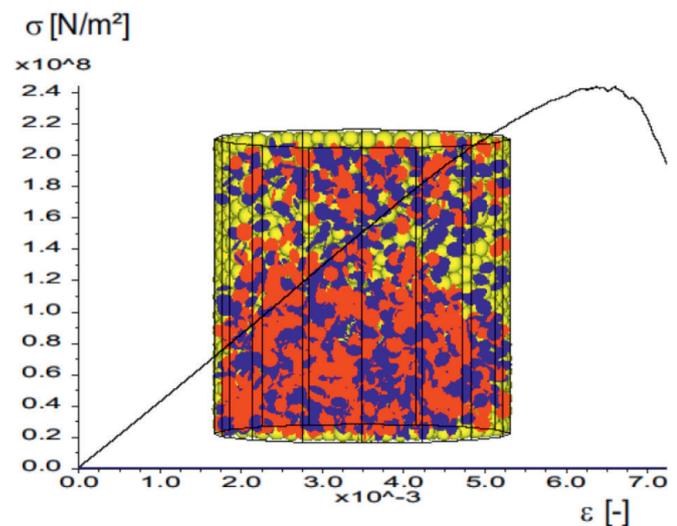
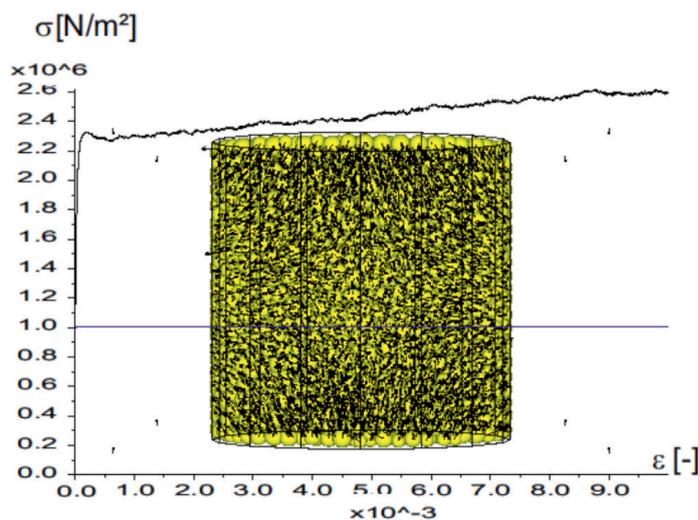




# Simulation von Abbau- und Verschleißvorgängen mit der Methode der diskreten Elemente

Nicola Wessels



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**  
**Institut für Mechanik**

**Simulation von Abbau- und Verschleißvorgängen mit der  
Methode der diskreten Elemente**

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 167**

Herausgeber (Publisher):

Institut für Mechanik

— Schriftenreihe —

Ruhr-Universität Bochum

D-44780 Bochum

---

ISBN 3-935892-45-2

---

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

©2016 Nicola Wessels, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum

Printed in Germany

Tag der mündlichen Prüfung (thesis defense): 26. August 2016

Erster Referent (first referee):

Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl

Zweiter Referent (second referee):

Prof. Dr. techn. Günther Meschke

Fachfremder Referent (fourth referee)

Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Höffer

Vorsitzender (committee chair):

Prof. Dr.-Ing. Markus Thewes



## Danksagung

Diese Arbeit entstand während meiner Arbeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin im Sonderforschungsbereich 837 *Interaktionsmodelle im maschinellen Tunnelbau* am Lehrstuhl für Mechanik -Materialtheorie an der Ruhr-Universität Bochum. Hier möchte ich zunächst Herrn Prof. Dr. rer. nat. Klaus Hackl für die Betreuung meiner Arbeit danken und dafür, ein hervorragendes Klima am Lehrstuhl geschaffen zu haben. Auch bei den anderen Mitgliedern der Promotionskommission möchte ich mich bedanken, bei Herrn Prof. Dr. techn. Günther Meschke, Herrn Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Höffer und Herrn Prof. Dr.-Ing. Markus Thewes.

Für die finanzielle Förderung meiner Arbeit möchte ich an dieser Stelle der Deutschen Forschungsgemeinschaft meinen Dank aussprechen. Durch die Beteiligung verschiedener Fachbereiche war der SFB stets eine Umgebung, in der viel Wissen geteilt und vermittelt wurde, und in der interessante Diskussionen geführt werden konnten. Für die Zusammenarbeit und das entspannte Miteinander möchte ich allen Kollegen im SFB danken.

Auch meinen Kollegen am Lehrstuhl möchte ich für die gute Arbeitsatmosphäre und die große Hilfsbereitschaft während meiner Zeit hier danken. Allen voran meinen Zimmernachbarinnen Sandra und Christina, aber auch jenen, die mich in meiner Anfangszeit in Bochum willkommen heißen und ins Team aufgenommen haben, sowie meinen aktuellen Kollegen.

Schließlich möchte ich noch meiner Familie und meinen Freunden danken, die mich immer unterstützt haben, meinen Eltern, Timm, Milan und Jannik.

## Kurzfassung

Der Fokus der vorliegenden Arbeit liegt auf der Simulation verschiedener Teilprozesse eines Tunnelvortriebs. Simulationen dienen dazu, Auswirkungen von Bauarbeiten besser abschätzen zu können, Risiken zu minimieren sowie die Wirtschaftlichkeit zu optimieren. Insbesondere die Erstellung von Tunneln kann weitreichende Folgen haben, da durch die notwendigen Baumaßnahmen etwa eine Änderung des Grundwasserspiegels oder Setzungen herbeigeführt werden können.

Durch das Abgraben von Erd- oder Felsmaterial wird das Materialgefüge des Bodens aufgebrochen und teilweise abgebaut, weshalb die weit verbreiteten kontinuumsbasierten Simulationsverfahren an ihre Grenzen stoßen. Daher soll hier die Anwendbarkeit der Methode der diskreten Elemente (DEM) überprüft werden, die Schädigungen und Ablösevorgänge explizit abbilden kann. Ein wesentliches Hindernis für die verbreitete Anwendung der Methodik ist jedoch, dass es kein allgemein akzeptiertes Verfahren zur Bestimmung der für eine Simulation benötigten Kontaktparameter gibt.

Es wird daher zunächst ein Überblick über die unterschiedlichen Möglichkeiten, die in der Praxis momentan genutzt werden, gegeben. Da sämtliche bekannten Verfahren gravierende Nachteile besitzen, wird anschließend gezeigt, wie mit Hilfe von Energieminimierung eine Relation zwischen den gesuchten Kontaktparametern und den bekannten Kontinuumsparametern hergeleitet werden kann, sodass die benötigten Kennwerte zu Beginn einer Simulation bestimmt werden können. Es werden Gleichungen zur Parameteridentifikation sowohl für granulares Material als auch für Feststoffe, für zweidimensionale und auch für dreidimensionale Anwendungen vorgestellt.

Nach der theoretischen Herleitung erfolgt eine umfangreiche Validierung der gefundenen Relationen. Hierfür wird eine Vielzahl von Bi- und Triaxialversuchen mit unterschiedlichen Materialeigenschaften simuliert und ausgewertet. Es zeigt sich, dass die Parameteridentifikationen insgesamt gute Übereinstimmungen mit den aus den Simulationen abgeleiteten Werten ergeben. In den meisten Fällen gilt hier, dass die Übereinstimmung mit einer Verfeinerung der Diskretisierung ansteigt. Die gefundenen Gleichungen werden sowohl für granulare als auch für kontinuierlich verteilte Materialien validiert. Auch wird ein Slump-Test gezeigt, der in Experimenten mit konditioniertem Bodenmaterial häufig eine sehr charakteristische S-Form ausbildet. Diese Geometrie kann mit der DEM gut numerisch reproduziert werden.

Schließlich werden Beispiele aus der Vortriebssimulation vorgestellt, für die die DEM gute Ergebnisse liefert. Zunächst wird eine umfangreiche, zweidimensionale Simulation des Abbauprozesses durchgeführt. Es wird der Einfluss verschiedener Parameter auf den Massenfluss untersucht. Ein weiteres Anwendungsbeispiel beschäftigt sich mit dem Werkzeugverschleiß. Hierbei wird die Belastung und die abriebbedingte Formänderung eines einzelnen Werkzeuges simuliert und wiederum der Einfluss verschiedener Parameter auf das Verschleißvolumen betrachtet.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Mathematische und mechanische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Mathematische Grundlagen . . . . .	7
2.1.1	Notationen . . . . .	7
2.1.2	Vektoren, Matrizen, Tensoren . . . . .	8
2.1.3	Optimierungsprobleme . . . . .	10
2.2	Grundlagen der Kontinuumsmechanik . . . . .	11
2.2.1	Verformung und Dehnung . . . . .	11
2.2.2	Kraft und Spannung . . . . .	13
2.2.3	Elastizität . . . . .	14
2.2.4	Plastizität . . . . .	16
2.2.5	Klassische Versagshypothesen . . . . .	17
2.3	Energie und Potential . . . . .	21
2.3.1	Innere Energie . . . . .	21
2.3.2	Freie Helmholtz Energie . . . . .	22
2.3.3	Gibbs- Energie . . . . .	22
2.3.4	Enthalpie . . . . .	22
2.4	Eigenschaften granularer Materialien . . . . .	23
2.4.1	Eigenschaften des einzelnen Partikels . . . . .	23
2.4.2	Porosität des Mediums . . . . .	24
2.5	Bodenmechanik . . . . .	25
2.5.1	Klassifikation von Böden . . . . .	25
2.5.2	Laborversuche . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Tunnelbau</b>	<b>31</b>
3.1	Schildvortriebe . . . . .	31
3.1.1	Erddruckschilde . . . . .	32
3.1.2	Flüssigkeitsschilde . . . . .	35
3.1.3	Druckluftschilde . . . . .	35
3.1.4	Kombinierte Schilde . . . . .	36
3.2	Abbauwerkzeuge . . . . .	36
3.2.1	Messer, Zähne . . . . .	38
3.2.2	Schneidrollen, Stichel und Räumler . . . . .	38
3.2.3	Härte nach Rockwell . . . . .	40
3.3	Verschleiß . . . . .	40
3.3.1	Verschleißmechnismen . . . . .	41
3.3.2	Abrasivität . . . . .	43
3.3.3	Werkzeugverschleiß im Schildvortrieb . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Discrete Element Method</b>	<b>45</b>
4.1	Anwendungsgebiete . . . . .	45
4.1.1	Fächerübergreifende Anwendung der DEM . . . . .	46

4.1.2	DEM-Simulationen von Böden . . . . .	47
4.2	Der Berechnungsalgorithmus / Prinzip der DEM . . . . .	48
4.3	Kontaktgesetze . . . . .	50
4.3.1	Komponenten des Kontakts . . . . .	51
4.3.2	Lineares Modell . . . . .	54
4.3.3	Hertz Modell . . . . .	54
4.3.4	weitere Modelle . . . . .	54
4.4	Bestimmung der DEM-Parameter . . . . .	55
4.4.1	Kalibrierungssimulationen . . . . .	56
4.4.2	Analytische Ansätze . . . . .	56
4.4.3	Zusammenfassung . . . . .	59
4.5	Kompaktierungsalgorithmen . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Bestimmung der DEM Kontaktparameter</b>	<b>61</b>
5.1	Das mikroskopische Potential . . . . .	61
5.2	Das makroskopische Potential . . . . .	63
5.3	Von der makroskopischen Energie zu den elastischen Konstanten (3D) . . . . .	64
5.4	Triaxialversuch . . . . .	66
5.4.1	Modellbildung . . . . .	66
5.4.2	Ergebnisse . . . . .	70
5.5	Untersuchung der elastischen Konstanten im zweidimensionalen Raum . . . . .	75
5.5.1	Ermittlung der elastischen Konstanten . . . . .	77
5.5.2	Biaxialversuch . . . . .	77
5.6	Bonds in tangentialer und normaler Richtung . . . . .	81
5.6.1	Verknüpfung mit den Spannungshypothesen nach Tresca und Rankine . . . . .	81
5.6.2	Triaxialversuch - Untersuchung der elastischen Konstanten . . . . .	82
5.6.3	Triaxialversuch - Untersuchung der Versagensspannung . . . . .	86
5.6.4	Biaxialversuch . . . . .	90
5.7	Zusammenfassende Interpretation der Ergebnisse . . . . .	94
<b>6</b>	<b>Anwendungsbeispiele</b>	<b>97</b>
6.1	Slump Test . . . . .	98
6.1.1	Simulation . . . . .	98
6.1.2	Ergebnisse . . . . .	99
6.2	Abbauprozess . . . . .	102
6.2.1	Modellbildung . . . . .	103
6.2.2	Ergebnisse . . . . .	105
6.2.3	Zusammenfassung . . . . .	111
6.3	Werkzeugverschleiß . . . . .	114
6.3.1	Simulation . . . . .	114
6.3.2	Versagensmechanismen . . . . .	116
6.3.3	Ergebnisse . . . . .	117
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>123</b>

## 1 Einleitung

Die weltweite Urbanisierung und die wachsenden Bevölkerungszahlen führen dazu, dass sich immer mehr Menschen in städtischen Gebieten, also auf relativ engem Raum, aufhalten. Dieser Trend ist Abbildung 1.1 klar zu entnehmen [124]. Hieraus ergibt sich zum einen ein stetig wachsendes Transportvolumen von Personen und Gütern, zum anderen aber auch mehr und mehr benötigte Versorgungsleitungen, und daher sehr hohe Anforderungen an die Infrastruktur. Hierbei handelt es sich, auch wegen der weiter fortschreitenden Technisierung von Schwellen- und Entwicklungsländern, um ein weltweites Phänomen.

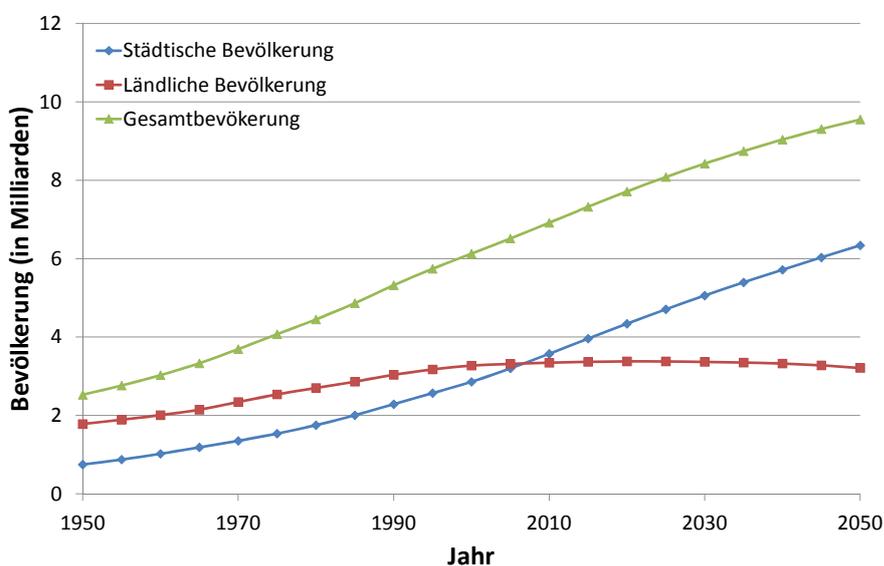


Abbildung 1.1: Entwicklung der Weltbevölkerung, sowie Anteil derer, die eher ländlich oder eher städtisch leben [124]

Da die Erdoberfläche häufig bereits intensiv und engmaschig genutzt wird, wird weltweit verstärkt auf eine unterirdische Nutzung gesetzt. Hiervon sind Ver- und Entsorgungsschächte aller Art, aber auch Verkehrswege betroffen. So gewinnt der Tunnelbau, sowohl in der klassischen Bauweise, aber vor allem auch der maschinelle Vortrieb, immer mehr an Bedeutung. Der maschinelle Vortrieb bietet insbesondere im innerstädtischen Bereich den Vorteil, dass das oberirdische Leben schon während der Bauphase weitgehend unbeeinflusst bleibt und Tunnel so in verschiedensten geologischen Gegebenheiten realisiert werden können.

Obwohl weltweit bereits eine große Anzahl von Tunneln durch maschinellen Vortrieb erstellt wurden und somit ein großer Erfahrungsschatz besteht, kommt es immer wieder zu Problemen, die durch den Einsatz von Tunnelbohrmaschinen entstehen. Vor allem bei innerstädtischen Vortrieben ist es essentiell, die Einschränkungen für die Anwohner und die Bestandsbebauung so gering wie möglich zu halten. Dies gilt zum einen für entstehenden Lärm und eventuelle Erschütterungen, aber auch für Setzungen oder eine Beeinflussung des Grundwasserspiegels.

Während erstere normalerweise nur für die Dauer der Bauarbeiten anhalten, können Setzungen oder eine Änderung des Grundwasserspiegels langfristige Folgen haben. So können schon vergleichsweise geringe Setzungen zu großen Schäden an anderen Bauwerken führen, wie in Abbildung 1.2 illustriert wird.

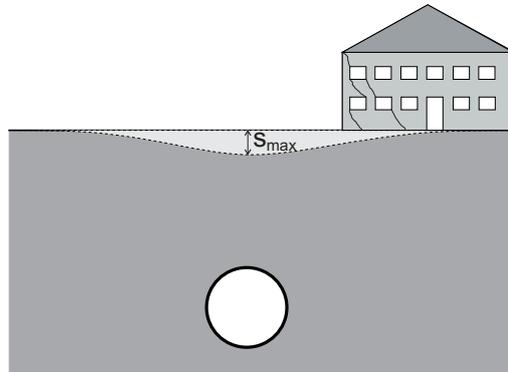


Abbildung 1.2: Durch Tunnelvortriebe induzierte Setzungen können zu Schäden in der Bebauung führen, Prinzipskizze

Infolge der durch den Tunnelvortrieb induzierten Setzungen kann es zu einer ungleichmäßigen Absenkung der oberirdischen Bebauung kommen, wie Abbildung 1.2 schematisch zeigt. Hierdurch kann es etwa zu Rissen in Gebäuden kommen. Der gleiche Mechanismus kann auch eine Schädigung unterirdisch verlegter Versorgungsinfrastruktur zur Folge haben. Solche Schäden können zu Problemen in der Versorgung führen, oder im Falle der oberirdischen Bebauung zu einem Verlust der Standfestigkeit der Gebäude und damit einer Gefährdung von Menschenleben. In jedem Fall ziehen solche und ähnliche Schäden hohe Folgekosten nach sich.



Abbildung 1.3: Absacken der Straße oberhalb des Vortriebs für den Chennai Metro Rail Tunnel, Chennai, Indien [45]

Dramatische Folgen einer unvorhergesehenen Setzung gab es beim Vortrieb des Chennai Metro Rail Tunnel in Chennai, Indien. Wie in Abbildung 1.3 gezeigt, sackte hier eine belebte Straße über einen Bereich von mehreren Quadratmetern ab. Als Auslöser wird eine plötzliche Änderung der Geologie im Bereich des Tunnelvortriebs genannt [45].

Es gibt verschiedene Maßnahmen, die während oder schon vor dem Tunnelvortrieb ergriffen werden können, um solche Schäden zu vermeiden. Welche Maßnahme zu welchem Zeitpunkt sinnvoll ist, unterscheidet sich jedoch individuell. Bei dieser Entscheidung können

realitätsnahe Computersimulationen helfen. Mit ihrer Hilfe können die Auswirkungen der verschiedenen Maßnahmen untersucht und die für den Einzelfall beste herausgearbeitet werden.

Simulationen können nicht nur helfen, auf grobe Schäden besser zu reagieren oder diese gar zu vermeiden, sondern dienen üblicherweise auch dazu, die Wirtschaftlichkeit von Vortrieben zu optimieren. Durch gute, realitätsnahe Simulationen können auch kleine Hindernisse oder Komplikationen früher erkannt und adäquat behandelt werden. Kann beispielsweise präzise vorhergesagt werden, wann Werkzeuge verschleißbedingt ausgewechselt werden müssen, kann dieser Austausch vorbeugend stattfinden. Wird dagegen der Vortrieb gefahren, bis die Werkzeuge vollständig verschlissen sind, kann das zu deutlich längeren Standzeiten zu unter Umständen sehr ungünstigen Zeitpunkten und somit zu hohen Kosten führen.

Auch kann durch Simulationen der Materialeinsatz optimiert werden. Wenn etwa bekannt ist, wie sich in den Boden eingebrachte Injektionen verteilen und verfestigen, wird deren Einsatz entsprechend dosiert. Auch kann das Bodenmaterial so konditioniert werden, dass es bestmögliche Transporteigenschaften besitzt. Ohne oder mit einer ungünstigen Konditionierung kann es beispielsweise zu Verklebungen im Schneidrad oder in der Förderschnecke kommen, was die gesamte Effektivität einer Tunnelbohrmaschine stark beeinträchtigt [47]. Ähnliche Anwendungen, die die Sinnhaftigkeit von Simulationen sowohl in der Planungsphase als auch während des Vortriebs belegen, lassen sich sehr viele finden.

Neben den bisher aufgeführten Beispielen aus der unmittelbaren Vortriebssimulation dienen Simulationen in der Planung und Forschung dazu, unterschiedliche Prozesse besser zu verstehen und schließlich zu optimieren. Auch in der Planungs- und Genehmigungsphase eines konkreten Bauvorhabens tragen numerische Betrachtungen wesentlich dazu bei, die technische Durchführbarkeit und die bestehenden Risiken abzuwägen.

Für Betrachtungen der Tragfähigkeit von Strukturen und deren Antwort auf externe Einwirkungen ist die Methode der finiten Elemente, oder *Finite-Elemente-Methode (FEM)*, die meistgewählte Art der Computersimulation. Wie in Abbildung 1.4 gezeigt, wird der betrachtete Körper in kleinere (finite) Elemente unterteilt und die Materialantwort, die aus einer physikalischen Belastung folgt, in den einzelnen Elementen ermittelt. Die Methode eignet sich daher im Tunnelbau hervorragend für statische Berechnungen, Tragwerksplanungen, eine Ermittlung der Setzungen und viele andere Bereiche.

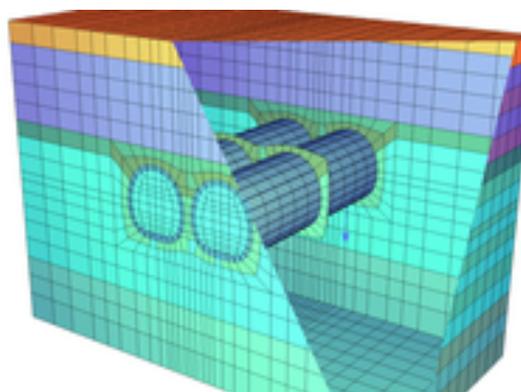


Abbildung 1.4: Simulation von zwei Tunnelröhren mit der Methode der finiten Elemente, abgedruckt mit Genehmigung der SOFiSTiK AG [5]

Die Methode der finiten Elemente stößt jedoch an ihre Grenzen, wenn es zu einer Schädigung des Materials, Ablöseprozessen oder ähnlichem kommt. Es gibt zwar eine Vielzahl von Anpassungen und Erweiterungen der Methode, die sich mit solchen Fällen beschäftigen, jedoch soll hier gezeigt werden, dass sich die Methode der diskreten Elemente, auch *Discrete* oder *Distinct Element Method* (DEM), für solche Betrachtungen anbietet.

In der DEM werden die betrachteten Körper in einzelne, meist runde oder kugelförmige, Elemente unterteilt, wie in Abbildung 1.5(a) dargestellt, die miteinander interagieren, sich aber auch voneinander lösen können. Die Methode bietet sich für Materialflusssimulationen an, kann aber auch für Feststoffe verwendet werden, indem die einzelnen Elemente, oder Partikel, miteinander verbunden werden. So können eben jene Prozesse, die mit der FEM nur unter erhöhtem Aufwand untersucht werden können, sehr einfach simuliert werden. In der in Abbildung 1.5(b) gezeigten Simulation geht es um eine Untersuchung der Ortsbruststabilität unter verschiedenen Randbedingungen [132].

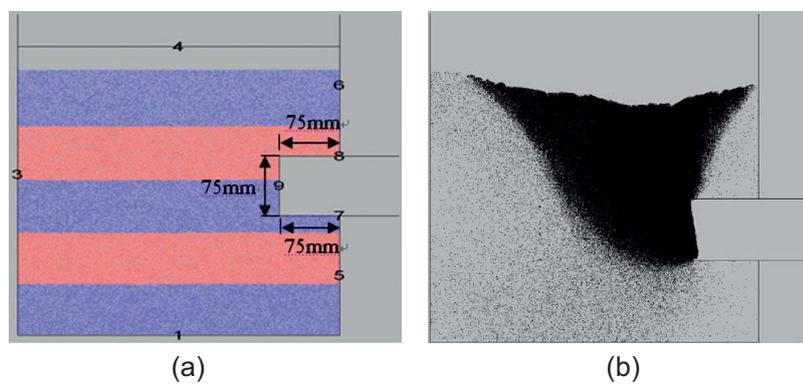


Abbildung 1.5: (a) DEM-Modell zur Simulation von Bodenbewegungen durch einen Tunnelvortrieb mit 150000 Partikeln (b) Das resultierende Verformungsfeld [132], abgedruckt mit Genehmigung von Elsevier

Problematisch für die Anwendung der DEM ist jedoch, dass es aktuell kein einfaches und allgemein akzeptiertes Verfahren gibt, mit dem die erforderlichen Materialparameter bestimmt werden können. In industriellen Anwendungen werden hier zumeist aufwendige Kalibrierungsrechnungen durchgeführt, was eine weitere Verbreitung des Verfahrens hemmt.

Einen Beitrag zur Lösung dieser Problematik zu leisten ist das Hauptziel dieser Arbeit. Es soll ein Zusammenhang zwischen den üblicherweise verwendeten Materialparametern und jenen, die für Simulationen mit der DEM erforderlich sind, aufgestellt werden. Außerdem soll in einigen Beispielen deutlich gemacht werden, dass sich auch im Bereich der Vortriebssimulation unterschiedlichste Möglichkeiten ergeben, mit der Methode der diskreten Elemente Erkenntnisse zu gewinnen.

In Kapitel 2 wird zunächst auf die zum Verständnis dieser Arbeit erforderlichen mathematischen Grundlagen eingegangen. Anschließend werden relevante Bereiche der Kontinuumsmechanik erläutert, wobei vor allem die unterschiedlichen Versagenshypothesen wiedergegeben werden. Nach einem Überblick über die Besonderheiten granularer Materialien erfolgt ein kurzer Einstieg in die Bodenmechanik gegeben. Hier liegt der Fokus vor allem auf dem Vorstellen von Laborversuchen, die für diese Arbeit von Belang sind.

Die unterschiedlichen Verfahren im Tunnelbau, aber vor allem die wesentlichen Schildvor-

triebe, sind das Thema in Kapitel 3. Es werden die im Schildvortrieb am Schneidrad angebrachten Abbauwerkzeuge vorgestellt, sowie ein Einblick gegeben, wie diese Werkzeuge verschleifen.

Da sämtliche durchgeführte Simulationen auf der Methode der diskreten Elemente (DEM) beruhen, wird diese in Kapitel 4 vorgestellt. Neben der generellen Funktionsweise sowie Anwendungsbeispielen erfolgt hier eine detaillierte Erörterung der einzelnen Kontaktkomponenten. Schließlich folgt ein Überblick darüber, wie aktuell die, für Berechnungen mit der DEM benötigten, Kontaktparameter ermittelt werden.

Kapitel 5 stellt einen neuen Ansatz zur Bestimmung der Kontaktparameter vor. Hier wird mit Hilfe von Energien, die im Kontakt definiert und schließlich auf das gesamte Material erweitert werden, ein Zusammenhang zwischen eben jenen Kontaktparametern und den üblicherweise verwendeten Materialparametern aus der Kontinuumsmechanik hergestellt. Diese Parameteridentifikation wird mit Hilfe von DEM-Simulationen verifiziert. Hierbei erfolgt sowohl eine Betrachtung granularer wie auch kohäsiver Materialien, beides sowohl im zwei- wie auch im dreidimensionalen Raum.

Beispiele, bei welcher Art von Simulation im Bereich des Tunnelbaus die DEM gute Ergebnisse liefert, werden in Kapitel 6 gegeben. Zunächst wird hier anhand des Slump Test gezeigt, dass hier für konditionierte Böden mit Hilfe der DEM gute Ergebnisse erreicht werden können. Anschließend folgt eine auf zwei Dimensionen reduzierte Abbausimulation, die Rückschlüsse auf das abgebaute Materialvolumen sowie den Einfluss der Werkzeuggeometrie erlaubt. Im letzten Beispiel steht der Werkzeugverschleiß im Fokus. Hier wird ein aus zwei Materialien zusammengesetztes, geometrisch vereinfachtes Schälmesser betrachtet.

Abschließend wird in Kapitel 7 eine Zusammenfassung sowie ein Ausblick auf Themen, die noch weitergehend untersucht werden sollten, gegeben. Hierbei werden mögliche Erweiterungen der Parameteridentifikation und deren Validierung angesprochen. Andererseits erfolgen auch Vorschläge für erweiterte tunnelbauspezifische Simulationen.



## 2 Mathematische und mechanische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen in groben Zügen die mechanischen Grundlagen, die für das Verständnis dieser Arbeit erforderlich sind, erläutert werden. Hierbei wird zunächst in Kapitel 2.1 in aller Kürze auf die benötigten mathematischen Grundlagen eingegangen. Anschließend werden in Kapitel 2.2 die für diese Arbeit relevanten Grundbegriffe der Kontinuumsmechanik erläutert. Da hier die *Methode der diskreten Elemente*, vergleiche Kapitel 4, eine wesentliche Rolle spielt und diese häufig für die Simulation von granularen Materialien verwendet wird, wird in Kapitel 2.4 auf deren besonderen Eigenschaften eingegangen, bevor dann in Kapitel 2.5 auf relevante Themengebiete der Bodenmechanik erläutert werden. Schließlich werden in Kapitel 2.3 die physikalischen Begriffe *Energie* und *Potential* vorgestellt.

### 2.1 Mathematische Grundlagen

Wie bereits erwähnt, sollen hier zunächst die mathematischen Grundbegriffe, die für die in dieser Arbeit entwickelten Beziehungen nötig sind, kurz zusammengefasst werden. Selbstverständlich wird hier keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit erhoben, im Gegenteil handelt es sich nur um kleine Ausschnitte der jeweiligen Themengebiete. Es gibt jedoch eine große Anzahl von Fachbüchern, in denen die berührten Fachbereiche umfangreich erläutert werden. Beispielhaft seien etwa [24], [49] und [16] genannt.

In diesem Kapitel werden zunächst ein Basiskoordinatensystem sowie die in dieser Arbeit gültigen Notationen festgelegt. Anschließend folgt eine kurze Wiedergabe der wichtigsten Rechenregeln für den Umgang mit Vektoren und Tensoren, bevor schließlich die mathematische Optimierung erläutert wird.

#### 2.1.1 Notationen

Um Vorgänge jeglicher Art örtlich beschreiben zu können, muss zunächst ein Referenzsystem definiert werden. In räumlichen Systemen sind hierfür drei Koordinaten erforderlich. Das in Abbildung 2.1 gezeigte Basis-Koordinatensystem sei daher definiert als:

$$\mathcal{B} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \quad (2.1)$$

Anhand dieses Basissystems kann jeder Vektor definiert werden als

$$\mathbf{u} = \sum u_i \mathbf{e}_i \quad (2.2)$$

oder entsprechend der Einsteinschen Summenkonvention, bei der über doppelt auftretenden Indizes aufsummiert wird:

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i \quad (2.3)$$

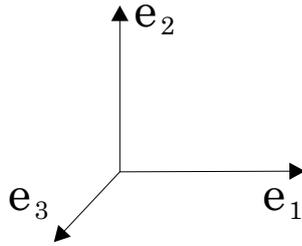


Abbildung 2.1: Basiskoordinatensystem

Vektoren und Matrizen werden hier im Unterschied zu Skalaren fett gedruckt dargestellt, Vektoren durch Kleinbuchstaben, Matrizen durch Großbuchstaben gekennzeichnet.

### 2.1.2 Vektoren, Matrizen, Tensoren

In diesem Kapitel sollen kurz einige grundsätzliche Regeln zur Vektor- und Tensorrechnung wiedergegeben werden.

#### Vektoren

Ein Vektor ist eine algebraische Struktur, durch die, im zwei- oder dreidimensionalen Raum, ein Punkt bezeichnet werden kann. Er wird durch eine Spalte und mehrere Zeilen, deren Anzahl den Dimensionen entspricht, dargestellt.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren erhält seinen Namen aus der Tatsache, dass aus den beiden miteinander multiplizierten Vektoren im Ergebnis ein Skalar wird, und wird berechnet zu:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i \quad (2.4)$$

Hierbei bezeichnet  $\delta_{ij}$  das Kronecker Delta, für das

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (2.5)$$

gilt. Dagegen entsteht durch Verwendung des Kreuzproduktes oder Vektorproduktes zweier Vektoren wiederum ein Vektor. Es ist definiert als

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = u_i v_j \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = u_i v_j \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k, \quad (2.6)$$

wobei  $\varepsilon_{ijk}$  das Permutationssymbol ist, das folgendermaßen definiert ist:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{wenn zwei Indizes übereinstimmen} \\ +1, & \text{wenn } i, j, k \text{ aufeinanderfolgen wie } 1, 2, 3 \\ -1, & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases} \quad (2.7)$$

Zwei hintereinander zu berechnende Kreuzprodukte ergeben das doppelte Kreuzprodukt, das sich folgendermaßen berechnet:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} \quad (2.8)$$

Die Verbindung des Kreuz- und des Skalarproduktes wird als Spatprodukt bezeichnet, es berechnet sich wie die Determinante einer aus den Vektoren zusammengesetzten Matrix:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Für die Sonderfälle  $\mathbf{u} = \mathbf{w}$  und  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$  wird das Spatprodukt zu Null.

Aus dem dyadischen Produkt zweier Vektoren, das auch einfach Dyade genannt wird, entsteht eine Matrix. Es wird berechnet als

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_1 v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_m v_1 & \cdots & u_m v_n \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Unter dem Nabla Operator  $\nabla$  wird formal ein Vektor verstanden, dessen Komponenten die partiellen Ableitungsoperatoren sind:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad (2.11)$$

Da es sich bei dem Nabla Operator aber eben nicht um einen Vektor sondern um einen Operator handelt, gelten hier auch spezielle Rechenregeln. So ergibt sein Produkt mit einer Funktion deren Gradienten, während sein Produkt mit einem Vektorfeld die Divergenz ergibt. Im Detail soll hier jedoch nicht auf diese Regeln eingegangen werden.

## Matrizen und Tensoren

Ein Tensor ist eine Funktion, die eine bestimmte Anzahl von Vektoren abbildet. Die Anzahl der Vektoren wird als Rang des Tensors bezeichnet. Eine Matrix ist ein Tensor zweiten Ranges. Auch ein Vektor ist ein Spezialfall eines Tensors, nämlich ein Tensor ersten Ranges. Tensoren sind durch ihre Transformationseigenschaften gegenüber orthogonalen Transformationen definiert, für sie gilt also:

$$T_{ij} = \Omega_{ik} \Omega_{il} T_{kl} \quad (2.12)$$

Da in dieser Arbeit lediglich Matrizen verwendet werden, wird auch auf die Rechenregeln entsprechend eingegangen, auf die allgemeineren, für alle Tensoren gültigen, Formen wird hier zumeist verzichtet.

Die Determinante einer 3x3 Matrix wird berechnet als:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Die Spur (englisch: Trace) einer 3x3 Matrix berechnet sich zu:

$$\text{tr } \mathbf{A} = \text{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad (2.14)$$

### 2.1.3 Optimierungsprobleme

Bei Optimierungsproblemen handelt es sich um Funktionen, deren *optimaler* Wert gefunden werden soll - also, je nach Fragestellung ein Minimum oder ein Maximum. Die einfache Vorgehensweise wird hier als bekannt vorausgesetzt, jedoch soll die Optimierung von Funktionen mit einer oder mehreren Nebenbedingungen kurz erläutert werden. In einfachen Fällen kann die Nebenbedingung direkt in die zu optimierende Funktion eingesetzt werden, die dann wiederum auf herkömmlichem Weg behandelt werden kann. Für komplexere Nebenbedingungen bietet das *Lagrange*-Verfahren, das im folgenden kurz erläutert werden soll, eine Lösung. Umfangreichere Beschreibungen der Verfahren finden sich beispielsweise in [6] und [20].

#### Lagrange-Verfahren

Damit das Lagrange-Verfahren angewendet werden kann, muss es sich bei der zu optimierenden Funktion um eine differenzierbare Funktion handeln, deren Nebenbedingungen als Gleichungen vorliegen. Es sei also  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  die zu untersuchende Funktion mit  $k$  Nebenbedingungen  $g_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bis  $g_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Nach dem Lagrange-Verfahren werden die Nebenbedingungen zunächst so umgestellt, dass sie gleich 0 sind. Anschließend werden sie jeweils mit einem Lagrange-Multiplikator  $\lambda_i$  multipliziert und auf die Funktion addiert. So ergibt sich die sogenannte Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \cdot g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_k \cdot g_k(x_1, \dots, x_n) \quad (2.15)$$

Diese Funktion wird nun nach allen Variablen  $x_1, \dots, x_n$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  partiell abgeleitet, und diese Ableitungen werden zu Null gesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)}{\partial x_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)}{\partial x_n} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)}{\partial \lambda_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)}{\partial \lambda_k} &= 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Lösung des sich hieraus ergebenden Gleichungssystems liefert die Extremalstellen des Ausgangsproblems. Diese Extremalstellen ergeben sich aus den so ermittelten Stationaritäten, zu denen allerdings auch Sattelpunkte zählen.

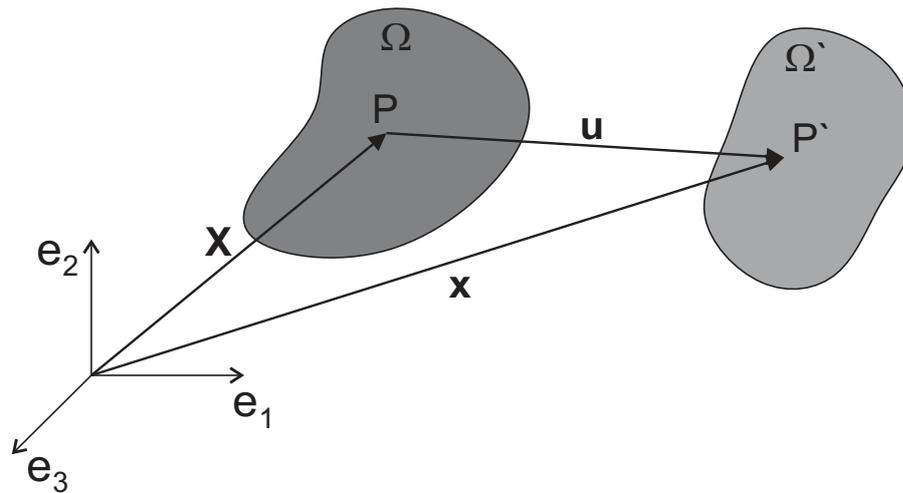


Abbildung 2.2: Unverformter und verformter Körper

## 2.2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Bei der Kontinuumsmechanik handelt es sich um eine Feldtheorie, bei der der zu untersuchende Körper als Kontinuum betrachtet wird, seine Eigenschaften können sich also nicht sprunghaft von einem Punkt zum nächsten ändern. Jedem Punkt werden Eigenschaften zugeordnet, die in ihrer Gesamtheit den Körper beschreiben. Hierbei kann es sich um ein Geschwindigkeitsfeld, ein Beschleunigungsfeld, ein Temperaturfeld oder ein anderes Feld zur Zustandsbeschreibung handeln. Im folgenden werden die für diese Arbeit wesentlichen Teilgebiete der Kontinuumsmechanik kurz erläutert. Es gibt eine Vielzahl von Werken, die einen detaillierten Einblick in die Kontinuumsmechanik liefern, beispielsweise [7], [53], [15], [51].

Die Kontinuumsmechanik dient dazu, aus beobachteten Phänomenen mathematische Modelle für das Verhalten eines Materials zu erstellen. Mit deren Hilfe können dann konkrete physikalische und technische Fragestellungen untersucht werden.

### 2.2.1 Verformung und Dehnung

Gerät ein Kontinuum  $\Omega$  in Bewegung, verschiebt sich jeder Materialpunkt  $P$  von der Ausgangskonfiguration, die durch den Vektor  $\mathbf{X}$  beschrieben wird, an die neue Position  $\mathbf{x}$ , die nun mit  $P'$  bezeichnet wird. Dies ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.17)$$

beschreibt hier die Zustandsänderung jedes Punktes, also zum Beispiel den durch eine Positionsänderung zurückgelegten Weg zwischen der Ausgangs- und der aktuellen Konfiguration. In dieser Arbeit handelt es sich bei dem beschriebenen Zustand immer um Positionen im Raum, weshalb von hier an auf eine allgemeine Formulierung verzichtet wird.

Ein Spezialfall tritt ein, wenn sich jeder Materialpunkt des Kontinuums um den gleichen Wert  $u_i$  verschiebt. In diesem Fall verschiebt sich der gesamte Körper ohne sich zu verformen, es handelt sich also um eine Starrkörperbewegung. In allen anderen Fällen jedoch verformt sich das Material, es entstehen Deformationen. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Feldgrößen darzustellen, die sich auf unterschiedliche Konfigurationen beziehen. Hier wird die Lagrangesche oder materielle Darstellung benutzt, bei der eine Referenzkonfiguration zu Grunde liegt, also etwa das Verschiebungsfeld zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

Aus Zeitableitungen ergeben sich aus dem Verschiebungsfeld die Geschwindigkeiten, sowie durch eine weitere Zeitableitung die Beschleunigungen in jedem Punkt:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.19)$$

Aus der Ableitung der Verschiebung  $\mathbf{u}$  nach den materiellen Koordinaten  $\mathbf{X}$  ergibt sich dagegen der Verschiebungsgradient  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} := \text{gradu} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{X}} \quad (2.20)$$

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  berechnet sich entsprechend zu

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \frac{d(\mathbf{u} + \mathbf{X})}{d\mathbf{X}} = \mathbf{H} + \mathbf{I} \quad , \quad (2.21)$$

wobei  $\mathbf{I}$  der Einheitstensor ist. Mit diesen Definitionen lässt sich der Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$ , entsprechend der Definition von Green-Lagrange, folgendermaßen ausdrücken:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}[\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}] = \frac{1}{2}[\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H}] \quad (2.22)$$

Da in den meisten Ingenieur Anwendungen, und auch in dieser Arbeit, lediglich kleine Verzerrungen betrachtet werden, kann dieser Tensor vereinfacht werden, indem der letzte Term vernachlässigt wird. Der linearisierte Verzerrungstensor ergibt sich dann zu:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}[\mathbf{H} + \mathbf{H}^T] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Anschaulich betrachtet, sind Dehnungen die Längenänderungen eines Körpers auf seine Ausgangslänge bezogen. Ist  $dS$  also die ursprüngliche Länge, und  $ds$  die aus einer Verformung folgende Länge, ergibt sich für die Dehnung  $\varepsilon$  die Beziehung:

$$\varepsilon = \frac{ds - dS}{dS} \quad (2.24)$$

Unter Hauptdehnungen werden die betragsmäßig größten Dehnungen in einem bestimmten Punkt verstanden. Ihre Richtung wird als Hauptdehnungsrichtung bezeichnet. Bestimmt werden können sie analog zu dem in Kapitel 2.2.2 für die Hauptnormalspannungen und ihre Richtungen erläuterten Verfahren.

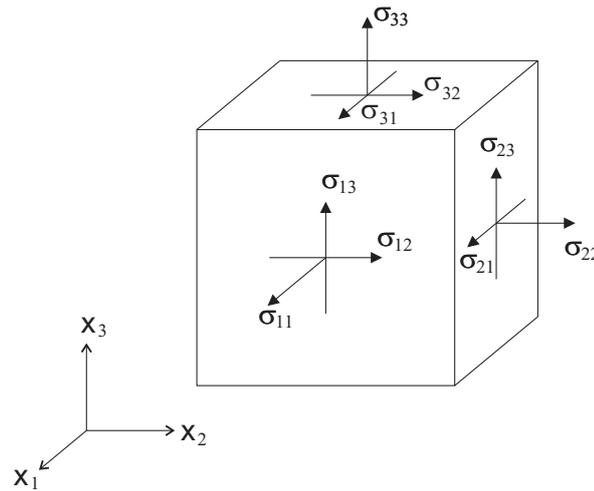


Abbildung 2.3: Spannungskomponenten an einem dreidimensionalen Körper

### 2.2.2 Kraft und Spannung

Als Kraft wird eine auf einen Körper gerichtete Einwirkung bezeichnet. Sie verändert, allgemein gesprochen, den energetischen Zustand eines Körpers. Im hier betrachteten Fall führen auf einen Körper einwirkende Kräfte zu Verformungen. Hier können punktuell wirkende Kräfte unterschieden werden von solchen, die über eine Fläche oder gar über ein Volumen verteilt sind. Eine Volumenkraft liegt beispielsweise bei einem, sich im Schwerfeld der Erde befindenden, massebehafteten Körper vor. Flächenhaft verteilte Kräfte werden als Spannungen bezeichnet.

Eine wesentliche Hypothese zur Berücksichtigung der inneren Kräfte ist das Spannungsprinzip von Euler und Cauchy. Hiernach finden an jeder gedachten Schnittfläche innerhalb eines Körpers die gleichen Wechselwirkungen wie an dessen Oberfläche statt. Da eine auftretende Spannung nicht notwendigerweise senkrecht auf der betrachteten Schnitt- oder Oberfläche eines Körpers steht, wird die Spannung üblicherweise zerlegt, in einen zur betrachteten Fläche normalen und einen tangentialen Anteil. Wird ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem verwendet, wird die auftretende Spannung in die drei Koordinatenrichtungen zerlegt, entsprechend gilt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}_1\sigma_1 + \mathbf{e}_2\sigma_2 + \mathbf{e}_3\sigma_3 \quad (2.25)$$

Daraus ergibt sich entsprechend Abbildung 2.3 der Cauchysche Spannungstensor zu:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Hierbei gibt der erste Index die Bezugsfläche, der zweite die Richtung der Spannung an. Bei den Spannungskomponenten  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  und  $\sigma_{33}$  handelt es sich also um Normalspannungen, während jene mit einem Mischindex als Schub- oder Scherspannungen bezeichnet werden. Wegen der besseren Übersichtlichkeit wurden die Spannungen hier nicht flächenbezogen, sondern lediglich als Pfeile dargestellt. Durch eine Diagonalisierung des Spannungstensors 2.26, also eine Transformation mit dem Ziel, dass alle Einträge außer den diagonalen zu Null

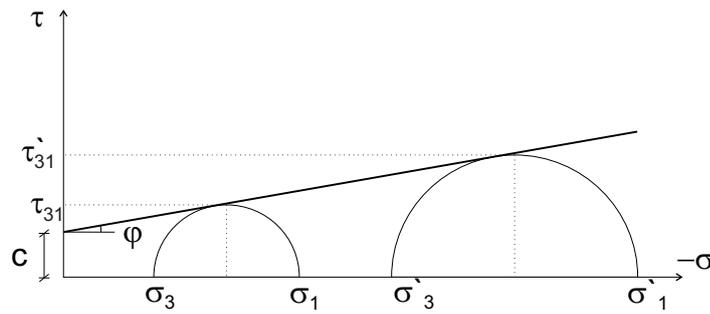


Abbildung 2.4: Mohr'scher Spannungskreis und die daraus ablesbaren Parameter  $c$  und  $\varphi$

werden, können die Hauptnormalspannungen ermittelt werden. Es muss dafür die Gleichung  $\det \mathbf{S} - \sigma \mathbf{E} = 0$  gelöst werden, wodurch sich der Tensor der Hauptnormalspannungen  $\mathbf{S}$  zu

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

ergibt. Die Matrix wird entsprechend der Größe ihrer Einträge so sortiert, dass  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  gilt. Diese Spannungen gelten in einem System, das im Vergleich zum Ausgangssystem um einen bestimmten Winkel gedreht wurde.

Die betragsmäßig größten Schubspannungen können aus den Hauptnormalspannungen berechnet werden und werden als Hauptschubspannungen bezeichnet:

$$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (2.28)$$

Da der Spannungstensor für unterschiedlich gedrehte Bezugssysteme also unterschiedliche Werte annehmen kann, wird oft mit den sogenannten Invarianten des Spannungstensors gerechnet. Diese sind transformationsunabhängig und werden üblicherweise folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \quad , \\ II_\sigma &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2 = \frac{1}{2}((\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 - \text{tr } \boldsymbol{\sigma}^2) \quad , \quad (2.29) \\ III_\sigma &= \det \boldsymbol{\sigma} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der in einer Ebene geltenden Hauptnormalspannungen können die *Mohr'schen Spannungskreise* wie in Abbildung 2.4 gezeichnet werden. Aus dieser Konstruktion lassen sich zum einen die geltenden Spannungen in jeder beliebigen Richtung sowie die Hauptschubspannung ablesen. Wie in der Darstellung gezeigt, können aber auch die für die Bodenmechanik wichtigen Parameter Reibungswinkel  $\varphi$  und Kohäsion  $c$  abgelesen werden. Auf deren Bedeutung wird in den Kapiteln 2.5 und 2.5.2 genauer eingegangen.

### 2.2.3 Elastizität

Um ein bestimmtes Materialverhalten zu charakterisieren, muss eine Beziehung zwischen den Spannungsgrößen und den Verformungsgrößen hergestellt werden. Die Beschreibung

dieser Beziehung nennt man Stoff- oder Konstitutivgesetz. Das bekannteste Materialverhalten ist das elastische Materialverhalten. Hiermit können die meisten Festkörper zumindest bis zu einer gewissen aufgetragenen Verformung beschrieben werden. Es wird dabei angenommen, dass ein Körper, der eine Belastung erfährt und sich dadurch verformt, in seinen Ausgangszustand zurückkehrt, wenn die Belastung endet. Die Verformung ist somit komplett reversibel. Man geht also davon aus, dass die aufgetragene Arbeit sich als rein potentielle Energie wiederfindet und es keinerlei Dissipation gibt. Bei einem ideal-elastischen Material ist also ein direkter Rückschluss vom Verzerrungszustand auf den Spannungszustand möglich.

Dies führt unmittelbar zu Hooke's Gesetz, welches in seiner einfachsten Form

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.30)$$

lautet. Hierbei werden nur eine eindimensionale Spannung  $\sigma$ , die zugehörige Dehnung  $\varepsilon$  und der materialabhängige Proportionalitätsfaktor, der als Elastizitätsmodul  $E$  bezeichnet wird, betrachtet. Verallgemeinert ergibt sich die Beziehung zu:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.31)$$

Hierbei wird  $\mathcal{C}$  der Elastizitätstensor genannt. Dieser Tensor besitzt im allgemeinen, dreidimensionalen Fall 81 Komponenten. Er kann allerdings wegen der vorhandenen Symmetrien des Spannungs- sowie des Dehnungstensors, und da hier von isotropem Materialverhalten ausgegangen wird, auf eine Abhängigkeit von 2 voneinander unabhängigen Komponenten reduziert werden. Hierfür werden häufig die Laméparameter  $\lambda$  und  $\mu$  eingeführt. Hieraus ergibt sich die Abhängigkeit:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.32)$$

Das Konstitutivgesetz für lineare Elastizität lässt sich somit auch formulieren als

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.33)$$

In der Ingenieurspraxis ist der Einsatz der folgenden elastischen Konstanten für isotropes Material üblich, die ebenfalls in Abhängigkeit der Laméparameter ausgedrückt werden können:

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad G = \mu \quad (2.34)$$

Hierbei wird  $E$  als E-Modul (Elastizitätsmodul oder englisch: Young's Modulus),  $G$  als Schubmodul und  $\nu$  als Querkontraktions- oder Poissonzahl bezeichnet. Der Elastizitätsmodul beschreibt hierbei den Grad der Nachgiebigkeit bei einer einachsigen Belastung. Er entspricht der Steigung einer Kraft-Verschiebungskurve. Der Schubmodul gibt die Verformung in Folge einer Scherkraft an, in der linearen Elastizität entspricht er der zweiten Lamé-Konstanten. Die Querdehnung wird durch die Poissonzahl  $\nu$  beschrieben. Dementsprechend lassen sich die Konstanten auch wie folgt berechnen, wobei die Spannungen wie schon zuvor mit  $\sigma$  und die Dehnungen mit  $\varepsilon$  bezeichnet werden:

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}, \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}, \quad G = \frac{\sigma_{12}}{\varepsilon_{12}} \quad (2.35)$$

Die hier genannten Beziehungen werden genutzt, um die elastischen Parameter experimentell zu ermitteln.

### Gültigkeitsbereiche der elastischen Parameter

Für linear-elastische, isotrope Materialien ergeben sich Gültigkeitsbereiche für die elastischen Parameter. So muss der E-Modul stets einen positiven Wert haben:

$$E \geq 0 \quad (2.36)$$

Für einen einachsigen Spannungszustand und ein konstant bleibendes Materialvolumen ergibt sich die Poissonzahl zu 0,5. Im Allgemeinen ändert sich jedoch das Volumen eines Materials unter Belastung. Für linear-elastische Materialien gilt, dass sich unter Zugbelastung das Probenvolumen erhöht, es ergeben sich also folgende Grenzen:

$$0 \leq \nu \leq 0,5 \quad (2.37)$$

In Einzelfällen kann es auch zu negativen Poissonzahlen kommen, nämlich dann, wenn ein Material sich bei aufgebrachtener Längendehnung auch in Querrichtung ausdehnt. Für solche *auxetischen* Materialien gilt:  $-1 \leq \nu \leq 0,5$ . Da diese Materialien hier jedoch nicht betrachtet werden, soll darauf nicht weiter eingegangen werden.

Aus dem begrenzten Gültigkeitsbereich für die Poissonzahl ergeben sich auch Grenzen für den Schubmodul:

$$\frac{1}{3}E \leq G \leq \frac{1}{2}E \quad (2.38)$$

Analog zur Poissonzahl ändern sich die Gültigkeitsgrenzen auch für den Schubmodul für auxetische Materialien zu  $\frac{1}{3}E \leq G \leq +\infty$ .

#### 2.2.4 Plastizität

Plastizität beschreibt das Verhalten eines Materials, das sich inelastisch verformt. Durch eine bestimmte Belastung wird die Fließgrenze eines Materials überschritten, und das Material unterläuft eine Verformung, die dieses auch nach Beendigung des Belastungszustandes beibehält. Unterhalb der materialspezifischen Fließgrenze treten keine oder rein-elastische Dehnungen auf, oberhalb plastische. Die Verzerrungen setzen sich dann aus einem elastischen  $\varepsilon^e$  und einem plastischen Anteil  $\varepsilon^p$  zusammen.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (2.39)$$

Die Literatur zu dem komplexen Thema der Plastizität, das hier jedoch nur kurz erwähnt werden soll, ist äußerst umfangreich, genannt seien hier beispielsweise [89], [27] und [62].

Abbildung 2.5 zeigt ideal-plastisches Materialverhalten. Nach einer Phase der elastischen Verformung wird die Fließgrenze  $\sigma_F$  erreicht. Von diesem Zeitpunkt an verhält sich das Material rein-plastisch, was bedeutet, dass es sich bei konstant bleibender Belastung immer weiter verformt, also fließt. Für dreidimensionale Systeme wird aus der Fließgrenze eine Fließfläche. Häufig kommt es nach Erreichen der Fließgrenze, also innerhalb des plastischen Bereichs, zu einer Verfestigung des beanspruchten Materials.

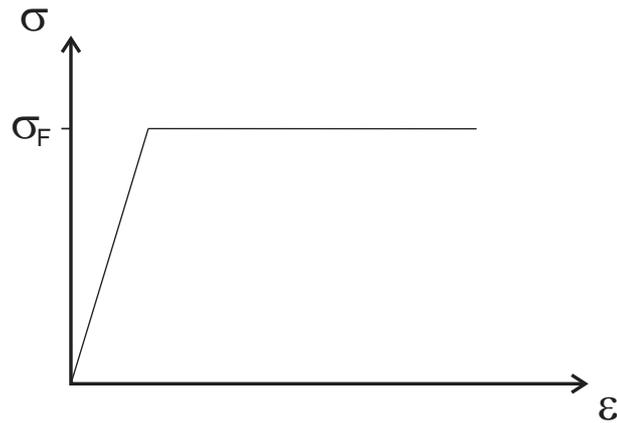


Abbildung 2.5: Verformungskurve bei ideal-plastischem Materialverhalten

### 2.2.5 Klassische Versagenshypothesen

Versagens- oder Festigkeitshypothesen machen eine Aussage darüber, unter welchen Umständen ein Material versagt [52]. Die hier vorgestellten Hypothesen wurden bereits Ende des 19., beziehungsweise Anfang des 20. Jahrhunderts entwickelt und sind bis heute sehr verbreitet. Sie beruhen zumeist auf experimentellen Beobachtungen. Abhängig von der zu untersuchenden Problematik wird zunächst definiert, wann Versagen eintritt, bzw. was Festigkeit ist. Üblicherweise wird hierfür entweder die Fließgrenze  $\sigma_F$  oder die Bruchgrenze  $\sigma_B$  verwendet, vergleiche Abbildung 2.6, da zu beiden Zeitpunkten eine grundlegende Veränderung im Materialverhalten eintritt. Bei den klassischen Versagenshypothesen wird angenommen, dass die Versagensgrenze allein durch den Spannungszustand, beziehungsweise den Dehnungszustand charakterisierbar ist. Dann kann die Versagensbedingung durch

$$F(\sigma_{ij}) = 0, \quad G(\epsilon_{ij}) = 0 \quad (2.40)$$

ausgedrückt werden. Formal lassen sich beliebig viele Hypothesen aufstellen, die Gleichung 2.40 erfüllen, hier sollen aber nur die gängigsten vorgestellt werden.

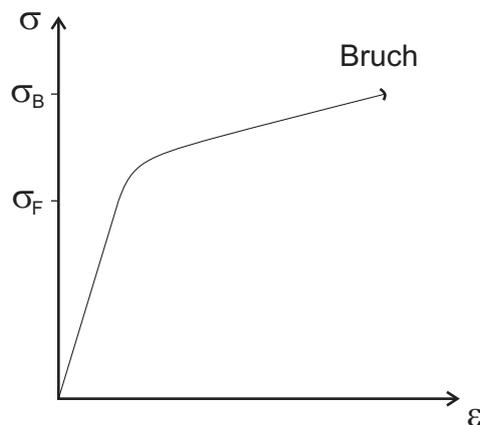


Abbildung 2.6: Typische Spannungs-Dehnungskurve eines einachsialen Zugversuchs

Abbildung 2.6 zeigt eine für viele Materialien typische Spannungs-Dehnungskurve, wie sie sich aus einem einachsialen Zugversuch ergibt. Zunächst ist die Dehnung elastisch, die

Kurve steigt also linear an, dann verändert sich die Steigung, die Kurve ist nicht mehr linear, hier ist die Fließgrenze  $\sigma_F$  erreicht. Von nun an sind die Dehnungen inelastisch. Schließlich wird die Probe zerstört, die Belastung, die zu diesem Zeitpunkt auf die Probe aufgebracht wurde, wird als Bruchgrenze  $\sigma_B$  bezeichnet.

Grafisch lässt sich die die Versagens- oder Fließkurve, beziehungsweise im dreidimensionalen die Versagens- oder Fließfläche, im Raum der Hauptspannungen darstellen. Hierfür spielt im dreidimensionalen die hydrostatische Achse eine wesentliche Rolle. Die hydrostatische Achse ist diejenige Gerade, die gleiche Werte für alle drei Hauptspannungen kennzeichnet.

### Hauptnormalspannungshypothese (Rankine)

Nach der Hauptnormalspannungshypothese wird Versagen erreicht, wenn eine der Hauptnormalspannungen entweder die Zugfestigkeit  $\sigma_z$  oder die Druckfestigkeit  $\sigma_d$  des Materials erreicht. Sie geht zurück auf W. J. M. Rankine, G. Lamé und C.L. Navier, wurde also bereits zu Beginn des 19. Jahrhunderts formuliert. Als zugehörige Versagensfläche ergibt sich hier der in Abbildung 2.7 gezeigte Würfel. Durch sie soll vor allem das Versagen spröder Werkstoffe beschrieben werden. Da der Einfluss mehrerer zeitgleich wirkender Hauptspannungen auf das Versagen vernachlässigt wird, ist die Hauptnormalspannungshypothese nur eingeschränkt anwendbar. Formal tritt Versagen ein, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$\sigma_1 = \begin{cases} \sigma_z \\ -\sigma_d \end{cases}, \quad \sigma_2 = \begin{cases} \sigma_z \\ -\sigma_d \end{cases}, \quad \sigma_3 = \begin{cases} \sigma_z \\ -\sigma_d \end{cases} \quad (2.41)$$

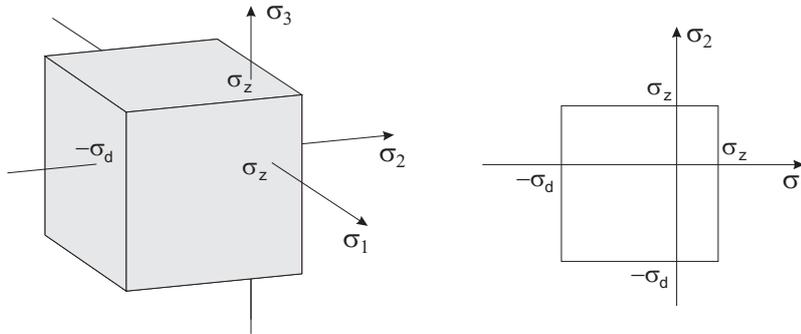


Abbildung 2.7: Fließflächen nach der Hauptnormalspannungshypothese im dreidimensionalen (links) und im zweidimensionalen (rechts) Raum

### Fließbedingung nach von Mises

In der Fließbedingung nach R. von Mises tritt Fließen ein, wenn die zweite Invariante des Spannungstensors einer Materialkonstanten  $k^2$  entspricht:

$$F = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - k^2 = 0 \quad (2.42)$$

Hieraus ergibt sich im dreidimensionalen Raum die in 2.8 dargestellte Fließfläche. Sie kann als Kreiszyylinder beschrieben werden, deren Mittelachse auf der hydrostatischen Geraden liegt. Im zweidimensionalen ergibt sich entsprechend eine Ellipse. Der Materialparameter  $k$  ist für ideal-plastische Materialien konstant und hängt sonst von den plastischen Deformationen ab.

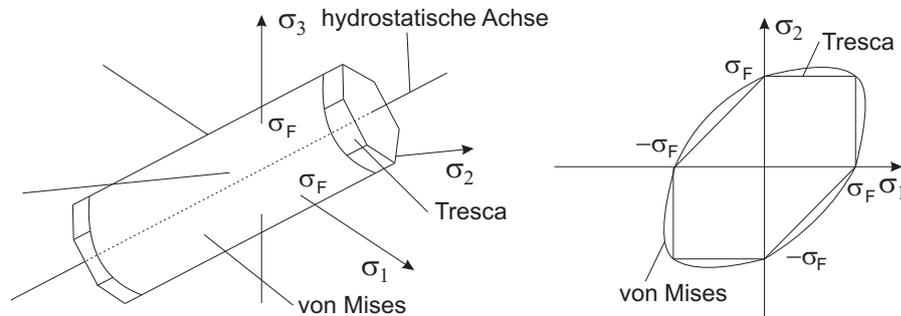


Abbildung 2.8: Fließflächen nach von Mises und Tresca im dreidimensionalen (links) und im zweidimensionalen (rechts) Raum

### Fließbedingung nach Tresca

H.E. Tresca geht in seiner Fließbedingung davon aus, dass durch Erreichen der maximalen Schubspannung Fließen ausgelöst wird, wenn also gilt  $F = \tau_{max} - k = 0$ . Mit Gleichung 2.28 ergeben sich also die Beziehungen:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \pm 2k = 0, \quad \sigma_2 - \sigma_1 \pm 2k = 0, \quad \sigma_3 - \sigma_2 \pm 2k = 0 \quad (2.43)$$

Die sich ergebende Fließfläche ist ein hexagonales Prisma um die hydrostatische Gerade, sie wird in Abbildung 2.8 gemeinsam mit der Fließfläche nach von Mises dargestellt.

### Fließbedingung nach Mohr-Coulomb

Diese Hypothese wird vor allem für granulare Medien benutzt, da sie das Versagen durch Gleiten charakterisiert. Granulare Materialien können Zugspannungen nicht oder nur in geringem Maße aufnehmen. Es wird von der modifizierten Gleitbedingung ausgegangen, die auch als Mohr-Coulomb-Hypothese bekannt ist:

$$|\tau| = -\sigma \tan \varphi + c \quad (2.44)$$

Es wird also angenommen, dass Gleiten eintritt, wenn die Schubspannungen einen kritischen Wert annimmt, der sich proportional zur Druckspannung verhält. Zusätzlich werden die Materialparameter der Reibungswinkel  $\varphi$  und die Kohäsion  $c$  benutzt. Werden die Schubspannungen der unterschiedlichen Richtungen durch Hauptnormalspannungen ausgedrückt und außerdem anstelle der oben genannten Parameter  $\varphi$  und  $c$  die Materialkennwerte

$\sigma_d$  und  $\kappa = \frac{\sigma_d}{\sigma_z}$  verwendet ergibt sich die folgende Formulierung für das Eintreten von Gleiten:

$$\sigma_d = \begin{cases} \kappa\sigma_1 - \sigma_3 \\ -\sigma_1 + \kappa\sigma_3 \end{cases}, \quad \sigma_d = \begin{cases} \kappa\sigma_2 - \sigma_1 \\ -\sigma_2 + \kappa\sigma_1 \end{cases}, \quad \sigma_d = \begin{cases} \kappa\sigma_3 - \sigma_2 \\ -\sigma_3 + \kappa\sigma_1 \end{cases} \quad (2.45)$$

In Abbildung 2.9 ist die sich ergebende Versagensfläche dargestellt, eine sechsflächige Pyramide um die hydrostatische Achse. Deren Scheitelpunkt liegt bei  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{\sigma_d}{\kappa-1}$ . In

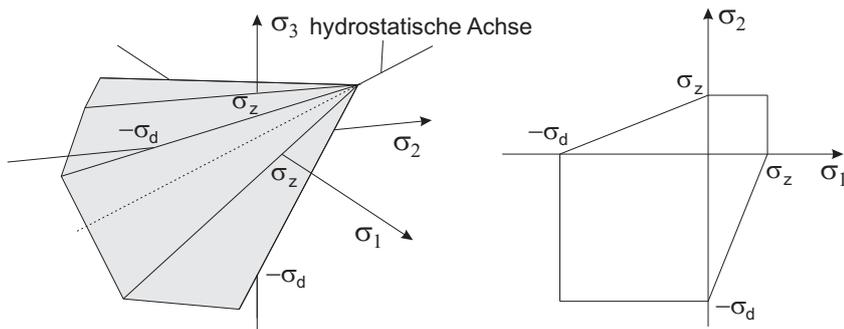


Abbildung 2.9: Fließflächen nach der Mohr-Coulomb-Hypothese im dreidimensionalen (links) und im zweidimensionalen (rechts) Raum

Experimenten wurde festgestellt, dass das Materialverhalten bestimmter Materialien durch die Mohr-Coulomb-Hypothese im Druckbereich gut beschrieben werden kann, im Zugbereich jedoch nicht ausreichend funktioniert [80]. Dies kann dadurch erklärt werden, dass unter Zugspannung Versagen häufig nicht durch Gleiten stattfindet, sondern durch Dekohäsion der Schnittflächen, es liegt also ein völlig anderes Phänomen zu Grunde. Eine Möglichkeit, die Versagensbedingung dahingehend zu verbessern, ist der *tension-cut-off*, bei dem die Versagensfläche durch Normalspannungsabschnitte modifiziert wird. Eine entsprechende Versagensfläche ist in Abbildung 2.10 dargestellt.

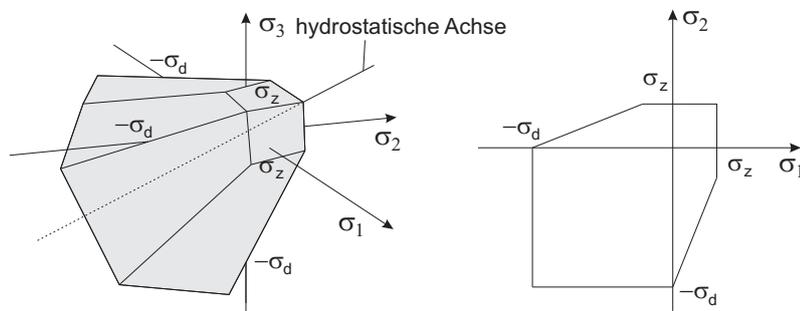


Abbildung 2.10: Fließflächen nach der modifizierten Mohr-Coulomb-Hypothese *tension-cut-off* im dreidimensionalen (links) und im zweidimensionalen (rechts) Raum

## 2.3 Energie und Potential

Wie bereits in Kapitel 2.2.3 beschrieben, werden Konstitutivgesetze benötigt, um ein bestimmtes Materialverhalten zu beschreiben. Diese lassen sich auch als Energiepotentiale formulieren, was den großen Vorteil birgt, dass sie vollkommen koordinatenunabhängig sind.

Bei einem Potential im physikalischen Sinn handelt es sich um eine Feldgröße, also um eine Größe, deren Wirkung in Abhängigkeit von ihrer Position beschrieben wird. Das Potential beschreibt hierbei die Energie, die die betrachtete Größe (etwa eine definierte Masse) an einer bestimmten Stelle besitzt. Es handelt sich also um eine skalare Funktion in Abhängigkeit eines Ortsvektors. Einige Beispiele für unterschiedliche Potentiale werden in [43] gegeben.

Energie wird dagegen immer für eine festgelegte Größe angegeben. Dabei kann es sich um eine Masse, eine Ladung oder ein System handeln. Wie das Potential, kann sich auch eine Energie aus verschiedenen Teilen zusammensetzen, wenn etwa unterschiedliche physikalische Felder wirken. Mit den Hauptsätzen der Thermodynamik kann gezeigt werden, dass Systeme, deren Entropie und Volumen konstant sind, Gleichgewicht dann erreichen, wenn die innere Energie ein Minimum annimmt [43].

Aus der Thermodynamik stammen auch die *Thermodynamischen Potentiale*, von denen einige im Folgenden kurz erläutert werden. Sie beschreiben den energetischen Zustand eines Systems. Ihr wohl bekanntester Vertreter ist die Innere Energie, auf die in Kapitel 2.3.1 eingegangen wird. Mit Hilfe von Legendre-Transformationen, durch die die Variablen verändert werden, können aus ihr andere Formulierungen folgen, von denen einige in den nachfolgenden Unterkapiteln vorgestellt werden. Herleitungen der verschiedenen thermodynamischen Potentiale und genauere Darstellungen der Legendre-Transformationen finden sich etwa in [83] oder [28].

### 2.3.1 Innere Energie

Die innere Energie  $U$  beschreibt diejenige Energie, die einem System allein durch die Bewegung und Interaktion seiner Moleküle und Atome innewohnt. Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik ist sie in einem abgeschlossenen System konstant. Sie ändert sich lediglich durch Hinzufügen von Wärme oder Arbeit:

$$U = \int (T dS - \sigma : \varepsilon + \sum_i \mu_i dN_i) \quad (2.46)$$

Hierbei bezeichnet  $T$  die Temperatur,  $S$  die Entropie,  $\sigma$  die Spannungen und  $\varepsilon$  die elastischen Dehnungen. Der letzte Term, der häufig zu Null gesetzt wird, beinhaltet das chemische Potential des Systems.  $\mu_i$  ist hier das chemische Potential eines Teilchens der Art  $i$ ,  $N_i$  seine Anzahl innerhalb des betrachteten Systems.

### 2.3.2 Freie Helmholtz Energie

Für konstantes Volumen und konstante Temperatur, beziehungsweise konstanten Atmosphärendruck und konstante Temperatur, kann die (nach Hermann von Helmholtz benannte) *freie Energie*  $F$ , wie bereits erwähnt, aus den Hauptsätzen der Thermodynamik abgeleitet werden. Sie ergibt sich zu

$$F = U - TS \quad , \quad (2.47)$$

wobei  $U$  wie zuvor für die innere Energie,  $T$  für die (konstante) Temperatur und  $S$  für die Entropie steht.

Das Potential der freien Helmholtz Energie zur Beschreibung der in einem Körper gespeicherten elastischen Energie kann ausgedrückt werden als:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.48)$$

Hierbei beschreibt der Dehnungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  lediglich den elastischen Anteil der Verformung und  $\boldsymbol{C}$  den bereits bekannten Elastizitätstensor.

### 2.3.3 Gibbs- Energie

Die Gibbs-Energie  $G$  ist dasjenige thermodynamische Potential, dessen Minimum erreicht wird, wenn bei konstanter Temperatur und konstantem Druck chemisches Gleichgewicht innerhalb des betrachteten Systems herrscht. Ihre Änderung beschreibt die Richtung, in der eine chemische Reaktion abläuft. Sie wird beschrieben durch die Gleichung

$$G = U + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} - TS \quad , \quad (2.49)$$

Für die in dieser Arbeit betrachteten Fälle gilt stets  $dG \leq 0$ , da hier die chemischen Reaktionen spontan ablaufen können.

### 2.3.4 Enthalpie

Durch die Enthalpie  $H$  können Phasenumwandlungen beschrieben werden. Sie ist diejenige Energie, die ein Stoff benötigt, um seine Phase zu verändern.

$$H = U + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.50)$$

Je nach betrachtetem Phasenübergang wird die Enthalpie unterschiedlich definiert. Darauf soll jedoch hier nicht weiter eingegangen werden. Mit der Legendre-Transformation können noch weitere Potentiale aus der inneren Energie abgeleitet werden, die hier jedoch ebenfalls nicht vorgestellt werden sollen.

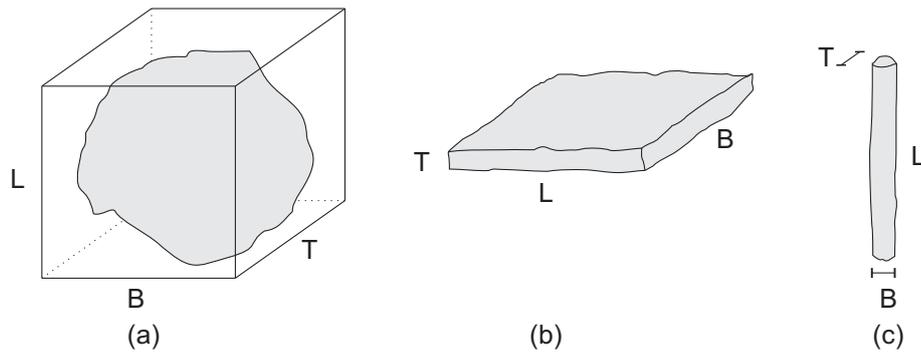


Abbildung 2.11: Unterschiedliche Kategorien von Partikelgeometrien nach [61]

## 2.4 Eigenschaften granularer Materialien

In diesem Kapitel soll kurz auf die besonderen Eigenschaften und Charakteristika granularer Materialien, also Materialien, die sich aus einer Vielzahl einzelner Partikel zusammensetzen, eingegangen werden, da sich diese stark von jenen anderer Materialien unterscheiden können. Ausführlich wird auf diese Eigenschaften beispielsweise in [29], [55] und [68] eingegangen.

Granulare Medien spielen in vielen technischen Anwendungen eine wichtige Rolle, etwa als Böden, Puder oder Körner, die als Untergrund, Rohmaterial oder Schmiermittel genutzt werden können. Für die Definition, ob also ein Material als Granulat betrachtet werden kann, sind die Größenverhältnisse ausschlaggebend: Ein Partikel ist dann vorhanden, wenn seine Ausdehnungen klein im Vergleich zu seiner Umgebung ist. Je nach betrachtetem System kann ein „Partikel“ also Nanometer oder Lichtjahre groß sein. Eine Ansammlung einer größeren Anzahl von Partikeln wird dann als granulares Medium bezeichnet.

### 2.4.1 Eigenschaften des einzelnen Partikels

Neben der Größe und dem Gewicht der einzelnen Partikel hat auch ihre Geometrie wesentlichen Einfluss auf das Verhalten des gesamten Mediums. Wegen der Vielzahl vorkommender Geometrien wurden hier verschiedene Ansätze entwickelt, die Geometrien von Partikeln zu kategorisieren. Die in Abbildung 2.11 dargestellten Kategorien wurden in [61] vorgestellt. Ein Partikel, das in allen drei Dimensionen in etwa gleiche Ausdehnungen besitzt, für das also gilt  $L \approx B \approx T$ , wird hier als sperrig (engl.: *bulky*) bezeichnet, ein flaches Partikel (engl.: *flakey*) ist eines, für das  $L \approx B > T$  gilt, während für ein nadelähnliches (engl.: *needle-like*) gilt:  $L > B \approx T$ . Hierbei bezeichnen  $L$ ,  $B$  und  $T$  die Längenausdehnung des Partikels in den drei Raumrichtungen.

Neben den Längenverhältnissen spielt auch die *Sphärizität* der einzelnen Partikel eine große Rolle für die mechanischen Eigenschaften eines Granulats. Die Sphärizität  $z$  ist ein Maß dafür, wie weit die tatsächliche Form eines Partikels von einer Kreis- oder Kugelform abweicht [127]:

$$z = \frac{\text{Oberfläche einer Kugel mit dem gleichen Volumen wie das Partikel}}{\text{Oberfläche des Partikels}} \quad (2.51)$$

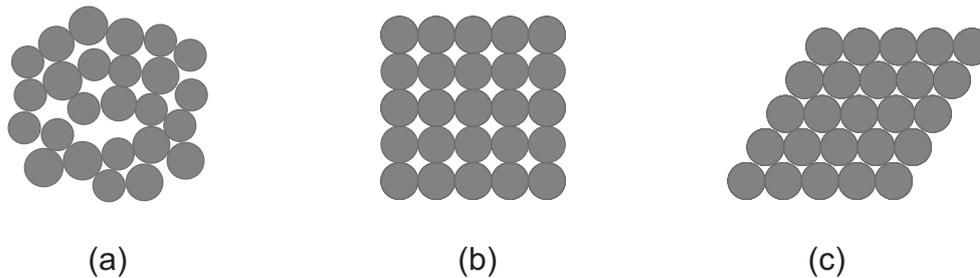


Abbildung 2.12: Unterschiedliche Anordnungsformen von Partikeln

Mit der Rundheit (engl. *roundness*) eines Partikels wird beschrieben, ob die Oberfläche eher kantig oder abgerundet ist. In der Geologie ist die Rundheit häufig ein Maß für die Abnutzung eines Partikels: Während ein neu entstandenes Sandpartikel meist kantig ist, wird es durch den Einfluss von Wind und Wasser immer mehr abgerundet. Sehr nah verwandt mit der Rundheit ist die Oberflächenrauheit von Partikeln. Sie bezeichnet ebenfalls Unebenheiten an der Partikeloberfläche, allerdings eher auf der Mikroskala. Beide Parameter haben einen großen Einfluss auf den Reibungswinkel, der in Kapitel 2.5 genauer erläutert wird.

Für die einzelnen Partikel sind ebenso komplexe Konstitutivgesetze denkbar, wie in der Kontinuumsmechanik angewendet werden, und von denen einige in Kapitel 2.2 beschrieben wurden. Diese Konstitutivgesetze müssten dann in jedem Partikelkontakt angewendet und ausgewertet werden. Üblicherweise wird darauf im Umgang mit Granulaten jedoch verzichtet, da davon ausgegangen wird, dass die Anordnung der Partikel und deren Freiheitsgrade die ausschlaggebenden Parameter für das gesamte Materialverhalten sind, und die Verformung der einzelnen Partikel hier eine stark untergeordnete Rolle spielt. Daher werden die Partikel meist als Starrkörper angenommen, nur in einzelnen Fällen wird ideal-elastisches Materialverhalten zu Grunde gelegt.

### 2.4.2 Porosität des Mediums

Ein granulares Material besteht immer aus festen Anteilen, den Partikeln, und Hohlräumen, die zwischen den Partikeln entstehen. Diese Hohlräume können je nach Materialzusammensetzung mit flüssigen oder gasförmigen Substanzen aufgefüllt sein. Das Verhältnis zwischen dem Hohlraumvolumen  $V_H$  und dem Gesamtvolumen  $V$  einer Probe wird als *Porosität*  $n$  bezeichnet:

$$n = \frac{V_H}{V} \quad (2.52)$$

Während sich Gleichung 2.52 auf Volumenanteile bezieht, sind auch Definitionen üblich, die die Massenanteile oder Kombinationen aus beiden verwenden.

Das Verhältnis zwischen Hohlräumen und festen Anteilen kann aber auch über die Packungsdichte eines Granulats beschrieben werden. Wie in Abbildung 2.12 dargestellt, sind hier neben ungeordneten Granulaten auch ideale Packformen denkbar, die generell eine geringere Porosität, also eine höhere Packungsdichte aufweisen.

	nichtbindiger Boden	bindiger Boden	organischer Boden
Durchlässigkeit	hoch	sehr gering	gering
Verformungsfähigkeit	meist gering	meist hoch	sehr hoch
Zeitsetzungsverhalten	kaum vorhanden	ausgeprägt	sehr ausgeprägt
Reibung	ausgeprägt	gering	nahezu Null
Kohäsion	kaum	ausgeprägt	gering

Tabelle 2.1: Eigenschaftsmerkmale der unterschiedlichen Bodengruppen [133]

## 2.5 Bodenmechanik

Die Bodenmechanik dient dazu, die mechanischen und hydraulischen Eigenschaften des Bodens als Baugrund oder Baustoff zu beschreiben. Da Böden eine sehr große Bandbreite unterschiedlicher Eigenschaften besitzen können und diese auch oft auf kleinstem Raum voneinander abweichen, handelt es sich hierbei um ein äußerst komplexes Material. Die Begriffe *Boden* und *Lockergestein* werden hier entsprechend der Euro-Norm EN ISO 14688 synonym benutzt, da hier Boden als „Lockergestein im oberen Bereich der Erdkruste“ [1] definiert wird. In diesem Kapitel werden nur die für diese Arbeit wesentlichen Punkte zusammengefasst. Selbstverständlich gibt es umfangreiche Literatur zu dieser Thematik, beispielhaft seien hier [81], [54] und [115] genannt.

### 2.5.1 Klassifikation von Böden

Böden oder Lockergesteine entstehen durch Verwitterung aus Festgesteinen, sodass die Bodeneigenschaften von der Mineralzusammensetzung der Gesteine sowie der Art der Verwitterung abhängen. Auch die Entstehungsgeschichte der Festgesteine spielt eine Rolle. So lassen sich Böden beispielsweise nach ihrer Entstehungszeit und Art des Festgesteins einteilen, da dann auch ähnliche bodenmechanische Eigenschaften erwartet werden können. Unterschieden werden so *magmatische Gesteine*, *Sedimentgesteine* und *metamorphe Gesteine*.

Die daraus entstehenden Lockergesteine werden ebenfalls in drei Hauptgruppen eingeteilt, wobei diese auch in gemischter Form vorzufinden sind:

- Nichtbindige Böden (Sand, Kiese, Steine, Korngröße  $>0,06\text{mm}$ )
- Bindige Böden (Schluffe, Tone, Korngröße  $< 0,06\text{mm}$ )
- Organische Böden (vorwiegend bindige Böden mit hohem organischem Anteil)

Tabelle 2.1 gibt einen Überblick über die Eigenschaften, die in den Bodenarten vorherrschen, vergleiche [133]. Es muss allerdings angemerkt werden, dass hier nur die Tendenz der jeweiligen Eigenschaft wiedergegeben wird, einzelne Böden können hiervon auch immer abweichen.

Das wichtigste Unterscheidungsmerkmal innerhalb nichtbindiger Böden ist die Korngröße, beziehungsweise die Sieblinie des Materials. Die sogenannte äquivalente Korngröße, die

Bodenart	Reibungswinkel
Ton, Schluff	$\approx 25^\circ$
Sand	$\approx 27,5 - 35^\circ$
Kies	$\approx 32 - 27^\circ$

Tabelle 2.2: Reibungswinkel für unterschiedliche Bodenarten [133]

die Größe des einzelnen Partikels beschreibt, wird meist durch Siebe mit unterschiedlichen Sieblochgrößen ermittelt. Durch das Hintereinanderschalten mehrerer Siebe mit standardisierten Lochgrößen kann die sogenannte Sieblinie eines Bodens ermittelt werden. Sie gibt über die Anteile der verschiedenen Korngrößen innerhalb eines Materials Auskunft.

Bindige Böden werden in erster Linie über ihre Konsistenz, also ob sie breiig, steif oder fest sind, definiert. Um hier eine objektive Einteilung zu gewährleisten, wurden verschiedene einfache Versuche entwickelt, auf die hier aber nicht näher eingegangen werden soll. Besonders bei bindigen Böden spielt außerdem der Wassergehalt eine große Rolle. Der Wassergehalt beeinflusst auch die Kohäsion. Mit Kohäsion wird der Zusammenhalt der einzelnen Bodenpartikel bezeichnet. Sie wird auf molekularer Ebene durch Anziehungskräfte zwischen den einzelnen Körnern und der umgebenden Wasserhülle bewirkt, weshalb dieser Effekt sich nur bei geringer Korngröße einstellt, bei der die Oberflächeneigenschaften gegenüber den Masseigenschaften der einzelnen Körner ausreichend groß sind, also für bindige Böden. Die Kohäsion  $[\frac{N}{mm^2}]$  kann beispielsweise durch die Auswertung einer Reihe von Triaxialversuchen bestimmt werden, sie entspricht dann dem Achsenabschnitt der Schergeraden, wie in Abbildung 2.4 dargestellt.

Eine weitere Eigenschaft von Lockergesteinen lässt sich durch den Reibungswinkel  $\varphi$  beschreiben. Darunter ist der Winkel zu verstehen, in dem ein Material belastet werden kann, ohne abzurutschen. Er wird in Grad  $[\circ]$  angegeben. Für kohäsionslose Materialien entspricht er dem Schütt- oder Böschungswinkel, für kohäsionsbehaftete Materialien ist er geringer als der Böschungswinkel. Eine ungefähre Größenordnung des Reibungswinkels für verschiedene Bodenarten ist in Tabelle 2.2 gegeben.

### 2.5.2 Laborversuche

Um die Eigenschaften und Kennzahlen von Lockergestein zu ermitteln, gibt es eine Vielzahl unterschiedlicher Laborversuche [56]. Welche Versuche angewendet werden, hängt sowohl von der Art des Bodens als auch von der Art der erwarteten Beanspruchung ab. Hier wird nur auf die zum Verständnis dieser Arbeit benötigten Versuche eingegangen.

Wie bereits in Kapitel 2.4.2 wird der Boden als Dreiphasenmodell beschrieben, der sich aus den Phasen Feststoff, Porenwasser und Porenluft zusammensetzt. Bei einem völlig trockenen Boden entfällt hier das Porenwasser, ein vollständig gesättigtes Material besteht nur aus Feststoff und Porenwasser. Dementsprechend lassen sich viele Parameter für einzelne oder alle Bestandteile unterschiedlich berechnen. Dies soll in Gleichung 2.53 für die Dichte gezeigt werden:

$$\rho_s = \frac{m_d}{V_s}, \quad \rho_d = \frac{m_d}{V}, \quad \rho = \frac{m_d + m_w}{V} \quad (2.53)$$

Boden	$\rho_s \left[ \frac{t}{m^3} \right]$
Kies, Sand	2,65
Löß, Mehlsand, sandiger Schluff	2,67
Schluff	2,70
schluffiger Ton	2,75
Ton	2,80

Tabelle 2.3: Korndichten verschiedener Bodenarten [133]

Boden	Wassergehalt $w$
Sand	0,05 - 0,10
Schluff	0,10 - 0,20
Ton	0,20 - 0,30
Torf	0,50 - >1,0

Tabelle 2.4: Wassergehalt verschiedener Bodenarten [133]

Hierbei bezeichnet  $\rho_s$  die Korndichte des reinen Feststoffes,  $\rho_d$  die Trockendichte eines Materials und  $\rho$  die Feuchtdichte desselben Materials, meist also die Dichte, die in-situ vorgefunden wird. Die Massen werden unterschieden in diejenige des Feststoffes  $m_d$  und die des Porenwassers  $m_w$ . Das Volumen  $V$  beschreibt das Volumen einer Bodenprobe,  $V_s$  das eines einzelnen Kornes. Die ungefähren Korndichten verschiedener Bodenarten sind in Tabelle 2.3 zusammengestellt. Der Wassergehalt eines Bodens kann über verschiedene Verfahren ermittelt werden. Beispielsweise wird die Probe gewogen und so die Masse  $m$  ermittelt, dann auf bestimmte definierte Weise getrocknet, und wieder gewogen, um jetzt die Trockenmasse  $m_d$  zu bestimmen. Daraus ergibt sich der Wassergehalt  $w$  zu:

$$w = \frac{m - m_d}{m_d} \quad (2.54)$$

Typische Wassergehalte unterschiedlicher Bodenarten sind in Tabelle 2.4 dargestellt.

### Triaxialversuch

Zur Ermittlung der Scherfestigkeit und der Bestimmung von Festigkeitseigenschaften von Böden wird meist der Triaxialversuch angewendet, dessen Rahmenbedingungen in DIN 18137-2 festgeschrieben sind [2], Details finden sich außerdem in [71], [23] und vielen anderen Werken. Bei diesem Versuch wird eine zylindrische Probe in Axialrichtung durch einen Belastungsstempel beansprucht, während die seitliche Belastung konstant gehalten wird. Da hierbei  $\sigma_2 \equiv \sigma_3$  und  $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_3$  gilt, ist der Name Triaxialversuch irreführend, da es tatsächlich nur zwei unabhängige Spannungsvariablen, nämlich  $\sigma_1$  in Axialrichtung und  $\sigma_2$  senkrecht dazu, gibt. Das gleiche gilt für die Verformungen, auch hier gibt es nur zwei unabhängige Variablen,  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ .

Nach definierten Sättigungs- und Konsolidationsvorgängen kommt es zum Abschervorgang. Dieser wird je nach gewählter Versuchsart auf leicht voneinander abweichende Weise durchgeführt. Unterschieden werden [2]:

- Der konsolidierte, dränierte Versuch (D-Versuch),

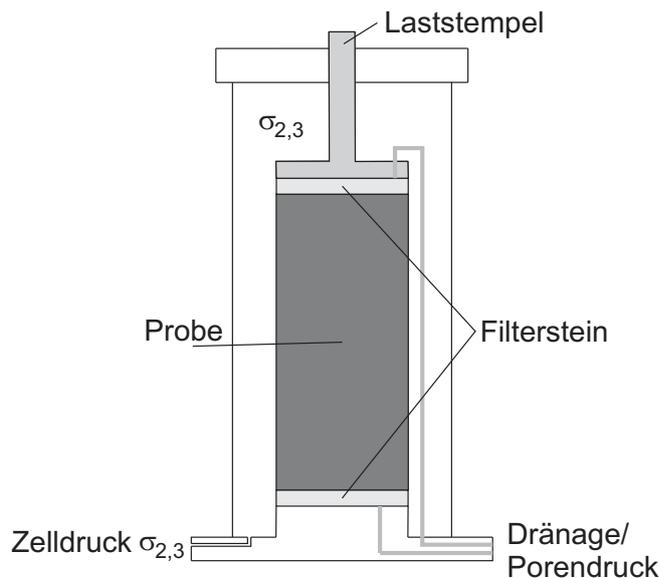


Abbildung 2.13: Allgemeiner Versuchsaufbau eines Triaxialversuchs

- der konsolidierte, undrainierte Versuch (CU-Versuch),
- der konsolidierte, drainierte Versuch mit konstant gehaltenem Volumen (CCV-Versuch) und
- der unkonsolidierte, undrainierte Versuch (UU-Versuch).

Unter *Konsolidierung* ist hierbei eine zeitlich verzögerte Stauchung des Bodens infolge einer Lasterhöhung zu verstehen, ein Effekt, der dem Kriechen ähnelt. Ursache hierfür ist das zeitlich verzögerte Abfließen des Porenwassers, das zunächst einen Teil des durch die zusätzliche Last entstehenden Drucks aufnimmt. Dieses Verhalten spielt hauptsächlich für bindige Böden eine Rolle. Ob der Versuch *drainiert* oder *undrainiert* durchgeführt wird, entscheidet sich an der Einstellung eines Ventils, also je nachdem, ob das Abfließen überschüssigen Porenwassers erlaubt oder behindert wird. Der allgemeine Versuchsaufbau ist in Abbildung 2.13 gezeigt.

Während die Probe immer stärker belastet wird, werden die folgenden Werte gemessen:

- Zeit
- Zusammendrückung der Probe
- Stempelkraft
- Zellendruck
- Porenwasserdruck (bei CU und CCV)
- Ausgepresstes Wasservolumen (bei D-Versuch)

Die Probe wird mit einer konstanten, der Bodenart anzupassenden, Geschwindigkeit belastet. Der Versuch ist frühestens dann beendet, wenn  $\sigma_1$  trotz eines Stauchungszuwachses von mindestens 1% nicht mehr ansteigt. Steigt  $\sigma_1$  weiter an, wird der Versuch bei einer Stauchung des Probenkörpers von 20% beendet.

Um aus der Stempelkraft die effektive Axialspannung berechnen zu können, muss zunächst die mittlere Probenquerschnittsfläche  $A$  infolge der Volumenänderung berechnet werden.

$$A = \frac{V_0 - \Delta V}{h_0 - \Delta h} \quad (2.55)$$

Hierbei bezeichnen  $V_0$  und  $h_0$  die Ausgangsgeometrie (Volumen und Höhe) der Probenkörpers,  $\Delta V$  und  $\Delta h$  ihre Abnahme. Die effektive Axialspannung  $\sigma'_1$  ergibt sich dann zu

$$\sigma'_1 = \frac{P - P_0}{A} + \sigma_3 - u_0 \quad , \quad (2.56)$$

wobei  $P_0$  die Stempelkraft im Ausgangszustand, und  $u_0$  den zu Beginn vorherrschenden Porenwasserdruck meint. Der Versuch wird ausgewertet, indem die halbe Hauptspannungsdifferenz ( $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ ) in einem Diagramm über der Stauchung  $\epsilon_1$  aufgetragen wird. Für die meisten Böden steigt die Versuchskurve zunächst linear an, es kann also für die ersten Belastungsschritte von elastischem Materialverhalten ausgegangen werden, und der Elastizitätsmodul kann abgelesen werden. Aus diesem Diagramm können außerdem, wenn der Versuch für unterschiedliche Radialspannungen ausgewertet wird, mit Hilfe eines  $\tau - \sigma$ -Diagramms Mohr-Kreise gezeichnet und daraus die Kohäsion und der Reibungswinkel abgelesen werden, wie bereits in 2.2.2 erläutert. Durch die Auswertung des Verhältnisses von axialer zu radialer Verformung kann desweiteren die Querkontraktionszahl, oder Poissonzahl, berechnet werden.

Durch den Triaxialtest ist also ein Aussage über unterschiedliche, zur Charakterisierung eines Bodenmaterials wichtiger, Parameter möglich. Neben den hier vorgestellten Varianten bestehen zahlreiche weitere, die entsprechend der jeweiligen Bodenbeschaffenheit oder an spezielle gewünschte Ergebnisse angepasst wurden.

### Slump Test

Der *Slump Test* wird üblicherweise zur Bestimmung der Konsistenz von Frischbeton verwendet. Mit Hilfe des Ausbreitmaßes sowie des Setzmaßes wird dieser hier in steif, plastisch, weich oder fließfähig eingeteilt. Die Durchführung und Auswertung ist in DIN EN 12350-2 [41] geregelt.

Das zu untersuchende Material wird in einen genormten Kegelstumpf gefüllt, und dieser anschließend angehoben. Der Versuch findet auf einer nicht absorbierenden, glatten Oberfläche statt, die sich nicht bewegen lässt, also einfach unter Einfluss der Gravitation. Das wesentliche Ergebnis des Slump Tests ist das Maß, um das das Material absinkt, wenn das Gefäß entfernt wird, das sogenannte Setzmaß. Desweiteren wird der Durchmesser der verteilten Masse gemessen, daraus ergibt sich das Ausbreitmaß. Hauptziel des Versuches ist es, die Verarbeitbarkeit von frischem Beton zu beurteilen.

Der Versuch und mögliche Endzustände werden in Abbildung 2.14 dargestellt. In (a) ist hier lediglich die Ausgangsgeometrie des Versuchskörpers dargestellt. Abbildung 2.14(b),

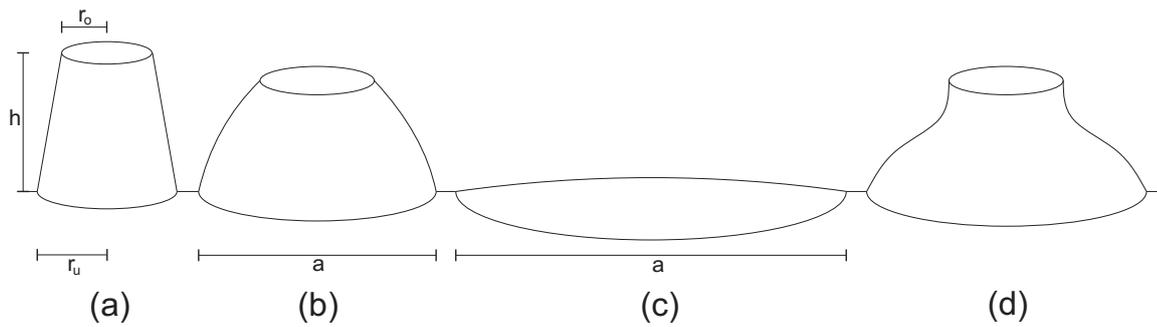


Abbildung 2.14: Ausbreitversuch: (a) Kegelstumpf (Ausgangsgeometrie), (b), (c), (d) Mögliche Geometrien zum Versuchsende

(c) und (d) zeigen dagegen Endzustände, die sich abhängig von den Materialeigenschaften ergeben können. Hierbei entspricht (b) einem recht steifen (geringes Ausbreitmaß  $a$ ), (c) einem eher fließfähigen Material (größeres  $a$ ). Unter anderem in [50] wurde gezeigt, dass der Slump Test auch für eine Untersuchung von konditionierten Böden, wie sie durch Injektionen am Schneidrad im Tunnelvortrieb entstehen, das Verfahren wird in Kapitel 3.1.1 beschrieben, interessante Ergebnisse liefert. In diesem Fall entsteht oft ein s-förmiger Probekörper wie in Abbildung 2.14(d) dargestellt.

## 3 Tunnelbau

Tunnel werden bereits seit tausenden von Jahren genutzt und gebaut. Besonders aus dem Altertum sind erstaunliche Leistungen beim Bau von unterirdischen Tunneln und Stollen überliefert. Lange handelte es sich hauptsächlich um Ver- oder Entsorgungstunnel, im Laufe der letzten etwa 200 Jahre sind aber Verkehrstunnel mehr und mehr in den Vordergrund gerückt. In der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts sollten Städte und Länder mit Hilfe der Eisenbahn verbunden werden. Die hierfür erforderliche Trassierung führte zu den ersten großen Alpendurchstößungen und damit zu einer Blütezeit des Verkehrstunnelbaus, [19] [92]. Hierbei wurde zunächst Schwarzpulver, später dann Dynamit verwendet um den Fels zu durchhohlen. Die benötigten Bohrlöcher wurden amfangs mit Schlägel und Eisen in mühevoller Handarbeit, etwas später dann mit Drehbohrmaschinen und vergleichbarem Gerät geschlagen. Das aufgesprengte Schuttergut wurde bis weit ins zwanzigste Jahrhundert hinein mit Schaufel und Schubkarren abtransportiert.

In der Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts folgten dann verschiedene große Straßentunnel in den Alpen, genauso wie an vielen anderen Orten der Welt. Auch wenn sich die Baustoffe und die verwendeten Maschinen in den vergangenen 100 Jahren enorm entwickelt hatten, blieb die handwerkliche Kunst in den groben Zügen unverändert. Meist wurde aus Gründen der Standsicherheit mit Teilausbrüchen gearbeitet.

Etwa seit der Mitte der 1960er Jahre werden Tunnel auch durch Tunnelbohrmaschinen erstellt. Zunächst waren dies zumeist Hartgesteinsmaschinen, die aus einem Bohrkopf, der das Gestein ausbricht, und einem hintergelagerten Teil mit Hilfseinrichtungen etwa zur Steuerung und für den Materialabtransport, bestanden. Diese werden auch als „Offene Tunnelbohrmaschinen“ bezeichnet. In dieser Arbeit liegt der Fokus aber auf den Schildmaschinen, die sowohl in festem, als auch in lockerem Gestein benutzt werden können. In Kapitel 3.1 wird daher einen Überblick über die unterschiedlichen Vortriebsarten in Schildbauweise gegeben. Anschließend werden in Kapitel 3.2 die unterschiedlichen am Schneidrad befindlichen Werkzeuge beschrieben, bevor es in Kapitel 3.3 dann um deren Verschleiß geht.

### 3.1 Schildvortriebe

In diesem Kapitel soll ein kurzer Überblick über die verschiedenen Arten des maschinellen Tunnelbaus im Bereich der Schildvortriebe gegeben werden. Ausführliche Erläuterungen hierzu finden sich unter anderem in [93], [74] und [75]. Mit Hilfe von Schildbauverfahren lassen sich Tunnel auch in schwieriger geologischer Umgebung realisieren. Kleine Überdeckungshöhen, wenig tragfähige Bodenarten und hoch anstehendes Grundwasser stellen hier kein Problem dar, es können Störungen und Setzungen an der Oberfläche weitgehend vermieden werden. Das Schild dient dazu, die Stabilität des Tunnels während des Bauzustands zu gewährleisten, und eine Störung des Untergrundes soweit möglich zu verhindern.

Neben den genannten Vorteilen bieten sie außerdem eine hohe Vortriebsgeschwindigkeit im Vergleich zu anderen Verfahren, eine gute Profilgenauigkeit, eine große Sicherheit für die Belegschaft und eine geringe Beeinträchtigung für die Umgebung (wenig Lärm, kaum Erschütterungen, der Grundwasserspiegel bleibt erhalten). Dem gegenüber steht ein deutlich erhöhter Planungsaufwand, eine lange Vorlaufzeit für die Planung und Erstellung der Schildmaschine sowie gewisse Einschränkungen bei der Tunnelgeometrie: In der Regel kann nur ein Kreisquerschnitt realisiert werden, jegliche Änderung, wie zum Beispiel eine Aufweitung für einen Bahnhof oder ähnliches, bedeuten einen deutlich erhöhten Aufwand.

Im maschinellen Schildvortrieb ist das Schild eine zylindrische Stahlkonstruktion, die im Tunnel Stück für Stück vorgeschoben wird. In ihrem Schutz findet der Ausbruch statt, an ihrem Ende wird eine Tunnelsicherung eingebaut, die endgültig oder vorläufig sein kann. Obwohl so gut wie jede Schildmaschine ein Unikat ist, das den ganz speziellen geologischen Zwängen angepasst ist, werden verschiedene Typen unterteilt. Die Unterteilung erfolgt üblicherweise nach Art der Ortsbruststützung, wie in Abbildung 3.1 dargestellt.

Das *Offene Schild* stützt den anstehenden Erddruck nur durch die sich auf natürliche Weise in der Abbaukammer ergebende Böschung und besitzt kein System zur Grundwasserstützung an der Ortsbrust. Es kann somit nur in Verhältnissen ohne, bzw. mit abgesenktem Grundwasser eingesetzt werden. Bei der *Mechanischen Stützung* übernimmt das Schneidrad eine gewisse Stützfunktion. Dies kann auch nur in grundwasserfreien Böden mit einer ausreichenden Eigenstabilität angewandt werden.

*Druckluftschilde* realisieren die Grundwasserstützung mittels Druckluft und sind somit auch unter offenen Gewässern und unterhalb des Grundwasserspiegels einsetzbar. Bei den *Flüssigkeitsschilden* erfolgt die Ortsbruststützung mit Hilfe einer Flüssigkeit. Hierbei kann es sich um unterschiedliche Bentonite oder Suspensionen handeln. *Erddruckschilde* nutzen den bereits vom Schneidrad abgelösten Boden als Stützmedium. Sie können also auf sekundäre Stützmedien verzichten. Da für die Abbausimulation in Kapitel 6.2 ein Erddruckschild betrachtet wird, wird dieser Schildtyp in Kapitel 3.1.1 genauer erläutert.

Natürlich lassen sich die Maschinen auch nach anderen Kriterien einteilen, etwa nach Art des Abbaus, also ob im Teilschnitt, im Vollschnitt oder hydraulisch abgebaut wird. Da diese Unterscheidung jedoch, genau wie eine Unterteilung nach Art des Abtransports, für diese Arbeit keine Rolle spielt, soll lediglich auf [93] verwiesen werden.

### 3.1.1 Erddruckschilde

Erddruckschilde, die im Englischen als *Earth Pressure Balance Shields* (EPBS) bezeichnet werden, setzen den bereits gelösten Boden in der Abbaukammer unter Druck, um die Ortsbrust zu stützen und ein unkontrolliertes Eindringen des Bodens in die Abbaukammer zu verhindern. Die Funktionsweise ist in Abbildung 3.2 dargestellt.

Der Boden wird mit Hilfe des Schneidrades gelöst und in die Abbaukammer befördert. Diese endet mit einer Druckwand. So kann der Stützdruck in der Abbaukammer über den Zufluss durch das Schneidrad (die Größe des Zuflusses hängt unter anderem von der Vortriebsgeschwindigkeit ab) sowie den Abfluss des Materials über den Schneckenförderer gesteuert werden. Sobald genug Raum da ist, können dann die Tübbinge eingebaut werden, die den

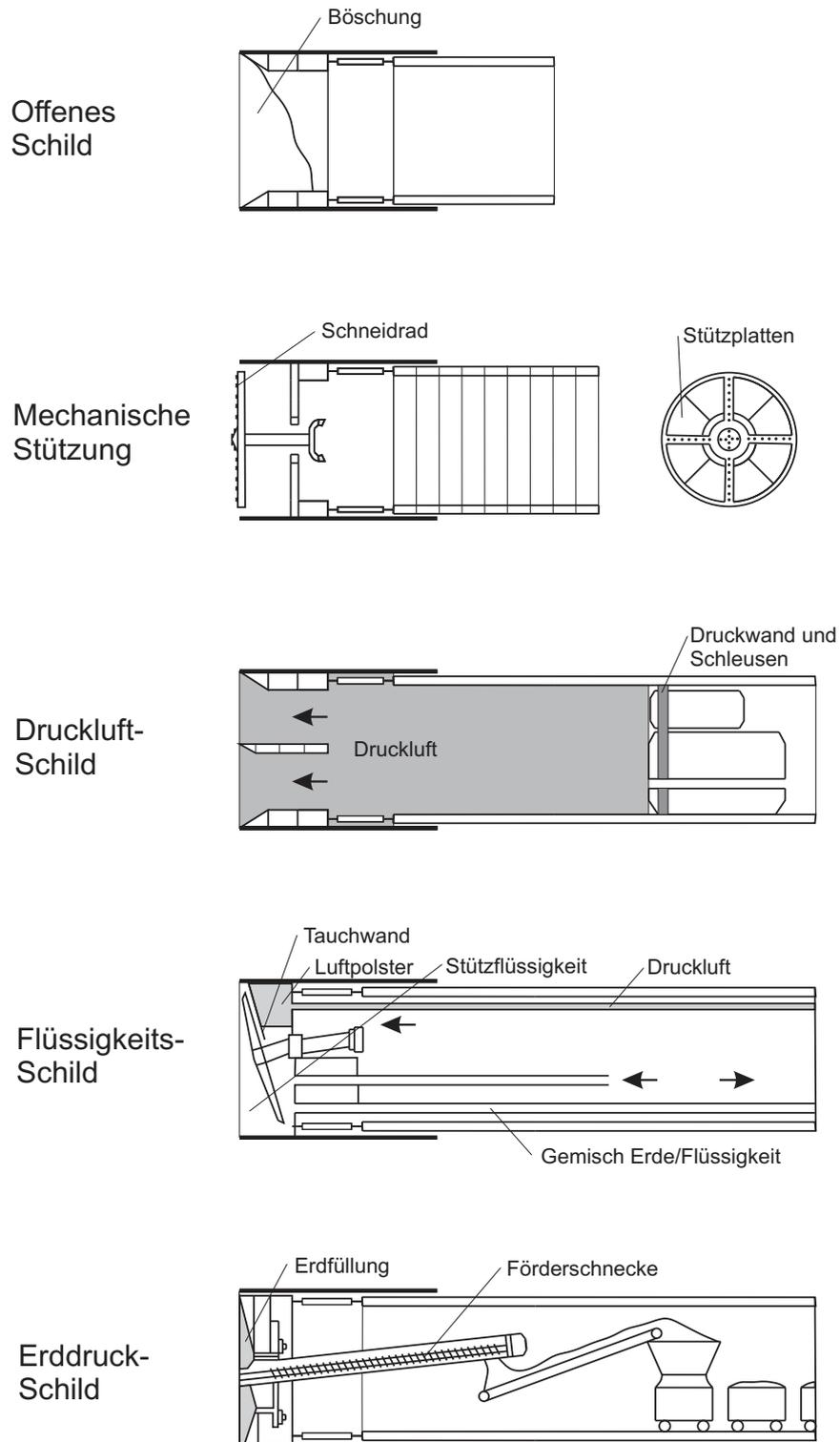


Abbildung 3.1: Möglichkeiten der Ortsbruststützung, [114]

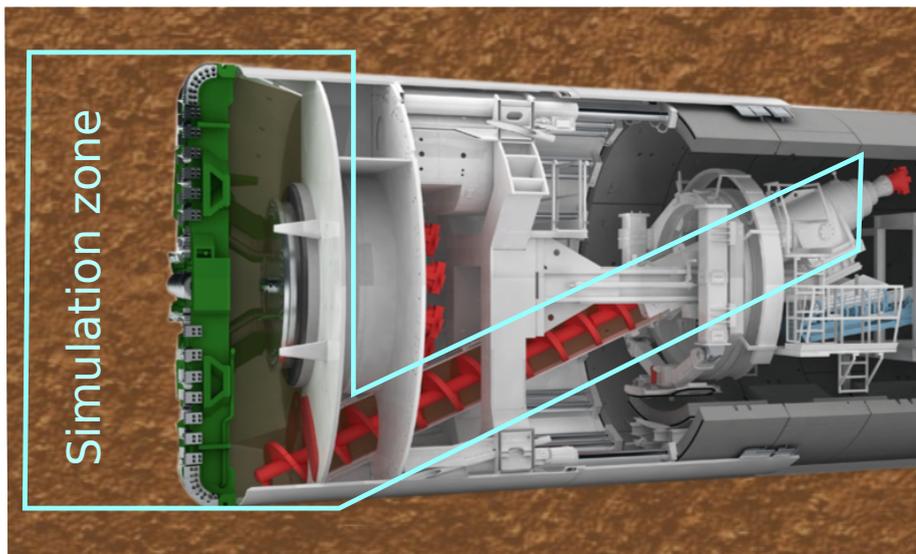


Abbildung 3.2: Funktionsweise eines Erddruckschildes

Tunnel stabilisieren. Sobald diese eingesetzt und, wenn nötig, abgedichtet sind, übernehmen sie die Stützwirkung, und das Schild wird an dieser Stelle überflüssig.

Das erste Erddruckschild wurde 1974 in Japan eingesetzt, wobei die grundlegende Technik bereits 1806 von Sir Marc Isambard Brunel erdacht, aber zu diesem Zeitpunkt nicht umgesetzt wurde, [59]. Zu Beginn ihrer Einsatzzeit konnten Erddruckschilde nur Tunnel in einer sehr genau eingegrenzten geologischen Umgebung auffahren. In gemischt- und feinkörnigen Böden mit einem Feinanteil von mindestens 30% kann der Vortrieb ohne weitere Maßnahmen erfolgen.

### Bodenkonditionierung bei EPB-Schilden

Durch die Entwicklung der Bodenkonditionierung konnte das Einsatzgebiet deutlich erweitert werden. Die Konditionierung mit Wasser, Schäumen, Polymeren und Feinstoffsuspensionen kann je nach Anforderungen der geologischen Gegebenheiten unterschiedliche Aufgaben erfüllen, hierzu zählen unter anderem

- die Beeinflussung der Materialeigenschaften des Stützmediums, um etwa das Fließverhalten und damit den Materialabtransport zu verbessern,
- die Homogenisierung des Materials, um so den Stützdruck besser auf die Ortsbrust übertragen zu können,
- die Reduzierung der Wasserdurchlässigkeit,
- die Reduktion der inneren Reibung des Stützmaterials, um so den Materialverschleiß der Maschinenkomponenten zu minimieren.

Um diese Ziele erreichen zu können, wurde eine große Bandbreite unterschiedlicher Konditionierungsmittel entwickelt, [26], [50], [94], [120]. Die Wahl einer geeigneten Kondi-

tionierung erfolgt bisher hauptsächlich auf Grundlage empirischer Daten, wobei viele Forschungseinrichtungen aktuell Untersuchungen zum Zusammenspiel zwischen Boden und Konditionierungsmittel durchführen, vgl. beispielsweise [97], [21], [125], [105]. Das Konditionierungsmittel wird üblicherweise durch Austrittsöffnungen im Schneidrad in den Boden in Ortsbrustnähe gepresst.

Das entstehende Gemisch aus Boden und Konditionierungsmittel ist für jeden Anwendungsfall einzigartig. Die entstehenden mechanischen Eigenschaften des Mischmaterials werden aktuell in verschiedenen Experimenten untersucht und klassifiziert [119], um daraus Empfehlungen für die Tunnelbaupraxis ableiten zu können.

### 3.1.2 Flüssigkeitsschilde

Unter der Bezeichnung *Flüssigkeitsschild* werden zwei Haupttypen von Schilden zusammengefasst: Zum einen das vor allem in Japan entwickelte *Slurry Shield* und das in Deutschland entwickelte *Hydroschild*. Das Slurry Shield diente als Basis für die Entwicklung der Erddruckschilde, die in Kapitel 3.1.1 vorgestellt wurden, während aus dem Hydroschild einige weniger bekannte Varianten wie das Mixschild, Thixschild oder das Hydrojetschild entstanden, auf die hier jedoch nicht im einzelnen eingegangen werden soll.

Die Ortsbruststützung beruht hierbei auf einer Stützflüssigkeit, die unter Druck in die Abbaukammer gepumpt wird. Je nach Bodenbeschaffenheit handelt es sich bei dieser Stützflüssigkeit um eine Suspension aus Wasser und Bentonit oder Ton und gegebenenfalls weiteren Zusatzstoffen. Da sie unter Druck steht, dringt sie in den anstehenden Boden ein und bildet im Bereich der Ortsbrust den sogenannten Filterkuchen. Dieser Filterkuchen, also die Mischung aus Boden und Suspension, ist quasi undurchlässig und bildet daher einen Schutz gegen den anstehenden Erd- und Wasserdruck.

Außerdem dient die Suspension als Fördermedium. Sie mischt sich in der Abbaukammer mit dem abgebauten Bodenmaterial, und dieses Gemisch wird dann an die Oberfläche gepumpt, wo es in einer Separieranlage wieder in seine Bestandteile getrennt wird. So kann die gereinigte Suspension erneut verwendet werden. Hier liegen auch die Hauptnachteile des Verfahrens. Die erforderliche Trennanlage braucht Platz, Energie und ist aus ökologischen Gesichtspunkten ungünstig, was vor allem auch für die Deponierung des untrennbaren Teils des Boden-Suspensions-Gemischs gilt.

Flüssigkeitsschilde können heute in allen Lockerböden benutzt werden, auch bei anstehendem Grundwasser. Sogar eine Anwendung in standfestem Gebirge kann unter Umständen Vorteile haben.

### 3.1.3 Druckluftschilde

Bereits im neunzehnten Jahrhundert entstand eine Technik, die erlaubte, das anstehende Grundwasser durch Druckluft aus dem entstehenden Tunnel herauszuhalten [60]. Hierbei hält die Druckluft zwar dem hydrostatischen Druck statt, für den Erddruck ist allerdings eine natürliche oder mechanische Stützung erforderlich. Problematisch an diesem Verfahren sind

die erhöhten Anforderungen an die Arbeitssicherheit. Die Belegschaft wird durch Schleusen in und aus dem unter Druck stehenden Bereich gebracht, was zum einen Zeit kostet, zum anderen aber auch deren Leistungsfähigkeit vermindert. Außerdem herrscht erhöhte Brandgefahr.

Aus den genannten Gründen und weil der mögliche Einsatzbereich der Druckluftschilde durch Vorgaben an die maximale Luftdurchlässigkeit des Bodens, sowie eine Mindestüberdeckung und eine maximal zugelassene Druckhöhe weiter eingeschränkt wird, wird das Verfahren eher selten zum Einsatz gebracht.

### 3.1.4 Kombinierte Schilde

Das kombinierte Schild erlaubt einen Umbau zwischen den zuvor vorgestellten, verschiedenen Arten der Ortsbruststützung. Ihm liegt die Idee zu Grunde, mit nur einer Maschine unterschiedlichste Geologien durchfahren zu können. Neben dem Umbau der Ortsbruststützung mit allen Zu- und Ableitungen, ist oft auch eine Modifikation der Abbauwerkzeuge, der Förderanlagen und weiterer Einrichtungen erforderlich. Hierbei sind folgende Kombinationen im Einsatz [93]:

- Eine Kombination aus Druckluftschild und Offenem Schild,
- eine Kombination aus Flüssigkeitsschild und Offenem Schild,
- eine Kombination aus Erddruckschild und Offenem Schild
- und eine Kombination aus Flüssigkeitsschild und Erddruckschild.

Teilweise wird der Begriff *Mixschild* synonym zu dem des kombinierten Schildes verwendet, teilweise wird darunter aber auch eine ganz bestimmte, aus dem Slurry-Shield weiterentwickelte, Technologie verstanden [58].

## 3.2 Abbauwerkzeuge

Das Werkzeug, mit dem der Boden aus dem natürlichen Lagerverband gelöst wird, wird als *Abbauwerkzeug* bezeichnet. Im Schildvortrieb werden diese Werkzeuge im Schneidrad angebracht, während beim Abbau von Festgestein meist ein Bohrkopf benutzt wird, an dem die Werkzeuge befestigt werden. Welche Werkzeuge mit welcher exakten Geometrie und Materialzusammensetzung an welcher Stelle des Schneidrades angeordnet werden, hängt von vielen Faktoren ab, und kann nicht allgemein beantwortet werden. Natürlich spielt die Geologie hier eine wesentliche Rolle, aber auch Kostengründe, erwartete Standzeiten, Vortriebslänge und Erfahrungen des Herstellers aus vergangenen Projekten fließen in die Entscheidung mit ein. Somit ist praktisch jedes Schneidrad ein Unikat.

Beispielhaft ist in Abbildung 3.3 das Schneidrad der Slurry-Shield TBM *Turborine* dargestellt, mit der Teilbereiche des Projektes *Wehrhahnlinie Düsseldorf* aufgefahen wurden.

Dieses spezielle Schneidrad war mit 27 Doppeldisken, 172 Schälmessern und 16 Räumern bestückt.



Abbildung 3.3: Das Schneidrad der Mixschild TBM „Turborine“ der Wehrhahnlinie Düsseldorf, abgedruckt mit Genehmigung der Herrenknecht AG

Üblicherweise wird ein Schneidrad mit Schälmessern und/oder Schneidrollen besetzt. Beide Werkzeugtypen sind exemplarisch in Abbildung 3.4 dargestellt, wobei von beiden Grundformen eine Vielzahl unterschiedlicher Varianten umgesetzt wird.

Während bei bindigen Böden die Herausforderung vor allem darin besteht, ein Verkleben der Werkzeuge zu verhindern, geht es bei Felsgestein, oder Lockergestein mit einem gewissen Anteil an Hartgestein, vor allem darum, den Verschleiß der Werkzeuge gering zu halten. Hierfür ist neben der Anordnung der Werkzeuge nebeneinander, auch die Geometrie und die Materialien der einzelnen Werkzeuge ausschlaggebend. Auch in Lockergestein kommt es, wenn gewisse Wege zurückgelegt werden, zu Verschleißeffekten. In Kapitel 3.3 wird genauer auf das Thema Verschleiß eingegangen.

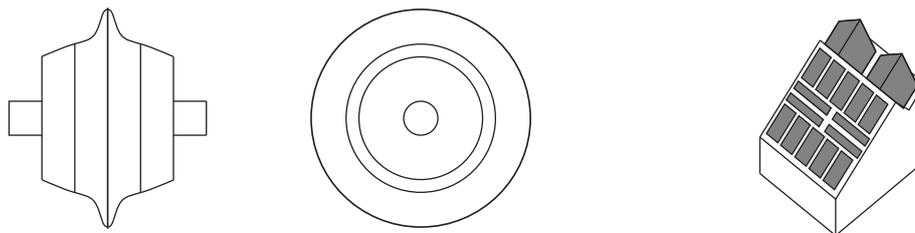


Abbildung 3.4: Schematische Darstellung von Schneidrolle (links) und Schälmesser (rechts)

### 3.2.1 Messer, Zähne

Messer und Zähne stehen häufig vor dem Werkzeugträger und dienen der ersten, lokalen Auflockerung des fest gelagerten Bodens [93]. Sie *schneiden* den Boden, der entstehende Span gleitet dann über die Messervorderseite ab. Üblicherweise werden die Schälmesser aus einem Trägerstahl gefertigt und mit Hartmetalleinsätzen an den kritischen Stellen verstärkt.

Nach [73] sind Schälmesser normalerweise folgendermaßen aufgebaut: Sie bestehen aus einem Kopf und einem Schaft, die in einem Stück aus einem Werkzeugstahl mit einer Härte von etwa 44-48 HRC gefertigt werden. Anschließend werden Hartmetalleinsätze und -aufträge auf Schneide, sowie Front- und Rückenfläche aufgebracht, vergleiche Abbildung 3.5.

Unter dem Begriff Hartmetall werden hier Werkstoffe verstanden, die zu 70-85% aus Wolframcarbid (WC)-Partikeln bestehen, die in eine Materialmatrix etwa aus Nickel (N) oder Chrom (Cr) -haltigen Werkstoffen eingebettet werden. Diese Einsätze erhalten ihre endgültige Form bereits während der Herstellung, da sie aufgrund ihrer extremen Härte weder nachbearbeitet noch geschweißt werden können. Die hier angegebenen Werte und Materialien sind jedoch nur als Beispiele zu verstehen, da die genaue Zusammensetzung natürlich je nach Hersteller variiert und stark vom Einsatzgebiet abhängt.

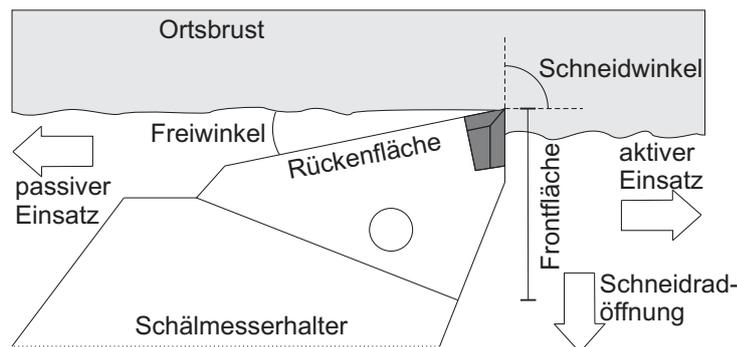


Abbildung 3.5: Querschnitt durch ein Schälmesser, inklusive Einordnung der Einsatzrichtung [73]

Was die Geometrie angeht, so sind nach [18] vor allem die Breite des Schälmessers sowie der Schneidwinkel  $\alpha_c$  und der Freiwinkel  $\beta_c$  wesentlich. Die Breite des Schälmessers beträgt üblicherweise 100 – 250mm, während die Winkel je nach Bodenart sehr stark variieren können. Ihr Gewicht liegt meist zwischen 5 und 35kg. Einige unterschiedliche Geometrien eines Herstellers sind in Abbildung 3.6 dargestellt. Die Anordnung der Schälmesser auf dem Schneidrad hängt wiederum vom genauen Einsatzgebiet ab. Die Schälmesser werden üblicherweise aber über die gesamte Ortsbrust verteilt angebracht.

### 3.2.2 Schneidrollen, Stichel und Räumer

Neben den zuvor erwähnten Schneidmessern oder -meißeln kommen bei den hier untersuchten Vortriebstypen auch Schneidrollen, Stichel und Räumer zum Einsatz. Da diese für die

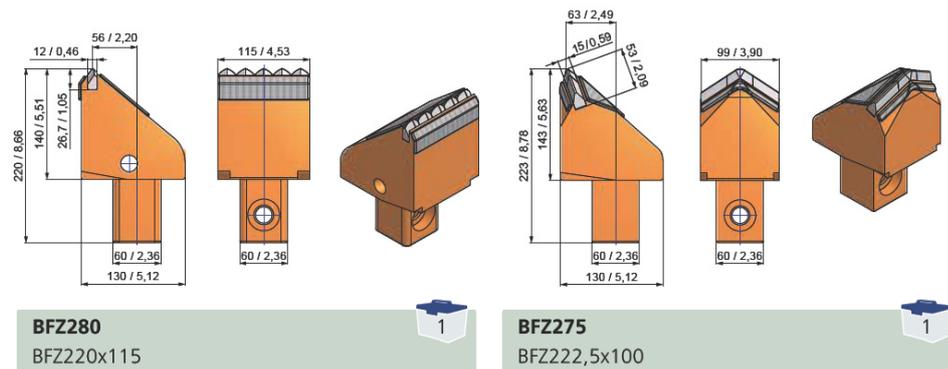


Abbildung 3.6: Unterschiedliche Schälmesser-Geometrien, abgedruckt mit Genehmigung der BETEK GmbH

weiteren Untersuchungen allerdings keine Rolle spielen, sollen sie nur der Vollständigkeit halber kurz beschrieben werden.

### Schneidrollen

Schneidrollen oder Disken wurden ursprünglich für Hartgestein entwickelt, da bei abrasivem Gestein Meißel schnell abstumpfen [19]. Die Schneide rollt mit großen Anpressdruck über das Gestein ab und soll es so in größere Stücke brechen anstatt es zu zermahlen. Neben der in Abbildung 3.4 dargestellten einzelnen Schneidrolle, oder *Monodisk*, sind auch verschiedene andere Ausführungen gängig, beispielsweise die Rollen, bei denen mehrere Schneidrollen parallel und nur durch Abstandshalter getrennt angeordnet werden.

Für größere Vortriebsmaschinen, ab einem Ausbruchsdurchmesser von etwa  $6m$  wird meist ein Außendurchmesser der Schneidrolle von 17 Zoll (=  $432mm$ ) verbaut [73]. Es gibt allerdings auch noch größere Varianten, die einen Außendurchmesser von 18 oder 19 Zoll besitzen. Die Schneidringe werden aus verschleißfesten, hochlegierten Werkzeugstählen hergestellt, die dann durch Wärmebehandlung auf eine durchgehende Härte von 54-58 HRC gebracht werden. Es soll hier einerseits eine möglichst große Härte erreicht werden, auf der anderen Seite muss das Material aber auch eine gewisse Zähigkeit behalten, um die Schneidkräfte aufnehmen zu können [73].

### Stichel

Stichel werden senkrecht zur Ortsbrust eingesetzt und haben meist eine runde oder rechteckige Form. Bei nicht-bindigem Lockergestein wirken sie gefügezerstörend, während bindige Böden durch sie geknetet werden. Auch Stichel werden häufig mit Hartmetalleinsätzen versehen [93]. Der wesentliche Unterschied zwischen Stichel und Schälmessern ist, dass Stichel richtungsunabhängig sind, und daher für beide Drehrichtungen eine Schneide besitzen. Die Materialverwendung ist entsprechend ähnlich wie in Kapitel 3.2.1 für Schälmesser beschrieben [73]

## Räumer

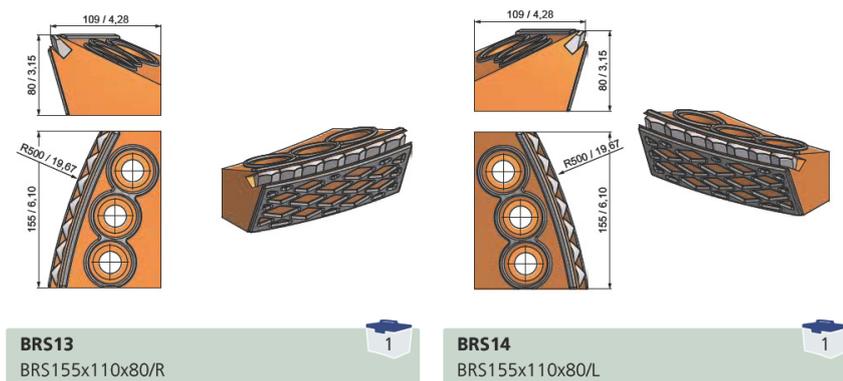


Abbildung 3.7: Unterschiedliche Räumer-Geometrien, abgedruckt mit Genehmigung der BETEK GmbH

Räumer werden im Außenradius des Schneidrades meist in regelmäßigen Abständen angeordnet. Sie dienen dazu, den Übergang zwischen dem Ausbruchsprofil und der Ortsbrust abzurunden. Im Lockergestein (anders als im Festgestein) nehmen sie außerdem aktiv am Bodenabbau teil und werden deshalb aus Gründen des Verschleißschutzes aus vergleichbaren Materialien wie die Schälmesser hergestellt [73]. Beispielhafte Geometrien werden in Abbildung 3.7 dargestellt.

### 3.2.3 Härte nach Rockwell

Die Einheit *Rockwell*, *HR* ist eine Maßeinheit, die die Härte von Materialien beschreibt. Als Zusatz zu der Einheitsbezeichnung *HR* erfolgt ein weiterer Buchstabe, der beschreibt, anhand von welcher Skala der entsprechende Versuch durchgeführt wurde, eine detaillierte Beschreibung von Versuchsaufbau, -durchführung und -auswertung findet sich in [3]. Grundlage der Versuchs ist die Eindringtiefe eines Prüfkörpers in den zu untersuchenden Werkstoff. Bei den größten Härten, die mit den Skalen A, B und C untersucht werden, handelt es sich bei dem Prüfkörper um einen Diamantkegel mit einem Spitzenwinkel von  $120^\circ$ , der mit einer definierten Kraft auf den Prüfkörper gedrückt wird.

## 3.3 Verschleiß

Die Gesellschaft für Tribologie definiert in einem Arbeitsblatt aus dem Jahr 2002 Verschleiß als den „fortschreitenden Materialverlust aus der Oberfläche eines festen Körpers, hervorgerufen durch mechanische Ursachen, d. h. Kontakt und Relativbewegung eines festen, flüssigen oder gasförmigen Gegenkörpers“ [8]. Alle Einflüsse von außen werden hierbei als tribologische Beanspruchung bezeichnet.

Verschleiß kann auf unterschiedliche Arten kategorisiert werden. Einerseits kann nach Art des Verschleißmechanismus, also je nach tribologischer Beanspruchung, unterteilt werden. Hieraus ergeben sich die Adhäsion, Abrasion, Oberflächenzerrüttung (Ermüdung) und die

tribochemische Reaktion (Tribooxidation). Natürlich treten diese Verschleißmechanismen auch oft in Kombination miteinander auf. Bei Verschleiß von Metall durch Beanspruchung mit einem vergleichsweise weichen Gegenüber, wie etwa Sand oder Ton, ist die Abrasion die vorherrschende Verschleißform [108], [100], [44]. Laut [130] führt Abrasion zu „Ritzungen und Mikroerspannungen des Grundkörpers durch harte Rauheitshügel des Gegenkörpers oder durch harte Partikel im Zwischenstoff“.

Außerdem kann Verschleiß entsprechend seiner Erscheinungsform kategorisiert werden, hier gibt es nach [14] im Wesentlichen Rissbildung, Abtragung, Schälung, Grübchen, Kratzer und Korrosion. Zu welcher Erscheinungsform es im einzelnen kommt, hängt von dem speziellen betrachteten Tribosystem ab. Die Hapterscheinungsformen werden in Abbildung 3.8 dargestellt.

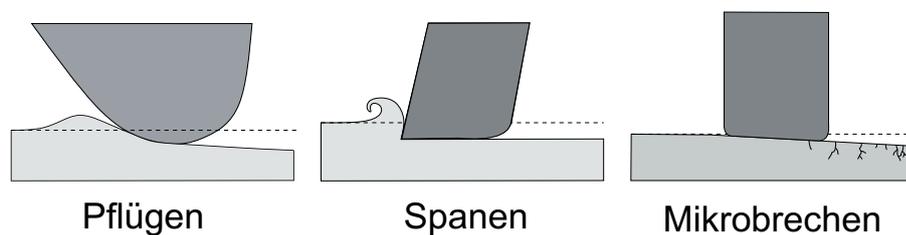


Abbildung 3.8: Verschleißtechniken

Die Bestimmung von Verschleiß ist nicht trivial und kann auf unterschiedliche Arten erfolgen. Zunächst gibt es *direkte Messgrößen* wie das Verschleißvolumen oder den Verschleißwiderstand. Hieraus lassen sich *bezogene Messgrößen* ableiten, wie die Verschleißgeschwindigkeit, das Verschleiß-Weg-Verhältnis und das Verschleiß-Durchsatzverhältnis. In der technischen Praxis werden außerdem noch *indirekte Messgrößen* wie die verschleißbedingte Gebrauchsdauer, die Gesamtgebrauchsdauer und die verschleißbedingte Durchsatzmenge benutzt.

Auf die verschiedenen Verschleißmechanismen, insbesondere aber auf die Abrasion, wird in Kapitel 3.3.1 genauer eingegangen. Anschließend wird in Kapitel 3.3.2 der geologische Begriff der *Abrasivität* erläutert, bevor schließlich in Kapitel 3.3.3 einige Besonderheiten des Verschleißes aufgezeigt werden, die im Schildvortrieb entstehen.

### 3.3.1 Verschleißmechanismen

In Abbildung 3.9 wird der Mechanismus für die Gleitreibung zwischen zwei Festkörpern schematisch dargestellt. Die Oberflächenrauheiten von Körper (1) werden dadurch verändert, dass der Gegenkörper (2) mit der Geschwindigkeit  $v$  an ihm vorbeigeführt wird. Beeinflusst wird das tribologische System außerdem durch das Zwischenmedium (3) sowie das Umgebungsmedium (4). Die einzelnen Verschleißmechanismen sollen hier kurz vorgestellt werden, detaillierte Erläuterungen finden sich beispielsweise in [130] oder [116].

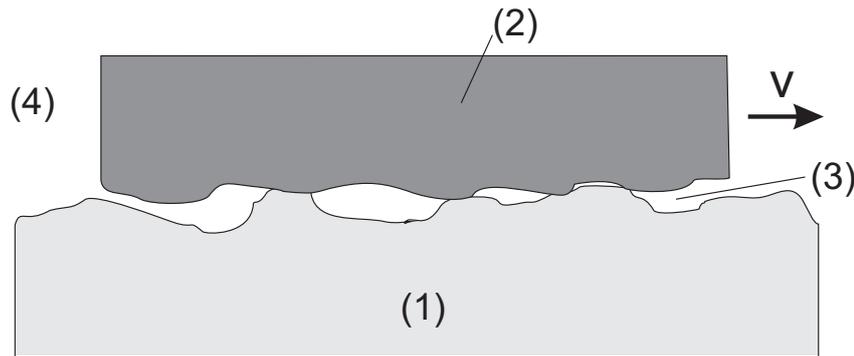


Abbildung 3.9: Verschleißmechanismus

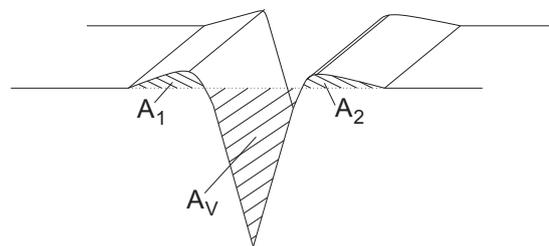


Abbildung 3.10: Flächenanteile bei den Teilprozessen Mikrozerspanen und -verformen [134]

### Abrasion

Abrasion tritt auf, wenn mikroskopische Unebenheiten eines Festkörpers in einen anderen eindringen oder über ihn gleiten. Was auf mikroskopischer Ebene passiert, hängt hierbei von der Art des Werkstoffes ab: Bei duktilen Werkstoffes kommt es zu Verformungs- und Zerspanungsprozessen, die durch Ermüdung zu Versagen führen können. Bei spröden Werkstoffes führen diese Unebenheiten dagegen vor allem zu Mikrobrechen. Je nach Art des Werkstoffes stehen also völlig unterschiedliche Vorgänge auf mikroskopischer Ebene im Vordergrund.

Für duktile Werkstoffes lassen sich verschiedene Gleichungen aufstellen, mit denen das Verschleißvolumen  $W$  ermittelt werden kann [116]. So wird in [107] eine Abhängigkeit von der Normalkraft  $F_N$  und der Härte  $H$  des Werkstoffes formuliert:

$$W = k_{ab} \frac{F_N \cdot s}{H} \quad (3.1)$$

Hierbei ist  $k_{ab}$  ein Faktor, der abhängig von der Geometrie des Abrasivkorns ist, und  $s$  bezeichnet den Gleitweg. Ein Modell, das sowohl Zerspanung als auch Verformung berücksichtigt [134], ergibt sich zu

$$W = f_{ab} \cdot A_V \cdot s \quad , \quad (3.2)$$

wobei  $A_V$  für die Zerspanungsfläche bezeichnet und  $f_{ab} = \frac{A_V - (A_1 + A_2)}{A_V}$  den Anteil von Zerspanen gegenüber Verformen angibt, wie in Abbildung 3.10 dargestellt. Beide Formulierungen 3.1 und 3.2 hängen vom Gleitweg  $s$  ab. Auch ist ihnen Gemein, dass sie einen Faktor,

nämlich  $k_{ab}$  und  $f_{ab}$ , beinhalten, der sich zwar unter einem Mikroskop näherungsweise für einzelne Körner bestimmen lässt, für Anwendungen in der Realität aber wenig praktikabel ist.

### Adhäsion

Bei der Adhäsion kommt es, natürlich auf mikroskopischer Ebene, zu einer Haftung der unebenen Oberflächen der beiden Verschleißkörper aneinander. Bildet sich so eine starke Haftbrücke zwischen beiden Körpern aus, kann es bei einem weiteren aneinander vorbeigleiten der Körper dazu kommen, dass die Trennung nicht entlang der Oberflächen sondern durch den Verschleißkörper hindurch erfolgt, und es somit zu Verschleiß kommt.

Eine grundlegende und stark generalisierte Formel zur Berechnung von adhäsivem Verschleiß findet sich in [9] und lautet:

$$W = K_1 \cdot P \cdot s \quad (3.3)$$

Hierbei bezeichnet  $W$  wie zuvor das Verschleißvolumen,  $P$  die Kontaktkraft,  $s$  den Verschleißweg und  $K_1$  einen Verschleißkoeffizienten, der vom Material und insbesondere der Oberflächenbeschaffenheit abhängt.

### Oberflächenzerrüttung

Bei der Oberflächenzerrüttung brechen keilförmige Partikel aus dem Werkstoff heraus. Dies ist das Ergebnis einer zyklischen Belastung, durch die Risse entstehen und sich dann immer weiter ausbreiten. Solche Risse können durch lokale Spannungsspitzen entstehen, auch wenn sich die makroskopische Belastung innerhalb der elastischen Grenzen des Werkstoffes befindet.

### Tribochemische Reaktion und Ablation

Sowohl bei der tribochemischen Reaktion als auch bei der Ablation handelt es sich um Vorgänge, die durch den tribologischen Prozess begünstigt werden. Bei der tribochemischen Reaktion finden chemische Prozesse statt die durch die mechanische und thermische Beanspruchung aktiviert werden. Bei der Ablation handelt es sich vor allem um das Schmelzen des Materials infolge von hoher thermischer Beanspruchung. Beide Effekte werden in dieser Arbeit nicht betrachtet, und daher auch nicht genauer erläutert.

#### 3.3.2 Abrasivität

Während mit *Abrasion* wie oben erläutert ein bestimmter Verschleißmechanismus bezeichnet wird, werden unter *Abrasivität* nach [106] diejenigen geologischen Eigenschaften zusammengefasst, welche maßgeblich für den Materialabtrag am Werkzeug verantwortlich

sind, und daher für die Anwendung im Tunnelbau eine große Rolle spielen. Jedoch wird der Verschleiß natürlich auch von anderen, von der Geologie vollkommen unabhängigen, Größen beeinflusst, die Abrasivität kann nur als eine von mehreren maßgeblichen Kenngrößen für Verschleiß verstanden werden. Die beiden anderen Haupteinflussfaktoren neben dem Boden sind die Maschinenteknik und -ausrüstung sowie das Bauprozessmanagement [122]. Die Abrasivität eines Bodens wird nach [70] durch folgende Faktoren gesteuert:

- Äquivalenter Quarzgehalt - also der Anteil verschleißscharfer Materialien [121]
- Lagerungsdichte
- Korngröße, bzw. Komponentengröße
- Kornrundung, Kantigkeit

Die Abrasivität eines Lockermaterials kann mit Hilfe des LCPC-Versuchs bestimmt werden [123]. Hierbei handelt es sich um einen Laborversuch, bei dem ein Abrasivitäts-Koeffizient bestimmt wird. Die Möglichkeit eines unmittelbaren Rückschlusses auf Bohrwerkzeugverschleißraten ist jedoch anhand des Koeffizienten bisher nicht bekannt [70]. Für Hartgestein anerkannte Laborversuche zur Abrasivitätsbestimmung können nicht auf Lockergestein angewendet werden, da sich sowohl das Material also auch die Abbauprozesse zu sehr unterscheiden.

### 3.3.3 Werkzeugverschleiß im Schildvortrieb

Zusätzlich zu den oben genannten allgemeinen Einflussfaktoren auf Verschleiß, gibt es im Schildvortrieb einige Besonderheiten, die sich unter Umständen auch stark im Verschleiß widerspiegeln. Im Schildvortrieb sind die Abbauwerkzeuge nicht nur für das Ablösen des Materials, sondern auch für seinen Transport in die Abbaukammer zuständig, wie in Kapitel 3.1 beschrieben. Neben der Abrasivität beeinflussen also auch die Lösbarkeit, das Transportverhalten und die Konsistenz des Lockergesteins sowie der Umgebungsdruck das Verschleißverhalten der Werkzeuge [70]. Diese Eigenschaften sind zum einen nur äußerst selten über eine längere Strecke konstant und werden außerdem durch den Abbau häufig verändert. So wird das Lockergestein im Bereich der Ortsbrust durch den Eintrag effektiver Spannungen, die sich aus dem Abbauprozess ergeben, verdichtet (Kompaktierung), was eine Beeinflussung des Baugrunds darstellt, die häufig unterschätzt wird [70], [93].

Mindestens ebenso großen Einfluss auf den Werkzeugverschleiß haben die direkten Folgen des Prozesses. So erhöhen eine hohe Penetration und Drehzahl des Schneidrads den Primärverschleiß. Durch eine aktive Erd- oder Flüssigkeitsstützung wird die Dichte und so auch die Abrasivität des Bodens verändert. Die Lösbarkeit des Materials kann verschlechtert, Verklebungen begünstigt werden [70]. Da im Schildvortrieb meist verschiedene Abbauwerkzeuge für unterschiedliche Aufgaben parallel eingesetzt werden, muss auch die Art des Werkzeugs in der Verschleißprognose berücksichtigt werden.

## 4 Discrete Element Method

Bei der *Methode der diskreten Elemente*, die auf englisch *Discrete* oder *Distinct Element Method* genannt und daher *DEM* abgekürzt wird, handelt es sich um ein numerisches Berechnungsverfahren zur Simulation von granularen Materialien. Eine Übersicht und eine Einführung in diese und ähnliche Methoden findet sich beispielsweise in [22] oder [67], wo auch auf Details der Implementierung einer entsprechenden Software eingegangen wird, sowie in [31]. [42] gibt auch einen Überblick über die Methodik, allerdings mit besonderem Fokus auf die Anwendung im Bereich Boden- und Felsmechanik sowie in der Betontechnologie. Das hier betrachtete Verfahren, mit dem die Bewegung einer großen Zahl von Teilchen berechnet werden kann, wurde zunächst 1971 von P.A. Cundall auf einer Konferenz vorgestellt [37] und 1979 von Cundall und Strack veröffentlicht [39].

In der DEM wird die Bewegung sowie die Interaktion einzelner, meist kugelförmiger Partikel berechnet. Zunächst wurde die Methode auf die Molekulardynamik (*MD*) angewandt. In der Molekulardynamik werden die Bewegungen von Atomen und Molekülen, die aus den zwischen ihnen wirkenden Wechselwirkungen und aus äußeren Lasten entstehen, beschrieben. Im Unterschied zur DEM, so wie sie heute meist interpretiert wird, finden hier also die in dieser Größenordnung vorherrschenden Coulomb- und Van-der-Waals -Kräfte sowie die Pauli Repulsion Eingang in die Berechnung. Weiterhin werden in der Molekulardynamik die Partikelrotationen nicht berücksichtigt und die Partikelanordnung der Ausgangslage bleibt grundsätzlich bestehen.

Neben der Anwendung in der Molekulardynamik kann die DEM für Problemstellungen beliebiger Skalen und sowohl für granulare Materialien als auch für Feststoffe benutzt werden. Einige der vielfältigen Möglichkeiten und Anwendungsbereiche werden in Kapitel 4.1 angesprochen. Anschließend wird die prinzipielle numerische Vorgehensweise der Methode in Kapitel 4.2 erläutert. Kapitel 4.3 gibt einen Überblick über die unterschiedlichen Mechanismen, die im Kontakt zwischen zwei Partikeln wirken können, bevor Kapitel 4.4 schließlich verschiedene Ansätze zeigt, mit denen die entsprechenden Kontaktparameter ermittelt werden können. Da neben den Kontaktparametern auch die Kompaktheit der Partikelmenge großen Einfluss auf die Simulationen hat, werden in Kapitel 4.5 gängige Kompaktierungsalgorithmen vorgestellt.

### 4.1 Anwendungsgebiete

Die DEM wird bereits für ein breites Themenspektrum genutzt und ihre Anwendbarkeit wird für weitere Felder geprüft. Es ist offensichtlich, dass sich die DEM für Simulationen von Granulaten, ob statisch oder dynamisch, anbietet. Sie sollte aber darüber hinaus auch für Feststoffe in Betracht gezogen werden, wenn es zu Schädigungen bis hin zum Ausbruch einzelner Teile kommt, zu großen Deformationen oder wenn verschiedene Körper miteinander in Kontakt treten.

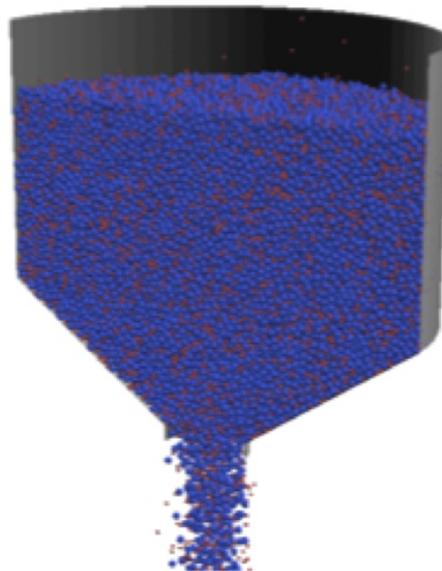


Abbildung 4.1: Entladung eines mit Partikeln gefüllten Trichters [69], abgedruckt mit Genehmigung von Elsevier

Da die Partikel an ihren Berührungspunkten zu einem aus beliebig vielen Einzelpartikeln bestehenden Festkörper zusammengefügt werden können, kann etwa die Schädigung eines Festkörpers oder die Wechselwirkung verschiedener Festkörper untereinander untersucht werden. Im folgenden soll ein Einblick in die verschiedenen Themengebiete gegeben werden, und exemplarisch einzelne Untersuchungen werden vorgestellt. Zu allen Themengebieten und zu unzähligen darüber hinaus existieren weitere Studien, die hier genannten sollen lediglich beispielhaft für den jeweiligen Bereich stehen.

#### 4.1.1 Fächerübergreifende Anwendung der DEM

Wie bereits erwähnt, wurde die DEM abgewandelt, um die Interaktion von Molekülen und Atomen untersuchen zu können. Das Anwendungsgebiet ist auch hier sehr groß und umfasst beispielsweise die Untersuchung des Verhaltens metallischer Atomgitter bei einer Zugprobe [72] oder die Wärmeleitfähigkeit von Silikon-Nanodrähten [126]. Am anderen Ende der Skala werden Partikel-Methoden auch benutzt, um die Entstehung ganzer Galaxien besser verstehen zu können [4]

Ein weiteres großes Anwendungsgebiet sind Schüttgüter, insbesondere deren Lagerung, Be- und Entfüll- sowie Mischungsvorgänge. So wurden die Granulatbewegungen in einem Behälter und die Abhängigkeit der Entladegeschwindigkeit und der Spannung in den Seitenwänden von den Partikelparametern in [82] und [69] beleuchtet, wobei dies nur eine von vielen Studien mit einer ähnlichen Zielsetzung ist, vergleiche Abbildung 4.1. In [34] liegt der Fokus der Untersuchung auf den Mischungsvorgängen innerhalb des Granulats.

Wie bereits erwähnt, kann die DEM auch für Feststoffe angewendet werden: Während sich [57] zunächst mit der Identifikation und Validierung der Kontaktparameter befasst, wird in [110] die lokale Schädigung von bewehrten Betonen unter Belastung untersucht, eine schematische Darstellung wird in Abbildung 4.2 gezeigt. Die Rissausbreitung in Aluminium wurde in [117] ebenfalls mit Hilfe von DEM-Simulationen beleuchtet. Ein Überblick

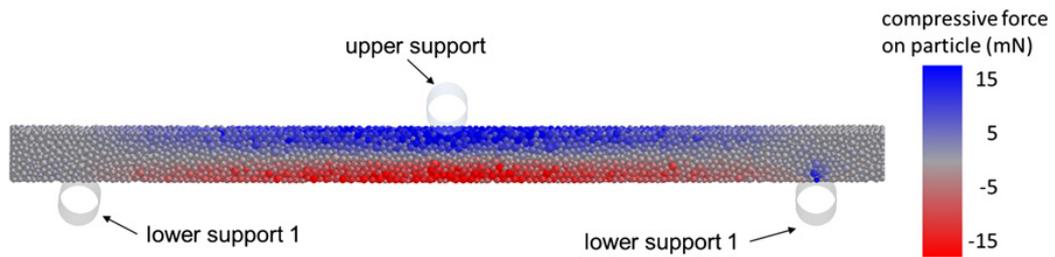


Abbildung 4.2: DEM-Simulation eines 3-Punkt Biegeversuchs [129], abgedruckt mit Genehmigung von Elsevier

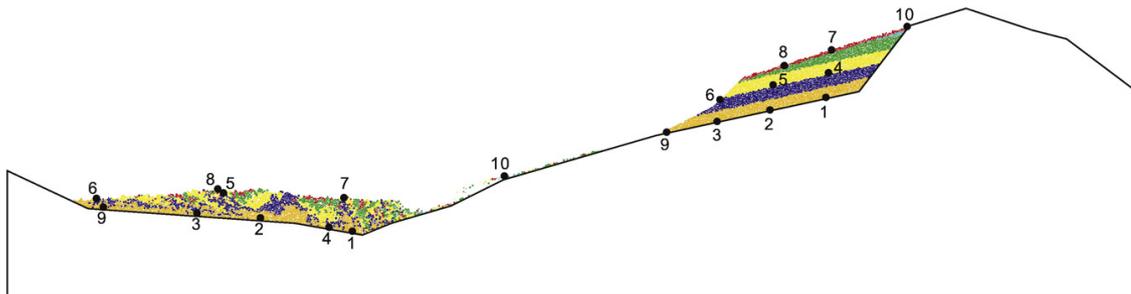


Abbildung 4.3: DEM-Simulation eines Erdrutsches [32], abgedruckt mit Genehmigung von Elsevier

über die Anwendbarkeit der Methode für den Maschinenbau findet sich in [48], auch für industrielle Anwendungen auf der Makroskala ist sie durchaus geeignet [33].

#### 4.1.2 DEM-Simulationen von Böden

Von besonderer Bedeutung für diese Arbeit ist jedoch die Anwendung der DEM auf Problemstellungen im Bereich von Bodenmechanik und Grundbau. Ein Überblick über einige Anwendungen in diesem Bereich wird in [42] gegeben. Auch in diesem Bereich kann die Methode wieder auf der Makro-Ebene angewendet werden, wie zum Beispiel zur allgemeinen Simulation von Erdrutschen [32], wie in Abbildung 4.3 dargestellt, oder auch zum besseren Verständnis ganz bestimmter Ereignisse, wie etwa einer großen Erdbewegung infolge eines Erdbebens in Taiwan [118], [131].

Auf einer mittleren Größenskala gibt es eine Vielzahl von Untersuchungen, die sich mit Erdbewegung beschäftigen. So werden in [35] und [102] Be- und Entladevorgänge von Baggerschaufeln mit der DEM betrachtet. Den Stand der Technik zur DEM-Simulation von unterirdischen Ausbrucharbeiten gibt [79] wieder. Auch im Bereich der Agrarforschung wird häufig mit der DEM gearbeitet, etwa um die Interaktion zwischen einem Pflug und dem Boden zu beleuchten [112]. Mit dieser Thematik, aber vor allem auch mit der Identifikation der erforderlichen Kontaktparameter, beschäftigt sich auch [10].

Außerdem gibt es mehrere Arbeiten, die sich auch oder ausschließlich mit Labor- oder In-Situ-Testverfahren von Böden und den entsprechenden DEM-Simulationen befassen. Mit der Simulation eines dränierten Triaxialversuchs beschäftigt sich etwa [17], während sich

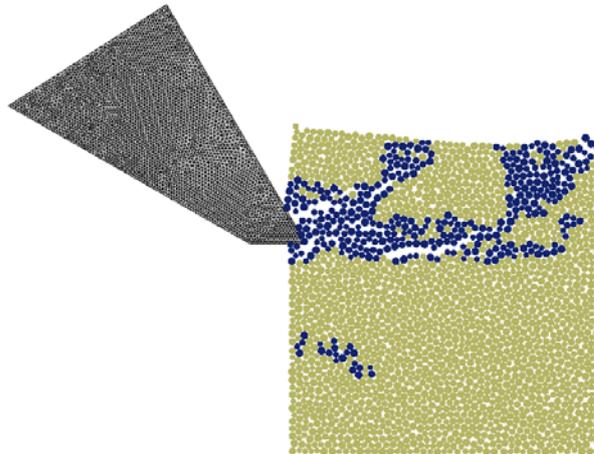


Abbildung 4.4: Aufbrechen eines Felsblocks [103], abgedruckt mit Genehmigung von Elsevier

[64] auf ein spezielles Material, nämlich Gleisschotter, konzentriert. Andere Untersuchungen legen den Fokus dagegen eher auf die Umsetzung des Tests mit der DEM. So wird in [36] zwar nur ein Viertel des Testzylinders betrachtet, dafür werden aber an den entsprechenden Stellen periodische Randbedingungen eingeführt. Häufig werden auch Scherverversuche simuliert. Während in [87] das Brechen der einzelnen Partikel unter Scherbelastung betrachtet wird, untersucht [66] die Einflüsse bestimmter Parameter auf die Entstehung von Scherbändern innerhalb eines Probenkörpers.

Auch zu den für diese Arbeit besonders relevanten Schneid- und Ablösevorgängen gibt es bereits eine Vielzahl von DEM-Simulationen. Die Schneidvorgänge beim Ablösen von Fels werden in [109] und [63], wobei in beiden Fällen das Aufbrechen des Felsgesteins im Vordergrund steht, wie auch in Abbildung 4.4 dargestellt wird. Für Lockergestein gibt es vor allem Untersuchungen, die an der Erdoberfläche stattfinden, also zum Beispiel die Interaktion zwischen einem Schneidwerkzeug und dem (Acker-)Boden untersuchen [101], [113].

## 4.2 Der Berechnungsalgorithmus / Prinzip der DEM

Die in der DEM verwendeten Teilchen werden als „Partikel“ bezeichnet, wobei hiermit ein Körper gemeint ist, der einen finiten Raum einnimmt. Die Partikel bewegen sich unabhängig voneinander und interagieren nur an ihren Kontaktstellen. Der Zusammenhang zwischen der Bewegung der Partikel und der auf sie einwirkenden Kräfte wird durch Newton's Bewegungsgesetze

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{t}_i \quad I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{M}_i \quad (4.1)$$

gegeben. In Gleichung 4.1 steht  $m_i$  für die Masse des Partikels  $i$ ,  $\ddot{\mathbf{x}}_i$  beschreibt seine Beschleunigung, und daraus kann die Kraft  $\mathbf{t}_i$  ermittelt werden. Analog für die Rotationsbewegung ist  $I_i$  das Massenträgheitsmoment von Partikel  $i$ ,  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$  seine Winkelbeschleunigung und  $\mathbf{M}_i$  sein Drehmoment.

Anhand der bekannten Bewegungsgesetze werden für sämtliche Partikel die innerhalb eines Zeitschrittes  $\Delta t$  erreichten neuen Positionen berechnet. Hieraus folgen neue Kontaktpunkte.

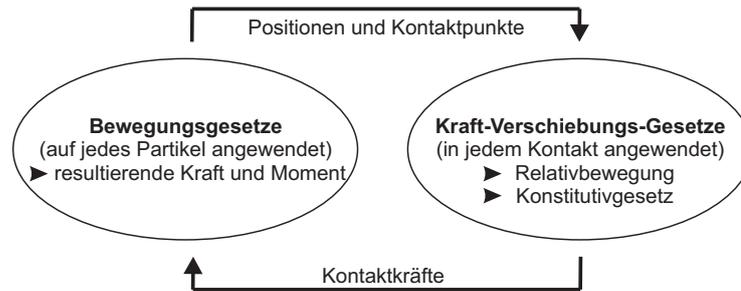


Abbildung 4.5: Schematische Darstellung des Berechnungszyklus

Mit diesen neuen Positionen, der bekannten Beschleunigung eines jeden Partikels sowie seinen Kontakten, können nun Kraft und Drehmoment berechnet werden, die jedes Partikel auf seine Nachbarn aufbringt. In welchem Maß diese Kräfte übertragen werden, hängt von dem gewählten Kontaktgesetz oder *Kraft-Verschiebungs-Gesetz*, vergleiche Kapitel 4.3, und den gewählten *Kontaktparametern*, vergleiche Kapitel 4.3.1, ab. Der Berechnungszyklus wird in Abbildung 4.5 visualisiert.

Komplexeres Materialverhalten kann modelliert werden, indem die Partikel durch *Bonds* miteinander verbunden werden. Diese können Zugkräfte zwischen den Partikeln aufnehmen. Sobald die vorgegebene maximale Kraft in den Bonds überschritten wird, bricht die Verbindung und die Partikel bewegen sich wieder unabhängig voneinander. In dem hier verwendeten Code werden folgende Annahmen getroffen [65]:

- Die Partikel werden als starre Körper betrachtet.
- Kontaktflächen werden infinitesimal klein angenommen (Punktkontakt).
- Für die Kontaktgesetze wird der „soft-contact approach“ benutzt, die starren Partikel überlappen sich also in den Kontaktpunkten.
- Um Zugkräfte zwischen den Partikeln aufnehmen zu können, können in den Kontaktpunkten Bonds eingefügt werden.
- Alle Partikel sind kreis-, bzw. kugelförmig.

Neben den Partikeln können auch sogenannte *Walls*, also Wandelemente, verwendet werden. Mit deren Hilfe können verschiedene Randbedingungen, wie etwa fixe Geometrien, von außen aufgebrachte Geschwindigkeiten, Druckverhältnisse, etc., aufgebracht werden. Die Wandelemente interagieren dann über gewählte Kontaktgesetze mit den Partikeln, nicht aber miteinander.

Die DEM verwendet einen expliziten Berechnungsalgorithmus, es werden also die zu berechnenden Größen aus dem vorangegangenen Zeitschritt abgeleitet. In jedem Zeitschritt  $\Delta t$  werden für jedes Partikel die Bewegungsgesetze und in jedem Kontakt die Kontaktgesetze (vgl. Kapitel 4.3) angewendet. Außerdem werden die neuen Positionen der Wandelemente berechnet. Der Berechnungszyklus ist schematisch in Bild 4.5 dargestellt.

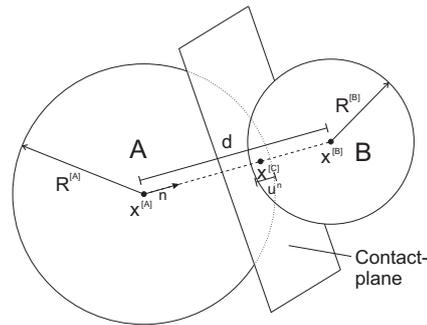


Abbildung 4.6: Notationen für den Kontakt Partikel - Partikel

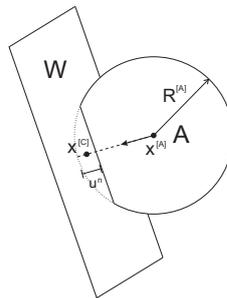


Abbildung 4.7: Notationen für den Kontakt Partikel - Wandelement

Die Konstitutivgesetze, die das Materialverhalten beschreiben, werden auch als Kraft- Verschiebungsgesetze bezeichnet. Hier werden aus der relativen Verschiebung zweier Objekte zueinander die in ihrem Kontakt wirkende Kraft bestimmt.

Hierbei wird unterschieden zwischen dem Kontakt zweier Partikel, dem sogenannten „ball-ball“-Kontakt, der in Bild 4.6 dargestellt ist, und dem Kontakt zwischen einem Partikel und einem Wandelement, dem „ball-wall“-Kontakt, vergleiche Abbildung 4.7.

Zur Beschreibung dieser Kontakte können verschiedene Ansätze verwendet werden, von denen eine Auswahl in Kapitel 4.3 vorgestellt wird.

### 4.3 Kontaktgesetze

Sobald sich zwei Partikel  $A$  und  $B$  berühren, entsteht der Kontaktpunkt  $C$ , vgl. Abbildung 4.6. Die Normale  $\mathbf{n}_i$ , die die Kontaktfläche beschreibt, wird definiert durch den normierten Abstand zwischen den Partikelmittelpunkten:

$$\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{x}_i^{[B]} - \mathbf{x}_i^{[A]}}{d} \quad (4.2)$$

wobei für den Abstand

$$d = |\mathbf{x}_i^{[B]} - \mathbf{x}_i^{[A]}| \quad (4.3)$$

gilt. Die Überschneidung  $U^n$  zwischen zwei Partikeln  $A$  und  $B$  wird durch die Beziehung

$$U^n = R^{[A]} + R^{[B]} - d \quad (4.4)$$

beschrieben. Hier bezeichnet  $R^z$  den Radius von Partikel  $z$ . Daraus ergibt sich der Ortsvektor des Kontaktpunktes  $\mathbf{x}_i^{[C]}$  zu:

$$\mathbf{x}_i^{[C]} = \mathbf{x}_i^{[A]} + (R^{[A]} - \frac{1}{2}U^n)\mathbf{n}_i \quad (4.5)$$

Vergleichbare Beziehungen ergeben sich ebenso für den Kontakt eines Partikels mit einem Wandelement, dies wird etwa in [39] genauer erläutert.

Die im Kontaktpunkt  $i$  wirkende Kraft  $\mathbf{F}_i$  kann ihren Normalen- sowie Scheranteil zerlegt werden:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^n - \mathbf{F}_i^s \quad (4.6)$$

Die Kontaktkraft in Normalenrichtung wird mit Hilfe der Überschneidung und der Kontaktsteifigkeit in Normalenrichtung  $K^n$  ausgedrückt:

$$\mathbf{F}_i^n = K^n U^n \mathbf{n}_i \quad (4.7)$$

Der Wert der Normalsteifigkeit hängt hierbei ab vom gewählten Kontaktmodell. Die gängigsten Kontaktmodelle werden im folgenden kurz erläutert. Für die tangentialer Richtung gilt analog die Beziehung:

$$\Delta \mathbf{F}_i^s = -k^s \Delta \mathbf{U}_i^s \quad (4.8)$$

In dieser Gleichung bezeichnet  $k^s$  die Schersteifigkeit des Kontaktes, während  $\Delta \mathbf{U}_i^s = \mathbf{V}_i^s \Delta t$  für den Scheranteil der Kontaktverformung steht, abhängig vom Scheranteil der Kontaktgeschwindigkeit  $\mathbf{V}_i^s$  und dem Zeitschritt  $\Delta t$ . In tangentialer Richtung werden also, im Gegensatz zur normalen Richtung, inkrementelle Werte für Kraft und Verschiebung verwendet.

### 4.3.1 Komponenten des Kontakts

Das mechanische Verhalten der Kontaktpunkte kann durch verschiedene Anteile beeinflusst werden, was in Bild 4.8 verdeutlicht wird. Zwischen den Partikeln wirkt ein Kontaktgesetz, zusätzlich können verbindende Elemente („Bonds“) oder Dämpfer eingefügt werden. Diese Bestandteile eines Kontakts werden nun kurz erläutert.

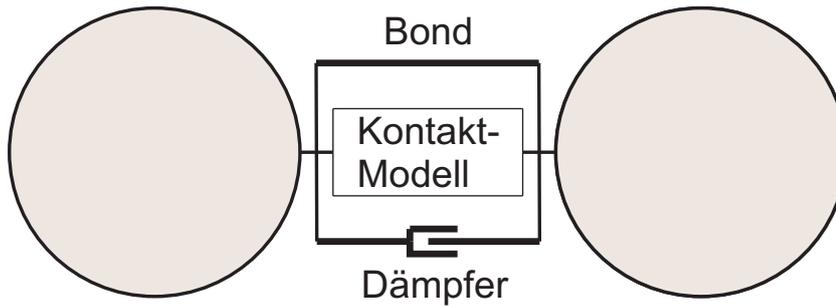


Abbildung 4.8: mögliche Kontaktkomponenten

### Kontaktsteifigkeiten

Wesentlich für jedes Kontaktgesetz sind die Kontaktsteifigkeiten in normaler und tangentialer Richtung,  $K^n$  und  $k^s$ . Diese werden aus den Steifigkeiten, welche sowohl den Partikeln als auch den Wandelementen zugewiesen werden, je nach gewähltem Kontaktgesetz ermittelt. Sie haben unmittelbaren Einfluss auf die wirkenden Kontaktkräfte, wie bereits in Kapitel 4.3 durch die Gleichungen 4.7 und 4.8 deutlich gemacht wurde.

Werden keine weiteren Komponenten zum Kontakt hinzugefügt, ist er nur unter Druck stehend aktiv. Das bedeutet im Umkehrschluss auch, dass die Steifigkeit nur für die Druckverbindung zweier Partikel über die Kontaktsteifigkeit definiert wird. Wird eine Zugverbindung mit Hilfe von Bonds geschaffen, definieren diese Bonds auch die Steifigkeit der Verbindung für den Zugbereich.

Wie die Kontaktsteifigkeiten berechnet werden, hängt vom gewählten Kontaktmodell ab. Für einige ausgewählte Kontaktmodelle finden sich Details hierzu in den Kapiteln 4.3.2, ff.

### Reibungskoeffizient

Außerdem kann den Elementen ein Reibungskoeffizient zugewiesen werden. Treten zwei Elemente in Kontakt, wird der jeweils kleinere Reibungskoeffizient von beiden Elementen  $\mu$  ausgewählt, der dann die maximal aufzunehmende Scherkraft bestimmt:

$$F_{max}^s = \mu |F_i^n| \quad (4.9)$$

So wird ein Gleiten zwischen den Partikeln ermöglicht.

Üblicherweise sollte  $0 \leq \mu \leq 1$  gelten, in Einzelfällen kann allerdings auch  $\mu > 1$  auftreten. Dann kann also die Tangentialkraft größer werden als die im Kontakt wirkende Normalkraft.

## Bonds

Sollen zwischen den Partikeln auch Zugkräfte aufgenommen werden, können *Bonds* eingefügt werden. Üblicherweise werden zwei Arten von Bonds unterschieden. Zum einen gibt es die punktförmig wirkenden Kontakt-Bonds, hier wird die Festigkeit sowohl in normaler  $f_c^n$  als auch in tangentialer Kontakttrichtung  $f_c^s$  definiert. Sobald diese Festigkeit von den Kontaktkräften überschritten wird, „brechen“ die Bonds und in diesem Kontaktpunkt können keine Zugkräfte mehr aufgenommen werden. Das unterschiedliche Verhalten der Bonds in normaler und tangentialer Richtung, wird in den Bildern 4.9 und 4.10 veranschaulicht.

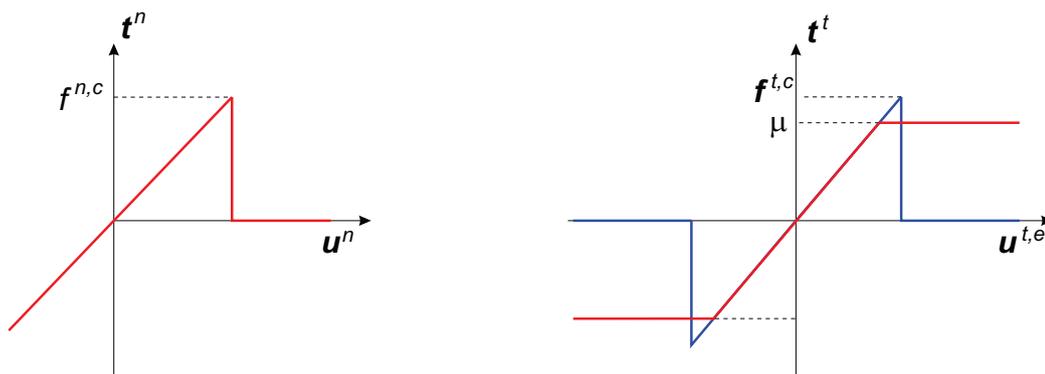


Abbildung 4.9: Verhalten der Bonds in Richtung der Kontaktnormalen

Abbildung 4.10: Verhalten der Bonds in tangentialer Kontakttrichtung

Ergänzend zu diesen, nur punktförmig wirkenden, Bonds können außerdem *Parallel Bonds* im Kontakt eingefügt werden. Diese wirken im Gegensatz zu den einfachen Bonds nicht nur genau im Kontaktpunkt sondern entsprechen, bildlich gesprochen, einer auf eine finite Größe ausgedehnten Verbindung der Elemente. Dieses Verbindungselement wird über einen Radius, Steifigkeiten und Festigkeiten definiert. Durch Parallel Bonds können neben Zugkräften auch Momente übertragen werden.

## Dämpfer

Optional können Dämpfer sowohl in normaler als auch in tangentialer Richtung zum Kontakt hinzugefügt werden. Diese agieren dann parallel zum Kontaktmodell sowie eventuell vorhandenen Bonds, siehe Abbildung 4.8. Die im Dämpfer wirkende Kraft  $\mathbf{D}_i$ , für die gilt

$$\mathbf{D}_i = \beta_i |\mathbf{V}_i| \quad (4.10)$$

wird zur Kontaktkraft addiert, wobei sie immer einer Bewegung entgegenwirkt. Hierbei bezeichnet  $\beta_i$  die Dämpfungskonstante und  $\mathbf{V}_i$  die Relativgeschwindigkeit im Kontakt. Vorgegeben wird jedoch in der DEM nicht die Dämpfungskonstante  $\beta_i$  direkt, sondern über eine Verhältniszahl  $d_i$ , die beschreibt, wie hoch der Anteil der Dämpfungskonstante an der kritischen Dämpfungskonstante  $\beta_i^{crit}$  ist:

$$\beta_i = d_i \beta_i^{crit} \quad (4.11)$$

Eine kritische Dämpfung wird für  $d_i = 1$  erreicht, hier findet das System also schnellstmöglich Gleichgewicht. Wird es nicht anders definiert, gilt  $d_i = 0$ .

### 4.3.2 Lineares Modell

Das lineare Kontaktmodell ist, neben dem Hertz-Modell, das in Kapitel 4.3.3 beschrieben wird, das am weitesten verbreitete Kontaktgesetz und wird auch in dieser Arbeit verwendet. Hier ist die Steifigkeit des Kontaktes konstant und wird aus den einzelnen Partikel- Steifigkeiten entsprechend den folgenden Formeln ermittelt. In normaler Richtung gilt

$$K^n = \frac{k_n^A k_n^B}{k_n^A + k_n^B} \quad (4.12)$$

und in tangentialer Richtung analog

$$K^s = \frac{k_s^A k_s^B}{k_s^A + k_s^B}, \quad (4.13)$$

wobei  $[A]$  und  $[B]$  wiederum die beiden in Kontakt stehenden Elemente bezeichnen. Bei diesem Modell können optional Bonds und auch Dämpfer, deren Wirkungsweise in Kapitel 4.3.1 beschrieben wurde, eingefügt werden.

### 4.3.3 Hertz Modell

Das Hertz- oder Hertz-Mindlin-Kontaktmodell beruht auf [98] und [38]. Es erlaubt Gleiten sowie Steifigkeiten, die durch eine Funktion der elastischen Konstanten Schermodul  $G$  und Poissonzahl  $\nu$ , ermittelt werden. Für im Kontakt wirkende Zugkräfte ist das Modell nicht definiert. Die Kontaktsteifigkeit in Normalenrichtung wird berechnet zu:

$$K^n = \left( \frac{2 \langle G \rangle \sqrt{2\tilde{R}}}{3(1 - \langle \nu \rangle)} \right) \sqrt{U^n} \quad (4.14)$$

In tangentialer Richtung lautet die Beziehung:

$$K^s = \left( \frac{2(\langle G \rangle^2 3(1 - \langle \nu \rangle)) \tilde{R}}{2 - \langle \nu \rangle} \right) |F_i^n|^{1/3} \quad (4.15)$$

Bei  $\tilde{R}$ ,  $\langle G \rangle$  und  $\langle \nu \rangle$  handelt es sich um Größen, die aus den jeweiligen, den Partikeln zugeordneten, Kontaktparametern ermittelt werden. Bonds können bei dem Hertz-Modell nicht eingefügt werden.

### 4.3.4 weitere Modelle

In der Literatur finden sich eine Vielzahl weiterer Kontaktmodelle, die für unterschiedlichste Anwendungen entwickelt wurden. Ein Überblick sowie eine umfangreiche Einführung in die Vorgänge im Kontaktbereich von Partikeln findet sich in [128]. Einzelne für Spezialanwendungen erdachte Kontaktmodelle sind außerdem das *Smooth Joint Model*, mit dem

Grenzflächen modelliert werden können [65], Anwendung findet das Modell beispielsweise in der Vorhersage von Instabilitäten von Felsformationen [111]. Ein viskoelastisches Kontaktmodell wird in [86] vorgestellt und für die Anwendung für Asphalte verifiziert.

Neben den anwendungsspezifischen Kontaktmodellen, gibt es auch Versuche, ein Kontaktmodell zu entwickeln, dessen Parameter aus einfachen standardisierten Versuchen ermittelt werden können [99]. Das vorgestellte Modell beruht auf der theoretischen Kontaktmechanik.

Die genannten Modelle sind lediglich Beispiele, die Liste kann beliebig erweitert werden.

## 4.4 Bestimmung der DEM-Parameter

Generell gibt es zwei wesentlich unterschiedliche Interpretationen der Partikel innerhalb der Nutzergemeinde der Methode der diskreten Elemente. Für die eine Gruppe entspricht ein Partikel in der Simulation einem Partikel in der Realität, also beispielsweise einem Sandkorn. Der Vorteil dieser Betrachtungsweise ist, dass durch entsprechende Mikroskalenexperimente die für die Simulation benötigten Parameter zumindest teilweise bestimmt werden können. Auch die Auswertung und Interpretation der Simulationsergebnisse fällt auf dieser Basis leicht, da sie unmittelbar auf die Realität übertragen werden können. Nachteile dieser Herangehensweise sind vor allem der hohe Rechenaufwand, wenn große Mengen eines granularen Mediums betrachtet werden sollen, und zum anderen der Anspruch, auch eine realistische Form der Partikel umzusetzen. Dies ist in den meisten Anwendungen möglich, indem mehrere kugelförmige Partikel kombiniert werden. Sollen jedoch kantige oder in anderer Art komplexe Geometrien verwirklicht werden, erhöht das die Rechenzeiten enorm, da die Identifikation der Kontaktpunkte ungleich komplizierter wird. Theoretische Überlegungen sowie Anwendungsbeispiele hierzu finden sich etwa in [46] und [96].

Die deutlich weiter verbreitete Betrachtungsweise, die auch dieser Arbeit zu Grunde liegt, interpretiert die DEM lediglich als numerische Diskretisierungsmethode, in diesem Sinne vergleichbar der Methode der Finiten Elemente. Es muss eine sinnvolle Mindestanzahl von Partikeln gewählt werden, jedoch besteht keinesfalls der Anspruch, dass jedem reellen Partikel eines in der Simulation entsprechen soll. Hieraus ergibt sich ein deutlich reduzierter Rechenaufwand und eine viel bessere numerische Umsetzbarkeit als in der ersten Variante. Hauptnachteil ist hier jedoch die Interpretation der Parameter auf der Ebene des Partikelkontakts.

In Kapitel 4.3 wird deutlich, dass eine Vielzahl von Parametern das Verhalten der Partikel definiert. Da nicht allen Parametern eine klare physikalische Bedeutung zuzuweisen ist, sind sie schwer experimentell zu bestimmen. Dies wird zusätzlich dadurch erschwert, dass sie teilweise voneinander abhängig sind [42]. Im Unterschied zur Methode der Finiten Elemente (FEM), bei der es festgelegte und allgemein anerkannte Verfahren zur Bestimmung der benötigten Materialparameter gibt, existiert für die DEM bisher keine allgemein anerkannte Methodik. Jedoch gibt es natürlich verschiedene Ansätze, von denen einige im Folgenden vorgestellt werden. Zunächst werden in Abschnitt 4.4.1 Beispiele vorgestellt, bei denen mit Hilfe von Simulationen von Laborversuchen die Parameter für die DEM kalibriert werden. In Abschnitt 4.4.2 werden dagegen einige analytische Verfahren wiedergegeben.

#### 4.4.1 Kalibrierungssimulationen

Da eine direkte physikalische Interpretation der Kontaktparameter für makroskopisches Materialverhalten, wie bereits erwähnt, nicht möglich ist, werden meist DEM-Simulationen durchgeführt, die an entsprechenden Experimenten kalibriert werden, um so Parameter für ein bestimmtes Material zu ermitteln. Erst im nächsten Schritt kann dann - mit den nun festgelegten Parametern - die eigentliche Simulation begonnen werden. Welcher Kalibrierungsversuch sinnvoll ist, hängt von dem betrachteten Material sowie der Anwendung ab. So wird in [17] vorgeschlagen, die Kalibrierung, wenn Erd- oder Bodenmaterial betrachtet wird, anhand eines Triaxialtests durchzuführen. Da auch die Rechenzeiten für den begrenzten Probenkörper nicht so sehr ins Gewicht fallen, und da die numerischen Ergebnisse eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen ergeben, scheint es sich hier um eine vielversprechende Methode handeln.

In [10] wird andererseits ein Feld-Test numerisch simuliert und zur Kalibrierung benutzt. Um die Unterschiede zwischen den experimentellen und numerischen Ergebnissen zu minimieren, wird hier eine inverse Lösungsstrategie unter Zuhilfenahme des Nelder-Mead Optimierungs-Algorithmus verwendet. Dieses Verfahren zeigt gute Ergebnisse, wird aber in [10] lediglich für zweidimensionale Probleme dargestellt.

Dass die DEM auch zur Simulation von Betonteilen verwendet werden können, wird in [57] gezeigt. Hier wird zunächst eine Kalibrierung eines Trägers anhand von quasistatischen Belastungen durchgeführt, bevor dann auch dynamische Simulationen durchgeführt werden. Die DEM zeigt sich hier in der Lage, auch komplexe Materialeigenschaften wie die Entfestigung durch Mikrorisse oder die Abhängigkeit von der Dehnungsrate zu replizieren.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass sich DEM-Parameter für Böden zuverlässig vorhersagen lassen. Voraussetzung hierfür ist allerdings zum einen, dass für das spezifische zu untersuchende Material aussagekräftige Experimente vorliegen, die zur Kalibrierung benutzt werden können. Für diese Kalibrierungsrechnungen muss eine gewisse Zeit und Rechenleistung aufgewendet werden. Selbstverständlich müssen diese Kalibrierungsrechnungen außerdem sehr sorgfältig vorbereitet werden, wobei auch die eigentliche Anwendung stets bedacht werden muss, damit die Parameter auch tatsächlich übertragen werden können.

#### 4.4.2 Analytische Ansätze

Eine analytische Bestimmung der Kontaktparameter ist aus vielerlei Gründen wünschenswert. Auch wenn laut [42] aktuell keiner der analytischen Ansätze allgemein anerkannt ist, sollen hier einige vielversprechende Methoden vorgestellt werden. Während in der Kontinuumsmechanik die Dehnungen benutzt werden, um die Deformationen eines infinitesimalen Bereichs eines Kontinuums um den zu untersuchenden Punkt zu charakterisieren, besteht granulares Material aus einzelnen Partikeln, mit jeweils eigenen Bewegungen, die sich aus Translationen und Rotationen zusammensetzen.

Die Verformungen können daher sehr heterogen sein. Einen Zusammenhang zwischen den Partikelverformungen und den makroskopischen Verformungen herzustellen, ist zum einen wichtig, um Konstitutivgesetze für granulares Material erstellen zu können, aber auch um

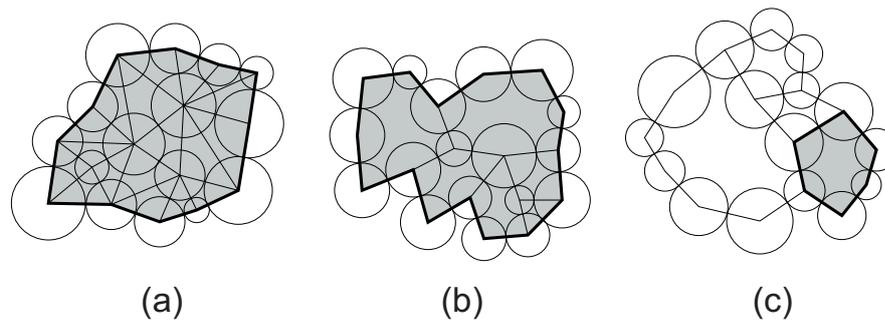


Abbildung 4.11: Wahl eines äquivalenten Kontinuums nach (a) Bagi (b) Kruyt-Rothenburg (c) Kuhn

DEM-Simulationen auf makroskopischer Ebene interpretieren zu können. Laut [13] können die Ideen zur Interpretation eines mikroskopischen Dehnungstensors im Wesentlichen in zwei Kategorien eingeteilt werden:

1. Dehnungen basieren auf einem äquivalenten Kontinuum:  
Das granulare Medium wird hier durch ein Kontinuum ersetzt, dem dann passende Deformationen zugeordnet werden, sodass die Verformungen an charakteristischen Punkten des Kontinuums jenen der entsprechenden Partikel möglichst nahe kommen. Unterschiedliche Ansätze ergeben sich hier vor allem durch die Wahl des äquivalenten Kontinuums.
2. „Best-fit Strains“:  
Es wird derjenige Dehnungstensor ermittelt, der die kleinsten Abweichungen zu den charakteristischen Verformungen des Systems hat. Der Dehnungstensor hängt also von der Art der Verformung ab.

### Best-fit Strains

Zu den bekanntesten Vertretern der „best-fit“-Methode gehören Liao et al, [84], [85], sowie Cundall und Strack, [39]. Unterschiede bestehen vor allem in der Definition der charakteristischen Verformung: Während die Formulierung von Cundall auf rein translatorischen Bewegungen der Partikelmittelpunkte basieren, stützt sich der Ansatz nach Liao et. al. auf die Verformungen der Kontaktpunkte, sodass hier neben den Translationen auch die Rotationen der Partikel berücksichtigt werden.

In verschiedenen Untersuchungen [13], [30], zeigt sich, dass die Approximation von Liao et. al. keine gute Übereinstimmung mit makroskopischen Verformungen ergibt. Die Approximation nach Cundall hingegen liefert Werte, die sehr nah an den makroskopisch berechneten liegen. Weitere Vorteile liegen bei dieser Methode in der einfachen Berechenbarkeit sowie der Übertragbarkeit vom zwei- in den dreidimensionalen Raum.

## Äquivalente Kontinua

Wie bereits erwähnt, liegen die Unterschiede bei der Methode eines äquivalenten Kontinuums in der Definition desselben. In 4.11 werden die gewählten Kontinua dreier Vertreter veranschaulicht. Bagi [11] definiert zunächst sogenannte „Space Cells“. Jede dieser Zellen verbindet die Partikelmittelpunkte miteinander, sodass sich im zweidimensionalen Fall Dreiecke, im dreidimensionalen Tetraeder ergeben. Anhand dieser Zellen wird nun das Verformungsfeld definiert, wobei die Verformungen an den Eckpunkten der Zellen natürlich jenen der Partikelmittelpunkte entsprechen. Innerhalb der Zellen werden die Verformungen dann linear interpoliert. Durch eine Integration über alle Zellen kann so schließlich das Verformungsfeld des gesamten äquivalenten Kontinuums bestimmt werden. Ein Hauptvorteil dieser Herangehensweise ist, dass die Partikel keine geometrischen Vorgaben erfüllen müssen, um ein äquivalentes Kontinuum berechnen zu können. Allerdings ist der Rechenaufwand, besonders für den dreidimensionalen Fall, sehr hoch. Im Vergleich mit DEM-Simulationen liefert dieser Ansatz eine gute Übereinstimmung.

Ein anderer Ansatz, ein äquivalentes Kontinuum zu definieren, wird durch Kruyt und Rothenburg, [77], vorgestellt. Das äquivalente Kontinuum ist in Abbildung 4.11(b) illustriert. Es ist nur gültig für zweidimensionale Ansammlungen konvex geformter Partikel. Hier wird durch die Mittelpunkte sich berührender Partikel ein Polygon gezogen, das dann das äquivalente Kontinuum bildet. So entsprechen hier die Bewegungen der Partikelmittelpunkte wieder jenen der Eckpunkte. Dieser Ansatz konzentriert sich nur auf den Randbereich, die Verformungen im Inneren des Polygons werden nicht spezifiziert.

Wiederum einen leicht veränderten Ansatz verfolgen Cambou, [30], und Dedecker, [40]. Hier werden Zellen definiert, die die Partikelmittelpunkte nah beisammen liegender Partikel verbinden, wobei diese sich nicht zwingend berühren müssen. Dieser Ansatz führt jedoch wiederum zu den gleichen Ergebnissen wie jener von Kruyt-Rothenburg.

Eine weitere Variante wurde von Kuhn, [78], 1997 und 1999 veröffentlicht. Die Herangehensweise ist sehr ähnlich jener von Kruyt-Rothenburg, nur dass hier für das äquivalente Kontinuum nur jene Partikel herangezogen werden, die eine tragende Funktion erfüllen. Was die sich ergebenden Dehnungen angeht, entspricht das sich ergebende Kontinuum jenem von Kruyt-Rothenburg.

Die bisher vorgestellten Ansätze beruhen auf einer rein translatorischen Bewegungen der Partikel. Ein weiterer Ansatz nach Kruyt, [76], berücksichtigt zudem auch die Möglichkeit der Rotationen. Da dieser deutlich komplexere Ansatz jedoch laut [13] die makroskopischen Verformungen deutlich unterschätzt, wenn ein mehr als einaxialer Spannungszustand vorherrscht, wird er hier nicht weiter erläutert.

## Ableitung der Spannungen aus virtuellen Verschiebungen

Einen wiederum anderen Ansatz verfolgt Luding, [90], [91]. Für eine statische Simulation wird hier zunächst die virtuelle Verschiebung in Normalenrichtung definiert. Mit der zugehörigen potentiellen Energiedichte lässt sich der Spannungstensor berechnen.

Für dynamische Systeme wird hier angenommen, dass Momente durch Partikelbewegungen innerhalb des betrachteten Körpers übertragen werden. Mit Hilfe der kinetischen Energiedichte lässt sich ebenfalls ein Spannungstensor formulieren.

Da in dieser Arbeit unverformbare Partikel untersucht werden, werden hier auch nur die entsprechenden Ergebnisse aus [91] wiedergegeben. Der aus dem statischen und dynamischen Ansatz kombinierte Spannungstensor ergibt sich zu:

$$\sigma = \frac{1}{V} \left[ \sum_i \mathbf{m}_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i - \frac{1}{\Delta t} \sum_n \sum_j \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{l}_j \right] \quad (4.16)$$

Hierbei steht  $V$  für das betrachtete Volumen. Die linke Summe wird über sämtliche Partikel  $i$  gebildet. Sie beinhaltet den dynamischen Anteil des Spannungstensors, wobei  $\mathbf{m}_i$  und  $\mathbf{v}_i$  für die Partikelmassen und -geschwindigkeiten stehen. Die auf der rechten Seite von Gleichung 4.16 stehende Doppelsumme wird über alle neu gebildeten Kontakte  $n$  und über alle beteiligten Partikel  $j$  gebildet. Die Änderung der Kontaktmomente wird in  $\mathbf{p}_j$  zusammengefasst, während  $\mathbf{l}_j = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  die Vektoren, die beide in Kontakt stehende Partikelmittelpunkte miteinander verbindet, enthält.  $\Delta t$  ist der Zeitabschnitt, in dem  $n$  Kontakte gebildet werden.

#### 4.4.3 Zusammenfassung

Sämtliche hier vorgestellten analytischen Ansätze setzen zumindest voraus, dass eine Probe durch Partikel aufgebaut wird. Bei den Methoden, die äquivalente Kontinua verwenden, wird das äquivalente Kontinuum ausgehend von der sich ergebenden Partikelstruktur gebildet. Für die Best-Fit Methodik ist eine weitergehende Simulation erforderlich, da die sich ergebenden Dehnungen mit dem (kontinuumsmechanischem) Dehnungstensor abgeglichen werden. Auch für die von Luding entwickelte Methodik sind DEM-Simulationen nötig, da hier beispielsweise die Partikelgeschwindigkeiten und die Kontaktmomente in die Gleichung zur Bestimmung des Spannungstensors eingehen.

Alle hier vorgestellten Methoden lassen es jedoch zu, aus vergleichsweise einfachen Simulationen die Materialantwort abzuleiten und auf ein komplexeres System zu übertragen. Eine Relation, aus der die Kontaktparameter, oder die kontinuumsmechanischen Größen Spannung und Dehnung a priori, also ohne vorangehende Simulation bestimmt werden können, ist allerdings bisher nicht bekannt.

## 4.5 Kompaktierungsalgorithmen

Wesentlich bei der Verwendung der DEM ist, neben der bereits beschriebenen Bestimmung der Parameter und der Wahl des passenden Kontaktgesetzes, auch das Bilden einer korrekten Domain. Dieser Punkt ist extrem wichtig, da bei einer ungünstigen Partikelanordnung die Ergebnisse völlig unbrauchbar werden können, da der Simulationskörper unerwartete Materialantworten zeigen kann [67].

Insbesondere für die Simulation von Feststoffen ist es essenziell eine *kompakte* Partikelansammlung zu generieren. Hierfür sind verschiedene Ansätze bekannt, von denen einige hier kurz vorgestellt werden:

- In [88] wird der „iterative Wachstumsalgorithmus“ erläutert. Hier wird die gewünschte Partikelanzahl zunächst punktförmig innerhalb der Domäne erzeugt, anschließend werden sämtliche Partikelradien in mehreren Iterationsschritten vergrößert, bis die Partikel die Zielgröße erreicht haben. Haben alle Partikel den gleichen Radius, ordnen sie sich größtenteils gitterförmig an, wobei es Fehlstellen gibt, die die Materialantwort ungünstig beeinflussen können.
- Ein kompaktes Material kann auch hergestellt werden, indem durch Wandelemente isotroper Druck auf eine zunächst lose Partikelansammlung gebracht wird. Dieses Verfahren wird in [95] vorgestellt.
- Ein weiterer Ansatz, der vor allem in der Simulation von Feststoffen angewandt wird, wird als „Floater Elimination“-Algorithmus bezeichnet [65]. Hierbei werden Partikel, die nicht mit der Matrix in Kontakt stehen („Floater“), identifiziert und vergrößert bis sich Kontaktpunkte bilden. Die Anzahl der erforderlichen Kontaktpunkte, also die Koordinationszahl der ehemaligen Floater, kann hierbei vorgegeben werden.
- Ein Algorithmus, in dem die Partikel direkt in der gewünschten Anordnung erzeugt werden, wird in [12] erläutert. Hier wird jedes Partikel an eine kleine Ausgangsanordnung gefügt, sodass ebenfalls ein kompaktes Material erzeugt wird. Der große Vorteil hierbei ist, dass keine weiteren (dynamischen) Rechnungen erforderlich sind. Allerdings existiert dieser Algorithmus bisher nur im zweidimensionalen Raum.

In dieser Arbeit wird meist eine Kombination der verschiedenen Kompaktierungsalgorithmen verwendet, um optimale Partikelansammlungen zu erhalten. Welche das im einzelnen sind, wird in den Kapiteln zur Simulationsdurchführung genauer beschrieben. Lediglich der statische Ansatz nach [12] kommt hier nicht zum Einsatz, da der Algorithmus nicht zu Verfügung stand.

## 5 Bestimmung der DEM Kontaktparameter

Wie bereits in Kapitel 4.4 beschrieben, ist die Bestimmung der Kontaktparameter, die für jede Simulation mit der Methode der Diskreten Elemente benötigt werden, sehr komplex. Aus Gründen der Zeit- und Kostenersparnis ist es sinnvoll, einen Zusammenhang zwischen den (mikroskopischen) Kontaktparametern und den (makroskopischen) Materialparametern, die üblicherweise in der Mechanik verwendet werden, herzustellen. Ein Ansatz hierfür soll in diesem Kapitel vorgestellt werden.

Hierfür wird zunächst in Kapitel 5.1 die in jedem einzelnen Kontakt vorliegende Energie in Abhängigkeit der Kontaktverformung definiert. Anschließend wird von diesen mikroskopischen Energien mit Hilfe eines Volumenintegrals auf die makroskopische Energie des Probenkörpers geschlossen, was in Kapitel 5.2 gezeigt wird. Durch Anwendung des Lagrange-Formalismus und Betrachtung der sich daraus ergebenden Verformungen wird schließlich in Kapitel 5.3 eine Relation zwischen dem Elastizitätsmodul und der Querkontraktionszahl auf der einen und den Kontaktsteifigkeiten auf der anderen Seite hergestellt.

Diese gefundene Relation kann als Parameteridentifikation oder bei vorgegebenen Kontaktsteifigkeiten als Prognose für die elastischen Parameter benutzt werden. In dieser zweiten Funktion wird sie zunächst mit Hilfe eines Triaxialversuchs validiert, dessen Aufbau und Auswertung in Kapitel 5.4 beschrieben wird. Anschließend folgt in Kapitel 5.5 die Anpassung der Theorie für den zweidimensionalen Raum sowie die Auswertung einiger Biaxialversuche.

Nachdem also zunächst granulares Material untersucht wurde, werden nun Bonds eingefügt, wodurch kohäsives oder gar festes Material betrachtet werden kann. Hieraus ergibt sich eine Relation zwischen der Streckgrenze und den Stärken der im Kontakt eingefügten Bonds. Deren Herleitung für zwei- und dreidimensionale Betrachtungen sowie die Verifizierung der Annahmen anhand von Biaxial- und Triaxialversuchen wird in Kapitel 5.6 gezeigt. Abschließend werden in Kapitel 5.7 die Ergebnisse bewertet.

### 5.1 Das mikroskopische Potential

Um einen Zusammenhang zwischen den Kontaktparametern, also mikroskopischen Parametern auf Partikelebene, und den makroskopischen Materialparametern herzustellen, soll zunächst der Partikelkontakt und die Verformung dieses Kontaktpunktes genauer untersucht werden.

Hierfür soll der in Abbildung 5.1 dargestellte Kontakt zwischen zwei Partikeln zu Grunde gelegt werden. Die Partikel haben die Radien  $r_1$  und  $r_2$ , im Kontaktpunkt wirkt außerdem der Normalenvektor  $\mathbf{n}$ , der auf der Verbindungslinie beider Partikelmittelpunkte liegt und im Kontaktpunkt angreift. Die Verformungen der Partikel im Kontaktpunkt werden mit  $\mathbf{u}$

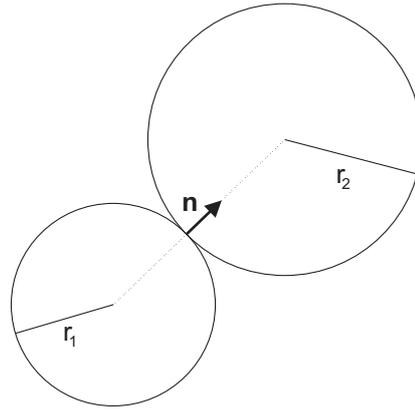


Abbildung 5.1: Zwei miteinander in Kontakt stehende Partikel

bezeichnet. Sie setzen sich aus einem elastischen, einem inelastischen, und einem rotatorischen Anteil zusammen, wie in Gleichung 5.1 gezeigt wird.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^i + \mathbf{u}^r. \quad (5.1)$$

Es wird  $\mathbf{u}^n$  als Komponente der relativen Verschiebung in Normalenrichtung bezeichnet, für die gilt:  $\mathbf{u}^n = u^n \mathbf{n}$ ,  $u^n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ . Der tangential Anteil ist entsprechend  $\mathbf{u}^t = \mathbf{u} - \mathbf{u}^n$ . Die Verformungen in Normalenrichtung werden als voll elastisch angenommen, während sich die tangentialen Verformungskomponente aus dem elastischen, einem inelastischen und einem rotatorischen Anteil zusammensetzt:

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^{n,e}, \quad \mathbf{u}^t = \mathbf{u}^{t,e} + \mathbf{u}^{t,i} + \mathbf{u}^{t,r}. \quad (5.2)$$

Die Tangentialverformungen werden als kleine Abweichungen von der Ausgangslage definiert, weshalb diese Aufteilung eigentlich nur für infinitesimal kleine Verformungen gilt.

Der rotatorische Anteil der Kontaktverformung setzt sich zusammen aus den Verdrehungen der am Kontakt beteiligten Partikel. Diese infinitesimale Verdrehung eines Partikels  $i$  kann durch den Rotationsvektor  $\boldsymbol{\omega}_i$  beschrieben werden. Damit ergibt sich der Rotationsanteil der relativen Kontaktverschiebung zu

$$\mathbf{u}^{t,r} = -r_1 \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{n} - r_2 \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{n}. \quad (5.3)$$

Da aus der Verdrehung der Partikel nur eine relative Verschiebung des Kontaktpunktes in tangentialer Richtung erfolgt, gilt selbstverständlich  $\mathbf{u}^n \times \mathbf{u}^{t,r} = \mathbf{0}$ .

Auf Basis der vorangegangenen Überlegungen werden nun freie Helmholtz Energien, wie in Kapitel 2.3.2 vorgestellt, definiert. Hierfür werden wiederum die normale und die tangentiale Richtung unterschieden. Es ergibt sich also die Energie in Normalenrichtung zu  $\psi^n(\mathbf{u}^n)$ , diejenige in tangentialer Richtung zu  $\psi^t(\mathbf{u}^{t,e}) = \psi^t(\mathbf{u}^t, \mathbf{u}^{t,r}, \mathbf{u}^{t,i})$ , da hier auch die inelastischen und rotatorischen Komponenten Berücksichtigung finden. Daraus können die Kontaktkräfte in normaler und tangentialer Richtung wie folgt abgeleitet werden:

$$\mathbf{t}^n = \frac{\partial \psi^n}{\partial \mathbf{u}^n}, \quad \mathbf{t}^t = \frac{\partial \psi^t}{\partial \mathbf{u}^t}. \quad (5.4)$$

Die Potentiale auf Kontaktebene werden nun wie folgt definiert:

$$\psi^n(\mathbf{u}^n) = \frac{c^n}{2} (u^n)^2, \quad \psi^t(\mathbf{u}^{t,e}) = \frac{c^t}{2} (u^{t,e})^2, \quad (5.5)$$

Im Kontakt werden also Federn angenommen, was den Simulationen, die in den folgenden Kapiteln vorgestellt werden, entspricht. Hier wurde das lineare Kontaktgesetz, wie in Kapitel 4.3.2 vorgestellt, angewendet, was ebenfalls der Vorstellung einer Feder im Kontakt entspricht. Aus den Potentialen nach Gleichung 5.5 können dann nach Gleichung 2.48 die Kontaktkräfte in normaler und tangentialer Richtung abgeleitet werden, die ebenfalls mit dem linearen Kontaktgesetz übereinstimmen:

$$\mathbf{t}^n = c^n \mathbf{u}^n, \quad \mathbf{t}^t = c^t \mathbf{u}^{t,e}, \quad (5.6)$$

Hierbei beschreiben  $c^n$ ,  $c^t$  die Kontaktsteifigkeit in normaler sowie in tangentialer Richtung. Diese werden aus den Partikelsteifigkeiten nach den Gleichungen 4.12 und 4.13 ermittelt.

## 5.2 Das makroskopische Potential

Nachdem nun der Kontaktpunkt genauer betrachtet wurde und auf Kontaktebene Potentiale aufgestellt wurden, sollen diese in ein makroskopisches Potential überführt werden. Es wird von einem monodispersen Material ausgegangen, was bedeutet, dass die Partikel, was ihre Materialeigenschaften und vor allem ihre Größe betrifft, nicht oder kaum voneinander abweichen. Hier wird allerdings davon ausgegangen, dass die Partikelradien variieren, da sich sonst durch die in Kapitel 4.5 beschriebenen Verdichtungsmechanismen kristallartige Strukturen bilden.

Es wird also ein durchschnittlicher Radius  $r$  für alle Partikel vorausgesetzt, wobei die Abweichung der einzelnen Partikel etwa 25% betragen darf. Weiterhin wird angenommen, dass sich alle Relativverschiebungen und Kräfte im Kontakt als Funktionen der Normalenrichtung ausdrücken lassen und nicht abhängig von dem einzelnen Partikel sind. Daraus folgt, dass die Relativverschiebung sich dann zu  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{n})$  formulieren lässt, wobei der elastische Anteil  $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}^e(\mathbf{n})$  lautet.

Allgemein gilt, dass sich das Mittel über alle Richtungen einer Menge  $\mathbf{f}$  mit einem Integral über eine Einheitskugel bestimmen lässt:

$$\langle \mathbf{f} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \mathbf{f}(\mathbf{n}) \, dS, \quad (5.7)$$

Entsprechend folgt für die makroskopische freie Energie  $\psi^m$  eines entsprechenden Mediums:

$$\psi^m = \rho_c \langle \psi(\mathbf{u}^e(\mathbf{n})) \rangle. \quad (5.8)$$

In Gleichung 5.8 steht  $\rho_c$  für die Anzahl an Kontaktpunkten innerhalb eines Einheitsvolumens. Sie lässt sich mit der Porosität  $\eta$  und der Koordinationszahl  $c$ , die dem Mittelwert der Kontaktpunktzahl pro Partikels entspricht und in Kapitel 5.4.1 genauer untersucht wird, wie folgt berechnen:

$$\rho_c = \frac{c}{2} \frac{1 - \eta}{\frac{4}{3}\pi r^3}, \quad (5.9)$$

Der makroskopische Verformungsgradient kann aus dem richtungsabhängigen Mittel der relativen Kontaktverformungen ermittelt werden.

$$\nabla \mathbf{u}^m = \frac{1}{r} \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{n} \rangle. \quad (5.10)$$

Es wird nun davon ausgegangen, dass die Partikel des Mediums sich so anordnen, dass die freie Energie für einen bestimmten makroskopischen Verformungsgradienten minimiert wird. Dies geschieht durch eine entsprechende Verteilung der relativen Kontaktverformungen  $\mathbf{u}(\mathbf{n})$  und der Partikelrotationen  $\boldsymbol{\omega}$ . Weiterhin wird für die folgenden Überlegungen angenommen, dass die Partikelrotation  $\boldsymbol{\omega}$  ein für alle Partikel konstanter Mittelwert ist. Aus diesen Annahmen folgt, dass die makroskopische freie Energie folgendermaßen berechnet wird:

$$\psi^m(\nabla \mathbf{u}^m, \mathbf{u}^{t,i}) = \rho_c \inf\{\langle \psi(\mathbf{u}^e) \rangle \mid \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}; \nabla \mathbf{u}^m = \frac{1}{r} \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{n} \rangle\} \quad (5.11)$$

### 5.3 Von der makroskopischen Energie zu den elastischen Konstanten (3D)

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie mit der zuvor hergeleiteten makroskopischen freien Energie in Gleichung 5.11 und den in Kapitel 5.1 vorgestellten Überlegungen zur Energie auf Kontaktpunktebene die elastischen Materialkonstanten, also der Elastizitätsmodul  $E$  und die Poissonzahl  $\nu$  in Abhängigkeit der Kontaktparameter, bestimmt werden können. Diese Überlegungen gelten zunächst nur für granulares Material, also Partikel, zwischen denen keine Bonds eingefügt werden.

Hierfür wird von der in Gleichung 5.11 definierten makroskopischen freien Energie ausgegangen. Es werden die in Gleichung 5.5 spezifizierten Kontaktenergien in normaler und tangentialer Richtung eingesetzt, und außerdem die elastischen und inelastischen Kontaktverformungen entsprechend den Gleichungen 5.2 und 5.3 verwendet. Damit ergibt sich für die hier betrachteten Kontaktenergien die makroskopische Energie zu:

$$\begin{aligned} & \psi^m(\nabla \mathbf{u}^m, \mathbf{u}^{t,i}) \\ &= \rho_c \inf\left\{\left\langle \frac{c^n}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{c^t}{2} |\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{u}^{t,i} + 2r \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}|^2 \right\rangle \mid \mathbf{u}, \boldsymbol{\omega}; \nabla \mathbf{u}^m = \frac{1}{r} \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{n} \rangle\right\}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Zur Minimierung dieser makroskopischen Energie wird das Lagrange-Multiplikatorverfahren, das in Kapitel 2.1.3 erläutert wird, angewendet. Hierfür wird der Lagrange-Multiplikator  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  eingeführt. Damit ergibt sich die folgende Lagrange-Funktion.

$$\mathcal{L}_m = \rho_c \left\langle \frac{c^n}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{c^t}{2} |\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{u}^{t,i} + 2r \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}|^2 \right\rangle + \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \left( \nabla \mathbf{u}^m - \frac{1}{r} \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{n} \rangle \right). \quad (5.13)$$

Nun werden die Stationaritätsbedingungen  $\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$  und  $\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$  betrachtet. Aus der Geometrie folgt, dass die Beziehung  $\mathbf{u}^{t,i} \cdot \mathbf{n} = 0$  gilt, außerdem ergeben sich  $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0$  und  $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = -\boldsymbol{\omega}$  aus den in Kapitel 2.1 vorgestellten Rechenregeln. Mit diesen Beziehungen folgen aus der Stationarität die Gleichungen 5.14 und 5.15.

$$\rho_c \left( c^n (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + c^t (\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{u}^{t,i}) + 2r c^t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} \right) - \frac{1}{r} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (5.14)$$

$$\langle (\mathbf{u} - \mathbf{u}^{t,i}) \times \mathbf{n} \rangle - 2r \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}, \quad (5.15)$$

Als nächstes sollen die Relativverschiebungen in den Kontaktpunkten betrachtet werden. Dafür wird Gleichung 5.14 nach  $\mathbf{u}$  aufgelöst.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{t,i}} + \left[ \left( \frac{1}{c^n} - \frac{1}{c^t} \right) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{c^t} \mathbf{I} \right] \cdot \left( \frac{1}{\rho_c r} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} - 2r c^t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} \right) \quad (5.16)$$

Gleichung 5.16 wird nun in die Gleichung für den makroskopischen Verschiebungsgradienten (vergleiche Gleichung 5.10) eingesetzt. Hierbei entspricht  $\mathbf{I}$  einer Einheitsmatrix.

$$\nabla \mathbf{u}^{\text{m}} = \nabla \mathbf{u}^{\text{m,i}} + \frac{1}{\rho_c r^2} \left[ \left( \frac{1}{c^n} - \frac{1}{c^t} \right) \langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle : \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{c^t} \langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right] + 2r \langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle \times \boldsymbol{\omega}. \quad (5.17)$$

Dieser Ausdruck kann durch die folgenden Beziehungen vereinfacht werden

$$\langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{3} \mathbf{I}, \quad \langle \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \rangle : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{15} \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} + \frac{2}{15} \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.18)$$

wobei  $\boldsymbol{\sigma} = \text{sym } \bar{\boldsymbol{\sigma}}$  gilt.

In der Kontinuumsmechanik werden, wie in Kapitel 2.2 deutlich wird, üblicherweise Dehnungen statt Verformungen betrachtet. Daher sollen auch hier Dehnungen ermittelt werden. Die Gesamtdehnungen ergeben sich aus dem symmetrischen Anteil des makroskopischen Verformungsgradienten  $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym } \nabla \mathbf{u}^{\text{m}}$ , die inelastischen Dehnungen auch nur aus seinem inelastischen Anteil  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{i}} = \text{sym } \nabla \mathbf{u}^{\text{m,i}}$ .

Mit diesen Beziehungen lässt sich Gleichung 5.16 umformulieren, sodass sich die folgenden Abhängigkeiten ergeben:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{i}} + \frac{1}{\rho_c r^2} \left[ \frac{1}{15} \left( \frac{1}{c^n} - \frac{1}{c^t} \right) \text{tr } \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I} + \left( \frac{2}{15} \frac{1}{c^n} + \frac{1}{5} \frac{1}{c^t} \right) \boldsymbol{\sigma} \right]. \quad (5.19)$$

Wird  $\boldsymbol{\varepsilon}$  als Dehnungstensor und  $\boldsymbol{\sigma}$  als Spannungstensor verstanden, beinhaltet Gleichung 5.19 ein linear-elastisches, isotropes Materialgesetz. Hieraus können nun der Elastizitätsmodul und die Querkontraktion abgeleitet werden.

$$E = 15 \rho_c r^2 \left( \frac{3}{c^n} + \frac{2}{c^t} \right)^{-1}, \quad \nu = \frac{c^n - c^t}{2c^n + 3c^t}. \quad (5.20)$$

Die Gleichungen 5.20 stellen nun also die Verbindung her zwischen der mikroskopischen Betrachtungsweise, die für die DEM benötigt wird, auf der einen Seite und den makroskopischen Parametern auf der anderen Seite. Es gibt also eine Relation zwischen den Kontaktsteifigkeiten, Partikelradien und der Anzahl der Kontakte in einem Volumen auf der einen Seite, sowie den elastischen Parametern Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl auf der anderen. Mit Hilfe dieser Relation können die elastischen Konstanten apriori, also ohne zeitaufwändige Kalibrierungsrechnungen, bestimmt werden. Nach den Kontaktsteifigkeiten umgestellt, ergeben sich die Gleichungen zu:

$$c^n = \frac{E}{3\rho_c r^2 \cdot (1 - 2\nu)}, \quad c^t = \frac{E}{3\rho_c r^2 \cdot (1 + 3\nu)} \quad (5.21)$$

Mit Gleichung 5.21 ist es also möglich, einem mit der DEM modellierten Material genau die Kontaktsteifigkeiten zuzuweisen, mit denen das Material die benötigten (und zumeist bekannten) makroskopischen Steifigkeiten bekommt. Hierbei ist lediglich, wie bereits erwähnt, zu beachten, dass die Kontaktsteifigkeit nicht der Partikelsteifigkeit entspricht, sondern sie sich entsprechend dem gewählten Materialgesetz aus den Partikelsteifigkeiten berechnet.

Partikelanzahl	112	855	6524
mittlerer Radius [ $m$ ]	$2,85 \cdot 10^{-3}$	$1,49 \cdot 10^{-3}$	$7,69 \cdot 10^{-4}$
Dichte [ $\frac{kg}{m^3}$ ]	2630	2630	2630

Tabelle 5.1: Mikroskopische Materialparameter der Partikel

## 5.4 Triaxialversuch

Die in Kapitel 5.3 aufgestellten Zusammenhänge zwischen den mikroskopischen Kontaktparametern und den makroskopischen elastischen Konstanten sollen nun überprüft werden. Hierfür wird ein unkonsolidierter, undrännierter Triaxialversuch, wie er in Kapitel 2.5.2 beschrieben wird, verwendet. So können die analytisch nach Gleichung 5.20 ermittelten elastischen Konstanten  $E$  und  $\nu$  mit jenen, die sich aus der Auswertung des numerischen Triaxialversuchs ergeben, verglichen werden. Hierfür wird die DEM Software *pf<sup>3D</sup>* der itasca Gruppe verwendet, deren Funktionsweise in Kapitel 4 beschrieben wird, und die auf den Entwicklungen von Cundall und Strack beruhen, vergleiche [39].

### 5.4.1 Modellbildung

Der Triaxialversuch wird an einem zylinderförmigen Probenkörper durchgeführt, der die Höhe  $h_v = 30cm$  und den Radius  $r_v = 15cm$  besitzt. Der Probenkörper wird durch Wand-Elemente begrenzt, die während des Versuchs auch die vorgegebene Verformung, beziehungsweise Spannung, erzwingen.

Im nächsten Schritt wird der anfangs leere Behälter nun mit sehr kleinen Partikeln gefüllt. Es wird hier ein minimaler und ein maximaler Partikelradius vorgegeben, zwischen beiden Werten erfolgt eine Gleichverteilung der Radien. Die jeweiligen Partikelradien werden in 3 Schritten vergrößert bis die vorgegebene Porosität von 35% erreicht ist. Durch das Vergrößern und die daraus folgende Umordnung der Partikel können innere Spannungen entstehen, die nur mit dem numerischen Prozess zu erklären sind, und daher hier nicht gewünscht sind. Um diese abzubauen und ein dichtes, isotropisches Material zu erhalten, wird nun konstante Spannung von sämtlichen, die Probe begrenzende Wand-Elementen aufgebracht. Diese Spannung beträgt hier  $\sigma_t = -0,1e6 \frac{N}{m^2}$ . Erst nach diesem Schritt werden den Partikeln ihre mikroskopischen Materialparameter zugewiesen, die in den Tabellen 5.1, 5.2 und 5.3 aufgeführt werden. Es ist zu beachten, dass es sich bei den hier angegebenen Steifigkeiten um die Steifigkeiten der Partikel handelt. Sie entsprechen nicht den in Gleichung 5.20 verwendeten Kontaktsteifigkeiten. Diese werden entsprechend dem linearen Kontaktmodell ermittelt.

Der Test wird mit drei unterschiedlichen Diskretisierungen und mit jeweils vier unterschiedlichen Werten für die Normal- und die Tangentialsteifigkeiten, sodass sich insgesamt zwölf Testdurchläufe ergeben. Die Startkonfiguration ist für die drei verschiedenen Partikelanzahlen, 112, 855 und 6524, in Abbildung 5.2 dargestellt.

Der eigentliche Versuch beginnt damit, dass die durch die Begrenzungswände übertragene Spannung auf einen konstanten Wert erhöht wird, der hier  $\sigma_c = \sigma_{1,start} = -1e7 \frac{N}{m^2}$  beträgt. Die axial aufgebrachte Spannung wird hier als  $\sigma_1$  bezeichnet, die umschließende Span-

Test Nr.	1	2	3	4
112 Partikel	$8,85 \cdot 10^8$	$6,41 \cdot 10^8$	$3,85 \cdot 10^8$	$1,28 \cdot 10^8$
855 Partikel	$4,28 \cdot 10^8$	$3,19 \cdot 10^8$	$1,92 \cdot 10^8$	$6,39 \cdot 10^7$
6524 Partikel	$2,20 \cdot 10^8$	$1,60 \cdot 10^8$	$9,57 \cdot 10^7$	$3,19 \cdot 10^7$

Tabelle 5.2: Mikroskopische Partikelsteifigkeiten der Partikel in Normalenrichtung  $k^n \left[ \frac{N}{m} \right]$ 

Test Nr.	1	2	3	4
112 Partikel	$3,54 \cdot 10^8$	$2,57 \cdot 10^8$	$1,54 \cdot 10^8$	$5,13 \cdot 10^7$
855 Partikel	$1,71 \cdot 10^8$	$1,28 \cdot 10^8$	$7,67 \cdot 10^7$	$2,55 \cdot 10^7$
6524 Partikel	$8,79 \cdot 10^7$	$6,38 \cdot 10^7$	$3,83 \cdot 10^7$	$1,27 \cdot 10^7$

Tabelle 5.3: Mikroskopische Partikelsteifigkeiten der Partikel in Tangentialrichtung  $k^t \left[ \frac{N}{m} \right]$ 

nung als  $\sigma_c$ . Die Wandelemente werden durch einen Servomechanismus kontrolliert, durch den sie eine konstante Spannung auf die Probe übertragen, bis ein ausreichendes Gleichgewicht zwischen Wandelementen und Partikeln erreicht ist.

Im nächsten Schritt wird nur noch die Spannung des zylindrischen Wandelements konstant bei  $\sigma_c = -1e7 \frac{N}{m^2} = \text{konst.}$  gehalten, während die normal zur Achse angeordneten Wandelemente die Probe nun belasten. Dafür werden sie mit einer vorgegebenen Geschwindigkeit aufeinander zubewegt, was dazu führt, dass die Spannung  $\sigma_1$  vergrößert wird. Die Belastungsgeschwindigkeit hängt von der gewählten Verformungsgeschwindigkeit an, die in diesem Versuch zu  $\dot{\varepsilon}_a = 1,0 \frac{m}{s}$  festgelegt wird.

Neben den Verformungen und Spannungen der Wandelemente wird auch die Deviatorspannung, die sich aus  $\sigma_d = \sigma_1 - \sigma_c$  ergibt, ständig aufgezeichnet. Bei Materialversagen sinkt die Deviatorspannung ab und sobald die Bedingung  $|\sigma_d| < \alpha |\sigma_d|_{\max}$  eingehalten wird, wird der Versuch beendet. Hier wird  $\alpha = 0,8$  gesetzt.

Aus dem Triaxialversuch können die makroskopischen elastischen Materialkonstanten wie folgt abgeleitet werden:

$$E = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a} \quad , \quad (5.22)$$

$$\nu = -\frac{\Delta \varepsilon_x}{\Delta \varepsilon_a} \quad (5.23)$$

Hierbei bezeichnen  $\sigma_a$  und  $\varepsilon_a$  die Spannung und Dehnung in achsialer Richtung, während die senkrecht dazu stehenden Dehnungen  $\varepsilon_x$  genannt werden. Aus der Anwendung der Methode der diskreten Elemente können diese Werte auf drei unterschiedliche Arten ermittelt werden, einmal werden die Werte aus den Wand-Elementen abgeleitet, einmal aus den Partikeln und schließlich aus der Verwendung sogenannter *Measurement Spheres*:

1. *Wall-Based*:

Die Kräfte und Verschiebungen der Wand-Elemente werden beobachtet. Aus diesen können die benötigten Spannungen und Dehnungen berechnet werden.

2. *Specimen-Based*:

Die aus Partikeln zusammengesetzte Probe (engl.: Specimen) wird beobachtet. Die in

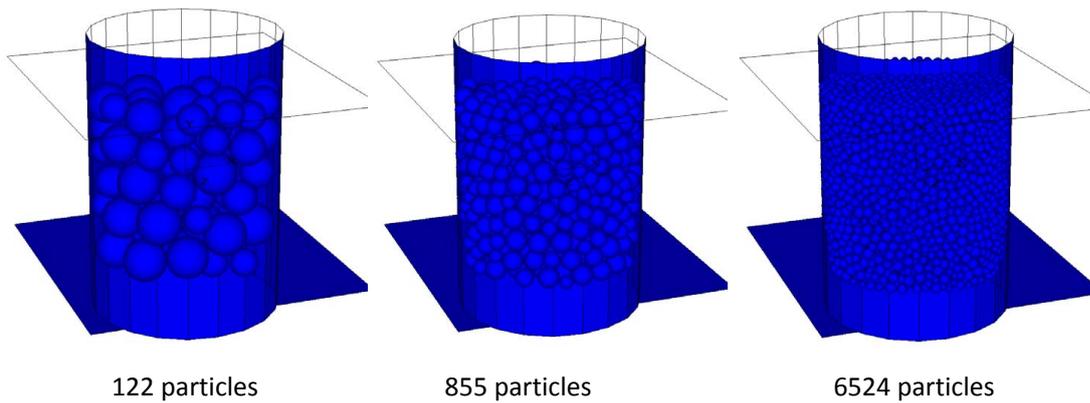


Abbildung 5.2: Probenkörper mit den drei unterschiedlichen, betrachteten Partikelradien

den Randpartikeln auftretenden Kräfte und Verschiebungen werden zur Berechnung der elastischen Konstanten herangezogen.

### 3. *Measurement-Sphere-Based:*

Drei kugelförmige Messbereiche (engl.: Measurement Sphere) werden innerhalb der Probe angeordnet. Je eine befindet sich im oberen und unteren Bereich, eine in auf mittlerer Höhe. Die in diesen Bereich auftretenden Kräfte und Verschiebungen werden gemittelt und daraus die Spannungen und Dehnungen berechnet.

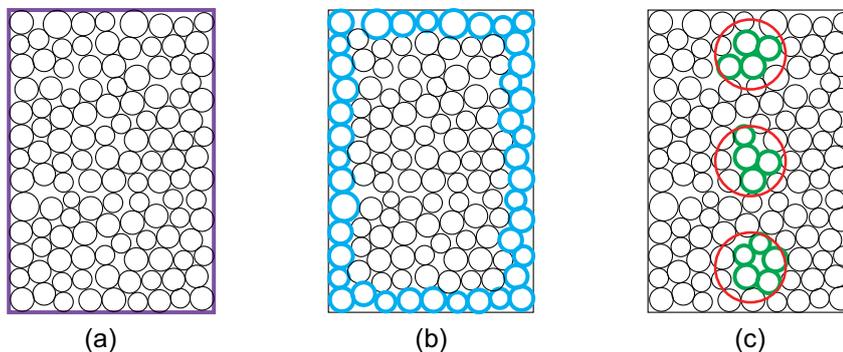


Abbildung 5.3: Die drei unterschiedlichen Arten, Kräfte und Verschiebungen im DEM-Triaxialversuch zu messen: (a) Wall-Based, (b) Specimen-Based, (c) Measurement-Sphere-Based

Die unterschiedlichen Arten, Werte für Spannungen und Dehnungen aus dem DEM-Triaxialversuch zu ermitteln, werden in Abbildung 5.3 vereinfacht gezeigt. Die jeweils verwendeten Elemente sind hier farblich markiert.

Der Test wird beendet, wenn eines der beiden festgelegten Abbruchkriterien erreicht wird:

1. Das erste Kriterium wird zumeist bei Proben erreicht, in denen die Partikel durch Bonds miteinander verbunden sind. Hier steigt die Spannung bis zu einem Maximum  $|\sigma_{d,\max}|$ , bevor die Bonds zu brechen beginnen und Materialversagen auftritt. Im folgenden sinkt die Deviatorspannung wieder ab. Der Versuch wird abgebrochen, sobald die Spannung  $\sigma_d < 0,8\sigma_{d,\max}$  erreicht, also nur noch 80% der Maximalspannung

aufgenommen werden können.

- Bei granularem Material kommt es üblicherweise zu einer Verfestigung, sodass oft keine eindeutige Spannungsspitze und vor allem kein Abfall der Kurve verzeichnet werden kann. In diesem Fall wird die Simulation beendet, sobald eine achsiale Dehnung von 1% erreicht wird, wenn also gilt:  $\varepsilon_a = 0,01$ .

Weiterhin werden auch die Zahlenwerte für die maximal erreichte Deviatorspannung  $\sigma_{d,max}$  und, im Falle von Bonds, diejenige Spannung, bei der zuerst Versagen von Bonds eintrat,  $\sigma_{d,ci}$  aufgezeichnet.

### Koordinationszahl

Die Koordinationszahl  $\rho_c$  wird entsprechend der Gleichung

$$\rho_c = \frac{n_c}{V} \quad (5.24)$$

ermittelt, wobei  $n_c$  die Anzahl der Kontaktpunkte und  $V$  das Probenvolumen bezeichnen. Die Kontaktpunkte innerhalb der Probe werden hierbei direkt aus dem DEM-Modell ermittelt, als Probenvolumen wird der durch Wandelemente eingeschlossene Raum angesehen.

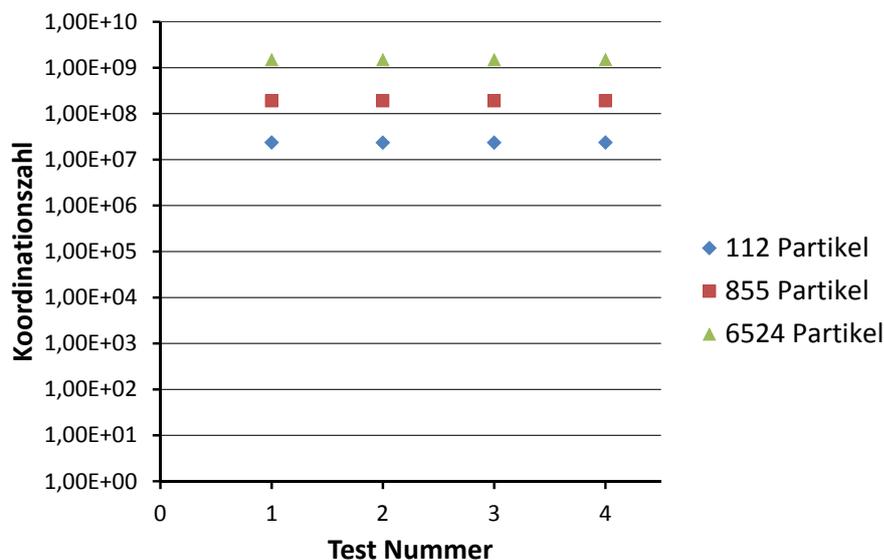


Abbildung 5.4: Die Koordinationszahl in den verschiedenen Diskretisierungen des Triaxialversuchs

Wie in Abbildung 5.4 gezeigt, hat die Koordinationszahl in den hier betrachteten Triaxialversuchen eine Größenordnung von etwa  $1 \cdot 10^7$  bis  $2 \cdot 10^9$ . Mit größer werdender Partikelanzahl steigt auch die Koordinationszahl, da sie bei wie hier konstantem Probenvolumen lediglich von der Anzahl der Kontaktpunkte abhängt, siehe Gleichung 5.24. Wird die gleiche Partikelanzahl betrachtet, bleibt jedoch auch die Anzahl der Kontakte und damit auch die Koordinationszahl in etwa konstant. Auch über die Dauer des quasi-statischen Triaxialversuchs ändert sich die Koordinationszahl nur geringfügig, wie in Abbildung 5.5 beispielhaft für einen Versuchsdurchgang mit 6524 Partikeln gezeigt wird.

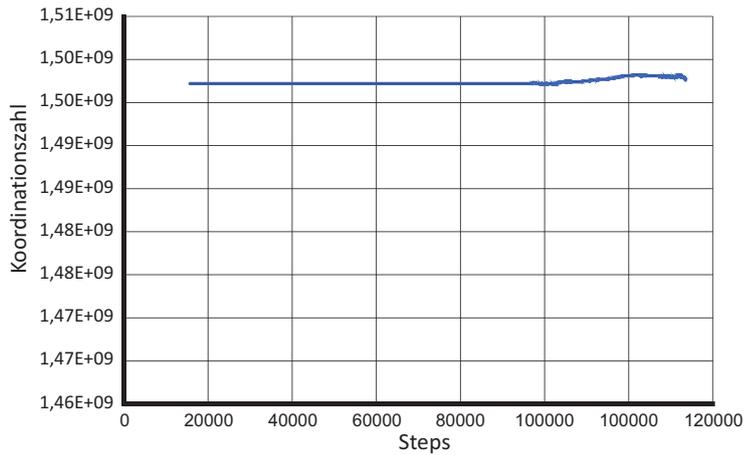


Abbildung 5.5: Die Entwicklung der Koordinationszahl über die Dauer eines Triaxialversuchs mit 6524 Partikeln

#### 5.4.2 Ergebnisse

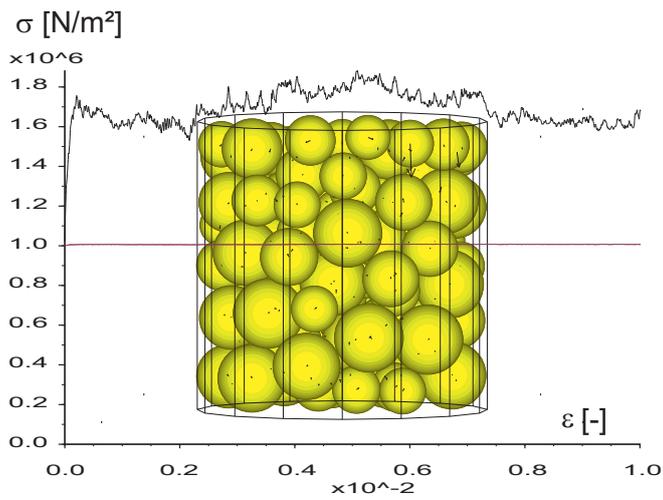
In diesem Kapitel wird die Validierung der in Kapitel 5.3 vorgestellten Identifikation der Kontaktparameter beschrieben. Hierzu werden nach den Gleichungen 5.20 erhaltenen Werte für den Elastizitätsmodul und die Poissonzahl mit jenen verglichen, die sich aus der Simulation des Triaxialtests mit der DEM, wie in Kapitel 5.4.1 beschrieben, ergeben. Wie bereits erwähnt, werden dafür insgesamt zwölf Triaxialtests simuliert, jeweils vier mit einer konstanten Partikelanzahl (112, 855 und 6524), bei denen jeweils die Partikelsteifigkeit variiert wird. Das Verhältnis von Partikelsteifigkeit in Normalenrichtung zu Partikelsteifigkeit in Tangentialrichtung bleibt in allen Simulationen konstant bei 2,5.

Die in den Gleichungen 5.20 benötigten Eingangsparameter werden aus dem entsprechenden numerischen Versuch entnommen. Dies sind also die gemittelten Werte für die Kontaktsteifigkeiten  $c^n$ ,  $c^t$ , die wie bereits erläutert nach dem linearen Kontaktmodell aus den Partikelsteifigkeiten bestimmt werden, sowie den mittleren Partikelradius  $r$ . Die Koordinationszahl wird wie in 5.4.1 beschrieben ebenfalls aus der Numerik abgeleitet.

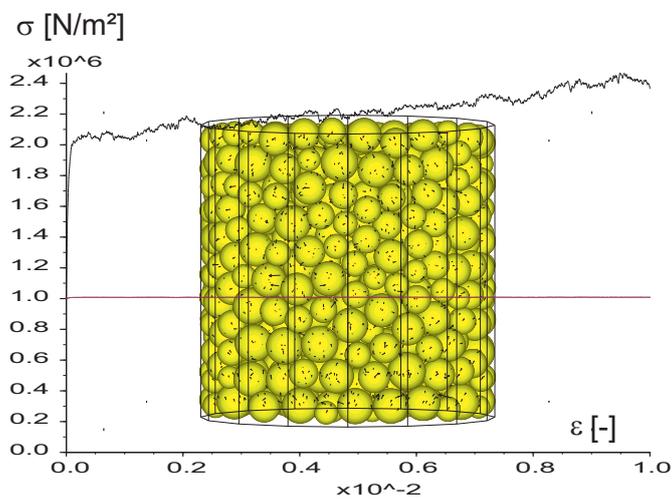
#### Spannungs-Dehnungslinien

Aus den unterschiedlich diskretisierten Triaxialversuchen ergeben sich die in Abbildung 5.6 dargestellten Spannungs-Dehnungs-Linien. Die Grafiken zeigen zusätzlich auch die sich ergebende Partikelanordnung, die jedoch kaum von der Anfangskonfiguration aus Abbildung 5.2 abweicht.

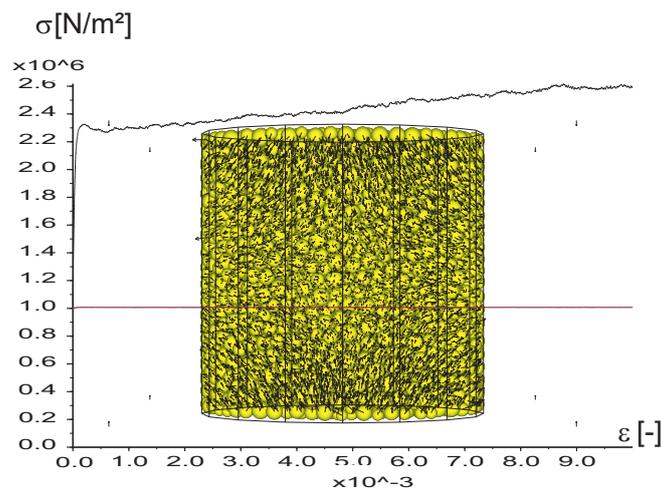
Gezeigt wird einmal die Spannungs-Dehnungs-Kurve der Umfangsrichtung in blau, sowie diejenige in axialer Richtung in schwarz. In Umfangsrichtung wird die Spannung trotz sich ändernder Dehnung konstant gehalten, wie es den Randbedingungen des Triaxialtests entspricht.



(a) Spannungs-Dehnungs-Kurve aus dem Triaxialtest mit 112 Partikeln



(b) Spannungs-Dehnungs-Kurve aus dem Triaxialtest mit 855 Partikeln



(c) Spannungs-Dehnungs-Kurve aus dem Triaxialtest mit 6524 Partikeln

Abbildung 5.6: Die Spannungs-Dehnungslinien zum Ende der Versuchsdauer für unterschiedliche Diskretisierungen (jeweils Test Nr. 3)

Auch die Kurven für die achsiale Richtung zeigen alle ähnliche Charakteristika, wobei die Spannungs-Dehnungs-Kurve glatter wird, je mehr Partikel verwendet werden, da der Einfluss eines einzelnen Partikels dann immer geringer wird. So zeigen alle Proben zunächst ein elastisches Verhalten, indem die Kurve linear vom Ausgangszustand  $\sigma_a = \sigma_u$  aus ansteigt. An den elastischen Bereich schließt sich eine Spannungsspitze an (besonders ausgeprägt in Abbildung 5.6(c)). Nach einem kurzen Abfall der Kurve folgt eine Phase der Verfestigung, bis der Versuch, wie in Kapitel 5.4.1 erläutert, bei einer achsialen Dehnung von 1% abgebrochen wird.

### Elastizitätsmodul

Nun werden die Ergebnisse für den Elastizitätsmodul verglichen, welche in Abbildung 5.7 dargestellt werden. Für jeden einzelnen Versuch wird der Elastizitätsmodul entsprechend der Parameteridentifikation nach Gleichung 5.20 ermittelt, in der Grafik mit einem roten Punkt markiert und mit  $E_{PI}$  bezeichnet. Dieser Wert wird verglichen mit jenen aus der DEM-Simulation. Hier werden die zuvor beschriebenen drei unterschiedlich ermittelten Werte mit verschiedenen Symbolen und Farben dargestellt. Der Elastizitätsmodul nach der Methode *Wall-Based* mit einem violetten Quadrat, *Specimen-Based* mit einer blauen Raute und *Measurement-Sphere-Based* mit einem grünen Dreieck.

Werden zunächst nur die Prognosen nach der Parameteridentifikation betrachtet, fällt auf, dass die Werte des Elastizitätsmoduls mit einer höheren Versuchsnummer abnehmen. Dies liegt daran, dass die Werte für die Partikelsteifigkeiten mit jedem weiteren Versuch verringert werden.

In jeder Grafik werden die Ergebnisse für vier unterschiedliche Versuchsdurchläufe bei konstanter Partikelanzahl dargestellt. Die Partikelsteifigkeiten sind so gewählt, dass sich für die gleiche Versuchsnummer etwa der gleiche Wert für den Elastizitätsmodul ergibt, unabhängig von der betrachteten Partikelanzahl.

Abbildung 5.7(a) zeigt die Ergebnisse für die Triaxialtests mit 112 Partikeln. Es fällt auf, dass in allen vier Versuchen der prognostizierte Wert zwischen jenem mit der *Measurement-Sphere-Based* Methode ermittelten und jenen, die von der Probe, bzw den Begrenzungselementen, abhängen, liegt. Die Werte, die für den Elastizitätsmodul nach der *Wall-Based* und *Specimen-Based* Methode ausgegeben werden, sind nahezu identisch. Sie liegen in allen Versuchen deutlich unterhalb des prognostizierten Wertes, während die Methode *Measurement-Sphere-Based* den erwarteten Wert übertrifft.

Für eine Erhöhung der Partikelanzahl auf 855 sind die sich ergebenden Werte für den Elastizitätsmodul in Abbildung 5.7(b) dargestellt. Sämtliche numerisch ermittelten Werte nähern sich nun stark den prognostizierten an. Besonders gut ist die Übereinstimmung mit den Werten aus der Parameteridentifikation bei jenen, die mit Hilfe der *Measurement Spheres* ermittelt werden. Diese Beobachtung bleibt auch für eine weitere Erhöhung der Partikelanzahl auf 6524, deren Ergebnisse in Abbildung 5.7(c) gezeigt werden, bestehen.

Es kann daher festgehalten werden, dass die *Measurement Spheres* Werte liefern, die am Besten mit jenen nach der Parameteridentifikation ermittelten Elastizitätsmodulen übereinstimmen. Dies liegt vor allem daran, dass hier kein direkter Einfluss der Wandelemente

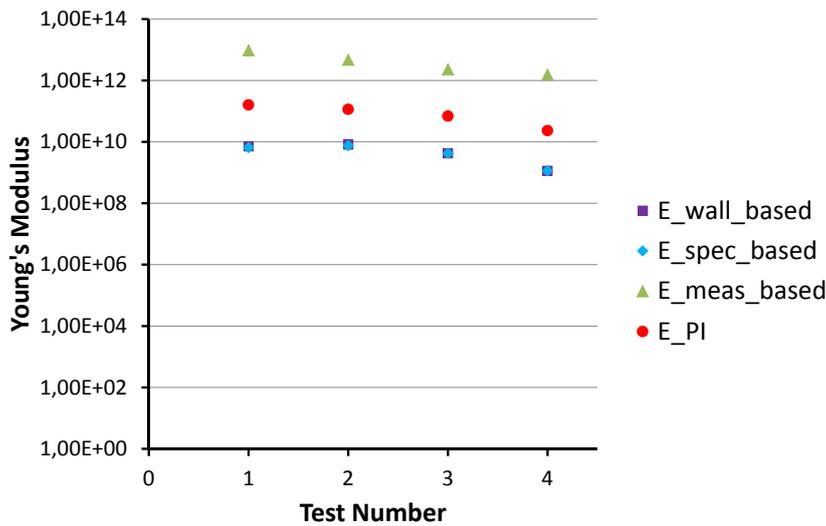
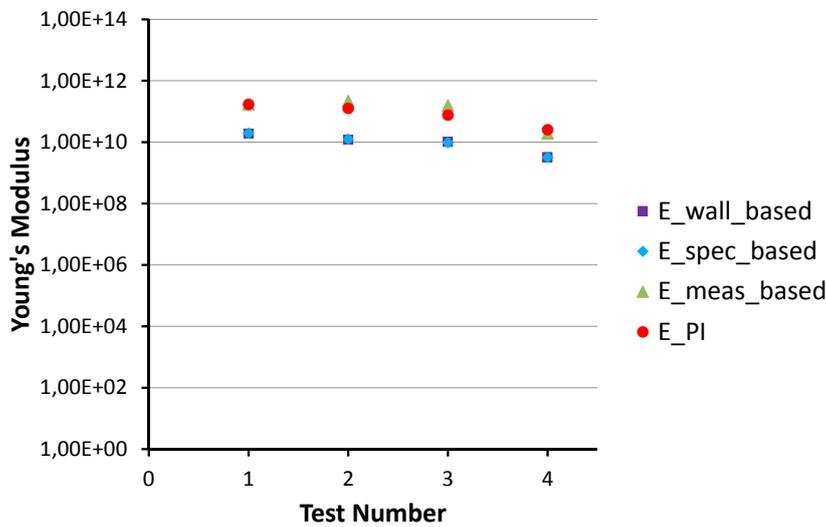
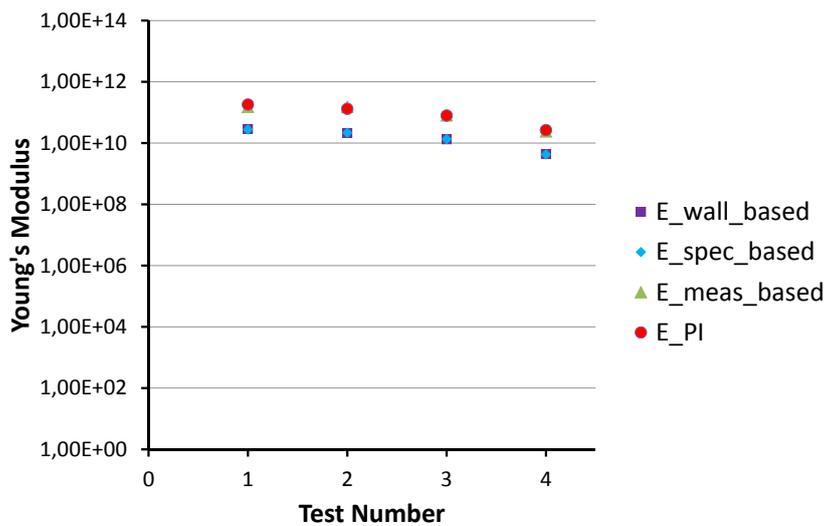
(a) Elastizitätsmoduli  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Triaxialtest mit 112 Partikeln(b) Elastizitätsmoduli  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Triaxialtest mit 855 Partikeln(c) Elastizitätsmoduli  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Triaxialtest mit 6524 Partikeln

Abbildung 5.7: Elastizitätsmoduli für jeweils vier unterschiedliche Kontaktsteifigkeiten, Ergebnisse der dreidimensionalen Triaxialtests im Vergleich mit dem Wert entsprechend der Parameteridentifikation

gegeben ist, was der Annahme in der Parameteridentifikation entspricht. Nur für eine sehr grobe Diskretisierung der Probe ergeben sich hier zu hohe Zahlenwerte. Dies liegt daran, dass die Kontaktkräfte bei einer geringen Partikelzahl schlecht verteilt sind, es also große Unterschiede gibt. Besonders in den Randbereichen und speziell am oberen und unteren Wandelement, über die die Verformung aufgebracht wird, ergeben sich hohe Werte in den Kontaktkräften, wie in Abbildung 5.8 dargestellt wird. Hier werden die Kontaktkräfte in Normalenrichtung durch Linien symbolisiert, die mit steigendem Wert dicker dargestellt werden. Da das Material hier als Granulat betrachtet wird, handelt es sich ausschließlich um Druckkräfte.

Es fällt auf, dass die Kontaktkräfte bei einer geringen Partikelanzahl stark untereinander variieren, während sie bei einer höheren Anzahl immer homogener verteilt werden. So sind in einer groben Diskretisierung die erhöhten Kontaktkräfte in den Randbereichen in den *Measurement Spheres* überrepräsentiert, was in einer Überschätzung der achsialen Spannung und so auch in einem zu großen Wert für den Elastizitätsmodul resultiert.

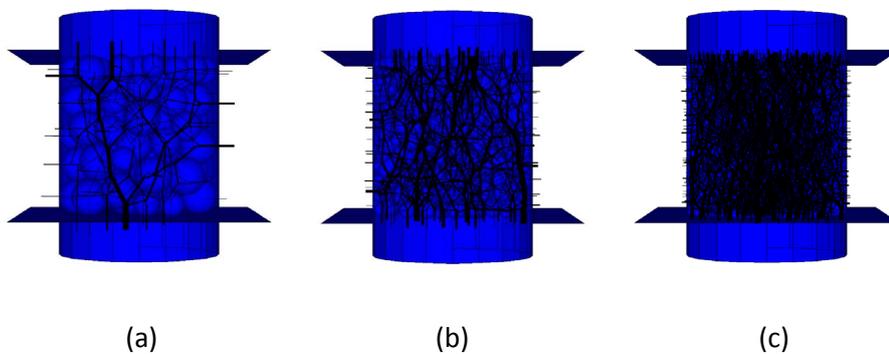


Abbildung 5.8: Darstellung der Kontaktkräfte in Normalenrichtung

Bei einer erhöhten Partikelanzahl auf hier 855 Partikel spielt dieser Effekt wegen der gleichmäßigeren Verteilung der Kontaktkräfte jedoch bereits keine Rolle mehr. Da die Ergebnisse hier bereits sehr überzeugend sind, und auch eine weitere Verfeinerung auf insgesamt 6524 Partikel keine wesentliche Änderung der Werte bewirkt, kann davon ausgegangen werden, dass für den dargestellten Triaxialversuch die Verwendung von 855 Partikeln ausreichend ist.

Desweiteren wird deutlich, dass die Übereinstimmung zwischen den Elastizitätsmoduli, die die Parameteridentifikation nach Kapitel 5.3 ergibt, und jenen, die numerisch mit *Measurement Spheres* ermittelt werden, sehr gut ist. Hieraus wird geschlossen, dass das hier beschriebene Verfahren zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls von granularen Medien für DEM-Simulationen geeignet ist. Die erweiterte Anwendbarkeit auf Medien, die mit durch Bonds verbundene Partikel beschrieben wird, wird in Kapitel 5.6 untersucht.

### Querkontraktionszahl

Nachdem zunächst der Elastizitätsmodul aus den Triaxialversuchen ausgewertet und mit den Werten nach der Parameteridentifikation verglichen wurde, soll nun die Querkontraktions- oder Poissonzahl betrachtet werden. Das Vorgehen entspricht dem für den Elastizitätsmodul, die Ergebnisse sind in Abbildung 5.9 dargestellt. Es werden die gleichen Versuche

ausgewertet, sodass wieder drei Partikelgrößen mit jeweils vier unterschiedlichen Kontaktsteifigkeiten der Partikel betrachtet werden. Da das Verhältnis der Partikelsteifigkeiten in Normalenrichtung zu jener in Tangentialrichtung sich nicht ändert, ergibt sich für jeden Versuch der gleiche Wert für die Querkontraktionszahl nach der Parameteridentifikation (vergleiche Gleichung 5.20).

Da die numerischen Ergebnisse aus den *Measurement Spheres* für den Elastizitätsmodul die beste Übereinstimmung mit der Prognose ergaben, werden diese auch für die Poissonzahl zuerst betrachtet. Bei einer geringen Partikelzahl liegen die Werte deutlich unter dem erwarteten Wert. Wird die Zahl der Partikel auf 855 erhöht, ergibt sich jedoch für alle Versuche bereits eine sehr gute Übereinstimmung mit den Werten nach der Parameteridentifikation. Eine weitere verfeinerte Diskretisierung (auf 6524 Partikel) verbessert die Übereinstimmung weiter, allerdings erscheint jene aus der mittleren Diskretisierung bereits ausreichend gut.

Die Querkontraktionszahlen, die mit Hilfe der *Wall-Based* Methode ermittelt werden, liegen bereits bei der groben Diskretisierung in der gleichen Größenordnung wie die erwarteten, überschätzen diese allerdings. Auch sie nähern sich mit einer Verfeinerung der Diskretisierung den prognostizierten Werten an, kommen aber nie zu einer so guten Übereinstimmung wie jene nach der *Measurement-Sphere* Methode.

Die *Specimen-Based* Methodik erweist sich in einer groben Diskretisierung als völlig unbrauchbar zur Bestimmung der Querkontraktionszahl. Sie gibt hier für drei von vier Versuchen einen negativen Wert aus, was physikalisch keinen Sinn macht, wie in Kapitel 2.2.3 erläutert wurde. In diesem Kontext erscheint die gute Übereinstimmung bei Versuch Nummer 3 eher zufällig zu sein. Auch hier verbessern sich die Werte jedoch erwartungsgemäß mit einer verfeinerten Diskretisierung. Bei der Verwendung von 6524 Partikeln nähern sich die Werte auch hier gut den prognostizierten an.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass die Parameteridentifikation auch für die Querkontraktionszahl funktioniert, da sich die numerischen Werte den prognostizierten immer besser annähern, je feiner die Diskretisierung wird. Wie auch schon für den Elastizitätsmodul ist auch für die Querkontraktionszahl eine mittlere Diskretisierung ausreichend, wenn die Werte mit Hilfe der *Measurement Spheres* ermittelt werden.

## 5.5 Untersuchung der elastischen Konstanten im zweidimensionalen Raum

Die in den Kapiteln 5.2 und 5.3 beschriebene Vorgehensweise lässt sich auch auf zweidimensionale Probleme übertragen. Diese haben in der Anwendung der DEM eine besondere Bedeutung, da die Rechenzeiten bei dieser Methode besonders ins Gewicht fallen und somit die Reduktion von drei auf zwei Dimensionen auch einen besonders großen Effekt hat. In Kapitel 5.5.1 wird daher zunächst kurz die Herleitung der Relation zwischen elastischen Konstanten und Kontaktparametern dargestellt, bevor sie dann in Kapitel 5.5.2 anhand von simulierten Biaxialversuchen validiert wird.

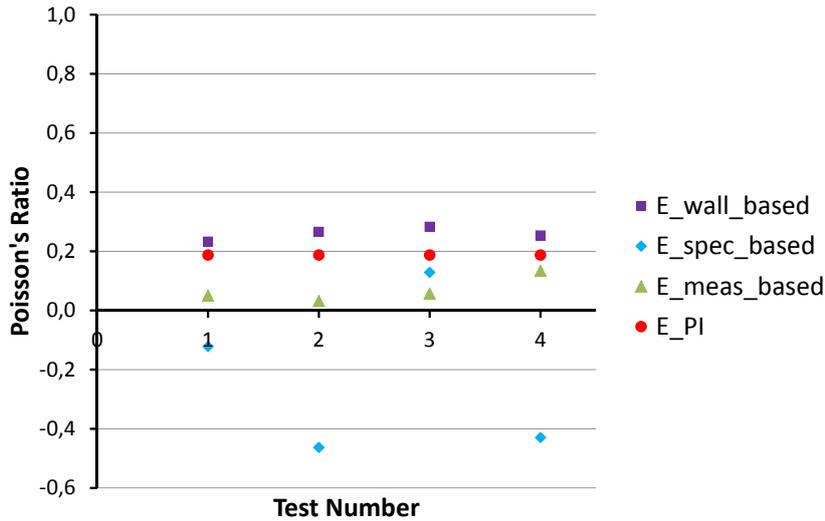
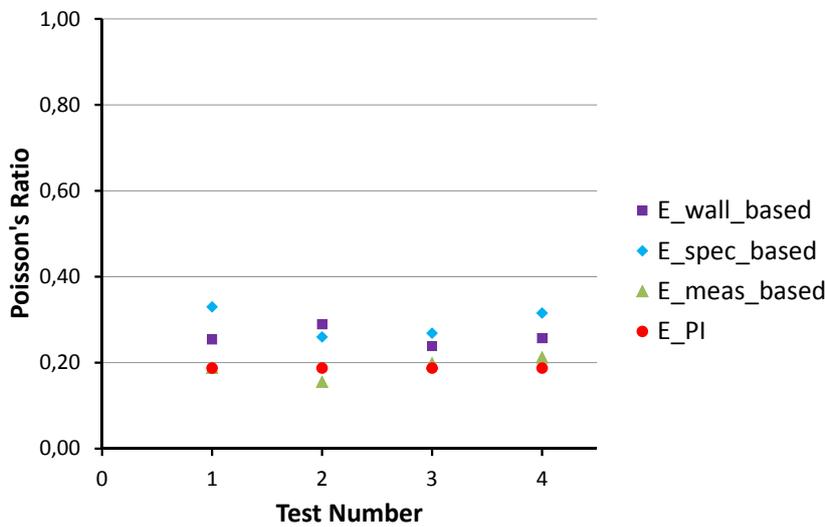
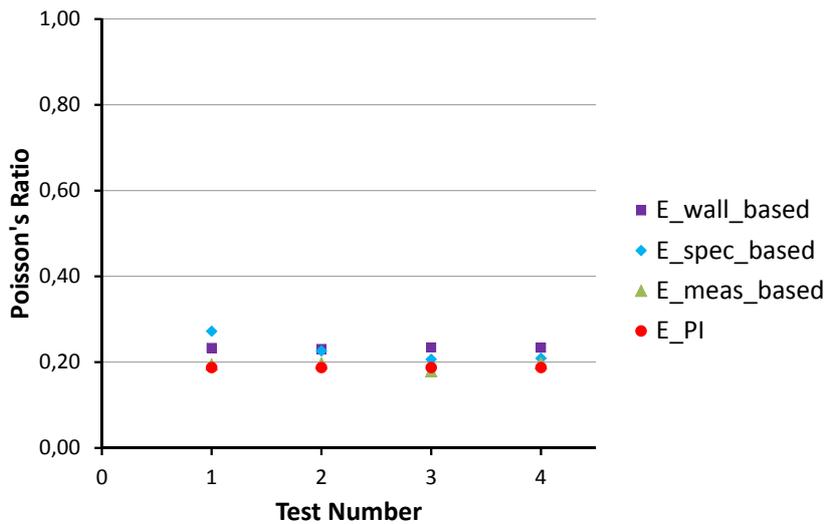
(a) Querkontraktionszahlen  $[-]$  aus dem Triaxialtest mit 112 Partikeln(b) Querkontraktionszahlen  $[-]$  aus dem Triaxialtest mit 855 Partikeln(c) Querkontraktionszahlen  $[-]$  aus dem Triaxialtest mit 6524 Partikeln

Abbildung 5.9: Querkontraktionszahlen für jeweils vier unterschiedliche Kontaktsteifigkeiten, Ergebnisse der dreidimensionalen Triaxialtests im Vergleich mit dem Wert entsprechend der Parameteridentifikation

### 5.5.1 Ermittlung der elastischen Konstanten

Die Überlegungen zum mikroskopischen Potential, die in Kapitel 5.1 angestellt wurden, gelten für den zweidimensionalen Fall genauso wie für den dreidimensionalen. Auch die Zusammensetzung der Kontaktverschiebung aus elastischem, inelastischen und rotatorischen Anteil bleibt bestehen. Weiterhin werden auch hier für die Kontaktpotentiale Federn angenommen, sodass sie jenen in Gleichung 5.5 entsprechen.

Die ersten Unterschiede ergeben sich in der Ermittlung des Durchschnitts über alle Richtungen. Während in Gleichung 5.7 eine Einheitskugel betrachtet wird, ist im zweidimensionalen Fall die Reduktion auf einen Einheitskreis erforderlich. So ergibt sich das Mittel über alle Richtungen einer Menge  $\mathbf{f}$  zu

$$\langle \mathbf{f} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{A}^2} \mathbf{f}(\mathbf{n}) \, dA. \quad (5.25)$$

Analog dazu wird natürlich auch  $\rho_c$  nicht mehr als die Anzahl der Kontakte je Einheitsvolumen bezeichnet, sondern bezieht sich nun auf eine Einheitsfläche.

$$\rho_c = \frac{c}{2} \frac{1 - \eta}{4\pi r^2}. \quad (5.26)$$

Wird mit diesen geänderten Eingangswerten wieder die makroskopische freie Energie aufgestellt und minimiert, wie in Kapitel 5.3 detailliert beschrieben, ergeben sich die folgenden Relationen zwischen Kontaktparametern und elastischen Konstanten:

$$E = 8 \frac{\rho_c r^2}{h} \left( \frac{3}{c^n} + \frac{1}{c^t} \right)^{-1}, \quad \nu = \frac{c^n - c^t}{c^n + 3c^t}, \quad (5.27)$$

Aus Gründen der Einheitenkonsistenz wird der zusätzliche Parameter  $h$  eingeführt. Er bezeichnet die Dicke der Partikelschicht.

### 5.5.2 Biaxialversuch

Wie bereits in Kapitel 5.4 die Ergebnisse der dreidimensionalen Parameteridentifikation überprüft wurden, werden hier nun die Ergebnisse aus Gleichung 5.27 validiert. Hierfür wird ein sogenannter *Biaxialversuch* in der DEM aufgebaut. Dieser entspricht einem Triaxialversuch mit einer reduzierten Dimension. Den Partikeln werden nur Verschiebungen in  $x$ - und  $z$ -Richtung sowie Verdrehungen um die  $y$ -Achse erlaubt, alle anderen Freiheitsgrade werden blockiert. Das obere und das untere Wandelement bringen eine definierte Verformung auf die Probe, das linke und das rechte Wandelement halten die Spannung in  $x$ -Richtung konstant. Die Modellbildung verläuft analog zu der in Kapitel 5.4.1 beschriebenen Vorgehensweise.

Die gewählte Probe ist in ihrer Ausgangslage quadratisch mit einer Seitenlänge von  $30\text{cm}$ . Der Versuch wird wieder mit unterschiedlichen Radien gefahren, was in Partikelzahlen von 25, 100 und 400 resultiert. Die jeweiligen Proben sind in Abbildung 5.10 dargestellt. Während des Versuchs werden die Kräfte und Verschiebungen gemessen und in Spannungen und Dehnungen umgerechnet. Hieraus können der Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl berechnet werden. Wie auch im dreidimensionalen gibt es auch hier für jeden Fall drei verschiedene Methoden, diese zu ermitteln: Die *Wall-based*, die *Specimen-based* und die *Measurement-Sphere-based* Method. Diese werden in Kapitel 5.4.1 detailliert erläutert.

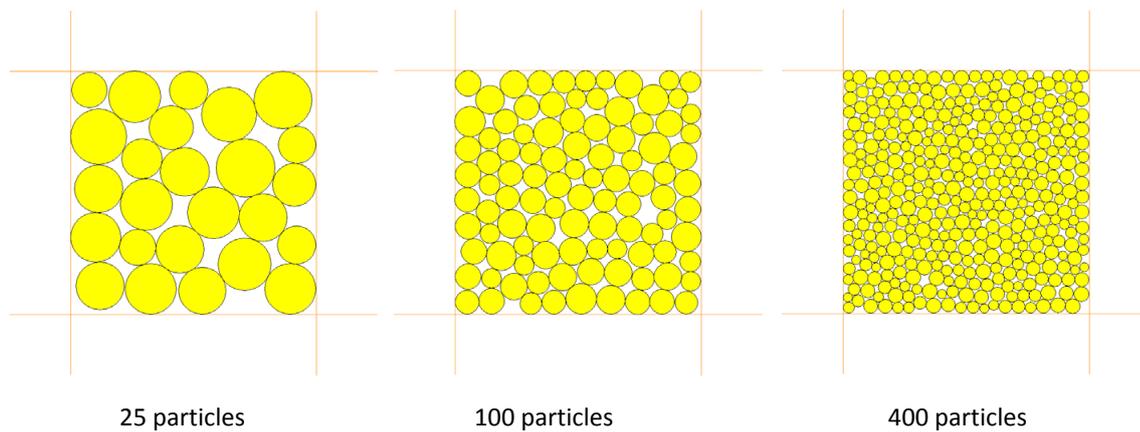


Abbildung 5.10: Zweidimensionaler Probenkörper für den Biaxialtest, mit drei verschiedenen Radien

### Ergebnisse Elastizitätsmodul

Abbildung 5.11 zeigt die Ergebnisse für den Elastizitätsmodul. Die roten Punkte markieren jeweils den Wert, der für die jeweiligen Kontaktparameter und Partikelradii, aus der Parameteridentifikation nach Gleichung 5.27 ermittelt wird. Die anderen Werte werden durch die DEM-Simulation ermittelt und dienen als Vergleichswerte. Wie zuvor steht das grüne Dreieck für die Ermittlung der elastischen Konstanten mit *Measurement Spheres*, der mit dem violetten Rechteck markierte Wert wird *Wall-based* ermittelt, die blaue Raute steht für die *Specimen-based* Methodik.

Bereits bei einer sehr groben Diskretisierung mit nur 25 Partikeln wird eine gute Übereinstimmung zwischen den prognostizierten Werten für den Elastizitätsmodul und den mit Hilfe von *Measurement Spheres* numerisch ermittelten. Werden mehr Partikel verwendet, liegen die Werte sogar noch näher zusammen. Beide anderen numerischen Verfahren errechnen in sämtlichen Versuchen einen niedrigeren Wert für den Elastizitätsmodul als prognostiziert. Sie nähern sich jedoch mit steigender Partikelanzahl dem prognostizierten Wert an. Daraus wird, wie auch schon im dreidimensionalen Fall, geschlossen, dass die Parameteridentifikation eine sehr gute Abschätzung des Elastizitätsmoduls liefert.

### Ergebnisse Querkontraktionszahl

In diesem Abschnitt wird die in Gleichung 5.27 analytisch ermittelte Querkontraktionszahl mit den numerischen Ergebnissen abgeglichen. Die Ergebnisse der Biaxialversuche sind in Abbildung 5.12 zusammengefasst. Abgesehen von einer sehr guten Übereinstimmung in Test 1 zwischen dem prognostizierten Wert und dem mit *Measurement Spheres* ermittelten, liegen die mit der DEM ermittelten Zahlenwerte für alle Versuche mit 25 und 100 Partikeln deutlich über den prognostizierten. Daher muss für diesen einen Wert von einer zufälligen Übereinstimmung ausgegangen werden.

Erst eine Verfeinerung der Diskretisierung auf 400 Partikel, dargestellt in Abbildung 5.12(c), bringt eine Annäherung der numerischen Werte an die prognostizierten. Wie bereits im dreidimensionalen Fall, muss auch hier festgestellt werden, dass die Parameteridentifikation für

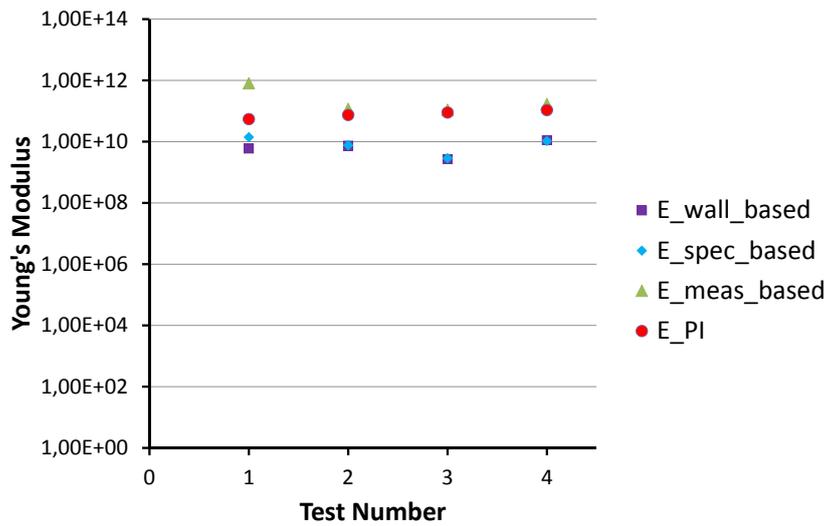
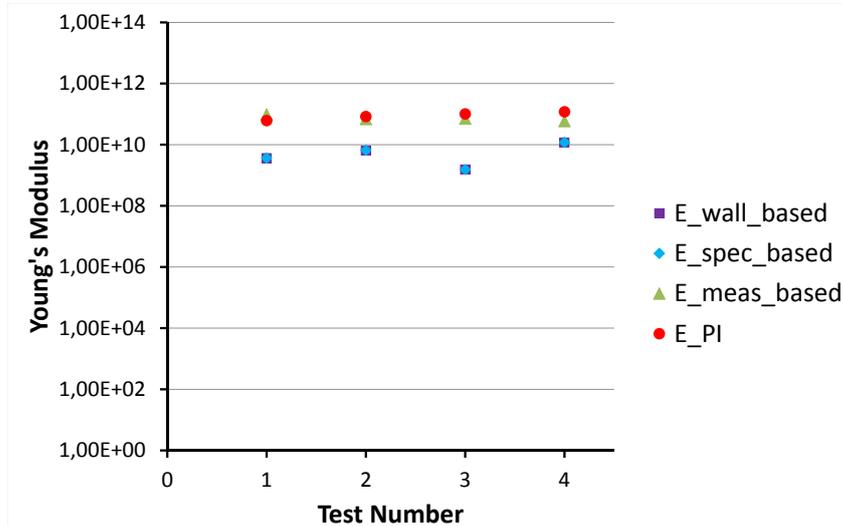
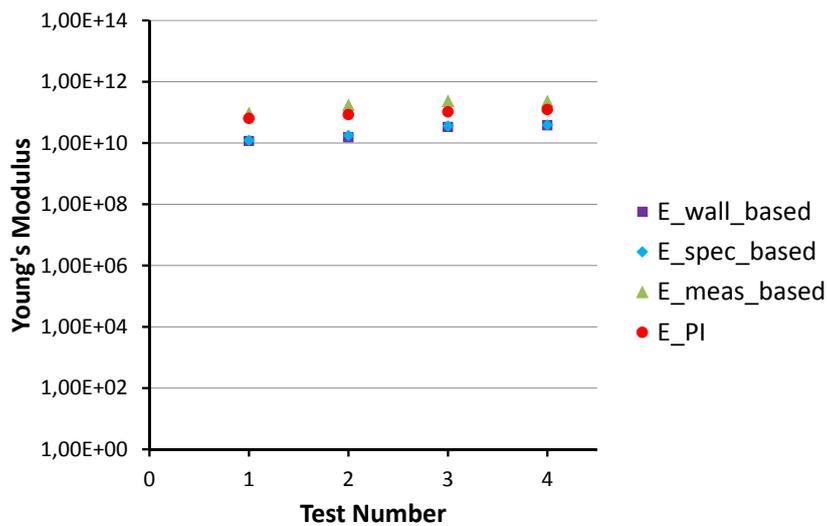
(a) Elastizitätsmoduli  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Biaxialtest mit 25 Partikeln(b) Elastizitätsmoduli  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Biaxialtest mit 100 Partikeln(c) Elastizitätsmoduli  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Biaxialtest mit 400 Partikeln

Abbildung 5.11: Elastizitätsmoduli für jeweils vier unterschiedliche Kontaktsteifigkeiten, Ergebnisse der dreidimensionalen Triaxialtests im Vergleich mit dem Wert entsprechend der Parameteridentifikation

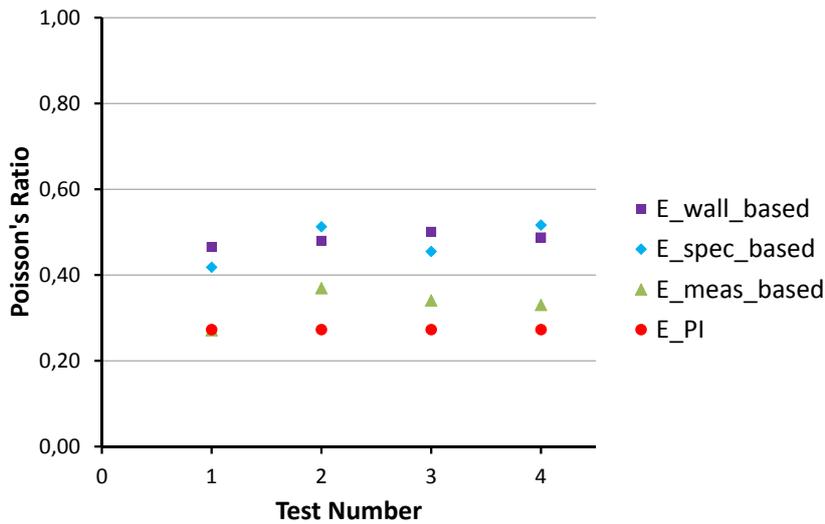
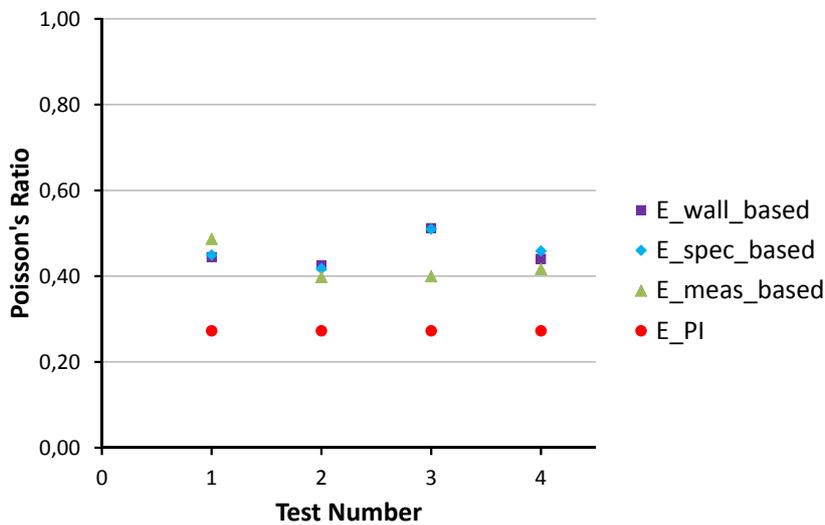
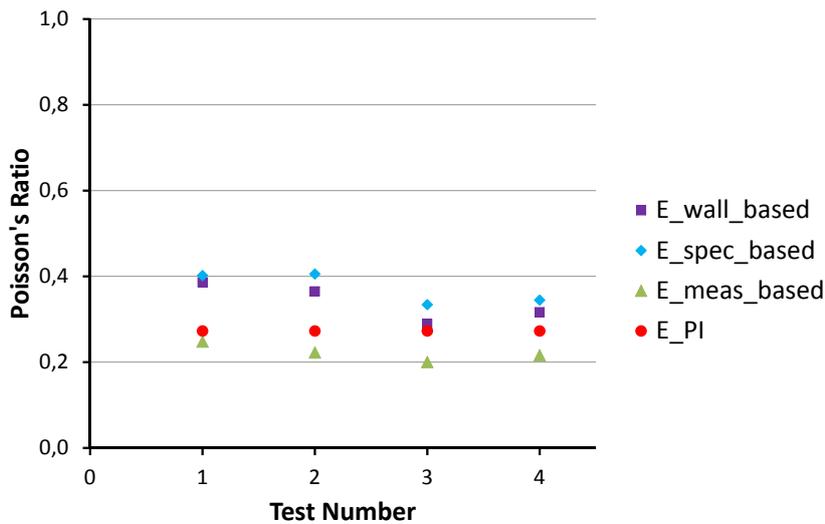
(a) Querkontraktionszahlen  $[-]$  aus dem Biaxialtest mit 25 Partikeln(b) Querkontraktionszahlen  $[-]$  aus dem Biaxialtest mit 100 Partikeln(c) Querkontraktionszahlen  $[-]$  aus dem Biaxialtest mit 400 Partikeln

Abbildung 5.12: Querkontraktionszahlen für jeweils vier unterschiedliche Kontaktsteifigkeiten, Ergebnisse der zweidimensionalen Biaxialtests im Vergleich mit dem Wert entsprechend der Parameteridentifikation

die Querkontraktionszahl zwar gute Werte liefert, um diese numerisch zu bestätigen, werden allerdings deutlich mehr Partikel benötigt als beim Elastizitätsmodul. Im zweidimensionalen Raum ist die Diskrepanz noch stärker ausgeprägt als im dreidimensionalen Fall.

## 5.6 Bonds in tangentialer und normaler Richtung

Für viele Anwendungen der DEM werden Bonds eingesetzt, deren Funktionsweise in Kapitel 4.3.1 beschrieben wird. Durch sie können zwischen den Partikeln auch Zugkräfte aufgenommen werden, was zur Simulation von Feststoffen, aber auch für etwa kohäsive Böden, zwingend erforderlich ist. In Kapitel 5.6.2 soll daher zunächst überprüft werden, ob die für granulares Material gefundenen Zusammenhänge zwischen Kontaktparametern und elastischen Parametern auch für kohäsives Material, bzw. Feststoffe, gilt. Hierfür werden wiederum Triaxialversuche simuliert.

Desweiteren ist es allerdings auch wesentlich, die Stärke der Bonds zu bestimmen. Um dies zu erreichen wird die in den Kapiteln 5.1, 5.2, 5.3 und 5.5.1 vorgestellte Parameteridentifikation erweitert. Die genaue Vorgehensweise wird in Kapitel 5.6.1 beschrieben und anschließend mit Hilfe einer weiteren Auswertung der Triaxialversuche validiert.

### 5.6.1 Verknüpfung mit den Spannungshypothesen nach Tresca und Rankine

In diesem Kapitel soll erläutert werden, wie die Stärke der Bonds in normaler und tangentialer Richtung ebenfalls aus den in Kapitel 5.3 abgeleitet werden können. Dies wird zunächst ausführlich für den dreidimensionalen Fall behandelt, bevor dann kurz auf die Unterschiede, die sich für eine zweidimensionale Betrachtungsweise ergeben, eingegangen wird.

#### 3D

Im dreidimensionalen Fall wird hierfür zunächst Gleichung 5.16 betrachtet, in der die Relativverschiebung im Kontakt beschrieben wird. Aus dieser folgt, dass sich der Verformungsanteil in Normalenrichtung zu

$$u^n = \frac{1}{\rho_c r} \frac{1}{c^n} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (5.28)$$

formulieren lässt. Wird außerdem die aus der Geometrie entstammende Bedingung  $\mathbf{u}^{t,e} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$  verwendet, wird der elastische Anteil der tangentialen Verformung zu

$$\mathbf{u}^{t,e} = \frac{1}{\rho_c r} \frac{1}{c^t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}). \quad (5.29)$$

Diese richtungsabhängigen Verformungen können nun in die Gleichungen 5.6 eingesetzt werden, die den Zusammenhang zwischen Kraft und Verformung beschreiben. Daraus ergibt sich:

$$\mathbf{t}^n = \frac{1}{\rho_c r} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad \mathbf{t}^t = \frac{1}{\rho_c r} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}) \quad (5.30)$$

Hier wird  $\boldsymbol{\sigma}^n = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$  als normaler Anteil eines Spannungsvektors einer Schnittebene mit der Normalen  $\mathbf{n}$  interpretiert,  $\boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$  als tangentialer Anteil dieses Spannungsvektors. So kann Gleichung 5.30 vereinfacht werden:

$$\mathbf{t}^n = \frac{1}{\rho_c r} \boldsymbol{\sigma}^n, \quad \mathbf{t}^t = \frac{1}{\rho_c r} \boldsymbol{\sigma}^t \quad (5.31)$$

Wird nun weiterhin die im Kontakt wirkende Kraft  $\mathbf{t}^n$  im Zugbereich als Stärke der Kontaktverbindung in Normalenrichtung interpretiert, kann sie durch  $f^{n,c}$  ersetzt werden. Das Gleiche gilt analog für die Tangentialrichtung. Nun geben die Gleichungen 5.31 Versagensfälle an, in denen Kontaktversagen entweder ausschließlich in Normalen- oder ausschließlich in Tangentialrichtung stattfindet.

Analog zu den in Kapitel 2.2.5 vorgestellten Versagenshypothesen, kann die Versagensspannung von Kontaktverbindungen in Normalenrichtung als *Rankine-Spannung*  $\sigma_y^{\text{Rankine}}$ , diejenige der Tangentialrichtung als *Tresca-Spannung*  $\sigma_y^{\text{Tresca}}$  verstanden werden. Umgeformt nach den Bondstärken ergibt sich die Beziehung

$$\sigma_y^{\text{Rankine}} = \rho_c r f^{n,c} \quad \sigma_y^{\text{Tresca}} = \rho_c r f^{t,c} \quad (5.32)$$

Bei bekannten Versagensspannungen können aus dieser Gleichung also die Stärken der Bonds sowohl in normaler als auch in tangentialer Richtung ermittelt werden.

## 2D

Auch für zweidimensionale Anwendungen ist eine entsprechende Beziehung vorhanden. Sie unterscheidet sich vom dreidimensionalen Fall nur durch den in Gleichung 5.27 eingeführten Parameter  $h$ , der die Dicke der Partikelschicht im zweidimensionalen kennzeichnet. So ergibt sich

$$\mathbf{t}^n = \frac{h}{\rho_c r} \boldsymbol{\sigma}^n, \quad \mathbf{t}^t = \frac{h}{\rho_c r} \boldsymbol{\sigma}^t, \quad (5.33)$$

mit den normalen und tangentialen Spannungskomponenten:

$$\boldsymbol{\sigma}^n = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\sigma}^t = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}^n \quad (5.34)$$

Die Beziehung zwischen den Versagensspannungen und der normalen und tangentialen Bond-Komponente ergibt sich also zu:

$$\sigma_y^{\text{Rankine}} = \frac{\rho_c r}{h} f^{n,c} \quad \sigma_y^{\text{Tresca}} = \frac{\rho_c r}{h} f^{t,c} \quad (5.35)$$

Aus diesem Zusammenhang können die Stärken der Bonds also für zweidimensionale Simulationen aus bekannten Versagensspannungen ermittelt werden.

### 5.6.2 Triaxialversuch - Untersuchung der elastischen Konstanten

Es soll zunächst überprüft werden, ob die Parameteridentifikation nach Gleichung 5.20 auch für Partikel gilt, die durch Bonds miteinander verbunden werden. Hierfür wird wie in Kapitel 5.4 ein Triaxialversuch simuliert. Der einzige Unterschied besteht darin, dass hier in

Test 1	$f^{n,c} = f^{t,c}$
Test 2	$f^{n,c} = 100 \cdot f^{t,c}$
Test 3	$100 \cdot f^{n,c} = f^{t,c}$

Tabelle 5.4: Verhältnis zwischen normalen und tangentialen Bondstärken in den Simulationen

jedem Kontakt Bonds in normaler und tangentialer Richtung eingefügt werden, nachdem die Partikel ihre endgültige Größe und Position erreicht haben.

Es werden jeweils drei unterschiedliche Tests durchgeführt, bei denen lediglich die Stärken der Bonds variiert werden. Bei Test 1 entspricht die Stärke der Bonds in normaler Richtung jener der Bonds in tangentialer Richtung, es gilt also  $f^{n,c} = f^{t,c}$ . In Test 2 liegt der Fokus auf den Bonds in Normalenrichtung, damit so die Versagenshypothese nach Rankine, vergleiche Gleichung 5.35, verifiziert werden kann. Hier gilt  $f^{n,c} = 100 \cdot f^{t,c}$ . Test 3 dient dem Abgleich der Versagenshypothese nach Tresca, hier werden also die tangentialen Bonds deutlich verstärkt, es gilt  $100 \cdot f^{n,c} = f^{t,c}$ . Diese Unterschiede sind zur besseren Übersichtlichkeit in Tabelle 5.4 zusammengefasst.

Abbildung 5.13 zeigt die Spannungs-Dehnungs-Linien der Triaxialtests mit 6524 Partikeln. Neben den Grafen wird außerdem der Endzustand der Probe dargestellt, wobei die Stellen, an denen Bonds während des Tests versagt haben, markiert werden. Hierbei steht rot für ein Versagen von Bonds in Normalenrichtung, blau für ein Versagen der Tangentialbonds. Versagt jedoch der Bond in einer der beiden Richtungen, wird die Verbindung komplett gebrochen.

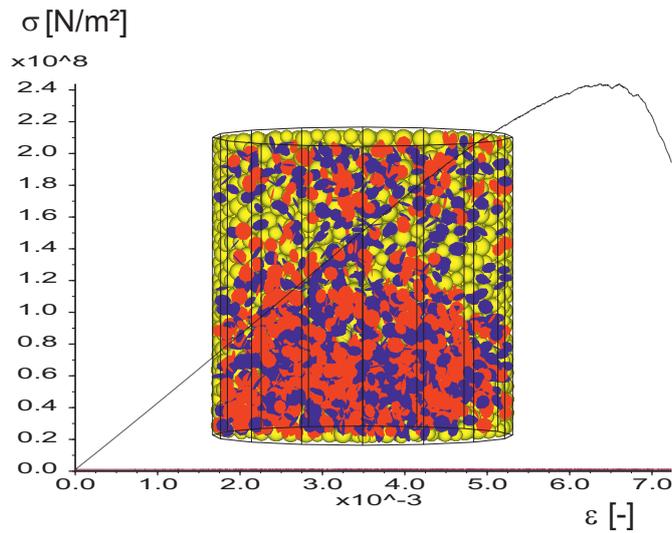
In Abbildung 5.13(a) wird das Ergebnis von Test 1 dargestellt, hier besitzen die Bonds in beiden Richtungen also im Mittel die gleiche Stärke. Hier ergibt sich eine deutliche Erhöhung der Versagensspannung auf etwa  $2,4 \cdot 10^8$ , also etwa vom 100fachen im Vergleich zum granularen Triaxialtest, dessen Ergebnis in Abbildung 5.6 gezeigt wird.

Anschließend wird der Test noch einmal mit einer Reduktion der Bonds in Tangentialrichtung um den Faktor 100 durchgeführt, dann mit einer Reduktion der Bondstärke in Normalenrichtung um den gleichen Faktor. Die Ergebnisse werden in Abbildung 5.13(b) und (c) dargestellt.

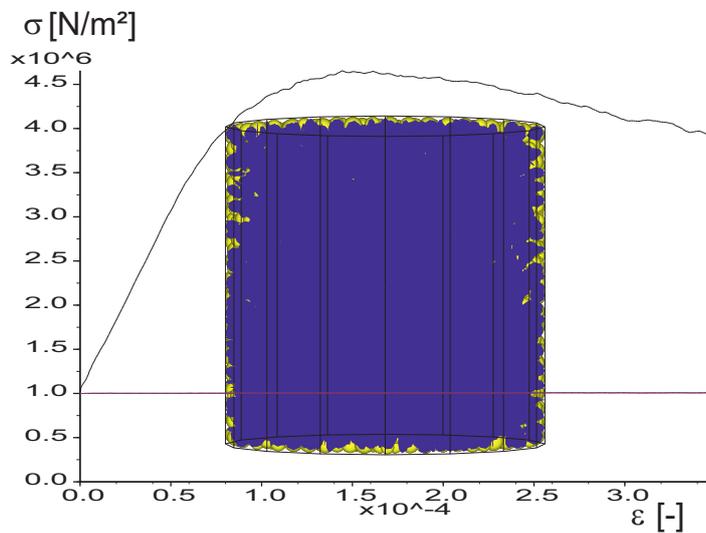
In beiden Versuchen sinkt die Versagensspannung ebenfalls in etwa um einen Faktor 100. Außerdem zeigt sich, dass in Test 2 die (hier schwächeren) Tangentialbonds zu einem Versagen der Kontaktbonds führen, was durch die blaue Markierung dargestellt wird. In Test 3 versagen zuerst die Normalbonds. Erwartungsgemäß gibt also die schwächste Bondstärke den Ausschlag für ein Versagen.

Die intakt bleibenden Bonds sorgen allerdings dafür, dass die Versagensspannung auch in Test 2 und 3 im Vergleich zu jener aus dem granularen Triaxialtest noch deutlich erhöht ist. Im Folgenden soll nun untersucht werden, wie gut die bereits erläuterte Parameteridentifikation in Form einer Vorhersage für den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl für das mit Bonds verbundene Material zutrifft.

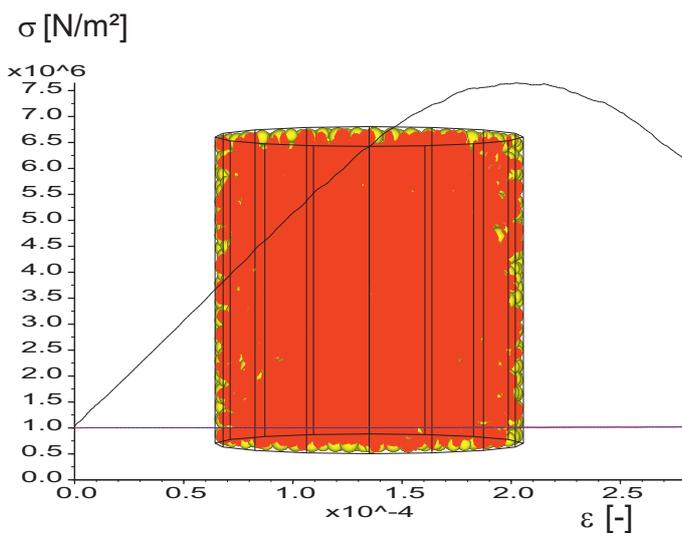
Zunächst werden die drei unterschiedlichen Elastizitätsmoduli betrachtet, die, wie bereits



(a) Beispielhafte Spannungs-Dehnung-Kurve (Test 1)



(b) Beispielhafte Spannungs-Dehnung-Kurve (Test 2)



(c) Beispielhafte Spannungs-Dehnung-Kurve (Test 3)

Abbildung 5.13: Spannungs-Dehnungslinien, die sich aus den Triaxialtests mit 6524 Partikeln ergeben. Außerdem werden die zerstörten Bonds markiert, rot steht für ein Versagen in Normalenrichtung, blau für ein Versagen in Tangentialrichtung

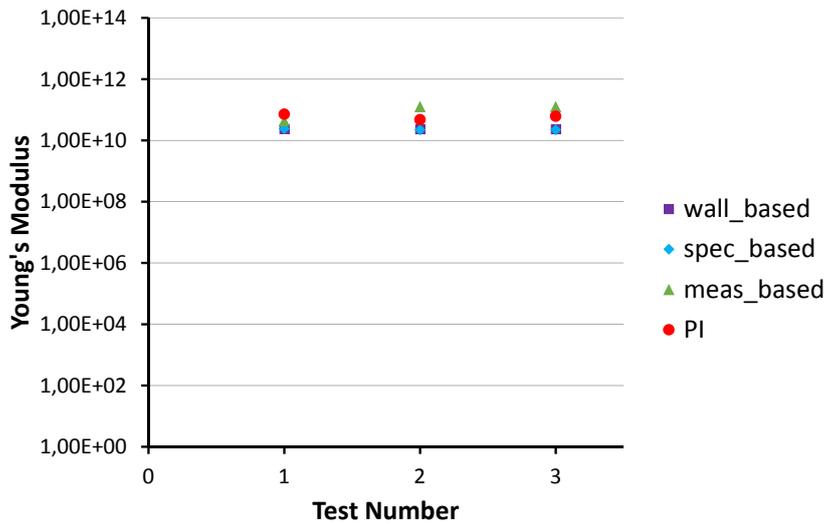
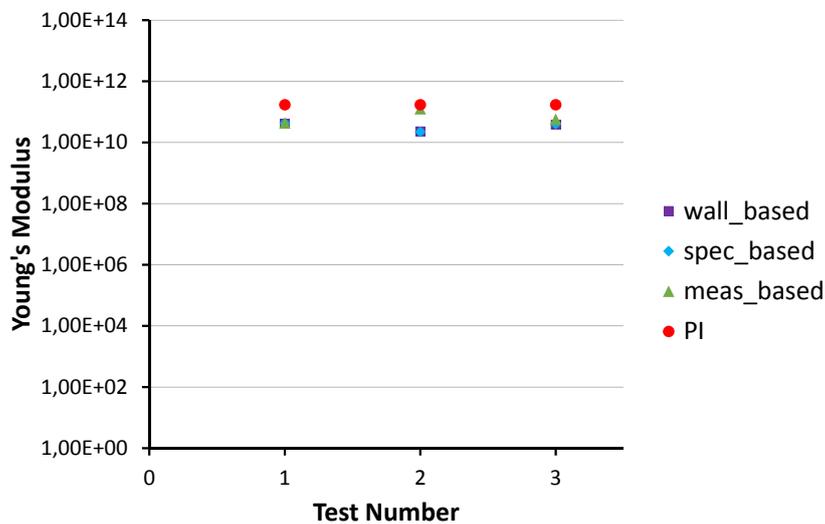
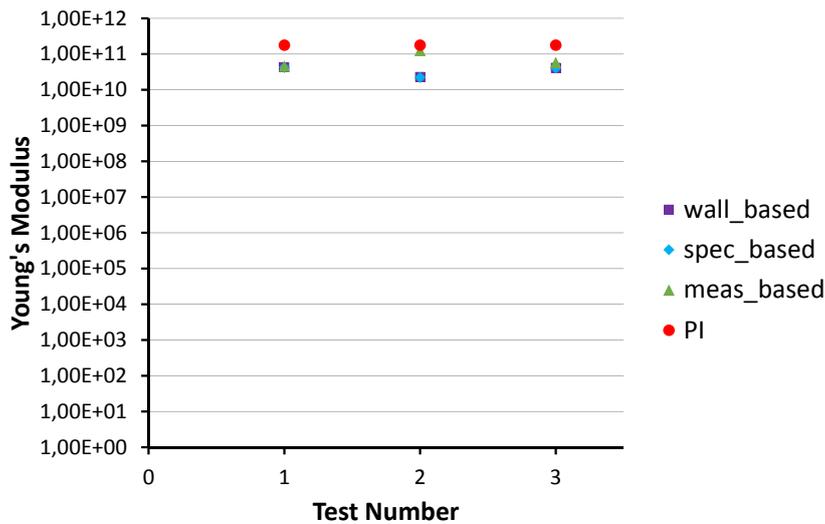
(a) Elastizitätsmoduli  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Triaxialtest mit 112 Partikeln(b) Elastizitätsmoduli  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Triaxialtest mit 855 Partikeln(c) Elastizitätsmoduli  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Triaxialtest mit 6524 Partikeln

Abbildung 5.14: Elastizitätsmoduli, die sich aus den Triaxialtests ergeben, verglichen mit den Werten entsprechend der Parameteridentifikation. Für die Stärken der Bonds gilt: Test 1 -  $f^{n,c} = f^{t,c}$ , Test 2 -  $f^{n,c} = 100 \cdot f^{t,c}$ , Test 3 -  $100 \cdot f^{n,c} = f^{t,c}$

in Abbildung 5.3 dargestellt, anhand der DEM-Simulation berechnet werden. Diese werden jeweils dem Wert, der sich aus der Parameteridentifikation nach Gleichung 5.20 ergibt, gegenübergestellt. In allen Fällen zeigt sich eine gute Übereinstimmung der Größenordnung der Elastizitätsmodule. Die Ergebnisse der Parameteridentifikation stimmen in einzelnen Tests nahezu mit jenen überein, die mit Hilfe der *measurement spheres* ermittelt werden. Dass sich hier die beste Übereinstimmung ergibt, entspricht den Beobachtungen im granularen Fall (Abbildung 5.7).

Im Unterschied zum granularen Fall stimmen hier jedoch die aus der DEM-Simulation berechneten Elastizitätsmodule deutlich besser überein. Daraus ergibt sich, dass der entsprechend der Parameteridentifikation berechnete Wert jene aus der Simulation tendenziell überschätzt. Andererseits fällt auf, dass die einzelnen Werte und auch die Übereinstimmung zwischen ihnen durch eine höhere Partikelzahl nicht wesentlich beeinflusst werden.

Wie für den granularen Fall werden auch hier nun in Abbildung 5.15 die Ergebnisse für die Querkontraktionszahl betrachtet. Abgesehen von dem aus der Verschiebung der Wandelemente abgeleiteten Wert in Test 1 in Abbildung 5.15(a) ergibt sich auch hier eine gute Übereinstimmung zwischen den Simulationsergebnissen und der Parameteridentifikation. Die Simulationsergebnisse überschätzen die Werte nach der Parameteridentifikation meist, nähern sich ihnen aber mit steigender Partikelanzahl an. Im Gegensatz zu den Simulationen der granularen Medien sind hier keine schwer erklärbaren Ausreißer ermittelt worden, die Werte für die Querkontraktion aus der Simulation liegen näher beieinander und ergeben auch daher insgesamt eine bessere Übereinstimmung mit der Parameteridentifikation nach Gleichung 5.20.

### 5.6.3 Triaxialversuch - Untersuchung der Versagensspannung

Da die zur Berechnung der Bondstärke in tangentialer und normaler Richtung die maximal aufnehmbare Spannung, also die Versagensspannung, entsprechend Gleichung 5.32, benötigt wird, wird diese hier untersucht. Diese wird mit der Maximalspannung, die sich aus der DEM-Simulation ergibt, verglichen.

Die entsprechenden Spannungsverläufe sind für die unterschiedlichen betrachteten Diskretisierungen in Abbildung 5.13 geplottet. Die Ergebnisse für die Versagensspannung sind in Abbildung 5.16 zusammengefasst, wobei sich wie zuvor aus der DEM-Simulation wie zuvor jeweils drei unterschiedliche Ergebnisse ableiten lassen. Diese basieren auf den, in Kapitel 5.4.1 ausführlich erläuterten, unterschiedlichen Messmethoden für Spannungen und Dehnungen, also *Wall-based*, *Specimen-based* und *Measurement-Sphere-based*.

Zunächst fällt auf, dass die Parameteridentifikation hier unabhängig von der gewählten Diskretisierung eine gute Übereinstimmung liefert. Wie schon zuvor bei den elastischen Parametern liegen auch hier die unterschiedlichen aus der Simulation ermittelten Werte sehr nah beieinander, die jeweiligen Versagensspannungen sind praktisch identisch. In Test 1, in dem Normal- und Tangentialbonds die gleiche Stärke besitzen, sind die beiden nach den Gleichungen 5.32 ermittelten Versagensspannungen natürlich identisch. Sie überschätzen die aus der Simulation gewonnenen Werte leicht.

Die Simulationsergebnisse für Test 2 korrespondieren sehr gut mit der Versagensspannung

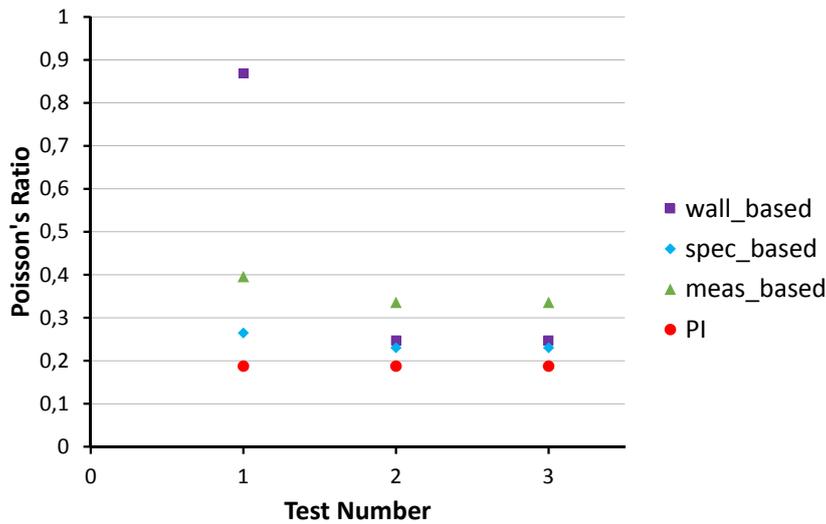
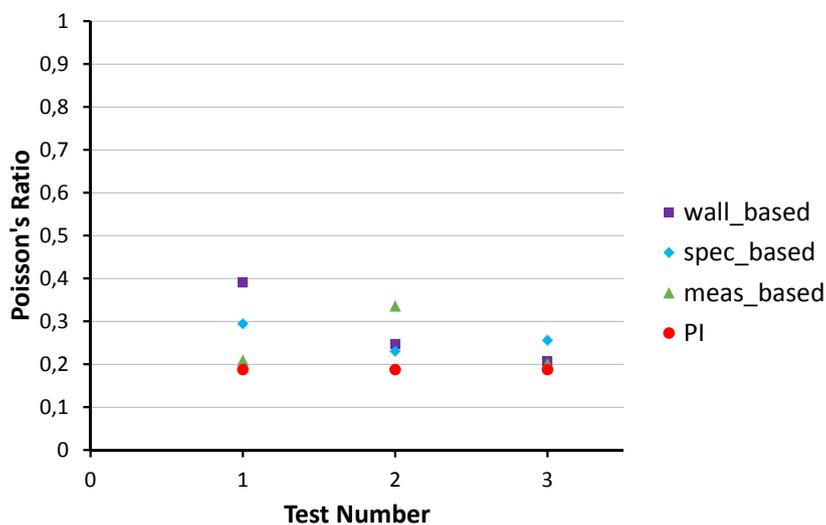
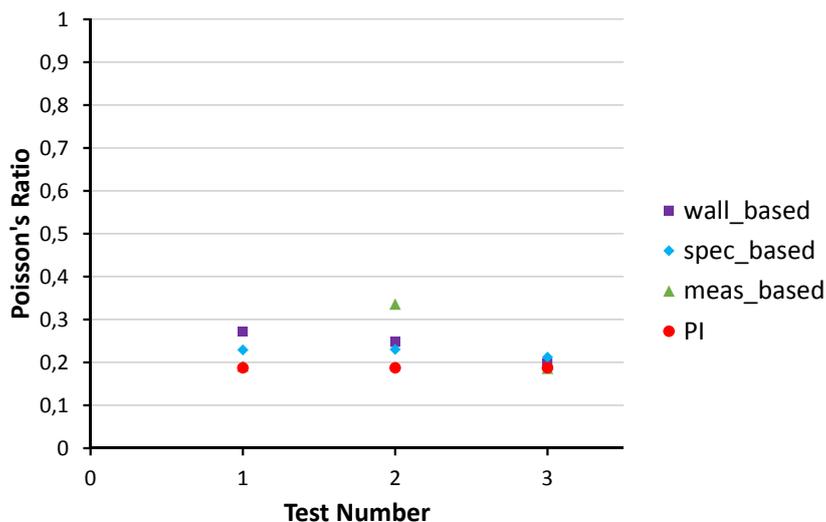
(a) Querkontraktionszahlen  $[-]$  aus dem Triaxialtest mit 112 Partikeln(b) Querkontraktionszahlen  $[-]$  aus dem Triaxialtest mit 855 Partikeln(c) Querkontraktionszahlen  $[-]$  aus dem Triaxialtest mit 6524 Partikeln

Abbildung 5.15: Querkontraktionszahlen, die sich aus den Triaxialtests ergeben, verglichen mit den Werten entsprechend der Parameteridentifikation. Für die Stärken der Bonds gilt: Test 1 -  $f^{n,c} = f^{t,c}$ , Test 2 -  $f^{n,c} = 100 \cdot f^{t,c}$ , Test 3 -  $100 \cdot f^{n,c} = f^{t,c}$

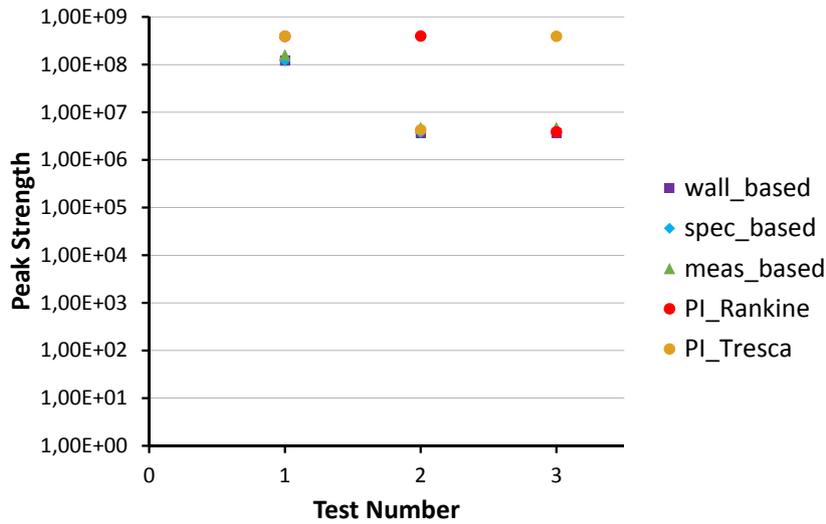
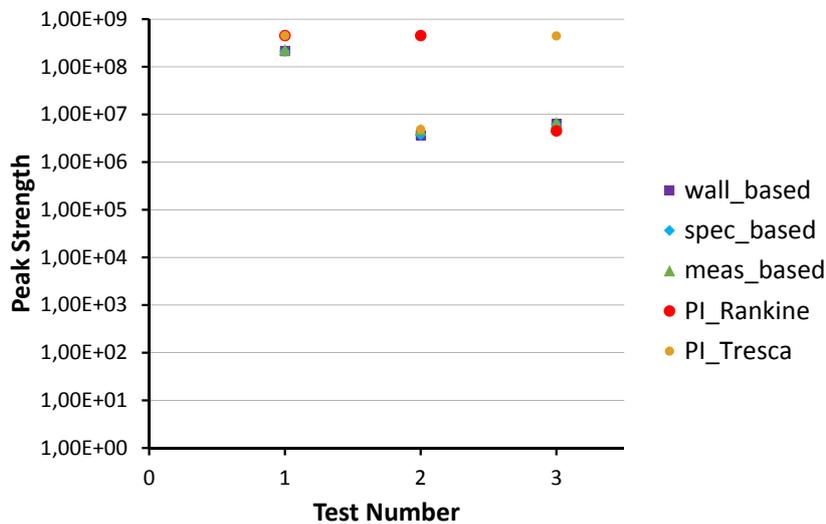
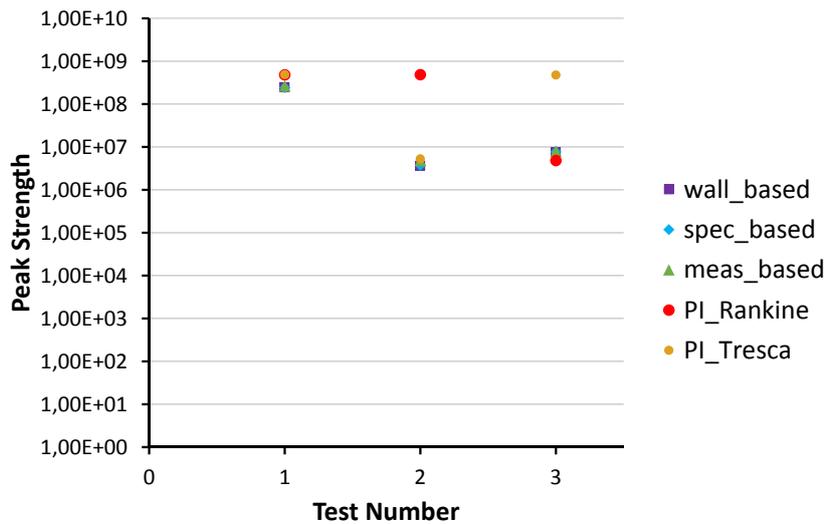
(a) Streckgrenzen  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Triaxialtest mit 112 Partikeln(b) Streckgrenzen  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Triaxialtest mit 855 Partikeln(c) Streckgrenzen  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Triaxialtest mit 6524 Partikeln

Abbildung 5.16: Streckgrenzen, die sich aus den Triaxialtests ergeben, verglichen mit den Werten entsprechend der Parameteridentifikation. Für die Stärken der Bonds gilt: Test 1 -  $f^{n,c} = f^{t,c}$ , Test 2 -  $f^{n,c} = 100 \cdot f^{t,c}$ , Test 3 -  $100 \cdot f^{n,c} = f^{t,c}$

nach Tresca  $\sigma_y^{Tresca}$ . Da in Test 2 die Normalbonds deutlich stärker gewählt wurden als die Tangentialbonds, sind hier die Tangentialbonds diejenigen, die das Versagen der Bonds auslösen. Hier ist also das Versagen nach Tresca zu erwarten und wird durch die Ergebnisse bestätigt. In Test 3 ergibt sich entsprechend eine Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit der Versagensspannung nach Rankine.

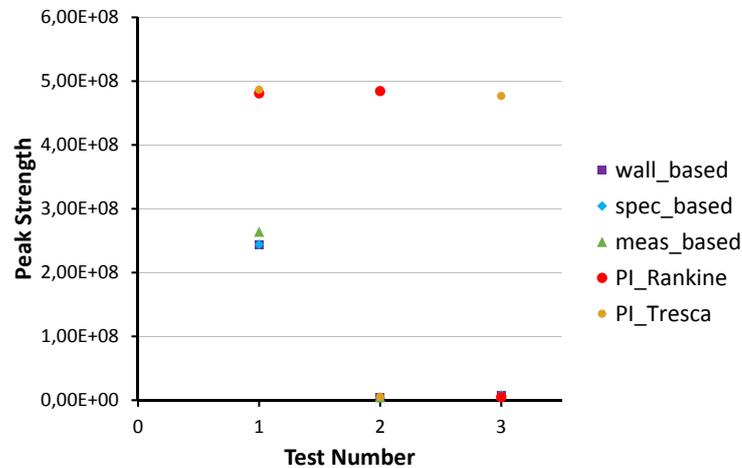


Abbildung 5.17: Streckgrenzen aus dem Triaxialtest mit 6524 Partikeln, nicht-logarithmische Darstellung

Zur besseren Übersichtlichkeit werden die Ergebnisse logarithmisch geplottet. Um die Abweichung zwischen prognostizierten und berechneten Werten einfacher abschätzen zu können, zeigt Abbildung 5.18 die sich ergebenden Versagensspannungen für den Test mit 6524 Partikeln auf einer nicht-logarithmischen Skala. Hieraus ist für Test 1 abzulesen, dass die prognostizierten Werte jene aus der Simulation etwa um den Faktor 2 übersteigen.

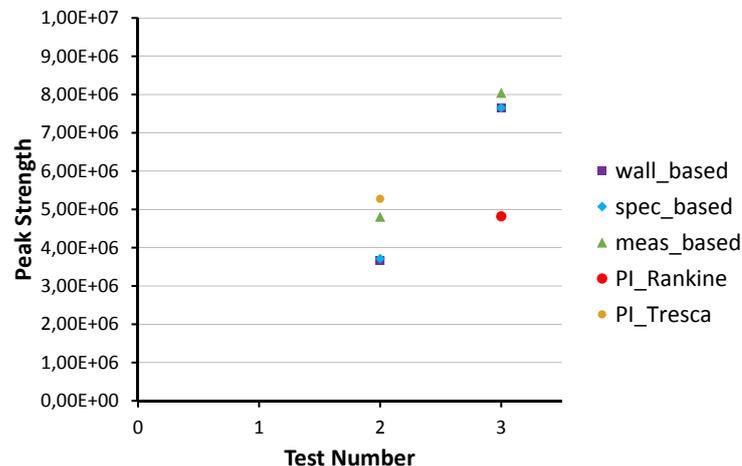


Abbildung 5.18: Streckgrenzen aus dem Triaxialtest mit 6524 Partikeln, nicht-logarithmische Darstellung, Betrachtung der relevanten Werte für Test 2 und 3

Abbildung 5.18 betrachtet den für die Tests 2 und 3 relevanten Bereich des Diagrams. Während sich für Test 2 nur eine minimale Abweichung zwischen  $\sigma_y^{Tresca}$  und der anhand der *Measurement Spheres* ermittelten Versagensspannung ergibt, liegen in Test 3 die Versagensspannungen aus der DEM um einen Faktor von etwa 1,6 über der prognostizierten Versagensspannung  $\sigma_y^{Rankine}$ .

Insgesamt zeigt sich also eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den nach Gleichung 5.32 ermittelten Prognosen und den sich aus der DEM-Simulation ergebenden Werten. Die hierbei auftretenden Abweichungen um maximal einen Faktor 2 mögen auf den ersten Blick groß erscheinen. Wird jedoch berücksichtigt, wie stark schon die drei unterschiedlich ermittelten Simulationsergebnisse streuen, wird klar, dass eine solche Abweichung kaum ins Gewicht fällt. Die Gleichungen 5.32 sind also geeignet, eine Versagensspannung vorherzusagen, oder auch aus einer bekannten Versagensspannung die entsprechenden Bondstärken abzuleiten.

#### 5.6.4 Biaxialversuch

Analog zu Kapitel 5.5.2 wird der Biaxialtest auch für eine mit Bonds verbundene Probe noch einmal durchgeführt. Wie auch in den Kapiteln 5.6.2 und 5.6.3 werden jeweils drei unterschiedliche Parameterpaare für die Stärken der Bonds in normaler und tangentialer Richtung gewählt. Auch hier gilt, dass beide in Test 1 die gleiche Stärke besitzen,  $f^{n,c} = f^{t,c}$ , während in Test 2 der Normalbond deutlich stärker ist,  $f^{n,c} = 100 \cdot f^{t,c}$ , in Test 3 dagegen der tangentiale Bond mit  $100 \cdot f^{n,c} = f^{t,c}$ .

Zunächst werden wieder die sich ergebenden Elastizitätsmoduli untersucht, das Ergebnis ist in Abbildung 5.19 zusammengefasst. Es zeigt sich für alle drei Fälle eine sehr gute Übereinstimmung, die jene aus den granularen Versuchen sogar noch deutlich übertrifft. Wie schon in der dreidimensionalen Betrachtung liegen auch hier die unterschiedlichen Ergebnisse aus der DEM (*wall-based*, *specimen-based* und *measurement-sphere-based*) viel enger zusammen als im granularen Fall.

Ebenfalls wie im dreidimensionalen Fall fällt auch hier auf, dass sich bereits für eine sehr grobe Diskretisierung mit nur 25 Partikeln eine äußerst gute Übereinstimmung zwischen Simulations- und prognostizierten Werten ergibt. Dies ist besonders in Test 2 und 3 der Fall. Bei einer Verwendung von 400 Partikeln im Biaxialtest ergibt sich aber für Test 1 eine sehr gute Übereinstimmung.

Abbildung 5.20 zeigt die Resultate für die Querkontraktionszahl. Auch hier zeigt sich eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen der Prognose und den DEM-Ergebnissen, wobei die Prognose die Ergebnisse aus der DEM tendenziell überschätzt, während sie im granularen Fall eher unterhalb oder bei einer entsprechend hohen Diskretisierung zwischen den DEM-Ergebnissen liegt. Wie auch schon für den Elastizitätsmodul ergibt sich aber auch hier eine engere Übereinstimmung als im granularen Fall.

Für die Bestimmung der Querkontraktionszahl ist eine hohe Diskretisierung allerdings erforderlich. Je weniger Partikel hier verwendet werden, desto größer ist die Streuung zwischen den unterschiedlich ermittelten Querkontraktionszahlen aus der Simulation, und damit auch die Abweichung von der Prognose. Wird der Biaxialtest mit 400 Partikeln durchgeführt, ergibt sich jedoch bereits eine zufriedenstellende Übereinstimmung.

Schließlich wird auch die Versagensspannung oder Streckgrenze betrachtet, die für die Parameteridentifikation nur für durch Bonds verbundene Proben von Belang ist. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.21 zusammengefasst.

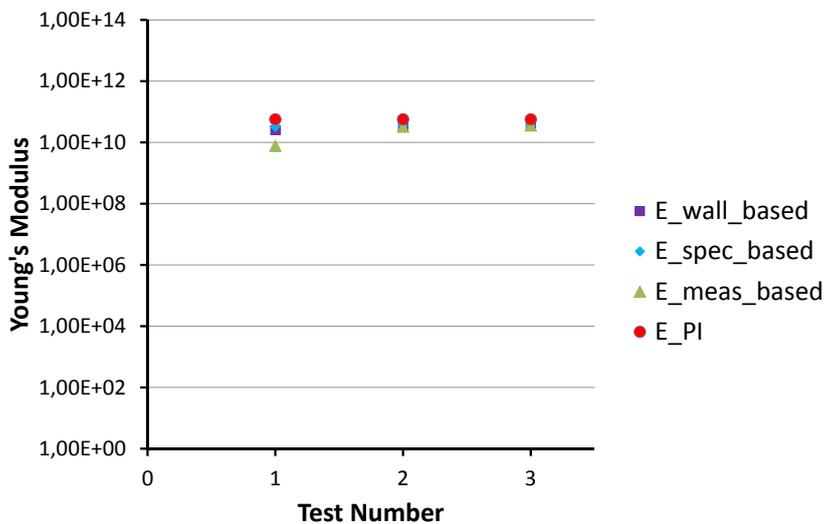
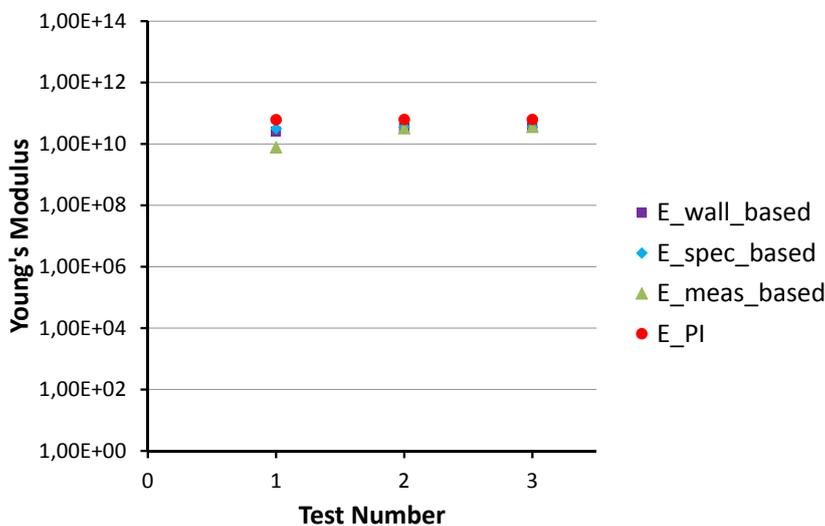
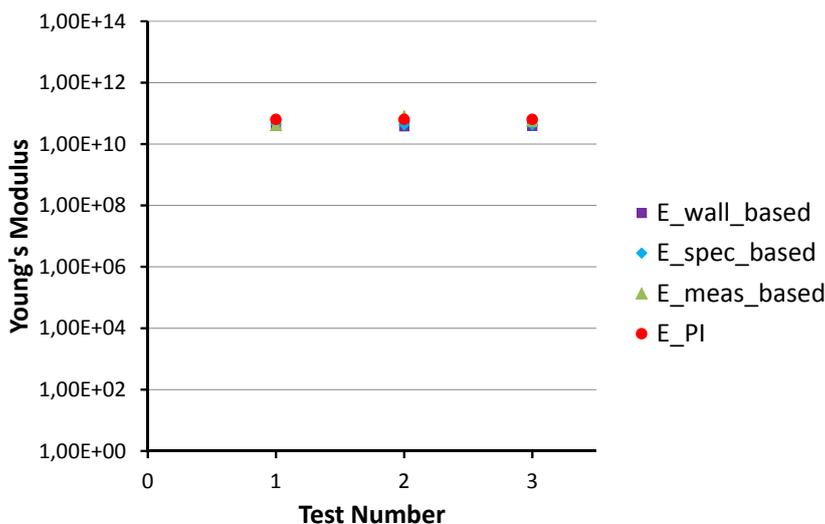
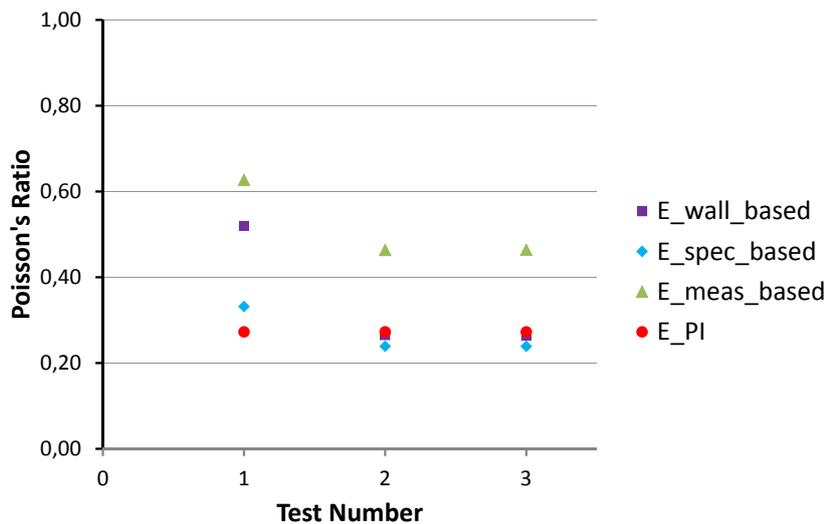
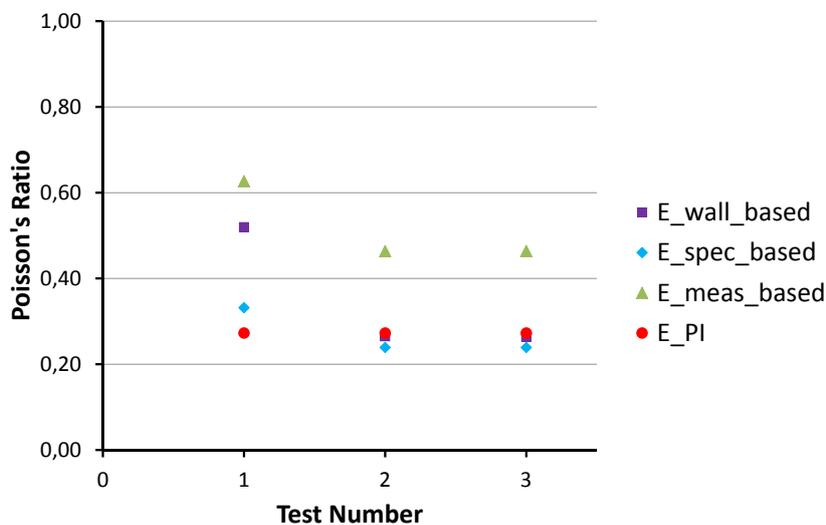
(a) Elastizitätsmoduli  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Biaxialtest mit 25 Partikeln(b) Elastizitätsmoduli  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Biaxialtest mit 100 Partikeln(c) Elastizitätsmoduli  $[\frac{N}{m^2}]$  aus dem Biaxialtest mit 400 Partikeln

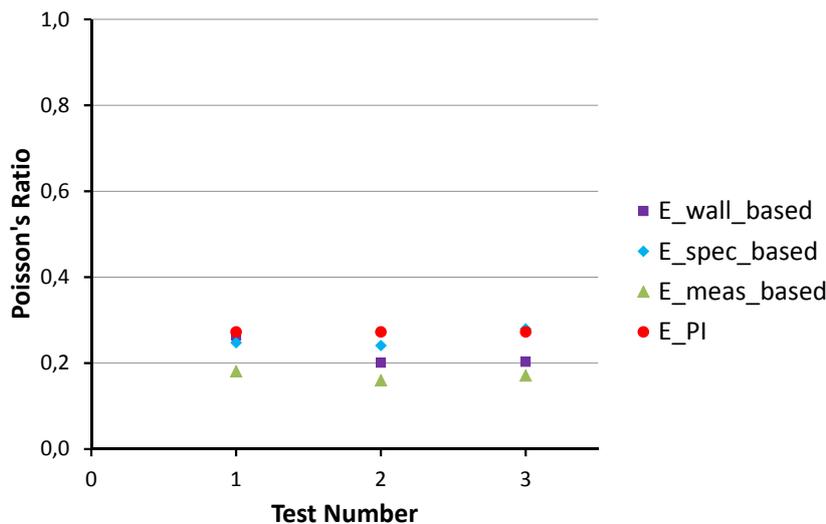
Abbildung 5.19: Elastizitätsmoduli, die sich aus den Biaxialtests ergeben, verglichen mit den Werten entsprechend der Parameteridentifikation. Für die Stärken der Bonds gilt: Test 1 -  $f^{n,c} = f^{t,c}$ , Test 2 -  $f^{n,c} = 100 \cdot f^{t,c}$ , Test 3 -  $100 \cdot f^{n,c} = f^{t,c}$



(a) Querkontraktionszahlen [–] aus dem Biaxialtest mit 25 Partikeln

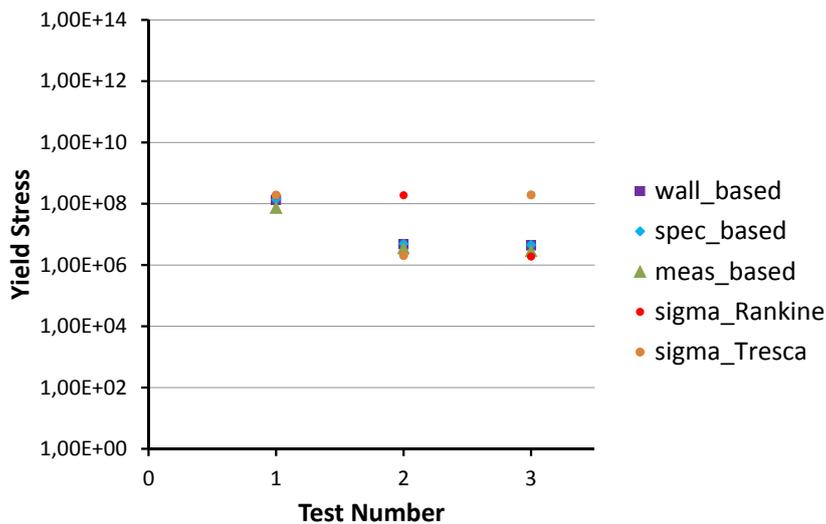


(b) Querkontraktionszahlen [–] aus dem Biaxialtest mit 100 Partikeln

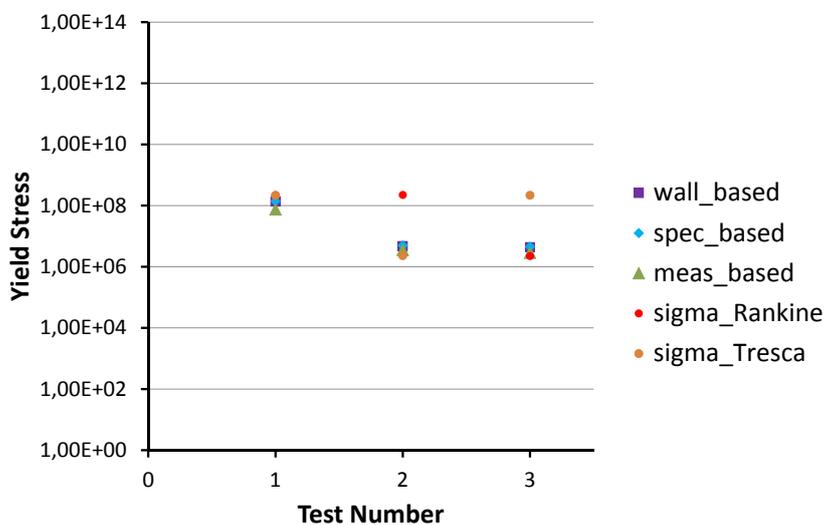


(c) Querkontraktionszahlen [–] aus dem Biaxialtest mit 400 Partikeln

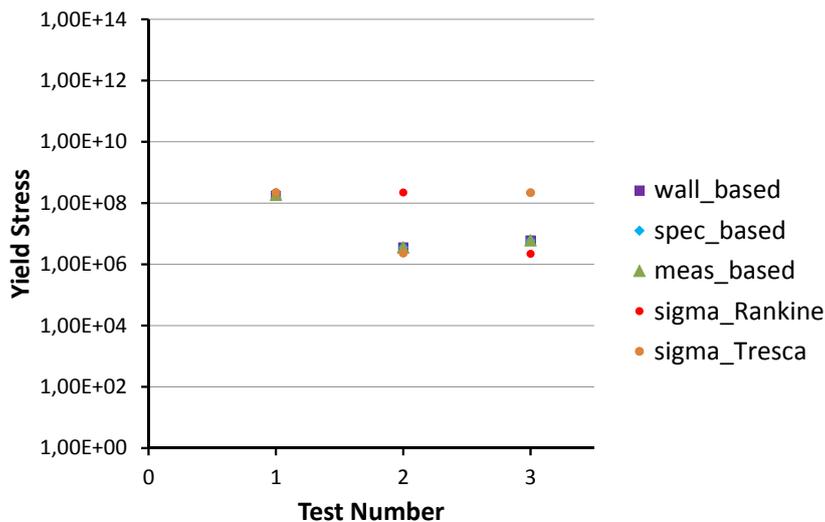
Abbildung 5.20: Querkontraktionszahlen, die sich aus den Biaxialtests ergeben, verglichen mit den Werten entsprechend der Parameteridentifikation. Für die Stärken der Bonds gilt: Test 1 -  $f^{n,c} = f^{t,c}$ , Test 2 -  $f^{n,c} = 100 \cdot f^{t,c}$ , Test 3 -  $100 \cdot f^{n,c} = f^{t,c}$



(a) Streckgrenzen [–] aus dem Biaxialtest mit 25 Partikeln



(b) Streckgrenzen [–] aus dem Biaxialtest mit 100 Partikeln



(c) Streckgrenzen [–] aus dem Biaxialtest mit 400 Partikeln

Abbildung 5.21: Streckgrenzen, die sich aus den Biaxialtests ergeben, verglichen mit den Werten entsprechend der Parameteridentifikation. Für die Stärken der Bonds gilt: Test 1 -  $f^{n,c} = f^{t,c}$ , Test 2 -  $f^{n,c} = 100 \cdot f^{t,c}$ , Test 3 -  $100 \cdot f^{n,c} = f^{t,c}$

Die Ergebnisse gleichen jenen aus dem Triaxialtest, die in Kapitel 5.6.3 beschrieben werden. Bereits für die größte betrachtete Diskretisierung ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen der Prognose und den Resultaten der DEM-Simulation. In Test 1 korrespondieren die DEM-Resultate mit beiden prognostizierten Versagensspannungen  $\sigma_y^{Tresca}$  und  $\sigma_y^{Rankine}$ , in Test 2 nur mit  $\sigma_y^{Tresca}$ , in Test 3 dagegen mit  $\sigma_y^{Rankine}$ . Dies liegt an den entsprechend gleich oder unterschiedlich gewählten Stärken der Bonds in Normal-, beziehungsweise in Tangentialrichtung. Auch für den zweidimensionalen Fall sind die Gleichungen 5.27 und 5.35 also auch für durch Bonds verbundene Proben anwendbar.

## 5.7 Zusammenfassende Interpretation der Ergebnisse

Durch die Bestimmung der Energie auf Kontaktebene und deren Übertragung auf das gesamte Partikelsystem kann hier ein Zusammenhang zwischen makroskopischen (kontinuumsmechanischen) Parametern und mikroskopischen Kontaktparametern hergestellt werden, dieser ist durch Gleichung 5.20 im dreidimensionalen und durch Gleichung 5.27 im zweidimensionalen Raum gegeben. Nun wird anhand von Kompressionsversuchen getestet, wie gut die aus den Kontaktsteifigkeiten abgeleiteten Elastizitätsmoduli und Querkontraktionszahlen mit den Ergebnissen aus entsprechenden DEM-Simulationen übereinstimmen.

Hierfür wird im dreidimensionalen Raum ein Triaxial-, im zweidimensionalen ein Biaxialversuch verwendet, deren Aufbau detailliert in Kapitel 5.4 beschrieben wird. Bei diesen Versuchen wird die seitliche, beziehungsweise die Umfangsspannung konstant gehalten, während die achsiale Spannung schrittweise erhöht wird, bis ein zuvor definiertes Abbruchkriterium erreicht wird. Um den Einfluss der Diskretisierung einschätzen zu können, werden sämtliche Tests mit drei unterschiedlichen Partikelgrößen und dementsprechend auch -anzahlen durchgeführt. Aus der Simulation werden für jeden Wert drei unterschiedliche Größen abgeleitet, abhängig davon, wie die Kräfte und Verformungen gemessen werden: *Wall-based*, *Specimen-based* und *Measurement-sphere-based*.

Zunächst wird rein granulares Material untersucht, wobei die Qualität der Ergebnisse im zweidimensionalen Raum mit jenen für den dreidimensionalen Raum vergleichbar ist, und deshalb hier bei der Bewertung zusammengefasst betrachtet wird. Es zeigt sich ein starker Einfluss der Diskretisierung. In den ersten Simulationen mit nur 112 Partikeln weichen die aus der DEM abgeleiteten Werte stark voneinander ab, die Werte entsprechend der Prognosen nach den Gleichungen 5.20, beziehungsweise 5.27 liegen im Bereich dieser Streuung. Mit einer feineren Diskretisierung nähern sich die Parameter aus der Simulation des Triaxialversuchs mehr und mehr jenen aus der Parameteridentifikation an.

Für den granularen Fall kann also sowohl für den Elastizitätsmodul als auch -mit etwas geringerer Qualität der Übereinstimmung- für die Querkontraktionszahl die Gültigkeit der Parameteridentifikation gezeigt werden.

Im nächsten Schritt wird die Gültigkeit der Parameteridentifikation für kohäsive Materialien, in denen die Partikel also durch Bonds verbunden sind, untersucht. Wiederum werden hierfür Kompressionsversuche verwendet. Zusätzlich wird hier beruhend auf den Herleitungen in den Kapiteln 5.1 und 5.2 ein Zusammenhang zwischen der Versagensspannung auf der makroskopischen Ebene und den Bondstärken auf der Kontaktebene ermittelt.

Für alle drei untersuchten makroskopischen Parameter (also Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl und Versagensspannung) kann eine Korrelation zwischen den Simulationsergebnissen und den Prognosen nach der Parameteridentifikation gezeigt werden. Es fällt auf, dass besonders beim Elastizitätsmodul und der Versagensspannung weitgehend unabhängig von der Diskretisierung sehr gute Ergebnisse erzielt werden.

Es gilt also sowohl für granulare wie auch für kohäsive Materialien, im zwei- wie auch im dreidimensionalen Raum, dass die hier hergeleiteten Zusammenhänge zwischen den makroskopischen Parametern Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl und Versagensspannung auf der einen und den Kontaktsteifigkeiten und Bondstärken auf der anderen Seite durch die gezeigten Kompressionstests verifiziert werden konnten. Sie können also für quasistatische Simulationen, bei denen innerhalb des Probenkörpers im Wesentlichen Druckspannungen vorliegen, als Grundlage für die Parameteridentifikation dienen.



## 6 Anwendungsbeispiele

In diesem Kapitel sollen beispielhaft einige tunnelspezifische Anwendungsbereiche der DEM vorgestellt werden. So wird abschließend noch einmal klar werden, welche immensen Vorteile die Verwendung der Methode gegenüber den verbreiteten Kontinuumsmethoden in bestimmten Gebieten hat. Hierfür werden völlig unterschiedliche Simulationsbereiche gewählt, die jedoch alle für den Tunnelbau relevant sind.

Zunächst wird in Kapitel 6.1 ein Slump Test simuliert und gezeigt, wie mit Hilfe der DEM ein sehr komplexes Materialverhalten reproduziert werden kann. Als Probenkörper dient hier exemplarisch ein Boden-Schaum-Gemisch wie es bei der Bodenconditionierung entsteht.

Anschließend widmet sich Kapitel 6.2 einer stark vereinfachten Simulation des Abbauprozesses, wie er etwa in EPB-Maschinen stattfindet. Es wird gezeigt, wie die DEM dazu dienen kann, solche Prozesse zu optimieren. Hier wird zum einen die Werkzeuggeometrie und zum anderen die Abbaugeschwindigkeit und deren jeweiliger Einfluss auf die abgebaute Masse und den Massenfluss in die Abbaukammer untersucht. Aus dem Massenfluss kann weiter auf die Druckverteilung in der Abbaukammer geschlossen werden.

Als drittes Beispiel dient in Kapitel 6.3 eine Verschleißsimulation. Da Verschleiß mit der DEM durch ein einfaches Brechen der Bonds simuliert werden kann, hat sie hier gewichtige Vorteile gegenüber den Kontinuumsmethoden.

## 6.1 Slump Test

Zunächst soll das Materialverhalten eines Boden-Schaum-Gemisches, wie es sich durch die in Kapitel 3.1.1 beschriebene Bodenconditionierung ergibt, untersucht werden. Wie bereits erwähnt, sind die mechanischen Eigenschaften des Materialgemisches schwer zu bestimmen. In Experimenten wird hierfür beispielsweise der in Kapitel 2.5.2 vorgestellte Slump Test verwendet.

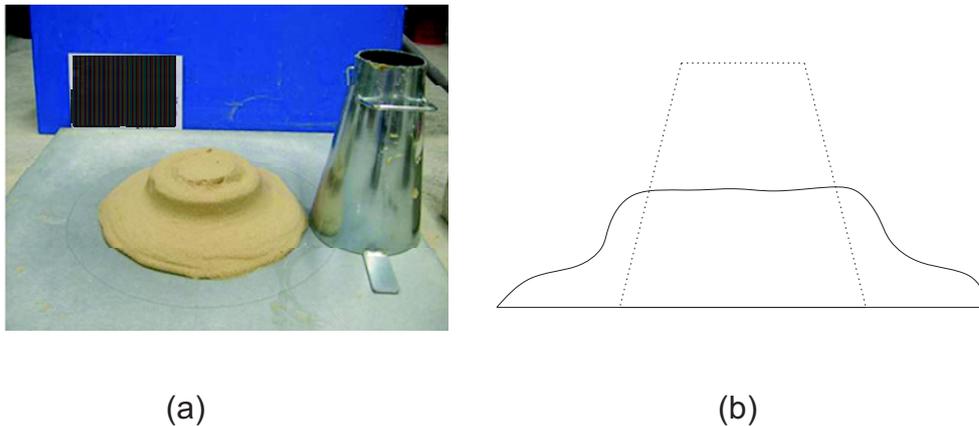


Abbildung 6.1: S-förmiger *Slump*, (a) Ergebnis nach [25], (b) zweidimensionale Skizze

So werden in [104] die mechanischen Eigenschaften verschiedener konditionierter Böden untersucht. In [25] wurde festgestellt, dass das Boden-Schaum-Gemisch häufig die in Abbildung 6.1 dargestellte charakteristische S-Form im Slump Test zeigen. Diese experimentellen Ergebnisse sollen nun mit Hilfe der DEM reproduziert werden.

### 6.1.1 Simulation

Da es sich bei dem Slump Test um einen symmetrischen Versuch handelt, werden auch bei der Simulation die Symmetrieachsen ausgenutzt, es wird also nur ein Viertel des Kegelstumpfes modelliert. Dieser wird dann hier mit 4570 Partikeln gefüllt, die anschließend in mehreren Schritten bis zu dem gewünschten Radius vergrößert werden. Eine vereinfachte Darstellung des Simulationsbereiches mit Angabe der entsprechenden Maße ist in Abbildung 6.2 gegeben.

Nachdem die Partikel die vorgegebene Größe und Kompaktheit erreicht haben, wird die Erdbeschleunigung aktiviert und der Berechnungszyklus bis zum Erreichen von Gleichgewicht wiederholt. Anschließend können in allen Kontakten Bonds eingefügt werden und dann diejenigen Partikel, die sich hinreichend nah an den Symmetrieebenen befinden, so fixiert, dass sie sich nur auf diesen Achsen bewegen können, um ein realistisches Materialverhalten zu gewährleisten. Nachdem erneut Gleichgewicht hergestellt wird, ist die Probe vorbereitet.

Der Versuchsablauf entspricht nun jenem in Kapitel 2.5.2 vorgestellten: Das kegelstumpfförmige Wandelement wird mit einer definierten Geschwindigkeit (hier:  $0,4 \frac{m}{s}$ ) nach oben bewegt, sodass die Partikel sich unter Einfluss der Schwerkraft verformen können. Der Simulation endet, sobald ein ausreichendes Gleichgewicht erreicht wird.

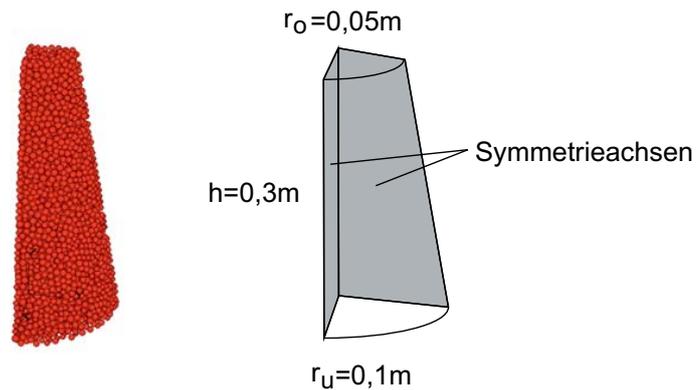


Abbildung 6.2: Ausgangsgeometrie der Probe im Slump Test, unter Ausnutzung der Symmetrie

### 6.1.2 Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse aus der Slump-Test Simulation von konditioniertem Bodenmaterial vorgestellt. Hierbei wird zunächst der Einfluss der Verhältniszahl der Dämpfung untersucht. Im Anschluss wird gezeigt, dass mit Dämpfern und Bonds eine ähnliche Geometrie des Probenkörpers erreicht werden kann wie in Laborversuchen.

#### Dämpfer

Wie in Kapitel 2.5.2 erwähnt, geht es bei diesem Test vor allem um die Fließfähigkeit, also die Viskosität, des Probenkörpers. Da die Viskosität mit der DEM am besten über im Kontakt eingefügte Dämpfer gesteuert werden kann, wird hier eine Parameterstudie mit unterschiedlichen Werten für die Verhältniszahl der Dämpfung  $d_i$ , die hier stets in normaler und in tangentialer Richtung gleich gewählt wird, es gilt also  $d_i = d_n = d_t$ . Im Folgenden wird hier von  $d_i$  als der Dämpfungskonstanten gesprochen, auch wenn es sich eigentlich um die Verhältniszahl handelt. Die Funktionsweise der Dämpfer wird in Kapitel 4.3.1 erläutert.

Zunächst wurden also für den Dämpfer auf Kontaktebene unterschiedliche Werte zwischen  $10 \geq d_i \geq 0$  eingesetzt und deren Auswirkungen auf das Setzmaß sowie das Ausbreitmaß ermittelt. Um möglichst wenig andere Variablen in dieser Studie berücksichtigen zu müssen, wird hier auf Bonds verzichtet. Abbildung 6.3 zeigt die sich aus der DEM-Simulation ergebenden Geometrien, wobei hier ein Gitternetz mit einem 5cm-Raster eingefügt wurde, um die Ergebnisse leichter miteinander vergleichen zu können.

Erwartungsgemäß zeigt sich hier, dass sich bei einer hohen Dämpfungskonstante von  $d_i = 10$  die Geometrie des Probenkörpers kaum ändert, wie in Abbildung 6.3(a) dargestellt wird, Setzmaß und Ausbreitmaß also dem Ausgangszustand entsprechen. Je geringer die Dämpfungskonstante dann gewählt wird, um so mehr sackt der Probenkörper ab, bevor sich Gleichgewicht einstellt. In Abbildung (b) ist  $d_i = 2$ , gewählt, in (c)  $d_i = 0,5$ .

In Abbildung 6.4 wird der Einfluss der Dämpfungskonstanten auf Setz- und Ausbreitmaß

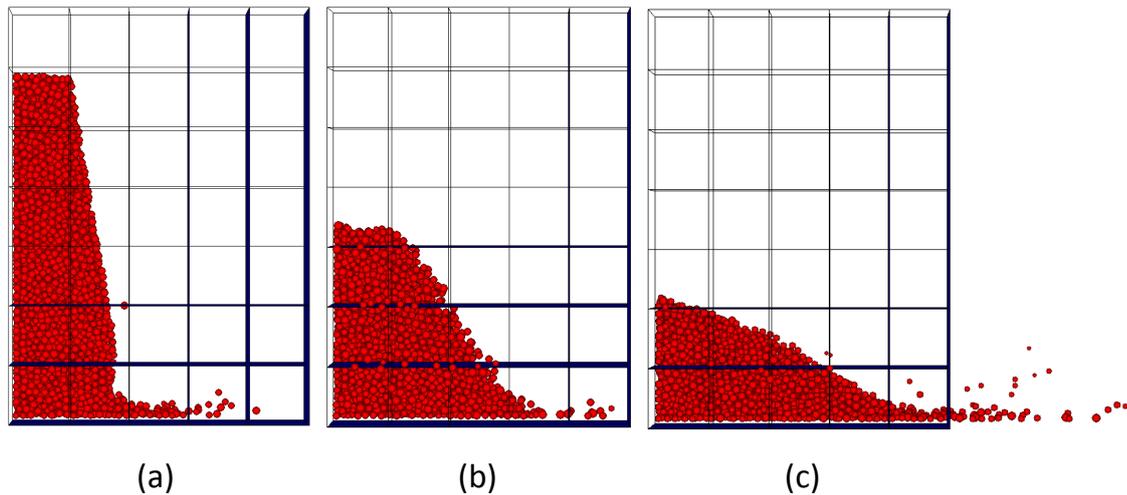


Abbildung 6.3: Ergebnisse der Slump Test Simulationen für unterschiedliche Dämpfungskonstanten  $d_i$

deutlicher gemacht. Ändert sich die Ausgangsgeometrie gar nicht, ergibt sich ein Setzmaß von 0cm, und ein Ausbreitmaß von 20cm, also dem doppelten Radius. Da sich sogar bei einer Dämpfung von  $d_i = 10$ , wie in Abbildung 6.3(a) gezeigt, einzelne Partikel lösen, ist das Ausbreitmaß jedoch in allen Fällen  $\geq 20$ cm. Ansonsten zeigt sich auch hier deutlich, dass die Geometrie immer flacher und breiter wird je geringer die Dämpfungskonstante gewählt wird.

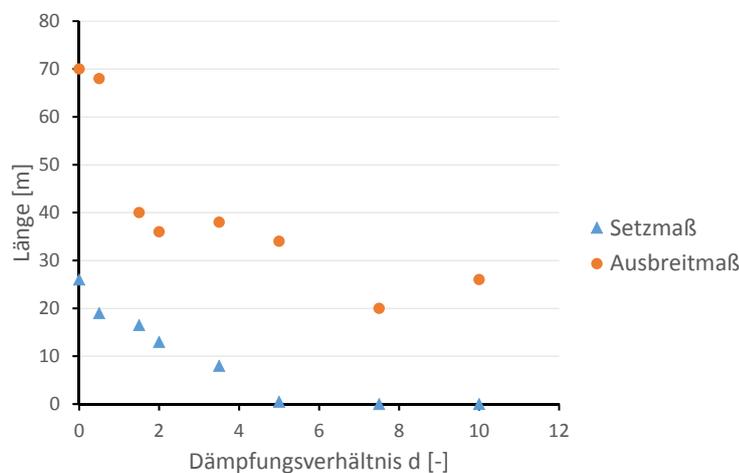


Abbildung 6.4: Einfluss der Dämpfungskonstante auf Setzmaß und Ausbreitmaß

## Bonds

Wie oben gezeigt wurde, hat das Einfügen von Dämpfern substantielle Auswirkungen auf den Slump Test. Unabhängig von den gewählten Werten für  $d_i$ , ergibt sich jedoch nie die gewünschte S-förmige Geometrie, wie sie für konditionierten Boden in Versuchen ermittelt wurde. Um dies zu verbessern, werden nun Bonds eingefügt.

Die Bonds werden in tangentialer Richtung achtmal so stark gewählt wie in normaler Rich-

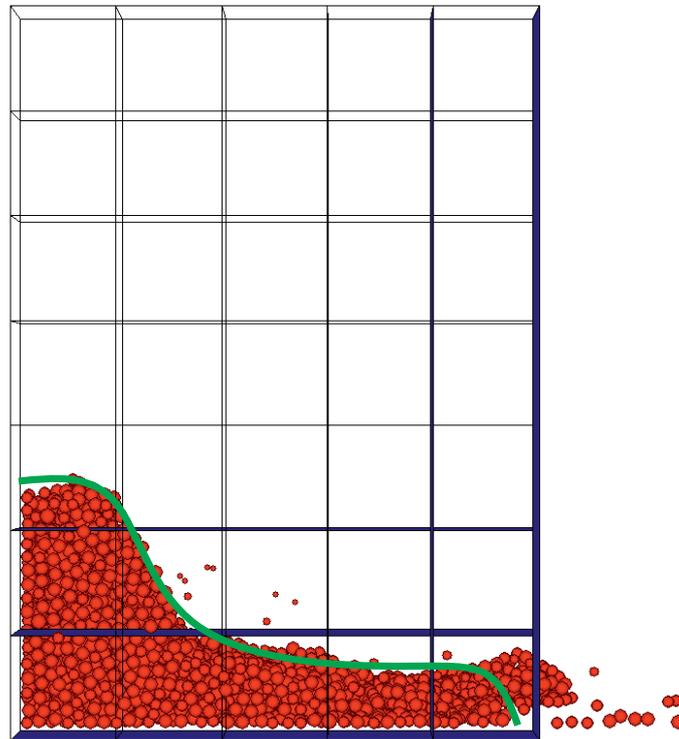


Abbildung 6.5: Geometrie am Ende des Slump Tests, die sich durch die Kombination von Dämpfungskonstante und Bonds ergibt

tung, es gilt  $f_c^n = 0,1N$  und  $f_c^t = 0,8N$ , das Dämpfungsverhältnis wird zu  $d_i = 1,5$  gesetzt. Das Ergebnis der Simulation ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Hier ist zu erkennen, dass eine entsprechende Kombination der Parameter dazu führt, dass in dem oberen Teil des Probenkörpers kaum eine Geometrieänderung eintritt, während sich der untere Teil stark ausbreitet.

Diese Kombination führt dann zu dem Verhalten, das auch experimentell für mit Schaum konditionierten Boden beobachtet werden kann. Zusätzlich verdeutlicht wird diese Form durch die eingefügte grüne Linie, die die Verformung des Körpers auf der Symmetrieachse nachzeichnet. Hierfür werden also jene Partikel außer Acht gelassen, die sich räumlich gesehen weiter weg befinden, und nur diejenigen in der  $x$ - $z$ -Ebene betrachtet.

## 6.2 Abbauprozess

In dieser Simulation wird der Abbauprozess genauer betrachtet. Der relevante Simulationsbereich ist in Abbildung 6.6 gezeigt. Es handelt sich um einen Ausschnitt im Bereich des Tunnelschneirades. Die tatsächliche Geometrie wird dabei stark vereinfacht, es wird nur ein einzelnes Schälmesser, der anstehende Boden und die stützende Suspension modelliert.

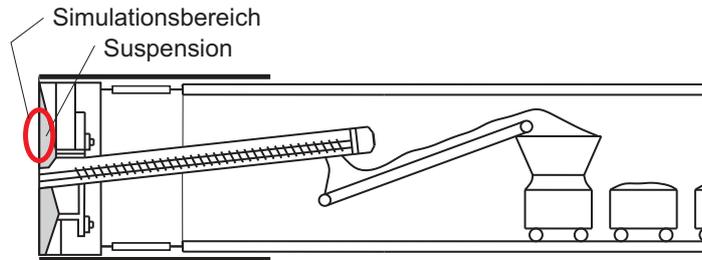


Abbildung 6.6: Der hier betrachtete Simulationsbereich

Simuliert wird ein Bereich einer Abbaukammer eines konditionierten Erdruck- oder Flüssigkeitsschildes. Die Funktionsweise dieser Schilde wird in Kapitel 3.1 genauer erläutert. Die Geometrie des betrachteten Ausschnittes wird in Abbildung 6.7 gezeigt.

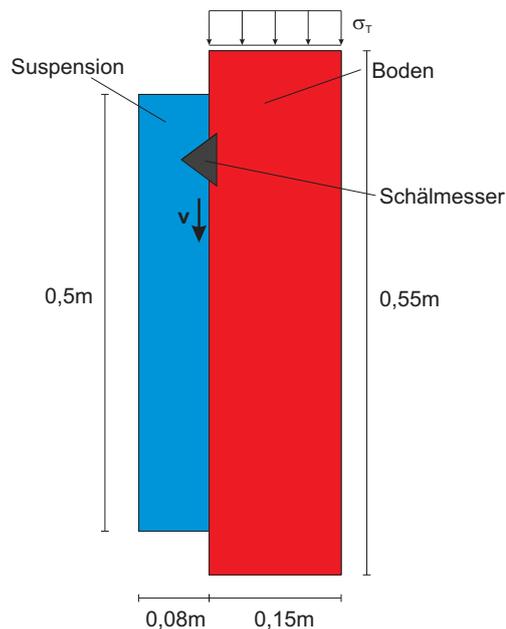


Abbildung 6.7: Die Geometrie des Simulationsbereiches der Abbaukammer

Hierbei ist der vor der TBM anstehende Boden in rot dargestellt, die Suspension, die in der Abbaukammer als zur Stützung der Ortsbrust verwendet wird, in blau. Um eine Überdeckung anzudeuten wird auf die roten Bodenpartikel eine konstant bleibende Auflast von  $\sigma_T = 40 \cdot 10^3 \frac{N}{m^2}$  aufgebracht. Zur weiteren Vereinfachung wird das Schneidrad ausschließlich auf das Schälmesser reduziert, welches als schwarzes Dreieck in der Abbildung auftaucht. Die Schneidrichtung ist zunächst vertikal nach unten, dann bohrt sich das Schälmesser um eine festgelegte Tiefe weiter in den Boden ein, bevor es sich anschließend wieder

nach oben bewegt. Das Bewegungsprofil ist in Abbildung 6.8 angegeben. Die Bewegung erfolgt geschwindigkeitsgesteuert.

Wie aus Abbildung 6.8 hervorgeht, ist die Bewegung des Werkzeugs immer entweder horizontal oder vertikal, aber niemals eine Mischform. Gerade das horizontale Eindringen des Werkzeuges entspricht nicht dem normalen Lauf eines Werkzeuges im Einsatz einer Tunnelbohrmaschine. Hier wird das Werkzeug spiralförmig in den Boden geführt. Aus der hier betrachteten stark vereinfachten Betrachtungsweise ergibt sich also, dass besonders der obere und untere Randbereich der Simulation keine aussagekräftigen Ergebnisse liefern kann.

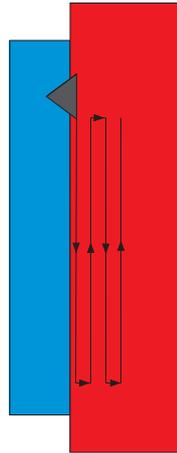


Abbildung 6.8: Bewegungsprofil des Schälmessers

Durch die Bewegung durch das Bodenmaterial lösen sich Bodenpartikel ab und mischen sich mit der Suspension. Die Menge der abgelösten Partikel wird gemessen, sodass daraus der Massenfluss in die Abbaukammer ermittelt werden kann. Um eine genauere Aussage über die örtliche Massenverteilung zu ermöglichen, wird die Höhe des Simulationsbereichs unterteilt. So ergibt sich eine Verteilung der Ergebnisse über die vertikale Achse.

Der Fokus dieser Simulation liegt auf der Masse, die durch das Schälmesser abgebaut wird. Es wird untersucht, wie das Abbauvolumen und der Materialfluss durch verschiedene Parameter beeinflusst werden. Als Einflussparameter werden hier der Schneidwinkel des Werkzeuges und die Geschwindigkeit, mit der es sich durch den Boden bewegt, betrachtet. Der Einfluss des Freiwinkels des Werkzeuges kann hier wegen der symmetrischen Bewegung des Schälmessers nicht untersucht werden. Da das Schälmesser (ohne Anpassung seiner Geometrie) nach oben und nach unten bewegt wird, wird die tatsächliche Geometrie angepasst, siehe Abbildung 6.9.

Untersucht werden Schnittgeschwindigkeiten von  $0,2 \frac{m}{s}$ ,  $0,5 \frac{m}{s}$  und  $1,0 \frac{m}{s}$  sowie Schneidwinkel von  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $60^\circ$ . Die Eindringtiefe des Schälmessers beträgt in allen Simulationen  $2cm$ .

### 6.2.1 Modellbildung

In diesem Kapitel soll der Aufbau des Partikelmodells erklärt werden. Zunächst werden mit Wand-Elementen die beiden Bereiche abgegrenzt, die in Abbildung 6.7 dargestellt sind.

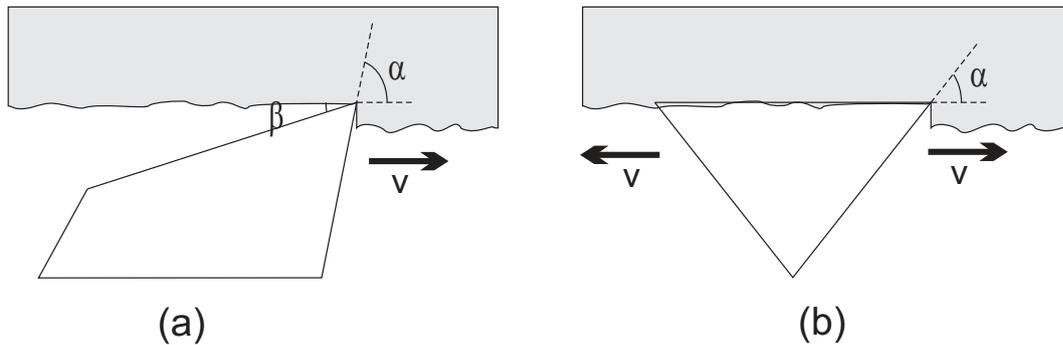


Abbildung 6.9: Geometrie eines Schälmessers (a) Realitätsnah (b) in der Simulation

	Boden	Suspension
$r_{min}[m]$	$9,99 \cdot 10^{-4}$	$2,00 \cdot 10^{-3}$
$r_{max}[m]$	$1,99 \cdot 10^{-3}$	$2,01 \cdot 10^{-3}$
$k_n \left[ \frac{N}{m} \right]$	$5,0 \cdot 10^6$	$5,0 \cdot 10^6$
$k_s \left[ \frac{N}{m} \right]$	$1,8 \cdot 10^6$	$0,0 \cdot 10^6$
density $\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	$1,29 \cdot 10^6$	$9,93 \cdot 10^5$
friction $[-]$	0,58	0,00

Tabelle 6.1: Parameter für Boden- und Suspensionspartikel

Anschließend werden diese mit Partikeln gefüllt, 10788 für den Boden und 4541 für die Suspension. Diese werden dann vergrößert, bis die vorgegebenen Porositäten erreicht werden. Die gewählten Parameter sind in Tabelle 6.1 zusammengestellt.

Da es sich hier um einen zweidimensionalen Simulationsbereich handelt, die Simulation aber mit der Software *pf<sup>3d</sup>* durchgeführt wird, ist eine Anpassung der Partikeldichte erforderlich. Bei echten zweidimensionalen Simulationen werden zylinderförmige Partikel der Länge 1 verwendet, während in dieser Rechnung kugelförmige Partikel verwendet werden, deren Freiheitsgrade nur entsprechend eingeschränkt werden. Da das Produkt aus Dichte und Volumen eines jeden Partikels jedoch entsprechend  $\rho_{Kugel} \cdot V_{Kugel} = \rho_{Zylinder} \cdot V_{Zylinder}$  konstant sein muss, wird die Dichte eines jeden Partikels folgendermaßen angepasst:

$$\rho_{Kugel} = \rho_{Zylinder} \cdot \frac{3}{4r} \quad (6.1)$$

Oberhalb eines jeden Tunnels befindet sich Bodenmaterial, das Druck auf die Ortsbrust ausübt. Dies muss in der Simulation natürlich berücksichtigt werden. Hierzu wird auf die obersten Bodenpartikel eine Spannung von  $40 \cdot 10^3 Pa$  aufgebracht, was einer Überdeckung von  $2 - 2,5m$  mit einem sandig-kiesigen Material entspricht. Die Spannung wird auf die Partikel, die sich im Abstand von maximal  $0,01m$  zum oberen Ende befinden, verteilt. Dies wird bereits in Abbildung 6.7 gezeigt.

Nun wird das Schälmesser eingeführt, das hier stark vereinfacht als Dreieck aus Wand-Elementen zusammengesetzt wird. Es handelt sich hierbei stets um ein gleichschenkeliges Dreieck, wobei der Winkel variiert werden kann. Wie bereits erwähnt, werden für das Schälmesser hier zwei Frontflächen angenommen, damit es zwei Bewegungsrichtungen haben kann. Da es sich um eine zweidimensionale Simulation handelt, kann der Einfluss der

Schälmesserbreite hier nicht untersucht werden. Hierfür wäre eine dreidimensionale Betrachtung notwendig.

Ist das Schälmesser in seiner Startposition, wird das trennende Wanelement zwischen Boden- und Suspensionspartikeln entfernt. Nun werden so viele Simulationszyklen durchgeführt, bis Gleichgewicht zwischen den beiden unterschiedlichen Materialien erreicht wird.

Der letzte Schritt vor Beginn der eigentlichen Simulation besteht darin, die Bonds zwischen den Partikeln einzufügen, da diese nun ihre Startposition erreicht haben. Mit Festlegung der horizontalen sowie vertikalen Geschwindigkeiten des Schälmessers beginnt nun die Simulation des Schneidprozesses.

Ausgewertet wird der Materialfluss, der sich für die verschiedenen Randbedingungen (Geometrie des Schälmessers und Schnittgeschwindigkeit) ergibt. Hierfür werden die Bodenpartikel gezählt, die durch das Schneidrad von der Ortsbrust abgelöst werden und sich dann mit der Suspension mischen. Um zu ermitteln, in welcher Lage der Massenfluss welche Werte annimmt, wird der Simulationsbereich in 50 Abschnitte unterteilt, die getrennt voneinander betrachtet werden. Diese Abschnitte sind in Abbildung 6.10 dargestellt.

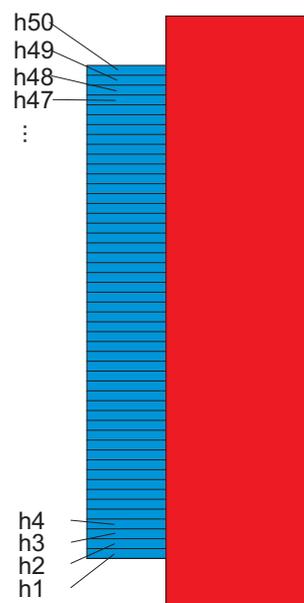


Abbildung 6.10: Messbereiche des Materialflusses

Aus dem hieraus entstehenden Materialfluss in Abhängigkeit der Lage kann die Druckverteilung in der Abbaukammer abgeleitet werden.

### 6.2.2 Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse aus der Abbausimulation erläutert. Abbildung 6.11 zeigt beispielhaft die Simulation für einen Winkel  $\alpha = 45^\circ$  und eine Geschwindigkeit des Schneidwerkzeugs von  $v = 0,5 \frac{m}{s}$  zu verschiedenen Zeitpunkten. Hierbei sind die Suspensions-Partikel stets in blau dargestellt, die Boden-Partikel in rot.

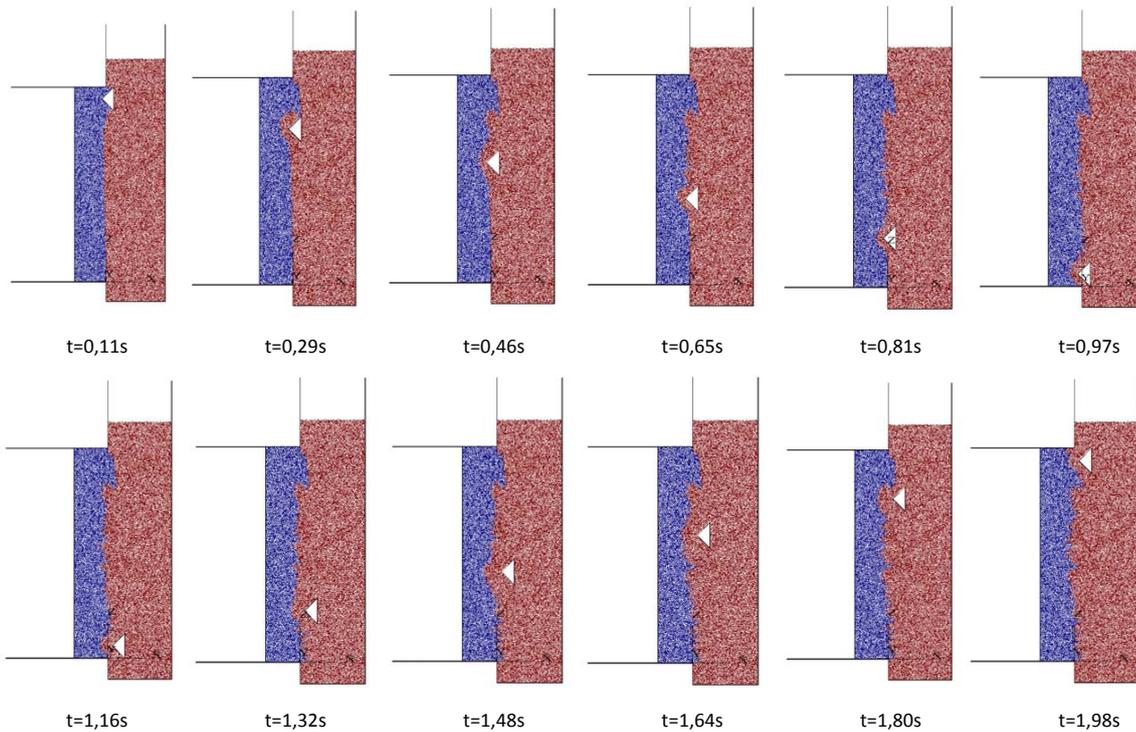


Abbildung 6.11: Abbausimulation zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$ , während des ersten Abbauzyklus

Das Werkzeug bewegt sich zunächst vom Ausgangspunkt nach unten bis zu einem Zeitpunkt von etwa  $t = 1\text{ s}$ , dann dringt es 2 cm tiefer in den Boden ein und bewegt sich anschließend wieder nach oben. Die Eindringgeschwindigkeit beträgt in allen Untersuchungen  $v_E = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Das erste Bild aus Abbildung 6.11 zeigt die Anordnung der Partikel, nachdem das Werkzeug in den Boden eingedrungen ist: Durch die Bewegung des Werkzeugs in den Bodenbereich hinein werden die Partikel zusammengedrückt, es bildet sich eine Art Einschnürung vor dem Werkzeug. Die folgenden Bilder zeigen dann den Fortschritt des Werkzeugs zu verschiedenen Zeitpunkten. Es werden Bodenpartikel von der Gesamtmasse abgelöst, das Werkzeug bewegt sich hindurch.

Eine wirkliche Durchmischung der roten Boden- und der blauen Suspensionspartikel findet zu keinem der hier betrachteten Zeitpunkte statt. Da hier nur ein Ausschnitt im unmittelbaren Schneidradbereich betrachtet wird, ist dieses Ergebnis durchaus realistisch, da davon ausgegangen wird, dass sich der abgelöste Boden erst in der Abbaukammer mit der Suspension mischt.

Im folgenden wird der Einfluss des Schneidwinkels sowie der Abbaugeschwindigkeit auf die abgebaute Gesamtmasse sowie den Massenfluss untersucht.

### Abhängigkeit des Abbauvolumens vom Schneidwinkel

In diesem Kapitel werden zunächst die unterschiedlichen Schneidwinkel untersucht. Da die Tiefe des Werkzeugs konstant gehalten wird, ergeben sich die in Abbildung 6.12 dargestellten Werkzeuggeometrien. Da daraus unterschiedliche Höhen für die Werkzeuge resultieren, und die vertikale Lauflänge von der Werkzeuggeometrie abhängt, damit stets ein Abstand von der Werkzeughöhe zum Randbereich eingehalten wird, folgen für die unterschiedlichen Geometrien auch leicht voneinander abweichende Lauflängen je Zyklus.

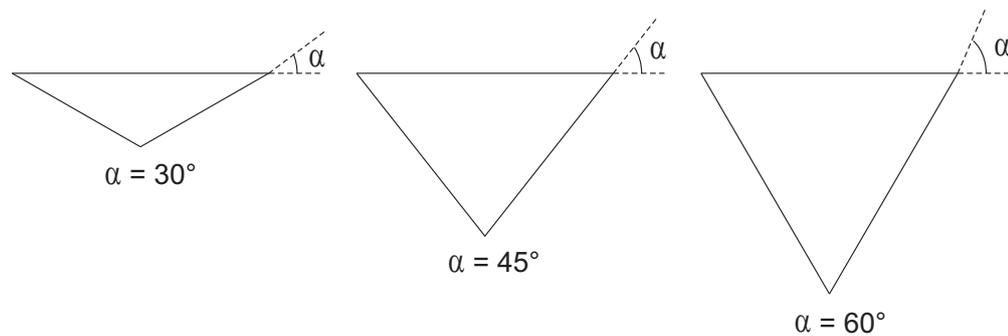


Abbildung 6.12: Verwendete Werkzeuggeometrien mit  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$  und  $\alpha = 60^\circ$

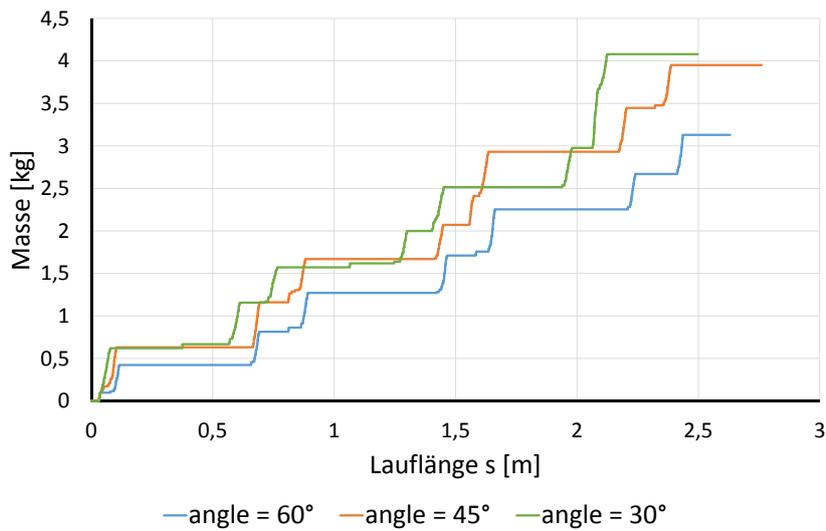
Abbildung 6.13 stellt die winkelabhängigen Gesamtmassen dar, die unterschiedliche Bereiche in der Simulation durchströmen. Die Bereiche werden in Abbildung 6.10 beschrieben und hängen von der Höhe im Simulationsbereich ab. Exemplarisch wurden hier ein Bereich im oberen Drittel (h38), derjenige in der Mitte (h25) sowie einer im unteren Drittel (h13) des simulierten Ausschnittes ausgewählt.

Da das Werkzeug sich in der Simulation zunächst von oben nach unten bewegt, ist eine Massenzunahme zunächst in Abbildung 6.13(a) zu erkennen, dann in (b) und schließlich in (c), weil das Werkzeug die Bereiche in dieser Reihenfolge durchläuft. Ebenso kann die anschließende Aufwärtsbewegung des Werkzeugs in umgekehrter Reihenfolge identifiziert werden.

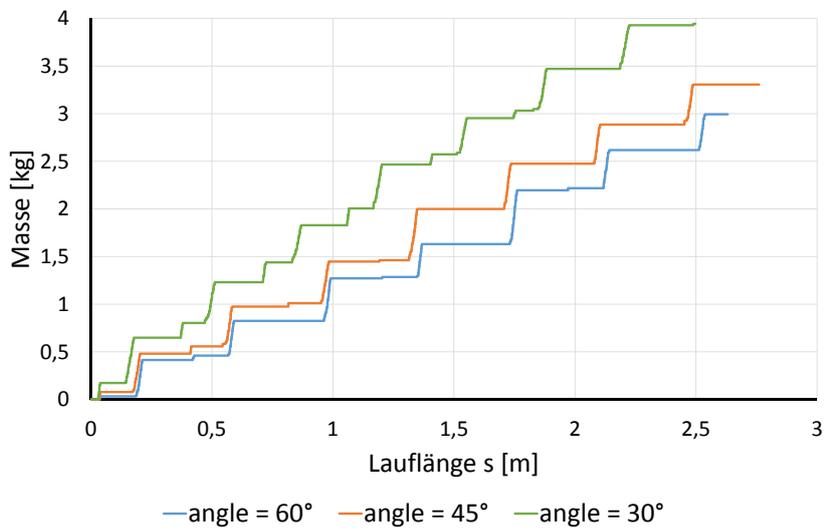
Bei der Betrachtung der gesamten Kurven fällt desweiteren auf, dass der Materialabtrag mit steigendem Schneidwinkel geringer wird. Der steilste hier betrachtete Schneidwinkel von  $60^\circ$  baut so etwa 15-30% (je nach betrachtetem Bereich) weniger Masse ab als der mit  $30^\circ$  spitzeste Schneidwinkel.

Der Vergleich von Abbildung 6.13(a), (b) und (c) zeigt, dass in allen Fällen etwa gleich viel Masse abgebaut wird. Die Grafen in Abbildung (a) und (c) zeigen einige längere Abschnitte ohne Steigung. In Abbildung (b) sind diese im Vergleich deutlich kürzer, dafür gleichmäßiger verteilt. Auch dies erklärt sich einfach durch die Geometrie. Während das Werkzeug den mittleren Bereich h25, der in (b) gezeigt wird, mit einer konstanten Frequenz passiert, ist es in den beiden anderen Fällen so, dass das Werkzeug diese Bereiche auf dem Weg nach oben und anschließend wieder nach unten in einem recht kurzen zeitlichen Abstand passiert und dann für eine längere Zeitspanne gar nicht mehr.

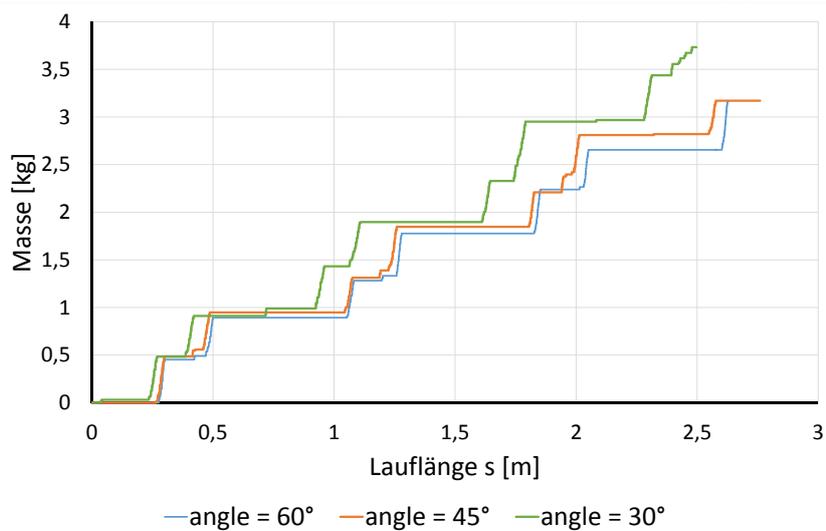
Abbildung 6.14 stellt für die zuvor beschriebenen Fälle den Massenfluss dar. Unter Massenfluss wird die Masse verstanden, die innerhalb einer bestimmten Zeit, hier  $3,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ , den



(a) Gesamtmasse, die den Bereich h38 durchläuft, abhängig vom Schneidwinkel



(b) Gesamtmasse, die den Bereich h25 durchläuft, abhängig vom Schneidwinkel



(c) Gesamtmasse, die den Bereich h13 durchläuft, abhängig vom Schneidwinkel

Abbildung 6.13: Masse an Bodenpartikeln, die in die Suspension übertritt, in verschiedenen Höhen des Simulationsbereiches

entsprechenden Bereich passiert.

Sobald Masse in den entsprechenden Bereich strömt, schlägt der Graf aus, andernfalls bleibt er bei Null. Bis auf einige Peaks liegt der Massenfluss meist bei etwa 170 kg/s. Korrespondierend zu den Steigungen in Abbildung 6.13 zeigt sich auch hier ein gleichmäßiger verteiltes Bild für den Bereich h25, was, wie bereits erläutert, an seiner Lage in der Mitte des Simulationsbereichs liegt.

In Abbildung 6.14 wirkt es, als bestünde zwischen den unterschiedlichen Schneidwinkeln kein erkennbar unterschiedlicher Massenfluss. Abbildung 6.15 zeigt daher wiederum den Massenfluss, allerdings für alle Höhen parallel zu einem bestimmten Zeitpunkt.

Aus dieser Darstellung lässt sich der Massenfluss zu einem bestimmten Zeitpunkt in jeder beliebigen Höhe ablesen. Daraus lässt sich beispielsweise auf die Druckverteilung in dem Bereich der Abbaukammer schließen, die unmittelbar an das Schneidrad anschließt. Diese Druckverteilung zu kennen, ist beispielsweise für die konstruktive Auslegung der Abbaukammer und des Schneckenförderers von Interesse.

Hier zeigen sich auch, was die verschiedenen Schneidwinkel angeht, deutliche Unterschiede. So zeigt das Profil für  $\alpha = 30^\circ$  deutlich höhere Spitzenwerte als jenes für  $\alpha = 60^\circ$ , was mit der zuvor getroffenen Aussage übereinstimmt, dass der spitzeste Winkel die meiste Masse abträgt. Auf der anderen Seite wird für die flacheren Winkel eine größere Anzahl von Ausschlägen registriert, der Massenfluss verteilt sich also über mehr Bereiche.

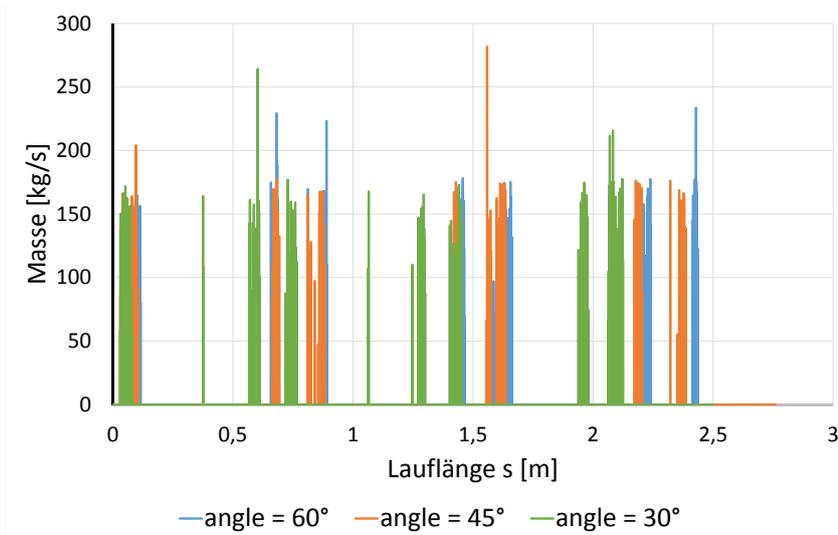
Insgesamt scheint der Winkel  $\alpha = 30^\circ$  in dieser Betrachtung die günstigsten Ergebnisse zu liefern: Zum einen ist hier die abgetragene Masse stets am größten, wie aus Abbildung 6.13 hervorgeht. Zum anderen besitzt der Massenfluss im gesamten Bereich ähnliche Spitzenwerte (Abbildung 6.15), was zu einer gleichmäßigen Druckverteilung in der Abbaukammer führen sollte.

### **Abhängigkeit des Abbauvolumens von der Abbaugeschwindigkeit**

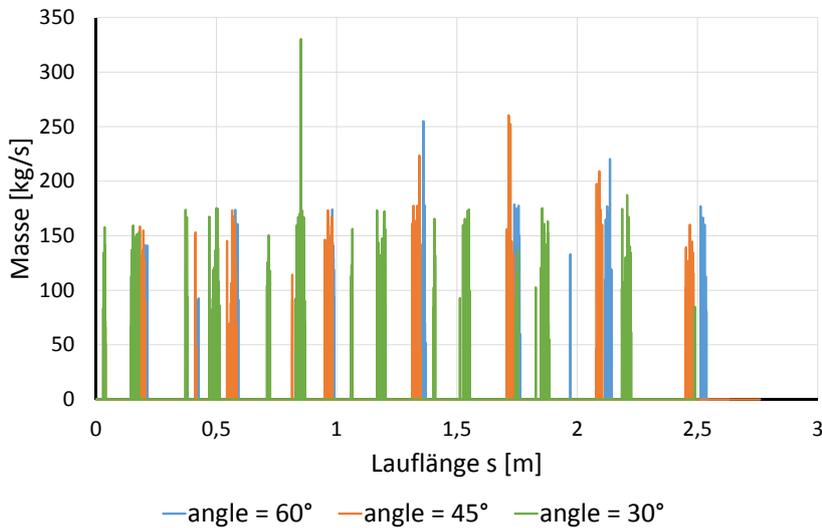
In diesem Kapitel wird der Einfluss der Abbaugeschwindigkeit, also der Geschwindigkeit, mit der sich das Werkzeug in der Simulation nach oben und nach unten bewegt, auf die abgebaute Masse untersucht. Hierfür wurden die Geschwindigkeiten  $v = 0,2 \frac{m}{s}$ ,  $v = 0,5 \frac{m}{s}$  und  $v = 1,0 \frac{m}{s}$  betrachtet. Abbildung 6.16 zeigt die abgebauten Massen für die verschiedenen Geschwindigkeiten. Wie in Kapitel 6.2.2 werden hierfür die drei Bereiche h13, h25 und h38 herausgegriffen. Der Schneidwinkel liegt für alle Rechnungen bei  $\alpha = 45^\circ$ .

Wie bereits im vorangegangenen Kapitel beschrieben, lässt sich auch hier anhand der unterschiedlichen langen Phasen, in denen die Graphen steigen oder konstant bleiben, die Lage des dargestellten Simulationsbereiches ablesen. Was die abgebaute Gesamtmasse in Abhängigkeit der Geschwindigkeiten angeht, lassen sich jedoch keine klaren Unterschiede erkennen.

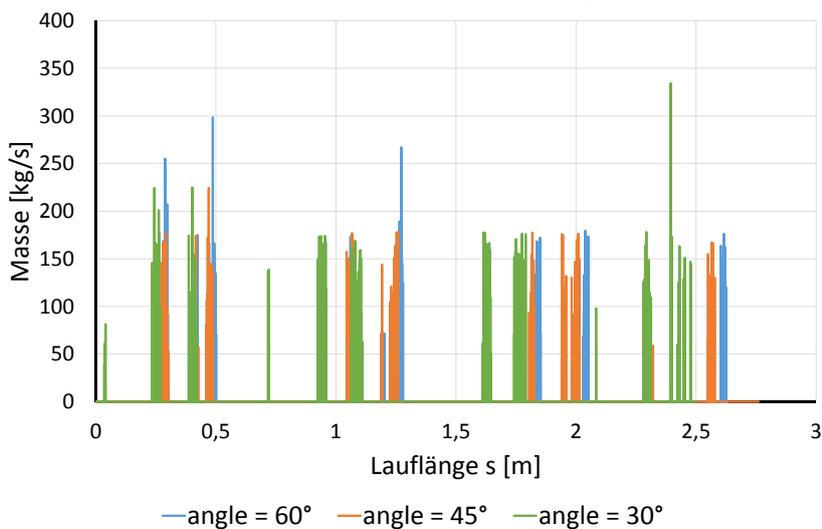
Wird jedoch der höhenverteilte Massenfluss zu einem bestimmten Zeitpunkt betrachtet, der in Abbildung 6.17 gezeigt wird, zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen den verschiedenen Geschwindigkeiten. Hier zeigt sich ganz klar, dass eine erhöhte Geschwindigkeit auch



(a) Massenfluss durch den Bereich h38, abhängig vom Schneidwinkel



(b) Massenfluss durch den Bereich h25, abhängig vom Schneidwinkel



(c) Massenfluss durch den Bereich h13, abhängig vom Schneidwinkel

Abbildung 6.14: Massenfluss der Bodenpartikel, die in die Suspension übertreten, in verschiedenen Höhen des Simulationsbereiches

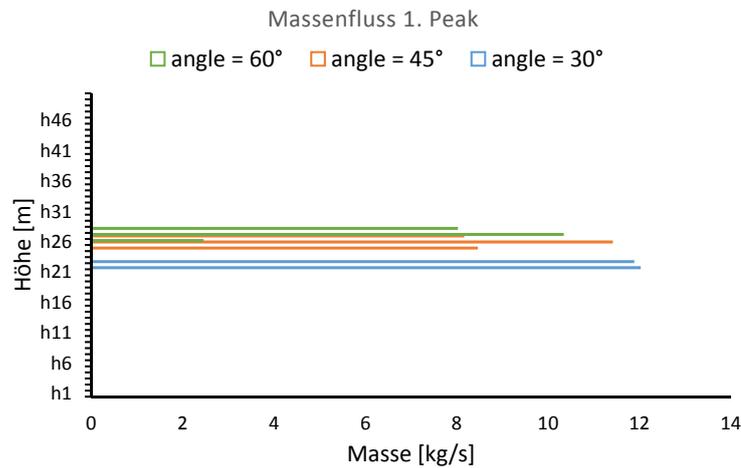


Abbildung 6.15: Massenfluss über die Höhe des Simulationsbereiches, abhängig vom Schneidwinkel

einen größeren Massenfluss bedingt. Da dieser dann entsprechend nur für eine kurze Zeit auftritt, führt es im Gesamtergebnis zu etwa gleichen abgebauten Massen.

Es lässt sich also aus der Simulation erkennen, dass eine Erhöhung der Geschwindigkeit zu einem punktuell vergrößerten Massenfluss führt, und damit wohl auch zu Spannungsspitzen innerhalb der Abbaukammer. Wird dieser Punkt also isoliert von den anderen, in der Praxis stets gegebenen, Zwängen betrachtet, sollte das Werkzeug sehr langsam gefahren werden.

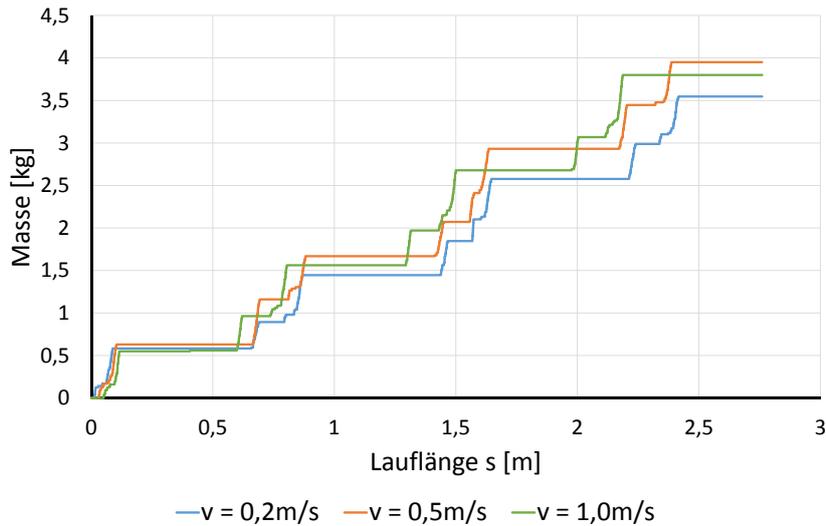
### 6.2.3 Zusammenfassung

In der Simulation des Abbauprozesses wurden die abgebauten Massen sowie der in die Abbaukammer strömende Massenfluss untersucht. Hierbei wurde zum einen der Einfluss des Schneidwinkels und zum anderen der der Schneidgeschwindigkeit betrachtet. Im Ergebnis zeigt sich, dass ein spitzer Schneidwinkel, hier wurden  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\alpha = 45^\circ$  und  $\alpha = 60^\circ$  betrachtet, zum größten Materialabtrag führt. Es ist allerdings anzumerken, dass der Unterschied lediglich etwa 10-15% beträgt, also vergleichsweise klein ist.

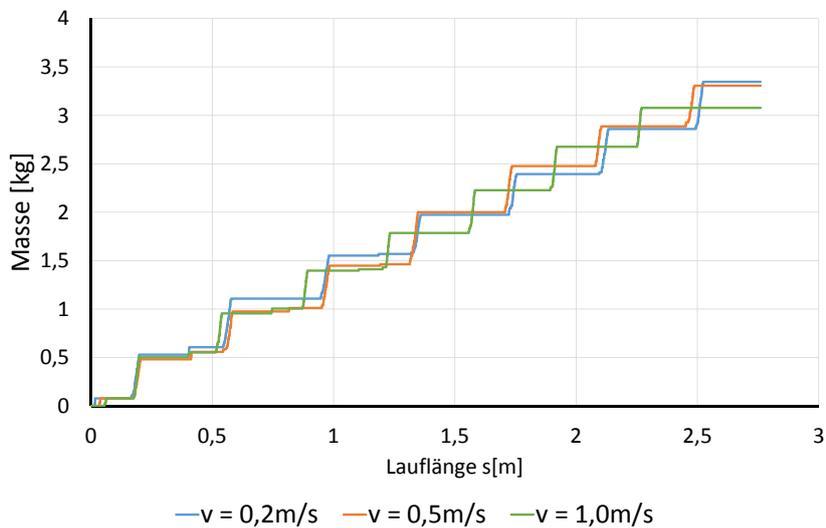
Die unterschiedlichen Schneidgeschwindigkeiten ( $v = 0,2 \frac{m}{s}$ ,  $v = 0,5 \frac{m}{s}$  und  $v = 1,0 \frac{m}{s}$ ) führen dagegen zu einem vergleichbaren Materialabtrag. Hier sind jedoch klare Unterschiede im Massenfluss zu erkennen: Eine größere Geschwindigkeit führt ganz klar auch zu einem höheren (allerdings zeitlich kürzeren) Materialfluss in die Abbaukammer.

Die hier durchgeführten Untersuchungen sollten als ein Herantasten an eine DEM-Simulation des Abbauprozesses verstanden werden. Bereits hier lassen sich logisch erklärbare und aus der Praxis begründbare Ergebnisse ableiten. Um tatsächlich zu einem praxisrelevanten Erkenntnisgewinn beizutragen, muss die Simulation jedoch um einige Punkte erweitert werden:

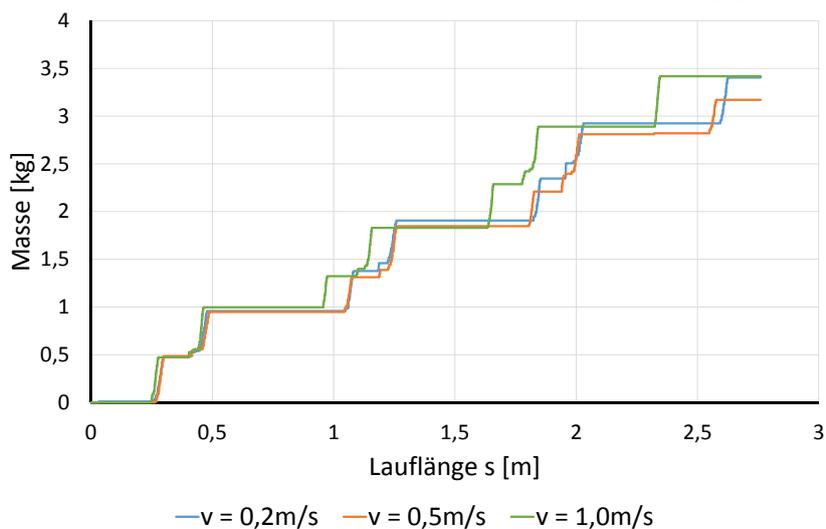
Zunächst ist hierfür eine 3D Betrachtung unerlässlich. Im zweidimensionalen Simulationsbereich können die Materialströme niemals wirklich realistisch erfasst werden. Auch die Schälmesserbreite, die wie in Kapitel 3.2 beschrieben, einen erheblichen Einfluss auf den



(a) Gesamtmasse, die den Bereich h38 durchläuft, abhängig von der Schnittgeschwindigkeit



(b) Gesamtmasse, die den Bereich h25 durchläuft, abhängig von der Schnittgeschwindigkeit



(c) Gesamtmasse, die den Bereich h13 durchläuft, abhängig von der Schnittgeschwindigkeit

Abbildung 6.16: Masse an Bodenpartikeln, die in die Suspension übertritt, in verschiedenen Höhen des Simulationsbereiches

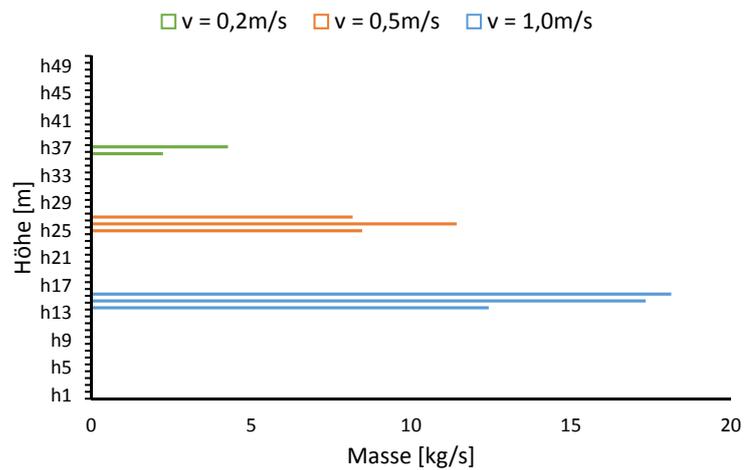


Abbildung 6.17: Massenfluss über die Höhe des Simulationsbereiches, abhängig von der Schnittgeschwindigkeit

Abbauprozess hat, kann nur im dreidimensionalen untersucht werden.

Desweiteren müsste der Simulationsbereich realitätsnäher dargestellt werden, also die tatsächlichen Geometrien eines Schneirates sowie seine wirkliche Fortbewegungsrichtung als Kombination aus Translation und Rotation. Hierdurch bedingt sollte außerdem der Simulationsbereich entsprechend vergrößert werden.

### 6.3 Werkzeugverschleiß

Abschließend soll die Simulation des Werkzeugverschleiß im Fokus stehen. Auf die Verschleißproblematik im Allgemeinen wurde bereits in Kapitel 3.3 eingegangen, auf die besonderen Schwierigkeiten im Schildvortrieb in Kapitel 3.3.3. In der im Folgenden gezeigten Simulation soll die Anwendbarkeit der DEM für eine Verschleißprognose im Lockergestein überprüft werden.

Hierfür wird, ähnlich wie zuvor in der Abbausimulation in Kapitel 6.2, ein einzelnes, annähernd dreiecksförmiges Werkzeug betrachtet. Der Simulationsbereich mit Angabe der gewählten Dimensionen ist in Abbildung 6.18 dargestellt. In Kapitel 6.3.1 wird zunächst der Aufbau und die Durchführung der Simulation erläutert, bevor in Kapitel 6.3.2 die beiden unterschiedlichen hier verwendeten Versagensmechanismen für den duktilen sowie den spröden Werkzeugteil erklärt werden. Anschließend werden in Kapitel 6.3.3 die Ergebnisse vorgestellt und diskutiert.

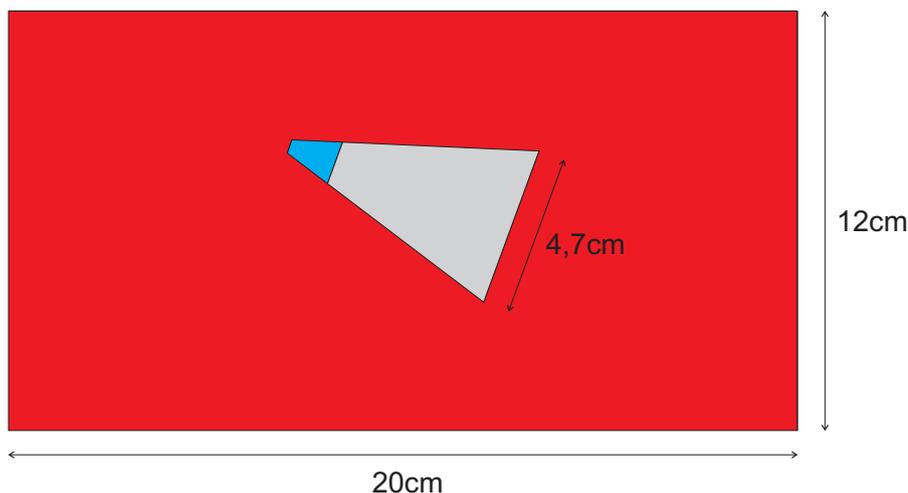


Abbildung 6.18: Betrachteter Ausschnitt der Verschleißsimulation

#### 6.3.1 Simulation

Das Werkzeug ist hier, wie auch zumeist in der Realität, aus zwei unterschiedlichen Materialien zusammengesetzt, wobei die Geometrie für die Simulation stark vereinfacht betrachtet wird, wie die Abbildungen 6.19 und 6.20 zeigen: Die vordere, aus Werkzeugstahl oder Hartmetall gefertigte Bereich wird hier durch Partikel modelliert, die durch Bonds miteinander verbunden sind. Durch das Brechen der Bonds kann ein sprödes Materialversagen gut beschrieben werden. Der Hauptteil des Werkzeuges wird dagegen durch einzelne Wand-Elemente diskretisiert. Durch ein Verformungsgesetz, das an die in Gleichung 3.3 erwähnte Verschleißberechnung nach Archard angelehnt ist, verformen die Wand-Elemente sich abhängig von der Belastungssituation. Auf die genaue Formulierung wird in Kapitel 6.3.2 eingegangen.

Ein weiterer Unterschied zu der in Kapitel 6.2 vorgestellten Abbausimulation besteht darin, dass hier die Bewegungen umgekehrt sind: Nicht das Werkzeug bewegt sich durch die

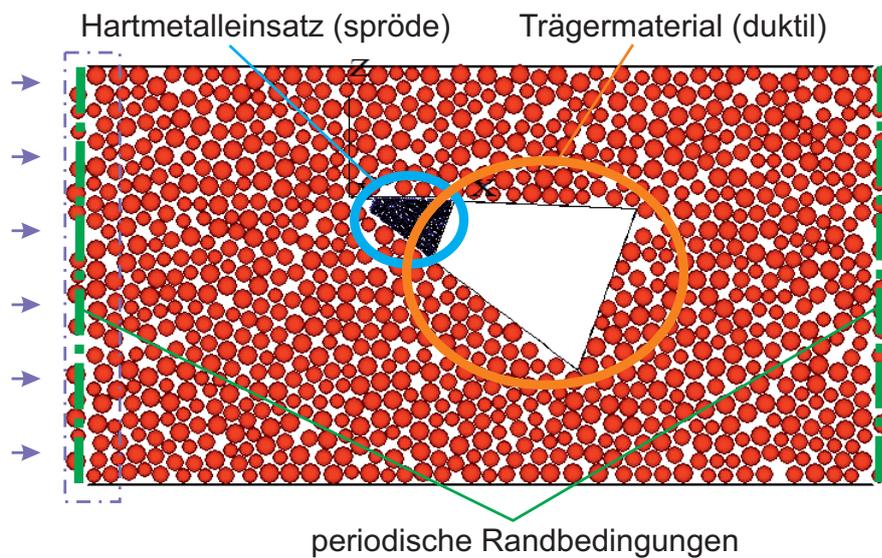


Abbildung 6.19: Simulationsbereich der zweidimensionalen Verschleißsimulation eines einzelnen Werkzeugs

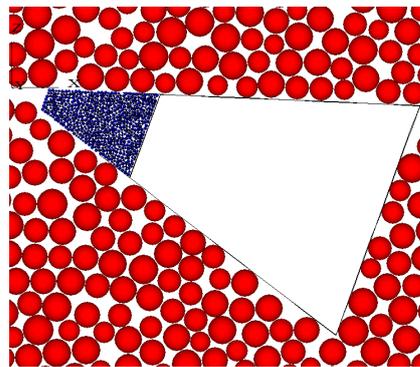


Abbildung 6.20: Werkzeug, zusammengesetzt aus Partikeln und Wand-Elementen

Boden-Partikel, sondern der Boden bewegt sich am Werkzeug vorbei. Dies hat den Vorteil, dass eine geringere Anzahl an Boden-Partikeln benötigt wird, wenn mit periodischen Randbedingungen gearbeitet wird. Diese sorgen dafür, dass ein Partikel, das den Simulationsbereich durch eine der periodischen Grenzen verlässt, an der ihr gegenüberliegenden wieder auftaucht.

Das Generieren des Partikelmodells erfolgt analog zu den in Kapitel 6.2 erläuterten Schritten. Die einzigen Unterschiede bestehen zum einen in einer Eliminierung von sogenannten *Floatern* innerhalb des Werkzeugs, also solchen Partikeln, die eine nicht ausreichende Anzahl an Berührungspunkten mit benachbarten Partikeln haben, das Verfahren wird in Kapitel 4.5 detailliert dargelegt. Der zweite Unterschied besteht in dem Einfügen der bereits erwähnten periodischen Randbedingungen am linken und rechten Rand des Simulationsbereiches.

Nachdem innerhalb des Werkzeugs Bonds eingefügt sind, werden die trennenden Wand-Elemente gelöscht und das Set-up ist beendet. Nun wird den Partikeln am linken Rand eine Translationsgeschwindigkeit von  $v_p$  zugewiesen, wodurch innerhalb kurzer Zeit sämtliche Boden-Partikel in Bewegung gesetzt werden, ohne eine plötzlich auftretende Kraft auf das Werkzeug auszuüben.

	Boden	Werkzeug
Partikelanzahl	914	590
$r_{\text{mean}}$	$2,60 \cdot 10^{-3}$	$3,47 \cdot 10^{-4}$
$k_n$	$4 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$
$k_s$	$8 \cdot 10^5$	$1,84 \cdot 10^6$
density	$1,46 \cdot 10^5$	$2,63 \cdot 10^7$
friction	0,577	0,54

Tabelle 6.2: Gewählte Parameter für die Boden- und Werkzeugmaterialien

Diejenigen Parameter, die auch während der später gezeigten Parametervariationen immer konstant gehalten werden, sind in Tabelle 6.2 zusammengefasst. Der Einfluss derjenigen Parameter, die den duktilen Verschleiß steuern, soll innerhalb der Simulation genauer untersucht werden. Dies sind insbesondere der Verschleißfaktor  $z_W$  und die Mindestgeschwindigkeit  $v_{\text{Grenz}}$ , deren Bedeutung im folgenden Kapitel 6.3.2 erläutert wird. Auch der Einfluss der Partikelgeschwindigkeit  $v_p$  wird betrachtet. Im letzten Schritt werden schließlich noch die Stärken der Bonds innerhalb der spröden Materialspitze variiert und deren Auswirkung auf das Gesamtergebnis untersucht.

### 6.3.2 Versagensmechanismen

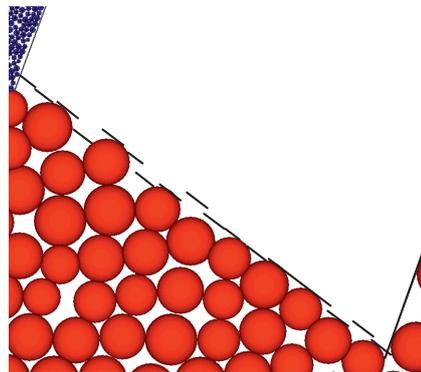
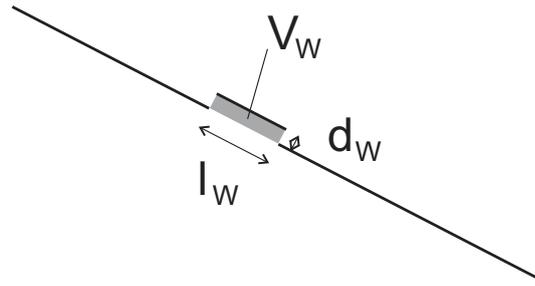


Abbildung 6.21: Duktile Materialversagen im Trägerstahl wird durch ein Zurückweichen der einzelnen Wandelemente modelliert

Das duktile Materialversagen des Trägermaterials wird in Abbildung 6.21 gezeigt. Die seitlichen Begrenzungen des Werkzeugs werden oben und unten aus jeweils 20, an der rechten Seite aus zehn einzelnen Wandelementen zusammengesetzt, die sich voneinander unabhängig bewegen können. Durch ein *Zurückweichen* eines Wandelementes wird Materialabtrag durch Verschleiß simuliert. Dies folgt der Formel

$$d_W = z_{Wi} F_{Wi}^n (v_{\text{Grenz}}) \quad (6.2)$$

Hierbei beschreibt  $d_W$  die Strecke, um die das entsprechende Wandelement verschoben wird, wie in Abbildung 6.22 illustriert. Ein vom tribologischen System abhängiger Faktor wird durch  $z_{Wi}$  eingeführt, während  $F_{Wi}^n$  diejenigen Normalkraftanteile der Kontaktkräfte zwischen Wandelement und Partikeln meint, die einen Anteil am Verschleiß haben. Ein verschleißrelevanter Kontakt wird in unserem Fall nur dann angenommen, wenn die Relativgeschwindigkeit zwischen Partikel und Wandelement eine Mindestgeschwindigkeit  $v_{\text{Grenz}}$  übersteigt.

Abbildung 6.22: Verschleißweg  $d_W$  eines Wandelements

Das Verschleiß„volumen“, das in dieser zweidimensionalen Betrachtung eigentlich einer Verschleißfläche entspricht, kann, wie aus Abbildung 6.22 entnommen werden kann, einfach aus

$$V_W = d_{Wj} l_{Wj} \quad (6.3)$$

ermittelt werden. Hierbei ist  $j$  die Anzahl der am Gesamtverschleiß beteiligten Wandelemente,  $l_W$  die Länge der einzelnen Elemente.

Für den Versagensmechanismus des spröden Materials ist dagegen keine Implementierung eines entsprechenden Gesetzes erforderlich. Das Materialversagen wird hier lediglich durch die bei zu hoher Normal- oder Tangentialbelastung eines Kontaktes brechenden Bonds simuliert. Das Brechen eines einzelnen Bonds kann hierbei zunächst als Mikroschädigung interpretiert werden. Löst ein Partikel all seine Verbindung und bewegt sich damit unabhängig, verringert die Werkzeugspitze ihre Masse und es kommt zu Verschleiß. Durch das Versagen von in einer Reihe liegenden Bonds können Risse im Material simuliert werden.

### 6.3.3 Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Simulationen gezeigt. Wie schon bei den anderen Anwendungsbeispielen gilt auch hier, dass eine recht grobe Diskretisierung verwendet wurde, und daher lediglich eine qualitative Auswertung erfolgen kann. Die Ergebnisse werden weiterhin durch ihre Zweidimensionalität beeinträchtigt, da diese wesentliche Effekte nicht berücksichtigen kann.

Wie bereits in Abbildung 6.21 gezeigt, kommt es zunächst zu einem Verschleiß des duktilen Teils. Schließlich versagt das komplette Werkzeug, indem seine Spitze wegbricht, wie in Abbildung 6.23 gezeigt.

Hier führt das Versagen einzelner Bonds (Mikrorisse) innerhalb kürzester Zeit dazu, dass sich ein großer Teil des Hartmetalleinsatzes komplett herauslöst. Dieses Verhalten entspricht auch in der Realität beobachteten Versagensmechanismen. Ein so stark beschädigtes Werkzeug kann nicht mehr in relevantem Maße zum Materialabbau beitragen, weshalb die Simulation an dieser Stelle abbricht.

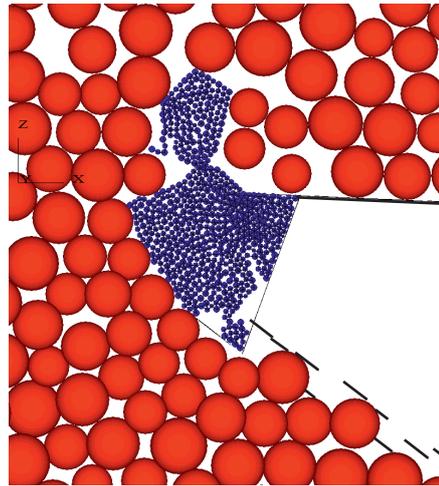


Abbildung 6.23: Materialversagen im spröden Teil des Werkzeuges

### Einfluss verschiedener Parameter auf den duktilen Verschleiß

Im folgenden soll der Verschleißprozess des Trägermaterials genauer betrachtet werden. Abbildung 6.24 zeigt zunächst den Einfluss der Partikelgeschwindigkeit  $v_p$ , die den Bodenpartikeln am linken Rand des Simulationsausschnitts zugewiesen wird.

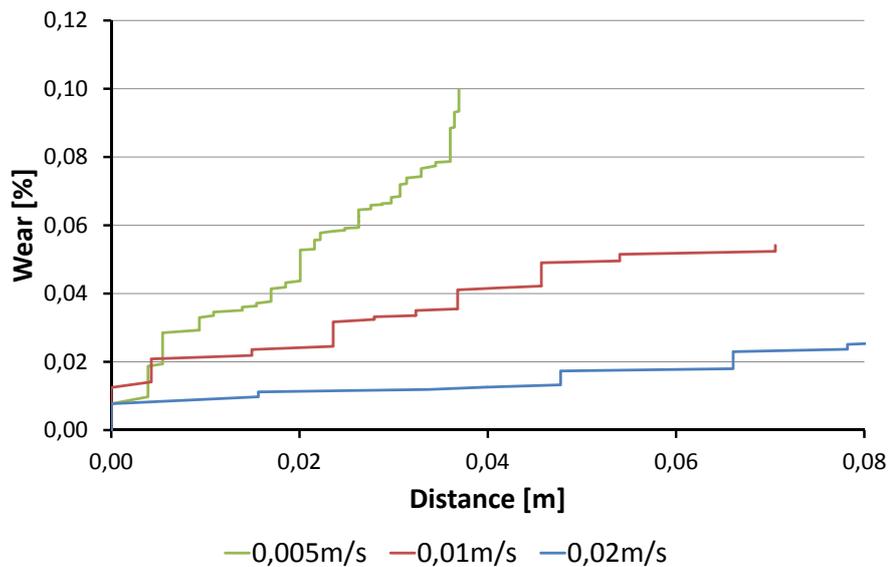


Abbildung 6.24: Duktiler Verschleiß im Trägermaterial in Abhängigkeit der Partikelgeschwindigkeit  $v_p$

Die Grafik zeigt deutlich, dass eine geringere Partikelgeschwindigkeit zu einem schnelleren und höheren Verschleiß im Trägermaterial führt. Da die Partikel sich so langsamer am Werkzeug vorbeibewegen, können sich deutlich größere Normalkräfte  $F_{Wi}^n$  zwischen den Partikeln und den Wandelementen aufbauen. Diese haben entsprechend Gleichung 6.3 einen unmittelbaren Einfluss auf die Verschleißtiefe  $d_W$ , was sich dann in einem höheren Verschleißvolumen widerspiegelt.

Unabhängig von der Partikelgeschwindigkeit zeigen alle Graphen tendenziell einen konstanten Anstieg, der sich jedoch stufenartig darstellt. Bei einer feineren Diskretisierung in

der deutlich mehr einzelne Wanelemente eingesetzt würden, fielen diese Stufen kaum auf und es würden sich glattere Kurven ergeben.

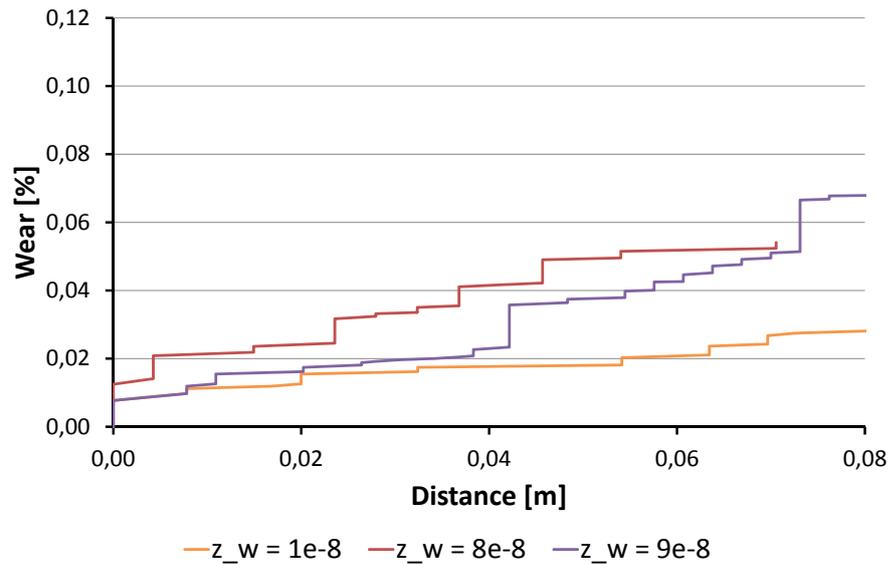


Abbildung 6.25: Duktiler Verschleiß im Trägermaterial in Abhängigkeit des Verschleißfaktors  $z_w$

Abbildung 6.25 zeigt den Einfluss, der durch eine Variation des Tribologie-abhängigen Verschleißparameters  $z_w$  ergibt. Da die gewählten Parameter sich jedoch im nano-Bereich bewegen, ist der Einfluss äußerst gering. Nicht einmal die Annahme, dass ein höherer Verschleißparameter unmittelbar zu einem höheren Verschleiß führt, lässt sich hier klar belegen. Als Begründung muss hier wiederum auf die grobe Diskretisierung verwiesen werden.

Schließlich folgt eine Untersuchung der Geschwindigkeit  $v_{\text{Grenz}}$ , also der minimal erforderlichen Relativgeschwindigkeit zwischen Partikel und Wanelement, um überhaupt Verschleiß zu bewirken. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.26 zusammengefasst.

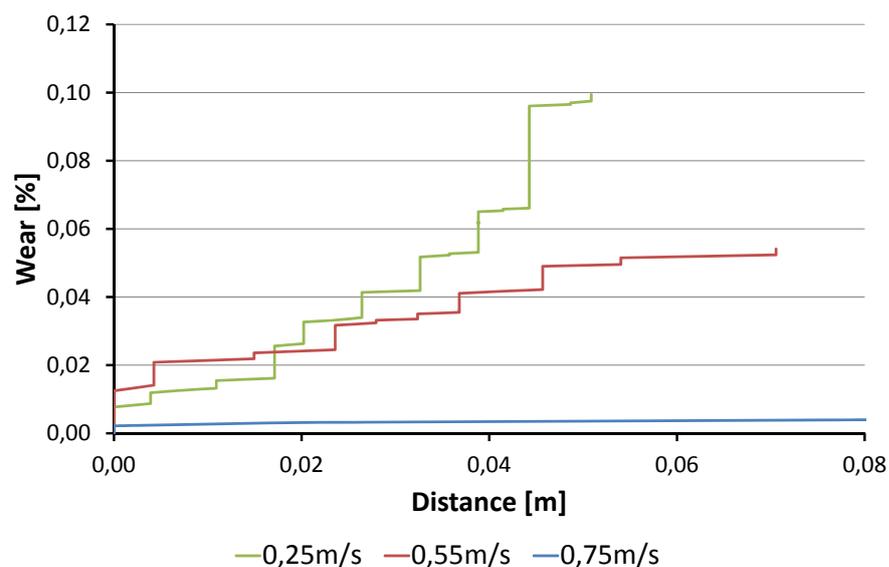


Abbildung 6.26: Duktiler Verschleiß im Trägermaterial in Abhängigkeit der minimalen Relativgeschwindigkeit zwischen Partikeln und Wanelementen  $v_{\text{Grenz}}$

Erwartungsgemäß zeigt sich hier, dass eine verminderte Grenzgeschwindigkeit unmittelbar einen erhöhten Verschleiß bewirkt. Wird die Geschwindigkeit zu hoch gesetzt, in diesem konkreten Beispiel bereits bei  $v_{\text{Grenz}} = 0,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , gibt es praktisch gar keinen Verschleiß mehr, da solche Relativgeschwindigkeiten bei den hier gewählten Randbedingungen einfach nicht erreicht werden. Ein Herabsetzen der Grenzgeschwindigkeit führt entsprechend zu einem steileren Anstieg der Verschleißrate.

### Einfluss der Bondstärke auf den Versagenszeitpunkt

Nun soll der Einfluss unterschiedlicher Bondstärken auf das Versagen des Werkzeugs untersucht werden. Hierbei werden die Stärken der Bonds in normaler und tangentialer Richtung stets gleich gewählt. Abbildung 6.27 zeigt zunächst die sich aus der Simulation ergebenden Versagensbilder für die vier betrachteten Bondstärken.

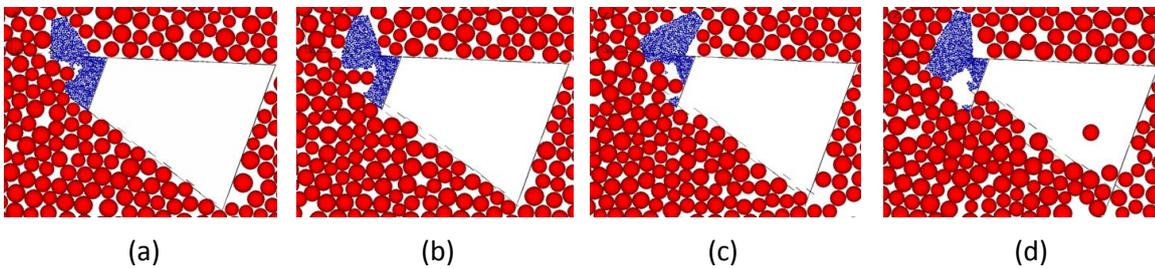


Abbildung 6.27: Versagen bei unterschiedlichen Bondstärken: (a)  $f_c^n = f_c^t = 300$ , (b)  $f_c^n = f_c^t = 350$ , (c)  $f_c^n = f_c^t = 400$ , (d)  $f_c^n = f_c^t = 450$

Hierbei wird festgestellt, dass in allen Fällen ein wesentlicher Teil der gehärteten Spitze des Werkzeugs wegbreicht, es also stets zu einem totalen Versagen kommt.

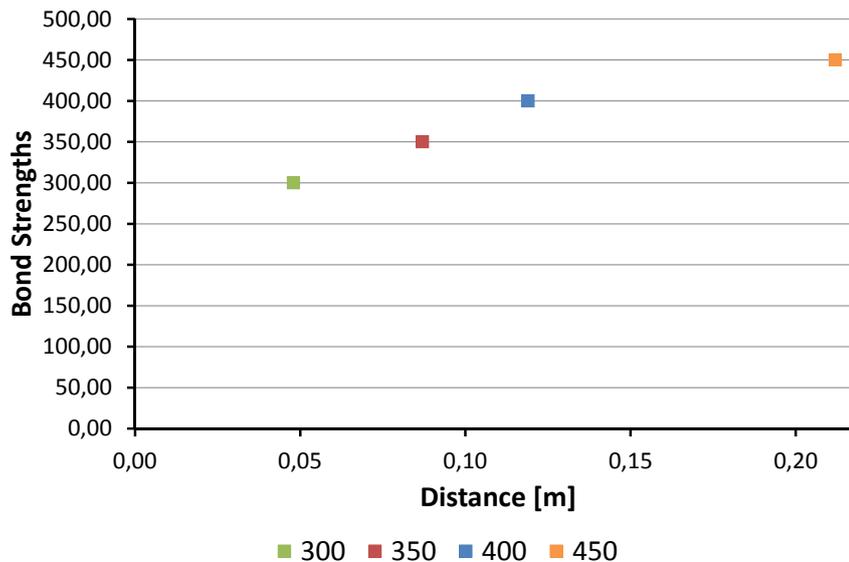


Abbildung 6.28: Einfluss der Bondstärken auf den bis zum Versagen zurückgelegten Verschleißweg

Wie groß der wegbrechende Anteil ist, scheint allerdings im Zusammenhang mit der gewählten Bondstärke zu stehen: Je stärker die Bonds gewählt werden, desto mehr Partikel lösen

sich auf einmal vom Rest des Werkzeuges ab.

Erwartungsgemäß tritt dieses Versagen jedoch später auf, je stärker die Bonds gewählt werden, was in Abbildung 6.28 deutlich gemacht wird. In Abbildung 6.27 ist entsprechend auch ein stärkerer Verschleiß im Trägermaterial zu erkennen, wenn die Bondstärke erhöht wird. Möglicherweise besteht auch ein kausaler Zusammenhang zwischen dem stärkeren Verschleiß im Trägermaterial und einem größeren Ausbruch im spröden Teil des Werkzeuges.

Abschließend soll untersucht werden, ob die unterschiedlichen Bondstärken einen Einfluss auf den duktilen Verschleiß haben, der in Abbildung 6.29 dargestellt wird.

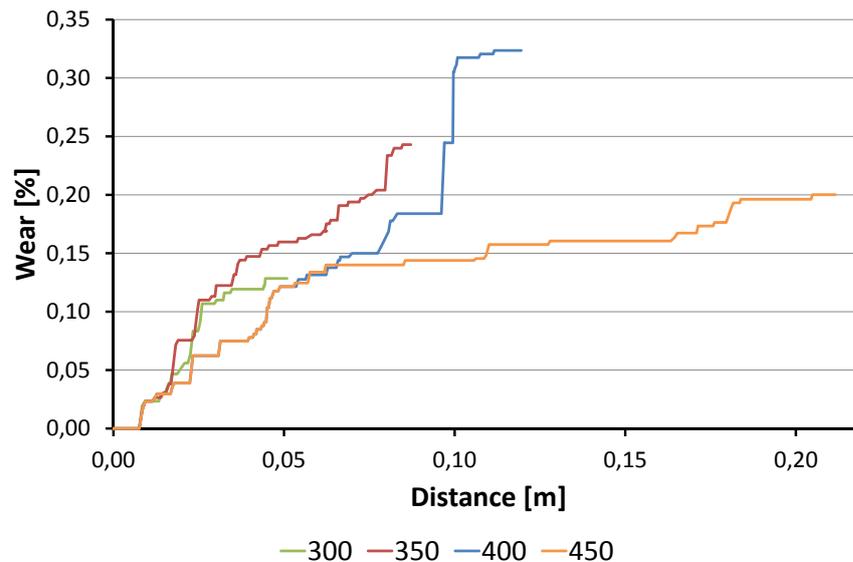


Abbildung 6.29: Einfluss der Bondstärken auf den duktilen Verschleiß im Trägermaterial

Wegen der unterschiedlich langen Verschleißwege bis zum Versagenszeitpunkt ergeben sich hier natürlich auch unterschiedlich lange Kurven. Zu Beginn der Simulation, bis zu einem Verschleißweg von etwa 2cm, lassen sich die Kurven kaum auseinanderhalten. Anschließend verfolgen sie zwar nicht mehr exakt denselben Weg, behalten jedoch die gleiche Tendenz bei.

Dies ändert sich erst, kurz bevor es zu einem Versagen der *spröden* Werkzeugspitze kommt. Hier kommt es zu einem sprunghaften Anstieg des *duktilen* Verschleißes. Die einzige Ausnahme hiervon bildet die Kurve für eine gewählte Bondstärke von  $f_c^n = f_c^t = 300$ , in der sich kein plötzlicher Anstieg zeigt. Diese Beobachtung stärkt die Vermutung, dass die Schwächung des Trägermaterials, die durch den sprunghaften Anstieg des duktilen Verschleißes bedingt wird, ein Versagen der spröden Materialspitze bedingt oder zumindest begünstigt.

### Zusammenfassung

In allen Abbildungen fällt unmittelbar auf, dass der Verschleißweg  $s$  äußerst gering ist - die Simulationen brechen bereits bei Verschleißwegen zwischen 4 und 22cm wegen Werkzeugversagens ab. Hier ließe sich durch eine Skalierung der Bondstärken sowie des Verschleißfaktors  $z_W$  problemlos ein realistischer Verschleißweg von mehreren Kilometern erreichen.

Da dies jedoch die Rechenzeiten massiv beeinflussen würde und hier lediglich die generelle Anwendbarkeit der DEM für die betrachtete Problematik im Fokus steht, wird im Rahmen dieser Arbeit darauf verzichtet.

Die Simulation liefert aber abgesehen vom Verschleißweg qualitativ überzeugende Resultate. Die Variationen der Verschleißparameter  $z_W$  und  $v_{\text{Grenz}}$  sowie der Partikelgeschwindigkeit  $v_p$  ergeben jeweils sinnvolles Verschleißverhalten und qualitativ überzeugende Ergebnisse. Das gleiche gilt für die Betrachtung unterschiedlicher Bondstärken im spröden Materialteil. Vor allem der Einfluss des duktilen Verschleißes im Trägermaterial auf den -für das Versagen des gesamten Werkzeuges maßgeblichen- Verschleiß im spröden Materialteil sollte aber in seiner Kausalität noch genauer untersucht, und mit Laborexperimenten abgeglichen werden.

Generell gilt, dass, um tatsächlich in der Realität verwertbare Aussagen zu erhalten, der Simulationsbereich allerdings vergrößert und die Partikel verkleinert werden sollten. Auch eine Anpassung der Werkzeuggeometrie sowie eine Erweiterung der Dimensionalität ist hierfür unumgänglich.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde gezeigt, dass ein einfacher Zusammenhang zwischen den elastischen Parametern und der Streckgrenze eines Materials auf der einen Seite und den mikroskopischen Kontaktparametern aus der Methode der diskreten Elemente auf der anderen Seite gute Ergebnisse für die Prognose der Materialparameter liefert. Somit können die entsprechenden Gleichungen für quasistatische, primär unter Druckbeanspruchungen stehende Berechnungen zur Bestimmung der DEM-Kontaktparameter aus den Materialparametern verwendet werden. Das Hauptziel dieser Arbeit, mit einfachen Mitteln die für eine DEM-Simulation erforderlichen Kontaktparameter zu bestimmen, wurde damit erreicht.

Mit Hilfe von mikroskopischen Energien, die auf der Ebene der Kontaktpunkte definiert wurden, konnte die gesamte freie Energie des Probenkörpers ermittelt werden. Unter der Annahme, dass jedes System stets versucht, die in ihm enthaltene Energie zu minimieren, wurde diese freie Energie unter Anwendung des Lagrange-Formalismus minimiert. So ergab sich ein isotropes linear-elastisches Materialgesetz, aus dem der Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl unmittelbar in Abhängigkeit der Kontaktsteifigkeiten abgelesen werden konnten.

Für ein durch Bonds verbundenes Material ergibt sich ein ähnlicher Zusammenhang zwischen den Streckgrenzen nach Rankine und Tresca und den Stärken der Bonds in Normal-, beziehungsweise Tangentialrichtung. Beide Beziehungen wurden sowohl für zweidimensionale als auch für dreidimensionale Modelle hergeleitet und deren Anwendbarkeit anschließend in DEM-Simulationen von Bi- beziehungsweise Triaxialversuchen validiert. Hierbei wurden jeweils für unterschiedliche Kontaktparameter die zu untersuchenden makroskopischen Parameter, also Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl und Streckgrenze, ermittelt. Je nach Art der Messung können sich hier in einer einzigen Simulation stark voneinander abweichende Werte ergeben. Diese wurden dann mit den Werten verglichen, die sich aus den Beziehungen zur Parameteridentifikation ergeben.

Allgemein konnte hier festgestellt werden, dass die Parameteridentifikation eine gute Übereinstimmung mit den Simulationsergebnissen liefert. Dies gilt sowohl für die Simulation von granularem wie auch von kohäsivem Material, und es funktioniert im zweidimensionalen ebenso gut wie im dreidimensionalen Raum. Generell wurde festgestellt, dass die Ergebnisse sich verbessern, je mehr Partikel in der Simulation verwendet werden, wobei meist auch schon eine vergleichsweise geringe Partikelanzahl ausreicht um zufriedenstellende Ergebnisse zu erzielen.

Anschließend wurden Beispiele aus dem Bereich des maschinellen Tunnelvortriebs gezeigt, bei denen die Verwendung der DEM in Kombination mit der Parameteridentifikation große Vorteile gegenüber anderen Simulationsmethoden besitzt. So konnte in der Simulation eines Slump Tests mit konditioniertem Boden mit einfachen Mitteln eine gute Übereinstimmung in der Geometrie des Probenkörpers am Ende des Versuchs erreicht werden. Anschließend wurde der Abbaumechanismus von Boden am Schneidrad genauer betrachtet. Hier konnte

der Materialabtrag in Abhängigkeit der verwendeten Werkzeuggeometrie und der Schneidgeschwindigkeit untersucht werden. Die letzte hier gezeigte Simulation beschäftigte sich mit dem Verschleiß der Werkzeuge einer Tunnelbohrmaschine, indem sie ein Schälmesser geometrisch vereinfacht, aber aus zwei unterschiedlichen Materialien zusammengesetzt, betrachtet.

Sämtliche hier gezeigten Simulationen zur Anwendung der DEM im Tunnelbau sind als Beispiele zu verstehen. Um hier tatsächlich relevante Aussagen treffen zu können, muss die jeweilige Simulation stark ausgebaut werden. Dies gilt vor allem für die zweidimensionalen Berechnungen. Auch gilt insbesondere in diesen, aber auch in den anderen Fällen, dass eine detaillierte Simulationsumgebung sowie ein erweiterter Simulationsausschnitt die Ergebnisse vermutlich verbessern würde. Die Umsetzung dieser Maßnahmen sollte allerdings mit einer parallelisierfähigen Software möglichst auf einem Cluster erfolgen, da sonst sehr lange Rechenzeiten von mehreren Wochen erwartet werden müssen.

Auch für die Parameteridentifikation sind verschiedene Erweiterungen denkbar und sollten weiter verfolgt werden. So werden bisher nicht alle Kontaktkomponenten, die in der DEM eingefügt werden können, berücksichtigt. Eine Aussage über den Kontaktreibungskoeffizienten oder die Dämpfer würde zu einem weiteren Erkenntnisgewinn beitragen. Auch wird innerhalb dieser Arbeit nur das lineare Kontaktmodell betrachtet, obwohl es eine Vielzahl unterschiedlicher Modelle gibt und ständig neue hinzukommen. Das hier vorgestellte Verfahren kann, indem entsprechende Energien auf der Ebene des einzelnen Kontaktpunktes aufgestellt werden, analog auch für andere Kontaktgesetze angewendet werden und entsprechend auch zu einer Parameteridentifikation führen.

Weiterhin wäre es sinnvoll, die vorgestellte Parameteridentifikation auch für Systeme zu validieren, in denen nicht vornehmlich Druckkräfte herrschen, also etwa in einem einfachen Zugversuch. In dieser Arbeit wurden ausschließlich quasistatische Simulationen durchgeführt, die DEM wird aber häufig auch für dynamische Berechnungen und zur Beobachtung von Partikelbewegungen genutzt. Eine in solchen Fällen gültige und validierte Parameteridentifikation wäre aus Sicht der DEM-Anwender ebenfalls wünschenswert.

## Literaturverzeichnis

- [1] EN-ISO 14688: Geotechnische Erkundung und Untersuchung: Benennung, Beschreibung und Klassifizierung von Böden, 2002.
- [2] DIN 18137-2:2011-04: Baugrund, Untersuchung von Bodenproben - Bestimmung der Scherfestigkeit - Teil 2: Triaxialversuch, 2011.
- [3] DIN EN-ISO 6508-1:2015-06: Metallische Werkstoffe - Härteprüfung nach Rockwell - Teil 1: Prüfverfahren, 2015.
- [4] Mario G Abadi, Julio F Navarro, Matthias Steinmetz, and Vincent R Eke. Simulations of galaxy formation in a  $\lambda$  cold dark matter universe. ii. the fine structure of simulated galactic disks. *The Astrophysical Journal*, 597(1):21, 2003.
- [5] SOFiSTiK AG. Tunnel design. <http://www.sofistik.com/en/solutions/structural-fea/tunnel-design/>, abgerufen am 11.3.2016.
- [6] Walter Alt. *Nichtlineare Optimierung: Eine Einführung in Theorie, Verfahren und Anwendungen*. Springer-Verlag, 2013.
- [7] Johannes Altenbach and Holm Altenbach. *Einführung in die Kontinuums-Mechanik*. Teubner, 1994.
- [8] GFT Arbeitsblatt. 7: Tribologie-Definitionen. *Begriffe, Prüfung*, 2002.
- [9] JF Archard and W Hirst. The wear of metals under unlubricated conditions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 236(1206):397–410, 1956.
- [10] Z Asaf, D Rubinstein, and I Shmulevich. Determination of discrete element model parameters required for soil tillage. *Soil and Tillage Research*, 92(1):227–242, 2007.
- [11] Katalin Bagi. Stress and strain in granular assemblies. *Mechanics of materials*, 22(3):165–177, 1996.
- [12] Katalin Bagi. An algorithm to generate random dense arrangements for discrete element simulations of granular assemblies. *Granular Matter*, 7(1):31–43, 2005.
- [13] Katalin Bagi. Analysis of microstructural strain tensors for granular assemblies. *International Journal of Solids and Structures*, 43(10):3166–3184, 2006.
- [14] Wilfried J Bartz. *Einführung in die Tribologie und Schmierungstechnik: Tribologie, Schmierstoffe, Anwendungen. Mit 142 Tabellen*. expert Verlag, 2010.
- [15] Ernst Becker and Wolfgang Bürger. *Kontinuumsmechanik: eine Einführung in die Grundlagen und einfache Anwendungen*, volume 20. Springer-Verlag, 2013.

- [16] Ferdinand P Beer, E Russell Johnston Jr, David F Mazurek, Phillip J Cornwell, Elliot R Eisenberg, and Sanjeev Sanghi. *Vector mechanics for engineers*, volume 1. Tata McGraw-Hill Education, 1962.
- [17] N Belheine, J-P Plassiard, F-V Donzé, F Darve, and A Seridi. Numerical simulation of drained triaxial test using 3d discrete element modeling. *Computers and Geotechnics*, 36(1):320–331, 2009.
- [18] Stefan Beretitsch. *Kräftepiel im System Schneidwerkzeug-Boden*. na, 1992.
- [19] W Berger. *Der moderne Tunnel-und Stollenvortrieb - Neue Bauverfahren und Probleme*. Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH, 1970.
- [20] Dieter Bestle. *Analyse und Optimierung von Mehrkörpersystemen: Grundlagen und rechnergestützte Methoden*. Springer-Verlag, 2013.
- [21] Adam Bezuijen and Paul EL Schaminee. Simulation of the epb-shield tbm in model tests with foam as additive. *Tunnelling. A Decade of Progress. GeoDelft 1995-2005*, page 157, 2005.
- [22] Nenad Bićanić. Discrete element methods. *Encyclopedia of computational mechanics*, 2004.
- [23] C Boley. *Handbuch Geotechnik - Grundlagen, Anwendungen, Praxiserfahrungen*. Vieweg+Teubner, 2012.
- [24] Ilja N Bronstein, Juraj Hromkovic, Bernd Luderer, Hans-Rudolf Schwarz, Jochen Blath, Alexander Schied, Stephan Dempe, Gert Wanka, Siegfried Gottwald, Eberhard Zeidler, et al. *Taschenbuch der Mathematik*, volume 1. Springer-Verlag, 2012.
- [25] Christoph Budach. *Untersuchungen zum erweiterten Einsatz von Erddruckschilden in grobkörnigem Lockergestein*. Shaker, 2012.
- [26] Christoph Budach and Markus Thewes. Erweiterte Einsatzbereiche von EPB-Schilden. *geotechnik*, 36(2):96–103, 2013.
- [27] Knut Burth and Wolfgang Brocks. *Plastizität: Grundlagen und Anwendungen für Ingenieure*. Springer, 1992.
- [28] Herbert B Callen. *Thermodynamics & an Intro. to Thermostatistics*. John Wiley & Sons, 2006.
- [29] Bernard Cambou. *Behaviour of granular materials*. Springer, 1998.
- [30] Bernard Cambou, Marie Chaze, and Fabian Dedecker. Change of scale in granular materials. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 19(6):999–1014, 2000.
- [31] Bernard Cambou, Michel Jean, and Fahrang Radjai. *Micromechanics of granular materials*. John Wiley & Sons, 2013.
- [32] Charles S Campbell, Paul W Cleary, and Mark Hopkins. Large-scale landslide simulations: Global deformation, velocities and basal friction. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978–2012)*, 100(B5):8267–8283, 1995.

- [33] Paul W Cleary. Large scale industrial dem modelling. *Engineering Computations*, 21(2/3/4):169–204, 2004.
- [34] Paul W Cleary, Guy Metcalfe, and Kurt Liffman. How well do discrete element granular flow models capture the essentials of mixing processes? *Applied Mathematical Modelling*, 22(12):995–1008, 1998.
- [35] CJ Coetzee, AH Basson, and PA Vermeer. Discrete and continuum modelling of excavator bucket filling. *Journal of terramechanics*, 44(2):177–186, 2007.
- [36] L Cui, C O’sullivan, and S O’neill. An analysis of the triaxial apparatus using a mixed boundary three-dimensional discrete element model. *Geotechnique*, 57(10):831–844, 2007.
- [37] PA Cundall. A computer model for simulating progressive large-scale movements in block rock mechanics. In *Proc. Symp. Int. Soc. Rock Mech. Nancy*, volume 2, 1971.
- [38] PA Cundall. Computer simulations of dense sphere assemblies. *Micromechanics of granular materials*, 4:113–123, 1988.
- [39] Peter A Cundall and Otto DL Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29(1):47–65, 1979.
- [40] F Dedecker, M Chaze, Ph Dubujet, and B Cambou. Specific features of strain in granular materials. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 5(3):173–193, 2000.
- [41] EN DIN. 12350-5 prüfung von frischbeton-teil 5: Ausbreitmaß. *Berlin: Deutsches Institut für Normung*, 2009.
- [42] Frédéric V Donzé, Vincent Richefeu, and Sophie-Adélaïde Magnier. Advances in discrete element method applied to soil, rock and concrete mechanics. *State of the art of geotechnical engineering. Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 44, 2009.
- [43] Thomas Dorfmueller, Wilhelm T Hering, and Klaus Stierstadt. *Mechanik Relativität Wärme*. Walter de Gruyter, Berlin, 1998.
- [44] Petra Drucker. Abrasivität von lockergestein und der werkzeugverschleiß im tief-und tunnelbau. *Österr. Ingenieur- und Architekten-Zeitschrift*, 156(1-6), 2011.
- [45] New Indian Express. Chennai metro rail tunnelling ‘traps’ car. <http://www.newindianexpress.com/cities/chennai/Chennai-Metro-Rail-Tunnelling-Traps-Car/2015/06/27/article2888662.ece>, abgerufen am 9.3.2016, 2014.
- [46] JF Favier, MH Abbaspour-Fard, M Kremmer, and AO Raji. Shape representation of axi-symmetrical, non-spherical particles in discrete element simulation using multi-element model particles. *Engineering Computations*, 16(4):467–480, 1999.
- [47] M Feinendegen, M Ziegler, G Spagnoli, M Weh, HP Neher, TM Fernandez-Steeger, and H Stanjek. Grenzflächenprozesse zwischen mineral—und werkzeu-goberflächen—verklebungsproblematik beim maschinellen tunnelvortrieb mit erd-druckschilden. *Geotechnik*, 33(2):180–184, 2010.

- [48] Florian Fleissner, Timo Gaugele, and Peter Eberhard. Applications of the discrete element method in mechanical engineering. *Multibody System Dynamics*, 18(1):81–94, 2007.
- [49] Wilhelm Flügge. *Handbook of engineering mechanics*. McGraw-Hill Book, 1962.
- [50] Mario Galli and Markus Thewes. Investigations for the application of epb shields in difficult grounds/untersuchungen für den einsatz von erddruckschilden in schwierigem baugrund. *Geomechanics and Tunnelling*, 7(1):31–44, 2014.
- [51] Ralf Greve. *Kontinuumsmechanik*. Springer-Verlag, 2003.
- [52] Dietmar Gross and Thomas Seelig. *Bruchmechanik*, volume 2. Springer, 1996.
- [53] Morton E Gurtin, Eliot Fried, and Lallit Anand. *The mechanics and thermodynamics of continua*. Cambridge University Press, 2010.
- [54] Jorgen B Hansen and Helge Lundgren. *Hauptprobleme der Bodenmechanik*. Springer-Verlag, 2013.
- [55] M.E. Harr. *Mechanics of particulate media*. McGraw-Hill, Inc., 1977.
- [56] KH Head. *Manual of Soil Laboratory Testing*. Pentech Press Limited, 1986.
- [57] Sébastien Hentz, Laurent Daudeville, and Frédéric V Donzé. Identification and validation of a discrete element model for concrete. *Journal of engineering mechanics*, 130(6):709–719, 2004.
- [58] M Herrenknecht. Die entwicklung der mixschilder. *Tiefbau TBG*, 106(11), 1994.
- [59] Martin Herrenknecht, Markus Thewes, and Christoph Budach. The development of earth pressure shields: from the beginning to the present/entwicklung der erddruckschilder: Von den anfängen bis zur gegenwart. *Geomechanics and Tunnelling*, 4(1):11–35, 2011.
- [60] Bertram Henry Majendie Hewett and Sigvald Johannesson. *Shield and compressed air tunneling*. McGraw-Hill book Company, Incorporated, 1922.
- [61] Harold Heywood. The scope of particle size analysis and standardization. *Trans. Inst. Chem. Eng.*, 25:14, 1947.
- [62] Rodney Hill. *The mathematical theory of plasticity*, volume 11. Oxford university press, 1998.
- [63] Haiying Huang, Emmanuel Detournay, and Benoit Bellier. Discrete element modeling of rock cutting. *Rock mechanics for industry*. Amadei, Kranz, Scott and Smeallie (eds) Balkema Rotterdam, 1999.
- [64] Buddhima Indraratna, D Ionescu, and HD Christie. Shear behavior of railway ballast based on large-scale triaxial tests. *Journal of geotechnical and geoenvironmental Engineering*, 124(5):439–449, 1998.
- [65] UDEC Itasca. Version 4.0. Itasca Consulting Group Inc, 2004.

- [66] Kazuyoshi Iwashita and Masanobu Oda. Rolling resistance at contacts in simulation of shear band development by dem. *Journal of engineering mechanics*, 124(3):285–292, 1998.
- [67] Mohamed Jebahi, Damien Andre, Inigo Terreros, and Ivan Iordanoff. *Discrete Element Method to Model 3D Continuous Materials*. John Wiley & Sons, 2015.
- [68] James T Jenkins and Masao Satake. *Mechanics of granular materials: new models and constitutive relations*. Elsevier, 2013.
- [69] William R Ketterhagen, Jennifer S Curtis, Carl R Wassgren, and Bruno C Hancock. Modeling granular segregation in flow from quasi-three-dimensional, wedge-shaped hoppers. *Powder Technology*, 179(3):126–143, 2008.
- [70] Manfred Köhler, Ulrich Maidl, and Lothar Martak. Abrasiveness and tool wear in shield tunnelling in soil/abrasivität und werkzeugverschleiß beim schildvortrieb im lockergestein. *Geomechanics and Tunnelling*, 4(1):36–54, 2011.
- [71] Dimitrios Kolymbas. *Geotechnik - Bodenmechanik und Grundbau*. Springer, 1998.
- [72] R Komanduri, N Chandrasekaran, and LM Raff. Molecular dynamics (md) simulation of uniaxial tension of some single-crystal cubic metals at nanolevel. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43(10):2237–2260, 2001.
- [73] Florian Köppl et al. *Abbauwerkzeugverschleiß und empirische Verschleißprognose beim Vortrieb mit Hydroschild TVM in Lockergesteinen*. PhD thesis, Technische Universität München, 2014.
- [74] Yukinori Koyama. Present status and technology of shield tunneling method in japan. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 18(2):145–159, 2003.
- [75] Thomas Krause. Schildvortrieb mit flüssigkeits-und erdgestützter ortsbrust. *Mitteilungen Des Instituts Fuer Grundbau Und Bodenmechanik Der Technischen Univer-sitaet Braunschweig*, (24), 1987.
- [76] NP Kruyt. Statics and kinematics of discrete cosserat-type granular materials. *International journal of solids and structures*, 40(3):511–534, 2003.
- [77] NP Kruyt and L Rothenburg. Micromechanical definition of the strain tensor for granular materials. *Journal of applied mechanics*, 63(3):706–711, 1996.
- [78] Matthew R Kuhn. Structured deformation in granular materials. *Mechanics of materials*, 31(6):407–429, 1999.
- [79] Carlos Labra, Jerzy Rojek, Eugenio Oñate, and Francisco Zarate. Advances in discrete element modelling of underground excavations. *Acta Geotechnica*, 3(4):317–322, 2008.
- [80] Joseph F Labuz and Arno Zang. Mohr–coulomb failure criterion. In *The ISRM Suggested Methods for Rock Characterization, Testing and Monitoring: 2007-2014*, pages 227–231. Springer, 2015.
- [81] HJ Lang, J Huder, P Amann, and AM Puzrin. *Bodenmechanik und Grundbau*. Springer, 1982.

- [82] PA Langston, U Tüzün, and DM Heyes. Discrete element simulation of granular flow in 2d and 3d hoppers: dependence of discharge rate and wall stress on particle interactions. *Chemical Engineering Science*, 50(6):967–987, 1995.
- [83] Jean Lemaitre and Jean-Louis Chaboche. *Mechanics of solid materials*. Cambridge university press, 1994.
- [84] Ching-Lung Liao and Tian-Chyuan Chan. A generalized constitutive relation for a randomly packed particle assembly. *Computers and Geotechnics*, 20(3):345–363, 1997.
- [85] Ching-Lung Liao, Ta-Peng Chang, Dong-Hwa Young, and Ching S Chang. Stress-strain relationship for granular materials based on the hypothesis of best fit. *International Journal of Solids and Structures*, 34(31):4087–4100, 1997.
- [86] Yu Liu, Qingli Dai, and Zhanping You. Viscoelastic model for discrete element simulation of asphalt mixtures. *Journal of engineering mechanics*, 135(4):324–333, 2009.
- [87] Sebastian Lobo-Guerrero and Luis E Vallejo. Discrete element method evaluation of granular crushing under direct shear test conditions. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 131(10):1295–1300, 2005.
- [88] Boris D Lubachevsky and Frank H Stillinger. Geometric properties of random disk packings. *Journal of statistical Physics*, 60(5-6):561–583, 1990.
- [89] Jacob Lubliner. *Plasticity theory*. Courier Corporation, 2008.
- [90] Stefan Luding. Micro–macro transition for anisotropic, frictional granular packings. *International Journal of Solids and Structures*, 41(21):5821–5836, 2004.
- [91] Stefan Luding. Introduction to discrete element methods: basic of contact force models and how to perform the micro-macro transition to continuum theory. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 12(7-8):785–826, 2008.
- [92] B Maidl. *Handbuch des Tunnel-und Stollenbaus Band I: Konstruktion und Verfahren: 1994*. Verlag Glückauf GmbH, Essen, 1988.
- [93] Bernhard Maidl, Martin Herrenknecht, and Lothar 'Anheuser. *Maschineller Tunnelbau im Schildvortrieb*. Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften GmbH, 1995.
- [94] Ulrich Maidl. *Erweiterung der Einsatzbereiche der Erddruckschilde durch bodenkonditionierung mit Schaum*. Ruhr-Universität Bochum, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, 1992.
- [95] CL Martin, D Bouvard, and S Shima. Study of particle rearrangement during powder compaction by the discrete element method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51(4):667–693, 2003.
- [96] HG Matuttis, S Luding, and HJ Herrmann. Discrete element simulations of dense packings and heaps made of spherical and non-spherical particles. *Powder technology*, 109(1):278–292, 2000.

- [97] Andrew Stuart Merritt. *Conditioning of clay soils for tunnelling machine screw conveyors*. PhD thesis, University of Cambridge, 2005.
- [98] RD Mindlin and H Deresiewicz. Thickness-shear and flexural vibrations of a circular disk. *Journal of Applied Physics*, 25(10):1329–1332, 1954.
- [99] BK Mishra and C Thornton. An improved contact model for ball mill simulation by the discrete element method. *Advanced Powder Technology*, 13(1):25–41, 2002.
- [100] MA Moore. Abrasive wear by soil. *Tribology International*, 8(3):105–110, 1975.
- [101] A Nardin, G Zavarise, and BA Schrefler. Modelling of cutting tool–soil interaction—part i: contact behaviour. *Computational mechanics*, 31(3-4):327–339, 2003.
- [102] Erfan G Nezami, Youssef Hashash, Dawei Zhao, and Jamshid Ghaboussi. Simulation of front end loader bucket–soil interaction using discrete element method. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 31(9):1147–1162, 2007.
- [103] E Onate and J Rojek. Combination of discrete element and finite element methods for dynamic analysis of geomechanics problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193(27):3087–3128, 2004.
- [104] Daniele Peila, Claudio Oggeri, and Luca Borio. Using the slump test to assess the behavior of conditioned soil for epb tunneling. *Environmental & Engineering Geoscience*, 15(3):167–174, 2009.
- [105] Daniele Peila, Claudio Oggeri, and Raffaele Vinai. Screw conveyor device for laboratory tests on conditioned soil for epb tunneling operations. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 133(12):1622–1625, 2007.
- [106] Ralf J Plinninger. Geotechnische einflüsse auf den werkzeugverschleiß beim bohren in festgestein. In 58. *Berg-und Hüttenmännischer Tag-Kolloquium 4: Innovative Bohrtechnologien für Flach-, Tief-und Großlochbohrungen*, pages 1–15, 2007.
- [107] Ernest Rabinowicz. *Friction and wear of materials*. 1965.
- [108] RCD Richardson. The wear of metals by relatively soft abrasives. *Wear*, 11(4):245–275, 1968.
- [109] Jerzy Rojek, Eugenio Oñate, Carlos Labra, and Hubert Kargl. Discrete element simulation of rock cutting. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 48(6):996–1010, 2011.
- [110] Yoshikazu Sawamoto, Haruji Tsubota, Yoshiyuki Kasai, Norihide Koshika, and Hiroshi Morikawa. Analytical studies on local damage to reinforced concrete structures under impact loading by discrete element method. *Nuclear Engineering and Design*, 179(2):157–177, 1998.
- [111] LUC Scholtès and Frédéric-Victor Donzé. Modelling progressive failure in fractured rock masses using a 3d discrete element method. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 52:18–30, 2012.
- [112] I Shmulevich. State of the art modeling of soil–tillage interaction using discrete element method. *Soil and Tillage Research*, 111(1):41–53, 2010.

- [113] I Shmulevich, Z Asaf, and D Rubinstein. Interaction between soil and a wide cutting blade using the discrete element method. *Soil and Tillage Research*, 97(1):37–50, 2007.
- [114] W Sievers. Entwicklungen im tunnelbau. *Beton*, 34:347–354, 1984.
- [115] Konrad Simmer. *Grundbau: Teil I Bodenmechanik und erdstatische Berechnungen*. Springer-Verlag, 2013.
- [116] Karl Sommer, Rudolf Heinz, and Jörg Schöfer. Verschleiß metallischer werkstoffe. *Wiesbaden: Vieweg+ Teubner*, 90(4), 2010.
- [117] Yuanqiang Tan, Dongmin Yang, and Yong Sheng. Study of polycrystalline al 2 o 3 machining cracks using discrete element method. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 48(9):975–982, 2008.
- [118] Chao-Lung Tang, Jyr-Ching Hu, Ming-Lang Lin, Jacques Angelier, Chia-Yu Lu, Yu-Chang Chan, and Hao-Tsu Chu. The tsaoling landslide triggered by the chi-chi earthquake, taiwan: insights from a discrete element simulation. *Engineering Geology*, 106(1):1–19, 2009.
- [119] M Thewes, C Budach, and A Bezuijen. Foam conditioning in epb tunnelling. *Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Ground*, page 127, 2012.
- [120] Markus Thewes and Christoph Budach. Soil conditioning with foam during epb tunnelling/. konditionierung von lockergesteinen bei erddruckschilden. *Geomechanics and Tunnelling*, 3(3):256–267, 2010.
- [121] K Thuro and RJ Plinninger. Klassifizierung und prognose von leistungs-und verschleißparametern im tunnelbau. *Taschenbuch für den Tunnelbau*, pages 62–126, 2003.
- [122] K Thuro, J Singer, H Käsling, and M Bauer. Abrasivitätsuntersuchungen an lockergesteinen im hinblick auf die gebirgslösung. *Proc. Baugrundtagung*, pages 283–290, 2006.
- [123] K Thuro, J Singer, H Käsling, and M Bauer. Determining abrasivity with the lcpc test. In *Proceedings of the 1st Canada–US rock mechanics symposium*, volume 27, page 2007, 2007.
- [124] Department of Economic United Nations and Social Affairs. Population Division world urbanisation prospects. <http://esa.un.org/unpd/wup/>, abgerufen am 19.2.2016, 2014.
- [125] Raffaele Vinai, Claudio Oggeri, and Daniele Peila. Soil conditioning of sand for epb applications: A laboratory research. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 23(3):308–317, 2008.
- [126] Sebastian G Volz and Gang Chen. Molecular dynamics simulation of thermal conductivity of silicon nanowires. *Applied Physics Letters*, 75(14):2056–2058, 1999.
- [127] Hakon Wadell. Volume, shape, and roundness of rock particles. *The Journal of Geology*, pages 443–451, 1932.

- [128] Otis R Walton. Numerical simulation of inelastic, frictional particle-particle interactions, 1993.
- [129] MFH Wolff, V Salikov, S Antonyuk, S Heinrich, and GA Schneider. Three-dimensional discrete element modeling of micromechanical bending tests of ceramic-polymer composite materials. *Powder technology*, 248:77–83, 2013.
- [130] Mathias Woydt. *Reibung und Verschleiß von Werkstoffen und Dünnschichten, Bauteilen und Konstruktionen: Ursachen, Analyse, Optimierung*. Expert-Verlag, 2010.
- [131] Jian-Hong Wu, Jeen-Shang Lin, and Chao-Shi Chen. Dynamic discrete analysis of an earthquake-induced large-scale landslide. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 46(2):397–407, 2009.
- [132] ZX Zhang, XY Hu, and Kieffer D Scott. A discrete numerical approach for modeling face stability in slurry shield tunnelling in soft soils. *Computers and Geotechnics*, 38(1):94–104, 2011.
- [133] Martin Ziegler. *Skript zur Vorlesung: Bodenmechanik I*. RWTH Aachen, 2005.
- [134] K-H Zum Gahr. *Microstructure and wear of materials*, volume 10. Elsevier, 1987.



## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann: 1976  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann: 1978  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic  
Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings: 1976  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem  
Stoffverhalten Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke: 1976  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen  
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze: 1976  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig  
gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer: 1977  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei  
endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl: 1977  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur  
Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers: 1977  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer: 1977  
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchungen eines dickwandigen Zylinders  
bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz: 1977  
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom: 1977  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig: 1977  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem

- gekoppelter elastoplastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski: 1978  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers: 1978  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert: 1979  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz: 1979  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl: 1979  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kohlberg: 1979  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes: 1980  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak: 1980  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek: 1980  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow: 1980  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss: 1981  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann: 1981  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert: 1981  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz: 1981

## On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells

- Nr. 27 Georg Zander: 1981  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski: 1981  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausien: 1981  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl: 1981  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek: 1982  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner: 1982  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu: 1982  
Variationsprinzip der Thermoplastizität I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf: 1982  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf: 1983  
Ein Exremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft: 1983  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu: 1983  
Variationsprinzip der Thermoplastizität II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley: 1983  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte: 1983

- Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix: 1983  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker: 1984  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Diemar Bouchard: 1984  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel: 1984  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik: 1985  
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp: 1985  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowski/L.-P. Nolte/H. Stumpf: 1985  
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch: 1985  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte: 1985  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger: 1985  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid: 1987  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier: 1987  
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski: 1987

- Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert: 1987  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe: 1988  
Wellenausbreitung in akustischen Medien Randelement-Prozeduren im 2-D  
Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz: 1988  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf: 1988  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape: 1988  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von  
Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege: 1988  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU: 1988  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer  
Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt: 1988  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und  
Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer: 1988  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen  
Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf: 1988  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell  
theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns: 1989  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert: 1989  
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller: 1989  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl: 1989  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen

- metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis: 1989  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker: 1989  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck: 1989  
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan: 1989  
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz: 1989  
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf: 1989  
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld: 1990  
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf: 1990  
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller: 1991  
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott: 1991  
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel: 1991  
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns: 1991  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part I: Theoretical Foundations

- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part  
II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller: 1992  
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für  
Kerbspannungsprobleme im Maschinenebau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann: 1992  
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem  
Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé: 1993  
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84 U. Kikillus: 1993  
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85 T. Guo: 1993  
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum  
in verfestigendem Material
- Nr. 86 Achim Menne: 1994  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen  
Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert: 1994  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen
- Nr. 88 Jörg Körber: 1994  
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer  
Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schieße: 1994  
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter  
Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung
- Nr. 90 Egbert Schopphoff: 1994  
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91 Christoph Beerens: 1994  
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der  
Strukturmechanik
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf: 1994  
Finite elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93 O. T. Bruhns: 1994  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994

- Nr. 94 Armin Lenzen: 1994  
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung -  
Erfassung von Strukturveränderungen
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf: 1994  
Mechanics of Irregular Shell Structures
- Nr. 96 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf: 1994  
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.: 1995  
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller
- Nr. 98 Ralf Podleschny: 1995  
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse
- Nr. 99 Bernd Westerhoff: 1995  
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl
- Nr. 100 Marc Mittelbach: 1995  
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch  
mit einem Kontinuums-Damage-Modell
- Nr. 101 Ulrich Hoppe: 1996  
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und  
Schalentheorie
- Nr. 102 Marcus Otto: 1996  
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher  
Spannungskonzentrationen
- Nr. 103 Horst Lanzerath: 1996  
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode
- Nr. 104 Andreas Wichtmann: 1996  
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur  
Beschreibung der Reckalterung
- Nr. 105 Bjarne Fossa: 1996  
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stoffen
- Nr. 106 Khanh Chau Le: 1996  
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher  
Mikrostruktur
- Nr. 107 Holger Behrens: 1997  
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen  
mit allge- meinen diskreten Modellansätzen
- Nr. 108 Johannes Moosheimer: 1997

## Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden

- Nr. 109 Dirk Klaus Anding: 1997  
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze
- Nr. 110 Stephan Weng: 1997  
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen
- Nr. 111 Michael Straßberger: 1997  
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit Hilfe piezo-keramischer Aktoren
- Nr. 112 Hans-Jörg Becker: 1997  
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines monokristallinen Stoffgesetzes
- Nr. 113 Thomas Nerzak: 1997  
Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen
- Nr. 114 O. T. Bruhns: 1998  
Große plastische Formänderungen
- Nr. 115 Jan Steinhausen: 1998  
Die Beschreibung der Dynamik von Antriebssträngen durch Black-Box-Modelle hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 116 Thomas Pandorf: 1998  
Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Kerbspitzenbeanspruchung bei schlagbelasteten Biegeproben
- Nr. 117 Claus Oberste-Brandenburg: 1999  
Ein Materialmodell zur Beschreibung der Austenit-Martensit Phasentransformation unter Berücksichtigung der transformationsinduzierten Plastizität
- Nr. 118 Michael Märtens: 1999  
Regelung mechanischer Strukturen mit Hilfe piezokeramischer Stapelaktoren
- Nr. 119 Dirk Kamarys: 1999  
Detektion von Systemveränderungen durch neue Identifikationsverfahren in der experimentellen Modalanalyse
- Nr. 120 Wolfgang Hiese: 2000  
Gültigkeitskriterien zur Bestimmung von Scherbruchzähigkeiten
- Nr. 121 Peter Jaschke: 2000  
Mathematische Modellierung des Betriebsverhaltens hydrodynamischer Kupplungen mit hybriden Modellansätzen

- Nr. 122 Stefan Müller: 2000  
Zum Einsatz von semi-aktiven Aktoren zur optimalen Schwingungsreduktion in Tragwerken
- Nr. 123 Dirk Eichel: 2000  
Zur Kondensation strukturdynamischer Aufgaben mit Hilfe von Polynommatrizen
- Nr. 124 Andreas Bürgel: 2000  
Bruchmechanische Kennwerte beim Wechsel im Versagensverhalten dynamisch scherbeanspruchter Risse
- Nr. 125 Daniela Lürding: 2001  
Modellierung großer Deformationen in orthotropen, hyperelastischen Schalenstrukturen
- Nr. 126 Thorsten Quent: 2001  
Ein mikromechanisch begründetes Modell zur Beschreibung des duktilen Verhaltens metallischer Werkstoffe bei endlichen Deformationen unter Berücksichtigung von Porenschädigung
- Nr. 127 Ndzi C. Bongmba: 2001  
Ein finites anisotropes Materialmodell auf der Basis der Hencky-Dehnung und der logarithmischen Rate zur Beschreibung duktiler Schädigung
- Nr. 128 Henning Schütte: 2001  
Ein finites Modell für spröde Schädigung basierend auf der Ausbreitung von Mikrorissen
- Nr. 129 Henner Vogelsang: 2001  
Parameteridentifikation für ein selbstkonsistentes Stoffmodell unter Berücksichtigung von Phasentransformationen
- Nr. 130 Jörn Mosler: 2002  
Finite Elemente mit sprungstetigen Abbildungen des Verschiebungsfeldes für numerische Analysen lokalisierter Versagenszustände
- Nr. 131 Karin Preusch: 2003  
Hierarchische Schalenmodelle für nichtlineare Kontinua mit der p-Version der Finite-Element Methode
- Nr. 132 Christoph Müller: 2003  
Thermodynamic modeling of polycrystalline shape memory alloys at finite strains
- Nr. 133 Martin Heiderich: 2004  
Ein Beitrag zur zerstörungsfreien Schädigungsanalyse
- Nr. 134 Raoul Costamagna: 2004  
Globale Materialbeziehungen für das geklüftete Gebirge

- 
- Nr. 135 Markus Böl: 2005  
Numerische Simulation von Polymernetzwerken mit Hilfe der  
Finite-Elemente-Methode
- Nr. 136 Gregor Kotucha: 2005  
Regularisierung von Problemen der Topologieoptimierung unter Einbeziehung  
von Dichtegradienten
- Nr. 137 Michael Steiner: 2006  
Deformations- und Versagensverhalten innendruckbeanspruchter Stahlrohre  
durch Stoßbelastung
- Nr. 138 Dirk Bergmannshoff: 2006  
Das Instabilitätsverhalten zug-/scherbeanspruchter Risse bei Variation des  
Belastungspfades
- Nr. 139 Olaf Schilling: 2007  
Über eine implizite Partikelmethode zur Simulation von Umformprozessen
- Nr. 140 Jörn Mosler: 2007  
On the numerical modeling of localized material failure at finite strains by  
means of variational mesh adaption and cohesive elements
- Nr. 141 Rainer Fechte-Heinen: 2007  
Mikromechanische Modellierung von Formgedächtnismaterialien
- Nr. 142 Christian Grabe: 2007  
Experimental testing and parameter identification on the multidimensional  
material behavior of shape memory alloys
- Nr. 143 Markus Peters: 2007  
Modellierung von Rissausbreitung unter Verwendung der p-Version der  
XFEM mit einer adaptiven Integrationsmethode
- Nr. 144 Claus Oberste-Brandenburg: 2007  
Thermomechanical modeling of shape memory alloys at different length scales
- Nr. 145 Stefan Reichling: 2007  
Das inverse Problem der quantitativen Ultraschallelastografie unter  
Berücksichtigung großer Deformationen
- Nr. 146 Kianoush Molla-Abbasi: 2008  
A Consistent Anisotropic Brittle Damage Model Based on the Concept of  
Growing Elliptical Cracks
- Nr. 147 Sandra Ilic: 2008  
Application of the multiscale FEM to the modeling of composite materials
- Nr. 148 Patrick Luig: 2008  
A consistent Eulerian rate model for shape memory alloys

- Nr. 149 Lidija Stanković: 2009  
Describing multiple surface localised failure by means of strong discontinuities at finite strains
- Nr. 150 Thorsten Bartel: 2009  
Multiskalenmodellierung martensitischer Phasentransformationen in Formgedächtnislegierungen unter Verwendung relaxierter Energiepotenziale
- Nr. 151 Zoran Stanković: 2009  
Detection of fatigue crack growth using nondestructive testing methods
- Nr. 152 Dennis M. Kochmann: 2009  
Mechanical Modeling of Microstructures in Elasto-Plastically Deformed Crystalline Solids
- Nr. 153 Trinh Bach Tuyet: 2009  
Constitutive Modelling and Numerical Simulation of Localization Phenomena in Solid Materials with Application to Soils and Geomaterials
- Nr. 154 Bojan Dimitrijevic: 2010  
On a regularization framework for inelastic material models via gradient enhancement of the free energy function
- Nr. 155 Philipp Junker: 2011  
Simulation of Shape Memory Alloys - Material Modeling Using the Principle of Maximum Dissipation
- Nr. 156 Muhammad Sabeel Khan: 2013  
An Investigation of Material Microstructures via Relaxation of Non-convex Potentials
- Nr. 157 K. Hackl, H. Steeb, U. Hoppe, R. Jänicke, P. Junker: 2013  
Übungen zu Mechanik A
- Nr. 158 K. Hackl, H. Steeb, U. Hoppe, R. Jänicke, P. Junker: 2013  
Übungen zu Mechanik B
- Nr. 159 Patrick S. Kurzeja: 2013  
Waves in partially saturated porous media: An investigation on multiple scales
- Nr. 160 Christoph Moos: 2013  
An FFT Based Algorithm for Damage Mechanics
- Nr. 161 Carlo Vinci: 2014  
Hydro-mechanical coupling in fractured rocks: modeling and numerical simulations
- Nr. 162 Pramio G. Sembiring: 2014  
Analytical and Numerical Solutions to Plane Strain Problems in Continuum Dislocation Theory

- 
- Nr. 163 Timo Reisner: 2015  
Fluid compressibility in a solid-fluid mixture flow: Experiments, modeling and numerical application to batch sedimentation
- Nr. 164 Alexander Schaufler: 2015  
Multi-physical simulations: transport and infiltration of suspensions in granular porous media
- Nr. 165 Christina Günther: 2015  
Continuum modeling of ductile crystals with evolving microstructures
- Nr. 166 Rakulan Sivanesapillai: 2016  
Analytical and Numerical Solutions to Plane Strain Problems in Continuum Dislocation Theory



## Lebenslauf

### Persönliche Daten

Nicola Wessels  
Geboren am 23.4.1983 in Bochum

### Schulische Ausbildung

08/1989 - 07/1993 Städtische Grundschule Marienstraße, Wuppertal  
08/1993 - 06/2002 Wilhelm-Dörpfeld Gymnasium, Wuppertal  
08/1999 - 01/2000 Schüleraustausch an der Heath High School, Paducah, KY, USA

### Studium

10/2003 - 07/2008 Bauingenieurwesen an der RWTH Aachen, Abschluss: Diplom

### Beruflicher Werdegang

10/2004 - 03/2008 Studentische Hilfskraft am Lehrstuhl für Mechanik und Baukonstruktionen, RWTH Aachen  
09/2006 - 12/2006 Praktikum bei Thiess Pty Ltd, Brisbane, Australien  
08/2008 - 03/2009 Tragwerksplanerin bei Arup GmbH, Düsseldorf  
seit 06/2009 Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Mechanik - Materialtheorie, Ruhr-Universität Bochum

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 167**

**ISBN 978-3-935892-45-2**