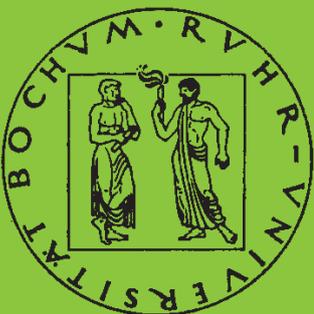


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Dirk Kamarys

**Detektion von Systemveränderungen
durch neue Identifikationsverfahren in
der experimentellen Modalanalyse**

Heft Nr. 119



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
INSTITUT FÜR MECHANIK

Dirk Kamarys

**Detektion von Systemveränderungen
durch neue Identifikationsverfahren in der
experimentellen Modalanalyse**

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 119
1999

Herausgeber:
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum
Schriftenreihe
Universitätsstr. 150
44870 Bochum

©1999 Dr.-Ing. Dirk Kamarys
Eiselenstr.19
44625 Herne

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie) des Werkes oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der *Arbeitsgruppe Numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik* am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum.

Sie soll die Forschungsergebnisse dokumentieren, die ich bei der Bearbeitung des Teilprojektes B4, *Diagnose und Lokalisierung diskreter Schäden durch Schwingungsmessung mit dem Ziel der Restlebensdauerermittlung* beim Sonderforschungsbereich 398 *Lebensdauerorientierte Entwurfskonzepte unter Schädigungs- und Deteriorationsaspekten*, erzielen konnte. Deshalb gilt der Deutschen Forschungsgesellschaft für die finanzielle Förderung der Arbeit mein Dank.

Herr Prof. Dr.-Ing. H. Waller, auf dessen Anregung diese Arbeit entstanden ist, danke ich recht herzlich für die tatkräftige Unterstützung und Betreuung. Seine Erfahrungen und Bereitschaft zur fachlichen Diskussion haben diese Arbeit mitgeprägt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns danke ich für sein Interesse und seine freundliche Bereitschaft zur Übernahme des Korreferats sowie die Erlaubnis zur Durchführung von Versuchen in seinen Laborräumen.

Bei Herrn Pfarrer A. Wuttke möchte ich mich für seine Geduld, die er während unserer Messungen am Kirchturm in Marl-Lenkerbeck aufgebracht hat, bedanken und auch dafür, dass er uns diese Messungen überhaupt ermöglicht hat.

Allen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe danke ich für die gute Zusammenarbeit und kollegiale Unterstützung sowie Ihrer Bereitschaft zur fachlichen Diskussion. Hervorheben möchte ich an dieser Stelle meinen Vorgänger Herrn Dr.-Ing. A. Lenzen, von dessen Erfahrungen ich viel lernen konnte, und meine studentischen Hilfskräfte T. Exner, A. Lichius, H. Römer und M. Schämnn, die mich auch bei widrigen Wetterbedingungen nicht allein gelassen haben.

Meinen Eltern danke ich für ihre Unterstützung und Geduld bis zum heutigen Tag, ohne sie wäre es nie zu dieser Arbeit gekommen.

Herne, im Oktober 1999

Dirk Kamarys

Dissertation eingereicht am: 12. Oktober 1999
Tag der mündlichen Prüfung: 17. Dezember 1999

Erster Referent: Prof. Dr.-Ing. H. Waller
Zweiter Referent: Prof. Dr.-Ing O.T. Bruhns

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 11 |
| 1.1 | Einführung | 11 |
| 1.2 | Stand der Forschung | 12 |
| 1.2.1 | Schädigungsanalysen | 13 |
| 1.2.2 | Identifikationsverfahren | 15 |
| 1.3 | Ziele der Arbeit | 16 |
| 1.4 | Probleme | 17 |
| 1.5 | Gliederung der Arbeit | 21 |
| 2 | Grundlagen | 23 |
| 2.1 | Lineare Gleichungssysteme | 23 |
| 2.2 | Least squares | 25 |
| 2.3 | SVD | 26 |
| 2.3.1 | SVD und least squares | 28 |
| 2.3.2 | Berechnung orthogonaler Unterräume mit der SVD | 28 |
| 2.4 | QSVD | 29 |
| 2.5 | Das QR-Verfahren | 29 |
| 2.5.1 | Die Berechnung orthogonaler Unterräume mit der QR-Zerlegung | 30 |
| 2.6 | Stochastische Kennzahlen und Kennfunktionen | 30 |
| 2.6.1 | Mittelwert und Varianz | 31 |
| 2.6.2 | Korrelationsfunktionen und Leistungsspektren | 32 |
| 3 | Identifikation und Filtergenerierung | 37 |
| 3.1 | Impulserregte Realisierung | 37 |
| 3.1.1 | Rauschfilterung | 44 |
| 3.2 | Stochastische Realisierung | 46 |
| 3.3 | Allgemeinerregte Realisierung | 51 |
| 4 | Vergleich der Subspace-Methoden mit der FFT | 57 |
| 4.1 | Die klassische Fourier-Transformation | 57 |
| 4.2 | Die Subspace-Methoden | 62 |
| 4.3 | Testfunktionen | 62 |
| 4.4 | Strukturanalyse | 75 |
| 4.4.1 | Impulserregung | 75 |
| 4.4.2 | Rauscherregung | 80 |
| 4.4.3 | Beliebige Erregung | 82 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5 | Modalanalyse und Schädigungserkennung | 89 |
| 5.1 | Parameter in der Modalanalyse | 89 |
| 5.2 | MAC und COMAC | 92 |
| 5.3 | Einflusszahlen als Schädigungsindikator | 95 |
| 5.4 | Steigungslinien | 96 |
| 5.5 | Einsatz in der Modalanalyse | 97 |
| 5.5.1 | Analyse eines Balkens | 97 |
| 5.5.2 | Analyse einer Platte | 100 |
| 5.6 | Updating mit Subspace-Methoden | 107 |
| 6 | Beispielrechnungen und Verifikation an ausgesuchten Objekten | 109 |
| 6.1 | Kirchturm in Marl | 109 |
| 6.2 | Laborbalken | 116 |
| 6.2.1 | Steifigkeitsänderung | 116 |
| 6.2.2 | Masseänderung | 120 |
| 6.2.3 | Sweeperregung beim Balken | 124 |
| 6.3 | Laternenmast | 128 |
| 6.3.1 | Schadenslokalisierung mit Impulserregung | 128 |
| 6.3.2 | Schadenslokalisierung mit ambienter Erregung | 139 |
| 7 | Zusammenfassung | 141 |
| | Literaturverzeichnis | 144 |
| A | Verarbeitung gemessener Signale | 151 |
| A.1 | Lineare Regression zur Trendbereinigung | 151 |
| B | Verwendete Messtechnik | 155 |
| B.1 | PC-Messkarte | 155 |
| B.2 | Analoge Filter | 157 |
| B.3 | Mess-Sensoren | 158 |
| B.3.1 | Beschleunigungsaufnehmer | 158 |
| B.3.2 | Windgeschwindigkeits-Sensoren | 160 |
| B.4 | Verwendete Aktoren zur Strukturerrgung | 161 |
| B.4.1 | Schwingerreger (<i>Shaker</i>) | 161 |
| B.4.2 | Piezo-Stapelaktor | 162 |

Die wichtigsten Formelzeichen und Abkürzungen

| | |
|------------------------------------|--|
| α | Koeffizient |
| α_i | Singulärwerte aus der QSVD |
| β | Koeffizient |
| β_i | Singulärwerte aus der QSVD |
| Γ | Beobachtbarkeitsmatrix |
| δ_{ik} | statische Einflusszahlen, Kronecker-Symbol |
| Δ | Differenz |
| Θ_i | Diagonalelemente der Jordanmatrix |
| λ | Eigenwert |
| μ | Mittelwert |
| ξ | Rauschvektor |
| π | Konstante Pi |
| σ^2 | Varianz |
| σ_i | Singulärwerte |
| Σ | Diagonalmatrix mit Singulärwerten |
| τ | Laufvariable der Korrelationsfunktionen |
| Φ_X | Modalmatrix |
| $\Phi(\tau)$ | Korrelationsfunktion |
| $\Phi_{xx}(\tau)$ | Autokorrelationsfunktion AKF |
| $\Phi_{xy}(\tau), \Phi_{yx}(\tau)$ | Kreuzkorrelationsfunktionen KKF |
| ω | Kreisfrequenz |
| ω_{Eck} | Eckfrequenz |
| ω_{max} | höchste darstellbare Frequenz |
| a_i | Koeffizient |
| \hat{a} | Amplitude |
| \mathbf{a} | Vektor |
| \mathbf{A} | diskrete Systemmatrix, allgemeine Matrix |
| $\hat{\mathbf{A}}$ | kontinuierliche Systemmatrix |
| b_i | Konstanten |
| \mathbf{b} | Vektor |
| $\tilde{\mathbf{b}}$ | erweiterter Vektor \mathbf{b} |
| \mathbf{B} | diskrete Eingangsmatrix, allgemeine Matrix |
| $\bar{\mathbf{B}}$ | geschätztes \mathbf{B} |
| $\hat{\mathbf{B}}$ | kontinuierliche Eingangsmatrix |

| | |
|---------------------------|---|
| $\tilde{\mathbf{B}}$ | erweitertes \mathbf{B} |
| $\tilde{\mathbf{c}}$ | erweiterter Vektor \mathbf{c} |
| \mathbf{C} | diskrete Ausgangsmatrix |
| $\hat{\mathbf{C}}$ | kontinuierliche Ausgangsmatrix |
| $\tilde{\mathbf{C}}$ | erweitertes \mathbf{C} |
| $COMAC(i)$ | COMAC-Wert |
| d_i | Korrekturterm |
| \mathbf{D} | diskrete Durchgriffsmatrix, Dämpfungsmatrix |
| $\hat{\mathbf{D}}$ | kontinuierliche Durchgriffsmatrix |
| $diag(\dots)$ | Diagonalmatrix mit den Elementen (...) |
| e | Euler'sche Zahl |
| $E[x]$ | erstes zentrales Moment |
| $E[x^2]$ | zweites zentrales Moment |
| f | Fehler, Frequenz |
| f_{ab} | Abtastfrequenz |
| f_{err} | Erregungsfrequenz |
| \mathbf{F}_{dyn} | Einflusszahlen |
| $\mathbf{F}(\omega)$ | Fourier-Transformierte |
| \mathbf{F}_k | diskrete Fourier-Transformierte |
| $\mathbf{f}(t)$ | Zeitfunktion |
| \mathbf{f}_k | diskrete Zeitfunktion |
| $F(t)_i$ | Test-Funktion |
| \mathbf{G} | stochastisches Analogon zur Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q} |
| \mathbf{H} | Hankelmatrix |
| $\bar{\mathbf{H}}$ | Töplitzmatrix |
| $\mathbf{H}(\omega)$ | Frequenzgang |
| $\mathbf{H}(s)$ | Übertragungsmatrix |
| i | Zählvariable |
| \mathbf{I} | Einheitsmatrix |
| j | Zählvariable, Imaginärteil |
| J | Gütekriterium |
| \mathbf{J} | Matrix in Jordanform |
| k | Zählvariable |
| \mathbf{K} | Steifigkeitsmatrix, Gütekriterium |
| $\mathcal{K}(\mathbf{A})$ | Raum von \mathbf{A} |
| \mathbf{K} | allgemeiner Zahlenkörper |
| \mathbf{M} | Massenmatrix |
| M_i | Markovparameter |
| $MAC(i, j)$ | Elemente der MAC-Matrix |
| n | Zustandsraumdimension |
| nf | Anzahl der Messwerte |
| $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ | Nullraum von \mathbf{A} |
| p | Zahl der Eingänge |
| \mathbf{p} | Projektion |
| \mathbf{P}_{xx} | Steuerbarkeitsgramian |
| q | Zahl der Ausgänge |

| | |
|----------------------------------|---|
| $Q(a_0; a_1)$ | Gütekriterium |
| Q | orthogonale Matrix der QR-Zerlegung, Steuerbarkeitsmatrix |
| R | obere Dreiecksmatrix der QR-Zerlegung |
| $\mathcal{R}(A)$ | Bildraum von A |
| \mathbf{R} | Menge der reellen Zahlen |
| s | Variable im Bildbereich, systemabhängiger Parameter |
| $S(\omega)$ | Leistungsspektrum |
| $S_{\xi\xi}$ | Leistungsspektrum des Eingangsrauschens |
| $S_{xx}(\omega), S_{yy}(\omega)$ | Autoleistungsspektrum |
| $S_{xy}(\omega), S_{yx}(\omega)$ | Kreuzleistungsspektrum |
| t | Zeitpunkt |
| t_0 | Startzeit |
| T | Transformationsmatrix |
| T | Messzeit |
| $u, u(t)$ | Erregungsvektor |
| U | Matrix der linken Singulärwertvektoren, semiinfinite Hankelmatrix |
| \tilde{U} | erweiterte Matrix der linken Singulärwertvektoren |
| U_{ij} | Matrix mit gemessenen Eingangswerten |
| v | Geschwindigkeitsvektor |
| \dot{v} | Beschleunigungsvektor |
| V^T | Matrix der rechten Singulärwertvektoren |
| \tilde{V} | erweiterte Matrix der rechten Singulärwertvektoren |
| x | Koordinatenrichtung |
| x | Vektor, Zustandsraumvektor |
| \hat{x} | Amplitudenvektor, Eigenvektor |
| x^* | Minimum eines Residuenvektors |
| \dot{x} | Zeitableitung des Zustandsraumes |
| X | invertierbare Matrix |
| y | Variable |
| $y', y'', y''', y^{(4)}$ | Ableitungen von y |
| y | Ausgangsvektor, Vektor |
| \bar{y} | fiktives Zeitsignal |
| \tilde{Y} | konjugiert komplexe Größe Y |
| Y | semiinfinite Hankelmatrix |
| Y_m | Matrix mit geschätzten Ausgangswerten |
| Y_{ij} | Matrix mit gemessenen Ausgangswerten |
| z | Zustandsvektor |
| \dot{z} | Ableitung des Zustandsvektors |
| 0 | Nullmatrix |
| $col(\dots)$ | Spalte von (...) |
| $dim(\dots)$ | Dimension von (...) |
| $max(\dots)$ | Maximalwert von (...) |
| $min(\dots)$ | Minimalwert von (...) |
| $rg(\dots)$ | Rang einer Matrix (...) |

| | |
|---------------|---|
| $span(\dots)$ | Menge der Basisvektoren von (...) |
| $vec(\dots)$ | Vektor von (...) |
| \dagger | Kennzeichnung der Pseudoinversen |
| T | Kennzeichnung der Transponierten |
| $-$ | Mittelwert |
| \sim | konjugiert Komplexe einer Matrix, erweiterter Parameter |
| $m \times n$ | Dimension einer Matrix |
| $[1:p:1:q]$ | Teilbereich einer Matrix |
| \subset | Untermenge |
| \in | Element aus |
| \perp | orthogonales Komplement |
| \otimes | dyadisches Produkt |
| $\ \dots\ _2$ | Euklidische Vektornorm |

| | |
|-------------|---------------------------------------|
| AKF | Autokorrelationsfunktion |
| COMAC | Co-Ordinated Modal Assurance Criteria |
| D\A | digital-analog |
| DC | Gleichspannung |
| DIN | Deutsche Industrie-Norm |
| EVD | Eigenwertzerlegung |
| FE-Modell | Finite Elemente Modell |
| FEM | Finite Elemente Methode |
| FFT | Fast Fourier-Transformation |
| FIFO | First In First Out |
| FT | Fourier-Transformation |
| H-dim | Dimension der Hankelmatrix |
| l_2 -Norm | Euklidische Norm |
| MAC | Modal Assurance Criteria |
| <i>Min.</i> | Minimum |
| QSVD | Quotienten-Singulärwertzerlegung |
| SMI | Subspace-Method Identification |
| SVD | Singulärwertzerlegung |

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Einführung

Das Versagen von technischen Systemen ist in den letzten Jahren vor allem durch die Medien einer breiten Öffentlichkeit bekannt geworden. Man denke nur an die spektakuläre Flugzeugkatastrophe des Inlandfluges der Aloha Airlines auf Hawaii am 28.04.1988, bei der sich die obere Außenhaut der Kabine vollkommen abgelöst hat oder an den Bruch des Radreifens des ICE von München nach Hamburg am 03.06.1998 in Eschede. Beide Unfälle haben die Diskussion um die Art und Weise einer Überwachung von hochdynamisch belasteten Systemen entfacht und viele auch nicht-wissenschaftliche Meinungen sind zu diesem Thema geäußert worden.

Unfälle dieser Art stellen im Allgemeinen keinesfalls eine Ausnahme dar. Durch Naturkatastrophen und menschliche Fehlplanung kam es in der Vergangenheit immer wieder zu Schäden an Bauwerken und anderen technischen Objekten. Sie traten als durch die Zeit verursachte Ermüdung - wie in Eschede - oder Überbeanspruchung auf, was schließlich zum Versagen ihrer Struktur führte. Dabei waren es vor allem die dynamischen Belastungen, welche es den zuständigen Ingenieuren schwer machten, gesicherte Aussagen über die wahre Lebensdauer ihrer Konstruktion zu tätigen. Leichtbauweisen und ein auf wenige Jahre begrenzter Nutzungszeitraum verlangen eine Optimierung der Struktur, schon allein aus ökonomischer Sichtweise. Doch sind die Einwirkungen nicht immer deterministischer, sondern vielmehr stochastischer Natur und genau hier sind die Schwierigkeiten zu finden, welche eine rechnerische Auslegung, die oftmals noch auf empirischen Richtwerten der DIN beruht, mit gewissen Unsicherheiten versieht.



Abbildung 1.1: Ultraschallprüfung am Radreifen des ICE

Das Ziel des Bochumer Sonderforschungsbereiches 398 ist die Auslegung von Bauwerken unter Berücksichtigung der angesprochenen Problemstellungen, deshalb trägt er den Namen *Lebensdauerorientierte Entwurfskonzepte unter Schädigungs-*

und Deteriorationsaspekten. Das Teilprojekt B4 *Diagnose und Lokalisation diskreter Schäden durch Schwingungsmessung mit dem Ziel der Restlebensdauerermittlung*, auf dessen Ergebnisse sich diese Arbeit stützt, soll den messtechnischen bzw. experimentellen Bereich zu dieser Thematik abdecken. Wobei eine globale Strukturüberwachung an komplexen Systemen angestrebt wurde, um im Fall einer Schädigung mit präventiven Maßnahmen gegen ein totales Versagen des Bauteils zu beginnen.

Die Schwerpunkte der Arbeit sind das Aufstellen neuer Identifikationsalgorithmen in der Schwingungsüberwachung und die Anwendung von Schädigungsindikatoren für die neuen Vorgehensweisen. Als Identifikation wird die Ermittlung der dynamischen Eigenschaften eines Systems bezeichnet, z.B. Frequenz, Phase und Amplitude, welche auch modale Parameter genannt werden. Jeder Körper hat bestimmte Frequenzen, auf die er besonders sensibel reagiert. Die Bewegungen, die er dann beschreibt, nennt man Eigenformen oder Moden.

Jedem Mode sind bestimmte modale Parameter, die nur ihn charakterisieren, zugeordnet. Die Aufgabe besteht darin, diese sensiblen Zustände zu finden und im Falle einer Schädigung eventuelle Veränderungen festzustellen.

1.2 Stand der Forschung

Bei den schon existierenden technischen Objekten sind aus konstruktiver Sicht keine großen Änderungen mehr möglich, ihr Schädigungsgrad durch Überbeanspruchung, Ermüdung, Alterung, Umwelteinflüsse usw. ist zu quantifizieren, um eine sichere Funktionsweise zu garantieren.

Es stellt sich die folgende Frage: „Wie können Schädigungen, wenn sie auftreten, so früh wie möglich erkannt und lokalisiert werden?“ Geeignete Methoden und Vorgehensweisen waren zu ermitteln, ebenso mussten sensitive Schädigungsmaße aufgestellt werden.

Ist die Stelle der vermuteten Schädigung bekannt, so bieten sich je nach Größe und Lage der Schädigung, visuelle Verfahren, Ultraschall und Magnetfeldmethoden an, um die Vermutung zu bestätigen. Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass eine Schädigung typischerweise ein lokales Problem ist und sich lokal durch Veränderungen der hohen Frequenzen äußert. Niedrigere Frequenzen geben eher eine Aussage über das globale Verhalten der zu untersuchenden Struktur wieder. Das Bedürfnis nach einer quantitativen, globaleren Methode, bei der die Schädigung und der Ort unbekannt sein können, trug zur Entwicklung der Verfahren zur Detektion durch Schwingungsüberwachung bei. Man geht hierbei davon aus, dass eine Änderung der modalen Eigenschaften auch immer eine Änderung der physikalischen Eigenschaften bewirkt.

Im Folgenden sollen drei Bereiche betrachtet werden (siehe Abbild 1.2), die zur Charakterisierung der Schadenslokalisierung durch Schwingungsmessung wichtig sind. Als Erstes ist hier die Gegenüberstellung der verwendeten Modelle vorzunehmen. Es wird zwischen einer physikalischen modellgestützten Vorgehensweise und einer nicht physikalischen modellgestützten Vorgehensweise unterschieden. Eine physikalische Modellunterstützung bedeutet: Man verwendet ein *Finite Elemente Modell*, im Gegensatz zum nicht physikalischen Vorgehen, wo ein synthetisches mathematisches Vorgehen angenommen wird - *Black-Box-Darstellung* -, deren innerer Zustand völlig unbekannt ist.

Weiterhin kann die Art der Schädigung in eine lineare und eine nichtlineare Schädigung eingeteilt werden. Von einer linearen Schädigung spricht man, wenn eine lineare Struktur sich vor und nach der Systemveränderung linear verhält. Die Verschiebungen der modalen Parameter sind dann eine Folge der Veränderungen an Geometrie und Materialeigenschaften. Bei einer nichtlinearen Veränderung geht man davon aus, dass eine anfänglich linear-elastische Struktur sich nach der Schädigung nichtlinear verhält. Ein Beispiel hierfür ist das Klaffen eines Ermüdungsbruches.

Die dritte Hauptunterscheidung ist durch die Einwirkungsseite zu treffen. Es können Impulseinwirkungen und Ausschwingvorgänge auftreten, welche sich vom mathematischen Aufwand relativ leicht behandeln lassen. Weiterhin gibt es deterministische Einwirkungsverhalten, die sich wie periodische Funktionen verhalten, aber auch stochastische Einwirkungen, d.h. ambiente Erregungen die durch Wind, Mikroseismik oder Erdbeben hervorgerufen werden, sind zu finden.

Eine andere Klassifizierung der Schädigungsidentifikation lässt sich bei Farrar [21] finden.

- **Stufe 1:** Erfassung von Strukturveränderungen
- **Stufe 2:** Stufe 1 und Lokalisation
- **Stufe 3:** Stufe 2 und Quantifizierung der Schädigung
- **Stufe 4:** Stufe 3 und Lebensdauerabschätzung

Die modale Schadenslokalisierung ist in den ersten beiden Stufen anzusiedeln, in Ausnahmefällen in der dritten Stufe. Stufe vier wird der Bruchmechanik zugeordnet, sie soll im Rahmen dieser Arbeit aber nicht weiter zur Diskussion stehen.

1.2.1 Schädigungsanalysen

Die ersten Überlegungen zum Problem der Schadensfrüherkennung wurden im Bereich der Off-Shore- und Ölindustrie angestellt. Das war Anfang der 70er Jahre und noch mit vielen Problemen versehen. Es stellte sich nämlich heraus, dass eine reine Betrachtung der Resonanzfrequenzen wenig Informationen über den Zustand einer Bohrinself liefert, weil die äußeren Einwirkungen wie Meeresdünung, Messrauschen, der Füllstand der Tanks etc. einen zu großen Einfluss auf die Untersuchungen haben. Deshalb verwarf man Mitte der 80er Jahre diese Methode aus Mangel an Erfolg.

Der Mangel an Erfolg bei der reinen Betrachtung der Veränderung von Eigenfrequenzen hinderte eine Vielzahl von Forschern aber nicht daran, diese Veränderungen zur Grundlage ihrer Untersuchungen zu machen. Als Ergebnis fand man heraus, dass die stochastische Streubreite der Eigenfrequenzen im Gegensatz zu anderen modalen Parametern geringer ist [21]. Leider hat sich ebenfalls gezeigt, wie unsensibel die Eigenfrequenzen bei einer Systemveränderung reagieren. Selbst große Schädigungen an Brücken sind durch sie nur bedingt feststellbar und machen sie als einen alleinigen Schädigungsindikator unbrauchbar.

Ein Fall in dem die Frequenzen als Indikator ausreichen, ist das *forward problem* [21]. Es wird vorausgesetzt, dass man die Art des Schadens und auch die Auswirkungen auf das Eigenfrequenzverhalten kennt, dann muss in der Anwendung nur nach diesem Zustand gesucht werden. Als

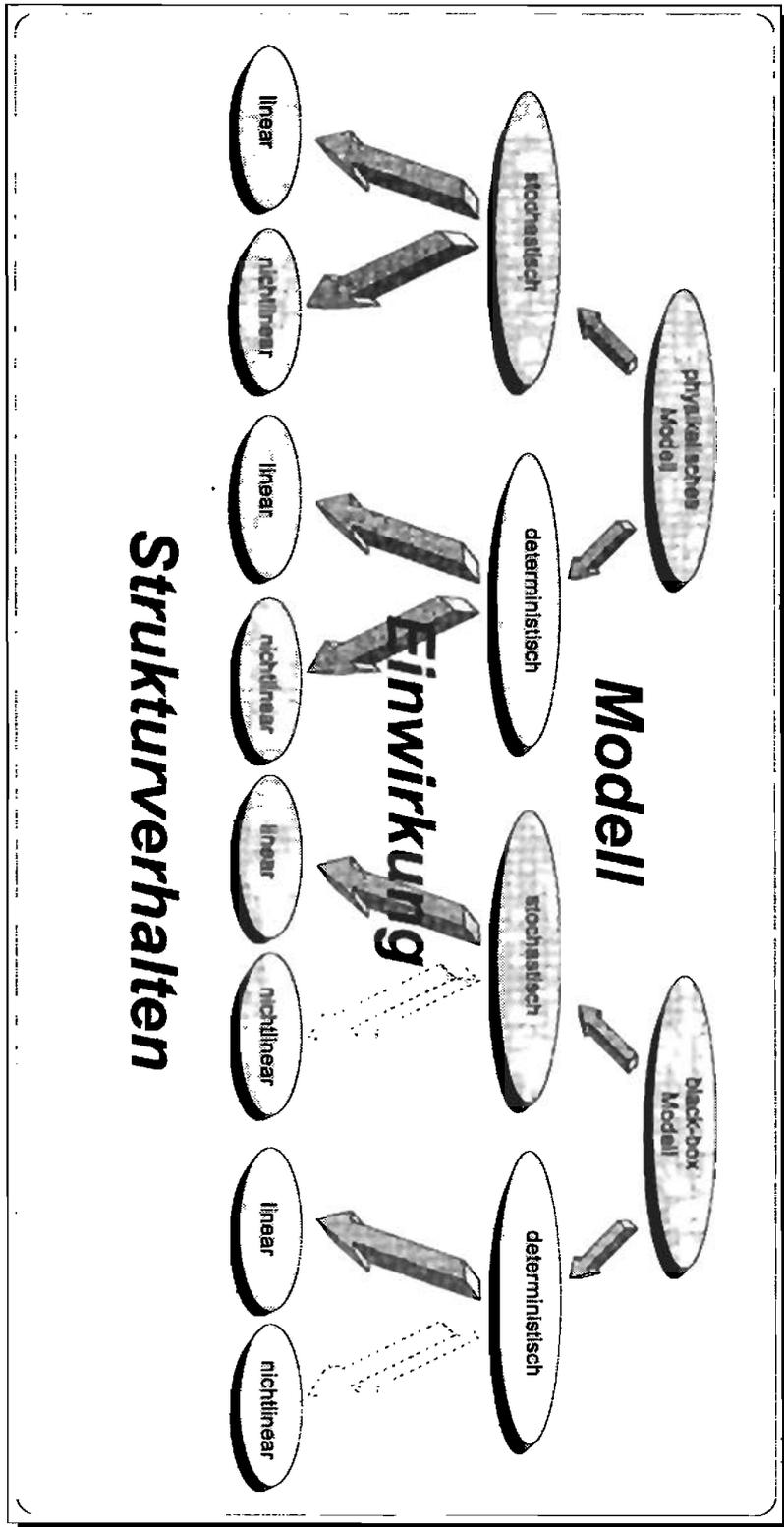


Abbildung 1.2: Hauptunterscheidungen der Schädigungsanalyse

Beispiel lässt sich die Überwachung von Kugellagern angeben. Die Diagnose ist aber sehr bauteilspezifisch und schon die Größe eines Lagers gleichen Typs muss berücksichtigt werden.

Eine Erweiterung der reinen Eigenwertbetrachtung ist durch die Berücksichtigung der Eigenformen hinzugekommen. Bei West [104] ist zum ersten Mal das modal assurance criteria MAC angewendet worden. Bei den MAC-Werten wird die Korrelation zwischen einem geschädigten und ungeschädigten System berechnet. Allerdings wird die Sensitivität dieses Verfahrens bei komplexen Systemen stark angezweifelt, obwohl eine Vielzahl von Forschern mit diesem Verfahren gearbeitet haben und arbeiten.

Als eine etwas variierte Vorgehensweise ist die Betrachtung der Krümmungslinie der Eigenformen anzusehen. Man hat hierbei festgestellt, dass die Veränderung der Krümmungslinie im direkten Zusammenhang zur Steifigkeitsänderung steht und diesen Effekt ausgenutzt [92]. Mit dem zentralen Differenzenstern bildet man dann die Ableitungen.

Außerdem sind als Indikatoren Energiemaße und die Flexibilität einer Struktur verwendet worden [92], bei denen die Eigenformen mit in die Berechnung einfließen. Topole [94] hat eine Erweiterung dieser Methoden auf nichtlineare Systeme bei Impulserregung beschrieben und erfolgreich bei kleineren Systemen angewendet. Diese Methoden sind alle an der Texas A&M Universität entstanden und mussten frühzeitig ihre Eignung bei der Untersuchung der Außenhaut des Space Shuttles beweisen.

Die Berechnung der dynamischen Steifigkeiten, welche die Inverse der Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen wiedergeben, fand auch bei einigen Autoren Verwendung. Der Nachteil der Methode wird deutlich, wenn man versucht, über die dynamischen Steifigkeiten das komplette Systemverhalten zurückzugewinnen. Da meist nur die unteren Eigenfrequenzen gemessen werden können, für eine vollständige Rekonstruktion aber alle Eigenfrequenzen vonnöten sind, ist dies nicht möglich, ohne dass die Matrizen singulär werden.

Lenzen [50] geht einen anderen Weg: Er hat sich bei seiner Arbeit von den FE-Modellen gelöst und versucht, durch ein synthetisches Modell eine neue Vorgehensweise zur modalen Analyse zu finden. Insbesondere bei der Identifikation legt seine Methode den Grundstein für die vorliegende Arbeit.

1.2.2 Identifikationsverfahren

Bei den oben beschriebenen Methoden und Vorgehensweisen handelt es sich bei der Berechnung der Identifikation - bis auf eine Ausnahme - um Verfahren die auf die klassische Fourier-Transformation und auf die Circle-Fit-Methode zurückgreifen [103]. Das wesentliche Werkzeug in diesem Zusammenhang ist das Fourierspektrum, an dem man die auftretenden modalen Eigenschaften bestimmen kann.

Lenzen [50] führte erstmals eine Zustandsraumbetrachtung zur Systemidentifikation bei der modalen Analyse durch. Die Grundlagen des Verfahrens beruhen auf systemtheoretischen Überlegungen und werden numerisch durch effektive Algorithmen der linearen Algebra umgesetzt. Eine tragende Rolle spielt dabei die Singulärwertzerlegung. Ohne sie ist diese Art der Realisierung, welche seit Ho und Kalman [34] bekannt ist, nicht effizient anzugeben. Die Realisierung ist die Beschreibung

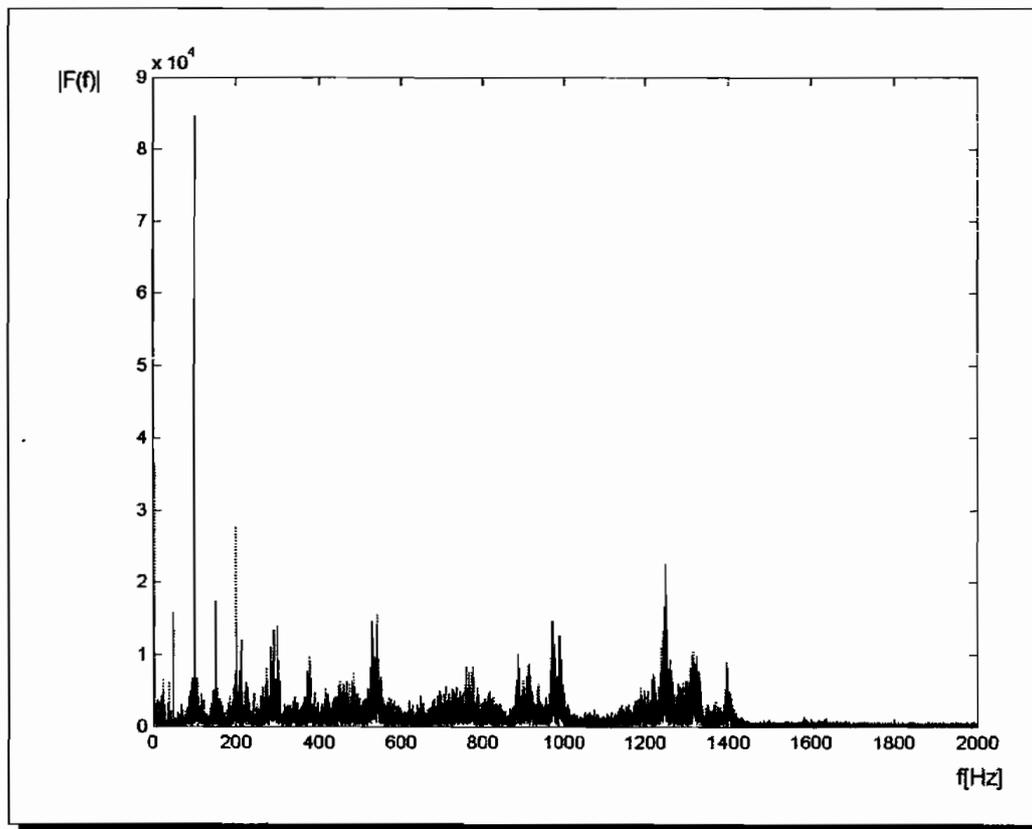


Abbildung 1.3: Fourierspektrum eines Zeitsignals

des Systems durch ein Black-Box-Modell, in der Art, dass alle relevanten dynamischen Eigenschaften durch das Modell vollständig berücksichtigt werden. Eine Einschränkung ist in dem bei Lenzen verwendeten Vorschlag allerdings gemacht worden, man muss sich nämlich auf Impuls- und Abschaltvorgänge als Erregung beschränken, was in manchen Fällen sicher ein Nachteil ist.

Die Methoden, die als Grundlage der Identifikation die Zustandsraumdifferentialgleichung benutzen, sind bisher nur in der Regelungs- und Elektrotechnik angewendet worden und nicht in der Mechanik. Sie werden zur Signalanalyse und zur Bestimmung von Regelungsmodellen verwendet. Der Vorteil ist, dass sie auch bei allgemeinen Erregungen und stochastischen Eingangsgrößen zu verwenden sind [74] [97] [6]. Die grundlegende Idee bei diesen Verfahren ist bei allen Autoren, die sich mit diesem Thema beschäftigen, gleich. Die Verallgemeinerungen aller Algorithmen durch eine einheitliche Schreibweise von van Oversche und De Moor [74] erschwert aber das allgemeine Verständnis der Verfahren.

1.3 Ziele der Arbeit

Ausgehend von den bei Lenzen [50] beschriebenen Grundlagen soll die modale Systemidentifikation mit anschließender Schädigungserkennung durchgeführt werden. Dazu werden die bestehenden Algorithmen aufgegriffen und auf beliebige Eingangserregungen erweitert. Es ist vorgesehen, erstmals u.a. Sinussweep-Funktionen und ambiente Erregungen zu nutzen, um ein Black-Box-Modell

aufzustellen. Dabei wird zunächst die Entwicklung von der von Lenzen verwendeten Methode bis hin zu den allgemeinen Erregungen beschrieben. Durch diese Erweiterungen hofft man, dass mehr Energie als bei einer Impulserregung in das untersuchte System gelangt und so eine bessere Identifikation ermöglicht wird. Es besteht daher die berechnete Annahme, dass bei einer genaueren Beschreibung des Systems, auch kleinere Veränderungen deutlicher dargestellt werden können.

Ein Black-Box-Modell beschreibt das Ausgangsverhalten des Systems bei gegebenem Eingang, ohne eine physikalische Deutung des Inneren, der Black-Box. Die Beschreibung reduziert sich dann auf eine Differentialgleichung erster Ordnung, der Zustandsraumdifferentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{x} + (\mathbf{D} \mathbf{u}).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Anhand der Parameter der Gleichung (1.1) lassen sich die modalen Eigenschaften des Systems bestimmen. So kann man einen Vergleich mit den sonst für die Identifikation üblichen Verfahren vornehmen.

Ein Vergleich zwischen dieser in der modalen Analyse neuen Vorgehensweise und dem klassischen Verfahren mit Hilfe der Fourier-Transformation - ist nach Wissen des Autors - in dieser Art, noch nicht durchgeführt worden und deshalb erstrebenswert. Es sollen sowohl die Vor- und Nachteile beschrieben werden als auch die Grenzen beider Verfahren.

Ist die Systemidentifikation in allen drei Erregungsfällen durchgeführt, können Schädigungsmaße auf das neue Verfahren angewendet werden. Es ist hierbei das Ziel, Hinweise zu finden, welche Parameter bei großen Systemen besonders sensitiv sind und welche sich gut für die vorgestellte Untersuchungsmöglichkeit eignen.

Verifiziert und validiert werden die aufgestellten Thesen durch FE-Simulation vorhandener realer Messobjekte und durch eine anschließende reale Untersuchung. Die messtechnische Untersuchung wurde mit Piezo-Beschleunigungs-Aufnehmern und der entsprechenden Echtzeit-Hardware an einem PC durchgeführt. An der Eingangsseite wird bei den realen Bauwerken auch Wind berücksichtigt. Dieser ist ebenfalls gemessen worden und geht in die Berechnungen mit ein.

1.4 Probleme bei der messtechnischen Identifikation und Schädigungslokalisierung

Allen Identifikationsverfahren ist die Signalverfälschung durch das Messrauschen gemein, welches durch die Messkette hervorgerufen wird. Der verwendete A/D-Wandler hat eine Auflösung von 12-Bit bei einem Messbereich von $\pm 5 V$, damit ist die Messgenauigkeit durch die verwendete Hardware festgelegt. Geht man von einer Signalverfälschung von $f < 10\%$ der max. Amplitude von $\pm 5 V$ aus, so ist es einsichtig, dass es bei einer Messung erstrebenswert ist, die Signale auf die maximale Amplitude auszusteuern, um die Messfehler so gering wie möglich zu halten.

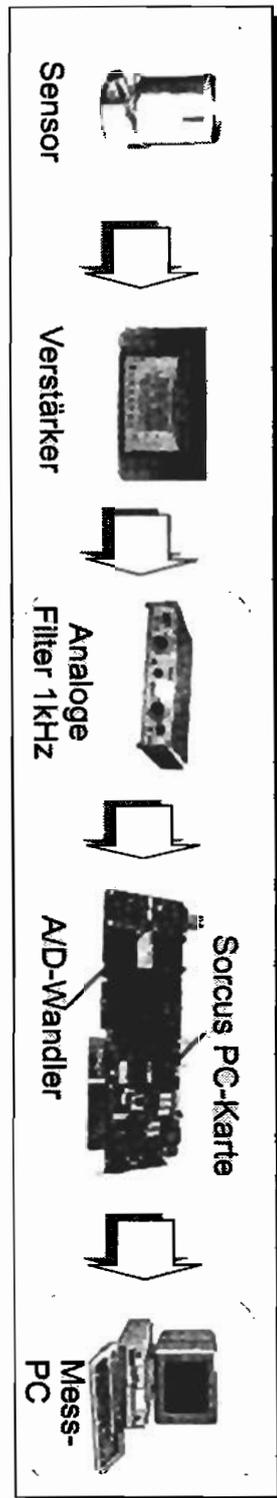


Abbildung 1.4: Verwendete Messkette zur Beschleunigungsmessung

Dieses Problem wird verstärkt, wenn man unterschiedlich empfindliche Aufnehmer benutzt und die einzelnen Signale auf den optimalen Bereich des A/D-Wandlers anpassen will. Deshalb ist es sinnvoll, möglichst gleiche Aufnehmer zu verwenden, um diesen Schwierigkeiten vorzubeugen.

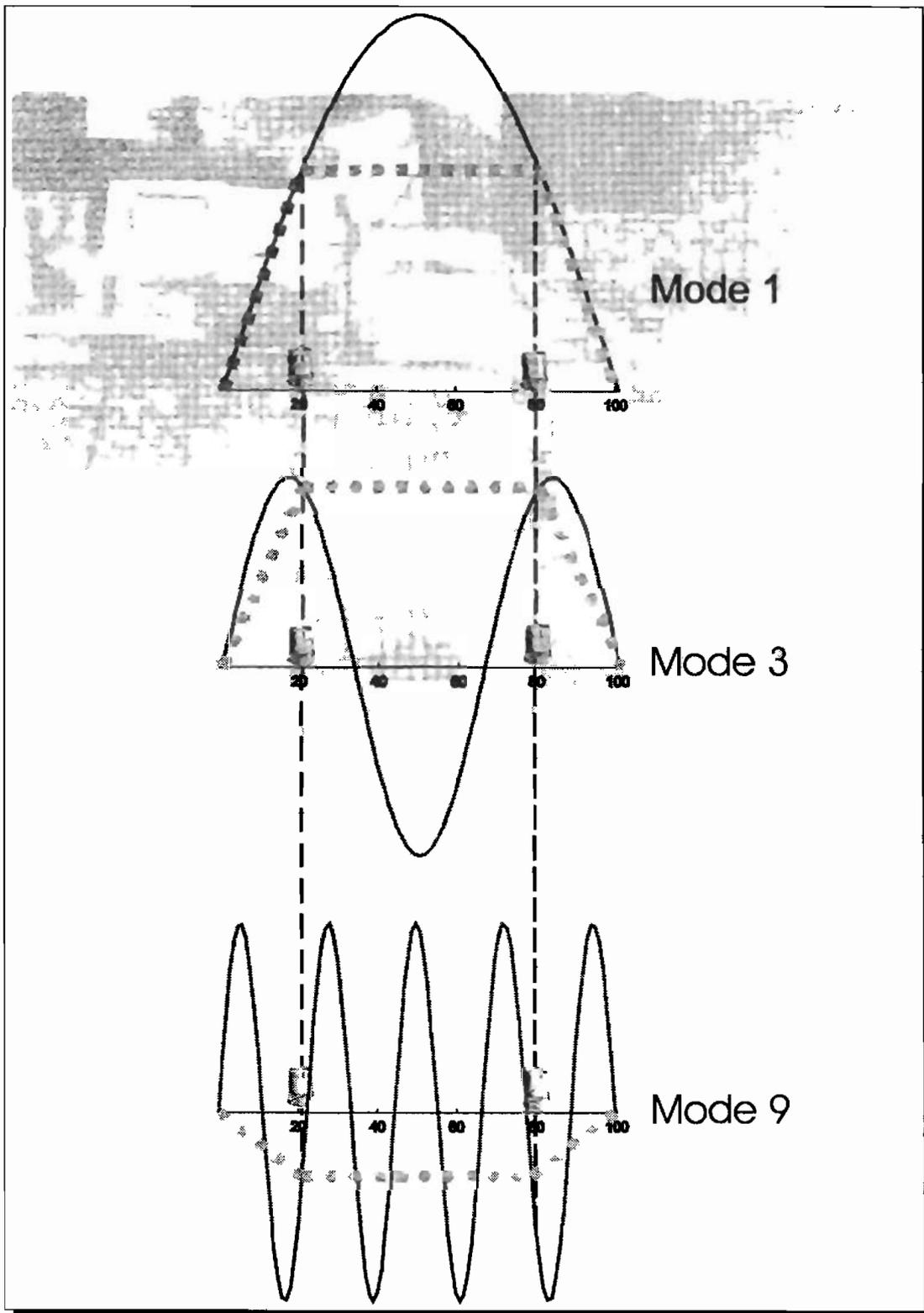


Abbildung 1.5: Einfluss der Sensorposition auf die Identifikation

Bei der Identifikation ist es nötig, eine Schwingung mindestens zweimal pro Schwingungsperiode abzutasten, um eine eindeutige Aussage über das Signal tätigen zu können (Abtasttheorem von Shannon [103]). Dies erfordert insbesondere bei vielen Messkanälen eine Messtechnik, welche auch bei relativ hohen Frequenzen die Echtzeitbedingungen nicht verletzt. Die bei Gebäuden auftretenden Frequenzen sind in dieser Hinsicht als eher unkritisch anzusehen. Für die Messungen fand eine SORCUS PC-Messkarte Verwendung, welche Frequenzen bis zu 300 kHz mit einem Kanal aufnehmen kann. Benötigt man mehr als einen Kanal, dividiert sich die maximale Abtastrate durch die Anzahl der gesamten Kanäle.

Die anfallende Datenflut bei hohen Abtastraten stellt ein allgemeines Problem dar. Die für eine Auswertung sinnvollen langen Messzeiten stehen der Datenmenge bei hohen Frequenzen und vielen Messkanälen entgegen. Die begrenzte Speichermenge macht es bei der Auswertung der Signale zum Teil unmöglich, hohe und niedrige Frequenzen gleichzeitig zu untersuchen, weil sonst das Abtasttheorem verletzt würde.

Nachdem die Thematik der Signalverfälschung erläutert wurde, muss ein weiterer wichtiger Punkt im Bereich der Identifikation angesprochen werden. Möchte man aus den Messdaten die Eigenformen der Struktur bestimmen, so benötigt man mehr als einen Messsensor. Die Anzahl der Sensoren ist dabei ausschlaggebend für die Identifikation der Eigenformen höherer Ordnung (Abbild 1.5).

Wie im Abbild 1.5 zu erkennen, ist es nicht möglich die komplette Schwingungsform zu rekonstruieren, weil zu wenig Informationen vorliegen. Außerdem erkennt man, dass es auch Sensorpositionen gibt, die kein Signal aufnehmen können, was bedeutet, dass keine Aussage über irgendeine modale Größe möglich wird. Diese Stellen sind die Knotenlinien der Eigenformen.

Die genannten Schwierigkeiten sind bei der Schädigungsanalyse in jedem Fall zu berücksichtigen und tragen dazu bei, dass es immer noch ein sehr komplexes Problem ist, aus reinen Schwingungsmessungen Defekte zu identifizieren.

Zur Auswertung der Daten wurde das Messwertanalysesystem MODIMESS (siehe Abbild 1.6) programmiert, mit dem es möglich ist, die einzelnen Algorithmen zu vergleichen. Es können unterschiedliche Sensorrichtungen vorgenommen werden, um die eventuell verschiedenen Empfindlichkeiten zu berücksichtigen. Die Messungen werden direkt durch eine grafische Bedienoberfläche vorgenommen und stehen dann zur Messdatenanalyse bereit.

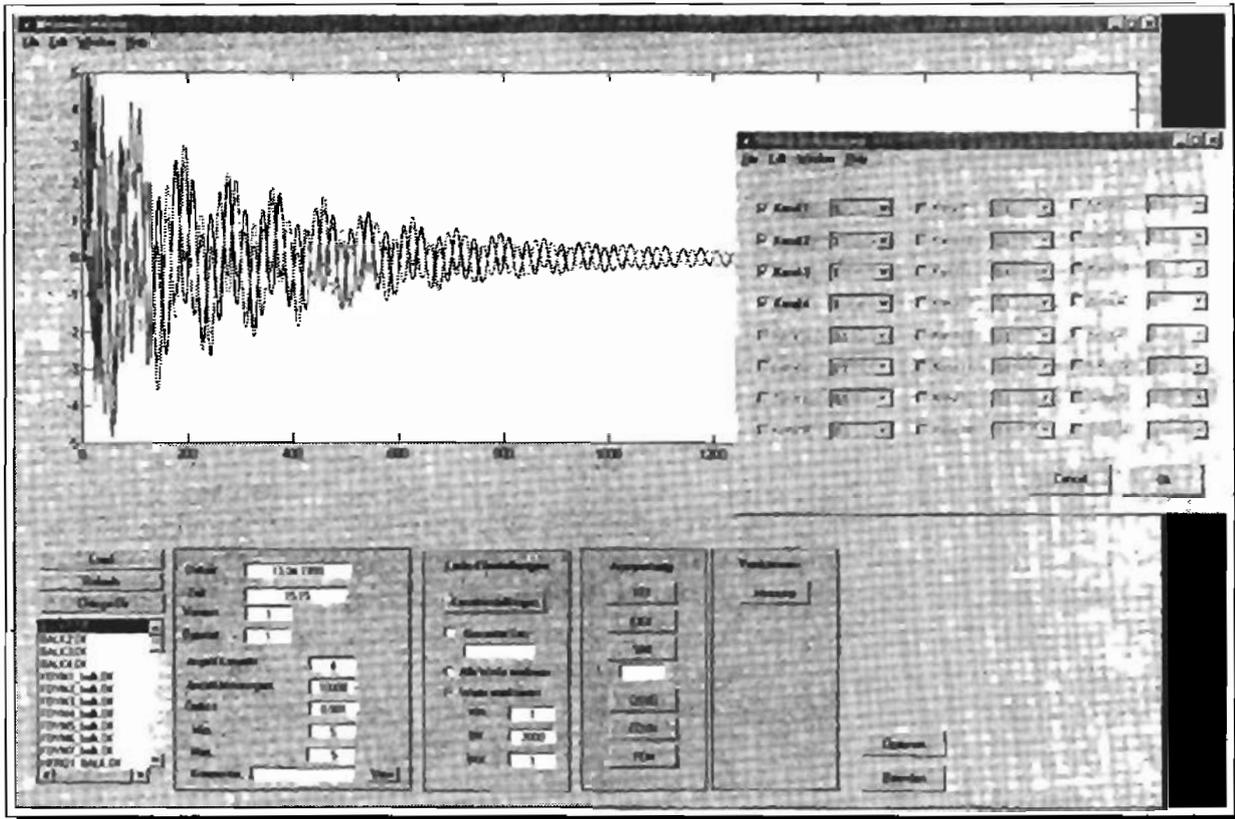


Abbildung 1.6: Messwertanalysemodul MODIMESS

1.5 Gliederung der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist die Identifikation von strukturdynamischen Parametern, durch neuartige Methoden in der experimentellen Modalanalyse. Dazu werden Algorithmen, welche in der Systemtheorie ihre Ursprünge besitzen, verwandt.

Der zweite Schwerpunkt behandelt die Schädigungslokalisierung, mit verschiedenen auf die neuen Algorithmen abgestimmten Indikatoren. Damit gliedert sich die Arbeit in zwei Teile. Der erste Teil behandelt die Identifikationsverfahren und ihre Berechnungsgrundlagen und im zweiten Teil sind die beschriebenen Verfahren auf reale Strukturen bei der Detektion von Systemveränderungen angewendet.

Die in der Modalanalyse neuen Identifikationsverfahren werden in Kapitel 2, Kapitel 3 und Kapitel 4 vorgestellt. Das Kapitel 2 beinhaltet die numerischen Werkzeuge aus der linearen Algebra, durch welche die im Folgenden vorgestellten Verfahren ihre enorme Effizienz gegenüber den bisherigen Verfahren erlangt haben. Da in dieser Arbeit beliebige Erregerprozesse Verwendung finden, ist an dieser Stelle auch eine Aufstellung der für die Bearbeitung von stochastischen Prozessen üblichen Kennzahlen und Kennfunktionen angegeben.

Im nachfolgenden Kapitel 3 sind die einzelnen Subspace-Methoden für die unterschiedlichen Erregungsfälle beschrieben. Als Erstes besteht die Möglichkeit der Behandlung von impulserregten Systemen, weil hier die mathematischen Zusammenhänge am einfachsten zu durchschauen sind. Daran schliesst die Behandlung der stochastisch erregten Systeme, diese sind durch eine Analogie auf den impulserregten Fall zurückzuführen. Da diese Art der Behandlung in der Praxis wenig praktikabel ist, werden die beiden vorgestellten Berechnungsmöglichkeiten durch eine allgemeinere Formulierung, für beliebige Erregungszustände, ersetzt.

Zur Demonstration der Vorteile der neuen Methoden bei der Signalidentifikation, wird im Kapitel 4 ein Vergleich mit der bisher sehr beliebten Fourier-Transformation angefügt und die aufgestellten Thesen an verschiedenen Beispielen verifiziert.

Damit sind alle Grundlagen für die Schädigungslokalisierung mit den neuen Methoden geschaffen, sodass diese, im zweiten Teil der Arbeit, in dem Kapitel 5 und dem Kapitel 6 ihre Anwendung finden können. Das Kapitel 5 beginnt mit einer Einführung in die modale Analyse und mit der Beschreibung dynamischer Parameter, welche sich bei einer Systemveränderung als sensitiv erweisen können. Abschliessend werden einige Indikatoren beschrieben, die auf den Veränderungen der dynamischen Parameter beruhen und die Gleichwertigkeit in der experimentellen und theoretischen Modalanalyse, im Vergleich mit den bisherigen Verfahren, gezeigt.

Um die erlangten theoretischen Kenntnisse zu untermauern, werden im letzten Kapitel die Verfahren an realen Strukturen erprobt. Dabei wurden ein Kirchturm, ein Laternenmast und ein Laborbalken eingehend untersucht und die gewonnenen Ergebnisse im Kapitel 6 dargestellt.

Die Arbeit schliesst mit einer Zusammenfassung aller theoretisch und experimentell gefundenen Ergebnisse.

Kapitel 2

Grundlagen und Werkzeuge der linearen Algebra und Stochastik

In diesem Abschnitt sollen die mathematischen Verfahren und deren Basis diskutiert werden, welche für die Berechnungen in dieser Arbeit von großer Bedeutung sind. Die numerische Behandlung mathematischer Probleme bedarf oftmals einer anderen Darstellung, als man es bei einer analytischen Vorgehensweise - von Hand gewohnt ist. Die Formulierung von speziellen Matrizen, welche eine effektive Beschreibung des Problems zulassen, wird angegeben. Bestimmte Eigenschaften der Matrizen werden bei den verwendeten Algorithmen ausgenutzt und finden deshalb in diesem Abschnitt besondere Beachtung.

Es handelt sich hierbei um Vorgehensweisen, die in den Bereich der verallgemeinerten Eigenwertzerlegung einzuordnen sind; gleichzeitig wird eine mathematische Beschreibung der Unterräume einer Matrix, die zugehörigen Basen, ihre Berechnung und deren Eigenarten beschrieben.

In dem nachfolgenden Kapitel 3 findet man eine Untersuchung stochastischer Prozesse. Diese treten auf, wenn man Wind, Mikroseismik und andere ambiente Erregungen als Einwirkung zulässt. Deshalb steht am Ende dieses Kapitels eine Zusammenfassung der wichtigsten Kennfunktionen und Kenngrößen, welche bei einer stochastischen Betrachtungsweise nützlich sind.

2.1 Lineare Gleichungssysteme

Aus der linearen Algebra ist die Berechnung eines linearen Gleichungssystems bekannt

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{2.2}$$

Der Aufbau der Matrix $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, ist entscheidend für die Lösung des Problems. In dem Fall einer *quadratischen Matrix* $m = n$, mit m linear unabhängigen Zeilen und Spalten, lässt sich entweder eine Lösung einfach angeben, ein ganzer Lösungsraum bestimmen oder keine Lösung finden. Die bekannteste Herangehensweise hierfür ist der *Gauß-Algorithmus*.

Wenn aber nicht alle n Zeilen und Spalten bzw. Gleichungen linear unabhängig sind, so spricht man von einem *Rangproblem*, weil linear abhängige Gleichungen keine Zusatzinformationen zur Lösung beitragen. Der *Rang* $r = \text{rg}(\mathbf{A})$ einer Matrix \mathbf{A} gibt nämlich Auskunft über die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen und Spalten, ihm kommt bei der Berechnung der Realisierung im Kapitel 3 und bei der Bestimmung der Unterräume hohe Bedeutung zu.

Ist die Anzahl der Zeilen kleiner als die Anzahl der Spalten $m < n$, handelt es sich um ein System das unterbestimmt ist. Derartige Systeme besitzen immer einen ganzen Unterraum $\mathbf{x} \in \mathcal{K}(\mathbf{A})$ als Lösung mit einer Dimension $\dim(\mathbf{x}) \geq (n - m)$. Ein Raum ist in diesem Fall der Bereich, in dem sich die Menge aller möglichen Lösungen befindet, er kann ein Punkt, eine Gerade oder eine Ebene sein. Wenn der Raum größer als der \mathbf{R}^3 ist, lässt er sich nicht mehr physikalisch deuten und die Vorstellung für diesen Bereich reduziert sich auf die mathematische Definition.

Der Fall $m > n$ behandelt ein überbestimmtes System, man hat hier mehr Informationen als man für die Berechnung des Gleichungssystems benötigt. In den meisten Fällen gibt es hierzu keine Lösung. Bei überbestimmten Systemen geht man meist in ein lineares Ausgleichsproblem über, bei dem das Minimum \mathbf{x}^* eines Residuenvektors gesucht wird

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}\|_p = \min\{\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_p : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\}. \quad (2.3)$$

Häufig wird die l_2 -Norm (Euklidische Norm) verwendet, um das Minimum im Sinne der kleinsten Quadrate zu schätzen

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2}. \quad (2.4)$$

Beim Lösen von linearen Gleichungssystemen sind zwei Unterräume und ihre Komplementäräume von Bedeutung, das ist zum einen der *Bildraum* $\mathcal{R}(\mathbf{A}) \in \mathbf{R}^m$, in dem die Lösung \mathbf{b} für die Gleichung 2.2 zu finden ist, zum anderen der *Nullraum* $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \in \mathbf{R}^n$, der die Lösung \mathbf{x} des homogenen linearen Gleichungssystems (Gleichung 2.5) beinhaltet

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (2.5)$$

Es ist für das weitere Verständnis wichtig, die Zusammenhänge der beiden Unterräume zu ihren Komplementäräumen zu verstehen. Wenn man mit \mathbf{B} einen beliebigen Unterraum im \mathbf{R}^m definiert und dazu einen orthogonalen Komplementärraum \mathbf{B}^\perp sucht, dann muss dieser folgendermaßen definiert sein:

$$\mathbf{B}^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m : \mathbf{y}^T \mathbf{x}_j = 0; j = 1, \dots, s\} \quad (2.6)$$

Dargestellt im \mathbf{R}^3 ist im Abbild 2.1 der Raum \mathbf{B} als Ebene und die darauf senkrecht stehende Gerade als Komplementärraum \mathbf{B}^\perp . Als Beweis kann das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad ; \text{ mit } \mathbf{b} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}^m \quad (2.7)$$

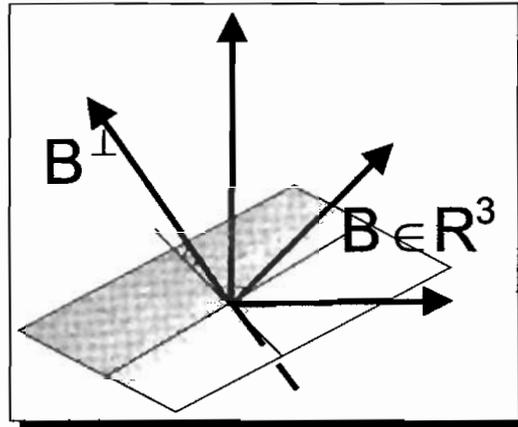


Abbildung 2.1: Raum \mathbf{B} im \mathbf{R}^3 mit orthogonalem Komplementärraum \mathbf{B}^\perp

dienen. Gibt man die Lösung des homogenen Gleichungssystems

$$\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad ; \text{ mit } \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^T) = \mathbf{R}^m \tag{2.8}$$

an, die ebenfalls im \mathbf{R}^m zu finden ist, so lässt sich zeigen, dass diese beiden Räume orthogonal zueinander sind $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T) \perp \mathcal{R}(\mathbf{A})$. Den Nachweis hierfür liefert das Skalarprodukt zweier beliebiger Vektoren in diesen beiden Räumen,

$$\mathbf{b}^T \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \underbrace{\mathbf{A}^T \mathbf{x}}_0 = 0$$

das immer zu Null wird. Gleiches gilt für $\mathcal{R}(\mathbf{A}^T) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}) \in \mathbf{R}^n$. Somit sind die orthogonalen Komplementärräume bestimmt und man kann ihre Eigenschaft nutzen. Es gibt damit Matrizenprodukte zwischen einer Basis und der Basis ihres zugeordneten orthogonalen Komplementärraumes, welche immer null sind.

Folgender Zusammenhang lässt sich angeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{A}) &\perp \mathcal{R}(\mathbf{A}^T) \in \mathbf{R}^n \\ \mathcal{N}(\mathbf{A}^T) &\perp \mathcal{R}(\mathbf{A}) \in \mathbf{R}^m \end{aligned}$$

Mit diesem Wissen kann die Lösung eines Gleichungssystems im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bzw. eine *least squares* Berechnung durchgeführt werden, was im Grunde einer Projektion in einen kleineren Lösungsraum entspricht.

2.2 Least squares Berechnungen und orthogonale Projektionen

Ausgehend von dem linearen Gleichungssystem (Gleichung 2.2) mit $m > n$ ist eine Lösung zu finden, durch die der Fehler minimiert wird. Im \mathbf{R}^3 kann dies durch das Abbild 2.3 verdeutlicht werden. Die Lösung des Gleichungssystems ist die orthogonale Projektion des Vektors \mathbf{b} in den

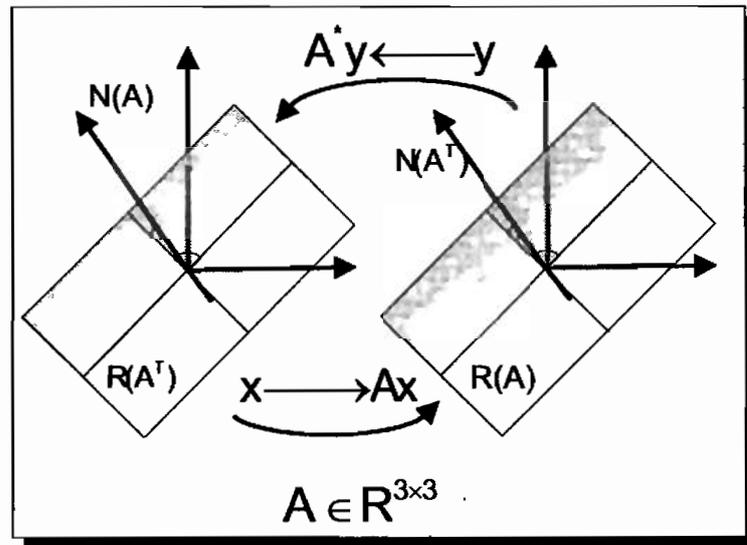


Abbildung 2.2: Abbildung $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ und $\mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ bei symmetrischem A

Bildraum von A , daraus folgt, dass der Fehlervektor im Nullraum von A^T liegen muss, was zum folgenden Ansatz führt:

$$A^T (b - Ax) = 0 \quad (2.9)$$

$$A^T Ax = A^T b. \quad (2.10)$$

Wenn die Spalten von A linear unabhängig sind, dann ist es möglich das Produkt $A^T A$ zu invertieren und eine *least squares* Lösung zu erhalten

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b. \quad (2.11)$$

Die Projektion hierzu ist schließlich:

$$p = Ax = A(A^T A)^{-1} A^T b \quad (2.12)$$

Diese theoretischen Überlegungen lassen sich numerisch hervorragend mit einem Werkzeug berechnen, welchem seit Mitte der 70er Jahre immer größere Bedeutung zukommt. Es handelt sich um die Singulärwertzerlegung SVD, deren numerische Aufbereitung 1975 von Golub und van Loen durchgeführt wurde, was zu ihrer Beliebtheit als stabiles numerisches Hilfsmittel bei der Berechnung von Matrizenproblemen beitrug [28].

2.3 Die gewöhnliche Singulärwertzerlegung SVD

Die gewöhnliche Singulärwertzerlegung ist eine Verallgemeinerung der in den Ingenieurwissenschaften weit verbreiteten Eigenwertzerlegung EVD. Die zur Rekapitulation angefügte EVD ermöglicht die Aufteilung einer Matrix $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$ in eine Diagonalmatrix $J \in \mathbf{R}^{m \times m}$ und zwei Transformationsmatrizen T bzw. $T^{-1} \in \mathbf{R}^{m \times m}$

$$A = T J T^{-1}. \quad (2.13)$$

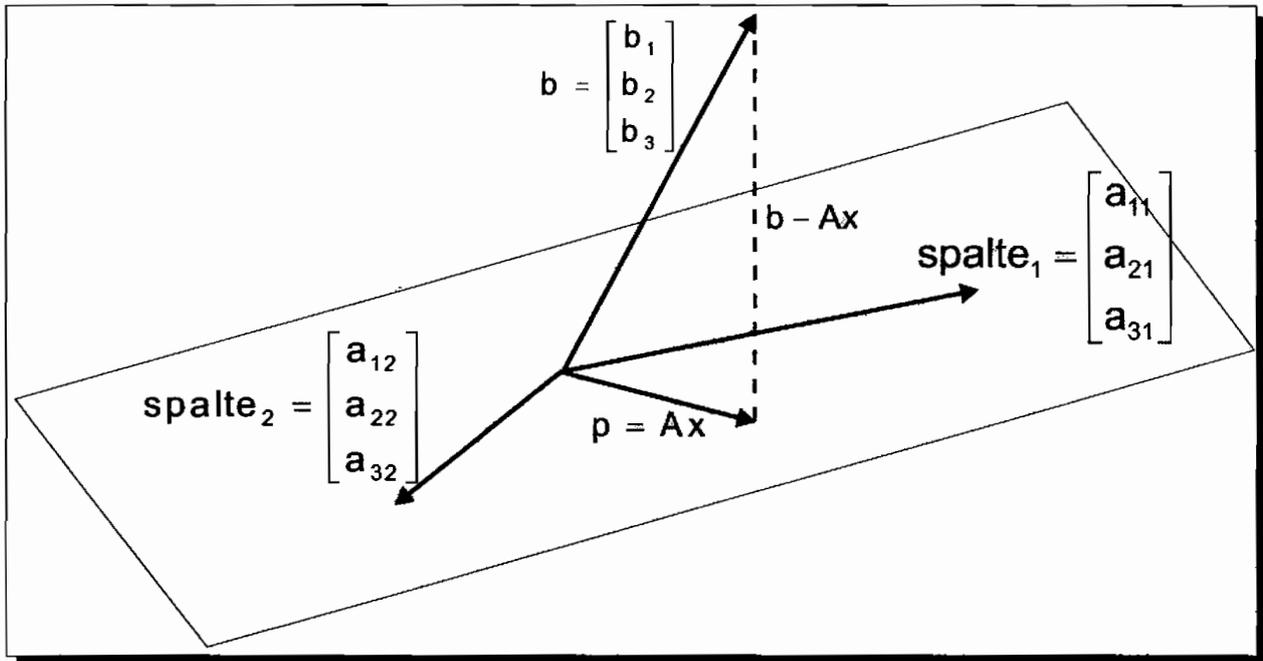


Abbildung 2.3: Projektion auf den Spaltenraum einer 3×2 -Matrix

Es sei darauf hingewiesen, dass A eine quadratische Matrix sein muss!

In der Mechanik wird die EVD im Bereich der Modalanalyse zur Entkopplung der Schwingungs-Differentialgleichung genutzt, was zu einer Rechenvereinfachung führt. Bei einer numerischen Berechnung sei auf die Schwierigkeiten, die bei der Invertierung entstehen können, hingewiesen. Sie stellen ein allgemeines numerisches Problem dar, das später durch die Algorithmen der Singulärwertzerlegung elegant gelöst werden kann, im Fall der Eigenwertzerlegung aber durch die Berechnung der Rechts- und Linkseigenvektoren umgangen wird.

Bei der SVD wird die Beschränkung auf quadratische Matrizen aufgehoben. Die zu bearbeitende Matrix $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ muss nicht zwingend quadratischer Form sein, damit lässt sich für die Zerlegung folgender Ausdruck angeben

$$A = U \text{diag} \{ \sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0 \} V^T. \tag{2.14}$$

$U \in \mathbf{R}^{m \times m}$ beinhaltet die linkssingulären Vektoren, sie ist außerdem eine orthogonale Matrix. $V^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ist die Matrix der rechtssingulären Vektoren, welche ebenfalls orthogonal ist.

Bei orthogonalen Matrizen liegt die besondere Eigenschaft vor, dass die Transponierte gleichzeitig die Inverse darstellt

$$A^T = A^{-1}. \tag{2.15}$$

Mit der Diagonalmatrix $\Sigma \in \mathbf{R}^{m \times n}$, welche die Singulärwerte enthält und deren r von null verschiedene Singulärwerte den Rang $r = \text{rg}(A)$ der Matrix A angeben, lässt sich eine schon angesprochene Anwendung der SVD anfügen. Die Invertierung einer Matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ist so

besonders zuverlässig zu berechnen, indem man die Eigenschaften orthogonaler und diagonalen Matrizen ausnützt

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^T. \quad (2.16)$$

2.3.1 Least squares und die Pseudoinverse mit der SVD

Soll ein überbestimmtes Gleichungssystem mit *least squares* berechnet werden, so ist dies numerisch sehr elegant mit der SVD, durch die Berechnung der Pseudoinversen † von \mathbf{A} , möglich

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b}. \quad (2.18)$$

Unter Ausnutzung der Eigenschaften orthogonaler und diagonalen Matrizen ergibt sich die SVD zu:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (2.19)$$

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T \quad (2.20)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^\dagger) = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^T \quad (2.21)$$

Damit ist

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{b}. \quad (2.22)$$

Aus dem vorangegangenen Abschnitt wissen wir, wie die Lösung mit *least squares* auszusehen hat. Wir erinnern uns an die Gleichung 2.11 und setzen die SVD ein

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (2.23)$$

$$= (\mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T \mathbf{b} \quad (2.24)$$

$$= \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-2} \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{U}^T \mathbf{b} \quad (2.25)$$

$$= \mathbf{V} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{b}. \quad (2.26)$$

Man erkennt hierbei, dass mit der direkten Berechnung durch die SVD (Gleichung 2.22) eine äquivalente Beschreibung zum klassischen Weg (Gleichung 2.26) gefunden wurde, welche im Folgenden verwendet wird.

2.3.2 Berechnung orthogonaler Unterräume mit der SVD

Die im Abschnitt 2.1 angesprochenen Unterräume lassen sich sehr einfach mit der SVD berechnen. Ein positiver Effekt hierbei ist, dass nicht nur die Räume bestimmt werden, sondern gleichzeitig ihre orthogonalen Basen. Abhängig vom berechneten Rang r , der von der Anzahl der von null verschiedenen Singulärwerte abhängt, ergeben sich dann mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}_A \mathbf{V}^T \quad (2.27)$$

die Unterräume

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\} \quad (2.28)$$

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \text{span}\{\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n\} \quad (2.29)$$

und die zugehörigen Komplementäräume

$$\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp = \text{span}\{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m\} \tag{2.30}$$

$$\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}. \tag{2.31}$$

2.4 Die verallgemeinerte Singulärwertzerlegung QSVD

Die lineare Algebra stellt noch ein weiteres sehr hilfreiches Werkzeug für die Bearbeitung von Matrizen bereit, die verallgemeinerte oder quotienten Singulärwertzerlegung QSVD.

Die QSVD ermöglicht die Berechnung der Singulärwerte von zwei Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ und $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, sie liefert zwei orthogonale Matrizen $\mathbf{U} \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $\mathbf{V} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ sowie eine invertierbare Matrix $\mathbf{X}^{-1} \in \mathbf{R}^{n \times n}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \Sigma_{\mathbf{A}} \mathbf{X}^{-1} \tag{2.32}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V} \Sigma_{\mathbf{B}} \mathbf{X}^{-1}. \tag{2.33}$$

Die Singulärwerte der beiden Matrizen zeigen eine besondere Eigenschaft der QSVD auf, welche eine nähere Erläuterung lohnenswert macht. Jede Summe der einzelnen Quadrate der Singulärwerte ist immer eins und der Betrag eines Singulärwertes der QSVD liegt bei $0 \leq \sigma_i \leq 1$. Weiterhin erhält man drei Möglichkeiten der Verteilung des Betrages auf einzelne Wertepaare

$$\begin{aligned} \alpha_i &= 1 & , & \beta_i = 0 & \quad i=1, \dots, r \\ \alpha_i &< 1 & , & \beta_i > 0 & \quad i=r+1, \dots, r+s \\ \alpha_i &= 0 & , & \beta_i = 1 & \quad i=r+s+1, \dots, k. \end{aligned}$$

Im wichtigsten Fall ist der Betrag der Singulärwerte so, dass $\alpha_i < 1$ und $\beta_i > 0$ ist, weil hier in beiden Matrizen A und B Systemgemeinsamkeiten gefunden werden. Dies ist eine Eigenschaft, welche den Gebrauch der QSVD in der Systemtheorie rechtfertigt, weil hier die Systemgemeinsamkeiten gesucht sind, obwohl sie durch sehr hohe Rechenzeiten erkauft wird. Zudem ist die QSVD nicht eindeutig definiert. Es gibt auch Formulierungen bei denen die invertierbare Matrix X, eine orthogonale Matrix ist und die Diagonalmatrizen keinen Rangabfall besitzen.

2.5 Das QR-Verfahren

Das QR-Verfahren dient der Faktorisierung einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ dabei muss $m > n$ sein. Dann kann eine orthogonale Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ berechnet werden, sodass

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

ist, wobei $\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ sich zu einer oberen Dreiecksmatrix ergibt.

Angewendet werden kann das Verfahren z.B. bei linearen Gleichungssystemen

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2.35}$$

¹span ist die Menge der Vektoren, die eine Basis im Raum aufspannen

indem man die Matrix \mathbf{A} mit dem QR-Algorithmus faktorisiert und dann in das Gleichungssystem einsetzt.

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b} \quad (2.37)$$

Durch Rückwärtseinsetzen löst man anschließend das Gleichungssystem, wobei dies nicht die Standardanwendung des Verfahrens darstellt.

2.5.1 Die Berechnung orthogonaler Unterräume mit der QR-Zerlegung

In den folgenden Kapiteln wird der QR-Algorithmus zur Berechnung der schon bekannten Unterräume und den zugehörigen Komplementäräumen genutzt. An dieser Stelle soll gezeigt werden, wie die orthogonale Matrix \mathbf{Q} zu separieren ist, damit man die Unterräume voneinander trennen kann.

Wendet man die QR-Zerlegung wie bei Gleichung 2.34 auf eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ an, ist es möglich bei vollem Spaltenraum, d.h. $rg(\mathbf{A}) = n$, die Separierung in folgender Form durchzuführen. Mit $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}(1 : m, 1 : n)$ und $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}(1 : m, n + 1 : m)$ ergibt sich

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{Q}_1) \quad (2.38)$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{Q}_2). \quad (2.39)$$

2.6 Stochastische Kennzahlen und Kennfunktionen

Stochastische Signale sind als Zeitfunktion nicht deterministisch und deshalb mathematisch nicht explizit beschreibbar, weil man das Gesetz von Ursache und Wirkung wegen fehlender Randbedingungen nicht darauf anwenden kann [26]. Deshalb gibt es zur Quantifizierung des stochastischen Verhaltens entsprechende Werkzeuge aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, um durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kennzahlen und Kennfunktionen eine Charakterisierung treffen zu können.

Ein stochastischer Prozess $\mathbf{x}(t)$ ist der Ablauf eines zufälligen Vorgangs über die Zeit t . Hat man mehrere stochastische Prozesse unter gleichen Versuchsbedingungen aufgenommen, entspricht dies einem *Ensemble* stochastischer Zufallsfunktionen. Diese gelten als *stationär*, wenn die ersten beiden Kennfunktionen bzw. statistischen Momente nicht über die Zeit variieren und als *streng stationär*, wenn alle stochastischen Kennzahlen zeitinvariant sind.

Als weitere Verfeinerung ist die *Ergodizität* anzusehen. Stochastische Prozesse entsprechen den Anforderungen an Ergodizität, wenn alle Kennzahlen der untersuchten Prozesse gleich sind. Ist die Ergodizität gewährleistet, impliziert dies die Stationarität. Die *Ergodenhypothese* besagt, dass eine große Anzahl von Beobachtungen an einem einzigen Messprotokoll, dessen Veränderungen bei beliebigen Zeitpunkten eine Zufallsfunktion darstellt, dieselben Eigenschaften hat, wie die gleiche Anzahl an Beobachtungen desselben Zeitpunktes an beliebigen Messprotokollen des gleichen Systems (*Ensemblemittelung*). Ensemble- und Zeitmittelung sind dann als gleichwertig anzusehen.

In der Natur vorkommende Prozesse sind meist stationär und ergodisch, sie besitzen eine Verteilungsfunktion die man annähernd als Normal- oder Gauß-Verteilt bezeichnet.

2.6.1 Mittelwert und Varianz

Um eine Aussage über normalverteilte stochastische Prozesse zu tätigen, reichen die ersten beiden Momente aus. Die wichtigsten stochastischen Kennwerte sind deshalb Mittelwert und Varianz. Sie werden, da es sich bei gemessenen Signalen in der Regel immer um natürliche Zufallsprozesse handelt, auch immer bei der Signalanalyse als Auswertehilfe benutzt.

Der Mittelwert, oder das erste zentrale Moment $E[x]$ ist definiert durch den Zusammenhang

$$E[x] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \quad (2.40)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ kann in dem Ausdruck unterschiedliche Verteilungsformen annehmen. Im Fall natürlicher Vorgänge kann man durch den zentralen Grenzwertsatz die Gauß-Verteilung benutzen. Der Mittelwert stellt eine wichtige Kenngröße dar, weil durch ihn ein Maß gefunden wird, welches die Lage der Zufallsgrößen charakterisiert. Da es sich bei Lebensdauerberechnungen um Größen handelt, die die Beanspruchung des Systems wiedergeben, ist es von enormem Nutzen zu wissen, in welcher Größenordnung sich diese Beanspruchungen befinden. Bei herkömmlichen Lebensdauerberechnungen wurde die dynamische Belastung insofern berücksichtigt, dass man den Mittelwert als Belastungsmaß annahm und so eine statische Auslegung durchführen konnte.

Die Gleichung 2.40 kann bei ergodischen Prozessen durch

$$E[x] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (2.41)$$

ersetzt werden, dies lässt sich durch die Ergodenhypothese zeigen. Damit ist eine Form angegeben, in der auch eine zeitliche Abhängigkeit Berücksichtigung findet.

Man erkannte aber schnell die oft erheblichen Unterschiede zwischen Spitzenwerten, die eher selten vorkommen, und den Werten, die vom Betrag her nahe am Mittelwert liegen. Um diese Spanne um den Mittelwert greifbar zu machen, wurde die *Streuung*, bzw. ihr Quadrat die *Varianz* $E[x^2]$ eingeführt, die die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert darstellt. Sie ist das zweite Moment

$$E[(x - \mu)^2] = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx. \quad (2.42)$$

Bei ergodischen Prozessen gibt es wieder eine Form, in die die Zeit miteingeht

$$E[(x - \mu)^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x - \mu)^2 dt. \quad (2.43)$$

2.6.2 Korrelationsfunktionen und Leistungsspektren

Es wird zwischen zwei Arten von Korrelationsfunktionen unterschieden, der *Autokorrelationsfunktion* AKF und der *Kreuzkorrelationsfunktion* KKF. Die Autokorrelationsfunktion $\Phi_{xx}(\tau)$ setzt Werte einer Zufallsgröße zum Zeitpunkt t und zum Zeitpunkt $t + \tau$ in Beziehung, indem sie den zeitlichen Mittelwert von $x(t)$ und $x(t + \tau)$ bildet. Sie gibt Auskunft über die innere Verwandtschaft der Funktionswerte einer Zufallsfunktion. Mit ihr lassen sich Schwankungszeiten und Periodizitäten feststellen.

$$\Phi_{xx}(-\tau) = \Phi_{xx}(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)x(t+\tau) dt \quad (2.44)$$

Enthält eine Zufallsschwingung Periodizitäten, so weist ihre Autokorrelationsfunktion ebenfalls

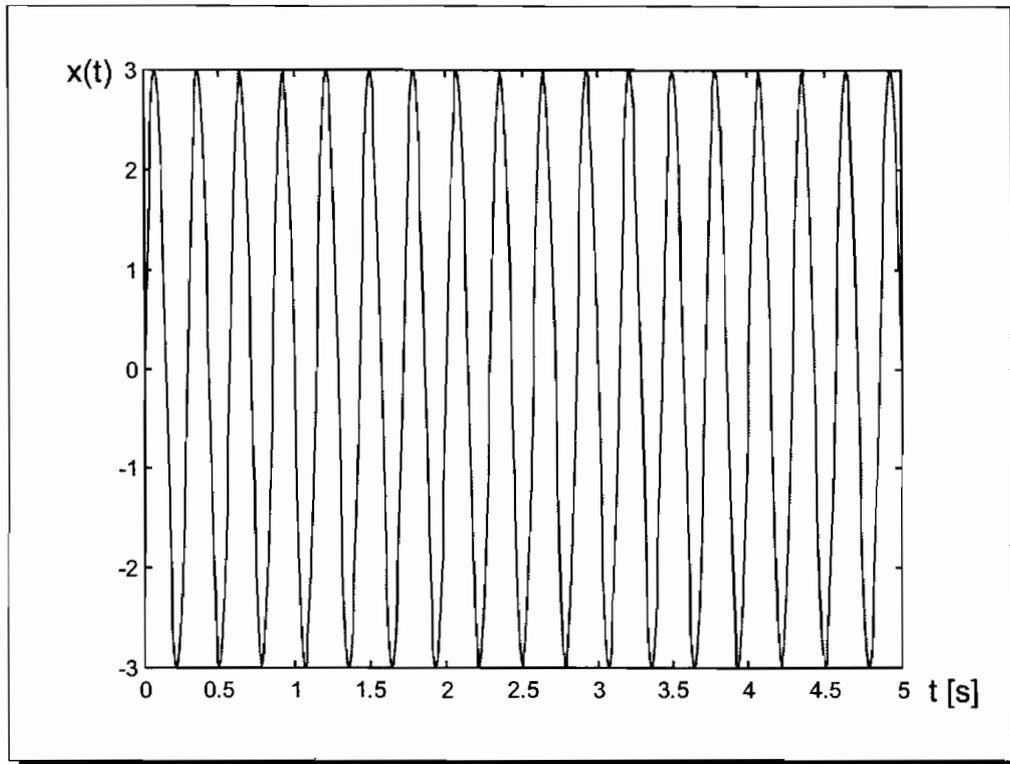


Abbildung 2.4: Zeitfunktion $\hat{a} \sin(\omega t)$

periodische Anteile auf (mit derselben Periode). Bei der numerischen Berechnung der Autokorrelationsfunktion wird $\tau = k \cdot \frac{T}{NF}$, $k = 1, 2, 3, \dots, NF$. Zur Auswertung von $\Phi_{xx}(\tau)$ wird der Ursprung von $x(t)$ in die Mitte des zu untersuchenden Zeitintervalls gelegt, sodass von $-T/2$ bis $+T/2$ integriert werden kann. Entsprechend liegt auch der Definitionsbereich von $\Phi_{xx}(\tau)$ in diesem Intervall.

- $\Phi_{xx}(\tau) = \Phi_{xx}(-\tau)$: Die Autokorrelationsfunktion ist eine gerade Funktion.

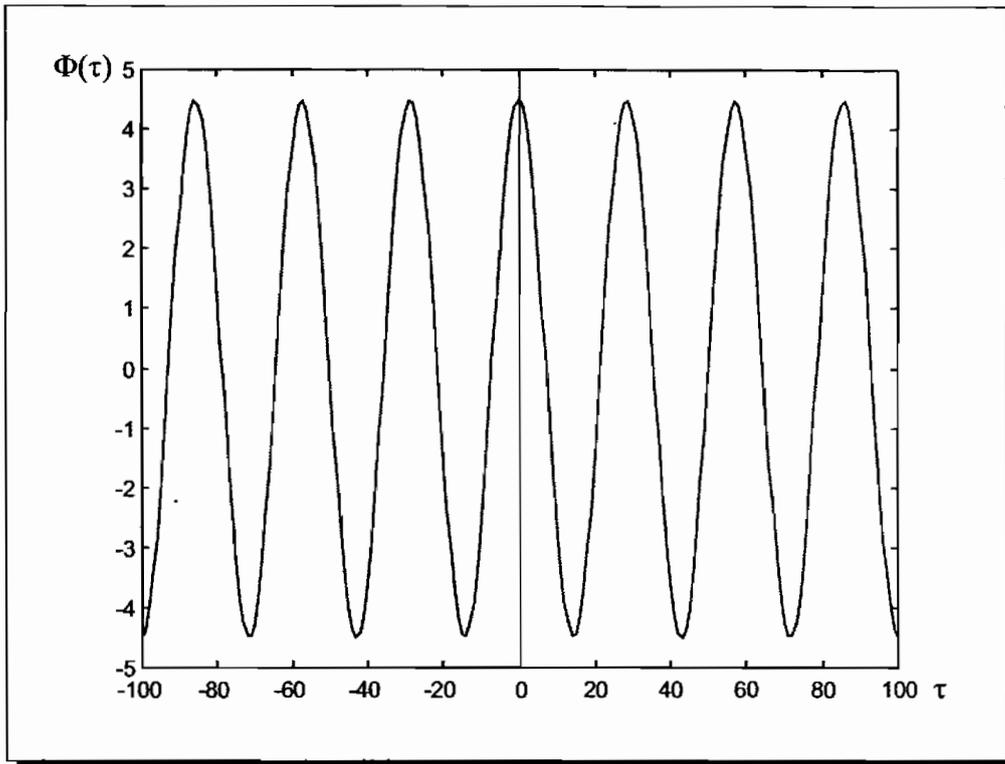


Abbildung 2.5: Autokorrelationsfunktion $\frac{a^2}{2} \cos(\omega t)$ einer Sinusfunktion

- $\Phi_{xx}(\tau \neq 0) \leq \Phi_{xx}(\tau = 0)$: Das Maximum der Autokorrelationsfunktion liegt bei $\tau = 0$; es entspricht dem quadratischen Mittelwert des Signals. Für rein stochastische Signale ohne periodische Anteile gilt sogar $|\Phi_{xx}(\tau \neq 0)| < \Phi_{xx}(\tau = 0)$
- Für $\tau \rightarrow \infty$ ergibt sich das Quadrat des linearen Mittelwertes $\Phi_{xx}(\infty) = [\overline{x(t)}]^2$
- $\Phi_{xx}(\tau)$ ist stetig monoton fallend, wenn keine periodischen Anteile vorhanden sind. Wenn der von periodischen Bestandteilen freie Vorgang überhaupt einen inneren Zusammenhang besitzt, dann muss dieser für kleine Werte von τ stärker sein als für große.
- Enthält die Zufallsfunktion Periodizitäten, so weist ihre Autokorrelationsfunktion periodische Anteile der selben Periode auf.
- Sind die Werte x_t und $x_{t+\tau}$ einander zufällig zugeordnet, so ist im Allgemeinen die Korrelation schwach.
- Der Abfall der Autokorrelationsfunktion an der Stelle $\tau = 0$ ist ein Maß für die innere Kohärenz des Signals. Dabei bedeuten große Werte der Kohärenzzeit große Erhaltungstendenz und umgekehrt.
- Aus dem Verlauf der Autokorrelation kann nicht auf den zeitlichen Signalverlauf zurückgeschlossen werden.

In gleicher Weise wie bei der Autokorrelationsfunktion, kann die innere Verwandtschaft zweier stochastischer Zeitfunktionen $x(t)$ und $y(t)$ durch die Kreuzkorrelationsfunktion ausgedrückt

werden.

$$\Phi_{xy}(\tau) = \overline{\mathbf{x}(t) \mathbf{y}(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathbf{x}(t) \mathbf{y}(t + \tau) dt \quad (2.45)$$

$$\Phi_{yx}(\tau) = \overline{\mathbf{y}(t) \mathbf{x}(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \mathbf{y}(t) \mathbf{x}(t + \tau) dt \quad (2.46)$$

Periodische Anteile in $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ tragen nur dann etwas zur Kreuzkorrelationsfunktion bei, wenn Schwingungen gleicher Frequenz enthalten sind.

- $\Phi_{xy}(\tau) = \Phi_{yx}(-\tau)$: Die Kreuzkorrelationsfunktion ist weder eine gerade noch eine ungerade Funktion.
- $\Phi_{xy}(0) = \overline{\mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t)}$: Der Nullwert der Kreuzkorrelationsfunktion ist gleich dem Produktmittelwert der Zeitfunktionen. Dies ist das einfachste gemischte Moment. Die größte statistische Verwandtschaft existiert nicht wie bei der Autokorrelationsfunktion an der Stelle $\tau = 0$, sondern bei einem Wert $\tau_{max} \neq 0$.
- $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Phi_{xy}(\tau) = \bar{\mathbf{x}}(t)\bar{\mathbf{y}}(t)$: Für $\tau \rightarrow \infty$ ergibt sich das Produkt der beiden linearen Mittelwerte wenn die beiden Signale $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ nicht mehr miteinander korreliert sind.
- $\Phi_{xy}(\tau)$ und $\Phi_{yx}(-\tau)$ verlaufen spiegelbildlich und schneiden sich bei $\tau=0$
- Aus dem Verlauf der Kreuzkorrelationsfunktion kann nicht auf den Verlauf der Signale $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ zurückgeschlossen werden.
- Im Gegensatz zur Autokorrelationsfunktion enthält die Kreuzkorrelationsfunktion noch eine Phaseninformation, mit deren Hilfe man auf entscheidende Eigenschaften eines signalverformenden linearen Systems und damit auf dessen dynamische Eigenschaften schließen kann.

Während die Korrelationsfunktionen stochastische Prozesse im Zeitbereich kennzeichnen, liefert das Leistungsspektrum $S(\omega)$ eine gleichwertige Beschreibung im Frequenzbereich. Dies wird durch das *Parseval'sche Theorem* gezeigt, welches besagt, dass die im ganzen Spektrum enthaltene Energie, gleich der gesamten in der Zeitfunktion enthaltenen Energie sein muss. Das Leistungsspektrum wurde eingeführt, da ein stochastischer Prozess wegen fehlender Konvergenz nicht durch eine Fourier-Transformation beschrieben werden kann. Gebildet wird das Leistungsspektrum indem das Intervall $-T/2 \leq t \leq +T/2$ einer gegebenen Funktion $\mathbf{x}(t)$ betrachtet und die Funktion außerhalb zu null gesetzt wird. Durch eine Grenzbetrachtung für $T \rightarrow \infty$ wird $\mathbf{x}(t)$ zunehmend der Funktion $\mathbf{x}(t + \tau)$ approximiert. Das Leistungsspektrum zeigt, welche Frequenzen in einem Zufallsprozess vertreten sind und wie stark sie sich auswirken.

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} |\mathbf{X}_T(\omega)|^2 \right] \quad (2.47)$$

Ebenso wie im Zeitbereich eine Verwandtschaft zweier stochastischer Vorgänge durch die Kreuzkorrelationsfunktion beschrieben wird, lässt sich dies im Frequenzbereich mittels des Kreuzleistungsspektrums durchführen.

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \widetilde{X}_t(\omega) Y_t(\omega) \right] \quad (2.48)$$

$$S_{yx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} \widetilde{Y}_t(\omega) X_t(\omega) \right] \quad (2.49)$$

Die Leistungsspektren besitzen folgende Eigenschaften.

- $S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega)$: Das Autoleistungsspektrum ist wie die Autokorrelationsfunktion eine gerade Funktion.
- $S_{xx}(\omega) \geq 0$ für $-\infty < \omega < \infty$: Das Autoleistungsspektrum ist reell und stets größer bzw. höchstens gleich Null
- $S_{xy}(\omega) = S_{yx}(-\omega)$ Das Kreuzleistungsspektrum $S_{xy}(\omega)$ ist gleich dem konjugiert komplexen Wert von $S_{yx}(-\omega)$
- Zu einer Kreuzkorrelationsfunktion $\Phi_{xy}(\tau)$, die weder eine gerade noch eine ungerade Funktion ist, gehört ein komplexes Kreuzleistungsspektrum $S_{xy}(\omega)$, in dem die gleiche Phaseninformation enthalten ist wie in der Kreuzkorrelation.
- Von dem Leistungsspektrum kann man nicht auf die Signalform zurückschließen.

Korrelationsfunktion und Leistungsspektrum sind in ihrer statistischen Aussage gleichwertig. Der Zusammenhang zwischen ihnen ist durch die *Wiener-Khintschin-Gleichungen* gegeben

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.50)$$

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2.51)$$

Diese statistischen Kennfunktionen lassen sich mit Hilfe der Fast-Fourier-Transformation FFT berechnen. Für die Autokorrelation wird die Zeitfunktion fouriertransformiert, quadriert und wieder rücktransformiert. Bei der Kreuzkorrelationsfunktion werden beide Zeitfunktionen transformiert und multipliziert, bevor die Produktfunktion rücktransformiert wird.

Aus der Leistungsspektralmatrix S_{xx} , lässt sich durch die Wiener-Khintschin'schen-Gleichungen die Korrelationsfunktion $\Phi_{xx}(\tau)$ bilden. Zum Zeitpunkt $\tau = 0$ entspricht diese dann dem *quadratischen Mittelwert*, im Sonderfall $\mu = 0$ sogar der Varianz

$$\sigma^2 = \Phi_{xx}(\tau = 0). \quad (2.52)$$

Man hat also durch die Spektralmethode eine Möglichkeit gefunden, die Varianz zu bestimmen und kann durch die Korrelationsfunktionen oder Leistungsspektren gleichzeitig den stochastischen Prozess auf Periodizitäten untersuchen.

Kapitel 3

Identifikation und Filtergenerierung

In diesem Kapitel zur Identifikation und Filtergenerierung, werden verschiedene Arten der Realisierung eines Zustandsraummodells oder subspace model aus Messdaten angegeben. Es soll zuerst durch die schon bei Lenzen [50] vorgestellte impulserregte Realisierung des Zustandsraummodells ein Einblick in die grundlegende Vorgehensweise des Verfahrens gewonnen werden. Diese Realisierung stellt ein vollständiges System zur Schwingungsanalyse dar.

Im Anschluss wird durch eine Abwandlung auch ein durch weißes Rauschen erregtes System berechnet, bis schließlich im letzten Abschnitt allgemeine Erregungen als Eingangsdaten dienen. Durch diese Erweiterungen soll es möglich sein, eine größere Flexibilität für reale Messungen zu bieten. In der Praxis ist es nämlich häufig sehr schwierig, Gebäude oder Maschinen geeignet zu erregen.

Die neuen Algorithmen stellen in dieser Hinsicht eine Erleichterung dar, weil sie eine Modellgenerierung ermöglichen, welche an den systemrelevanten Stellen eine bessere Darstellung erlauben, als dies mit einem FE-Modell möglich wäre. Meist können nämlich die Randbedingungen mit finiten Elementen nur unvollständig beschrieben werden. So liefert der Ansatz bessere Möglichkeiten zur Schädigungslokalisierung und zum model updating.

Gegenüber dem klassischen Verfahren der Fourier-Transformation zeichnen sich diese Algorithmen durch ihren erweiterten Funktionensatz und eine bessere Trennungsschärfe aus.

3.1 Impulserregte Realisierung

Die impulserregte Realisierung hat ihren Ursprung in der Systemtheorie. 1965 haben Ho und Kalman [34] die Möglichkeit einer Systembeschreibung angegeben, welche auf einer Zustandsraumdifferentialgleichung erster Ordnung beruht.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{C}} \mathbf{x} + (\hat{\mathbf{D}} \mathbf{u})\end{aligned}\tag{3.1}$$

Bei dieser systemtheoretischen Betrachtungsweise werden die Parameter \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} und manchmal auch \hat{D} durch die bekannten Ein- und Ausgangsgrößen so angepasst, dass diese das Systemverhalten möglichst exakt wiedergeben, ohne die inneren Systemzusammenhänge näher zu betrachten. Da das Innere des Systems nicht beschrieben wird, nennt man diese Form der Beschreibung auch *Black-Box-Formulierung*.

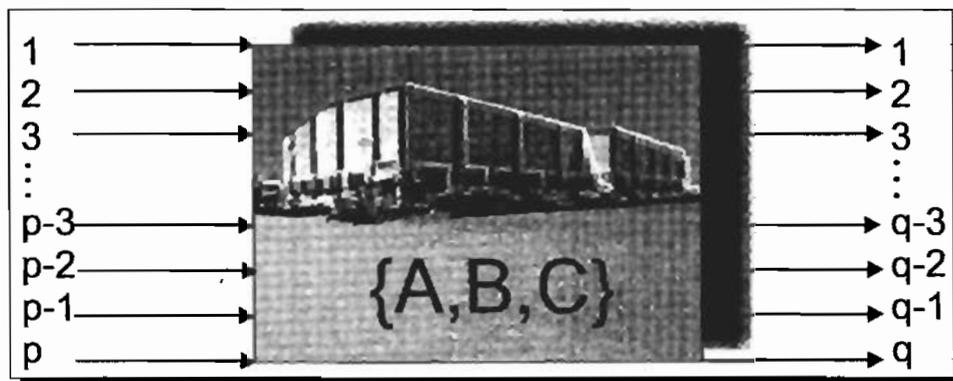


Abbildung 3.1: Ein- Ausgangsbeschreibung durch ein Black-Box-Modell

Betrachtet man diese Formulierung, wie es in der Regelungstechnik üblich ist, in einem Blockschaltbild (Abbildung 3.2), welches die einzelnen Übertragungsverhalten verdeutlicht, so ist zu erkennen, welche Matrizen auf das Ein- u und welche auf das Ausgangsverhalten y Einfluss nehmen.

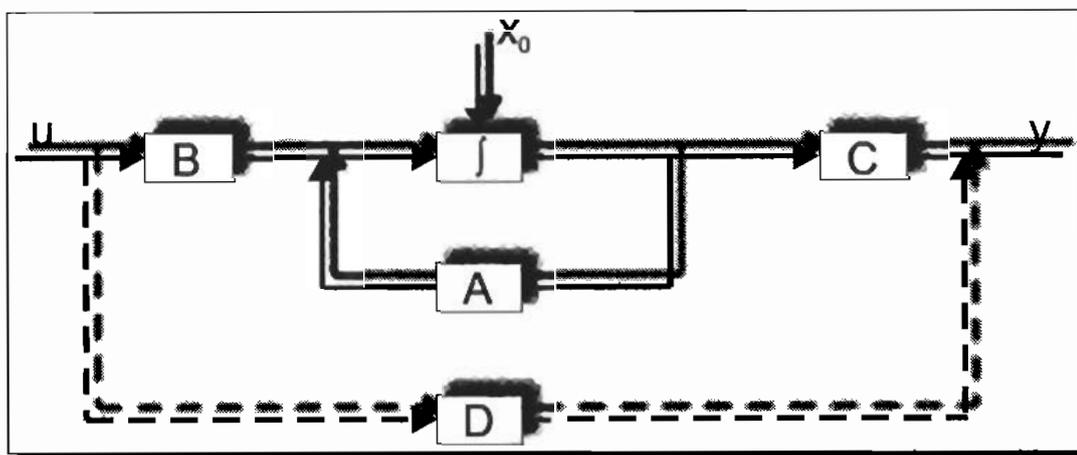


Abbildung 3.2: Blockschaltbild eines Zustandsraummodells

Die Matrix $\hat{A} \in \mathbf{K}^{n \times n}$ dient der Beschreibung der Systemdynamik, während $\hat{B} \in \mathbf{K}^{n \times p}$ die Stelle und die Intensität der Eingangsgrößen steuert. Die Matrix $\hat{C} \in \mathbf{K}^{q \times n}$ enthält Informationen über die Stelle des beschreibenden Ausgangs, die Anzahl der Ausgänge und deren Intensität. Die Matrix $\hat{D} \in \mathbf{K}^{q \times p}$ wird manchmal als Durchgriffsmatrix bezeichnet. Sie verbindet mit einer

geeigneten Normierung den Ein- und Ausgang und dient in dieser Arbeit nur der numerischen Stabilität.

Um den Bezug zu einem realen System herzustellen, wird der Zusammenhang zwischen einem physikalischen FE-Modell und den Parametern der Zustandsraumdifferentialgleichung diskutiert. Für eine dynamische Untersuchung benutzt man eine Differentialgleichung 2. Ordnung mit Massen- \mathbf{M} , Dämpfungs- \mathbf{D} und Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{u}(t). \quad (3.2)$$

Dabei sind die Zustände der einzelnen Freiheitsgrade des Systems $\ddot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{x}}$, \mathbf{x} und die Erregung $\mathbf{u}(t)$ berücksichtigt. Mit der Substitution $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ lässt sich die Gleichung 3.2 in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung umschreiben. Dieses ist gleichzeitig die Basis für die numerische Integration.

Man erhält:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} \quad (3.3)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{v} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{u}(t) \quad (3.4)$$

Fasst man diese Gleichungen in eine Matrixform zusammen, so ist die Zuordnung zwischen System-Matrizen und den physikalischen Matrizen aus der FE-Modellierung deutlich. In der Realität kann leider aus den Messwerten diese physikalische Zuordnung nicht vorgenommen werden, was noch gezeigt wird

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.5)$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{z} + \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}(t). \quad (3.6)$$

Die Matrix $\hat{\mathbf{C}}$, als Ausgangsmatrix, stellt den Zusammenhang zwischen den Zuständen \mathbf{v} , $\dot{\mathbf{v}}$ und der tatsächlichen Beobachtung \mathbf{y} dar

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}} \mathbf{x} \quad (3.7)$$

Für den folgenden Abschnitt sollen nur Abschalt- oder Impulsvorgänge als Erregung zugelassen sein

$$\mathbf{u} \begin{cases} = 0 & : \quad t > t_0 \\ \neq 0 & : \quad t \leq t_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Das Problem liegt nun darin, die Systemgrößen $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ und $\hat{\mathbf{C}}$ aus den gemessenen Ein- und Ausgangswerten zu identifizieren. Es handelt sich also um ein Identifikationsproblem. Da bei der numerischen Verarbeitung von Messdaten diese diskretisiert werden müssen,

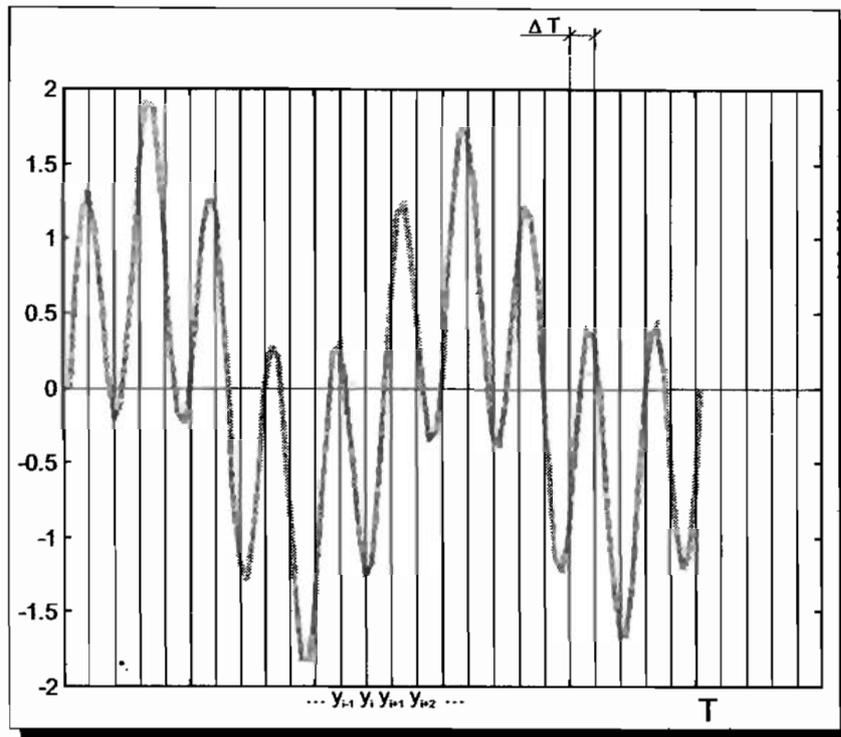


Abbildung 3.3: Diskretisierte Zeitfunktion

muss auch bei der Berechnung auf diskrete Modelle zurückgegriffen werden. Die diskrete Zustandsraumdifferentialgleichung lautet dann

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k + (\mathbf{D} \mathbf{u}_k). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Im Fall eines Einheitssprunges mit $\mathbf{u}_0 = 1$ erhält man für den zeitdiskreten Verlauf von y_i mit $i > 0$ und ohne Durchgriff $\mathbf{D} = 0$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_{n-0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{A}^0 \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^1 \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{n-0} \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

weil

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \mathbf{B} \mathbf{u}_0 && = \mathbf{B} \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{C} \mathbf{A}^0 \mathbf{B} \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{A} \mathbf{x}_0 && = \mathbf{A} \mathbf{B} \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C} \mathbf{A}^1 \mathbf{x}_0 = \mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B} \\ &\vdots \end{aligned}$$

aus der Zustandsraumdifferentialgleichung folgt.

Die zeitdiskreten Werte werden in einer *Hankelmatrix* abgelegt. Die *Hankelmatrix* zeichnet sich durch ihre besondere Struktur aus, jede Antidiagonale ist mit Matrixblöcken besetzt, welche durch den gleichen Zeitschritt entstanden sind (Gleichung 3.11) und deren Größe von den vorhandenen Ein- und Ausgangskanälen abhängt. So ist in jedem Zeitschritt auch ein Trippel von Systemparametern enthalten

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \dots \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \mathbf{M}_5 & \dots \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \mathbf{M}_5 & \mathbf{M}_6 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}^0\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^1\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^3\mathbf{B} & \dots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^1\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^3\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^4\mathbf{B} & \dots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^3\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^4\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^5\mathbf{B} & \dots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^3\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^4\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^5\mathbf{B} & \mathbf{C}\mathbf{A}^6\mathbf{B} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Durch diese besondere Struktur ist es möglich, trotz einer theoretisch unendlichen Dimension $\mathbf{H} \in \mathbf{R}^{\infty \times \infty}$ einen endlichen Rang n zu berechnen [25]. Die Matrixblöcke \mathbf{M}_i auf den Antidiagonalen sind als Markovblöcke \mathbf{M}_i bekannt und lassen sich aus der Übertragungsfunktion der Bewegungsdifferentialgleichung (Gleichung 3.12) herleiten

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{u}(t). \quad (3.12)$$

Nach der Laplace-Transformation erhält man daraus die Übertragungsfunktion $\mathbf{H}(s)$

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)}. \quad (3.13)$$

Diese lässt sich schließlich als Matrixpolynom schreiben, sodass die Form

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{M}_1}{s^1} + \frac{\mathbf{M}_2}{s^2} + \frac{\mathbf{M}_3}{s^3} + \frac{\mathbf{M}_4}{s^4} + \dots + \frac{\mathbf{M}_i}{s^i} + \dots \quad (3.14)$$

gefunden wird.

Verwendet man das analoge kontinuierliche Modellsystem

$$\mathbf{H}(s) = \hat{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \hat{\mathbf{A}})^{-1}\hat{\mathbf{B}} \quad (3.15)$$

$$= \frac{\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^0\hat{\mathbf{B}}}{s^1} + \frac{\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^1\hat{\mathbf{B}}}{s^2} + \frac{\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}}}{s^3} + \dots + \frac{\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{i-1}\hat{\mathbf{B}}}{s^i} + \dots, \quad (3.16)$$

ist es möglich, einen Koeffizientenvergleich vorzunehmen, der die Beziehung zu den Markovparametern verdeutlicht

$$\mathbf{M}_i = \frac{\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{i-1}\hat{\mathbf{B}}}{s^i}. \quad (3.17)$$

Zum Vergleich sei hier noch einmal die diskrete Form gegenübergestellt

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B}. \quad (3.18)$$

Nach Zeiger und McEwen [107] wird die *Hankelmatrix* in zwei Matrizen aufgeteilt, diese Faktorisierung war aber wegen der schlechten Kondition der Hankelmatrizen numerisch lange Zeit nicht

zuverlässig durchzuführen. Möglich wurde dies mit der Einführung der numerischen Aufbereitung der SVD. Erst dann konnte eine Zerlegung in die Steuerbarkeitsmatrix \mathbf{Q} und eine Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{\Gamma}$, ohne große Mühe durchgeführt werden

$$\mathbf{H} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{Q} \quad (3.19)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{CA}^0 \\ \mathbf{CA}^1 \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} [\mathbf{A}^0\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^1\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (3.20)$$

Den Begriffen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit kommt in der Systemtheorie große Bedeutung zu, deshalb soll ihre Definition etwas genauer erläutert werden.

Steuerbarkeit

Ein System ist vollständig steuerbar, wenn die Erregung so gewählt werden kann, dass die Antwort alle für die Aufgabenstellung notwendigen Freiheitsgrade in nicht vernachlässigbarem Maße enthält. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies für den zeitinvarianten Fall, dass man eine Matrix \mathbf{Q} finden kann, welche aus der Zustandsraumtransformation resultiert und vollen Rang besitzt. Dieser ist proportional zu den Systemfreiheitsgraden

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{A}^0\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^1\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{j-1}\mathbf{B}] \quad (3.21)$$

$$rg(\mathbf{Q}) = n. \quad (3.22)$$

Beobachtbarkeit

Vollständige Beobachtbarkeit liegt vor, wenn die wesentlichen physikalischen Vorgänge in den gemessenen Antworten enthalten sind. Das sind die Vorgänge, die ausreichen, um ein System so zu charakterisieren, dass beim Vernachlässigen der anderen Zustände der Fehler nicht zu groß wird. Auch dies lässt sich mathematisch formulieren. Vollständige Beobachtbarkeit liegt folglich vor, wenn eine Matrix $\mathbf{\Gamma}$ zu finden ist, welche ebenfalls aus der Zustandsraumtransformation abstammt und vollen Rang besitzt.

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA}^0 \\ \mathbf{CA}^1 \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$rg(\mathbf{\Gamma}) = n. \quad (3.24)$$

Man spricht von einem identifizierbaren System, wenn alle dafür notwendigen Freiheitsgrade aus den gegebenen Messwerten beobachtbar sind.

Durch Ein- und Ausgangsmessungen am realen System wird letzteres nur durch Beobachtung identifiziert. Das ist aber nur möglich, wenn alle relevanten dynamischen Teile eines Systems steuerbar und beobachtbar sind. Besitzt ein System die geforderten Eigenschaften, kann eine Minimalrealisierung durchgeführt werden, welche es ermöglicht **A**, **B** und **C** zu bestimmen. Die Minimalrealisierung ist die Form von Realisierung mit der ein System beschrieben wird, bei der der kleinstmögliche Rang zur Beschreibung ausreicht. Die Hankelmatrix erfüllt bei einer Rangbestimmung dieses Kriterium.

Ein weiteres Ziel ist es, aus der faktorisierten Hankelmatrix die Systemparameter zu bestimmen. Wir wissen, dass die Hankelmatrix eine Minimalrealisierung darstellt und dass wir zeitinvariante Signale betrachten. Weiter können wir uns eine zweite Hankelmatrix H_2 erzeugen, welche prinzipiell die gleichen Informationen beinhaltet, wie die erste Hankelmatrix H_1 , nur um einen Zeitschritt verschoben

$$H_1 = \begin{bmatrix} CA^0B & CA^1B & CA^2B & \dots \\ CA^1B & CA^2B & CA^3B & \dots \\ CA^2B & CA^3B & CA^4B & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} CA^1B & CA^2B & CA^3B & \dots \\ CA^2B & CA^3B & CA^4B & \dots \\ CA^3B & CA^4B & CA^5B & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Damit lässt sich die Shiftinvarianz dieses Systems durch

$$H_1 = \Gamma Q \quad H_2 = \Gamma A Q \quad (3.26)$$

darstellen. Die Faktorisierung berechnet man beispielsweise mit der QSVD. Obwohl dies vom Rechenaufwand eher ungünstig ist, kann eine Realisierung sehr elegant gefunden werden

$$H_1 = U \Sigma_1 X^{-1} = \tilde{U} X^{-1} \quad (3.27)$$

$$H_2 = V \Sigma_2 X^{-1} = \tilde{V} X^{-1} \quad (3.28)$$

Mit dem Wissen über die Anzahl der gemessenen Ein- und Ausgänge und dem Rang $rg(H_1) = rg(H_2) = n$ der Hankelmatrizen ist es jetzt möglich, anhand der Zerlegung von Gleichung 3.27 und Gleichung 3.28 die Systemparameter zu bestimmen. Man erhält aus der ersten Hankelmatrix

$$H_1 = \tilde{U} X^{-1} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} CA^0 \\ CA^1 \\ CA^2 \\ \vdots \end{bmatrix} [A^0B \quad A^1B \quad A^2B \quad \dots] \quad (3.29)$$

die Systemparameter **B** und **C**

$$B = X_{[1:n;1:p]}^{-1} \quad (3.30)$$

$$C = \tilde{U}_{[1;q;1:n]} \quad (3.31)$$

und mit der zweiten Hankelmatrix den Systemparameter **A**

$$H_2 = \tilde{V} X^{-1} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} CA^0 \\ CA^1 \\ CA^2 \\ \vdots \end{bmatrix} A [A^0B \quad A^1B \quad A^2B \quad \dots] \quad (3.32)$$

¹Mit dem Rang n und p Eingängen

²q Ausgänge

$$\tilde{\mathbf{V}}_{[1:q;1:n]} = \mathbf{C} \mathbf{A} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{U}}^\dagger \tilde{\mathbf{V}}.^3 \quad (3.34)$$

Damit ist eine Mögliche von unendlich vielen Realisierungen $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ gefunden worden. Es ist bei der Berechnung der Realisierung keine eindeutige Lösung möglich, weil es immer eine beliebige Zustandsraumtransformation $\mathbf{T} \in \mathbf{K}^{n \times n}$ gibt, welche das System transformiert, ohne dieses zu verändern. Eine Zustandsraumtransformation ist auch der Grund, weshalb die physikalischen Größen des FE-Modells nicht direkt aus $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ detektiert werden können.

$$\mathbf{y}_i = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{A}}^{i-1} \tilde{\mathbf{B}} \longleftrightarrow \mathbf{C} \underbrace{\mathbf{T} \mathbf{T}^{-1}}_{\mathbf{I}} \mathbf{A}^{i-1} \underbrace{\mathbf{T} \mathbf{T}^{-1}}_{\mathbf{I}} \mathbf{B} \longleftrightarrow \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{B} \quad (3.35)$$

Eine zum Umrechnen auf physikalische Größen wichtige Zustandsraumtransformation transformiert die Matrix \mathbf{A} auf Jordanform \mathbf{J} , sodass auf den Diagonalelementen von \mathbf{J} , je nach Systemeigenschaften, komplexkonjugierte Wertepaare stehen.

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{T} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{J} = \text{diag}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots, \Theta_n) \quad (3.37)$$

$$\Rightarrow \left\{ \underbrace{\mathbf{C} \mathbf{T}}_{\tilde{\mathbf{C}}}, \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}}_{\mathbf{J}}, \underbrace{\mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}}_{\tilde{\mathbf{B}}} \right\} \quad (3.38)$$

3.1.1 Trennung von Rausch- und Signalraum

Bei der oben angegebenen Realisierung mit der QSVD tritt vor allem bei verrauschten Signalen der Effekt auf, dass die Gemeinsamkeiten nur schlecht berechnet werden können. Dies hängt mit der internen Rangbestimmung des verwendeten Algorithmus zusammen. Hierzu wird nämlich die QR-Zerlegung eingesetzt, welche es bei den eingestellten Fehlerschranken und dem vorhandenem Messrauschen nicht automatisch schafft, den Rang zu bestimmen.

Abhilfe schafft hierbei die Vorschaltung der SVD. Durch sie kann eine manuelle Rangbestimmung vorgenommen werden, sie ermöglicht das Trennen von Rausch- und Signalraum. Der Signalraum ist der Raum, in dem sich die relevanten Messsignale befinden, er wird durch die betragsmäßig größeren Singulärwerte gekennzeichnet. Die betragsmäßig kleineren Singulärwerte werden dem Rauschraum zugesprochen. Eigentlich können die Singulärwerte auch null werden, nur erzeugen Rechner- und Messrauschen einen Mindestauschlag in der Größenordnung der Rechnergenauigkeit.

Durch die Rauschfilterung ist eine Verbesserung der Signalidentifikation möglich, weil man nur reine Signalinformationen bei der Weiterverarbeitung betrachtet. Die Trennung der beiden Unterräume ist auch für den im englischsprachigen Raum bekannten Namen des Verfahrens verantwortlich, man nennt es die *subspace method* aufgrund der Betrachtung der Unterräume.

Werden die Auflösungen eines Digitalrechners und eines D/A-Wandlers untersucht,

- Digitalrechner: $2^{-52} = 2.204 \cdot 10^{-16}$
- D/A Karte: $2^{-12} = 2.441 \cdot 10^{-4}$,

³† bedeutet Pseudoinverse

ist klar, warum die Singulärwertkurve niemals wirklich zu Null geht. Es ist immer ein Rechnerauschen vorhanden, welches sich durch sehr niedrige Singulärwerte äußert.

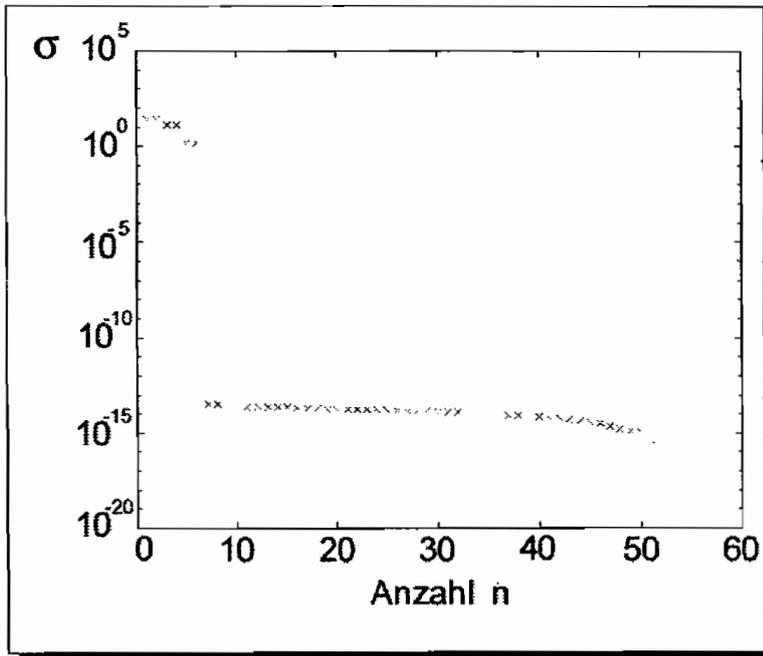


Abbildung 3.4: Singulärwertkurve eines generierten Signals

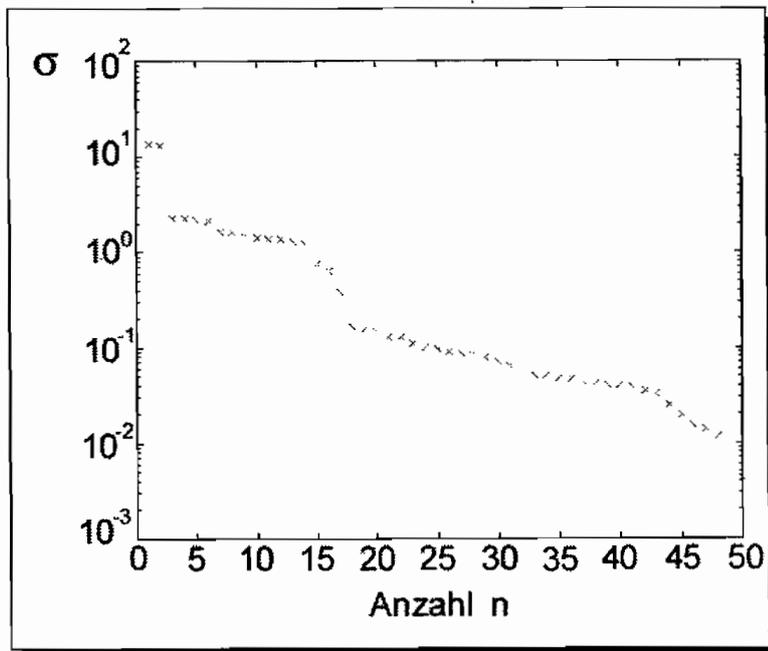


Abbildung 3.5: Singulärwertkurve eines gemessenen Signals

Für die Anwendung als Filterung des verrauschten Signals vor der QSVD bedeutet dies, dass eine

Hankelmatrix mit der SVD vorgefiltert wird. Aus der dann gefilterten Hankelmatrix gehen die beiden Hankelmatrizen für das weitere Vorgehen mit der QSVD hervor.

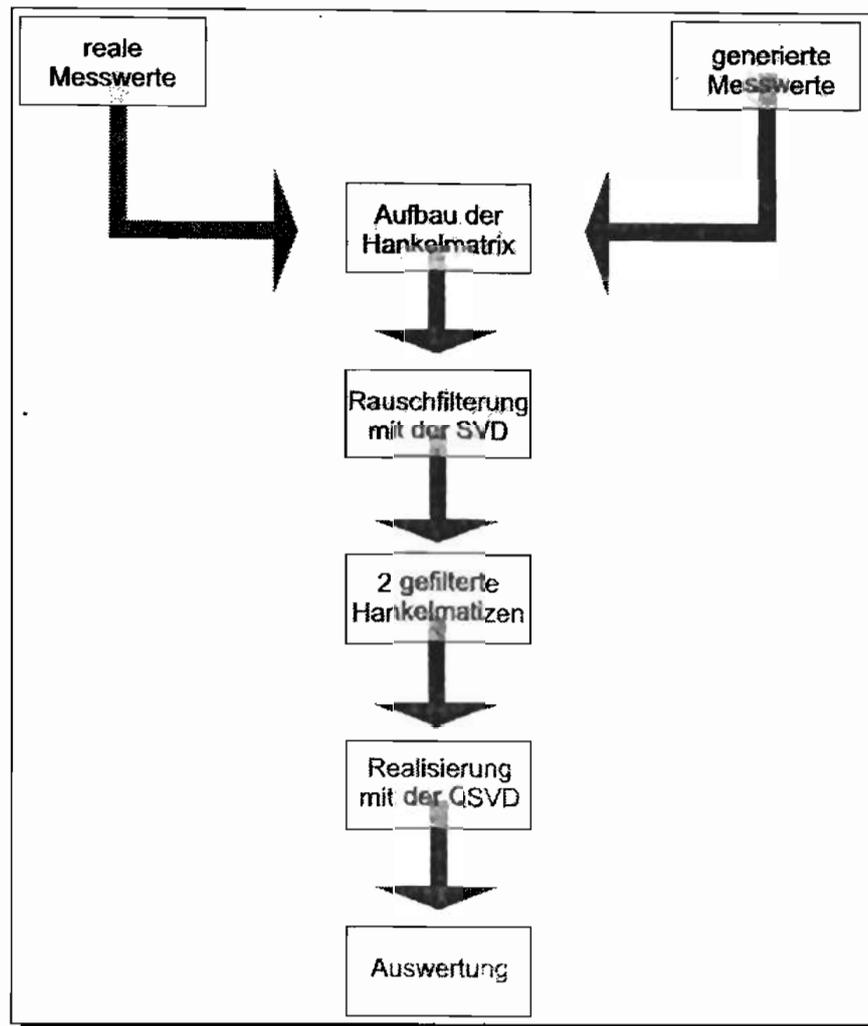


Abbildung 3.6: Ablauf der impulserregten Realisierung

3.2 Stochastische Realisierung

Eine Erweiterung der impulserregten Realisierung sollte mit der stochastischen Realisierung gefunden werden. Schon bei Goßmann [29] wird versucht, einen beliebigen stochastischen Prozess auf weißes Rauschen zurückzuführen.

Grundlage der Vorgehensweise ist wieder, wie bei der impulserregten Realisierung, eine Zustandsraumdifferentialgleichung erster Ordnung. Anstelle der Erregung \mathbf{u} bei Gleichung 3.9 wird hier der Rauschterm ξ verwendet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \xi_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Während sich die gesuchten Systemparameter bei Goßmann durch recht aufwendige Berechnungsmethoden und Lösung der Ljapunov-Gleichung finden ließen, lässt sich mit der Singulärwertzerlegung eine numerisch sinnvollere und für den Anwender einfachere Methode angeben.

Der grundlegende Ablauf soll analog zum vorherigen Kapitel erfolgen. Die Problematik eines benötigten Abschaltvorganges oder einer Impulserregung für den Aufbau der Hankelmatrix wird durch die Bildung der Leistungsspektren S_{ii} gelöst.

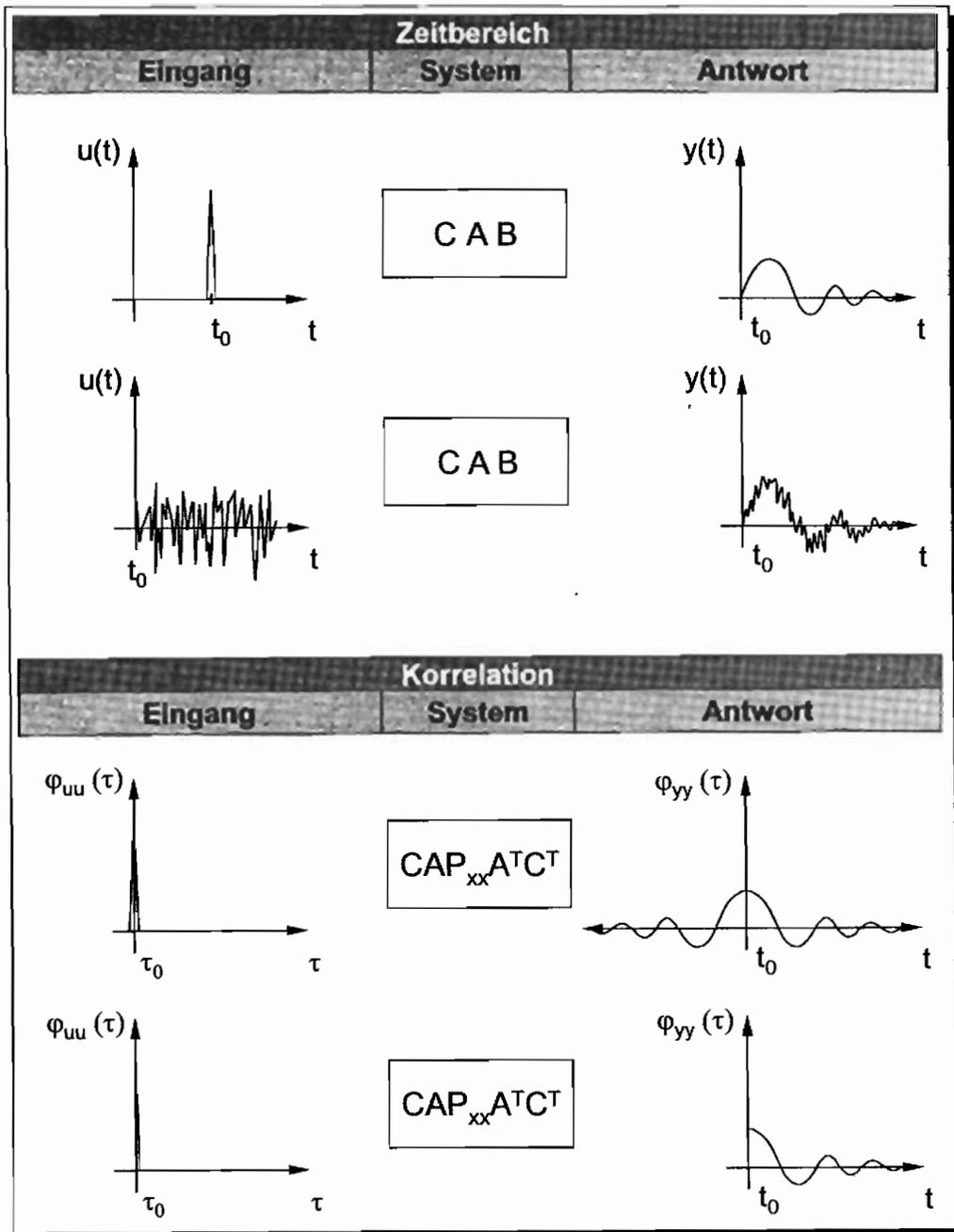


Abbildung 3.7: Analogie zur Impulserregung durch Korrelationsfunktionen

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA^0B & 0 & & & & \\ CA^1B & CA^0B & 0 & & & \\ CA^2B & CAB & CA^0B & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ CA^{n-3}B & CA^{n-4}B & CA^{n-5}B & \dots & 0 & \\ CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & CA^{n-4}B & \dots & 0 & \\ CA^{n-1}B & CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & \dots & CA^0B & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{n-3} \\ \xi_{n-2} \\ \xi_{n-1} \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Es ist zu erkennen, dass nach dem schon bekannten Schema eine Separation in die einzelnen Systemparameter durch die Multiplikation mit den Rauschtermen ξ_i und der Summenbildung der Parameter nicht möglich ist. Als Ausweg wird der zwingend benötigte Abschaltvorgang oder die Impulserregung für den Aufbau der Hankelmatrix durch die Bildung der Leistungsspektren ersetzt. Zur Erinnerung sei nochmals der Zusammenhang eines Ein-/Ausgangssystems angegeben

$$S_{yy} = H(\omega) \underbrace{S_{\xi\xi}}_{I \text{ im Fall von weißem Rauschen}} \tilde{H}^T(\omega) \quad (3.41)$$

$$= H(\omega) \tilde{H}^T(\omega).^4 \quad (3.42)$$

Weißes Rauschen stellt im Grunde einen Modellprozess dar. Es wird versucht eine möglichst breitbandige Erregung zu erzeugen, welche im Idealfall alle Frequenzen enthält. Dies ist in der Realität aber nicht möglich. Deshalb begnügt man sich mit breitbandigem Erregerrauschen. Der Name weißes Rauschen ist in Anlehnung an weißes Licht gewählt worden, welches als Idealfall auch alle Frequenzen des Lichtes enthält.

Mit der Beschreibung des Eingangsrauschens durch sein Leistungsspektrum hat man den komplizierten stochastischen Prozess auf eine Impulsfunktion zurückgeführt und somit die Realisierung von Impulserregungen auch für stochastische Prozesse bereitgestellt.

Das Theorem von Wiener und Khintchin stellt, wie im Kap. 2.6.2 gezeigt, den Zusammenhang zwischen Leistungsspektren und Korrelationsfunktionen her

$$S(\omega) \xrightarrow{\text{FT}} \Phi(\tau). \quad (3.43)$$

Mit der Motivation einen Zusammenhang zu kennen, der eine Realisierung ermöglicht wie sie uns vom Ablauf her vertraut ist, können anstelle der zeitdiskreten Werte fortan in $\Delta\tau$ diskretisierte Korrelationsfunktionen benutzt werden

$$\begin{bmatrix} \Phi(\tau_0) \\ \Phi(\tau_1) \\ \Phi(\tau_2) \\ \vdots \\ \Phi(\tau_{n-2}) \\ \Phi(\tau_{n-1}) \\ \Phi(\tau_{n-0}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA^0P_{xx}C^T \\ CA^1P_{xx}C^T \\ CA^2P_{xx}C^T \\ \vdots \\ CA^{n-2}P_{xx}C^T \\ CA^{n-1}P_{xx}C^T \\ CA^{n-0}P_{xx}C^T \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

⁴(...) bedeutet komplex konjugiert

Da es sich um eine Betrachtung der Korrelationsfunktion handelt, hat man grundsätzlich die Möglichkeit den positiven oder den negativen Ast, sowie beide Äste der Funktion zu untersuchen (siehe Abbildung 3.7). Im Fall von Korrelationsfunktionen von schwingungsfähigen Systemen ist die Funktion immer symmetrisch und enthält die für unsere Identifikation benötigten Informationen über die Dynamik auch bei der Betrachtung eines der beiden Äste. Deshalb kann die Hankelmatrix durch eine Korrelationsfunktion mit positiven τ gebildet werden

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \Phi_{yy}(\tau_0) & \Phi_{yy}(\tau_1) & \Phi_{yy}(\tau_2) & \dots \\ \Phi_{yy}(\tau_1) & \Phi_{yy}(\tau_2) & \Phi_{yy}(\tau_3) & \dots \\ \Phi_{yy}(\tau_2) & \Phi_{yy}(\tau_3) & \Phi_{yy}(\tau_4) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA}^0 \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T & \mathbf{CA}^1 \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T & \mathbf{CA}^2 \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T & \dots \\ \mathbf{CA}^1 \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T & \mathbf{CA}^2 \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T & \mathbf{CA}^3 \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T & \dots \\ \mathbf{CA}^2 \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T & \mathbf{CA}^3 \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T & \mathbf{CA}^4 \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Analog der Zerlegung für die bekannten Steuerbarkeits- und Beobachtbarkeitsmatrizen lässt sich die Hankelmatrix angeben durch das Produkt

$$\mathbf{H} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{G} \quad (3.46)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{CA}^0 \\ \mathbf{CA}^1 \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} [\mathbf{A}^0 \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^1 \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T]. \quad (3.47)$$

Die Matrix \mathbf{G} ist damit das stochastische Analogon zum \mathbf{Q} bei der deterministischen Betrachtung. Aus der Darstellung von Gleichung 3.47 wird ersichtlich, dass der Systemparameter \mathbf{B} nicht mehr explizit auftritt. Diese Größe ist nur noch durch eine zusätzliche Berechnung aus \mathbf{G} zu ermitteln.

Die Vorgehensweise gestaltet sich also in bekannter Art und Weise. Man filtert als Erstes die Hankelmatrix mit den Korrelationsfunktionen (Gleichung 3.45) durch die SVD und ermittelt dann zwei gefilterte Hankelmatrizen, die sich durch einen Shift um $\Delta\tau$ unterscheiden

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \Phi_{yy}(\tau_0) & \Phi_{yy}(\tau_1) & \Phi_{yy}(\tau_2) & \dots \\ \Phi_{yy}(\tau_1) & \Phi_{yy}(\tau_2) & \Phi_{yy}(\tau_3) & \dots \\ \Phi_{yy}(\tau_2) & \Phi_{yy}(\tau_3) & \Phi_{yy}(\tau_4) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \Phi_{yy}(\tau_1) & \Phi_{yy}(\tau_2) & \Phi_{yy}(\tau_3) & \dots \\ \Phi_{yy}(\tau_2) & \Phi_{yy}(\tau_3) & \Phi_{yy}(\tau_4) & \dots \\ \Phi_{yy}(\tau_3) & \Phi_{yy}(\tau_4) & \Phi_{yy}(\tau_5) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Anschließend ist entweder die QSVD wie im impulserregten Fall einzusetzen oder als Alternative eine Zerlegung nur mit der SVD vorzunehmen. Die Zerlegung mit der SVD hat auch den Vorteil einer Rechenzeit- und Speicherplatzersparnis von nicht zu unterschätzendem Ausmaß.

Benötigt werden wieder zwei Hankelmatrizen \mathbf{H}_1 und \mathbf{H}_2 , wobei nur die erste \mathbf{H}_1 durch die SVD in ihre Komponenten zerlegt werden muss. Im zweiten Fall genügt die theoretische Überlegung

$$\mathbf{H}_1 = \underbrace{\mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma}_1}_{\mathbf{\Gamma}_1} \underbrace{\mathbf{V}_1^T}_{\mathbf{Q}} \quad (3.49)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{Q} = \mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{V}_1^T. \quad (3.50)$$

Daraus lässt sich für Γ_2 angeben

$$\Gamma_2 = \mathbf{H}_2 \mathbf{V}_1. \quad (3.51)$$

Mit diesem Wissen ist es dann möglich, die ersten Systemparameter für die stochastische Realisierung zu bestimmen. Sie lauten:

$$\mathbf{A} = \Gamma_1^\dagger \Gamma_2 \quad (3.52)$$

$$\mathbf{C} = \Gamma_{1[1:q;1:n]} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{Q}_{[1:n;1:q]} = \mathbf{P}_{xx} \mathbf{C}^T \quad (3.54)$$

Die Berechnung des Parameters \mathbf{B} ist etwas aufwendiger. Der Zusammenhang mit den schon berechneten Größen ist durch die Ljapunov-Gleichung gegeben. Als Sonderfall der Riccati-Gleichung lautet ihre diskrete Form nach Glover [27]

$$\mathbf{P}_{xx} - \mathbf{A} \mathbf{P}_{xx} \mathbf{A}^T = \mathbf{B} \mathbf{B}^T. \quad (3.55)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist der *Steuerbarkeitsgramian*, allerdings ist die Lösung der Ljapunov-Gleichung unter Umständen recht instabil und wegen mangelnder Konvergenz numerisch nicht immer zu berechnen

$$\mathbf{P}_{xx} = \sum_{0 \leq k < \infty} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{T k}. \quad (3.56)$$

Näherungsweise ist für die Berechnung bei Aoki [6] und Van Overschee [74] eine Formel angegeben, welche aber ebenfalls nicht in allen Fällen ausreichend ist. Im zweiten Schritt ist \mathbf{B} dann durch die Gleichung 3.55 zu ermitteln.

Besser ist es, die Berechnung des letzten Systemparameters anhand der Zeitverläufe vorzunehmen. Ausgehend von einem beliebigen $\bar{\mathbf{B}}$ ist es möglich, sich mit den schon identifizierten Parametern \mathbf{A} und \mathbf{C} und dem bekannten Eingangsrauschen ein Zeitsignal zu generieren. Dieses Zeitsignal wird anschließend mit dem gemessenen Zeitsignal durch ein lineares Gleichungssystem so abgeglichen, dass man ein \mathbf{B} erhält, welches auf das System abgestimmt ist.

Die Erzeugung des fiktiven Zeitsignals $\bar{\mathbf{y}}$ erfolgt durch die diskrete Zustandsraumdifferentialgleichung mit den berechneten Parametern \mathbf{A} und \mathbf{C} sowie dem geschätzten $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{I}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^{ij} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_k^{ij} + \text{vec}(\bar{\mathbf{B}}_j) \mathbf{u}_k^i \\ \bar{\mathbf{y}}_k^{ij} &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k^{ij}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Dabei wird für jeden Eingang i (mit $i = 1, \dots, p$) das Zeitsignal $\bar{\mathbf{y}}^i = [\bar{\mathbf{y}}^{i1} \dots \bar{\mathbf{y}}^{in}]$ in einer Matrix abgelegt. Als geschätztes $\bar{\mathbf{B}}$ kann man die karthesischen Einheitsvektoren in Abhängigkeit des Zustandsraumes n der p Eingänge variieren.

$$\mathbf{y}_m = \bar{\mathbf{y}}_m^1 \mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{y}}_m^2 \mathbf{b}_2 + \dots + \bar{\mathbf{y}}_m^p \mathbf{b}_p \quad (3.58)$$

Das erhaltene Gleichungssystem wird z.B. wie im Kap. 2.3.1 mit einem leastsquares-Algorithmus gelöst und man hat wiederum, wie im impulserregten Fall, eine Möglichkeit gefunden, die Realisierung $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$ auszudrücken.

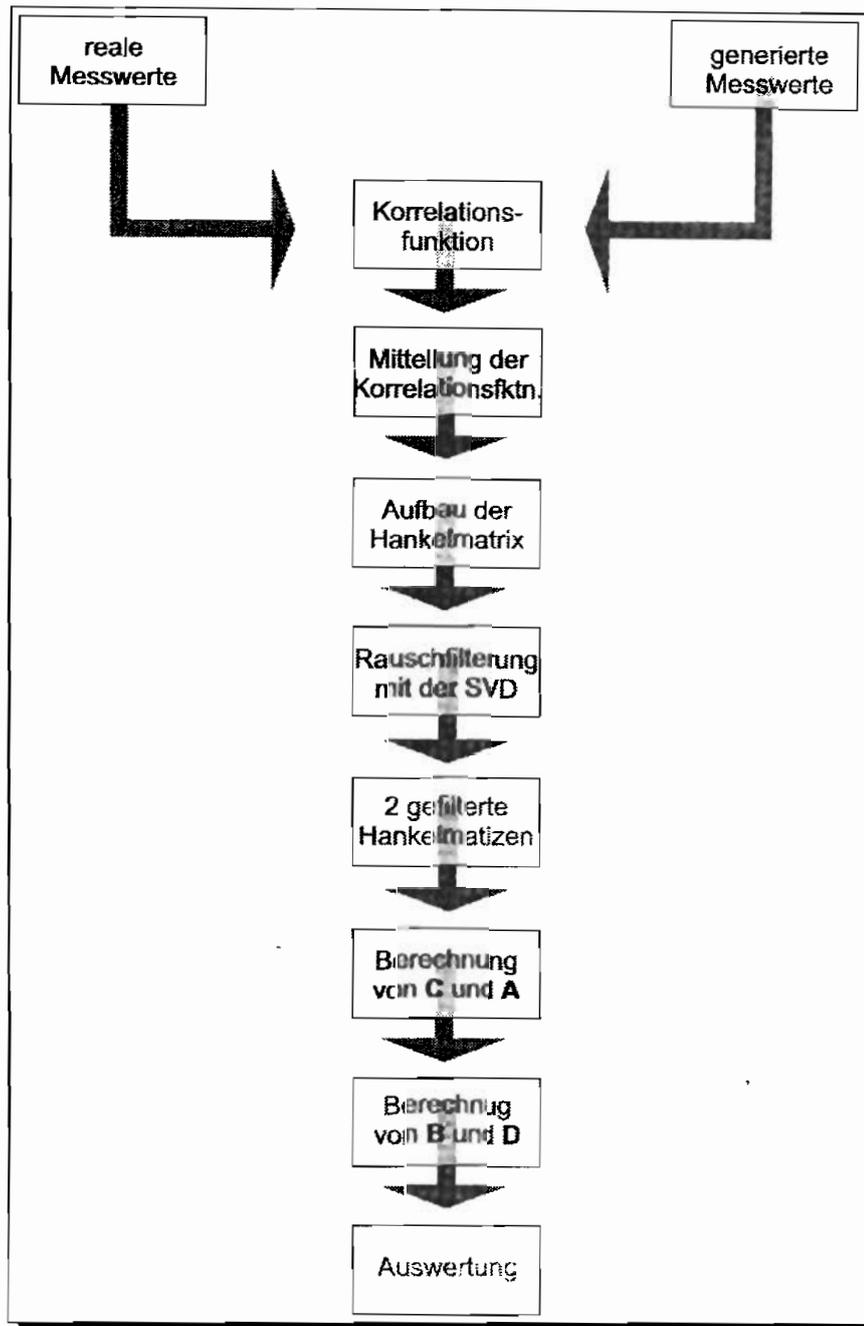


Abbildung 3.8: Ablauf der stochastischen Realisierung

3.3 Allgemeinerregte Realisierung

Nach der impulserregten und der stochastischen Realisierung sollte noch eine weitere Einschränkung aufgehoben werden. Die Betrachtung eines Systems mit den vorher beschriebenen Berechnungsmethoden lässt es meist nicht zu, auch Frequenzen in einem bestimmten Bereich oder höhere Moden als die ersten fünf Eigenformen zu erregen, da die Erregerenergie in den meisten Fällen nicht ausreicht.

Ursprünglich diene der im Folgenden beschriebene Algorithmus als Ersatz für die stochastische Realisierung durch Korrelationsfunktionen mit reinen Zeitsignalen, weil es dabei anfänglich noch Schwierigkeiten bei der Bestimmung von \mathbf{B} gab. Es wurde überlegt, ob eine Erregung mit deterministischen Signalen wie Sinus- und Sinussweepfunktionen nicht auch sinnvoll sei. Hierbei kann man das System in seinen Resonanzen anregen und so, wie bei einer modalen Regelung, mit wenig energetischem Aufwand große Systemreaktionen erzeugen. Beide Anregungsarten sind mit dem im Folgenden beschriebenen Berechnungsalgorithmus analysierbar und arbeiten sehr stabil, sodass auf die Umrechnung zu Korrelationsfunktionen gänzlich verzichtet werden kann.

Der Hauptunterschied zu den vorher beschriebenen Verfahren liegt in der Zuhilfenahme des Erregerzeitsignals. Die Durchgriffsmatrix \mathbf{D} kann verwendet werden, um eine bessere numerische Stabilität zu gewährleisten, ist aber nicht zwingend notwendig. Damit lautet die diskrete Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k + \mathbf{D} \mathbf{u}_k. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Die gemessenen Zeitverläufe werden jetzt in Hankelmatrizen abgelegt, welche rechteckig sind und nicht wie früher quadratisch, was zu einer erheblichen Speicherplatzersparnis führt. Schreibt man die diskrete Differentialgleichung für jeden Zeitschritt, nimmt die Gleichung folgende Gestalt an

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \dots & \mathbf{y}_{i+nf-1} \\ \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \dots & \mathbf{y}_{i+nf} \\ \mathbf{y}_{i+2} & \mathbf{y}_{i+3} & \dots & \mathbf{y}_{i+nf+1} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{y}_{i+s-1} & \mathbf{y}_{i+s} & \dots & \mathbf{y}_{i+s+nf-1} \\ \mathbf{y}_{i+s} & \mathbf{y}_{i+s+1} & \dots & \mathbf{y}_{i+s+nf} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{A}^0 \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{s-2} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i & \mathbf{x}_{i+1} & \mathbf{x}_{i+2} & \dots & \mathbf{x}_{i+nf-2} & \mathbf{x}_{i+nf-1} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \dots & & & \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^0 \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \dots & & \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^1 \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{A}^0 \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \dots & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{s-2} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{A}^{s-3} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{A}^{s-4} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{s-1} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{A}^{s-2} \mathbf{B} & \mathbf{C} \mathbf{A}^{s-3} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{C} \mathbf{A}^0 \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i & \mathbf{u}_{i+1} & \dots & \mathbf{u}_{i+nf-1} \\ \mathbf{u}_{i+1} & \mathbf{u}_{i+2} & \dots & \mathbf{u}_{i+nf} \\ \mathbf{u}_{i+2} & \mathbf{u}_{i+3} & \dots & \mathbf{u}_{i+nf+1} \\ \vdots & & & \\ \mathbf{u}_{i+s-1} & \mathbf{u}_{i+s} & \dots & \mathbf{u}_{i+s+nf-1} \\ \mathbf{u}_{i+s} & \mathbf{u}_{i+s+1} & \dots & \mathbf{u}_{i+s+nf} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.60}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Gamma} \mathbf{X} + \overline{\mathbf{H}} \mathbf{U}. \tag{3.61}$$

s ist ein Parameter, der Systemabhängig ist. Er wird im Vorfeld abgeschätzt und soll die Dimension der Hankelmatrix begrenzen. Als ‚Faustregel‘ gilt: $s \leq \frac{nf+1}{2(p+q)+1}$. Deshalb sollte eine gewisse Vorstellung über die erwartete Anzahl der Freiheitsgrade bestehen. Das Primärziel ist, die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathbf{\Gamma}$ aus den gemessenen Werten zu identifizieren. Dazu werden die theoretisch semiinfiniten Hankelmatrizen $\mathbf{Y} \in \mathbf{K}^{2s \times \infty}$ und $\mathbf{U} \in \mathbf{K}^{2s \times \infty}$ in bestimmter Weise angeordnet und dann mit der QR-Zerlegung faktorisiert

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}. \tag{3.62}$$

Aus Gleichung 3.62 ergibt sich der Zusammenhang zwischen den Ein- U und Ausgangszeitwerten Y und den Untermatrizen aus der QR-Zerlegung

$$\mathbf{Y} = \mathbf{R}_{21}\mathbf{Q}_1 + \mathbf{R}_{22}\mathbf{Q}_2 \quad (3.63)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}_{11}\mathbf{Q}_1. \quad (3.64)$$

Mit dem Wissen über orthogonale Komplementäräume von Kap. 2.5.1, Gleichung 3.61 und Gleichung 3.62 stellt sich der Zusammenhang für die Beobachtbarkeitsmatrix wie folgt dar

$$\mathbf{Y}\mathbf{Q}_2^T = \mathbf{R}_{21} \underbrace{\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2^T}_0 + \mathbf{R}_{22} \underbrace{\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_2^T}_\mathbf{I} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{Y}\mathbf{Q}_2^T = \underbrace{\mathbf{\Gamma}\mathbf{X}\mathbf{Q}_2^T}_\mathbf{T} + \mathbf{H}\mathbf{R}_{11} \underbrace{\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2^T}_0 \quad (3.66)$$

$$= \mathbf{\Gamma}\mathbf{T} = \mathbf{R}_{22}. \quad (3.67)$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix ist mit einer Zustandsraumtransformation T in der Untermatrix R₂₂ der QR-Zerlegung enthalten, was durch die obigen Gleichungen bewiesen wurde. Vorteilhaft bei diesem Vorgehen ist die große Reduktion der Daten. Man benötigt durch die oben angeführten Überlegungen nur den R-Teil der Faktorisierung. Somit reduziert sich dieser mit den gesuchten Informationen auf die Untermatrix R₂₂.

Die gesuchte Dimension n des Zustandsraumes zur Schätzung von A, erhält man durch den Rang von R₂₂ $n = \text{rg}(\mathbf{R}_{22})$ berechnet mit der SVD.

Die Beobachtbarkeitsmatrix Γ hat genau wie in den vorangegangenen Abschnitten die Shiftinvarianz als Eigenschaft. Dies ermöglicht den Aufbau zweier Teilmatrizen Γ₁ ⊂ Γ und Γ₂ ⊂ Γ, wobei Γ₁ = Γ₂A ist. Mit diesen beiden Matrizen berechnet sich die Realisierung von A und C mit der SVD durch

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}_2^\dagger \mathbf{\Gamma}_1 \quad (3.68)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Gamma}_{[1:q;1:n]}. \quad (3.69)$$

Die Systemparameter B und D werden über ein lineares Gleichungssystem, welches aus generierten und gemessenen Zeitsignalen besteht, geschätzt. Die Erzeugung der fiktiven Zeitsignale $\bar{\mathbf{y}}$ erfolgt durch die diskrete Zustandsraumdifferentialgleichung mit den exakten Parametern A und C, sowie dem geschätzten $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{I}^{n \times n}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^{ij} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_k^{ij} + \text{vec}(\bar{\mathbf{B}}_j) \mathbf{u}_k^i \\ \bar{\mathbf{y}}_k^{ij} &= \mathbf{C} \mathbf{x}_k^{ij}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Dabei wird für jeden Eingang i (i = 1, ..., p) das Zeitsignal $\bar{\mathbf{y}}^i = [\bar{\mathbf{y}}^{i1} \dots \bar{\mathbf{y}}^{in}]$ in einer Matrix abgelegt. Als geschätztes $\bar{\mathbf{B}}$ kann man die karthesischen Einheitsvektoren in Abhängigkeit des Zustandsraumes n und der p Eingänge variieren

$$\mathbf{y}_m = \bar{\mathbf{y}}_g^1 \mathbf{b}_1 + \bar{\mathbf{y}}_g^2 \mathbf{b}_2 + \dots + \bar{\mathbf{y}}_g^p \mathbf{b}_p + \mathbf{u}_m^1 \mathbf{d}_1 + \mathbf{u}_m^2 \mathbf{d}_2 + \dots + \mathbf{u}_m^p \mathbf{d}_p. \quad (3.71)$$

Das Gleichungssystem wird z.B. wie im Kap. 2.3.1 und Kap. 3.2 gelöst, die numerische Vorgehensweise soll jetzt aber genauer beleuchtet werden.

Formuliert man das Gleichungssystem von Gleichung 3.61 um, sodass **B** und **D** explizit auftreten

$$Y_m = \Gamma X_0 + Y_{ij} \text{col}(\mathbf{B}) + U_{ij} \text{col}(\mathbf{D}) \quad (3.72)$$

$$\begin{bmatrix} y_{m11} \\ \vdots \\ y_{m1nf} \\ \vdots \\ y_{mq1} \\ \vdots \\ y_{mqnf} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \mathbf{A}^0 \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-1} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}^{i-0} \end{bmatrix} \mathbf{X}_0 + \begin{bmatrix} y_{1111} & y_{1211} & \dots & y_{1n11} & \dots & y_{11p1} & \dots & y_{1np1} \\ y_{2111} & y_{2211} & \dots & y_{2n11} & \dots & y_{21p1} & \dots & y_{2np1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{nf111} & y_{nf211} & \dots & y_{nfn11} & \dots & y_{nf1p1} & \dots & y_{nfnp1} \\ y_{1112} & y_{1212} & \dots & y_{1n12} & \dots & y_{11p2} & \dots & y_{1np2} \\ y_{2112} & y_{2212} & \dots & y_{2n12} & \dots & y_{21p2} & \dots & y_{2np2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{nf112} & y_{nf212} & \dots & y_{nfn12} & \dots & y_{nf1p2} & \dots & y_{nfnp2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{nf11q} & y_{nf21q} & \dots & y_{nfn1q} & \dots & y_{nf1pq} & \dots & y_{nfnpq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} + \quad (3.73)$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & \dots & u_{1p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_{21} & \dots & u_{2p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_{31} & \dots & u_{3p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ u_{(nf-1)1} & \dots & u_{(nf-1)p} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_{nf1} & \dots & u_{nfp} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & u_{11} & \dots & u_{1p} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & u_{21} & \dots & u_{2p} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & u_{31} & \dots & u_{3p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & u_{(nf-1)1} & \dots & u_{(nf-1)p} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & u_{nf1} & \dots & u_{nfp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

kann das Gleichungssystem, das für jeden gesuchten Parameter linear ist, mit dem QR-Verfahren zerlegt werden. Die Indizes entsprechen dabei [Zeit, Zustandsraumkoord., Erregung, Sensor]. Aus Gründen der numerischen Stabilität ist es sinnvoll, die Zustände mit in die Gleichung zu integrieren

$$[\Gamma \quad Y_{ij} \quad U_{ij} \quad Y_m] = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4] \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ 0 & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ 0 & 0 & R_{33} & R_{34} \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Ausgeschrieben lassen sich die einzelnen Matrizen Γ , Y_{ij} , U_{ij} und Y_m den Untermatrizen der QR-Zerlegung zuordnen

$$\Gamma = Q_1 R_{11} \quad (3.76)$$

$$Y_{ij} = Q_1 R_{12} + Q_2 R_{22} \quad (3.77)$$

$$U_{ij} = Q_1 R_{13} + Q_2 R_{23} + Q_3 R_{33} \quad (3.78)$$

$$Y_m = Q_1 R_{14} + Q_2 R_{24} + Q_3 R_{34} + Q_4 R_{44}. \quad (3.79)$$

Die einzelnen Matrizen können nun in die Hauptgleichung (Gleichung 3.72) eingesetzt werden. Durch die Multiplikation mit den orthogonalen Unterräumen bekommt man eine Zuordnung für B und D

$$Y = Q_1 R_{11} X_0 + (Q_1 R_{12} + Q_2 R_{22}) col(B) + (Q_1 R_{13} + Q_2 R_{23} + Q_3 R_{33}) col(D) \quad (3.80)$$

$$Q_2^T Y = R_{22} col(B) + R_{23} col(D) = R_{24} \quad (3.81)$$

$$Q_3^T Y = R_{33} col(D) = R_{34} \quad (3.82)$$

Durch das lineare Gleichungssystem kann endgültig eine Lösung der gesuchten Parameter angegeben werden

$$\begin{bmatrix} R_{24} \\ R_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{22} & R_{23} \\ 0 & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} col(B) \\ col(D) \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

$$\begin{bmatrix} col(B) \\ col(D) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{22} & R_{23} \\ 0 & R_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{24} \\ R_{34} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

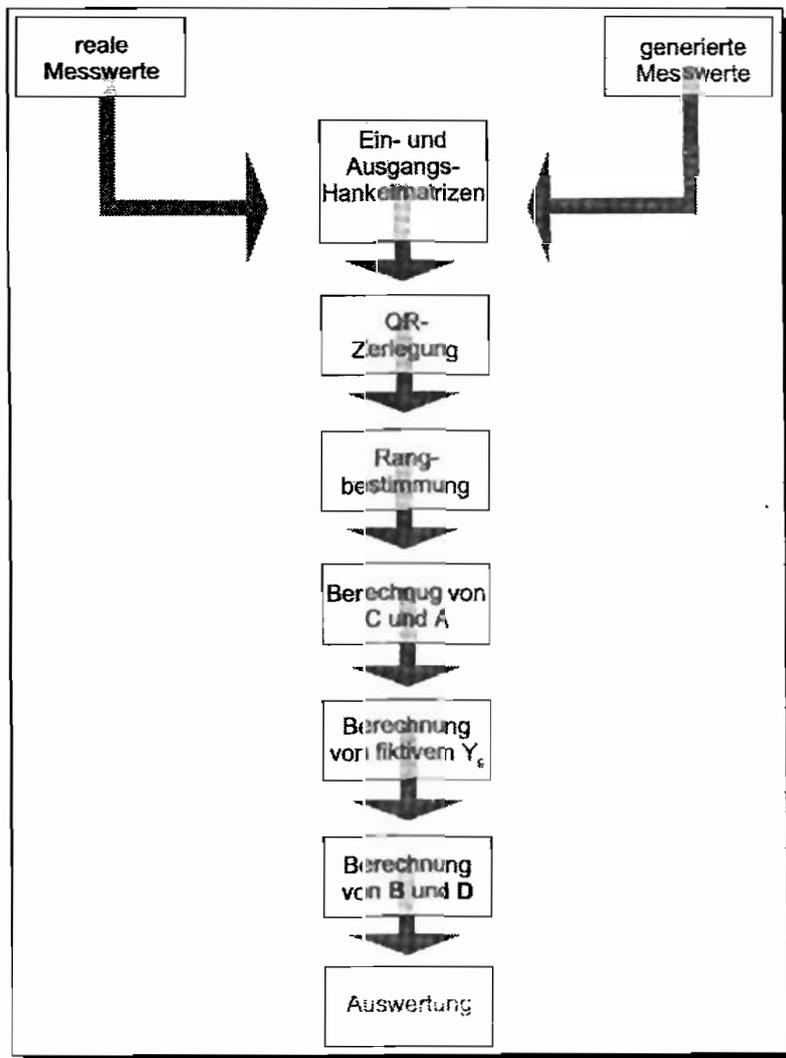


Abbildung 3.9: Ablauf der allgemeinerregten Realisierung

Kapitel 4

Vergleich der Subspace-Methoden mit der FFT

Die Effektivität der vorgestellten Algorithmen soll im folgenden Abschnitt näher betrachtet werden. Dazu wird ein Vergleich der Subspace-Methoden mit der klassischen Fast-Fourier-Transformation im Bereich der Systemidentifikation vorgenommen.

Zuerst sollen die Vor- und Nachteile der Fast-Fourier-Transformation dargestellt und die klaren Nachteile gegenüber den alternativen Algorithmen besprochen werden.

Geschlossen wird das Kapitel mit einigen Beispielen zu technisch relevanten Erregungen, welche mit der Fourieranalyse nicht untersucht werden können.

4.1 Die klassische Fourier-Transformation

Im Jahre 1965 formulierten Cooley und Tuckey die schnelle Fourier-Transformation (*Fast-Fourier-Transform FFT*) [12]. Mit der Fourier-Transformation ist es möglich, Zeitsignale zu untersuchen und sie in ihre spektralen Anteile zu zerlegen, d.h. man ermittelt die dem Signal innewohnenden Frequenzen der Sinusanteile und überträgt diese in Abhängigkeit ihrer Amplituden in ein Diagramm. Das Verfahren war bekannt, es wurde nur ein schneller und speichereffizienter Algorithmus gesucht, mit dem die Fourier-Transformation auf Computern zum Einsatz kommen konnte. Ein ähnlicher Algorithmus wie er von Cooley und Tukey entwickelt wurde, war schon viel früher von Gauß vorgeschlagen worden. Damals fehlte nur die notwendige Rechenleistung für eine breite Anwendung der Fourier-Analyse, bis der Algorithmus im Jahre 1965 wiederentdeckt wurde.

Mit der Formulierung der Fast-Fourier-Transformation war der Weg für eine effiziente numerische Behandlung geebnet und von 1970 an, wird sie im Ingenieurwesen als Analysewerkzeug eingesetzt. In der Strukturmechanik führte das zur Entwicklung der experimentellen Modalanalyse. Die große Erleichterung bei der empirischen Ermittlung der dynamischen Eigenschaften von Tragkonstruktionen ermöglichte einer Vielzahl von Forschern auf diesem Gebiet zu arbeiten.

Es ist bekannt, dass resonanzfähige Tragwerke nur in bestimmten Schwingungsformen, den Eigen-

formen, denen feste Eigenfrequenzen zugeordnet werden können, auf zeitabhängige Belastungen antworten. Vor der numerischen Bereitstellung der FFT benutzte man vorwiegend harmonische Erregungen, um mit der Aufnahme des Frequenzgangs das dynamische Verhalten einer Konstruktion zu erfassen. Es war ein mühsames und zeitaufwendiges Vorgehen. Heute gelingt es mit einem einzigen Kraftimpuls, die Gewichtsfunktionen rechnergestützt aufzunehmen und durch Anwendung der Fourier-Transformation die Eigenfrequenzen, -formen und die modalen Steifigkeiten eines Systems - im Rahmen der eingebrachten Impulsenergie - zu berechnen. Damit hat man das dynamische Verhalten in übersichtlicher Form erfasst.

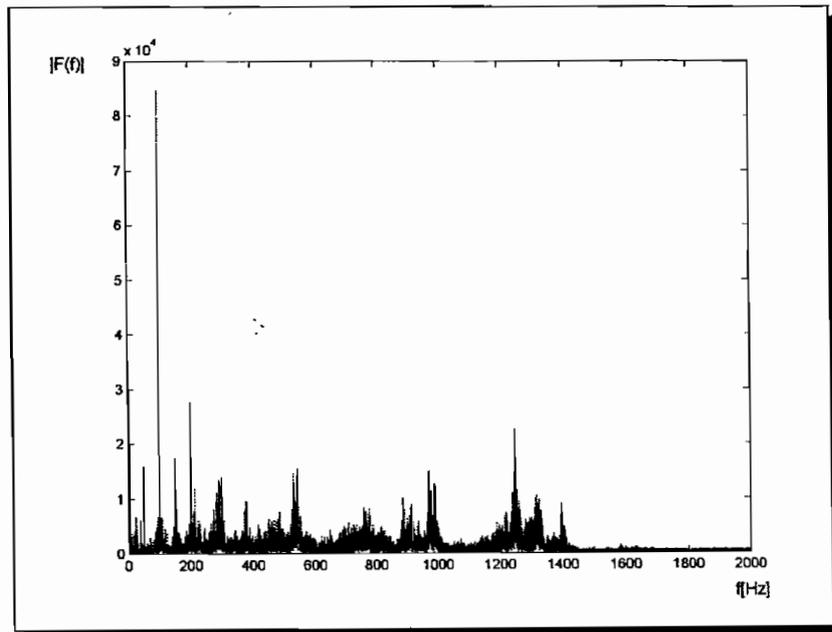


Abbildung 4.1: Fourier-Spektrum

Der analytische Ausdruck, mit dem dieses Werkzeug beschrieben wird, lautet:

$$\mathbf{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.1)$$

Die Rücktransformation der analytischen Fourier-Transformation ergibt sich zu

$$\mathbf{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4.2)$$

Beachten muss man bei diesen Ausdrücken die Konvergenz der Fourier-Transformation. Sie ist nur sichergestellt, wenn das Integral über der Zeitfunktion endlich bleibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{f}(t)| dt < \infty. \quad (4.3)$$

Die Arbeit mit den analytischen Funktionen lässt den Nutzer oft an seine Grenzen stossen, weil die integrale Formulierung nicht ganz einfach zu handhaben ist. Deshalb stellt die numerische Umsetzung einen erheblichen Komfortgewinn dar.

Numerische Werkzeuge wie die Fast-Fourier-Transformation sind Algorithmen, die eine mathematische Umsetzung für den Computer darstellen. Im Fall der Fast-Fourier-Transformation wird durch ihre geschickte Formulierung Zeit und Speicherplatz gespart. In der heutigen Zeit rücken diese Kriterien durch leistungsfähigere Rechner jedoch immer mehr in den Hintergrund. Die eigentliche Grundlage stellt aber die diskrete Fourier-Transformation dar. Bei der diskreten Fourier-Transformation betrachtet man ein endliches Intervall T der Funktion $f(t)$ und diskretisiert dieses Intervall in nf äquidistante Teilstücke.

Somit geht das Integral der analytischen Formulierung in eine endliche Summe über

$$\mathbf{F}_n = \frac{T}{nf} \sum_{k=0}^{nf-1} \mathbf{f}_k e^{-j2\pi \frac{n \cdot k}{nf}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots, (nf - 1)). \quad (4.4)$$

Die Rücktransformation lautet entsprechend

$$\mathbf{f}_k = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{nf-1} \mathbf{F}_n e^{j2\pi \frac{n \cdot k}{nf}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, (nf - 1)). \quad (4.5)$$

Es wird ein endlicher Zeitbereich betrachtet $0 \leq t \leq T$ und die numerische Integration mit der Rechteckregel vorgenommen. Durch die Betrachtung des begrenzten Zeitintervalles ist auch eine Begrenzung des Frequenzbereiches gegeben $0 \leq \omega \leq nf \cdot \frac{2\pi}{T}$. Bei der Diskretisierung der Zeitfunktion $f(t)$ ist für eine ausreichend genaue Abbildung das *Abtasttheorem von Shannon* einzuhalten. Danach ist die höchste durch die diskrete Fourier-Transformation darstellbare Frequenz gegeben durch

$$\omega_{max} = \frac{\pi \cdot nf}{T}. \quad (4.6)$$

Das Theorem besagt, dass eine Funktion nur eindeutig rekonstruiert werden kann, wenn jede im Signal enthaltene Schwingung mindestens zweimal pro Periode abgetastet wird.

Aus dieser Bedingung ergeben sich einige Schwierigkeiten, die beim Umgang mit der Fourier-Transformation, insbesondere bei der Signalidentifikation auftreten. Die Mängel die sich zeigen sind z.B. systematische Fehler welche die Arbeit erschweren oder die Tatsache, dass die Auflösung mit hohem Aufwand erkauft wird. Sie machen die Anwendung der heute als Hardware verfügbaren Fourier-Transformatoren für Laien weiterhin problematisch.

Der erste Fehler der im Zusammenhang mit dem Abtasttheorem von Shannon auftritt ist der Spiegelungsfehler. Ein Spiegelungsfehler liegt vor, wenn die mit der Fourier-Transformation maximal darstellbare Frequenz ω_{max} , von einer dem System innewohnenden Frequenz $\omega_i > \omega_{max}$, überschritten wird. Die Frequenz ω_i spiegelt sich dann an der Achse von ω_{max} in einen niedrigeren Frequenzbereich (Aliasfrequenzen) [39], siehe Abbildung 4.2. Man erhält dann eine virtuelle Frequenz, welche die Systemidentifikation verfälscht. Insbesondere bei realen gemessenen Signalen, bei denen das Frequenzspektrum nicht bekannt ist, tritt das Problem auf. Abhilfe schafft nur die

Erhöhung des Frequenzbereiches oder eine Tiefpassfilterung mit einer Eckfrequenz des Filters ω_{Eck} unterhalb von ω_{max} .

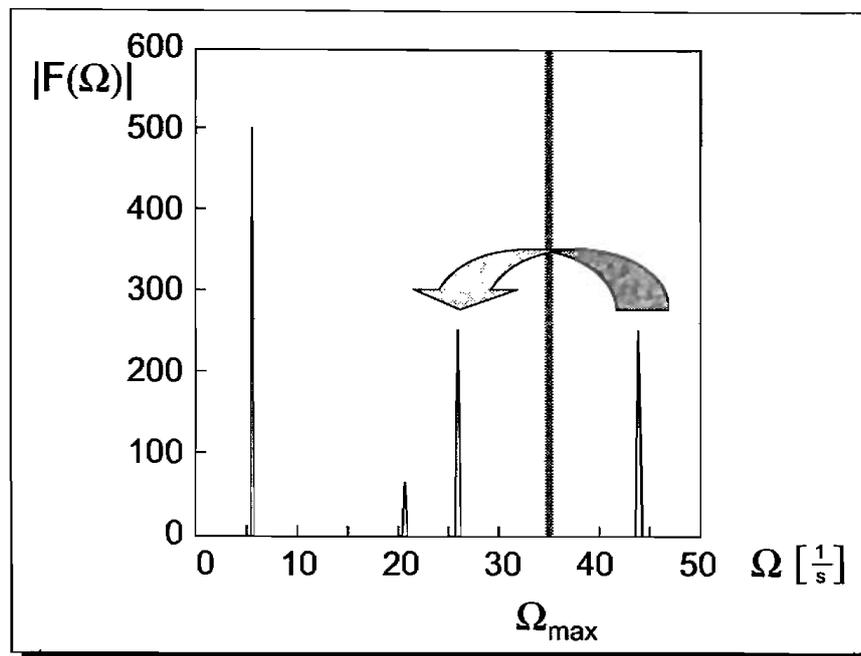


Abbildung 4.2: Spiegelungsfehler durch Verletzung des Abtasttheorems

Die Vergrößerung des Frequenzbereiches ist aber durch das starre Raster der diskreten Formulierung nicht ohne einen Nachteil zu erkaufen

$$\Delta t = \frac{T}{nf} \quad \text{und} \quad (4.7)$$

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.8)$$

Die maximal darstellbare Frequenz ist bekannt

$$\omega_{max} = \frac{\pi \cdot nf}{T}, \quad (4.9)$$

aus den Gleichungen (4.7) (4.8) ist zu erkennen, wie sich der Betrachtungszeitraum T verkleinern oder die Anzahl der Messwerte nf vergrößern muss, um die Grenzfrequenz ω_{max} zu erhöhen. Dies verursacht gleichzeitig eine Vergrößerung des benötigten Speichers oder die Auflösung wird im Frequenzbereich herabgesetzt, was meist ebenfalls nicht erwünscht ist.

Einen weiteren Fehler, der insbesondere in der Praxis nicht einfach zu handhaben ist, stellt der Abschneidefehler dar [69]. Der Abschneidefehler tritt auf, wenn eine periodische und bandbegrenzte Funktion abgetastet und derart zeitbegrenzt wird, dass nach der Zeitbegrenzung der Betrachtungszeitraum T nicht aus einem ganzzahligen Vielfachen der Periode der ursprünglichen Funktion besteht. In dem Fall können sich die kontinuierliche und die diskrete Fourier-Transformation erheblich voneinander unterscheiden. Um diesen Effekt zu verstehen, muss die Abbildung 4.3 betrachtet werden. Man beobachtet, dass das zeitbegrenzte Abtastsignal keinem ganzzahligen Vielfachen einer Periode von $f(t)$ entspricht; daher resultiert aus der Faltung der Funktion mit einem

Abschaltvorgang - wie ihn die Zeitbegrenzung darstellt - eine Überlagerung der beiden Funktionen im Frequenzbeich.

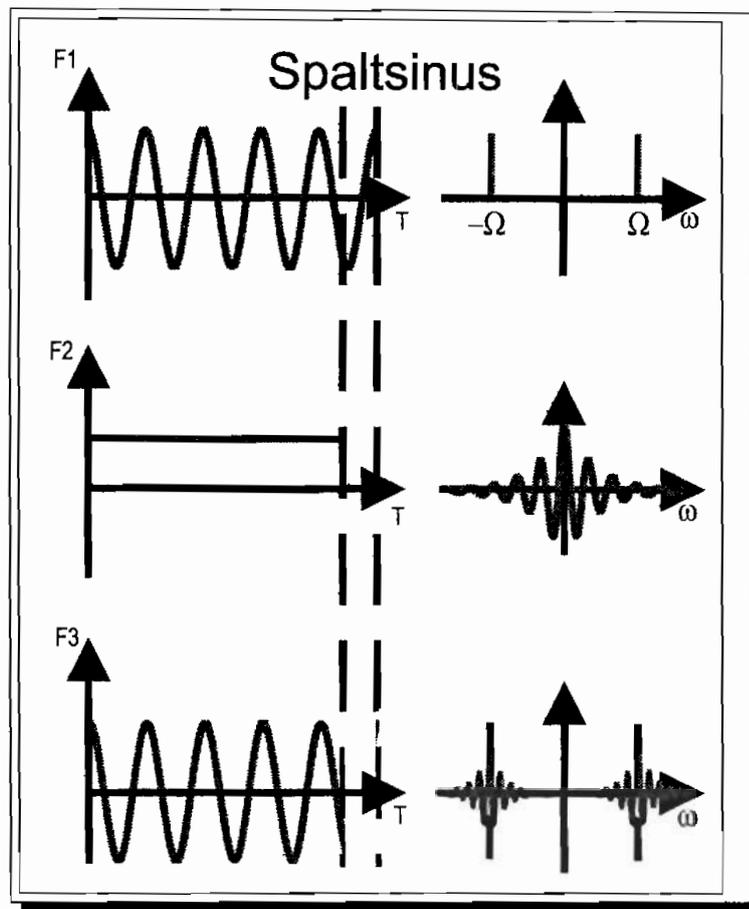


Abbildung 4.3: Abschneidefehler durch falsche Zeitfenster

Es tritt der sogenannte Spaltsinus-Effekt auf, welcher als Folgeerscheinung im Frequenzspektrum neben den eigentlichen Frequenzen Nebenmaxima erzeugt. Diese sind wieder nur virtuell vorhanden. Durch die Verbreiterung des Peaks im Frequenzbereich wird zusätzlich eine Signaldämpfung vorgetäuscht.

In der Strukturdynamik stellt die Bestimmung von Dämpfung ein wesentliches Problem dar. Die Modellierung von Dämpfung ist meist nicht ganz einfach und wird deshalb durch Experimente abgesichert. Bisher wurden die experimentellen Untersuchungen mit der Fourieranalyse ausgewertet. Dabei wird ein weiterer Nachteil des Verfahrens sichtbar. Zur mathematischen Beschreibung von Dämpfungseffekten werden Exponentialfunktionen benötigt, diese gehören aber nicht zum Funktionensatz der Fourier-Transformation, weil sie wie die Fourier-Reihe nur eine Anpassung der Signale durch Sinus- und Cosinusfunktionen bereitstellt.

Die große Beliebtheit der Fast-Fourier-Transformation und die hohe Akzeptanz machen es einem Konkurrenzverfahren nicht einfach, wenn es sich gegen die Fourier-Transformation bewähren soll. Ihre hohe industrielle Verbreitung und die Implementierung in viele moderne Analysewerkzeuge

sind als positives Merkmal für die FFT zu verstehen. Leider ist es aber auch so, dass die scheinbar einfache Handhabung häufig zu dem Trugschluss führt, ein richtiges Ergebnis, mit relativ wenig Aufwand gefunden zu haben. Doch schon Brigham [12] schliesst mit den Worten: „*Es dürfte wenig erfolgreich sein, die FFT ohne gründliche Kenntnisse ihrer Grundlagen auf Probleme wie digitale Filterung, Systemanalyse, etc., anzuwenden.*“

Brigham spricht damit gleichzeitig einen wichtigen Punkt an: Die Systemidentifikation wird immer ein Gebiet sein, für das Expertenwissen benötigt wird. Der Interpretationsspielraum in diesem Bereich ist sehr groß, deshalb werden auch in der Zukunft Fehlinterpretationen von Laien vorkommen.

4.2 Die Subspace-Methoden

Seit etwas mehr als zehn Jahren wird in der Signalanalyse mit einem ganz anderen Vorgehen experimentiert, dessen Basis in einem von Ho und Kalman um 1965 vorgeschlagenen Vorgehen zur Realisierung linearer Systeme aus Messgrößen liegt. Die damals vorgeschlagene Methodik ist in der Anwendung schwer praktikabel und hat sich nicht durchgesetzt. Erst seitdem in der linearen Algebra ein stabiler Algorithmus zur Singulärwertzerlegung zur Verfügung steht, kann erwartet werden, dass mit der sogenannten Subspace-Methode ein der Fourieranalyse vergleichbares oder sogar besseres Verfahren entwickelt werden kann. Ein Vergleich beider Verfahren zeigt die Ähnlichkeit bzw. Gleichwertigkeit des theoretischen Ansatzes.

Die Skepsis gegenüber den recht komplexen mathematischen Grundlagen und die einfache ‚black-box-Anwendung‘ der Fourieranalytoren machten es einer weiteren Verbreitung der Subspace-Methode bei Impulserregung schwer. Dabei haben die Subspace-Methoden einige Vorteile die an dieser Stelle näher diskutiert werden. Die aufgestellten Thesen werden durch einfache Beispiele bestätigt und auf strukturdynamische Probleme mit beliebiger Eingangserregung angewendet.

Der Hauptgrund, weshalb diese Art der Signalanalyse von der *Arbeitsgruppe Numerische Methoden und Simulationstechnik* der Ruhr-Uni-Bochum verwendet wurde, war die Unzufriedenheit über die Trennungsschärfe der Fourieranalyse. Das starre Raster im Frequenz- und im Zeitbereich erlauben keine optimale Analyse der Signale. Dies ist bei den Subspace-Methoden anders. Sie sind nur an das Raster im Zeitbereich und damit an das Abtasttheorem von Shannon gebunden. Deshalb kommt man im Vergleich zur FFT mit einem um den Faktor 10 kleineren Datensatz aus, bei gleichwertigen oder besseren Ergebnissen.

Ein weiterer Vorteil ist die Erweiterung des Funktionensatzes um Exponentialfunktionen. Damit können auch gedämpfte Signale durch das Verfahren beschrieben werden.

4.3 Testfunktionen

Die Testfunktionen sollen die Einschränkungen bei der Fourier-Transformation dokumentieren und die Möglichkeiten der Subspace-Methoden zeigen.

Aus diesem Grunde werden Exponential-, gedämpfte Sinus- und Cosinusfunktionen mit beiden

Verfahren verglichen. Der Einfluss von Rauschen als Signalverfälschung wird ebenfalls betrachtet. Die Trennungsschärfe, der in der Strukturdynamik neuen Algorithmen, wird bei gleichem Aufwand um ein Vielfaches höher sein. Die erzielte Aufwandsreduktion wird anhand der Simulation von zwei eng benachbarten Frequenzen gezeigt.

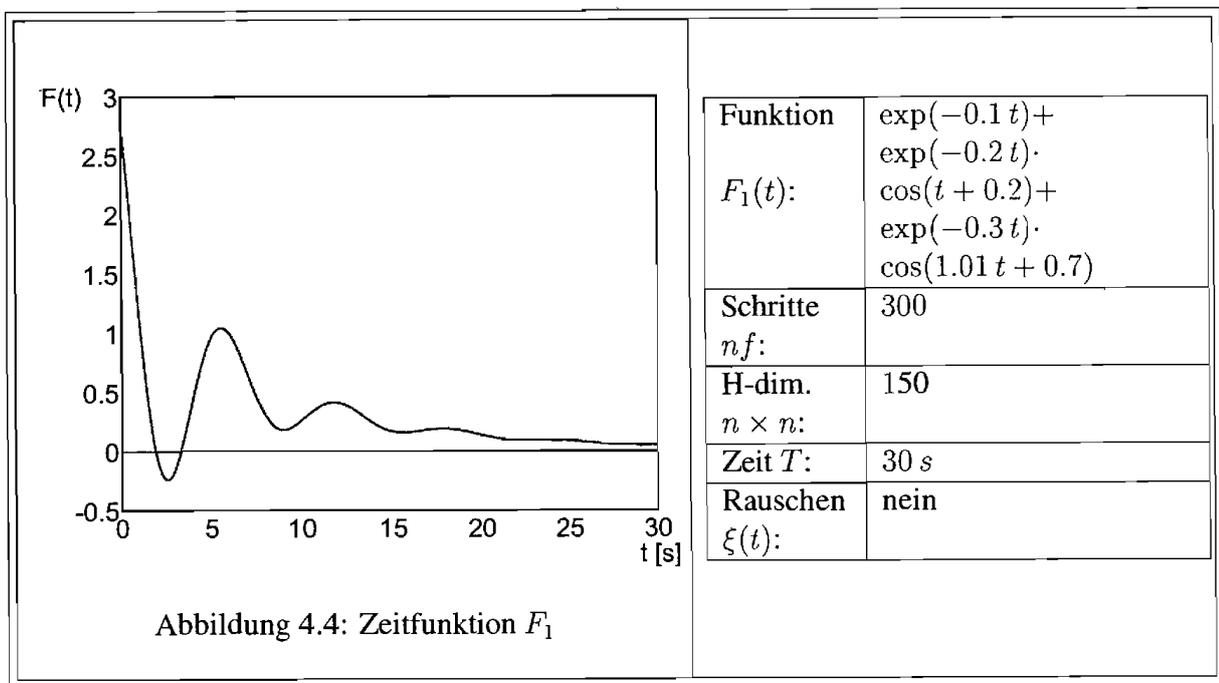
Die untersuchten Funktionen stellen zum Teil eine Auswahl von Systemen dar, welche mit der Fourier-Transformation nicht oder nur bedingt zu analysieren sind. Verglichen werden dabei die rekonstruierte Zeitfunktion mit allen relevanten Parametern und das Fourierspektrum im Frequenzbereich.

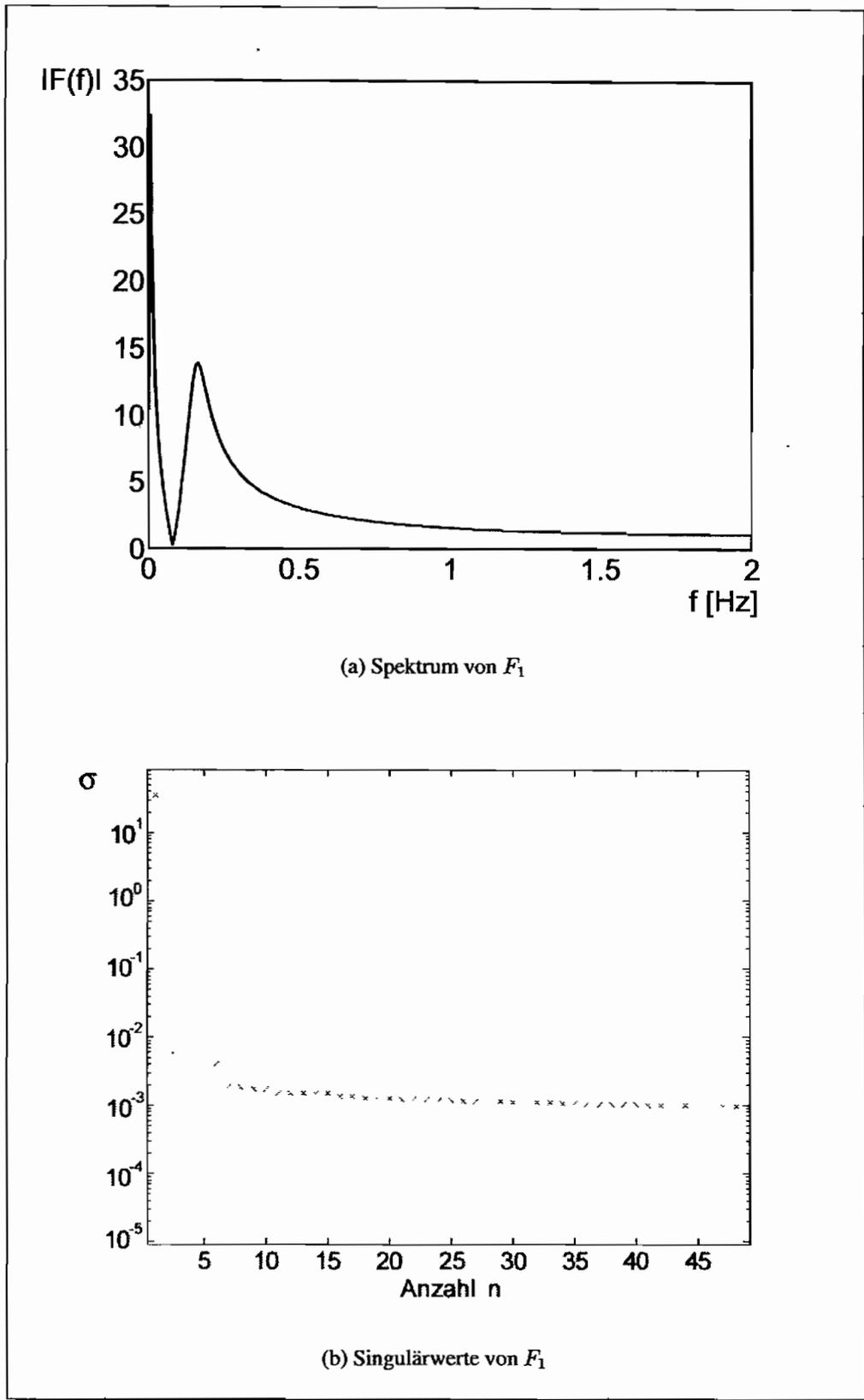
Man erkennt die mangelhaften Informationen, die durch das Spektrum bei Exponentialfunktionen geliefert werden. Ohne zusätzlichen Aufwand ist keine eindeutige Aussage zu treffen.

Hingegen ist bei der Identifikation mit der Subspace-Methode eine Übereinstimmung so gut, dass bei einer Rückrechnung das gemessene und das generierte Signal im Rahmen der Rechengenauigkeit keine Unterschiede mehr aufweist.

Ein weiterer Vorteil ist bei der Betrachtung der mit Rauschen verunreinigten Signale zu erkennen. Durch die Subspace-Methoden kann in einem Zwischenschritt, den die Verfahren implizieren, eine Trennung des Rauschens und der Signale vorgenommen werden. Diese Trennung ermöglicht es, aus dem bereinigten Signal die gesuchten Größen zu schätzen. Das erzielte Ergebnis ist dabei besser, als das Ergebnis mit der herkömmlichen Vorgehensweise.

Selbst Abschaltvorgänge lassen sich darstellen. Die hierbei gewonnenen Resultate entsprechen einer Fourier-Reihen-Entwicklung des Abschaltvorganges.



Abbildung 4.5: Funktion F_1

Bei der ersten zu betrachtenden Testfunktion ist die Fähigkeit, Sinus- und gleichzeitig Exponentialfunktionen anzupassen, zu erkennen. Im Spektrum der Fourier-Transformation sind außer einer Peakaufweitung und einem Offset bei 0 Hz keine Hinweise für eine vollständige Beschreibung des Signals zu finden. Die zweite, sehr dicht an der ersten gelegenen Frequenz ist durch Dämpfung und mangelhafte Auflösung nicht zu erkennen. Sie verschwindet in der Verbreiterung des Peaks.

Mit der Subspace-Methode ist eine vollständige Rekonstruktion, im Rahmen der Rechengenauigkeit möglich. Bei einem Vergleich der Graphen in Abbildung 4.4 ist deshalb nur eine Funktion zu erkennen.

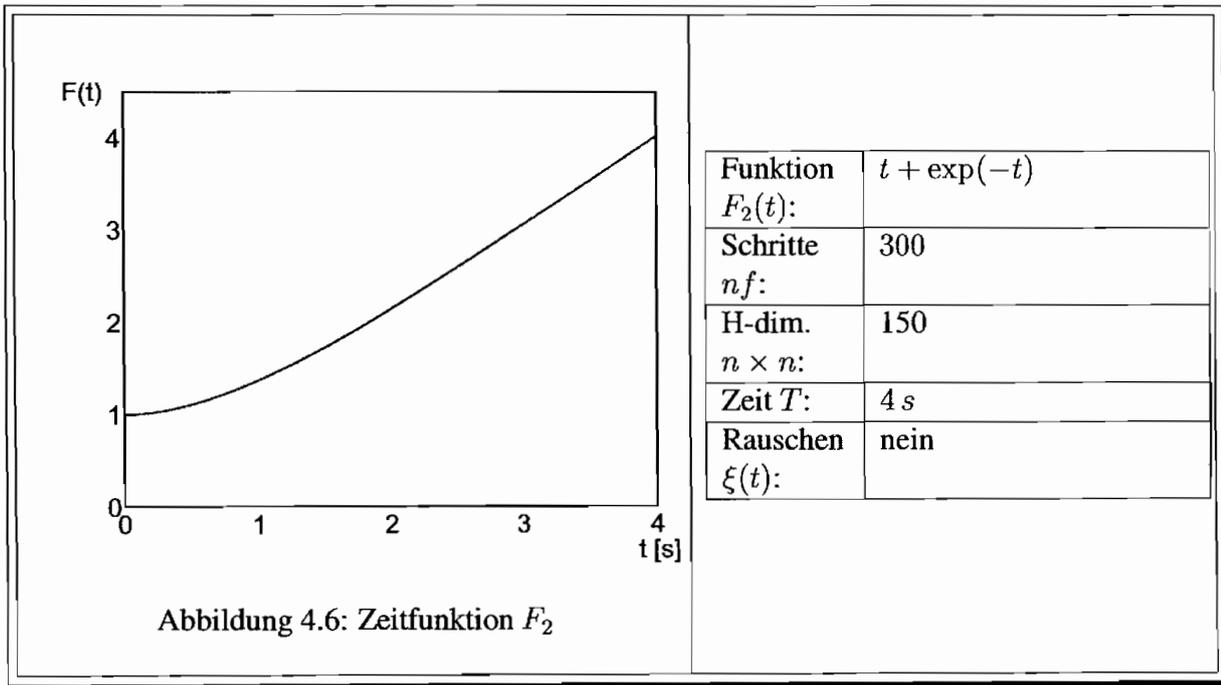
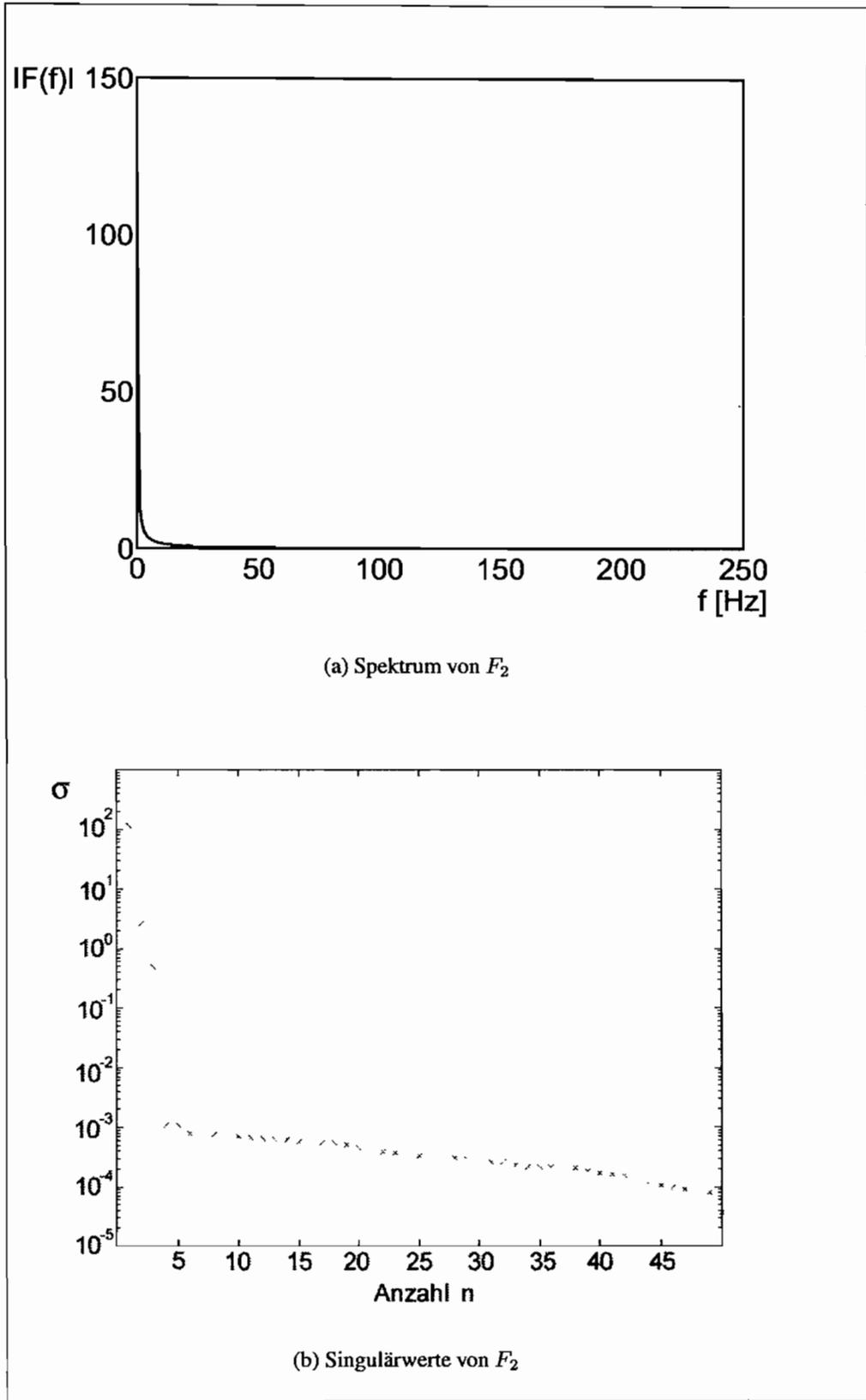


Abbildung 4.6: Zeitfunktion F_2

Die zweite Testfunktion setzt sich aus einem linearen Anteil und einer Exponentialfunktion zusammen (siehe Abbildung 4.6). Diese Funktionen sind mit der Fourier-Transformation aufgrund ihres beschränkten Funktionensatzes von Sinus- und Cosinusfunktionen nicht zu erfassen. Die untersuchte Funktion zeigt bei der Singulärwertkurve drei charakteristische Singulärwerte.

Die Begründung für diese Größe des Zustandsraumes liefert eine triviale Fourier-Reihen-Entwicklung. Wird die lineare Funktion durch eine Fourier-Reihe näherungsweise dargestellt, ist das erste Glied der Reihe eine sehr langsame Sinusfunktion. Durch die Realisierung mit der Subspace-Methode drückt sich dies durch die Identifikation eines Sinus mit der Frequenz $\omega \rightarrow 0$ aus.

Benutzt man allerdings nur zwei Singulärwerte so wird noch deutlicher, dass es sich um eine Überlagerung eines langsamen Sinus mit einer Exponentialfunktion handelt, weil nun die Sinusfunktion explizit auftritt. In diesem Fall ist die Übereinstimmung mit der Ausgangsfunktion im Rahmen der Rechengenauigkeit jedoch nicht gegeben.

Abbildung 4.7: Funktion F_2

| Frequenz f_i [Hz] | Dämpfung d_i | Amplitude a_{ij} | Phase ϕ_{ij} |
|---------------------|----------------|--------------------|-------------------|
| 0 | 0.0229 | 20.030 | 0 |
| 0 | -0.0282 | 20.031 | 3.1416 |
| 0 | -0.4916 | 2.0023 | 0 |

Tabelle 4.1: Modale, mit der Subspace-Methode identifizierte Parameter von Funktion F_2

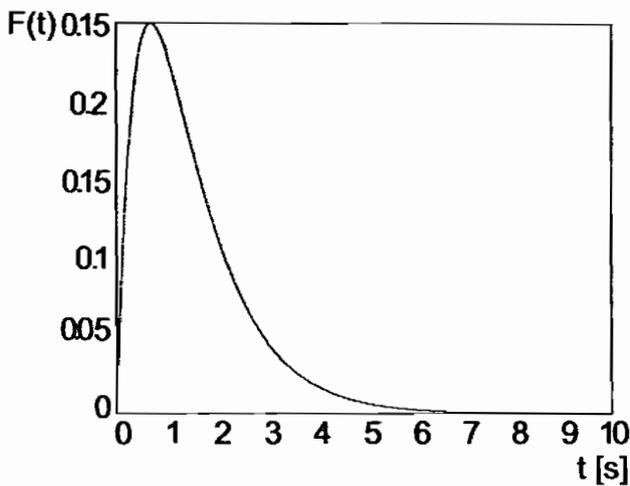


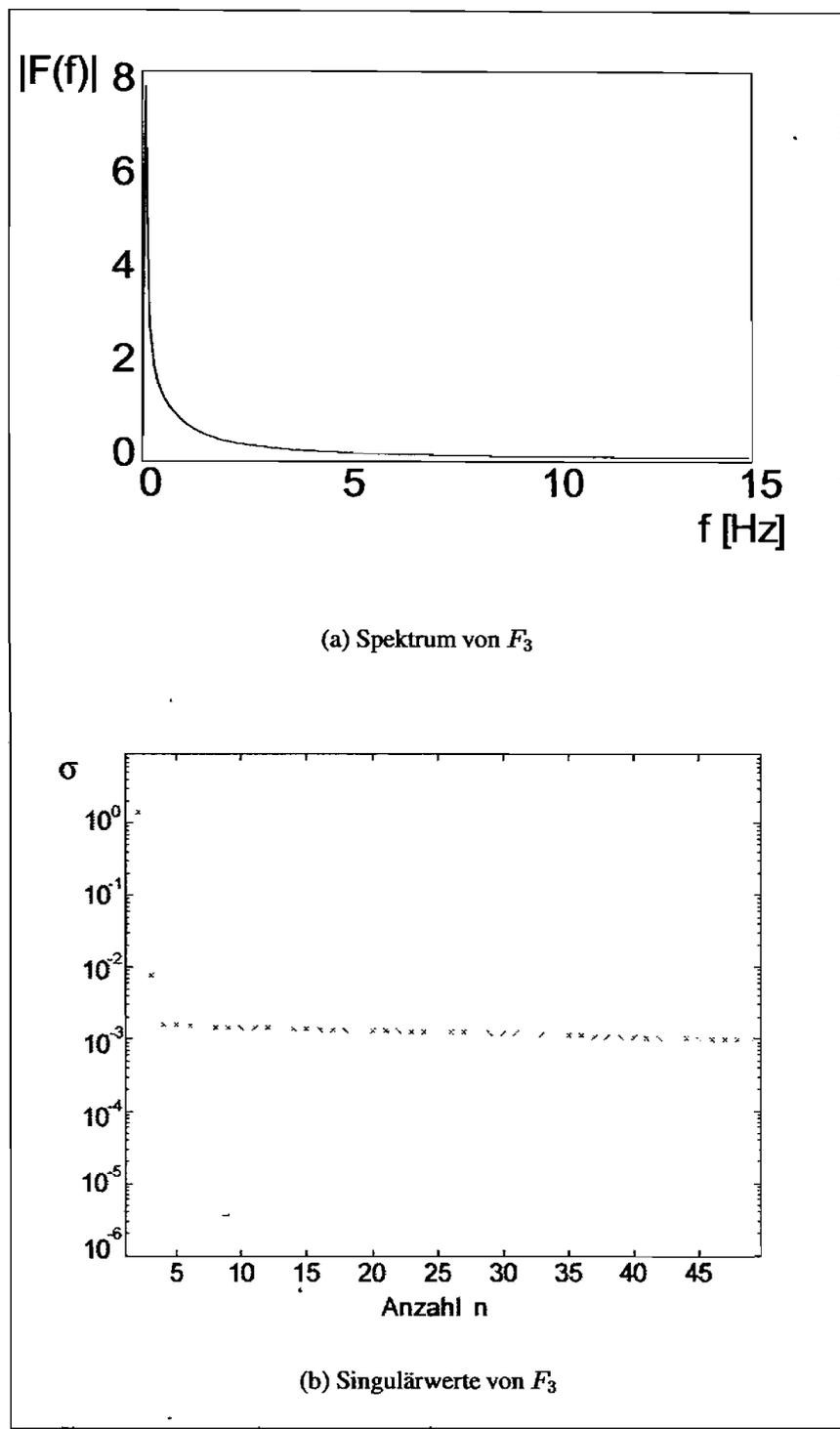
Abbildung 4.8: Zeitfunktion F_3

| | |
|-----------------------|------------------------|
| Funktion $F_3(t)$: | $\exp(-t) - \exp(-2t)$ |
| Schritte nf : | 300 |
| H-dim. $n \times n$: | 150 |
| Zeit T : | 10 s |
| Rauschen $\xi(t)$: | nein |

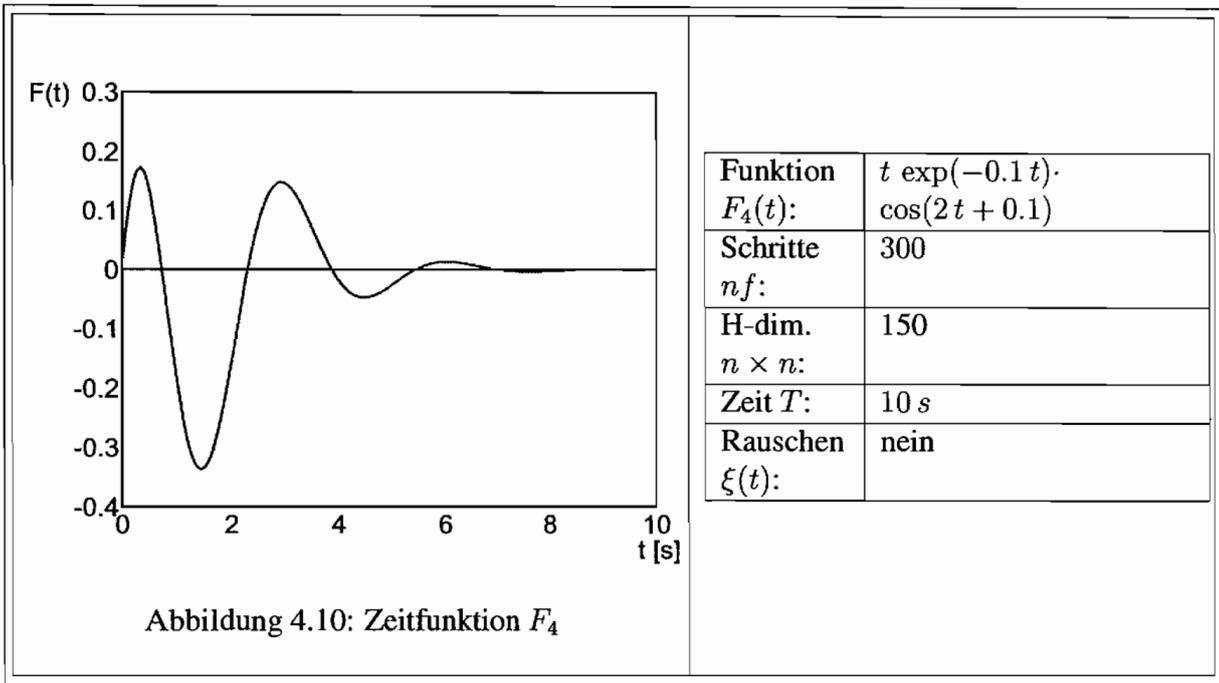
Als drittes Beispiel sind zwei sich superponierende Exponentialfunktionen gewählt worden. Man betrachte dazu die Abbildung 4.8. Die Überlagerung der beiden Funktionen ist ebenfalls nicht in dem Fourierspektrum aus Abbildung 4.9(a) zu erkennen. Außer eines Peaks, der auch als eine vorliegende sehr niedrige Frequenz gedeutet werden kann, sind keine weiteren Hinweise aus dem Diagramm zu entnehmen.

Betrachtet man die zugehörige Singulärwertkurve von Abbildung 4.9(a), die zur Rangbestimmung und zum Abschätzen der Systemfreiheitsgrade benötigt wird, so erkennt man nur zwei das System charakterisierende Singulärwerte. Diese beiden Singulärwerte entsprechen genau der Anzahl der im Signal befindlichen Exponentialfunktionen.

Für die vierte Funktion in Abbildung 4.10 wurde eine Kombination eines linearen Anteils, einer Cosinusfunktion und einer Exponentialfunktion gewählt. Auch in diesem Fall ist das Spektrum von Abbildung 4.11(a) wenig aufschlussreich. Hingegen liefert die Untersuchung mit der Subspace-Methode eine genauere Analyse der dem Signal innewohnenden Anteile.

Abbildung 4.9: Funktion F_3

Es wurden vier Systemfreiheitsgrade durch die Singulärwertkurve in Abbildung 4.11(b) gefunden, die bei einer weiteren Analyse die Signalzusammensetzung aus Sinus- und Exponentialfunktionen offenbaren. Die genaue Zusammensetzung ist aus der Tabelle 4.2 zu entnehmen.

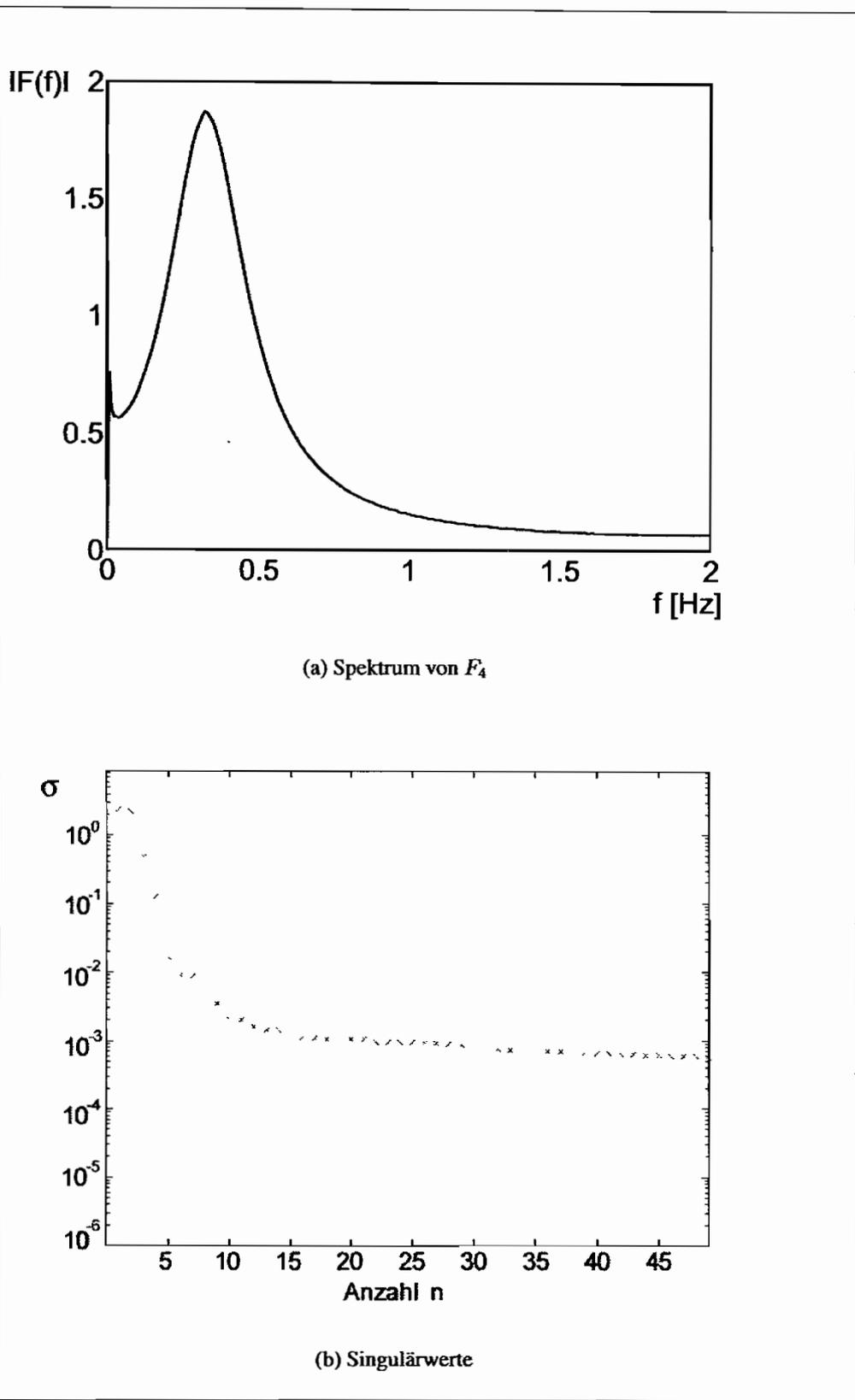


| Frequenz f_i [Hz] | Dämpfung d_i | Amplitude a_{ij} | Phase ϕ_{ij} |
|---------------------|----------------|--------------------|-------------------|
| 0.3176 | -0.4764 | 8.8432 | 0.4847 |
| -0.3176 | -0.4764 | 8.8432 | -0.4847 |
| 0.3196 | -0.5260 | 8.7261 | -2.6556 |
| -0.3196 | -0.5260 | 8.7261 | 2.6556 |

Tabelle 4.2: Modale mit der Subspace-Methode identifizierte Parameter von Funktion F_4

Das fünfte Beispiel ist in Kombination mit dem sechsten Beispiel zu sehen. Die erzeugte Funktion in Abbildung 4.12 besteht aus zwei Cosinusfunktionen, die sich nur durch eine Phasenverschiebung unterscheiden. Eine der Funktionen ist weiterhin mit einer Dämpfung versehen.

Die letzte Beispielfunktion F_6 , Abbildung 4.14, ist bis auf einen zusätzlichen Rauschterm, welcher betragsmäßig etwa 10% der Maximalamplitude ausmacht, identisch mit der Funktion F_5 . Im Fourierspektrum der beiden Abbildungen 4.13(a) und 4.15(a) ist es nicht möglich zu erkennen, dass es sich um zwei Funktionen handelt, welche sich nur durch eine Phasenverschiebung unterscheiden.

Abbildung 4.11: Funktion F_4

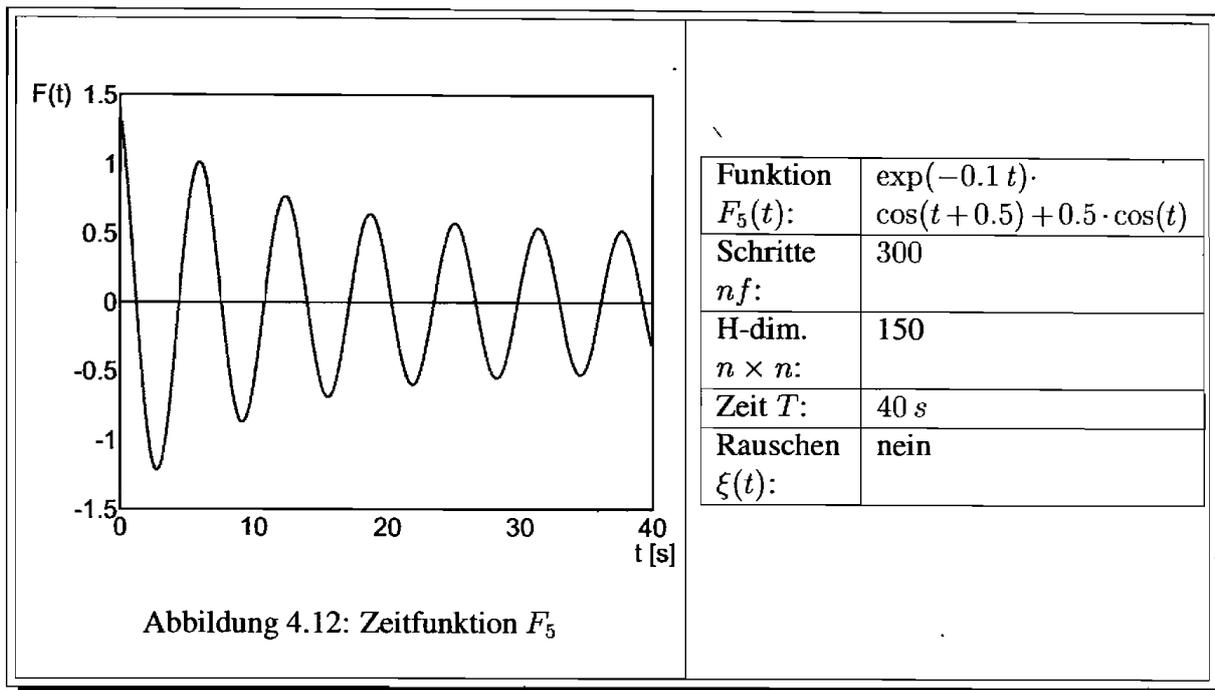


Abbildung 4.12: Zeitfunktion F_5

Hingegen ist die Trennung der beiden Funktionen durch die Subspace-Methode unproblematisch. Wie in der Tabelle 4.3 zu sehen ist, können sogar die Phasenverschiebungen erkannt werden. Auch die Dämpfungseigenschaften sind mit diesem Verfahren sicher zu finden.

Die Rückrechnung über die Systemparameter $\{A, B, C\}$ liefert noch bessere Ergebnisse, weil dabei kein Unterschied zur Ausgangsfunktion zu erkennen ist.

Untersucht man die verrauschte Funktion mit der Spektral-Methode, ist diese im Vergleich zum unverrauschten Signal (Abbildung 4.13(a)) auch im Spektralbereich mit einem Rauschen überlagert. Durch dieses Rauschen scheint es so, als ob noch wesentlich mehr Frequenzen in dem Signal enthalten sind.

Die Trennung der beiden Cosinusfunktionen ist aber auch in diesem Fall nicht möglich. Mit der Subspace-Methode kann bei verrauschten Signalen in den meisten Fällen ebenfalls ein besseres Ergebnis erzielt werden, als mit der alternativen Methode. Nur durch das Rauschen wird der Phasenunterschied stark verdeckt. In Abbildung 4.15(b) ist im Gegensatz zur Abbildung 4.13(b) eine deutliche Erhöhung des Rauschraumes zu finden, sodass das zweite Cosinus-Signal im Rauschraum untergeht.

| Frequenz f_i [Hz] | Dämpfung d_i | Amplitude a_{ij} | Phase ϕ_{ij} |
|---------------------|----------------|--------------------|-------------------|
| 0.1592 | 0 | 0.5003 | 0.1340 |
| -0.1592 | 0 | 0.5003 | -0.1340 |
| 0.1592 | -0.05 | 0.9863 | 0.6332 |
| -0.1592 | -0.05 | 0.9863 | -0.6332 |

Tabelle 4.3: Modale, mit der Subspace-Methode identifizierte Parameter von Funktion F_5

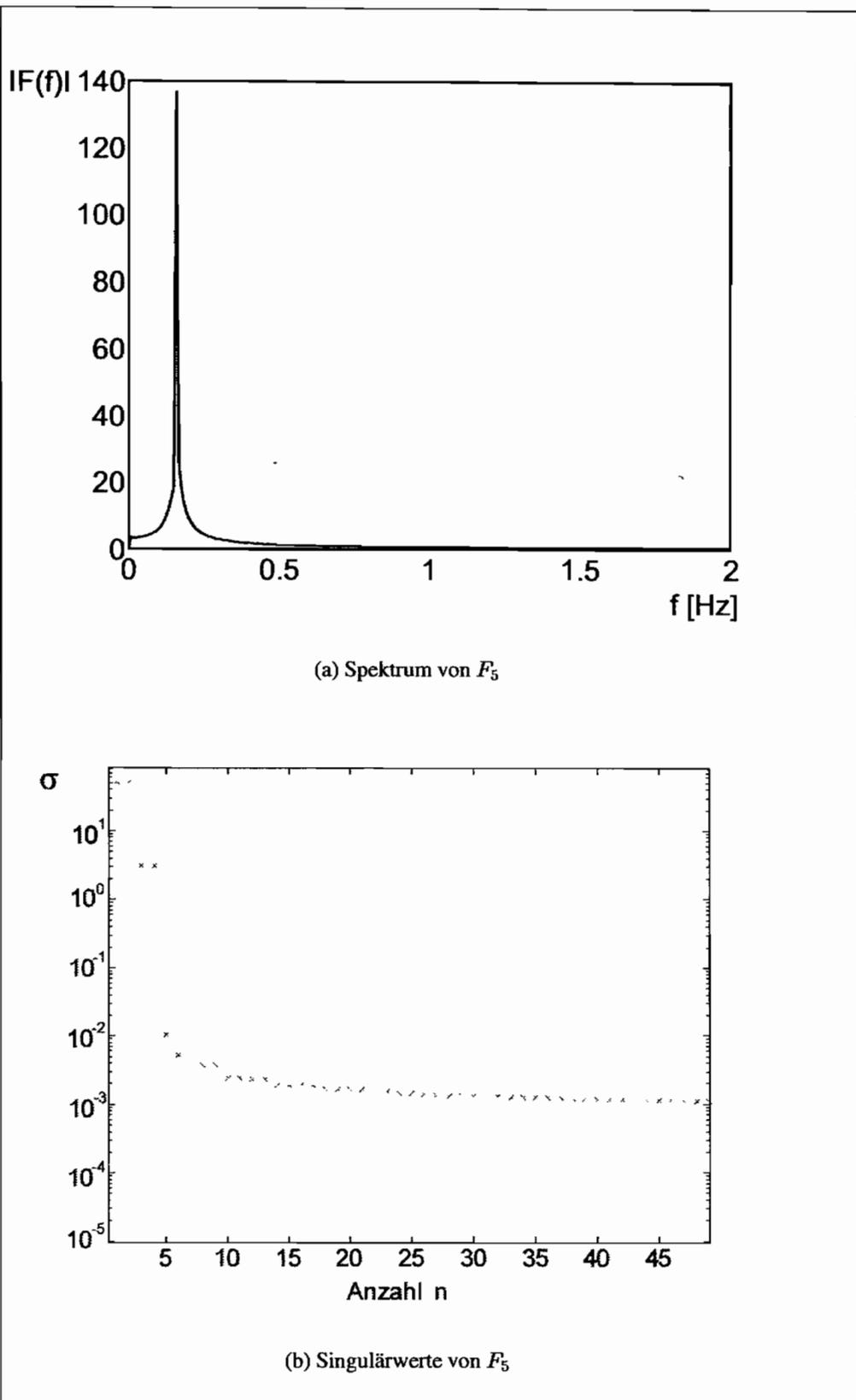
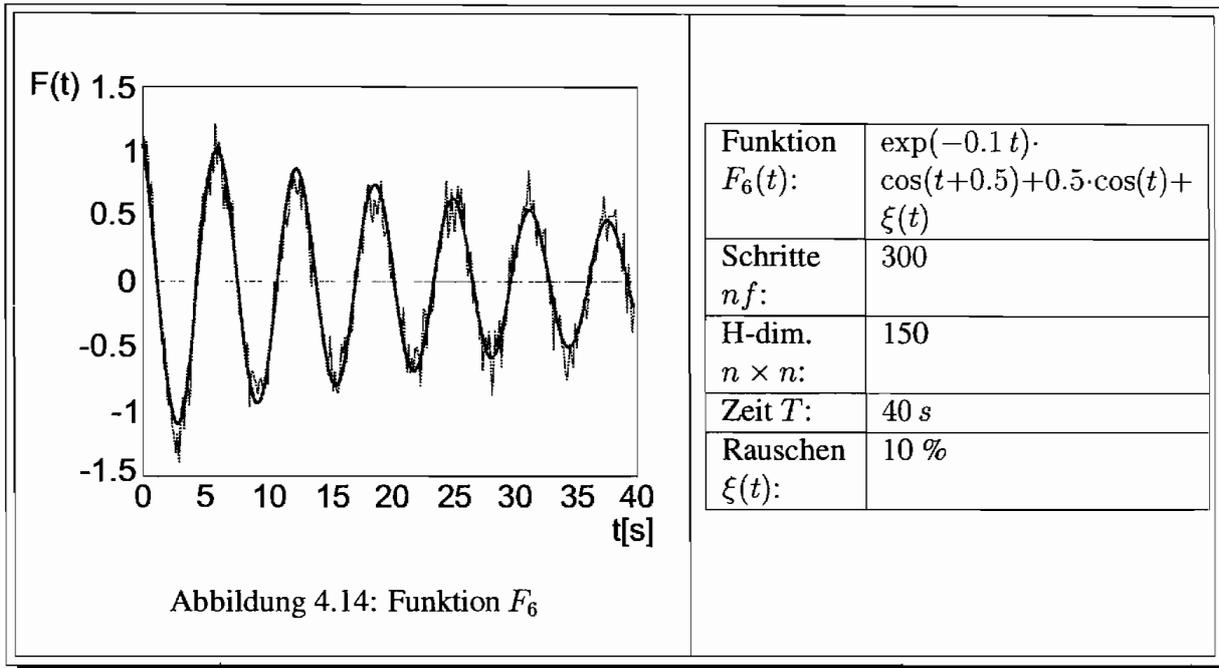


Abbildung 4.13: Funktion F_5



In den beiden Tabellen 4.4 und 4.5 sind die Unterschiede einer falschen oder zu hohen Anzahl der Singulärwerte bei der Identifikation der Signale zu sehen.

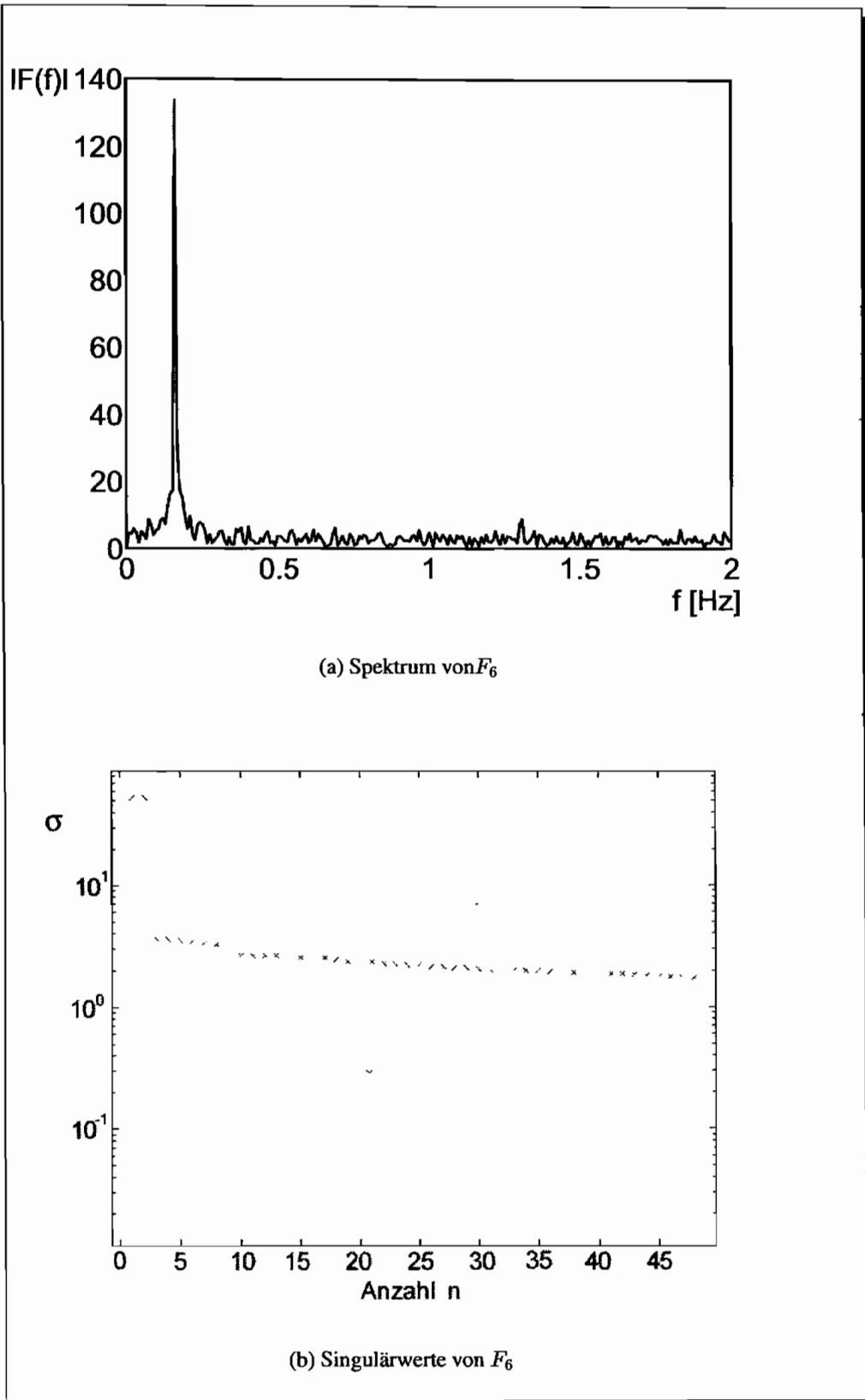
| Frequenz f_i [Hz] | Dämpfung d_i | Amplitude a_{ij} | Phase ϕ_{ij} |
|---------------------|----------------|--------------------|-------------------|
| 0.1575 | -0.0121 | 1.1703 | 0.4586 |
| -0.1575 | -0.0121 | 1.1703 | -0.4586 |

Tabelle 4.4: Parameter der Funktion F_6 mit $n = 2$

Wenn man die durch die Singulärwertkurve mit zwei Systemparametern gefilterte Funktion zurückrechnet, erkennt man in Abbildung 4.14 an dem gestrichelten ‚glatten‘ Signal die reine Cosinusfunktion ohne jegliche Rauschterme.

| Frequenz f_i [Hz] | Dämpfung d_i | Amplitude a_{ij} | Phase ϕ_{ij} |
|---------------------|----------------|--------------------|-------------------|
| 1.2908 | -0.0007 | 0.0534 | -2.6403 |
| 1.2908 | -0.0007 | 0.0534 | 2.6403 |
| 1.0239 | 0.0004 | 0.0269 | -1.2215 |
| -1.0239 | 0.0004 | 0.0269 | 1.2215 |
| 0.1581 | -0.0070 | 0.8970 | 0.3384 |
| -0.1581 | -0.0070 | 0.8970 | -0.3384 |
| 0.1712 | -0.0799 | 0.4917 | 0.5451 |
| -0.1712 | -0.0799 | 0.4917 | -0.5451 |

Tabelle 4.5: Parameter der Funktion F_6 mit $n = 8$

Abbildung 4.15: Funktion F_6

4.4 Strukturanalyse mit Erregung

Der große Vorteil der Subspace-Methoden ist die Möglichkeit, mit beliebigen Erregungszuständen ein System zu identifizieren. Man kann verschiedene Eingangssignale nutzen und ist nicht nur auf Impuls- oder Abschaltvorgänge angewiesen, was in der Praxis an großen Objekten einen erheblichen Mehraufwand bedeuten würde. Umgebungserregung oder die gezielte Anwendung der Erregung des Objektes in seinen Eigenfrequenzen machen es möglich, deutlich mehr Energie in die Systeme zu bringen und so eine verbesserte Signalgüte zu erzielen.

Diese Art der Identifikation ist mit den herkömmlichen Methoden nicht durchführbar, weil nicht nur eine Aussage über das System sondern auch über die Erregung gemacht wird. Manchmal geht dabei die gesuchte Information des untersuchten Systems vollkommen verloren.

Bei den Subspace-Methoden hat man den Vorteil, dass der Eingang in das Identifikationsverfahren einbezogen wird und so eine bessere Berücksichtigung findet. Man konzentriert sich auf das eigentliche System und nicht auf die zu beobachtende Systemreaktion!

Als Erregungsbeispiele wurden Rausch- und Sinussweepfunktionen benutzt, wobei letztere sich als besonders geeignet erwiesen haben. Bei der Erregung mit Sweepfunktionen in einem ausgewählten Frequenzbereich ist immer eine Anregung im Bereich der Eigenfrequenzen möglich. In dem Moment, indem ein Sweep eine Resonanzstelle durchläuft, ist die Systemreaktion deutlich größer als bei einem Ausschwingvorgang, weil das System auf die eingebrachte Energie besser reagiert. Durch geschickte Wahl der Zeit, die man dem System lässt um sich auf seine Erregung einzustellen (Einschwingzeit), kann der Aufwand der Datenmenge reduziert und die Identifikation verbessert werden.

Die reine Rauscherregung, die ähnlich einer Impulsfunktion alle dem System innewohnenden Frequenzen erregt, erzeugt nicht ganz so gute Ergebnisse wie die Sweepfunktion, weil die umgesetzte Energie nicht so hoch ist, wie im anderen Fall. Die Hoffnung in der Praxis auch Umgebungserregungen als einen Rauschvorgang einzusetzen, ist nur bedingt erfüllt worden, weil es sich als schwierig erwiesen hat, den dominanten Erregungsvorgang zu ermitteln.

Die Trennung von Wind- und Bodenerregung durch Fahrzeuge oder auch Kinder mit Skateboards - im Fall des untersuchten Kirchturmes - erwies sich als äußerst schwierig.

4.4.1 Impulserregung

Im Fall der Impulserregung sollte der Ausschwingvorgang an einem 2500 mm langen Stahlbalken beobachtet werden. Dazu ist eine definierte Masse an dem Balken befestigt und zur Zeit t_0 , vom Balken gelöst worden. Damit wurde ein für die Auswertung benötigter Ausschwingvorgang erzeugt. Die erzeugten Schwingungen wurden mit dem Mess-PC aufgenommen und sind in den Abbildungen 4.16(a) bis 4.16(d) zu finden.

Um den Vergleich zwischen der Subspace-Methode und der Fourier-Transformation und die Gleichwertigkeit des neuen Werkzeuges zu verdeutlichen, sollen die aufgenommenen Signale durch beide Verfahren identifiziert und die Ergebnisse verglichen werden.

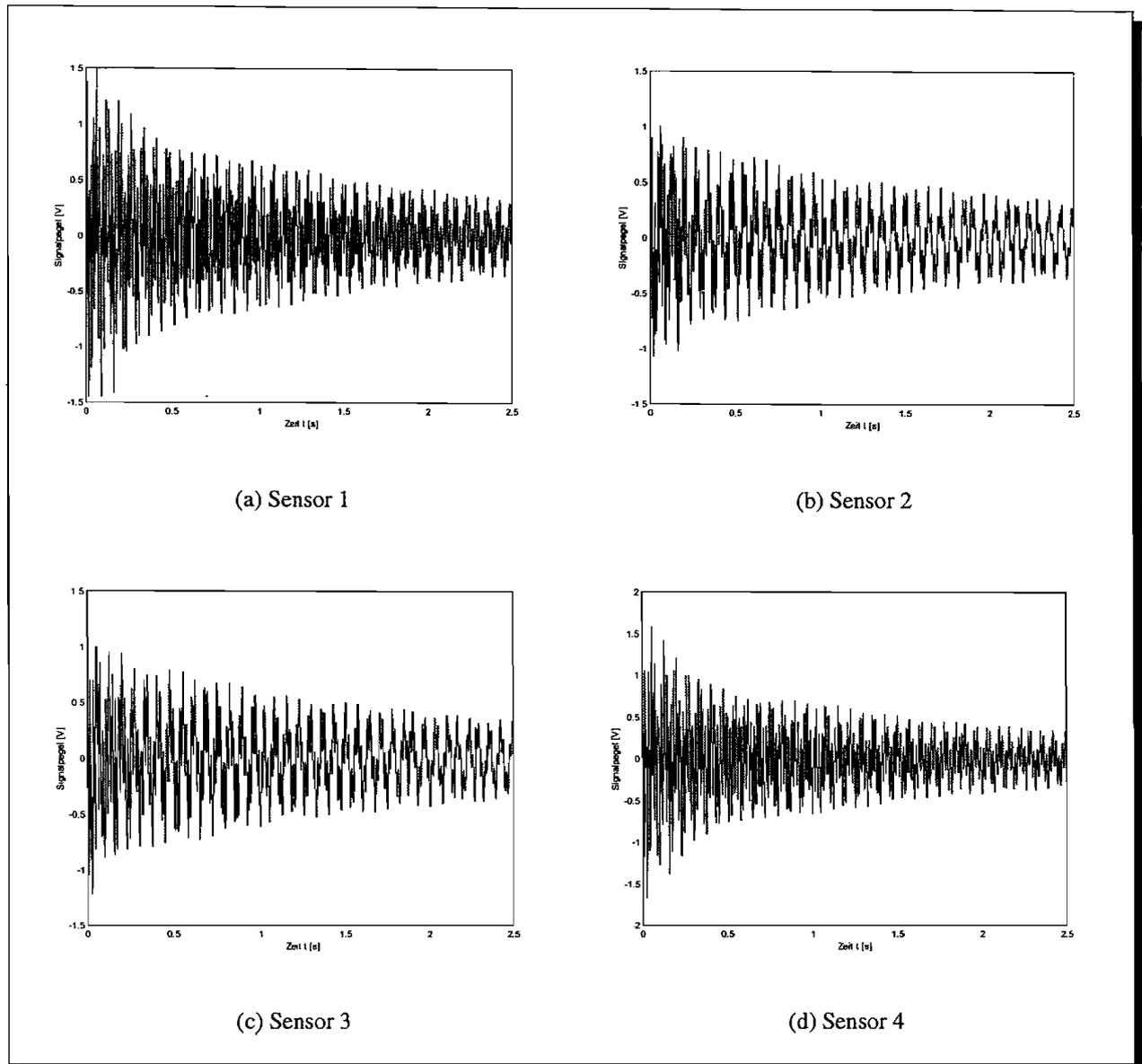


Abbildung 4.16: Zeitsignale der Sensoren 1 – 4 bei Impulserregung

Die Messwerte sind mit einer Abtastfrequenz f_{ab} von 4000 Hz aufgezeichnet worden. Alle Sensoren wurden symmetrisch zur Mittellinie auf dem Balken appliziert, was sich durch die gleichen Amplitudenbeträge bei den Zeitsignalen der gegenüberliegenden Sensoren zeigt.

Mit der Fourieranalyse sind die ersten vier Eigenfrequenzen zu identifizieren, alle vier Sensorsignale liefern die gleichen Ergebnisse, was in den Abbildungen 4.17(a) bis 4.17(d) zu verifizieren ist. Für die Analyse wurden $nf = 10000$ Messpunkte verwendet, was einem Betrachtungszeitraum von $T = 2.5\text{ s}$ entspricht. Die in der Zeitfunktion zu erkennende Dämpfung, macht sich im Spektrum durch eine leichte Peakaufweitung bemerkbar und ist nur durch weitere zusätzliche Berechnungsmethoden (Circle Fit) [103], zu bestimmen.

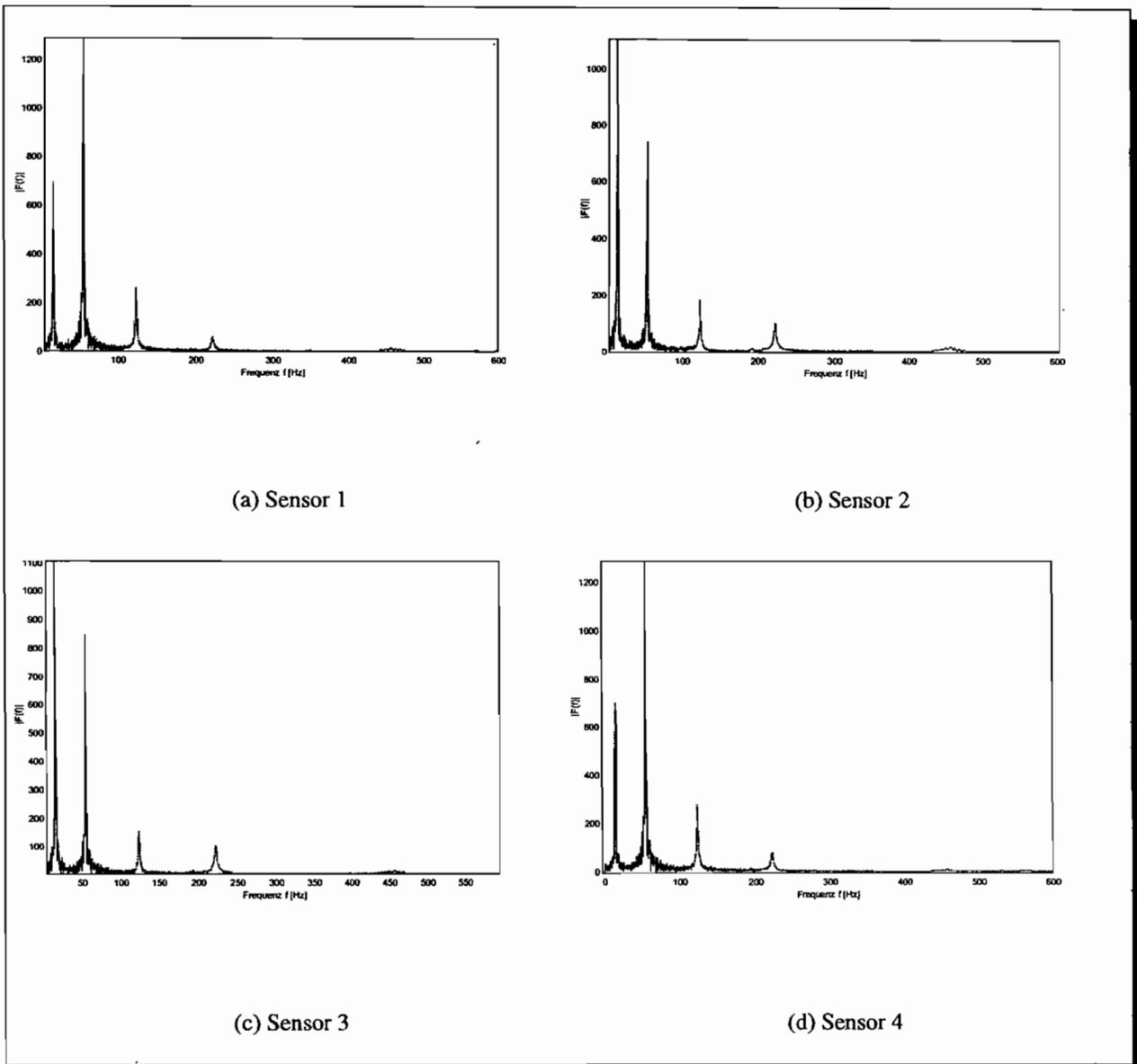


Abbildung 4.17: Spektren des Laborbalkens

Eine weitere Analyse mit der Subspace-Methode lieferte mit einer geringeren Anzahl von Messpunkten $nf = 200$ gleiche Ergebnisse für die ersten vier Eigenfrequenzen. Zusätzlich konnten aber noch zwei weitere Frequenzen detektiert werden. Es wurde aber nur ein Betrachtungszeitraum von $T = 0.05$ s benötigt. Die Berechnung des Zustandsraumes durch die Singulärwertzerlegung ergab eine Dimension von $n = 13$ (siehe Abbildung 4.4.1). Eine paarweise Anordnung der Singulärwerte ist ein Hinweis, auf eine dem System innewohnende Frequenz.

Es sind folglich sechs Frequenzen durch die Subspace-Methode gefunden worden, welche in der Tabelle 4.6 aufgeführt sind. Der 13. Singulärwert charakterisiert eine Dämpfung, welche physika-

lisch nicht zu deuten ist, aber bei realen Signalen bei der Analyse auftreten kann.

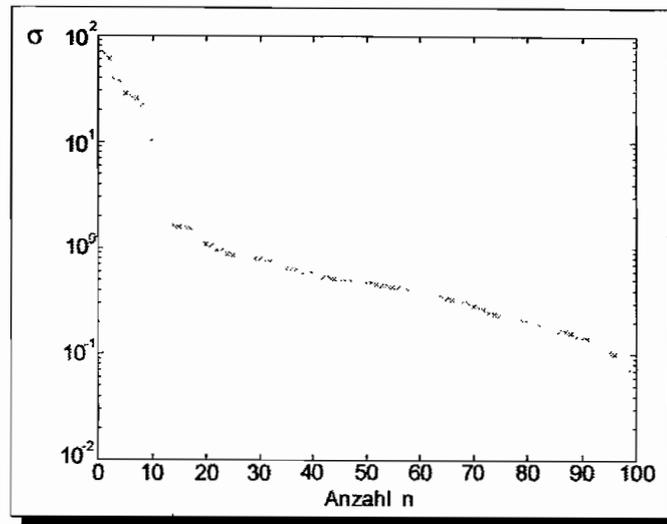


Abbildung 4.18: Singulärwertkurve der Balkenmessung

Die gefundenen Frequenzen stimmen gut mit denen der Fourieranalyse überein, jedoch ist der Vergleich mit der analytischen Lösung des Balkens recht schlecht. Die abweichenden Ergebnisse sind auf die nicht idealen Modellierungen der Lager zurückzuführen. Bei den Frequenzen, die in dem Fourier-Spektrum von $nf = 10000$ Werten nicht enthalten sind, handelt es sich um Frequenzen im nicht eingeschwungenen Zustand. Sie sind bei einer FFT-Untersuchung mit ebenfalls $nf = 200$ Werten aufgetreten, aber aufgrund der schlechten Auflösung nicht genau zuzuordnen. Bei dem längeren Betrachtungszeitraum ist die Mittelung über die dominanten Frequenzen stärker als bei den Subspace-Methoden, sodass diese Frequenzen im Spektrum nicht auftreten.

In der nachfolgenden Tabelle sind die mit der Subspace-Methode berechneten Amplituden und Phasen in Abhängigkeit der Frequenz, für jeden der vier Aufnehmer, angegeben.

| Frequenz f_i [Hz] | Dämpfung d_i | Amplitude a_{ij} | Phase ϕ_{ij} |
|---------------------|----------------|--------------------|-------------------|
| 13.3527 | -0.2782 | 0.2562 | 1.2098 |
| | | 0.3981 | 1.0739 |
| | | 0.4853 | 1.1356 |
| | | 0.3648 | 0.9845 |
| -13.3527 | -0.2782 | 0.2562 | -1.2098 |
| | | 0.3981 | -1.0739 |
| | | 0.4853 | -1.1356 |
| | | 0.3648 | -0.9845 |
| 54.1677 | -0.5028 | 0.7787 | 0.4498 |
| | | 0.4908 | 0.4330 |
| | | 0.4330 | -2.7215 |
| | | 0.7888 | -2.6979 |

| | | | |
|-----------|----------|--------|---------|
| -54.1677 | -0.5028 | 0.7787 | -0.4498 |
| | | 0.4908 | -0.4330 |
| | | 0.4330 | 2.7215 |
| | | 0.7888 | 2.6979 |
| 122.9775 | -4.1342 | 0.5219 | 1.7720 |
| | | 0.2674 | -1.2506 |
| | | 0.3275 | -1.3737 |
| | | 0.4740 | 1.7840 |
| -122.9775 | -4.1342 | 0.5219 | -1.7720 |
| | | 0.2674 | 1.2506 |
| | | 0.3275 | 1.3737 |
| | | 0.4740 | -1.7840 |
| 222.1499 | -5.9899 | 0.2786 | -1.4604 |
| | | 0.3749 | 1.6556 |
| | | 0.3758 | -1.4834 |
| | | 0.1983 | 1.6288 |
| -222.1499 | -5.9899 | 0.2786 | 1.4604 |
| | | 0.3749 | -1.6556 |
| | | 0.3758 | 1.4834 |
| | | 0.1983 | -1.6288 |
| 453.6783 | -37.7835 | 0.1466 | 0.7144 |
| | | 0.2412 | -2.3954 |
| | | 0.2629 | 0.7574 |
| | | 0.2257 | -2.4596 |
| -453.6783 | -37.7835 | 0.1466 | -0.7144 |
| | | 0.2412 | 2.3954 |
| | | 0.2629 | -0.7574 |
| | | 0.2257 | 2.4596 |
| 615.2339 | -54.5537 | 0.1068 | 1.7139 |
| | | 0.0930 | -1.3513 |
| | | 0.0441 | -1.1838 |
| | | 0.1441 | 1.5892 |
| -615.2339 | -54.5537 | 0.1068 | -1.7139 |
| | | 0.0930 | 1.3513 |
| | | 0.0441 | 1.1838 |
| | | 0.1441 | -1.5892 |
| 0 | -13.7689 | 0.4155 | 0 |
| | | 0.4100 | 0 |
| | | 0.4324 | 0 |
| | | 0.3678 | 0 |

Tabelle 4.6: Modale, mit der Subspace-Methode identifizierte Parameter

| | |
|------------------|-------------------|
| 1. Eigenfrequenz | $15.0171 s^{-1}$ |
| 2. Eigenfrequenz | $60.0681 s^{-1}$ |
| 3. Eigenfrequenz | $135.1531 s^{-1}$ |
| 4. Eigenfrequenz | $240.2722 s^{-1}$ |
| 5. Eigenfrequenz | $375.4252 s^{-1}$ |

Tabelle 4.7: Analytisch berechnete Frequenzen

4.4.2 Rauscherregung

Als Beispiel für die Rauscherregung werden Messungen vom Kirchturm in Marl-Lenkerbeck untersucht. Der Kirchturm am Versöhnungszentrum ist zu diesem Zweck mit Beschleunigungsaufnehmern versehen worden, um die Turmbewegung zu analysieren. Desweiteren wurden für die Erregersignale auf die Glocken Beschleunigungsaufnehmern appliziert. Die Glockenerregung konnte nicht als reines harmonisches Signal betrachtet werden, weil die Überlagerungen durch den Schall auf die Aufnehmer sich stärker auswirkten, als das eigentlich zu untersuchende Signal. Deshalb wurde es in dieser Betrachtung im Bereich der stochastischen Erregung eingeordnet. Um auch den Wind zu berücksichtigen sind zusätzlich vier Thermoanemometer zum Einsatz gekommen, so konnte an zwei Punkten, in unterschiedlicher Höhe, die Windgeschwindigkeiten gemessen und für die weitere Verarbeitung bereitgestellt werden.

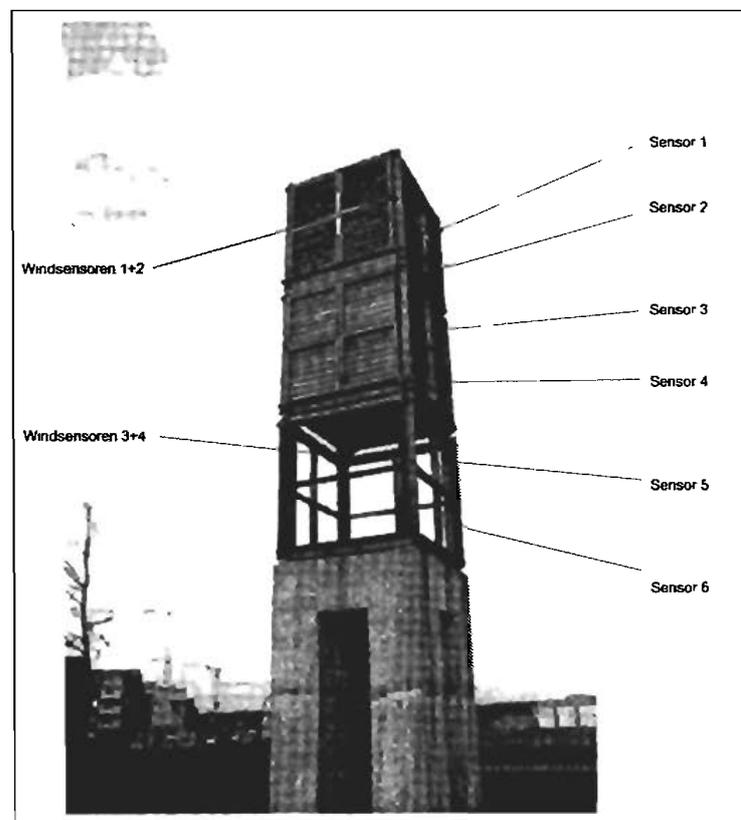


Abbildung 4.19: Sensoranordnung des Kirchturms

Es zeigte sich, dass die Subspace-Methode gute Ergebnisse lieferte. Um die Güte der erzielten Ergebnisse zu verifizieren, wurde versucht das gemessene Signal mit einem aus der Subspace-Methode gewonnenem simuliertem Signal im Zeitbereich zu vergleichen. Dabei trat das Problem auf, dass die Anfangszustände im Zustandsraum allgemein nicht bekannt sind und nur geschätzt werden können. Aufgrund kleinster Abweichungen lässt sich ein Vergleich im Zeitbereich nicht sinnvoll durchführen. Durch die hohe Dynamik bei Rauschvorgängen sind die Abweichungen sehr groß, obwohl die Systemeigenschaften gut getroffen sind.

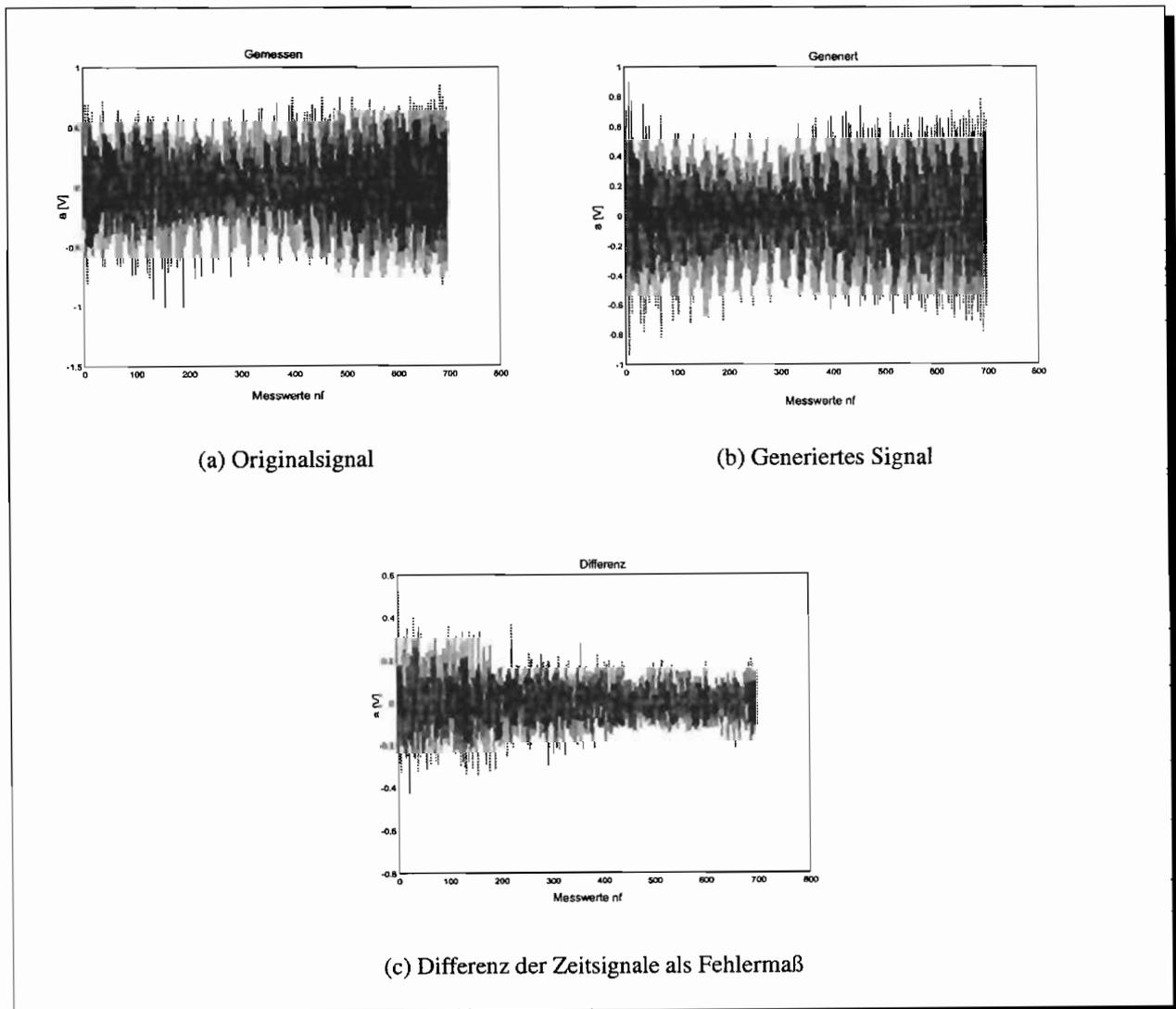


Abbildung 4.20: Zeitsignale der sechs Beschleunigungsaufnehmer

Aus diesem Grund lassen sich die dynamischen Eigenschaften im Frequenzbereich besser vergleichen. Obwohl die Fourier-Transformation eigentlich nur für Ausschwingvorgänge geeignet ist, lassen sich die Signalanteile des gemessenen und des generierten Signals mit ihr untersuchen.

Betrachtet man das Differenzspektrum, so erkennt man, dass die Frequenzen im Wesentlichen

gut übereinstimmen und die Abweichungen der Beträge der Spektren $< 10\%$ sind. Die Fehler stammen von der durch die Luft auf die Beschleunigungsaufnehmer übertragene Erregung, welche durch die Sensoren für die Erregerseite nicht erfasst werden konnte und nicht zu unterschätzen ist.

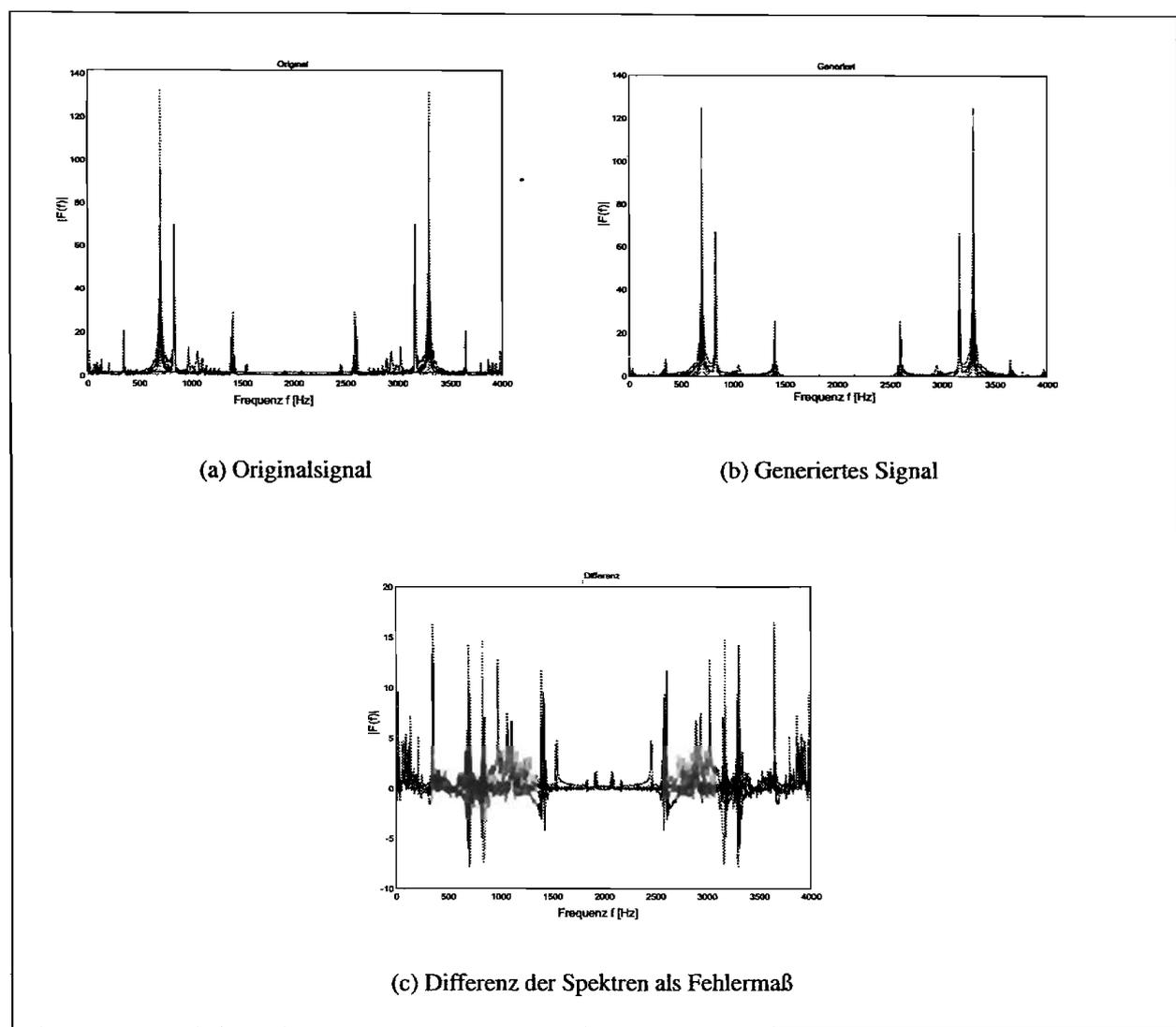


Abbildung 4.21: Spektren der sechs Beschleunigungsaufnehmer

4.4.3 Beliebige Erregung

In den vorangegangenen Abschnitten sind die Identifikationsmethoden mit Impuls- und Rauscherregung beschrieben worden. Das Problem für die hohen Frequenzen genügend Energie bereitzustellen bleibt jedoch bestehen. Deshalb wurde mit Erregungen experimentiert, welche die Strukturen direkt an ihren Resonanzstellen erregen. Besonders geeignet sind in diesem Zusammenhang die Sweepfunktionen. Man kann über einen großen Frequenzbereich die Strukturen anregen und so Resonanzfrequenzen erregen, ohne ihre genaue Lage zu kennen.

Die erzielten Ergebnisse, welche durch die Sweeperregung hervorgebracht wurden, konnten durch keine andere Erregungsform erreicht werden. Als Beispiel für die beliebigen Erregungen ist der schon betrachtete Laborbalken mit einem Piezo-Stapelaktor (siehe Abschnitt B.4.2) versehen worden.

Der Stapelaktor gab einen Sweep von $f_{err} = 2.5 - 125 \text{ Hz}$ in der Zeit von $T = 60 \text{ s}$ auf die Balkenstruktur (Abbildung 4.22). Da bei einer Abtastung von $f_{ab} = 4000 \text{ Hz}$ über eine lange Messzeit T bei vielen Messkanälen sehr große Datensätze entstehen, die aufgrund von Speicherbeschränkungen nicht mehr bearbeitet werden können, ist es nötig nur Teilbereiche des Betrachtungszeitraumes zu untersuchen.

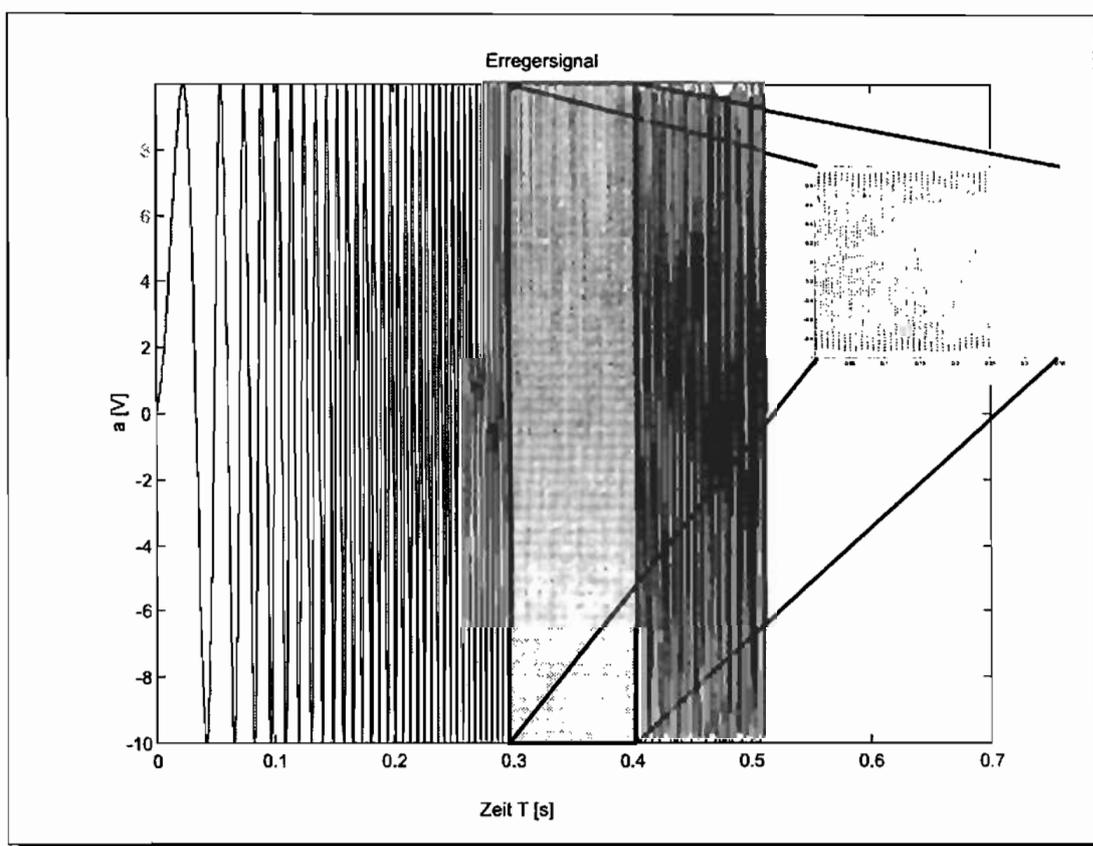


Abbildung 4.22: Teilbereiche der Sweeperregung

Die Resultate der Messung sind in Abbildung 4.23(a) zu finden, das generierte Signal, welches aus der Identifikation mit der Subspace-Methode hervorging, ist in Abbildung 4.23(b) dargestellt. Bei der Sweeperregung ist der Anfangswert im Zustandsraum besser zu schätzen, als bei einer Rauscherregung. Dies ist der Grund für die bessere Übereinstimmung im Zeitbereich (siehe Abbildung 4.23(c)).

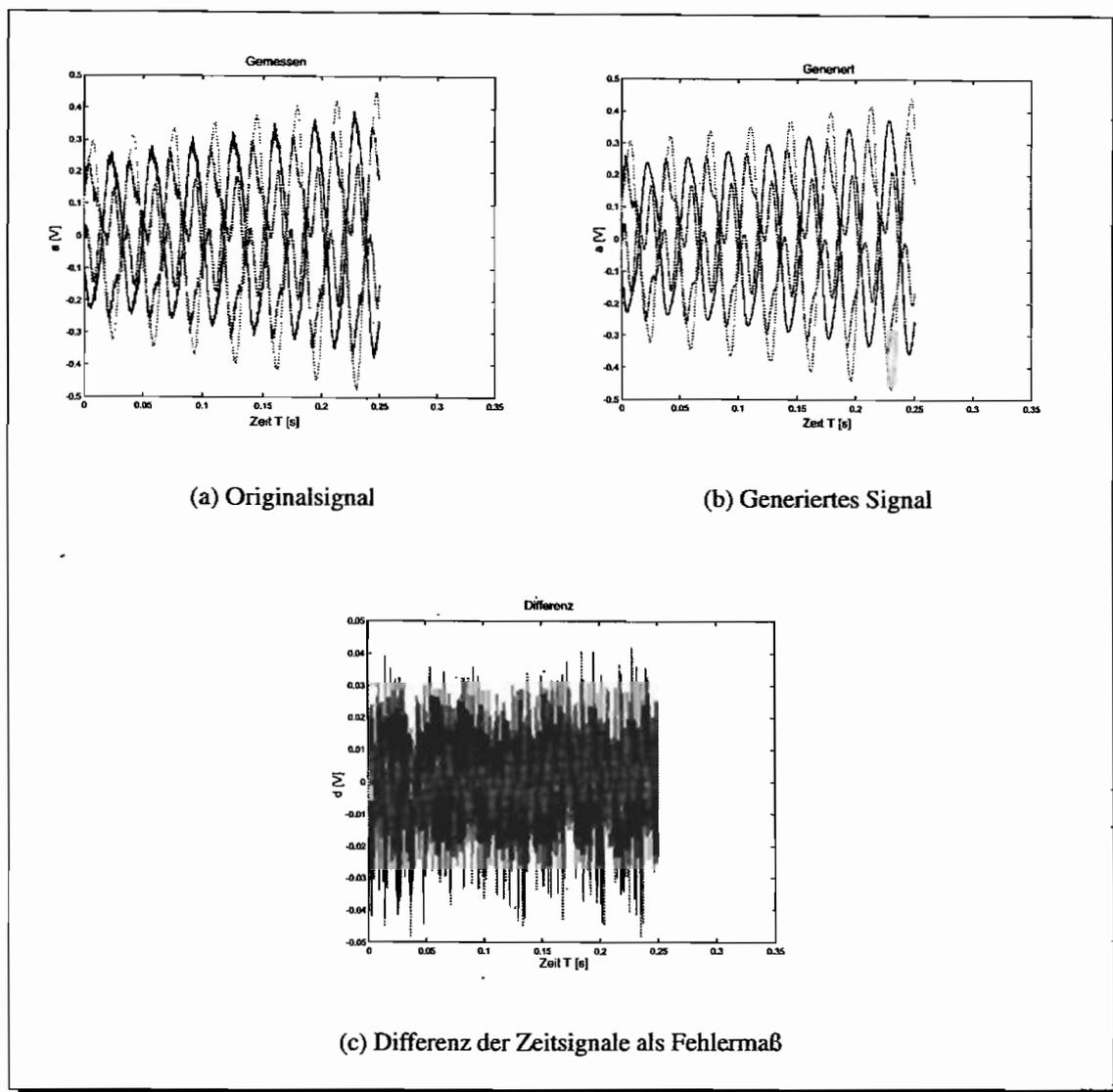


Abbildung 4.23: Zeitsignale der sechs Beschleunigungsaufnehmer

Eine Betrachtung der Spektren der gemessenen und generierten Signale, zeigte einen noch geringeren Fehler als im Zeitbereich 4.25(c), weil die Spektren unabhängig von der Phasenlage und des Anfangswertes einen Vergleich zulassen. Zur Weiterverarbeitung der Zeitsignale mit der Subspace-Methode, ist der Zustandsraum von $n = 6$ gewählt worden (Abbildung 4.24). Dies entsprach auch der aus der analytischen Berechnung gewonnenen Anzahl der Eigenfrequenzen des Balkens, für den untersuchten Frequenzbereich. In den Spektren wurden nur zwei Frequenzen gefunden, da der Piezostapelaktor aufgrund seines geringen Stellweges, bei den niedrigen Frequenzen nicht genug Energie in die Struktur einbringen kann. Die gefundenen Frequenzen stimmten auch nicht mit den analytischen Frequenzen des beidseitig eingespannten Balkens überein, weil die Ankopplung durch den Stapelaktor einen erheblichen Eingriff in das relativ kleine System bedeutete. Die Rückrechnung im Zeitbereich macht deutlich, wie gut das Gesamtsystem von Balken mit Stapelaktor wiedergegeben wird.

Der größte Vorteil der Methode ist die exakte Identifikation von großen Frequenzbereichen bei kleinen Datensätzen. Die Probleme die bei der Fourieranalyse auftreten, sind im Zusammenhang mit hohen Abtastfrequenzen und sehr niedrigen Signalen zu sehen. Es können nur relativ wenig Zeitpunkte betrachtet werden, weil sonst der Hauptspeicher schnell überschritten wird. Bei hohen Frequenzen ist der Betrachtungszeitraum aber sehr klein, sodass die niedrigen dem Signal innewohnenden Frequenzen nicht immer erfasst werden können. Dies liegt daran, dass keine vollständige Periode zur Untersuchung bereitsteht.

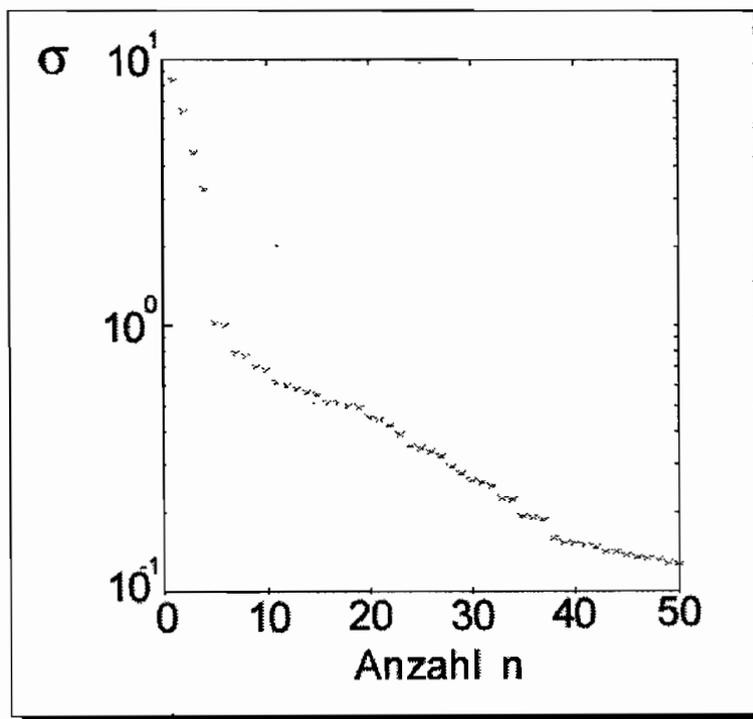


Abbildung 4.24: Singulärwerte der Sweeperregung

Da bei einer Identifikation möglichst viele Eigenfrequenzen in einem Identifikationslauf berechnet und der Zeitaufwand möglichst gering sein soll, ist dies nicht ohne erheblichen Aufwand und Bereitstellung großer Rechenleistung zu tätigen.

Einen Ausweg liefert die *Block-Summen-Transformation*. Man teilt den gesamten Messzeitraum T in mehrere i kleinere Messbereiche $i \cdot T_{Block}$. Von den kleineren Messbereichen summiert man die i Erreger- und die i Ausgangssignale miteinander auf.

$$\mathbf{u}_{block} = \sum_{j=1}^i \mathbf{u}_j \quad (4.10)$$

$$\mathbf{y}_{block} = \sum_{j=1}^i \mathbf{y}_j. \quad (4.11)$$

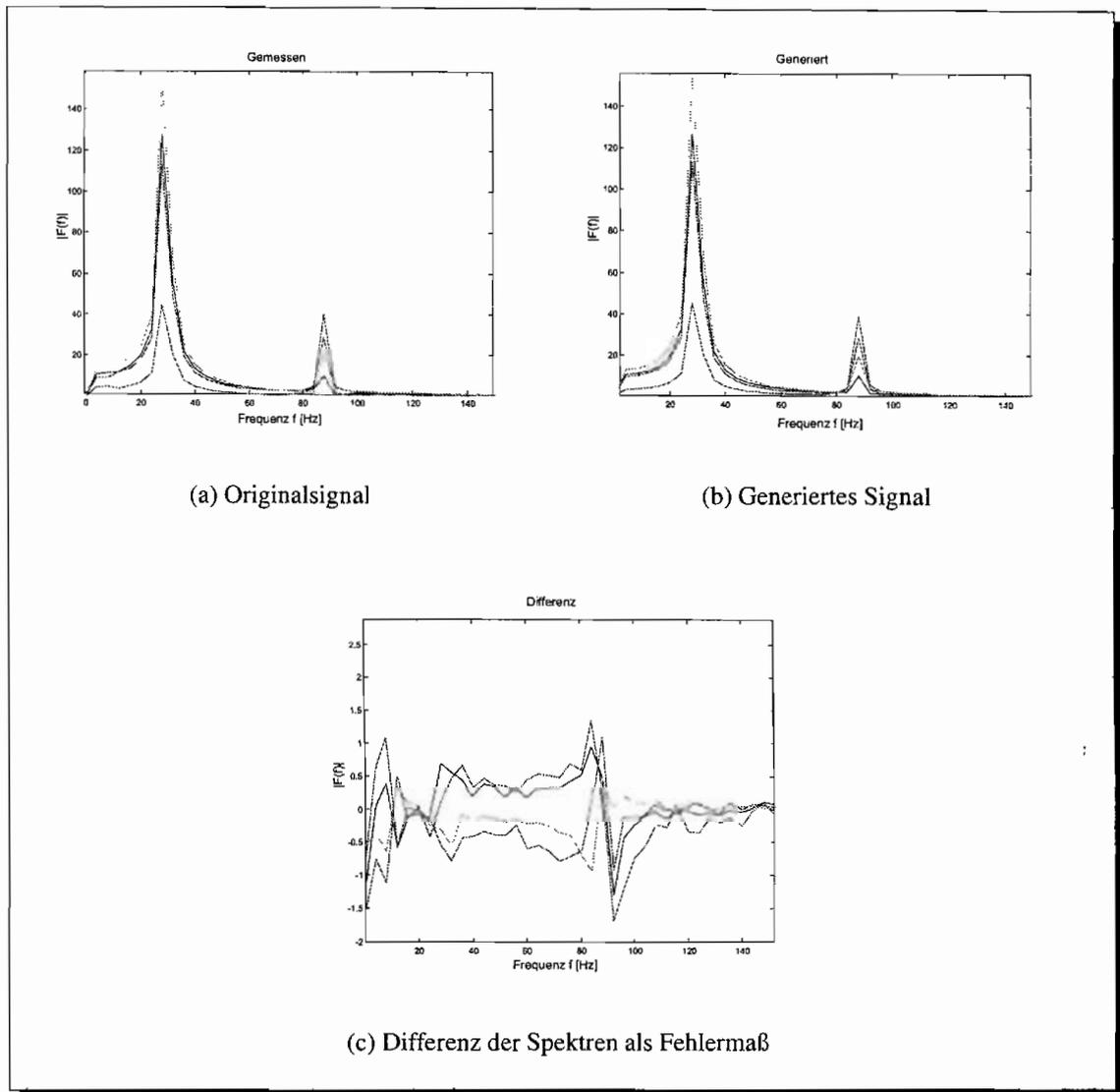


Abbildung 4.25: Spektren der sechs Beschleunigungsaufnehmer

Es lässt sich dann zeigen, dass die addierten Signale y_{block} und u_{block} durch das Superpositionsprinzip bei der Identifikation die gleichen Systemeigenschaften liefern, wie bei einer Betrachtung über den gesamten Zeitraum T . Damit hat man die Möglichkeit in sehr kurzen Betrachtungszeiträumen und ohne große Rechenleistung ein System zu identifizieren.

Mit dem gewonnenen Modell, bestehend aus den Systemparametern $\{A, B, C, D\}$, ist auch eine Berechnung des Zeitverlaufes möglich, was durch einen Sweep in den Frequenzbereichen der ersten drei Eigenfrequenzen des Balkens in den Abbildungen 4.26(a), 4.26(b) und 4.26(c) dargestellt wurde.

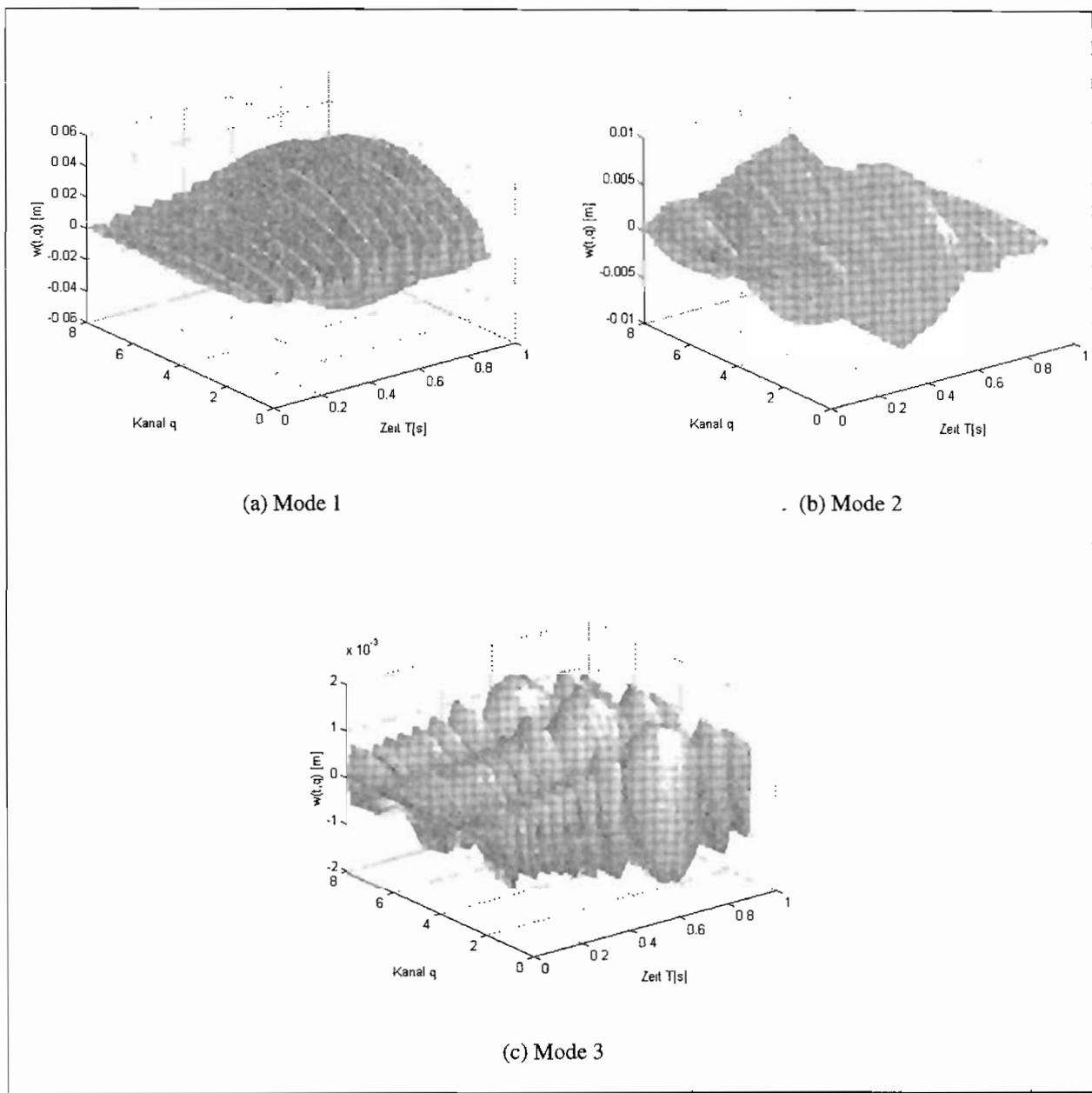


Abbildung 4.26: Zeitverläufe der Balkenschwingung in 3 Bereichen mit Sweeperregung

Kapitel 5

Modalanalyse und Schädigungserkennung

Im Kapitel zur Schädigung werden einige Detektions-Methoden, die mit den Subspace-Algorithmen zu verbinden sind, vorgestellt. Eine Einführung in die Modalanalyse soll die Parameter, welche als Schädigungs-Indikatoren dienen können, angeben.

Der Vergleich zwischen den durch die Subspace-Methoden berechneten dynamischen Einflusszahlen und den Eigenformen, die mit den bisher verwendeten Werkzeugen in der Modalanalyse berechnet worden sind, zeigt die Gleichwertigkeit der neuen Methoden. Hierbei wird eine Balken- und eine Plattenstruktur betrachtet.

Des Weiteren werden die Definitionen von MAC, COMAC und den dynamischen Einflusszahlen als Schädigungsindikatoren, sowie Vorgehensweisen für das model updating, im Zusammenhang mit den Subspace-Methoden angegeben.

5.1 Parameter in der Modalanalyse

Die Modalanalyse dient als Hilfsmittel bei der Betrachtung des Schwingungsverhaltens von dynamischen Systemen. Durch sie kann ein tieferer Einblick über das Systemverhalten gewonnen werden, indem man die einzelnen Freiheitsgrade voneinander entkoppelt. Jede Systembewegung wird so durch bestimmte Moden charakterisiert, denen jeweils eine Frequenz, Phase, Amplitude und Dämpfung zugeordnet ist.

Man unterscheidet zwischen der experimentellen und der analytischen Modalanalyse. Bei der experimentellen Modalanalyse werden die modalen Eigenschaften durch Messungen ermittelt, indem man die Antwort des Systems auf definierte Erregungen aufnimmt. Als Basis der analytischen Modalanalyse dient bei diskreten Systemen wie im Kapitel 3 die diskrete Bewegungs-Differentialgleichung. Möchte man ein kontinuierliches System beschreiben, so erhält man eine kontinuierliche partielle Bewegungs-Differentialgleichung für den Ort und die Zeit. Bei der numerischen Beschreibung greift man aber auf die diskrete Formulierung zurück, wobei die einzelnen Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{D} und \mathbf{K} sich aus den Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitselementen zusammensetzen – den finiten Elementen

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t). \quad (5.1)$$

Die Unterteilung in Massen- \mathbf{M} , Dämpfungs- \mathbf{D} und Steifigkeitsmatrizen \mathbf{K} macht es möglich, ein reales kontinuierliches System in beliebig viele Freiheitsgrade zu zerlegen. Diese können dann genauer in ihrem dynamischen Verhalten untersucht werden. Als Vereinfachung wird die Dämpfung als viskos, d.h. geschwindigkeitsproportional angenommen. Damit ist eine weitere Vereinfachung des Dämpfungsmodells zur modalen Dämpfung möglich. Bei dieser Idealisierung der Dämpfung geht man davon aus, dass die Eigenformen trotz der vorhandenen Dämpfung erhalten bleiben.

Unter der Annahme, dass die Eigenformen sich bei der modalen Dämpfung nicht ändern, werden die Eigenformen zunächst für das ungedämpfte System berechnet

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t). \quad (5.2)$$

Die Lösung dieses Differentialgleichungs-Systems 2. Ordnung wird allgemein durch den Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{x}} e^{j\omega t} \quad (5.3)$$

des homogenen Differentialgleichungs-Systems gewonnen. Aus der Gleichung

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\hat{\mathbf{x}} = 0 \quad (5.4)$$

wird das charakteristische Polynom zur Berechnung aller nicht trivialen Lösungen aufgestellt und für jeden betrachteten Systemfreiheitsgrad die Eigenfrequenz ω_i bestimmt

$$\det |\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}| = 0. \quad (5.5)$$

Im Anschluss lassen sich aus der Gleichung 5.4 die Rechtseigenvektoren $\hat{\mathbf{x}}_{Ri}$ berechnen und analog dazu, aus dem transponierten System, die Linkseigenvektoren $\hat{\mathbf{x}}_{Li}$. Bei einem symmetrischen System mit modaler Dämpfung ist diese Unterscheidung allerdings nicht nötig, weil dann Rechts- und Linkseigenvektoren gleich sind. Die Eigenvektoren (Moden) stellen die qualitative physikalische Bewegung des Systems der zugeordneten Eigenfrequenz dar. Die gefundenen Eigenvektoren sind in der Theorie immer orthogonal zueinander was in Waller/Krings [101] gezeigt wird. Bei einer experimentellen Untersuchung ist dies nicht zwingend der Fall!

In der Praxis ist es üblich, die Eigenvektoren $\hat{\mathbf{x}}_{Xi}$ auf die Massenmatrix zu normieren

$$\hat{\mathbf{x}}_{Lj}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_{Ri} = \delta_{ij} [kg]. \quad (5.6)$$

Aus den masse-normierten Eigenvektoren geht schließlich die Modalmatrix Φ_X hervor, in ihr sind die einzelnen Vektoren spaltenweise abgelegt

$$\Phi_X = [\hat{\mathbf{x}}_{X1} \quad \hat{\mathbf{x}}_{X2} \quad \dots \quad \hat{\mathbf{x}}_{Xn}]. \quad (5.7)$$

Mit den Modalmatrizen Φ_L und Φ_R ist man nun in der Lage, das System zu diagonalisieren, was in der Anwendung auf das Differentialgleichungs-System einer Entkopplung der einzelnen Freiheitsgrade gleichkommt

$$\Phi_L^T \mathbf{K} \Phi_R = \text{diag}(\omega_i^2) \quad (5.8)$$

$$\Phi_L^T \mathbf{M} \Phi_R = \mathbf{I}. \quad (5.9)$$

Mit der Modaltransformation

$$\mathbf{x}(t) = \Phi_R \mathbf{q}(t) \quad (5.10)$$

nimmt die Bewegungs-Differentialgleichung in Modalkoordinaten $\mathbf{q}(t)$ ausgedrückt, die Form

$$\mathbf{M}\Phi_R \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\Phi_R \mathbf{q}(t) = \mathbf{u}(t) \quad (5.11)$$

an. Linksmultiplikation mit der Matrix Φ_L^T liefert n entkoppelte Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$\Phi_L^T \mathbf{M} \Phi_R \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Phi_L^T \mathbf{K} \Phi_R \mathbf{q}(t) = \Phi_L^T \mathbf{u}(t) \quad (5.12)$$

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \text{diag}(\omega_i^2) \mathbf{q}(t) = \Phi_L^T \mathbf{u}(t). \quad (5.13)$$

Somit können die einzelnen entkoppelten Differentialgleichungen getrennt gelöst werden. Mit der Verwendung der Rechts- Φ_R und Linkseigenvektoren Φ_L , wird eine numerisch problematische Invertierung von Φ_R bei nicht modaler Dämpfung vermieden [103].

Zur Lösung der einzelnen Differentialgleichungen müssen jedoch auch die Randbedingungen in den modalen Raum transformiert werden

$$\mathbf{x}_0 = \Phi_R \mathbf{q}_0 \quad (5.14)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \Phi_R \dot{\mathbf{q}}_0. \quad (5.15)$$

Modal gedämpfte Systeme

Durch die jahrzehntelange Erfahrung die mit der Modalanalyse gemacht wurde, hat sich gezeigt, dass mit dem viskosen Dämpfungsmodell in der Praxis akzeptable Ergebnisse gefunden werden. Sind die Eigenformen eines gedämpften und ungedämpften Systems näherungsweise gleich, dies ist meist bei schwacher Dämpfung der Fall, kann man die *Bequemlichkeitshypothese* als Näherung einsetzen. Die Bequemlichkeitshypothese dient der Berechnung einer Dämpfungsmatrix \mathbf{D} aus einer Linearkombination der Steifigkeits- und Massenmatrix

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M}. \quad (5.16)$$

Mit der Bequemlichkeitshypothese ist jedoch die erzeugte Dämpfung besonders bei den höheren Moden überproportional hoch, sodass es besser ist, die modale Dämpfung durch Experimente zu bestimmen [103]. Die Dämpfungsmatrix lässt sich bei beiden Vorgehensweisen, wie die Massen- und Steifigkeitsmatrix diagonalisieren

$$\Phi_L^T \mathbf{D} \Phi_R = \text{diag}(\Delta_i). \quad (5.17)$$

Daraus folgt die Differentialgleichung für modal gedämpfte Systeme:

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \text{diag}(\Delta_i) \dot{\mathbf{q}}(t) + \text{diag}(\omega_i^2) \mathbf{q}(t) = \Phi_L^T \mathbf{u}(t) \quad (5.18)$$

Weitere Dämpfungsmodelle

Als weitere Dämpfungsmodelle sind die hysteretische Dämpfung und die allgemeine viskose Dämpfung zu nennen. Die hysteretische Dämpfung drückt sich in der Bewegungs-Differentialgleichung durch einen komplexen Steifigkeitsterm aus

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + j\mathbf{D})\mathbf{x} = \mathbf{u}(t). \quad (5.19)$$

Damit erhält man eine physikalisch unsinnige Formulierung, die zu nicht kausalen Systemen führt. Sie ist deshalb nur bedingt geeignet und bestenfalls bei periodischen Erregungen einsetzbar. Die hysteretische Dämpfung repräsentiert hauptsächlich die Strukturdämpfung, hingegen wird die allgemeine viskose Dämpfung für die Beschreibung von Fahrzeug-Dämpfungs-Systemen eingesetzt. Ihre Bewegungs-Differentialgleichung unterscheidet sich zunächst nicht von der Bewegungs-Differentialgleichung modalgedämpfter Systeme. Da eine Diagonalisierung durch die Eigenformen in diesem Fall nicht möglich ist, wird das System in den Zustandsraum transformiert und dort gelöst [32]. Durch die Transformation in den Zustandsraum erhält man ein unsymmetrisches Problem, sodass für die anschließende Entkopplung, die Rechts- und Linkseigenvektoren benutzt werden.

Zur genaueren Betrachtung dieser beiden Dämpfungsformen sei an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen. Wichtig ist in dem Zusammenhang für den weiteren Verlauf der Arbeit, dass bei den höherwertigen Dämpfungsmodellen die Eigenvektoren nicht mehr reell sind, sondern komplex. Dies gilt insbesondere bei den gemessenen Moden.

Damit ergibt sich das Problem der physikalischen Interpretation der Eigenformen. Man umgeht diese physikalische Unstetigkeit, indem man den komplexen Wert auf die reelle Achse des Koordinatensystems projiziert und so, einen physikalisch sinnvollen und reellen Wert erhält.

Durch die Modalanalyse ist es möglich geworden, die dynamischen, das System charakterisierenden Größen zu bestimmen. Die Abhängigkeit der modalen Parameter Frequenz, Dämpfung, Phase und Amplitude, von Masse und Steifigkeit, ist gezeigt worden. Im nächsten Schritt lassen sich auch Veränderungen von Masse und Steifigkeit auf Veränderungen in den modalen Parametern projizieren. Damit ist ein Ansatz geschaffen, mit den Werkzeugen der modalen Analyse Systemveränderungen zu detektieren.

Die Darstellung der einzelnen Indikatoren, welche diese Veränderungen sichtbar machen, sind allerdings sehr vielfältig und lassen viel Spielraum für weitere Überlegungen.

5.2 MAC und COMAC als Hilfsmittel bei der Schädigungskalisation

Ein wichtiger Punkt bei der theoretischen Modalanalyse, ist die Verifikation der Modelle durch empirische Identifikationsmethoden. Die oftmals nichtidealen Randbedingungen und die Beschreibung der Dämpfung sind nur sehr schlecht in die Überlegungen einzubeziehen. Zur Verbesserung der Unstimmigkeiten zwischen gemessener Realität und FE-Modell, ist es nötig, die Erfahrungen und Ergebnisse aus den Messungen in das mathematische Modell einzubringen.

Diese Vorgehensweise nennt man *finite element model updating*. Die Schwierigkeiten in diesem Zusammenhang sind in der enormen Anzahl von Freiheitsgraden an einem realen System zu sehen. Ein Motor oder eine andere komplexe Struktur hat als ein FE-Modell eine sehr große Anzahl von Freiheitsgraden $n = 5000 - 60000$, welche durch Sensoren (meist $n < 200$) nur sehr schwer beschreibbar sind. Insbesondere Torsionsschwingungen stellen messtechnisch eine Herausforderung dar.

Um die Eigenformen des FE-Modells mit denen der vermessenen Struktur zu vergleichen, steht man vor der Wahl, die gemessenen Freiheitsgrade zu extrapolieren oder die Freiheitsgrade des FE-Modells zu kondensieren. Die demzufolge großen Unterschiede der zu vergleichenden Dimensionen rufen Fehler hervor, welche genauer quantifiziert werden müssen.

Die Güte der Übereinstimmung des theoretisch ermittelten Modells x und des experimentell ermittelten Modells y , ist zu überprüfen. Dabei bedient man sich meist der Möglichkeit, die Eigenformen zu untersuchen.

Das bekannteste Verfahren hierzu ist das *modal assurance criterium*, kurz MAC genannt. Bei der Bildung der MAC-Werte wird ein normiertes Skalarprodukt zwischen den Eigenvektoren des FE-Modells \hat{x}_{xi} und den Eigenvektoren aus der Messung \hat{x}_{yj} berechnet und in der MAC-Matrix angeordnet

$$MAC(i, j) = \frac{|(\hat{x}_{xi})^T (\hat{x}_{yj})|^2}{(\hat{x}_{xi})^T (\hat{x}_{xi}) \cdot (\hat{x}_{yj})^T (\hat{x}_{yj})} \tag{5.20}$$

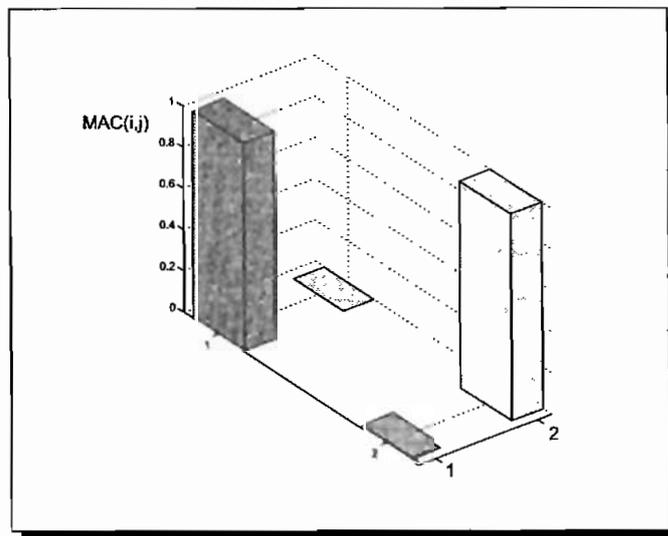


Abbildung 5.1: Beispiel einer MAC-Matrix mit zwei Eigenvektoren

Eine starke Korrelation, d.h. gleiche Eigenvektoren, drückt sich durch einen MAC-Wert nahe eins aus, ein MAC-Wert von $MAC(i, j) = 0$ deutet auf wenig Übereinstimmung hin. Zu beachten ist, dass die einzelnen Vektoren \hat{x}_{xi} und \hat{x}_{yj} nicht zwingend orthogonal sein müssen, sie sind nur

orthogonal unter Berücksichtigung der Massen und Steifigkeitsmatrix

$$\hat{\mathbf{x}}_{xi}^T \mathbf{M} \hat{\mathbf{x}}_{xj} = 0 \quad i \neq j \quad (5.21)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{xi}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{x}}_{xj} = 0. \quad (5.22)$$

Im Normalfall wird mit dieser Methode die Güte des erstellten FE-Modells überprüft, indem die berechneten Eigenformen mit den gemessenen verglichen werden. In dieser Arbeit werden aber zwei gemessene Modelle miteinander verglichen, deshalb dient das MAC-Kriterium nur der Zuordnung der Moden untereinander. Insbesondere bei eng benachbarten Frequenzen, können die Formen so besser verglichen werden. Für zwei der nachfolgenden Schädigungsmaße, die den direkten Vergleich zwischen einem Referenzvektor und dem eines zu untersuchenden Systems vornehmen, ist dies von Bedeutung.

In der Praxis können während der Untersuchung von FE-Modell und Messung alle Werte zwischen 0 und 1 auftreten, sie werden aber bei gleichen Vektorpaaren meist zwischen 0.6 und 0.8 liegen und bei ungleichen Vektoren zwischen 0 und 0.2. Schwierigkeiten kann es bei der Bildung der MAC-Werten nur geben, wenn die Moden eng beieinander liegen oder die Sensorapplizierung unglücklich gewählt wurde.

Um Fehler in der Modellbildung bzw. Schädigungen in einer Struktur zu entdecken, gibt es noch einen zweiten Typ von MAC-Werten, den *co-ordinated MAC-Wert (COMAC)*. Bei der herkömmlichen Bildung des MAC's werden alle vorhandenen Eigenformen miteinander korreliert, beim COMAC die skalaren Komponenten.

Der COMAC-Wert ist vom Prinzip ähnlich zusammengesetzt wie der MAC, er stellt jedoch den Zusammenhang zwischen den Sensororten der gepaarten MAC-Werte her. So ist es möglich auch Systemveränderungen bzw. Knoten an denen Abweichungen auftreten im Vergleich von Modell und Messung nachzuweisen. Gebildet wird der COMAC durch die multiplikative Paarung der Elemente der Eigenvektoren und der anschließenden Summation über alle l Eigenfrequenzen. So wird eine Aussage über die Abweichungen der einzelnen Messpunkte getroffen.

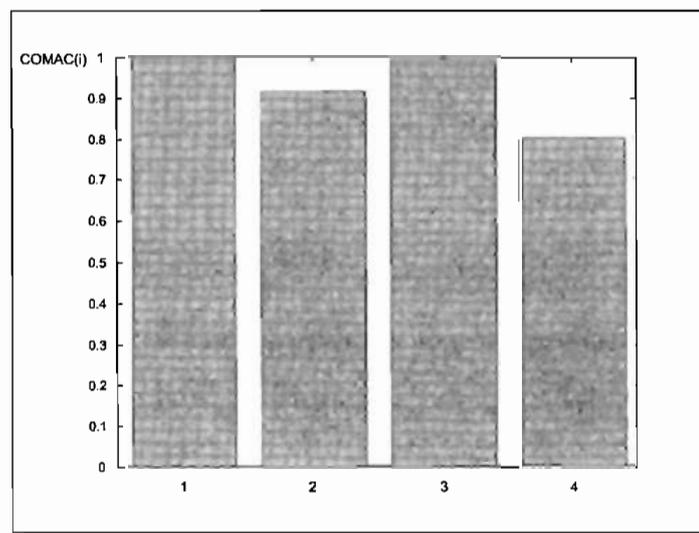


Abbildung 5.2: Beispiel einer COMAC-Matrix für die Einflusszahlen mit vier Eingängen

Ein COMAC-Wert von 1 besagt, dass es keine Differenzen zwischen den gepaarten Eigenvektoren an dem untersuchten Freiheitsgrad gibt

$$COMAC(i) = \frac{\sum_l |(\hat{x}_{xl}(i) \cdot \hat{x}_{yl}(i))|^2}{\sum_l (\hat{x}(i)_{xl})^2 \cdot \sum_l (\hat{x}(i)_{yl})^2} \tag{5.23}$$

Hingegen deutet ein COMAC-Wert von 0 auf keine Übereinstimmung hin. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, Stellen mit geringem COMAC-Wert genauer zu untersuchen, weil hier größere Unterschiede zwischen den untersuchten Systemen vorliegen.

5.3 Einflusszahlen als Schädigungsindikator

Die 1994 von A. Lenzen verwendeten Schädigungsindikatoren bauen auf einer systemtheoretischen Betrachtungsweise auf und wurden von ihm, im Falle von Impulserregungen und Abschaltvorgängen, eingesetzt.

Die dynamischen Einflusszahlen F_{dyn} stellen eine Erweiterung der statischen Einflusszahlen δ_{ik} dar. Einflusszahlen sind diskrete Lösungen der Green'schen Funktionen und die Inverse der Steifigkeitsmatrix. Ihre Berechnung erfolgt durch eine Reihenentwicklung der sogenannten Übertragungsmatrix $H(s)$ (Gleichung 5.28), die eine Beziehung zwischen Ein- und Ausgangsverhalten des zuvor realisierten Black-Box Systems aufweist. Da y und u direkt messbar sind, ergibt sich der Zusammenhang

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t F_{dyn,i} e^{\lambda_i(t-\sigma)} u(s) d\sigma, \tag{5.24}$$

welcher durch Laplace-Transformation auch als Übertragungsfunktion darstellbar ist

$$\begin{aligned} y(s) &= \sum_{i=1}^n F_{dyn,i} \frac{1}{(s - \lambda_i)} u(s) \\ &= H(s)u(s). \end{aligned} \tag{5.25}$$

Greift man Gleichung 5.25 auf und stellt sie in anderer Form dar

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B, \tag{5.26}$$

erhält man durch die Reihenentwicklung von $(sI - A)^{-1}$ mit $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ den Ausdruck

$$H(s) = \frac{CIB}{s} + \frac{CAB}{s^2} + \frac{CA^2B}{s^3} + \dots + \frac{CA^{i-1}B}{s^i} + \dots \tag{5.27}$$

Es lässt sich nach einer Transformation von $\{A, B, C\}$ auf Jordanform $\{T^{-1}AT, T^{-1}B, CT\}$, für jedes einzelne Reihenglied eine dyadische Zerlegung angeben. Durch sortieren der einzelnen Reihenglieder findet man die Form

$$H(s) = \frac{\tilde{c}_1 \otimes \tilde{b}_1^T}{s - \lambda_1} + \frac{\tilde{c}_2 \otimes \tilde{b}_2^T}{s - \lambda_2} + \frac{\tilde{c}_3 \otimes \tilde{b}_3^T}{s - \lambda_3} + \dots + \frac{\tilde{c}_n \otimes \tilde{b}_n^T}{s - \lambda_n} \tag{5.28}$$

Diese Reihenentwicklung stellt den Zusammenhang zwischen Systemparametern und dynamischen Einflusszahlen für jeden Freiheitsgrad her

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{\mathbf{c}}_i \otimes \tilde{\mathbf{b}}_i^T}{(s - \lambda_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{F}_{dyn,i}}{(s - \lambda_i)} \quad (5.29)$$

Durch den Vergleich der dynamischen Einflusszahlen zwischen einem geschädigten und einem ungeschädigten Referenzsystem, lässt sich durch das Anwachsen der Differenz der Einflusszahlen der Ort der Schädigung lokalisieren.

Die Einflusszahlen können - analog zu den Eigenvektoren bei der modalen Analyse von realen Strukturen - komplex sein. Ein Vergleich mit den reellen Vektoren aus der numerischen Simulation und der gemessenen Vektoren muss daher möglich gemacht werden. Eine Umwandlung der komplexen Zahl in den reellen Zahlenbereich kann entweder durch die Projektion auf die reelle oder die imaginäre Achse erfolgen.

5.4 Steigungen als zusätzlicher Schädigungsindikator

Eine zusätzliche Information, die aus den Eigenformen und den Einflusszahlen gewonnen wird, ist die Steigungslinie. Sie ist die Ableitung der Biegelinie, welche numerisch beispielsweise durch den zentralen Differenzenquotienten hervorgeht.

Die Berechnung der Ableitungen mit einem Differenzenquotient hat Vorteile, weil wie bei einem kontinuierlichen System, durch ihn Ableitungen an allen n zur Verfügung stehenden diskreten Punkten möglich sind. Grundsätzlich gibt es drei verschiedene Differenzenquotienten, den vorderen, den zentralen und den hinteren Differenzenquotienten. Meist wird allerdings nur der zentrale Differenzenstern benutzt.

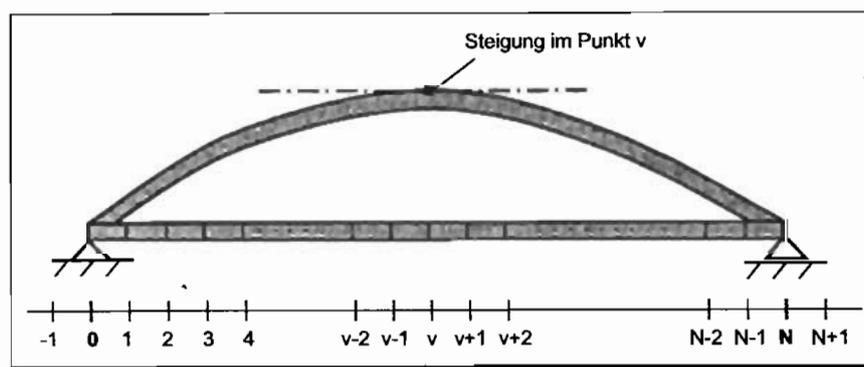


Abbildung 5.3: Ableitung mit Differenzenquotienten

Bei einer einfachen Bestimmung der Ableitungen durch die Steigung zwischen zwei Punkten geht in jedem Fall die Information über die Steigung im letzten Punkt verloren. Dies wird durch die Berücksichtigung der Randbedingungen bei der Bildung des Differenzensternes vermieden. Für

den zentralen Differenzenstern ergeben sich dann folgende Formeln:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2 \Delta x} \quad (5.30)$$

$$y''_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (5.31)$$

$$y'''_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2 \Delta x^3} \quad (5.32)$$

$$y^{(4)}_i = \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{\Delta x^4} \quad (5.33)$$

Zu erkennen ist in Gleichung 5.30 und Bild 5.3, dass bei der ersten Ableitung zusätzlich zwei diskrete Punkte benötigt werden y_{-1} und y_{n+1} . Da für diese Punkte aus der diskreten Funktion keine Werte gewonnen werden können, müssen ihre Werte aus den Randbedingungen folgen.

In der Anwendung hat sich gezeigt, dass die Veränderungen der Steigungslinien besonders sensitiv bei Steifigkeitsänderungen waren. Genau wie die Einflusszahlen, benutzt man die Differenz eines Referenzsystems zu einem geschädigten System als Indikator.

5.5 Beispiele zum Einsatz der Subspace-Methoden in der Modalanalyse

5.5.1 Analyse eines Balkens

Der Balken, der in Abschnitt 4.4.1 bei der Identifikation untersucht wurde, soll auch bei der Analyse der Eigenformen bzw. der Einflusslinien betrachtet werden. Das Balkensystem besteht aus einem dünnwandigen Hohlprofil das mit einem Festlager und einem Loslager versehen wurde. Die Dimensionen sind der Abbildung 5.5 zu entnehmen.

Die Auslenkungen des Balkens wurden mit vier hochempfindlichen Beschleunigungsaufnehmern gemessen. Die genauen Positionen der Beschleunigungsaufnehmer findet man ebenfalls in der Abbildung 5.5.



Abbildung 5.4: Laborbalken mit Sensorapplikation

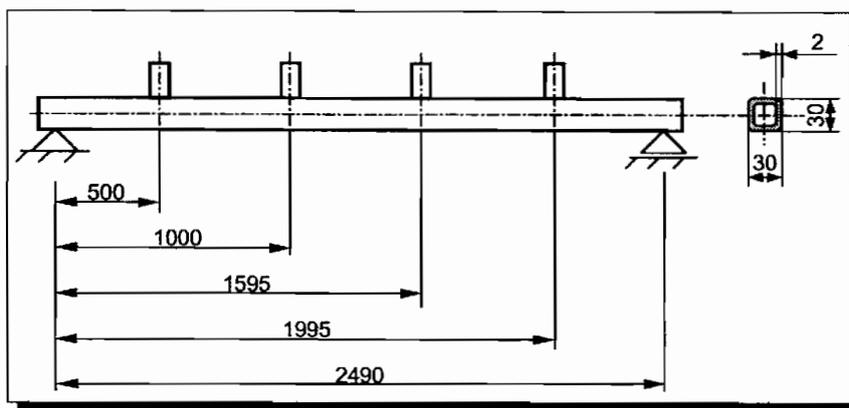


Abbildung 5.5: Positionen der Beschleunigungsaufnehmer

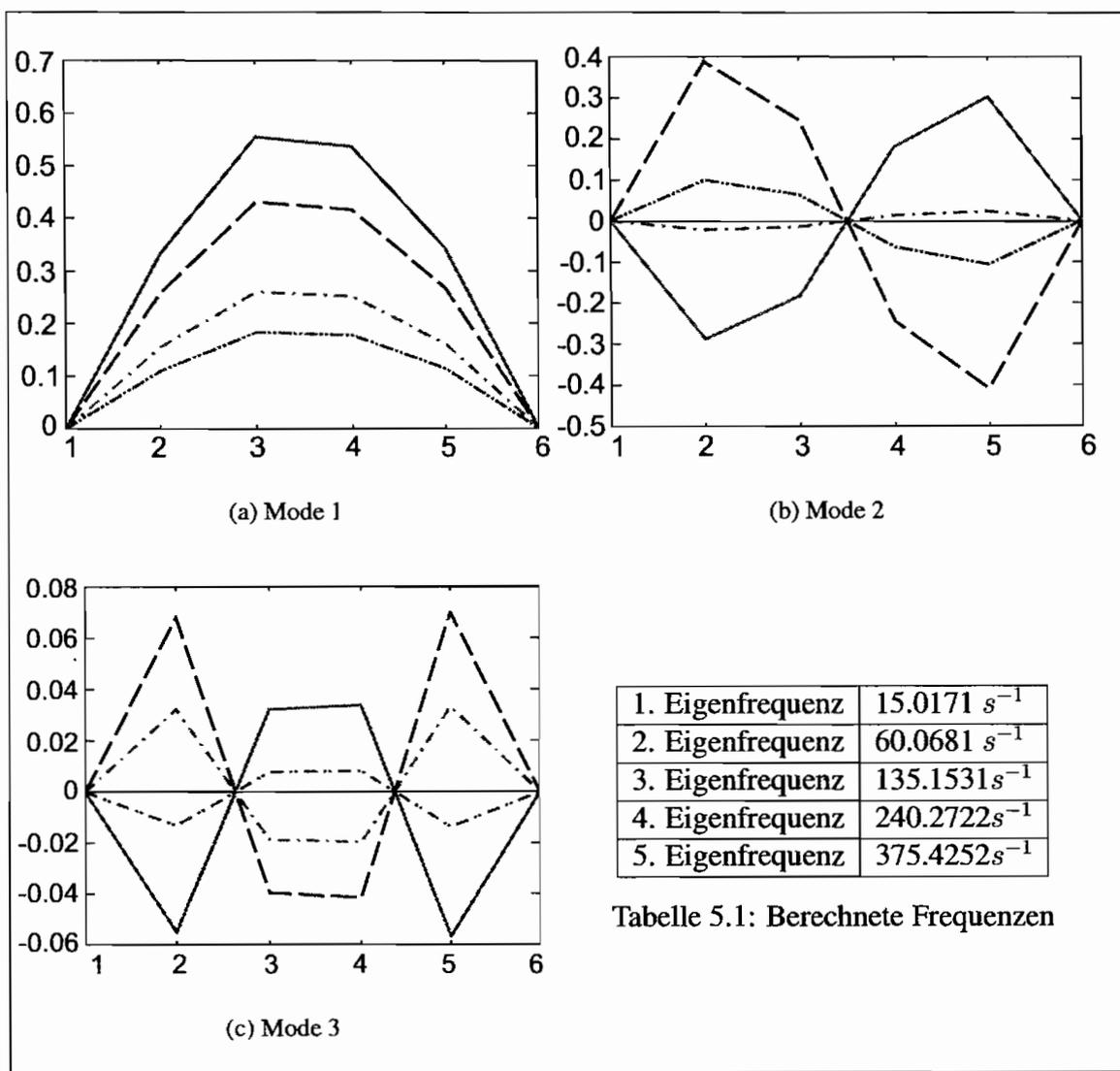


Abbildung 5.6: Die ersten drei Einflusslinien des Laborbalkens

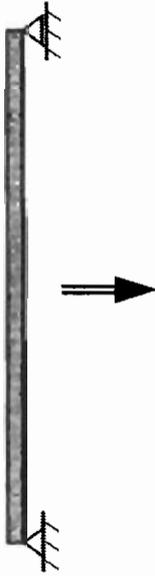
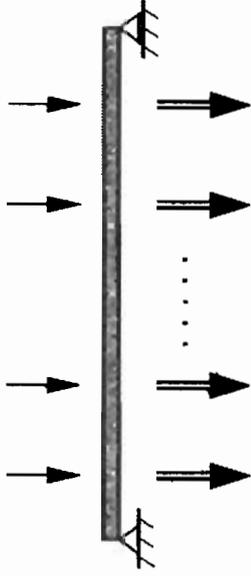
| Unterschied zwischen Eigenformen und Einflusszahlen in der Modalanalyse | | Einflusszahlen |
|--|---|--|
| Eingang | Eigenformen | Einflusszahlen |
| System | $u = 0$ | $u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{n-1} \quad u_n \neq 0$ |
| |  |  |
| Ergebnis | • Eigenformen zu ω_j | • Einflusszahlen zu ω_j von u_j |
| | $\Phi_j = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ | $F_{dyn_j} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ |
| Normierung | • über Masse | • über Intensität des Eingangs |

Abbildung 5.7: Unterschied von Eigenformen und Einflusslinien

Die Einflusslinien die mit der Subspace-Methode in den Abbildungen 5.6(a), 5.6(b) und 5.6(c) berechnet wurden, sind grundsätzlich identisch mit den Eigenformen, welche durch die Modalanalyse gewonnen werden können.

Der einzige Unterschied zwischen den gefundenen Ergebnissen liegt in der Normierung. Bei der Modalanalyse ist es üblich eine Normierung vorzunehmen, die sich auf die Masse bezieht – in manchen Fällen wird aber auch der Maximalwert der Eigenform auf eins gesetzt. Die Normierung der Subspace-Methoden berücksichtigt demgegenüber die realen physikalischen Gegebenheiten der Struktur. Dies kann beim Ausschwingen eines ausgelenkten Balkens im Mode 1 die statische Auslenkung sein.

In den Bildern zu den ersten drei Eigenformen, deren gemessene Frequenzen bei 13.9 Hz , 55.4 Hz und 128.2 Hz liegen, sind jeweils vier Formen abgebildet. Dies resultiert aus vier separaten Messungen, wobei die Erregerstelle, die jeweils an einem der Sensoren lag, wechselte. Bei vollkommener Symmetrie sollten die Amplituden der Einflusslinien/Eigenformen paarweise gleich sein. Da es im Versuch aber sehr schwierig ist, vollkommene Symmetrie zu gewährleisten und die Erregerintensität ebenfalls leicht variiert, kommt es nicht zu dieser Übereinstimmung. Bei den FE-Simulationen ist diese aber stets möglich. Abweichungen der gemessenen und theoretischen Frequenz sind auf die nichtidealen Lagerungen zurückzuführen und auch bei einer Fourier-Analyse zu finden.

Damit wurde die Eignung der Methoden zur Untersuchung der Eigenformen für kleine mechanische Strukturen gezeigt. Der Vorteil des zusätzlichen Informationsgewinnes durch die Verwendung der physikalisch normierten Einflusslinien lässt vielleicht schon das Potential bei der Schädigungsanalyse erahnen. Im nächsten Schritt wird die Methode zuerst an einem System mit mehr Freiheitsgraden angewendet.

5.5.2 Analyse einer Platte

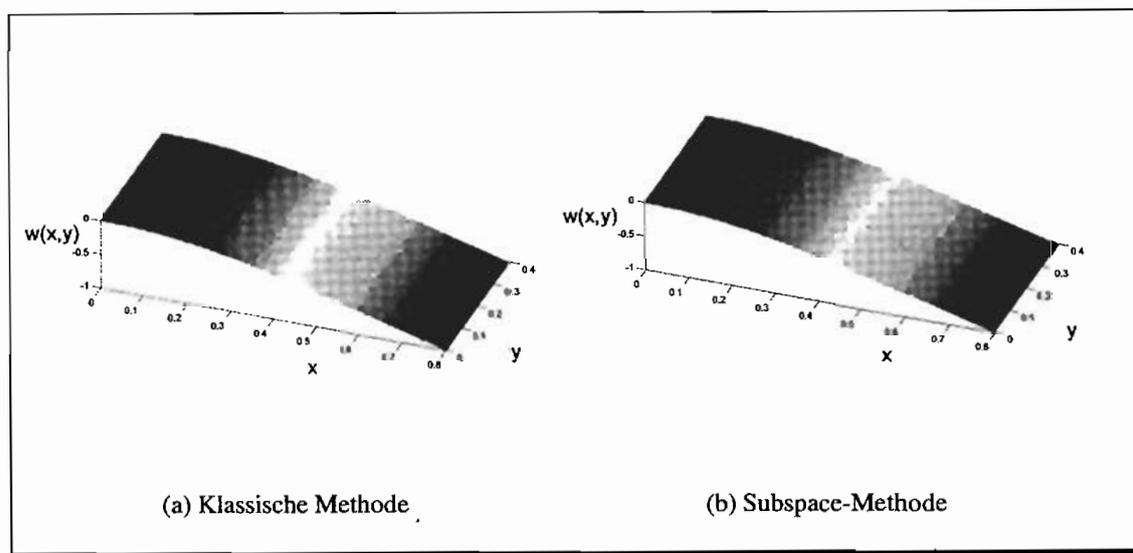


Abbildung 5.8: Vergleich der normierten Eigenformen einer eingespannten Platte: Mode 1

In einem weiteren Beispiel, bei dem die Subspace-Methode im Vergleich zu den für diese Anwendung bisherigen Standardverfahren benutzt wird, soll eine Plattenstruktur als Anschauungsobjekt dienen.

Die benutzte Platte wurde einseitig fest eingespannt und in 100 Elemente diskretisiert. Dabei kam es zur Verwendung eines einfachen linear-quadratischen Elementes mit vier Knoten und vier Rändern. Jeder Knoten wurde durch drei Translations- und drei Rotationsfreiheitsgrade beschrieben.

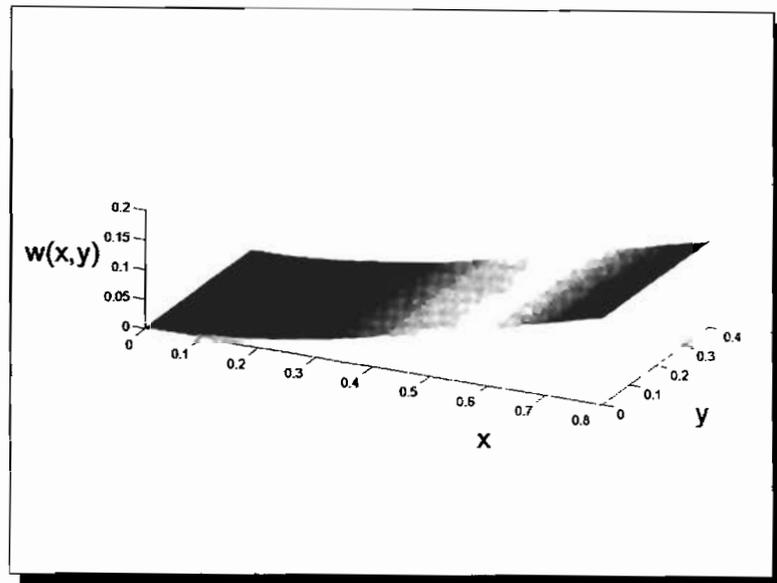


Abbildung 5.9: Physikalische Normierung auf den Eingang zur Zeit t_0 : Mode 1 (Subspace-Methode)

Die 100 Elemente sind durch insgesamt 121 Knoten miteinander verbunden worden. Am 121. Knoten wurde die äußere Belastung, in Form eines Dirac-Impulses, auf die Struktur aufgebracht und der Zeitverlauf für die Analyse mit der Subspace-Methode aufgezeichnet.

Dabei ist zum Vergleich der einzelnen Moden der linke Graph mit der konventionellen Modalanalyse und der rechte mit der Subspace-Methode berechnet worden. Da die Einflusslinien der Subspace-Methode nicht wie in der Modalanalyse üblich auf einen festen Wert normiert werden, sondern ihre physikalische Anfangsauslenkung wiedergeben, mussten sie zu diesem Zweck nachträglich normiert werden. Der Maximalwert der Form sollte dabei den Wert eins betragen. In Abbildung 5.9 ist zur Verdeutlichung zusätzlich zu den Abbildungen 5.8(a) 5.8(b) noch die physikalische Normierung der Einflusszahlen angegeben.

In der Tabelle 5.2 sind die mit der FE-Methode und der Subspace-Methode ermittelten Eigenfrequenzen zusammengefasst. Da es sich um simulierte Messdaten für die Identifikation handelte, lagen die Abweichungen der ermittelten Eigenfrequenzen im Rahmen der Rechnergenauigkeit.

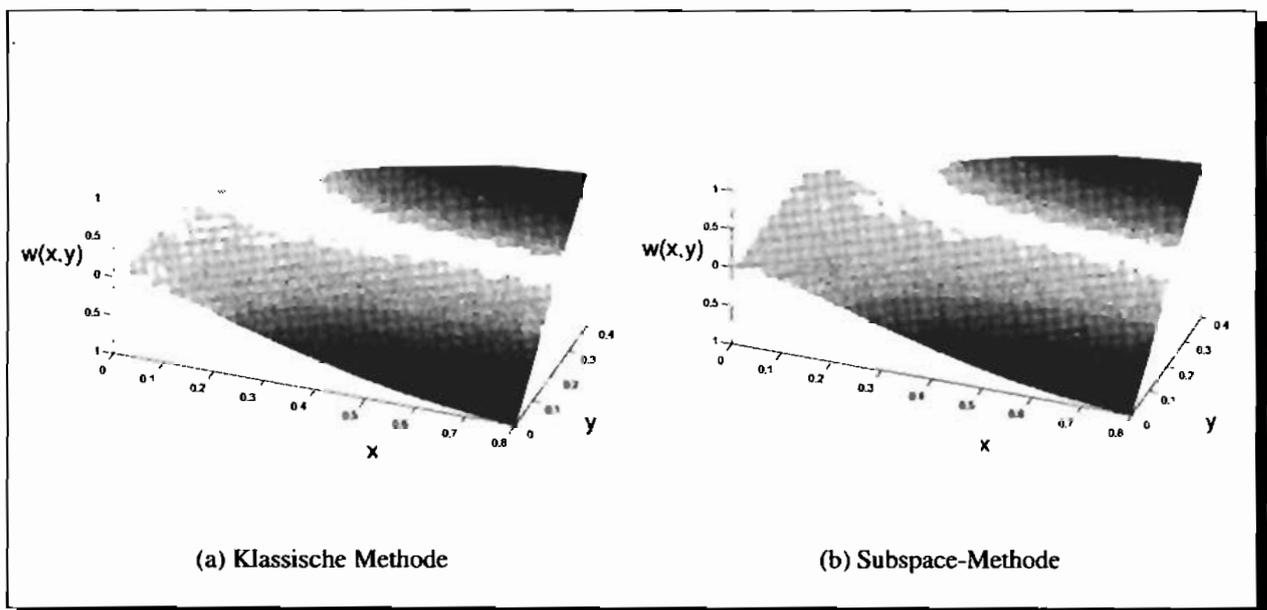
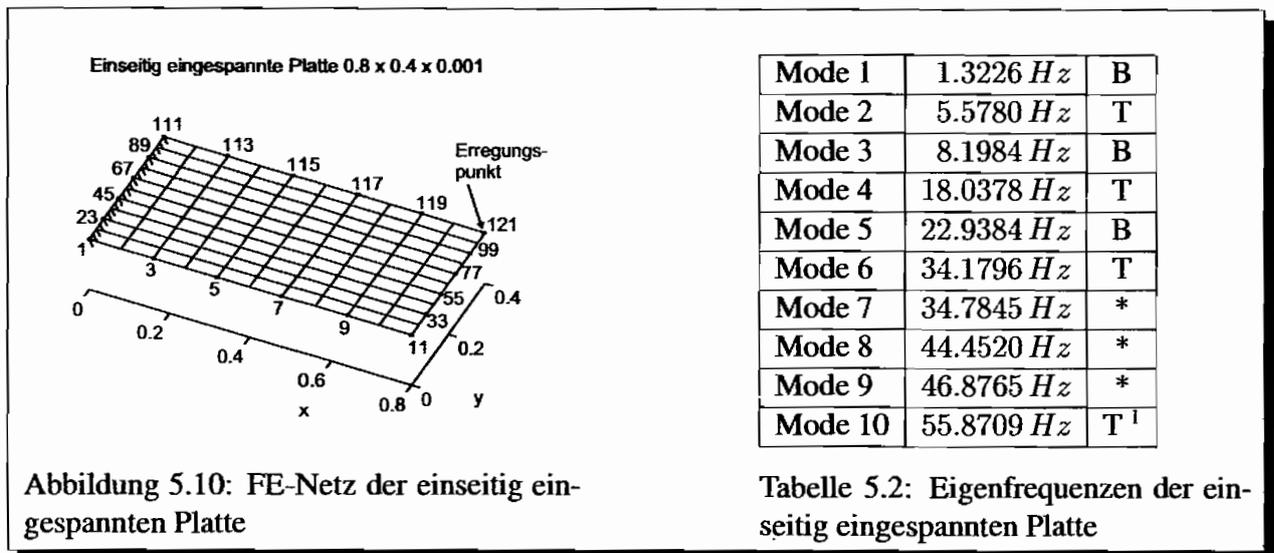


Abbildung 5.11: Vergleich der normierten Eigenformen einer eingespannten Platte: Mode 2

¹B entspricht einer Biegeschwingung;
 T entspricht einer Torsionsschwingung
 * ist eine Mischform

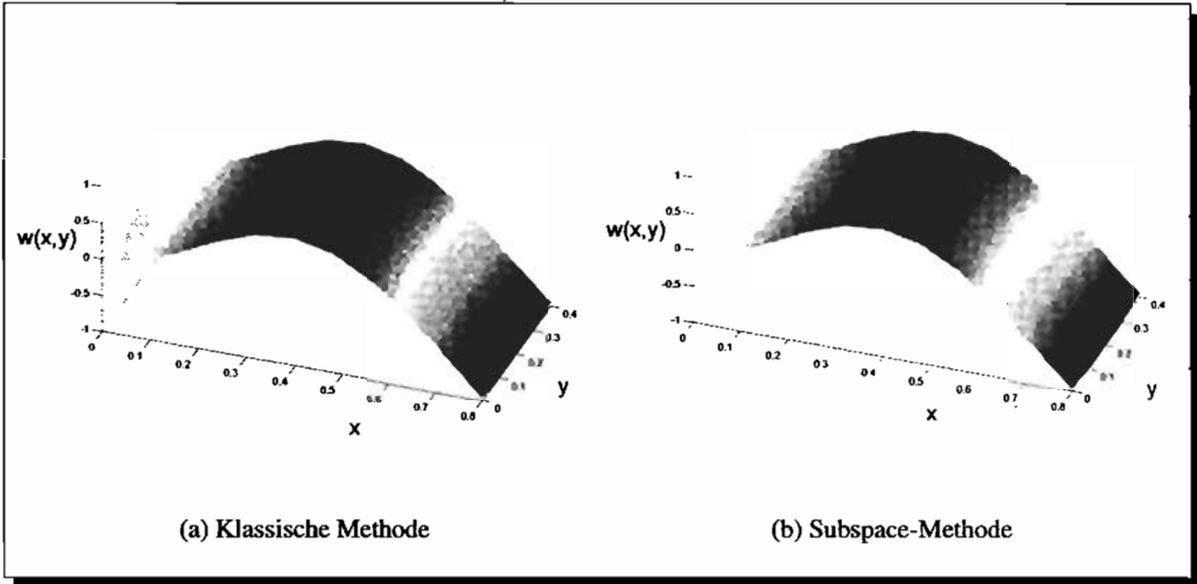


Abbildung 5.12: Vergleich der normierten Eigenformen einer eingespannten Platte: Mode 3

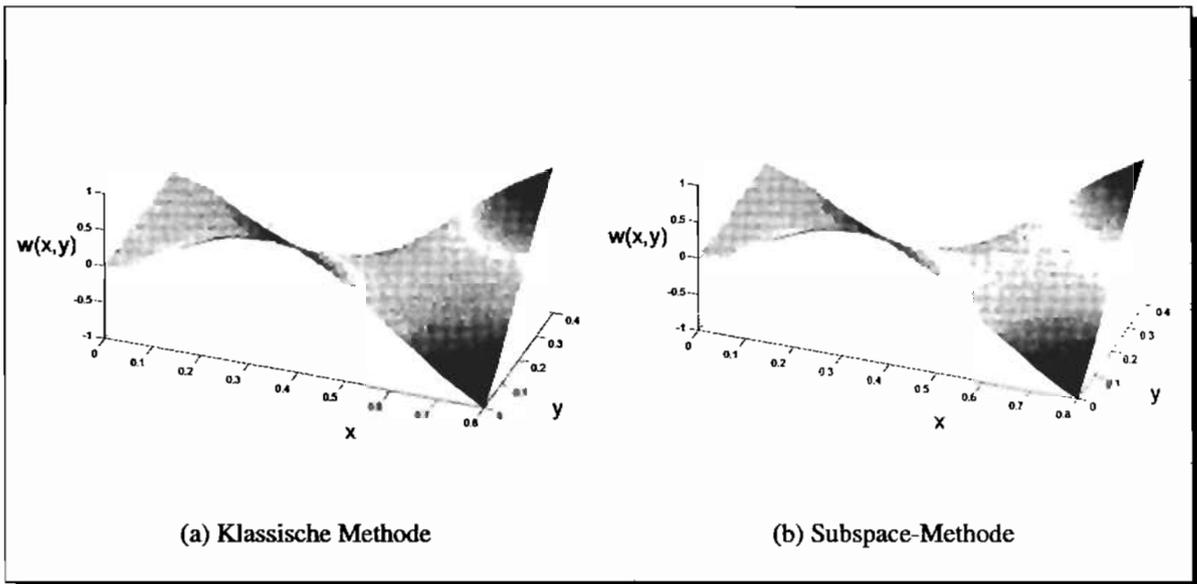


Abbildung 5.13: Vergleich der normierten Eigenformen einer eingespannten Platte: Mode 4

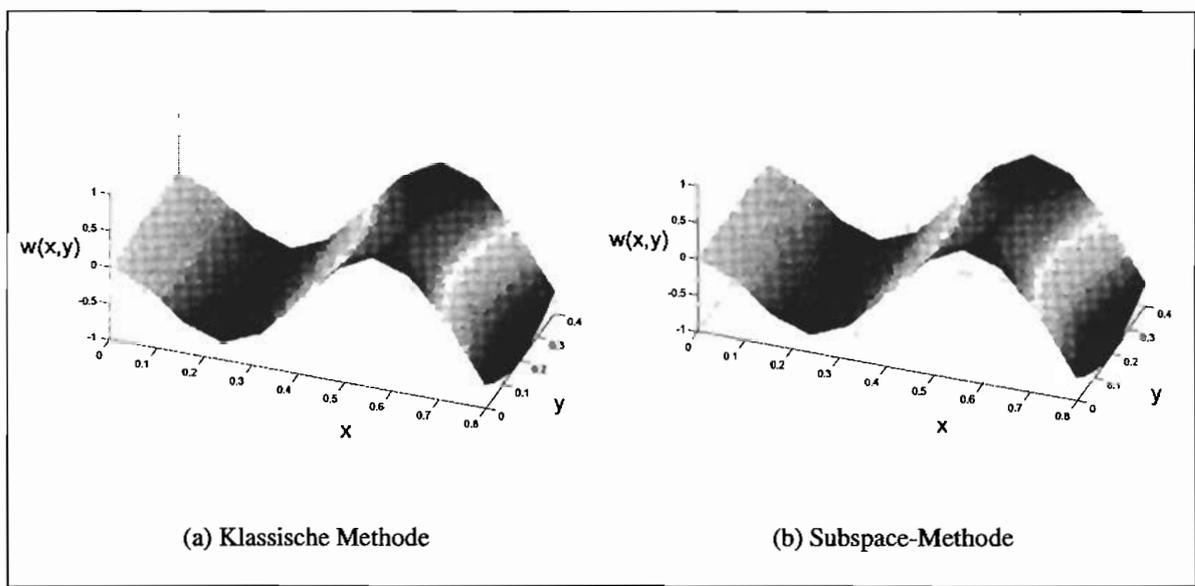


Abbildung 5.14: Vergleich der normierten Eigenformen einer eingespannten Platte: Mode 5

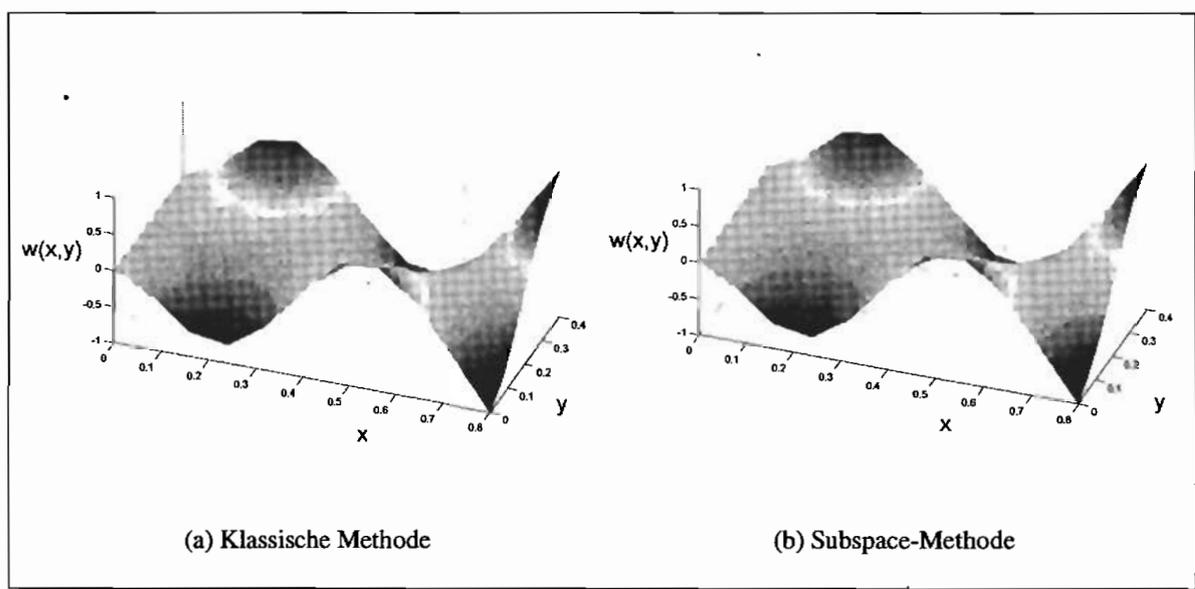


Abbildung 5.15: Vergleich der normierten Eigenformen einer eingespannten Platte: Mode 6

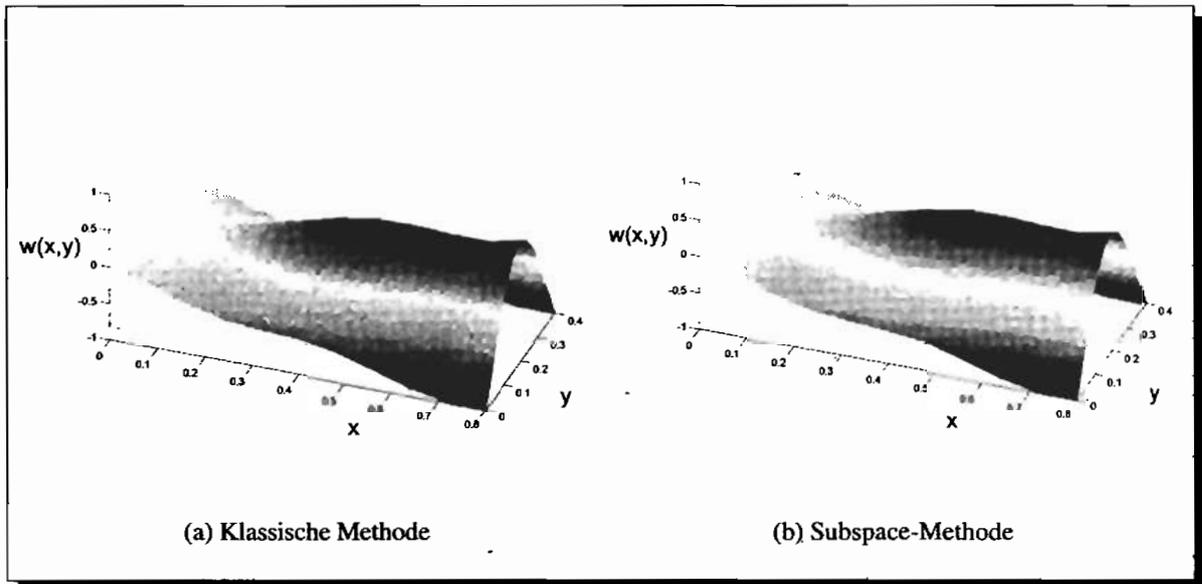


Abbildung 5.16: Vergleich der normierten Eigenformen einer eingespannten Platte: Mode 7

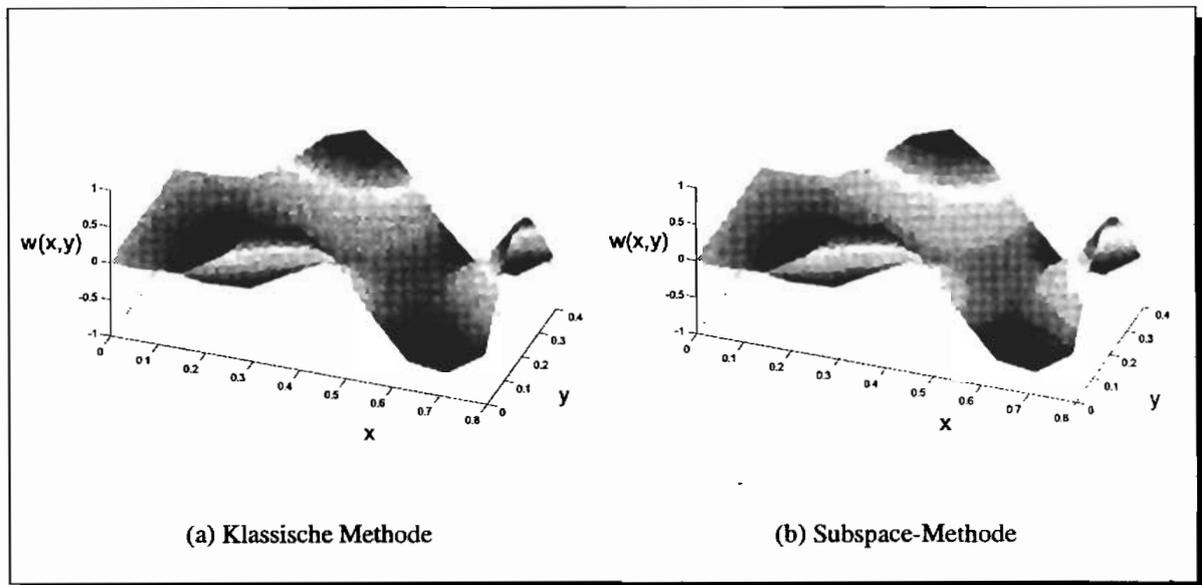


Abbildung 5.17: Vergleich der normierten Eigenformen einer eingespannten Platte: Mode 8

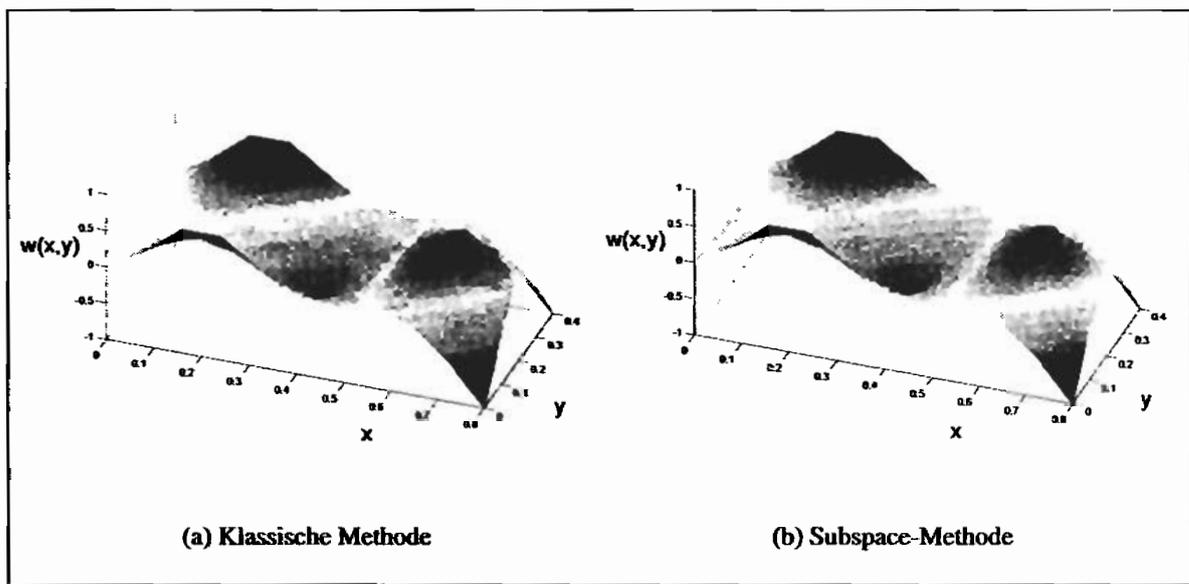


Abbildung 5.18: Vergleich der normierten Eigenformen einer eingespannten Platte: Mode 9

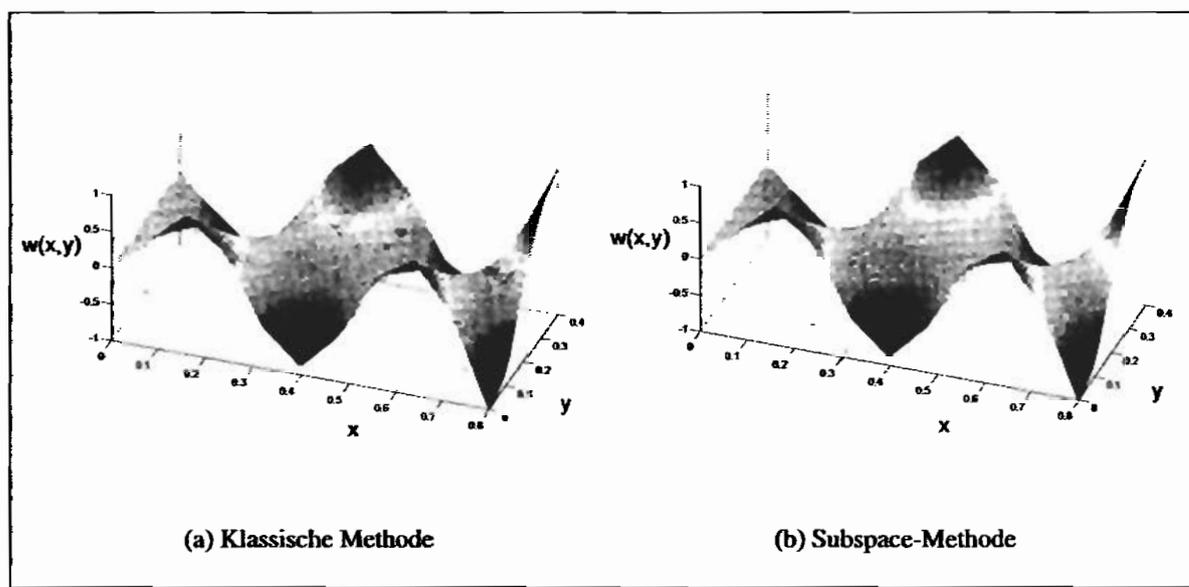


Abbildung 5.19: Vergleich der normierten Eigenformen einer eingespannten Platte: Mode 10

Aus den Graphen ist die Gleichwertigkeit beider Verfahren zu erkennen, man kann also aus den gemessenen Daten sehr gut eine Analyse der Eigenformen und Frequenzen vornehmen. Diese sind im Fall der Simulation, im Rahmen der Rechengenauigkeit, gleich. Somit ist für die experimentelle Modalanalyse ein zusätzliches Werkzeug gefunden worden, welches mit wenig Aufwand hervorragende Ergebnisse liefert.

5.6 Anmerkungen zum model updating und der Schädigungslokalisierung mit den Subspace-Methoden

In dem vorangegangenen Abschnitt sind die Subspace-Methoden als ein besseres Werkzeug zur Modalanalyse vorgestellt worden. Damit wurde gleichzeitig die Möglichkeit geschaffen, mit diesen Methoden ein bestehendes FE-Modell zu korrigieren, so wie es bisher mit der Fourier-Transformation durchgeführt wurde.

Die Notwendigkeit einer solchen Vorgehensweise steht außer Frage, weil gerade bei komplexen Systemen wie Autos, Motoren usw. eine Korrektur zu einem realitätsnahen Modell stark gefragt ist und die Verwendung der FE-Methode in der Entwicklungsphase dieser Systeme immer häufiger angewendet wird.

Da die besseren Identifikationsergebnisse mit der Subspace-Methode auch einen besseren Abgleich von Modell und Realität implizieren, ist in dieser Hinsicht noch ein weiterer Fortschritt des Modellabgleichs zu erwarten.

Zusätzlich zum reinen *updating*, ist ein weiteres Anwendungsgebiet im Hinblick auf die Schadenslokalisierung denkbar. Man wird dann nicht mehr ein Referenz-Modell durch eine FE-Modellierung betrachten, sondern ein reales ungeschädigtes Referenzsystem, mit einem in periodischen Abständen zu untersuchenden System. Durch die Änderungen die sich dann bei einem Vergleich ergeben, lassen sich Rückschlüsse auf den Ort der Schädigung ziehen.

Um ein bestehendes FE-Modell zu korrigieren, muss man sich im ersten Schritt Gedanken über die Parameter machen, welche eine Hilfe bei der Korrektur darstellen können. In diesem Zusammenhang wird immer von der Sensitivität der Parameter gesprochen [69] [24], die Parameter sollen sensitiv gegenüber der Veränderung des zu betrachtenden Systems sein. Nun kann man sich die Frage stellen, welche Parameter diese Eigenschaften erfüllen? Die meisten Autoren äußern sich nämlich nur sehr zurückhaltend und geben meist nur die Frequenz und zusätzlich die Eigenformen als sensitive Parameter an.

In dem nachfolgenden Kapitel 6 ist aber auch zu erkennen, dass die Betrachtung von Frequenzen und Eigenformen nur begrenzt als sensitiv zu bezeichnen ist, weil diese nicht in jedem Fall auf die Systemveränderung reagieren und dieses, nach der Erfahrung des Autors auch sehr stark vom Ort der Einwirkung abhängt. Die Betrachtung der Einwirkung trägt in jedem Fall den größten Teil zur eigentlichen Schadenslokalisierung bei, weil viele Schädigungen erst durch die gezielte Variation des Erregungsortes lokalisiert werden konnten. Demzufolge ist die Abweichung oder Veränderung bei den Parametern eher als gering zu bezeichnen und für die geforderte Sensivität beim *updating* im ersten Schritt ungeeignet.

Ein allgemeines Problem der Modellkorrektur ist allerdings der Informationsgehalt der Messwerte an sich, weil man entweder das komplette Zeitsignal untersuchen muss, mit der komplexen Fülle aller ihm enthaltenen Informationen oder eine Betrachtung des Frequenzbereiches vornimmt, was einer Reduktion der Informationen gleichkommt. Wie schon erwähnt, können auch nicht alle in einem Rechenmodell enthaltenen Freiheitsgrade durch die Messtechnik Berücksichtigung finden. Zusätzlich stellen die Messfehler und alle sonstigen Verunreinigungen eine große Beeinflussung

des gewünschten Ergebnisses dar, sodass ein geeigneter Weg gefunden werden muss, um möglichst realitätsnahe Resultate zu erzielen.

Um eine Modellkorrektur vorzunehmen, muss noch die Entscheidung getroffen werden, welches Korrekturverfahren angewendet werden soll. Es gibt auf diesem Gebiet nämlich eine Vielzahl von Methoden, welche sich in zwei Hauptgruppen einteilen lassen. Die direkten und die iterativen Methoden.

Bei den direkten Methoden hat man den Vorteil, dass in einem Schritt die Veränderungen im FE-System zu ermitteln sind. In diesem Fall hat man ein Gütekriterium welches ein Minimum annehmen soll (hier nach Baruch und Bar-Itzhack 1978)

$$J = \|\mathbf{M}_{FEM}^{1/2}(\Phi_{FEM} - \Phi_{Mess})\|. \quad (5.34)$$

Damit berechnet sich eine korrigierte Modalmatrix durch

$$\Phi = \Phi_{Mess}[\Phi_{Mess}^T \mathbf{M}_{FEM} \Phi_{Mess}]^{-1/2} \quad (5.35)$$

und ein weiteres Gütefunktional erlaubt die Berechnung einer korrigierten Steifigkeitsmatrix

$$J = \|\mathbf{M}_{FEM}^{-1/2}(\mathbf{K} - \mathbf{K}_{FEM})\mathbf{M}_{FEM}^{-1/2}\| \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \mathbf{K}_{FEM} - \mathbf{K}_{FEM} \Phi \Phi^T \mathbf{M}_{FEM}^{-1} - \mathbf{M}_{FEM}^{-1} \Phi \Phi^T \mathbf{K}_{FEM} \\ & + \mathbf{M}_{FEM}^{-1} \Phi \Phi^T \mathbf{K}_{FEM} \Phi \Phi^T \mathbf{M}_{FEM}^{-1} + \mathbf{M}_{FEM}^{-1} \Phi \text{diag}(\omega_{Mess}) \Phi^T \mathbf{M}_{FEM}^{-1} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Bei den iterativen Methoden gibt es wiederum eine Vielzahl von Möglichkeiten eine Systemoptimierung zu erzielen. Das Problem dieser Methoden ist die Gewährleistung der Stabilität bei jedem Iterationsschritt.

Jedes der vorgestellten Verfahren ist mit den Subspace-Methoden zu behandeln. Aufgrund der Ergebnisse im Vergleich mit den bisherigen Methoden, ist auch auf dem Gebiet des model updating mit guten Ergebnissen zu rechnen. Als weiterführende Literatur sei in diesem Zusammenhang auf [24] verwiesen.

Da die Veränderungen von Steifigkeits- und Massenmatrizen in einem direkten Zusammenhang zum Ort der Schädigung stehen, lassen sich auch durch die korrigierten Matrizen gewisse Aussagen über Systemveränderung und Orte der Schädigung vornehmen. Dies ist allerdings nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Kapitel 6

Beispielrechnungen und Verifikation an ausgesuchten Objekten

Die mit den vorgestellten Subspace-Methoden erzielten Ergebnisse an den einzelnen Versuchsobjekten – Kirchturm, Laternenmast und Laborbalken –, sind in diesem Kapitel zusammengefasst.

Die Ergebnisse, die am Beispiel des Kirchturmes erzielt wurden, beziehen sich nur auf die Identifikation, während die erzielten Erfolge bei der Schädigungslokalisierung an den anderen beiden Versuchsobjekten, Laternenmast und Laborbalken, in Bezug auf die gefundenen Massen- und Steifigkeitsänderungen dokumentiert sind.

6.1 Identifikation des Kirchturms in Marl-Lenkerbeck

Bei dem ausgewählten Kirchturm in Marl-Lenkerbeck handelt es sich um einen freistehenden Glockenturm, der aus einem Betonfundament mit einem Stahlaufbau besteht. Als Stahlkonstruktion zur Lagerung des Glockenstuhls wurden drei ca. 3 m hohe Stahlrahmenquader mit einer Breite von $2.4\text{ m} \times 2.4\text{ m}$ aus Breitflanschträgern miteinander verschraubt. An der Verbindungsstelle des ersten Quaders mit dem zweiten, ist eine Holzdecke eingezogen, welche den eigentlichen Glockenstuhl von der Umgebung nach unten abtrennt.

Die Rahmen sind mit insgesamt vier Eckwinkeln und 12 aufgeschweißten Winkeln versehen, welche als Träger für eine Holzverschalung oder Schallblende dienen und den Turm zusätzlich versteifen.

Die Holzverschalung an dem mittleren Quader ist aus 25 mm dickem Eichenholz und die Schallblenden aus 30 mm Eichenholz. Der eigentliche Glockenstuhl besteht aus entsprechend dickerem Eichenholz und trägt vier unterschiedlich große Glocken (siehe dazu, Abbildung 6.1).

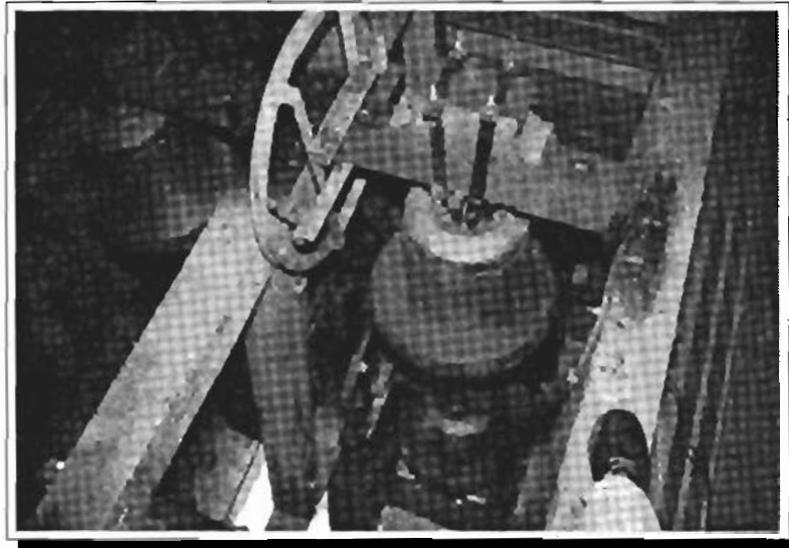


Abbildung 6.1: Anordnung der Glocken im Kirchturm

Ziel der Untersuchung des Glockenturms, sollte die Praxistauglichkeit der vorgestellten Subspace-Methoden bei ambianter Erregung sein. Es wurden an diesem Versuchsobjekt nur Identifikationsmethoden angewendet, weil der Glockenturm verständlicherweise nicht geschädigt werden konnte.

Um die Identifikation vorzunehmen, wurde der Glockenturm mit 15 Beschleunigungs-Sensoren und vier Thermoanemometern zur Bestimmung der Windgeschwindigkeit versehen. Die Anordnung der einzelnen Messpunkte ist in der Abbildung 6.2 dargestellt, in der auch ein Eindruck über die konstruktive Zusammensetzung der Stahlquader gewonnen werden kann. Die Applizierung der Beschleunigungsaufnehmer 1 – 12 erfolgte horizontal in Richtung der Glockenschwingbewegung und die Aufnehmer 13 – 15 dienten der Aufnahme der Vertikalbewegung der Querträger.

Dass leider nicht 15 gleiche Beschleunigungsaufnehmer vorhanden waren, sollte sich als problematisch erweisen, weil es bei den einzelnen Messungen nicht möglich war den Messbereich der Aufnehmer so einzustellen, dass die empfindlichen Sensoren den Messverstärker nicht übersteuerten, während die weniger empfindlichen Sensoren noch kein brauchbares Signal lieferten.

Für die Windmessungen sind deshalb sechs hochempfindliche Sensoren 1-6 und bei der energiereicheren Glockenmessung sechs weniger empfindliche Aufnehmer 7-12 verwendet worden.

Zunächst wurde jedoch versucht den Turm durch einen Ausschwingvorgang zu erregen, um seine Eigendynamik zu ermitteln. Dies missglückte aufgrund der hohen Steifigkeit der Stahlkonstruktion, sodass zuwenig Energie eingebracht werden konnte. Eine Erregung mit dem Impulshammer war ebenso erfolglos, weil nur höher harmonische Schwingungen angeregt wurden.

Aus diesem Grund ist für eine erste Abschätzung ein FE-Modell der Stahlrahmenkonstruktion des Turms erstellt worden, welches einen ersten Eindruck über die vorliegenden Frequenzen liefert.

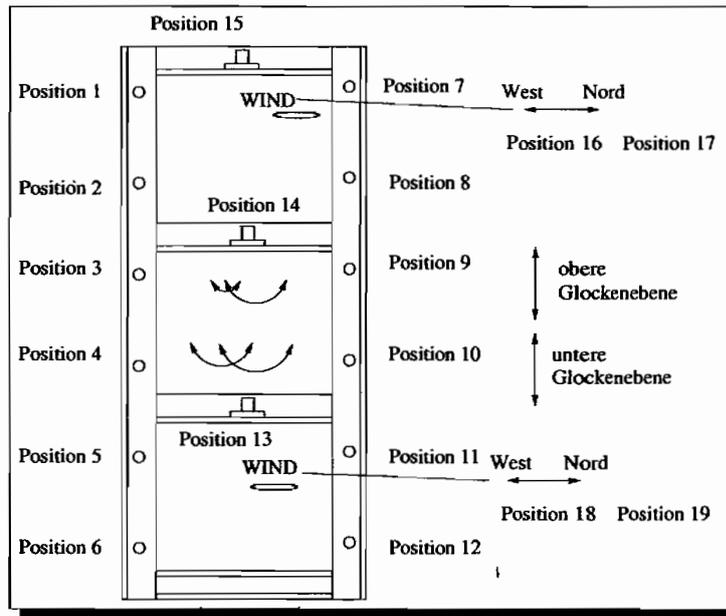


Abbildung 6.2: Prinzipskizze der Sensoranordnung

Das erzeugte FE-Modell bestand aus 584 Elementen mit 572 Knoten. Als Elementtyp wurden einfache lineare Balkenelemente gewählt. In der Abbildung 6.3 ist die Stahlkonstruktion, mit den entsprechenden Diskretisierungen zu finden. Die Verbindung mit dem Betonfundament ist in dieser Abschätzung als fest eingespannte Lagerung modelliert worden.

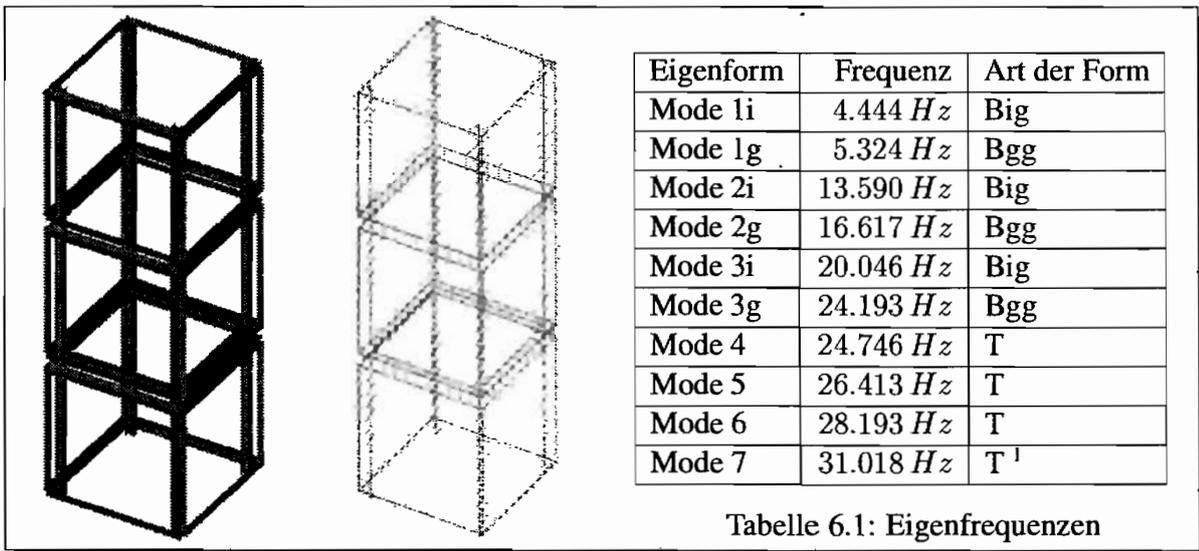


Tabelle 6.1: Eigenfrequenzen

Abbildung 6.3: FE-Modell des Kirchturmes und Frequenzen

¹Big ist eine Biegeschwingung in Glockenschwingrichtung
 Bgg ist eine Biegeschwingung gegen die Glockenschwingrichtung
 T stellt eine Torsionsschwingung dar

Mit dem oben beschriebenen Modell sind die Frequenzen der ersten Eigenformen zu ermitteln. Die Ergebnisse der Berechnung sind in der Tabelle 6.1 und den Abbildungen 6.4(a)-6.4(f) dokumentiert.

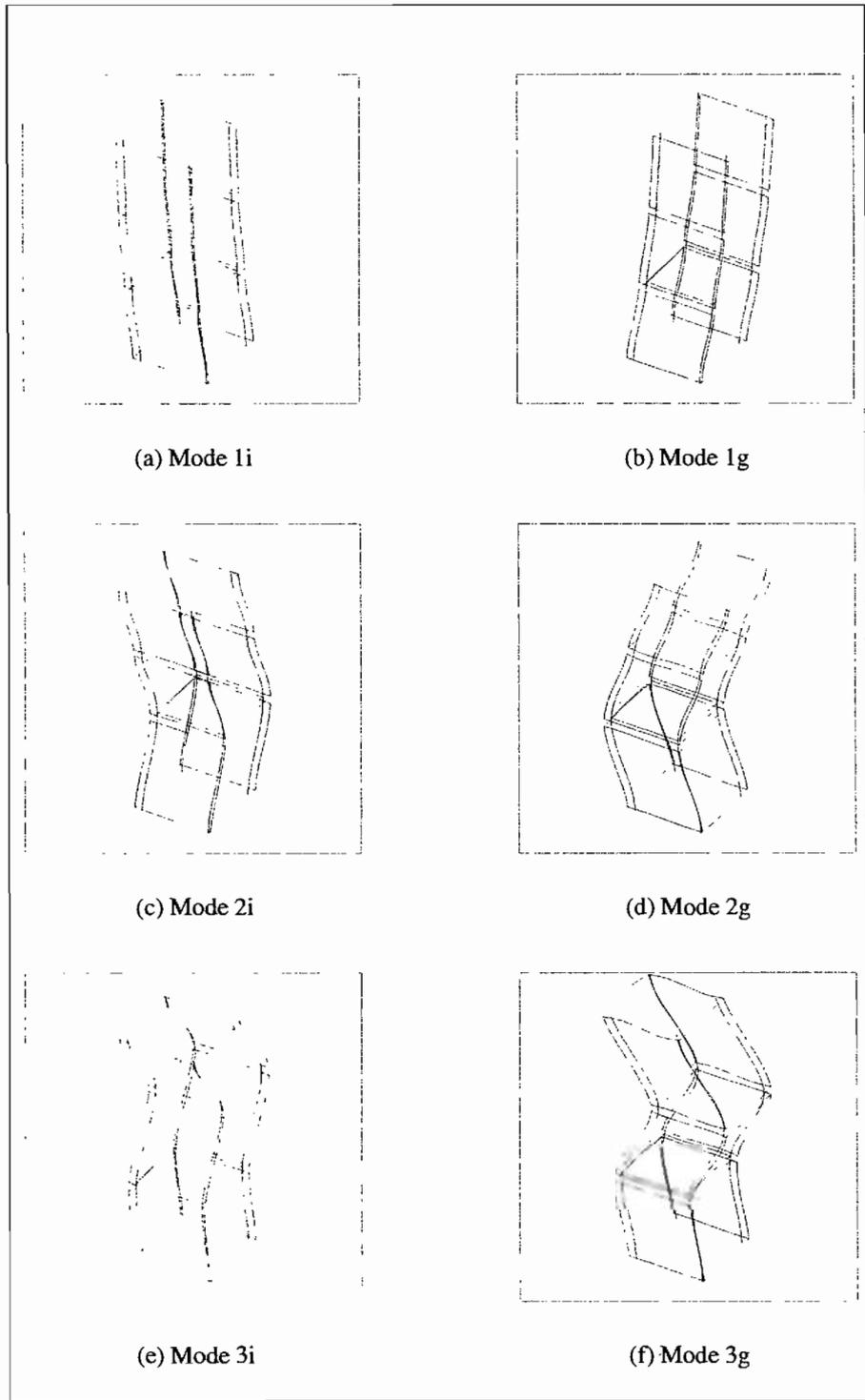


Abbildung 6.4: Schwingungsformen des Kirchturms (FEM)

Im nächsten Schritt wurden die einzelnen Glocken mit Beschleunigungsaufnehmern bestückt, um die Frequenzen der Glocken bei den folgenden Untersuchungen identifizieren zu können. Die gefundenen Glockentöne sind identisch mit denen, die in der DIN 4178 für die Auslegung von Glockentürmen angegeben sind.

Es handelt sich bei den untersuchten Glocken um folgende Frequenzen:

Die große untere Glocke hat eine Frequenz von 260 Hz , die kleinere untere Glocke besitzt eine von 351 Hz , während die große obere Glocke einen Ton von 384 Hz hervorbringt und die obere kleine Glocke mit einer Frequenz von 442 Hz schwingt. Siehe dazu die aufgenommenen Spektren dieser Messungen in den Abbildungen 6.5(a)-6.5(d).

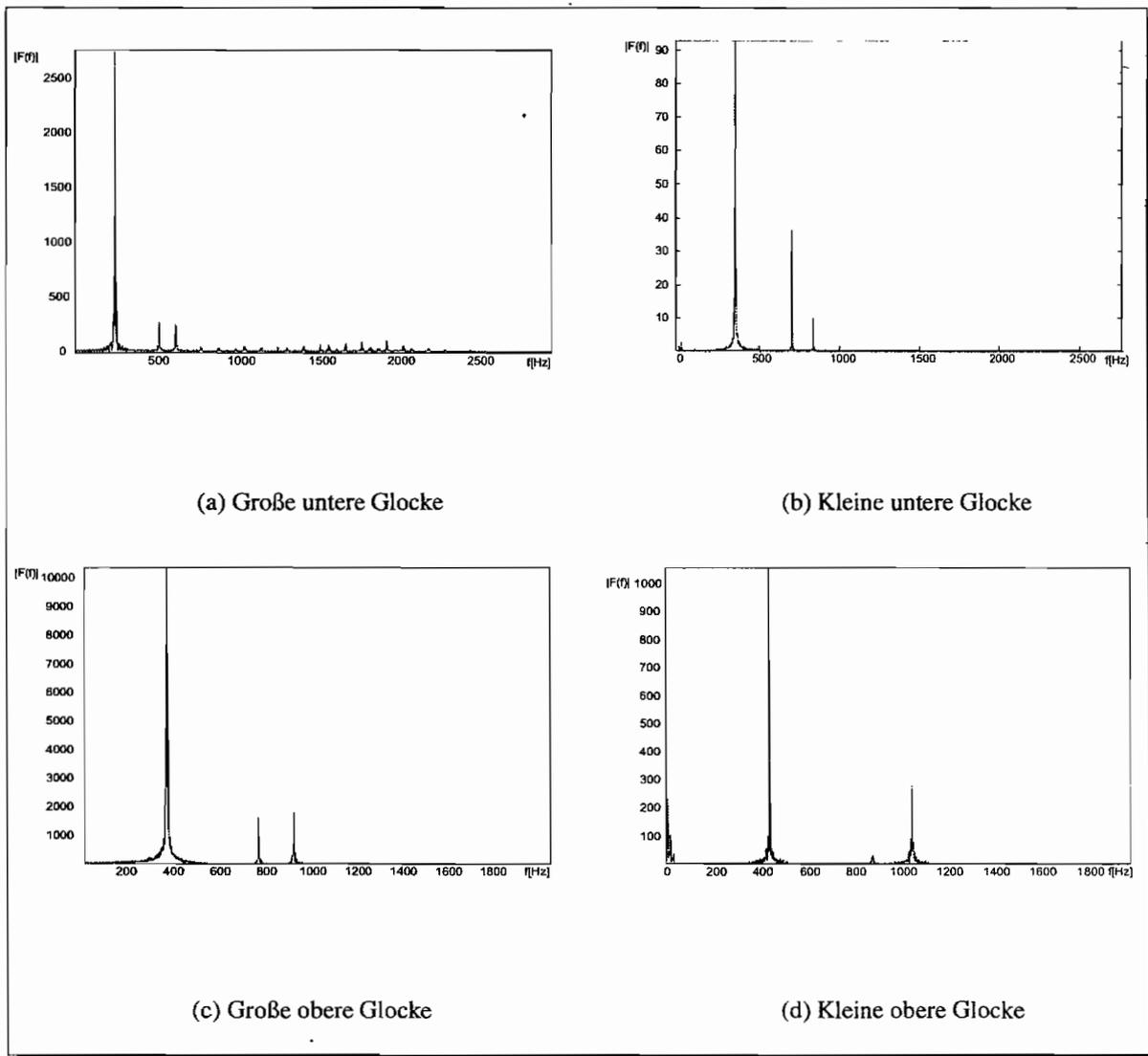


Abbildung 6.5: Spektren der im Turm vorhandenen Glocken

Mit diesem Wissen und dem Wissen, dass die Glocken den Turm in ihren höher harmonischen Schwingungen anregen, sind die Eigenfrequenzen und Formen mit der Subspace-Methode für stochastische Erregungszustände untersucht worden.

Da die Glocken extreme Schalldruckpegel erzeugt ist das Rauschen was durch den Schall auf die Aufnehmer übertragen wurde, enorm. Die höher harmonischen Frequenzen waren so dominant, dass es nicht leicht war gute Ergebnisse zu erzielen. Es konnte aber mit der Subspace-Methode die zweite Eigenfrequenz der Biegschwingung des Turmes in der Glockenschwingrichtung an einer Außenkante gefunden werden. Diese ist in der Abbildung 6.6 dargestellt. Sie weicht relativ stark von der FE-Abschätzung ab, weil bei der Abschätzung die nichtlineare Glockenbewegung nicht berücksichtigt wurde.

Zum Vergleich der Turmschwingungsformen können nochmals die Moden der Abbildungen 6.4(a)-6.4(f) der FE-Berechnung herangezogen werden.

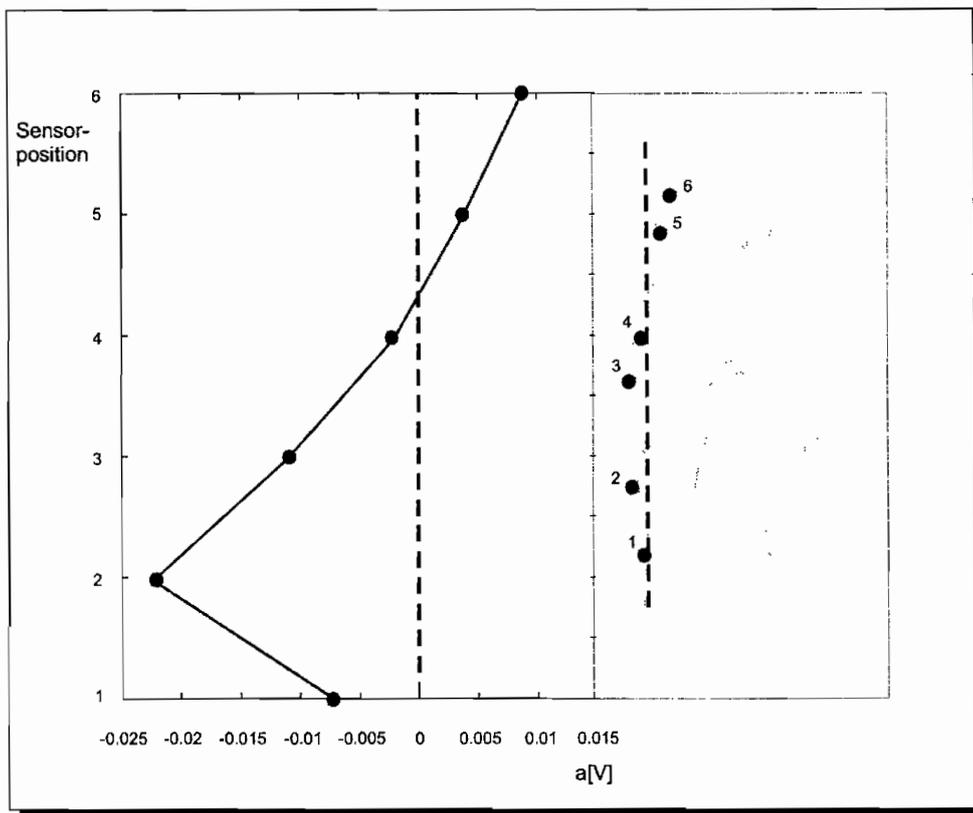


Abbildung 6.6: Mode 2 ($f = 17.4 \text{ Hz}$) (glockenerregt)

Die Berechnung der ersten beiden Eigenfrequenzen durch die Winderregung war hingegen unkritisch, weil hier keine störenden Einflüsse auf die Aufnehmer wirkten. Siehe dazu, die Abbildung 6.7(a) und Abbildung 6.7(b).

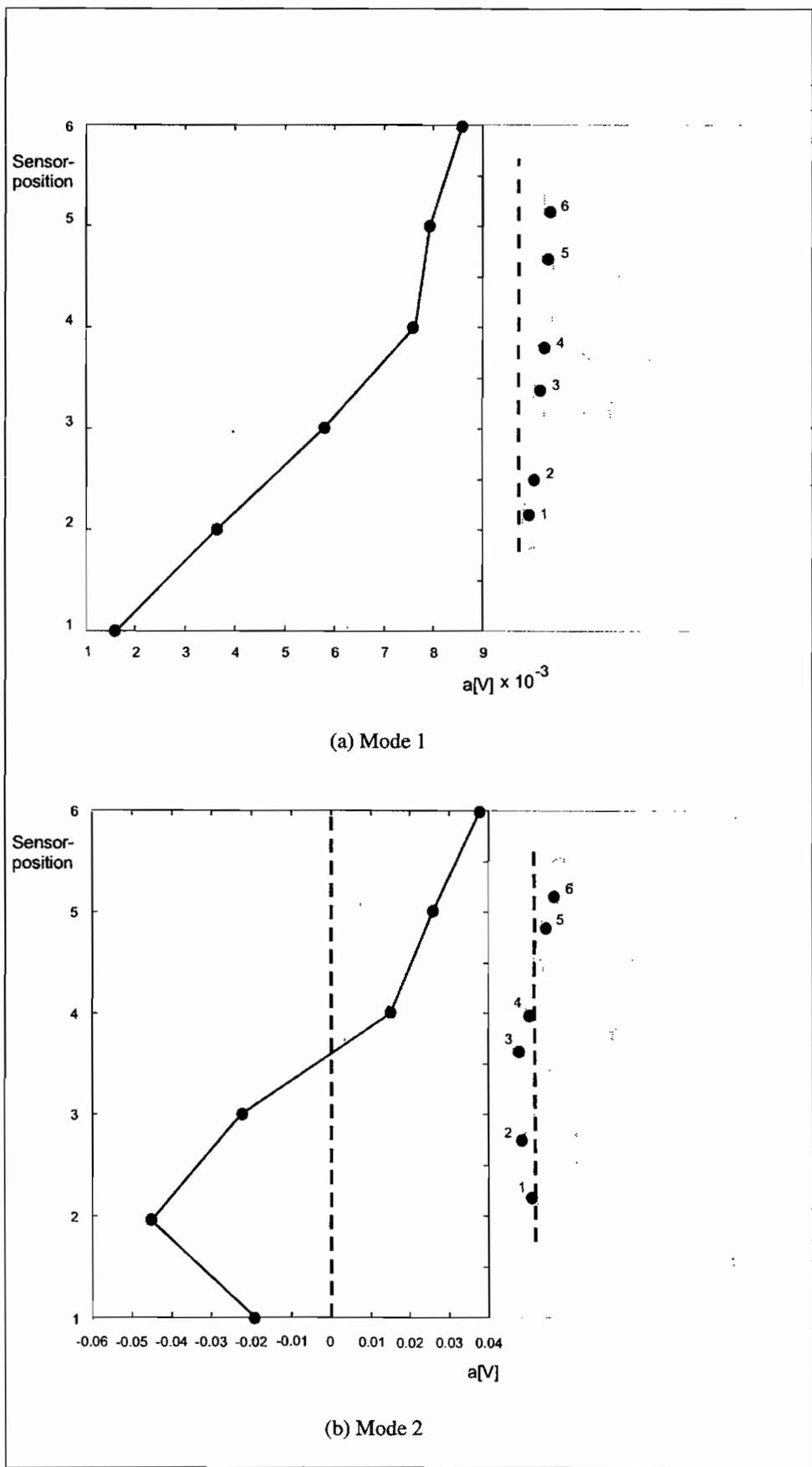


Abbildung 6.7: Mode 1 (3.8 Hz) und Mode 2 (13.7 Hz) (winderregt)

6.2 Laborbalken

6.2.1 Steifigkeitsänderung

Bei der Betrachtung der Beispiele zur Schädigungslokalisierung zeichnete sich die Tendenz ab, möglichst viele verschiedene Indikatoren zur Lokalisation der Systemdefekte einzusetzen, weil diese unterschiedlich auf Veränderungen reagieren. Zum Teil kann es vorkommen, dass eine Veränderung angezeigt wird, aber keine Schädigung vorliegt oder ein geschädigtes System als ungeschädigt angesehen wird. Deshalb werden als Schädigungsindikatoren Einfluss- und Steigungslinien, sowie COMAC-Werte gemeinsam eingesetzt.

Nach einer Vorauswahl mit dem MAC-Kriterium, um möglichst passende Einflusszahlen miteinander zu vergleichen $MAC(i, j) = 1$, kann man die Differenzen der Einflusszahlen und ihre Ableitungen untersuchen.

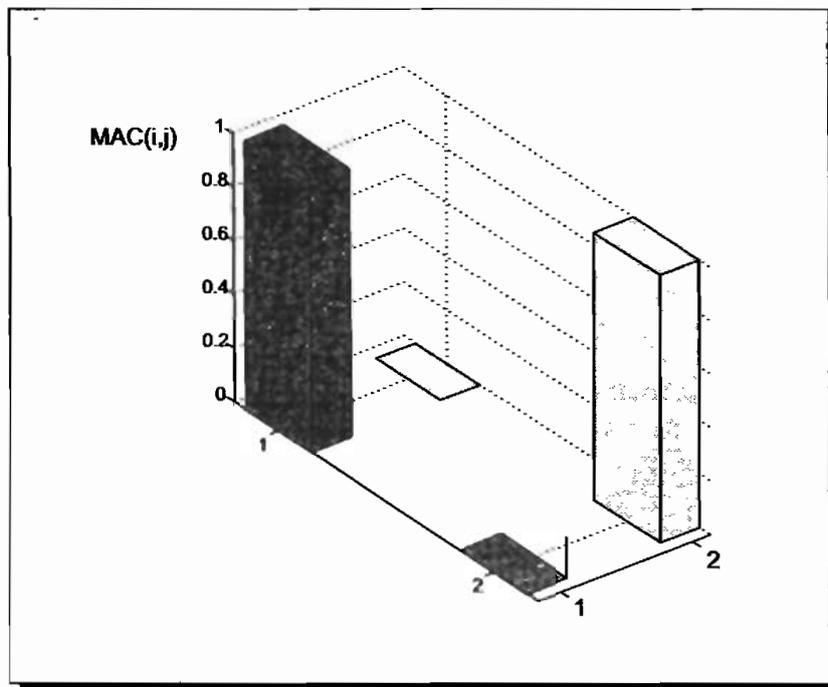


Abbildung 6.8: MAC-Werte des Referenzsystems und des geschädigten Systems

Da beim Laborbalken die Sensoren so appliziert werden konnten, dass physikalisch sinnvolle Eigenformen zu vergleichen waren, lieferte die Untersuchung der ersten beiden gemessenen Eigenfrequenzen mit dem MAC-Kriterium eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Modelle, was durch die Orthogonalität der Einflusszahlen gezeigt wird (Abbildung 6.8).

Im ersten Schadensfall wurde dem Laborbalken eine Steifigkeitsänderung durch einen Sägeschnitt zugefügt. Dieser entsprach einer Steifigkeitsänderung an der Schädigungsstelle von ca. 10%.

Die entsprechenden Differenzen der Einfluss- und Steigungslinien sind in den nachfolgenden Abbildungen 6.9(a), 6.9(b) und 6.10(a), 6.10(b) für Mode 1 und Mode 2 dargestellt.

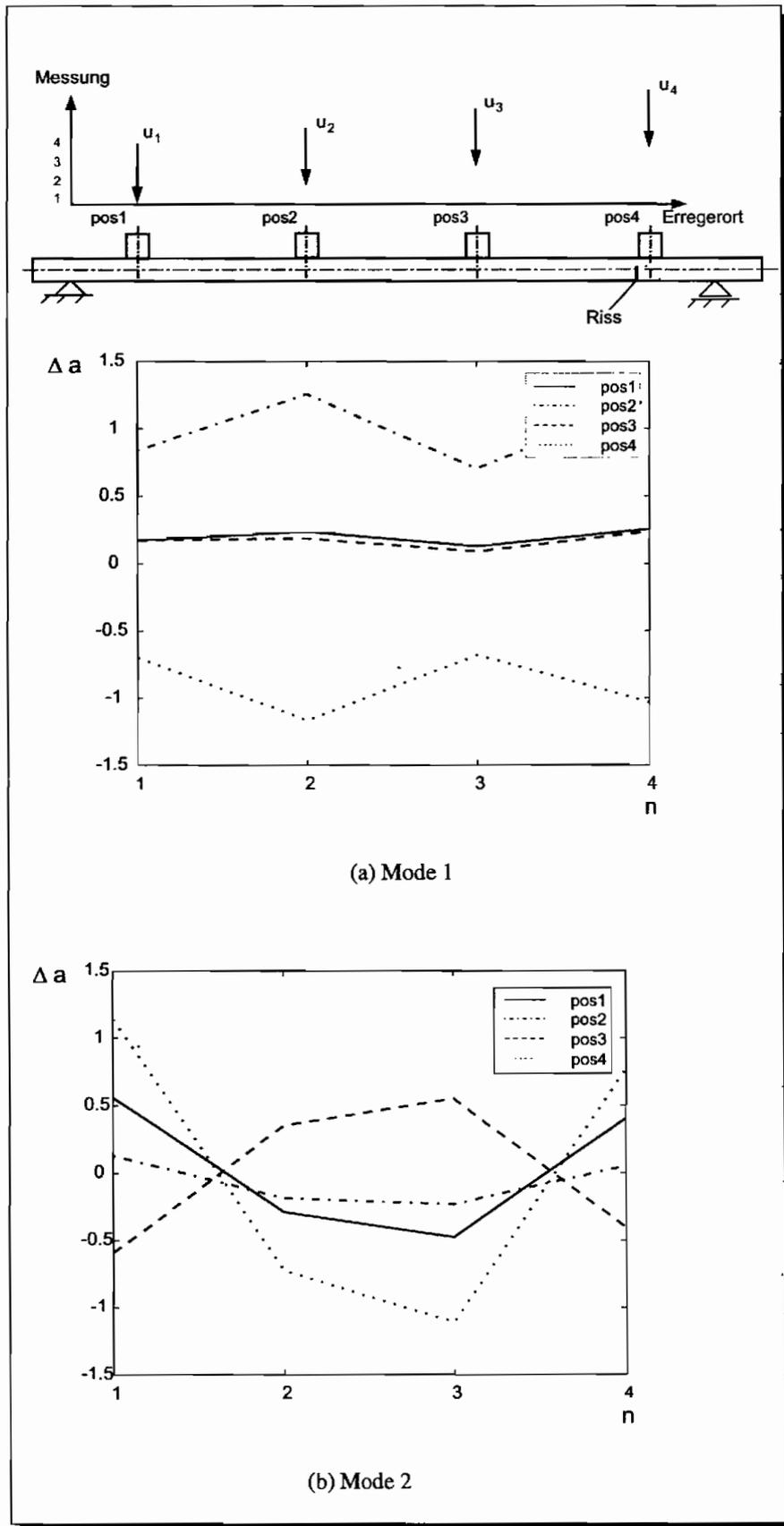


Abbildung 6.9: Differenz der Einflusszahlen bei Steifigkeitsänderungen

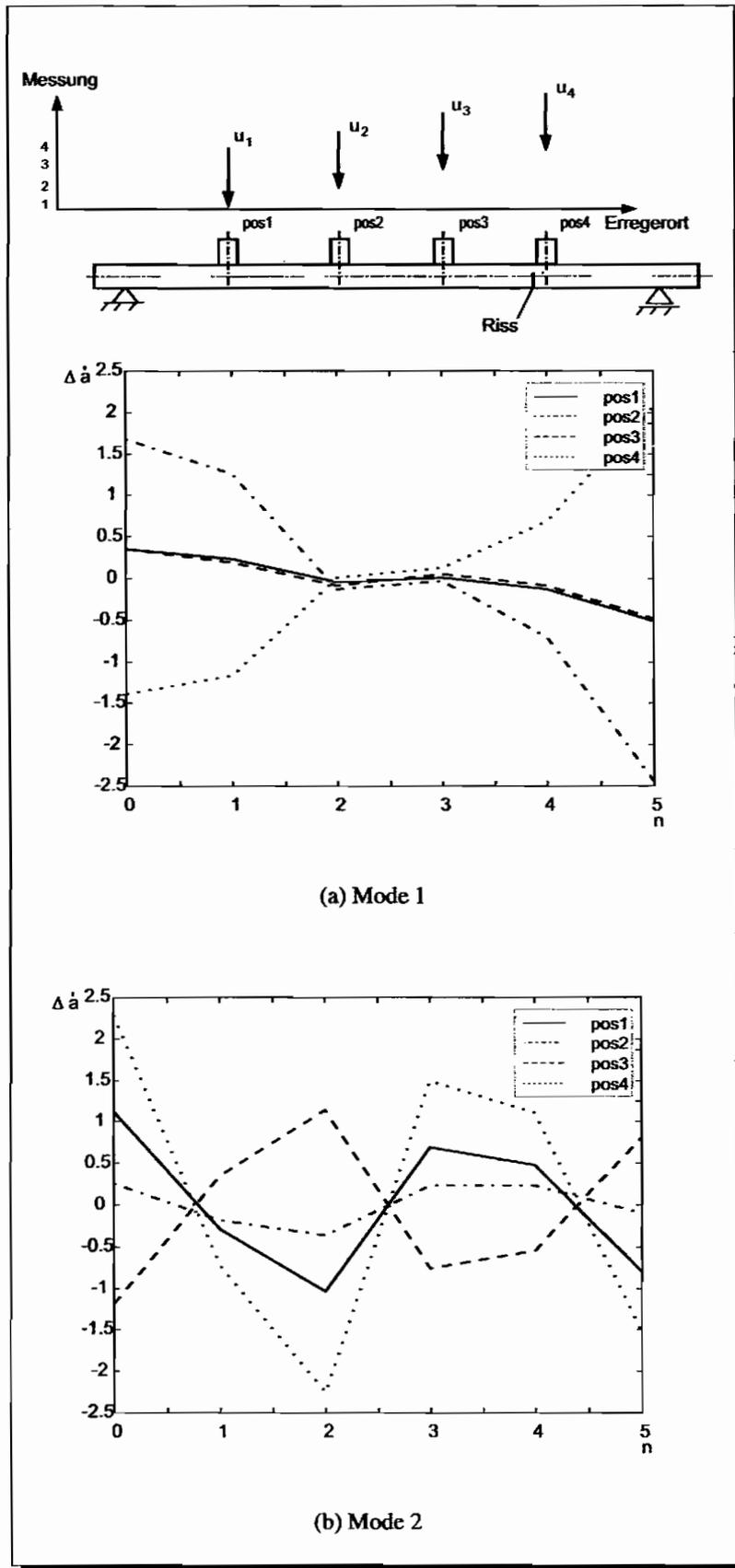


Abbildung 6.10: Differenz der Steigungslinien bei Steifigkeitsänderungen

Die Position des Messwert-Aufnehmers 4 lag dabei direkt neben der geschädigten Stelle, was leider im Mode 1 nicht eindeutig durch die Differenz der Einfluss- und Steigungslinien detektiert wurde.

Gelesen werden die Schädigungsindikatoren, indem man nach der Linie mit der größten Abweichung gegenüber allen anderen Linien sucht und diese ihrem Erregungsort zuordnet, welcher in der Nähe der Schädigung liegt. Zu beachten ist jedoch, dass eine Achsensymmetrie durch Phasenverschiebungen bei manchen Moden noch keine Schädigung darstellt.

Es handelt sich um vier Differenzlinien der Einflusszahlen, weil vier Messungen durch Erregung an allen vier Sensorpositionen gemacht wurden, welche in einem Graphen zusammengefasst sind. Dabei ist bei diesem Schadenszenario eine leichte Abweichung der Einflusslinie, welche an Sensorposition vier erregt wurde im Mode 2 zu verzeichnen.

Bei den Differenzen der Steigungslinien, ist die Abweichung der Steigungslinie vier des Mode 2, schon deutlicher zu erkennen (Abbildungen 6.10(a)-6.10(b)). Die zusätzliche Sicherheit wird aber erst durch die Betrachtung der COMAC-Werte gewonnen, wobei hier die in dieser Arbeit benutzte neue Variante als Lokalisationshilfe von Defekten zum Einsatz kam. Wichtig ist bei dieser Betrachtung die Variation der Erregungspositionen, weil nur dadurch eine Zusatzinformation über den Ort der Schädigung gewonnen wird!

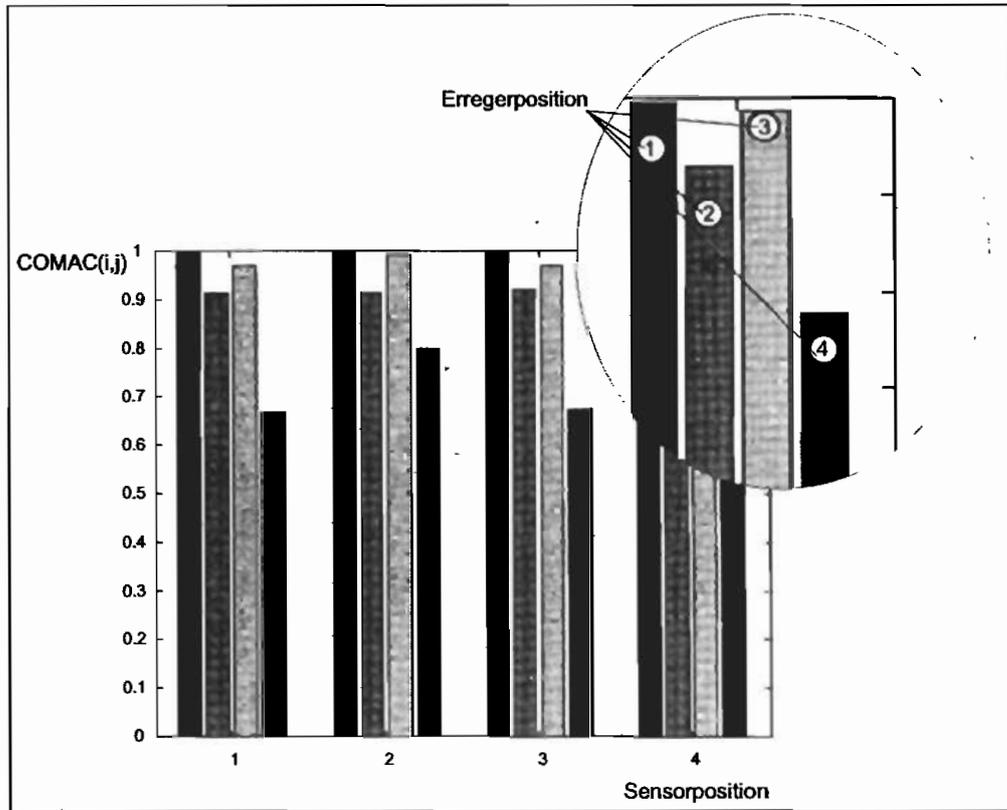


Abbildung 6.11: COMAC-Werte mit unterschiedlichen Erregungsorten bei Steifigkeitsänderungen

In Abbildung 6.11 sind deshalb die einzelnen Sensorpositionen 1 – 4 aufgetragen. Jede Position wird in dem Blockdiagramm mit vier Balken, den einzelnen COMAC-Werten, durch die unterschiedlichen Erregerorte charakterisiert.

Die Reihenfolge der Balkengraphiken an den Sensorpositionen repräsentiert die Erregungsreihenfolge 1 – 4. Damit lassen sich durch die Abweichungen des Maximalwertes 1 der COMAC-Werte, Aussagen über den Ort der Schädigung treffen. So ist in diesem Beispiel, der Steifigkeitsänderung an der Stelle 4, eine Abnahme des COMAC-Wertes festzustellen, der durch eine Erregung an der Stelle 4 berechnet wurde.

6.2.2 Masseänderung

Um die Eignung der Methode auch im Fall des Balkens für die Detektion von Masseveränderungen nachzuweisen, sind an dem Laborbalken Zusatzmassen angebracht worden. Das Gewicht dieser Massen entsprach in dem hier betrachteten Fall ca. 2% der Gesamtbalkenmasse und wurde durch Magnetmassen realisiert.

Im ersten Schritt werden wieder die geeigneten Einflusszahlen selektiert. Dies geschah wieder mit der Hilfe des MAC-Kriteriums. Möglichst gleiche Frequenzen und Einflusslinien mit hohen MAC-Werten werden verglichen. Die Einflusslinien der beiden untersuchten Systeme zeichnen sich auch in diesem Anwendungsfall durch ihre geringen Abweichungen aus, was sich durch das MAC-Kriterium in hohen bzw. bei ungleichen Vektorpaaren durch niedrige MAC-Werte zeigen lässt (Abbildung 6.12).

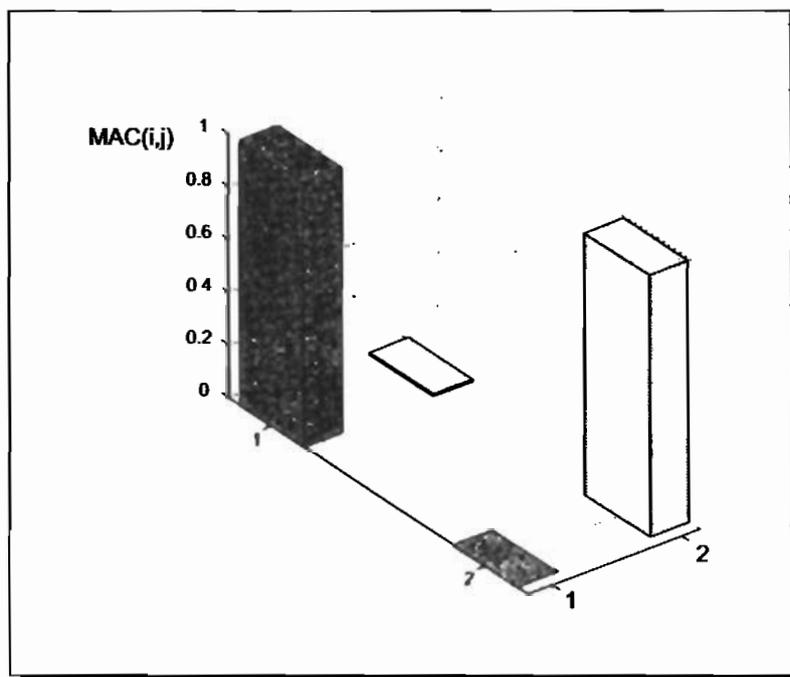


Abbildung 6.12: MAC-Werte des Referenzsystems und des geschädigten Systems

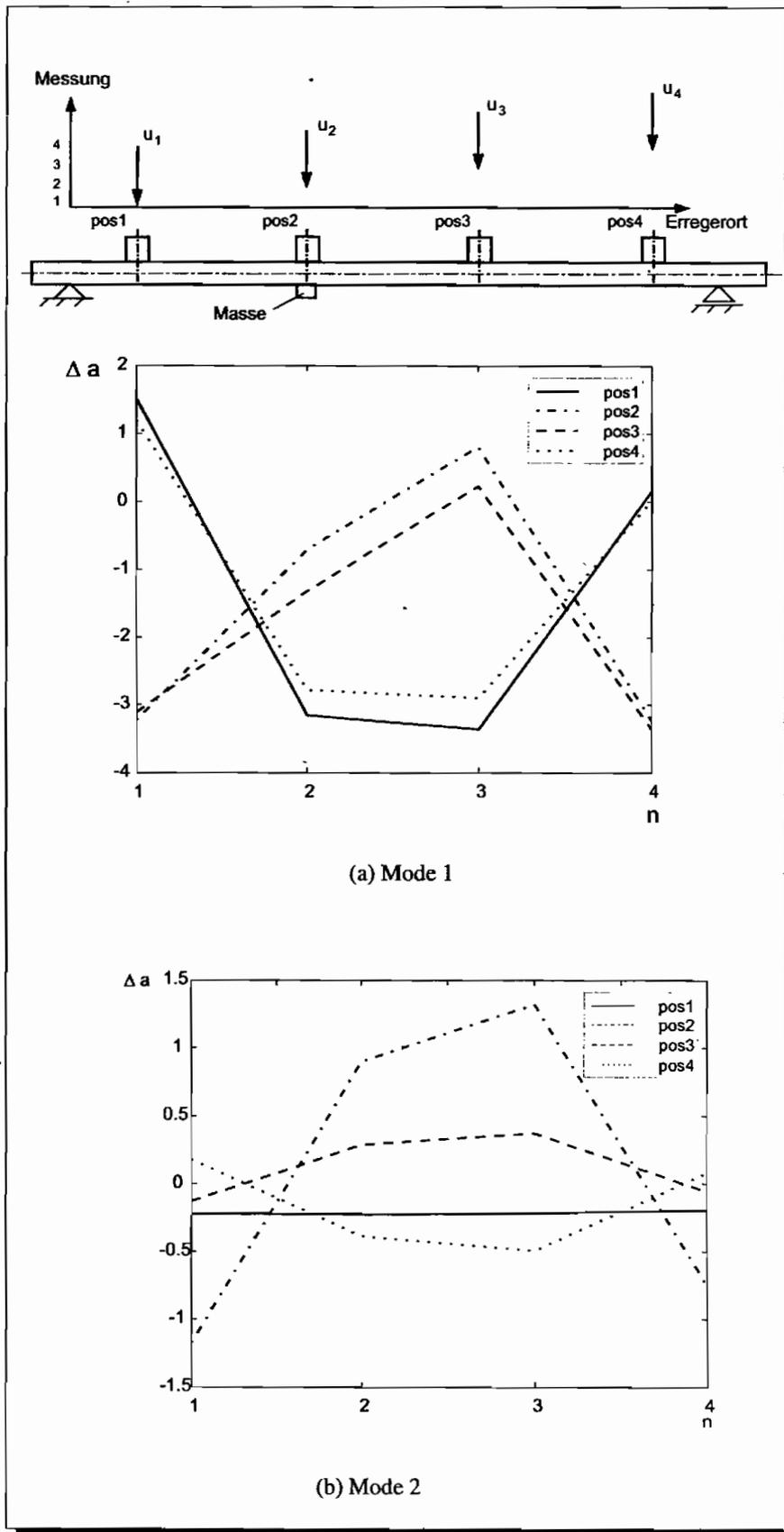


Abbildung 6.13: Differenz der Einflusszahlen bei Masseveränderungen

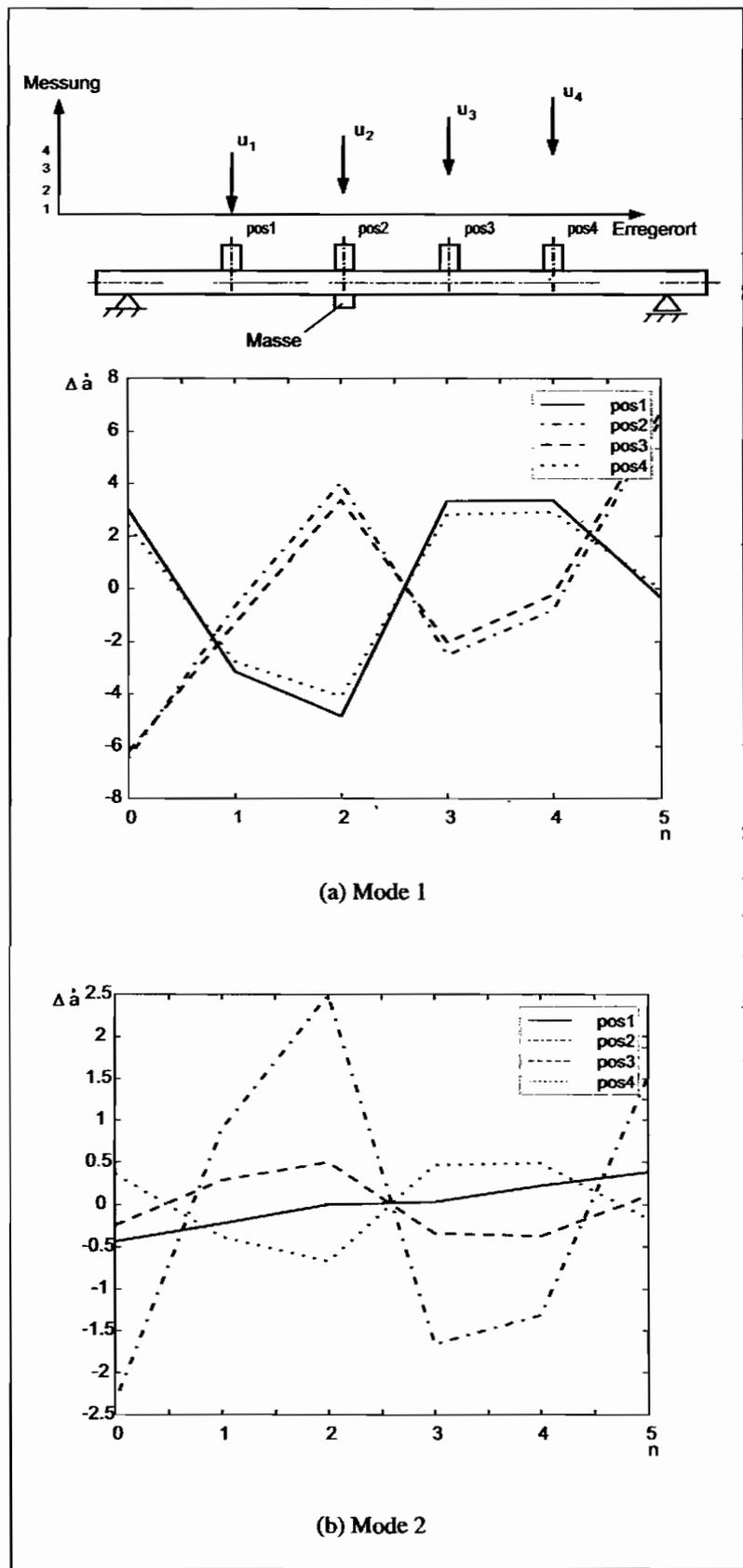


Abbildung 6.14: Differenz der Steigungslinien bei Masseveränderungen

Da die Zuordnung der Balkenformen sehr einfach zu erkennen war, gab es keine Schwierigkeiten bei der Auswahl der zu untersuchenden Einflusszahlen. Die Differenzen der Einflusszahlen wurden abermals für die ersten beiden Moden aufgestellt, sodass deren Ergebnisse in Abbildung 6.13(a) und Abbildung 6.13(b) zu begutachten sind.

Während bei der ersten Eigenform in Abbildung 6.13(a) die Veränderung sich noch nicht äußerte, kann bei den von Mode 2 herrührenden Differenzen der Einflusszahlen eine deutliche Abweichung der zweiten Eigenform verzeichnet werden.

Dieser Trend bestätigt sich ebenfalls bei den Steigungslinien (Abbildungen 6.14(a) und 6.14(b)). Auch bei der Betrachtung der Ableitungen der Einflusszahlen war beim Mode 1 die Zusatzmasse nicht aufzufinden. Hingegen trat bei der Untersuchung von Mode 2 eine große Veränderung auf, die auf einen Schaden in der Nähe der Sensorposition zwei schließen lässt.

Als drittes Kriterium zur Lokalisation kam es auch beim masseveränderten Balken zur Anwendung der variierten COMAC-Werte (Abbildung 6.15).

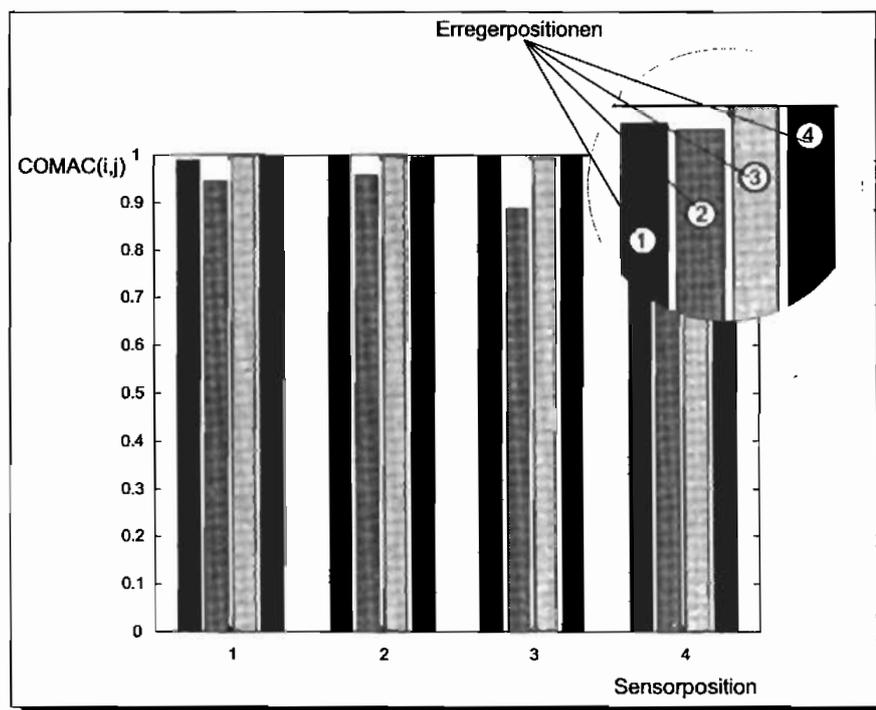


Abbildung 6.15: COMAC-Werte mit unterschiedlichen Erregungsorten bei Masseveränderungen

Die Untersuchung dieser Werte bestätigte die zuvor schon gewonnenen Erfahrungen: Es reicht nicht, die von jeweils einer Erregerstelle abhängigen COMAC-Werte zu untersuchen, weil die Abweichungen an den einzelnen Knoten oder Freiheitsgraden keine Aussage über den Ort der Veränderung zulassen.

Diese Anwendung der COMAC-Werte ist nur beim *model updating* von Bedeutung, wenn die Freiheitsgrade des FE-Modells mit den durch Messungen gewonnenen Werten verglichen werden, um die Modellgüte an den einzelnen Freiheitsgraden zu prüfen.

In der Anwendung der Schädigungslokalisierung wurde nur durch die Einbeziehung der Eingangsorte die Existenz der Zusatzmasse am Sensor 2 bestätigt.

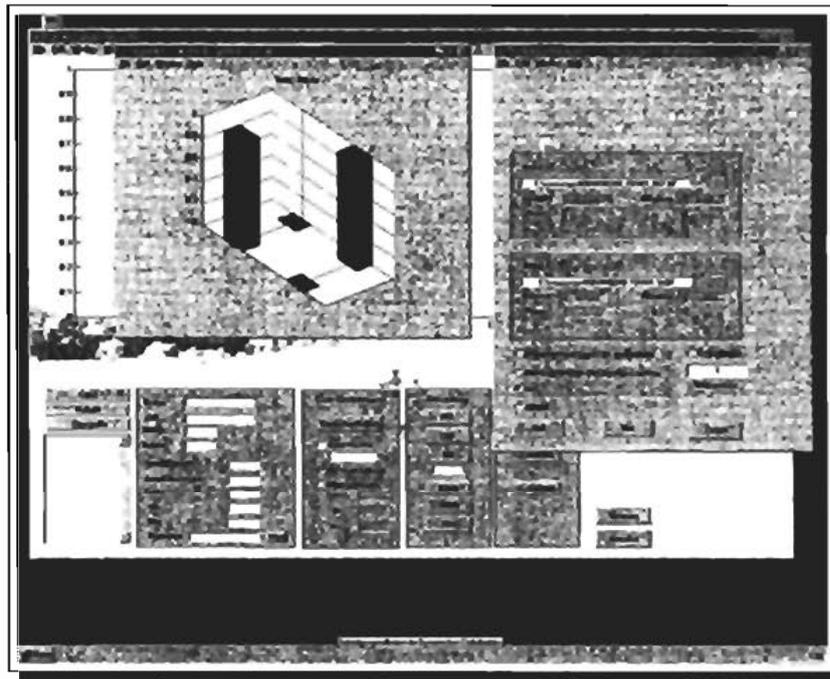


Abbildung 6.16: Auswertung einer MAC-Matrix mit MODIMESS

6.2.3 Schädigungslokalisierung mit Sweeperregung beim Balken

Die in den obigen Abschnitten erzielten Ergebnisse durch Impulserregung sollten auch mit einer allgemeineren Erregung untersucht werden. Dazu ist der Versuchsbalken mit einem Piezostapelaktor und einem Schwingerreger an den einzelnen Sensorpositionen erregt worden.

Die erzielten Ergebnisse waren sehr positiv, weil durch die Sweeperregung sehr viel Energie vom System in Schwingungen umgewandelt wurde. Bei niedrigeren Frequenzen lagen die Vorteile aufgrund des größeren Stellweges beim Schwingerreger, während bei den hohen Frequenzen ab 100 Hz die kraftvolle Dynamik des Piezoaktors mit Trägheitsmasse Vorteile aufwies.

Es zeigten sich die gleichen Ergebnisse wie bei den vorhergehenden Versuchen. Trotz der besser eingebrachten Energie ist noch keine Schädigung zu erkennen, erst mit der Variation der Eingangsorte ist dies auch in diesem Erregungsfall möglich. Die Abbildungen 6.17(a) bis 6.20 zeigen die erzielten Resultate bei einer Zusatzmasse an der Position 1.

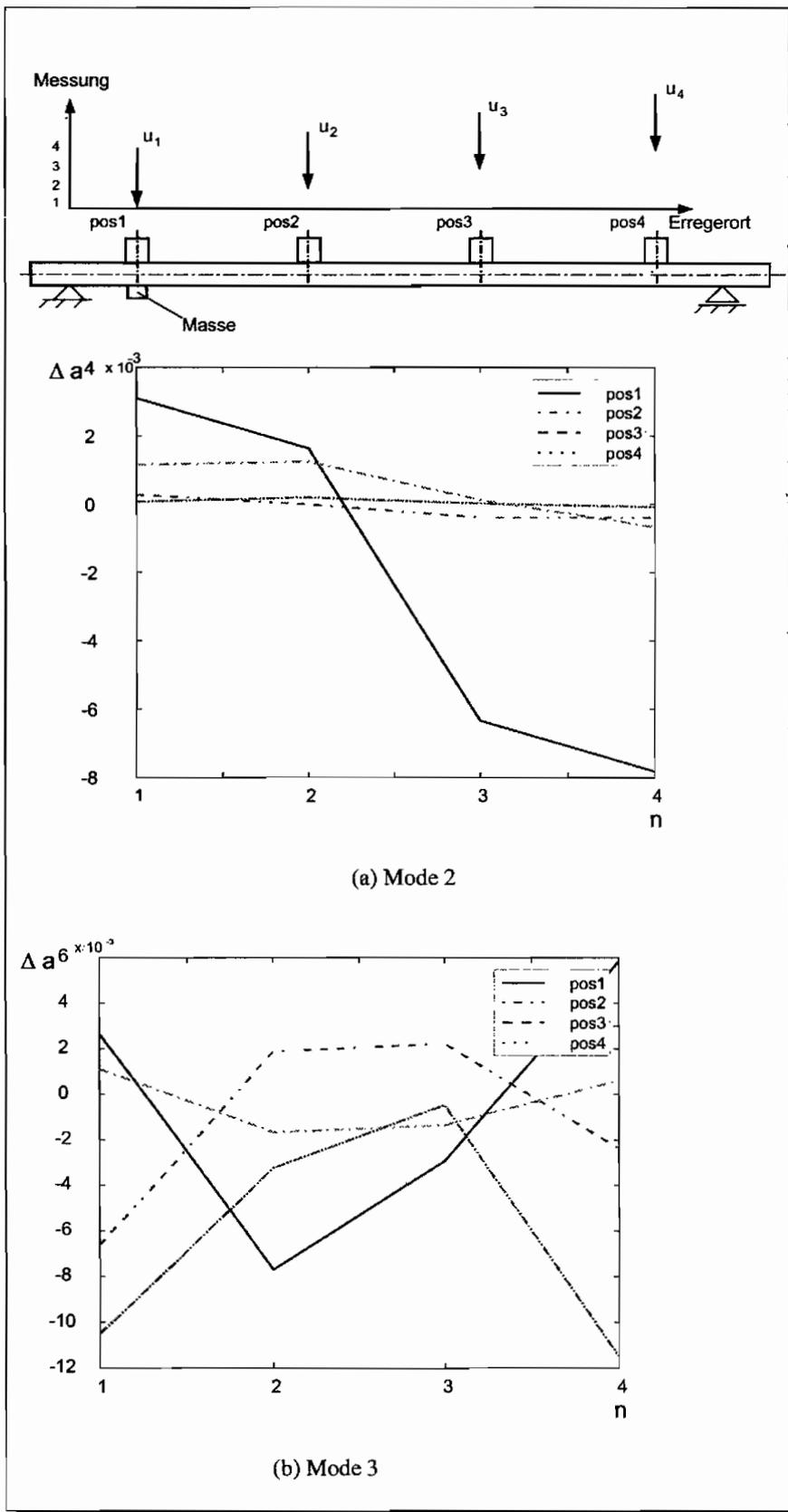


Abbildung 6.17: Differenz der Einflusslinien mit Sweep

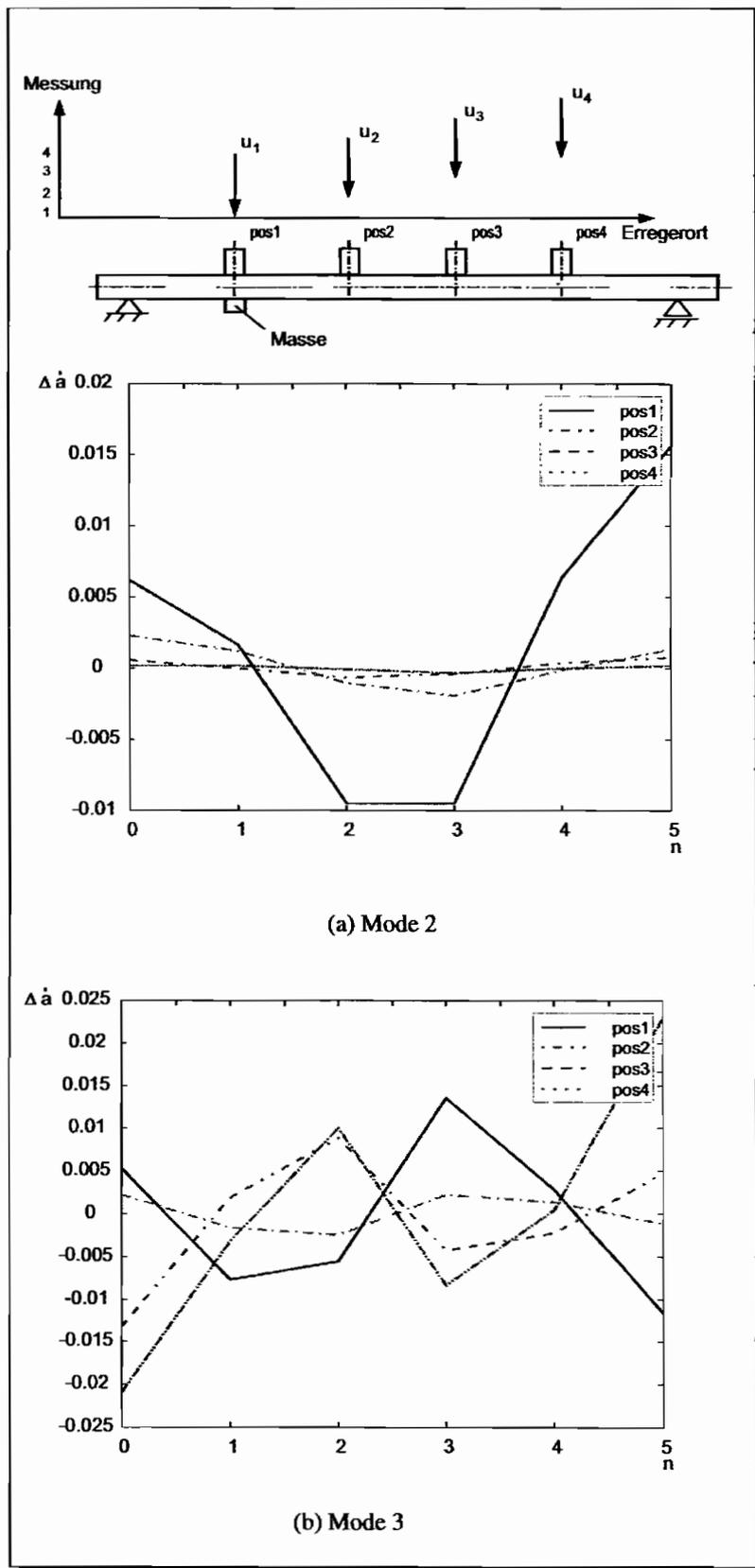


Abbildung 6.18: Differenz der Steigungslinien mit Sweep

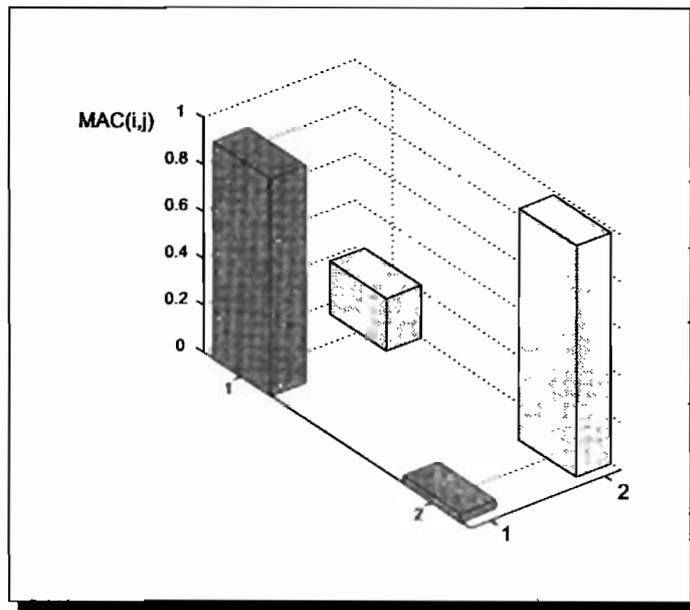


Abbildung 6.19: MAC-Werte bei der Sweeperregung

Die Erhöhung der MAC-Werte der ungleichen Einflusslinien $MAC(1, 2)$ und $MAC(2, 1)$ von Abbildung 6.19 kommt durch die Unterschiedliche Anordnung der Aktoren mit ihren Zusatzmassen und Steifigkeiten zustande. Es ist in diesem Fall nur durch äußerste Sorgfalt zu realisieren, dass bei jeder Messung möglichst gleiche Versuchsbedingungen eingehalten werden.

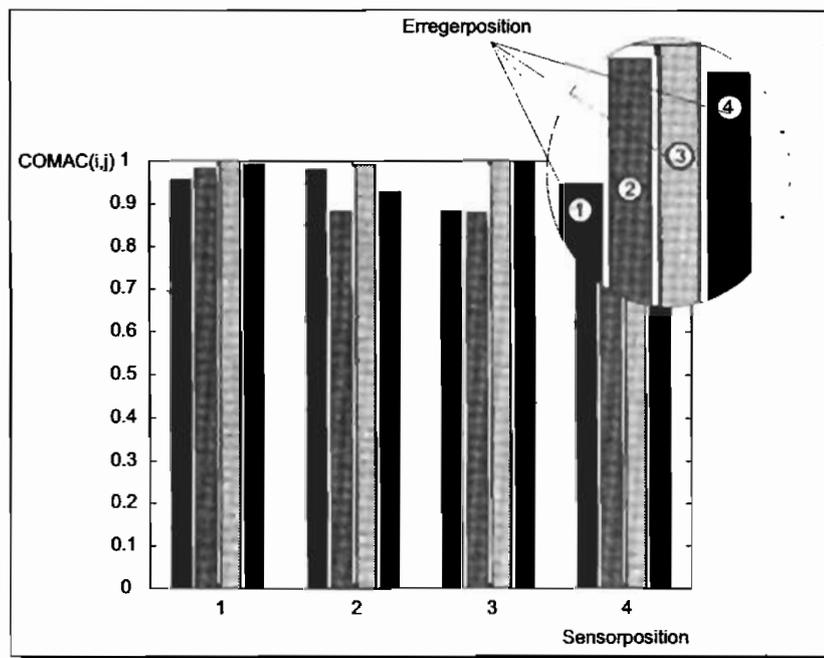


Abbildung 6.20: COMAC-Werte mit unterschiedlichen Erregungsorten bei Masseveränderungen

6.3 Laternenmast

Der in Abbildung 6.21 dargestellte Laternenmast ist mit Beschleunigungs- und Windsensoren versehen worden, um die einzelnen Möglichkeiten der Schadenslokalisierung mit den Zustandsraummethoden zu untersuchen. Dazu kamen 8 hochempfindliche Beschleunigungsaufnehmer zum Einsatz, welche die Bewegung des Mastes in Ost-West-Richtung dokumentieren sollten. Um auch eine Identifikation mit Winderregungen durchzuführen, wurden an der Spitze zusätzlich zwei Thermoanemometer appliziert.

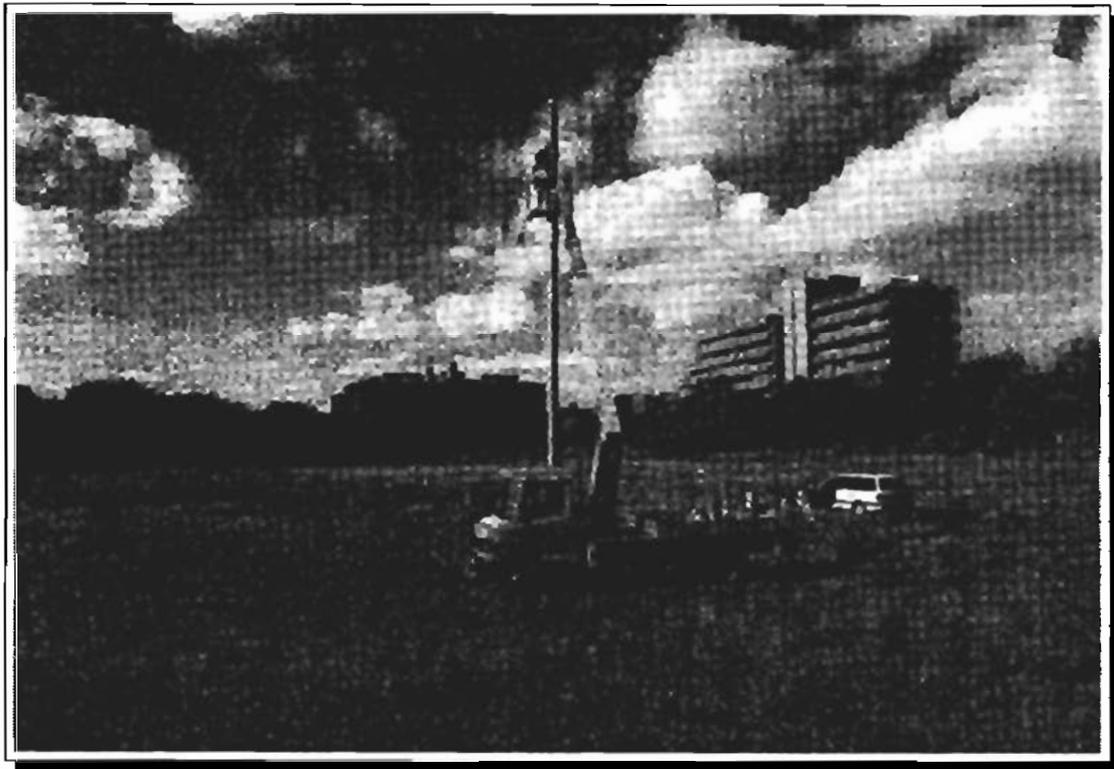


Abbildung 6.21: Laternenmast hinter der Ruhr-Universität-Bochum

6.3.1 Schadenslokalisierung mit Impulserregung

Das Ziel der Untersuchung war dabei die Dokumentation von fortschreitenden Steifigkeitsveränderungen. Die Steifigkeitsverminderung des Betonmastes wurde durch drei verschiedene Szenarien realisiert und mit den Sensoren aufgezeichnet.

Die Vorgehensweise bei der Schadenslokalisierung war durch die benötigten Abschaltvorgänge vorgegeben. Zunächst wurde der Mast im ungeschädigten Zustand an allen acht Sensorpositionen nacheinander erregt und die Ausschwingvorgänge aufgezeichnet.

Im zweiten Schritt wurde die Schädigung der Stufe 1 an den Mast angebracht (siehe dazu, Abbildung 6.23) und eine weitere Messung für jede Sensorposition vorgenommen. Die Schädigung bezog sich in der Stufe 1 nur auf die Schädigung des äußeren Betonmantels, es sind bei dieser Untersuchung noch keine für die eigentliche Stabilität verantwortlichen Eisen geschädigt worden.

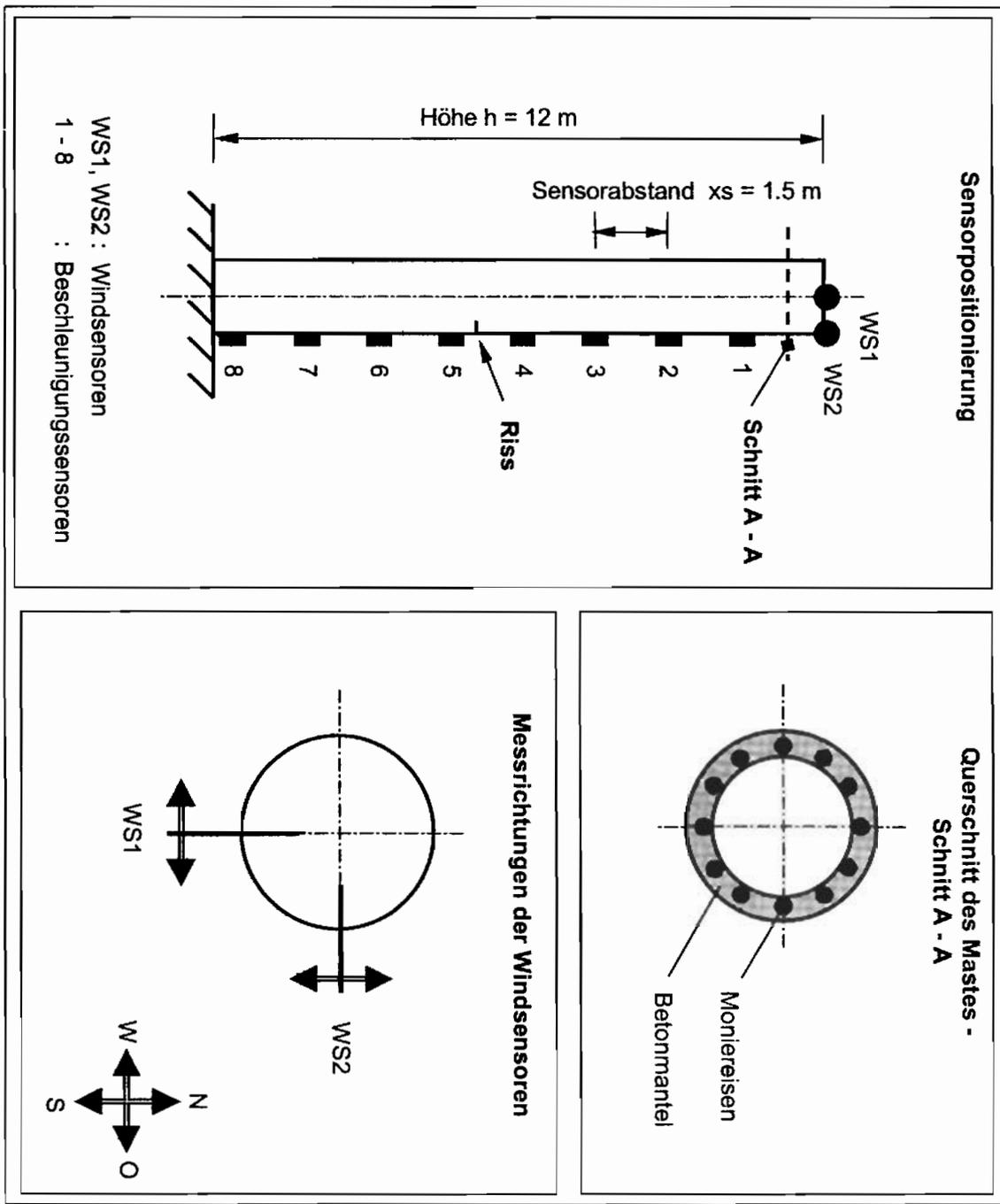


Abbildung 6.22: Sensorpositionierung am Laternenmast

Die angebrachte Steifigkeitsverminderung befand sich wie in der Abbildung 6.21 zu sehen, zwischen der vierten und fünften Sensorposition. Eine Analyse mit den dynamischen Einflusszahlen zeigte im Vergleich für die ersten beiden Moden starke Abweichungen der Sensorposition eins, aber auch eine Abweichung der Sensorposition vier, welche in der Nähe des Anrisses lag (siehe dazu, Abbildung 6.22).

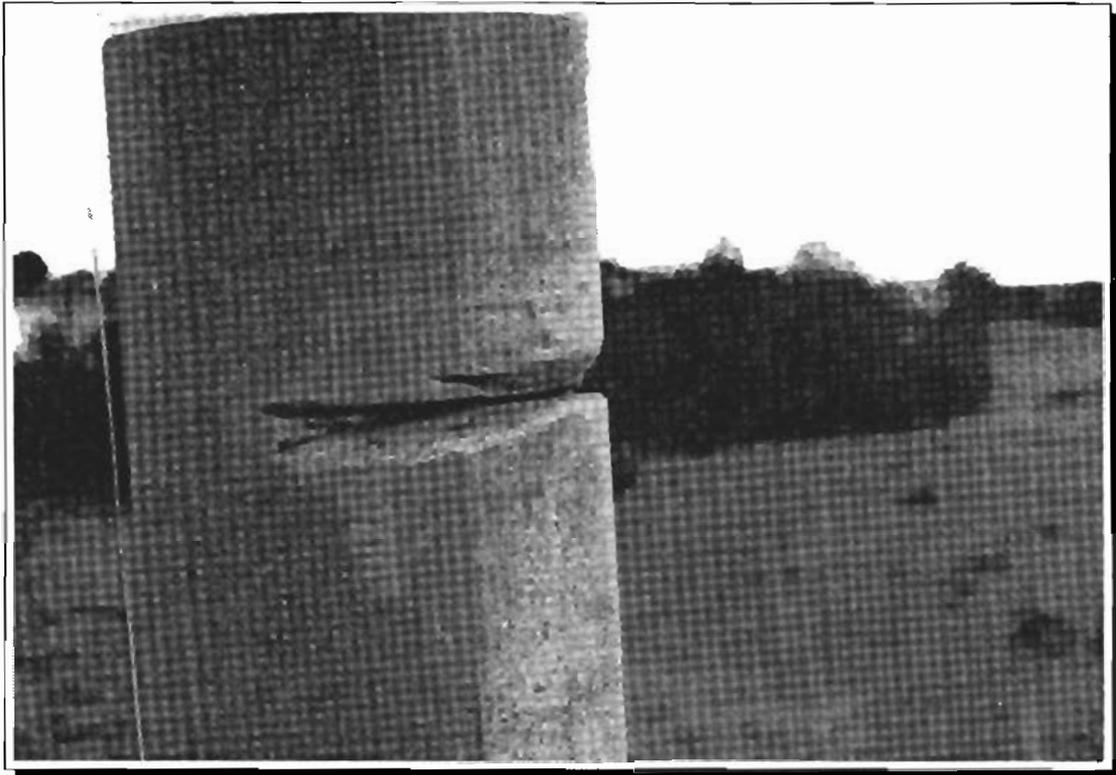


Abbildung 6.23: Schadenstufe 1

Die Sensorposition fünf welche eigentlich ebenfalls betroffen sein sollte, verhielt sich in dieser Schädigungsstufe eher unauffällig. Hingegen kommt es zu einer weiteren scheinbaren Schädigung vor allem bei der Sensorposition drei (Abbildungen 6.24(a) und 6.24(b)).

Die Abweichung der ersten Einflusslinie macht sich besonders stark bemerkbar, weil die Erregung nicht wie im Fall des Laborbalkens immer konstant gehalten werden konnte. Im Fall des Mastes ist ein Seil, welches mit dem Mast und einem Auto verbunden war und anschliessend durchtrennt wurde, eingesetzt worden. Das Seil wurde in diesem Moment aber nicht auf seine Seilkraft oder Spannung untersucht. Obwohl versucht wurde gleiche Versuchsbedingungen einzuhalten sind deshalb Abweichungen durch unterschiedliche Energieeinleitung möglich.

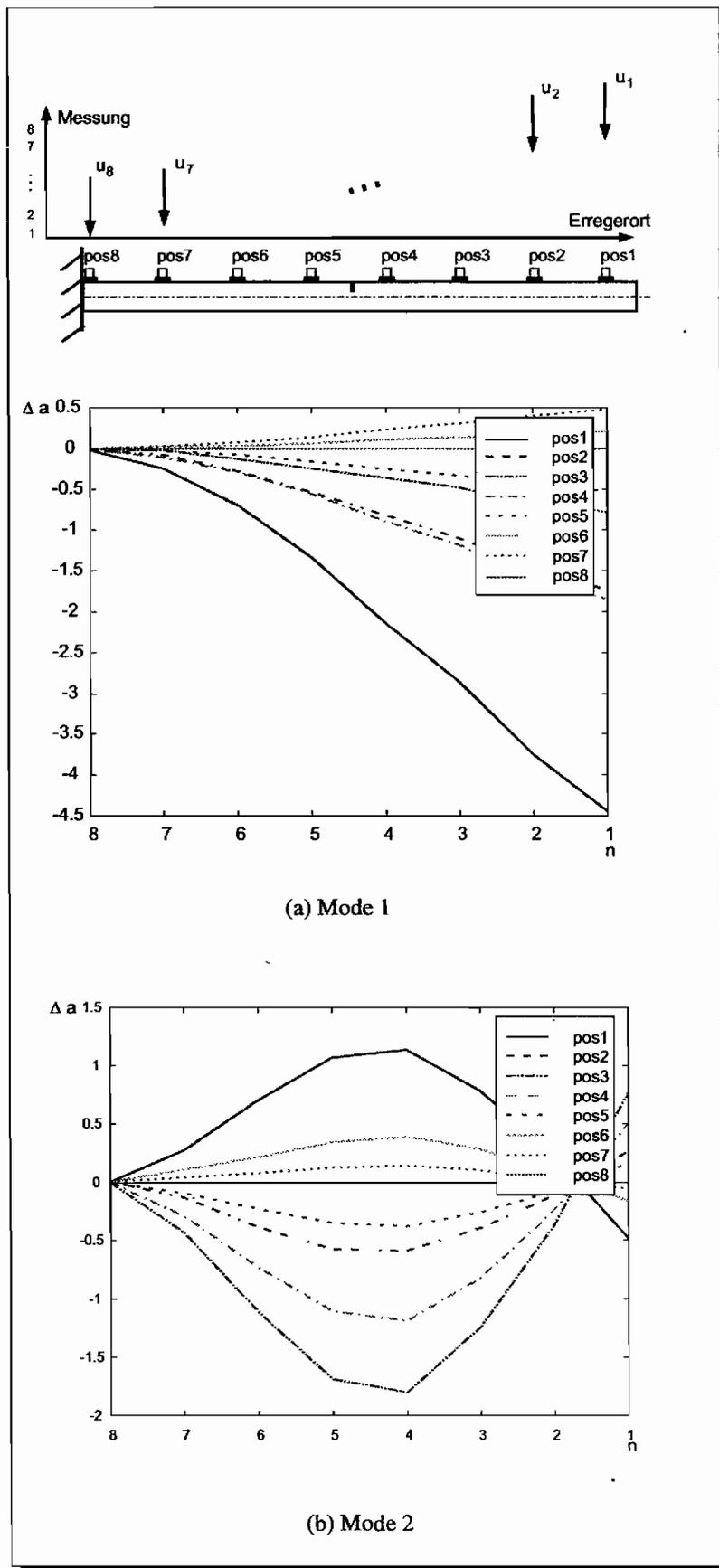


Abbildung 6.24: Differenz der Einflusszahlen bei Steifigkeitsänderungen am Mast

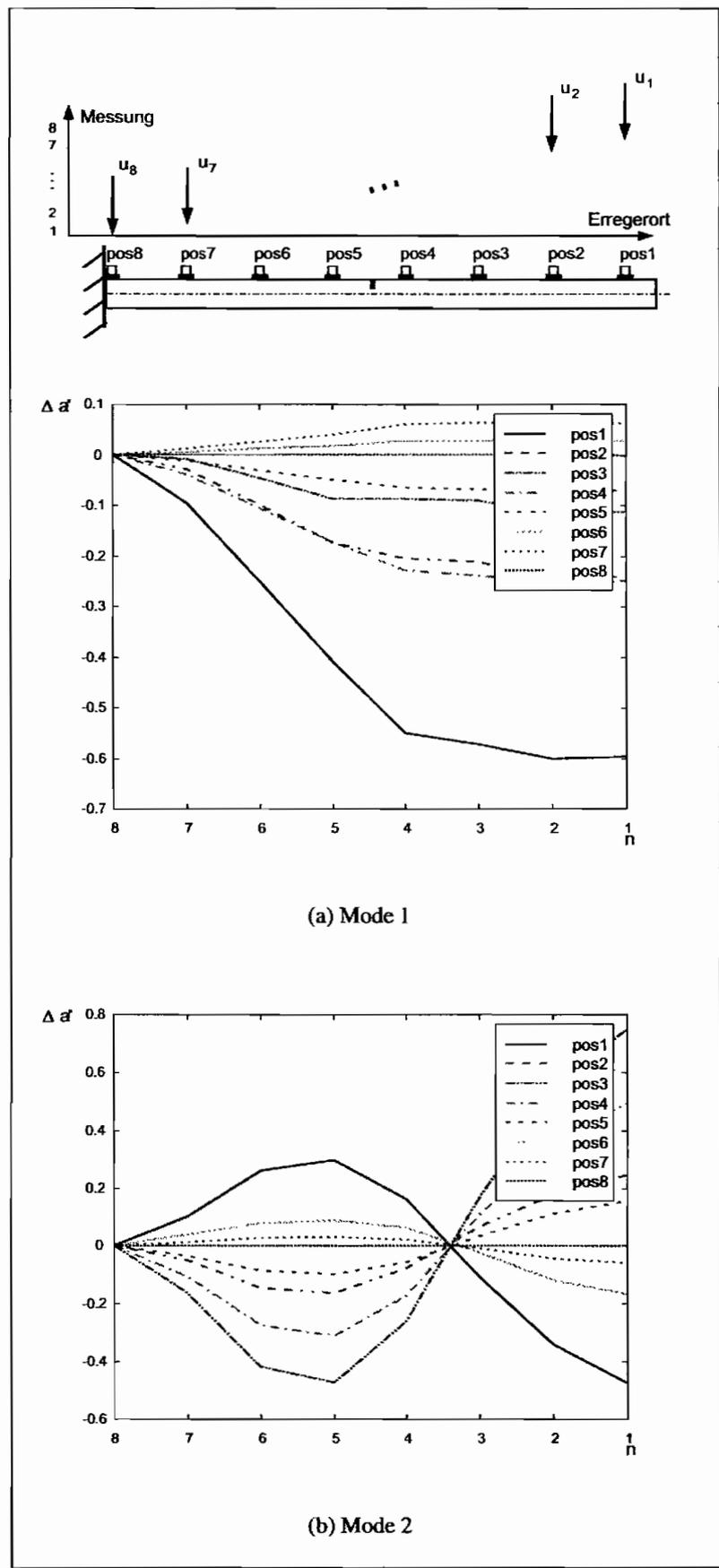


Abbildung 6.25: Differenz der Steigungen bei Steifigkeitsänderungen am Mast

Ein ähnliches Bild zeigt sich bei der Untersuchung der Steigungen der ersten beiden Moden. Hier sind wieder starke Abweichungen durch die erste und dritte Steigungslinie zu beobachten, aber auch die vierte Steigungslinie zeigt Tendenzen zu einer Schädigung.

Mit der zusätzlichen Untersuchung der COMAC-Werte sollen die gefundenen Ergebnisse weiter eingeschränkt werden. Dabei kommt der Eingangserregung eine besondere Bedeutung zu, weil durch sie zusätzliche Informationen gewonnen werden.

Betrachtet man nämlich jeden einzelnen COMAC-Wert an einem Sensorpunkt der nur durch eine Erregerstelle berechnet wurde, so ist dies wenig aussagekräftig. Man erkennt zwar, dass Abweichungen von der idealen Systemübereinstimmung eines COMAC-Wertes von $COMAC(i) = 1$ vorliegen, doch durch welche Systemveränderungen sind diese Abweichungen zustande gekommen?

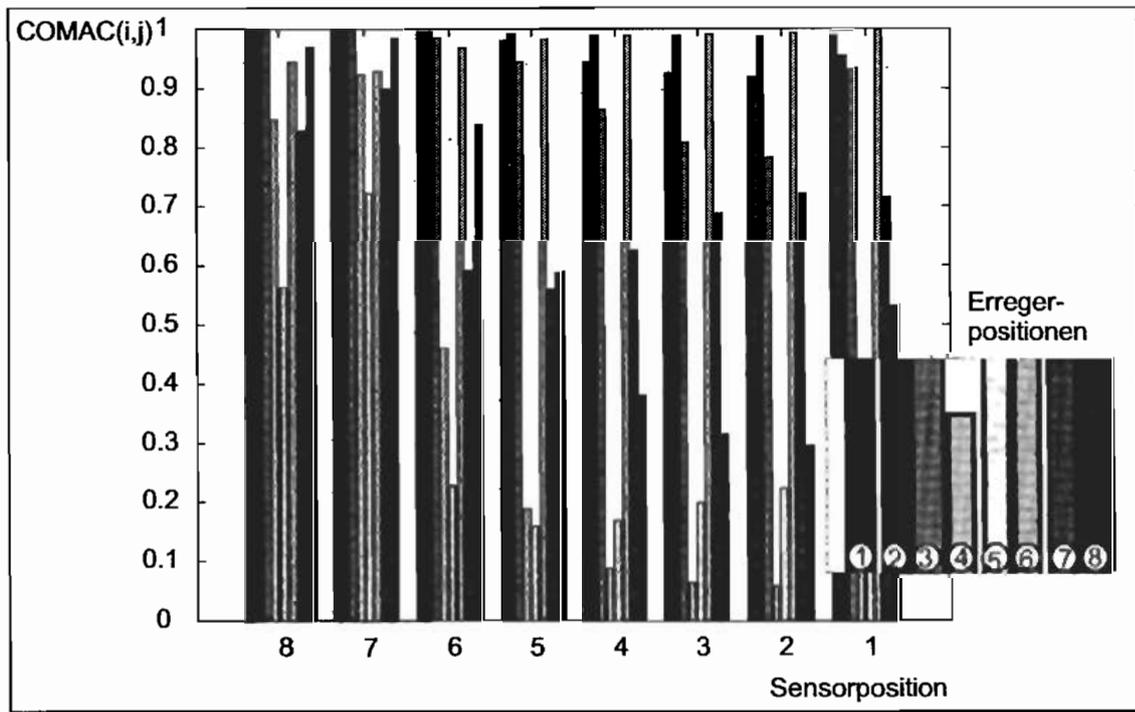


Abbildung 6.26: COMAC-Werte mit unterschiedlichen Erregungsorten bei Steifigkeitsänderung 1 am Mast

Die Frage stellt sich auch: „In welchem Zusammenhang steht die Abweichungsstelle mit der Schädigungsstelle?“

Um eine bessere Lokalisierung dieser Punkte zu gewährleisten, betrachtet man die COMAC-Werte der anderen Erregungspunkte. Man wird feststellen, dass in der Abbildung 6.26 die COMAC-Werte besonders stark bei einer Schädigung von ihrem Maximalwert abweichen, wenn der Ort der Schädigung in der Nähe des Erregerortes liegt.

Diese Beobachtungen verstärken sich insbesondere bei der Betrachtung des Schadensszenarios zwei, bei dem ein stärkerer Eingriff getätigt wurde, um die Steifigkeit noch mehr herabzusetzen.

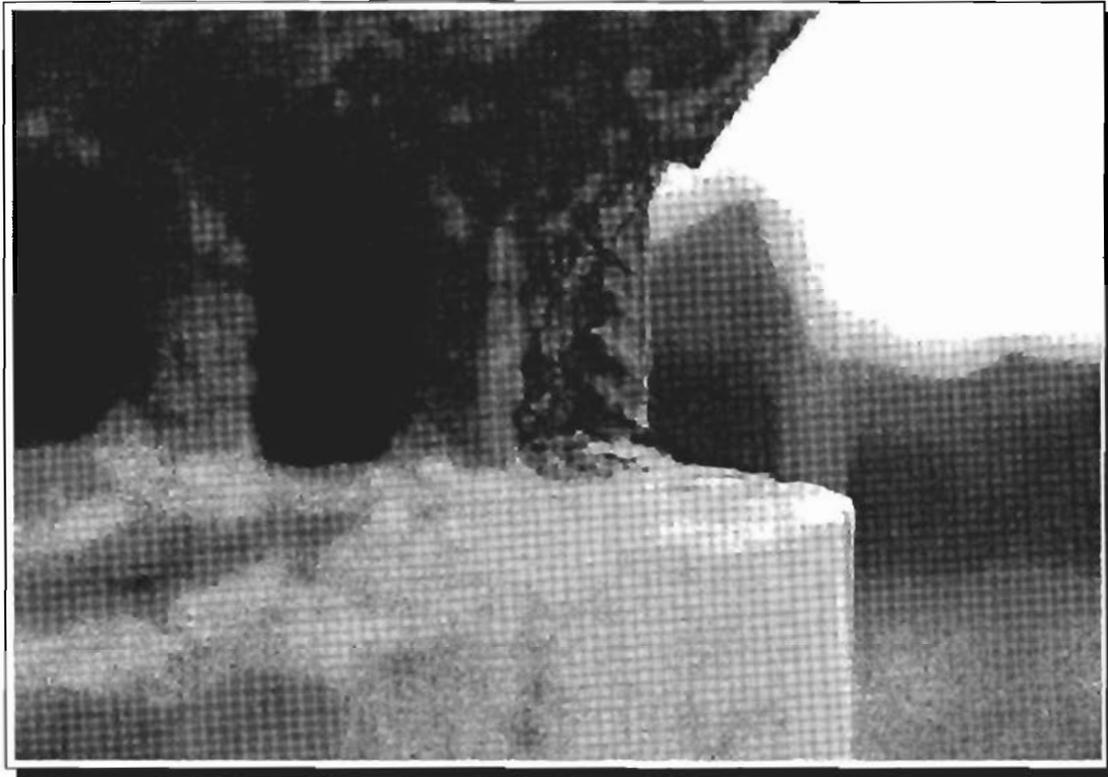


Abbildung 6.27: Schadenstufe 2

Das Foto in der Abbildung 6.27 gibt einen Eindruck von der Schädigung, bei der ein Moniereisen durchtrennt wurde.

Die Beobachtungen in den Bildern zum Schadensfall, welche mit den Differenzen der dynamischen Einflusszahlen dokumentiert wurden (Abbildung 6.28(a) und Abbildung 6.28(b)), zeigen einen Trend, bei dem die Einflusslinien der Sensorpositionen vier und fünf immer stärker zur Geltung kommen. Sie sind schon fast so dominant, wie die Abweichung der Einflusslinie eins.

Bei den Steigungen zeigte sich das gleiche Bild, auch hier wuchsen die Steigungslinien in der Nähe der Schädigung überproportional an. Während sich die COMAC-Werte bei den stärkeren Schäden fast nicht änderten.

Noch deutlicher sind die Ergebnisse im Schadensfall von drei durchtrennten Moniereisen (Abbildung 6.30(a) und Abbildung 6.30(b)). Jetzt sind die Einfluss- und Steigungslinien der Schädigung insbesondere im Mode 2 die dominierenden Linien, was ein Hinweis für eine Strukturveränderung zwischen diesen beiden Sensorpositionen ist.

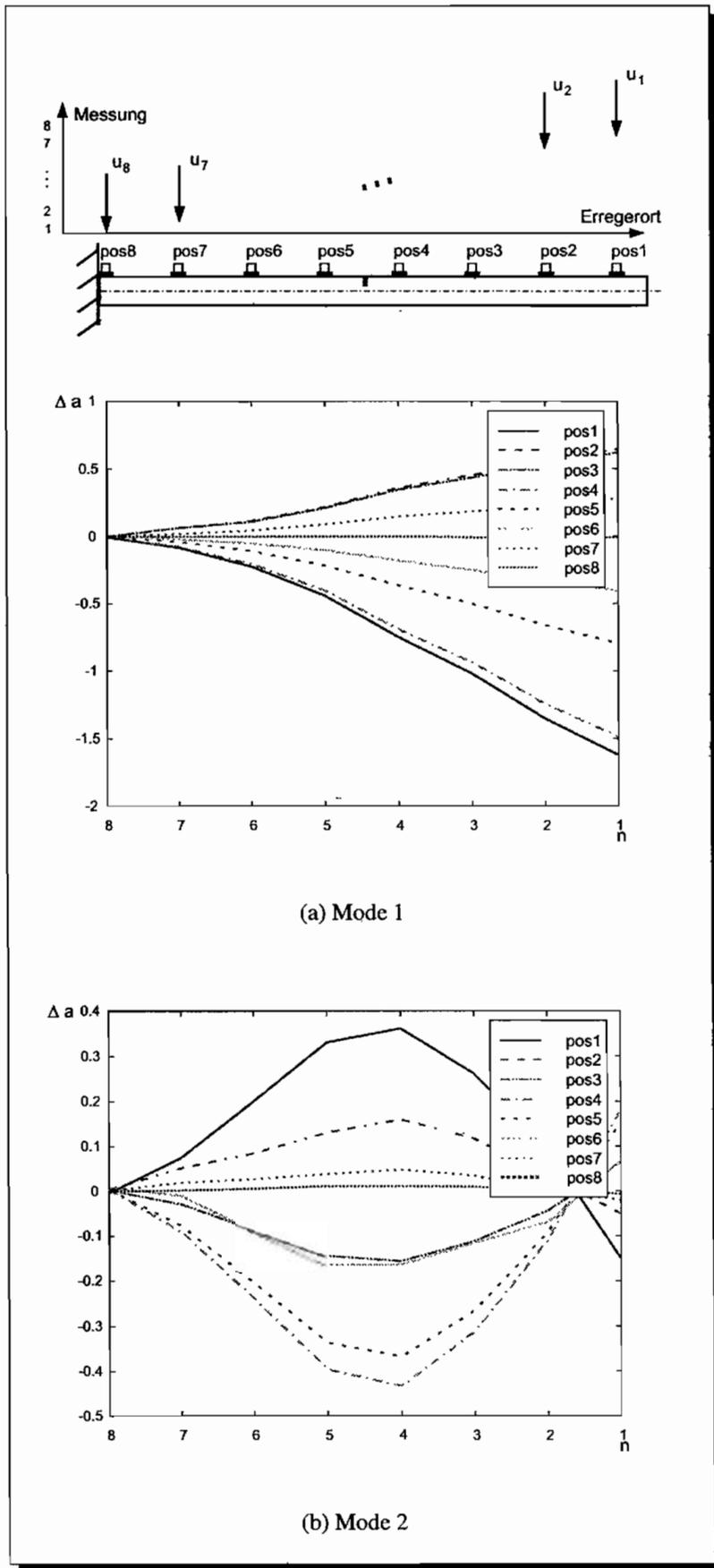


Abbildung 6.28: Differenz der Einflusszahlen – ein Moniereisen geschädigt

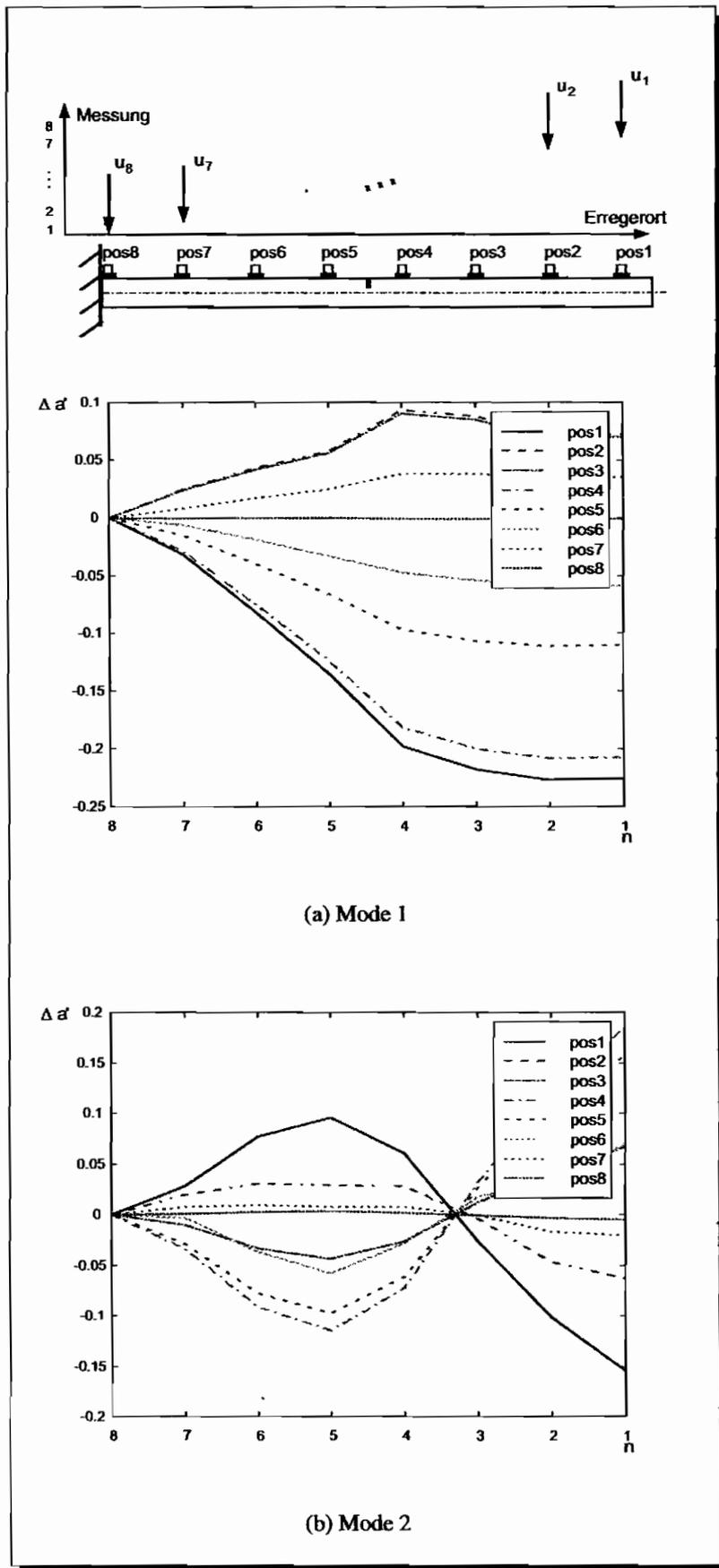


Abbildung 6.29: Differenz der Steigungen – ein Moniereisen geschädigt

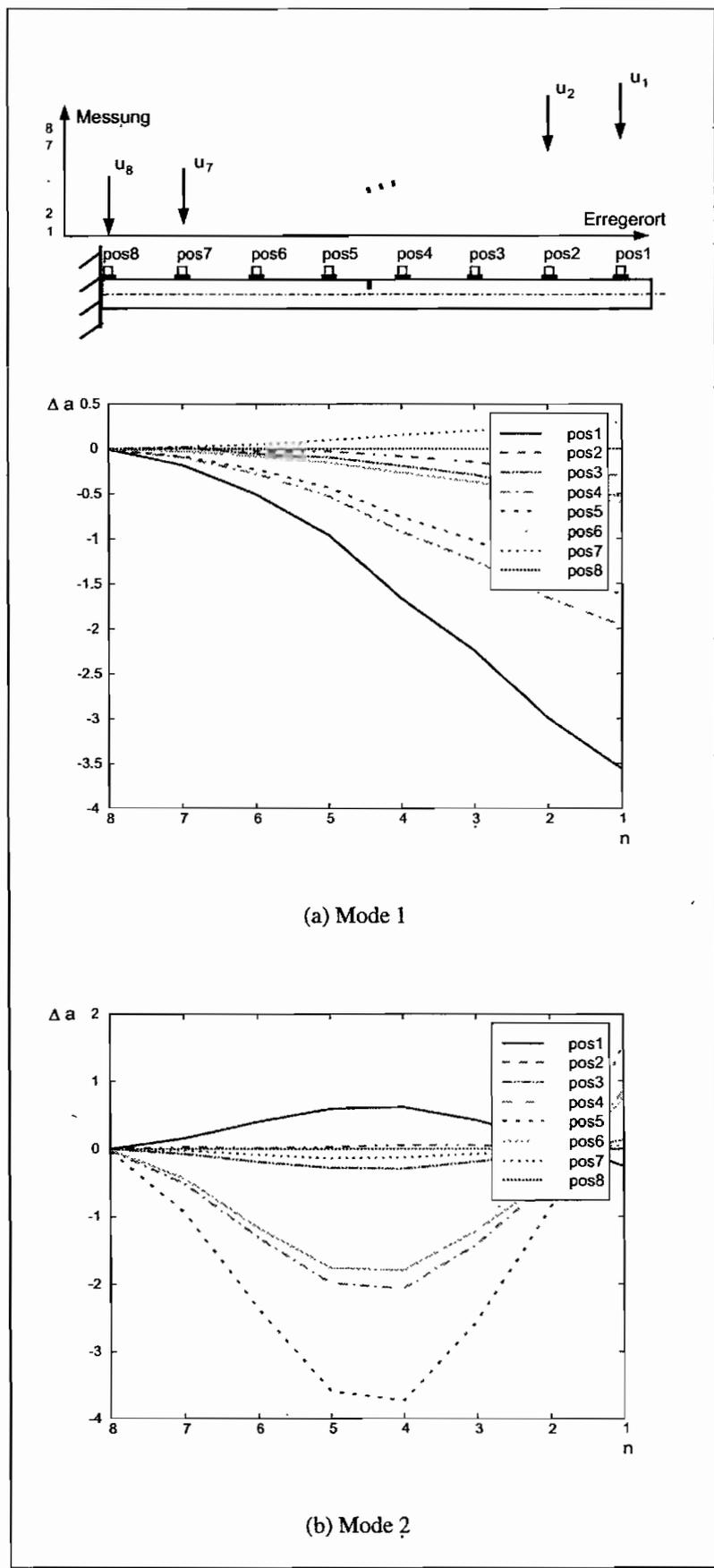


Abbildung 6.30: Differenz der Einflusszahlen – drei Moniereisen geschädigt

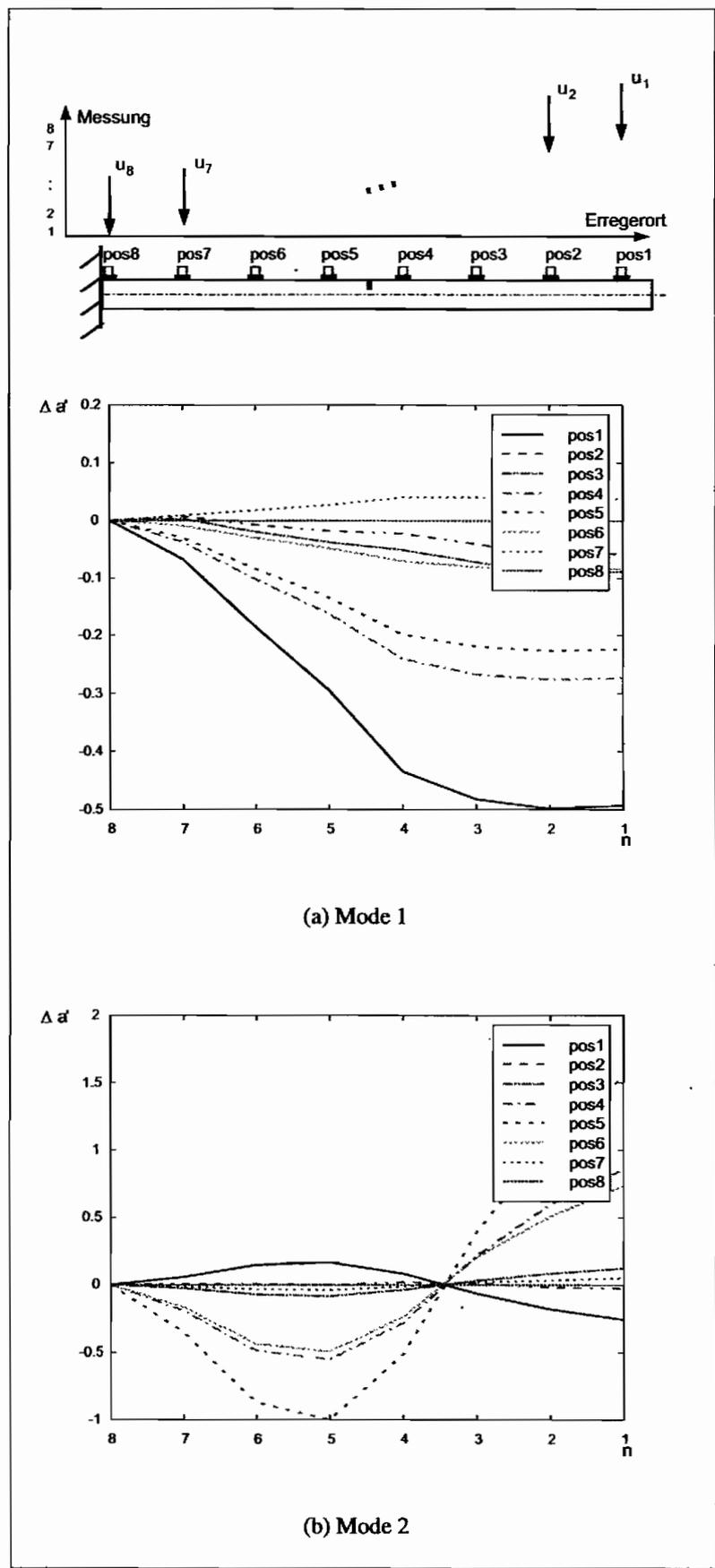


Abbildung 6.31: Differenz der Steigungen – drei Moniereisen geschädigt

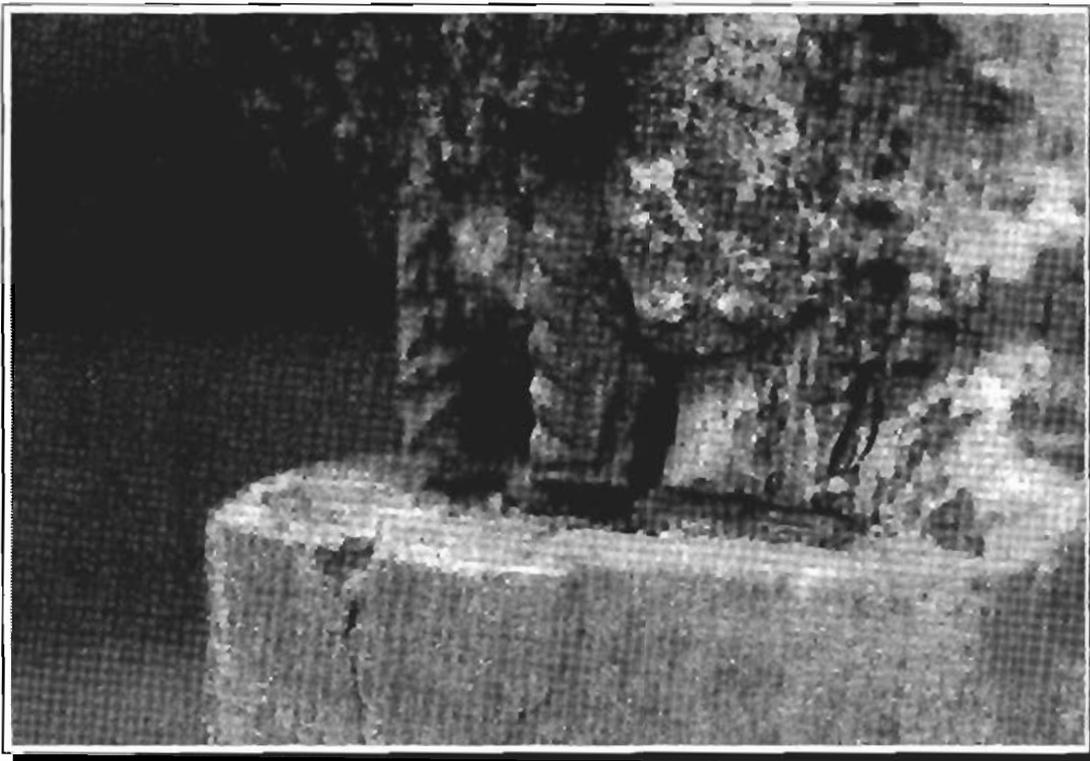


Abbildung 6.32: Schadenstufe 3

6.3.2 Schadenslokalisierung mit ambierter Erregung

Die Schadenserkennung mit ambierter Erregung wurde mit Wind als Eingangserregung durchgeführt, das große Problem bei dieser Art der Schadenslokalisierung ist nicht die Systemidentifikation, welche gute Ergebnisse, wie im Fall des Kirchturmes lieferte, sondern die Sensitivität der Indikatoren auf Veränderungen. Im Gegensatz zu den Impuls und Abschaltvorgängen kann dem Wind leider nicht eine Sensorposition zugeteilt werden, an der er bei der entsprechenden Messung angreifen soll, sondern er erregt die gesamte Struktur. Damit gehen die zusätzlichen Informationen, die bei der Impulserregung so hilfreich waren, verloren.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Identifikation dynamischer Systeme und anschließender Schädigungslokalisierung unter Verwendung der in der modalen Analyse neuen Subspace-Methoden. In Theorie und Experimenten wird die Effizienz der Subspace-Methoden nachgewiesen und mit den bisher für diese Probleme verwendeten Verfahren verglichen. Dabei ist die derzeitige Einschränkung, nur Impuls- und Abschaltvorgänge zu betrachten, aufgehoben worden.

Zunächst wird im theoretischen Teil der Arbeit die Basis für den Kern der experimentellen Modalanalyse – der Identifikation – erarbeitet. Die mathematischen Zusammenhänge der angegebenen Subspace-Methoden, welche alle auf einer Zustandsraum-Differentialgleichung erster Ordnung beruhen, werden besprochen. Die Differentialgleichung dient der Beschreibung eines systemtheoretischen Black-Box-Modells, dessen innerer Aufbau anfänglich unbekannt ist und erst durch eine Schätzung, mit Hilfe der bekannten Ein- und Ausgänge, bestmöglich angepasst wird.

Die Anpassung der Parameter der Zustandsraum-Differentialgleichung bezeichnet man als Realisierung, diese wird durch bestimmte numerische Werkzeuge ermöglicht, welche in den Bereich der linearen Algebra und Statistik einzuordnen sind und erst in den letzten zehn Jahren enorme Bedeutung in vielen Bereichen der Computernumerik erlangt haben. Auf die verständliche Darstellung der Singulärwertzerlegungen und anderen Matrizenzerlegungsverfahren wird deshalb großen Wert gelegt, weil sie durch ihre numerische Stabilität und Vielseitigkeit überzeugen konnten.

In dieser Arbeit sind die Erweiterungen der Subspace-Methoden, von der Realisierung mit Impulserregung über die Realisierung mit stochastischer Erregung bis hin zur beliebig erregten Realisierung, beschrieben. Damit kann ein System in allgemeinen Betriebsbedingungen und mit sehr kurzen Messdatensätzen untersucht werden.

Durch die Berechnung der Realisierung ist die Basis für den zweiten eher experimentellen Teil der Arbeit geschaffen – der Schädigungslokalisierung. Aus den gewonnenen Systemparametern lassen sich durch eine Zustandsraumtransformation die dynamischen Einflusszahlen berechnen, welche vom Aufbau mit den Eigenformen vergleichbar sind, aber zusätzliche Informationen über ihre tatsächliche physikalische Größe enthalten. In diesem Fall werden die Eingänge des Systems mit in die Normierung einbezogen und nicht, wie bei der Normierung der Eigenformen, die Massenmatrix.

Es wird gezeigt welche modalen Parameter bei einer Systemveränderung besonders sensitiv sind und welche Möglichkeiten sich dadurch für die Schädigungslokalisierung ergeben. Unter Berücksichtigung dieser Parameter werden Indikatoren angegeben, welche sich besonders für den Einsatz mit den Subspace-Methoden empfehlen.

Eine Systemüberwachung mit den Subspace-Methoden bietet sich deshalb an, weil im Gegensatz zu einer Modellierung mit der Finiten Elemente Methode die Einflüsse, der oft schwierig zu modellierenden Randbedingungen, besser wiedergeben werden. Für die Schädigungslokalisierung ist man dann nur auf eine Referenzmessung angewiesen, mit der alle späteren Messungen verglichen werden. Zu diesem Zweck sind aus der Vielzahl der existierenden Indikatoren die Differenzen der dynamischen Einflusslinien und die Differenzen der Ableitungen der Einflusslinien ausgewählt worden. Als Hilfsmittel, welche Einflusslinien miteinander zu vergleichen sind, sind die MAC-Werte einzusetzen. Um eine zusätzliche Sicherheit über den Ort der Schädigung zu gewinnen, werden auch COMAC-Werte hinzugezogen.

Bei der Erprobung der Subspace-Methoden wird erstmalig ein Vergleich mit der für die Identifikation standardmäßig verwendeten Fourier-Transformation durchgeführt, dabei zeigt sich die Überlegenheit der neuen Methoden gegenüber der Fourier-Transformation. Die Fourier-Transformation hat durch ihren eingeschränkten Funktionensatz und dem starren Raster im Frequenz- und Zeitbereich klare Nachteile.

Um die Subspace-Methoden bei ambienten Erregungen zu testen, wurde ein Kirchturm in Marl-Lenkerbeck als Versuchsobjekt ausgewählt. Die Erregung des Kirchturms ist dabei zum einen durch seine vier Glocken und zum anderen durch den Wind erfolgt. In beiden Fällen werden die Frequenzen, welche im Vorfeld mit einem Finite Elemente Programm abgeschätzt worden sind, um die Frequenzen der Biegeschwingungen zu bestimmen, identifiziert. Auch die zugehörigen Moden sind zu ermitteln. Die Abschätzung ist deshalb erfolgt, weil mit der Fourier-Analyse eine Identifikation der Turmfrequenzen mit der ambienten Erregung nicht möglich ist und durch Impulserregung nicht genug Energie in die steife Turmkonstruktion gelangt.

Im zweiten Schritt sind mit den Subspace-Methoden die Schädigungsorte untersucht worden. Es dienten als Versuchsobjekte ein Laternenmast und ein Laborbalken. Verschiedene Schadensszenarien werden betrachtet und die Orte der eingebrachten Schädigung gut detektiert. Es hat sich weiterhin gezeigt, dass die Sensitivität der Indikatoren sehr stark vom Erregungsort abhängt! So konnten die COMAC-Werte, die bisher nur beim Abgleich von experimenteller Messung und theoretischen Finite Element Modellen Verwendung finden, durch die Variation der Erregerorte, als zusätzliche Indikatoren mit gutem Erfolg eingesetzt werden.

Es ist möglich, sowohl Sweeperregungen als auch Impulserregungen zur Schadenslokalisierung einzusetzen, solange der Erregungsort definiert variiert werden kann. Die Sweepfunktionen zeichnen sich dabei insofern aus, weil mit ihnen eine Untersuchung eines bestimmten Frequenzbereiches möglich wird, ohne die Datensätze zu vergrößern (Blocksummentransformation). Allerdings sind Sweeperregungen stark abhängig von den benutzten Aktoren.

Für niedrige Frequenzen eignet sich ein normaler Schwingerreger wegen seines relativ großen Stellweges besser, während ein Piezo-Stapelaktor aufgrund seiner großen Stellkräfte bei hoher

Dynamik mehr Energie in das System einbringen kann.

Die Erfahrungen bei der Schadenslokalisierung zeigen, dass es wichtig ist mehrere Indikatoren für die Untersuchungen zu benutzen, weil nur durch redundante Ergebnisse eine gesicherte Aussage auf diesem schwierigen Gebiet zu machen ist.

Als Fazit der Untersuchungen ist zu nennen, dass die Subspace-Methoden der klassischen Fourier-Transformation im Hinblick auf die Auflösungsgenauigkeit und die Flexibilität, bei unterschiedlichen Erregungen und der Berechnung von Dämpfung, überlegen sind.

Auf die verbesserten Identifikationsergebnisse sind auch die Erfolge bei der Schädigungslokalisierung zurückzuführen. Durch die Zusatzinformation einer physikalischen Normierung der Einflusslinien wird der Vergleich bei der Variation der Eingänge erst möglich und die Anwendung differenzbildender Verfahren sinnvoll. Ein zusätzlicher Gewinn wird durch die Variation der COMAC-Werte erzielt, durch die eine Absicherung der Ergebnisse aller anderen Indikatoren gemacht wird.

Als ein weiteres Anwendungsgebiet ist die Kopplung der bekannten Finiten Elemente Methode mit den Subspace-Methoden durch das *model updating* zu sehen, hier sind in Zukunft noch gute Erfolge mit den vorgestellten Methoden zu erwarten.

Literaturverzeichnis

- [1] T.J. Abatzoglou. The constrained total least squares technique and its applications to harmonic superresolution. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(5):1070–1087, 1991.
- [2] H. Akaike. Stochastic theorie of minimal realization. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 19(6):667 – 674, december 1974.
- [3] H. Akaike. Markovian representation of stochastic processes by canonical variables. *SIAM J. Control*, 13(1):162 – 173, january 1975.
- [4] M. Aoki. *Dynamic Analysis of Open Economics*. Academic Press, New York London Toronto, 1981.
- [5] M. Aoki. *Notes on Economic time Series Analysis: System Thoretic Perspectives*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [6] M. Aoki. *State Space Modeling of Time Series*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1990.
- [7] L. Arnold. *Stochastische Differentialgleichungen*. Oldenbourg-Verlag, München Wien, 1973.
- [8] K.S. Arun and S.Y. Kung. Balanced approximation of stochastic systems. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 11(1):42 – 68, january 1990.
- [9] W.J. Bartz. *Frühdiagnose von Schäden an Maschinen und Maschinenanlagen*. Expert-Verlag, 1988.
- [10] S. Brandt. *Datenanalyse*. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1985.
- [11] S.G. Braun. State-space identification of vibrating systems from multi-output measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1997.
- [12] E.O Brigham. *FFT Schnelle Fourier-Transformation*. Oldenbourg-Verlag, München, Wien, 1992.
- [13] L. F. Campanile. *Diagnose struktureller Schäden mit Hilfe der strukturdynamischen Systemidentifikation*. Shaker-Verlag, 1996.
- [14] D.E. Catlin. *Estimation Control, and the Diskrete Kalman Filter*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [15] R.A. Collacott. *Vibration Monitoring and Diagnosis*. Wiley & Sons, 1979.

- [16] L. Czerny. *Analyse instationärer Zufallsschwingungen*. VDI-Verlag, 1987.
- [17] K.I. Diamantras. *Principal Component Neural Networks*. John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [18] E.B. Dynkin. *Die Grundlagen der Theorie der Markovschen Prozesse*. Springer-Verlag, 1961.
- [19] E.B. Dynkin. *Markov Processes I*. Springer-Verlag, 1965.
- [20] E.B. Dynkin. *Markov Processes II*. Springer-Verlag, 1965.
- [21] C.R Farrar and Doebling S.W. An overview of modal-based damage identification methods. *DAMAS'97 Sheffield Academic Press*, 1997.
- [22] F. Faurre. Identification par minimalisation d'une representation markovienne de processus aleatoire, symposium on optimization. *Lecture Notes in Mathematics 132*, Springer-Verlag, 1970.
- [23] O. Föllinger. *Regelungstechnik*. Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, 1994.
- [24] M.I. Friswell and J.E. Mottershead. *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [25] F.R. Gantmacher. *Matrizenmethoden Bd.II*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft, Berlin, 1958.
- [26] W. Giloi. *Simulation und Analyse stochastischer Vorgänge*. Oldenbourg-Verlag, 1970.
- [27] K. Glover. All optimal hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their l^∞ -error bounds. *Int. J. of Control*, 39(6), 1984. 1115-1193.
- [28] G.H. Golub and C.F Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 1996.
- [29] P. Goßmann. *Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei der Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregung durch stochastische Differentialgleichungen*. Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1981.
- [30] R. Guidorzi. Canonical structures in the identification of multivariable systems. *Automatica*, 11:361–374, 1975.
- [31] R. Guidorzi. Invariants and canonical forms for systems structural and parametric identification. *Automatica*, 17(1):117–133, 1981.
- [32] C.H. Hansen and S.D. Snyder. *Active Control of Noise and Vibration*. London, 1997.
- [33] A.C. Harvey. *Forecasting, structural time series models and the Kalman filter*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1992.
- [34] B.L. Ho and R.E. Kalman. Effective construction of linear state-variable models from input/output functions. *Regelungstechnik*, 1966.
- [35] C. Hoen. System identification of structures exposed to environmental loads. *Structural Dynamics - EURO DYN'93*, 835 – 844, 1993.

- [36] J. Honerkamp. *Stochastische Dynamische Systeme*. VCH Verlagsgesellschaft, 1990.
- [37] H. Hotelling. Relations between two sets of variates. *Biometrika*, 28:321–377, 1936.
- [38] S. Van Huffel. Total least squares algorithms based on rank-revealing complete orthogonal decompositions. In *Recent Advances in Total Least Squares Techniques and Errors-in-Variables Modeling*, 99–116. SIAM, 1997.
- [39] R. Isermann. *Digitale Regelsysteme*. Springer-Verlag, 1987.
- [40] R. Isermann. *Identifikation dynamischer Systeme Band 1*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988.
- [41] R. Isermann. *Identifikation dynamischer Systeme Band 2*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988.
- [42] G. M. Jenkins G. E. P. Box. *Time Series Analysis*. Holden-Day, San Francisco Düsseldorf, 1976.
- [43] T. Kailath. *Modern Signal Processing*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [44] D. Kamarys A. Lenzen and H. Waller. Realization of multicorrelated random excitations of structures. In *Aspects in Modern Computational Structural Analysis*, 33–45. Balkema-Verlag, 1998.
- [45] D. Kamarys und H. Waller. Detektion von Strukturveränderungen mit Zustandsraummodellen und der Singulärwertzerlegung. *VDI-Tagung Technische Diagnostik in Merseburg*, 1998.
- [46] D. Kamarys und H. Waller. Die Subspace-Methode in der experimentellen Modalanalyse - eine bessere Alternative zur Fourier-Analyse? *VDI-Bericht 1463*, 33–45, 1999.
- [47] H. Lahres. *Einführung in die diskreten Markoff-Prozesse und ihre Anwendung*. Vieweg Verlag, 1963.
- [48] S. Edwards A.W. Lees and M.I. Friswell. Fault diagnosis of rotating machinery. *Shock and Vibration Digest*, 30(1):4–13, 1998.
- [49] B. Leiner. *Spectralanalyse -Einführung in die Theorie und Praxis moderner Zeitreihenanalyse*. Westdeutscher Verlag, 1975.
- [50] A. Lenzen. *Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen*. Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1994.
- [51] K. Liu. Application of svd in optimization of structural modal test. *Computer & Structures*, 63(1):51–59, 1997.
- [52] K. Liu. Identification of linear time varying systems. *Journal of Sound and Vibrations*, 206(4):487–505, 1997.
- [53] L. Ljung and T. Söderström. *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, 1986.

- [54] C.F. Van Loan. Generalized the singular value decomposition. *SIAM J. Numer. Anal.*, 13(1):76–83, 1976.
- [55] A. Fort C Manfredi and S. Rocchi. Adaptive svd-based ar model order determination for time-frequency analysis of doppler ultrasound signals. *Utrasound in Medicine and Biology*, 21(6):793–804, 1995.
- [56] P.S. Maybeck. *Stochastic Models, Estimation, and Control*, volume 1. Academic Press, San Diego, New York, Berkley Boston, London, Paris, 1979.
- [57] P.S. Maybeck. *Stochastic Models, Estimation, and Control*, volume 2. Academic Press, San Diego, New York, Berkley Boston, London, Paris, 1982.
- [58] P.S. Maybeck. *Stochastic Models, Estimation, and Control*, volume 3. Academic Press, San Diego, New York, Berkley Boston, London, Paris, 1982.
- [59] B. Miao. *Zur analytischen und numerischen Behandlung der Zufallsschwingungen nichtlinearer Systeme*. VDI-Verlag, 1982.
- [60] M. Moonen and B. De Moor. On- and off-line identification of linear state-space models. *Int. J. Control*, 49(1):219–232, 1989.
- [61] M. Moonen and B. De Moor. Comments on state-space model identification with data correlation. *Int. J. Control*, 55(1):257–259, 1992.
- [62] M. Moonen and J. Vandewalle. Qsvd approach to on- and off-line state-space identification. *Int. J. Control*, 51(5):1133–1146, 1990.
- [63] B. De Moor. On the structure of generalized singular value and qr decomposition. *SIAM J. o. Matrix Analysis & Application*, 15(1):347–358, 1994.
- [64] B. De Moor. Total least squares for affinely structured matrices and the noisy realization problem. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 42(11):3104–3113, 1994.
- [65] B. De Moor. Linear system identification, structure total least squares and the riemanian svd. In *Recent Advances in Total Least Squares Techniques and Errors-in-Variables Modeling*, 225–238. SIAM, 1997.
- [66] B. De Moor and P. van Overschee. Subspace algorithms for the stochastic identification problem. *Automatica*, 29(3):649–660, 1993.
- [67] J.E. Mottershead and M.I. Friswell. Modell updating in structural dynamics: A survey. *Journal of Sound and Vibration*, 167(2):347–375, 1993.
- [68] S. Müller and H. Waller. Efficient integration of real-time hardware and web based services into matlab. In *11th European Simulation Symposium and Exhibition*, 26–28. 1999.
- [69] H.G. Natke. *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. Vieweg Verlag, 1988.
- [70] W. Oberhofer. *Lineare Algebra für Wirtschaftswissenschaftler*. Oldenbourg Verlag, München, 1993.

- [71] P. Van Overschee and B. De Moor. About the choice of state space basis in combined deterministic- stochastic subspace identification. *Automatica*, 31(12):1877–1883, 1994.
- [72] P. Van Overschee and B. De Moor. N4sid: Subspace algorithms for the identification of combined deterministic-stochastic systems. *Automatica*, 30(1):75–93, 1994.
- [73] P. Van Overschee and B. De Moor. A unifying theorem for three subspace system identification algorithms. *Proc. of 10th IFAC Symposium on System Identification (SYSID'94)*, 145–150, 1994.
- [74] P. Van Overschee and B. de Moor. *Subspace identification for linear systems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht NEDERLANDS, 1996.
- [75] P. Van Overschee and B. De Moor. Continuous-time frequency domain subspace system identification. *Proc. of the 13th IFAC World Congress*, 157–162, 1996.
- [76] C.C Paige and M.A. Saunders. Towards a generalized singular value decomposition. *SIAM J. Numer. Anal.*, 18(3):398–405, 1981.
- [77] C.C. Paige M.T. Heath and R.C. Ward. Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(2):115–121, 1997.
- [78] M. Pavon. Stochastic realization and invariant directions of the matrix riccati equation. *SIAM J. of Control and Optimization*, 18(2):155–180, 1980.
- [79] C. Petersen. *Dynamik der Baukonstruktionen*. Vieweg Verlag, 1996.
- [80] E.J. Plate. *Statistik und angewandte Wahrscheinlichkeitslehre für Bauingenieure*. Ernst & Sohn, Berlin, 1993.
- [81] M.B. Priestley. *Spectral Analysis and Time Series*. Academic Press, London, San Diego, 1981.
- [82] G. Rauscher und R.Flesch. *Messtechnik zur genauen Bestimmung der Modalparameter im Hinblick auf die dynamische Bauwerksidentifikation*. VDI-Bericht 536, 1984.
- [83] G. Siffing K. Brammer. *Kalman-Bucy-Filter*. R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 1989.
- [84] H. Schlitt. *Systemtheorie für regellose Vorgänge*. Springer-Verlag, Göttingen, 1960.
- [85] H. Schlitt. *Systemtheorie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.
- [86] R. Schlittgen. *Zeitreihenanalyse*. Oldenbourg-Verlag, München, Wien, 1984.
- [87] H. Schwarz. *Nichtlineare Regelungssysteme*. Oldenbourg-Verlag, München, Wien, 1991.
- [88] R.E. Skelton. *Dynamic System Control*. John Wiley & Sons, New York; Brisbane; Toronto, 1988.
- [89] J. Suhardjo B.F Spencer and A. Kareem. Frequency domain optimal control of wind-excited buildings. *ASCE*, 8(2):2463–2481, 1994.

- [90] G.W. Stewart. On the early history of the singular value decomposition. *SIAM Review*, 35(4):551–566, 1993.
- [91] G. Strang. *Linear Algebra and its Application*. Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, Fort Worth Philadelphia, 1986.
- [92] N. Stubbs, M. Choi and C. Sikorsky. Combining individual damage detection theories to increase the reliability of damage detection. *DAMAS'97 Sheffield Academic Press*, 1997.
- [93] C.W. Therrien. *Discrete random signals and statistical signal processing*. Prentice-Hall International Editions, 1992.
- [94] K.G. Topole. *Nondestructive Damage Evaluation in Nonlinear Structures*. Texas A&M University, 1993.
- [95] U. Tietze und C. Schenk. *Halbleiter-Schaltungstechnik*. Springer-Verlag, 1989.
- [96] J. Vandewalle and B. De Moor. *Numerical Linear Algebra, Digital Signal Processing and Parallel Algorithms*, chapter: On the Use of the Singular Value Decomposition in Identification and Signal Processing, 321–359. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991.
- [97] M. Verhaegen and P. Dewilde. Subspace model identification – the output-error state-space model identification class of algorithm. *Int. J. of Control*, 56(5):1187–1210, 1992.
- [98] M. Verhaegen. Analysis of the ordinary output-error state-space model identification algorithm. *Int. J. Control*, 58(3):555–586, 1993.
- [99] M. Verhaegen. Identification of the deterministic part of mimo state space models given in innovations form from input-output data. *Automatica*, 30(1):61–74, 1994.
- [100] M. Viberg. Subspace-based methods for the identification of linear time-invariant systems. *Automatica*, 31(12):1835–1851, 1995.
- [101] H. Waller und W. Krings. *Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik*. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1974.
- [102] H. Waller and P. Goßmann. Analysis of multi-correlated windexcited vibrations of structures using the covariance method. *Eng. Struct.*, 5, oct 1983.
- [103] H. Waller und R. Schmidt. *Schwingungslehre für Ingenieure*. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1989.
- [104] W.M West. Illustration of the use of modal assurance criterion to detect structural changes in an orbiter test specimen. *Air Force Conference on Aircraft Structural Integrity*, 1984.
- [105] F. Wille K. Burg, H. Haf. *Höhere Mathematik für Ingenieure Band 2 - Lineare Algebra* -. B. G. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [106] J.H. Williams. *Transfer Function Techniques and Fault Location*. Research Studies Press, 1985.
- [107] H.P. Zeiger and A.J. McEwen. Approximate linear realizations of given dimension via ho's algorithm. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 19:153, 1974.

Anhang A

Verarbeitung gemessener Signale

Die in der Praxis gemessenen Signale und Zeitverläufe sind häufig mit einem Trend versehen, der durch die verwendete Messtechnik wie Filter und Verstärker hervorgerufen wird. Die Identifikation von dynamischen Vorgängen bezieht sich aber auf das Schwingungsverhalten und wird durch diese oftmals linear verlaufenden Trends verfälscht. Der erste Schritt bei der Analyse von Zeitsignalen ist die Bereinigung der Messwerte von diesen, die Auswertung störender Effekten.

A.1 Lineare Regression zur Trendbereinigung

Es wird angenommen, dass die Echtzeitbedingungen bei jeder Messung nicht verletzt werden und die Messung so zu jedem vorgesehenen Zeitpunkt erfolgen kann. Damit ist die Zeitachse als bekannt und nicht fehlerbehaftet anzusehen.

Die erwarteten Abweichungen auf der Ordinate sind als linear zu bezeichnen und können durch eine Geradengleichung wie folgt beschrieben werden

$$y = a_1 t + a_0. \quad (\text{A.1})$$

Die Aufgabe besteht darin, aus den mit Rauschen versehenen Messdaten diese Geradengleichung zu finden oder möglichst optimal anzupassen. Denn es gilt:

$$y_i \neq a_1 t_i + a_0 \quad (\text{A.2})$$

Unter Verwendung eines Korrekturterms d_i lässt sich die Abweichung zwischen Ausgleichsgerade und Messpunkt (t_i, y_i) beschreiben

$$d_i + y_i = a_1 t_i + a_0. \quad (\text{A.3})$$

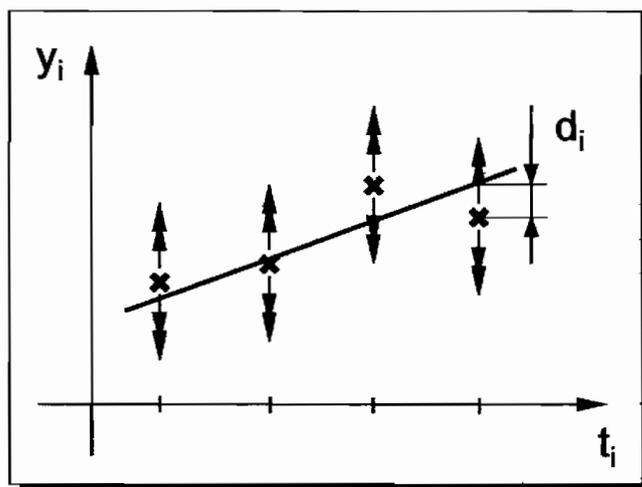


Abbildung A.1: Trendbereinigung von verrauschten Werten der y-Achse

Die zu berechnende Ausgleichsgerade soll im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate (*least squares*) optimal an das Problem angepasst werden. Dies bedeutet, dass die Summe über d_i^2 ein Minimum annehmen muss

$$\sum_i^n d_i^2 \rightarrow \text{Min.} \quad (\text{A.4})$$

In Abhängigkeit von den beiden Parametern a_0 und a_1 wird dies durch das Gütekriterium ausgedrückt

$$Q(a_0, a_1) = \sum_i^n d_i^2. \quad (\text{A.5})$$

Über die Berechnung der Extremwerte dieses Gütekriteriums, aus den Bedingungen

$$\frac{\partial Q}{\partial a_0} = 0 \text{ und } \frac{\partial Q}{\partial a_1} = 0, \quad (\text{A.6})$$

ist ein Gleichungssystem anzugeben, welches die Berechnung der Parameter a_0 und a_1 zur optimalen Anpassung der Geradengleichung liefert

$$a_1 \sum_i^n t_i + a_0 n - \sum_i^n y_i = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$a_1 \sum_i^n t_i^2 + a_0 \sum_i^n t_i - \sum_i^n t_i y_i = 0. \quad (\text{A.8})$$

Als Lösung des Gleichungssystems ergibt sich damit:

$$a_0 = \frac{\sum_i^n y_i \sum_i^n t_i - \sum_i^n t_i \sum_i^n t_i y_i}{n \sum_i^n t_i^2 - (\sum_i^n t_i)^2} \quad (\text{A.9})$$

$$a_1 = \frac{n \sum_i^n t_i y_i - \sum_i^n t_i \sum_i^n y_i}{n \sum_i^n t_i^2 - (\sum_i^n t_i)^2} \quad (\text{A.10})$$

Die gefundene Geradengleichung kann nun auf die erfassten Messwerte angewendet werden, so dass der Trend aus der zu untersuchenden Messreihe eliminiert und eine genauere Identifikation der periodischen Anteile des Signals ermöglicht wird.

Anhang B

Verwendete Messtechnik

Die zur dynamischen Strukturanalyse benötigten Komponenten sind im folgenden Abschnitt zusammengefasst und die Eigenschaften einiger Komponenten näher erläutert.

B.1 PC-Messkarte

Die verwendete PC-Messkarte der Firma SORCUS ist eine intelligente Einsteck-Karte vom Typ MODULAR-4/486. Sie wurde mit einem Speicher von 4 MB RAM und einer Zentraleinheit AMD 586 mit 133 MHz ausgestattet. Der Aufbau der Karte entspricht dem eines herkömmlichen PC's. Als Betriebssystem wurde allerdings das für diese Zwecke entwickelte OSx benutzt.

Es handelt sich bei der Karte um eine Multifunktionskarte zum Messen, Steuern und Regeln. Diese Fähigkeiten sind je nach Wunsch durch entsprechende Aufsteckmodule (SP-Module) frei zu konfigurieren. Da sie außerdem auch unabhängig vom PC arbeiten kann, ergibt sich die Möglichkeit, sie als ein sehr leistungsfähiges und echtzeitfähiges Multi-Tasking-System zu nutzen. Die Verbindung mit dem Mess-PC erfolgt über den ISA-Bus des PC's.

Die Aufgabenverteilung zwischen PC und Messkarte wird so realisiert, dass der PC zur Steuerung und Eingabe der für die eigentlichen zeitkritischen Aufgaben nötigen Parameter und zum Herunterladen der Echtzeitprogramme auf die Messkarte benötigt wird. Danach ist ein eigenständiger Betrieb der Karte möglich. Die aufgenommenen Messwerte können im Speicher der Messkarte zwischengelagert und, durch einen Interrupt-Befehl gestartet, an den Mess-PC übermittelt werden, sodass die Karte vom PC entlastet wird und sich voll auf die zeitkritischen Messaufgaben beschränken kann.

Die gesamte Programmentwicklung erfolgte in der Programmiersprache C und wurde so realisiert, dass eine Schnittstelle zum Messen aus der MATLAB-Umgebung möglich wurde.

In dem RAM der Messkarte sind zur Zwischenspeicherung der Messwerte zwei Ringspeicher programmiert worden. Sie puffern den Datenaustausch zwischen der MODULAR-4 Karte und dem PC. Überschreitet die Auslastung eines der beiden Ringspeicher einen vorher festgelegten Schwellwert, setzt die Karte den Interrupt, der den PC zum Auslesen dieses Speichers veranlasst. Während des Auslesevorganges füllt die Messkarte den zweiten Ringspeicher (*swinging buffer*).

Diese Konstruktion ist notwendig, weil der Zugriff auf einen der Ringspeicher streng sequentiell erfolgt, d.h. der Speicher kann entweder nur beschrieben oder nur ausgelesen werden.

Auf der MODULAR-4 Karte können bis zu 256 verschiedene Ringspeicher angelegt werden, deshalb wird bei der Anforderung eines dieser Puffer eine Puffernummer an den PC geliefert, die für alle weiteren Zugriffe auf diesen Speicher maßgeblich ist.

Die Ringspeicher arbeiten byteorientiert nach dem FIFO-Prinzip: Die zuerst geschriebenen Bytes werden auch als erste wieder ausgelesen. Damit ist sichergestellt, dass die Messdaten in der richtigen Reihenfolge in den Hauptspeicher des Computers gelangen.

Für die Messdatenerfassung wurde die Karte mit drei Modulen SH 12-8 versehen, auf denen jeweils ein Analog-Digital-Wandler realisiert ist. Durch die Fähigkeit des *sample and hold* war es möglich, 24 Messkanäle zeitgleich zu erfassen. Dies bedeutet, dass man die Messwerte unter Echtzeitbedingungen in ein Register zeitgleich ablegt und später nacheinander ausliest.

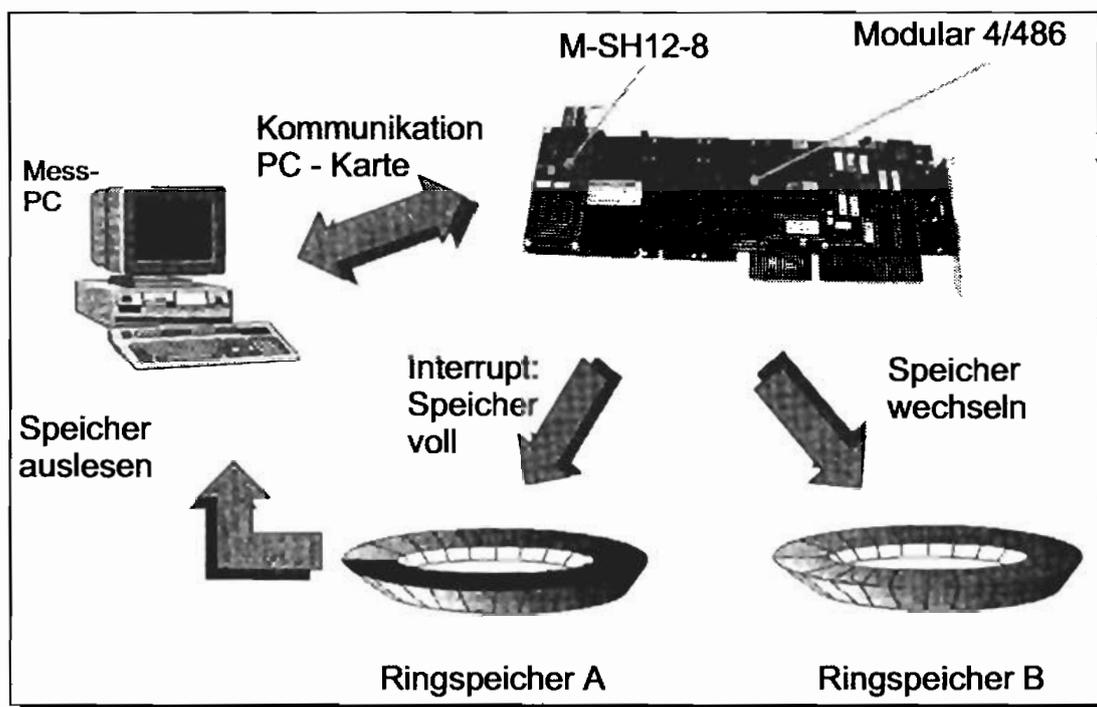


Abbildung B.1: Funktionsweise des ‚swinging buffer‘

Ein Modul SH 12-8 enthält folgende Funktionseinheiten:

- 8 Single-Ended (SE) Analogeingänge

- Exakt zeitgleiche Abtastung durch 8 Sample/Hold Verstärker
- 12-Bit Auflösung, maximal 10μ Wandlungszeit
- Eingangsbereich: $\pm 5 V$
- Triggern des Abtastzeitpunktes durch:
 - Software
 - Timer der Basiskarte
 - Externen Impuls
 - Durch Überschreiten einer vorprogrammierten Schwelle
- Interrupt-Auslösung durch Abtast-Trigger
- Analogausgang zur Einstellung der Trigger-Schwelle, 12-Bit Auflösung
- Korrektur durch EEPROM-Abgleich auf dem Modul

B.2 Analoge Filter

Um bei der Auswertung der Messungen Aliasing-Effekten vorzubeugen, ist es besser, die gemessenen Signale mit einem Tiefpass-Filter zu bearbeiten. Da als Abtastfrequenz eine Frequenz $f_{ab} = 4000 \text{ Hz}$ nicht unterschritten werden sollte, ist eine Tiefpass-Filterung mit einer Eckfrequenz $f_{eck} = 1000 \text{ Hz}$, als ausreichend angesehen worden.

Zum Einsatz kamen dabei Butterworth-Filter 8. Ordnung, welche durch einen Filter vom Typ MAX274 realisiert wurden. Dieser Filter ist ein aktiver analoger Baustein, der vier Filter 2. Ordnung enthält die je nach Anwendung zu einem Tief- oder Bandpass verschaltet werden können. Als Filter-Typ kann zwischen einem Butterworth-, Tschebyscheff- und einem Bessel-Filter gewählt werden [95]. Durch eine Kaskadisierung der Filter ist die Ordnung der Filterung einzustellen. Dies ermöglicht entweder vier Tiefpässe 2. Ordnung zu betreiben, oder einen Tiefpass 8. Ordnung.

Da die Eingangsspannung des Bausteins zwischen $\pm 5 V$ liegt, und diese Spannung in manchen Fällen durch die hochsensiblen Beschleunigungsaufnehmer überschritten werden kann, ist ein Spannungsteiler dem eigentlichen Filter vorgeschaltet worden, sodass nur Spannungen von *max.* $\pm 5 V$ an dem Filter anliegen. Durch eine Jumpereinstellung auf der Filterplatine ist es möglich, das gefilterte analoge Signal wieder zu verstärken bevor es an den A/D-Wandler des

Mess-PC's weitergeleitet wird, oder mit dem niedrigeren Spannungssignal weiter zu arbeiten.

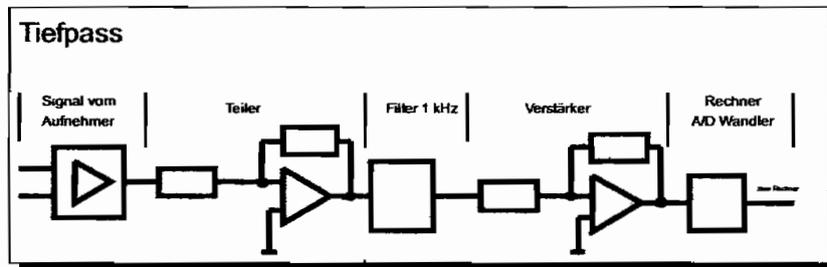


Abbildung B.2: Prinzip der Tiefpass-Filterung

B.3 Mess-Sensoren

Als Mess-Sensoren sind Windgeschwindigkeits-Sensoren für die Erregerkräfte und Beschleunigungs-Sensoren für die Systemantwort zum Einsatz gekommen. Die Funktionsweisen der verwendeten Sensoren werden im folgenden Abschnitt erläutert.

B.3.1 Beschleunigungsaufnehmer

Piezoelektrische Beschleunigungsaufnehmer werden überall dort eingesetzt, wo es um die Messung dynamischer Beschleunigungen geht. Der Sensor wird direkt auf das Messobjekt gesetzt und benötigt daher keine externe Montagereferenz. Aufgrund der hohen Messfrequenzen und wegen des großen erfassbaren Beschleunigungsbereichs sind diese Sensoren für sehr viele Anwendungen geeignet.

Piezoelektrische Beschleunigungsaufnehmer können aus Quarz oder Keramik als sensitives Material, im Kompressions- oder Shear-Design und mit bzw. ohne integrierte Signalkonditionierung hergestellt werden.

Die einfachste Bauform ist beim Kompressions-Mode-Aufnehmer verwirklicht worden. Er besteht aus einer oder mehreren Scheiben piezoelektrischen Materials, die in Sandwich-Technik zwischen der Basis und einer seismischen Masse montiert sind. Dieser Aufbau ermöglicht hohe Empfindlichkeit und Linearität sowie hohe Resonanzfrequenzen. Schnelle Temperaturänderungen und Biebeanspruchungen der Basis führen jedoch zu Messfehlern, besonders bei niedrigen Frequenzen.

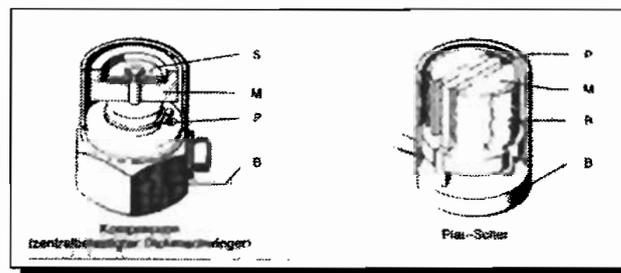


Abbildung B.3: Piezo-Beschleunigungsaufnehmer im Shear-Design

Die Shear-Mode-Aufnehmer lösen dieses Problem weitgehend. Hier wird das piezoelektrische Material wie ein Sandwich zwischen einem zentralen Pfosten und einer seismischen Masse aufgehängt. Ein Ring presst die verschiedenen Schichten zusammen. Beim Auftreten von Beschleunigungen erzeugen die seismischen Massen Scherkräfte im piezoelektrischen Material, was dann zur Ladungstrennung führt.

Da bei diesem Aufbau die Basis des Sensors strikt vom empfindlichen Material getrennt ist, werden die Einflüsse von Temperatur- und Biegeinflüssen stark reduziert.

Die Beschleunigungs-Sensoren beruhen alle auf dem Piezokeramischen-Effekt. Beim Belasten eines Piezokristalls durch eine äußere Kraft F wird eine Ladungsänderung hervorgerufen, welche durch die Verschiebung der Silitumatome zu den O_2 -Ionen zustande kommt. Im Fall der Beschleunigungssensoren wird eine seismische Masse mit einem Piezokristall verbunden. Eine aufgebrachte Beschleunigung a erzeugt zusammen mit der Masse m eine Kraft F (Trägheitskraft), welche die Ladungsverschiebung proportional zur Beschleunigung verursacht.

Prinzipiell gibt es zwei unterschiedliche Bauweisen bei den Beschleunigungsaufnehmern, welche bei der Signalweiterleitung eine entscheidende Rolle spielen. Beschleunigungsaufnehmer werden mit Ladungs- oder Spannungsausgang hergestellt. Sensoren mit Ladungseingang haben keine integrierte Elektronik zur Vorverarbeitung der Signale. Sie beinhalten lediglich das Sensorelement und einen Ausgang zum Anschluss des Kabels. Sensoren mit Spannungsausgang beinhalten die Elektronik, die das Ladungssignal in Form von messbarer Spannung am Ausgang des Sensors zur Verfügung stellt.

Aufnehmer mit Ladungsausgang liefern ein Ausgangssignal mit hoher Impedanz. Vorteilhaft ist deren Fähigkeit, bei hohen Temperaturen zuverlässige Messwerte zu liefern.

Sie sind sehr leicht und kompakt herzustellen. Leider ist das Signal sehr empfindlich gegenüber Umgebungseinflüssen. Daher sind hochwertige, festinstallierte Kabel zu benutzen um elektromagnetische Einflüsse zu minimieren.

Bei Ladungsverstärkersystemen hängt die Ausgangsspannung nur noch vom Verhältnis der Sensorladung zur Verstärkerkapazität ab. Daher werden meist piezokeramische Sensoren mit hohen Ladungsausgängen zusammen mit Ladungsverstärkern eingesetzt. Sie liefern sehr rauscharme Messsignale. Trotzdem bleiben die Probleme mit den empfindlichen Kabeln bestehen, denn das

Rauschniveau hängt direkt mit der Kabellänge zusammen. Deshalb ist auch in diesem Fall eine Bewegung der Kabel während der Messung unbedingt zu vermeiden.

B.3.2 Windgeschwindigkeits-Sensoren

Als Windmess-Sensoren wurden vier hochgenaue Thermoanemometer eingesetzt. Es handelt sich dabei um eine laser-kalibrierte Sonde, deren Messbereich und Ausgangssignale frei einstellbar sind.

Der Ausgang wurde mit dem SH12-8 Modul der Messkarte verbunden und lieferte Daten in einem Bereich von 0 – 5 V oder 0 – 10 V als Analogsignal. Als externe Versorgungsspannung wird eine Spannungsquelle von 11 – 30 VDC benötigt.

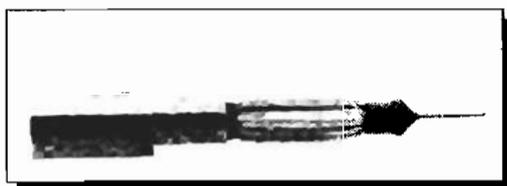


Abbildung B.4: Sonde des Thermoanemometers MT 8400

Technische Daten:

| | |
|------------------------------------|--|
| Genauigkeit | $\pm 2\%$ vom Messwert, $\pm 0.5\%$ vom ausgewählten Bereich |
| Nenntemperatur | $18 - 20^\circ C + 0.2\% \text{ je } ^\circ C$ |
| Auflösung | 0.07 % vom ausgewählten Bereich |
| Reproduzierbarkeit | $< \pm 1\%$ vom Messwert |
| Zeitkonstante | von 0.05 s – 10 s |
| Einsatzbereich | 0 – 60°C |
| Elektromagnetische Verträglichkeit | EN 55011-1 1991 Teil 1. EN 50082-1 1992 Teil 2 |

Tabelle B.1: Technische Daten des Thermoanemometers

Umrechnung des Ausgabesignals:

$$V = \frac{E_{out} - E_0}{E_{FS} - E_0} \cdot V_{FS} \quad (\text{B.1})$$

- V = Gemessene Geschwindigkeit
- V_{FS} = Volle Geschwindigkeit in m/s

- E_{out} = Spannung für die gemessene Geschwindigkeit
- E_0 = Spannung für die Nullgeschwindigkeit
- E_{FS} = Spannung für die volle Geschwindigkeit

B.4 Verwendete Aktoren zur Strukturerrregung

B.4.1 Schwingerreger (Shaker)

Der Mini-Schwingerreger 4809 von Brüel & Kjaer ist ein kleines und vielseitig verwendbares Gerät. Er eignet sich zum Messen mechanischer Impedanzen, zum Anregen von Modellstrukturen - so wie er in der vorliegenden Arbeit verwendet wurde -, zur Schwingprüfung von kleinen Objekten und zum Kalibrieren von Beschleunigungssensoren. Es können Frequenzen von 10 Hz bis 20 kHz simuliert werden, dabei ist es möglich Beschleunigungen bis zu 56 g zu erzielen.

Der Aufbau des Schwingerregers ist so ausgelegt, dass eine Axialresonanzfrequenz von 20 kHz im Leerlauf erreicht werden kann, mit einem maximalen Hub von 8 mm .

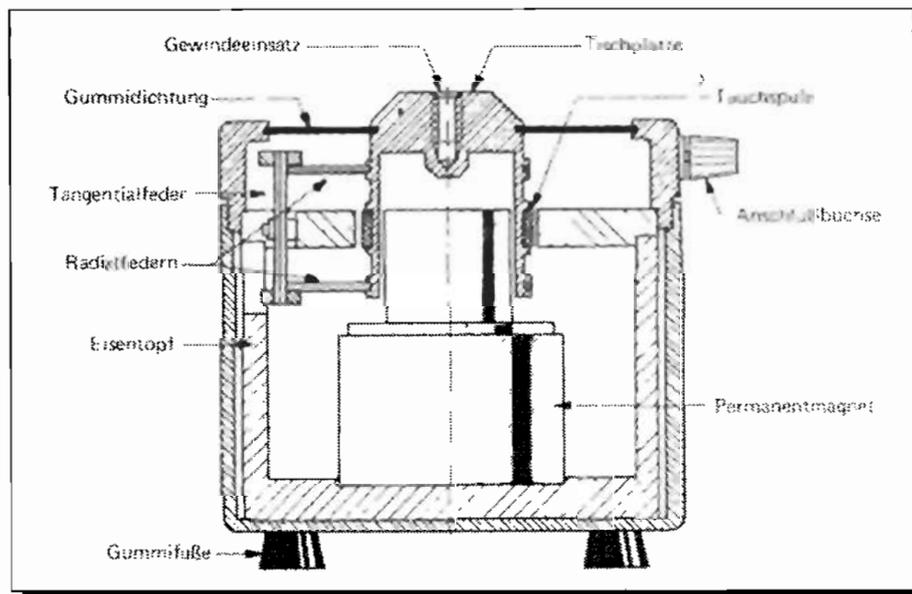


Abbildung B.5: Shaker Brüel & Kjaer

Zum Einsatz kam der Schwingerreger indem er über eine Feder mit dem zu erregenden Objekt verbunden wurde. Es wurden zu diesem Zweck verschiedene Federn mit unterschiedlichen Steifigkeiten eingesetzt. Um aber hohe Frequenzen in die Versuchsobjekte einzubringen, ist die weiche Ankopplung durch eine Feder nicht geeignet, weil zu wenig Energie übertragen wird, es müsste eine höhere Steifigkeit verwendet werden, welche aber einer zusätzlichen Lagerung gleichkäme.

B.4.2 Piezo-Stapelaktor

Eine Alternative zum weitverbreiteten Schwingerreger ist ein Piezo-Stapelaktor. Bei diesem Aktor wird die Umkehrung des Piezoeffektes genutzt, um eine sehr hohe Dynamik und sehr hohe Stellkräfte zu erzeugen.

Die Aktoren sind allerdings relativ empfindlich gegen falsche Belastungen und zu hohe Verstärkerleistungen. Die mechanische Veranlagung des Piezoaktors lässt zwar hohe Belastungen in Zug- und Druckrichtung zu, bei einer Querkraftbelastung oder bei einem eingeleiteten Moment ist eine Zerstörung jedoch nicht auszuschließen. Deshalb werden diese Aktoren immer über eine elastische Kupplung mit dem zu erregenden Objekt verbunden.

Im Bereich der experimentellen Modalanalyse dient der Stapelaktor zur Erregung von Gebäudestrukturen und Modellen. Seine im Gegensatz zum Schwingerreger geringen Auslenkungen, kompensiert er durch die hohen Kräfte, die er aufbringen kann.

Die Einbaumöglichkeiten beschränken sich im Wesentlichen auf zwei Möglichkeiten. Zum Einen ist die Abstützung an einer festen Struktur möglich - bei dieser Einsatzmöglichkeit kann die volle Kraft des Aktors in die zu erregende Struktur übertragen werden -, zum Anderen kann an den Aktor eine Trägheitsmasse befestigt werden und so durch die auftretenden Trägheitskräfte eine Erregung stattfinden. Die erste Möglichkeit stellt meist einen erheblichen Eingriff in die Lagerungen und die Modellierung der Randbedingungen dar, während die alternative Ankopplung mit Trägheitsmasse nur als Zusatzmasse berücksichtigt werden muss.

Durch den Einsatz der Trägheitsmasse konnten auch die höheren Frequenzen mit mehr Energie als beim Schwingerreger angeregt werden, sodass dieser Aktor durchaus als eine Alternative zu den üblichen Erregungsmechanismen in der Strukturdynamik anzusehen ist.

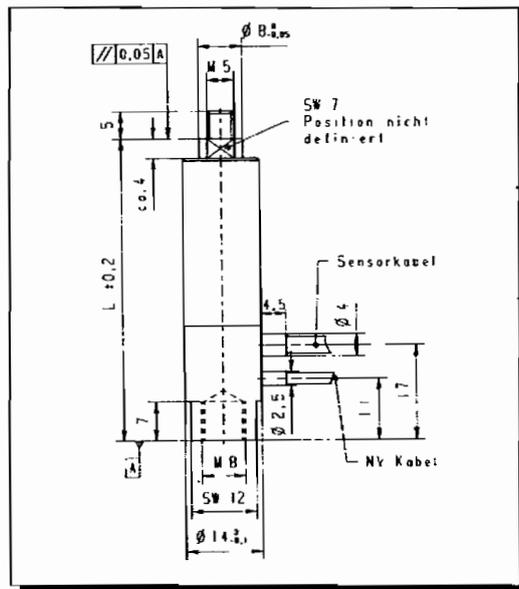


Abbildung B.6: Piezokeramischer-Stapelaktor PI P-844

Technische Daten:

| | PI P-844.60 | PI P-842.20 |
|---------------------------------|----------------|----------------|
| Betriebsspannung | -20 V – +120 V | -20 V – +120 V |
| mechanische Vorspannung | 700 N | 300 N |
| Temperaturbereich | -20 – +80°C | -20 – +80°C |
| Nennausdehnung bei +100 V ± 10% | 90 μm | 30 μm |
| Druckbelastbarkeit | 3000 N | 800 N |
| Zugbelastbarkeit | 700 N | 300 N |
| elektr. Kapazität | 43 μF ± 20% | 3.6 μF ± 20% |
| Steifigkeit | 33 N/μm | 27 N/μm |
| Resonanzfrequenz | 5,5 kHz | 14 kHz |
| Gewicht | 215 g | 53 g |
| Gesamtlänge | 137 mm | 55 mm |

Tabelle B.2: Technische Daten der benutzten Piezo-Stapelaktoren

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen (Dezember 1976)
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts (Juni 1978)
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
Stoffverhalten (Januar 1976)
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen (Januar 1976)
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter
Profilmittellinie (Februar 1976)
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen
Formänderungen (Januar 1977)
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung
orthotroper Platten (März 1977)
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen (April 1977)
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchungen eines dickwandigen Zylinders bei
endlichen Verzerrungen (April 1977)
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells (Mai 1977)
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung (Juni 1977)
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter
elastoplastischer Wellen (Juli 1977)
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity (März 1978)
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse (Juli
1978)
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung
von Spannungsrestriktionen (August 1979)
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen (Juli 1979)

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates (Dezember 1979)
- Nr. 18 Uwe Kohlberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates (Juli 1979)
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken (Januar 1980)
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods (März 1980)
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity (Juni 1980)
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung (Dezember 1980)
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode (Februar 1981)
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen (Februar 1981)
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems (März 1981)
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells (Juni 1981)
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast (September 1981)
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem (September 1981)
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft (November 1981)
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem (Dezember 1981)
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory (Juni 1982)
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen (Juli 1982)
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:

- Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität (Dezember 1982)
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells (Dezember 1982)
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Exremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente (März 1983)
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten (Juli 1983)
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse (August 1983)
- Nr. 38 Klaus-Detlef Micklej:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen (November 1983)
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen (Dezember 1983)
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode (Dezember 1983)
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden (Februar 1984)
- Nr. 42 Diemar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme (Februar 1984)
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz (Dezember 1984)
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent (April 1985)
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme (Juni 1985)
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems (Juli 1985)
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren (August 1985)
- Nr. 48 J. Chrosielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY (Oktober 1985)
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:

- Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung (Dezember 1985)
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern (Februar 1987)
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte (März 1987)
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity (Juli 1987)
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie (Dezember 1987)
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich (Januar 1988)
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells (März 1988)
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods (April 1988)
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells (Mai 1988)
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken (Juni 1988)
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last (Juli 1988)
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen (August 1988)
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes (Juli 1988)
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory (Dezember 1988)
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988 (Januar 1989)
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics (Juli 1989)
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten (Juni 1989)
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder (Juni 1989)

- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode (November 1989)
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme (November 1989)
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien (November 1989)
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung (Dezember 1989)
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen (Dezember 1989)
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory (Dezember 1989)
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells (Januar 1990)
- Nr. 74 J. Sączuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems (April 1990)
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua (April 1991)
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen (April 1991)
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1991)
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991 (Dezember 1991)
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenebau (Mai 1992)
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie (Juli 1992)
- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis (Februar 1993)

- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15 (Mai 1993)
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material (Juni 1993)
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern (Januar 1994)
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen (Januar 1994)
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle (April 1994)
- Nr. 89 Peer Schieße:
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung (April 1994)
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1994)
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik (Juli 1994)
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finite elastoplasticity with microstructure (November 1994)
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994 (Dezember 1994)
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen (Dezember 1994)
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:
Mechanics of Irregular Shell Structures (Dezember 1994)
- Nr. 96 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells (Dezember 1994)
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller (Februar 1995)
- Nr. 98 Ralf Podleschny:
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse (April 1995)
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl (Juli 1995)
- Nr. 100 Marc Mittelbach:
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell (Dezember 1995)
- Nr. 101 Ulrich Hoppe:
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie (Mai 1996)

- Nr. 102 Marcus Otto:
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen
(Juni 1996)
- Nr. 103 Horst Lanzerath:
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode
(Juli 1996)
- Nr. 104 Andreas Wichtmann
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der
Reckalterung (August 1996)
- Nr. 105 Bjarne Fosså
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stoffen (Oktober 1996)
- Nr. 106 Khanh Cha Le:
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur
(Dezember 1996)
- Nr. 107 Holger Behrens:
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allge-
meinen diskreten Modellansätzen (Januar 1997)
- Nr. 108 Johannes Moosheimer:
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden (Juli 1997)
- Nr. 109 Dirk Klaus Anding:
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze
(Oktober 1997)
- Nr. 110 Stephan Weng:
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen
(Dezember 1997)
- Nr. 111 Michael Straßberger:
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit
Hilfe piezo-keramischer Aktoren (Dezember 1997)
- Nr. 112 Hans-Jörg Becker:
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines
monokristallinen Stoffgesetzes (Dezember 1997)
- Nr. 113 Thomas Nerzak:
Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen
Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen (Dezember 1997)
- Nr. 114 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen (März 1998)
- Nr. 115 Jan Steinhausen:
Die Beschreibung der Dynamik von Antriebssträngen durch Black-Box-Modelle
hydrodynamischer Kupplungen (August 1998)
- Nr. 116 Thomas Pandorf:
Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Kerbspitzenbeanspruchung bei
schlagbelasteten Biegeproben (August 1998)
- Nr. 117 Claus Oberste-Brandenburg:
Ein Materialmodell zur Beschreibung der Austenit-Martensit Phasentransformation unter
Berücksichtigung der transformationsinduzierten Plastizität (Juni 1999)

- Nr. 118** **Michael Märtens:**
Regelung mechanischer Strukturen mit Hilfe piezokeramischer Stapelaktoren
(Dezember 1999)
- Nr. 119** **Dirk Kamarys:**
Detektion von Systemveränderungen durch neue Identifikationsverfahren in der
experimentellen Modalanalyse (Dezember 1999)

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 119**