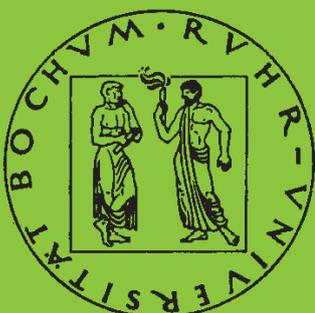


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Jan Steinhausen

**Die Beschreibung der Dynamik von
Antriebssträngen durch
Black-Box-Modelle hydrodynamischer
Kupplungen**

Heft Nr. 115



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
INSTITUT FÜR MECHANIK

Jan Steinhausen

**Die Beschreibung der Dynamik von Antriebssträngen
durch Black-Box-Modelle
hydrodynamischer Kupplungen**

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 115
1998

Herausgeber:
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum
Schriftenreihe
Universitätsstr. 150
44870 Bochum

©1998 Dr.-Ing. Jan Steinhausen
Kniebreche 21
56077 Koblenz

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie) des Werkes oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1994 bis 1998 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der „Arbeitsgruppe für numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik“ am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum.

Sie berichtet über die Forschungsergebnisse des Projektes „Modellierung und experimentelle Identifikation hydrodynamischer Wandler und Kupplungen als Komponenten eines Antriebsstrangs“. An dieser Stelle sei der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Förderung dieses Projektes gedankt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich herzlich für das mir entgegengebrachte Vertrauen sowie für die Unterstützung und Betreuung meiner Arbeit. Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns danke ich für sein Interesse und die freundliche Bereitschaft zur Übernahme des Koreferates.

Allen Mitarbeitern der „Arbeitsgruppe für numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik“ gilt mein Dank für die jederzeit gute Zusammenarbeit und kollegiale Unterstützung. Besonders bedanken möchte ich mich bei meinem ehemaligen Kollegen Herrn Holger Behrens für seine unermüdliche Diskussionsbereitschaft sowie Herrn Peter Jaschke für seine Hilfe bei den experimentellen Arbeiten.

Bochum, im Juli 1998

Jan Steinhausen

Dissertation eingereicht am: 11. Mai 1998

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Juli 1998

Erster Referent: Prof. Dr.-Ing. H. Waller

Zweiter Referent: Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns

Inhaltsverzeichnis

| | |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Verwendete Formelzeichen | IV |
| 1 Einführung | 1 |
| 1.1 Ziel der Arbeit | 1 |
| 1.2 Überblick | 2 |
| 2 Grundlagen | 5 |
| 2.1 Die hydrodynamische Kupplung | 5 |
| 2.2 Stand der Forschung | 8 |
| 3 Zur Modellierung und Beschreibung dynamischer Systeme | 12 |
| 3.1 Ein-/Ausgangsmodelle dynamischer Systeme | 13 |
| 3.2 Grundlagen der Systemidentifikation | 14 |
| 3.3 Beschreibungen linearer Systeme | 15 |
| 3.3.1 Gewichtsfunktion | 15 |
| 3.3.2 Differentialgleichungen | 16 |
| 3.3.3 Zustandsraummodelle | 17 |
| 3.3.4 Die Zustandsraummodelle für Systeme ungleicher Ordnung | 19 |
| 3.3.5 Modelle im Frequenz- und Laplacebereich | 23 |
| 3.3.6 Kopplung linearer E/A-Modelle | 26 |
| 3.4 Diskrete Systeme | 29 |
| 3.5 Nichtlineare Systeme | 30 |
| 3.5.1 Eingößensysteme | 31 |
| 3.5.2 Diskrete nichtlineare Zweigößensysteme | 33 |

| | | |
|----------|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| 4 | Modellierung des Antriebsstrangs mit hydrodynamischer Kupplung | 37 |
| 4.1 | Die Modelle der hydrodynamischen Kupplung | 37 |
| 4.1.1 | Die linearen Black-Box-Modelle | 38 |
| 4.1.2 | Die nichtlinearen Black-Box-Modelle | 41 |
| 4.2 | Die Kopplung der linearen Black-Box-Modelle | 43 |
| 4.2.1 | Kopplung linearer mechanischer E/A-Modelle im Frequenzbereich . . | 43 |
| 4.2.2 | Der Antriebsstrang mit der hydrodynamischen Kupplung | 46 |
| 4.2.3 | Zur Kopplung im Frequenzbereich | 48 |
| 4.2.4 | Die Kopplung im Zeitbereich | 49 |
| 4.2.5 | Das DGL-System des Antriebsstrangs | 52 |
| 4.2.6 | Das Zustandsraummodell des Antriebsstrangs | 56 |
| 4.2.7 | Das System 1. Ordnung zur Zeitsimulation | 59 |
| 4.3 | Die Kopplung der nichtlinearen Black-Box-Modelle | 64 |
| 5 | Eigenwertanalyse der linearen Antriebsstrangmodelle | 70 |
| 5.1 | Die Gültigkeitsbereiche der Modelle | 71 |
| 5.2 | Eigenwerte und Eigenformen | 74 |
| 5.3 | Der Einfluß des Modellgültigkeitsbereiches | 79 |
| 5.4 | Der Einfluß des Kupplungsmodellansatzes | 92 |
| 5.5 | Der Einfluß der Modellparameter der Antriebsstrangstruktur | 95 |
| 6 | Die Versuchsaufbauten | 101 |
| 6.1 | Der Versuchsstand | 101 |
| 6.1.1 | Konzept und Aufbau | 101 |
| 6.1.2 | Analoge und digitale Regelung der Antriebseinheiten | 104 |
| 6.1.3 | Meß- und Rechentechnik | 105 |
| 6.2 | Der experimentelle Antriebsstrang | 109 |
| 6.2.1 | Auslegung | 109 |
| 6.2.2 | Die Antriebsstrangaufbauten | 112 |
| 6.3 | Modellierung der linearen Versuchselemente | 113 |
| 6.3.1 | Identifikation der Federkupplung | 116 |
| 6.3.2 | Identifikation des Versuchsaufbaus III | 121 |

| | | |
|----------|------------------------------------------------------------------------|------------|
| 7 | Das Resonanzverhalten des Antriebsstrangs | 125 |
| 7.1 | Experimentelle Bestimmung der Eigenfrequenzen und Dämpfungskennwerte . | 125 |
| 7.1.1 | Grundlagen | 125 |
| 7.1.2 | Identifikation des Antriebsstrangs im Frequenzbereich | 127 |
| 7.1.3 | Auswertung der Frequenzgangfunktionen | 130 |
| 7.2 | Ergebnisse - Vergleich Modell und Messung | 134 |
| 7.2.1 | Die Modelle der Versuchsaufbauten | 134 |
| 7.2.2 | Die Resonanzen in Abhängigkeit von der Pumpendrehzahl | 135 |
| 7.2.3 | Die Resonanzen in Abhängigkeit vom Schlupf | 139 |
| 8 | Die Simulation dynamischer Vorgänge | 151 |
| 8.1 | Das E/A-Modell zur Simulation | 151 |
| 8.2 | Systemerregung | 152 |
| 8.3 | Zeitsimulationen der linearen Kupplungsmodelle | 154 |
| 8.3.1 | Umschaltung der Teilmodelle | 154 |
| 8.3.2 | Ergebnisse | 155 |
| 8.4 | Zeitsimulationen der nichtlinearen Modelle | 164 |
| 8.4.1 | Ergebnisse | 170 |
| 8.4.2 | Reduktion der Parameteranzahl | 171 |
| 9 | Zusammenfassung | 175 |
| | Literaturverzeichnis | 179 |
| A | Dynamische Dämpfungsmatrizen | 183 |
| A.1 | Modelle für $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ | 183 |
| B | Kupplungsgleichungen des Systems 1. Ordnung | 192 |
| C | Eigenformen der linearen Antriebsstrangmodelle | 194 |
| C.1 | Eigenformen, Versuchsaufbau II | 194 |
| C.2 | Eigenformen, Versuchsaufbau III | 197 |
| D | Nichtlineare Kupplungsmodelle | 201 |
| D.1 | Nichtlineares Modell, $\eta = 3$ | 201 |
| D.2 | Quadratisches Minimalmodell | 204 |

Verwendete Formelzeichen

| | |
|------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| A | Systemmatrix |
| A₀, ..., A_q | Koeffizientenmatrix des Ausgangs |
| B | Eingangsmatrix |
| B₀, ..., B_p | Koeffizientenmatrix des Eingangs |
| C | Ausgangsmatrix |
| D | Dämpfungsmatrix, Durchgangsmatrix |
| D(jω) | Dynamische Dämpfungsmatrix |
| G(jω) | Frequenzgangmatrix, allgemein |
| G(s) | Übertragungsfunktionsmatrix |
| H(jω) | Frequenzgangmatrix, mechanisches System |
| I | Einheitsmatrix |
| K | Steifigkeitsmatrix |
| M | Massenmatrix |
| P | Polynommatrix |
| S(jω) | Dynamische Steifigkeitsmatrix |
| U(jω) | Übertragungsmatrix |
| V_i | Koeffizientenmatrix des linearen Kupplungsmodells |
| a | Parametervektor des Ausgangs (diskret) |
| b | Eingangsvektor, Parametervektor des Eingangs (diskret) |
| c | Parametervektor der gemischten Terme (diskret) |
| c^T | Ausgangsvektor |
| f | Erregervektor der Kräfte |
| g | Vektor der nichtlinearen Terme, diskret |
| u | Vektor der Eingangsgrößen |
| m | Meßvektor der Momente (diskret), Erregervektor der Momente |
| n | Meßvektor der Drehzahlen (diskret) |
| x | Vektor der Weggrößen |
| y | Vektor der Ausgangsgrößen |
| z | Zustandsvektor |
| D | dimensionsloses Lehr'sches Dämpfungsmaß, Durchmesser |
| M | Drehmoment |
| M_P | Pumpenmoment |
| M_T | Turbinenmoment |
| ΔT | Abtastzeit |
| \tilde{M} | Momentabweichung vom Betriebspunkt, komplexe Amplitude des Momentes |
| M* | stationäres Moment |
| N_q | Nennerpolynom <i>q</i> -ter Ordnung |

| | |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| P^* | stationärer Betriebspunkt |
| $P^\gamma[...]$ | Polynomsumme des diskreten Modells |
| T_{sweep} | Sweepdauer |
| U | Eingangsgröße im Bildbereich |
| Y | Ausgangsgröße im Bildbereich |
| Z_p | Zählerpolynom p -ter Ordnung |
| a_0, \dots, a_q | Modellkoeffizienten des Ausgangs, kontinuierlich |
| b_0, \dots, b_p | Modellkoeffizienten des Eingangs, kontinuierlich |
| d | Durchgangparameter |
| f | Frequenz |
| f_0 | Eigenfrequenz |
| f_k | k -te Eigenfrequenz |
| $f_{\text{R samp}}$ | Resamplefrequenz |
| f_{Tast} | Abtastfrequenz |
| h_{ij} | Frequenzgangfunktion |
| $ h_{ij} $ | Amplitudenspektrum |
| j | imaginäre Einheit |
| $j\omega^k$ | k -te Potenz von $j\omega$ |
| k | Steifigkeit, diskrete Zeiteinheit |
| n | Ansatzgrad des Zählerpolynoms, Parameteranzahl |
| n_{F} | Anzahl der Freiheitsgrade |
| n_i | Drehzahl des i -ten Freiheitsgrades |
| n_{P} | Pumpendrehzahl |
| n_{T} | Turbinendrehzahl |
| \tilde{n} | Drehzahlabweichung vom Betriebspunkt, komplexe Amplitude der Drehzahl |
| n^* | stationäre Drehzahl |
| Δn | Drehzahlamplitude |
| m | Ansatzgrad des Nennerpolynoms |
| p | Ordnung des Eingangs |
| $p_{\gamma i}$ | Ordnung des nichtlinearen Modellterms für den i -ten Eingang |
| q | Ordnung des Ausgangs |
| $q_{\gamma i}$ | Ordnung des nichtlinearen Modellterms für den i -ten Ausgang |
| r_f | Frequenzauflösung der FFT |
| s | Kupplungsschlupf |
| s^* | stationärer Kupplungsschlupf |
| t | Zeit |
| Δt | Schrittweite |
| u | Eingangsgröße |
| y | Ausgangsgröße |
| z | Zustandsgröße |
| $\Delta \frac{d}{dt}$ | Differentialoperationsmatrix |
| ϕ | Vektor der Winkelgrößen |
| ϕ_k | k -ter Eigenvektor |

| | |
|-----------------------------|-----------------------------------------------|
| $\alpha_0, \dots, \alpha_q$ | Modellkoeffizienten des Ausgangs, diskret |
| β_0, \dots, β_p | Modellkoeffizienten des Eingangs, diskret |
| γ | Grad der Nichtlinearität des Modellterms |
| δ | Viskoser Dämpfungsparameter, Abklingkonstante |
| η | Grad der Nichtlinearität |
| θ | Drehträgheitsmasse |
| θ_P^+ | Zusatzträgheit des Pumpenrades |
| θ_T^+ | Zusatzträgheit des Turbinenrades |
| θ | Drehträgheitsmasse |
| λ | Leistungszahl |
| λ_k | k -ter Eigenwert |
| λ^+ | Eigenwert der Nachdifferentiation |
| ν | Drehzahlverhältnis |
| ρ | Dichte |
| τ | Zeitparameter |
| φ | Winkelgröße |
| φ_{ij} | Phasenspektrum |
| ω | Kreisfrequenz, Winkelgeschwindigkeit |
| ω_0 | Eigenkreisfrequenz |
| ω_P | Winkelgeschwindigkeit des Pumpenlaufrades |
| ω_T | Winkelgeschwindigkeit des Turbinenlaufrades |

Indizes

| | |
|-------|--------------------------------|
| K | Kupplung |
| P | Pumpenrad |
| P - 1 | Freiheitsgrad vor Pumpenrad |
| T | Turbinenrad |
| T + 1 | Freiheitsgrad nach Turbinenrad |
| W | Wellenzug |
| ab | Abtrieb |
| an | Antrieb |
| im | Imaginärteil |
| max | maximal |
| min | minimal |
| mod | modifiziert |
| re | Realteil |

Kapitel 1

Einführung

Für die sichere Auslegung eines Antriebssystems ist die Kenntnis seines dynamischen Verhaltens erforderlich. Hierzu werden möglichst exakte mathematische Modelle der einzelnen Antriebsstrangkomponenten benötigt. Aus den einzelnen Modellen läßt sich ein Gesamtmodell aufstellen, das zur Vorausberechnung von Schwingungen unter verschiedenen Lastfällen des Antriebssystems verwendet werden kann.

Innerhalb eines Antriebssystems dient die hydrodynamische Kupplung als Verbindungsglied zwischen der Antriebsmaschine, z.B. einem Dieselmotor, und der Arbeitsmaschine, z.B. einen Turbokompressor. Das Prinzip dieser Kupplungsbauart basiert auf der hydrodynamischen Kraftübertragung einer umlaufenden Flüssigkeit, die einen verschleißfreien Antrieb gewährleistet und zudem stoßartige Belastungen der Arbeitsmaschine vermeidet.

Eine genaue Voraussage der Dynamik von Antrieben, in denen hydrodynamische Kupplungen eingesetzt werden, bereitet aufgrund des nichtlinearen Verhaltens dieser Kupplungsbauart besondere Schwierigkeiten. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung des dynamischen Verhaltens von Antriebssträngen unter der Verwendung von neuen Berechnungsmodellen für die hydrodynamische Kupplung. Diese Kupplungsmodelle sind auf der Grundlage von systemtheoretischen Betrachtungen durch Systemidentifikation entstanden. Da für die Entwicklung solcher Modelle eine Analyse der physikalischen Zusammenhänge entfällt, werden sie als Black-Box-Modelle bezeichnet.

1.1 Ziel der Arbeit

Der Ausgangspunkt der hier vorgestellten Arbeiten sind die **linearen** und **nichtlinearen** Black-Box-Modelle der hydrodynamischen Kupplung, die aus den Arbeiten von FOLCHERT [12] und BEHRENS [7] hervorgegangen sind. Für diese Modelle soll die Leistungsfähigkeit zur theoretischen Berechnung des dynamischen Verhaltens von Antriebssträngen mit der hydrodynamischen Kupplung aufgezeigt werden. Die Ergebnisse der theoretischen Antriebsstrangberechnungen werden durch den Vergleich mit experimentellen Untersuchungen auf einem Versuchsstand validiert.

Bei den linearen Kupplungsmodellen handelt es sich um zeitkontinuierliche Modelle, die durch Linearisierung gewonnen werden und somit nur in einem bestimmten Betriebsbereich

der hydrodynamischen Kupplung gültig sind. Die nichtlinearen Modelle sind zeitdiskrete Formulierungen und besitzen einen großen Gültigkeitsbereich. Für die beiden unterschiedlichen Typen von Black-Box-Modellen ergeben sich die folgenden Ziele:

1. Lineare zeitkontinuierliche Black-Box-Modelle

- Entwicklung eines linearen Antriebsstrangmodells: a) zur Eigenwertanalyse: Bestimmung von Eigenfrequenzen, Dämpfungen und Eigenformen des Antriebsstrangs, b) zur Simulation des zeitlichen Verhaltens des Antriebsstrangs.
- Darstellung der Abhängigkeiten der Eigenfrequenzen und Dämpfungen vom jeweils gültigen Betriebsbereich der linearen Kupplungsmodelle.
- Validierung des linearen Antriebsstrangmodells zur Eigenwertanalyse durch den Vergleich mit experimentellen Ergebnissen am Versuchsstand.
- Validierung des linearen Antriebsstrangmodells zur Zeitsimulation durch den Vergleich mit auf dem Versuchsstand gemessenen Größen.

2. Nichtlineare zeitdiskrete Black-Box-Modelle

- Entwicklung eines diskreten nichtlinearen Antriebsstrangmodells zur Simulation des zeitlichen Verhaltens des Antriebsstrangs.
- Validierung des nichtlinearen Antriebsstrangmodells zur Zeitsimulation durch den Vergleich mit auf dem Versuchsstand gemessenen Größen

1.2 Überblick

In Kapitel 2 werden zunächst das Bauprinzip und die Wirkungsweise der hydrodynamischen Kupplung erläutert. Anschließend wird der aus der Literatur bekannte Kenntnisstand bezüglich der Modellierung zur Schwingungsberechnung von Antrieben mit der hydrodynamischen Kupplung dargelegt. Im wesentlichen wird die Kupplung bisher durch ein vereinfachtes Feder-Dämpfer-Masse-System (KELVIN-Modell) abgebildet, das sich leicht in bestehende Programmsysteme zur Antriebsstrangberechnung integrieren läßt.

Das Kapitel 3 behandelt die systemtheoretischen Grundlagen zur Modellierung des Antriebsstrangs mit den Black-Box-Modellen der hydrodynamischen Kupplung. Es wird ausführlich auf die im Rahmen der Arbeit benötigten Sachverhalte zur Beschreibung und Modellierung linearer und nichtlinearer Systeme eingegangen. Insbesondere werden zur Modellierung des Antriebsstrangs die Möglichkeiten der Kopplung linearer Modelle beschrieben.

In Kapitel 4 werden zuerst die linearen und nichtlinearen Black-Box-Modelle der hydrodynamischen Kupplung vorgestellt. Anschließend wird nach einer Vorbetrachtung zur Kopplung speziell von mechanischen Systemen die Entwicklung der Antriebsstrangmodelle beschrieben.

In einem ersten Schritt wird das Differentialgleichungssystem des Antriebsstrangs hergeleitet. Hierbei wird das lineare Kupplungsmodell in ein diskretes Torsionsschwingungssystem integriert. Bekannte Vorschriften zur Transformation in den Zustandsraum können nicht direkt angewendet werden. Durch das Nachdifferenzieren von Gleichungen des Differentialgleichungssystems kann das Aufstellen eines Zustandsmodells ermöglicht werden. Zur Simulation wird ein modifiziertes Zustandsmodell entwickelt, das eine mehrfache Differenzierung von Eingangsgrößen vermeidet. Die Erstellung des diskreten Antriebsstrangmodells unter Verwendung der komplexeren nichtlinearen Kupplungsmodelle zeigt, daß, unter praktischen Gesichtspunkten betrachtet, die Einbindung dieser Modelle in den Antriebsstrang weniger Probleme bereitet.

In Kapitel 5 werden die Ergebnisse der Analyse der Eigenwerte und Eigenformen des erstellten linearen Antriebsstrangmodells untersucht. Für einen späteren Vergleich mit experimentell bestimmten Werten für Eigenfrequenz und Dämpfung erfolgt hier die physikalische Interpretation der auftretenden Eigenwerte. Dabei zeigt sich, daß durch die Verwendung des Kupplungsmodells Eigenformen entstehen, die physikalisch nicht interpretiert werden können. Die Darstellung der Eigenwerte in Abhängigkeit des Modellbereiches der Kupplung zeigt den Einfluß des Betriebsbereiches auf das Resonanzverhalten des Antriebsstrangmodells.

Im ersten Abschnitt des Kapitels 6 werden der Aufbau des hochdynamischen Versuchsstandes sowie die installierte Meß- und Rechentechnik erläutert. Im weiteren wird auf die Auslegung und Konstruktion der für die experimentellen Arbeiten entwickelten Versuchsaufbauten eingegangen. Da die Kupplungsmodelle nur einen Frequenzbereich bis maximal ca. 15 Hz erfassen, müssen tief abgestimmte Wellenzüge realisiert werden. Da eine aussagekräftige Verifikation der Kupplungsmodelle erst im Vergleich mit Messungen an den experimentellen Aufbauten möglich ist, befaßt sich der letzte Abschnitt dieses Kapitels eingehend mit der Modellierung der angefertigten Versuchsstrangelemente.

Zur Bewertung der Eignung der linearen Antriebsstrangmodelle zur Voraussage von Eigenfrequenzen und Dämpfungen werden in Kapitel 7 für einen experimentellen Strangaufbau das Rechenmodell erstellt und die Ergebnisse der Eigenwertanalyse dem realen Resonanzverhalten gegenübergestellt. Die Auswertung der Messungen erfolgt über eine Teilsystembetrachtung des experimentellen Antriebsstrangs innerhalb des gesamten Versuchsstandaufbaus. Die Erregung des Systems wird durch Gleitsinusfunktionen vorgenommen, mit denen die Resonanzbereiche des Versuchsaufbaus kontinuierlich durchfahren werden können. Eine stationäre Erregung in der Nähe einer Resonanz, die eine instabile Regelung des Versuchsstandes zur Folge hat, kann auf diese Weise vermieden werden. Nach der Diskussion der Ergebnisse aus Messung und Rechnung wird anschließend untersucht, inwieweit mit dem linearen Black-Box-Modell ein vereinfachtes aber leistungsfähiges Kupplungsmodell in Form des KELVIN-Modells aufgestellt werden kann.

Die Berechnung des Resonanzverhaltens ist der linearen Betrachtungsweise vorbehalten. Die Berechnung des dynamischen Verhaltens im Zeitbereich kann sowohl mit den linearen als auch mit den nichtlinearen Antriebsstrangmodellen durchgeführt werden. In Kapitel 8 wird die Verifikation der Modelle anhand von Zeitbereichssimulationen vorgenommen. Da die Eingangsgrößen des Simulationsmodells aus Messungen am Versuchsstand vorgegeben werden, ist ein direkter Vergleich der Simulationsergebnisse mit der realen Systemantwort möglich.

Bei der Untersuchung im Zeitbereich treten die besonderen Eigenschaften der linearen Modelle hervor. Es werden Simulationsbeispiele mit unterschiedlichen Erregerfunktionen für verschiedene Betriebsbereiche der Kupplung vorgestellt. Die Rechnung über einen großen Betriebsbereich mit den begrenzt gültigen linearen Modellen der Kupplung kann durch eine Modellumschaltung erfolgen.

Die nichtlinearen Antriebsstrangmodelle besitzen einen großen Gültigkeitsbereich. Sie eignen sich besonders für Erregungen über einen weiten Betriebsbereich der Kupplung und bei großen Beschleunigungen. Für den Vergleich der Leistungen und Grenzen der linearen und nichtlinearen Modelle werden die Simulationen vorwiegend mit den gleichen Erregerfunktionen durchgeführt. Im letzten Abschnitt des Kapitels erfolgt eine Untersuchung zur Reduktion der Parameteranzahl des nichtlinearen Modells. Es wird ein nichtlineares Modell mit einer minimierten Parameteranzahl erstellt, so daß für Simulationen des Antriebsstrangs die Modellgüte noch hinreichend genau ist.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Die hydrodynamische Kupplung

Als Komponente im Antriebsstrang überträgt die hydrodynamische Kupplung, die auch nach ihrem Erfinder HERRMANN FÖTTINGER als FÖTTINGER-Kupplung bezeichnet wird, mechanische Leistung. Die wesentlichsten Bauteile der Kupplung sind das Pumpen- und das Turbinenlaufrad. Die Laufräder sind radial mit Schaufeln bestückt und zusammen in einem geschlossenen, torusförmigen Gehäuse untergebracht.

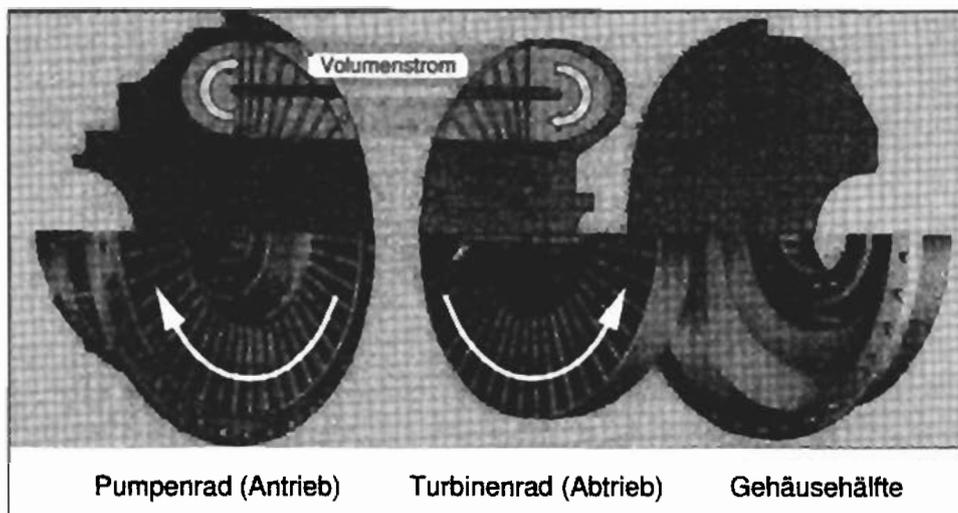


Abbildung 2.1: Bauteile der hydrodynamischen Kupplung für Konstantfüllung

Das verwendete Schaufelprofil hat einen großen Einfluß auf das Übertragungsverhalten der Kupplung und wird je nach Anwendungsfall für einen bestimmten Bautyp gezielt verändert. In Abbildung 2.1 ist der konstruktive Aufbau der hydrodynamischen Kupplung dargestellt. Für diese Bauform bildet das Pumpenrad zugleich eine der Gehäusehälften. Dem Pumpenlaufrad liegt das Turbinenrad gegenüber, das frei drehend im Gehäuse gelagert ist. Für den Betrieb wird die Kupplung mit einer Betriebsflüssigkeit gefüllt, z.B. Hydrauliköl, Wasser. Eine gezielte Beeinflussung des Kennlinienverlaufes der Kupplung ist ebenfalls über die verwendete Flüssigkeitsmenge möglich.

Die Momentübertragung der hydrodynamischen Kupplung, die nur bei einer Drehzahldifferenz der Laufräder auftritt, beruht auf dem Prinzip der Strömungsmaschinen. Das Pumpenlaufrad an der Antriebsseite versetzt das Betriebsfluid in Bewegung, d.h. die Flüssigkeit nimmt mechanische Energie auf. Durch Impulsübertragung der Strömungsteilchen auf die Schaufeln des Turbinenlaufrades entsteht das Drehmoment an der Abtriebsseite. Das Betriebsfluid gibt mechanische Energie ab. Im Betrieb entsteht ein Strömungskreislauf zwischen den Schaufelräumen von Pumpen- und Turbinenrad, der sich senkrecht zur Drehrichtung der Laufräder ausbildet. Auftretende Verluste werden in Wärme umgesetzt und an das Gehäuse abgegeben. Bei der hier betrachteten Kupplung handelt es sich um eine Konstantfüllungskupplung, bei der Kühlung nur durch Konvektion an der Gehäuseoberfläche stattfindet. Um eine Zerstörung der Kupplung durch Überhitzen zu vermeiden, muß bei Betrieb außerhalb des Nennbereiches oder längeren hohen Belastungen die Temperatur überwacht werden.

Konstantfüllungskupplungen der hier beschriebenen Bauart werden vielfach in Antrieben mit Verbrennungsmotoren im Fahrzeugbau, Schiffsbau etc., aber auch für stationäre Anlagen eingesetzt. Neben dem Gebrauch als Anfahr- und Sicherheitskupplung ist es ihre Aufgabe, im Antriebsstrang auftretende Schwingungen aufgrund von Resonanzerscheinungen oder Belastungsstößen zu dämpfen.

Alle theoretischen und experimentellen Untersuchungen dieser Arbeit sind an einer Serienkupplung der Firma *Voith Turbo GmbH* vom Typ 422 TH durchgeführt worden, deren technische Daten in der Tabelle 2.1 angegeben sind.

Turbokupplung VOITH 422 TH

| | |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------|
| Bauart: | Konstantfüllungskupplung |
| Profildurchmesser D : | 422 mm |
| Profil: | Mischprofil |
| Schaufelanzahl: | Pumpe: 46, Turbine 48 |
| Leergewicht: | 46 kg |
| Gesamtvolumen: | 12.8 l |
| maximale Füllung: | 10.5 l (ca. 80 %) |
| Füllung: | 8 l (ca. 60 %) |
| Betriebsflüssigkeit: | Mineralöl ISO VG 32, $\rho = 840 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ |
| Trägheitsmassen | |
| Pumpenrad + Gehäusehälfte: | ca. 0.75 kg m ² |
| Turbinenrad: | ca. 0.16 kg m ² |
| Maximalfüllung: | ca. 0.23 kg m ² |

Tabelle 2.1: Technische Daten der Versuchskupplung

System- und Kenngrößen

Die mechanischen Größen, durch die das Verhalten der hydrodynamischen Kupplung beschrieben werden kann, sind die Drehzahlen und Drehmomente an Pumpen- und Turbinenrad. Sie bilden für die weiteren Betrachtungen die Systemgrößen der Kupplung.

| | | |
|-------------------|-------|---------------------|
| Pumpendrehzahl: | n_P | $[\text{min}^{-1}]$ |
| Turbinendrehzahl: | n_T | $[\text{min}^{-1}]$ |
| Pumpenmoment: | M_P | $[\text{Nm}]$ |
| Turbinenmoment: | M_T | $[\text{Nm}]$ |

Im stationären Betrieb, hierbei sind die Drehzahlen von Pumpe und Turbine konstant, liegt Momentengleichgewicht an Antrieb- und Abtriebsseite vor, so daß Pumpenmoment und Turbinenmoment betragsmäßig gleich sind. Die stationären Größen werden durch „*“ gekennzeichnet.

$$M_{\text{stat}} = M_P^* = M_T^* \quad (2.1)$$

Im Zusammenhang mit der Beschreibung des Übertragungsverhaltens der hydrodynamischen Kupplung werden häufig zwei Kenngrößen verwendet: Das Drehzahlverhältnis ν und der Schlupf s .

$$\nu = \frac{n_T}{n_P} \quad [1] \quad (2.2)$$

$$s = (1 - \nu) \cdot 100 \quad [\%] \quad (2.3)$$

Das stationäre Übertragungsverhalten der Kupplung kann bei konstanter Pumpendrehzahl n_P^* durch das stationäre Moment M_{stat} in Abhängigkeit des Drehzahlverhältnisses ν charakterisiert werden. In Abbildung 2.2 ist schematisch die stationäre Kennlinie dargestellt.

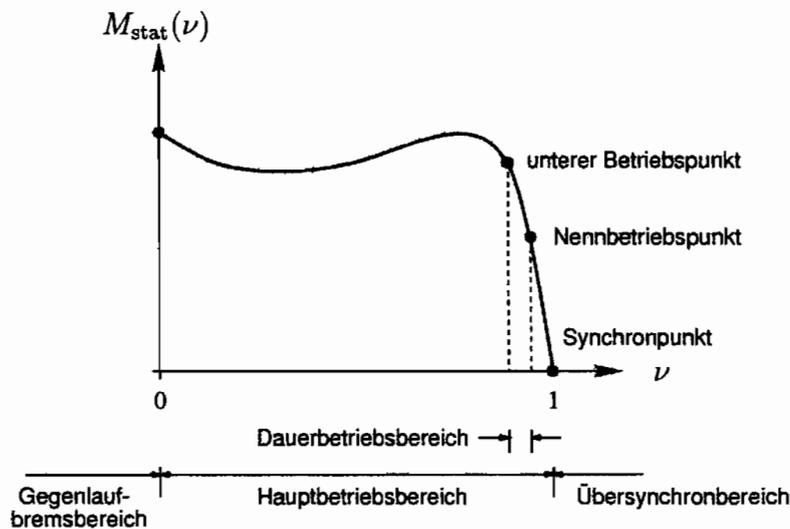


Abbildung 2.2: Stationäre Kennlinie der hydrodynamischen Kupplung mit Betriebsbereichen

Um das Übertragungsverhalten unabhängig von der Pumpendrehzahl n_P^* beschreiben zu können, wird die Leistungszahl λ als dimensionslose Kenngröße verwendet. Aus der Euler'schen Turbinengleichung und den Ähnlichkeitsbeziehungen für Strömungsmaschinen ergibt sich mit der Dichte ρ des Betriebsfluids, des Profilaußendurchmessers D und der stationären Winkelgeschwindigkeit ω_P^* des Pumpenrades der folgende Zusammenhang:

$$\lambda = \frac{M_{\text{stat}}}{\rho \cdot D^5 \cdot \omega_P^{*2}} \quad (2.4)$$

Die Leistungszahl λ ist wie das stationäre Moment abhängig vom Drehzahlverhältnis ν . Zudem ist sie eine Funktion der Konstruktionsdaten (Bauart), der Eigenschaften des Betriebsmediums und des Füllungsgrades. Die λ -Kennlinien für geometrisch ähnliche Kupplungen, d.h. Kupplungen verschiedener Größe aber derselben Bauart, Füllungsgrad etc., sind annähernd deckungsgleich.

Ebenfalls zu den hydrodynamischen Getrieben zählt der hydrodynamische Wandler, dessen Prinzip hier kurz erläutert werden soll. Der Wandler besitzt zusätzlich noch ein drittes Schau felrad, das aber feststeht. Dieses Leitrad, das im Strömungskreislauf zwischen Pumpen- und Turbinenrad steht, nimmt ein mechanisches Moment auf, das über das Gehäuse abgestützt wird, so daß im stationären Betrieb an An- und Abtriebsseite unterschiedliche Drehmomente anliegen.

2.2 Stand der Forschung

In der Literatur bestehen teilweise unterschiedliche Ansichten bezüglich der schwingungstechnischen Auswirkungen des Einbaus einer hydrodynamischen Kupplung in ein Antriebssystem. So wird in [16] die Kupplung als schwingungsfähiges System betrachtet, das eine (wenn auch sehr niedrige) Eigenfrequenz besitzt. In einer neueren Arbeit [4] werden der Kupplung sogar entdämpfende also anfachende Eigenschaften zugeschrieben. Weitaus häufiger wird die Ansicht vertreten, daß die Kupplung gute schwingungsisolierende Eigenschaften besitzt und ihr keine Eigenfrequenz zugeordnet werden kann [6],[19],[40],[36]. Die Untersuchungen in [52] zeigen, daß die Kupplung ein günstiges Drehschwingungsverhalten aufweist, aber genauso wie elastische oder hochdämpfende Kupplungen auf den jeweiligen Einsatz abgestimmt bzw. ausgelegt werden muß.

Aus dem Verlauf der Kennlinie der hydrodynamischen Kupplung ist zu entnehmen, daß schon im stationären Fall ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen dem übertragbaren Drehmoment und dem Drehzahlverhältnis vorliegt. Für instationäre Vorgänge zeigen sich ebenfalls nichtlineare Eigenschaften wie z.B. die Abhängigkeit des Übertragungsverhaltens von der Amplitude bei stationärer, harmonischer Erregung, die in [12] systematisch untersucht worden ist. Der stark nichtlineare Charakter der hydrodynamischen Kupplung ist auf die komplexen strömungsmechanischen Vorgänge im Inneren der Kupplung zurückzuführen. Für die Berechnung der Dynamik von Antriebssträngen mit einer hydrodynamischen Kupplung steht zunächst die mathematische Beschreibung des Kupplungsverhaltens im Vordergrund, da in der Regel die Modellierung der übrigen Antriebsstrangkomponenten keine Schwierigkeiten bereitet.

Erste theoretische Betrachtungen zur Modellierung des Schwingungsverhaltens machte SÖCHTING (1938) [40], indem er die hydrodynamische Kupplung für stationäre, harmonische Erregungen durch ein reines Dämpfungsglied (geschwindigkeitproportionale Dämpfung) zwischen An- und Abtriebsseite abbildete. Der Dämpfungswert ist hierbei durch das Verhältnis des stationären Momentes zur Differenz der Winkelgeschwindigkeiten bestimmt. Er kommt zu dem Schluß, daß hohe Schwingungsaus schläge nur dann auftreten, wenn die Eigenfrequenzen der Wellenzüge an An- und Abtriebsseite gleich sind.

KUGEL (1962) [30] greift den Modellansatz von Söchting auf und stellt durch den Vergleich mit Messungen fest, daß der Dämpfungsparameter abhängig von der Schwingungsfrequenz der Kupplungslaufräder ist. Diese Abhängigkeit führt er auf die Trägheitswirkung der Flüssigkeitsmasse zurück. Er versucht, diesen Einfluß zumindest qualitativ zu erfassen, und stellt ein Berechnungsmodell für den inneren Strömungskreislauf der Kupplung mit Hilfe der Eulersche Turbinengleichung und einer Beziehung für den umlaufenden Volumenstrom auf. Aufgrund seiner theoretischen Berechnungen kommt er zu der Annahme, daß eine hohe Erregerfrequenz zu einer vollkommenen Schwingungstrennung der Wellenzüge an An- und Abtriebsseite führt. Weiterhin stellt er fest, daß die hydrodynamische Kupplung keine Eigenfrequenz besitzt.

In den Arbeiten von FRÖMDER (1962) [16], BENZ (1963) [6], HASSELGRUBER (1965) [19], ISHIHARA (1967) [27] und DIEN (1992) [10] wird im wesentlichen der innere Strömungskreislauf mit Hilfe der Stromfadentheorie für instationäre Vorgänge erfaßt. Es wird hierbei vereinfachend angenommen, daß über den gesamten Strömungsquerschnitt ein konstantes Geschwindigkeitsprofil vorliegt. Als Berechnungsmodell für die dynamischen Kupplungsmomente an An- und Abtrieb wird aus den aufgestellten Gleichungen ein frequenzabhängiger Steifigkeits- und ein frequenzabhängiger Dämpfungsparameter ermittelt. Damit kann das dynamische Kupplungsverhalten durch ein frequenzabhängiges KELVIN-Modell, das aus der Parallelschaltung einer elastischen Feder und eines Dämpfungsgliedes besteht, abgebildet werden. Dieser Modellansatz bedeutet allerdings nicht, daß die Kupplung tatsächlich eine Steifigkeit im physikalischen Sinne besitzt. Der Vergleich mit Messungen zeigt aber, daß die auf dieser theoretischen Basis aufgestellten Modelle nur bedingt das reale dynamische Verhalten des Antriebsstrangs beschreiben können.

ROGOS (1965) [36] geht davon aus, daß die Voraussetzungen für die vereinfachende Modellierung nach der Stromfadentheorie schon im stationären Fall aufgrund der komplexen Strömungserscheinungen im Inneren der Kupplung verletzt werden. Er untersucht das dynamische Kupplungsverhalten zunächst experimentell und vergleicht dieses mit den theoretischen Ansätzen. Für ihn zeigt dieser Vergleich keine ausreichende Übereinstimmung. Die Anwendung moderner Meßmethoden (Laser-Doppler-Anemometrie) von MIDDELMANN (1992) [33] und WIENHOLT (1993) [51] ermöglicht eine Visualisierung der Strömungsvorgänge der Kupplung während des Betriebes. Die Untersuchungen zeigen, daß die tatsächlichen strömungsmechanischen Erscheinungen so komplex sind, daß die Modellierung nach der Stromfadentheorie nur als starke Vereinfachung angesehen werden muß. Für eine genauere theoretische Berechnung der inneren Vorgänge der hydrodynamischen Kupplung werden in den neueren Arbeiten von FORMANSKI (1996) [15] und HUITENGA (1997) [23] Finite-Volumen-Element-Verfahren eingesetzt und die Strömung turbulent modelliert wird. Aber auch die Rechnung mit diesen aufwendigen Modellen liefert bislang nur begrenzt quantitativ befriedigende Aussagen. Zudem scheint eine solche Modellierung für praktische Schwingungsberechnungen eines Antriebsstrangs mit hydrodynamischer Kupplung noch nicht einsetzbar.

WORSCH und SIDERIS (1989) [52], [53] greifen auf das frequenzabhängige KELVIN-Modell von FRÖMDER [16] und HASSELGRUBER [19] zurück. Sie fassen das Übertragungsverhalten für stationäre Erregungen um einen Betriebspunkt der Kupplung in einer komplexen Funktion zusammen, die sich aus Messungen im Versuch bestimmen läßt. Aus der gemessenen Funktion kann dann in Abhängigkeit der Erregerfrequenz der jeweilige äquivalente Steifigkeits-

und Dämpfungsparameter bestimmt werden. Das KELVIN-Modell wird hier durch experimentelle Ergebnisse bestimmt. Das gewonnene Modell läßt sich in einfacher Weise in ein Modell für einen Antriebsstrang einsetzen. Die Methode dieser Modellierung wird durch den Vergleich des auf einem Prüfstand gemessenen Frequenzganges eines Antriebsstrangs mit dem aus dem Antriebsstrangmodell berechneten überprüft. Mit solchen einfachen aber frequenzabhängigen Modellen sind abschätzende Berechnungen von stationären Schwingungserscheinungen bzw. von quasistationären Erregungen eines Antriebes möglich.

RATH (1992) [35] greift auf die Arbeiten von HERBERTZ (1973) [20] zurück, der mit der eindimensionalen Stromfadentheorie ein nichtlineares Differentialgleichungssystem in erster Linie zur Beschreibung für den hydrodynamischen Wandler aufstellt. Für die hydrodynamische Kupplung vereinfacht RATH die Gleichungen, linearisiert in einem Betriebspunkt und erhält so ein Übertragungsmodell. Durch weitere Vereinfachungen stellt er eine frequenzunabhängige Beschreibung auf, die er in ein Rechenmodell zur Zeitsimulation eines Antriebssystems verwendet. Eine Überprüfung der theoretischen Ergebnisse durch experimentelle Untersuchungen bleibt jedoch aus.

Anstatt die inneren physikalischen Zusammenhänge der hydrodynamischen Kupplung exakter zu beschreiben, hat FOLCHERT (1994) [12] versucht mit den Methoden der Systemidentifikation ein verbessertes Modell für das dynamische Verhalten aufzustellen. Mit MENNE [31], der sich mit dem hydrodynamischen Wandler in gleicher Weise beschäftigt, entwickelt er ein Verfahren mit dem das Übertragungsverhalten der Kupplung bereichsweise abgebildet werden kann. Hierbei wird die Kupplung als Black-Box-System mit 2 Eingangs- und 2 Ausgangsgrößen (Zweigrößensystem) aufgefaßt. Als Ein- und Ausgangsgrößen werden die Abweichungen der Drehzahlen und Drehmomente an Pumpen- und Turbinenrad von einem mittleren Betriebspunkt betrachtet. Für unterschiedliche Betriebspunkte werden auf einem Versuchsstand mit konstanten Erregeramplituden Frequenzgangmessungen durchgeführt und so eine Linearisierung des Übertragungsverhaltens erreicht. Das lineare Black-Box-Modell wird anschließend durch eine Parametrisierung der gemessenen Frequenzgangfunktionen aufgestellt. Als Modellansatz werden gebrochenrationale Polynome mit beliebigem Ansatzgrad im Frequenzbereich verwendet. Das aufgestellte Black-Box-Modell gilt dann nur speziell für die vermessene Kupplung und ist somit abhängig von der Bauform, den physikalischen Eigenschaften des Betriebsfluids, der Temperatur des Fluids und dem Füllgrad. Aus der Transformation des Frequenzbereichsmodells erhält man ein Differentialgleichungssystem im Zeitbereich. Die Aufstellung von Zustandsraummodellen erlaubt die Simulation dynamischer Vorgänge. Da die Modelle jeweils nur für einen begrenzten Betriebsbereich gültig sind, muß zur Simulation über größere Betriebsbereiche eine Modellumschaltung vorgenommen werden. Der Vergleich von gemessenen und simulierten Drehzahlverläufen an der Kupplung zeigt, daß an den Umschaltpunkten Einschwingvorgänge auftreten können. Auf den Einsatz solcher Black-Box-Modelle zur Berechnung von Schwingungen eines Antriebsstrangs mit hydrodynamischer Kupplung wird nicht näher eingegangen. Weiterhin zeigt FOLCHERT die Abhängigkeit der aufgestellten Modelle von der bei der Identifikation gewählten Erregeramplitude und geht damit auf das nichtlineare dynamische Verhalten der Kupplung ein.

BEHRENS (1997) [7] greift die Grundidee der Black-Box-Modellierung von FOLCHERT auf, verwendet aber nichtlineare Modellansätze, um hochdynamische Vorgänge über einen großen Betriebsbereich erfassen zu können. Bei dem hier verwendeten Ansatz handelt es sich um

ein allgemeines diskretes Differenzgleichungssystem, das linear in den Parametern ist. Die bei der Parameterschätzung verwendete feste Abtastzeit von 0,01 s ist implizit in den Modellparametern enthalten und bestimmt damit die Schrittweite für Simulationsrechnungen. Ein wesentlicher Unterschied zu den linearen kontinuierlichen Modellen von FOLCHERT liegt darin, daß hier die Ein- und Ausgangsgrößen nicht durch die Abweichungen von einem Betriebspunkt sondern durch die absoluten Drehzahlen und Drehmomente an An- und Abtrieb der Kupplung gebildet werden. Dadurch wird mit den diskreten nichtlinearen Modellen auch das stationäre Verhalten abgebildet. Die Leistungen des aufgestellten Modells werden durch den Vergleich von simulierten und gemessenen Verläufen der Drehzahlen und Drehmomente an der Kupplung bewertet. Abschließend wird gezeigt, wie sich prinzipiell die diskreten nichtlinearen Modelle in ein Antriebsstrangmodell für Simulationsrechnungen einsetzen lassen.

Die hier vorliegende Arbeit baut auf den Ergebnissen von FOLCHERT [12] und BEHRENS [7] auf.

Kapitel 3

Zur Modellierung und Beschreibung dynamischer Systeme

In Hinblick auf ein zu entwickelndes Gesamtmodell für einen konkreten Antriebsstrang mit hydrodynamischer Kupplung wird in diesem Kapitel neben den wichtigsten Grundlagen zur Systemidentifikation und der mathematischen Beschreibung dynamischer Systeme auf spezielle Probleme eingegangen, die sich durch die Kopplung der Black-Box-Formulierungen der Kupplung in den Antriebsstrang ergeben.

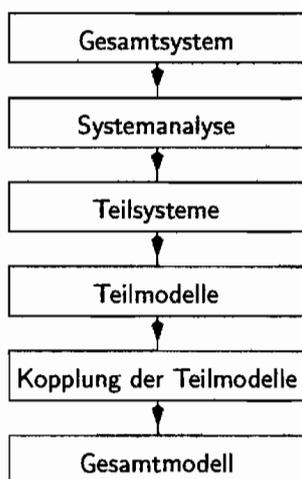


Abbildung 3.1: Modellierung komplexer Systeme

Allgemein ist zur Abbildung von technischen Systemen eine Zerlegung in Teilsysteme üblich. Diese Zerlegung wird soweit fortgesetzt, bis für die erhaltenen Teilsysteme eine mathematische Beschreibung, ein Modell, gefunden werden kann. Durch diese Systemanalyse erhält man statt eines Gesamtmodells zunächst die Modelle der Teilsysteme, Teilmodelle genannt. Um eine Beschreibung des Gesamtsystems zu erhalten, müssen die Teilmodelle miteinander gekoppelt werden. Oft bereitet die Kopplung der Teilmodelle wegen der schwer zu modellierenden Interaktion an den Teilsystemgrenzen große Schwierigkeiten, so daß man sich mit den durch die Teilmodelle gewonnen Aussagen begnügt. Beispiele hierfür sind: Wellenschwin-

gungen von Turbosätzen ohne Einbeziehung der Einflüsse von Gleitlagern und Fundament, Bauwerk-Boden-Interaktion etc.

Der Antriebsstrang mit der hydrodynamischen Kupplung stellt ein Gesamtsystem dar, das sich neben dem Teilsystem der hydrodynamischen Kupplung aus einer Antriebsmaschine, Wellen, Verbindungskupplungen, Getriebe usw. zusammensetzt. In Hinblick auf einen möglichst geringen experimentellen Aufwand, wird in dieser Arbeit ein einfacher Aufbau aus Wellenzügen zugrundegelegt, die durch die hydrodynamische Kupplung verbunden werden. Im allgemeinen können solche einfachen Wellenzüge durch eine physikalische Betrachtung mit den bekannten Modellen für diskrete Feder-Dämpfer-Masse-Systeme genügend genau modelliert werden. Diese Modelle für den Antriebsstrang werden im weiteren als *konventionelle* Modelle bezeichnet. Für das Teilsystem hydrodynamische Kupplung werden die aus der experimentellen Systemidentifikation gewonnenen Black-Box-Modelle verwendet. Damit ist die Modellierung der Teilsysteme vollständig, das Gesamtmodell kann durch Kopplung der Teilmodelle entwickelt werden. Aufgrund der besonderen Struktur der Black-Box-Modelle zur Beschreibung der hydrodynamischen Kupplung und der damit verbundenen Auswirkungen auf das Gesamtmodell, werden vor der eigentlichen Modellierung des Antriebsstrangs in diesem Kapitel diejenigen Modellstrukturen linearer und nichtlinearer Systeme aufgeführt, die hierbei von grundlegender Bedeutung sind.

3.1 Ein-/Ausgangsmodelle dynamischer Systeme

Dynamische Systeme charakterisieren sich dadurch, daß ihr Verhalten durch zeitabhängige Größen beschrieben werden kann. Mit diesen Größen lassen sich die Systeme durch Ein-/Ausgangsmodelle beschreiben. Besitzt das System genau eine Eingangsgröße $u(t)$ und eine Ausgangsgröße $y(t)$, liegt ein Eingrößensystem vor, auch SISO-System genannt (**S**ingle **I**nput **S**ingle **O**utput). Besitzt ein System mehrere Eingänge und mehrere Ausgänge, handelt es sich um ein Mehrgrößensystem, MIMO-System (**M**ulti **I**nput **M**ulti **O**utput). Die Größen an Ein- und Ausgang werden in Vektoren zusammengefaßt.

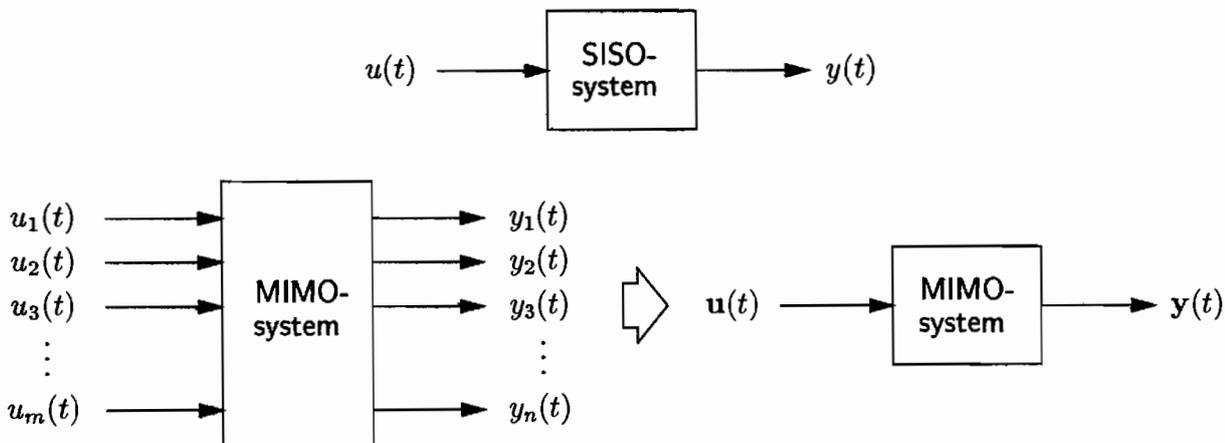


Abbildung 3.2: Ein-/Ausgangsbeschreibung von Ein- und Mehrgrößensystemen

Ein-/Ausgangsbeschreibungen lassen sich grob in *parametrische* und in *nichtparametrische* Modelle aufteilen. Nichtparametrische Modelle beschreiben den funktionalen Zusammenhang

zwischen Ein- und Ausgang in Form von Tabellen und Diagrammen, die durch Messungen gewonnen werden. Parametrische Modelle sind mathematische Beschreibungen in deren Struktur die Ein-/Ausgangsgrößen als zeitabhängige Veränderliche eingehen. Modellstruktur und Modellparameter bestimmen die Eigenschaften des parametrischen Modells.

3.2 Grundlagen der Systemidentifikation

Die Aufgabe der Systemidentifikation ist das Aufstellen von mathematischen Modellen zur Systembeschreibung unter der Verwendung der zeitlichen Verläufe der Ein- und Ausgangsgrößen des realen Systems. Durch Systemidentifikation können nichtparametrische Modelle, z.B. nichtparametrische Frequenzgänge und Korrelationsfunktionen, als auch parametrische Modelle, z.B. in Form von Differentialgleichungen, erstellt werden. Oft werden zunächst nichtparametrische Modelle erstellt, die anschließend durch geeignete mathematische Funktionen approximiert werden, so daß man eine parametrische Beschreibung erhält. Die Anpassung des Verhaltens eines parametrischen Modells an das des realen Systems durch gezielte Veränderung der Parameter, heißt Parameteridentifikation.

Mit dem Begriff der Parameteridentifikation sind mehrere Aufgabenschritte verbunden. Im wesentlichen sind dies die folgenden Punkte:

- Ermittlung der Modellstruktur
- Erregung des Systems und Messung der Ein-/Ausgangsgrößen
- Parameterschätzung

In Abhängigkeit von den vorhandenen Vorkenntnissen über das zu identifizierende System ist zunächst die Modellstruktur aufzustellen. Eine Möglichkeit, die Modellstruktur zu ermitteln, besteht in der Analyse der physikalischen Gesetzmäßigkeiten des betrachteten Systems. Auf diese Weise erhält man ein *physikalisches* oder auch *analytisches* Modell. Oft sind jedoch die physikalischen Zusammenhänge von komplexer Natur, so daß sie sich einer analytischen Betrachtung entziehen. Für diese Systeme kann ein *synthetischer* Ansatz, d.h. eine rein mathematische Struktur ohne konkreten physikalischen Hintergrund, verwendet werden. Solche Formulierungen werden als *Black-Box-Modelle* oder *synthetische Modelle* bezeichnet, da sie über die tatsächlichen physikalischen Gegebenheiten des Systems, wenn überhaupt möglich, nur begrenzt eine Aussage liefern können. Setzt sich die Modellstruktur aus einem analytischen und einem synthetischen Teil zusammen, spricht man von *hybriden* Modellen.

Der experimentelle Teil der Identifikation besteht aus der Messung des zeitlichen Verlaufes der Ein- und Ausgangsgrößen bei Erregung des Systems durch geeignete Testsignale. Den Testsignalen kommt bei der Black-Box-Identifikation eine besondere Bedeutung zu. Erfolgt eine zu schwache dynamische Erregung des Systems, so kann das dadurch gewonnene Modell ebenfalls nur schwach dynamische Vorgänge wiedergeben. D. h., es ist für den Anwendungsfall abzuschätzen, welche Dynamik für die Erregung des Systems erforderlich ist. Ebenfalls kann eine zu schwache Erregung zu Instabilität bei der anschließenden Parameterschätzung führen. Ist das Erregersignal nicht dynamisch genug, können bestimmte Terme der Modellstruktur bei der Schätzung nicht angesprochen werden. Die Erregung paßt nicht zur Struktur und

umgekehrt. Es kann nun der Modellansatz als auch die Erregung verändert werden. An diesem Punkt ist deutlich zu erkennen, daß die Black-Box-Identifikation ein iterativer Prozeß ist.

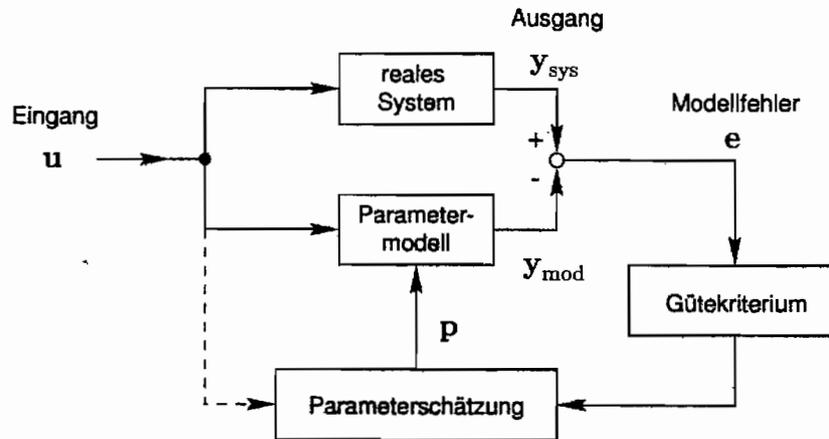


Abbildung 3.3: Blockschaltbild der Parameterschätzung

Auf die vielen verschiedenen mathematischen Verfahren der Parameterschätzung soll hier nicht näher eingegangen werden. Die Parameterschätzung hat zur Aufgabe, durch Anpassung der Parameter die Minimierung des Fehlers zwischen Modellausgang und gemessenem Systemausgang zu erreichen. Die Wahl eines geeigneten Schätzverfahrens hängt unter anderem von den in den Signalen vorhandenen Störungen ab. Das am häufigsten angewendete Verfahren ist die Methode der kleinsten Quadrate, auch als *Least-Squares-Methode* bezeichnet. Hierbei wird als Gütekriterium die Summe der Fehlerquadrate zwischen Modell- und Systemausgang verwendet.

3.3 Beschreibungen linearer Systeme

Für die Beschreibung von linearen Systemen mit Hilfe von Black-Box-Modellen stehen in der Literatur verschiedene Ansätze zur Verfügung. Deshalb werden in diesem Abschnitt die Modellstrukturen linearer zeitinvarianter Systeme mit zeitkontinuierlichen Ein- und Ausgangssignalen, die für die Arbeit mit den Black-Box-Modellen der Kupplung von grundlegender Bedeutung sind, vorgestellt. Dabei wird auf die Zusammenhänge der verschiedenen Modellformen untereinander und den sich daraus ergebenden Möglichkeiten zur Kopplung der Kupplungsmodelle zu einem Gesamtmodell für den Antriebsstrang eingegangen.

3.3.1 Gewichtsfunktion

Die mathematische Beschreibung linearer Systeme kann im Zeitbereich durch die Gewichtsfunktion bzw. für Mehrgrößensysteme durch die Matrix der Gewichtsfunktionen erfolgen. Die Gewichtsfunktion $g(t)$ wird auch als Impulsantwort bezeichnet, da sie den Systemausgang beschreibt, wenn der Eingang mit dem Dirac-Impuls $\delta(t)$ beaufschlagt wird. Dieser Impuls

wird durch

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty; & t = 0 \\ 0; & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (3.1)$$

definiert. Mit Hilfe der Gewichtsfunktion kann die Antwort eines linearen Systems auf einen beliebigen Verlauf der Eingangsgröße durch das Faltungsintegral bestimmt werden.

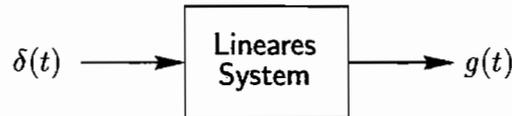


Abbildung 3.4: Beschreibung eines linearen Systems durch die Gewichtsfunktion

Für Eingrößensysteme gilt dann der Zusammenhang

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

Analog dazu werden Mehrgrößensysteme durch die Matrix $\mathbf{G}(t)$ der Gewichtsfunktionen

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{G}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

charakterisiert. Die Gewichtsfunktion ist nicht zwingend ein parametrisches Modell, da sie auch nichtparametrisch, z.B. als Kurvenverlauf in Abhängigkeit von der Zeit, dargestellt werden kann. Auf den Zusammenhang der Gewichtsfunktion mit den parametrischen Modellen linearer Systeme wird im weiteren noch eingegangen.

3.3.2 Differentialgleichungen

Eine parametrische Beschreibung des Ein-/Ausgangsverhaltens zeitinvarianter linearer Systeme im Zeitbereich ist die Formulierung als gewöhnliche Differentialgleichung mit konzentrierten Parametern oder als System von Differentialgleichungen. Für ein Eingrößensystem läßt sich damit das lineare System durch die Differentialgleichung q -ter Ordnung beschreiben:

$$a_q \frac{d^q}{dt^q} y + a_{q-1} \frac{d^{q-1}}{dt^{q-1}} y + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_p \frac{d^p}{dt^p} u + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (3.4)$$

Für Mehrgrößensysteme mit n -Freiheitsgraden erhält man eine lineare Matrizendifferentialgleichung

$$\mathbf{A}_q \frac{d^q}{dt^q} \mathbf{y} + \mathbf{A}_{q-1} \frac{d^{q-1}}{dt^{q-1}} \mathbf{y} + \dots + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{A}_0 \mathbf{y} = \mathbf{B}_p \frac{d^p}{dt^p} \mathbf{u} + \dots + \mathbf{B}_1 \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_0 \mathbf{u} \quad (3.5)$$

mit dem Eingangsgrößen- und dem Ausgangsgrößenvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\top &= [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \ , \\ \mathbf{y}^\top &= [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n] \ . \end{aligned}$$

Eine besondere Eigenschaft der Modellierung durch Differentialgleichungen ist, daß sie das Systemverhalten auch bei Umkehrung des Signalflusses, also der Vertauschung von Ein- und Ausgang, beschreiben. Im Gegensatz dazu ist z.B. die Gewichtsfunktion immer abhängig von der Richtung des Signalflusses, da hier per Definition Ein- und Ausgangsgröße festgelegt sind. Durch das Differentialgleichungsmodell ist nicht von vornherein festgelegt, daß tatsächlich u Eingangs- und y Ausgangsgröße ist.

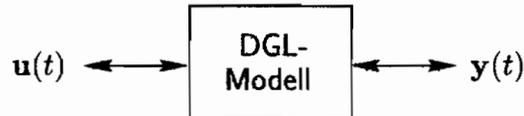


Abbildung 3.5: Offene Signalrichtung des Differentialgleichungsmodells

3.3.3 Zustandsraummodelle

Die Möglichkeit, eine lineare Differentialgleichung der Ordnung q in ein System 1-ter Ordnung mit q Gleichungen umzuformulieren, führt auf die Systemdarstellung im Zustandsraum, dem Zustandsraummodell. Anhand von Zustandsraummodellen ist eine anschauliche Behandlung von dynamischen Problemen unter Berücksichtigung beliebiger Anfangsbedingungen möglich. Die Darstellung im Zustandsraum führt zudem auf eine konzentrierte Schreibweise, die sich gut zur Aufbereitung des Problems für den Rechner eignet.

Das Zustandsraummodell wird durch zwei Gleichungen, die Zustandsdifferentialgleichung Gl.(3.6) und die Ausgangsgleichung Gl.(3.7), repräsentiert. Für ein Eingrößensystem lautet die Zustandsraumdarstellung mit $u(t)$ als Eingangs- und $y(t)$ als Ausgangsgröße

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}(t) + \mathbf{b} \cdot u(t) \tag{3.6}$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{z}(t) + d \cdot u(t) \tag{3.7}$$

Der Zustandsvektor $\mathbf{z}(t)$ enthält interne Größen des Systems. Die Zustandsdarstellung ist nicht eindeutig, d.h. für eine Differentialgleichung gibt es mehrere Möglichkeiten, die Belegung der Systemmatrix \mathbf{A} , des Eingangsvektors \mathbf{b} und des Ausgangsvektors \mathbf{c}^T vorzunehmen. Der Durchgangparameter d bleibt in der Regel unverändert. In Abbildung 3.6 ist das Blockschaltbild des Zustandsmodells dargestellt. Es sei erwähnt, daß die verschiedenen möglichen

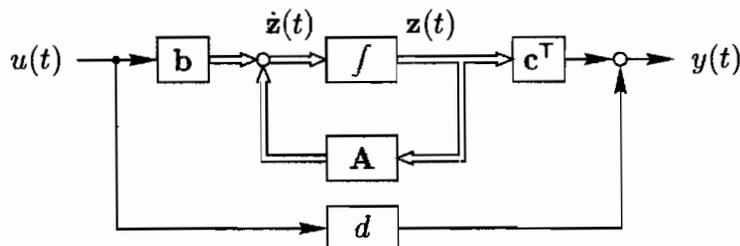


Abbildung 3.6: Zustandsraummodell des Eingrößensystems

Darstellungen durch Ähnlichkeitstransformationen ineinander überführt werden können. Bestimmte Darstellungen der Zustandsraummodelle, sogenannte kanonische Formen oder Normalformen, sind aus der Regelungstechnik bekannt und zeichnen sich durch eine besonders einfache Gestalt der Systemmatrizen aus.

Voraussetzung für die Darstellung im Zustandsraum ist, daß die Differentialgleichung in expliziter Form vorliegt, d.h. der Koeffizient der höchsten Ableitung ist $\alpha_q = 1$. Ausgehend von der Differentialgleichung q -ter Ordnung

$$\frac{d^q}{dt^q}y + a_{q-1}\frac{d^{q-1}}{dt^{q-1}}y + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_{q-1}\frac{d^{q-1}}{dt^{q-1}}u + \dots + b_1\dot{u} + b_0u \quad (3.8)$$

kann das Zustandsraummodell z.B. in der Beobachtbarkeitsnormalform nach [44] angegeben werden

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & & -a_{q-1} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{q-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{q-2} & a_{q-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{q-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_{q-1} \\ b_{q-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{c}^T &= [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0], \\ d &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Elemente der letzten Zeile der Systemmatrix \mathbf{A} entsprechen den Koeffizienten der Ausgangsgröße und lassen sich direkt aus der Differentialgleichung übernehmen. Der Zustandsvektor besitzt dann die Struktur

$$\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_q]^T, \quad (3.10)$$

und die Zustandsgrößen z_i entsprechen den Ableitungen $\frac{d^i}{dt^i}y$ der Ausgangsgröße. Für Mehrgrößensysteme kann analog aus der Matrizendifferentialgleichung q -ter Ordnung

$$\frac{d^q}{dt^q}\mathbf{y} + \mathbf{A}_{q-1}\frac{d^{q-1}}{dt^{q-1}}\mathbf{y} + \dots + \mathbf{A}_1\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{A}_0\mathbf{y} = \mathbf{B}_{q-1}\frac{d^{q-1}}{dt^{q-1}}\mathbf{u} + \dots + \mathbf{B}_1\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_0\mathbf{u} \quad (3.11)$$

das Zustandsraummodell durch

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (3.12)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{z}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (3.13)$$

angegeben werden. Die Matrizen des Zustandsraummodells haben dann analog zum Ein-

größensystem die nachfolgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_0 & -\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 & \dots & & -\mathbf{A}_{q-1} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{q-1} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{q-2} & \mathbf{A}_{q-1} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \dots & & \mathbf{A}_{q-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{q-1} \\ \mathbf{B}_{q-2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_0 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{C} &= [\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}], \\
 \mathbf{D} &= \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Für die Darstellung im Zustandsraum muß das zugrundeliegende Differentialgleichungssystem wie bei dem vorher betrachteten Eingrößensystem in expliziter Form vorliegen. Das heißt, daß die Koeffizientenmatrix der höchsten Ableitung der Ausgangsgröße die Einheitsmatrix sein muß. Diesem Umstand kommt in Bezug auf die Verwendung der linearen Black-Box-Modelle zur Modellierung des Antriebsstrangsystems eine besondere Bedeutung zu, da sie auf ein Differentialgleichungssystem führt, das diese Eigenschaft zunächst nicht besitzt.

3.3.4 Die Zustandsraummodelle für Systeme ungleicher Ordnung

Die Verwendung der linearen Black-Box-Modelle für die hydrodynamische Kupplung führt auf ein Differentialgleichungssystem mit Differentialgleichungen unterschiedlicher Ordnungen, s. hierzu Abschnitt 4.2.5. Damit ist die Darstellung des Differentialgleichungssystems in expliziter Form nach Gl.(3.11) nicht möglich. Entsprechend kann für das System zunächst auch keine Zustandsraumdarstellung angegeben werden. In diesem Abschnitt wird eine Möglichkeit gezeigt, wie eine Transformation in den Zustandsraum für solche Systeme durchgeführt werden kann. Da mit dem Zustandsraummodell des Antriebsstrangs auch die Eigenwertanalyse durchgeführt werden soll, werden anschließend die Eigenwerte des hier aufgestellten Zustandsraummodells näher betrachtet.

Als Beispiel wird ein Zweigrößensystem mit u_1, u_2 als Eingänge und y_1, y_2 als Ausgänge betrachtet. Dieses wird durch zwei gekoppelte Differentialgleichungen beschrieben. Die erste Differentialgleichung besitzt die Ordnung p , die zweite die Ordnung q .

$$a_{1p} \frac{d^p}{dt^p} y_1 + \dots + a_{11} \dot{y}_1 + a_{10} y_1 + b_{1p} \frac{d^p}{dt^p} y_2 + \dots + b_{11} \dot{y}_2 + b_{10} y_2 = u_1 \tag{3.15}$$

$$a_{2q} \frac{d^q}{dt^q} y_1 + \dots + a_{21} \dot{y}_1 + a_{20} y_1 + b_{2q} \frac{d^q}{dt^q} y_2 + \dots + b_{21} \dot{y}_2 + b_{20} y_2 = u_2 \tag{3.16}$$

Mit

$$p > q \tag{3.17}$$

ist der Ordnungsunterschied r der beiden Systemgleichungen

$$r = p - q \quad . \quad (3.18)$$

Wird das System in Matrixschreibweise formuliert, erhält man mit

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

die Matrizendifferentialgleichung

$$\mathbf{A}_p \frac{d^p}{dt^p} \mathbf{y} + \dots + \mathbf{A}_{q+1} \frac{d^{q+1}}{dt^{q+1}} \mathbf{y} + \dots + \mathbf{A}_q \frac{d^q}{dt^q} \mathbf{y} + \dots + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{A}_0 \mathbf{y} = \mathbf{u} \quad . \quad (3.19)$$

Für die Koeffizientenmatrizen gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_p &= \begin{bmatrix} a_{1p} & b_{1p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &\vdots \\ \mathbf{A}_{q+1} &= \begin{bmatrix} a_{1q+1} & b_{1q+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_q &= \begin{bmatrix} a_{1q} & b_{1q} \\ a_{2q} & b_{2q} \end{bmatrix}, \\ &\vdots \\ \mathbf{A}_0 &= \begin{bmatrix} a_{10} & b_{10} \\ a_{20} & b_{20} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die explizite Form nach Gl.(3.11) kann formal durch Linksmultiplikation des Systems Gl.(3.19) mit der Inversen der Koeffizientenmatrix der höchsten Ableitung \mathbf{A}_p erreicht werden. Da aber beide Systemgleichungen unterschiedliche Ordnungen besitzen, ist diese Matrix singulär, so daß die Inverse \mathbf{A}_p^{-1} nicht existiert. Wird jetzt die zweite Gleichung des Systems, Gl.(3.16), r -fach nach der Zeit differenziert

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{dt^r} \left(a_{2q} \frac{d^q}{dt^q} y_1 + \dots + a_{20} y_1 + b_{2q} \frac{d^q}{dt^q} y_2 + \dots + b_{20} y_2 \right) &= \frac{d^r}{dt^r} u_2, \\ a_{2q} \frac{d^p}{dt^p} y_1 + \dots + a_{20} \frac{d^r}{dt^r} y_1 + b_{2q} \frac{d^p}{dt^p} y_2 + \dots + b_{20} \frac{d^r}{dt^r} y_2 &= \frac{d^r}{dt^r} u_2 \end{aligned}$$

wird erreicht, daß beide Gleichungen des Systems dieselbe Ordnung p besitzen:

$$\begin{aligned} a_{1p} \frac{d^p}{dt^p} y_1 + \dots + a_{11} \dot{y}_1 + a_{10} y_1 + b_{1p} \frac{d^p}{dt^p} y_2 + \dots + b_{11} \dot{y}_2 + b_{10} y_2 &= u_1, \\ a_{2q} \frac{d^p}{dt^p} y_1 + \dots + a_{20} \frac{d^r}{dt^r} y_1 + b_{2q} \frac{d^p}{dt^p} y_2 + \dots + b_{20} \frac{d^r}{dt^r} y_2 &= \frac{d^r}{dt^r} u_2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Mit

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u_1 \\ \frac{d^r}{dt^r} u_2 \end{bmatrix}$$

lautet das System

$$\mathbf{A}'_p \frac{d^p}{dt^p} \mathbf{y} + \dots + \mathbf{A}'_r \frac{d^r}{dt^r} \mathbf{y} + \dots + \mathbf{A}'_1 \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{A}'_0 \mathbf{y} = \mathbf{u}' \quad (3.21)$$

mit den veränderten Koeffizientenmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_p &= \begin{bmatrix} a_{1p} & b_{1p} \\ a_{2q} & b_{2q} \end{bmatrix}, \\ &\vdots \\ \mathbf{A}'_r &= \begin{bmatrix} a_{1r} & b_{1r} \\ a_{20} & b_{20} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}'_{r-1} &= \begin{bmatrix} a_{1r-1} & b_{1r-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &\vdots \\ \mathbf{A}_0 &= \begin{bmatrix} a_{10} & b_{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix der höchsten Ableitung \mathbf{A}'_p des Systems Gl.(3.21) ist nicht mehr singular, sie läßt sich invertieren. Mit

$$\mathbf{A}'_i = \mathbf{A}'_p^{-1} \cdot \mathbf{A}'_i \quad \text{und} \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{A}'_p^{-1} \mathbf{u}' \quad (3.22)$$

erreicht man für das nachdifferenzierte System die Darstellung in expliziter Form

$$\frac{d^p}{dt^p} \mathbf{y} + \mathbf{A}^*_{p-1} \frac{d^p}{dt^p} \mathbf{y} + \dots + \mathbf{A}^*_1 \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{A}^*_0 \mathbf{y} = \mathbf{u}^* . \quad (3.23)$$

Für dieses System ist eine Transformation in den Zustandsraum möglich.

Die Eigenwerte des nachdifferenzierten Systems

Wie oben beschrieben, ist es möglich, daß durch die Nachdifferenzierung von Systemgleichungen des Differentialgleichungsmodells ein Zustandsmodell aufgestellt werden kann. Es werden jetzt die Konsequenzen betrachtet, die sich aus der Transformation in den Zustandsraum für die Eigenwerte des Modells ergeben. Die dargestellten Ergebnisse sind unmittelbar auf das in Abschnitt 4.2.6 vorgestellte Antriebsstrangmodell übertragbar.

Mit dem Lösungsansatz

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} e^{\lambda t} \quad (3.24)$$

für das homogene Problem des oben angegebenen Beispielsystems Gl.(3.15) und Gl.(3.16) erhält man

$$\begin{bmatrix} a_{10} + \lambda a_{11} + \dots + \lambda^p a_{1p} & b_{10} + \lambda b_{11} + \dots + \lambda^p b_{1p} \\ a_{20} + \lambda a_{21} + \dots + \lambda^q a_{2q} & b_{20} + \lambda b_{21} + \dots + \lambda^q b_{2q} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{P}(\lambda) \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0} , \quad (3.26)$$

mit der Polynommatrix

$$\mathbf{P}(\lambda) = \begin{bmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) \\ P_{21}(\lambda) & P_{22}(\lambda) \end{bmatrix} . \quad (3.27)$$

Die Eigenwerte λ_i werden aus der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} \det \mathbf{P}(\lambda) &= 0 , \\ P_{11}(\lambda) P_{22}(\lambda) - P_{12}(\lambda) P_{21}(\lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

bestimmt. Die Anzahl n_λ der Eigenwertlösungen λ_i hängt von den Ordnungen der Polynome ab, und es gilt:

$$n_\lambda = p + q . \quad (3.29)$$

Für das nachdifferenzierte System nach Gl.(3.21) erhält man mit dem Ansatz Gl.(3.24)

$$\begin{bmatrix} a_{10} + \lambda a_{11} + \dots + \lambda^p a_{1p} & b_{10} + \lambda b_{11} + \dots + \lambda^p b_{1p} \\ \lambda^r a_{20} + \lambda^{r+1} a_{21} + \dots + \lambda^p a_{2q} & \lambda^r b_{20} + \lambda^{r+1} b_{21} + \dots + \lambda^p b_{2q} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0} . \quad (3.30)$$

Zur Unterscheidung wird die Polynommatrix mit ' gekennzeichnet

$$\mathbf{P}'(\lambda) \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0} . \quad (3.31)$$

In der unteren Zeile der Matrix \mathbf{P}' , kann der Term λ^r vorgezogen werden

$$\mathbf{P}'(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{10} + \lambda a_{11} + \dots + \lambda^p a_{1p} & b_{10} + \lambda b_{11} + \dots + \lambda^p b_{1p} \\ \lambda^r (a_{20} + \lambda a_{21} + \dots + \lambda^q a_{2q}) & \lambda^r (b_{20} + \lambda b_{21} + \dots + \lambda^q b_{2q}) \end{bmatrix} . \quad (3.32)$$

Damit ist

$$\mathbf{P}'(\lambda) = \begin{bmatrix} P'_{11}(\lambda) & P'_{12}(\lambda) \\ P'_{21}(\lambda) & P'_{22}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) \\ \lambda^r (P_{21}(\lambda)) & \lambda^r (P_{22}(\lambda)) \end{bmatrix} , \quad (3.33)$$

und es folgt für die charakteristische Gleichung des nachdifferenzierten Systems

$$\begin{aligned} \det \mathbf{P}'(\lambda) &= 0 , \\ \lambda^r \cdot (P_{11}(\lambda) P_{22}(\lambda) - P_{12}(\lambda) P_{21}(\lambda)) &= 0 . \end{aligned} \quad (3.34)$$

Das bedeutet, daß zu den n_λ Eigenwerten des ursprünglichen Systems durch die r -fache Nachdifferenzierung einer Systemgleichung genau r Eigenwerte der Größe null zusätzlich auftreten. Die Anzahl n_λ^+ der Eigenwerte des nachdifferenzierten Systems lautet

$$n_\lambda^+ = p + q + r = 2q . \quad (3.35)$$

Für die r durch die Nachdifferenzierung auftretenden Eigenwerte λ_i^+ gilt

$$\lambda_i^+ = 0 , \quad i = 1, 2, \dots, r . \quad (3.36)$$

Daraus folgt, daß durch eine Nachdifferenzierung von Systemgleichungen die dem ursprünglichen System eigenen Eigenwerte und Eigenvektoren erhalten bleiben und hierdurch nicht verändert werden. Zu den Lösungen des unveränderten Systems treten zusätzlich verschwindende Eigenwertlösungen auf.

Die zusätzlichen Eigenwerte λ_i^+ müssen bei einer Interpretation der Eigenwerte und Eigenformen des linearen Antriebsstrangmodells berücksichtigt werden.

3.3.5 Modelle im Frequenz- und Laplacebereich

Nichtparametrische Modelle

Bildet man für unterschiedliche Frequenzen das Verhältnis von Ausgangs- zu Eingangssignal für eine stationäre, harmonische Erregung des linearen Systems, so erhält man den *Frequenzgang* $G(j\omega)$.

$$G(j\omega) = \frac{\bar{y}(j\omega)}{\bar{u}(j\omega)} = \frac{y_0(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}}{u_0(\omega) e^{j\omega t}} = \frac{y_0(\omega)}{u_0(\omega)} e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.37)$$

Der nichtparametrische Frequenzgang kann experimentell ermittelt werden und bildet auch die Grundlage für die parametrischen linearen Black-Box-Modelle der hydrodynamischen Kupplung. Für nichtperiodische Ein-/Ausgangsgrößen werden die Signale zunächst mit Hilfe der Fourier-Transformation in den Frequenzbereich übertragen.

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.38)$$

Der Frequenzgang ist dann durch das Verhältnis der Fourier-Transformierten von Ausgangs- und Eingangssignal festgelegt.

$$G(j\omega) = \frac{\mathcal{F}\{y(t)\}}{\mathcal{F}\{u(t)\}} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \quad (3.39)$$

Wie in Abschnitt 3.3.1 beschrieben, wird die Beziehung zwischen Ein- und Ausgang des Systems im Zeitbereich durch die Gewichtsfunktion $g(t)$ über das Faltungsintegral Gl.(3.2) charakterisiert. Die entsprechende Beziehung im Frequenzbereich ist durch

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega) \quad (3.40)$$

gegeben. Da die Fourier-Transformierte des Dirac-Impulses

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \quad (3.41)$$

ist, gilt zwischen Frequenzgang und Gewichtsfunktion der Zusammenhang

$$G(j\omega) = \frac{\mathcal{F}\{g(t)\}}{\mathcal{F}\{\delta(t)\}} = \mathcal{F}\{g(t)\} \quad (3.42)$$

Der Frequenzgang ist die Fourier-Transformierte der Gewichtsfunktion. Die Verknüpfung von Ein- und Ausgang im Zeitbereich über das Faltungsintegral entspricht somit im Frequenzbereich einem einfachen Produkt. Aus diesem Grund wird oft bei linearen Systemen eine Betrachtung im Frequenzbereich durchgeführt. Als Einschränkung für die Verwendung der Fourier-Transformation gelten Signale $f(t)$, die die Konvergenzbedingung (absolute Integrierbarkeit)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (3.43)$$

nicht erfüllen, wie z.B. die Rampenfunktion. Hier wird eine weitere Integraltransformation, die Laplace-Transformation, verwendet. Mit dem Laplaceparameter s

$$s = \delta + j\omega \quad (3.44)$$

lautet die Laplace-Transformierte von

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (3.45)$$

Analog zum Frequenzgang ist die *Übertragungsfunktion* $G(s)$ im Laplacebereich definiert. Sie ergibt sich aus dem Verhältnis der Laplace-Transformierten von Ausgangs- zu Eingangssignal

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (3.46)$$

Damit ist die Übertragungsfunktion die Laplace-Transformierte der Gewichtsfunktion

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} \quad (3.47)$$

Die Fourier-Transformation kann als Sonderfall der Laplace-Transformation aufgefaßt werden. Indem man den Übergang $\delta \rightarrow 0$ und damit $s \rightarrow j\omega$ betrachtet, geht die Übertragungsfunktion in den Frequenzgang über

$$\lim_{s \rightarrow j\omega} G(s) = G(j\omega) \quad (3.48)$$

Frequenz- und Laplacebereich werden auch häufig gemeinsam als Bildbereich bezeichnet.

Parametrische Modelle

Mit Hilfe der Laplace-Transformation kann die Differentialgleichung eines linearen Systems bei verschwindenden Anfangsbedingungen in die parametrische Übertragungsfunktion überführt werden. Aus der linearen Differentialgleichung

$$a_q \frac{d^q}{dt^q} y + a_{q-1} \frac{d^{q-1}}{dt^{q-1}} y + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_p \frac{d^p}{dt^p} u + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (3.49)$$

folgt die Darstellung im Laplacebereich

$$\begin{aligned} a_q s^q Y + a_{q-1} s^{q-1} Y + \dots + a_1 s Y + a_0 Y &= b_p s^p U + \dots + b_1 s U + b_0 U, \\ (a_q s^q + a_{q-1} s^{q-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y &= (b_p s^p + \dots + b_1 s + b_0) U. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die Übertragungsfunktion besitzt dann die Form eines gebrochenrationalen Polynoms und lautet

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Z_p(s)}{N_q(s)} = \frac{b_p s^p + b_{p-1} s^{p-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_q s^q + a_{q-1} s^{q-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.51)$$

Die Koeffizienten a_i der Ausgangsgröße y der Differentialgleichung stehen im Nennerpolynom $N_q(s)$, die Koeffizienten b_i der Eingangsgröße u im Zählerpolynom $Z_p(s)$ der Übertragungsfunktion. Durch den schon erwähnten Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$ ergibt sich der Frequenzgang des Systems

$$\lim_{s \rightarrow j\omega} G(s) = G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{Z_p(j\omega)}{N_q(j\omega)} = \frac{b_p j\omega^p + b_{p-1} j\omega^{p-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_q j\omega^q + a_{q-1} j\omega^{q-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0} \quad (3.52)$$

Übertragungsfunktion und Frequenzgang besitzen dieselbe Struktur und können direkt aus der Differentialgleichung abgelesen werden. Analog zur Differentialgleichung stellen Gl.(3.51) und Gl.(3.52) parametrische Modelle im Laplace- bzw. Frequenzbereich (Bildbereich) dar. Diese Modelle in Form von gebrochenrationalen Polynomen sind bei der Systemidentifikation von besonderer Bedeutung, da sie als Modellansätze zur Black-Box-Identifikation linearer Systeme im Frequenzbereich verwendet werden.

Für Mehrgrößensysteme, die sich durch das Matrizendifferentialgleichungssystem

$$\mathbf{A}_q \frac{d^q}{dt^q} \mathbf{y} + \mathbf{A}_{q-1} \frac{d^{q-1}}{dt^{q-1}} \mathbf{y} + \dots + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{A}_0 \mathbf{y} = \mathbf{B}_p \frac{d^p}{dt^p} \mathbf{u} + \dots + \mathbf{B}_1 \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_0 \mathbf{u} \quad (3.53)$$

mit

$$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T, \quad \mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$$

beschreiben lassen, erhält man im Frequenzbereich aus der Beziehung

$$\mathbf{y}(j\omega) = \mathbf{G}(j\omega) \cdot \mathbf{u}(j\omega) \quad (3.54)$$

die Frequenzgangmatrix

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(j\omega) &= \left(j\omega^q \mathbf{A}_q + j\omega^{q-1} \mathbf{A}_{q-1} + \dots + j\omega \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 \right)^{-1} (j\omega^p \mathbf{B}_p + \dots + j\omega \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_0) \\ &= \begin{bmatrix} G_{11}(j\omega) & G_{12}(j\omega) & \dots & G_{1n}(j\omega) \\ G_{21}(j\omega) & \dots & & \\ \vdots & & & \\ G_{n1}(j\omega) & \dots & & G_{nn}(j\omega) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Die Frequenzgangmatrix $\mathbf{G}(j\omega)$ stellt ein allgemeines Ein-/Ausgangsmodell für Mehrgrößensysteme im Frequenzbereich dar. Der Modellansatz des linearen Black-Box-Modells der hydrodynamischen Kupplung, auf den konkret in Abschnitt 4.1 eingegangen wird, entspricht einer solchen allgemeinen Ein-/Ausgangsformulierung für ein System mit zwei Eingangs- und zwei Ausgangsgrößen. Um den Zusammenhang zu dem linearen Black-Box-Ansatz im Frequenzbereich herzustellen wird die Matrizendifferentialgleichung Gl.(3.53) fouriertransformiert und analog zum Eingrößensystem, Gl.(3.50), durch Polynommatrizen dargestellt.

$$\begin{bmatrix} N_{q11} & N_{q12} & \dots & N_{q1n} \\ N_{q21} & \dots & & \\ \vdots & & & \\ N_{qn1} & \dots & & N_{qnn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{p11} & Z_{p12} & \dots & Z_{p1n} \\ Z_{p21} & \dots & & \\ \vdots & & & \\ Z_{pn1} & \dots & & Z_{pnn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

Für den Sonderfall, daß die Ausgänge Y_i entkoppelt sind, ist die Matrix auf der linken Seite eine Diagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} N_{q11} & & & \\ & N_{q22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_{qnn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{p11} & Z_{p12} & \cdots & Z_{p1n} \\ Z_{p21} & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ Z_{pn1} & \cdots & & Z_{pnn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

so daß sich die Elemente der Frequenzgangmatrix zu gebrochenrationalen Polynomen mit der Zählerordnung p und der Nennerordnung q ergeben

$$\mathbf{G}(j\omega) = \begin{bmatrix} \frac{Z_{p11}(j\omega)}{N_{q11}(j\omega)} & \frac{Z_{p12}(j\omega)}{N_{q11}(j\omega)} & \cdots & \frac{Z_{p1n}(j\omega)}{N_{q11}(j\omega)} \\ \frac{Z_{p21}(j\omega)}{N_{q22}(j\omega)} & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ \frac{Z_{pn1}(j\omega)}{N_{qnn}(j\omega)} & \cdots & & \frac{Z_{pnn}(j\omega)}{N_{qnn}(j\omega)} \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

Der Modellansatz in Form der Frequenzgangmatrix Gl.(3.58) ist die Grundlage für das lineare parametrische Black-Box-Modell der hydrodynamischen Kupplung im Frequenzbereich.

3.3.6 Kopplung linearer E/A-Modelle

Das Modell des Antriebsstrangs mit der hydrodynamischen Kupplung läßt sich aufgrund des linearen Black-Box-Modells der Kupplung in lineare Teilmodelle aufteilen. Zur Modellierung des Antriebsstrangs müssen die Modelle der einzelnen Antriebsstrangkomponenten miteinander gekoppelt werden. Hierzu stehen prinzipiell mehrere Möglichkeiten zur Verfügung, auf die in diesem Abschnitt anhand einer allgemeinen Betrachtung linearer Ein-/Ausgangsmodelle eingegangen wird.

Für lineare Systeme kann eine Kopplung der Modelle je nach Art entweder im Zeitbereich oder im Bildbereich durchgeführt werden. Die Bestimmung des Gesamtmodells eines Ein-

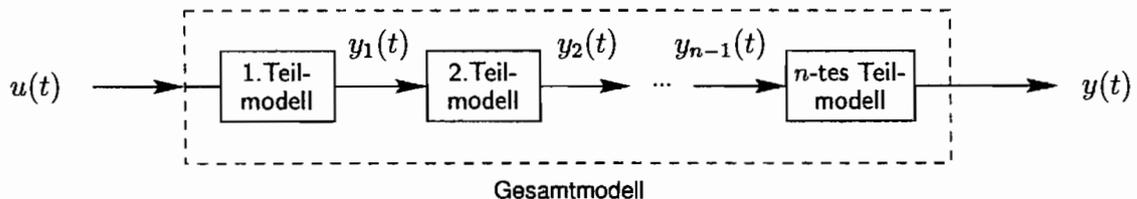


Abbildung 3.7: Kopplung der Teilmodelle des Eingrößensystems

größensystems in Form der Gewichtsfunktion $g(t)$, das sich aus n Teilsystemen zusammensetzt, ergibt sich aus der n -fachen Faltung der Gewichtsfunktionen der Teilsysteme

$$g(t) = \int_0^t \cdots \int_0^t \int_0^t g_1(t) \cdot g_2(t - \tau_1) \cdot \cdots \cdot g_n(t - \tau_{n-1}) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_{n-1}. \quad (3.59)$$

Der Faltung im Zeitbereich entspricht im Frequenzbereich die wesentlich einfachere multiplikative Verknüpfung der einzelnen Frequenzgänge nach Anwendung der Fouriertransformation auf entweder die Gewichtsfunktionen, die Differentialgleichungen oder die Zustandsraummodelle der Teilsysteme

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot \dots \cdot G_n(j\omega) = \prod_{i=0}^n G_i(j\omega) . \quad (3.60)$$

Wenn sich die Teilsysteme durch lineare Differentialgleichungen beschreiben lassen, haben die Frequenzgänge nach Gl.(3.52) die Form von gebrochenrationalen Polynomen mit $Z_i(j\omega)$ als Zähler- und $N_i(j\omega)$ als Nennerpolynome

$$G(j\omega) = \prod_{i=0}^n \frac{Z_i(j\omega)}{N_i(j\omega)} . \quad (3.61)$$

Die Differentialgleichung des Gesamtsystems folgt dann aus der Rücktransformation der Beziehung

$$N_1(j\omega) \cdot N_2(j\omega) \cdot \dots \cdot N_n(j\omega) \cdot Y(j\omega) = Z_1(j\omega) \cdot Z_2(j\omega) \cdot \dots \cdot Z_n(j\omega) \cdot U(j\omega) \quad (3.62)$$

in den Zeitbereich. Die so gewonnene Differentialgleichung beschreibt die Beziehung zwischen Eingang $u(t)$ und Ausgang $y(t)$ des Gesamtsystems im Zeitbereich, so daß aus ihr das entsprechende Zustandsraummodell entwickelt werden kann. Möchte man das Verhalten der inneren Systemzustände $y_k(t)$ wissen, so müssen im Bildbereich erst die entsprechenden Modelle der Form

$$G_{\Pi_k}(j\omega) = \prod_{i=0}^k G_i(j\omega) \quad (3.63)$$

aufgestellt werden. Wenn außer der Ausgangsgröße $y(t)$ noch die inneren Systemgrößen $y_k(t)$ von Interesse sind, eignet sich diese Art der Modellierung des Gesamtsystems nur bedingt für Simulationen im Zeitbereich. Für Mehrgrößensysteme ist prinzipiell die gleiche Vorge-

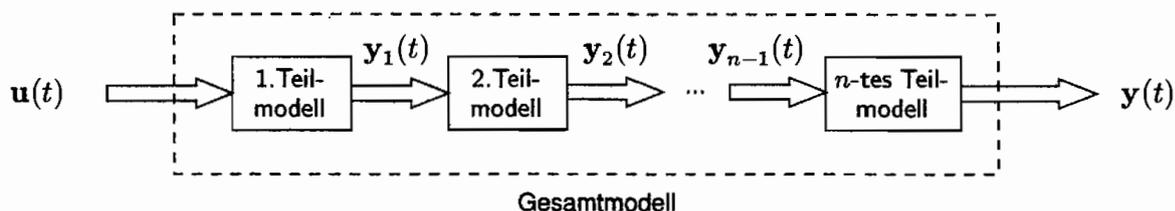


Abbildung 3.8: Kopplung der Teilmodelle des Mehrgrößensystems

hensweise möglich. Formal ergibt sich die Frequenzgangmatrix des Gesamtsystems aus den Frequenzgangmatrizen der Teilsysteme nach Gl.(3.60) zu

$$\mathbf{G}(j\omega) = \prod_{i=0}^n \mathbf{G}_i(j\omega) . \quad (3.64)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Ausgangsgrößen eines Teilmodells die Eingangsgrößen des nachfolgenden Teilmodells sind, erweist sich die Kopplung im Frequenzbereich als elegante

Methode zur Aufstellung des Gesamtmodells. Die **Modelle** sind untereinander rückwirkungsfrei, d.h. ein Teilmodell hat auf den Ausgang des vorangegangenen Teilmodells keinen Einfluß. Die Rückwirkungsfreiheit der Modelle bedeutet nicht, daß die realen Teilsysteme untereinander rückwirkungsfrei sind. Das Blockschaltbild des Gesamtsystems in Abbildung 3.8 zeigt eine eindeutig festgelegte Signalrichtung, so daß die Rückwirkungsfreiheit dadurch zum Ausdruck kommt, daß bei bekanntem Eingang $\mathbf{u}(t)$ der Systemzustand $\mathbf{y}_k(t)$ nur von den davorliegenden Teilmodellen abhängt

$$\mathbf{y}_k(j\omega) = \mathbf{G}_{\Pi_k}(j\omega) \mathbf{u}(j\omega) = \prod_{i=0}^k \mathbf{G}_i(j\omega) \cdot \mathbf{u}(j\omega) . \quad (3.65)$$

Für die Kopplung im Frequenzbereich müssen also rückwirkungsfreie Teilmodelle aufgestellt werden. Am Beispiel mechanischer Elemente wird in Abschnitt 4.2.1 deutlich, daß diese Eigenschaft im wesentlichen von der Festlegung der Ein-/Ausgangsgrößen des betrachteten Teilsystems bestimmt wird.

Für die Kopplung von Zustandsraummodellen im Zeitbereich muß ebenfalls die Signalrichtung fest vorgegeben sein. Es wird als Beispiel ein System mit zwei aufeinanderfolgenden Eingrößensystemen betrachtet.

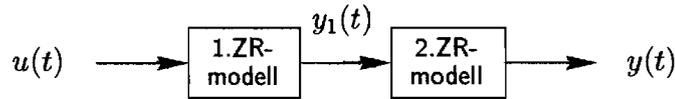


Abbildung 3.9: Kopplung der Zustandsraummodelle

Die Zustandsmodelle haben nach Abschnitt 3.3.3 die Form

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{z}_1 + \mathbf{b}_1 \cdot u , \quad (3.66)$$

$$y_1 = \mathbf{c}_1^T \cdot \mathbf{z}_1 + d_1 \cdot u , \quad (3.67)$$

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{z}_2 + \mathbf{b}_2 \cdot y_1 , \quad (3.68)$$

$$y = \mathbf{c}_2^T \cdot \mathbf{z}_2 + d_2 \cdot y_1 . \quad (3.69)$$

Setzt man die Ausgangsgleichung Gl.(3.67) des ersten Modells in die Beziehungen Gl.(3.68) und Gl.(3.69) des zweiten ein, folgt für das Gesamtmodell

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{\mathbf{z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_2 \mathbf{c}_1^T & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 d_1 \end{bmatrix} u , \quad (3.70)$$

$$y = \begin{bmatrix} d_2 \mathbf{c}_1^T & \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} + d_2 d_1 u . \quad (3.71)$$

Systembeschreibungen in Form von Zustandsraummodellen lassen sich auch nach Transformation in den Bildbereich miteinander koppeln. Der Frequenzgang ergibt sich nach Gl.(3.60) für ein Eingrößensystem zu

$$G(j\omega) = \prod_{i=0}^n \left\{ \mathbf{c}_i^T (j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{b}_i + d_i \right\} . \quad (3.72)$$

3.4 Diskrete Systeme

In Bezug auf den Einsatz der diskreten nichtlinearen Black-Box-Modelle der hydrodynamischen Kupplung wird in diesem Abschnitt auf die Beschreibung zeitdiskreter Systeme eingegangen.

Die Bearbeitung von Meßsignalen mit digitalen Rechenanlagen hat prinzipiell zur Folge, daß Meßwerte von kontinuierlichen Signalen nur zu bestimmten Zeiten vorliegen. Durch die Abtastung eines Analog/Digital-Wandlers kann das reale kontinuierliche Signal als eine Folge von diskreten Werten dargestellt werden. Systeme deren Ein-/Ausgangsgrößen diskrete Signale sind, werden als diskrete Systeme bezeichnet. Für eine feste Abtastzeit ΔT lassen

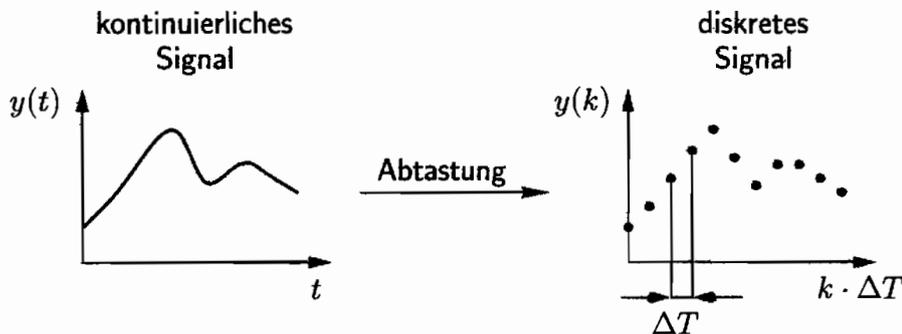


Abbildung 3.10: Diskretisierung zeitkontinuierlicher Signale

sich mit Hilfe der Taylorreihe

$$y(k-1) = y(k) - \dot{y}(k) \Delta T - \ddot{y}(k) \frac{\Delta T^2}{2!} - \frac{d^3}{dt^3} y(k) \frac{\Delta T^3}{3!} - \dots \quad (3.73)$$

die kontinuierlichen Modelle in diskrete überführen. Für eine hinreichend kleine Abtastzeit ΔT , bzw. eine hohe Abtastfrequenz $f_{\text{Tast}} = 1/\Delta T$, erhält man einen quasikontinuierlichen Verlauf. Der Fehler bei Abbruch der Taylorreihe nach dem ersten Glied wird vernachlässigbar klein und es gilt näherungsweise der rückwärtige Differenzenquotient

$$\dot{y}(k) \approx \frac{y(k) - y(k-1)}{\Delta T} \quad (3.74)$$

Für das Differential 2-ter Ordnung erhält man die Differenzgleichung

$$\ddot{y}(k) \approx \frac{\dot{y}(k) - \dot{y}(k-1)}{\Delta T} \approx \frac{y(k) - 2y(k-1) + y(k-2)}{\Delta T^2} \quad (3.75)$$

Die Entwicklung kann für Differentiale beliebiger Ordnung fortgeführt werden. Dabei entspricht die Ordnung i des Differential $\frac{d^i}{dt^i} y$ in der Differenzgleichung der Anzahl der berücksichtigten zurückliegenden Werte $y(k-i)$. Mit der Substitution von Differentialen durch entsprechende Differenzenquotienten können kontinuierliche Systembeschreibungen in diskrete umformuliert werden. Beispielsweise läßt sich so die lineare Differentialgleichung des Eingrößensystems

$$a_q \frac{d^q}{dt^q} y + a_{q-1} \frac{d^{q-1}}{dt^{q-1}} y + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_p \frac{d^p}{dt^p} u + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u \quad (3.76)$$

in die lineare Differenzgleichung

$$\alpha_q y(k-q) + \dots + \alpha_1 y(k-1) + \alpha_0 y(k) = \beta_p u(k-p) + \dots + \beta_1 u(k-1) + \beta_0 u(k) \quad (3.77)$$

überführen und als diskretes System formulieren. Die Parameter a_i und b_i der kontinuierlichen Darstellung sowie die Abtastzeit ΔT stecken implizit in den Parametern α_i und β_i der diskreten Beschreibung. Ein Vorteil der diskreten Modelle gegenüber den kontinuierlichen ist, daß die numerische Integration entfällt. Der aktuelle Systemausgang in Gl.(3.77) läßt sich mit der Normierung auf $\alpha_0 = 1$ durch die arithmetische Gleichung

$$y(k) = -\alpha_q y(k-q) - \dots - \alpha_1 y(k-1) + \beta_p u(k-p) + \dots + \beta_0 u(k) \quad (3.78)$$

bestimmen, die auch in Matrixschreibweise angegeben werden kann

$$y(k) = \mathbf{m}(k)^T \mathbf{p} \quad , \quad (3.79)$$

mit Meßvektor $\mathbf{m}(k)$ und dem Parametervektor \mathbf{p}

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(k)^T &= [\mathbf{y}^T \mathbf{u}^T] = [-y(k-1) \dots -y(k-q) \ u(k) \dots u(k-p)] \quad , \\ \mathbf{p}^T &= [\mathbf{a}^T \mathbf{b}^T] = [\alpha_1 \dots \alpha_q \ \beta_0 \ \beta_1 \dots \beta_p] \quad . \end{aligned} \quad (3.80)$$

Da der Ausgang $y(k)$ nicht nur vom Eingang \mathbf{u} sondern auch von den in \mathbf{y} enthaltenen zurückliegenden Werten des Ausgangs abhängt, handelt es sich um ein *rekursives* Modell. Bei einem *nichtrekursiven* Modell, hängt der Ausgang nur vom Eingang \mathbf{u} ab.

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, daß der umgekehrte Weg, von der diskreten zur kontinuierlichen Darstellung zu gelangen, zu großen Schwierigkeiten führen kann. In erste Linie dann, wenn die kontinuierliche Struktur des Modells unbekannt ist, entfällt die Möglichkeit die Parameter des kontinuierlichen Modells durch Koeffizientenvergleich zu ermitteln. Aus komplexen diskreten Modellen sind so kaum mehr Rückschlüsse auf die physikalischen Zusammenhänge des realen Systems möglich. Hier wird die Bezeichnung Black-Box-Modell besonders deutlich.

3.5 Nichtlineare Systeme

Die meisten real vorkommenden Prozesse besitzen nichtlinearen Charakter. Ihre Erscheinungen sind von so unterschiedlicher Natur, daß für ihre mathematische Beschreibung keine einheitliche, in sich geschlossene Theorie existiert. Nur jeweils für bestimmte Klassen von nichtlinearen Systemen lassen sich Modellansätze formulieren. Die Schwierigkeiten, die bei der Abbildung nichtlinearer Systeme auftreten, versucht man oft dadurch zu umgehen, daß das System linearisiert wird. Die durch diese Methode gewonnenen linearen Modelle haben aber nur einen eingeschränkten Gültigkeitsbereich, so daß man für eine Verbesserung des Modells gezwungen ist, mit nichtlinearen Ansätzen zu arbeiten.

Da die hydrodynamische Kupplung nichtlinearen Charakter in ihrem dynamischen Verhalten zeigt, und die linearen Black-Box-Modelle einen relativ eingeschränkten Anwendungsbereich besitzen, hat BEHRENS [7] die Kupplung mit diskreten nichtlinearen Modellansätzen

identifiziert. In der praktischen Anwendung sind die diskreten nichtlinearen Ansätze gegenüber den kontinuierlichen nichtlinearen besser zu handhaben. Diese Modelle finden in Abschnitt 8.4 zu Zeitbereichssimulationen Verwendung. In diesem Abschnitt werden die Grundlagen für die nichtlinearen Black-Box-Modelle aufgeführt.

3.5.1 Eingrößensysteme

Wie in Abschnitt 3.3.1 beschrieben, lassen sich lineare Eingrößensysteme durch die Gewichtsfunktion $g(t)$ als nichtparametrisches Modell beschreiben. Die Beziehung zwischen Ein- und Ausgang des Systems wird durch das Faltungsintegral beschrieben

$$y(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau .$$

Der bekannteste Ansatz für ein System mit stetig differenzierbaren Nichtlinearitäten ist die VOLTERRA-Reihe. Dieses Ein-/Ausgangsmodell in Form einer gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_0^t g_1(\tau_1) u(t - \tau_1) d\tau_1 \\ & + \int_0^t \int_0^t g_2(\tau_1, \tau_2) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \dots \\ & + \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t g_\eta(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\eta) u(t - \tau_1) u(t - \tau_2) \dots u(t - \tau_\eta) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_\eta \end{aligned} \quad (3.81)$$

kann als Erweiterung des Faltungsintegrals angesehen werden. Die Terme $g_i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i)$ werden als Voltterrakerne oder auch als Gewichtsfunktionen i -ter Ordnung bezeichnet. Der Parameter η bestimmt den Grad der Nichtlinearität. Im folgenden wird immer vom Grad der Nichtlinearität gesprochen, um eine Verwechslung mit der Ordnung der Differentialgleichung zu vermeiden. Für die numerische Behandlung solcher komplexen nichtlinearen Modelle in der Praxis wird an dieser Stelle günstigerweise auf die Beschreibung durch diskrete Modellsätze übergegangen.

Die diskrete Volterra-Reihe lautet:

$$\begin{aligned} y(k) = & y_0 + \sum_{i_1=0}^{\infty} g_i u(k - i_1) + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} g_{i_1 i_2} u(k - i_1) u(k - i_2) + \dots \\ & + \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_\eta=0}^{\infty} g_{i_1 i_2 \dots i_\eta} u(k - i_1) u(k - i_2) \dots u(k - i_\eta) . \end{aligned} \quad (3.82)$$

Die Kerne g_{i_γ} können als freie Parameter des Modells aufgefaßt werden. Für stabile Systeme ist ein endlicher Ansatz mit Ansatzgrad n zulässig [42]. Wird noch berücksichtigt, daß die Kerne symmetrisch sind, das heißt

$$\begin{aligned} g_{i_1 i_2} &= g_{i_2 i_1} , \\ g_{i_1 i_2 i_3} &= g_{i_1 i_3 i_2} = g_{i_2 i_1 i_3} = g_{i_2 i_3 i_1} = g_{i_3 i_1 i_2} = g_{i_3 i_2 i_1} , \\ &\dots , \text{ usw.} , \end{aligned}$$

so erhält man einen Ansatz mit einer endlichen Anzahl von Parametern

$$\begin{aligned}
 y(k) = & y_0 + \sum_{i_1=0}^n g_{i_1} u(k-i_1) + \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=i_1}^n g_{i_1 i_2} u(k-i_1) u(k-i_2) + \dots \\
 & + \sum_{i_1=0}^n \sum_{i_2=i_1}^n \dots \sum_{i_\eta=i_{\eta-1}}^n g_{i_1 i_2 \dots i_\eta} u(k-i_1) u(k-i_2) \dots u(k-i_\eta) \quad (3.83)
 \end{aligned}$$

Wie zu erkennen ist, setzt sich das Ausgangssignal $y(k)$ nur aus dem Eingang $u(k)$ und seinen Zeitverschiebungen $u(k-i)$ zusammen, so daß die Struktur Gl.(3.83) einen nichtrekursiven Modellansatz darstellt. Die nichtrekursiven Modelle sind bei der Parameterschätzung von Vorteil (s. hierzu [42]), allerdings haben solche Ansätze in dieser Form keine große praktische Bedeutung, da die Identifikation auf eine hohe Anzahl zu bestimmender Parameter führt. Aufgrund der Tatsache, daß bei der nichtrekursiven Struktur der Modellausgang nur vom Eingang abhängt, muß ein entsprechend hoher Ansatzgrad n gewählt werden. Damit steigt aber die Parameteranzahl n nach

$$n = \binom{n+1+\eta}{\eta} = \frac{(n+1+\eta)!}{(n+1)!\eta!} \quad (3.84)$$

an. Als Beispiel sei ein Eingrößensystem betrachtet, für das der Grad der Nichtlinearität mit $\eta = 3$ angesetzt wird und $n = 20$ Meßwerte (Zeitverschiebungen von $u(k)$) berücksichtigt werden sollen. Es ergeben sich für dieses Modell 2024 Parameter. Da für die Systemidentifikation des Mehrgrößensystems der hydrodynamischen Kupplung in [7] keine a-priori-Kenntnisse bezüglich der zu wählenden nichtlinearen Modellstruktur vorhanden sind, um eine Beschränkung der Parameteranzahl zu ermöglichen, ist zunächst auf eine rekursive Struktur zurückgegriffen worden, der das sogenannte KOLMOGOROV-GABOR-Polynom zugrunde liegt. Mit diesem Polynomansatz

$$P[\mathbf{x}] = p_0 + \sum_{i=1}^q p_i x_i + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q p_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^q p_{ijk} x_i x_j x_k + \dots \quad (3.85)$$

$$\text{mit } \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_q]$$

kann eine beliebige stetige Funktion $F(\mathbf{x})$ auf einem abgeschlossenen Intervall \mathbf{x} approximiert werden. Die Verwendung der diskreten Werte für Ein- und Ausgang in

$$\mathbf{x} = [y(k-1) \ \dots \ y(k-q) \ u(k) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-q)]$$

führt auf einen allgemeinen rekursiven nichtlinearen Modellansatz.

$$\left. \begin{aligned}
 y(k) = & \bar{y} + \sum_{i_1=0}^q b_{i_1} u(k-i_1) + \sum_{i_1=0}^q \sum_{i_2=i_1}^q b_{i_1 i_2} u(k-i_1) u(k-i_2) + \dots \\
 & + \sum_{i_1=0}^q \sum_{i_2=i_1}^q \dots \sum_{i_\eta=i_{\eta-1}}^q a_{i_1 i_2 \dots i_\eta} u(k-i_1) u(k-i_2) \dots u(k-i_\eta)
 \end{aligned} \right\} P_1^1[\mathbf{u}, \mathbf{b}]$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + \sum_{i_1=1}^q a_{i_1} y(k-i_1) + \sum_{i_1=1}^q \sum_{i_2=i_1}^q a_{i_1 i_2} y(k-i_1) y(k-i_2) + \dots \\
 & + \sum_{i_1=1}^q \sum_{i_2=i_1}^q \dots \sum_{i_\eta=i_{\eta-1}}^q a_{i_1 i_2 \dots i_\eta} y(k-i_1) y(k-i_2) \dots y(k-i_\eta)
 \end{aligned} \right\} P_2^1[\mathbf{y}, \mathbf{a}]$$

$$\left. \begin{aligned}
& + \sum_{i_1=0}^q \sum_{i_2=1}^q c_{i_1 i_2} u(k-i_1) y(k-i_2) + \dots \\
& + \sum_{i_1=0}^q \sum_{i_2=i_1}^q \dots \sum_{i_\eta=1}^q c_{i_1 i_2 \dots i_\eta} u(k-i_1) u(k-i_2) \dots y(k-i_\eta) \\
& + \sum_{i_1=0}^q \sum_{i_2=1}^q \dots \sum_{i_\eta=i_{\eta-1}}^q c_{i_1 i_2 \dots i_\eta} u(k-i_1) y(k-i_2) \dots y(k-i_\eta)
\end{aligned} \right\} P^2[\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{c}]$$

(3.86)

Analog zur diskreten Darstellung linearer Systeme Gl.(3.77) gibt der Parameter q die Systemordnung, d.h. die Anzahl der berücksichtigten Zeitverschiebungen, und η den Grad der Nichtlinearität an. Die ersten beiden Zeilen des Modells Gl.(3.86) beinhalten neben dem Gleichanteilparameter \bar{y} die Terme für den Eingang $u(k) \dots u(k-q)$. Die Zeilen 3 und 4 enthalten für den Ausgang entsprechend $y(k-1) \dots y(k-q)$, die letzten 3 Zeilen die gemischten Terme, die Produkte von Ein- und Ausgang. Damit kann das Modell Gl.(3.86) übersichtlich als Polynomsumme geschrieben werden:

$$y(k) = \bar{y} + P_1^1[\mathbf{u}, \mathbf{b}] + P_2^1[\mathbf{y}, \mathbf{a}] + P^2[\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{c}] , \eta \geq 2 \quad (3.87)$$

mit den Vektoren der Meßwerte

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= [u(k) \ u(k-1) \ \dots \ u(k-q)] , \\
\mathbf{y} &= [y(k-1) \ \dots \ y(k-q)]
\end{aligned}$$

und den Parametervektoren

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= [a_1 \ \dots \ a_q \ a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{qq} \ a_{111} \ \dots] , \\
\mathbf{b} &= [b_1 \ \dots \ b_q \ b_{11} \ b_{12} \ \dots \ b_{qq} \ b_{111} \ \dots] , \\
\mathbf{c} &= [c_1 \ \dots \ c_q \ c_{11} \ c_{12} \ \dots \ c_{qq} \ c_{111} \ \dots] .
\end{aligned}$$

Es sei angemerkt, daß das Polynom $P^2[\mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{c}]$ in Gl.(3.87), das nur die gemischten Terme $u \cdot y$ beschreibt, erst für Nichtlinearitätsgrade $\eta \geq 2$ relevant wird. Für den Modellansatz läßt sich die Parameteranzahl durch

$$n = \binom{2q+1+\eta}{\eta} = \frac{(2q+1+\eta)!}{(2q+1)!\eta!} \quad (3.88)$$

bestimmen. Beipielsweise ergibt der Ansatz mit der Ordnung $q = 4$ und dem Nichtlinearitätsgrad $\eta = 4$ eine Parameteranzahl von $n = 715$.

3.5.2 Diskrete nichtlineare Zweigrößensysteme

Auf der Basis des allgemeinen nichtlinearen Modells nach Gl.(3.86) für ein Eingrößensystem wird der Ansatz für Mehrgrößensysteme aufgestellt. Da die hydrodynamische Kuppelung als System mit zwei Eingangs- und zwei Ausgangsgrößen beschrieben wird (Abschnitt 4.1), beschränkt sich die Betrachtung auf den Modellansatz für ein diskretes nichtlineares Zweigrößensystem. Die diskreten Werte der Ein-/Ausgangsgrößen werden analog zum Ein-



Abbildung 3.11: Nichtlineares Zweigrößenmodell

größensystem in Vektoren zusammengefaßt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_1 &= [u_1(k) \ u_1(k-1) \ \dots \ u_1(k-q)] , \\
 \mathbf{u}_2 &= [u_2(k) \ u_2(k-1) \ \dots \ u_2(k-q)] , \\
 \mathbf{y}_1 &= [y_1(k-1) \ \dots \ y_1(k-q)] , \\
 \mathbf{y}_2 &= [y_2(k-1) \ \dots \ y_2(k-q)] .
 \end{aligned}$$

Eine übersichtliche Darstellung des vollständigen Ansatzes ist kaum mehr möglich. Das allgemeine nichtlineare Modell des Zweigrößensystems kann für Nichtlinearitätsgrade $\eta \geq 4$ wieder durch Polynomsummen, gemäß der Beschreibung für das Eingrößensystem Gl.(3.87), dargestellt werden.

$$\begin{aligned}
 y_1(k) &= \bar{y}_1 + P_1^1[\mathbf{u}_1, {}^1\mathbf{b}_1] + P_2^1[\mathbf{u}_2, {}^1\mathbf{b}_2] + P_3^1[\mathbf{y}_1, {}^1\mathbf{a}_1] + P_4^1[\mathbf{y}_2, {}^1\mathbf{a}_2] \\
 &+ P_1^2[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, {}^1\mathbf{c}_1] + P_2^2[\mathbf{u}_1, \mathbf{y}_1, {}^1\mathbf{c}_2] + P_3^2[\mathbf{u}_1, \mathbf{y}_2, {}^1\mathbf{c}_3] \\
 &+ P_4^2[\mathbf{u}_2, \mathbf{y}_1, {}^1\mathbf{c}_4] + P_5^2[\mathbf{u}_2, \mathbf{y}_2, {}^1\mathbf{c}_5] + P_6^2[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, {}^1\mathbf{c}_6] \\
 &+ P_1^3[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{y}_1, {}^1\mathbf{d}_1] + P_2^3[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{y}_2, {}^1\mathbf{d}_2] + P_3^3[\mathbf{u}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1, {}^1\mathbf{d}_3] \\
 &+ \dots + P_{20}^3[\mathbf{u}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2, {}^1\mathbf{d}_{20}] \\
 &+ P_1^4[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{y}_1, {}^1\mathbf{e}_1] + P_2^4[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{y}_2, {}^1\mathbf{e}_1] \\
 &+ \dots + P_{35}^4[\mathbf{u}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_2, {}^1\mathbf{e}_{35}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_2(k) &= \bar{y}_2 + P_1^1[\mathbf{u}_1, {}^2\mathbf{b}_1] + P_2^1[\mathbf{u}_2, {}^2\mathbf{b}_2] + P_3^1[\mathbf{y}_1, {}^2\mathbf{a}_1] + P_4^1[\mathbf{y}_2, {}^2\mathbf{a}_2] \\
 &+ P_1^2[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, {}^1\mathbf{c}_1] + P_2^2[\mathbf{u}_1, \mathbf{y}_1, {}^1\mathbf{c}_2] + \dots \\
 &+ \dots , \qquad \qquad \qquad \text{für } \eta \geq 4
 \end{aligned}$$

(3.89)

Die Entwicklung der Polynome P_i^3 und P_i^4 der gemischten Terme erfolgt sinngemäß zum Aufbau des Polynoms P^2 ; auf die explizite Darstellung wird hier verzichtet. Es ist zu erkennen, daß der Ansatz gegenüber dem Eingrößenmodell an Komplexität stark zugenommen hat. Die Parameteranzahl ist durch

$$n = \binom{4q+2+\eta}{\eta} = \frac{(4q+2+\eta)!}{(4q+2)!\eta!} \quad (3.90)$$

bestimmt. Für das Beispiel im vorherigen Abschnitt mit $q = 4$ und $\eta = 4$ erhält man $n = 7315$ Parameter. Die große Parameteranzahl dieses allgemeinen Ansatzes stößt bei der Parameterschätzung schnell an die Grenze der Rechenkapazität. Um die Parameteranzahl des Modellansatzes für das konkret vorliegende Problem der hydrodynamischen Kupplung begrenzt zu halten, werden anstatt einer konstanten Ordnung q für die einzelnen Modellterme

unterschiedlichen Grades γ unterschiedliche Ordnungen angesetzt [7]. Die Ordnungen $p_{\gamma j}$ gelten für die Systemeingänge und die Ordnungen $q_{\gamma j}$ für die Systemausgänge

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_1(p_{\gamma 1}) = [u_1(k) \ u_1(k-1) \ \dots \ u_1(k-p_{\gamma 1})], \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_2(p_{\gamma 2}) = [u_2(k) \ u_2(k-1) \ \dots \ u_2(k-p_{\gamma 2})], \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{y}_1(q_{\gamma 1}) = [y_1(k-1) \ \dots \ y_1(k-q_{\gamma 1})], \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{y}_2(q_{\gamma 2}) = [y_2(k-1) \ \dots \ y_2(k-q_{\gamma 2})]\end{aligned}$$

mit

$$\gamma = 1, 2, \dots, \eta .$$

Somit ist es z.B. möglich, die quadratischen Terme ($\eta = 2$) des Eingangs u_1 mit der Ordnung $p_{21} = 6$ und die Terme des Grades $\eta = 4$ nur mit $p_{41} = 2$ zu berücksichtigen. Der Aufbau des Modells wird deutlich, wenn die Modellterme nach dem Grad ihrer Nichtlinearität γ geordnet werden. Nachstehend wird das Modell für den Ausgang y_1 bis zum ersten Element des Grades $\eta = 3$ aufgeführt. Der Ansatz für den Ausgang y_2 ergibt sich hierzu analog.

$$\begin{aligned}y_1(k) &= \bar{y}_1 + \left. \begin{aligned} &\sum_{i_1=0}^{p_{11}} b_{i_1,1} u_1(k-i_1) + \sum_{i_1=0}^{p_{12}} b_{i_1,2} u_2(k-i_1) \\ &+ \sum_{i_1=1}^{q_{11}} a_{i_1,1} y_1(k-i_1) + \sum_{i_1=1}^{q_{12}} a_{i_1,2} y_2(k-i_1) \end{aligned} \right\} \gamma = 1 \\ &+ \left. \begin{aligned} &\sum_{i_1=0}^{p_{21}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{21}} b_{i_1 i_2,11} u_1(k-i_1) u_1(k-i_2) + \sum_{i_1=0}^{p_{21}} \sum_{i_2=0}^{p_{22}} b_{i_1 i_2,12} u_1(k-i_1) u_2(k-i_2) \\ &+ \sum_{i_1=0}^{p_{22}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{22}} b_{i_1 i_2,22} u_2(k-i_1) u_2(k-i_2) \\ &+ \sum_{i_1=1}^{q_{21}} \sum_{i_2=i_1}^{q_{21}} a_{i_1 i_2,11} y_1(k-i_1) y_1(k-i_2) + \sum_{i_1=1}^{q_{21}} \sum_{i_2=1}^{q_{22}} a_{i_1 i_2,12} y_1(k-i_1) y_2(k-i_2) \\ &+ \sum_{i_1=1}^{q_{22}} \sum_{i_2=i_1}^{q_{22}} a_{i_1 i_2,22} y_2(k-i_1) y_2(k-i_2) \end{aligned} \right\} \gamma = 2 \\ &+ \left. \begin{aligned} &\sum_{i_1=0}^{p_{21}} \sum_{i_2=1}^{q_{21}} c_{i_1 i_2,11} u_1(k-i_1) y_1(k-i_2) + \sum_{i_1=0}^{p_{21}} \sum_{i_2=1}^{q_{22}} c_{i_1 i_2,12} u_1(k-i_1) y_2(k-i_2) \\ &+ \sum_{i_1=0}^{p_{22}} \sum_{i_2=1}^{q_{21}} c_{i_1 i_2,21} u_2(k-i_1) y_1(k-i_2) + \sum_{i_1=0}^{p_{22}} \sum_{i_2=1}^{q_{22}} c_{i_1 i_2,22} u_2(k-i_1) y_2(k-i_2) \end{aligned} \right\} \\ &+ \left. \sum_{i_1=0}^{p_{31}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{31}} \sum_{i_3=i_2}^{p_{31}} b_{i_1 i_2 i_3,111} u_1(k-i_1) u_1(k-i_2) u_1(k-i_3) + \dots \right\} \gamma = \eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2(k) &= \bar{y}_2 + \left. \begin{aligned} &\sum_{i_1=0}^{p_{11}} b_{i_1,1} u_1(k-i_1) + \sum_{i_1=0}^{p_{12}} b_{i_1,2} u_2(k-i_1) \\ &+ \sum_{i_1=1}^{q_{11}} a_{i_1,1} y_1(k-i_1) + \sum_{i_1=1}^{q_{12}} a_{i_1,2} y_2(k-i_1) \end{aligned} \right\} \gamma = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_1=0}^{p_{21}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{21}} 2b_{i_1 i_2, 11} u_1(k-i_1) u_1(k-i_2) + \sum_{i_1=0}^{p_{21}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{22}} 2b_{i_1 i_2, 12} u_1(k-i_1) u_2(k-i_2) \\
& + \dots \left. \vphantom{\sum_{i_1=0}^{p_{21}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{21}}} \right\} \gamma = 2
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Der diskrete nichtlineare Modellansatz nach Gl.(3.91) bildet die Grundlage für die nichtlinearen Black-Box-Modelle der Kupplung.

Kapitel 4

Modellierung des Antriebsstrangs mit hydrodynamischer Kupplung

In diesem Kapitel wird das Modell des Antriebsstrangs mit der hydrodynamischen Kupplung entwickelt. Hierzu werden zunächst die linearen und die nichtlinearen Modelle der Kupplung vorgestellt. Nach den Grundlagen zur Kopplung speziell von mechanischen Systemen erfolgt die Entwicklung des Differentialgleichungssystems des Antriebsstrangs unter Verwendung der linearen Kupplungsmodelle. Anschließend wird das diskrete Antriebsstrangmodell mit dem nichtlinearen Kupplungsmodell vorgestellt.

4.1 Die Modelle der hydrodynamischen Kupplung

In diesem Abschnitt werden die linearen und nichtlinearen Modelle der hydrodynamischen Kupplung angegeben, wie sie aus den Arbeiten in [7] und [12] durch die Black-Box-Identifikation hervorgegangen sind. Diese Modelle bilden in dieser Arbeit den Ausgangspunkt für die Modellierung des Antriebsstrangs mit der hydrodynamischen Kupplung.

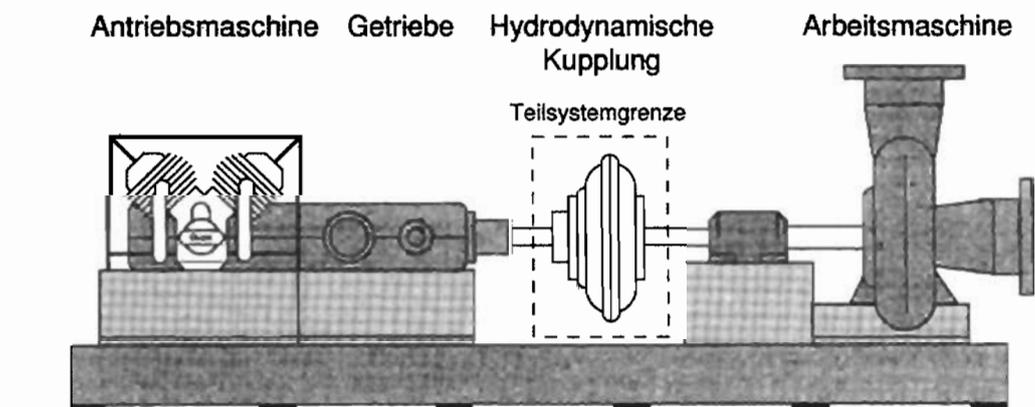


Abbildung 4.1: Die hydrodynamische Kupplung als Komponente im Antriebsstrang

Als Komponente in einem Antriebsstrang hat die hydrodynamische Kupplung die Aufgabe, mechanische Leistung zu übertragen. Durch Festlegung einer Teilsystemgrenze innerhalb des

Antriebssystems läßt sich die Kupplung isoliert betrachten. Die mechanischen Größen, die durch Schnitt an der Teilsystemgrenze entstehen, bestimmen das mechanische Teilsystemverhalten und bilden damit die Ein- und Ausgangsgrößen für das Kupplungsmodell. Die für die Identifikation der hydrodynamischen Kupplung gemessenen Größen sind die Drehzahlen

$$n_P(t), n_T(t)$$

und Drehmomente

$$M_P(t), M_T(t)$$

an der Pumpen- und Turbinenseite. Daraus ergibt sich, daß die Kupplung als Zweigrößensystem betrachtet werden kann, d.h., für das Modell ergeben sich insgesamt vier Ein-/Ausgangsgrößen. Damit sind die für die Black-Box-Betrachtung des Systems nötigen Größen festgelegt.

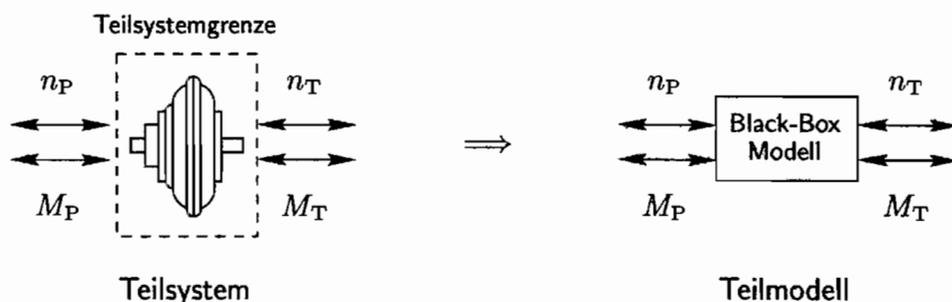


Abbildung 4.2: Ein- und Ausgangsgrößen des Black-Box-Modells der hydrodynamischen Kupplung

4.1.1 Die linearen Black-Box-Modelle

Grundlage der linearen Modelle ist die Linearisierung des dynamischen Verhaltens der Kupplung um einen mittleren Betriebspunkt P^* , der durch die gemessenen mittleren Werte der Pumpendrehzahl n_P^* , dem Schlupf s^* und den Momenten M_P^* und M_T^* an Pumpen- und Turbinenrad der Kupplung bestimmt ist, s. Abbildung 4.4.

$$P^* = f(n_P^*, s^*, M_P^*, M_T^*) \quad (4.1)$$

Die Ein- und Ausgangsgrößen des Modellansatzes sind die Abweichungen der Drehzahlen und Drehmomente vom mittleren Betriebspunkt, die durch eine Tilde gekennzeichnet sind.

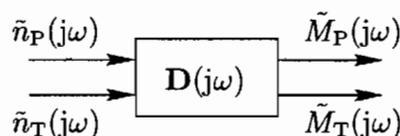


Abbildung 4.3: E/A-Größen der dynamischen Dämpfungsmatrix

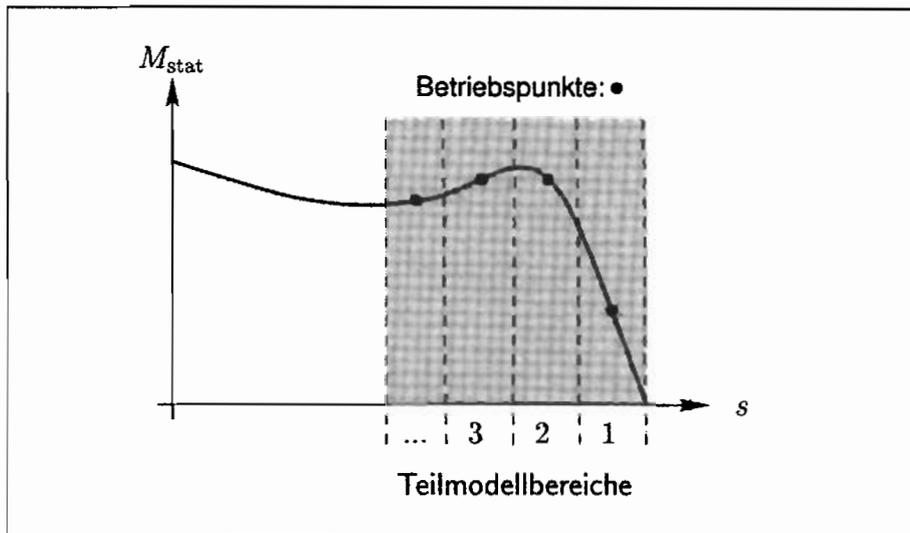


Abbildung 4.4: Stationäre Kennlinie mit Gültigkeitsbereichen - schematisch

Werden nach Abbildung 4.3 die Drehzahlen \tilde{n}_P und \tilde{n}_T als Eingangsgrößen und die Drehmomente \tilde{M}_P und \tilde{M}_T als Ausgangsgrößen des Zweigrößensystems betrachtet, ergibt sich ein Frequenzbereichsmodell mit vier Matrixelementen

$$\mathbf{m}(j\omega) = \mathbf{D}(j\omega) \mathbf{n}(j\omega),$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_P(j\omega) \\ \tilde{M}_T(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}(j\omega) & d_{12}(j\omega) \\ d_{21}(j\omega) & d_{22}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{n}_P(j\omega) \\ \tilde{n}_T(j\omega) \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Sinngemäß zu dem in der Strukturdynamik verwendeten Begriff der dynamischen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}(j\omega)$, die die Beziehung zwischen Kraftgrößen und Auslenkungen wiedergibt, wird das Modell $\mathbf{D}(j\omega)$ als dynamische Dämpfungsmatrix bezeichnet, da dieses die Beziehung zwischen Kraftgrößen und den Geschwindigkeiten der Auslenkungen im Frequenzbereich herstellt. Bei Drehschwingungssystemen werden die Auslenkungen durch Winkelgrößen beschrieben, deshalb wird anstatt von $\mathbf{x}(t)$ der Koordinatenvektor mit $\phi(t)$ bezeichnet. Mit

$$\phi(j\omega) = \begin{bmatrix} \varphi_P(j\omega) \\ \varphi_T(j\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \frac{\pi}{30} \mathbf{n}(j\omega)$$

ergibt sich der Zusammenhang zwischen der dynamischen Steifigkeits- und der dynamischen Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{S}(j\omega) = j\omega \frac{30}{\pi} \mathbf{D}(j\omega). \quad (4.3)$$

Die dynamische Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}(j\omega)$ kann somit als Sonderfall der dynamischen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}(j\omega)$ aufgefaßt werden.

Zur Identifikation des linearen Modells wird zunächst mit Hilfe von Frequenzgangmessungen das nichtparametrische Modell der dynamischen Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}(j\omega)$ im Frequenzbereich bestimmt. In dem darauffolgenden Identifikationsschritt wird für eine Parametrisierung des Modells der allgemeine Ansatz der linearen Ein-/Ausgangsbeschreibung für ein Zweigrößensystem im Frequenzbereich verwendet. Die vier Elemente der dynamischen Dämpfungsmatrix lassen sich durch 4 gebrochenrationale Polynome nach Gl.(3.58) darstellen. Zur

Vereinfachung des Ansatzes wird für alle Elemente dasselbe Nennerpolynom verwendet. Die Ordnung der Zählerpolynome beträgt n , die des Nennerpolynoms m

$$\mathbf{m}(j\omega) = \mathbf{D}(j\omega) \mathbf{n}(j\omega),$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_P(j\omega) \\ \tilde{M}_T(j\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{N_m(j\omega)} \begin{bmatrix} Z_{11n}(j\omega) & Z_{12n}(j\omega) \\ Z_{21n}(j\omega) & Z_{22n}(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{n}_P(j\omega) \\ \tilde{n}_T(j\omega) \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Für die einzelnen Elemente der dynamischen Dämpfungsmatrix erhält man

$$\mathbf{D}(j\omega) = \begin{bmatrix} d_{11}(j\omega) & d_{12}(j\omega) \\ d_{21}(j\omega) & d_{22}(j\omega) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$d_{ij}(j\omega) = \frac{Z_{ijn}(j\omega)}{N_m(j\omega)} = \frac{b_{ij0} + b_{ij1}j\omega + \dots + b_{ijn}j\omega^n}{a_0 + a_1j\omega + \dots + a_mj\omega^m}. \quad (4.6)$$

Durch die Transformation der Gleichungen in den Zeitbereich ergibt sich das aus zwei Gleichungen bestehende lineare Differentialgleichungssystem der Kupplung

$$\begin{aligned} a_0 \tilde{M}_P + a_1 \dot{\tilde{M}}_P + \dots + a_m \frac{d^m}{dt^m} \tilde{M}_P &= b_{110} \tilde{n}_P + b_{111} \dot{\tilde{n}}_P + \dots + b_{11n} \frac{d^n}{dt^n} \tilde{n}_P \\ &+ b_{120} \tilde{n}_T + b_{121} \dot{\tilde{n}}_T + \dots + b_{12n} \frac{d^n}{dt^n} \tilde{n}_T, \\ a_0 \tilde{M}_T + a_1 \dot{\tilde{M}}_T + \dots + a_m \frac{d^m}{dt^m} \tilde{M}_T &= b_{210} \tilde{n}_P + b_{211} \dot{\tilde{n}}_P + \dots + b_{21n} \frac{d^n}{dt^n} \tilde{n}_P \\ &+ b_{220} \tilde{n}_T + b_{221} \dot{\tilde{n}}_T + \dots + b_{22n} \frac{d^n}{dt^n} \tilde{n}_T. \end{aligned} \quad (4.7)$$

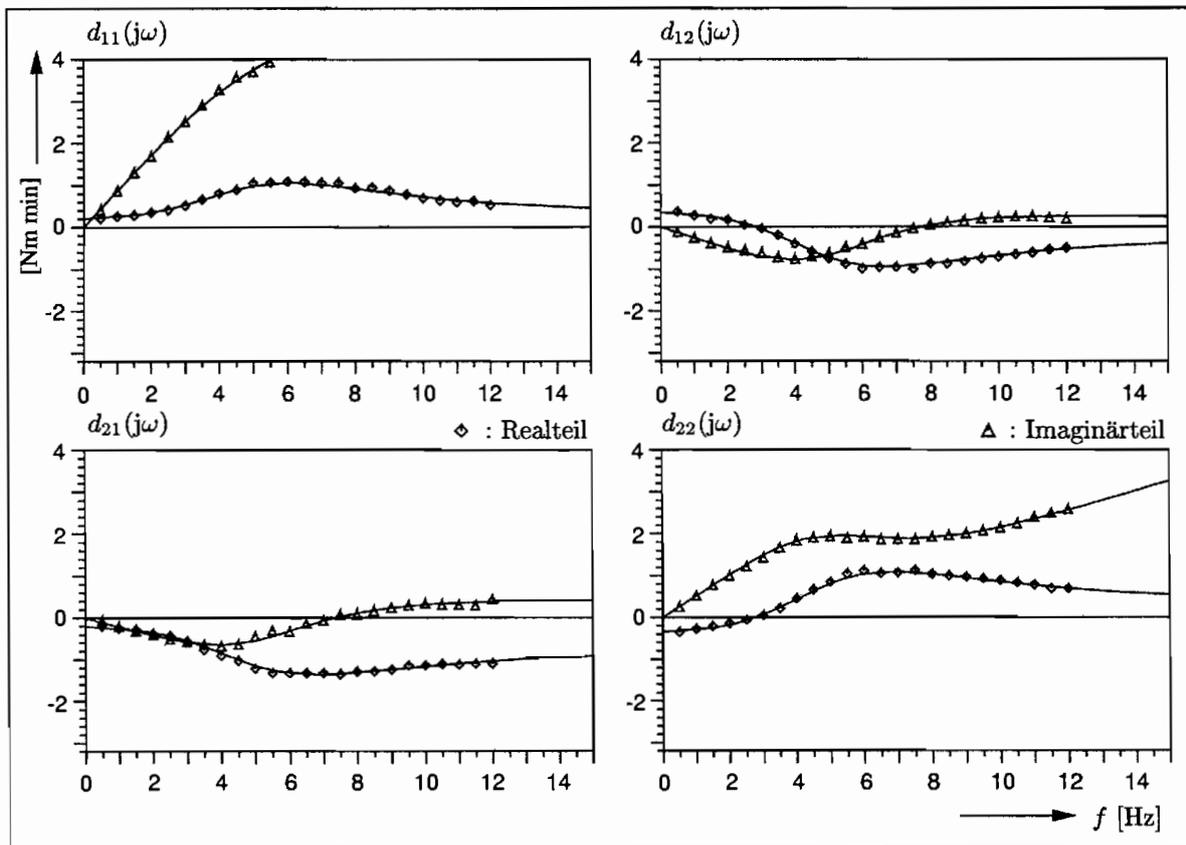


Abbildung 4.5: Dynamische Dämpfungsmatrix, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 20 \%$, Messung: Symbole, Schätzung: durchgezogen.

Aufgrund der Linearisierung in einem Betriebspunkt besitzen die Modelle nur einen beschränkten Gültigkeitsbereich. Zur Erfassung des Kupplungsverhaltens über einen großen Betriebsbereich werden mehrere Modelle für unterschiedlich Betriebspunkte aufgestellt. Die Modelle gelten jeweils nur für einen bestimmten Teilbetriebsbereich der Kupplung und werden daher auch als Teilmodelle der Kupplung bezeichnet. In Abbildung 4.4 sind die Betriebspunkte, für die das dynamische Kupplungsverhalten linearisiert betrachtet wird, und die entsprechenden zugehörigen Teilmodellbereiche schematisch für 4 Teilmodelle in der stationären Kennlinie gekennzeichnet. In Abbildung 4.5 ist ein Beispiel für eine dynamische Dämpfungsmatrix dargestellt.

4.1.2 Die nichtlinearen Black-Box-Modelle

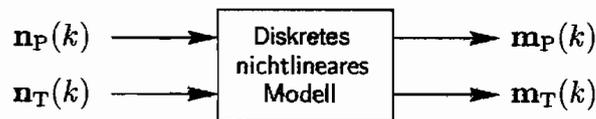


Abbildung 4.6: E/A-Größen des nichtlinearen Kupplungsmodells

Im Gegensatz zu den linearen Modellen, bei denen die Abweichungen von einem stationären Betriebspunkt die Systemgrößen bilden, werden bei dem nichtlinearen Modellansatz für die hydrodynamische Kupplung die absoluten Drehzahlen und Drehmomente als Ein-/Ausgangsgrößen verwendet. Ausgehend von dem allgemeinen diskreten nichtlinearen Modellansatz eines Zweigrößensystems nach Gl.(3.91) und den Ein-/Ausgangsgrößen nach Abbildung 4.6

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_P &= \mathbf{n}_P(k) = [n_P(k-1) \dots n_P(k-p_{\gamma 1})] , \\ \mathbf{n}_T &= \mathbf{n}_T(k) = [n_T(k-1) \dots n_T(k-p_{\gamma 2})] , \\ \mathbf{m}_P &= \mathbf{m}_P(k) = [M_P(k) M_P(k-1) \dots M_P(k-q_{\gamma 1})] , \\ \mathbf{m}_T &= \mathbf{m}_T(k) = [M_T(k) M_T(k-1) \dots M_T(k-q_{\gamma 2})] \end{aligned}$$

$$\text{mit } \gamma = 1, 2, \dots, \eta$$

wird für das konkrete nichtlineare Modell der hydrodynamischen Kupplung der Ansatz nach [7] verwendet, für den die folgenden Modifikationen gegenüber Gl.(3.91) gelten:

- die jeweilige Ausgangsgröße ist von der anderen unabhängig.
- die Ausgangsgröße ist nur linear von ihren zurückliegenden Werten abhängig; die nichtlinearen Terme bleiben unberücksichtigt.
- alle nichtlinearen Terme, die die aktuellen Eingangsgrößen $n_P(k)$ und $n_T(k)$ enthalten, entfallen.
- der Grad der Nichtlinearität beträgt maximal $\eta = 4$.

Damit läßt sich das diskrete nichtlineare Kupplungsmodell in der folgenden Form angeben:

$$\begin{aligned}
M_P(k) &= \bar{M}_P + \sum_{i_1=0}^{p_{11}} {}^1b_{i_1,1} n_P(k-i_1) + \sum_{i_1=0}^{p_{12}} {}^1b_{i_1,2} n_T(k-i_1) + \sum_{i_1=1}^{q_{11}} {}^1a_{i_1,1} M_P(k-i_1) \\
&+ \sum_{i_1=1}^{p_{21}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{21}} {}^1b_{i_1 i_2,11} n_P(k-i_1) n_P(k-i_2) + \sum_{i_1=1}^{p_{21}} \sum_{i_2=1}^{p_{22}} {}^1b_{i_1 i_2,12} n_P(k-i_1) n_T(k-i_2) \\
&+ \sum_{i_1=1}^{p_{21}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{22}} {}^1b_{i_1 i_2,22} n_T(k-i_1) n_T(k-i_2) \\
&+ \sum_{i_1=1}^{p_{31}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{31}} \sum_{i_3=i_2}^{p_{31}} {}^1b_{i_1 i_2 i_3,111} n_P(k-i_1) n_P(k-i_2) n_P(k-i_3) \\
&+ \sum_{i_1=1}^{p_{31}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{31}} \sum_{i_3=1}^{p_{32}} {}^1b_{i_1 i_2 i_3,112} n_P(k-i_1) n_P(k-i_2) n_T(k-i_3) \\
&+ \sum_{i_1=1}^{p_{31}} \sum_{i_2=1}^{p_{32}} \sum_{i_3=i_2}^{p_{32}} {}^1b_{i_1 i_2 i_3,122} n_P(k-i_1) n_T(k-i_2) n_T(k-i_3) \\
&+ \sum_{i_1=1}^{p_{32}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{32}} \sum_{i_3=i_2}^{p_{32}} {}^1b_{i_1 i_2 i_3,222} n_T(k-i_1) n_T(k-i_2) n_T(k-i_3) \\
&+ \sum_{i_1=1}^{p_{41}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{41}} \sum_{i_3=i_2}^{p_{41}} \sum_{i_4=i_3}^{p_{41}} {}^1b_{i_1 i_2 i_3 i_4,1111} n_P(k-i_1) n_P(k-i_2) n_P(k-i_3) n_P(k-i_4) \\
&+ \dots \\
M_T(k) &= \bar{M}_T + \sum_{i_1=0}^{p_{11}} {}^2b_{i_1,1} n_P(k-i_1) + \sum_{i_1=0}^{p_{12}} {}^2b_{i_1,2} n_T(k-i_1) + \sum_{i_1=1}^{q_{12}} {}^2a_{i_1,1} M_T(k-i_1) \\
&+ \sum_{i_1=1}^{p_{21}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{21}} {}^2b_{i_1 i_2,11} n_P(k-i_1) n_P(k-i_2) + \sum_{i_1=1}^{p_{21}} \sum_{i_2=1}^{p_{22}} {}^2b_{i_1 i_2,12} n_P(k-i_1) n_T(k-i_2) \\
&+ \sum_{i_1=1}^{p_{21}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{22}} {}^2b_{i_1 i_2,22} n_T(k-i_1) n_T(k-i_2) \\
&+ \sum_{i_1=1}^{p_{31}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{31}} \sum_{i_3=i_2}^{p_{31}} {}^2b_{i_1 i_2 i_3,111} n_P(k-i_1) n_P(k-i_2) n_P(k-i_3) \\
&+ \dots \\
&+ \sum_{i_1=1}^{p_{42}} \sum_{i_2=i_1}^{p_{42}} \sum_{i_3=i_2}^{p_{42}} \sum_{i_4=i_3}^{p_{42}} {}^2b_{i_1 i_2 i_3 i_4,2222} n_T(k-i_1) n_T(k-i_2) n_T(k-i_3) n_T(k-i_4) \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Für den Fall, daß die Ordnungen der linearen Glieder der Ausgänge gleich sind, d.h.

$$q_{11} = q_{12} \quad ,$$

wird die Parameteranzahl des Modells durch die Beziehung

$$n = 2 \cdot \left\{ 3 + p_{11} + p_{12} + q_{11} + \sum_{i=2}^{\eta} \binom{p_{i1} + p_{i2} + i - 1}{i} \right\} \tag{4.9}$$

bestimmt. Die Strukturparameter einer konkreten Realisierung des Modells werden in Tabellenform angegeben werden. Als Beispiel ist in nachstehender Tabelle 4.1 ein Modell mit dem Nichtlinearitätsgrad $\eta = 4$ angegeben, das für die Kupplung mit 8 l Füllung ermittelt wurde, nach [7].

| Nichtlineares Modell, Grad $\eta = 4$ | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------|
| Nichtlinearität γ | Ordnungen der Modellterme des Grades γ | |
| $\gamma = 1$ | $p_{11} = 6$ | $p_{12} = 6$ |
| | $q_{11} = 1$ | $q_{12} = 1$ |
| $\gamma = 2$ | $p_{21} = 5$ | $p_{22} = 5$ |
| $\gamma = 3$ | $p_{31} = 1$ | $p_{32} = 1$ |
| $\gamma = \eta = 4$ | $p_{41} = 1$ | $p_{42} = 1$ |
| Parameteranzahl n : 160 | | |

Tabelle 4.1: Modellstruktur des nichtlinearen Modellansatzes nach Gl.(4.8) für die hydrodynamische Kupplung

4.2 Die Kopplung der linearen Black-Box-Modelle

4.2.1 Kopplung linearer mechanischer E/A-Modelle im Frequenzbereich

In Abschnitt 3.3.6 ist die Kopplung allgemeiner linearer Systembeschreibungen behandelt worden. Die Kopplung im Frequenzbereich erweist sich aufgrund der einfachen multiplikativen Verknüpfung der einzelnen Modelle als besonders günstig. Da es sich bei dem Antriebsstrang mit hydrodynamischer Kupplung um ein mechanisches System handelt, wird in diesem Abschnitt zunächst speziell auf die Kopplung von mechanischen Systemen im Frequenzbereich eingegangen.

Die Bewegung vieler mechanischer Systeme aufgrund von äußerer Erregung kann hinreichend genau durch das lineare Matrizendifferentialgleichungssystem

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (4.10)$$

beschrieben werden. Diese Gleichung beinhaltet das Kräftegleichgewicht von äußeren Erregerkräften und den vom System entgegenwirkenden Kräften. Dieser physikalischen Modellvorstellung liegt zugrunde, daß sich das Systemverhalten durch Newton'sche Trägheitskräfte (beschleunigungsproportionale Kräfte), Dämpfungskräfte (geschwindigkeitsproportionale Kräfte) und elastische Kräfte (wegproportionale Kräfte) beschreiben läßt, so daß man als Modellbeschreibung ein DGL-System mit der Ordnung $q = 2$ erhält. Dabei beinhaltet $\mathbf{x}(t)$ allgemein die Auslenkungen an den Freiheitsgraden der mechanischen Struktur und $\mathbf{f}(t)$ die an ihnen angreifenden Erregerkräfte. Das System wird durch die Parametermatrizen, Massenmatrix \mathbf{M} , Dämpfungsmatrix \mathbf{D} und Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} , charakterisiert. Wird das DGL-System Gl.(4.10) in den Frequenzbereich transformiert, erhält man die Beziehung

$$\mathbf{S}(j\omega) \cdot \mathbf{x}(j\omega) = \mathbf{f}(j\omega) \quad , \quad (4.11)$$

mit

$$\mathbf{S}(j\omega) = (j\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{D} + \mathbf{K}) \quad . \quad (4.12)$$

In der Strukturodynamik wird die Matrix $\mathbf{S}(j\omega)$ als dynamische Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Sie kann als Ein-/Ausgangsmodell mit \mathbf{f} als Eingang und \mathbf{x} als Ausgang aufgefaßt werden. Vertauscht man die Größen für Ein- und Ausgang, gelangt man zu der folgenden Ein-/Ausgangsformulierung

$$\mathbf{H}(j\omega) \cdot \mathbf{f}(j\omega) = \mathbf{x}(j\omega) . \quad (4.13)$$

Die Matrix $\mathbf{H}(j\omega)$ wird als Frequenzgangmatrix bezeichnet und ist die Inverse der Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{S}^{-1}(j\omega) . \quad (4.14)$$

War in Abschnitt 3.3.5 gemäß der linearen Systemtheorie die Formulierung der Frequenzgangmatrix $\mathbf{G}(j\omega)$ allgemein durch das Verhältnis von Ausgang \mathbf{y} zu Eingang \mathbf{u} bestimmt, so ist in der Strukturodynamik für die Frequenzgangmatrix $\mathbf{H}(j\omega)$ als Eingangsgröße die Erregung $\mathbf{f}(j\omega)$ und als Ausgangsgröße die Auslenkungen $\mathbf{x}(j\omega)$ festgelegt, s. Abbildung 4.7. Eine multiplikative Kopplung nach Gl.(3.64) von zwei Modellen in Form von Frequenzgangmatrizen ist hier nicht möglich, da der Eingangs- und der Ausgangsvektor physikalisch unterschiedliche Größen beinhalten. Dasselbe gilt für die Steifigkeitsmatrizen. Durch eine formale Umsortierung der Ein-/Ausgangsgrößen der Steifigkeits- oder der Frequenzgangmatrix kann eine Modellformulierung erreicht werden, mit der die multiplikative Kopplung durchgeführt werden kann. Diese Frequenzbereichsmodelle werden in der Strukturodynamik als Übertragungsmatrizen $\mathbf{U}(j\omega)$ bezeichnet.

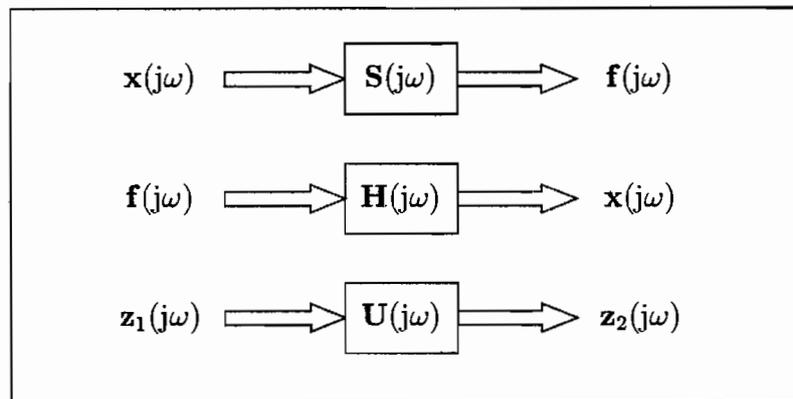


Abbildung 4.7: Steifigkeits-, Frequenzgang- und Übertragungsmodell

Als Beispiel für die multiplikative Kopplung mechanischer Systeme im Frequenzbereich wird eine Schwingerkette mit 3 Freiheitsgraden nach Abbildung 4.8 betrachtet, die aus zwei Zweimassenschwingern zusammengesetzt werden kann. Die Teilsysteme der Schwingerkette stellen mechanische Zweigrößensysteme dar. Das erste Teilsystem wird nach Abbildung 4.8 zunächst als Steifigkeitsmodell formuliert

$$\mathbf{S}_1(j\omega)\mathbf{x}_1(j\omega) = \mathbf{f}_1(j\omega) ,$$

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(j\omega) \\ x_2(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(j\omega) \\ -F_2(j\omega) \end{bmatrix} . \quad (4.15)$$

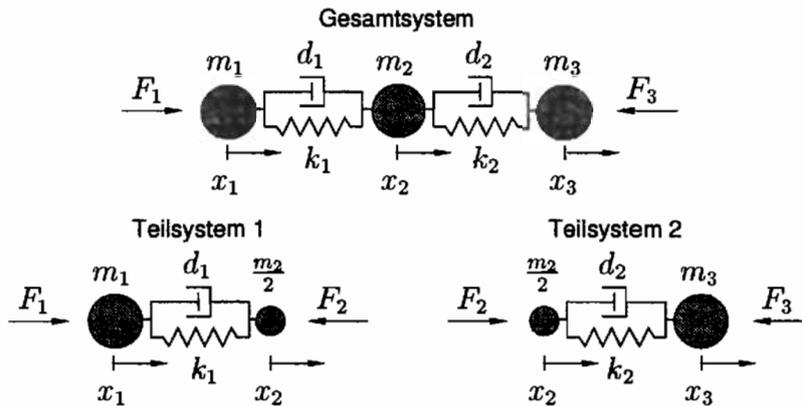


Abbildung 4.8: Schwinger mit 3 Freiheitsgraden

Durch Umsortierung der Gleichungsterme können die mechanischen Größen an der Koordinate x_1 im Eingangsvektor \mathbf{z}_1 und an Koordinate x_2 in Ausgangsvektor \mathbf{z}_2 zusammengefaßt werden. Es ergibt sich aus Gl.(4.15) die Beziehung

$$\frac{1}{s_{12}} \begin{bmatrix} -s_{11} & 1 \\ \det \mathbf{S}_1 & -s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(j\omega) \\ F_1(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(j\omega) \\ F_2(j\omega) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(j\omega) \\ F_1(j\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(j\omega) \\ F_2(j\omega) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}_1(j\omega) \mathbf{z}_1(j\omega) = \mathbf{z}_2(j\omega). \tag{4.16}$$

Ein- und Ausgangsvektor dieser Formulierung beschreiben den mechanischen Zustand des Systems an Freiheitsgrad 1 bzw. 2. Das Modell wird in dieser Form als Übertragungsmatrix bezeichnet. Die Übertragungsmatrizen der mechanischen Teilsysteme lassen sich multiplikativ verknüpfen; das Modell des Gesamtsystems kann gemäß Gl.(3.64) im Frequenzbereich erstellt werden.

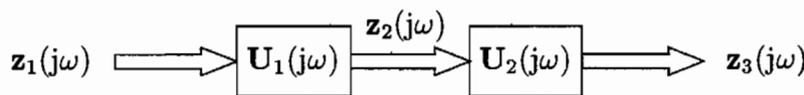


Abbildung 4.9: Kopplung der Übertragungsmodelle

Die Übertragungsmatrix \mathbf{U} im Beispiel der Schwingerkette wird durch die Übertragungsmatrizen der beiden Teilsysteme bestimmt

$$\mathbf{U}(j\omega) \mathbf{z}_1 = \mathbf{U}_1(j\omega) \mathbf{U}_2(j\omega) \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_3. \tag{4.17}$$

Das Übertragungsmodell des Gesamtsystems kann anschließend nach Tabelle 4.2 in das Steifigkeits- oder das Frequenzgangmodell umgerechnet werden. Das Gesamtmodell \mathbf{U} ist wieder ein Zweigrößensystem mit \mathbf{z}_1 als Eingang und \mathbf{z}_3 als Ausgang

$$\mathbf{z}_k(j\omega) = \mathbf{U}_{\Pi_k}(j\omega) \mathbf{z}_1(j\omega) = \prod_{i=0}^k \mathbf{U}_i(j\omega) \cdot \mathbf{z}_1(j\omega). \tag{4.18}$$

| | | |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| S : | $f(\mathbf{H}) = \mathbf{H}^{-1}$ | $f(\mathbf{U}) = \frac{1}{u_{12}} \begin{bmatrix} -u_{11} & 1 \\ \det \mathbf{U} & -u_{22} \end{bmatrix}$ |
| H : | $f(\mathbf{S}) = \mathbf{S}^{-1}$ | $f(\mathbf{U}) = -\frac{1}{u_{12}} \begin{bmatrix} u_{22} & 1 \\ \det \mathbf{U} & u_{11} \end{bmatrix}$ |
| U : | $f(\mathbf{S}) = \frac{1}{s_{12}} \begin{bmatrix} -s_{11} & 1 \\ \det \mathbf{S} & -s_{22} \end{bmatrix}$ | $f(\mathbf{H}) = \frac{1}{h_{12}} \begin{bmatrix} h_{22} & -\det \mathbf{H} \\ -1 & h_{11} \end{bmatrix}$ |

Tabelle 4.2: Umrechnung der Frequenzbereichsmodelle des mechanischen Zweigrößensystems

Man erkennt in Abbildung 4.10, daß eine Vertauschung der Ein- und Ausgangsgrößen des Systems im Frequenzbereich einen Wechsel der Modellbeschreibung bedeutet. Die multiplikative Verknüpfung von Teilmodellen zur Aufstellung des Gesamtmodells eines mechanischen Zweigrößensystems ist jedoch nur in Form von Übertragungsmatrizen möglich.

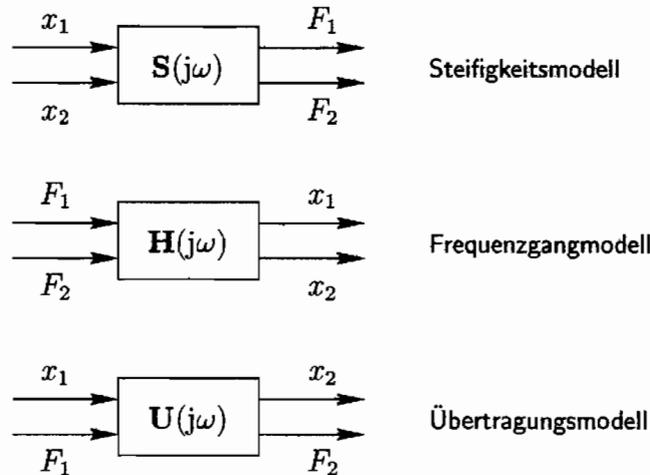


Abbildung 4.10: E/A-Konfigurationen des mechanischen Zweigrößensystems der verschiedenen Modellformen im Frequenzbereich

4.2.2 Der Antriebsstrang mit der hydrodynamischen Kupplung

Antriebssysteme bestehen aus einer Vielzahl von Einzelkomponenten wie Antriebs- und Lastmaschine, Getriebe, elastischen Wellen und Kupplungen. Zur Behandlung von Torsionsschwingungsproblemen können die Antriebe ohne Leistungsverzweigung auf einen glatten Wellenstrang, das heißt eine einfache Schwingerkette zurückgeführt werden. Im Gegensatz zu Biegeschwingungssystemen geht man bei Torsionsschwingungsproblemen im wesentlichen von einer diskreten Struktur aus, da sich hier starre Einzelmassen, deren Trägheitsmomente groß gegenüber denen der elastischen Verbindungselemente (z.B. Wellenabschnitte)

sind, im allgemeinen mit guter Genauigkeit bestimmen lassen. Die Dämpfung des Systems wird meist durch einen geschwindigkeitsproportionalen Term (viskose Dämpfung) erfaßt. Grundsätzlich wird für die einzelnen Antriebsstrangkomponenten lineares Verhalten vorausgesetzt. Somit lassen sich viele Antriebsstränge als diskretes Schwingungssystem darstellen und können durch die lineare Matrizendifferentialgleichung 2-ter Ordnung mit der Massenmatrix (Trägheitsmatrix) Θ , der Dämpfungsmatrix \mathbf{D} und der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} nach Gl.(4.19) beschrieben werden

$$\Theta \ddot{\phi}(t) + \mathbf{D} \dot{\phi}(t) + \mathbf{K} \phi(t) = \mathbf{m}(t) , \quad (4.19)$$

$$\text{mit } \phi = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \cdots \ \varphi_{n_F}]^T .$$

Zur Kopplung der linearen Black-Box-Modelle der hydrodynamischen Kupplung wird vorausgesetzt, daß sich die Wellenzüge des Antriebsstrangs vor und hinter der Kupplung als diskrete Mehrmassenschwingungssysteme abbilden lassen. Zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens des mechanischen Zweigrößensystems „Hydrodynamische Kupplung“ wird das in Abschnitt 4.1 vorgestellte allgemeine lineare Modell verwendet, das jeweils nur in dem entsprechenden Teilbetriebsbereich gültig ist. Mit den Momenten M_{an} und M_{ab} an den Randfreiheitsgraden als bekannte Belastungen und den Verdrehungen φ_j als Unbekannte ergibt sich das in Abbildung 4.11 dargestellte Blockschaltbild für das Antriebsstrangmodell.

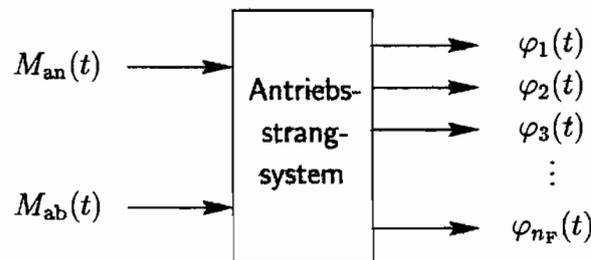


Abbildung 4.11: E/A-Konfiguration des Antriebsstrangmodells

Die linearen Modelle der hydrodynamischen Kupplung enthalten neben den eigentlichen Laufradträgheitsmassen von Pumpe und Turbine ebenfalls die Trägheiten der Anbauteile des bei der Identifikation der Kupplung verwendeten Versuchsaufbaus. Bei der Diskretisierung der Drehmassen eines beliebigen Antriebsstrangs weichen die Trägheiten der Laufräder von denen ab, die im Modell der Kupplung implizit enthalten sind. Um die Drehträgheiten der Freiheitsgrade von Pumpen- und Turbinenrad an die jeweilige Problemstellung anpassen zu können, wird die Differenz zu den Drehmassen des Identifikationsaufbaus $\theta_{mod,P}$ und $\theta_{mod,T}$ durch Zusatzträgheiten berücksichtigt. Diese zusätzlichen Massenträgheiten werden hier mit den Größen θ_P^+ auf der Pumpen- und θ_T^+ auf der Turbinenseite erfaßt. Sie gleichen somit den Unterschied der Laufradträgheiten zwischen Kupplungsmodell und Antriebsstrangmodell mit leerer Kupplung aus. Für diese Modellparameter sind auch negative Werte zulässig, falls die für den Pumpen- oder Turbinenfreiheitsgrad diskretisierten Drehmassen jeweils kleiner sind als die bei der Identifikation.

$$\begin{aligned} \theta_P &= \theta_{mod,P} + \theta_P^+ \\ \theta_T &= \theta_{mod,T} + \theta_T^+ \end{aligned} \quad (4.20)$$

mit

- θ_P, θ_T : Trägheiten der Laufräder des AS-Modells
- $\theta_{\text{mod},P}, \theta_{\text{mod},T}$: implizit im Kupplungsmodell enthaltene Laufradträgheiten
- θ_P^+, θ_T^+ : Zusatzträgheiten für Kupplungsmodell im Antriebsstrang

Damit ergibt sich für den Antriebsstrang das in Abbildung 4.12 dargestellte mechanische Ersatzschaltbild. Da es sich bei dem Kupplungsmodell um ein synthetisches Ein-/Ausgangsmodell (Black-Box-Modell) handelt, dem keine physikalische Parameter, wie z.B. Massenträgheiten, Steifigkeiten etc., zugeordnet werden können, läßt sich hierfür auch kein mechanisches Ersatzschaltbild angeben.

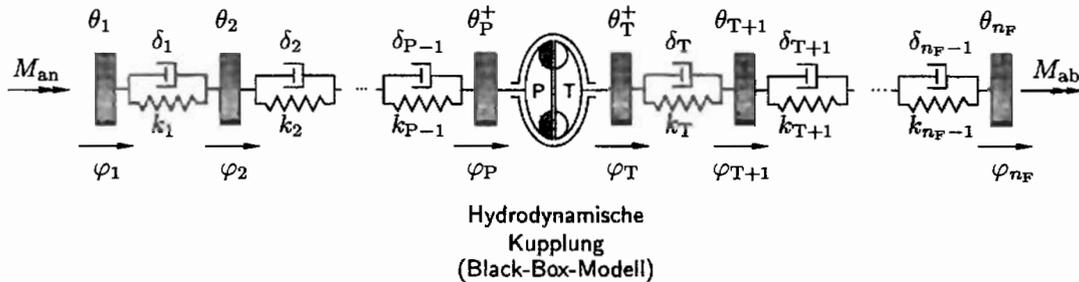


Abbildung 4.12: Mechanisches Ersatzmodell des Antriebsstrangs mit hydrodynamischer Kupplung

Die Kupplung wird daher im Ersatzschaltbild des Antriebsstrangs durch das in Abbildung 4.13 dargestellte Symbol angedeutet, welches eine eindeutige Zuordnung von Pumpen- und Turbinenseite ermöglicht.

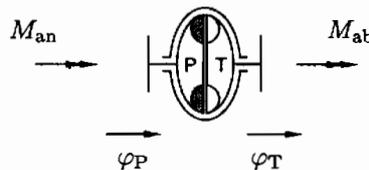


Abbildung 4.13: Vorgehensdefinition des linearen Modells der hydrodynamischen Kupplung

4.2.3 Zur Kopplung im Frequenzbereich

Zur Erstellung des Rechenmodells für den gesamten Antriebsstrang mit der hydrodynamischen Kupplung, bei dem das lineare Black-Box-Modell verwendet werden soll, müssen die Gleichungen für die Kupplung mit denen der konventionellen Feder-Dämpfer-Masse-Elemente gekoppelt werden. Theoretisch ist für die Kopplung der linearen Black-Box-Modelle die Arbeit mit Übertragungsmatrizen von Vorteil. Im Frequenzbereich liegen die Kupplungsmodelle in Form der dynamischen Dämpfungsmatrix $D(j\omega)$ vor, die sich nach Gl.(4.3) als

Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}(j\omega)$ formulieren lassen

$$\mathbf{S}(j\omega) = j\omega \frac{30}{\pi} \mathbf{D}(j\omega), \tag{4.21}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{Z_{11_n}(j\omega)}{N_m(j\omega)} & \frac{Z_{12_n}(j\omega)}{N_m(j\omega)} \\ \frac{Z_{21_n}(j\omega)}{N_m(j\omega)} & \frac{Z_{22_n}(j\omega)}{N_m(j\omega)} \end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

Das Steifigkeitsmodell mit beliebigem Ansatz n für die Zählerpolynome $Z_{ij_n}(j\omega)$ und m für das Nennerpolynom $N_m(j\omega)$ läßt sich nach Tabelle 4.2 in die zur Kopplung nötige Form, die des Übertragungsmodells umrechnen

$$\mathbf{U}(j\omega) = \begin{bmatrix} -\frac{Z_{11_n}}{Z_{12_n}} & \frac{N_m}{Z_{12_n}} \\ \frac{Z_{11_n} Z_{22_n} - Z_{12_n} Z_{21_n}}{Z_{12_n} N_m} & \frac{Z_{22_n}}{Z_{12_n}} \end{bmatrix}. \tag{4.23}$$

Die Modellierung mit Hilfe der Übertragungsmatrizen wird hauptsächlich bei der Behandlung von freien Schwingungen oder für stationäre Erregung verwendet. Ist aber der Zeitverlauf der Systemantwort auf transiente Erregungen von Interesse, ist die Anwendung des Übertragungsverfahrens beschränkt. Da in dieser Arbeit neben der Eigenwertanalyse des linearen Antriebsstrangmodells mit der hydrodynamischen Kupplung auch Simulationen im Zeitbereich durchgeführt werden sollen, erfolgt die aufwendigere Kopplung der Modelle der Antriebsstrangkomponenten im Zeitbereich.

4.2.4 Die Kopplung im Zeitbereich

Ziel der Kopplung im Zeitbereich ist das Differentialgleichungssystem des Antriebsstrangs mit dem linearen Black-Box-Modell der hydrodynamischen Kupplung. Für die Simulation wird anschließend das Zustandsraummodell des Antriebsstrangs aufgestellt. Die Kopplung des Modells der hydrodynamischen Kupplung mit den benachbarten Freiheitsgraden innerhalb des Antriebsstrangs führt zunächst auf zwei Bewegungsdifferentialgleichungen zur Beschreibung der beiden Kupplungslaufräder, die in diesem Abschnitt aufgestellt werden.

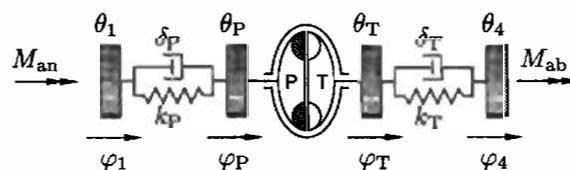


Abbildung 4.14: Einfaches Antriebsstrangsystem mit 4-Freiheitsgraden

Die diskreten Massen des Pumpen- und Turbinenstrangs vor und hinter den Freiheitsgraden der Laufräder φ_P und φ_T gehorchen den bekannten Differentialgleichungen 2-ter Ordnung

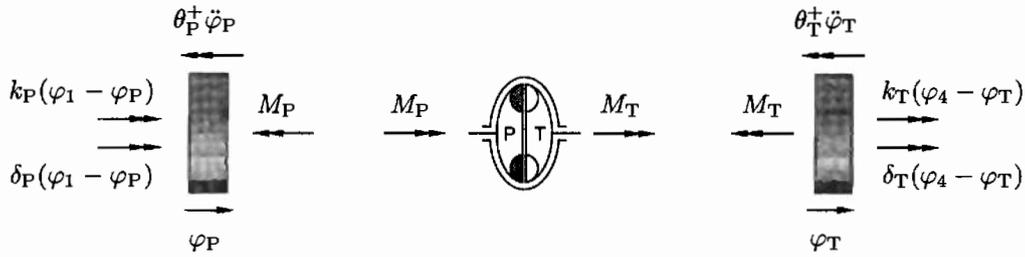


Abbildung 4.15: Die Schnittgrößen des linearen Kupplungsmodells im Antriebsstrang

Gl.(4.19). Um das Vorgehen prinzipiell zu erläutern, genügt die Betrachtung des in Abbildung 4.14 dargestellten Antriebsstrangs mit 4 Freiheitsgraden.

Als Kupplungsmodell wird das Differentialgleichungssystem nach Gl.(4.7) verwendet. Die Ordnung des DGL-Systems hängt von den Polynomansatzgraden n und m der Elemente der dynamischen Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}(j\omega)$ im Frequenzbereich ab. Aus der Parameterschätzung der dynamischen Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}(j\omega)$ hat sich ergeben, daß die die Ordnung n des Zählerpolynoms um 1 größer zu wählen ist als die Ordnung m des Nennerpolynoms. Es gilt deshalb für das lineare Kupplungsmodell im Zeitbereich die folgende Strukturbedingung:

$$\boxed{\text{Strukturbedingung: } n = m + 1} \quad (4.24)$$

Die dynamische Dämpfungsmatrix lautet

$$\mathbf{D}(j\omega) = \frac{1}{N_m(j\omega)} \begin{bmatrix} Z_{11_{m+1}}(j\omega) & Z_{12_{m+1}}(j\omega) \\ Z_{21_{m+1}}(j\omega) & Z_{22_{m+1}}(j\omega) \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Damit ist der Ansatzgrad n abhängig von m . Im Zeitbereich bedeutet das für das Differentialgleichungssystem, daß die Ordnung der Ableitungen der Drehzahlen \tilde{n}_P und \tilde{n}_T um 1 höher ist als die der Momente \tilde{M}_P und \tilde{M}_T .

Mit diesen Voraussetzungen kann über die Betrachtung des Gleichgewichts der mechanischen Größen an der Kupplung das DGL-System für den Antriebsstrang aufgestellt werden

$$\theta_1 \ddot{\varphi}_1 + \delta_P(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_P) + k_P(\varphi_1 - \varphi_P) = M_{an}, \quad (4.26)$$

$$-\theta_P^+ \ddot{\varphi}_P + \delta_P(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_P) + k_P(\varphi_1 - \varphi_P) = M_P, \quad (4.27)$$

$$b_{11_0} \tilde{n}_P + b_{11_1} \dot{\tilde{n}}_P + \dots + b_{11_{m+1}} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \tilde{n}_P = a_0 \tilde{M}_P + a_1 \dot{\tilde{M}}_P + a_2 \ddot{\tilde{M}}_P + \dots + a_m \frac{d^m}{dt^m} \tilde{M}_P \\ + b_{12_0} \tilde{n}_T + b_{12_1} \dot{\tilde{n}}_T + \dots + b_{12_{m+1}} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \tilde{n}_T, \quad (4.28)$$

$$b_{21_0} \tilde{n}_P + b_{21_1} \dot{\tilde{n}}_P + \dots + b_{21_{m+1}} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \tilde{n}_P = a_0 \tilde{M}_T + a_1 \dot{\tilde{M}}_T + a_2 \ddot{\tilde{M}}_T + \dots + a_m \frac{d^m}{dt^m} \tilde{M}_T \\ + b_{22_0} \tilde{n}_T + b_{22_1} \dot{\tilde{n}}_T + \dots + b_{22_{m+1}} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \tilde{n}_T, \quad (4.29)$$

$$-\theta_T^+ \ddot{\varphi}_T + \delta_T(\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_T) + k_T(\varphi_4 - \varphi_T) = M_T, \quad (4.30)$$

$$\theta_4 \ddot{\varphi}_4 + \delta_T(\dot{\varphi}_4 - \dot{\varphi}_T) + k_T(\varphi_4 - \varphi_T) = M_{Ab}. \quad (4.31)$$

Hierin sind die Momente M_P und M_T absolute Größen. Die rechten Seiten der Gleichungen Gl.(4.28) und Gl.(4.29), also die des Kupplungsmodells, stellen keine äußeren Belastungen

des Antriebsstranges sondern unbekannte Größen dar. Sie lassen sich durch Gl.(4.27) und Gl.(4.30) ausdrücken. Für die Betrachtung der Schnittgrößen innerhalb des Antriebsstrangs sind Absolutgrößen an der Kupplung erforderlich, so daß die Betriebspunktabweichungen umgerechnet werden müssen

$$\begin{aligned}\tilde{M}_P &= M_P - M_P^* , \\ \tilde{M}_T &= M_T - M_T^* , \\ \tilde{n}_P &= n_P - n_P^* , \\ \tilde{n}_T &= n_T - n_T^* .\end{aligned}\tag{4.32}$$

Aus Gl.(4.28) und Gl.(4.29) ergibt sich hiermit:

$$\begin{aligned}b_{11_0}(n_P - n_P^*) + b_{11_1}\dot{n}_P + \dots + b_{11_{m+1}}\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}n_P &= a_0(M_P - M_P^*) + a_1\dot{M}_P + \dots + a_m\frac{d^m}{dt^m}M_P \\ + b_{12_0}(n_T - n_T^*) + b_{12_1}\dot{n}_T + \dots + b_{12_{m+1}}\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}n_T ,\end{aligned}\tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}b_{21_0}(n_P - n_P^*) + b_{21_1}\dot{n}_P + \dots + b_{21_{m+1}}\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}n_P &= a_0(M_T - M_T^*) + a_1\dot{M}_T + \dots + a_m\frac{d^m}{dt^m}M_T \\ + b_{22_0}(n_T - n_T^*) + b_{22_1}\dot{n}_T + \dots + b_{22_{m+1}}\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}n_T .\end{aligned}\tag{4.34}$$

Mit den Beziehungen

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\pi}{30}n_P , \quad \dot{\varphi}_3 = \frac{\pi}{30}n_T$$

werden die Drehzahlkoeffizienten b_{kl} der Kupplungsgleichungen auf absolute Winkelgrößen umgerechnet

$$\begin{aligned}b_j &= \frac{30}{\pi}b_{11_j} , \\ c_j &= \frac{30}{\pi}b_{12_j} , \\ d_j &= \frac{30}{\pi}b_{21_j} , \\ e_j &= \frac{30}{\pi}b_{22_j} .\end{aligned}\tag{4.35}$$

Man erhält dadurch die Modellbeziehungen der Kupplung in Winkelgrößen. Werden die Terme nach Freiheitsgraden geordnet, so erhält man die Bewegungsdifferentialgleichungen des Pumpen- und Turbinenrades für einen Teilbetriebsbereich der hydrodynamischen Kupplung innerhalb des Antriebsstrangs. Setzt man die Koeffizienten

$$b_0 = c_0 = d_0 = e_0 = a_{m+1} = a_{m+2} = 0$$

können die beiden Gleichungen der Kupplung wie folgt formuliert werden

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^m a_i \left(k_P \frac{d^i}{dt^i} \varphi_1 + \delta_P \frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}} \varphi_1 \right) \\ - \sum_{i=0}^{m+2} \left[(a_i k_P + b_i) \frac{d^i}{dt^i} \varphi_P + a_i \left(\delta_P \frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}} \varphi_P + \theta_P^+ \frac{d^{i+2}}{dt^{i+2}} \varphi_P \right) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=0}^{m+2} c_i \frac{d^i}{dt^i} \varphi_T = a_0 M_P^* - b_1 \dot{\varphi}_P^* - c_1 \varphi_T^* , \\
& - \sum_{i=0}^{m+2} d_i \frac{d^i}{dt^i} \varphi_P \\
& - \sum_{i=0}^{m+2} \left[(a_i k_T + e_i) \frac{d^i}{dt^i} \varphi_T + a_i \left(\delta_T \frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}} \varphi_T + \theta_T^+ \frac{d^{i+2}}{dt^{i+2}} \varphi_T \right) \right] \\
& + \sum_{i=0}^m a_i \left(k_T \frac{d^i}{dt^i} \varphi_4 + \delta_T \frac{d^{i+1}}{dt^{i+1}} \varphi_4 \right) = a_0 M_T^* - d_1 \dot{\varphi}_P^* - e_1 \varphi_T^* .
\end{aligned} \tag{4.36}$$

4.2.5 Das DGL-System des Antriebsstrangs

Es wird jetzt das Differentialgleichungssystem für einen Antriebsstrang nach Abbildung 4.12 mit einer beliebigen Anzahl n_F von Freiheitsgraden, mindestens aber jeweils 1 Freiheitsgrad an der Pumpen- und Turbinenseite der Kupplung, aufgestellt. Der Sonderfall, daß die Freiheitsgrade der Kupplungslaufräder an den Enden des Antriebsstrangs liegen, ist in dem hier erstellten Modell nicht enthalten, kann aber leicht daraus abgeleitet werden. Als Kupplungsmodell werden die im vorangegangenen Abschnitt hergeleiteten Beziehungen verwendet.

Die Freiheitsgrade der beiden Wellenzüge an Pumpen- und Turbinenstrang lassen sich durch das System Gl.(4.37) beschreiben. Mit

$$j = 2, 3 \dots, P - 1, T + 1, T + 2, \dots, n_F - 1$$

gilt

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 & -\delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = M_{an} , \\
& \begin{bmatrix} 0 & \theta_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_{j-1} \\ \ddot{\varphi}_j \\ \ddot{\varphi}_{j+1} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} -\delta_{j-1} & \delta_{j-1} + \delta_j & -\delta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{j-1} \\ \dot{\varphi}_j \\ \dot{\varphi}_{j+1} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} -k_{j-1} & k_{j-1} + k_j & -k_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{j-1} \\ \varphi_j \\ \varphi_{j+1} \end{bmatrix} = 0 , \\
& \begin{bmatrix} 0 & \theta_{n_F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_{n_F-1} \\ \ddot{\varphi}_{n_F} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{n_F-1} & -\delta_{n_F-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{n_F-1} \\ \dot{\varphi}_{n_F} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{n_F-1} & -k_{n_F-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{n_F-1} \\ \varphi_{n_F} \end{bmatrix} = M_{ab} .
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Mit der im vorigen Abschnitt vorausgesetzten Strukturbedingung Gl.(4.24) für das Kupplungsmodell können Pumpen- und Turbinenrad durch die Gleichungen Gl.(4.38) und Gl.(4.39)

$$\begin{aligned} \text{mit } \Theta_P &= \text{diag}[\theta_1, \dots, \theta_{P-1}] \text{ ,} \\ \Theta_T &= \text{diag}[\theta_T, \dots, \theta_{n_F}] \text{ ,} \end{aligned}$$

für die Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_T \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } \mathbf{K}_P = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & & & & \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -k_{P-2} & k_{P-2} + k_{P-1} & -k_{P-1} \end{bmatrix} \text{ ,}$$

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} -k_T & k_T + k_{T+1} & -k_{T+1} & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -k_{n_F-2} & k_{n_F-2} + k_{n_F-1} & -k_{n_F-1} \\ & & & & -k_{n_F-1} & k_{n_F-1} \end{bmatrix}$$

und analog zu \mathbf{K} für die Dämpfungsmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_P & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_T \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } \mathbf{D}_P = \begin{bmatrix} \delta_1 & -\delta_1 & & & & \\ -\delta_1 & \delta_1 + \delta_2 & -\delta_2 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -\delta_{P-2} & \delta_{P-2} + \delta_{P-1} & -\delta_{P-1} \end{bmatrix} \text{ ,}$$

$$\mathbf{D}_T = \begin{bmatrix} -\delta_T & \delta_T + \delta_{T+1} & -\delta_{T+1} & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -\delta_{n_F-2} & \delta_{n_F-2} + \delta_{n_F-1} & -\delta_{n_F-1} \\ & & & & -\delta_{n_F-1} & \delta_{n_F-1} \end{bmatrix}$$

Werden anschließend die Kupplungsgleichungen Gl.(4.38) und Gl.(4.39) separat für sich betrachtet, so lassen diese sich in einer Matrizendifferentialgleichung zusammenfassen

$$\mathbf{V}_{m+2} \frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}} \phi_K(t) + \mathbf{V}_{m+1} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \phi_K(t) + \dots + \mathbf{V}_1 \dot{\phi}_K(t) + \mathbf{V}_0 \phi_K(t) = \mathbf{m}_K \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \phi_K &= [\varphi_{P-1} \ \varphi_P \ \varphi_T \ \varphi_{T+1}]^T \text{ ,} \\ \mathbf{m}_K &= [M_{K,P}^* \ M_{K,T}^*]^T \text{ .} \end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrizen \mathbf{V}_i lauten dann

$$\mathbf{V}_{m+2} = \begin{bmatrix} 0 & -b_{m+2} - a_m \theta_P^+ & c_{m+2} & 0 \\ 0 & -d_{m+2} & -e_{m+2} - a_m \theta_T^+ & 0 \end{bmatrix} \text{ ,}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{m+1} &= \begin{bmatrix} a_m \delta_{P-1} & -b_{m+1} - a_m \delta_{P-1} - a_{m-1} \theta_P^+ & c_{m+1} & 0 \\ 0 & d_{m+1} & -e_{m+1} - a_m \delta_T - a_{m-1} \theta_T^+ & a_m \delta_T \end{bmatrix}, \\
\mathbf{V}_m &= \begin{bmatrix} a_m k_{P-1} & -(a_m k_{P-1} + b_m) & c_m & 0 \\ +a_{m-1} \delta_{P-1} & -a_{m-1} \delta_{P-1} - a_{m-2} \theta_P^+ & & \\ 0 & -d_m & -(a_m k_T + e_m) & a_m k_T \\ & & -a_{m-1} \delta_T - a_{m-2} \theta_T^+ & +a_{m-1} \delta_T \end{bmatrix}, \\
&\vdots \\
\mathbf{V}_1 &= \begin{bmatrix} a_1 k_{P-1} + a_0 \delta_{P-1} & -(a_1 k_{P-1} + b_1) & -c_1 & 0 \\ & -a_0 \delta_{P-1} & & \\ 0 & -d_1 & -(a_1 k_T + e_1) & a_1 k_T + a_0 \delta_T \\ & & -a_0 \delta_T & \end{bmatrix}, \\
\mathbf{V}_0 &= \begin{bmatrix} a_0 k_{P-1} & -a_0 k_{P-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_0 k_T & a_0 k_T \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Nach diesen Vorbetrachtungen kann jetzt das Gesamtmodell aus den Teilmodellen für die Wellenzüge Gl.(4.40) und der hydrodynamischen Kupplung Gl.(4.41) zusammengesetzt werden. Das Gesamtmodell des Antriebsstrangs für einen Teilbetriebsbereich der hydrodynamischen Kupplung besitzt dann die Form

$$\mathbf{A}_{m+2} \frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}} \boldsymbol{\phi}(t) + \mathbf{A}_{m+1} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \boldsymbol{\phi}(t) + \cdots + \mathbf{A}_1 \dot{\boldsymbol{\phi}}(t) + \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{m}(t) \quad (4.42)$$

$$\text{mit } \boldsymbol{\phi}^T = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_F}]. \quad (4.43)$$

Die Koeffizientenmatrizen \mathbf{A}_i lassen sich nun mit den Matrizen $\boldsymbol{\Theta}$, \mathbf{D} , \mathbf{K} und \mathbf{V}_i der Teilsysteme Gl.(4.40) und Gl.(4.41) aufstellen

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{m+2} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \\ & \mathbf{V}_{m+2} & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\
\mathbf{A}_{m+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \\ & \mathbf{V}_{m+1} & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\
&\vdots \\
\mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \\ & \mathbf{V}_3 & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} \Theta_P & & \\ & \mathbf{V}_2 & \\ & & \Theta_T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_P & & \\ & \mathbf{V}_1 & \\ & & \mathbf{D}_T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_P & & \\ & \mathbf{V}_0 & \\ & & \mathbf{K}_T \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Für den Erregervektor erhält man

$$\mathbf{m}(t) = [M_{\text{an}}(t) \ 0 \ \cdots \ 0 \ M_{\text{K,P}}^* \ M_{\text{K,T}}^* \ 0 \ \cdots \ 0 \ M_{\text{ab}}(t)]^T. \quad (4.44)$$

Die Elemente $M_{\text{K,P}}^*$ und $M_{\text{K,T}}^*$ des Erregervektors sind vom Betriebspunkt des jeweiligen Kupplungsmodells abhängige zeitkonstante Größen.

4.2.6 Das Zustandsraummodell des Antriebsstrangs

Für Zeitbereichssimulationen ist die Darstellung eines Modellsystems als System 1. Ordnung in Form von Zustandsraummodellen günstig. Aus der Systemmatrix des Zustandsraummodells lassen sich zudem die Eigenwerte und Eigenvektoren des Antriebsstrangmodells bestimmen. Aus dem DGL-System für den Antriebsstrang wird das zugehörige Zustandsraummodell entwickelt. Als Eingangsgrößen des Gesamtmodells werden die Momente M_{an} , M_{ab} und als Ausgangsgrößen die Winkelverdrehungen φ_i verwendet.

Das DGL-System des Antriebsstrangs Gl.(4.42) besitzt die Form der Matrizendifferentialgleichung

$$\mathbf{A}_{m+2} \frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}} \boldsymbol{\phi}(t) + \mathbf{A}_{m+1} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \boldsymbol{\phi}(t) + \cdots + \mathbf{A}_1 \dot{\boldsymbol{\phi}}(t) + \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{m}(t)$$

mit der Ordnung

$$q = m + 2,$$

die allein durch die Ordnung m des Modellansatzes des linearen Kupplungsmodells bestimmt wird. Die Koeffizientenmatrix der höchsten Ordnung

$$\mathbf{A}_{m+2} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \\ & \mathbf{V}_{m+2} & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ist singulär und damit nicht invertierbar. Um eine Zustandsraumdarstellung des Antriebsstrangmodells zu erhalten, werden nach dem in Abschnitt 3.3.4 beschriebenen Vorgehen die Gleichungen für die Wellenzüge Gl.(4.40) m -fach nach der Zeit differenziert

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m} (\Theta \ddot{\boldsymbol{\phi}}(t) + \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\phi}}(t) + \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}(t)) &= \frac{d^m}{dt^m} \mathbf{m}_W(t), \\ \Theta \frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}} \boldsymbol{\phi}(t) + \mathbf{D} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \boldsymbol{\phi}(t) + \mathbf{K} \frac{d^m}{dt^m} \boldsymbol{\phi}(t) &= \mathbf{m}'_W(t) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\text{mit } \mathbf{m}'_{\text{W}}(t) = \left[\frac{d^m}{dt^m} M_{\text{an}}(t) \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \frac{d^m}{dt^m} M_{\text{ab}}(t) \right]^{\text{T}}.$$

Mit Gl.(4.45) erhält man eine neue Formulierung des Antriebsstrangmodells

$$\mathbf{A}'_{m+2} \frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}} \phi(t) + \mathbf{A}'_{m+1} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \phi(t) + \dots + \mathbf{A}'_1 \dot{\phi}(t) + \mathbf{A}'_0 \phi(t) = \mathbf{m}'(t). \quad (4.46)$$

Die Koeffizientenmatrizen \mathbf{A}'_i haben sich gegenüber den Matrizen \mathbf{A}_i in Gl.(4.42) verändert

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_{m+2} &= \begin{bmatrix} \mathbf{\Theta}_P & & \\ & \mathbf{V}_{m+2} & \\ & & \mathbf{\Theta}_T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}'_{m+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_P & & \\ & \mathbf{V}_{m+1} & \\ & & \mathbf{D}_T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}'_m &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_P & & \\ & \mathbf{V}_m & \\ & & \mathbf{K}_T \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}'_{m-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \\ & \mathbf{V}_{m-1} & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ &\vdots \\ \mathbf{A}'_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \\ & \mathbf{V}_1 & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}'_0 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \\ & \mathbf{V}_0 & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Für den Erregervektor ergibt sich

$$\mathbf{m}'(t) = \left[\frac{d^m}{dt^m} M_{\text{an}}(t) \ 0 \ \dots \ 0 \ M_{\text{K,P}}^* \ M_{\text{K,T}}^* \ 0 \ \dots \ 0 \ \frac{d^m}{dt^m} M_{\text{ab}}(t) \right]^{\text{T}}. \quad (4.47)$$

Mit der Nachdifferenzierung der Gleichungen der Wellenzüge des Pumpen- und Turbinenstrangs ist erreicht worden, daß alle Differentialgleichungen dieselbe Ordnung

$$q = m + 2$$

besitzen. Damit ist in dieser Formulierung die Koeffizientenmatrix der höchsten Ordnung \mathbf{A}'_{m+2} invertierbar und das Gesamtsystem Antriebsstrang kann durch Multiplikation mit der Inversen \mathbf{A}'_{m+2}^{-1} in die allgemeine Form der Matrizendifferentialgleichung Gl.(3.11) überführt werden

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}} \phi(t) + \mathbf{A}'_{m+2}^{-1} \mathbf{A}'_{m+1} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \phi(t) + \dots + \mathbf{A}'_{m+2}^{-1} \mathbf{A}'_0 \phi(t) &= \mathbf{A}'_{m+2}^{-1} \mathbf{m}'(t), \\ \frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}} \phi(t) + \mathbf{\Lambda}_{m+1} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \phi(t) + \dots + \mathbf{\Lambda}_1 \dot{\phi}(t) + \mathbf{\Lambda}_0 \phi(t) &= \mathbf{B}_0 \mathbf{m}'(t) \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\text{mit } \Lambda_i = \mathbf{A}'_{m+2}{}^{-1} \cdot \mathbf{A}'_i . \quad (4.49)$$

Mit den allgemeinen Ein-/Ausgangsgrößen \mathbf{u} und \mathbf{y} für das Zustandsmodell

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \boldsymbol{\phi}(t) , \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{m}'(t) \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}'_{m+2}{}^{-1}$$

ergibt sich

$$\frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}}\mathbf{y} + \Lambda_{m+1}\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}\mathbf{y} + \dots + \Lambda_2\ddot{\mathbf{y}} + \Lambda_1\dot{\mathbf{y}} + \Lambda_0\mathbf{y} = \mathbf{B}_0\mathbf{u} . \quad (4.50)$$

Aus Gl.(4.48) können mit

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= [\boldsymbol{\phi} \dot{\boldsymbol{\phi}} \dots \frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}}\boldsymbol{\phi}]^T , \\ \mathbf{u} &= [\frac{d^m}{dt^m}M_{\text{an}}(t) \ 0 \ \dots \ 0 \ M_{\text{K,P}}^* \ M_{\text{K,T}}^* \ 0 \ \dots \ 0 \ \frac{d^m}{dt^m}M_{\text{ab}}(t)]^T \end{aligned}$$

direkt die Matrizen der Zustandsraumdarstellung des Antriebsstrangs unter Verwendung eines linearen Teilmodells der hydrodynamischen Kupplung angegeben werden

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{u} , \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C} \mathbf{z} \end{aligned} \quad (4.51)$$

mit den Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} \\ -\Lambda_0 & -\Lambda_1 & -\Lambda_2 & \dots & & -\Lambda_{m+1} \end{bmatrix} , \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_0 \end{bmatrix} , \\ \mathbf{C} &= [\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}] . \end{aligned}$$

Damit erhält man für das Zustandsraummodell Gl.(4.51) die in Abbildung 4.16 dargestellte Konfiguration der Ein-/Ausgangsgrößen, vgl. auch hierzu Abbildung 4.11. Für das Zustandsraummodell ergibt sich der Nachteil, daß die eigentlichen Erregergrößen des Antriebsstrangs, das Antriebsmoment $M_{\text{an}}(t)$ und das Abtriebsmoment $M_{\text{ab}}(t)$, abhängig vom Kupplungsmodell m -fach nach der Zeit differenziert werden müssen. Das bedeutet aber, daß eine Simulation nur sinnvoll ist, wenn die Erregergrößen nicht verschwinden, und es gilt

$$\frac{d^m}{dt^m}M_{\text{an}}(t) \neq 0 \ , \ \frac{d^m}{dt^m}M_{\text{ab}}(t) \neq 0 \ . \quad (4.52)$$

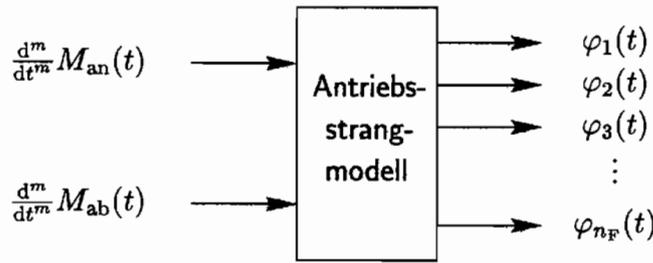


Abbildung 4.16: E/A-Konfiguration des Zustandsmodells des Antriebsstrangs

Das Zustandsmodell ist daher nur eingeschränkt verwendbar und kann z.B. für $m = 2$ mit den Erregerfunktionen

$$\begin{aligned} M_{an}(t) &= \text{const.}, \\ M_{ab}(t) &= a \cdot t \end{aligned}$$

nicht verwendet werden. Aus diesem Grund wird für die Zeitbereichssimulationen des Antriebsstrangs ein modifiziertes System 1. Ordnung verwendet. Die Systemmatrix \mathbf{A} des Zustandsmodells wird zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenformen des Antriebsstrangs herangezogen.

4.2.7 Das System 1. Ordnung zur Zeitsimulation

Die m -fache Nachdifferenzierung der Erregermomente in der Zustandsraumdarstellung ist auf die Verwendung der linearen Black-Box-Modelle der Kupplung zurückzuführen. In den Gleichungen der Kupplung treten Ableitungen von höherer Ordnung auf als in den Gleichungen der diskreten Massen der Wellenzüge. Benötigt werden daher die Ableitungen höherer Ordnung $q > 2$ nur für die Kupplungsgleichungen. Bei dem hier aufgestellten System zur Zeitsimulation werden diese Größen separat für die Kupplungsgleichungen berechnet. Dieses Modell hat systemtheoretisch betrachtet keine ausgezeichnete Form und wird nur als Werkzeug zur Simulation verwendet.

Es werden die Gleichungen des Differentialgleichungssystems des Antriebsstrangs einzeln in die explizite Form gebracht und anschließend als System 1. Ordnung formuliert. Für den Freiheitsgrad φ_j der Wellenzüge vor und hinter der Kupplung kann nach Gl.(4.37) die explizite Darstellung angegeben werden durch

$$\ddot{\varphi}_j = -\frac{1}{\theta_j} \begin{bmatrix} -\delta_{j-1} & \delta_{j-1} + \delta_j & -\delta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{j-1} \\ \dot{\varphi}_j \\ \dot{\varphi}_{j+1} \end{bmatrix} - \frac{1}{\theta_j} \begin{bmatrix} -k_{j-1} & k_{j-1} + k_j & -k_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{j-1} \\ \varphi_j \\ \varphi_{j+1} \end{bmatrix},$$

oder mit allgemeinen Koeffizienten a_{ij} und b_{ij}

$$\ddot{\varphi}_j = \begin{bmatrix} b_{j(j-1)} & b_{jj} & b_{j(j+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{j-1} \\ \dot{\varphi}_j \\ \dot{\varphi}_{j+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{j(j-1)} & a_{jj} & a_{j(j+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{j-1} \\ \varphi_j \\ \varphi_{j+1} \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Die in den Gleichungen enthaltenen Koeffizienten $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, \dots, \bar{\nu}_i$ und h_P^*, h_T^* sind in Anhang B angegeben. Im Gegensatz zu den Gleichungen der konventionellen Schwingerkette, dort sind nur benachbarte Freiheitsgrade miteinander gekoppelt, sind hier in jeder Gleichung der Kupplungslaufräder jeweils 4 Freiheitsgrade gekoppelt. In Matrixschreibweise notiert erhält man aus Gl.(4.61)

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}} \varphi_P = & \begin{bmatrix} \alpha_{m+1} & \beta_{m+1} & \gamma_{m+1} & \delta_{m+1} \end{bmatrix} \cdot \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \begin{bmatrix} \varphi_{P-1} \\ \varphi_P \\ \varphi_T \\ \varphi_{T+1} \end{bmatrix} \\ & + \dots + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{P-1} \\ \dot{\varphi}_P \\ \dot{\varphi}_T \\ \dot{\varphi}_{T+1} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{P-1} \\ \varphi_P \\ \varphi_T \\ \varphi_{T+1} \end{bmatrix} + h_P^* . \end{aligned} \quad (4.63)$$

Analog dazu kann aus Gl.(4.62) diese Form auch für das Turbinenrad angegeben werden. Damit können beide Kupplungsgleichungen gemeinsam in ein Subsystem 1. Ordnung überführt werden. Entsprechend ergibt sich der Subzustandsvektor der Kupplung

$$\mathbf{z}_K = \begin{bmatrix} \varphi_P & \dot{\varphi}_P & \ddot{\varphi}_P & \dots & \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \varphi_P \\ \varphi_T & \dot{\varphi}_T & \ddot{\varphi}_T & \dots & \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \varphi_T \end{bmatrix}^T , \quad (4.64)$$

mit der Dimension

$$\dim \mathbf{z}_K = 2(m+2) . \quad (4.65)$$

Die Subsystemmatrix der Kupplung hat dann die Form

$$\mathbf{A}_K = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & \\ \alpha_0 & \dots & \alpha_{m+1} & \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{m+1} & \gamma_0 & \dots & \gamma_{m+1} & \delta_0 & \dots & \delta_{m+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & & & \\ \eta_0 & \dots & \eta_{m+1} & \xi_0 & \xi_1 & \dots & \xi_{m+1} & \zeta_0 & \dots & \zeta_{m+1} & \nu_0 & \dots & \nu_{m+1} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

mit der Dimension

$$\dim \mathbf{A}_K = 2(m+2) \times 4(m+2) . \quad (4.67)$$

Vergleicht man den Zustandsvektor Gl.(4.55) der Subsysteme der konventionellen Elemente mit dem der Kupplung Gl.(4.64), ist eine Kopplung nach obigem Schema im Zustandsraum

nicht möglich. Es fehlen in den Subsystemen der der Kupplung benachbarten Freiheitsgrade die folgenden für die Kopplung nötigen Zustandsgrößen

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_{P-1}, \frac{d^3}{dt^3}\varphi_{P-1}, \dots, \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}\varphi_{P-1}, \\ \ddot{\varphi}_{T+1}, \frac{d^3}{dt^3}\varphi_{T+1}, \dots, \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}\varphi_{T+1}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

An dieser Stelle trifft man erneut auf das Problem der unterschiedlichen Ordnungen der gekoppelten Differentialgleichungen, vgl. Abschnitt 4.2.6. Diese Größen in Gl.(4.68) müssen für die Kopplung der Kupplungsgleichungen in den Zustandssystemen der unmittelbar benachbarten Freiheitsgrade der Kupplung als Zustandsgrößen existieren. Aufgrund der Ordnung $q = 2$ ihrer Differentialgleichung enthält der Zustandsvektor nur Größen bis zum Ableitungsgrad $q - 1 = 1$. Um die fehlenden Größen zu berechnen, müssen die vorhandenen Zustandsgrößen der Zustandsdarstellung der Freiheitsgrade $\dot{\varphi}_{P-1}$, $\dot{\varphi}_{T+1}$ direkt vor und nach der Kupplung m -fach differenziert werden. Damit kann der entsprechende Zustandsvektor um die für die Kopplung nötigen Größen ergänzt werden. Die auf diese Weise berechneten Zustandsgrößen werden deshalb zur Unterscheidung im folgenden als *ergänzte* Zustandsgrößen bezeichnet. Somit werden nur die Zustandsvektoren der Subsysteme der Nachbarfreiheitsgrade der Kupplung ergänzt zu

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{P-1} &= \left[\varphi_{P-1} \ \dot{\varphi}_{P-1} \ \frac{d}{dt}\dot{\varphi}_{P-1} \ \dots \ \frac{d^m}{dt^m}\dot{\varphi}_{P-1} \right]^T, \\ \mathbf{z}_{T+1} &= \left[\varphi_{T+1} \ \dot{\varphi}_{T+1} \ \frac{d}{dt}\dot{\varphi}_{T+1} \ \dots \ \frac{d^m}{dt^m}\dot{\varphi}_{T+1} \right]^T. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Damit verbunden ist die veränderte Gestalt der Subsystemmatrizen \mathbf{A}_{P-1} und \mathbf{A}_{T+1} . An den entsprechenden Stellen entstehen Nullspalten- und Nullzeilenvektoren, da die ergänzten Zustandsgrößen in der Differentialgleichung des Subsystems selbst nicht vorkommen

$$\mathbf{A}_{P-1} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{P-2,0} & a_{P-2,1} & a_{P-1,0} & a_{P-1,1} & \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{m\text{-mal}} & a_{P,0} & a_{P,1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & & & \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{cccc|cccc} \right\} m - \text{mal} \right. \quad (4.70)$$

$$\mathbf{A}_{T+1} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{T,0} & a_{T,1} & a_{T+1,0} & a_{T+1,1} & \underbrace{0 \ \dots \ 0}_{m\text{-mal}} & a_{T+2,0} & a_{T+2,1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & & & \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{cccc|cccc} \right\} m - \text{mal} \right. \quad (4.71)$$

Mit diesen Matrizen, (4.70) und (4.71), für die Nachbarfreiheitsgrade der Kupplung, den Matrizen für die Wellenzüge (4.56) und der Matrix für die Kupplung (4.66) kann eine gegenüber der üblichen Methode modifizierte Systemmatrix \mathbf{A}_{mod} für den Antriebsstrang aufgestellt werden. Die Besonderheit dieses Systems 1. Ordnung besteht darin, daß bestimmte

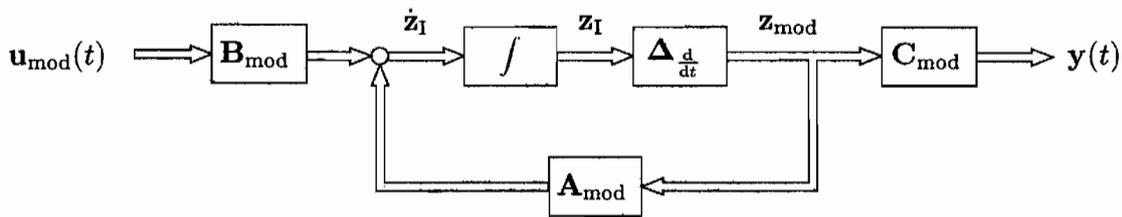


Abbildung 4.17: Blockschaltbild des Systems 1. Ordnung zur Zeitsimulation

Zustandsgrößen nicht durch Integration, sondern durch Differentiation berechnet werden. In der Systemmatrix \mathbf{A}_{mod} ergeben sich dadurch Nullspalten- und Nullzeilenvektoren für die ergänzten Zustandsgrößen. Formal werden daher die ergänzten Zustandsgrößen im Blockschaltbild der Zustandsraumdarstellung durch eine hier eingeführte Differentialoperationsmatrix $\Delta \frac{d}{dt}$ bestimmt. Damit ergibt sich für die modifizierte Zustandsraumdarstellung des Antriebsstrangs

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_I &= \mathbf{A}_{\text{mod}} \left(\Delta \frac{d}{dt} \cdot \mathbf{z}_I \right) + \mathbf{B}_{\text{mod}} \mathbf{u}_{\text{mod}} , \\ &= \mathbf{A}_{\text{mod}} \mathbf{z}_{\text{mod}} + \mathbf{B}_{\text{mod}} \mathbf{u}_{\text{mod}} , \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{\text{mod}} \mathbf{z}_{\text{mod}} . \end{aligned} \tag{4.72}$$

In Abbildung 4.17 ist das zugehörige Blockschaltbild wiedergegeben. Es ist zu erkennen, daß der Zustandsvektor \mathbf{z}_{mod} nach der Integration noch nicht vollständig ist, sondern anschließend die Differentialoperation durchlaufen muß. Es wird daher unterschieden zwischen den „Zuständen“ des Zustandsvektors \mathbf{z}_I und \mathbf{z}_{mod} . Der Vorteil dieser modifizierten Zustandsmethode liegt darin, daß für Simulationen im Zeitbereich die numerische Differenzierung von Zustandsgrößen an der Stelle durchgeführt werden kann, an der sie zwingend erforderlich ist: an der Koppelstelle des Kupplungsmodells mit seinen direkten Nachbar-elementen. Die Differenzierung der Erreger-elemente entfällt, Abbildung 4.18. Der Nachteil liegt in dem umständlich zu formulierenden Aufbau der Systemmatrix des Gesamtmodells.

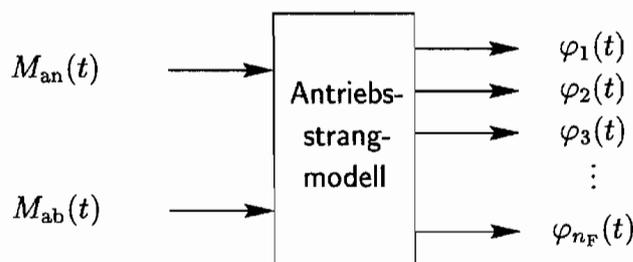


Abbildung 4.18: E/A-Konfiguration des Systems 1. Ordnung zur Zeitsimulation

Zur Veranschaulichung soll ein einfaches Beispiel, die Differentialgleichung des gedämpften Einmassenschwingers, herangezogen werden

$$m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + k \cdot y = x . \tag{4.73}$$

Hierfür kann die Zustandsdifferentialgleichung angegeben werden

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{B} \cdot x, \\ \dot{\mathbf{z}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot x.\end{aligned}\quad (4.74)$$

Der Zustandsvektor wird jetzt um die Größe \ddot{y} ergänzt. Zunächst wird die zu ergänzende Zustandsgröße mit Null belegt. Da die Größen y und \dot{y} aus der Zustandsdifferentialgleichung und damit durch Integration bestimmt werden können, wird dieser Vektor mit \mathbf{z}_1 bezeichnet. Über die Differentialoperationsmatrix $\Delta_{\frac{d}{dt}}$ kann der neue vollständige Zustandsvektor \mathbf{z}_{mod} bestimmt werden

$$\mathbf{z}_{\text{mod}} = \Delta_{\frac{d}{dt}} \cdot \mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \frac{d}{dt} \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}.\quad (4.75)$$

Damit ergibt sich für die modifizierte Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}_1 &= \mathbf{A}_{\text{mod}} \Delta_{\frac{d}{dt}} \cdot \mathbf{z}_1 + \mathbf{B}_{\text{mod}} \cdot x, \\ \dot{\mathbf{z}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{z}_{\text{mod}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x.\end{aligned}\quad (4.76)$$

Die entsprechende Zeile der Systemmatrix \mathbf{A}_{mod} für die ergänzte Zustandsgröße \ddot{y} ist eine Nullzeile, die bei der Integration ohne Wirkung ist.

4.3 Die Kopplung der nichtlinearen Black-Box-Modelle

Die diskreten nichtlinearen Modelle der Kupplung lassen für eine Kopplung nur die Möglichkeit, die kontinuierlichen Modelle der herkömmlichen Stranglelemente zu diskretisieren. Die prinzipielle Vorgehensweise der Kopplung im diskreten Zeitbereich ist in [7] bereits gezeigt worden. Es wird hier das diskrete Modell des Antriebsstrangs mit n_F Freiheitsgraden entwickelt, analog zu der Struktur des Antriebsstrangs, die bei den linearen Kupplungsmodellen behandelt worden ist. In Abbildung 4.19 ist die Vorzeichendefinition des nichtlinearen Kupplungsmodells wiedergegeben.

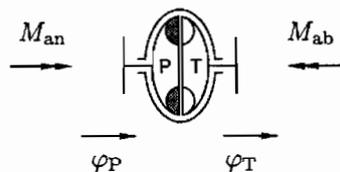


Abbildung 4.19: Vorzeichendefinition des nichtlinearen Kupplungsmodells

Für die Kopplung der Modelle der Wellenzüge und der hydrodynamischen Kupplung werden die Feder-Dämpfer-Masse-Systeme des Pumpen- und des Turbinenstrangs diskretisiert. Der

Antriebsstrang nach Abbildung 4.12 wird in Pumpenstrang, Kupplung und Turbinenstrang aufgeteilt. Für den Pumpenstrang ergibt sich dann das DGL-System

$$\mathbf{\Theta}_P \cdot \ddot{\boldsymbol{\phi}}_P + \mathbf{D}_P \cdot \dot{\boldsymbol{\phi}}_P + \mathbf{K}_P \cdot \boldsymbol{\phi}_P = \begin{bmatrix} M_{\text{an}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

$$\text{mit } \boldsymbol{\phi}_P = [\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{P-1}]^T .$$

Unter Verwendung des rückwärtigen Differenzenquotienten kann diese Beziehung für das diskrete Kupplungsmodell gültigen mit der Zeitschrittweite ΔT diskretisiert werden. Mit

$$\boldsymbol{\phi}(t) \rightarrow \boldsymbol{\phi}(k) , \quad (4.78)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) \rightarrow \frac{\boldsymbol{\phi}(k) - \boldsymbol{\phi}(k-1)}{\Delta T} , \quad (4.79)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}}(t) \rightarrow \frac{1}{\Delta T^2} (\boldsymbol{\phi}(k) - 2 \cdot \boldsymbol{\phi}(k-1) + \boldsymbol{\phi}(k-2)) \quad (4.80)$$

führt Gl.(4.77) auf das Differenzgleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{\Theta}_P \frac{1}{\Delta T^2} (\boldsymbol{\phi}_P(k) - 2\boldsymbol{\phi}_P(k-1) + \boldsymbol{\phi}_P(k-2)) + \\ \mathbf{D}_P \frac{1}{\Delta T} (\boldsymbol{\phi}_P(k) - \boldsymbol{\phi}_P(k-1)) + \mathbf{K}_P \boldsymbol{\phi}_P(k) = \end{aligned} \begin{bmatrix} M_{\text{an}}(k) \\ \vdots \\ k_{P-1} \varphi_P(k) + \delta_{P-1} \left(\frac{\varphi_P(k) - \varphi_P(k-1)}{\Delta T} \right) \end{bmatrix} . \quad (4.81)$$

Die Terme werden nach den Zeitverschiebungen sortiert

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{\Theta}_P \frac{1}{\Delta T^2} + \mathbf{D}_P \frac{1}{\Delta T} + \mathbf{K}_P \right] \cdot \boldsymbol{\phi}_P(k) \\ - \left[\mathbf{\Theta}_P \frac{2}{\Delta T^2} + \mathbf{D}_P \frac{1}{\Delta T} \right] \cdot \boldsymbol{\phi}_P(k-1) \\ + \mathbf{\Theta}_P \frac{2}{\Delta T^2} \cdot \boldsymbol{\phi}_P(k-2) = \end{aligned} \begin{bmatrix} M_{\text{an}}(k) \\ \vdots \\ \left(k_{P-1} + \frac{\delta_{P-1}}{\Delta T} \right) \varphi_P(k) - \frac{\delta_{P-1}}{\Delta T} \varphi_P(k-1) \end{bmatrix} . \quad (4.82)$$

In Matrixschreibweise formuliert ergibt sich

$$\mathbf{A}_{0,P} \boldsymbol{\phi}_P(k) + \mathbf{A}_{1,P} \boldsymbol{\phi}_P(k-1) + \mathbf{A}_{2,P} \boldsymbol{\phi}_P(k-2) = \mathbf{B}_{0,P} \mathbf{m}_P(k) + \mathbf{B}_{1,P} \mathbf{m}_P(k-1) . \quad (4.83)$$

Da der Freiheitsgrad φ_P eine unbekannte Größe des Gesamtmodells ist, kann die Gleichung des Pumpenstrangs auch wie folgt formuliert werden

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{0,P} \boldsymbol{\phi}_P(k) + \mathbf{A}_{1,P} \boldsymbol{\phi}_P(k-1) + \mathbf{A}_{2,P} \boldsymbol{\phi}_P(k-2) - \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(k_{P-1} + \frac{\delta_{P-1}}{\Delta T} \right) \varphi_P(k) - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\delta_{P-1}}{\Delta T} \varphi_P(k-1) = \end{aligned} \begin{bmatrix} M_{\text{an}}(k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} . \quad (4.84)$$

Analog dazu ergibt sich die Gleichung für den Turbinenstrang

$$\mathbf{A}_{0,T}\boldsymbol{\phi}_T(k) + \mathbf{A}_{1,T}\boldsymbol{\phi}_T(k-1) + \mathbf{A}_{2,T}\boldsymbol{\phi}_T(k-2) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \left(k_{T-1} + \frac{\delta_{T-1}}{\Delta T} \right) \boldsymbol{\phi}_T(k) - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\delta_{T-1}}{\Delta T} \boldsymbol{\phi}_T(k-1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ M_{ab}(k) \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

$$\text{mit } \boldsymbol{\phi}_T = [\varphi_{T+1} \ \varphi_{T+2} \ \dots \ \varphi_{n_F}]^T .$$

Als Kupplungsbeschreibung wird der in Abschnitt 4.1.2 vorgestellte Ansatz Gl.(4.8) mit dem Grad der Nichtlinearität $\eta = 3$ verwendet. Die in den Kupplungsgleichungen verwendeten Drehzahlen $n_P(k)$ und $n_T(k)$ müssen aus den entsprechenden Winkelverdrehungen der Kupplungsfreiheitsgrade berechnet werden. Mit

$$V_n = \frac{30}{\pi \Delta T} \quad (4.86)$$

ergeben sich die diskreten Drehzahlen zu

$$\begin{aligned} n_P(k) &= V_n \cdot (\varphi_P(k) - \varphi_P(k-1)) , \\ n_T(k) &= V_n \cdot (\varphi_T(k) - \varphi_T(k-1)) . \end{aligned} \quad (4.87)$$

Damit können die Kupplungsgleichungen auch mit den aktuellen Verdrehungen $\varphi_P(k)$ und $\varphi_T(k)$ von Pumpen- und Turbinenrad ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} M_P(k) &= M_P^* + V_n^1 b_{0,1} \cdot (\varphi_P(k) - \varphi_P(k-1)) + \sum_{i=1}^{p_{11}} b_{i,1} n_P(k-i) \\ &+ V_n^1 b_{0,2} \cdot (\varphi_T(k) - \varphi_T(k-1)) + \sum_{i=1}^{p_{12}} b_{i,2} n_T(k-i) \\ &+ \sum_{i=1}^{q_{11}} a_{i,1}^1 M_P(k-i) + \dots \text{ (nichtlineare Terme) ,} \\ M_T(k) &= M_T^* + V_n^2 b_{0,1} \cdot (\varphi_P(k) - \varphi_P(k-1)) + \sum_{i=1}^{p_{11}} b_{i,1} n_P(k-i) \\ &+ V_n^2 b_{0,1} \cdot (\varphi_T(k) - \varphi_T(k-1)) + \sum_{i=1}^{p_{12}} b_{i,2} n_T(k-i) \\ &+ \sum_{i=1}^{q_{12}} a_{i,1}^2 M_T(k-i) + \dots \text{ (nichtlineare Terme) .} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Die Momente $M_P(k)$ und $M_T(k)$ werden aus den Gleichgewichtsbedingungen, s. Abbildung 4.20, am Kupplungsmodell im Antriebsstrang bestimmt

$$\begin{aligned} M_P &= -\theta_P^+ \ddot{\varphi}_P + k_{P-1}(\varphi_{P-1} - \varphi_P) + \delta_{P-1}(\dot{\varphi}_{P-1} - \dot{\varphi}_P) , \\ M_T &= \theta_T^+ \ddot{\varphi}_T + k_T(\varphi_{T+1} - \varphi_T) + \delta_{T+1}(\dot{\varphi}_{T+1} - \dot{\varphi}_T) . \end{aligned} \quad (4.89)$$

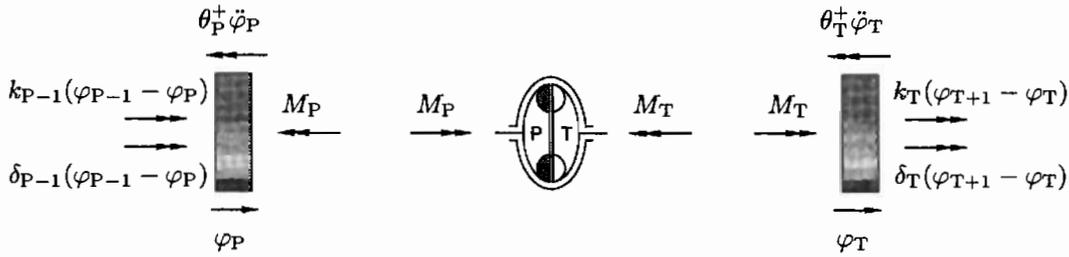


Abbildung 4.20: Die Schnittgrößen am nichtlinearen Kupplungsmodell im Antriebsstrang

Nach Diskretisierung erhält man für die Kupplungsmomente die nachfolgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 M_P(k) &= \left(k_{P-1} + \frac{\delta_{P-1}}{\Delta T} \right) \varphi_{P-1}(k) - \frac{\delta_{P-1}}{\Delta T} \varphi_{P-1}(k-1) \\
 &\quad - \left(k_{P-1} + \frac{\delta_{P-1}}{\Delta T} + \frac{\theta_P^+}{\Delta T^2} \right) \varphi_P(k) + \left(\frac{\delta_{P-1}}{\Delta T} + \frac{2\theta_P^+}{\Delta T^2} \right) \varphi_P(k-1) - \frac{2\theta_P^+}{\Delta T^2} \varphi_P(k-2) , \\
 M_T(k) &= \left(k_T + \frac{\delta_T}{\Delta T} + \frac{\theta_T^+}{\Delta T^2} \right) \varphi_T(k) + \left(\frac{\delta_T}{\Delta T} + \frac{2\theta_T^+}{\Delta T^2} \right) \varphi_T(k-1) + \frac{2\theta_T^+}{\Delta T^2} \varphi_T(k-2) \\
 &\quad - \left(k_T + \frac{\delta_T}{\Delta T} \right) \varphi_{T+1}(k) + \frac{\delta_T}{\Delta T} \varphi_{T+1}(k-1) .
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

Die Koeffizienten der einzelnen Terme werden zusammengefaßt. Man erhält danach für die Kupplungsmomente

$$\begin{aligned}
 M_P(k) &= a_{P1} \varphi_{P-1}(k) + a_{P2} \varphi_P(k) + a_{P3} \varphi_{P-1}(k-1) + a_{P4} \varphi_P(k-1) + a_{P5} \varphi_P(k-2) , \\
 M_T(k) &= a_{T1} \varphi_T(k) + a_{T2} \varphi_{T+1}(k) + a_{T3} \varphi_T(k-1) + a_{T4} \varphi_{T+1}(k-1) + a_{T5} \varphi_T(k-2)
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

mit den nachstehenden Koeffizienten a_{Pi} und a_{Ti} .

$$\begin{aligned}
 a_{P1} &= k_{P-1} + \frac{\delta_{P-1}}{\Delta T} & a_{T1} &= - \left(k_T + \frac{\delta_T}{\Delta T} + \frac{\theta_T^+}{\Delta T^2} \right) \\
 a_{P2} &= - \left(k_{P-1} + \frac{\delta_{P-1}}{\Delta T} + \frac{\theta_P^+}{\Delta T^2} \right) & a_{T2} &= - \left(k_T + \frac{\delta_T}{\Delta T} \right) \\
 a_{P3} &= - \frac{\delta_{P-1}}{\Delta T} & a_{T3} &= - \left(\frac{\delta_T}{\Delta T} + \frac{2\theta_T^+}{\Delta T^2} \right) \\
 a_{P4} &= - \left(\frac{\delta_{P-1}}{\Delta T} + \frac{2\theta_P^+}{\Delta T^2} \right) & a_{T4} &= - \frac{\delta_{P-1}}{\Delta T} \\
 a_{P5} &= - \frac{\theta_P^+}{\Delta T^2} & a_{T5} &= \frac{\theta_T^+}{\Delta T^2}
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

Setzt man anschließend die Momente Gl.(4.91) in das Kupplungsmodell Gl.(4.88) ein, so kann zusammen mit den Beziehungen für die Wellenzüge Gl.(4.84) und Gl.(4.85) das Differenzgleichungssystem für den gesamten Antriebsstrang aufgestellt werden. Mit dem diskreten Zustandsvektor

$$\mathbf{z}(k) = [\phi_P^T(k) \varphi_P(k) \varphi_T(k) \phi_T^T(k)]^T \tag{4.93}$$

besitzt das diskrete Gesamtmodell die Form

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{z}(k) + \mathbf{A}_1 \mathbf{z}(k-1) + \mathbf{A}_2 \mathbf{z}(k-2) + \mathbf{g}(k) = \mathbf{0} . \quad (4.94)$$

Die darin enthaltenen Matrizen sowie der Vektor \mathbf{g} sind wie folgt aufgebaut

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,P} & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-a_{P1}) & \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}^\top \cdot (-a_{P1}) & V_n \cdot {}^1b_{0,1} - a_{P2} & V_n \cdot {}^1b_{0,2} \\ & V_n \cdot {}^2b_{0,1} & V_n \cdot {}^2b_{0,2} - a_{T1} \\ & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^\top \cdot (-a_{T2}) \\ & & \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot a_{T2} & \mathbf{A}_{0,T} \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,P} & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-a_{P3}) & \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}^\top \cdot (-a_{P3}) & -(V_n \cdot {}^1b_{0,1} + a_{P4}) & -V_n \cdot {}^1b_{0,2} \\ & -V_n \cdot {}^2b_{0,1} & -(V_n \cdot {}^2b_{0,2} + a_{T3}) \\ & \mathbf{0} & \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}^\top \cdot (-a_{T4}) \\ & & \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \cdot a_{T4} & \mathbf{A}_{1,T} \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2,P} & \mathbf{0} \\ -a_{P5} & 0 \\ 0 & -a_{T5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{2,T} \end{bmatrix} ,$$

$$\mathbf{g}(k) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -M_{\text{an}}(k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ M_{\text{P}}^* + \sum_{i=1}^{p_{11}} b_{i,1} n_{\text{P}}(k-i) + \sum_{i=1}^{p_{12}} b_{i,2} n_{\text{T}}(k-i) + \sum_{i=1}^{q_{11}} a_{i,1} M_{\text{P}}(k-i) + \dots \\ M_{\text{T}}^* + \sum_{i=1}^{p_{11}} b_{i,1} n_{\text{P}}(k-i) + \sum_{i=1}^{p_{12}} b_{i,2} n_{\text{T}}(k-i) + \sum_{i=1}^{q_{11}} a_{i,1} M_{\text{T}}(k-i) + \dots \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -M_{\text{ab}}(k) \end{bmatrix} \end{bmatrix} .$$

Der Vektor $\mathbf{g}(k)$ enthält die Erregungen und die Modellterme der Kupplung, die in \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 nicht enthalten sind. Das Differenzgleichungssystem Gl.(4.94) wird so umgeformt, daß der Zustandsvektor $\mathbf{z}(k)$ ausschließlich aus zurückliegenden Werten berechnet werden kann

$$\mathbf{z}(k) = -\mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_1 \mathbf{z}(k-1) - \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{z}(k-2) - \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{g}(k) ,$$

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{A}'_1 \mathbf{z}(k-1) - \mathbf{A}'_2 \mathbf{z}(k-2) - \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{g}(k) . \quad (4.95)$$

Diese Darstellung ist die Zustandsdifferenzgleichung des Antriebsstrangs mit dem nichtlinearen Modell für die hydrodynamische Kupplung. Diese Formulierung wird später für die Simulationsrechnungen verwendet.

Kapitel 5

Eigenwertanalyse der linearen Antriebsstrangmodelle

Für eine in schwingungstechnischer Hinsicht sichere Auslegung von Antrieben ist die Kenntnis des dynamischen Verhaltens eines Antriebssystems unumgänglich. Die hierfür wichtigen Eigenschaften des Antriebsstrangs können durch dynamische Kennwerte, wie z.B. Eigenfrequenzen und Dämpfungen, charakterisiert werden. Das Ziel ist daher, die Eigenfrequenzen und ihre zugehörigen Dämpfungen für den Antriebsstrang mit den linearen Black-Box-Modellen der hydrodynamischen Kupplung zu berechnen.

Da die hydrodynamische Kupplung ein nichtlineares System darstellt, hat ein lineares Kupplungsmodell nur einen beschränkten Gültigkeitsbereich. Das Verhalten über einen großen Betriebsbereich kann dementsprechend mit mehreren Modellen abgebildet werden, wie dies durch die Methode der linearen Teilmodelle geschehen ist [12]. Ein Vorteil der linearen Modelle liegt darin, daß sich mit ihnen lineare Antriebsstrangmodelle aufstellen lassen, mit denen eine Eigenwert- und Eigenformanalyse durchgeführt werden kann. Jedoch ist der Gültigkeitsbereich der linearen Antriebsstrangmodelle durch die Modelle der Kupplung ebenfalls beschränkt.

Aus diesem Grund werden in diesem Kapitel zunächst die grundlegenden Eigenschaften der linearen Antriebsstrangmodelle zur Eigenwertanalyse untersucht. Es soll geklärt werden, welche Auswirkungen die Verwendung der linearen Black-Box-Modelle der hydrodynamischen Kupplung auf die Eigenwerte und damit auf die Eigenfrequenzen und Eigenformen des Gesamtmodells des Antriebsstrangsystems besitzt. Die aus der Eigenwertanalyse gewonnenen Ergebnisse werden anschließend interpretiert und diskutiert.

Das Antriebsstrangverhalten kann für verschiedene Betriebsbereiche entsprechend der Modelle der hydrodynamischen Kupplung charakterisiert werden. Bevor der direkte Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen am Versuchsantriebsstrang vorgenommen wird, erfolgt hier die theoretische Betrachtung der Eigenschaften der Antriebsstrangmodelle. Es wird hierbei untersucht, in welcher Art und Weise die Eigenwerte und Eigenformen des Modells von

den folgenden Einflußfaktoren abhängen:

- Gültigkeitsbereich des Kupplungsmodells
- Ansatzgrad des Kupplungsmodells
- Strukturparameter des Antriebsstrangs

Mit dem linearen Zustandsraummodell des Antriebsstrangs wird die Analyse der Eigenfrequenzen und der Eigenformen des Modellsystems durchgeführt. Dazu werden die Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix des Zustandsraummodells nach Gl.(4.51) berechnet. Es ergibt sich das spezielle Eigenwertproblem

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{z} = \mathbf{0} . \quad (5.1)$$

Durch die numerische Lösung der Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (5.2)$$

werden die komplexwertigen Eigenwerte

$$\lambda_k = \lambda_{\text{re}_k} + j\lambda_{\text{im}_k} \quad (5.3)$$

des Systems bestimmt. Mit den Eigenwerten ergeben sich die komplexen Eigenvektoren \mathbf{z}_k des Zustandsraummodells nach

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}) \mathbf{z}_k = \mathbf{0} . \quad (5.4)$$

Die komplexen Eigenvektoren ϕ_k des Differentialgleichungssystems für den Antriebsstrang Gl.(4.42) erhält man über die Ausgangsgleichung des Zustandsraummodells in Gl.(4.51)

$$\phi_k = \mathbf{C} \mathbf{z}_k = [\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \dots \ \mathbf{0}]^T \mathbf{z}_k . \quad (5.5)$$

5.1 Die Gültigkeitsbereiche der Modelle

Bei den Untersuchungen der linearen Antriebsstrangmodelle werden die linearen Kupplungsmodelle verwendet, die für die unterschiedlichen Betriebspunkte der hydrodynamischen Kupplung erstellt worden sind (Methode der linearen Teilmodelle [12]). Der Gültigkeitsbereich von Kupplungs- und Antriebsstrangmodell ist somit identisch. Zur Untersuchung der Abhängigkeit des dynamischen Verhaltens des Antriebsstrangs von der Absolutdrehzahl n_p des Pumpenrades der Kupplung wurden auch Kupplungsmodelle für unterschiedliche Pumpendrehzahlen identifiziert. Insgesamt liegen für die drei mittleren Pumpendrehzahlen $n_p = 500, 700$ und 900 min^{-1} jeweils 8 Modelle mit einem Schlupf von $s = 5, 8, 10, 12, 15, 20, 25$ und 30% vor. Um die einzelnen Modelle für die drei verschiedenen Pumpendrehzahlen voneinander zu unterscheiden, werden im folgenden die 8 Modelle einer gemeinsamen Pumpendrehzahl als *Modellreihe* bezeichnet. Die einzelnen Modelle werden durch 3

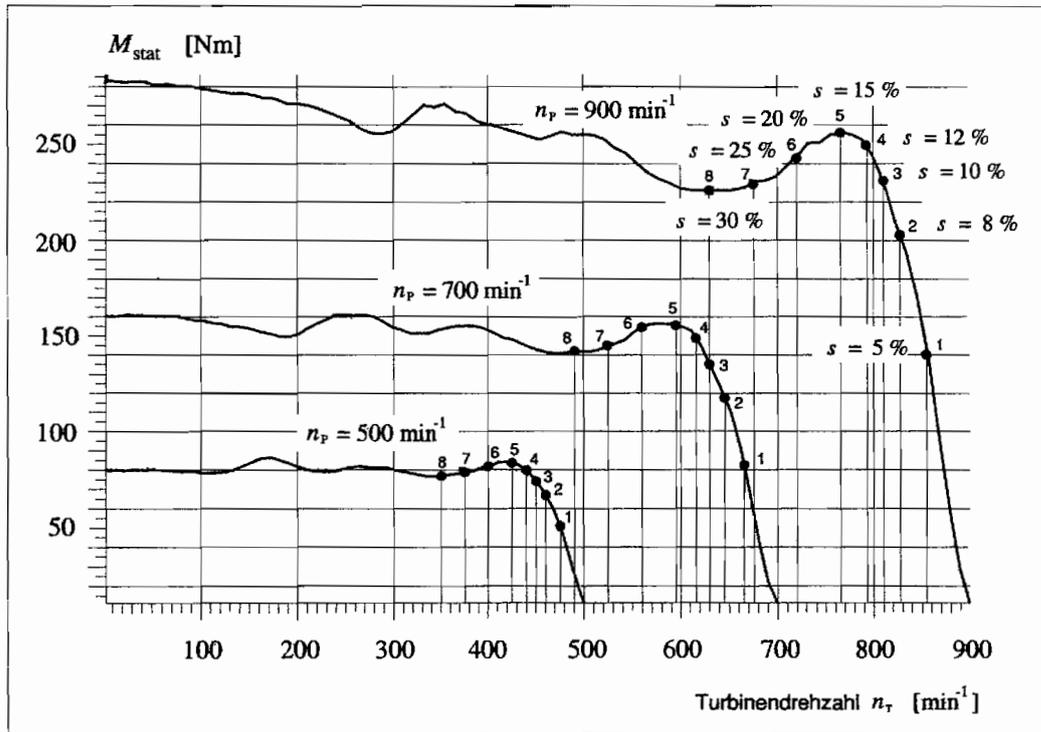


Abbildung 5.1: Stationäre Kennlinien der hydrodynamischen Kupplung für die Pumpendrehzahlen $n_p = 500, 700$ und 900 min^{-1} , \bullet : Stationärer Betriebspunkt der Kupplungsmodelle

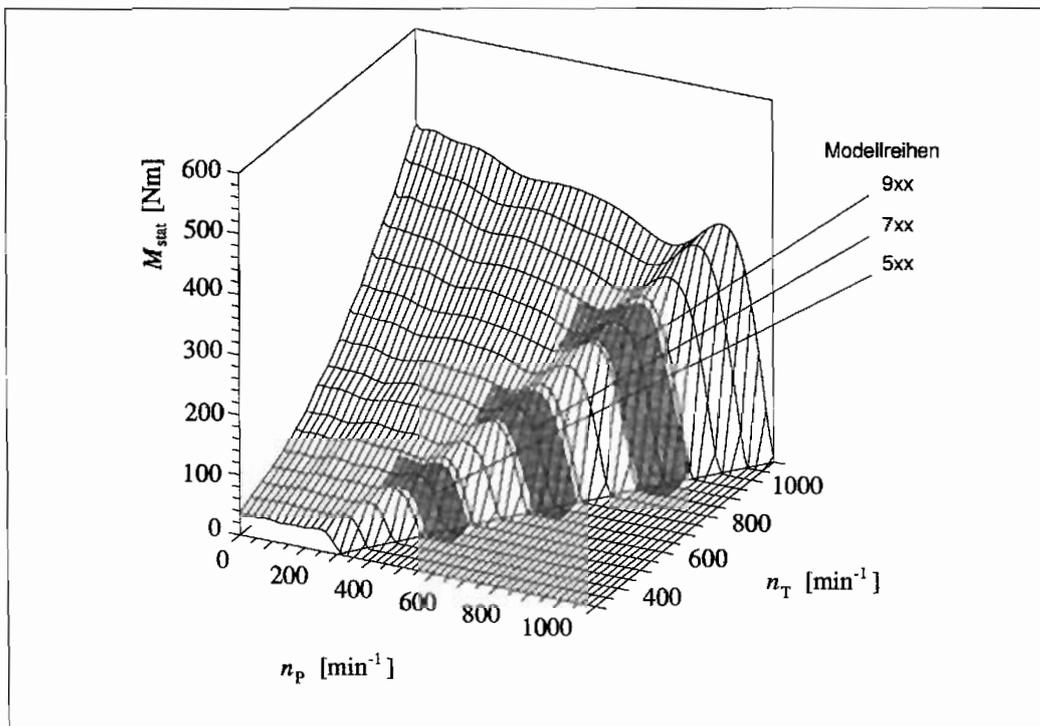


Abbildung 5.2: Stationäres Kennfeld der hydrodynamischen Kupplung, Gültigkeitsbereiche der Modellreihen

Modellreihe 9xx:

Pumpendrehzahl n_P : 900 min^{-1}
 Vermessener Frequenzbereich: $0,5 - 12,0 \text{ Hz}$ mit $0,5 \text{ Hz}$ Schrittweite
 Mittlere Betriebstemperatur: 60° C

| Teilmodellnr.: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Modellbezeichnung : | 905 | 908 | 910 | 912 | 915 | 920 | 925 | 930 |
| Schlupf s in % | 5 | 8 | 10 | 12 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| Zähleransatzgrad n | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Nenneransatzgrad m | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

In Abbildung 5.1 sind die jeweiligen stationären Kennlinien mit den stationären Betriebspunkten der Kupplungsmodelle gekennzeichnet. In Abbildung 5.2 sind die Gültigkeitsbereiche der drei Modellreihen im stationären Kennfeld der Kupplung schattiert unterlegt.

5.2 Eigenwerte und Eigenformen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Eigenwertanalyse des Antriebsstrangmodells für ein ausgewähltes Beispiel vorgestellt. Die Betrachtungen werden an einem System mit $n_F = 4$ Freiheitsgraden nach Abbildung 5.3 durchgeführt.

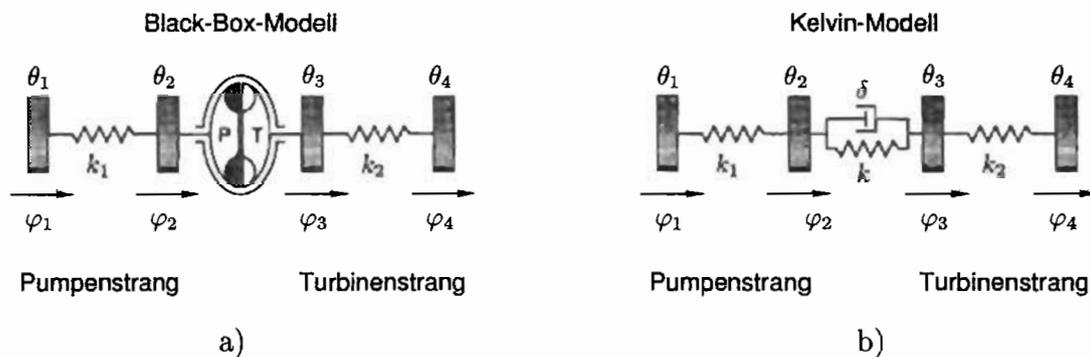


Abbildung 5.3: Antriebsstrang mit 4 Freiheitsgraden a) mit Black-Box-Modell b) mit KELVIN-Modell

Um eine Interpretation aller Eigenfrequenzen und Eigenformen zu ermöglichen, wird der qualitative Vergleich zu einer konventionellen Schwingerkette (Feder-Dämpfer-Masse-System) mit 4 Freiheitsgraden angestellt, bei dem die Kupplung durch das KELVIN-Modell abgebildet wird, Abbildung 5.3 b). Das konventionelle System läßt sich durch das homogene DGL-System mit der Ordnung $q = 2$ beschreiben

$$\Theta \ddot{\phi}(t) + \mathbf{D} \dot{\phi}(t) + \mathbf{K} \phi(t) = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

$$\text{mit } \phi = [\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4]^T. \quad (5.9)$$

Für dieses System ergeben sich genau $n_F \cdot q = 8$ Eigenwerte bzw. 4 konjugiert komplexe Eigenwertpaare. Das bedeutet, daß das konventionelle System genau 4 Eigenfrequenzen und damit 4 Eigenformen besitzt. Die Anzahl der auftretenden Eigenformen ist hier gleich der Anzahl der Freiheitsgrade.

Für die theoretische Untersuchung des Antriebsstrangs mit dem Black-Box-Modell werden die Modellparameter unter Berücksichtigung der Trägheiten, die in den Kupplungsmodellen aus der Identifikation implizit enthalten sind, s. Abschnitt 4.2.2,

$$\begin{aligned}\theta_{\text{mod,P}} &= 1.033 \text{ kg m}^2, \\ \theta_{\text{mod,T}} &= 0.290 \text{ kg m}^2\end{aligned}$$

nach den in Tabelle 5.1 angegebenen Werten gewählt. Für die Massenträgheiten an den Kupplungslaufrädern gilt

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \theta_{\text{mod,P}} + \theta_P^+, \\ \theta_3 &= \theta_{\text{mod,T}} + \theta_T^+.\end{aligned}$$

Zum Vergleich mit den Eigenfrequenzen des gesamten Antriebsstrangsmodells werden die Eigenfrequenzen von Pumpen- und Turbinenstrang ohne hydrodynamische Kopplung, d.h. mit entleerter Kupplung, angegeben. Für die beiden Zweimassenschwingersysteme ergibt sich in diesem Fall

$$\begin{aligned}\text{Pumpenstrang: } f_{0_P} &= 5.49 \text{ Hz}, \\ \text{Turbinstrang: } f_{0_T} &= 7.03 \text{ Hz}.\end{aligned}\tag{5.10}$$

Als Kupplungsmodell wird das in Abschnitt 5.1 vorgestellte Modell der Reihe 5xx mit einem Schlupf von $s = 30\%$ verwendet. Da dieses Kupplungsmodell den Ansatzgrad $m = 2$ besitzt, gilt für die Ordnung q des Differentialgleichungssystems des Antriebsstrangs nach Gl.(4.42)

$$q = m + 2 = 4.$$

Da der Antriebsstrang aus $n_F = 4$ Freiheitsgraden besteht, ergibt sich entsprechend Gl.(3.35) die Anzahl der Eigenwerte zu

$$n_{\lambda^+} = q \cdot n_F = 16.$$

| | | | |
|--------------|---|-------|-------------------|
| θ_P^+ | = | 1.0 | kg m ² |
| θ_T^+ | = | 0.6 | kg m ² |
| θ_1 | = | 2 | kg m ² |
| θ_2 | = | 2.033 | kg m ² |
| θ_3 | = | 0.890 | kg m ² |
| θ_4 | = | 2 | kg m ² |
| k_1 | = | 1200 | Nm/rad |
| k_2 | = | 1200 | Nm/rad |

Tabelle 5.1: Modellparameter für den Antriebsstrang mit dem linearen Black-Box-Modell der hydrodynamischen Kupplung nach Abbildung 5.3 a)

Man erhält für das hier betrachtete Eigenwertproblem 8 konjugiert komplexe Lösungspaare. Aus dem Imaginärteil des k -ten Eigenwertes

$$\lambda_k = \lambda_{\text{re}_k} + j \lambda_{\text{im}_k}$$

wird die jeweilige Eigenfrequenz entsprechend

$$f_{0_k} = \frac{1}{2\pi} \lambda_{\text{im}_k}$$

berechnet.

4 der 8 Lösungspaare besitzen einen verschwindenden Imaginärteil und damit die Eigenfrequenz $f_0 = 0$ Hz. Nach den Ausführungen in Abschnitt 3.3.4 ergeben sich als Folge der Zustandsraumtransformation zwei verschwindende Eigenwertpaare aus der m -fachen Nachdifferenzierung ($m = 2$) der Gleichungen der Freiheitsgrade 1 und 4 des DGL-Systems nach Gl.(4.42). Diese Lösungen stehen in keinem Zusammenhang zu den Eigenschaften des Antriebsstrangs und sind daher für die weiteren Betrachtungen irrelevant.

Daraus ergibt sich, daß der Antriebsstrang mit dem linearen Black-Box-Modell (Ansatzgrade $n = 3$, $m = 2$) der Kupplung genau 6 Eigenfrequenzen aufweist, also 2 mehr als das konventionelle System. Dabei können zwei Eigenwertpaare mit den Eigenfrequenzen $f_0 = 0$ Hz den beiden möglichen Starrkörperrotationen des Systems zugeordnet werden. Neben der schwingungsfreien Rotation aller Freiheitsgrade in Phase ist auch eine unabhängige Rotation von Pumpen- und Turbinenstrang möglich. Da für $\omega = 0 \text{ s}^{-1}$ der Imaginärteil der dynamischen Dämpfungsmatrix der Kupplung verschwindet, s. Abbildung 4.5, vereinfacht sich das Kupplungsmodell näherungsweise zu

$$\mathbf{D}(j\omega)|_{\omega=0} = \begin{bmatrix} b_{11_0} & b_{12_0} \\ b_{21_0} & b_{22_0} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \delta_0 & -\delta_0 \\ -\delta_0 & \delta_0 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

so daß in diesem Fall sich für den Antriebsstrang das mechanische Ersatzmodell nach Abbildung 5.4 ergibt.

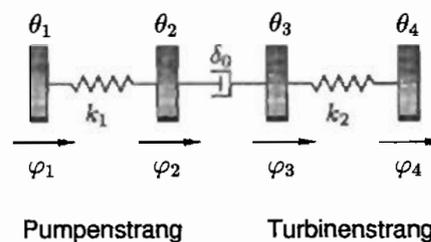


Abbildung 5.4: Mechanisches Ersatzmodell des Antriebsstrangs für $\omega = 0 \text{ s}^{-1}$

Die übrigen 4 Eigenwerte, deren Eigenfrequenzen f_{0_k} von null verschieden sind, sind in Tabelle 5.2 nach ihrer Größe absteigend sortiert angegeben. Die höchste Eigenfrequenz ist der laufenden Nummer $k = 1$ zugeordnet. Neben den Eigenfrequenzen des Modells sind die zugehörigen Realteile λ_{re_k} aufgeführt, die ein Maß für die Dämpfung der jeweiligen Eigenschwingung sind und der Abklingkonstante δ der gedämpften, freien Schwingung entsprechen. Die 4 Eigenfrequenzen des Modells in Tabelle 5.2 sollen im folgenden durch die zugehörigen Eigenformen physikalisch interpretiert werden. Da Turbinen- und Pumpenstrang ohne

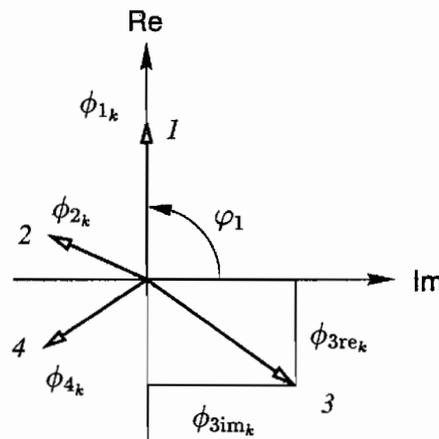
| Nr. k | Eigenfrequenzen f_{0k} [Hz] | Realteile λ_{re_k} [s ⁻¹] |
|------------|----------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1 | 6.935 | -.974 |
| 2 | 5.558 | -.312 |
| 3 | 2.541 | -18.754 |
| 4 | 1.985 | -19.989 |

Tabelle 5.2: Eigenwerte $k = 1, \dots, 4$ des Modells Reihe 5xx, $s = 30\%$

Dämpfung modelliert worden sind, besitzen die Eigenvektoren allein aufgrund der Eigenschaften des Kupplungsmodells neben dem Realteil auch einen Imaginärteil

$$\begin{aligned} \phi_k &= \phi_{re_k} + j \phi_{im_k}, \\ \phi_k &= \begin{bmatrix} \phi_{1k} \\ \phi_{2k} \\ \phi_{3k} \\ \phi_{4k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1re_k} \\ \phi_{2re_k} \\ \phi_{3re_k} \\ \phi_{4re_k} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \phi_{1im_k} \\ \phi_{2im_k} \\ \phi_{3im_k} \\ \phi_{4im_k} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die komplexen Elemente (Zeiger) ϕ_{jk} der einzelnen Freiheitsgrade $j = 1, \dots, 4$, der Eigenvektoren ϕ_k stehen jeweils in einer festen Winkelbeziehung zueinander. Die relative Lage der Zeiger wird für jede Eigenform in der komplexen Ebene dargestellt, s. Abbildung 5.5. Bezug ist jeweils der Zeiger des ersten Freiheitsgrades ϕ_{1k} , dessen Phasenwinkel für jede Eigenform auf $\varphi_1 = 90^\circ$, d.h. senkrecht zur Imaginärachse, festgelegt wird. Die Elemente ϕ_{jk} werden auf das jeweils größte Element des Eigenvektors normiert. In der Darstellung der Elemente ϕ_{jk} über den Freiheitsgrad j werden die jeweiligen Realanteile aufgetragen.

Abbildung 5.5: Die Elemente des Eigenvektors ϕ_k für $k = 1, \dots, 4$ in der komplexen Ebene

Für das hier betrachtete Beispiel können die Eigenfrequenzen f_{01} und f_{02} , auch ohne eine Betrachtung der Eigenformen, von ihrem Betrag her eindeutig den Resonanzschwingungen des Turbinen- und des Pumpenstrangs zugeordnet werden

$$\begin{aligned} f_{01} &\approx f_{0T}, \\ f_{02} &\approx f_{0P}. \end{aligned}$$

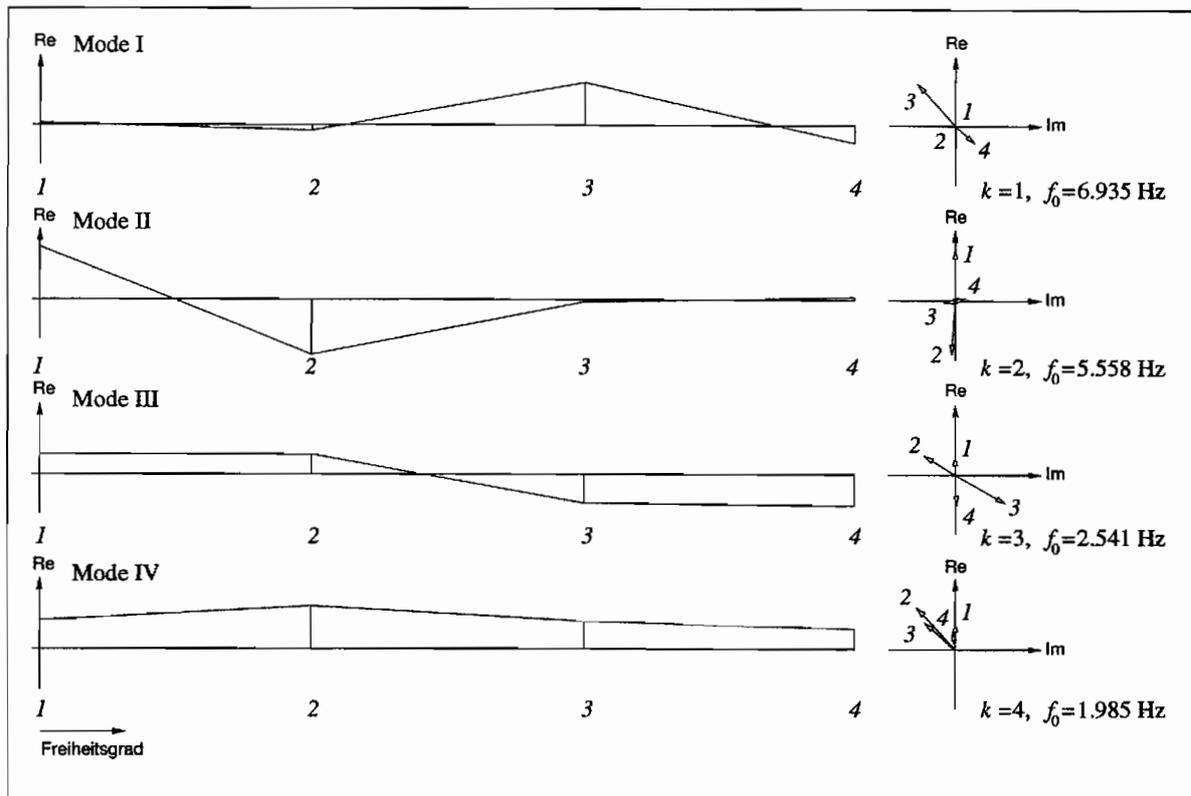


Abbildung 5.6: Eigenformen $k = 1, \dots, 4$ des Antriebsstrangmodells für die Pumpendrehzahl $n_P = 500 \text{ min}^{-1}$ und den Schlupf $s = 30 \%$

In Abbildung 5.6 sind die Eigenformen für die Eigenfrequenzen f_{01} bis f_{04} dargestellt. Es werden die Eigenformen ihrem Mode nach durch die römischen Ziffern I, II, III und IV bezeichnet. Mode I entspricht der Eigenschwingung des Turbinenstrangs, Mode II der des Pumpenstrangs.

Eine physikalisch sinnvolle Interpretation kann für ein mechanisches System mit 4 Freiheitsgraden nur für 4 Eigenformen bzw. Eigenfrequenzen angegeben werden. Diese sind hier die zwei Starrkörperrotationen sowie Mode I und Mode II. Die bei dem Antriebsstrangmodell auftretenden Eigenformen Mode III und Mode IV sind auf die Verwendung des linearen Black-Box-Modells für die hydrodynamische Kupplung zurückzuführen. Sie haben für das reale Antriebsstrangverhalten keine Bedeutung. Das Auftreten dieser Moden hängt von den Ansatzgraden n und m des Zähler- und Nennerpolynoms des Kupplungsmodells ab. Hierauf wird in einem der folgenden Abschnitte noch näher eingegangen.

Um aus der Eigenwertanalyse des Antriebsstrangmodells die auf das reale System übertragbaren Ergebnisse zu ermitteln, muß ein eindeutiges Kriterium für die Trennung der relevanten von den irrelevanten Moden gefunden werden. Es kann nicht davon ausgegangen werden, daß sich die relevanten Moden immer eindeutig aus der Betrachtung der Eigenformen bestimmen lassen. Ein erkennbarer Zusammenhang besteht zwischen dem linearen Kupplungsmodell und dem Eigenwert des Mode IV. Hierzu werden die Nullstellen des Nennerpolynoms der dynamischen Dämpfungsmatrix berechnet

$$d_{ij}(j\omega) = \frac{Z_{ij_n}(j\omega)}{N_m(j\omega)} = \frac{b_{ij_0} + b_{ij_1}j\omega + \dots + b_{ij_n}j\omega^n}{1 + a_1j\omega + \dots + a_mj\omega^m}$$

Mit dem Ansatzgrad $m = 2$ für das Nennerpolynom des hier verwendeten Kupplungsmodells 530 ergibt sich eine konjugiert komplexe Nullstelle

$$\begin{aligned} N_2(s_0) &= 1 + a_1 s_0 + a_2 s_0^2 = 0, \\ \implies s_0 &= s_{\text{re}0} + j s_{\text{im}0}, \\ s_0 &= -20.54 \pm j 2\pi \cdot 1.88 \text{ [s}^{-1}\text{]}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Diese Nullstelle entspricht dem 4. Eigenwert des Antriebsstrangmodells in Tabelle 5.2

$$s_0 \approx \lambda_4 = \lambda_{\text{re}4} + j 2\pi f_{04}. \quad (5.14)$$

Das bedeutet, daß Mode IV nur durch das Nennerpolynom des Kupplungsmodells bestimmt ist und unabhängig von den Parametern und der Struktur des Antriebsstrangs ist.

5.3 Der Einfluß des Modellgültigkeitsbereiches

Um die Abhängigkeit der Eigenwerte und Eigenformen des Antriebsstrangmodells von den verschiedenen Gültigkeitsbereichen näher zu untersuchen, werden die Eigenwerte, d.h. die Eigenfrequenzen und die zugehörigen Realteile der einzelnen Antriebsstrangmodelle, für unterschiedlichen Schlupf der Kupplung miteinander verglichen. Als Beispiel wird wieder der im vorigen Abschnitt vorgestellte Antriebsstrang nach Abbildung 5.3 mit den Modellparametern nach Tabelle 5.1 betrachtet.

In Tabelle 5.3 sind die Eigenwerte der verschiedenen Antriebsstrangmodelle für die drei Modellreihen 5xx, 7xx und 9xx aufgeführt. Für jeweils eine konstante Pumpendrehzahl sind in der entsprechenden Tabelle die Ergebnisse für die acht Modelle mit unterschiedlichem Schlupf s nebeneinander dargestellt. Die Eigenfrequenzen sind nach ihrer Größe für jedes Modell absteigend sortiert. Die höchste Eigenfrequenz ist jeweils der laufenden Nummer $k = 1$ zugeordnet. In den Tabellen sind für eine Beurteilung des Dämpfungsverhaltens die zu den Eigenfrequenzen gehörenden Realteile in derselben Reihenfolge darunter angegeben.

Um den Verlauf der verschiedenen Eigenfrequenzen f_{0k} und Realteile $\lambda_{\text{re}k}$ in Abhängigkeit vom Schlupfbereich zu verdeutlichen, sind die Eigenfrequenzen der Modelleigenformen, $k = 1, 2, 3, 4$, gemeinsam für jeweils eine Modellreihe über den Schlupf der hydrodynamischen Kupplung aufgetragen. In gleicher Weise wird mit den Realteilen $\lambda_{\text{re}k}$ verfahren.

Bei der Modellreihe 5xx, $n_P = 500 \text{ min}^{-1}$, zeigt der Verlauf der Eigenfrequenzen f_{01} und f_{02} sowie ihrer zugehörigen Realteile $\lambda_{\text{re}1}$ und $\lambda_{\text{re}2}$, in Abbildung 5.7 und Abbildung 5.8 durchgezogen dargestellt, kaum eine Veränderung über den gesamten Schlupfbereich. Die Eigenfrequenzen bleiben nahezu konstant bei den Werten des Pumpen- und Turbinenstrangs mit entleerter Kupplung nach Gl.(5.10).

In der Modellreihe 7xx, $n_P = 700 \text{ min}^{-1}$, zeigt die Eigenfrequenz des Pumpenstrangs für $k = 2$ ebenfalls keine Veränderung über die 8 unterschiedlichen Modelle, Abbildung 5.9. Zu bemerken ist jedoch, daß die Eigenfrequenz des Turbinenstrangs bei $s = 5 \%$ um ca. 0.3 Hz höher liegt als in der Reihe 5xx. Sie fällt bis zum Modell mit $s = 15 \%$ wieder auf ca. 7.0 Hz ab. Die Abbildung 5.10 zeigt, daß für $k = 1$ die Dämpfung bei $s = 15 \%$ ein schwach ausgeprägtes Maximum besitzt.

| Modellreihe 5xx $n_p = 500 \text{ min}^{-1}$ | | | | | | | | |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Nr. k | Modell für Schlupf s [%] | | | | | | | |
| | 5 | 8 | 10 | 12 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| | Eigenfrequenzen f_{0_k} [Hz] | | | | | | | |
| 1 | 7.046 | 7.089 | 7.096 | 7.050 | 6.991 | 6.918 | 6.903 | 6.935 |
| 2 | 5.576 | 5.592 | 5.614 | 5.601 | 5.583 | 5.558 | 5.551 | 5.558 |
| 3 | 1.192 | .283 | 4.164 | 2.685 | 2.702 | 2.973 | 2.822 | 2.541 |
| 4 | 0 | 0 | 3.820 | 2.173 | 1.608 | 1.868 | 2.094 | 1.985 |
| | Realteile der Eigenwerte λ_{re_k} [s^{-1}] | | | | | | | |
| 1 | -1.027 | -1.128 | -1.317 | -1.569 | -1.791 | -1.689 | -1.340 | -.974 |
| 2 | -.275 | -.290 | -.382 | -.437 | -.556 | -.577 | -.437 | -.312 |
| 3 | -7.089 | -11.819 | -24.953 | -17.854 | -20.269 | -22.192 | -20.484 | -18.754 |
| 4 | 0 | 0 | -22.061 | -20.834 | -22.856 | -24.013 | -21.533 | -19.989 |

| Modellreihe 7xx $n_p = 700 \text{ min}^{-1}$ | | | | | | | | |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Nr. k | Modell für Schlupf s [%] | | | | | | | |
| | 5 | 8 | 10 | 12 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| | Eigenfrequenzen f_{0_k} [Hz] | | | | | | | |
| 1 | 7.266 | 7.316 | 7.230 | 7.079 | 6.872 | 6.756 | 6.867 | 6.959 |
| 2 | 5.640 | 5.687 | 5.679 | 5.648 | 5.612 | 5.546 | 5.557 | 5.571 |
| 3 | 1.780 | 3.861 | 3.444 | 3.707 | 4.657 | 4.903 | 4.374 | 3.328 |
| 4 | 0 | 3.213 | 3.061 | 2.386 | 3.303 | 3.795 | 3.524 | 2.491 |
| | Realteile der Eigenwerte λ_{re_k} [s^{-1}] | | | | | | | |
| 1 | -1.703 | -2.481 | -3.286 | -3.888 | -4.155 | -3.108 | -2.494 | -1.916 |
| 2 | -.364 | -.538 | -.730 | -.981 | -1.202 | -1.122 | -.787 | -.570 |
| 3 | -8.048 | -24.712 | -17.345 | -21.291 | -20.129 | -19.879 | -20.364 | -20.558 |
| 4 | 0 | -18.539 | -23.106 | -27.572 | -25.263 | -22.708 | -23.066 | -23.100 |

| Modellreihe 9xx $n_p = 900 \text{ min}^{-1}$ | | | | | | | | |
|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Nr. k | Modell für Schlupf s [%] | | | | | | | |
| | 5 | 8 | 10 | 12 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| | Eigenfrequenzen f_{0_k} [Hz] | | | | | | | |
| 1 | 7.510 | 7.581 | 7.422 | 6.981 | 6.630 | 6.375 | 6.563 | 6.866 |
| 2 | 5.696 | 5.749 | 5.738 | 5.717 | 6.201 | 6.358 | 6.012 | 5.571 |
| 3 | 2.259 | 3.305 | 3.565 | 5.390 | 5.618 | 5.444 | 5.520 | 5.045 |
| 4 | 0 | 3.206 | 2.656 | 4.294 | 4.639 | 4.764 | 4.994 | 4.129 |
| | Realteile der Eigenwerte λ_{re_k} [s^{-1}] | | | | | | | |
| 1 | -2.781 | -4.789 | -6.052 | -8.314 | -19.176 | -2.872 | -3.551 | -3.526 |
| 2 | -.437 | -.746 | -.939 | -1.466 | -5.040 | -20.577 | -16.876 | -.961 |
| 3 | -7.313 | -13.788 | -16.169 | -17.970 | -2.441 | -1.764 | -1.348 | -20.212 |
| 4 | 0 | -23.955 | -25.858 | -29.203 | -25.285 | -22.240 | -20.113 | -24.942 |

Tabelle 5.3: Eigenwerte des Antriebsstrangmodells der Modellreihen 5xx, 7xx und 9xx, Modellparameter nach Tabelle 5.1

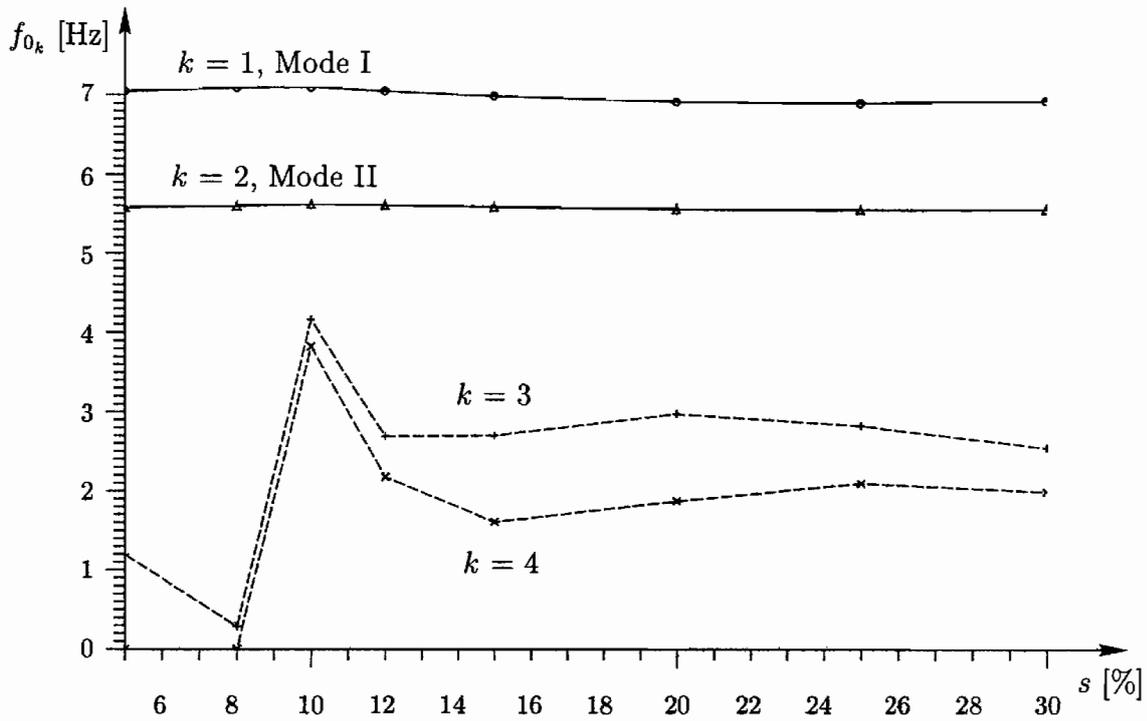


Abbildung 5.7: Eigenfrequenzen der k -ten Eigenform der Modellreihe 5xx ($n_P = 500 \text{ min}^{-1}$) in Abhängigkeit vom Schlupf s der hydrodynamischen Kupplung

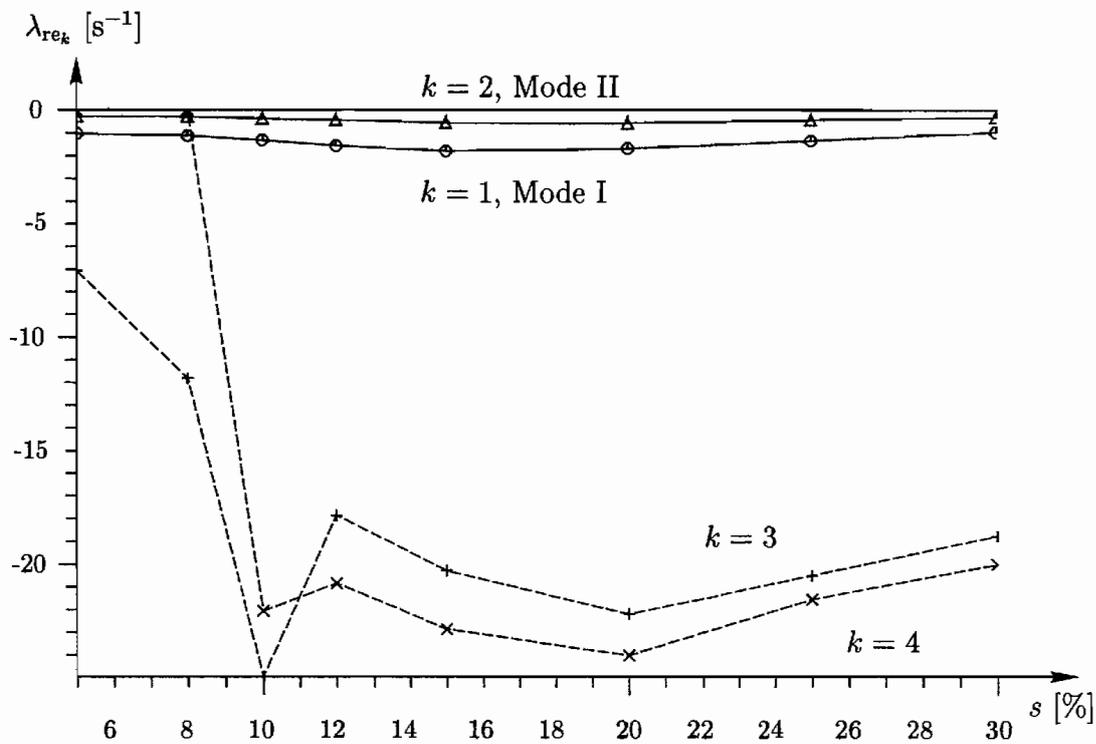


Abbildung 5.8: Realteile der k -ten Eigenform der Modellreihe 5xx ($n_P = 500 \text{ min}^{-1}$) in Abhängigkeit vom Schlupf s der hydrodynamischen Kupplung

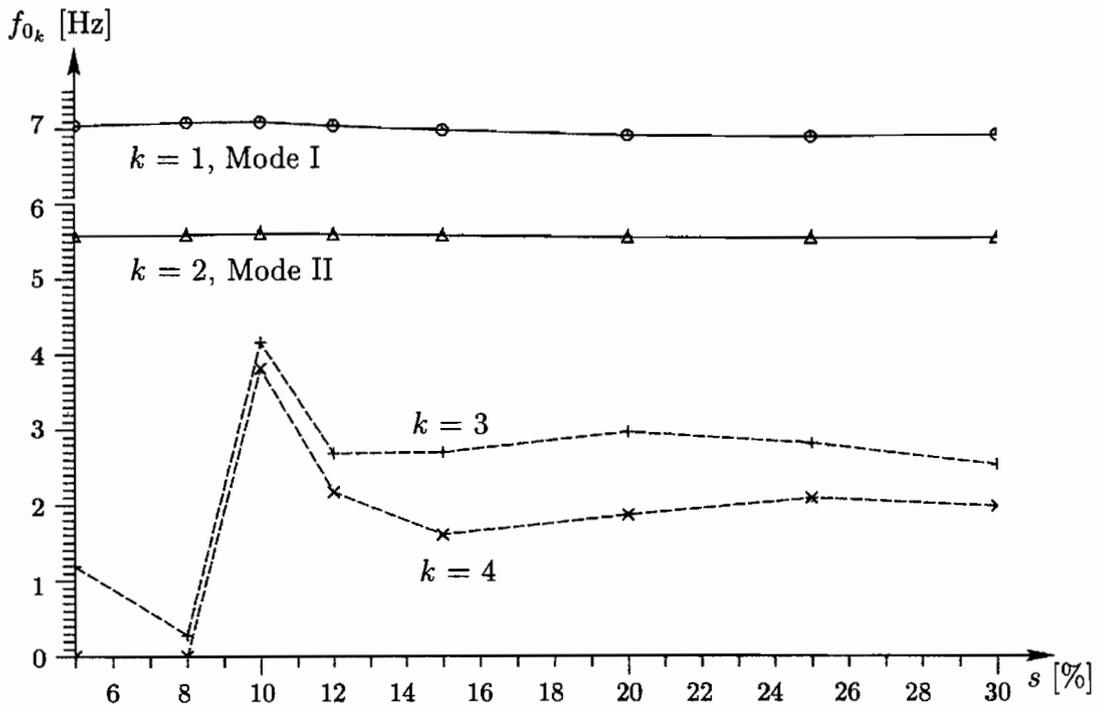


Abbildung 5.9: Eigenfrequenzen der k -ten Eigenform der Modellreihe 7xx ($n_P = 700 \text{ min}^{-1}$) in Abhängigkeit vom Schlupf s der hydrodynamischen Kupplung

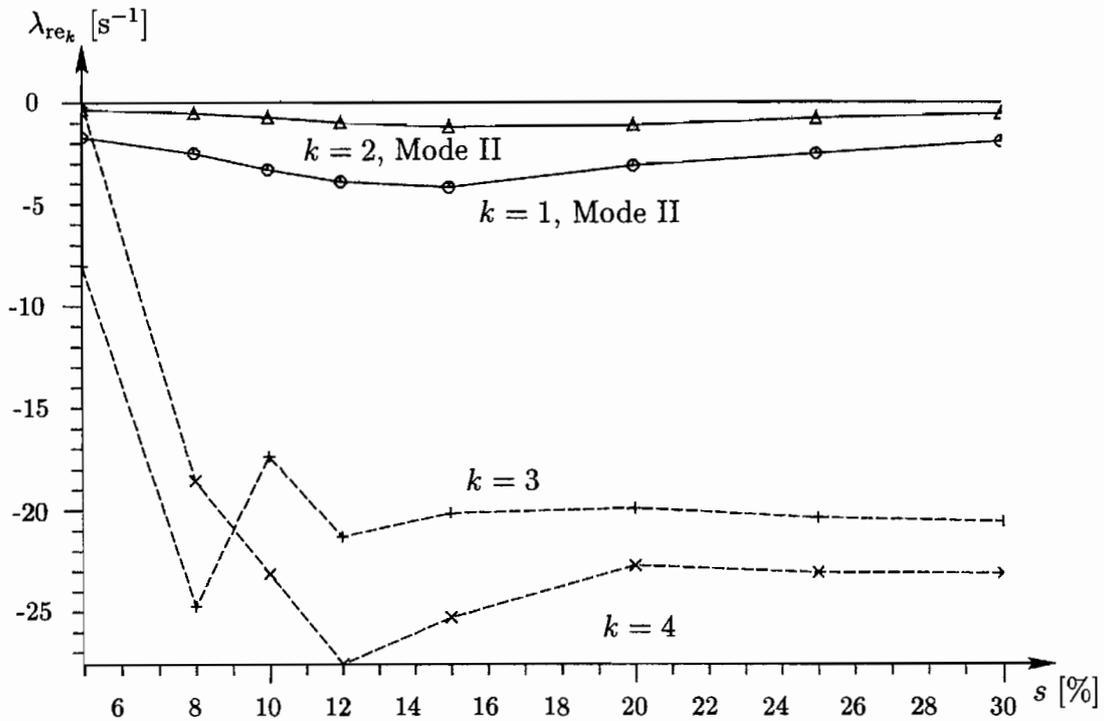


Abbildung 5.10: Realteile der k -ten Eigenform der Modellreihe 7xx ($n_P = 700 \text{ min}^{-1}$) in Abhängigkeit vom Schlupf s der hydrodynamischen Kupplung

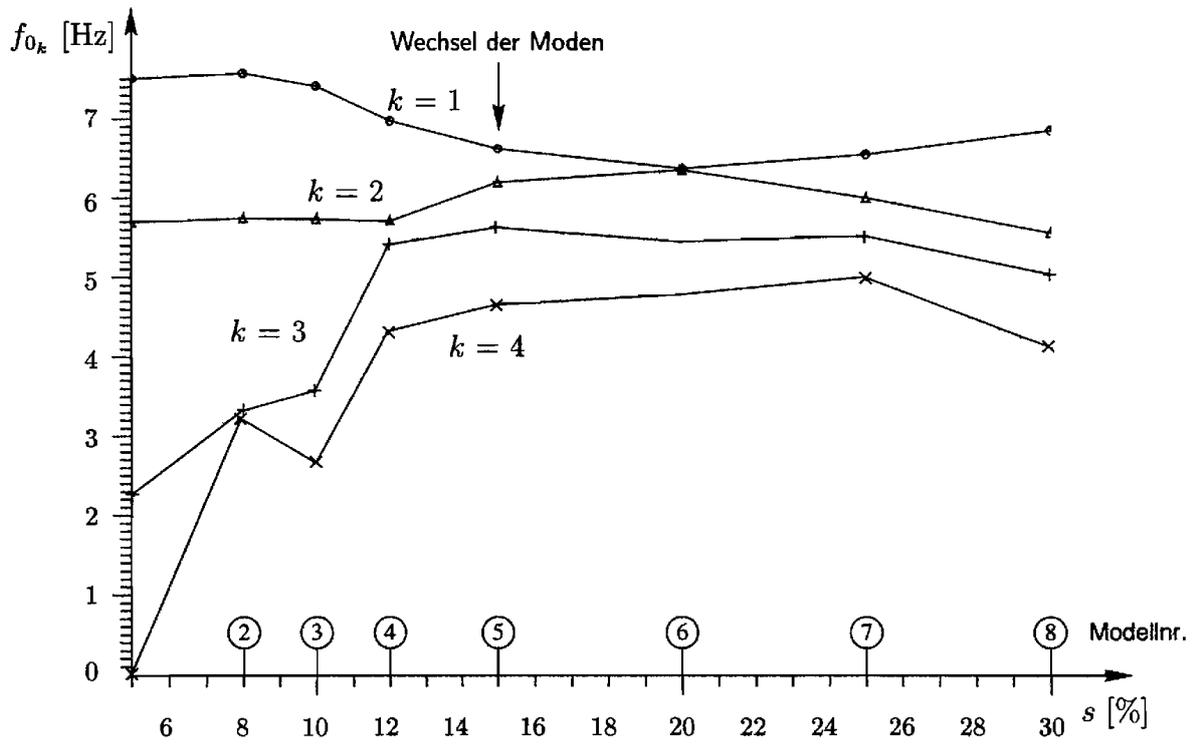


Abbildung 5.11: Eigenfrequenzen der k -ten Eigenform der Modellreihe 9xx ($n_P = 900 \text{ min}^{-1}$) in Abhängigkeit vom Schlupf s der hydrodynamischen Kupplung

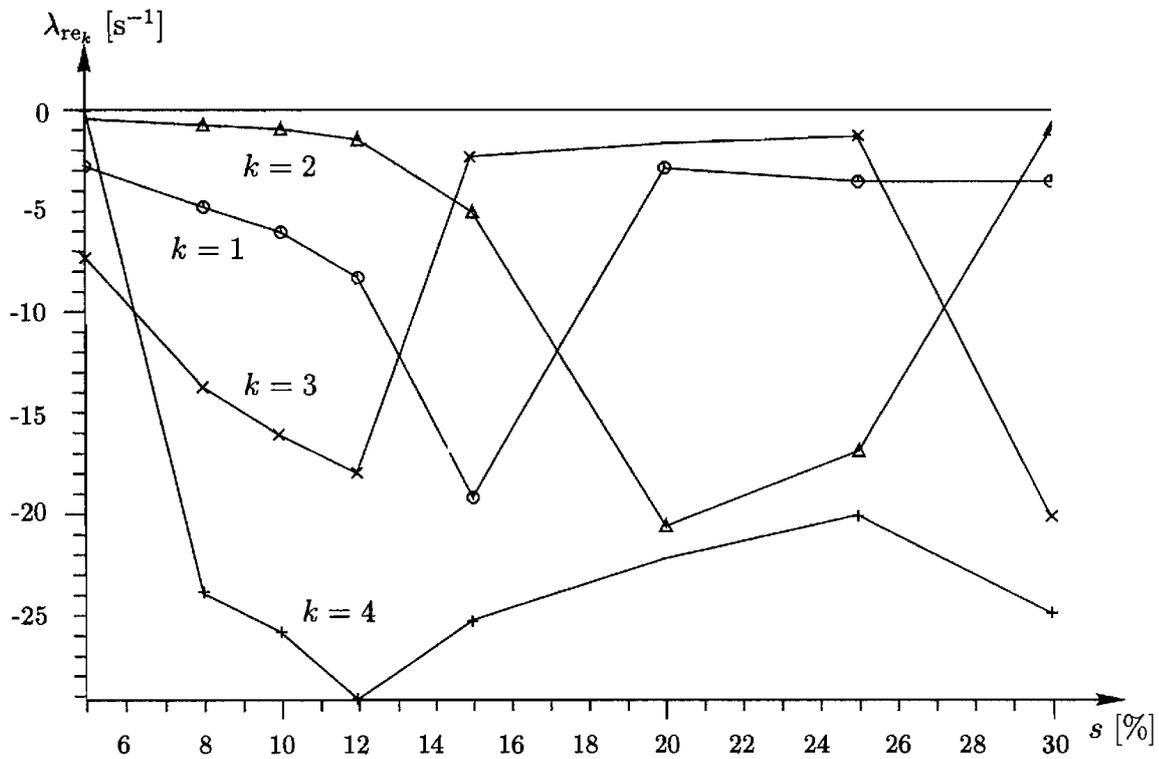
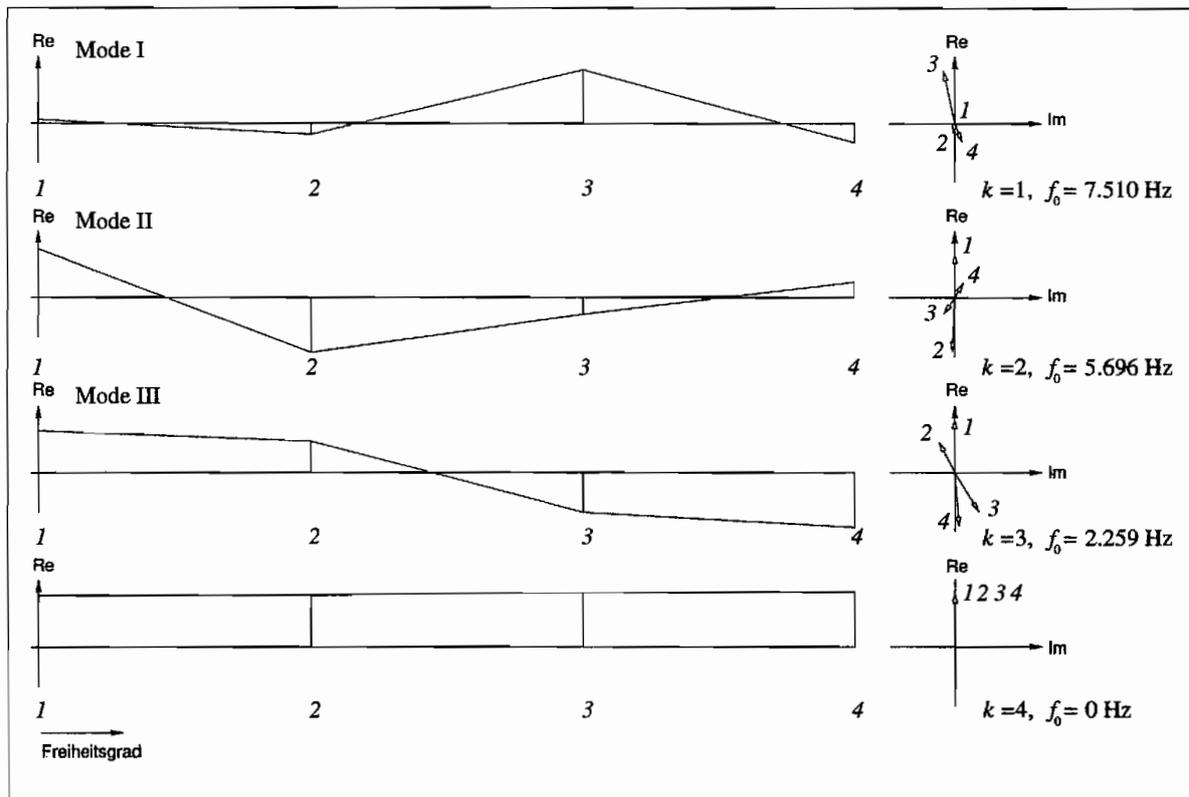
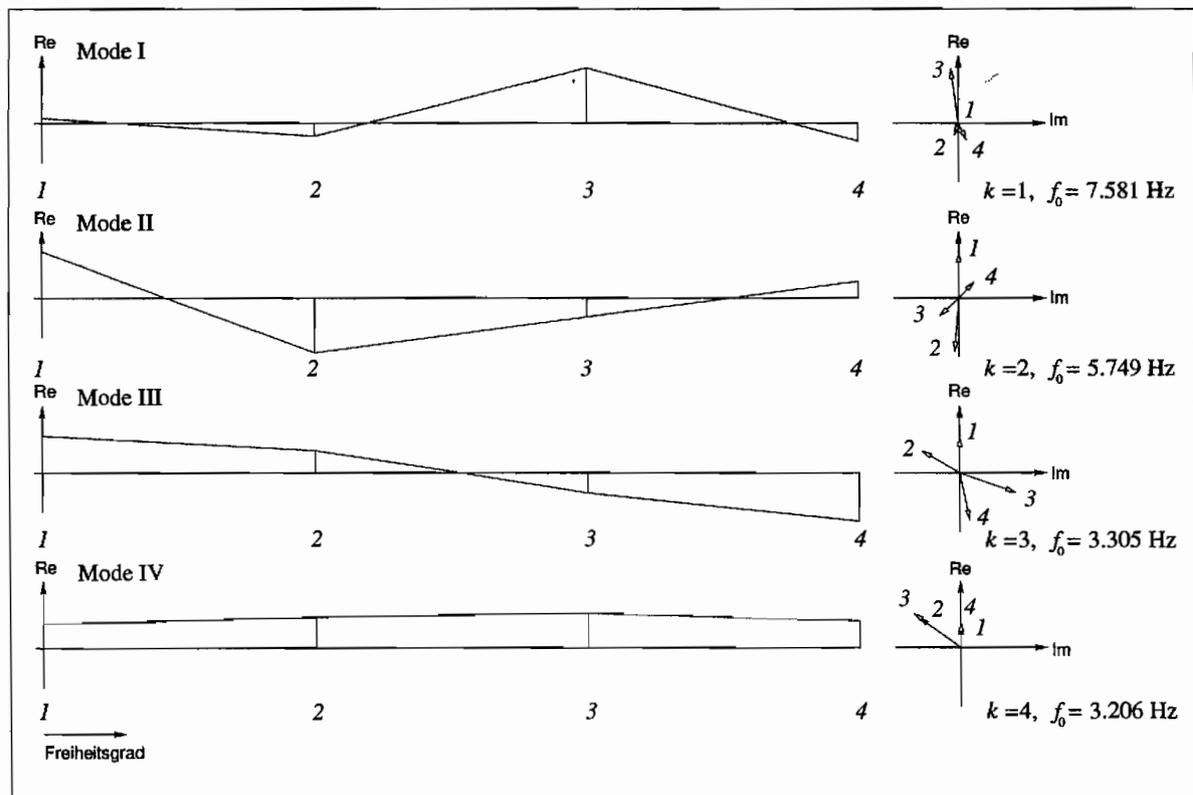


Abbildung 5.12: Realteile der k -ten Eigenform der Modellreihe 9xx ($n_P = 900 \text{ min}^{-1}$) in Abhängigkeit vom Schlupf s der hydrodynamischen Kupplung

Abbildung 5.13: Eigenformen des Antriebsstrangmodells 1 für $n_p = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 5 \%$ Abbildung 5.14: Eigenformen des Antriebsstrangmodells 2 für $n_p = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 8 \%$

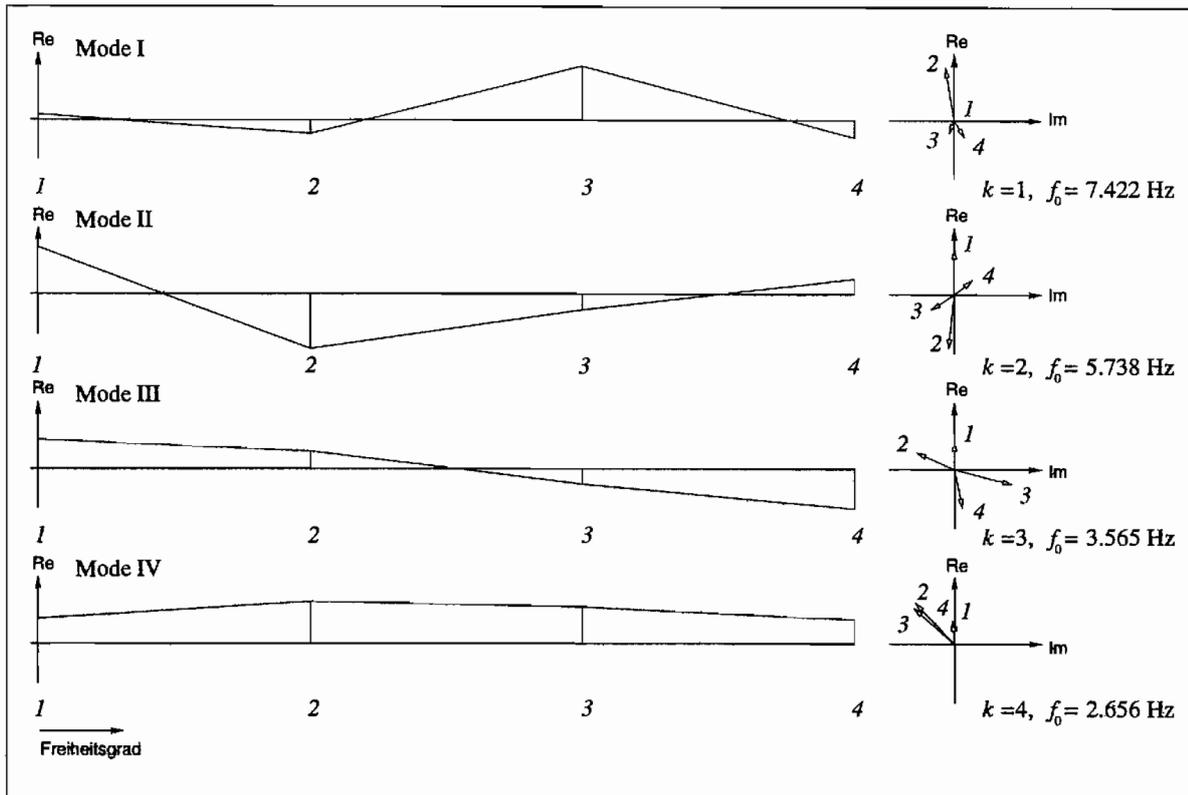


Abbildung 5.15: Eigenformen des Antriebsstrangmodells 3 für $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 10 \%$

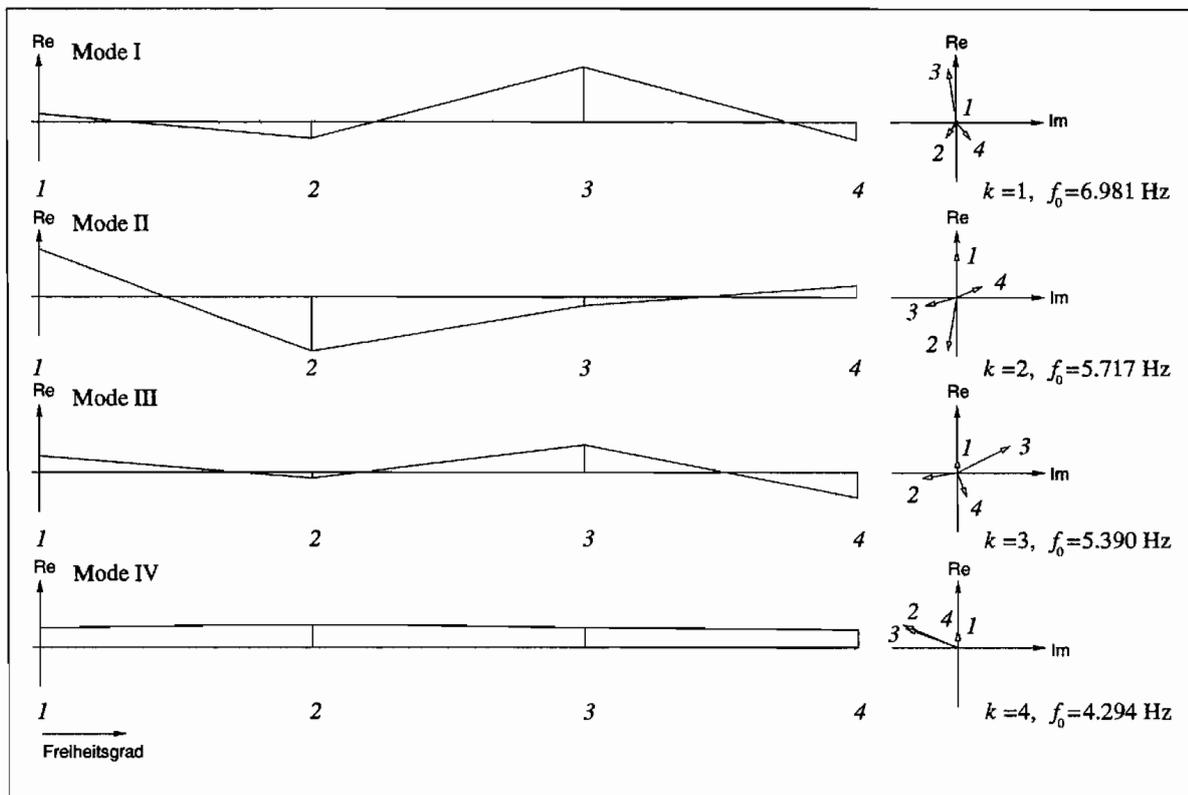
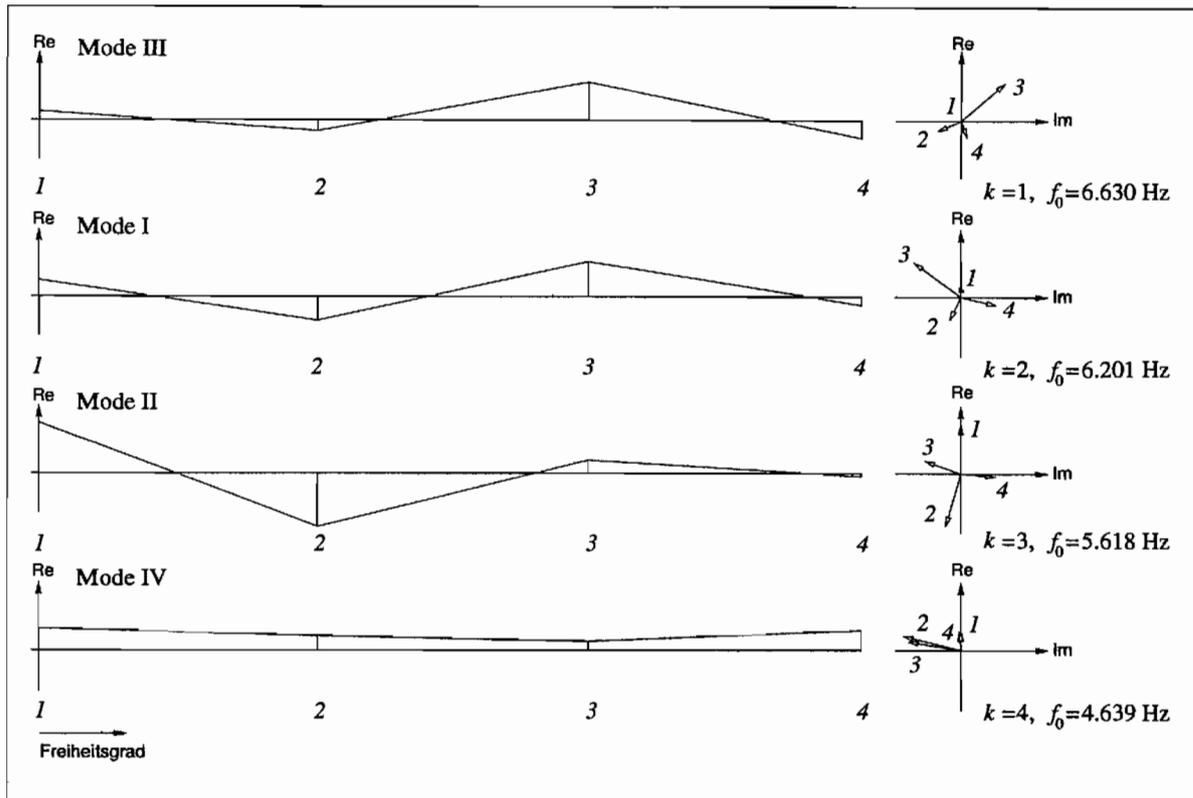
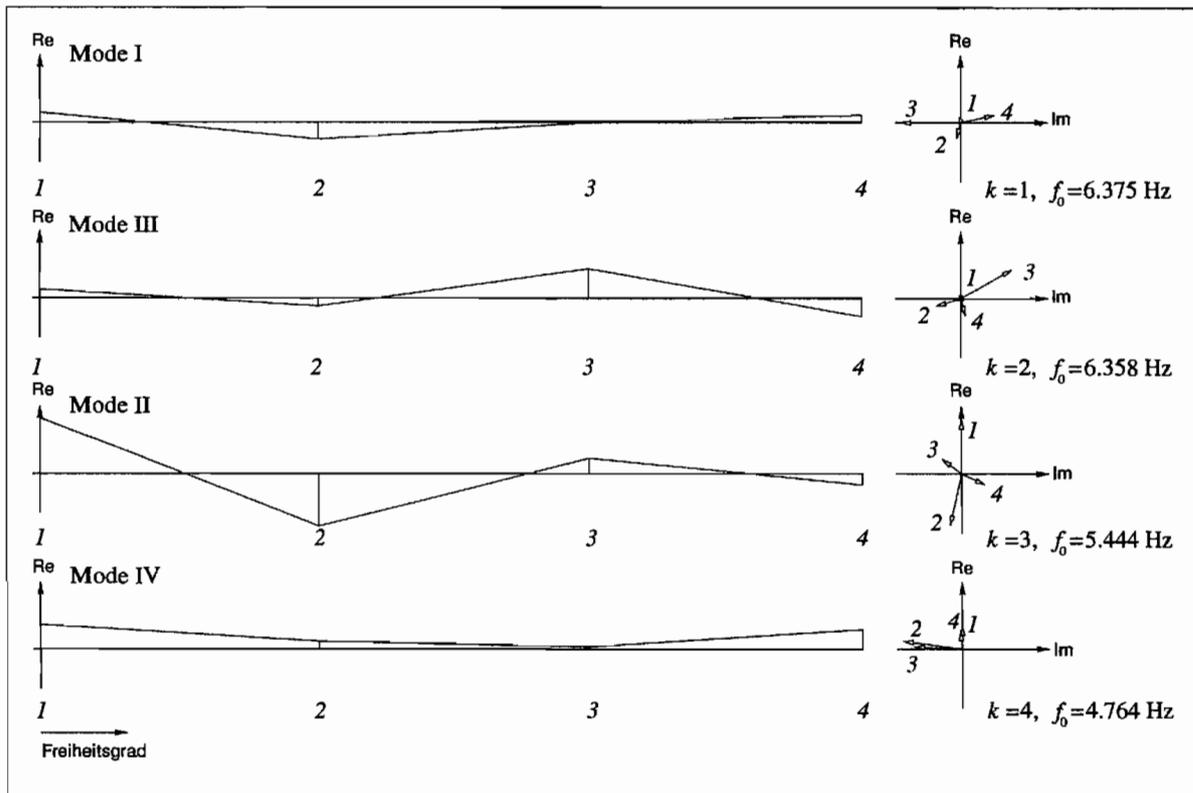


Abbildung 5.16: Eigenformen des Antriebsstrangmodells 4 für $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 12 \%$

Abbildung 5.17: Eigenformen des Antriebsstrangmodells 5 für $n_p = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 15 \%$ Abbildung 5.18: Eigenformen des Antriebsstrangmodells 6 für $n_p = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 20 \%$

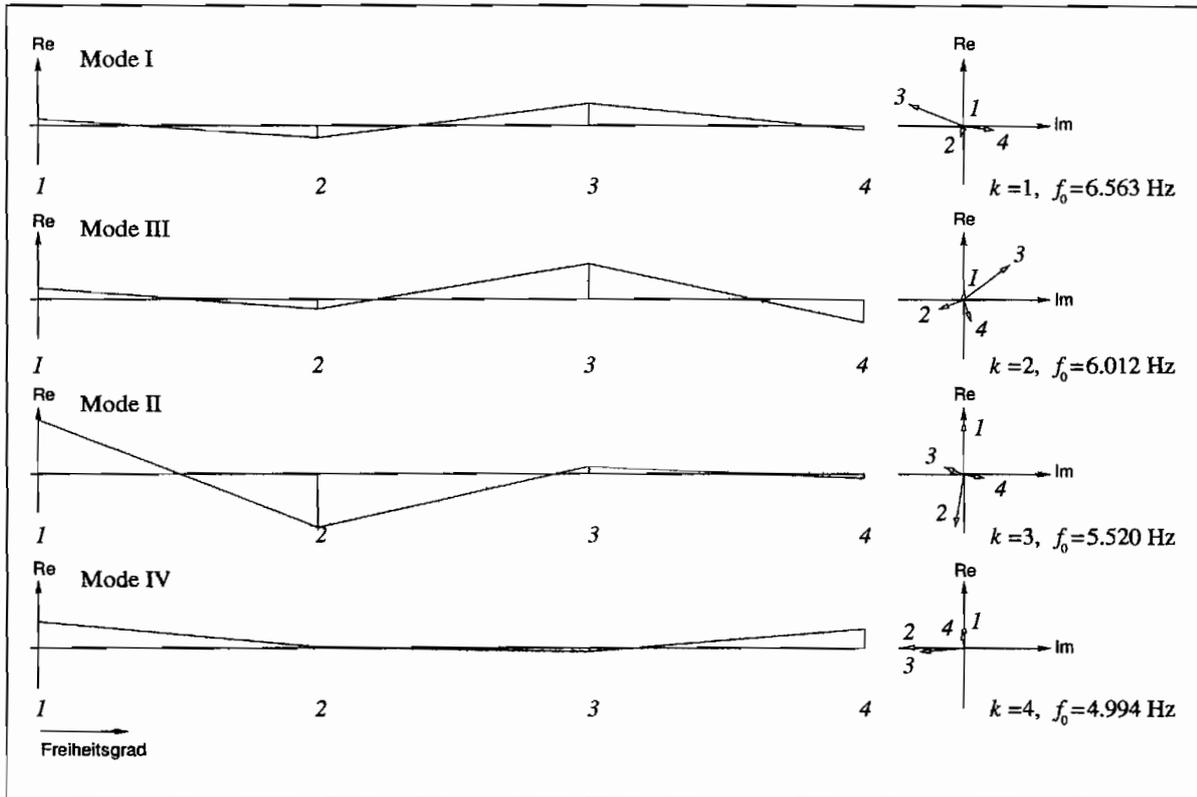


Abbildung 5.19: Eigenformen des Antriebsstrangmodells 7 für $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 25 \%$

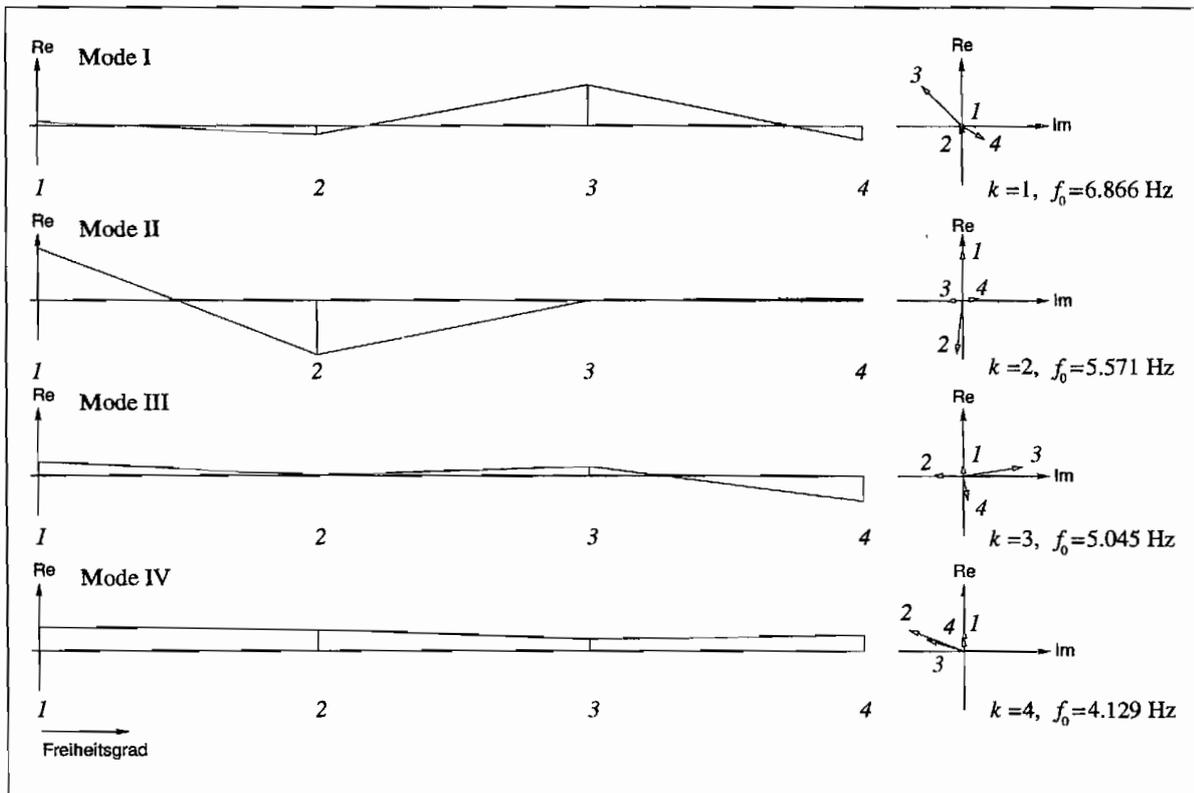


Abbildung 5.20: Eigenformen des Antriebsstrangmodells 8 für $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 30 \%$

Die Eigenfrequenzen und Dämpfungen der einzelnen Moden zeigen in Abhängigkeit vom Schlupf unterschiedlich starke Veränderungen. In der Darstellung der Eigenfrequenzverläufe in Abbildung 5.21 ist zu erkennen, daß die Eigenfrequenz des Pumpenstrangs, Mode II, sich nur wenig verändert. Einen größeren Einfluß des Schlupfes zeigt jedoch die Resonanz des Turbinenstrangs, Mode I. Sie liegt für das Modell 1, $s = 5\%$, bei 7.5 Hz und damit um 0.5 Hz höher als die Eigenfrequenz f_{0T} des ungekoppelten Turbinenstrangs, Gl.(5.10). Das Minimum der Eigenfrequenzkurve für den Mode I liegt bei $s = 15\%$, Modell 5. Sie fällt von Modell 1 bis zu Modell 5 um 1.3 Hz auf 6.2 Hz herab. Zum Vergleich sei hier erwähnt, daß die zu der Modellreihe 9xx zugehörige stationäre Kennlinie, Abbildung 5.1, für das Modell 5 ein ausgeprägteres Maximum des Moments zeigt als in den Modellreihen 5xx und 7xx.

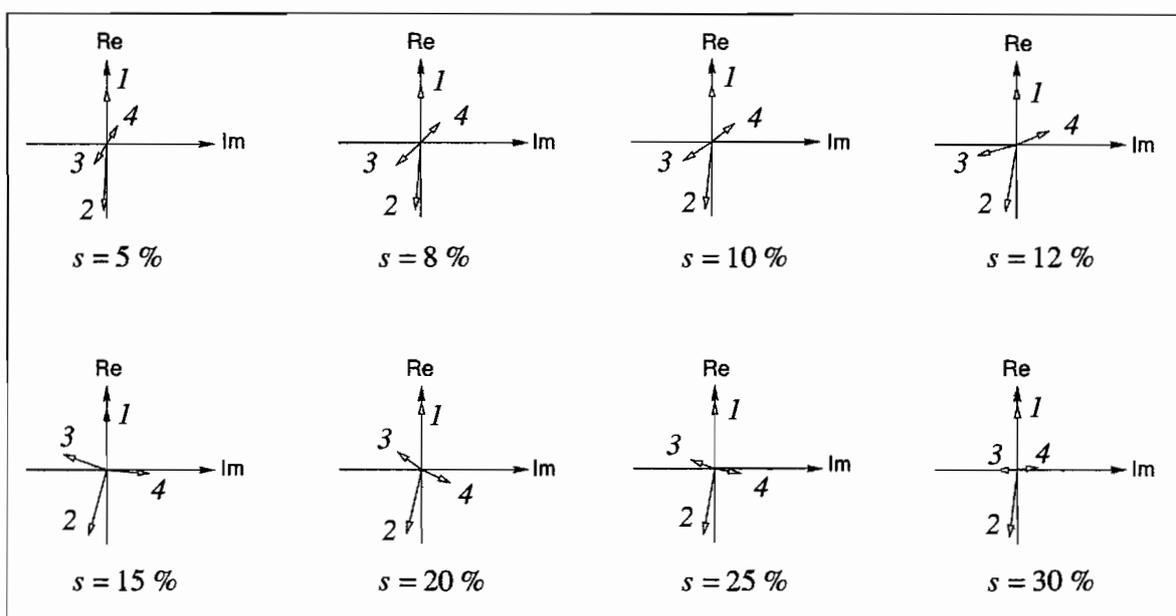


Abbildung 5.23: Die Eigenformen des Mode II in Abhängigkeit des Schlupfes, Modellreihe 9xx ($n_P = 900 \text{ min}^{-1}$)

Während sich die Eigenwerte des Mode II nur wenig verändern, zeigen die Eigenformen dagegen eine starke Abhängigkeit vom Schlupf. Vergleicht man den Mode II aller 8 Modelle in der Zeigerdarstellung Abbildung 5.23, so fällt auf, daß sich die Eigenschwingungen unterschiedlich stark auf den Turbinenstrang, die Freiheitsgrade 3 und 4, auswirken. Die Amplituden dieser Freiheitsgrade variieren in Abhängigkeit vom Schlupf. Für $s = 15\%$ zeigt der Turbinenstrang die größten Amplituden, obwohl die Dämpfung des Mode II hier ihren höchsten Wert erreicht, s. Abbildung 5.22. Der Mode I besitzt dagegen keine Abhängigkeit seiner Eigenformen vom Schlupf. Es zeigt sich also, daß die Eigenformen eines Mode stark vom Betriebsbereich der Kupplung abhängen können. Für die Modellreihe 5xx, $n_P = 500 \text{ min}^{-1}$, ist ein Einfluß des Schlupfes auf die Eigenformen nicht zu erkennen. Dies ist auf die in diesem Betriebsbereich relativ geringe hydrodynamische Wechselwirkung der Kupplungslaufräder zurückzuführen.

| | | $\lambda_{re} [s^{-1}]$ | | | |
|-----|-------------|-------------------------|-------------|---------|-----|
| k | Modell 4 | | Modell 5 | | |
| | $s = 12 \%$ | | $s = 15 \%$ | | |
| 1 | I | -8.314 | → | -19.176 | III |
| 2 | II | -1.466 | → | -5.040 | I |
| 3 | III | -17.970 | → | -2.441 | II |
| 4 | IV | -29.203 | → | -25.285 | IV |

Tabelle 5.4: Beispiel zur Bestimmung der Moden I, II, III, IV anhand der Realteile λ_{re_k}

| Modellreihe 9xx $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ | | | | | | | | |
|----------------------------------------------------|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Mode | Modell für Schlupf s [%] | | | | | | | |
| | 5 | 8 | 10 | 12 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| Eigenfrequenzen f_0 [Hz] | | | | | | | | |
| I | 7.510 | 7.581 | 7.422 | 6.981 | 6.201 | 6.375 | 6.563 | 6.866 |
| II | 5.696 | 5.749 | 5.738 | 5.717 | 5.618 | 5.444 | 5.520 | 5.571 |
| III | 2.259 | 3.305 | 3.565 | 5.390 | 6.630 | 6.358 | 6.012 | 5.045 |
| IV | .000 | 3.206 | 2.656 | 4.294 | 4.639 | 4.764 | 4.994 | 4.129 |
| Realteile der Eigenwerte $\lambda_{re_k} [s^{-1}]$ | | | | | | | | |
| I | -2.781 | -4.789 | -6.052 | -8.314 | -5.040 | -2.872 | -3.551 | -3.526 |
| II | -.437 | -.746 | -.939 | -1.466 | -2.441 | -1.764 | -1.348 | -.961 |
| III | -7.313 | -13.788 | -16.169 | -17.970 | -19.176 | -20.577 | -16.876 | -20.212 |
| IV | .000 | -23.955 | -25.858 | -29.203 | -25.285 | -22.240 | -20.113 | -24.942 |

Tabelle 5.5: Eigenwerte der Moden I bis IV des Antriebsstrangmodells der Modellreihe 9xx

| Modellreihe 9xx $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ | | | | | |
|----------------------------------------------|------------|-----------------------------------|-------------------------|--------------------|--|
| Nr. | f_0 [Hz] | $\frac{1}{2\pi} s_{im0} [s^{-1}]$ | $\lambda_{re} [s^{-1}]$ | $s_{re0} [s^{-1}]$ | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | 3.206 | 3.181 | -23.55 | -24.50 | |
| 3 | 2.656 | 2.595 | -25.86 | -26.49 | |
| 4 | 4.294 | 4.259 | -29.20 | -29.89 | |
| 5 | 4.639 | 4.678 | -25.26 | -25.79 | |
| 6 | 4.764 | 4.792 | -22.24 | -22.65 | |
| 7 | 4.994 | 5.022 | -20.11 | -20.46 | |
| 8 | 4.129 | 4.133 | -24.94 | -25.40 | |

Tabelle 5.6: Vergleich der Eigenfrequenzen und Realteile des Modes IV für die Antriebsstrangmodelle 1 – 8 und den Nullstellen s_0 der Nennerpolynome der Kupplungsmodelle 1 – 8

Der Eigenwert des Mode IV zeigt im vorigen Abschnitt bei dem Modellbeispiel mit $n_P = 500 \text{ min}^{-1}$, $s = 30 \%$, Übereinstimmung mit der Nullstelle s_0 des Nennerpolynoms des Kupplungsmodells, s. Gl.(5.14). Diese Übereinstimmung der Eigenfrequenzen für $k = 4$, die dem Mode IV entsprechen, tritt in allen Modellen der Reihen 5xx, 7xx und 9xx auf. Zur Verdeutlichung des Sachverhaltes sind in Tabelle 5.6 die Eigenwerte des Mode IV der Modelle 1 bis 8 und die Nullstellen der jeweiligen Nennerpolynome der Kupplungsmodelle für die Modellreihe 9xx aufgeführt.

5.4 Der Einfluß des Kupplungsmodellansatzes

In diesem Abschnitt wird untersucht, in welchem Maße die für die Schätzung des linearen Parametermodells der hydrodynamischen Kupplung angesetzten Ordnungen n und m für Zähler- und Nennerpolynom sich auf die Eigenfrequenzen und die auftretenden Eigenformen des Antriebsstrangmodells auswirken. Zur Übersicht sei an dieser Stelle der lineare Kupplungsmodellansatz in Form der dynamischen Dämpfungsmatrix noch einmal angegeben

$$\mathbf{D}(j\omega) = \begin{bmatrix} d_{11}(j\omega) & d_{12}(j\omega) \\ d_{21}(j\omega) & d_{22}(j\omega) \end{bmatrix},$$

$$d_{ij}(j\omega) = \frac{Z_{ij_n}(j\omega)}{N_m(j\omega)} = \frac{b_{ij_0} + b_{ij_1} j\omega + \dots + b_{ij_n} j\omega^n}{a_0 + a_1 j\omega + \dots + a_m j\omega^m}.$$

Zur Untersuchung werden für den Schlupfbereich $s = 15 \%$ und der Pumpendrehzahl $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ Modelle mit unterschiedlichen Ordnungen n und m erstellt. Als Antriebsstrang wird das Beispiel aus den beiden vorherigen Abschnitten, s. Abbildung 5.3, und den Strukturparametern nach Tabelle 5.1 übernommen.

Um den prinzipiellen Einfluß des Modellansatzes deutlich zu machen, werden hier auch Ansätze gewählt, die nur eine geringe Modellgüte erreichen. Aus diesem Grund wird hier auch nicht die bislang verwendete Strukturbedingung des Kupplungsmodellansatzes

$$n = m + 1$$

eingehalten, vgl. Abschnitt 4.2.4. Als Einschränkung für den Ansatz gilt hier

$$n \geq m.$$

In Tabelle 5.7 sind die Eigenfrequenzen und die zugehörigen Realteile der Eigenwerte des Antriebsstrangmodells für 11 unterschiedliche Ansätze des Kupplungsmodells 915 dargestellt. Die Werte sind nach den jeweils auftretenden Moden geordnet. Die Zuordnung von Eigenfrequenz und Mode erfolgt, wie im vorangegangenen Abschnitt erläutert, über die Größe des Betrages der Realteile, also entsprechend der Dämpfung. Die Abhängigkeit der Moden III bis VI von dem gewählten Ansatz ist hier deutlich zu erkennen. Die Modelle mit einer hohen Modellgüte, die das Kupplungsverhalten gut beschreiben, sind in Tabelle 5.7 durch einen Stern „ \star “ vor der Modellnummer gekennzeichnet.

| Modell 915 $n_p = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 15 \%$ | | | | | |
|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|----------|
| Nr.: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| n : | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| m : | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 |
| Mode | Eigenfrequenzen f_{0_k} [Hz] | | | | |
| I | 6.738 | 6.464 | 6.558 | 6.447 | 6.402 |
| II | 5.566 | 5.530 | 5.546 | 5.410 | 5.509 |
| III | - | - | - | 15.688 | 5.334 |
| IV | - | - | - | - | - |
| V | - | - | - | - | - |
| VI | - | - | - | - | - |
| | Realteile der Eigenwerte λ_{re_k} [s^{-1}] | | | | |
| I | -1.237 | -1.614 | -1.554 | -1.259 | -1.907 |
| II | -3.236 | -3.369 | -3.224 | -1.495 | -3.421 |
| III | - | - | - | 20.939 | -108.884 |
| IV | - | - | - | - | - |
| V | - | - | - | - | - |
| VI | - | - | - | - | - |

| Nr.: | *6 | *7 | *8 | *9 | *10 | 11 |
|-------|----------------------------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| n : | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| m : | 2 | 3 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| Mode | Eigenfrequenzen f_{0_k} [Hz] | | | | | |
| I | 6.201 | 6.229 | 6.254 | 6.252 | 6.266 | 6.214 |
| II | 5.618 | 5.625 | 5.617 | 5.617 | 5.618 | 5.624 |
| III | 6.630 | 6.408 | 6.058 | 6.069 | 6.017 | 6.411 |
| IV | 4.639 | 4.525 | 4.321 | 4.330 | 4.304 | 4.656 |
| V | - | - | - | - | - | 10.358 |
| VI | - | - | - | - | - | 10.402 |
| | Realteile der Eigenwerte λ_{re_k} [s^{-1}] | | | | | |
| I | -5.040 | -5.626 | -5.464 | -5.461 | -5.460 | -5.726 |
| II | -2.441 | -2.339 | -2.288 | -2.289 | -2.276 | -2.380 |
| III | -19.176 | -17.869 | -18.050 | -18.019 | -17.927 | -15.911 |
| IV | -25.285 | -23.738 | -22.270 | -22.291 | -22.132 | -22.801 |
| V | - | - | - | - | - | -3.260 |
| VI | - | - | - | - | - | -3.411 |

Tabelle 5.7: Eigenwerte des Antriebsstrangmodells für $n_p = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 15 \%$ für verschiedene Ansatzordnungen n und m des Kupplungsmodells, *: hohe Modellgüte des Kupplungsmodells

Die Anzahl der Eigenwerte, die für das jeweilige Kupplungsmodell in der Tabelle aufgeführt sind, hängt von der Ordnung q des Differentialgleichungssystems des Antriebsstrangs nach Gl.(4.42) ab. Die Ordnung q ist hierbei durch die Ordnung n des Zählerpolynoms des Kupplungsmodells bestimmt

$$q = n + 1 \quad . \quad (5.15)$$

Damit erhält man in Abhängigkeit des Kupplungsmodellansatzes für das Antriebsstrangmodell die Anzahl der konjugiert komplexen Lösungen für das 4-Freiheitsgradsystem ($n_F = 4$)

$$\frac{1}{2} q \cdot n_F = 2n + 2 \quad .$$

Stellvertretend sind in Abbildung 5.24 die Eigenformen des Antriebsstrangmodells Nr. 11 nach Tabelle 5.7 dargestellt, in denen die auftretenden Moden I - VI enthalten sind.

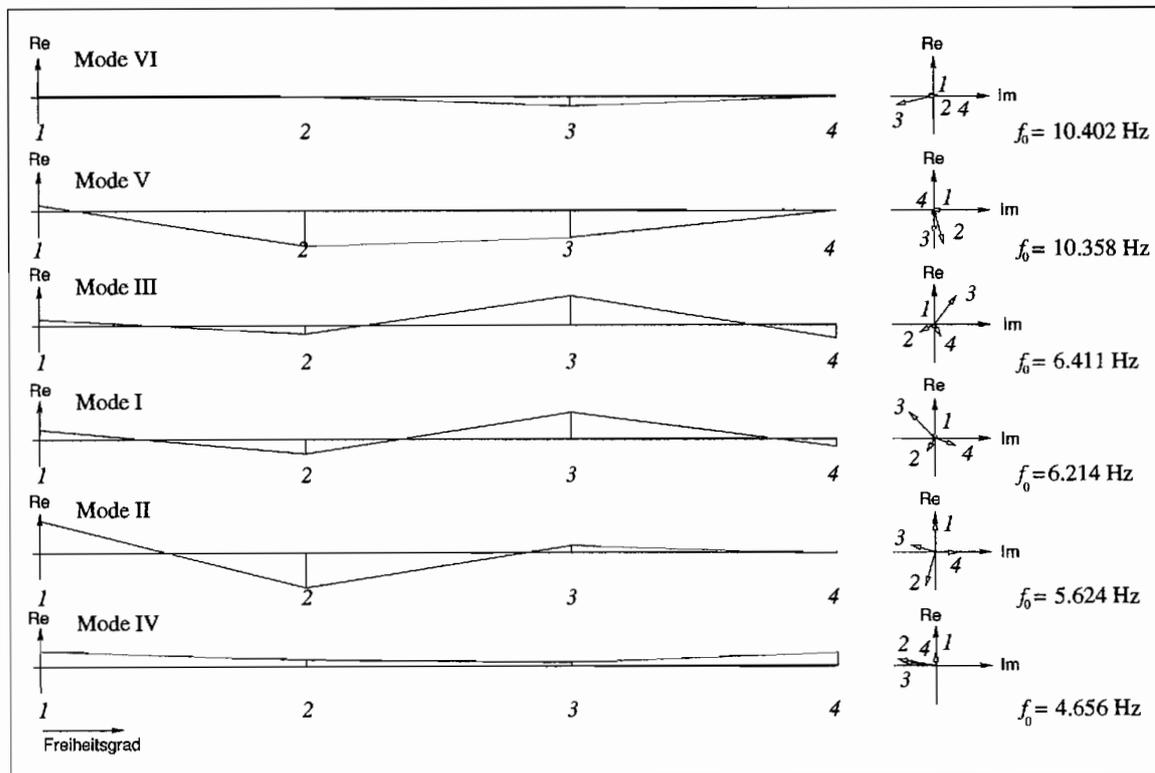


Abbildung 5.24: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für $n_p = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 15 \%$, Kupplungsmodellansatz: $n = 5$, $m = 4$

Wie schon im vorigen Abschnitt gezeigt, kann der Mode I der Resonanz des Turbinenstrangs und Mode II der Resonanz des Pumpenstrangs zugeordnet werden. Es fällt auf, daß die Eigenfrequenzen für den Mode I der Modelle mit einer schlechten Modellgüte, Nr. 1 bis Nr. 5 in Tabelle 5.7, zwischen 6.74 Hz und 6.40 Hz variieren. Für die verschiedenen Modelle mit hoher Modellgüte, Modelle Nr. 6 - Nr. 10, bleibt die Eigenfrequenz des Mode I nahezu konstant. Dieses Ergebnis zeigt, daß letztere Modelle das dynamische Verhalten der Kupplung gleichwertig beschreiben. Dieser Sachverhalt zeigt sich auch dadurch, daß bei Erhöhung der Ansatzordnungen n und m von 3 auf 4, von Modell Nr. 7 zu Modell Nr. 10, kein neuer

Mode auftritt, währenddem bei Erhöhung der Ordnung n auf 5, Modell Nr. 11, zwei weitere Moden auftreten. Es sei erwähnt, daß der Ansatz für Modell 11 mit $n = 5$ und $m = 4$ für die Polynomschätzung im Frequenzbereich zu hoch gewählt ist.

Es zeigt sich, daß die Modellansätze, die sich für eine erfolgreiche Schätzung des Kupplungsmodells bei $s = 15\%$ eignen (durch \star gekennzeichnet), alle das gleiche Ergebnis für die Eigenwerte der Moden I und II des Antriebsstrangsmodells liefern. Mit diesen Ansätzen treten für das Antriebsstrangmodell genau vier Moden auf. Ein Vergleich der Modelle Nr. 8, 9 und 10 zeigt, daß für die Modelle mit $n = 4$ die Erhöhung von $m = 2$ auf 3 oder 4 keine Veränderung in den Ergebnissen aller Moden bewirkt. Daraus folgt, daß zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens der Kupplung bei $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ und $s = 15\%$ der Ansatz mit $n = 4$ und $m = 2$ am günstigsten ist.

Daß die Wahl des Betriebsbereiches für den Modellansatz eine Rolle spielt, ist schon in [12] gezeigt worden. Hier äußert sich dieser Sachverhalt in den für das Antriebsstrangmodell auftretenden Moden, z.B. reicht für die Beschreibung des Kupplungsverhaltens bei Schlupf $s = 5\%$ ein Ansatz mit $n = 3$ und $m = 1$ aus, da der Mode IV in Abbildung 5.21 für diesen Schlupfbereich mit dem Ansatz $n = 3$ und $m = 2$ nicht in Erscheinung tritt.

5.5 Der Einfluß der Modellparameter der Antriebsstrangstruktur

In Abschnitt 5.3 ist die Abhängigkeit der Eigenfrequenzen vom gewählten Schlupfbereich des Kupplungsmodells erläutert worden. In diesem Abschnitt soll die Abhängigkeit des Verlaufes der Eigenfrequenzen über den Schlupf von den Modellparametern der Antriebsstrangstruktur behandelt werden. Diese Modellparameter sind die Massenträgheitsmomente und Federsteifigkeiten des Antriebsstrangs. Für den Antriebsstrang mit vier Freiheitsgraden nach Abbildung 5.3 wird das Trägheitsmoment θ_2 des Pumpenfreiheitsgrades willkürlich zunächst um $0,5 \text{ kg m}^2$ gegenüber dem bisher gewählten Wert nach Tabelle 5.1 verringert. Das 4-Freiheitsgradsystem besitzt dann die in Tabelle 5.8 angegebenen Modellparameter.

| | | |
|--------------|-------|-----------------|
| $\theta_1 =$ | 2 | kg m^2 |
| $\theta_2 =$ | 1.533 | kg m^2 |
| $\theta_3 =$ | 0.890 | kg m^2 |
| $\theta_4 =$ | 2 | kg m^2 |
| $k_1 =$ | 1200 | Nm/rad |
| $k_2 =$ | 1200 | Nm/rad |

Tabelle 5.8: Modellparameter für das Beispielsystem nach Abbildung 5.3

Aufgrund der neuen Verteilung der Trägheitsmassen in der Antriebsstrangstruktur hat sich nur die Eigenfrequenz des Pumpenstrangs gegenüber dem vorigen Beispiel verändert

$$\text{Pumpenstrang : } f_{0_P} = 5.92 \text{ Hz ,}$$

$$\text{Turbinenstrang : } f_{0_T} = 7.02 \text{ Hz .}$$

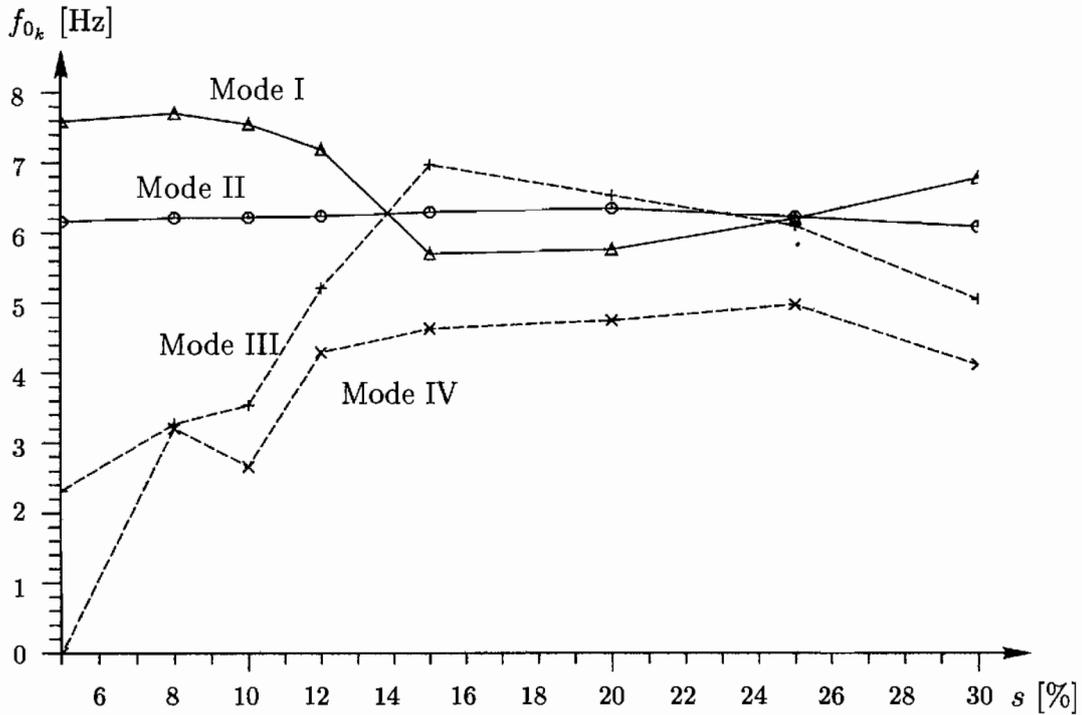


Abbildung 5.25: Eigenfrequenzen der Moden I bis IV der Modellreihe 9xx des Antriebsstrangmodells nach Tabelle 5.8 in Abhängigkeit vom Schlupf

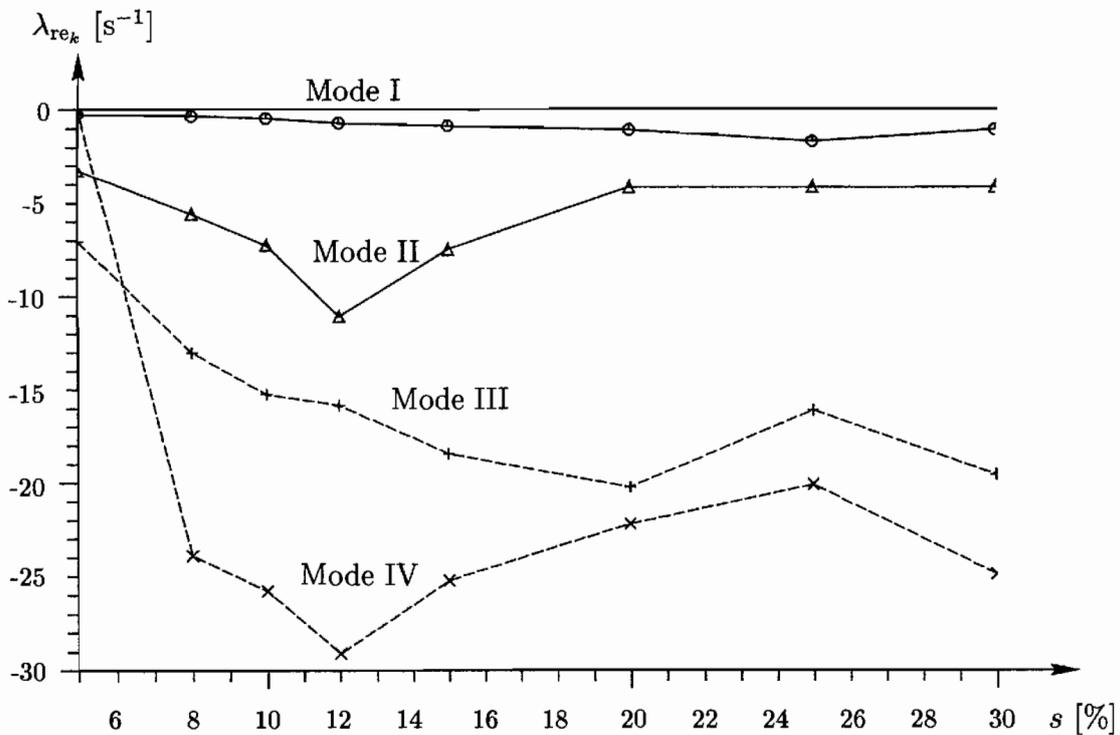


Abbildung 5.26: Realteile der Moden I bis IV der Modellreihe 9xx des Antriebsstrangmodells nach Tabelle 5.8 in Abhängigkeit vom Schlupf

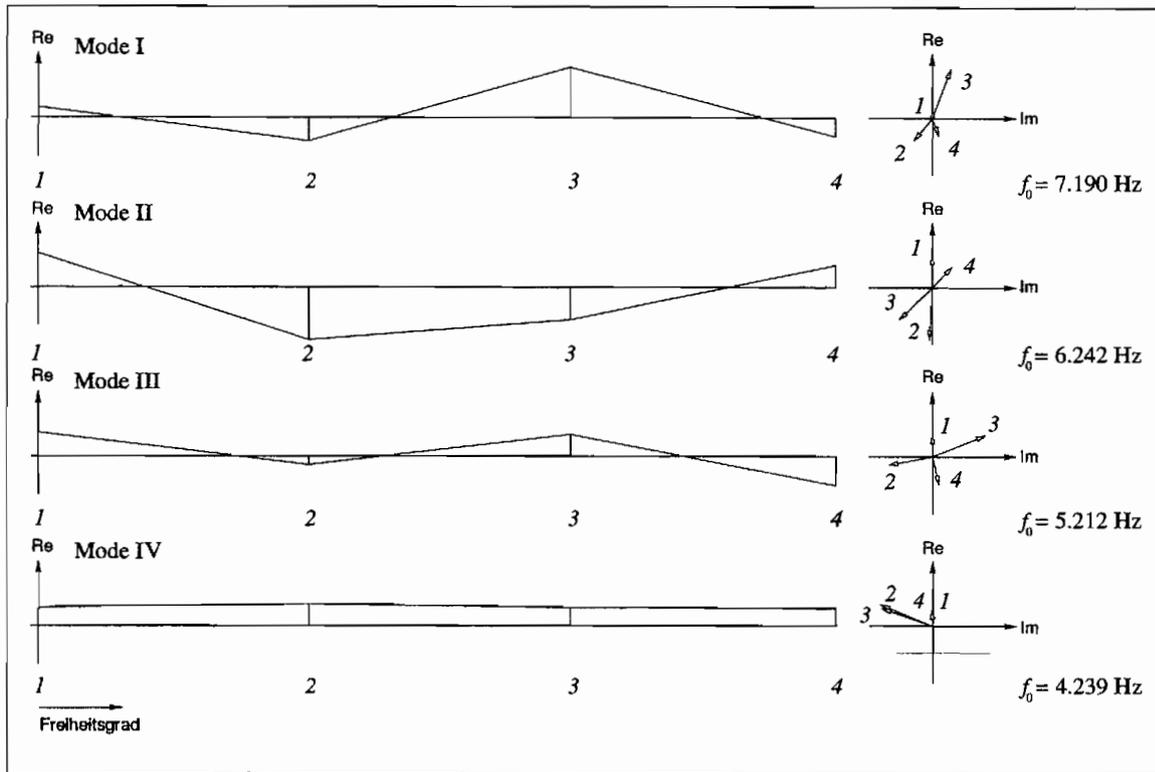


Abbildung 5.27: Eigenformen des Antriebsstrangmodells 4 für $n_p = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 12 \%$, Modellparameter nach Tabelle 5.8

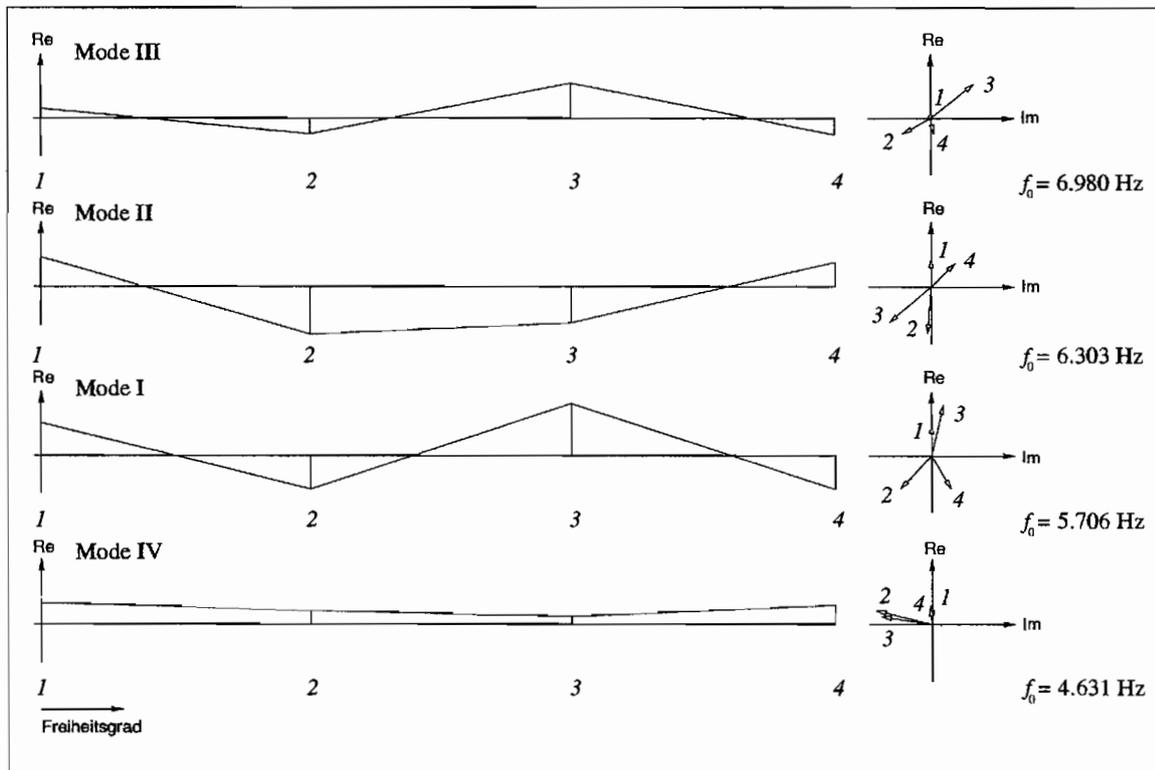


Abbildung 5.28: Eigenformen des Antriebsstrangmodells 5 für $n_p = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 15 \%$, Modellparameter nach Tabelle 5.8

| Modellreihe 9xx $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ | | | | | | | | |
|----------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Mode | Modell für Schlupf s [%] | | | | | | | |
| | 5 | 8 | 10 | 12 | 15 | 20 | 25 | 30 |
| | Eigenfrequenzen f_{0k} [Hz] | | | | | | | |
| I | 7.591 | 7.709 | 7.552 | 7.190 | 5.706 | 5.774 | 6.215 | 6.801 |
| II | 6.158 | 6.216 | 6.220 | 6.242 | 6.303 | 6.363 | 6.243 | 6.107 |
| III | 2.319 | 3.269 | 3.538 | 5.212 | 6.980 | 6.545 | 6.119 | 5.067 |
| IV | .000 | 3.204 | 2.660 | 4.293 | 4.631 | 4.755 | 4.985 | 4.124 |
| | Realteile der Eigenwerte λ_{re} [s^{-1}] | | | | | | | |
| I | -3.260 | -5.598 | -7.274 | -11.078 | -7.483 | -4.138 | -4.130 | -4.124 |
| II | -.244 | -.331 | -.448 | -.701 | -.857 | -1.066 | -1.685 | -1.039 |
| III | -7.068 | -13.009 | -15.252 | -15.847 | -18.431 | -20.212 | -16.092 | -19.535 |
| IV | -.001 | -23.893 | -25.775 | -29.098 | -25.220 | -22.192 | -20.075 | -24.872 |

Tabelle 5.9: Eigenwerte der Antriebsstrangmodelle für die Antriebsstrangparameter nach Tabelle 5.8

Da in Abschnitt 5.3 die Modelle der Reihe 9xx, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, den größten Einfluß auf die Modelleigenwerte zeigen, werden sie auch für die hier durchgeführte Untersuchung verwendet. In Tabelle 5.9 sind die Eigenfrequenzen und die zugehörigen Realteile der 8 Antriebsstrangmodelle mit unterschiedlichem Schlupf der Kupplung angegeben. Die Zuordnung der Eigenfrequenzen zu den Moden, erfolgt, wie beschrieben, über die Beträge der Realteile λ_{re_k} der Dämpfung. Die Verläufe der relevanten Moden sind durchgezogen dargestellt.

In Abbildung 5.25 ist der Verlauf der Eigenfrequenzen der Moden I, II, III und IV für das Antriebsstrangmodell in Abhängigkeit des Schlupfes s dargestellt. In der Abbildung 5.26 sind entsprechend die zugehörigen Realteile aufgetragen. Der Mode II zeigt über den gesamten Schlupfbereich nur eine geringfügige Veränderung der Eigenfrequenz sowie der Dämpfung. Der Verlauf der Eigenfrequenz des Mode I zeigt dagegen einen starken Abfall von Modell 4 zu Modell 5 um ca. 2.5 Hz. Interessant hierbei ist, daß bis Modell 4 die Eigenfrequenz von Mode I oberhalb der des Mode II und ab Modell 5 unterhalb der des Mode II liegt. Damit findet im Betriebspunkt $s = 15 \%$ ein Wechsel der Eigenformen für die höchste Eigenfrequenz statt. Für eine genauere Betrachtung dieses Wechsels werden die Eigenformen von Modell 4 und Modell 5 analysiert. In Abbildung 5.27 sind die Eigenformen des Antriebsstrangmodells mit Schlupf $s = 12 \%$ und in Abbildung 5.28 mit $s = 15 \%$ dargestellt. Der Vergleich der Eigenformen der jeweils höchsten Eigenfrequenz zeigt, daß eine eindeutige Identifizierung der Eigenfrequenz des Mode I durch eine Zuordnung der Eigenformen nicht möglich ist, da der Mode I eine ähnliche Eigenform besitzt wie der Mode III. Das bedeutet, daß die Eigenform des Antriebsstrangmodells allein kein Kriterium dafür bildet, ob die Eigenfrequenz $f_0 = 5.483 \text{ Hz}$ dem Mode I oder dem Mode III zuzuordnen ist. Die eindeutige Zuordnung der systemrelevanten Moden zu den Eigenfrequenzen ist nur über die Größe der Realteile λ_{re} möglich.

| | | |
|--------------|-------|-------------------|
| $\theta_1 =$ | 2 | kg m ² |
| $\theta_2 =$ | 1.533 | kg m ² |
| $\theta_3 =$ | 0.890 | kg m ² |
| $\theta_4 =$ | 2 | kg m ² |
| $k_1 =$ | 1200 | Nm/rad |
| $k_2 =$ | 1200 | Nm/rad |

Tabelle 5.10: Modellparameter für das Beispielsystem nach Abbildung 5.3

| Mode | Eigenfrequenzen f_{0_k} [Hz] | Realteile λ_{re_k} [s ⁻¹] |
|------|-----------------------------------|--------------------------------------------------|
| I | 5.483 | -9.935 |
| II | 6.786 | .252 |
| III | 7.664 | -17.310 |
| IV | 4.619 | -25.141 |

Tabelle 5.11: Eigenwerte des Modells Reihe 9xx, $s = 15 \%$ für den Antriebsstrang nach Tabelle 5.10

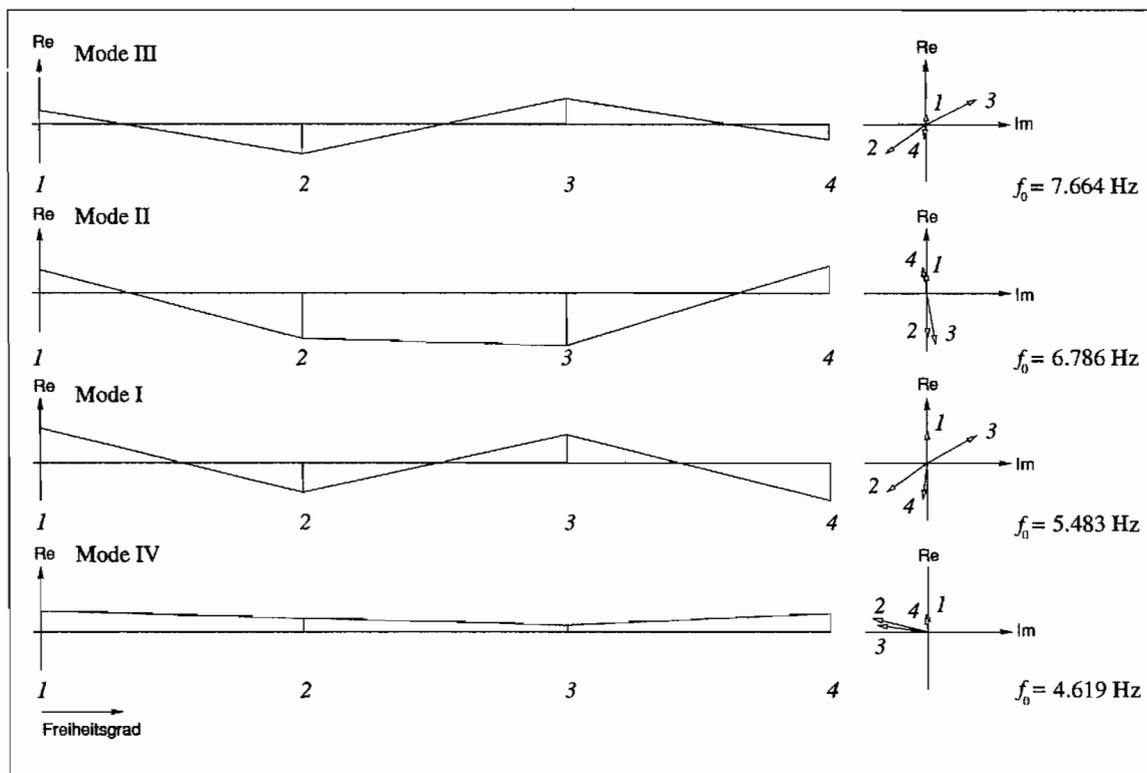


Abbildung 5.29: Eigenformen des Antriebsstrangmodells 5 für $n_p = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 15 \%$, Modellparameter nach Tabelle 5.10

An dieser Stelle soll auf ein spezielles Problem hingewiesen werden, das für bestimmte Eigenformen des linearen Antriebsstrangmodells auftreten kann. Wird die Drehträgheit des Pumpenfreiheitsgrades nochmals um 0.5 kg m^2 verringert, ergeben sich die Modellparameter des Antriebsstrangs nach Tabelle 5.10. Die Eigenwertanalyse zeigt für das Modell mit Schlupf = 15 % die Ergebnisse nach Tabelle 5.11. Eine mögliche Erklärung für den positiven Realteil des Mode II kann dadurch gegeben werden, daß in der entsprechenden Eigenform die beiden Kupplungslaufräder, die Freiheitsgrade 2 und 3, nur eine geringe Relativbewegung vollziehen. In Abbildung 5.29 weisen für Mode II deshalb die Zeiger dieser Freiheitsgrade kaum einen Phasendifferenz auf. Für solche Moden macht sich die leichte Unsymmetrie der dynamischen Dämpfungsmatrix bemerkbar, die sich in der nicht exakten Übereinstimmung der Nebendiagonalelemente $d_{12}(j\omega)$ und $d_{21}(j\omega)$ ausdrückt, s. Abbildung 4.5. Erzwingt man die Symmetrie, z.B. durch identische Parameter für diese Elemente, erhält man für diese Moden negative Realteile. Die Moden mit einer geringen Phasendifferenz der Kupplungsfreiheitsgrade müssen als Einschränkung gesehen werden.

Die wesentlichen Ergebnisse dieses Kapitels werden kurz zusammengefaßt:

- Mit den linearen Black-Box-Modellen ist eine Eigenwertanalyse des Antriebsstrangs für einen Betriebspunkt der hydrodynamischen Kupplung möglich, ohne daß das Kupplungsmodell an eine bestimmte Frequenz angepaßt werden muß.
- Durch die Formulierung der Kupplung als lineares Black-Box-Modell treten bei der Eigenwertanalyse des Antriebsstrangs Eigenwerte und Eigenformen auf, die nicht dem realen Systemverhalten zugeordnet werden können. Diese irrelevanten Moden lassen sich anhand ihrer wesentlich höheren Dämpfung (Realteile der Eigenwerte) von den für das reale System relevanten Moden gut unterscheiden und sind für die Beurteilung des Resonanzverhaltens des Antriebsstrangs ohne Bedeutung.
- Die Größe der Veränderung der Eigenwerte und Eigenformen hängt stark vom gewählten Betriebsbereich der Pumpendrehzahl ab. Den stärksten Einfluß des Schlupfes zeigen die Modelle mit der mittleren Pumpendrehzahl $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, da hier die hydrodynamische Wechselwirkung der Kupplung für die untersuchten Betriebsbereiche am größten ist. Die relative Veränderung zwischen der höchsten und der niedrigsten auftretenden Eigenfrequenz beträgt für den Turbinenstrangs ca. 20 %. Ein stärkerer Einfluß der hydrodynamischen Kupplung auf das Resonanzverhalten des Antriebsstrangs ist für höhere Pumpendrehzahlen zu erwarten.

Kapitel 6

Die Versuchsaufbauten

In diesem Kapitel wird zunächst der allgemeine Aufbau des Versuchsstandes erläutert, an dem die experimentellen Arbeiten durchgeführt worden sind. Anschließend wird auf die Auslegung und die Realisierung des Versuchsantriebsstrangs eingegangen und die untersuchten Antriebsstrangaufbauten beschrieben. Der letzte Abschnitt befaßt sich mit der Modellierung der für die Antriebsstranguntersuchungen neu konstruierten Stranglelemente.

6.1 Der Versuchsstand

6.1.1 Konzept und Aufbau

Die vorgestellten experimentellen Untersuchungen in dieser Arbeit sind an einem hochdynamischen Verspannungsprüfstand der *Arbeitsgruppe für Numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik* durchgeführt worden. Das Grundkonzept des Versuchsstandes geht auf die Arbeiten im Sonderforschungsbereich 278 *Hydrodynamische Leistungsübertragung* zurück. Es wurde ein Prüfstand aufgebaut, mit dem das dynamische Verhalten von hydrodynamischen Wandlern und Kupplungen untersucht werden konnte. Da für die Systemerregung bei der experimentellen Identifikation große Beschleunigungen der Laufräder an Pumpen- und Turbinenseite realisiert werden müssen, wurden hohe Anforderungen an die Dynamik der Antriebsmaschinen gestellt. Aus diesem Grund wurde der Versuchsstand mit hydrostatischen Antrieben ausgerüstet, die nach dem Prinzip der Sekundärregelung arbeiten.

Bei sekundärgeregelten Antrieben wird durch die mit einem Elektromotor angetriebene Hydropumpe, die sogenannte Primäreinheit, eine Druckdifferenz Δp im Hydrauliksystem aufgebaut. Dabei wird das Druckniveau durch den Ladezustand der im Netz vorhandenen Hydraulikspeicher mitbestimmt. Als Verbraucher sind die eigentlichen Antriebseinheiten, die Sekundäreinheiten, angeschlossen, die hydraulische Leistung in mechanische und umgekehrt umsetzen können. Durch die Hydraulikspeicher ist es möglich, kurzzeitig höhere Leistung aus dem Netz zu nehmen als die Primäreinheit liefern kann, das heißt, es werden Volumenspitzen abgedeckt. Die hydrostatischen Sekundäreinheiten entnehmen im Motorbetrieb (Antrieb) dem Hydrauliksystem Energie; arbeiten sie als Pumpe (Bremse) führen sie diesem

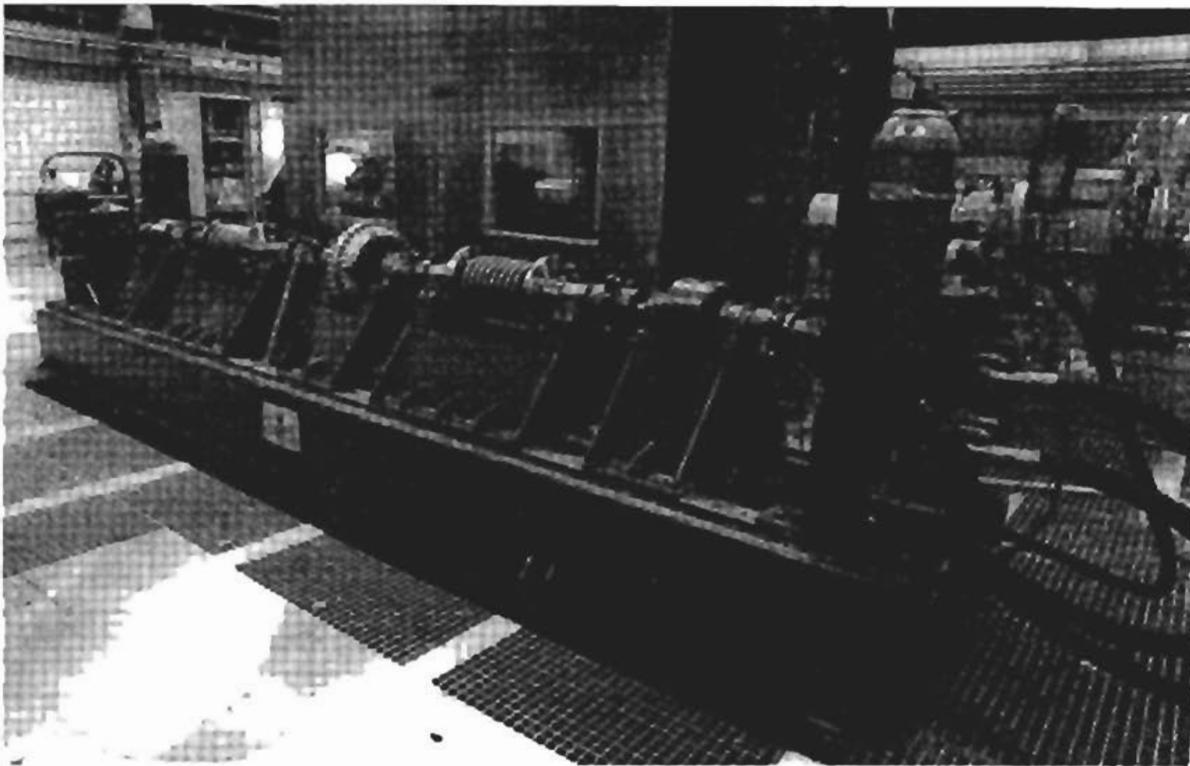


Abbildung 6.1: Verspannungsprüfstand mit sekundärgeregelten hydrostatischen Antriebseinheiten (Versuchsaufbau III)

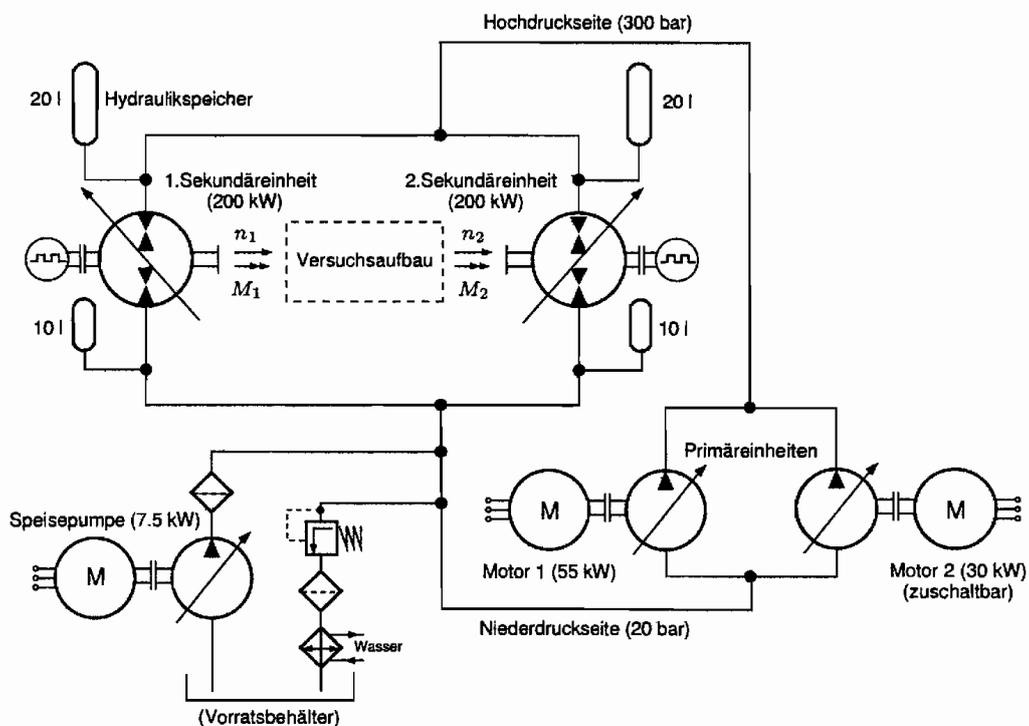


Abbildung 6.2: Vereinfachter Hydraulikplan des Versuchsstands

Energie zu; die Speicher werden hierdurch aufgeladen. Dadurch muß bei einem Verspannungsprüfstand, bei dem eine Sekundäreinheit als Motor und die andere als Bremse arbeitet, die

Primäreinheit (-einheiten) lediglich die Verlustleistung decken. Damit beim Einschalten die Primäreinheiten nicht beschädigt werden, wird bei Inbetriebnahme des Versuchsstandes das Hydrauliknetz zunächst durch eine Speisepumpe auf ca. 20 bar vorgespannt.

Die hydrostatischen Komponenten der Primär- als auch der Sekundäreinheiten sind Axialkolbenmaschinen in Schrägscheibenbauart. Bei den Sekundäreinheiten sind neun Kolben um vier Grad geneigt auf einem Kegelmantel in einer Trommel angeordnet, die um ihre Mittelachse rotieren kann. Die Steuerung der Ölförderung erfolgt über eine feststehende Steuerscheibe, die über zwei halbkreisförmige Schlitze verfügt, die zum einen mit Hochdruck zum anderen mit Niederdruck beaufschlagt sind. Die Kolben stützen sich über Gleitschuhe gegen die verstellbare Schrägscheibe ab. Die Verstellung der Schrägscheibe wird elektrohydraulisch über einen Stellzylinder vorgenommen, der im Maschinengehäuse integriert ist. In Abhängigkeit des Stellwinkels (Schwenkwinkel) der Schrägscheibe bewirken die Kolben an der Hochdruckseite der Steuerscheibe ein Drehmoment um die Maschinenachse; dabei ist das erzeugte Drehmoment proportional zum Stellwinkel. Damit lassen sich drehzahlunabhängig beliebig hohe Momente bis zum Maximalmoment erzeugen, wodurch bei einer geeigneten Regelung eine hohe Dynamik der Versuchskomponenten möglich wird. In Tabelle 6.1 sind die technischen Daten der hydrostatischen Einheiten angegeben.

| Primäreinheiten | | |
|------------------------------|---------------------------------------------|------------------------|
| Bauart : | Axialkolbeneinheit in Schrägscheibenbauart | |
| Systemdruck Δp : | 280 bar | |
| | Hauptpumpe | Zusatzpumpe |
| Modell : | Typ A4VSO 71 DR | Typ A4VSO 40 DR |
| Leistung P : | 55 kW | 30 kW |
| Drehzahl n : | 1500 min ⁻¹ | 1500 min ⁻¹ |
| Schluckvolumen V_g : | 71 cm ³ | 40 min ⁻¹ |
| Antrieb : | Asynchronmotor 55 kW | Asynchronmotor 30 kW |
| Sekundäreinheiten | | |
| Bauart : | Axialkolbeneinheit in Schrägscheibenbauart | |
| Modell : | <i>Mannesmann Rexroth</i> Typ A4VSG 250 DS1 | |
| Systemdruck Δp : | 280 bar | |
| max. Leistung P_{max} : | 200 kW | |
| max. Drehzahl n_{max} : | 1860 min ⁻¹ | |
| max. Drehmoment M_{max} : | 1060 Nm | |
| Schluckvolumen V_g : | 250 cm ³ | |
| min. Stellzeit t_{Stell} : | 0.06 s | |
| Trägheitsmoment θ : | 0.0959 kg m ² | |

Tabelle 6.1: Technische Daten der Primär- und Sekundäreinheiten

Der gesamte Versuchsstand teilt sich in drei Baugruppen auf: die Versorgungseinheit (Öltank, Primäreinheiten mit elektrischen Antrieben, etc.), die Steuereinheit zur Regelung und Überwachung der Anlage und den eigentlichen Prüfstand mit den Sekundäreinheiten. Letztere sind in ihren Haltekonstruktionen auf einem sechs Meter langen Grundrahmen aus einer torsionssteifen Schweißkonstruktion mit zwei Führungsbahnen flexibel montierbar. Sie werden zusammen mit der Verrohrung und je einem Speicher für Hoch- und Niederdruck auf

dem Grundrahmen verschiebbar befestigt. Zwischen den Antriebseinheiten werden die Versuchsaufbauten eingesetzt. Hierbei sind alle Komponenten auf eigenen Lagerböcken montiert, so daß sich ein modularer Aufbau des gesamten Versuchsantriebsstrangs ergibt. Zur Verbindung der einzelnen Stranglelemente werden drehsteife Stahllamellen-Kupplungen (*Rader*) verwendet, die eine spielfreie Kraftübertragung auch bei wechselnder Belastungsrichtung gewährleisten. Aus dem gleichen Grund werden für die Welle-Nabenverbindungen aufwendig zu fertigende Zahnwellen-Verbindungen eingesetzt. Die Stahllamellen-Kupplungen ermöglichen den Ausgleich von Radial-, Axial- und Winkelversatz zwischen den Strangkomponenten.

6.1.2 Analoge und digitale Regelung der Antriebseinheiten

Bei sekundärgeregelten Systemen handelt es sich um einen Drehzahlregelkreis mit der Stellgröße Schwenkwinkel bzw. Drehmoment, d.h. die hydrostatische Antriebseinheit sucht sich selbsttätig das erforderliche Drehmoment, um bei dem jeweils vorhandenen Betriebsdruck die vorgegebene (Soll-) Drehzahl halten zu können. Aufgrund des Prinzips der Sekundär-

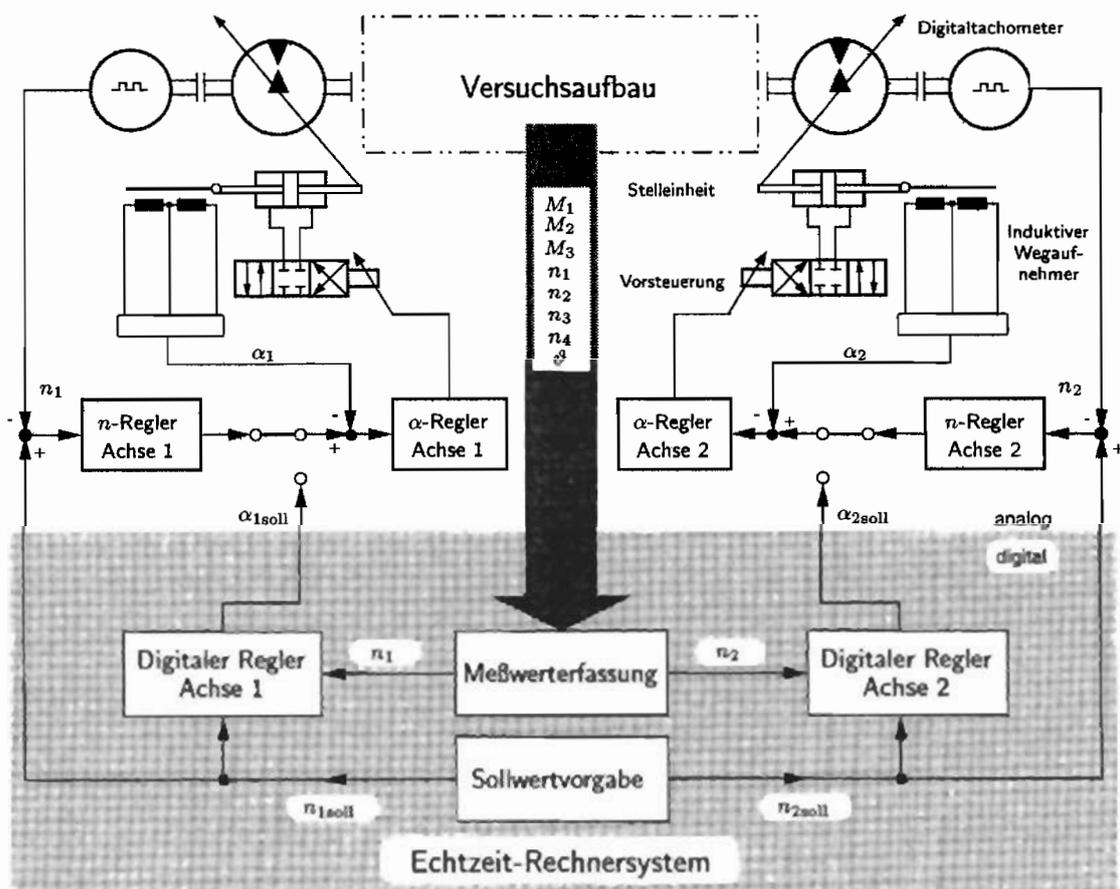


Abbildung 6.3: Analoger und digitaler Drehzahlregelkreis des Versuchszustandes

regelung können die Antriebseinheiten unabhängig voneinander drehzahl geregelt betrieben werden. Hierzu ist eine digitale Tachomaschine spielfrei am zweiten freien Wellenende der Axialkolbeneinheiten angebracht. Integriert ist ein mechanischer Fliehkraftschalter, der bei Überdrehzahl ein Schaltsignal für Notaus ausgibt. Am Stellkolben und mit diesem über

eine schiefe Ebene kraftschlüssig verbunden ist ein induktiver Wegaufnehmer zur elektrischen Rückführung des Schwenkwinkels. Die dem Drehzahlkreis unterlagerte Schwenkwinkelrückführung (Kaskadenregelung) verbessert die Systemstabilität und kann bei Bedarf für eine Drehmomentregelung der Einheit eingesetzt werden. Der Stellzylinder wird über ein angebautes elektrohydraulisches Servoventil angesteuert.

Die analoge Regelung wird von der werkseitig eingebauten Reglerkarte VT 12000 (*Manesmann Rexroth*) übernommen. Die Reglerkoeffizienten des PID-Drehzahlreglers und des PD-Schwenkwinkelreglers lassen sich von außen über Potentiometer in bestimmten Grenzen einstellen. Die Drehzahlwerte werden an den Tachomaschinen der Sekundäreinheiten erfaßt, s. hierzu Abbildung 6.3. Die Drehzahlsollwerte können wahlweise per Hand über Potentiometer oder über das Echtzeitrechnersystem, auf das weiter unten näher eingegangen wird, eingegeben werden.

Die analoge Regelung setzt der Dynamik der Antriebseinheiten Grenzen. Erregungen mit hohen Beschleunigungen, wie z.B. Drehzahlsprungfunktionen mit einer Flankensteilheit bis zu $10000 \text{ min}^{-1}/\text{s}$, die bei der Identifikation der Kupplung mit nichtlinearen Modellansätzen notwendig sind, können nicht realisiert werden. Da zur Sollwertvorgabe und Datenerfassung am Versuchsstand bereits ein Echtzeitrechnersystem vorhanden war, ist in Eigenarbeit der Arbeitsgruppe eine digitale Drehzahlregelung entwickelt worden [7], mit der sich entsprechend hochdynamische Erregungen erzeugen lassen. An beiden Sekundäreinheiten kann wahlweise der analoge oder digitale Drehzahlregler verwendet werden. Der innere Regelkreis der Schwenkwinkelrückführung bleibt in beiden Fällen erhalten, so daß die Überwachungsaufgaben der Anlage auch bei digitaler Drehzahlregelung von der SPS-Einheit übernommen werden können. Als Regelalgorithmus wird für jede Achse ein PID-Regler verwendet, dessen Reglerkoeffizienten menügesteuert einstellbar sind.

6.1.3 Meß- und Rechentechnik

Bei den experimentellen Untersuchungen auf dem Versuchsstand werden die Drehzahlen und Drehmomente an unterschiedlichen Stellen des Aufbaus gemessen. Die Drehzahlen an den Enden der Versuchsaufbauten werden über die an die beiden Antriebseinheiten angeflanschten Digitaltachometer erfaßt. Diese Inkrementaldrehgeber besitzen eine Auflösung von 1250 Strichen pro Umdrehung. Das Meßsignal in Form von Rechteckimpulsen wird durch einen Frequenz/Spannungswandler in eine Gleichspannung umgewandelt. Hierbei entsprechen $\pm 10 \text{ V}$ einer Drehzahl von $\pm 2000 \text{ min}^{-1}$. Zur Erfassung der Drehzahlen innerhalb eines längeren Antriebsstrangaufbaus wurden zwei zusätzliche Drehzahlmeßstellen speziell angefertigt. Über einen Zahnriemenantrieb wird ein Inkrementaldrehgeber (*Heidenhain ROD 420*) mit 1000 Strichen pro Umdrehung mit einem Übersetzungsverhältnis von $i = 2$ angetrieben, s. Abbildung 6.4. Mit diesen Spezifikationen sind Drehzahlschwankungen von $\pm 5 \text{ min}^{-1}$ bei einer Frequenz $f = 15 \text{ Hz}$ noch erfaßbar. Die antreibende Zahnscheibe ist an eine Stahllamellenkupplungsnahe eines Strangelements angeflanscht. Der Drehgeber sitzt an einem Gehäuse, das die Lagerung der Welle übernimmt, auf der die Sekundärzahnscheibe sitzt. Drehgeber und Welle sind über eine zugehörige biegeeweiche Steckkupplung (*Heidenhain*) verbunden, um Biegebelastung des empfindlichen Drehgebers zu vermeiden. Zur Spannung des Zahnriemens kann die Halterung der Meßstelle, die senkrecht unterhalb der Strangachse



Abbildung 6.4: Drehzahlmeßstelle mit Zahnriemenantrieb

am Lagerbock befestigt ist, in einer Führung verschoben werden. Die Fixierung geschieht durch 4 Schraubverbindungen in Langlöchern. Die Konstruktion gewährleistet aufgrund der niedrigen Trägheit des Drehgebers mit der Welle, bezogen auf die Steifigkeit des Zahnriemens, eine spielfreie und phasengleiche Übertragung der Drehzahl des Kupplungsflansches im Antriebsstrang. Die Inkrementaldrehgeber liefern ein TTL-Rechtecksignal, das von einer an der Arbeitsgruppe in eigener Arbeit entwickelten Periodenmeßkarte ausgewertet wird. Dazu

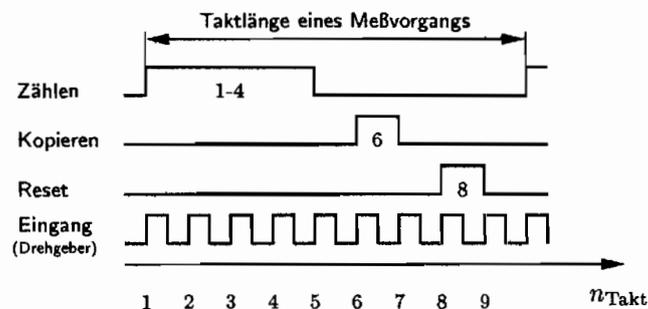


Abbildung 6.5: Timing-Diagramm der Periodenmesskarte

wird auf der Karte ein Referenzsignal von $f_{\text{ref}} = 50 \text{ MHz}$ verwendet, das von einem Quarz erzeugt wird. Für die Drehzahlmessung wird über die Dauer von 4 Takten des TTL-Signals gemittelt, s. Abbildung 6.5. In einem 16-Bit Zähler wird die Anzahl der innerhalb der Meßzeit (Takte 1-4) verstrichenen Periodendauern T_{ref} des Referenzsignals abgelegt. In Takt 6

wird der Zählerstand in einen Speicher kopiert und in Takt 8 für die nachfolgende Messung zurückgesetzt. Der aktuelle Zählerstand ist im Speicher bis zum nächsten Überschreiben abrufbar. Die Momentandrehzahl im Antriebsstrang ergibt sich dann aus der Beziehung

$$n = \frac{f_{\text{ref}} \cdot k_{\text{mess}} \cdot v}{z \cdot i} \cdot \frac{60}{s}$$

- f_{ref} : Referenzfrequenz, 50 MHz
- k_{mess} : Taktanzahl für Mittelung der Messung
- v : Vorteiler
- z : Zählerstand
- i : Übersetzungsverhältnis der Zahnscheiben
- s : Strichanzahl des Drehgebers

Bei hohen Drehzahlen kann die Eingangstaktfrequenz über einen Vorteiler v , der mittels Jumper eingestellt wird, reduziert werden, so daß nur jeder zweite, vierte oder achte TTL-Impuls berücksichtigt wird. Die Periodenmessung wird vom Takt des Eingangssignals gesteuert. Daraus ergibt sich eine Mindestdrehzahl, ab der in dem 16-Bit Zähler (in der Zeit für $k_{\text{mess}} = 4$ Takte) gerade kein Überlauf auftritt. Die Mindestdrehzahl beträgt für $v = 2$ und $i = 2$: $n_{\text{min}} = 184 \text{ min}^{-1}$.

Zur Messung der Drehmomente werden drei schleifringlose Drehmoment-Meßwellen (*Hottinger Baldwin*, Typ T30 FN/2k) verwendet, die nach dem DMS-Prinzip arbeiten. Das Ausgangssignal ist eine modulierte Pulsfrequenz, die im Meßverstärker in ein Gleichspannungssignal umgesetzt wird. Hierbei entsprechen $\pm 10 \text{ V}$ einem Drehmoment von $\pm 2000 \text{ Nm}$.

Zur Überwachung der Öltemperatur im Inneren der Kupplung werden zwei NTC-Temperaturfühler (*Bosch*) eingesetzt, die im Kupplungsgehäuse eingeschraubt werden. Ihr Signal wird über Schleifringe abgegriffen.

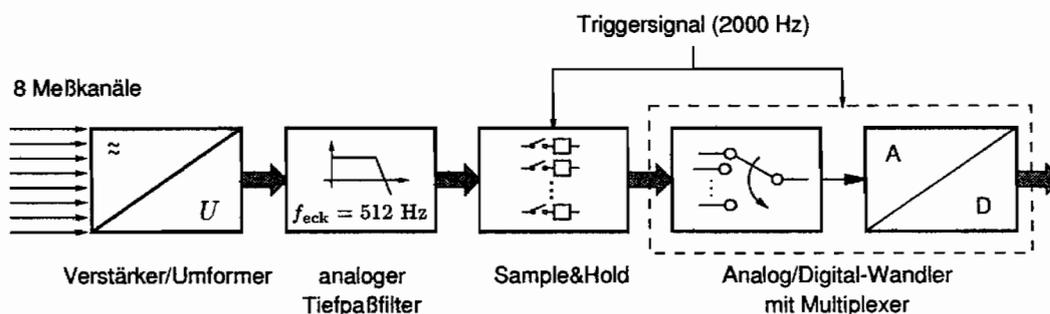


Abbildung 6.6: Erfassung der Meßdaten

Die Kontrolle der verschiedenen Versuchsaufgaben einschließlich der Meßdatenerfassung und der digitalen Regelung wird durch ein Echtzeitrechnersystem übernommen, s. Abbildung 6.7. Dabei wird ein VME-Bus System verwendet, das mit einer *Motorola* Host-CPU (MVME 147) arbeitet. Dem UNIX-Betriebssystem ist das Echtzeitsystem VMEexec überlagert. Die Host-CPU-Karte ist über den VME-Bus mit vier weiteren CPU-Karten, den Targets, verbunden (zwei MVME 133 XT mit je 4 MB RAM und zwei MVME 167 mit je 8 MB RAM). Auf

den Targets laufen die Programme für die Meßwernerfassung, die digitale Regelung und die Sollwertvorgabe des Versuchsstandes. Die Meßdaten werden bei laufender Messung unter Echtzeit auf den Target-RAM geschrieben. Die Daten können anschließend unter UNIX auf Harddisk gespeichert und weiterverarbeitet werden.

Zur Erfassung der Meßdaten werden die Gleichspannungen zwischen ± 10 V mit einem analogen Tiefpaß (Anti-Aliasing, Eckfrequenz 512 Hz) gefiltert. Die vorhandene Hardware läßt die Filterung von 8 Kanälen gleichzeitig zu. Für die Digitalisierung der Daten wird von einem programmierbaren Timer im Zeittakt der vorgegebenen Abtastfrequenz von

$$f_{\text{Tast}} = 2000 \text{ Hz}$$

ein Interrupt erzeugt, der die Interrupt-Service-Routine (ISR) startet. Die ISR erzeugt ein Triggersignal, das über ein Sample & Hold (*Datel DVME 645*) den 12 Bit Analog/Digital-Wandler (*Datel DVME 601*) anspricht. Parallel zum Abtastvorgang werden die Sollwerte neu berechnet und über einen Digital/Analog-Wandler (*DVME 628*) ausgegeben.

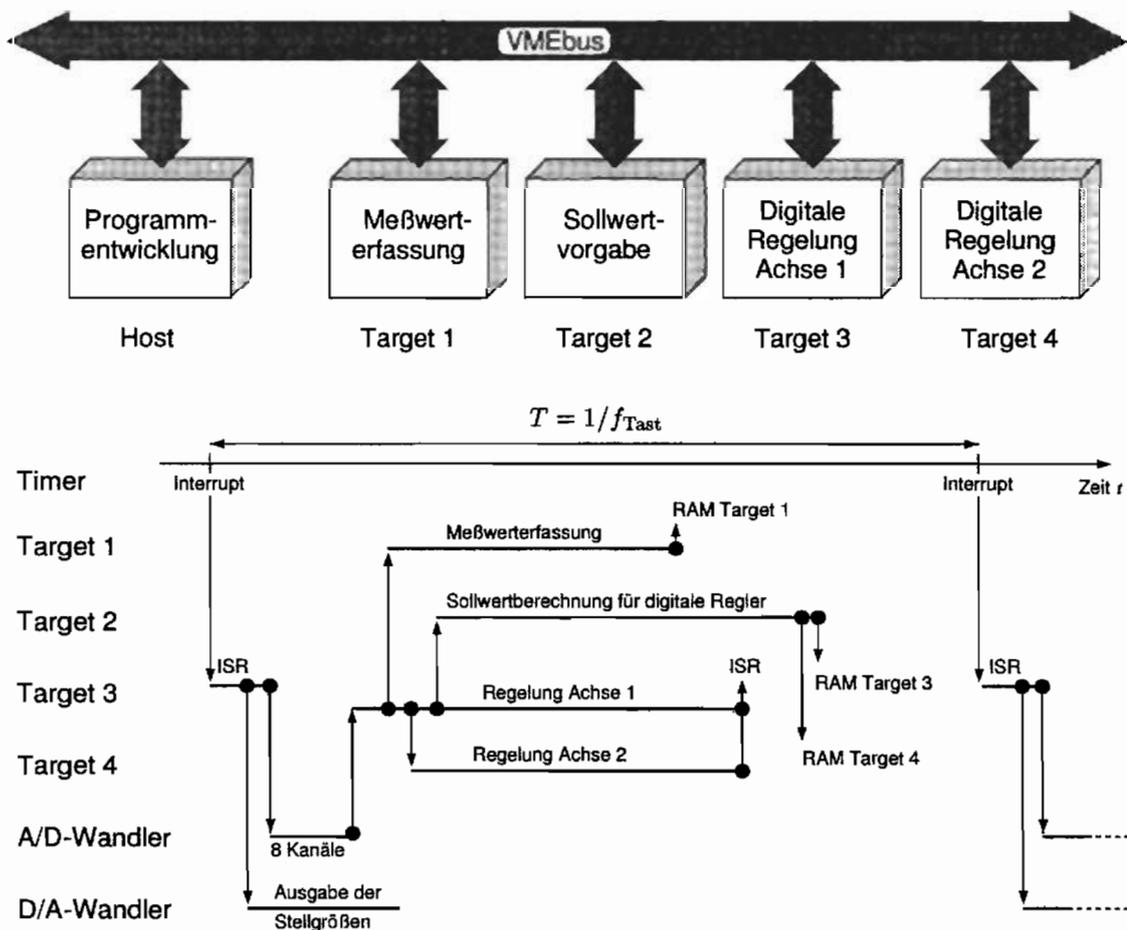


Abbildung 6.7: Timing-Diagramm des Echtzeitsystems

Wird der Versuchsstand mit der digitalen Regelung betrieben, beträgt die tatsächliche Abtastfrequenz bei Vorgabe des Timers von 2000 Hz nur

$$f_{\text{Tast}} = 1904.8 \text{ Hz.}$$

Durch den gemeinsamen Zugriff der schnellen MVME 167 und der langsameren MVME 133 Karten auf den VME-Bus entstehen Timingprobleme, die die effektive Abtastfrequenz heruntersetzen. Diese muß bei der Auswertung der digitalisierten Daten berücksichtigt werden.

Der zeitliche Ablauf für eine Abtastdauer und die Verteilung der Programmtasks auf die einzelnen CPU-Karten sind in Abbildung 6.7 unten dargestellt.

6.2 Der experimentelle Antriebsstrang

6.2.1 Auslegung

Die linearen als auch die nichtlinearen Black-Box-Modelle der Kupplung gelten für einen Frequenzbereich bis maximal 12 - 15 Hz. Aus dieser oberen Grenze ergibt sich zur Validierung der Modelle innerhalb eines Antriebsstrangs die Forderung, daß die Torsionseigenfrequenzen des experimentellen Aufbaus an der Pumpen- und Turbinenseite diese Grenze nicht überschreiten dürfen. Es werden also Wellenelemente benötigt, mit denen die Realisierung tief abgestimmter Wellenzüge möglich wird. Hierzu ist ein Versuchselement konstruiert worden, das als Zweimassentorsionsschwinger ausgeführt ist. Es ergibt sich für die Konstruktion der folgende Anforderungskatalog:

1. Drehelastische Verbindung zwischen An- und Abtrieb mit Eigenfrequenz nicht über 12 Hz.
2. Lineare Federkennlinie zwischen mindestens $\pm 30^\circ$ Relativverdrehung und geringe Dämpfung, um eine möglichst unkomplizierte und exakte Modellierung der Strangkomponente vornehmen zu können.
3. Modulare Bauweise, so daß sich das Element an beliebiger Stelle auf dem Versuchsstand einfügen läßt und leicht mit den schon vorhandenen Elementen zu verbinden ist.
4. Geringe Massenträgheiten, um hohe Beschleunigungen zur Erregung des Antriebsstrangsystems bei maximalem Drehmoment von $M_{\max} = 1060$ Nm zu realisieren.
5. Begrenzung der Baulänge, da der Aufbau für den gesamten Antriebsstrang durch die Länge von 6 m des Versuchsstandfundamentes eingeschränkt ist.
6. Funktionssicherheit: die Konstruktion muß auf das Maximalmoment M_{\max} des von den Antriebseinheiten erzeugbaren Drehmoments mit Sicherheitsfaktor 2 ausgelegt werden.

Die Eigenkreisfrequenz ω_0 (neben der Starrkörperrotation) des ungedämpften Zweimassenschwingers ist durch

$$\omega_0^2 = k \cdot \frac{\theta_1 + \theta_2}{\theta_1 \cdot \theta_2}$$

bestimmt, so daß die Forderung nach einer niedrigen Eigenfrequenz durch eine geringe Steifigkeit und/oder große Trägheiten erreicht werden kann. Zu den konstruktiven Überlegungen

seien nur zwei Beispiele angegeben. Geht man von einer einfachen Drehstabfeder mit Kreisquerschnitt aus, bedeutet die Verringerung der Steifigkeit entweder eine Verlängerung des Bauteils, die in Widerspruch zur Forderung nach kurzer Baulänge steht, oder eine Verkleinerung des Stabdurchmessers, die eine starke Verringerung der Bauteilfestigkeit bewirkt. Drehelastische Kupplungen auf Kautschuk- oder Kunststoffbasis sind, obwohl sie auf kleinem Bauraum eine lineare Federkennlinie aufweisen können, ebenfalls ungünstig, da sie eine hohe Dämpfung besitzen, die in den meisten Fällen schlecht zu modellieren ist.

Als Drehträgheiten für den experimentellen Antriebsstrang stehen zum einen die Laufräder der hydrodynamischen Kupplung, Pumpen- und Turbinenrad, und zum anderen die Versuchselemente zur Verfügung, auf deren Verbindungswelle eine einfache Drehträgheit montiert ist. Überschlägige Berechnungen mit den sich aus den Konstruktionsunterlagen ergebenden Zahlenwerten für die einzelnen Massenträgheiten ergaben zur Auslegung der benötigten Torsionsfedersteifigkeit einen Wert von ca. $k_t = 600 \text{ Nm/rad}$. Als konstruktive Lösung wird

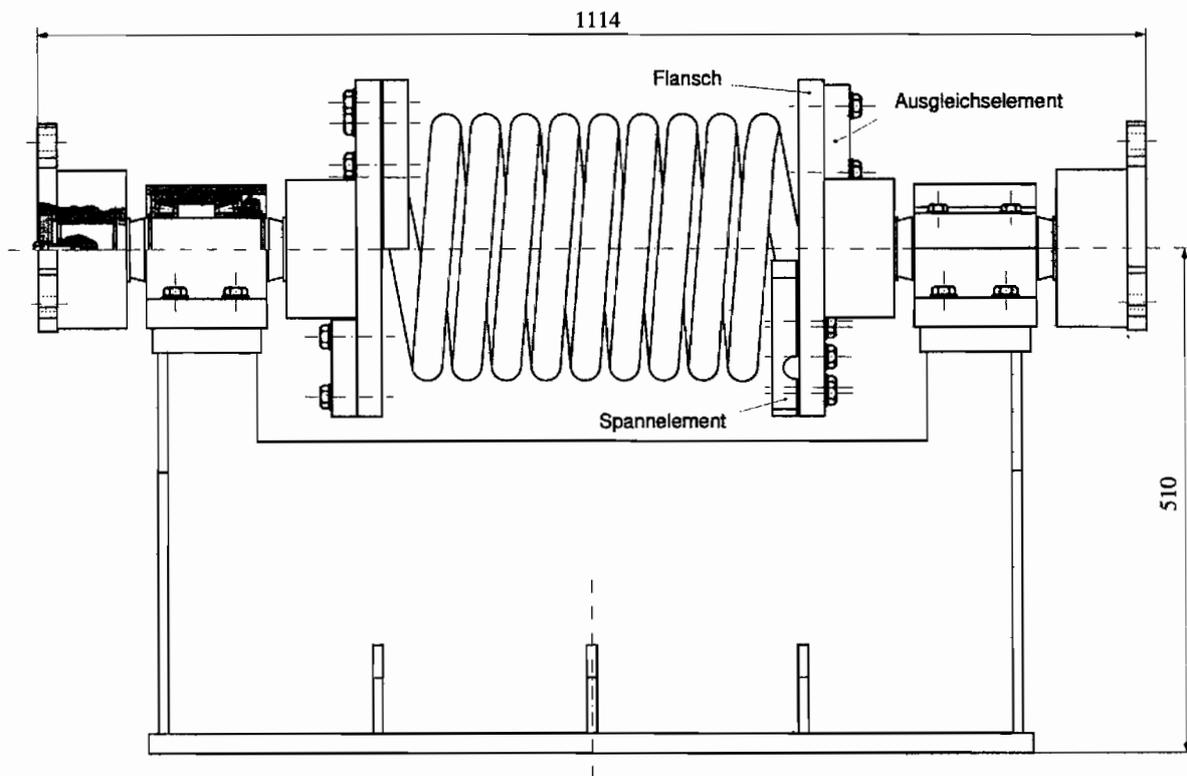


Abbildung 6.8: Federkupplung: drehelastisches Strangelement des experimentellen Antriebsstrangaufbaus (Maße in mm)

eine Schraubenfeder mit Drahtdurchmesser $d = 30 \text{ mm}$ verwendet, die im Antriebsstrang als Torsionsfeder eingesetzt wird. Da die Federdrahtlänge aus fertigungstechnischen Gründen begrenzt ist, werden zwei gleichartige Elemente mit einer Torsionsfedersteifigkeit von 1200 Nm/rad verwendet. Der Federdraht wird bei Verdrehung der Enden auf Biegung belastet, so daß es sich bei dieser Schraubenfeder um eine aufgewickelte Biegefeder handelt. Ihre Enden laufen im letzten Viertel der Windungen jeweils senkrecht zur Längsachse aus, so daß sie in einer Ringnut der An- und Abtriebsflansche eingespannt werden können, s. Abbildung 6.9. Das jeweilige Federende wird mit einem Spannelement durch acht Schrauben in der

| | |
|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Torsionssteifigkeit k_{Fk} : | 1192 Nm/rad |
| Drehträgheit θ_{Fed} : | 0.598 kg m ² |
| maximale Verdrehung bei 1000 Nm $\Delta\varphi_{max}$: | 48 Grad |
| Drahtdurchmesser d : | 30 mm |
| Wicklungsdurchmesser D : | 240 mm |
| Windungsanzahl i : | 9,8 |
| Federdrahtlänge l_1 : | 7.39 m |
| Einbaulänge l_2 : | 452 mm |
| Werkstoff : | 50 CrV 4 |
| Drehträgheit Flansch mit Spann- und Ausgleichselement θ_{F1} : | 0.40 kg m ² |

Tabelle 6.2: Technische Daten der Federkupplung



Abbildung 6.9: Einspannung der Federkupplung

Nut kraftschlüssig fixiert. Zum Massenausgleich des viertelkreisringförmigen Spannelementes wird um 180 Grad versetzt dazu ein Ausgleichselement gleicher Abmessungen angebracht. Aufgrund des fehlenden Bauraumes zwischen Feder und Flansch sitzt das Ausgleichselement auf der gegenüberliegenden Flanschseite, so daß im rotierenden Betrieb ein Kippmoment entsteht. Deshalb ist die Lagerung der Wellen entsprechend steif durch die Verwendung von Kegelrollenlagern ausgeführt worden.

Die fliegend gelagerten Flansche zur Aufnahme der Federenden sind nur über die Feder miteinander verbunden. Eine gemeinsame Fluchtung der beiden Lagergehäuse auf dem Unterbau wird mit Hilfe einer zu diesem Zweck angefertigten Ausrichtwelle erreicht. Alle Welle-Nabe-Verbindungen sind wie bei den schon vorhandenen Versuchselementen als Zahnwellenprofil ausgeführt. Für die Verbindung mit anderen Elementen werden die oben erwähnten Stahllamellenkupplungen verwendet.

Die Auslegung der Feder auf das von den Antriebseinheiten erzeugte maximale Moment von 1060 Nm führt bei der Vorgabe der Federsteifigkeit $k_t = 1200 \text{ Nm/rad}$ zu einer Drahtlänge, die bis an die Grenzen der Fertigungsmöglichkeiten ($l_{1 \text{ max}} = \text{ca. } 8 \text{ m}$) stößt. Die Baulänge des gesamten Rotors wird im wesentlichen durch den Wicklungsdurchmesser D der Feder bestimmt. Ein großer Wicklungsdurchmesser hat bei dieser konstruktiven Lösung den Nachteil, daß sich auch der Durchmesser der Flansche für die Einspannungen und damit deren Massenträgheitsmoment erhöht. Somit ist der festgelegte Wicklungsdurchmesser $D = 240 \text{ mm}$ ein Kompromiß zwischen Baulänge und Massenträgheit des Rotors.

Nach Fertigstellung der Federkupplung wurde versucht, den Rotor auszuwuchten. Dabei wurden die hierzu nötigen Messungen für das dynamische Zwei-Ebenen-Auswuchten mit einem portablen Schwingungsmeßgerät im Betrieb durchgeführt. Es stellte sich heraus, daß ein Auswuchten jeweils nur für eine stationäre Drehzahl möglich ist. Offenbar wandert der Schwerpunkt der Feder je nach Drehzahl unterschiedlich mehr oder weniger von der statischen Ruhelage aus, so daß für jeden Arbeitspunkt die Auswuchtung erneut durchgeführt werden muß. Da die Unwuchten an beiden Flanschen ca. 800 g bei einer Drehzahl von 900 min^{-1} betragen, konnte auf das Anbringen von Ausgleichgewichten verzichtet werden, da die auftretenden Fliehkräfte in dieser Größenordnung keinerlei Auswirkungen auf die Festigkeit der Bauteile haben. Die maximale stationäre Drehzahl wurde jedoch für sämtliche Versuche auf

$$n_{\text{max}} = 900 \text{ min}^{-1}$$

begrenzt.

6.2.2 Die Antriebsstrangaufbauten

In Abbildung 6.10 sind die untersuchten Antriebsstrangaufbauten schematisch in einer Übersicht dargestellt. Die Positionen der Meßstellen sind jeweils gekennzeichnet. Es wurden maximal 4 Drehzahlen und 3 Drehmomente erfaßt. Für die Anordnung der hydrodynamischen Kupplung und der zwei Federkupplungen stehen drei grundsätzliche Möglichkeiten zur Verfügung:

- I. Aufbau mit nur einer Federkupplung
- II. Aufbau mit zwei Federkupplungen an einer Seite der hydrodynamischen Kupplung
- III. Aufbau mit zwei Federkupplungen an verschiedenen Seite der hydrodynamischen Kupplung

Bei den experimentellen Aufbauten sind die folgenden versuchstechnischen Einschränkungen

zu berücksichtigen:

- Die Wahl der Antriebsstrangstruktur beschränkt sich in den Versuchsaufbauten I, II und III auf ein Mehrfreiheitsgradsystem, das maximal 4 Freiheitsgrade besitzt. Da sich jedoch der grundlegende Einfluß der hydrodynamischen Kupplung auf das Resonanzverhalten eines Antriebsstrangs nach Kapitel 5 an einem 4-Freiheitsgradsystem betrachten läßt, ist die Anzahl der Freiheitsgrade für die hier durchgeführten Untersuchungen ausreichend.
- Die Variation der in den Aufbauten verwendeten Drehträgheiten und Federsteifigkeiten ist auf die mit den vorhandenen Stranglelementen möglichen Kombinationen beschränkt. Es läßt sich dadurch z.B. kein Aufbau mit zu der Kupplung symmetrisch verteilten Drehmassen und Federsteifigkeiten realisieren.
- Für eine stabile Regelung des Versuchsstandes, die gleichzeitig zur Systemerregung hohe Drehzahlbeschleunigungen ermöglicht, besteht die Notwendigkeit, in den Antriebsstrangaufbauten direkt an den hydrostatischen Antriebseinheiten Drehträgheiten von ca. 1 kg m^2 zu verwenden.

Aufbau I stellt den einfachsten und auch kürzesten Aufbau dar, er wurde zu ersten Untersuchungen des dynamischen Verhaltens des Strangs mit der Federkupplung verwendet. Zudem konnten hier erste Erfahrungen mit der digitalen Regelung für den Antriebsstrang bei Durchfahren der Resonanz gesammelt werden. Aufgrund der begrenzten Länge des Versuchsstandgrundrahmens können maximal zwei Federkupplungen verwendet werden. In Aufbau II sind beide Federkupplungen an der Pumpenradseite der hydrodynamischen Kupplung angeordnet, so daß der Pumpenstrang zwei Eigenfrequenzen aufweist.

In Versuchsaufbau III wird die hydrodynamische Kupplung zwischen den zwei drehelastischen Elementen eingebaut. Zusätzlich war es notwendig, um eine stabile Drehzahlregelung auf beiden Achsen zu erreichen, jeweils eine Drehträgheit von mindestens 0.5 kg m^2 direkt an die Antriebseinheiten anschließend zu verwenden. Auf die Auswirkungen, die sich durch den Einsatz dieser Drehträgheiten auf das dynamische Verhalten des Antriebsstrangs ergeben, wird bei der Vorstellung der Simulationsrechnungen eingegangen.

6.3 Modellierung der linearen Versuchselemente

Eine Validierung der linearen als auch der nichtlinearen Black-Box-Modelle der hydrodynamischen Kupplung im Antriebsstrang wird erst durch einen Vergleich zwischen Meßergebnissen und Rechenergebnissen möglich. Da die Leistungsfähigkeit der Kupplungsmodelle bewertet werden soll, müssen für die übrigen Stranglelemente möglichst genaue Modelle vorliegen. Wie bei der Vorstellung der Meßergebnisse zu erkennen sein wird, ist die Veränderung der Resonanzfrequenzen für verschiedene Betriebsbereiche der hydrodynamischen Kupplung bei den untersuchten Aufbauten relativ gering. Sie liegt im günstigsten Fall in der Größenordnung von maximal 1 Hz. Da die qualitative und quantitative Veränderung der Eigenfrequenzen des Antriebsstrangmodells in dieser Größenordnung nicht nur vom Kupplungsmodell

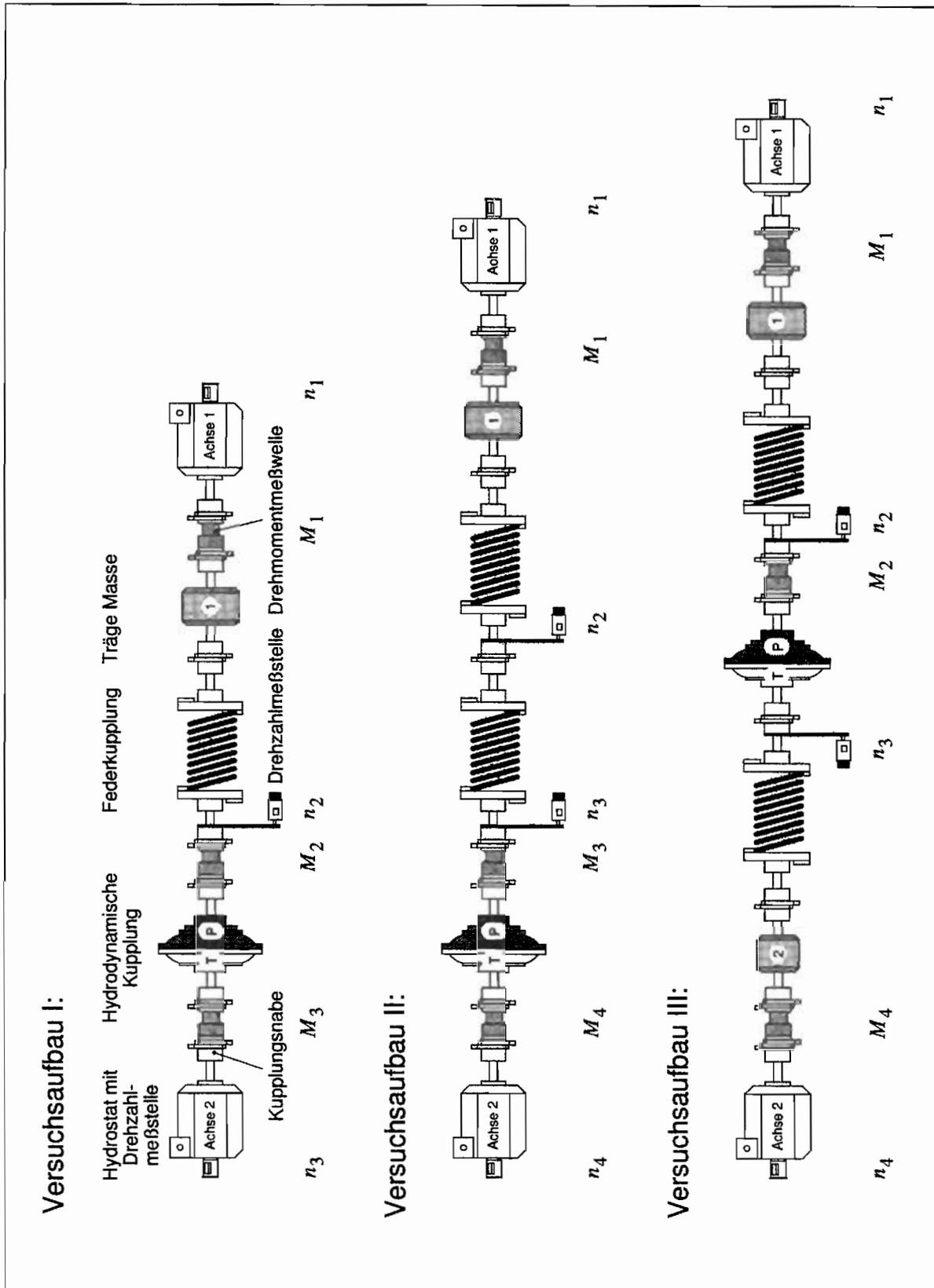


Abbildung 6.10: Versuchsaufbauten I, II, III, Anordnung der Strangelemente und Positionen der Meßgrößen

| Massenträgheitsmomente | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|-------------------|
| Hydrostaten, θ_{A1}, θ_{A2} | : 0.0959 | kg m ² |
| Kupplungsnahe (drehstarre Kupplung) θ_{Kup} | : 0.062 | kg m ² |
| Drehmomentmeßwelle, inkl. Flansche θ_{DM} | : 0.0744 | kg m ² |
| Träge Masse 1, inkl. Kupplungsflansche θ_{TM1} | : 1.190 | kg m ² |
| Träge Masse 2, inkl. Kupplungsflansche θ_{TM2} | : 0.560 | kg m ² |
| Pumpenlaufrad, inkl. Kupplungsflansch und halbe Drehmomentmeßwelle (aus Identifikation) θ_P | : 1.033 | kg m ² |
| Turbinenlaufrad, inkl. Kupplungsflansch und halbe Drehmomentmeßwelle (aus Identifikation) θ_T | : 0.290 | kg m ² |
| Ausrichtwelle, inkl. Kupplungsflansche θ_{AW} | : 0.139 | kg m ² |
| Verbindungswellenstücke θ_W | : 0.0024 | kg m ² |
| Steifigkeiten | | |
| Stahllamellenkupplung k_{Kup} | : $1.74 \cdot 10^6$ | Nm/rad |
| Drehmomentmeßwelle k_{Kup} | : $0.382 \cdot 10^6$ | Nm/rad |
| Drehmomentmeßwelle k_{Kup} | : $0.382 \cdot 10^6$ | Nm/rad |
| Verbindungswellenstücke k_W | : $1.4 \cdot 10^6$ | Nm/rad |

Tabelle 6.3: Mechanische Daten der Antriebsstrangbauteile

sondern auch von den Modellen der übrigen Stranglelemente beeinflusst wird, wird in diesem Abschnitt ausführlich auf deren Modellierung eingegangen.

Hauptaufgabe ist hierbei die Erstellung eines Modells für die drehelastische Federkupplung. Durch Systemidentifikation soll versucht werden, die aus den Konstruktionsunterlagen berechneten Daten zu bestätigen, um diese als Grundlage für die Modellierung der verschiedenen Antriebsstrangaufbauten mit hydrodynamische Kupplung zu verwenden. Hierzu wird ein Versuchsaufbau betrachtet, bei dem die Antriebseinheiten an Achse 1 und Achse 2 nur über die elastische Federkupplung mit verschiedenen als starr anzusehende Bauteile verbunden sind, s. Abbildung 6.11. Daher kann der Aufbau für ein vereinfachtes mechanisches Ersatzmodell als Zweimassenschwinger betrachtet werden.

Für den gedämpften Zweimassenschwinger ist das parametrische Modell des Zweigrößensystems im Frequenzbereich in Form der dynamischen Steifigkeitsmatrix gegeben

$$\mathbf{S}(j\omega) = \begin{bmatrix} j\omega^2 \theta_1 + j\omega \delta + k & -j\omega \delta - k \\ -j\omega \delta - k & j\omega^2 \theta_2 + j\omega \delta + k \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Für die Abschätzung der Eigenfrequenz mit Hilfe der Konstruktionsdaten wird die Dämpfung vernachlässigt, d.h. $\delta = 0$. Wird zunächst die Federkupplung isoliert betrachtet, ist ihr mechanisches Ersatzmodell in Form des Zweimassenschwingers durch ihre Federsteifigkeit k_t und Trägheiten θ_{FK} gegeben. Mit der symmetrischen Aufteilung der Federträgheit θ_{Fed} , ergibt sich nach Tabelle 6.2 und Tabelle 6.3

$$\theta_{FK} = \theta_{F1} + \frac{1}{2}\theta_{Fed} + \theta_{Kup} = 0.760 \text{ kg m}^2. \quad (6.2)$$

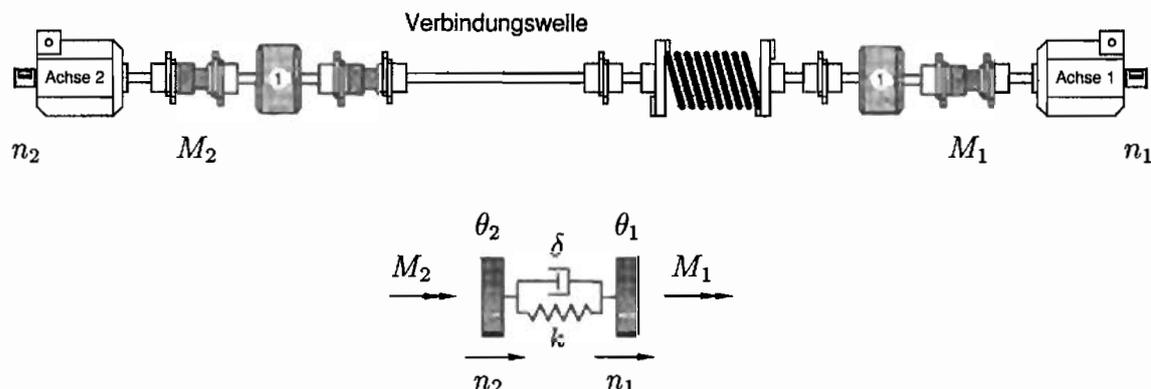


Abbildung 6.11: Versuchsaufbau zur Identifikation der Federkupplung und vereinfachtes mechanisches Ersatzmodell

Nach Abbildung 6.11 und Tabelle 6.3 erhält man für den gesamten Antrieb die physikalischen Modellparameter mit den folgenden Zahlenwerten:

| | | |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|
| θ_1 | $= \theta_{A1} + \theta_{Kup} + \theta_{DM} + \theta_{TM1} + \theta_{FK}$ | $= 2.182 \text{ kg m}^2$ |
| θ_2 | $= \theta_{A2} + \theta_{Kup} + \theta_{DM} + \theta_{TM1} + \theta_{DM} + \theta_{AW} + \theta_{FK}$ | $= 2.396 \text{ kg m}^2$ |
| k | $= k_{FK}$ | $= 1192 \text{ Nm/rad}$ |
| f_0 | | $= 5.14 \text{ Hz}$ |

Tabelle 6.4: Antriebsstrangparameter nach theoretischer Berechnung

6.3.1 Identifikation der Federkupplung

Für einen Vergleich wird der Antriebsstrang mit Hilfe von Frequenzgangmessungen unter Verwendung des Modellansatzes Gl.(6.1) identifiziert. Dieses Verfahren ist auch für die Identifikation der hydrodynamischen Kupplung mit den linearen Modellansätzen angewendet worden [12]. Da anstatt der Drehwinkel die Drehzahlen gemessen werden, wird auf die Formulierung der dynamischen Dämpfungsmatrix übergegangen. Für den Zweimassenschwinger als mechanisches Zweigrößensystem ergibt sich unter Berücksichtigung der Dämpfung der Ansatz

$$D(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \frac{\pi}{30} \mathbf{S}(j\omega) = \frac{\pi}{30} \begin{bmatrix} \frac{j\omega^2 \theta_1 + j\omega \delta + k}{j\omega} & \frac{-j\omega \delta - k}{j\omega} \\ \frac{-j\omega \delta - k}{j\omega} & \frac{j\omega^2 \theta_2 + j\omega \delta + k}{j\omega} \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Zunächst wird das nichtparametrische Modell für diskrete Frequenzen f_k zwischen 0.4 Hz und 8 Hz aus Messungen bestimmt. Hierbei wird das System in jeder Frequenz harmonisch erregt. Gemessen werden alle vier Systemgrößen $M_1(t)$, $M_2(t)$, $n_1(t)$ und $n_2(t)$ im eingeschwungenen Zustand. Zur Bestimmung der vier Elemente $d_{ij}(j\omega)$ im Frequenzbereich müssen pro

angefahrenem Frequenzpunkt f_k zwei linear unabhängige Messungen durchgeführt werden, da jede Messung nur zwei Gleichungen für vier Unbekannte liefert. Die beiden erforderlichen Messungen erhält man dadurch, daß für die erste Messung die Drehzahlerregung an Achse 1 und für die zweite Messung die Drehzahlerregung an Achse 2 stattfindet. Die jeweils andere Achse muß bei diesem Versuchsaufbau drehmomentgeregelt betrieben werden. Zur Aufnahme des nichtparametrischen Modells gelten die in Tabelle 6.5 aufgeführten Vorgaben. Um das nichtparametrische Modell im Frequenzbereich zu erhalten, werden aus den gemes-

| 1. Messung | | |
|-----------------------------------------------------------------------|--------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| | Regelmodus | Sollwert |
| Achse 1 : | drehzahlgeregelt | $500 \text{ min}^{-1} \pm 50 \text{ min}^{-1} \cdot \sin(\omega_k t)$ |
| Achse 2 : | drehmomentgeregelt | 0 Nm |
| 2. Messung | | |
| | Regelmodus | Sollwert |
| Achse 2 : | drehmomentgeregelt | 0 Nm |
| Achse 1 : | drehzahlgeregelt | $500 \text{ min}^{-1} \pm 50 \text{ min}^{-1} \cdot \sin(\omega_k t)$ |
| mit $\omega_k = 2\pi f_k$, $f_k = 0.4, 0.8, 1.2, \dots 8 \text{ Hz}$ | | |

Tabelle 6.5: Vorgaben für die Messung des Frequenzbereichsmodells

senen Zeitverläufen der Systemgrößen die komplexen Amplituden $\tilde{M}_1(\omega_k)$, $\tilde{M}_2(\omega_k)$, $\tilde{n}_1(\omega_k)$ und $\tilde{n}_2(\omega_k)$ ermittelt. Da sich das System bei der Messung im eingeschwungenen Zustand befindet, können die Meßgrößen, stellvertretend mit y bezeichnet, für jeden Frequenzpunkt f_k durch rein harmonische Schwingungen um einen Mittelwert \bar{y} mit der Kreisfrequenz ω_k beschrieben werden. Mit der komplexen Amplitude \tilde{y}_k gilt allgemein

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \bar{y} + \tilde{y}_k e^{j\omega_k t} \\
 &= \bar{y} + (\hat{y}_{\text{re}} + j\hat{y}_{\text{im},k}) e^{j\omega_k t} \\
 &= \bar{y} + \hat{y}_{\text{re},k} \sin(\omega_k t) + \hat{y}_{\text{im},k} \cos(\omega_k t) .
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Realteil, Imaginärteil und Mittelwert der komplexen Amplituden jeder Meßgröße werden durch eine Least-Squares-Schätzung bestimmt. Das hierzu benötigte überbestimmte lineare Gleichungssystem ergibt sich nach Gl.(6.4) aus den n_k in der Meßzeit $T_k = \frac{1}{f_k}$ abgetasteten Meßwerten jeder Meßgröße

$$\begin{bmatrix} 1 & \sin(\omega_k t_1) & \cos(\omega_k t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sin(\omega_k t_{n_k}) & \cos(\omega_k t_{n_k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y} \\ y_{\text{re},k} \\ y_{\text{im},k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ \vdots \\ y(t_{n_k}) \end{bmatrix} . \tag{6.5}$$

Mit den komplexen Amplituden \tilde{y}_k aus der 1. und der 2. Messung ($|_1$ und $|_2$) wird die dynamische Dämpfungsmatrix für jeden Frequenzpunkt bestimmt

$$\mathbf{D}(j\omega_k) = \begin{bmatrix} d_{11}(j\omega_k) & d_{12}(j\omega_k) \\ d_{21}(j\omega_k) & d_{22}(j\omega_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{1,k|1} & \tilde{M}_{1,k|2} \\ \tilde{M}_{2,k|1} & \tilde{M}_{2,k|2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{n}_{1,k|1} & \tilde{n}_{1,k|2} \\ \tilde{n}_{2,k|1} & \tilde{n}_{2,k|2} \end{bmatrix}^{-1} . \tag{6.6}$$

Aus der nichtparametrischen dynamischen Dämpfungsmatrix wird nach Gl.(6.3) ein 4-Parametermodell geschätzt. Für jeden gemessenen Frequenzpunkt f_k erhält man ein Gleichungssystem

$$\frac{\pi}{30} \cdot \begin{bmatrix} 1 & j\omega_k & j\omega_k^2 & 0 \\ -1 & -j\omega_k & 0 & 0 \\ -1 & -j\omega_k & 0 & 0 \\ 1 & j\omega_k & 0 & j\omega_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \delta \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = j\omega_k \cdot \begin{bmatrix} d_{11}(j\omega_k) \\ d_{12}(j\omega_k) \\ d_{21}(j\omega_k) \\ d_{22}(j\omega_k) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_k \mathbf{p} = \mathbf{b}_k.$$
(6.7)

Die Schätzgleichung lautet für m gemessene Frequenzpunkte

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \delta \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{b}.$$
(6.8)

In Abbildung 6.12 ist der Verlauf von Real- und Imaginärteil der Elemente der dynamischen Dämpfungsmatrix für Messung und Schätzung dargestellt. Die geschätzten Modellparameter sind in Tabelle 6.6 angegeben. Die Eigenfrequenz stimmt mit der theoretischen Abschätzung nach Tabelle 6.4 gut überein. Die geschätzten Werte für k , θ_1 und θ_2 weichen

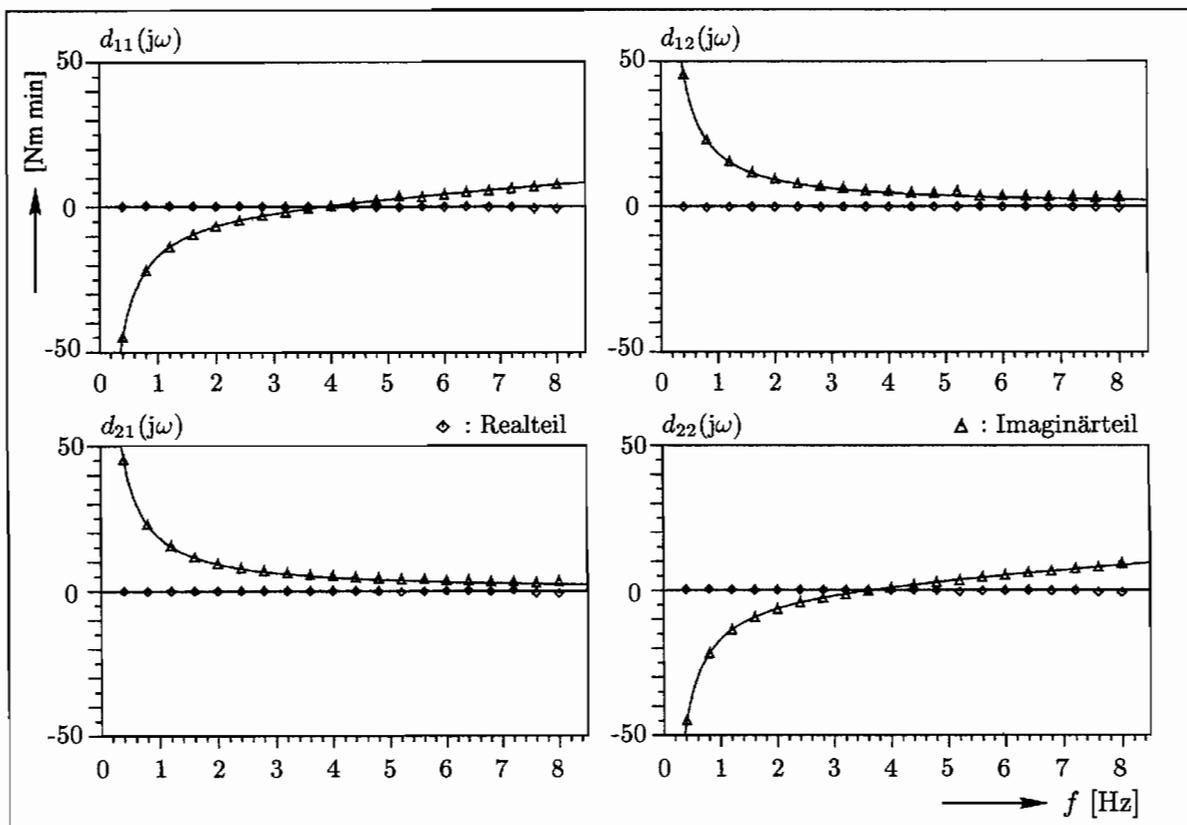


Abbildung 6.12: Dynamische Dämpfungsmatrix des Antriebsstrangs mit der Federkupplung, Messung: Symbole, Schätzung: durchgezogen

| | | |
|--------------|---------|-------------------|
| $k =$ | 1097.98 | Nm/rad |
| $\delta =$ | 0.74 | Nm s/rad |
| $\theta_1 =$ | 1.87 | kg m ² |
| $\theta_2 =$ | 2.07 | kg m ² |
| $f_0 =$ | 5.32 | Hz |

Tabelle 6.6: Antriebsstrangparameter nach Schätzung der dynamischen Dämpfungsmatrix

zum Teil um mehr als zehn Prozent ab. Die Ursache hierfür liegt in der Modellierung der Federkupplung. Prinzipiell ist es in guter Näherung möglich, die Federkupplung als Zweimassenschwinger abzubilden, das die mit dem entsprechenden Ansatz durchgeführte Schätzung zeigt. Die Massenparameter des physikalischen Modells der Federkupplung mit der Hälfte ihrer Drehträgheit nach Gl.(6.2) anzusetzen, ist fehlerbehaftet. Die Differenz der geschätzten Massenparameter zu den berechneten nach Tabelle 6.4 und Tabelle 6.6 entspricht ungefähr diesem Wert

$$\begin{aligned}\Delta\theta_1 &= (2.182 - 1.87) \text{ kg m}^2 = 0.312 \text{ kg m}^2 \approx \frac{1}{2}\theta_{\text{Fed}}, \\ \Delta\theta_2 &= (2.396 - 2.05) \text{ kg m}^2 = 0.346 \text{ kg m}^2 \approx \frac{1}{2}\theta_{\text{Fed}}.\end{aligned}$$

Zum Vergleich des Schätzungsergebnisses wird die inverse Formulierung der dynamischen Dämpfungsmatrix betrachtet. Hier sind die Momente die Systemeingänge und die Drehzahlen die Systemausgänge im Frequenzbereich. Die Schätzung der physikalischen Parameter gestaltet sich hier schwieriger, da sie nicht mehr linear in Zähler- und Nennerpolynom enthalten sind. Um ein nichtlineares Schätzproblem zu vermeiden, werden die Polynomkoeffizienten als Modellparameter betrachtet. Wird der lineare Ansatz für die inverse dynamische Dämpfungsmatrix auf den Koeffizienten $a_1 = 1$ des Nennerpolynoms normiert, erhält man ein 6-Parameter-Modell

$$\mathbf{D}^I(j\omega) = \mathbf{D}^{-1}(j\omega) = \frac{30}{\pi} \cdot \begin{bmatrix} \frac{b_0 + j\omega b_1 + j\omega^2 b_2}{j\omega + j\omega^2 a_2 + j\omega^3 a_3} & \frac{b_0 + j\omega b_1}{j\omega + j\omega^2 a_2 + j\omega^3 a_3} \\ \frac{b_0 + j\omega b_1}{j\omega + j\omega^2 a_2 + j\omega^3 a_3} & \frac{b_0 + j\omega b_1 + j\omega^2 b_3}{j\omega + j\omega^2 a_2 + j\omega^3 a_3} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

in dem die gesuchten physikalischen Parameter nur implizit enthalten sind

$$\begin{aligned}b_0 &= \frac{30}{\pi} \frac{1}{\theta_1 + \theta_2}, & b_1 &= \frac{30}{\pi} \frac{d}{k(\theta_1 + \theta_2)}, & b_2 &= \frac{30}{\pi} \frac{\theta_2}{k(\theta_1 + \theta_2)}, & b_3 &= \frac{30}{\pi} \frac{\theta_1}{k(\theta_1 + \theta_2)} \\ a_2 &= \frac{30}{\pi} \frac{d}{k}, & a_3 &= \frac{30}{\pi} \frac{\theta_1 \theta_2}{k(\theta_1 + \theta_2)}.\end{aligned}$$

Die physikalischen Parameter lassen sich aus den geschätzten Modellparametern bestimmen

$$\theta_1 = \frac{30}{\pi} \frac{a_3}{b_2}, \quad \theta_2 = \frac{30}{\pi} \frac{a_3}{b_3}, \quad k = \frac{30}{\pi} \frac{1}{b_2 + b_3}, \quad \delta = \frac{30}{\pi} \frac{a_2}{b_2 + b_3}.$$

In Abbildung 6.13 ist das Ergebnis der Schätzung und Messung von \mathbf{D}^I gemeinsam aufgetragen. Der Vergleich der Imaginärteile der Nebendiagonalelemente d_{12}^I und d_{21}^I zeigt, daß

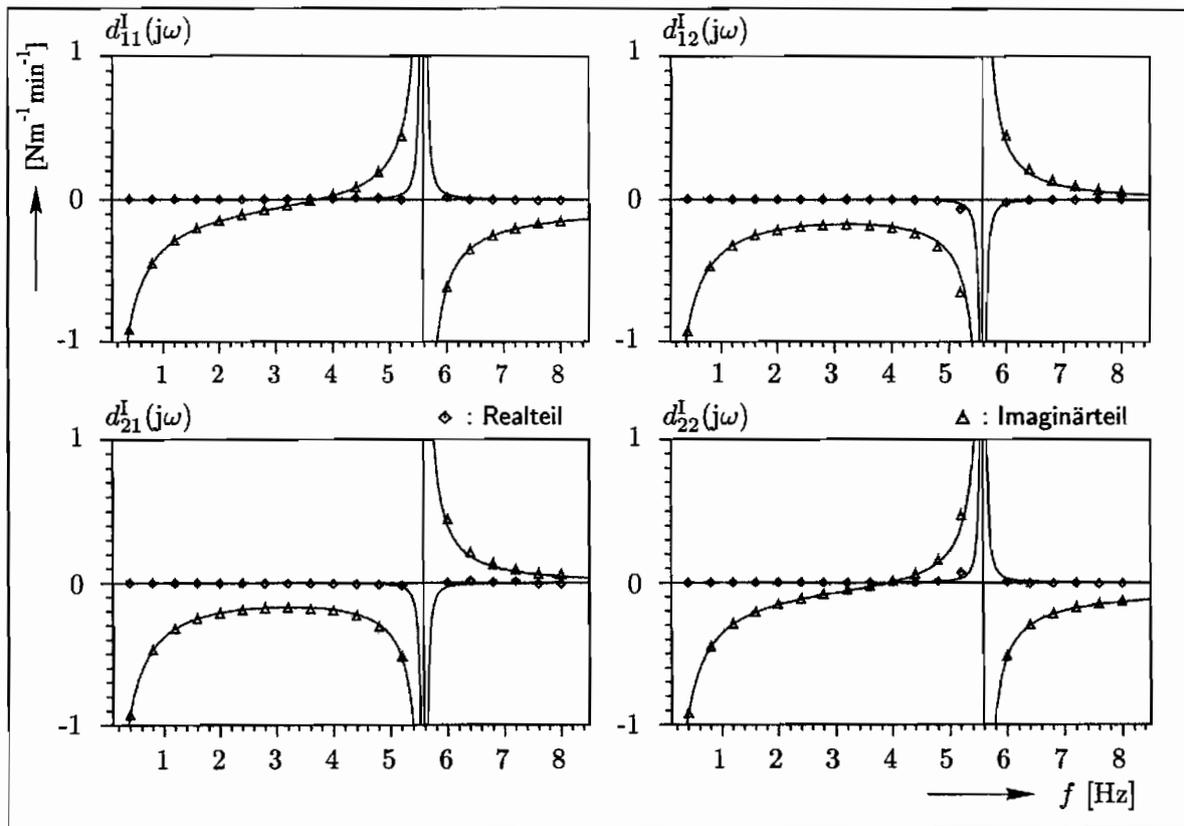


Abbildung 6.13: Inverse dynamische Dämpfungsmatrix des Antriebsstrangs mit der Federkupplung, Messung: Symbole, Schätzung: durchgezogen

sich das System nicht exakt symmetrisch verhält. Dieser Unterschied ist aus den entsprechenden Elementen der dynamischen Dämpfungsmatrix in Abbildung 6.12 nicht ablesbar. Daraus folgt, daß Modellfehler in der Darstellung der inversen dynamischen Dämpfungsmatrix eher zu erkennen sind und eine Parameterschätzung zu einem genaueren Modell führt. Aus den geschätzten Modellparametern ergeben sich die Werte nach untenstehender Tabelle. Die Ergebnisse stimmen für die Massenträgheiten θ_1 und θ_2 mit denen aus der Schätzung der dynamischen Dämpfungsmatrix überein. Die Steifigkeit liegt hier jedoch näher am theoretisch vorausgesagten Wert von $k = 1192 \text{ Nm/rad}$. Die Ergebnisse in Tabelle 6.7 werden als Grundlage für die Modellierung der Federkupplung der Antriebsstrangaufbauten I und II, s. Abbildung 6.10, verwendet.

| | | | |
|------------|-----|---------|-------------------|
| k | $=$ | 1204.50 | Nm/rad |
| δ | $=$ | 0.31 | Nms/rad |
| θ_1 | $=$ | 1.87 | kg m ² |
| θ_2 | $=$ | 2.05 | kg m ² |
| f_0 | $=$ | 5.59 | Hz |

Tabelle 6.7: Antriebsstrangparameter nach Schätzung der inversen dynamischen Dämpfungsmatrix

Zur Modellierung der Dämpfung

An dieser Stelle soll geklärt werden, ob der geschätzte Dämpfungsparameter δ für die Modellierung des Antriebsstrangs vernachlässigt werden kann. Der Absolutwert der viskosen Dämpfung δ liefert zunächst keine Aussage über das Dämpfungsverhalten des betrachteten Systems. Hierzu wird das dimensionslose Lehr'sche Dämpfungsmaß D betrachtet. Mit Hilfe der modalen Analyse [48] kann gezeigt werden, daß für einen Zweimassenschwinger zwischen D und δ der folgende rein zahlenmäßige Zusammenhang besteht

$$D = 2\delta \sqrt{\frac{\theta_1 \theta_2}{k(\theta_1 + \theta_2)^5}} \quad (6.10)$$

Setzt man hier die aus der Schätzung gefundenen Werte nach Tabelle 6.7 ein, erhält man als Dämpfungsmaß

$$D = 0.0011 \quad .$$

Dieser Wert entspricht der Werkstoffdämpfung von Stahl, so daß im weiteren die Dämpfung vernachlässigt werden kann. Für das Modell des Zweimassenschwingers der Federkupplung gilt damit

$$\delta = 0 \quad ,$$

so daß die Federkupplung als ungedämpfter Zweimassenschwinger mit den Daten nach Tabelle 6.7 modelliert wird.

6.3.2 Identifikation des Versuchsaufbaus III

An Versuchsaufbau III, s. Abbildung 6.10, zeigten die gemessenen Eigenfrequenzen eine relativ hohe Abweichung von den mit dem Antriebsstrangmodell berechneten Eigenfrequenzen. Es wurden deshalb die Modellparameter der Wellenzüge an der Pumpen- und an der Turbinenseite des Aufbaus III noch einmal durch Systemidentifikation überprüft. Die Identifikation mittels der oben geschilderten Methode der Frequenzgangmessung ist in diesem Aufbau aufgrund der vorhandenen Kupplung nicht möglich. Durch den Einfluß der hydrodynamischen Kupplung in Wechselwirkung mit der elastischen Federkupplung treten bei stationärer harmonischer Erregung an den jeweiligen Achsen in den Drehzahlverläufen der Kupplungslaufräder starke Oberschwingungen auf. Aus diesem Grund liefert die Schätzung der zur Auswertung notwendigen komplexen Amplituden der Laufraddrehzahlen unbrauchbare Ergebnisse. Um dieses Problem zu umgehen, wurde die Kupplung entleert. Da damit die hydrodynamische Kopplung von Pumpen- und Turbinenstrang entfällt, besitzen diese jeweils ein freies Ende, an dem das mechanische Moment null ist.

Es zeigte sich, daß in dieser Konfiguration die Drehzahlregelung der Achsen bei stationär harmonischer Erregung nicht zu stabilisieren war, so daß bei diesem Aufbau zur Identifikation keine Frequenzgangmessungen durchgeführt werden konnten. Bei stabiler Regelung war es möglich, beide Wellenzüge jeweils mit einem Drehzahl-Gleitsinus (Siunssweep) zu erregen.

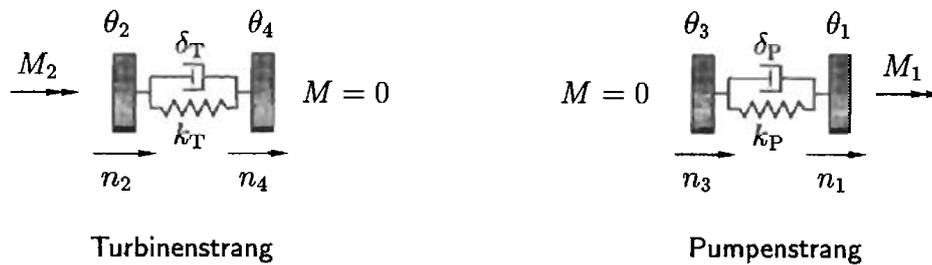


Abbildung 6.14: Mechanisches Ersatzmodell für den Pumpen- und Turbinenstrang des Versuchsaufbaus III mit entleerter hydrodynamischer Kupplung

Hierbei ist die Frequenz der Erregerdrehzahl eine Funktion der Zeit

$$n(t) = \bar{n} + \hat{n} \sin[\omega(t) \cdot t] \quad (6.11)$$

$$\text{mit } \omega(t) = \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2 T_{\text{sweep}}} t . \quad (6.12)$$

Innerhalb der Sweepdauer T_{sweep} variiert die Erregerfrequenz linear anwachsend zwischen ω_1 und ω_2 . Die Messungen wurden mit den folgenden Vorgaben durchgeführt

$$\begin{aligned} f_1 &= 2 \text{ Hz} , \\ f_2 &= 12 \text{ Hz} , \\ T_{\text{sweep}} &= 30 \text{ s} . \end{aligned}$$

Die Abtastfrequenz beträgt $f_{\text{Tast}} = 1904.8 \text{ Hz}$. Die lange Sweepdauer gewährleistet bei einer anschließenden FFT der Meßsignale eine hohe Auflösung im Frequenzbereich, so daß auf diese Weise eine quasistationäre Erregung realisiert wird. In Abbildung 6.15 ist das Amplitudenspektrum der FFT eines Gleitsinus mit konstanter Amplitude dargestellt. Als Modellansatz im Frequenzbereich wird wieder die inverse dynamische Dämpfungsmatrix des Zweimassenschwingers verwendet. Die Ein-/Ausgangsgrößen werden hierbei durch die Fouriertransformierten der gemessenen Größen gebildet. Da der jeweilige Teilstrang, s. Abbildung 6.14, ein freies Ende besitzt, gilt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n_1(j\omega) \\ n_2(j\omega) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_{11}^I(j\omega) & d_{12}^I(j\omega) \\ d_{21}^I(j\omega) & d_{22}^I(j\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(j\omega) \\ 0 \end{bmatrix} , \\ \begin{bmatrix} n_1(j\omega) \\ n_2(j\omega) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_{11}^I(j\omega) \\ d_{21}^I(j\omega) \end{bmatrix} \cdot M_1(j\omega) . \end{aligned} \quad (6.13)$$

Das nichtparametrische Modell ist dann durch

$$\begin{aligned} d_{11}^I(j\omega) &= \frac{n_1(j\omega)}{M_1(j\omega)} , \\ d_{21}^I(j\omega) &= \frac{n_2(j\omega)}{M_1(j\omega)} \end{aligned} \quad (6.14)$$

bestimmt. Die Schätzung des Parametermodells erfolgt mit dem Ansatz nach Gl.(6.9), der jetzt nur noch fünf Parameter enthält, da nur die Elemente d_{11}^I und d_{21}^I bestimmt werden.

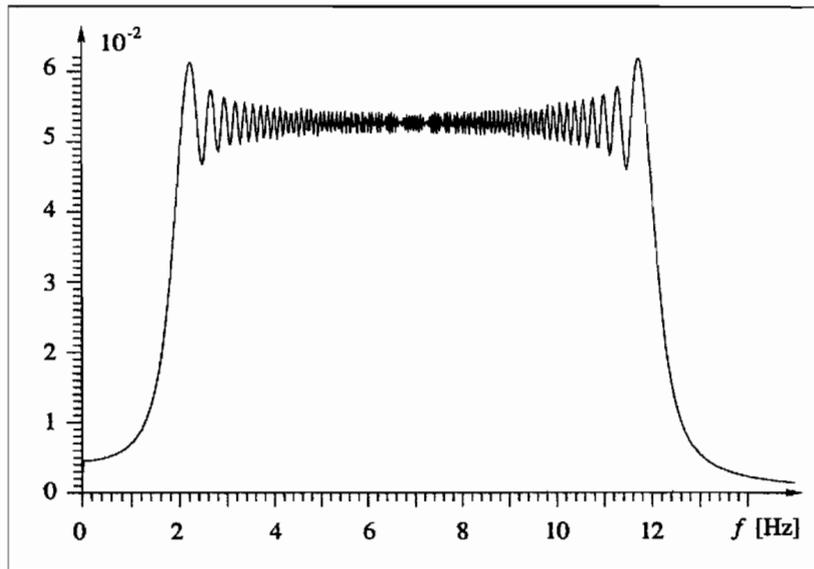


Abbildung 6.15: Amplitudenspektrum der FFT einer Gleitsinusfunktion zwischen 2 und 12 Hz, Sweeptime: 30 s, Abtastfrequenz: 2000 Hz

Um eine eventuelle Abhängigkeit des dynamischen Verhaltens von der stationären Drehzahl (unterschiedlich starkes Auswandern des Federschwerpunktes aus der Mittelachse) erkennen zu können, sind für Pumpen- und Turbinenstrang jeweils fünf Modelle für unterschiedliche Drehzahlen erstellt worden. Die Ergebnisse der Parameterschätzung sind in Tabelle 6.8

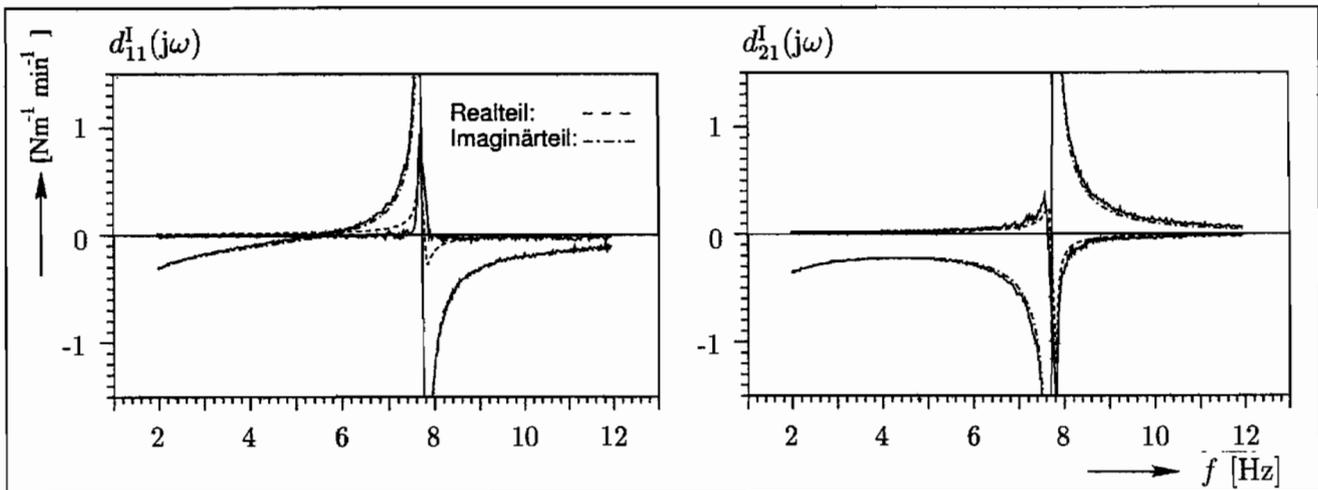


Abbildung 6.16: Elemente d_{11}^I und d_{21}^I der inversen dynamischen Dämpfungsmatrix des Turbinenstrangs, Aufbau III, stationäre Drehzahl $n_1 = 900 \text{ min}^{-1}$, Schätzung: gestrichelt, Messung: durchgezogen

angegeben. Besonders ist hier zu bemerken, daß der Steifigkeitsparameter k_T des Turbinenstrangs wesentlich höher als der des Pumpenstrangs k_P liegt. Ein drehzahlabhängiges Verhalten kann jedoch aufgrund der geringen relativen Abweichung der Modellsteifigkeiten nicht festgestellt werden. Die Berechnung der Eigenfrequenzen für eine mittlere Drehzahl von $n = 900 \text{ min}^{-1}$ mit den entsprechenden Modellparametern ergab eine gute Übereinstimmung

mit den gemessenen Eigenfrequenzen, vgl. Kapitel 7. Eine physikalische Interpretation der gefundenen Modellparameter muß allerdings offen bleiben.

| | | | | | | | | |
|------------|-----------------------|---|------|------|------|------|------|------------|
| n | [min^{-1}] | : | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | Mittelwert |
| θ_1 | [kg m^2] | : | 1.91 | 1.88 | 1.91 | 1.86 | 1.88 | 1.89 |
| θ_3 | [kg m^2] | : | 1.53 | 1.53 | 1.52 | 1.53 | 1.52 | 1.53 |
| k_P | [Nm/rad] | : | 1267 | 1259 | 1257 | 1249 | 1243 | 1255 |
| θ_2 | [kg m^2] | : | 1.25 | 1.24 | 1.26 | 1.23 | 1.26 | 1.25 |
| θ_4 | [kg m^2] | : | 1.04 | 1.04 | 1.04 | 1.05 | 1.03 | 1.04 |
| k_T | [Nm/rad] | : | 1353 | 1350 | 1355 | 1345 | 1343 | 1349 |

Tabelle 6.8: Modellparameter aus Schätzung der inversen dynamischen Dämpfungsmatrix für Versuchsaufbau III mit entleerter Kupplung

Insgesamt gestaltet sich eine exakte Modellierung der elastischen Elemente durch einfache Zweimassenmodelle, deren Modellparameter aus den Konstruktionsunterlagen entnommen werden, in Hinblick auf das Ziel, die Modelle der hydrodynamischen Kupplung zu bewerten, als problematisch. Für den Vergleich von Messung und Rechnung werden daher für die Versuchsaufbauten die entsprechend identifizierten Modellparameter verwendet.

Kapitel 7

Das Resonanzverhalten des Antriebsstrangs

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen zum Resonanzverhalten der Versuchsantriebsstrangaufbauten vorgestellt. Das Ziel dieser Arbeiten ist, die im Versuch bestimmten Eigenfrequenzen mit den Ergebnissen aus der Eigenwertanalyse der linearen Antriebsstrangmodelle zu vergleichen. Auf diese Weise ist eine Bewertung der linearen Kupplungsmodelle zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und des Dämpfungsverhaltens von Antriebssträngen mit der hydrodynamischen Kupplung möglich.

In den Versuchen wird für die verschiedenen Betriebsbereiche der hydrodynamischen Kupplung, für die die linearen Modelle erstellt worden sind, der experimentelle Antriebsstrang auf dem Versuchsstand entsprechend erregt. Aus den gemessenen Größen lassen sich für das Mehrfreiheitsgradsystem des Versuchsaufbaus nichtparametrische Frequenzbereichsmodelle in Form von Frequenzgangmatrizen bestimmen. Aus dem Amplitudenverlauf der Elemente der Frequenzgangmatrizen an den Resonanzstellen können die Lage der Eigenfrequenzen und die zugehörigen Abklingkonstanten, die der Dämpfung entsprechen, bestimmt werden. Für die linearen Antriebsstrangmodelle werden die in Abschnitt 6.3 mittels Identifikation bestimmten Drehträgheiten und Steifigkeiten verwendet. Anschließend werden die Berechnungsergebnisse der Eigenwertanalyse des Antriebsstrangmodells mit den gemessenen Ergebnissen verglichen.

Die hier vorgestellten Versuchsergebnisse wurden an den Antriebsstrangaufbauten I, II und III ermittelt, die ausführlich in Abschnitt 6.2.2 beschrieben sind.

7.1 Experimentelle Bestimmung der Eigenfrequenzen und Dämpfungskennwerte

7.1.1 Grundlagen

Die Eigenfrequenzen und ihre zugehörigen Realteile von konventionellen mechanischen Systemen können nach Transformation ihrer beschreibenden Differentialgleichung

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (7.1)$$

in den Frequenzbereich

$$\begin{aligned} (j\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{D} + \mathbf{K}) \mathbf{x}(j\omega) &= \mathbf{f}(j\omega) , \\ \mathbf{S}(j\omega) \mathbf{x}(j\omega) &= \mathbf{f}(j\omega) \end{aligned} \quad (7.2)$$

durch die Bestimmung der Nullstellen der Determinante der dynamischen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{S}(j\omega)$ berechnet werden

$$\det \mathbf{S}(j\omega) = 0 . \quad (7.3)$$

Für die k -te Lösung dieser Gleichung erhält man

$$\omega_k = \omega_{\text{re}_k} + j \omega_{\text{im}_k} . \quad (7.4)$$

Analog hierzu kann auch das Torsionsschwingungssystem des Antriebsstrangs mit der hydrodynamischen Kupplung nach Gl.(4.42)

$$\mathbf{A}_{m+2} \frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}} \boldsymbol{\phi}(t) + \mathbf{A}_{m+1} \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \boldsymbol{\phi}(t) + \dots + \mathbf{A}_1 \dot{\boldsymbol{\phi}}(t) + \mathbf{A}_0 \boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{m}(t) \quad (7.5)$$

in den Frequenzbereich transformiert werden

$$\begin{aligned} (j\omega^{m+2} \mathbf{A}_{m+2} + j\omega^{m+1} \mathbf{A}_{m+1} + \dots + j\omega \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0) \boldsymbol{\phi}(j\omega) &= \mathbf{m}(j\omega) , \\ \mathbf{S}(j\omega) \boldsymbol{\phi}(j\omega) &= \mathbf{m}(j\omega) . \end{aligned} \quad (7.6)$$

In Kapitel 5 wurden die Eigenwerte des Antriebsstrangmodells durch die Berechnung der Eigenwerte der Systemmatrix des Zustandsraummodells bestimmt. Diese stimmen mit den Nullstellen der Determinante der Steifigkeitsmatrix überein

$$\lambda_k = j\omega_k . \quad (7.7)$$

Wie bereits in Abschnitt 4.2.1 gezeigt, ist die inverse Formulierung zur Steifigkeitsmatrix die Frequenzgangmatrix ¹

$$\mathbf{H}(j\omega) = \mathbf{S}^{-1}(j\omega) = \frac{1}{\det \mathbf{S}(j\omega)} \mathbf{S}_{\text{adj}}^{\text{T}}(j\omega) = \begin{bmatrix} h_{11}(j\omega) & h_{12}(j\omega) & \dots \\ h_{21}(j\omega) & \dots & \\ \vdots & \ddots & \end{bmatrix} . \quad (7.8)$$

Speziell für den Antriebsstrang ergibt sich:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}(j\omega) &= \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{m}(j\omega) \\ \begin{bmatrix} \varphi_1(j\omega) \\ \varphi_2(j\omega) \\ \vdots \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h_{11}(j\omega) & h_{12}(j\omega) & \dots \\ h_{21}(j\omega) & \dots & \\ \vdots & \ddots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(j\omega) \\ M_2(j\omega) \\ \vdots \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (7.9)$$

Der Vorteil der Frequenzgangmatrix liegt darin, daß sie experimentell durch Identifikation als nichtparametrisches Modell ermittelt werden kann und aus ihr die Eigenfrequenzen

¹ $\mathbf{S}_{\text{adj}}(j\omega)$ bezeichnet die Matrix der Adjunkten von $\mathbf{S}(j\omega)$.

und deren zugehörige Dämpfung bestimmt werden können. Da die Determinante der Steifigkeitsmatrix im Nenner der Frequenzgangmatrix steht, finden sich bei gedämpften Systemen die Eigenwerte als Resonanzüberhöhungen in den Beträgen $|h_{ij}(j\omega)|$ der einzelnen Elemente wieder. Die Funktionen $|h_{ij}(j\omega)|$ werden auch als Amplitudengänge oder Amplitudenspektren bezeichnet. Wie stark die Resonanzüberhöhung im jeweiligen Element ausfällt, hängt von den Eigenformen des Schwingungssystems ab. Liegt z.B. der zweite Freiheitsgrad φ_2 in einem Schwingungsknoten einer bestimmten Eigenform, so tritt in keinem der Amplitudengänge $|h_{2j}(j\omega)|$ eine Resonanzüberhöhung dieser Eigenform auf. Die Eigenfrequenz und die Dämpfung eines bestimmten Mode sind daher nur in bestimmten Amplitudengängen $|h_{ij}(j\omega)|$ zu erkennen. Die Bestimmung der Eigenfrequenz und der zugehörigen Dämpfung kann nach der Methode der Halbwertsbreite vorgenommen werden, die später beschrieben wird. Praktisch wird so vorgegangen, daß für eine bestimmte Resonanz aus der gemessenen Frequenzgangmatrix dasjenige Element herausgesucht wird, das bei dieser Eigenfrequenz die größte Amplitude zeigt.

Da auf dem Versuchsstand die Drehzahlen und nicht die Drehwinkel gemessen werden, läßt sich anstatt der Frequenzgangmatrix $\mathbf{H}(j\omega)$ die inverse dynamische Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}^{-1}(j\omega)$ ermitteln

$$\mathbf{D}^{-1}(j\omega) = j\omega \frac{30}{\pi} \mathbf{S}^{-1}(j\omega) = j\omega \frac{30}{\pi} \mathbf{H}(j\omega) . \quad (7.10)$$

Da aber für die Bestimmung der Resonanzkennwerte hierdurch kein Unterschied besteht, wird hier der Begriff der Frequenzgangmatrix beibehalten und das gemessene Modell durch $\mathbf{H}(j\omega)$ bezeichnet.

7.1.2 Identifikation des Antriebsstrangs im Frequenzbereich

Zur experimentellen Bestimmung der Resonanzfrequenzen wird der Antriebsstrang als Teilsystem aus dem gesamten Versuchsaufbau herausgeschnitten, s. Abbildung 7.1. Die Wechselwirkungsgrößen, die an der gezogenen Teilsystemgrenze auftreten, bestimmen die Ein- und Ausgangsgrößen des Antriebsstrangmodells. Zur Ermittlung der Eigenfrequenzen und der zugehörigen Dämpfungen wird der Antriebsstrang als Ein-/Ausgangsmodell im Frequenzbereich betrachtet. Auf dem Versuchsstand wird das nichtparametrische Modell in Form der Frequenzgangmatrix $\mathbf{H}(j\omega)$ des Antriebsstrangsystems gemessen. Als Eingangsgrößen werden die angreifenden Momente $M_i(t)$ und als Ausgangsgrößen die Drehzahlen $n_i(t)$ betrachtet. Als Beispiel hierzu ist in Abbildung 7.2 das mechanische Ersatzmodell des Versuchsaufbaus III nach Abbildung 6.10 wiedergegeben. Der Versuchsaufbau III kann als 4-Freiheitsgradsystem betrachtet werden. Hierbei entspricht das Moment M_1 dem Erregermoment, das auf dem Versuchsstand von der Antriebseinheit an Achse 1 erzeugt wird, und das Moment M_4 entspricht dem Erregermoment von Achse 2.

Als Erregung für den jeweiligen Antriebsstrangaufbau wird an An- und Abtriebsseite, Achse 1 und Achse 2 in Abbildung 6.10, eine Sinussweepfunktion nach Gl.(6.12) zwischen $f_{\min} = 2$ Hz und $f_{\max} = 12$ Hz verwendet. Die Sweepdauer, in der die Erregung zwischen der minimalen und der maximalen Frequenz variiert wird, beträgt $T_{\text{sweep}} = 30$ s. Wie schon in Abschnitt 6.3.2 erläutert wurde, gewährleistet die lange Sweepdauer für eine FFT der Meßsignale eine

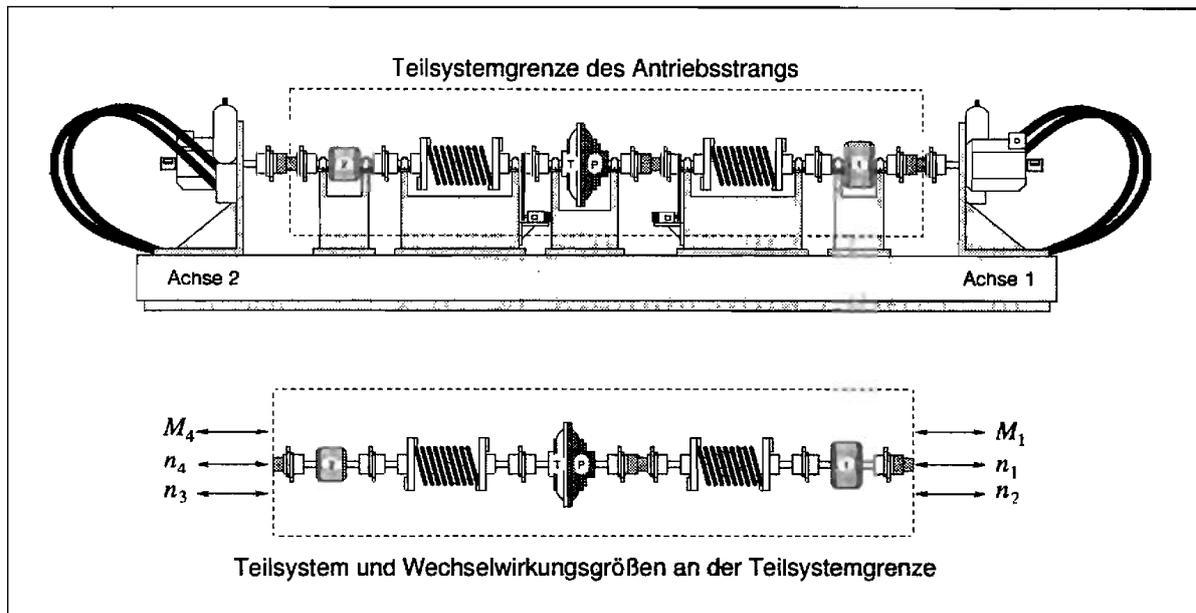


Abbildung 7.1: Das Teilsystem des Antriebsstrangs im Gesamtaufbau nach Versuch III

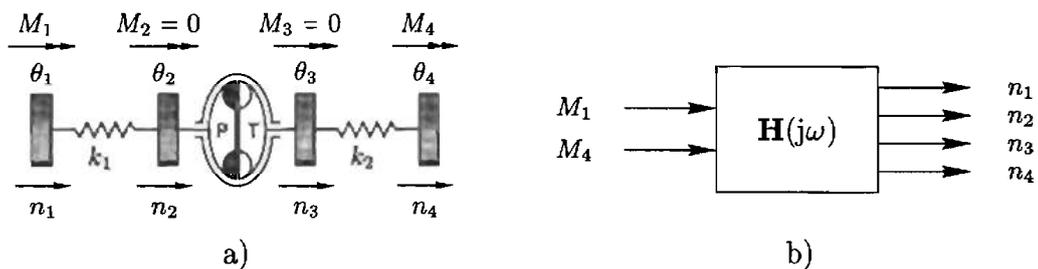


Abbildung 7.2: a) Mechanisches Ersatzmodell des Versuchsaufbaus III b) E/A-Modell des Antriebsstrangs im Frequenzbereich.

hohe Auflösung im Frequenzbereich, so daß auch kleine Verschiebungen der Eigenfrequenzen für die unterschiedlichen Schlupfbereiche der Kupplung erfaßt werden können. Als Beispiel ist in Abbildung 7.3 der gemessene Verlauf der Drehzahl n_4 des Versuchsaufbaus II bei Erregung an der Turbinenseite des Strangs (Achse 2) und daneben das dazugehörige Amplitudenspektrum der FFT des Zeitsignals dargestellt.

Bei den Messungen an den Versuchsaufbauten wird der Versuchsstand an beiden Achsen drehzahl geregelt betrieben. In den folgenden Abschnitten wird, wenn nicht anders erwähnt, für die Drehzahlerregung jeweils der beschriebene Sinussweep verwendet. Um den Gültigkeitsbereich des Kupplungsmodells einzuhalten, besitzt die vorgegebene Drehzahlamplitude denselben Wert $\Delta n = 40 \text{ min}^{-1}$, der auch bei der Identifikation der Kupplungsmodelle verwendet wurde.

Da die Meßgrößen nach der Abtastung diskret vorliegen, beziehen sich die folgenden Betrachtungen auf diskrete Größen. Die Meßwerte, stellvertretend mit $y(k)$ bezeichnet, werden mit Hilfe der FFT (*Fast-Fourier-Transformation*) in den Frequenzbereich transformiert.

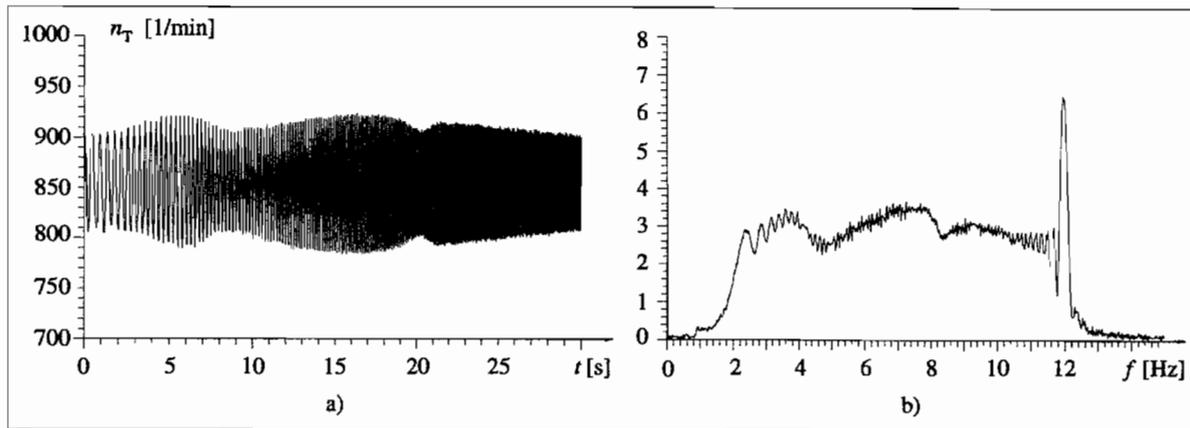


Abbildung 7.3: a) Gemessene Turbinendrehzahl bei Sinussweeperregung von 2 bis 12 Hz, b) Amplitudenspektrum der FFT, vgl. Abbildung 6.15

$$y(k) \xrightarrow{\text{FFT}} y(j\omega_k)$$

Da auf dem Versuchsstand eine Erregung des Antriebsstrangsystems nur an den Strangenden stattfindet, vereinfacht sich die diskrete Frequenzgangmatrix $\mathbf{H}(j\omega_k)$ wie folgt

$$\mathbf{n}(j\omega_k) = \mathbf{H}(j\omega_k) \mathbf{m}(j\omega_k), \quad (7.11)$$

$$\begin{bmatrix} n_1(j\omega_k) \\ n_2(j\omega_k) \\ n_3(j\omega_k) \\ n_4(j\omega_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(j\omega_k) & h_{12}(j\omega_k) & h_{13}(j\omega_k) & h_{14}(j\omega_k) \\ h_{21}(j\omega_k) & h_{22}(j\omega_k) & h_{23}(j\omega_k) & h_{24}(j\omega_k) \\ h_{31}(j\omega_k) & h_{32}(j\omega_k) & h_{33}(j\omega_k) & h_{34}(j\omega_k) \\ h_{41}(j\omega_k) & h_{42}(j\omega_k) & h_{43}(j\omega_k) & h_{44}(j\omega_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1(j\omega_k) \\ M_2(j\omega_k) = 0 \\ M_3(j\omega_k) = 0 \\ M_4(j\omega_k) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}(j\omega_k) = \begin{bmatrix} h_{11}(j\omega_k) & h_{14}(j\omega_k) \\ h_{21}(j\omega_k) & h_{24}(j\omega_k) \\ h_{31}(j\omega_k) & h_{34}(j\omega_k) \\ h_{41}(j\omega_k) & h_{44}(j\omega_k) \end{bmatrix}.$$

Für die Bestimmung der einzelnen Frequenzgangelemente müssen zwei Messungen durchgeführt werden, so daß man ein linear unabhängiges Gleichungssystem erhält. Bei der ersten Messung ($y|_1$) wird das System an Achse 1 durch $M_1(t)$, bei der zweiten Messung ($y|_2$) an Achse 2 durch $M_4(t)$ erregt. Als Beispiel werden die Elemente h_{11} und h_{14} in der ersten Zeile von $\mathbf{H}(j\omega_k)$ betrachtet. Es ergibt sich aus den beiden Messungen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} n_{1|1}(j\omega_k) &= h_{11}(j\omega_k) M_{1|1}(j\omega_k) + h_{14}(j\omega_k) M_{4|1}(j\omega_k) && \text{1. Messung} \quad , \quad (7.12) \\ n_{1|2}(j\omega_k) &= h_{11}(j\omega_k) M_{1|2}(j\omega_k) + h_{14}(j\omega_k) M_{4|2}(j\omega_k) && \text{2. Messung} \quad . \end{aligned}$$

Daraus erhält man die gesuchten Größen

$$\begin{bmatrix} h_{11}(j\omega_k) \\ h_{14}(j\omega_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1|1}(j\omega_k) & M_{4|1}(j\omega_k) \\ M_{1|2}(j\omega_k) & M_{4|2}(j\omega_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_{1|1}(j\omega_k) \\ n_{1|2}(j\omega_k) \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

Die übrigen Elemente von $\mathbf{H}(j\omega_k)$ ergeben sich analog

$$\begin{bmatrix} h_{21}(j\omega_k) \\ h_{24}(j\omega_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1|1}(j\omega_k) & M_{4|1}(j\omega_k) \\ M_{1|2}(j\omega_k) & M_{4|2}(j\omega_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_{2|1}(j\omega_k) \\ n_{2|2}(j\omega_k) \end{bmatrix}, \quad (7.14)$$

$$\begin{bmatrix} h_{31}(j\omega_k) \\ h_{34}(j\omega_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1|1}(j\omega_k) & M_{4|1}(j\omega_k) \\ M_{1|2}(j\omega_k) & M_{4|2}(j\omega_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_{3|1}(j\omega_k) \\ n_{3|2}(j\omega_k) \end{bmatrix}, \quad (7.15)$$

$$\begin{bmatrix} h_{41}(j\omega_k) \\ h_{44}(j\omega_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1|1}(j\omega_k) & M_{4|1}(j\omega_k) \\ M_{1|2}(j\omega_k) & M_{4|2}(j\omega_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_{4|1}(j\omega_k) \\ n_{4|2}(j\omega_k) \end{bmatrix}. \quad (7.16)$$

Aus den jeweiligen Frequenzgangfunktionen

$$h_{ij}(j\omega_k) = h_{\text{re}ij}(j\omega_k) + j h_{\text{im}ij}(j\omega_k) \quad (7.17)$$

ergeben sich die Amplitudenspektren

$$|h_{ij}(j\omega_k)| = \sqrt{h_{\text{re}ij}(j\omega_k)^2 + h_{\text{im}ij}(j\omega_k)^2} \quad (7.18)$$

und die Phasenspektren

$$\varphi_{ij}(j\omega_k) = \frac{180}{\pi} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{h_{\text{im}ij}(j\omega_k)}{h_{\text{re}ij}(j\omega_k)} \right). \quad (7.19)$$

7.1.3 Auswertung der Frequenzgangfunktionen

Je nach den Moden des Versuchsaufbaus spiegeln sich die Resonanzen unterschiedlich stark in den verschiedenen Frequenzgangfunktionen wider, so daß zur Auswertung aus den 8 zur Verfügung stehenden Frequenzgangelementen $h_{ij}(j\omega_k)$ dasjenige verwendet wird, in dem die Resonanzen des jeweiligen Mode am deutlichsten hervortreten. Beispielsweise ist für Versuchsaufbau III zur Bestimmung der Resonanzen des Pumpenstrangs, Mode II, die Betrachtung des Elementes $h_{21}(j\omega_k)$ günstig, das das Antwortverhalten der Pumpenraddrehzahl n_2 auf die Erregung M_1 an Achse 1 wiedergibt. Im Amplitudenspektrum von $h_{21}(j\omega_k)$ tritt die vergleichsweise stärkste Resonanzüberhöhung bei Durchfahren der Eigenfrequenz des Pumpenstrangs auf. Entsprechend günstig ist zur Bestimmung der Turbinenstrangresonanz, Mode I, die Betrachtung des Elementes $h_{34}(j\omega_k)$, das durch das Antwortverhalten der Turbinendrehzahl n_3 auf die Erregung M_4 an Achse 2 bestimmt ist.

Zur Verdeutlichung des Sachverhaltes wird in Abbildung 7.4 das Amplitudenspektrum des Elementes $h_{21}(j\omega_k)$ für zwei Messungen mit $s = 5\%$ und $s = 20\%$ an Versuchsaufbau III mit einer mittleren Pumpendrehzahl von $n_2 = 900 \text{ min}^{-1}$ betrachtet. Ein sinnvoll interpretierbares Ergebnis liefern die Spektren nur innerhalb des durch die Erregung festgelegten Frequenzbereiches von 2 bis 12 Hz. Zu erkennen ist, daß die Resonanz bei $s = 20\%$ ca. 0.2 Hz tiefer als bei $s = 5\%$ liegt. Eine qualitative Bewertung der Dämpfung kann zum einen durch die Amplitude des Resonanzpeaks vorgenommen werden, zum anderen durch den unterschiedlich starken Abfall der Phase $\varphi(h_{21})$ an der Resonanzstelle. Gut zu erkennen ist in Abbildung 7.5, daß die stärker gedämpfte Eigenfrequenz für $s = 20\%$ flacher abfällt. Die Interpretation des Phasenverlaufs entspricht der eines einfachen Zweimassenschwingers, wenn man berücksichtigt, daß statt der Auslenkung die Geschwindigkeit (Drehzahl) als Ausgangsgröße betrachtet wird. Da bei einer harmonischen Schwingung die Geschwindigkeit der Auslenkung um 90° nacheilt, nähert sich dementsprechend die Phase in Abbildung 7.5 für Erregerfrequenzen gegen 0 Hz dem Wert $\varphi(h_{21}) = -90^\circ$. Nach Durchfahren der Resonanzstelle des Zweimassenschwingers findet eine Phasenverschiebung von -180° statt, so daß hier die Phasenverschiebung im überkritischen Bereich $\varphi(h_{21}) = -270^\circ$ beträgt.

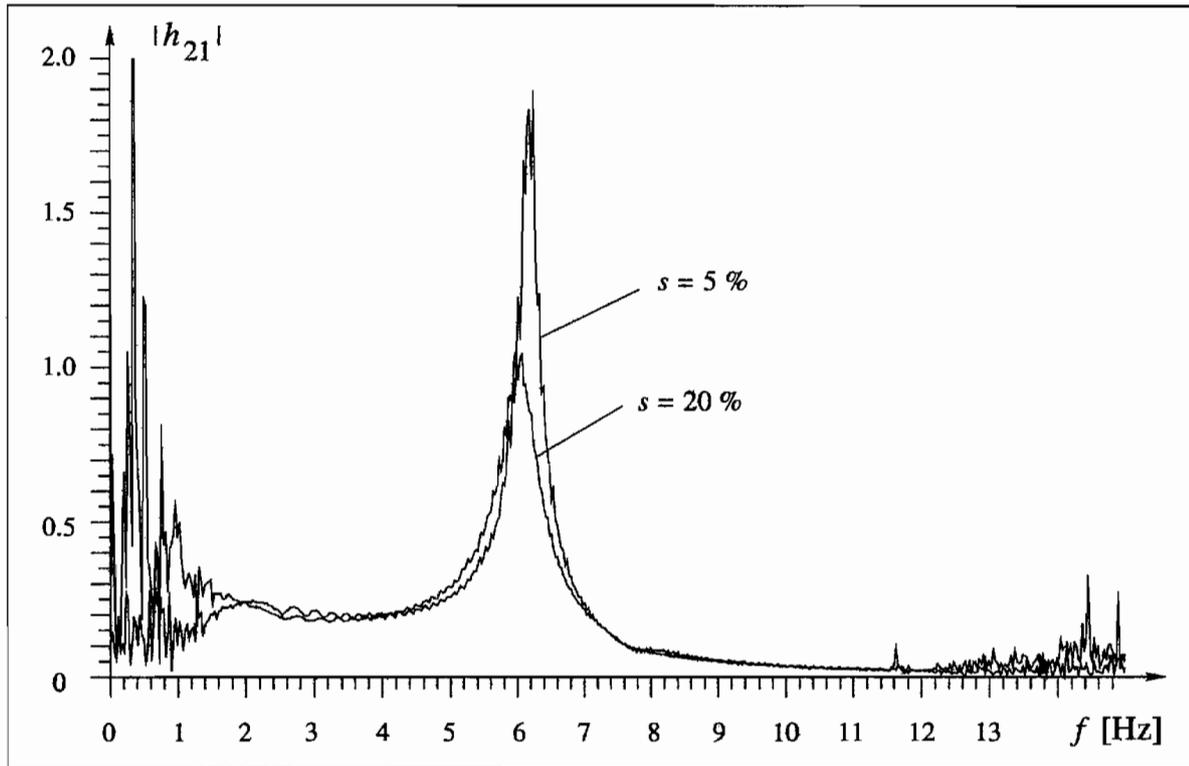


Abbildung 7.4: Amplitudenspektren des Elementes h_{21} der Frequenzgangmatrix für zwei unterschiedliche Betriebspunkte

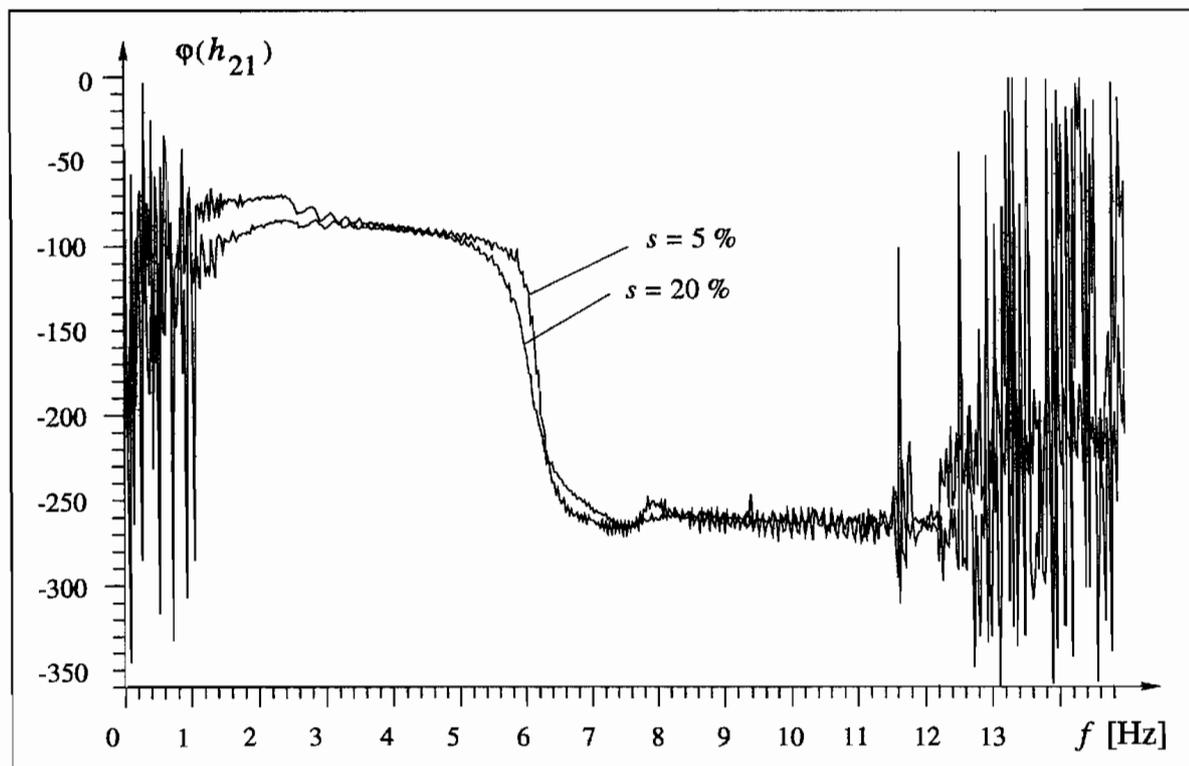


Abbildung 7.5: Phasenspektren des Elementes h_{21} der Frequenzgangmatrix für zwei unterschiedliche Betriebspunkte

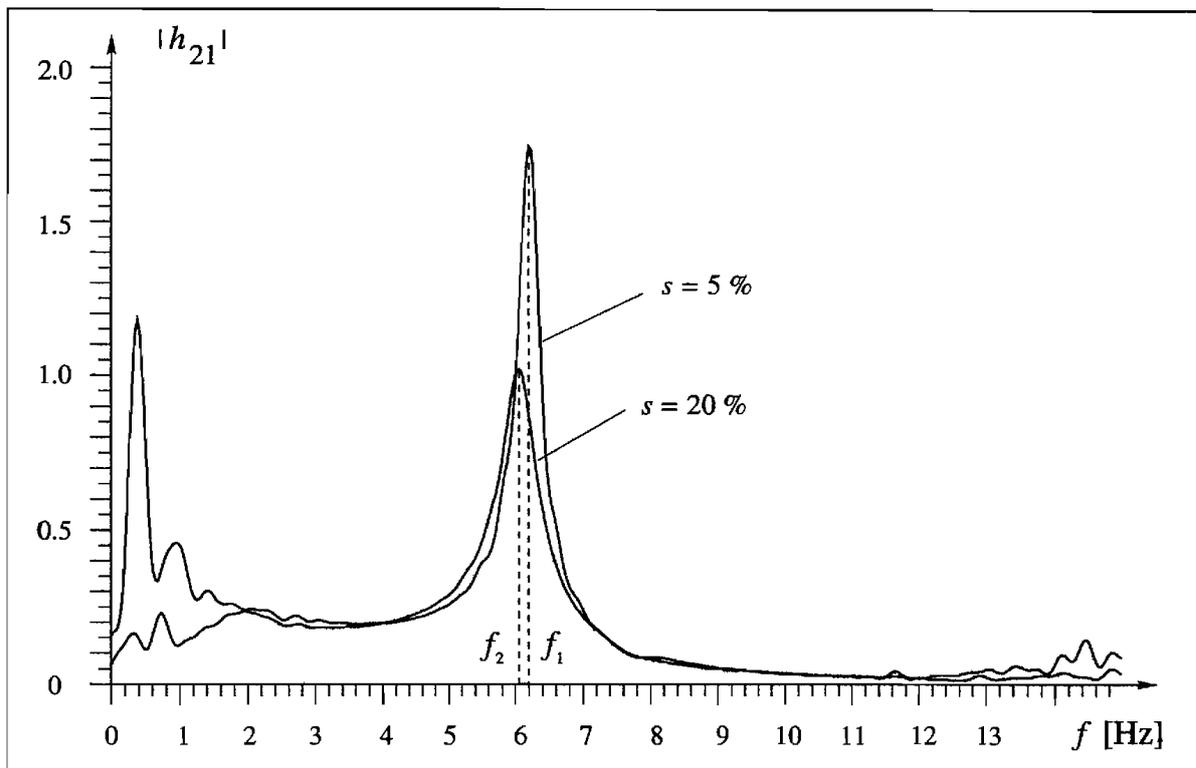


Abbildung 7.6: Geglättete Amplitudenspektren des Elementes h_{21} der Frequenzgangmatrix für zwei unterschiedliche Betriebspunkte

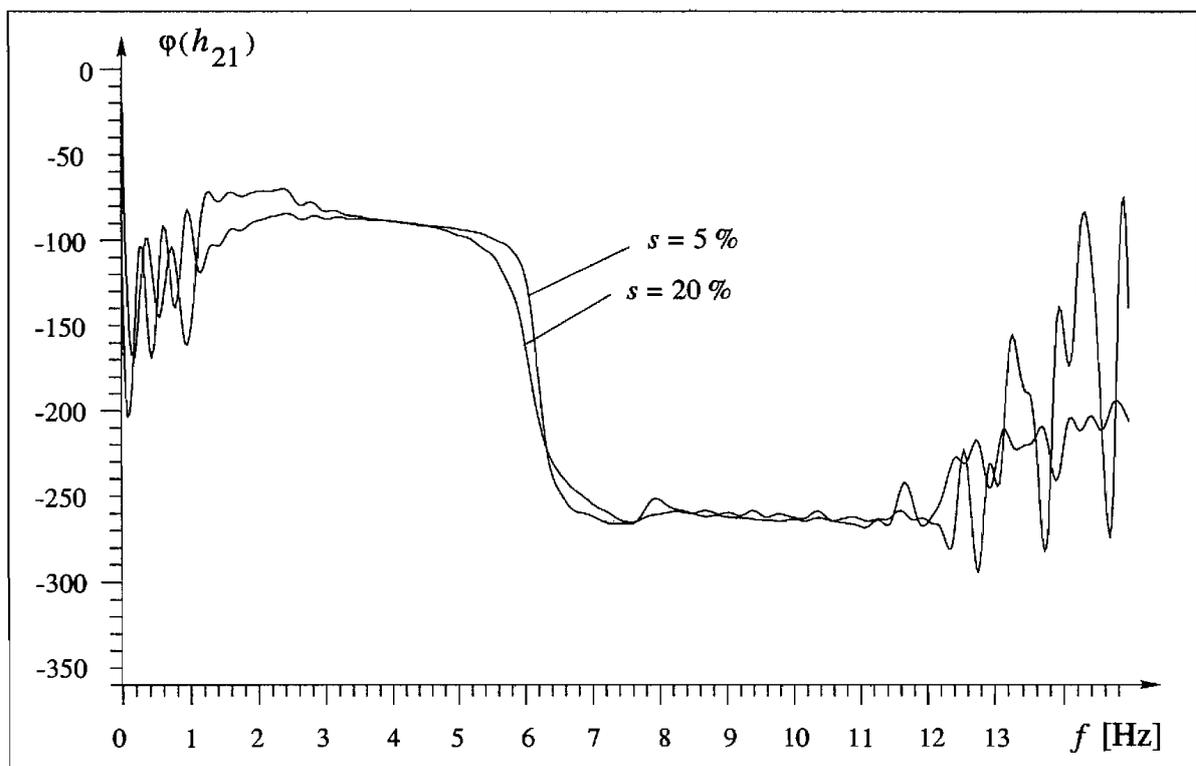


Abbildung 7.7: Geglättete Phasenspektren des Elementes h_{21} der Frequenzgangmatrix für zwei unterschiedliche Betriebspunkte

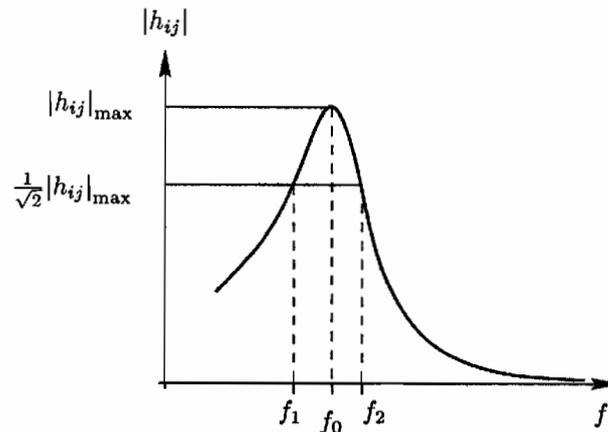


Abbildung 7.8: Bestimmung der Dämpfung aus dem Verlauf des Amplitudenspektrums

Um für eine Bestimmung der Eigenfrequenzlage in den Amplitudenspektren einen besseren Kurvenverlauf zu erreichen, werden die Spektren mit Hilfe eines digitalen Filters geglättet. Diese Art der Glättung hat den Vorteil, daß sie bei geeigneter Wahl der Filtereckfrequenz keine Verbreiterung der Frequenzpeaks nach sich zieht. In Abbildung 7.6 ist das geglättete Spektrum der Abbildung 7.4 dargestellt, aus dem sich die Lage der Amplitudenmaxima und damit die Eigenfrequenz gut erkennen läßt. Die Eigenfrequenz wird durch einen Algorithmus bestimmt, der das lokale Maximum auf einem entsprechenden Frequenzintervall um die Resonanzstelle sucht. Dabei ist der auftretende Frequenzfehler durch die Frequenzauflösung r_f der FFT gegeben, für die 2^{16} Messwerte einer Messung verwendet werden. Daraus ergibt sich mit der Abtastfrequenz $f_{\text{Tast}} = 1908.4$ Hz die für die FFT relevante Meßzeit

$$T_{\text{fft}} = 34.41 \text{ s} \quad (7.20)$$

und man erhält für die Auflösung im Frequenzbereich

$$r_f = \frac{1}{T_{\text{fft}}} = 0.029 \text{ Hz} \quad (7.21)$$

Zur Beurteilung der Dämpfung kann das Dämpfungsmaß D nach der Methode der Halbwertsbreite bestimmt werden. Dabei gilt für D nach Abbildung 7.8

$$D = \frac{f_2 - f_1}{2 f_0} \quad (7.22)$$

Für den direkten Vergleich mit den Realteilen λ_{re} der Ergebnisse aus der Eigenwertanalyse des Antriebsstrangmodells eignet sich Abklingkonstante δ ,

$$\delta = \lambda_{\text{re}} \quad (7.23)$$

Sie wird aus der folgenden Beziehung bestimmt

$$\delta = \omega_0 D = \pi(f_2 - f_1) \quad (7.24)$$

Die Auswertung des Amplitudenverlaufes zur Bestimmung der Dämpfung, d.h. der Abklingkonstanten, wird ebenfalls durch einen Algorithmus vorgenommen.

Die auf diese Weise aus den Meßergebnissen bestimmten Eigenfrequenzen und Abklingkonstanten können zur Bewertung der linearen Kupplungsmodelle den Ergebnissen aus der Eigenwertanalyse des Antriebsstrangmodells gegenüber gestellt werden.

7.2 Ergebnisse - Vergleich Modell und Messung

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen des Resonanzverhaltens des Antriebsstrangs mit der hydrodynamischen Kupplung für die unterschiedlichen Betriebsbereiche vorgestellt. Für den Vergleich von Modell und realem System werden parallel dazu die Eigenfrequenzen und Realteile der Eigenwerte des Antriebsstrangmodells angegeben.

7.2.1 Die Modelle der Versuchsaufbauten

In Abbildung 7.9 sind die mechanischen Ersatzmodelle der drei untersuchten Antriebsstrangaufbauten dargestellt. In Tabelle 7.1 sind die für die Modelle verwendeten Parameter nach Abschnitt 6.3 angegeben. Dabei sind die Parameter für den Versuchsaufbau III durch Systemidentifikation bestimmt worden. Um für die Auswertung der Frequenzgangfunktionen

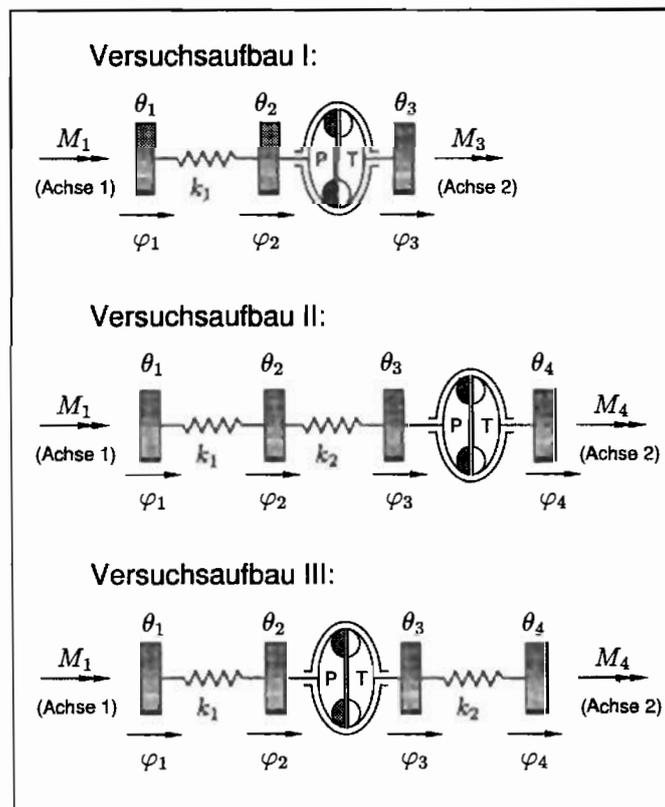
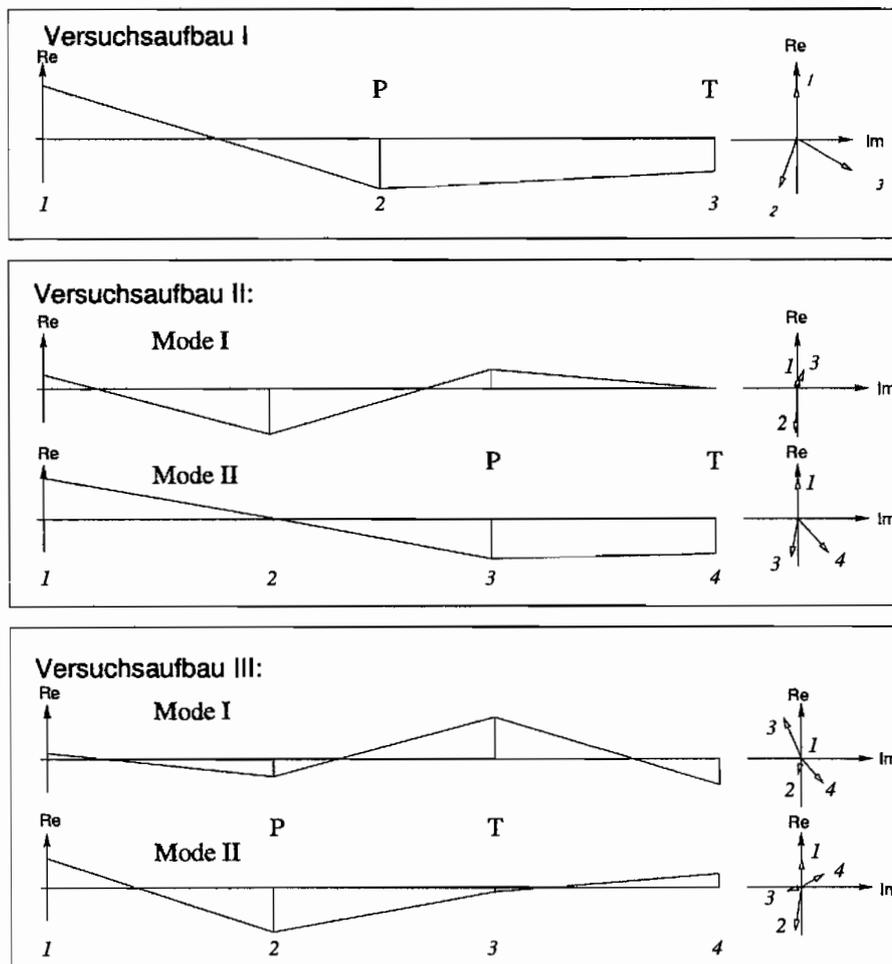


Abbildung 7.9: Die mechanischen Ersatzmodelle der Versuchsaufbauten I, II und III

die auftretenden Moden des jeweiligen Antriebsstrangaufbaus zu spezifizieren, sind die Moden der Antriebsstrangmodelle der Versuchsaufbauten nach Tabelle 7.1 in Abbildung 7.10 in einer Übersicht dargestellt. Hierbei werden nur die Moden I und II betrachtet, da die höheren Moden III und IV für das reale System nicht relevant sind, s. Kapitel 5. In den Beispielen ist der Betriebspunkt mit $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ und $s = 10 \%$ gewählt worden.

| Parameter | Versuchsaufbau | | |
|------------------------------------------|----------------|------|------|
| | I | II | III |
| θ_1 [kg m ²] | 1.86 | 1.86 | 1.88 |
| θ_2 [kg m ²] | 1.10 | 1.23 | 1.53 |
| θ_3 [kg m ²] | 0.49 | 1.53 | 1.02 |
| θ_4 [kg m ²] | – | 0.49 | 1.26 |
| k_1 [$\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$] | 1200 | 1200 | 1243 |
| k_2 [$\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$] | – | 1200 | 1343 |

Tabelle 7.1: Die Modellparameter der Versuchsaufbauten I, II und III

Abbildung 7.10: Die Moden der Versuchsaufbauten I, II und III. P: Pumpenrad, T: Turbinenrad, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 10 \%$

7.2.2 Die Resonanzen in Abhängigkeit von der Pumpendrehzahl

Die Eigenwertanalyse der Antriebsstrangmodelle in Kapitel 5 zeigt eine starke Abhängigkeit der Ergebnisse von dem gewählten Betriebsbereich der hydrodynamischen Kupplung. Es wird daher das Resonanzverhalten zunächst bei *konstantem* Schlupf und unterschiedlichen Pumpendrehzahlen untersucht. Hierzu wird der Versuchsaufbau III nach Abbildung 6.10

pumpenseitig an Achse 1 und danach turbinenseitig an Achse 2 für 5 unterschiedliche Pumpendrehzahlen $n_P = 500, 600, 700, 800$ und 900 min^{-1} erregt. Der Schlupf beträgt jeweils $s = 5 \%$.

In einem Vorversuch ist derselbe Aufbau III auf gleiche Weise jedoch mit entleerter Kupplung erregt worden, um einen eventuellen drehzahlabhängigen Einfluß der Federkupplung auf das Resonanzverhalten des Antriebsstrangs festzustellen. Einen solchen Einfluß zeigten die Meßergebnisse nicht, so daß das Resonanzverhalten des Versuchsaufbaus unabhängig von der Betriebsdrehzahl der Federkupplungskomponente ist. Alle in den Messungen dargestellten Veränderungen des Resonanzverhaltens sind auf das betriebspunktabhängige Übertragungsverhalten der hydrodynamischen Kupplung zurückzuführen.

In Abbildung 7.11 sind die Amplitudenspektren der Frequenzgangfunktionen $h_{21}(j\omega_k)$ für die 5 verschiedenen Pumpendrehzahlen aufgetragen. Die Kurvenmaxima geben die Eigenfrequenz des Pumpenstrangs (Mode II) wieder. Es ist zu erkennen, daß die Eigenfrequenzen für höhere Drehzahlen sich im Spektrum nach rechts verschieben. Für $n_P = 500 \dots 900 \text{ min}^{-1}$ von ca. 6.1 Hz bis ca. 6.2 Hz. Gleichzeitig erhöht sich die Dämpfung, da die Resonanzamplituden mit wachsender Drehzahl abnehmen. Dieses Verhalten ist auch in den betreffenden Phasenspektren durch die geringere Steilheit des Phasenabfalls an der Resonanzstelle zu erkennen. Die Resonanz des Turbinenstrangs, Mode I, die bei ca. 8 Hz liegt, tritt in keinem der Amplitudenspektren auf, s. Abbildung 7.13.

Vergleicht man die Spektren des Elementes $h_{21}(j\omega_k)$ mit denen von $h_{34}(j\omega_k)$ in Abbildung 7.13, so ist mit wachsender Pumpendrehzahl für den Turbinenstrang eine stärkere Verschiebung der Resonanzfrequenz als für den Pumpenstrang zu verzeichnen. Für die niedrigste Pumpendrehzahl, $n_P = 500 \text{ min}^{-1}$, beträgt die Eigenfrequenz des Turbinenstrangs ca. 7.65 Hz und für die höchste, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, ca. 8 Hz. Wie auch bei der Frequenzgangfunktion h_{21} nimmt die Dämpfung für höhere Drehzahlen zu. Interessant ist, daß hier die Resonanz des Pumpenstrangs zu erkennen ist, die sich durch eine leichte Überhöhung bei ca. 6.2 Hz in den Amplitudenspektren auswirkt. Der Einfluß dieser Resonanz auf den Phasenverlauf ist in Abbildung 7.14 zu sehen. Der Vergleich der Spektren in Abbildung 7.11 und Abbildung 7.13 zeigt, daß die Eigenfrequenzen des Turbinenstrangs, Mode I, eine höhere Dämpfung zeigen als die des Pumpenstrangs, Mode II.

Da nur Kupplungsmodelle für die Drehzahlen 500, 700 und 900 min^{-1} aufgenommen worden sind, sind in Tabelle 7.2 die Ergebnisse aus der Eigenwertanalyse des Antriebsstrangmodells, Versuchsaufbau III nach Tabelle 7.1, für die entsprechenden Drehzahlen den Meßergebnissen gegenübergestellt. Aufgeführt sind die Moden I und II des jeweiligen Modells, die den Resonanzen von Pumpen- und Turbinenstrang entsprechen. Der Vergleich der Ergebnisse der Modellrechnung und der Messung zeigt, daß das Antriebsstrangmodell die Eigenfrequenzen und Dämpfungen des Turbinenstrangs, Mode I, in Abhängigkeit der Absolutdrehzahl n_P des Pumpenlaufrades nicht nur qualitativ sondern auch quantitativ gut wiedergibt. Jedoch liegen die Dämpfungen der Pumpenstrangeigenfrequenz bei den Modellergebnissen niedriger als bei den Messungen.

In Kapitel 5 zeigt die Eigenwertanalyse der Antriebsstrangmodelle, daß die Abhängigkeit der Eigenfrequenzverschiebung vom Schlupf besonders ausgeprägt ist, wenn die Kupplungsmodelle für die höchste Pumpendrehzahl, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, verwendet werden. Dieses Verhalten

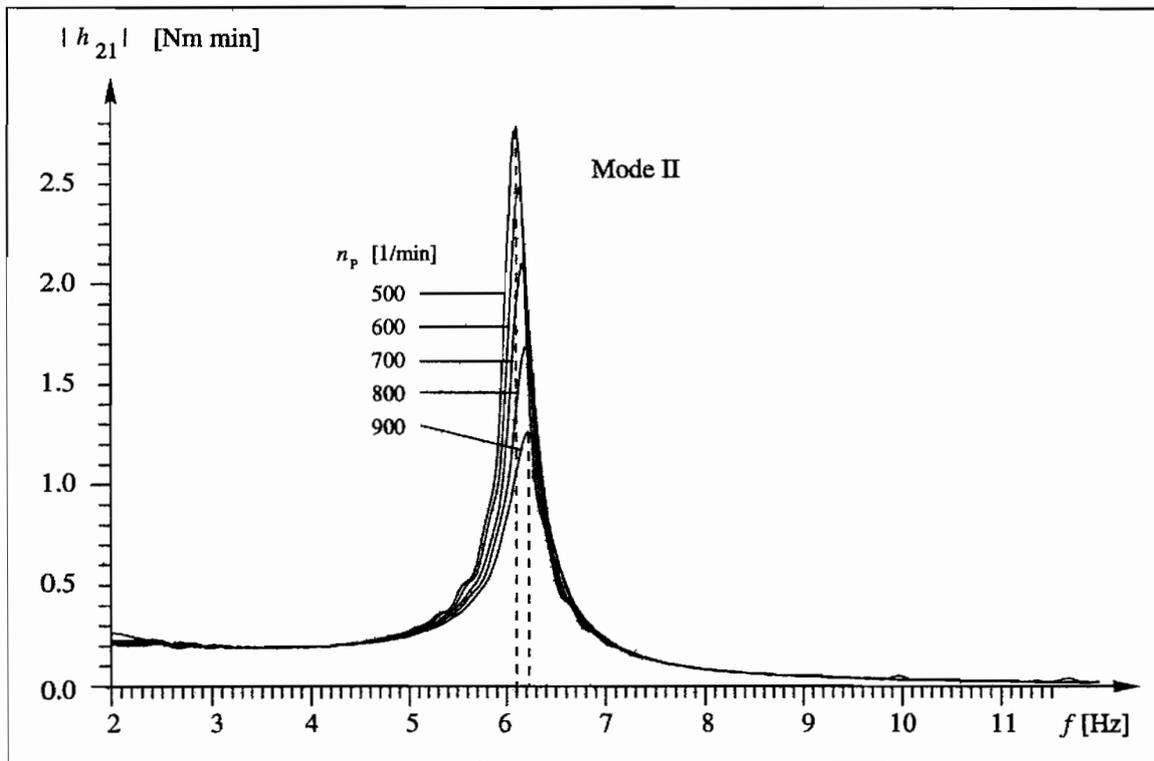


Abbildung 7.11: Amplitudenspektren der Frequenzgangfunktionen h_{21} des Aufbaus III für unterschiedliche Pumpendrehzahlen, $s = 5\%$

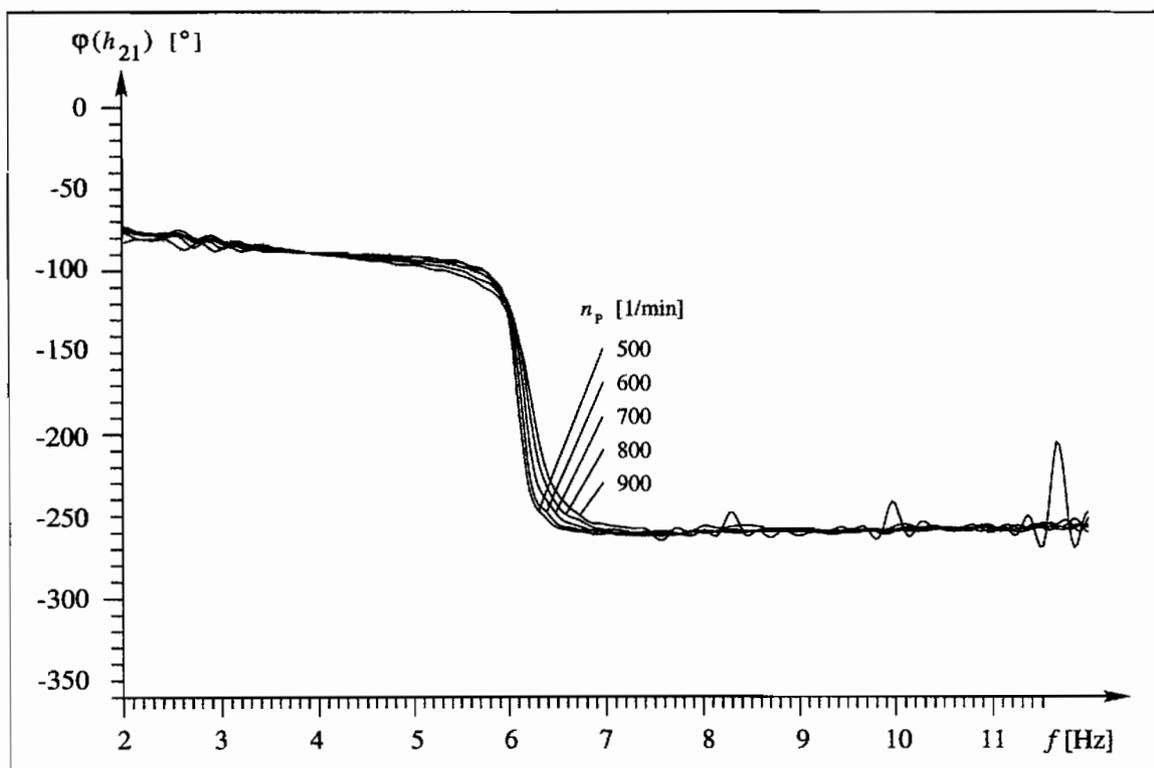


Abbildung 7.12: Phasenspektren der Frequenzgangfunktionen h_{21} des Aufbaus III für unterschiedliche Pumpendrehzahlen, $s = 5\%$

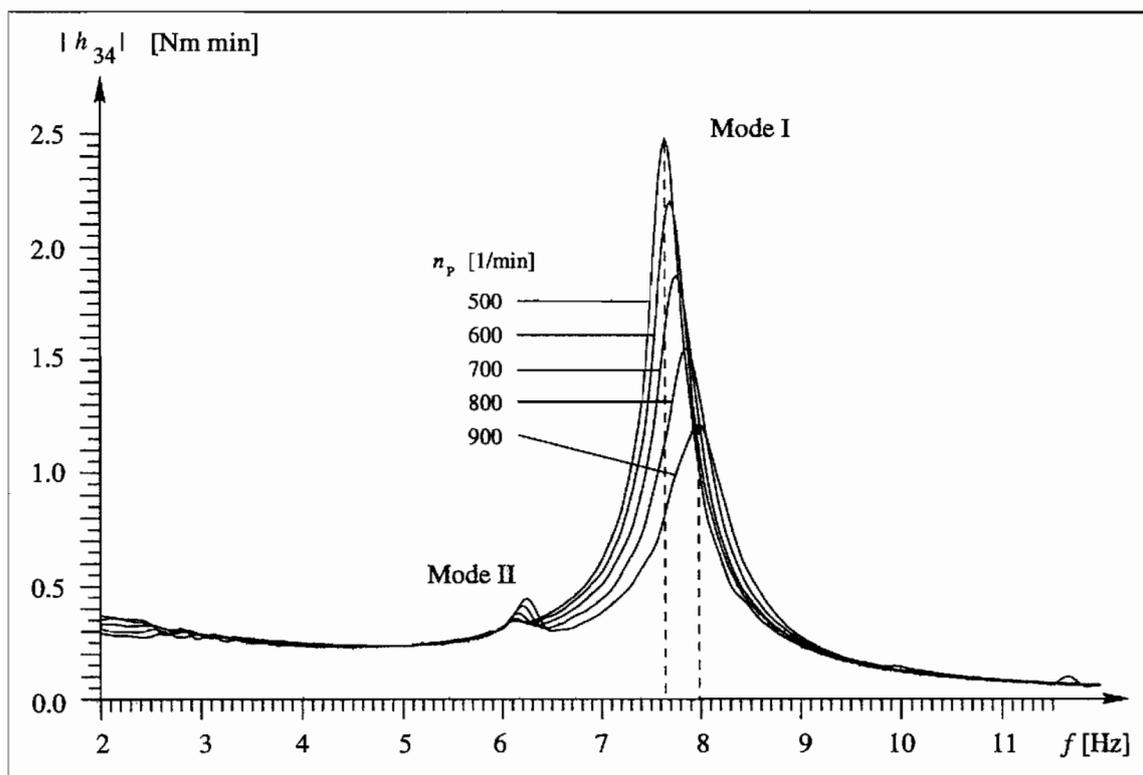


Abbildung 7.13: Amplitudenspektren der Frequenzgangfunktionen h_{34} des Aufbaus III für unterschiedliche Pumpendrehzahlen, $s = 5 \%$

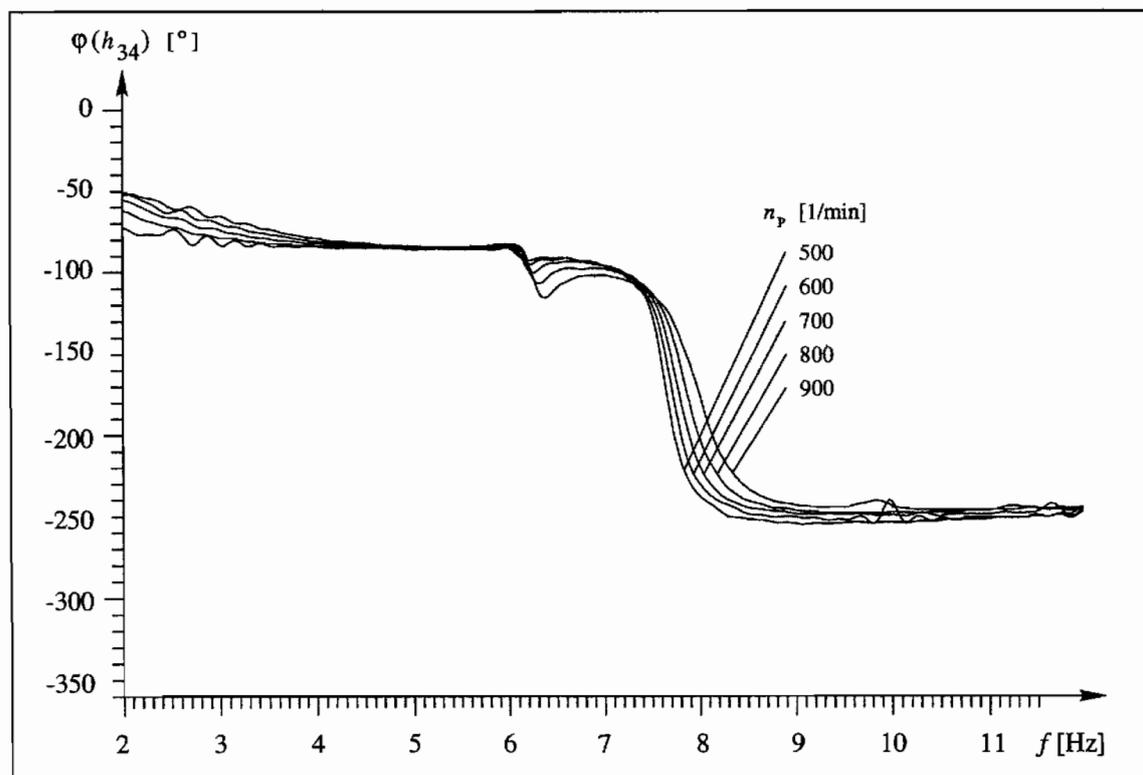


Abbildung 7.14: Phasenspektren der Frequenzgangfunktionen h_{34} des Aufbaus III für unterschiedliche Pumpendrehzahlen, $s = 5 \%$

| Versuchsaufbau III $s = 5 \%$ | | | | | |
|---------------------------------------------|------|------------|-----------------------------|------------|-----------------------------|
| Betriebspunkt n_P [min ⁻¹] | Mode | Modell | | Messung | |
| | | f_0 [Hz] | δ [s ⁻¹] | f_0 [Hz] | δ [s ⁻¹] |
| 500 | I | 7.76 | 0.707 | 7.67 | 0.548 |
| | II | 6.24 | 0.394 | 6.13 | 0.639 |
| 600 | I | – | – | 7.70 | 1.100 |
| | II | – | – | 6.16 | 0.730 |
| 700 | I | 7.90 | 1.184 | 7.79 | 1.278 |
| | II | 6.34 | 0.577 | 6.19 | 0.731 |
| 800 | I | – | – | 7.88 | 1.645 |
| | II | – | – | 6.22 | 0.913 |
| 900 | I | 8.06 | 2.067 | 8.02 | 2.009 |
| | II | 6.44 | 0.762 | 6.25 | 1.187 |

Tabelle 7.2: Versuchsaufbau III, Eigenfrequenzen und Abklingkonstanten der Resonanzen aus Modell und Messung für verschiedene Pumpendrehzahlen

wird durch die Versuchsergebnisse bestätigt. In Abbildung 7.15 und Abbildung 7.16 sind die Resonanzen des Versuchsaufbaus I, s. Abbildung 6.10, für die niedrigste Pumpendrehzahl, $n_P = 500$, und die höchste, 900 min^{-1} , dargestellt. Die Versuchsanordnung I ist hier mit einem DrehzahlswEEP von 3 bis 10 Hz erregt worden. Mit der Meßzeit $t_{\text{mess}} = 20 \text{ s}$ beträgt die Auflösung im Frequenzbereich abweichend von den anderen Messungen $r_f = 0.059 \text{ Hz}$. Die Resonanzkurven zeigen für $n_P = 500 \text{ min}^{-1}$, daß sich die Dämpfung in Abhängigkeit vom Schlupf verändert, jedoch die Eigenfrequenz für sämtliche Betriebspunkte nahezu konstant bei ca. 5.9 Hz bleibt, s.a. Tabelle 7.3. Für $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ zeigt neben der Dämpfung auch die Eigenfrequenz eine starke Abhängigkeit vom Schlupf. Sie wandert von $f_0 = 5.4 \text{ Hz}$ für $s = 5 \%$ bis $f_0 = 5.8 \text{ Hz}$ bei $s = 30 \%$. Im folgenden Abschnitt wird das Resonanzverhalten für unterschiedlichen Schlupf näher betrachtet.

7.2.3 Die Resonanzen in Abhängigkeit vom Schlupf

Daß die Eigenfrequenzen sich über den Schlupf bei höheren Pumpendrehzahlen stärker verschieben als bei niedrigen, zeigen auch die Antriebsstrangmodelle, deren Betriebspunktabhängigkeit in Kapitel 5 untersucht worden ist. In Tabelle 7.3 und 7.4 sind die Resonanzkennwerte aus Modellrechnung und Messung für den Versuchsaufbau I angegeben. Die Ergebnisse sind für $n_P = 500 \text{ min}^{-1}$ in Abbildung 7.17 und Abbildung 7.18 jeweils gemeinsam in einem Diagramm aufgetragen. Qualitativ gibt das Modell den Verlauf der Eigenfrequenz und der Dämpfung des Versuchsaufbaus I gut wieder. Die Eigenfrequenz bleibt nahezu konstant über den gesamten Betriebsbereich. Die Abweichung zwischen Modell und Messung liegen im Bereich der Frequenzauflösung der FFT von ca. 0.06 Hz. Der Verlauf der Dämpfung (Abklingkonstante) des Modells weicht aber von dem gemessenen teilweise um mehr als 50 % nach unten ab, so daß quantitativ gesehen, das Dämpfungsverhalten durch das Modell nur mäßig wiedergegeben wird.

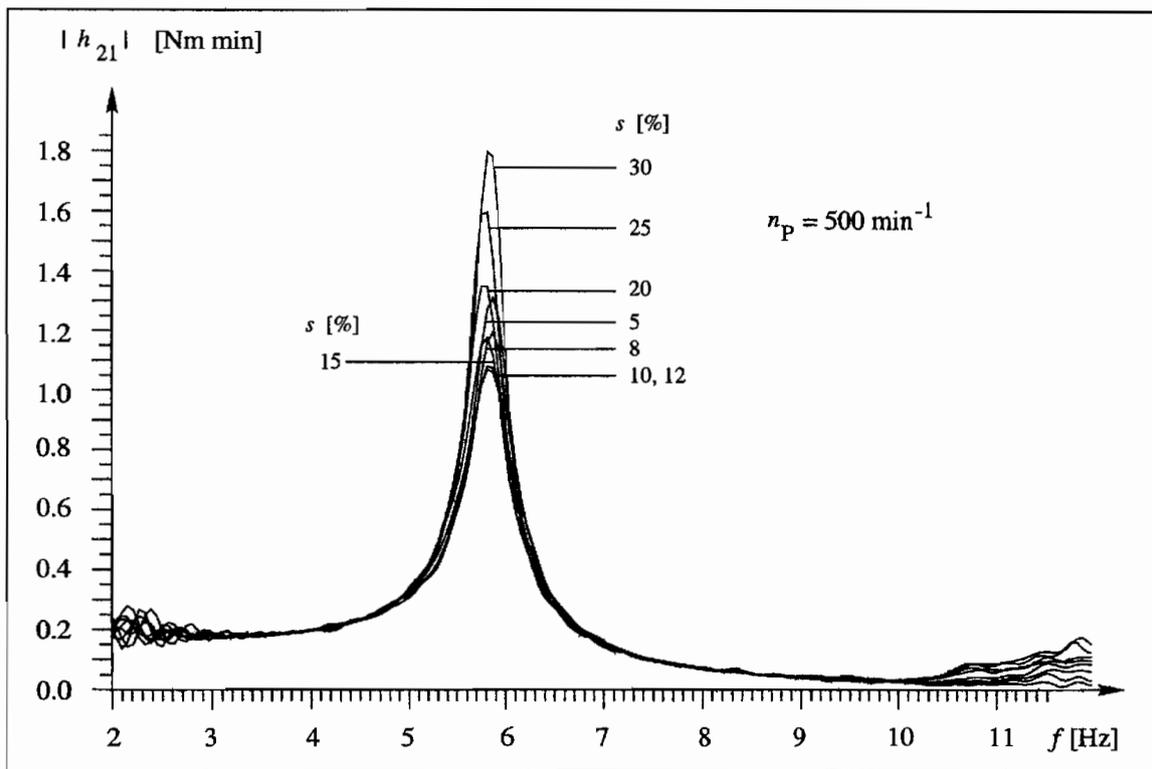


Abbildung 7.15: Amplitudenspektren der Frequenzgangfunktionen h_{31} des Aufbaus I für $n_P = 500 \text{ min}^{-1}$

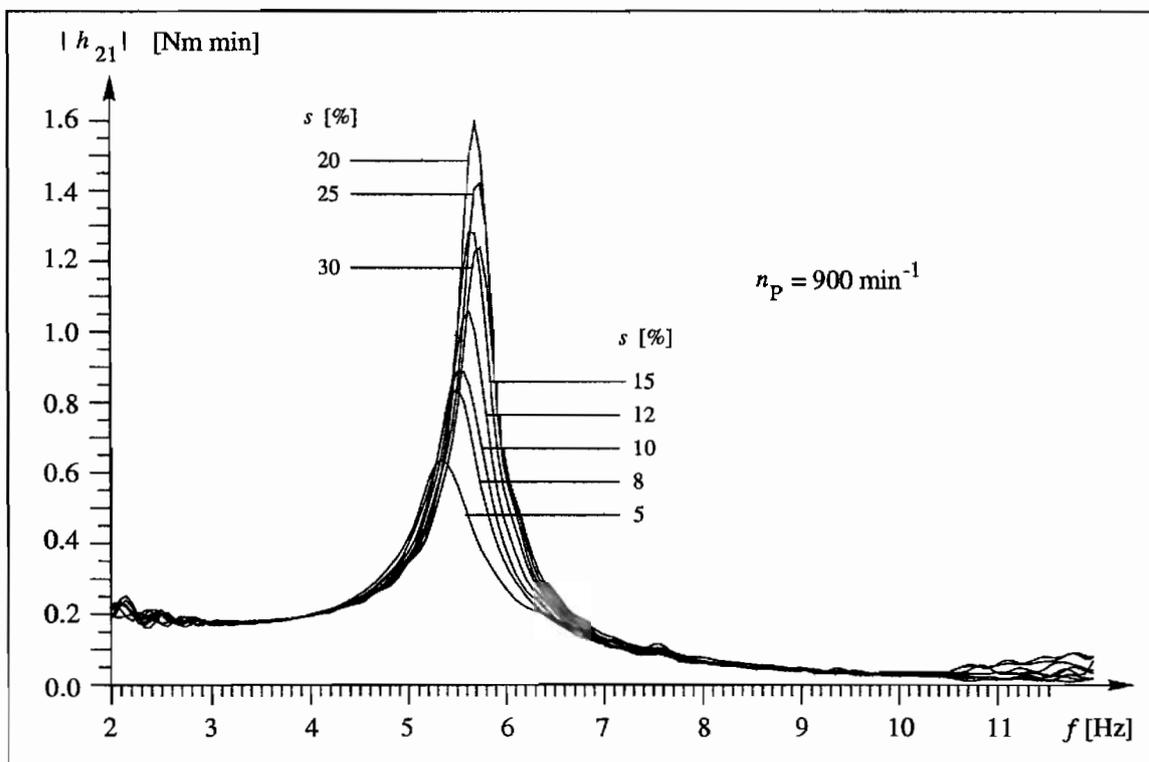
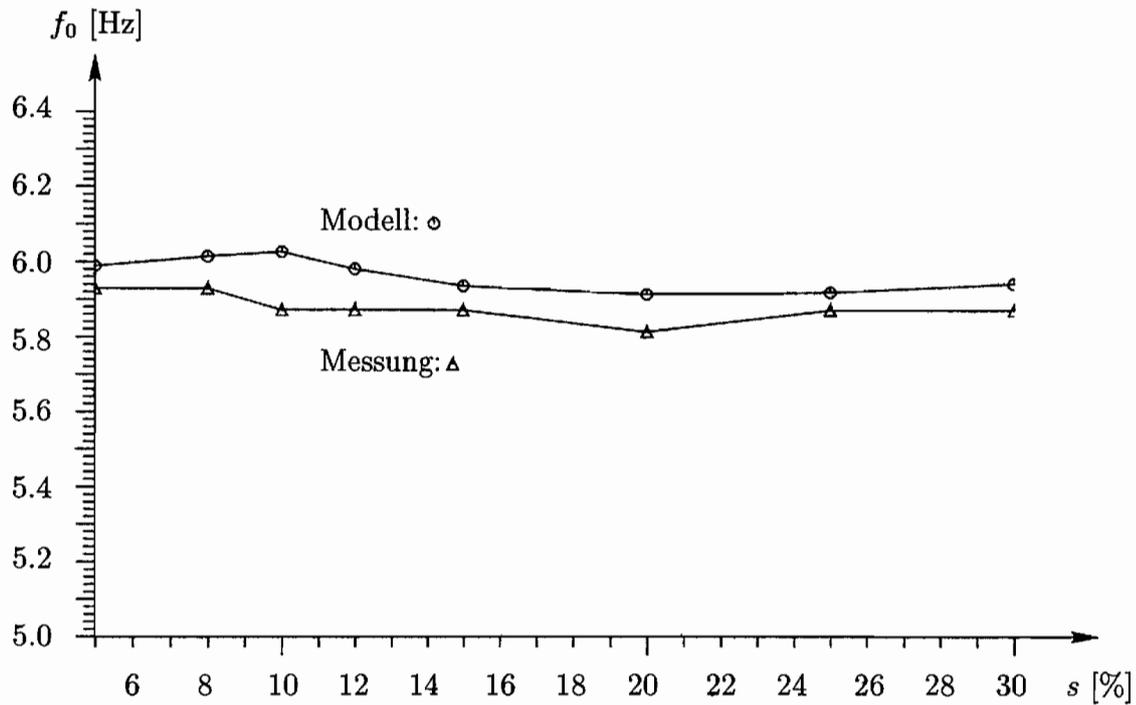
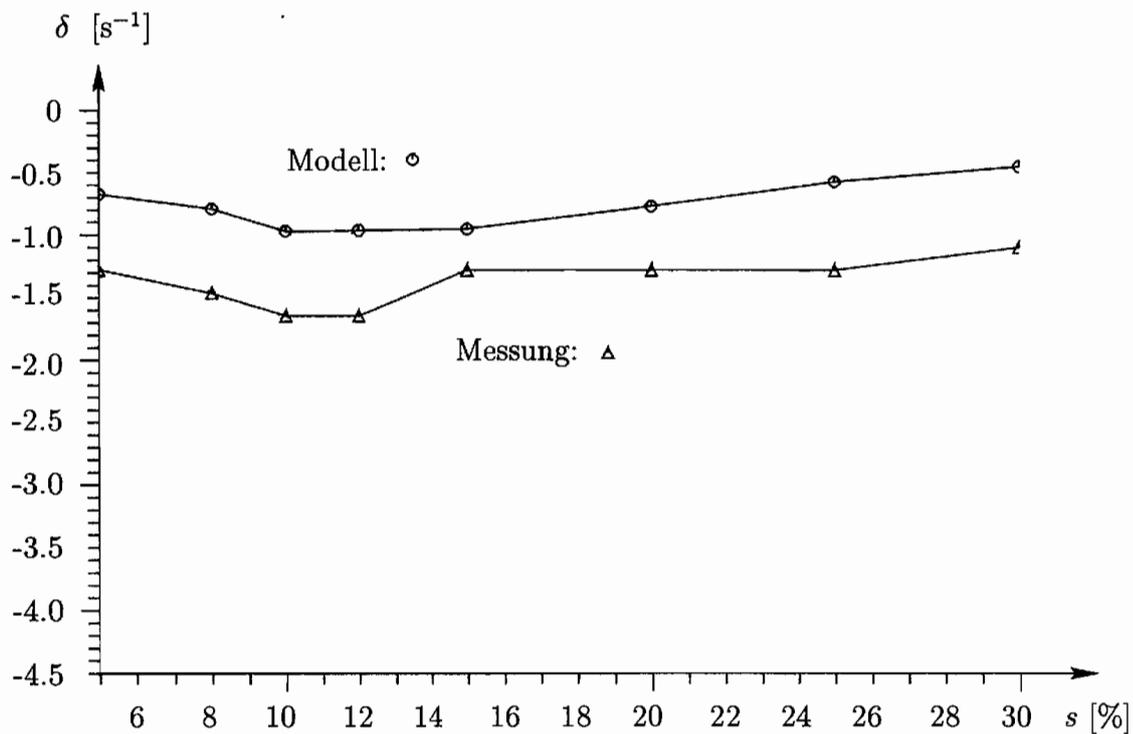
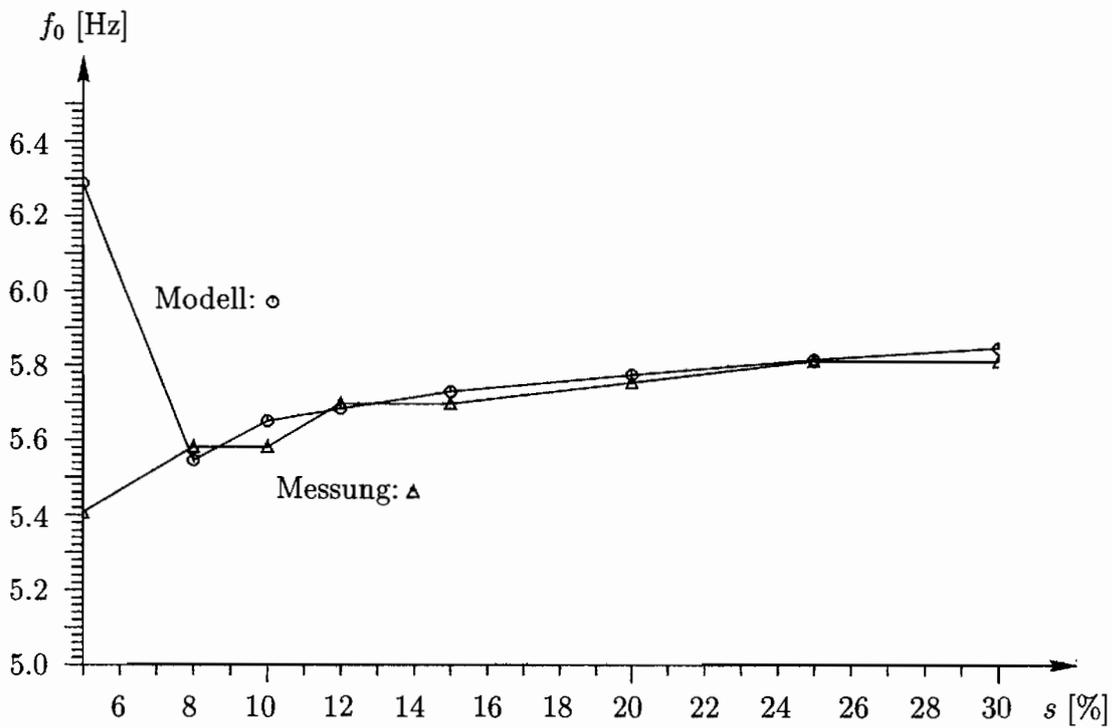
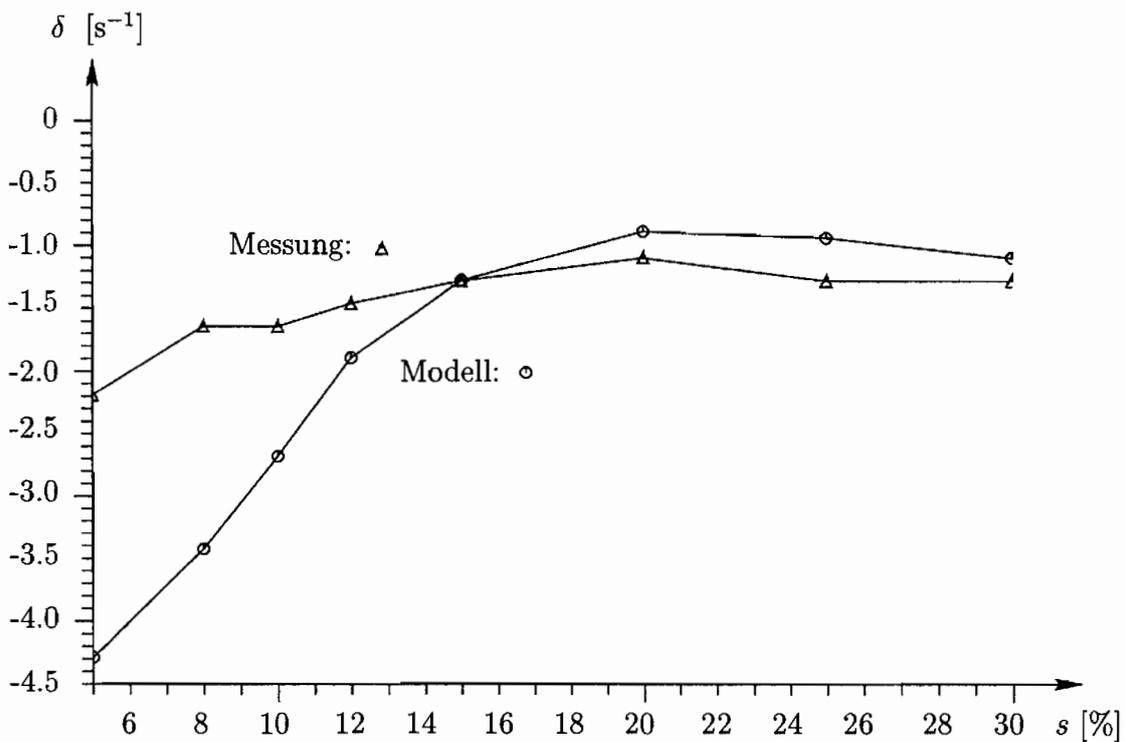


Abbildung 7.16: Amplitudenspektren der Frequenzgangfunktionen h_{31} des Aufbaus I für $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$

Abbildung 7.17: Versuchsaufbau I, $n_P = 500 \text{ min}^{-1}$, Eigenfrequenzen Modell – MessungAbbildung 7.18: Versuchsaufbau I, $n_P = 500 \text{ min}^{-1}$, Abklingkonstanten Modell – Messung

Abbildung 7.19: Versuchsaufbau I, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, Eigenfrequenzen, Modell – MessungAbbildung 7.20: Versuchsaufbau I, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, Abklingkonstanten Modell – Messung

| Versuchsaufbau I $n_P = 500 \text{ min}^{-1}$ | | | | |
|-----------------------------------------------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|
| Betriebspunkt s [%] | Modell | | Messung | |
| | f_0 [Hz] | δ [s^{-1}] | f_0 [Hz] | δ [s^{-1}] |
| 5 | 5.99 | 0.374 | 5.93 | 1.278 |
| 8 | 6.01 | 0.790 | 5.93 | 1.461 |
| 10 | 6.03 | 0.969 | 5.87 | 1.644 |
| 12 | 5.98 | 0.962 | 5.87 | 1.644 |
| 15 | 5.94 | 0.951 | 5.87 | 1.278 |
| 20 | 5.91 | 0.770 | 5.81 | 1.278 |
| 25 | 5.92 | 0.572 | 5.87 | 1.278 |
| 30 | 5.94 | 0.446 | 5.87 | 1.096 |

Tabelle 7.3: Versuchsaufbau I, Eigenfrequenzen und Abklingkonstanten der Resonanzen aus Modell und Messung in Abhängigkeit vom Schlupf, $n_P = 500 \text{ min}^{-1}$

| Versuchsaufbau I $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ | | | | |
|-----------------------------------------------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|
| Betriebspunkt s [%] | Modell | | Messung | |
| | f_0 [Hz] | δ [s^{-1}] | f_0 [Hz] | δ [s^{-1}] |
| 5 | 6.29 | 4.288 | 5.41 | 2.191 |
| 8 | 5.55 | 3.428 | 5.58 | 1.644 |
| 10 | 5.65 | 2.681 | 5.58 | 1.644 |
| 12 | 5.68 | 1.894 | 5.70 | 1.461 |
| 15 | 5.73 | 1.275 | 5.70 | 1.278 |
| 20 | 5.78 | 0.884 | 5.75 | 1.096 |
| 25 | 5.82 | 0.936 | 5.81 | 1.278 |
| 30 | 5.85 | 1.095 | 5.81 | 1.278 |

Tabelle 7.4: Versuchsaufbau I, Eigenfrequenzen und Abklingkonstanten der Resonanzen aus Modell und Messung in Abhängigkeit vom Schlupf, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$

Ein anderes Bild zeigt der Vergleich bei $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ in Abbildung 7.19 und 7.20. Sieht man von der hohen Abweichung des Modells bei $s = 5 \%$ ab, so stimmt der Verlauf der Eigenfrequenz zwischen Modell und Messung sehr gut überein. Die Dämpfung zeigt aber, daß im unteren Schlupfbereich, $s = 5 \dots 10 \%$ hier der Wert des Modells bis zu 100 % über dem Gemessenen liegt.

Für die Struktur mit 3 Freiheitsgraden des Antriebsstrangs nach Versuchsaufbau I tritt nur eine einzige Eigenform auf. Es wird nun das Resonanzverhalten der Versuchsaufbauten II und III nach Abbildung 6.10 betrachtet, für die jeweils zwei Moden auftreten. Da für hohe Pumpendrehzahlen die Resonanzen des Antriebsstrangs die stärkste Abhängigkeit vom Schlupf zeigen, werden für diese Versuche nur die Ergebnisse diskutiert, die sich bei der höchsten Pumpendrehzahl $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ ergeben haben. Sie sind für die Eigenfrequenzen und Dämpfungen beider Versuchsanordnungen in Tabelle 7.5 aus Modell und Messung gegenübergestellt. Für jeden Betriebspunkt der hydrodynamischen Kupplung sind die Werte

| Versuchsaufbau II $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ | | | | | |
|------------------------------------------------|------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|
| Betriebspunkt s [%] | Mode | Modell | | Messung | |
| | | f_0 [Hz] | δ [s^{-1}] | f_0 [Hz] | δ [s^{-1}] |
| 5 | I | 8.31 | 0.561 | 8.28 | 1.278 |
| | II | 3.79 | 1.647 | 3.87 | 0.822 |
| 8 | I | 8.28 | 0.904 | 8.23 | 1.461 |
| | II | 3.93 | 1.428 | 3.89 | 0.913 |
| 10 | I | 8.25 | 0.912 | 8.20 | 1.187 |
| | II | 3.99 | 1.455 | 3.92 | 0.913 |
| 12 | I | 8.21 | 0.815 | 8.17 | 1.004 |
| | II | 4.04 | 1.238 | 3.95 | 0.913 |
| 15 | I | 8.20 | 0.596 | 8.20 | 0.822 |
| | II | 4.11 | 0.909 | 4.01 | 0.822 |
| 20 | I | 8.20 | 0.398 | 8.20 | 0.822 |
| | II | 4.16 | 0.637 | 4.04 | 0.730 |
| 25 | I | 8.22 | 0.351 | 8.23 | 0.822 |
| | II | 4.18 | 0.719 | 4.07 | 0.822 |
| 30 | I | 8.24 | 0.330 | 8.23 | 0.822 |
| | II | 4.19 | 0.890 | 4.04 | 0.913 |

| Versuchsaufbau III $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ | | | | | |
|-------------------------------------------------|------|------------|-----------------------|------------|-----------------------|
| Betriebspunkt s [%] | Mode | Modell | | Messung | |
| | | f_0 [Hz] | δ [s^{-1}] | f_0 [Hz] | δ [s^{-1}] |
| 5 | I | 8.06 | 2.067 | 8.08 | 2.831 |
| | II | 6.44 | 0.762 | 6.31 | 1.187 |
| 8 | I | 8.10 | 3.510 | 8.08 | 4.748 |
| | II | 6.52 | 1.282 | 6.36 | 1.735 |
| 10 | I | 7.97 | 4.319 | 7.85 | 7.214 |
| | II | 6.51 | 1.693 | 6.36 | 2.100 |
| 12 | I | 7.67 | 5.200 | 7.35 | 5.844 |
| | II | 6.46 | 2.730 | 6.22 | 2.922 |
| 15 | I | 7.35 | 3.600 | 7.24 | 3.652 |
| | II | 6.20 | 3.514 | 6.02 | 3.196 |
| 20 | I | 7.40 | 2.326 | 7.32 | 2.739 |
| | II | 6.06 | 2.296 | 6.05 | 2.374 |
| 25 | I | 7.53 | 2.357 | 7.35 | 2.922 |
| | II | 6.16 | 1.814 | 6.07 | 2.009 |
| 30 | I | 7.68 | 2.155 | 7.59 | 2.831 |
| | II | 6.23 | 1.375 | 6.13 | 1.644 |

Tabelle 7.5: Versuchsaufbau II und III, Eigenfrequenzen und Abklingkonstanten der Resonanzen aus Modellrechnung und Messung in Abhängigkeit vom Schlupf, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$

des Mode I und II angegeben. Zur Auswertung der Messungen an Versuchsaufbau II wird entsprechend der Eigenform des Mode I nach Abbildung 7.10 das Element h_{21} und für Mode II das Element h_{31} der Frequenzgangmatrix betrachtet. Das Element h_{21} gibt die Systemantwort des 2. Freiheitsgrades und h_{31} die des 3. Freiheitsgrades auf die Erregung an Achse 1 wieder. Die Frequenzgangfunktionen sind für die verschiedenen Betriebspunkte in Abbildung 7.21 und Abbildung 7.22 dargestellt. Es ist gut zu erkennen, daß die Resonanz des Mode II sich auf den 2. Freiheitsgrad kaum auswirkt, während der Mode I an Freiheitsgrad 3 eine deutliche Resonanzüberhöhung aufweist. Dieser Sachverhalt stimmt mit den Eigenformen des Antriebsstrangmodells für den Versuchsaufbau II in Abbildung 7.10 überein: für Mode II des Modells verschwindet die Amplitude des 2. Freiheitsgrades, für Mode I besitzt der 3. Freiheitsgrad eine deutliche Auslenkung.

An der Lage der Kurvenmaxima der Frequenzgangfunktionen ist zu sehen, daß die Eigenfrequenzen beider Moden sich bei Veränderung des Betriebspunktes kaum verschieben und nahezu konstant über den gesamten Schlupfbereich sind. In Abbildung 7.23 und 7.24 sind die Ergebnisse für Mode I und II dargestellt. Die Eigenfrequenzen von Modell und realem System stimmen sehr gut überein. Es ist zu erkennen, daß der Dämpfungsverlauf des Mode II von den Antriebsstrangmodellen besser wiedergegeben werden kann als der des Mode I. Aus der Zeigerdarstellung der Eigenformen des Versuchsaufbaus II in Abbildung 7.10 ist zu entnehmen, daß für Mode II die Freiheitsgrade 3 und 4 der Kupplungslaufräder einen Phasenunterschied von nur ca. 60° besitzen. Das bedeutet, daß die Relativverdrehung der Kupplungslaufräder gegenüber Mode I kleiner, und damit der Einfluß des hydrodynamischen Übertragungsverhaltens der Kupplung auf die Resonanz geringer ist. Da der 2. Freiheitsgrad in diesem Mode unbeteiligt ist, läßt sich diese Eigenform anschaulich beschreiben: die Kupplung (beide Laufräder) „schwingt gegen“ die Drehmasse des 1. Freiheitsgrades. Wesentlich hierbei ist, daß die beiden Kupplungslaufräder im Gegensatz zu Mode I annähernd phasengleich sind. Da bei der Eigenform des Versuchsaufbaus I die Verhältnisse ähnlich sind (s. Abbildung 7.10), kann man folgern, daß die Dämpfung derjenigen Eigenformen nur mäßig wiedergegeben werden kann, in denen die Schwingungen der beiden Kupplungslaufräder einen geringen Phasenunterschied aufweisen.

Der Versuchsaufbau III zeichnet sich dadurch aus, daß er an beiden Kupplungsseiten resonanzfähige Teilstränge besitzt. In den Abbildungen 7.25 und 7.26 sind die Amplitudenspektren der Frequenzgangfunktionen h_{21} und h_{34} dargestellt. Hier gibt das Element h_{21} die Systemantwort am Pumpenlaufrad für die Erregung an Achse 1 und h_{34} die Antwort am Turbinenlaufrad für die Erregung an Achse 2 wieder. Anschaulich entspricht der Mode I der Resonanz des Teilstrangs an der Turbinenseite, der Mode II der des an der Pumpenseite. Eine strenge Trennung zwischen diesen beiden Resonanzen ist aber eigentlich durch die Kopplung der hydrodynamischen Kupplung nicht mehr möglich, da für beide Moden der jeweils andere Teilstrang ebenfalls mitschwingt. Dieser Sachverhalt ist gut in den Eigenformen des Modells für Versuchsaufbau III zu erkennen, s. Abbildung 7.10. Beide Moden zeigen in Abbildung 7.25 und Abbildung 7.26 eine sehr starke Betriebspunktabhängigkeit bezüglich ihres Resonanzverhaltens. Im Amplitudenspektrum von h_{21} ist zu erkennen, daß bei pumpenseitiger Erregung (Achse 1) keine Resonanz des Turbinenstrangs auftritt, umgekehrt aber bei Erregung an der Turbinenseite (Achse 2) die Resonanz des Pumpenstrangs wesentlich den Verlauf des Amplitudenspektrums h_{34} mitbestimmt. Besonders hervorzuheben ist der

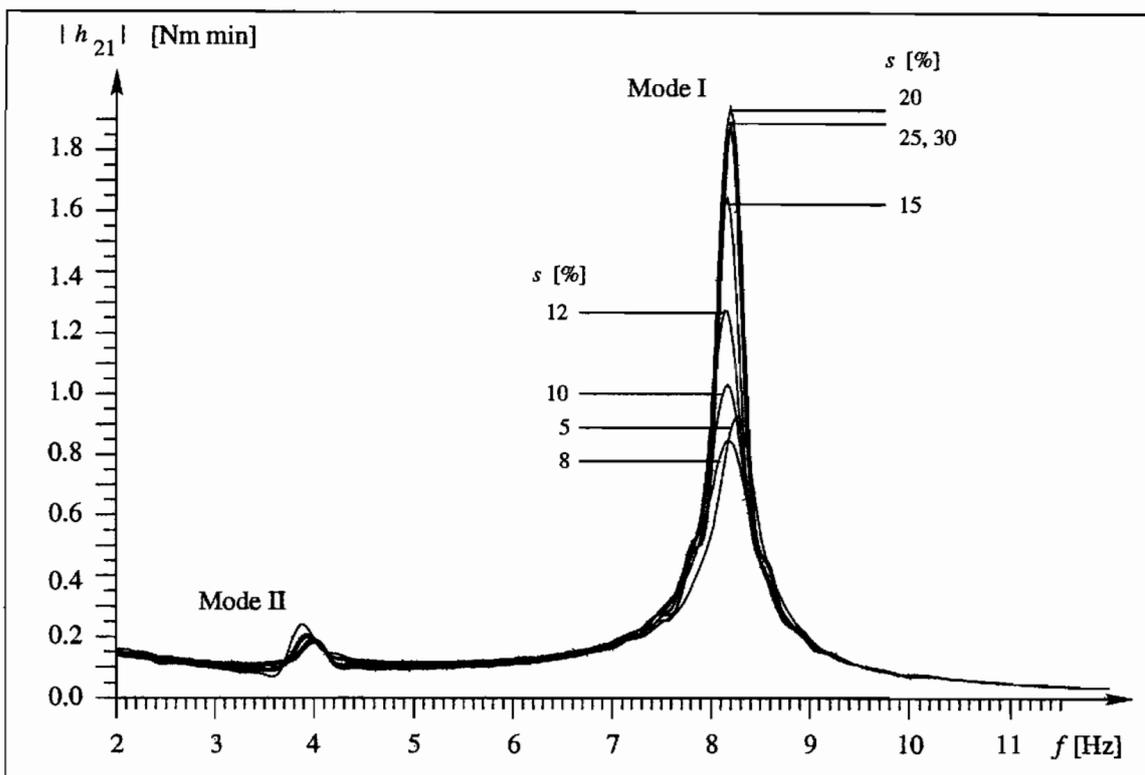


Abbildung 7.21: Amplitudenspektren der Frequenzgangfunktionen h_{21} des Aufbaus II für $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$

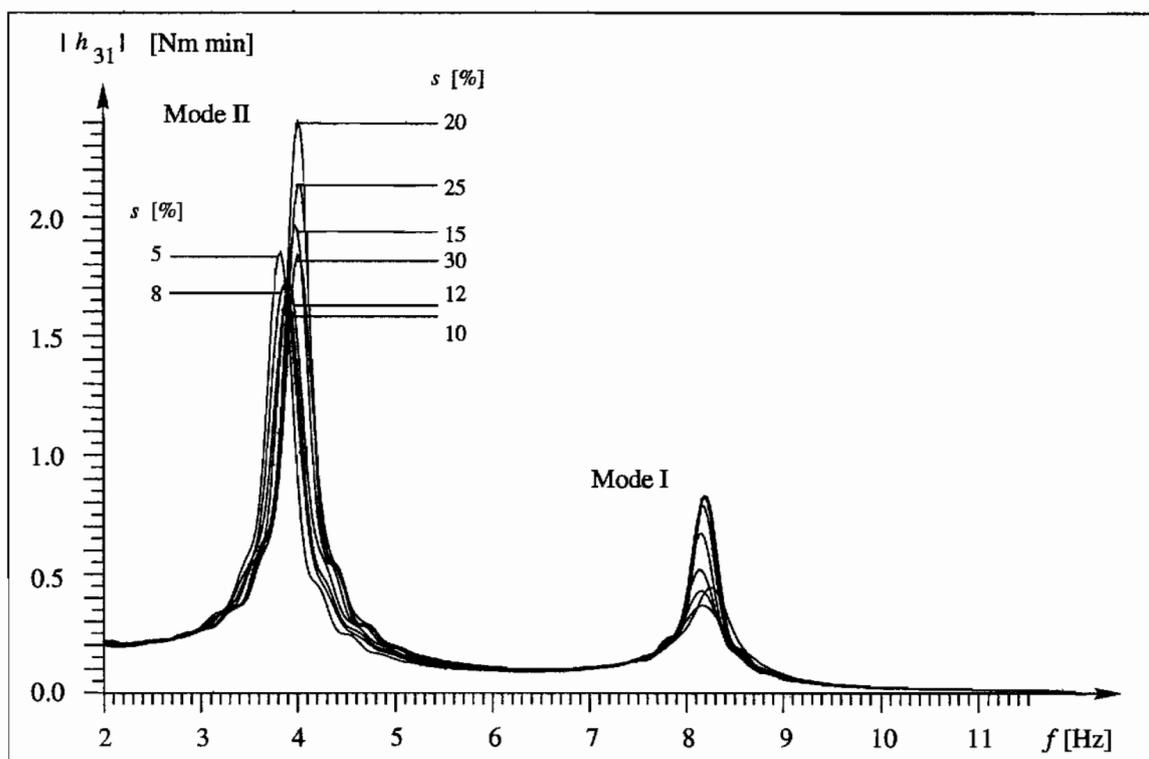
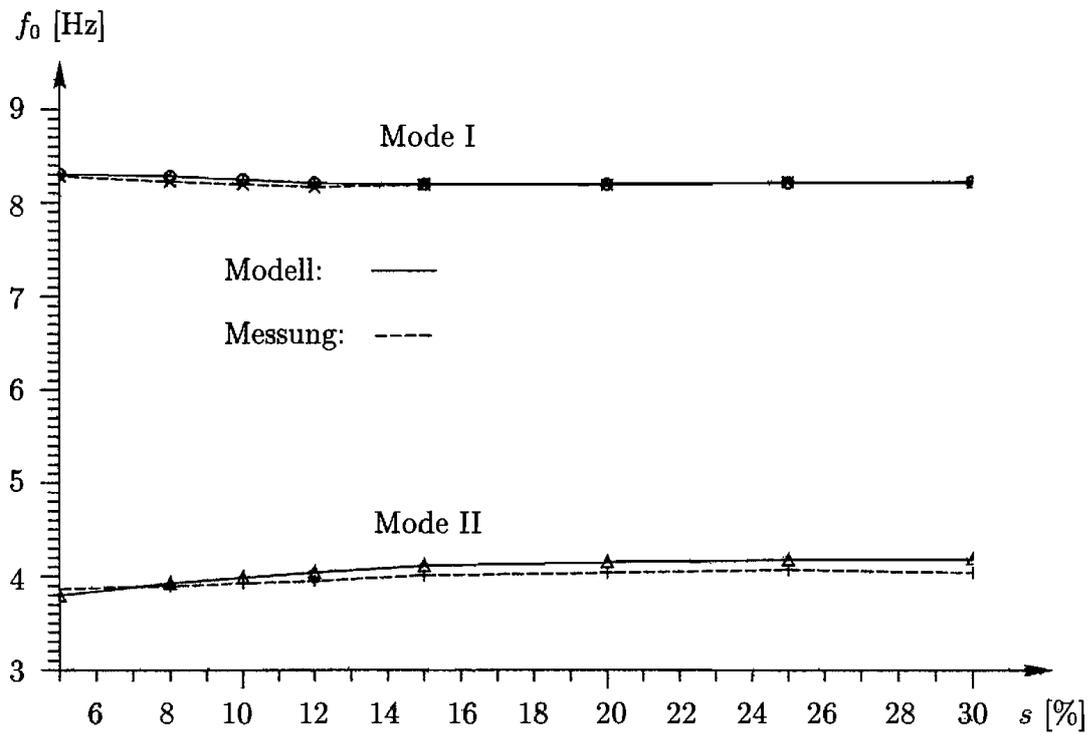
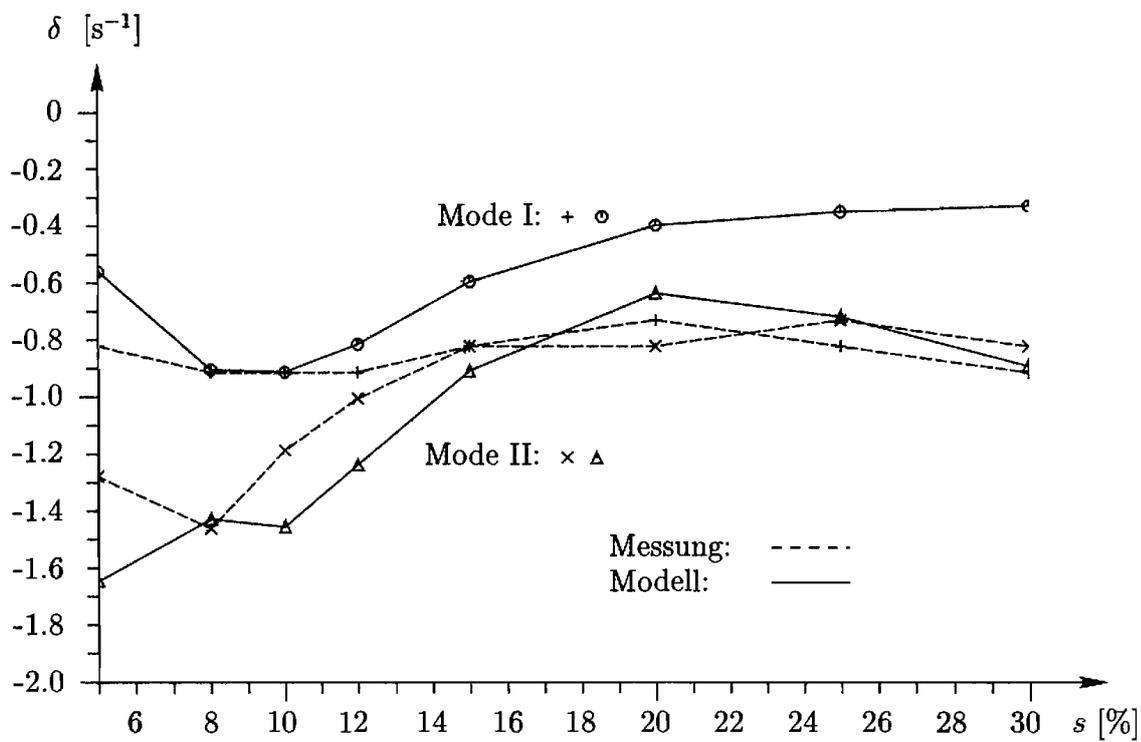


Abbildung 7.22: Amplitudenspektren der Frequenzgangfunktionen h_{31} des Aufbaus II für $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$

Abbildung 7.23: Versuchsaufbau II, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, Eigenfrequenzen, Modell - MessungAbbildung 7.24: Versuchsaufbau II, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, Abklingkonstanten Modell - Messung

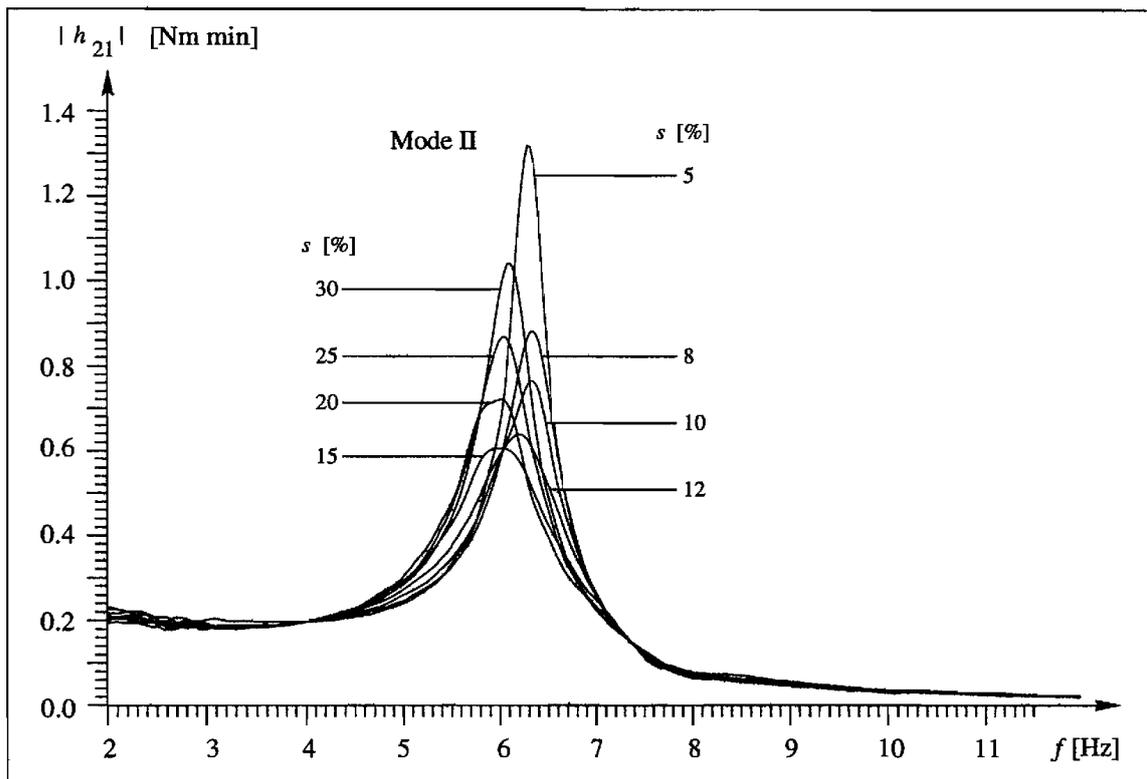


Abbildung 7.25: Amplitudenspektren der Frequenzgangfunktionen h_{21} des Aufbaus III für $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$

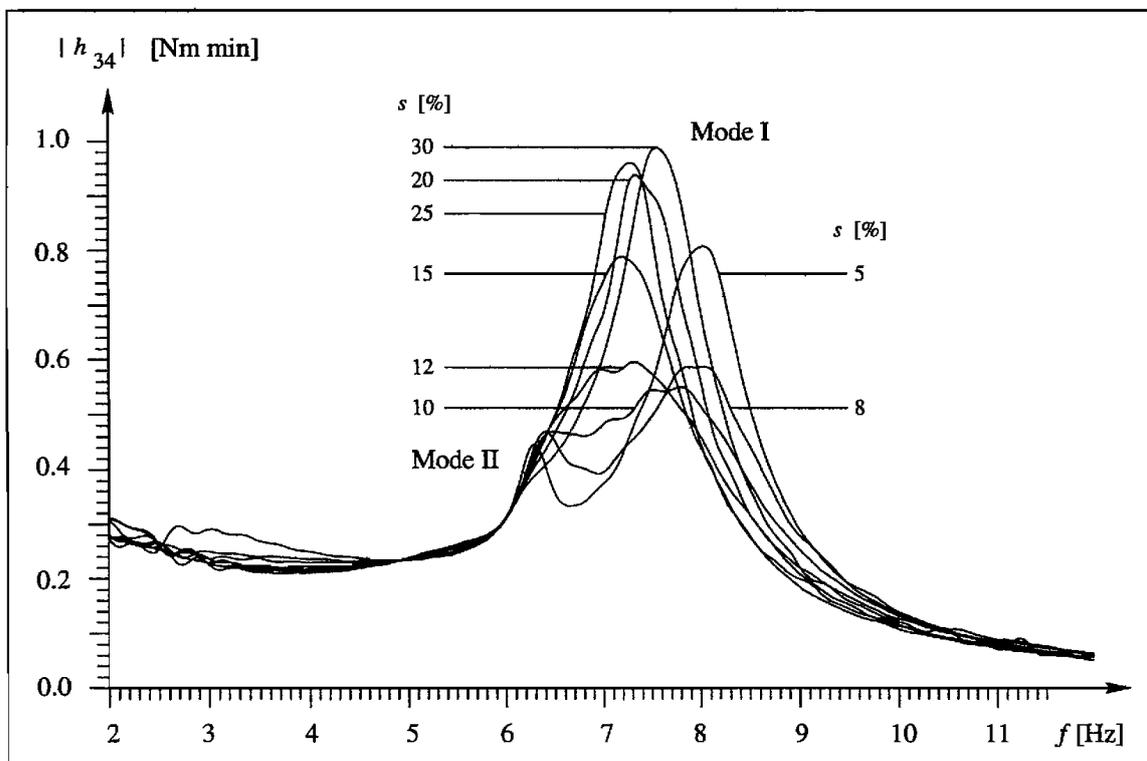


Abbildung 7.26: Amplitudenspektren der Frequenzgangfunktionen h_{34} des Aufbaus III für $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$

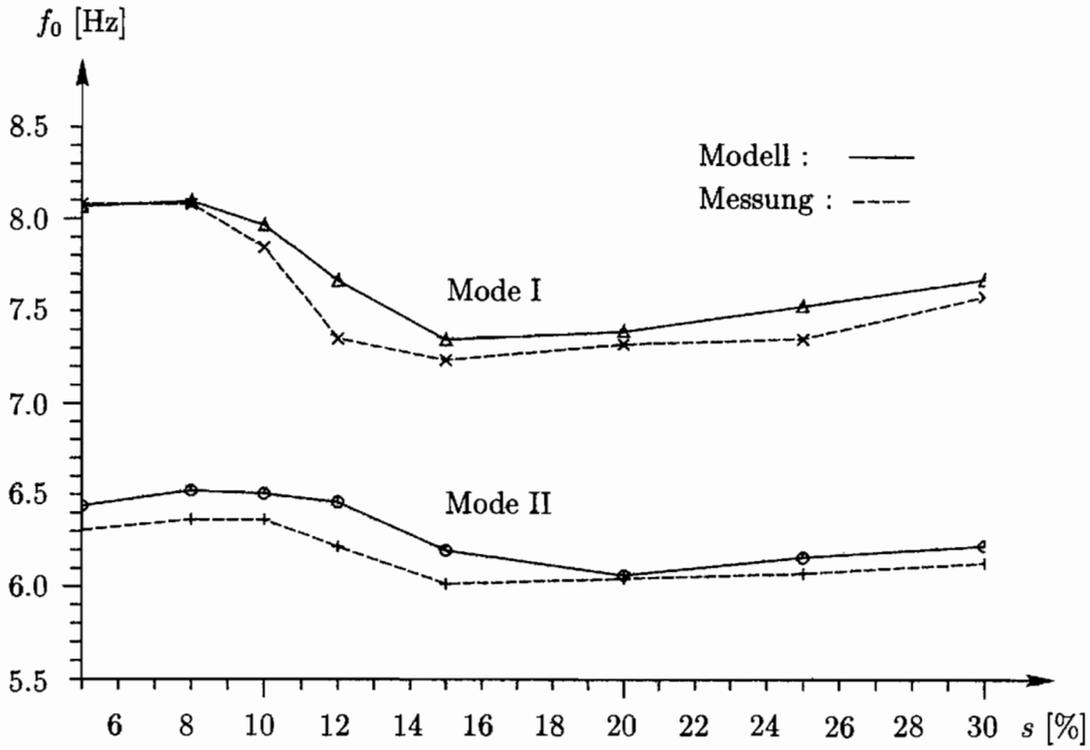


Abbildung 7.27: Versuchsaufbau III, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, Eigenfrequenzen, Modell – Messung

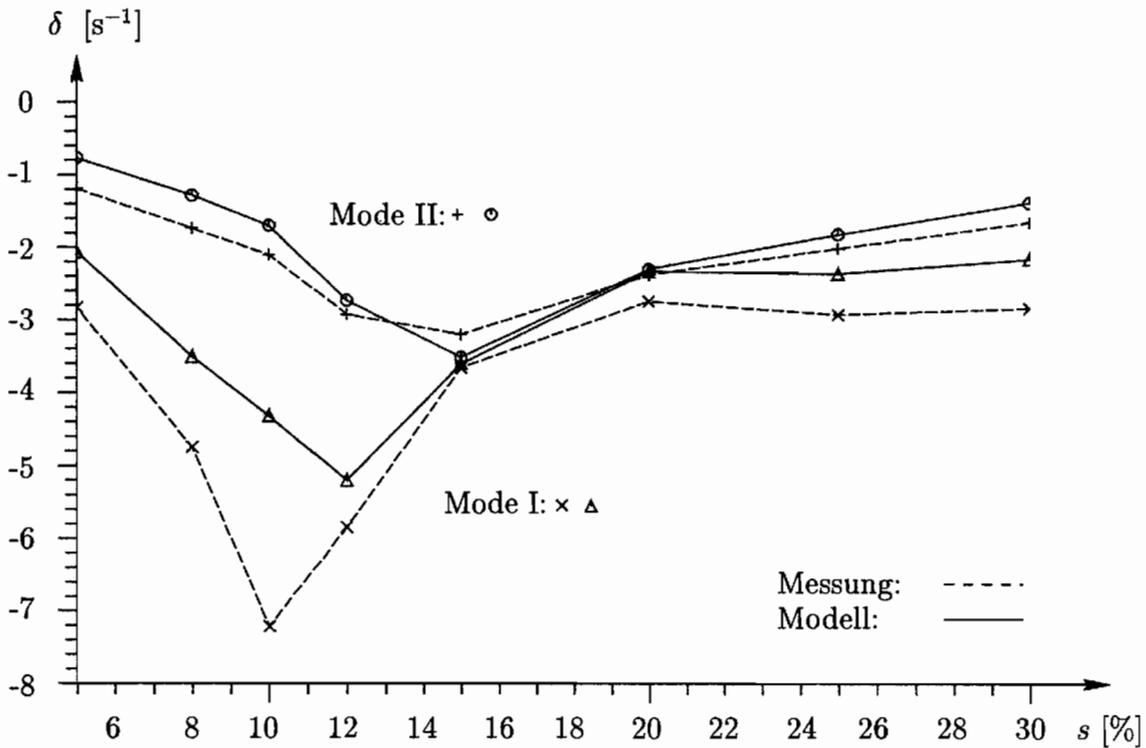


Abbildung 7.28: Versuchsaufbau III, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, Abklingkonstanten Modell – Messung

Amplitudenverlauf h_{34} der Modelle für $s = 10\%$ und $s = 12\%$ in Abbildung 7.26. In diesen Spektren ist keine deutlich ausgeprägte Resonanzfrequenz mehr zu erkennen. Die Werte für die Dämpfung müssen für diese beiden Betriebspunkte unter Vorbehalt betrachtet werden. In Abbildung 7.27 und Abbildung 7.28 sind die Eigenfrequenzen und Dämpfungen aus der Messung und der Modellrechnung für die Moden I und II aufgetragen. Der Verlauf der Eigenfrequenzen des Modells stimmt gut mit den aus der Messung bestimmten Werten überein. Auch der Dämpfungsverlauf der Modelle zeigt eine gute Übereinstimmung mit den Meßwerten. Erwartungsgemäß liegt die Dämpfung des Mode II für das Modell im Betriebspunkt $s = 10\%$ zu hoch.

Die Ergebnisse der Versuche zeigen, daß durch die Verwendung der linearen Black-Box-Modelle der hydrodynamischen Kupplung das reale Resonanzverhalten des Antriebsstrangs gut abgebildet werden kann. Als Einschränkung ist zu nennen, daß die berechneten Werte der Dämpfung für die Eigenformen, bei denen die Kupplungslaufräder eine geringe Phasendifferenz aufweisen, stark von der Dämpfung am realen System abweichen können. Die zusätzlich auftretenden irrelevanten Moden III und IV der Antriebsstrangsmodelle (s. Kapitel 5) können, wie erwartet, experimentell nicht nachgewiesen werden.

Kapitel 8

Die Simulation dynamischer Vorgänge

Simulationsrechnungen im Zeitbereich ermöglichen eine Voraussage des zeitlichen Verlaufes der Drehzahlen und Drehmomente eines Antriebssystems. In diesem Kapitel soll die Leistungsfähigkeit der linearen sowie der nichtlinearen Kupplungsmodelle zur Simulation dynamischer Vorgänge eines Antriebsstrangs mit der hydrodynamischen Kupplung untersucht werden.

Hierzu wird der Antriebsstrang auf dem Versuchsstand durch die Vorgabe von verschiedenen Sollwertfunktionen erregt. Als Eingangsgrößen für das Simulationsmodell werden gemessene Größen verwendet, so daß ein direkter Vergleich der realen Systemantwort mit den Simulationsergebnissen durchgeführt werden kann.

- Für die Simulation mit den **linearen** Antriebsstrangmodellen wird das System 1. Ordnung (Modifiziertes Zustandsmodell) nach Gl.(4.72) herangezogen, das in Abschnitt 4.2.7 aufgestellt wurde, um eine numerische Differenzierung der Eingangsgrößen zu vermeiden.
- Das diskrete Differenzengleichungssystem Gl.(4.95) bildet das Modell für die Simulation der **nichtlinearen** Antriebsstrangmodelle.

8.1 Das E/A-Modell zur Simulation

Die Teilsystembetrachtung des Antriebsstrangs am Versuchsstand, wie sie bei den experimentellen Untersuchungen zum Resonanzverhalten vorgenommen worden ist, liefert als mechanisches Ersatzmodell das momenterregte Schwingungssystem nach Abbildung 8.1 a. Die Eigenfrequenzen dieses Systems ergeben sich aus der Betrachtung des frei gelagerten Wellenzuges, der aufgrund der fehlenden elastischen Verbindung der Kupplungslaufräder 2 Starrkörperrotationen besitzt, vgl. Abbildung 5.4. Die Real- und Imaginärteile der zugehörigen Eigenwerte verschwinden. Das bedeutet, daß das Modell für $\omega = 0$ Hz, also im stationären Fall, grenzstabil ist. Dieser Sachverhalt stimmt mit der Theorie von frei gelagerten, rotatorischen Systemen überein. Sind bei der Simulation mit stationärer periodischer Erregung um einen Betriebspunkt das mittlere An- und Abtriebsmoment nicht exakt im Gleichgewicht, wandert die Lösung der Drehzahlen aus dem vorgegebenen Betriebspunkt heraus. Daher

ist die Simulation des momentenerregten Systems zur Validierung der Modelle unter Vorgabe von gemessenen Größen ungeeignet. Das Auswandern des realen Antriebsstrangs aus einem vorgegebenem Betriebspunkt wird im Gegensatz zu dem Modell durch die am Versuchsstand vorhandene Regelung verhindert.

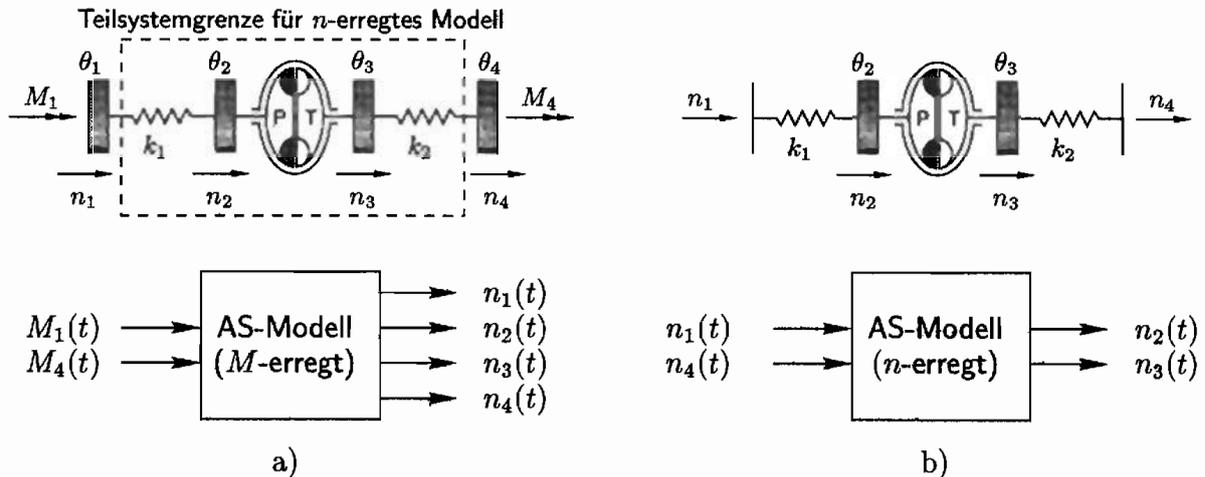


Abbildung 8.1: E/A-Konfiguration des Antriebsstrangmodells des a) frei gelagerten (momentenerregt) und b) des gefesselten (drehzahlerregt) Systems; Versuchsaufbau III

Um ein Simulationsmodell zu erhalten, das stationär stabil ist, wird daher die Systemgrenze um den Antriebsstrang enger gezogen, so daß die bisherigen Randfreiheitsgrade 1 und 4 nicht dazugehören und man ein Zweigrößensystem erhält, s. Abbildung 8.1. Das so entstandene Teilsystem ist an den Rändern eingespannt, die Erregung erfolgt dementsprechend durch die Drehzahlen n_1 und n_4 . Aufgrund der Veränderung der Systemgrenze verändern sich entsprechend die mechanischen Randbedingungen, so daß sich für die freien Schwingungen des drehzahlerregten Systems jeweils andere Eigenwerte ergeben als bei dem momentenerregten System. Starrkörperrotationen treten bei den Eigenschwingungen des drehzahlerregten (gefesselten) Systems nicht mehr auf. Da sich mit der Systemgrenze aber auch entsprechend die Eingangsgrößen verändern, sind die Antworten der Modellausgangsgrößen $n_2(t)$ und $n_3(t)$ des moment- und des drehzahlerregten Modells nach Abbildung 8.1 a und 8.1 b identisch.

Für die hier vorgestellten Zeitbereichssimulationen wird das drehzahlerregte Antriebsstrangmodell nach Abbildung 8.1 b für den Versuchsaufbau III mit den Modellparametern nach Tabelle 7.1 verwendet; die Angaben für θ_1 und θ_4 verlieren hier ihre Bedeutung. Als Integrationsverfahren bei der Simulation der linearen Antriebsstrangmodelle wird die Vorschrift nach RUNGE-KUTTA 4. Ordnung verwendet. Die Schrittweite ist dabei durch die mit $f_{\text{Tast}} = 1904.8$ Hz diskretisierten Meßwerte auf $\Delta t = \frac{1}{f_{\text{Tast}}}$ festgelegt.

8.2 Systemerregung

Da als Systemerregung für die Simulation die am Versuchsaufbau gemessenen Größen verwendet werden, ist die Bandbreite der Erregerfunktionen durch die versuchstechnischen

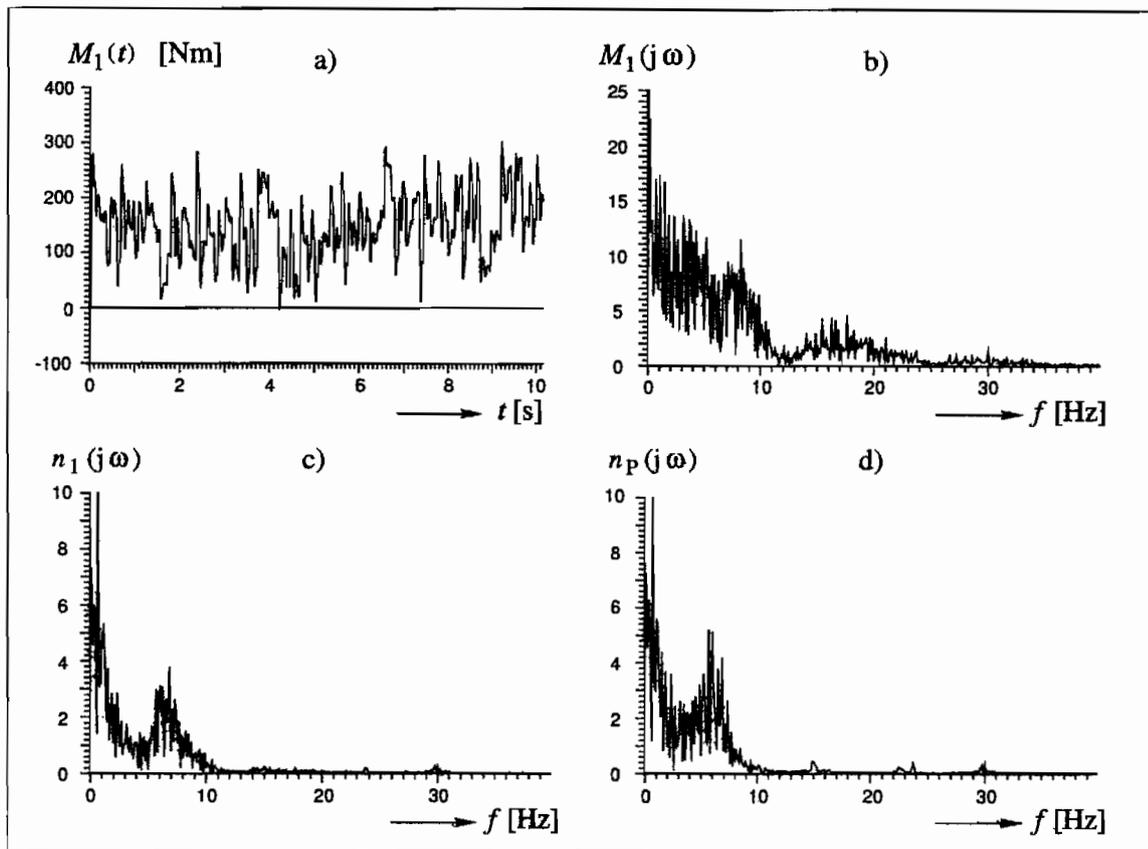


Abbildung 8.2: Zur Erregung des Versuchsaufbaus III a) Erregersignal Moment M_1 (Rauschen) b) FFT des Erregersignals M_1 c) FFT der Drehzahl n_1 d) FFT der Pumpendrehzahl $n_P = n_2$

Möglichkeiten eingeschränkt. Wie schon in Abschnitt 6.2.2 erwähnt wurde, ist für eine stabile Drehzahlregelung des Versuchsaufbaus III an jeder Achse zwischen der Antriebseinheit und der Torsionsfeder ein Massenträgheitsmoment von ca. 1 kg m^2 notwendig. Diese Drehmassen wirken zusammen mit der Torsionsfeder als mechanischer Filter, so daß nur noch Erregerfrequenzen wenig oberhalb der Eigenfrequenzen von Pumpen- und Turbinenstrang bis zur hydrodynamischen Kupplung weitergeleitet werden. Als Beispiel hierzu ist in Abbildung 8.2 a der Zeitverlauf des Erregermomentes M_1 an Achse 1 dargestellt, das mit einer pseudobinären Rauschfunktion [25], [7] erzeugt worden ist. Die Abbildung 8.2 b zeigt die FFT des Erregersignals, die deutlich noch Frequenzen oberhalb von 10 Hz aufweist. Diese sind in den Spektren des Momentes M_2 (s. Abbildung 6.10) und der Pumpendrehzahl n_P nicht mehr enthalten. Das bedeutet, daß in den hier durchgeführten Versuchen die hydrodynamische Kupplung innerhalb des Antriebsstrangs mit maximal $f_{\max} = 10 \text{ Hz}$ erregt werden konnte, so daß eine Validierung der Kupplungsmodelle bzw. der Antriebsstrangmodelle auch nur bis zu dieser oberen Grenzfrequenz erfolgen kann. Der gültige Frequenzbereich der linearen als auch der nichtlinearen Modelle, der zwischen 0 Hz und ca. 15 Hz liegt, wird also nur bis ca. 10 Hz angesprochen.

Aus den beschriebenen Gründen lassen sich nur relativ geringe Beschleunigungen der einzelnen Drehmassen des Antriebsstrangaufbaus erreichen. So führt beispielsweise die Sollwertvorgabe einer Drehzahl-Rechteckschwingung an Achse 1 für n_1 mit einer Amplitude von

40 min^{-1} und einer Frequenz von 3 Hz selbst bei optimal eingestellten Regelparametern nur zu einem sinusähnlichen Drehzahlwertverlauf. Damit beschränkt sich die Systemerregung des Antriebsstrangs auf die folgenden Erregerfunktionen:

1. Erregung mit periodischen Funktionen
2. Erregung mit Gleitsinusfunktion
3. Erregung mit pseudobinärem Rauschen

8.3 Zeitsimulationen der linearen Kupplungsmodelle

Die im vorangegangenen Kapitel beschriebene Eigenwertanalyse des Antriebsstrangs entspricht der Anwendung der linearen Kupplungsmodelle im Frequenzbereich. Geringe Abweichungen im Frequenzbereich zwischen Modell und System haben auf das Modellverhalten im Zeitbereich großen Einfluß, so daß hier höhere Forderungen an die Modellgüte gestellt werden. Die Simulation im Zeitbereich ist damit besonders wichtig zur Beurteilung der Qualität der linearen Kupplungsmodelle zur Antriebsstrangberechnung.

8.3.1 Umschaltung der Teilmodelle

Die Drehzahlen und Drehmomente der an Versuchsaufbau III durchgeführten Messungen zur Verifikation der Antriebsstrangmodelle im Zeitbereich liegen innerhalb der Gültigkeitsbereiche der linearen Kupplungsmodelle, die für die Pumpendrehzahl $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ (s. Abbildung 5.2, Modellreihe 9xx) erstellt worden sind. Bei der Simulation von Vorgängen, die durch mehrere Teilmodellbetriebsbereiche verlaufen, wird eine Modellumschaltung vorgenommen. Das aktuelle Teilmodell wird während der Rechnung nur in Abhängigkeit der Turbinendrehzahl n_T bestimmt, da der zulässige Bereich für die Pumpendrehzahl $n_P = 900 \pm 40 \text{ min}^{-1}$ bei allen Teilmodellen derselbe ist. Die Gültigkeitsbereiche der einzelnen Teilmodelle sind im Verlauf der stationären Kennlinie in Abbildung 8.3 dargestellt, die Umschaltunkte durch gestrichelte, senkrechte Linien gekennzeichnet. Hat die simulierte Turbinendrehzahl den aktuellen Teilbetriebsbereich überschritten, erfolgt eine Umschaltung zu dem neuen Teilmodell. Hierzu sind zwei Schritte notwendig:

1. Die Systemmatrix des noch aktuellen Zustandsraummodells Gl.(4.72) für den Antriebsstrang wird mit der des neuen Teilmodells ausgetauscht.
2. Die vom mittleren Betriebspunkt der Teilmodelle abhängigen Elemente ($M_{K,P}^*$, $M_{K,T}^*$) des Erregervektors, s. Gl.(4.72), werden ebenfalls für den neuen Modellbereich aktualisiert.

Da das Zustandsraummodell des Antriebsstrangs mit absoluten Drehzahlen arbeitet, braucht bei der Modellumschaltung für das neue Modell keine Anfangswertberechnung durchgeführt zu werden.

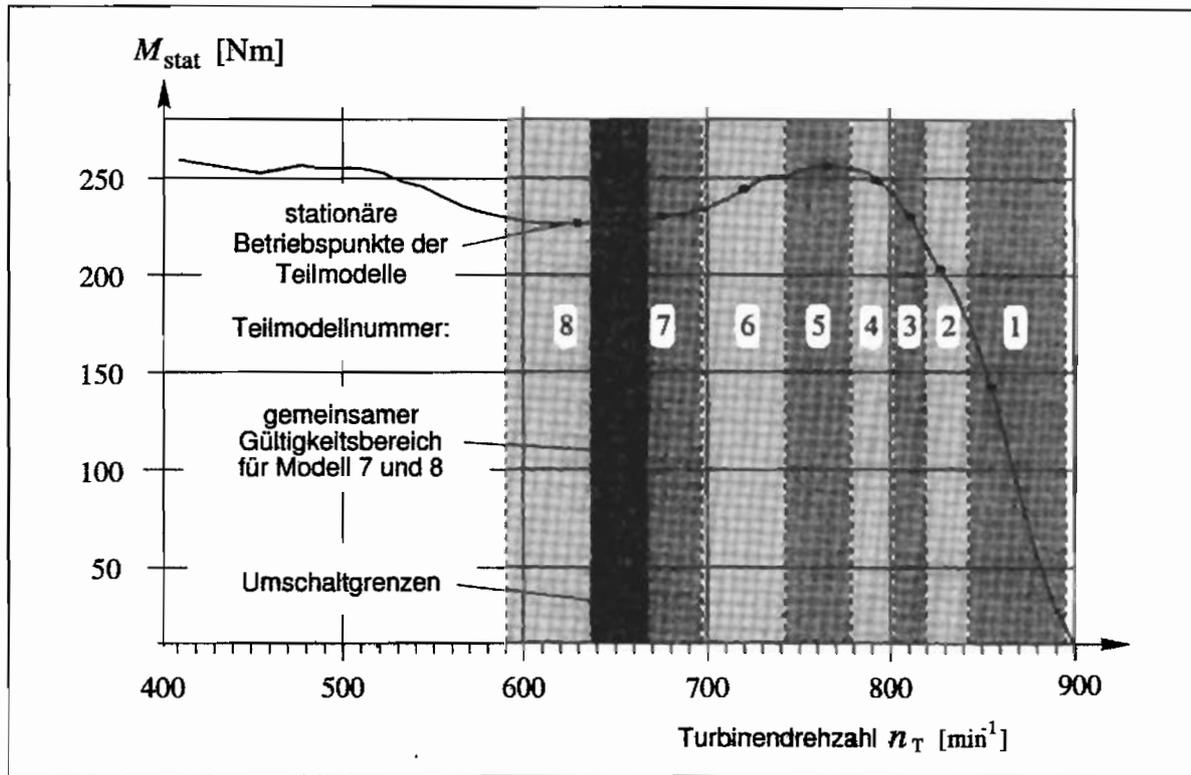


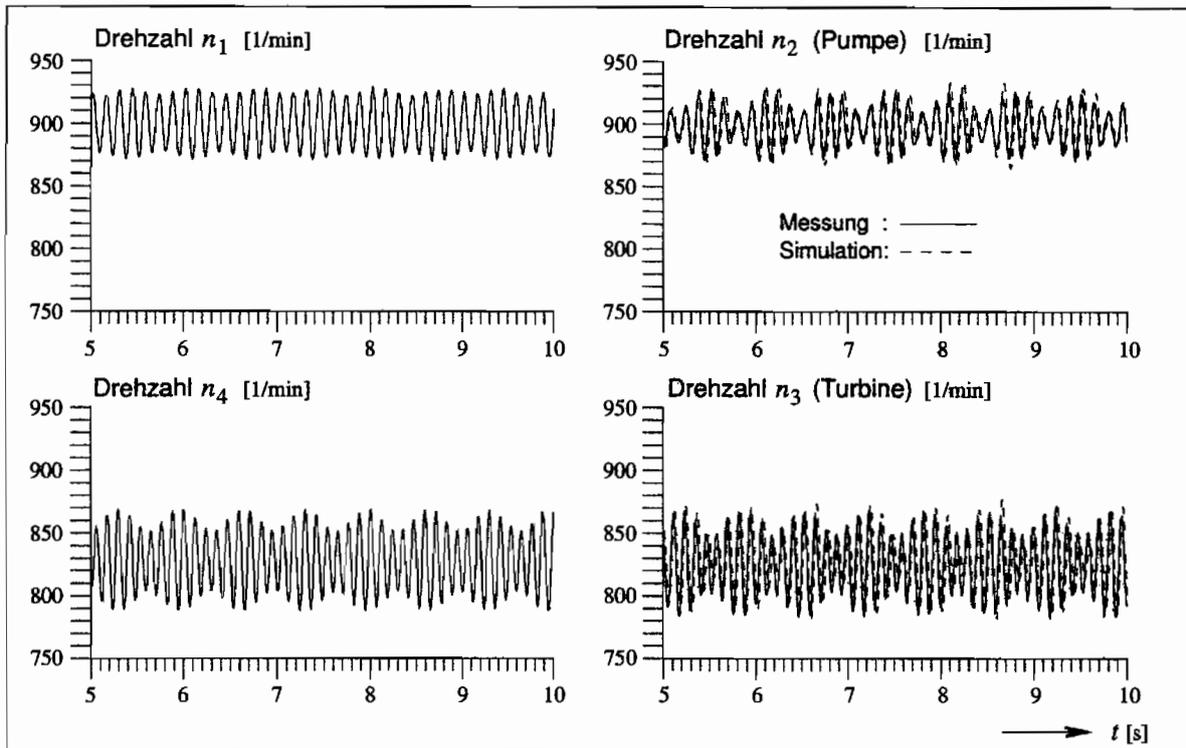
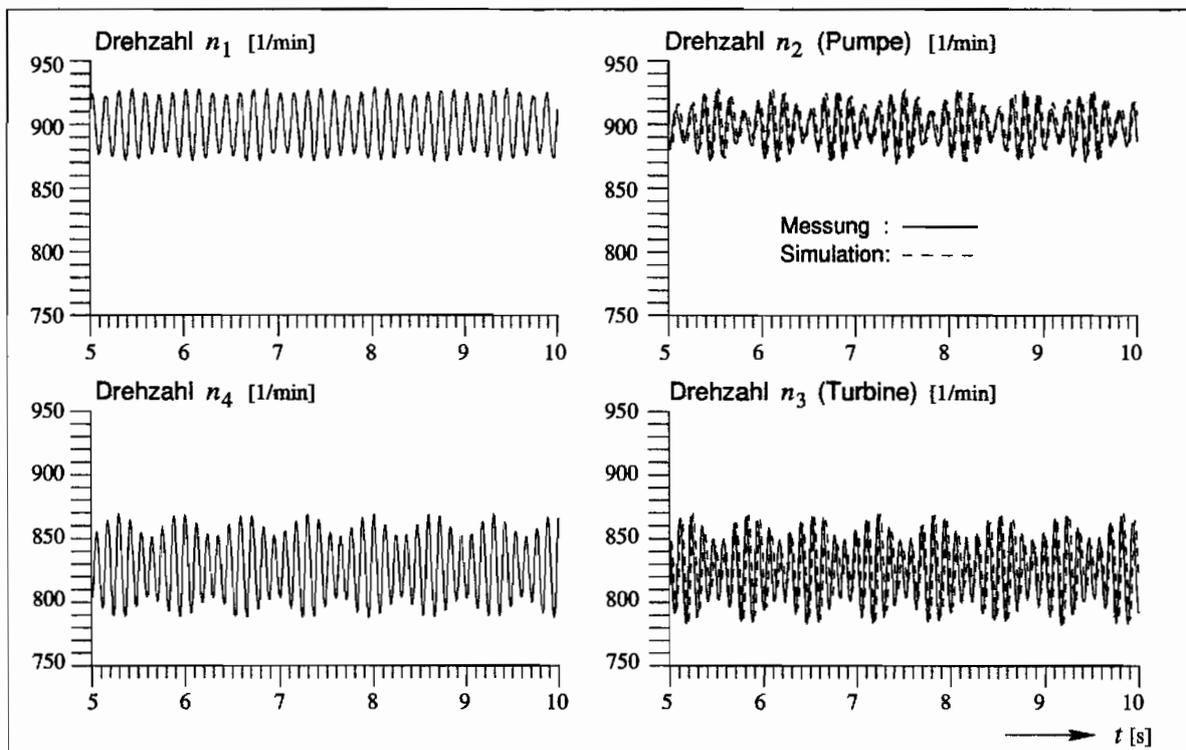
Abbildung 8.3: Modellbetriebsbereiche der linearen Antriebsstrangmodelle, $\Delta n_P = \pm 40 \text{ min}^{-1}$, stationäre Kennlinie für Pumpendrehzahl $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$

Die linearen Teilmodelle der Kupplung sind für Drehzahlschwankungen von $\Delta n = \pm 40 \text{ min}^{-1}$ um den jeweiligen Betriebspunkt gültig, so daß sich die Gültigkeitsbereiche benachbarter Teilmodelle in einem Übergangsbereich überschneiden. Es ist somit zwischen dem Gültigkeitsbereich eines Teilmodells und dessen bei der Simulation verwendeten Modellbetriebsbereich zu unterscheiden. Als Beispiel ist der Übergangsbereich für die Modelle 7 und 8 in Abbildung 8.3 gekennzeichnet. Für mäßige Beschleunigungen, bei denen eine Umschaltung innerhalb dieser Übergangsbereiche stattfinden kann, ist eine iterative Bestimmung des aktuell gültigen Teilmodellbereiches nicht erforderlich.

8.3.2 Ergebnisse

Auf den folgenden Seiten sind die Simulationsergebnisse für verschiedene Erregerfunktionen abgebildet. Die einzelnen Plots bestehen jeweils aus vier Diagrammen. In der linken Hälfte sind die Eingangsgrößen des Simulationsmodells, die Drehzahlen n_1 (Achse 1) und n_4 (Achse 2), aufgetragen. In der rechten Hälfte sind die Drehzahlen n_2 und n_3 aus Messung und Simulation gemeinsam für den direkten Vergleich dargestellt. Die gemessenen Größen sind durchgezogen, die Simulationsergebnisse gestrichelt eingezeichnet. Die Drehzahlen n_2 und n_3 entsprechen der Pumpen- und der Turbinendrehzahl der hydrodynamischen Kupplung.

Als erstes wird die Drehzallerregung innerhalb des Gültigkeitsbereiches eines Teilmodells betrachtet. Das bedeutet, daß die Drehzahlamplituden von Pumpe und Turbine maximal $\Delta n_2 = \Delta n_3 = 40 \text{ min}^{-1}$ betragen. Als Beispiel wird das Modell 2 für $s = 8 \%$ herangezogen.

Abbildung 8.4: Simulation mit Teilmodellumschaltung, mittlerer Schlupf $s = 8 \%$ Abbildung 8.5: Simulation ohne Teilmodellumschaltung: Teilmodell 2, mittlerer Schlupf $s = 8 \%$

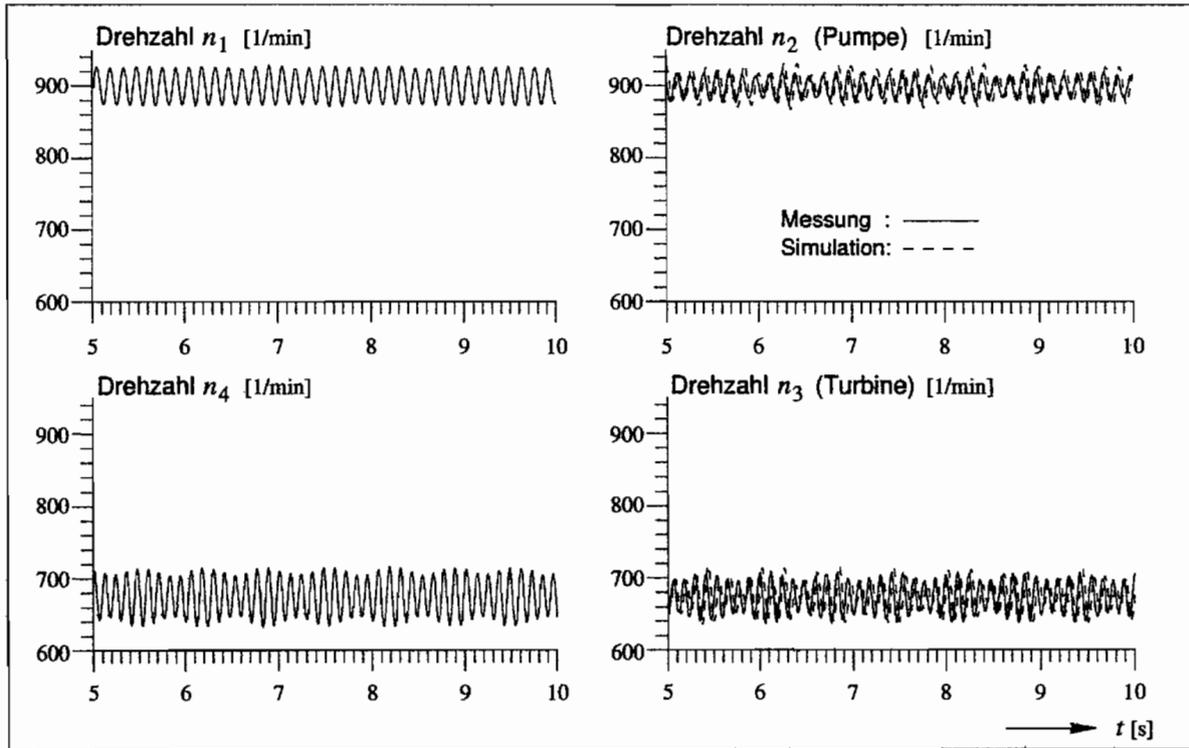


Abbildung 8.6: Simulation mit Teilmodellumschaltung, mittlerer Schlupf $s = 25\%$

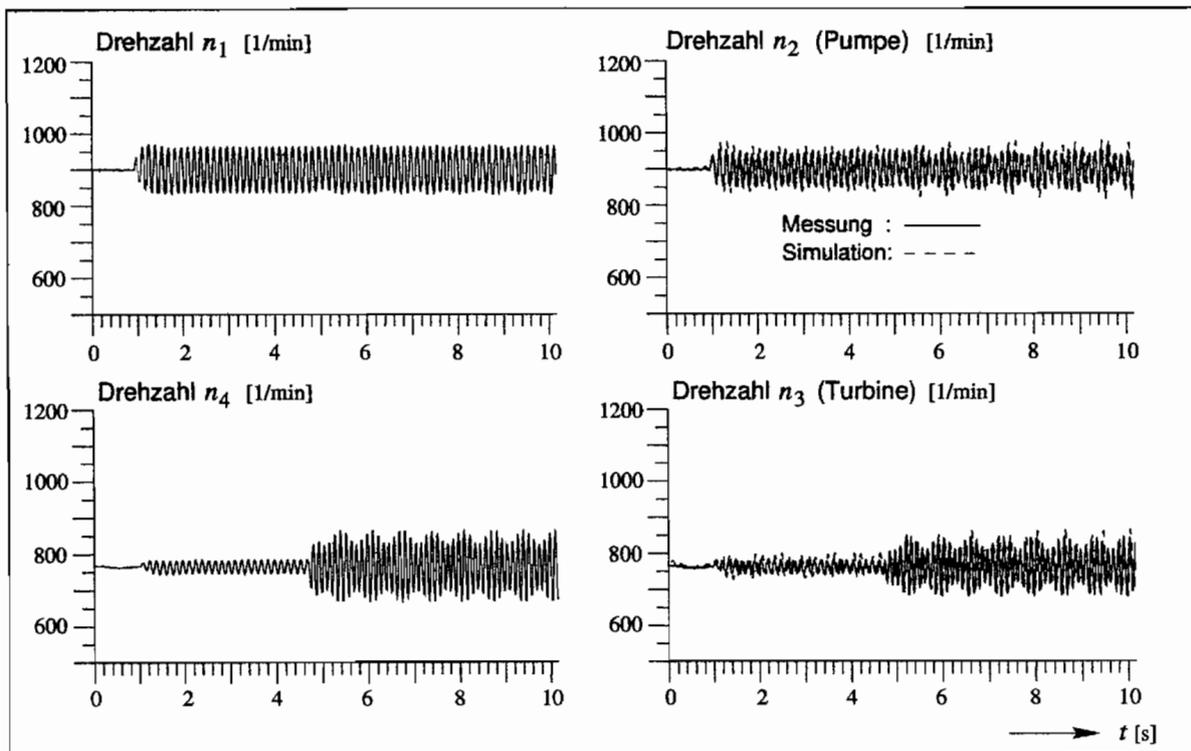


Abbildung 8.7: Simulation für große Erregeramplituden $\Delta n_T = \pm 100 \text{ min}^{-1}$, Erregerfrequenzen $f_{n_1} = 7 \text{ Hz}$, $f_{n_4} = 8.5 \text{ Hz}$ ($t > 4.7 \text{ s}$), $s = 15\%$

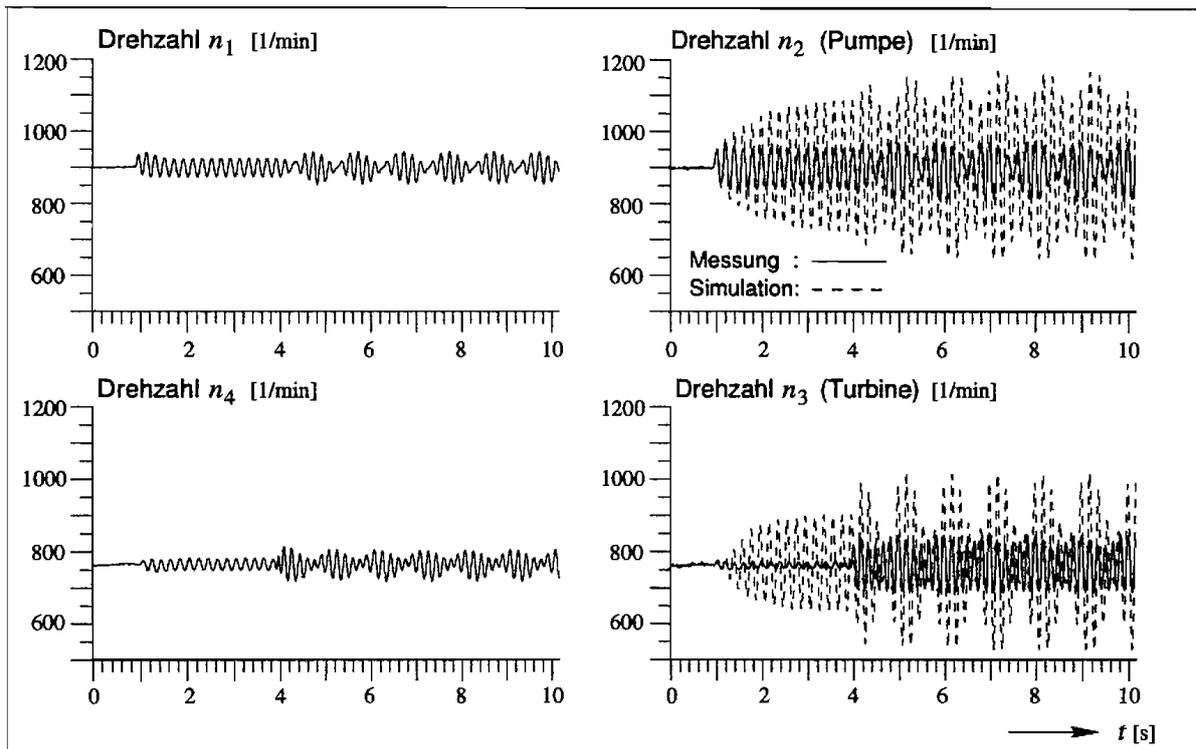


Abbildung 8.8: Simulation für große Erregeramplituden $\Delta n_T = \pm 100 \text{ min}^{-1}$, Erregerfrequenzen $f_{n_1} = 5 \text{ Hz}$, $f_{n_4} = 6 \text{ Hz}$, ($t > 4 \text{ s}$), $s = 15 \%$

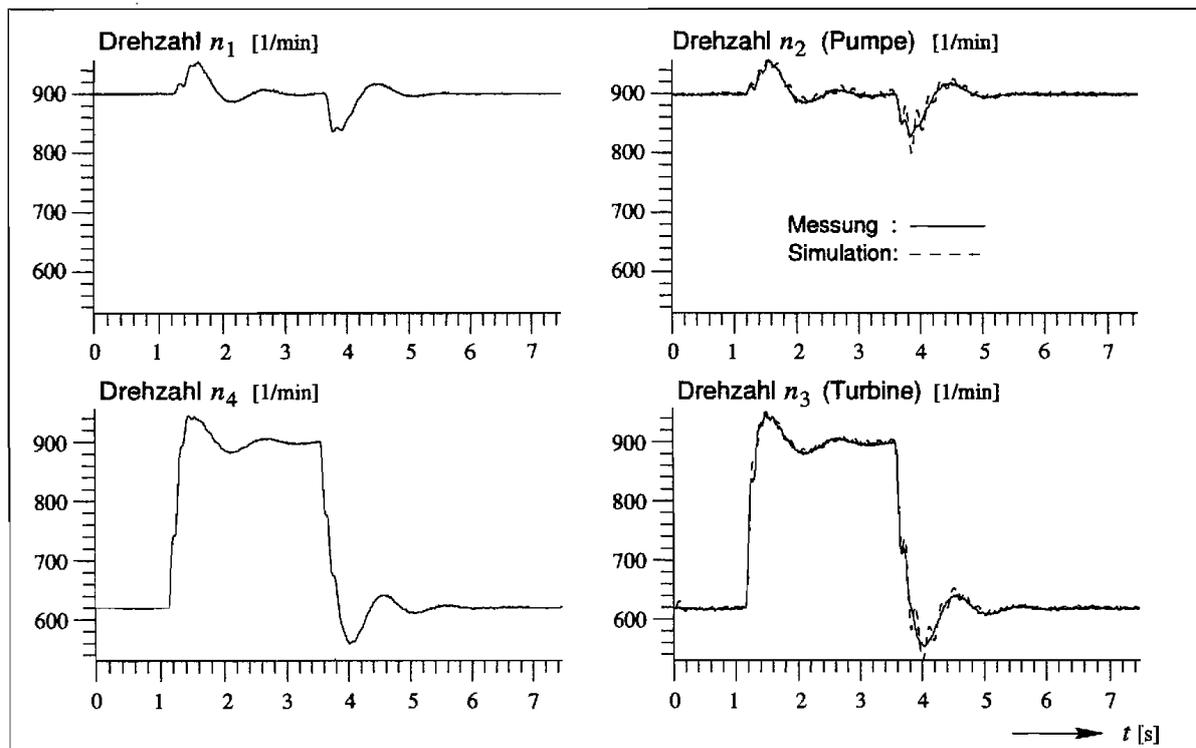


Abbildung 8.9: Simulation über gesamten Gültigkeitsbereich

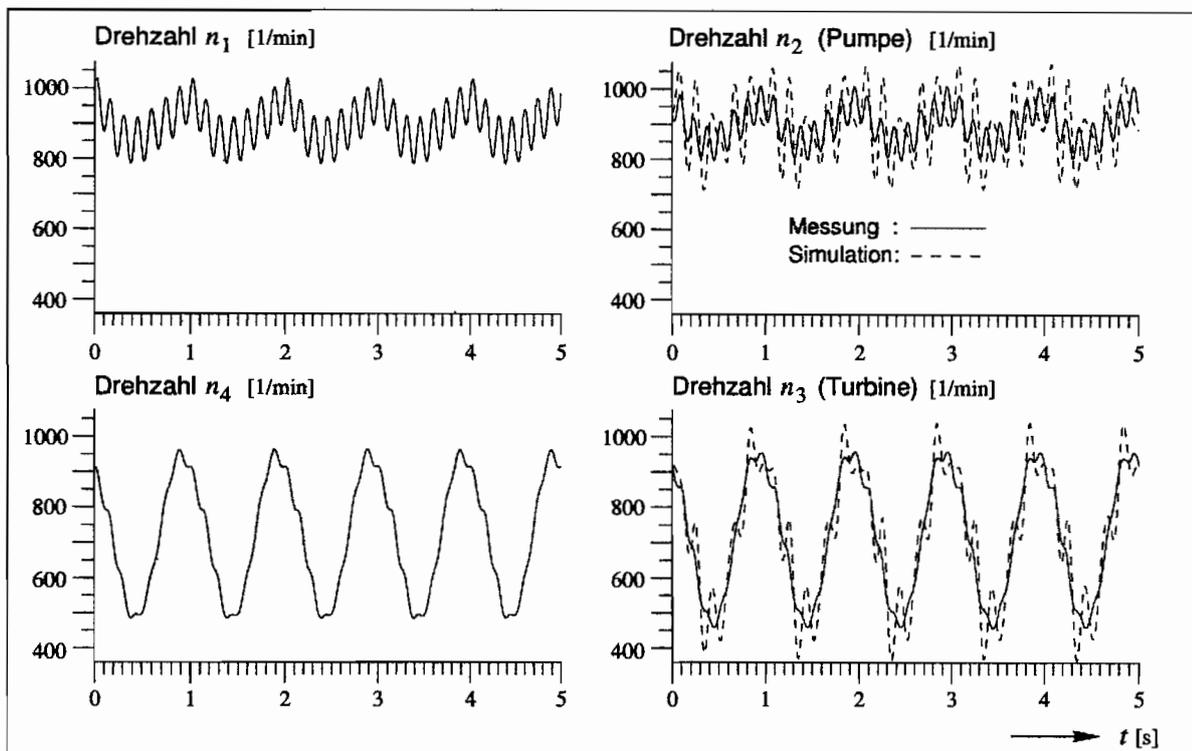


Abbildung 8.10: Simulation bei Überschreiten des Gültigkeitsbereiches

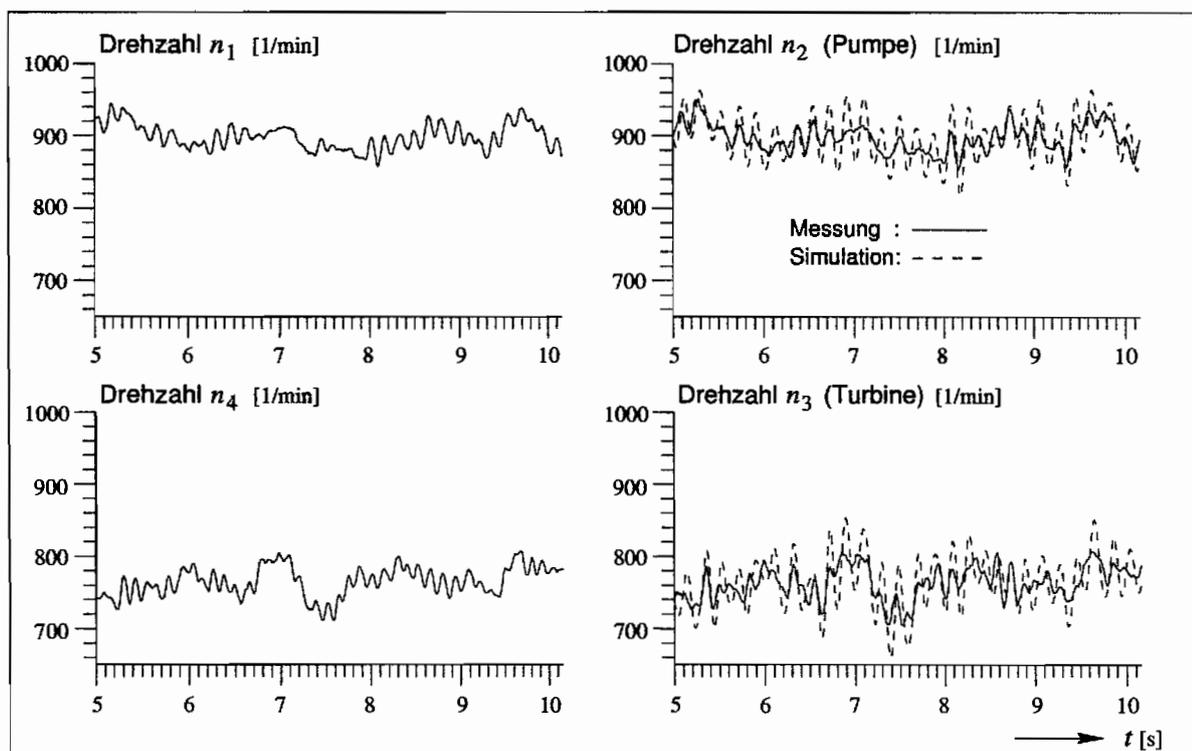


Abbildung 8.11: Simulation mit Teilmodellumschaltung für Drehzahl-Rauscherregung

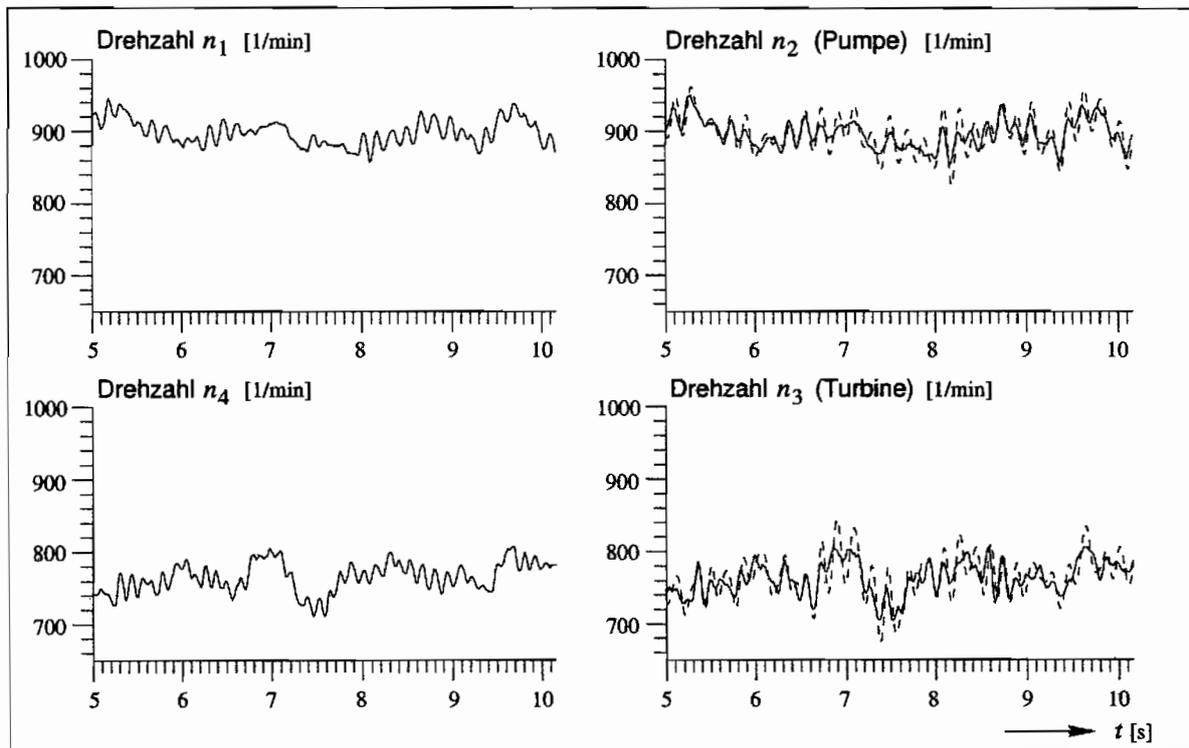


Abbildung 8.12: Simulation ohne Teilmodellumschaltung für Drehzahl-Rauscherregung, $\Delta n_3 = 40 \text{ min}^{-1}$, $s = 15 \%$

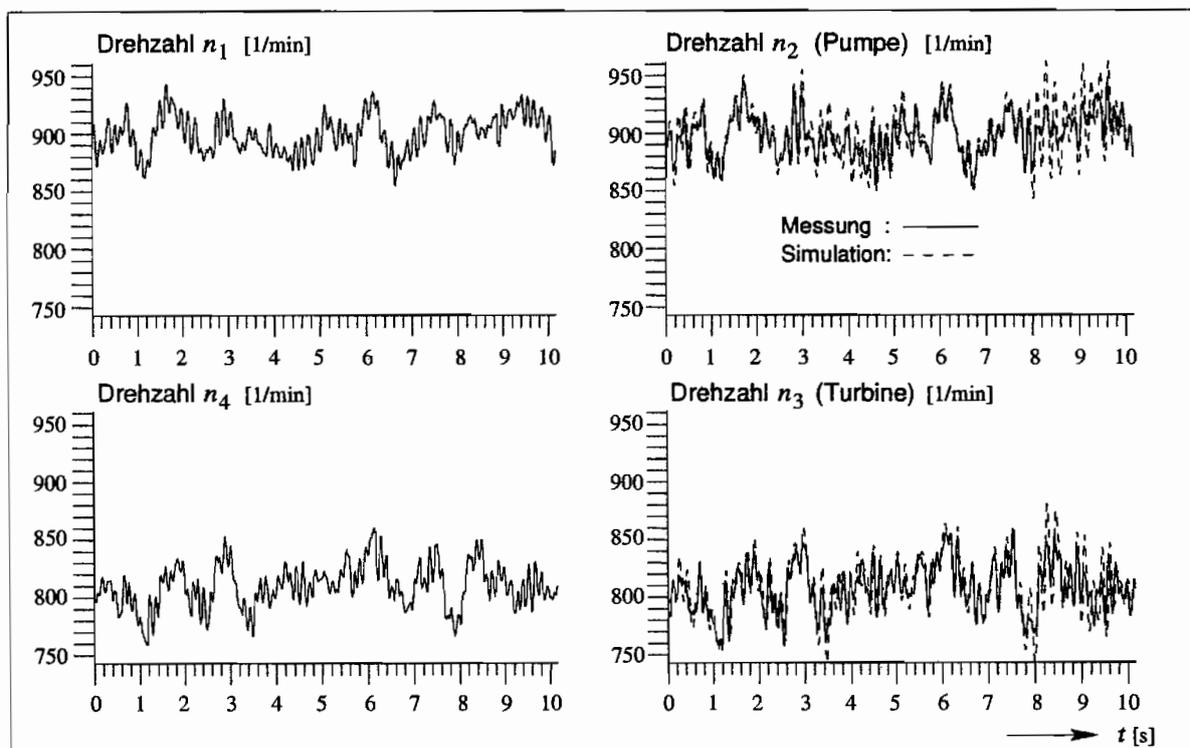


Abbildung 8.13: Simulation für Drehzahl-Rauscherregung mit großen Erregeramplituden $\Delta n_3 = 100 \text{ min}^{-1}$, $s = 15 \%$

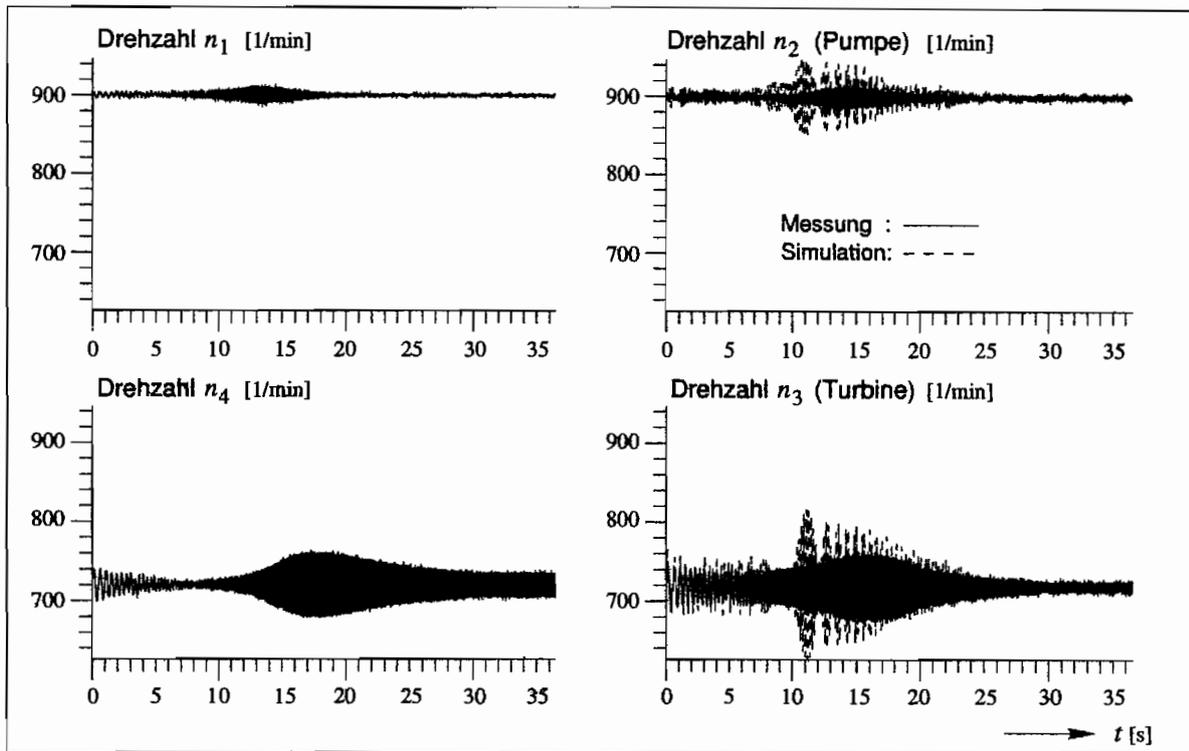


Abbildung 8.14: Simulation für Sweeperregung der Drehzahl n_2 , turbinenstrangseitige Erregung von 2 bis 12 Hz, $s = 20\%$

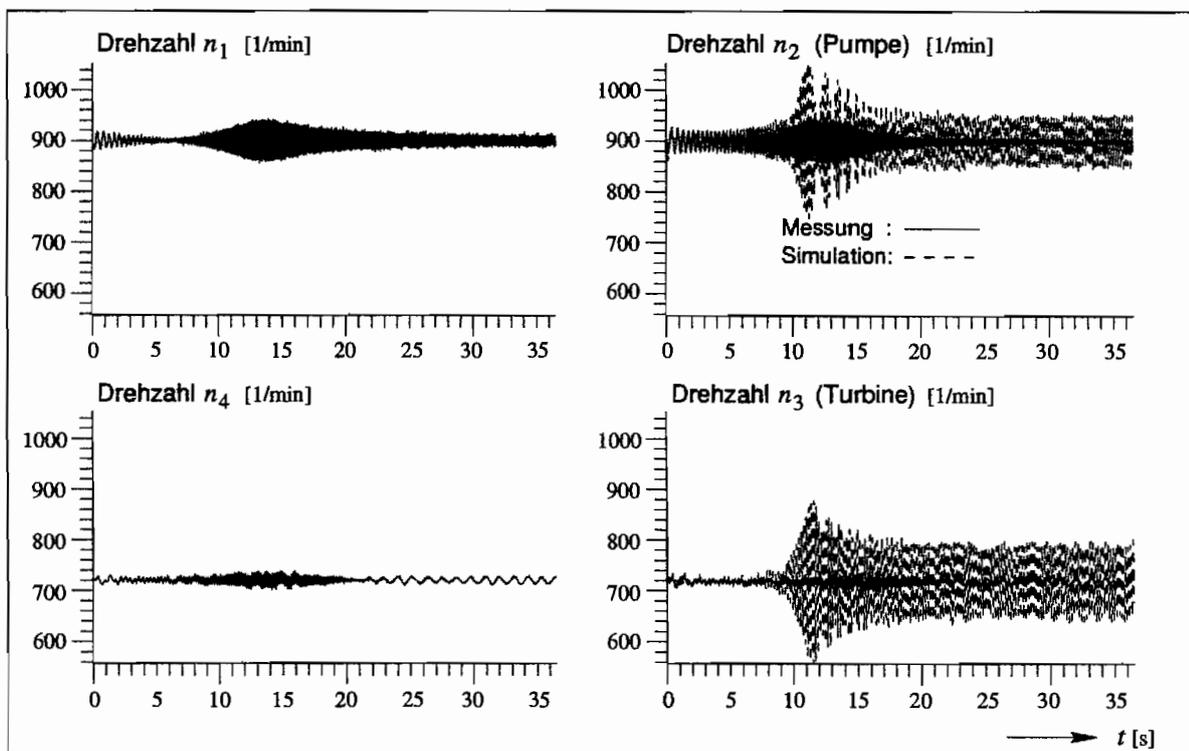


Abbildung 8.15: Simulation für Sweeperregung der Drehzahl n_1 , pumpestrangseitige Erregung von 2 bis 12 Hz, $s = 20\%$

Die vorgegebene Erregerfrequenz beträgt pumpenseitig (Drehzahl n_1) $f_{n_1} = 7$ Hz und turbinenseitig (Drehzahl n_4) $f_{n_4} = 8.5$ Hz. Da die Eigenfrequenz des Versuchsaufbaus III für den Pumpenstrang bei ca. 6 Hz und für den Turbinenstrang bei ca. 8 Hz liegt (vgl. Abschnitt 7.2.3), handelt es sich an beiden Strangseiten um überkritische Erregung. In Abbildung 8.4 ist die Simulation mit Modellumschaltung und zum Vergleich in Abbildung 8.5 ohne Modellumschaltung, nur mit Teilmodell 2, dargestellt. Bis auf einen geringen Phasenunterschied zeigen beide Rechnungen eine gute Übereinstimmung zwischen Modell und Messung. Die Unterschiede der Simulation mit und ohne Teilmodellumschaltung sind verschwindend gering, so daß die Eignung des verwendeten Umschaltkriteriums bestätigt wird. Im weiteren werden die Rechnungen, wenn nicht anders erwähnt, mit der Teilmodellumschaltung durchgeführt.

In Abbildung 8.6 ist die Simulation für einen anderen Betriebspunkt mit Schlupf $s = 25$ % unter sonst gleichen Bedingungen ($f_{n_1} = 7$ Hz, $f_{n_4} = 8.5$ Hz) gezeigt. Die Erregeramplituden betragen hier ebenfalls $\Delta n_1 = \Delta n_4 = 40 \text{ min}^{-1}$.

In Abbildung 8.7 ist die Simulation für turbinenstrangseitige Erregeramplituden von maximal $\Delta n_4 = 100 \text{ min}^{-1}$ dargestellt. Die pumpenstrangseitigen Amplituden betragen ca. $\Delta n_1 = 60 \text{ min}^{-1}$. Während der Simulation werden aufgrund der großen Erregeramplitude der Drehzahl n_4 die Modellbetriebsbereiche 1 bis 7 nach Abbildung 8.3 durchfahren. Die Erregung n_1 um den mittleren Betriebspunkt von $s = 15$ % beginnt pumpenseitig ab $t = 1$ s mit 7 Hz. Ab $t = 4.8$ s wird die Erregung n_2 mit 8.5 Hz vorgegeben. Messung und Simulation der Drehzahlverläufe n_3 und n_4 zeigen für diese Erregerfrequenzen gute Übereinstimmung. Unter ansonsten gleichen Vorgaben am Versuchsstand wird die Erregerfrequenz der Drehzahl n_1 auf 5 Hz und die der Drehzahl n_4 auf 6 Hz abgesenkt, s. Abbildung 8.8. Die Erregung von n_1 startet zum Zeitpunkt $t = 1$ s. Gut zu erkennen ist, daß die Amplitude Δn_1 zunächst nur ca. $\Delta n_4 = 40 \text{ min}^{-1}$ beträgt. Wird die Erregung ab $t = 4$ s an Drehzahl n_4 zugeschaltet, entsteht im Drehzahlverlauf von n_1 und n_4 eine Schwebung. Interessant hierbei ist, daß die turbinenseitige Erregung an Achse 2 sich auf die Pumpenseite auswirkt und im Drehzahlverlauf n_1 zu erkennen ist. Eine solche Auswirkung ist bei dem vorherigen Versuch, Abbildung 8.7, nicht zu erkennen. Die Simulationsergebnisse geben das gemessene Systemverhalten nur ungenügend wieder. Die Drehzahlamplituden von n_2 und n_3 wachsen bis auf das vier- bis fünffache der gemessenen an. Die Untersuchung der Eigenwerte des drehzahlerregten Antriebsstrangsystems zeigt, daß das Modell des Versuchsaufbaus III bei ca. $f_0 = 5$ Hz eine Eigenfrequenz mit dem zugehörigen Realteil (Abklingkonstante) $\lambda_{re} = -0.43 \text{ s}^{-1}$ besitzt. In Abbildung 8.16 sind als Beispiel die Eigenformen der Moden I und II des Antriebsstrangmodells für $s = 10$ % abgebildet. Wie im Zeigerdiagramm des Mode II zu sehen ist, schwingen die Freiheitsgrade 2 und 3 der Kupplungslaufräder mit nur geringem Phasenunterschied. In Abschnitt 5.5 ist auf die Problematik der ungenauen Abbildung der Dämpfung durch das Kupplungsmodell für solche Eigenformen schon eingegangen worden. Hier zeigt sich, wie empfindlich das Modell im Zeitbereich auf Ungenauigkeiten bei der Abbildung im Frequenzbereich reagiert. Die zu dieser Eigenfrequenz zugehörige Dämpfung ist, wie das Simulationsergebnis des erregten Systems zeigt, zu niedrig. Eine Erregung in der Eigenfrequenz des Mode II führt zu starken Abweichungen gegenüber den gemessenen Werten.

In Abbildung 8.9 ist die Simulation einer Drehzahlrampe des Turbinenstrangs gezeigt. Ausgehend von dem stationären Betriebspunkt mit einem Schlupf von ca. $s = 30$ % wird der gesamte Betriebsbereich durchfahren. Die Flankensteilheit der Drehzahlrampe beträgt ca.

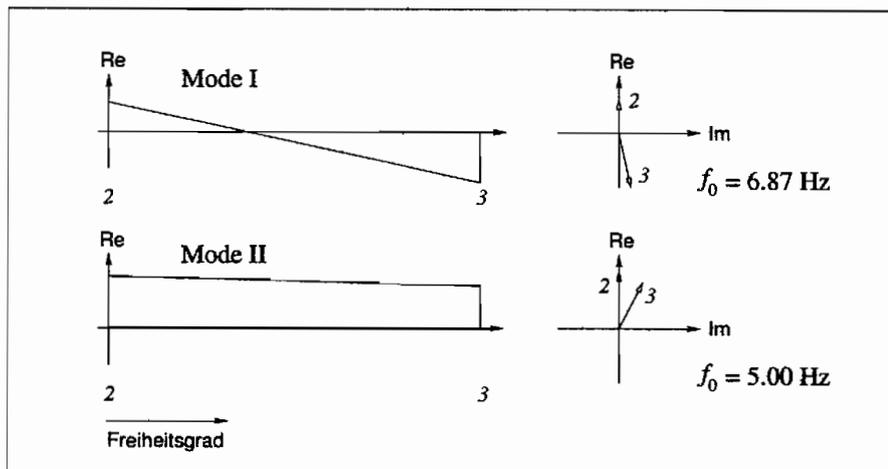


Abbildung 8.16: Versuchsaufbau III, Mode I und Mode II des Antriebstrangmodells für Drehzahlerregung, Teilmodell 3, $s = 10\%$

$1500 \text{ min}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Hier wird die Eigenfrequenz (Mode II) des Modells nur leicht angeregt.

Abbildung 8.10 zeigt eine Simulation bei der der Gültigkeitsbereich der linearen Teilmodelle stark überschritten wird. Die Drehzahlamplitude der Turbine wandert bis zu 150 min^{-1} unter die untere Grenze von 590 min^{-1} , vgl. Abbildung 8.3. Das Überschreiten des Gültigkeitsbereiches führt zu starkem Überschwingen der simulierten Lösung.

In den bisher gezeigten Rechnungen sind an der Pumpen- und Turbinenseite des Antriebsstrangs nur stationäre, periodische Erregungen vorgegeben worden. Zur Untersuchung des Verhaltens bei transientscher Erregung wird nun an Achse 1 und Achse 2 ein pseudozufälliges Rauschsignal erzeugt, so daß in den Drehzahlensignalen der Erregergrößen des Modells, n_1 und n_4 , Frequenzen bis ca. 10 Hz enthalten sind, vgl. 8.2. Abbildung 8.11 zeigt die Simulation eines Rauschsignals, dessen Amplituden im Gültigkeitsbereich des Teilmodells 5, $s = 15\%$, liegen. Die Berechnung erfolgt mit Teilmodellumschaltung. Zum Vergleich ist in Abbildung 8.12 das Ergebnis für dieselbe Erregung ohne Teilmodellumschaltung dargestellt. Beide Simulationen zeigen, daß der Verlauf der Pumpen- und Turbinendrehzahl nur im Mittel, d.h., die Dynamik nur schwach wiedergegeben wird. Eine FFT der Modellsystemantworten n_2 und n_3 zeigt, daß diese in erster Linie die oben erwähnte Eigenfrequenz des Antriebstrangmodells bei ca. 5 Hz enthalten. Durch die Rauscherregung wird das Modell hauptsächlich in dieser Eigenfrequenz erregt. Es ist gut zu erkennen, daß ohne Teilmodellumschaltung ein geringeres Überschwingen der Lösung auftritt. Die Umschaltung verstärkt zusätzlich zur Rauscherregung die Anregung des Antriebstrangmodells. Die Simulation über einen großen Betriebsbereich kann jedoch nur mit Teilmodellumschaltung erfolgen. In Abbildung 8.13 ist das Ergebnis der Rechnung bei Rauscherregung mit Drehzahlamplituden von $\Delta n_4 = \pm 100 \text{ min}^{-1}$ für zehn Sekunden dargestellt. Der mittlere Betriebspunkt liegt bei $s = 10\%$. Durch die großen Drehzahlamplituden wird zwischen den Teilmodellen 1 bis 6 umgeschaltet. Auch hier ist ein teilweise starkes Überschwingen der Lösung zu erkennen.

In Abbildung 8.14 ist die Simulation für eine Sinussweeperregung mit der Drehzahl n_1 an der Turbinenseite dargestellt. Der mittlere Betriebspunkt liegt bei $s = 20\%$. Die Erregerfrequenz variiert innerhalb der ersten 30 Sekunden kontinuierlich von 2 bis 12 Hz. Gut

zu erkennen ist im Zeitverlauf von n_1 die Resonanz des Pumpenstrangs mit kleinen Amplituden und im Zeitverlauf von n_4 die Resonanz des Turbinenstrangs mit großen Amplituden. Die simulierten Drehzahlen zeigen vor allem bei Erreichen der Erregerfrequenz von 5 Hz bei ca. $t = 9$ s ein deutliches Überspringen. Bei Erregung an der Pumpenseite in Abbildung 8.15, unter sonst gleichen Bedingungen, tritt nach Durchfahren der 5 Hz auch für höhere Frequenzen Überspringen auf.

Die Ergebnisse zeigen, daß die Simulation im Zeitbereich mit den linearen Antriebsstrangmodellen zu Schwierigkeiten führt, die auf die Verwendung der linearen Black-Box-Modelle der hydrodynamischen Kupplung zurückzuführen sind. Daher sind die linearen Modelle für diese Anwendung nur bedingt einsetzbar. Wie bei der Untersuchung der Eigenwerte und Eigenformen der linearen Modelle gezeigt wurde, gibt das Antriebsstrangmodell die Dämpfung der Eigenschwingungen, bei denen die Kupplungslaufräder nur eine geringe Relativbewegung besitzen (kleine Phasendifferenz), nur ungenau wieder. Bei der Simulation im Zeitbereich kann diese Eigenschaft auf starke Abweichungen vom realen Verhalten des Systems führen. Für stationäre, periodische Erregungen, die nicht diese kritischen Eigenformen des Modells anregen, liefern die linearen Modelle gute Ergebnisse. Dies gilt auch für das Durchfahren mehrerer Teilmodellbetriebsbereiche der Kupplung mit mäßiger Beschleunigung. Durch eine der Zeitsimulation vorangehende Analyse der Eigenformen des Modells kann überprüft werden, ob das Modell kritische Moden mit einer geringen Phasendifferenz der Kupplungsfreiheitsgrade besitzt. In Abschnitt 5 wurde gezeigt, daß diese nicht nur vom Kupplungsmodell sondern auch von den Trägheiten, Steifigkeiten und Dämpfungen des gesamten Antriebsstrangs abhängen.

8.4 Zeitsimulationen der nichtlinearen Modelle

Aufgrund der nichtlinearen Struktur der diskreten Modellansätze zur Identifikation des Kupplungsverhaltens ist es möglich, einen großen Betriebsbereich abzubilden. Dadurch kann mit nur einem nichtlinearen Modell ein größerer Bereich abgedeckt werden als mit den 8 linearen Teilmodellen insgesamt. Die Umschaltung von einzelnen Teilmodellen für unterschiedliche Betriebsbereiche entfällt hierdurch. Ein weiterer wesentlicher Unterschied zu den linearen Modellen ist, daß hier die Modellein- und ausgänge die absoluten Drehzahlen und Drehmomente sind. Damit wird auch das stationäre Verhalten der Kupplung erfaßt.

| Nichtlineares Modell, Grad $\eta = 3$ | | |
|----------------------------------------|-----------------------------------------------|--------------|
| Nichtlinearität γ | Ordnungen der Modellterme des Grades γ | |
| $\gamma = 1$ | $p_{11} = 4$ | $p_{12} = 4$ |
| | $q_{11} = 1$ | $q_{12} = 1$ |
| $\gamma = 2$ | $p_{21} = 4$ | $p_{22} = 4$ |
| $\gamma = \eta = 3$ | $p_{31} = 1$ | $p_{32} = 1$ |
| Parameteranzahl n_{par} : 104 | | |

Tabelle 8.1: Modellstruktur des nichtlinearen Modellansatzes

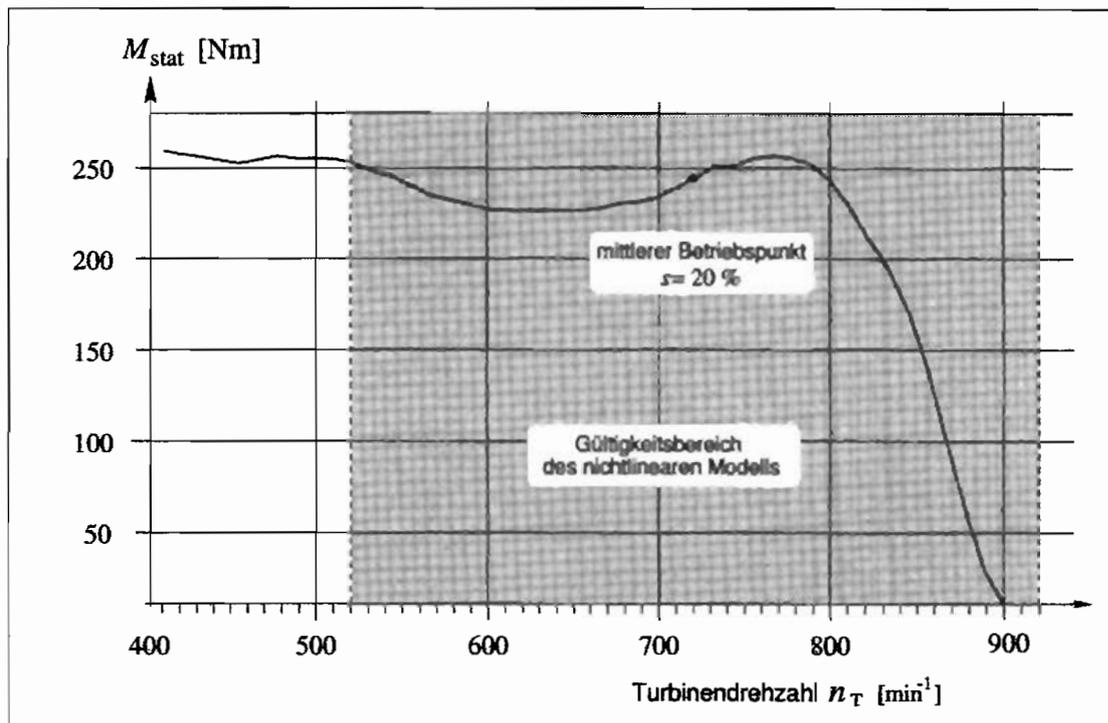


Abbildung 8.17: Gültigkeitsbereich des nichtlinearen Antriebsstrangmodells, $\Delta n_P = \pm 100 \text{ min}^{-1}$, stationäre Kennlinie für Pumpendrehzahl $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$

In Abbildung 8.17 ist der Gültigkeitsbereich des verwendeten nichtlinearen Kupplungsmodells dargestellt, daß bei einem mittleren Betriebspunkt mit Schlupf $s = 20 \%$ und der Pumpendrehzahl $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ identifiziert worden ist. Zur Identifikation wurde auf der Pumpenseite die Erregung mit $n_P = 900 \pm 100 \text{ min}^{-1}$ und auf der Turbinenseite mit $n_T = 720 \pm 200 \text{ min}^{-1}$ durchgeführt. Der zulässige Modellbereich beträgt somit für die Pumpendrehzahl $n_P = n_2 = 800 \text{ min}^{-1}$ bis 1000 min^{-1} und für die Turbinendrehzahl $n_T = n_3 = 520 \text{ min}^{-1}$ bis 920 min^{-1} . Für den Kupplungsmodellansatz nach Gl.(4.8) wurde eine Struktur mit Nichtlinearitätsgrad $\eta = 3$ verwendet. Die Ordnungen der einzelnen Modellterme sind in Tabelle 8.1 angegeben. Nach Gl.(4.9) ergibt sich für jede Gleichung des Kupplungsmodells 52 und somit insgesamt $2 \cdot 52 = 104$ Modellparameter, s.a. Anhang D.

Die bei der Simulation des diskreten nichtlinearen Antriebsstrangmodells verwendete Schrittweite Δt ist durch das Kupplungsmodell bestimmt. Bei der Identifikation wurden die gemessenen Größen zunächst mit einer Abtastfrequenz von $f_{\text{Tast}} = 2000 \text{ Hz}$ diskretisiert. Für die Parameterschätzung des Modells wurde ein Resampling vorgenommen, so daß das Modell für eine Abtastfrequenz von $f_{\text{Rsamp}} = 100 \text{ Hz}$ ermittelt wurde. Hierdurch ist die Schrittweite Δt festgelegt

$$\Delta t = \Delta T = \frac{1}{f_{\text{Rsamp}}} = 0.01 \text{ s} . \quad (8.1)$$

Sie ist in den Modellparametern implizit enthalten und kann nicht verändert werden. Die Simulation mit den diskreten nichtlinearen Modellen ist dadurch auf eine einzige Schrittweite von $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ beschränkt.

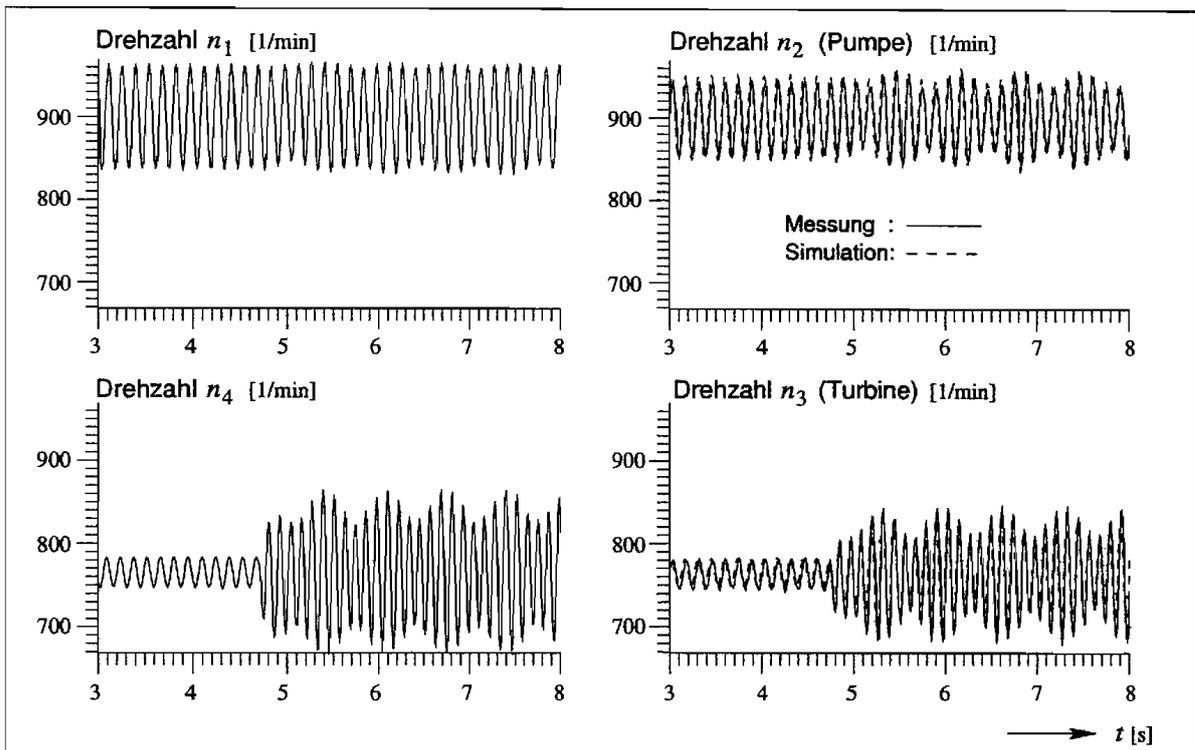


Abbildung 8.18: Simulation für große Erregeramplituden $\Delta n_T = \pm 100 \text{ min}^{-1}$, Erregerfrequenzen $f_{n_1} = 7 \text{ Hz}$, $f_{n_4} = 8.5 \text{ Hz}$ ($t > 4.7 \text{ s}$)

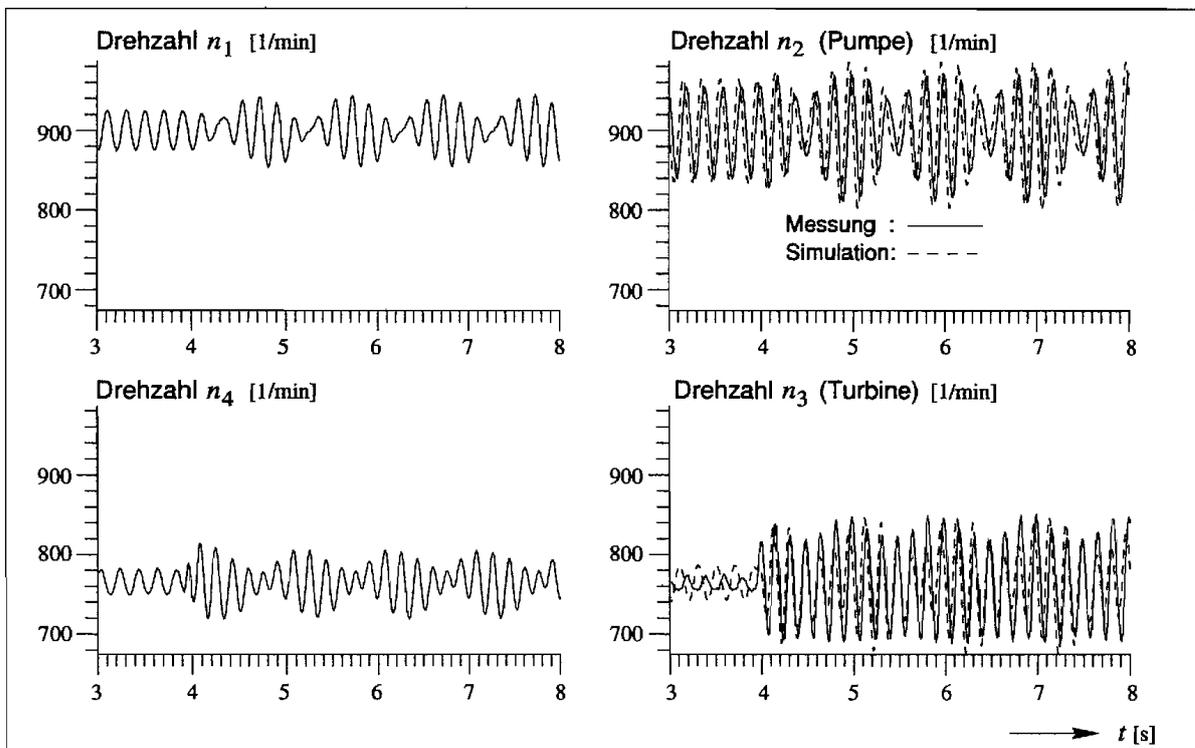


Abbildung 8.19: Simulation für große Erregeramplituden $\Delta n_T = \pm 100 \text{ min}^{-1}$, Erregerfrequenzen $f_{n_1} = 5 \text{ Hz}$, $f_{n_4} = 6 \text{ Hz}$

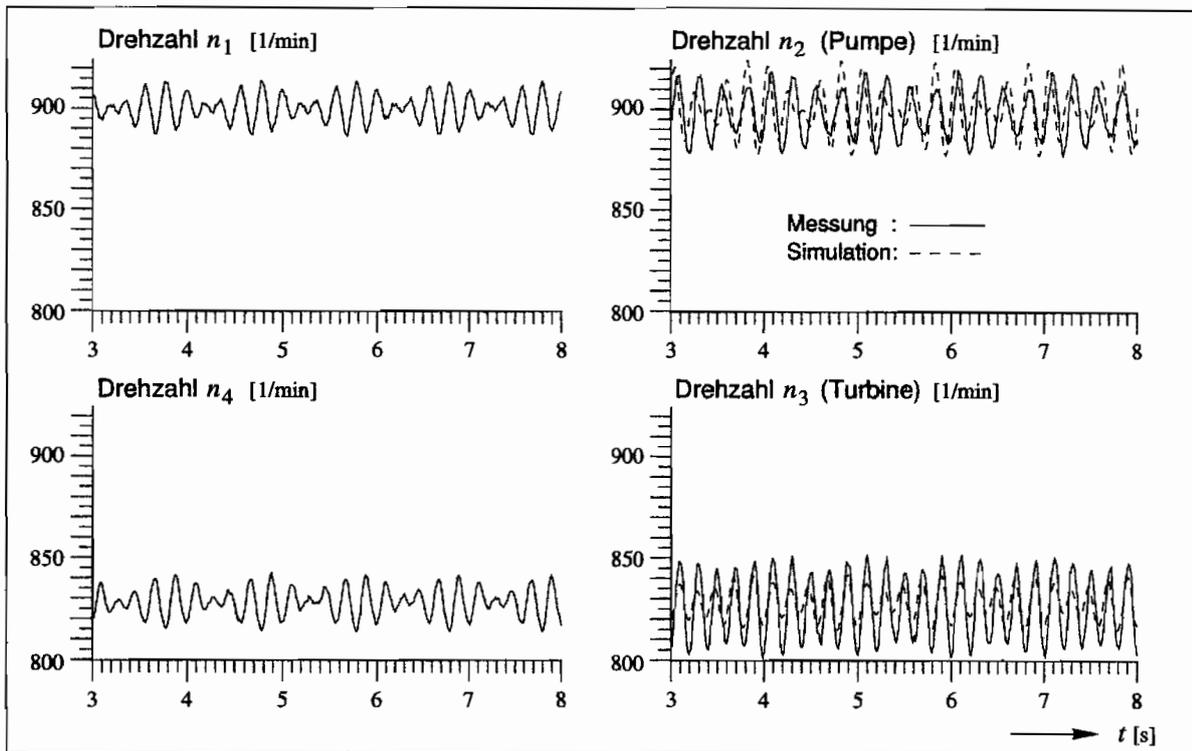


Abbildung 8.20: Simulation für große Erregeramplituden $\Delta n_T = \pm 100 \text{ min}^{-1}$, Erregerfrequenzen $f_{n_1} = 4 \text{ Hz}$, $f_{n_4} = 5 \text{ Hz}$

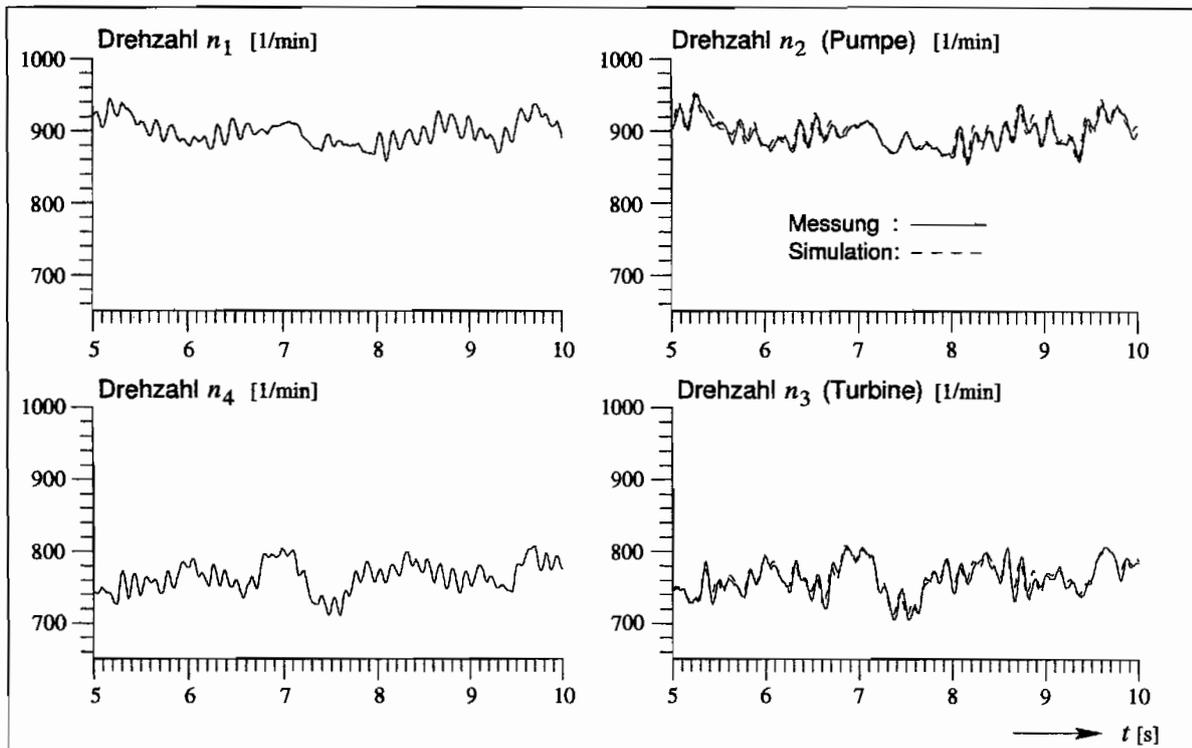


Abbildung 8.21: Simulation für Drehzahl-Rauscherregung

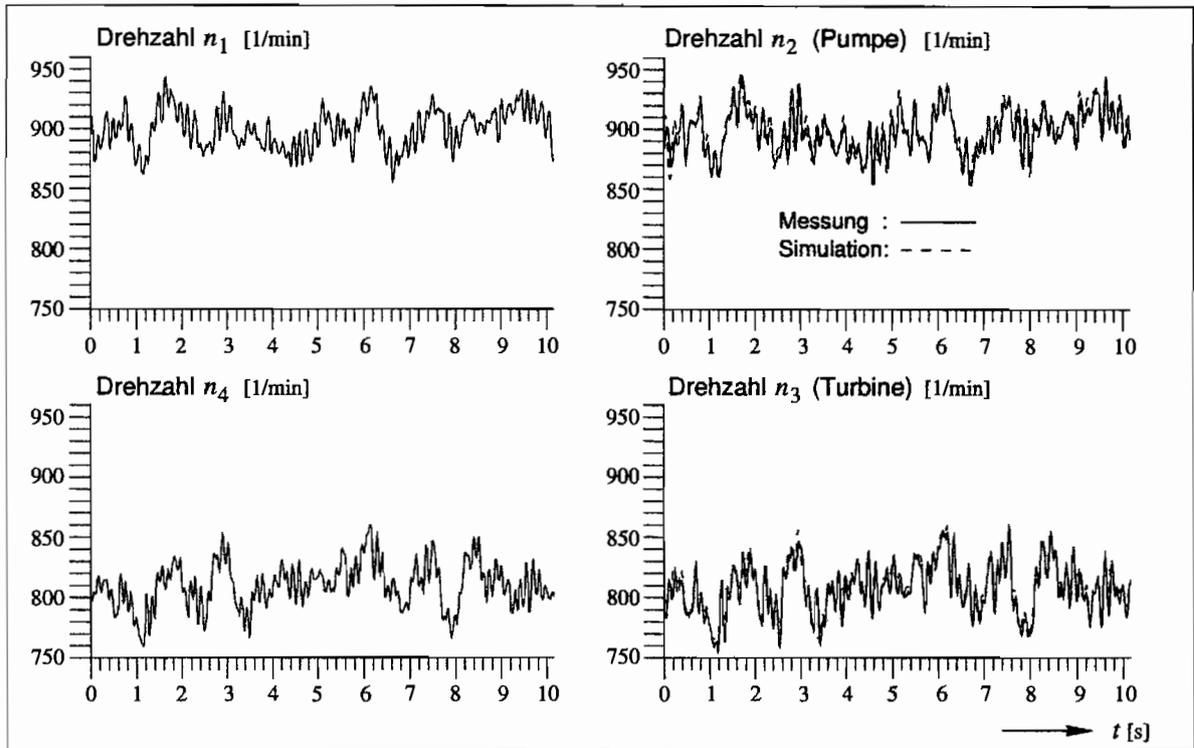


Abbildung 8.22: Simulation für Drehzahl-Rauscherregnung mit großen Erregeramplituden
 $\Delta n_T = \pm 100 \text{ min}^{-1}$

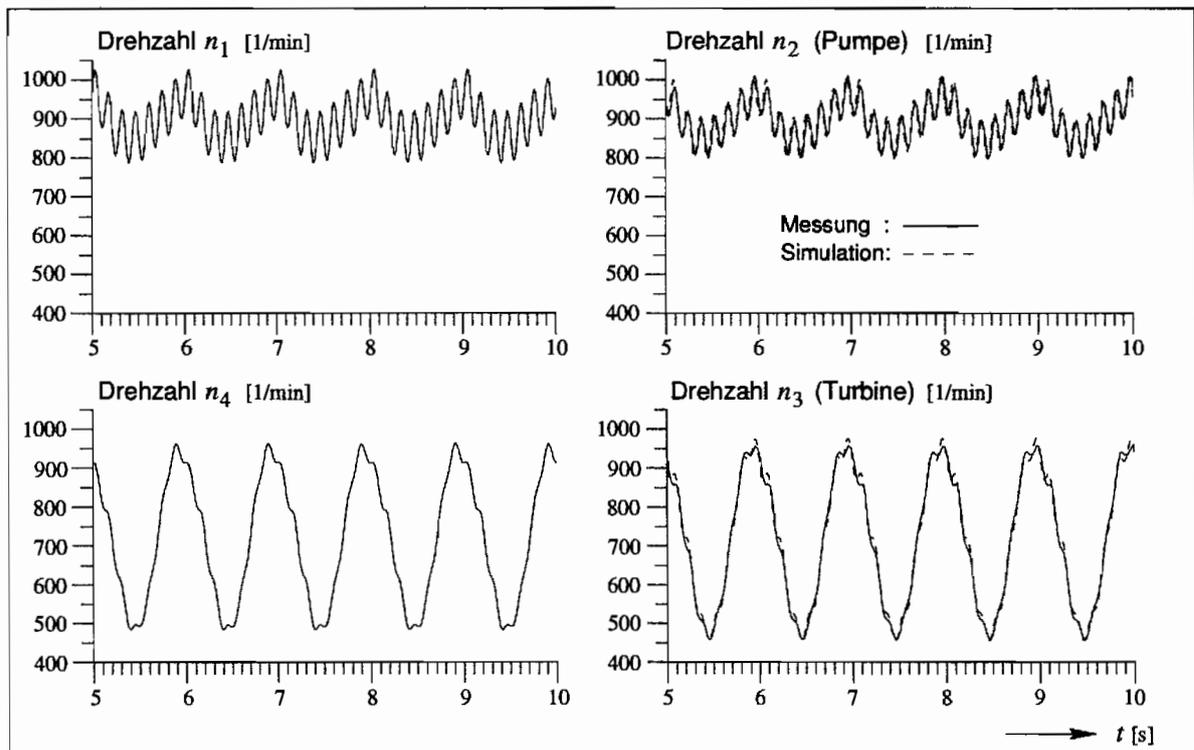


Abbildung 8.23: Simulation bei Überschreiten des Gültigkeitsbereiches

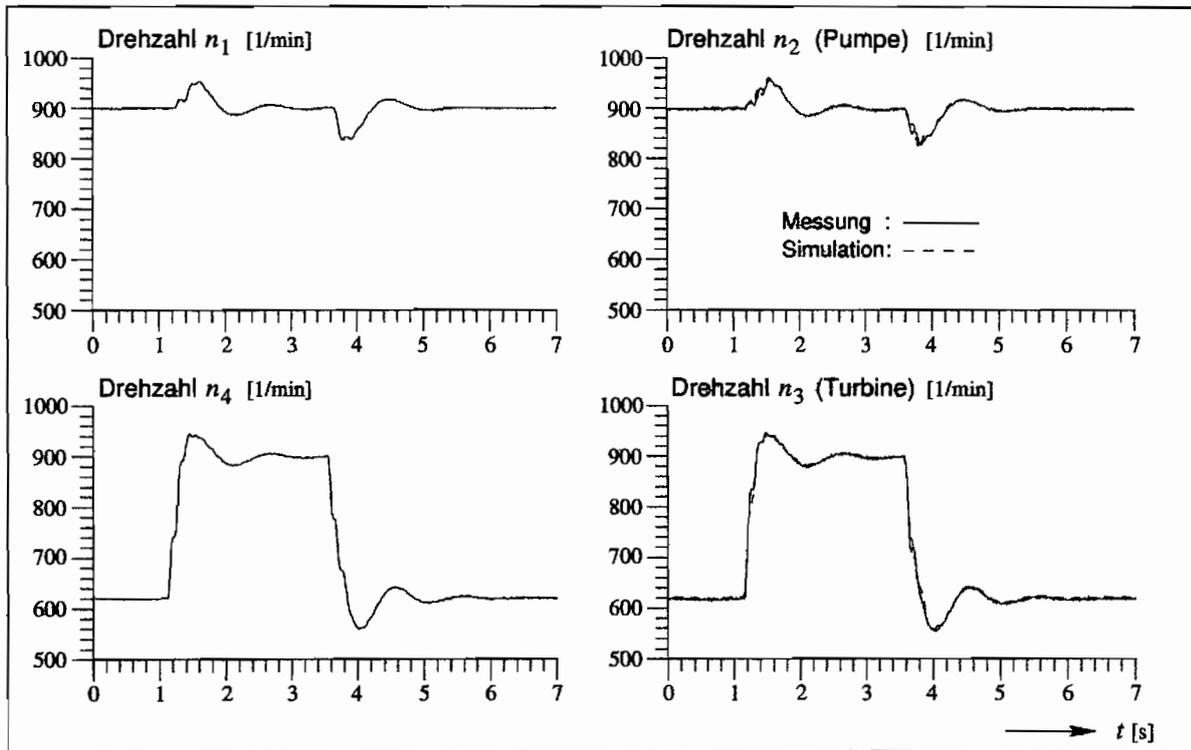


Abbildung 8.24: Simulation über gesamten Gültigkeitsbereich

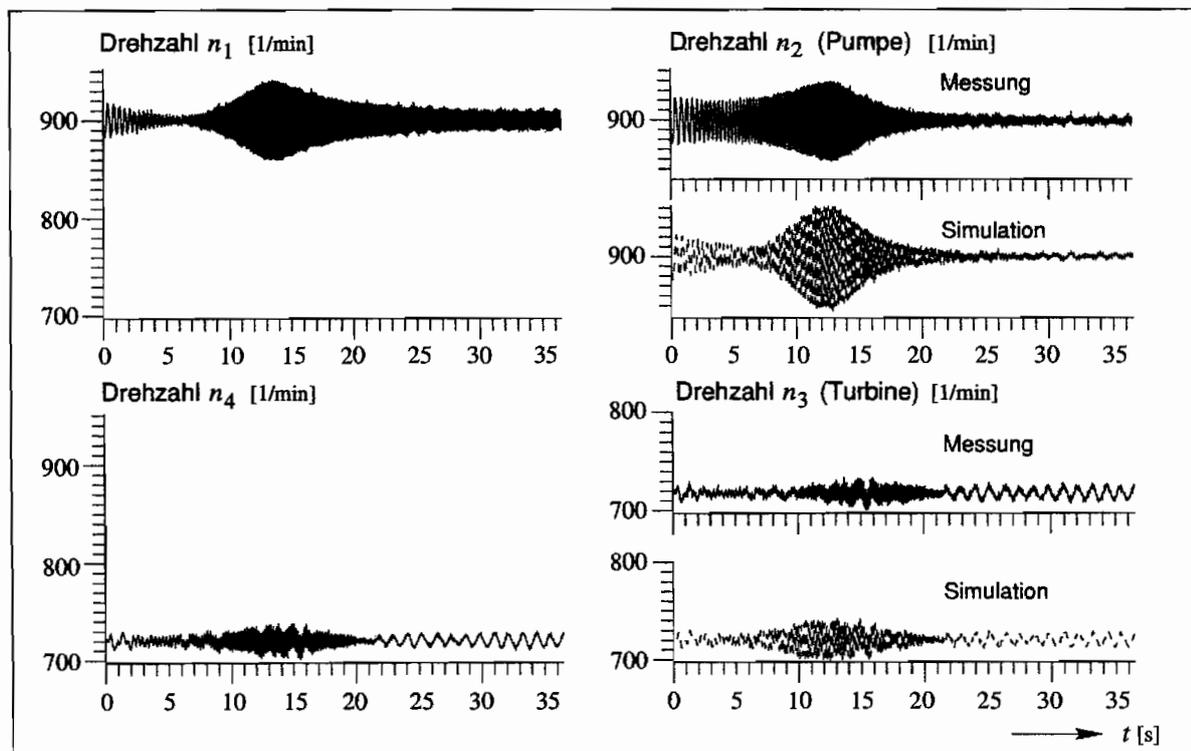


Abbildung 8.25: Simulation für Sweeperregung der Drehzahl n_1 , pumpeustrangseitige Erregung von 2 bis 12 Hz

8.4.1 Ergebnisse

Um einen direkten Vergleich mit den Simulationsergebnissen der linearen Modelle durchführen zu können, werden hier im wesentlichen dieselben Meßwerte für den Modelleingang verwendet, wie bei den linearen Modellen.

Die Antwort der Pumpen- und Turbinendrehzahl auf eine stationäre Erregung der Drehzahl n_1 mit 7 Hz und durch n_4 mit 8.5 Hz ist in Abbildung 8.18 dargestellt, vgl. Abbildung 8.7. Der mittlere Betriebspunkt liegt bei $s = 15 \%$. Messung und Simulation stimmen für diese Erregerfrequenzen sehr gut überein. Wird unter sonst gleichen Bedingungen die Erregerfrequenz für n_1 auf $f_{n_1} = 5$ Hz und für n_2 auf $f_{n_2} = 6$ Hz abgesenkt, tritt zwischen Messung und Simulation eine deutliche Phasendifferenz auf. Zudem zeigt die simulierte Turbinendrehzahl n_3 eine stärker ausgeprägte Schwebung als die gemessene. Die Simulation des Antriebsstrangs (Versuchsaufbau III) bei Drehzahlerregung in der Nähe von 5 Hz (Resonanz des drehzahlerregten linearen Systems) zeigt also auch mit den nichtlinearen Modellen Abweichungen von den gemessenen Werten. Werden bei $s = 8 \%$ die Erregerfrequenzen nochmals um ein 1 Hz auf $f_{n_1} = 4$ Hz und $f_{n_2} = 5$ Hz reduziert, zeigen Simulation und Messung einen stark qualitativ unterschiedlichen Verlauf. Parameterstudien für die Modellparameter θ_1 , θ_2 , k_1 und k_2 des Antriebsstrangmodells haben gezeigt, daß die Abweichungen nicht auf Ungenauigkeiten in der Modellierung der Steifigkeiten und Massen zurückzuführen sind.

Für die Erregung des Antriebsstrangs mit der Drehzahl-Rauschfunktion zeigt das nichtlineare Modell sowohl für kleine als auch für große Erregeramplituden gute Ergebnisse. In Abbildung 8.21 beträgt die Amplitude der Turbinendrehzahl $\Delta n_3 = 40 \text{ min}^{-1}$ und in Abbildung 8.22 $\Delta n_3 = 100 \text{ min}^{-1}$ (vgl. a. Abbildung 8.12, Abbildung 8.13).

Für die Simulation über den gesamten Modellgültigkeitsbereich des nichtlinearen Kupplungsmodells sind in Abbildung 8.23 und Abbildung 8.24 zwei Beispiele angegeben. Die Ergebnisse aus Simulation und Messung sind hier nahezu kongruent, da hier nur Beschleunigungen bis maximal $1500 \text{ min}^{-1}/\text{s}$ auftreten. Es soll an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß mit den Antriebseinheiten, die maximal ein Drehmoment von ca. 1060 Nm erzeugen können, auf dem Versuchsstand mit Versuchsaufbau III theoretisch Beschleunigungen bis ca. $3500 \text{ min}^{-1}/\text{s}$ möglich sind. Die Drehzahlregelung muß jedoch für eine stabile Regelung des Antriebsstrangs mit den elastischen Wellenelementen (Federkupplung) so abgestimmt werden, daß höhere Beschleunigungen als $1500 \text{ min}^{-1}/\text{s}$ nicht zu realisieren sind.

In Abbildung 8.25 ist eine Sinussweeperregung mit der Drehzahl n_1 zwischen 2 Hz und 12 Hz aufgeführt. Die Simulation mit den linearen Teilmodellen führt hier zu starkem Überschwingen der Lösung, s. Abbildung 8.15. Die Ergebnisse der nichtlinearen Rechnung zeigen nur leichte Unterschiede zu den gemessenen Drehzahlen n_2 und n_3 . Ein kritisches Überschwingen der Lösung ist nicht festzustellen.

Die Ergebnisse der Simulationen zeigen, daß mit den diskreten nichtlinearen Modellen das dynamische Verhalten der hydrodynamischen Kupplung innerhalb des Antriebsstrangs für den hier erregten Frequenzbereich bis ca. 10 Hz sehr gut abgebildet werden kann. Im Vergleich zu den linearen Modellen liefern sie wesentlich genauere Ergebnisse. Zu Abweichungen der Simulationsergebnisse vom tatsächlichen Verhalten kann es allerdings auch hier kommen, wenn die Erregung in der Nähe der Eigenfrequenz eines Mode erfolgt, bei dem sich die Kupplungslaufräder mit einer relativ geringen Phasendifferenz gegeneinander bewegen.

8.4.2 Reduktion der Parameteranzahl

In diesem Abschnitt wird untersucht, wie weit sich eine Reduktion des diskreten Modellansatzes durchführen läßt, so daß das Kupplungsmodell das hydrodynamische Übertragungsverhalten im Antriebsstrang noch hinreichend genau wiedergeben kann.

Die Modellstruktur nach Tabelle 8.1 ist aus [7] übernommen worden, mit der gute Ergebnisse bei der Verifikation an der separaten Kupplung erzielt wurden. Die Verwendung dieses Modells zur Simulation von Schwingungen im Antriebsstrang konnte im vorangegangenen Abschnitt bestätigt werden, so daß dieses Modell als Referenzmodell herangezogen wird. Als Erregersignal wird das schon in Abbildung 8.22 dargestellte Drehzahlauschen verwendet. Die Ergebnisse des Referenzmodells sind, um Unterschiede zwischen Messung und Simulation besser erkennen zu können, in Abbildung 8.26 für ein Zeitintervall von fünf Sekunden aufgetragen.

| Nichtlineares Modell, Grad $\eta = 2$ | | |
|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------|
| Nichtlinearität γ | Ordnungen der Modellterme des Grades γ | |
| $\gamma = 1$ | $p_{11} = 1$ | $p_{12} = 1$ |
| | $q_{11} = 1$ | $q_{12} = 1$ |
| $\gamma = \eta = 2$ | $p_{21} = 1$ | $p_{22} = 1$ |
| Parameteranzahl n : 18 | | |

Tabelle 8.2: Modellstruktur des quadratischen Minimalansatzes

Es wurde eine systematische Veränderung des Modellansatzes durch sukzessives Herabsetzen der Modellordnungen $p_{\gamma 1}$ und $p_{\gamma 2}$ der einzelnen Modellterme (der Nichtlinearität γ) sowie des Grades der Nichtlinearität η vorgenommen. Der Vergleich der Ergebnisse der Simulationen mit den Antriebsstrangmodellen zeigt, daß das nichtlineare Modell bis auf eine Struktur mit einem quadratischem Ansatz, $\eta = 2$, und insgesamt 18 Parametern reduziert werden kann, ohne daß die Modellgüte gravierend vermindert wird. Die Struktur dieses Modells ist in Tabelle 8.2 aufgeführt.

| Lineares Modell, Grad $\eta = 1$ | | |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------|
| Nichtlinearität γ | Ordnungen der Modellterme des Grades γ | |
| $\gamma = 1$ | $p_{11} = 3$ | $p_{12} = 3$ |
| | $q_{11} = 1$ | $q_{12} = 1$ |
| Parameteranzahl n : 20 | | |

Tabelle 8.3: Modellstruktur des linearen diskreten Ansatzes

Anhand der Ordnungen ist zu erkennen, daß es sich hierbei um den quadratischen Ansatz mit der kleinstmöglichen Parameteranzahl handelt. In Abbildung 8.27 sind die Simulationsergebnisse des Antriebsstrangs unter Verwendung dieses Kupplungsmodells dargestellt.

Bei der Simulation über einen großen Betriebsbereich mit dem reduzierten Modell, Abbildung 8.29, zeigen sich ebenfalls keine besonderen Abweichungen gegenüber dem Ergebnis des Referenzmodells, vgl. hierzu Abbildung 8.23.

Eine weitere Reduktion des Modellansatzes bedeutet die Verringerung des Nichtlinearitätsgrades auf $\eta = 1$ und damit einen linearen Modellansatz. Dieses Modell, nach Tabelle 8.3, kann aber das Kupplungsverhalten nicht mehr wiedergeben, s. Abbildung 8.28.

Bei der Identifikation bzw. der Parameterschätzung des Kupplungsmodells liefert das Referenzmodell nach Tabelle 8.1 zwar ein wesentlich besseres Ergebnis als das quadratische Minimalmodell nach Tabelle 8.2, jedoch zeigen beide bei Einsatz im Antriebsstrang mit den hier verwendeten Erregerfunktionen dieselben Leistungen. Das läßt den Schluß zu, daß das komplexere nichtlineare Modell der Kupplung (Referenzmodell) eine höhere Dynamik abbilden kann, die aber bei den durchgeführten Messungen am Versuchsantriebsstrang nicht realisiert werden konnte.

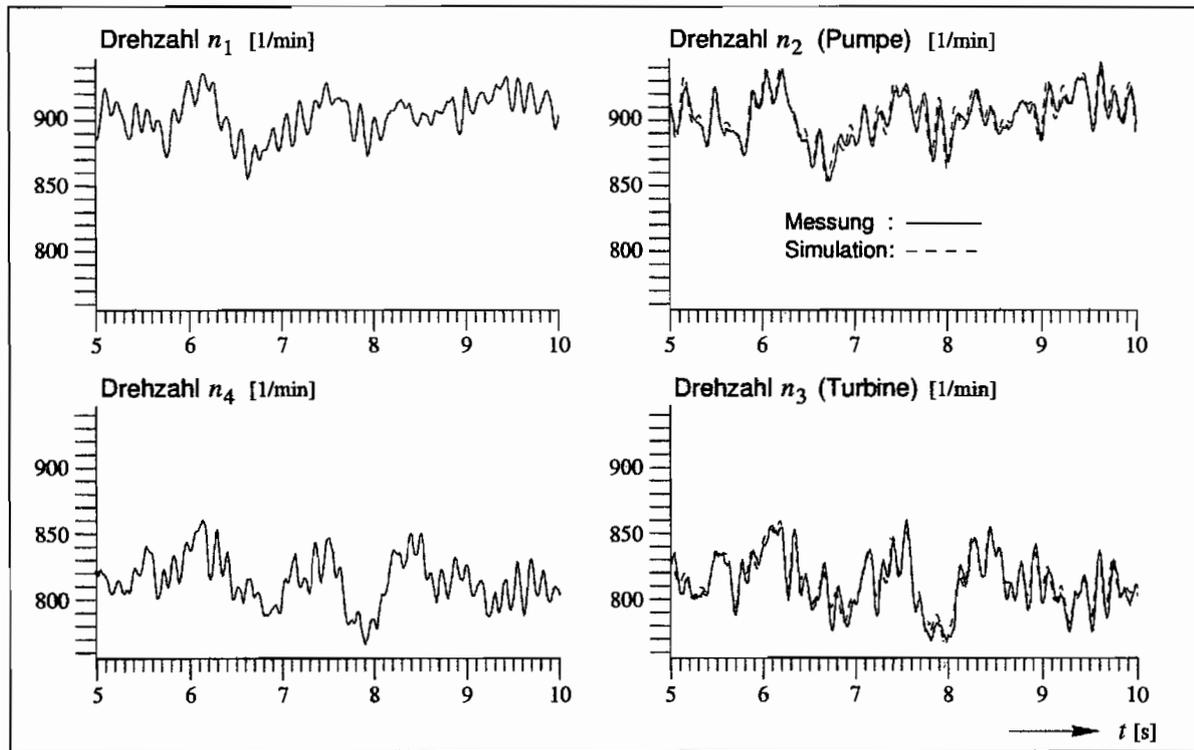


Abbildung 8.26: Simulation des Antriebsstrangs mit nichtlinearem Kupplungsmodell, $\eta = 3$, $n = 104$, (Referenzmodell)

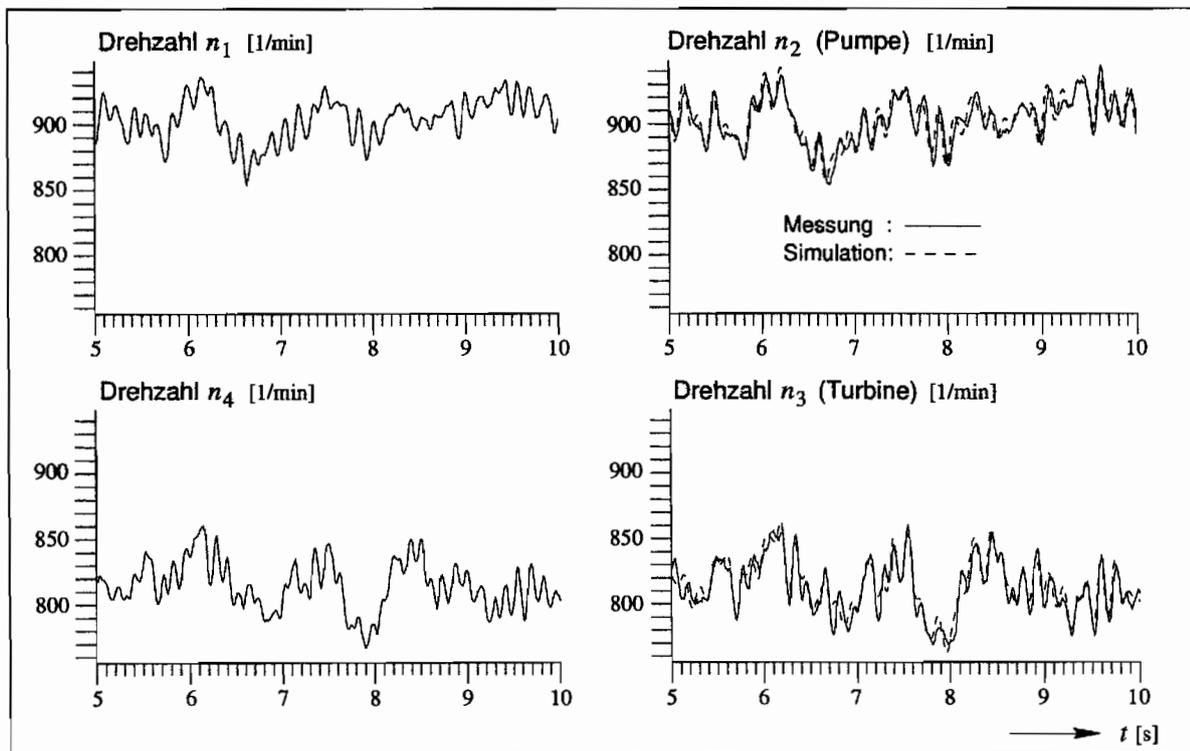


Abbildung 8.27: Simulation des Antriebsstrangs mit nichtlinearem Kupplungsmodell, $\eta = 2$, $n = 18$

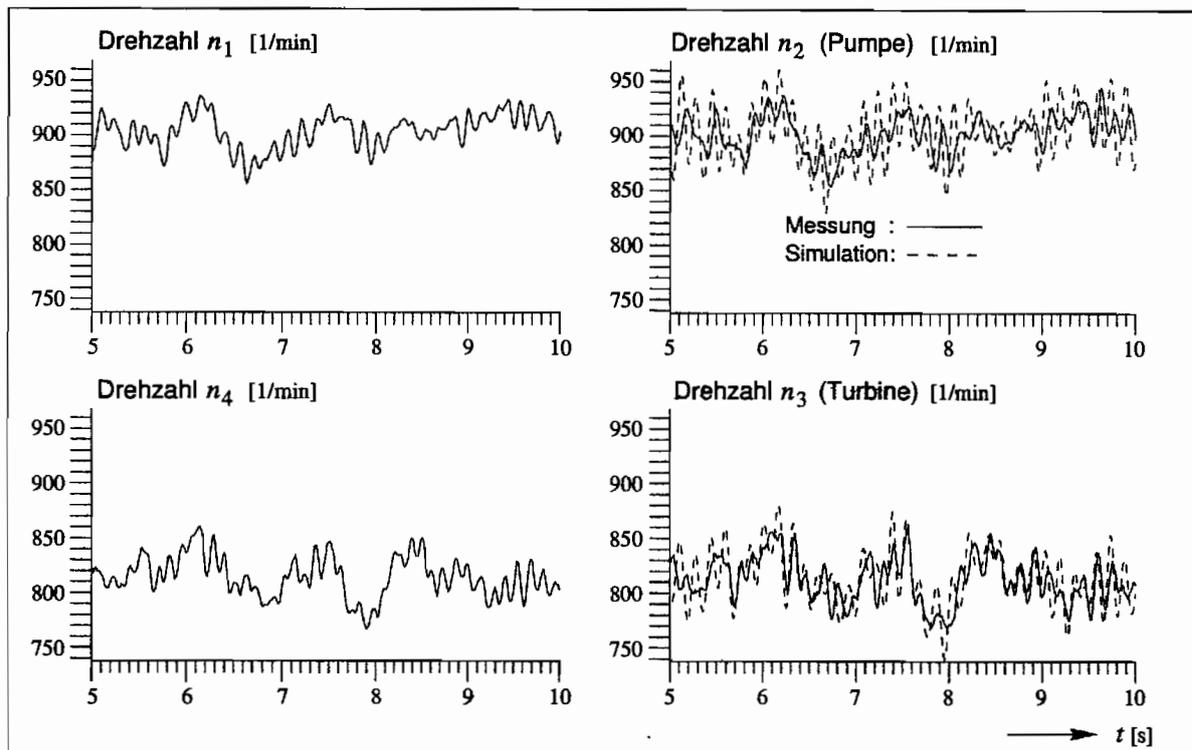


Abbildung 8.28: Simulation des Antriebsstrangs mit linearem diskreten Kupplungsmodell, $\eta = 1$, $n = 20$

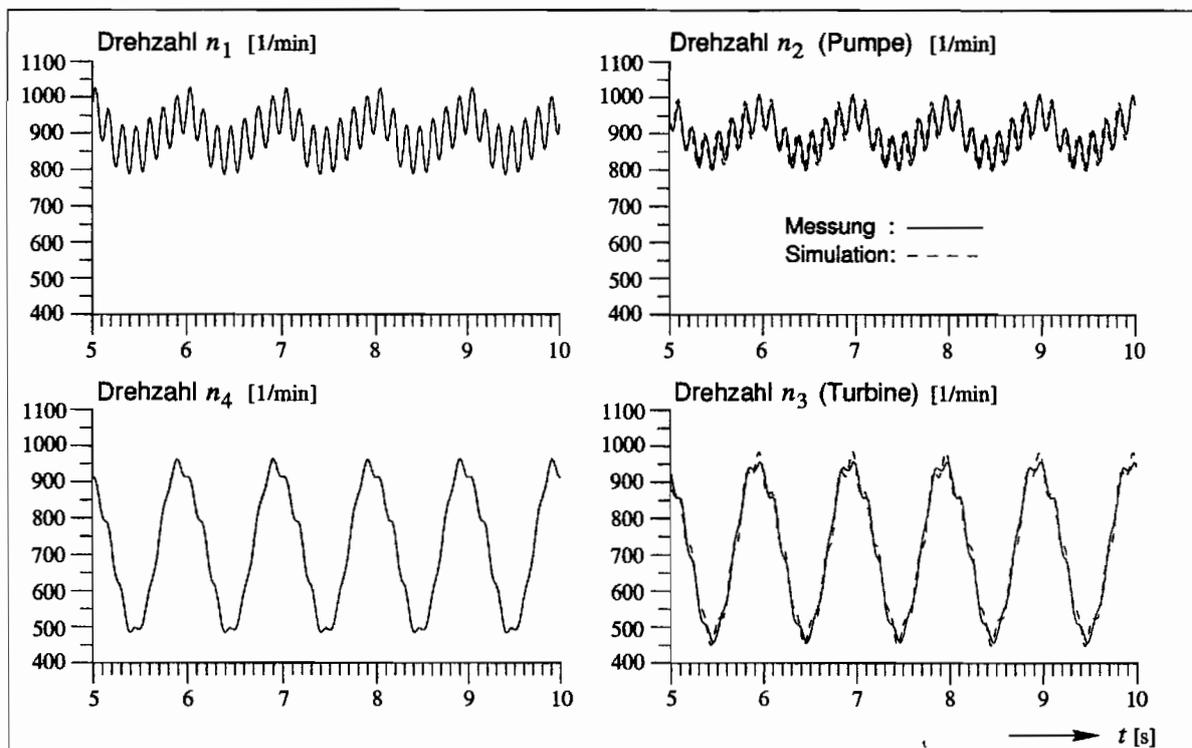


Abbildung 8.29: Simulation des Antriebsstrangs mit nichtlinearem Kupplungsmodell, $\eta = 2$, $n = 18$, über gesamten Modellgültigkeitsbereich

Kapitel 9

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Berechnung des dynamischen Verhaltens von Antrieben, bei denen eine hydrodynamische Kupplung als Verbindungselement im Antriebsstrang zum Einsatz kommt. Zur mathematischen Modellierung des Antriebsstrangs werden die Wellenzüge auf der An- und Abtriebsseite der Kupplung durch konventionelle diskrete Feder-Dämpfer-Masse-Systeme abgebildet. Die Beschreibung der hydrodynamischen Kupplung erfolgt hier durch lineare und nichtlineare Black-Box-Modelle, die aus Systemidentifikation der Kupplung gewonnen werden. Diese Art der Modellierung bietet sich für Systeme an, deren innere physikalische Zusammenhänge aufgrund ihrer Komplexität nur schwer zu erfassen sind, wie es bei der hydrodynamischen Kupplung der Fall ist. Der Vorteil der Systemidentifikation liegt darin, daß hier eine Modellierung auch ohne physikalische a-priori Kenntnisse möglich ist. Mit den Drehzahlen und den Drehmomenten an der Pumpen- und Turbinenradseite als Ein- und Ausgangsgrößen wird das Übertragungsverhalten der hydrodynamischen Kupplung zunächst experimentell ermittelt. Die Bestimmung der linearen Modelle erfolgt aus Frequenzgangmessungen in einem Betriebspunkt der Kupplung, die auf parametrische Modelle im Frequenzbereich in Form der dynamischen Dämpfungsmatrix führen. Diese können als Sonderfall der dynamischen Steifigkeitsmatrix aufgefaßt werden. Die inverse Fouriertransformation liefert das Modell der Kupplung im Zeitbereich als Differentialgleichungssystem. Die nichtlinearen Modelle werden im Zeitbereich ermittelt, und man erhält ein diskretes nichtlineares Differenzgleichungssystem zur Beschreibung des Kupplungsverhaltens. Die linearen und die nichtlinearen Modelle der Kupplung sind der Ausgangspunkt für die hier vorgestellten Untersuchungen, die zum Ziel haben, die Einsatzfähigkeit der Black-Box-Modelle für Antriebsstrangberechnungen zur schwingungstechnischen Auslegung aufzuzeigen.

Zur Modellierung des Antriebsstrangs erfolgt die Kopplung der Black-Box-Modelle der hydrodynamischen Kupplung mit den konventionellen Torsionsschwinger-Modellen der Wellenzüge. Die Kopplung der linearen Kupplungsmodelle kann im Frequenzbereich problemlos mit Hilfe des Übertragungsmatrizenverfahrens vorgenommen werden. Für die Simulation mit transienten Erregerfunktionen ist jedoch ein Modell im Zeitbereich von Vorteil, so daß die Kopplung direkt im Zeitbereich erfolgt. Durch die Betrachtung der Schnittgrößen an der Kupplung innerhalb des Antriebsstrangs wird das Differentialgleichungssystem für den gesamten Antrieb aufgestellt. Zur Simulation ist die Darstellung des Differentialgleichungssystems im Zustandsraum günstig. Aufgrund der Verwendung des linearen Black-Box-Modells

besitzen innerhalb dieses Systems die Gleichungen der Kupplungslaufräder eine höhere Ordnung als die Gleichungen der übrigen Freiheitsgrade. Durch die mehrfache Nachdifferentiation der Gleichungen niedrigerer Ordnung können alle Systemgleichungen auf eine einheitliche Ordnung gebracht werden. Auf diese Weise wird eine Transformation des Differentialgleichungssystems in den Zustandsraum ermöglicht. Die Systemmatrix des aufgestellten Zustandsraummodells wird zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenformen des Antriebsstrangmodells verwendet. Durch die Nachdifferentiation treten als Eingangsgrößen Ableitungen des An- und Abtriebsmomentes auf, so daß das Zustandsraummodell nur für bestimmte Erregerfunktionen verwendet werden kann, für die die Ableitungen nicht verschwinden. Um diese Einschränkung zu umgehen, wird zur Simulation ein System 1. Ordnung aufgestellt, bei dem die für die Kupplungsgleichungen benötigten Größen von höherer Ableitungsordnung simultan durch numerische Differentiation berechnet werden. Systemtheoretisch hat dieses Modell keine Bedeutung und dient lediglich als Werkzeug zur Simulation der linearen Antriebsstrangmodelle.

Für die Einbindung der nichtlinearen Kupplungsmodelle in den Antriebsstrang werden die Modelle der Wellenzüge diskretisiert. Die Schrittweite für die Diskretisierung ist hierbei durch die bei der Identifikation des Kupplungsmodells verwendete Abtastzeit bestimmt, da diese implizit in den Modellparametern der Kupplung enthalten ist. Unter der Berücksichtigung der Schnittgrößen an der Kupplung ergibt sich als Modell für den Antriebsstrang ein diskretes nichtlineares Differenzgleichungssystem.

Für die schwingungstechnische Auslegung eines Antriebsstrangs bieten die linearen Antriebsstrangmodelle den Vorteil, eine Berechnung der Eigenwerte und Eigenformen vorzunehmen, ohne das Modell vorher an eine bestimmte Erregerfrequenz anpassen zu müssen. Das Antriebsstrangmodell ist daher nur vom Betriebspunkt der Kupplung abhängig. Die Frequenzabhängigkeit des Kupplungsverhaltens wird durch das lineare Black-Box-Modell selbst berücksichtigt. Somit kann eine Aussage über die Veränderung des Resonanzverhaltens des Antriebsstrangs in Abhängigkeit von verschiedenen Betriebspunkten der Kupplung getroffen werden. Hierzu müssen zunächst die Auswirkungen des linearen Black-Box-Modells auf das Antriebsstrangmodell untersucht werden. Es zeigt sich, daß das Antriebsstrangmodell bestimmte Eigenwerte und Eigenformen aufweist, die nicht dem realen Systemverhalten zugeordnet werden können, und nur aufgrund der Eigenschaften des Kupplungsmodells auftreten. Durch die wesentlich höhere Dämpfung dieser irrelevanten Moden, die für das tatsächliche Resonanzverhalten ohne Bedeutung sind, kann eine Selektion der für das reale System relevanten Eigenformen durchgeführt werden.

Die Validierung der Black-Box-Modelle der hydrodynamischen Kupplung innerhalb des Antriebsstrangs wird anhand von Messungen an einem Versuchsaufbau durchgeführt. Da die Frequenzbereichsmodelle zeigen, daß der Frequenzbereich, in dem die Kupplung Schwingungen übertragen kann, bis maximal 15 Hz reicht, werden für den Versuchsantriebsstrang tief abgestimmte Wellenelemente an An- und Abtriebsseite verwendet. Kernstück hierbei ist die zu diesem Zweck konstruierte drehelastische Torsionsfederkupplung. Sie besteht aus einer Schraubenfeder, deren Enden jeweils in einen Verbindungsflansch eingespannt sind, und so als Wellenverbindung in den Versuchsaufbau eingesetzt werden kann. Durch die Verwendung eines solchen Federelementes an jeder Seite der Kupplung wird ein Antriebsstrang realisiert,

der an An- und Abtriebsseite der Kupplung jeweils ein schwingungsfähiges System besitzt. An diesem Versuchsantriebsstrang, der auf einem Verspannungsprüfstand mit hoher Erregerdynamik aufgebaut wird, werden die experimentellen Untersuchungen durchgeführt.

Die Quantifizierung des Resonanzverhaltens des Versuchsaufbaus erfolgt durch die experimentelle Bestimmung der Eigenfrequenzen und deren zugehörige Dämpfungen durch die Messung der Frequenzgangmatrix des Antriebsstrangs. Aus den einzelnen Frequenzgangfunktionen können für den jeweiligen Mode die Eigenfrequenz und die Dämpfung in Form der Abklingkonstante bestimmt werden. Beide experimentell ermittelte Kennwerte können unmittelbar mit den Eigenwerten des für den Betriebspunkt entsprechenden Antriebsstrangmodells verglichen werden. Die Gegenüberstellung der theoretischen und der experimentellen Ergebnisse zeigt, daß die linearen Antriebsstrangmodelle den Verlauf der Eigenfrequenzen und der Dämpfungen in Abhängigkeit vom Betriebspunkt der hydrodynamischen Kupplung sowohl qualitativ als auch quantitativ gut wiedergeben können. Als Einschränkung sind hierbei diejenigen Schwingungsmoden des Antriebsstrangs zu nennen, bei denen die beiden Kupplungslaufräder nur eine schwache Relativbewegung vollziehen. Bei diesen Moden treten gegenüber der gemessenen Dämpfung stärkere Abweichungen auf. Dieser Sachverhalt ist auf Ungenauigkeiten bei der Abbildung des Kupplungsverhaltens im Frequenzbereich für Frequenzen gegen 0 Hz zurückzuführen.

Die Validierung der linearen und der nichtlinearen Modelle im Zeitbereich erfolgt durch den Vergleich der Simulationsergebnisse für die Pumpen- und Turbinendrehzahl des Antriebsstrangs mit den im Versuch gemessenen Daten. Als Eingangsgrößen der Modelle werden dementsprechend Meßgrößen vorgegeben. Der Antriebsstrang wird mit verschiedenartigen Funktionen mit bis zu 15 Hz an der An- und Abtriebsseite erregt. Für das Durchfahren mehrerer Teilmodellbetriebsbereiche der Kupplung findet eine geeignete Modellschaltung statt. Die Simulationsergebnisse zeigen, daß starke Abweichungen vom realen Verhalten des Systems auftreten können, wenn eine Eigenform erregt wird, für die das Kupplungsmodell die Dämpfung aufgrund der schwachen Relativbewegung der Kupplungslaufräder nur ungenau wiedergibt. Für stationäre periodische Erregungen, die die kritischen Moden nicht anregen, ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung. Diese ergibt sich ebenfalls für das Durchfahren mehrerer Teilmodellbetriebsbereiche der hydrodynamischen Kupplung mit mäßiger Beschleunigung.

Sehr gut für Simulationsrechnungen eignen sich dagegen die diskreten nichtlinearen Modelle. Mit einem einzigen Modell läßt sich ein großer Betriebsbereich erfassen. Die Simulationsergebnisse zeigen, daß mit diesen Modellen das dynamische Verhalten der hydrodynamischen Kupplung innerhalb eines Antriebsstrangs sehr gut abgebildet werden kann. In den hier durchgeführten Simulationsrechnungen tritt die durch das Kupplungsmodell festgelegte Zeitschrittweite von 0.01 s nicht negativ in Erscheinung, da durch den realisierten Versuchsaufbau die Kupplung selbst nur bis maximal ca. 10 Hz erregt wird. Aufgrund dieser relativ niederfrequenten Erregung, ist es auch möglich, das diskrete nichtlineare Kupplungsmodell auf einen quadratischen Minimalansatz zu reduzieren, so daß die Modellgüte für den Einsatz des Kupplungsmodells innerhalb des Antriebsstrangs immer noch ausreichend ist.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen zeigen, daß sich die aus der Systemidentifikation gewonnenen Black-Box-Modelle der hydrodynamischen Kupplung für die Berechnung des dynamischen Verhaltens von Antriebssträngen einsetzen lassen. Je nach Anwendungsfall ist auf die beiden verschiedenen Modellarten, linear oder nichtlinear, zurückzugreifen. Die Berechnung von Eigenwerten und Eigenformen ist der linearen Betrachtungsweise vorenthalten und liefert hierfür gute Ergebnisse. Für die Simulation von Vorgängen im Zeitbereich erweisen sich die diskreten nichtlinearen Modelle als besonders leistungsfähig. Eine praxisgerechte Implementierung in bestehende Programmsysteme steht noch aus, so daß der Einsatz derartiger Modelle speziellen Anwendungen vorenthalten bleibt, für die eine höhere Genauigkeit der Beschreibung des hydrodynamischen Kupplungsverhaltens erforderlich ist.

Literaturverzeichnis

- [1] Achilles, D.: „Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung: kontinuierliche und diskrete Verfahren der Praxis“, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1985
- [2] Appell, B.; Hoffeld, H.; Menne, A.: „Kombinationskupplung zum Schutz von Gasturbinen vor Überlast und Überdrehzahl“, Antriebstechnik 37, Nr.2, 1998
- [3] Argyris, J.; Mlejnik, H.-P.: „Die Methode der finiten Elemente“, Band 2, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden 1987
- [4] Beck, H.-P.; Sourkounis, C.; Wenske, J.: „Torsionsschwingungen in Antriebssträngen mit hydrodynamischer Kupplung“, Antriebstechnik 34, Nr. 5, 1995
- [5] Beerens, C.: „Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik“, Dissertation, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 91, Ruhr-Universität Bochum 1994
- [6] Benz, W.: „Kenngrößen für das Verhalten drehnachgiebiger Kupplungen“, VDI-Berichte Nr. 73, 1963
- [7] Behrens, H.: „Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allgemeinen diskreten Modellansätzen“, Dissertation, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 107, Ruhr-Universität Bochum 1997
- [8] Brigham, E. O.: „FFT: schnelle Fourier Transformation“, 6. Auflage, Oldenbourg Verlag, München/Wien 1995
- [9] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.: „Taschenbuch der Mathematik“, Verlag Harri Deutsch, Thun 1987
- [10] Dien, R.: „Torsionsschwingungsverhalten einer hydrodynamischen Kupplung“, MTZ Motortechnische Zeitschrift 53, 1992
- [11] Fischer, U.; Stephan, W.: „Mechanische Schwingungen“, 3. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig-Köln 1993
- [12] Folchert, U.: „Identifikation der dynamischen Eigenschaften hydrodynamischer Kupplungen“, Dissertation, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 87, Ruhr-Universität Bochum 1994

- [13] Föttinger, H.: „Die hydrodynamische Arbeitsübertragung, insbesondere durch Transformatoren, Ein Rückblick und Ausblick“, Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, Bd. 31, S. 171-214, 1930
- [14] Föllinger, O.: „Laplace- und Fourier-Transformation“, 4. Auflage, Hüthig, Heidelberg 1986
- [15] Formanski, T.: „Numerische Untersuchung von dynamischen Betriebszuständen hydrodynamischer Kupplungen“, Dissertation, Cuvillier Verlag, Göttingen 1996
- [16] Frömder, J.: „Das dynamische Verhalten der Föttinger-Kupplung“, Dissertation, Fakultät für Maschinenwesen, TH Hannover, 1962
- [17] Feuser, A.; Kordak, R.; Liebler, G., Nikolaus, H. W.: „Der Hydraulik Trainer, Band 6: Hydrostatische Antriebe mit Sekundärregelung“, Herausgeber: Mannesmann-Rexroth GmbH, Lohr am Main 1989
- [18] Gasch, R.; Knothe, K.: „Strukturdynamik Band 1, Diskrete Systeme“, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1987
- [19] Hasselgruber, H.: „Zum Drehschwingungsverhalten der hydrodynamischen Kupplung“, Industrie-Anzeiger 87. Jg. 1965, Nr. 8, S. 121-123, Nr. 25, S. 436-438
- [20] Herbertz, R.: „Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Föttinger-Getrieben“, Dissertation, Technische Universität Hannover 1973
- [21] Höller, H.: „Hydrodynamische Kupplungen und Bremsen“, Firmenschrift Fa. VOITH-Turbo GmbH&Co. KG, Crailsheim, 1987
- [22] Holzweißig, F.; Dresig, H.: „Lehrbuch der Maschinendynamik“, Fachbuchverlag Leipzig-Köln, 4. Auflage, 1994
- [23] Huitenga, H.: „Verbesserung des Anlaufverhaltens hydrodynamischer Kupplungen durch Modifikation der Kreislaufgeometrie“, Dissertation, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 7, Nr. 322, VDI Verlag 1997
- [24] Isermann, R.: „Digitale Regelungstechnik“, Band I und II, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1988
- [25] Isermann, R.: „Identifikation dynamischer Systeme“, Band I und II, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1988
- [26] Isermann, R.: „Parameterschätzung dynamischer Systeme“, Automatisierungstechnik 36, Heft 6, 1988
- [27] Ishihara, T.-O.: „Non steady Characteristics of Hydrodynamic Transmission“, Bericht des Institute of Industrial Science, The University of Tokio, Vol. 18, Nr. 1, 1967
- [28] Kickbusch, E.: „Föttinger-Kupplungen und Föttinger-Getriebe“, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1963

- [29] Kost, A.: „Strömungsstruktur und Drehmomentübertragung in hydrodynamischen Kupplungen“, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 7, Nr. 234, VDI Verlag, Düsseldorf 1993
- [30] Kugel, F.: „Schwingungs- und Stoßdämpfung bei hydrodynamischer Kraftübertragung“, Ölhydraulik und Pneumatik 6, Nr. 9, 1962
- [31] Menne, A.: „Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern“, Dissertation, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 86, Ruhr-Universität Bochum 1994
- [32] Menne, A.: „Einflüsse von hydrodynamischen Kupplungen auf Torsionsschwingungen in Antriebssystemen“, Antriebstechnik 36, Nr. 3, 1997
- [33] Middelman, V.: „Analyse des Systemverhaltens hydrodynamischer Kupplungen bei Variation der Kreislaufgeometrie“, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 1992
- [34] Rake, H.: „Regelungstechnik A & B“, Skript zur Vorlesung an der RWTH-Aachen, Aachen 1989
- [35] Rath, M.: „Abbildung hydrodynamischer Kopplungen in Antriebssystemen“, Dissertation, Reihe Konstruktionstechnik, Verlag Shaker, Aachen 1992
- [36] Rogos, J.: „Experimentelle Untersuchungen über das Verhalten von Föttinger-Kupplungen bei periodischer Störung des Belastungsmomentes“, Dissertation, Technische Universität Berlin 1965
- [37] Schmitt, G.: „Simulationstechnik“, Oldenbourg-Verlag, München/Wien 1980
- [38] Schöne, A.: „Simulation technischer Systeme“, Band I, Carl Hanser Verlag, München 1974
- [39] Schwarz, H.: „Nichtlineare Regelungssysteme“, Oldenbourg Verlag, München/Wien 1991
- [40] Söchting, F.: „Dämpfung der Drehschwingungen durch Flüssigkeitskupplungen“, VDI-Zeitschrift, Bd. 82, Nr. 23, 1938
- [41] Timm, K.: „Untersuchungen an Föttinger Kupplungen“, Dissertation, Technische Hochschule Hannover 1958
- [42] Unbehauen, H.: „Regelungstechnik I, II, III“, 3. Auflage, Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden 1988
- [43] Unbehauen, H.: „Identifikation nichtlinearer Systeme“, Interner Bericht ESR-9304, Lehrstuhl für Elektrische Steuerung und Regelung, Bochum, Juni 1993
- [44] Unbehauen, R.: „Systemtheorie“, 5. Auflage, Oldenbourg Verlag, München/Wien 1990
- [45] VDI-Richtlinie 2153: „Hydrodynamische Leistungsübertragung, Begriffe - Bauformen - Wirkungsweise“, VDI-Verlag, Düsseldorf 1994

- [46] J. M. Voith GmbH: „Hydrodynamik in der Antriebstechnik, Wandler, Wandlergetriebe, Kupplungen, Bremsen“, Krausskopf-Verlag, Mainz 1987
- [47] Waller, H.; Schmidt, R.: „Schwingungslehre für Ingenieure“, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich 1989
- [48] Waller, H.; Krings, W.: „Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik“, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich 1975
- [49] Wend, H.-D.: „Strukturelle Analyse linearer Regelungssysteme“, Oldenbourg Verlag, München/Wien 1993
- [50] Wernstedt, J.: „Experimentelle Prozeßanalyse“, Oldenbourg Verlag, München/Wien 1989
- [51] Wienholt, H.: „Verlustzustand und Instabilitäten der Strömung in hydrodynamischen Kupplungen bei Variation der Schaufelgitter“, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 1993
- [52] Worsch, H.: „Drehschwingungsverhalten von hydrodynamischen Kupplungen“, Voith Forschung u. Konstruktion, Heft 33, Aufsatz 2, 1989
- [53] Worsch, H.; Sideris, D.: „Torsionsschwingungsverhalten von hydrodynamischen Kupplungen“, MTZ Motortechnische Zeitschrift, 1989, Nr. 4, S. 179-182, Nr. 6, S. 285-289
- [54] Wunsch, G.: „Handbuch der Systemtheorie“, Oldenbourg Verlag, München/Wien 1986
- [55] Zurmühl, R.; Falk, S.: „Matrizen und ihre Anwendungen“, Band 1, 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1992

Anhang A

Dynamische Dämpfungsmatrizen

A.1 Modelle für $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$

Es werden hier die linearen Kupplungsmodelle im Frequenzbereich in Form der dynamischen Dämpfungsmatrizen für die 8 verschiedenen Betriebspunkte mit der mittleren Pumpendrehzahl $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ angegeben. Die Modelle gelten für die hydrodynamische Kupplung *Voith 422 TH*, deren technische Daten und Betriebsparameter in Tabelle 2.1 aufgeführt sind. In den folgenden Diagrammen sind die gemessenen Frequenzgangpunkte durch Symbole und das zugehörige parametrische Modell aus der Schätzung mit

$$\mathbf{D}(j\omega) = \begin{bmatrix} d_{11}(j\omega) & d_{12}(j\omega) \\ d_{21}(j\omega) & d_{22}(j\omega) \end{bmatrix},$$

$$d_{ij}(j\omega) = \frac{Z_{ij_n}(j\omega)}{N_m(j\omega)} = \frac{b_{ij_0} + b_{ij_1}j\omega + \dots + b_{ij_n}j\omega^n}{a_0 + a_1j\omega + \dots + a_mj\omega^m}$$

durchgezogen dargestellt. Für die Ansatzordnungen der Zählerpolynome und des Nennerpolynoms aller Modelle gilt

$$n = 3, \quad m = 2.$$

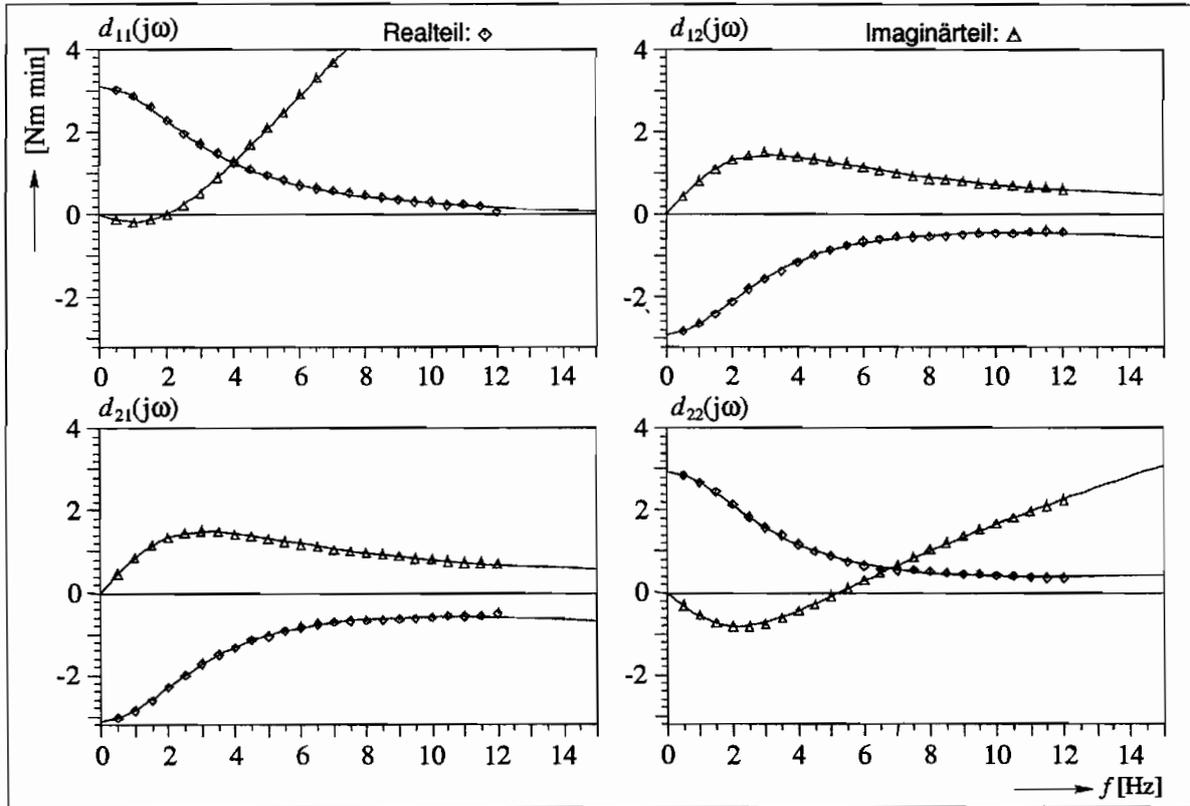


Abbildung A.1: Dynamische Dämpfungsmatrix $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 5 \%$. Symbole: Messung, durchgezogen: Parametermodell

| Modellparameter für $s = 5 \%$ | | | |
|----------------------------------|--------------|----------------------------------|--------------------------|
| Stationärer Betriebspunkt P^* | | | |
| $M_P^* = 124.2 \text{ Nm}$ | | $M_T^* = -116.5 \text{ Nm}$ | |
| $n_P^* = 898.1 \text{ min}^{-1}$ | | $n_T^* = 852.1 \text{ min}^{-1}$ | |
| $a_0 = 1.00000000$ | $b_{11_0} =$ | 3.10708703 | $b_{12_0} = -2.91265692$ |
| $a_1 = .05373821$ | $b_{11_1} =$ | $.12663946$ | $b_{12_1} = -.01442194$ |
| $a_2 = .00025366$ | $b_{11_2} =$ | $.00594870$ | $b_{12_2} = -.00012782$ |
| | $b_{11_3} =$ | $.00002845$ | $b_{12_3} = .00000243$ |
| | $b_{21_0} =$ | -3.11369692 | $b_{22_0} = 2.92705038$ |
| | $b_{21_1} =$ | $-.02067804$ | $b_{22_1} = .05305048$ |
| | $b_{21_2} =$ | $-.00011019$ | $b_{22_2} = .00215692$ |
| | $b_{21_3} =$ | $.00000262$ | $b_{22_3} = .00000804$ |

Tabelle A.1: Parameter des linearen Kupplungsmodells, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 5 \%$

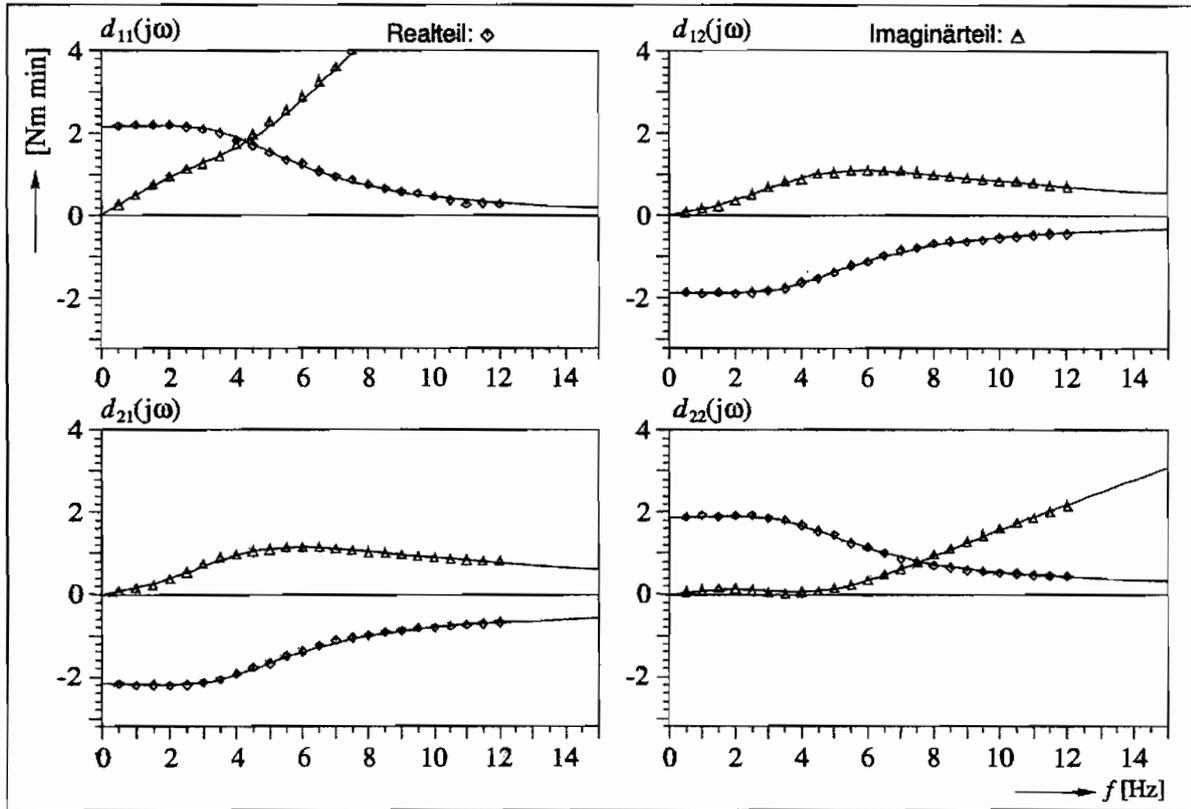


Abbildung A.2: Dynamische Dämpfungsmatrix $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 8 \%$. Symbole: Messung, durchgezogen: Parametermodell

| Modellkoeffizienten für $s = 8 \%$ | | | |
|------------------------------------|--------------------------|----------------------------------|--|
| Stationärer Betriebspunkt P^* | | | |
| $M_P^* = 182.0 \text{ Nm}$ | | $M_T^* = -174.6 \text{ Nm}$ | |
| $n_P^* = 898.0 \text{ min}^{-1}$ | | $n_T^* = 825.2 \text{ min}^{-1}$ | |
| $a_0 = 1.00000000$ | $b_{11_0} = 2.15081908$ | $b_{12_0} = -1.86927310$ | |
| $a_1 = .04900797$ | $b_{11_1} = .18777920$ | $b_{12_1} = -.06790250$ | |
| $a_2 = .00100005$ | $b_{11_2} = .00551548$ | $b_{12_2} = -.00022043$ | |
| | $b_{11_3} = .00011244$ | $b_{12_3} = -.00000055$ | |
| | $b_{21_0} = -2.17175218$ | $b_{22_0} = 1.87790264$ | |
| | $b_{21_1} = -.08167436$ | $b_{22_1} = .10777776$ | |
| | $b_{21_2} = -.00044191$ | $b_{22_2} = .00208979$ | |
| | $b_{21_3} = -.00000009$ | $b_{22_3} = .00003940$ | |

Tabelle A.2: Parameter des linearen Kupplungsmodells, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 8 \%$

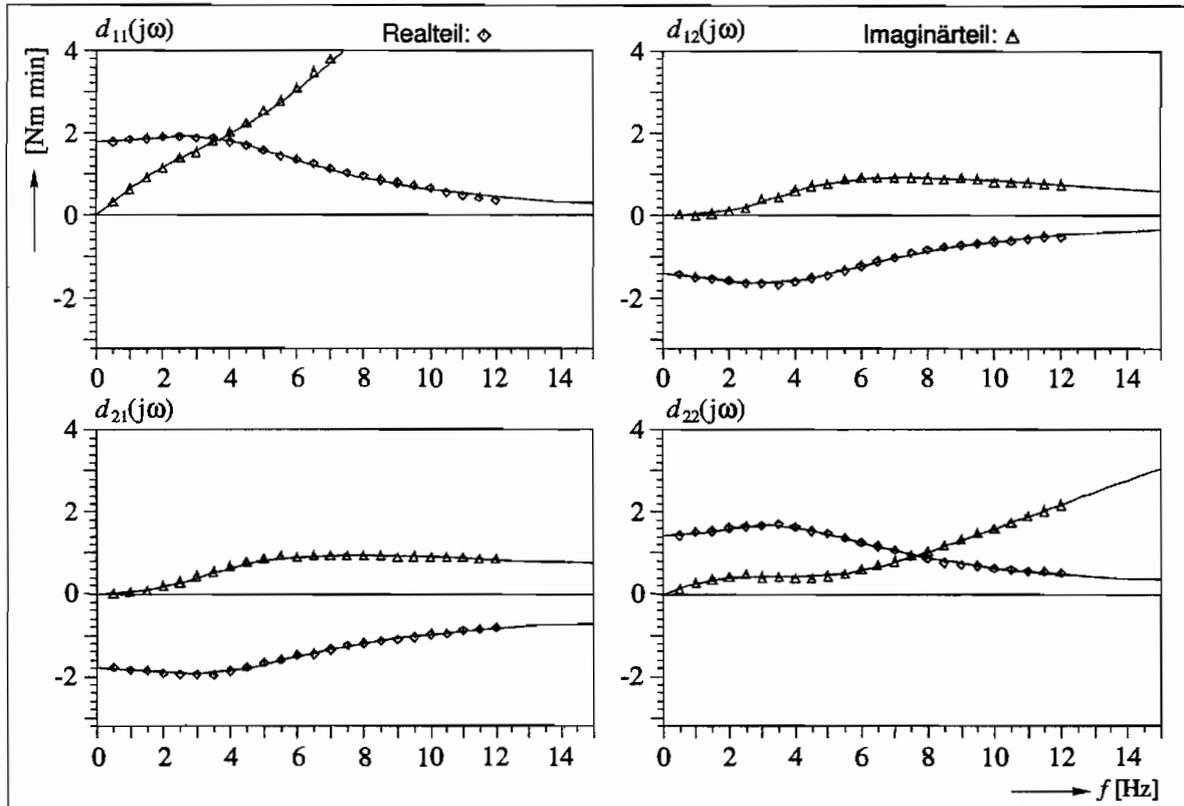


Abbildung A.3: Dynamische Dämpfungsmatrix $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 10 \%$. Symbole: Messung, durchgezogen: Parametermodell

| Modellkoeffizienten für $s = 10 \%$ | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|----------------------------------|--|
| Stationärer Betriebspunkt P^* | | | |
| $M_P^* = 214.2 \text{ Nm}$ | | $M_T^* = -207.4 \text{ Nm}$ | |
| $n_P^* = 897.8 \text{ min}^{-1}$ | | $n_T^* = 807.4 \text{ min}^{-1}$ | |
| $a_0 = 1.00000000$ | $b_{11_0} = 1.75875676$ | $b_{12_0} = -1.41500196$ | |
| $a_1 = .05476259$ | $b_{11_1} = .19825597$ | $b_{12_1} = -.07933540$ | |
| $a_2 = .00103383$ | $b_{11_2} = .00609247$ | $b_{12_2} = -.00012902$ | |
| | $b_{11_3} = .00011510$ | $b_{12_3} = -.00000092$ | |
| | $b_{21_0} = -1.77589495$ | $b_{22_0} = 1.41757879$ | |
| | $b_{21_1} = -.09334093$ | $b_{22_1} = .12057666$ | |
| | $b_{21_2} = -.00042556$ | $b_{22_2} = .00224546$ | |
| | $b_{21_3} = .00000112$ | $b_{22_3} = .00004142$ | |

Tabelle A.3: Parameter des linearen Kupplungsmodells, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 10 \%$

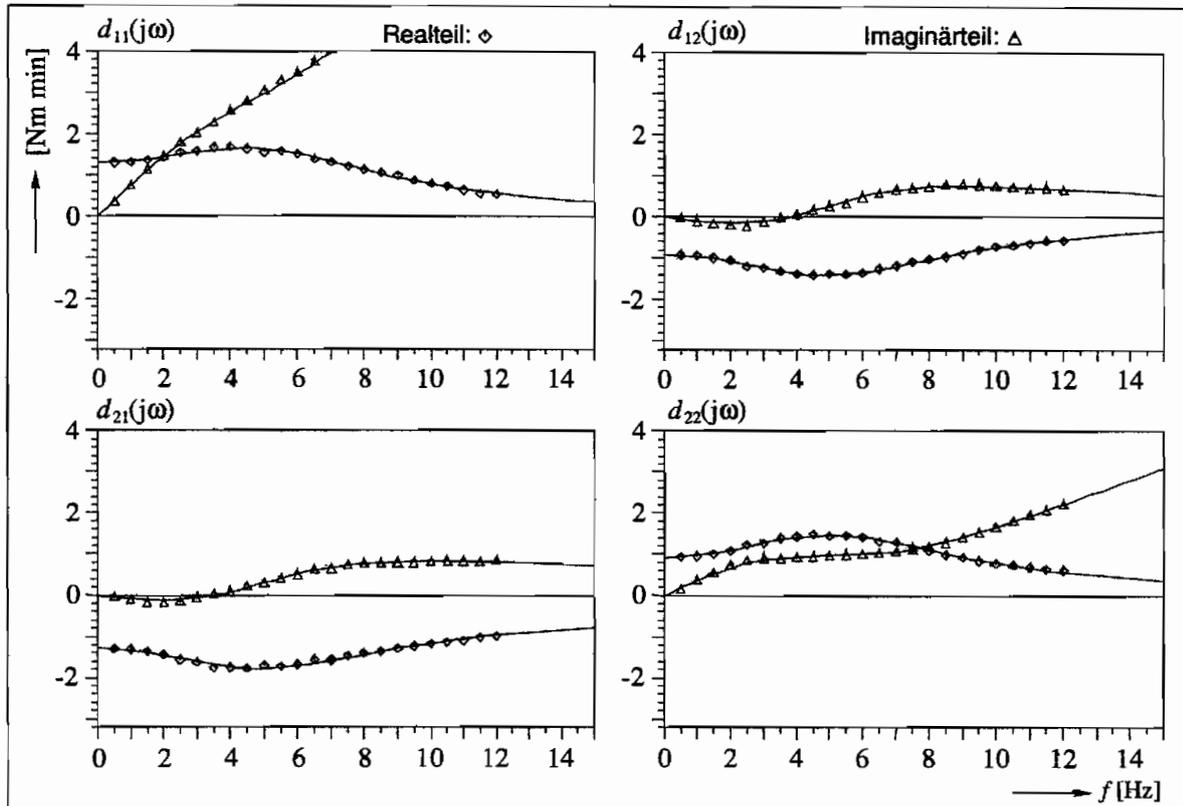


Abbildung A.4: Dynamische Dämpfungsmatrix $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 12 \%$. Symbole: Messung, durchgezogen: Parametermodell

| Modellkoeffizienten für $s = 12 \%$ | | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--|
| Stationärer Betriebspunkt P^* | | | |
| | $M_P^* = 238.0 \text{ Nm}$ | $M_T^* = -231.3 \text{ Nm}$ | |
| | $n_P^* = 898.1 \text{ min}^{-1}$ | $n_T^* = 789.4 \text{ min}^{-1}$ | |
| $a_0 = 1.00000000$ | $b_{11_0} = 1.27585551$ | $b_{12_0} = -0.90668679$ | |
| $a_1 = .03740487$ | $b_{11_1} = .16747221$ | $b_{12_1} = -.05141524$ | |
| $a_2 = .00063794$ | $b_{11_2} = .00421329$ | $b_{12_2} = -.00007209$ | |
| | $b_{11_3} = .00007189$ | $b_{12_3} = -.00000142$ | |
| | $b_{21_0} = -1.28350848$ | $b_{22_0} = .90969560$ | |
| | $b_{21_1} = -.06300721$ | $b_{22_1} = .09253350$ | |
| | $b_{21_2} = -.00028184$ | $b_{22_2} = .00152355$ | |
| | $b_{21_3} = .00000023$ | $b_{22_3} = .00002612$ | |

Tabelle A.4: Parameter des linearen Kupplungsmodells, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 12 \%$

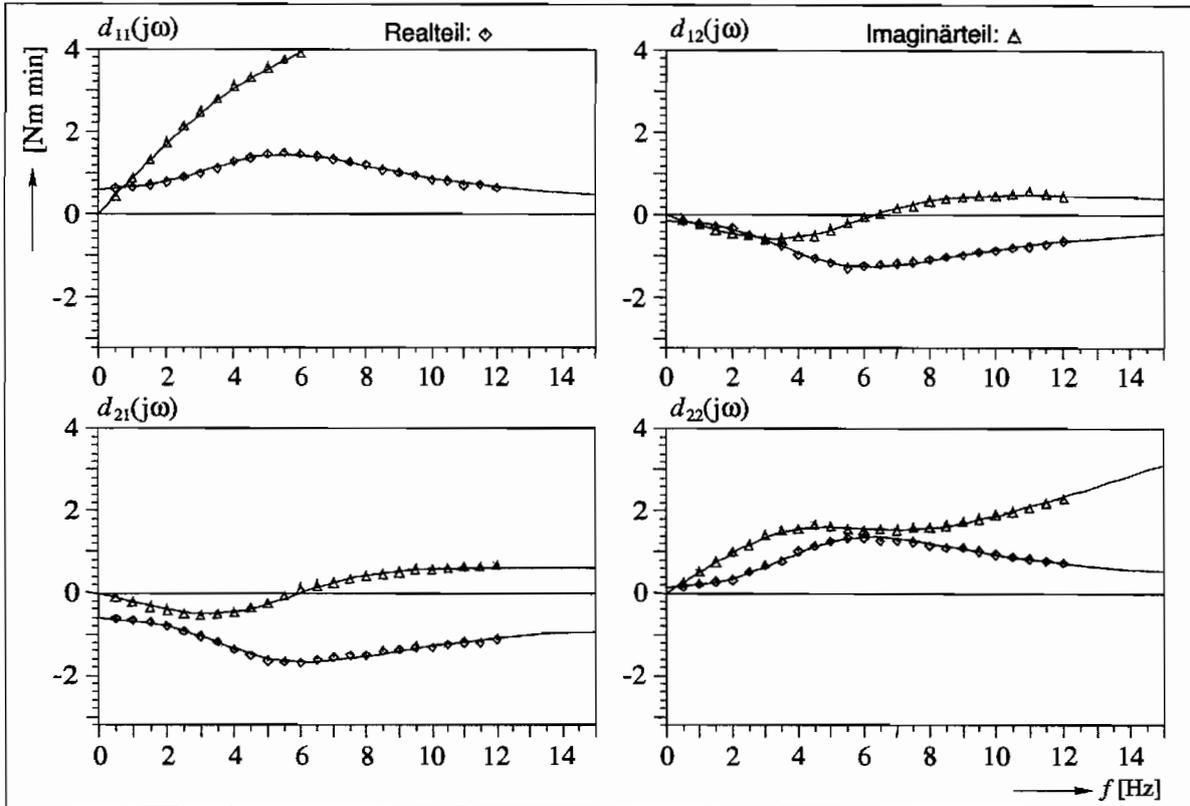


Abbildung A.5: Dynamische Dämpfungsmatrix $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 15 \%$. Symbole: Messung, durchgezogen: Parametermodell

| Modellkoeffizienten für $s = 15 \%$ | | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--|
| Stationärer Betriebspunkt P^* | | | |
| | $M_P^* = 248.4 \text{ Nm}$ | $M_T^* = -241.7 \text{ Nm}$ | |
| | $n_P^* = 898.1 \text{ min}^{-1}$ | $n_T^* = 762.2 \text{ min}^{-1}$ | |
| $a_0 = 1.00000000$ | $b_{11_0} = .60849326$ | $b_{12_0} = -.13867444$ | |
| $a_1 = .03389899$ | $b_{11_1} = .15993339$ | $b_{12_1} = .04457191$ | |
| $a_2 = .00065730$ | $b_{11_2} = .00389151$ | $b_{12_2} = -.00011870$ | |
| | $b_{11_3} = .00007322$ | $b_{12_3} = -.00000090$ | |
| | $b_{21_0} = -.61064663$ | $b_{22_0} = .13596129$ | |
| | $b_{21_1} = -.05603302$ | $b_{22_1} = .08586918$ | |
| | $b_{21_2} = -.00035628$ | $b_{22_2} = .00142922$ | |
| | $b_{21_3} = .00000070$ | $b_{22_3} = .00002576$ | |

Tabelle A.5: Parameter des linearen Kupplungsmodells, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 15 \%$

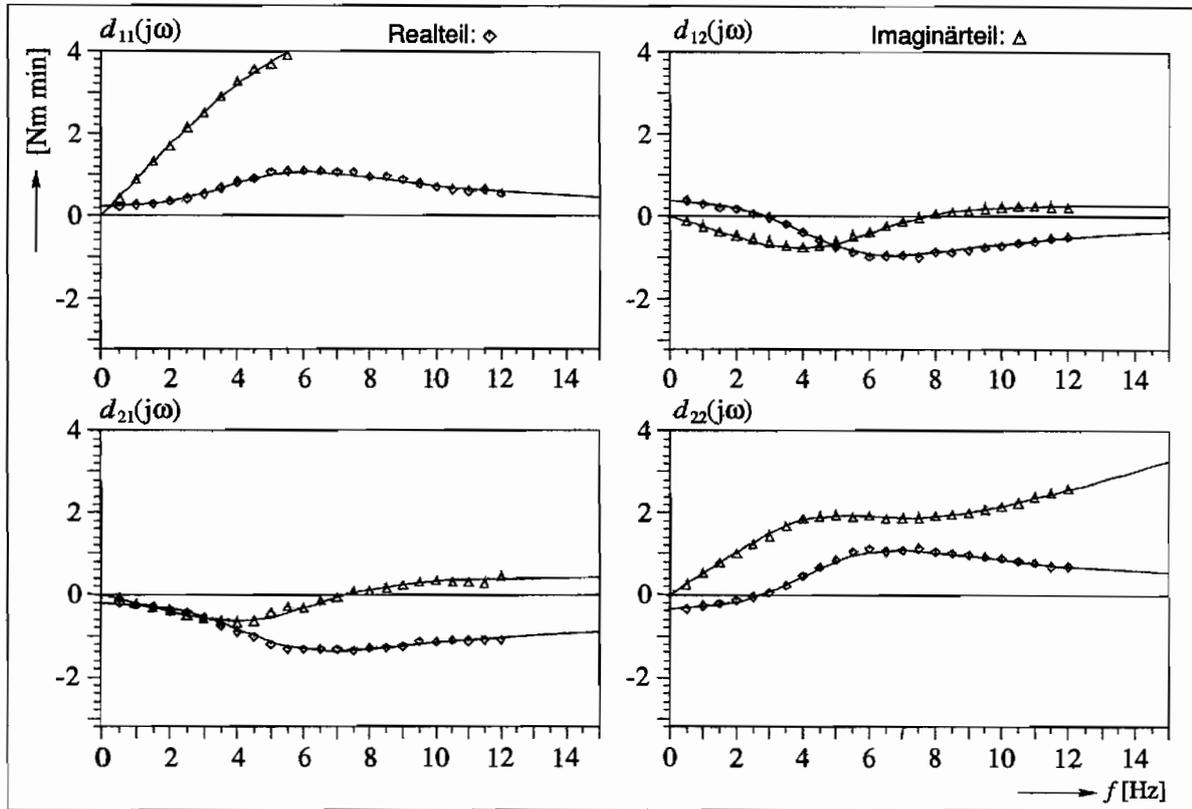


Abbildung A.6: Dynamische Dämpfungsmatrix $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 20 \%$. Symbole: Messung, durchgezogen: Parametermodell

| Modellkoeffizienten für $s = 20 \%$ | | | |
|-------------------------------------|-------------------------|----------------------------------|--|
| Stationärer Betriebspunkt P^* | | | |
| $M_P^* = 241.4 \text{ Nm}$ | | $M_T^* = -237.7 \text{ Nm}$ | |
| $n_P^* = 898.1 \text{ min}^{-1}$ | | $n_T^* = 717.1 \text{ min}^{-1}$ | |
| $a_0 = 1.00000000$ | $b_{11_0} = .20534806$ | $b_{12_0} = .35247651$ | |
| $a_1 = .03191007$ | $b_{11_1} = .14472691$ | $b_{12_1} = -.02973623$ | |
| $a_2 = .00070432$ | $b_{11_2} = .00370603$ | $b_{12_2} = -.00010404$ | |
| | $b_{11_3} = .00007790$ | $b_{12_3} = -.00000044$ | |
| | $b_{21_0} = -.20881096$ | $b_{22_0} = -.34682363$ | |
| | $b_{21_1} = -.04033474$ | $b_{22_1} = .07083197$ | |
| | $b_{21_2} = -.00042012$ | $b_{22_2} = .00138818$ | |
| | $b_{21_3} = .00000142$ | $b_{22_3} = .00002653$ | |

Tabelle A.6: Parameter des linearen Kupplungsmodells, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 20 \%$

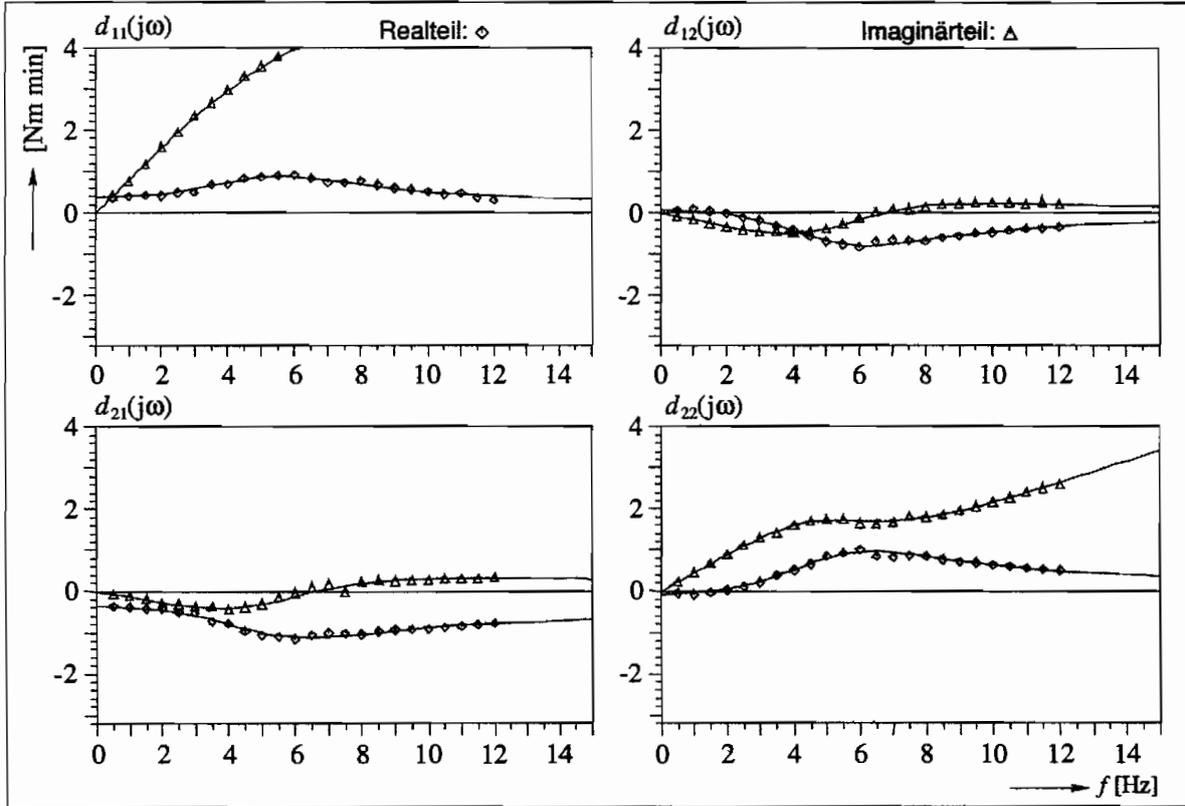


Abbildung A.7: Dynamische Dämpfungsmatrix $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 25 \%$. Symbole: Messung, durchgezogen: Parametermodell

| Modellkoeffizienten für $s = 25 \%$ | | | |
|-------------------------------------|-------------------------|----------------------------------|--|
| Stationärer Betriebspunkt P^* | | | |
| $M_P^* = 229.9 \text{ Nm}$ | | $M_T^* = -223.4 \text{ Nm}$ | |
| $n_P^* = 898.1 \text{ min}^{-1}$ | | $n_T^* = 672.3 \text{ min}^{-1}$ | |
| $a_0 = 1.00000000$ | $b_{11_0} = .36018393$ | $b_{12_0} = .08067395$ | |
| $a_1 = .02893440$ | $b_{11_1} = .13539244$ | $b_{12_1} = -.02460529$ | |
| $a_2 = .00070718$ | $b_{11_2} = .00332154$ | $b_{12_2} = -.00008164$ | |
| | $b_{11_3} = .00007769$ | $b_{12_3} = -.00000108$ | |
| | $b_{21_0} = -.36209474$ | $b_{22_0} = -.08186802$ | |
| | $b_{21_1} = -.03182953$ | $b_{22_1} = .06715984$ | |
| | $b_{21_2} = -.00035930$ | $b_{22_2} = .00125754$ | |
| | $b_{21_3} = .00000053$ | $b_{22_3} = .00002796$ | |

Tabelle A.7: Parameter des linearen Kupplungsmodells, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 25 \%$

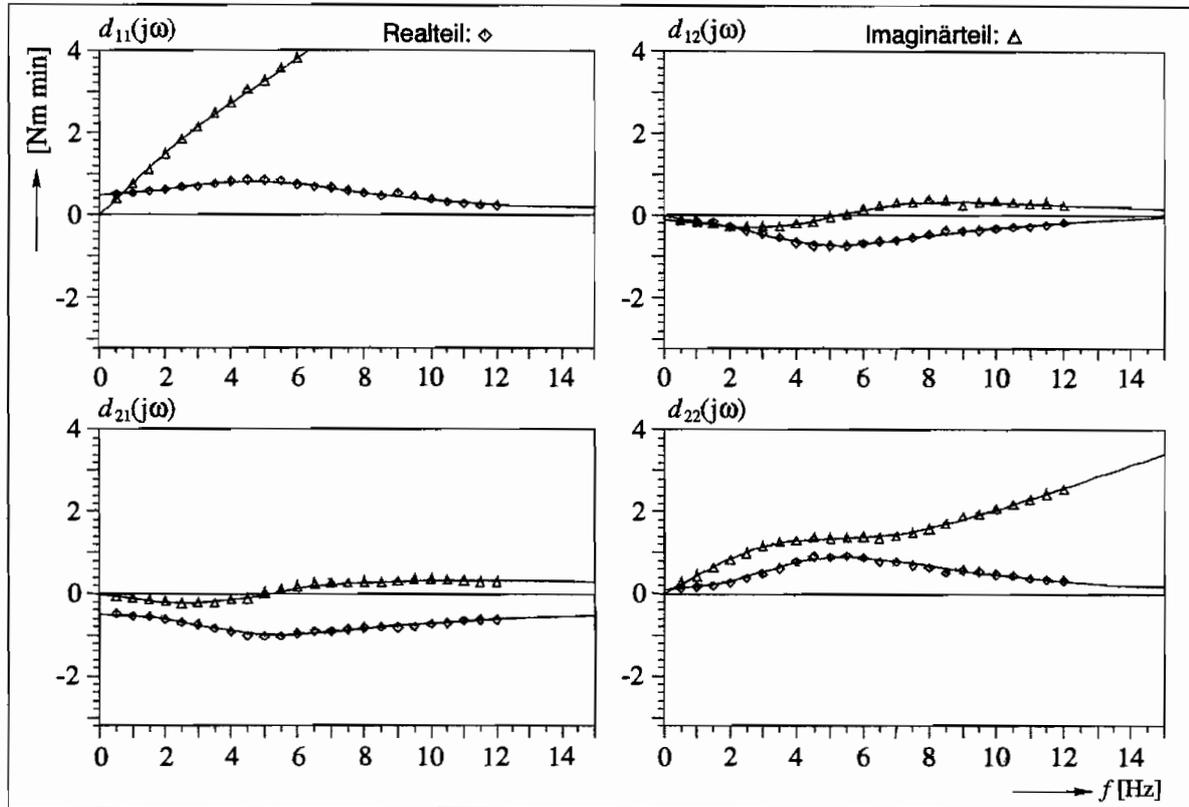


Abbildung A.8: Dynamische Dämpfungsmatrix $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 30 \%$. Symbole: Messung, durchgezogen: Parametermodell

| Modellkoeffizienten für $s = 30 \%$ | | | |
|-------------------------------------|-------------------------|----------------------------------|--|
| Stationärer Betriebspunkt P^* | | | |
| $M_P^* = 227.5 \text{ Nm}$ | | $M_T^* = -221.1 \text{ Nm}$ | |
| $n_P^* = 898.1 \text{ min}^{-1}$ | | $n_T^* = 622.3 \text{ min}^{-1}$ | |
| $a_0 = 1.00000000$ | $b_{11_0} = .49540989$ | $b_{12_0} = -.11275958$ | |
| $a_1 = .03849846$ | $b_{11_1} = .14050251$ | $b_{12_1} = -.03066229$ | |
| $a_2 = .00075792$ | $b_{11_2} = .00426744$ | $b_{12_2} = .00001684$ | |
| | $b_{11_3} = .00008385$ | $b_{12_3} = -.00000219$ | |
| | $b_{21_0} = -.49195602$ | $b_{22_0} = .09430441$ | |
| | $b_{21_1} = -.03901824$ | $b_{22_1} = .07590166$ | |
| | $b_{21_2} = -.00029060$ | $b_{22_2} = .00150660$ | |
| | $b_{21_3} = -.00000024$ | $b_{22_3} = .00003122$ | |

Tabelle A.8: Parameter des linearen Kupplungsmodells, $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$, $s = 30 \%$

Anhang B

Kupplungsgleichungen des Systems 1. Ordnung

Es werden hier die Koeffizienten der Kupplungsgleichungen Gl.(4.61) und Gl.(4.62) des Systems 1. Ordnung zur Simulation mit dem linearen Antriebsstrangmodell nach Abbildung 4.12 angegeben

$$\begin{aligned}\frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}}\varphi_P &= \sum_{i=0}^{m+1} \frac{d^i}{dt^i} \left(\bar{\alpha}_i \varphi_{P-1} + \bar{\beta}_i \varphi_P + \bar{\delta}_i \varphi_T + \bar{\gamma}_i \varphi_{T+1} \right) + h_P^* , \\ \frac{d^{m+2}}{dt^{m+2}}\varphi_T &= \sum_{i=0}^{m+1} \frac{d^i}{dt^i} \left(\bar{\eta}_i \varphi_{P-1} + \bar{\xi}_i \varphi_P + \bar{\zeta}_i \varphi_T + \bar{\nu}_i \varphi_{T+1} \right) + h_T^* .\end{aligned}$$

Die Modellparameter des linearen Kupplungsmodells a_i, b_i, c_i, d_i, e_i sind Gl.(4.35) zu entnehmen. Es gilt

$$b_0 = c_0 = d_0 = e_0 = a_{m+1} = a_{m+2} .$$

Zur Schreibvereinfachung werden abweichend zu Abbildung 4.12 die folgenden Bezeichnungen für die Feder- und Dämpferkonstante an der Pumpenseite der Kupplung verwendet

$$\begin{aligned}k_{P-1} &\longrightarrow k_1 , \\ k_T &\longrightarrow k_2 , \\ \delta_{P-1} &\longrightarrow \delta_1 , \\ \delta_T &\longrightarrow \delta_2 .\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{e_{m+2} + a_m \theta_T^+}{(b_{m+2} + a_m \theta_P^+)(e_{m+2} + a_m \theta_T^+) - c_{m+2} d_{m+2}} , \\ \psi_2 &= \frac{b_{m+2} + a_m \theta_P^+}{(b_{m+2} + a_m \theta_P^+)(e_{m+2} + a_m \theta_T^+) - c_{m+2} d_{m+2}}\end{aligned}$$

werden die Koeffizienten wie nachstehend notiert.

Koeffizienten $\bar{\alpha}_i$:

$$\begin{aligned} i = 0 & \quad \bar{\alpha}_0 = \psi_1 a_0 k_1 \\ i = 1, 2, \dots, m+1 & \quad \bar{\alpha}_i = \psi_1 (a_i k_1 + a_{i-1} \delta_1) \end{aligned}$$

Koeffizienten $\bar{\beta}_i$:

$$\begin{aligned} i = 0 & \quad \bar{\beta}_0 = -\psi_1 a_0 k_1 \\ i = 1 & \quad \bar{\beta}_1 = \psi_1 \left(\frac{c_{m+2}}{e_{m+2} + a_m \theta_T^+} d_1 - (a_i k_1 + b_1) \right) - \psi_1 a_0 \delta_1 \\ i = 2, 3, \dots, m+1 & \quad \bar{\beta}_i = \psi_1 \left(\frac{c_{m+2}}{e_{m+2} + a_m \theta_T^+} d_i - (a_i k_1 + b_i) \right) - \psi_1 (a_{i-1} \delta_1 - a_{i-2} \theta_P^+) \end{aligned}$$

Koeffizienten $\bar{\gamma}_i$:

$$\begin{aligned} i = 0 & \quad \bar{\gamma}_0 = \psi_1 \left(\frac{c_{m+2}}{e_{m+2} + a_m \theta_T^+} a_0 k_2 \right) \\ i = 1 & \quad \bar{\gamma}_1 = \psi_1 \left(\frac{c_{m+2}}{e_{m+2} + a_m \theta_T^+} (a_1 k_2 + e_1) - c_1 \right) + \psi_1 \frac{c_{m+2}}{e_{m+2} + a_m \theta_T^+} a_0 \delta_2 \\ i = 2, 3, \dots, m+1 & \quad \bar{\gamma}_i = \psi_1 \left(\frac{c_{m+2}}{e_{m+2} + a_m \theta_T^+} (a_i k_2 + e_i) - c_i \right) + \psi_1 \frac{c_{m+2}}{e_{m+2} + a_m \theta_T^+} (a_{i-1} \delta_2 + a_{i-2} \theta_T^+) \end{aligned}$$

Koeffizienten $\bar{\delta}_i$:

$$\begin{aligned} i = 0 & \quad \bar{\delta}_0 = -\psi_1 \frac{c_{m+2}}{e_{m+2} + a_m \theta_T^+} a_0 k_2 \\ i = 1, 2, \dots, m+1 & \quad \bar{\delta}_i = -\psi_1 \frac{c_{m+2}}{e_{m+2} + a_m \theta_T^+} (a_i k_2 + a_{i-1} \delta_2) \end{aligned}$$

Koeffizienten $\bar{\eta}_i$:

$$\begin{aligned} i = 0 & \quad \bar{\eta}_0 = -\psi_2 \frac{d_{m+2}}{b_{m+2} + a_m \theta_P^+} a_0 k_1 \\ i = 1, 2, \dots, m+1 & \quad \bar{\eta}_i = -\psi_2 \frac{d_{m+2}}{b_{m+2} + a_m \theta_P^+} (a_i k_1 + a_{i-1} \delta_1) \end{aligned}$$

Koeffizienten $\bar{\xi}_i$:

$$\begin{aligned} i = 0 & \quad \bar{\xi}_0 = \psi_2 \left(\frac{d_{m+2}}{b_{m+2} + a_m \theta_P^+} a_0 k_1 \right) \\ i = 1 & \quad \bar{\xi}_1 = \psi_2 \left(\frac{d_{m+2}}{b_{m+2} + a_m \theta_P^+} (a_1 k_1 + b_1) - d_1 \right) + \psi_2 \frac{d_{m+2}}{b_{m+2} + a_m \theta_P^+} a_0 \delta_1 \\ i = 2, 3, \dots, m+1 & \quad \bar{\xi}_i = \psi_2 \left(\frac{d_{m+2}}{b_{m+2} + a_m \theta_P^+} (a_i k_1 + b_i) - d_i \right) + \psi_2 \frac{d_{m+2}}{b_{m+2} + a_m \theta_P^+} (a_{i-1} \delta_2 + a_{i-2} \theta_T^+) \end{aligned}$$

Koeffizienten $\bar{\zeta}_i$:

$$\begin{aligned} i = 0 & \quad \bar{\zeta}_0 = -\psi_2 a_0 k_2 \\ i = 1 & \quad \bar{\zeta}_1 = \psi_2 \left(\frac{d_{m+2}}{b_{m+2} + a_m \theta_P^+} c_1 - (a_i k_2 + e_1) \right) - \psi_2 a_0 \delta_2 \\ i = 2, 3, \dots, m+1 & \quad \bar{\zeta}_i = \psi_2 \left(\frac{d_{m+2}}{b_{m+2} + a_m \theta_P^+} c_i - (a_i k_2 + e_i) \right) - \psi_2 (a_{i-1} \delta_2 + a_{i-2} \theta_T^+) \end{aligned}$$

Koeffizienten $\bar{\nu}_i$:

$$\begin{aligned} i = 0 & \quad \bar{\nu}_0 = \psi_2 a_0 k_2 \\ i = 1, 2, \dots, m+1 & \quad \bar{\nu}_i = \psi_2 (a_i k_2 + a_{i-1} \delta_2) \end{aligned}$$

$$h_P^* = \psi_1 (-a_0 M_P^* + b_1 \dot{\varphi}_P^* + c_1 \dot{\varphi}_T^*) + \psi_1 \frac{c_{m+2}}{e_{m+2} + a_m \theta_T^+} (-a_0 M_T^* - d_1 \dot{\varphi}_P^* - e_1 \dot{\varphi}_T^*)$$

$$h_T^* = \psi_1 (-a_0 M_T^* + d_1 \dot{\varphi}_P^* + e_1 \dot{\varphi}_T^*) + \psi_1 \frac{d_{m+2}}{b_{m+2} + a_m \theta_P^+} (-a_0 M_P^* - b_1 \dot{\varphi}_P^* - c_1 \dot{\varphi}_T^*)$$

Anhang C

Eigenformen der linearen Antriebsstrangmodelle

Ergänzend zu Abschnitt 7.2.3 sind die Eigenformen der Moden I und II des linearen Antriebsstrangmodells für die Versuchsaufbauten II und III dargestellt. Die Modelle sind für die Pumpenraddrehzahl $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ gültig, Modellreihe 9xx.

C.1 Eigenformen, Versuchsaufbau II

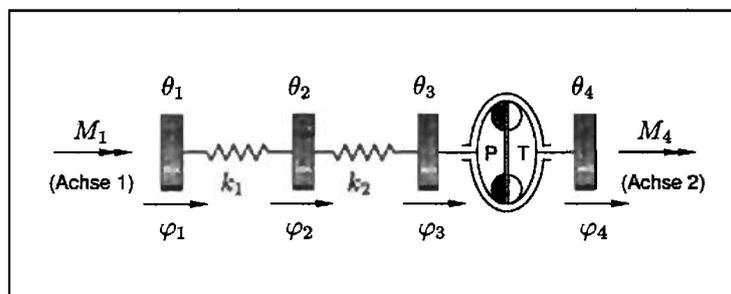


Abbildung C.1: Mechanisches Ersatzmodell des Versuchsaufbaus II

Die Parameter des 4-Freiheitsgradsystems sind in der nachfolgenden Tabelle nochmals aufgeführt.

| Versuchsaufbau II | |
|-------------------|------------------------|
| $\theta_1 =$ | 1.86 kg m ² |
| $\theta_2 =$ | 1.23 kg m ² |
| $\theta_3 =$ | 1.52 kg m ² |
| $\theta_4 =$ | 0.49 kg m ² |
| $k_1 =$ | 1200 Nm/rad |
| $k_2 =$ | 1200 Nm/rad |

Tabelle C.1: Die Strukturparameter des Versuchsaufbaus II

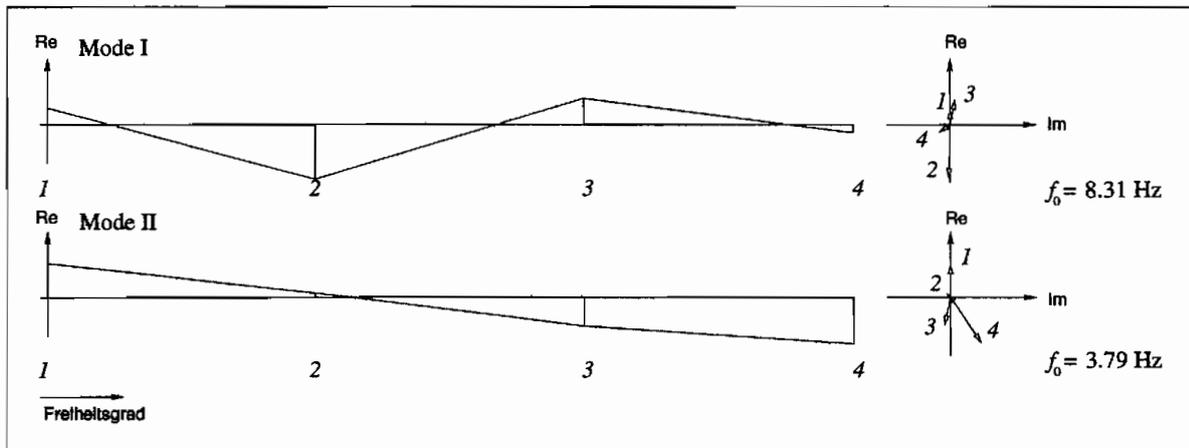


Abbildung C.2: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau III, $s = 5\%$

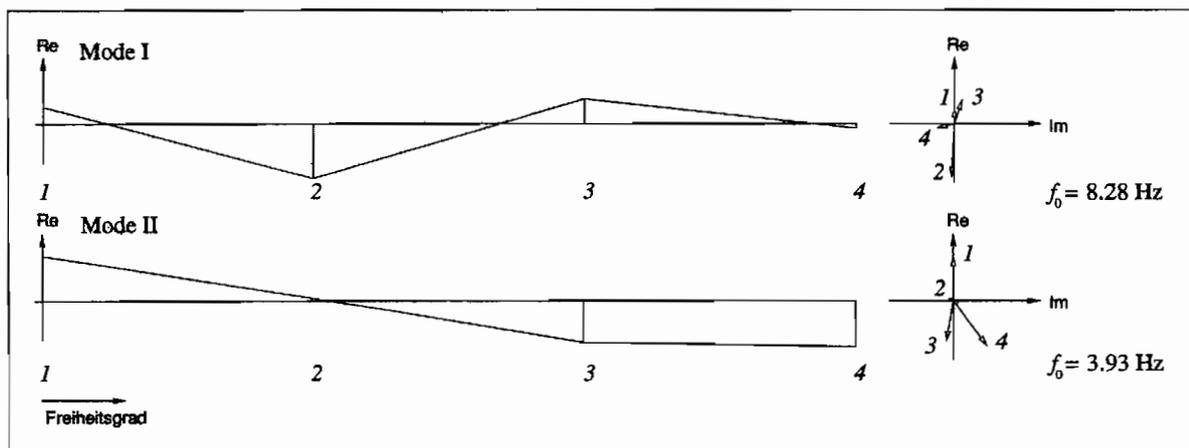


Abbildung C.3: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau III, $s = 8\%$

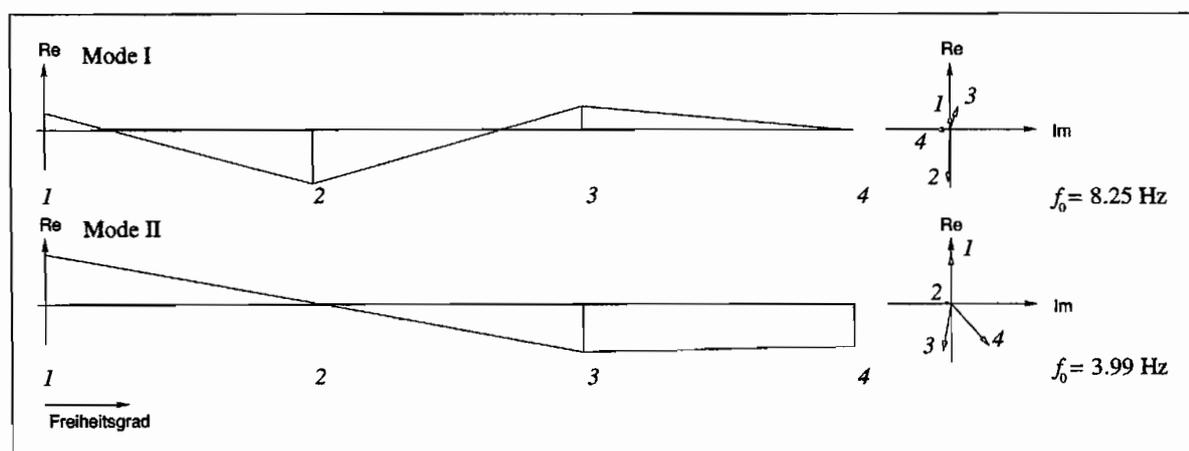


Abbildung C.4: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau II, $s = 10\%$

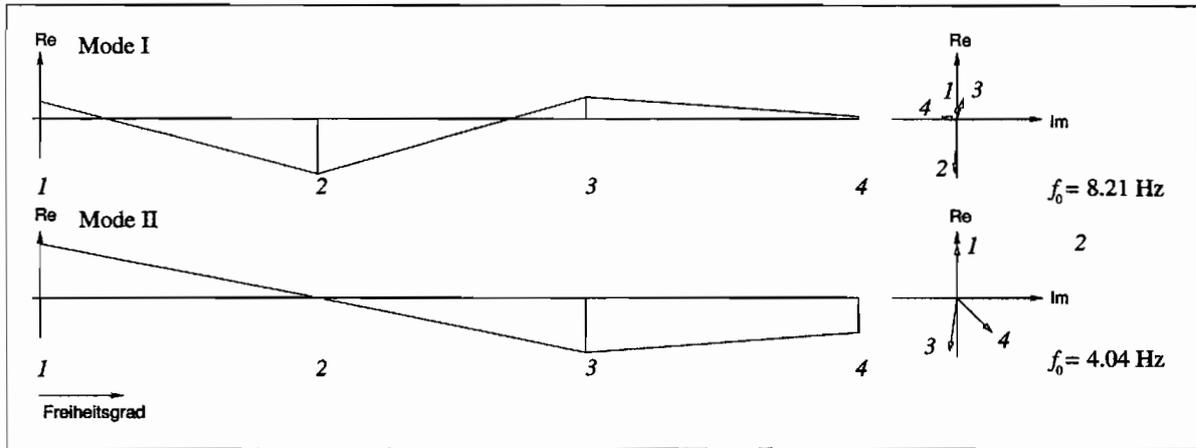


Abbildung C.5: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau II, $s = 12 \%$

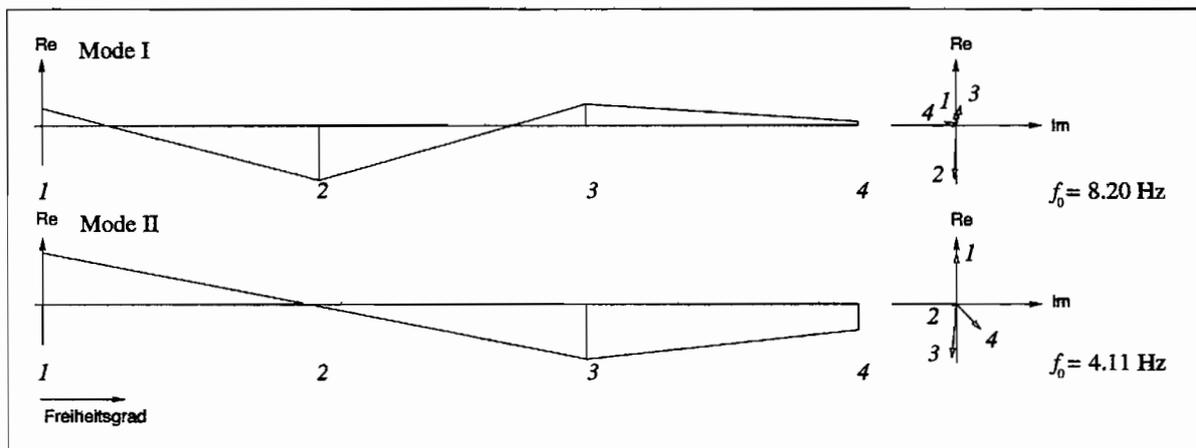


Abbildung C.6: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau II, $s = 15 \%$

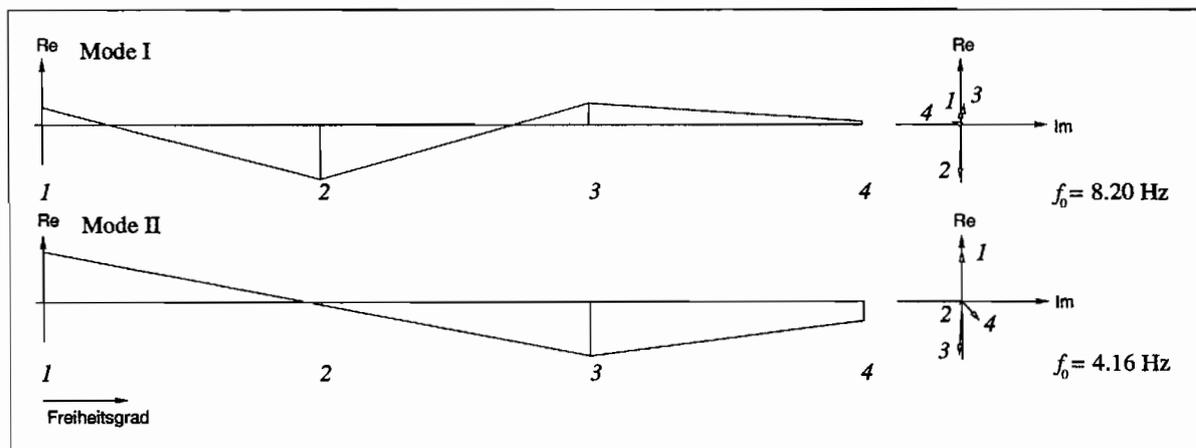


Abbildung C.7: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau II, $s = 20 \%$

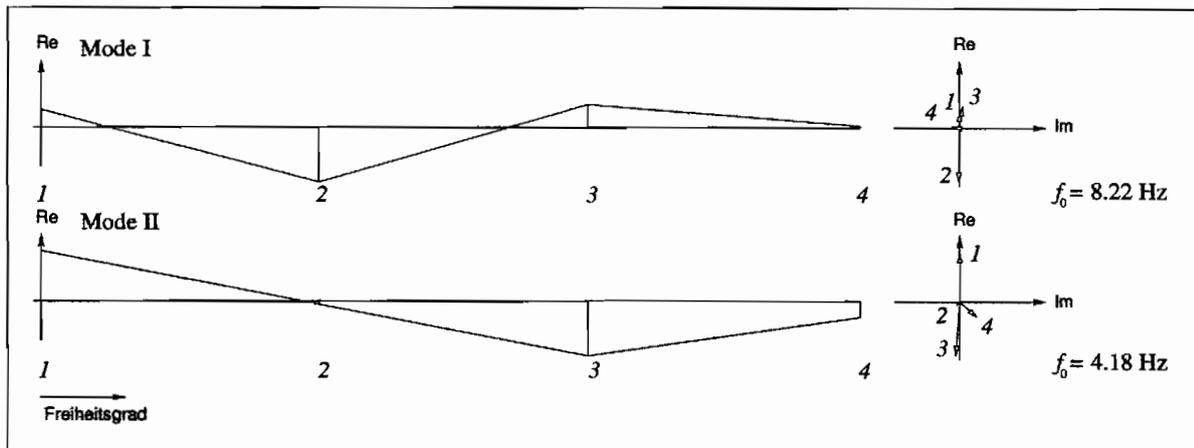


Abbildung C.8: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau II, $s = 25 \%$

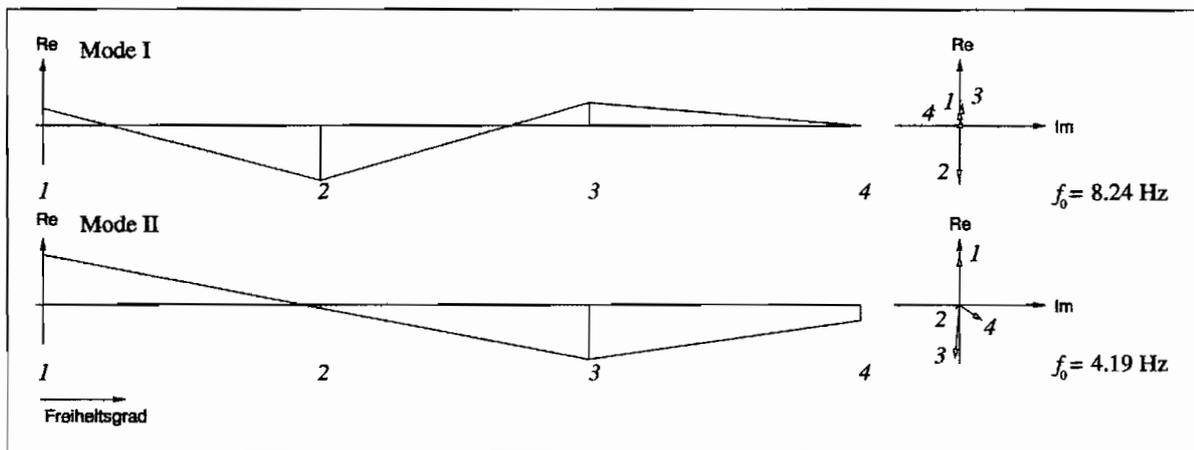


Abbildung C.9: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau II, $s = 30 \%$

C.2 Eigenformen, Versuchsaufbau III

Ergänzend zu Abschnitt 7.2.3 sind die Eigenformen der Moden I und II des linearen Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau III mit der mittleren Pumpendrehzahl der Kupplung $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ dargestellt.

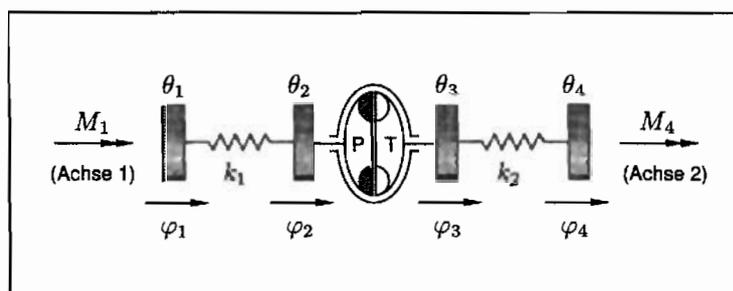


Abbildung C.10: Mechanisches Ersatzmodell des Versuchsaufbaus III

Die Parameter des 4-Freiheitsgradsystems sind in der nachfolgenden Tabelle nochmals aufgeführt.

| Versuchsaufbau III | |
|--------------------|------------------------|
| $\theta_1 =$ | 1.88 kg m ² |
| $\theta_2 =$ | 1.53 kg m ² |
| $\theta_3 =$ | 1.02 kg m ² |
| $\theta_4 =$ | 1.26 kg m ² |
| $k_1 =$ | 1243 Nm/rad |
| $k_2 =$ | 1343 Nm/rad |

Tabelle C.2: Die Strukturparameter des Versuchsaufbaus III

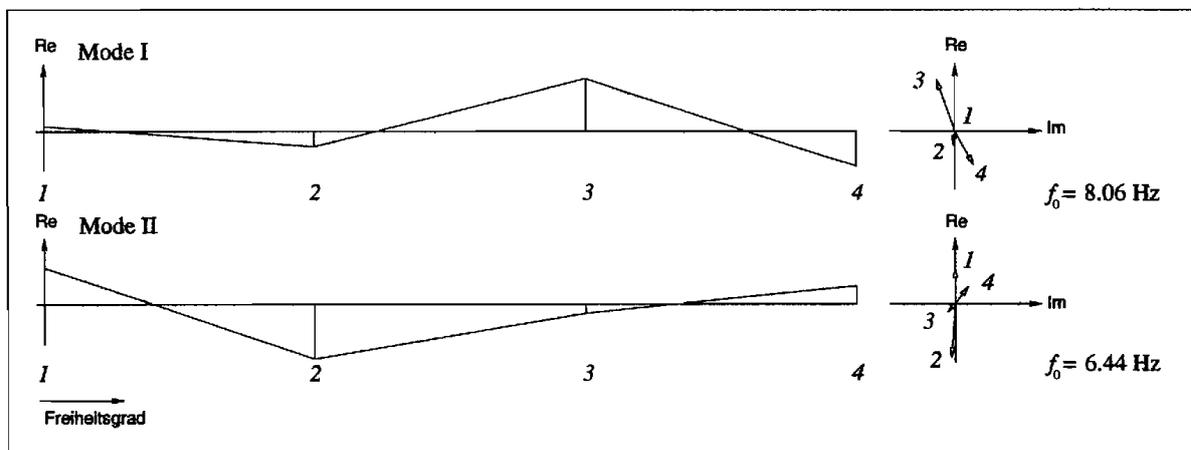


Abbildung C.11: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau III, $s = 5\%$

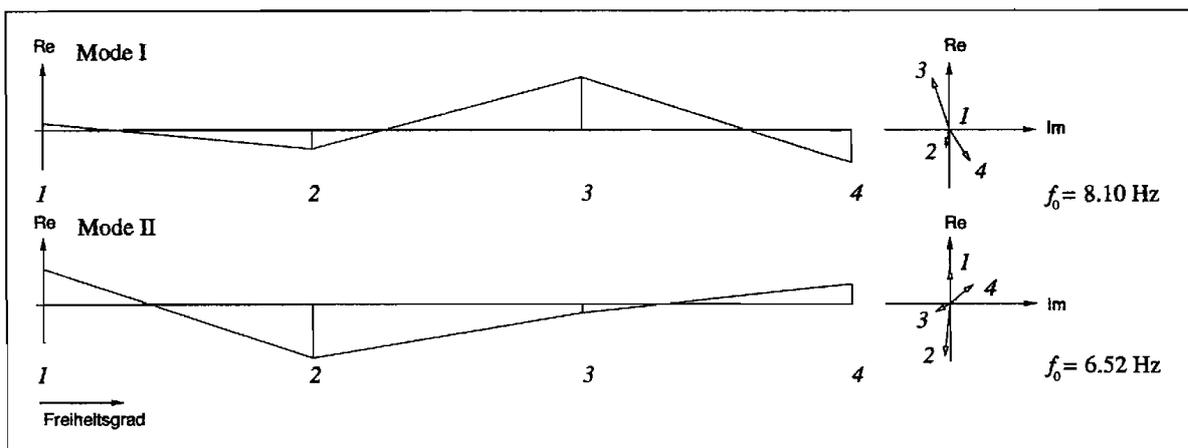


Abbildung C.12: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau III, $s = 8\%$

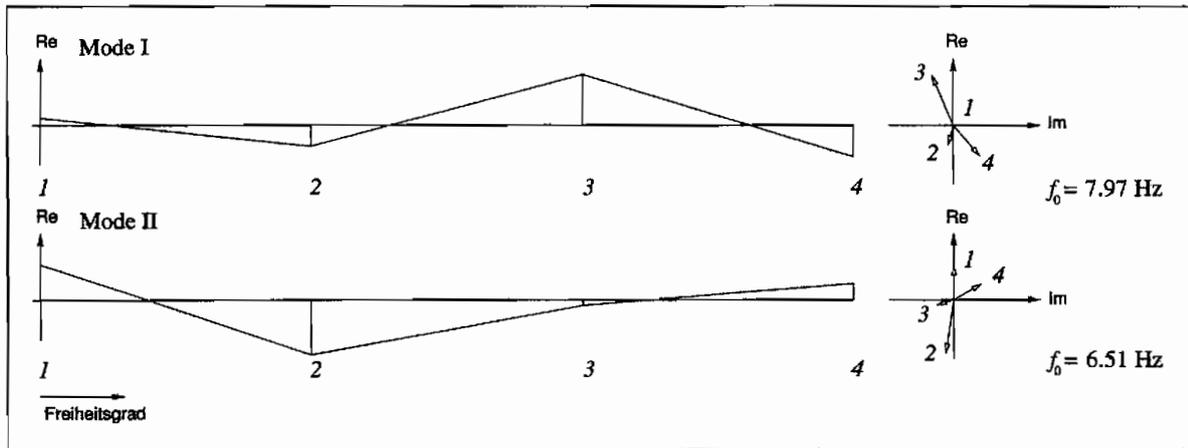


Abbildung C.13: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau III, $s = 10\%$

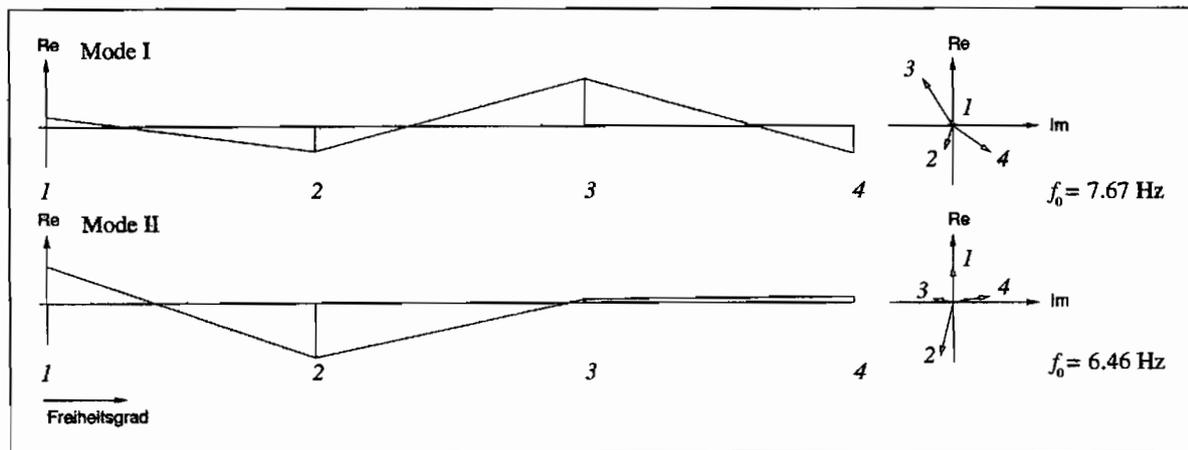


Abbildung C.14: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau III, $s = 12\%$

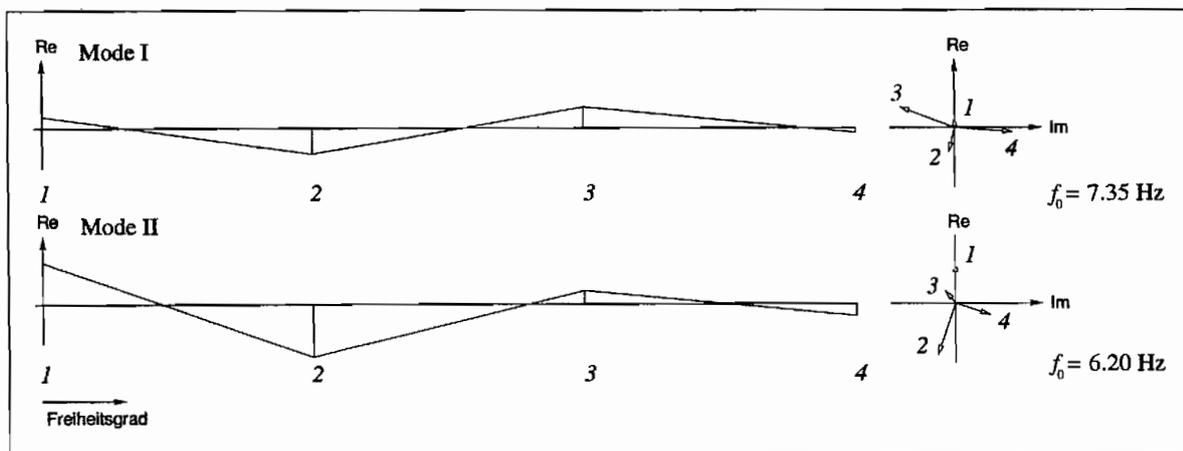
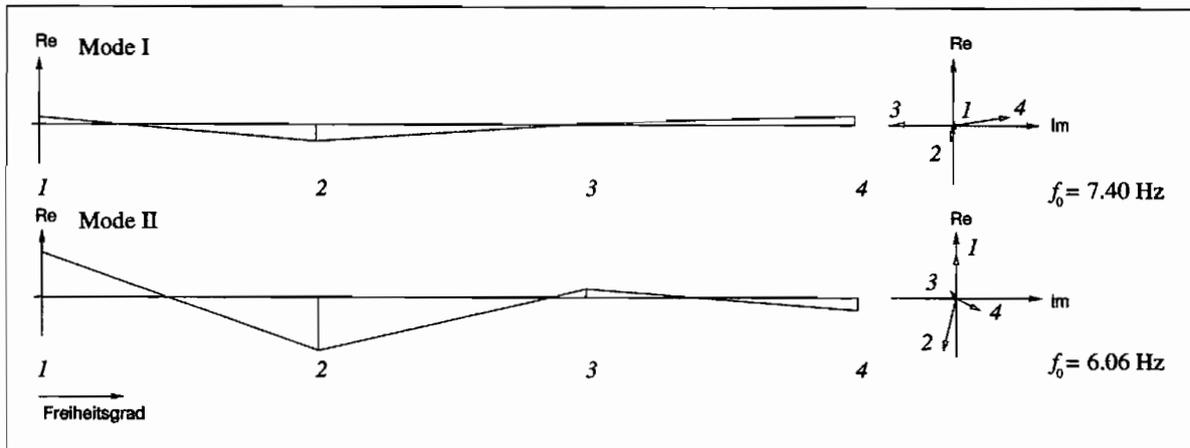
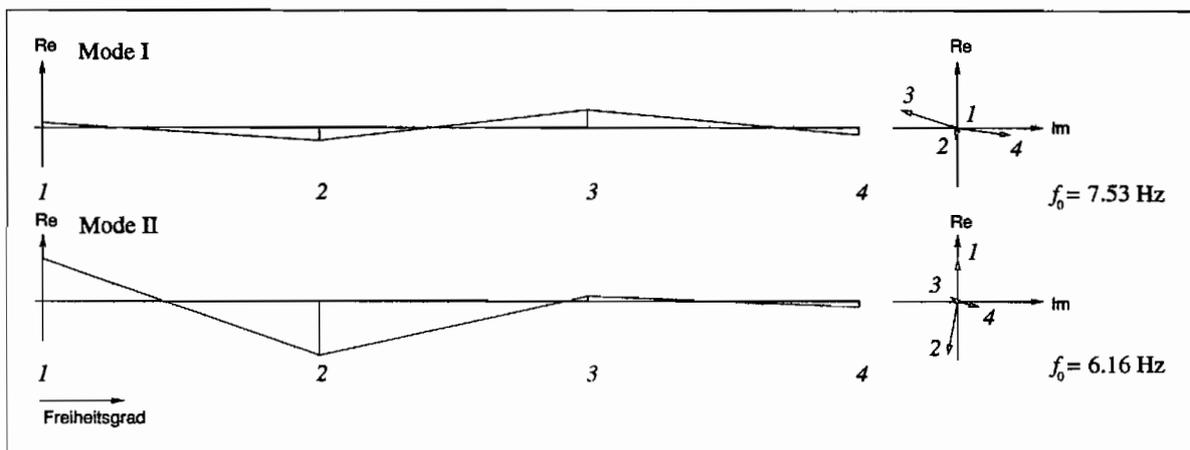
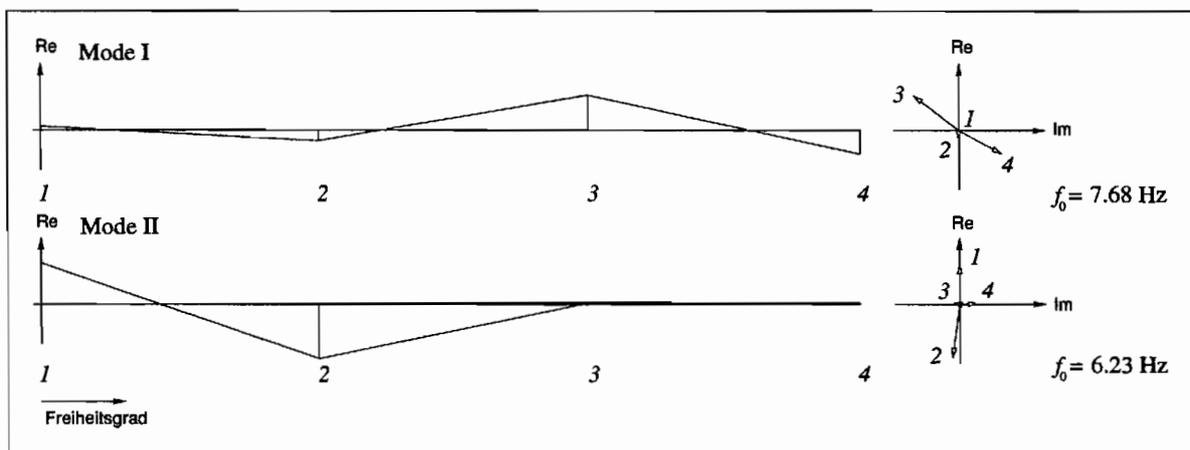


Abbildung C.15: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau III, $s = 15\%$

Abbildung C.16: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau III, $s = 20\%$ Abbildung C.17: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau III, $s = 25\%$ Abbildung C.18: Eigenformen des Antriebsstrangmodells für Versuchsaufbau III, $s = 30\%$

Anhang D

Nichtlineare Kupplungsmodelle

D.1 Nichtlineares Modell, $\eta = 3$

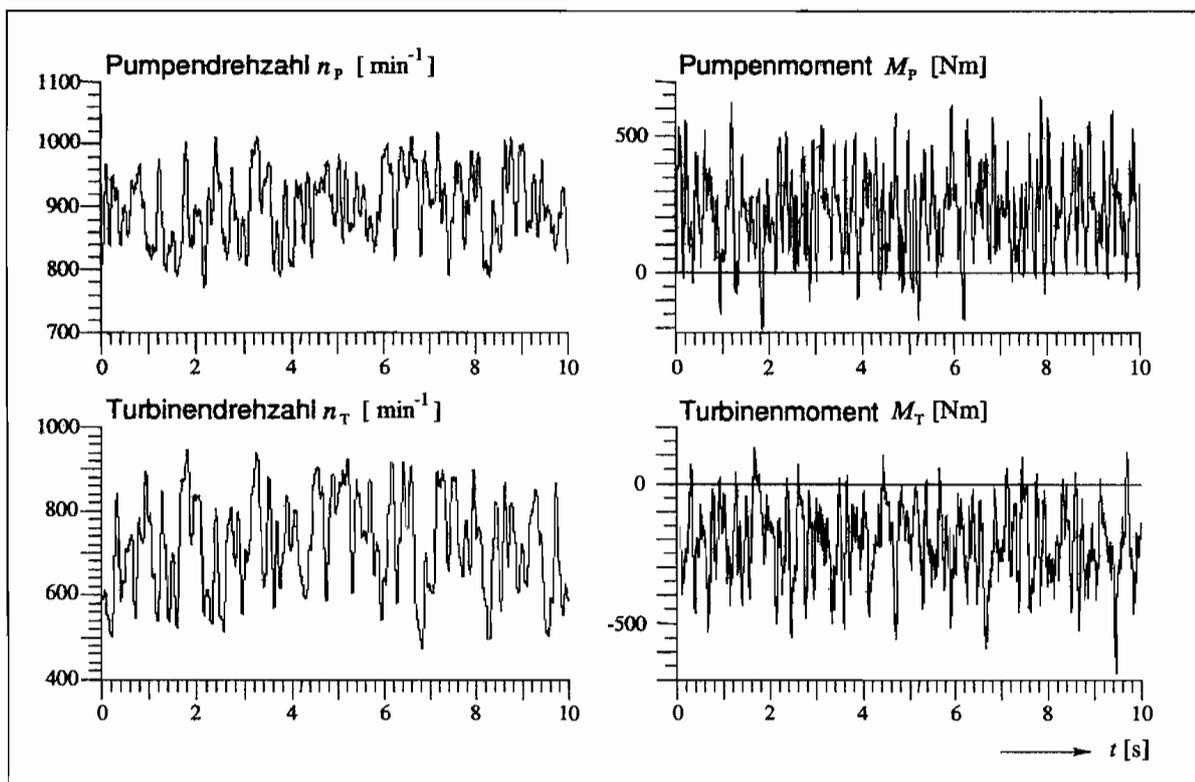


Abbildung D.1: Drehzahlerregung mit pseudobinärem Rauschsignal zur Identifikation des nichtlinearen Kupplungsmodells

In Abbildung D.1 sind die an der Kupplung gemessenen Systemgrößen dargestellt, die für die Identifikation des diskreten nichtlinearen Modells verwendet worden sind. Mit der Struktur nach Tabelle D.1 ergibt sich für den Modellansatz nach Gl.(4.8) das untenstehende konkrete Modell.

| Nichtlineares Modell, Grad $\eta = 3$ | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------|
| Nichtlinearität γ | Ordnungen der Modellterme des Grades γ | |
| $\gamma = 1$ | $p_{11} = 4$ | $p_{12} = 4$ |
| | $q_{11} = 1$ | $q_{12} = 1$ |
| $\gamma = 2$ | $p_{21} = 4$ | $p_{22} = 4$ |
| $\gamma = \eta = 3$ | $p_{31} = 1$ | $p_{32} = 1$ |
| Parameteranzahl n : 104 | | |

Tabelle D.1: Modellstruktur des nichtlinearen Modellansatzes

$$\begin{aligned}
M_P(k) = & \bar{M}_P + \sum_{i_1=0}^4 {}^1b_{i_1,1} n_P(k-i_1) + \sum_{i_1=0}^4 {}^1b_{i_1,2} n_T(k-i_1) + {}^1a_{1,1} M_P(k-1) \\
& + \sum_{i_1=1}^4 \sum_{i_2=i_1}^4 {}^1b_{i_1 i_2,11} n_P(k-i_1) n_P(k-i_2) + \sum_{i_1=1}^4 \sum_{i_2=1}^4 {}^1b_{i_1 i_2,12} n_P(k-i_1) n_T(k-i_2) \\
& + \sum_{i_1=1}^4 \sum_{i_2=i_1}^4 {}^1b_{i_1 i_2,12} n_T(k-i_1) n_T(k-i_2) \\
& + {}^1b_{111,111} n_P^3(k-1) \\
& + {}^1b_{111,112} n_P^2(k-1) n_T(k-1) \\
& + {}^1b_{111,122} n_P(k-1) n_T^2(k-1) \\
& + {}^1b_{111,222} n_T^3(k-1)
\end{aligned} \tag{D.1}$$

$$\begin{aligned}
M_T(k) = & \bar{M}_T + \sum_{i_1=0}^4 {}^2b_{i_1,1} n_P(k-i_1) + \sum_{i_1=0}^4 {}^2b_{i_1,2} n_T(k-i_1) + {}^2a_{1,1} M_T(k-1) \\
& + \sum_{i_1=1}^4 \sum_{i_2=i_1}^4 {}^2b_{i_1 i_2,11} n_P(k-i_1) n_P(k-i_2) + \sum_{i_1=1}^4 \sum_{i_2=1}^4 {}^2b_{i_1 i_2,12} n_P(k-i_1) n_T(k-i_2) \\
& + \sum_{i_1=1}^4 \sum_{i_2=i_1}^4 {}^2b_{i_1 i_2,12} n_T(k-i_1) n_T(k-i_2) \\
& + {}^2b_{111,111} n_P^3(k-1) \\
& + {}^2b_{111,112} n_P^2(k-1) n_T(k-1) \\
& + {}^2b_{111,122} n_P(k-1) n_T^2(k-1) \\
& + {}^2b_{111,222} n_T^3(k-1)
\end{aligned} \tag{D.2}$$

Die Modellparameter sind in den Tabellen der nachfolgenden Seiten aufgeföhrt.

| Modellparameter | | | |
|------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| $\gamma = 1$ | $\bar{M}_P = -12836.3009431968$ | $\bar{M}_T = 3916.1489289640444$ | |
| | ${}^1b_{0,1} = 14.50704815674543$ | ${}^2b_{0,1} = 4.288583243305766E-02$ | |
| | ${}^1b_{1,1} = 8.40287331300351$ | ${}^2b_{1,1} = -16.1506266734141$ | |
| | ${}^1b_{2,1} = 29.32311111874969$ | ${}^2b_{2,1} = 4.05984373559841$ | |
| | ${}^1b_{3,1} = -13.5353800269686$ | ${}^2b_{3,1} = -3.76639106263139$ | |
| | ${}^1b_{4,1} = 4.04439546716685$ | ${}^2b_{4,1} = 1.20092254719293$ | |
| | ${}^1b_{0,2} = -1.283697453550303E-02$ | ${}^2b_{0,2} = -5.80424784119299$ | |
| | ${}^1b_{1,2} = .1330228413644363$ | ${}^2b_{1,2} = 17.05449449158186$ | |
| | ${}^1b_{2,2} = 2.12517824848328$ | ${}^2b_{2,2} = -13.5633329726115$ | |
| | ${}^1b_{3,2} = -2.96654358309024$ | ${}^2b_{3,2} = 4.09387487331332$ | |
| | ${}^1b_{4,2} = 1.1554753250939$ | ${}^2b_{4,2} = .1670770995715429$ | |
| | ${}^1a_{1,1} = .8226003979775669$ | ${}^2a_{1,1} = .841358902444881$ | |
| | $\gamma = 2$ | ${}^1b_{11,11} = -6.986404060566542E-02$ | ${}^2b_{11,11} = -1.506016412672295E-02$ |
| | | ${}^1b_{12,11} = .1117500862780502$ | ${}^2b_{12,11} = -1.506016412672295E-02$ |
| ${}^1b_{13,11} = -8.063030440303009E-02$ | | ${}^2b_{13,11} = .1552759754289923$ | |
| ${}^1b_{14,11} = 1.601505439897721E-02$ | | ${}^2b_{14,11} = -.125484512589821$ | |
| ${}^1b_{22,11} = -.137135408292124$ | | ${}^2b_{22,11} = 3.961564292049502E-02$ | |
| ${}^1b_{23,11} = .2059050594075415$ | | ${}^2b_{23,11} = -.177352780482238$ | |
| ${}^1b_{24,11} = -4.357414513106049E-02$ | | ${}^2b_{24,11} = .2835839663321166$ | |
| ${}^1b_{33,11} = -7.576479970475702E-02$ | | ${}^2b_{33,11} = -8.880353794279471E-02$ | |
| ${}^1b_{34,11} = 2.834528275900538E-02$ | | ${}^2b_{34,11} = -.109590290677943$ | |
| ${}^1b_{44,11} = -1.438040544542218E-03$ | | ${}^2b_{44,11} = 6.399969740880351E-02$ | |
| ${}^1b_{11,12} = 5.840208517288658E-02$ | | ${}^2b_{11,12} = -7.763727695703437E-03$ | |
| ${}^1b_{12,12} = -8.969383081728210E-02$ | | ${}^2b_{12,12} = 3.404549189933448E-02$ | |
| ${}^1b_{13,12} = 1.795055427157876E-02$ | | ${}^2b_{13,12} = -6.908080084468793E-02$ | |
| ${}^1b_{14,12} = 1.225982080046605E-02$ | | ${}^2b_{14,12} = 3.204809775127159E-02$ | |
| ${}^1b_{21,12} = -1.161802399414967$ | | ${}^2b_{21,12} = -1.760108778427138E-03$ | |
| ${}^1b_{22,12} = .2484687447540636$ | | ${}^2b_{22,12} = -.12150742683707$ | |
| ${}^1b_{23,12} = -7.621411552440804E-02$ | | ${}^2b_{23,12} = .2211596231759358$ | |
| ${}^1b_{24,12} = -1.504009447444332E-02$ | | ${}^2b_{24,12} = -.120575071628309$ | |
| ${}^1b_{31,12} = .1552131415159099$ | | ${}^2b_{31,12} = 1.863201528794888E-02$ | |
| ${}^1b_{32,12} = -.258727759188218$ | | ${}^2b_{32,12} = .1242321979467924$ | |
| ${}^1b_{33,12} = .1139190582759965$ | | ${}^2b_{33,12} = -.232842792954102$ | |
| ${}^1b_{34,12} = -6.379272881304131E-03$ | | ${}^2b_{34,12} = .1352848359963445$ | |
| ${}^1b_{41,12} = -5.427327722670583E-02$ | | ${}^2b_{41,12} = -2.370777593716866E-02$ | |
| ${}^1b_{42,12} = 9.777287895855125E-02$ | | ${}^2b_{42,12} = -4.244150625554965E-02$ | |
| ${}^1b_{43,12} = -5.363772033564373E-02$ | ${}^2b_{43,12} = 7.929085404762758E-02$ | | |
| ${}^1b_{44,12} = 8.903278488730847E-03$ | ${}^2b_{44,12} = -4.338518298152393E-02$ | | |

| | | |
|---------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $\gamma = 2$ | ${}^1b_{11,22} = 1.951672268457826E-03$ | ${}^2b_{11,22} = 5.182431048297075E-03$ |
| | ${}^1b_{12,22} = -2.531631460954031E-03$ | ${}^2b_{12,22} = -2.031088283985127E-03$ |
| | ${}^1b_{13,22} = -5.175988675318876E-03$ | ${}^2b_{13,22} = -7.184852719319678E-04$ |
| | ${}^1b_{14,22} = 4.987901453091581E-03$ | ${}^2b_{14,22} = 1.060565325036577E-02$ |
| | ${}^1b_{22,22} = -4.027223284992942E-03$ | ${}^2b_{22,22} = -6.557830148636867E-03$ |
| | ${}^1b_{23,22} = 3.154876135545236E-02$ | ${}^2b_{23,22} = 1.621015268779046E-02$ |
| | ${}^1b_{24,22} = -1.997068872532281E-02$ | ${}^2b_{24,22} = -5.067245042164359E-02$ |
| | ${}^1b_{33,22} = -2.579526460806391E-02$ | ${}^2b_{33,22} = 2.338390229010656E-02$ |
| | ${}^1b_{34,22} = 2.608690568200699E-02$ | ${}^2b_{34,22} = 3.294423920851841E-02$ |
| | ${}^1b_{44,22} = -5.967055973258083E-03$ | ${}^2b_{44,22} = -2.853986280968001E-02$ |
| $\gamma = \eta = 3$ | ${}^1b_{111,111} = 1.765991951388490E-05$ | ${}^2b_{111,111} = -6.226789815724776E-06$ |
| | ${}^1b_{111,112} = -2.479859720544430E-06$ | ${}^2b_{111,112} = -2.764454480996825E-06$ |
| | ${}^1b_{111,122} = 5.931901300465502E-06$ | ${}^2b_{111,122} = 8.030497777589129E-06$ |
| | ${}^1b_{111,222} = -3.285149123594122E-06$ | ${}^2b_{111,222} = -3.979247419808040E-06$ |

D.2 Quadratisches Minimalmodell

Ergänzend zu Abschnitt 8.4.2 ist hier das diskrete nichtlineare Modell mit quadratischem Ansatz angegeben.

| Nichtlineares Modell, Grad $\eta = 2$ | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------|
| Nichtlinearität γ | Ordnungen der Modellterme des Grades γ | |
| $\gamma = 1$ | $p_{11} = 1$ | $p_{12} = 1$ |
| | $q_{11} = 1$ | $q_{12} = 1$ |
| $\gamma = \eta = 2$ | $p_{21} = 1$ | $p_{22} = 1$ |
| Parameteranzahl $n: 18$ | | |

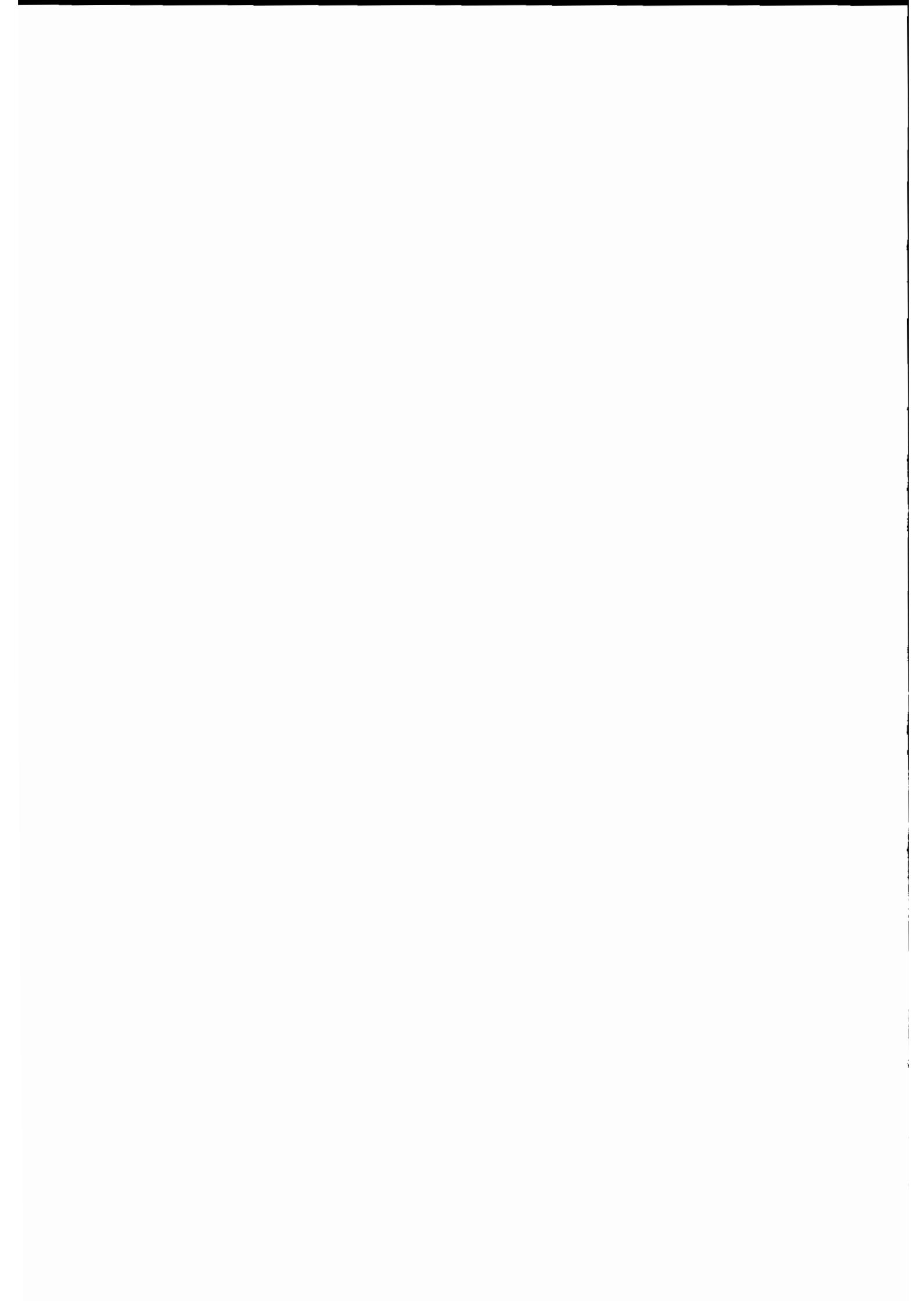
Tabelle D.2: Modellstruktur des quadratischen Minimalansatzes

$$\begin{aligned}
M_P(k) = \bar{M}_P &+ {}^1b_{0,1} n_P(k) + {}^1b_{1,1} n_P(k-1) \\
&+ {}^1b_{0,2} n_T(k) + {}^1b_{1,2} n_T(k-1) \\
&+ {}^1a_{1,1} M_P(k-1) \\
&+ {}^1b_{11,11} n_P^2(k-1) \\
&+ {}^1b_{11,12} n_P(k-1) n_T(k-1) \\
&+ {}^1b_{11,22} n_T^2(k-1)
\end{aligned} \tag{D.3}$$

$$\begin{aligned}
M_T(k) = \bar{M}_T &+ {}^2b_{0,1} n_P(k) + {}^2b_{1,1} n_P(k-1) \\
&+ {}^2b_{0,2} n_T(k) + {}^2b_{1,2} n_T(k-1) \\
&+ {}^2a_{1,1} M_T(k-1) \\
&+ {}^2b_{11,11} n_P^2(k-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + {}^2b_{11,12} n_F(k-1) n_T(k-1) \\
& + {}^2b_{11,22} n_T^2(k-1)
\end{aligned} \tag{D.4}$$

| Modellparameter | | |
|---------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| $\gamma = 1$ | $\bar{M}_P = -9379.64819006872$ | $\bar{M}_T = 1916.789070543949$ |
| | ${}^1b_{0,1} = 11.29589565920463$ | ${}^2b_{0,1} = .7639651948560608$ |
| | ${}^1b_{1,1} = 10.94236978194057$ | ${}^2b_{1,1} = -4.6969062357249$ |
| | ${}^1b_{0,2} = -.65120196026206$ | ${}^2b_{0,2} = -3.81023824478984$ |
| | ${}^1b_{1,2} = -.529717345426889$ | ${}^2b_{1,2} = 3.3267734257937$ |
| | ${}^1a_{1,1} = -.20040738313693$ | ${}^2a_{1,1} = .1726882991611091$ |
| $\gamma = \eta = 2$ | ${}^1b_{11,11} = -1.371293075327179E-02$ | ${}^2b_{11,11} = 1.701077134884820E-03$ |
| | ${}^1b_{11,12} = 4.549557683419247E-03$ | ${}^2b_{11,12} = 2.306677562988523E-03$ |
| | ${}^1b_{11,22} = -2.509641024947328E-03$ | ${}^2b_{11,22} = -1.386442077643379E-03$ |



Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elastoplastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr.45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung

- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczyrski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua Liu:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme

- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltsoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fomefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Sączuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material

- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung
angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schieße:
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua
unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finite elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von
Strukturveränderungen
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:
Mechanics of Irregular Shell Structures
- Nr. 96 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller
- Nr. 98 Ralf Podleschny:
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl
- Nr. 100 Marc Mittelbach:
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem
Kontinuums-Damage-Modell
- Nr. 101 Ulrich Hoppe:
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie
- Nr. 102 Marcus Otto:
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen
- Nr. 103 Horst Lanzerath:
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode
- Nr. 104 Andreas Wichtmann:
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der
Reckalterung

- Nr. 105 **Bjame Fossá:**
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stählen
- Nr. 106 **Khanh Chau Le:**
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur
- Nr. 107 **Holger Behrens:**
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allgemeinen diskreten Modellansätzen
- Nr. 108 **Johannes Moosheimer:**
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden
- Nr. 109 **Dirk Klaus Anding:**
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze
- Nr. 110 **Stephan Weng:**
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen
- Nr. 111 **Michael Straßberger:**
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit Hilfe piezo-keramischer Aktoren
- Nr. 112 **Hans-Jörg Becker:**
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines monokristallinen Stoffgesetzes
- Nr. 113 **Thomas Nerzak:**
Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen
- Nr. 114 **O. T. Bruhns:**
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1997
- Nr. 115 **Jan Steinhausen:**
Die Beschreibung der Dynamik von Antriebssträngen durch Black-Box-Modelle hydrodynamischer Kupplungen

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 115**