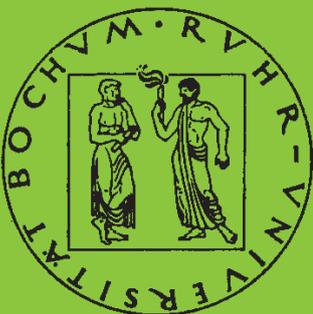


**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik**

**Hans-Jörg Becker**

**Simulation des Deformationsverhaltens  
polykristallinen Eises auf der Basis  
eines monokristallinen Stoffgesetzes**

Heft Nr. 112



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

INSTITUT FÜR MECHANIK  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Hans-Jörg Becker

Simulation des Deformationsverhaltens  
polykristallinen Eises  
auf der Basis  
eines monokristallinen Stoffgesetzes

## Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns für die Betreuung meiner Arbeit und für die Freizügigkeit, mit der ich an der Universität arbeiten konnte. Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich für die Übernahme des Korreferates und seine hilfreichen Anmerkungen. Mein Dank geht auch an Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Scherer als fachfremden Bericht.

Allen Angehörigen des Lehrstuhls für Technische Mechanik möchte ich für die gute Zusammenarbeit in den vergangenen Jahren herzlich danken. Besonders erwähnen möchte ich meinen „Vorgänger“ Herrn Dr.-Ing. B. Bischoff-Beiermann und meinen langjährigen Zimmerkollegen Herrn Dipl.-Ing. Th. Nerzak, die mir nicht nur in fachlicher Hinsicht wichtige Gesprächspartner waren. Herrn cand.-Ing. Ch. Musch danke ich für die Unterstützung beim Erstellen des Manuskriptes.

Schließlich möchte ich mich besonders herzlich bei meinen Eltern bedanken, einmal für ihr Verständnis in all den Jahren und dafür, daß sie mich in den letzten Wochen so liebevoll umsorgt haben.

Bochum, Dezember 1997

Hans-Jörg Becker

Referenten: Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns  
Prof. Dr.-Ing. H. Waller

Tag der Einreichung: 21.10.1997

Tag der mündlichen Prüfung: 18.12.1997

©1997 Dr.-Ing. Hans-Jörg Becker  
Oskar-Hoffmann-Str. 29  
D-44789 Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## **Zusammenfassung**

Eis zeichnet sich durch sehr unterschiedliches Kraft-Verformungs-Verhalten aus, je nachdem, ob es in einkristalliner bzw. polykristalliner Form auftritt. In der vorliegenden Arbeit soll das Deformationsverhalten von polykristallinem Eis simuliert werden, indem der Polykristall als Verbund von monokristallinen Eiskörnern betrachtet wird. Jedes einzelne Korn wird durch ein mikromechanisches Stoffgesetz beschrieben. Die Simulationen erfolgen mit Hilfe zweidimensionaler geometrisch und physikalisch nichtlinearer Finite-Elemente-Berechnungen. Die Eigenspannungsentwicklung innerhalb des Polykristalls, die Abhängigkeit seines makroskopischen Spannungs-Dehnungs-Verhaltens von Kornform, -anordnung und -orientierung werden untersucht.

## **Summary**

The force-displacement behaviour of ice monocrystals and ice polycrystals is very different. In this thesis the deformation-behaviour of polycrystalline ice is simulated by idealizing the ice polycrystal as a composite of single monocrystalline grains. Each grain is described by a microscopic constitutive law. The simulations are carried out by means of the two-dimensional geometrically and physically nonlinear finite-element method. The development of the residual stresses inside the polycrystal, the dependence of its macroscopic stress-strain behaviour upon the shape and location of the grains and upon the orientation of the microstructure of each grain is studied.



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Monokristallines Eis</b>	<b>5</b>
2.1	Monokristallines Stoffgesetz . . . . .	9
2.1.1	Elastischer Anteil . . . . .	9
2.1.2	Inelastischer Anteil . . . . .	10
2.2	Aufbereitung der Stoffgleichungen für die Finite-Elemente-Formulierung . .	11
2.2.1	Elastischer Anteil . . . . .	12
2.2.2	Inelastischer Anteil . . . . .	15
2.2.3	Rotation der Mikrostruktur . . . . .	16
2.2.4	Monokristallines Stoffgesetz in globalen Koordinaten . . . . .	17
2.2.5	Ebener Verzerrungszustand und ebener Spannungszustand . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Finite-Elemente-Modellierung</b>	<b>22</b>
3.1	Vorbemerkungen . . . . .	22
3.2	Formulierung der Methode der Finiten Elemente . . . . .	23
3.2.1	Grundlegendes Konzept . . . . .	23
3.2.2	Prinzip der virtuellen Arbeit für große Formänderungen . . . . .	24
3.2.3	Update-Lagrangesche Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit	24
3.2.4	Zerlegung von Spannungen und Verzerrungen . . . . .	28
3.2.5	Einbau des Werkstoffgesetzes . . . . .	29
3.2.6	Inkrementelle Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit . . .	30
3.2.7	Elemente und Ansatzfunktionen . . . . .	32
3.2.8	Gleichgewichtsiteration . . . . .	34
3.2.9	Zeitintegration . . . . .	35
3.3	Verifikationsrechnungen . . . . .	38

---

3.4	Diskretisierung einer Eisprobe mit Probenaufhängung . . . . .	42
3.4.1	Anforderung an die FE-Struktur . . . . .	42
3.4.2	Modul für das Präprocessing . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Einkristall</b>	<b>53</b>
4.1	FE-Simulation eines Druckversuches . . . . .	53
4.2	Geometrische Betrachtung . . . . .	55
4.3	FE-Simulation eines Zugversuches . . . . .	57
4.4	Vergleich unterschiedlicher Probeneinspannungen . . . . .	59
4.5	Schlußfolgerung . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Zweikristall</b>	<b>62</b>
5.1	Definition und Bedeutung von Eigenspannungen . . . . .	62
5.2	Zweikristall-Modell . . . . .	65
5.3	Physikalische Bedeutung der Parameter . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Polykristall</b>	<b>81</b>
6.1	Vorbemerkungen . . . . .	81
6.2	Der Modell-Polykristall aus Rechteckkörnern im simulierten Druckversuch .	83
6.2.1	Innerer Spannungszustand . . . . .	85
6.2.2	Innerer Verformungszustand . . . . .	87
6.2.3	Die Tragwirkung des Polykristalls . . . . .	88
6.3	Der Modell-Polykristall für die Anpassung an Versuche mit S2-Eis . . . . .	92
6.3.1	Variation der Kornformen und -anordnungen . . . . .	92
6.3.2	Variation der Kornorientierungen . . . . .	96
6.3.3	Verfeinerung der Diskretisierung . . . . .	98
6.3.4	Schlußfolgerungen . . . . .	102
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>103</b>
<b>8</b>	<b>Anhang</b>	<b>106</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>111</b>

# 1. Einleitung

Im Gegensatz zu anderen Werkstoffen erlangt Eis seine wirtschaftliche Bedeutung dadurch, daß es sich auf das Geschehen häufiger in einer destruktiven als in einer konstruktiven Weise auswirkt.

Als Konstruktionsmaterial spielt Eis eine Rolle in nordischen Ländern mit einer lang andauernden Winterperiode, in denen z.B. zugefrorene Flüsse und Seen als Verkehrswege bzw. als Veranstaltungsflächen genutzt werden. Im Offshore-Bereich dienen an der Küste festgefrorene Eisdecken (z.B. in der Beaufort See) als Untergrund für die Gerätschaften zur Erdölerkundung. Mit fahrbarem Bohrgerät können diese Untersuchungen erheblich kostengünstiger durchgeführt werden als im Sommer von einem Schiff aus. In beiden Fällen stellt sich die Frage nach der maximalen Tragfähigkeit des Eises. Falls diese nicht ausreicht, wird die Eisdecke durch Überfluten mit Wasser oder Wasser-Versprühen künstlich verstärkt. In der Forschung wird die Verwendung von Eis als Baumaterial für Dauerfrostregionen untersucht. Bei Eiscomposites läßt sich die Festigkeit von Eis durch Einlagerung von Fiberglas, Holzfasern, Altpapier und ähnlichem erhöhen. Permacrete, eine Mischung aus Böden und Eis kann in vergleichbarer Weise wie Beton eingesetzt und verarbeitet werden. In Deutschland wurde die Wirkung des Eises als Bindemittel erfolgreich ausgenutzt. Der Tunnelvortrieb im fließgefährdeten wassergesättigten Schluff beim U-Bahn-Baulos 17 in Essen wurde dadurch ermöglicht, daß der Firstbereich vereist wurde, um ihn gegen nachrutschenden Schluff zu sichern (vgl. [hoc84]).

Mit überfrorenen Autoscheiben und eisglatten Straßen macht Eis in unangenehmer Art und Weise auf sich aufmerksam und bleibt auch im Frühjahr in schlechter Erinnerung, wenn aufgeworfene Straßendecken aufgrund mangelhaft ausgeführter Frostschutzschichten instand zu setzen sind.

Konstruktionen wie Brückenpfeiler, Küstenbauwerke (Anlegestellen, Leuchttürme ect.) und Off-Shore-Einrichtungen (z.B. Erdölplattformen und -pipelines) vor sehr kostenintensiven Schäden aus Treibeisbelastungen zu bewahren, stellt den bemessenden Ingenieur vor eine schwierige Aufgabe. Die einschlägigen Regelwerke [eau90], [api88], [fip88] geben ihm nur für wenige, abgegrenzte Fälle unmittelbar nutzbare Formeln an, so z.B. die EAU [eau90] für Flächenbauwerke und Pfähle bis zu 2 m Durchmesser unter den Eisverhältnissen des norddeutschen Küstenraums. Die obere Grenze der Belastung wird erreicht, wenn das Eis beim Auftreffen auf das Bauwerk in Abhängigkeit von der Bauwerksform, Bela-

stungsgeschwindigkeit und Eisform durch Druckbruch, Schubbruch, Biegung oder Beulen versagt. Dabei können zwei- oder dreidimensionale Spannungszustände im Eis auftreten, die bis heute wenig erforscht sind. Da die Biegefestigkeit von Eis klein gegenüber der Druckfestigkeit ist, haben manche Entwürfe für Offshore-Bauwerke das Ziel, durch konische Bauteile das Eis durch Biegung um die in der Eisebene liegenden Achsen zu brechen. Der aufwärtsbrechende Konus besitzt den Vorteil, daß das aus dem Wasser gehobene Eis eine zusätzliche für die Standsicherheit günstige, nach unten wirkende Vertikalkraft erzeugt.

Dagegen ähnelt der Bug eines Eisbrechers einem abwärtsbrechenden Konus. Eisbrecher sind z.B. in Finnland unverzichtbar, da dort alle Häfen in den Wintermonaten regelmäßig durch Eis blockiert sind. Die Häfen trotzdem zugänglich zu halten, ist von großem wirtschaftlichen Interesse. Hat man sich am Anfang des Jahrhunderts hauptsächlich darauf konzentriert, die Maschinenleistung der Eisbrecher zu erhöhen, ist man in den letzten Jahrzehnten mehr und mehr dazu übergegangen, durch eine ausgefeiltere Bugform die erforderlichen Eisbrechkräfte zu reduzieren. Durch Experimente mit verschiedenen Schiffsmodellen gelang es in Finnland, die Rumpfform so zu optimieren, daß innerhalb von 10 Jahren der Energieverbrauch bei einem Eisbrechvorgang unter gleichen Randbedingungen um 20% gesenkt werden konnte (vgl. MÄÄTTÄNEN [Mä87]). Dazu wurden in sogenannten Eistanks – das sind Versuchsbecken in der Größe eines Schwimmbades, untergebracht in einem Kühlhaus – die verschiedenen Schiffsmodelle mit Hilfe einer Schleppeinrichtung durch eine künstliche Eisdecke gezogen und die dazu notwendigen Kräfte gemessen. Allerdings stellen solche Experimente für die Optimierung eines Schiffsrumpfes oder der Pfeiler einer Erdölplattform ein sehr zeit- und kostenintensives Unterfangen dar.

Die numerische Simulation als ein alternatives Vorgehen zu Experimenten in Eistanks benötigt ein Werkstoffgesetz für Eis. Die Entwicklung dieses Gesetzes setzt die Kenntnis der Materialeigenschaften des Eises voraus.

Eis gehört zur Klasse der Hochtemperaturwerkstoffe, da es sich in der Natur nahe an seinem Schmelzpunkt befindet. Es zeigt wie die meisten Materialien bei hohen homologen Temperaturen eine deutliche Viskosität. Das gleiche Eis, das bereits unter seinem Eigengewicht kriecht, kann auch nahe dem Gefrierpunkt unter genügend hoher Belastungsgeschwindigkeit (z.B. Hammerschlägen) wie Glas spröde zerspringen.

Den Wechselwirkungen zwischen den mikroskopischen Aufbau und den makroskopischen Belastungen eines Werkstoffes wird in der Literatur viel Aufmerksamkeit gewidmet, z.B. bei der Vorhersage von Walztexturen und deren Auswirkungen auf die Materialeigenschaften oder bei der Berechnung von Composites. Will man einen Werkstoff auch nahe seines Bruchzustandes beschreiben, werden die Kenntnisse der Vorgänge auf der Mikro-

ebene besonders wichtig. Dort werden durch Dehnungslokalisierung und/oder lokal hohe Eigenspannungen die Schädigungsmechanismen initiiert, die schließlich zu dem makroskopischen Versagen führen. Aufgrund seiner Transparenz bietet Eis die Möglichkeit, mit relativ einfachen Mitteln einen zerstörungsfreien Einblick in die innere Struktur eines Polykristalls zu nehmen und die Änderungen auf lokaler Ebene infolge einer äußeren Belastung zu beobachten. So kann Hochtemperaturverhalten bei gemäßigter Temperatur untersucht werden.

Die vorliegende Arbeit setzt sich das Ziel, zu einem vertieften Verständnis des Tragverhaltens polykristallinen Eises beizutragen und so eine Grundlage zur Beurteilung und Entwicklung von polykristallinen Stoffgesetzen zu schaffen. Ausgangspunkt ist das Verformungsverhalten eines Bestandteils am Polykristall, eines einzelnen monokristallinen Eiskorns. Polykristallines Eis wird modelliert als ein Verbund dieser Eiskörner. Für alle Körner wird das gleiche mikromechanische Stoffgesetz angenommen. Sie unterscheiden sich nur hinsichtlich der Orientierung ihrer Mikrostruktur. Zweidimensionale Finite-Elemente-Berechnungen von Druckversuchen an einem Modell-Polykristall ermöglichen auf numerischen Wege die Beobachtung der Vorgänge auf Kornebene. Wegen der Bedeutung für die Auslösung von Schädigungsmechanismen wird besonderer Wert auf eine möglichst unverfälschte Darstellung des sich entwickelnden Eigenspannungszustandes gelegt. Die Einsatzmöglichkeiten des in dieser Arbeit vorgestellten Modell-Polykristalls bei der Anpassung an Versuche mit polykristallinem Eis werden untersucht. Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

Nach der Vorstellung des verwendeten monokristallinen Stoffgesetzes werden die Stoffgleichungen für die Finite-Elemente-Formulierung aufbereitet, wobei der Wahl einer geeigneten objektiven Zeitableitung eine besondere Bedeutung zufällt.

Die Aufgaben der FE-Modellierung beinhalten zum einen die Entwicklung eines physikalisch und geometrisch nichtlinearen Scheibenelementes für den Werkstoff "monokristallines Eis", zum anderen für die Simulation von zwei axialen Belastungsfällen ein automatisiertes Präprocessing, das die entsprechende Probenaufhängung inklusive rechteckiger mono- bzw. polykristalliner Eisproben vernetzt und die zum betrachteten Lastfall zugehörige Macro-Befehlsliste zur Steuerung der FE-Rechnung erstellt.

Für die Erklärung der Tragwirkung des Polykristalls ist die Kenntnis des Verformungsverhaltens seiner Bestandteile, der Einkristalle erforderlich. Deshalb werden zunächst ein-axiale Versuche an einem dieser Einkristalle simuliert. Das Verformungsverhalten läßt auf große Eigenspannungen innerhalb des Polykristalls schließen.

Zum Abschätzen der Größe der Eigenspannungen wird der einfachste Polykristall, der Zweikristall, durch ein rheologisches Modell beschrieben, das die Grundlage bestimmter Stoffgesetze für polykristallines Eis darstellt, die die Eigenspannung als interne Variable benutzen. Die Abhängigkeit der Eigenspannungen von den Modellparametern wird diskutiert.

Wie komplex die Eigenspannungsverteilung tatsächlich ist und wie inhomogen der Verzerungszustand, wird exemplarisch an einem Modell-Polykristall aus 64 Körnern im simulierten Druckversuch aufgezeigt. Durch Herauszoomen einzelner Körner wird im Detail die Tragwirkung des Polykristalls erklärt und eine Bewertung der Annahmen des Zweikristall-Modells vorgenommen.

Im Hinblick auf die Verwendung des Modell-Polykristalls für die Anpassung an Versuche mit plananisotropen polykristallinem Eis wird die Bedeutung der zu wählenden Parameter Kornform, -anzahl und Feinheit der Diskretisierung herausgearbeitet und die heutigen Möglichkeiten und Grenzen des Einsatzes des Modell-Polykristalls für die Anpassung erörtert.

## 2. Monokristallines Eis

Monokristallines Eis  $I_h$  weist ein ausgeprägt anisotropes Materialverhalten auf. Seine hexagonale Mikrostruktur (Index  $h$ ) wird durch die sogenannten basalen Ebenen senkrecht zu der charakteristischen Richtung  $\vec{n}$  gebildet (BISCHOFF-BEIERMANN und BRUHNS [BBB94]). Das Abgleiten dieser Ebenen stellt den inelastischen Hauptverformungsmechanismus dar. Man veranschaulicht sich das gerne mit dem Spielkarten-Modell:

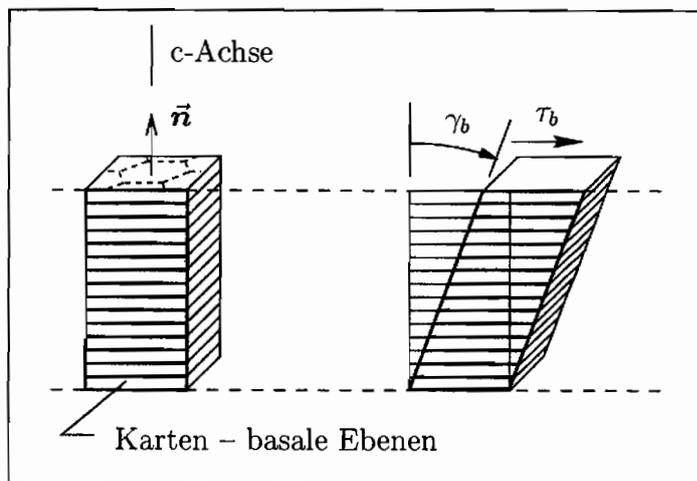


Abb. 2.1: Spielkarten-Modell

MICHEL [Mic78] vergleicht den Monokristall mit einem „pack of cards which deforms very easily when a shear stress is applied parallel to the basal plane but has a very high resistance to deformation when the stress is applied perpendicularly to this plane“. Der Kartenstapel gleitet unter einer parallel zu den Spielkarten angreifenden Schubspannung, der basalen Schubspannung  $\tau_b$ , sehr leicht ab. Einer Last senkrecht zu den basalen Ebenen setzt er einen viel größeren Verformungswiderstand entgegen.

Diese leichte Abgleitbarkeit läßt monokristallines Eis an eine sehr viskose Flüssigkeit erinnern. Eis als Newtonsches Fluid idealisiert könnte dann durch

$$\tau_b = \eta \dot{\gamma}_b \quad (2.1)$$

beschrieben werden.  $\eta$  bezeichnet die dynamische Viskosität (vgl. GERSTEN [Ger74]) oder die Dämpferkonstante, wenn man die Beziehung (2.1) als die Beschreibung eines geschwin-

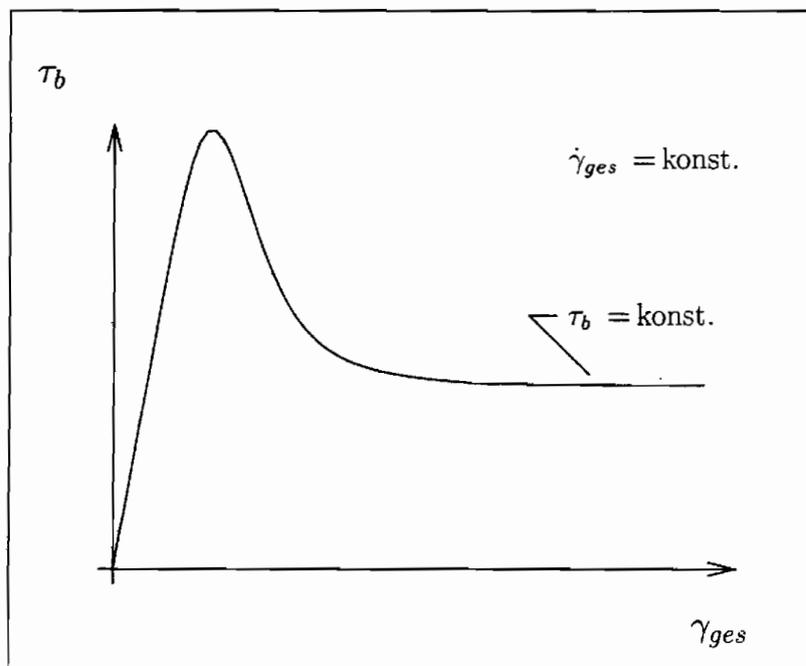
digkeitsproportionalen Dämpfers ansieht. Schaltet man diesen Dämpfer zur Berücksichtigung der elastischen Verformung in Reihe mit einer Feder, erhält man ein rheologisches Modell für monokristallines Eis, das die Aufspaltung der Gesamtverzerrung in einen elastischen und einen inelastischen (basalen) Anteil voraussetzt:

$$\dot{\gamma}_{ges} = \dot{\gamma}_{el} + \dot{\gamma}_b. \quad (2.2)$$

Mit  $\dot{\gamma}_{el} = \dot{\tau}_b/G$  folgt

$$\dot{\tau}_b = G(\dot{\gamma}_{ges} - \dot{\gamma}_b). \quad (2.3)$$

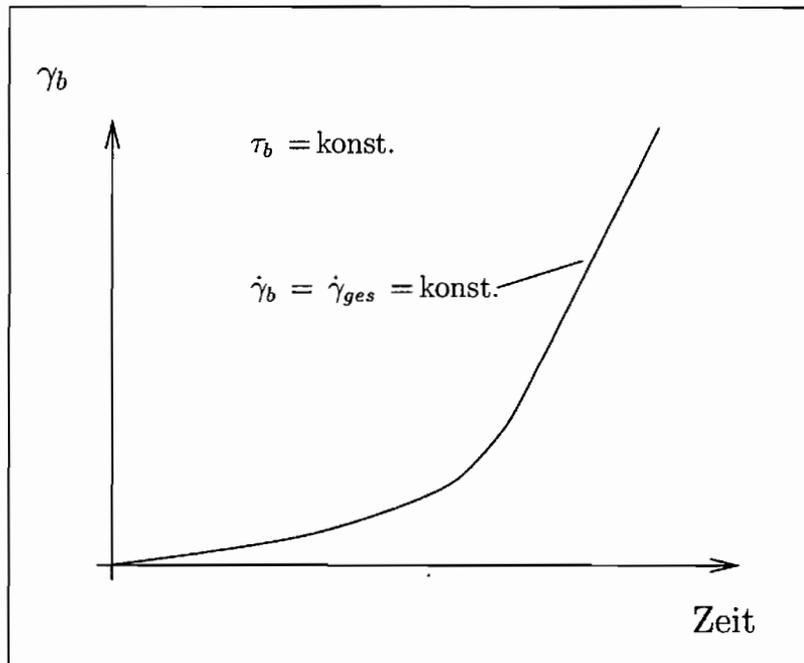
Scherversuche mit konstanter Abgleitgeschwindigkeit  $\dot{\gamma}_{ges}$  liefern folgende für monokristallines Eis typische Spannungs-Dehnungs-Kurve:



**Abb. 2.2:** Prinzipieller Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurve bei  $\dot{\gamma}_{ges} = \text{konstant}$

Am Anfang ist die basale Abgleitrate  $\dot{\gamma}_b$  sehr klein; der Kristall verformt sich zunächst quasi rein elastisch. Im Spannungsmaximum hat die basale Dehnrade gerade die vorgegebene Gesamtdehnrade erreicht: der Spannungszuwachs  $\dot{\tau}_b$  nach Gleichung (2.3) und damit die elastische Dehnrade  $\dot{\gamma}_{el}$  nach Gleichung (2.2) sind 0. Die Spannung fällt wieder ab, da  $\dot{\gamma}_b$  größer als  $\dot{\gamma}_{ges}$ , also  $\dot{\gamma}_{el} < 0$  wird. Ein Teil der Spannungen relaxiert heraus, bis ein stationärer Fließzustand erreicht ist: Eine konstante Spannung infolge der

vorgegebenen konstanten Verzerrungsgeschwindigkeit stellt sich ein, beschreibbar durch  $\tau_b = \eta \dot{\gamma}_b = \text{konstant}$ ; d.h. die Feder des zugrundegelegten rheologischen Modells ist ganz entspannt, also  $\dot{\gamma}_{ges} = \dot{\gamma}_b$ . Dieser Zustand ist nicht mehr zu unterscheiden von Kriechversuchen an monokristallinem Eis, bei denen STEINEMANN [STE58] nach einem Übergangsbereich einen linearen Anstieg von  $\gamma_b$  beobachtet hat (vgl. Abb. 2.3).



**Abb. 2.3:** Prinzipieller Verlauf der Kriechkurve

In beiden Versuchen ist der Übergangsbereich am Anfang mit einem konstanten  $\eta$  nicht zu beschreiben. Zur Entwicklung einer Evolutionsgleichung, etwa  $\dot{\eta} = f(\eta, \dots)$ , ist die Kenntnis der Vorgänge auf der Mikroebene von großem Wert:

Das Abgleiten der basalen Ebenen geschieht nicht schlagartig um einen Gitterabstand, sondern durch Wandern von Fehlstellen, den sogenannten Versetzungen. Dieser Vorgang wird gerne verglichen mit dem stückweisen Verschieben eines Teppichbodens, indem man durch schnelles Anheben an einem seiner Enden eine Falte bis zum anderen Ende durchlaufen läßt. Die Bewegung der Falte bzw. der Fehlstelle ist mit einem erheblich geringeren Kraftaufwand verbunden, als für das gleichzeitige Lösen aller Gitterbindungen in der basalen Ebene aufgebracht werden müßte. In Versuchen ist eine Zunahme der Versetzungsanzahl beobachtet worden (vgl. FUKUDA UND HIGASHI [FH69]). Versetzungsquellen befanden sich häufig an Spannungskonzentrationen in der Nähe von vorhandenen polygonalisierten Versetzungen oder Einschlüssen. Die Zunahme der Versetzungsdichte bedeutet

bei monokristallinem Eis eine Entfestigung des Kristalls, da die neu entstandenen Versetzungen jeweils an eine basale Ebene gebunden sind und sich gegenseitig nur unwesentlich in ihrer Bewegung behindern.

Die basale Abgleitung ergibt sich als Funktion der Versetzungsdichte  $\lambda$  nach der Gleichung von (OROWAN [Oro34]) zu

$$\dot{\gamma}_b = b \lambda v(\tau_b) . \quad (2.4)$$

Hierin ist  $b$  der Betrag des Burger-Vektors, und  $v(\tau_b)$  ist die mittlere Geschwindigkeit der Versetzungen als Funktion der basalen Schubspannung. Mit einem linearen Ansatz für  $v(\tau_b)$  folgt

$$\dot{\gamma}_b = b \lambda k_{vb} \tau_b . \quad (2.5)$$

Unschwer ist durch Vergleich mit Gleichung (2.1) die Identität

$$\frac{1}{\eta} = b \lambda k_{vb} \quad (2.6)$$

zu erkennen, wenn veränderliches  $\eta$  vorausgesetzt wird.

Für die Entwicklung einer Evolutionsgleichung  $\dot{\lambda} = f(\lambda, \dots)$  ist zu berücksichtigen, daß die Versetzungsdichte bei den oben erwähnten Kriechversuchen gegen einen Grenzwert streben muß, da sonst der lineare Verlauf der Abgleitung nicht zu modellieren wäre. Allerdings ist dieser stationäre Wert abhängig von der anliegenden Spannung.

Wie stark in Abb. 2.2 das Maximum ausgeprägt ist, hängt davon ab, wie nahe die Versetzungsdichte ihrem stationären Wert bei Erreichen des Maximums gekommen ist. Bei einer großen Anfangsversetzungsdichte und/oder sehr kleinen Gesamtverzerrungsgeschwindigkeit  $\dot{\gamma}_{ges}$  kann die Versetzungsdichte im Spannungsmaximum ihren stationären Wert erreichen, so daß nach Gleichung (2.5)  $\dot{\gamma}_b$  nicht weiter zunehmen kann, und die Kurve im weiteren als horizontale Gerade verläuft.

## 2.1 Monokristallines Stoffgesetz

Dem verwendeten Stoffgesetz liegt die additive Aufspaltung des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten in einen elastischen und einen inelastischen Anteil zugrunde:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_i . \quad (2.7)$$

Diese Aufspaltung ist gleichbedeutend mit der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in entsprechende Anteile

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_i , \quad (2.8)$$

da die elastischen Verformungen als klein im Vergleich zu den irreversiblen Deformationen angenommen werden.

### 2.1.1 Elastischer Anteil

Für den elastischen Anteil  $\mathbf{d}_e$  wird ein hypoelastisches Stoffgesetz angesetzt mit einer noch zu definierenden objektiven Zeitableitung ( $\overset{\nabla}{\cdot}$ ):

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{C}^{-1} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} . \quad (2.9)$$

Aus der hexagonalen Kristallstruktur des monokristallinen Eises ergibt sich sofort die transversale Isotropie der elastischen Eigenschaften. Sie sind von beliebigen Rotationen des Kristalls um die durch die Richtung  $\vec{n}$  gekennzeichnete Achse, die sogenannte c-Achse unabhängig (vgl. Abb. 2.1 und BISCHOFF-BEIERMANN [BB92]). Die 21 Komponenten des Elastizitätstensors  $\mathbf{C}$  lassen sich aus 5 linear unabhängigen Größen berechnen, die von DANTL [Dan68] als Funktion der Temperatur  $T_c$  in  $^{\circ}\text{C}$  bestimmt worden sind:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 12.904 (1 - 1.489 \cdot 10^{-3} T_c - 1.85 \cdot 10^{-6} T_c^2) 10^3 \text{MPa} \quad \pm 0.3\% \\ c_{12} &= 6.487 (1 - 2.072 \cdot 10^{-3} T_c - 3.62 \cdot 10^{-6} T_c^2) 10^3 \text{MPa} \quad \pm 2.0\% \\ c_{13} &= 5.622 (1 - 1.874 \cdot 10^{-3} T_c - 3.62 \cdot 10^{-6} T_c^2) 10^3 \text{MPa} \quad \pm 7.0\% \\ c_{33} &= 14.075 (1 - 1.629 \cdot 10^{-3} T_c - 2.93 \cdot 10^{-6} T_c^2) 10^3 \text{MPa} \quad \pm 0.4\% \\ c_{44} &= 2.819 (1 - 1.601 \cdot 10^{-3} T_c - 3.62 \cdot 10^{-6} T_c^2) 10^3 \text{MPa} \quad \pm 0.7\% \end{aligned}$$

In Kapitel 2.2.1 wird nach dem Übergang auf die Matrixschreibweise angegeben, wie die dem Tensor  $\mathbf{C}$  entsprechende  $6 \times 6$ -Matrix mit den  $c_{ij}$  belegt ist.

### 2.1.2 Inelastischer Anteil

Zur Beschreibung der irreversiblen Formänderung  $\mathbf{d}_i$  wird das Stoffgesetz für den Eismonokristall von BISCHOFF-BEIERMANN [BB92] verwendet. Entsprechend den zugrunde liegenden mikromechanischen Ursachen wird der (isochore) inelastische Anteil des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\mathbf{d}_i$  in 3 Anteile aufgespalten:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_b + \mathbf{d}_p + \mathbf{d}_a \quad , \quad \text{tr}(\mathbf{d}_i) = 0 \quad . \quad (2.10)$$

Sie werden durch die Verformungsmechanismen der basalen und der prismatischen Gleitung sowie durch axiale Längenänderung hervorgerufen. Die Materialfunktionen in den Gleichungen für  $\mathbf{d}_p$  und  $\mathbf{d}_a$  wurden aufgrund mangelnder experimenteller Untersuchungen nicht entwickelt.  $\mathbf{d}_i$  wird deshalb durch die dominierende basale Abgleitung  $\mathbf{d}_b$  allein beschrieben. Für sie läßt sich ein Stoffgesetz aus der Analyse der Versetzungsbewegung angeben. Es verknüpft die Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\mathbf{d}_b$  mit den Schubspannungen  $\boldsymbol{\tau}_b$  im zweidimensionalen Unterraum der basalen Gleitung in Abhängigkeit von der Versetzungsdichte  $\lambda$ :

$$\mathbf{d}_b = \frac{\dot{\gamma}_b}{2\tau_b} \boldsymbol{\tau}_b \quad . \quad (2.11)$$

mit

$$\tau_b = \sqrt{\frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_b \cdot \boldsymbol{\tau}_b} \quad , \quad (2.12)$$

$$\dot{\gamma}_b = b \lambda v(\tau_b) \quad , \quad (2.13)$$

$$\dot{\lambda} = \left( \frac{1}{\pi G b} \int_0^{\tau_b} \mu(\bar{\tau}) \bar{\tau} \, d\bar{\tau} - \lambda \right) \frac{2}{d} v(\tau_b) \quad . \quad (2.14)$$

Hierin ist  $b$  der Betrag des Burger-Vektors,  $v(\tau_b)$  die mittlere Geschwindigkeit der Versetzungen als Funktion vom Betrag der maximalen basalen Schubspannung,  $d$  der Abstand der Versetzungsquellen,  $\mu(\bar{\tau})$  die Versetzungsquellendichte und  $G$  der Schubmodul.

Die Schubspannungen  $\boldsymbol{\tau}_b$  lassen sich berechnen aus der Beziehung:

$$\boldsymbol{\tau}_b = \mathbf{I}^b \boldsymbol{\sigma} \quad . \quad (2.15)$$

Dabei ist  $\mathbf{I}^b$  ein Einheitstensor (vierter Stufe) des zweidimensionalen Unterraums der basalen Gleitung. In diesen Unterraum projiziert  $\mathbf{I}^b$  aus dem sechsdimensionalen Spannungsraum den beliebigen Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}$ . Gleichung (2.15) führt auf

$$\boldsymbol{\tau}_b = \bar{\mathbf{n}} \otimes \boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma} \otimes \bar{\mathbf{n}} - 2 \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}} (\bar{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma} \bar{\mathbf{n}}). \quad (2.16)$$

Die Rate  $\dot{\gamma}_b$  der basalen Abgleitung verhält sich proportional zur mittleren Geschwindigkeit der Versetzungen  $v$  gemäß der Orowangleichung (2.13) (OROWAN [Oro34]) und ist über  $v(\tau_b)$  indirekt eine Funktion von  $\tau_b$  (vgl. a. Abb. 2.1).

Mit einem linearen Ansatz sowohl für die Geschwindigkeit  $v(\tau_b)$  als auch für die Versetzungsquellendichte  $\mu(\bar{\tau})$ , d.h. mit

$$v(\tau_b) = k_{vb} \tau_b \quad (2.17)$$

und

$$\mu(\bar{\tau}) = \mu_l \bar{\tau} \quad (2.18)$$

werden die Gleichungen (2.11) und (2.14) umgeformt zu

$$\mathbf{d}_b = \frac{1}{2} b k_{vb} \lambda \boldsymbol{\tau}_b \quad (2.19)$$

und

$$\dot{\lambda} = -\frac{2 k_{vb}}{d} \tau_b \lambda + \frac{2 \mu_l k_{vb}}{3 \pi G b d} \tau_b^4 \quad (2.20)$$

mit den zusätzlichen Materialparametern  $k_{vb}$  und  $\mu_l$ .

## 2.2 Aufbereitung der Stoffgleichungen für die Finite-Elemente-Formulierung

Für die FE-Formulierung werden die Gleichungen des monokristallinen Stoffgesetzes in Komponenten bezüglich globaler Koordinaten benötigt. Abb. 2.4 zeigt ein finites Element als Ausschnitt eines Eiskorns. Die c-Achse bzw. der Normalenvektor  $\bar{\mathbf{n}}$  ist gegenüber der globalen z-Achse um den Anisotropiewinkel  $\vartheta$  geneigt. In Richtung der c-Achse verläuft die 3-Achse eines lokalen Koordinatensystems. Die zugehörige 2-Achse ist an der Schnittlinie der basalen Ebene mit der Zeichenebene angeheftet. Diese Geometrie wird bei der Herleitung des monokristallinen Stoffgesetzes in globalen Koordinaten zugrundegelegt.

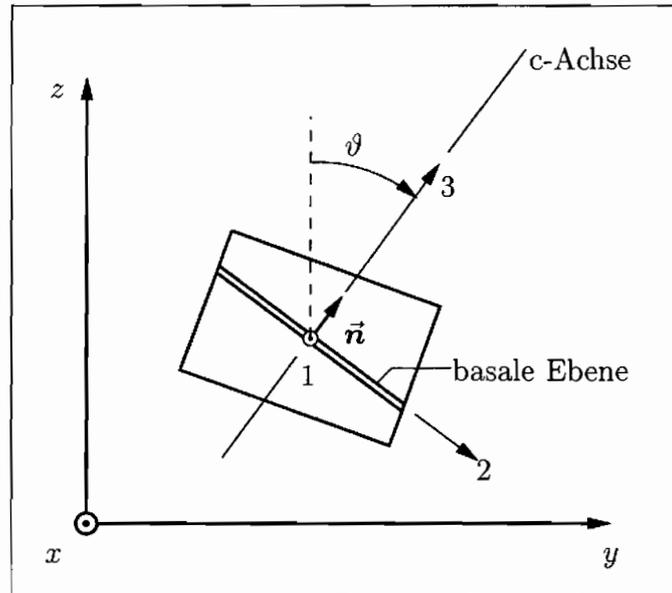


Abb. 2.4: Finites Element mit basaler Ebene

Es genügt, die Rotation der basalen Ebene mit  $\vartheta$  allein, also nur mit einem Rotationsfreiheitsgrad zu beschreiben, da sich die in Kapitel 6 betrachtete polykristalline Eisform unter der vorherrschenden ebenen Belastung durch ein zweidimensionales FE-Modell beschreiben läßt.

### 2.2.1 Elastischer Anteil

Zunächst soll die objektive Zeitableitung in Gleichung (2.9) gewählt werden. Es erweist sich als zweckmäßig, auf die Matrixschreibweise überzugehen, d.h. Spannungen und Verzerrungen als  $6 \times 1$  Vektoren unter Ausnutzung des Boltzmann-Axioms darzustellen. Ihre Komponenten beziehen sich auf das lokale an die basale Ebene angeheftete Koordinatensystem (vgl. Abb. 2.4). Darauf weist das Sternchen \* im folgenden hin.

Die Spannungen sind linear mit den elastischen Verzerrungen verknüpft:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\varepsilon}_e^* , \quad (2.21)$$

oder in den Raten ausgedrückt

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mathbf{C}^* \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^* . \quad (2.22)$$

Gleichung (2.22) entsteht durch materielle Ableitung der Gleichung (2.21) nach der Zeit; d.h. die mitrotierende Basis des lokalen KOOS wird nicht mit abgeleitet, da die Trägheitskräfte in den Gleichgewichtsbeziehungen und nicht in den Stoffgleichungen berücksichtigt

werden.

Z.B. lautet die Matrixgleichung (2.21) ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}^* \\ \sigma_{22}^* \\ \sigma_{33}^* \\ \sigma_{23}^* \\ \sigma_{31}^* \\ \sigma_{12}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11} - c_{12}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{e11}^* \\ \varepsilon_{e22}^* \\ \varepsilon_{e33}^* \\ \varepsilon_{e23}^* \\ \varepsilon_{e31}^* \\ \varepsilon_{e12}^* \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Die Größen  $c_{ij}$  sind im Kapitel 2.1.1 angegeben. Der  $6 \times 1$  Vektor  $\varepsilon_e^*$  enthält nicht die doppelten Werte der gemischt indizierten Komponenten, da zunächst noch bewußt auf die Voigtsche Notation verzichtet werden soll. Dadurch gestaltet sich die Herleitung des Werkstoffgesetzes in globalen Koordinaten einheitlicher:

Die im lokalen Koordinatensystem angegebenen Vektoren der Spannungen und Verzerungen werden mit Hilfe der gleichen Transformationsmatrix  $\mathbf{P}$  auf das globale Koordinatensystem umgerechnet. Das Sternchen \* fällt weg:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_e^* = \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}_e. \quad (2.24)$$

Die Transformationsmatrix  $\mathbf{P}$  lautet

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & s^2 & -2sc & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & c^2 & 2sc & 0 & 0 \\ 0 & sc & -sc & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

wobei  $s$  und  $c$  für  $\sin \vartheta$  bzw.  $\cos \vartheta$  stehen.

Wir wollen beide Schreibarten (2.21) und (2.22) des elastischen Stoffgesetzes parallel auf das globale raumfeste KOOS transformieren und die Unterschiede herausarbeiten. Dabei werden die beiden Gleichungen von links mit  $\mathbf{P}^{-1}$  multipliziert und die Darstellbarkeit der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$  als  $\mathbf{I} = \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1}$  ausgenutzt:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\varepsilon}_e^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_e^* \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (2.26)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mathbf{C}^* \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^* \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^* \quad (2.27)$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^*) \cdot - (\mathbf{P}^{-1}) \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C} \{ (\mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_e^*) \cdot - (\mathbf{P}^{-1}) \boldsymbol{\varepsilon}_e^* \} \quad (2.28)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\mathbf{P}^{-1}) \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e - (\mathbf{P}^{-1}) \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}_e \} \quad \Rightarrow \quad \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \quad (2.29)$$

Bei isotropen Materialverhalten führt die Transformation (2.26) einfach auf  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\varepsilon}_e$ , da in diesem Fall  $\mathbf{C}^*$  und  $\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{P}$  übereinstimmen.

Für die in Raten angeschriebene Werkstoffbeziehung stellt man fest, daß sich für isotropes Material die zusätzlichen Terme  $-(\mathbf{P}^{-1}) \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}$  und  $-\mathbf{C} (\mathbf{P}^{-1}) \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}_e$  gerade wegheben, also einfach  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^* \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$  gilt. Trotzdem reduziert sich die Bedeutung der Gleichung (2.29) nicht auf die triviale Tatsache, daß sie durch das Addieren der gleichen Größe auf beiden Seiten einer Gleichung entsteht. Vielmehr stellt nur  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^* \overset{\nabla}{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$  das zu  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = \mathbf{C}^* \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^*$  äquivalente Stoffgesetz in raumbezogenen Größen dar. Das Objektivitätsprinzip (vgl. WEGENER [Weg91]) verlangt, daß nur objektive Größen in Werkstoffgesetzen verwendet werden, d.h. für diese Größen muß folgende Transformationsvorschrift gelten, hier z.B. angeschrieben für  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^* . \quad (2.30)$$

Für die Transformation der materiellen Zeitableitung gilt:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{P}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^* , \quad (2.31)$$

mit der sogenannten objektiven Zeitableitung

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\mathbf{P}^{-1}) \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} . \quad (2.32)$$

Ein Beispiel soll den Unterschied zwischen  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$  und  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  verdeutlichen:

Für einen zeitlich unveränderlichen Spannungs- und Verzerrungszustand  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^* = 0 = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e^*$  ergibt sich ebenfalls  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 0 = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ , aber  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{P}^{-1}) \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} \neq 0$  (analog für  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ ), wenn die basale Ebene eine Starrkörperrotation mit  $(\mathbf{P}^{-1}) \mathbf{P} \neq 0$  erfährt.

Erfordern die vorangehenden Überlegungen schon im isotropen Fall die Verwendung objektiver Größen im Stoffgesetz, so sind diese im anisotropen Fall unumgänglich, da dann

$\mathbf{C} \neq \mathbf{C}^*$  gilt, und sich die zusätzlichen Terme  $-(\mathbf{P}^{-1})' \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}$  und  $-\mathbf{C} (\mathbf{P}^{-1})' \mathbf{P} \boldsymbol{\varepsilon}_e$  nicht mehr gegeneinander wegheben.

Gleichung (2.29) berücksichtigt bereits die Rotation der basalen Ebenen infolge einer Starrkörperrotation. Diese Beziehung läßt sich formal auf den Fall großer Deformationen erweitern, indem folgendes hypoelastisches Stoffgesetz angesetzt wird:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \mathbf{d}_e, \quad (2.33)$$

mit  $\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}^* \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{C}^*$  nach Gleichung (2.23) und  $\mathbf{P}$  nach (2.25).  $\mathbf{d}_e$  (hier als  $6 \times 1$ -Vektor geschrieben) ist der elastische Anteil des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\mathbf{d}$ , der als symmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten bereits eine objektive Größe darstellt.

Damit erhalten wir gerade die inverse Formulierung von Gleichung (2.9).

Anstatt wie vorgestellt über die Koordinatentransformation zur geeigneten objektiven Zeitableitung der Spannungen zu gelangen, kann das Ergebnis auch analog zu dem Konzept der Lie-Ableitung gewonnen werden, nach dem zuerst der auf die aktuelle Konfiguration bezogene Spannungstensor zurückgezogen wird auf die Referenzkonfiguration (pull-back:  $\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}$ ), dann materiell nach der Zeit abgeleitet und anschließend wieder „vorgeschoben“ wird auf die Momentankonfiguration (push forward:  $\mathbf{P}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$ ):

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{P} \boldsymbol{\sigma})' = \mathbf{P}^{-1} \dot{\mathbf{P}} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{P}^{-1} \dot{\mathbf{P}} \boldsymbol{\sigma}. \quad (2.34)$$

Das führt mit der Beziehung  $\mathbf{P}^{-1} \dot{\mathbf{P}} = -(\dot{\mathbf{P}}^{-1}) \mathbf{P}$  (aus der Ableitung der Identität  $\mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$  nach der Zeit) gerade auf das Ergebnis (2.32).

In Tensorschreibweise lautet es

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega} \quad (2.35)$$

und ist unschwer als die verallgemeinerte objektive Zeitableitung nach Jaumann zu erkennen mit  $\boldsymbol{\omega}$  als Rotationsgeschwindigkeit der Gleitsysteme bzw. der basalen Ebene.

## 2.2.2 Inelastischer Anteil

Der Tensor der basalen Schubspannungen  $\boldsymbol{\tau}_b$  und der Betrag  $\tau_b$  der maximalen basalen Schubspannung aus den Stoffgleichungen (2.19) und (2.20) für den inelastischen Verformungsanteil sind noch bezüglich globaler Koordinaten anzugeben:

$\tau_b$  nach Gleichung (2.15) bzw. nach (2.16) stellt sich mit  $\vec{n} = (0, \sin \vartheta, \cos \vartheta)^T$  - vgl. Abb. 2.4 - und nach Übergang auf die Matrixschreibweise dar als

$$\tau_b = \mathbf{I}_b \boldsymbol{\sigma} . \quad (2.36)$$

In dieser Matrixgleichung sind  $\tau_b$  und  $\boldsymbol{\sigma}$   $6 \times 1$  Vektoren und  $\mathbf{I}_b$  ist die dem Tensor  $\mathbf{I}^b$  entsprechende  $6 \times 6$  Einheitsmatrix. Gleichung (2.36) lautet ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} \tau_{b_{xx}} \\ \tau_{b_{yy}} \\ \tau_{b_{zz}} \\ \tau_{b_{yz}} \\ \tau_{b_{zx}} \\ \tau_{b_{xy}} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \sin^2 2\vartheta & -2 \sin^2 2\vartheta & 2 \sin 4\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & -2 \sin^2 2\vartheta & 2 \sin^2 2\vartheta & -2 \sin 4\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & \sin 4\vartheta & -\sin 4\vartheta & 4 \cos^2 2\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \cos^2 \vartheta & 2 \sin 2\vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \sin 2\vartheta & 4 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} , \quad (2.37)$$

und der Betrag der maximalen basalen Schubspannung  $\tau_b$  ergibt sich zu

$$\tau_b = \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} (\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \sin 2\vartheta + \sigma_{yz} \cos 2\vartheta \right\}^2 + \left\{ \sigma_{xy} \sin \vartheta + \sigma_{xz} \cos \vartheta \right\}^2} . \quad (2.38)$$

Damit schreibt sich der inelastische Anteil des Stoffgesetzes nach Gleichung (2.19) in der Matrixdarstellung als

$$\mathbf{d}_b = \frac{1}{2} b k_{vb} \lambda \mathbf{I}_b \boldsymbol{\sigma} , \quad (2.39)$$

mit der Evolutionsgleichung für  $\lambda(\tau_b)$  nach den Gleichungen (2.20) und (2.38).

### 2.2.3 Rotation der Mikrostruktur

Ausgangspunkt für die Herleitung einer Bestimmungsgleichung für die Geschwindigkeit  $\dot{\vartheta}$ , mit der die c-Achse und damit die basale Ebene rotiert, ist der Tensor der Rotationsgeschwindigkeiten  $\mathbf{W}$ . Er läßt sich unter der Voraussetzung kleiner elastischer Verformungen additiv in den Spintensor  $\boldsymbol{\omega}$  und den plastischen Spin  $\mathbf{W}^p$  zerlegen:

$$\mathbf{W} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{W}^p . \quad (2.40)$$

ARAVAS UND AIFANTIS [AA91] geben für sie folgende geometrische Interpretation:  $\boldsymbol{\omega}$  ist die Geschwindigkeit, mit der die Gleitsysteme rotieren. Dann lautet die zeitliche Änderung des die c-Achse kennzeichnenden Normalenvektors  $\vec{n}$ :

$$\dot{\vec{n}} = \boldsymbol{\omega} \vec{n} . \quad (2.41)$$

$\mathbf{W}^P$  ist die mittlere Rotationsgeschwindigkeit aller materiellen Linienelemente in der Umgebung des Beobachterpunktes, relativ zu einem Beobachter, der sich mit den Gleitsystemen bewegt:

$$\mathbf{W}^P = \mathbf{d}_b \vec{n} \otimes \vec{n} - \vec{n} \otimes \vec{n} \mathbf{d}_b . \quad (2.42)$$

Mit diesem Zusammenhang und mit  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{W} - \mathbf{W}^P$  nach Gleichung (2.40) folgt

$$\dot{\vec{n}} = \mathbf{W} \vec{n} - (\mathbf{I} - \vec{n} \otimes \vec{n}) \mathbf{d}_b \vec{n} . \quad (2.43)$$

Die Änderung des Winkels  $\vartheta$  ergibt sich, indem die Beziehung

$$\dot{\vec{n}} = \frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d\vec{n}}{d\vartheta} \dot{\vartheta} \quad (2.44)$$

mit dem Vektor  $\frac{d\vec{n}}{d\vartheta}$  skalar multipliziert wird:

$$\dot{\vartheta} = \frac{d\vec{n}}{d\vartheta} \cdot [\mathbf{W} \vec{n} - (\mathbf{I} - \vec{n} \otimes \vec{n}) \mathbf{d}_b \vec{n}] , \quad (2.45)$$

$$\dot{\vartheta} = W_{yz} - \frac{b k_{vb}}{4} \lambda [\sin 2\vartheta (\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) + 2 \cos 2\vartheta \sigma_{yz}] . \quad (2.46)$$

## 2.2.4 Monokristallines Stoffgesetz in globalen Koordinaten

Zur Verknüpfung des elastischen und inelastischen Anteils des Stoffgesetzes dient die zu Gleichung (2.7) analoge Aufspaltung in der Matrixschreibweise:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_i \quad (2.47)$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (2.33), (2.19) und (2.36) für die elastischen und inelastischen Anteile der Verzerrungsgeschwindigkeiten wird Gleichung (2.47) in das monokristalline Stoffgesetz, ausgedrückt in globalen Koordinaten, umgeformt:

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}^{-1} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} + \lambda_k \mathbf{I}_b \boldsymbol{\sigma} . \quad (2.48)$$

Dabei bedeutet  $\lambda_k$ :

$$\lambda_k = \frac{1}{2} b k_{vb} \lambda. \quad (2.49)$$

Die Methode der Finiten Elemente benötigt die inverse Formulierung des Stoffgesetzes:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{C} \mathbf{d} - \lambda_k \mathbf{C} \mathbf{I}_b \underline{\underline{\sigma}}, \quad (2.50)$$

oder ausgeschrieben:

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\sigma}}_{xx} \\ \underline{\underline{\sigma}}_{yy} \\ \underline{\underline{\sigma}}_{zz} \\ \underline{\underline{\sigma}}_{yz} \\ \underline{\underline{\sigma}}_{zx} \\ \underline{\underline{\sigma}}_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 2C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 2C_{24} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 2C_{34} & 0 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & 2C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{55} & 2C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{56} & 2C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{xx} \\ d_{yy} \\ d_{zz} \\ d_{yz} \\ d_{zx} \\ d_{xy} \end{pmatrix} - 2c_{44} \lambda_k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{i1} & -C_{i1} & 2C_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & -C_{i1} & C_{i1} & -2C_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & C_{i2} & -C_{i2} & C_{i3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2 sc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sc s^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

mit:

$$\begin{aligned} C_{11} &= c_{11} & C_{i1} &= 2s^2c^2 \\ C_{12} &= c^2c_{12} + s^2c_{13} & C_{i2} &= sc(c^2 - s^2) \\ C_{13} &= s^2c_{12} + c^2c_{13} & C_{i3} &= (c^2 - s^2)^2 \\ C_{14} &= -sc c_{12} + sc c_{13} \\ C_{22} &= c^4c_{11} + 2s^2c^2c_{13} + s^4c_{33} + 4s^2c^2c_{44} \\ C_{23} &= s^2c^2c_{11} + (s^4 + c^4)c_{13} + s^2c^2c_{33} - 4s^2c^2c_{44} \\ C_{24} &= -sc^3c_{11} + (sc^3 - s^3c)c_{13} + s^3c c_{33} + 2(sc^3 - s^3c)c_{44} \\ C_{33} &= s^4c_{11} + 2s^2c^2c_{13} + c^4c_{33} + 4s^2c^2c_{44} \\ C_{34} &= -s^3c c_{11} + (s^3c - sc^3)c_{13} + sc^3c_{33} + 2(s^3c - sc^3)c_{44} \\ C_{44} &= s^2c^2c_{11} - 2s^2c^2c_{13} + s^2c^2c_{33} + (c^2 - s^2)^2c_{44} \\ C_{55} &= \frac{1}{2}s^2c_{11} - \frac{1}{2}s^2c_{12} + c^2c_{44} \\ C_{56} &= -\frac{1}{2}sc c_{11} + \frac{1}{2}sc c_{12} + sc c_{44} \\ C_{66} &= \frac{1}{2}c^2c_{11} - \frac{1}{2}c^2c_{12} + s^2c_{44} \end{aligned}$$

In zweierlei Hinsicht bedarf es noch einer Modifikation:

1. Im Hinblick auf das zu formulierende Prinzip der virtuellen Arbeit für die FE-Methode muß überprüft werden, ob die im Stoffgesetz verwendeten Spannungs- und Verzerrungsmaße zueinander konjugiert sind. Das soll zunächst gleichbedeutend mit der Forderung sein, daß das Skalarprodukt  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d}$  aus den Vektoren  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\mathbf{d}$  die gleiche Elementarleistung ergibt wie das doppelt skalare Produkt  $\sigma_{ij}d_{ji}$  aus den entsprechenden Tensoren. Diese Bedingung führt direkt zur Voigtschen Notation, die hier aber dahingehend modifiziert wird, daß die einzelnen Komponenten weiterhin doppeltindiziert bleiben. Anstelle der gemischtindizierten Komponenten in  $\mathbf{d}$  treten jetzt ihre zweifachen Werte. Dadurch erhält die Matrix  $\mathbf{C}$  eine symmetrische Gestalt, was später von rechentechnischem Vorteil sein wird:

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{xx} \\ \bar{\sigma}_{yy} \\ \bar{\sigma}_{zz} \\ \bar{\sigma}_{yz} \\ \bar{\sigma}_{zx} \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{xx} \\ d_{yy} \\ d_{zz} \\ 2d_{yz} \\ 2d_{zx} \\ 2d_{xy} \end{pmatrix} - 2c_{44}\lambda_k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{i1} & -C_{i1} & 2C_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & -C_{i1} & C_{i1} & -2C_{i2} & 0 & 0 \\ 0 & C_{i2} & -C_{i2} & C_{i3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^2 sc & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & sc & s^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

2. Die Beziehung (2.52) erscheint als ein dreidimensionales Werkstoffgesetz. Da es aber voraussetzt, daß die c-Achse allein um die z-Achse rotieren kann, ist Gleichung (2.52) nur auf bestimmte Belastungsfälle anwendbar. Ebene Probleme wie der ebene Spannungszustand und der ebene Verzerrungszustand garantieren aus reinen Symmetriebetrachtungen heraus, daß die c-Achse sich weder zur einen noch zur anderen Seite aus der Ebene herausbewegt und stattdessen nur innerhalb der Ebene rotiert:

### 2.2.5 Ebener Verzerrungszustand und ebener Spannungszustand

Mit den Bedingungen für den ebenen Verzerrungszustand EVZ

$$d_{xx} = d_{xy} = d_{xz} = 0 \quad (2.53)$$

und denen des ebenen Spannungszustand ESZ

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0 = \bar{\sigma}_{xx} = \bar{\sigma}_{xy} = \bar{\sigma}_{xz} \quad (2.54)$$

folgt:

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_{yy} \\ \bar{\sigma}_{zz} \\ \bar{\sigma}_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{e11} & c_{e12} & c_{e13} \\ c_{e12} & c_{e22} & c_{e23} \\ c_{e13} & c_{e23} & c_{e33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{yy} \\ d_{zz} \\ 2d_{yz} \end{pmatrix} - 2c_{44}\lambda_k \begin{pmatrix} c_{i11} & -c_{i11} & 2c_{i31} \\ -c_{i11} & c_{i11} & -2c_{i31} \\ c_{i31} & -c_{i31} & c_{i33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

mit:

$$\begin{aligned} c_{i11} &= 2s^2c^2 \\ c_{i31} &= sc(c^2 - s^2) \\ c_{i33} &= (c^2 - s^2)^2 \end{aligned} \quad (2.56)$$

und für den ebenen Verzerrungszustand mit

$$\begin{aligned} c_{e11} &= c_{e11}^v = c^4c_{11} + 2s^2c^2c_{13} + s^4c_{33} + 4s^2c^2c_{44} \\ c_{e12} &= c_{e12}^v = s^2c^2c_{11} + (s^4 + c^4)c_{13} + s^2c^2c_{33} - 4s^2c^2c_{44} \\ c_{e13} &= c_{e13}^v = -sc^3c_{11} + (sc^3 - s^3c)c_{13} + s^3c c_{33} + 2(sc^3 - s^3c)c_{44} \\ c_{e22} &= c_{e22}^v = s^4c_{11} + 2s^2c^2c_{13} + c^4c_{33} + 4s^2c^2c_{44} \\ c_{e23} &= c_{e23}^v = -s^3c c_{11} + (s^3c - sc^3)c_{13} + sc^3c_{33} + 2(s^3c - sc^3)c_{44} \\ c_{e33} &= c_{e33}^v = s^2c^2c_{11} - 2s^2c^2c_{13} + s^2c^2c_{33} + (c^2 - s^2)^2c_{44} \end{aligned} \quad (2.57)$$

sowie für den ebenen Spannungszustand mit

$$\begin{aligned} c_{e11} &= c_{e11}^s = c_{e11}^v - \frac{1}{c_{11}}(c^2c_{12} + s^2c_{13})^2 \\ c_{e12} &= c_{e12}^s = c_{e12}^v - \frac{1}{c_{11}}(c^2c_{12} + s^2c_{13})(s^2c_{12} + c^2c_{13}) \\ c_{e13} &= c_{e13}^s = c_{e13}^v - \frac{1}{c_{11}}(c^2c_{12} + s^2c_{13})(-sc c_{12} + sc c_{13}) \\ c_{e22} &= c_{e22}^s = c_{e22}^v - \frac{1}{c_{11}}(s^2c_{12} + c^2c_{13})^2 \\ c_{e23} &= c_{e23}^s = c_{e23}^v - \frac{1}{c_{11}}(s^2c_{12} + c^2c_{13})(-sc c_{12} + sc c_{13}) \\ c_{e33} &= c_{e33}^s = c_{e33}^v - \frac{1}{c_{11}}(-sc c_{12} + sc c_{13})^2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

Der ebene Verzerrungszustand und der ebene Spannungszustand unterscheiden sich im inelastischen Anteil des Stoffgesetzes nicht, da die basale Abgleitung  $\mathbf{d}_b$  keine Änderung der Dicke in x-Richtung verursacht.

Ein Unterschied zwischen dem ESZ und EVZ könnte noch in der Auswertung des Betrages  $\tau_b$  der maximalen basalen Schubspannung bestehen.  $\tau_b$  geht als Variable in die Evolutionsgleichung (2.20) für die Versetzungsdichte ein:

Beim EVZ erfordert die Berechnung von  $\tau_b$  nach Gleichung (2.38) die Bestimmung der Spannungen  $\sigma_{xz}$  und  $\sigma_{zx}$ , die nicht als Belastung vorgegeben werden dürfen, sondern aus der Verformungsbehinderung in x-Richtung herzuleiten sind. Abermals hilft die Forderung nach Symmetrie bzgl. der y,z-Ebene weiter. Der Schubspannungsvektor  $\vec{t}$  als verjüngendes Produkt aus dem Schubspannungstensor  $\boldsymbol{\tau}_b$  mit dem Normaleneinheitsvektor  $\vec{n}$  liegt in der basalen Ebene. Innerhalb dieser Ebene darf  $\vec{t}$  nicht beliebig gerichtet sein, da ein Herauszeigen dieses Vektors aus der y,z-Ebene gegen obige Symmetrieforderung bei ebenen Problemen verstößt. Folglich gibt die Schnittlinie aus der basalen Ebene mit der y,z-Ebene die Orientierung von  $\vec{t}$  wieder; d.h. seine x-Komponente

$$t_x = \sigma_{xy} \sin \vartheta + \sigma_{xz} \cos \vartheta \quad (2.59)$$

muß verschwinden. Also auch für den EVZ vereinfacht sich dann  $\tau_b$  zu:

$$\tau_b = \left| \frac{1}{2}(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \sin 2\vartheta + \sigma_{yz} \cos 2\vartheta \right|. \quad (2.60)$$

Die Gleichungen der abhängigen Größen lauten für den ebenen Verzerrungszustand (mit  $t_x = 0$  aus Gleichung (2.59))

$$\bar{\sigma}_{xx} = (C_{12} \quad C_{13} \quad C_{14}) \begin{pmatrix} d_{yy} \\ d_{zz} \\ 2 d_{yz} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \bar{\sigma}_{xz} = 0 \quad (2.62)$$

und für den ebenen Spannungszustand

$$d_{xx} = -\frac{1}{C_{11}} (C_{12} \quad C_{13} \quad C_{14}) \begin{pmatrix} d_{yy} \\ d_{zz} \\ 2 d_{yz} \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

$$d_{zx} = d_{xy} = 0. \quad (2.64)$$

## 3. Finite-Elemente-Modellierung

### 3.1 Vorbemerkungen

Für die Simulationsrechnungen wird das semikommerzielle Finite-Elemente-Programm FEAP verwendet. Dieses Programm wurde von TAYLOR ([ZT89a] und [ZT89b]) speziell zur Lösung nichtlinearer Probleme entwickelt. Es nimmt dem Anwender den Zusammenbau der Elementmatrizen, die Lösung des Gleichungssystems und die Speicherplatzverwaltung für die Elementdaten ab, erfordert aber eine benutzereigene Elementroutine, die die Elementsteifigkeitsmatrix und die Elementlastvektoren zur Verfügung stellt. Angelehnt an ein Scheibenelement von WESTERHOFF [Wes95] wurde ein isoparametrisches Vier-Knoten-Scheibenelement für monokristallines Eis entwickelt, das über kleine Verformungen hinaus auch bei großen Deformationen und großen Starrkörperrotationen anwendbar ist.

Dieses Kapitel gliedert sich wie folgt:

Im Abschnitt 3.2 wird die Update-Lagrangesche Formulierung erläutert, das isoparametrische Element mit seinen Ansatzfunktionen vorgestellt, sowie die innerhalb der Gleichgewichtsiteration erforderliche Zeitintegration besprochen.

Die Verifikationsrechnungen im Abschnitt 3.3 zeigen die erfolgreiche programmtechnische Umsetzung der FE-Formulierung.

Abschnitt 3.4 erläutert das Präprocessing zum Erstellen der FE-Modelle von monokristallinen und polykristallinen Eisproben für ein- bzw. zweiachsigale Versuche.

## 3.2 Formulierung der Methode der Finiten Elemente

### 3.2.1 Grundlegendes Konzept

Das dieser Methode zugrunde liegende Konzept besteht in der Überführung eines Systems partieller Differentialgleichungen in ein linearisiertes algebraisches Gleichungssystem, für welches effektive Lösungsverfahren zur Verfügung stehen. Dazu wird das Differentialgleichungssystem in einen Integralausdruck über das zu untersuchende Gebiet umgeformt. Durch Zerlegung des Gebietes in diskrete Teilbereiche (die finiten Elemente) kann das Integral als Summe der Integrale über die Elemente dargestellt werden. Die Unbekannten werden durch elementweise Ansatzfunktionen in Abhängigkeit der Elementknotenwerte ausgedrückt. Einsetzen dieser Ansatzfunktionen in den Integralausdruck liefert ein algebraisches Gleichungssystem für die Knotenwerte. Nach dessen Lösung kann mit Hilfe der Ansätze eine Näherungslösung für das gesamte Gebiet angegeben werden.

Die einzelnen Schritte zur Herleitung des hier verwendeten FE-Konzeptes stellen sich kurz zusammengefaßt folgendermaßen dar:

Aus dem Impulssatz für ein ruhendes, verformtes Körperelement wird das Prinzip der virtuellen Arbeit für große Formänderungen hergeleitet. Durch Anwendung der Update-Lagrange-Formulierung gelingt es, die Volumenintegration zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  auf das bekannte Volumen zum Zeitpunkt  $t$  zurückzuführen. Die unbekannte Spannung zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  wird ersetzt durch die bereits im vorherigen Zeitschritt berechnete Spannung und einen zu ermittelnden Zuwachs. Dieser Spannungszuwachs wird durch das inkrementell zu formulierende Werkstoffgesetz beschrieben und entspricht damit einem Zuwachs an Dehnung. Durch einen Polynomansatz für die Verschiebung mit den zu berechnenden Knotenpunktverschiebungen als Freiwerte kann die Volumenintegration vorweggenommen werden, so daß ein lineares Gleichungssystem für die Knotenpunktverschiebungszuwächse verbleibt. Addiert zu der bekannten Verschiebung zum Zeitpunkt  $t$  ergibt sich eine erste Näherung für die Verschiebung zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$ . Mittels einer Zeitintegration zwischen  $t$  und  $t + \Delta t$  werden aus der Werkstoffbeziehung für die angenäherte Verschiebung die entsprechenden Spannungen und internen Variablen berechnet und damit die rechte Seite des Gleichungssystems neu bestimmt. Daraus resultiert ein weiterer Zuwachs. Diese Iteration wird solange fortgesetzt, bis ein geeignetes wählendes Konvergenzkriterium erfüllt ist.

### 3.2.2 Prinzip der virtuellen Arbeit für große Formänderungen

Wird der Impulssatz für ein ruhendes, verformtes Körperelement

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

skalar mit der virtuellen Verschiebung  $\delta \mathbf{u}$  multipliziert und anschließend über das aktuelle Volumen integriert, folgt mit Hilfe des Gaußschen Satzes das bezüglich der verformten Konfiguration aufgestellte Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} \delta(\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T) dV = \int_A \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV. \quad (3.2)$$

Dabei wurden die Vertauschbarkeit der Gradientenbildung und Variation, die Symmetrie des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  und das Theorem von Cauchy  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  ausgenutzt.

Die linke Seite von Gleichung (3.2) stellt die virtuelle Formänderungsarbeit  $\delta W$  dar, während auf der rechten Seite die virtuelle Arbeit der äußeren flächenhaft verteilt angreifenden Kräfte  $\delta A_A$  und aller volumenhaft angreifenden Kräfte  $\delta A_V$  steht.

### 3.2.3 Update-Lagrangesche Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit

In der Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit gemäß Gleichung (3.2) sind alle Größen auf die unbekannt verformte Lage bezogen. Zur Auswertung der Integrale muß eine Transformation auf eine bekannte Konfiguration durchgeführt werden.

Bei dem vorliegenden geschwindigkeitsabhängigen Materialverhalten wird die Aufteilung der Belastung in einzelne Belastungsschritte erforderlich, so daß sich die Konfiguration des zuletzt berechneten Schrittes anbietet. Dieses Vorgehen wird als Update-Lagrangesches Verfahren bezeichnet.

Um die im folgenden auftretenden Größen eindeutig zu bestimmen, wird die Bezeichnungsweise von BATHE [Bat90] übernommen: Linke obere Indizes kennzeichnen die Konfiguration, in der die betreffende Größe auftritt, während der linke untere Index die Bezugs-konfiguration dieser Größe angibt. Bei Eindeutigkeit werden die linksstehenden Indizes weggelassen.

Das Problem besteht nun darin, aus der bekannten Konfiguration zum Zeitpunkt  $t$  die neue Konfiguration zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  zu berechnen. Dabei bezeichnet  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$  die Verschiebung aus der Ausgangskonfiguration zur Zeit  $t$  in die unbekannt Lage zur Zeit  $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{r} - {}^t \mathbf{r}. \quad (3.3)$$

Zunächst soll die Integration in Gleichung (3.2) auf die Integration über ein bekanntes Gebiet zurückgeführt werden:

Mit den Definitionen

$${}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{S} = J ({}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{F}^{-1}) ({}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{\sigma}) ({}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{F}^{-1})^T \quad (3.4)$$

für den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor und

$${}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{Grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u} + (\text{Grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u})^T) + (\text{Grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u})^T \text{Grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \quad (3.5)$$

für den Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor und unter Zuhilfenahme der Beziehungen

$$J = \frac{{}^{t+\Delta t}V}{{}^tV} = \frac{{}^t\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho} \quad (3.6)$$

und

$$({}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{F})^{-T} \delta {}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{\varepsilon} ({}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{F})^{-1} = \frac{1}{2} \delta (\text{grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u} + (\text{grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u})^T) \quad (3.7)$$

läßt sich die virtuelle Formänderungsarbeit

$$\delta W = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} \delta (\text{grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u} + (\text{grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u})^T) {}^{t+\Delta t}dV \quad (3.8)$$

umformen in ein Integral über das bekannte Volumen  ${}^tV$ :

$$\delta W = \int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{S} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{\varepsilon} {}^tdV. \quad (3.9)$$

Nach MACVEAN [Mac68] stellen  $\mathbf{S}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  zueinander konjugierte Spannungs- und Verzerrungsmaße auch für den Fall der Anisotropie dar. Während der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor einer anschaulichen Deutung kaum zugänglich ist, läßt sich der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor folgendermaßen geometrisch interpretieren:

Betrachten wir dazu in Abb. 3.1 einen Quader in der Ausgangskonfiguration mit den Abmessungen  $dx_0$ ,  $dy_0$  und  $dz_0$  in kartesischen Koordinaten. Der Körper sei mit einem orthogonalen Netz von Materielinien überzogen. Für eine anfangs parallel zur  $x_0$ -Achse ausgerichtete Materielinie mit dem herausgegriffenen Längenstück  $dx_0$  läßt sich die neue Länge  $dx$  infolge der Verformungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  in  $x_0$ -,  $y_0$ - und  $z_0$ -Richtung berechnen zu

$$dx = \sqrt{\left(dx_0 + \frac{\partial u}{\partial x_0} dx_0\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_0} dx_0\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x_0} dx_0\right)^2}. \quad (3.10)$$

Entwickelt man den Wurzelausdruck in eine Potenzreihe und bricht nach dem 2. Glied

ab. folgt:

$$dx = dx_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left\{ 2 \frac{\partial u}{\partial x_0} + \left( \frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x_0} \right)^2 \right\} + \dots \right]. \quad (3.11)$$

Dann läßt sich die relative Längenänderung der Materielinie als Dehnung definieren:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{dx - dx_0}{dx_0} \quad (3.12)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial x_0} + \left( \frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x_0} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x_0} \right)^2 \right\}. \quad (3.13)$$

Dieser Ausdruck ist unschwer als  $xx$ -Komponente des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors (3.5) zu erkennen. Die Näherung in Gleichung (3.11) läßt sich umgehen, indem die Dehnung im Gegensatz zu Gleichung (3.12) definiert wird als

$$\varepsilon_{xx} = \frac{(dx)^2 - (dx_0)^2}{(dx_0)^2} \quad (3.14)$$

und somit Gleichung (3.13) direkt aus Gleichung (3.10) folgt.

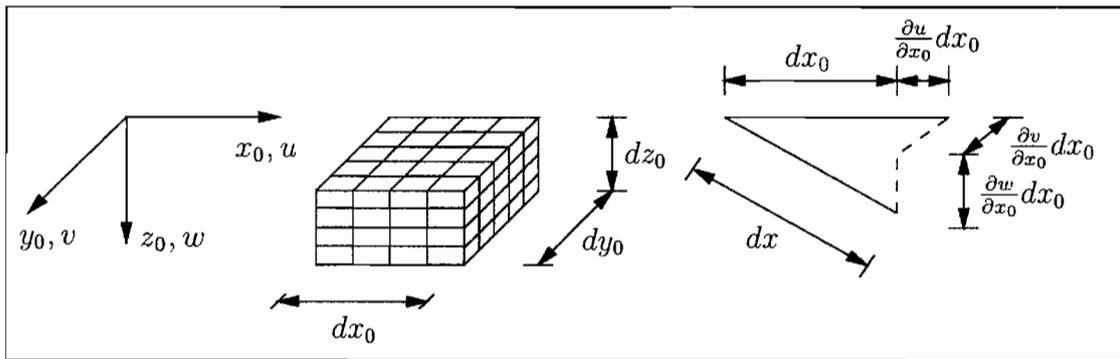


Abb. 3.1: Längenänderung einer Materielinie

Die Gestaltänderung des Quaders soll durch die Gleitung beschrieben werden (vgl. Abb. 3.2). Ein anschauliches Maß ist der Winkel  $\gamma$ , den zwei sich kreuzende Materielinien miteinander einschließen. Im unverformten Zustand stehen die Materielinien aufeinander senkrecht, d.h.  $\gamma = \pi/2$ . Es läßt sich zeigen, daß die  $xy$ -Komponente des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors (3.5)

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} + \frac{\partial u}{\partial x_0} \frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \frac{\partial v}{\partial y_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \frac{\partial w}{\partial y_0} \right\} \quad (3.15)$$

zurückführbar ist auf

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}{dx_0 dy_0} \cos \gamma, \quad (3.16)$$

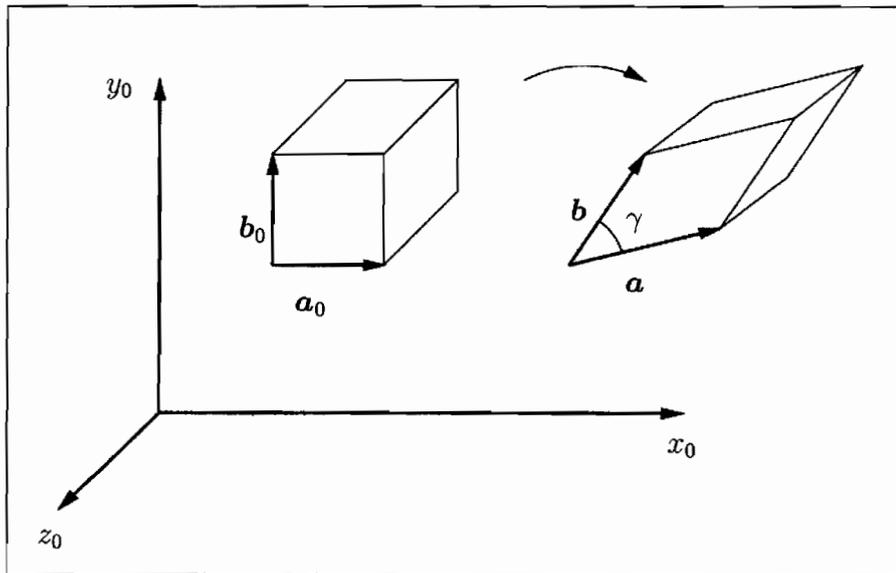


Abb. 3.2: Anfangs- und Momentankonfiguration des Quaders

mit

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \quad (3.17)$$

und den Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  der betrachteten sich kreuzenden Materielinien

$$\mathbf{a} = dx_0 \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x_0}; \frac{\partial v}{\partial x_0}; \frac{\partial w}{\partial x_0} \right)^T, \quad \mathbf{b} = dy_0 \left( \frac{\partial u}{\partial y_0}; 1 + \frac{\partial v}{\partial y_0}; \frac{\partial w}{\partial y_0} \right)^T, \quad (3.18)$$

die im unverformten Zustand die Längen  $dx_0$  bzw.  $dy_0$  besaßen:

$$\mathbf{a}_0 = dx_0 (1; 0; 0)^T, \quad \mathbf{b}_0 = dy_0 (0; 1; 0)^T. \quad (3.19)$$

Damit beschreibt die Beziehung (3.16) die Gleitung als die Hälfte des Cosinus des von den betrachteten Materielinien eingeschlossenen Winkels  $\gamma$ , normiert mit dem Verhältnis der aktuellen zu den ursprünglichen Längen der infinitesimalen Teilstücke auf den Materielinien. Analog zu diesen Ausführungen lassen sich auch die anderen Komponenten des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors herleiten.

In der Literatur (z.B. BETTEN [Bet93]) wird von der Differenz der Abstandsquadrate zweier infinitesimal benachbarter Punkte in der aktuellen Konfiguration und in der Ausgangskonfiguration ausgegangen (vgl. Gleichung (3.14)) und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  aus der Definition

$$d\mathbf{r} d\mathbf{r} - d\mathbf{r}_0 d\mathbf{r}_0 = d\mathbf{r}_0 2\boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{r}_0 \quad (3.20)$$

bestimmt.

Vor dem Hintergrund, daß die Größen  $\mathbf{S}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  kaum bzw. - wie in dem kleinen Exkurs ausgeführt - nur unter Aufwand anschaulich erläutert werden können, beruht ihre Bedeutung in der Mechanik auf dem mathematischen Kunstgriff, daß Operationen mit ihnen bezüglich einer bekannten Konfiguration ausgeführt werden können:

So lautet mit der auf das Ausgangsvolumen bezogenen Belastung  ${}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{p}$  das vollständige Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{S} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{\varepsilon} {}^t dV = \int_{{}^0A} {}^{t+\Delta t}{}_0\mathbf{p} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{u} {}^0 dA + \int_{{}^tV} {}^t\rho {}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{f} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{u} {}^t dV. \quad (3.21)$$

Zur Lösung von Gleichung (3.21) mit Hilfe der Verschiebungsmethode müssen alle auftretenden Größen als Funktionen des unbekanntem Verschiebungsfeldes ausgedrückt werden. Das dadurch entstehende nichtlineare Gleichungssystem in  $\mathbf{u}$  wird durch geometrische und physikalische Linearisierung gelöst. Dazu werden Spannungen und Verzerrungen zerlegt und das Spannungskrement über das Materialgesetz als Funktion der Verzerrungen ausgedrückt.

### 3.2.4 Zerlegung von Spannungen und Verzerrungen

Der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor wird zerlegt in einen bekannten Anteil zum Zeitpunkt  $t$  und den zu ermittelnden Zuwachs

$${}^{t+\Delta t}{}_t\mathbf{S} = {}^t\mathbf{S} + \Delta_t\mathbf{S}. \quad (3.22)$$

Die Variation des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors wird in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil aufgespalten

$$\delta {}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{\varepsilon} = \delta_t\boldsymbol{\varepsilon} = \delta_t\mathbf{e} + \delta_t\boldsymbol{\eta} \quad (3.23)$$

mit

$$\delta_t\mathbf{e} = \frac{1}{2} \delta (\text{Grad}\mathbf{u} + (\text{Grad}\mathbf{u})^T) \quad (3.24)$$

und

$$\delta_t\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} \delta ((\text{Grad}\mathbf{u})^T \text{Grad}\mathbf{u}). \quad (3.25)$$

Vernachlässigt man das Produkt der beiden kleinen Größen  $\Delta_t\mathbf{S} \cdot \delta_t\boldsymbol{\eta}$ , so ergibt sich aus Gleichung (3.21)

$$\int_{{}^tV} \Delta_t\mathbf{S} \cdot \delta_t\mathbf{e} {}^t dV + \int_{{}^tV} {}^t\mathbf{S} \cdot \delta_t\boldsymbol{\eta} {}^t dV = \delta A_V + \delta A_A - \int_{{}^tV} {}^t\mathbf{S} \cdot \delta_t\mathbf{e} {}^t dV. \quad (3.26)$$

### 3.2.5 Einbau des Werkstoffgesetzes

Nach Gleichung (2.50) lautet das Werkstoffgesetz

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \mathbf{d} - \mathbf{C}_i \boldsymbol{\sigma} \quad (3.27)$$

mit

$$\mathbf{C}_i = \lambda_k \mathbf{C} \mathbf{I}_b \quad (3.28)$$

und den Gleichungen (2.20) und (2.49) für die Entwicklung der Versetzungsdichte  $\lambda$  als interne Variable und mit Gleichung (2.46), welche die Änderung des Winkels  $\vartheta$  beschreibt, von dem  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{C}_i$  abhängen.

Um das Werkstoffgesetz in das Prinzip der virtuellen Arbeit nach Gleichung (3.26) einsetzen zu können, muß das Inkrement des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors durch den Zuwachs der Cauchy-Spannungen gemäß Gleichung (3.27) ausgedrückt werden. Eine Integration des Werkstoffgesetzes von  $t$  bis zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  ist nicht ohne weiteres möglich, da der Funktionsverlauf der von  $t$  abhängigen Größen gerade gesucht wird, also nicht bekannt ist. Wenn deshalb im folgenden diese Größen konstant zu ihren bekannten Werten zum Zeitpunkt  $t$  gesetzt werden - das entspricht der expliziten Eulerintegration -, dann geschieht dies im Bewußtsein, daß sich eine Gleichgewichtsiteration anschließen wird.

Mit der Näherung

$$\Delta_t \mathbf{S} \approx {}^t \dot{\mathbf{S}} \Delta t \quad (3.29)$$

reduziert sich das Problem der Integration auf die Bestimmung der substantiellen Zeitableitung des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors aus der Beziehung

$${}^\tau \boldsymbol{\sigma} = \frac{{}^\tau \rho}{{}^t \rho} \mathbf{F} {}^t \mathbf{S} \mathbf{F}^T, \quad t \leq \tau \leq t + \Delta t. \quad (3.30)$$

Die substantielle Zeitableitung der Gleichung (3.30) ergibt

$${}^\tau \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{{}^\tau \dot{\rho}}{{}^t \rho} \mathbf{F} {}^t \mathbf{S} \mathbf{F}^T + \frac{{}^\tau \rho}{{}^t \rho} (\dot{\mathbf{F}} {}^t \mathbf{S} \mathbf{F}^T + \mathbf{F} {}^t \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T + \mathbf{F} {}^t \mathbf{S} \dot{\mathbf{F}}^T), \quad (3.31)$$

mit

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F}. \quad (3.32)$$

Zum Zeitpunkt  $\tau = t$  gilt

$$\mathbf{F} = \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}, \quad J = 1, \quad (3.33)$$

woraus sich mit der objektiven Zeitableitung nach Gleichung (2.35)

$${}^t \dot{\mathbf{S}} = {}^t \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} + {}^t \boldsymbol{\omega} {}^t \boldsymbol{\sigma} - {}^t \boldsymbol{\sigma} {}^t \boldsymbol{\omega} - \frac{{}^\tau \dot{\rho}}{{}^t \rho} {}^t \boldsymbol{\sigma} - {}^t \mathbf{L} {}^t \boldsymbol{\sigma} - {}^t \boldsymbol{\sigma} ({}^t \mathbf{L})^T \quad (3.34)$$

ergibt. Mit  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{W} - \mathbf{W}^p$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{d} + \mathbf{W}$  und  $\dot{\rho}/\rho = -\text{tr}(\mathbf{d})$  folgt

$$\dot{\mathbf{S}} = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} + \text{tr}(\mathbf{d})\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{d}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{d} - \mathbf{W}^p\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^p. \quad (3.35)$$

Der Dehnungsgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{d}$  läßt sich unter der Annahme zeitlich konstanter Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \text{const.} = \frac{D\mathbf{r}}{dt} = \frac{D\mathbf{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} \quad (3.36)$$

mit Hilfe der Verschiebungen ausdrücken:

Zum betrachteten Zeitpunkt  $\tau = t$  fallen die aktuellen Koordinaten mit denen der Referenzkonfiguration zusammen, d.h.

$${}^t\mathbf{d} = \frac{1}{2\Delta t} (\text{Grad}\mathbf{u} + (\text{Grad}\mathbf{u})^T) = \frac{1}{\Delta t} {}^t\boldsymbol{\varepsilon}_l. \quad (3.37)$$

Setzt man Gleichung (3.35) mit der Beziehung (3.37) und dem Werkstoffgesetz (3.27) in Gleichung (3.29) ein, so erhält man für den Zuwachs des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors

$$\Delta {}^t\mathbf{S} \approx {}^t\mathbf{C} {}^t\boldsymbol{\varepsilon}_l - (\mathbf{C}_i\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{W}^p\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^p)\Delta t + \text{tr}({}^t\boldsymbol{\varepsilon}_l){}^t\boldsymbol{\sigma} - {}^t\boldsymbol{\varepsilon}_l {}^t\boldsymbol{\sigma} - {}^t\boldsymbol{\sigma} {}^t\boldsymbol{\varepsilon}_l \quad (3.38)$$

und damit für das Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\begin{aligned} & \int_{{}^tV} \{ {}^t\mathbf{C} {}^t\boldsymbol{\varepsilon}_l + \text{tr}({}^t\boldsymbol{\varepsilon}_l){}^t\boldsymbol{\sigma} - {}^t\boldsymbol{\varepsilon}_l {}^t\boldsymbol{\sigma} - {}^t\boldsymbol{\sigma} {}^t\boldsymbol{\varepsilon}_l \} \cdot \delta {}^t\mathbf{e} {}^t dV + \int_{{}^tV} {}^t\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta {}^t\boldsymbol{\eta} {}^t dV \\ & = \delta A_V + \delta A_A - \int_{{}^tV} {}^t\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta {}^t\mathbf{e} {}^t dV + \Delta t \int_{{}^tV} (\mathbf{C}_i\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{W}^p\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^p) \cdot \delta {}^t\mathbf{e} {}^t dV. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Diese Gleichung stellt die linearisierte Form des Prinzip der virtuellen Arbeit (3.21) dar und liefert nur eine erste Näherung für das gesuchte Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$ . Es soll ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß sich die Näherungen zur Berechnung des Spannungsinkrementes  $\Delta {}^t\mathbf{S}$  nur auf die Ermittlung der Steifigkeitsmatrix beziehen. Die für die Gleichgewichtsiteration benötigten Spannungen werden ohne diese Näherungen berechnet. Als nächstes wird das Prinzip der virtuellen Arbeit für diese Iteration aufbereitet:

### 3.2.6 Inkrementelle Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit

Da das nichtlineare Gleichungssystem (3.21) für das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  mit Hilfe einer Gleichgewichtsoperation gelöst werden soll, muß das Problem inkrementell in den

Verschiebungen formuliert werden. Dazu wird die unbekannte Verschiebung  ${}^t\mathbf{u}$  durch die Folge  ${}^{(i)}\mathbf{u}$  mit

$${}^{(i)}\mathbf{u} = {}^{(i-1)}\mathbf{u} + \Delta^{(i)}\mathbf{u} \ , \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.40)$$

angenähert.

Dementsprechend wird auch die Verzerrung  ${}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{\varepsilon}$  durch  ${}^{(i)}{}_t\boldsymbol{\varepsilon}$  approximiert

$${}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{\varepsilon} \approx {}^{(i)}{}_t\boldsymbol{\varepsilon} \ . \quad (3.41)$$

Aus der Variation der Verschiebungen

$$\delta {}^{(i)}\mathbf{u} = \delta ({}^{(i-1)}\mathbf{u} + \Delta^{(i)}\mathbf{u}) = \delta \Delta^{(i)}\mathbf{u} \quad (3.42)$$

folgt

$$\delta {}^{(i)}{}_t\boldsymbol{\varepsilon} = \delta \Delta^{(i)}{}_t\boldsymbol{\varepsilon} + \delta \Delta^{(i)}{}_t\boldsymbol{\eta} \ , \quad (3.43)$$

wobei in

$$\begin{aligned} \delta \Delta^{(i)}{}_t\boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\delta \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u}) + \delta \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u})^T \\ &\quad + \delta \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u})^T \text{Grad}({}^{(i-1)}\mathbf{u}) \\ &\quad + \text{Grad}({}^{(i-1)}\mathbf{u})^T \delta \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u})) \end{aligned} \quad (3.44)$$

die in  $\Delta^{(i)}\mathbf{u}$  linearen und in

$$\begin{aligned} \delta \Delta^{(i)}{}_t\boldsymbol{\eta} &= \frac{1}{2} (\delta \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u})^T \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u}) \\ &\quad + \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u})^T \delta \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u})) \end{aligned} \quad (3.45)$$

die in  $\Delta^{(i)}\mathbf{u}$  quadratischen Terme zusammengefaßt sind. Für  $i = 1$  wird  ${}^{(i-1)}\mathbf{u} = {}^{(0)}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , und die Gleichungen (3.44) und (3.45) gehen in die entsprechenden Beziehungen (3.24) und (3.25) über. Nach Aufteilung der Spannungen  ${}^{(i)}\mathbf{S}$  in den bekannten Anteil  ${}^{(i-1)}\mathbf{S}$  und das Inkrement  $\Delta^{(i)}\mathbf{S}$

$$\Delta^{(i)}\mathbf{S} = {}^{(i)}\mathbf{S} - {}^{(i-1)}\mathbf{S} \quad (3.46)$$

stellt sich das Prinzip der virtuellen Arbeit folgendermaßen dar:

$$\begin{aligned} &\int_{{}^tV} \Delta^{(i)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta^{(i)}{}_t\boldsymbol{\varepsilon} \, {}^t dV + \int_{{}^tV} \Delta^{(i)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta^{(i)}{}_t\boldsymbol{\eta} \, {}^t dV \\ &+ \int_{{}^tV} {}^{(i-1)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta^{(i)}{}_t\boldsymbol{\eta} \, {}^t dV = \delta A_V + \delta A_A - \int_{{}^tV} {}^{(i-1)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta^{(i)}{}_t\boldsymbol{\varepsilon} \, {}^t dV \ . \end{aligned} \quad (3.47)$$

Da das zweite Integral auf der linken Seite Größen enthält, die gegenüber den restlichen von höherer Ordnung klein sind, wird es in der Iteration nicht berücksichtigt. Für  $i = 1$

stimmt die Formulierung (3.47) mit der Gleichung (3.26) überein, wenn in beiden Fällen das Inkrement  $\Delta \mathbf{S}$  in gleicher Weise angenähert wird.

Das Inkrement  $\Delta^{(i)} \mathbf{S}$  wird aus Gleichung (3.38) bestimmt, indem in  ${}_t \boldsymbol{\varepsilon}_l$  aus der Beziehung (3.37) das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  durch  $\Delta^{(i)} \mathbf{u}$  ersetzt wird. Dann folgt mit der Bezeichnung

$$\Delta^{(i)} {}_t \boldsymbol{\varepsilon}_l = \frac{1}{2} ( \text{Grad}(\Delta^{(i)} \mathbf{u}) + \text{Grad}(\Delta^{(i)} \mathbf{u})^T ) \quad (3.48)$$

das Spannungsinkrement

$$\begin{aligned} \Delta^{(i)} \mathbf{S} \approx & {}_t \mathbf{C} \Delta^{(i)} {}_t \boldsymbol{\varepsilon}_l + \text{tr}(\Delta^{(i)} {}_t \boldsymbol{\varepsilon}_l) {}_t \boldsymbol{\sigma} - \Delta^{(i)} {}_t \boldsymbol{\varepsilon}_l {}_t \boldsymbol{\sigma} - {}_t \boldsymbol{\sigma} \Delta^{(i)} {}_t \boldsymbol{\varepsilon}_l \\ & - \{ \mathbf{C}_i \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{W}^p \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{W}^p \} \Delta t, \end{aligned} \quad (3.49)$$

wobei der Klammerausdruck  $\{\dots\}$  und die Größen  ${}_t \mathbf{C}$  und  ${}_t \boldsymbol{\sigma}$  konstant mit ihren Anfangswerten zum Zeitpunkt  $t$  belegt sind.

Die Gleichungen (3.47) und (3.49) bilden zusammen den Ausgangspunkt für die inkrementelle FE-Formulierung.

### 3.2.7 Elemente und Ansatzfunktionen

Es stellt sich nun die Aufgabe, geeignete Ansatzfunktionen mit zu bestimmenden Freiwerten für das unbekannte Verschiebungsfeld  $\Delta^{(i)} \mathbf{u}$  zu finden, um die Volumenintegration in Gleichung (3.47) vorwegnehmen zu können. Diese Aufgabe wäre unlösbar bzw. das Ergebnis zu ungenau, wenn das ganze Gebiet auf einmal betrachtet würde, da das tatsächliche Verschiebungsfeld viel zu komplex ist. Stattdessen - und das ist gerade die Idee der Finite-Elemente-Methode - wird der betrachtete Körper in einzelne diskrete Bereiche aufgeteilt. Bei genügend hoher Anzahl solcher finiten Elemente reicht auf Elementebene ein weniger komplexer Ansatz aus, um gute Ergebnisse zu erzielen. Die Integrale über das ganze Gebiet im Prinzip der virtuellen Arbeit (3.47) werden dann durch die Summe der Integrale über die Teilvolumina ersetzt. Um die Elementsteifigkeitsmatrix etc. zu bestimmen, muß Gleichung (3.47) für jedes Element angeschrieben werden. Erst durch den Zusammenbau der Matrizen aus den einzelnen Elementen gemäß Gleichung (3.47) und nach Einarbeiten der geometrischen Randbedingungen entsteht ein lösbares lineares Gleichungssystem, aus dem die Freiwerte für das gesamte Gebiet gleichzeitig bestimmt werden können.

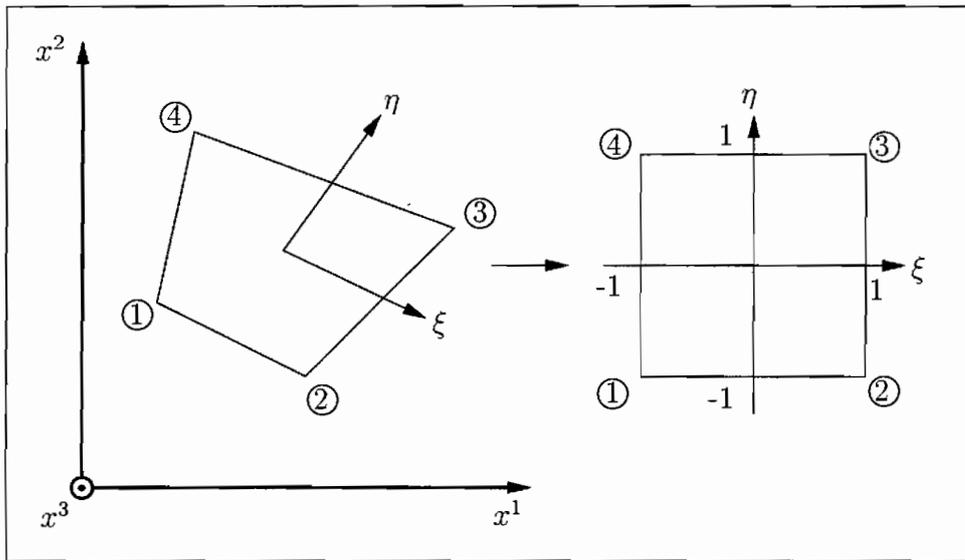


Abb. 3.3: Vierknotenelement

Bei zweidimensionalen Problemen hat sich die Aufteilung in Dreiecks- und Viereckselemente bewährt. Der Vorteil der Dreieckselemente liegt in der besseren Anpassungsmöglichkeit an komplizierte Geometrien. Schwierigkeiten treten jedoch nach GALLAGHER [Gal76] durch geometrische Anisotropie und unterschiedliches Konvergenzverhalten bei verschiedenen Netzen auf.

Die Wahl der Ansätze bei einem finiten Element hat entscheidenden Einfluß auf Rechenzeit, Genauigkeit, Konvergenzverhalten und numerische Stabilität der gesamten Rechnung.

Aufgrund der großen Effektivität (BATHE [Bat90]) finden isoparametrische Ansätze für Vier-Knoten-Scheibenelemente Verwendung (vgl. Abb. 3.3):

$$x^\alpha = \sum_{j=1}^4 h_j x_j^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad (3.50)$$

$$\Delta^{(i)} u^\alpha = \sum_{j=1}^4 h_j \Delta^{(i)} u_j^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad (3.51)$$

mit den Formfunktionen

$$h_j = \frac{1}{4} (1 + \xi_j \xi) (1 + \eta_j \eta). \quad (3.52)$$

Der Knoten  $j$  ist bezüglich des globalen  $x^1, x^2$ -Koordinatensystems durch die Koordinaten  $x_j^1$  und  $x_j^2$  und bezüglich des lokalen  $\xi, \eta$ -Koordinatensystems durch die Koordinaten

$\xi_j$  und  $\eta_j$  gekennzeichnet. Die Formfunktion  $h_j$  hat am Knoten  $j$  den Wert 1 und sonst 0. Diese Form der Ansatzfunktion mit den Parametern  $\Delta^{(i)}u_j^\alpha$  hat den Vorteil, daß die zu berechnenden Freiwerte eine physikalische Bedeutung aufweisen. Es sind gerade die Knotenwerte des unbekanntes Verschiebungsfeldes  $\Delta^{(i)}\mathbf{u}$  im  $i$ -ten Schritt der Gleichgewichtsiteration.

### 3.2.8 Gleichgewichtsiteration

Der Ansatz (3.51) wird unter Verwendung der Gleichungen (3.44), (3.45), (3.48) und (3.49) in das Prinzip der virtuellen Arbeit (3.47) auf Elementebene eingesetzt. Dabei läßt sich die Variation  $\delta[\Delta^{(i)}\mathbf{u}]$  ausklammern. Die Flächen und Volumenintegration erfolgt numerisch mittels der Gauß-Quadratur (optimierte Gewichtungsfaktoren und Lage der Stützstellen).

Nach Zusammenbau der so berechneten Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren erhält man das linearisierte Gleichungssystem für die Inkremente der Knotenpunktverschiebungen

$$[\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_{nl}] [\Delta^{(i)}\mathbf{u}] = [\mathbf{R}_p] - [{}^{(i-1)}\mathbf{F}] - \{[\mathbf{R}_q]\} . \quad (3.53)$$

Darin bezeichnen  $[\mathbf{K}_l]$  und  $[\mathbf{K}_{nl}]$  den linearen bzw. nichtlinearen Anteil der Systemsteifigkeitsmatrix, der Lastvektor  $[\mathbf{R}_p]$  enthält die Knotenlasten einschließlich der durch Kondensation berücksichtigten geometrischen Randbedingungen,  $[{}^{(i-1)}\mathbf{F}]$  umfaßt die aus dem vorangegangenen Iterationsschritt stammenden Ungleichgewichtslasten, und  $[\mathbf{R}_q]$  kann als viskoplastischer Lastvektor angesehen werden.

Die Lösung des Gleichungssystems liefert nur eine Näherung für  $[{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}]$

$$[{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}] \approx [{}^{(i)}\mathbf{u}] = [{}^{(i-1)}\mathbf{u}] + [\Delta^{(i)}\mathbf{u}] . \quad (3.54)$$

Mit der modifizierten Newton-Raphson-Iteration kann die Lösung verbessert werden, indem die rechte Seite von Gleichung (3.53) als Funktion von  $[{}^{(i)}\mathbf{u}]$  neu berechnet wird. Aus dem verbleibenden Residuum resultiert ein weiterer Verformungszuwachs usw.. Dabei wird konstant mit der Steifigkeitsmatrix zum Zeitpunkt  $t$  gearbeitet. In den Vektor der Ungleichgewichtslasten geht  $[{}^{(i)}\mathbf{u}]$  allerdings nicht direkt ein, sondern nur über die Spannung  ${}^{(i-1)}\mathbf{S}$  (vgl. Gleichung (3.47)).

### 3.2.9 Zeitintegration

Nach jedem Schritt der Gleichgewichtsiteration müssen also die Spannungen  ${}^{(i)}\mathbf{S}$  auf Elementebene neu ermittelt werden. Die Exaktheit einer FE-Analyse hängt in erster Linie davon ab, wie genau die rechte Seite des linearisierten Gleichungssystems (3.53) berechnet wird, während das Konvergenzverhalten vor allem von der Steifigkeitsmatrix beeinflusst wird. Um  ${}^{(i)}\mathbf{S}$  zu bestimmen, werden die konstitutiven Gleichungen (3.27) und (3.28) numerisch von  $t$  bis  $t + \Delta t$  integriert und daran anschließend die Cauchy-Spannungen in 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungen transformiert. Für die Integration werden diese Beziehungen zu einem Differentialgleichungssystem 1. Ordnung umgeformt, auf dessen linker Seite nur die substantiellen Ableitungen der zu berechnenden Größen steht, d.h. die objektive Zeitableitung des Spannungsvektors nach Gleichung (2.32) ist einzusetzen.

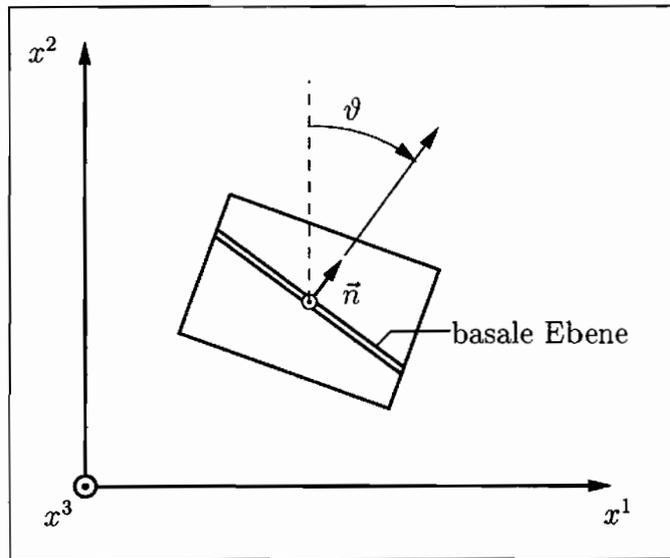


Abb. 3.4: Finites Element mit basaler Ebene

Mit der auf das verwendete FE-Programm angepassten Notation (vgl. Abb. 3.4) folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} = & c_{e11} v_{1,1} + c_{e12} v_{2,2} + c_{e13} (v_{1,2} + v_{2,1}) \\ & - c_{44} k_v \lambda (c_{i11} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 2 c_{i31} \sigma_{12}) + 2 \sigma_{12} \dot{\vartheta} \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{22} = & c_{e12} v_{1,1} + c_{e22} v_{2,2} + c_{e23} (v_{1,2} + v_{2,1}) \\ & + c_{44} k_v \lambda (c_{i11} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 2 c_{i31} \sigma_{12}) - 2 \sigma_{12} \dot{\vartheta} \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{12} = & c_{e13} v_{1,1} + c_{e23} v_{2,2} + c_{e33} (v_{1,2} + v_{2,1}) \\ & - c_{44} k_v \lambda (c_{i31} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + c_{i33} \sigma_{12}) - (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \dot{\vartheta} \end{aligned} \quad (3.57)$$

mit

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{2} (v_{1,2} - v_{2,1}) - \frac{1}{4} k_v \lambda (c_{\vartheta_1} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + c_{\vartheta_2} \sigma_{12}) . \quad (3.58)$$

Der Anteil  $2 \sigma_{12} \dot{\vartheta}$  bzw.  $(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \dot{\vartheta}$  entstammt dem Term  $(\mathbf{P}^{-1})' \mathbf{P}$  in der objektiven Zeitableitung (2.32). Durch Einsetzen von  $\dot{\vartheta}$  und Hinzunahme der Evolutionsgleichung (2.20) für die Versetzungsdichte  $\lambda$  folgt das vollständige Differentialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} = & \sigma_{12} (v_{1,2} - v_{2,1}) + c_{e11} v_{1,1} + c_{e12} v_{2,2} + c_{e13} (v_{1,2} + v_{2,1}) \\ & - c_{44} k_v \lambda (c_{i11} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 2 c_{i31} \sigma_{12}) - \frac{1}{2} \sigma_{12} k_v \lambda (c_{\vartheta_1} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + c_{\vartheta_2} \sigma_{12}) \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{22} = & -\sigma_{12} (v_{1,2} - v_{2,1}) + c_{e12} v_{1,1} + c_{e22} v_{2,2} + c_{e23} (v_{1,2} + v_{2,1}) \\ & + c_{44} k_v \lambda (c_{i11} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + 2 c_{i31} \sigma_{12}) + \frac{1}{2} \sigma_{12} k_v \lambda (c_{\vartheta_1} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + c_{\vartheta_2} \sigma_{12}) \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{12} = & -\frac{1}{2} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) (v_{1,2} - v_{2,1}) + c_{e13} v_{1,1} + c_{e23} v_{2,2} + c_{e33} (v_{1,2} + v_{2,1}) \\ & - c_{44} k_v \lambda (c_{i31} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + c_{i33} \sigma_{12}) + \frac{1}{4} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) k_v \lambda (c_{\vartheta_1} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + c_{\vartheta_2} \sigma_{12}) \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{2} (v_{1,2} - v_{2,1}) - \frac{1}{4} k_v \lambda (c_{\vartheta_1} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + c_{\vartheta_2} \sigma_{12}) \quad (3.62)$$

$$\dot{\lambda} = -c_{\lambda_1} \tau_b \lambda + c_{\lambda_2} \tau_b^4 , \quad (3.63)$$

mit  $\tau_b$  nach Gleichung (2.60)

$$\tau_b = \frac{1}{2} |c_{\vartheta_1} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + c_{\vartheta_2} \sigma_{12}| \quad (3.64)$$

und mit den Abkürzungen

$$c_{\vartheta_1} = \sin 2\vartheta , \quad c_{\vartheta_2} = 2 \cos 2\vartheta , \quad (3.65)$$

$$c_{\lambda_1} = \frac{2 k_{vb}}{d} , \quad c_{\lambda_2} = \frac{2 \mu_l k_{vb}}{3 \pi G b d} , \quad k_v = b k_{vb} , \quad (3.66)$$

$$c_{i11} = \frac{1}{2} \sin^2 2\vartheta , \quad c_{i31} = \frac{1}{4} \sin 4\vartheta , \quad c_{i33} = \cos^2 2\vartheta , \quad (3.67)$$

sowie mit den Elastizitätskoeffizienten  $c_{e_{ij}}$  als Funktionen des Winkels  $\vartheta$ , die getrennt nach dem ebenen Verzerrungszustand und dem ebenen Spannungszustand in den Gleichungen

(2.57) bzw. (2.58) aufgelistet sind.

In den konstitutiven Gleichungen treten die Geschwindigkeiten der Körperpunkte abgeleitet nach den aktuellen raumfesten Koordinaten auf. Da die FE-Analyse nur Konfigurationen zu diskreten Zeitpunkten ergibt, muß über den Geschwindigkeitsverlauf eine geeignete Annahme getroffen werden. Die Zeitintegration benötigt die Geschwindigkeit zu einem beliebigen Zeitpunkt  $\tau$  innerhalb des Intervalls von  $t$  bis  $t + \Delta t$ . Die Gleichgewichtsiteration liefert ein  ${}^{(i)}\mathbf{u}$  als Näherung für  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ . Daraus berechnen sich die Koordinaten  ${}^{t+\Delta t}x_j^\alpha$  des Knotens  $j$  zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  näherungsweise zu  ${}^{t+\Delta t}x_j^\alpha \approx {}^t x_j^\alpha + {}^{(i)}u_j^\alpha$ . Im weiteren wird der Iterationsindex  $i$  der Übersicht halber weggelassen. Bestimmt man die Ortskoordinaten  ${}^\tau x_j^\alpha$  aus einer linearen Interpolation zwischen  ${}^t x_j^\alpha$  und  ${}^{t+\Delta t}x_j^\alpha$ , so entspricht dies der Annahme einer konstanten Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit des Knotens  $j$  zum Zeitpunkt  $\tau$  in  $\alpha$ -Richtung errechnet sich dann zu:

$${}^\tau v_{\alpha j} = \frac{{}^\tau x_j^\alpha - {}^t x_j^\alpha}{\tau - t} = \frac{{}^\tau x_j^\alpha - {}^t x_j^\alpha}{\Delta \tau} , \quad (3.68)$$

also auch zu

$${}^\tau v_{\alpha j} = \frac{{}^{t+\Delta t}x_j^\alpha - {}^t x_j^\alpha}{\Delta t} . \quad (3.69)$$

Durch Multiplikation mit den Formfunktionen  $h_j$  und nach Anwendung der Einsteinschen Summationskonvention ergibt sich das Geschwindigkeitsfeld zu:

$${}^\tau v_\alpha = h_j {}^\tau v_{\alpha j} = \frac{h_j {}^\tau x_j^\alpha - h_j {}^t x_j^\alpha}{\Delta \tau} = \frac{{}^\tau x^\alpha - {}^t x^\alpha}{\Delta \tau} . \quad (3.70)$$

Dann folgt der Geschwindigkeitsgradient

$$\frac{\partial {}^\tau v_\alpha}{\partial {}^\tau x^\beta} = \frac{\partial}{\partial {}^\tau x^\beta} \left( \frac{{}^\tau x^\alpha - {}^t x^\alpha}{\Delta \tau} \right) = \frac{1}{\Delta \tau} \left( \frac{\partial h_j}{\partial {}^\tau x^\beta} {}^\tau x_j^\alpha - \frac{\partial h_j}{\partial {}^\tau x^\beta} {}^t x_j^\alpha \right) = \frac{\partial h_j}{\partial {}^\tau x^\beta} {}^\tau v_{\alpha j} , \quad (3.71)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^\tau v_\alpha}{\partial {}^\tau x^1} &= \frac{1}{J} ({}^\tau x_{,\eta}^2 h_{j,\xi} - {}^\tau x_{,\xi}^2 h_{j,\eta}) {}^\tau v_{\alpha j} \\ \frac{\partial {}^\tau v_\alpha}{\partial {}^\tau x^2} &= \frac{1}{J} (-{}^\tau x_{,\eta}^1 h_{j,\xi} + {}^\tau x_{,\xi}^1 h_{j,\eta}) {}^\tau v_{\alpha j} , \end{aligned} \quad (3.72)$$

oder auch

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^\tau v_\alpha}{\partial {}^\tau x^1} &= \frac{1}{J} (h_{k,\eta} {}^\tau x_k^2 h_{j,\xi} - h_{k,\xi} {}^\tau x_k^2 h_{j,\eta}) {}^\tau v_{\alpha j} \\ \frac{\partial {}^\tau v_\alpha}{\partial {}^\tau x^2} &= \frac{1}{J} (-h_{k,\eta} {}^\tau x_k^1 h_{j,\xi} + h_{k,\xi} {}^\tau x_k^1 h_{j,\eta}) {}^\tau v_{\alpha j} , \end{aligned} \quad (3.73)$$

mit

$$\begin{aligned} J &= \tau_{x^1, \xi} \tau_{x^2, \eta} - \tau_{x^1, \eta} \tau_{x^2, \xi} \\ &= h_{k, \xi} \tau_{x_k^1} h_{j, \eta} \tau_{x_j^2} - h_{k, \eta} \tau_{x_k^1} h_{j, \xi} \tau_{x_j^2} \end{aligned} \quad (3.74)$$

und

$$\tau_{x_j^\alpha} = {}^{t+\Delta t}x_j^\alpha \frac{\Delta \tau}{\Delta t} + {}^t x_j^\alpha \left(1 - \frac{\Delta \tau}{\Delta t}\right). \quad (3.75)$$

Mit konstanter Geschwindigkeit ist der Geschwindigkeitsgradient als Funktion der lokalen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  nur noch von den „Parametern“  $\tau_{x_j^\alpha}$  abhängig. An dieser Stelle wird deutlich, daß trotz einer Zeitintegration die Belastung nicht in einem Schritt aufgebracht werden kann, da die Annahme eines konstanten Geschwindigkeitsfeldes nur über einen sehr kleinen Zeitraum  $\Delta t$  hinnehmbar ist.

Das Differentialgleichungssystem erster Ordnung für die Spannungen und die internen Variablen wird mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung an den Gaußpunkten gelöst.

### 3.3 Verifikationsrechnungen

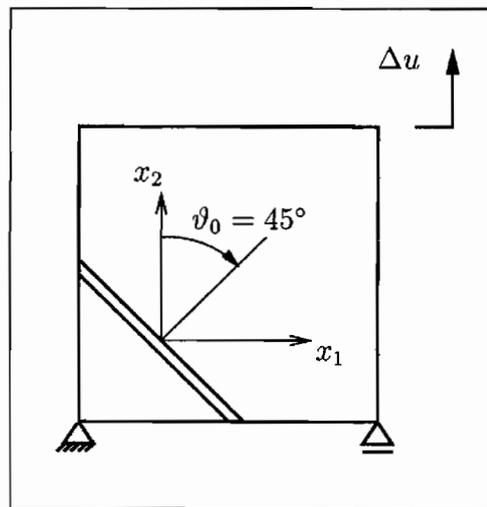
Die erfolgreiche programmtechnische Umsetzung der FE-Formulierung soll durch den Vergleich zwischen der FE-Lösung und dem Ergebnis der Stoffgesetzintegration (SG-Integration) für einaxiale Zugversuche bestätigt werden. Gerechnet wird, sofern nicht etwas anderes angegeben ist, mit einer Dehngeschwindigkeit von  $\dot{\epsilon} = \pm 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  bei den weggesteuerten Versuchen und mit den Referenzwerten der Werkstoffparameter nach BISCHOFF-BEIERMANN [BB92](S.39)(für eine Temperatur  $T = -5^\circ\text{C}$ ):

- Anfangsversetzungsdichte  $\lambda_0 = 1.0 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{mm}^2}$
- Versetzungsquellenabstand  $d = 10.0 \text{ mm}$
- Versetzungsquellendichte  $\mu_l = 1.0 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{mm MPa}^2}$
- Parameter  $k_{vb} = 8.06 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{s MPa}}$

Da in [BB92] mit einer isotropen Steifigkeit  $K_{ref} = 2000 \text{ MPa}$  gearbeitet wurde, die die elastischen Eigenschaften älterer Prüfmaschinen mitberücksichtigt, sollen zum Vergleich mit der einaxialen Stoffgesetzintegration nach BISCHOFF-BEIERMANN die  $c_{ij}$  in Gleichung (2.23) zunächst isotrop gewählt werden. Mit  $E = K_{ref} = 2000 \text{ MPa}$  und  $\nu = 0.36$  ergeben sich folgende isotrope  $c_{ij}^i$ :

$$\begin{aligned}
 c_{11}^i &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (1-\nu) = 3.364 \cdot 10^3 \text{ MPa} \\
 c_{12}^i &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \nu = 1.893 \cdot 10^3 \text{ MPa} \\
 c_{13}^i &= c_{12}^i = 1.893 \cdot 10^3 \text{ MPa} \\
 c_{33}^i &= c_{11}^i = 3.364 \cdot 10^3 \text{ MPa} \\
 c_{44}^i &= \frac{E}{2(1+\nu)} = 7.352 \cdot 10^2 \text{ MPa}
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Für die FE-Nachrechnung der SG-Integration wird ein quadratisches finites Element mit den Randbedingungen nach Abb. 3.5 einem weggesteuerten Zugversuch unterworfen.  $\vartheta_0$  betrage  $45^\circ$ :



**Abb. 3.5:** Finites Element und Randbedingungen für die FE-Berechnung

Die Spannungs-Dehnungs-Kurve sowie die Entwicklung der Versetzungsdichte  $\lambda$  aus der FE-Rechnung stimmen sehr gut mit den entsprechenden Verläufen nach BISCHOFF-BEIERMANN überein (vgl. Abb. 3.6 und 3.7):

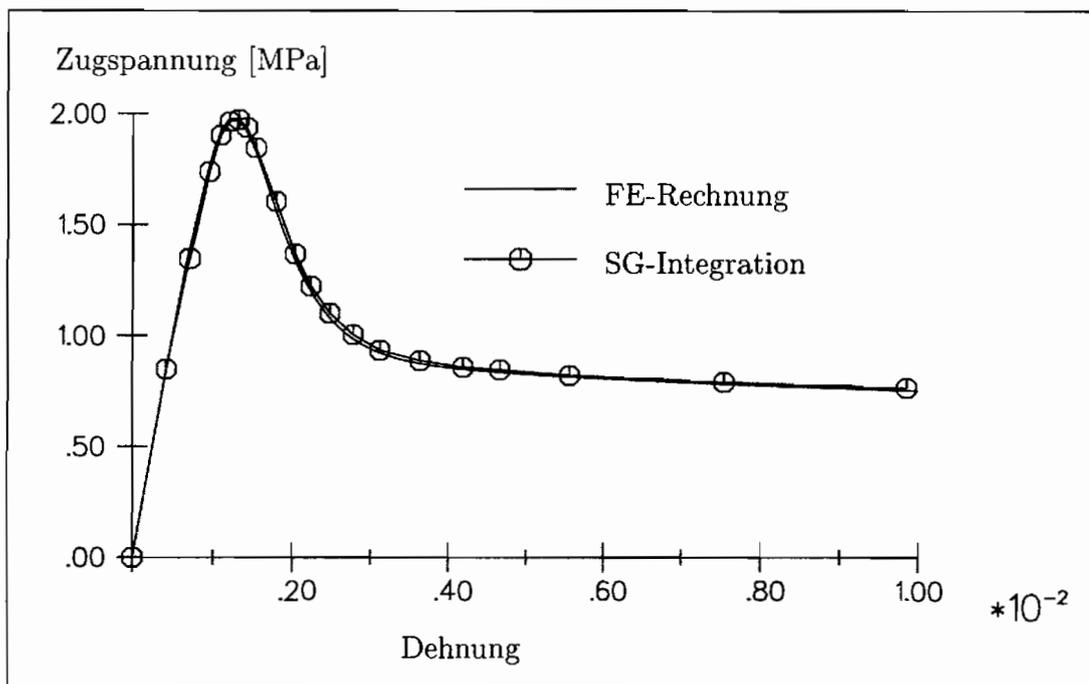


Abb. 3.6: FE-Nachrechnung der SG-Integration nach [BB92] für den Verlauf der Spannung

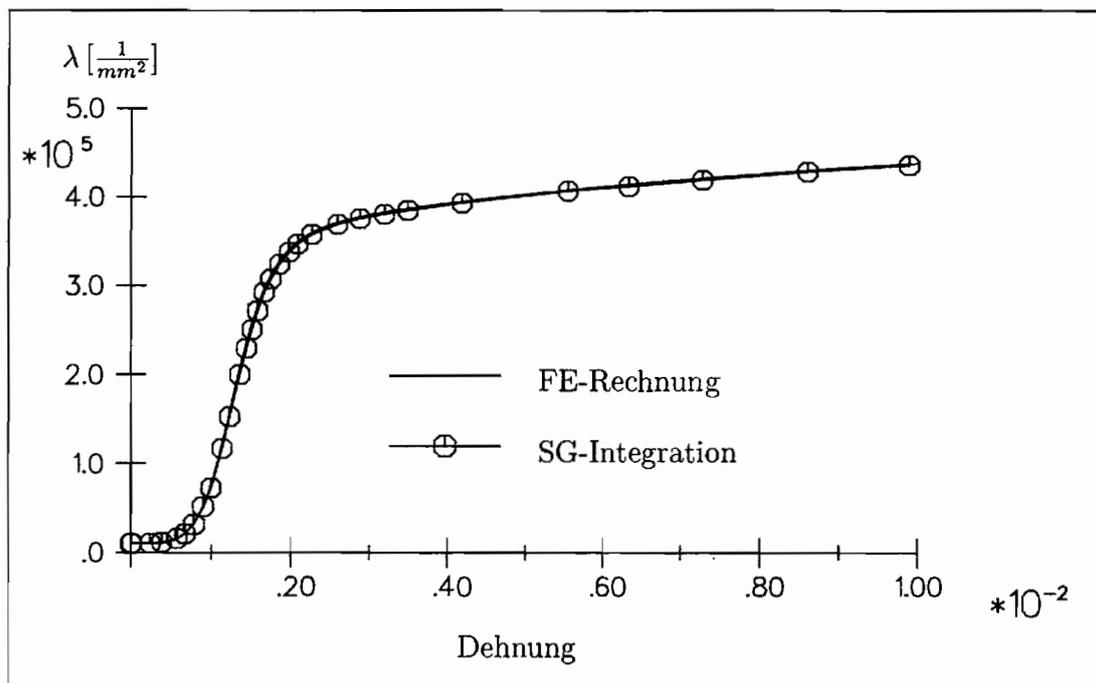


Abb. 3.7: FE-Nachrechnung der SG-Integration nach [BB92] für die Entwicklung der Versetzungsdichte

Für anisotrop elastisch basales Materialverhalten und für ein  $\vartheta_0 = -20^\circ$  werden im Kapitel 4.3 FE-Lösung und Stoffgesetzintegration verglichen.

Für die Rechnung dort und für alle anderen Simulationen wird mit folgenden elastischen Koeffizienten gearbeitet:

Um mit zu den oben angegebenen elastisch isotropen  $c_{ij}^i$  vergleichbaren anisotropen  $c_{ij}$  zu rechnen, werden die anisotropen  $c_{ij}^a$  aus Kapitel (2.1.1) skaliert mit dem Verhältnis  $c_{11}^i/c_{11}^a = 2000 \text{ MPa} / 12999 \text{ MPa} = 0.2588$ . Dabei wurde  $\nu$  gerade so gewählt, daß die neuen  $c_{11}^a$  und  $c_{44}^a$  mit den isotropen  $c_{11}^i$  und  $c_{44}^i$  übereinstimmen. Das  $\nu$  ergab sich also mit den alten  $c_{ij}^a$  aus der Bedingung:

$$\frac{c_{11}^i}{c_{11}^a} c_{44}^a = c_{44}^i, \quad (3.77)$$

woraus mit der Abkürzung  $\frac{c_{44}^a}{c_{11}^a} = c$  folgt:

$$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} c = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.78)$$

und damit:

$$\nu = \frac{\frac{1}{2} - c}{1 - c} = 0.36. \quad (3.79)$$

Dann lauten die neuen  $c_{ij}^a$ :

$$\begin{aligned} c_{11}^a &= 3.364 \cdot 10^3 \text{ MPa} \\ c_{12}^a &= 1.696 \cdot 10^3 \text{ MPa} \\ c_{13}^a &= 1.468 \cdot 10^3 \text{ MPa} \\ c_{33}^a &= 3.671 \cdot 10^3 \text{ MPa} \\ c_{44}^a &= 7.352 \cdot 10^2 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (3.80)$$

## 3.4 Diskretisierung einer Eisprobe mit Probenaufhängung

### 3.4.1 Anforderung an die FE-Struktur

Rechteckige mono- bzw. polykristalline Eisproben werden durch Vierknoten-Scheibenelemente vernetzt. Im Falle des Polykristalls tritt der Unterschied zwischen den einzelnen Körnern nur dadurch hervor, daß den finiten Elementen des einen Kornes andere Anisotropiewinkel  $\vartheta_0$  zugeordnet sind als denen des Nachbarkorns. Die Scheibenelemente sind folglich an den Korngrenzen in gleicher Weise an ihren Eckknoten miteinander gekoppelt wie im Inneren eines Monokristalls (vgl. a. Kapitel 6.1). Folgende Ziele haben einen entscheidenden Einfluß auf die FE-Vernetzung:

1. Der Eigenspannungszustand zu einem bestimmten Belastungszeitpunkt soll durch eine schlagartige Entlastung der Struktur ermittelt werden können.
2. Die makroskopische Spannung zu jedem Lastzeitpunkt interessiert besonders bei den polykristallinen Versuchen.
3. Die Zuordnung der Attribute (Anisotropiewinkel  $\vartheta_0$ ) zu jedem Korn soll für Netzverfeinerungen automatisch erfolgen.
4. Die Randbedingungen für die vernetzte Eisprobe sollen die Probenaufhängung für zweiachsiges Belastungstests simulieren.

Zu Punkt 1: Damit keinerlei Zwängungsspannungen den Eigenspannungszustand im Polykristall verfälschen, muß der Polykristall ab dem Entlastungszeitpunkt einschließlich statisch bestimmt gelagert sein. Da das verwendete FE-Programm im Verlauf einer Rechnung keine Änderungen des Profils der resultierenden Gleichungen zuläßt (vgl. FEAP-Manual [TP90]), können die Randbedingungen nicht verändert werden. Ein zweiwertiges und ein einwertiges Auflager reichen i.a. in den beiden Ecken des befestigten Randes der Struktur nicht aus, da dieser Rand zumindestens beim Polykristall in mehrere Elemente unterteilt und aufgrund der nicht befestigten Zwischenknoten ein unerwünschter Biegespannungszustand z.B. während eines einaxialen Zug- bzw. Druckversuches in der Struktur verursacht wird. Wird zudem solch ein Versuch weggesteuert gefahren, sind auf dem Rand mit der vorgegebenen Verformung Verschiebungsrandbedingungen zu wählen. Schlagartige Entlastung bedingt eine spontan elastische Rückfederung, die gerade beim Polykristall von Randknoten zu Randknoten unterschiedlich sein wird. Diese inhomogene Randverschiebung dürfte kaum vorab geschätzt werden können, um sie dann einfach vorzugeben.

Ein anderes Vorgehen wurde deshalb gewählt: Die Eisprobe wird mit Fachwerk(truss)-Elementen gehalten, und während des weggesteuerten Versuchs werden die Verformungsinkremente über ebenfalls diese Elemente aufgegeben.

Schlagartige Entlastung wird durch schlagartige Herabsetzung der Stabsteifigkeit erreicht. Wie diese Stabsteifigkeiten zu wählen sind, wird etwas später noch erläutert.

Zu Punkt 2: Die Verwendung von truss-Elementen bietet neben den unter Punkt 1 angesprochenen Vorteilen die Möglichkeit, die makroskopische Spannung  $\Sigma$  als Summe der Stabkräfte geteilt durch die Ausgangsquerschnittsfläche bzw. die mittlere Verschiebung des Probenrandes (bei Kriechversuchen und nach Entlastung) für jeden Belastungszeitpunkt zu bestimmen.

Zu Punkt 3: Für die Untersuchung, welchen Einfluß eine feinere Diskretisierung z.B. auf den Verlauf der makroskopischen und mikroskopischen Spannungen hat, wird in Abhängigkeit von zwei Parametern  $a_i$  und  $a_j$  (je einen pro Koordinatenrichtung) jedes Viertelkorn in  $a_i \times a_j$  finite Elemente unterteilt, die FE-Struktur mit den truss-Elementen und eine sogenannte E-Datei erstellt, in der den Strukturelementen die richtigen Kornattribute zugewiesen werden. Diese Daten werden von der Eis-Element-Routine eingelesen und stehen der FE-Berechnung zur Verfügung.

Zu Punkt 4: Zu diesem Zweck sind an die Eisprobe rundherum Auflagerstäbe angeschlossen, über die je nach Lastfallkombination Verformungs- oder Lastinkremente aufgebracht werden können. Für die folgenden 8 ausgewählten Lastfälle (Variable *ibela*) wird die Liste von Makrobefehlen, die die FE-Rechnung steuern (Newton-Raphson-Iteration, Zeitintegration etc.), automatisch erstellt:

C	Lastfall	Belastung in:		Steuerung:	
		1-Richt.	2-Richt.	Wegst.	Kraftst.
C	<i>ibela</i>				
C	1	1		W	
C	2		2	W	
C	3	1	2	W	

C	Lastfall	Belastung in:		Steuerung:	
		1-Richt.	2-Richt.	Wegst.	Kraftst.
C	ibela				
C	4	1			K
C	5		2		K
C	6	1	2		K
C	7	1			K
C			2	W	
C	8		2		K
C		1		W	

Eine Kombination dieser Lastfälle mit Haltezeiten (Kriech- bzw. Relaxationsphase) und mit der schlagartigen Entlastung zur Aufdeckung des Eigenspannungszustandes ist möglich.

### 3.4.2 Modul für das Präprocessing

Wie die Ziele der Punkte 1 bis 4 im vorhergehenden Abschnitt mit Hilfe des entwickelten FORTRAN-Programmes *wabeve* umgesetzt wurden, soll im folgenden etwas detaillierter beschrieben werden:

Beim Start der FE-Rechnung liest das Programm FEAP eine Eingabedatei i-file ein, in der neben den mesh-Kommandos (Angabe der Knotenkoordinaten, Inzidenzen, Randbedingungen, Materialdaten, Belastungen) gerade die macros for solution (Newton-Raphson-Iteration, Zeitintegration, Ausgabe der Ergebnisse etc.) aufgelistet sind, die die FE-Rechnung steuern. Insbesondere kann in den mesh-Modus zurückgesprungen werden, um Lasten, Materialsteifigkeiten ect. zu ändern (vgl. Beschränktheit dieser Änderungen nach Punkt 1). Besondere Bedeutung fällt dem mesh-macro *mate* zu, mit dem die Materialdaten für die Eis- bzw truss-Elemente eingelesen werden. Wie unter Punkt 1 erläutert, kann nach einer Belastungsphase die Änderung der Steifigkeiten bestimmter Auflagerstäbe notwendig werden, etwa um schlagartige Entlastung zu simulieren.

Das Programm *wabeve* erstellt in Abhängigkeit von folgenden Parametern diesen i-file sowie den E-file für die Kornattribute (siehe Punkt 3):

Die Parameter lassen sich mehreren Klassen zuordnen:

- Parameter für die Lastfallkombination:
  - Steuervariable *ibela* (s.o.)
  - Vorgegebene makroskopische Verzerrungs- bzw. Spannungsgeschwindigkeiten in zwei Richtungen:  
*eps1p*, *eps2p* bzw.  
*sig1p*, *sig2p*
  - Belastungszeitinkrement *dt*, ihre Anzahl *it*
  - Haltezeitinkrement (Relaxation bzw. Kriechen) *dtrk*, ihre Anzahl *itrk*
  - Entlastungszeitschritt *dte*, ihre Anzahl *ite* (aber 1. Entlastungszeitschritt mit  $dt=0.001s$ )
- Parameter für die Ergebnisausgabe:
 

*xfile*=file für die Bezeichnung der Dateien, die die Ergebnisse der FE-Berechnung aufnehmen:

  - 1-file und 2-file für die Ausgabe der makroskopischen Spannung und der gemittelten Randverschiebungen in 1- bzw. 2-Richtung
  - A-file für die Ausgabe der mikroskopischen Spannungen, internen Variablen sowie der Greenschen Verzerrungen von Strukturelement-Nr. *ianfa* bis *ienda*
- Parameter für die Geometrie (s.u.):
  - Breite *b* und Höhe *h* der Eisprobe
  - *ews* beschreibt die Kornform
  - Probe besteht aus *i* Viertelwaben in 1-Richtung mal *j* Viertelwaben in 2-Richtung
  - jede Viertelwabe auf  $a_i \times a_j$  finite Elemente verfeinerbar (s.a. oben unter Punkt 3)
  - Eis/Stab-Steifigkeitsverhältnis *gs* und -Nachgiebigkeitsverhältnis *gn*

Die Parameter für die Geometrie sollen im folgenden näher erläutert werden:

Die rechteckige Probe aus monokristallinem Eis wird mit quadratischen Strukturelementen vernetzt, die alle den gleichen Anisotropiewinkel dieses Einkristalls als Attribut besitzen. Der Polykristall hat zwar die gleiche Probenform, besteht jedoch aus verschiedenen

Körnern, deren Anzahl und Form vorgegeben werden müssen. Im Hinblick auf die Untersuchung, welchen Einfluß die Kornform auf das Deformationsverhalten des Polykristalls hat, erweist es sich als zweckmäßig, jedes Korn aus mindestens 4 Strukturelementen aufzubauen und von dem allgemeineren Fall einer sechseckigen, d.h. wabenförmigen Kornform auszugehen:

Die Probe aus Viertelwaben aufzubauen und jeweils vier Viertelwaben zu einem Korn zusammenzufassen, bietet sich an, wenn man wie in Abb. 3.8 von einem Rechteckgitter ausgeht, und in jeder zweiten Reihe zyklisch vertauscht die horizontalen Vierecksseiten betragsmäßig um den gleichen Winkel verdreht:

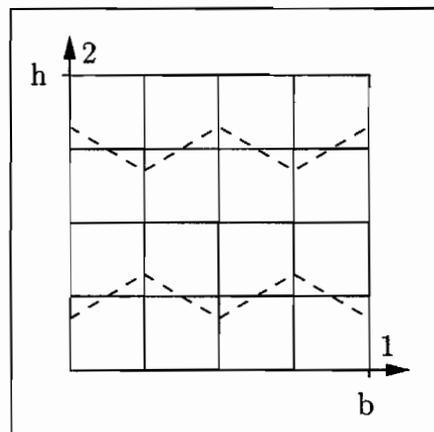


Abb. 3.8: Waben, zugrunde liegendes Rechtecknetz

In Abb. 3.9 ist die Viertelwabe einer  $120^\circ$ -Wabe vermaßt:

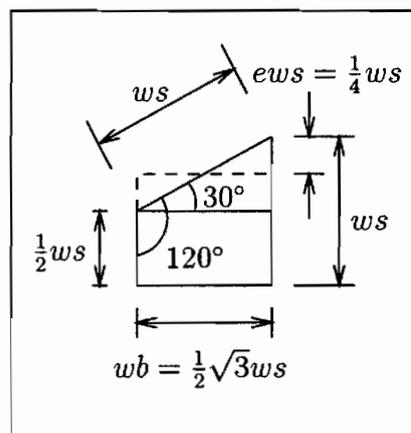


Abb. 3.9: Viertelwabe

Das feste Verhältnis von Wabenbreite zur Wabenseite  $wb/ws = 1/2\sqrt{3}$  bedingt, daß z.B. mit vorgegebener Breite  $b$  und gewählter Anzahl  $i \times j$  Viertelwaben das Programm *wabeve* den Benutzer auffordert, die Anzahl  $j$  noch einmal einzugeben, und ihm dabei zwei  $j$ -Werte und damit zwei Probenhöhen  $h$  vorschlägt, die der gewünschten Probenhöhe am nächsten liegen. Für andere „Neigungen“  $ews$  als  $1/4 ws$  kann die Höhe  $h$  frei gewählt und so beliebige Wabenformen erzeugt werden; speziell für  $ews = 0$  erhält man rechteckige Viertelkörner.

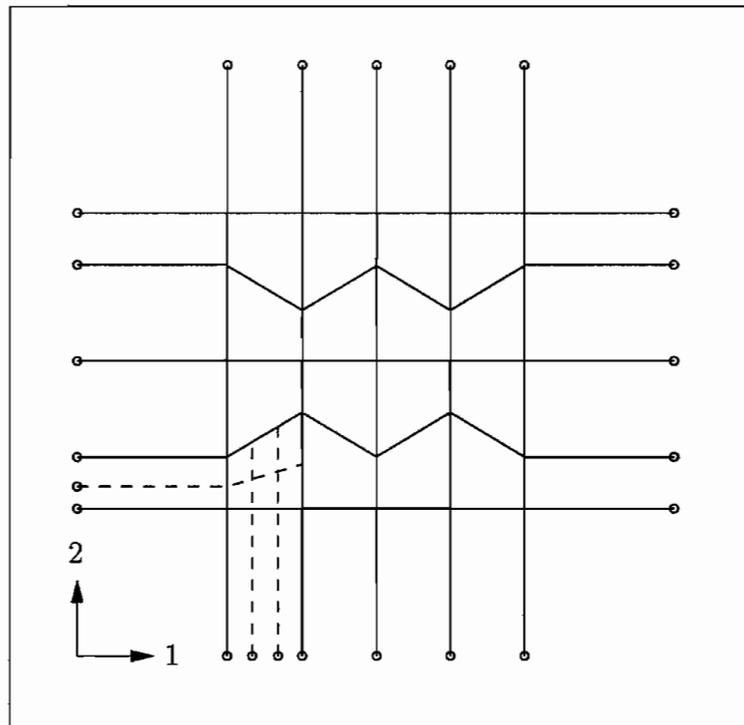
Für die Verfeinerung der Diskretisierung wird jede Viertelwabe durch  $a_i \times a_j$  Elemente ersetzt mit Hilfe des von FEAP (vgl. [TP90] oder [ZT89a]) zur Verfügung gestellten Makros *bloc*, das die Eckknoten der Viertelwabe als Referenzknoten benötigt:

```
bloc
4,ai,aj,1.Knoten,1.Element,material set number
1,x1,x2
2,x1,x2
3,x1,x2
4,x1,x2
```

Die Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  der Referenzknoten werden zeilenweise erzeugt und auf einem Feld abgelegt, wobei in jeder zweiten Knotenreihe die Knoten um das Maß  $ews$  aus ihrer Position im zugrunde liegenden Rechteckgitter (vgl. Abb. 3.9) abwechselnd nach oben und unten verschoben werden.

In einem zweiten Schritt werden jeweils  $a_i \times a_j$  Elemente mit dem Makro *bloc* in das von den 4 Referenzknoten der Viertelwabe aufgespannte Viereck gelegt, wobei jeweils die Nummer des 1. Knotens und des 1. Elementes angegeben werden müssen. In diesem zweiten Schritt wird auch die Element-Attribut-Zuordnung bestimmt und in der E-Datei abgelegt.

Durch Verwendung des *bloc*-Kommandos werden viele Knoten mehrfach erzeugt, die mit Hilfe des *tie*-Kommandos vor dem Start der FE-Berechnung miteinander verbunden werden. Überzählige Knoten werden gelöscht.



**Abb. 3.10:** Eisprobe mit truss-Elementen

Auf die anzuschließenden Fachwerkstäbe als Probenaufhängung (vgl. Abb. 3.10) soll hier nur hinsichtlich der Wahl ihrer Steifigkeit eingegangen werden. Im Idealfall sollten die über die truss-Elemente aufgegebenen Kraft- bzw. Weginkremente nur in der Eisprobe Verformungen hervorrufen. Dazu müßten die Stäbe unendlich steif sein, was in der FE-Simulation eine singuläre Steifigkeitsmatrix verursachen würde. Auch bei einem realen Versuch sind die Verformungen der Probenaufhängung zu berücksichtigen.

Wie der Wert der gewählten „sehr“ großen Stabsteifigkeit für die Belastung und der der „sehr“ kleinen Stabsteifigkeit bei der Entlastung anschaulich interpretiert werden kann, soll untersucht werden, um sich bei der Wahl dieser Werte nicht abhängig zu machen von iterativen Versuchen, „was noch rechenbar ist“. Dabei wird von homogenen Verhältnissen ausgegangen und nur isotrop elastisches Materialverhalten für das Eis angesetzt.

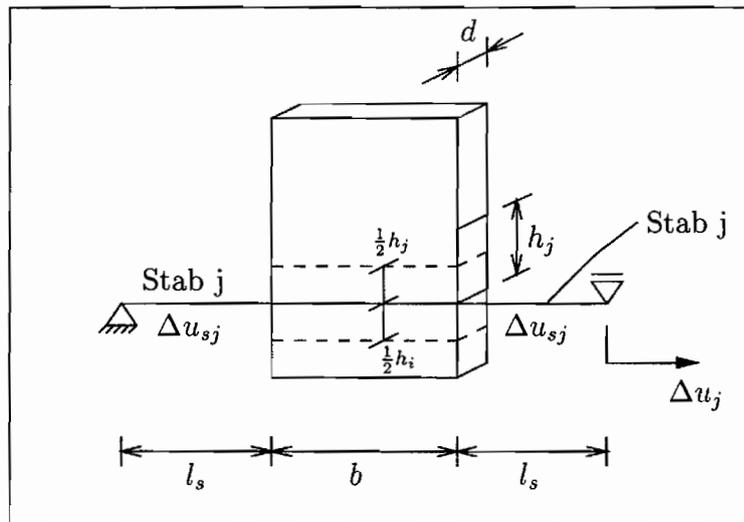


Abb. 3.11: Stab-Eis-Stab-Kette

In Abb. 3.11 wird die Eisprobe in horizontale Streifen unterteilt, die jeweils mit den über ihre Einflußbreiten ( $1/2 h_i$  und  $1/2 h_j$ ) zugehörigen Auflagerstäben eine Kette bilden. Das bei einer Wegsteuerung auf die Kette  $j$  aufgegebene Verformungsincrement  $\Delta u_j$  teilt sich auf Eis und Stäbe wie folgt auf:

$$\Delta u_j = \Delta u_{ej} + 2\Delta u_{sj} . \quad (3.81)$$

Der Anteil der Verformung, der auf die Stäbe entfällt, soll das Maß  $g$  (z.B. 0.1%) nicht überschreiten:

$$\frac{\Delta u_j - \Delta u_{ej}}{\Delta u_j} \leq g \quad (3.82)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\Delta u_{sj}}{\Delta u_{ej} + 2\Delta u_{sj}} \leq g \quad (3.83)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\Delta u_{sj}}{\Delta u_{ej}} \leq g . \quad (3.84)$$

Unter Verwendung gleicher Stablängen  $l_s$  und Stabquerschnittsflächen  $A$ , des E-Moduls  $E_{i,j}$  für die Stäbe  $j$  und des Eis-E-Moduls  $E_{is}$ , sowie nach Anwendung des Hookschen Gesetzes für Eis und Stäbe folgt bei konstanter Kraft innerhalb der Kette  $j$ :

$$\Leftrightarrow g_s := \frac{E_{is} \cdot \frac{1}{2}(h_i + h_j) d / b}{2(E_{i,j} \cdot A) / l_s} \leq g . \quad (3.85)$$

Soll auf die Aufhängung nach Gleichung (3.84) höchstens ein Anteil  $g$  der vorgegebenen Verformung entfallen, so ist das Verhältnis  $gs$  von Eissteifigkeit zur Stabsteifigkeit nach der Beziehung (3.85) zu wählen.

Bis auf die Stäbe, die die statisch bestimmte Lagerung gewährleisten, sind bei schlagartiger Entlastung alle anderen in der Stabsteifigkeit so herabzusetzen, daß die äußeren Zwängungsspannungen möglichst gering ausfallen, um den Eigenspannungszustand nicht zu verfälschen:

Am Ende eines weggesteuerten Versuches wird die bis dahin aufgebaute vorgegebene Verformung konstant gehalten:

$$\Delta u_j = \Delta u_{ej} + 2\Delta u_{sj} = \text{const.} \quad (3.86)$$

Nach Anwendung des Hookschen Gesetzes und Ausklammern der innerhalb einer Kette konstanten Kraft  $F_{i,j}$  folgt mit  $gs$  nach der Definition (3.85) und mit  $\sigma_{Eis}$  für die Spannung im Eisstreifen:

$$F_{i,j} (1 + gs) = \Delta u_j \cdot \frac{(h_i + h_j) d E_{is}}{2b} \quad (3.87)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma_{Eis}}{E_{is}} b (1 + gs) = \Delta u_j. \quad (3.88)$$

Infolge einer schlagartigen Entlastung soll die konstante Verformung  $\Delta u_j$  nach

$$\Delta u_{ej}^E + 2\Delta u_{sj}^E = \Delta u_j \quad (3.89)$$

möglichst ganz allein von der Stabverformung  $\Delta u_{sj}^E$  kompensiert werden, so daß das als elastisch angenommene Eis fast vollständig zurückfedern kann, also seine Verformung  $\Delta u_{ej}^E$  höchstens den Anteil  $q$  an der konstant gehaltenen äußeren Verformung  $\Delta u_j$  besitzt. Diese Bedingungen lauten also:

$$\Delta u_{ej}^E \leq q \cdot \Delta u_j \quad (3.90)$$

$$2\Delta u_{sj}^E \geq (1 - q) \cdot \Delta u_j. \quad (3.91)$$

Mit der Spannung  $\sigma_{Eis}^E$  nach der Entlastung folgt aus der Bedingung (3.90) mit Gleichung (3.88)

$$\frac{\sigma_{Eis}^E}{E_{is}} b \leq q \Delta u_j = q \cdot \frac{\sigma_{Eis}}{E_{is}} b (1 + gs) \quad (3.92)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma_{Eis}^E}{\sigma_{Eis}} \leq q (1 + gs). \quad (3.93)$$

Mit der Spannung  $\sigma_s^E$  in den beiden Stäben der Kette und mit ihrem E-Modul  $E_{i,j}^E$  nach der Entlastung ergibt Bedingung (3.91) mit Gleichung (3.88)

$$\frac{\sigma_s^E}{E_{i,j}^E} 2l_s \geq (1 - q) \Delta u_j = (1 - q) \cdot \frac{\sigma_{Eis}}{E_{is}} b (1 + gs). \quad (3.94)$$

Mit dem Gleichgewicht  $\sigma_{Eis}^E \cdot \frac{1}{2} (h_i + h_j) d = \sigma_s^E \cdot A$  folgt:

$$\frac{b / (E_{is} \cdot \frac{1}{2} (h_i + h_j) d)}{l_s / (E_{i,j}^E A)} \leq \frac{q}{1 - q} \quad (3.95)$$

$$\Leftrightarrow gn := \frac{b / (E_{is} \cdot \frac{1}{2} (h_i + h_j) d)}{l_s / (E_{i,j}^E A)} \leq q. \quad (3.96)$$

Ein kleines Verhältnis  $gn$  von der Eisnachgiebigkeit zur Stabnachgiebigkeit nach Gleichung (3.96) kann mit der Ungleichung (3.93) als kleiner Anteil der äußeren Zwängungsspannung nach der Entlastung an der unmittelbar vor der Belastung anliegenden äußeren Spannung interpretiert werden, wenn  $gs$  nach Gleichung (3.85) klein genug gewählt wird, so daß das Produkt aus  $gn \cdot gs$  als Größe 2. Ordnung vernachlässigt werden kann.

Die Stabsteifigkeiten spielen bei den Lastfallkombinationen im Zusammenhang mit den Auflagerbedingungen an den von der Eisprobe entfernteren Stabenden eine Rolle. Unterschieden nach dem Belastungs- und Entlastungszustand werden in Abhängigkeit von den Lastfällen so viele Stäbe wie möglich mit einer Steifigkeit in der Größenordnung der Eissteifigkeit versehen, um zur Erreichung einer gut konditionierten Steifigkeitsmatrix die Steifigkeitsunterschiede innerhalb der zu rechnenden Struktur möglichst gering zu halten. Ohne hier zu sehr ins Detail gehen zu wollen, sei nur erwähnt, daß z.B. bei einer Kraftsteuerung die Stabsteifigkeit des mit dem Kraftinkrement  $F_{i,j}$  beaufschlagten Stabes in der Größenordnung der Eissteifigkeit gewählt wurde, da die Verformung dieses Stabes bei diesem Lastfall unerheblich ist. Übrigens wird entsprechend der Abb. 3.11 –  $\Delta u_j$  ist nur durch  $F_{i,j}$  zu ersetzen – das gesamte Kraftinkrement  $F$  pro Belastungszeitschritt so auf

die einzelnen Stäbe verteilt, daß ein möglichst homogener Randspannungszustand erreicht wird:

$$\sigma_{Oberfl.} = \frac{F_{i,j}}{\frac{1}{2}(h_i + h_j) \cdot d} = \frac{F}{h \cdot d} \quad (3.97)$$

mit  $h = \sum_{i=1}^{n_{max}} h_i$ ,  $i \in [0, n_{max}]$ ,  $j \in [1, n_{max} + 1]$  und  $h_0 = 0 = h_{n_{max}+1}$ .

An den vertikalen Rändern unterscheiden sich für  $ews \neq 0$  die der Korngrenze benachbarten  $h_i$  und  $h_j$  erheblich voneinander.

Was die mit dem Programm *wabeve* erstellten FE-Strukturen leisten können, wird bei den in den nächsten Kapiteln folgenden FE-Simulationen präsentiert, deren Strukturen mit dem aus *wabeve* entwickelten FORTRAN-Programm *wabez2* vernetzt wurden. *wabez2* unterscheidet sich insofern von *wabeve*, daß zusätzlich in **2**-Richtung gegenüber der in Abb. 3.8 abgebildeten Wabenstruktur am unteren und am oberen Rand jeweils eine Reihe abgeplätteter Viertelwaben, d.h. rechteckiger Viertelkörner, eingefügt wurde, damit innerhalb des Modell-Polykristalls die einzelnen Körner eine möglichst gleiche Größe aufweisen.

Im folgenden Kapitel zeigt die FE-Simulation eines Eis-Einkristalls im Druck- und Zugversuch, wie stark das Verformungsverhalten von der Art der Versuchsprobeneinspannung abhängt und daß die einaxiale Stoffgesetzeintegration, die ja homogene Verhältnisse in der Probe voraussetzt, ganz spezielle Randbedingungen erfordert.

## 4. Einkristall

### 4.1 FE-Simulation eines Druckversuches

Ein einzelnes monokristallines Eiskorn wird aus einer polykristallinen Eisprobe herausgegriffen und sein Deformationsverhalten im simulierten einaxialen Druckversuch untersucht.

Die Eisprobe ist doppelt so hoch wie breit. Ihre basalen Ebenen seien um  $20^\circ$  gegenüber den horizontalen Stirnflächen des Einkristalls geneigt. Das entspricht einem  $\vartheta_0$  von  $-20^\circ$ . Die Probe ist so gelagert, daß an den Stirnflächen oben und unten die Querkontraktion nicht behindert ist:

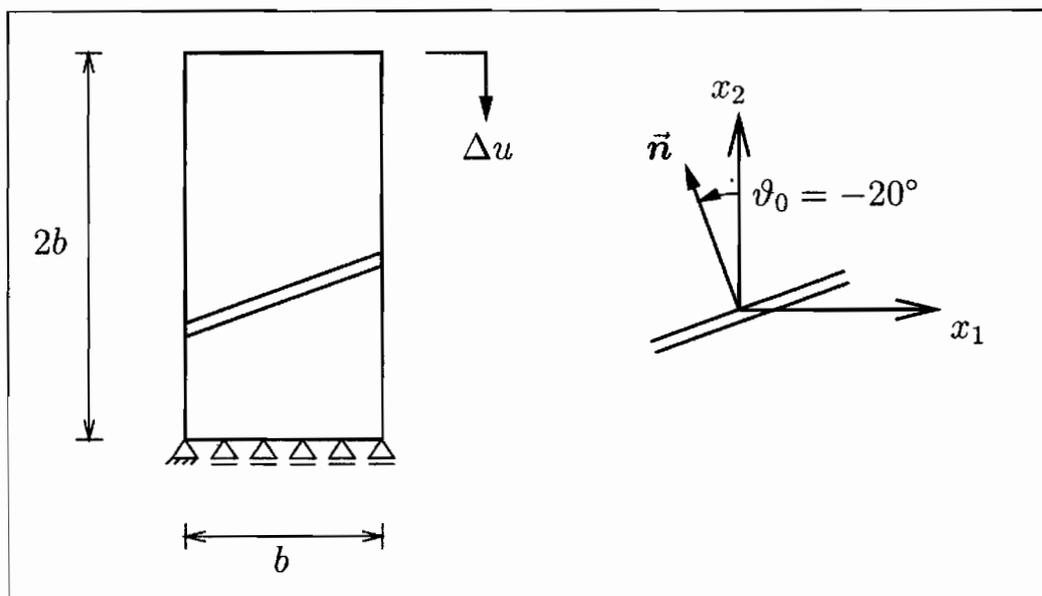


Abb. 4.1: Geometrie eines Einkristalls im Druckversuch

Der Einkristall wird weggesteuert mit der Geschwindigkeit  $\dot{\epsilon} = -1.4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  bis  $-8.2\%$  gestaucht. Der Monokristall antwortet unter der vorgegebenen vertikalen Verformung nicht nur mit der zu erwartenden Querkontraktion, sondern neigt sich zusätzlich um ca.  $15^\circ$  zur Seite (vgl. Abb. 4.2). Die Spannungsverteilung ist sehr inhomogen. Die Versetzungsdichte  $\lambda = \lambda_0 + \Delta \lambda$  hat ebenfalls nicht gleichmäßig zugenommen.

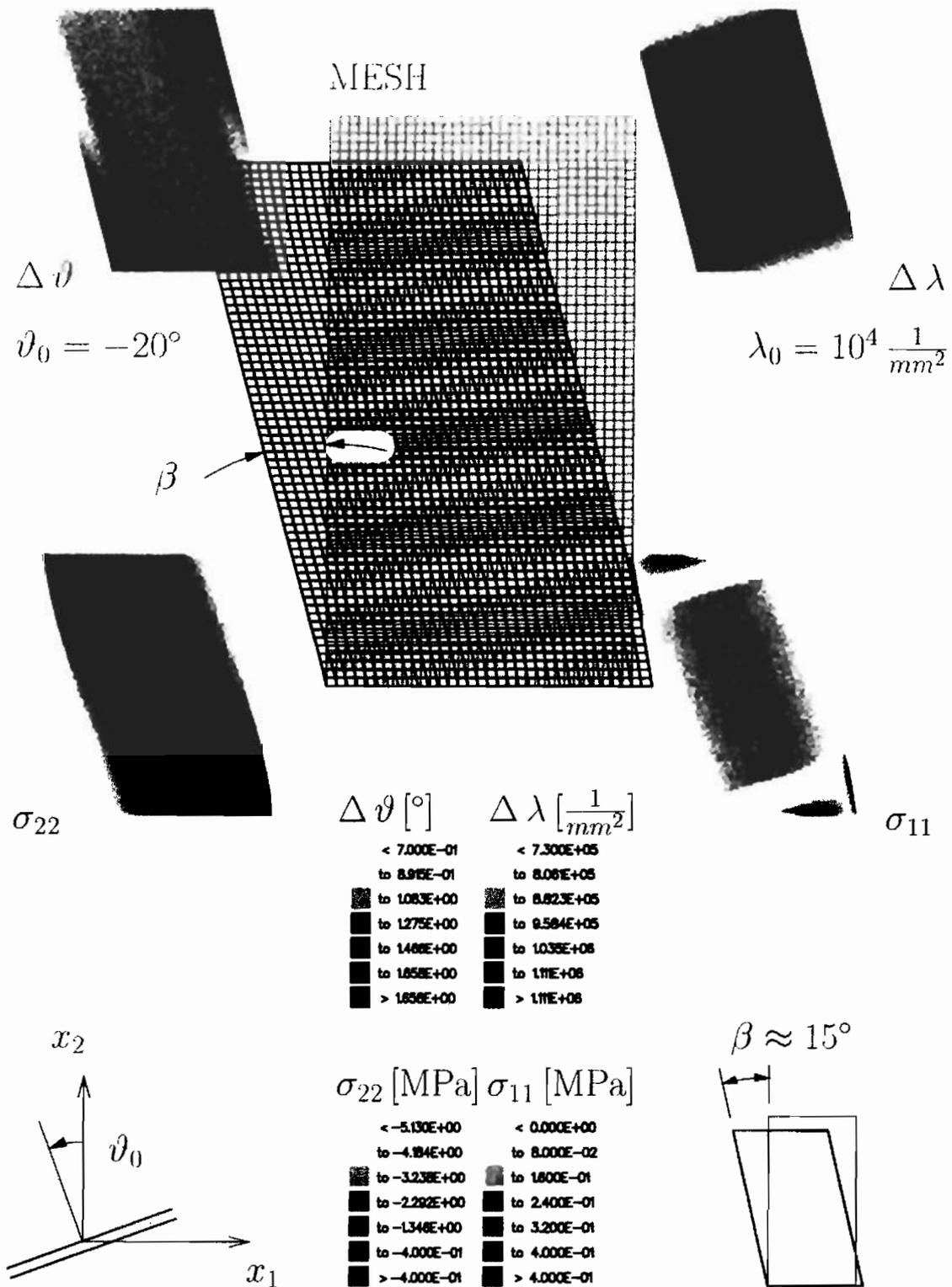


Abb. 4.2: Verteilung der Spannungen und internen Variablen und die Verformung des Eis-Einkristalls nach Abb. 4.1

Die Basalen Ebenen haben ihre Neigung kaum geändert.  $\Delta \vartheta$ , die Veränderung des Anisotropiewinkels  $\vartheta_0$ , liegt zwischen  $0.7^\circ$  an den Probenflanken nahe der linken oberen bzw. rechten unteren Ecke und maximal  $1.7^\circ$  in der linken unteren und rechten oberen Ecke. Die Ergebnisplots sind alle punktsymmetrisch zum Schwerpunkt des Einkristalls.

Mit Hilfe einer geometrischen Betrachtung soll das Verformungsverhalten des Einkristalls erklärt werden. Dabei wird nur die inelastische Formänderung, die basale Abgleitung, berücksichtigt.

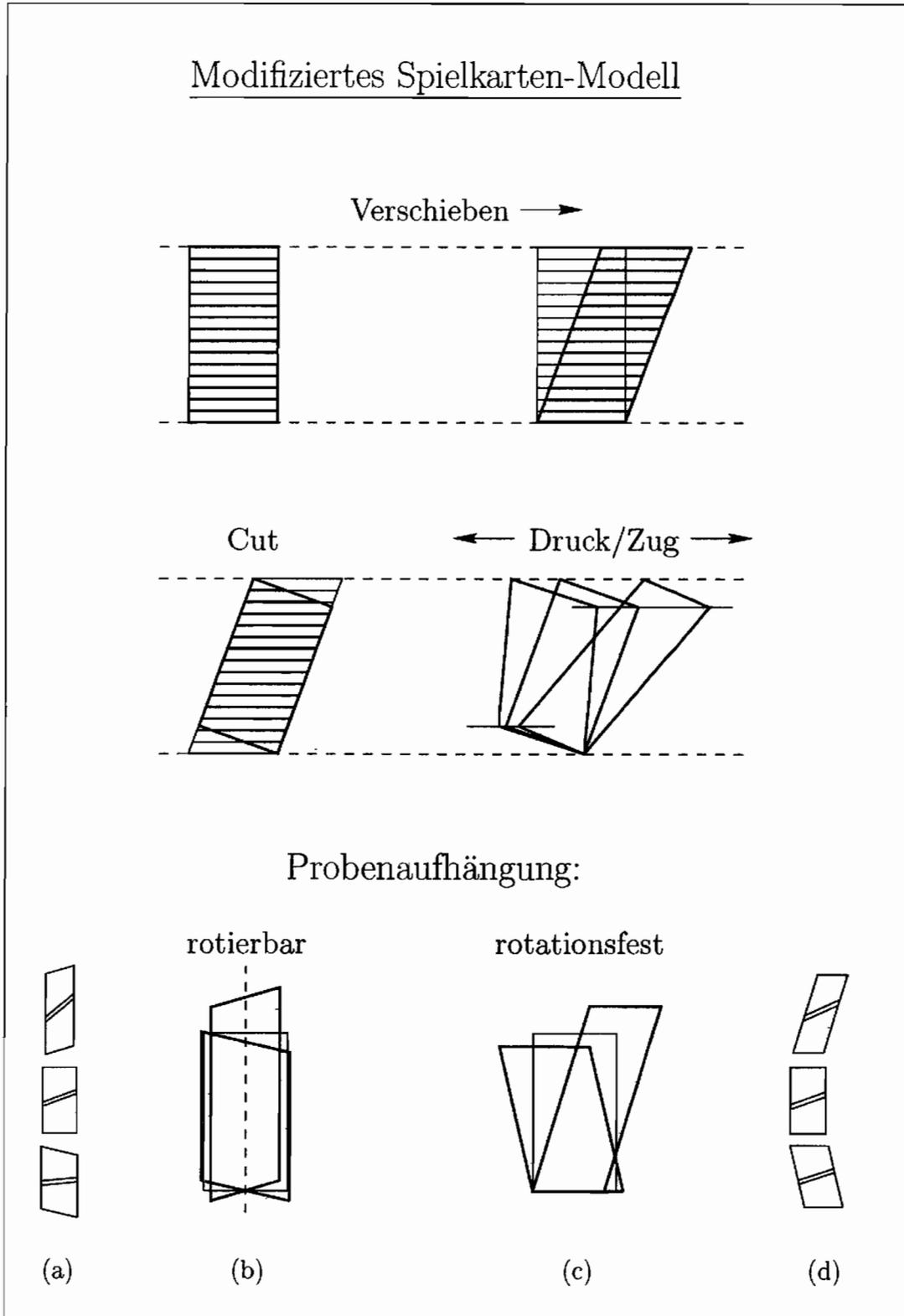
## 4.2 Geometrische Betrachtung

Das schon erwähnte Spielkartenmodell (vgl. Abb. 2.1) läßt sich folgendermaßen modifizieren (s. Abb. 4.3):

Nachdem der Kartenstapel zu einer Raute verschoben worden ist, wird eine rechteckige Versuchsprobe ausgeschnitten. Die Karten bzw. basalen Ebenen schließen wieder einen Winkel von  $20^\circ$  mit der Probenstirnfläche ein.

Um jetzt den Druckversuch in Richtung der Probenlängsachse, also parallel zu den schrägliegenden Probenflanken zu simulieren, können der durch die gestrichelten Linien angegebene Bezugsrahmen und die abgeschnittenen Karten als Führung verwendet werden. Druck läßt sich dann durch Zurückschieben des Kartenstapels nach links und Zug durch Verschieben nach rechts simulieren. Man stellt fest, daß die Stirnflächen keinen rechten Winkel mehr mit den Probenflanken einschließen.

Wir können die Längsachsen der verformten Proben miteinander zur Deckung bringen und erhalten das in Abb. 4.3b gezeichnete Verformungsbild. Im Versuch würde das eine rotierbare, d.h. die Stirnflächenneigung nicht behindernde Probenaufhängung voraussetzen. Gegenüber der vertikalen Lastrichtung haben sich die basalen Ebenen viel stärker gedreht, als für den Fall der rotationsfesten Probenaufhängung (s. Abb. 4.3c und vgl. Abb. 4.3a mit d). Dadurch, daß diese Probeneinspannung wie bei der zuvor gezeigten FE-Simulation die Neigung der Stirnflächen unterdrückt, antwortet die Probe mit seitlichem Ausweichen.



**Abb. 4.3:** Modifiziertes Spielkarten-Modell, Einfluß der Probenaufhängung

### 4.3 FE-Simulation eines Zugversuches

Der Einkristall soll jetzt in einer rotierbaren Probeneinspannung weggesteuert mit der Geschwindigkeit  $\dot{\epsilon} = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  gedehnt werden. Das erfordert in der FE-Umsetzung ein spezielles Probenaufhängesystem, das in dem in Kapitel 3.4.2 entwickelten nicht enthalten ist. Dieses Aufhängesystem wird mit truss-Elementen bewerkstelligt. Es entsteht eine Kette aus oberer Aufhängung, Eisprobe und unterer Aufhängung, die eine singuläre Steifigkeitsmatrix bewirkt. Durch Anschluß zweier weicher horizontaler Hilfsstäbe wird für eine reguläre Steifigkeitsmatrix gesorgt:

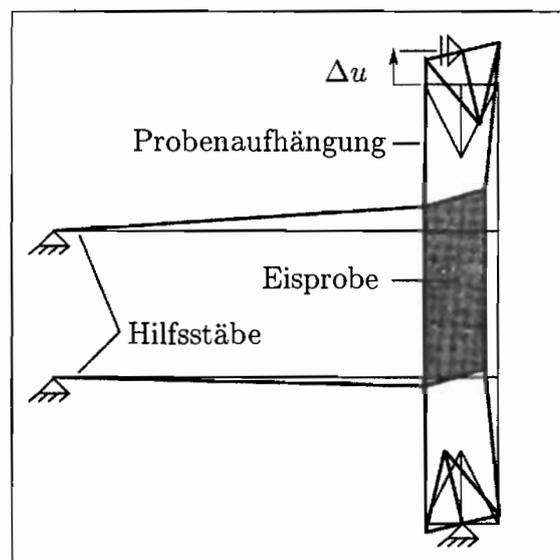


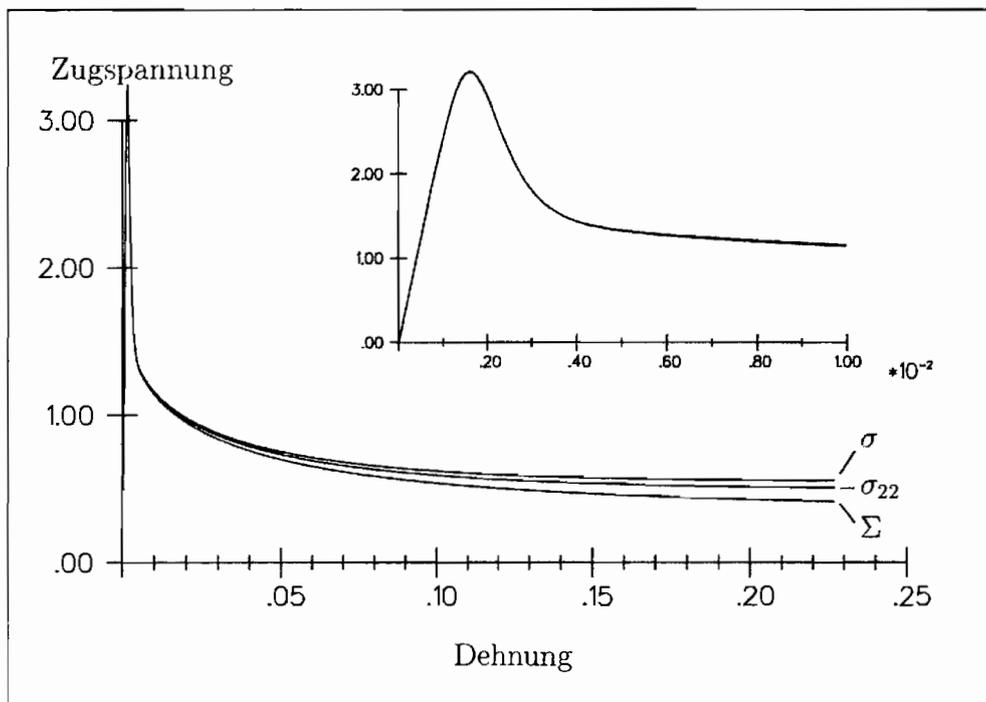
Abb. 4.4: Eiskorn in rotierbarer Probeneinspannung

Nach 22.7% Dehnung erhalten wir mit einer Oberflächenneigung von ca.  $16^\circ$  eine mit der linken unteren Darstellung von Abb. 4.3 übereinstimmende Verformung. Die Spannungs-Dehnungs-Kurve für die FE-Simulation ( $\sigma_{22}$ ) stimmt auch bis zu dieser relativ großen Verformung sehr gut mit der Spannungs-Dehnungs-Kurve ( $\sigma$ ) der einaxialen Stoffgesetzintegration überein (vgl. Abb. 4.5). Der kleine Unterschied mag durch die gewisse Behinderung der horizontalen Hilfsstäbe hervorgerufen werden. Die Differenz zwischen der makroskopischen Spannung  $\Sigma$  und der Cauchy-Spannung  $\sigma_{22}$  rührt daher, daß sich  $\Sigma$  als Quotient der äußeren Kraft zur Ausgangsquerschnittsfläche berechnet.

In der Tat setzt die Stoffgesetzintegration für den einaxialen Versuch gerade diese rotierbare Probeneinspannung voraus. Im Anhang wird gezeigt, wie das DGL-System (3.59) -

(3.63) auf den einaxialen Fall, d.h. auf die ausschließliche Belastung z.B. in 2-Richtung reduziert und auf das Differentialgleichungssystem (3.53) für den einaxialen Zug- bzw. Druckversuch bei BISCHOFF-BEIERMANN [BB92] zurückgeführt werden kann. Dabei ergibt sich neben der nicht verschwindenden Querkontraktion  $v_{1,1}$  auch eine Gleitung  $v_{2,1}$ , die gerade die Neigung der Probenstirnflächen beschreibt.

Da unter der rotierbaren Probeneinspannung homogene Verhältnisse in der Versuchsprobe garantiert werden, reichte im simulierten Zugversuch ein finites Element für das Eiskorn. Bei  $\vartheta_0 = 45^\circ$  wird übrigens bei der gleichen Dehnung von 22.7% erst eine Oberflächenneigung von ca.  $5^\circ$  erreicht. So ist die sehr gute Übereinstimmung zwischen SG-Integration und FE-Nachrechnung auch unter den Randbedingungen nach Abb. 3.5 verständlich.



**Abb. 4.5:** Vergleich der Spannungsverläufe:  $\sigma$  für die Stoffgesetzintegration,  $\sigma_{22}$  als Cauchy-Spannung und  $\Sigma$  als makroskopische Spannung für die FE-Simulation, Ausschnittsvergrößerung für eine Dehnung bis 1%

## 4.4 Vergleich unterschiedlicher Probeneinspannungen

Die Auswirkungen der unterschiedlichen Probenaufhängungen auf die Entwicklung des Anisotropiewinkels und die Spannung in äußerer Lastrichtung soll hier vorgestellt werden. Nur die Druckbelastung wird betrachtet, da diese den maßgeblichen Lastfall bei Eis darstellt. Für den Fall der rotierbaren Probeneinspannung kann auf die einaxiale Stoffgesetzintegration zurückgegriffen werden (vgl. Kapitel 4.3). Grundlage für den Vergleich ist die Forderung, daß in der selben Zeit die gleiche rautenförmige Gestalt für beide Arten der Probeneinspannung erreicht werden soll. Dabei muß offensichtlich bei der rotationsfesten Probenaufhängung nach Abb. 4.3 in vertikaler Richtung eine größere Verformung vorgegeben werden als bei der rotierbaren Einspannung. Bei gleicher Zeitdauer erforderte dies in Kapitel 3.1 mit  $\dot{\varepsilon} = -1.4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  einen ca. 40% größeren Wert gegenüber dem der Geschwindigkeit  $\dot{\varepsilon} = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , mit der die Stoffgesetzintegration durchgeführt wird.

Die Randbedingungen der FE-Simulation des Druckversuches entsprachen einer rotationsfesten Probeneinspannung. Die basalen Ebenen haben sich wenig gedreht, z.B. in Kornmitte nur um  $1^\circ$  (vgl. Abb. 4.6).

Die Stoffgesetzintegration setzt nach Kapitel 4.3 gerade die rotierbare Probenaufhängung voraus und liefert mit einer Drehung der basalen Ebenen um  $14^\circ$  ein Ergebnis, das der rein geometrischen Betrachtung nach dem modifizierten Spielkarten-Modell (rein basale Abgleitung) sehr nahe kommt. Der Unterschied beruht darauf, daß bei der Stoffgesetzintegration auch die elastische Verformung berücksichtigt wird. Hier zeigt sich eine Gesetzmäßigkeit, die für die Texturbildung im Polykristall wichtig ist, daß sich nämlich die basalen Ebenen mehr und mehr senkrecht zur Drucklastrichtung orientieren.

Für die Auswirkung einer großen Drehung der basalen Ebenen auf den Spannungsverlauf werfen wir noch einmal kurz einen Blick zurück auf die Abb. 4.3a. Am Ende des Druckversuchs verlaufen die basalen Ebenen fast senkrecht zu den Probenflanken, d.h. fast senkrecht zur Lastrichtung. Auf die basale Schubspannung entfällt nur noch ein sehr kleiner Anteil der äußeren Last. Die basale Abgleitung wird kaum noch angetrieben, die Probe kann sich zunehmend nur noch elastisch verformen. Die Spannung in 2-Richtung steigt an (SG-Int.). Bei rotationsfester Probeneinspannung fällt die Spannung in Kornmitte immer weiter ab. Die makroskopische Spannung  $\Sigma$  erreicht einen stationären Wert.

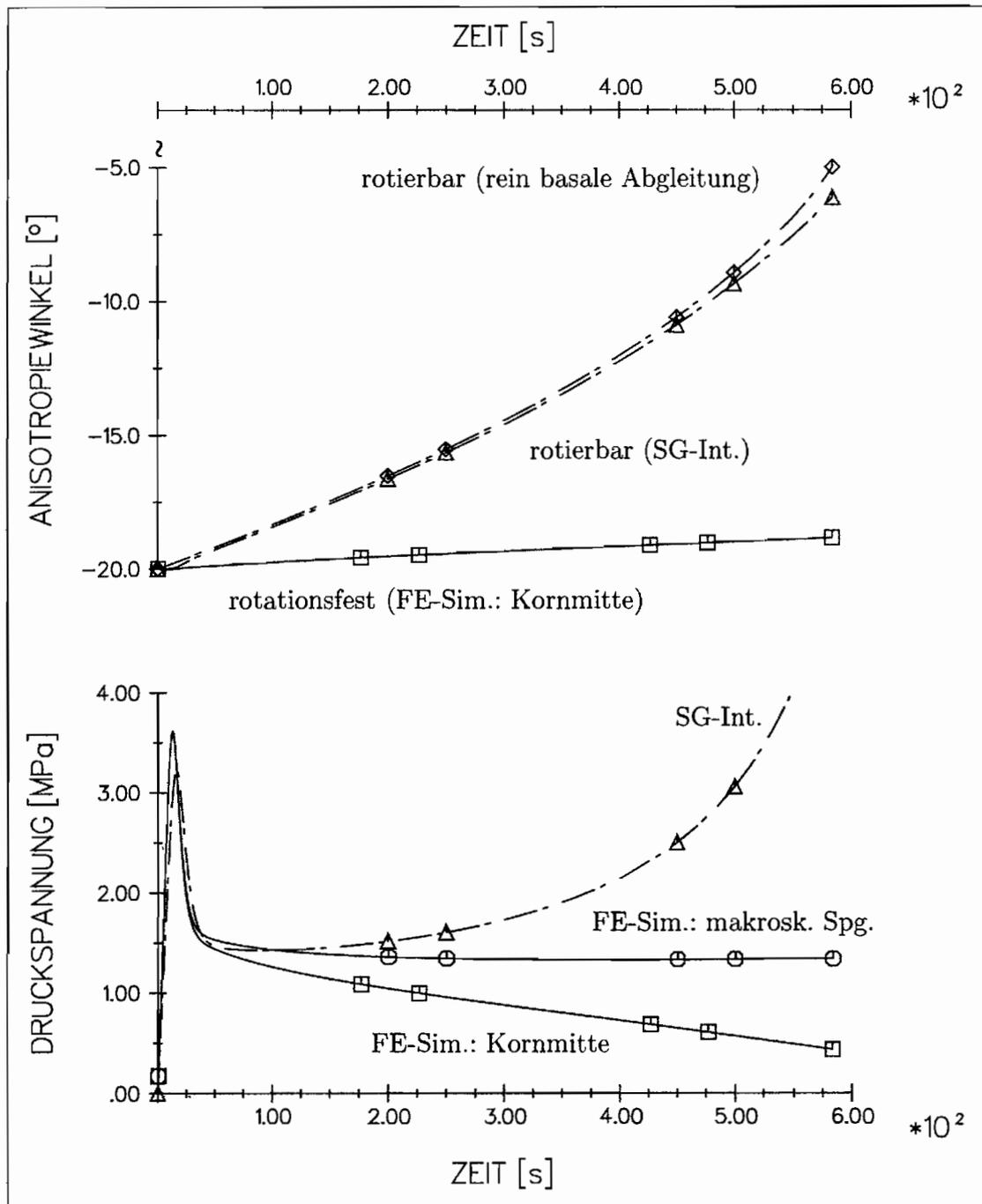


Abb. 4.6: Vergleich der Probeneinspannungen für den Anisotropiewinkel  $\vartheta$  und die Druckspannungen in 2-Richtung

## 4.5 **Schlußfolgerung**

Wie die FE-Simulation mit behinderter Stirnflächenneigung zeigt, versucht das Eiskorn unter der Last zur Seite auszuweichen. Wenn jetzt innerhalb des Polykristalls das Nachbarkorn z.B. gerade in die entgegengesetzte Richtung auszuweichen versucht, dann werden sich die Körner gegenseitig stark verspannen. Dieses Verhalten wird zu einem großen Eigenspannungen im Polykristall verursachen zum anderen dafür sorgen, daß der Polykristall i.a. wesentlich steifer als der Monokristall auf eine Belastung reagiert.

Zur Abschätzung der Größe dieser Eigenspannungen wird der einfachste Polykristall, der Zweikristall betrachtet.

## 5. Zweikristall

### 5.1 Definition und Bedeutung von Eigenspannungen

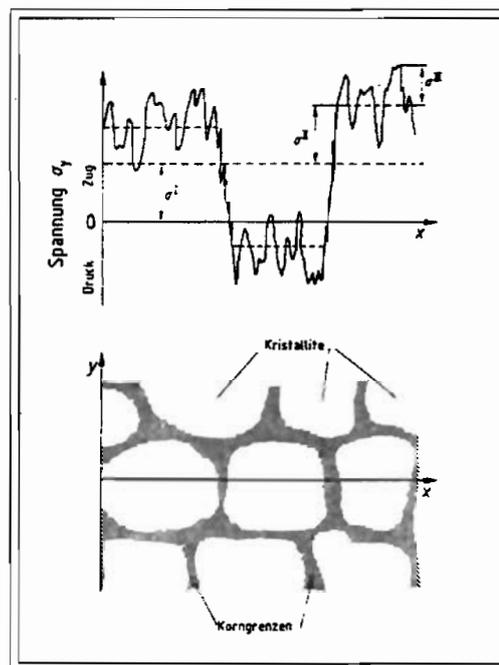
Das Verformungsverhalten eines monokristallinen Eiskorns läßt darauf schließen daß sich die einzelnen Körner innerhalb eines Eis-Polykristalls gegenseitig stark verspannen und hohe Eigenspannungen verursachen. Die Eigenspannungen spielen eine wichtige Rolle bei der Auslösung und beim Antrieb von Schädigungsmechanismen in einem Werkstoff. Deshalb ist es wichtig, sich über ihre Größe und ihre Wirkung eine genauere Vorstellung zu verschaffen. Da man einem Körper von außen nicht ansehen kann, ob in ihm Eigenspannungen vorhanden und wie groß sie sind, ist man zu ihrer Bestimmung auf materialzerstörende oder indirekte Verfahren angewiesen. Die ersteren Verfahren machen sich die folgenden Wirkungen der Eigenspannungen zunutze (vgl. a. JOHNSON [JH95]):

Wird einem äußerlich belasteten Körper eben diese Last schlagartig entzogen, und der Körper in einzelne Stücke getrennt, so weist die Tatsache, daß mindestens zwei vorher parallele Fasern jetzt im freigeschnittenen, entlasteten Zustand nicht mehr gleich lang und unterschiedlich gekrümmt sind, daraufhin, daß in dem Körper Eigenspannungen geherrscht haben müssen, die dafür gesorgt haben, daß diese beiden Fasern kompatibel miteinander verbunden waren. Können alle freigeschnittenen Stücke ohne Kraftaufwendung wieder miteinander verbunden werden, so kann nicht geschlußfolgert werden, daß keine Eigenspannungen im Körper geherrscht haben, da innerhalb jedes einzelnen Stückes noch Eigenspannungen wirken könnten.

Indem z.B. aus der Oberfläche eines Körpers Schichten abgetragen und ihre Rückfederung bzw. die der Schnittkanten am Körper gemessen werden, kann mit dem zweidimensionalen Verzerrungszustand der Rückfederung über das Hooksche Gesetz auf den zweidimensionalen Eigenspannungszustand in der Oberflächenschicht geschlossen werden.

Aus dem zweiten Satz zur Wirkung der Eigenspannungen deutet sich an, daß sich Eigenspannungen klassifizieren lassen in Makro- und Mikroeigenspannungen. Nach MACHERAU [MWW73] stellen diese Begriffe eine sprachliche Abkürzung dar, die aber vielleicht den Zugang zu dem vollständigen System aus Eigenspannungen I., II. und III. Art erleichtern. Diese lassen sich unter Benutzung des Wortes "homogen" im Sinne von "konstant in Größe und Richtung" folgendermaßen definieren [MWW73]:

1. Eigenspannungen I. Art sind über größere Werkstoffbereiche (mehrere Körner oder mm - Bereiche) nahezu homogen. Die mit Eigenspannungen I. Art verbundenen inneren Kräfte sind bezüglich jeder Schnittfläche durch den ganzen Körper im Gleichgewicht. Ebenso verschwinden die mit ihnen verbundenen inneren Momente bezüglich jeder Achse. Bei Eingriffen in das Kräfte- und Momentengleichgewicht von Körpern, in denen Eigenspannungen I. Art vorliegen, treten immer makroskopische Maßänderungen auf.
2. Eigenspannungen II. Art sind über kleine Werkstoffbereiche (ein Korn oder Kornbereiche) nahezu homogen. Die mit Eigenspannungen II. Art verbundenen inneren Kräfte und Momente sind über viele Körner im Gleichgewicht. Bei Eingriffen in dieses Gleichgewicht können makroskopische Maßänderungen auftreten.
3. Eigenspannungen III. Art sind über kleinste Werkstoffbereiche (mehrere Atomabstände) inhomogen. Die mit Eigenspannungen III. Art verbundenen inneren Kräfte und Momente sind in kleinen Bereichen (hinreichend großen Teilen eines Kornes) im Gleichgewicht. Bei Eingriffen in dieses Gleichgewicht treten keine makroskopischen Maßänderungen auf.



**Abb. 5.1:** Mögliche Überlagerungen von Eigenspannungen I., II. und III. Art [MWW73]

Ein indirektes Verfahren, um die Größe der Eigenspannungen in einem Polykristall abzuschätzen, besteht darin, den Polykristall als einen Zweikristall zu betrachten, der in einem seiner beiden Kristalle die weniger leicht und in dem anderen die leichter verformbaren Körner des Polykristalls zusammenfaßt und dann zu fordern, daß im Sinne eines einaxialen Taylor-Modells beide Ersatzkristalle sich nur gleich verformen dürfen. Man kann auch die Taylorsche Annahme (TAYLOR [Tay38]) von gleicher äußerer wie innerer Verzerrung auf das RVE mit einer begrenzten Anzahl von Körnern innerhalb eines Polykristalls ansetzen, homogenen Spannungs- und Verzerrungszustand auf dem Rand des RVE voraussetzen, da es als Punkt auf der Makroebene erscheint, und zur Bestimmung der maximalen Eigenspannung im RVE zwei nebeneinander liegende Körner mit dem größtmöglichen Unterschied im Verformungswiderstand als einen Zweikristall separat betrachten. Mit solch einem Modell, im weiteren Zweikristall-Modell genannt, kann aus Kriechversuchen mit Lastwechsel an polykristallinem Eis die maximale Eigenspannung abgeschätzt werden, wenn die verzögert elastische Dehnung gemessen wird. Mit diesem Modell wird im folgenden Abschnitt die Größe der Eigenspannung als Funktion der Modellparameter bestimmt.

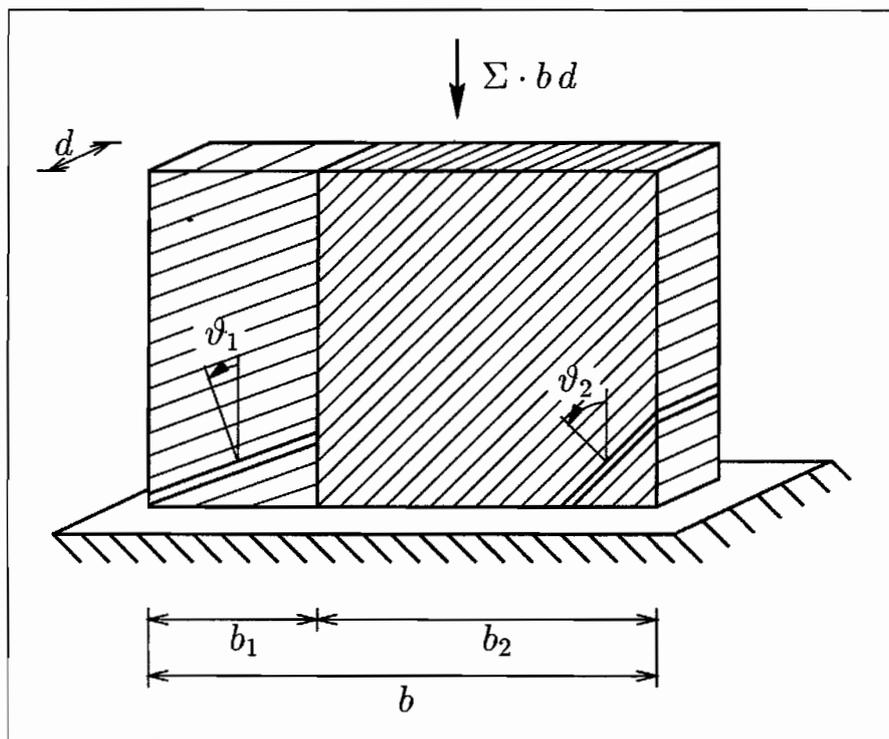


Abb. 5.2: Zweikristall

## 5.2 Zweikristall-Modell

Für einen Zweikristall, wie er etwa in Abb. 5.2 gezeigt ist, soll mit Hilfe eines einaxialen Modells die maximale Größe der Eigenspannungen in dem Zweikristall abgeschätzt werden. Einige Kenngrößen und Begriffe werden anhand der Abb. 5.2 eingeführt:

Kristall 1 hat mit seiner Querschnittsfläche von  $b_1 \times d$  den Anteil  $\alpha_1 = b_1 / b$  am Gesamtquerschnitt.

Verlaufen die basalen Ebenen unter  $45^\circ$  zur Lastrichtung, erreicht die basale Schubspannung, der resolved shear-stress, den Maximalwert (vgl.  $\sigma_{12}^*$  nach Gleichung 8.4 im Anhang). Ein basales Abgleiten kann besonders leicht erfolgen. Demgegenüber gleitet Kristall 1 mit einem  $\vartheta$  von  $20^\circ$  und einer kleineren basalen Schubspannung schlechter ab und ist in diesem Sinne weniger gut orientiert.

Wie sich in diesem Zweikristall bei einer ausgewählten Belastungsgeschichte die Spannungen umlagern und sich so ein Eigenspannungszustand einstellt, soll anhand eines Feder-Dämpfer-Modells, im folgenden Zweikristall-Modell genannt, erläutert werden (vgl. Abb. 5.3 zum Zeitpunkt  $t < t_0$ ). Jeder Kristall wird idealisiert durch eine Feder für den elastischen Anteil der Deformation und einen Dämpfer für das Abgleiten der unterschiedlich orientierten basalen Ebenen. Eine geeignete Vorrichtung stellt sicher, daß beide Kristalle in vertikaler Richtung die gleiche Verformung erfahren. Parameter dieses Modells sind:

- $\tilde{E} = \frac{E_1}{E_2}$  als Verhältnis der effektiven E-Moduli der beiden Kristalle,
- $\tilde{\eta} = \frac{\eta_1}{\eta_2}$  als Verhältnis ihrer Dämpferkonstanten,
- $\alpha_1$  und  $(1 - \alpha_1)$  als ihre Querschnittsflächenanteile (vgl. a. Abb. 5.2).

### Belastungsgeschichte nach Abb. 5.3

$$\underline{t = t_0 + 0}$$

Der Zweikristall wird zum Zeitpunkt  $t = t_0 + 0$  schlagartig mit  $\Sigma \cdot b \cdot d$  belastet und antwortet mit der elastischen Verformung  $\varepsilon_e$  aufgrund der Spannungen  ${}^0\sigma_1$  und  ${}^0\sigma_2$  in Kristall 1 bzw. 2 (s. Abb. 5.3 und Abb. 5.4):

$$\varepsilon_e = {}^0\sigma_1 / E_1 = {}^0\sigma_2 / E_2 \quad (5.1)$$

mit

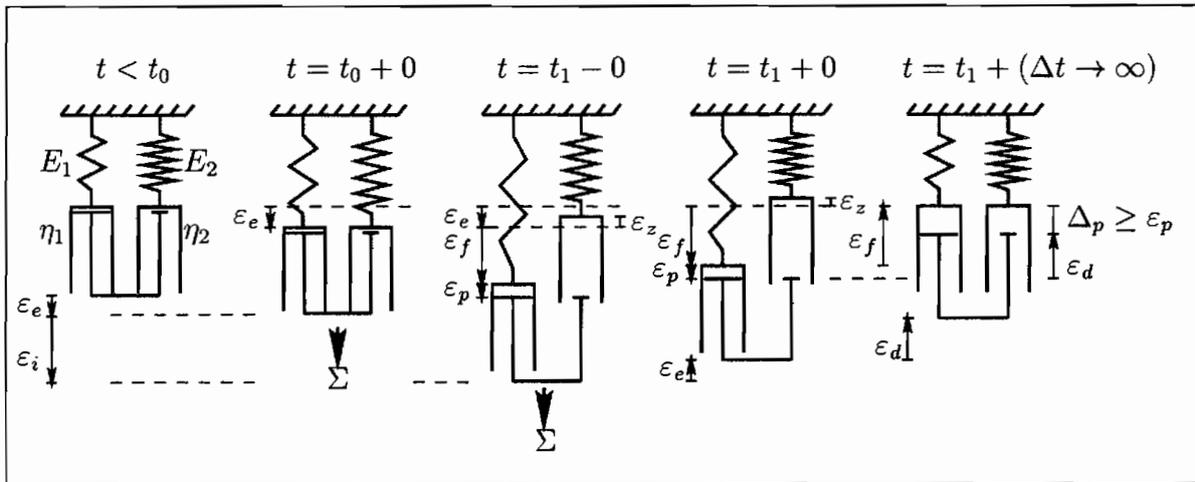


Abb. 5.3: Zweikristall-Modell und ausgewählte Belastungsgeschichte

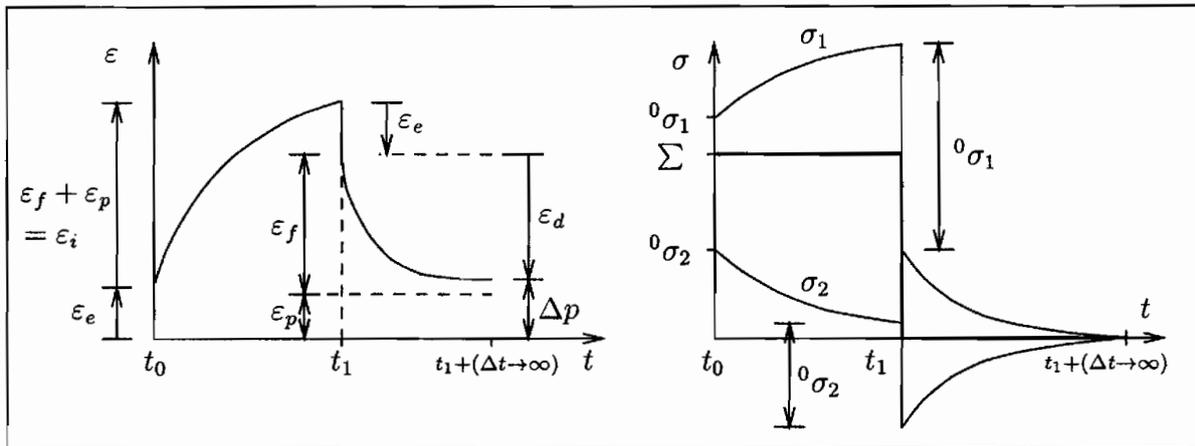


Abb. 5.4: Entwicklung der Verzerrungen und der Spannungen im Zweikristall-Modell für die Belastungsgeschichte nach Abb. 5.3 (qualitativ)

$${}^0\sigma_1 = \frac{1}{\alpha_1 + (1 - \alpha_1)/\tilde{E}} \Sigma \quad (5.2)$$

$${}^0\sigma_2 = \frac{1/\tilde{E}}{\alpha_1 + (1 - \alpha_1)/\tilde{E}} \Sigma \quad (5.3)$$

$$\underline{t = t_1 - 0}$$

Die äußere Lastspannung  $\Sigma$  wird konstant gehalten bis zum Zeitpunkt  $t_1$ . Infolge der unterschiedlichen Dämpferverformungen während des Kriechprozesses beginnen sich die Spannungen von dem gut orientierten Kristall 2 auf den schlechter abgleitbaren Kristall 1 umzulagern, d.h. die Feder des Kristall 1 wird zusätzlich um  $\varepsilon_f$  gedehnt, die Feder 2 um  $\varepsilon_z$  entspannt. Die Gesamtverformung hat zugenommen um:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_f + \varepsilon_p \quad (5.4)$$

$$\underline{t = t_1 + 0}$$

Zum Zeitpunkt  $t_1$  wird schlagartig entlastet. Der Zweikristall federt insgesamt mit  $\varepsilon_e$  zurück. In den Verformungen der beiden Federn  $\varepsilon_f$  bzw.  $\varepsilon_z$  drückt sich aus, daß im Zweikristall ein Eigenspannungszustand verbleibt:

$$\sigma_{ES1} = \varepsilon_f \cdot E_1 \quad (5.5)$$

$$\sigma_{ES2} = -\varepsilon_z \cdot E_2 \quad (5.6)$$

Aus der Bedingung, daß die Eigenspannungen miteinander im Kräftegleichgewicht stehen,

$$\sigma_{ES1} \alpha_1 + \sigma_{ES2} (1 - \alpha_1) = 0 \quad (5.7)$$

folgt eine Beziehung zwischen  $\varepsilon_f$  und  $\varepsilon_z$

$$\frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_z} = \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1} \cdot \frac{E_2}{E_1} \quad (5.8)$$

$$\underline{t = t_1 + \Delta t, \quad \Delta t \rightarrow \infty}$$

Der Eigenspannungszustand baut sich mit der Zeit mehr und mehr ab, was sich in der verzögert elastischen Dehnung  $\varepsilon_d$  widerspiegelt. Nach  $\Delta t \rightarrow \infty$  sind die Federn wieder völlig entspannt, aber der Zweikristall hat nicht seinen Ausgangszustand zum Zeitpunkt  $t < t_0$  erreicht, da die Dämpfer um  $\Delta_p \geq \varepsilon_p$  verformt bleiben (vgl. Abb. 5.3).

Im realen Versuch kann nur über die gemessene verzögert elastische Dehnung  $\varepsilon_d$  auf die Eigenspannungen zurückgeschlossen werden. Dabei fällt der Ungleichung

$$\Delta_p \geq \varepsilon_p \quad (5.9)$$

die Bedeutung einer unteren Schranke für die Eigenspannungen zu (s.u.). Diese Ungleichung entstammt der Feststellung, daß die bis zum Entlastungszeitpunkt erreichte Dämpferverformung  $\varepsilon_p$  im lastanziehenden Kristall 1 nach Wegnahme der äußeren Last auf keinen Fall kleiner werden kann, da die verbleibende innere Kraft  $F_E$  am Dämpfer 1 zieht (vgl. Abb. 5.5).

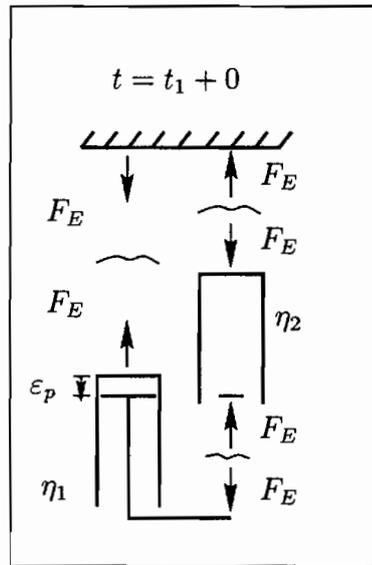


Abb. 5.5: Innere Kräfte zum Zeitpunkt  $t = t_1 + 0$

Aus der Ungleichung (5.9) folgt mit der Identität

$$\varepsilon_d + \Delta_p = \varepsilon_f + \varepsilon_p \quad (5.10)$$

nach Abb. 5.3 und unter der Verwendung von Gleichungen (5.5) und (5.1)

$$\begin{aligned} \varepsilon_d &\leq \varepsilon_f \\ \Leftrightarrow \varepsilon_d &\leq \frac{\sigma_{ES1}}{E_1} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_d &\leq \frac{\sigma_{ES1}}{0\sigma_1} \varepsilon_e \\ \Leftrightarrow \sigma_{ES1} &\geq \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_e} 0\sigma_1. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Eine obere Schranke für  $\sigma_{ES1}$  läßt sich aus der Forderung

$$\varepsilon_z \leq \varepsilon_e \quad (5.12)$$

ableiten, die bedeutet, daß sich die Feder 2 während des Kriechprozesses bis zum Entlastungszeitpunkt  $t_1$  nur ganz entspannen kann. Würde sie darüber hinaus noch gestaucht, entfiel auf Kristall 1 eine größere Kraft, als von außen wirkt. Das ist energetisch nicht möglich. Mit den Beziehungen (5.1) und (5.5) folgt aus Ungleichung (5.12) weiter:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \varepsilon_z &\leq \frac{{}^0\sigma_{ES1}}{E_1} \\ \Leftrightarrow \varepsilon_z &\leq \frac{{}^0\sigma_1}{\sigma_{ES1}} \varepsilon_f \\ \Leftrightarrow \sigma_{ES1} &\leq \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_z} {}^0\sigma_1. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Die Eigenspannung  $\sigma_{ES1}$  ist also nach unten und oben begrenzt durch

$${}^0\sigma_1 \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_e} \leq \sigma_{ES1} \leq \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_z} {}^0\sigma_1. \quad (5.14)$$

Durch Vergleich der beiden Schranken lassen sich die mikroskopischen Verformungen  $\varepsilon_f$  und  $\varepsilon_z$  gegenüber den meßbaren makroskopischen Verformungen  $\varepsilon_d$  und  $\varepsilon_e$  abschätzen:

$$\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_e} \leq \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_z}. \quad (5.15)$$

Ausgehend von dieser Abschätzung wird in Kapitel 5.3 die physikalische Bedeutung der Modellparameter diskutiert.

Die Eigenspannungen  $\sigma_{ES1}$  und  $\sigma_{ES2}$  lassen sich mit der Schrankenbeziehung (5.14) unter Verwendung der Gleichungen (5.2), (5.8) und (5.7) folgendermaßen eingrenzen:

$$\frac{\tilde{E}}{E} \frac{\varepsilon_d}{\alpha_1 + 1 - \alpha_1} \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_e} \leq \frac{\sigma_{ES1}}{\Sigma} \leq \frac{1 - \alpha_1}{\tilde{E} \alpha_1} \frac{\tilde{E}}{E} \frac{\varepsilon_f}{\alpha_1 + 1 - \alpha_1} \quad (5.16)$$

$$\sigma_{ES2} = -\sigma_{ES1} \cdot \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}. \quad (5.17)$$

Durch die gemessene verzögert elastische Dehnung  $\varepsilon_d$  können die Eigenspannungen in ihrem Betrag nach unten abgeschätzt werden. Ob in dem Kristall, der Last an sich zieht, oder in dem, der sie abgibt, die betragsmäßig größere Eigenspannung herrscht, entscheidet der Querschnittsflächenanteil  $\alpha_1$ : Für  $\alpha_1 = 1/2$  sind  $\sigma_{ES1}$  und  $\sigma_{ES2}$  betragsmäßig gleich groß. Für kleineres (größeres)  $\alpha_1$  ist  $\sigma_{ES1}$  ( $\sigma_{ES2}$ ) die betragsmäßig größere Eigenspannung.

Jetzt soll untersucht werden, unter welchen Kombinationen der Modellparameter die Eigenspannungen im Zweikristall-Modell maximal werden. Dazu ist es zweckmäßig, nicht

die Eigenspannung direkt zu betrachten, sondern die Gesamtspannung  $\sigma_1$  im Kristall 1 bzw. den auf die äußere Lastspannung  $\Sigma$  bezogenen Wert  $\bar{\sigma}_1$ . Im weiteren reicht es aus, nur Kristall 1 zu betrachten und den Fall  $\alpha_1 \leq 1/2$ , da dann auf jeden Fall im Kristall 1 die betragsmäßig größere Eigenspannung herrscht. Dann werden für Kristall 1 aber beide Rollen zugelassen, die des lastanziehenden und die des lastabgebenden Kristalls.

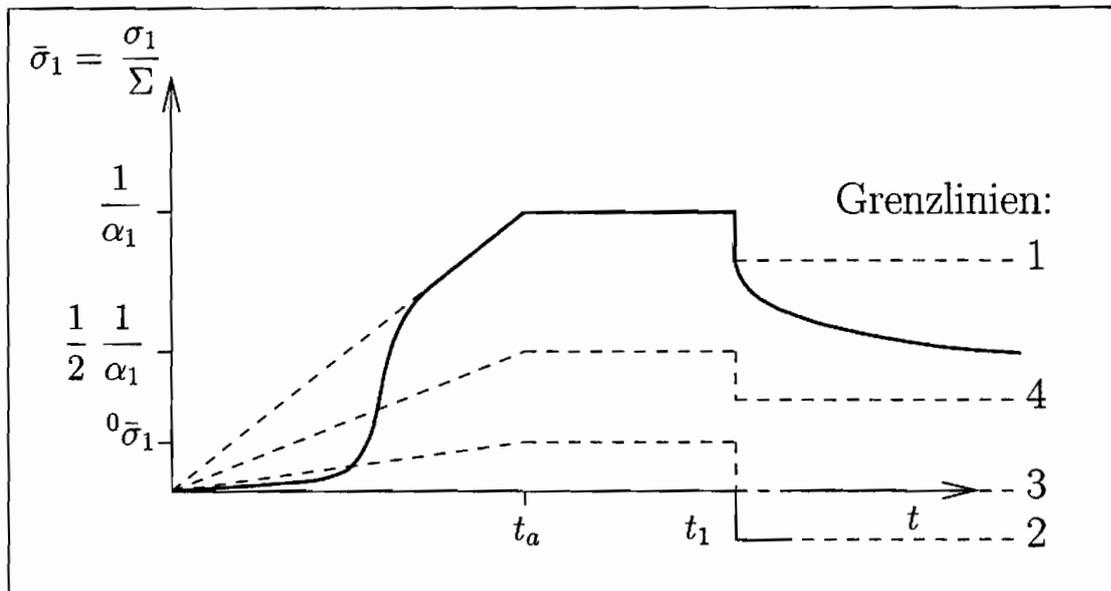


Abb. 5.6: Wertebereich für die Spannung in Kristall 1

Gegenüber Abb. 5.3 ist in Abb. 5.6 der allgemeinere Fall dargestellt, daß die äußere Last  $\Sigma$  nicht schlagartig, sondern linear ansteigend innerhalb der Zeit  $t_a$  aufgebracht wird. Für  $t_a \rightarrow 0$  erhalten wir gerade die schlagartige Belastung.  $\Sigma$  wird dann konstant gehalten bis zum Zeitpunkt  $t_1$ , danach schlagartig entfernt. Die eingezeichneten Grenzlinien haben folgende Bedeutung:

- **Grenzlinie 1** kennzeichnet den Verlauf von  $\bar{\sigma}_1$ , wenn sich Kristall 1 von vornherein nur elastisch verformen kann, und Kristall 2 unendlich leicht basal abgleitet.  $\bar{\sigma}_1$  kann sich nicht oberhalb dieser Kurve bewegen, da dann Kristall 1 einen höheren Zug aushalten müßte, als von außen überhaupt wirkt, also Kristall 2 unter Druckzwang gerät und zusätzlich aktiv auf Kristall 1 einwirkt, sprich an ihm ziehen müßte. Das ist aus energetischen Gründen nicht möglich.
- Unterhalb **Grenzlinie 2** kann  $\bar{\sigma}_1$  ebenfalls nicht verlaufen, da dann Kristall 2 mehr Zug, als von außen wirkt, aufnehmen müßte (vgl. vorherigen Punkt).

- **Grenzlinie 3** entsteht unter der Annahme, daß beide Kristalle sich nur elastisch verformen können; man könnte sie als  ${}^0\bar{\sigma}_1$ -Kurve bezeichnen, da es bei rein elastischen Materialverhalten auf die Belastungsgeschwindigkeit nicht ankommt. Der Abstand zur Zeitachse gibt an, um welchen Betrag sich  $\bar{\sigma}_1$  verringern würde, wenn schlagartig entlastet wird.
- **Grenzlinie 4** verläuft auf dem halben Abstand zwischen Grenzlinie 1 und 2. Liegt  $\bar{\sigma}_1$  oberhalb dieser Kurve, trägt Kristall 1 den größeren Teil der Belastung.

Die aktuelle Eigenspannung ergibt sich als Differenz des Verlaufes der  $\bar{\sigma}_1$ -Kurve zur Grenzlinie 3.

Greifen wir uns eine prinzipiell mögliche  $\bar{\sigma}_1$ -Kurve heraus:

Anfangs verläuft  $\bar{\sigma}_1$  unterhalb Grenzlinie 3, Kristall 1 trägt weniger als im rein elastischen Fall. Da Kristall 2 letztendlich leichter basal abgleiten soll als Kristall 1 und damit Last an Kristall 1 abgibt, steigt  $\bar{\sigma}_1$  über diese Grenze an. Am Schnittpunkt mit der Grenzlinie 4 tragen beide Kristalle gerade die Hälfte der äußeren Last, oberhalb dieser Linie trägt Kristall 1 den größeren Anteil, um ab dem Berührungspunkt mit Grenzlinie 1 die gesamte äußere Last übernommen zu haben. Mit weiterem Anstieg von  $\Sigma$  steigt auch die aktuelle Eigenspannung noch an, um dann ab  $t = t_a$  für konstantes  $\Sigma$  ebenfalls konstant zu bleiben. Wenn  $\Sigma$  zu schnell aufgebracht wird, also  $t_a$  sehr klein ist, verschiebt sich der erste Berührungspunkt mit Grenzlinie 1 in den Bereich, wo sie horizontal verläuft für  $t < t_1$ , oder es wird schon entlastet, bevor Kristall 1 die gesamte Last übernommen hat. Zum Zeitpunkt  $t_1$  wird entlastet, die Eigenspannungen bauen sich wieder ab.

Die betragsmäßig maximalen Eigenspannungen ergeben sich unterschieden nach den Fällen I und II zu:

$$\text{I. Grenzlinie 4 " > " Grenzlinie 3} \rightarrow \max \bar{\sigma}_{ES1} = 1/\alpha_1 \cdot {}^0\bar{\sigma}_1$$

$$\text{II. Grenzlinie 4 " < " Grenzlinie 3} \rightarrow \max |\bar{\sigma}_{ES1}| = | - {}^0\bar{\sigma}_1 |$$

Mit  ${}^0\bar{\sigma}_1 = {}^0\sigma_1/\Sigma$  und  ${}^0\sigma_1$  nach Gleichung (5.2) folgt nach einer kleinen Umformung die Übereinstimmung des Fall I mit der oberen Schranke nach Schrankenbeziehung (5.16). Einsetzen der oberen Schranke in Gleichung (5.17) liefert mit Beziehung (5.3) gerade  $\sigma_{ES2} = -{}^0\sigma_2$ , also den Fall II, nur in den Größen des Kristall 2 ausgedrückt.

Zu I.: Verläuft  ${}^0\bar{\sigma}_1$  unterhalb der Hälfte der maximal von Kristall 1 aufnehmbaren Spannung, also  ${}^0\bar{\sigma}_1 < 1/2 \cdot 1/\alpha_1$ , ergibt sich die betragsmäßig größte Eigenspannung zu

$1/\alpha_1 - {}^0\bar{\sigma}_1 > 1/2 \cdot 1/\alpha_1$  für den Fall, daß letztendlich Kristall 1 alles trägt. Nach Abb. 5.7 verschwindet  ${}^0\bar{\sigma}_1$  für  $\tilde{E} \rightarrow 0$ , und die maximale Eigenspannung wird mit  $\max \bar{\sigma}_{ES1} = 1/\alpha_1$  für  $\alpha_1 \rightarrow 0$  beliebig groß.

Zu II.: Ist  ${}^0\bar{\sigma}_1 > 1/2 \cdot 1/\alpha_1$ , wird die Eigenspannung betragsmäßig maximal  ${}^0\bar{\sigma}_1 > 1/2 \cdot 1/\alpha_1$ , wenn Kristall 1 seinen Lastanteil komplett an Kristall 2 abgegeben hat. Für  $\tilde{E} \rightarrow \infty$  geht  ${}^0\bar{\sigma}_1 \rightarrow 1/\alpha_1$  nach Abb. 5.7 und damit  $\max |\bar{\sigma}_{ES1}| = |-1/\alpha_1|$  gegen beliebig hohe Werte für  $\alpha_1 \rightarrow 0$ .

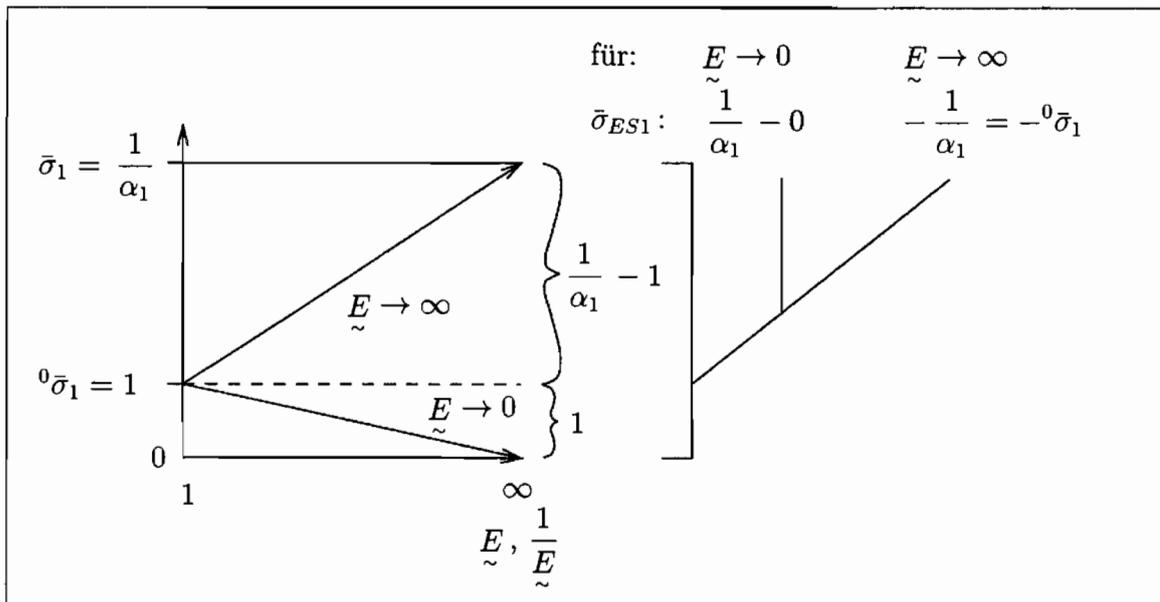


Abb. 5.7: Maximales Potential für die Eigenspannung  $\bar{\sigma}_{ES1}$

Die Fälle I und II unterscheiden sich darin, daß einmal Kristall 1 die gesamte Last, das andere Mal nichts trägt. Offensichtlich hängt dies von  $\eta$ , dem Verhältnis der Dämpferkonstanten ab, also davon, wie schlecht oder wie gut Kristall 1 im Verhältnis zu Kristall 2 abgeleitet. Für den Fall I ist man geneigt,  $\eta \rightarrow \infty$  und für den Fall II  $\eta \rightarrow 0$  anzunehmen und so die Kombinationen der Modellparameter  $\eta$ ,  $\tilde{E}$  und  $\alpha_1$  gefunden zu haben, für die sich betragsmäßig maximale Eigenspannungen ergeben. Allerdings läßt sich nach den Grenzwertsätzen für Funktionen mehrerer Variabler (vgl. BRONSTEIN [BS87]) nur die eindeutige Aussage machen, daß kein Grenzwert existiert, wenn für zwei unterschiedliche Pfade im Definitionsraum der Variablen zwei verschiedene Grenzwerte in der Funktion dieser Variablen folgen. Ein Beispiel ist die Funktion  $z(x_1, x_2)$  zweier Veränderlicher  $x_1$  und  $x_2$ , die sich als eine Fläche darstellt, die zwischen zwei zueinander windschiefen Geraden aufgespannt ist. Diese Geraden mögen für  $(x_1 = 0, x_2 = 0)$  die  $z$ -Achse bei  $z_1$  bzw  $z_2$

schneiden. Dann ergibt sich für die Grenzwertbetrachtung  $P(x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0) = P(0, 0)$  einmal  $z_1$ , wenn man der einen Geraden als Pfad folgt und  $z_2$ , wenn man entlang der anderen Geraden  $P(0, 0)$  ansteuert. Praktisch bedeutet dies, daß in der Umgebung von  $P(0, 0)$  sehr große Gradienten in der Funktion  $z$  auftreten, also für kleine Veränderungen der Variablen große Änderungen in den Funktionswerten zu erwarten sind. Wie sieht das nun für die Eigenspannungen des Zweikristall-Modells als Funktion der Modellparameter aus?

Die Dehnung  $\varepsilon$  des Zweikristall-Modells teilt sich für jeden Kristall in einen elastischen und einen Dämpferanteil auf, die durch die entsprechenden Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  ersetzt werden können:

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{E_1} + \frac{\sigma_1}{\eta_1} = \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_2}{E_2} + \frac{\sigma_2}{\eta_2} \quad (5.18)$$

Für die schlagartige Belastung  $t_a \rightarrow 0$  und anschließendes Konstanthalten der äußeren Lastspannung  $\Sigma$  lassen sich die Spannungen aufteilen in ihren Anteil aus der schlagartigen Belastung und der sich mit der Zeit entwickelnden Eigenspannung:

$$\sigma_1 = {}^0\sigma_1 + \sigma_{ES1} \quad (5.19)$$

$$\sigma_2 = {}^0\sigma_2 + \sigma_{ES2} \quad (5.20)$$

Einsetzen von diesen beiden Beziehungen und der Forderung (5.7) in Gleichung (5.18) führt auf eine Differentialgleichung für die Eigenspannung  $\sigma_{ES1}$ , deren Integration mit  $\bar{\sigma}_{ES1} = \sigma_{ES1}/\Sigma$  folgendes Ergebnis liefert:

$$\bar{\sigma}_{ES1} = [1 - \exp(-X^* t^*)] Z \quad (5.21)$$

mit

$$Z = \frac{1/\tilde{E} - 1/\tilde{\eta}}{\alpha_1 + (1 - \alpha_1)/\tilde{E}} \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_1 + (1 - \alpha_1)/\tilde{\eta}}, \quad (5.22)$$

$$X^* = \frac{\alpha_1 + (1 - \alpha_1)/\tilde{\eta}}{\alpha_1 + (1 - \alpha_1)/\tilde{E}} \quad (5.23)$$

und mit der dimensionslosen Zeit  $t^* = \frac{E_2}{\eta_2} t$ .

Sollte sich bei Grenzwertbetrachtungen  $X^*$  zu 0 ergeben und  $Z \rightarrow \infty$  gehen, d.h. sich für  $\bar{\sigma}_{ES1}$  ein Ausdruck der Form „ $\frac{0}{0}$ “ ergeben, ist es vorteilhaft, die Exponentialfunktion als Reihe zu entwickeln:

$$\bar{\sigma}_{ES1} = Y^* t^* \left[ 1 - \frac{1}{2!} X^* t^* + \frac{1}{3!} (X^* t^*)^2 - \frac{1}{4!} (X^* t^*)^3 \pm \dots \right] \quad (5.24)$$

mit

$$Y^* = \frac{1/\underline{E} - 1/\underline{\eta}}{(\alpha_1 + (1 - \alpha_1)/\underline{E})^2} (1 - \alpha_1). \quad (5.25)$$

Z.B. läßt sich die Grenzwertbetrachtung für  $\underline{\eta} \rightarrow \infty \wedge \underline{E} \rightarrow \infty \wedge \alpha_1 \rightarrow 0$ , d.h. für die Folge oder den Pfad  $\lim_{k \rightarrow 0} \{\underline{\eta} = 1/k^m, \underline{E} = 1/k^n, \alpha_1 = k^p\} = \{\infty, \infty, 0\}$  schreiben als  $\lim_{k \rightarrow 0} \bar{\sigma}_{ES1}(k) = \bar{\sigma}_{ES1}(m, n, p)$ . Mit den Exponenten  $m, n, p$  kann gesteuert werden, welche Variable schneller gegen ihren Grenzwert geht. Auf diese Art und Weise erhalten wir u.U. verschiedene Grenzwerte für unterschiedliche Pfade.

Die Grenzwertbetrachtungen, die für die Eigenspannungen Extremwerte ergeben, werden nach den Fällen I und II getrennt aufgelistet. Z.B. bedeutet  $p < m < n < 2p$  bzw.  $\alpha_1 \prec \underline{\eta} \prec \underline{E} \prec 2\alpha_1$ , daß  $\alpha_1$  langsamer als  $\underline{\eta}$ ,  $\underline{\eta}$  langsamer als  $\underline{E}$ ,  $\underline{E}$  langsamer als mit der doppelten Geschwindigkeit von  $\alpha_1$  gegen den eigenen Grenzwert geht.

Zu I.: Die Grenzwertbetrachtung  $\underline{E} \rightarrow \infty \wedge \underline{\eta} \rightarrow \infty \wedge \alpha_1 \rightarrow 0$  liefert 3 verschiedene Grenzwerte, von denen 0 nach Abb. 5.7 am plausibelsten erscheint und  $-\infty$  unter II. betrachtet wird. Der dritte Grenzwert  $\infty$  ergibt sich für jede der folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\prec \underline{\eta} \prec \underline{E} \prec 2\alpha_1 \\ \underline{\eta} &\succ \alpha_1 = \underline{E} \\ \underline{\eta} &= \alpha_1 \succ \underline{E} \\ \underline{\alpha}_1 &\succ \underline{\eta} \succ \underline{E} \end{aligned}$$

Bei der Grenzwertbetrachtung  $\underline{E} \rightarrow 0 \wedge \underline{\eta} \rightarrow \infty \wedge \alpha_1 \rightarrow 0$  verschwindet die Eigenspannung ganz. Offensichtlich ist die elastische Nachgiebigkeit so groß, daß Kristall 1 mit  ${}^0\bar{\sigma}_1$  schon gleich Null praktisch keine Spannung mehr an sich ziehen kann, obwohl für diese Grenzwertbetrachtung das Potential für die Eigenspannung nach Abb. 5.7 am größten ist.

Zu II.: Die Grenzwertbetrachtung  $\underline{E} \rightarrow \infty \wedge \underline{\eta} \rightarrow \infty \wedge \alpha_1 \rightarrow 0$  (s. auch unter I.) liefert den hier interessierenden Grenzwert von  $-\infty$  für jede der folgenden Bedingungen:

$$\alpha_1 \prec \underline{E} \prec \underline{\eta} \prec 2\alpha_1$$

$$\begin{aligned} E &\succ \alpha_1 \succ \eta \\ \tilde{E} &\succ \alpha_1 = \tilde{\eta} \\ \alpha_1 &\succ \tilde{E} \succ \tilde{\eta} \end{aligned}$$

Bei der Grenzwertbetrachtung  $\tilde{E} \rightarrow \infty \wedge \tilde{\eta} \rightarrow 0 \wedge \alpha_1 \rightarrow 0$  ergibt sich  $-\infty$  als einziger Grenzwert in Übereinstimmung mit Abb. 5.7.

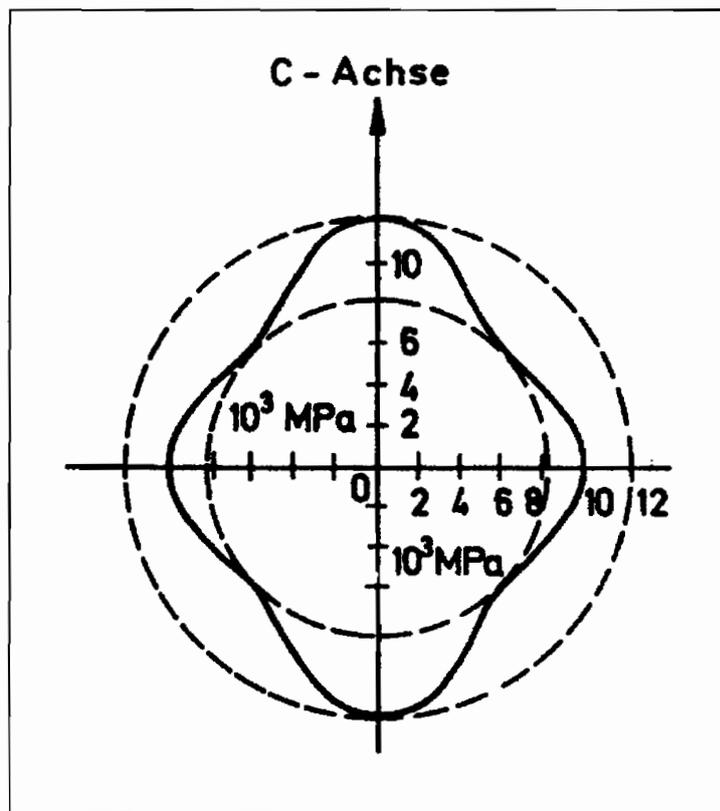


Abb. 5.8: Abhängigkeit des effektiven E-Moduls von der Belastungsrichtung nach FLETCHER [Fle70]

Die Fälle I und II sind in Bezug auf den Werkstoff Eis unterschiedlich zu bewerten, da bei Eis das Verhältnis  $\tilde{E}$  der effektiven E-Moduli nur Werte zwischen 0.67 und 1.5 annehmen kann (vgl. Abb. 5.8). Damit der Fall II im Vergleich zu Fall I die betragsmäßig größere Eigenspannung liefert, muß die Grenzlinie 3 oberhalb der Grenzlinie 4 verlaufen (vgl. Abb. 5.6); d.h. es muß gelten:

$${}^0\bar{\sigma}_1 > \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha_1}, \quad (5.26)$$

woraus mit  ${}^0\bar{\sigma}_1 = {}^0\sigma_1/\Sigma$  und Gleichung 5.2 folgt:

$$\alpha_1 > \frac{1}{1 + \tilde{E}} =: f(\tilde{E}) \quad (5.27)$$

Für den Fall I gilt gerade das <-Zeichen, d.h. Grenzlinie 3 liegt unterhalb Grenzlinie 4. Für ausgewählte Werte von  $\tilde{E}$  aus seinem Definitionsbereich wird die Bedingung (5.27) für  $\alpha_1$  ausgewertet und für spezielle  $\alpha_1$  die Eigenspannungen  $\bar{\sigma}_{ES1}$  nach Fall I und II miteinander verglichen:

	Fall I	Fall II
$\tilde{E} = 0.67$	$\alpha_1 < 1/2$ ( $\alpha_1 < 0.6$ )	( $\alpha_1 > 0.6$ )
$\tilde{E} = 1.0$	$\alpha_1 < 1/2$	( $\alpha_1 > 1/2$ )
$\tilde{E} = 1.5$	$\alpha_1 < 0.4$	$\alpha_1 > 0.4$
(5.28)		
z.B. für $\tilde{E} = 1.5$ :		
$\alpha_1 = 0.35$	$\bar{\sigma}_{ES1} = 1.58$	$\bar{\sigma}_{ES1} = -1.28$
$\alpha_1 = 0.4$	$\bar{\sigma}_{ES1} = 1.25$	$\bar{\sigma}_{ES1} = -1.25$
$\alpha_1 = 0.45$	$\bar{\sigma}_{ES1} = 1.00$	$\bar{\sigma}_{ES1} = -1.22$

Die eingeklammerten Ungleichungen rühren daher, daß nur  $\alpha_1 \leq 1/2$  betrachtet zu werden braucht (s.o.). Nur in dem Bereich  $\tilde{E} \in ]1.0, 1.5]$  und für  $\alpha_1 > \max(0.4, f(\tilde{E}))$  nach der Bedingung (5.27) liefert Fall II die betragsmäßig größere Eigenspannung, wenn Kristall 1 nach schlagartiger Belastung während des anschließenden Kriechprozesses die gesamte äußere Last abgegeben hat. Auf der Grenze  $\alpha_1 = f(\tilde{E})$  sind die beiden entgegengesetzten Extremfälle möglich: z.B. für  $\alpha_1 = f(\tilde{E} = 1.5) = 0.4$  wird auf zwei Arten 1.25 als Absolutbetrag der Eigenspannungen erreicht: Entweder gibt Kristall 1 seine gesamte Last ab, was  $\bar{\sigma}_{ES1} = -1.25$  zur Folge hat, oder Kristall 1 trägt die äußere Last allein, wodurch sich in ihm ein  $\bar{\sigma}_{ES1}$  von +1.25 aufbaut.

Veranschaulicht man sich die Grenzwertbetrachtung  $\tilde{E} \rightarrow \infty \wedge \tilde{\eta} \rightarrow \infty \wedge \alpha_1 \rightarrow 0$  nach Abb. 5.9, erscheinen die unterschiedlichen Grenzwerte (s.o.) zunächst paradox, da Kristall 1 viel härter „aussieht“ als Kristall 2 und von Anfang an die gesamte äußere Last übernommen zu haben scheint.

Die Lösung (5.21) der Differentialgleichungen, die den Zweikristall mit der in Abb. 5.3 dargestellten Belastungsgeschichte beschreiben, zeigt jedoch, daß Kristall 1 auch in dem Fall, daß sowohl sein effektiver E-Modul  $E_1 > E_2$  als auch seine Dämpferkonstante  $\eta_1 > \eta_2$

größer als die entsprechenden Werte von Kristall 2 sind, nach schlagartiger Belastung Last an Kristall 2 abgeben kann. In diesem Fall würde die Amplitude (5.22) von  $\bar{\sigma}_{ES1}$  negativ werden, d.h. der Zähler  $1/\tilde{E} - 1/\tilde{\eta}$  wird kleiner 0. Lastabgabe ist also gleichbedeutend mit  $\tilde{\eta} < \tilde{E} \Leftrightarrow \eta_1/\eta_2 < E_1/E_2 \Leftrightarrow \eta_1/E_1 < \eta_2/E_2$ .

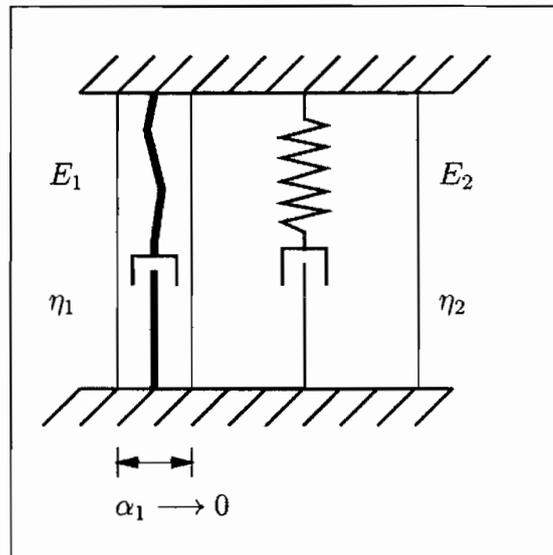


Abb. 5.9: Veranschaulichung der Grenzwertbetrachtung  $E \rightarrow \infty \wedge \tilde{\eta} \rightarrow \infty \wedge \alpha_1 \rightarrow 0$

Für die Frage, welcher Kristall nach schlagartiger Belastung im anschließenden Kriechprozess noch zusätzliche Last von dem anderen Kristall übernimmt, ist das größere Verhältnis  $\eta_i/E_i$  entscheidend, das aber allein keine Aussage über die Ursache der Spannungsumlagerung erlaubt.

Daß z.B. mit  $\eta_1/E_1 > \eta_2/E_2$  Kristall 1 Last anzieht, kann daran liegen, daß er langfristig den größeren Anteil und mehr als kurzfristig trägt (wobei er kurzfristig vielleicht nur den kleineren Lastanteil übernimmt), oder daß sich die Last langfristig auf beide Kristalle gleich verteilt, aber der andere Kristall kurzfristig den größeren Anteil getragen hat, oder daß Kristall 1 sowohl langfristig als auch kurzfristig weniger als der andere Kristall trägt, aber langfristig einen größeren Anteil als kurzfristig übernimmt. Die Bedingungen für diese verschiedenen Möglichkeiten können angegeben werden, indem man bei der Beschreibung des Zweikristalls von den Kräften in jedem Kristall ausgeht. Darauf soll aber an dieser Stelle verzichtet werden.

### 5.3 Physikalische Bedeutung der Parameter

Nach der unteren Schranke (5.11) kann die Eigenspannung aus der im Versuch gemessenen verzögert elastischen Dehnung abgeschätzt werden. Allerdings existiert aus energetischen Gründen eine obere Schranke für die Eigenspannung. Stellt man unmittelbar obere und untere Schranke einander gegenüber, wie in der Ungleichung (5.15) geschehen, entsteht nach Einsetzen der Beziehung (5.8) eine Schrankenbeziehung für die Modellparameter  $\tilde{E}$  und  $\alpha_1$ :

$$\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_e} \leq \frac{1 - \alpha_1}{\tilde{E} \alpha_1}, \quad (5.29)$$

mit der sich aus dem gemessenen Verhältnis der verzögert elastischen zur elastischen Dehnung  $V = \varepsilon_d/\varepsilon_e$  eine Schranke für den Querschnittsflächenanteil  $\alpha_1$  ergibt:

$$\alpha_1 \leq \frac{1}{V \tilde{E} + 1} \quad (5.30)$$

Den Versuchen von MELLOR und TESTA [MT69] an polykristallinen Eisproben läßt sich ein sehr großes Verhältnis  $V = 30$  entnehmen. Bei Annahme elastischer Isotropie ( $\tilde{E} = 1$ ) beschränkt dies den Querschnittsflächenanteil des schlechter abgleitbaren Kristalls 1 auf höchstens  $\alpha = 3.2\%$  (und für elastische Anisotropie bei  $\tilde{E} = 0.66$  und  $\tilde{E} = 1.5$  auf  $\alpha_1 = 4.8\%$  bzw. auf  $\alpha_1 = 2.2\%$ ).

Soll mit dem Zweikristall-Modell die polykristalline Versuchsprobe beschrieben werden, müßte man aus diesem Ergebnis schlußfolgern, daß die Eisprobe einen sehr kleinen „Hartkornanteil“ von 3.2% besitzt, der definiert sein mag als die Summe aller Körner, deren basalen Ebenen senkrecht zur aufgetragenen äußeren Lastrichtung stehen. Unterteilen wir den Bereich der möglichen Lastrichtung in beliebig feine Winkelabschnitte, können wir auch für einen isotropen Polykristall (bei dem alle Kornorientierungen gleich gewichtet sind) beliebig kleine „Hartkornanteile“, wie sie oben definiert sind, erhalten. Die Frage stellt sich nur, ob alle anderen Körner, auch die, die sich in ihrer Orientierung nur infinitesimal von der des Hartkornanteils unterscheiden, leicht genug abgleiten, oder ob nicht doch eine Textur vorliegen müßte, d.h. daß die Klassen, deren Kornorientierungen der des „Hartkornanteils“ „nahe“ sind, nicht im Polykristall auftreten dürfen, damit wirklich nur der „Hartkornanteil“ die gesamte äußere Last trägt. Dann lägen die wenigen schlecht orientierten Körner wie eine 2. Phase in einer Matrix aus sehr leicht abgleitbaren Körnern. Bei zu kleinem „Hartkornanteil“ wäre dann kaum noch die Taylorsche Annahme nach homogener Verformung zu halten, da man sich vorstellen kann, daß die leicht abgleitbare Matrix um die wenigen harten Körner herumfließt.

Es kann noch angefügt werden, daß die Ungleichung (5.30) auch für  $\alpha = 1/2$  erfüllt werden kann; dann müßte Kristall 1 als eine Art 2. Phase einen effektiven E-Modul von  $1/30$  desjenigen von Kristall 2 haben. Die Eigenspannung in Kristall 1 beträgt in diesem Fall  $1.94 \Sigma$  anstatt  $30 \Sigma$ .

MELLOR und TESTA [MT69] postulieren für ihre Eisproben Isotropie: Zur Herstellung der Proben wurden Eiskörner gesiebt, in eine vibrierende Form geschüttet und dieses Eis-Luft-Gemisch mit destilliertem und entgastem Wasser gesättigt.

Das Zweikristall-Modell kann das transiente Spannungs-Dehnungsverhalten einer polykristallinen Eisprobe im einaxialen Versuch wiedergeben. Aber die Diskussion zeigt, daß sich den Modell-Parametern nur eine ungefähre physikalische Bedeutung zumessen läßt. Je eindeutiger die physikalische Bedeutung ist, desto leichter ist häufig bei der Anpassung eines Stoffgesetzes an einen Versuch die Größenordnung der Parameter abzuschätzen. ASHBY und DUVAL [AD85] verwenden z.B. das rheologische Modell nach Abb. 5.10 mit den unterschiedlichen Längen  $l_A$  und  $l_B$  für die beiden Feder-Dämpfer-Elemente. Dann kann die Stabsteifigkeit bei Konstanthalten des physikalisch bekannten E-Moduls variiert werden durch Veränderung der Länge und der Querschnittsfläche. Sie wenden dieses Modell auf einen einzigen Kristall, auf das „average“ grain an, wobei ein Dämpfer die basale und der andere die prismatische Abgleitung dieses Kristalls repräsentieren. Die in diesem Modell auftretende Spannungsumlagerung verwenden sie als interne Variable für ihr Stoffgesetz. Welche physikalische Bedeutung z.B. den Längen  $l_A$  und  $l_B$  zugewiesen werden könnte, geben sie nicht an. Allerdings können sie dadurch, daß sie bestimmte Anforderungen an ihr Modell stellen, Beziehungen entwickeln, aus denen sich diese beiden Parameter mit Hilfe der im Versuch ermittelten Größen bestimmen lassen.

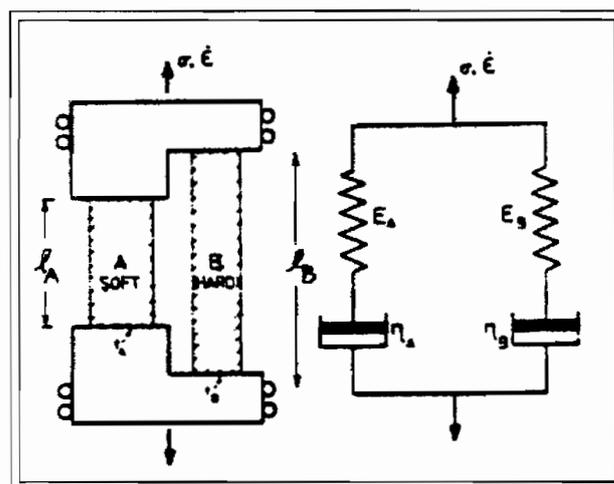


Abb. 5.10: Rheologisches Modell des Stoffgesetzes von ASHBY und DUVAL [AD85]

Verbindet man  $\alpha_1 = 1/2$  mit der Vorstellung, daß alle Körner gleich groß sind, dann dürfte sich nach dem Zweikristall-Modell im Polykristall höchstens eine Eigenspannung in der Größenordnung der von außen anliegenden Lastspannung  $\Sigma$  ergeben (vgl. Fall I in Abschnitt 5.2). Dabei ist zu beachten, daß diese Eigenspannung als eine II. Art zu betrachten ist, da sie im Modell als homogen verteilt über das einzelne Korn vorausgesetzt ist (vgl. a. Abschnitt 5.1).

Wesentliche Merkmale des in diesem Kapitel vorgestellten Zweikristall-Modells sind seine Einaxialität und die Taylorsche Annahme der gleichen Endverformungen der beiden Kristalle. Wie inhomogen sich ein der Realität schon näher kommender Polykristall in seinem Inneren verformt und wie komplex sich in ihm der Eigenspannungszustand ausbildet, wird im nächsten Kapitel vorgestellt.

## 6. Polykristall

### 6.1 Vorbemerkungen

Von den verschiedenen Formen polykristallinen Eises wird im Rahmen dieser Arbeit das säulenförmige Eis *S2* untersucht. Diese Eisform ist von besonderem Interesse, da es als Meereis fast immer an Eis-Struktur-Interaktionen im Offshore-Bereich beteiligt ist (vgl. a. SINHA [Sin78]). Es tritt auch als Frischwassereis auf. Im Laufe seines Wachstums entwickelt es Kristallkörner, die nach einer Länge von wenigen cm ungünstig orientierte Körner so verdrängt haben, daß die Abweichung der *c*-Achsen von der Horizontalen nur wenige Grad beträgt (MICHEL [Mic78]). In dieser horizontalen Ebene sind die *c*-Achsen der in vertikaler Richtung langgestreckten Körner regellos orientiert. Das Eis verhält sich demnach plananisotrop. Die Anisotropieachse liegt dabei parallel zur vertikalen Wachstumsrichtung. Bei einer Konfrontation z.B. mit einer Erdölplattform wird das *S2*-Eis hauptsächlich horizontal belastet. Dabei bildet sich i.a. durch die Rotation der *c*-Achsen um die Anisotropieachse eine Textur aus, d.h. die *c*-Achsen liegen zwar immer noch in der gleichen Ebene, aber ihre Richtungen sind nicht mehr gleichverteilt.

Dieses polykristalline Eis läßt sich sehr gut durch ein zweidimensionales FE-Modell beschreiben, mit dessen Hilfe die Antwort des Eises auf die vorherrschenden ebenen Beanspruchungszustände simuliert werden kann. Dabei soll das FE-Modell den Polykristall als einen Verbund von monokristallinen Eiskörnern idealisieren. Die Korngrenzen werden als Schichten verschwindend geringer Dicke betrachtet, an denen von einem Korn zum anderen schreitend ein Sprung in der Orientierung der benachbarten Körner festzustellen ist. Bei Temperaturen von knapp unter 0°C haben STEINEMANN [Ste58] und KETCHAM UND HOBBS [KH69] Wassereinschlüsse an den Tripelpunkten, also dort wo drei Korngrenzen zusammenstoßen, in polykristallinem Eis beobachtet. Solche Wassereinschlüsse begünstigen das Korngrenzgleiten, das Abgleiten der Körner relativ zueinander. Bei dem in der vorliegenden Arbeit betrachteten Temperaturbereich von -20°C bis -5°C und bei Spannungen von  $10^{-2}$  MPa bis 1 MPa werden die inelastischen Verformungen nach SHOJI und HIGASHI [SH78] durch Versetzungsbewegungen hervorgerufen. Im FE-Modell sind deshalb keine Kontaktelemente an den Korngrenzen, also zwischen den Elementen unterschiedlicher Körner, eingefügt worden, wie es zur Simulation von Korngrenzgleiten nötig wäre. Stattdessen wurden die gemeinsamen Knoten von Elementen verschiedener Körner fest miteinander gekoppelt. Einzelheiten zu der FE-Vernetzung von Modell-Polykristallen

finden sich im Kapitel 3.4.2.

Das Kapitel 6 ist zweigeteilt:

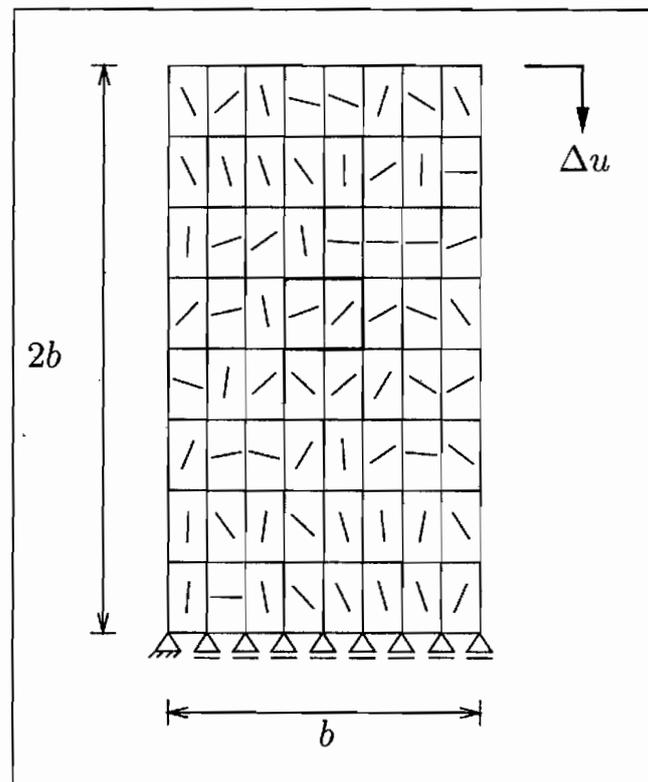
In Kapitel 6.2 werden rechteckige Körner, wie sie im Kapitel 4 separat getestet wurden und in Kapitel 5 den Zweikristall gebildet haben, zu einem Modell-Polykristall aus 64 Körnern zusammengesetzt. Zur Beurteilung der Annahmen des Zweikristall-Modells nach Kapitel 5.2, das bestimmten Stoffgesetzen für polykristallines Eis als Grundlage dient, werden die Eigenspannungsverteilung und die innere Verformung des Polykristalls infolge einer äußeren Belastung untersucht. Das dem Tragverhalten des Polykristalls zugrunde liegende Prinzip wird durch Herauszoomen einzelner Kristalle erläutert und die Konsequenz auf den Verlauf der makroskopischen Spannung  $\Sigma$  aufgezeigt.

Welche Bedeutung die zu wählenden Parameter Kornform, -anzahl und Feinheit der Finite-Elemente-Diskretisierung im Hinblick auf die Verwendung des Modell-Polykristalls für die Anpassung an Versuche mit polykristallinem Eis  $S_2$  haben, wird in Kapitel 6.3 herausgearbeitet.

## 6.2 Der Modell-Polykristall aus Rechteckkörnern im simulierten Druckversuch

Der Polykristall nach Abb. 6.1 besteht aus  $8 \times 8$  Rechteckkörnern. Die Länge der Probe beträgt das Doppelte ihrer Breite. Zur Erreichung einer isotropen Verteilung der Kornorientierungen, werden diese i.d. R. per Zufallsgenerator aus dem Wertebereich  $-90^\circ \leq \vartheta_0 \leq 90^\circ$  vorgegeben (vgl. a. Abb. 3.4). Ausnahmen von diesem Vorgehen werden später noch erläutert. Senkrecht zur Bildebene verlaufen die basalen Ebenen. Ihre Schnittlinie mit der Zeichenebene wird in jedem Korn durch einen kurzen Strich angedeutet. In Abb. 6.1 blickt man praktisch von oben auf eine z.B. auf dem Meer schwimmende rechteckige S2-Eis-Platte.

Wie zuvor bei dem Einkristall in Kapitel 3.1 wird mit der Geschwindigkeit  $\dot{\epsilon} = -1.4 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  ein weggesteuerter Druckversuch gefahren, diesmal bis 1% Stauchung.



**Abb. 6.1:** Polykristall mit der Lage der basalen Ebenen; auf die markierten Körner wird im Abschnitt 6.2.3 Bezug genommen!

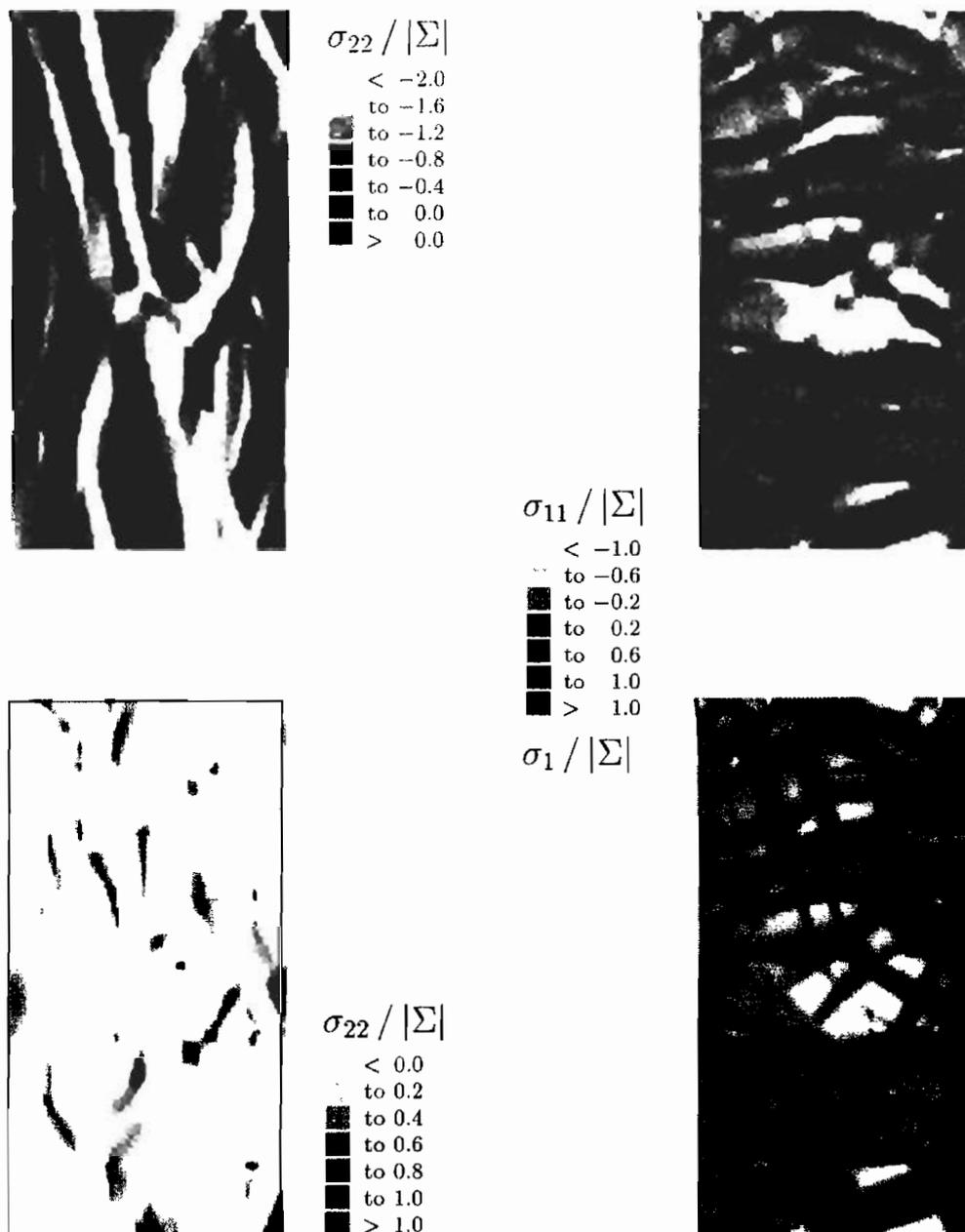


Abb. 6.2: Spannungsverteilung für  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{11}$  und  $\sigma_1$  am Belastungsende

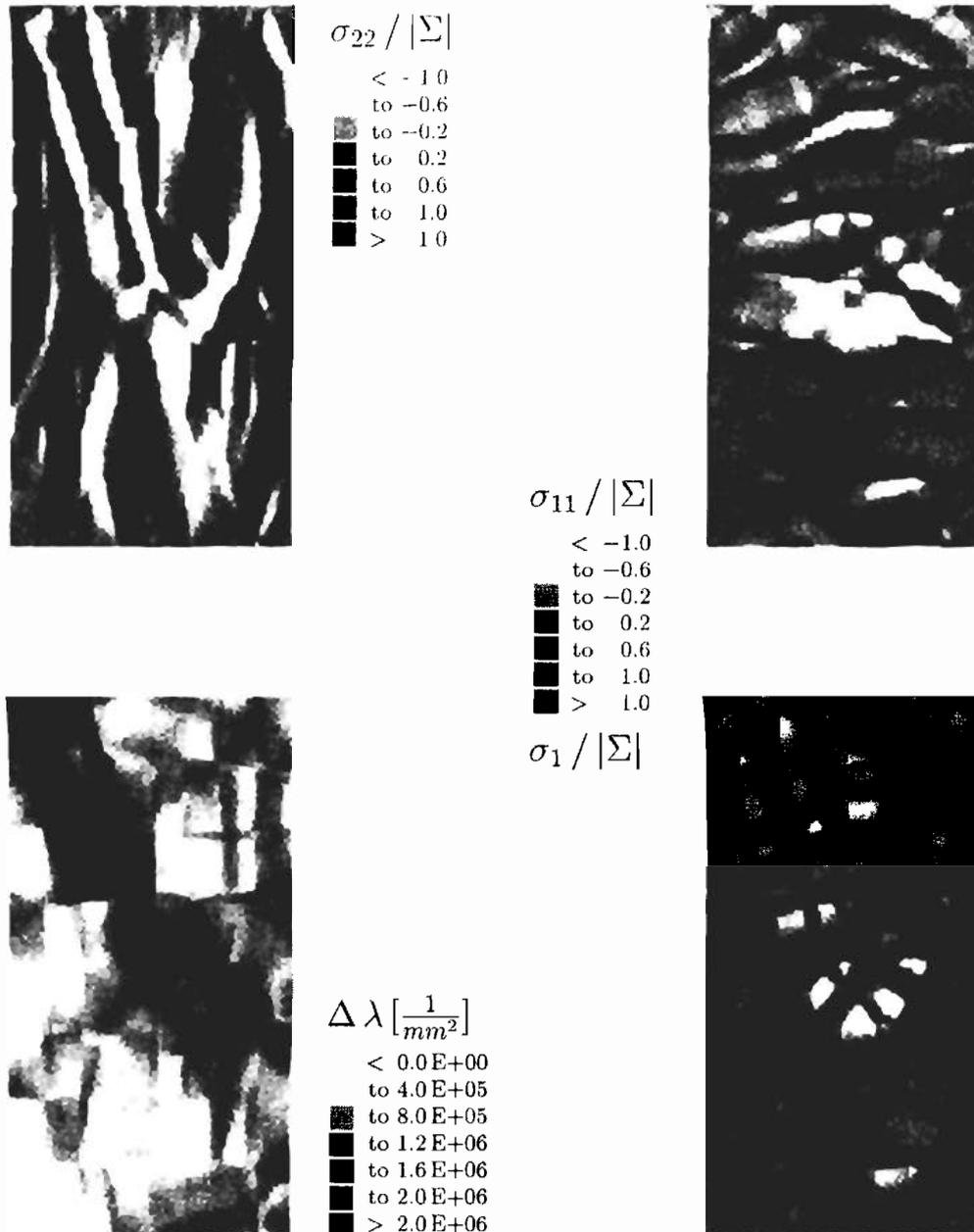
### 6.2.1 Innerer Spannungszustand

Zur Festlegung der Grenzen, innerhalb derer die Spannungsverteilung angezeigt werden soll, übertragen wir das Ergebnis vom Zweikristall-Modell. Hat dort der weniger gut orientierte Kristall 1 die gesamte äußere Last am Belastungsende übernommen, erreicht in ihm für  $\alpha_1 = 1/2$  die Spannung gerade das Doppelte der makroskopischen Spannung, und Kristall 2 ist vollkommen spannungsfrei.

In diesen Grenzen  $2 \Sigma$  bis 0 stellen wir  $\sigma_{22}$  am Belastungsende in Abb. 6.2 dar. Im Laufe des Belastungsprozesses haben sich die Spannungen von den schwarz gekennzeichneten Bereichen umgelagert hin zu den weiß unterlegten Strängen. Die Umlenkung des Kraftflusses bewirkt auch senkrecht zur Lastrichtung, d.h. in 1-Richtung, Spannungen in der Größenordnung der makroskopischen Spannung. Die Verteilung der 1. Hauptspannung  $\sigma_1$  unterscheidet sich insofern von  $\sigma_{11}$ , als daß noch an einzelnen Stellen nahezu vertikal ausgerichtete schwarze Stränge auftreten. Sie rühren daher, daß  $\sigma_{22}$  in seinen schwarzen Bereichen nicht nur auf 0 angestiegen ist, sondern darüber hinaus an sehr wenigen Stellen den Betrag der außen anliegenden Druckspannung  $\Sigma$  erreicht hat (siehe  $\sigma_{22}$ -Plot links unten in Abb. 6.2). Im Vergleich dazu konnte sich Kristall 2 im einaxialen Zweikristall-Modell nur vollständig der äußeren Belastung entziehen, aber nicht noch Spannungen entgegengesetzten Vorzeichens aufbauen (vgl. Kapitel 5.2).

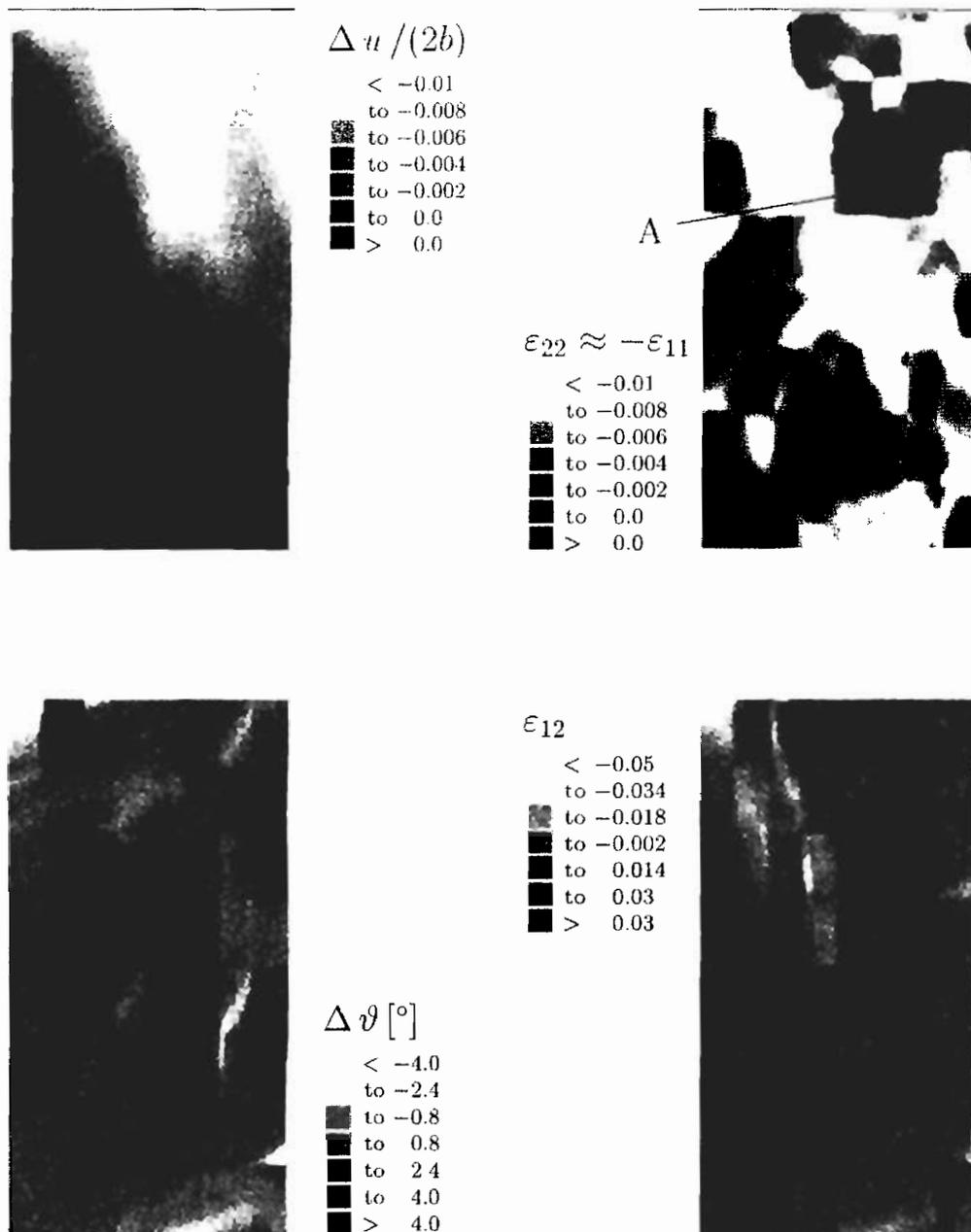
Wird jetzt zur Offenlegung des Eigenspannungszustandes schlagartig entlastet, d.h. mit  $-\Sigma$  belastet, erhalten wir für die Verteilung von  $\sigma_{22}$  ein fast identisches Bild, wenn wir die Grenzen von -2 bis 0 um  $|-\Sigma|$  verschieben auf -1 bis 1 (s. Abb. 6.3). Nur in den Randbereichen oben und unten haben sich wegen der erforderlichen Randspannungsfreiheit deutliche Veränderungen ergeben. Da auch vor der Entlastung keine äußere Last in 1-Richtung gewirkt hat, bleibt folgerichtig  $\sigma_{11}$  nahezu unverändert. Die charakteristische Zellstruktur in der Abbildung der 1. Hauptspannung hat sich schon bei  $\sigma_1$  am Belastungsende angedeutet. Sie entsteht durch Superposition der schwarzen Flächen von  $\sigma_{22}$  mit den schwarzen Strängen von  $\sigma_{11}$ . Die schlechter orientierten Bereiche stehen unter Druck und erzeugen in den sie umgebenden Zellwänden Zugspannungen.

Entlang der weißen Stränge im linken oberen Quadranten im Plot von  $\sigma_{22}$  hat die Versetzungsdichte um  $\Delta\lambda$  stark zugenommen. Offensichtlich mußten dort in den schlechter orientierten Kristallen sehr viele Versetzungen erzeugt werden, damit die vorgegebene makroskopische Verformung umgesetzt werden konnte. Im Vergleich dazu ist in dem rechten weißen Strang, der ab halber Höhe mehr und mehr nach links zur Mitte abknickt, kein besonders großer Zuwachs in der Versetzungsdichte zu beobachten.



**Abb. 6.3:** Verteilung der Eigenspannungen  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{11}$  und  $\sigma_1$  und der Veränderung  $\Delta\lambda$  der Versetzungsdichte (Entlastung); auf die markierten Körner im  $\sigma_{11}$ -Plot wird im Abschnitt 6.2.3 Bezug genommen!

## 6.2.2 Innerer Verformungszustand



**Abb. 6.4:** Verschiebungsfeld  $\Delta u$  in 2-Richtung,  $\varepsilon_{22} \approx -\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{12}$  und  $\Delta \vartheta$  (Belastungsende)

Es soll noch einmal das Belastungsende betrachtet werden, um aufzuzeigen, wie inhomogen sich der Polykristall verformt hat. In Abb. 6.4 zeigt das Höhenlinienbild des Verschiebungsfeldes  $\Delta u$  für die 2-Richtung, daß sich auf der linken Seite die vorgegebene Verformung auf die obere Ecke konzentriert, wo die Höhenlinien im besonders geringen Abstand verlaufen. Hier wird lokal eine Stauchung von über 10% erreicht.

Die Greensche Verzerrung  $\varepsilon_{22}$  ist dargestellt in den Grenzen 0% bis zur vorgegebenen makroskopischen Stauchung von 1%. Das Korn an der Stelle A ist z.B. kaum verzerrt und hat vor allem eine Starkkörperbewegung vollzogen. Das läßt sich an dem großen Abstand der Höhenlinien des Verschiebungsfeldes nahe dem verschobenen Rand ablesen. Die Verformung konzentriert sich auf das schrägliegende weiße Band (im  $\varepsilon_{22}$ -Plot), wo Stauchungen von über 1% erreicht werden (vgl. geringen Abstand der Höhenlinien in der Darstellung von  $\Delta u$ ).

Bei der basalen Abgleitung bleibt das Volumen konstant. Da sich für die  $\varepsilon_{11}$ -Verteilung ein fast identisches Bild nur mit umgekehrten Vorzeichen ergibt, übersteigt die inelastische Verformung deutlich die elastische.

Die Gestaltänderung  $\varepsilon_{12}$  beträgt zwischen weniger als -5% in der linken oberen Ecke bis über 3% an einzelnen Stellen im Polykristall. Die verschiedenen Rechteckkörner sind in diesem Plot besonders gut auszumachen. Unter den geeigneten Randbedingungen geht mit der Gestaltänderung auch eine Rotation der basalen Ebenen einher, wie die  $\Delta \vartheta$ -Verteilung zeigt. Diese Rotation kann innerhalb des einzelnen Kornes sehr inhomogen sein. Z.B. erkennt man im unteren rechten Viertel zwei dreiecksförmige Extrema, und zwar unmittelbar am rechten Rand des Polykristalls und an der horizontalen Korngrenze zwischen den beiden untersten übereinander liegenden Körnern: Diese Körner sind gerade so orientiert (fast spiegelbildlich zu ihrer Korngrenze, vgl. a. Abb. 6.1), daß sie versuchen, unter der vertikalen Drucklast nach rechts zur freien Oberfläche auszuweichen. Dabei würden sich ihre basalen Ebenen tendenziell parallel zu dieser Korngrenze orientieren. Die Nachbarkörner behindern diese Verformung. Nur an der freien Oberfläche findet sie statt. Infolgedessen werden die basalen Ebenen sehr stark gekrümmt, fast abgeknickt, wie an dem sehr geringen Abstand der Höhenlinien abgelesen werden kann. So entwickelt sich an den Hypotenusen der dreiecksförmigen Extrema jeweils eine Kleinwinkelkorngrenze. Dieser mikromechanische Effekt wird häufig bei Materialien mit nur einer effektiven Abgleitenebene beobachtet.

### 6.2.3 Die Tragwirkung des Polykristalls

Die Tragwirkung polykristallinen Eises soll an zwei Körnern in der Mitte des Polykristalls aufgezeigt werden. Dort ist der in Kapitel 5.2 betrachtete Zweikristall eingebettet (vgl. Abb. 6.1). Die benachbarten Kristalle verhindern, daß das  $-20^\circ$ -Korn wie im simulierten Einkristallversuch zur Seite unter der Last ausweicht. Stattdessen vollzieht sich seine Gestaltänderung in der offenbar weniger stark behinderten Neigung seiner Stirnseiten. Wie in der rotierbaren Probenaufhängung (vgl. Abb. 4.3) kann so das Korn seine basalen Ebenen tendenziell senkrechter zur äußeren Drucklastichtung orientieren, und zwar hier um maximal  $4^\circ$  (s. Abb. 6.5). Dadurch wird ein weiteres basales Abgleiten erschwert.

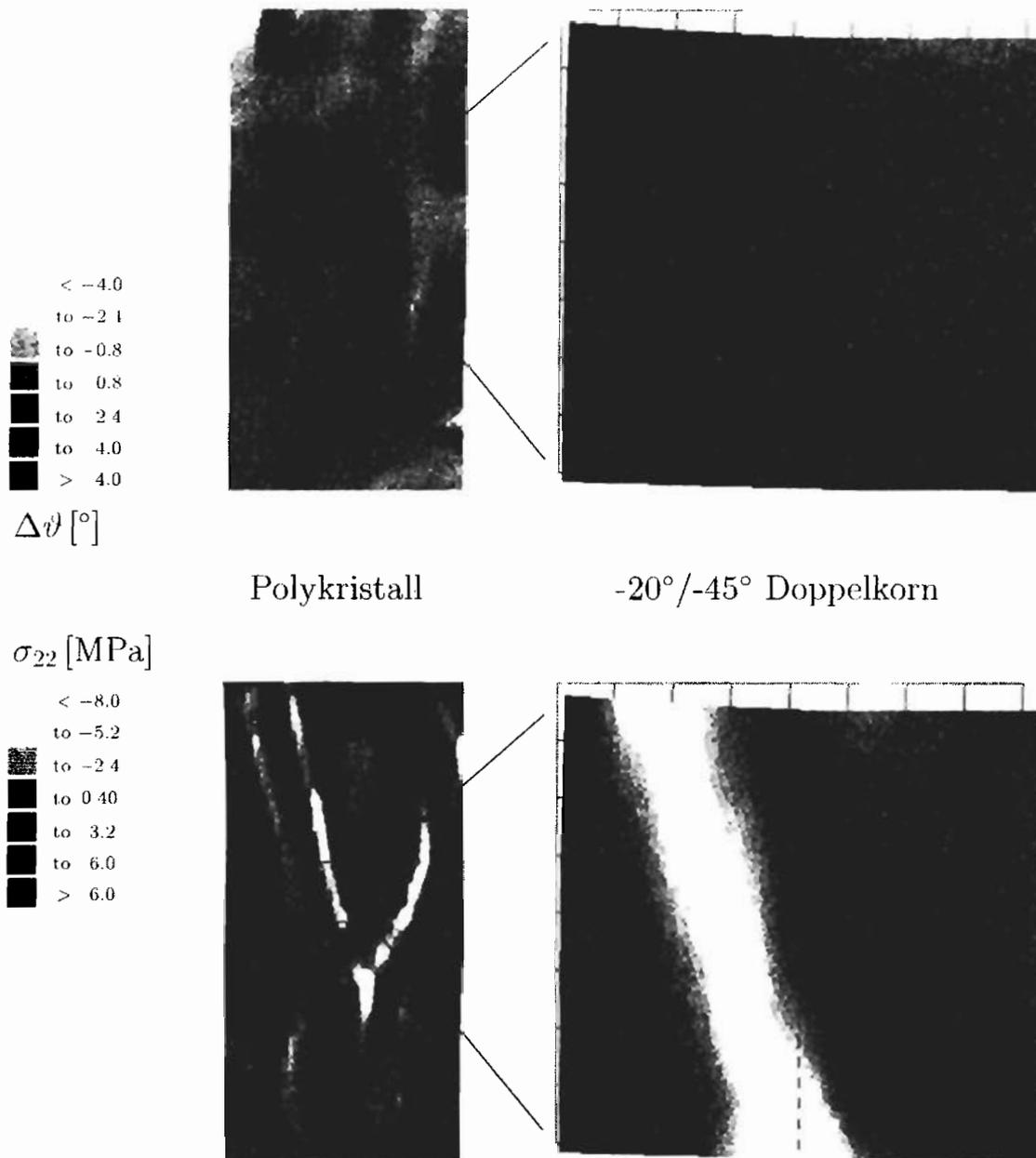


Abb. 6.5: -20° / -45° Zweikristall herausgezoozt für  $\Delta\vartheta$  und für die Eigenspannung  $\sigma_{22}$

Diese Ausrichtung der basalen Ebenen haben wir ebenfalls bei den beiden Randkörnern gesehen. Allerdings führen deren Ausgangsorientierung mit  $|\vartheta_0| \geq 45^\circ$  dazu, daß sich ihre c-Achsen durch das seitliche Ausweichen schneller der Drucklastrichtung annähern als für den Fall der Stirnseitenneigung. Mit dem modifizierten Spielkarten-Modell nach Kapitel 4.2 läßt sich  $|\vartheta_0| = 45^\circ$  als Grenze für dieses unterschiedliche Verhalten herleiten.

Auch bei den anderen Körnern werden diese Drehungen der Mikrostruktur beobachtet, obgleich im unterschiedlichen Ausmaß. Auf diese Weise bildet sich im Polykristall eine Textur aus. Der Verformungswiderstand steigt an.

Die gegenseitige Behinderung der Kristalle am seitlichen Ausweichen führt zu einer Verspannung der Körner untereinander. Dadurch wird ein mehraxialer Eigenspannungszustand hervorgerufen (s. Abb. 6.3). Die Eigenspannungsverteilung in jedem einzelnen Korn ist i.a. sehr inhomogen. Allenfalls ist sie über sehr kleine Kornbereiche als homogen zu bezeichnen (vgl. Abb. 6.5). Von Eigenspannungen III. Art kann noch nicht gesprochen werden (vgl. Abb. 5.1), doch als Eigenspannungen II. Art klassifiziert unterscheiden sie sich deutlich von den Eigenspannungen II. Art, die im Zweikristall-Modell nach Kapitel 5.3 homogen über jedem einzelnen Korn auftreten. Die inhomogenen Eigenspannungen nach Abb. 6.5 aufintegriert für verschiedene Schnitte über die Querschnittsfläche mögen zwar in der Größenordnung der maximalen „Eigenkraft“ von Kristall 1 für  $\alpha_1 = 1/2$  liegen, aber die Taylorsche Annahme gleicher Verformung ist zumindest bei polykristallinem Eis fragwürdig. Bei 1% makroskopischer Stauchung treten lokal Stauchungen von 10% auf (vgl. Abb. 6.4).

Bei einer makroskopischen Spannung von -3.8 MPa verbleibt im  $-20^\circ$ -Korn in 2-Richtung maximal eine Eigenspannung von -8 MPa und im  $-45^\circ$ -Korn eine von 4 MPa. Senkrecht zur globalen Lastrichtung treten im unteren Viertel des  $-20^\circ$ -Korns, sowie durch ein Band verbunden bis in die Mitte des  $-45^\circ$ -Korns positive Eigenspannungen vom Betrage der äußeren Spannung auf (vgl. Abb. 6.3). Das Zweikristall-Modell ist einaxial und kann diese wichtigen Eigenspannungen senkrecht zur Lastrichtung nicht liefern. Aber gerade diese Eigenspannungen sind mitverantwortlich bei der Entstehung und dem Antrieb von Spalt- rissen, die sich unter Drucklast bevorzugt in Ebenen parallel zur Lastrichtung anordnen können.

Zur besseren quantitativen Einordnung werden diese Ergebnisse denen aus den simulierten Einkristall-Versuchen in Abb. 6.6 gegenübergestellt: Nach einer makroskopischen Stauchung von nur 1% haben sich die basalen Ebenen des im Polykristall eingebetteten  $-20^\circ$ -Korns bereits um  $4^\circ$  aufgrund der Lokalisierung der Verformung gedreht, während  $\Delta\vartheta$  im rotierbar eingespannten Korn nach der gleichen, aber jetzt homogen verteilten Verzerrung nur  $1^\circ$  beträgt. Dagegen fällt die Strukturdrehung im einaxialen Druckversuch sehr gering aus, wenn die Prüfvorrichtung die Stirnflächenneigung des Korns behindert (vgl. Kapitel 4.4).

Die gegenseitige Verspannung der Körner mit lokal sehr hohen Spannungswerten führt zu einem Anstieg der Lastkapazität des Polykristalls. Das spiegelt sich in der zeitlichen Entwicklung seiner makroskopischen Spannung wider. Im Vergleich zum Einkristall-Versuch kommt es nach dem Zwischenmaximum nicht mehr zu solch einem starken Abfall der Spannung. Es ist im Anschluß daran wieder ein Anstieg, eine Art Verfestigung, zu beobachten.

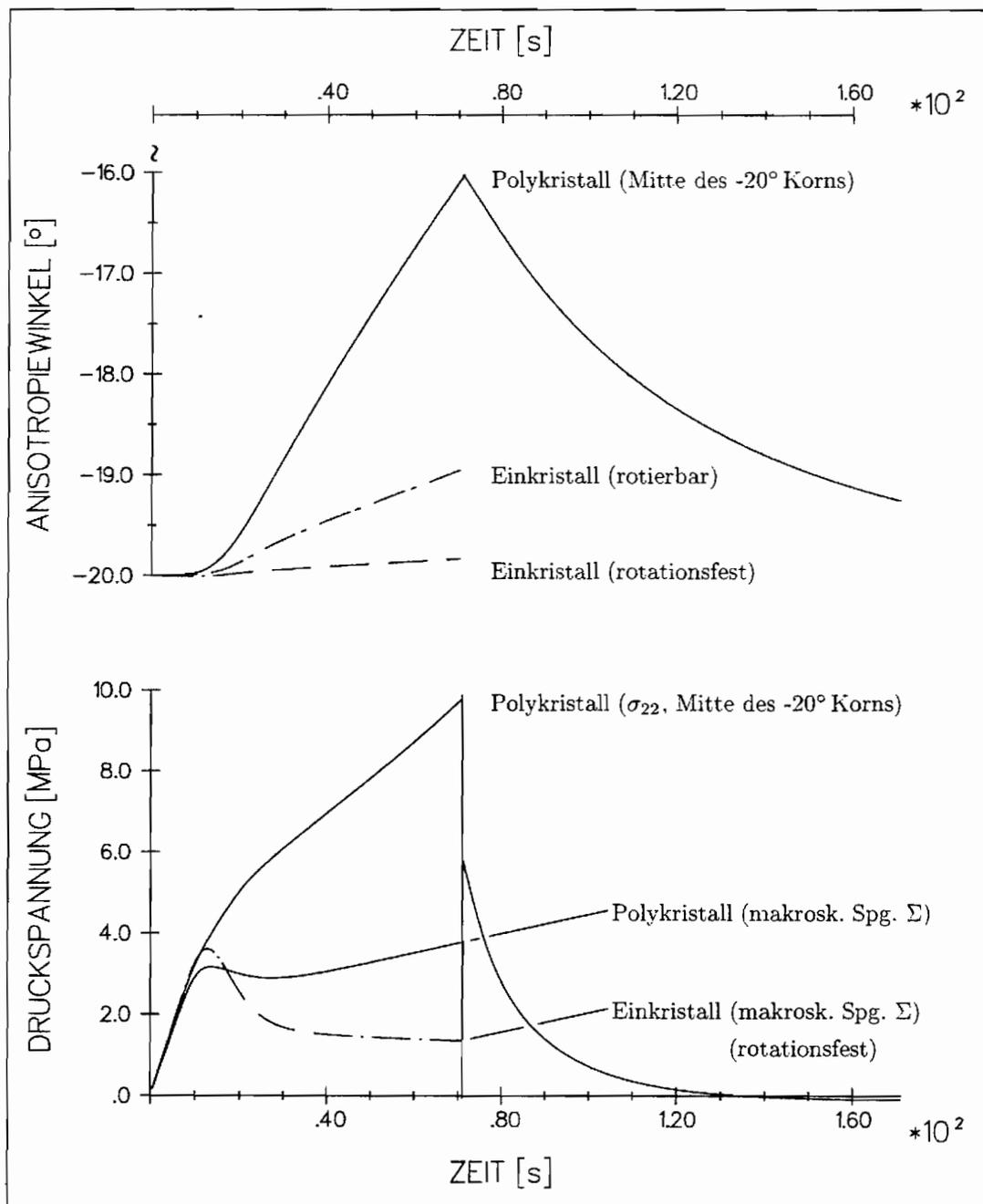


Abb. 6.6: Vergleich: Polykristall – Einkristall

## 6.3 Der Modell-Polykristall für die Anpassung an Versuche mit *S2*-Eis

Soll mit Hilfe des vorgestellten Modell-Polykristalls eine Anpassung an den im Versuch an *S2*-Eis ermittelten Verlauf der makroskopischen Spannung vorgenommen werden, müssen eine geeignete Kornform, -anzahl und die erforderliche Feinheit der FE-Diskretisierung bestimmt werden.

Da es dabei nicht um die genaue Modellierung der Zustandsänderung auf der Mikroebene geht, interessiert man sich für eine mittlere Form der Körner und für die Mindestanzahl der Körner, die für ein isotropes Materialverhalten auf der Makroebene erforderlich ist. Ab dieser Mindestanzahl sollten sich für unterschiedliche per Zufallsgenerator bestimmte Verteilungen der Kornorientierungen die gleichen makroskopischen Kurven ergeben.

Ab einer genügend feinen FE-Diskretisierung sollte sich der Verlauf der makroskopischen Spannung für weitere Netzverfeinerungen nur noch unwesentlich ändern.

Durch die Variation dieser Parameter werden ihre Bedeutung und Anhaltswerte für den Modellierungs- und Rechenaufwand erarbeitet. Zur quantitativen Einschätzung der Ergebnisunterschiede auf der makroskopischen Ebene sind die Veränderungen auf lokaler Ebene mit angegeben.

### 6.3.1 Variation der Kornformen und -anordnungen

Der bisher betrachtete Polykristall bestand aus Rechteckkörnern, wie sie links oben in Abb. 6.7 unter der Bezeichnung Rechteck-Gitter RG angeordnet sind. Aus der Werkstoffkunde (vgl. z.B. HONEYCOMBE [Hon84] und HAASEN [Haa84]) ist bekannt, daß bezüglich des Kornwachstums eine instabile Situation vorliegt, falls in einem Punkt 4 Korngrenzen zusammenstoßen. Eine besonders stabile Situation ist erreicht, wenn sich drei Korngrenzen unter  $120^\circ$  im Tripelpunkt treffen. Das führt bei geradlinigen Kornseiten auf ein Sechseck mit  $120^\circ$ -Innenwinkel.

Dieses Sechseck kann einmal auf eine seiner Seiten gelegt oder auf eine seiner Spitzen gestellt werden, so daß eine vertikal angreifende äußere Last im ersten Fall in Richtung des kürzesten Abstandes der Sechseckseiten und im anderen Fall längs der größten Verbindungslinie zwischen zwei Eckpunkten wirkt. Welche Anordnung den größeren Widerstand

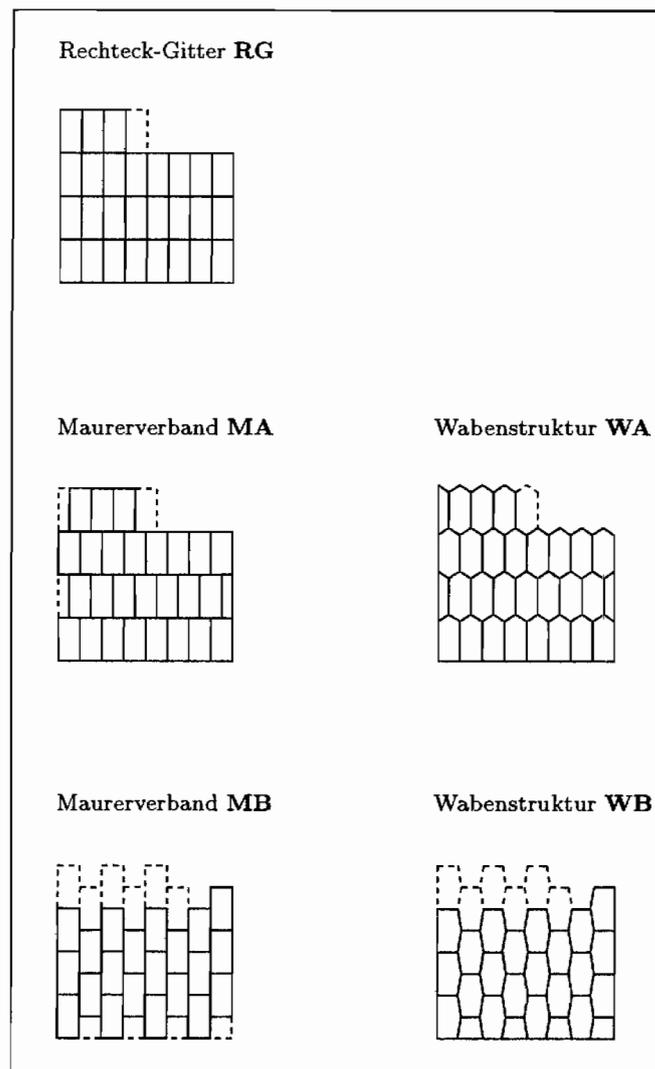
einer äußeren Last entgegengesetzt, läßt sich anhand der beiden möglichen Zwischenstufen Maurerverband MA und MB abschätzen, über die man vom Rechteck-Gitter RG zu einer sechseckigen Kornform gelangt (vgl. Abb. 6.7):

- Im Maurerverband MA ist jede 2. Steinreihe um ein halbes Korn nach rechts verschoben. Wird die halbe Kornstirnseite um  $30^\circ$  um ihren Mittelpunkt gedreht, entsteht die Wabenstruktur WA mit  $120^\circ$ -Innenwinkel.
- Im Maurerverband MB ist jede 2. Steinreihe um ein halbes Korn nach oben verschoben. Wird die halbe Kornlängsseite um  $8.2^\circ$  um ihren Mittelpunkt gedreht, entsteht die Wabenstruktur WB.

Mit dem gewählten Winkel von  $8.2^\circ$  wird erreicht, daß beim Übergang vom Verband MB auf die Struktur WB die gleiche Kornfläche modifiziert wird wie beim Übergang von MA nach WA.

Beim Verschieben einer Steinreihe fällt rechts ein halbes Korn weg, links muß ein halbes Korn eingefügt werden. Um lokal die Veränderung möglichst gering zu halten, ist der Anisotropiewinkel des unmittelbar benachbarten Kornes in der gleichen Reihe als Attribut gewählt worden.

Durch den Versatz der Kornreihen beim Maurerverband MA senkrecht zu einer vertikalen Last verbindet man mit dieser Anordnung einen größeren Zusammenhalt der einzelnen Steine als beim Maurerverband MB. In der Tat reagiert der Maurerverband MA steifer als MB, zumindestens in der Umgebung des Zwischenmaximums bis zum Minimum der makroskopischen Spannungskurve nach Abb. 6.8. Dann drehen sich die Verhältnisse um; MA verläuft unterhalb von MB. Während der Maurerverband MB und die zugehörigen Wabenstruktur WB praktisch deckungsgleich sind, fällt MA gegenüber WA mehr und mehr ab. Abgesehen von einer sehr kleinen Umgebung des Zwischenmaximums erreicht das Rechteckgitter RG die höchsten Werte in der makroskopischen Spannung. Dieser Kurve liegen WB und MB ab dem Minimum noch am nächsten.



**Abb. 6.7:** Andere Kornformen und -anordnungen

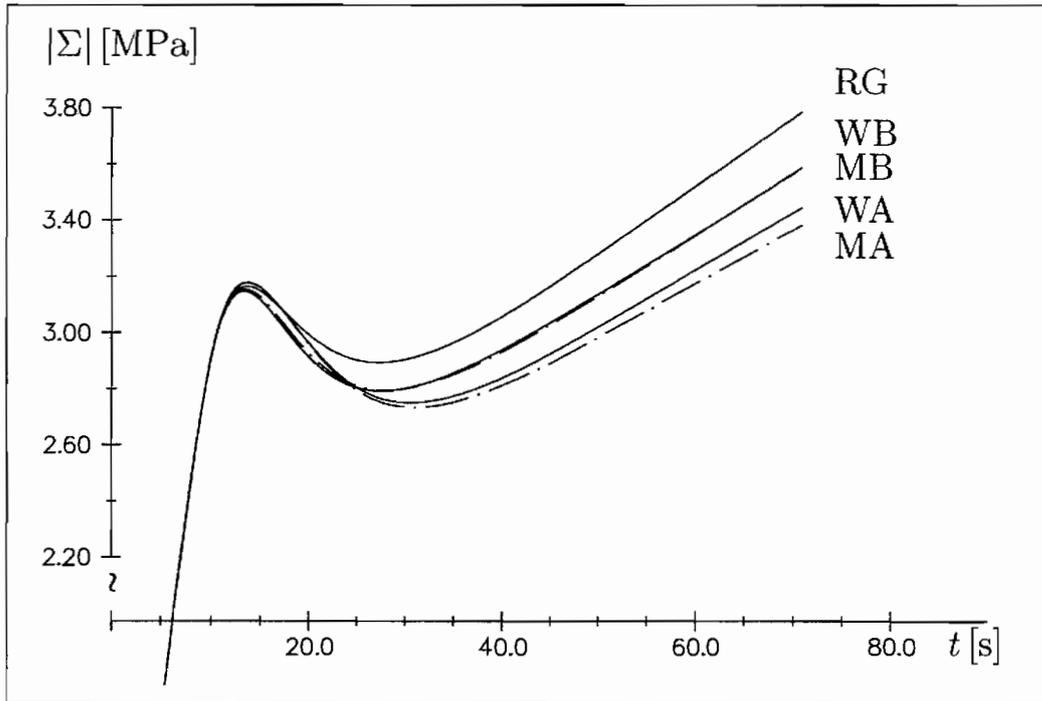


Abb. 6.8: Vergleich der makroskopischen Spannung  $\Sigma$  für verschiedene Kornformen und -anordnungen

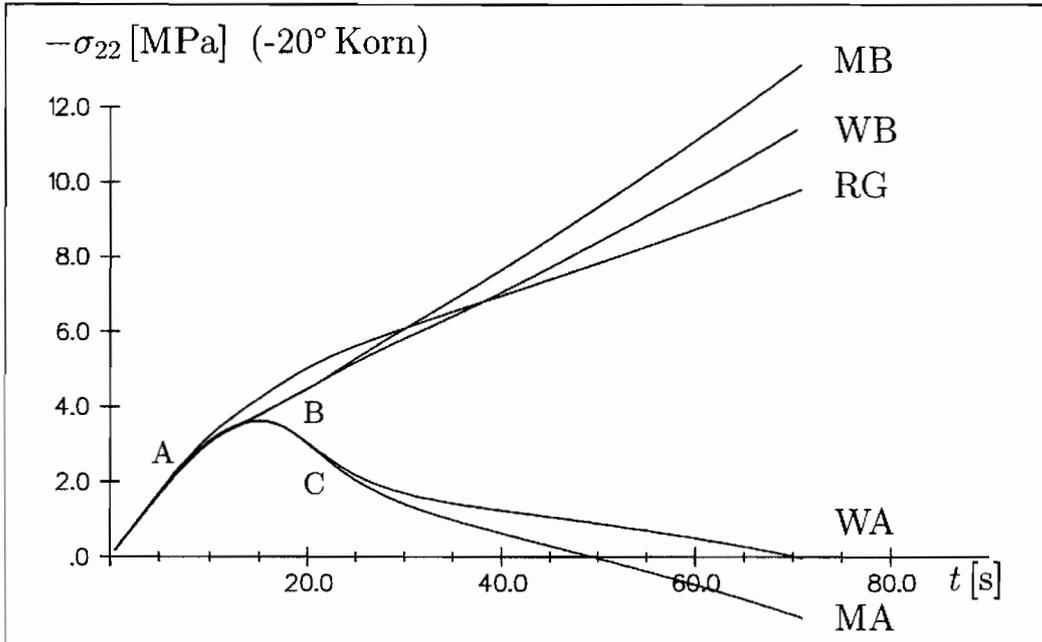


Abb. 6.9: Vergleich der Spannung  $\sigma_{22}$  in der Mitte des  $-20^\circ$ -Korns für verschiedene Kornformen und -anordnungen

Lokal, in der Mitte des  $-20^\circ$ -Korns ergibt sich nach Abb. 6.9 folgendes für die Spannung  $\sigma_{22}$ : Wiederum verlaufen die Kurven WB und MB in der Nähe von RG. Dagegen fällt die Spannung für MA und WA nach einem Zwischenmaximum ab. Drei Punkte fallen besonders auf: An der Stelle A entfernt sich die Kurve für das Rechteck-Gitter von allen übrigen Graphen. Ab Punkt B bzw C tritt jeweils der Unterschied zwischen dem Maurerverband und der zugehörigen Wabenstruktur zu Tage.

Während sich lokal  $\sigma_{22}$  für die verschiedenen Kornformen und -anordnungen qualitativ und quantitativ erheblich unterscheiden, liegen die makroskopischen Kurven am Belastungsende maximal um  $\pm 5.5\%$  von ihrem Mittelwert entfernt, d.h. in einer Bandbreite, innerhalb derer die Ergebnisse von Versuchen an polykristallinen Eisproben streuen.

### 6.3.2 Variation der Kornorientierungen

Um mit der vom Programm *wabez2* (vgl. Kapitel 3.4) erstellten Struktur einen einaxialen Versuch an der Wabenstruktur WB nach Abb. 6.7 in 2-Richtung zu simulieren, wurde einfach die *wabez2*-Struktur in 1-Richtung belastet. Vorher bot sich jedoch die Kontrollrechnung an, ob sich nicht der simulierte einaxiale Versuch an dem Rechteck-Gitter RG jetzt durch einen einaxialen Versuch in 1-Richtung mit einem Höhen-Breiten-Verhältnis  $h/b = 1/2$  gegenrechnen ließe. Dazu muß jede basale Ebene zunächst an der 2-Achse gespiegelt werden, d.h. alle  $\vartheta_0$  sind mit (-1) zu multiplizieren. Dann ist die Matrix aus  $8 \times 8$  Kornattributen zu transponieren, und schließlich  $90^\circ$  zu allen alten mit (-1) skalierten  $\vartheta_0$  zu addieren.

Die einfachste Methode, einen neuen Satz an Kornattributen herzustellen, ohne noch einmal den Zufallsgenerator zu bemühen, besteht darin, bei obiger Kontrollrechnung die Skalierung mit (-1) zu unterlassen. Dieses Vorgehen ist gleichbedeutend damit, nicht wie im Polykristall nach Abb. 6.1 von unten links an die Körner mit den 64 Attributen reihenweise zu belegen, sondern oben links mit der Zuweisung der  $\vartheta_0$  zu beginnen. Damit sind die Kornreihen einfach vertauscht, nicht gespiegelt. Der Vergleich der Ergebnisse dieser mit RGV bezeichneten Kornanordnung mit denen des alten Rechteck-Gitters RG wird in Abb. 6.10 vorgenommen:

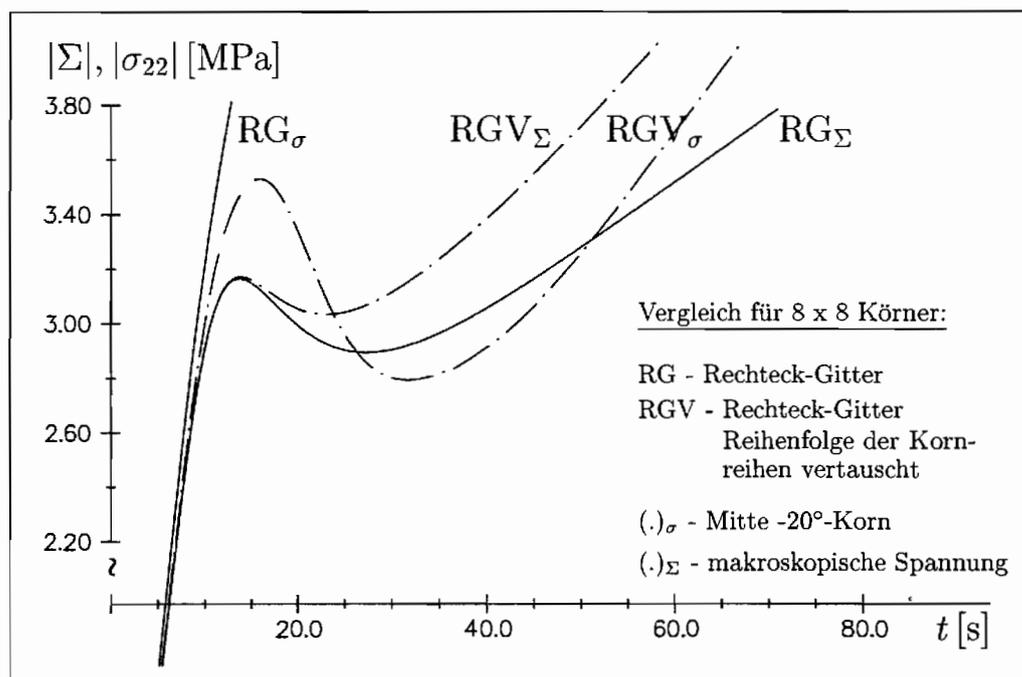


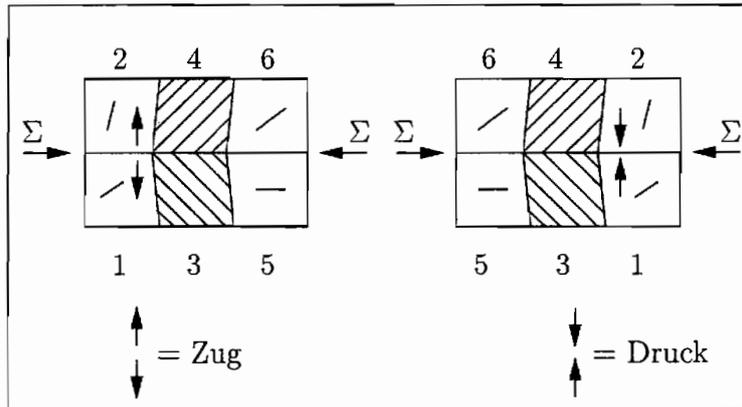
Abb. 6.10: Vergleich zwischen Rechteck-Gitter RG und Rechteck-Gitter RGV (Kornreihen vertauscht)

In den makroskopischen Kurven ergibt sich am Belastungsende mit  $\pm 9\%$  Abstand vom Mittelwert ein Unterschied, der fast doppelt so hoch ist wie der infolge der unterschiedlichen Kornformen und -anordnungen nach Kapitel 6.3.

$\Sigma$  steigt bei den vertauschten Reihen wesentlich stärker an, als bei der ursprünglichen  $\vartheta_0$ -Zuordnung vom Rechteck-Gitter RG.

$\sigma_{22}$  im  $-20^\circ$ -Korn verläuft nicht wie zuvor monoton, sondern ähnelt, allerdings mit ausgeprägteren Extrema, vielmehr der makroskopischen Kurve.

Ab einer genügend großen Anzahl von Körnern dürfte diese Reihenvertauschung keinen Unterschied mehr in den makroskopischen Kurven bewirken, wohl aber auf der Mikroebene. Die Änderungen auf der Mikroebene scheinen sich bei 64 Körnern noch auf die Makroebene durchzuschlagen. Daß sich überhaupt durch die Vertauschung der Reihen Unterschiede ergeben, läßt sich anhand Abb. 6.11 und der schon getroffenen Feststellung erklären, daß sich unter der auch lokal dominierenden äußeren Last die basalen Ebenen senkrechter zur Drucklastichtung orientieren aber mehr und mehr parallel zur Zuglastichtung drehen (vgl. a. Abb. 4.3a):



**Abb. 6.11:** Beispiel für die mikromechanische Auswirkung der Vertauschung der Kornreihenfolge von 1-3-5 auf 5-3-1

Die mittlere der drei hintereinander geschalteten Kornreihen nach Abb. 6.11 bestehe aus einem Kristallpaar, dessen basalen Ebenen einen Winkel einschließen, deren Winkelhalbierende sich nicht zu sehr von der Lastrichtung unterscheidet. Dieses Paar von basalen Ebenen bildet eine Art Keil. Unter der Drucklast wird die Keilspitze in die nächste Kornreihe gedrückt, wo sie Querkzug erzeugt. Das rückwärtige Ende des Keils bildet mit seinen basalen Ebenen geöffnete Schenkel, in die die angrenzende Kornreihe hineindrückt. Sie gerät dann unter Querdruck. Auf den Keil wirkt an seinem rückwärtigen Ende dann Querkzug und an seiner Spitze Querdruck. Jedesmal ist die äußere Drucklast zu überlagern.

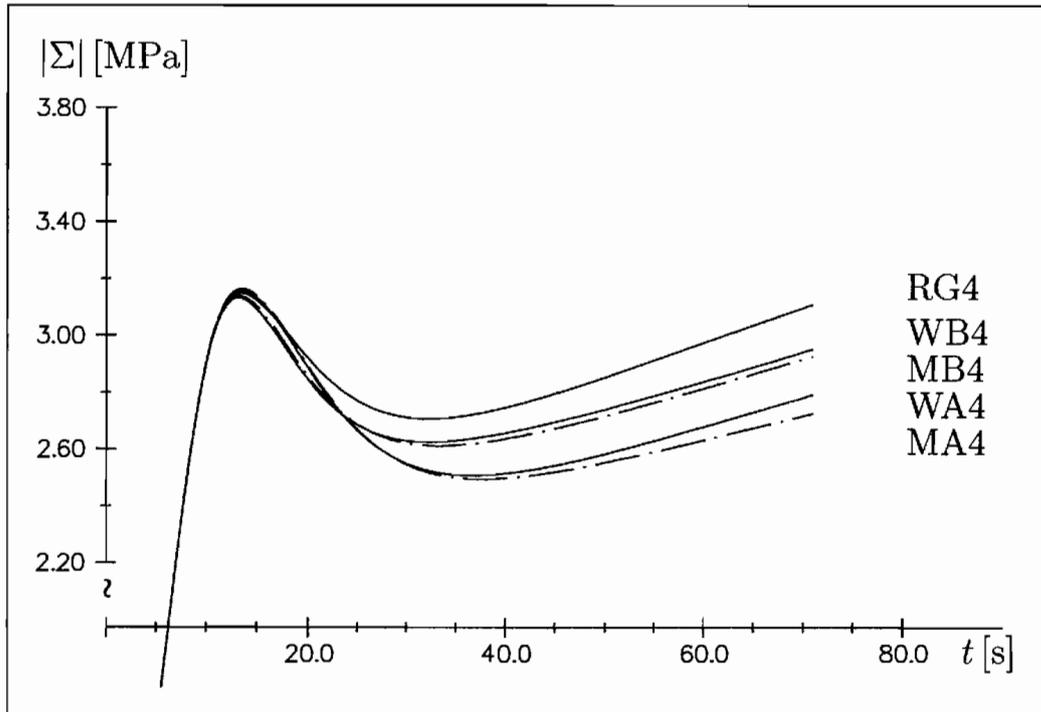
Mit diesem speziellen Beispiel einer Keilwirkung wird schnell klar, daß es sehr wohl einen Unterschied macht, ob z.B. Kornreihe 1-2 links oder rechts von 3-4 angeordnet ist, da in beiden Fällen wegen verschiedenen Vorzeichens in der Querbelastung die basalen Ebenen in unterschiedliche Richtungen rotieren werden.

### 6.3.3 Verfeinerung der Diskretisierung

Zur Modellierung der lokal starken Krümmung der basalen Ebenen reicht es nicht aus, jedes Korn etwa nur durch ein finites Element zu beschreiben. Den Kurvenverläufen in Abb. 6.8 und Abb. 6.9 liegt eine Diskretisierung von  $4 \times 8$  Elementen pro Korn, d.h. von insgesamt 2048 Elementen zugrunde. Eine 4-fach feinere Diskretisierung (d.h. 128 statt 32 Elemente pro Korn) liefert folgende Ergebnisse:

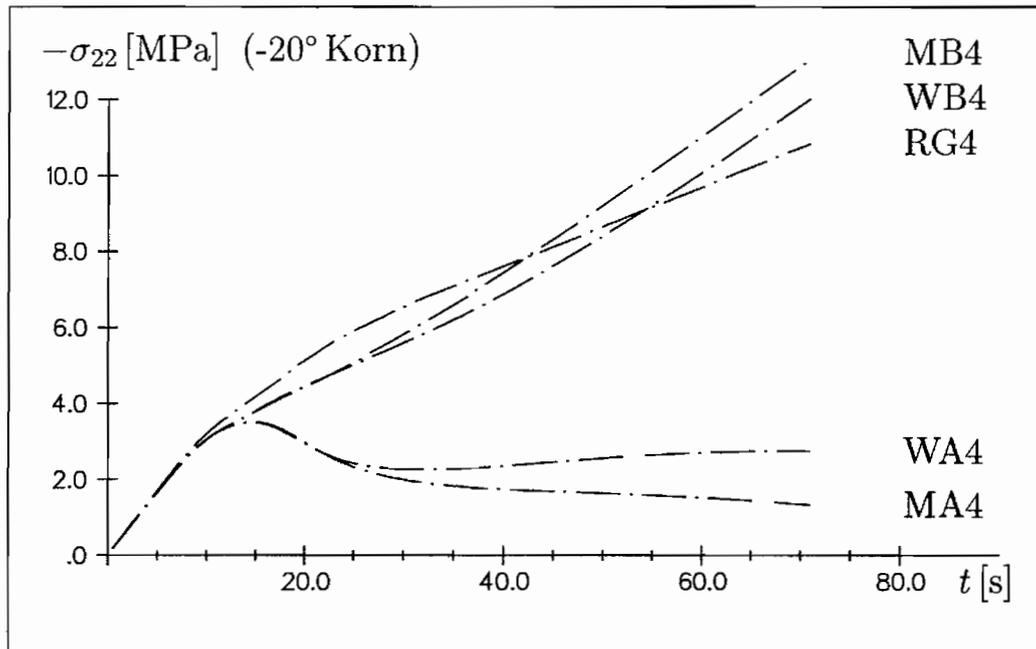
Alle Strukturen reagieren wesentlich weicher (vgl. Abb. 6.12 mit Abb. 6.8). Qualitativ verlaufen die Kurven völlig analog. Allerdings können WB und MB jetzt voneinander

unterschieden werden. Die makroskopischen Kurven liegen am Belastungsende in der gleichen absoluten Bandbreite von 0.4 MPa; das entspricht einem prozentualen Abstand von  $\pm 7\%$  vom Mittelwert. Aus den Kurven RG4 bis MA4 und aus den Verläufen RG bis MA läßt sich jeweils eine mittlere Kurve konstruieren. Diese gemittelten Graphen liegen in einem Abstand von  $\pm 11\%$  von ihrem gemeinsamen Mittel entfernt.



**Abb. 6.12:** Vergleich der makroskopischen Spannung  $\Sigma$  für verschiedene Kornformen und -anordnungen für eine 4-fach feinere Diskretisierung als in Abb. 6.8

Auf lokaler Ebene fällt beim Vergleich von Abb. 6.13 mit Abb. 6.9 auf, daß jetzt WA und MA nicht mehr so stark abfallen; RG4 liegt deutlich oberhalb von RG. Bei MB und WB hat die Verfeinerung nur eine geringe Änderung verursacht.



**Abb. 6.13:** Vergleich der Spannung  $\sigma_{22}$  in der Mitte des  $-20^\circ$ -Korns für verschiedene Kornformen und -anordnungen für eine 4-fach feinere Diskretisierung als in Abb. 6.9

Auf makroskopischer Ebene ist damit der Einfluß der Diskretisierung (Abfall um 22%) doppelt so groß wie die Auswirkung verschiedener Kornformen und -anordnungen (Bandbreite von  $2 \cdot 5.5\% = 11\%$ ) und noch deutlich größer als der Unterschied  $2 \cdot 9\% = 18\%$  infolge der Variation der Kornorientierungen.

Für weitere Netzverfeinerungen sollten die zur gleichen Kornform gehörenden Verläufe der makroskopischen Spannungen gegen eine Grenzkurve konvergieren. Dies soll wegen des zu erwartenden Rechenaufwandes an einem „etwas kleineren“ Polykristall überprüft werden:

Aus dem bisher betrachteten Polykristall nach Abb. 6.1 wird der linke untere Bereich mit  $4 \times 5$  Körnern separiert, die Wabenstruktur WB gewählt, aber jetzt mit gleichseitigen  $120^\circ$ -Waben. Bis zu 2% wird dieser neue Polykristall gestaucht.

Gestartet wird mit 4 FE-Elementen pro Korn. Für jede weitere Verfeinerungsstufe wird die Elementanzahl pro Korn vervierfacht. Mit zunehmend feinerer Diskretisierung antwortet der Polykristall weicher (vgl. Abb. 6.14). Die Kurven für die makroskopische Spannung nähern sich aneinander an. Der anfängliche Wiederanstieg flacht wieder etwas ab. Zur quantitativen Einordnung ist die makroskopische Spannungskurve für den  $8 \times 8$  Polykri-

stall WB4 mit eingezeichnet.

Offensichtlich bedarf es eines großen Aufwandes hinsichtlich der Anzahl der Elemente und damit hinsichtlich der Rechenzeit, um einen Verlauf der makroskopischen Spannung zu erhalten, der sich für weitere Verfeinerungen kaum noch ändert. Nach Abb. 6.14 ist mindestens noch eine weitere, wenn nicht sogar zwei 4-fach feinere Diskretisierungen erforderlich. Dann sind wir bereits in der Größenordnung von insgesamt 20000 bzw. 80000 Elementen. Die Berechnungen erfolgten auf einer SUN-Workstation-Umgebung, bei der man ab 10000 Elementen auf Schwierigkeiten wegen des begrenzten Arbeitsspeichers stieß.

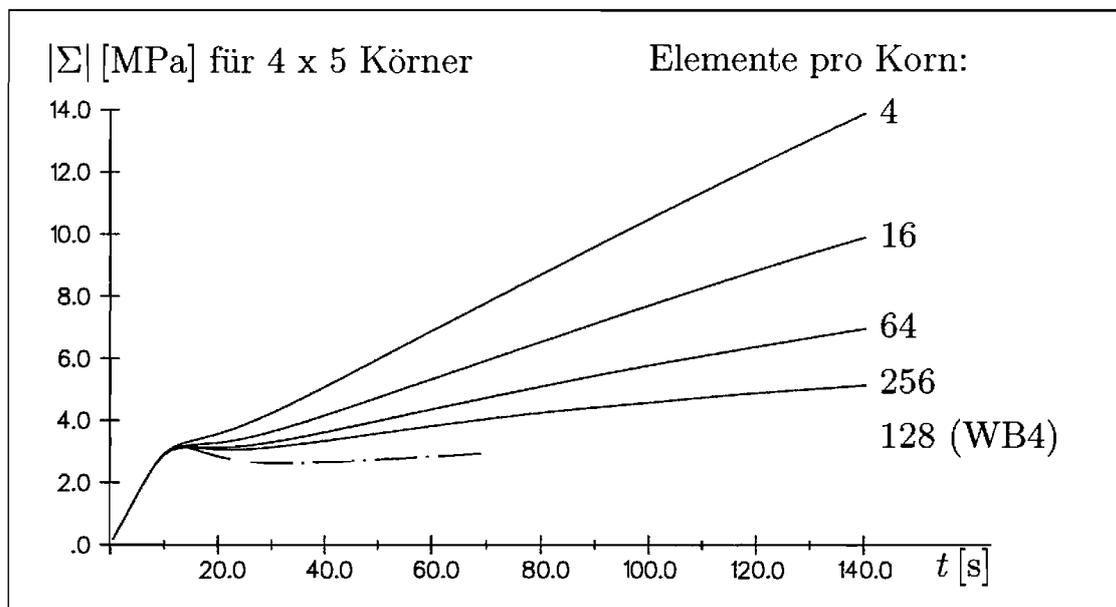


Abb. 6.14: Verlauf der makroskopischen Spannung  $\Sigma$  für eine unterschiedliche Anzahl von Elementen pro Korn

### 6.3.4 Schlußfolgerungen

Ist allein die Entwicklung der makroskopischen Spannung  $\Sigma$  von Interesse, etwa für die Anpassung an Versuchskurven, stellte sich die Frage, ob ein höherer Aufwand in der Modellierung einer realitätsnäheren Kornform und -anordnung einen signifikanten Einfluß auf den Verlauf von  $\Sigma$  hat. Die Ergebnisse der betrachteten fünf verschiedenen Kornformen und -anordnungen lagen innerhalb des bei Eis-Versuchen üblichen Streubereiches der Meßergebnisse. Solange keine Rekristallisation und damit Kornwachstum und -abbau simuliert werden soll, reicht es deshalb aus, die Körner nach der einfachst denkbaren Anordnung, d.h. nach dem Rechteckgitter RG zu einem Modell-Polykristall zusammensetzen.

Selbstverständlich sollten für die Anpassung an plananisotropes polykristallines Eis (S2-Eis) gleich lange Kornseiten und gleiche Innenwinkel innerhalb eines Kornes, also etwa quadratische Körner gewählt werden, um eine Anisotropie infolge ungleicher Kornabmessungen in den verschiedenen Richtungen auszuschließen. Darüber hinaus wird für diese Anpassung eine große Anzahl von Körnern erforderlich sein, damit für unterschiedliche per Zufallsgenerator ermittelte  $\vartheta_0$ -Verteilungen die makroskopischen Kurven auch im inelastischen Bereich übereinstimmen. 64 Körner scheinen bei weitem noch nicht auszureichen, da allein die Vertauschung der Kornreihen noch eine deutliche Veränderung in der makroskopischen Spannung verursacht. Die Anzahl der an den äußerlich unbelasteten Rändern des Modell-Polykristalls liegenden Körner muß sehr klein im Vergleich zur Gesamtzahl der Körner sein. Sonst ist der Anteil der Körner zu groß, die aufgrund der freien Oberfläche weniger stark am seitlichen Ausweichen behindert werden (vgl. a. die beiden in Abschnitt 6.2.2 betrachteten Randkörner); d.h. die Randeffekte haben einen zu großen Einfluß auf den Verlauf von  $\Sigma$ . Bei insgesamt sehr wenigen Körnern sind die Randeffekte für verschiedene Verteilungen der Kornorientierungen trotz Gleichverteilung der Orientierungen sehr unterschiedlich und damit auch der Verlauf von  $\Sigma$ .

Zusammen mit der Anzahl der Körner bestimmt die Anzahl der finiten Elemente pro Korn ganz entscheidend den Aufwand der FE-Berechnungen, wie an einem Polykristall aus 20 Körnern für vier unterschiedlich feine Diskretisierungen aufgezeigt wurde.

Zur Zeit scheint bei vertretbarem Aufwand nur die Anpassung an Versuche mit Eis-Polykristallen möglich zu sein, die aus wenigen Körnern bestehen: Ihr gemessenes makroskopisches Materialverhalten wird nicht isotrop sein, so daß man es nicht für die Anpassung von Werkstoffgesetzen für Eis-Polykristalle verwenden kann. Stattdessen dürfte es besonders vielversprechend sein, sich auf die Modellierung der mikromechanischen Effekte wie z.B. die Bildung von Kleinwinkelkorn Grenzen zu konzentrieren.

## 7. Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel der Arbeit bestand darin, zu einem tieferen Verständnis des Tragverhaltens polykristallinen Eises beizutragen, indem der Polykristall als Verbund seiner Gefügebau- steine, der monokristallinen Eiskörner, idealisiert wurde. Wichtigstes Werkzeug für die Simulation von Zug-/Druckversuchen an den einzelnen Eiskörnern und an den aus ih- nen zusammengesetzten Polykristallen war die geometrisch und physikalisch nichtlineare Finite-Elemente Methode.

Das verwendete monokristalline Stoffgesetz entstammt in seinem inelastischen Anteil der Arbeit von Bischoff-Beiermann [BB92]: für den elastischen Anteil wurde ein hypoelasti- sches Stoffgesetz und die für hexagonales Eis  $I_h$  gültige transversale Isotropie angesetzt. Besonderen Wert wurde auf die Wahl der objektiven Zeitableitung gelegt. Indem dazu auf die Matrizenschreibweise übergegangen wurde, konnte ausgehend von einer Transforma- tionsbetrachtung die verallgemeinerte objektive Zeitableitung nach Jaumann anschaulich hergeleitet werden.

Im Kapitel 3 wurde die Grundlage für die Entwicklung eines geometrisch und physi- kalisch nicht-linearen Vier-Knoten-Scheiben-Elementes für monokristallines Eis erläutert und anhand von Verifikationsrechnungen die erfolgreiche Implementierung dieses Schei- benelementes in das Finite-Elemente-Programm FEAP gezeigt. Besonderen Wert wurde auf die Simulation eines Versuchsstandes für biaxiale weg- und/oder kraftgesteuerte Ver- suche an mono- bzw. polykristallinen Eisproben gelegt, wobei auch bei weggesteuerten Versuchen zur Aufdeckung eines unverfälschten Eigenspannungszustandes eine schlagar- tige Entlastung erreicht werden kann. Das dafür entwickelte Modul beinhaltet die automa- tische Vernetzung der mono bzw. polykristallinen Eisproben und der Probenaufhängung in Abhängigkeit weniger Parameter und ordnet bei Verfeinerungen den neuen Elemen- ten die zugehörigen Attribute (Kornorientierungen) zu. Mit einem Parameter lassen sich Körner zwischen mehr oder weniger wabenförmigen bis rechteckigen Formen bilden. Das Programmmodul ist grundsätzlich auf unregelmäßige Sechseckwaben erweiterbar, indem je- der Wabeneckknoten nur um einen innerhalb eines Bereiches zufällig bestimmten Abstand aus der Position der regelmäßigen Kornform verschoben wird.

Für die Erklärung der Tragwirkung des Polykristalls ist die Kenntnis des Verformungsver- haltens seiner Bestandteile, der Einkristalle erforderlich. Die Finite-Elemente-Simulationen

von einaxialen Zug-/Druckversuchen an monokristallinem Eis dienten dazu, zunächst einmal eine Vorstellung davon zu vermitteln, wie stark das Deformationsverhalten des Monokristalls von den Randbedingungen abhängt. Durch Modifizierung des sogenannten Spielkarten-Modells konnte das gegenüber der elastischen Verformung dominierende inelastische Deformationsverhalten anschaulich erklärt werden. Dieses Kapitel endet mit einem Vergleich der Ergebnisse für verschiedene Randbedingungen, denen der Einkristall unterworfen sein kann, und mit der Schlußfolgerung, daß sich zwei benachbarte Körner innerhalb des Polykristalls stark gegeneinander verspannen und damit hohe Eigenspannungen verursachen können.

In Kapitel 5 wurde anhand eines Modells für den einfachsten Polykristall, den Zweikristall die Größe dieser Eigenspannungen abgeschätzt, da hohe Eigenspannungen Schädigungsmechanismen auslösen und antreiben können. Mit Hilfe dieses Zweikristall-Modells als eine Art einaxiales Taylor-Modell lassen sich aus Versuchsdaten bestimmter Belastungsgeschichten die Eigenspannungen in einer Größenordnung des 30-fachen Wertes der äußeren Lastspannung abschätzen. Es wurde untersucht, wie groß und unter welchen Bedingungen die Eigenspannungen im Zweikristall-Modell maximal werden können: Als Bedingung wurde gefunden, daß die Modellparameter selbst extreme Werte annehmen müssen, so daß die Schwierigkeit auftrat, ihnen überhaupt noch eine physikalische Bedeutung zuzumessen zu können. Diese Schwierigkeit wurde vor dem Hintergrund diskutiert, daß es für die Anpassung eines Stoffgesetzes an Versuchsdaten wünschenswert ist, aufgrund klarer physikalischer Bedeutung der Modellparameter eine genauere Vorstellung von ihrer Größenordnung zu besitzen.

Wie komplex die Eigenspannungsverteilung im polykristallinen Eis tatsächlich ist und wie inhomogen der Verzerrungszustand, wurde exemplarisch an einem Modell-Polykristall aus 64 Körnern im simulierten Druckversuch aufgezeigt. Konnte das Zweikristall-Modell als einaxiales Modell nur die Eigenspannungen in Lastrichtung beschreiben, treten in dem Modell-Polykristall auch Eigenspannungen senkrecht zur Lastrichtung auf und zwar in einer mit dem Wert der außen anliegenden Spannung vergleichbaren Größenordnung. Die in Versuchen beobachteten Spaltrisse, die in Ebenen liegen, die die Drucklastrichtung enthalten, werden von diesen senkrecht zur äußeren Lastrichtung wirkenden Eigenspannungen verursacht. Die Taylorsche Annahme von gleichen Verzerrungen im Polykristall gilt offensichtlich bei polykristallinem Eis auch nicht näherungsweise. Bei 1% makroskopischer Stauchung ergaben sich im Inneren Stauchungen bis 10%.

Die Änderung der Korngestalt und die Krümmung der basalen Ebenen wurden an einzelnen Kristallen genauer untersucht. Es ließ sich zeigen, daß die Tragwirkung des Polykristalls in der Tat auf der gegenseitigen Verspannung der Körner beruht, so daß die

---

Lastkapazität des Polykristalls im Vergleich zu der des Monokristalls ansteigt.

Der vorgestellte Modell-Polykristall ist für die Anpassung an Versuche mit plananisotropen polykristallinem Eis grundsätzlich geeignet. Die Form der einzelnen Körner ist weniger entscheidend. Von besonderer Bedeutung sind eine genügend feine Finite-Elemente-Diskretisierung und eine sehr große Anzahl von Körnern (vgl. Schlußfolgerungen in Kapitel 6.3.4).

Aufgrund der beiden letzten Punkte scheint zur Zeit bei vertretbarem Aufwand nur die Anpassung an Versuche mit Eis-Polykristallen möglich zu sein, die aus wenigen Körnern aufgebaut sind. Dann steht nicht mehr der Verlauf der makroskopischen Spannung im Vordergrund, sondern die möglichst genaue Modellierung der mikromechanischen Effekte. Dazu hat diese Arbeit auch bereits einen Beitrag geleistet, indem Effekte wie Gleitebenenverkrümmung und die Bildung von Kleinwinkelkorngrenzen simuliert werden konnten. Von besonderem Wert dürfte es sein, die Modellierung von Mikrorissen hinzuzunehmen. In dem Verformungsdiagramm nach SHOJI und HIGASHI [SH78], das für die Verformungsmechanismen Grenzen als Funktion von Spannung und Temperatur angibt, könnte so ein zusätzlicher Bereich erschlossen werden, in dem ein erweitertes monokristallines Stoffgesetz anwendbar ist. An welchen Stellen innerhalb des Modell-Polykristalls die Mikroschädigung einsetzt, kann dann mit der im Versuch beobachteten Ribbildung verglichen werden.

## 8. Anhang

Das DGL-System (3.59) - (3.63) läßt sich auf den einaxialen Fall reduzieren. Dazu sind für die ausschließliche Belastung z.B. in 2-Richtung folgende Bedingungen zu stellen:

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = v_{1,2} = 0. \quad (8.1)$$

Da in 1-Richtung keine äußeren Lasten angreifen, müssen  $\sigma_{11}$  und  $\sigma_{12}$  verschwinden. Ebenso ist  $v_{1,2} = 0$  zu verlangen, da sonst die Probenachse aus der 2-Richtung herauswandert, und somit die Resultierenden der globalen  $\sigma_{22}$ -Spannungen am oberen und unteren Ende der Probe nicht mehr auf einer Wirkungslinie liegen würden. Das resultierende Moment würde einen inhomogenen zweiaxialen Spannungszustand in der Probe verursachen, der gegen die Voraussetzung der Homogenität und gegen die Bedingung verstößt, daß in 1-Richtung keine äußeren Lasten angreifen.

Über die Geschwindigkeiten  $v_{1,1}$  und  $v_{2,1}$  der Querkontraktion bzw. der Gleitung kann noch nichts ausgesagt werden.

Über die Bedingung (8.1) hinaus ist zu verlangen:

$$\dot{\sigma}_{11} = \dot{\sigma}_{12} = 0. \quad (8.2)$$

Da sich die  $\sigma_{11}$ - und  $\sigma_{12}$ -Spannungen durch die Integration ihrer einfachen zeitlichen Ableitungen berechnen lassen, müssen diese Ableitungen verschwinden, um die Bedingung (8.1) zu erfüllen. Während sich so bei  $\sigma_{11}$  auch die objektive Zeitableitung wegen  $\sigma_{12} = 0$  zu Null ergibt, verbleibt ein  $\overset{\vee}{\sigma}_{12} = -\sigma_{22} \dot{\vartheta} \neq 0$ .

Bei der vorliegenden Belastung treten in dem gesternten KOOS, das an der c-Achse angeheftet ist, alle drei Spannungskomponenten auf, besonders gerade die basale Schubspannung, die die basale Abgleitung antreibt. Dann werden bei sich ändernder äußerer Belastung auch die materiellen Zeitableitungen der gesternten Größen auftreten. Analog zu dem Fall eines zeitlich unveränderlichen Spannungszustands  $\dot{\sigma}^* = 0$  und damit  $\overset{\vee}{\sigma} = 0$ , aber  $\dot{\sigma} = (\mathbf{P}^{-1}) \cdot \mathbf{P} \sigma \neq 0$ , muß jetzt erwartet werden, daß sich  $\overset{\vee}{\sigma} \neq 0$  ergibt. Hier liegt der besondere Fall vor, daß wir über die substantielle Zeitableitung innerhalb der objektiven Zeitableitung schon teilweise eine Aussage machen konnten, vgl. Bedingung (8.2).

Zur besseren Veranschaulichung werden die gesternten und ungesternten Größen einander gegenübergestellt, wobei  $\sigma$  und  $\dot{\sigma}$  die durch die besonderen Randbedingungen des einaxialen Zug- und Druckversuchs vorgegebenen Größen darstellen. Mit ihnen läßt sich nach Gleichung (2.32) die objektive Zeitableitung berechnen und über die Transformationsvorschrift die entsprechenden gesternten Größen. Der Kreis schließt sich über die Kontrolle, daß die materielle Zeitableitung von  $\sigma^*$  exakt  $\dot{\sigma}^*$  ergibt:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\sigma}_{22} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\sigma}_{22} \\ -\sigma_{22} \dot{\vartheta} \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

$$\sigma^* = P \sigma$$

$$\dot{\sigma}^* = P \bar{\sigma}$$

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta \sigma_{22} \\ \cos^2 \vartheta \sigma_{22} \\ -\sin \vartheta \cos \vartheta \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad \dot{\sigma}^* = \begin{pmatrix} \sin^2 \vartheta \dot{\sigma}_{22} + 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \sigma_{22} \dot{\vartheta} \\ \cos^2 \vartheta \dot{\sigma}_{22} - 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \sigma_{22} \dot{\vartheta} \\ -\sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\sigma}_{22} - (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) \sigma_{22} \dot{\vartheta} \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

Mit den Bedingungen (8.1) und (8.2) reduziert sich das DGL-System (3.59) - (3.63) auf

$$0 = c_{e11} v_{1,1} + c_{e12} v_{2,2} + c_{e13} v_{2,1} - c_{44} k_v \lambda c_{i11} (-\sigma_{22}) \quad (8.5)$$

$$\dot{\sigma}_{22} = c_{e12} v_{1,1} + c_{e22} v_{2,2} + c_{e23} v_{2,1} + c_{44} k_v \lambda c_{i11} (-\sigma_{22}) \quad (8.6)$$

$$0 = c_{e13} v_{1,1} + c_{e23} v_{2,2} + c_{e33} v_{2,1} - c_{44} k_v \lambda c_{i31} (-\sigma_{22}) + \frac{1}{4} (-\sigma_{22}) k_v \lambda c_{\vartheta_1} (-\sigma_{22}) - \frac{1}{2} \sigma_{22} v_{2,1} \quad (8.7)$$

$$\dot{\vartheta} = -\frac{1}{4} k_v \lambda c_{\vartheta_1} (-\sigma_{22}) - \frac{1}{2} v_{2,1} \quad (8.8)$$

$$\dot{\lambda} = -c_{\lambda_1} \tau_b \lambda + c_{\lambda_2} \tau_b^4, \quad (8.9)$$

Die Gleichungen (8.5) und (8.7) stellen ein Gleichungssystem für die Querkontraktion  $v_{1,1}$  und die Gleitung  $v_{2,1}$  dar. Auflösen ergibt:

$$v_{1,1} = \frac{(-c_{e33}^* c_{e12} + c_{e13} c_{e23}) v_{2,2} + (-c_{e33}^* c_{i11}^* + c_{e13} c_{i31}^*) k_v \lambda \sigma_{22}}{c_{e11} c_{e33}^* - c_{e13}^2} \quad (8.10)$$

$$v_{2,1} = \frac{(c_{e13} c_{e12} - c_{e11} c_{e23}) v_{2,2} + (c_{e13} c_{i11}^* - c_{e11} c_{i31}^*) k_v \lambda \sigma_{22}}{c_{e11} c_{e33}^* - c_{e13}^2} \quad (8.11)$$

mit den Abkürzungen

$$c_{e33}^* = c_{e33} - \frac{1}{2} \sigma_{22}, \quad c_{i11}^* = c_{i11} c_{44}, \quad c_{i31}^* = c_{i31} c_{44} + \frac{1}{4} \sigma_{22} c_{\theta 1}. \quad (8.12)$$

Einsetzen in die Gleichungen (8.6) und (8.8) liefert die Differentialgleichungen des einaxialen Stoffgesetzes:

$$\dot{\sigma}_{22} = X v_{2,2} + Y k_v \lambda \sigma_{22} \quad (8.13)$$

$$\dot{\vartheta} = Z k_v \lambda \sigma_{22} - R v_{2,2} \quad (8.14)$$

$$\dot{\lambda} = -c_{\lambda 1} \tau_b \lambda + c_{\lambda 2} \tau_b^4, \quad (8.15)$$

mit

$$X = c_{e22} + \frac{c_{e12} (-c_{e33}^* c_{e12} + c_{e13} c_{e23}) + c_{e23} (c_{e13} c_{e12} - c_{e11} c_{e23})}{c_{e11} c_{e33}^* - c_{e13}^2} \quad (8.16)$$

$$Y = -c_{i11}^* + \frac{c_{e12} (-c_{e33}^* c_{i11}^* + c_{e13} c_{i31}^*) + c_{e23} (c_{e13} c_{i11}^* - c_{e11} c_{i31}^*)}{c_{e11} c_{e33}^* - c_{e13}^2} \quad (8.17)$$

$$Z = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} c_{\theta 1} - \frac{c_{e13} c_{i11}^* - c_{e11} c_{i31}^*}{c_{e11} c_{e33}^* - c_{e13}^2} \right\} \quad (8.18)$$

$$R = \frac{1}{2} \frac{c_{e13} c_{e12} - c_{e11} c_{e23}}{c_{e11} c_{e33}^* - c_{e13}^2} \quad (8.19)$$

und den Abkürzungen nach den Gleichungen (3.65) - (3.67) und nach (8.12).

Bei (BISCHOFF-BEIERMANN [BB92]) erwies es sich für die Anpassung an Versuche als sinnvoll, die Abhängigkeit des elastischen Anteils von der Kristallorientierung zu vernachlässigen, da die elastischen Eigenschaften quasi nur von der Prüfmaschine bestimmt wurden. Dann reduzieren sich die fünf linear unabhängigen Größen der Elastizitätsmatrix in Gleichung (2.23) für den isotropen Fall auf:

$$c_{11} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (1 - \nu) \quad (8.20)$$

$$c_{12} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \nu \quad (8.21)$$

$$c_{13} = c_{12} \quad (8.22)$$

$$c_{33} = c_{11} \quad (8.23)$$

$$c_{44} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8.24)$$

mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$ . Mit den solchermaßen definierten  $c_{ij}$  müßten sich die Gleichungen (8.13) - (8.15) reduzieren lassen auf die Beziehungen (3.53) bei (BISCHOFF-BEIERMANN [BB92]). Die Überprüfung dieser Vermutung gestaltet sich sehr aufwendig, wenn man die  $c_{eij}$  als Funktionen des Anisotropiewinkels einsetzt. Stattdessen nutzen wir aus, daß sie im isotropen Fall gar nicht von diesem Winkel abhängen dürfen und wählen  $\vartheta = 0$ . Damit reduzieren sich die  $c_{eij}$  beim vorliegenden ESZ (einaxialer Versuch) auf (vgl.  $c_{eij}^s$  nach (2.58)):

$$c_{e11} = -\frac{c_{12}^2}{c_{11}} + c_{11} \quad (8.25)$$

$$c_{e12} = -\frac{c_{12} c_{13}}{c_{11}} + c_{13} \quad (8.26)$$

$$c_{e13} = 0 \quad (8.27)$$

$$c_{e22} = -\frac{c_{13}^2}{c_{11}} + c_{33} \quad (8.28)$$

$$c_{e23} = 0 \quad (8.29)$$

$$c_{e33} = c_{44} \quad (8.30)$$

$X$ ,  $Y$ ,  $Z$  und  $R$  erhalten so im isotropen Fall die Werte:

$$X = E \quad (8.31)$$

$$Y = -\frac{E}{4} \sin^2 2\vartheta \quad (8.32)$$

$$Z = 1^* \sin \vartheta \cos^3 \vartheta \quad \text{mit } 1^* = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{22}}{2c_{44}}} \quad (8.33)$$

$$R = 0 \quad (8.34)$$

Eingesetzt in die Gleichungen (8.13) - (8.15) erhalten wir die Beziehungen (3.53) bei (BISCHOFF-BEIERMANN [BB92]), wenn man  $n_3$  als  $\cos \vartheta$ ,  $K$  als  $E$ ,  $b k_{vb}$  als  $k_v$ ,  $\lambda_b$  als  $\lambda$ ,  $\sigma$  als  $\sigma_{22}$  und  $\dot{\epsilon}$  als  $v_{2,2}$  identifiziert und  $1^*$  näherungsweise gleich 1 setzt:

$$\dot{\sigma}_{22} = E v_{2,2} - \frac{E}{4} \sin^2 2\vartheta k_v \lambda \sigma_{22} \quad (8.35)$$

$$\dot{\vartheta} = 1^* \sin \vartheta \cos^3 \vartheta k_v \lambda \sigma_{22} \quad \text{mit } 1^* \approx 1 \quad (8.36)$$

$$\dot{\lambda} = -c_{\lambda_1} \tau_b \lambda + c_{\lambda_2} \tau_b^4. \quad (8.37)$$

Der zusätzliche Faktor  $1^*$  wird dem Unterschied zwischen der objektiven Zeitableitung  $\overset{\vee}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  der bei BISCHOFF-BEIERMANN verwendeten Hencky-Dehnung  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und dem hier verwendeten Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\boldsymbol{d}$  zugeschrieben. Bei den in Versuchen maximal beobachteten Spannungen von wenigen MPa liegt der Unterschied bei der Berechnung von  $\dot{\vartheta}$  unter 0.1 %.

## Literaturverzeichnis

- [AA91] N. Aravas und E.C. Aifantis. On the geometry of slip and spin in finite plastic deformation. *International Journal of Plasticity*, 7:141–160, 1991.
- [AD85] M.F. Ashby und P. Duval. The creep of polycrystalline ice. *Cold Regions Science and Technology*, 11:285–300, 1985.
- [api88] *API – Recommended practice for planning, designing and constructing fixed offshore structures in ice environments*. American Petroleum Institute API. 2N (RP 2N), Washington, DC, 1988.
- [Bat90] K.-J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, 1990.
- [BB92] Burkhard Bischoff-Beiermann. *Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie*. Nummer 82 in Mitteilungen des Instituts für Mechanik. Ruhr-Universität Bochum, 7 1992.
- [BBB94] B. Bischoff-Beiermann und O.T. Bruhns. A physically motivated set of invariants and tensor generators in the case of transverse isotropy. *Int. J. Engng. Sci.*, 32(10):1531–1552, 1994.
- [Bet93] J. Betten. *Kontinuumsmechanik*. Springer-Verlag, 1993.
- [BS87] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt (Main), 1987.
- [Dan68] G. Dantl. Die elastischen Moduln von Eis-Einkristallen. *Physik der kondensierten Materie*, 7:390–397, 1968.
- [eau90] *Empfehlung E 177: Eisstoß und Eisdruck auf Ufereinfassungen, Fenderungen und Dalben im Küstenbereich. Empfehlungen des Arbeitsausschusses "Ufereinfassungen", EAU 1990*. Verlag Ernst & Sohn, Berlin, 1990.
- [FH69] A. Fukuda und A. Higashi. X-ray diffraction topographical studies of deformation behaviour of ice single crystals. *Physics of Ice, Proc. of Int. Sym. on Phys. of Ice, München 1968*, Seiten 239–250, 1969.

- [fip88] *Appendix on ice load considerations to FIP recommendations: Design and construction of concrete sea structures.* FIP Special Report SR 88/3, London, 1988.
- [Fle70] N.H. Fletcher. *The chemical physics of ice.* Cambridge University Press, 1970. Zitiert nach [Gle75].
- [Gal76] R.H. Gallagher. *Finite-Element-Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [Ger74] K. Gersten. *Einführung in die Strömungsmechanik.* Bertelsmann Universitätsverlag, 1974.
- [Gle75] J. W. Glen. *The mechanics of ice. CRREL, Monograph II-C2b,* 1975.
- [Haa84] P. Haasen. *Physikalische Metallkunde.* Springer-Verlag, 1984.
- [hoc84] Hochtief-Nachrichten. Opernplatz 2, D-45128 Essen, 4 / 1984.
- [Hon84] R.W.K. Honeycombe. *The plastic deformation of metals.* Edward Arnold (Publishers) Ltd, 1984.
- [JH95] B.E. Johnson und A. Hoger. The use of a virtual configuration in formulating constitutive equations for residually stressed elastic materials. *Journal of Elasticity*, 41:177–215, 1995.
- [KH69] W.M. Ketcham und P.V. Hobbs. An experimental determination of the surface energies of ice. *Phil. Mag.*, 19:1161–1173, 1969.
- [Mä87] M. Määttäen. Advance in ice mechanics in finland. *Appl. Mech. Rev.*, 40(9):1200–1207, 1987.
- [Mac68] D.B. Macvean. Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren. *ZAMP*, 19:157–185, 1968.
- [Mic78] B. Michel. *Ice Mechanics.* Les Presses de l'Université Laval, Quebec, 1978.
- [MT69] M. Mellor und R. Testa. Creep of ice under low stress. *Journal of Glaciology*, 8(52):147–152, 1969.
- [MWW73] E. Macherau, U. Wolfstieg, und H. Wohlfahrt. Zur zweckmäßigen Definition von Eigenspannungen. *HTM*, 28(3):201–211, 1973. Zitiert nach [Pre88].
- [Oro34] E. Orowan. Crystal Plasticity III. *Zeitschrift für Physik*, 89:614–635, 1934.
- [Pre88] U. Preckel. *Eigenspannungen: Rechnergestützte Bestimmung in Umformteilen.* Verlag TÜV Rheinland, Köln, 1988.

- [SH78] H. Shoji und A. Higashi. A deformation mechanism map of ice. *Journal of Glaciology*, 21(85):419–427, 1978.
- [Sin78] N.K. Sinha. Rheology of columnar-grained ice. *Exp. Mech.*, 18((12)):464–470, 1978.
- [Ste58] S. Steinemann. Experimentelle Untersuchungen zur Plastizität von Eis. In *Beiträge zur Geologie der Schweiz, Hydrologie Nr. 10*. Kümmerly & Frey AG, Geographischer Verlag, Bern, 1958.
- [Tay38] G.I. Taylor. Plastic strain in metals. *Journal of the Institute of Metals*, 62:307–324, 1938.
- [TP90] R.L. Taylor und Wriggers P. FEAP, Description and Users-Manual. 1990.
- [Weg91] K. Wegener. *Zur Berechnung großer plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Überspannungstyp*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, Institut für Allgemeine Mechanik und Festigkeitslehre, 1991.
- [Wes95] Bernd Westerhoff. *Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl*. Nummer 99 in Mitteilungen des Instituts für Mechanik. Ruhr-Universität Bochum, 1995.
- [ZT89a] O.C. Zienkiewicz und R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, Band 1. McGraw-Hill Book Company, London, 4 edition, 1989.
- [ZT89b] O.C. Zienkiewicz und R.L. Taylor. *The Finite Element Method*, Band 2. McGraw-Hill Book Company, London, 4 edition, 1989.



## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1      Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2      Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3      Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4      Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5      Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6      Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7      H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8      Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9      Berend Fischer:  
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10      Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11      Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12      Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elastoplastischer Wellen
- Nr. 13      Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14      Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15      Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16      Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzipie der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzipie der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr.45 Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung

- Nr. 50      Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51      Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52      W. Tampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53      Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54      Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien  
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55      Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56      Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57      Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58      Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59      Peihua Liu:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60      Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61      Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62      Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63      O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64      Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65      Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66      Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67      Michael Geis:  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68      Günter Renker:  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme

- Nr. 69      Berthold Schieck:  
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70      Frank Szepan:  
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71      Christian Scholz:  
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72      J. Badur/H. Stumpf:  
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73      Werner Fornefeld:  
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74      J. Saczuk/H. Stumpf:  
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75      Andreas Feldmüller:  
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76      Ulfert Rott:  
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77      Thomas Heinrich Pingel:  
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78      O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79      J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80      J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81      R. H. Frania/H. Waller:  
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82      B. Bischoff-Beiermann:  
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83      J. Pohé:  
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84      U. Kikillus:  
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85      T. Guo:  
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material

- Nr. 86 Achim Menne:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 88 Jörg Körber:  
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung  
angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schießle:  
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua  
unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:  
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91 Christoph Beerens:  
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:  
Finite elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994
- Nr. 94 Armin Lenzen:  
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von  
Strukturveränderungen
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:  
Mechanics of Irregular Shell Structures
- Nr. 96 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:  
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller
- Nr. 98 Ralf Podleschny:  
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:  
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl
- Nr. 100 Marc Mittelbach:  
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem  
Kontinuums-Damage-Modell
- Nr. 101 Ulrich Hoppe:  
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie
- Nr. 102 Marcus Otto:  
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen
- Nr. 103 Horst Lanzerath:  
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode
- Nr. 104 Andreas Wichtmann:  
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der  
Reckalterung

- Nr. 105     **Bjarne Fosså:**  
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stählen
- Nr. 106     **Khanh Chau Le:**  
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur
- Nr. 107     **Holger Behrens:**  
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allgemeinen diskreten Modellansätzen
- Nr. 108     **Johannes Moosheimer:**  
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden
- Nr. 109     **Dirk Klaus Anding:**  
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze
- Nr. 110     **Stephan Weng:**  
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen
- Nr. 111     **Michael Straßberger:**  
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit Hilfe piezo-keramischer Aktoren
- Nr. 112     **Hans-Jörg Becker:**  
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines monokristallinen Stoffgesetzes





**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 112**