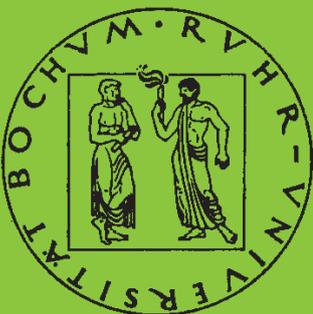


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Khanh Chau Le

**Kontinuumsmechanisches Modellieren von
Medien mit veränderlicher Mikrostruktur**

Heft Nr. 106



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Khanh Chau Le

**Kontinuumsmechanisches Modellieren
von Medien mit
veränderlicher Mikrostruktur**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 106

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

1996

Herausgeber:
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum
Schriftenreihe
Universitätsstr. 150
44780 Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl für Allgemeine Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Bauingenieurwesen als Habilitationsschrift zur Erlangung der *venia legendi* im Fach "Mechanik" angenommen.

Mein besonderer Dank gebührt Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf für seine Anregung zu dieser Arbeit und seine Unterstützung bei ihrer Anfertigung. Den Herren Prof. Dr. rer. nat. E. Kröner und Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns gilt mein herzlicher Dank für die Übernahme der Koreferate sowie viele wertvolle und lehrreiche Hinweise zum Inhalt der Schrift.

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf
Prof. Dr. rer. nat. E. Kröner
Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns

Tag der Habilitation: 27.11.1996

©1996 Dr. Habil. Khanh Chau Le, Hustadtring 33, 44801 Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie oder Datenverarbeitung) oder aus Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

Bei der Berechnung von Werkstoffen und Bauteilen unter der Wirkung äußerer Lasten kann es zu erheblichen Abweichungen vom realen Verhalten kommen, wenn der Einfluß der Mikrostruktur unberücksichtigt bleibt. In der vorliegenden Arbeit werden kontinuumsmechanische Modelle von Medien mit Mikrostruktur untersucht. Es wird dabei insbesondere auf die variationelle Formulierung der Bruchmechanik, das Homogenisationsproblem für inhomogene Medien und die Versetzungstheorie eingegangen. Zur Illustration der dargestellten Theorie werden einige Beispiele (Spannungssingularität, Eingrenzungssätze) präsentiert.



Vorwort

Es ist bekannt, daß die Mikrostruktur von Bauteilen und Werkstoffen deren mechanisches (allgemeiner: physikalisches und chemisches) Verhalten maßgebend beeinflußt. Um dies zu illustrieren, nehmen wir das einfache Beispiel eines Werkstoffs oder Bauteils mit einem oder mehreren Rissen (oder Mikrorissen). Das Verhalten der Materialien mit Rissen wird gänzlich anders sein als das von Materialien ohne Risse. Die vorhandenen Risse lösen die Verbindung zwischen den Teilchen, die an den Rißufern des Körpers liegen, und führen zur Spannungskonzentration an der Rißfront, wenn der Körper z.B. unter Zugkräften beansprucht wird. Sind in der Umgebung der Rißfront nur elastische Verformung möglich, dann wird ein singuläres Spannungsfeld gebildet, was dazu führt, daß bei einem eventuellen Rißwachstum ein Teil der Energie zur Rißfront fließt (Energiefreisetzungsrate). In diesem Fall wird sich der Riß unter einem kritischen Wert der äußeren Belastung ausbreiten und zum Sprödbbruch führen. Die andere Möglichkeit ist mit einer Bildung von Versetzungen in günstig gelegenen Gleitebenen verknüpft, die von der Rißfront nach vorn oder schräg nach vorn weglaufen. Sie transportieren damit die Energie in die weitere Umgebung der Rißfront. Man spricht von einer plastischen Zone. Der Riß kann sich ausbreiten, wenn die verbleibende Energie dafür noch ausreichend ist, jedoch wird die Art des Rißwachstums oder der Rißausbreitung gänzlich anders sein als beim Sprödbbruch (man spricht dann von einem Zähbruch).

Das nächste Beispiel sind Vielkristalle und Verbundwerkstoffe, deren mechanisches und physikalisches Verhalten auch stark von ihren Mikrostrukturen geprägt ist. Wenn man solch eine Mikrostruktur kennt (Geometrie, Anteile der Phasen oder Komponenten, u.s.w.), kann man oft die effektiven Elastizitätsmoduln, elektrische Leitfähigkeit, Wärmeleitfähigkeit, u.s.w. aus ihr näherungsweise bestimmen. Dabei spielen Eingrenzungssätze der dualen Variationsprinzipien eine wichtige Rolle. Sie können zur Optimierung der mechanischen und physikalischen Eigenschaften von vielen Verbundwerkstoffen sehr nützlich sein.

Als letztes Beispiel betrachten wir makroskopische Erscheinungen wie die Gleitung, plastische Verformung, Materialverfestigung oder Bildung eines Scherbandes, die man nur verstehen kann, wenn man die mikroskopische Kristallstruktur und ihre Defekte (Versetzungen) berücksichtigt. Im Rahmen der Kontinuumsmechanik führt dies zu einer neuen Zustands-

größe der Theorie, nämlich dem Tensor der Versetzungsdichte, welche die Einführung einer weiteren Längenskala mit sich bringt. Eine Konsequenz davon ist, daß die Bilanzgleichungen und die damit verbundenen Konstitutivgleichungen der klassischen Kontinuumsmechanik nicht ausreichend sind, um alle Größen einer Theorie mit Mikrostruktur, insbesondere die Bewegung der Versetzungen, zu bestimmen. Die wichtigsten Begriffe des generalisierten Kontinuums mit Mikrostruktur sind die Momentenspannungen infolge der Versetzungsdichte und die inneren Konfigurationsspannungen aufgrund der stetig verteilten Versetzungen. Diese Begriffe müssen die Schlüsselrolle in allen Bilanz- und Konstitutivgleichungen der Versetzungstheorie übernehmen.

Die obengenannten Problemen werden in der vorliegenden Habilitationsschrift behandelt. Die Ergebnisse, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, wurden erhalten während meiner wissenschaftlichen Tätigkeit am Lehrstuhl für Allgemeine Mechanik der Ruhr-Universität Bochum, zuerst als Humboldt Stipendiat, danach als Assistent, und zuletzt als Oberingenieur. Ich danke Herrn Professor Stumpf für seine Anregung zu dieser Habilitationsschrift und für seine stetige Unterstützung. Den Herren Prof. Kröner (Stuttgart) und Prof. Bruhns (Bochum) gilt mein herzlicher Dank für die Übernahme der Koreferate sowie für viele wertvolle und lehrreiche Hinweise zum Inhalt der Schrift.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Nichtlineare Bruchmechanik	13
2.1	Vorbemerkungen und Vereinbarungen	13
2.2	Variationsprinzipien der Bruchmechanik	14
2.2.1	Statik	14
2.2.2	Dynamik	23
2.2.3	Linearisierung	29
2.3	Spannungssingularität	33
2.3.1	Problemstellung	33
2.3.2	Ogden-Ballsche Materialien	40
2.3.3	Der Hauptterm der Deformation	45
2.3.4	Die Nebenterme der Deformation	50
2.3.5	Katalog von kanonischen Feldern	60
2.3.6	Charakteristika singulärer Felder	65
2.4	Kohäsivkraft und Spannungssingularität	70
2.4.1	Problemstellung	70
2.4.2	Energiefreisetzungsrates	72
2.4.3	Energieminimale und Spannungssingularität	75
3	Mikroinhomogene Materialien	80
3.1	Variationsmethode der Homogenisation	80
3.1.1	Problemstellung	80
3.1.2	Homogenisation periodischer Medien	81
3.1.3	Homogenisation zufälliger Medien	87
3.2	Eingrenzungen der effektiven Leitfähigkeit	89
3.2.1	Problemstellung	89
3.2.2	Herleitung der Ungleichungen	91

3.2.3	Anwendung der Ungleichungen	95
4	Versetzungstheorie	100
4.1	Kinematik	100
4.1.1	Körper, Bewegung und Referenzen	100
4.1.2	Zusammenhang, Torsion und Krümmung	104
4.1.3	Kristallzusammenhang	107
4.1.4	Riemannsche Strukturen	112
4.1.5	Geschwindigkeit und relative Raten	114
4.2	Kristallreferenz	117
4.2.1	Elastische Umkehrdeformation	117
4.2.2	Elastische Umkehrrotation	119
4.2.3	Duale Probleme	121
4.2.4	Linearisierung.	124
4.3	Statik	127
4.3.1	Freie Energiedichte	127
4.3.2	Prinzip der virtuellen Arbeit	132
4.3.3	Invarianzeigenschaften	137
4.3.4	Gleichgewichtsbedingungen	139
4.4	Dynamik	142
4.4.1	Prinzip der stationären Wirkung	142
4.4.2	Bilanzgleichungen in der Anfangsbeschreibung	146
4.4.3	Bilanzgleichungen in der Momentanbeschreibung	150
4.5	Konstitutivgleichungen	153
4.5.1	Thermodynamische Betrachtung	153
4.5.2	Klassische Modelle	158
4.5.3	Linearisierte Theorie	161
4.5.4	Zusammenhang mit der Elastoplastizität	164
5	Schlußbemerkungen	171
	Anhang	173
	Literaturverzeichnis	176

Kapitel 1

Einleitung

Das Konzept der Energie und der damit verbundenen Variationsprinzipien spielt eine zentrale Rolle bei der Untersuchung des Gleichgewichts und der Bewegung von Körpern mit Rissen. Griffith war der erste, der die kritische Rißlänge durch die Bedingung bestimmt hat, daß die erste Ableitung der gesamten Energie des Körpers mit Rissen als Funktion der Rißlänge verschwindet [1, 2]. Dazu führte er den Begriff der Oberflächenenergie ein, der zuvor nicht in der Elastizitätstheorie zu finden war. Dieses ist eines der ersten Charakteristika fester Körper, das mit der Mikrostruktur verknüpft ist. Irwin [3] hat die Beziehung zwischen dem Energiezufluß und dem Spannungsintensitätsfaktor [4, 5] hergeleitet. Der durch Eshelby [6] eingeführte Energie-Impuls-Tensor und das J-Integral (Sanders [7], Chepanov [8], und Rice [9]) sind nun im allgemeinen Fall die Größen, die den Energiezufluß und das Rißwachstum bestimmen (siehe auch [10, 11]). Im dynamischen Fall haben Eischen und Herrman [12] das Rißausbreitungskriterium wieder mit dem Energiezufluß zur Rißfront formuliert.

In der nichtlinearen Elastizitätstheorie kann man das nichtlineare J-Integral als den Ausdruck für den Energiezufluß bei Gurtin [13], Herrman [14] und Batra [15] finden (siehe auch [16]). Freund [17] und Gurtin und Yatomı [18] haben das dynamische Rißproblem betrachtet.

In allen zitierten Arbeiten kann man die unausgesprochene Beziehung zwischen der Herleitung des J-Integrals einerseits, und der Variationsrechnung des Energiefunktionalen andererseits, bemerken. Trotzdem ist das statische Randwertproblem für einen elastischen Körper mit Rissen im Gleichgewicht erst in unseren Arbeiten [19–22] mit Hilfe einer Variationsungleichung formuliert worden. Das Variationsprinzip lautet: Ein elastischer Körper mit Rissen kann sich nur im Gleichgewicht befinden, wenn

die Variationen seiner gesamten Energie, einschließlich der Energie der Rißoberfläche, für alle zulässigen virtuellen Konfigurationen nicht negativ sind. Als zulässig betrachten wir auch die Konfigurationen mit virtuellem Rißwachstum, und um die eventuelle Rißumlenkung beschreiben zu können, lassen wir auch zu, daß dieses Rißwachstum in beliebige Richtungen erfolgen kann. Dies ist neu im Vergleich zu den bekannten Variationsprinzipien, weil es sich hier um ein Problem mit unbekanntem inneren Rändern (Rissen) des Körpers handelt, die sich ändern können (hnliche Probleme findet man in der Theorie der Phasenumwandlung). Durch virtuelle Änderung der Risse wird nicht nur die Oberflächenenergie einen Zuwachs erfahren, sondern auch die elastische Energie des Körpers. Den negativen Zuwachs der elastischen Energie durch Rißwachstum definiert man als den Energiezufluß zur Rißfront. Letzterer läßt sich durch das skalare Produkt des J-Integral-Vektors mit dem virtuellen Riwachstumsvektor ausdrücken [22]. Aus dieser Variationsungleichung folgen nicht nur die Grundgleichungen und Randbedingungen der nichtlinearen Elastizitstheorie, sondern auch die Randbedingungen an der Rißfront, betrachtet als Rißwachstumskriterium. Dieses Kriterium besagt: Der Riß befindet sich dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn der J-Integral-Vektor vom Betrag kleiner oder gleich der doppelten Energiedichte der Oberfläche ist.

Wenn das statische Rißproblem keine stabile Lösung hat, dann wird der Riß sich sehr schnell ausbreiten, bis der Körper zum Bruch kommt. Will man die dynamischen Prozesse der Rißausbreitung beschreiben, dann kann man dies, wie wir gezeigt haben, mit Hilfe einer Evolutionsungleichung machen. In dieser Evolutionsungleichung muß man nicht nur die d'Alembertschen Hilfskräfte, sondern darüberhinaus auch den Zufluß der kinetischen Energie zur Rißfront berücksichtigen [22]. Dies führt dazu, daß in den dynamischen J-Integral-Vektor noch die kinetische Energiedichte einfließen muß. Die Randbedingungen an der Rißfront ermöglichen es, die Position der laufenden Rißfront sowie die bevorzugte Riausbreitungsrichtung zu bestimmen.

Die obengenannten Ergebnisse wurden auf elastoplastische Körper mit Rissen bei großen Dehnungen in unseren Arbeiten [23, 24] verallgemeinert. Wir werden hier eine solch komplizierte Theorie nicht präsentieren. Die Arbeiten [25–37] sollen einen Überblick über dieses schnell wachsende Forschungsgebiet geben. Ich möchte den interessierten Leser auf eine hochinteressante Arbeit von Rice [38] aufmerksam machen, in der er ein

Kriterium für die Versetzungsbildung vorgeschlagen hat, das den Energiezufluß (oder das J-Integral) mit einer neuen mikroskopischen Materialcharakteristik, nämlich der Bildungsenergie der Versetzungen (stacking energy), verknüpft.

Dank der Singularität der Spannungs- und Dehnungsfelder an der Rißfront ist der Energiezufluß und das J-Integral nicht gleich Null. Aber das singuläre Verhalten des Verschiebungsgradienten widerspricht den Annahmen der linearisierten Theorie. Die erste Untersuchung des Rißproblems im Rahmen der nichtlinearen Elastizitätstheorie ist in [39] vorgenommen worden. Knowles und Sternberg [40, 41] waren die ersten, die gezeigt haben, daß bei Rißproblemen von hyperelastischen Materialien die Bestimmung der singulären Spannungs- und Dehnungsfelder stark von dem asymptotischen Verhalten der freien Energiedichte bei großen Verformungen abhängt. Weil es unmöglich ist, dieses Verhalten aus den experimentellen Daten zu gewinnen, muß man verschiedene Annahmen treffen. In [40, 41] ist die Energiedichte als Potenzfunktion des durch Blatz und Ko [42] vorgeschlagenen Ausdrucks angenommen worden. Die Untersuchung ist für den durch Zugkräfte entstehenden ebenen Dehnungszustand an der rechten Rißspitze durchgeführt worden, und die asymptotischen Strukturen der entstandenen statischen Spannungs- und Dehnungsfelder wurden gründlich analysiert. Der Singularitätsgrad sowie der Hauptterm der Deformation sind durch Lösung eines nichtlinearen Eigenwertproblems bestimmt worden, das auch für spätere Untersuchungen von großer Bedeutung ist. Knowles [43] hat die asymptotische Analyse für den durch Schub entstehenden Deformationszustand durchgeführt, wobei das Materialverhalten eine Klasse von sogenannten generalisierten, inkompressiblen, neo-Hookeschen Materialien darstellt. Darüberhinaus hat er mit Sternberg [44, 45] bei diesem Problem eine interessante Möglichkeit entdeckt, wie das Gleichungssystem seine Elliptizität in der Umgebung der Rißspitze verlieren kann (siehe auch die späteren Untersuchungen von Abeyaratne und Yang [46] und Silling [47, 48]). Ferner hat ein Beitrag von Stephenson zu den Rißproblemen [49] auf sich aufmerksam gemacht. Er hat die gleiche Rißkonfiguration und das ebene Rißproblem wie in [40, 41] betrachtet. Die Materialien sind hyperelastisch und inkompressibel angenommen, aber im Gegenteil zu [40, 41] ist die Energiedichte als Summe von zwei Potenzfunktionen der ersten Grundinvariante des Cauchy-Green Deformationstensors angenommen (sogenannte generalisierte Mooney-Rivlin

Materialien mit zwei Potenzindizes). Darüberhinaus wurden die Randbedingungen allgemeiner als in [40, 41] betrachtet, um zu prüfen, ob eine Analogie zu dem in der linearen Bruchmechanik bekannten antisymmetrischen Erscheinungsbild (Modus) besteht. Stephenson hat die asymptotische Struktur der singulären Deformation analysiert. Außerdem hat er bewiesen, daß es in dem betrachteten Modell keine Analogie zum Modus II gibt, und der Riß sich immer öffnen wird.

In [50] haben wir die asymptotische Analyse des Rißproblems für den ebenen Deformationszustand und für eine allgemeine Klasse von kompressiblen Materialien durchgeführt, die dem *Polykonvexitätskriterium* und bestimmten *Wachstumsbedingungen* genügen (siehe Ogden [51, 52] und Ball [53]). Die Energiedichte wird als eine Funktion der Hauptstreckungen angenommen, die ziemlich kompliziert von den Grundinvarianten des Cauchy-Greenschen Deformationstensors abhängt und ein verwickeltes Verhalten bei großen einachsigen Dehnungen aufweist. Aufgrund der Polykonvexität garantiert das Ogden-Ballsche Konstitutivgesetz immer die Elliptizität des Gleichungssystems und die daraus folgende Existenz der Lösung des Randwertproblems in einem geeignet gewählten Funktionsraum (Ball [53]). Wir betrachten die Rißkonfiguration und die äußeren Randbedingungen, welche zu spannungsfreien Bedingungen auf den Rißufern in der Nähe der Rißspitze führen. Wir haben dann die Methode der asymptotischen Analyse von Knowles und Sternberg [40, 41] weiterentwickelt, so daß sie auf Riprobleme für kompressible Materialien angewandt werden kann. Obwohl sich die Ogden-Ballsche Energiedichte mit mehreren Potenzindizes bei großen Verformungen komplizierter verhält als die von [40, 41], hat unsere Analyse gezeigt, daß der Singularitätsgrad und der Hauptterm der Deformation genau gleich sind. Der Grund dafür ist, daß auch für die Ogden-Ballschen Materialien die Jakobische Determinante der Deformation *weniger singulär* ist als die erste Grundinvariante des Dehnungstensors in der Umgebung der Rißspitze. Außerdem ist für eine Teilklasse von betrachteten Materialien die Jakobische Determinante asymptotisch konstant geblieben, und so können die Ergebnisse von Stephenson [49] aus den unseren hergeleitet werden, wenn die Energiedichte nur von zwei Potenzindizes abhängt. Im Vergleich zu [49] gibt es nur Änderungen bei den Nebentermen der Deformation infolge der Kompressibilität und den kleineren Potenzindizes. Wir haben gezeigt, daß man die Deformation mit Hilfe einer Zusammensetzung aus einer Starrkörperrota-

tion und einer darauf folgenden parallelen Verschiebung eines sogenannten kanonischen Feldes erhalten kann. Das Adjektiv kanonisch wird hier für die Kennzeichnung eines Feldes mit sich öffnenden Rißufern benutzt, das dem symmetrischen Modus in der linearen Bruchmechanik vergleichbar ist. Folglich existiert keine Analogie mit dem antisymmetrischen Modus in der linearen Bruchmechanik, und der Riß wird sich immer unter dem Winkel von 180° öffnen. In der nichtlinearen Bruchmechanik gibt es daher (für ebene Probleme) nur einen Spannungsintensitätsfaktor, der allerdings nur aus der Lösung des globalen Rißproblems bestimmt werden kann. Eine parallele Analyse ist für die Hadamardschen Materialien durchgeführt worden [54].

Die Spannungssingularität ist mit den Annahmen der Kontinuumsmechanik verknüpft, sie bildet mehr oder weniger genau das tatsächliche Verhalten von Materialien in der Umgebung der Rißspitze ab. Barenblatt fand aber eine solche Singularität physikalisch sinnwidrig und hat versucht, sie durch Einführung einer Kohäsivkraft zu beseitigen [55]. Das Model mit Kohäsivkraft ist in letzter Zeit durch die Möglichkeit einer Verstärkung des Rißes durch sich überbrückende Fasern wieder interessant geworden [56–62]. In einem solchen Model nimmt man an, daß das Material *en gros* linear elastisch ist, jedoch die gegenüberliegenden Rißufer eine Anziehungskraft erfahren werden, die von ihren relativen Verschiebungen abhängt. Die oben genannten Autoren haben entweder durch numerische Berechnungen oder durch asymptotische Analyse für den speziellen Fall des sehr langen Rißes gezeigt, daß die Lösung des Rißproblems die gleiche Spannungssingularität besitzt, und daß die Kohäsivkraft bestenfalls den Spannungsintensitätsfaktor mindern kann. Es bleibt dennoch eine Frage: wird diese Spannungssingularität auch nach der Einführung der Kohäsivkraft auf jeden Fall auftreten? In [63] haben wir diese Frage durch eine direkte Variationsrechnung positiv beantwortet. Die variationelle Formulierung des Rißproblems mit Kohäsivkraft [58] unterscheidet sich von der Griffithschen Formulierung dadurch, daß in der Gesamtenergie statt der Energie der Rißoberflächen eine Kohäsivenergie steht, deren Betrag von der relativen Rißtrennung abhängt. An der Rißspitze ist sowohl die Rißtrennung als auch die Kohäsivenergie gleich Null. Dies führt zu einer wesentlichen Änderung der Energiebilanzgleichung. Bei einem Rißwachstum wird die Gesamtenergie auf ein Teil reduziert, der dem negativen J-Integral gleich ist. Mit Hilfe der direkten Variationsrechnung können wir

eine obere Schranke für die Energiefreisetzungsrate bestimmen, die dann zu einer unteren Schranke für das J-Integral führt. Wir können damit beweisen, daß die Kohäsivkraft die Spannungssingularität nicht beseitigen kann. Unsere Methode kann auch benutzt werden, um den Spannungsinintensitätsfaktor näherungsweise zu bestimmen.

Die oben genannten Ergebnisse sind der nichtlinearen Bruchmechanik gewidmet und sind im zweiten Kapitel zusammengefaßt. Es ist nicht die Absicht dieser Habilitationsschrift, die umfangreiche Literatur der linearen und nichtlinearen Bruchmechanik vollständig zu präsentieren. Der interessierte Leser mag die Arbeiten [64–69] konsultieren, um einen Überblick über theoretische und experimentelle Methoden sowie die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten der Bruchmechanik zu erhalten.

Das dritte Kapitel ist der Untersuchung des physikalischen und mechanischen Verhaltens inhomogener Medien gewidmet, deren Charakteristika mit dem Ort variieren. Wichtige Beispiele sind Vielkristalle und Verbundwerkstoffe in allen möglichen Ausprägungen (Schichtstrukturen, Faserstrukturen usw.). Dabei ist ein numerisches Verfahren zumindest unpraktisch, wenn überhaupt möglich. Das liegt nicht nur daran, daß die zur Zeit bekannten Finite-Elemente-Programme solche komplizierten Probleme noch nicht behandeln können, sondern vielmehr daran, daß man auch nicht die vollständigen Informationen über die Mikrostruktur zur Verfügung hat. Zu Hilfe kommt dabei die Idee der Homogenisation. Letztere hat eine lange Geschichte, beginnend mit den Arbeiten von Maxwell [70] und Rayleigh [71]. Eine exakte mathematische Problemstellung für periodische Medien ist aber erst in der Arbeit von Bachvalov [72] formuliert worden (siehe auch [73, 74]). Die damit verbundene Definition der G-Konvergenz ist in [75] gegeben. Wir präsentieren hier die wesentlichen Aspekte des Homogenisationsproblems im Hinblick auf die direkte Variationsrechnung (zur variationell-asymptotischen Methode und deren Anwendungen in vielen unterschiedlichen Gebieten weisen wir auf [76] bzw. [77–90] hin). Wir formulieren nämlich ein Problem der Mechanik inhomogener Medien als ein Variationsproblem mit einem kleinen Parameter, der die charakteristische Länge der Inhomogenität aufweist. Wir können dann dieses Problem bei dem Grenzübergang, bei dem dieser kleine Parameter gegen Null geht, asymptotisch analysieren. Als Ergebnis erhalten wir sowohl für periodische als auch für zufällige Medien die dualen Zellprobleme, mit deren Hilfe die sogenannten effektiven Charakteristika

der homogenisierten Medien bestimmt werden können. Dabei brauchen diese effektiven Charakteristika nicht immer exakt bestimmt zu werden; oft ist es ausreichend, ihre Grenzen zu kennen [91–93]. Im abschließenden Abschnitt dieses Kapitels präsentieren wir die Bestimmung der dualen Schranken für die effektive Leitfähigkeit des Verbundwerkstoffs [94–96]. Unser Ziel ist es, alle gegebenen Informationen über die Mikrostruktur auszunutzen, um möglichst enge Schranken für die effektive Leitfähigkeit herzuleiten. Zuerst stellen wir Ungleichungen für die effektive Leitfähigkeit mit Hilfe der dualen Variationsformulierungen auf. Um daraus Schranken zu erhalten, muß man einige Koeffizienten berechnen, die von der Mikrostruktur abhängen. Man kann zeigen, daß die somit erhaltenen Schranken enger sind, als die von Hashin-Shtrikman [97]. Es wird gezeigt, daß diese Koeffizienten für ein Modell bestimmt werden können, welches ein Aggregat elliptischer, zweischichtiger Einschlüsse von unterschiedlicher Größe darstellt, die den Raum füllen. Als Konsequenz werden neue Schranken für die effektive Leitfähigkeit solch eines Modells des Verbundwerkstoffs hergeleitet. Für ein entsprechendes Modell der Verbundwerkstoffe können wir folgendes feststellen: Wenn die Leitfähigkeit der Einschlußkomponente kleiner als die der Matrixkomponente ist, dann besitzen die Verbundwerkstoffe mit Kugel-Einschlüssen die kleinste effektive Leitfähigkeit, mit Platten-Einschlüssen die größte und mit Nadel-Einschlüssen eine mittlere. Wenn die Leitfähigkeit der Einschlußkomponente größer als die der Matrixkomponente ist, dann gilt die umgekehrte Reihenfolge. Diese Methode kann auch zur Eingrenzung der Elastizitätsmoduln angewendet werden (siehe [98–100]).

Im letzten Kapitel dieser Arbeit formulieren wir eine Elastoplastizität bei großen Verformungen unter Berücksichtigung der Mikrostruktur des Materials mit stetig verteilten Versetzungen. Es ist bekannt, daß in der nichtlinearen Makro-Elastoplastizität (ohne Berücksichtigung der Mikrostruktur) die elastische und plastische Rotation nicht eindeutig bestimmbar sind. Um diese Schwierigkeit zu überwinden, sind unterschiedliche Theorien vorgeschlagen worden. Einige Autoren führten eine zusätzliche Konstitutivgleichung für den sogenannten plastischen Spin ein (siehe, u.a., [101–104]). Im Gegensatz dazu haben Stumpf und Badur [105] und unabhängig davon Nemat-Nasser [106] bewiesen, daß der plastische Spin von der elastischen und plastischen Dehnungsrate abhängt und deswegen keiner zusätzlichen Konstitutivgleichung bedarf. Was die Wahl einer ge-

eigneten objektiven Deformationsrate betrifft, welche in die Konstitutivgleichung eingehen soll, kann man verschiedene Vorschläge in der Literatur finden [107–118]. Der alternative Weg, den wir hier gewählt haben, ist mit der Berücksichtigung der Mikrostruktur von plastisch verformten Kristallen, nämlich der Bewegung von Versetzungen, verknüpft. Unser Ziel ist es, ein Kontinuumsmodell elastoplastischer Körper bei großen Dehnungen zu konstruieren, in dem die elastischen und die plastischen Rotationen eindeutig bestimmt werden können (siehe auch [119–132]). Dabei spielen in solch einer Theorie mit Mikrostruktur zwei Begriffe eine wichtige Rolle: die Momentenspannungen infolge der Versetzungsdichte und die auf Versetzungen wirkenden Konfigurationsspannungen.

Bei der Entwicklung geeigneter Modelle der finiten Elastoplastizität war das Konzept der Kristallreferenz und der damit verbundenen lokalen Zwischenkonfiguration eines elastoplastischen Körpers am schwierigsten und kontroversesten (siehe [119–137]). Um die Spannungen überall im Körper durch eine elastische Deformation auf Null zu reduzieren muß man, gemäß Kröner [122], folgendes *Gedankenexperiment* machen. Man zerschneidet den Körper im verformten momentanen Zustand in infinitesimale Elemente und läßt die Versetzungen frei laufen. Nachdem alle Versetzungen die Elemente durchlaufen haben erhält man einen Zustand, in dem jedem Atom des Bravaiskristalls ein Basisdreibein zugeordnet ist und zwischen allen Basisdreibeinen ein natürlicher Fernparallelismus entstanden ist. Man kann intuitiv erwarten, daß die Elemente nach diesem Gedankenexperiment irgendwie zueinander isomorph sein müssen. Noll [124] war der erste, der diese Idee in eine exakte mathematische Formulierung durch Einführung von einigen Begriffen (Körpermannigfaltigkeit, lokale Konfiguration, uniforme Referenz, materieller Isomorphismus) überführt hat (siehe auch [125]). Obwohl Noll's Theorie mathematisch perfekt ist, ist es unmöglich, eine dynamische Theorie elastoplastischer Körper mit Versetzungen in deren Rahmen zu konstruieren. Dafür gibt es zwei Gründe. Zum ersten wird die uniforme Referenz in Noll's Theorie als Charakteristikum des Materials betrachtet, so daß die Bewegung von Versetzungen gar nicht berücksichtigt werden kann. Zum zweiten tragen die Versetzungen einen Anteil zur Energiedichte des Körpers bei, und dies führt unmittelbar dazu, daß Momentenspannungen entstehen (eine sehr klare Interpretation kann man in [123, 138] finden). Man kann diese Schwierigkeiten vermeiden, indem man das Material mit Versetzungen als ein orientiertes Kontinuum

gemäß Toupinscher Definition betrachtet [139], und folglich die Nollsche konstante uniforme Referenz durch eine zeitabhängige *Kristallreferenz* ersetzt, die darüberhinaus noch variiert werden muß. Wir wollen kurz an dieser Stelle die Kritik von Anthony [140–142] am Konzept der Körpermannigfaltigkeit diskutieren. Nach Anthony kann ein plastisch verformter Körper gar nicht als eine Körpermannigfaltigkeit modelliert werden, weil die Bewegung von Versetzungen ein Deformationschaos verursachen wird [143], und dadurch alle inneren materiellen Zusammenhänge zerrissen werden. Dies trifft zu, wenn die kristalline Struktur in fast allen materiellen Punkten geschädigt ist. Wenn man aber annimmt, daß, trotz einer hohen Versetzungsdichte, der Bereich, in dem die kristalline Struktur geschädigt ist, nur einen kleinen prozentuellen Anteil verglichen mit dem gesamten Bereich des Körpers darstellt, dann kann man eine kristallographische Orientierung für jedes makroskopische Volumenelement definieren [144, 145]. Obwohl die durch Versetzungsbewegung entstandenen elementaren Gleitungen (slips) von diskreter Natur sind, können die damit verbundene elastische und plastische Deformationen auf dem Niveau der Kontinuumstheorie als stetig differenzierbar angenommen werden. Der zweite Kritikpunkt von Anthony [142], daß die Versetzungsdichte nur ein gemittelttes Maß zur Beschreibung des Versetzungsnetzwerks sei, trifft auch nicht immer zu, denn dies hängt wesentlich von der Wahl der charakteristischen Länge ab. Wählt man die letztere kleiner als den mittleren Abstand zwischen den Versetzungen, erhält man eine vollständige Beschreibung des Versetzungsnetzwerks.

Obwohl die zum Konzept der Kristallreferenz führenden physikalischen Motivationen ganz unterschiedlich sind, sieht die dadurch entstandene geometrische Struktur in allen Theorien ähnlich aus. Es existiert nämlich eindeutig ein Kristallzusammenhang infolge des Kristallparallelismus, dessen Kartansche Torsion als Versetzungsdichte [120, 122, 146] (oder als Inhomogenität, in Nollscher Terminologie [124]) identifiziert werden kann. Ferner existiert auf der Körpermannigfaltigkeit eine Riemannsche Struktur, die von der Kristallreferenz induziert wird und entsprechend eine Metrik und einen torsionsfreien Zusammenhang erzeugt. Die Darstellung dieser Metrik bezüglich der Anfangsbeschreibung ist mit dem plastischen Dehnungsmaß zu interpretieren. Die Differenz zwischen dem Riemannschen Zusammenhang und dem Kristallzusammenhang ist als Kontorsion definiert. Torsion und Kontorsion bestimmen einander. Im Rahmen unseres

kinematischen Modells können wir sowohl Dehnungsmaße als auch Versetzungsdichten auf der Körpermanigfaltigkeit und im euklidischen Translationsraum definieren. Besonders interessant ist die Definition der sogenannten relativen Zeitableitungen für räumliche Tensoren bezüglich der Kristall- und Momentanreferenz [133–135, 147]. Es ist anzumerken, daß die Zeitableitung bezüglich der Momentanreferenz mit der Lie-Ableitung bezüglich des räumlichen Geschwindigkeitsfeldes zusammenfällt.

Es ist nun klar, daß die Bestimmung der Kristallreferenz aus der gegebenen Metrik und Torsion ein sehr wichtiges Problem der finiten Elastoplastizität ist. Letzteres ist rein kinematisch und ähnlich dem Problem der Bestimmung des Verschiebungsfeldes aus dem gegebenen Dehnungsfeld in der klassischen Kontinuumsmechanik, mit dem wesentlichen Unterschied, daß die Unbekannte in unserem Problem ein Zweibein-Tensorfeld ist. Wir leiten ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung für die elastische Umkehrdeformation her. Die Integrabilitätsbedingung dieses Gleichungssystems entspricht der bekannten Eigenschaft des Kristallzusammenhangs, daß nämlich deren Krümmung verschwinden muß. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann man das Gleichungssystem entlang beliebiger Wege, die zwei Punkte des Körpers verbinden, integrieren, was es ermöglicht, sowohl die elastische Umkehrdeformation als auch die Kristallreferenz zu bestimmen, vorausgesetzt die Momentankonfiguration ist bekannt. Wir haben eine Formel hergeleitet, die der von Cesàro [148] in der linearen Kontinuumsmechanik und der von Pietraszkiewicz [149] und Pietraszkiewicz & Badur [150] in der nichtlinearen Kontinuumsmechanik ähnlich ist. Zuweilen ist es zweckmäßig, die polare Zerlegung zu benutzen, um die elastische Deformation als Produkt von Rotation und Streckung zu repräsentieren. Letztere kann dann durch das elastische Dehnungsfeld mit Hilfe der linearen Algebra bestimmt werden. Für die elastische Umkehrrotation kann man ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung herleiten, dessen Integrabilitätsbedingung völlig äquivalent dem Verschwinden der Krümmung des Kristallzusammenhangs ist. Die Lösung dieses Gleichungssystems kann in Form einer Tensorreihe präsentiert werden. Weil die Darstellungen von Metrik und Torsion bezüglich der Anfangsreferenz mit der plastischen Dehnung bzw. mit der Versetzungsdichte zusammenfällt, sind die Bestimmungen der plastischen Deformation und Rotation aus den letzteren duale Probleme bezüglich der oben betrachteten Probleme, die analog gelöst werden können. Es ist interessant, die

linearisierte Kinematik herzuleiten und die Ergebnisse mit der bekannten Theorie von Kröner [122, 138] zu vergleichen. Solch eine Linearisierung ist durchgeführt worden, und der Vergleich zeigt, daß sich die linearisierten Formeln auf die von Kröner reduzieren.

Die oben hergeleiteten Ergebnisse können dann benutzt werden, um die Wahl der minimal benötigten Zustandsgrößen in der finiten Elastoplastizität mit sich variierender Kristallreferenz zu treffen (cf. [122, 123, 126, 128]). Weil die mit der Kristallreferenz assoziierte Metrik und Torsion deren vollständige Charakteristika sind, müssen sie die Rolle von Zustandsgrößen spielen und daher als Argumente in die freie Energiedichte des Körpers eingehen. Wir zeigen, daß die freie Energiedichte, als Funktion der elastischen Dehnung und der Versetzungsdichte, dem Prinzip der Bezugsindifferenz genauso wie dem Prinzip der Anfangsdeformationsindifferenz, das wir in [128] eingeführt haben, genügt. Die Statik nichtlinearer Körper mit Versetzungen, die wir hier konstruieren, basiert auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit und auf dem Ansatz der freien Energiedichte pro Kristallvolumeneinheit (cf. [126, 151, 152]). In der klassischen Theorie von Kröner [122, 138] handelt es sich hauptsächlich um kleine elastische und plastische Distorsionen. In [151] ist von Kröner die Forderung gestellt worden, daß die freie Energiedichte nur von der elastischen Dehnung und von der Versetzungsdichte abhängen darf, während in [152] die Bilanzgleichung für den Mikroimpuls untersucht wurde. Wir haben von der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in elastische und plastische Anteile Gebrauch gemacht, um die Makro- und Versetzungsbewegung vollständig beschreiben zu können. Das Material mit Versetzungen kann als orientiertes Kontinuum im Sinne von Toupin [139] interpretiert werden (siehe auch das ähnliche Kontinuum mit internen Freiheitsgraden von Sedov und Berdichevsky [126]). In einem Punkt unterscheidet sich dennoch unsere Theorie wesentlich von der Toupinschen. Unsere Energiedichte genießt nämlich noch eine zusätzliche Invarianzeigenschaft bezüglich der Gruppe aller plastischen Anfangsdeformationen. Dies führt zu den Bilanzgleichungen des Mikroimpulses und des Mikrodrehimpulses. Die Momentenspannungen müssen mit den auf die Versetzungen wirkenden internen Konfigurationsspannungen im Gleichgewicht sein. Letztere setzen sich zusammen aus dem Eshelby Spannungstensor infolge des umgebenden elastischen Feldes [6], [127] und einem zusätzlichen Term, der die Wechselwirkung zwischen den Versetzungen charakterisiert. Die-

se Konfigurationsspannung oder Konfigurationskraft taucht immer wieder auf, wenn man ein Kontinuum mit veränderlicher Mikrostruktur behandelt (vergleiche mit der Phasenumwandlungstheorie [153–155] und der nichtlinearer Bruchmechanik [19–24, 50, 156, 157]).

Im Rahmen einer Mechanik generalisierter Kontinua [126, 139] formulieren wir ein Bilanzgleichungssystem, inklusive der Entropieerzeugungsgleichung, für ein beliebiges Volumen der Anfangskonfiguration. Ein äquivalentes Gleichungssystem bezüglich der Momentanreferenz wird ebenfalls hergeleitet. Wenn die internen Spannungen und Momentenspannungen raten-unabhängig sind, dann kann man die Entropieerzeugungsgleichung bezüglich der Anfangsreferenz benutzen, um die Konstitutivgleichungen konsistent mit dieser Ungleichung herzuleiten. Andernfalls muß man die internen Spannungen und Momentenspannungen in reversible und irreversible Anteile zerlegen, um die Entropieerzeugungsgleichung auf eine Dissipationsungleichung zu reduzieren. Letztere kann benutzt werden, um die Konstitutivgleichungen, die die Dehnungs- und Versetzungsrate enthalten, zu begründen. Wir analysieren Spezialfälle und zeigen, daß sich unsere Theorie auf die von Noll [124] und Wang [125] reduziert, wenn die Kristallreferenz als konstant angenommen wird (deren Variation wird also nicht zugelassen). Die linearisierte Statik fällt mit der bekannten Krönerschen Theorie [122, 138] zusammen. Wir untersuchen auch den Fall, daß die Kristallreferenz zeit-abhängig ist, aber keine Variation zuläßt (dies entspricht einer konventionellen Elastoplastizität ohne Mikrostruktur). Die Momentenspannungen verschwinden dann, und die Konstitutivgleichungen reduzieren sich auf die von [133–135]. Wir zeigen auch, daß das Modell von Naghdi und Srinivasa [144, 145] aus unserer Theorie durch eine spezielle Wahl der Dissipationsfunktion hergeleitet werden kann.

Kapitel 2

Nichtlineare Bruchmechanik

2.1 Vorbemerkungen und Vereinbarungen

Wir bezeichnen den dreidimensionalen euklidischen Raum durch \mathcal{E} . Elemente x, y, \dots des Raumes \mathcal{E} nennt man Raumpunkte. Der Translationsraum von \mathcal{E} ist durch \mathcal{V} bezeichnet; er ist ein dreidimensionaler Vektorraum. Elemente $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$ von \mathcal{V} nennt man Raumvektoren. Das skalare Produkt von zwei Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ist durch $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, oder durch $\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ bezeichnet. Die quadratische Form \mathbf{g} ist positiv und entspricht der räumlichen Metrik, die auf \mathcal{V} definiert ist. Der Dualraum von \mathcal{V} ist durch \mathcal{V}^* bezeichnet. Die Metrik \mathbf{g} bildet zwar einen Isomorphismus zwischen \mathcal{V} und \mathcal{V}^* , jedoch werden wir solch einen Isomorphismus nicht benutzen, um \mathcal{V}^* mit \mathcal{V} identifizieren zu können. Das Vektorprodukt von zwei Vektoren \mathbf{u}, \mathbf{v} ist durch $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ bezeichnet.

Der Tensorraum auf \mathcal{V} , r -fach kontravariant und s -fach kovariant, ist durch $T_s^r(\mathcal{V})$ bezeichnet; seine Elemente sind mit fettgedruckten Buchstaben gekennzeichnet. Zum Beispiel entspricht $T_1^1(\mathcal{V})$ dem Raum der linearen Abbildungen von \mathcal{V} auf sich selbst. Man nennt die Identitätsabbildung auf \mathcal{V} Einheitstensor und bezeichnet sie durch $\mathbf{1}$. Zuweilen ist es zweckmäßig, Tensoren auch in Komponentenschreibweise zu präsentieren. Dabei benutzt man häufig kartesische Koordinaten. Wenn es nicht gesondert angemerkt wird, vereinbaren wir, daß die großen und kleinen Indizes die Werte 1,2,3 annehmen; es gilt außerdem die Einsteinsche Summationsvereinbarung.

Es sei \mathcal{U} irgendein offener Bereich von \mathcal{E} . Man nennt die Abbildung $\mathbf{t} : \mathcal{U} \rightarrow T_s^r(\mathcal{V})$ ein Tensorfeld (r -fach kontravariantes und s -fach kovariantes), daß auf \mathcal{U} definiert ist. Man sagt, daß ein Tensorfeld \mathbf{t} zur Klasse C^1 gehört

(stetig differenzierbar), wenn ein Tensorfeld $dt : \mathcal{U} \rightarrow T_{s+1}^r(\mathcal{V})$ existiert, so daß

$$\mathbf{t}(x + \mathbf{u}) = \mathbf{t}(x) + (dt(x))\mathbf{u} + \epsilon(x, \mathbf{u}), \quad x \in \mathcal{U}, \mathbf{u} \in \mathcal{V},$$

wobei für alle $x \in \mathcal{U}$

$$\lim_{|\mathbf{u}| \rightarrow 0} \frac{1}{|\mathbf{u}|} \epsilon(x, \mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

gilt. Das Tensorfeld dt wird eindeutig bestimmt durch \mathbf{t} und wird die Ableitung von \mathbf{t} genannt.

Wir nehmen an, daß der Leser mit der Tensorrechnung auf Mannigfaltigkeiten vertraut ist (die Lehrbücher von Abraham, Marsden & Ratiu [158], oder Sternberg [159] sind empfehlenswert). Es sei \mathcal{M} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Der Tangentenraum im Punkt $X \in \mathcal{M}$ ist durch $T_X \mathcal{M}$ bezeichnet, das Tangentenbündel auf \mathcal{M} - durch $T\mathcal{M}$. Es sei ferner \mathcal{N} eine andere differenzierbare Mannigfaltigkeit, und $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ eine differenzierbare Abbildung. Die assoziierte tangierende lineare Abbildung von $T\mathcal{M}$ in $T\mathcal{N}$ ist durch $T\phi : T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{N}$ bezeichnet. Es seien nun E, F zwei Vektorräume und $\varphi : E \rightarrow F$ eine lineare Abbildung. Die transponierte Abbildung von φ kennzeichnet man durch φ^T , sie ist eine lineare Abbildung zwischen den Dualräumen F^*, E^* , $\varphi^T : F^* \rightarrow E^*$, welche mit Hilfe von $\langle \varphi^T(\beta), \mathbf{u} \rangle = \langle \beta, \varphi(\mathbf{u}) \rangle$ definiert ist, wobei $\beta \in F^*$, $\mathbf{u} \in E$, und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Produkt zweier dualer Tensoren bezeichnet.

2.2 Variationsprinzipien der Bruchmechanik

2.2.1 Statik

Wir setzen voraus, daß ein nichtlinearer hyperelastischer Körper schon in seiner Anfangskonfiguration einen Riß hat. Letzterer läßt sich durch eine glatte Fläche \mathcal{S} mit glattem Rand $\partial\mathcal{S}$ modellieren. Die Anfangskonfiguration nimmt den Bereich $\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \mathcal{B} \setminus (\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S})$ des dreidimensionalen euklidischen Raumes \mathcal{E} ein, wobei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ ein offener zusammenhängender Bereich ist. Der äußere Rand des Körpers in seiner Anfangskonfiguration fällt zusammen mit $\partial\mathcal{B}$, der innere Rand - mit $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$. Die kartesischen Koordinaten der materiellen Punkte in einem raumfesten Koordinatensystem sind durch $X_K, K = 1, 2, 3$ gekennzeichnet. In der verformten Konfiguration haben dieselben materiellen Punkte neue Koordinaten x_i , die durch

folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} x_i &= \phi_i(X_1, X_2, X_3), \quad i = 1, 2, 3, \\ \text{oder } \mathbf{x} &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B}_S, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

beschrieben werden. Die Koordinaten x_i durchlaufen den Bereich $\phi(\mathcal{B}_S)$ der verformten Konfiguration. Wir setzen voraus, daß $\phi_i(X_K)$ eine eindeutige und umkehrbare Abbildung von \mathcal{B}_S auf $\phi(\mathcal{B}_S)$ ist, die den folgenden Bedingungen genügt

$$0 < J = \det \left| \frac{\partial \phi_i}{\partial X_K} \right| < \infty, \quad \forall X_K \in \mathcal{B}_S.$$

Die Funktionen ϕ_i sind nicht auf $\mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$ definiert. Die Grenzwerte von $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X})$ an den beiden Seiten der Fläche \mathcal{S} werden durch $\boldsymbol{\phi}^+$ und $\boldsymbol{\phi}^-$ bezeichnet. Sie beschreiben die zwei Flächen des geöffneten Risses in der verformten Konfiguration (Abb.2.1).

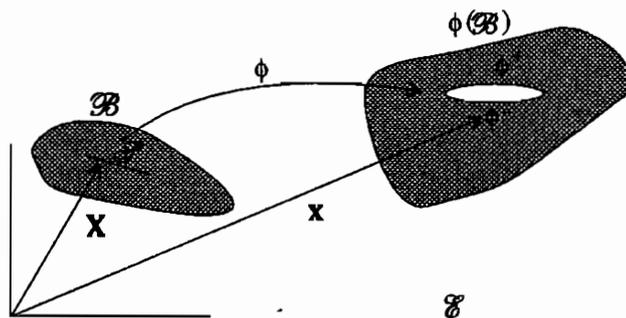


Abbildung 2.1: Verformung eines Körpers mit einem Riß

Es ist offensichtlich, daß $\boldsymbol{\phi}^+$ und $\boldsymbol{\phi}^-$ nicht unbedingt gleich sein müssen. Das heißt, die Funktion $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{X})$ kann einen Sprung auf \mathcal{S} aufweisen. Wir müssen auch zulassen, daß der Deformationgradient $\mathbf{F} = \partial\boldsymbol{\phi}/\partial\mathbf{X}$ in der Umgebung der Rißfront $\partial\mathcal{S}$ singular werden kann, in dem Sinne, daß $\mathbf{F} \rightarrow \infty$ wenn $\mathbf{X} \rightarrow \partial\mathcal{S}$. Der Grund, warum eine solche Singularität auftritt, mag in der Geometrie des Körper mit Riß liegen. Es ist zumindest nicht auszuschließen, daß eine solche Singularität in Körpern mit unterschiedlichem mechanischen Verhalten auftreten kann.

Wir definieren die Menge der zulässigen Konfigurationen, die wir durch \mathcal{C} bezeichnen, wie folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}) \mid \mathbf{X} \in \mathcal{B}_\Sigma = \mathcal{B} \setminus (\Sigma \cup \partial\Sigma), \Sigma \supseteq \mathcal{S}, \\ 0 < J &= \det \partial\boldsymbol{\chi}/\partial\mathbf{X} < \infty, \boldsymbol{\chi} = \mathbf{r}(\mathbf{X}) \text{ auf } \partial\mathcal{B}_x\}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Diese Definition erlaubt es, einen Körper mit eventuell wachsendem Riß betrachten zu können. Dabei ist Σ eine beliebige Fläche, die \mathcal{S} als Teilfläche enthält. Die Kontinuität und Glattheit von Σ sind vorausgesetzt, außer auf Punkten von $\partial\mathcal{S}$, auf denen die Fläche Σ , im allgemeinen Fall Knicke entlang der Rißfront erleiden kann (Abb.2.2).



Abbildung 2.2: Ein virtueller Riß mit Knicken entlang der Rißfront

Weil die Funktionen $\chi(\mathbf{X})$ an dieser Fläche einen Sprung erfahren können, nennen wir Σ die Sprungfläche. Es ist auch anzunehmen, daß der Deformationsgradient $\mathbf{F} = \partial\chi/\partial\mathbf{X}$ ein singuläres Verhalten in der Umgebung der Rißfront $\partial\Sigma$ haben kann. Die Funktionen $\mathbf{r}(\mathbf{X})$ auf dem Teil $\partial\mathcal{B}_x$ des äußeren Randes geben die kinematischen Randbedingungen vor.

Wir drücken nun die gesamte Energie eines homogenen hyperelastischen Körpers mit einem Riß, der infolge der Konfiguration $\chi(\mathbf{X})$ mit der Sprungfläche Σ entstanden ist, wie folgt aus

$$E[\chi(\mathbf{X})] = \int_{\mathcal{B}_\Sigma} W(\mathbf{F}(\chi), \vartheta) dv + \int_{\Sigma} 2\gamma da + \int_{\mathcal{B}_\Sigma} \psi(\chi) dv - \int_{\partial\mathcal{B}_T} \mathbf{t} \cdot \chi da, \quad (2.2.3)$$

in voller Übereinstimmung mit Griffith's grundlegenden Ideen [1,2]. In dieser Formel (2.2.3) bezeichnen wir mit $W(\mathbf{F}, \vartheta)$ die freie Energiedichte pro Volumeneinheit, mit γ die Energiedichte der Sprungfläche pro Flächeneinheit (der Faktor 2 ist dadurch entstanden, daß der Riß zwei Ufer hat), mit $\psi(\chi)$ das Potential der Volumenkraft, mit dv und da entsprechend die Volumen- und Flächenelemente im dreidimensionalen euklidischen Raum \mathcal{E} . Der Tensor $\mathbf{F} = \partial\chi/\partial\mathbf{X}$ ist der Deformationsgradient, während ϑ die vorgegebene Temperatur bezeichnet (wir betrachten isotherme Prozesse). Da die Temperatur konstant bleibt, ist es nicht nötig, sie in der Liste der Zustandsgrößen zu erwähnen. Auf dem restlichen Teil $\partial\mathcal{B}_T$ des äußeren Randes $\partial\mathcal{B}$ ist die "tote" Last \mathbf{t} als statische Randbedingung vorgegeben.

Wir wollen nun die Variation der Energie definieren. Für diesen Zweck betrachten wir eine Einparameterfamilie der zulässigen Konfigurationen $\chi = \chi(\mathbf{X}, \epsilon) \in \mathcal{C}$ mit den Sprungflächen \mathcal{S}^ϵ , die von ϵ abhängen. Wir

nehmen an, daß

$$\mathcal{S}^{\epsilon'} \supseteq \mathcal{S}^\epsilon \supseteq \mathcal{S} \quad \text{für} \quad \epsilon' > \epsilon > 0, \quad \mathcal{S}^\epsilon \rightarrow \mathcal{S} \quad \text{wenn} \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

$$\chi(\mathbf{X}, 0) = \phi(\mathbf{X}).$$

Die Variation der gesamten Energie (2.2.3) kann man dann wie folgt definieren

$$\delta E = \left. \frac{d}{d\epsilon} E[\chi(\mathbf{X}, \epsilon)] \right|_{\epsilon=0}. \quad (2.2.4)$$

Nun formulieren wir das Variationsprinzip der gesamten Energie für einen Körper mit einem Riß: Der Körper mit dem Riß kann sich nur im stabilen Gleichgewicht befinden, wenn die Variationen seiner gesamten Energie δE für alle möglichen Familien zulässiger Konfigurationen nicht negativ sind

$$\delta E \geq 0 \quad \forall \chi(\mathbf{X}, \epsilon) \in \mathcal{C}. \quad (2.2.5)$$

Es gibt keine prinzipiellen Schwierigkeiten, das oben formulierte Variationsprinzip auf Körper mit mehreren Rissen zu verallgemeinern. Deswegen konzentrieren wir uns hier einfachheitshalber auf den Fall, daß der Körper nur einen einzigen Riß hat. Es ist hier anzumerken, daß das Variationsproblem (2.2.5) nicht standard in dem Sinne ist, daß die Menge \mathcal{C} der zulässigen Konfigurationen keinen linearen Funktionsraum bildet. Denn aufgrund der Bedingung (2.2.2) und der unterschiedlichen Definitionsbereiche kann man zwei unterschiedliche, zulässige Konfigurationen nicht addieren.

Um die Konsequenzen aus (2.2.5) ziehen zu können, muß man die Variation der gesamten Energie δE gemäß der Definition (2.2.4) bestimmen. Die Schwierigkeiten solch einer Bestimmung sind mit den veränderlichen Integrationsbereichen $\mathcal{B}_{\mathcal{S}^\epsilon}$ und Sprungflächen \mathcal{S}^ϵ verknüpft. Um diese Schwierigkeiten zu überwinden, versuchen wir jetzt eine Familie von eindeutigen und bereichsweise stetig-differenzierbaren Abbildungen von \mathcal{B} auf sich selbst

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{X}, \epsilon)$$

einzuführen, so daß

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\mathbf{Y}} \mathcal{B}_{\mathcal{S}^\epsilon}, \quad \mathcal{S} \xrightarrow{\mathbf{Y}} \mathcal{S}^\epsilon,$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}, \epsilon) = \mathbf{X}, \quad \text{wenn} \quad \epsilon = 0, \quad \text{oder wenn} \quad \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}.$$

Der Sinn solcher Abbildungen ist es, die Integrale in Glg. (2.2.3) auf eine solche Form zu bringen, daß sie sich nun über die konfigurationsunabhängigen Integrationsbereiche \mathcal{B}_S und \mathcal{S} erstrecken. Als eine Art des "Variablenwechsels", werden die Abbildungen $\mathbf{Y}(\mathbf{X}, \epsilon)$ Parametrisierung des Mediums genannt. Durch solch einen Variablenwechsel kann man die vor dem Integralzeichen stehende Ableitung in (2.2.4), (2.2.5) unter das Integral bringen

$$\begin{aligned} \delta \int_{\mathcal{B}_S^\epsilon} W(\mathbf{F}(\boldsymbol{\chi})) dv &= \delta \int_{\mathcal{B}_S} W(\boldsymbol{\chi}_Y) \det \mathbf{Y}_X dv \\ &= \int_{\mathcal{B}_S} (\delta W + W \delta \det \mathbf{Y}_X) dv \\ &= \int_{\mathcal{B}_S} [\text{tr}(\mathbf{P}^T \delta \boldsymbol{\chi}_Y) + W \text{Div} \delta \mathbf{Y}] dv. \end{aligned}$$

Von nun an bezeichnen wir mit δ unter dem Integralzeichen die partielle Ableitung nach ϵ bei festem \mathbf{X} mit darauf folgendem Einsatz von $\epsilon = 0$. Zum Beispiel

$$\delta \mathbf{Y} = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathbf{Y}(\mathbf{X}, \epsilon) \right|_{\mathbf{X}=\text{const}, \epsilon=0}.$$

Der erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor \mathbf{P} ist durch $\mathbf{P} = \partial W / \partial \mathbf{F}$ gegeben. Es ist leicht ersichtlich, daß

$$\delta \boldsymbol{\chi}_Y = (\delta \boldsymbol{\chi})_X - \mathbf{F}(\delta \mathbf{Y})_X,$$

wobei

$$\delta \boldsymbol{\chi} = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{Y}(\mathbf{X}, \epsilon), \epsilon) \right|_{\mathbf{X}=\text{const}, \epsilon=0}.$$

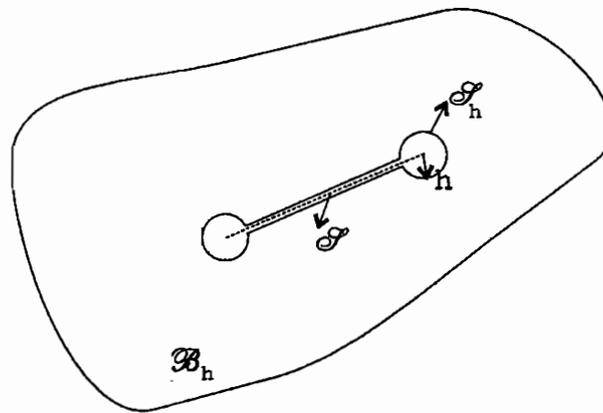
Deswegen gilt

$$\delta \int_{\mathcal{B}_S^\epsilon} W dv = \int_{\mathcal{B}_S} [\text{tr}(\mathbf{P}^T \delta \boldsymbol{\chi}_X) + \text{tr}(\mathbf{B}^T \delta \mathbf{Y}_X)] dv, \quad (2.2.6)$$

wobei der Tensor

$$\mathbf{B} = -\mathbf{F}^T \mathbf{P} + W \mathbf{1}$$

dem Eshelby-Tensor [6] entspricht. Im Hinblick darauf, daß die Funktionen $\phi(\mathbf{X})$ und andere Feldgrößen einen Sprung auf \mathcal{S} und ein singuläres Verhalten in der Umgebung von $\partial \mathcal{S}$ haben können, machen wir die folgenden Schritte mit dem Ziel, das Gauss Theorem später auf das Integral (2.2.6) anzuwenden. Wir ersetzen den Integrationsbereich \mathcal{B}_S durch \mathcal{B}_h , der den inneren Rand \mathcal{S}_h hat, welcher einen kleinen Abstand h von $\partial \mathcal{S}$ aufweist

Abbildung 2.3: Der Integrationsbereich \mathcal{B}_h

(Abb.2.3). Nun dürfen wir das Gauss Theorem auf das Integral (2.2.6) über \mathcal{B}_h anwenden. Nachdem wir h gegen null gehen lassen, erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \delta \int_{\mathcal{B}_h} W \, dv &= \int_{\mathcal{B}_h} (-\text{Div} \mathbf{P} \cdot \delta \boldsymbol{\chi} - \text{Div} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{Y}) \, dv \\ &+ \int_S [(-\delta \boldsymbol{\chi}^+ \cdot \mathbf{P}^+ \mathbf{N} + \delta \boldsymbol{\chi}^- \cdot \mathbf{P}^- \mathbf{N}) + \delta \mathbf{Y} \cdot (-\mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^-) \mathbf{N}] \, da \\ &- \int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot \delta \mathbf{Y} \, ds + \int_{\partial \mathcal{B}_T} \delta \boldsymbol{\chi} \cdot \mathbf{P} \mathbf{N} \, da, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

wobei ds das Längenelement im Raum \mathcal{E} bezeichnet, die Indizes $+$, $-$ markieren die Grenzwerte der Feldgrößen auf den zwei Seiten der Sprungfläche \mathcal{S} , und \mathbf{N} ist der äußere Normaleneinheitsvektor in der Anfangskonfiguration (auf \mathcal{S} weist er die Richtung $+$ auf). Schließlich ist \mathbf{J} der Energiezuflußvektor zur Rißfront, der sich wie folgt ausdrücken läßt

$$\mathbf{J} = \lim_{|\Gamma| \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa} \, ds = \lim_{|\Gamma| \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (-\mathbf{F}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\kappa} + W \boldsymbol{\kappa}) \, ds, \quad (2.2.8)$$

wobei Γ eine geschlossene Kurve ist, die in der zu $\partial \mathcal{S}$ senkrechten Ebene liegt und den Punkt $\mathbf{X} \in \partial \mathcal{S}$ enthält und gegen denselben schrumpft, wenn der Umfang $|\Gamma|$ gegen Null tendiert. Wir bezeichnen durch $\boldsymbol{\kappa}$ den äußeren Normaleneinheitsvektor an Γ . Bei der Herleitung von (2.2.8) haben wir angenommen, daß die folgende asymptotische Eigenschaft

$$\lim_{|\Gamma| \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \mathbf{P} \boldsymbol{\kappa} \, ds = 0$$

gilt. Dies bedeutet nichts anderes, als daß die Newtonsche Kraft, die auf die Rißfront wirkt, gleich null ist.

Die Variation der Oberflächenenergie und der anderen Energieanteile in der Gesamtenergie (2.2.3) läßt sich durch folgende Formel ausdrücken

$$\delta \int_{S^\epsilon} 2\gamma da = - \int_S 4H\delta\mathbf{Y} \cdot \mathbf{n} da + \int_{\partial S} 2\gamma\delta\mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\nu}_1 ds, \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned} \delta \int_{B_{S^\epsilon}} \psi dv &= \int_{B_S} \mathbf{f} \cdot (-\delta\boldsymbol{\chi} + \mathbf{F}\delta\mathbf{Y}) dv \\ &\quad - \int_S (\psi^+ - \psi^-)\delta\mathbf{Y} \cdot \mathbf{n} da, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$\delta \int_{\partial B_T} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\chi} da = \int_{\partial B_T} \mathbf{t} \cdot \delta\boldsymbol{\chi} da. \quad (2.2.11)$$

Dabei ist \mathbf{N} der Normaleneinheitsvektor zu S , H die mittlere Krümmung der Fläche S , und $\mathbf{f} = -\text{grad}\psi$ die Volumenkraft. Der Normaleneinheitsvektor $\boldsymbol{\nu}_1$ steht senkrecht zur Randkurve ∂S und bestimmt die transversale Richtung der Erweiterung von S nach S^ϵ (Abb.2.4).



Abbildung 2.4: Normaleneinheitsvektoren $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2$

Wir kombinieren letztendlich die Formeln (2.2.7), (2.2.9)-(2.2.11), um den folgenden Ausdruck für die Variation der gesamten Energie zu erhalten

$$\begin{aligned} \delta E &= \int_{B_S} [-(\text{Div}\mathbf{P} + \mathbf{f}) \cdot \delta\boldsymbol{\chi} + (-\text{Div}\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{Y} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}\delta\mathbf{Y})] dv \\ &\quad + \int_S \{(-\delta\boldsymbol{\chi}^+ \cdot \mathbf{P}^+ \mathbf{N} + \delta\boldsymbol{\chi}^- \cdot \mathbf{P}^- \mathbf{N}) \\ &\quad + \delta\mathbf{Y} \cdot [(-\mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^-)\mathbf{N} - 4\gamma H\mathbf{N} - (\psi^+ - \psi^-)\mathbf{N}]\} da \\ &\quad + \int_{\partial S} (2\gamma\boldsymbol{\nu}_1 - \mathbf{J}) \cdot \delta\mathbf{Y} ds + \int_{\partial B_T} \delta\boldsymbol{\chi} \cdot (\mathbf{P}\mathbf{N} - \mathbf{t}) da. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Wir analysieren die Variationsungleichung (2.2.5), deren linke Seite nun durch die Formel (2.2.12) ausgedrückt wird. Es ist leicht ersichtlich, daß die Variationen $\delta\boldsymbol{\chi}$ und $\delta\mathbf{Y}$ in dem Bereich B_S sowie $\delta\boldsymbol{\chi}$ auf der Fläche ∂B_T beliebig sein können. Dagegen müssen sich die Variationen $\delta\boldsymbol{\chi}$ und $\delta\mathbf{Y}$ auf S und ∂S einigen Beschränkungen unterwerfen, die wir nun bestimmen

werden. Wenn sich die Ufer des verformten Risses nicht miteinander in Kontakt befinden, dann kann die Variation $\delta\chi$ auf \mathcal{S} offensichtlich beliebige Werte annehmen. Wenn dies nicht der Fall ist, dann bezeichnen wir die Teilflächen von \mathcal{S} , deren Punkte sich nach der Verformung miteinander in Kontakt befinden, durch \mathcal{S}^+ und \mathcal{S}^-

$$\phi^+(\eta_\alpha^+) = \phi^-(\eta_\alpha^-), \quad \eta_\alpha^\pm \in \mathcal{S}^\pm, \quad \alpha = 1, 2.$$

Dabei ist die Fläche \mathcal{S} durch ein zweidimensionales krummliniges Koordinatensystem η_α beschrieben. Die griechischen Indizes nehmen die Werte 1 und 2 an. Für die Punkte der verformten Rißufern, die sich im Kontakt befinden, gilt die folgende Beschränkung

$$[\delta\chi^+(\eta_\alpha^+) - \delta\chi^-(\eta_\alpha^-)] \cdot \mathbf{n} \geq 0, \quad (2.2.13)$$

wobei \mathbf{n} , der gemeinsame Normaleneinheitsvektor zu den verformten Kontaktoberflächen, die Richtung + aufweist (Abb.2.5). Die Formel (2.2.13) bedeutet nichts anderes als die Bedingung, daß eine Durchdringung der Rißufer ineinander nicht erlaubt ist. Wir lassen dagegen zu, daß die Ri-

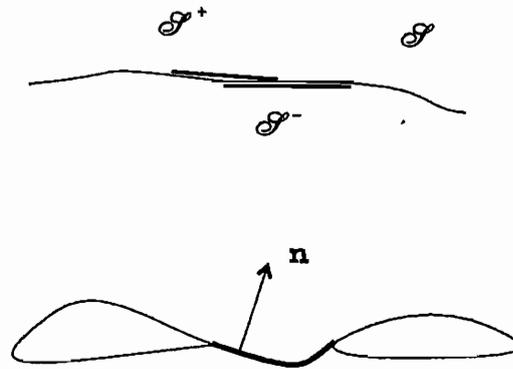


Abbildung 2.5: Die Rißufer im Kontakt

ßufer aneinander ohne Reibung rutschen können und deswegen die virtuellen Tangentialverschiebungen $\delta\chi^\pm \cdot \phi_{,\alpha}$ beliebige Werte auf \mathcal{S}^\pm annehmen können, wobei $\phi_{,\alpha} = \partial\phi/\partial\eta_\alpha$ ist. Ferner, weil $\mathcal{S}^e \supseteq \mathcal{S}$ ist, müssen wir $\delta\mathbf{Y}$ wie folgt einschränken

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{Y} \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{auf } \mathcal{S}, \\ \delta\mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\nu}_1 &\geq 0, \quad \delta\mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\nu}_2 = 0, \\ \delta\mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\nu}_3 &= \text{beliebig auf } \partial\mathcal{S}, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

wobei ν_3 der Tangentenvektor an $\partial\mathcal{S}$ ist und die drei Vektoren ν_1, ν_2, ν_3 eine orthonormierte Basis im Punkt $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$ bilden.

Unter Berücksichtigung aller Beschränkungen für die Variationen, kann man zeigen daß (2.2.5), (2.2.12)-(2.2.14) auf folgende Gleichungen führen

$$\text{Div}\mathbf{P} + \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \quad \text{in } \mathcal{B}_S, \quad (2.2.15)$$

$$\phi = \mathbf{r}(\mathbf{X}) \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_x, \quad \mathbf{P}\mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_T, \quad (2.2.16)$$

$$\mathbf{P}^\pm \mathbf{N} = 0 \quad \text{auf } \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^\pm, \quad (2.2.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^+ \mathbf{N} \sqrt{A/a}|_{\eta_\alpha^+} &= \mathbf{P}^- \mathbf{N} \sqrt{A/a}|_{\eta_\alpha^-} = -p\mathbf{n}, \\ p &\geq 0 \quad \text{auf } \mathcal{S}^+, \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{J}| &= \sqrt{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}} \leq 2\gamma, \\ J_3 &= \mathbf{J} \cdot \nu_3 = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{S}, \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= \det |A_{\alpha\beta}|, \quad A_{\alpha\beta} = \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}, \\ a &= \det |a_{\alpha\beta}|, \quad a_{\alpha\beta} = \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta}. \end{aligned}$$

Man kann prüfen, daß die Gleichung $J_3 = 0$ aufgrund von (2.2.15)-(2.2.18) und (2.2.19)₁ identisch erfüllt wird.

Zusammenfassend führen die Gleichungen (2.2.15)-(2.2.19) zu einem statischen Randwertproblem, dessen Lösungen alle möglichen Gleichgewichtskonfigurationen des Körpers mit dem Riß bestimmen. Es ist interessant anzumerken, daß das Rißwachstumskriterium (2.2.19)₁ entkoppelt von allen anderen Gleichungen steht. Deswegen kann man in der Praxis erst das Teilsystem von (2.2.15)-(2.2.18) auflösen, um die verformte Konfiguration $\mathbf{x}(\mathbf{X})$ und das Spannungsfeld \mathbf{P} zu bestimmen. Dann berechnet man mit Hilfe von (2.2.8) den J-Integral-Vektor und prüft dabei die Ungleichung (2.2.19). Es ist nicht schwer zu zeigen, daß das Teilsystem von (2.2.15)-(2.2.18) aus der Variationsungleichung

$$\delta E \geq 0. \quad (2.2.20)$$

hergeleitet werden kann. Die Ungleichung (2.2.20) gilt für alle Einparameterfamilien der zulässigen Konfigurationen mit der *fixierten Sprungfläche* \mathcal{S} und kann mit Hilfe der bekannten numerischen Verfahren behandelt werden.

2.2.2 Dynamik

Wir betrachten nun den Fall, daß kein stabiles Gleichgewicht des Körpers mit dem Riß möglich ist, und der Riß sich sehr schnell durch den Körper ausbreitet, bis er dann in Teile zerfällt. Wir beschreiben die Bewegung des Körpers mit einem sich ausbreitenden Riß durch folgende Gleichungen

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B}_t = \mathcal{B} \setminus (\mathcal{S}_t \cup \partial\mathcal{S}_t), \quad (2.2.21)$$

wobei \mathcal{S}_t die Sprungfläche zur Zeit t ist, und $\mathcal{S}_t \supseteq \mathcal{S}_\tau$, $t > \tau$. Zu jeder Zeit ist die Funktion $\phi(\mathbf{X}, t)$ eine eindeutige und umkehrbare Abbildung von \mathcal{B}_t auf einen offenen Bereich $\phi_t(\mathcal{B}_t)$. Es ist anzumerken, daß die materielle Konfiguration \mathcal{B}_t , die man als Bezugskonfiguration zur Zeit t gewählt hat, von der Zeit abhängt. Deswegen, ist das dynamische Rißproblem auch in der Bezugsbeschreibung ein Problem mit einem unbekanntem inneren Rand \mathcal{S}_t , der bestimmt werden muß, wie alle anderen Größen (Spannungen, Dehnungen, etc.). Wir lassen ein singuläres Verhalten des Geschwindigkeitsfeldes $\dot{\phi}$ in der Umgebung der Rißfront $\partial\mathcal{S}_t$ zu, wobei der über einer Größe stehende Punkt ihre Zeitableitung bei festem \mathbf{X} bedeutet

$$\dot{\phi} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{X}, t) \right|_{\mathbf{x}=\text{const}}$$

Wir werden erst den Energieerhaltungssatz für einen hyperelastischen Körper mit einem Riß analysieren, welcher offensichtlich folgende Form hat

$$\frac{d}{dt}(E + K) = 0, \quad (2.2.22)$$

wobei

$$\begin{aligned} E &= \int_{\mathcal{B}_t} U(\mathbf{F}, \eta) \, dv + \int_{\mathcal{S}_t} 2\gamma \, da \\ &+ \int_{\mathcal{B}_t} \psi(\phi) \, dv - \int_{\partial\mathcal{B}_T} \mathbf{t} \cdot \phi \, da, \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

$$K = \int_{\mathcal{B}_t} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\phi} \cdot \dot{\phi} \, dv. \quad (2.2.24)$$

Das Funktional E entspricht der potentiellen Energie des Körpers mit dem Riß einschließlich der Energie der Rißoberflächen, das Funktional K der kinetischen Energie des Körpers. Wir bezeichnen mit ρ_0 die Dichte,

mit $U(\mathbf{F}, \eta)$ die innere Energiedichte des Körpers pro Volumeneinheit, mit $\mathbf{F} = \partial\phi/\partial\mathbf{X}$ den Deformationsgradienten, und mit η die lokale Entropie, die wir als Konstante während der betrachteten Bewegung annehmen werden. Da die Entropie konstant bleibt, ist es nicht nötig, sie in der Liste der Zustandsgrößen der Funktion U zu erwähnen. Die anderen Bezeichnungen, wie $\gamma, \psi(\phi), \mathbf{t}, \dot{\phi}$ sind oben schon erläutert worden. Wegen der veränderlichen Integrationsbereiche \mathcal{B}_t und Sprungflächen \mathcal{S}_t ist es schwierig, die Zeitableitungen \dot{E} und \dot{K} zur Zeit $t = \tau$ zu bestimmen. Um diese Schwierigkeit zu überwinden, führen wir eine zeitabhängige Familie von Parametrisierungen $\mathbf{X}' = \mathbf{X}'(\mathbf{X}, t)$ ein, so daß

$$\mathcal{B}_t \xrightarrow{\mathbf{X}'} \mathcal{B}_\tau, \quad \mathcal{S}_t \xrightarrow{\mathbf{X}'} \mathcal{S}_\tau,$$

$$\mathbf{X}'(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X}, \quad \text{wenn } t = \tau, \quad \text{oder wenn } \mathbf{X} \in \partial\mathcal{B}.$$

Man bemerkt, daß das Funktional E von (2.2.23) in genau der gleichen Art und Weise von t abhängt, wie das Funktional (2.2.3) von ϵ . Deswegen kann man sofort zeigen, daß zur Zeit τ die folgende Gleichung gilt

$$\begin{aligned} \dot{E} = & \int_{\mathcal{B}_\tau} [-(\text{Div}\mathbf{P} + \mathbf{f}) \cdot \delta_\tau \phi + (-\text{Div}\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{X}}' + \mathbf{f} \cdot \mathbf{F}\dot{\mathbf{X}}')] dv \\ & + \int_{\mathcal{S}_\tau} [(-\delta_\tau \phi^+ \cdot \mathbf{P}^+ \mathbf{N} + \delta_\tau \phi^- \cdot \mathbf{P}^- \mathbf{N}) + \dot{\mathbf{X}}' \cdot (-\mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^-) \mathbf{N}] da \\ & + \int_{\partial\mathcal{S}_\tau} (2\gamma\nu_1 - \mathbf{J}) \cdot \dot{\mathbf{X}}' ds + \int_{\partial\mathcal{B}_\tau} \delta_\tau \phi (\mathbf{T}\mathbf{n} - \mathbf{t}) da. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Dabei haben wir schon die Eigenschaft $\dot{\mathbf{X}}' \cdot \mathbf{n} = 0$ auf \mathcal{S}_τ berücksichtigt. In Glg. (2.2.25) sind der Spannungstensor \mathbf{P} und der Eshelby-Tensor \mathbf{B} wie folgt definiert

$$\mathbf{P} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{F}}, \quad \mathbf{B} = -\mathbf{F}^T \mathbf{P} + U \mathbf{1}.$$

Der Zufluß der potentiellen Energie zur Rißfront ist durch

$$\mathbf{J} = \lim_{|\Gamma_\tau| \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\tau} \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa} ds = \lim_{|\Gamma_\tau| \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\tau} (-\mathbf{F}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\kappa} + U \boldsymbol{\kappa}) ds,$$

gegeben, wobei die geschlossene Kurve Γ_τ in der zu $\partial\mathcal{S}_\tau$ senkrechten Ebene liegt und den Punkt $\mathbf{X} \in \partial\mathcal{S}_\tau$ enthält und gegen denselben schrumpft, wenn ihr Umfang gegen null tendiert. Das Symbol $\delta_\tau \phi$ bezeichnet die Zeitableitung von verketteten Funktionen bei festem \mathbf{X}

$$\delta_\tau \phi = \left. \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{X}'(\mathbf{X}, t), t) \right|_{\mathbf{X}=\text{const}, t=\tau}.$$

Es ist zu betonen, daß $\delta_\tau \phi$ nicht gleich der materiellen Geschwindigkeit $\dot{\phi}$ ist. Wir bestimmen nun \dot{K}

$$\begin{aligned}\dot{K} &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=\tau} \int_{B_\tau} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\phi} \cdot \dot{\phi} \det \mathbf{X}'_{\mathbf{X}} dv \\ &= \int_{B_\tau} (\rho_0 \dot{\phi} \cdot \delta_\tau \dot{\phi} + \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\phi} \cdot \dot{\phi} \operatorname{Div} \dot{\mathbf{X}}') dv.\end{aligned}\quad (2.2.26)$$

Es ist leicht zu sehen, daß

$$\delta_\tau \phi = \dot{\phi} + \mathbf{F} \dot{\mathbf{X}}', \quad \delta_\tau \dot{\phi} = \ddot{\phi} + \dot{\mathbf{F}} \dot{\mathbf{X}}', \quad (2.2.27)$$

wobei $\ddot{\phi}$ die materielle Beschleunigung bedeutet. Wenn man die Ableitung $\delta_\tau \phi$ von (2.2.27) in Glg. (2.2.26) einsetzt und vom Gauss Theorem Gebrauch macht, ergibt sich

$$\dot{K} = \int_{B_\tau} \rho_0 \ddot{\phi} \cdot (\delta_\tau \phi - \mathbf{F} \dot{\mathbf{X}}') dv - \int_{\partial S_\tau} \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{X}}' ds, \quad (2.2.28)$$

wobei

$$\mathbf{Q} = \lim_{|\Gamma_\tau| \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\tau} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\phi} \cdot \dot{\phi} \boldsymbol{\kappa} ds \quad (2.2.29)$$

ist. Der Vektor \mathbf{Q} kann als der Zufluß der kinetischen Energie zur Rißfront interpretiert werden.

Mit Berücksichtigung von Gln. (2.2.25)-(2.2.29) erhält man den Energieerhaltungssatz für den Körper mit Riß in der Form

$$\begin{aligned}\dot{E} + \dot{T} &= \int_{B_t} \{(\rho_0 \ddot{\phi} - \operatorname{Div} \mathbf{P} - \mathbf{f}) \cdot \delta_t \phi + [-\operatorname{Div} \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{X}}' + (\mathbf{f} - \rho_0 \ddot{\phi}) \cdot \mathbf{F} \dot{\mathbf{X}}']\} dv \\ &+ \int_{S_t} [(-\delta_t \phi^+ \cdot \mathbf{P}^+ \mathbf{N} + \delta_t \phi^- \cdot \mathbf{P}^- \mathbf{N}) + \dot{\mathbf{X}}' \cdot (-\mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^-) \mathbf{N}] da \\ &+ \int_{\partial S_t} (2\gamma \boldsymbol{\nu}_1 - \mathbf{I}) \cdot \dot{\mathbf{X}}' ds + \int_{\partial B_\tau} \delta_t \phi \cdot (\mathbf{P} \mathbf{n} - \mathbf{t}) da = 0,\end{aligned}\quad (2.2.30)$$

wobei der Vektor \mathbf{I} den gesamten Energiezufluß zur Rißfront bedeutet, welcher sich wie folgt berechnen läßt (siehe auch [12, 13, 21, 22])

$$\mathbf{I} = \lim_{|\Gamma_t| \rightarrow 0} \int_{\Gamma_t} [-\mathbf{F}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\kappa} + (U + \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\phi} \cdot \dot{\phi}) \boldsymbol{\kappa}] ds. \quad (2.2.31)$$

Wir gehen nun zur Formulierung einer variationellen Evolutionsungleichung der dynamischen Bruchmechanik über. Zu diesem Zweck führen

wir die zwei folgenden Mengen ein. Die erste ist die Menge der zulässigen Konfigurationen \mathcal{C}_t , die wie folgt definiert ist

$$\mathcal{C}_t = \{\chi(\mathbf{X}, t) | \mathbf{X} \in \mathcal{B}_{\Sigma_t} = \mathcal{B} \setminus (\Sigma_t \cup \partial\Sigma_t), \Sigma_t \supseteq \mathcal{S}_t, \\ 0 < J = \det \chi_{\mathbf{X}} < \infty, \chi = \mathbf{r}(\mathbf{X}) \text{ auf } \partial\mathcal{B}_x\}.$$

Die zweite, die wir durch \mathcal{P}_t bezeichnen, ist die Menge der Parametrisierungen $\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t)$, welche den folgenden Bedingungen genügt

$$\mathcal{B}_t \xrightarrow{\mathbf{Y}} \mathcal{B}_{\Sigma_t}, \quad \mathcal{S}_t \xrightarrow{\mathbf{Y}} \Sigma_t,$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} \text{ wenn } \mathbf{X} \in \partial\mathcal{B}.$$

Auf der Menge \mathcal{C}_t definieren wir das Energiefunktional

$$E[\chi(\mathbf{X}, t)] = \int_{\mathcal{B}_{\Sigma_t}} U(\mathbf{F}(\chi)) dv + \int_{\Sigma_t} 2\gamma da + \int_{\mathcal{B}_{\Sigma_t}} \psi(\chi) dv - \int_{\partial\mathcal{B}_T} \mathbf{t} \cdot \chi da.$$

Nun formulieren wir das Variationsprinzip: Für die aktuelle Konfiguration eines hyperelastischen Körpers mit einem Riß gilt die variationelle Evolutionsungleichung

$$\delta E + \int_{\mathcal{B}_t} \rho_0 \ddot{\phi} \cdot (\delta \chi - \mathbf{F} \delta \mathbf{Y}) dv - \int_{\partial\mathcal{S}_t} \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{Y} ds \geq 0 \quad (2.2.32)$$

zu jeder Zeit t und für alle Variationen der zulässigen Konfigurationen $\delta \chi$ und der Parametrisierungen $\delta \mathbf{Y}$. Darüberhinaus fordert das Variationsprinzip noch, daß Glg. (2.2.32) identisch dem Energieerhaltungssatz (2.2.30) wird, wenn $\delta \chi$ und $\delta \mathbf{Y}$ durch die Geschwindigkeiten $\delta_t \phi$ und $\dot{\mathbf{X}}'$ der *tatsächlichen* Funktionen entsprechend ersetzt werden. Dabei ist die Variation des Energiefunktionales in (2.2.32) wie folgt definiert

$$\delta E = \left. \frac{d}{d\epsilon} E[\chi(\mathbf{X}, t, \epsilon)] \right|_{\epsilon=0}, \\ \delta \chi = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \chi(\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t, \epsilon), t, \epsilon) \right|_{\mathbf{X}, t = \text{const}, \epsilon=0}, \\ \delta \mathbf{Y} = \left. \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathbf{Y}(\mathbf{X}, t, \epsilon) \right|_{\mathbf{X}, t = \text{const}, \epsilon=0}.$$

Hier sind $\chi(\mathbf{X}, t, \epsilon) \in \mathcal{C}_t$ und $\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t, \epsilon) \in \mathcal{P}_t$ beliebige generalisierte Kurven in den entsprechenden Mengen, die den folgenden Bedingungen genügen

$$\chi(\mathbf{X}, t, 0) = \phi(\mathbf{X}, t),$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t, 0) = \mathbf{X}.$$

In der Ungleichung (2.2.32) entspricht der zweite Term der virtuellen Arbeit der d'Alembertschen Hilfskräfte. Es ist anzumerken, daß dieser Term nicht von den Parametrisierungen $\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t, \epsilon)$ abhängt. In der Tat ergibt sich aus der Definition der Variation

$$\delta\boldsymbol{\chi} - \mathbf{F}\delta\mathbf{Y} = \left. \frac{\partial}{\partial\epsilon}\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t, \epsilon) \right|_{\mathbf{X}, t = \text{const}, \epsilon=0}.$$

Der letzter Term von (2.2.32) ist nicht standard. Dessen Einfügung in Glg. (2.2.32) kann durch den Vergleich von (2.2.32) mit (2.2.28), (2.2.30) begründet werden. Dennoch dient die Analyse der Energiebilanzgleichung nur als heuristisches Argument für die Akzeptanz des Postulates (2.2.32).

In ähnlicher Weise erhalten wir aus (2.2.32)

$$\begin{aligned} & \int_{B_t} \{(\rho_0\ddot{\phi} - \text{Div}\mathbf{P} + \mathbf{f}) \cdot \delta\boldsymbol{\chi} + [-\text{Div}\mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{Y} + (\mathbf{f} - \rho_0\ddot{\phi}) \cdot \mathbf{F}\delta\mathbf{Y}]\} dv \\ & + \int_{S_t} [(-\delta\boldsymbol{\chi}^+ \cdot \mathbf{P}^+ \mathbf{N} + \delta\boldsymbol{\chi}^- \cdot \mathbf{P}^- \mathbf{N}) + \delta\mathbf{Y} \cdot (-\mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^-) \mathbf{N}] da \\ & + \int_{S_t} (2\gamma\nu_1 - \mathbf{I}) \cdot \delta\mathbf{Y} ds + \int_{\partial B_T} \delta\boldsymbol{\chi} \cdot (\mathbf{P}\mathbf{n} - \mathbf{t}) da \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

Die kinematischen Beschränkungen auf $\delta\boldsymbol{\chi}$ und $\delta\mathbf{Y}$ sind wie folgt vorge-schrieben

$$[\delta\boldsymbol{\chi}^+(\eta_\alpha^+) - \delta\boldsymbol{\chi}^-(\eta_\alpha^-)] \cdot \mathbf{n} \geq 0, \quad \eta_\alpha^\pm \in S_t^\pm,$$

$$\delta\mathbf{Y} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } S_t, \quad (2.2.34)$$

$$\delta\mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\nu}_1 \geq 0, \quad \delta\mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\nu}_2 = 0, \quad \delta\mathbf{Y} \cdot \boldsymbol{\nu}_3 - \text{beliebig auf } \partial S_t.$$

Wie bisher bedeuten S_t^+ und S_t^- die Teilflächen von S_t , deren materielle Punkte sich zur Zeit t im Kontakt miteinander befinden: $\phi^+(\eta_\alpha^+) = \phi^-(\eta_\alpha^-)$, $\eta_\alpha^\pm \in S_t^\pm$; \mathbf{n} ist der Normaleneinheitsvektor zu der gemeinsamen verformten Kontaktfläche. Die Vektoren $\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3$ bilden die orthonormierte Basis im Punkt $\mathbf{X} \in \partial S_t$, wobei $\boldsymbol{\nu}_3$ der Tangentenvektor an ∂S_t ist, und $\boldsymbol{\nu}_1$ die transversale Richtung der Erweiterung von S_t auf S_t^ϵ bedeutet.

Die Gleichungen (2.2.33), (2.2.34) liefern

$$\text{Div}\mathbf{P} + \mathbf{f} = \rho_0\ddot{\phi}, \quad \mathbf{P} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{F}} \quad \text{in } B_t,$$

$$\phi = \mathbf{r}(\mathbf{X}) \quad \text{auf } \partial B_x, \quad \mathbf{P}\mathbf{n} = \mathbf{t} \quad \text{auf } \partial B_T,$$

$$\mathbf{P}^\pm \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \mathcal{S}_t \setminus \mathcal{S}_t^\pm, \quad (2.2.35)$$

$$\mathbf{P}^+ \mathbf{N} \sqrt{A/a}|_{\eta_\alpha^+} = \mathbf{P}^- \mathbf{N} \sqrt{A/a}|_{\eta_\alpha^-} = -p \mathbf{n}, \quad p \geq 0 \quad \text{auf } \mathcal{S}_t^+,$$

$$|\mathbf{I}| = \sqrt{\mathbf{I} \cdot \mathbf{I}} \leq 2\gamma, \quad I_3 = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\nu}_3 = 0 \quad \text{auf } \partial \mathcal{S}_t.$$

Die letzte Bedingung (2.2.35) kann man wie folgt auslegen: der Betrag des gesamten Energiezuflusses zur Rißfront muß kleiner oder gleich der doppelten Energiedichte der Oberflächen sein. Diese Bedingung ist dennoch nicht ausreichend für die Bestimmung der Ausbreitungsrichtung des Risses. Um detailliertere Informationen zu gewinnen, benutzen wir nun den zweiten Teil des Postulates. Nach dem wir $\delta \boldsymbol{\chi}$ und $\delta \mathbf{Y}$ durch $\delta_t \boldsymbol{\phi}$ und $\dot{\mathbf{X}}'$ entsprechend in Glg. (2.2.33) ersetzen, unter Berücksichtigung von (2.2.34),(2.2.35), können wir sie auf folgende Form bringen

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{S}_t} (-\delta_t \boldsymbol{\phi}^+ \cdot \mathbf{P}^+ \mathbf{N} + \delta_t \boldsymbol{\phi}^- \cdot \mathbf{P}^- \mathbf{N}) da \\ & + \int_{\partial \mathcal{S}_t} (2\gamma \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{I}) \cdot \dot{\mathbf{X}}' ds = 0. \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

Der Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ kennzeichnet die transversale Richtung der Rißausbreitung, und entsprechend, $\boldsymbol{\lambda} \cdot \dot{\mathbf{X}}'$ die transversale Geschwindigkeit der Rißfront. Die Gleichung (2.2.36) führt zu folgenden Beziehungen

$$p > 0 \Rightarrow [\dot{\boldsymbol{\phi}}^+(\eta_\alpha^+) - \dot{\boldsymbol{\phi}}^-(\eta_\alpha^-)] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \mathcal{S}_t^+,$$

$$p = 0 \Rightarrow [\dot{\boldsymbol{\phi}}^+(\eta_\alpha^+) - \dot{\boldsymbol{\phi}}^-(\eta_\alpha^-)] \cdot \mathbf{n}_D \geq 0,$$

$$|\mathbf{I}| < 2\gamma \Rightarrow \dot{\mathbf{X}}' = 0 \quad (\text{keine Rißausbreitung}), \quad (2.2.37)$$

$$|\mathbf{I}| = 2\gamma \Rightarrow \dot{\mathbf{X}}' \cdot \boldsymbol{\lambda} \geq 0, \quad 2\gamma \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{I}.$$

Die letzte Beziehung von (2.2.37) bestimmt die Richtung der Rißausbreitung, die mit der Richtung von \mathbf{I} zusammenfällt. Der Riß wird sich deswegen in die Richtung des maximalen Energiezuflusses ausbreiten, der gleich der doppelten Energiedichte der Oberflächen ist.

Die Gln. (2.2.35),(2.2.37) bilden zusammengesetzt ein korrektes Randwertproblem für einen Körper mit einem Riß, von denen Gebrauch gemacht werden muß, um sowohl seine Bewegung als auch die Kontaktflächen und die Rißfront zu bestimmen.

2.2.3 Linearisierung

In diesem Abschnitt präsentieren wir die linearisierte Version der nichtlinearen Bruchmechanik, die wir oben formuliert haben.

(a) Statik. Wir nehmen an, daß sowohl die Verschiebungen

$$\mathbf{w}(\mathbf{X}) = \phi(\mathbf{X}) - \mathbf{X}, \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B} \setminus \bar{\mathcal{S}}, \quad (2.2.38)$$

als auch die Verschiebungsgradienten überall klein sind. Weil dann der Unterschied zwischen der Anfangs- und der Momentankonfiguration klein ist, darf man diese identifizieren. Die Groß- und Kleinschreibweisen sind deswegen unwesentlich. Man darf auch die Metrik mit 1 sowie ko- mit kontravarianten Tensoren identifizieren.

Wir führen einen Sobolev-Raum $(H^1(\mathcal{B}_\Sigma))^3$ aller vektorwertigen Funktionen auf \mathcal{B}_Σ ein, die quadratisch integrierbar sind und quadratisch integrierbare Ableitungen aufweisen

$$(H^1(\mathcal{B}_\Sigma))^3 = \{v_a | v_a \text{ und } v_{a,b} \in L^1(\mathcal{B}_\Sigma), \quad v_a|_{\partial\mathcal{B}_x} = 0\}.$$

Die Norm eines Elementes \mathbf{v} des Raumes kann wie folgt definiert werden

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \int_{\mathcal{B}_\Sigma} (v_a v_a + v_{a,b} v_{a,b}) dv.$$

Wegen des singulären Bereiches \mathcal{B}_Σ schließt diese Definition eine eventuelle Singularität von $v_{a,b}$ in Punkten von $\partial\Sigma$ nicht aus.

Nun betrachten wir die folgende Menge

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\Sigma = \{v_a | v_a \in (H^1(\mathcal{B}_\Sigma))^3, \\ (v_a^+ - v_a^-) n_a \geq 0, X_a \in \Sigma\}, \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

wobei n_a der Normaleneinheitsvektor ist, der die Richtung + aufweist. Es ist leicht ersichtlich, daß \mathcal{C}_Σ konvex ist. Nun definieren wir die Menge der zulässigen Verschiebungen als die Vereinigung von \mathcal{C}_Σ mit $\Sigma \supseteq \mathcal{S}$

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\Sigma \supseteq \mathcal{S}} \mathcal{C}_\Sigma. \quad (2.2.40)$$

Für ein beliebiges Verschiebungsfeld $\mathbf{v} \in \mathcal{C}_\Sigma$ definieren wir das Energiefunktional eines Körpers mit der Sprungfläche Σ durch

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}] = \int_{\mathcal{B}_\Sigma} W(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) dv + \int_{\Sigma} 2\gamma da \\ + \int_{\mathcal{B}_\Sigma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv - \int_{\partial\mathcal{B}_T} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da. \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

Der Tensor ϵ entspricht dem Dehnungstensor, der sich wie folgt ausdrücken läßt

$$\epsilon_{ab}(v_a) = \frac{1}{2}(v_{a,b} + v_{b,a}). \quad (2.2.42)$$

Die anderen Bezeichnungen bleiben wie bisher.

Wir betrachten nun eine Einparameterfamilie von zulässigen Verschiebungen $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\epsilon) \in \mathcal{C}$ mit den Sprungflächen \mathcal{S}^ϵ , die den folgenden Bedingungen genügen

$$\mathcal{S}^{\epsilon'} \supseteq \mathcal{S}^\epsilon \supseteq \mathcal{S} \quad \text{für} \quad \epsilon' > \epsilon > 0, \quad \mathcal{S}^\epsilon \rightarrow \mathcal{S} \quad \text{wenn} \quad \epsilon \rightarrow 0,$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{w}.$$

Die Variation der gesamten Energie (2.2.41) kann man dann wie folgt definieren

$$\delta E = \left. \frac{d}{d\epsilon} E[\mathbf{v}(\epsilon)] \right|_{\epsilon=0}. \quad (2.2.43)$$

Das Variationsprinzip der linearisierten Bruchmechanik lautet

$$\delta E \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}, \quad (2.2.44)$$

wenn \mathbf{w} das Verschiebungsfeld im Gleichgewichtszustand ist. Mit dem gleichen Verfahren erhält man aus (2.2.44)

$$\begin{aligned} \sigma_{ab,b} + f_a &= 0, \quad \sigma_{ab} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ab}}, \\ \epsilon_{ab} &= \frac{1}{2}(w_{a,b} + w_{b,a}), \\ w_a &= 0 \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{B}_x, \quad \sigma_{ab} n_b = t_a \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{B}_T, \\ (w^+ - w^-) n_a &\geq 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{S}, \\ \sigma_{ab}^+ n_b &= \sigma_{ab}^- n_b = -p n_a, \quad p \geq 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{S}, \\ (w_a^+ - w_a^-) n_a &> 0 \Rightarrow p = 0, \\ |J_\alpha| &\leq 2\gamma, \quad J_3 = 0, \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

wobei der J-Integral-Vektor sich wie folgt berechnen läßt

$$J_a = \lim_{|\Gamma| \rightarrow 0} \int_\Gamma (-\sigma_{bc} w_{c,a} \kappa_b + W \kappa_a) ds. \quad (2.2.46)$$

Wenn die elastische Energiedichte näherungsweise durch eine positive quadratische Form angegeben ist

$$W = \frac{1}{2} C_{abcd} \epsilon_{ab} \epsilon_{cd},$$

mit C_{abcd} dem Tensor 4-er Stufe der Elastizitätsmoduln, dann wird das Problem (2.2.45) zu einem klassischen Rißproblem. Es ist zu betonen, daß auch in diesem Fall das Rißproblem im Ganzen nichtlinear bleibt, was schon an den Randbedingungen auf \mathcal{S} und $\partial\mathcal{S}$ zu sehen ist. Aufgrund dieser Nichtlinearität wird sich der Körper mit dem Riß unterschiedlich verhalten, z.B. bei Zug und Druck. Diese Tatsache spielt eine sehr wichtige Rolle bei der Methode der Homogenisation. Man kann nämlich zeigen [74], daß die effektiven Elastizitätsmoduln eines Körpers mit vielen Rissen unterschiedlich bei Zug und Druck sein können. Das Problem (2.2.45) ohne die letzte Randbedingung kann als ein Extremalproblem formuliert werden. Mit Hilfe der Korn Ungleichung kann man die Existenz- und Eindeigkeitsätze dafür beweisen. Man kann auch die Finite-Elemente-Methode direkt anwenden, um eine diskrete Formulierung des Rißproblems zu gewinnen.

(b) Dynamik. Die Bewegung eines Körpers mit einem Riß wird beschrieben durch

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{w}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B}_t. \quad (2.2.47)$$

Wir nehmen an, daß

$$\begin{aligned} w_a \in \mathcal{C}_{\mathcal{S}_t} = \{v_a | v_a \text{ und } v_{a,b} \in (H^1(\mathcal{B}_{\mathcal{S}_t}))^3, \\ (v_a^+ - v_a^-)n_a \geq 0 \text{ auf } \mathcal{S}_t, \dot{w}_a \in (L^1(\mathcal{B}_{\mathcal{S}_t}))^3\}. \end{aligned}$$

Es sei nun \mathcal{C}_t die Menge der zulässigen Verschiebungen, die als Vereinigung von \mathcal{C}_{Σ_t} definiert ist

$$\mathcal{C}_t = \bigcup_{\Sigma_t \supseteq \mathcal{S}_t} \mathcal{C}_{\Sigma_t}.$$

Auf \mathcal{C}_t definieren wir das Energiefunktional durch die Formel

$$\begin{aligned} E[\mathbf{v}] = \int_{\mathcal{B}_{\Sigma_t}} U(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) dv + \int_{\Sigma_t} 2\gamma da \\ + \int_{\mathcal{B}_{\Sigma_t}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dv - \int_{\partial\mathcal{B}_T} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da. \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

Wir führen auch die Menge \mathcal{P}_t der Parametrisierungen $\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t)$ ein, die den folgenden Bedingungen genügen

$$\mathcal{B}_t \xrightarrow{\mathbf{Y}} \mathcal{B}_{\Sigma_t}, \quad \mathcal{S}_t \xrightarrow{\mathbf{Y}} \Sigma_t,$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X}, \quad \text{wenn } \mathbf{X} \in \partial\mathcal{B}.$$

Dann wird die linearisierte dynamische Bruchmechanik wie folgt formuliert: Bestimme $w_a \in \mathcal{C}_t$ so, daß die Ungleichung

$$\begin{aligned} \delta E + \int_{\mathcal{B}_t} \rho_0 \ddot{w}_a (\delta v_a - w_{a,b} \delta Y_b) dv \\ - \int_{\partial\mathcal{S}_t} Q_a \delta Y_a ds \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

für beliebige Familien von zulässigen Verschiebungen $v_a(X_a, t, \epsilon) \in \mathcal{C}_t$ und Parametrisierungen $Y_a(X_a, t, \epsilon) \in \mathcal{P}_t$ gilt. Dabei ist Q_a gegeben durch

$$Q_a = \lim_{|\Gamma_t| \rightarrow 0} \int_{\Gamma_t} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{w}_b \dot{w}_b \kappa_a ds.$$

Wir fordern zusätzlich, daß die Gleichung (2.2.49) zur Identität wird, wenn das tatsächliche Verschiebungsfeld für die Familie der zulässigen Verschiebungen gewählt wird.

Als Konsequenzen des oben formulierten Postulates erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma_{ab,b} + f_a &= \rho_0 \ddot{w}_a, \quad \sigma_{ab} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ab}}, \\ \epsilon_{ab} &= \frac{1}{2} (w_{a,b} + w_{b,a}), \\ w_a &= 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_x, \quad \sigma_{ab} n_b = t_a \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_T, \\ (w^+ - w^-) n_a &\geq 0 \quad \text{auf } \mathcal{S}, \\ \sigma_{ab}^+ n_b &= \sigma_{ab}^- n_b = -p n_a, \quad p \geq 0 \quad \text{auf } \mathcal{S}, \\ (w_a^+ - w_a^-) n_a &> 0 \Rightarrow p = 0, \\ |I_\alpha| &\leq 2\gamma, \quad I_3 = 0, \\ p > 0 &\Rightarrow [\dot{w}_a^+ - \dot{w}_a^-] n_a = 0 \quad \text{auf } \mathcal{S}_t, \\ p = 0 &\Rightarrow [\dot{w}_a^+ - \dot{w}_a^-] n_a \geq 0, \\ |\mathbf{I}_\alpha| < 2\gamma &\Rightarrow \dot{X}'_a = 0 \quad (\text{keine Ri\ssausbreitung}), \\ |\mathbf{I}_\alpha| = 2\gamma &\Rightarrow \dot{X}'_a \lambda_a \geq 0, \quad 2\gamma \lambda_a = I_a, \end{aligned} \quad (2.2.50)$$

wobei der Vektor I_a sich durch die folgende Gleichung berechnen läßt

$$I_a = \lim_{|\Gamma_t| \rightarrow 0} \int_{\Gamma_t} [-\sigma_{bc} w_{c,a} \kappa_b + (U + \frac{1}{2} \rho_0 \dot{w}_b \dot{w}_b) \kappa_a] ds.$$

Der Vektor I_a bezeichnet den Zufluß der gesamten Energie zur Rißfront.

2.3 Spannungssingularität

2.3.1 Problemstellung

Wir betrachten wieder einen nichtlinearen hyperelastischen Körper, der in seiner Anfangskonfiguration einen Riß enthält, mit denen er sich nach der Verformung im Gleichgewicht befindet. Wenn keine Volumenkraft auf den Körper wirkt, dann müssen die folgenden Gleichungen erfüllt werden

$$\text{Div} \mathbf{P} = 0, \quad (2.3.1)$$

$$\mathbf{P} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{P}^T, \quad (2.3.2)$$

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \quad (2.3.3)$$

Dabei ist \mathbf{P} der erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor und $W(\mathbf{F})$ die elastische Energiedichte (pro Volumeneinheit der Anfangskonfiguration). In dem Fall, daß irgendein Kontakt ohne Reibung zwischen den verformten Rißufern auftritt, müssen, wie wir im Abschnitt 2.2.1 gezeigt haben, die folgenden Randbedingungen erfüllt werden

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(\mathbf{X}) \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{B}_x, \quad \mathbf{P} \mathbf{N} = \mathbf{t} \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{B}_T, \quad (2.3.4)$$

$$\mathbf{P}^\pm \mathbf{N} = 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^\pm, \quad (2.3.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^+ \mathbf{N} \sqrt{A/a}|_{\eta_\alpha^+} &= \mathbf{P}^- \mathbf{N} \sqrt{A/a}|_{\eta_\alpha^-} = -p \mathbf{n}, \\ p &\geq 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{S}^+. \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Das Randwertproblem (2.3.1)-(2.3.6) ist nur dann korrekt gestellt, wenn eine richtige Wahl für die Energiedichte $W(\mathbf{F})$ getroffen wird. Gemäß dem

Objektivitätsprinzip [160] muß diese Funktion $W(\mathbf{F})$ der folgenden Forderung

$$W(\mathbf{QF}) = W(\mathbf{F}) \quad (2.3.7)$$

für alle eigentlich orthogonalen Rotationen \mathbf{Q} genügen. Dies bedeutet, daß die Energiedichte W nur vom rechten Cauchy-Greenschens Deformationstensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{g} \mathbf{F}$ abhängen darf, mit der Konsequenz, daß Glg. (2.3.2) aufgrund (2.3.7) automatisch erfüllt wird. Weil wir in diesem Abschnitt keine zeitabhängigen Probleme behandeln, können wir einfach \mathbf{g} mit $\mathbf{1}$ identifizieren und schreiben $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$. Wenn das Material die zusätzliche Eigenschaften von Homogenität und Isotropie besitzt, dann wird W nur noch von den Grundinvarianten I_1, I_2, I_3 des Tensors \mathbf{C} abhängen

$$W = \bar{W}(I_1, I_2, I_3), \quad (2.3.8)$$

wobei

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{C}, \quad I_2 = \det \text{Ctr} \mathbf{C}^{-1}, \quad I_3 = \det \mathbf{C} = J^2, \quad (2.3.9)$$

und tr den Spuroperator bezeichnet. Wir nehmen im folgenden an, daß letzteres zutrifft. Wenn wir die Hauptstreckungen, oder, was dem gleich ist, die Eigenwerte des Rechts-Streck Tensors $\mathbf{U} = (\mathbf{C})^{1/2}$ durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bezeichnen, dann lassen sich die Grundinvarianten I_1, I_2, I_3 durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ wie folgt ausdrücken

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2, \\ I_3 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Aus Gln. (2.3.3), (2.3.8) und (2.3.9) folgt (siehe, z.B., [161])

$$\mathbf{P} = 2 \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial I_1} \mathbf{F} + \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial I_2} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_3} \right) \mathbf{F}^{-T} - \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_3} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{C}^{-1} \right]. \quad (2.3.11)$$

Nach Angabe der Energiedichte (2.3.8) wird das System von Gleichungen (2.3.1), (2.3.11) mit der Randbedingungen (2.3.4)-(2.3.6) abgeschlossen bezüglich der drei unbekanntenen Komponenten des Ortsvektor $\mathbf{x}(\mathbf{X})$ mit der Sprungfläche \mathcal{S} . Die verformte Konfiguration $\mathbf{x}(\mathbf{X})$ gehört zur Menge der zulässigen Konfigurationen $\mathcal{C} = \{\mathbf{y}(\mathbf{X}) | \mathbf{X} \in \mathcal{B}_S, \det \mathbf{y}_X >$

$0, \mathbf{y}(\mathbf{X}) = \mathbf{r}(\mathbf{X})$ auf $\partial\mathcal{B}_x$, welche stetig differenzierbar in \mathcal{B}_S sind und eine beschränkte Gesamtenergie haben

$$E[\mathbf{y}(\mathbf{X})] = \int_{\mathcal{B}_S} W(\mathbf{F}) \, dv - \int_{\partial\mathcal{B}_T} \mathbf{t} \cdot \mathbf{y} \, da < +\infty. \quad (2.3.12)$$

Die Voraussetzung (2.3.12) charakterisiert völlig den Singularitätsgrad des Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X}$ in der Umgebung der Rißfront.

Es ist interessant anzumerken, daß Gln. (2.3.1)-(2.3.6) aus der folgenden Variationsungleichung hergeleitet werden können (siehe auch Abschnitt 2.2.1)

$$\begin{aligned} \delta E = \frac{d}{d\epsilon} E[\mathbf{y}(\mathbf{X}, \epsilon)] \Big|_{\epsilon=0} \geq 0, \\ \forall \mathbf{y}(\mathbf{X}, \epsilon) \in \mathcal{C}, \quad \mathbf{y}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{x}(\mathbf{X}). \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Wenn die Energiedichte polykonvex ist und bestimmten Wachstumsgesetzen genügt, dann ist es plausibel, die Existenz von Lösungen der Glg. (2.3.13) in einem geeignet gewählten Funktionsraum zu erwarten (siehe Ciarlet [161]).

Nun wollen wir uns auf einen speziellen Fall des ebenen Deformationszustandes beschränken. Es sei nun \mathcal{B}_S ein zylindrischer Bereich mit einem Querschnitt $\mathcal{Q}_L = \mathcal{Q} \setminus \bar{\mathcal{L}}$ (ein Stab), wobei \mathcal{L} einer Sprunglinie entspricht. Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem X_1, X_2, X_3 mit der X_3 -Achse parallel zur Stabachse von \mathcal{B}_S so daß (siehe Abb.2.6)

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \mathcal{L} \times (0 < X_3 < L), \\ \mathcal{B}_S &= \mathcal{Q}_L \times (0 < X_3 < L). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Ein ebener Deformationszustand parallel zur Ebene X_1, X_2 ist dann charakterisiert durch

$$\begin{aligned} x_\alpha &= x_\alpha(X_\Sigma), \quad \alpha, \Sigma = 1, 2 \\ \text{oder } \mathfrak{x} &= \mathfrak{x}(\mathfrak{X}), \quad x_3 = X_3, \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

wobei $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (X_1, X_2)$, $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = (x_1, x_2)$. In diesem Abschnitt benutzen wir deutsche Buchstaben für ebene Vektoren und Tensoren.

Die Komponenten des Deformationsgradienten \mathbf{F} und des Deformationstensors \mathbf{C} sind von X_3 unabhängig und sind gleich

$$\begin{aligned} F_{\alpha\Sigma} &= \mathfrak{F}_{\alpha\Sigma}, \quad \mathfrak{F} = \partial\mathfrak{x}/\partial\mathfrak{X}, \\ F_{\alpha 3} &= 0, \quad F_{3\Sigma} = 0, \quad F_{33} = 1, \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

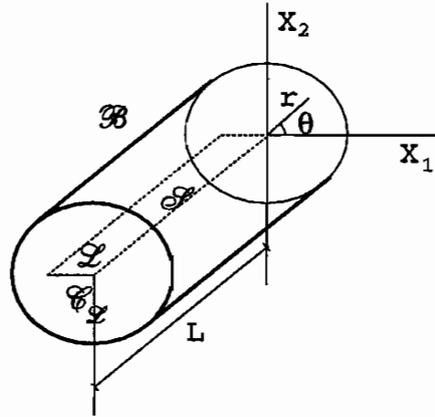


Abbildung 2.6: Reduzierung von 3 auf 2 Dimension

$$\begin{aligned} C_{\Sigma\Delta} &= \mathfrak{C}_{\Sigma\Delta}, & \mathfrak{C} &= \mathfrak{F}^T \mathfrak{F}, \\ C_{\Sigma 3} &= C_{3\Sigma} = 0, & C_{33} &= 1. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Man kann die Grundinvarianten I_1, I_2, I_3 durch Einsetzen von (2.3.17) in (2.3.9) bestimmen

$$I_1 = I + 1, \quad I_2 = J^2 + I, \quad I_3 = J^2, \quad (2.3.18)$$

wobei

$$I = \text{tr} \mathfrak{C} = \text{tr}(\mathfrak{F}^T \mathfrak{F}), \quad J = \det \mathfrak{F}. \quad (2.3.19)$$

Unter Berücksichtigung von (2.3.8), (2.3.18) führen wir die folgenden Notationen ein

$$\begin{aligned} W(\mathbf{F}) &= \bar{W}(I_1, I_2, I_3) \\ &= \bar{W}(I + 1, I + J^2, J^2) = \Phi(I, J). \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Beim ebenen Deformationszustand hängt die Energiedichte also nur von I, J ab. Wir analysieren nun die Konstitutivgleichung (2.3.11). Aus Gln. (2.3.11), (2.3.16), (2.3.17) kann man sehen, daß \mathbf{P} von X_3 unabhängig ist, mit

$$\begin{aligned} P_{3\Sigma} &= P_{\alpha 3} = 0, \\ P_{33} &= 2 \left[\frac{\partial \bar{W}}{\partial I_1} + \frac{\partial}{\partial I_2} (I_2 - I_3) + \frac{\partial \bar{W}}{\partial I_3} I_3 \right]. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Ferner, gilt (vergleiche mit der Identität von Hamilton-Kelly im dreidimensionalen Fall)

$$\mathfrak{C}^2 - I \mathfrak{C} + J^2 \mathfrak{J} = 0, \quad (2.3.22)$$

mit \mathfrak{J} , dem 2-D Einheitstensor. Eine ziemlich einfache Berechnung unter Berücksichtigung von (2.3.11), (2.3.16)-(2.3.20) und (2.3.22) zeigt, daß

$$P_{i\Delta} = \mathfrak{P}_{i\Delta}, \quad \mathfrak{P} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial I} + \frac{\partial \Phi}{\partial J} J \mathfrak{F}^{-T}. \quad (2.3.23)$$

Die Gleichgewichtsbedingung (2.3.1) vereinfacht sich zu

$$\text{Div} \mathfrak{P} = 0, \quad (2.3.24)$$

wobei Div hier den 2-D Divergenzoperator bezeichnet. Weil wir den ebenen Deformationszustand (2.3.15) betrachten, müssen wir auch annehmen, daß auf dem Seitenrand des Stabes \mathcal{B}_S gilt

$$\begin{aligned} r_3 = X_3, \quad r_\alpha = \mathfrak{r}_\alpha(\mathfrak{X}) \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{Q}_x \times (0, L); \\ t_3 = 0, \quad t_\alpha = \mathfrak{t}_\alpha(\mathfrak{X}) \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{Q}_T \times (0, l), \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

während an seinen Enden gilt

$$x_3 = X_3 \quad \text{an} \quad X_3 = 0, L \quad (2.3.26)$$

(keine Verschiebung in X_3 -Richtung). Folglich sind die zweidimensionalen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\mathfrak{X}) \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{Q}_x, \\ \mathfrak{P}\mathfrak{N} = \mathfrak{t}(\mathfrak{X}) \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{Q}_T, \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

$$\mathfrak{P}^\pm \mathfrak{N} = 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}^\pm, \quad (2.3.28)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}^+ \mathfrak{N} \sqrt{D/d}|_{\varphi^+} = \mathfrak{P}^- \mathfrak{N} \sqrt{D/d}|_{\varphi^-} = -pn, \\ p \geq 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{L}^+. \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

Die Linien \mathcal{L}^\pm sind die Projektionen von \mathcal{S}^\pm auf die Ebene $(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$, $D = \mathfrak{x}_{,\varphi} \cdot \mathfrak{x}_{,\varphi}$, $d = \mathfrak{r}_{,\varphi} \cdot \mathfrak{r}_{,\varphi}$, \mathfrak{r} , \mathfrak{t} , \mathfrak{N} , und \mathfrak{n} sind ebene Vektoren analog zu \mathbf{r} , \mathbf{t} , \mathbf{N} , und \mathbf{n} . Wir nehmen an, daß \mathcal{L}^\pm streng im Innern von \mathcal{L} liegt, und daß in der Nähe der Reißspitze die Reißufer völlig spannungsfrei sind (siehe Abb.2.7). Genauso wie im dreidimensionalen Fall fordern wir, daß die Lösungen von (2.3.24), (2.3.23), (2.3.27)-(2.3.29) zur Menge der zulässigen Konfigurationen mit beschränkter Gesamtenergie gehören

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = \{ \eta(\mathfrak{X}) \mid \mathfrak{X} \in \mathcal{Q}_L, J = \det \partial \eta / \partial \mathfrak{X} > 0, \eta = \mathfrak{r}(\mathfrak{X}) \text{ on } \partial \mathcal{Q}_x, \\ E[\eta(\mathfrak{X})] = \int_{\mathcal{Q}_L} \Phi(I, J) da - \int_{\partial \mathcal{Q}_T} \mathfrak{t} \cdot \eta ds < +\infty \}. \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

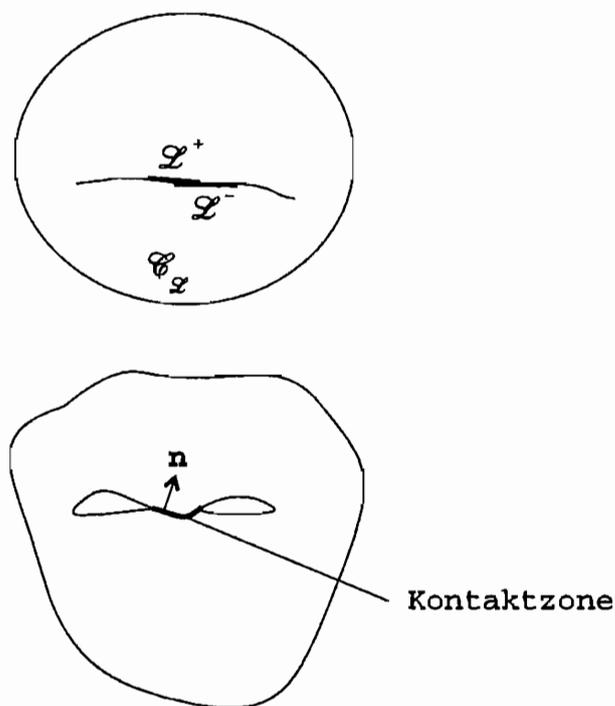


Abbildung 2.7: Querschnitt eines Stabes mit Riß

Es sei nun \mathcal{D} die Klasse aller $\{\eta, p\}$, welche sowohl den Gleichungen (2.3.16), (2.3.23), (2.3.24), als auch den inneren Randbedingungen (2.3.28), (2.3.29) für \mathfrak{P} genügen. Dann ist es nicht schwer zu zeigen, daß wenn $\{\hat{h}, \hat{p}\}$ zur Klasse \mathcal{D} gehört, das gleiche auch für $\{\Omega(\hat{h} - \eta^\circ), \hat{p}\}$, mit einem beliebigen konstanten Vektor η° und einer beliebigen konstanten Drehung Ω , gelten muß. Der Garant dafür ist die Objektivität der Konstitutivgleichung (2.3.23) und die Form der Randbedingungen (2.3.28), (2.3.29).

Wir wollen nun folgendes zu einem Erhaltungssatz der 2-D Elastostatik anmerken: Für eine beliebige Kurve \mathcal{G} , die als Grenze eines *finiten regulären Teibereichs* von \mathcal{Q}_L dient, gilt

$$\int_{\mathcal{G}} (-\mathfrak{F}^T \mathfrak{P} \mathfrak{k} + \Phi \mathfrak{k}) ds = 0, \quad (2.3.31)$$

wobei \mathfrak{k} der äußere Normaleneinheitsvektor ist (siehe Eshelby [6]). Der von ihm eingeführte Tensor $-\mathfrak{F}^T \mathfrak{P} + \Phi \mathfrak{J}$ ist mit diesem Satz (2.3.31) verbunden und wird Energie-Impuls-Tensor genannt, oder Tensor des chemischen Potentials, wie man ihn in der Theorie der Phasenumwandlung nennt. Diesen Tensor kann man als Größe, die die Inhomogenität des Materials charakterisiert, betrachten.

Die Linearisierung des oben gestellten ebenen Rißproblems bei kleinen

Verschiebungsgradienten führt zu dem entsprechenden 2-D Randwertproblem der linearen Bruchmechanik (siehe [9], und Abschnitt 2.2.3). Wir wollen hier die von der linearen Bruchmechanik bekannten asymptotischen Formeln für die Verschiebungs- und Spannungsfelder w° , σ° in der Nähe der Rißspitze angeben. Zu diesem Zweck führen wir ein lokales zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ ein, mit dem Ursprung an der Rißspitze $\partial\mathcal{L}$ und mit der Basis j_1, j_2 , wobei j_1 und j_2 als Tangential- und Normaleneinheitsvektoren zu \mathcal{L} auf $\partial\mathcal{L}$ definiert sind. Wir führen auch ein lokales polares Koordinatensystem r, θ ein, so daß (siehe Abb.2.6)

$$\mathfrak{x}_1 = r \cos \theta, \quad \mathfrak{x}_2 = r \sin \theta, \quad (2.3.32)$$

mit $r > 0, \theta \in [-\pi, \pi]$. Die Linie \mathcal{L} läßt sich lokal beschreiben durch

$$\mathfrak{x}_2 = 0, \quad \mathfrak{x}_1 < 0$$

oder, was dem gleich ist

$$\theta = \pm\pi, \quad r > 0. \quad (2.3.33)$$

Gemäß dem Superpositionsprinzip der linearen Elastostatik, kann man die singulären Felder w°, σ° durch die Summe zweier Felder, die den Modi I und II entsprechen, überlagern (Abb.2.8).

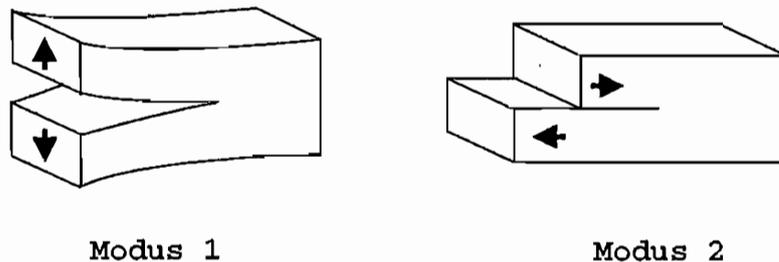


Abbildung 2.8: Symmetrische und antisymmetrische Modi

Für den symmetrischen Modus bei $r \rightarrow 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 w_1^\circ &= \frac{K_1}{\mu} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + o(r^{1/2}), \\
 w_2^\circ &= \frac{K_1}{\mu} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + o(r^{1/2}), \\
 \sigma_{11}^\circ &= K_1 (2\pi r)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right) + o(r^{-1/2}), \\
 \sigma_{22}^\circ &= K_1 (2\pi r)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right) + o(r^{-1/2}), \\
 \sigma_{12}^\circ &= K_1 (2\pi r)^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta + o(r^{-1/2}). \tag{2.3.34}
 \end{aligned}$$

Für den antisymmetrischen Modus bei $r \rightarrow 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 w_1^\circ &= \frac{K_2}{\mu} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + o(r^{1/2}), \\
 w_2^\circ &= \frac{K_2}{\mu} \left(\frac{r}{2\pi} \right)^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(-2 + 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + o(r^{1/2}), \\
 \sigma_{11}^\circ &= K_2 (2\pi r)^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} \left(-2 - \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta \right) + o(r^{-1/2}), \\
 \sigma_{12}^\circ &= K_2 (2\pi r)^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right) + o(r^{-1/2}), \\
 \sigma_{22}^\circ &= K_2 (2\pi r)^{-1/2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta + o(r^{-1/2}). \tag{2.3.35}
 \end{aligned}$$

Dabei ist μ der Schubmodul und ν die Poissonsche Zahl. Die Proportionalitätsfaktoren K_1 und K_2 heissen entsprechend symmetrischer und antisymmetrischer Spannungsintensitätsfaktor. Unser Ziel ist es, ähnliche singuläre Felder in der Umgebung der Rißspitze zu finden, die im Rahmen der finiten Elastostatik unter Berücksichtigung großer Rotationen und Dehnungen sowie nichtlinearen Materialverhaltens von gummiartigen Werkstoffen auftreten sollen.

2.3.2 Ogden-Ballsche Materialien

Das mechanische Verhalten von hyperelastischen Materialien ist völlig bestimmt durch die spezifische Form der Energiedichte $W(\mathbf{F})$. Für gummiartige Materialien sind unterschiedliche Formeln vorgeschlagen worden

(siehe Blatz und Ko [42] und Ogden [51, 52]). Wir beschränken uns einfachheitshalber auf isotrope und homogene gummiartige Materialien und benutzen die Hauptstreckungen λ_1, λ_2 und λ_3 als unabhängige Zustandsgrößen der Energiedichte

$$W(\mathbf{F}) = \hat{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3). \quad (2.3.36)$$

Die Funktion $\hat{W}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ muß symmetrisch bezüglich Austausch je zweier von λ_1, λ_2 und λ_3 sein. In diesem Abschnitt betrachten wir eine Klasse von gummiartigen Materialien, die Ogden [51, 52] eingeführt hat und Ball [53] danach leicht modifiziert hat. Für $\alpha \geq 1$ sei

$$\begin{aligned} \phi_1(\lambda_i, \alpha) &= \lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha + \lambda_3^\alpha, \\ \phi_2(\lambda_i, \alpha) &= (\lambda_2\lambda_3)^\alpha + (\lambda_3\lambda_1)^\alpha + (\lambda_1\lambda_2)^\alpha. \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

Dann ist die Energiedichte wie folgt gegeben

$$\begin{aligned} W(\mathbf{F}) &= \sum_{a=1}^L A_a \phi_1(\lambda_i, \alpha_a) \\ &\quad + \sum_{b=1}^M B_b \phi_2(\lambda_i, \beta_b) + g(\lambda_1\lambda_2\lambda_3). \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

Hier sind $\alpha_1 > \dots > \alpha_L \geq 1, \beta_1 > \dots > \beta_M \geq 1$, und A_a, B_b positive Konstanten. Wir nehmen dazu noch an, daß $g(J)$ eine konvexe Funktion in dem Intervall $0 < J < \infty$ ist, $g(1) = 0$, und daß $g(J)$ den folgenden Wachstumskriterien genügt

$$g(J) \rightarrow \infty \quad \text{bei } J \rightarrow 0,$$

und

$$\begin{aligned} g(J) &= CJ^\gamma + o(J^\gamma), \quad \gamma > \max\{\alpha_1, \beta_1\} \\ &\text{bei } J \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

Wir nehmen an, daß die asymptotische Formeln, die durch Ableitungen von (2.3.39) entstanden sind, ebenso gelten.

Es ist bekannt, daß für die Klasse von Materialien (2.3.38), (2.3.39) mit

$$\alpha_1 \geq 2, \quad \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1} \leq 1, \quad (2.3.40)$$

das Materialgesetz die Elliptizität des Gleichungssystems und die damit verbundene Existenz der Lösung des Randwertproblems in irgendeinem geeignet gewählten Funktionsraum garantiert (siehe Ball [53])¹. In der

¹Ball hat den Existenzsatz auch unter schwächeren Annahmen bewiesen.

folgenden Analyse nehmen wir die Bedingungen (2.3.40) an.

Im 2-D Fall ist es offensichtlich, daß die spezifische Form der Energiedichte $\Phi(I, J)$ das Materialverhalten des ebenen Deformationszustandes völlig bestimmt, soweit es die Spannungen in der Ebene betrifft (cf. Formel (2.3.23)). Um diese Funktion von (2.3.38) auszudrücken, beachten wir zunächst, daß λ_1, λ_2 die Eigenwerte des Tensors $\mathfrak{C}^{1/2}$ sind, mit \mathfrak{C} von Glg. (2.3.17), während

$$\lambda_3 = 1 \quad (2.3.41)$$

für die ebene Deformation parallel der \mathfrak{X} -Ebene gilt. Führt man folgende Bezeichnungen für die Energiedichte in dem 2-D Fall ein

$$\begin{aligned} \hat{W}(\lambda_1, \lambda_2, 1) &= \Omega(\lambda_1, \lambda_2) \\ &= \Omega(\lambda_1(I, J), \lambda_2(I, J)) = \Phi(I, J), \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

kürzt man Glg. (2.3.38) zu

$$\Omega(\lambda_1, \lambda_2) = \sum_{c=1}^N A_c \phi(\lambda_c, \alpha_c) + h(\lambda_1 \lambda_2). \quad (2.3.43)$$

Hier sind

$$\phi(\lambda_c, \alpha) = \lambda_1^\alpha + \lambda_2^\alpha - 2, \quad (2.3.44)$$

$$h(J) = g(J) + \sum_{b=1}^M B_b (J^{\beta_b} - 1). \quad (2.3.45)$$

Man kann α_c mit $c = 1, \dots, N \leq L + M$ erneut ordnen, so daß $\alpha_1 > \dots > \alpha_N \geq 1$. Die Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ werden (elastische) Potenzindizes genannt. Manchmal lassen wir den Unterindex 1 des größten Potenzindex fallen und schreiben einfach $\alpha_1 = \alpha$. Aus Gln. (2.3.39), (2.3.45) folgt, daß $h(J)$ eine konvexe Funktion auf $(0, \infty)$ ist, die den folgenden Wachstumskriterien

$$h(J) \rightarrow \infty \quad \text{bei} \quad J \rightarrow 0,$$

und

$$\begin{aligned} h(J) &= C J^\gamma + o(J^\gamma), \quad \gamma > \alpha_1 \\ &\text{bei} \quad J \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

genügt. Man bemerkt, daß die durch die Ableitungen von (2.3.46) entstandenen asymptotischen Formeln ebenfalls gelten. Aus (2.3.40) erhalten wir die Bedingung

$$\alpha_1 \geq 2. \quad (2.3.47)$$

Nun drücken wir λ_1, λ_2 durch I, J aus. Anwendung von (2.3.22) zeigt, daß λ_1^2, λ_2^2 die Wurzeln der folgenden Gleichung sind

$$y^2 - Iy + J^2 = 0. \quad (2.3.48)$$

Daraus ergeben sich

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= \frac{1}{2}(I - \sqrt{I^2 - 4J^2}), \\ \lambda_2^2 &= \frac{1}{2}(I + \sqrt{I^2 - 4J^2}). \end{aligned} \quad (2.3.49)$$

Weil λ_1, λ_2 positiv sind, müssen I und J den Ungleichungen genügen

$$I > 0, \quad J > 0, \quad I - 2J \geq 0. \quad (2.3.50)$$

Wir nennen den durch (2.3.50) beschriebenen Bereich in der (I, J) -Ebene "zulässigen" Bereich der Invariantenebene (siehe Abb.2.9).

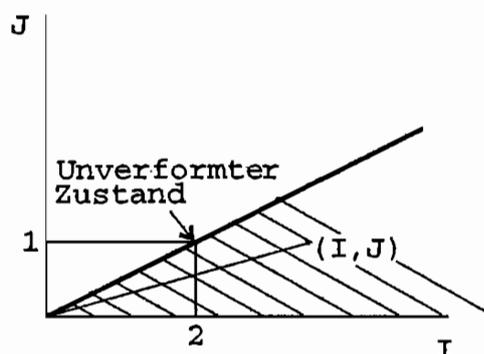


Abbildung 2.9: "Zulässiger" Bereich der Invariantenebene

Nun nimmt die 2-D Energiedichte $\Phi(I, J)$ die Form an

$$\Phi(I, J) = \sum_{c=1}^N A_c \zeta(I, J, \alpha_c) + h(J), \quad (2.3.51)$$

wobei

$$\begin{aligned} \zeta(I, J, \alpha) &= \left[\frac{1}{2}(I - \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2} \\ &\quad + \left[\frac{1}{2}(I + \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2}. \end{aligned} \quad (2.3.52)$$

Die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von $\Phi(I, J)$ und ihre asymptotischen Eigenschaften sind im Anhang zusammengefaßt.

Bevor wir zur Analyse des asymptotischen Feldes in der Umgebung der Rißspitze übergehen, ist es sehr wichtig, das Verhalten hyperelastischer Materialien bei einer rein homogenen ebenen Deformation

$$\mathfrak{r}_1 = \lambda_1 \mathfrak{X}_1, \quad \mathfrak{r}_2 = \lambda_2 \mathfrak{X}_2, \quad x_3 = X_3 \quad (2.3.53)$$

verstehen zu können (cf. auch Knowles und Sternberg [40]). Durch Berechnen von \mathfrak{F} und \mathfrak{C} gemäß (2.3.16), (2.3.17) erhalten wir

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}. \quad (2.3.54)$$

Aus (2.3.23), (2.3.42), (2.3.54) ist leicht zu sehen daß

$$\mathfrak{P}_{11} = \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_1}, \quad \mathfrak{P}_{22} = \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_2}, \quad \mathfrak{P}_{12} = \mathfrak{P}_{21} = 0. \quad (2.3.55)$$

Wenn das Ogden-Ballsche Material zusätzlich einer einachsigen Dehnung parallel zur \mathfrak{X}_2 -Achse unterworfen ist, die einer Hauptstreckung $\lambda_2 = \lambda > 1$ entspricht, und $\lambda_1 = \bar{\lambda}(\lambda)$ die darauffolgende senkrechte Hauptstreckung parallel zur \mathfrak{X}_1 -Achse ist, dann

$$\mathfrak{P}_{11}(\lambda_1, \lambda_2) = \mathfrak{P}_{11}(\bar{\lambda}(\lambda), \lambda) = 0. \quad (2.3.56)$$

Betrachten wir die Gleichung

$$\mathfrak{P}_{11} = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_1} \right|_{(\lambda_1, \lambda)} = 0. \quad (2.3.57)$$

Mit Hilfe von (2.3.43)-(2.3.45) formen wir (2.3.57) um

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_1} = \sum_{c=1}^N A_c \alpha_c \lambda_1^{\alpha_c - 1} + h'(\lambda_1 \lambda) \lambda = 0, \quad (2.3.58)$$

mit $h'(J) = \partial h / \partial J$. Aufgrund der Konvexität der Funktion $h(J)$ und den asymptotischen Eigenschaften (2.3.44) hat Glg. (2.3.58) eine einzige Wurzel $\lambda_1 = \bar{\lambda}(\lambda)$ für alle hinreichend großen λ . Wenn $\lambda \rightarrow \infty$, dann verhält sich die Hauptstreckung $\lambda_1 = \bar{\lambda}(\lambda)$ wie folgt

$$\lambda_1 = q_0 / \lambda + o(\lambda^{-1}), \quad (2.3.59)$$

mit q_0 als der einzigen Wurzel der Gleichung $h'(q) = 0$. Wir merken an, daß allgemein $q_0 \neq 1$ gilt (cf. Glg. (2.3.45)), jedoch bedeutet dies nicht, daß die Energie des Zustandes (2.3.53), (2.3.59) kleiner als die des natürlichen Zustandes ist, denn der Beitrag $\sum A_c \phi(\lambda_c, \alpha_c)$ zur Energie muß auch berücksichtigt werden.

Gemäß (2.3.59) bleibt die Jakobische Determinante des homogenen einachsigen Dehnungszustandes asymptotisch konstant bei $\lambda_2 = \lambda \rightarrow \infty$:

$$J = \lambda \bar{\lambda}(\lambda) = q_0 + o(1) \quad \text{bei} \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.3.60)$$

Diese Formel spielt eine wichtige Rolle in der folgenden Analyse.

2.3.3 Der Hauptterm der Deformation

In diesem Abschnitt wollen wir den Hauptterm der Deformation in der Umgebung der Rißspitze für Ogden-Ballsche Materialien bestimmen. Zu diesem Zweck betrachten wir erneut die im Abschnitt 2.3.1 eingeführten lokalen zweidimensionalen Koordinatensysteme $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ und r, θ (siehe Abb.2.6). Unter Verwendung der Koordinatentransformation von $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ nach r, θ gemäß (2.3.32) läßt sich der Deformationsgradient \mathfrak{F} von (2.3.16) in der Form schreiben

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{r}_{,r} \otimes \mathfrak{k}_1 + \frac{1}{r} \dot{\mathfrak{r}} \otimes \mathfrak{k}_2. \quad (2.3.61)$$

Hier benutzen wir den über einer Größe stehenden Punkt für die Ableitung nach θ , und \otimes für das Tensorprodukt. Wir führen zwei aufeinander senkrechte Einheitsvektoren $\mathfrak{k}_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$ und $\mathfrak{k}_2 = (-\sin \theta, \cos \theta)$ ein, für die der folgende Zusammenhang besteht

$$\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{E} \mathfrak{k}_2, \quad \mathfrak{k}_{1,\theta} = \mathfrak{k}_2, \quad (2.3.62)$$

mit \mathfrak{E} , dem in der Anfangskonfiguration definierten 2-D Permutationstensor. Auf ähnliche Weise können wir Glg. (2.3.24) umschreiben

$$\text{Div} \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{,r} \mathfrak{k}_1 + \frac{1}{r} \dot{\mathfrak{P}} \mathfrak{k}_2 = 0. \quad (2.3.63)$$

Durch Einsetzen von \mathfrak{P} gemäß (2.3.23) in (2.3.63) unter Berücksichtigung von (2.3.62) und der folgenden Identität

$$\mathfrak{F}^{-T} = -J^{-1} \mathfrak{e} \mathfrak{F} \mathfrak{E}, \quad (2.3.64)$$

mit ϵ , dem in der verformten Konfiguration definierten 2-D Permutationstensor, kann man die Gleichung (2.3.63) transformieren

$$2 \frac{\partial \Phi}{\partial I} (r \mathfrak{x}, r)_{,r} + 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I} \right)_{,r} r \mathfrak{x}_{,r} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial J} \right)_{,r} \epsilon \dot{\mathfrak{x}} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial I} \frac{1}{r} \ddot{\mathfrak{x}} + 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I} \right)_{,\theta} \frac{1}{r} \dot{\mathfrak{x}} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial J} \right)_{,\theta} \epsilon \mathfrak{x}_{,r} = 0. \quad (2.3.65)$$

Aufgrund der Annahme über die spannungsfreien Randbedingungen an den Rißufern in der Umgebung der Rißspitze erhalten wir

$$\mathfrak{P} \mathfrak{k}_2 = 0 \quad \text{für } \theta = \pm \pi \quad \text{und kleine } r > 0 \quad (2.3.66)$$

oder, mit (2.3.33) und (2.3.64)

$$2 \frac{\partial \Phi}{\partial I} \frac{1}{r} \dot{\mathfrak{x}} - \frac{\partial \Phi}{\partial J} \epsilon \mathfrak{x}_{,r} = 0 \quad \text{für } \theta = \pm \pi. \quad (2.3.67)$$

Gln. (2.3.65), (2.3.67) sind die zweidimensionale Gleichgewichtsbedingung und die spannungsfreien Randbedingungen bezüglich des polaren Koordinatensystems, die für beliebige Formen der Energiedichte $\Phi(I, J)$ gelten. Unser Ziel ist es, die asymptotische Struktur der Lösung von (2.3.65), (2.3.67) für die spezielle Klasse (2.3.51) der Energiedichte zu untersuchen. Um die Singularität des Deformationsgradienten infolge des Risses beschreiben zu können, suchen wir die Funktion $\mathfrak{x}(r, \theta)$ in der Form

$$\mathfrak{x}(r, \theta) = \mathfrak{x}^\circ + r^m \mathbf{u}(\theta) + o(r^m) \quad \text{bei } r \rightarrow 0. \quad (2.3.68)$$

Dabei ist \mathfrak{x}° ein konstanter Vektor und m irgendeine Konstante zwischen

$$0 < m < 1. \quad (2.3.69)$$

Aufgrund des positiven Exponenten m garantiert Glg. (2.3.68), daß \mathfrak{x} bei dem Grenzübergang $r \rightarrow 0$ beschränkt bleibt und \mathfrak{x}° dem Ortsvektor der Rißspitze in der verformten Konfiguration entspricht. Andererseits, führt die Bedingung $m < 1$ zu einem lokalen Dehnungszustand mit einer großen Hauptstreckung in der Nähe der Rißspitze, dessen Gültigkeit auch für andere elliptische Materialien bewiesen worden ist (cf. Knowles und Sternberg [40, 41], und Stephenson [49]). Dies vollendet die Motivation für den Ansatz (2.3.68), (2.3.69). Wir bestimmen den kleinsten Exponent

$m \in (0, 1)$ und den Vektor $u(\theta)$ in Glg. (2.3.68) konsistent mit den Gleichgewichtsgleichungen (2.3.65), (2.3.51) und den Randbedingungen (2.3.67). Zuerst berechnen wir den Deformationgradienten \mathfrak{F} gemäß (2.3.61)

$$\mathfrak{F} = r^{m-1}f + o(r^{m-1}), \quad (2.3.70)$$

$$f = mu \otimes \mathfrak{k}_1 + \dot{u}\mathfrak{k}_2. \quad (2.3.71)$$

Man kann sehen, daß der konstante Vector r° in (2.3.68) keinen Einfluß sowohl auf \mathfrak{F} , als auch auf Glg. (2.3.65) hat. Nun bestimmen wir die Grundinvarianten I, J gemäß Gln. (2.3.19), (2.3.70), (2.3.71)

$$\begin{aligned} I &= \text{tr}(\mathfrak{F}^T \mathfrak{F}) \\ &= r^{2(m-1)}(m^2 u \cdot u + \dot{u} \cdot \dot{u}) + o(r^{2(m-1)}), \end{aligned} \quad (2.3.72)$$

$$\begin{aligned} J &= \det \mathfrak{F} = r^{2(m-1)} m u \cdot \epsilon \dot{u} + o(r^{2(m-1)}) \\ &= r^{2(m-1)} m (u_1 \dot{u}_2 - u_2 \dot{u}_1) + o(r^{2(m-1)}). \end{aligned} \quad (2.3.73)$$

Wir nehmen an, daß

$$J = r^s H(\theta) + o(r^s), \quad H(\theta) \geq 0, \quad (2.3.74)$$

mit s einer unbekanntenen Konstanten und $H(\theta)$ einer unbekanntenen Funktion, welche nicht identisch null auf $[-\pi, \pi]$ sein darf. Aus (2.3.73), (2.3.74) folgt dann $2(m-1) \leq s$ und

$$u_1 \dot{u}_2 - \dot{u}_1 u_2 = 0 \quad \text{wenn} \quad 2(m-1) < s, \quad (2.3.75)$$

$$\begin{aligned} m(u_1 \dot{u}_2 - \dot{u}_1 u_2) &= H(\theta) \geq 0 \\ &\text{wenn} \quad 2(m-1) = s. \end{aligned} \quad (2.3.76)$$

Wir beweisen nun, daß der zweite Fall zu einem Konflikt mit Glg. (2.3.74) führt. Denn, wenn (2.3.76) gilt, dann werden I und J asymptotisch äquivalent sein und $J \sim r^{2(m-1)} H(\theta) \rightarrow \infty$ bei $r \rightarrow 0$ (wegen $m < 1$). Gemäß dem Wachstumskriterium (2.3.46) können wir die folgenden zwei dominanten Terme in Glg. (2.3.65) belassen

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial J} \right)_{,r} \epsilon \dot{\mathfrak{x}} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial J} \right)_{,\theta} \epsilon \mathfrak{x}_{,r} = 0 \quad (2.3.77)$$

und die restlichen Terme als klein vernachlässigen. Dementsprechend können wir auch eine asymptotische Äquivalenz für $\Phi_J(I, J)$ nehmen

$$\Phi_J = \frac{\partial \Phi}{\partial J} = C\gamma J^{\gamma-1} + o(J^{\gamma-1}). \quad (2.3.78)$$

Durch Einsetzen von (2.3.78) in Glg. (2.3.77) und unter Berücksichtigung von (2.3.76) erhält man die folgende Gleichung

$$2(m-1)H^{\gamma-1}\dot{\epsilon}\mathbf{u} - mH^{\gamma-2}\dot{H}\epsilon\mathbf{u} = 0. \quad (2.3.79)$$

Nun ergibt sich durch Multiplikation von (2.3.79) mit \mathbf{u} und durch Gebrauch von (2.3.76)

$$2\frac{m-1}{m}H^\gamma = 0 \Rightarrow H(\theta) \equiv 0, \quad (2.3.80)$$

was Glg. (2.3.74) widerspricht.

Der erste Fall (2.3.75) führt zu

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}U(\theta) \quad \text{auf} \quad [-\pi, \pi], \quad \mathbf{a} \neq 0, \quad (2.3.81)$$

wobei \mathbf{a} ein konstanter Vektor und $U(\theta)$ eine unbekannte Funktion ist.

Wir betrachten wieder die Invariante I gemäß (2.3.72)

$$I = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = r^{2(m-1)}\mathbf{a}^2(m^2U^2 + \dot{U}^2), \quad (2.3.82)$$

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}.$$

Wir nehmen an, daß U keine doppelte Nullstelle auf $[-\pi, \pi]$ hat, so daß der Koeffizient bei $r^{2(m-1)}$ in (2.3.82) nirgendwo auf $[-\pi, \pi]$ verschwinden kann. Dies bedeutet abermals, daß $I \rightarrow \infty$ bei $r \rightarrow 0$ oder, was das gleiche bedeutet, daß eine der Hauptstreckungen, sagen wir, $\lambda_2 \rightarrow \infty$ bei $r \rightarrow 0$. Ferner nehmen wir an, daß in der Umgebung der spannungsfreien Reißufer ein *lokaler einachsiger Dehnungszustand* mit $\lambda_2 \rightarrow \infty$ auftritt. Aufgrund des heuristischen Argumentes, von dem wir am Ende des Abschnittes 3.3.2 gesprochen haben (cf. (2.3.60)), kommen wir zur Aussage (2.3.74) mit

$$2(m-1) < s \leq 0, \quad (2.3.83)$$

$$H(\pm\pi) = 0 \quad \text{wenn} \quad 2(m-1) < s < 0, \quad H(\pm\pi) = q_0 \quad \text{wenn} \quad s = 0,$$

wobei q_0 die Wurzel der Gleichung $h'(q) = 0$ ist. Gln. (2.3.74) und (2.3.83) vereinfachen beträchtlich die asymptotische Analyse unseres Problems,

denn statt der komplizierten Ausdrücke für die Ableitungen von $\Phi(I, J)$ in Glg. (2.3.65) können wir von nun an ihre asymptotisch äquivalenten Ausdrücke mit dem Fehler $o(J/I)$, verglichen mit 1, einsetzen (siehe Anhang). Folglich kann man zeigen, daß im Rahmen der Approximation (2.3.68) die zwei Terme

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right)_{,r} e_{\dot{x}} \quad \text{und} \quad -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right)_{,\theta} e_{\dot{x},r}$$

klein im Vergleich zu den restlichen Termen sind, und daß $\Phi_I(I, J)$ ersetzt werden kann durch die Formel

$$2\Phi_I(I, J) = 2\frac{\partial\Phi}{\partial I} \sim A_1\alpha I^{\alpha/2-1} + o(I^{\alpha/2-1}), \quad (2.3.84)$$

deren formelle Ableitungen nach r und θ auch gelten. Durch Multiplikation von Gleichung (2.3.65) mit α und darauffolgender Division durch $A_1\alpha a^\alpha r^{(m-1)(\alpha-1)}$ und durch den anschließenden Grenzübergang $r \rightarrow 0$ unter Berücksichtigung von (2.3.84) und ihrer Konsequenzen erhalten wir die Gleichung

$$\frac{d}{d\theta}(G^{\alpha/2-1}\dot{U}) + m[(m-1)(\alpha-1) - 1]G^{\alpha/2-1}U = 0, \quad (2.3.85)$$

mit

$$G = m^2U^2 + \dot{U}^2. \quad (2.3.86)$$

Analog zu dem führen Gln. (2.3.84) und (2.3.67) zu den Randbedingungen

$$\dot{U}(\pm\pi) = 0. \quad (2.3.87)$$

Gln. (2.3.85), (2.3.87) stellt ein nichtlineares Eigenwertproblem dar, daß schon mehrmals durch die asymptotische Analyse von anderen Reißproblemen im Rahmen der finiten Elastostatik hergeleitet wurde [40, 41, 43, 49], mit der in [40] gegebenen Lösung. Der einzige Eigenwert $m \in (0, 1)$ ist gleich

$$m = 1 - 1/\alpha \quad (2.3.88)$$

und entspricht der Eigenfunktion

$$U(\theta) = \sin(\theta/2) \left[1 - \frac{2k^2 \cos^2(\theta/2)}{1 + \omega(\theta, \alpha)} \right]^{1/2} \\ \times [\omega(\theta, \alpha) + k \cos \theta]^{k/2}, \quad (2.3.89)$$

wobei

$$\omega(\theta, \alpha) = [1 - k^2 \sin^2 \theta]^{1/2}, \quad k = (\alpha - 2)/\alpha. \quad (2.3.90)$$

Man kann die Gültigkeit dieser Lösung direkt prüfen, indem man Glg. (2.3.89) in (2.3.85) einsetzt und die folgenden Formeln benutzt

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{\cos \theta + \omega(\theta, \alpha)}{2 \sin \theta} U, \\ \ddot{U} &= -\frac{1}{4} \left[1 + \frac{2k^2 \cos \theta}{\omega(\theta, \alpha)} + k^2 \right] U, \end{aligned} \quad (2.3.91)$$

$$G = \frac{1}{4} (1 - k^2)(1 + k) [\omega(\theta, \alpha) + k \cos \theta]^{k-1}, \quad (2.3.92)$$

welche die Konsequenzen aus (2.3.89) sind. Man beachte, daß $U(\theta)$ unendlich glatt auf $[-\pi, \pi]$ ist und folgende Eigenschaften besitzt

$$\begin{aligned} U(\theta) &> 0 \quad (0 < \theta \leq \pi), \quad U(0) = 0, \\ U(-\theta) &= -U(\theta) \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi), \end{aligned} \quad (2.3.93)$$

$$\begin{aligned} \dot{U}(\theta) &> 0 \quad (-\pi < \theta < \pi), \\ \dot{U}(-\pi) &= \dot{U}(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.94)$$

2.3.4 Die Nebenterme der Deformation

Die asymptotische Darstellung des lokalen Deformationsfeldes durch Gln. (2.3.68), (2.3.81), (2.3.89) liefert nur eine schwache Schätzung

$$J \sim o(r^{2(m-1)}) \quad \text{bei } r \rightarrow 0. \quad (2.3.95)$$

Um deswegen die asymptotischen Annahmen (2.3.83) zu bestätigen, und dabei die noch unbekannte Funktion $H(\theta)$ zu bestimmen, müssen wir die weitere asymptotische Analyse für Nebenterme durchführen. Mit dem Ziel, Glg. (2.3.68) zu verfeinern, ersetzen wir sie durch

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(r, \theta) &= \mathbf{x}^\circ + ar^m U(\theta) + r^{m'} \mathbf{v}(\theta) + o(r^{m'}), \\ m' &> m, \end{aligned} \quad (2.3.96)$$

mit m' einem anderen unbekanntem Exponenten und $\mathfrak{v}(\theta)$ einem unbekanntem Vektor. Der Deformationsgradient ist dann gegeben durch

$$\mathfrak{F} = r^{m-1}\mathfrak{f} + r^{m'-1}\mathfrak{g} + o(r^{m'-1}), \quad (2.3.97)$$

mit \mathfrak{f} aus (2.3.71) und

$$\mathfrak{g} = m'\mathfrak{v} \otimes \mathfrak{k}_1 + \dot{\mathfrak{v}} \otimes \mathfrak{k}_2. \quad (2.3.98)$$

Wir berechnen die Grundinvarianten I, J nach den Gleichungen (2.3.19), (2.3.97), (2.3.98)

$$I = r^{2(m-1)}a^2G + 2r^{m+m'-2}K + o(r^{m+m'-2}), \quad (2.3.99)$$

$$J = r^{m+m'-2}(mU\dot{\Psi} - m'\dot{U}\Psi) + o(r^{m+m'-2}), \quad (2.3.100)$$

mit G aus (2.3.86) und

$$K = mm'U\chi + \dot{U}\dot{\chi}, \quad (2.3.101)$$

wobei χ und Ψ die folgenden Größen bezeichnen

$$\chi = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v}, \quad \Psi = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{v}\mathfrak{v}. \quad (2.3.102)$$

Durch Vergleich der zwei asymptotischen Formeln (2.3.74) und (2.3.100) für J , beschließt man, daß

$$m + m' - 2 \leq s \leq 0, \quad (2.3.103)$$

und ferner

$$\begin{aligned} mU\dot{\Psi} - m'\dot{U}\Psi &= 0 \quad \text{auf } [-\pi, \pi] \\ \text{wenn } m + m' - 2 &< s, \end{aligned} \quad (2.3.104)$$

$$\begin{aligned} mU\dot{\Psi} - m'\dot{U}\Psi &= H(\theta) \quad \text{auf } [-\pi, \pi] \\ \text{wenn } m + m' - 2 &= s. \end{aligned} \quad (2.3.105)$$

Wenn $m + m' - 2 < s$, stellt (2.3.104) eine Gleichung für Ψ dar. Für $m' = 2 + s - m$ enthält Glg. (2.3.105) noch eine unbekanntem Funktion $H(\theta)$ und deswegen kann Ψ in diesem Fall nicht bestimmt werden. Dennoch ist es leicht ersichtlich, daß wenn $\alpha < 4$

$$s = 0, \quad \text{und} \quad H(\theta) \equiv q_0 = \text{const.} \quad (2.3.106)$$

Nimmt man in der Tat erst $s < 0$ an, dann kann man mit Hilfe von (2.3.65) und der Bedingung $\alpha < 4$ zeigen, daß $H(\theta) \equiv 0$, was Glg. (2.3.74) widerspricht. Deswegen analysieren wir den Fall mit dem kleinsten Wert $s = 0$. Durch Multiplikation von (2.3.65) mit ϵa , unter Berücksichtigung von $\alpha < 4$, was die dominanten Terme übrig läßt, ergibt sich

$$\frac{d}{d\theta}(h'(H(\theta)))a^2mU = 0 \Rightarrow h'(H(\theta)) \equiv 0, \quad (2.3.107)$$

was äquivalent zu (2.3.106) ist.

Wir betrachten nun den Fall $\alpha > 4$. Um eine zusätzliche Gleichung für Ψ zu erhalten, multiplizieren wir Glg. (2.3.65) mit ϵa und vernachlässigen dort die minoranten Terme. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial\Phi}{\partial I}m'^2r^{m'-1}\Psi + 2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial I}\right)_{,r}rm'r^{m'-1}\Psi - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right)_{,r}ra^2r^{m-1}\dot{U} \\ + 2\frac{\partial\Phi}{\partial I}r^{m'-1}\ddot{\Psi} + 2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial I}\right)_{,\theta}r^{m'-1}\dot{\Psi} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial J}\right)_{,\theta}ma^2r^{m-1}U = 0. \end{aligned} \quad (2.3.108)$$

Analog zu dem folgt aus (2.3.67)

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial\Phi}{\partial I}r^{m'-1}\dot{\Psi} + \frac{\partial\Phi}{\partial J}ma^2r^{m-1}U = 0 \quad (2.3.109) \\ \text{für } \theta = \pm\pi. \end{aligned}$$

In (2.3.108), (2.3.109) enthalten die Ableitungen Φ_J , $(\Phi_J)_{,r}$ und $(\Phi_J)_{,\theta}$ die Terme ζ_J , ζ_{JJ} , $h'(J)$ und $h''(J)$. Unter Berücksichtigung der asymptotischen Formeln (2.3.46) und (A.11)-(A.18) des Anhangs kann man zeigen, daß für $s(\gamma - 2) < 2(m - 1)(\alpha/2 - 2)$ nur die Terme $h'(J)$, $h''(J)$ dominant sind. Gln. (2.3.108), (2.3.109) führen dann zu $H \equiv 0$, was Glg. (2.3.74) widerspricht. Wir betrachten den kleinsten Wert $s = m + m' - 2 = (m - 1)(\alpha - 4)/(\gamma - 2)$. Unter Berücksichtigung aller dominanten Terme in (2.3.108), (2.3.109) erhalten wir

$$\begin{aligned} G(\ddot{\Psi} + m'^2\Psi) + (\alpha/2 - 1)\dot{G}\dot{\Psi} + (\alpha - 2)m'(m - 1)G\Psi \\ + [(\alpha/2 - 2)2(m - 1) + m + m' - 2]\dot{U}H - (\alpha/2 - 2)m\frac{\dot{G}U}{G}H \\ - mU\dot{H} + \nu\gamma(\gamma - 1)\frac{H^{\gamma-2}}{\alpha^{\alpha-4}G^{\alpha/2-2}}[mU\dot{H} - (m + m' - 2)\dot{U}H] = 0, \end{aligned} \quad (2.3.110)$$

mit $\nu = C/(\alpha A_1)$, und G, K, H gemäß (2.3.86), (2.3.101) und (2.3.105). Die Durchführung der gleichen Schritte für (2.3.109) liefert die Randbedingung

$$H(\pm\pi) = 0, \quad \text{oder} \quad \dot{\Psi}(\pm\pi) = 0. \quad (2.3.111)$$

Wir wollen nun die Gleichung für χ herleiten. Durch Multiplikation von (2.3.65) mit \mathbf{a} und Vernachlässigen der minoranten Terme erhalten wir

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I} \frac{d}{d\theta} (a^2 r^{m-1} \ddot{U} + r^{m'-1} \dot{\chi}) + 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I} \right)_{,\theta} (a^2 r^{m-1} \dot{U} + r^{m'-1} \dot{\chi}) \\ + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial I} (m^2 a^2 r^{m-1} U + m'^2 r^{m'-1} \chi) \\ + 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial I} \right)_{,r} r (m a^2 r^{m-1} U + m' r^{m'-1} \chi) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.112)$$

Auf ähnliche Weise folgt aus (2.3.67), (2.3.96)

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \Phi}{\partial I} (a^2 r^{m-1} \dot{U} + r^{m'-1} \dot{\chi}) = 0 \\ \text{für } \theta = \pm\pi. \end{aligned} \quad (2.3.113)$$

Aufgrund (2.3.99) und infolge der asymptotischen Formeln aus dem Anhang kann man die Funktion $2\Phi_I(I, J)$ durch

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \Phi}{\partial I} \sim A_1 \alpha r^{(m-1)(\alpha-2)} (a^2 G)^{\alpha/2-1} \left[1 + (\alpha-2) r^{m'-m} \frac{K}{a^2 G} \right] \\ + A_2 \alpha_2 r^{(m-1)(\alpha_2-1)} (a^2 G)^{\alpha_2/2-1} \quad \text{wenn } m' = m + (\alpha - \alpha_2)/\alpha, \end{aligned} \quad (2.3.114)$$

oder durch

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \Phi}{\partial I} \sim A_1 \alpha r^{(m-1)(\alpha-2)} (a^2 G)^{\alpha/2-1} \left[1 + (\alpha-2) r^{m'-m} \frac{K}{a^2 G} \right] \\ \text{wenn } m' < m + (\alpha - \alpha_2)/\alpha, \end{aligned} \quad (2.3.115)$$

ersetzen. Es gelten auch die formelle Differentiation von (2.3.114) oder von (2.3.115) nach r und θ . Wenn man Gln. (2.3.112), (2.3.114)-(2.3.115) zusammensetzt und beachtet, daß U Glg. (2.3.85) genügt, kann man schließen, daß auf $[-\pi, \pi]$

$$Y = 0 \quad \text{wenn } m < m' < m + (\alpha - \alpha_2)/\alpha, \quad (2.3.116)$$

$$Y = -\frac{A_2 \alpha_2}{A_1 \alpha} \frac{\alpha - \alpha_2}{\alpha - 2} (a^2 G)^{\alpha_2/2 - \alpha/2 + 1} (\ddot{U} + m^2 U)$$

wenn $m' = m + (\alpha - \alpha_2)/\alpha$, (2.3.117)

wobei Y eine Hilfsfunktion darstellt, welche wie folgt definiert ist

$$Y = G(\ddot{\chi} + m'^2 \chi) + 2K(\ddot{U} + m^2 U) + (\alpha/2 - 1)\dot{G}\dot{\chi} + (\alpha - 2)[m'(m - 1)G\chi + m(m' + m - 2)KU + \dot{K}\dot{U}]. \quad (2.3.118)$$

In (2.3.118) sind G und K durch (2.3.86) und (2.3.101) gegeben. Ferner führt die Randbedingung (2.3.113) zu

$$\dot{\chi}(\pm\pi) = 0 \quad \text{wenn} \quad m < m' \leq 2 - m. \quad (2.3.119)$$

Gln. (2.3.116), (2.3.118) stellen zusammen mit (2.3.119) ein Eigenwertproblem für χ mit dem Eigenwert m' dar. Andernfalls ist Glg. (2.3.117) eine inhomogene Differentialgleichung für χ , die zusammen mit der Randbedingung (2.3.119) gelöst werden muß, falls ein α_2 existiert so daß $m' = m + (\alpha - \alpha_2)/\alpha \leq 2 - m$ (oder, äquivalent, $\alpha_2 \geq \alpha - 2$; cf. (2.3.88), (2.3.103), (2.3.117)). Andererseits ist Glg. (2.3.104) ein unkonventionelles Eigenwertproblem für Ψ . Um diese Gleichung lösen zu können, brauchen wir noch einige zusätzliche Informationen. Diese Informationen erhält man durch die Annahme, daß die Lösung Ψ von (2.3.104) unendlich glatt sein muß, was als Konsequenz der Elliptizität der Gleichgewichtsgleichungen zu betrachten ist (siehe auch [40, 41, 49]). Dies gilt auch für die inhomogene Differentialgleichung (2.3.105), (2.3.106).

Wir führen nun die einzelnen Möglichkeiten auf, Gleichungen (2.3.104), (2.3.105), (2.3.106), (2.3.110), (2.3.111), (2.3.116), (2.3.117), (2.3.119) zu lösen. Zuerst bezeichnen wir mit $m + (\alpha - \alpha_2)/\alpha = m'_1$ den assoziierten Wert von (2.3.117), falls es α_2 gibt, so daß $\alpha_2 > \alpha - 2$, ferner mit m'_2 den Eigenwert von (2.3.104), und mit m'_3 den Eigenwert von (2.3.116), (2.3.119), beide im Intervall $(m, 2 - m)$ liegend. Wir bezeichnen auch mit $m'_4 = 2 - m + (m - 1)(\alpha - 4)/(\alpha - 2)$ den assoziierten Wert von (2.3.110), (2.3.111). Wenn zumindest eines von den obengenannten Problemen eine Lösung im Intervall $(m, 2 - m)$ hat, wählen wir für m' den kleinsten Wert

$$m' = \min\{m'_1, m'_2, m'_3, m'_4\}$$

und für χ (oder Ψ) die entsprechende Lösung, und annullieren alle anderen. Falls zwei, drei oder sogar vier Werte gleich m' sind, müssen die entsprechenden Lösungen kombiniert werden.

Wenn letztendlich keines von den Problemen irgendeinen Wert im Intervall $(m, 2-m)$ hat, dann ist offensichtlich $m' = 2-m$ und sowohl die inhomogenen Gleichungen (2.3.105), (2.3.106), als auch (2.3.117), (2.3.119) (mit der Annahme, daß $\alpha_2 = \alpha - 2$) oder (2.3.116), (2.3.119) (falls $\alpha_2 < \alpha - 2$) müssen für Ψ und χ gelöst werden.

Alle obengenannten Probleme, außer Gln. (2.3.110), (2.3.111), und (2.3.117), (2.3.119), sind schon in [40, 41, 49] gelöst worden. Wir fassen deren Lösungen zusammen. Zuerst betrachten wir Glg. (2.3.104). Aufgrund der Annahme über die unendliche Glattheit von Lösungen kann man zeigen, daß der kleinste Eigenwert $m'_2 > m$ gleich [40]

$$m'_2 = 2m = 2 - 2/\alpha \quad (2.3.120)$$

ist und die assoziierte Eigenfunktion durch

$$\Psi = bU^2, \quad (2.3.121)$$

gegeben ist, wobei b eine Konstante ist. Zusätzlich muß m'_2 im Intervall $(m, 2-m)$ liegen, was nur möglich ist, wenn

$$\alpha < 3. \quad (2.3.122)$$

Wenn $\alpha \geq 3$ ist, dann besitzt das Problem (2.3.104) keinen Eigenwert in $(m, 2-m)$. Mit dem Ziel, die Funktion Ψ für $3 \leq \alpha < 4$ zu bestimmen, betrachten wir die inhomogenen Gleichungen (2.3.105), (2.3.106). Gemäß [49] hat die unendlich glatte Lösung des Problems (2.3.105), (2.3.106) auf $[-\pi, \pi]$ die Form

$$\begin{aligned} \Psi(\theta) = q_0 L_1(\theta, \alpha) = & -q_0 \frac{(\alpha/2)^{(5/2)}}{m^2} [\omega(\theta, \alpha) + k \cos \theta]^{m'} \\ & \times \left[\frac{m'}{m} F(1/2 - 1/m, 1/2; 3/2 - 1/m; \cos^2 \varphi_0) - k \sin \varphi_0 \right], \quad (2.3.123) \end{aligned}$$

mit $m' = 2 - m$, wobei

$$\cos \varphi_0 = \frac{\sqrt{2} [1 + k \sin^2 \theta - \omega(\theta, \alpha) \cos \theta]^{1/2}}{\alpha \omega(\theta, \alpha) + k \cos \theta}, \quad (2.3.124)$$

und F die hypergeometrische Funktion bezeichnet². Man kann aus Glg.

²Siehe z.B. [162], p.556.

(2.3.123) und aus bekannten Eigenschaften der hypergeometrischen Funktion prüfen, daß

$$L_1(0, \alpha) = -2(\alpha/2)^{1/2}(2m)^{-m}/m',$$

$$L_1(\pm\pi, 0) = \frac{(\pi\alpha/2)^{1/2}(\alpha/2)^m \Gamma(3/2 - 1/m)}{mm' \Gamma(1 - 1/m)}. \quad (2.3.125)$$

Wenn $\alpha > 4$ ist, dann muß die Funktion Ψ durch das Problem (2.3.110), (2.3.111) bestimmt werden. Unter Berücksichtigung der Parität von $U(\theta)$ kann man zeigen, daß Ψ eine gerade Funktion ist: $\Psi(\theta) = \Psi(-\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Folglich kann man Glg. (2.3.110) auf das Halbointervall $[0, \pi]$ beschränken und für sie die folgenden Randbedingungen aufstellen

$$\dot{\Psi}(0) = 0, \quad \dot{\Psi}(\pi) = 0. \quad (2.3.126)$$

Die Lösung zu Gln. (2.3.110), (2.3.126) hat die Form

$$\Psi(\theta) = a^{(\alpha-4)/(\gamma-2)} L_2(\theta), \quad (2.3.127)$$

wobei $L_2(\theta)$ der folgenden Gleichung genügt

$$G(\ddot{L}_2 + m'^2 L_2) + (\alpha/2 - 1)\dot{G}\dot{L}_2 + (\alpha - 2)m'(m - 1)GL_2$$

$$+ [(\alpha/2 - 2)2(m - 1) + m + m' - 2]\dot{U}H_2$$

$$- (\alpha/2 - 2)m\frac{\dot{G}U}{G}H_2 - mU\dot{H}_2 + \nu\gamma(\gamma - 1)\frac{H_2^{\gamma-2}}{G^{\alpha/2-2}}$$

$$\times [mU\dot{H}_2 - (m + m' - 2)\dot{U}H_2] = 0, \quad (2.3.128)$$

mit $H_2 = mU\dot{L}_2 - m'\dot{U}L_2 \geq 0$. Es ist leicht zu sehen, daß Glg. (2.3.128) einen singulären Punkt $\theta = \pi$ hat. Weil $H_2(\pi) = 0$ ist, kann man den nichtlinearen Term von (2.3.128) in der Umgebung des singulären Punktes vernachlässigen. Dann wird die assoziierte charakteristische Gleichung³ zwei Wurzeln r_1 und r_2 mit $1 < r_1 < 2$ haben (die Verläufe von r_1 und r_2 in Abhängigkeit von $\alpha \in (4, 10)$, $\gamma = \alpha + 1$ sind in Abb.2.10 dargestellt).

Wegen der Beschränkung $H_2 \geq 0$ kann man mit Hilfe der numerischen Integration von (2.3.128) zeigen, daß die nichttrivialen Lösungen $L_2(\theta)$ zu (2.3.128), (2.3.126) nur dann existieren, wenn $L_2(0) = -b_0 \leq -b_{cr} < 0$ ist. Die Funktionen \ddot{L}_2 und \dot{H}_2 haben dann eine Singularität von $(\pi - \theta)^{r_1-2}$ in der Umgebung des Punktes $\theta = \pi$. Die graphische Darstellung der

³Siehe Kamke [163].

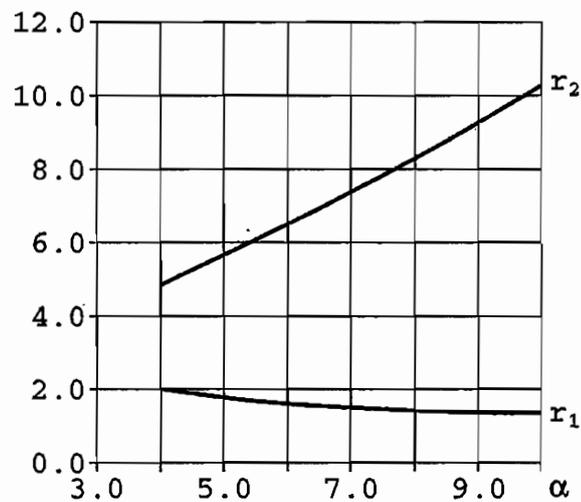


Abbildung 2.10: Wurzeln der charakteristischen Gleichung

Funktionen $L_2(\theta, b_0, \alpha, \gamma, \nu)$ und H_2 mit $b_0 = b_{cr}$, die durch numerische Integration für $\alpha = 4.5$, $\gamma = 5.5$ und $\nu = 1$ berechnet worden sind, ist in Abb.2.11 gegeben. Man kann sehen, daß H_2 überall im Intervall $(-\pi, \pi)$ positiv ist.

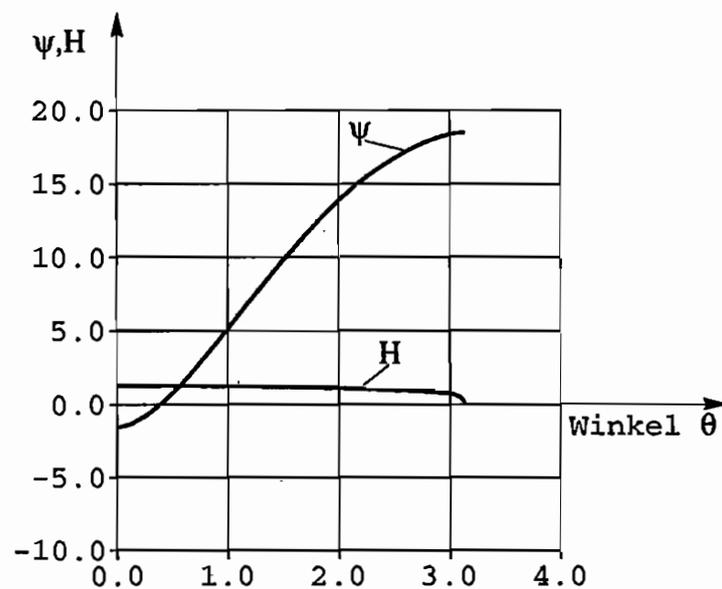


Abbildung 2.11: Lösung der Glg. (2.3.128)

Wir wollen nun χ bestimmen. Zuerst betrachten wir das Eigenwertproblem (2.3.116), (2.3.119). Sein kleinster Eigenwert m'_3 ist gegeben durch

(siehe [41, 49])

$$m'_3 = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 16m/\alpha}), \quad (2.3.129)$$

der der folgenden Eigenfunktion entspricht

$$\begin{aligned} \chi(\theta) &= cM(\theta, \alpha) \\ &= c[\omega(\theta, \alpha) + k \cos \theta]^{m'_3} \left\{ \frac{4}{\alpha^2} \frac{1 + k \sin^2 \theta - \omega(\theta, \alpha) \cos \theta}{[\omega(\theta, \alpha) + k \cos \theta]^2} - 1 \right\}, \end{aligned} \quad (2.3.130)$$

wobei c eine Konstante und $\omega(\theta, \alpha)$ und k durch Glg. (2.3.90) definiert sind. Dieser Eigenwert von (2.3.129) genügt der Bedingung (2.3.103) so lange die Ungleichung gilt

$$\alpha \leq 7. \quad (2.3.131)$$

Zuletzt wollen wir das inhomogene Problem (2.3.117), (2.3.119) für χ betrachten, unter der Annahme, daß es ein α_2 gibt, so daß $\alpha_2 \geq \alpha - 2$. Wir zerlegen χ in eine gerade und eine ungerade Funktionen durch

$$\chi = \chi' + \chi'' \quad \text{auf} \quad [-\pi, \pi], \quad (2.3.132)$$

wobei

$$\chi'(\theta) = \frac{1}{2}[\chi(\theta) - \chi(-\theta)], \quad (2.3.133)$$

$$\chi''(\theta) = \frac{1}{2}[\chi(\theta) + \chi(-\theta)], \quad (2.3.134)$$

für alle $\theta \in [-\pi, \pi]$. Gemäß Gln. (2.3.132), (2.3.134), (2.3.117), (2.3.119) können wir die Gleichungen für χ' und χ'' auf $[0, \pi]$ wie folgt trennen

$$\begin{aligned} G(\ddot{\chi}' + m_1'^2 \chi') + 2K'(\ddot{U} + m^2 U) + (\alpha/2 - 1)\dot{G}\chi' \\ + (\alpha - 2)[m_1'(m - 1)G\chi' + m(m_1' + m - 2)K'\dot{U}] \\ = -\frac{a_2 \alpha_2}{A_1 \alpha} \frac{\alpha - \alpha_2}{\alpha - 2} (a^2 G)^{\alpha_2/2 - \alpha/2 + 1} (\ddot{U} + m^2 U), \end{aligned} \quad (2.3.135)$$

$$\begin{aligned} G(\ddot{\chi}'' + m_1'^2 \chi'') + 2K''(\ddot{U} + m^2 U) + (\alpha/2 - 1)\dot{G}\chi'' \\ + (\alpha - 2)[m_1'(m - 1)G\chi'' + m(m_1' + m - 2)K''U + \dot{K}''\dot{U}] = 0, \end{aligned} \quad (2.3.136)$$

wobei

$$K' = \dot{U}\dot{\chi}' + mm_1'U\chi', \quad K'' = \dot{U}\dot{\chi}'' + mm_1'U\chi''. \quad (2.3.137)$$

Ferner führen (2.3.132), (2.3.119) zu

$$\dot{\chi}'(\pi) = 0, \quad \chi'(0) = 0, \quad (2.3.138)$$

$$\dot{\chi}''(\pi) = 0, \quad \chi''(0) = 0. \quad (2.3.139)$$

Wir wenden auf (2.3.135), (2.3.138) die Transformationen an

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2} [1 + k \sin^2 \theta - \omega(\theta, \alpha) \cos \theta]^{1/2}}{\alpha \omega(\theta, \alpha) + k \cos \theta}, \quad (2.3.140)$$

$$W_1(\varphi) = [\omega(\theta, \alpha) + k \cos \theta]^{-m_1} \chi'(\theta), \quad (2.3.141)$$

wobei $\theta \in [0, \pi]$. Nach langwierigen Berechnungen mit Hilfe von (2.3.91), (2.3.92) und der folgenden Formeln

$$\dot{\varphi} = \frac{k \cos \theta - \omega(\theta, \alpha)}{2\omega(\theta, \alpha)}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{k^2 - 1}{2} \frac{k \sin \theta}{\omega(\theta, \alpha)^3}, \quad (2.3.142)$$

kann man zeigen, daß (2.3.135), (2.3.138) sich reduziert auf

$$W_{1,\varphi\varphi} + \lambda^2 W_1 = D_1 \cos \varphi \quad \text{auf } [0, \pi/2] \quad (2.3.143)$$

$$\dot{W}_1(0) = 0, \quad W_1(\pi/2) = 0, \quad (2.3.144)$$

wobei

$$\lambda^2 = \frac{(2\alpha\alpha_2 - 1)(\alpha - \alpha_2 + 1)}{\alpha - 1},$$

$$D_1 = -\frac{A_2\alpha_2}{4A_1} \frac{\alpha - \alpha_2}{\alpha - 2} \frac{k(2\alpha)^{1/2}}{m^3} \left(\frac{2m^2}{\alpha} a^2 \right)^{\alpha_2/2 - \alpha/2 + 1}. \quad (2.3.145)$$

Folglich

$$W_1(\varphi) = d_1 \cos \varphi, \quad d_1 = D_1 / (\lambda^2 - 1). \quad (2.3.146)$$

Für $\chi'(\theta)$ haben wir dann

$$\begin{aligned} \chi'(\theta) = d_1 M_1(\theta, \alpha, \alpha_2) &= d_1 \frac{\sqrt{2}}{\alpha} [\omega(\theta, \alpha) + k \cos \theta]^{m_1 - 1} \\ &\quad \times [1 + k \sin^2 \theta - \omega(\theta, \alpha) \cos \theta]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.3.147)$$

Nach der Transformation

$$W_2(\varphi) = [\omega(\theta, \alpha) + k \cos \theta]^{-m_1} \chi''(\theta), \quad (2.3.148)$$

$\theta \in [0, \pi]$ und unter Berücksichtigung von (2.3.140) erhalten wir aus Gln. (2.3.136), (2.3.139)

$$W_{2,\varphi\varphi} + \lambda^2 W_2 = 0 \quad \text{auf } [0, \pi/2], \quad (2.3.149)$$

$$\dot{W}_2(0) = 0, \quad \dot{W}_2(\pi/2) = 0, \quad (2.3.150)$$

mit λ^2 aus (2.3.145). Die Lösung zu (2.3.149), (2.3.150) ist gegeben durch

$$W_2(\varphi) = d \cos 2\varphi, \quad (2.3.151)$$

mit d einer beliebigen Konstanten, natürlich unter der Voraussetzung, daß

$$\lambda^2 = \frac{(2\alpha - \alpha_2 - 1)(\alpha - \alpha_2 + 1)}{\alpha - 1} = 4. \quad (2.3.152)$$

Für $\chi''(\theta)$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \chi''(\theta) &= dM_2(\theta, \alpha, \alpha_2) \\ &= d[\omega(\theta, \alpha) + k \cos \theta]^{m_1} \left\{ \frac{1 + k \sin^2 \theta - \omega(\theta, \alpha) \cos \theta}{(\alpha/2)^2 [\omega(\theta, \alpha) + k \cos \theta]^2} - 1 \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.153)$$

Wir kombinieren Gln. (2.3.147) und (2.3.153), um die Lösung $\chi(\theta)$ von (2.3.115), (2.3.117) in der folgenden Form darzustellen

$$\chi(\theta) = d_1 M_1(\theta, \alpha, \alpha_2) + d M_2(\theta, \alpha, \alpha_2), \quad (2.3.154)$$

mit $d = 0$ wenn $(2\alpha - \alpha_2 - 1)(\alpha - \alpha_2 + 1)/(\alpha - 1) \neq 4$.

2.3.5 Katalog von kanonischen Feldern

Wir fassen nun die asymptotischen Felder in der Umgebung der Reißspitze für die Ogden-Ballschen Materialien zusammen. Zu diesem Zweck benutzen wir nun die wichtige Bemerkung am Ende des Abschnitts 2.3.1, die die Invarianz des lokalen Feldes bezüglich beliebiger paralleler Verschiebungen und Starrkörperrotationen betrifft. Wir wenden auf $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}^0$, mit \mathfrak{r} aus (2.3.96), eine zusätzliche Starrkörperrotation an, die durch folgende orthogonale Matrix $\mathbf{\Omega}^T$ definiert ist ⁴

$$\mathbf{\Omega}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2/a & -\mathbf{a}_1/a \\ \mathbf{a}_1/a & \mathbf{a}_2/a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2/a & \mathbf{a}_1/a \\ -\mathbf{a}_1/a & \mathbf{a}_2/a \end{pmatrix}. \quad (2.3.155)$$

⁴Diese schöne Idee ist von Stephenson [49] vorgeschlagen worden.

Die Berechnung von $\mathfrak{r}^* = \Omega^T(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}^\circ)$ unter Berücksichtigung von (2.3.102) liefert

$$\mathfrak{r}_1^* = -\frac{1}{a}r^{m'}\Psi(\theta) + o(r^{m'}), \quad (2.3.156)$$

$$\mathfrak{r}_2^* = ar^m U(\theta) + \frac{1}{a}r^{m'}\chi(\theta) + o(r^{m'}). \quad (2.3.157)$$

Wir werden dieses spezielle Feld kanonisches Feld nennen, weil es einem repräsentativen Element der Menge \mathcal{D} von lokalen singulären Feldern entspricht. Um alle anderen Elemente von \mathcal{D} zu erhalten, benutzen wir einfach die Umkehrformel

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^\circ + \Omega\mathfrak{r}^*, \quad (2.3.158)$$

mit \mathfrak{r}° und Ω einem beliebigen konstanten Vektor und einem eigentlich orthogonalen Tensor.

Wir analysieren das kanonische Feld (2.3.156), (2.3.157) für die folgenden Fälle.

Fall 1

Die Energiedichte enthält nur einen Potenzindex $\alpha = \alpha_1$ oder $\alpha_2 < \alpha - 2$. In diesem Fall existiert kein Wert $m'_1 = m + (\alpha - \alpha_2)/\alpha$ im Intervall $(m, 2 - m)$, und deswegen müssen nur m'_2 , m'_3 und m'_4 berücksichtigt werden.

(a) $\alpha \geq 7$. Es gibt keine Eigenwerte m'_2 und m'_3 im Intervall $(m, 2 - m)$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} m' &= m'_4 = 2 - m + (m - 1)(\alpha - 4)/(\gamma - 2), \\ \chi &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.159)$$

und Ψ ist durch (2.3.127), (2.3.128) gegeben. Wir merken an, daß die Jakobische Determinante der asymptotischen Formel genügt

$$J = r^{(m-1)(\alpha-4)/(\gamma-2)} H_2(\theta) + o(r^{(m-1)(\alpha-4)/(\gamma-2)}), \quad (2.3.160)$$

und das kanonische Feld (2.3.156), (2.3.157) überall im Intervall $(-\pi, \pi)$ eine lokal umkehrbare Abbildung darstellt, außer in den Endpunkten $\theta = \pm\pi$. Um die Approximation in ihren Umgebungen zu verbessern, ersetzen wir Glg. (2.3.156) durch

$$\mathfrak{r}_1^* = -\frac{1}{a}r^{m'}\Psi(\theta) - \frac{1}{a}r^{m''}X(\theta) + o(r^{m''}), \quad (2.3.161)$$

$m'' > m'$.

Die Berechnung der Jakobischen Determinante zeigt

$$J = r^{m+m'-2}H(\theta) + r^{m+m''-2}N(\theta) + o(r^{m+m''-2}), \quad (2.3.162)$$

wobei

$$N(\theta) = mU\dot{X} - m''X. \quad (2.3.163)$$

Wir nehmen an, daß $N(\pm\pi) \neq 0$ ist. Durch Vergleich (2.3.162) mit (2.3.60) kann man schließen, daß

$$m + m'' - 2 = 0, \quad m'' = 2 - m. \quad (2.3.164)$$

Einsetzen von (2.3.161), (2.3.157) in Gln. (2.3.65), (2.3.67), darauffolgende Multiplikation mit $\epsilon\alpha$ und zuletzt die Berücksichtigung nur der dominanten Terme führt auf

$$N(\theta) = mU\dot{X} - m''\dot{U}X = q_0, \quad (2.3.165)$$

mit q_0 der Wurzel der Gleichung $h'(q) = 0$. Die Lösung von (2.3.165) liefert

$$X = q_0L_1(\theta, \alpha), \quad (2.3.166)$$

mit $L_1(\theta, \alpha)$ aus (2.3.123). Das kanonische Feld (2.3.157), (2.3.161) stellt nun überall eine lokal umkehrbare Abbildung dar.

(b) $4 < \alpha < 7$. In diesem Fall besitzt das Problem (2.3.114), (2.3.117) einen Eigenwert $m'_3 \in (m, 2 - m)$ (cf. (2.3.121), (2.3.131)), das durch (2.3.129) charakterisiert ist. Wenn α und γ so vorgegeben sind, daß $m'_3 > m'_4$, dann müssen wir das kanonische Feld durch (2.3.159), (2.3.161)-(2.3.166) angeben. Falls $m'_3 < m'_4$, dann

$$\Psi = 0, \quad (2.3.167)$$

$m' = m'_3$, und χ ist durch (2.3.130) gegeben. Eine Verfeinerung analog zum Fall (a) kann durchgeführt werden, die dann zu (2.3.161)-(2.3.166), mit m' durch m'_4 ersetzt, führt.

(c) $3 < \alpha < 4$. Wir haben die gleiche Situation wie in (b). Der einzige Wert ist $m' = m'_3$, mit m'_3 aus (2.3.129), $\Psi = 0$ und χ ist durch (2.3.130) charakterisiert. Verfeinerung von (2.3.156) durch Betrachtung von (2.3.161) zeigt

$$mU\dot{X} - m''\dot{U}X = q_0, \quad m'' = 2 - m, \quad (2.3.168)$$

auf $[-\pi, \pi]$. Folglich,

$$X = q_0 L_1(\theta, \alpha), \quad (2.3.169)$$

mit $L_1(\theta, \alpha)$ aus (2.3.122). Dann wird $J \sim q_0$ und das kanonische Feld wird überall umkehrbar.

(d) $2 < \alpha < 3$. Beide Eigenwerte m'_2 und m'_3 liegen in $(m, 2 - m)$, aber $m'_3 < m'_2$. Wir wählen $m' = m'_3$, mit m'_3 aus (2.3.129), $\Psi = 0$ und $\chi = cM(\theta, \alpha)$ mit $M(\theta, \alpha)$ aus (2.3.130). Durch Ersetzen von (2.3.156) durch (2.3.161) erhalten wir Gln. (2.3.163), (2.3.168), was dazu führt, daß

$$m'' = 2m = 2 - 2/\alpha, \quad X = bU^2. \quad (2.3.170)$$

Um die reguläre Jakobische Determinante zu gewinnen, ersetzen wir Glg. (2.3.161) durch

$$\mathfrak{r}_1^* = -\frac{1}{a} r^{2m} b U^2 - \frac{1}{a} r^{m''} Y(\theta) + o(r^{m''}), \quad (2.3.171)$$

mit $m'' > 2m$. Wir erhalten damit

$$mU\dot{Y} - m''\dot{U}Y = 0 \quad (2.3.172)$$

$$mU\dot{Y} - m''\dot{U}Y = q_0 \quad (2.3.173)$$

auf $[-\pi, \pi]$, für $2m < m'' < 2 - m$ oder entsprechend für $m'' = 2 - m$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} m'' &= 2 - m = 1 + 1/\alpha, \\ Y &= q_0 L_1(\theta, \alpha), \end{aligned} \quad (2.3.174)$$

mit $L_1(\theta, \alpha)$ durch (2.3.122) definiert, und, deswegen ist die Jakobische Determinante konstant im Rahmen dieser Approximation: $J \sim q_0$.

Fall 2

Die Energiedichte enthält einige Potenzindizes und $\alpha_2 > \alpha - 2$. Dann muß der Wert m'_1 von (2.3.115), (2.3.117) berücksichtigt werden. Die Verfeinerungen von \mathfrak{r}_1^* können analog zu dem ersten Fall durchgeführt werden. Wir fassen hier nur die Ergebnisse zusammen.

(a) $\alpha \geq 7$. Wenn α, α_2 und γ so vorgegeben sind, daß $m'_1 > m'_4$, dann ist das kanonische Feld durch Gln. (2.3.157), (2.3.161) charakterisiert, mit $m' = m'_4$, $\chi(\theta) = 0$ und $m'', X(\theta)$ aus (2.3.164), (2.3.166). Falls $m'_4 >$

m'_1 , dann $m' = m'_1$, $\chi(\theta)$ ist durch (2.3.154) gegeben, und \varkappa_1^* ist durch (2.3.161), (2.3.166), mit m' durch m'_4 ersetzt, beschrieben.

(b) $4 < \alpha < 7$. Wenn $m'_4 < \min\{m'_1, m'_3\}$ dann ist das kanonische Feld durch (2.3.157), (2.3.161) mit $m' = m'_4$ charakterisiert, wobei $\chi(\theta) = 0$, $\Psi(\theta)$ aus (2.3.117), (2.3.118), m'' und $X(\theta)$ aus (2.3.164), (2.3.166). Falls $m'_4 > \min\{m'_1, m'_3\}$ müssen wir $m' = \min\{m'_1, m'_3\}$ wählen. Es kommt dann darauf an, ob $m'_3 < m'_1$ oder $m'_3 > m'_1$, $\chi(\theta)$ muß entsprechend durch (2.3.130) oder durch (2.3.154) charakterisiert werden. Wenn $m'_3 = m'_1$, dann

$$m' = m'_1 = m'_3, \\ \chi(\theta) = cM(\theta, \alpha) + d_1M_1(\theta, \alpha, \alpha_2) + dM_2(\theta, \alpha, \alpha_2). \quad (2.3.175)$$

Die Funktion \varkappa_1^* ist dann durch (2.3.161)-(2.3.166) gegeben, wobei m' durch m'_4 ersetzt ist.

(c) $3 < \alpha < 4$. Das kanonische Feld ist durch (2.3.157), (2.3.161) gegeben. Der Wert m' und die Funktion $\chi(\theta)$ sind nun analog zum Fall (b) definiert, während m'' und X durch (2.3.168), (2.3.169) gegeben sind.

(d) $2 < \alpha < 3$. Das kanonische Feld ist durch (2.3.157), (2.3.171) gegeben. Der Wert m' und die Funktion $\chi(\theta)$ sind analog zu dem Fall (b) definiert, während m'' und Y durch (2.3.174) gegeben sind.

Fall 3

Die Energiedichte enthält einige Potenzindizes und $\alpha_2 = \alpha - 2$. Dann wählen wir $m'_1 = 2 - m$ und die Charakteristiken des kanonischen Feldes können genau so beschrieben werden wie im Fall 1. Es ist interessant anzumerken, daß für $2 < \alpha < 4$ unser kanonisches Feld mit Stephenson's Feld durch Einsetzen von $q_0 = 1$ zusammenfällt. Man kann dies durch Betrachtung des Grenzfalles von inkompressiblen Materialien mit $J \equiv 1$ und durch asymptotische Analyse des Verhalten der Energiedichte (2.3.51) zeigen. Es ist leicht zu sehen, daß für $\alpha_2 = \alpha - 2$

$$\Phi(I) = A_1 I^{\alpha/2} + A_2 I^{\alpha/2-1} + o(I^{\alpha/2-1}), \quad (2.3.176)$$

und daß die durch Ableitungen von (2.3.176) entstandenen asymptotischen Formeln auch gelten (cf. mit dem Anhang). Dieser Ausdruck ist nichts anderes als Stephenson's Energiedichte (siehe [49]).

Man merkt, daß die Grenzfälle $\alpha = 3$ und $\alpha = 4$, in denen einige "pathologische" Eigenschaften auftreten können⁵, einfachheitshalber überhaupt nicht analysiert worden sind. Wir haben auch die Analyse der weiteren Nebenterme von r_2^* in Abhängigkeit von kleineren Potenzindizes fallengelassen. Dennoch kann in diesen Fällen, wie auch im Fall $\alpha = 2$, was der Hadamard Energiedichte zugeordnet ist, die asymptotische Analyse des singulären Feldes auf ähnliche Weise durchgeführt werden (siehe [54]).

Als Illustration betrachten wir nun einen Spezialfall der Energiedichte (2.3.51) mit drei Potenzindizes, der von Ogden [51, 52] vorgeschlagen wurde

$$\alpha_1 = 5, 0, \quad \alpha_2 = 2, 0, \quad \alpha_3 = 1, 3. \quad (2.3.177)$$

Man kann leicht bestimmen, daß

$$m = 0, 8, \quad m'_3 = \frac{1}{10}(3 + \sqrt{73}) \approx 1, 154. \quad (2.3.178)$$

Wenn $\gamma > 2 + (1 - m)(\alpha - 4)/(2 - m - m'_3) \approx 6, 35$, dann wird $m'_4 > m'_3$, und das kanonische Feld wird durch (2.3.157), (2.3.161)-(2.3.166) mit $m' = m'_3$ definiert, wobei $\chi(\theta)$ durch (2.3.130) bestimmt ist und m' in (2.3.161), (2.3.166) durch m'_4 ersetzt werden muß. Wenn $5 < \gamma < 6, 35$ dann wird das kanonische Feld durch Gln. (2.3.157), (2.3.159), (2.3.161)-(2.3.166) charakterisiert.

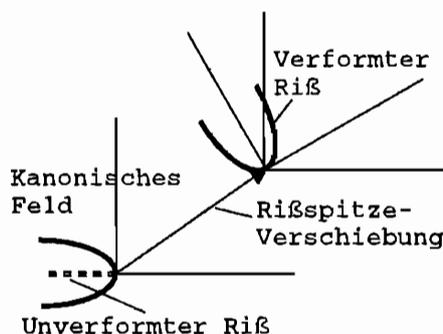
2.3.6 Charakteristika singulärer Felder

Gemäß der Komposition (2.3.158) kann man das lokale Deformationfeld r aus dem kanonischen Feld r^* herleiten, indem man die Starrkörperrotation Ω und die darauffolgende parallele Verschiebung r° auf letzteres anwendet (siehe Abb.2.12).

Weil Starrkörperbewegungen keinen Einfluß auf Dehnungs- und Spannungszustände haben, kann man alle Charakteristika singulärer Felder durch die des kanonischen Feldes bestimmen. Zuerst ist es leicht zu sehen, daß, in erster Approximation, das kanonische Feld den folgenden Symmetrieeigenschaften genügt

$$r_1(r, \theta) = r_1(r, -\theta), \quad r_2(r, \theta) = -r_2(r, -\theta). \quad (2.3.179)$$

⁵Siehe [49].

Abbildung 2.12: Komposition $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^o + \mathfrak{Q}\mathfrak{r}^*$.

Wir werden das Sternzeichen * bei \mathfrak{r} fallenlassen, weil wir uns im weiteren nur mit dem kanonischen Feld beschäftigen werden. Die Symmetrieeigenschaften (2.3.179) sind mit der Parität von $U(\theta)$, $L_1(\theta, \alpha)$, $L_2(\theta, \alpha)$ verknüpft (cf. die Formeln (2.3.93), (2.3.123), (2.3.126)). Ferner bestimmen wir die Plazierung der Rißufer $\theta = \pm\pi$ nach der Verformung. Aus (2.3.157), (2.3.161), (2.3.127), (2.3.169), (2.3.171), (2.3.174) folgt

$$\mathfrak{r}_1(r, \theta) \sim \begin{cases} -\frac{1}{a} r^{m'_4} a^{(\alpha-4)/(\gamma-2)} L_2(\theta, b_0, \alpha, \gamma, \nu) \\ -\frac{1}{a} r^{1+1/\alpha} q_0 L_1(\theta, \alpha) \\ -\frac{1}{a} r^{2-2/\alpha} b U^2 \end{cases} \quad (2.3.180)$$

wenn $4 < \alpha$, $3 < \alpha < 4$ bzw. $2 < \alpha < 3$, und

$$\mathfrak{r}_2(r, \theta) \sim ar^{1-1/\alpha} U(\theta, \alpha). \quad (2.3.181)$$

In Gln. (2.3.180), (2.3.181) zeigen wir nur die Hauptterme von \mathfrak{r}_1 und \mathfrak{r}_2 . Mit Berücksichtigung von (2.3.89), (2.3.124), (2.3.127) erhält man

$$\mathfrak{r}_1(r, \pm\pi) \sim \begin{cases} -\frac{1}{a} r^{m'_4} a^{(\alpha-4)/(\gamma-2)} L_2(\pi, b_0, \alpha, \gamma, \nu) \\ -\frac{1}{a} r^{1+1/\alpha} q_0 \frac{(\pi\alpha/2)^m}{m(1+1/\alpha)} \frac{\Gamma(3/2-1/m)}{\Gamma(2-1/m)} \\ -\frac{1}{a} r^{2-2/\alpha} b (2/\alpha)^k \end{cases} \quad (2.3.182)$$

in den drei obengenannten Fällen, und

$$\mathfrak{r}_2(r, \pm\pi) \sim \pm ar^{1-1/\alpha} (2/\alpha)^{k/2}. \quad (2.3.183)$$

Gemäß (2.3.182), (2.3.183) werden die zwei Rißufer in die folgenden Kurven überführt

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_2 &= \pm \mathcal{K}(\alpha, \gamma, \nu) a |a^{(m'_4-1)\alpha} \mathfrak{r}_1|^{(1-1/\alpha)/m'_4}, \\ \mathfrak{r}_1 &< 0, \mathcal{K}(\alpha, \gamma, \nu) \neq 0 \end{aligned} \quad (2.3.184)$$

$$\varepsilon_2 = \pm K(\alpha, q_0) a^\alpha \left| \frac{\varepsilon_1}{a^\alpha} \right|^{(\alpha-1)/(\alpha+1)}, \quad (2.3.185)$$

$$\varepsilon_1 < 0, K(\alpha, q_0) \neq 0;$$

$$\varepsilon_2 = \pm K(\alpha, b) a^2 |\varepsilon_1/a|^{1/2}, \quad (2.3.186)$$

$$\varepsilon_1 < 0, K(\alpha, b) \neq 0;$$

in den drei obengenannten Fällen.

Es folgt aus (2.3.184)-(2.3.186), daß die Rißufer sich an der Rißspitze immer öffnen werden, und daß es keinen zum antisymmetrischen Modus der linearen Bruchmechanik analogen Modus gibt (cf.(2.3.35)). Diese Schlußfolgerung kann man ebenso durch eine Stabilitätsanalyse erzielen, denn wenn ein solcher Modus existierte, dann würde dies zu einem unendlich großen Druckspannungszustand an irgendeinem Rißufer führen, dem das Material gar nicht widerstehen könnte (vergleiche mit dem Eulerschen Stab). Der Öffnungswinkel zwischen den Rißufern erreicht bei $r \rightarrow 0$ in allen betrachteten Fällen 180° (siehe Abb.2.12). Folglich sieht das kanonische Feld in der nichtlinearen Bruchmechanik ähnlich aus wie das Verschiebungsfeld des Modus I in der linearen Bruchmechanik (cf. (2.3.34)). Um ferner ein beliebiges singuläres Feld infolge beliebiger Rißkonfiguration und Lastfälle zu erhalten, muß man statt des in der linearen Theorie üblichen Superpositionsprinzips die Komposition (2.3.158) benutzen. Wir nennen den Koeffizienten a von (2.3.181) auch Spannungsintensitätsfaktor (analog zur linearen Bruchmechanik). Es ist hier zu betonen, daß sowohl der Spannungsintensitätsfaktor a als auch die Rotationsmatrix Ω und der konstante Vektor ε^0 nur nach Auflösung des globalen Rißproblems bestimmt werden können. Wenn dennoch die äußere Belastung hinreichend klein ist, darf man annehmen, daß die Lösung des nichtlinearen Rißproblems näherungsweise durch die Lösung des linearisierten Rißproblems in allen Punkten weit weg von der Rißspitze ersetzt werden kann. Diese Annahme erlaubt es, den Spannungsintensitätsfaktor a mit Hilfe des Erhaltungssatz (2.3.31) und der bekannten Lösung des linearisierten Rißproblems für kleine Belastungen zu bestimmen (siehe [40, 41, 49]).

Wir fassen nun die asymptotischen Formeln für die wichtigsten Charakteristika des kanonischen Feldes zusammen. Zuerst präsentieren wir den Deformationsgradienten in der Form

$$\mathfrak{F} = j_1 \otimes \mathfrak{F}_1 + j_2 \otimes \mathfrak{F}_2, \quad (2.3.187)$$

wobei die Hauptterme von \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 durch

$$\mathfrak{F}_1 \sim r^{[1-(\alpha-4)/(\gamma-2)]/\alpha} a^{(\alpha-4)/(\gamma-2)-1} [-m'_4 L_2 \mathfrak{k}_1 - \dot{L}_2 \mathfrak{k}_2], \quad (2.3.188)$$

$$\mathfrak{F}_1 \sim r^{1/\alpha} \frac{1}{a} [-(1 + 1/\alpha) q_0 L_1 \mathfrak{k}_1 - q_0 \dot{L}_1 \mathfrak{k}_2], \quad (2.3.189)$$

$$\mathfrak{F}_1 \sim r^{1-2/\alpha} \frac{1}{a} [-2(1 - 1/\alpha) b U^2 \mathfrak{k}_1 - 2b U \dot{U} \mathfrak{k}_2], \quad (2.3.190)$$

in den drei betrachteten Fällen gegeben sind, und

$$\mathfrak{F}_2 \sim r^{-1/\alpha} a [(1 - 1/\alpha) U \mathfrak{k}_1 + \dot{U} \mathfrak{k}_2]. \quad (2.3.191)$$

Die Jakobische Determinante läßt sich wie folgt ausdrücken

$$J \sim (r^{-1/\alpha} a)^{(\alpha-4)/(\gamma-2)} H_2(\theta) + q_0, \quad (2.3.192)$$

$$J \sim q_0, \quad (2.3.193)$$

wenn $4 < \alpha$ bzw. $2 < \alpha < 4$. Durch Gebrauch von (2.3.23), kombiniert mit (2.3.187), können wir den Spannungstensor \mathfrak{P} wie folgt ausdrücken

$$\mathfrak{P} = j_1 \otimes \mathfrak{P}_1 + j_2 \otimes \mathfrak{F}_2, \quad (2.3.194)$$

wobei der singularste Spannungsvektor \mathfrak{P}_2 durch

$$\mathfrak{P}_2 \sim r^{-1+1/\alpha} A_1 \alpha a (a^2 G)^{\alpha/2-1} [(1 - 1/\alpha) U \mathfrak{k}_1 + \dot{U} \mathfrak{k}_2] \quad (2.3.195)$$

gegeben ist. Aus Gln. (2.3.51), (2.3.187)-(2.3.193) und aus der asymptotischen Eigenschaft der Funktion $\zeta(I, J, \alpha)$ folgt daß der singularste Term der Energiedichte die Potenz r^{-1} enthält

$$\Phi \sim r^{-1} A_1 a^\alpha G^{\alpha/2}. \quad (2.3.196)$$

Die Formel (2.3.196) garantiert, daß das in diesem Abschnitt beschriebene singuläre Feld in der Umgebung der Reißspitze der Menge \mathcal{U} der zulässigen Konfigurationen mit finiter Energie angehört (siehe (2.3.30)) ⁶.

Die asymptotischen Formeln (2.3.180)-(2.3.181) und ihre Konsequenzen spielen eine Schlüsselrolle bei der Lösung des nichtlinearen Randwertproblems (2.3.24), (2.3.23), (2.3.27)-(2.3.29).

⁶Dies gilt für beide, nichtlineare und linearisierte, Theorien.

Nachdem man die Lösung des singulären Rißproblems gefunden hat, muß man noch das Rißwachstumskriterium überprüfen (siehe Abschnitt 2.2.2)

$$|\mathfrak{J}| \leq 2\gamma, \quad (2.3.197)$$

mit γ der Energie der Rißoberflächen und \mathfrak{J} dem Vektor des Energiezuflusses zur Rißspitze, welcher sich wie folgt berechnen läßt

$$\mathfrak{J} = \lim_{|\mathcal{G}| \rightarrow 0} \int_{\mathcal{G}} (-\mathfrak{F}^T \mathfrak{p} \mathfrak{k} + \Phi \mathfrak{k}) ds. \quad (2.3.198)$$

Hier bezeichnen wir durch \mathcal{G} die geschlossene Kurve, die den Punkt $\mathfrak{x} \in \mathcal{L}$ enthält und gegen denselben schrumpft, wenn ihr Umfang $|\mathcal{G}|$ gegen null tendiert, durch \mathfrak{k} den äußeren Normaleneinheitsvektor an \mathcal{G} (siehe Abb.2.13).

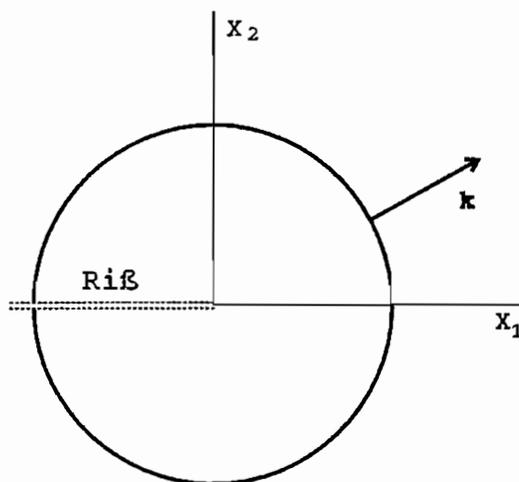


Abbildung 2.13: \mathcal{G} -Kontur.

Man bemerkt, daß der Erhaltungssatz (2.3.31) nicht direkt auf das Integral (2.3.198) angewandt werden kann, da \mathcal{G} in Glg. (2.3.198) keine Grenze eines finiten regulären Teilbereichs von $\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}$ ist. Aber aus Glg. (2.3.31) folgt, daß das J-Integral asymptotisch wegunabhängig ist (siehe, z.B., [50]). Wir können deswegen das Integral (2.3.198) über einen kleinen Kreis mit $ds = r d\theta$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1 = (\cos \theta, \sin \theta)$ bestimmen und dann r gegen null gehen lassen. Dies erlaubt es, nur den singulärsten Term von r^{-1} in dem Integral zu belassen, um das Integral und den Vektor \mathfrak{J} bestimmen zu können. Aus (2.3.92), (2.3.187)-(2.3.196) und (2.3.198) folgen

$$\mathfrak{J}_2 = 0, \quad (2.3.199)$$

$$\mathfrak{J}_1 = A_1 \left[\frac{2(\alpha - 1)^2}{\alpha^3} \right]^{\alpha/2} \int_{\pi}^{\pi} \left[\frac{\cos \theta}{\omega(\theta, \alpha)} + \frac{\alpha}{2} \sin^2 \theta - \frac{\alpha^2}{4} \omega(\theta, \alpha) \cos \theta - \frac{\alpha^2}{4} \cos^2 \theta \right] d\theta, \quad (2.3.200)$$

wobei $\omega(\theta, \alpha)$ die in Glg. (2.3.90) eingeführte Hilfsfunktion ist. Durchführung einer elementaren Integration in (2.3.200) liefert

$$\mathfrak{J}_1 = A_1 a^\alpha \frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{\alpha^3} \right)^{\alpha/2-1} (\alpha - 1)^{\alpha-1}. \quad (2.3.201)$$

Gemäß der Formeln (2.3.199), (2.3.201) liegt der Vektor des Energiezuflusses genau in der *Tangentialebene* zur Rißoberfläche, was bedeutet, daß eine Rißumlenkung für solche Klasse von gummiartigen Materialien unmöglich ist. Um die Effekte der Rißumlenkung beschreiben zu können, müssen wir wahrscheinlich nicht die isotropen und homogenen Materialien, sondern die Materialien mit *stochastischen Mikrostrukturen* betrachten, deren Oberflächenenergie vom *Winkel* zur Rißoberfläche abhängt. Aus (2.3.197) und (2.3.201) folgt, daß für das Rißwachstumskriterium nur der einzige Spannungsintensitätsfaktor a bestimmt werden muß. Wir merken auch, daß infolge Glg. (2.3.199) die Methode des virtuellen Rißwachstums, die die Ableitung der Energie entlang der tangentialen Richtung des Rißwachstums bestimmt (siehe [164]), effektiv für die Berechnung des Energiezuflusses zur Rißfront (oder der Energiefreisetzungsrates) sein mag.

2.4 Kohäsivkraft und Spannungsingularität

2.4.1 Problemstellung

Wir betrachten einen linear-elastischen Körper, deren Anfangskonfiguration den Bereich $\mathcal{B}_S = \mathcal{B} \setminus \bar{\mathcal{S}}$ des dreidimensionalen euklidischen Raumes einnimmt, wobei $\partial\mathcal{B}$ der äußere Rand und $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \partial\mathcal{S}$ der innere Rand sind. Die Fläche \mathcal{S} beschreibt einen Riß des Körpers in seiner Anfangskonfiguration. Nun wird der Körper so belastet (z.B. durch Zugkräfte), daß seine materiellen Punkte die Verschiebungen $w_i(x_j)$ (mit x_1, x_2, x_3 den kartesischen Koordinaten) erfahren werden und dadurch ein Spannungsfeld $\sigma_{ij}(x_k)$ hervorgerufen wird. Wenn keine Volumenkraft auf den Körper wirkt, dann muß die folgende Gleichgewichtsbedingung erfüllt werden

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (2.4.1)$$

mit $f_{,i} = \partial f / \partial x_i$. Wenn das Material homogen und isotrop ist, dann gilt nach dem Hookeschen Gesetz

$$\sigma_{ij} = \lambda w_{k,k} \delta_{ij} + \mu (w_{i,j} + w_{j,i}). \quad (2.4.2)$$

Die Randbedingungen auf der äußeren Oberfläche $\partial \mathcal{B}$ sind

$$w_i = 0 \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{B}_w, \quad (2.4.3)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \quad \text{auf} \quad \partial \mathcal{B}_t, \quad (2.4.4)$$

mit $\partial \mathcal{B}_w$ und $\partial \mathcal{B}_t$, den disjunkten Teilflächen von $\partial \mathcal{B}$, auf welchen die Verschiebungen w_i und Lasten t_i entsprechend vorgegeben sind, und mit n_i dem äußeren Normaleneinheitsvektor. Wir werden nur solche Lastfälle analysieren, die dazu führen, daß sich die Rißufer öffnen (sie werden sich also in der verformten Konfiguration nicht in Kontakt miteinander befinden). Unter Berücksichtigung einer Kohäsivkraft gelten die folgenden Randbedingungen auf Ω

$$\sigma_{ij}^+ n_j = \sigma_{ij}^- n_j = f_i([w_j]). \quad (2.4.5)$$

Die Indizes $+$, $-$ kennzeichnen die Grenzwerte der Feldgrößen auf den zwei Seiten von Ω , n_i entspricht dem Normaleneinheitsvektor, der die Richtung $+$ aufweist, f_i ist die Kohäsivkraft, die von der relativen Verschiebung $[w_i] = w_i^+ - w_i^-$ der gegenüberliegenden Rißufern abhängt. Barenblatt folgend [55] setzen wir die Existenz eines Potentials für die Kohäsivkraft voraus

$$f_i = \partial \phi / \partial [w_i], \quad (2.4.6)$$

wobei die Funktion $\phi([w_i])$ bei steigender Rißtrennung sehr schnell ihr Maximum erreicht und dann von dort an konstant bleibt (man nennt sie die Kohäsivenergie, siehe Abb.2.14).

Das Randwertproblem (2.4.1)-(2.4.6) kann mit Hilfe des folgenden Variationsprinzips formuliert werden. Wir führen einen Sobolev-Vektorraum $(H^1(\mathcal{B}_S))^3$ aller quadratisch integrierbaren Verschiebungsfelder mit quadratisch integrierbaren Ableitungen in \mathcal{B}_S und mit der verschwindenden Verschiebung auf $\partial \mathcal{B}_w$ ein. Man bemerkt, daß aufgrund des singulären Bereichs \mathcal{B}_S eine mögliche Singularität des Verschiebungsgradienten in

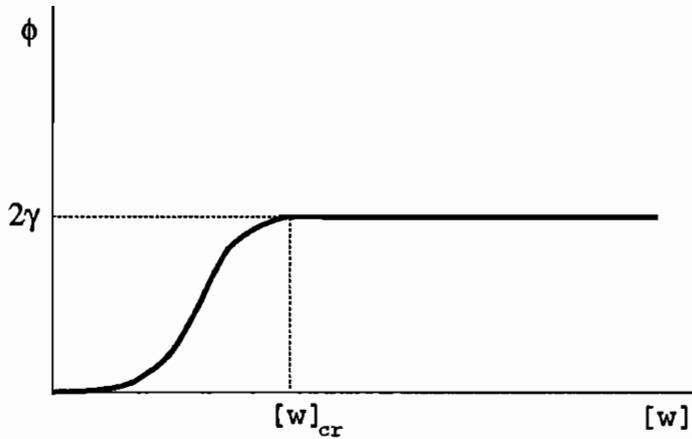


Abbildung 2.14: Kohäsivkraft und ihr Potential

Punkten von $\partial\mathcal{S}$ nicht auszuschließen ist, auch wenn die Verschiebungsfelder und ihre Ableitungen quadratisch integrierbar sind. Nun betrachten wir die folgende Menge $\mathcal{C}_S \subset (H^1(\mathcal{B}_S))^3$

$$\mathcal{C}_S = \{u_i \mid u_i \in (H^1(\mathcal{B}_S))^3, (u_i^+ - u_i^-)n_i \geq 0, x_i \in \mathcal{S}\}. \quad (2.4.7)$$

Für ein beliebiges Verschiebungsfeld $u_i \in \mathcal{C}_S$ definieren wir das Energiefunktional durch

$$I(u_i) = \int_{\mathcal{B}_S} W(u_{i,j}) dv - \int_{\partial\mathcal{B}_t} t_i u_i da + \int_{\mathcal{S}} \phi([u_i]) da, \quad (2.4.8)$$

mit $W(u_{i,j}) = (1/2)\lambda(u_{i,i})^2 + (1/4)\mu(u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i})$ der Verformungsenergiedichte. Berechnet man die Variation dieses Energiefunktionals und macht man von den bekannten Argumenten der Variationsrechnung Gebrauch (siehe, z.B. [76]), kann man zeigen daß Gln. (2.4.1)-(2.4.6) die Euler-Lagrangeschen Gleichungen von (2.4.8) sind. Man bemerkt, daß die durch das letzte Integral in (2.4.8) gegebene Kohäsivenergie positiv ist, was die Existenz eines Minimalen (Minimizer) des Funktionals (2.4.8) garantiert.

2.4.2 Energiefreisetzungsrates

Um die Änderung der Gesamtenergie infolge eines virtuellen Rißwachstums bestimmen zu können definieren wir die Menge \mathcal{C} der zulässigen Verschiebungsfelder als die Vereinigung von \mathcal{C}_Σ mit $\Sigma \supseteq \mathcal{S}$. Für ein beliebiges zulässiges Verschiebungsfeld $u_i(x_i) \in \mathcal{C}$ mit einer Sprungfläche

$\Sigma \supseteq \mathcal{S}$ definieren wir das Energiefunktional durch

$$I(u_i) = \int_{\mathcal{B}_\Sigma} W(u_{i,j}) dv - \int_{\partial \mathcal{B}_t} t_i u_i da + \int_{\Sigma} \phi([u_i]) da. \quad (2.4.9)$$

Nun betrachten wir eine Einparameterfamilie der zulässigen Verschiebungsfelder $u_i(x_i, \epsilon) \in \mathcal{C}$ mit den Sprungflächen \mathcal{S}^ϵ , die den folgenden Bedingungen genügen

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\epsilon'} \supseteq \mathcal{S}^\epsilon \supseteq \mathcal{S} \quad \text{für} \quad \epsilon' > \epsilon > 0, \quad \mathcal{S}^\epsilon \rightarrow \mathcal{S}, \quad \text{wenn} \quad \epsilon \rightarrow 0, \\ u_i(x_i, 0) = w_i(x_i). \end{aligned}$$

Die Variation der Gesamtenergie bei dem Gleichgewichtsverschiebungsfeld bezüglich der Familie $u_i(x_i, \epsilon)$ ist definiert durch

$$\delta I = \frac{d}{d\epsilon} I(u_i(x_i, \epsilon)) \Big|_{\epsilon=0}. \quad (2.4.10)$$

Die Schwierigkeiten solch einer Variationsrechnung von (2.4.10) sind mit den veränderlichen Integrationsbereichen $\mathcal{B}_{\mathcal{S}^\epsilon}$ und Sprungflächen \mathcal{S}^ϵ verknüpft. Um diese Bereiche und Flächen zu fixieren, führen wir eine Familie von Parametrisierungen $y_i(x_i, \epsilon)$ ein (siehe [19–22] und Abschnitt 2.2), die den Bereich $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ auf $\mathcal{B}_{\mathcal{S}^\epsilon}$, und die Fläche \mathcal{S} auf \mathcal{S}^ϵ transformieren und den folgenden Bedingungen genügen

$$y_i(x_i, \epsilon) = x_i \quad \text{wenn} \quad \epsilon = 0 \quad \text{oder} \quad x_i \in \partial \mathcal{B}.$$

Mit Hilfe dieser Familie der Parametrisierungen als eine Art des Variablenwechsels kann man die Variation (2.4.10) bestimmen. Die Variation der Verformungsenergie haben wir schon bestimmt (siehe [19–22, 165] und Abschnitt 2.2). Wir wollen jetzt die Variation der Kohäsivenergie bestimmen. Nach dem wir ein zweidimensionales krummliniges Koordinatensystem η_α auf der Fläche \mathcal{S} eingeführt haben, können wir schreiben

$$\delta \int_{\mathcal{S}^\epsilon} \phi([u_i]) da = \delta \int_{\mathcal{S}} \phi([u_i(y_i, \epsilon), \epsilon]) \sqrt{A^\epsilon} d^2 \eta, \quad (2.4.11)$$

wobei

$$A^\epsilon = \det |A_{\alpha\beta}^\epsilon|, \quad A_{\alpha\beta}^\epsilon = y_{i,\alpha} y_{i,\beta}.$$

Es ist leicht ersichtlich, daß

$$\delta \sqrt{A^\epsilon} = \sqrt{A} A^{\alpha\beta} x_{i,\alpha} \delta y_{i,\beta}.$$

Hier nehmen die griechischen Indizes die Werte 1 und 2 an, $A = \det |A_{\alpha\beta}|$, wobei $A_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha}x_{i,\beta}$ die Metrik der Fläche \mathcal{S} und $A^{\alpha\beta}$ der assoziierte kontravariante Metrik Tensor ist. Die vor den griechischen Indizes stehenden Kommata kennzeichnen die kovariante Ableitung auf \mathcal{S} . Anwendung des Gauss Theorems und Umformung von (2.4.11) liefern

$$\delta \int_{\mathcal{S}^\epsilon} \phi([w_i]) da = \int_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial [w_i]} [\delta u_i] - \frac{\partial \phi}{\partial [w_j]} [w_{j,\beta}] A^{\alpha\beta} x_{i,\alpha} \delta y_i - 2\phi([w_i]) H n_i \delta y_i \right) da,$$

wobei n_i , der Normaleneinheitsvektor, die Richtung + aufweist, und H die mittlere Krümmung von \mathcal{S} bezeichnet. Im Gegensatz zur Griffithschen Theorie gibt es hier keinen Anteil zur Energieänderung aus der Kohesivenergie, die durch das Oberflächenintegral auf $\partial\mathcal{S}$ gegeben ist. Dies kann man durch die Tatsache erklären, daß $\phi([w_i]) = 0$ auf $\partial\mathcal{S}$ ist.

Die Variation der Gesamtenergie läßt sich also wie folgt ausdrücken

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{\mathcal{B}_S} (-\sigma_{ij,j} \delta u_i - \mu_{ij,j} \delta y_i) dv + \int_{\mathcal{S}} \left\{ (-\sigma_{ij}^+ \delta u_i^+ + \sigma_{ij}^- \delta u_i^-) n_j + \frac{\partial \phi}{\partial [w_i]} [\delta u_i] \right. \\ & + ((-\mu_{ij}^+ + \mu_{ij}^-) n_j - \frac{\partial \phi}{\partial [w_j]} [w_{j,\beta}] A^{\alpha\beta} x_{i,\alpha} - 2\phi([w_i]) H n_i) \delta y_i \left. \right\} da \\ & - \int_{\partial\mathcal{B}_S} J_i \delta y_i ds + \int_{\partial\mathcal{B}_t} (\sigma_{ij} n_j - t_i) da. \quad (2.4.12) \end{aligned}$$

Hier entspricht σ_{ij} dem Cauchyschen Spannungstensor, μ_{ij} ist der Eshelby-Tensor, der wie folgt definiert ist

$$\mu_{ij} = -\sigma_{kj} w_{k,i} + W(w_{i,j}) \delta_{ij},$$

und J_i ist der J-Integral-Vektor

$$\begin{aligned} J_i &= \lim_{|\Gamma| \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \mu_{ij} \kappa_j ds \\ &= \lim_{|\Gamma| \rightarrow 0} \int_{\Gamma} (-\sigma_{kj} w_{k,i} \kappa_j + W \kappa_i) ds, \quad (2.4.13) \end{aligned}$$

mit Γ der Kontur, die den Punkt $x_i \in \partial\mathcal{S}$ enthält und gegen denselben schrumpft, wenn ihr Umfang gegen null tendiert, und κ_i dem Normaleneinheitsvektor an Γ . Wenn man das tatsächliche Verschiebungsfeld w_i als Minimal des Funktional (2.4.8) in Glg. (2.4.12) einsetzt, dann reduziert sich der letztere aufgrund Gln. (2.4.1)-(2.4.6) und der Tatsache, daß $\delta y_i n_i = 0$ auf \mathcal{S} ist, zu

$$\delta I = - \int_{\partial\mathcal{S}} J_i \delta y_i ds. \quad (2.4.14)$$

Wir nennen den Ausdruck (2.4.14) die Energiefreisetzungsrate.

2.4.3 Energieminimale und Spannungssingularität

Nun beschränken wir uns auf das ebene Rißproblem für einen unbegrenzten Körper mit einem Riß auf dem Intervall $\mathcal{L} = (-a, a)$ der x -Achse (Abb.2.15).

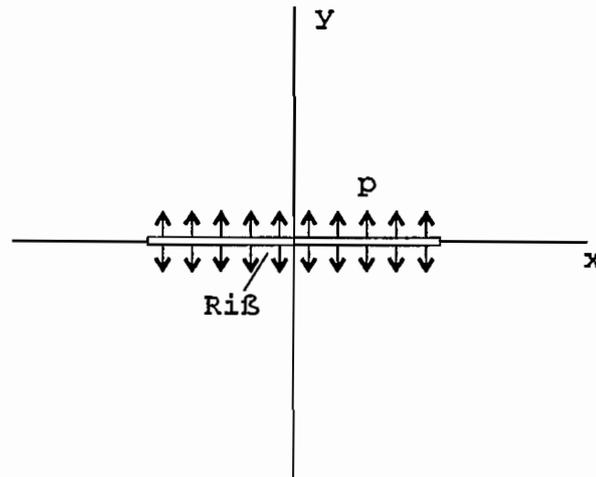


Abbildung 2.15: Rißkonfiguration

Es sei nun $p(x)$ die Normalspannung in y -Richtung, die durch die Lasten erzeugt würde wenn es keinen Riß gäbe. Wir nehmen an, daß die relative Verschiebung $\varphi(x) = [w_2]$ der Rißufer (oder kurz die Rißtrennung) die normale Richtung aufweist (das heißt, y -Richtung). Eliminiert man in dem Energiefunktional die Terme, die das bekannte stetige Verschiebungsfeld enthält, erhält man damit

$$I = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{L}} W(u_{\alpha, \beta}) da - \int_{-a}^a p(x) \varphi(x) dx + \int_{-a}^a \phi(\varphi(x)) dx. \quad (2.4.15)$$

Wendet man das Gauss Theorem auf den ersten Term der rechten Seite von Glg. (2.4.15) unter Berücksichtigung von $W = (1/2)\sigma_{\alpha\beta}u_{\alpha,\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) an, reduziert man (2.4.15) zu

$$I = -\frac{1}{2} \int_{-a}^a \sigma_{22}(x) \varphi(x) dx - \int_{-a}^a p(x) \varphi(x) dx + \int_{-a}^a \phi(\varphi(x)) dx. \quad (2.4.16)$$

Das Verschiebungsfeld u_α mit der Rißtrennung $\varphi(x)$ kann durch stetig verteilte Versetzungen mit einer unbekanntem Versetzungsdichte $\rho(x)$ auf \mathcal{L}

dargestellt werden. Solche stetig verteilten Versetzungen erzeugen die folgenden Zugspannungen auf \mathcal{L}

$$\sigma_{22}(x) = -D \int_{-a}^a \frac{\rho(y)}{y-x} dy, \quad D = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)}. \quad (2.4.17)$$

Hierbei ist ν die Poissonsche Zahl, außerdem bedeutet das Symbol \int das Integral vom Cauchyschen Typ. Bei der Herleitung (2.4.16) haben wir von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß das durch $\rho(x)$ erzeugte Spannungsfeld $\sigma_{\alpha\beta}$ den Gleichgewichtsbedingungen genügt. Da die Rißtrennung durch die Versetzungsdichte ausgedrückt werden kann

$$\varphi = - \int_{-a}^x \rho(y) dy,$$

oder $\rho = -d\varphi/dx$, kann man Glg.(2.4.16) wie folgt umformen

$$\begin{aligned} I &= \frac{D}{2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \ln|x-y| \varphi'(x) \varphi'(y) dx dy \\ &\quad - \int_{-a}^a p(x) \varphi(x) dx + \int_{-a}^a \phi(\varphi(x)) dx. \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

Nun reduziert sich das Variationsproblem (2.4.8) auf die Bestimmung der Minimale des Funktional (2.4.18). Die Funktion $\ln|x-y|$ in (2.4.18) kann im Sinne einer Distribution interpretiert werden (siehe [166]). Der erste Term von (2.4.18) ist eine positive quadratische Form, weil er dem ersten Integral von (2.4.15) gleich ist. Der dritte Term von (2.4.18) ist ebenfalls positiv. Deswegen kann man den Existenzsatz für Minimale von (2.4.18) leicht prüfen. Die Euler-Lagrangesche Gleichung für Minimale hat die folgende Form

$$-D \int_{-a}^a \frac{\varphi(y)}{(y-x)^2} dy + f(\varphi(x)) = p(x), \quad (2.4.19)$$

mit $f = d\phi/d\varphi$. Das Integral auf der linken Seite der Glg. (2.4.19) ist singular und muß als Integral vom Hadamardschen Typ interpretiert werden (siehe [167]) oder, was dem gleich ist, als Faltungsprodukt von $\varphi(x)$ (das außerhalb $[-a, a]$ Null gesetzt ist) mit der generalisierten Funktion x^{-2} . Zur Glg. (2.4.19) müssen außerdem noch die Randbedingungen gestellt werden, die die verschwindende Rißtrennung an den Rißspitzen bedeuten

$$\varphi(-a) = \varphi(a) = 0. \quad (2.4.20)$$

Probleme dieses Typs sind erstmals systematisch durch Nemat-Nasser und Hori behandelt worden [60]. Die Methode der asymptotischen Analyse von (2.4.19), (2.4.20) ist in der letzten Zeit intensiv entwickelt worden ([56–62]).

Mit $\varphi_m(x, a)$ bezeichnen wir die Lösung des Problems (2.4.19), (2.4.20), die einem Minimal des Funktionals (2.4.18) mit dem Parameter a entspricht. Wenn wir nun $\varphi_m(x, a)$ als eine Familie der zulässigen Rißtrennungsfelder betrachten und die Formel (2.4.14) darauf anwenden, dann ergibt sich aufgrund der vorhandenen Symmetrie

$$\dot{I}_m(a) = -2J_1(a). \quad (2.4.21)$$

Dementsprechend muß das gleiche ebenfalls für das J-Integral gelten, wenn die Ableitung des Minimums der Energie $I_m(a)$ nicht verschwindet. Letzterer ist für den Modus I gleich

$$J_1 = \frac{1-\nu}{2\mu} K_I^2, \quad (2.4.22)$$

wobei K_I der Spannungsintensitätsfaktor ist (siehe, z.B., [21]). Folglich kann \dot{I}_m nur negativ oder gleich Null sein, und wenn $\dot{I}_m < 0$, dann werden die Minima von (2.4.8) die quadratische Wurzel-Singularität bei den Spannungen haben.

Um die Ungleichung $\dot{I}_m < 0$ zu prüfen ist es ausreichend, eine obere Schranke für das Minimum der Energie $I_m(a)$ als Funktion der Rißlänge festzustellen. Zuerst kann man leicht sehen, daß $I_m(a) \leq 0$ für alle $a \geq 0$. Wenn wir in der Tat $\varphi \equiv 0$ in das Funktional (2.4.18) einsetzen, erhalten wir $I(0) = 0$. Wir werden hier einfachheitshalber nur homogene Lasten betrachten, so daß $p(x) = p = \text{const}$ gilt. Wir nehmen das Kohäsivpotential in der Form an

$$\phi = \begin{cases} c\varphi^2 & \text{für } \varphi \leq \varphi_{cr} \\ 2\gamma & \text{für } \varphi \geq \varphi_{cr} \end{cases}, \quad (2.4.23)$$

mit c einer Konstante von der Ordnung eines zehntels des Young'schen Modulus und γ der Oberflächenenergie. Wir wählen die folgende "Versuchsfunktion"

$$\varphi^* = \frac{p}{\pi D} \sqrt{a^2 - x^2}. \quad (2.4.24)$$

Die Versetzungsdichte ρ^* ist gleich

$$\rho^* = -\frac{d\varphi^*}{dx} = \frac{px}{\pi D\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad (2.4.25)$$

und die Spannung $\sigma_{22}^*(x)$, die sich durch (2.4.17) berechnen läßt, bleibt konstant

$$\sigma_{22}^* = -p. \quad (2.4.26)$$

Wenn man $\varphi^*(x)$ in das Funktional (2.4.18) einsetzt und Glg. (2.4.26) berücksichtigt, erhält man

$$I(\varphi^*) = -\frac{p^2 a^2}{4D} + \int_{-a}^a \phi\left(\frac{p}{\pi D}\sqrt{a^2 - x^2}\right) dx. \quad (2.4.27)$$

Wir nehmen erst an, daß a klein ist, so daß $pa/\pi D \leq \varphi_{cr}$. Dann können wir $\phi(\varphi^*) = c\varphi^{*2}$ ersetzen, was zu einer expliziten Bestimmung des Integrals in (2.4.27) führt

$$I(\varphi^*) = -\frac{p^2 a^2}{4D} + \frac{4cp^2 a^3}{3\pi^2 D^2}. \quad (2.4.28)$$

Wenn a groß ist, ersetzen wir einfach ϕ durch 2γ und erhalten damit die Ungleichung

$$I(\varphi^*) \leq -\frac{p^2 a^2}{4D} + 2\gamma a. \quad (2.4.29)$$

In beiden Fällen sind die oberen Schranken für das Minimum der Energie asymptotisch äquivalent zu $-p^2 a^2/4D$, wenn $a \rightarrow 0$ oder $a \rightarrow \infty$, siehe Abb.2.16.

Die Kurve $I_m(a)$ muß unter der Kurve $I(\varphi^*(x, a))$ liegen, mit der Konsequenz, daß seine Ableitung für beide, kleine und große a , negativ sein muß. Weil diese Funktion nirgendwo eine positive Ableitung hat, darf sie nur isolierte stationäre Stellen oder Intervalle mit verschwindender Ableitung haben. Lösungen, welche diesen stationären Stellen oder Intervallen entsprechen, haben keine Spannungssingularität und können daher Barrenblattsche Felder genannt werden.

Aus den hier erhaltenen Ergebnissen können wir die folgende Schlußfolgerung ziehen: Die Einführung der Kohäsivkraft kann nicht die Spannungssingularität der Minimale des Energiefunktionals beseitigen. Es ist

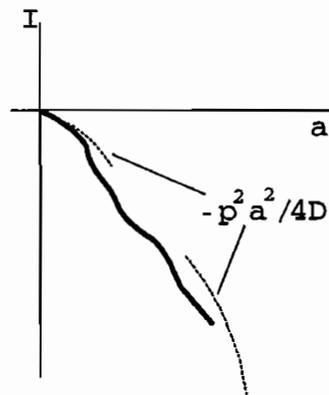


Abbildung 2.16: Minimum der Energie $I_m(a)$ und seine obere Schranke

nicht schwer zu zeigen, daß diese Schlußfolgerung unabhängig von der konkreten Form des Kohäsivpotentials ist, vorausgesetzt daß $\phi \sim c\varphi^m$ für kleine φ , mit $m > 1$. Daraus folgt, daß der richtige Weg, um das Gleichgewichtsfeld als Energieminimal zu bestimmen und gleichzeitig eine Spannungssingularität zu vermeiden, der ist, neue nichtlineare Konstitutivgleichungen einzuführen. Die Prozeßzone (wo die Materialentfestigung durch Bildung von Mikroporen auftreten kann [64]) muß vor der Rißspitze gesucht werden, und nicht an den Rißufern, deren Kohäsivkraft bestenfalls nur den Spannungsintensitätsfaktor mindern kann.

Kapitel 3

Mechanik mikroinhomogener Materialien

3.1 Variationsmethode der Homogenisation

3.1.1 Problemstellung

Viele Probleme der Mechanik und Physik können wie folgt formuliert werden: Man bestimme die Minimale des Funktionales

$$I(u) = \int_V L(a(x), u, \nabla u) dv, \quad (3.1.1)$$

wobei V einen Bereich des dreidimensionalen euklidischen Raumes bezeichnet, u eine (vektorwertige) Funktion auf V ist, und $a(x)$ die physikalischen Charakteristika des Mediums darstellen. Wenn die letzteren sich schnell von Punkt zu Punkt ändern, so daß die charakteristische Länge ϵ dieser Änderung sehr viel kleiner als die Maßstäbe des Bereiches V ist, dann sagt man, daß das Medium mikroinhomogen ist. Wichtige Beispiele sind Vielkristalle und Komposite (Verbundwerkstoffe) in allen möglichen Konformationen (Schichtstrukturen, Faserstrukturen etc.). Eine numerische Lösung des Problems (3.1.1) ist zumindest unpraktisch, wenn überhaupt möglich. Die Gründe dafür sind, daß erstens die zur Zeit bekannten Finite-Elemente-Programme solche komplizierten Probleme noch nicht behandeln können, und daß man zweitens auch nicht die vollständigen Informationen über die Mikrostruktur zur Verfügung hat. Zu Hilfe kommt dabei dann die Methode der Homogenisation (siehe [72–74]).

Wir führen einen dreidimensionalen Raum R_y der sogenannten schnellen Variablen y ein, die als dimensionslos betrachtet werden. Es sei $A(y)$ eine (im allgemeinen tensorwertige) Funktion auf R_y , deren charakteristi-

sche Länge 1 ist. Man setzt

$$a(x) = A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

in (3.1.1) ein und untersucht das Variationsproblem in Abhängigkeit des Parameters ϵ bei dem Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$. Wenn dabei die Minimale \hat{u}_ϵ des Funktionales (3.1.1) gegen irgendeine Funktion \hat{v} gehen, die unabhängig von ϵ ist und als Minimal des folgenden Funktionales

$$\bar{I}(v) = \int_V \bar{L}(v, \nabla v) dv \quad (3.1.2)$$

dient, dann sagt man, daß das Funktional (3.1.2) ein homogenisiertes Funktional von (3.1.1) ist.

Eine Angabe der Funktion $A(y)$ bedeutet die Angabe einer Realisierung der Mikrostruktur. Das Problem der Homogenisation besteht in einer Beschreibung von Realisierungen oder Klassen von Realisierungen, die den Übergang von (3.1.1) zu (3.1.2) ermöglichen. Dazu muß auch das homogenisierte Funktional (3.1.2) aus (3.1.1) bestimmt werden. Ein wichtiges Beispiel von mikroinhomogenen Medien ist das periodische Medium, dessen Funktion $A(y)$ eine periodische Funktion von y ist. Wenn $A(y, \omega)$ ein zufälliges Feld ist, mit dem Parameter ω (Nummer der Realisierung) aus einer Menge Ω , auf welchem ein zufälliges Maß μ vorgegeben ist, dann spricht man von einem zufälligen Medium. In diesem Fall werden die Minimale des Funktionales (3.1.1) von der Realisierung abhängen. Im weiteren wird klar, daß die Homogenisation praktisch für jede Realisierung durchgeführt werden muß, und daß die homogenisierte Lagrangian \bar{L} dabei im allgemeinen auch von der Realisierung abhängt. Deswegen interessieren wir uns dafür, Mengen von Realisierungen zu finden, die die Unabhängigkeit der Lagrangian \bar{L} von der Realisierung garantieren.

3.1.2 Homogenisation periodischer Medien

In dem Raum R_y betrachten wir ein Gitter, das durch die Gittervektoren $\tau_{(p)}$ ($p = 1, 2, 3$) gebildet wird, mit den Gitterpunkten $n^p \tau_{(p)}$ (mit n^p den ganzen Zahlen). Jedem Gitterpunkt $n^p \tau_{(p)}$ wird eine Zelle Z_n zugeordnet, die ein Parallelepipet ist, dessen Kanten die Vektoren $\tau_{(p)}$ sind und dessen Mittelpunkt mit dem Gitterpunkt $n^p \tau_{(p)}$ zusammenfällt. Die Zelle Z_0 wird auch durch Z bezeichnet. Die dualen Vektoren des Umkehrgitters sind

durch $\tau^{(p)}$ bezeichnet (die Indizes befinden sich also oben). Sie werden durch die Gleichung

$$\tau^{(p)}\tau^{(q)} = \delta_p^q$$

bestimmt.

Die Funktion $A(y)$ wird innerhalb irgendeiner Zelle angegeben und läßt sich dann außerhalb periodisch fortsetzen. Sie kann bereichsweise stetig sein, insbesondere brauchen die Werten von $A(y)$ an den gegenüberliegenden Seitenflächen nicht unbedingt gleich zu werden. Ein Spezialfall von bereichsweise stetigen Funktionen $A(y)$ sind die bereichsweise konstanten Funktionen, deren Wert in irgendeinem Teilbereich E (Einfügung) gleich a_1 , und in $Z \setminus E$ gleich a_2 ist (siehe Abb. 3.1). Das Problem der Homoge-

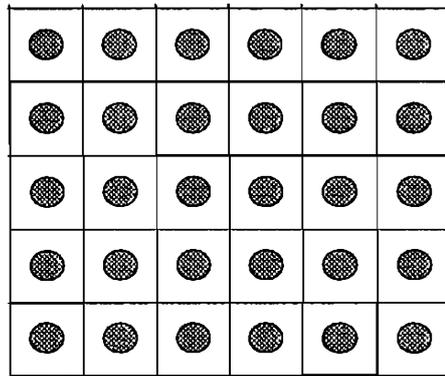


Abbildung 3.1: Ein periodisches Medium

nisation reduziert sich nun auf die Untersuchung des Funktionales

$$I(u) = \int_V L \left(A \left(\frac{x}{\epsilon} \right), u, \nabla u \right) dv, \quad (3.1.3)$$

das von dem Parameter ϵ abhängt. Nun suchen wir Minimale des Funktionales (3.1.3) in der Klasse folgender Funktionen

$$u = U \left(\frac{x}{\epsilon}, x, \epsilon \right), \quad (3.1.4)$$

wobei $U(y, x, \epsilon)$ periodische Funktionen mit den Perioden $\tau^{(p)}$ bezüglich y sind. Dann ist die Ableitung von u gleich

$$\nabla u = \frac{1}{\epsilon} \nabla_y U + \nabla_x U,$$

wobei ∇_y und ∇_x die Ableitung nach y bzw. die Ableitung nach x bei festem y bezeichnet. In der ersten Approximation kann man ∇u durch

$\nabla u = (1/\epsilon)\nabla_y U$ ersetzen, deswegen nimmt das Funktional (3.1.4) die folgende Form an

$$I(U) = \int_V L \left(A \left(\frac{x}{\epsilon} \right), U, \frac{1}{\epsilon} \nabla_y U \right) d^3 x. \quad (3.1.5)$$

Nun betrachten wir die Abbildung $y \rightarrow x : x = \epsilon y$. Infolge dieser Abbildung werden die Zellen Z_n des Raumes R_y in die viel kleineren Zellen \tilde{Z}_n mit der Kantenlänge der Ordnung ϵ überführt, die den Bereich V füllen. Das Integral von (3.1.5) läßt sich dann als Summe der Integrale über die Zellen umschreiben

$$\sum_n \int_{\tilde{Z}_n} L \left(A \left(\frac{x}{\epsilon} \right), U \left(\frac{x}{\epsilon}, x, \epsilon \right), \frac{1}{\epsilon} \nabla_y U \left(\frac{x}{\epsilon}, x, \epsilon \right) \right) d^3 x \quad (3.1.6)$$

Nur die Integrale über die Zellen, welche sich strikt innerhalb des Bereiches V befinden, fließen in diese Summe ein. Die Integrale über die Zellen an der Grenze des Bereiches V können vernachlässigt werden, da deren Anzahl verglichen mit der Zahl der übrigen Zellen klein ist (sie ist von der Ordnung $1/\epsilon^2$ verglichen mit der Ordnung $1/\epsilon^3$).

In jedem Integral über die Zelle \tilde{Z}_n kann man die Abhängigkeit der Funktion U von der langsamen Variablen x vernachlässigen, dabei

$$\int_{\tilde{Z}_n} L d^3 x = \epsilon^3 \int_{Z_n} L \left(A(y), U(y, x, \epsilon), \frac{1}{\epsilon} \nabla_y U(y, x, \epsilon) \right) d^3 y.$$

Infolge der Periodizität bezüglich y kann man die Integrale über Z_n durch das Integral über Z ersetzen. Folglich läßt sich die Summe (3.1.6) näherungsweise wieder als Integral ausdrücken

$$\int_V \left(\frac{1}{|Z|} \int_Z L \left(A(y), U(y, x, \epsilon), \frac{1}{\epsilon} \nabla_y U(y, x, \epsilon) \right) d^3 y \right) d^3 x. \quad (3.1.7)$$

Die Bestimmung von Minimalen des Funktionalen (3.1.7) reduziert sich auf die Bestimmung von Minimalen des folgenden Funktionalen über die Zelle

$$J_0(U) = \frac{1}{|Z|} \int_Z L(A(y), U(y, x, \epsilon), \frac{1}{\epsilon} \nabla_y U(y, x, \epsilon)) d^3 y, \quad (3.1.8)$$

wobei die $U(y, x, \epsilon)$ periodische Funktionen bezüglich y sind. Bei diesem Variationsproblem kann man x einfach als Parameter betrachten.

Die weiteren Schritte hängen wesentlich davon ab, wie sich die Minimale des Funktionales (3.1.8) bei $\epsilon \rightarrow 0$ verhalten. Wir analysieren den Fall, bei dem die Minimale von (3.1.8) unabhängig von y sind. Typische Lagrangian, für die diese Eigenschaft gilt, ist die Lagrangian quasilinear elliptischer Gleichungen (z.B. $L = 1/2 A^{ij}(y, U) U_{,i} U_{,j}$, mit A^{ij} einem positiv definiten Tensorfeld 2-ter Stufe). Dann ergibt sich

$$U = v(x)$$

mit $v(x)$ einer noch beliebigen Funktion von x . Sie bilden zusammen eine Menge M_0 im allgemeinen Schema der variationell-asymptotischen Methode [76].

Wir fixieren v und verfeinern die Minimale von (3.1.3) durch

$$u = v + U'(y, x, \epsilon), \quad (3.1.9)$$

wobei U' periodisch bezüglich y und asymptotisch kleiner als v ist. Die Allgemeinheit wird nicht verletzt, wenn U' folgender Einschränkung unterworfen wird

$$\langle U' \rangle = 0, \quad \langle \cdot \rangle = \frac{1}{|Z|} \int_Z \cdot d^3 y. \quad (3.1.10)$$

Gilt diese Einschränkung, läßt sich v als Mittelwert (über die Zelle) des Feldes u interpretieren

$$v(x, \epsilon) = \langle u(y, x, \epsilon) \rangle. \quad (3.1.11)$$

Setzt man (3.1.9) in das Funktional (3.1.3) ein und vernachlässigt man den Term $\nabla_x U'$, der asymptotisch kleiner als $(1/\epsilon) \nabla_y U'$ ist, erhält man folgendes Funktional

$$\int_V L \left(A, v + U', \nabla_x v + \frac{1}{\epsilon} \nabla_y U' \right) d^3 x. \quad (3.1.12)$$

Die Funktion U' in dem zweiten Argument der Lagrangian L kann vernachlässigt werden, denn sie ist asymptotisch klein verglichen mit v . Macht man die Umformungen analog zu den oben durchgeführten Schritten, kann man zeigen, daß die Bestimmung von U' sich auf die Bestimmung der Minimale des folgenden Funktionales

$$\frac{1}{|Z|} \int_Z L \left(A(y), v, \nabla_x v + \frac{1}{\epsilon} \nabla_y U' \right) d^3 y \quad (3.1.13)$$

reduziert, wobei U' der Menge periodischer Funktionen angehört, welche der Einschränkung (3.1.10) genügen. Es ist offensichtlich, daß das Funktional (3.1.13) invariant bezüglich der Verschiebung von U' um eine beliebige Konstante ist, deswegen hat die Einschränkung (3.1.10) keinen Einfluß auf sein Minimum, sie ist nur für die Bestimmung von U' wichtig. Man kann nun die neue unbekannte Funktion ψ durch $U' = \epsilon\psi$ einführen, um das Funktional (3.1.13) unabhängig von ϵ zu machen

$$\frac{1}{|Z|} \int_Z L(A(y), v, \nabla_x v + \nabla_y \psi) d^3 y \quad (3.1.14)$$

Das heißt, die Minimale von (3.1.14) sind unabhängig von ϵ . Wir gehen davon aus, daß das Funktional (3.1.14) ein einziges Minimal $\hat{\psi}$ besitzt, und sein Minimum $\bar{L}(v, \nabla v)$ ist. Dann reduziert sich die Bestimmung von v auf die Bestimmung der Minimale des folgenden Funktionales

$$\bar{I}(v) = \int_V \bar{L}(v, \nabla v) d^3 x. \quad (3.1.15)$$

Sind die Minimale von (3.1.14) und (3.1.15) bekannt, dann lassen sich die Minimale des Problem (3.1.3) asymptotisch wie folgt ausdrücken

$$\hat{u}(x, \epsilon) = \hat{v}(x) + \epsilon \hat{\psi}(y, v, \nabla v). \quad (3.1.16)$$

Gemäß dieser Gleichung gilt $\hat{u} \rightarrow \hat{v}$ bei $\epsilon \rightarrow 0$. Dies gilt nicht mehr für die Ableitung von \hat{u} , denn

$$\nabla \hat{u} = \nabla \hat{v} + \nabla_y \hat{\psi}. \quad (3.1.17)$$

Um die Ableitung von \hat{u} zu bestimmen, muß man also auch das Zellproblem lösen. Qualitativ läßt sich die Lösung des Problem (3.1.3) wie in Abb.3.2 darstellen: Einer langsam veränderlichen Funktion ist eine schnelle periodische Oszillation überlagert. Infolge der Periodizität wird der Mittelwert von $\nabla \hat{u}$ über die Zelle mit $\nabla \hat{v}$ zusammenfallen.

Im folgenden wird das Funktional (3.1.14) konvex bezüglich ψ angenommen, deswegen ist \bar{L} das Minimum von (3.1.14)

$$\bar{L}(v, \nabla v) = \inf_{\psi} \frac{1}{|Z|} \int_Z L(A(y), v, \nabla v + \nabla_y \psi) d^3 y \quad (3.1.18)$$

in der Menge periodischer Funktionen ψ . Mit Hilfe von (3.1.18) kann man obere Schranken für \bar{L} erhalten.

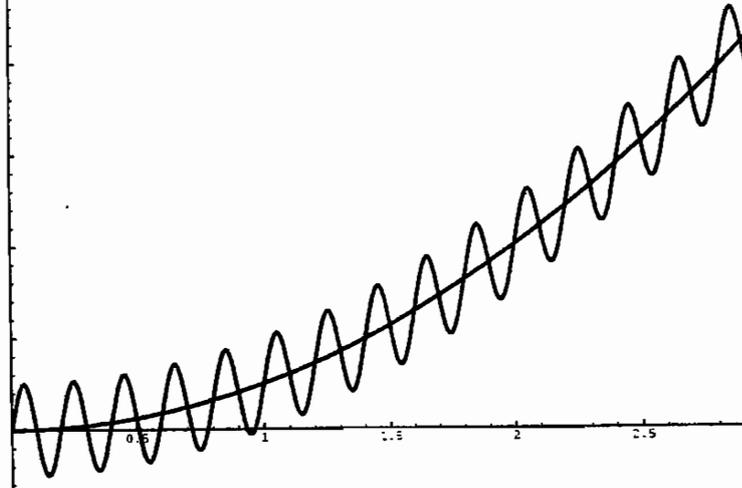


Abbildung 3.2: Graphische Darstellung der Lösung

Wir untersuchen das duale Problem von (3.1.18). Dazu führen wir die Variablen \mathbf{p} dual bezüglich ∇u ein, und wenden die Fenchel-Transformation [168] auf die Funktion $L(a, u, \nabla u)$ bezüglich ∇u an. Das Ergebnis bezeichnen wir durch $L^*(a, u, \mathbf{p})$. Man formt das Variationsproblem (3.1.18) um

$$\bar{L} = \inf_{\psi} \langle L \rangle = \inf_{\psi} \sup_{\mathbf{p}} \langle \mathbf{p} \cdot (\nabla v + \nabla_y \psi) - L^*(A, v, \mathbf{p}) \rangle.$$

Daher ist es ausreichend, nur die Funktionen \mathbf{p} zuzulassen, die der folgenden Identität $\langle \mathbf{p} \cdot \nabla_y \psi \rangle = 0$ für alle periodischen Funktionen ψ genügen. Diese Identität ist äquivalent zu

$$\operatorname{div}_y \mathbf{p} = 0, \quad [\mathbf{p}]_{(s)} \boldsymbol{\nu}_{(s)} = 0. \quad (3.1.19)$$

Das Symbol $[\mathbf{p}]_{(s)}$ bedeutet hier die Differenz der Werte von \mathbf{p} an den gegenüberliegenden Seitenflächen der Zelle, und $\boldsymbol{\nu}_{(s)}$ ist der entsprechende Normaleneinheitsvektor. Daraus ergibt sich

$$\bar{L}(v, \nabla v) = \sup_{\mathbf{p}} (\langle \mathbf{p} \rangle \cdot \nabla v - \langle L^*(A, v, \mathbf{p}) \rangle), \quad (3.1.20)$$

wobei das Maximum in der Menge aller \mathbf{p} gefunden werden muß, die den Einschränkungen (3.1.19) genügen.

Das oben hergeleitete duale Variationsproblem läßt sich in eine elegante Form umschreiben, wenn man die Fenchel-Transformation auf die Funktion $\bar{L}(v, \nabla v)$ anwendet. Bezeichnet man durch $\bar{L}^*(v, \bar{\mathbf{p}})$ das Ergebnis, kann

man zeigen, daß

$$\bar{L}^*(v, \bar{\mathbf{p}}) = \inf_{\mathbf{p} \in (3.1.19), \langle \mathbf{p} \rangle = \bar{\mathbf{p}}} \langle L^*(A, v, \mathbf{p}) \rangle. \quad (3.1.21)$$

Mit Hilfe von (3.1.21) kann man untere Schranken für \bar{L} erhalten.

3.1.3 Homogenisation zufälliger Medien

Die Homogenisation zufälliger Medien kann analog zu der obigen Herleitung durchgeführt werden. Wir beginnen mit der Definition des räumlichen Mittelwertes einer Funktion. Es sei Z ein Würfel (oder eine Kugel), dessen Volumen gleich 1 ist und dessen Mittelpunkt sich im Ursprung des Koordinatensystemes befindet. Wir bezeichnen durch λZ den Würfel mit der Kantenlänge λ . Es sei ferner $f(y)$ eine Funktion, und es existiert folgender Grenzwert für einen beliebigen konstanten Vektor c

$$\langle f \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda^3} \int_{\lambda Z} f(y + c) d^3 y.$$

Er wird räumlicher Mittelwert der Funktion f genannt.

Wir betrachten nun eine stetige Funktion der schnellen und langsamen Variablen $f(y, x)$, für die ein räumlicher Mittelwert bei jedem x existiert. Dann gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_V f\left(\frac{x}{\epsilon}, x\right) d^3 x = \int_V \langle f(y, x) \rangle d^3 x. \quad (3.1.22)$$

Zum Beweis von (3.1.22) zerschneidet man den Bereich V in kleine Würfel \tilde{Z}_n mit der Kantenlänge Δ , so daß die Funktion $f(x/\epsilon, x)$ innerhalb jedes Würfels als konstant bezüglich x betrachtet werden kann. Weil $\Delta \gg \epsilon$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{Z}_n} f\left(\frac{x}{\epsilon}, x\right) d^3 x &\approx \Delta^3 \left(\frac{1}{\lambda^3} \int_{\lambda Z} f\left(y + \lambda \frac{x_n}{\Delta}, x\right) d^3 y \right) \\ &\approx \langle f(y, x) \rangle \Delta^3, \end{aligned}$$

wobei man eine Variablentransformation $(x - x_n)/\epsilon = y$ durchgeführt hat, mit x_n dem Mittelpunkt des Würfels Z_n und $\lambda = \Delta/\epsilon$. Daraus ergibt sich (3.1.22).

Es sei nun $A(y)$ irgendeine Realisierung des Mediums. Wir suchen dann die Lösung des Homogenisationsproblems in der Form

$$u = U\left(\frac{x}{\epsilon}, x, \epsilon\right),$$

wobei die Funktion $U(y, x, \epsilon)$ überall in R_y definiert ist. In der ersten Approximation gilt $\nabla u = (1/\epsilon)\nabla_y U$, folglich nimmt das Integral (3.1.3) gemäß (3.1.22) die folgende Form an

$$\int_V \left\langle L \left(A(y), U(y, x, \epsilon), \frac{1}{\epsilon} \nabla_y U(y, x, \epsilon) \right) \right\rangle d^3x. \quad (3.1.23)$$

Aus (3.1.23) folgt, daß sich das Problem in der ersten Approximation auf die Untersuchung des Minimums des Funktionals über die Zelle reduziert

$$\left\langle L \left(A(y), U(y, x, \epsilon), \frac{1}{\epsilon} \nabla_y U(y, x, \epsilon) \right) \right\rangle. \quad (3.1.24)$$

Das Argument x kann in (3.1.24) als Parameter betrachtet werden.

Wir nehmen wieder an, daß die Minimale des Funktionals (3.1.24) unabhängig von y sind: $U(y, x, \epsilon) = v(x)$. Die Funktionen $v(x)$ bilden zusammen eine Menge M_0 im allgemeinen Schema der variationell-asymptotischen Methode [76]. Wir fixieren v und suchen die Lösung in der Form

$$u = v + U'(y, x, \epsilon), \quad (3.1.25)$$

wobei die Funktion U' asymptotisch kleiner als v ist. Für U' wird die folgende Einschränkung angenommen

$$\langle U' \rangle = 0. \quad (3.1.26)$$

Sie bedeutet, daß $v = \langle u \rangle$. Einsetzen von (3.1.25) in das Funktional (3.1.3) und Durchführung ähnlicher Schritte wie bisher liefert

$$\int_V \left\langle L \left(A(y), v(x), \nabla v + \frac{1}{\epsilon} \nabla_y U'(y, x, \epsilon) \right) \right\rangle d^3x. \quad (3.1.27)$$

Mit Hilfe der Variablentransformation $U' = \epsilon\psi$ reduziert sich das Variationsproblem auf die Untersuchung der Minimale des folgenden Funktionals

$$\langle L(A(y), v, \nabla v + \nabla_y \psi) \rangle, \quad (3.1.28)$$

wobei v und ∇v als gegebene Funktionen betrachtet werden können. Die Voraussetzung, daß " U' asymptotisch kleiner als v " ist, bedeutet, daß

$$\frac{\psi(y)}{|y|} \rightarrow 0 \quad \text{bei} \quad |y| \rightarrow 0. \quad (3.1.29)$$

Wie im Fall periodischer Medien nennen wir das Problem (3.1.28) mit den Einschränkungen (3.1.26) und (3.1.29) auch Zellproblem.

Die Minimale $\hat{\psi}$ des Funktionales (3.1.28) sind unabhängig von ϵ und die Lösung u läßt sich in folgender Form ausdrücken

$$u = v + \epsilon \hat{\psi}(y, v, \nabla v). \quad (3.1.30)$$

Das Minimum des Funktionales (3.1.28) wird durch $\bar{L}(v, \nabla v)$ bezeichnet

$$\bar{L}(v, \nabla v) = \inf_{\psi} \langle L(A(y), v, \nabla v + \nabla_y \psi(y)) \rangle, \quad (3.1.31)$$

wobei die ψ den Einschränkungen (3.1.26) und (3.1.29) genügen. Die Physikalische Bedeutung von ψ verlangt oft, daß sowohl ψ , als auch ihre Ableitung bei $|y| \rightarrow \infty$ beschränkt bleiben.

Wir formulieren nun das duale Variationsproblem. Wendet man also die Fenchel-Transformation an, erhält man

$$\bar{L}(v, \nabla v) = \sup_{\mathbf{p}} \langle \mathbf{p} \rangle \cdot \nabla v - \langle L^*(A(y), v, \mathbf{p}) \rangle, \quad (3.1.32)$$

wobei das Minimum in der Menge der ψ gesucht werden muß, welche den folgenden Bedingungen genügen

$$\operatorname{div}_y \mathbf{p} = 0, \quad \mathbf{p} \text{ beschränkt im Unendlichen} \quad (3.1.33)$$

Genauso wie für periodische Medien gilt

$$\bar{L}^*(v, \bar{\mathbf{p}}) = \inf_{\mathbf{p} \in (3.1.33), \langle \mathbf{p} \rangle = \bar{\mathbf{p}}} \langle L^*(A(y), v, \mathbf{p}) \rangle. \quad (3.1.34)$$

Man kann die dualen Probleme (3.1.31) und (3.1.32) benutzen, um die oberen und unteren Schranken für \bar{L} zu erhalten.

3.2 Eingrenzungen der effektiven Leitfähigkeit isotroper Materialien

3.2.1 Problemstellung

Wir untersuchen nun die effektive elektrische Leitfähigkeit eines isotropen Verbundwerkstoffs (Komposit), der den Bereich V des dreidimensionalen Raumes einnimmt. Dieser Werkstoff besteht aus n isotropen und homogenen Komponenten (Phasen), die die Bereiche $V_\alpha \subset V$ einnehmen und

die elektrischen Leitfähigkeiten σ_α ($\alpha = 1, \dots, n$) besitzen. Man führt eine Funktion der Leitfähigkeit ein

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^n \sigma_\alpha \chi_\alpha,$$

wobei $\chi_\alpha(x)$ die charakteristische Funktion darstellt, welche gleich 1 in V_α und 0 in $\mathbb{R}^3 \setminus V_\alpha$ ist. Dann läßt sich das ursprüngliche Variationsproblem wie folgt formulieren: Man bestimme das Minimum des Funktionales

$$I = \int_V \frac{1}{2} \sigma(x) |\nabla \varphi|^2 d^3x \quad (3.2.1)$$

in der Menge der elektrischen Potentiale φ , welche noch bestimmten Randbedingungen auf ∂V genügen. Es geht also hier um die Homogenisation eines zufälligen Mediums, und das Problem (3.2.1) reduziert sich auf das Problem (3.1.31) mit

$$L = \frac{1}{2} \sigma(y) (\mathbf{e} + \nabla_y \psi) \cdot (\mathbf{e} + \nabla_y \psi),$$

wobei $\mathbf{e} = \nabla v$ das gemittelte elektrische Feld bezeichnet. Man kann ein Volumen Z so wählen, daß der räumliche Mittelwert von L mit ausreichender Genauigkeit durch das Integral von L über Z ersetzt werden kann. Solch ein Volumen wird repräsentativ genannt. Ohne die Allgemeinheit zu verletzen kann man $|Z| = 1$ setzen. Weil L eine quadratische Form ist, ist es offensichtlich, daß auch die homogenisierte Lagrangian eine quadratische Form bezüglich \mathbf{e} wird. Das heißt, für makroskopisch homogene Materialien gilt [94–96]

$$\sigma_c \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \inf_{\mathbf{E} \in \mathcal{C}} \int_Z \sigma(\mathbf{e} + \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{e} + \mathbf{E}) d^3y \quad (3.2.2)$$

wobei σ_c die effektive Leitfähigkeit des Verbundwerkstoffs bezeichnet. Das Minimum des Funktionales muß im Raum \mathcal{C} aller quadratisch integrierbaren elektrischen Felder \mathbf{E} gesucht werden, welche den folgenden Einschränkungen genügen

$$\text{rot} \mathbf{E} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathbf{E} = \nabla \varphi, \quad \int_Z \mathbf{E} d^3y = 0. \quad (3.2.3)$$

Statt die Lösung des schwierigen Problem (3.2.2) zu finden kann man irgendein "Testfeld" \mathbf{E}^* wählen, es in das Funktional einsetzen und eine obere Schranke für σ_c erhalten

$$\sigma_c \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \leq I(\mathbf{E}^*). \quad (3.2.4)$$

Unser Ziel ist es, alle gegebenen Informationen über die Mikrostruktur des Verbundwerkstoffs auszunutzen, um möglichst enge Schranke für σ_c herzuleiten. Wenn nur σ_α und die Volumenanteile der Komponenten f_α bekannt sind, dann sind die Schranken von Hashin und Shtrikman für Zweikomponenter Verbundwerkstoffe in dem Sinne optimal, daß sie durch eine geeignete Wahl der Mikrostruktur erreicht werden können (siehe den Beweis in [97] und die Verallgemeinerung dieses Ergebnisses in [169–171]). Einige Autoren [172–176] haben Schranken für σ_c durch die statistischen Charakteristika der Mikrostruktur, wie z.B. die sogenannten Zwei- und Drei-Punkt-Korrelationsfunktionen, hergeleitet. Aufgrund der komplizierten Prozeduren, die man für die experimentelle Bestimmung solcher Funktionen braucht, ist eine Herleitung der Schranken für σ_c ohne diese Funktionen unzweifelhaft interessant vom praktischen Standpunkt aus. Im folgenden stellen wir Ungleichungen für σ_c mit Hilfe der dualen Variationsformulierungen auf. Um daraus die Schranken zu erhalten, muß man einige Koeffizienten berechnen, die von der Mikrostruktur abhängen. Man kann zeigen, daß die somit erhaltenen Schranken enger sind, als die von Hashin-Shtrikman. Es wird gezeigt, daß diese Koeffizienten für ein Modell bestimmt werden können, welches ein Aggregat elliptischer zweischichtiger Einschlüsse von unterschiedlicher Größe ist, die den Raum füllen. Als Konsequenz werden neue Schranken für die effektive Leitfähigkeit für solch ein Modell des Verbundwerkstoffs hergeleitet.

3.2.2 Herleitung der Ungleichungen

Da der Mittelwert des elektrischen Feldes \mathbf{E} über Z null ist, läßt sich das Funktional (3.2.2) wie folgt umschreiben

$$I(\mathbf{E}) = \sigma_0 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + \int_Z [(\sigma - \sigma_0)(\mathbf{e} + \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{e} + \mathbf{E}) + \sigma_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}] d^3y,$$

wobei σ_0 irgendeine positive Zahl ist. Bezeichnet man durch $\langle \mathbf{E} \rangle_\alpha$ den Mittelwert des elektrischen Feldes über Z_α

$$\langle \mathbf{E} \rangle_\alpha = f_\alpha^{-1} \int_{Z_\alpha} \mathbf{E} d^3y,$$

dann kann man den ersten Term unter dem Integralzeichen umformen zu

$$\begin{aligned} & \int_Z (\sigma - \sigma_0)(\mathbf{e} + \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{e} + \mathbf{E}) d^3y \\ &= \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha (\sigma_\alpha - \sigma_0) (\mathbf{e} + \langle \mathbf{E} \rangle_\alpha) \cdot (\mathbf{e} + \langle \mathbf{E} \rangle_\alpha) + U(\mathbf{E}), \quad (3.2.5) \end{aligned}$$

wobei

$$U(\mathbf{E}) = \sum_{\alpha=1}^n (\sigma_{\alpha} - \sigma_0) \int_{Z_{\alpha}} (\mathbf{E} + \langle \mathbf{E} \rangle_{\alpha}) \cdot (\mathbf{E} - \langle \mathbf{E} \rangle_{\alpha}) d^3y. \quad (3.2.6)$$

Auf die Summe von (3.2.5) wenden wir nun die Legendre-Transformation an durch Einführung von Variablen \mathbf{P}_{α}

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha} (\sigma_{\alpha} - \sigma_0) (\mathbf{e} + \langle \mathbf{E} \rangle_{\alpha}) \cdot (\mathbf{e} + \langle \mathbf{E} \rangle_{\alpha}) \\ &= 2 \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha} \cdot (\mathbf{e} + \langle \mathbf{E} \rangle_{\alpha}) - \Phi(\mathbf{P}), \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

$$\mathbf{P}_{\alpha} = (\sigma_{\alpha} - \sigma_0) (\mathbf{e} + \langle \mathbf{E} \rangle_{\alpha}), \quad (3.2.8)$$

wobei $\Phi(\mathbf{P})$ die folgende Funktion bezeichnet

$$\Phi(\mathbf{P}) = \sum_{\alpha=1}^n f_{\alpha} \frac{\mathbf{P}_{\alpha} \cdot \mathbf{P}_{\alpha}}{\sigma_{\alpha} - \sigma_0}. \quad (3.2.9)$$

Nun untersuchen wir statt des Funktionalen (3.2.2) ein neues Funktional

$$\begin{aligned} I_P(\mathbf{E}) &= \sigma_0 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + \int_Z [\sigma_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + 2(\mathbf{e} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{P}] d^3y \\ &\quad - \Phi(\mathbf{P}) + U(\mathbf{E}) \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

auf der folgenden Menge der Felder \mathbf{P}

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{P}_{\alpha} \chi_{\alpha}, \quad \mathbf{P}_{\alpha} = \text{konst.} \quad (3.2.11)$$

Aus den angegebenen Formeln folgt, daß $I_P(\mathbf{E}) = I(\mathbf{E})$ wenn \mathbf{P}_{α} der Gleichung (3.2.8) genügt. Der Unterschied zwischen dem Funktional (3.2.10) und dem Hashin-Shtrikmanschen Funktional auf der Menge der \mathbf{P} von (3.2.11) ist der zusätzliche Term $U(\mathbf{E})$, der die Fluktuation des elektrischen Feldes innerhalb jeder Komponente des Verbundwerkstoffs berücksichtigt.

Nun wählen wir ein elektrisches "Testfeld" wie folgt. Zuerst suchen wir das Minimum des folgenden Funktionalen

$$\int_{\mathbb{R}^3} (\sigma_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}) d^3y, \quad (3.2.12)$$

wobei $\mathbf{P} = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{P}_\alpha \chi_\alpha$ in \mathbb{R}^3 , $\mathbf{P}_\alpha = \text{konst}$, und die Felder \mathbf{E} den folgenden Einschränkungen genügen

$$\mathbf{E} = \nabla u, \quad \int_Z \mathbf{E} d^3 y = 0,$$

$$u = o\left(\frac{1}{|y|}\right) \quad \text{bei } |y| \rightarrow \infty.$$

Es sei $\tilde{\mathbf{E}}$ das Extremalfeld des Funktionales (3.2.12). Dann setzen wir das Testfeld gleich $\mathbf{E}^*(y) = \tilde{\mathbf{E}}(y)$, $y \in Z$. Es ist leicht nachzuprüfen, daß (siehe auch [97])

$$\mathbf{E}^* = -\frac{1}{\sigma_0} \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{P}'_\alpha \cdot \nabla \nabla u_\alpha$$

$$\int_Z (\sigma_0 \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}^* + 2 \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{P}) d^3 y \leq \int_{\mathbb{R}^3} (\sigma_0 \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{E}} + 2 \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{P}) d^3 y$$

$$= -\frac{1}{3\sigma_0} \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha \mathbf{P}'_\alpha \cdot \mathbf{P}'_\alpha. \quad (3.2.13)$$

Hierbei sind

$$\mathbf{P}'_\alpha = \mathbf{P}_\alpha - \bar{\mathbf{P}}, \quad \bar{\mathbf{P}} = \int_Z \mathbf{P} d^3 y = \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{P}_\alpha f_\alpha,$$

und u_α bezeichnet das Gravitationspotential infolge einer Einheitsmassendichte in Z_α

$$\nabla \cdot \nabla u_\alpha = \chi_\alpha \quad \text{oder} \quad u_\alpha = \int_{Z_\alpha} G(y-x) d^3 x,$$

$$G(y-x) = -\frac{1}{4\pi|y-x|}. \quad (3.2.14)$$

Aus Gln. (3.2.11), (3.2.13) folgt

$$I_P(\mathbf{E}^*) \leq \sigma_0 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}$$

$$+ \left[2\mathbf{e} \cdot \bar{\mathbf{P}} - \frac{1}{3\sigma_0} \sum_{\alpha=1}^n f_\alpha \mathbf{P}'_\alpha \cdot \mathbf{P}'_\alpha - \sum_{\alpha=1}^n \frac{f_\alpha}{\sigma_\alpha - \sigma_0} \mathbf{P}_\alpha \cdot \mathbf{P}_\alpha \right] + U(\mathbf{E}^*). \quad (3.2.15)$$

Es sei nun \mathbf{P}^* der stationäre Punkt des Ausdrucks in den Klammern von (3.2.15)

$$\mathbf{P}_\alpha^* = \frac{\sigma_0 \mathbf{e}}{(1 - W/3) \left(\frac{1}{3} + \frac{\sigma_0}{\sigma_\alpha - \sigma_0} \right)}, \quad (3.2.16)$$

$$W = \sum_{\alpha=1}^n \frac{f_\alpha}{\frac{1}{3} + \frac{\sigma_0}{\sigma_\alpha - \sigma_0}}.$$

Mit Hilfe der üblichen Algebra kann man zeigen, daß \mathbf{P}_α^* und $\langle \mathbf{E}^* \rangle_\alpha$ Glg. (3.2.8) genügen. Folglich erhält man durch Einsetzen von \mathbf{P}^* in (3.2.15)

$$\begin{aligned} \sigma_c \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} &\leq I(\mathbf{E}^*) \leq I_{\mathbf{P}^*}(\mathbf{E}^*) \\ &\leq \sigma_0 \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \left(1 + \frac{W}{1 - W/3} \right) + U(\mathbf{E}^*). \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Macht man von Gleichungen (3.2.6), (3.2.9), (3.2.13), (3.2.14), (3.2.16) und von der makroskopischen Isotropieeigenschaft des Verbundwerkstoffes Gebrauch, erhält man

$$U(\mathbf{E}^*) = \frac{1}{(1 - W/3)^2} \sum_{\alpha=1}^n (\sigma_\alpha - \sigma_0) C_\alpha \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}, \quad (3.2.18)$$

wobei

$$\begin{aligned} C_\alpha &= \sum_{\beta=1}^n \sum_{\gamma=1}^n \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{\sigma_0}{\sigma_\beta - \sigma_0} \right)^{-1} - W \right] \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{\sigma_0}{\sigma_\gamma - \sigma_0} \right)^{-1} - W \right] C_{\alpha\beta\gamma}, \\ C_{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{3} \text{tr} \int_{Z_\alpha} (\nabla \nabla u_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \mathbf{1}) \cdot (\nabla \nabla u_\gamma - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\gamma} \mathbf{1}) d^3 y. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Hier entspricht $\delta_{\alpha\beta}$ dem üblichen Kronecker-Symbol, $\text{tr} \mathbf{A} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$. Es ist offensichtlich, daß $C_\alpha > 0$ ist. Aus (3.2.17), (3.2.18) folgt die Ungleichung

$$\sigma_c \leq \sigma_0 \left[1 + \frac{W}{1 - W/3} + \frac{1}{(1 - W/3)^2} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\sigma_\alpha - \sigma_0}{\sigma_0} C_\alpha \right]. \quad (3.2.20)$$

Nimmt man $\sigma_0 > \sigma_{\max} = \max \{ \sigma_1, \dots, \sigma_n \}$, dann wird die letzte Summe von (3.2.20) negativ und kann deswegen vernachlässigt werden, was zu einer schwächeren Ungleichung führt. Läßt man dann σ_0 gegen σ_{\max} gehen, erhält man die obere Schranke von Hashin-Shtrikman. Die engere Schranke kann hergeleitet werden, wenn man die Werte der Koeffizienten C_α von (3.2.19) zur Verfügung hat, die die Mikrostruktur charakterisieren.

Die duale Ungleichung für σ_c kann analog dazu hergeleitet werden. Hier beginnt man mit dem dualen Variationsproblem (Vgl. mit (3.1.34))

$$\begin{aligned} \sigma_c^{-1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= \inf_{\mathbf{J} \in \mathcal{J}} K(\mathbf{J}), \\ K(\mathbf{J}) &= \int_Z \sigma^{-1} (\mathbf{j} + \mathbf{J}) \cdot (\mathbf{j} + \mathbf{J}) d^3 y, \end{aligned}$$

mit \mathbf{j} einem beliebigen konstanten elektrischen Strömungsfeld und \mathcal{J} dem Raum aller quadratisch integrierbaren elektrischen Strömungsfelder, die den folgenden Einschränkungen genügen

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad \int_{\mathcal{Z}} \mathbf{J} d^3y = 0.$$

Dann kann man zeigen, daß die duale Ungleichung die folgende Form hat

$$\begin{aligned} \sigma_c^{-1} \leq (\sigma'_0)^{-1} & \left[1 - \frac{W'}{1 + 2W'/3} + \frac{1}{(1 + 2W'/3)^2} \right. \\ & \left. \times \sum_{\alpha=1}^n \sigma'_0 (\sigma_\alpha^{-1} - \sigma_0'^{-1}) C'_\alpha \right], \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

wobei σ'_0 irgendeine positive Zahl ist, W' und C'_α durch die Formeln (3.2.16) und (3.2.19) angegeben sind, wenn man dort σ_0 durch σ'_0 ersetzt. Aus (3.2.21) folgt ebenso die untere Schranke von Hashin und Shtrikman, wenn man $\sigma'_0 < \sigma_{\min} = \min \{ \sigma_1, \dots, \sigma_n \}$ nimmt, danach die letzte Summe in (3.2.21) vernachlässigt und σ'_0 gegen σ_{\min} gehen läßt.

3.2.3 Anwendung der Ungleichungen

Wir betrachten nun das folgende Modell eines Zweikomponenten-Verbundwerkstoffs. Es sei E_i ein Ellipsoid, dessen Hauptachsen in der Relation $a_1 : a_2 : a_3$ stehen, welches von der ersten Komponente (Einschluß) besetzt ist: $E_i \subset Z_1$. Dieses Ellipsoid ist umrandet von einer Ellipsoid-Schale, welche von der zweiten Komponente (Matrix) besetzt ist: $E_s \setminus E_i \subset Z_2$. Wir wählen das Ellipsoid E_s mit den gleichen Hauptachsen, die in der gleichen Relation sind, so daß die Relation der Volumina der Ellipsoide gleich $|E_i|/|E_s| = f_1$ ist. Nun wird der Körper des Verbundwerkstoffs isotropisch und homogen durch unendlich viele solcher zweiseichtigen Ellipsoide von unterschiedlicher Größe, aber mit der gleichen Hauptachsenrelation, voll besetzt.

Als repräsentatives Volumen Z wählen wir die Kugel, deren Mittelpunkt mit dem Ursprung des kartesischen Koordinatensystems zusammenfällt. Für jedes Paar der Ellipsoide (E_i, E_s) wählen wir ein lokales kartesisches Koordinatensystems y' , so daß E_i, E_s durch die Gleichungen

$$\left(\frac{y'_1}{\epsilon_1} \right)^2 + \left(\frac{y'_2}{\epsilon_2} \right)^2 + \left(\frac{y'_3}{\epsilon_3} \right)^2 \leq f_1^{2/3}, \quad y' \in E_i,$$

$$\left(\frac{y'_1}{\epsilon_1}\right)^2 + \left(\frac{y'_2}{\epsilon_2}\right)^2 + \left(\frac{y'_3}{\epsilon_3}\right)^2 \leq 1, \quad y' \in E_s,$$

beschrieben werden, wobei $y' = \mathbf{A}y + y_0$, mit \mathbf{A} der Transformationsmatrix, y_0 dem Mittelpunkt von E_i, E_s , und $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ den Hauptachsen von E_s . Es ist bekannt aus der Potentialtheorie [177], daß

$$\int_Z G(y-x) d^3x = \frac{1}{6}y_i y_j + \text{konst}, \quad y \in Z,$$

$$\int_Z G(y-x) d^3x = \frac{1}{2}\omega_{ij}y'_i y'_j + \text{konst}, \quad y \in E_s, \quad (3.2.22)$$

$$\int_Z G(y-x) d^3x = \frac{1}{2}\omega_{ij}y'_i y'_j + \text{konst}, \quad y \in E_i,$$

wobei $\omega_{ij} = \omega_i \delta_{ij}$ (keine Summe) und

$$\omega_i = \frac{a_1 a_2 a_3}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(a_i^2 + s)\sqrt{(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s)}}. \quad (3.2.23)$$

Die Konstanten in (3.2.22) spielen keine Rolle bei der Bestimmung von C_α und können daher unberücksichtigt bleiben.

Für solch ein Aggregat der zweischichtigen Ellipsoide gilt die folgende Eigenschaft

$$\int_{Z_1 \setminus E_s} G(y-x) d^3x = f_1 \int_{E_s} G(y-x) d^3x \quad (3.2.24)$$

für jedes $x \in E_s$. Sie ist die Konsequenz der Formel

$$\int_{E_i} G(y-x) d^3x = f_1 \int_{E_s} G(y-x) d^3x,$$

die für jedes $x \in \mathcal{R}^3 \setminus E_s$ und jedes E_s gilt, wenn man bemerkt, daß der ganze Bereich durch solche Ellipsoide besetzt ist. Unter Berücksichtigung von (3.2.22)-(3.2.24) kann man u_α bestimmen

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_{E_i} G d^3x + \int_{Z_1 \setminus E_s} G d^3x \\ &= \frac{1}{2}\omega_{ij}y'_i y'_j + f_1 \left(\frac{1}{6}y_i y_j - \frac{1}{2}\omega_{ij}y'_i y'_j \right), \quad y \in E_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_{E_i} G d^3x + \int_{Z_1 \setminus E_s} G d^3x \\ &= g(y') + f_1 \left(\frac{1}{6}y_i y_j - \frac{1}{2}\omega_{ij}y'_i y'_j \right), \quad y \in E_s \setminus E_i, \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \int_{Z_2} G d^3x = \int_Z G d^3x - \int_{Z_1} G d^3x \\ &= \frac{1}{6} y_i y_i - u_1, \quad y \in E_s, \end{aligned}$$

wobei $g(y)$ das folgende Gravitationspotential bezeichnet

$$g(y) = \int_{E_i} G(y-x) d^3x = - \int_{E_i} \frac{d^3x}{4\pi|y-x|}, \quad x \in \mathcal{R}^3 \setminus E_i.$$

Aus Gln. (3.2.19), (3.2.25) ergibt sich

$$\begin{aligned} C_{111} &= C_{122} = -C_{112} = \frac{1}{3} f_1 f_2^2 (\omega_i \omega_i - 1/3), \\ C_1 &= \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{\sigma_0}{\sigma_1 - \sigma_0} \right)^{-1} - \left(\frac{1}{3} + \frac{\sigma_0}{\sigma_2 - \sigma_0} \right)^{-1} \right]^2 \frac{1}{3} f_1 f_2^2 (\omega_i \omega_i - 1/3), \\ C_{211} &= C_{222} = -C_{212} = \frac{1}{3} [f_1^2 f_2 (\omega_i \omega_i - 1/3) + \delta], \quad (3.2.26) \\ C_2 &= \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{\sigma_0}{\sigma_1 - \sigma_0} \right)^{-1} - \left(\frac{1}{3} + \frac{\sigma_0}{\sigma_2 - \sigma_0} \right)^{-1} \right]^2 \frac{1}{3} [f_1^2 f_2 (\omega_i \omega_i - 1/3) + \delta], \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \delta &= \int_{E_n \setminus E_t} h_{,ij} (h_{,ij} - 2f_1 \omega_{ij}) d^3y \\ h &= - \int_{E_t} \frac{d^3x}{4\pi|y-x|}, \quad y \in E_n \setminus E_t, \end{aligned}$$

wobei E_t und E_n die Ellipsoide mit der Hauptachsenrelation $a_1 : a_2 : a_3$ und den Volumina f_1 bzw. 1 sind. Die Formeln für C'_α haben die gleiche Gestalt, wenn man σ'_0 statt σ_0 einsetzt.

In dem Fall der Kugel-Einschlüsse haben wir $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1/3$ und $C_1 = C'_1 = 0$. Wählt man $\sigma_0 = \sigma'_0 = \sigma_2$, dann fallen die obere und untere Schranke (3.2.20) bzw. (3.2.21) mit dem genauen Wert von σ_c zusammen (siehe [97])

$$\sigma_c = \sigma_1 \left(1 + \frac{W}{1 - W/3} \right), \quad W = f_1 (1/3 + (\sigma_2/\sigma_1 - \sigma_2))^{-1}.$$

In dem Fall der Ellipsoid-Einschlüsse kann man die Koeffizienten C_2, C'_2 nur numerisch bestimmen. In diesem Zusammenhang scheint die folgende

Formel hilfreich zu sein

$$h = \frac{b_1 b_2 b_3}{4} \int_{\xi}^{\infty} \left(\frac{y_1^2}{b_1^2 + s} + \frac{y_2^2}{b_2^2 + s} + \frac{y_3^2}{b_3^2 + s} - 1 \right) \frac{ds}{R_s},$$

wobei b_1, b_2, b_3 die Hauptachsen von E_t sind,

$$R_s = \sqrt{(b_1^2 + s)(b_2^2 + s)(b_3^2 + s)},$$

und ξ ist die größte Wurzel der Gleichung

$$\frac{y_1^2}{b_1^2 + \xi} + \frac{y_2^2}{b_2^2 + \xi} + \frac{y_3^2}{b_3^2 + \xi} = 1.$$

Nach der Bestimmung von δ wählen wir σ_0 (σ'_0) so, daß die obere (untere) Schranke deren Minimum (Maximum) einnimmt. Zur Illustration nehmen wir $\sigma_2 = 1, \sigma_1 = 10$ und bestimmen die obere und untere Schranke in drei Fällen: 1) $a_1 : a_2 : a_3 = 3 : 4 : 5$ (Ellipsoid-Einschlüsse), 2) $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : 10$ (Nadel-Einschlüsse) und 3) $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 10 : 10$ (Platten-Einschlüsse). Das Ergebnis der Berechnung ist in der Tabelle 1 präsentiert.

f_1	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
σ_{hs}^u	1.65	3.08	4.71	6.58	8.77
σ_p^u	1.58	2.81	4.10	5.57	7.69
σ_n^u	1.41	2.35	3.42	4.88	7.42
σ_e^u	1.27	1.95	2.90	4.40	7.26
σ_p^l	1.38	2.22	3.19	4.61	7.31
σ_n^l	1.27	1.96	2.90	4.40	7.27
σ_e^l	1.27	1.89	2.81	4.32	7.25
σ_{hs}^l	1.24	1.87	2.80	4.32	7.23

Tabelle 1: Obere und untere Schranke.

Die Indizes u, l kennzeichnen die obere und untere Schranke, während die Indizes hs, e, n, p entsprechen den Schranken von Hashin-Shtrikman und den Schranken für die Fälle 1), 2) bzw. 3).

Aus diesem Ergebnis kann man folgende Schlußfolgerung ziehen: Mit dem gleichen Volumenanteil der Komponenten und wenn $\sigma_1 < \sigma_2$, besitzen

die Verbundwerkstoffe mit den Kugel-Einschlüssen die größte Leitfähigkeit σ_c , mit den Platten-Einschlüssen die kleinste und mit den Nadel-Einschlüssen die mittlere. Wenn $\sigma_1 > \sigma_2$, dann gilt die umgekehrte Reihenfolge. In dem Fall, daß $\omega_i \omega_i - 1/3$ klein ist (wie für Ellipsoid-Einschlüsse), liegen die Schranken so nah beieinander, daß sie eine gute Bestimmung für σ_c sein können.

Kapitel 4

Versetzungstheorie

4.1 Kinematik

4.1.1 Körper, Bewegung und Referenzen

Um einen elastoplastischen Körper mit Versetzungen durch ein Kontinuum modellieren zu können werden wir vom Konzept der Mannigfaltigkeiten Gebrauch machen. Wir beginnen mit der Identifizierung des Körpers mit einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{B} (der Dimension 3). Materielle Punkte, die zu \mathcal{B} gehören, sind durch X, Y, \dots gekennzeichnet. Eine Bewegung von \mathcal{B} ist durch eine Einparameterfamilie von Plazierungen oder Abbildungen $\phi_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ beschrieben

$$x = \phi(X, t), \quad X \in \mathcal{B}, x \in \mathcal{E}. \quad (4.1.1)$$

Wir setzen voraus, daß die Abbildung ϕ umkehrbar und außerdem so oft wie benötigt stetig differenzierbar ist. Die mit ϕ assoziierte tangierende Abbildung in X , die durch $\mathbb{K}_X = T\phi|_X$ bezeichnet und Distorsion genannt wird, entspricht der linearen Transformation von $T_X\mathcal{B}$ in \mathcal{V} . Von großer Bedeutung ist das Konzept der lokalen Konfiguration in X (Noll [124]), welches als eine Äquivalenzklasse aller Plazierungen mit der gleichen Distorsion in X definiert ist. Die Distorsion \mathbb{K}_X kann als Repräsentant dieser Klasse angesehen werden. Eine Funktion \mathbb{K} auf \mathcal{B} , deren Werte lokale Konfigurationen bilden, wird Referenz für \mathcal{B} genannt. Wenn es eine globale Platzierung ϕ gibt, so daß die Referenz \mathbb{K} mit $T\phi$ identifiziert werden kann, dann nennen wir \mathbb{K} eine Beschreibung für \mathcal{B} . Andernfalls wird \mathbb{K} anholonome Referenz genannt.

Zwei wichtige Beispiele von Beschreibungen sind: $\mathbb{K}_t = T\phi_t$ (Momentan- oder Eulersche Beschreibung) und $\mathbb{K}_0 = T\phi_0$ (Anfangs- oder Lagrangesche

Beschreibung). Zwischen ihnen gilt der folgende Zusammenhang

$$\mathbb{K}_t = \mathbf{F}\mathbb{K}_0, \quad (4.1.2)$$

wobei \mathbf{F} die Gesamtdeformation des Körpers ist. Weil ϕ als eindeutig und umkehrbar vorausgesetzt wird, ist die Deformation \mathbf{F} eine umkehrbare lineare Abbildung von \mathcal{V} auf \mathcal{V} . Darüberhinaus nehmen wir an, daß

$$J = \det \mathbf{F} > 0,$$

so daß \mathbf{F} eine orientierungserhaltende Deformation ist ¹.

Es ist die spezifische Besonderheit eines elastoplastischen Körpers, daß die Gesamtdeformation \mathbf{F} dessen Spannungszustand nicht vollständig charakterisieren kann. Wir betrachten in der Tat einen Körper, welcher schon nichthomogene plastische Verformungen erlitten hat, und stellen uns das folgende Gedankenexperiment: Man zerschneide den verformten Körper in infinitesimale Elemente und reduziere die Spannungen in den Elementen durch elastische Deformationen auf Null. Wenn keine plastische Deformation vorhanden wäre, dann würden nach diesem Gedankenexperiment die Elemente die unverformte Konfiguration einnehmen. In diesem Fall würde die Gesamtdeformation \mathbf{F} den Spannungszustand des verformten Körpers vollständig charakterisieren. Infolge der inhomogenen plastischen Deformation werden aber die Elemente im allgemeinen Fall nicht in ihren unverformten Zustand zurückkehren, sondern eher in irgendeinen spannungsfreien Zwischenzustand übergehen. Zwei Bemerkungen über solch einen spannungsfreien Zwischenzustand müssen gemacht werden. Erstens hängt der spannungsfreie Zustand *nicht* davon ab, wie die Elemente plastisch verformt sind. Zweitens gestalten die Elemente, nachdem sie in den spannungsfreien Zustand übergegangen sind, keine mögliche globale Konfiguration mehr. Man spricht von einer Inkompatibilität infolge der inhomogenen plastischen Deformation.

Vom mikroskopischen Standpunkt aus kann ein spannungsfreier Zustand nur realisiert werden, wenn jedem Atom (z.B. im Bravaiskristall) ein Punkt eines perfekten Kristallgitters zugeordnet ist (abgesehen von kleinen thermischen Schwingungen der Atome um diese Lage). Abb. 4.1 zeigt ein perfektes Kristallgitter (ohne Defekte) im zweidimensionalen Fall, bei

¹Dies bedeutet einfach, daß ein würfelförmiges infinitesimales Element durch solch eine Deformation (Streckung mit darauffolgender Rotation) seine Orientierung beibehält.

dem die Gitterpunkte (Atome) durch Translationsvektoren $m\mathbf{e}_1 + n\mathbf{e}_2$ gekennzeichnet werden können, mit $m, n = 1, 2, \dots$. Man kann das Null-Niveau der freien Energie diesem Zustand zuweisen. Dank der defektfreien Anordnung der Atome kann man auch Vektoren auf natürliche Weise parallel verschieben. Folglich kann man erwarten, daß gleiche Belastungen, durch die die Elemente in ihrem spannungsfreien Zustand beansprucht werden, zu gleichen Abweichungen führen.

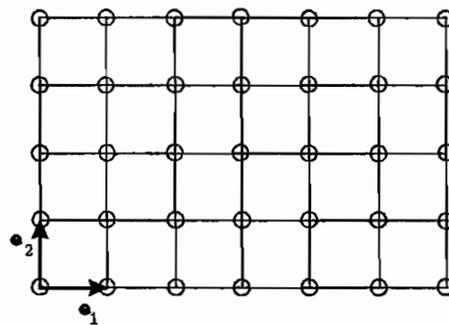


Abbildung 4.1: Ein perfektes Gitter

Bei dem was wir gerade besprochen haben ist es einleuchtend, daß man den spannungsfreien Zustand der Elemente bestimmen muß, um deren mechanisches Verhalten vollständig zu charakterisieren. Dies ist die physikalische Motivation für uns, den Begriff der zeitabhängigen Kristallreferenz $\bar{\mathbb{K}}_t$ einzuführen², die anholonom ist, mit der Eigenschaft, daß $\Phi(X, Y) = \bar{\mathbb{K}}_t^{-1}(X)\bar{\mathbb{K}}_t(Y)$ einen *Kristallparallelismus* (einige Autoren ziehen das Wort Fernparallelismus vor) von $T_Y\mathcal{B}$ auf $T_X\mathcal{B}$ für beliebige Punkte $X, Y \in \mathcal{B}$ erzeugt. Mit anderen Worten ist $\mathbf{c} = \bar{\mathbb{K}}_t^{-1}\mathbf{c}$ ein kristallographisch konstantes Vektorfeld für einen beliebigen konstanten Vektor $\mathbf{c} \in \mathcal{V}$. Wir nehmen folgende Zusammenhänge zwischen den drei Referenzen an (siehe Abb.4.2)

$$\mathbb{K}_t = \mathbf{F}^e \bar{\mathbb{K}}_t, \quad (4.1.3)$$

$$\bar{\mathbb{K}}_t = \mathbf{F}^p \mathbb{K}_0, \quad (4.1.4)$$

wobei \mathbf{F}^e und \mathbf{F}^p die elastische und plastische Deformation sind³. Wir setzen voraus, daß diese Tensorfelder so oft wie benötigt stetig differenzierbar

²In ingenieurmässiger Sprache nennt man die lokale Konfiguration $\bar{\mathbb{K}}_{t,X}$ lokale spannungsfreie Zwischenkonfiguration.

³Genauer genommen müssen wir annehmen, daß $\bar{\mathbb{K}}_t = \mathbf{F}_t^p \bar{\mathbb{K}}_0$, $\bar{\mathbb{K}}_0 = \mathbf{F}_0^p \mathbb{K}_0$, mit \mathbf{F}_0^p der plastischen Anfangsdeformation, und $\mathbf{F}^p = \mathbf{F}_t^p \mathbf{F}_0^p$. Da \mathbf{F}_0^p a priori vorgegeben sein soll, kann man einfachheitshalber

sind. Ferner müssen sie den folgenden natürlichen Forderungen genügen

$$J^p = \det \mathbf{F}^p > 0, \quad J^e = \det \mathbf{F}^e > 0.$$

Diese bedeuten, daß \mathbf{F}^p und \mathbf{F}^e orientierungserhaltende Deformationsfelder sind. Folglich haben sie Umkehrdeformationsfelder, die durch \mathbf{F}^{p-1} bzw. \mathbf{F}^{e-1} bezeichnet sind. Aus (4.1.2)-(4.1.4) folgt die multiplikative Zerlegung der Gesamtdeformation (siehe Abb.4.2)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p. \quad (4.1.5)$$

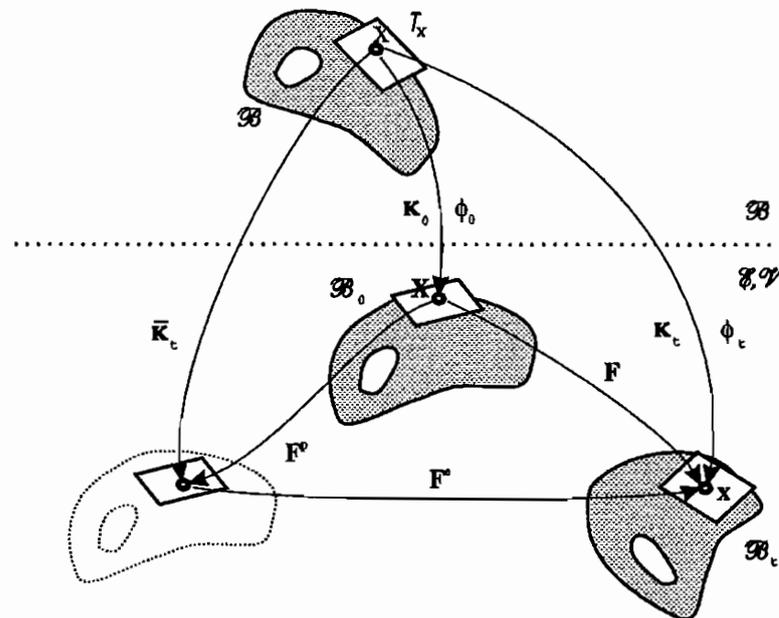


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung der Körpermannigfaltigkeit \mathcal{B} , die Anfangs- \mathcal{K}_0 , Kristall- $\bar{\mathcal{K}}_t$, und Momentan- \mathcal{K}_t Referenz und die assoziierte multiplikative Aufspaltung der Gesamtdeformation.

Die Zerlegung (4.1.5) ist erstmalig in der Arbeit von Bilby *et al.* [121] als eine grundlegende Annahme eingeführt worden, um die Kinematik stetig verteilter Versetzungen herzuleiten. In ihrer Arbeit werden \mathbf{F} , \mathbf{F}^e , \mathbf{F}^p "shape deformation, lattice deformation, and dislocation deformation" genannt. Wir benutzen hier die gleiche Terminologie wie Kröner [122, 123] und Lee [137], der darüberhinaus noch die Unabhängigkeit der freien Energiedichte von der plastischen Deformation gefordert hat, um geeignete

annehmen, daß $\mathbf{F}_0^p = \mathbf{1}$. Sowohl die elastische und plastische Deformation, als auch die Kristallreferenz mögen im allgemeinen von der Temperatur abhängen. Weil die Dynamik und Thermodynamik später in den Abschnitten 4.4 und 4.5 behandelt werden, beschränken wir uns hier und in den Abschnitten 4.2 und 4.3 auf isotherme Prozesse.

Konstitutivgleichungen für elastoplastische Körper bei großen Dehnungen herzuleiten.

Im Zusammenhang mit der Zerlegung (4.1.5) diskutieren wir noch über ein Cosserat-Kontinuum, dessen Kinematik z.B. in [178, 179] untersucht wurde. Für ein Cosserat-Kontinuum nimmt man traditionell an, daß die Rotation eine unabhängige kinematische Größe ist (siehe, z.B. [180, 181]). Das heißt also, daß die materiellen Punkte noch zusätzliche Freiheitsgrade besitzen, die mit einer unabhängigen Rotation verbunden sind. Im Gegensatz dazu sind die Versetzungen in Kristallen entstanden, deren materielle Punkte nicht unbedingt rotatorische Freiheitsgrade besitzen. Man spricht von einer Orientierung in Kristallen nur bezüglich mehrerer benachbarter materiellen Punkte [182]. Deswegen kann man die in [178] vorgeschlagene multiplikative Zerlegung des unabhängigen Rotationstensors in die elastischen und plastischen Anteile im Rahmen der Versetzungstheorie nicht physikalisch interpretieren. Ebenso hat die in [179] vorgeschlagene additive Zerlegung des Verzerrungsmaßes infolge der Rotation keine Verwandtschaft mit Versetzungen.

4.1.2 Zusammenhang, Torsion und Krümmung

Wir betrachten nun ein Tensorfeld auf \mathcal{B} als eine Abbildung $\mathbf{t} : \mathcal{B} \rightarrow T_s^r(\mathcal{V})$ von \mathcal{B} in $T_s^r(\mathcal{V})$ (r -fach kontravariant und s -fach kovariant), und es sei $\mathbb{K} = d\phi$ für irgendein ϕ . Mit Hilfe dieser Beschreibung $\mathbb{K} = T\phi$ können wir ein neues Tensorfeld

$$d_{\mathbb{K}}\mathbf{t} : \mathcal{B} \rightarrow T_{s+1}^r(\mathcal{V}),$$

einführen, das durch

$$d_{\mathbb{K}}\mathbf{t} = d(\mathbf{t} \circ \phi^{-1}) \circ \phi, \quad (4.1.6)$$

definiert ist und Ableitung von \mathbf{t} bezüglich \mathbb{K} genannt wird, mit d der bekannten Ableitung für Tensorfelder auf dem Raum \mathcal{E} (siehe Abschnitt 2.2.1). Wenn $\bar{\mathbb{K}}$ anholonom ist, dann kann die Ableitung bezüglich $\bar{\mathbb{K}}$ wie folgt definiert werden

$$d_{\bar{\mathbb{K}}}\mathbf{t} = d_{\mathbb{K}}\mathbf{t}(\bar{\mathbb{K}}\bar{\mathbb{K}}^{-1}), \quad (4.1.7)$$

wobei \mathbb{K} eine beliebige Beschreibung ist. Selbstverständlich ist diese Definition unabhängig von der Wahl von \mathbb{K} .

Um das Verständnis des Folgenden zu erleichtern erinnern wir den Leser an einige Fakten aus der Differentialgeometrie (siehe [158, 159]). Es sei $\mathfrak{v} \in T\mathcal{B}$ ein Vektorfeld und f eine Funktion auf \mathcal{B} . Die Ableitung von f in Richtung \mathfrak{v} ist definiert als

$$\mathfrak{v}[f] = (d_{\mathbb{K}}f)(\mathbb{K}\mathfrak{v}). \quad (4.1.8)$$

Es ist nicht schwer, die folgenden Eigenschaften zu prüfen

$$\mathfrak{v}[f + g] = \mathfrak{v}[f] + \mathfrak{v}[g], \quad \mathfrak{v}[fg] = f\mathfrak{v}[g] + g\mathfrak{v}[f]. \quad (4.1.9)$$

Tatsächlich kann jedes Vektorfeld \mathfrak{v} mit einer Abbildung $f \mapsto \mathfrak{v}[f]$, die Gl. (4.1.9) genügt, identifiziert werden. Es seien nun \mathfrak{v}_1 und \mathfrak{v}_2 zwei Vektorfelder auf \mathcal{B} . Die Liesche Multiplikation von \mathfrak{v}_1 und \mathfrak{v}_2 ist durch den folgenden Kommutator definiert:

$$[\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2][f] = \mathfrak{v}_1[\mathfrak{v}_2[f]] - \mathfrak{v}_2[\mathfrak{v}_1[f]]. \quad (4.1.10)$$

Das Liesche Produkt zweier Vektorfelder kann als folgendes Vektorfeld

$$[\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2] = \mathbb{K}^{-1}[d_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}\mathfrak{v}_2)\mathbb{K}\mathfrak{v}_1 - d_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}\mathfrak{v}_1)\mathbb{K}\mathfrak{v}_2],$$

identifiziert werden, wobei \mathbb{K} eine beliebige Beschreibung ist. Die Liesche Multiplikation genügt den folgenden Eigenschaften

$$[\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2] = -[\mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_1],$$

$$[\mathfrak{v}_1, f\mathfrak{v}_2] = f[\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2] + \mathfrak{v}_1[f]\mathfrak{v}_2,$$

$$[[\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2], \mathfrak{v}_3] + [[\mathfrak{v}_3, \mathfrak{v}_1], \mathfrak{v}_2] + [[\mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3], \mathfrak{v}_1] = 0 \quad (\text{Jakobi}).$$

Wir definieren einen Zusammenhang auf \mathcal{B} als eine bilineare Abbildung $\nabla : T\mathcal{B} \times T\mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{B}$, die jedem Paar von Vektorfeldern $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ auf \mathcal{B} ein drittes Vektorfeld zuordnet, das durch $\nabla_{\mathfrak{v}_1}\mathfrak{v}_2$ bezeichnet und kovariante Ableitung von \mathfrak{v}_2 längs \mathfrak{v}_1 genannt wird, so daß

1. $\nabla_{\mathfrak{v}_1}\mathfrak{v}_2$ linear bezüglich beider \mathfrak{v}_1 und \mathfrak{v}_2 ist,
2. $\nabla_{f\mathfrak{v}_1}\mathfrak{v}_2 = f\nabla_{\mathfrak{v}_1}\mathfrak{v}_2$ für jede skalare Funktion f ,
3. $\nabla_{\mathfrak{v}_1}(f\mathfrak{v}_2) = f\nabla_{\mathfrak{v}_1}\mathfrak{v}_2 + (\mathfrak{v}_1[f])\mathfrak{v}_2$.

Man bemerkt, daß die dritte Regel ähnlich der Regel für die Ableitung des Produktes ist.

Die Kartansche Torsion eines Zusammenhanges ∇ ist ein (1,2)-Tensor $\mathbf{t} : T\mathcal{B} \times T\mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{B}$, der wie folgt definiert ist

$$\mathbf{t}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \nabla_{\mathbf{w}_1} \mathbf{w}_2 - \nabla_{\mathbf{w}_2} \mathbf{w}_1 - [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]. \quad (4.1.11)$$

Aus dieser Definition folgt, daß \mathbf{t} bezüglich der beiden kovarianten Indizes schief-symmetrisch ist

$$\mathbf{t}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = -\mathbf{t}(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1).$$

Wir nennen einen Zusammenhang torsionsfrei, wenn sein Torsionstensor verschwindet.

Der Krümmungstensor eines Zusammenhanges ∇ ist ein (1,3)-Tensor $\mathbf{r} : T\mathcal{B} \times T\mathcal{B} \times T\mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{B}$, der wie folgt definiert ist

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) &= \nabla_{\mathbf{w}_1} \nabla_{\mathbf{w}_2} \mathbf{w}_3 - \nabla_{\mathbf{w}_2} \nabla_{\mathbf{w}_1} \mathbf{w}_3 \\ &\quad - \nabla_{[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]} \mathbf{w}_3. \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

Es ist offensichtlich, daß \mathbf{r} schief-symmetrisch im folgenden Sinne ist

$$\mathbf{r}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = -\mathbf{r}(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3).$$

Es gilt eine wichtige Beziehung zwischen der Torsion und der Krümmung eines Zusammenhanges. Sie genügen nämlich der Bianchi-Identität

$$\begin{aligned} \sum_{\text{zyklisch}} \{ \nabla_{\mathbf{w}_3} (\mathbf{t}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)) + \mathbf{t}(\mathbf{w}_2, [\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1]) \\ - \mathbf{r}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) \} = 0. \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Um letztere zu prüfen, wenden wir $\nabla_{\mathbf{w}_3}$ auf (4.1.11) an, was dazu führt, daß

$$\nabla_{\mathbf{w}_3} (\mathbf{t}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)) - \nabla_{\mathbf{w}_3} \nabla_{\mathbf{w}_1} \mathbf{w}_2 + \nabla_{\mathbf{w}_3} \nabla_{\mathbf{w}_2} \mathbf{w}_1 + \nabla_{\mathbf{w}_3} [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] = 0.$$

Die zyklische Summe der linken Seite dieser Gleichung bleibt unverändert, wenn der dritte Term durch eine und der vierte durch zwei zyklische Permutationen von $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ ersetzt wird. Deswegen haben wir

$$\sum_{\text{zyklisch}} \{ \nabla_{\mathbf{w}_3} (\mathbf{t}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)) - \nabla_{\mathbf{w}_3} \nabla_{\mathbf{w}_1} \mathbf{w}_2 + \nabla_{\mathbf{w}_3} \nabla_{\mathbf{w}_2} \mathbf{w}_1 + \nabla_{\mathbf{w}_3} [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] \}$$

$$= \sum_{\text{zyklisch}} \{ \nabla_{\mathbf{w}_3}(\mathbf{t}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)) - [\nabla_{\mathbf{w}_3}, \nabla_{\mathbf{w}_1}] \mathbf{w}_2 + \nabla_{\mathbf{w}_2}[\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1] \} = 0.$$

Unter Berücksichtigung der Definitionen (4.1.11) und (4.1.12) erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{zyklisch}} \{ \nabla_{\mathbf{w}_3}(\mathbf{t}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)) - \mathbf{r}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) \\ & + \mathbf{t}(\mathbf{w}_2, [\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1]) + [\mathbf{w}_2, [\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1]] \} = 0. \end{aligned}$$

Gemäß der Jakobischen Identität trägt der letzte Term nicht zur Summe bei, was zu (4.1.13) führt.

Es seien nun ∇ und ∇^* zwei Zusammenhänge auf \mathcal{B} . Aus der Definition des Zusammenhanges ist leicht zu ersehen, daß die Differenz

$$\mathfrak{d} = \nabla - \nabla^*$$

mit einem (1,2)-Tensorfeld auf \mathcal{B} identifiziert werden kann. Wir werden später erfahren, daß diese Differenz nur von den Christoffel-Symbolen der Zusammenhänge abhängt.

4.1.3 Kristallzusammenhang und Versetzungsdichte

Wir betrachten wieder die Kristallreferenz $\bar{\mathbb{K}}_t$. Wir sagen, daß ein Vektorfeld \mathbf{c} auf \mathcal{B} kristallographisch konstant bezüglich $\bar{\mathbb{K}}_t$ ist, wenn

$$\bar{\mathbb{K}}_t \mathbf{c} = \mathbf{c} = \text{konst} \quad \text{mit} \quad \mathbf{c} \in \mathcal{V}.$$

Dieses Vektorfeld ist das "Pull-back" (Rückwärts-Transformation) des konstanten räumlichen Vektors \mathbf{c} durch $\bar{\mathbb{K}}_t^{-1}$ in irgendeinem Punkt Y mit darauf folgender paralleler Verschiebung $\bar{\mathbb{K}}_t^{-1}(X)\bar{\mathbb{K}}_t(Y)$ zu allen Punkten der Körpermannigfaltigkeit (Fernparallelismus). Wir suchen nun einen Zusammenhang $\bar{\nabla}$, so daß $\bar{\nabla}_{\mathbf{w}} \mathbf{c} = \mathbf{0}$ für ein beliebiges konstantes Vektorfeld \mathbf{c} und ein beliebiges Vektorfeld \mathbf{w} gilt. Solch ein Zusammenhang (wenn er existiert) wird Kristallzusammenhang genannt. Wir zeigen nun, daß er durch $\bar{\mathbb{K}}_t$ wie folgt eindeutig bestimmbar ist [124, 125]

$$\bar{\nabla}_{\mathbf{w}_1} \mathbf{w}_2 = \bar{\mathbb{K}}_t^{-1} d_{\bar{\mathbb{K}}_t}(\bar{\mathbb{K}}_t \mathbf{w}_2) \bar{\mathbb{K}}_t \mathbf{w}_1, \quad (4.1.14)$$

wobei \mathbf{w}_1 und \mathbf{w}_2 beliebige Vektorfelder auf \mathcal{B} sind. Zuerst zeigen wir, daß diese Formel allen nötigen Eigenschaften des Kristallzusammenhanges genügt. Es ist offensichtlich, daß $\bar{\nabla}_{\mathbf{w}} \mathbf{c} = \mathbf{0}$ wenn \mathbf{c} konstant ist, weil

dann $\mathbb{K}_t \mathbf{c} = \mathbf{c} = \text{konst.}$ Die Linearität bezüglich \mathbf{w}_1 und \mathbf{w}_2 ist auch offensichtlich, und die Produktregel folgt aus der Gültigkeit der ähnlichen Regel für die relative Ableitung.

Um die Eindeutigkeit des Kristallzusammenhanges zu prüfen, nehmen wir an, es gäbe noch einen anderen Kristallzusammenhang $\bar{\nabla}'$. Bezeichnet man die Differenz der beiden Zusammenhänge durch $\mathfrak{d}_{\mathbf{w}} = \bar{\nabla}_{\mathbf{w}} - \bar{\nabla}'_{\mathbf{w}}$, dann kann man feststellen, daß $\mathfrak{d}_{\mathbf{w}} \mathbf{c} = \mathbf{0}$ für alle konstanten Vektorfelder \mathbf{c} . Wir haben aber am Ende des vorherigen Abschnitts festgestellt, daß $\mathfrak{d}_{\mathbf{w}}$ mit einem Tensorfeld identifiziert werden kann. Weil dann \mathbf{c} beliebig ist, können wir daraus schließen, daß $\mathfrak{d}_{\mathbf{w}} = 0$ für beliebige \mathbf{w} , und deswegen $\bar{\nabla} = \bar{\nabla}'$.

Wir zeigen nun, daß die Krümmung des Kristallzusammenhanges $\bar{\nabla}$ verschwindet (siehe auch [124]), d.h. letzterer folgender Identität genügt

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{r}}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) &= \bar{\nabla}_{\mathbf{w}_1} \bar{\nabla}_{\mathbf{w}_2} \mathbf{w}_3 - \bar{\nabla}_{\mathbf{w}_2} \bar{\nabla}_{\mathbf{w}_1} \mathbf{w}_3 \\ &\quad - \bar{\nabla}_{[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]} \mathbf{w}_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Es sei in der Tat \mathbf{c} ein beliebiges konstantes Vektorfeld auf \mathcal{B} . Weil $\bar{\nabla}$ der Kristallzusammenhang ist, gilt $\bar{\nabla}_{\mathbf{w}_1} \mathbf{c} = \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{w}_1 \in T\mathcal{B}$. Folglich zeigt die Definition (4.1.12), daß $\bar{\mathfrak{r}}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{c}) = 0$ für alle $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in T\mathcal{B}$. Daraus folgt, daß die Gleichung (4.1.15) gelten muß. Hierbei muß man betonen, daß es sich in unserem Kontinuumsmodell nur um die sogenannten translatorischen Versetzungen handelt. Im allgemeineren Rahmen unter Berücksichtigung von Disklinationen braucht die Krümmung nicht unbedingt zu verschwinden (siehe [165, 183]).

Von wichtiger Bedeutung in der finiten Elastoplastizität mit Mikrostruktur ist die Kartansche Torsion des Kristallzusammenhanges

$$\bar{\mathfrak{t}}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \bar{\nabla}_{\mathbf{w}_1} \mathbf{w}_2 - \bar{\nabla}_{\mathbf{w}_2} \mathbf{w}_1 - [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]. \quad (4.1.16)$$

Wir bestimmen nun die räumliche Darstellung des Kristallzusammenhanges (4.1.14) und der Kartanschen Torsion (4.1.16) bezüglich verschiedener Referenzen. Durch Einsetzen von (4.1.4) in (4.1.14) können wir die kovariante Ableitung (4.1.14) in folgender Form ausdrücken

$$\bar{\nabla}_{\mathbf{w}_1} \mathbf{w}_2 = \mathbb{K}_0^{-1} [D\mathbf{W}_2 + \mathbf{F}^{p-1}(D\mathbf{F}^p)\mathbf{W}_2] \mathbf{W}_1, \quad (4.1.17)$$

wobei $\mathbf{W}_1 = \mathbb{K}_0 \mathbf{w}_1$, $\mathbf{W}_2 = \mathbb{K}_0 \mathbf{w}_2$, und D die Ableitung bezüglich \mathbb{K}_0 bezeichnet, $D = d_{\mathbb{K}_0}$. Der Ausdruck in den eckigen Klammern stellt ein

(1,1)-Tensorfeld auf \mathcal{V} dar und kann in Komponenten wie folgt geschrieben werden

$$(\mathbf{W}_2)_{|B}^A = (\mathbf{W}_2)_{,B}^A + \Gamma_{BC}^A (\mathbf{W}_2)^C, \quad (4.1.18)$$

wobei

$$\Gamma_{BC}^A = (\mathbf{F}^{p-1})_{,\alpha}^A (\mathbf{F}^p)_{C,B}^\alpha. \quad (4.1.19)$$

Hier bedeutet das Komma vor den Indizes die partielle Ableitung bezüglich der entsprechenden Koordinaten⁴. Gemäß (4.1.18) und (4.1.19) kann man die Größen Γ_{BC}^A Christoffel-Symbole des Kristallzusammenhanges bezüglich der Anfangsreferenz nennen. Mit der Formel für das Liesche Produkt

$$[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] = \mathbb{K}_0^{-1} [(D\mathbf{W}_2)\mathbf{W}_1 - (D\mathbf{W}_1)\mathbf{W}_2]$$

und mit (4.1.17) läßt sich der Torsionstensor (4.1.16) wie folgt schreiben

$$\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mathbb{K}_0^{-1} [\mathbf{T}(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)],$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = \mathbf{F}^{p-1} [((D\mathbf{F}^p)\mathbf{W}_2)\mathbf{W}_1 - ((D\mathbf{F}^p)\mathbf{W}_1)\mathbf{W}_2], \quad (4.1.20)$$

oder in Komponenten

$$(\mathbf{T})_{BC}^A = \Gamma_{BC}^A - \Gamma_{CB}^A = (\mathbf{F}^{p-1})_{,\alpha}^A [(\mathbf{F}^p)_{C,B}^\alpha - (\mathbf{F}^p)_{B,C}^\alpha]. \quad (4.1.21)$$

Es ist leicht zu sehen, daß \mathbf{T} schief-symmetrisch bezüglich der kovarianten Indizes ist. Dieses Tensorfeld erhält man als das "Push-forward" (Vorwärts-Transformation) von $\bar{\mathbf{t}}$ in die Anfangskonfiguration.

Auf ähnliche Weise kann die gleiche kovariante Ableitung (4.1.14) auf \mathcal{B} mit Hilfe von (4.1.3) auch wie folgt dargestellt werden

$$\bar{\nabla}_{\mathbf{w}_1} \mathbf{w}_2 = \mathbb{K}_t^{-1} [d\mathbf{w}_2 + \mathbf{F}^e (d\mathbf{F}^{e-1})\mathbf{w}_2] \mathbf{w}_1, \quad (4.1.22)$$

mit $\mathbf{w}_1 = \mathbb{K}_t \mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2 = \mathbb{K}_t \mathbf{w}_2$, und mit d , der Ableitung bezüglich \mathbb{K}_t , $d = d_{\mathbb{K}_t}$. In Komponenten kann der Ausdruck in den Klammern in (4.1.22) wie folgt geschrieben werden

$$(\mathbf{w}_2)_{|b}^a = (\mathbf{w}_2)_{,b}^a + \gamma_{bc}^a (\mathbf{w}_2)^c, \quad (4.1.23)$$

⁴Wir benutzen großgeschriebene Indizes für die Koordinaten in \mathcal{B}_0 , kleingeschriebene Indizes für die Koordinaten in \mathcal{B}_t , und griechische Indizes für die anholonome Basis infolge von \mathbb{K}_t .

mit den Christoffel-Symbolen, die durch

$$\gamma_{bc}^a = (\mathbf{F}^e)_\alpha^a (\mathbf{F}^{e-1})_{c,b}^\alpha \quad (4.1.24)$$

definiert sind. Damit kann der Torsionstensor (4.1.16) bezüglich der Momentanreferenz wie folgt dargestellt werden

$$\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mathbb{K}_t^{-1}[\mathbf{t}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)],$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mathbf{F}^e[((d\mathbf{F}^{e-1})\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_1 - ((d\mathbf{F}^{e-1})\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_2], \quad (4.1.25)$$

oder in Komponenten

$$(\mathbf{t})_{bc}^a = \gamma_{bc}^a - \gamma_{cb}^a = (\mathbf{F}^e)_\alpha^a [(\mathbf{F}^{e-1})_{c,b}^\alpha - (\mathbf{F}^{e-1})_{b,c}^\alpha]. \quad (4.1.26)$$

Der Tensor \mathbf{t} kann als das "Push-forward" von $\bar{\mathbf{t}}$ in die Momentankonfiguration interpretiert werden (siehe [120]).

Durch Einsetzen von $\mathbf{W}_1 = \mathbf{F}^{p-1}\bar{\mathbf{w}}_1$, $\mathbf{W}_2 = \mathbf{F}^{p-1}\bar{\mathbf{w}}_2$ in (4.1.20), unter Berücksichtigung der Definition (4.1.7), können wir den Torsionstensor $\bar{\mathbf{t}}$ bezüglich der anholonomen Kristallreferenz wie folgt darstellen

$$\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \bar{\mathbb{K}}_t^{-1}[\bar{\mathbf{t}}(\bar{\mathbf{w}}_1, \bar{\mathbf{w}}_2)],$$

$$\bar{\mathbf{t}}(\bar{\mathbf{w}}_1, \bar{\mathbf{w}}_2) = \mathbf{F}^p[((d\bar{\mathbf{F}}^{p-1})\bar{\mathbf{w}}_1)\bar{\mathbf{w}}_2 - ((d\bar{\mathbf{F}}^{p-1})\bar{\mathbf{w}}_2)\bar{\mathbf{w}}_1], \quad (4.1.27)$$

$$(\bar{\mathbf{t}})_{\beta\gamma}^\alpha = (\mathbf{F}^p)_A^\alpha [(\mathbf{F}^{p-1})_{\beta,\gamma}^A - (\mathbf{F}^{p-1})_{\gamma,\beta}^A].$$

Auf ähnliche Weise folgen aus (4.1.25)

$$\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \bar{\mathbb{K}}_t^{-1}[\bar{\mathbf{t}}(\bar{\mathbf{w}}_1, \bar{\mathbf{w}}_2)],$$

$$\bar{\mathbf{t}}(\bar{\mathbf{w}}_1, \bar{\mathbf{w}}_2) = \mathbf{F}^{e-1}[((d\bar{\mathbf{F}}^e)\bar{\mathbf{w}}_1)\bar{\mathbf{w}}_2 - ((d\bar{\mathbf{F}}^e)\bar{\mathbf{w}}_2)\bar{\mathbf{w}}_1], \quad (4.1.28)$$

$$(\bar{\mathbf{t}})_{\beta\gamma}^\alpha = (\mathbf{F}^{e-1})_a^\alpha [(\mathbf{F}^e)_{\beta,\gamma}^a - (\mathbf{F}^e)_{\gamma,\beta}^a],$$

mit $\bar{\mathbf{w}}_1 = \bar{\mathbb{K}}_t \mathbf{w}_1$, $\bar{\mathbf{w}}_2 = \bar{\mathbb{K}}_t \mathbf{w}_2$, und mit \bar{d} der Ableitung bezüglich $\bar{\mathbb{K}}_t$ (in Komponenten wird sie durch das Komma vor den griechischen Indizes bezeichnet). Wir interpretieren $\bar{\mathbf{t}}$ als die tatsächliche Versetzungsdichte, die nicht als Charakteristikum des Materials vorgegeben ist, sondern nur durch die interne Dynamik der Versetzungen bestimmt werden kann

(cf. [124,125]). Aus Gln. (4.1.20), (4.1.25), (4.1.27), (4.1.28) können die folgenden Beziehungen hergeleitet werden

$$\bar{\mathbf{t}}(\bar{\mathbf{w}}_1, \bar{\mathbf{w}}_2) = \mathbf{F}^p \mathbf{T}(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2),$$

$$(\bar{\mathbf{t}})_{\beta\gamma}^{\alpha} = (\mathbf{F}^p)_A^{\alpha} (\mathbf{T})_{BC}^A (\mathbf{F}^{p-1})_{\beta}^B (\mathbf{F}^{p-1})_{\gamma}^C, \quad (4.1.29)$$

$$\bar{\mathbf{t}}(\bar{\mathbf{w}}_1, \bar{\mathbf{w}}_2) = \mathbf{F}^{e-1} \mathbf{t}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2),$$

$$(\bar{\mathbf{t}})_{\beta\gamma}^{\alpha} = (\mathbf{F}^{e-1})_a^{\alpha} (\mathbf{t})_{bc}^a (\mathbf{F}^e)_{\beta}^b (\mathbf{F}^e)_{\gamma}^c. \quad (4.1.30)$$

Wir sehen, daß $\bar{\mathbf{t}}$ das "Push-forward" (durch \mathbf{F}^p) von \mathbf{T} und das "Pull-back" (durch \mathbf{F}^e) von \mathbf{t} ist.

Wir geben nun die geometrische Interpretation des Tensors \mathbf{t} [120,123]. Wir wählen eine geschlossene Kontur $c(s)$ in der Momentankonfiguration und betrachten folgendes Integral

$$(\bar{\mathbf{b}})^{\alpha} = - \oint_c (\mathbf{F}^{e-1})_b^{\alpha} dx^b. \quad (4.1.31)$$

Wenn das Integral für alle geschlossenen Konturen verschwinden würde, wäre durch Glg. (4.1.31) die Kompatibilität der elastischen Deformation gegeben. Aber wie wir schon im Abschnitt 4.1.1 erwähnt haben, ist dies im allgemeinen Fall nicht so, und das Integral mißt den Inkompatibilitätsgrad der elastischen Deformation. Man kann zeigen, daß das Integral (4.1.31) im Grenzfall des Kontinuumsmodells mit dem Burgers-Vektor zusammenfällt (wenn man die Gitterkonstante gegen null gehen läßt). Die mikroskopische Darstellung würde sich wie in Abb.4.3 widerspiegeln.

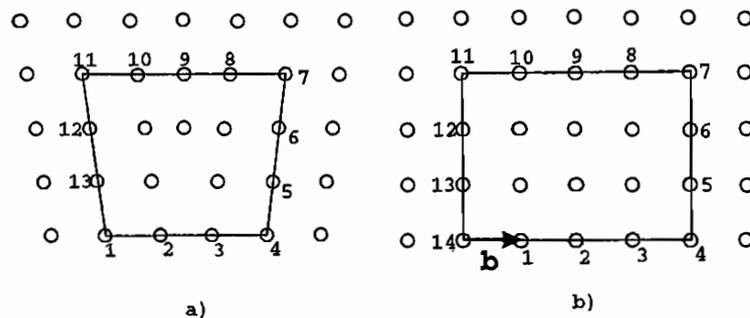


Abbildung 4.3: Definition des Burgers-Vektors: a) Frank-Umlauf in der Momentankonfiguration; b) Kristallreferenz.

Mit Hilfe des Stokesschen Theorems läßt sich das Integral (4.1.31) umschreiben

$$(\bar{\mathbf{b}})^\alpha = \frac{1}{2} \int_A [(\mathbf{F}^{e-1})_{c,b}^\alpha - (\mathbf{F}^{e-1})_{b,c}^\alpha] dx^b \wedge dx^c, \quad (4.1.32)$$

wobei A die Fläche mit dem Rand c ist, und $dx^b \wedge dx^c$ das orientierte Flächenelement bedeutet. Für genügend kleine Konturen c ergibt sich aus (4.1.32)

$$(\bar{\mathbf{b}})^\alpha = \frac{1}{2} [(\mathbf{F}^{e-1})_{c,b}^\alpha - (\mathbf{F}^{e-1})_{b,c}^\alpha] dx^b \wedge dx^c. \quad (4.1.33)$$

Transformiert man den Burgers-Vektor vorwärts in die Momentankonfiguration, erhält man

$$\begin{aligned} (\mathbf{b})^a &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^e)_\alpha^a [(\mathbf{F}^{e-1})_{c,b}^\alpha - (\mathbf{F}^{e-1})_{b,c}^\alpha] dx^b \wedge dx^c \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{t})_{bc}^a dx^b \wedge dx^c. \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

Dieses Ergebnis liefert die präzise geometrische Interpretation der Versetzungsdichte.

4.1.4 Riemannsche Strukturen, Dehnungsmaße und Kontorsion

Wir definieren skalare Produkte und Metriken auf \mathcal{T} infolge der drei Referenzen $\mathbb{K}_0 = d\phi_0$, $\mathbb{K}_t = d\phi_t$, und $\bar{\mathbb{K}}_t$ wie folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) &= \mathfrak{g}(\mathbb{K}_0 \mathbf{w}_1, \mathbb{K}_0 \mathbf{w}_2), & \mathfrak{G} &= \mathbb{K}_0^T \mathfrak{g} \mathbb{K}_0, \\ \mathfrak{g}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) &= \mathfrak{g}(\mathbb{K}_t \mathbf{w}_1, \mathbb{K}_t \mathbf{w}_2), & \mathfrak{g} &= \mathbb{K}_t^T \mathfrak{g} \mathbb{K}_t, \\ \bar{\mathfrak{g}}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) &= \mathfrak{g}(\bar{\mathbb{K}}_t \mathbf{w}_1, \bar{\mathbb{K}}_t \mathbf{w}_2), & \bar{\mathfrak{g}} &= \bar{\mathbb{K}}_t^T \mathfrak{g} \bar{\mathbb{K}}_t. \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

Diese Metriktensoren erzeugen drei Riemannschen Strukturen auf \mathcal{B} relativ zu den drei oben genannten Referenzen. Man sagt, \mathfrak{G} , \mathfrak{g} , und $\bar{\mathfrak{g}}$ sind die "Pull-backs" der Metrik \mathfrak{g} auf \mathcal{V} durch die Operationen mit \mathbb{K}_0 , \mathbb{K}_t , bzw. $\bar{\mathbb{K}}_t$ (siehe [158, 184]). Aus (4.1.35) folgt

$$\mathfrak{g} = \mathbb{K}_0^T \mathbf{C} \mathbb{K}_0, \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathfrak{g} \mathbf{F}, \quad (4.1.36)$$

mit \mathbf{C} dem rechten Cauchy-Greenschen Deformationstensor. Auf ähnliche Weise stellt man fest, daß

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} &= \mathbb{K}_t^T \mathbf{c} \mathbb{K}_t, & \mathbf{c} &= \mathbf{F}^{-T} \mathbf{g} \mathbf{F}^{-1}, \\ \mathfrak{G} &= \bar{\mathbb{K}}_t^T \bar{\mathbf{c}}^p \bar{\mathbb{K}}_t, & \bar{\mathbf{c}}^p &= \mathbf{F}^{p-T} \mathbf{g} \mathbf{F}^{p-1}, \\ \mathfrak{g} &= \bar{\mathbb{K}}_t^T \bar{\mathbf{c}}^e \bar{\mathbb{K}}_t, & \bar{\mathbf{c}}^e &= \mathbf{F}^{eT} \mathbf{g} \mathbf{F}^e.\end{aligned}\quad (4.1.37)$$

Mit Hilfe der Pull-back- und Push-forward-Operationen kann man auch folgende elastische und plastische Deformationstensoren erhalten

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathbb{K}_0^T \mathbf{C}^p \mathbb{K}_0, \quad \mathbf{C}^p = \mathbf{F}^{pT} \mathbf{g} \mathbf{F}^p, \quad (4.1.38)$$

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathbb{K}_t^T \mathbf{c}^e \mathbb{K}_t, \quad \mathbf{c}^e = \mathbf{F}^{e-T} \mathbf{g} \mathbf{F}^{e-1}. \quad (4.1.39)$$

Die Formeln (4.1.36)-(4.1.39) stellen die gesamten, elastischen und plastischen Dehnungsmaße bezüglich der Anfangs- und Momentanreferenzen dar. Aus (4.1.36) und (4.1.37) folgt

$$\bar{\mathbf{c}}^e = \mathbf{F}^{p-T} \mathbf{C} \mathbf{F}^{p-1}, \quad (4.1.40)$$

oder in Komponenten

$$(\bar{\mathbf{c}}^e)_{\alpha\beta} = (\mathbf{C})_{AB} (\mathbf{F}^{p-1})_{\alpha}^A (\mathbf{F}^{p-1})_{\beta}^B. \quad (4.1.41)$$

Man kann auch unterschiedliche torsionsfreie Zusammenhänge ∇° , ∇ , und ∇^* eindeutig definieren, die mit den Metrikensoren \mathfrak{G} , \mathfrak{g} bzw. $\bar{\mathfrak{g}}$ assoziiert sind, deren Parallelverschiebungen die entsprechenden skalaren Produkte nicht ändern (der Fundamentalsatz der Riemannschen Geometrie). Es ist nicht schwer zu zeigen, daß die Krümmungen von ∇° und ∇ verschwinden (dank der Kompatibilität der Gesamtdeformation), hingegen verschwindet die Krümmung von ∇^* im allgemein nicht (siehe [124]).

Um die Beziehung zwischen $\bar{\nabla}$ und ∇^* herzuleiten, betrachten wir folgenden Ausdruck

$$\bar{\mathfrak{d}}_{\mathbf{v}} = \bar{\nabla}_{\mathbf{v}} - \nabla_{\mathbf{v}}^* = \bar{\mathfrak{d}} \mathbf{v}. \quad (4.1.42)$$

Das (1,2)-Tensorfeld $\bar{\mathfrak{d}}$ wird Kontorsion der Kristallreferenz $\bar{\mathbb{K}}_t$ genannt. In der Anfangsbeschreibung hat sie die folgenden Komponenten

$$D_{BC}^A = \Gamma_{BC}^A - \{^A_{BC}\}, \quad (4.1.43)$$

wobei $\{^A_{BC}\}$ die Christoffel-Symbole des Riemannschen Zusammenhanges sind

$$\{^A_{BC}\} = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^{p-1})^{AD} [(\mathbf{C}^p)_{BD,C} + (\mathbf{C}^p)_{CD,B} - (\mathbf{C}^p)_{BC,D}]. \quad (4.1.44)$$

Weil der Riemannsche Zusammenhang torsionsfrei ist, ist $\{^A_{BC}\}$ symmetrisch bezüglich der Indizes B, C . Die Gleichung (4.1.42) läßt sich relativ zur Momentanbeschreibung wie folgt umschreiben

$$d_{bc}^a = \gamma_{bc}^a - \{^a_{bc}\}, \quad (4.1.45)$$

mit

$$\{^a_{bc}\} = \frac{1}{2}(\mathbf{c}^{e-1})^{ad} [(\mathbf{c}^e)_{bd,c} + (\mathbf{c}^e)_{cd,b} - (\mathbf{c}^e)_{bc,d}]. \quad (4.1.46)$$

Macht man von den Eigenschaften der Kristallreferenz $\bar{\mathbb{K}}_t$ Gebrauch (siehe [124]), kann man zeigen, daß

$$2\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{w}_1, (\bar{\mathbf{d}}\mathbf{w}_3)\mathbf{w}_2) = \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{w}_3, (\bar{\mathbf{t}}\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_2) - \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{w}_1, (\bar{\mathbf{t}}\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_3) - \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{w}_2, (\bar{\mathbf{t}}\mathbf{w}_3)\mathbf{w}_1). \quad (4.1.47)$$

Bezüglich der Anfangsbeschreibung ist dies äquivalent zu

$$2(\mathbf{C}^p)_{AB}D_{CD}^B = (\mathbf{C}^p)_{AB}(\mathbf{T})_{CD}^B - (\mathbf{C}^p)_{CB}(\mathbf{T})_{DA}^B - (\mathbf{C}^p)_{DB}(\mathbf{T})_{AC}^B. \quad (4.1.48)$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir die äquivalente Formel bezüglich der Momentanbeschreibung

$$2(\mathbf{c}^e)_{ab}d_{cd}^b = (\mathbf{c}^e)_{ab}(\mathbf{t})_{cd}^b - (\mathbf{c}^e)_{cb}(\mathbf{t})_{da}^b - (\mathbf{c}^e)_{db}(\mathbf{t})_{ac}^b. \quad (4.1.49)$$

Gemäß Glg. (4.1.48) bestimmen Kontorsion und Torsion einander gegenseitig. Es ist auch bemerkenswert, daß $\bar{\nabla}\bar{\mathbf{g}} = \mathbf{0}$, deswegen kann das Heben oder Senken der Indizes mit Hilfe von $\bar{\mathbf{g}}$ mit der kovarianten Ableitung $\bar{\nabla}$ vertauscht werden.

4.1.5 Geschwindigkeit und relative Raten

Die Geschwindigkeit und Beschleunigung eines materiellen Punktes X zur Zeit t sind die folgenden räumlichen Vektoren

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t}\phi(X, t), \quad (4.1.50)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(X, t). \quad (4.1.51)$$

Von hier an wird der über einer Größe stehende Punkt die partielle Zeitableitung bei festem X bedeuten. Nimmt man die Bewegung als regulär an, kann man X durch $X = \phi_t^{-1}(x)$ ausdrücken und in Gln. (4.1.50), (4.1.51) einsetzen, was zu der Geschwindigkeit und der Beschleunigung bezüglich der Momentanbeschreibung führt

$$\mathbf{v}(x, t) = \dot{\mathbf{x}}(\phi_t^{-1}(x), t), \quad (4.1.52)$$

$$\mathbf{a}(x, t) = \ddot{\mathbf{x}}(\phi_t^{-1}(x), t). \quad (4.1.53)$$

Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen \mathbf{a} und \mathbf{v}

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v}. \quad (4.1.54)$$

Wir setzen die Existenz einer Massenform dm auf $T\mathcal{B}$ voraus. Die Masse eines Teilkörpers \mathcal{U} von \mathcal{B} ist als $m(\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} dm$ definiert. Wir können das Volumenelement dv auf \mathcal{V} durch \mathbb{K}_0 , \mathbb{K}_t , und $\bar{\mathbb{K}}_t$ rückwärts transformieren, um die entsprechenden Volumenelemente dv_0 , dv und $d\bar{v}$ auf $T\mathcal{B}$ zu erhalten. Wir führen dann die Massendichten τ_0 , τ , und $\bar{\tau}$ bezüglich der entsprechenden Referenzen \mathbb{K}_0 , \mathbb{K}_t , und $\bar{\mathbb{K}}_t$ wie folgt ein

$$\tau_0 dv_0 = \tau dv = \bar{\tau} d\bar{v} = dm \quad (\text{Erhaltung der Masse}). \quad (4.1.55)$$

Gemäß dieser Definitionen und gemäß Gln. (4.1.2)-(4.1.4) gilt

$$\tau_0 = \tau J = \bar{\tau} J^p. \quad (4.1.56)$$

Bezeichnet man $\rho(x, t) = \tau(X, t)$ und leitet man die erste Gleichung von (4.1.56) partiell nach der Zeit ab, erhält man den Erhaltungssatz der Masse bezüglich der Momentanbeschreibung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \mathbf{v} = 0. \quad (4.1.57)$$

Wir betrachten nun verschiedene Raten der Deformation und der Versetzungsdichte. Sei irgendein Tensor auf der Körpermannigfaltigkeit \mathcal{B} gegeben, kann man dessen Rate durch die materielle Zeitableitung berechnen (d.h., die partielle Zeitableitung bei festem X). Beispiele von solchen Raten sind

$$\dot{\mathbf{g}} = 2\mathbb{K}_t^T d\mathbb{K}_t, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2}(1^T \mathbf{g} + \mathbf{g}1), \quad (4.1.58)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{g}}} = 2\bar{\mathbb{K}}_t^T \bar{\mathbf{d}}^p \bar{\mathbb{K}}_t, \quad \bar{\mathbf{d}}^p = \frac{1}{2}(\bar{\mathbb{I}}^{pT} \mathbf{g} + \mathbf{g} \bar{\mathbb{I}}^p), \quad (4.1.59)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{t}}}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \bar{\mathbb{K}}_t^{-1} 2\bar{\mathbf{z}}(\bar{\mathbf{w}}_1, \bar{\mathbf{w}}_2), \quad \bar{\mathbf{w}}_1 = \bar{\mathbb{K}}_t \mathbf{w}_1, \quad \bar{\mathbf{w}}_2 = \bar{\mathbb{K}}_t \mathbf{w}_2, \quad (4.1.60)$$

$$2\bar{\mathbf{z}}(\bar{\mathbf{w}}_1, \bar{\mathbf{w}}_2) = [((\bar{\mathbf{d}} \bar{\mathbb{I}}^p) \bar{\mathbf{w}}_2) \bar{\mathbf{w}}_1 - ((\bar{\mathbf{d}} \bar{\mathbb{I}}^p) \bar{\mathbf{w}}_1) \bar{\mathbf{w}}_2], \quad (4.1.61)$$

mit $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$, $\bar{\mathbb{I}}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1}$. Die Tensoren \mathbf{d} und $\bar{\mathbf{d}}^p$ entsprechen der gesamten Deformationsrate bzw. der plastischen Deformationsrate, wohingegen der Tensor $\bar{\mathbf{z}}$ die Rate der Versetzungsdichte bezeichnet.

Betrachtet man einen objektiven räumlichen Tensor, kann man dessen objektive Rate mit Hilfe einer sogenannten relativen Zeitableitung bezüglich einer Referenz \mathbb{K} definieren, indem man ihn zur Körpermannigfaltigkeit durch \mathbb{K} rückwärts transformiert, dann die partielle Zeitableitung bei festem X berechnet, und zuletzt das Ergebnis durch die gleiche Referenz \mathbb{K} vorwärts transformiert. Wir bezeichnen solch eine Zeitableitung durch $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$. Anhand dieser Definition kann man leicht nachprüfen, daß

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}_t} \mathbf{t} = \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{t} \quad (4.1.62)$$

für jeden räumlichen Tensor \mathbf{t} , mit $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$ der Lieschen Ableitung bezüglich des Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{v} . Es ist bemerkenswert, daß die relative Zeitableitung einer skalaren Funktion mit deren materieller Zeitableitung zusammenfällt

$$L_{\mathbb{K}_t} f = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot d_{\mathbb{K}_t} f = D_t f.$$

Es folgt direkt aus der Definition der Zeitableitung bezüglich der Referenz \mathbb{K} und aus Gln. (4.1.39)-(4.1.41), (4.1.24)

$$L_{\mathbb{K}_t} \mathbf{c} = 0, \quad \frac{1}{2} L_{\mathbb{K}_t} \mathbf{g} = \mathbf{d}, \quad \frac{1}{2} L_{\mathbb{K}_t} \mathbf{c}^e = \mathbf{d}^p, \quad (4.1.63)$$

$$L_{\bar{\mathbb{K}}_t} \bar{\mathbf{c}}^p = 0, \quad \frac{1}{2} L_{\bar{\mathbb{K}}_t} \mathbf{g} = \bar{\mathbf{d}}^p, \quad \frac{1}{2} L_{\bar{\mathbb{K}}_t} \bar{\mathbf{c}}^e = \bar{\mathbf{d}}, \quad (4.1.64)$$

$$\frac{1}{2} L_{\bar{\mathbb{K}}_t} \bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{z}}, \quad \frac{1}{2} L_{\mathbb{K}_t} \mathbf{t} = \mathbf{z}, \quad (4.1.65)$$

$$\mathbf{z}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^e [((d\bar{\Gamma}^p) \mathbf{F}^{e-1} \mathbf{w}_2) \mathbf{w}_1 - ((d\bar{\Gamma}^p) \mathbf{F}^{e-1} \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_2], \quad (4.1.66)$$

mit $\mathbf{d}^p = \mathbf{F}^{e-T} \bar{\mathbf{d}}^p \mathbf{F}^{e-1}$, $\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{F}^{eT} \mathbf{d} \mathbf{F}^e$. Den Tensor \mathbf{z} nennen wir (räumliche) Versetzungsänderungsrate. Die Eigenschaften (4.1.63)-(4.1.66) werden in den folgenden Untersuchungen der Konstitutivgleichungen eine sehr wichtige Rolle spielen.

4.2 Bestimmung der Kristallreferenz

4.2.1 Differentialgleichung für die elastische Umkehrdeformation.

In den Abschnitten 4.1 haben wir festgestellt, daß solch wichtige kinematische Größen wie die Metriken (Dehnungsmaße) und die Torsion (Versetzungsdichte) durch die Kristallreferenz definiert sind. Nun betrachten wir das umgekehrte Problem: Man bestimme die Kristallreferenz aus den vorgegebenen Metrik- und Torsionsfeldern. Bezüglich der Momentanbeschreibung kann man das Problem wie folgt stellen: Bestimme \mathbf{F}^{e-1} aus den vorgegebenen Feldern \mathbf{c}^e und \mathbf{t} , vorausgesetzt die Momentankonfiguration ist bekannt. Es gibt sechs unabhängige Komponenten des symmetrischen Tensors \mathbf{c}^e und neun unabhängige Komponenten des schief-symmetrischen Tensors \mathbf{t} , aus denen neun Komponenten des Tensors \mathbf{F}^{e-1} bestimmt werden sollen. Es ist offensichtlich, daß einige Zusatzbedingungen erfüllt werden müssen, um das Problem lösbar zu machen.

Zuerst stellen wir die Differentialgleichung für \mathbf{F}^{e-1} auf. Durch Ableitung von \mathbf{F}^{e-1} bezüglich \mathbb{K}_t erhalten wir

$$d\mathbf{F}^{e-1} = \mathbf{F}^{e-1} \boldsymbol{\gamma}, \quad (4.2.1)$$

oder in Komponenten,

$$(\mathbf{F}^{e-1})_{b,c}^\alpha = (\mathbf{F}^{e-1})_a^\alpha \gamma_{cb}^a. \quad (4.2.2)$$

In dem vorliegenden Abschnitt 4.2 werden wir fast alle Formeln explizit in Komponenten präsentieren. Gemäß Glg. (4.1.24) sind die Größen γ_{bc}^a die Christoffel-Symbole des Kristallzusammenhanges bezüglich der Momentanreferenz. Weil \mathbf{c}^e und \mathbf{t} als vorgegeben angenommen sind, kann man γ_{bc}^a durch $(\mathbf{c}^e)_{ab}^a$ und $(\mathbf{t})_{bc}^a$ mit Hilfe der Gln. (4.1.45) und (4.1.49) wie folgt

ausdrücken

$$\begin{aligned} \gamma_{bc}^a &= \{^a_{bc}\} + d_{bc}^a = \frac{1}{2}(\mathbf{c}^{e-1})^{ad} [(\mathbf{c}^e)_{bd,c} + (\mathbf{c}^e)_{cd,b} - (\mathbf{c}^e)_{bc,d}] \\ &\quad + \frac{1}{2} [(\mathbf{t})_{bc}^a - (\mathbf{c}^e)_{bd}(\mathbf{t})_{ce}^d(\mathbf{c}^{e-1})^{ea} - (\mathbf{c}^e)_{cd}(\mathbf{t})_{be}^d(\mathbf{c}^{e-1})^{ea}]. \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Glg. (4.2.2) kann dann als das System der partiellen Differentialgleichungen für die neun Komponenten von \mathbf{F}^{e-1} angesehen werden. Die Existenz der Lösung des Gleichungssystems (4.2.2) wird garantiert, wenn folgende Integrabilitätsbedingungen erfüllt werden

$$(\mathbf{F}^{e-1})_{b,dc}^\alpha - (\mathbf{F}^{e-1})_{b,cd}^\alpha = 0. \quad (4.2.4)$$

Unter Berücksichtigung von (4.2.2) berechnen wir die zweite Ableitung von \mathbf{F}^{e-1}

$$(\mathbf{F}^{e-1})_{b,dc}^\alpha = (\mathbf{F}^{e-1})_a^\alpha [\gamma_{ci}^a \gamma_{db}^i + \gamma_{db,c}^a]. \quad (4.2.5)$$

Aufgrund von (4.2.5) bekommen die Integrabilitätsbedingungen (4.2.4) die folgende Form

$$(\mathbf{F}^{e-1})_a^\alpha r_{bcd}^a = 0, \quad (4.2.6)$$

mit

$$r_{bcd}^a = \gamma_{ci}^a \gamma_{db}^i - \gamma_{di}^a \gamma_{cb}^i + \gamma_{db,c}^a - \gamma_{cb,d}^a. \quad (4.2.7)$$

Glg. (4.2.7) stellt nichts anderes als die Komponenten des Krümmungstensors $\bar{\mathbf{r}}$ von (4.1.15) bezüglich der Momentanreferenz dar (Vgl. übliche Bücher über die Differentialgeometrie, z.B. [159]). Folglich verlangen die Integrabilitätsbedingungen (4.2.6), daß der Krümmungstensor (4.2.7) identisch Null sein muß.

Treffen die Integrabilitätsbedingungen (4.2.6) zu, kann man Glg. (4.2.2) integrieren, um \mathbf{F}^{e-1} zu bestimmen. Dafür nimmt man irgendeinen festen Bezugspunkt X_0 des Körpers zu Hilfe. Es sei $c(s)$ eine Kurve, die X_0 mit einem anderen Punkt X verbindet, so daß $c(0) = X_0$. Bezüglich der Momentanbeschreibung wird diese Kurve durch folgende Gleichung beschrieben

$$x^a = x^a(s), \quad x^a(0) = x_0^a. \quad (4.2.8)$$

Multipliziert man beide Seiten der Glg. (4.2.2) mit dem Tangentenvektor x'^c der Kurve (der Strich bedeutet hier die Ableitung nach s), erhält man

$$\frac{d}{ds} \mathbf{F}^{e-1} = \mathbf{F}^{e-1} \mathbf{p}, \quad (4.2.9)$$

wobei der Tensor \mathbf{p} folgende Komponenten hat

$$p_b^a = \gamma_{cb}^a x'^c. \quad (4.2.10)$$

Damit ist das Gleichungssystem (4.2.2) für \mathbf{F}^{e-1} in die lineare gewöhnliche Differentialgleichung für \mathbf{F}^{e-1} entlang der Kurve $c(s)$ umgewandelt worden, mit dem Tensor \mathbf{p} als gegebener Funktion von s . Dazu braucht man noch folgende Anfangsbedingungen für \mathbf{F}^{e-1} in $s = 0$ (an der Stelle X_0)

$$\mathbf{F}^{e-1}(X_0) = \mathbf{F}_0^{e-1}. \quad (4.2.11)$$

Da der Links-Streck-Tensor \mathbf{v}^e der polaren Zerlegung von \mathbf{F}^e aus der Metrik \mathbf{c}^e bestimmt werden kann, müssen nur drei Komponenten des Rotationstensors am Punkt X^0 vorgegeben werden. Die Lösung von (4.2.9), (4.2.11) lautet (siehe [185])

$$\mathbf{F}^{e-1} = \mathbf{F}_0^{e-1} \boldsymbol{\omega}_s, \quad (4.2.12)$$

mit $\boldsymbol{\omega}_s$ dem Matrizant von (4.2.9), der durch die Matrizenreihe

$$\boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{1} + \int_0^s \mathbf{p}(\tau) d\tau + \int_0^s \left[\int_0^\tau \mathbf{p}(\tau_1) d\tau_1 \right] \mathbf{p}(\tau) d\tau + \dots \quad (4.2.13)$$

zu berechnen ist. Hierbei ist $\mathbf{1}$ der Identitätstensor. Infolge der Integrabilitätsbedingungen (4.2.4) wird die Lösung \mathbf{F}^{e-1} unabhängig von der Wahl der Kurve $c(s)$ sein. Deswegen wird die Lösung (4.2.12)-(4.2.13) eindeutig sein, wenn der Körper einfach zusammenhängend ist. Die Formeln (4.2.12), (4.2.13), die für die nichtlineare Versetzungstheorie gelten, sind Analog zu den Formeln von Cesàro [148] für das Verschiebungsfeld in der linearen Elastizitätstheorie und von Pietraszkiewicz [149] und Pietraszkiewicz & Badur [150] in der nichtlinearen Elastizitätstheorie.

4.2.2 Differentialgleichung für die elastische Umkehrrotation.

Um die elastische Umkehrrotation zu bestimmen betrachten wir die linke polare Zerlegung

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{v}^e \mathbf{R}^e, \quad \mathbf{F}^{e-1} = \mathbf{R}^{e-1} \mathbf{v}^{e-1}, \quad (4.2.14)$$

mit \mathbf{R}^e dem eigentlich orthogonalen elastischen Rotationstensor und \mathbf{v}^e dem elastischen Links-Streck-Tensor. Die Gleichung (4.2.14)₂ nimmt in Komponenten die Form an

$$(\mathbf{F}^{e-1})_b^\alpha = (\mathbf{R}^{e-1})_a^\alpha (\mathbf{v}^{e-1})_b^a. \quad (4.2.15)$$

Da der Streck-Tensor \mathbf{v}^{e-1} aus \mathbf{c}^e mit Hilfe der linearen Algebra bestimmt werden kann, reduziert sich das Problem der Bestimmung von \mathbf{F}^{e-1} aus \mathbf{c}^e und \mathbf{t} auf das Problem der Bestimmung von \mathbf{R}^{e-1} aus den gleichen Tensorfeldern. Wie stellen nun die Differentialgleichung dafür auf. Leitet man beide Seiten von (4.2.15) ab, erhält man

$$(\mathbf{F}^{e-1})_{b,c}^\alpha = (\mathbf{R}^{e-1})_{a,c}^\alpha (\mathbf{v}^{e-1})_b^a + (\mathbf{R}^{e-1})_a^\alpha (\mathbf{v}^{e-1})_{b,c}^a. \quad (4.2.16)$$

Durch Einsetzen von (4.2.16) in (4.2.2) ergibt sich

$$(\mathbf{R}^{e-1})_{b,c}^\alpha = (\mathbf{R}^{e-1})_a^\alpha \lambda_{cb}^a, \quad (4.2.17)$$

mit

$$\lambda_{cb}^a = [(\mathbf{v}^{e-1})_e^a \gamma_{cd}^e - (\mathbf{v}^{e-1})_{d,c}^a] (\mathbf{v}^e)_b^d. \quad (4.2.18)$$

Weil \mathbf{v}^{e-1} und γ_{bc}^a als Funktionen der Tensorfelder \mathbf{c}^e und \mathbf{t} ausgedrückt werden können, (Vgl. (4.2.3)) kann Glg. (4.2.17) als das System der partiellen Differentialgleichungen für \mathbf{R}^{e-1} angesehen werden, mit den Koeffizienten λ_{bc}^a als bekannten Funktionen von X . Man bemerkt, daß die Koeffizienten λ_{bc}^a aufgrund der Orthogonalität von \mathbf{R}^{e-1} schief-symmetrisch bezüglich der kovarianten Indizes sein müssen.

Die Integrabilitätsbedingungen für (4.2.17) lauten

$$(\mathbf{R}^{e-1})_{b,dc}^\alpha - (\mathbf{R}^{e-1})_{b,cd}^\alpha = 0. \quad (4.2.19)$$

Durch ähnliche Transformationen wie im Abschnitt 4.2.1 können wir Glg. (4.2.19) umformen

$$(\mathbf{R}^{e-1})_a^\alpha k_{bcd}^a = 0, \quad (4.2.20)$$

mit

$$k_{bdc}^a = \lambda_{ce}^a \lambda_{db}^e - \lambda_{de}^a \lambda_{cb}^e + \lambda_{db,c}^a - \lambda_{cb,d}^a. \quad (4.2.21)$$

Die Integrabilitätsbedingungen (4.2.19) verlangen also, daß der Tensor k_{bcd}^a von (4.2.21) verschwindet. Um zu zeigen, daß (4.2.20) und (4.2.6) gleichwertig sind, stellen wir den Zusammenhang zwischen dem Krümmungstensor r_{bcd}^a und dem Tensor k_{bcd}^a her. Mit Hilfe der Definition (4.2.18) von λ_{bc}^a drücken wir γ_{bc}^a durch λ_{bc}^a und $(\mathbf{v}^{e-1})_b^a$ aus und setzen dies in die Gleichung (4.2.7) ein. Nach einigen Umformungen kann man prüfen, daß

$$r_{bcd}^a = (\mathbf{v}^{e-1})_e^a (\mathbf{v}^e)_b^f k_{fcd}^e. \quad (4.2.22)$$

Da \mathbf{v}^e positiv definit ist, wird der Krümmungstensor r_{bcd}^a dann und nur dann verschwinden, wenn das gleiche mit dem Tensor k_{bcd}^a passiert. Damit haben wir die Gleichwertigkeit von (4.2.20) und (4.2.6) bewiesen.

Treffen die Integrabilitätsbedingungen (4.2.20) zu, kann man die Gleichung (4.2.17) analog zu der Prozedur im Abschnitt 4.2.1 integrieren. Es sei wieder $c(s)$ eine Kurve, die X_0 mit einem anderen Punkt X verbindet. Durch Multiplikation beider Seiten von (4.2.17) mit dem Tangentenvektor x'^c der Kurve erhalten wir

$$\frac{d}{ds} \mathbf{R}^{e-1} = \mathbf{R}^{e-1} \mathbf{q}, \quad (4.2.23)$$

mit

$$q_b^a = \lambda_{cb}^a x'^c. \quad (4.2.24)$$

Die Lösung von (4.2.23) lautet

$$\mathbf{R}^{e-1} = \mathbf{R}_0^{e-1} \mathbf{v}_s, \quad (4.2.25)$$

mit \mathbf{v}_s dem Matrizant von (4.2.23), der durch die Matrizenreihe

$$\mathbf{v}_s = \mathbf{1} + \int_0^s \mathbf{q}(\tau) d\tau + \int_0^s \left[\int_0^\tau \mathbf{q}(\tau_1) d\tau_1 \right] \mathbf{q}(\tau) d\tau + \dots \quad (4.2.26)$$

zu berechnen ist.

4.2.3 Duale Probleme für die plastische Deformation und plastische Rotation.

Durch die Tatsache, daß \mathbf{C}^p und \mathbf{T} die dualen Repräsentanten der Metrik bzw. der Torsion bezüglich der Anfangsbeschreibung sind, kann das duale Problem der Bestimmung \mathbf{F}^p und \mathbf{R}^p aus den gegebenen \mathbf{C}^p und \mathbf{T} auf

ähnliche Weise gelöst werden. Wir werden keine detaillierte Herleitung geben, sondern einfach die Formeln ohne Beweis angeben.

Das System der partiellen Differentialgleichungen für \mathbf{F}^p lautet

$$(\mathbf{F}^p)_{B,C}^\alpha = (\mathbf{F}^p)_A^\alpha \Gamma_{CB}^A, \quad (4.2.27)$$

wobei Γ_{BC}^A die Christoffel-Symbole des Kristallzusammenhanges bezüglich der Anfangsbeschreibung sind. Da \mathbf{C}^p und \mathbf{T} als bekannt angenommen worden sind, können Γ_{BC}^A durch sie mit Hilfe von Gln. (4.1.43) und (4.1.48) ausgedrückt werden. Nämlich,

$$\begin{aligned} \Gamma_{BC}^A &= \{^A_{BC}\} + D_{BC}^A = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^{p-1})^{AD} [(\mathbf{C}^p)_{BD,C} + (\mathbf{C}^p)_{CD,B} - (\mathbf{C}^p)_{BC,D}] \\ &+ \frac{1}{2} [(\mathbf{T})_{BC}^A - (\mathbf{C}^p)_{BD}(\mathbf{T})_{CE}^D(\mathbf{C}^{p-1})^{EA} - (\mathbf{C}^p)_{CD}(\mathbf{T})_{BE}^D(\mathbf{C}^{p-1})^{EA}]. \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Die Integrabilitätsbedingungen für (4.2.27) sind

$$(\mathbf{F}^p)_A^\alpha R_{BCD}^A = 0, \quad (4.2.29)$$

mit

$$R_{BCD}^A = \Gamma_{CE}^A \Gamma_{DB}^E - \Gamma_{DE}^A \Gamma_{CB}^E + \Gamma_{DB,C}^A - \Gamma_{CB,D}^A. \quad (4.2.30)$$

Glg. (4.2.30) stellt nichts anderes als die Komponenten des Krümmungstensors $\bar{\mathbf{r}}$ von (4.1.15) bezüglich der Anfangsbeschreibung dar.

Treffen die Bedingungen (4.2.29) zu, kann die Lösung von (4.2.27) in folgender Form präsentiert werden

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{F}_0^p \Omega_s, \quad (4.2.31)$$

mit \mathbf{F}_0^p dem vorgegebenen Wert von \mathbf{F}^p an der Stelle X_0 und mit Ω_s dem folgenden Matrizzant

$$\Omega_s = \mathbf{1} + \int_0^s \mathbf{P}(\tau) d\tau + \int_0^s \left[\int_0^\tau \mathbf{P}(\tau_1) d\tau_1 \right] \mathbf{P}(\tau) d\tau + \dots \quad (4.2.32)$$

Die Komponenten des Tensors \mathbf{P} in (3.6) sind

$$P_B^A = \Gamma_{CB}^a X'^C, \quad (4.2.33)$$

mit X'^C dem Tangentenvektor der Kurve $c(s)$ in der Anfangskonfiguration. Infolge der Integrabilitätsbedingungen (4.2.29) wird die Lösung \mathbf{F}^p

unabhängig von der Wahl der Kurve $c(s)$. Deswegen wird die Lösung (4.2.31)-(4.2.32) eindeutig sein, wenn der Körper einfach zusammenhängend ist.

Zur Bestimmung der plastischen Rotation betrachten wir die rechte polare Zerlegung

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{R}^p \mathbf{U}^p, \quad (4.2.34)$$

mit \mathbf{R}^p dem eigentlich orthogonalen plastischen Rotationstensor und \mathbf{U}^p dem plastischen Rechts-Streck-Tensor. Die Gleichung (4.2.34) in der Komponentenform lautet

$$(\mathbf{F}^p)^\alpha_B = (\mathbf{R}^p)^\alpha_A (\mathbf{U}^p)^A_B. \quad (4.2.35)$$

Es gelten die Differentialgleichungen für \mathbf{R}^p

$$(\mathbf{R}^p)^\alpha_{B,C} = (\mathbf{R}^p)^\alpha_A \Lambda^A_{CB}, \quad (4.2.36)$$

mit

$$\Lambda^A_{CB} = [(\mathbf{U}^p)^A_E \Gamma^E_{CD} - (\mathbf{U}^p)^A_{D,C}] (\mathbf{U}^{p-1})^D_B. \quad (4.2.37)$$

Die Integrabilitätsbedingungen für (4.2.36) verlangen, daß

$$(\mathbf{R}^p)^\alpha_A K^A_{BCD} = 0, \quad (4.2.38)$$

wobei

$$K^A_{BDC} = \Lambda^A_{CE} \Lambda^E_{DB} - \Lambda^A_{DE} \Lambda^E_{CB} + \Lambda^A_{DB,C} - \Lambda^A_{CB,D}. \quad (4.2.39)$$

Man kann prüfen, daß

$$R^A_{BCD} = (\mathbf{U}^p)^A_E (\mathbf{U}^{p-1})^F_B K^E_{FCD}. \quad (4.2.40)$$

Shield hat die analoge Formel der nichtlinearen Elastizitätstheorie hergeleitet [186]. Aufgrund der Positivdefinitheit von \mathbf{U}^p wird der Krümmungstensor R^A_{BCD} dann und nur dann verschwinden, wenn das gleiche mit dem Tensor K^A_{BCD} geschieht. Damit ist die Gleichwertigkeit von (4.2.29) und (4.2.38) bewiesen.

Treffen die Integrabilitätsbedingungen (4.2.38) zu, kann man (4.2.36) wie bisher integrieren. Die Lösung von (4.2.36) lautet

$$\mathbf{R}^p = \mathbf{R}_0^p \Upsilon_s, \quad (4.2.41)$$

wobei Υ_s der Matrizant von (4.2.36) ist, der durch die Matrizenreihe

$$\Upsilon_s = \mathbf{1} + \int_0^s \mathbf{Q}(\tau) d\tau + \int_0^s \left[\int_0^\tau \mathbf{Q}(\tau_1) d\tau_1 \right] \mathbf{Q}(\tau) d\tau + \dots \quad (4.2.42)$$

zu berechnen ist. Der Tensor \mathbf{Q} in (4.2.42) ist gegeben durch

$$Q_B^A = \Lambda_{CB}^A X'^C. \quad (4.2.43)$$

4.2.4 Linearisierung.

Es ist interessant, die Linearisierung der in den Abschnitten 4.1, 4.2 hergeleiteten Gleichungen durchzuführen, um sie mit der bekannten Kröner'schen Theorie [122, 138] zu vergleichen. Wir approximieren die Deformationsfelder \mathbf{F} , \mathbf{F}^p , \mathbf{F}^e wie folgt

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta},$$

$$\mathbf{F}^p = \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta}^p, \quad (4.2.44)$$

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{1} + \boldsymbol{\beta}^e,$$

wobei $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\beta}^p$ und $\boldsymbol{\beta}^e$ klein verglichen mit $\mathbf{1}$ sind. In diesem Fall unterscheiden sich die Referenzen \mathbb{K}_0 , \mathbb{K}_t und $\bar{\mathbb{K}}_t$ nur um kleine Distorsionen voneinander, so daß sie miteinander identifiziert werden können. Folglich braucht man nicht die großgeschriebenen, kleingeschriebenen und griechischen Indizes zu unterscheiden. Man kann auch die Metrik \mathbf{g} mit $\mathbf{1}$ identifizieren, und es gibt keinen Unterschied zwischen ko- und kontravarianten Tensoren. Setzt man (4.2.44) in (4.1.5) und vernachlässigt man die kleineren Terme, erhält man die additive Zerlegung

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^e + \boldsymbol{\beta}^p. \quad (4.2.45)$$

Auch die symmetrischen und schief-symmetrischen Anteile von $\boldsymbol{\beta}$ setzen sich additiv aus

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T) = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p, \quad (4.2.46)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}^T) = \boldsymbol{\omega}^e + \boldsymbol{\omega}^p, \quad (4.2.47)$$

zusammen, wobei ϵ^e , ϵ^p und ω^e , ω^p die Dehnungen (symmetrischen Anteile) und Rotationen (schief-symmetrischen Anteile) von β^e bzw. β^p sind. Für die Metriktensoren C^p und c^e erhält man näherungsweise

$$C^p = F^{pT} F^p \approx 1 + 2\epsilon^p, \quad (4.2.48)$$

$$c^e = F^{e-T} F^{e-1} \approx 1 - 2\epsilon^e. \quad (4.2.49)$$

Man kann sehen, daß es bequemer ist, in der linearisierten Theorie die kleinen Dehnungsmaße ϵ^p und ϵ^e statt C^p und c^e zu benutzen.

Wir betrachten nun die Versetzungsdichten \mathbf{T} und \mathbf{t} . Wir linearisieren (4.1.40) und (4.1.41) und erhalten

$$(\mathbf{T})_{abc} \approx (\beta^p)_{ac,b} - (\beta^p)_{ab,c}, \quad (4.2.50)$$

$$(\mathbf{t})_{abc} \approx -[(\beta^e)_{ac,b} - (\beta^e)_{ab,c}]. \quad (4.2.51)$$

Durch Subtraktion von (4.2.51) von (4.2.50) ergibt sich

$$(\mathbf{T})_{abc} - (\mathbf{t})_{abc} \approx (\beta)_{ac,b} - (\beta)_{ab,c}. \quad (4.2.52)$$

Da \mathbf{T} das "Pull-back" von \mathbf{t} ist, ist es näherungsweise gleich \mathbf{t} in der linearisierten Theorie. Glg. (4.2.52) lautet dann

$$(\beta)_{ac,b} - (\beta)_{ab,c} = 0. \quad (4.2.53)$$

Dies bedeutet einfach, daß die Gesamtdistorsion β kompatibel sein muß, oder was dem gleich ist: Es existiert ein Verschiebungsfeld \mathbf{w} , so daß

$$(\beta)_{ab} = (\mathbf{w})_{a,b}. \quad (4.2.54)$$

Wie auch für die Dehnungsmaße ist es bequemer, in der linearisierten Theorie einen Tensor 2-ter Stufe α zu benutzen, der mit \mathbf{T} wie folgt verbunden ist

$$\alpha_{ab} = \frac{1}{2} \varepsilon_{bcd} (\mathbf{T})_{acd}, \quad (4.2.55)$$

mit ε_{abc} dem Levi-Civita-Tensor. Glg. (4.2.50), durch den Tensor α ausgedrückt, nimmt die folgende klassische Form an [122]

$$\alpha = \text{rot} \beta^p, \quad (\alpha = \nabla \times \beta^p). \quad (4.2.56)$$

Der Tensor α wird in der linearisierten Theorie die Versetzungsdichte genannt. Glg. (4.2.51) liefert

$$\operatorname{rot}\beta^e = -\alpha, \quad (\nabla \times \beta^e = -\alpha). \quad (4.2.57)$$

Die Differentialgleichung für die elastische Umkehrdeformation (4.2.1) lautet nach der Linearisierung

$$\begin{aligned} -(\beta^e)_{ac,b} = & -[(\epsilon^e)_{ba,c} + (\epsilon^e)_{ca,b} - (\epsilon^e)_{bc,a}] \\ & + \frac{1}{2}[(\mathbf{t})_{abc} - (\mathbf{t})_{bca} - (\mathbf{t})_{cba}]. \end{aligned} \quad (4.2.58)$$

Die linearisierte Integrabilitätsbedingung (4.2.6) reduziert sich auf

$$\begin{aligned} r_{abcd} = & [-(\dot{\epsilon}^e)_{da,bc} + (\epsilon^e)_{db,ac} + (\epsilon^e)_{ca,bd} - (\epsilon^e)_{cb,ad}] \\ & + \frac{1}{2}[(\mathbf{t})_{adb} - (\mathbf{t})_{dba} - (\mathbf{t})_{bda}]_{,c} - \frac{1}{2}[(\mathbf{t})_{acb} - (\mathbf{t})_{cba} - (\mathbf{t})_{bca}]_{,d} = 0. \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

Multipliziert man (4.16) mit $\frac{1}{4}\epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}$ und berechnet man die symmetrischen und schief-symmetrischen Anteile, erhält man zwei Gleichungen:

$$\alpha_{ij,j} = 0, \quad (\operatorname{div}\alpha = 0), \quad (4.2.60)$$

und

$$\epsilon_{iab}\epsilon_{jcd}(\epsilon^e)_{db,ac} + \frac{1}{2}(\epsilon_{iab}\alpha_{bj,a} + \epsilon_{jab}\alpha_{bi,a}) = 0,$$

oder, in Krönerscher Notation,

$$\operatorname{in}\epsilon^e - (\alpha \times \nabla)_{\operatorname{sym}} = 0. \quad (4.2.61)$$

Sie sind zuerst in der Arbeit von Kröner [122] hergeleitet worden.

Analog dazu kann man zeigen, daß die linearisierte Gleichung von (4.2.17) für den elastischen Rotationstensor

$$\operatorname{rot}\omega^e = -\operatorname{rot}\epsilon^e - \alpha. \quad (4.2.62)$$

gleichwertig ist.

Es ist leicht zu sehen, daß die linearisierten Gleichungen für die plastische Deformation und für die plastische Rotation äquivalent zu (4.2.58) und (4.2.62) sind. Eine Dualität dieser Art kommt zustande dank der additiven Zerlegung des kompatiblen Gesamtverschiebungsgradienten β gemäß Glg. (4.2.45).

4.3 Statik

4.3.1 Freie Energiedichte und Objektivitätsprinzip

Wir betrachten einen elastoplastischen Körper mit stetig verteilten Versetzungen unter der Voraussetzung, daß die Temperatur konstant bleibt. Wir postulieren die Existenz einer freien Energiedichte pro Kristallvolumeneinheit des Körpers. Bezüglich der Kristallreferenz hängt diese freie Energiedichte sowohl von der elastischen Deformation \mathbf{F}^e als auch von deren Ableitung $\bar{d}\mathbf{F}^e$ ab,

$$\bar{w} = \bar{w}(X, \mathbf{F}^e, \bar{d}\mathbf{F}^e). \quad (4.3.1)$$

Der Spannungszustand im elastoplastischen Körper ist entstanden durch dessen elastische Deformation, was zur Speicherung der Energie im Körper führt. Deswegen erwarten wir, wenn wir eine zusätzliche Starrkörperbewegung auf die aktuelle Bewegung des Körpers überlagern, daß dessen Energie unverändert bleibt. Über solch eine skalare Größe sagt man, sie sei bezugsindifferent [187].

Es seien $\phi(X, t)$ und $\phi^*(X, t)$ zwei Bewegungen des Körpers. Keine von ihnen ist im allgemeinen eine Starrkörperbewegung. Diese Bewegungen unterscheiden sich voneinander um eine Starrkörperbewegung, wenn zu jeder Zeit der folgende Zusammenhang gilt

$$\phi^*(X, t) = c(t) + \mathbf{Q}(t)[\phi(X, t) - x_0], \quad (4.3.2)$$

mit $c(t)$ einem zeitabhängigen Punkt, $\mathbf{Q}(t)$ einem zeitabhängigen orthogonalen Tensor, und x_0 einem festen Punkt. Man sagt, eine skalare Funktion sei bezugsindifferent, wenn sie bei Überlagerung einer Starrkörperbewegung (4.3.2) ihre Werte nicht ändert. Wir wollen nun zeigen, daß wenn die freie Energiedichte (4.3.1) bezugsindifferent ist, sie nur von X , \bar{c}^e und \bar{t} abhängen darf.

Zuerst stellen wir fest, daß, wenn die Starrkörperbewegung (4.3.2) überlagert wird, sich dann auch die Momentanreferenz gemäß

$$\mathbb{K}_t^* = \mathbf{Q}\mathbb{K}_t \quad (4.3.3)$$

ändert. Die Kristallreferenz bleibt unverändert für beide Bewegungen. Deswegen ändert sich die elastische Deformation gemäß (4.1.3) wie folgt

$$\mathbf{F}^{e*} = \mathbf{Q}\mathbf{F}^e. \quad (4.3.4)$$

Weil die Ableitung \bar{d} bezüglich der gleichen Kristallreferenz $\bar{\mathbb{K}}_t$ zu berechnen ist, erhält man

$$\bar{d}\mathbf{F}^{e*} = \mathbf{Q}\bar{d}\mathbf{F}^e. \quad (4.3.5)$$

Mit Hilfe der Definitionen (4.1.28) und (4.1.37)₃ kann man feststellen, daß die folgenden Gleichungen

$$\bar{\mathbf{c}}^{e*} = \mathbf{F}^{e*T}\mathbf{g}\mathbf{F}^{e*} = \mathbf{F}^{eT}\mathbf{Q}^T\mathbf{g}\mathbf{Q}\mathbf{F}^e = \bar{\mathbf{c}}^e \quad (4.3.6)$$

und

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{t}}^*(\bar{\mathbf{w}}_1, \bar{\mathbf{w}}_2) &= \mathbf{F}^{e*-1} [((\bar{d}\mathbf{F}^{e*})\bar{\mathbf{w}}_2)\bar{\mathbf{w}}_1 - ((\bar{d}\mathbf{F}^{e*})\bar{\mathbf{w}}_1)\bar{\mathbf{w}}_2] \\ &= \mathbf{F}^{e-1}\mathbf{Q}^{-1} [((\mathbf{Q}\bar{d}\mathbf{F}^{e*})\bar{\mathbf{w}}_2)\bar{\mathbf{w}}_1 - ((\mathbf{Q}\bar{d}\mathbf{F}^{e*})\bar{\mathbf{w}}_1)\bar{\mathbf{w}}_2] = \bar{\mathbf{t}}(\bar{\mathbf{w}}_1, \bar{\mathbf{w}}_2) \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

gelten. Jede Funktion, die nur von X , $\bar{\mathbf{c}}^e$ und $\bar{\mathbf{t}}$ abhängt, wird deswegen bezugsindifferent.

Nun betrachten wir zwei Bewegungen $\phi(X, t)$ und $\phi^*(X, t)$ mit der gleichen elastischen Dehnung $\bar{\mathbf{c}}^e = \bar{\mathbf{c}}^{e*}$ und der gleichen Versetzungsdichte $\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{t}}^*$. Wir wollen zeigen, daß diese Bewegungen sich voneinander um eine Starrkörperbewegung unterscheiden. Es seien \mathbb{K}_t und \mathbb{K}_t^* die Momentanreferenzen dieser Bewegungen, die durch

$$\mathbb{K}_t^* = \mathbf{Q}(X, t)\mathbb{K}_t, \quad \mathbf{F}^{e*} = \mathbf{Q}(X, t)\mathbf{F}^e, \quad (4.3.8)$$

miteinander verbunden sind, wobei $\mathbf{Q}(X, t)$ irgendein Deformationsfeld ist. Wir müssen beweisen, daß \mathbf{Q} orthogonal ist und nur von t abhängt. In der Tat folgt aus der Bedingung $\bar{\mathbf{c}}^e = \bar{\mathbf{c}}^{e*}$ und (4.3.8)

$$\mathbf{F}^{e*T}\mathbf{g}\mathbf{F}^{e*} = \mathbf{F}^{eT}\mathbf{Q}^T(X, t)\mathbf{g}\mathbf{Q}(X, t)\mathbf{F}^e = \mathbf{F}^{eT}\mathbf{g}\mathbf{F}^e. \quad (4.3.9)$$

Deswegen genügt $\mathbf{Q}(X, t)$ der Identität

$$\mathbf{Q}^T(X, t)\mathbf{g}\mathbf{Q}(X, t) = \mathbf{g}, \quad (4.3.10)$$

oder, was dem gleich ist, $\mathbf{Q}(X, t)$ ist orthogonal. Setzt man (4.3.8)₂ in die Definition (4.1.28) ein und benutzt man die Identität $\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{t}}^*$, erhält man somit

$$\begin{aligned} &\mathbf{F}^{e*-1} [((\bar{d}\mathbf{F}^{e*})\bar{\mathbf{w}}_2)\bar{\mathbf{w}}_1 - ((\bar{d}\mathbf{F}^{e*})\bar{\mathbf{w}}_1)\bar{\mathbf{w}}_2] \\ &= \mathbf{F}^{e-1}\mathbf{Q}^{-1} [((\mathbf{Q}\bar{d}\mathbf{F}^e)\bar{\mathbf{w}}_2)\bar{\mathbf{w}}_1 - ((\mathbf{Q}\bar{d}\mathbf{F}^e)\bar{\mathbf{w}}_1)\bar{\mathbf{w}}_2] \\ &+ \mathbf{F}^{e-1}\mathbf{Q}^{-1} [(\bar{d}\mathbf{Q}(\mathbf{F}^e\bar{\mathbf{w}}_2))\bar{\mathbf{w}}_1 - (\bar{d}\mathbf{Q}(\mathbf{F}^e\bar{\mathbf{w}}_1))\bar{\mathbf{w}}_2] \\ &= \mathbf{F}^{e-1} [((\bar{d}\mathbf{F}^e)\bar{\mathbf{w}}_2)\bar{\mathbf{w}}_1 - ((\bar{d}\mathbf{F}^e)\bar{\mathbf{w}}_1)\bar{\mathbf{w}}_2]. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Aus (4.3.11) folgt die Identität

$$\mathbf{F}^{e-1} \mathbf{Q}^{-1} [(\bar{d}\mathbf{Q}(\mathbf{F}^e \bar{\mathbf{w}}_2)) \bar{\mathbf{w}}_1 - (\bar{d}\mathbf{Q}(\mathbf{F}^e \bar{\mathbf{w}}_1)) \bar{\mathbf{w}}_2] = 0. \quad (4.3.12)$$

Ersetzt man die Ableitung \bar{d} in (4.3.12) durch d gemäß (4.1.7), kann man zeigen, daß

$$\mathbf{Q}^{-1} [((d\mathbf{Q})\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_1 - ((d\mathbf{Q})\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_2] = 0. \quad (4.3.13)$$

Gln. (4.3.10) und (4.3.13) stellen das Problem der Bestimmung des Deformationsfeldes \mathbf{Q} dar, mit der Besonderheit, daß dessen Metrik gleich \mathbf{g} ist und dessen Torsion verschwindet (cf. das Problem der Bestimmung von \mathbf{F}^p aus \mathbf{C}^p und \mathbf{T} im Abschnitt 4.2.3). Es ist leicht nachzuprüfen, daß die Christoffel-Symbole von \mathbf{Q} verschwinden, und die Gleichung für \mathbf{Q} lautet

$$d\mathbf{Q} = 0. \quad (4.3.14)$$

Die Lösung (4.3.14) ist offenbar $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0(t)$ (\mathbf{Q} ist unabhängig von X). Gemäß dem Prinzip der Bezugsindifferenz müssen die Energien dieser Bewegungen gleich sein und wir erhalten

$$\mathfrak{w} = \hat{\mathfrak{w}}(X, \bar{\mathbf{c}}^e, \bar{\mathbf{t}}). \quad (4.3.15)$$

Diese Formel stimmt mit der Krönerschen Forderung überein, daß die freie Energiedichte nur von der elastischen Dehnung und von der Versetzungsdichte abhängen darf [151].

Man erkennt auch den Unterschied zwischen (4.3.15) und der Formel, die für die freie Energiedichte im von Davini vorgeschlagenen Modell defektiver Kristalle bestimmt wurde (siehe [188]). Davini hat nicht von der multiplikativen Zerlegung der Gesamtdeformation in elastische und plastische Anteile Gebrauch gemacht. Zusätzlich hat er die Gesamtdeformation mit Absicht aus der Konstitutivliste herausgenommen. Die freie Energiedichte in Davinis Theorie hängt also von der Metrik, die durch die Gittervektoren (Direktoren) erzeugt wird, und von den Maßen der Defekte (Versetzungsdichte und Fehlstellendichte) ab. Da die inelastischen Deformationen die Direktoren und dadurch auch die Metrik ändern können, hängt die freie Energiedichte in seiner Theorie *nicht nur* von der Metrik ab, die infolge der elastischen Deformation erzeugt wird, sondern auch von der Versetzungsdichte. Dies scheint im Konflikt mit der oben erwähnten Krönerschen Forderung zu sein.

Wenn die plastische Deformation fehlt, so daß $\mathbf{F}^p = \mathbf{1}$, und $\mathbf{F}^e = \mathbf{F}$ kompatibel wird, dann wird $\bar{\mathbf{c}}^e = \mathbf{C}$, und $\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$. Die Formel (4.3.15) reduziert sich in diesem Fall auf die bekannte Formel für hyperelastische Körper

$$W = W(X, \mathbf{C}). \quad (4.3.16)$$

Weil $\bar{\mathbf{c}}^e$ und $\bar{\mathbf{t}}$ die "Pull-backs" der Metrik \mathbf{g} bzw. der Torsion \mathbf{t} sind, können wir sie als Funktionen von \mathbf{F}^e , \mathbf{g} , und \mathbf{t} betrachten (Vgl. mit den Formeln (4.1.31) und (4.1.37)). Dadurch wird $\bar{\omega}$ auch eine Funktion von X , \mathbf{F}^e , \mathbf{g} , und \mathbf{t} . Damit wird die freie Energie pro Volumeneinheit bezüglich der Momentanreferenz \mathbb{K}_t die folgende Form annehmen

$$w = J^{e-1} \hat{\omega}(X, \bar{\mathbf{c}}^e(\mathbf{F}^e, \mathbf{g}), \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{F}^e, \mathbf{t})) = \hat{w}(X, \mathbf{F}^e, \mathbf{g}, \mathbf{t}), \quad (4.3.17)$$

wobei

$$J^{e-1} = \det \mathbf{F}^{e-1}. \quad (4.3.18)$$

Man bemerkt, daß \mathbf{t} ein objektiver Tensor 3-ter Stufe ist, der sich unter einer überlagerten Starrkörperbewegung wie folgt transformiert

$$\mathbf{t}^*(\mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_2^*) = \mathbf{Q}\mathbf{t}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2),$$

wobei $\mathbf{w}_1^* = \mathbf{Q}\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2^* = \mathbf{Q}\mathbf{w}_2$. Die Funktion \hat{w} kann im allgemeinen Fall von \mathbf{F}^e explizit abhängen. Nur in speziellen Fällen (z.B. bei isotropen Materialien) hängt \hat{w} nicht explizit von \mathbf{F}^e , sondern nur von \mathbf{c}^e ab. Unter der überlagerten Starrkörperbewegung muß diese freie Energiedichte \hat{w} bezugsindifferent sein, so daß

$$\hat{w}(X, \mathbf{Q}\mathbf{F}^e, \mathbf{g}, \mathbf{t}^*) = \hat{w}(X, \mathbf{F}^e, \mathbf{g}, \mathbf{t}). \quad (4.3.19)$$

Analog dazu wird die freie Energie pro Volumeneinheit der Anfangskonfiguration, bezogen auf die Anfangsbeschreibung \mathbb{K}_0 , die folgende Form annehmen

$$W = J^p \hat{\omega}(X, \bar{\mathbf{c}}^e(\mathbf{F}^p, \mathbf{C}), \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{F}^p, \mathbf{T})) = \hat{W}(X, \mathbf{F}^p, \mathbf{C}, \mathbf{T}), \quad (4.3.20)$$

mit

$$J^p = \det \mathbf{F}^p, \quad (4.3.21)$$

in voller Übereinstimmung mit dem Kovarianz-Prinzip. Man kann damit die Dualität und die Gleichwertigkeit zwischen der Anfangs- und Momentanbeschreibungen erkennen (siehe [135,184,189,190]). Besteht der Körper in allen Punkten aus dem gleichen Material (homogener Körper), wird die freie Energiedichte W explizit unabhängig von X , so daß

$$W = J^p \hat{w}(\bar{c}^e(\mathbf{F}^p, \mathbf{C}), \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{F}^p, \mathbf{T})) = \hat{W}(\mathbf{F}^p, \mathbf{C}, \mathbf{T}). \quad (4.3.22)$$

Einfachheitshalber werden wir im weiteren nur homogene Materialien betrachten, deren freie Energiedichte durch (4.3.22) gegeben ist.

Die Formel (4.3.1) genügt noch einem weiteren wichtigen Kriterium: Die freie Energiedichte pro Kristallvolumeneinheit eines Körpers hängt nämlich nur von den Momentan- und Zwischenzuständen ab, aber sie ist unabhängig von der Anfangsreferenz. Dies bedeutet, daß wenn wir der Anfangskonfiguration eine beliebige Anfangsdeformation überlagern, und die Kristall- und Momentanreferenzen unverändert lassen, dann wird die Energie \hat{w} unverändert bleiben. Wir nennen diese Eigenschaft das Prinzip der Anfangsbezugsindifferenz.

Es sei \mathbf{X} der Ortsvektor eines beliebigen Punktes X in einem ausgewählten Koordinatensystem. Die überlagerte Anfangsdeformation transformiert \mathbf{X} in die neue Lage \mathbf{X}^* wie folgt

$$\mathbf{X}^* = \Phi(\mathbf{X}). \quad (4.3.23)$$

Durch (4.3.23) wird sich die Anfangsreferenz ändern gemäß

$$\mathbb{K}_0^* = \mathbf{F}_0 \mathbb{K}_0, \quad (4.3.24)$$

wobei \mathbf{F}_0 die folgende Anfangsdeformation ist

$$\mathbf{F}_0 = D\Phi. \quad (4.3.25)$$

Da die Kristall- und Momentanreferenz unverändert bleiben, führen die Formeln (4.1.2)-(4.1.4) zu den folgenden Transformationsregeln

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}\mathbf{F}_0^{-1}, \quad \mathbf{F}^{p*} = \mathbf{F}^p\mathbf{F}_0^{-1}, \quad \mathbf{F}^{e*} = \mathbf{F}^e. \quad (4.3.26)$$

Einfachheitshalber leiten wir die Transformationsregel für $D\mathbf{F}^p$ direkt in Komponenten her

$$\begin{aligned} (D\mathbf{F}^p)_{BC}^{*\alpha} &= \frac{\partial((\mathbf{F}^p)_D^\alpha (\mathbf{F}_0^{-1})_B^D)}{\partial X^{*C}} = \frac{\partial((\mathbf{F}^p)_D^\alpha (\mathbf{F}_0^{-1})_B^D)}{\partial X^E} (\mathbf{F}_0^{-1})_C^E \\ &= (\mathbf{F}^p)_{D,E}^\alpha (\mathbf{F}_0^{-1})_B^D (\mathbf{F}_0^{-1})_C^E + (\mathbf{F}^p)_D^\alpha \frac{\partial (\mathbf{F}_0^{-1})_B^D}{\partial X^E} (\mathbf{F}_0^{-1})_C^E. \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

Gemäß des Prinzips der Anfangsbezugsindifferenz muß die freie Energiedichte pro Kristallvolumeneinheit $\hat{w}(\bar{\mathbf{c}}^e, \bar{\mathbf{t}})$ unter den Transformationen (4.3.23), (4.3.26) und (4.3.27) unverändert bleiben. Die Gruppe aller Transformationen, die durch (4.3.23) charakterisiert ist, wird die Gruppe der Anfangsdeformationen genannt. Die Energiedichte (4.3.22) ist somit invariant, bis zum Faktor J^p , bezüglich der Gruppe der Anfangsdeformationen (4.3.23). Dies hat viele weitgehenden Konsequenzen, von denen wir im folgenden noch sprechen werden.

4.3.2 Prinzip der virtuellen Arbeit

Wir betrachten nun \mathbb{K}_0 als eine gewählte feste Referenz, und es seien \mathbf{X} und \mathbf{x} die Ortsvektoren des Punktes X in der Anfangs- bzw. Momentan- konfiguration. Dann ist es offensichtlich, daß $\mathbf{F} = D\mathbf{x}$. Die Energie eines beliebigen Teilkörpers \mathcal{U} kann in folgender Form ausgedrückt werden

$$I = \int_{\mathcal{U}_0} W(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, D\mathbf{F}^p) dv, \quad (4.3.28)$$

mit $\mathcal{U}_0 = \phi_0(\mathcal{U})$, W der freie Energiedichte bezüglich der Anfangsreferenz, die im allgemeinen eine Funktion von \mathbf{F} , \mathbf{F}^p und $D\mathbf{F}^p$ ist. Wir analysieren zuerst die allgemeine Situation, und werden später die Energiedichte (4.3.22) betrachten.

Es seien nun $\mathbf{x}(\mathbf{X}, \epsilon)$ und $\mathbf{F}^p(\mathbf{X}, \epsilon)$ Einparameterfamilien der Konfigurationen bzw. der plastischen Deformationen. Wir definieren eine virtuelle Änderung $(\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{F}^p)$ (Variationen) wie folgt

$$(\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{F}^p) = \left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}, \frac{\partial\mathbf{F}^p}{\partial\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right). \quad (4.3.29)$$

Wir fordern, daß das Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\begin{aligned} \delta I = & \int_{\partial\mathcal{U}_0} (\rho_0 \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{x} + \langle \rho_0 \mathbf{B}^d, \delta\mathbf{F}^p \rangle) dv \\ & + \int_{\partial\mathcal{U}_0} (\mathbf{P}_\nu \cdot \delta\mathbf{x} + \langle \mathbf{P}_\nu^d, \delta\mathbf{F}^p \rangle) da \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

für jeden Teilkörper \mathcal{U} gelten muß, mit ρ_0 der Massendichte, \mathbf{B} und \mathbf{B}^d der äußeren Makro- bzw. Mikrokraft, \mathbf{P}_ν der Makrolast, \mathbf{P}_ν^d der Mikrolast⁵ (der kleine Index d dieses (1,1)-Tensors kennzeichnet die Wirkung

⁵Die Tatsache, daß die Mikrolast auf dem Rand des Körpers vorgegeben sein muß, bedeutet, daß wir

auf Versetzungen) und da der Flächenform in \mathcal{V} . Die Variation des Energiefunktionals I ist wie folgt definiert

$$\delta I = \frac{d}{d\epsilon} I[\mathbf{x}(\mathbf{X}, \epsilon), \mathbf{F}^p(\mathbf{X}, \epsilon)] \Big|_{\epsilon=0}. \quad (4.3.31)$$

Ein etwas anderer Standpunkt über zulässige Variationen und Thermodynamik, wenn es um Versetzungen und Plastizität geht, ist in Ericksens Arbeit [192] besprochen worden. Die Herleitung der Bilanzgleichungen für die unterschiedlichen Kontinua mit Mikrostruktur findet man in dem Buch von Capriz [193].

Wir berechnen nun die Variation von I (siehe z.B. [76])

$$\begin{aligned} \delta I = \int_{\mathcal{U}_0} \left(\left\langle \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \delta \mathbf{F} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}^p}, \delta \mathbf{F}^p \right\rangle \right. \\ \left. + \left\langle \frac{\partial W}{\partial D\mathbf{F}^p}, \delta D\mathbf{F}^p \right\rangle \right) dv. \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

Setzt man die Formeln $\delta \mathbf{F} = D\delta \mathbf{x}$ und $\delta D\mathbf{F}^p = D\delta \mathbf{F}^p$ in (4.3.32) ein und integriert man sie partiell, erhält man

$$\begin{aligned} \delta I = \int_{\mathcal{U}_0} \left(- \left\langle \text{Div} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \delta \mathbf{x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}^p}, \delta \mathbf{F}^p \right\rangle - \left\langle \text{Div} \frac{\partial W}{\partial D\mathbf{F}^p}, \delta \mathbf{F}^p \right\rangle \right) dv \\ + \int_{\partial \mathcal{U}_0} \left(\left\langle \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{N}, \delta \mathbf{x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial W}{\partial D\mathbf{F}^p} \mathbf{N}, \delta \mathbf{F}^p \right\rangle \right) da, \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

wobei \mathbf{N} der äußere Normaleneinheitsvektor auf $\partial \mathcal{U}_0$, dem Rand von \mathcal{U}_0 , ist. Kombiniert man (4.3.33) mit (4.3.30), kann man folgende Gleichgewichtsbedingungen herleiten

$$\text{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{g}^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad (4.3.34)$$

$$\text{Div} \mathbf{P}^d + \rho_0 \mathbf{B}^d - \mathbf{J} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{P}^d = \frac{\partial W}{\partial D\mathbf{F}^p}, \quad (4.3.35)$$

uns auf der zum Cauchyschen Niveau nächsthöheren Ebene der detaillierten Beschreibung des Kontinuums befinden (das Niveau der Mikrostrukturmechanik, in Krönerscher Terminologie [151]). Deswegen sollte man \mathbf{F}^p nicht als die interne Variable in Kestinscher Definition [191] behandeln, sondern muß es als die mikroskopischen Freiheitsgrade betrachten, die im Prinzip meßbar und kontrollierbar sind. Natürlich ist die Methode der praktischen Messungen der Mikrolast noch nicht so weit fortgeschritten, so daß dies ein Forschungsbereich der Zukunft für die Experimentatoren ist.

mit Div dem Divergenz-Operator, der mit der Ableitung D assoziiert ist, und \mathbf{J} dem folgenden Tensor

$$\mathbf{J} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}^p}. \quad (4.3.36)$$

Wir nennen \mathbf{P} den (ersten Piola-Kirchhoffschen) Makrospannungstensor, \mathbf{P}^d den Mikrospannungstensor (2-fach kontravarianten und einfach kovarianten, mit den Komponenten $(\mathbf{P}^d)_{\alpha}^{AB}$), und \mathbf{J} die innere Konfigurationsspannung ((1,1)-Tensor). Die Randbedingungen für \mathbf{P} und \mathbf{P}^d lauten

$$\mathbf{P}\mathbf{N} = \mathbf{P}_{\nu}, \quad (4.3.37)$$

$$\mathbf{P}^d\mathbf{N} = \mathbf{P}_{\nu}^d. \quad (4.3.38)$$

Wir berechnen nun $\mathbf{P}, \mathbf{P}^d, \mathbf{J}$ unter der Voraussetzung, daß die gespeicherte Energiedichte durch (4.3.22) gegeben ist. Man kann direkt prüfen, daß

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = 2\frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{C}} = J^p \mathbf{F}^{p-1} \bar{\mathbf{s}} \mathbf{F}^{p-T}, \quad (4.3.39)$$

$$\bar{\mathbf{s}} = 2\frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial \bar{\mathbf{c}}^e}, \quad (4.3.40)$$

$$\mathbf{P}^d = -\mathbf{F}^{p-T} \mathbf{S}^d, \quad \mathbf{S}^d = 2\frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{T}}, \quad (4.3.41)$$

$$\mathbf{S}^d(\mathbf{W}) = J^p \mathbf{F}^{p-1} \bar{\mathbf{s}}^d(\bar{\mathbf{w}}) \mathbf{F}^{p-T}, \quad (4.3.42)$$

$$\bar{\mathbf{s}}^d = 2\frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial \bar{\mathbf{t}}}. \quad (4.3.43)$$

Der (0,2)-Tensor \mathbf{S} ist offenbar symmetrisch und entspricht dem zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor in der Elastizitäts- und Elastoplastizitätstheorie. Der (2,1)-Tensor \mathbf{S}^d ist schief-symmetrisch bezüglich seiner kontravarianten Komponenten und wird Mikromomentenspannung genannt. Wir zeigen die Berechnung von \mathbf{J} in Komponenten mit Hilfe von

(4.3.36) und (4.3.22)

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{J})_{\alpha}^A = \frac{\partial W}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A} \Big|_{\mathbf{F}, D\mathbf{F}^p} &= \frac{\partial J^p}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A} \hat{\mathbf{w}} + J^p \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial (\bar{\mathbf{c}}^e)_{\gamma\delta}} \frac{\partial (\bar{\mathbf{c}}^e)_{\gamma\delta}}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A} \Big|_{\mathbf{F}} \\
 &+ J^p \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial (\bar{\mathbf{t}})_{\gamma\delta}^{\beta}} \frac{\partial (\bar{\mathbf{t}})_{\gamma\delta}^{\beta}}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A} \Big|_{D\mathbf{F}^p}. \quad (4.3.44)
 \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, daß mit Hilfe der Definition der Determinante

$$\frac{\partial J^p}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A} = J^p (\mathbf{F}^{p-1})_{\alpha}^A. \quad (4.3.45)$$

Wir berechnen nun den zweiten Term in (4.3.44). Durch Ableitung von (4.1.41) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial (\bar{\mathbf{c}}^e)_{\gamma\delta}}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A} \Big|_{\mathbf{F}} &= \frac{\partial (\mathbf{F}^{p-1})_{\gamma}^C}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A} (\mathbf{C})_{CD} (\mathbf{F}^{p-1})_{\delta}^D \\
 &+ (\mathbf{F}^{p-1})_{\gamma}^C (\mathbf{C})_{CD} \frac{\partial (\mathbf{F}^{p-1})_{\delta}^D}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A}. \quad (4.3.46)
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Identität $\mathbf{F}^{p-1} \mathbf{F}^p = \mathbf{1}$ kann man zeigen, daß

$$\frac{\partial (\mathbf{F}^{p-1})_{\gamma}^C}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A} = -(\mathbf{F}^{p-1})_{\alpha}^C (\mathbf{F}^{p-1})_{\gamma}^A. \quad (4.3.47)$$

Setzt man (4.3.46) und (4.3.47) in den zweiten Term von (4.3.44) ein und macht man von der Formel (4.3.39) Gebrauch, erhält man

$$J^p \frac{\partial \hat{\mathbf{w}}}{\partial (\bar{\mathbf{c}}^e)_{\gamma\delta}} \frac{\partial (\bar{\mathbf{c}}^e)_{\gamma\delta}}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A} \Big|_{\mathbf{F}} = -(\mathbf{F}^{p-1})_{\alpha}^C (\mathbf{C})_{CD} (\mathbf{S})^{DA}. \quad (4.3.48)$$

Zur Bestimmung des letzten Termes von (4.3.44) merken wir an, daß gemäß (4.1.20) und (4.1.29) (oder (4.1.27))

$$(\bar{\mathbf{t}})_{\gamma\delta}^{\beta} = [(\mathbf{F}^p)_{D,C}^{\beta} - (\mathbf{F}^p)_{C,D}^{\beta}] (\mathbf{F}^{p-1})_{\gamma}^C (\mathbf{F}^{p-1})_{\delta}^D. \quad (4.3.49)$$

Durch Ableitung von (4.3.49) analog zu der vorherigen Berechnung und mit Hilfe von (4.3.47) ergibt sich

$$\frac{\partial (\bar{\mathbf{t}})_{\gamma\delta}^{\beta}}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A} \Big|_{D\mathbf{F}^p} = (\bar{\mathbf{t}})_{\gamma\alpha}^{\beta} (\mathbf{F}^{p-1})_{\delta}^A + (\bar{\mathbf{t}})_{\alpha\delta}^{\beta} (\mathbf{F}^{p-1})_{\gamma}^A. \quad (4.3.50)$$

Setzt man dies in den letzten Term von (4.3.44) ein und berücksichtigt man (4.3.42) und (4.3.43), erhält man

$$\begin{aligned} J^p \frac{\partial \hat{w}}{\partial (\bar{\mathbf{t}})_{\gamma\delta}^\beta} \frac{\partial (\bar{\mathbf{t}})_{\gamma\delta}^\beta}{\partial (\mathbf{F}^p)_A^\alpha} \Big|_{D\mathbf{F}^p} &= J^p (\bar{\mathbf{t}})_{\alpha\delta}^\beta (\bar{\mathbf{S}}^d)_{\beta}^{\gamma\delta} (\mathbf{F}^{p-1})_\gamma^A \\ &= (\mathbf{F}^{p-1})_\alpha^C (\mathbf{T})_{CD}^B (\mathbf{S}^d)_B^{DA}. \end{aligned} \quad (4.3.51)$$

Kombiniert man letztendlich (4.3.45), (4.3.48) und (4.3.51), erhält man

$$(\mathbf{J})_\alpha^A = (\mathbf{F}^{p-1})_\alpha^C \left[-(\mathbf{C})_{CD} (\mathbf{S})^{DA} + \hat{W} \delta_C^A + (\mathbf{T})_{CD}^B (\mathbf{S}^d)_B^{DA} \right]. \quad (4.3.52)$$

Die Konfigurationsspannung ist also das "Pull-back" (mit einem Bein) zu der Kristallreferenz von dem Tensor in den eckigen Klammern, der wiederum die Summe des Eshelby-Tensors $-\mathbf{CS} + \hat{W}\mathbf{1}$ und des Tensors mit den Komponenten $(\mathbf{T})_{CD}^B (\mathbf{S}^d)_B^{DA}$ darstellt. Die Physikalische Bedeutung des ersten Tensors entspricht der Wirkung des umliegenden elastischen Feldes auf die Versetzungen [6, 127], der zweite Tensor weist hingegen auf die Wechselwirkung zwischen den Versetzungen hin.

Gemäß (4.3.41) ist der Mikrospannungstensor \mathbf{P}^d schief-symmetrisch im Bezug auf die kontravarianten Komponenten. Setzt man voraus, daß die äußeren Kräfte gleich Null sind, und wendet man den Div-Operator auf (4.3.35) noch einmal an, muß man die Identität

$$\text{Div} \mathbf{J} = \mathbf{0} \quad (4.3.53)$$

erhalten. Wir prüfen (4.3.53) direkt in Komponenten. Zuerst schreiben wir (4.3.52) als Ausdruck von \mathbf{P} und \mathbf{P}^d um

$$\begin{aligned} (\mathbf{J})_\alpha^A &= (\mathbf{F}^{p-1})_\alpha^B \left\{ W \delta_B^A - g_{ab} (\mathbf{P})^{aA} (\mathbf{F})_B^b \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{P}^d)_{\beta}^{CA} [(\mathbf{F}^p)_{C,B}^\beta - (\mathbf{F}^p)_{B,C}^\delta] \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.54)$$

Wendet man den Div-Operator auf (4.3.54) an, erhält man

$$\begin{aligned} (\mathbf{J})_{\alpha,A}^A &= (\mathbf{F}^{p-1})_{\alpha,A}^B \left\{ W \delta_B^A - g_{ab} (\mathbf{P})^{aA} (\mathbf{F})_B^b - (\mathbf{P}^d)_{\beta}^{CA} [(\mathbf{F}^p)_{C,B}^\beta - (\mathbf{F}^p)_{B,C}^\delta] \right\} \\ &\quad + (\mathbf{F}^{p-1})_\alpha^B \left\{ W_{,B} - g_{ab} (\mathbf{P}_{,A}^{aA} (\mathbf{F})_B^b - g_{ab} (\mathbf{P})^{aA} (\mathbf{F})_{B,A}^b \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{P}^d)_{\beta,A}^{CA} [(\mathbf{F}^p)_{C,B}^\beta - (\mathbf{F}^p)_{B,C}^\delta] - (\mathbf{P}^d)_{\beta}^{CA} [(\mathbf{F}^p)_{C,BA}^\beta - (\mathbf{F}^p)_{B,CA}^\delta] \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.55)$$

Mit Hilfe der Identität $\mathbf{F}^{p-1} \mathbf{F}^p = \mathbf{1}$ kann man die folgende Formel prüfen

$$(\mathbf{F}^{p-1})_{\alpha,A}^B = -(\mathbf{F}^{p-1})_\alpha^C (\mathbf{F}^p)_{C,A}^\beta (\mathbf{F}^{p-1})_\beta^B. \quad (4.3.56)$$

Durch Einsetzen von (4.3.56) in (4.3.55) und unter Berücksichtigung von (4.3.34) und (4.3.35) kann man feststellen, daß die rechte Seite von (4.3.55) verschwindet. Es ist bemerkenswert, daß, wenn die äußere Makrokraft nicht gleich null ist, die äußere Mikrokraft auch nicht identisch null angenommen werden darf, sonst wird die Theorie inkonsistent. Wir beschränken uns im weiteren Einfachheit halber auf den Fall der verschwindenden äußeren Kräfte.

4.3.3 Invarianzeigenschaften und Bilanzgleichungen

Im Abschnitt 4.3.1 haben wir angenommen, daß die Energiedichte eines elastoplastischen Körpers mit Versetzungen bezugsindifferent bezüglich der Gruppe aller Verschiebungen und Rotationen des euklidischen Raumes \mathcal{E} ist. Dies bedeutet, daß das Energiefunktional (4.3.28) unter beliebiger überlagerten Starrkörperbewegungen

$$x^* = x + c \quad (4.3.57)$$

und

$$x^* = x + Qx \quad (4.3.58)$$

unverändert bleibt. Folglich muß die Variation des Energiefunktionales δI für die folgende Familien infinitesimaler virtueller Verschiebungen und plastischer Deformationen

$$\delta x = d, \quad \delta F^p = 0, \quad (4.3.59)$$

$$\delta x = \omega x, \quad \delta F^p = 0, \quad (4.3.60)$$

verschwinden. Hierbei entspricht $d \in \mathcal{V}$ einem beliebigen konstanten Vektor, ω einem beliebigen konstanten Tensor, der der Identität $(g\omega)^T = -g\omega$ genügt (die sogenannten infinitesimalen Erzeugenden der Transformationen). Durch Einsetzen von (4.3.59) und (4.3.60) in die Gleichung (4.3.30), und mit Hilfe der Identität $\delta I = 0$ erhalten wir die folgenden Bilanzgleichungen für die stationären Funktionen

$$\int_{\partial u_0} P_\nu da = 0, \quad (4.3.61)$$

$$\int_{\partial u_0} x \times P_\nu da = 0. \quad (4.3.62)$$

Die Gleichungen (4.3.61) und (4.3.62) entsprechen der Bilanz des Makroimpulses bzw. des Makrodrehimpulses in der Integralform.

Wir leiten nun andere Bilanzgleichungen her, die mit der Invarianzeigenschaft der Energiedichte \bar{w} (oder W , genau bis zum Faktor J^p) bezüglich der Gruppe der Anfangsdeformationen (4.3.23) assoziiert sind. Wir werden jetzt explizit in Komponenten arbeiten. Wir betrachten die folgende Einparameterfamilie der homogenen Anfangsdeformationen

$$X^{*A} = (\mathbf{F}_0)_B^A X^B, \quad \mathbf{F}_0 = \text{konst.} \quad (4.3.63)$$

Die homogenen Deformationen $\mathbf{F}_0(\alpha)$ hängen von dem Parameter α so ab, daß $\mathbf{F}_0(0) = 1$. Deswegen ist (4.3.63) eine Untergruppe der Gruppe (4.3.23) und es gelten die Transformationsregeln (4.3.26) und (4.3.27). Da die freie Energiedichte \hat{w} anfangsbezugsindifferent ist, gilt die Identität

$$W(\mathbf{F}^*, \mathbf{F}^{p*}, (D\mathbf{F}^p)^*) = \det \mathbf{F}^{p*} \hat{w}(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, D\mathbf{F}^p) \quad (4.3.64)$$

mit \mathbf{F}^* , \mathbf{F}^{p*} und $(D\mathbf{F}^p)^*$ aus (4.3.26) bzw. (4.3.27). Wir leiten (4.3.64) nach α ab, setzen dann $\alpha = 0$ ein, und benutzen die Kettenregel und folgende Formeln

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} (\mathbf{F}^*)_A^a \Big|_{\alpha=0} &= (\mathbf{F})_B^a (\mathbf{G}_0)_A^B, \\ \frac{d}{d\alpha} (\mathbf{F}^{p*})_A^\alpha \Big|_{\alpha=0} &= (\mathbf{F}^p)_B^\alpha (\mathbf{G}_0)_A^B, \end{aligned} \quad (4.3.65)$$

$$\frac{d}{d\alpha} (\mathbf{F}^p)_{B,C}^{*\alpha} \Big|_{\alpha=0} = (\mathbf{F}^p)_{D,C}^\alpha (\mathbf{G}_0)_B^D + (\mathbf{F}^p)_{B,D}^\alpha (\mathbf{G}_0)_C^D,$$

wobei

$$\mathbf{G}_0 = \frac{d}{d\alpha} \mathbf{F}_0^{-1} \Big|_{\alpha=0}. \quad (4.3.66)$$

Unter Berücksichtigung von (4.3.34), (4.3.35), (4.3.36) und (4.3.45) erhalten wir

$$\begin{aligned} g_{ab}(\mathbf{P})^{bA} (\mathbf{F})_B^a (\mathbf{G}_0)_A^B + (\mathbf{J})_\alpha^A (\mathbf{F}^p)_B^\alpha (\mathbf{G}_0)_A^B \\ + (\mathbf{P}^d)_\alpha^{BC} [(\mathbf{F}^p)_{D,C}^\alpha (\mathbf{G}_0)_B^D + (\mathbf{F}^p)_{B,D}^\alpha (\mathbf{G}_0)_C^D] = W \delta_B^A (\mathbf{G}_0)_A^B. \end{aligned} \quad (4.3.67)$$

Weil \mathbf{G}_0 beliebig ist, folgt aus (4.3.67), daß

$$\begin{aligned} g_{ab}(\mathbf{P})^{bA} (\mathbf{F})_B^a + (\mathbf{J})_\alpha^A (\mathbf{F}^p)_B^\alpha \\ + (\mathbf{P}^d)_\alpha^{DA} [(\mathbf{F}^p)_{D,B}^\alpha - (\mathbf{F}^p)_{B,D}^\alpha] = W \delta_B^A. \end{aligned} \quad (4.3.68)$$

Es ist leicht zu sehen, daß Glg. (4.3.68) gleichwertig mit Glg. (4.3.52) ist. Die Invarianzeigenschaft von $\hat{\mathbf{t}}\mathbf{v}$ bezüglich (4.3.23) führt also zu der Bilanz des Mikroimpulses (4.3.35), die sich in Integralform wie folgt schreiben läßt

$$-\int_{\mathcal{U}_0} \mathbf{J} dv + \int_{\partial\mathcal{U}_0} \mathbf{P}_\nu^d da = \mathbf{0}. \quad (4.3.69)$$

Wir wählen nun eine Familie von inhomogenen Anfangsdeformationen, so daß

$$(\mathbf{F}_0^{-1})_B^A = (\mathbf{A}_0)_{BC}^A X^C + (\mathbf{B}_0)_B^A, \quad \mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 = \text{konst}, \quad (4.3.70)$$

$$(\mathbf{A}_0)_{BC}^A = (\mathbf{A}_0)_{CB}^A.$$

Durch nochmalige Ableitung von (4.3.64) nach α bei $\alpha = 0$, unter Berücksichtigung der Regel (4.3.27) und der Bilanz des Mikroimpulses (4.3.68), erhalten wir

$$(\mathbf{P}^d)_\alpha^{BC} (\mathbf{F}^p)_D^\alpha (\mathbf{H}_0)_{BC}^D = 0, \quad (4.3.71)$$

wobei

$$\mathbf{H}_0 = \left. \frac{d}{d\alpha} \mathbf{A}_0 \right|_{\alpha=0}. \quad (4.3.72)$$

Da \mathbf{F}^p und \mathbf{H}_0 beliebig sind folgt aus (4.3.72) und (4.3.70)₃, daß

$$(\mathbf{P}^d)_\alpha^{BC} = -(\mathbf{P}^d)_\alpha^{CB}. \quad (4.3.73)$$

Die Gleichung (4.3.73) nennen wir Bilanz des Mikrodrehimpulses. In Integralform lautet sie

$$\int_{\mathcal{U}_0} [(\mathbf{P}^d)_\alpha^{BC} + (\mathbf{P}^d)_\alpha^{CB}] dv = 0. \quad (4.3.74)$$

Die Bilanzgleichungen (4.3.69) und (4.3.74) können auch direkt aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit (4.3.30) hergeleitet werden.

4.3.4 Gleichgewichtsbedingungen bezüglich der Momentan- und Kristallreferenzen

Durch Umformung von (4.3.61) und (4.3.62) mit Hilfe der bekannten Euler- und Piola-Identitäten können wir die Bilanzgleichungen bezüglich der Momentanbeschreibung

$$\int_{\partial\phi(U)} \boldsymbol{\sigma}_\nu da = \mathbf{0}, \quad (4.3.75)$$

$$\int_{\partial\phi(\mathcal{U})} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_\nu da = \mathbf{0}, \quad (4.3.76)$$

aufstellen, mit $\boldsymbol{\sigma}_\nu = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$, $\boldsymbol{\sigma}$ dem Cauchyschen Spannungstensor, der mit \mathbf{P} durch

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{P} \mathbf{F}^T, \quad (4.3.77)$$

verbunden ist. Gln. (4.3.75) und (4.3.76) lauten in lokaler Form

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (4.3.78)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}. \quad (4.3.79)$$

Wir analysieren nun die übrigen Bilanzgleichungen des Mikroimpulses und des Mikrodrehimpulses bezüglich der Momentanbeschreibung. Zu diesem Zweck führen wir die Tensoren \mathbf{p}^d und \mathbf{j} ein, die sich durch \mathbf{P}^d und \mathbf{J} wie folgt ausdrücken lassen

$$(\mathbf{p}^d)_\alpha^{bc} = J^{-1} (\mathbf{P}^d)_\alpha^{BC} (\mathbf{F})_B^b (\mathbf{F})_C^c, \quad (4.3.80)$$

$$\mathbf{j} = J^{-1} \mathbf{J} \mathbf{F}^T. \quad (4.3.81)$$

Drückt man \mathbf{P}^d durch \mathbf{p}^d aus, setzt man es dann in (4.3.35) und macht man von der Piola-Identität Gebrauch, erhält man die Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{p}^d - \mathbf{j} = \mathbf{0}. \quad (4.3.82)$$

Analog dazu ergibt sich aus (4.3.80) und (4.3.73)

$$(\mathbf{p}^d)_\alpha^{bc} = -(\mathbf{p}^d)_\alpha^{cb}. \quad (4.3.83)$$

Es folgt aus den Definitionen (4.3.17), (4.3.77) und (4.3.80) der Ausdruck für die Mikrokraft \mathbf{j}

$$(\mathbf{j})_\alpha^b = (\mathbf{F}^e)_\alpha^c [-(\mathbf{g})_{cd} (\boldsymbol{\sigma})^{db} + \hat{w} \delta_c^b + (\mathbf{t})_{cd}^a (\boldsymbol{\sigma}^d)_a^{bd}], \quad (4.3.84)$$

wobei $\boldsymbol{\sigma}^d$ der Momentenspannungstensor ist, der mit \mathbf{p}^d durch

$$\boldsymbol{\sigma}^p = -\mathbf{F}^{e-T} \mathbf{p}^d, \quad \boldsymbol{\sigma}^d = 2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial \mathbf{t}}. \quad (4.3.85)$$

verbunden ist.

Es ist auch möglich, die Bilanzgleichungen bezüglich der Kristallreferenz aufzustellen. Mit diesem Ziel prüfen wir zuerst die folgende Identität

$$\operatorname{div}(J^{e-1}\mathbf{F}^{eT}) = J^{e-1}\bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad (4.3.86)$$

wobei der Vektor $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ sich wie folgt ausdrücken läßt

$$(\bar{\boldsymbol{\tau}})_{\beta} = (\bar{\mathbf{t}})_{\beta\alpha}^{\alpha} = (\mathbf{F}^{e-1})_a^{\alpha} [(\mathbf{F}^e)_{\beta,\alpha}^a - (\mathbf{F}^e)_{\alpha,\beta}^a]. \quad (4.3.87)$$

Die Formel (4.3.86) stellt eine Verallgemeinerung der bekannten Piola-Identität dar (denn wenn \mathbf{F}^e kompatibel wäre, würde die rechte Seite von Glg. (4.3.86) verschwinden, so daß wir die Piola-Identität erhalten würden). Wir beweisen (4.3.86) direkt in Komponenten mit Hilfe der Definitionen der Determinante und der relativen Ableitung

$$\begin{aligned} (J^{e-1}(\mathbf{F}^e)_{\beta}^b)_{,b} &= J^{e-1}(\mathbf{F}^e)_{\alpha}^a (\mathbf{F}^{e-1})_{a,b}^{\alpha} (\mathbf{F}^e)_{\beta}^b + J^{e-1}(\mathbf{F}^e)_{\beta,b}^b \\ &= J^{e-1} [(\mathbf{F}^e)_{\alpha}^a (\mathbf{F}^{e-1})_{a,\beta}^{\alpha} + (\mathbf{F}^e)_{\beta,\alpha}^a (\mathbf{F}^{e-1})_a^{\alpha}] \\ &= J^{e-1} [-(\mathbf{F}^{e-1})_a^{\alpha} (\mathbf{F}^e)_{\alpha,\beta}^a + (\mathbf{F}^{e-1})_a^{\alpha} (\mathbf{F}^e)_{\beta,\alpha}^a] = J^{e-1}(\bar{\boldsymbol{\tau}})_{\beta}. \end{aligned}$$

Wir definieren den Spannungstensor $\bar{\mathbf{p}}$ wie folgt

$$\bar{\mathbf{p}} = J^e \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{e-T}, \quad (4.3.89)$$

$$(\bar{\mathbf{p}})^{a\alpha} = J^e (\boldsymbol{\sigma})^{ab} (\mathbf{F}^{e-1})_b^{\beta}.$$

Dieser Tensor spielt die gleiche Rolle in Bezug auf die Kristallreferenz wie der erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor bezüglich der Anfangskonfiguration. Drückt man mit Hilfe von (4.3.89) $\boldsymbol{\sigma}$ durch $\bar{\mathbf{p}}$ aus und setzt man das Ergebnis in die Bilanz des Makroimpulses (4.3.78), erhält man

$$(\bar{\mathbf{p}})_{,\beta}^{a\beta} + (\bar{\mathbf{p}})^{a\beta} (\bar{\boldsymbol{\tau}})_{\beta} = 0, \quad (4.3.90)$$

oder in absoluter Notation

$$\operatorname{div}_{\mathbb{K}} \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{p}} \bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0}. \quad (4.3.91)$$

Bei der Herleitung von (4.3.90) haben wir nur von der Identität (4.3.86) Gebrauch gemacht. Die Gleichung (4.3.90) ist zuerst von Noll [124] und Wang [125] hergeleitet worden. Die Bilanz des Drehimpulses verändert sich zu

$$\bar{\mathbf{s}}^T = \bar{\mathbf{s}}, \quad \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{F}^{e-1} \bar{\mathbf{p}}. \quad (4.3.92)$$

Wir führen den folgenden Momentenspannungstensor bezüglich der Kristallreferenz ein

$$(\bar{\mathbf{s}}^d)_{\alpha}^{\beta\gamma} = -J^e (\mathbf{p}^d)_{\alpha}^{bc} (\mathbf{F}^{e-1})_b^{\beta} (\mathbf{F}^{e-1})_c^{\gamma}. \quad (4.3.93)$$

Durch Einsetzen von \mathbf{p}^d als Funktion von $\bar{\mathbf{s}}^d$ in die Bilanzgleichung (4.3.82) und unter Berücksichtigung der Identität (4.3.86) kann man prüfen, daß

$$(\mathbf{p}^d)_{\alpha,c}^{bc} - (\mathbf{j})_{\alpha}^b = -J^{e-1} [(\bar{\mathbf{s}}^d)_{\alpha,\gamma}^{\beta\gamma} (\mathbf{F}^e)_{\beta}^b + (\bar{\mathbf{s}}^d)_{\alpha}^{\beta\gamma} (\mathbf{F}^e)_{\beta,\gamma}^b + (\bar{\mathbf{s}}^d)_{\alpha}^{\beta\gamma} (\mathbf{F}^e)_{\beta}^b (\bar{\boldsymbol{\tau}})_{\gamma}] - (\mathbf{j})_{\alpha}^b = 0. \quad (4.3.94)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $J^e (\mathbf{F}^{e-1})_b^{\delta}$ und benutzt man die Definition des Torsionstensors (4.1.28), erhält man

$$(\bar{\mathbf{s}}^d)_{\alpha,\gamma}^{\delta\gamma} + (\bar{\mathbf{s}}^d)_{\alpha}^{\beta\gamma} (\bar{\mathbf{t}})_{\beta\gamma}^{\delta} + (\bar{\mathbf{s}}^d)_{\alpha}^{\delta\gamma} (\bar{\boldsymbol{\tau}})_{\gamma} - (\bar{\mathbf{j}})_{\alpha}^{\delta} = 0, \quad (4.3.95)$$

wobei

$$(\bar{\mathbf{j}})_{\alpha}^{\delta} = J^e (\mathbf{j})_{\alpha}^b (\mathbf{F}^{e-1})_b^{\delta}. \quad (4.3.96)$$

Aus (4.3.17), (4.3.89), (4.3.92) und (4.3.93) folgt

$$(\bar{\mathbf{j}})_{\alpha}^{\delta} = -(\bar{\mathbf{c}}^e)_{\alpha\beta} (\bar{\mathbf{s}})^{\beta\delta} + \bar{\mathfrak{m}} \delta_{\alpha}^{\delta} + (\bar{\mathbf{t}})_{\alpha\beta}^{\gamma} (\bar{\mathbf{s}}^d)_{\gamma}^{\delta\beta}. \quad (4.3.97)$$

Die Bilanz des Mikrodrehimpulses folgt nun aus (4.3.83) und (4.3.93)

$$(\bar{\mathbf{s}}^d)_{\alpha}^{\beta\gamma} = -(\bar{\mathbf{s}}^d)_{\alpha}^{\gamma\beta}. \quad (4.3.98)$$

4.4 Dynamik

4.4.1 Prinzip der stationären Wirkung

Durch Einführung der kinetischen Energie kann man die im Abschnitt 4.3 hergeleiteten Ergebnisse mit Hilfe des Variationsprinzips der stationären Wirkung auf die Dynamik verallgemeinern. Wir nehmen das Wirkungsfunktional eines elastoplastischen Körpers mit Mikrostruktur in der Form

$$I[\mathbf{x}, \mathbf{F}^p] = \int_0^T \int_{B_0} \mathcal{L}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{F}}^p; \mathbf{F}, \mathbf{F}^p, D\mathbf{F}^p) dv dt \quad (4.4.1)$$

an, wobei

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{F}}^p; \mathbf{F}, \mathbf{F}^p, D\mathbf{F}^p) = \rho_0 [K(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{F}}^p) - E(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, D\mathbf{F}^p)]. \quad (4.4.2)$$

Die Funktion \mathcal{L} , Lagrangian genannt, ist die Differenz der kinetischen Energie $\rho_0 K$ und der inneren Energie $\rho_0 E(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, D\mathbf{F}^p)$ pro Volumeneinheit der Anfangskonfiguration, wobei $\rho_0(\mathbf{X}) = \tau_0(X)$ die Massendichte ist. Die kinetische Energie pro Masseneinheit läßt sich durch

$$K(\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{F}}^p) = \frac{1}{2} g_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \Xi^{AB} (\dot{\mathbf{F}}^p)_A^\alpha (\dot{\mathbf{F}}^p)_B^\beta \quad (4.4.3)$$

ausdrücken, wobei Ξ^{AB} ein konstanter symmetrischer Tensor 2-ter Stufe ist. Der erste Term von (4.4.3) entspricht der kinetischen Energie der Makrobewegung, während der zweite Term die kinetische Energie der Versetzungsbewegung bezeichnet. Wie auch bei der freien Energie pro Volumeneinheit der Anfangskonfiguration nehmen wir an, daß die innere Energiedichte von \mathbf{F}^p , \mathbf{C} und \mathbf{T} wie folgt

$$\rho_0 E = \rho_0 \hat{E}(\mathbf{F}^p, \mathbf{C}, \mathbf{T}) = J^p \hat{e}(\bar{\mathbf{c}}^e(\mathbf{F}^p, \mathbf{C}), \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{F}^p, \mathbf{T})) \quad (4.4.4)$$

abhängt, mit $\hat{e}(\bar{\mathbf{c}}^e, \bar{\mathbf{t}})$ der inneren Energie pro Kristallvolumeneinheit, die eine Funktion *nur* von $\bar{\mathbf{c}}^e$ und $\bar{\mathbf{t}}$ ist (Vgl. die Formel (4.3.20) für die freie Energiedichte). Letzteres bedeutet, daß die innere Energiedichte invariant bezüglich der Gruppe aller Starrkörperbewegungen sowie der Gruppe aller Anfangsdeformationen (4.3.23) (genau bis auf den Faktor J^p) ist.

Nimmt man an, daß die äußeren Kräfte und Lasten gleich Null sind, formuliert man das Prinzip der stationären Wirkung wie folgt

$$\delta I[\mathbf{x}, \mathbf{F}^p] = 0. \quad (4.4.5)$$

Hier ist die Variation des Funktionales I analog zu (4.3.76) definiert. Wir berechnen nun die Variation des Wirkungsfunktionales (4.4.1)

$$\delta I = \int_0^T \int_{B_0} [\rho_0 \mathbf{M} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} + \rho_0 \langle \mathbf{M}^d, \delta \dot{\mathbf{F}}^p \rangle - \langle \mathbf{gP}, \delta D\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{J}, \delta \mathbf{F}^p \rangle - \langle \mathbf{P}^d, \delta D\mathbf{F}^p \rangle] dv dt. \quad (4.4.6)$$

In (4.4.6) sind die folgenden Felder eingeführt

$$\mathbf{M} = \mathbf{g}^{-1} \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \Big|_{\dot{\mathbf{F}}^p} = \dot{\mathbf{x}}, \quad (4.4.7)$$

$$\mathbf{M}^d = \frac{\partial K}{\partial \dot{\mathbf{F}}^p} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}}, \quad (\mathbf{M}^d)_\alpha^A = g_{\alpha\beta} \Xi^{AB} (\dot{\mathbf{F}}^p)_B^\beta, \quad (4.4.8)$$

$$\mathbf{P} = \rho_0 \mathbf{g}^{-1} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}^p, D\mathbf{F}^p}, \quad (4.4.9)$$

$$\mathbf{J} = \rho_0 \frac{\partial E}{\partial \mathbf{F}^p} \Big|_{\mathbf{F}, D\mathbf{F}^p}, \quad (4.4.10)$$

$$\mathbf{P}^d = \rho_0 \frac{\partial E}{\partial D\mathbf{F}^p} \Big|_{\mathbf{F}, \mathbf{F}^p}. \quad (4.4.11)$$

Wir nennen \mathbf{M} Impuls der Makrobewegung (Makroimpuls), \mathbf{M}^d Impuls der Versetzungsbewegung (kurz Mikroimpuls), \mathbf{P} Makrospannungstensor, \mathbf{J} inneren Konfigurationsspannungstensor, und \mathbf{P}^d Mikrospannungstensor.

Integriert man (4.4.6) partiell und setzt man die Variationen am Rand $\partial\mathcal{U}_0$ und zu $t = 0, T$ gleich Null, erhält man

$$\begin{aligned} \delta I = \int_0^T \int_{B_0} [(-\rho_0 \dot{\mathbf{M}} + \text{Div} \mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{x} \\ + \langle (-\rho_0 \dot{\mathbf{M}}^d + \text{Div} \mathbf{P}^d - \mathbf{J}), \delta \mathbf{F}^p \rangle] dv dt = 0. \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Da $\delta \mathbf{x}$ und $\delta \mathbf{F}^p$ beliebig sind, erhält man aus (4.4.12) die folgenden Gleichungen der Bewegung

$$\rho_0 \dot{\mathbf{M}} = \text{Div} \mathbf{P} \quad (\text{Makrobewegung}), \quad (4.4.13)$$

$$\rho_0 \dot{\mathbf{M}}^d = \text{Div} \mathbf{P}^d - \mathbf{J} \quad (\text{Versetzungsbewegung}). \quad (4.4.14)$$

Aus (4.4.4) und den Definitionen (4.4.9)-(4.4.11) können die folgenden Konstitutivgleichungen hergeleitet werden

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = 2\rho_0 \frac{\partial \hat{E}}{\partial \mathbf{C}} = J^p \mathbf{F}^{p-1} \bar{\mathbf{s}} \mathbf{F}^{p-T}, \quad (4.4.15)$$

$$\bar{\mathbf{s}} = 2 \frac{\partial \hat{e}}{\partial \bar{\mathbf{c}}^e}, \quad (4.4.16)$$

$$\mathbf{P}^d = -\mathbf{F}^{p-T} \mathbf{S}^d, \quad \mathbf{S}^d = 2\rho_0 \frac{\partial \hat{E}}{\partial \mathbf{T}}, \quad (4.4.17)$$

$$\mathbf{S}^d(\mathbf{W}) = J^p \mathbf{F}^{p-1} \bar{\mathbf{s}}^d(\bar{\mathbf{w}}) \mathbf{F}^{p-T}, \quad (4.4.18)$$

$$\bar{s}^d = 2 \frac{\partial \hat{e}}{\partial \bar{t}}, \quad (4.4.19)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{J})_{\alpha}^A &= (\mathbf{F}^{p-1})_{\alpha}^C \left[-(\mathbf{C})_{CD}(\mathbf{S})^{DA} + \rho_0 \hat{E} \delta_C^A \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{T})_{CD}^B (\mathbf{S}^d)_B^{DA} \right]. \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

Gln. (4.4.13)-(4.4.19) stellen ein korrektes Gleichungssystem für die unbekannt Funktionen \mathbf{x} und \mathbf{F}^p dar. Um es lösbar zu machen braucht man noch zusätzliche Rand- und Anfangsbedingungen analog zu der Elastizitätstheorie.

Wie die innere Energiedichte ist das Wirkungsfunktional (4.4.1) auch invariant bezüglich der Gruppe aller Starrkörperverschiebungen und Starrkörperrotationen des euklidischen Raumes \mathcal{E} . Deswegen kann man mit Hilfe des Noetherschen Theorems (siehe z.B. [184]) wieder (4.4.13) und auch die folgende Gleichung herleiten

$$\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}^T, \quad (4.4.21)$$

die die Bilanz des Makrodrehimpulses für stationäre Funktionen darstellt. Außerdem ist die innere Energiedichte $\bar{e}(\bar{\mathbf{c}}^e, \bar{\mathbf{t}})$ invariant bezüglich der Gruppe aller Anfangsdeformationen (4.3.23). Wiederholt man die gleiche Prozedur wie im Abschnitt 4.3.3, kann man die Gleichungen (4.3.68) und (4.3.73) erhalten. Die Gleichung (4.3.68) kann entweder als die Bilanz des Mikroimpulses, oder als die Definition der Konfigurationsspannung betrachtet werden. Die Gleichung (4.3.73) entspricht der Bilanz des Mikrodrehimpulses.

Alle diese Bilanzgleichungen lassen sich in Integralform wie folgt formulieren

Bilanz des Makroimpulses

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_0} \rho_0 \mathbf{M} dv = \int_{\partial \mathcal{U}_0} \mathbf{P}_{\nu} da, \quad (4.4.22)$$

Bilanz des Makrodrehimpulses

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_0} \rho_0 \mathbf{x} \times \mathbf{M} dv = \int_{\partial \mathcal{U}_0} \mathbf{x} \times \mathbf{P}_{\nu} da, \quad (4.4.23)$$

Bilanz des Mikroimpulses

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_0} \rho_0 \mathbf{M}^d dv = - \int_{\mathcal{U}_0} \mathbf{J} dv + \int_{\partial \mathcal{U}_0} \mathbf{P}_{\nu}^d da, \quad (4.4.24)$$

Bilanz des Mikrodrehimpulses

$$\int_{\mathcal{U}_0} [(\mathbf{P}^d)_{\alpha}^{BC} + \mathbf{P}^d_{\alpha}^{CB}] dv = 0, \quad (4.4.25)$$

für beliebige Teilkörper \mathcal{U} , mit der Konfigurationsspannung \mathbf{J} von (4.4.20). Mit Hilfe der Gleichungen der Bewegung (4.4.13) und (4.4.14) kann man letztendlich die Bilanz der Energie herleiten

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_0} \rho_0 (K + E) dv = \int_{\partial \mathcal{U}_0} [\mathbf{P}_{\nu} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \langle \mathbf{P}_{\nu}^d, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle] da. \quad (4.4.26)$$

Die rechte Seite von (4.4.26) entspricht der Leistung aller äußeren Kräfte. Man kann sehen, daß die innere Konfigurationsspannung keinen Beitrag zu dieser Leistung liefert. Um (4.4.26) zu prüfen entwickelt man die rechte Seite zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_0} \rho_0 (K + E) dv &= \int_{\mathcal{U}_0} (\rho_0 \dot{\mathbf{M}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \langle \rho_0 \dot{\mathbf{M}}^d, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle) dv \\ &+ \int_{\mathcal{U}_0} (\langle \mathbf{gP}, \dot{\mathbf{F}} \rangle + \langle \mathbf{J}, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle + \langle \mathbf{P}^d, D\dot{\mathbf{F}}^p \rangle) dv, \end{aligned} \quad (4.4.27)$$

dann macht man von den Gleichungen der Bewegung (4.4.13) und (4.4.14) Gebrauch, um das erste Integral in (4.4.27) durch

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_0} \rho_0 K dv = \int_{\mathcal{U}_0} (\text{Div} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \langle -\mathbf{J} + \text{Div} \mathbf{P}^d, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle) dv \quad (4.4.28)$$

zu ersetzen. Setzt man nun (4.4.28) in (4.4.27) ein, kürzt man dann die gleichen Terme und integriert zuletzt partiell, kann man die rechte Seite von (4.4.26) erhalten.

4.4.2 Bilanzgleichungen in der Anfangsbeschreibung

Im vorherigen Abschnitt blieben thermodynamische Einflüsse unberücksichtigt. Im allgemeinen Fall ist aber die plastische Deformation oft von Wärmefluß und Temperaturänderung begleitet. In diesem Fall ist das Prinzip der stationären Wirkung, das wir oben formuliert haben, nicht mehr geeignet. Wir werden nun die Bilanzgleichungen formulieren, so daß sie den Wärmefluß und die Clausius-Duhemsche Ungleichung auf eine natürliche Weise berücksichtigen können.

Es seien nun $\rho_0(\mathbf{X}) = \tau_0(X, 0)$ die Massendichte, $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)$ die Geschwindigkeit, $\mathbf{M}(\mathbf{X}, t)$ der Makroimpuls, $\mathbf{M}^d(\mathbf{X}, t)$ der Mikroimpuls, $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ der

erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor, $\mathbf{J}(\mathbf{X}, t)$ der innere Konfigurationsspannungstensor, $\mathbf{P}^d(\mathbf{X}, t)$ der Mikrospannungstensor, $K(\mathbf{X}, t)$ die kinetische Energiedichte und $E(\mathbf{X}, t)$ die innere Energiedichte, beide pro Masseneinheit, $\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)$ der Wärmeflußvektor, $\Theta(\mathbf{X}, t)$ die Temperatur, und $N(\mathbf{X}, t)$ die Entropie pro Volumeneinheit der Anfangskonfiguration. Nun postulieren wir die folgenden Bilanzgleichungen

Erhaltung der Masse

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_0} \rho J \, dv = 0, \quad (4.4.29)$$

Bilanz des Makroimpulses

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_0} \rho_0 \mathbf{M} \, dv = \int_{\partial \mathcal{U}_0} \mathbf{P}_\nu \, da, \quad (4.4.30)$$

Bilanz des Makrodrehimpulses

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_0} \rho_0 \mathbf{x} \times \mathbf{M} \, dv = \int_{\partial \mathcal{U}_0} \mathbf{x} \times \mathbf{P}_\nu \, da, \quad (4.4.31)$$

Bilanz des Mikroimpulses

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_0} \rho_0 \mathbf{M}^d \, dv = - \int_{\mathcal{U}_0} \mathbf{J} \, dv + \int_{\partial \mathcal{U}_0} \mathbf{P}_\nu^d \, da, \quad (4.4.32)$$

Bilanz des Mikrodrehimpulses

$$\int_{\mathcal{U}_0} [(\mathbf{P}^d)_\alpha^{BC} + \mathbf{P}^d)_\alpha^{CB}] \, dv = 0, \quad (4.4.33)$$

Bilanz der Energie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_0} \rho_0 (K + E) \, dv &= \int_{\partial \mathcal{U}_0} [\mathbf{P}_\nu \cdot \dot{\mathbf{x}} \\ &+ \langle \mathbf{P}_\nu^d, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle - \mathbf{Q}_\nu] \, da, \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

Entropieerzeugungsungleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_0} \rho_0 N \, dv \geq - \int_{\partial \mathcal{U}_0} \frac{\mathbf{Q}_\nu}{\Theta} \, da, \quad (4.4.35)$$

für beliebige Teilkörper \mathcal{U} . Im Vergleich mit (4.4.26) ist die Bilanz der Energie (4.4.34) allgemeiner; sie kann damit den Wärmefluß berücksichtigen. Die Ungleichung (4.4.35) ist neu zu den bisher bekannten Gleichungen und entspricht die Entropieerzeugungsungleichung in der Integralform. Mit Hilfe üblicher Prozeduren erhält man die Bilanzgleichungen in

der lokalisierten Form. Die lokalisierten Gleichungen von (4.4.29)-(4.4.33) ergeben sich wie folgt

Erhaltung der Masse

$$\rho J = \rho_0, \quad (4.4.36)$$

Bilanz des Makroimpulses

$$\rho_0 \dot{\mathbf{M}} = \text{Div} \mathbf{P}, \quad (4.4.37)$$

Bilanz des Makrodrehimpulses

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T, \quad \mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}, \quad (4.4.38)$$

Bilanz des Mikroimpulses

$$\rho_0 \dot{\mathbf{M}}^d = \text{Div} \mathbf{P}^d - \mathbf{J}, \quad (4.4.39)$$

Bilanz des Mikrodrehimpulses

$$(\mathbf{P}^d)_{\alpha}^{BC} = -(\mathbf{P}^d)_{\alpha}^{CB}. \quad (4.4.40)$$

Wir zeigen nun, wie man die Bilanz der Energie und die Entropiegleichung in der lokalisierten Form herleiten kann. Durch partielle Integration von (4.4.34) erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_0} \rho_0 (K + E) dv &= \int_{\mathcal{U}_0} [\text{Div} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \langle \mathbf{g}\mathbf{P}, \dot{\mathbf{F}} \rangle \\ &+ \langle \text{Div} \mathbf{P}^d, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle + \langle \mathbf{P}^d, D\dot{\mathbf{F}}^p \rangle - \text{Div} \mathbf{Q}] da. \end{aligned} \quad (4.4.41)$$

Subtrahiert man mit Hilfe von (4.4.28) die Rate der kinetischen Energie von (4.4.41), erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}_0} \rho_0 E dv &= \int_{\mathcal{U}_0} [\langle \mathbf{g}\mathbf{P}, \dot{\mathbf{F}} \rangle + \langle \mathbf{J}, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle \\ &+ \langle \mathbf{P}^d, D\dot{\mathbf{F}}^p \rangle - \text{Div} \mathbf{Q}] da. \end{aligned} \quad (4.4.42)$$

Da (4.4.42) für beliebige Teilkörper \mathcal{U}_0 gelten muß, folgt die Bilanz der Energie

$$\rho_0 \dot{E} + \text{Div} \mathbf{Q} = \langle \mathbf{g}\mathbf{P}, \dot{\mathbf{F}} \rangle + \langle \mathbf{J}, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle + \langle \mathbf{P}^d, D\dot{\mathbf{F}}^p \rangle. \quad (4.4.43)$$

In (4.4.43) betrachten wir die innere Energie pro Masseneinheit als Funktion von \mathbf{F} , \mathbf{F}^p , $D\mathbf{F}^p$ und von der Entropie N . Man kann diese Bilanzgleichung in einer anderen Form präsentieren. Dafür benutzt man, daß

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{g}\mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{g}\dot{\mathbf{F}}), \quad (4.4.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2) = -\frac{1}{2}\mathbf{F}^{p-1}\dot{\mathbf{F}}^p[\mathbf{T}(\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2)] \\ &+ \frac{1}{2}\mathbf{F}^{p-1}[((D\dot{\mathbf{F}}^p)\mathbf{W}_2)\mathbf{W}_1 - ((D\dot{\mathbf{F}}^p)\mathbf{W}_1)\mathbf{W}_2]. \end{aligned} \quad (4.4.45)$$

Man ersetzt nun \mathbf{P} und \mathbf{P}^d in der rechten Seite von (4.4.43) durch \mathbf{S} und \mathbf{S}^d gemäß (4.4.15)₁ und (4.4.17)₁. Mit Hilfe von (4.4.44) und (4.4.45) formt man die Bilanz der Energie um

$$\rho_0 \dot{E} + \text{Div}\mathbf{Q} = \langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{J}}, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle + \langle \mathbf{S}^d, \mathbf{Z} \rangle, \quad (4.4.46)$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}} &= \mathbf{J} + \frac{1}{2}\mathbf{F}^{p-T}(\mathbf{S}^d; \mathbf{T}), \\ (\tilde{\mathbf{J}})_\alpha^A &= (\mathbf{J})_\alpha^A + \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{p-1})_\alpha^C [(\mathbf{S}^d)_C^{BD}(\mathbf{T})_{BD}^A]. \end{aligned} \quad (4.4.47)$$

Die Interpretation von $\tilde{\mathbf{J}}$ im Zusammenhang mit der Energiebilanzgleichung (4.4.46) kann gefunden werden, wenn die innere Energie pro Masseneinheit als Funktion von \mathbf{F}^p , \mathbf{C} , \mathbf{T} und N betrachtet wird

$$E = \hat{E}(\mathbf{F}^p, \mathbf{C}, \mathbf{T}, N) = J^p \hat{\epsilon}(\bar{\mathbf{c}}^e(\mathbf{F}^p, \mathbf{C}), \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{F}^p, \mathbf{T}), \bar{\eta}). \quad (4.4.48)$$

Wir werden im nächsten Abschnitt zeigen, daß

$$\tilde{\mathbf{J}} = \rho_0 \left. \frac{\partial \hat{E}}{\partial \mathbf{F}^p} \right|_{\mathbf{C}, \mathbf{T}, N}.$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich aus (4.4.35) die lokalisierte Entropiegleichung

$$\rho_0 \dot{N} \geq -\frac{\text{Div}\mathbf{Q}}{\Theta} + \left\langle \frac{\text{Grad}\Theta}{\Theta^2}, \mathbf{Q} \right\rangle. \quad (4.4.49)$$

Wir führen die freie Energie pro Masseneinheit wie folgt ein

$$\Psi = E - N\Theta. \quad (4.4.50)$$

Sie wird als Funktion von \mathbf{F} , \mathbf{F}^p , $D\mathbf{F}^p$ und von der Temperatur Θ betrachtet. Die Zeitableitung von (4.4.50) liefert

$$\dot{\Psi} = \dot{E} - \dot{N}\Theta - N\dot{\Theta},$$

oder

$$\Theta\dot{N} = \dot{E} - N\dot{\Theta} - \dot{\Psi}. \quad (4.4.51)$$

Kombiniert man (4.4.51) mit (4.4.49) und berücksichtigt man, daß Θ positiv ist, erhält man

$$\rho_0(\dot{E} - N\dot{\Theta} - \dot{\Psi}) \geq -\text{Div}\mathbf{Q} + \left\langle \frac{\text{Grad}\Theta}{\Theta}, \mathbf{Q} \right\rangle. \quad (4.4.52)$$

Einsetzen von \dot{E} aus (4.4.43) in (4.4.52) liefert

$$\begin{aligned} \rho_0(N\dot{\Theta} + \dot{\Psi}) - \langle \mathbf{g}\mathbf{P}, \dot{\mathbf{F}} \rangle - \langle \mathbf{J}, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle \\ - \langle \mathbf{P}^d, D\dot{\mathbf{F}}^p \rangle + \left\langle \frac{\text{Grad}\Theta}{\Theta}, \mathbf{Q} \right\rangle \leq 0. \end{aligned} \quad (4.4.53)$$

Man betrachtet (4.4.53) als die lokalisierte Form der Entropieerzeugungsungleichung, durch die die mögliche Funktionalform der Konstitutivgleichungen eingeschränkt werden kann und soll. Mit Hilfe von (4.4.46) läßt sich Glg. (4.4.53) in eine andere Form umschreiben

$$\begin{aligned} \rho_0(N\dot{\Theta} + \dot{\Psi}) - \langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle - \langle \tilde{\mathbf{J}}, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle \\ - \langle \mathbf{S}^d, \mathbf{Z} \rangle + \left\langle \frac{\text{Grad}\Theta}{\Theta}, \mathbf{Q} \right\rangle \leq 0, \end{aligned} \quad (4.4.54)$$

mit $\tilde{\mathbf{J}}$ aus Glg. (4.4.47). Hierbei wird die freie Energie pro Masseneinheit als Funktion von \mathbf{F}^p , \mathbf{C} , \mathbf{T} und Θ betrachtet

$$\Psi = \hat{\Psi}(\mathbf{F}^p, \mathbf{C}, \mathbf{T}, \Theta) = J^p \hat{\psi}(\bar{\mathbf{c}}^e(\mathbf{F}^p, \mathbf{C}), \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{F}^p, \mathbf{T}), \bar{\theta}). \quad (4.4.55)$$

4.4.3 Bilanzgleichungen in der Momentanbeschreibung

Für die numerische Berechnungen ist die Formulierung der Bilanzgleichungen und der Entropieerzeugungsungleichung bezüglich der Momentanbeschreibung von vorrangiger Bedeutung. Es seien dafür $\rho(\mathbf{x}, t) = \tau(X, t)$

die Massendichte, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ das räumliche Geschwindigkeitsfeld und $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ das Cauchysche Spannungsfeld bezüglich der Momentanbeschreibung. Die üblichen Prozeduren mit Hilfe der Euler- und Piola-Identitäten ermöglichen es, die Gleichungen (4.4.36)-(4.4.38) zu folgenden Bilanzgleichungen zu transformieren

Erhaltung der Masse

$$D_t \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (4.4.56)$$

Bilanz des Makroimpulses

$$\rho D_t \mathbf{v} = \rho \mathbf{b} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.4.57)$$

Bilanz des Makrodrehimpulses

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.4.58)$$

mit D_t der materiellen Zeitableitung in der Momentanbeschreibung. Der Cauchysche Spannungstensor ist mit dem ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor durch (4.3.77) verbunden.

Wir betrachten nun die Bilanz des Mikroimpulses und des Mikrodrehimpulses. Führt man den Mikrospannungstensor \mathbf{p}^d und den Konfigurationsspannungstensor \mathbf{j} durch (4.3.80) und (4.3.81) ein, reduziert man mit Hilfe der Piola-Identität (4.4.39) zu

$$\rho_0 \dot{\mathbf{M}}^d = J(\operatorname{div} \mathbf{p}^d) \mathbf{F}^{-T} - J \mathbf{j} \mathbf{F}^{-T} \quad (4.4.59)$$

Multiplikation von (4.4.59) mit $J^{-1} \mathbf{F}^T$ liefert

Bilanz des Mikroimpulses

$$\rho \boldsymbol{\mu} = \operatorname{div} \mathbf{p}^d - \mathbf{j}, \quad (4.4.60)$$

wobei

$$\boldsymbol{\mu} = \dot{\mathbf{M}} \mathbf{F}^T. \quad (4.4.61)$$

Es ist leicht die

Bilanz des Mikrodrehimpulses

$$(\mathbf{p}^d)_{\alpha}^{bc} = -(\mathbf{p}^d)_{\alpha}^{cb} \quad (4.4.62)$$

zu erhalten.

Wir leiten nun die Bilanz der Energie her. Dafür bezeichnen wir durch e die innere Energie pro Masseneinheit, die als Funktion von \mathbf{F}^{e-1} , \mathbf{g} , \mathbf{t} und von der Entropie η betrachtet wird

$$e = \hat{e}(\mathbf{F}^{e-1}, \mathbf{g}, \mathbf{t}, \eta). \quad (4.4.63)$$

Da e eine skalare Funktion ist, muß sie unter einer Referenzänderung unverändert bleiben. Deswegen muß die materielle Zeitableitung von e gleich \dot{E} sein

$$D_t e = \dot{E}. \quad (4.4.64)$$

Außer $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^d$, $\tilde{\mathbf{j}}$ und \mathbf{q} aus Gln. (4.3.77), (4.3.85) führen wir noch folgende Tensoren ein

$$(\tilde{\mathbf{j}})_\alpha^a = (\mathbf{j})_\alpha^a + \frac{1}{2}(\mathbf{F}^e)_\alpha^c [(\boldsymbol{\sigma}^d)_c^{bd} (\mathbf{t})_{bd}^a], \quad (4.4.65)$$

$$\mathbf{q} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{Q}. \quad (4.4.66)$$

Durch Multiplikation der Bilanz der Energie (4.4.46) mit J^{-1} und unter Berücksichtigung von (4.4.64)-(4.4.66) transformieren wir (4.4.46) zu der Bilanz der Energie

$$\rho D_t e + \operatorname{div} \mathbf{q} = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{d} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{P}} \mathbf{F}^{e-1} \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}^d, \mathbf{z} \rangle, \quad (4.4.67)$$

mit \mathbf{d} der Gesamtdehnungsrate und \mathbf{z} der Versetzungsänderungsrate.

Wir führen die freie Energie pro Masseneinheit wie folgt ein

$$\psi = e - \eta \theta, \quad (4.4.68)$$

mit θ dem Temperaturfeld. Dann läßt sich die Entropieerzeugungsgleichung (4.4.54) in folgender Form schreiben

$$\begin{aligned} \rho(\eta D_t \theta + D_t \psi) - \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{d} \rangle - \langle \tilde{\mathbf{j}}, \bar{\mathbf{P}} \mathbf{F}^{e-1} \rangle \\ - \langle \boldsymbol{\sigma}^d, \mathbf{z} \rangle + \left\langle \frac{\operatorname{grad} \theta}{\theta}, \mathbf{q} \right\rangle \leq 0. \end{aligned} \quad (4.4.69)$$

Im nächsten Abschnitt werden wir die Konstitutivgleichungen konsistent mit (4.4.69) herleiten.

4.5 Konstitutivgleichungen: Allgemeine Theorie und Spezialmodelle

4.5.1 Thermodynamische Betrachtung

In diesem Abschnitt ziehen wir die Konsequenzen der Entropieerzeugungsungleichung, die sich bezüglich der Anfangsbeschreibung gemäß (4.3.52) wie folgt ausdrücken läßt

$$\begin{aligned} \rho_0(N\dot{\Theta} + \dot{\Psi}) - \langle \mathbf{gP}, \dot{\mathbf{F}} \rangle - \langle \mathbf{J}, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle \\ - \langle \mathbf{P}^d, D\dot{\mathbf{F}}^p \rangle + \langle \frac{\text{Grad}\Theta}{\Theta}, \mathbf{Q} \rangle \leq 0, \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

wobei \mathbf{P} , \mathbf{P}^d , und \mathbf{J} der erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor, der Mikrospannungstensor bzw. der Konfigurationskrafttensor sind. Wir nehmen an, daß die Entropieerzeugungsungleichung (4.5.1) für beliebige reguläre Bewegungen des Körpers mit Versetzungen gilt. Ferner fordern wir, daß die freie Energiedichte pro Masseneinheit Ψ gemäß (4.4.4) und (4.4.50) die folgende Funktionalform annimmt

$$\Psi = \Psi(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, D\mathbf{F}^p, \Theta). \quad (4.5.2)$$

Wir berechnen nun die Rate der freien Energiedichte

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} = \langle \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}, \dot{\mathbf{F}} \rangle + \langle \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}^p}, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle \\ + \langle \frac{\partial \Psi}{\partial D\mathbf{F}^p}, D\dot{\mathbf{F}}^p \rangle + \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \dot{\Theta}, \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

wobei $\partial \Psi / \partial \mathbf{F}$ die partielle Ableitung von Ψ nach \mathbf{F} bezeichnet. Einsetzen der Formel (4.5.3) in die Entropieerzeugungsungleichung (4.5.1) liefert

$$\begin{aligned} \langle (\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{gP}), \dot{\mathbf{F}} \rangle + \langle (\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}^p} - \mathbf{J}), \dot{\mathbf{F}}^p \rangle \\ + \langle (\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial D\mathbf{F}^p} - \mathbf{P}^d), D\dot{\mathbf{F}}^p \rangle + \rho_0 (\frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} + N) \dot{\Theta} + \langle \frac{\text{Grad}\Theta}{\Theta}, \mathbf{Q} \rangle \leq 0. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Zuerst nehmen wir an, die Größen \mathbf{P} , \mathbf{P}^d , \mathbf{J} und N seien unabhängig von den Raten $\dot{\mathbf{F}}$, $\dot{\mathbf{F}}^p$, $D\dot{\mathbf{F}}^p$ und $\dot{\Theta}$. Dann kann man mit Hilfe der bekannten

Vorgehensweisen von Coleman und Noll [194] die folgenden Konstitutivgleichungen herleiten

$$\mathbf{P} = \rho_0 \mathbf{g}^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}^p, D\mathbf{F}^p, \Theta}, \quad (4.5.5)$$

$$\mathbf{J} = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}^p} \Big|_{\mathbf{F}, D\mathbf{F}^p, \Theta}, \quad (4.5.6)$$

$$\mathbf{P}^d = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial D\mathbf{F}^p} \Big|_{\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, \Theta}, \quad (4.5.7)$$

$$N = - \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \Big|_{\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, D\mathbf{F}^p}. \quad (4.5.8)$$

Wie wir oben angenommen haben, gilt Glg. (4.5.1) für beliebige Prozesse $(\phi_t, \mathbf{F}^p, D\mathbf{F}^p, \Theta)$. Zum Beweis von (4.5.5)-(4.5.8) wählen wir zuerst ϕ_t und \mathbf{F}^p unabhängig von der Zeit; dann muß gelten

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} + N \right) \dot{\Theta} + \left\langle \frac{\text{Grad} \Theta}{\Theta}, \mathbf{Q} \right\rangle \leq 0. \quad (4.5.9)$$

Nimmt man an, daß $(\partial \Psi / \partial \Theta + N) \dot{\Theta}$ für bestimmte ϕ, \mathbf{F}^p und alle $\Theta(\mathbf{X}, t)$ nicht verschwinden würde. Dann kann man Θ zu einem Θ' ändern, so daß $\Theta(\mathbf{X}, t_0) = \Theta'(\mathbf{X}, t_0)$ und $\dot{\Theta}(\mathbf{X}, t_0) = \alpha \dot{\Theta}'(\mathbf{X}, t_0)$, wobei α eine beliebige vorgegebene Konstante ist. Man kann dann diese Konstante α so wählen, daß die Entropieungleichung verletzt würde. Folglich erhält man den Zusammenhang (4.5.8). Hält man nun \mathbf{F}^p und Θ fest und läßt ϕ_t variieren, kann man Glg. (4.5.5) herleiten. Nun hält man Θ fest und wählt \mathbf{F}^p homogen (unabhängig von X) und beliebig, so daß $D\mathbf{F}^p = \mathbf{0}$, erhält man (4.5.6). Die Gleichung (4.5.7) kann hergeleitet werden, wenn man Θ festhält und \mathbf{F}^p beliebig variieren läßt.

In der finiten Elastoplastizität mit Mikrostruktur nimmt aber die freie Energiedichte eine spezifische Form an

$$\Psi = \rho_0^{-1} J^p \hat{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{c}}^e(\mathbf{F}^p, \mathbf{C}), \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{F}^p, \mathbf{T}), \Theta) = \hat{\Psi}(\mathbf{F}^p, \mathbf{C}, \mathbf{T}, \Theta), \quad (4.5.10)$$

mit $\hat{\mathbf{r}}(\bar{\mathbf{c}}^e, \bar{\mathbf{t}})$ der freien Energie pro Kristallvolumeneinheit, die den Prinzipien der Bezugsindifferenz und der Anfangsbezugsindifferenz genügt. Wiederholt man die Berechnungen analog zu denen im Abschnitt 4.3.2, kann

man zeigen, daß (4.5.5)-(4.5.7) folgenden Gleichungen äquivalent sind

$$\mathbf{S} = 2\rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{C}} \Big|_{\mathbf{F}^p, \mathbf{T}, \theta}, \quad (4.5.11)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{J})_{\alpha}^A &= (\mathbf{F}^{p-1})_{\alpha}^C \left[-(\mathbf{C})_{CD} (\mathbf{S})^{DA} + \rho_0 \hat{\Psi} \delta_C^A \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{T})_{CD}^B (\mathbf{S}^d)^{DA} \right], \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

$$\mathbf{S}^d = 2\rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{T}} \Big|_{\mathbf{F}^p, \mathbf{C}, \theta}. \quad (4.5.13)$$

Man kann auch zeigen, daß der Tensor $\tilde{\mathbf{J}}$ von (4.4.47) sich wie folgt berechnen läßt

$$\tilde{\mathbf{J}} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{F}^p} \Big|_{\mathbf{C}, \mathbf{T}, \theta}. \quad (4.5.14)$$

Wir beweisen (4.5.14) direkt in Komponenten. Wendet man die Kettenregel der Ableitung auf die verkettete Funktion $\hat{\Psi}$ von (4.5.10) an, erhält man

$$\begin{aligned} (\mathbf{J})_{\alpha}^A &= \rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A} \Big|_{\mathbf{F}, D\mathbf{F}^p, \theta} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A} \Big|_{\mathbf{C}, \mathbf{T}, \theta} \\ &\quad + \rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial (\mathbf{T})_{CD}^B} \Big|_{\mathbf{F}^p, \mathbf{C}, \theta} \frac{\partial (\mathbf{T})_{CD}^B}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A} \Big|_{D\mathbf{F}^p}. \end{aligned} \quad (4.5.15)$$

Mit Hilfe der Formeln (4.1.21) und (4.3.47) ist es leicht zu prüfen, daß

$$\frac{\partial (\mathbf{T})_{CD}^B}{\partial (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^A} \Big|_{D\mathbf{F}^p} = -(\mathbf{F}^{p-1})_{\alpha}^B (\mathbf{T})_{CD}^A. \quad (4.5.16)$$

Einsetzen von (4.5.16) in (4.5.15) unter Berücksichtigung von (4.4.47) und (4.5.13) liefert (4.5.14).

Mit Hilfe der Push-forward-Operation durch \mathbf{F} können die folgenden Konstitutivgleichungen bezüglich der Momentanbeschreibung hergeleitet werden

$$\begin{aligned} \psi &= \hat{\psi}(\mathbf{F}^{e-1}, \mathbf{g}, \mathbf{t}, \theta) \\ &= \rho_0^{-1} J^{e-1} \hat{\mathbf{w}}(\bar{\mathbf{c}}^e(\mathbf{F}^{e-1}, \mathbf{g}), \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{F}^{e-1}, \mathbf{t}), \theta), \end{aligned} \quad (4.5.17)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{g}} \Big|_{\mathbf{F}^{e-1}, \mathbf{t}, \theta}, \quad (4.5.18)$$

$$(\mathbf{j})_{\alpha}^{\cdot b} = (\mathbf{F}^e)_{\alpha}^c \left[-(\mathbf{g})_{cd} (\boldsymbol{\sigma})^{db} + \rho \hat{\psi} \delta_c^b + (\mathbf{t})_{cd}^a (\boldsymbol{\sigma}^d)_a^{bd} \right], \quad (4.5.19)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^d = 2\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{t}} \Big|_{\mathbf{F}^{e-1}, \mathbf{g}, \theta}, \quad (4.5.20)$$

$$\eta = - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \theta} \Big|_{\mathbf{F}^{e-1}, \mathbf{g}, \mathbf{t}}. \quad (4.5.21)$$

Der Tensor $\tilde{\mathbf{j}}$ aus (4.3.66) läßt sich wie folgt ausdrücken

$$\tilde{\mathbf{j}} = \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{F}^{e-1}} \Big|_{\mathbf{g}, \mathbf{t}, \theta}. \quad (4.5.22)$$

Die Konstitutivgleichungen (4.5.18)-(4.5.22) können auch direkt aus der Energiebilanz (4.3.68) und der Entropieerzeugungsungleichung (4.3.70) bezüglich der Momentanbeschreibung hergeleitet werden.

Wir betrachten nun den Fall, daß die Makro- und Mikrospannungen auch von den Raten $\dot{\mathbf{F}}$, $\dot{\mathbf{F}}^p$, $D\dot{\mathbf{F}}^p$ und $\dot{\Theta}$ abhängig sind. In diesem Fall gibt es kein allgemeines "Rezept", wie man die Konstitutivgleichungen aus der Entropieerzeugungsungleichung herleiten kann. Wir können aber annehmen, daß der Makrospannungstensor \mathbf{P} , der Mikrospannungstensor \mathbf{P}^d und der Konfigurationsspannungstensor \mathbf{J} sich in zwei Anteile aufspalten lassen

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2, \quad (4.5.23)$$

$$\mathbf{P}^d = \mathbf{P}_1^d + \mathbf{P}_2^d, \quad (4.5.24)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2, \quad (4.5.25)$$

wobei die Größe mit dem Index 1 sowie die Entropie N durch Gln. (4.5.5)-(4.5.8) gegeben sind, d.h. sie sind rate-unabhängig. Damit sind nur noch

die Größen mit dem Index 2 von den Raten der gesamten und plastischen Deformationen sowie von der Versetzungsänderungsrate gemäß Glg. (4.4.45) abhängig. Die geleistete Arbeit durch die Spannungen mit dem Index 1 wird als *wiedergewinnbar* betrachtet. Hingegen wird die geleistete Arbeit durch die Spannungen mit dem Index 2 zu einem möglichen Entropiezuwachs führen und wird deswegen *dissipativ* genannt. Einsetzen von (4.5.23)-(4.5.25) in die Entropieerzeugungsgleichung (4.5.1) liefert

$$\begin{aligned} \sigma = & \langle \mathbf{gP}_2, \dot{\mathbf{F}} \rangle + \langle \mathbf{J}_2, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle + \langle \mathbf{P}_2^d, D\dot{\mathbf{F}}^p \rangle \\ & + \langle -\frac{\text{Grad}\Theta}{\Theta}, \mathbf{Q} \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (4.5.26)$$

Wir nennen σ Dissipationsfunktion, die sich noch weiter umformen läßt

$$\begin{aligned} \sigma = & \langle \mathbf{S}_2, \mathbf{D} \rangle + \langle \tilde{\mathbf{B}}_2, \mathbf{L}^p \rangle \\ & + \langle \mathbf{S}_2^d, \mathbf{Z} \rangle + \langle -\frac{\text{Grad}\Theta}{\Theta}, \mathbf{Q} \rangle \geq 0, \end{aligned} \quad (4.5.27)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_2 &= \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}_2, \\ \mathbf{S}_2^d &= -\mathbf{F}^{pT}\mathbf{P}_2^d, \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 &= \mathbf{J}_2\mathbf{F}^p + \frac{1}{2}(\mathbf{S}_2^d: \mathbf{T}). \end{aligned} \quad (4.5.28)$$

Der Tensor \mathbf{S}_2 (\mathbf{S}_2^d) entspricht einem Anteil des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors \mathbf{S} (bzw. \mathbf{S}^d), welcher rate-unabhängig ist. Der Tensor $\tilde{\mathbf{B}}_2$ ist auch rate-unabhängig und leistungskonjugiert zu $\mathbf{L}^p = \mathbf{F}^{p-1}\dot{\mathbf{F}}^p$. Die Ungleichung (4.5.27) kann daher als Dissipationsungleichung bezüglich der Anfangsbeschreibung betrachtet werden. Unter Berücksichtigung von (4.5.27) reduziert sich die Energiebilanzgleichung (4.4.43) zu

$$\rho_0 \dot{N} + \text{Div} \left(\frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \right) = \frac{\sigma}{\Theta}. \quad (4.5.29)$$

Letztere kann als die Entropiebilanzgleichung angesehen werden, mit \mathbf{Q}/Θ dem Entropiefluß und σ/Θ der Entropieerzeugung [195].

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, die Konstitutivgleichungen konsistent mit der Ungleichung (4.5.26) herzuleiten. Zum Beispiel kann man

annehmen, daß die Dissipationsfunktion σ positiv definit ist und von sogenannten "thermodynamischen Flüssen" \mathbf{D} , \mathbf{L}^p , \mathbf{Z} und $\text{Grad}\Theta$ homogen abhängt

$$\sigma = \hat{\sigma}(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, D\mathbf{F}^p, \Theta; \mathbf{D}, \mathbf{L}^p, \mathbf{Z}, \text{Grad}\Theta). \quad (4.5.30)$$

Dann lassen sich die "thermodynamischen Kräfte" \mathbf{S}_2 , $\tilde{\mathbf{B}}_2$, \mathbf{S}_2^d und $-\mathbf{Q}/\Theta$ wie folgt ausdrücken

$$\mathbf{S}_2 = \lambda_1 \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \mathbf{D}}, \quad (4.5.31)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_2 = \lambda_2 \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \mathbf{L}^p}, \quad (4.5.32)$$

$$\mathbf{S}_2^d = \lambda_3 \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \mathbf{Z}}, \quad (4.5.33)$$

$$-\frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} = \lambda_4 \frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial \text{Grad}\Theta}, \quad (4.5.34)$$

wobei die λ -Faktoren aus dem Homogenitätsgrad der Dissipationsfunktion $\hat{\sigma}$ bezüglich der entsprechenden "Flüsse" bestimmt werden sollen. Glg. (4.5.31) beschreibt die Viskosität infolge der Makrobewegung (wie im Fall der Navier-Stokesschen Flüssigkeiten oder nichtlinearer viskoser Flüssigkeiten). Glg. (4.5.32) kann für die plastische Fließbedingung benutzt werden, wenn der Homogenitätsgrad der Dissipationsfunktion $\hat{\sigma}$ bezüglich \mathbf{L}^p gleich 1 ist. Glg. (4.5.33) beschreibt die Viskosität infolge der Versetzungsbewegung, und letztendlich beschreibt Glg. (4.5.34) die nichtlineare Wärmeleitung elastoplastischer Körper.

4.5.2 Klassische Modelle

Die im Kapitel 4 vorgeschlagene Theorie umfaßt eine umfangreiche Klasse von bekannten Modellen der Kontinuumsmechanik. Im folgenden listen wir einige von ihnen auf.

1. Ideale Flüssigkeiten (und Gase). Die plastische Deformation \mathbf{F}^p ist dem Identitätstensor gleichgesetzt, und folglich, $\mathbf{F}^e = \mathbf{F}$. Die freie Energiedichte hängt nur von J und Θ ab

$$\Psi = \hat{\Psi}(J, \Theta).$$

Als Konsequenz verschwinden der Mikroimpuls und die Mikrospannung, der Cauchysche Makrospannungstensor ist hingegen hydrostatisch

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial J} \mathbf{g}^{-1}. \quad (4.5.35)$$

Die Entropie läßt sich durch Glg. (4.5.7) ausdrücken. Es gibt in diesem Modell keine Abhängigkeit des Spannungstensors von den Raten, und die Dissipationsfunktion σ ist für adiabate Prozesse gleich Null. Die Gleichung der Versetzungsbewegung (4.4.39) erfüllt sich automatisch, wenn \mathbf{B}^d und \mathbf{P}_v^d gleich Null gesetzt werden. Die Gleichung der Makrobewegung (4.4.37) reduziert sich zur Eulerschen Gleichung.

2. Viskose Flüssigkeiten. Der Unterschied zu dem vorherigen Fall ist, daß ein Anteil des Makrospannungstensors von der Gesamtdehnungsrate abhängt. Umformen der Dissipationsungleichung (4.5.26) bezüglich der Momentanbeschreibung liefert

$$\sigma = \langle \boldsymbol{\sigma}_2, \mathbf{d} \rangle + \left\langle -\frac{\text{grad}\theta}{\theta}, \mathbf{q} \right\rangle \geq 0. \quad (4.5.36)$$

Nun können wir annehmen, daß die Dissipationsfunktion σ von \mathbf{d} und $\text{grad}\theta$ homogen abhängt, und daß sich die Konstitutivgleichungen konsistent mit (4.5.36) wie folgt ausdrücken lassen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_2 &= \lambda_1 \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{d}}, \\ -\mathbf{q}/\theta &= \lambda_2 \frac{\partial \sigma}{\partial \text{grad}\theta}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind äquivalent zu (4.5.31) und (4.5.34), vorausgesetzt die Dissipationsfunktion $\hat{\sigma}$ hängt von \mathbf{F} explizit ab. Der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}_1$ ist durch Glg. (4.5.35) gegeben. Wenn die Dissipationsfunktion σ eine quadratische Form von \mathbf{d} und $\text{grad}\theta$ ist, dann entspricht dieses Modell der Navier-Stokesschen viskosen Flüssigkeit.

3. Elastischer Körper. Wir setzen $\mathbf{F}^p = \mathbf{1}$, $\mathbf{F}^e = \mathbf{F}$. Die freie Energiedichte hängt nur vom Dehnungstensor \mathbf{C} und von der Temperatur Θ ab

$$\Psi = \hat{\Psi}(\mathbf{C}, \Theta).$$

Folglich verschwinden die Mikrogrößen und die Gleichung der Versetzungsbewegung (4.4.39) erfüllt sich automatisch. Der Makrospannungs-

tensor \mathbf{S} und die Entropie N sind durch

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{C}},$$

bzw. (4.5.8) gegeben. Es gibt keine Abhängigkeit von den Raten. Ein Modell mit Viskosität infolge der Makrobewegung ist auch möglich, wenn man \mathbf{S}_2 von (4.5.31) in die Konstitutivgleichungen einbezieht.

4. Elastischer Körper mit feststehenden Versetzungen (Noll-Wangsche Materialien). Man kann annehmen, daß die plastische Deformation \mathbf{F}^p mit der Zeit konstant bleibt, folglich hängt die Kristallreferenz $\bar{\mathbf{K}}$ nur von X ab, und sie darf nicht variiert werden (Noll-Wangsche Theorie). Dies bedeutet, daß wir es mit sogenannten einfachen Körper mit eingefrorenen Versetzungen zu tun haben. Beschränkt man sich auf isotherme Prozesse, kann man annehmen, daß die gespeicherte Energie von der Versetzungsdichte $\bar{\mathbf{t}}$ unabhängig ist⁶

$$W = W(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p) = \hat{W}(\mathbf{F}^p, \mathbf{C}) = J^p \hat{w}(\bar{\mathbf{c}}^e(\mathbf{F}^p, \mathbf{C})). \quad (4.5.37)$$

In diesem Fall dient die Gleichung (4.3.34) als Definition der Mikrokräfte, die sich mit der inneren Konfigurationsspannung im Gleichgewicht befinden muß. Das Prinzip der Anfangsbezugsindifferenz gilt immer noch für \hat{w} , aber wegen der Abwesenheit von $\bar{\mathbf{t}}$ in der gespeicherten Energiedichte erhält man die andere Konsequenz

$$\mathbf{J} = \left. \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}^p} \right|_{\mathbf{F}, \Theta} = \mathbf{F}^{p-T} (-\mathbf{F}^T \mathbf{g} \mathbf{P} + W \mathbf{1}). \quad (4.5.38)$$

Wenn die äußere Makrokräft fehlt, dann kann man prüfen, daß

$$\text{Div} \mathbf{J} = 0. \quad (4.5.39)$$

Wendet man in der Tat den Div-Operator auf \mathbf{J} von (4.5.38) an, erhält man

$$\begin{aligned} (\mathbf{J})_{\alpha, A}^A &= (\mathbf{F}^{p-T})_{\alpha}^B (-g_{ab}(\mathbf{P})_{,A}^{aA} (\mathbf{F})_B^b - g_{ab}(\mathbf{P})^{aA} (\mathbf{F})_{B,A}^b + W_{,B}) \\ &\quad + (\mathbf{F}^{p-1})_{\alpha, A}^B (\mathbf{J})_{\beta}^A (\mathbf{F}^p)_{B}^{\beta}. \end{aligned} \quad (4.5.40)$$

Wir berechnen nun die partielle Ableitung von W gemäß (4.5.37)

$$W_{,B} = g_{ab}(\mathbf{P})^{aA} (\mathbf{F})_{A,B}^b + (\mathbf{J})_{\alpha}^A (\mathbf{F}^p)_{A,B}^{\alpha}. \quad (4.5.41)$$

⁶In ingenieurmässiger Sprache sagt man: die Eigenenergie der Versetzungen ist vernachlässigbar verglichen mit der Energie infolge der elastischen Deformation.

Setzt man (4.5.41) in (4.5.40) und berücksichtigt man die Gleichgewichtsbedingungen (4.3.34), kann man feststellen, daß (4.5.39) gilt. Wir bezeichnen durch \mathbf{A} den folgenden Tensor

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{S} - W\mathbf{1}, \quad \mathbf{J} = -\mathbf{F}^{p-T} \mathbf{A}. \quad (4.5.42)$$

Dann genügt \mathbf{A} der folgenden Gleichung

$$(\mathbf{A})_{C,A}^A + (\mathbf{A})_C^A (\mathbf{F}^p)_{\alpha}^B (\mathbf{F}^{p-1})_{\alpha,A}^B = 0. \quad (4.5.43)$$

Es folgt aus der Bilanz des Makrodrehimpulses, daß \mathbf{A} symmetrisch bezüglich des Tensors \mathbf{C} ist

$$\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{A}^T. \quad (4.5.44)$$

Gln. (4.5.43), (4.5.44) sind zuerst in [127] hergeleitet worden. Weitere Entwicklungen des Noll-Wangschen Modells findet man in [196–199].

4.5.3 Linearisierte Theorie

Wir betrachten wieder die Deformationsfelder $\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, \mathbf{F}^e$ von (4.2.44). In diesem Fall unterscheiden sich die Referenzen $\mathbb{K}_0, \mathbb{K}_t$ und $\bar{\mathbb{K}}_t$ voneinander nur um kleine Distorsionen, so daß sie miteinander identifiziert werden können. Folglich braucht man nicht die großgeschriebenen, kleingeschriebenen und griechischen Indizes zu unterscheiden. Man kann auch die Metrik \mathbf{g} mit $\mathbf{1}$ identifizieren, ebenso kann man Tangenten- und Cotangentenräume identifizieren. Alle Formeln, die im Abschnitt 4.2.4 hergeleitet worden sind, gelten auch hier. Wir erhalten insbesondere die additive Zerlegung des gesamten (kleinen) Dehnungstensors in elastische und plastische Anteile. Die finite Versetzungsdichte \mathbf{T} kann durch die linearisierte Versetzungsdichte (4.2.56) ersetzt werden. Beschränkt man sich auf die Statik unter der Voraussetzung, daß die Temperatur konstant bleibt, dann kann man die gespeicherte Energiedichte pro Volumeneinheit in folgender Form annehmen

$$w = \hat{w}(\boldsymbol{\epsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}) = \hat{w}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p, \text{rot}\boldsymbol{\beta}^p). \quad (4.5.45)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (4.3.78), (4.3.79) bleiben nach der Linearisierung unverändert

$$\text{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (4.5.46)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}. \quad (4.5.47)$$

Wir zeigen nun, wie Gln. (4.3.82), (4.3.83) und (4.3.84) linearisiert werden können. Wählt man den schief-symmetrischen Mikrospannungstensor \mathbf{p}^d zur Befriedigung der Glg. (4.3.83), kann man den folgenden Tensor 2-ter Stufe $\boldsymbol{\tau}$ mit den Komponenten

$$\tau_{ab} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{bcd}(\mathbf{p}^d)_{acd} \quad (4.5.48)$$

einführen. Dieser Tensor ist durch \mathbf{p}^d eindeutig bestimmt (gemäß der Vektordarstellung schief-symmetrischer Tensoren). Wir nennen $\boldsymbol{\tau}$ auch Momentenspannungstensor. Einsetzen von $(\mathbf{p}^d)_{abc} = -\varepsilon_{dbc}\tau_{ad}$ in die Glg. (4.3.82) liefert

$$\text{rot}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad (4.5.49)$$

oder in Komponenten

$$\varepsilon_{bcd}\tau_{ad,c} + j_{ab} = 0.$$

Linearisiert man (4.3.84), kann man zeigen, daß die innere Konfigurationsspannung näherungsweise gleich dem negativen Cauchyschen Spannungstensor ist

$$\mathbf{j} = -\boldsymbol{\sigma}, \quad j_{ab} = -\sigma_{ab}. \quad (4.5.50)$$

Deswegen reduziert sich die Bilanz des Mikroimpulses (4.5.49) zu

$$\text{rot}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (4.5.51)$$

Gemäß (4.5.45) haben wir die folgenden Konstitutivgleichungen

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}. \quad (4.5.52)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \boldsymbol{\alpha}}. \quad (4.5.53)$$

Die linearisierte Konfigurationsspannung ergibt sich zu

$$\mathbf{j} = -\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^p}. \quad (4.5.54)$$

Die linearisierten Gleichungen (4.5.46), (4.5.47) und (4.5.51) sind nicht identisch mit den bekannten Krönerschen Gleichungen. Letztere lassen sich in unserer Notation wie folgt ausdrücken (siehe [138], Gln. (41),(42))

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (4.5.55)$$

$$\tau_{ij,j} - \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0, \quad (4.5.56)$$

mit σ_{ij} einem unsymmetrischen Spannungstensor. Die Anwesenheit dieses unsymmetrischen Spannungstensor ist damit verbunden, daß Kröner in seiner Arbeit keine Bilanzgleichung des Drehimpulses aufgestellt hat, oder was dem gleich ist, seine Energiedichte als Funktion von β^e und α angenommen hat (siehe [138], Formel (40)). Eliminiert man den schiefsymmetrischen Anteil von β^e in der Krönerschen Energiedichte und macht man von dem Variationsprinzip der virtuellen Arbeit Gebrauch, kann man die Gleichungen identisch mit (4.5.46), (4.5.47) und (4.5.51) herleiten. Es ist bemerkenswert, daß Kröner in der Anwendung auf konkrete Probleme immer den symmetrischen Spannungstensor benutzt hat, der den Gleichgewichtsbedingungen (4.5.46) und (4.5.47) genügt.

Da die elastische Dehnung und die Versetzungsdichte klein sind, kann man die gespeicherte Energiedichte durch eine quadratische Form von ϵ^e und α approximieren

$$w = \frac{1}{2}C_{abcd}(\epsilon^e)_{ab}(\epsilon^e)_{cd} + \frac{1}{2}A_{abcd}(\alpha)_{ab}(\alpha)_{cd}. \quad (4.5.57)$$

In (4.5.57) nehmen wir explizit an, daß keine Kopplung zwischen ϵ^e und α vorhanden ist. Die Koeffizienten C_{abcd} und A_{abcd} müssen den folgenden Symmetrieeigenschaften genügen

$$C_{abcd} = C_{bacd} = C_{abdc} = C_{cdab}, \quad (4.5.58)$$

und

$$A_{abcd} = A_{cdab}. \quad (4.5.59)$$

Gln. (4.5.58) und (4.5.59) reduzieren die Zahl der unabhängigen Koeffizienten von 81 auf 21 für C_{abcd} und auf 45 für A_{abcd} im allgemeinen Fall der Anisotropie. Deren weitere Reduzierung ist auch möglich für spezielle Klassen der Kristallsymmetrie.

Gemäß (4.5.57) lassen sich die Spannung und Momentenspannung wie folgt ausdrücken

$$\sigma_{ab} = C_{abcd}(\epsilon^e)_{cd}, \quad (4.5.60)$$

$$\tau_{ab} = A_{abcd}(\alpha)_{cd}. \quad (4.5.61)$$

Nach (4.5.60) kann man zuerst das Spannungsfeld innerhalb des Körpers bestimmen, vorausgesetzt die Versetzungsdichte α ist vorgegeben. Kröner folgend führen wir ein Tensorfeld der Spannungsfunktionen χ ein, so daß

$$\sigma = \text{ink}\chi. \quad (4.5.62)$$

Es ist leicht, die folgenden Identitäten nachzuprüfen

$$\text{div ink} \equiv 0, \quad \text{ink def} \equiv 0, \quad (4.5.63)$$

die analog zu den bekannten Formeln mit div , grad und rot in der Vektoranalysis sind (siehe [122, 138]). Deswegen genügt das Spannungsfeld von (4.5.61) den Gleichgewichtsbedingungen (4.5.46) und (4.5.47) identisch. Drückt man nun mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes (4.5.59) die Dehnung ϵ^e durch σ und dann durch das Tensorfeld χ durch (4.5.61) aus und setzt man das Ergebnis in die Inkompatibilitätsgleichung (4.2.61) ein, dann erhält man die Feldgleichung für χ . Letztere kann für viele spezielle Probleme gelöst werden [122, 138].

4.5.4 Zusammenhang mit der Elastoplastizität

1. Elastoplastische Körper mit Mikrostruktur (Modell ohne Dissipation von Le und Stumpf [129]). In diesem Modell nimmt man an, daß keine Abhängigkeit von Raten vorhanden ist. Dann lassen sich die Konstitutivgleichungen durch (4.5.5)-(4.5.8) (oder durch (4.5.18)-(4.5.21)) ausdrücken (siehe [129]). In der Statik reduzieren sich die Gleichungen zu denen von Kröner [138].

2. Elastoplastische Körper mit Mikrostruktur (Modell mit Dissipation von Naghdi und Srinivasa [144, 145]). In diesem Modell sind die kinetische und freie Energiedichte durch (4.4.3) und (4.4.55) gegeben. Die Konstitutivgleichungen für \mathbf{P} und \mathbf{P}^d fallen mit (4.5.5) und (4.5.7) zusammen. Die innere Konfigurationsspannung \mathbf{J} setzt sich additiv gemäß (4.5.26) zusammen, wobei \mathbf{J}_1 sich durch (4.5.6) ausdrücken läßt. Der Tensor \mathbf{J}_2 hängt

von der Rate der plastischen Deformation $\dot{\mathbf{F}}^p$ ab. Dieser Tensor spielt eine zentrale Rolle bei der Verfestigung des Materials mit Versetzungen. Um die Konstitutivgleichung für ihn aufstellen zu können, führten Naghdi und Srinivasa Gleitungssysteme ein (siehe [200–204]), die durch die Vektoren $\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{n}^{(k)}$ charakterisiert sind, wobei $\mathbf{s}^{(k)}$ die Gleitrichtung und $\mathbf{n}^{(k)}$ die Normalrichtung zur Gleitebene sind, und der Index $k (k = 1, \dots, N)$ die Nummer des Gleitungssystems bedeutet. Es seien ferner $(\mathbf{s}_0^{(k)}, \mathbf{n}_0^{(k)})$ die entsprechenden Vektoren in der Anfangskonfiguration. Weil diese Vektoren mit dem Kristall festverbunden sind, kann man zeigen, daß

$$\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{F}^e \mathbf{s}_0^{(k)}, \quad \mathbf{n}^{(k)} = J^e \mathbf{F}^{e-T} \mathbf{n}_0^{(k)}.$$

Durch Verallgemeinerung des Ergebnisses von Taylor und Elam [200] (Vgl. auch [204]) stellten dann Naghdi und Srinivasa den folgenden Zusammenhang zwischen der kristallographischen Gleitung und der makroskopischen Deformation fest

$$\dot{\mathbf{F}}^p = \sum_{k=1}^N (\dot{\gamma}^{(k)} \mathbf{s}_0^{(k)} \otimes \mathbf{n}_0^{(k)}) \mathbf{F}^p, \quad (4.5.64)$$

wobei $\dot{\gamma}^{(k)}$ die Gleitungsrate des k -ten Gleitungssystems bedeutet. Das Gleitungssystem $p(k)$ wird aktiv genannt, wenn $\dot{\gamma}^{p(k)} \neq 0$ ist. Andernfalls wird es passiv genannt. Zum Beispiel hat ein f.c.c Kristall 12 Gleitebenen. Nimmt man an, zur Zeit seien nur 3 davon aktiv, sagen wir, die 1-te, 7-te und 9-te Gleitebene, dann gilt $p(1) = 1, p(2) = 7, p(3) = 9$. Nun läßt sich Glg. (4.5.64) wie folgt ausdrücken

$$\dot{\mathbf{F}}^p = \sum_{k=1}^R \dot{\gamma}^{p(k)} \mathbf{A}_{p(k)} \quad (R \leq 8), \quad \dot{\gamma}^{p(k)} \neq 0, \quad (4.5.65)$$

wobei

$$\mathbf{A}_{p(k)} = [\mathbf{s}_0^{p(k)} \otimes \mathbf{n}_0^{p(k)}] \mathbf{F}^p.$$

Aus Glg. (4.5.64) folgt

$$j^p = \frac{d}{dt}(\det \mathbf{F}^p) = [(\det \mathbf{F}^p) \mathbf{F}^{p-T}] \cdot \dot{\mathbf{F}}^p = 0,$$

oder, was dem gleich ist, $J^p = \det \mathbf{F}^p = 1$.

Glg. (4.5.65) stellt eine Zwangsbedingung für die Rate der plastischen Deformation dar. Es ist von der Kontinuumsmechanik bekannt [187], daß

eine solche Zwangsbedingung zu einer zusätzlichen Kraft (oder Spannung) führt. Nun machten Naghdi und Srinivasa die innere Konfigurationsspannung \mathbf{J}_2 verantwortlich für die Reaktion auf die oben genannten Zwangsbedingung. Sie haben \mathbf{J}_2 in zwei Teile aufgeteilt und hierfür die folgenden Konstitutivgleichung konsistent mit (4.5.28) vorgeschlagen

$$\mathbf{J}_2 = \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 \quad (4.5.66)$$

$$\mathbf{K}_2 \cdot \frac{\mathbf{A}_{p(k)}}{\|\mathbf{A}_{p(k)}\|} = \begin{cases} \kappa_{p(k)}^+ & \text{wenn } \dot{\gamma}^{p(k)} > 0, \\ \kappa_{p(k)}^- & \text{wenn } \dot{\gamma}^{p(k)} < 0, \end{cases} \quad (4.5.67)$$

$$\mathbf{K}_3 \cdot \mathbf{A}_{p(k)} = \eta \dot{\gamma}^{p(k)}, \quad (4.5.68)$$

mit $\dot{\gamma}^{p(k)}$ der Gleitungsrate des k -ten aktiven Gleitungssystems, η einem "Viskositätskoeffizienten" und $\kappa_{p(k)}^\pm$ den skalaren Funktionen, welche für die Materialverfestigung verantwortlich sind. Diese Konstitutivgleichungen sind ähnlich dem bekannten Schmid-Gesetz (siehe z.B. [203]). An einem Beispiel der ebenen Deformation eines Einkristalls haben Naghdi und Srinivasa dann den Verfestigungseffekt infolge der Lokalisierung von plastischer Deformation in der Nähe des Scherbandes sowie der Lokalisierung der Versetzungsdichte gezeigt.

3. Makroskopische Elastoplastizität. Es gibt zwei Wege, den Übergang der in diesem Kapitel vorgeschlagenen Versetzungstheorie zu der makroskopischen Elastoplastizität [105, 117, 118, 135, 137, 147]) zu erhalten. Bei dem ersten Weg geht man von dem Modell mit Mikrostruktur, aber ohne Dissipation, aus. Die Annahme über eine mögliche Nichtkonvexität der gespeicherten Energie führt dann zu der Koexistenz unterschiedlicher Phasen und Konglomeratsbildung (siehe z.B. [155, 205, 206]). Die Dissipation ist dann als die Leistung durch die Konfigurationsspannungen, die auf die bewegten Phasengrenzen wirken, definiert. In dem Fall der 1-D Elastizität hat Knowles gezeigt, daß ein Phasenbildungskriterium und ein kinetisches Gesetz postuliert werden müssen, um das Problem korrekt zu formulieren.

Der zweite Weg ist direkt. Wir nehmen wieder an, daß die freie Energiedichte pro Kristallvolumeneinheit nicht von der Versetzungsdichte abhängt

$$\Psi = \hat{\Psi}(\mathbf{F}^p, \mathbf{C}, \Theta) = \rho_0^{-1} J^p \hat{\omega}(\bar{\mathbf{c}}^e(\mathbf{F}^p, \mathbf{C}), \Theta). \quad (4.5.69)$$

Die plastische Deformation darf aber beliebig variieren, was im Gegensatz zur Noll-Wangschen Theorie steht. In diesem Modell dient die Gleichung (4.3.34) wieder als Definition der Mikrokräfte. Die Mikrospannung und die Momentenspannung verschwinden, was dazu führt, daß sich die Entropieerzeugungsungleichung auf die folgende Form reduziert [135]

$$\rho_0(N\dot{\Theta} + \dot{\Psi}) - \langle \mathbf{gP}, \dot{\mathbf{F}} \rangle + \left\langle \frac{\text{Grad}\Theta}{\Theta}, \mathbf{Q} \right\rangle \leq 0. \quad (4.5.70)$$

Durch die Zeitableitung von Ψ in (4.5.69) erhält man

$$\dot{\Psi} = \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}^p}, \dot{\mathbf{F}}^p \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}, \dot{\mathbf{F}} \right\rangle + \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \Theta} \dot{\Theta}. \quad (4.5.71)$$

Setzt man (4.5.71) in (4.5.70) ein, kann man sie wie folgt umschreiben

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} - \mathbf{gP} \right), \dot{\mathbf{F}} \right\rangle + \rho_0 \left(N + \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \right) \dot{\Theta} \\ & - \left\langle \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}^p}, \dot{\mathbf{F}}^p \right\rangle + \left\langle \frac{\text{Grad}\Theta}{\Theta}, \mathbf{Q} \right\rangle \leq 0. \end{aligned} \quad (4.5.72)$$

Die Prozedur analog der im Abschnitt 4.5.1 führt zu den folgenden Konstitutivgleichungen

$$\mathbf{P} = \rho_0 \mathbf{g}^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}^p, \Theta}, \quad (4.5.73)$$

$$N = - \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} \Big|_{\mathbf{F}, \mathbf{F}^p}. \quad (4.5.74)$$

Infolge (4.5.69) läßt sich die Konstitutivgleichung (4.5.74) auch wie folgt schreiben

$$\mathbf{S} = 2\rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{C}} \Big|_{\mathbf{F}^p, \Theta}. \quad (4.5.75)$$

Die Ungleichung (4.5.70) reduziert sich zu der Dissipationsungleichung

$$\langle \mathbf{J}, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle + \left\langle \frac{\text{Grad}\Theta}{\Theta}, \mathbf{Q} \right\rangle \leq 0, \quad (4.5.76)$$

wobei

$$\mathbf{J} = \rho_0 \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mathbf{F}^p} \Big|_{\mathbf{C}, \Theta} = \mathbf{F}^{p-T} (-\mathbf{CS} + \rho_0 \Psi \mathbf{1}). \quad (4.5.77)$$

Le und Stumpf folgend führen wir das folgende Tensorfeld $\bar{\mathbf{k}}$ ein

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{g}^{-1} \bar{\mathbf{c}}^e \bar{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{w}} \mathbf{g}^{-1}. \quad (4.5.78)$$

Wir nennen $\bar{\mathbf{k}}$ plastischen Spannungstensor [50]. Man bemerkt, daß $\bar{\mathbf{k}}$ symmetrisch ist, was die Konsequenz der Symmetrie von \mathbf{A} bezüglich \mathbf{C} ist (siehe Abschnitt 4.5.2). Multipliziert man (4.5.76) mit J^{p-1} , kann man sie zu der Dissipationsungleichung bezüglich der Kristallreferenz transformieren [135]

$$- \langle \bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{d}}^p \rangle + \langle \frac{\text{grad}_{\bar{\mathbf{k}}} \bar{\theta}}{\bar{\theta}}, \bar{\mathbf{q}} \rangle \leq 0. \quad (4.5.79)$$

Wir zeigen die Herleitung von (4.5.79) direkt in Komponenten. Durch Multiplikation des ersten Termes auf der rechten Seite von (4.5.76) mit J^{p-1} und unter Berücksichtigung von (4.5.77) erhält man

$$J^{p-1} \langle \mathbf{J}, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle = J^{p-1} (\mathbf{F}^{p-1})^B_\alpha [-(\mathbf{C})_{BC} (\mathbf{S})^{CA} + \rho_0 \hat{\Psi} \delta_B^A] (\dot{\mathbf{F}}^p)_A^\alpha. \quad (4.5.80)$$

Ersetzt man \mathbf{C} , \mathbf{S} und $\rho_0 \hat{\Psi}$ durch $\bar{\mathbf{c}}$, $\bar{\mathbf{s}}$ bzw. $\hat{\mathbf{w}}$ gemäß (4.1.41), (4.3.39) und (4.5.69), kann man (4.5.80) auf die Form bringen

$$J^{p-1} \langle \mathbf{J}, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle = [-(\bar{\mathbf{c}}^e)_{\alpha\gamma} (\bar{\mathbf{s}})^{\gamma\beta} + \hat{\mathbf{w}} \delta_\alpha^{\beta\gamma}] (\bar{\mathbf{I}}^p)_\beta^\alpha. \quad (4.5.81)$$

wobei $\bar{\mathbf{I}}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1}$. Durch das Heben des Index α des Tensors in den Klammern und das Senken des gleichen Index von $\bar{\mathbf{I}}^p$ mit Hilfe von \mathbf{g} und unter Berücksichtigung der Symmetrie von $\bar{\mathbf{k}}$ sowie der Definition (4.1.59) ergibt sich

$$J^{p-1} \langle \mathbf{J}, \dot{\mathbf{F}}^p \rangle = - \langle \bar{\mathbf{k}}, \bar{\mathbf{d}}^p \rangle. \quad (4.5.82)$$

Zur Umformung des zweiten Termes auf der rechten Seite von (4.5.76) bemerken wir, daß

$$(\mathbf{Q})^A = J^p (\mathbf{F}^{p-1})^A_\alpha (\bar{\mathbf{q}})^\alpha, \quad \Theta = \bar{\theta}. \quad (4.5.83)$$

Einsetzen von (4.5.83) in den zweiten Term von (4.5.76) mit darauf folgender Multiplikation mit J^{p-1} liefert

$$J^{p-1} \langle \frac{\text{Grad} \Theta}{\Theta}, \mathbf{Q} \rangle = \frac{1}{\bar{\theta}} \bar{\theta}_{,A} (\mathbf{F}^{p-1})^A_\alpha (\bar{\mathbf{q}})^\alpha = \frac{\bar{\theta}_{,\alpha}}{\bar{\theta}} (\bar{\mathbf{q}})^\alpha. \quad (4.5.84)$$

In dem letzten Schritt von (4.5.84) haben wir die Definition der relativen Ableitung (4.1.7) benutzt. Kombination von (4.5.82) und (4.5.84) führt zu (4.5.79).

In der finiten Elastoplastizität fordert man, daß die plastische Deformationsrate bestimmten Einschränkungen genügt. Als solch eine Einschränkung schlagen wir vor: Die plastische Deformationsrate $\bar{\mathbf{d}}^p$ ist so lange Null, wie der plastische Spannungstensor $\bar{\mathbf{k}}$ sich noch innerhalb einer konvexen Fließfläche befindet

$$f(\bar{\mathbf{k}}) < 0 \Rightarrow \bar{\mathbf{d}}^p = \mathbf{0}. \quad (4.5.85)$$

Wir nehmen an, daß es keine Kopplungseffekte zwischen Wärmeleitung und plastischem Fließen gibt, und wir bezeichnen $-\text{grad}_{\bar{\mathbf{k}}} \bar{\theta}/\bar{\theta}$ durch $\bar{\mathbf{f}}$. Dann formulieren wir die Normalitätsregel, oder, was dem gleich ist, das Prinzip vom Maximum der Dissipationsrate [207–210] wie folgt

$$\bar{\mathbf{k}} = \partial_{\bar{\mathbf{d}}^p} \bar{\mathcal{D}}^p, \quad \bar{\mathbf{f}} = \nu \partial_{\bar{\mathbf{q}}} \bar{\mathcal{D}}^h, \quad \nu = \bar{\mathcal{D}}^h (\partial_{\bar{\mathbf{q}}} \bar{\mathcal{D}}^h \cdot \bar{\mathbf{q}})^{-1}, \quad (4.5.86)$$

mit

$$\bar{\mathcal{D}}^p = \bar{\mathcal{D}}^p(\bar{\mathbf{d}}^p, \bar{\theta}) \geq 0, \quad \bar{\mathcal{D}}^h = \bar{\mathcal{D}}^h(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\theta}) \geq 0. \quad (4.5.87)$$

Die Dissipationsfunktionen $\bar{\mathcal{D}}^p$ und $\bar{\mathcal{D}}^h$ sind positiv definit, konvex und unterhalb-stetig bezüglich ihrer Argumente $\bar{\mathbf{d}}^p$ bzw. $\bar{\mathbf{q}}$ angenommen worden. Das Symbol ∂ bezeichnet die Unter-Ableitung (subdifferential) konvexer Funktionen [168]. Als Beispiel von Dissipationsfunktionen kann man in dem Fall isotroper Materialien, die den generalisierten Gesetzen von v.Mises und Fourier genügen, folgende betrachten

$$\bar{\mathcal{D}}^p(\bar{\mathbf{d}}^p, \bar{\theta}) = \begin{cases} \sigma_0 (2/3)^{1/2} [g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \bar{d}_{\alpha\beta}^p \bar{d}_{\gamma\delta}^p]^{1/2}: & \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{d}_{\alpha\beta}^p = 0 \\ +\infty: & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.5.88)$$

$$\bar{\mathcal{D}}^h(\bar{\mathbf{q}}, \bar{\theta}) = \frac{1}{\kappa \bar{\theta}} g_{\alpha\beta} \bar{q}^\alpha \bar{q}^\beta. \quad (4.5.89)$$

Hier entspricht σ_0 der Fließspannung in dem einachsigen Zugversuch und κ der Wärmeleitfähigkeit. Aus (4.5.89) folgt, daß $\nu = 1/2$ und damit reduziert sich (4.5.86)₂ zu der Gleichung von Fourier

$$\bar{\mathbf{q}} = -\kappa \text{grad}_{\bar{\mathbf{k}}} \bar{\theta}. \quad (4.5.90)$$

Ferner nimmt man in der Praxis oft an, daß keine Volumenänderung infolge des plastischen Fließens stattfindet

$$\bar{\rho} = \rho_0, \quad \text{tr}(\mathbf{g}^{-1}\bar{\mathbf{d}}^p) = 0. \quad (4.5.91)$$

Diese Bedingung schließt den Fall automatisch aus, bei dem die Dissipationsfunktion von (4.5.87) gegen unendlich geht. Es ist bemerkenswert, daß während $\bar{\mathcal{D}}^h$ eine quadratische Form von $\bar{\mathbf{q}}$ darstellt (Onsagersches Prinzip), $\bar{\mathcal{D}}^p$ hingegen nur eine homogene Funktion ersten Grades bezüglich $\bar{\mathbf{d}}^p$ ist. Dies kann man durch den Vergleich des Mechanismus der Wärmeleitung mit dem Wesen des plastischen Fließens erklären. Im letzteren Fall muß ein kritischer Wert des plastischen Spannungstensors erreicht werden, um das plastische Fließen zu initiieren (vergleiche mit dem ähnlichen Mechanismus der trockenen Reibung). Diese Erklärung stimmt auch mit unserer Einschränkung (4.5.85) überein. Auf der anderen Seite kann man zeigen, daß die Gleichung (4.5.86)₁ der konventionellen Fließbedingung (4.5.85) (mit konvexer Fließfläche) und dem assoziierten Fließgesetz dann und nur dann äquivalent ist, wenn die Dissipationsfunktion homogen ersten Grades bezüglich $\bar{\mathbf{d}}^p$ ist. Die Gleichung (4.5.86)₁ stellt dann die (mehrdeutige) Beziehung zwischen $\bar{\mathbf{k}}$ und $\bar{\mathbf{d}}^p$ dar. Natürlich ist die Dissipation selbst eindeutig bestimmt durch $\bar{\mathbf{d}}^p$. Um Glg. (4.5.86)₁ in gewöhnlicher Form zu präsentieren, wenden wir die Fenchel-Transformation [168] auf die Dissipationsfunktion $\bar{\mathcal{D}}^p$ an. Damit erhalten wir das sogenannte plastische Potential $\bar{\varphi}(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\theta})$. Die Konstitutivgleichung (4.5.86)₁ ist dann äquivalent der Fließregel

$$\bar{\mathbf{d}}^p = \partial_{\bar{\mathbf{k}}}\bar{\varphi}(\bar{\mathbf{k}}, \bar{\theta}). \quad (4.5.92)$$

Für die Dissipationsfunktion (4.5.88) nimmt das plastische Potential die folgende Form an

$$\bar{\varphi} = \begin{cases} 0: & [(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - \frac{1}{3}g_{\alpha\beta}g_{\gamma\delta})\bar{k}^{\alpha\beta}\bar{k}^{\gamma\delta}]^{1/2} \leq \sigma_0(2/3)^{1/2} \\ +\infty: & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.5.93)$$

Glg. (4.5.86) und (4.5.92) und ihre äquivalenten Versionen in der Anfangs- und Momentanbeschreibung sind zuerst in unserer Arbeit [135] hergeleitet worden.

Kapitel 5

Schlußbemerkungen

In dieser Habilitationsschrift haben wir versucht, einige Aspekte des kontinuumsmechanischen Modellierens von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur darzustellen. Dabei kann man sehen, wie wichtig, aber auch vielfältig und schwierig die Mikrostrukturen für das Verständnis des Verhaltens von Bauteilen und Werkstoffen sind. In der Bruchmechanik führt die Rißausbreitung zum Konzept der Konfigurationskraft, die auf die Rißfront wirkt. Damit ist auch die Energiefreisetzungsratesrate verknüpft, die man durch das J -Integral bestimmen kann. Letzteres hängt wesentlich davon ab, wie sich die Spannungssingularität in der Nähe der Rißfront verhält. Dies wird in der nichtlinearen Theorie nicht mehr universell, sondern durch das asymptotische Verhalten der Energie bei großen Verformungen bestimmt. Man kann die Spannungssingularität in der nichtlinearen Theorie nicht beseitigen, aber das asymptotische Verhalten des Spannungsfeldes im Vergleich mit dem in der linearen Theorie wird ganz anders sein. Es existiert zum Beispiel wegen Instabilität kein antisymmetrischer Modus. Man benötigt die Lösung des Randwertproblems für Körper mit Rissen, um den Spannungsintensitätsfaktoren zu ermitteln. Hierbei mögen die Finiten-Elemente- und Grenzflächenelemente-Methoden sehr nützlich sein. Dies gilt auch für das Problem der Homogenisation inhomogener Medien, bei dem man die dualen Zellprobleme im allgemeinen nur numerisch lösen kann. Oft ist es aber ausreichend, die dualen Schranken für die effektiven Charakteristika herzuleiten. Am schwierigsten ist das Modellieren von Körper mit Versetzungen, deren Bewegung neue Freiheitsgrade in die Theorie bringen, was dazu führt, daß man den Rahmen der Kontinuumsmechanik erweitern muß. Im Vordergrund der Theorie stehen nun die Begriffe der Konfigurationsspannung sowie der Momentenspannung,

die mit der Versetzungsdichte verbunden sind. Die gespeicherte Energiedichte pro Kristallvolumeneinheit darf nur von der elastischen Dehnung und von der Versetzungsdichte abhängen. Die im Rahmen der generalisierten Kontinuumsmechanik hergeleiteten Bilanzgleichungen spielen als Feldgleichungen die gleiche Rolle wie die Maxwell'schen Gleichungen für die Elektrodynamik. Mit der Untersuchung der Konstitutivgleichungen für solch eine komplizierte Theorie wird gerade erst begonnen, und man kann hier viele unerwartete Effekte und Ergebnisse erwarten. Zuletzt machen wir eine Bemerkung über den Vergleich der Versetzungstheorie mit Experimenten. Bis vor kurzen gab es noch keine quantitative dynamische Messung der Versetzungsdichte für Proben mit dem Maßstab der Ordnung von 1cm . Die neuerscheinende Arbeit von Tanner und Bowen [211] diskutiert das Problem und zeigt dabei, daß die topographische Technik mit der synchronisierten Röntgenstrahlung für diesen Zweck vielversprechend ist. Dies wird ein Forschungsbereich der Zukunft sein.

Anhang

Wir präsentieren hier die ersten und zweiten Ableitungen der 2-D Energiedichte $\Phi(I, J)$, die durch Gln. (2.3.51) und (2.3.52) im Kapitel 2 angegeben ist. Berechnung der ersten Ableitungen von $\Phi(I, J)$ liefert

$$\frac{\partial \Phi}{\partial I} = \sum_{c=1}^N A_c \zeta_I(I, J, \alpha_c), \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial J} = \sum_{c=1}^N A_c \zeta_J(I, J, \alpha_c) + h'(J), \quad (\text{A.2})$$

wobei $h'(J) = \partial h / \partial J$. Mit $\zeta_I(I, J, \alpha)$ und $\zeta_J(I, J, \alpha)$ bezeichnen wir die folgenden Funktionen

$$\zeta_I(I, J, \alpha) = \frac{\alpha}{2(I^2 - 4J^2)^{1/2}} \left\{ \left[\frac{1}{2}(I + \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2} - \left[\frac{1}{2}(I - \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2} \right\}, \quad (\text{A.3})$$

$$\zeta_J(I, J, \alpha) = \frac{\alpha J}{(I^2 - 4J^2)^{1/2}} \left\{ \left[\frac{1}{2}(I - \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2-1} - \left[\frac{1}{2}(I + \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2-1} \right\}. \quad (\text{A.4})$$

Ferner berechnen wir die zweiten Ableitungen von $\Phi(I, J)$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial I^2} = \sum_{c=1}^N A_c \zeta_{II}(I, J, \alpha_c), \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial I \partial J} = \sum_{c=1}^N A_c \zeta_{IJ}(I, J, \alpha_c), \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial J^2} = \sum_{c=1}^N A_c \zeta_{JJ}(I, J, \alpha_c) + h''(J), \quad (\text{A.7})$$

wobei $h''(J) = \partial^2 h / \partial J^2$. Hier sind

$$\begin{aligned} \zeta_{II}(I, J, \alpha) &= \frac{\alpha I}{2(I^2 - 4J^2)^{3/2}} \left\{ \left[\frac{1}{2}(I - \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2} \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1}{2}(I + \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2} \right\} + \frac{\alpha^2}{4(I^2 - 4J^2)} \\ &\quad \times \left\{ \left[\frac{1}{2}(I - \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2} + \left[\frac{1}{2}(I + \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2} \right\}, \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{IJ}(I, J, \alpha) &= \frac{2\alpha J}{(I^2 - 4J^2)^{3/2}} \left\{ \left[\frac{1}{2}(I + \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2} \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1}{2}(I - \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2} \right\} - \frac{\alpha^2}{2(I^2 - 4J^2)} \\ &\quad \times \left\{ \left[\frac{1}{2}(I - \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2-1} + \left[\frac{1}{2}(I + \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2-1} \right\}, \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{JJ}(I, J, \alpha) &= \frac{\alpha I^2}{(I^2 - 4J^2)^{3/2}} \left\{ \left[\frac{1}{2}(I - \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2-1} \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1}{2}(I + \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2-1} \right\} + \frac{\alpha(\alpha - 2)J^2}{I^2 - 4J^2} \\ &\quad \times \left\{ \left[\frac{1}{2}(I - \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2-2} + \left[\frac{1}{2}(I + \sqrt{I^2 - 4J^2}) \right]^{\alpha/2-2} \right\}. \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

Mit der Annahme daß J/I klein im Vergleich mit 1 ist, können wir die Formel (A.3)-(A.4), (A.8)-(A.10) durch ihre asymptotischen Äquivalenten (mit Fehlern von $o(J/I)$ verglichen mit 1) ersetzen

$$\zeta_I(I, J, \alpha) \sim \frac{\alpha}{2} I^{\alpha/2-1}, \quad (\text{A.11})$$

$$\zeta_J(I, J, \alpha) \sim \alpha I^{\alpha/2-1} (J/I) [(J/I)^{\alpha-2} - 1], \quad (\text{A.12})$$

$$\zeta_{II}(I, J, \alpha) \sim \frac{\alpha}{2} (\alpha/2 - 1) I^{\alpha/2-2}, \quad (\text{A.13})$$

$$\zeta_{IJ}(I, J, \alpha) \sim \frac{\alpha}{2} I^{\alpha/2-2} (J/I) [4 - \alpha - \alpha (J/I)^{\alpha-2}], \quad (\text{A.14})$$

$$\zeta_{JJ}(I, J, \alpha) \sim \alpha I^{\alpha/2-2} [(\alpha - 2)(J/I)^{\alpha-2} - 1]. \quad (\text{A.15})$$

Für $\alpha > 2$ können die Formeln (A.12), (A.14), (A.15) noch weiter vereinfacht werden

$$\zeta_J(I, J, \alpha) \sim -\alpha I^{\alpha/2-1}(J/I), \quad (\text{A.16})$$

$$\zeta_{IJ}(I, J, \alpha) \sim \frac{\alpha}{2}(4 - \alpha)I^{\alpha/2-2}(J/I), \quad (\text{A.17})$$

$$\zeta_{JJ}(I, J, \alpha) \sim -\alpha I^{\alpha/2-2}. \quad (\text{A.18})$$

Literaturverzeichnis

- [1] A. A. Griffith. The phenomenon of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A221:163–198, 1920.
- [2] A. A. Griffith. The theory of rupture. In *Proc. 1st Int. Congr. Appl. Mech., Delft, 1924*, pages 55–63, 1924.
- [3] G. R. Irwin. Fracture. In *Handbuch der Physik*, volume 6, pages 551–590. Springer, 1958.
- [4] I. N. Sneddon. The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A187:229–260, 1946.
- [5] M. Williams. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.*, 24:109–114, 1957.
- [6] J. D. Eshelby. The continuum theory of lattice defects. In *Progress in solids state physics*, volume 3. Academic Press, New York, 1956.
- [7] J. L. Sanders. On the Griffith-Irwin fracture theory. *J. Appl. Mech.*, 27:352–353, 1960.
- [8] G. P. Cherepanov. The propagation of cracks in continuum media. *J. Appl. Math. Mech. (PMM)*, 31:476–488, 1967.
- [9] J. R. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.*, 35:379–388, 1968.
- [10] W. Günther. Über einige Randintegrale der Elastomechanik. *Abh. Braunschw. Wiss. Ges.*, 14:53–72, 1962.

- [11] H. Buggisch, D. Gross, and K. H. Krüger. Einige Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik vom J-Integral-Typ. *Ingenieur-Archiv*, 50:103–111, 1981.
- [12] J. W. Eischen and G. Herrman. Energy release rates and related balance laws in linear elastic defect mechanics. *J. Appl. Mech.*, 54:388–392, 1987.
- [13] M. E. Gurtin. On the energy release rate in quasi-static elastic crack propagation. *J. Elasticity*, 9:187–195, 1979.
- [14] A. G. Herrman. Material momentum tensor and path-independent integrals of fracture mechanics. *Int. J. Solids Structures*, 18:319–326, 1982.
- [15] R. C. Batra. The force on a lattice defect in an elastic body. *J. Elasticity*, 17:3–8, 1987.
- [16] J. K. Knowles and E. Sternberg. On a class of conservation laws in linearized and finite elastostatics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 44:187–211, 1972.
- [17] L. B. Freund. Energy flux into the tip of an extending crack in an elastic solid. *J. Elasticity*, 2:341–349, 1972.
- [18] M. E. Gurtin and C. Yatomì. On the energy release rate in elastodynamical crack propagation. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 74:231–247, 1980.
- [19] K. C. Le. Variational inequalities in brittle fracture mechanics. In A. M. Brandt and I. H. Marshall, editors, *Brittle Matrix Composites 2*, pages 144–151, London, 1989. Elsevier Applied Science.
- [20] K. C. Le. Equilibrium criterion for a nonlinear elastic slitted body. In *Advances in Fracture*, volume 1, pages 49–53, New York, 1989. Pergamon Press.
- [21] K.C. Le, H. Stumpf, and D. Weichert. Variational principles of fracture mechanics. Technical Report 64, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1989.

- [22] H. Stumpf and K. C. Le. Variational principles of nonlinear fracture mechanics. *Acta Mechanica*, 83:25–37, 1990.
- [23] H. Stumpf and K. C. Le. On the elastoplastic crack problem at finite strain. *ZAMM*, 71(4):317–319, 1990.
- [24] H. Stumpf and K. C. Le. Variational formulation of crack problem for an elastoplastic body at finite strain. *ZAMM*, 72(9):387–396, 1992.
- [25] J. R. Rice. Mathematical analysis in the mechanics of fracture. In *Fracture: An advance treatise*, volume 2, pages 191–311. Academic Press, New York, 1968.
- [26] J. W. Hutchinson. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *J. Mech. Phys. Solids*, 16:13–32, 1968.
- [27] J. R. Rice and G. F. Rosengren. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *J. Mech. Phys. Solids*, 16:1–12, 1968.
- [28] W. T. Drugan, J. R. Rice, and T. L. Sham. Asymptotic analysis of growing plane strain tensile-cracks in elastic-ideally-plastic solid. *J. Mech. Phys. Solids*, 30:447–473, 1982.
- [29] Y. C. Gao and S. Nemat-Nasser. Mode II dynamic fields near a crack tip growing in an elastic-perfectly-plastic solid. *J. Mech. Phys. Solids*, 32:1–21, 1984.
- [30] J. D. Achenbach and V. Dunaevsky. Crack growth under plane stress condition in an elastic-perfectly-plastic material. *J. Mech. Phys. Solids*, 32:89–101, 1984.
- [31] P. Ponte Castaneda. Asymptotic fields in steady crack growth with linear strain-hardening. *J. Mech. Phys. Solids*, 35:227–268, 1987.
- [32] J. T. Leighton, C. R. Champion, and L. B. Freund. Asymptotic analysis of steady dynamic crack growth in an elastic-plastic material. *J. Mech. Phys. Solids*, 35:541–563, 1987.
- [33] S. N. Atluri, editor. *Computational methods in the mechanics of fracture*. North-Holland, Amsterdam, 1986.

- [34] G. P. Nikishov and S. N. Atluri. An equivalent domain integral method for computing crack-tip integral parameters in non-elastic, thermomechanical fracture. *Engng. Fract. Mech.*, 26:851–867, 1987.
- [35] S. N. Atluri and T. Nishioka. On some recent advances in computational methods in the mechanics of fracture. In *Advances in Fracture*, volume 3, pages 1923–1969, New York, 1989. Pergamon Press.
- [36] H. Miyamoto and M. Kikuchi. Three-dimensional J-integral. *Theor. Appl. Mech.*, 28:195–204, 1980.
- [37] W. Schmitt and R. Kienzler. The J-integral concept for elastic-plastic material behaviour. *Engng Fract. Mech.*, 32:409–418, 1989.
- [38] J. R. Rice. Dislocation nucleation from a crack tip: an analysis based on the Peierls concept. *J. Mech. Phys. Solids*, 40:239–271, 1992.
- [39] F. S. Wong and R. T. Shield. Large plane deformations of thin elastic sheets of neo-hookean material. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 20:176–199, 1969.
- [40] J. K. Knowles and E. Sternberg. An asymptotic finite-deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack. *J. Elasticity*, 3:67–107, 1973.
- [41] J. K. Knowles and E. Sternberg. Finite-deformation analysis of the elasto-static field near the tip of a crack: reconsideration and higher order results. *J. Elasticity*, 4:201–233, 1974.
- [42] P. J. Blatz and W. L. Ko. Application of finite elastic theory to the deformation of rubbery materials. *Transactions of the Society of Rheology*, 6:223–251, 1962.
- [43] J. K. Knowles. The finite anti-plane shear field near the tip of a crack for a class of incompressible elastic solids. *Int. J. Fracture*, 13:611–639, 1977.
- [44] J. K. Knowles and E. Sternberg. Discontinuous deformation gradients near the tip of a crack in finite anti-plane shear: an example. *J. Elasticity*, 10:81–110, 1980.

- [45] J. K. Knowles and E. Sternberg. Anti-plane shear fields with discontinuous deformation gradients near the tip of a crack in finite elastostatics. *J. Elasticity*, 11:129–164, 1981.
- [46] R. C. Abeyaratne and J. S. Yang. Localized shear discontinuities near the tip of a mode I crack. *J. Elasticity*, 17:93–102, 1987.
- [47] S. A. Silling. Numerical studies of loss of ellipticity near singularities in an elastic material. *J. Elasticity*, 19:213–239, 1988.
- [48] S. A. Silling. Consequences of the Maxwell relation for anti-plane shear deformations of an elastic solid. *J. Elasticity*, 19:241–284, 1988.
- [49] R. A. Stephenson. The equilibrium field near the tip of a crack for finite plane strain of incompressible elastic materials. *J. Elasticity*, 12:65–99, 1982.
- [50] K. C. Le and H. Stumpf. The singular elastoplastic field due to a crack in rubberlike materials. *J. Elasticity*, 32:183–222, 1993.
- [51] R. W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proc. R. Soc. Lond.*, A326:565–584, 1972.
- [52] R. W. Ogden. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. *Proc. R. Soc. Lond.*, A328:567–583, 1972.
- [53] J. M. Ball. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 63:337–403, 1977.
- [54] K. C. Le. On the singular elastostatic field induced by a crack in a Hadamard material. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 45:101–117, 1992.
- [55] G. I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. In H. L. Dryden and Th. von Karman, editors, *Advances in Applied Mechanics*, pages 55–129. Academic Press, New York, 1962.

- [56] A. K. Gautesen. On the solution to a class of strongly singular linear integral equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 50:129–140, 1992.
- [57] M. Hori and S. Nemat-Nasser. Asymptotic solution to a class of strongly singular integral equations. *Journal of Applied Mathematics*, 50:716–725, 1990.
- [58] Y. N. Li and R. I. Liang. The theory of the boundary eigenvalue problem in the cohesive crack model and its application. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 41:331–350, 1993.
- [59] A. B. Movchan and J. R. Willis. Asymptotic analysis of the reinforcement of a brittle crack by bridging fibres. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 46:331–350, 1993.
- [60] S. Nemat-Nasser and M. Hori. Toughening by partial or full bridging of cracks in ceramics and fiber reinforced composites. *Mechanics of Materials*, 6:245–269, 1987.
- [61] J. R. Willis. A comparison of the fracture criteria of Griffith and Barenblatt. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 15:151–162, 1967.
- [62] J. R. Willis and S. Nemat-Nasser. Singular perturbation solution of a class of singular integral equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 48:741–753, 1990.
- [63] K. C. Le and H. Stumpf. On the cohesive crack model. *ZAMM*, 75(Suppl. 1):231–232, 1995.
- [64] R. Li and A. Chudnovsky. Variation of the energy release rate as a crack approaches and passes through an elastic inclusion. *Int. J. Fract.*, 59:69–74, 1993.
- [65] H. G. Hahn. *Bruchmechanik*. Teubner, Stuttgart, 1976.
- [66] R. Kienzler. *Konzepte der Bruchmechanik*. Vierweg, Braunschweig, 1993.
- [67] K. P. Hermann and F. Ferber. Elementary failure mechanisms in thermally stressed models of fiber reinforced composites. In A. M.

- Brandt and I. H. Marshall, editors, *Brittle Matrix Composites 2*, pages 1–19, London, 1989. Elsevier Applied Science.
- [68] J. F. Kalthoff. Shadow optical method of caustics. In *Handbook on Experimental Mechanics*, pages 430–500. Prentice-Hall, Englewood, 1987.
- [69] D. Azodi and J. F. Kalthoff. Experimental-computational determination of crack propagation J-Values for ductile steels. In *Proc. Pressure vessels and piping Conference*, 1989.
- [70] J. C. Maxwell. *Electricity and magnetism*. Clarendon Press, Oxford, 1892.
- [71] J. W. Rayleigh. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. *Phil. Mag.*, 34:481–491, 1892.
- [72] N. C. Bachvalov. Homogenization of characteristics of periodic structures. *Soviet Mathematics Doklady*, 218:1046–1048, 1974.
- [73] A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [74] E. Sanchez-Palencia. *Nonhomogeneous media and vibration theory*. Springer, Berlin, 1980.
- [75] E. de Giorgi and S. Spagnolo. Sulla convergenze degli integrali dell'energia per operatori elliffi del secondo ordine. *Boll. U.M.I.*, 8:391–411, 1973.
- [76] V. L. Berdichevsky. *Variational principles of continuum mechanics*. Nauka, Moscow, 1983.
- [77] V. L. Berdichevsky. Spatial homogenization of periodic structures. *Soviet Physics Doklady*, 222:565–568, 1975.
- [78] V. L. Berdichevsky. Variational-asymptotic method for constructing shell theory. *J. Appl. Math. Mech. (PMM)*, 43:664–687, 1979.
- [79] V. L. Berdichevsky. Variational principles for homogenization of random structures. *Soviet Physics Doklady*, 261:301–304, 1981.

- [80] V. L. Berdichevsky and K. C. Le. High frequency, long wave shell vibration. *J. Appl. Math. Mech. (PMM)*, 44:520–525, 1980.
- [81] K. C. Le. High frequency, long wave vibration of piezoelectric ceramic plates. *Soviet Physics Doklady*, 27:422–423, 1982.
- [82] V. L. Berdichevsky and K. C. Le. High frequency vibration of shells. *Soviet Physics Doklady*, 27:988–990, 1982.
- [83] K. C. Le. *High frequency vibration of shells*. PhD thesis, Moscow State University, Moscow, 1983.
- [84] K. C. Le. Fundamental relations of the theory of anisotropic piezoelectric shells. *Mechanical Bulletin of Moscow University, Math.-Mech.*, (5):57–60, 1984.
- [85] K. C. Le. On the edge resonance of the semi-infinite elastic plate. *Mechanical Bulletin of Moscow University, Math.-Mech.*, (5):57–60, 1985.
- [86] K. C. Le. High frequency vibrations of piezoelectric ceramic shells. *Soviet Physics Doklady*, 30:899–900, 1985.
- [87] K. C. Le. The theory of piezoelectric shells. *J. Appl. Math. Mech. (PMM)*, 50:98–105, 1986.
- [88] K. C. Le. High frequency longitudinal vibrations of elastic rods. *J. Appl. Math. Mech. (PMM)*, 50:335–341, 1986.
- [89] K. C. Le. High frequency vibration of shells and rods. St-Petersburg State University, Habilitation, 1986.
- [90] K. C. Le. On the impact of piezoceramic rods. *Mechanics of Solids*, 3:312–316, 1987.
- [91] W. Voigt. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Teubner, Berlin, 1928.
- [92] A. Reuss. Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *ZAMM*, 9:49–58, 1929.
- [93] R. Hill. The elastic behaviour of a crystalline aggregate. *Proc. Phys. Soc. (London)*, A65:349–354, 1952.

- [94] K. C. Le and D. C. Pham. On bounding the effective conductivity of isotropic composite materials. In *Composite, Ceramic, Polymer, Thermoplastic, Paris, France, 1989*, pages 177–182, 1989.
- [95] K. C. Le and D. C. Pham. Variational estimates of the effective thermal conductivities of transversely isotropic composites. *J. Engng Physics*, 59:562–568, 1990.
- [96] K. C. Le and D. C. Pham. On bounding the effective conductivity of isotropic composite materials. *ZAMP*, 42:614–622, 1991.
- [97] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the effective permeability of multiphase materials. *J. Appl. Phys.*, 33:3125–3131, 1962.
- [98] L. J. Walpole. On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous system I. *J. Mech. Phys. Solids*, 14:151–162, 1966.
- [99] R. M. Christensen. *Mechanics of composite materials*. Wiley-Interscience, New York, 1979.
- [100] D. C. Pham. Bounds on the effective shear modulus of multiphase materials. *Int. J. Engng Sci.*, 31:11–17, 1993.
- [101] J. Mandel. *Plasticité classique et viscoplasticité*. CISM Lecture Notes, 97. Springer, Wien, 1971.
- [102] Y. F. Dafalias. Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations. *ASME J. Appl. Mech.*, 50:561–565, 1983.
- [103] B. Loret. On the effect of plastic rotation in the finite deformation of anisotropic elastoplastic materials. *Mechanics of Materials*, 2:287–304, 1983.
- [104] E. T. Onat. Shear flow of kinematically hardening rigid-plastic materials. In G. J. Dvorak and R. T. Shield, editors, *Mechanics of material behavior*, pages 311–324, 1984.
- [105] H. Stumpf and J. Badur. On missing links of rate-independent elasto-plasticity at finite strains. *Mech. Res. Comm.*, 17:353–364, 1990.

- [106] S. Nemat-Nasser. Certain basic issues in finite-deformation continuum plasticity. *Meccanica*, 25(4):223–229, 1990.
- [107] K. Dienes. On the analysis of rotation and stress rate in deforming body. *Acta Mechanica*, 32:217–232, 1979.
- [108] S. N. Atluri. On constitutive relations at finite strain: hypo-elasticity and elasto-plasticity with isotropic or kinematic hardening. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 43:137–171, 1984.
- [109] J. C. Simo and M. Ortiz. A unified approach to finite deformation elastoplasticity based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 49:222–235, 1985.
- [110] P. Haupt. On the concept of an intermediate configuration and its application to a representation of viscoelastic-plastic material behavior. *Int. J. Plasticity*, 1:303–316, 1985.
- [111] J. C. Simo. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part 1. continuum formulation. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engng*, 66:199–219, 1988.
- [112] O. T. Bruhns. Große plastische Formänderungen. Technical Report 78, Mitteilungen Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1991.
- [113] C. Miehe and E. Stein. A canonical model of multiplicative elastoplasticity. formulation and aspects of the numerical implementation. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 11:25–43, 1992.
- [114] O. T. Bruhns. Neue Materialgleichungen der Plastomechanik. *ZAMM*, 73:T6–T19, 1993.
- [115] O. T. Bruhns. Große plastische Formänderungen. Technical Report 93, Mitteilungen Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1994.
- [116] Z. Xia and F. Ellyin. A stress rate measure for finite elastic plastic deformations. *Acta Mechanica*, 98:1–14, 1993.

- [117] B. Schieck and H. Stumpf. Deformation analysis of finite elastic-plastic strains in a Lagrangean-type description. *Int. J. Solids Structures*, 30:2639–2660, 1993.
- [118] B. Schieck and H. Stumpf. The appropriate corotational rate, exact formula for the plastic spin and constitutive model for finite elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures*, 32:3643–3667, 1995.
- [119] K. Kondo. On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding. In *Proc. 2. Japan Congr. Appl. Mech.*, pages 41–47, 1952.
- [120] B. A. Bilby, R. Bullough, and E. Smith. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A231:263–273, 1955.
- [121] B. A. Bilby, L. R. T. Gardner, and A. N. Stroh. Continuous distributions of dislocations and the theory of plasticity. In *Extrait des actes du IX^e congrès international de mécanique appliquée*, pages 35–44, 1957.
- [122] E. Kröner. *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, volume 5 of *Ergebnisse der angewandten Mathematik*. Springer, Berlin, 1958.
- [123] E. Kröner. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 4:273–334, 1960.
- [124] W. Noll. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 27:1–32, 1967.
- [125] C. C. Wang. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 27:33–94, 1967.
- [126] L. I. Sedov and V. L. Berdichevsky. A dynamic theory of continual dislocations. In E. Kröner, editor, *Mechanics of generalized continua*, pages 215–238, Berlin, 1968. Springer.
- [127] M. Epstein and G. A. Maugin. The energy-momentum tensor and material uniformity in finite elasticity. *Acta Mechanica*, 83:127–133, 1990.

- [128] K. C. Le and H. Stumpf. Finite elastoplasticity with microstructure. Technical Report 92, Mitteilungen Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1994.
- [129] K. C. Le and H. Stumpf. Nonlinear continuum theory of dislocations. *Int. J. Engng Sci.*, 34:339–358, 1996.
- [130] K. C. Le and H. Stumpf. On the determination of the crystal reference in nonlinear continuum theory of dislocations. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A452:359–371, 1996.
- [131] K. C. Le and H. Stumpf. A model of elastoplastic bodies with continuously distributed dislocations. *Int. J. Plasticity*, 12:611–627, 1996.
- [132] K. C. Le and H. Stumpf. Theory of dislocations based on the resolution $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$. In K. Z. Markov, editor, *Continuum Models and Discrete Systems*, pages 538–545, Singapore, 1996. World Scientific.
- [133] K. C. Le and H. Stumpf. On thermodynamics of elastoplastic continua at finite strain. In *Modelling of plastic deformation and its engineering applications*, pages 317–321, Roskilde, 1992. Riso National Laboratory.
- [134] K. C. Le and H. Stumpf. A new look at finite strain elastoplasticity from the thermodynamic viewpoint. *ZAMM*, 73(4):302–304, 1993.
- [135] K. C. Le and H. Stumpf. Constitutive equations for elastoplastic bodies at finite strain: thermodynamic implementation. *Acta Mechanica*, 100:155–170, 1993.
- [136] C. Eckart. The thermodynamics of irreversible processes. 4. The theory of elasticity and anelasticity. *Phys. Rev.*, 73:373–382, 1948.
- [137] E. H. Lee. Elasto-plastic deformation at finite strains. *J. Appl. Mech.*, 36:1–6, 1969.
- [138] E. Kröner. Continuum theory of defects. In R. Balian, M. Kleman, and J. P. Poirier, editors, *Physics of defects*. North-Holland, Amsterdam, 1981.

- [139] R. A. Toupin. Theories of elasticity with couple-stress. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 17:85–112, 1964.
- [140] K. H. Anthony. Unification of continuum mechanics and thermodynamics by means of Lagrange-formalism. Present status of the theory and presumable applications. *Arch. Mech.*, 41:511–534, 1989.
- [141] K. H. Anthony. Dislocation dynamics, plasticity, thermodynamics: a unification by means of Lagrange formalism. In K. H. Anthony and H. J. Wagner, editors, *Continuum Models of Discrete Systems*, pages 567–578. Trans Tech Publications, 1993.
- [142] K. H. Anthony. Ansätze zu Plastizitätstheorie. In O. T. Bruhns, editor, *Große plastische Formänderungen*, volume 93, pages 71–75. Mitteilungen Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1994.
- [143] I. A. Kunin. Kinematics of media with continuously changing topology. *Int. J. Theoretical Physics*, 29:1167–1175, 1990.
- [144] P. M. Naghdi and A. R. Srinivasa. A dynamical theory of structured solids. I Basic developments. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, A345:425–458, 1993.
- [145] P. M. Naghdi and A. R. Srinivasa. Characterization of dislocations and their influence on plastic deformation in single crystals. *Int. J. Engng Sci.*, 32:1157–1182, 1994.
- [146] A. Seeger. Recent advances in the theory of defects in crystals. *Physica status solidi*, 1:669–688, 1961.
- [147] H. Stumpf. Theoretical and computational aspects in the shakedown analysis of finite elastoplasticity. *Int. J. Plasticity*, 9:583–602, 1993.
- [148] E. Cesàro. Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche. *Rend. Accad. Napoli*, 12:311–321, 1906.
- [149] W. Pietraszkiewicz. Determination of displacements from given strains in the non-linear continuum mechanics. *ZAMM*, 62:154–156, 1982.
- [150] W. Pietraszkiewicz and J. Badur. Finite rotations in the description of continuum deformation. *Int. J. Engng Sci.*, 21:1097–1115, 1983.

- [151] E. Kröner. Mikrostrukturmechanik. *GAMM-Mitteilungen*, 15:104–119, 1992.
- [152] E. Kröner. A variational principle in nonlinear dislocation theory. In *Proc. 2. Intern. Conf. on Nonlin. Mechanics*, pages 59–64, Beijing, 1993. Peking University Press.
- [153] L. M. Truskinovsky. Dynamics of non-equilibrium phase boundaries in a heat conducting nonlinearly elastic medium. *J. Appl. Math. Mech. (PMM)*, 51:777–784, 1987.
- [154] R. Abeyaratne and J. K. Knowles. On the driving traction acting on a surface of discontinuity in a continuum. *J. Mech. Phys. Solids*, 38:345–360, 1990.
- [155] J. K. Knowles. Continuum modeling of phase transitions in solids. In J. P. Boehler and A. Khan, editors, *Anisotropy and localization of plastic deformation*, pages 500–503, London, 1991. Elsevier.
- [156] G. A. Maugin. *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [157] G. A. Maugin and C. Trimarco. Pseudomomentum and material forces in nonlinear elasticity: variational formulations and application to brittle fracture. *Acta mechanica*, 94:1–28, 1992.
- [158] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer, New York, 1983.
- [159] S. Sternberg. *Lectures on Differential Geometry*. Chelsea, New York, 1983.
- [160] C. Truesdell and R. Toupin. The classical field theories. In *Handbuch der Physik*, volume III/1. Springer, 1960.
- [161] P. G. Ciarlet. *Mathematical elasticity*, volume 1. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [162] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions*. Dover Publications, New York, 1965.
- [163] E. Kamke. *Differentialgleichungen*. Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1967.

- [164] T. K. Hellen. On the method of virtual crack extensions. *Int. J. Numer. Meth. in Engng.*, 9:187–207, 1975.
- [165] G. A. Maugin. *Material Inhomogeneities in Elasticity*. Chapman & Hall, London, 1993.
- [166] I. M. Gelfand and G. E. Shilov. *Generalized Functions*, volume 1. Academic Press, New York, 1964.
- [167] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Differential Equations*. Dover Publications, New York, 1952.
- [168] J. J. Moreau. Sur les lois de frottement, de viscosité et plasticité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. 1*, 271:608–611, 1970.
- [169] K. A. Lurie and A. V. Cherkaev. Exact estimates of conductivity of composites formed by two isotropically conducting media taken in prescribed proportion. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 99A:71–87, 1984.
- [170] L. Tartar. Estimations fines des coefficients homogénéisés. In P. Kree, editor, *Ennio De Giorgi's Colloquium*. Pitman Press, London, 1985.
- [171] G. W. Milton and R. V. Kohn. Variational bounds on the effective moduli of anisotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 36:587–629, 1988.
- [172] M. J. Beran. Use of the variational approach to determine bounds for the effective permeability in random media. *Nuovo Cim.*, 38:771–795, 1965.
- [173] M. N. Miller. Bounds on the effective electrical, thermal and magnetic properties of heterogeneous materials. *J. Math. Phys.*, 10:1988–2004, 1969.
- [174] E. Kröner. Bounds for effective elastic moduli of disordered materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 25:137–155, 1977.
- [175] D. J. Bergman. The dielectric constant of a composite material - a problem in classical physics. *Phys. Lett. C: Phys. Rep.*, 43:377–407, 1978.

- [176] J. G. Berryman and G. W. Milton. Microgeometry of random composites and porous media. *J. Phys.*, 21D:87–94, 1988.
- [177] O. D. Kellog. *Foundation of Potential Theory*. Springer, Berlin, 1967.
- [178] P. Steinmann. A micropolar theory of finite deformation and finite rotation multiplicative elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures*, 31:1063–1084, 1994.
- [179] C. Sansour and J. Keck. Zum elasto-viskoplastischen Cosserat-Kontinuum. In O. T. Bruhns, editor, *Große plastische Formänderungen*, volume 93, pages 38–41. Mitteilungen Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 1994.
- [180] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des Corps Déformables*. Librairie Scientifique A.Hermann et Fils, Paris, 1909.
- [181] W. Günther. Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.*, 10:195–213, 1958.
- [182] E. Kröner. Interrelations between various branches of continuum mechanics. In E. Kröner, editor, *Mechanics of generalized media*. Springer, Berlin, 1968.
- [183] K. H. Anthony. Die Theorie der Disklinationen. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 39:43–88, 1970.
- [184] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall, New Jersey, 1983.
- [185] F. R. Gantmacher. *The theory of Matrices*. Chelsea, New York, 1983.
- [186] R. T. Shield. The rotation associated with large strains. *SIAM J. Appl. Math.*, 25:483–491, 1973.
- [187] C. Truesdell and W. Noll. *The nonlinear field theories of mechanics*, volume III/3 of *Handbuch der Physik*. Springer, Berlin, 1965.
- [188] C. Davini. A proposal for a continuum theory of defective crystals. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 96:296–317, 1986.

- [189] A. E. Green and P. M. Naghdi. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 18:251–281, 1965.
- [190] L. I. Sedov. *Foundations of the nonlinear mechanics of continua*. Pergamon Press, Oxford, 1966.
- [191] J. Kestin. Metal plasticity as a problem in thermodynamics. In H. D. Bui and Q. S. Nguyen, editors, *Thermomechanical coupling in solids*, pages 23–36, London, 1987. Elsevier.
- [192] J. L. Ericksen. Thermoelastic considerations for continuously dislocated crystals. In *Proc. Inter. Symp. on Mechanics of Dislocations*, pages 95–100, Michigan, 1983. American Soc. for Metals.
- [193] G. Capriz. *Continua with microstructure*, volume 35 of *Springer Tracts in Natural Philosophy*. Springer, Heidelberg, 1989.
- [194] B. D. Coleman and W. Noll. The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 13:167–178, 1963.
- [195] I. Müller. *Thermodynamik*. Bertelsmann, Düsseldorf, 1973.
- [196] M. de Leon and M. Epstein. On the integrability of second order G-structures with applications to continuous theories of dislocations. *Reports on Mathematical Physics*, 33:419–436, 1993.
- [197] M. de Leon and M. Epstein. The differential geometry of Cosserat media. In *Proceedings Colloquium on Differential Geometry, Debrecen, Hungary*, 1994.
- [198] M. de Leon and M. Epstein. The geometry of uniformity in second grade elasticity. *Acta Mechanica*, 108:1–8, 1995.
- [199] A. Bertram and M. Kraska. Description of finite plastic deformations in single crystals by material isomorphisms. In *Proceeding of IUTAM Symposium on Anisotropy, Inhomogeneity and Nonlinearity in Solid Mechanics, Nottingham*. Kluwer Academic Publ., 1994.
- [200] G. I. Taylor and C. F. Elam. The distortion of an aluminium crystal during a tensile test. *Proc. Roy. Soc. London*, A102:643–667, 1923.

- [201] G. I. Taylor and C. F. Elam. The plastic extension and fracture of aluminium crystals. *Proc. Roy. Soc. London*, A108:28–51, 1925.
- [202] G. I. Taylor. The mechanism of plastic deformation of crystals, Part I - theoretical. *Proc. Roy. Soc. London*, A145:362–387, 1934.
- [203] R. J. Asaro. Micromechanics of crystals and polycrystals. In *Advances in Applied Mechanics*, volume 23, pages 1–115. Academic Press, New York, 1982.
- [204] K. S. Havner. *Finite plastic deformation of crystalline solids*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [205] J. L. Ericksen. Equilibrium of bars. *Journal of Elasticity*, 5:191–201, 1975.
- [206] J. M. Ball and R. D. James. Fine phase mixtures as minimizers of energy. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 100:13–52, 1987.
- [207] R. von Mises. Mechanik der plastischen Formänderungen von Kristallen. *ZAMM*, 8:161–185, 1928.
- [208] R. Hill. A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 1:18–28, 1948.
- [209] D. C. Drucker. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. In *Proceedings of the first US national congress of applied mechanics*, pages 487–491, New York, 1951. ASME.
- [210] H. Ziegler. An attempt to generalize Onsager's principle, and its significance for rheological problems. *ZAMP*, 9:748–763, 1958.
- [211] B. K. Tanner and D. K. Bowen. *Mater. Sci. Reports*, 8:369, 1992.

.

.

.

.

.

.

.

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations.
Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter
Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen
Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung
orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei
endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter
elastoplastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung
von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with
Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates

- Nr. 18 Uwe Kohlberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente

- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermoeffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltsoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen

- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Franja/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schiäße:
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung

- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finite elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:
Mechanics of Irregular Shell Structures
- Nr. 96 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller
- Nr. 98 Ralf Podleschny:
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl
- Nr. 100 Marc Mittelbach:
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell
- Nr. 101 Ulrich Hoppe:
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie
- Nr. 102 Marcus Otto:
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen
- Nr. 103 Horst Lanzerath:
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode
- Nr. 104 Andreas Wichtmann:
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der Reckalterung
- Nr. 105 Bjarne Fosså:
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stählen
- Nr. 106 Khanh Chau Le:
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 106**