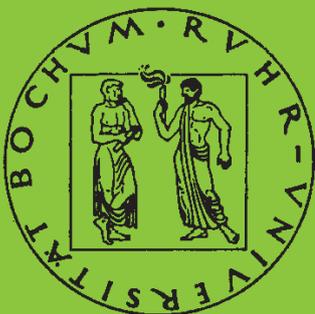


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Andreas Wichtmann

**Entwicklung eines thermodynamisch
konsistenten Stoffgesetzes
zur Beschreibung der Reckalterung**

Heft Nr. 104



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Andreas Wichtmann

Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes
zur Beschreibung der Reckalterung

Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Technische Mechanik der Ruhr-Universität Bochum.

Ich danke Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns für die Anregung zu dieser Arbeit, deren Betreuung und für die Übernahme des Referates. Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich für sein Interesse und für die Übernahme des Korreferates.

Bei allen Kollegen des Lehrstuhls für Technische Mechanik möchte ich mich für die gute Zusammenarbeit und angenehme Arbeitsatmosphäre bedanken. Herrn Grundmann, Herrn Böhme und Herrn Seifert danke ich für die tatkräftige Unterstützung meiner experimentellen Tätigkeiten im Labor des Lehrstuhls. Besonders hervorheben möchte ich meine Kollegen Herrn Dr.-Ing Peer Schieße, Herrn Dipl.-Ing. Dirk Anding, Herrn Dipl.-Ing. Thomas Nerzak, Herrn Dipl.-Ing. Hans-Jörg Becker und Herrn Dipl.-Ing. Stephan Weng, die durch fachliche Gespräche und Diskussionen wertvolle Anregungen zu dieser Arbeit gegeben haben. Für die Unterstützung bei der Erstellung des Manuskriptes danke ich Herrn cand. ing. Marc Lengning.

Nicht unerwähnt lassen möchte ich, daß das Entstehen dieser Arbeit durch die finanzielle Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft ermöglicht worden ist.

Schließlich möchte ich meinen Eltern für die Förderung meines Studiums und ihre Unterstützung ganz herzlich danken.

Juli 1996

Andreas Wichtmann

Referenten: Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns
Prof. Dr.-Ing. H. Waller

Tag der Einreichung: 08.05.1996

Tag der mündlichen Prüfung: 12.07.1996

© 1996 Andreas Wichtmann, Gilsingstraße 38, 44789 Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Mikromechanische Beschreibung der Reckalterung	4
2.1	Plastisches Verformungsverhalten metallischer Werkstoffe	4
2.2	Reckalterung	7
2.2.1	Statische Reckalterung	8
2.2.2	Dynamische Reckalterung	13
3	Versuche	21
3.1	Material und Proben	21
3.2	Versuchseinrichtung	22
3.3	Längenmessung	22
3.4	Versuchsprogramm	24
3.5	Versuchsergebnisse	25
3.5.1	Monotone Zugversuche	25
3.5.2	Versuche zur Fließspannungserhöhung	37
4	Kinematik	43
4.1	Konfiguration und Bewegung	43
4.2	Beschreibung der Deformation	47
4.3	Spannungstensoren	49
4.4	Aufspaltung der Verzerrungen	50
4.5	Differentiation nach der Zeit	52
5	Materialunabhängige Bilanzgleichungen der Thermodynamik	55
5.1	Massenbilanz	56
5.2	Impulsbilanz	56
5.3	Drehimpulsbilanz	57

5.4	1. Hauptsatz der Thermodynamik	57
5.5	2. Hauptsatz der Thermodynamik	57
5.5.1	Thermostatik	59
5.5.2	Klassische irreversible Thermodynamik	61
5.5.3	Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen	63
6	Konstitutive Beziehungen	67
6.1	Phänomenologische Modellierungskonzepte der Reckalterung	67
6.1.1	Abgrenzung der Alterungseffekte	67
6.1.2	Das Stoffgesetz von KREMPL	68
6.1.3	Das Stoffgesetz von CHABOCHE	71
6.1.4	Das Stoffgesetz von MARQUIS	75
6.2	Inelastisches Stoffgesetz mit Berücksichtigung der statischen und dynamischen Reckalterung	78
6.3	Elastisches Materialverhalten	79
6.4	Plastisches Materialverhalten	80
6.4.1	Statische Reckalterung	81
6.5	Elasto-viskoplastisches Materialverhalten	84
6.5.1	Dynamische Reckalterung	86
6.6	Beziehungen zwischen externer Energiezufuhr und Änderung des internen Zustandes	93
7	Bestimmung der Materialfunktionen	96
7.1	Axialsymmetrische Probleme in Zylinderkoordinaten	96
7.2	Homogener Zug	97
7.3	Materialfunktionen	100
7.3.1	Anpassungsstrategie	100
7.3.2	Splinefunktionsdarstellung der Materialfunktion	101
7.3.3	Isotrope Verfestigungsfunktion	102
7.3.4	Statische Reckalterung	106
7.3.5	Überspannungsfunktionen	111
7.3.6	Weitere Materialfunktionen	116

7.4	Verifikationsrechnungen	117
7.4.1	Übergangsverhalten	117
7.4.2	Kriechen und Relaxation	118
8	Finite-Elemente-Formulierung	121
8.1	Prinzip der virtuellen Arbeit	121
8.2	Numerische Lösungsmethoden	122
8.2.1	Update-Lagrange Formulierung	122
8.2.2	Inkrementelle Formulierung	124
8.2.3	Einbeziehung der Materialgleichungen	125
8.2.4	Umsetzung in eine Finite-Elemente-Formulierung	127
8.3	Strukturverhalten	129
8.3.1	Zugstab – Vergleich Stoffgesetzintegration/FE	129
8.3.2	Gekerbter Zugstab	133
8.3.3	Gelochte Scheibe	138
9	Zusammenfassung und Ausblick	141
A	Der Portevin-LeChatelier-Effekt	143
B	Zustandsunabhängige objektive Zeitableitungen	145
C	Materialparameter	149
D	Zusammenfassung des inelastischen Stoffgesetzes	153
	Literaturverzeichnis	157

Bezeichnungen

Skalare

a, A	Fläche in der Momentankonfiguration/Ausgangskonfiguration
a	Alterungsvariable (Stoffgesetz MARQUIS)
A	Wechselwirkungsparameter
\dot{a}	Schergeschwindigkeit
b	Länge des Burgersvektors
\mathcal{B}	Konfiguration
$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_t$	Ausgangskonfiguration/Momentankonfiguration
\mathcal{B}^*	fiktiver Referenzzustand
D	Diffusionskoeffizient
D_0	Diffusionskonstante
\mathcal{D}	Dissipation (Stoffgesetz CHABOCHE)
C_s	axiale Maschinensteifigkeit
E	Elastizitätsmodul
F	belastende Kraft der Prüfmaschine
g	zur isotropen Verfestigung κ assoziierte Materialfunktion
g_ρ	zur Reckalterungsverfestigungsvariablen ρ assoziierte Materialfunktion
G	Schubmodul
h	Enthalpie
H	Aktivierungsenergie
k	Boltzmannkonstante
K	Kompressionsmodul
l	Abstand zweier Hindernisse
m	Masse
n	Fremdatomkonzentration der COTTRELL-Wolke
n_0	Fremdatomkonzentration
N_m	Dichte der mobilen Versetzungen
p	akkumulierte plastische Dehnung (Stoffgesetz CHABOCHE)
Q	Wärmemenge
r	durch Strahlung pro Zeit- und Masseinheit zugeführte Wärmeenergie
R	isotrope Verfestigungsfunktion (Stoffgesetz CHABOCHE)
R_s	Grenzradius der Fließfläche (Stoffgesetz CHABOCHE)
R^*	Reibspannungsanteil aufgrund der Reckalterung (Stoffgesetz CHABOCHE)
s	Gesamtlängenänderung
s_{Probe}	Längenänderung der Probe
s	Entropie

s	irreversible Entropie
$s_{(i)}$	
$s_{(r)}$	reversible Entropie
$s_{(st)}$	Entropie aufgrund interner Vorgänge
$s_{(w)}$	Entropie aufgrund der Wärmeleitung
S	Dehnungsratenempfindlichkeit
S_{st}	stationäre Dehnungsratenempfindlichkeit
t	Zeit
t_{alt}	Alterungszeit
t_d	charakteristische Diffusionszeit
t_w	durchschnittliche Wartezeit einer Versetzung an einer Fremdatomwolke
t_{wst}	stationäre Wert der durchschnittlichen Wartezeit einer Versetzung an einer Fremdatomwolke
T	Temperatur
T_{alt}	Alterungstemperatur
T_s	Schmelztemperatur
u	innere Energie
U	Aktivierungsenergie
v, V	Volumen in der Momentankonfiguration/Ausgangskonfiguration
v	Versetzungsgeschwindigkeit
v_c	Versetzungsgeschwindigkeit bei maximaler Reißspannung
w	Formänderungsarbeit
$w_{(d)}$	dissipative Formänderungsarbeit
$w_{(h)}$	Strukturänderungsarbeit
$w_{(i)}$	irreversible Formänderungsarbeit
$w_{(r)}$	reversible Formänderungsarbeit
α	thermischer Ausdehnungskoeffizient
β_i	Strukturparameter
$\dot{\gamma}_m$	mittlere versetzungsinduzierte Verformungsgeschwindigkeit
δ	absolutes Verzerrungsmaß
ε	Dehnung
ε_{alt}	Dehnung zu Beginn des Alterungsprozesses
ε_p	plastische Dehnung
ε_{off}	Offsetdehnung
$\dot{\varepsilon}$	Dehnungsgeschwindigkeit
$\dot{\varepsilon}_0$	Geschwindigkeitskonstante der plastischen Verformung
ϵ	axiale Nenndehnung (Stoffgesetz KREMPL)
η	Entropie aufgrund der Änderung der inneren Materialstruktur

κ	isotrope Verfestigungsvariable
λ	plastischer Multiplikator
Λ	allgemeine Überspannung des viskoplastischen Modells
Λ_ν	Überspannung ohne dynamische Reckalterung
Λ_ρ	Überspannung mit dynamischer Reckalterung
$\Lambda_{\rho m}$	maximale Überspannung der dynamischen Reckalterung
ν	Querkontraktionszahl
ϱ, ϱ_0	Dichte in der Momentankonfiguration/Ausgangskonfiguration
ρ	statische Reckalterungsvariable
ρ^∞	Sättigungswert der statischen Reckalterungsvariablen
ρ_\perp	Versetzungsdichte
ρ_m	Dichte der mobilen Versetzungen
σ	anliegende Spannung
σ_{ath}	athermischer Spannungsanteil
σ_{th}	thermischer Spannungsanteil
σ_d	geschwindigkeitsabhängiger Spannungsanteil
σ_e	effektive Spannung
σ_f	Reibspannung
σ_i	innere Spannung
$\Delta\sigma$	Fließspannungserhöhung
$\Delta\sigma_{co}$	Fließspannungserhöhung aufgrund der COTTRELL-Wolkenbildung
$\Delta\sigma_{sn}$	Fließspannungserhöhung aufgrund des SNOEK-Effektes
τ	effektiv anliegende Schubspannung
ϕ	thermodynamisches Potential (Stoffgesetz CHABOCHE)
Φ	Abbildung der Ausgangs- auf die Momentankonfiguration
Φ	Dissipationspotential (Stoffgesetz CHABOCHE)
Φ	freie Energie
Φ	allgemeine Überspannungsfunktion
Φ_{dyn}	Überspannungsfunktion des dynamischen Reckalterungsmodells
Φ_ρ	Überspannungsfunktion zur Beschreibung der dynamischen Reckalterung
Ψ	spezifische freie Enthalpie

Vektoren

\mathbf{b}	Massenkraftdichte pro Masseneinheit
\mathbf{f}	Summe der angreifenden Kräfte
$\mathbf{g}_i, \mathbf{G}_i$	Basisvektoren der Momentankonfiguration/Ausgangskonfiguration in einem körperfesten System
$\mathbf{g}_\alpha, \mathbf{G}_\alpha$	Basisvektoren der Momentankonfiguration/Ausgangskonfiguration

	in einem raumfesten System
I	Impulsvektor
k, K	Schnittkraft in der Momentankonfiguration/Ausgangskonfiguration
m	Gleitrichtung
n, N	Normalenvektor in der Momentankonfiguration/Ausgangskonfiguration
q	Wärmeflußvektor
t, T	Spannungsvektor in der Momentankonfiguration/Ausgangskonfiguration
u	Verschiebung
x, X	Ortsvektor in der Momentankonfiguration/Ausgangskonfiguration

Tensoren 2. Stufe

\underline{A}_i	zu $\underline{\alpha}_i$ assoziierte thermodynamische Kräfte
\underline{b}	Links-CAUCHY-GREEN-Tensor
\underline{C}	Rechts-CAUCHY-GREEN-Tensor
\underline{D}	Deformationsgeschwindigkeitstensor
$\underline{D}^{(i)}$	irreversibler Anteil des Deformationsgeschwindigkeitstensors
$\underline{D}^{(r)}$	reversibler Anteil des Deformationsgeschwindigkeitstensors
\underline{e}	ALMANZI-Verzerrungstensor
\underline{E}	GREEN-Verzerrungstensor
\underline{F}	Deformationsgradient
$\underline{g}, \underline{G}$	Metriktensor der Momentankonfiguration/Ausgangskonfiguration
\underline{G}	Materialtensor (Stoffgesetz KREMPL)
\underline{L}	Geschwindigkeitsgradient
\underline{n}	Normaleneinheitstensor
\underline{P}_1	1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
\underline{P}_2	2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor
\underline{R}	Rotationstensor
\underline{S}	gewichteter CAUCHY-Spannungstensor
\underline{T}	Deviator des gewichteten CAUCHY-Spannungstensors
\underline{U}	Rechtsstrecktensor
\underline{V}	Linksstrecktensor
\underline{W}	Rotationsgeschwindigkeitstensor
\underline{X}	kinematische Verfestigung (Stoffgesetz CHABOCHE)
$\underline{\alpha}_i$	interne Variablen (Stoffgesetz CHABOCHE)
$\underline{\epsilon}_e$	elastischer Dehnungstensor (Stoffgesetz CHABOCHE)
$\underline{\epsilon}^{(r)}$	reversibler Dehnungstensor
$\underline{\epsilon}$	Dehnungstensor (Stoffgesetz KREMPL)

ξ	kinematische Verfestigungsvariable
$\underline{\sigma}$	CAUCHY-Spannungstensor
$\underline{\omega}_{(i)}$	Tensor des plastischen Spins
$\underline{\Omega}$	Maß für Rotationsgeschwindigkeit

Tensoren 4. Stufe

$\underline{\underline{C}}$	Elastizitätstensor (Stoffgesetz MARQUIS)
$\underline{\underline{K}}$	Materialtensor (Stoffgesetz KREMPL)
$\underline{\underline{M}}$	Materialtensor (Stoffgesetz KREMPL)
$\underline{\underline{\Lambda}}$	Materialtensor (Stoffgesetz CHABOCHE)

Operatoren

grad, Grad	Gradient in der Momentankonfiguration/Ausgangskonfiguration
div, Div	Divergenz in der Momentankonfiguration/Ausgangskonfiguration
rot, Rot	Rotor in der Momentankonfiguration/Ausgangskonfiguration
Sp(...)	Spur
sym(...)	symmetrischer Teil
ant(...)	antimetrischer Teil
∇ (...)	objektive Zeitableitung
(...)'	Deviator
(...) ⁻¹	Inverse
(...) ^T	Transponierte
(...) _{α}	kovariante Ableitung
$\overline{(\dots)}$	geschwindigkeitsunabhängiger Spannungsanteil
$\underline{\underline{(\dots)}}$	geschwindigkeitsabhängiger Spannungsanteil
...	Betrag
(...)	materielle Zeitableitung
H(...)	Heavyside-Funktion
(...) \otimes (...)	dyadisches Produkt
(...) \cdot (...)	einfach verjüngendes Produkt
(...) : (...)	doppelt verjüngendes Produkt

1. Einleitung

Die in den letzten Jahren ständig fortschreitende Leistungssteigerung von Rechenanlagen ermöglicht die numerische Analyse umfangreicher nichtlinearer Probleme. Zur Beschreibung des Deformationsverhaltens können daher komplexe kontinuumsmechanische Stoffgesetze entwickelt werden, die eine umfassende, und damit realistischere, Modellierung des Materialverhaltens ermöglichen. Die Verbesserung der Modellierung trägt den ständig steigenden Anforderungen an die Formgebung von Bauteilen hinsichtlich ihrer Belastbarkeit und ihres Gewichtes Rechnung. Insbesondere wird in Bereichen, in denen komplizierte Belastungen auftreten können, eine verbesserte Modellierung des Deformationsverhaltens angestrebt (z.B. Flugtriebwerke, Kraftwerktechnik, Raumfahrt).

Das Deformationsverhalten von Werkstoffen wird durch Alterungsprozesse beeinflusst. Im allgemeinen wird unter Alterung die zeitabhängige Änderung des Gefüges oder der Zusammensetzung eines Körpers verstanden. Bei metallischen Werkstoffen wird die zeit- bzw. temperaturabhängige Änderung bestimmter Eigenschaften wie Streckgrenze, Zugfestigkeit, Härte, elektrische Leitfähigkeit usw. als Alterung bezeichnet. Die Reckalterung ist durch die Änderung der verformungsmechanischen Eigenschaften in Abhängigkeit von der Zeit, der Temperatur und der plastischen Verformung, d.h. des Reckgrades, gekennzeichnet. Der von Reckalterung betroffene Körper weist eine mit anwachsender Zeit und Temperatur zunehmende Verfestigung und abnehmende Duktilität auf.

Eine nachteilige Eigenschaft der Reckalterung, welche sich in Umformprozessen zeigt, ist die inhomogene plastische Verformung, die sich in einem Zugversuch als gezackter bzw. stufenförmiger Verformungskurvenverlauf zeigt (PORTEVIN-LECHATLIER-Effekt). Unerwünschte Folgen sind mangelhaft glatte Oberflächen von kaltgewalzten oder tiefgezogenen Blechen und der Verlust der Duktilität. Beim zerspanenden Bearbeiten von Metallen werden die Späne brüchig und die Bearbeitungsflächen rau, was die Einhaltung von Toleranzen beeinträchtigt (PINK & GRINBERG [105]).

Auf der anderen Seite kann die Erhöhung der Verfestigung aufgrund der Reckalterung zur Festigkeitssteigerung von Bauteilen genutzt werden.

In der Umformtechnik wird beim Kaltziehen von Stabstahl im Temperaturbereich zwischen Umgebungs- und Rekristallisationstemperatur eine außerordentliche Festigkeitssteigerung bei $T \approx 300^\circ\text{C}$ erzielt (PETERSON [103]). Während des Tiefziehvorganges kann eine Festigkeitssteigerung durch künstliche Verformungsalterung des Tiefziehteils erreicht werden („bake-hardening“).

Ein anderes Beispiel des Ausnutzens der festigkeitssteigerenden Wirkung der Reckalterung zeigt die Entwicklung von Voll-Aluminium-Blech-Karosserien im Automobilbau. Die seit 1987 von Audi entwickelte Aluminium-Karosserie, genannt „Audi Space Frame“, besteht

aus der Legierung AlMg5Mn, die bei einer Temperatur von 200 °C zur Reckalterung neigt. Die Rohkarosserie wird einer Wärmebehandlung unterzogen, die eine künstliche Alterung des Materials und dadurch bedingt eine Festigkeitssteigerung der gesamten Karosserie hervorruft.

Eine Übersicht zur thermomechanischen Behandlung von Metallen und eine Einordnung der Reckalterung in dieses Schema geben RADCLIFFE & KULA [108] und KULA & RADCLIFFE [55].

Erste Untersuchungen zur Reckalterung gehen an den Anfang unseres Jahrhunderts zurück (ROBIN [113], GUILLET & RÉVILLON [43], KURZWERNHART [56], FETTWEISS [40], PORTEVIN & LE CHATELIER [106]). Es wurde die Beobachtung gemacht, daß bei einem Biegeversuch einer Stahlprobe bei steigenden Temperaturen die Biegefähigkeit im Temperaturbereich zwischen $T = 80^\circ\text{C}$ und $T = 300^\circ\text{C}$ abnimmt und der Werkstoff zunehmend versprödet (FETTWEISS [40]). Da diese Sprödigkeit ihr Maximum bei $T = 300^\circ\text{C}$, der Temperatur, bei welcher eine blanke Eisenfläche blau anläuft, erreicht, nennt man diese Erscheinung Blaubruch.

Erste Ansätze zur Erklärung der mikromechanischen Zusammenhänge, die zur Reckalterung führen, geben SNOEK [125], COTTRELL [21, 24, 22, 23], SCHOECK & SEEGER [120] und HAHN [44]. Auf der Grundlage einer Vielzahl von Experimenten mit unterschiedlichen Metallen werden diese Ansätze modifiziert und erweitert (WILSON & RUSSELL [135, 136], PETERSON [103], BRINDLEY & BARNBY [6], ROBERTS & OWEN [112], CUDDY & LESLIE [26] u.a.). Insbesondere wird der Einfluß der Verformung, der Verformungsgeschwindigkeit und der Temperaturänderung untersucht (BAIRD [4], VAN DEN BEUKEL [130, 131, 132], MAYER [84], MULFORD & KOCKS [91], WYCLIFFE, KOCKS & EMBURY [138], KUBIN & ESTRIN [53, 54], MESAROVIC [89] u.a.).

Vorschläge zur Berücksichtigung der Reckalterung in einem phänomenologischen Stoffgesetz werden von KREMPL [48, 49], SCHMIDT & MILLER [118, 119], CHABOCHE [14], MARQUIS [80], MARQUIS & MATTOS [81] und DELOBELLE [33, 34] gegeben.

In dieser Arbeit wird ein elasto-plastisches bzw. elasto-viskoplastisches Stoffgesetz vorgestellt, das eine phänomenologische Beschreibung der Reckalterung ermöglicht. Bei der Entwicklung des Stoffgesetzes werden die aus dem 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik folgenden Restriktionen berücksichtigt. Auf der Grundlage der Mikromechanik und der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente werden Ansätze zur Berücksichtigung der statischen und dynamischen Reckalterung gegeben und die Materialfunktionen des Stoffgesetzes bestimmt.

Im ersten Kapitel werden die mikromechanischen Ursachen der Reckalterung dargestellt und erläutert. Anhand eines Kohlenstoffstahls wird eine Analyse der Wechselwirkung zwischen der Versetzungsbewegung und der Bewegung der gelösten Fremdatome durchgeführt. Aus der Analyse kann eine Zuordnung der statischen Reckalterung zum plastischen und der dynamischen Reckalterung zum viskoplastischen Materialverhalten gewon-

nen werden. Zudem können aus der mikromechanischen Beschreibung Informationen für die Entwicklungsgleichung der zu definierenden internen Variablen des phänomenologischen Stoffgesetzes gewonnen werden.

Die experimentelle Grundlage zur Entwicklung des Stoffgesetzes und zur Bestimmung der Materialfunktionen bilden die im zweiten Kapitel vorgestellten Versuche zur statischen und dynamischen Reckalterung. Es wird der Stahl Ck35 untersucht, der aufgrund des relativ hohen Kohlenstoffgehaltes eine deutliche Reckalterung zeigt. Um eine Trennung zwischen den unterschiedlichen Verfestigungsmechanismen zu erreichen, werden Versuche in einem weiten Temperatur- und Verformungsgeschwindigkeitsbereich durchgeführt.

Nach der Diskussion der Verformungskinematik und der Auswahl einer geeigneten objektiven Zeitableitung im dritten Kapitel werden im vierten Kapitel die materialunabhängigen Bilanzgleichungen vorgestellt. Der Schwerpunkt wird auf die Erfüllung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik gelegt. Es werden die Annahmen und Folgerungen beim Übergang von der Thermostatik zur klassischen irreversiblen Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen aufgezeigt. Als Ergebnis dieser Betrachtungen ergeben sich die Gleichung für die Temperaturentwicklung und die Forderung nach Erfüllung der CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung.

Die Erweiterung eines elasto-plastischen und elasto-viskoplastischen phänomenologischen Stoffgesetzes zur Beschreibung der Reckalterung wird im fünften Kapitel vorgestellt. Basierend auf den Erkenntnissen der Mikromechanik und Vorschlägen zur phänomenologischen Modellbildung wird eine interne Variable zur Berücksichtigung der statischen und eine modifizierte Überspannungsfunktion zur Berücksichtigung der dynamischen Reckalterung eingeführt. Durch einen speziellen Ansatz für die Dissipationsleistung wird der 2. Hauptsatz der Thermodynamik in der Form der CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung erfüllt.

Die Freiwerte des Stoffgesetzes, d.h. die Materialfunktionen und -parameter, werden im sechsten Kapitel mit Hilfe einer ausgewählten Anpassungsstrategie bestimmt. Als Grundlage der Anpassung dienen die durchgeführten Versuche an Ck35. Verifikationsrechnungen zeigen eine qualitativ gute Beschreibung des Kriech- und Relaxationsverhaltens im Reckalterungstemperaturbereich.

Im siebten Kapitel wird das Stoffgesetz in ein Finite-Elemente-Programm umgesetzt. Es werden Verifikationsrechnungen zur Umsetzung der Differentialgleichungen des Stoffgesetzes in eine FE-Modellierung präsentiert. Am gekerbten Zugstab werden die Auswirkungen der statischen Reckalterung und an der gelochten Scheibe die der dynamischen Reckalterung gezeigt.

2. Mikromechanische Beschreibung der Reckalterung

2.1 Plastisches Verformungsverhalten metallischer Werkstoffe

Das makroskopische Verformungsverhalten polykristalliner Festkörper kann nach ASHBY & FROST [2] in sechs Gruppen aufgeteilt werden. Diese sind:

- Scherversagen
- Zwillingsbildung und martensitische Transformationen
- Versetzungsgleiten
- Versetzungsklettern
- Diffusion
- gekoppelte Mechanismen

Die plastische Verformung metallischer Werkstoffe beruht im Temperaturbereich $\leq 0.4 T_s$ (T_s = Schmelztemperatur) auf der Bewegung und Erzeugung von Versetzungen in den verformungsfähigen Körnern des Polykristalls (Versetzungsgleiten). Für einen Einkristall läßt sich die mittlere versetzungsinduzierte (Scher-)Verformungsgeschwindigkeit $\dot{\gamma}_m$ durch die Orowan-Schmid-Gleichung (KRÖNER [52])

$$\dot{\gamma}_m = \sum_{\alpha} \dot{a}_{\alpha} \text{sym}(\mathbf{m}_{\alpha} \otimes \mathbf{n}_{\alpha})$$

angeben. Die Summe erstreckt sich über alle aktiven Gleitsysteme mit den Normalen \mathbf{n}_{α} und den Gleitrichtungen \mathbf{m}_{α} . Die Schergeschwindigkeit kann angegeben werden durch

$$\dot{a}_{\alpha} = b_{\alpha} N_m^{\alpha} v.$$

Sie wird beeinflußt durch die jeweiligen Anteile der mobilen Versetzungsdichten N_m^{α} , den Burgers-Vektors b_{α} , die mittlere Versetzungsgeschwindigkeit v , die effektiv anliegende Schubspannung τ_{α} und die Aktivierungsenergie.

Der Versetzungsbewegung stehen verschiedene Formen von Hindernissen im Wege. Je nach Art der dominierenden Hindernisse können für die Schergeschwindigkeit \dot{a}_{α} unterschiedliche Zusammenhänge angegeben werden. Nach FROST & ASHBY [41] sind dies:

- athermische Versetzungsbewegung
- thermisch aktivierte Versetzungsbewegung
- durch viskose Dämpfungsmechanismen kontrollierte Versetzungsbewegung

Letztere tritt auf, wenn bei sehr hohen Spannungen in der Gleitebene die Versetzungen von diskreten Hindernissen kaum behindert werden. Die Versetzungsbewegung wird dann durch die Wechselwirkung mit dem regulären Gitter behindert.

Die thermisch aktivierte Versetzungsbewegung ist gekennzeichnet durch Hindernisse mit kurzreichenden inneren Spannungsfeldern (z.B. andere Versetzungen). Diese können aufgrund der thermisch aktivierten Bewegung von Punktfehlern durch lokales Klettern oder Quergleiten ohne Belastungssteigerung überwunden werden.

Die athermische Versetzungsbewegung wird durch Hindernisse mit weitreichenden inneren Spannungsfeldern (z.B. 3D-Gitterfehler, Korngrenzen), die über mehrere Atomabstände wirken, bestimmt. Diese können nur durch Erhöhung der in der Gleitebene wirkenden Schubspannung τ_α überwunden werden. Die Temperaturabhängigkeit der athermischen Versetzungsbewegung beschränkt sich auf die Temperaturabhängigkeit des Schubmoduls, die relativ schwach ist.

FROST & ASHBY [41] geben einen Dehnungsgeschwindigkeitsbereich von $10^{-5} \text{ s}^{-1} < \dot{\epsilon} < 10^4 \text{ s}^{-1}$ für die athermisch und thermisch aktivierte Versetzungsbewegung eines unlegierten Stahls an. Die viskos gedämpfte Versetzungsbewegung tritt erst ab Dehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon} > 10^3 \text{ s}^{-1}$ auf.

Da sich die nachfolgenden Untersuchungen auf den Dehnungsgeschwindigkeitsbereich der thermischen und athermischen Versetzungsbewegung beschränken, läßt sich die Spannung entsprechend in

$$\sigma = \sigma_{ath} + \sigma_{th}$$

aufspalten. Tabelle 2.1 zeigt eine Auswahl einiger Verfestigungsmechanismen infolge athermischer Versetzungsbewegung (MACHERAUCH [72]).

Thermisch aktivierte Versetzungsbewegungen zeigen eine ausgeprägte Abhängigkeit von der Temperatur und Verformungsgeschwindigkeit. Mit dem ARRHENIUS-Ansatz läßt sich die plastische Verformungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_p$ des thermisch aktivierten Prozesses beschreiben als

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_0 \exp\left(-\frac{U(\sigma, \beta_i)}{kT}\right),$$

mit der Geschwindigkeitskonstanten $\dot{\epsilon}_0$, der Boltzmannkonstanten k , die Temperatur T und der Aktivierungsenergie $U(\sigma, \beta_i)$ des Prozesses, die eine Funktion der anliegenden Spannung σ und der Strukturparameter β_i ist.

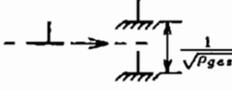
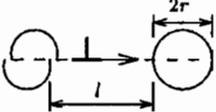
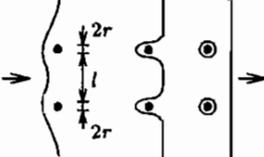
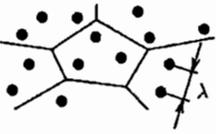
Verfestigungsmechanismen		Spannungszuwachs	Oberflächenmerkmale	
Wechselwirkung von Gleitversetzungen mit	Schematische Darstellung			
Versetzungen		$\Delta\sigma_{vers} = \alpha_1 G b \sqrt{\rho_{ges}}$	Gleitlinien und Gleitbänder und/oder Zwillingslamellen	
Korngrenzen		$\Delta\sigma_{KG} = \frac{k}{\sqrt{d}}$	Mehrfachgleitung	
Gelösten Fremdatomen		$\Delta\sigma_{MK} = \alpha_2 G c^n$	Gleitbänder	
Teilchen a) kohärente Ausscheidungen		$\Delta\sigma_{Aus} = \alpha_3 \gamma_{eff}^m \frac{r^m}{l + 2r}$	Grobleitung	
	b) inkohärente Ausscheidungen		$\Delta\sigma_{Teil} = \alpha_4 \frac{Gb}{l} \ln \frac{r}{b}$	Feingleitung
	c) körnige Anordnung		$\Delta\sigma_{Korn} = \frac{k}{\sqrt{\lambda}}$	Inhomogene Gleitung
	d) lamellare Anordnung		$\Delta\sigma_{lam} = \frac{\alpha_5}{\lambda}$	
	e) grobe Zweiphasigkeit		$\Delta\sigma_{zwei} = (\sigma_B - \sigma_A) f_B$	

Tabelle 2.1: Auswahl einiger Verfestigungsmechanismen metallischer Werkstoffe (nach MACHERAUCH [72])

2.2 Rekalterung

Unter Rekalterung versteht man die zeit- und temperaturabhängige Änderung bestimmter Eigenschaften metallischer Legierungen nach Wärmebehandlung und Verformung. Das Phänomen der Rekalterung tritt in homogenen Legierungen auf, die substitutional oder interstitiell gelöste Atome mit einer von der Temperatur abhängigen Beweglichkeit besitzen. Das Ausmaß und die Erscheinungsform der Rekalterung wird dabei von

- der Kristallstruktur des Werkstoffes,
- der Art der Fremdatome,
- der Einbettung der Fremdatome,
- der Alterungszeit und
- der Alterungstemperatur

bestimmt. Die Rekalterung geht mit der thermischen und athermischen Versetzungsbewegung einher. Die mikromechanische Ursache ist die Diffusionsbewegung der eingelagerten Fremdatome. Diese treten den mobilen Versetzungen als Hindernisse entgegen. Als Besonderheit ist herauszustellen, daß die Fremdatome nicht in Ruhe sind, sondern, als Charakteristik des Alterungsprozesses, eine Bewegung in Richtung der Versetzung vollziehen.

Zwei Formen der Rekalterung können unterschieden werden:

- Die statische Rekalterung, bei der der Alterungsprozeß nach einer aufgebrachten Vordehnung und anschließender Entlastung und Auslagerung bei einer erhöhten Temperatur abläuft und
- die dynamische Rekalterung, bei der der Alterungsprozeß bei bestimmten Temperatur- und Verformungsgeschwindigkeitsrandbedingungen während des Verformungsprozesses stattfindet.

In beiden Fällen erhält man ähnliche Änderungen der mechanischen Eigenschaften. Zum Beispiel wird für einen unlegierten Stahl im Zugversuch nach Rekalterung ein Anwachsen der Fließspannung und der Verfestigungsrate und eine Abnahme der Duktilität beobachtet (FELDMÜLLER [39]). Beide Arten der Rekalterung können zu inhomogenen plastischen Deformationen führen. Die statische Rekalterung eines unlegierten Stahls resultiert in einer Wiederkehr der LÜDERS-Deformationen, die dynamische Rekalterung äußert sich durch unterschiedlich gezackte Fließkurvenverläufe, die als PORTEVIN-LECHATelier-Effekt bezeichnet werden (BAIRD [4], s. Anhang A).

Die zugrundeliegenden mikromechanischen Prozesse umfassen den spannungsinduzierten SNOEK-Effekt, die COTTRELL-Wolkenbildung, die Ausscheidungsverfestigung und die Umlösung und Überalterung. Experimentelle Untersuchungen konzentrieren sich auf zwei Legierungsarten:

- kubisch-raumzentrierte (krz) Metalle mit interstitiell gelösten Fremdatomen und
- kubisch-flächenzentrierte (kfz) Metalle mit substitutional gelösten Fremdatomen.

Nachfolgend wird die statische und dynamische Reckalterung anhand eines krz Metalls mit interstitiell gelösten Atomen erläutert. Unterschiede und Gemeinsamkeiten bezüglich des mechanischen Verhaltens der kfz Metalle mit substitutional gelösten Fremdatomen werden aufgezeigt.

Als beispielhafter Werkstoff dient das α -Eisen mit interstitiell gelösten Kohlenstoff- und Stickstoffatomen.

2.2.1 Statische Reckalterung

Das phänomenologische Erscheinungsbild der statischen Reckalterung soll anhand der Verfestigungskurve eines unlegierten untereutektoiden Stahls im normalisierten Zustand beschrieben werden (MACHERAUCH [73]).

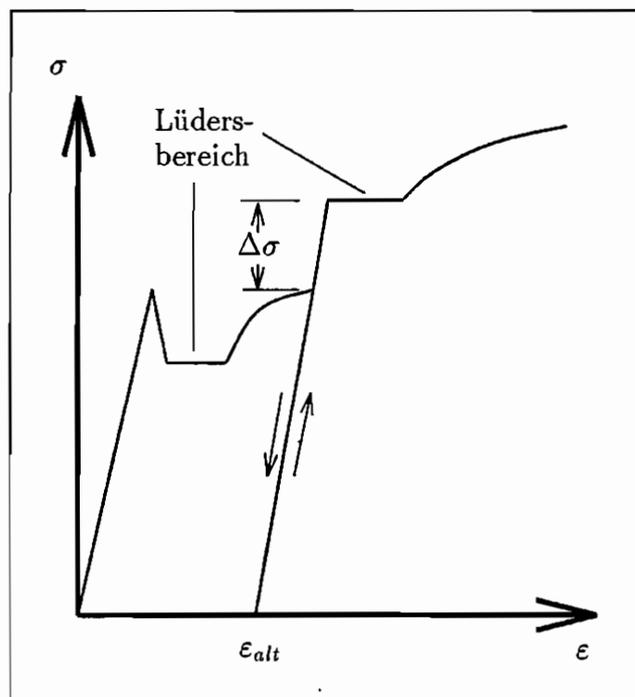


Abb. 2.1: Statische Reckalterung im Spannungs-Dehnungs-Diagramm

In Abb. 2.1 ist schematisch die Spannungs-Dehnungskurve eines Zugversuches bei Raumtemperatur nach Überschreiten der Streckgrenze und der inhomogenen LÜDERS-Deformationen aufgezeichnet. Nach Entlastung besitzt die Zugprobe eine plastische Dehnung ϵ_{alt} . Die Zugprobe wird bei einer Temperatur T_{alt} größer als Raumtemperatur für die Zeitdauer t_{alt} ausgelagert. Nach einer erneuten Zugbelastung setzt die plastische Deformation erst bei einer um $\Delta\sigma$ erhöhten Spannung ein. Zudem ist ein erneutes Auftreten der LÜDERS-Deformationen zu beobachten.

Die für die statische Reckalterung charakteristische Spannungserhöhung $\Delta\sigma$ läßt sich als Funktion der Alterungszeit t_{alt} und der Alterungstemperatur T_{alt} für $\epsilon_{alt} = \text{konst.}$ darstellen (Abb. 2.2). Die Fließspannungserhöhung $\Delta\sigma$ wächst mit zunehmender Alterungszeit um so stärker an, je größer T_{alt} ist.

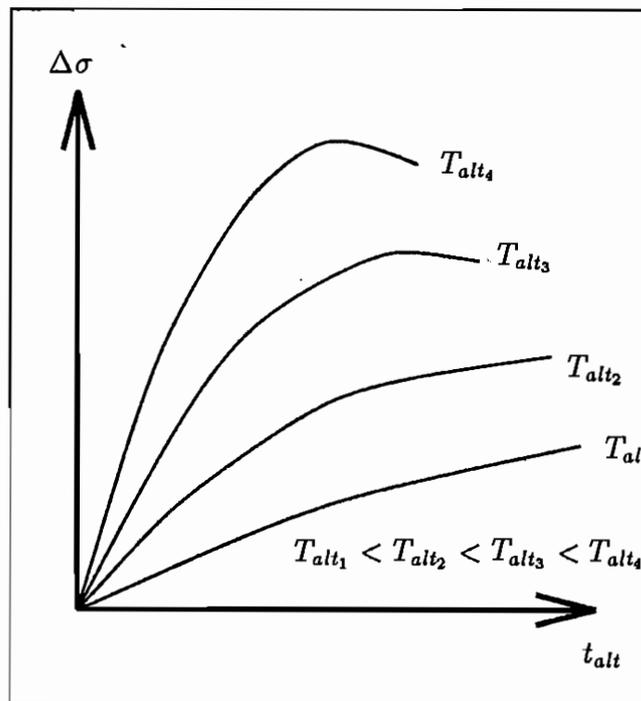


Abb. 2.2: Spannungserhöhung $\Delta\sigma$ in Abhängigkeit der Alterungszeit t_{alt} und der Alterungstemperatur T_{alt}

Ab einem bestimmten Temperaturniveau verändern sich die Kurvenverläufe; bei einer bestimmten Alterungszeit erreicht $\Delta\sigma$ einen Maximalwert und fällt danach ab. Der Maximalwert verschiebt sich mit zunehmender Alterungstemperatur zu kleineren Alterungszeiten. Der Bereich mit abnehmender Fließspannungserhöhung bei zunehmender Alterungszeit wird als Überalterung bezeichnet.

In Abhängigkeit von der Fremdatomkonzentration und der Alterungszeit können drei mikromechanische Verfestigungsmechanismen zur Erklärung der statischen Reckalterung herangezogen werden. Diese sind nach STOLTE & HELLER [126]

- der SNOEK-Effekt, der eine spannungsinduzierte Umordnung gelöster Atome im Spannungsfeld der Versetzungen bewirkt (SNOEK [125]),
- die COTTRELL-Wolkenbildung, die durch die Entstehung von Fremdatomwolken um Versetzungen gekennzeichnet ist (COTTRELL [21, 23, 22]) und
- die Ausscheidung von gelösten Fremdatomen an Versetzungen (Ausscheidungsverfestigung).

Die mikromechanischen Vorgänge der drei Verfestigungsmechanismen lassen sich nach ihrem zeitlichen Auftreten beschreiben.

Im Ausgangszustand des unlegierten Stahls kann davon ausgegangen werden, daß alle energetisch günstigen Plätze um die vorhandenen Versetzungen von interstitiell gelösten Kohlenstoff- und Stickstoffatomen besetzt sind. Fortschreitende plastische Verformung führt dazu, daß sich Versetzungen teilweise von ihren Fremdatomwolken losreißen, aber auch neue Versetzungen gebildet werden.

Snoek-Effekt

Wird der plastisch deformierte Körper entlastet und zur Alterung ausgelagert, beginnt zunächst der Prozeß der Umordnung von gelösten Atomen im Spannungsfeld der Versetzung (SNOEK-Ordnung). Die Fremdatome versuchen die energetisch günstigsten Positionen in der Nähe der Versetzung einzunehmen. Da dieser Prozeß durch Sprünge von Atomen zwischen benachbarten Gitterplätzen hervorgerufen wird, läuft er im Vergleich zur COTTRELL-Wolkenbildung und Ausscheidungsverfestigung um Größenordnungen schneller ab. Zum Beispiel ist dieser Vorgang für den unlegierten Stahl mit gelösten Kohlenstoff- und Stickstoffatomen bei Raumtemperatur innerhalb weniger Sekunden abgeschlossen (WILSON & RUSSELL & ESHELBY [137]). Die Größe der Spannungserhöhung $\Delta\sigma_{sn}$ ist unabhängig von der Temperatur – wenn diese groß genug ist, um einen Platzwechsel der Fremdatome zu ermöglichen – und proportional zur Anzahl der gelösten Fremdatome (SCHOECK & SEEGER [120]). Die Spannungserhöhung auf Grund des SNOEK-Effektes ist dann

$$\Delta\sigma_{sn} = c_1 n_0 .$$

Dabei ist n_0 die Fremdatomkonzentration und c_1 eine Größe, die von der Aktivierungsenergie zur Bewegung einer Versetzung aus der Fremdatomumgebung abhängt (ESHELBY [37]).

Cottrell-Wolkenbildung

Der zweite Verfestigungsmechanismus, der einen wesentlichen Beitrag zur Spannungserhöhung $\Delta\sigma$ liefert und verantwortlich für die Wiederkehr einer ausgeprägten Streckgrenze ist, ist die Blockierung der neu gebildeten Versetzungen durch Fremdatomwolken (NAKADA & KEH [95]).

Die Wechselwirkung von Versetzungen mit Fremdatomen führt zunächst zu einer gerichteten Diffusion der Fremdatome in das Spannungsfeld der Versetzung. Das Spannungsfeld einer Stufenversetzung weist oberhalb der Versetzung ein komprimiertes und unterhalb ein ausgedehntes Gebiet auf. Fremdatome mit kleineren Abmessungen als die Gitteratome diffundieren in das komprimierte und Atome mit größeren Abmessungen in das ausgedehnte Gebiet (Abb. 2.3). Infolgedessen verkleinern sich die lokalen Spannungen um die Versetzung. Es bildet sich eine Wolke von Fremdatomen, die als COTTRELL-Wolke bezeichnet wird (COTTRELL [21, 23, 22]). Sie blockiert die Versetzung. Zur Bewegung der Versetzung muß ein zusätzlicher Spannungsbetrag aufgebracht werden.

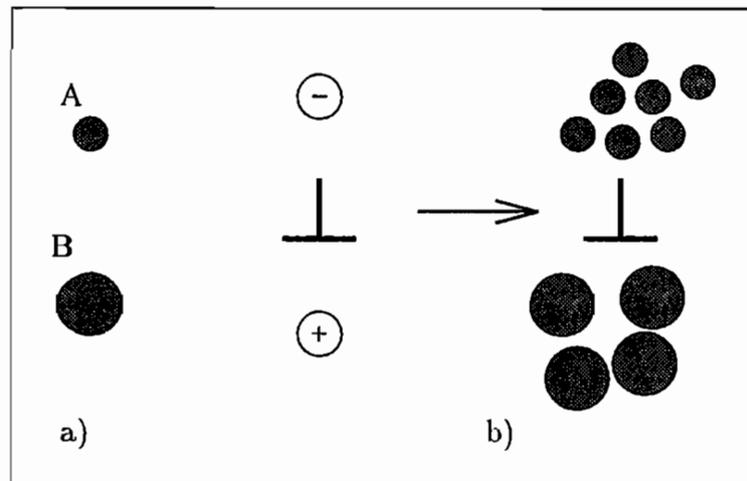


Abb. 2.3: a) und b) Entstehung einer Wolke mit Fremdatomen A und B, COTTRELL-Wolke

Geht man von einer Fremdatomkonzentration n_0 aus, so kann ein Zeitgesetz für die Fremdatomwolkenbildung mit der COTTRELL-BILBY Gleichung (COTTRELL & BILBY [24])

$$n(t_{alt}) = \alpha n_0 \rho_{\perp} \left(\frac{ADt_{alt}}{kT_{alt}} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.1)$$

angegeben werden. Dabei ist α eine Konstante, ρ_{\perp} die Versetzungsdichte, k die Boltzmannkonstante, T_{alt} die Alterungstemperatur und $D = D_0 \exp(-Q_w/kT_{alt})$ der Diffusionskoeffizient der gelösten Fremdatome. Die Größe A ist ein Wechselwirkungsparameter, der zwischen $1.4 \dots 3.0 \cdot 10^{-20}$ Pa für Kohlenstoff und Stickstoff in Eisen liegt. Man kann in erster Näherung davon ausgehen, daß die erforderliche Spannung $\Delta\sigma_{co}$ zum Losreißen der Versetzung von der COTTRELL-Wolke proportional der Konzentrationsänderung $n(t)/n_0$ ist. Aus der Beziehung (2.1) folgt somit:

$$\Delta\sigma_{co} = \alpha_1 \rho_{\perp} \left(\frac{ADt_{alt}}{kT_{alt}} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.2)$$

Eine Vielzahl experimenteller Untersuchungen zur statischen Reckalterung unlegierter Stähle zeigen eine deutliche Abhängigkeit der Reckalterung von der Vordehnung des Materials (WILSON & RUSSELL [135, 136], MARKULA & HEISKANEN [78], STOLTE & HELLER [126], WILLIAMS [134]). Die Abhängigkeit der Fließspannungserhöhung von der plastischen Verformung wird durch die Berücksichtigung der Versetzungsdichte ρ_{\perp} auf der rechten Seite von (2.2) sichtbar. Bei konstanter Auslagerungstemperatur steigt $\Delta\sigma_{co}$ mit $t_{alt}^{2/3}$ an, bis ein Maximalwert erreicht wird. Für größere Auslagerungszeiten kommt es zu einer Verringerung des Spannungszuwachses $\Delta\sigma_{co}$.

Ausscheidungsverfestigung und Umlösung

Die Ursache für die Abnahme des Spannungszuwachses bei größeren Alterungszeiten ist, daß die Fremdatomkonzentration an den Versetzungen einen Sättigungswert erreicht und es zu Ausscheidungen der Fremdatome kommt. Für den unlegierten Stahl sind dies Karbid- bzw. Nitridausscheidungen. Die Ausscheidungsverfestigung ist durch das Schneiden eines Ausscheidungsteilchens durch eine Versetzung bedingt (Tab. 2.1). Die Verfestigungswirkung ist geringer als die der COTTRELL-Wolkenbildung. Für weiter steigende Alterungszeiten kann es zudem zu einer Umlösung der ausgeschiedenen Teilchen kommen. Durch die Umlösung nimmt der mittlere Teilchenabstand zu, was zu einem Rückgang der durch die Teilchen verursachten Verfestigung gleichkommt. Dieser Vorgang wird als Überalterung bezeichnet (MACHERAUCH [73]).

Die statische Reckalterung der kfz Metalle mit substitutional gelösten Fremdatomen ist durch die COTTRELL-Wolkenbildung und Ausscheidungsverfestigung bestimmt. Der SNOEK-Effekt spielt bei diesen Legierungen keine Rolle, da die Fremdatome Plätze im Gittergefüge einnehmen und so ungleich schwerer – im Vergleich zu interstitiell gelösten Atomen – zu spannungsinduzierten Platzwechseln angeregt werden können.

Interstitiell gelöste Atome führen im allgemeinen zu einer stärkeren Blockade der Versetzungen, als substitutional gelöste. Die Ursache hierfür ist, daß Substitutionsatome symmetrische Gitterverzerrungen, die ein Normalspannungsfeld zur Folge haben, verursachen. Sie können daher nicht mit Schraubenversetzungen in Wechselwirkung treten, da diese ein Schubspannungsfeld aufweisen. Interstitiell gelöste Atome hingegen rufen größere anisotrope tetragonale Gitterverzerrungen hervor. Diese verursachen Normal- und Schubspannungen, die mit jedem Versetzungstyp Wechselwirkungen eingehen können.

2.2.2 Dynamische Reckalterung

Das phänomenologische Erscheinungsbild der dynamischen Reckalterung soll anhand eines Spannungs-Temperatur- und eines Spannungs-Dehnungsgeschwindigkeits-Diagramms eines unlegierten krz Stahls mit interstitiell gelösten Kohlenstoff- und Stickstoffatomen aufgezeigt werden (Abb. 2.4 und Abb. 2.5).

Die mikromechanische Ursache der dynamischen Reckalterung kann auf die Bildung von COTTRELL-Wolken um die sich bewegenden Versetzungen zurückgeführt werden. Dies führt – wie bei der statischen Reckalterung – zu einer Vergrößerung des Bewegungswiderstandes der Versetzung und daraus folgend zu einem Anwachsen der Verfestigung.

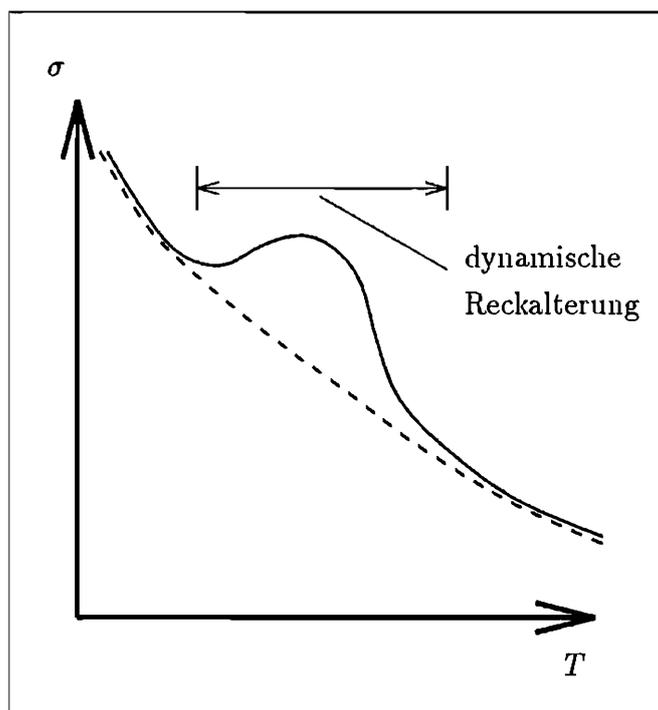


Abb. 2.4: Spannungs-Temperatur-Diagramm des α -Eisens für $\epsilon = konst.$ und $\dot{\epsilon} = konst.$ (schematisch)

Temperatureinfluß

Die Spannungs-Temperaturkurve des Stahls mit unbeweglichen Fremdatomen nach Abb. 2.4 stellt sich als stetig abfallende Kurve bei anwachsender Temperatur dar (gestrichelte Linie). Besitzt der Werkstoff interstitiell gelöste Fremdatome, wie Kohlenstoff oder Stickstoff, so erhält man für einen bestimmten Temperaturbereich eine erhöhte Fließspannung im Vergleich zum Material mit unbeweglichen Fremdatomen (durchgezogene Linie). Dies ist der Bereich der dynamischen Reckalterung. In Abhängigkeit von der äußeren Verformungsgeschwindigkeit und vom Verformungszustand, ergibt sich mit zunehmender

Temperatur zunächst ein Anstieg und danach ein Abfall des Spannungszuwachses. Für ausreichend große Temperaturen wird dieser Spannungszuwachs zu Null.

Das Auftreten der dynamischen Reckalterung beruht im unteren Temperaturbereich auf der Annäherung von Versetzungs- und Diffusionsgeschwindigkeit der Fremdatome (BAIRD [3] KEH, NAKADA & LESLIE [47]). Die Fremdatome haben das Bestreben, eine COTTRELL-Wolke um die Versetzung zu bilden. Während des Verformungsprozesses versucht die Fremdatomwolke, sich mit der Versetzung zu bewegen. Sie verursacht dadurch zusätzlich zur Gitterreibung einen erhöhten Bewegungswiderstand.

Eine Erhöhung der Temperatur bedeutet eine größere Diffusionsgeschwindigkeit der Fremdatome zu den Versetzungen hin und führt zu einer dichteren Fremdatomatmosphäre und somit zu einer erhöhten Reibspannung. Der Abfall des Reibspannungszuwachses nach Überschreiten des Maximums kann durch die mit steigender Temperatur zunehmend ungerichtete Diffusion der Fremdatome erklärt werden (Abb. 2.4). Die Diffusion ruft eine Ausdünnung der die Versetzung umgebenden und sich mitbewegenden Fremdatomwolke hervor. Für eine weiter steigende Temperatur verschwindet der Spannungszuwachs aufgrund der Reckalterung vollständig, und der Werkstoff verhält sich wie das Material ohne bewegliche Fremdatome.

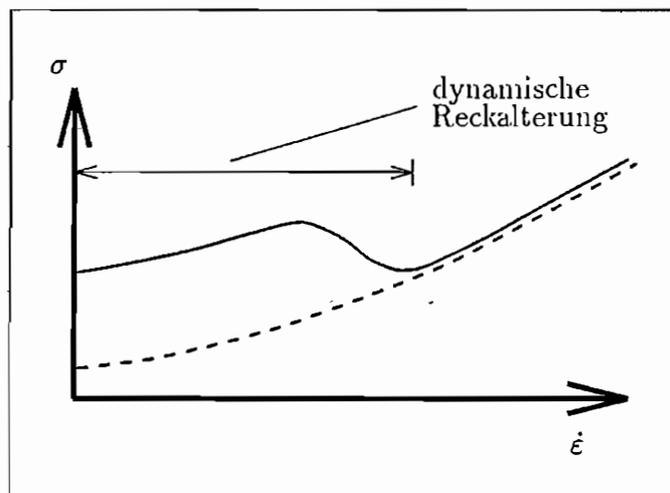


Abb. 2.5: Spannungs-Verformungsgeschwindigkeits-Diagramm des α -Eisens für $\epsilon = \text{konst.}$ und $T = \text{konst.}$ (schematisch)

Verformungsgeschwindigkeitseinfluß

Im Spannungs-Verformungsgeschwindigkeits-Diagramm (Abb. 2.5) ist ebenfalls ein zusätzlicher Spannungszuwachs gegenüber dem Verhalten des Metalls mit unbeweglichen Fremdatomen zu beobachten. Der kontinuierlich ansteigende Verlauf der Spannung mit zunehmender Verformungsgeschwindigkeit ist im unteren Geschwindigkeitsbereich von einem zunächst anwachsenden, dann aber geringer werdenden zusätzlichen Spannungsanteil überlagert. Es ist ein Bereich mit abnehmender Spannung bei anwachsender Verformungsgeschwindigkeit festzustellen. Dieser Zuwachs ist von der Temperatur und dem Verformungszustand abhängig.

Zur Erklärung der mikromechanischen Zusammenhänge zwischen Verformungsgeschwindigkeit und Temperatur auf der einen und dem Spannungsanstieg auf der anderen Seite dient die Abb. 2.6.

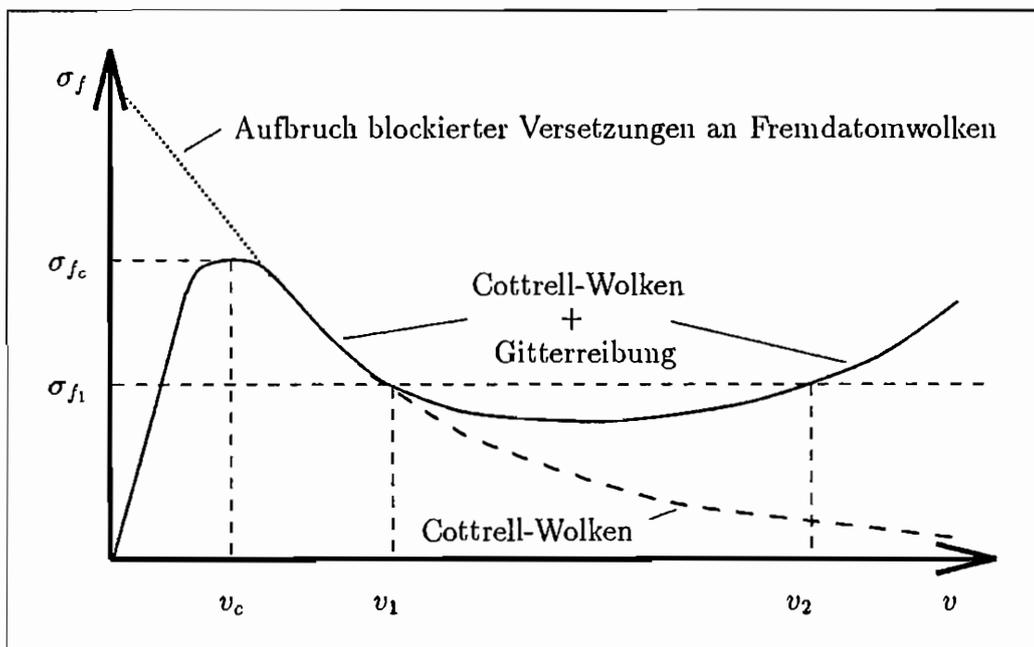


Abb. 2.6: Auswirkung der Versetzungsgeschwindigkeit v auf die Reibspannung σ_f unter Berücksichtigung der COTTRELL-Wolken (schematisch) (nach BAIRD [4])

Diese Abbildung stellt den Reibspannungsverlauf einer Versetzung in einer Fremdatomumgebung über der Versetzungsgeschwindigkeit dar. Die Beziehung zu dem Spannungs-Temperatur- und Spannungs-Verformungsgeschwindigkeits-Diagramm in den Abb. 2.4 und 2.5 wird deutlich, wenn man die Spannung aufteilt in (VAN DEN BEUKEL [132])

$$\sigma = \sigma_f + \sigma_d .$$

σ_d ist der geschwindigkeitsunabhängige Spannungsanteil aufgrund der Wechselwirkung zwischen den Versetzungen; σ_f ist der Reibspannungsanteil nach Abb. 2.6.

Bewegt sich eine Versetzung mit einer Fremdatomwolke, so wird diese aufgrund der Diffusion der Fremdatome in Richtung der Versetzungen, hinter der Versetzung hergeschleppt und übt dadurch einen Bewegungswiderstand auf diese aus. Der Bewegungswiderstand, der proportional zur Reibspannung ist, steigt zunächst mit anwachsender Versetzungsgeschwindigkeit und fällt dann ab (gestrichelte Linie in Abb. 2.6). Neben diesem Effekt treten noch andere Gitterreibungsprozesse auf, die mit zunehmender Versetzungsgeschwindigkeit einen zunehmenden Bewegungswiderstand auf die Versetzung ausüben. In der Summe kommt es daher zu einem Verlauf der Reibspannungs-Versetzungsgeschwindigkeits-Kurve, der in Abb. 2.6 mit der durchgezogenen Linie gegeben ist. Die Fremdatomkonzentration ist links vom Maximum in Abb. 2.6 nahe der Konzentration, die die stationären Versetzung im Gleichgewicht aufweist. Der Reibungswiderstand ändert sich in diesem Bereich linear mit der Versetzungsgeschwindigkeit (COTTRELL & JASWON [25], COTTRELL [22]). Die Versetzungsgeschwindigkeit v_c , die der maximalen Reibspannung zugeordnet ist, ist nach COTTRELL [22] gegeben durch

$$v_c = \frac{4kTD}{A}.$$

Dabei ist k die Boltzmannkonstante, D der Diffusionskoeffizient der gelösten Fremdatome und A ein Wechselwirkungsparameter zwischen Fremdatomen und Versetzung. Mit zunehmender Temperatur verschiebt sich das Maximum zu größeren Versetzungsgeschwindigkeiten.

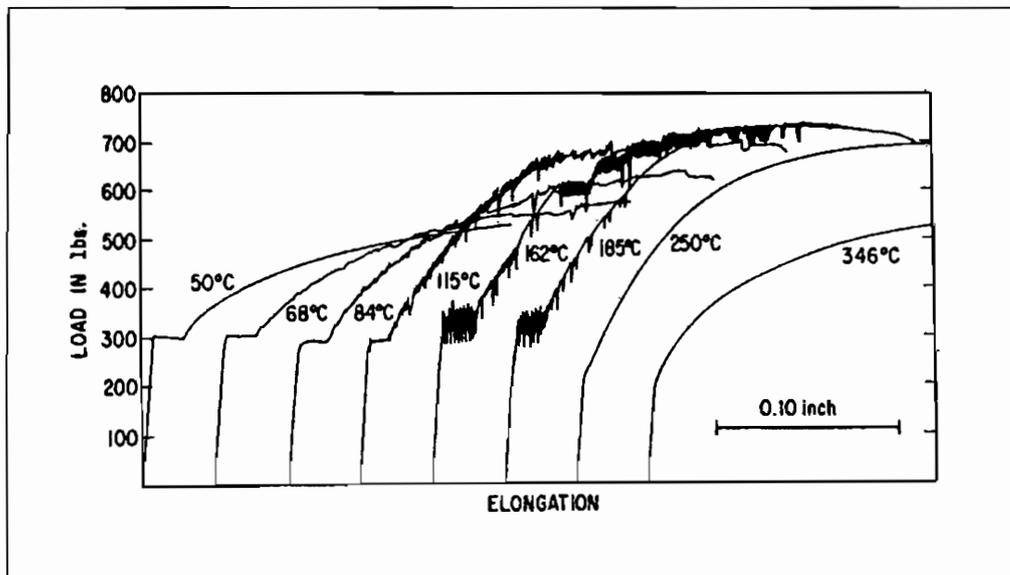


Abb. 2.7: Spannungs-Dehnungs-Kurven eines Stahls mit einem Massegehalt von 0.035 % C, bei einer Dehnungsgeschwindigkeit von $6.2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ und bei verschiedenen Temperaturen (BERGSTRÖM & ROBERTS [5])

Im Bereich rechts von der kritischen Versetzungsgeschwindigkeit v_c bewegt sich die Versetzung so schnell, daß es der Fremdatomwolke unmöglich ist, sich mitzubewegen. Wird die

Spannung σ_{f_1} erreicht, beschleunigt die Versetzung von v_1 auf den Wert v_2 . Dies drückt sich makroskopisch in hochgradig lokalem plastischen Fließen des Materials aus (Abb. 2.7, gezackter Fließkurvenverlauf).

Die auf die Versetzung wirkende effektive Spannung σ_e setzt sich zusammen aus

$$\sigma_e = \sigma - \sigma_i .$$

Dabei ist σ die von außen aufgebrachte und σ_i eine weitreichende innere Spannung. Das lokale plastische Fließen kommt zum Stillstand, wenn die effektive Spannung σ_e zu Null wird. Dies wird einerseits durch einen Anstieg von σ_i aufgrund der allgemeinen Verfestigung des Materials und andererseits durch das Absinken von σ aufgrund der Relaxation der Prüfmaschine erreicht. Um die neu entstehenden Versetzungen bilden sich in diesem Zustand Fremdatomwolken, die die Versetzung blockieren oder, nachdem die effektive Spannung angestiegen ist, sich mit dieser bewegen.

Die Spannungs-Dehnungskurve weist für den Bereich des lokalen plastischen Fließens einen gezackten Fließkurvenverlauf auf (Abb. 2.7 aus KEH & NAKADA & LESLIE [47]). Dies ist ein Resultat des oben beschriebenen Verformungsmechanismus und ist bei einer großen Anzahl von Ein- und Mehrkristallen beobachtet worden (PHILLIPS [104], BRINDLEY & WORTHINGTON [7]). In der Literatur wird diese Erscheinungsform auch als PORTEVIN-LECHATELIER-Effekt bezeichnet (PORTEVIN & LE CHATELIER [106], s. Anhang A).

Aus der Betrachtung der Versetzungsbewegung mit Berücksichtigung der umgebenden Fremdatomwolke wird deutlich, daß die dynamische Reckalterung und der PORTEVIN-LECHATELIER-Effekt nicht gleichgesetzt werden können. Wenn die Diffusionsgeschwindigkeit der Fremdatome im Bereich der Versetzungsgeschwindigkeit liegt, kommt es zu einer Beeinflussung des plastischen Materialverhaltens aufgrund dynamischer Reckalterung. Dies vollzieht sich schon im Bereich des homogenen Verformungsverhaltens. Eine ausschließliche makroskopische Analyse des Verformungsverhaltens reicht zur Abgrenzung der dynamischen Reckalterung von anderen Verfestigungsmechanismen nicht aus. Es sind vielmehr auch Kenntnisse der mikroskopischen Abläufe, wie Diffusionsgeschwindigkeiten bzw. Aktivierungsenergien der Fremdatome in dieser Hinsicht zu berücksichtigen.

2.2.2.1 Van den Beukel - Modell

Eine Sammlung von Modellvorstellungen zur Beschreibung der dynamischen Reckalterung sind bei MAYER [84] aufgeführt. Ausführlich werden dort die Modelle nach COTTRELL [22, 23], MCCORMICK [85] und VAN DEN BEUKEL [130] beschrieben. Hier soll das Modell von VAN DEN BEUKEL vorgestellt werden, da es versucht die quantitative Abhängigkeit der Fließspannung von der Deformationsgeschwindigkeit, der Temperatur und der Deformation aufzuzeigen.

Die Dehnungsgeschwindigkeit läßt sich in einem Modell, bei dem die Versetzungen mittels effektiver Spannung und thermischer Aktivierung Hindernisse zu überwinden haben, darstellen als

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 \exp\left(-\frac{H}{kT}\right). \quad (2.3)$$

Die Aktivierungsenergie H ist eine Funktion der effektiven Spannung σ_e . In metallischen Legierungen ist H zudem von der Konzentration der Lösungsatome n abhängig. Es ist also

$$H = H(\sigma_e, n). \quad (2.4)$$

Die lokale Konzentration der Fremdatome ist eine Funktion aus dem Produkt des stationären Wertes der Wartezeit der Versetzungen $t_{w,st}$ und des Diffusionskoeffizienten D :

$$n = n(Dt_{w,st}) \quad (2.5)$$

Ausgehend von den Beziehungen für

$$\begin{aligned} t_{w,st} &= \frac{\rho_m b l}{\dot{\epsilon}}, \\ \rho_m &\sim \epsilon^\beta, \\ D &\sim C_v \exp\left(-\frac{Q_m}{kT}\right), \\ C_v &\sim \epsilon^m, \end{aligned}$$

wobei l der Abstand zwischen zwei Hindernissen, ρ_m die Dichte der mobilen Versetzungen und C_v die Leerstellenkonzentration ist, ergibt sich

$$Dt_{w,st} \sim \frac{\epsilon^{m+\beta}}{\dot{\epsilon}} \exp\left(-\frac{Q_m}{kT}\right).$$

Die Größen m und β sind materialabhängige Parameter. Eine Substitution dieser Beziehung in die Gleichungen (2.3) und (2.4) erlaubt es, die Abhängigkeit der Spannung von ϵ , $\dot{\epsilon}$ und T zu bestimmen.

Die Dehnungsratenabhängigkeit der Spannung kann durch Differentiation der Gleichung (2.3) nach $\dot{\epsilon}$ als

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}} = \frac{kT}{\dot{\epsilon} V} - \frac{1}{\dot{\epsilon} V} \frac{\partial H}{\partial n} D t_w \frac{dn}{d(Dt_w)} \quad (2.6)$$

angegeben werden. Hierbei wurden die Beziehungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_e}{\partial \dot{\epsilon}} &= \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\epsilon}} \\ -\frac{\partial H}{\partial \sigma_e} &= V\end{aligned}$$

verwendet. Der erste Term auf der rechten Seite von (2.6) stellt die Abhängigkeit der Spannungs-Dehnungsgeschwindigkeitsrate in Abwesenheit der Diffusion der Fremdatome dar. Der zweite Term kann der dynamischen Reckalterung zugeschrieben werden. Eine schematische Darstellung der Beziehung (2.6) ist in Abb. 2.5 gegeben.

Für die Temperaturabhängigkeit der Spannung ergibt sich nach Umformung und anschließender Differentiation der Gleichungen (2.3) und (2.4)

$$V \frac{\partial \sigma_e}{\partial T} = -\frac{H}{T} + \frac{Q_m}{kT^2} \frac{\partial H}{\partial n} Dt_w \frac{dn}{d(Dt_w)}.$$

Der erste Term auf der rechten Seite stellt die Temperaturabhängigkeit in Abwesenheit von Diffusionsprozessen dar, nämlich einen kontinuierlichen Abfall der Spannungen mit zunehmender Temperatur. Der zweite Term berücksichtigt den Einfluß der dynamischen Reckalterung. Die schematische Darstellung des Spannungs-Temperatur-Verlaufes ist in Abb. 2.4 gegeben.

Der Effekt der dynamischen Reckalterung bezüglich der Verfestigung des Materials läßt sich wie folgt ableiten. Die Verfestigung ist während der plastischen Verformung eines Körpers von der inneren und der effektiven Spannung, σ_i und σ_e , abhängig. Sie kann angegeben werden als

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \sigma_e}{\partial \epsilon}.$$

Wenn wir annehmen, daß $\partial \sigma_i / \partial \epsilon$ unabhängig von der dynamischen Reckalterung ist, kann für die Änderung der effektiven Spannung bezüglich der Dehnung bei konstanter Dehnungsrate $\dot{\epsilon}$ der Ausdruck

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \epsilon} = -\frac{kT}{V} \frac{\partial \ln \dot{\epsilon}}{\partial \epsilon_0} + \frac{1}{V} \frac{\partial H}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial \epsilon}$$

abgeleitet werden.

Der Bereich, in dem das Materialverhalten durch die dynamische Reckalterung beeinflußt wird, wird durch die anliegende Verformungsgeschwindigkeit und die Temperatur bestimmt. Zu einer quantitativen Aussage bezüglich des Einsetzens der dynamischen Reckalterung gelangt man über den Ausdruck

$$S = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \ln \dot{\epsilon}} \right|_{c=konst.} = -\frac{1}{\frac{\partial}{\partial \sigma_e} \left(\frac{H}{kT} \right)}.$$

S wird als Dehnungsratenempfindlichkeit bezeichnet. Für die lokale Konzentration der Fremdatome (2.5) wird

$$n = 1 - \exp(-(t_w/t_d)^\alpha)$$

nach LOUAT [71] angesetzt. Die Größe t_w ist die Wartezeit einer Versetzung an einer Fremdatomwolke, t_d ist die charakteristische Diffusionszeit der Fremdatome und α ein Materialparameter. MCCORMICK [86] gibt eine Entwicklungsgleichung für t_w in der Form

$$\dot{t}_w = \frac{t_{wst} - t_w}{t_{wst}}.$$

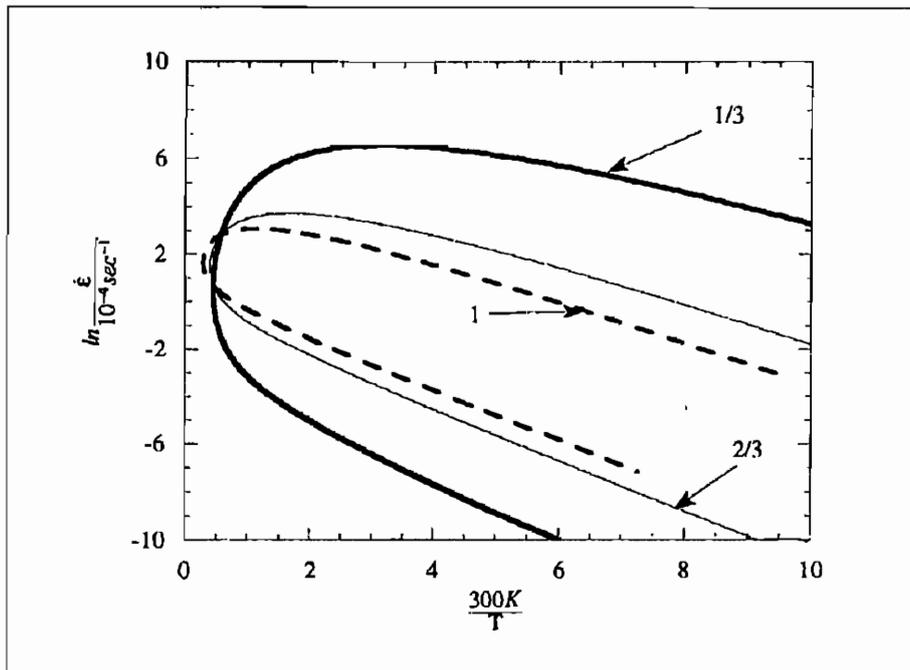


Abb. 2.8: Bereich der negativen Dehnungsratenempfindlichkeit (innerhalb der Kurven) für $\alpha = 1/3, 2/3$ und 1 (LING & MCCORMICK [70])

Es ergibt sich dann unter der Voraussetzung einer konstanten plastischen Dehnungsrate die Gleichung für die stationäre Dehnungsratenempfindlichkeit

$$S_{st} = \frac{\partial \sigma_{st}}{\partial \ln \dot{\epsilon}} = S \left[1 - \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{H}{kT} \right) \alpha \left(\frac{\Omega}{\dot{\epsilon} t_d} \right) \exp \left\{ - \left(\frac{\Omega}{\dot{\epsilon} t_d} \right)^\alpha \right\} \right].$$

Die Größe $\Omega = \rho_m b l$ kann als Dehnung, die von allen mobilen Versetzungen auf ihrem Weg zum nächsten Hindernis produziert wird, interpretiert werden. Eine graphische Darstellung von $S_{st} = 0$, angepaßt an experimentelle Ergebnisse von LING & MCCORMICK [70] für Al-Mg-Si und unterschiedliche Werte für α , ist in Abb. 2.8 gegeben. Im inneren Bereich der Kurven ist $S_{st} < 0$.

3. Versuche

3.1 Material und Proben

Die Experimente sind mit dem unlegierten Stahl Ck35, Werkstoffnummer 1.1181 nach DIN 17210, durchgeführt worden.

Eine chemische Analyse ergab folgende prozentuale Zusammensetzung:

C	Si	Mn	P	S	Cr	Mo	Ni	Al	Co
0.298	0.175	0.677	0.0170	0.0399	0.0978	0.0139	0.0877	< 0.0010	0.0107
Cu	Ti	V	W	Sn	Fe				
0.248	< 0.0100	< 0.0100	< 0.0100	0.0134	98.32				

In Anlehnung an die in DIN 50125 vorgegebene Form C sind zylindrische Vollproben nach Abb. 3.1 hergestellt worden.

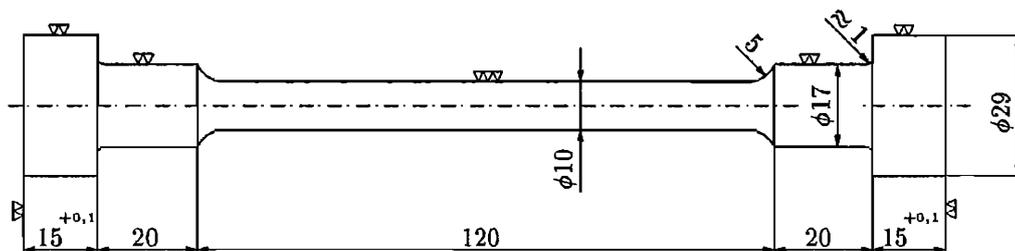


Abb. 3.1: Zugprobe Ck 35

Um die aufgrund der spanenden Fertigung entstandenen Anisotropien des Materials zu beseitigen, sind die Proben nach der Fertigung einer Wärmebehandlung unterzogen worden. Die Versuchskörper wurden im Vakuum auf 900 °C erhitzt, zwei Stunden auf dieser Temperatur gehalten und dann um 100 °C pro Stunde langsam abgekühlt. Abb. 3.2 zeigt ein Bild der entstandenen Materialstruktur. Das Ferrit-Perlit Gefüge hat eine maximale Korngröße, die kleiner als 100 μm ist. Dies bedeutet, daß der Probenquerschnitt aus einer Vielzahl von Körnern besteht. Aufgrund der regellosen Anordnung der Körner kann von homogenen Materialeigenschaften ausgegangen werden. Das anfängliche Materialverhalten läßt sich daher als makroskopisch isotrop charakterisieren.

3.2 Versuchseinrichtung

Die Experimente wurden mit einer elektromechanischen Prüfmaschine der Firma Schenck-Trebel, Typ RM 50 Kom. 43320, durchgeführt. Diese Maschine ist ausgelegt für eine Nennlast von ± 50 kN und hat einen maximalen Traversenweg von 1200 mm, wobei der vom Wegaufnehmer gemessene Bereich ± 150 mm beträgt. Versuche können wahlweise geschwindigkeits-, kraft- oder weggeregelt gefahren werden. Die Steuerung der Maschine und die Aufzeichnung der Meßwerte erfolgte mit einem Prozeßrechner.

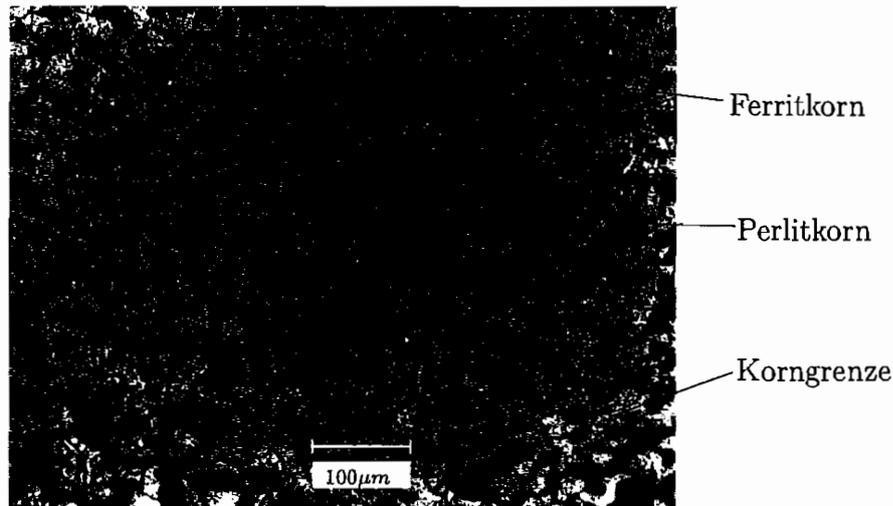


Abb. 3.2: Schliffbild der Ck 35 Probe

Zur Aufheizung der Proben ist ein Klappofen mit einer 3-Zonen-Regelung verwendet worden. Dieser ermöglicht Temperaturen bis 1000 °C.

3.3 Längenmessung

Die Längenänderung der Probe ist mit Hilfe eines Wegaufnehmers, der an der oberen Traverse der Prüfmaschine befestigt ist, bestimmt worden (Abb. 3.3).

Der Wegaufnehmer gibt den Verschiebeweg zwischen Traverse und Sockel wieder. Die mit dem Wegaufnehmer bestimmte Längenänderung kann jedoch nicht mit der Formänderung der Probe gleichgesetzt werden. Zur Bestimmung der Längenänderung bezüglich der Meßlänge der Probe sind zwei grundlegende Korrekturen durchzuführen.

Als erste Korrektur ist die Berücksichtigung der Elastizitäten von Prüfmaschine und Einspannung zu nennen. Sobald die Probe belastet wird, treten sowohl im Rahmen der Maschine als auch in der Probenhalterung elastische Deformationen auf. Der gemessene Weg

s setzt sich aus

$$s = s_{Probe} + \frac{F}{C_s} \quad (3.1)$$

zusammen. Dabei ist s_{Probe} die Längenänderung der Probe, F die belastende Kraft und C_s die axiale Maschinensteifigkeit. Diese läßt sich aus (3.1) für einen rein elastischen Versuch ermitteln:

$$C_s = \frac{F}{s - l_0 \left(\exp\left(\frac{F}{A_0 E}\right) - 1 \right)}$$

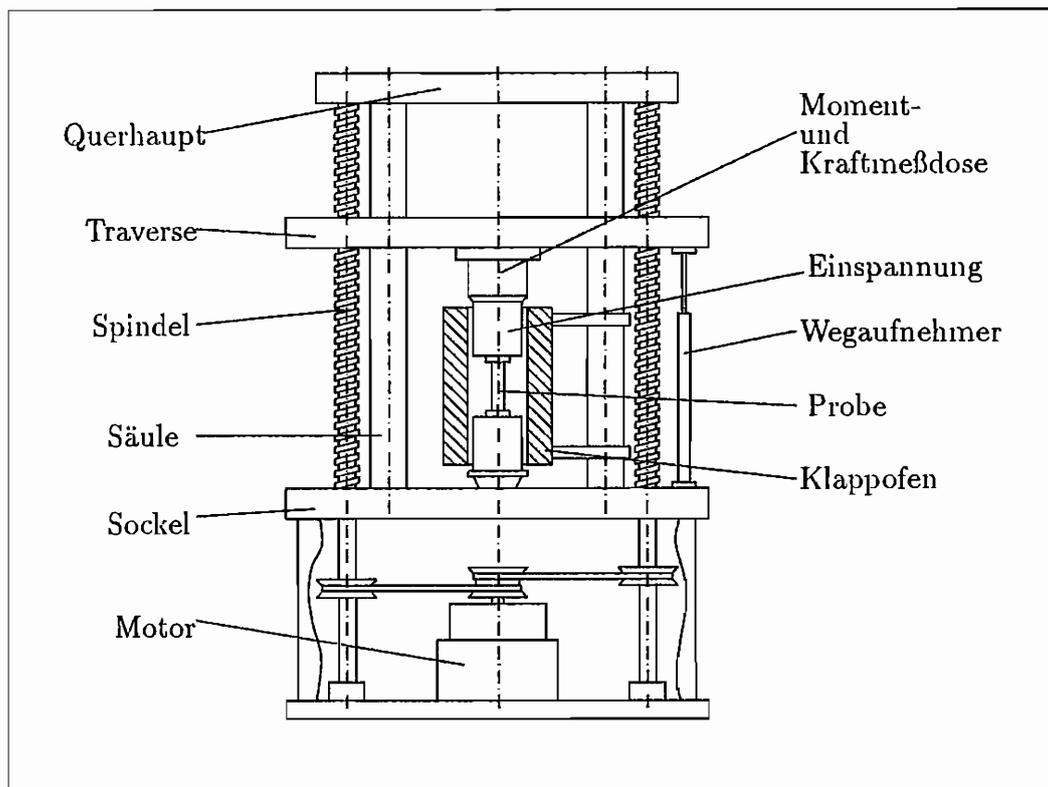


Abb. 3.3: Zug-Torsions Prüfmaschine

Bei großen plastischen Deformationen kann der Einfluß der elastischen Deformationen auf die gemessene Längenänderung als gering eingestuft werden. Wesentlich gravierender ist die Beeinflussung des Meßergebnisses durch plastische Verformungen außerhalb der betrachteten Meßlänge. Diese treten in den Übergangsbereichen zwischen dem Meßbereich und den elastisch bleibenden Einspannköpfen der Probe auf. In FELDMÜLLER [39] wird als Korrekturfaktor der gemessenen Probenverlängerung für die Probengeometrie nach Abb. 3.1 ein Wert von 0.975 angegeben.

3.4 Versuchsprogramm

Um die Bereiche der Verformungsgeschwindigkeit und der Temperatur festzulegen, in denen die Reckalterung einen Einfluß auf das Verformungsverhalten des Werkstoffes hat, sind Versuche bei unterschiedlichen Dehnungsgeschwindigkeiten und Temperaturen durchgeführt worden. Der Temperatur- und Dehnungsgeschwindigkeitsbereich wurde dabei so gewählt, daß neben der statischen und dynamischen Reckalterung auch das geschwindigkeitsabhängige und geschwindigkeitsunabhängige Materialverhalten ohne Reckalterung erfaßt werden konnte.

Die Variation der Dehnungsgeschwindigkeit liegt im Bereich von 10^{-6} s^{-1} bis 10^{-2} s^{-1} , die der Temperaturen von 20°C bis 800°C . In Tab. 3.1 sind alle untersuchten Kombinationen von Dehnungsgeschwindigkeit und Temperatur aufgelistet. Die Einträge in der Tabelle charakterisieren die dominierende Verformungsursache.

$[\text{s}^{-1}]$ $[\text{°C}]$	20	50	100	150	200	250	300	400	500	600	700	800
10^{-6}	PL	PL	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10^{-5}	PL	PL	SR	SR	SR	SR	SR	SR/ÜA	ÜA	PL	PL	PL
10^{-4}	VP	VP	DR	DR	DR	DR	DR	DR/ÜA	DR/ÜA	VP	VP	VP
10^{-3}	VP	VP	VP	DR	DR	DR	DR	DR	DR/ÜA	VP	VP	VP
10^{-2}	VP	VP	VP	DR	DR	DR	DR	DR	DR/ÜA	VP	VP	VP

PL = plastisches Materialverhalten ohne statische Reckalterung

VP = viskoplastisches Materialverhalten ohne dynamische Reckalterung

SR = statische Reckalterung

DR = dynamische Reckalterung

ÜA = Überalterung

Tabelle 3.1: Charakterisierung des Deformationsverhaltens

Zur Beschreibung der Temperaturerhöhung bei Versuchen mit großen Dehnungsgeschwindigkeiten ($\dot{\epsilon} > 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$) werden in dieser Arbeit die von FELDMÜLLER [39] gewonnenen experimentellen Ergebnisse herangezogen. FELDMÜLLER hat Versuche mit der Probengeometrie nach Abb. 3.1 durchgeführt und dabei einen Stahl verwendet, der bezüglich der thermo-mechanischen Eigenschaften die gleichen Kennwerte aufweist.

Neben den einaxialen Zugversuchen sind Experimente zur Bestimmung der Temperatur-, Zeit- und Vordehnungsabhängigkeit der statischen Reckalterung durchgeführt worden. Dazu wurde der plastisch vorgedehnte Versuchskörper nach Entlastung für eine bestimmte Zeitspanne bei einer bestimmten Alterungstemperatur ausgelagert und dann wiederbelastet. Der Temperaturbereich reicht von 40°C bis 300°C , als Vordehnungen wurden

$\varepsilon = 2\%$, 4% und 6% gewählt. Aufgezeichnet wurde die Fließspannungserhöhung bei Wiederbelastung.

3.5 Versuchsergebnisse

3.5.1 Monotone Zugversuche

Der Spannungs-Dehnungskurvenverlauf der monotonen Zugversuche kann in drei Bereiche eingeteilt werden:

- linear-elastischer Bereich,
- inhomogener LÜDERS-Bereich und
- homogener inelastischer Bereich mit schwachem Anstieg der Kurve bis zum Beginn des Einschnürvorganges.

Die Ausprägung dieser Bereiche ist abhängig von der Deformationsgeschwindigkeit und der Temperatur.

Alle Versuche sind bis zum Bruch des Probenkörpers gefahren worden. In den Abb. 3.4 bis 3.17 ist jeweils die CAUCHY-Spannung über der HENCKY-Dehnung dargestellt. Die Meßwerte sind bis zum Beginn der Einschnürung der Probe, d.h. bis zum Erreichen der maximalen CAUCHY-Spannung aufgezeichnet.

Zur Festlegung des Bereichs der quasistatischen Verformungsgeschwindigkeit sind Versuche mit unterschiedlichen Dehnungsgeschwindigkeiten durchgeführt worden. In Abb. 3.4 sind die beiden Spannungs-Dehnungskurven, die bei Verringerung der Dehnungsgeschwindigkeit einen nahezu identischen Kurvenverlauf aufweisen, dargestellt. Als Grenzwert der quasistatischen Dehnungsgeschwindigkeit wurde $\dot{\varepsilon} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ bestimmt.

Die Abb. 3.5 bis 3.13 zeigen Spannungs-Dehnungskurven bei unterschiedlichen Temperaturniveaus und Variation der Dehnungsgeschwindigkeit. Das geschwindigkeitsabhängige Materialverhalten ist für $T = 20^\circ\text{C}$ und $T = 50^\circ\text{C}$ schwach ausgeprägt (Abb. 3.5 und 3.6). Im Temperaturbereich von $T = 100^\circ\text{C}$ bis $T = 300^\circ\text{C}$ ist eine negative Dehnungsratenempfindlichkeit festzustellen (Abb. 3.7 bis 3.9). Dies ist der Bereich der dynamischen Reckalterung. Ab $T = 300^\circ\text{C}$ ist wieder das geschwindigkeitsabhängige Materialverhalten mit positiver Dehnungsratenempfindlichkeit zu erkennen (Abb. 3.10 bis 3.13). Dies ist im Vergleich zu den Versuchen bei $T = 20^\circ\text{C}$ und $T = 50^\circ\text{C}$ ausgeprägter.

Im Bereich der dynamischen Reckalterung ist eine deutliche Abnahme der Duktilität zu verzeichnen (Abb. 3.7 und 3.8). Insbesondere die stark gezackten Kurven zeigen eine geringe Duktilität. Die Ursache dafür ist die starke inhomogene Verformung im Bereich der dynamischen Reckalterung. Es bilden sich, wie bei der inhomogenen LÜDERS-Deformation,

eine oder mehrere plastische Deformationsfronten über den Meßbereich der Probe, aus. An der Probenoberfläche sind sogenannte Fließlinien zu erkennen. Dies führt bei einer hinreichend großen Spannung zu einer frühen Lokalisierung und zum Bruch der Probe.

Obwohl die Spannungs-Dehnungskurven für Temperaturen größer als 500°C ein relativ frühes Einschnürverhalten zeigen, weisen sie doch eine große Duktilität auf (Abb. 3.12 und 3.13). Die Ursache hierfür ist, daß aufgrund von Erholungseffekten wie Überalterung, Umlösung, Rekristallisation usw., die Verfestigung sehr gering ist. Dies führt dazu, daß mit zunehmender Dehnung der Spannungszuwachs, auch in der Einschnürung, sehr gering ist.

Um den Einfluß der Temperatur auf die dynamische Reckalterung zu beurteilen, sind in den Abb. 3.14 bis 3.21 Spannungs-Dehnungskurven für gleiche Prozeßgeschwindigkeiten und Variation des Temperaturniveaus zusammengestellt.

Die Spannungs-Dehnungskurven in den Abb. 3.14 bis 3.17 zeigen ab $T = 100^{\circ}\text{C}$ eine zunehmende Verfestigung mit zunehmender Temperatur. Für kleine Dehnungsgeschwindigkeiten liegt das Maximum der Verfestigung bei $T = 200^{\circ}\text{C}$ (Abb. 3.14 und 3.15). Die Kurvenverläufe für $T = 300^{\circ}\text{C}$ und $T = 400^{\circ}\text{C}$ zeigen einen abnehmenden Einfluß der dynamischen Reckalterung. Für größere Geschwindigkeiten verschiebt sich der steilste Kurvenverlauf zu $T = 300^{\circ}\text{C}$ (Abb. 3.16 und 3.17). Der Beginn der dynamischen Reckalterung verschiebt sich auch in Richtung höherer Temperaturen. Dies läßt sich dadurch belegen, daß die Spannungs-Dehnungskurve für $T = 100^{\circ}\text{C}$ unterhalb derjenigen für $T = 20^{\circ}\text{C}$ liegt (Abb. 3.16 und 3.17).

Die Ursache hierfür ist, daß bei zunehmender Dehnungsgeschwindigkeit die Fremdatome bei gleicher Temperatur weniger Zeit haben, zu den sich bewegenden Versetzungen zu diffundieren. Um die Versetzungen zu erreichen, benötigen sie eine größere thermische Energie. Diese kann durch die Erhöhung der Temperatur erzielt werden.

Bei den Versuchen mit kleiner Dehnungsgeschwindigkeit, Abb. 3.14 und 3.15, weisen alle Kurven den typischen gezackten Verlauf auf (PORTEVIN-LE-CHATELIER-Effekt). Im Bereich größerer Dehnungsgeschwindigkeiten, Abb. 3.16 und 3.17, haben viele Kurven, obwohl sie eine starke dynamische Reckalterung aufweisen, einen glatten Verlauf. Hieraus ist zu folgern, daß die dynamische Reckalterung nicht nur mit dem gezackten Fließkurvenverlauf gleichzusetzen ist. Auch außerhalb dieses Bereichs tritt die Reckalterung in Erscheinung.

Betrachtet man in den Abb. 3.14 bis 3.17 die anfängliche Fließspannung, erkennt man eine Abnahme der Fließspannung mit zunehmender Temperatur. Dieser Effekt ist unabhängig von der dynamischen Reckalterung.

Die dynamische Reckalterung beruht auf der Beeinflussung der mobilen Versetzungen durch diffundierende Fremdatome. An der Fließgrenze, also zum Beginn der plastischen Verformung, sind noch keine mobilen Versetzungen gebildet worden, die durch Fremdatome in ihrer Bewegung behindert werden könnten.

Betrachtet man die Kurvenverläufe außerhalb des Bereiches der dynamischen Reckalterung, Abb. 3.18 bis 3.21, erkennt man flacher verlaufende Kurven mit anwachsender Temperatur. Für die Spannungs-Dehnungskurve bei $T = 500^\circ\text{C}$ ist der abklingende Einfluß der dynamischen Reckalterung anhand des anfänglich steilen Kurvenverlaufes zu erkennen. Ein geringfügig zackiger Kurvenverlauf ist für kleine Dehnungsgeschwindigkeiten zu beobachten (Abb. 3.18 und 3.19). Hier zeigt sich ebenfalls der schwächer werdende Einfluß der dynamischen Reckalterung. Bei größeren Dehnungsgeschwindigkeiten ist ein glatter Kurvenverlauf anzutreffen (Abb. 3.20 und 3.21). Die dynamische Reckalterung hat in diesem Bereich keinen Einfluß mehr auf das Verformungsverhalten.

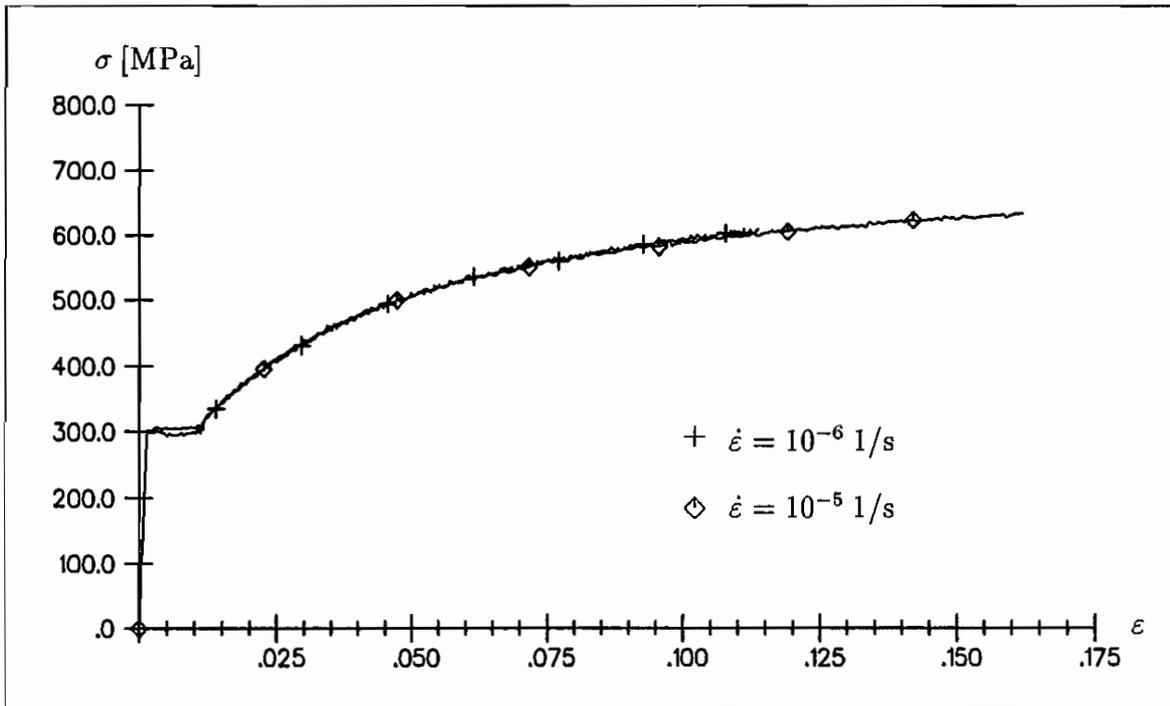


Abb. 3.4: Quasistatische Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 bei $T = 20^\circ\text{C}$

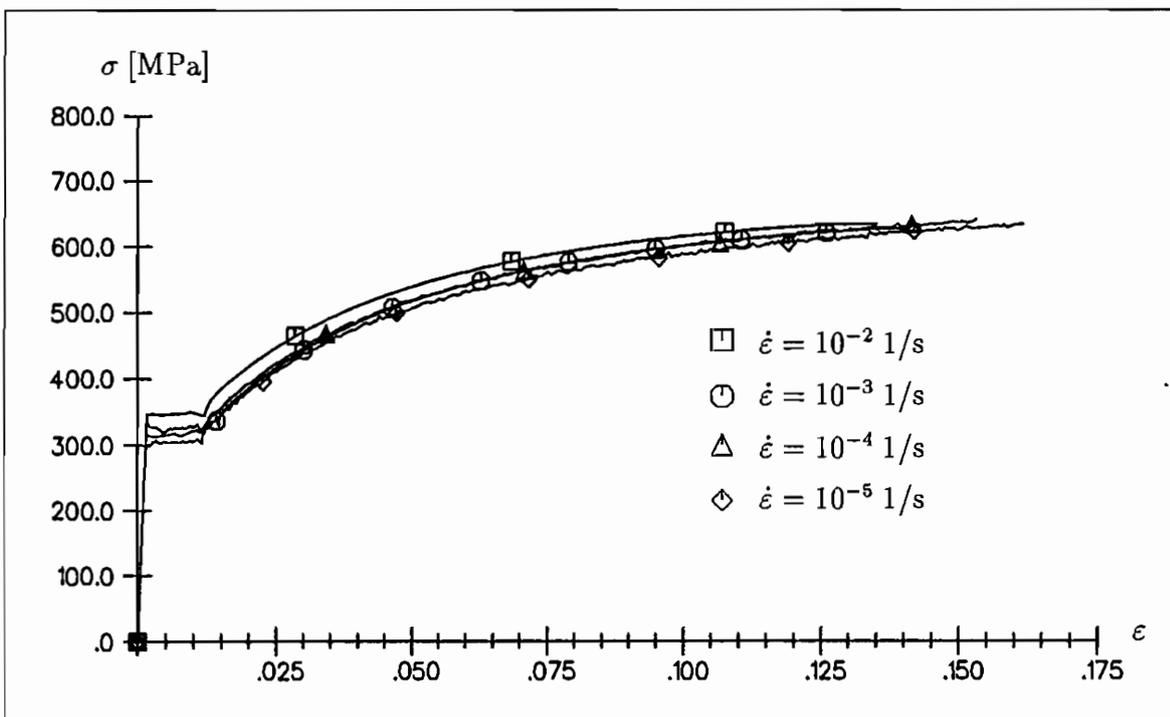


Abb. 3.5: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 bei $T = 20^\circ\text{C}$ für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten

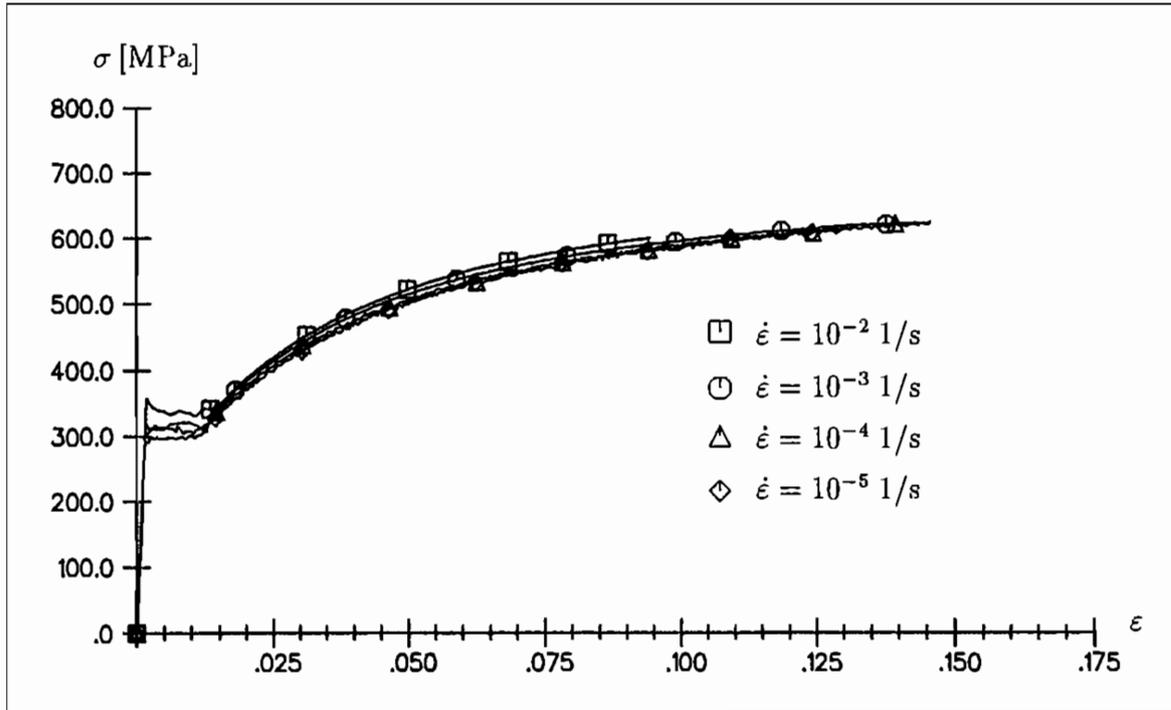


Abb. 3.6: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 bei $T = 50\text{ °C}$ für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten

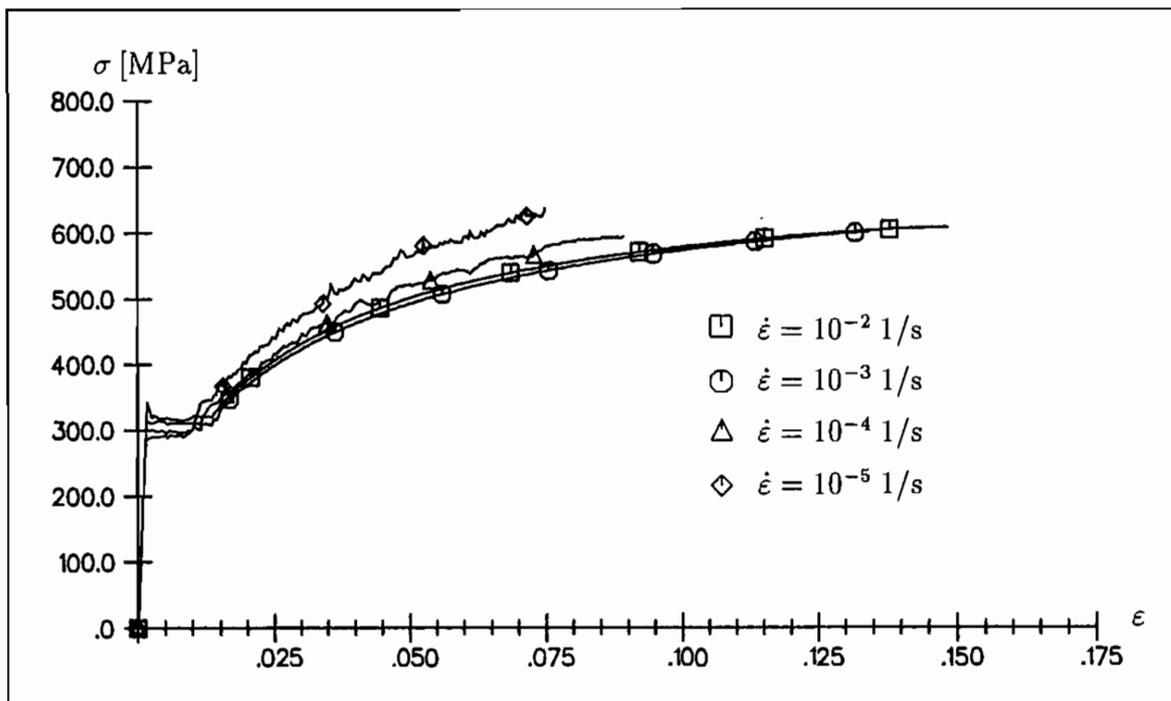


Abb. 3.7: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 bei $T = 100\text{ °C}$ für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten

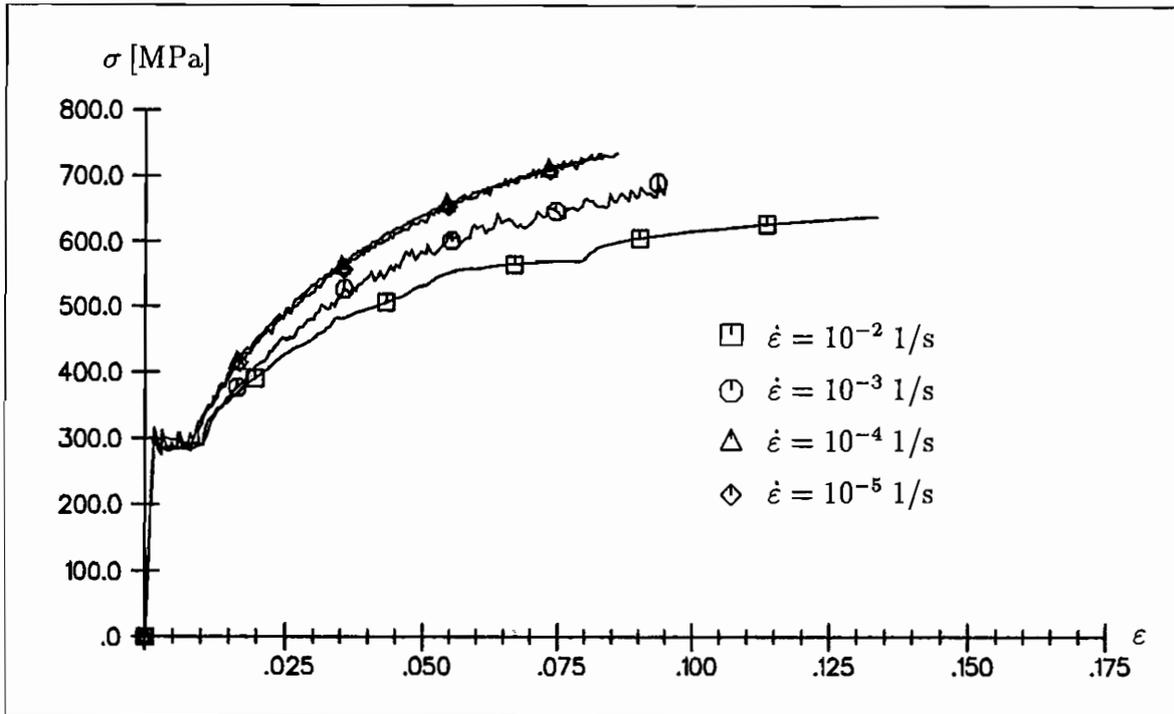


Abb. 3.8: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 bei $T = 200^\circ\text{C}$ für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten

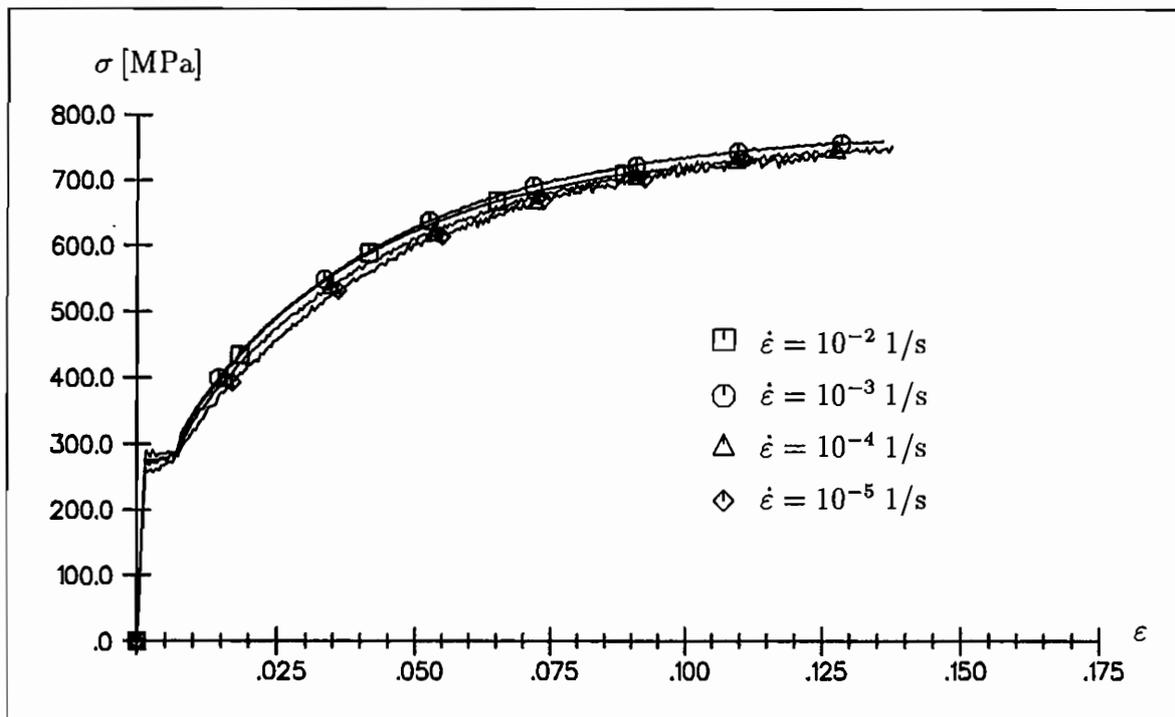


Abb. 3.9: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 bei $T = 300^\circ\text{C}$ für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten

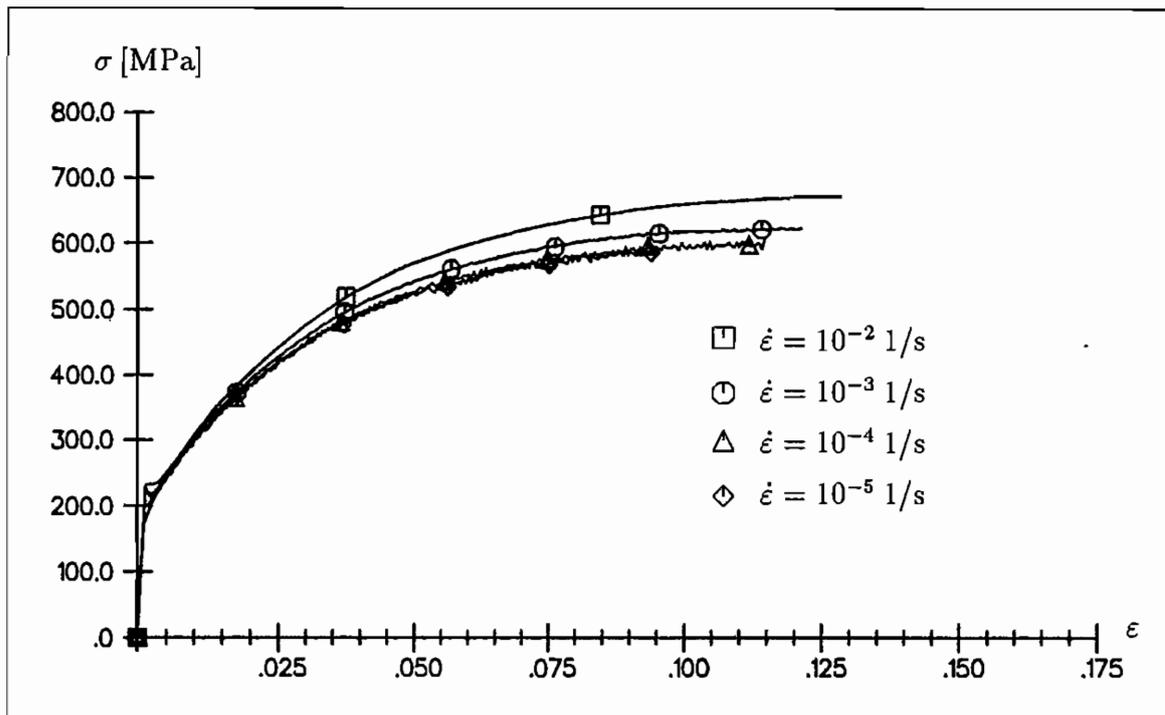


Abb. 3.10: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 bei $T = 400\text{ °C}$ für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten

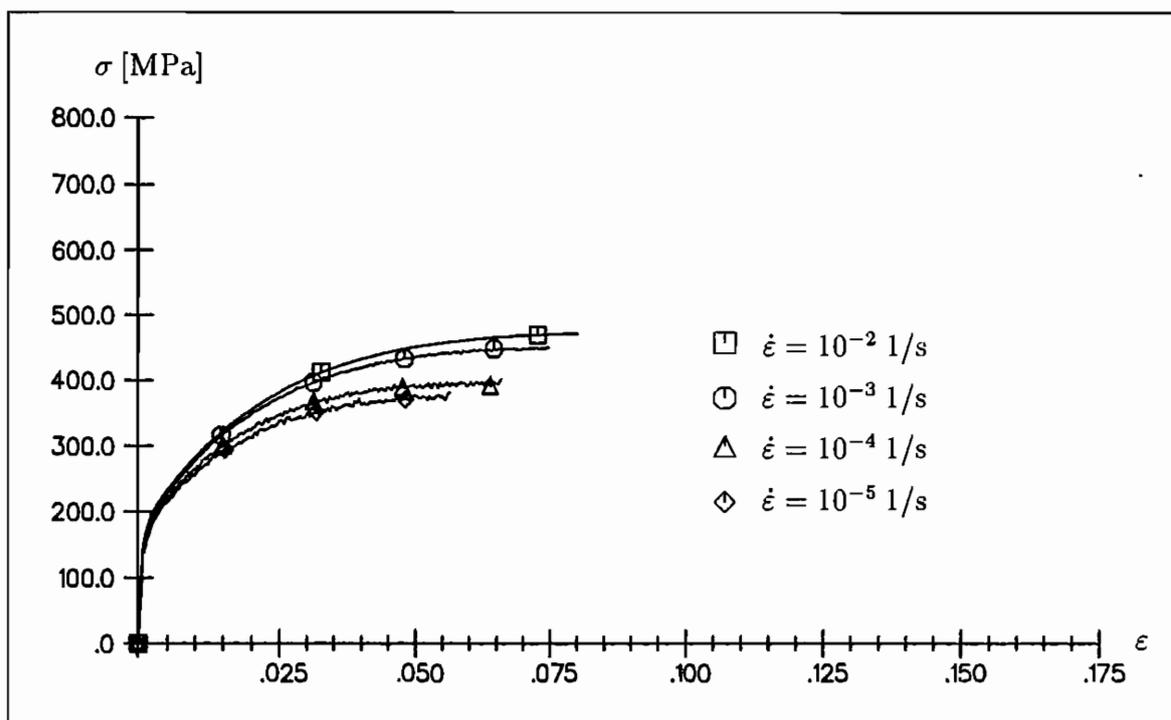


Abb. 3.11: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 bei $T = 500\text{ °C}$ für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten

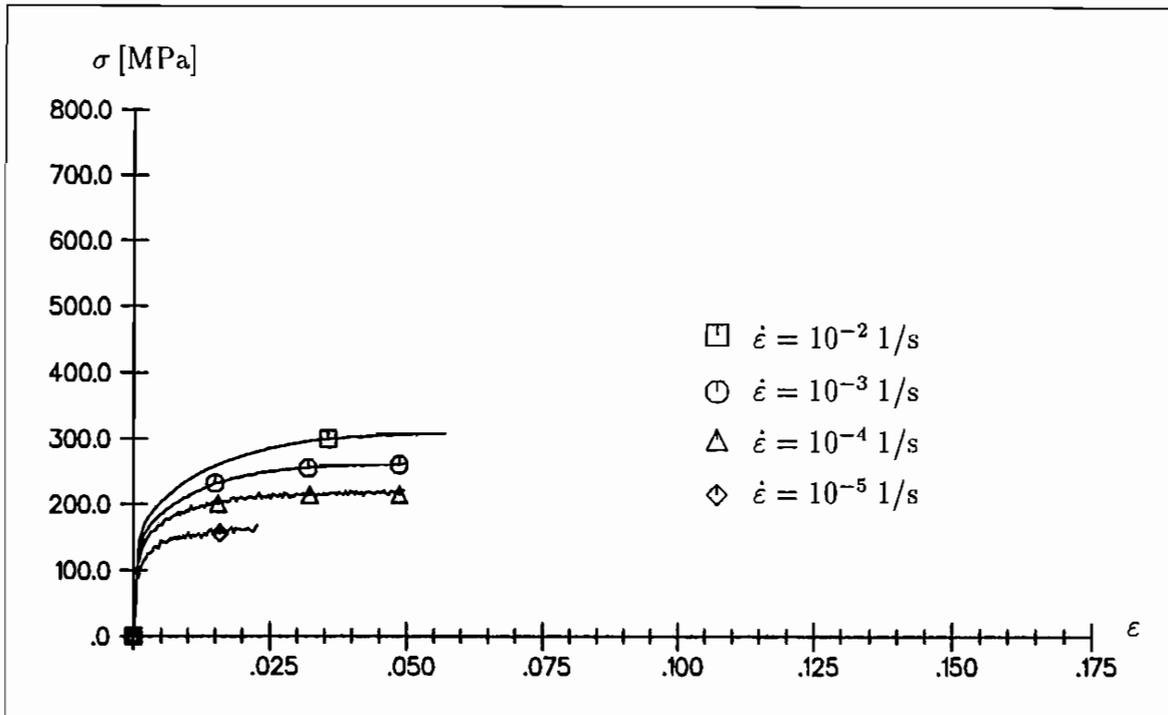


Abb. 3.12: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 bei $T = 600^\circ\text{C}$ für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten

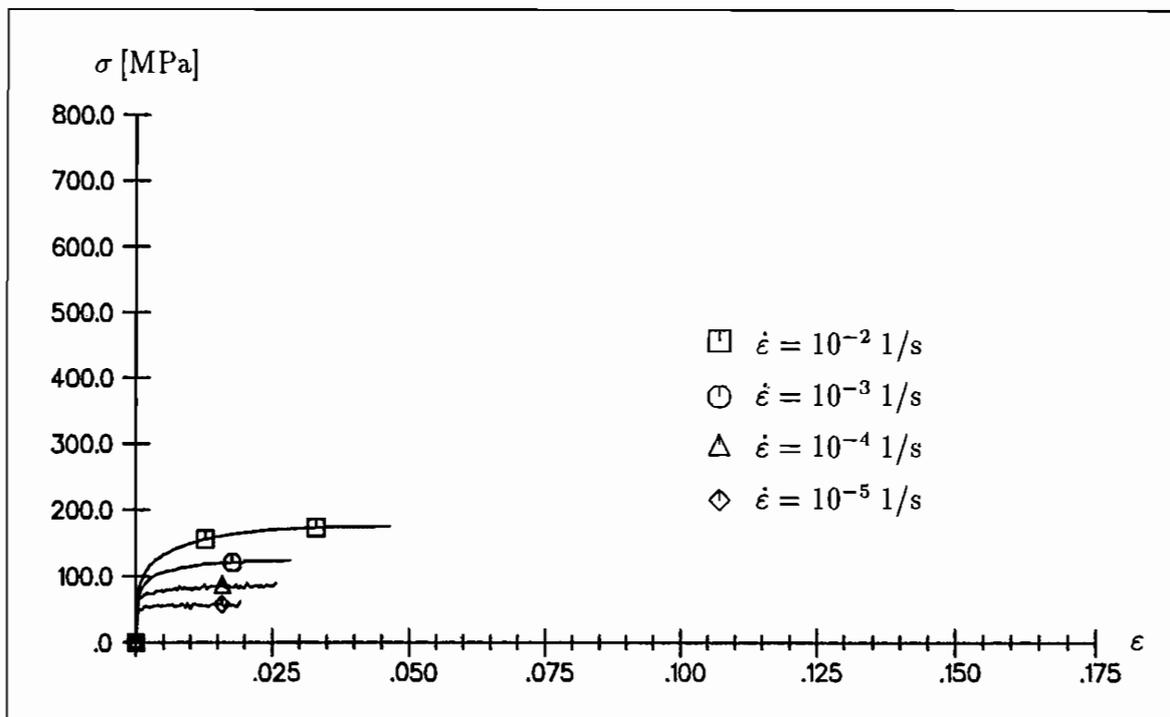


Abb. 3.13: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 bei $T = 700^\circ\text{C}$ für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten

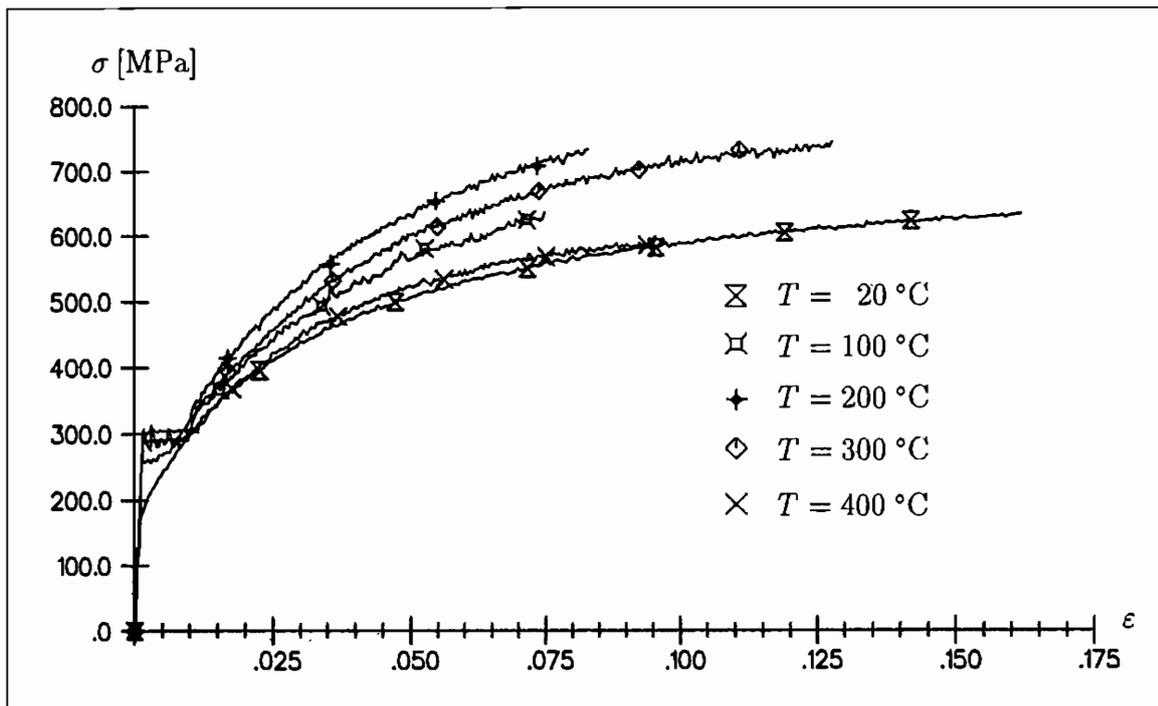


Abb. 3.14: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 für $\dot{\epsilon} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ und verschiedenen Temperaturen

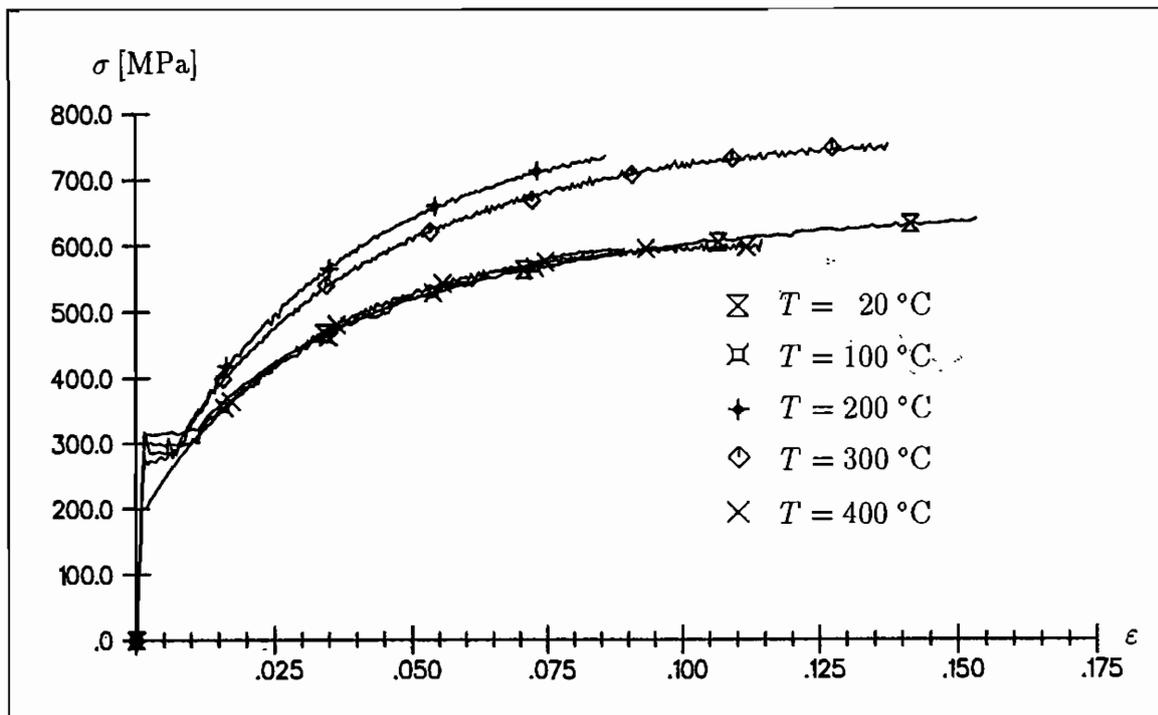


Abb. 3.15: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 für $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ und verschiedenen Temperaturen

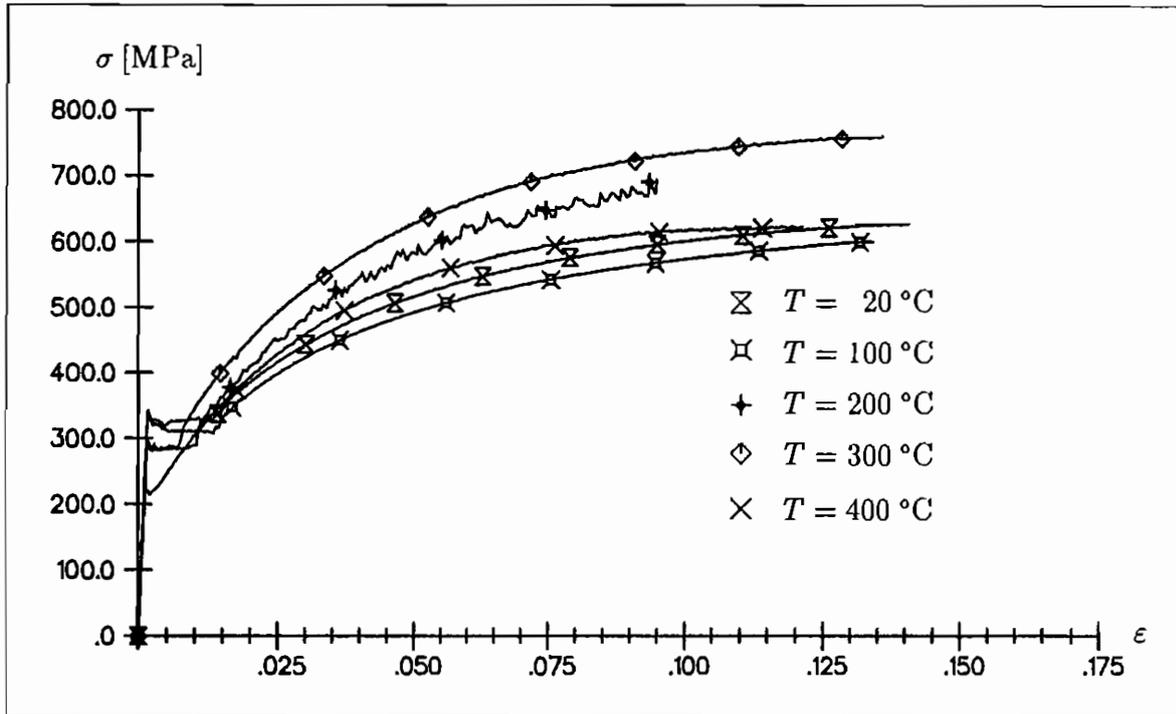


Abb. 3.16: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 für $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ und verschiedenen Temperaturen

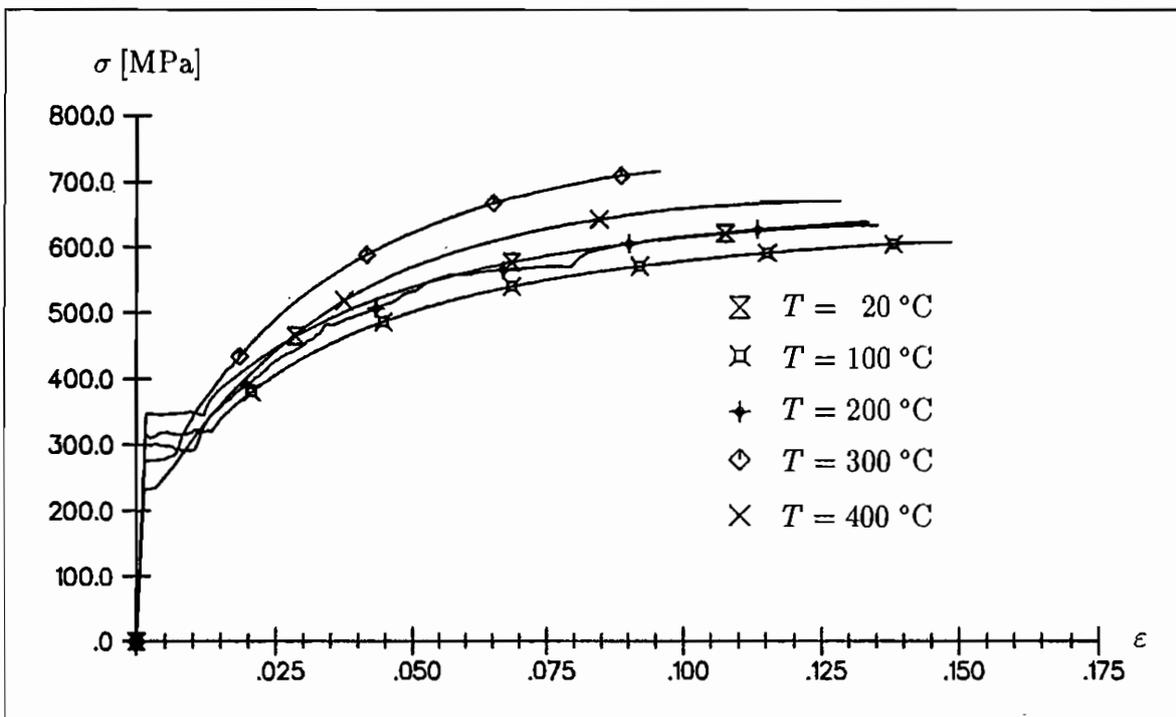


Abb. 3.17: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 für $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ und verschiedenen Temperaturen

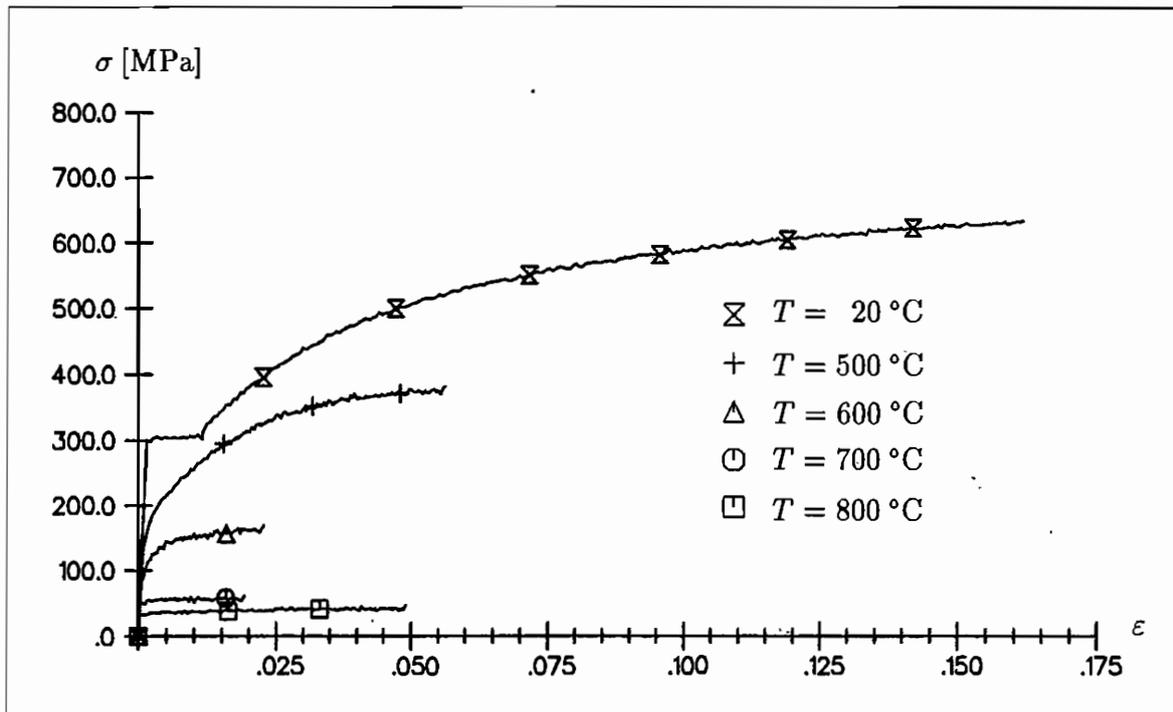


Abb. 3.18: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 für $\dot{\epsilon} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ und verschiedenen Temperaturen

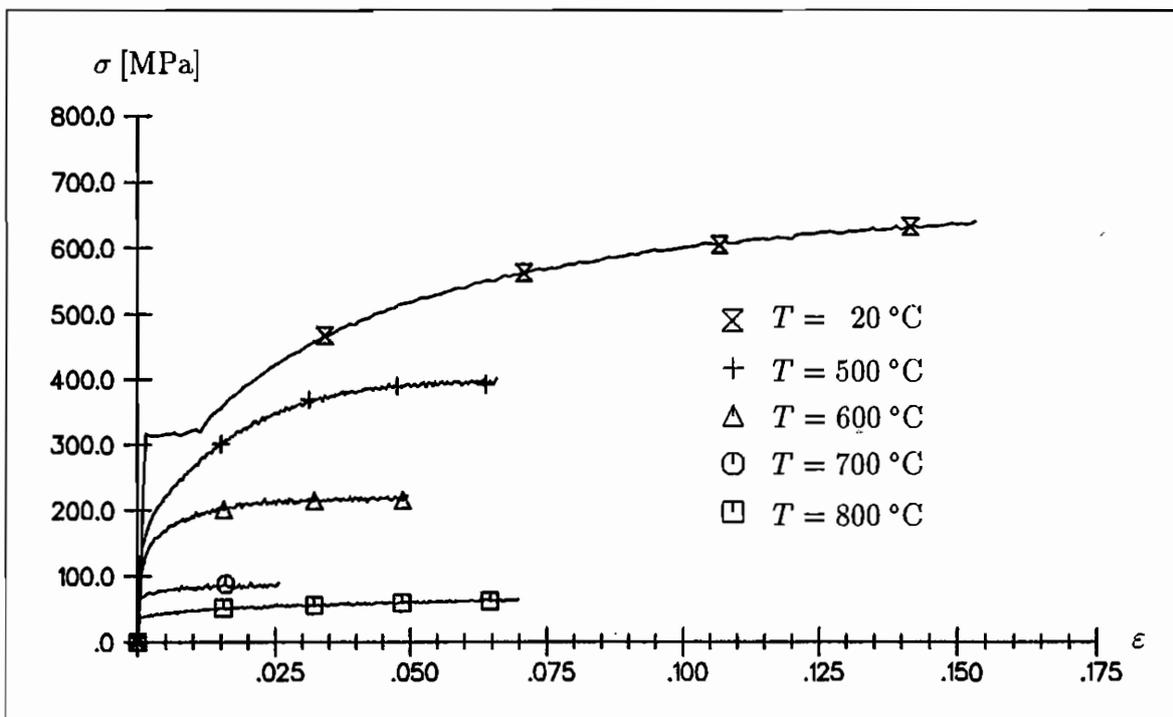


Abb. 3.19: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 für $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ und verschiedenen Temperaturen

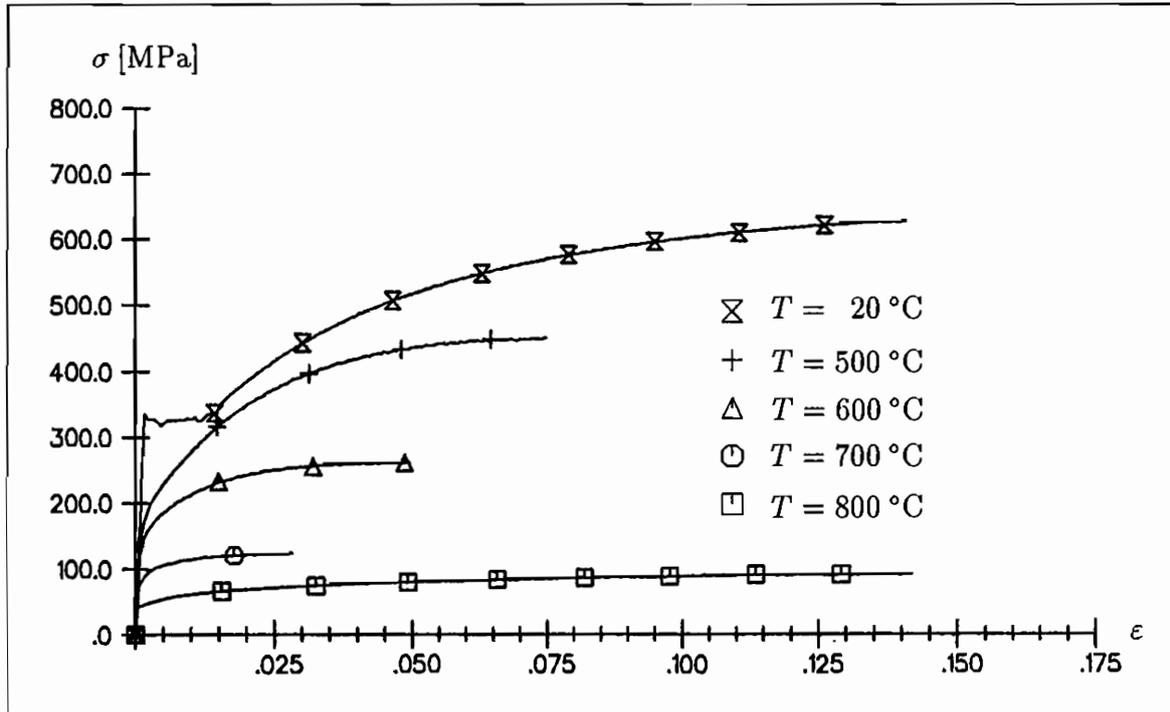


Abb. 3.20: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 für $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ und verschiedenen Temperaturen

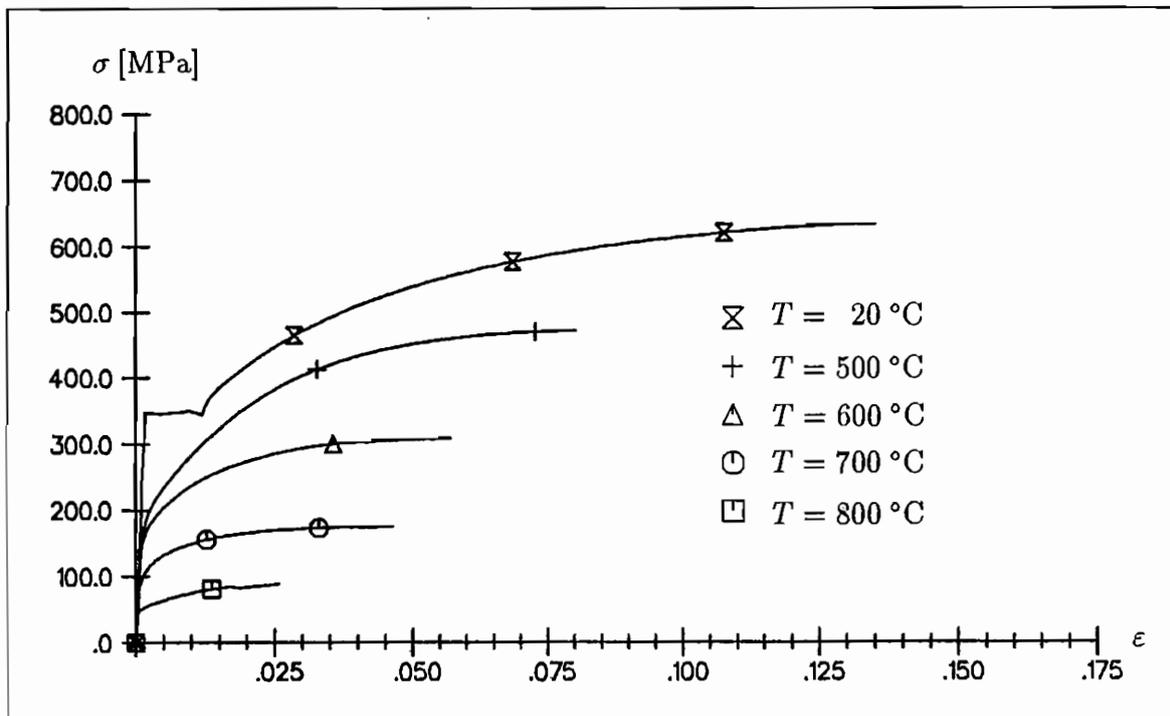


Abb. 3.21: Spannungs-Dehnungskurven Ck 35 für $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ und verschiedenen Temperaturen

3.5.2 Versuche zur Fließspannungserhöhung

Die Fließspannungserhöhung nach Auslagerung und Wiederbelastung kennzeichnet die statische Reckalterung.

Die in den Abb. 3.23 bis 3.28 aufgezeichneten Fließspannungserhöhungen sind nach dem Versuchsablauf in Abb. 3.22 bestimmt worden.

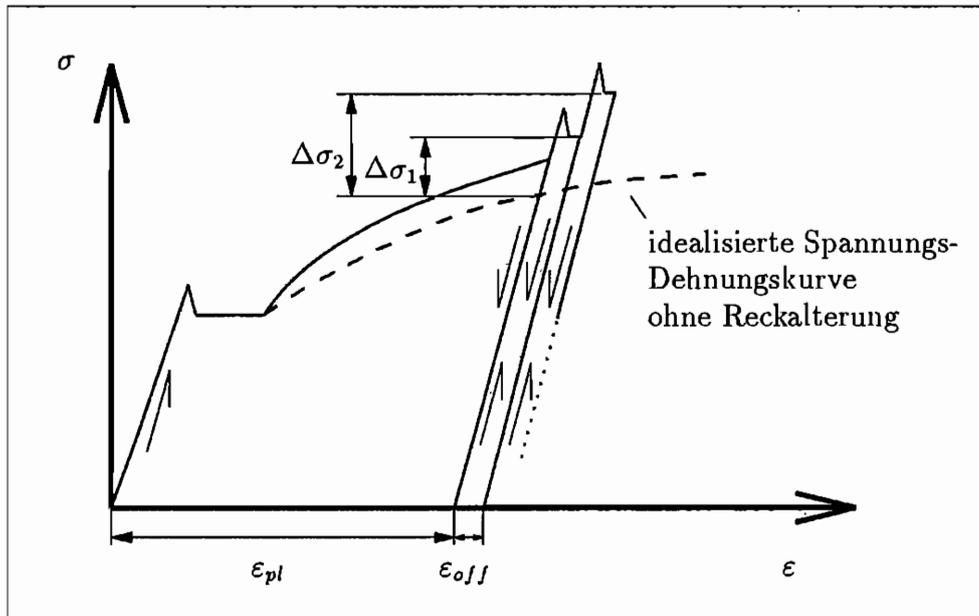


Abb. 3.22: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaues zur Fließspannungserhöhung

Der unbelastete jungfräuliche Versuchskörper wurde zunächst auf Alterungstemperatur erwärmt. Nachdem sich ein stationäres Temperaturfeld eingestellt hat, wurde ein Zugversuch bis zu einer bestimmten plastischen Deformation gefahren. Als plastische Dehnungen wurden $\epsilon_{pl} = 2\%$, 4% und 6% gewählt. Bei Erreichen der vorgegebenen plastischen Dehnung wurde die Zugprobe entlastet. Im entlasteten Zustand beginnt die Alterung der Probe. Nach einer bestimmten Alterungszeit t wurde der neue Fließpunkt angefahren. Dieser liegt um $\Delta\sigma$ oberhalb der Fließspannung ohne Reckalterung. Als Bedingung für den Fließbeginn ist das Erreichen einer plastischen Offsetdehnung ϵ_{off} festgelegt worden. Der Wert der Offsetdehnung ist klein, verglichen mit den plastischen Vordehnungen ϵ_{pl} der Probe. Selbst bei einer mehrmaligen Wiederholung der Fließspannungsmessung nach Alterung ist die durch die Offsetdehnung bedingte Verfestigung des Materials vernachlässigbar.

Der Verformungsprozeß des jungfräulichen Probenkörpers bis zur Aufbringung der Vordehnung ϵ_{pl} wird im Temperaturbereich $T > 100^\circ\text{C}$ von der dynamischen Reckalterung beeinflusst. Die Fließspannungserhöhung wird daher relativ zu der Spannungs-Dehnungskurve bestimmt, die von Reckalterungseinflüssen bereinigt worden ist (gestrichelter Ver-

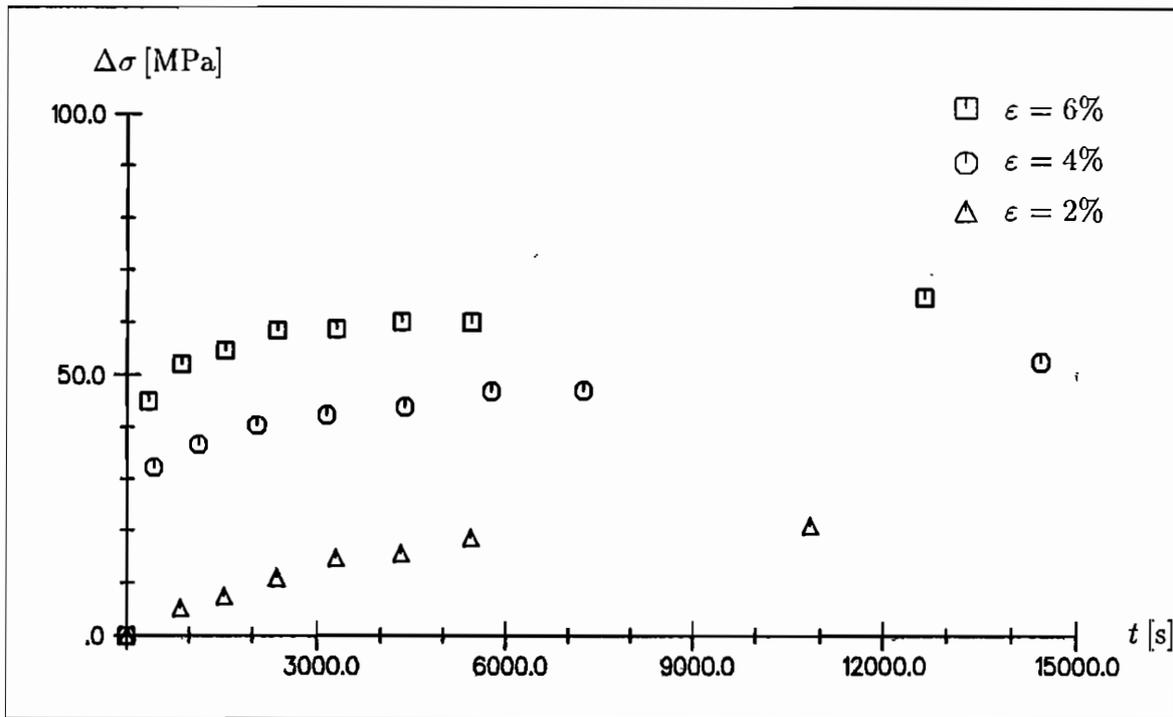
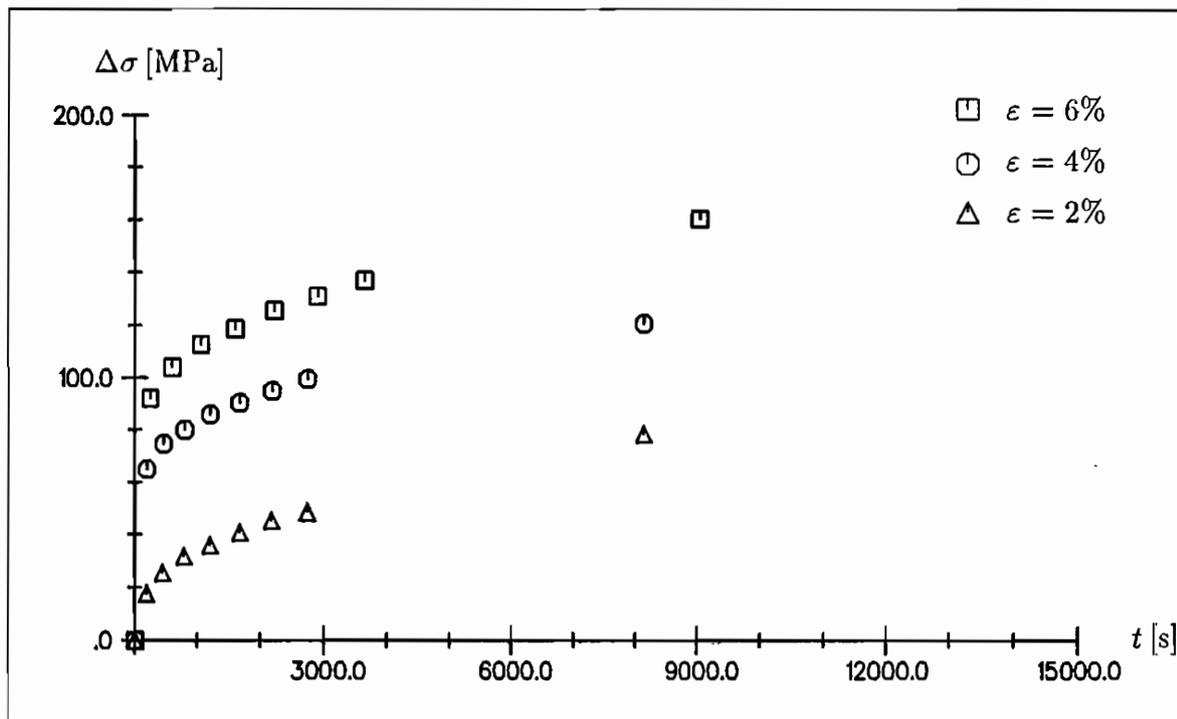
lauf in Abb. 3.22). Die bereinigte Spannungs-Dehnungskurve erhält man durch eine Interpolation der Spannungs-Dehnungskurvenverläufe zwischen den Temperaturen $T = 100^\circ\text{C}$ und $T = 600^\circ\text{C}$ (siehe Kapitel 7.3.3).

Abb. 3.23 bis 3.28 geben die Fließspannungserhöhung als Funktion der Zeit und bei Variation der Vordehnung wieder. Es ist festzustellen, daß mit zunehmender Vordehnung die Fließspannungserhöhung $\Delta\sigma$ zunimmt. Dies steht in Übereinstimmung mit den Messungen von WILSON & RUSSELL [135, 136], MARKULA & HEISKANEN [78], STOLTE & HELLER [126], WILLIAMS [134] u.a. Mit zunehmender plastischer Vordehnung steigt die Anzahl mobiler Versetzungen im Körper. Die Fremdatome können entsprechend mehr Versetzungen blockieren und rufen dadurch einen größeren Fließspannungszuwachs hervor.

Im Bereich kleiner Alterungszeiten nimmt die Fließspannung stark zu. Der qualitative Verlauf kann als exponentielles Anwachsen charakterisiert werden, das bei geeigneter Wahl der Materialparameter durch die COTTRELL-BILBY-Gleichung (2.2) beschrieben werden kann. Für große Alterungszeiten strebt $\Delta\sigma$ einem Sättigungswert entgegen. Der Sättigungswert wird umso schneller erreicht, je höher die Temperatur ist. Dies bestätigen auch die von MARQUIS [79] durchgeführten Versuche. Der Sättigungswert der Fließspannung ist dann erreicht, wenn der Diffusionsprozeß der Fremdatome zu den Versetzungen hin abgeschlossen ist. Der Maximalwert der Fließspannungserhöhung $\Delta\sigma$ ist auch eine Funktion des diffusionsfähigen Fremdatomanteils im Werkstoff.

Der Temperatureinfluß auf die Fließspannungserhöhung ist in den Abb. 3.29 und 3.30 wiedergegeben. Mit zunehmender Temperatur ist ein Anwachsen der Fließspannungserhöhung festzustellen. Dies beruht auf der Zunahme des Diffusionskoeffizienten der Fremdatome mit steigender Temperatur. Mit zunehmendem Diffusionskoeffizienten steigt die Wahrscheinlichkeit, daß sich die Fremdatome zu den Versetzungen bewegen und COTTRELL-Wolken bilden. Der Temperatureinfluß ist auch bei relativ niedrigen Temperaturen $T = 40^\circ\text{C}$ und $T = 80^\circ\text{C}$ feststellbar, dort aber nicht so ausgeprägt wie für $T > 100^\circ\text{C}$.

Das Hauptaugenmerk der Versuchsreihe ist auf die anfängliche Entwicklung der Fließspannungserhöhung $\Delta\sigma$ gelegt worden. Als größte Temperatur ist daher $T = 300^\circ\text{C}$ gewählt worden, da diese Temperatur für Kohlenstoffstähle den Grenzwert zur Überalterung des Materials darstellt (MARKULA & HEISKANEN [78], PETERSON [103]).

Abb. 3.23: Fließspannungserhöhung nach Auslagerung bei $T = 40^\circ\text{C}$ Abb. 3.24: Fließspannungserhöhung nach Auslagerung bei $T = 80^\circ\text{C}$

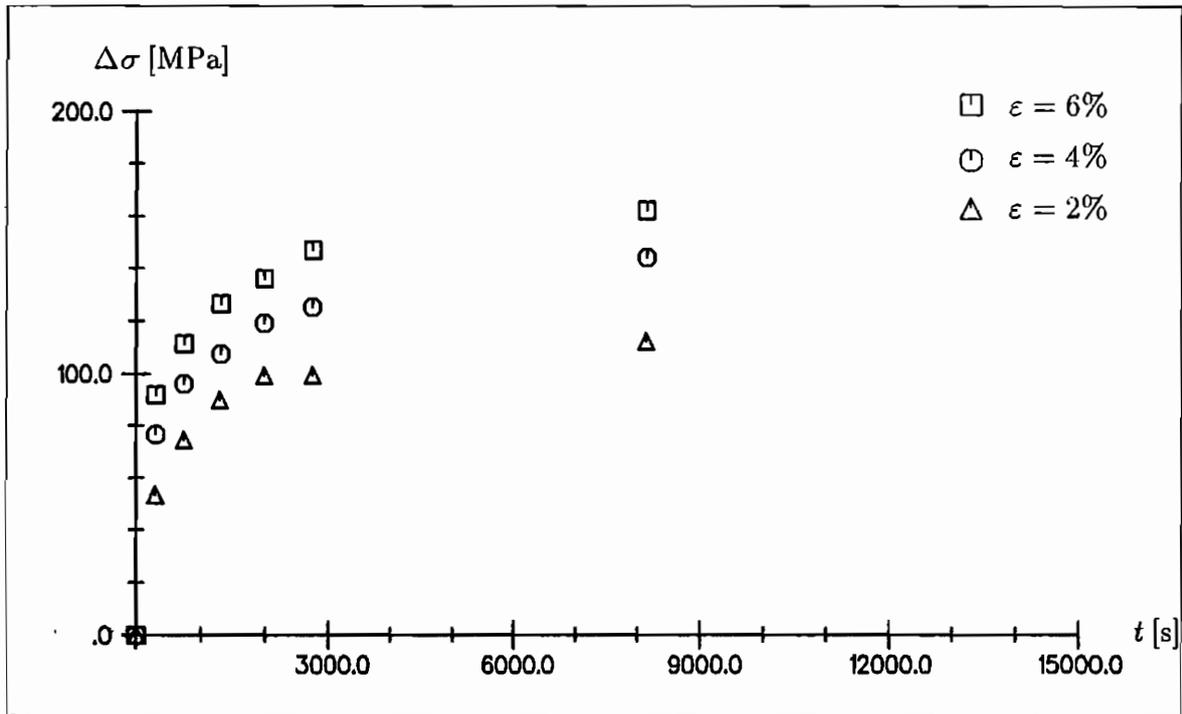


Abb. 3.25: Fließspannungserhöhung nach Auslagerung bei $T = 100\text{ }^\circ\text{C}$

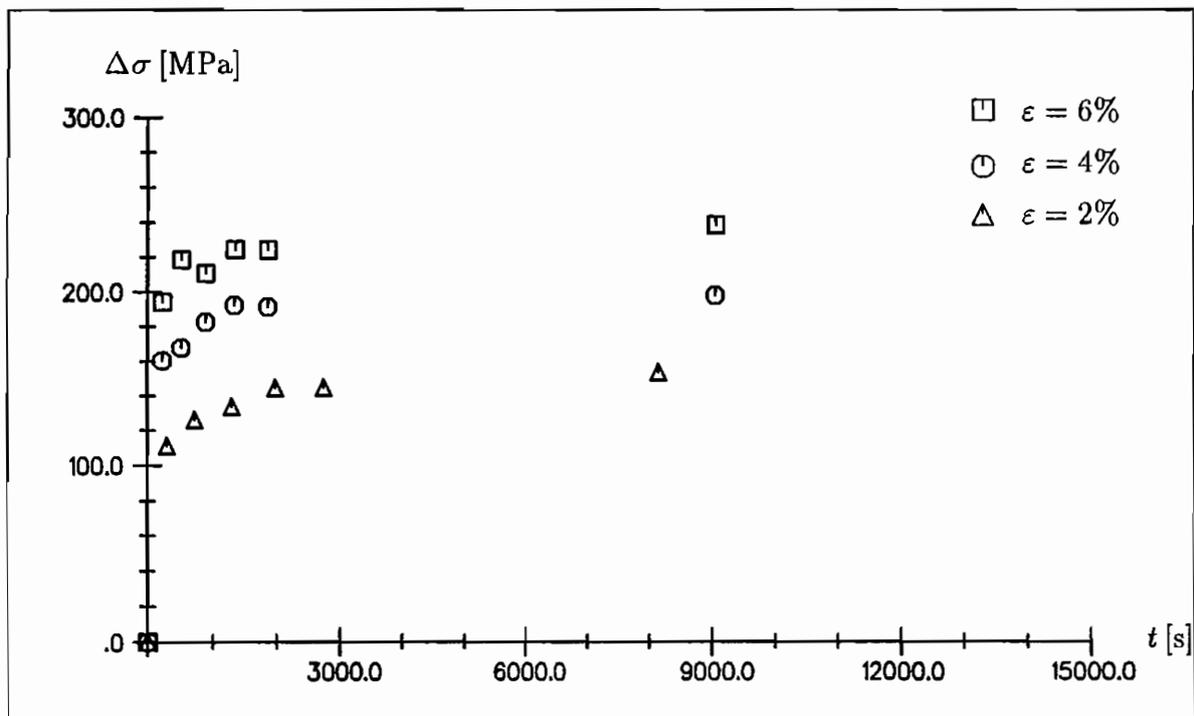
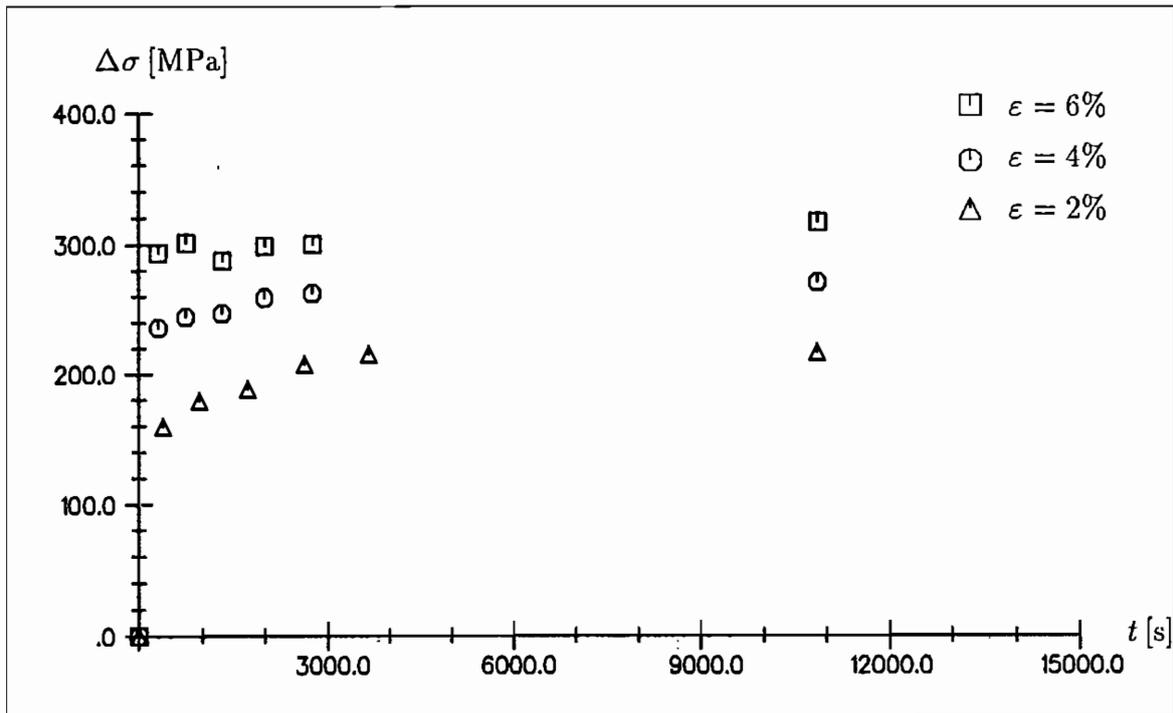
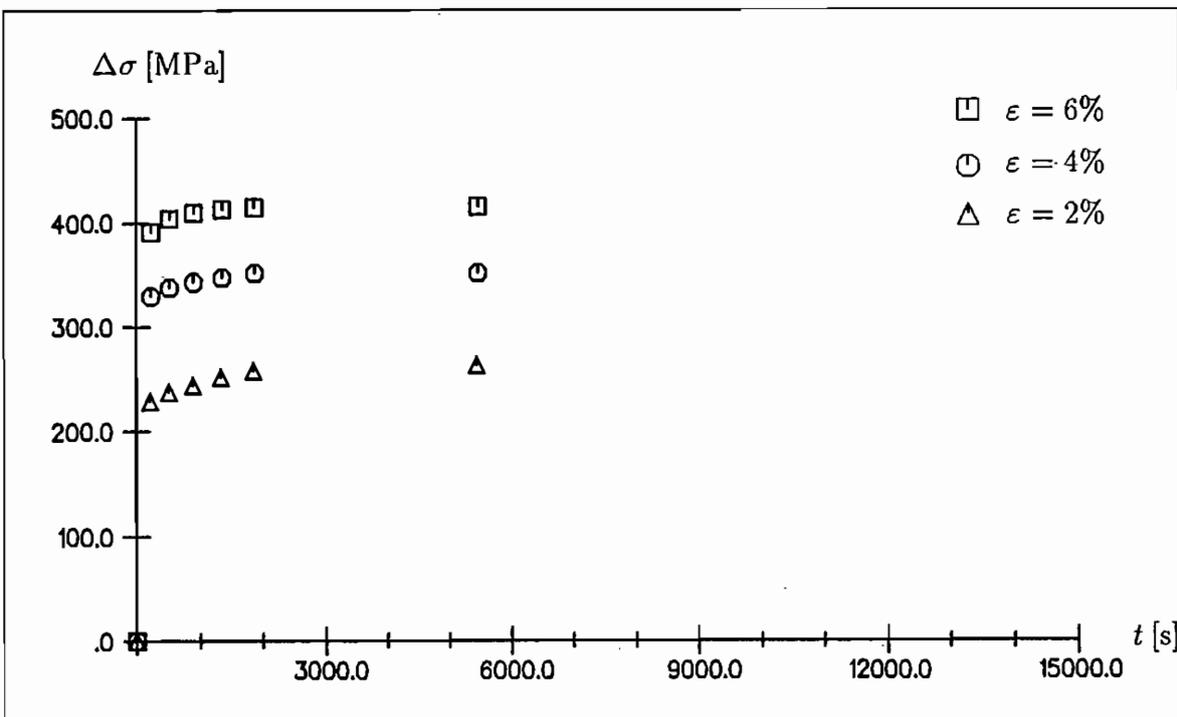


Abb. 3.26: Fließspannungserhöhung nach Auslagerung bei $T = 150\text{ }^\circ\text{C}$

Abb. 3.27: Fließspannungserhöhung nach Auslagerung bei $T = 200\text{ °C}$ Abb. 3.28: Fließspannungserhöhung nach Auslagerung bei $T = 300\text{ °C}$

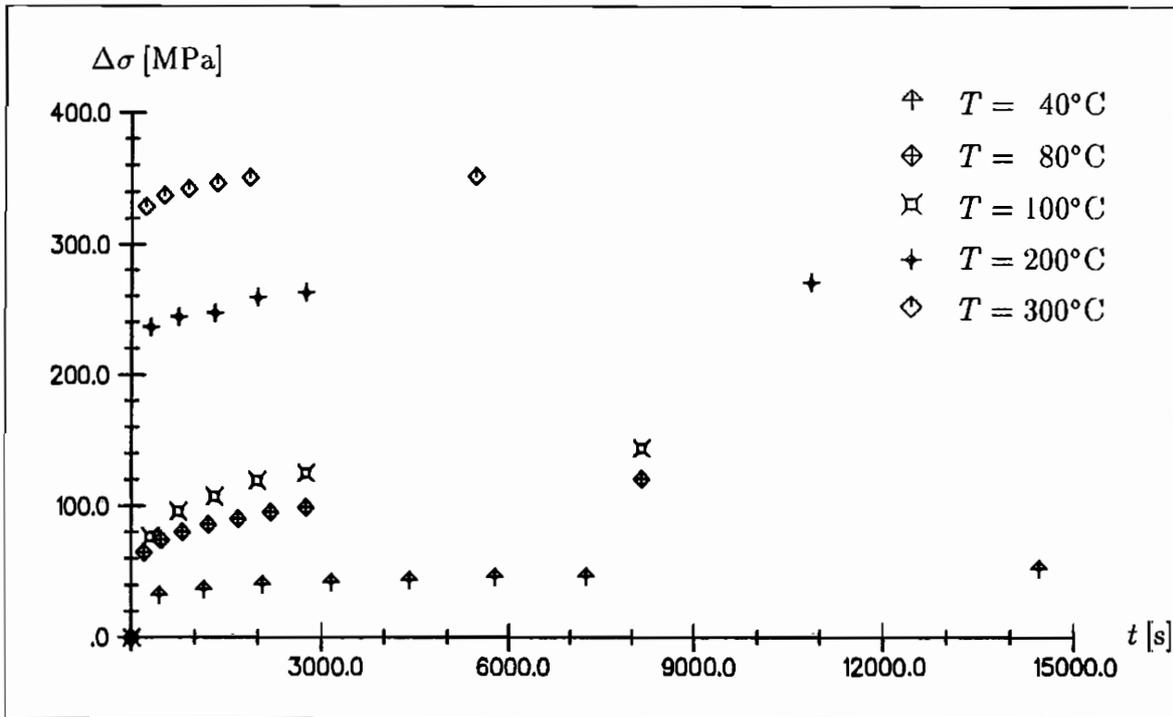


Abb. 3.29: Fließspannungserhöhung nach Auslagerung bei $\epsilon = 4\%$

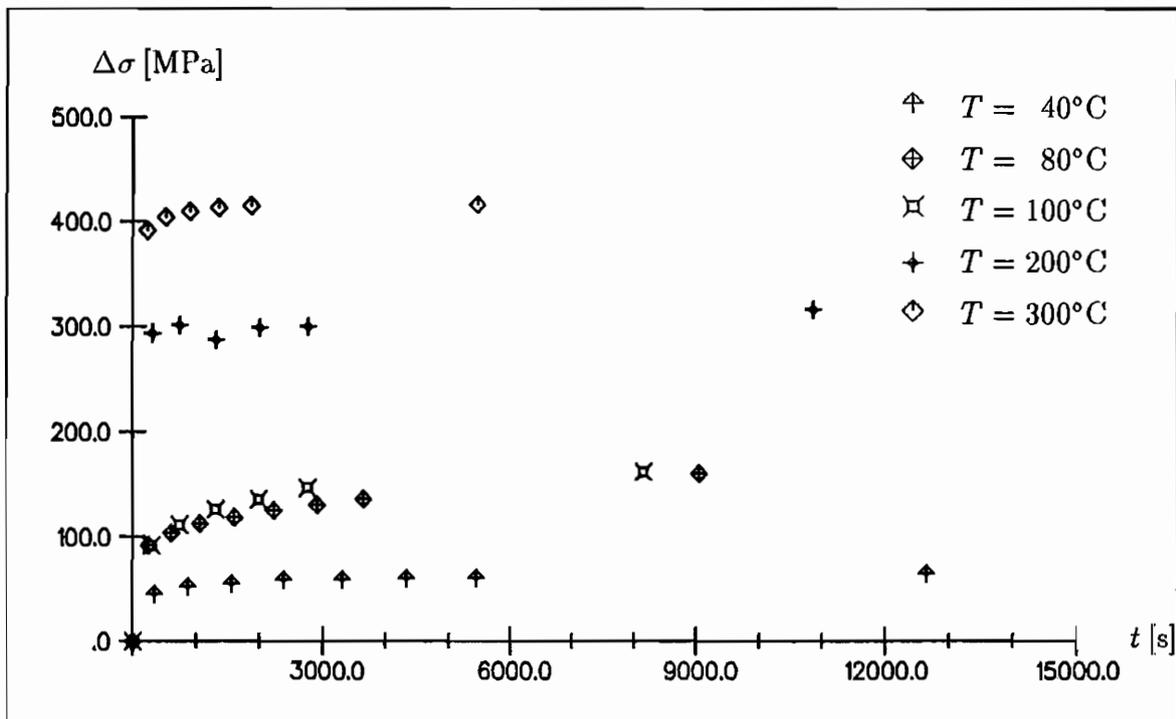


Abb. 3.30: Fließspannungserhöhung nach Auslagerung bei $\epsilon = 6\%$

4. Kinematik

4.1 Konfiguration und Bewegung

Ein Körper B wird als eine gleichmäßige Anhäufung von Materieteilchen, die mit χ bezeichnet werden, verstanden. Um zu einer geeigneten mathematischen Beschreibung der Bewegung der materiellen Punkte zu gelangen, wird eine Konfiguration χ eingeführt, die die materiellen Punkte eindeutig auf ein Gebiet \mathcal{B} des Euklidischen Anschauungsraumes \mathcal{E}^3 abbildet. Die Vielzahl aller möglichen Abbildungen des Körpers B auf das Gebiet \mathcal{B} des Euklidischen Raumes oder auf einen topologisch äquivalenten Raum \mathcal{B}_t kann durch die Konfiguration χ_t charakterisiert werden (Abb. 4.1).

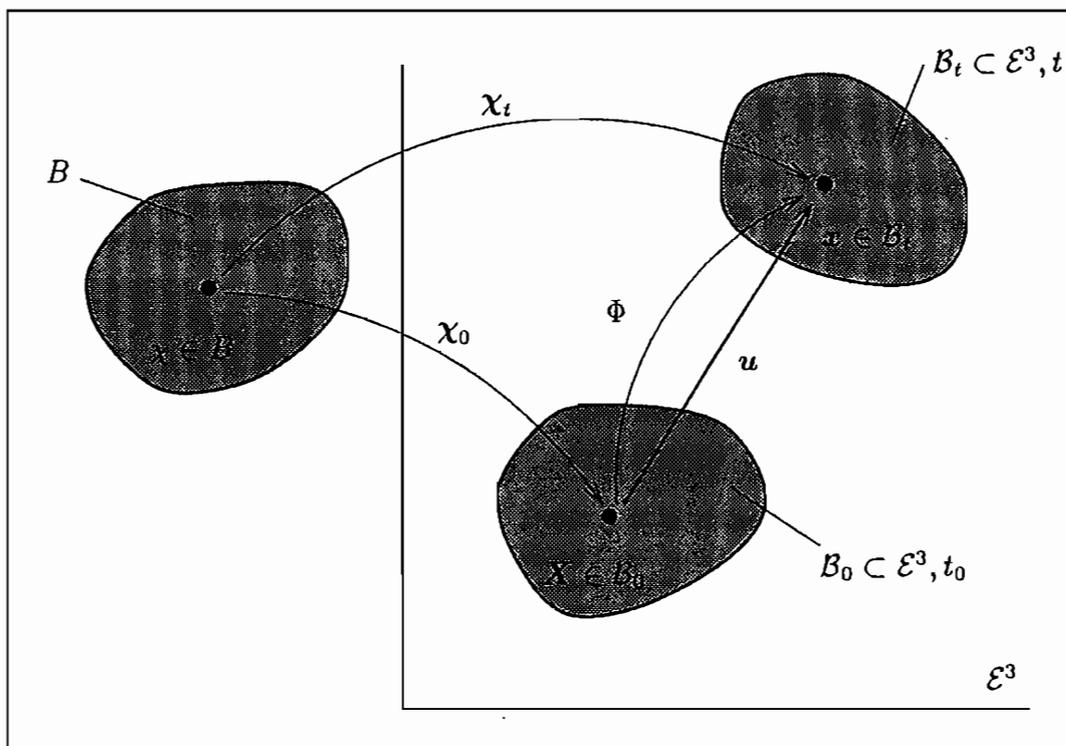


Abb. 4.1: Abbildung und Konfiguration

$$\begin{aligned}
 \chi_t : B &\rightarrow \mathcal{E}^3, \\
 \mathbf{x} = \chi(\chi, t) &\in \mathcal{E}^3, \\
 B_t = \chi_t(B) &= \{\chi(\chi, t), \chi \in B, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{E}^3.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Die Konfiguration χ_t weist jedem materiellen Punkt χ von B einen Platz mit den Koordinaten \boldsymbol{x} zur Zeit t im Euklidischen Raum zu. Die Konfiguration B_t wird als aktuelle oder Momentankonfiguration bezeichnet.

Entsprechend erhält man durch die Abbildung χ_0 des Körpers B zum Zeitpunkt $t = t_0$ die Darstellung in der Ausgangskonfiguration B_0 :

$$\begin{aligned} \chi_0 : B &\rightarrow \mathcal{E}^3, \\ \boldsymbol{X} = \chi(\chi, t_0) &\in \mathcal{E}^3, \\ B_0 = \chi_0(B) &= \{\chi(\chi, t_0), \chi \in B, t_0 \in R\} \subset \mathcal{E}^3. \end{aligned} \quad (4.2)$$

\boldsymbol{X} sind die Koordinaten der Ausgangskonfiguration B_0 .

Mit der Annahme der Existenz der inversen Abbildung χ^{-1} läßt sich mit (4.1) und (4.2) eine Beziehung zwischen den Koordinaten \boldsymbol{X} der Ausgangs- und \boldsymbol{x} der Momentankonfiguration angeben

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \Phi(\boldsymbol{X}, t), \\ \boldsymbol{X} &= \Phi^{-1}(\boldsymbol{x}, t). \end{aligned}$$

Dabei stellen $\Phi(\boldsymbol{X}, t)$ bzw. $\Phi^{-1}(\boldsymbol{x}, t)$ die zeitabhängigen Abbildungen der Ausgangs- auf die Momentankonfiguration bzw. die entsprechende Umkehrabbildung dar.

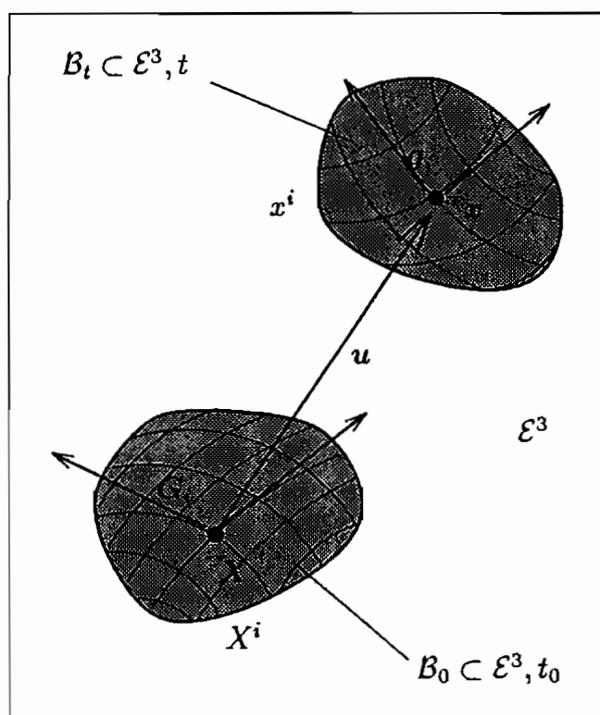


Abb. 4.2: Koordinaten und Basisvektoren des körperfesten Systems

Um zu einer mathematischen Beschreibung von Vorgängen in einem Kontinuum zu gelangen, kann ein raumfestes oder ein körperfestes Koordinatensystem eingeführt werden (LEHMANN [60, 61, 63]).

Die Verwendung eines körperfesten Koordinatensystems (Abb. 4.2) hat den Vorteil, daß Starrkörperrotationen der Materieelemente gegenüber dem Beobachtungsraum nicht auftreten. Allerdings muß zu einer vollständigen Beschreibung die Lage der Basisvektoren in der Konfiguration \mathcal{B}_t bekannt sein.

In dieser Arbeit wird ein raumfestes, krummliniges Koordinatensystem verwendet, das während der Deformation unverformt bleibt (Abb. 4.3).

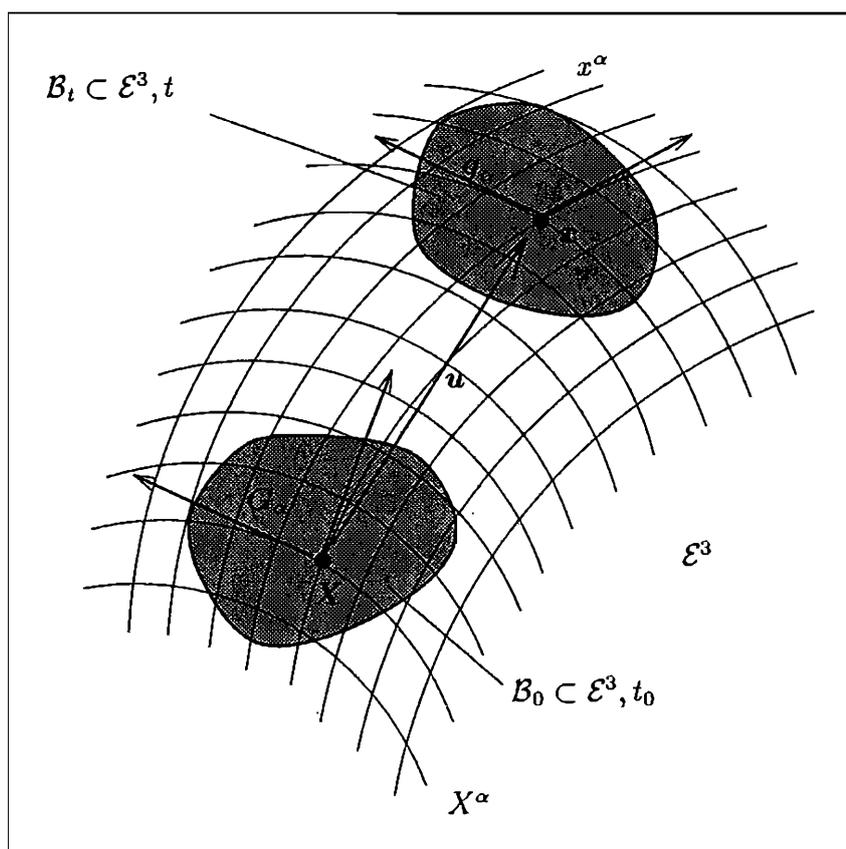


Abb. 4.3: Koordinaten und Basisvektoren des raumfesten Systems

Die kovarianten Basisvektoren sind definiert als die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien:

$$\mathbf{G}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial X^\alpha} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^\alpha}.$$

Die dazu reziproken Basisvektoren \mathbf{G}^α bzw. \mathbf{g}^α berechnen sich mit der Beziehung

$$\mathbf{G}^\alpha \cdot \mathbf{G}_\beta = \delta^\alpha_\beta \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \delta^\alpha_\beta.$$

Man spricht von kontravarianten Basisvektoren G_α bzw. g_α . Mit den Metriktensoren \underline{G} bzw. den Inversen des Metriktensors \underline{G}^{-1} der einzelnen Konfigurationen lassen sich die Basisvektoren ineinander umrechnen. Für die Ausgangskonfiguration \mathcal{B}_0 gilt

$$G_\alpha = \underline{G} \cdot G^\beta \quad \text{bzw.} \quad G^\alpha = \underline{G}^{-1} \cdot G_\beta$$

mit

$$\underline{G} := (G_\alpha \cdot G_\beta) G^\alpha \otimes G^\beta = G_{\alpha\beta} G^\alpha \otimes G^\beta \quad (4.3)$$

und

$$\underline{G}^{-1} := (G^\alpha \cdot G^\beta) G_\alpha \otimes G_\beta = G^{\alpha\beta} G_\alpha \otimes G_\beta. \quad (4.4)$$

Entsprechend für die Momentankonfiguration

$$g_\alpha = \underline{g} \cdot g^\beta \quad \text{bzw.} \quad g^\alpha = \underline{g}^{-1} \cdot g_\beta$$

mit

$$\underline{g} := (g_\alpha \cdot g_\beta) g^\alpha \otimes g^\beta = g_{\alpha\beta} g^\alpha \otimes g^\beta \quad (4.5)$$

und

$$\underline{g}^{-1} := (g^\alpha \cdot g^\beta) g_\alpha \otimes g_\beta = g^{\alpha\beta} g_\alpha \otimes g_\beta. \quad (4.6)$$

Wird ein Tensor nach seiner Raumkoordinate – als Beispiel wählen wir einen Tensor zweiter Stufe – abgeleitet, erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (A_{,\delta}^\beta g_\beta \otimes g^\delta) = A_{,\delta|\alpha}^\beta g_\beta \otimes g^\delta$$

mit der sogenannten kovarianten Ableitung

$$A_{,\delta|\alpha}^\beta = A_{,\delta,\alpha}^\beta + \gamma_{\alpha e}^\beta A_{,\delta}^e - \gamma_{\alpha\delta}^e A_{,\delta}^\beta.$$

Die Größe $\gamma_{\alpha e}^\beta$ wird als Christoffel-Symbol 2. Art bezeichnet und ist definiert durch

$$g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}^e g_e \quad \text{bzw.} \quad g_{,\beta}^\alpha = -\gamma_{\beta e}^\alpha g^e.$$

Der Nabla-Operator symbolisiert die partielle Differentiation nach den Koordinaten der Ausgangs- bzw. Momentankonfiguration, \mathbf{X} bzw. \mathbf{x} . Es gilt:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} &= \frac{\partial(\dots)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial(\dots)}{\partial X^\alpha} G^\alpha, \\ \nabla_{\mathbf{x}} &= \frac{\partial(\dots)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\dots)}{\partial x^\alpha} g^\alpha. \end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen erhält man die Operatoren:

$$\begin{aligned} \text{grad}(\dots) &= \nabla_{\mathbf{x}} \otimes (\dots), & \text{Grad}(\dots) &= \nabla_{\mathbf{X}} \otimes (\dots), \\ \text{div}(\dots) &= \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\dots), & \text{Div}(\dots) &= \nabla_{\mathbf{X}} \cdot (\dots), \\ \text{rot}(\dots) &= \nabla_{\mathbf{x}} \times (\dots), & \text{Rot}(\dots) &= \nabla_{\mathbf{X}} \times (\dots). \end{aligned}$$

4.2 Beschreibung der Deformation

Zur Beschreibung der relativen Bewegung der Materieteilchen in einem Körper betrachten wir die Lage eines Linienelementes in der Ausgangs- und Momentankonfiguration, $d\mathbf{X}$ und $d\mathbf{x}$. Das Linienelement verbindet in beiden Konfigurationen dieselben infinitesimal benachbarten Punkte. Der Übergang wird durch die Abbildung

$$d\mathbf{x} = \underline{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X}, \quad (4.7)$$

$$d\mathbf{X} = \underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \quad (4.8)$$

mit

$$\underline{\mathbf{F}} = \text{Grad}\mathbf{X} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta,$$

$$\underline{\mathbf{F}}^{-1} = \text{grad}\mathbf{x} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} \mathbf{G}_\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta$$

vermittelt. $\underline{\mathbf{F}}$ wird als Deformationsgradient und $\underline{\mathbf{F}}^{-1}$ als Inverse des Deformationsgradienten bezeichnet.

Die polare Zerlegung des Deformationsgradienten liefert:

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{V}} \cdot \underline{\mathbf{U}}, \quad (4.9)$$

wobei

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{R}} & \text{ die Rotation,} \\ \underline{\mathbf{U}} & \text{ die rechte Streckung (vor } \underline{\mathbf{R}} \text{ ausgeführt) und} \\ \underline{\mathbf{V}} & \text{ die linke Streckung (nach } \underline{\mathbf{R}} \text{ ausgeführt)} \end{aligned}$$

sind. Wird als absolutes Verzerrungsmaß die Differenz

$$\delta = \frac{1}{2}(d\mathbf{x}^2 - d\mathbf{X}^2) \quad (4.10)$$

der Quadrate der materiellen Linienelemente in der Ausgangs- und Momentankonfiguration gewählt, so lassen sich die folgenden Verzerrungs- bzw. Deformationstensoren angeben:

Rechts-CAUCHY-GREEN-Tensor:

$$\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{U}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \frac{\partial x^\epsilon}{\partial X^\alpha} g_{\epsilon\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial X^\beta} \mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta.$$

Links-CAUCHY-GREEN-Tensor:

$$\underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^T = \underline{\mathbf{V}} \cdot \underline{\mathbf{V}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\epsilon} G^{\epsilon\sigma} \frac{\partial x^\beta}{\partial X^\sigma} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta.$$

GREEN-Verzerrungstensor:

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{G}}) = \frac{1}{2}(C_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta})\mathbf{G}^\alpha \otimes \mathbf{G}^\beta. \quad (4.11)$$

ALMANZI-Verzerrungstensor:

$$\underline{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{g}} - \underline{\mathbf{b}}^{-1}) = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - (b^{-1})_{\alpha\beta})\mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta. \quad (4.12)$$

Die Differenz der Quadrate der Linienelemente (4.10) läßt sich mit (4.11) und (4.12) schreiben als

$$\delta = d\mathbf{X} \cdot \underline{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \underline{\mathbf{e}} \cdot d\mathbf{x}.$$

Als Maß für die Verzerrungsgeschwindigkeit kann

$$\dot{\delta} = d\mathbf{X} \cdot \underline{\dot{\mathbf{E}}} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \underline{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{x}$$

mit

$$\underline{\dot{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2}\underline{\dot{\mathbf{C}}} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underline{\dot{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1}$$

angegeben werden. $\underline{\mathbf{D}}$ kann auch mit Hilfe des Geschwindigkeitsgradienten

$$\underline{\mathbf{L}} = \underline{\dot{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1}$$

oder

$$\underline{\mathbf{L}} = \text{grad} \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^\beta} \mathbf{g}^\beta = v^\alpha |_\beta \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta$$

bestimmt werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{L}} &= \underline{\mathbf{D}} + \underline{\mathbf{W}} = \text{sym}\{\underline{\dot{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1}\} + \text{ant}\{\underline{\dot{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-1}\} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(v^\alpha |_\beta + v_\beta |^\alpha) \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta}_{D_{,\beta}^\alpha} + \underbrace{\frac{1}{2}(v^\alpha |_\beta - v_\beta |^\alpha) \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta}_{W_{,\beta}^\alpha} \end{aligned} \quad (4.13)$$

mit $v_\beta |^\alpha = g_{\alpha\gamma} v^\gamma |_\beta g^{e\alpha}$.

Den antimetrischen Teil des Geschwindigkeitsgradienten $\underline{\mathbf{W}}$ bezeichnet man als Rotationsgeschwindigkeits- bzw. Wirbeltensor.

Neben den hier angegebenen Verzerrungsmaßen, kann auf der Basis der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten nach Gleichung (4.9) eine allgemeine Formel für weitere Verzerrungsmaße angegeben werden (ODGEN [96]). In der Ausgangskonfiguration definierte Verzerrungsmaße erhält man für ganzzahlige m aus

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m} (\underline{\mathbf{U}}^m - \underline{\mathbf{G}}) \quad \text{für } m \neq 0 \\ &\ln \underline{\mathbf{U}} \quad \text{für } m = 0 \end{aligned}$$

und in der Momentankonfiguration definierte Verzerrungsmaße aus

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m} (\underline{\mathbf{V}}^m - \underline{\mathbf{g}}) \quad \text{für } m \neq 0 \\ &\ln \underline{\mathbf{V}} \quad \text{für } m = 0. \end{aligned}$$

4.3 Spannungstensoren

Schneidet man aus einem verformten Körper einen infinitesimalen Teilkörper heraus, so wirkt auf jeder Schnittfläche die gleichgewichtshaltende Schnittkraft

$$d\mathbf{k} = \mathbf{t} da,$$

wobei \mathbf{t} der Spannungsvektor und da der Flächeninhalt des Flächenelements ist. Mit Hilfe der Flächennormalen \mathbf{n} auf da kann der Spannungsvektor ausgedrückt werden durch

$$\mathbf{t} = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n},$$

die Schnittkraft durch

$$d\mathbf{k} = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} da = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot d\mathbf{a}. \quad (4.14)$$

Die Größe

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta$$

wird als CAUCHY-Spannungstensor bezeichnet. Im Rahmen thermodynamischer Betrachtungen bezieht man sich auf spezifische Größen, d.h. Ausdrücke für die Energie pro Masseneinheit, bzw. Energie pro Ausgangsvolumen. Dies führt auf den gewichteten CAUCHY-Spannungstensor

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{\rho_0}{\rho} \underline{\boldsymbol{\sigma}}.$$

Bezieht man sich auf das Flächenelement der Ausgangskonfiguration $d\mathbf{A}$, so gelangt man zum 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor $\underline{\mathbf{P}}_1$ durch

$$d\mathbf{k} = \underline{\mathbf{P}}_1 \cdot d\mathbf{A} \quad (4.15)$$

mit

$$\underline{\mathbf{P}}_1 = P_1^{\alpha\beta} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{G}_\beta.$$

Mit Hilfe des Deformationsgradienten $\underline{\mathbf{F}}$ lassen sich die Flächenelemente der Momentan- und Ausgangskonfiguration durch die Beziehung

$$d\mathbf{a} = \det(\underline{\mathbf{F}}) \underline{\mathbf{F}}^{-T} \cdot d\mathbf{A}$$

ineinander überführen. Durch die Verknüpfung von (4.14) und (4.15) kann der Zusammenhang zwischen CAUCHY- bzw. gewichteten CAUCHY- und 1. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor angegeben werden:

$$\underline{\mathbf{P}}_1 = \det(\underline{\mathbf{F}}) \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-T} = \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{F}}^{-T}$$

Eine weitere Definition eines Spannungstensors ergibt sich, wenn eine fiktive Schnittkraft

$$d\mathbf{K} := \underline{\mathbf{F}}^{-1} \cdot d\mathbf{k}$$

bezüglich der Ausgangskonfiguration eingeführt wird. Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor \underline{P}_2 ergibt sich aus der Beziehung

$$dK = \underline{P}_2 \cdot dA$$

mit

$$\underline{P}_2 = P_2^{\alpha\beta} G_\alpha \otimes G_\beta.$$

Der Zusammenhang zwischen diesem und dem CAUCHY- bzw. gewichteten CAUCHY-Spannungstensor ist

$$\underline{P}_2 = \det(\underline{F}) \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{F}^{-T} = \underline{F}^{-1} \cdot \underline{S} \cdot \underline{F}^{-T}.$$

Weitere Definitionen von Spannungstensoren ergeben sich aus der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten \underline{F} nach (4.9). Man erhält vier verschiedene Konfigurationen, auf denen 4 Flächenelemente und 4 zugeordnete Schnittgrößen definiert werden können. Insgesamt lassen sich also 16 Spannungstensoren durch die Kombination aller Schnittkräfte mit den jeweiligen Flächenelementen herleiten (MACVEAN [74]).

4.4 Aufspaltung der Verzerrungen

Der reale thermodynamische Prozeß überführt einen Körper aus seinem Anfangszustand B_0 in seinen aktuellen Zustand B_t (Abb. 4.4).

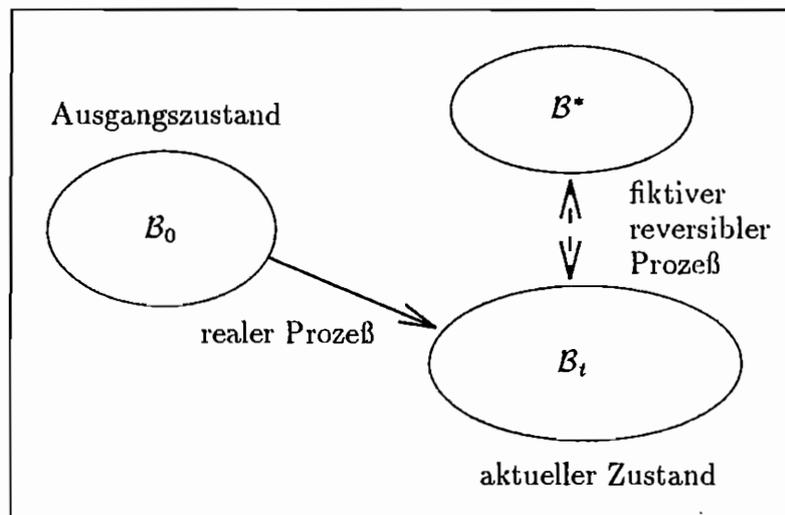


Abb. 4.4: Referenzzustand B^*

Wir führen nun einen begleitenden (fiktiven) Referenzzustand B^* ein. Der Referenzzustand wird mit Hilfe eines fiktiven reversiblen Prozesses erreicht, der dadurch charakterisiert ist, daß

- keine Änderungen der internen Variablen stattfinden und
- der Zustand durch $\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{0}}$ und $T = T^*$ gekennzeichnet ist.

Die Realisierung dieses Prozesses ist nicht möglich, da ein realer Prozeß zu Änderungen der internen Variablen führen kann und zudem die Zwischenkonfiguration inkompatibel ist.

Der fiktive reversible Prozeß ermöglicht eine eindeutige Aufspaltung der mechanischen Leistung \dot{w} in einen reversiblen und irreversiblen Teil:

$$\dot{w} = \dot{w}_{(r)} + \dot{w}_{(i)}$$

Der reversible Anteil läßt sich allgemein in der Form

$$\dot{w}_{(r)} = \frac{1}{\varrho_0} \underline{\mathbf{S}}_{(r)} : \underline{\mathbf{D}}_{(r)}$$

darstellen. Die Festlegung der Größen $\underline{\mathbf{S}}_{(r)}$ und $\underline{\mathbf{D}}_{(r)}$ hängt vom verwendeten rheologischen Werkstoffmodell ab. Gelte man von einem Modell aus, bei dem das reversible und das irreversible Element hintereinander angeordnet sind, gelangt man zur Aufteilung der Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\dot{w} = \dot{w}_{(r)} + \dot{w}_{(i)} = \frac{1}{\varrho_0} \underline{\mathbf{S}}_{(r)} : \underline{\mathbf{D}}_{(r)} + \frac{1}{\varrho_0} \underline{\mathbf{S}}_{(i)} : \underline{\mathbf{D}}_{(i)} \quad (4.16)$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{D}}_{(r)} + \underline{\mathbf{D}}_{(i)}. \quad (4.17)$$

Eine Parallelschaltung dagegen impliziert eine Aufspaltung der Spannung.

Mit Verwendung der Aufspaltung der Verzerrungsgeschwindigkeit nach Gleichung (4.17), kann die reversible Formänderungsleistung angegeben werden als

$$\dot{w}_{(r)} = \frac{1}{\varrho_0} \underline{\mathbf{S}}_{(r)} : \underline{\mathbf{D}}_{(r)} = \frac{1}{\varrho_0} \underline{\mathbf{S}}_{(r)} : \overset{\nabla}{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}_{(r)}$$

mit einer geeigneten objektiven Zeitableitung ($\overset{\nabla}{\dots}$). Die Größen $\underline{\mathbf{S}}_{(r)}$ und $\overset{\nabla}{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}_{(r)}$ bilden ein konjugiertes Paar. Weitere Forderungen bezüglich $\underline{\mathbf{D}}_{(r)}$ bzw. $\overset{\nabla}{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}_{(r)}$ sind (LEHMANN [64]):

1. Bei verschwindender inelastischer Formänderung $\underline{\mathbf{D}}_{(i)}$ muß $\dot{w}_{(r)}$ in \dot{w} und $\underline{\mathbf{D}}_{(r)}$ in $\underline{\mathbf{D}}$ übergehen.
2. Die Invarianten des reversiblen Dehnungstensors $\overset{\nabla}{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}_{(r)}$ dürfen nur von den Hauptdehnungen von $\overset{\nabla}{\underline{\boldsymbol{\epsilon}}}_{(r)}$ abhängen.

3. Verschwindende Invarianten von $\underline{D}_{(r)}$ implizieren verschwindende materielle Zeitableitungen der Invarianten von $\underline{\underline{\epsilon}}_{(r)}$.

Unter Berücksichtigung dieser Forderungen ergibt sich eine mögliche Aufspaltung der Gesamtdeformation bzw. Deformationsrate durch die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten (LEE & LIU [59], LEE [57, 58], MANDEL [76], SIDOROFF [123])

$$\underline{F} = \underline{F}_{(r)} \cdot \underline{F}_{(i)}$$

Man erhält für den Geschwindigkeitsgradienten \underline{L} den Ausdruck:

$$\begin{aligned} \underline{L} &= \dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1} = \dot{\underline{F}}_{(r)} \cdot \underline{F}_{(r)}^{-1} + \underline{F}_{(r)} \cdot \dot{\underline{F}}_{(i)} \cdot \underline{F}_{(i)}^{-1} \cdot \underline{F}_{(r)}^{-1} \\ &= \underline{L}_{(r)} + \underline{F}_{(r)} \cdot \underline{L}_{(i)}^* \cdot \underline{F}_{(r)}^{-1} = \underline{L}_{(r)} + \underline{F}_{(r)} \cdot (\underline{D}_{(i)}^* + \underline{W}_{(i)}^*) \cdot \underline{F}_{(r)}^{-1}. \end{aligned}$$

Die Anteile des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors und des Rotationsgeschwindigkeitstensors sind

$$\begin{aligned} \underline{D}_{(r)} &= \text{sym} \underline{L}_{(r)}, & \underline{W}_{(r)} &= \text{ant} \underline{L}_{(r)}, \\ \underline{D}_{(i)} &= \text{sym}(\underline{F}_{(r)} \cdot \underline{L}_{(i)}^* \cdot \underline{F}_{(r)}^{-1}), & \underline{W}_{(i)} &= \text{ant}(\underline{F}_{(r)} \cdot \underline{L}_{(i)}^* \cdot \underline{F}_{(r)}^{-1}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Im Falle kleiner elastischer Deformationen ist

$$\underline{D}_{(i)} \approx \underline{D}_{(i)}^* \quad \text{und} \quad \underline{W}_{(i)} \approx \underline{W}_{(i)}^*.$$

4.5 Differentiation nach der Zeit

Die inelastische Verformung eines Körper ist im allgemeinen von dem Belastungsweg, der zu diesem Zustand geführt hat, abhängig. Aus diesem Grund geben Stoffgesetze zur Beschreibung des inelastischen Verformungsverhaltens eine Beziehung zwischen der Dehnungsrate und den Raten der Zustandsvariablen an. Die Rate bzw. die zeitliche Änderung einer Zustandsgröße besteht aus einem Anteil, den ein auf dem Materieelement befindlicher Beobachter bezüglich eines materiellen Koordinatensystems registrieren würde (materielle Änderung), und einem konvektiven Anteil aufgrund der Veränderung des Materieelementes bezüglich des Gesamtsystems. In Stoffgesetzen darf aber nur der erste Teil, der die materielle Veränderung wiedergibt, Berücksichtigung finden.

Es ist daher notwendig, mitrotierende Zeitableitungen zu definieren, die bezüglich der gewählten Konfiguration ein Abbild des nach der Zeit abgeleiteten materiellen Bildes geben (MASUR [83]).

Das Auffinden einer geeigneten mitrotierenden Zeitableitung wird durch die Forderung eingeschränkt, daß diese objektiv, d.h. invariant gegenüber dem Ortswechsel eines außerhalb des Systems befindlichen Beobachter sein muß.

Die Vielzahl der unterschiedlichen Definitionen mitrotierender objektiver Zeitableitungen beruht auf dem Problem der Festlegung des konvektiven Anteils der zeitlichen Änderung der Zustandsvariablen.

Grundsätzlich lassen sich die in der Literatur angeführten Zeitableitungen dannach unterscheiden, ob der konvektive Anteil als zustandsabhängig oder zustandsunabhängig angenommen wird (Abb. 4.5). Die zustandsunabhängigen Zeitableitungen, die durch rein verformungskinematische Größen bestimmt sind, lassen sich in mitgeführte und mitdrehende Ableitungen unterteilen. Die mitgeführten Zeitableitungen rechnen die gesamte Änderung des Basissystems des Materieelementes, d.h. sowohl die Deformation als auch die Drehung, zum konvektiven Anteil. Die mitdrehenden berücksichtigen nur die Rotation des Materieelementes gegenüber dem Gesamtsystem (s. Anhang B).

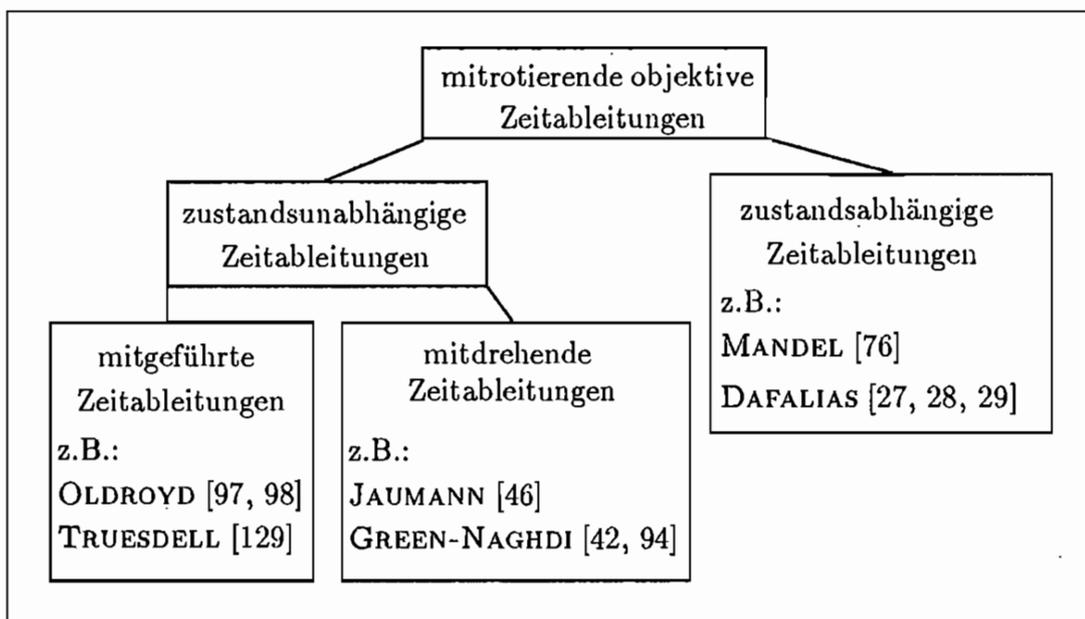


Abb. 4.5: Klassifizierung mitrotierender objektiver Zeitableitungen

Die Definition zustandsabhängiger Zeitableitungen basiert auf der Vorstellung, daß die Rotation der inneren Materialstruktur nicht mit der Rotation der materiellen Koordinatenlinien übereinstimmt (MANDEL [76]). DAFALIAS [29] geht von der Vorstellung aus, daß die innere Struktur, die er als Substruktur bezeichnet, einen anderen Verformungsweg beschreitet als das Kontinuum. Hieraus wird die Definition einer neuen Zustandsgröße, die als plastischer Spin bezeichnet wird, und die die Differenz zwischen der Rotation der Substruktur und der Rotation des Kontinuums darstellt, begründet. Eine geeignete mitrotierende Zeitableitung muß so beschaffen sein, daß die Evolutionsgleichungen der Zustandsvariablen in Raten formuliert werden, die die Rotation der Substruktur bezüglich eines raumfesten globalen Koordinatensystem beinhaltet.

Neben der Forderung der Objektivität, d.h. der Invarianz gegenüber Starrkörperbewegungen, können Kriterien aufgestellt werden, die die Auswahl der geeigneten mitrotierenden Zeitableitung einschränken (WEGENER [133]). Die wichtigsten sind:

- **Invariantenforderung:** Verschwindet die mitrotierende objektive Zeitableitung eines Tensors, so sollen auch die Invarianten stationär bleiben (PRAGER [107]).
- **Symmetrieforderung:** Jeder symmetrische Tensor, der auf der aktuellen räumlichen Konfiguration symmetrisch bleibt, soll auch auf der materiell mitdrehenden Konfiguration symmetrisch bleiben (LEHMANN [61]).
- **Produktregel:** Die mitrotierende Zeitableitung soll die Produktregel bezüglich einfachem und doppeltem Skalarprodukt erfüllen.
- **Isotropie-Eigenschaft:** Isotrope Stoffgesetze in Spannungsgeschwindigkeiten sollen in mitrotierenden oder materiellen Zeitableitungen angesetzt werden können.

In dieser Arbeit wird eine zustandsabhängige mitrotierende Zeitableitung nach DAFALIAS [27] verwendet. Für einen allgemeinen Tensor 2. Stufe $\underline{\mathbf{A}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\overset{\nabla}{\underline{\mathbf{A}}} &= \dot{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\mathbf{\Omega}} \underline{\mathbf{A}} + \underline{\mathbf{A}} \underline{\mathbf{\Omega}}, \\ \underline{\mathbf{\Omega}} &= \underline{\mathbf{W}} - \underline{\omega}_{(i)}, \\ \underline{\omega}_{(i)} &= \iota(\underline{\xi} \underline{\mathbf{D}}_{(i)} - \underline{\mathbf{D}}_{(i)} \underline{\xi}).\end{aligned}\tag{4.19}$$

$\underline{\mathbf{D}}_{(i)}$ ist die inelastische Verzerrungsgeschwindigkeit und $\underline{\xi}$ die kinematische Verfestigungsvariable, die durch das Stoffgesetz festgelegt sind. Der skalare Wert ι kann als Scharparameter betrachtet werden, der eine Klasse von objektiven mitrotierenden Zeitableitungen beschreibt. $\underline{\mathbf{\Omega}}$ beschreibt die Differenz zwischen der Rotation des Kontinuums $\underline{\mathbf{W}}$ und dem plastischen Spin $\underline{\omega}_{(i)}$ – also die Rotation der Substruktur.

5. Materialunabhängige Bilanzgleichungen der Thermodynamik

Ein thermodynamischer Prozeß wird bestimmt durch

- die Geschichte der unabhängigen Prozeßvariablen,
- die stoffunabhängigen Grundgleichungen, nämlich
 - a) Massenbilanz
 - b) Impulsbilanz
 - c) Drehimpulsbilanz
 - d) 1. Hauptsatz der Thermodynamik
 - e) 2. Hauptsatz der Thermodynamik
- und das konstitutive Gesetz.

Die Beschreibung des Prozeßablaufes wird begleitet von der Entwicklung der thermodynamischen Zustandsänderungen. Das konstitutive Gesetz verbindet Größen der Prozeßgeschichte mit den thermodynamischen Zustandsänderungen.

Man unterscheidet bei den materialunabhängigen Bilanzgleichungen zwischen der

- globalen Formulierung für den gesamten Körper und
- der lokalen (differentiellen) Formulierung.

Die allgemeine Form einer Bilanzgleichung in globaler und lokaler Formulierung ist

$$\begin{aligned} \text{global:} \quad & \frac{D}{dt} \int_V \varrho \zeta \, dV = - \int_A \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dA + \int_V \varrho r \, dV + \int_V \varrho p \, dV, \\ \text{lokal:} \quad & \varrho \dot{\zeta} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \varrho r + \varrho p, \end{aligned}$$

wobei ϱ die aktuelle Dichte, ζ die zu bilanzierende extensive Größe, \mathbf{q} der Fluß dieser Größe über die Oberfläche A mit dem Normalenvektor \mathbf{n} , r die Quellendichte bezüglich des Volumens V und p ein Produktionsterm ist.

5.1 Massenbilanz

Der Erhaltungssatz der Masse m eines Körpers mit dem Dichtefeld $\rho(\mathbf{x}, t)$ lautet in globaler bzw. lokaler Formulierung:

$$\begin{aligned} \text{global:} \quad \dot{m} &= \frac{D}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} [\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}] \, dv = 0, \\ \text{lokal:} \quad &\frac{D}{dt} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \end{aligned}$$

5.2 Impulsbilanz

Die Impulsbilanz besagt, daß die materielle Zeitableitung des Impulsvektors \mathbf{I} gleich der Summe der an einem Körper angreifenden Kräfte \mathbf{f} ist.

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{f}$$

Der Impulsvektor ist definiert durch:

$$\mathbf{I} = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{v} \, dV = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{v} \, dv,$$

Die Summe der Kräfte kann zerlegt werden in:

$$\mathbf{f} = \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{T} \, dA + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \, dV = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} \, da + \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{b} \, dv.$$

Hier ist \mathbf{b} die Massenkraftdichte pro Masseneinheit und $\mathbf{T} = \underline{\mathbf{P}}_1 \cdot \mathbf{N}$ bzw. $\mathbf{t} = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$ der CAUCHY'sche Spannungsvektor in der Ausgangs- bzw. in der Momentankonfiguration. \mathbf{N} und \mathbf{n} sind die Einheitsnormalenvektoren des orientierten Flächenelementes in der jeweiligen Konfiguration. Unter der Voraussetzung, daß als Bezugssystem ein Inertialsystem benutzt wird, entfallen die Trägheits- oder Scheinkräfte bezüglich \mathbf{b} . Der Impulssatz lautet dann nach Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes, aufgeschrieben in der Momentankonfiguration:

$$\begin{aligned} \text{global:} \quad \frac{D}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{v} \, dv &= \int_{\mathcal{B}_t} (\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{\sigma}}) \, dv + \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{b} \, dv, \\ \text{lokal:} \quad \rho \dot{\mathbf{v}} &= \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

In der Ausgangskonfiguration ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{global:} \quad \frac{D}{dt} \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{v} \, dV &= \int_{\mathcal{B}_0} (\operatorname{Div} \underline{\mathbf{P}}_1) \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \, dV \\ \text{lokal:} \quad \rho_0 \dot{\mathbf{v}} &= \operatorname{Div} \underline{\mathbf{P}}_1 + \rho_0 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

5.3 Drehimpulsbilanz

Bei Vernachlässigung von Volumen- und Oberflächenmomenten reduziert sich das resultierende Moment auf das Moment der Oberflächen- und Volumenkräfte nach (5.1). Die Drallbilanz führt auf die Symmetrie des CAUCHY- und 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors:

$$\begin{aligned}\underline{\boldsymbol{\sigma}} &= \underline{\boldsymbol{\sigma}}^T, \\ \underline{\mathbf{P}}_2 &= \underline{\mathbf{P}}_2^T.\end{aligned}$$

5.4 1. Hauptsatz der Thermodynamik

Die globale mechanische Leistungsbilanz

$$\int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dv = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v} \, da + \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv \quad (5.2)$$

besagt, daß die Änderung der kinetischen Energie gleich der Leistung der an der Oberfläche angreifenden Kräfte plus der Leistung der massenproportionalen Kräfte \mathbf{b} ist. Zur Formulierung des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik gelangt man, indem die Wärmebewegung berücksichtigt wird. In der Leistungsbilanz (5.2) wird ein Term, der die Wärmebewegung \mathbf{q} über die Oberfläche des Körpers und ein Term, der die Wärmestrahlung über die Massenelemente r berücksichtigt, hinzugefügt:

$$\int_{\mathcal{B}_t} \rho \dot{u} \, dv + \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dv = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{n} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v} \, da + \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{n} \cdot \mathbf{q} \, da + \int_{\mathcal{B}_t} \rho r \, dv.$$

Zum Ausgleich der Leistungsbilanz tritt auf der linken Seite ein Term hinzu, der die Änderung der inneren spezifischen Energie beschreibt. Unter Verwendung der Impulsbilanz nach (5.1) und des GAUSS'schen Integralsatzes erhält man die lokale Leistungsbilanz

$$\rho \dot{u} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r + \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \underline{\mathbf{D}} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r + \rho \dot{w}. \quad (5.3)$$

5.5 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Die Aussage des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik kann durch den Erfahrungssatz nach CLAUSIUS [18] ausgedrückt werden:

„Wärme kann nie von selbst von einem Körper niedriger Temperatur auf einen Körper höherer Temperatur übergehen.“

Dies bedeutet für einen Kreisprozeß, daß nur ein Bruchteil der zugeführten Wärmemenge in nutzbare Arbeit umgewandelt werden kann. Durch Einführung der Zustandsgröße Entropie s kann dieser Erfahrungssatz durch die Entropiegleichung

$$ds \geq \frac{dQ}{T} \quad (5.4)$$

oder in integraler Form

$$s_2 - s_1 \geq \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad (5.5)$$

angegeben werden. Dabei bezeichnet dQ die Änderung der Wärmeenergie und T die absolute Temperatur. Das Gleichheitszeichen gilt für eine reversible Zustandsänderung.

Die Beziehungen (5.4) und (5.5) bilden die Grundlage der Thermostatik. Sie vergleicht Zustandsänderungen von einem Gleichgewichtszustand 1 zu einem Gleichgewichtszustand 2. Temperatur und Entropie sind – da sie durch Meßvorschriften im Gleichgewicht definiert sind – problemlos bestimmbar.

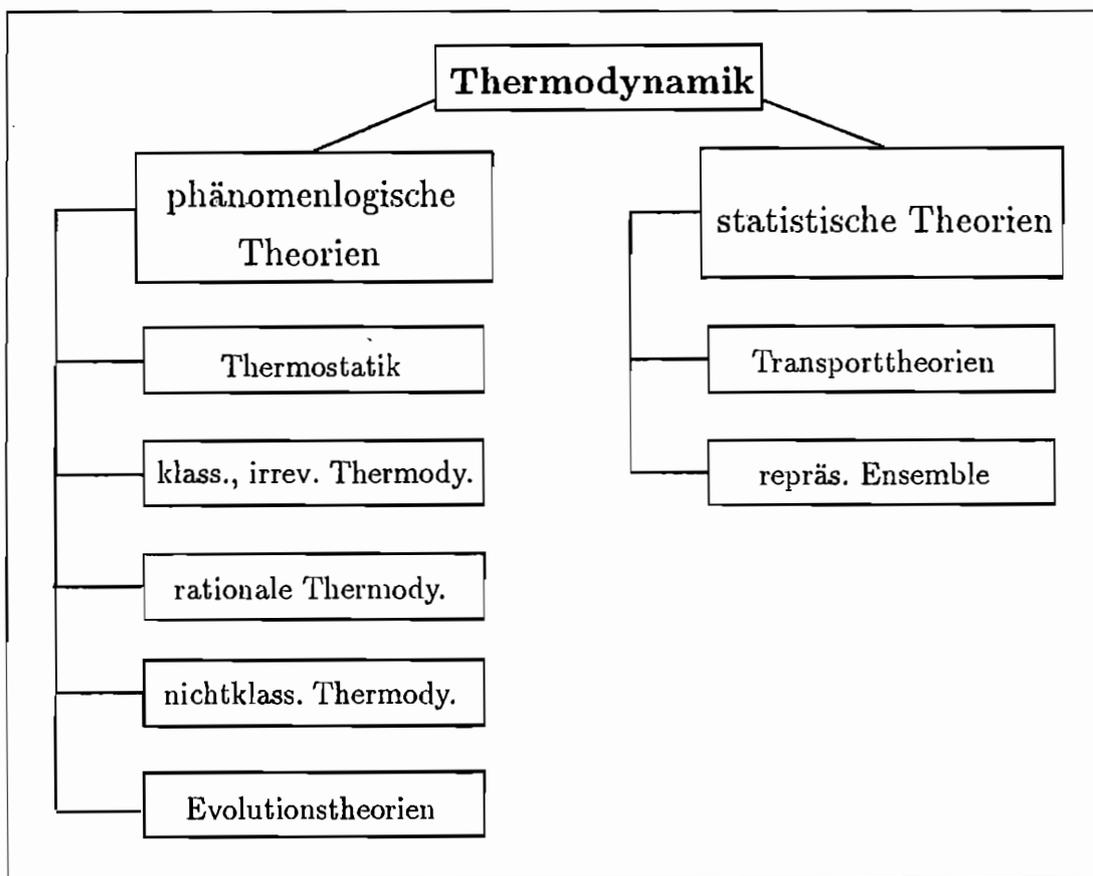


Abb. 5.1: Theorien der Thermodynamik

Die Beschreibung thermodynamischer Systeme im Nichtgleichgewicht führt zu einer Erweiterung der Thermostatik (Abb. 5.1). Die unterschiedlichen Theorien sind durch die Schwierigkeit der Definition von Temperatur und Entropie im Nichtgleichgewicht gekennzeichnet. Temperatur und Entropie werden entweder neu definiert oder als primitive Größen angesehen, d.h. ihre mathematische Existenz wird vorausgesetzt (MUSCHIK [93, 92]).

Grundsätzlich können die Theorien der Thermodynamik nach der mikro- oder der makroskopischen Betrachtungsweise der Vorgänge im Körper unterschieden werden. Die statistischen Theorien berücksichtigen den molekularen Aufbau der Materie durch mikroskopische Modelle (REIF [110]). Die phänomenologischen Theorien versuchen durch die Einführung makroskopischer Variablen den gesamten Körper zu erfassen.

Die einzelnen phänomenologischen Theorien – die alle eine Erweiterung der Thermostatik darstellen – unterscheiden sich dadurch, daß

- der zugrundeliegende Zustandsraum ein großer oder ein kleiner Raum ist,
- die Dissipationsungleichung zeitlich lokal oder global ist und
- daß zwischen Entropiestromung und der Wärmebewegung ein universeller oder materialabhängiger Zusammenhang besteht.

In dieser Arbeit wird die Theorie der Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen dargestellt. Es werden die Aussagen der Gleichgewichtsthermodynamik (Thermostatik) zusammengestellt, und darauf aufbauend wird die klassische irreversible Thermodynamik abgeleitet. Die klassische irreversible Thermodynamik ist die Grundlage der Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen.

5.5.1 Thermostatik

Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik nach Gleichung (5.3) kann als differentielle Energiebilanz

$$du = dw + dq \quad (5.6)$$

geschrieben werden. Unter dw versteht man die Änderung der inneren Elementararbeit des Systems. Durch Einführung verallgemeinerter innerer Kräftevariablen A_k und den konjugiert zugeordneten Änderungen der kinematischen Variablen a_k ist

$$dw = A_k da_k . \quad (5.7)$$

Beschränkt man sich auf die Beschreibung reversibler Prozesse, so kann die allgemeine Entropieungleichung (5.4) geschrieben werden als

$$ds = \frac{dq}{T} . \quad (5.8)$$

Aus der Verbindung von (5.6), (5.7) und (5.8) gelangt man zur Aussage

$$du = A_k da_k + T ds. \quad (5.9)$$

Diese Beziehung bezeichnet man als Fundamentalgleichung. Bestimmt man das totale Differential

$$du = \frac{\partial u}{\partial a_k} da_k + \frac{\partial u}{\partial s} ds,$$

so erhält man mittels Koeffizientenvergleichs das Ergebnis

$$A_k = \frac{\partial u}{\partial a_k} \quad \text{und} \quad T = \frac{\partial u}{\partial s}.$$

Die unabhängigen Variablen der Fundamentalgleichung (5.9) sind a_k und s . Für bestimmte Problemstellungen ist es vorteilhaft, von anderen unabhängigen Variablen auszugehen. Mittels der LEGENDRE-Transformation läßt sich die Variablenkombination $u(a_k, s)$ ohne Informationsverlust auf andere Variablenkombinationen transformieren. Es lassen sich insgesamt vier Fundamentalgleichungen aufstellen:

$$\begin{array}{ll} \text{Innere Energie} & u = u(a_k, s) \\ \text{Freie Energie} & \phi = \phi(a_k, T) \\ \text{Enthalpie} & h = h(A_k, s) \\ \text{Freie Enthalpie} & \Psi = \Psi(A_k, T) \end{array} \quad (5.10)$$

Aus der Gleichheit der gemischt partiellen Ableitungen der einzelnen Fundamentalgleichungen (Satz von SCHWARZ) erhält man die sogenannten MAXWELL-Beziehungen

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial s}{\partial a_k} \right|_T &= - \left. \frac{\partial A_k}{\partial T} \right|_{a_k}, \\ \left. \frac{\partial T}{\partial a_k} \right|_s &= + \left. \frac{\partial A_k}{\partial s} \right|_{a_k}, \\ \left. \frac{\partial s}{\partial A_k} \right|_T &= + \left. \frac{\partial a_k}{\partial T} \right|_{A_k}, \\ \left. \frac{\partial T}{\partial A_k} \right|_s &= - \left. \frac{\partial a_k}{\partial s} \right|_{A_k}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die MAXWELL-Beziehungen liefern wertvolle Zusammenhänge zur Verknüpfung der Zustandsgrößen untereinander.

5.5.2 Klassische irreversible Thermodynamik

Die Thermostatik liefert nach (5.5) eine integrale Aussage über den Prozeß im betrachteten Zeitintervall zwischen zwei Gleichgewichten. Im Rahmen einer Kontinuumsstheorie sind dagegen Aussagen zwischen beliebigen Zeitpunkten, insbesondere momentane erwünscht. Dies führt zur Entwicklung der klassischen irreversiblen Thermodynamik, die auf dem Postulat des lokalen Gleichgewichts beruht (ECKART [35, 36], MEIXNER [87]).

Eine Verallgemeinerung der rechten Seite der Entropieungleichung (5.5) im Sinne einer Kontinuumsstheorie führt auf die Form

$$s_2 - s_1 \geq - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{r}{T} \right] d\tau,$$

wobei \mathbf{q} die Wärmebewegung über die Oberfläche und r die durch Strahlung pro Zeit- und Masseneinheit zugeführte Energie ist. Mit der Voraussetzung eines ausreichend langsam ablaufenden Prozesses läßt man t_1 gegen t_2 streben und gelangt zu der momentanen Formulierung

$$\dot{s} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \frac{r}{T} \geq 0, \quad (5.12)$$

die als CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung bekannt ist. Identifiziert man die beiden mit Wärmebewegung zusammenhängenden Terme als Entropiestromung $\dot{s}_{(r)}$, so kann die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung auch in der Form

$$\dot{s}_{(i)} = \dot{s} - \dot{s}_{(r)} \geq 0 \quad (5.13)$$

angegeben werden. $\dot{s}_{(i)}$ wird als irreversible Entropieproduktion bezeichnet.

Die klassische irreversible Thermodynamik trifft neben der Annahme der momentanen Gültigkeit des 2. Hauptsatzes die Annahme der Lokalität der Entropieungleichung (5.12) bzw. (5.13).

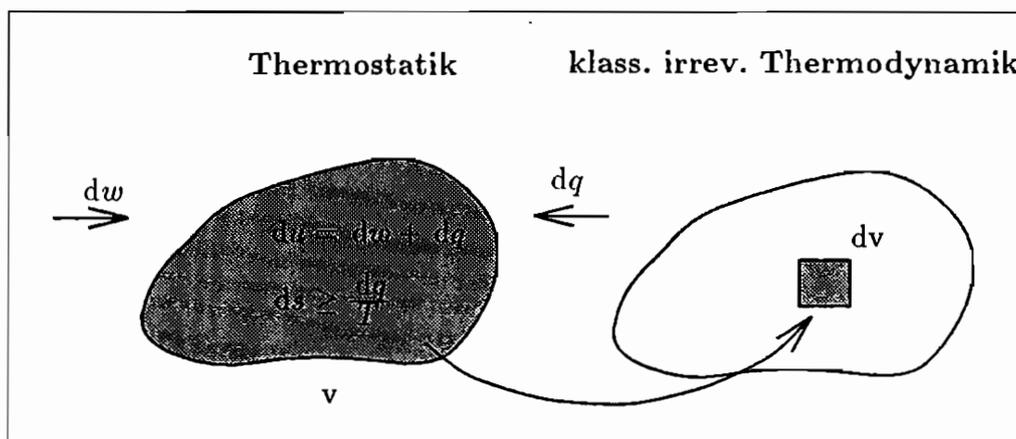


Abb. 5.2: Betrachtungsweisen der Thermostatik und klassischen irreversiblen Thermodynamik

Die globalen Aussagen der Thermostatik, die für den Körper als Ganzes gelten, werden in der klassischen irreversiblen Thermodynamik auf ein infinitesimales Volumenelement bezogen (Abb. 5.2). Es ist daher möglich, einen thermodynamischen Ungleichgewichtszustand durch eine Abfolge thermodynamischer Gleichgewichtszustände zu approximieren.

Durch Lokalisierung der Beziehungen der Thermostatik wird ein Übergang zur Feldtheorie erreicht, die durch die Entropiebilanz in der Momentankonfiguration

$$\rho \dot{s}_{(i)} = \rho \dot{s} - \left(-\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) + \rho \frac{r}{T} \right) \geq 0 \quad (5.14)$$

darstellbar ist.

Ersetzt man

$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) = \frac{1}{T}[\operatorname{div}\mathbf{q} - \frac{1}{T}(\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}T)]$$

in der Beziehung (5.14), gelangt man zu

$$\rho T \dot{s}_{(i)} = \rho T \dot{s} - (-\operatorname{div}\mathbf{q} + \rho r + \frac{1}{T}\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}T) \geq 0.$$

Zerlegt man die linke Seite in einen Anteil

$$\rho T \dot{s}_{(st)} = \rho T \dot{s} - (-\operatorname{div}\mathbf{q} + \rho r)$$

und einen Teil

$$\rho T \dot{s}_{(w)} = -\frac{1}{T}\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}T,$$

ergibt sich die Entropieungleichung als

$$\dot{s}_{(i)} = \dot{s}_{(st)} + \dot{s}_{(w)} \geq 0. \quad (5.15)$$

$\dot{s}_{(st)}$ kann als interne Entropieproduktion und $\dot{s}_{(w)}$ als Entropieproduktion infolge Wärmeleitung angesehen werden. Auf der Grundlage der physikalischen Erfahrung fordert man, daß

$$\dot{s}_{(w)} \geq 0 \quad (5.16)$$

und, um (5.15) zu erfüllen, daß

$$\dot{s}_{(st)} \geq 0 \quad (5.17)$$

ist.

Ein thermomechanisches Stoffgesetz wird als thermodynamisch konsistent bezeichnet, wenn die Bedingungen (5.16) und (5.17) erfüllt sind.

5.5.3 Thermodynamik mit internen Zustandsvariablen

Um das dynamische Materialverhalten des sich verformenden Kontinuums zu beschreiben, können drei mögliche Konzepte unterschieden werden (COLEMAN & GURTIN [19]):

- viskose Spannungen
- Funktionalbeschreibung durch Geschichtsintegrale
- interne Variablen Theorie

In dieser Arbeit wird das phänomenologische Materialverhalten mit Hilfe der internen Zustandsvariablen mit tensoriellem Charakter approximiert. Diese Modellierung entspricht formal einer mathematischen Parametrisierung der Geschichte der konstitutiven Parameter. Die internen Zustandsvariablen repräsentieren die aktuelle interne Struktur der Materieelemente. Zum Beispiel können die internen Variablen, die die isotrope und die kinematische Verfestigung in der klassischen Plastizitätstheorie darstellen, als eine mit Hilfe statistischer Methoden gefundene Mittelung der Verteilung von Gitterfehlern bzw. Versetzungen aufgefaßt werden. Eine umfassende Modellierung des Materialverhaltens erfordert eine unendliche Anzahl interner Variablen. Im Rahmen einer phänomenologischen Materialbeschreibung beschränkt man sich auf eine endliche Anzahl.

Der thermodynamische Zustand des Körpers ist dann neben den observierbaren, unabhängigen Zustandsvariablen, wie z.B. Spannung $\underline{\sigma}$ und Temperatur T , durch einen Satz interner Variablen $\underline{\alpha}$ festgelegt.

Die observierbaren, unabhängigen Zustandsvariablen können gleichzeitig als unabhängige thermodynamische Prozeßvariablen aufgefaßt werden.

Der thermomechanische Prozeß beginnt im Ausgangszustand des Körpers, der durch die Ausgangskonfiguration \mathcal{B}_0 und die anfänglichen Werte der Zustandsvariablen jedes Materieelementes festgelegt ist. Der Prozeß wird durch die Geschichte der unabhängigen Zustandsvariablen bestimmt.

Die Prozeßbeschreibung verfolgt das Ziel, die abhängigen Prozeßvariablen im Momentanzustand des Körpers zu bestimmen. Die inneren Zustandsvariablen werden den abhängigen thermodynamischen Prozeßvariablen zugeordnet. Die konstitutiven Beziehungen beschreiben die Entwicklung dieser abhängigen Prozeßvariablen. Die Prozeßbeschreibung muß den aus dem 1. und 2. Hauptsatz abgeleiteten Einschränkungen genügen.

Mit der Annahme des lokalen thermodynamischen Gleichgewichtszustandes ergibt sich der 1. Hauptsatz der Thermodynamik nach der Bilanz (5.3)

$$\dot{u} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} + r + \dot{w}. \quad (5.18)$$

Die mechanische Leistung läßt sich nach (4.16) in einen reversiblen Anteil $\dot{w}_{(r)}$ und einen irreversiblen Teil $\dot{w}_{(i)}$ aufspalten. Der irreversible Anteil $\dot{w}_{(i)}$ kann weiter in einen dissipativen Teil $\dot{w}_{(d)}$ und einen Teil $\dot{w}_{(h)}$, der mit dem nichtdissipativen Teil der Änderung der Materialstruktur verbunden werden kann, aufgespalten werden:

$$\dot{w}_{(i)} = \dot{w}_{(d)} + \dot{w}_{(h)}$$

mit

$$\dot{w}_{(h)} \geq 0.$$

Die innere Energie ist abhängig von einem geeignet gewählten Satz thermomechanischer Zustandsvariablen. Wir führen die Abhängigkeit

$$u = u(\underline{\underline{\epsilon}}_{(r)}, s, \underline{\underline{\alpha}})$$

ein. Dabei ist $\underline{\underline{\epsilon}}_{(r)}$ ein Dehnungstensor zur Beschreibung der reversiblen Verzerrungen. Im weiteren Verlauf der Ausführungen ist es sinnvoll, auf die Größen $\underline{\underline{S}}$ und T als unabhängige thermodynamische Zustandsvariablen überzugehen. Nach den Beziehungen (5.10) und (5.11) gelangt man zu einer Darstellung der freien Enthalpie

$$\Psi = u - \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\epsilon}}_{(r)} - Ts = \Psi(\underline{\underline{S}}, T, \underline{\underline{\alpha}}) \quad (5.19)$$

mit der Zeitableitung

$$\dot{\Psi} = \dot{u} - \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\epsilon}}_{(r)}^{\nabla} - \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{D}}_{(r)} - \dot{T}s - T\dot{s}. \quad (5.20)$$

Die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung wird in der Form (5.13)

$$\dot{s}_{(i)} = \dot{s} - \dot{s}_{(r)} \geq 0,$$

verwendet. $\dot{s}_{(i)}$ ist die Entropieproduktion und $\dot{s}_{(r)}$ die Entropieströmung. Einen Ausdruck für die Entropieströmung erhält man, wenn in der Beziehung (5.12) die linke und rechte Seite gleichgesetzt werden:

$$\dot{s}_{(r)} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{T}\right) + \frac{r}{T} = -\frac{1}{T}\left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div}\mathbf{q} - r\right) + \frac{1}{\rho T^2} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}T. \quad (5.21)$$

Durch die Verwendung von internen Zustandsvariablen wird diese Beziehung erweitert auf die Form

$$\dot{s}_{(r)} = -\frac{1}{T}\left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div}\mathbf{q} - r\right) + \frac{1}{\rho T^2} \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}T + \frac{1}{T} \dot{w}_{(h)} - \dot{\eta} - \frac{1}{T} \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} \underline{\underline{\alpha}}^{\nabla} \quad (5.22)$$

$\dot{\eta}$ ist die Entropieproduktion aufgrund der Wechselwirkung zwischen externer Energiezufuhr und Änderung der inneren Materialstruktur. Unter Beachtung der Leistungsbilanz (5.18) erhält man aus (5.13) und (5.22)

$$\dot{s}_{(i)} = \dot{s} - \frac{1}{T}(\dot{u} - \dot{w}) - \frac{1}{\rho T^2} \mathbf{q} \cdot \text{grad} T - \frac{1}{T} \dot{w}_{(h)} + \dot{\eta} + \frac{1}{T} \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\alpha}} \underline{\dot{\alpha}}.$$

Ersetzt man \dot{u} nach der Beziehung (5.20), so ist

$$\dot{s}_{(i)} = \frac{1}{T} \left(-\dot{\Psi} - \frac{1}{\rho_0} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{(r)} - \dot{T}s + \dot{w}_{(i)} - \frac{1}{\rho T} \mathbf{q} \cdot \text{grad} T - \dot{w}_{(h)} + T\dot{\eta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\alpha}} \underline{\dot{\alpha}} \right). \quad (5.23)$$

Mit

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbf{S}}} : \underline{\dot{\mathbf{S}}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}} : \underline{\dot{\alpha}}$$

ergibt sich aus (5.23)

$$\dot{s}_{(i)} = \frac{1}{T} \left[- \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\mathbf{S}}} + \frac{1}{\rho_0} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(r)} \right) : \underline{\dot{\mathbf{S}}} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T} + s \right) \dot{T} + \dot{w}_{(i)} + T\dot{\eta} \right] - \frac{1}{\rho T^2} \mathbf{q} \cdot \text{grad} T. \quad (5.24)$$

Es ist festzustellen, daß $\underline{\mathbf{S}}$ und T unabhängige, d.h. beliebig vorgebbare Größen sind. Um sicherzustellen, daß die Entropieproduktion immer größer oder gleich Null ist, muß

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(r)} = -\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\mathbf{S}}}, \quad (5.25)$$

$$s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (5.26)$$

gelten. Diese Gleichungen werden als thermische bzw. kalorische Zustandsgleichung bezeichnet. Mit (5.25) und (5.26) vereinfacht sich (5.24) zu:

$$\dot{s}_{(i)} = \frac{1}{T} (\dot{w}_{(i)} + T\dot{\eta}) - \frac{1}{\rho T^2} \mathbf{q} \cdot \text{grad} T \geq 0. \quad (5.27)$$

Durch einen Vergleich mit (5.15) können die Beziehungen

$$\dot{s}_{(st)} = \frac{1}{T} (\dot{w}_{(st)} + T\dot{\eta}) \geq 0 \quad (5.28)$$

und

$$\dot{s}_{(w)} = -\frac{1}{\rho T^2} \mathbf{q} \cdot \text{grad} T \geq 0$$

aufgestellt werden. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß in vielen Arbeiten die internen Prozesse als vollkommen dissipativ angenommen werden. Für diesen Fall ist

$\dot{w}_{(h)} = 0$ und

$$T\dot{\eta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\alpha}} \underline{\dot{\alpha}}.$$

Diese Formulierung führt im Unterschied zu (5.27) auf die Beziehung

$$\dot{s}_{(i)} = \frac{1}{T} \left[\dot{w}_{(i)} - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\alpha}} : \underline{\dot{\alpha}} \right] - \frac{1}{\rho T^2} \mathbf{q} \cdot \text{grad} T \geq 0, \quad (5.29)$$

die in der Literatur auch als CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung bezeichnet wird. Die Formulierung des 2. Hauptsatzes nach (5.29) soll hier nicht weiter verfolgt werden, da sie nicht in der Lage ist die experimentell bestätigte Wechselwirkung zwischen externer Energiezufuhr und gespeicherter Energie zu berücksichtigen.

Eine Gleichung für die Temperaturentwicklung läßt sich mit Hilfe der zeitlichen Ableitung der kalorischen Zustandsgleichung (5.26), (5.22), (5.27) und der Zerlegung $\dot{s} = \dot{s}_{(e)} + \dot{s}_{(i)}$ gewinnen:

$$c_p \dot{T} = \dot{w}_{(a)} - \frac{1}{\rho} \text{div} \mathbf{q} + r + T \dot{\eta} + T \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial \underline{S}} : \underline{\dot{S}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial \underline{\alpha}} : \underline{\dot{\alpha}} \right]. \quad (5.30)$$

Dabei bezeichnet

$$c_p = -T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2}$$

die spezifische Wärmekapazität. Die letzten beiden Terme in (5.30) stellen die sogenannten Koppelterme bei nicht-dissipativen Prozessen dar. In vielen Fällen können sie vernachlässigt werden.

Um die Entropieungleichungen nach (5.27) bzw. (5.28) zu erfüllen, können zwei unterschiedliche Wege beschritten werden. Der erste ist dadurch gekennzeichnet, daß die Entropieungleichung als Bilinearform thermodynamischer Flüsse $\underline{\mathbf{X}}_n$ und Kräfte $\underline{\mathbf{Y}}_n$ aufgeschrieben wird (WEGENER [133]):

$$\dot{s}_{(i)} = \sum_n \underline{\mathbf{X}}_n : \underline{\mathbf{Y}}_n \geq 0 \quad (5.31)$$

Die Flüsse sind die Zeitableitungen der extensiven Zustandsgrößen. Die Kräfte sind die zugehörigen energetisch konjugierten Größen. Auf Grundlage der CASIMIR-ONSAGER'schen Reziprozitätsbeziehungen werden die Beziehungen

$$\Phi = \Phi(\underline{\mathbf{X}}_n), \quad \underline{\mathbf{Y}}_n = \frac{\partial \Phi(\underline{\mathbf{X}}_n)}{\partial \underline{\mathbf{X}}_n}$$

angegeben (DE GROOT & MAZUR [32]). Dabei ist Φ ein zu definierendes Dissipationspotential. Durch die Forderung, daß Φ konvex sein muß, ist sichergestellt, daß die Entropieungleichung (5.31) erfüllt ist (CHABOCHE [14], ONAT [99]).

Eine andere Möglichkeit die Entropieungleichung zu erfüllen besteht darin, konstitutive Beziehungen für $\dot{\eta}$ und $\dot{w}_{(a)}$ anzugeben. Diese müssen so geartet sein, daß (5.27) bzw. (5.28) erfüllt sind. Konstitutive Beziehungen für $\dot{\eta}$ und $\dot{w}_{(a)}$ werden im Kapitel 6.6 aufgestellt.

6. Konstitutive Beziehungen

6.1 Phänomenologische Modellierungskonzepte der Reckalterung

6.1.1 Abgrenzung der Alterungseffekte

Zeit- und temperaturabhängige Änderungen der Mikrostruktur metallischer Legierungen werden als Alterung bezeichnet. Die Alterung wird durch Diffusionsprozesse bestimmter Atome bei erhöhten Temperaturen hervorgerufen, wobei neben anderen Eigenschaften das Deformationsverhalten des Metalls stark beeinflusst werden kann.

Zur phänomenologischen Beschreibung des Materialverhaltens ist es notwendig, diejenigen mikromechanischen Prozesse zu identifizieren, die für das Deformationsverhalten des Materials von Bedeutung sind. Nach KREMPL [49] sind dies Vorgänge, die eine mikrostrukturelle Veränderung des Materials hervorrufen (vgl. Kapitel 2.1). Neben den durch Deformation hervorgerufenen Veränderungen stehen diejenigen, die Diffusionsprozesse als Ursache haben. Die bei erhöhter Temperatur auftretenden Diffusionsprozesse metallischer Legierungen lassen sich in drei Gruppen unterteilen:

- 1) Diffusionsprozesse, die mit chemischen Reaktionen verbunden sind und die nicht in Wechselwirkung mit einhergehenden Deformationen treten. Sie werden durch eine aggressive Umgebung oder interne Reaktionen verursacht. Man bezeichnet sie im allgemeinen mit dem Begriff statische Reckalterung.
- 2) Diffusionsprozesse, die mit chemischen Reaktionen verbunden sind und die durch vorherige Deformationen initiiert oder gefördert werden. Man bezeichnet sie als dynamische Reckalterung.
- 3) Diffusionsprozesse, die nicht mit chemischen Reaktionen verbunden sind. Sie können die Auswirkungen vorheriger plastischer Deformationen neutralisieren. Man bezeichnet sie als Erholungsprozesse.

Alle drei Erscheinungsformen können in der Realität simultan auftreten. Zur Berücksichtigung in einem phänomenologischen Stoffgesetz ist es jedoch erforderlich, diese Effekte zu trennen.

Diffusionsprozesse nach Definition 3) werden in Stoffgesetzformulierungen berücksichtigt, die das Materialverhalten bei verschiedenen Temperaturniveaus modellieren sollen. Sie

werden allgemein mit dem Begriff Entfestigung erfaßt und sind für die Verringerung der entsprechenden Verfestigungsvariablen verantwortlich. Eine beispielhafte Formulierung ist bei LEHMANN [63] zu finden.

Kontinuumsmechanische Modelle mit Berücksichtigung der statischen Reckalterung gemäß Definition 1) sind von KREMPL [48, 49], MARQUIS & LEMAITRE [82], MARQUIS & COSTA MATOS [81] aufgestellt worden. MARQUIS entwickelt ein thermodynamisch konsistentes plastisches Stoffgesetz zur Beschreibung der statischen Reckalterung einer Aluminium-Kupfer-Legierung. Er untersucht die Kopplung zwischen plastischer Deformation und statischer Reckalterung. KREMPL untersucht den Einfluß der statischen Reckalterung auf das viskoplastische Materialverhalten. Insbesondere die Auswirkungen der Alterung bezüglich des Kriechverhaltens werden von ihm diskutiert.

Ansätze zur Berücksichtigung der dynamischen Reckalterung – also des Diffusionsprozesses nach Definition 2) – findet man bei SCHMIDT & MILLER [118, 119] und CHABOCHE [14]. Beide stellen ein viskoplastisches Stoffgesetz vor, daß durch die Einführung einer geeigneten internen Variablen die dynamische Reckalterung modellieren soll. CHABOCHE versucht insbesondere den Einfluß der dynamischen Reckalterung bezüglich der Ratenabhängigkeit des Materials zu berücksichtigen.

Nachfolgend werden einige Stoffgesetze, die eine Beschreibung der Reckalterung geben, vorgestellt und diskutiert. Die Erweiterung der Modelle zur Berücksichtigung der statischen und dynamischen Reckalterung kann in Verbindung mit den in Kapitel 2.1 vorgestellten werkstoffwissenschaftlichen Beschreibungsformen als erster Ansatzpunkt zur Berücksichtigung der Reckalterung in einem thermodynamisch konsistenten Stoffgesetz dienen.

6.1.2 Das Stoffgesetz von Krempl

Das Stoffgesetz von KREMPL [51, 50] stellt eine sogenannte vereinheitlichte Theorie ohne Fließ- und Belastungsbedingung dar. Es gehört zu den Stoffgesetzen, die auf dem Konzept der Überspannung basieren und ist daher geeignet, elasto-plastische und elasto-viskoplastische Prozesse zu beschreiben.

Die konstitutive Beziehung des allgemeinen anisotropen Modells ist (CERNOCKY & KREMPL [12])

$$\underline{\underline{M}}(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}) : \dot{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{G}}(\underline{\epsilon}) = \underline{\sigma} + \underline{\underline{K}}(\underline{\sigma}, \underline{\epsilon}) : \dot{\underline{\sigma}}. \quad (6.1)$$

$\underline{\underline{M}}$ und $\underline{\underline{K}}$ sind symmetrische, positiv definite Tensoren vierter Stufe. Die Größe $\underline{\underline{G}}$ hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \underline{\underline{G}}(\underline{0}) &= \underline{0}, \\ \underline{\underline{G}}(-\underline{\epsilon}) &= -\underline{\underline{G}}(\underline{\epsilon}). \end{aligned}$$

Beim Übergang zur isotropen einaxialen Formulierung vereinfacht sich (6.1) zu

$$m(\sigma, \epsilon)\dot{\epsilon} + g(\epsilon) = \sigma + k(\sigma, \epsilon)\dot{\sigma}, \quad (6.2)$$

wobei σ die axiale CAUCHY-Spannung und ϵ die axiale Nenndehnung in einem einaxialen Deformationsfeld sind. Die Materialfunktion $g(\epsilon)$ kann als Gleichgewichts-Spannungs-Dehnungskurve interpretiert werden, die man für ausreichend kleine Prozeßgeschwindigkeiten erhält. Setzt man

$$\frac{m(\sigma, \epsilon)}{k(\sigma, \epsilon)} = E,$$

wobei E der Elastizitätsmodul ist, so kann Gleichung (6.2) in der Form

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma - g(\epsilon)}{E k(\sigma - g(\epsilon))}$$

angegeben werden.

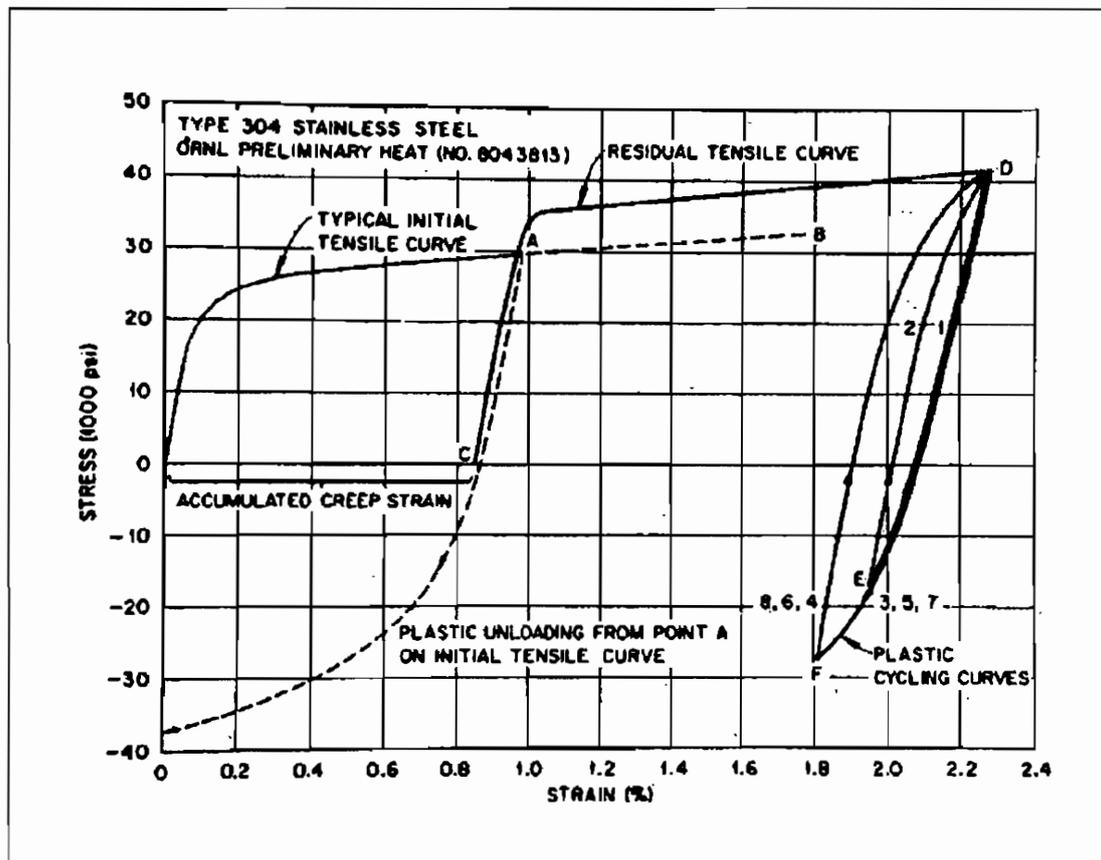


Abb. 6.1: Das Spannungsdehnungsverhalten bei Raumtemperatur einer jungfräulichen Probe (0-B) und einer Probe, die einem primären Kriechtest bei 86,2MPa und 649 °C für 2000 Stunden unterzogen wurde (C-D) (CORUM [20])

Um den Einfluß der Alterung auf das Kriechverhalten des Materials zu beschreiben, wird das Stoffgesetz modifiziert. Zur Verdeutlichung wird das Verhalten eines Versuchskörpers nach einem 2000-stündigen Kriechversuch bei 86.2 MPa und einer Temperatur von 649 °C in einem Zugversuch bei Raumtemperatur untersucht (Abb. 6.1).

Die Spannungs-Dehnungskurve dieser Probe (Kurve C-D) liegt oberhalb der Kurve des jungfräulichen Probenkörpers (Kurve 0-B). KREMPL widerspricht in [49] der Interpretation, daß primäres Kriechen zu einer Verfestigung des Materials geführt hat. Es ist vielmehr die Wechselwirkung zwischen Kriechen und Alterung, die zur Erhöhung der nachfolgenden Fließspannung führt.

In KREMPL [48, 49] werden die konstitutiven Beziehungen auf Prozesse, die die Alterung des Materials einbeziehen, erweitert. Die Materialfunktionen $g(\cdot)$ und $k(\cdot)$ werden zusätzlich von der Alterungszeit t_{alt} abhängig gemacht. Die Größe t_{alt} ist die Zeitspanne, die der Werkstoff vor der Belastung einer erhöhten Temperatur ausgesetzt ist. Die modifizierte konstitutive Beziehung ist

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma - g(\epsilon, t_{alt})}{Ek(\sigma - g(\epsilon, t_{alt}), t_{alt})}. \quad (6.3)$$

Unter der Annahme, daß die zeitliche Änderung von g und k nur langsam mit der Alterung des Materials fortschreitet, d.h. das spontane Deformationsverhalten unbeeinflusst von der Alterung bleibt, wird die Abhängigkeit zwischen Kriechen und Alterung des Materials untersucht.

Für Kriechen ($\sigma = \sigma_0 = konst.$) erhält man aus (6.3)

$$\dot{\epsilon} = \frac{\sigma_0 - g(\epsilon, t_{alt})}{Ek(\sigma_0 - g(\epsilon, t_{alt}), t_{alt})}.$$

Man erkennt, daß das Kriechverhalten des Materials von den beiden Materialfunktionen $g(\cdot)$ und $k(\cdot)$ abhängt, die wiederum durch die Alterung bestimmt werden.

Um den quantitativen Einfluß der Alterung auf die Materialfunktionen festzustellen, schlägt KREMPL ein spezielles Versuchsprogramm vor (KREMPL [49]). Das Versuchsprogramm umfaßt Experimente mit jungfräulichen Proben, die vor Belastung unterschiedlich lange Alterungsphase durchlaufen. Ein anschließender Zugversuch mit Wechsel der Verformungsgeschwindigkeit liefert Aussagen bezüglich der Auswirkung der Alterung auf das Verfestigungsverhalten und der Abhängigkeit von der Verformungsgeschwindigkeit.

6.1.3 Das Stoffgesetz von Chaboche

Das von CHABOCHE [14, 15] entwickelte viskoplastische Stoffgesetz ist durch die Aufspaltung der Dehnungsrate in einen elastischen und inelastischen Anteil, die Existenz einer Fließgrenze und die Verwendung interner Variablen zur Beschreibung des Verformungsverhaltens gekennzeichnet.

Ausgangspunkt zur Aufstellung der konstitutiven Beziehungen ist die Annahme der Existenz eines thermodynamischen Potentials

$$\varphi = \varphi(\underline{\epsilon}_e, T, \underline{\alpha}_i).$$

$\underline{\epsilon}_e$ stellt den elastischen Dehnungstensor, T die Temperatur und $\underline{\alpha}_i$ einen Satz interner Variablen dar. Mit den Annahmen und Voraussetzungen der klassischen irreversiblen Thermodynamik nach Abschnitt 5.5.2 lassen sich die Beziehungen

$$\underline{\sigma} = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\epsilon}_e}, \quad s = -\frac{\partial \varphi}{\partial T} \quad \text{und} \quad \underline{A}_i = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\alpha}_i}$$

angeben. $\underline{\sigma}$ bezeichnet den Spannungstensor, s die Entropie und \underline{A}_i die zu den internen Variablen $\underline{\alpha}_i$ assoziierten thermodynamischen Kräfte.

Die Entwicklung der Dissipation wird durch ein zweites Potential ϕ kontrolliert:

$$\phi = \phi(\dot{\underline{\epsilon}}_e, \dot{\underline{\alpha}}_i; \underline{\epsilon}_e, T, \underline{\alpha}_i).$$

Das Dissipationspotential Φ ist von der Rate der elastischen Dehnung $\dot{\underline{\epsilon}}_e$ und der Rate der internen Variablen $\dot{\underline{\alpha}}_i$ abhängig; die Größen $\underline{\epsilon}_e$, T und $\underline{\alpha}_i$ treten als Parameter auf. Die CLAUSIUS-DUHEM Ungleichung (5.13) fordert, daß die Entropieproduktion \dot{s} immer größer oder gleich Null ist. CHABOCHE führt einen der irreversiblen Entropieproduktion äquivalenten Ausdruck, den er Dissipation \mathcal{D} nennt, ein und durch

$$\mathcal{D} = \underline{\sigma} : \dot{\underline{\epsilon}}_p - \underline{A}_i : \dot{\underline{\alpha}}_i - \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \text{grad} T \geq 0 \quad (6.4)$$

gegeben ist. Dabei ist \mathbf{q} der Vektor des Wärmeflusses über die Oberfläche des Körpers.

Mit Verwendung der LEGENDRE-FENCHEL Transformation läßt sich das Potential ϕ in

$$\phi^* = \phi^*(\underline{\sigma}, \underline{A}_i; \underline{\epsilon}_e, T, \underline{\alpha}_i)$$

überführen. Man gelangt unter der Voraussetzung der allgemeinen Normalenregel zu der Darstellung

$$\dot{\underline{\epsilon}}_p = \frac{\partial \phi^*}{\partial \underline{\sigma}} \quad \text{und} \quad \dot{\underline{\alpha}}_i = -\frac{\partial \phi^*}{\partial \underline{A}_i}.$$

Die konstitutiven Beziehungen – mit Berücksichtigung einer kinematischen und isotropen Verfestigungsvariablen – ergeben sich aus den Ansätzen (CHABOCHE [14])

$$\varrho\varphi = \frac{1}{2}\underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_e : \underline{\underline{\varepsilon}}_e + \frac{4}{3}C a \underline{\underline{\xi}} : \underline{\underline{\xi}} + W(p)'$$

und

$$\phi^* = \frac{K}{n+1} \left\langle \frac{G - (3/4a)\underline{\underline{X}} : \underline{\underline{X}} + (1/3)C^2 a \underline{\underline{\xi}} : \underline{\underline{\xi}}}{K} \right\rangle^{n+1},$$

wobei p die akkumulierte plastische Dehnung, $\underline{\underline{\xi}}$ die kinematische Verfestigungsvariable und $\underline{\underline{\Lambda}}$, C und a Materialfunktionen bzw. -parameter darstellen.

Die Funktion

$$G = J(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - R - k \leq 0$$

legt den elastischen Bereich fest. $J(\cdot)$ ist nach der VON MISES Fließbedingung als

$$J(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\sigma}}'} \quad (6.5)$$

definiert. Hierbei ist $\underline{\underline{\sigma}}'$ der Tensor der Deviatorspannungen.

Aus dem Potential der freien Energie φ erhält man die Gleichungen der assoziierten Variablen

$$\underline{\underline{\sigma}} = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_e} = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_e, \quad (6.6)$$

$$\underline{\underline{X}} = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\xi}}} = \frac{2}{3} C a \underline{\underline{\xi}}, \quad (6.7)$$

$$R = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial p} = W'(p)$$

und aus dem Dissipationspotential ϕ^* die Größen

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p &= \frac{\partial \phi^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2} \dot{p} \frac{\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{X}}'}{J(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})}, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \phi^*}{\partial R} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p, \\ \dot{\underline{\underline{\xi}}} &= -\frac{\partial \phi^*}{\partial \underline{\underline{X}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p - \frac{3}{2a} \underline{\underline{X}} \dot{p}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

$\underline{\underline{X}}$ ist der Tensor der kinematischen Verfestigung und R eine skalarwertige Größe, die ein Maß für die isotrope Verfestigung darstellt. Die Evolutionsgleichung der kinematischen Verfestigung $\underline{\underline{X}}$ kann mit (6.7) und (6.8) geschrieben werden als

$$\dot{\underline{\underline{X}}} = \frac{2}{3} C a \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p - C \underline{\underline{X}} \dot{p}.$$

Eine Evolutionsgleichung für R ist

$$\dot{R} = b(R_s - R)\dot{p}.$$

Dabei bezeichnet R_s den Grenzradius der Fließfläche, der die Entwicklung der isotropen Verfestigung bei zyklischer Belastung beschreibt und b eine Materialfunktion.

Die Gleichungen (6.6) bis (6.8) stellen die grundlegenden konstitutiven Beziehungen des viskoplastischen Stoffgesetzes nach CHABOCHE [14] dar. Erweiterungen dieser Beziehungen werden hinsichtlich der Beschreibung des zyklischen Sättigungsverhaltens, der Erholung und der Alterung des Materials gegeben (CHABOCHE [15, 16], CHABOCHE & ROUSSELIER [13])

Unter Alterung wird die zeitabhängige Veränderung der Mikrostruktur eines Körpers verstanden. In das Stoffgesetz wird ein Ansatz zur Berücksichtigung der dynamischen Reckalterung aufgenommen. Es wird nach einem von SCHMIDT & MILLER [118, 119] vorgeschlagenen Modell eine zusätzliche interne Variable R^* eingeführt, die die Einheit einer Spannung hat und als „drag stress“ bezeichnet wird.

Es ergibt sich

$$J(\underline{\sigma} - \underline{X}) - k - R - R^* - K\dot{p}^{1/n} = 0, \tag{6.9}$$

bzw. für den einaxialen Zugversuch

$$\sigma = \underbrace{X + k + R + R^*}_{\sigma_i} + K\dot{p}^{1/n}. \tag{6.10}$$

σ_i wird als interne Spannung und $K\dot{p}^{1/n}$ als viskoser, geschwindigkeitsabhängiger Teil der Spannung bezeichnet. Die Größe R^* wird als Funktion der Prozeßgeschwindigkeit angesetzt:

$$R^* = R^*(\dot{p}). \tag{6.11}$$

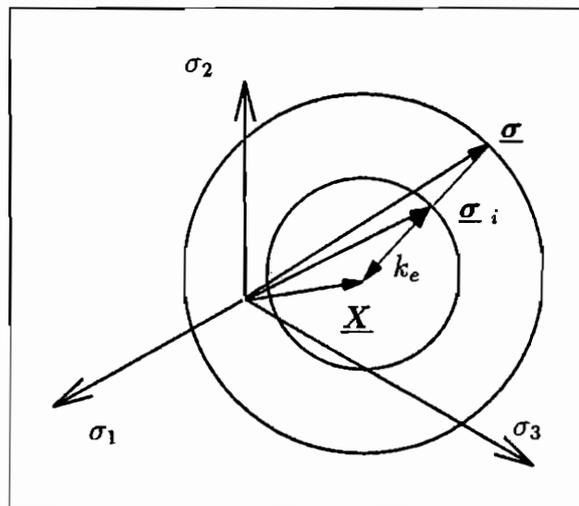


Abb. 6.2: Darstellung im HAIGH-WESTERGAARD-Spannungsraum

Eine Darstellung des Spannungszustandes in der Deviatorebene des Spannungsraumes ist in Abb. 6.2 gegeben. Der Mittelpunkt des elastischen Bereichs wird durch \underline{X} und der Radius durch $k_e = k + R + R^*$ beschrieben. Der innere Kreis stellt die Fließfläche des zugrunde liegenden plastischen Modells dar. Liegt der aktuelle Spannungspunkt außerhalb der Fließfläche, kann das Materialverhalten als viskoplastisch charakterisiert werden. Alle Spannungspunkte auf dem äußeren Kreis stellen Orte gleicher Dissipation \mathcal{D} bzw. gleicher Rate der akkumulierten plastischen Dehnung p dar.

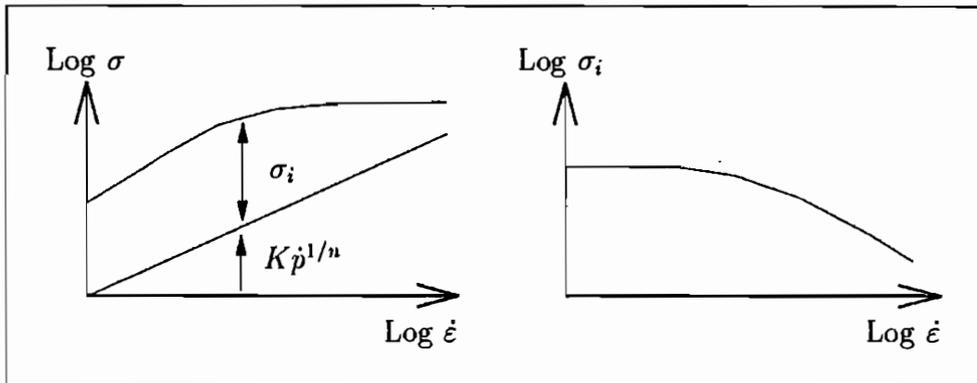


Abb. 6.3: Überlagerung von alterungsabhängigen (dynamische Reckalterung) und viskosen Effekten (nach CHABOCHE [14])

Aus der Betrachtung im HAIGH-WESTERGAARD-Spannungsraum und Gleichung (6.10) wird ersichtlich, daß die Modellierung der dynamischen Reckalterung über die interne Spannung σ_i erfolgt. Diese Spannung kann als Gleichgewichtsspannung des begleitenden plastischen Prozesses angesehen werden. Durch die Einführung der Abhängigkeit (6.11) wird σ_i ratenabhängig.

Die Ratenabhängigkeit der internen Spannung σ_i wird auch aus Abb. 6.3 deutlich, in der schematisch die entgegengesetzten Abhängigkeiten der beiden Spannungsanteile σ_i und $K\dot{p}^{1/n}$ aufgezeigt werden.

6.1.4 Das Stoffgesetz von Marquis

Das von MARQUIS & LEMAITRE [82], MARQUIS [80] und MARQUIS & MATTOS [81] entwickelte Stoffgesetz basiert auf der Theorie der internen Variablen und versucht im Rahmen der irreversiblen Thermodynamik, eine Beschreibung des elasto-plastischen Materialverhaltens zu geben. Die konstitutiven Beziehungen werden aus der freien Energie und einem Dissipationspotential bestimmt. Unter Alterung wird hier die nach KREMPL [49] definierte statische Reckalterung verstanden (vgl. Kapitel 6.1.1 Definition 1).

Das Potential der freien Energie φ ist

$$\begin{aligned} \varrho\varphi(\underline{\varepsilon}, T, \underline{\varepsilon}_p, p, \underline{\xi}, a) = & \frac{1}{2} \underline{\underline{C}} \underline{\varepsilon}_e : \underline{\varepsilon}_e + \frac{1}{2} c_1 c_0 \underline{\xi} : \underline{\xi} + b \left(p + \frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma p) \right) \\ & + a(cp - L) + L, \end{aligned} \quad (6.12)$$

wobei $\underline{\varepsilon}_e = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_p$ der elastische Dehnungstensor, $\underline{\underline{C}}$ der Elastizitätstensor, $\underline{\xi}$ die kinematischen Verfestigungsvariable, p die isotropen Verfestigung und a eine skalare interne Variable bezüglich der Alterung ist. Die Größen b , γ , c , c_0 , c_1 und L sind materialabhängige Parameter.

Die Zustandsgleichungen, die die Beziehung zwischen Zustandsgrößen und assoziierten Variablen darstellen, ergeben sich aus (6.12) zu

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} &= \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\varepsilon}_e} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\varepsilon}_e \Rightarrow \dot{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} \cdot \dot{\underline{\varepsilon}}_e, \\ \underline{\mathbf{X}} &= \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\xi}} = c_1 c_0 \underline{\xi} \Rightarrow \dot{\underline{\mathbf{X}}} = c_1 c_0 \dot{\underline{\xi}}, \\ R &= \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial p} = b(1 - \exp(-\gamma p)) + ca \Rightarrow \dot{R} = b\gamma \exp(-\gamma p) \dot{p} + c\dot{a}, \\ Z &= \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial a} = cp - L \Rightarrow \dot{Z} = c\dot{p}. \end{aligned}$$

Die Evolutionsgleichungen der internen Variablen werden aus einem Dissipationspotential

$$\Phi^*(\underline{\sigma}, R, \underline{\mathbf{X}}, Z, \text{grad}T; T, \underline{\varepsilon}_p, p, \underline{\xi}, a) = \Phi_p^*(\underline{\sigma}, R, \underline{\mathbf{X}}) + \Phi_a^*(Z; \underline{\varepsilon}_p, p, a)$$

abgeleitet. Der Anteil Φ_p^* beschreibt die Dissipation aufgrund plastischer und Φ_a^* die Dissipation aufgrund alterungsbedingter Formänderungen.

Die Evolutionsgleichungen der plastischen Dehnung $\underline{\varepsilon}_p$ und der internen Variablen $\underline{\xi}$, p und a können mit Hilfe einer Fließbedingung F als plastisches Potential Φ_p^* bestimmt werden. Die Fließbedingung F kommt aus der Menge C aller konvexen Funktionen mit der Eigenschaft

$$C = \{(\underline{\sigma}, R, \underline{\mathbf{X}}) | F(\underline{\sigma}, R, \underline{\mathbf{X}}) = J(\underline{\sigma} - \underline{\mathbf{X}}) - R - \sigma_y \leq 0\},$$

und $J(\cdot)$ nach Gleichung (6.5). Die Entwicklungsgleichung der statischen Reckalterungsvariablen a wird aus dem Potential

$$\Phi_a^* = [\xi - \beta \exp(-\gamma p)](a_\infty - a)(L - cp),$$

mit

$$a_\infty = A + (1 - A) \exp(-k'(\epsilon_{II}^p)_{\max})$$

abgeleitet. Die Größen $\epsilon_{II}^p = (2/3)\underline{\epsilon}_p : \underline{\epsilon}_p$, q , B , γ' , A und k' sind Materialparameter, so daß $q > \beta$, $0 \leq A \leq 1$ und $(x) = \text{Max}[x, 0]$ ist. Mit der Normalenregel ergibt sich:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\epsilon}}_p &= \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \lambda = \frac{3}{2} \frac{\underline{S} - \underline{X}}{J(\underline{\sigma} - \underline{X})} \lambda, \\ \dot{p} &= -\frac{\partial F}{\partial R} \lambda = \lambda, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\xi}} &= -\frac{\partial F}{\partial \underline{X}} \lambda = \frac{3}{2} \frac{\underline{S} - \underline{X}}{J(\underline{\sigma} - \underline{X})}, \\ \dot{a} &= [\xi - \beta \exp(-\gamma p)](a_\infty - a)H(L - cp). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Der plastische Multiplikator λ wird mit Hilfe der Konsistenzbedingung $\dot{F} = 0$ bestimmt. Die Freiwerte in der Entwicklungsgleichung (6.14) der statischen Reckalterungsvariablen a können auf zwei unterschiedlichen Wegen bestimmt werden:

Ist die akkumulierte plastische Dehnung p konstant, erhält man eine Darstellung für a nach (6.13) in der Form

$$a(t) = [R(t) - R(0)]/c,$$

wenn $a(t=0) = 0$ ist. Die Konstante c kann aus der Differenz

$$c = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t, p=0) - R(t=0, p=0)$$

bestimmt werden, wenn $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t, p=0) = 1$. Die Größe a gibt die relative Änderung der Größe R an.

In Abb. 6.4 sind die für eine Aluminium-Kupfer Legierung im Versuch ermittelten Werte der statischen Reckalterungsvariablen über der Zeit dargestellt.

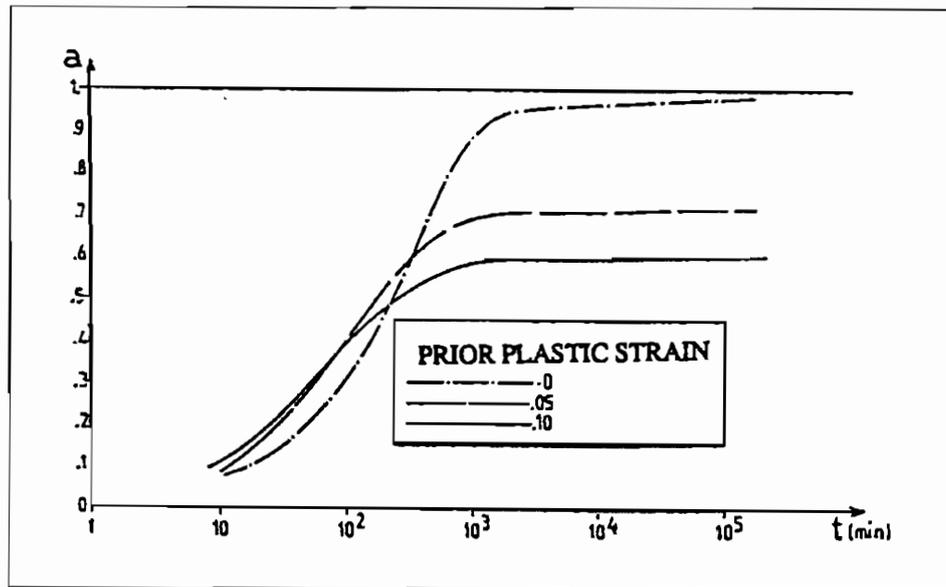


Abb. 6.4: Entwicklung von a für unterschiedliche Vordehnungen bei Raumtemperatur (MARQUIS & MATTOS [81])

Eine zweite Möglichkeit zur Bestimmung eines Entwicklungsgesetzes für a bietet die Erfüllung der thermodynamischen Restriktion in Form der CLAUSIUS-DUHEM Ungleichung. Die Dissipationsfunktion ist:

$$\mathcal{D} = \text{Sp}(\underline{\sigma} \cdot \underline{\dot{\epsilon}}_p) - R\dot{p} - \text{Sp}(\underline{X} \cdot \underline{\dot{\xi}}) - Z\dot{a} > 0. \quad (6.15)$$

Für $\underline{\epsilon}_p = \text{konst.}$ reduziert sich (6.15) auf

$$\mathcal{D} = \langle L - cp \rangle \langle a_\infty - a \rangle [\xi - \beta \exp(-\gamma'p)] > 0.$$

Ist $\underline{\epsilon}_p = \underline{0}$, erhält man

$$\mathcal{D} = L\dot{a}. \quad (6.16)$$

Gleichung (6.16) beschreibt die Dissipationsleistung während des Alterungsprozesses. Der Parameter L kann mit der gesamten Dissipationsleistung während des Alterungsprozesses identifiziert werden.

$$\int_0^\infty \mathcal{D} dt = La_\infty, \quad a_\infty = 1$$

Daraus folgt die Bestimmungsgleichung für a :

$$a = \frac{\int_0^t \mathcal{D} dt}{L}.$$

Die auf beiden Wegen gewonnenen Ergebnisse zur Bestimmung von a führen zu guten Übereinstimmungen.

6.2 Inelastisches Stoffgesetz mit Berücksichtigung der statischen und dynamischen Reckalterung

Basierend auf den Ausführungen im Abschnitt 4.4 wird ein Materialmodell verwendet bei dem der Tensor der Deformationsgeschwindigkeit \underline{D} in den reversiblen Anteil $\frac{D}{(r)}$ und den irreversiblen Anteil $\frac{D}{(i)}$ additiv aufgespalten wird:

$$\underline{D} = \frac{D}{(r)} + \frac{D}{(i)} .$$

Das entsprechende rheologische Modell ist in Abb. 6.5 dargestellt.

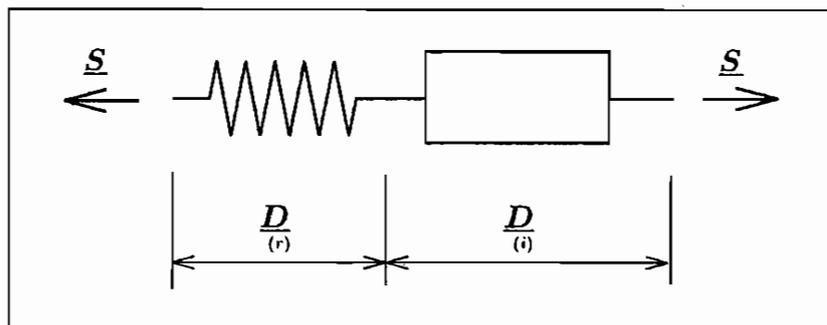


Abb. 6.5: Allgemeines rheologisches Modell

Das inelastische Verformungsverhalten kann gemäß der mikromechanischen Differenzierung der Versetzungsbewegungen (s. Kapitel 2.1) in

- thermisch aktivierte Verformungsprozesse, die auch vom Spannungszustand abhängen, und in
- spannungsinduzierte Verformungsprozesse, die auch von der Temperatur abhängen,

eingeteilt werden (LEHMANN [66]). Die Entwicklungsgleichungen der internen Zustandsvariablen, die den thermisch aktivierten Prozeß beschreiben, können in der Form des ARRHENIUS-Ansatzes – hier für eine allgemeine skalarwertige Größe –

$$\dot{\alpha} = f(\underline{S}, T, \underline{\alpha}; \underline{S}, \dot{T}) \exp(-Q/kT) \quad (6.17)$$

dargestellt werden. Q ist eine spezifische Aktivierungsenergie und k die Boltzmannkonstante.

Die Entwicklungsgleichung spannungsinduzierter interner Zustandsvariablen kann durch eine äquivalente verformungsabhängige Darstellung ersetzt werden. Für eine skalarwertige Größe ist dies z.B.:

$$\dot{\alpha} = f(\underline{S}, T, \underline{\alpha}; \underline{S}, \dot{T}) \dot{w}_{(i)} .$$

Dabei ist $\dot{w}_{(i)}$ die inelastische Leistung nach (4.16).

Thermisch aktivierte Vorgänge, wie z.B. Hochtemperaturkriechen, Rekristallisation, Erholung oder Alterung, können in einem spannungsfreien Zustand auftreten. Spannungsinduzierte Vorgänge sind immer mit einer thermischen Aktivierung verbunden (z.B. plastische oder viskoplastische Deformationen bei niedriger homologer Temperatur).

6.3 Elastisches Materialverhalten

Das thermoelastische Verhalten des zu untersuchenden Körpers soll isotrop und unabhängig von den inelastischen Deformationen sein. D.h., daß die Materialkonstanten, die das thermoelastische Verhalten bestimmen, unabhängig von den inelastischen Deformationen sind (LEHMANN [68]). Die spezifische freie Enthalpie nach (5.19) kann daher in

$$\Psi(\underline{\mathbf{S}}, T, \alpha) = \Psi^r(\underline{\mathbf{S}}, T) + \Psi^i(\underline{\mathbf{S}}, T, \alpha) \quad (6.18)$$

aufgespalten werden. Für viele Metalle ist eine lineare Abhängigkeit der elastischen Deformationen von der aktuellen Spannung und Temperatur festzustellen. Es kann somit der Ansatz

$$\Psi^r(\underline{\mathbf{S}}, T) = -\frac{1}{2\rho_0} \left\{ \frac{1}{9K} [\text{Sp}(\underline{\mathbf{S}})]^2 + \frac{1}{2G} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{S}} + 2\alpha(T - T_0) \text{Sp}(\underline{\mathbf{S}}) \right\}$$

gemacht werden. Aus der thermischen Zustandsgleichung (5.25) erhält man

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{(r)} = \frac{1}{9K} \text{Sp}(\underline{\mathbf{S}}) \underline{\mathbf{1}} + \frac{1}{2G} \underline{\mathbf{S}} + \alpha(T - T_0) \underline{\mathbf{1}}$$

und schließlich mit

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

und

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

die Gleichung

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{(r)} = \underline{\underline{D}}_{(r)} = \frac{1}{2G} \left\{ \underline{\underline{\nabla}} + \frac{1 - 2\nu}{3(1 + \nu)} \text{Sp}(\underline{\underline{\nabla}}) \underline{\mathbf{1}} \right\} + \alpha \dot{T} \underline{\mathbf{1}}.$$

Dabei ist K der Kompressions-, G der Schub- und E der Elastizitätsmodul. Die Größen ν und α werden als Querkontraktionszahl und thermischer Ausdehnungskoeffizient bezeichnet.

6.4 Plastisches Materialverhalten

Eine Entkopplung zwischen thermoelastischen und thermoplastischen Materialverhalten geschieht durch die Aufspaltung der spezifischen freien Enthalpie nach (6.18). Der zweite Term

$$\Psi^i = \Psi^i(\underline{\mathbf{S}}, T, \underline{\boldsymbol{\alpha}})$$

charakterisiert das thermoplastische Verhalten des Werkstoffes.

Es wird angenommen, daß plastische Deformationen dann auftreten, wenn sowohl eine Fließbedingung als auch eine Belastungsbedingung erfüllt sind:

$$\text{Fließbedingung:} \quad F(\underline{\mathbf{S}}, T, \underline{\boldsymbol{\alpha}}) = 0$$

$$\text{Belastungsbedingung:} \quad \frac{\partial F}{\partial \underline{\mathbf{S}}} : \underline{\dot{\mathbf{S}}} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} > 0$$

Als Fließbedingung wird hier eine auf Erweiterungen von MELAN [88], SHIELD & ZIEGLER [122] und ARMSTRONG & FREDERICK [1] beruhende VON MISES Fließbedingung

$$F(\underline{\mathbf{S}}, T, \underline{\boldsymbol{\xi}}, \kappa) = (\underline{\mathbf{T}} - \underline{\boldsymbol{\xi}}) : (\underline{\mathbf{T}} - \underline{\boldsymbol{\xi}}) - g(\kappa, T) = 0. \quad (6.19)$$

gewählt. $\underline{\mathbf{T}}$ steht für den Deviator der gewichteten CAUCHY-Spannungen $\underline{\mathbf{S}}$. Das Verfestigungsverhalten wird durch die beiden internen Zustandsvariablen $\underline{\boldsymbol{\xi}}$ und κ bestimmt. Die zu (6.19) korrespondierende Konsistenzbedingung lautet

$$\dot{F} = 2(\underline{\mathbf{T}} - \underline{\boldsymbol{\xi}}) : (\underline{\dot{\mathbf{T}}} - \underline{\dot{\boldsymbol{\xi}}}) - \frac{\partial g}{\partial \kappa} \dot{\kappa} - \frac{\partial g}{\partial T} \dot{T} = 0.$$

Die in dem elasto-plastischen Stoffgesetz

$$\underline{\mathbf{D}} = \frac{1}{2G} \left\{ \underline{\dot{\mathbf{S}}} + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \text{Sp}(\underline{\dot{\mathbf{S}}}) \underline{\mathbf{1}} \right\} + \alpha \dot{T} \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{D}}_{(i)}$$

auftretenden inelastischen Deformationen werden aus einem der Fließbedingung assoziierten Formänderungsgesetz

$$\underline{\mathbf{D}}_{(i)} = \begin{cases} \lambda \underline{\mathbf{n}} & , \text{ wenn } F = 0 \text{ und } \dot{F} = 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (6.20)$$

bestimmt, wobei

$$\underline{\mathbf{n}} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\mathbf{S}}} / \left\| \frac{\partial F}{\partial \underline{\mathbf{S}}} \right\|$$

den Normaleneinheitstensor an die Fließfläche bezeichnet. Der Ansatz (6.20) läßt sich nach ZIEGLER [140, 141] aus dem Prinzip der maximalen Entropieproduktion und weiteren, über die Hauptsätze der Thermodynamik hinausgehenden Zusatzannahmen herleiten. Da

es sich bei (6.20) um einen Ansatz handelt, sind auch Erweiterungen (z.B. LEHMANN [62], MAIER [75]) sowie nicht assoziierte Formänderungsgesetze (z.B. RANIECK & BRUHNS [109]) entwickelt worden.

Der Faktor λ kann aus der Konsistenzbedingung bestimmt werden, wobei $\dot{\kappa}$ und $\dot{\xi}$ durch entsprechende Evolutionsgleichungen ausgedrückt werden. SZEPAN [127] wählt den Ansatz

$$\dot{\kappa} = \frac{\delta}{\rho_0} (\underline{T} - \underline{\xi}) : \underline{D}_{(i)} - \beta \kappa \sqrt{\underline{D}_{(i)} : \underline{D}_{(i)}} \quad (6.21)$$

und

$$\dot{\xi} = \zeta \underline{D}_{(i)} - \gamma \xi \sqrt{\underline{D}_{(i)} : \underline{D}_{(i)}}, \quad (6.22)$$

wobei die zweiten Summanden Abklingterme darstellen und zur Beschreibung von Erholungsprozessen dienen. Eine weitergehende Diskussion der Entwicklungsgleichung der kinematischen Verfestigungsvariablen $\underline{\xi}$ findet man bei LEHMANN [65].

6.4.1 Statische Reckalterung

Das rheologische Modell der elasto-plastischen Verformung unter Berücksichtigung der statischen Reckalterung ist in Abb. 6.6) dargestellt. Das elastische Verhalten wird durch ein Federelement, das plastische Verhalten durch zwei Reibungselemente symbolisiert. Die auf das System aufgebrachte Spannung läßt sich zerlegen in

$$\underline{S} = (\underline{S} - \underline{S}_\rho) + \underline{S}_\rho,$$

wobei \underline{S}_ρ den Spannungszuwachs aufgrund der statischen Reckalterung bezeichnet.

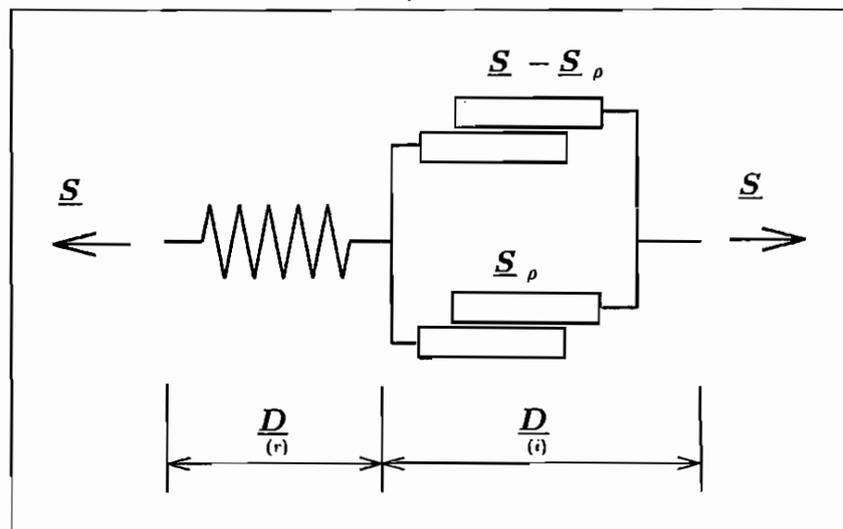


Abb. 6.6: Rheologisches Modell der elasto-plastischen Verformung (erweitertes PRANDTL-Modell)

Wie in Kapitel 2.2.1 erläutert, beeinflusst die statische Reckalterung durch die Blockade von Versetzungen den Fließbeginn, d.h. das Einsetzen plastischer Deformationen. Bezüglich des rheologischen Modells bedeutet dies, daß zur Modellierung der statischen Reckalterung ein zusätzliches Reibungselement eingefügt werden muß. Der Spannungsbeitrag \underline{S}_ρ , der am Reibungselement abfällt, ist abhängig von der vorhandenen plastischen Dehnung, der Alterungstemperatur und der Alterungszeit.

Zur Berücksichtigung der statischen Reckalterung in einem phänomenologischen Materialmodell wird in Anlehnung an das Stoffgesetz von MARQUIS & LEMAITRE [82] und MARQUIS & MATTOS [81] eine neue interne Zustandsvariable

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}(\kappa, T, \rho)$$

eingeführt. Da der Einfluß der statischen Reckalterung auf das Verformungsverhalten als isotrop charakterisiert werden kann, ist die Einführung einer skalarwertigen Größe ρ ausreichend.

Das plastische Stoffgesetz nach Kapitel 6.4 wird dahingehend erweitert, daß in der Fließbedingung (6.19) neben $g(\cdot)$ eine weitere, von der statischen Reckalterungsvariablen ρ abhängige Größe g_ρ hinzutritt:

$$F_\rho(\underline{S}, T, \underline{\xi}, \kappa, \rho) = (\underline{T} - \underline{\xi}) : (\underline{T} - \underline{\xi}) - g(\kappa, T) - g_\rho(\rho, T) = 0. \quad (6.23)$$

Die neue Materialfunktion verursacht eine Aufweitung der Fließfläche und somit mit ansteigender statischer Reckalterungsvariablen ρ eine Zunahme der Fließspannung (Abb. 6.7).

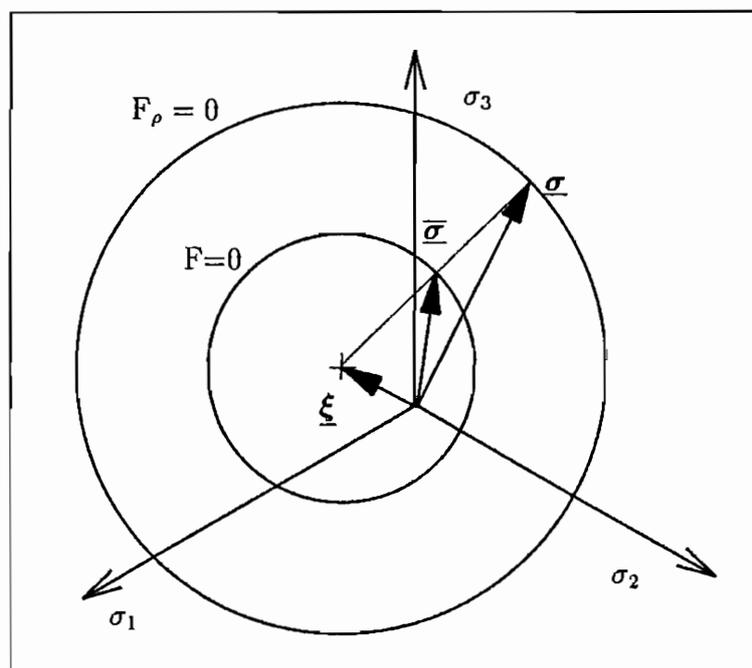


Abb. 6.7: Schematische Darstellung im HAIGH-WESTERGAARD-Spannungsraum

Die statische Reckalterung kann aufgrund der Diffusionsbewegung der Fremdatome als thermisch aktivierter Prozeß aufgefaßt werden. Die Entwicklungsgleichung der zugehörigen internen Zustandsvariablen ρ entspricht dann der Form des *ARRHENIUS*-Ansatzes nach (6.17):

$$\dot{\rho} = f(\underline{S}, T, \kappa, \underline{\xi}, \rho; \underline{S}, \dot{T}) \exp(-Q/kT).$$

Das Auftreten der statischen Reckalterung ist – wie oben erörtert – an bestimmte Randbedingungen gebunden:

- Die Verformungsgeschwindigkeit muß unterhalb eines materialspezifischen Grenzwertes liegen, um den statischen Reckalterungsprozeß zu ermöglichen. Dies kann aus der Betrachtung der mikromechanischen Vorgänge begründet werden:

Der Prozeß der Diffusion der eingelagerten Fremdatome zu den Versetzungen ist zeitabhängig. Nur wenn sich die Versetzungen hinreichend langsam oder gar nicht bewegen, können die Fremdatome diese erreichen und blockieren. Für die makroskopische Beschreibung bedeutet dies, daß nur bei ausreichend kleinen Verformungsgeschwindigkeiten das plastische Materialverhalten beeinflusst werden kann.

- Der Diffusionskoeffizient der eingelagerten Fremdatome muß größer als ein materialabhängiger Schwellenwert sein, um einen meßbaren Spannungszuwachs zu erzielen. Da der Diffusionskoeffizient temperaturabhängig ist, ist diese Bedingung äquivalent mit der Festlegung eines zulässigen Temperaturbereiches für die statische Reckalterung. Die obere Grenze des Temperaturbereichs wird durch den Übergang der statischen Reckalterung zur Überalterung (s. Kapitel 2.1) und zur Ausscheidungsverfestigung bestimmt.

Die Berücksichtigung dieser Bedingungen führt zu einer modifizierten Entwicklungsgleichung der statischen Reckalterungsvariablen ρ :

$$\dot{\rho} = \langle f(\underline{S}, T, \kappa, \underline{\xi}, \rho; \underline{S}, \dot{T}) \exp(-Q/kT) \rangle$$

mit

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & , \text{wenn } T_{\rho_u} < T < T_{\rho_o} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

T_{ρ_u} und T_{ρ_o} sind materialspezifische Werte, die den Einfluß der statischen Reckalterung auf den Verformungsprozeß kennzeichnen.

Die explizite funktionale Form der Entwicklungsgleichung der statischen Reckalterungsvariablen orientiert sich an Erkenntnissen, die aus mikromechanischen Untersuchungen und im Versuch gewonnen wurden:

- Die statische Reckalterung ist von der Zeit, der Temperatur und der akkumulierten plastischen Dehnung abhängig (STOLTE & HELLER [126], MARKULA & HEISKANEN [78], PETERSON [103], HUNDY [45]).
- Für große Alterungszeiten wird ein von der Temperatur und Vordehnung abhängiger Sättigungswert erreicht (MARQUIS [80], LOUAT [71]).

Ein Ansatz, der diesen Forderungen genügt, ist:

$$\dot{\rho} = \dot{\rho} = \langle [c_1 - c_2 \exp(-c_3 \kappa D)](\rho^\infty - \rho)^{c_4} \rangle \quad (6.24)$$

In (6.24) bezeichnen c_1 bis c_4 Materialparameter, $D = D_0 \exp(-Q/kT)$ den Diffusionskoeffizienten der Fremdatome und

$$\rho^\infty = \rho^\infty(\kappa, T)$$

ein von der Vordehnung und Temperatur abhängigen Sättigungswert.

Die Entwicklungsgleichung der isotropen Verfestigungsvariablen nach (6.21) wird dahingehend modifiziert, daß anstelle der Gesamtspannung die um die statische Reckalterung verminderte Spannung verwendet wird. Es ist dann

$$\dot{\kappa} = \frac{\delta}{\varrho_0} (\underline{\mathbf{T}} - \underline{\mathbf{T}}_\rho - \underline{\boldsymbol{\xi}}) : \underline{\underline{\mathbf{D}}} - \beta \kappa \sqrt{\underline{\underline{\mathbf{D}}} : \underline{\underline{\mathbf{D}}}}.$$

Die Evolutionsgleichung der kinematischen Verfestigungsvariablen $\underline{\boldsymbol{\xi}}$ ist durch (6.22) gegeben.

6.5 Elasto-viskoplastisches Materialverhalten

Die vorangegangenen Überlegungen zum elasto-plastischen Materialverhalten können mit dem Überspannungskonzept von PERZYNA [100, 101, 102] auf das viskoplastische Verhalten erweitert werden. Die nachfolgenden Überlegungen orientieren sich an den Ausführungen in BRUHNS & LEHMANN [11], BRUHNS [9] und LEHMANN [63, 65].

Das rheologische Modell der elasto-viskoplastischen Verformung ist in Abb. 6.8 dargestellt. Die auf das System aufgebrachte Spannung läßt sich zerlegen in

$$\underline{\mathbf{S}} = \underbrace{\underline{\mathbf{S}} - \underline{\mathbf{S}}_v}_{\underline{\underline{\mathbf{S}}}} + \underbrace{\underline{\mathbf{S}}_v}_{\underline{\underline{\mathbf{S}}}}, \quad (6.25)$$

wobei $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ die Gleichgewichtsspannung bei quasistatischer Prozeßführung und $\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\mathbf{S}} - \underline{\mathbf{S}}$ den geschwindigkeitsabhängigen Teil der Spannung darstellt. In Analogie zum plastischen Materialverhalten soll auch das viskose Verhalten aus der spezifischen freien Enthalpie Ψ^i nach (6.18) ableitbar sein.

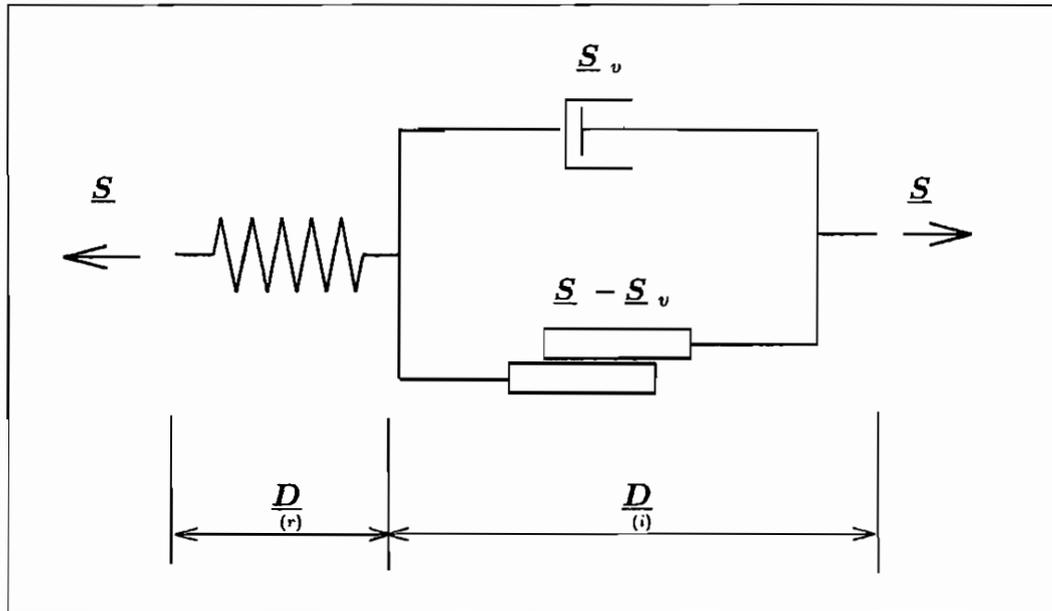


Abb. 6.8: Rheologisches Modell der elasto-viskoplastischen Verformung (BINGHAM-Modell)

Das elasto-viskoplastische Stoffgesetz ist

$$\underline{D} = \underline{D}_{(r)} + \underline{D}_{(i)} = \underline{D}_{(r)} + \ll \Phi \gg \underline{n} \quad (6.26)$$

mit

$$\underline{n} = \frac{\partial F}{\partial \underline{S}} / \left\| \frac{\partial F}{\partial \underline{S}} \right\|.$$

Zur Bestimmung der konstitutiven Beziehungen führen wir eine Fließbedingung der Form

$$F(\underline{S}, T, \underline{\xi}, \kappa) = (\underline{T} - \underline{\xi}) : (\underline{T} - \underline{\xi}) - g(\kappa, T) = f^2 - g > 0$$

ein. Der begleitende Gleichgewichtszustand erfüllt die Bedingung

$$\bar{F}(\bar{\underline{S}}, T, \underline{\xi}, \kappa) = (\bar{\underline{T}} - \underline{\xi}) : (\bar{\underline{T}} - \underline{\xi}) - g(\kappa, T) = \bar{f}^2 - g = 0.$$

Es läßt sich eine verallgemeinerte Überspannung

$$\Lambda = \sqrt{f^2} - \sqrt{g} \quad (6.27)$$

angeben, mit der die in (6.26) auftretende Nebenbedingung sich als

$$\ll x \gg = \begin{cases} x, & \text{wenn } \Lambda \geq 0 \text{ und } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ausdrücken läßt.

Die Forderung, daß das plastische und viskoplastische Verzerrungsinkrement die gleiche Richtung haben sollen, also

$$\underline{n} = \frac{\partial F}{\partial \underline{S}} / \left\| \frac{\partial F}{\partial \underline{S}} \right\| = \overline{\underline{n}} = \frac{\partial F}{\partial \overline{\underline{S}}} / \left\| \frac{\partial F}{\partial \overline{\underline{S}}} \right\|$$

ist, führt auf

$$\lambda = \Phi.$$

Die Überspannungsfunktion

$$\Phi = \Phi(T, \Lambda) \quad \text{mit} \quad \Phi(T, \Lambda = 0) = 0 \quad (6.28)$$

ist von der Temperatur T und der verallgemeinerten Überspannung Λ abhängig.

Die Entwicklungsgleichungen der isotropen und kinematischen Verfestigungsvariablen lassen sich analog zum elasto-plastischen Fall angeben:

$$\dot{\kappa} = \frac{\delta}{\rho_0} (\overline{\underline{T}} - \underline{\xi}) : \frac{\underline{D}}{(i)} - \beta \kappa \sqrt{\frac{\underline{D}}{(i)} : \frac{\underline{D}}{(i)}}, \quad (6.29)$$

$$\overset{\nabla}{\underline{\xi}} = \zeta \frac{\underline{D}}{(i)} - \gamma \underline{\xi} \sqrt{\frac{\underline{D}}{(i)} : \frac{\underline{D}}{(i)}}. \quad (6.30)$$

6.5.1 Dynamische Reckalterung

Zur Berücksichtigung der dynamischen Reckalterung wird das viskoplastische Stoffgesetz (6.26) modifiziert. Die dynamische Reckalterung beeinflusst das viskose Verformungsverhalten des Werkstoffes, da der Reibungswiderstand der Versetzungsbewegung durch die gleichzeitige Diffusionsbewegung der Fremdatome erhöht wird (vgl. Kapitel 2.2.2).

Das rheologische Modell der viskoplastischen Verformung wird um ein Parallelglied, daß zur Modellierung der dynamischen Reckalterung dient, erweitert (Abb. 6.9). Das Parallelglied besteht aus einem Reibungs- und einem Dämpferelement. Der Dämpfer modelliert das viskose Verhalten aufgrund der dynamischen Reckalterung, während das Reibungselement den Grenzzustand der dynamischen Reckalterung bei ausreichend kleinen Prozeßgeschwindigkeiten festlegt. Dieser Grenzzustand entspricht der statischen Reckalterung des Materials. Die Modellierung ermöglicht einen Übergang zwischen statischer und dynamischer Reckalterung.

Das rheologische Modell impliziert eine Zerlegung der Spannung in einen weiteren Anteil, der hier als dynamische Reckalterungsspannung \underline{S}_ρ bezeichnet werden soll. Es ergibt sich die Zerlegung der Spannung in einen quasistatischen Gleichgewichtsanteil $\overline{\underline{S}}$ und einen viskosen Anteil $\overline{\underline{S}}$ in Analogie zu (6.25) als

$$\underline{S} = \underbrace{\underline{S} - \underline{S}_v - \underline{S}_\rho}_{\overline{\underline{S}}} + \underbrace{\underline{S}_v + \underline{S}_\rho}_{\overline{\underline{S}}}. \quad (6.31)$$

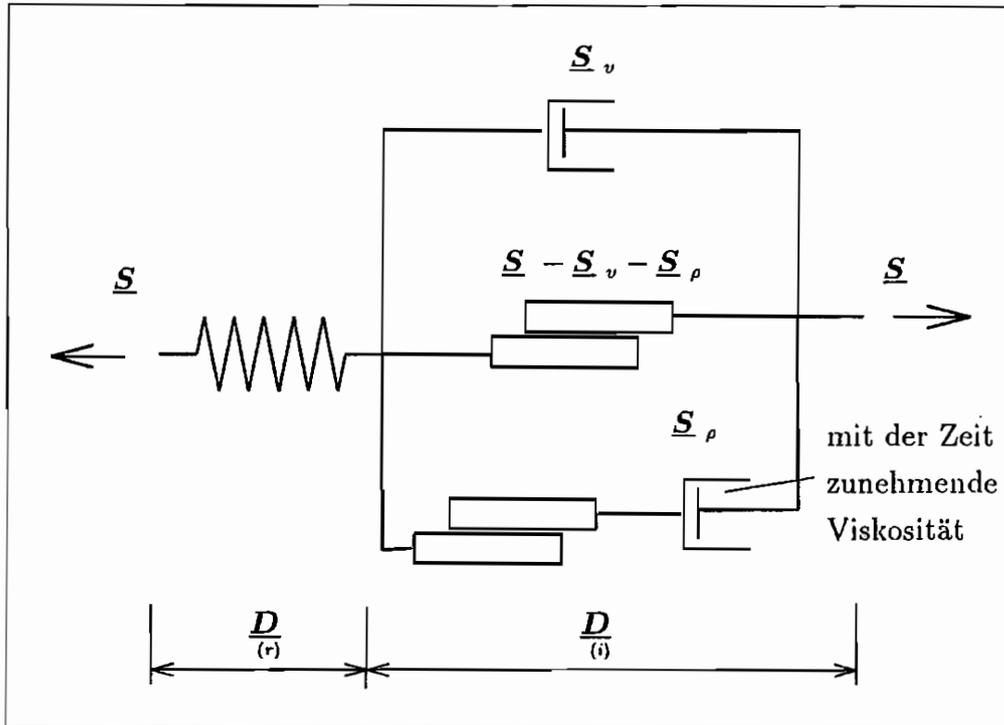


Abb. 6.9: Rheologisches Modell der elastoviskoplastischen Verformung mit Berücksichtigung der dynamischen Reckalterung (erweitertes BINGHAM-Modell)

An die dynamische Reckalterungsspannung ist auf Basis der mikrophysikalischen Zusammenhänge die Forderungen zu stellen, daß sie

- bei zunehmender Prozeßgeschwindigkeit absinkt und
- bei ausreichend kleiner Prozeßgeschwindigkeit sich dem Spannungswert \underline{S}_ρ der statischen Reckalterung annähert.

Die erste Forderung wird durch den Charakter des neu eingeführten Dämpferelementes erfüllt. Dieses weist eine mit der Zeit zunehmende Viskosität auf. Das hat zur Folge, daß einem Prozeß mit geringer Geschwindigkeit ein größerer Widerstand als einem Prozeß mit großen Geschwindigkeiten entgegengesetzt wird. Die zweite Forderung wird – wie schon oben angesprochen – durch die Hinzunahme eines Reibungselementes im Strang der dynamischen Reckalterungsspannung \underline{S}_ρ erfüllt. Das Reibungselement wird dann aktiviert, wenn der aktuelle Spannungszustand dem der statischen Reckalterung entspricht.

Die konstitutiven Beziehungen werden zur Erfassung der dynamischen Reckalterung modifiziert. Das Überspannungsmodell nach (6.26) wird erweitert durch

$$\underline{D} = \underline{D}_{(r)} + \ll \Phi_{dyn} \gg \underline{n} = \underline{D}_{(r)} + \ll (h(\cdot) \cdot \Phi(\cdot) - \ll \Phi_\rho(\cdot) \gg) \gg \underline{n}. \quad (6.32)$$

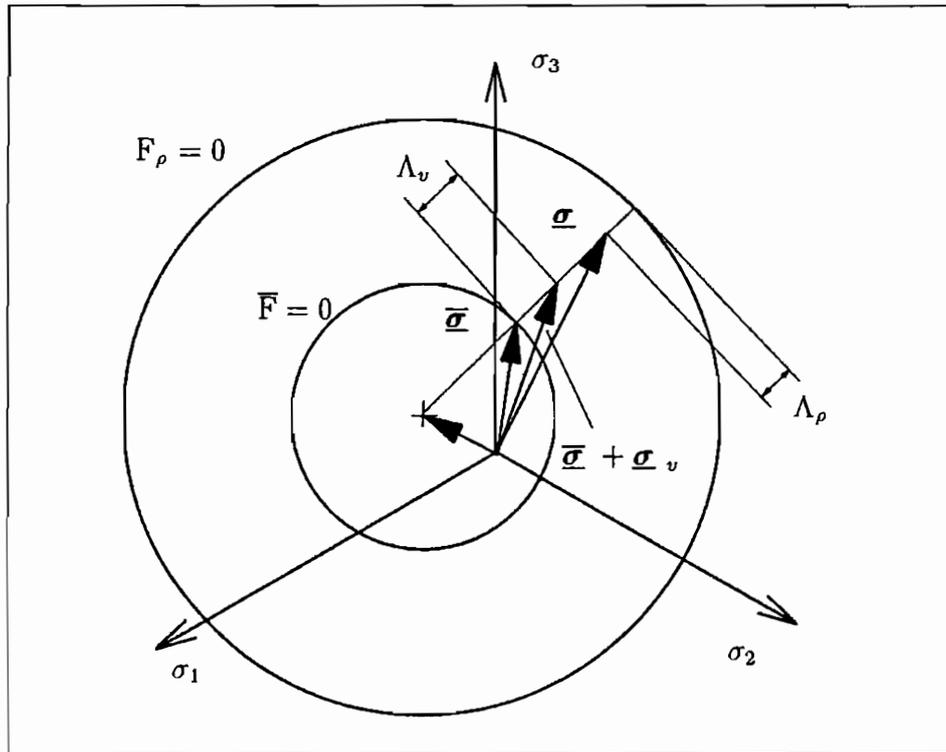


Abb. 6.10: Schematische Darstellung im HAIGH-WESTERGAARD-Spannungsraum

Die neue Überspannungsfunktion

$$\Phi_{dyn}(\cdot) = h(\cdot) \cdot \Phi(\cdot) - \lll \Phi_\rho(\cdot) \ggg \quad (6.33)$$

besteht aus einem Anteil $h(\cdot) \cdot \Phi$, der bei verschwindender dynamischer Reckalterung der Überspannungsfunktion (6.28) des viskoplastischen Materialmodells entspricht, und einem Anteil Φ_ρ , der den geschwindigkeitsabhängigen Einfluß der dynamischen Reckalterung erfaßt. Mit der Materialfunktion $h(\cdot)$ kann der Einfluß der dynamischen Reckalterung auf das „normale“ viskoplastische Verhalten modelliert werden. Der Ansatz (6.33) ist so konzipiert, daß dieses Modell in Abwesenheit der dynamischen Reckalterung in das viskoplastische nach Kapitel 6.5 übergeht.

Um die Abhängigkeit der Überspannungsfunktion von den Zustandsgrößen bzw. den aus ihnen resultierenden Prozeßgrößen festzulegen, betrachten wir den Zustand im HAIGH-WESTERGAARD-Spannungsraum (Abb. 6.10). Der aktuelle Spannungszustand ist von den beiden Grenzflächen, die durch die Gleichungen

$$\bar{F}(\bar{\underline{S}}, T, \underline{\xi}, \kappa) = (\bar{\underline{T}} - \underline{\xi}) : (\bar{\underline{T}} - \underline{\xi}) - g(\kappa, T) = \bar{f}^2 - g = 0 \quad (6.34)$$

und

$$\begin{aligned}
F_\rho(\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{T}_\rho, T, \underline{\xi}, \kappa, \rho) = \\
(\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{T}_\rho - \underline{\xi}) : (\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{T}_\rho - \underline{\xi}) - g(\kappa, T) - g_\rho(\rho, T) = \\
f_\rho^2 - g - g_\rho = 0
\end{aligned} \tag{6.35}$$

gegeben sind, eingeschlossen. Liegt der Spannungspunkt auf der inneren Fläche mit der Gleichung $\bar{F} = 0$, so entspricht dies einem Zustand ohne Reckalterung. Als Begrenzung tritt der aus dem plastischen Materialverhalten gewonnene Gleichgewichtsspannungszustand $\bar{\mathbf{S}}$ auf. Befindet sich der Spannungspunkt auf der äußeren Fläche $F_\rho = 0$, so ist der Zustand der vollständigen statischen Reckalterung erreicht.

Denkbar sind auch Spannungszustände außerhalb der Fläche $F_\rho = 0$. Zu diesen Spannungszuständen kann man aber nur gelangen, wenn die Prozeßgeschwindigkeit ausreichend groß ist. Da aber bei großen Prozeßgeschwindigkeiten die statische Reckalterungsvariable ρ nicht zunimmt bzw. $\rho = 0$ ist, ist $F_\rho = \bar{F}$. Dies bedeutet, daß die dynamische Reckalterung nicht auftritt. Wir beschränken uns daher auf den Spannungszustand zwischen diesen Flächen.

Der Spannungszustand mit dynamischer Reckalterung setzt sich zusammen aus

$$\underline{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}} + \underline{\mathbf{S}}_v + \underline{\mathbf{S}}_\rho.$$

Die Gleichgewichtsspannung $\bar{\mathbf{S}}$ genügt dem plastischen Stoffgesetz nach Kapitel 6.4 und kann auf diesem Weg bestimmt werden. Analog ergibt sich die viskose Spannung ohne dynamischen Reckalterungsanteil $\underline{\mathbf{S}}_v$ aus dem viskoplastischen Stoffgesetz. Die zugehörige Überspannung und Überspannungsfunktion können nach (6.27) und (6.28) übernommen werden. Die Überspannung stellt sich nach Abb. 6.10 dar als

$$\Lambda = \sqrt{f_v^2} - \sqrt{g(\kappa, T)}$$

mit

$$f_v^2 = (\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{T}_v - \underline{\xi}) : (\bar{\mathbf{T}} + \mathbf{T}_v - \underline{\xi}).$$

Zur Festlegung der konstitutiven Beziehung für den aktuellen Spannungszustand $\underline{\mathbf{S}}$ wird in Anlehnung an das Überspannungskonzept eine weitere verallgemeinerte Überspannung

$$\Lambda_\rho = \sqrt{g(\kappa, T) + g_\rho(\rho, T)} - \sqrt{f^2}$$

mit

$$f^2 = (\mathbf{T} - \underline{\xi}) : (\mathbf{T} - \underline{\xi}).$$

definiert (Abb. 6.10). Sie gibt den Abstand zwischen aktuellem Spannungspunkt und äußerer Grenzfläche F_ρ an. Die Überspannung ist so konzipiert, daß sie den Wert Null annimmt, wenn der aktuelle Spannungspunkt auf der Grenzfläche $F_\rho = 0$ liegt, d.h. ein Zustand der statischen Reckalterung erreicht ist.

Die Überspannungsfunktion nach (6.33) hat die Gestalt:

$$\Phi_{dyn}(\Lambda, \Lambda_\rho, T) = h(\Lambda_\rho) \cdot \Phi(\Lambda, T) - \lll \Phi_\rho(\Lambda_\rho, T) \ggg \quad (6.36)$$

Die Nebenbedingung in dieser Gleichung bedeutet

$$\lll x \ggg = \begin{cases} x, & \text{wenn } \Lambda_\rho \geq 0 \text{ und } T_{\rho_u} < T < T_{\rho_o} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.37)$$

Um den Übergang vom viskoplastischen Modell mit dynamischer Reckalterung zum viskoplastischen Modell ohne dynamische Reckalterung zu ermöglichen, muß die Überspannungsfunktion Φ_{dyn} die Bedingung

$$\Phi_{dyn}(\Lambda, \Lambda_\rho = 0, T) = \Phi(\Lambda, T)$$

erfüllen. Hieraus resultiert, daß

$$h(\Lambda_\rho = 0) = 1 \quad \text{und} \quad \Phi(\Lambda_\rho = 0, T) = 0$$

sein muß.

6.5.1.1 Reckalterung und Kriechen

Im Bereich der Reckalterung werden für viele Stähle geringere Kriechdehnungen als in Abwesenheit der Reckalterung dokumentiert (SIKKA, BRINKMAN & MCCOY [124], CHO & FINDLEY [17], CHABOCHE [14]).

Daß die Alterung des Materials einen signifikanten Einfluß auf das Kriech- und Erholungsverhalten hat, zeigt Abb. 6.11. Mit zunehmender Alterungszeit t_s sinkt die Kriechdehnung und die Dehnung der nachfolgenden Erholung.

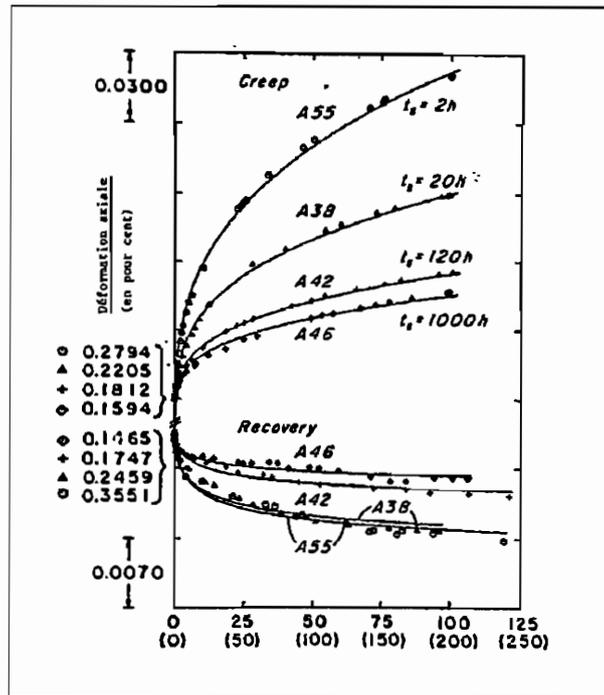


Abb. 6.11: Einfluß vorheriger Alterung (t_s ist die Alterungszeit) bei 593 °C auf das Kriechverhalten bei 593 °C bei einem Spannungsniveau von 86,2MPa und auf die nachfolgende Erholung (CHO & FINDLEY [17])

Die mikrophysikalische Ursache der geringen Kriechdehnung ist, daß, sobald der Kriechprozeß beginnt, die Prozeßgeschwindigkeit stark abfällt und dadurch den Fremdatomen genügend Zeit bleibt, zu den Versetzungen zu diffundieren und sie zu blockieren. Da die Spannung konstant ist, kann die Blockade der Versetzung nicht überwunden werden.

Das Materialgesetz nach (6.32) reduziert sich für den Kriechprozeß $\dot{\underline{S}} = \underline{0}$ auf die Beziehung

$$\underline{D} = \underline{D}_{(i)} = \lll \Phi_{dyn} \ggg \underline{n} = \lll (h \cdot \Phi - \lll \Phi_p \ggg) \ggg \underline{n} . \quad (6.38)$$

Die beiden Überspannungsfunktionen sind streng monoton steigende Funktionen in Abhängigkeit der beiden Überspannungen. Dies bedeutet, daß die anfängliche Kriechdehnungsrate des viskoplastischen Modells mit dynamischer Reckalterung um den Term Φ_ρ kleiner ist als die des Modells ohne dynamische Reckalterung.

Verstärkt wird die Verringerung der Kriechdehnungsrate im weiteren Verlauf des Prozesses durch die Entwicklung der Überspannung Λ_ρ . Für Kriechprozesse ergibt sich die Rate

$$\dot{\Lambda}_\rho = \frac{1}{2\sqrt{g + g_\rho}} \frac{\partial g}{\partial \kappa} \dot{\kappa},$$

die zu jedem Zeitpunkt des Prozesses größer oder gleich Null ist. Dies bedeutet, daß die Überspannung Λ_ρ und die Überspannungsfunktion Φ_ρ steigen. Der stationäre Zustand stellt sich für $\underline{D}_i = \underline{0}$ ein.

6.5.1.2 Reckalterung und Relaxation

Um das Verhalten des Modells im Relaxationsversuch zu untersuchen wird das Stoffgesetz (6.32) invertiert

$$\underline{\dot{S}} = 2G \left[\underline{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Sp}(\underline{D}) \underline{1} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{\partial g}{\partial \kappa} \underline{1} - \ll (\Phi - \ll \Phi_\rho \gg) \gg \underline{n} \right], \quad (6.39)$$

Diese Beziehung vereinfacht sich für den isothermen Relaxationsversuch, $\underline{D} = \underline{0}$ zu

$$\underline{\dot{S}} = 2G \left[- \ll (h \cdot \Phi - \ll \Phi_\rho \gg) \gg \underline{n} \right]. \quad (6.40)$$

Die Überspannungsfunktion Φ_ρ beeinflusst den Relaxationsprozeß derart, daß der Spannungsabfall im Vergleich zum Modell ohne dynamische Reckalterung vermindert wird. Verstärkt wird diese Wirkung noch durch das Anwachsen der Überspannung Λ_ρ während diese Prozesses. Der stationäre Zustand stellt sich für $\underline{D}_i = \underline{0}$ ein.

6.6 Beziehungen zwischen externer Energiezufuhr und Änderung des internen Zustandes

Geht man davon aus, daß ein Teil der von außen zugeführten Arbeit zur Erzeugung inelastischer Deformationen sofort dissipiert, d.h. in Wärmeenergie umgesetzt wird, und der andere Teil für die nicht-dissipative Änderung der internen Materialstruktur verantwortlich ist, so gelangt man zu der Aufspaltung der inelastischen Arbeitsrate:

$$\dot{w}_{(i)} = \dot{w}_{(d)} + \dot{w}_{(h)} \quad (6.41)$$

Mit der Annahme, daß die Änderung der nicht-dissipativen Arbeit $\dot{w}_{(h)}$ mit den Arbeistraten der spannungs- bzw. deformationinduzierten internen Variablen zu bilanzieren ist, ergibt sich:

$$\dot{w}_{(h)} = \frac{\partial \Psi^i}{\partial \kappa} \dot{\kappa} + \frac{\partial \Psi^i}{\partial \underline{\xi}} : \underline{\overset{\nabla}{\xi}} + T \dot{\eta}. \quad (6.42)$$

In dieser Gleichung kann $\dot{\eta}$ als die Entropieproduktion aufgrund der Wechselwirkung zwischen externer Energiezufuhr und Änderung der internen Materialstruktur interpretiert werden.

Mit der Aufspaltung (6.41) und der Bilanzgleichung (6.42) ergeben sich die Entropieungleichungen (5.27) bzw. (5.28) und die Entwicklungsgleichung der Temperatur (5.30) als:

$$\dot{s}_{(i)} = \frac{1}{T} \left[\dot{w}_{(d)} + \dot{w}_{(h)} - \frac{\partial \Psi^i}{\partial \kappa} \dot{\kappa} - \frac{\partial \Psi^i}{\partial \underline{\xi}} : \underline{\overset{\nabla}{\xi}} \right] - \frac{1}{\rho T^2} \mathbf{q} \cdot \text{grad} T \geq 0 \quad (6.43)$$

$$\dot{s}_{(s)} = \frac{1}{T} \left[\dot{w}_{(d)} + \dot{w}_{(h)} - \frac{\partial \Psi^i}{\partial \kappa} \dot{\kappa} - \frac{\partial \Psi^i}{\partial \underline{\xi}} : \underline{\overset{\nabla}{\xi}} \right] \geq 0 \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} c_p \dot{T} = & \dot{w}_{(d)} + \dot{w}_{(h)} - \frac{\partial \Psi^i}{\partial \kappa} \dot{\kappa} - \frac{\partial \Psi^i}{\partial \underline{\xi}} : \underline{\overset{\nabla}{\xi}} - \frac{1}{\rho} \text{div} \mathbf{q} + r \\ & + T \left[\frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial T \partial \underline{S}} : \underline{\overset{\nabla}{S}} + \frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial T \partial \underline{\alpha}} : \underline{\overset{\nabla}{\alpha}} \right] \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (6.42) lassen sich weitere Einschränkungen für die Formulierung des Stoffgesetzes gewinnen. Für den dissipierenden Anteil der Arbeitsrate wird bei plastischem Materialverhalten der Ansatz

$$\dot{w}_{(d)} = \frac{\xi}{\rho_0} (\underline{S} - \underline{\xi}) : \underline{D}_{(i)} \quad (6.45)$$

gemacht. Aus dieser Beziehungen folgt für $\dot{w}_{(h)}$ unmittelbar

$$\dot{w}_{(h)} = \dot{w}_{(i)} - \dot{w}_{(d)} = \frac{1 - \xi}{\rho_0} \underline{S} : \underline{D}_{(i)} + \frac{\xi}{\rho_0} \underline{\xi} : \underline{D}_{(i)}$$

Dabei ist $\xi = \xi(T, \kappa, \underline{\xi})$ vom aktuellen Zustand abhängig. Setzt man diesen Ausdruck in (6.42) ein, so erhält man mit (6.21), (6.22) und (6.24)

$$\begin{aligned} \frac{1-\xi}{\varrho_0} \underline{\mathbf{S}} : \underline{\mathbf{D}} + \frac{\xi}{\varrho_0} \underline{\xi} : \underline{\mathbf{D}} &= \frac{\partial \Psi^i}{\partial \kappa} \left[\frac{\delta}{\varrho_0} (\underline{\mathbf{T}} - \underline{\xi}) : \underline{\mathbf{D}} - \beta \kappa \sqrt{\underline{\mathbf{D}} : \underline{\mathbf{D}}} \right] \\ &+ \frac{\partial \Psi^i}{\partial \underline{\xi}} : \left[\zeta \underline{\mathbf{D}} - \gamma \underline{\xi} \sqrt{\underline{\mathbf{D}} : \underline{\mathbf{D}}} \right] \\ &+ T \dot{\eta} \end{aligned}$$

Eine Möglichkeit zur Erfüllung dieser Gleichung ist (SZEPAN [127]):

$$\frac{\partial \Psi^i}{\partial \kappa} = \frac{1-\xi}{\delta} \quad (6.46)$$

$$\frac{\partial \Psi^i}{\partial \underline{\xi}} = \frac{1}{\varrho_0 \zeta} \underline{\xi} \quad (6.47)$$

$$T \dot{\eta} = \left(\frac{1-\xi}{\delta} \beta \kappa + \frac{1}{\varrho_0 \zeta} \gamma \underline{\xi} : \underline{\xi} \right) \sqrt{\underline{\mathbf{D}} : \underline{\mathbf{D}}} \quad (6.48)$$

Der Ansatz für $T \dot{\eta}$ ist dabei so gewählt, daß

$$T \dot{\eta} \geq 0$$

ist. In Verbindung mit dem Ansatz (6.45) bedeutet dies, daß die Dissipationsungleichungen (5.27) und (5.28) bzw. (6.43) und (6.44) immer erfüllt sind. Das Stoffgesetz ist thermodynamisch konsistent.

Aus (6.46), (6.47) und (6.48) ergeben sich – ohne Kenntnis der spezifischen freien Enthalpie Ψ^i selbst – folgende Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial \underline{\xi} \partial \kappa} = \frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial \kappa \partial \underline{\xi}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left(\frac{1-\xi}{\delta} \right) = \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial}{\partial \kappa} \left(\frac{1}{\zeta} \underline{\xi} \right) \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Psi^i}{\partial \kappa \partial T^2} &= \frac{\partial^3 \Psi^i}{\partial T^2 \partial \kappa} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T} \frac{\partial c_p}{\partial \kappa} = -\frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(\frac{1-\xi}{\delta} \right) \\ \frac{\partial^3 \Psi^i}{\partial \underline{\xi} \partial T^2} &= \frac{\partial^3 \Psi^i}{\partial T^2 \partial \underline{\xi}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varrho_0}{T} \frac{\partial c_p}{\partial \underline{\xi}} = -\frac{\partial^2}{\partial T^2} \left(\frac{1}{\zeta} \underline{\xi} \right) \end{aligned} \quad (6.50)$$

Im Falle viskoplastischen Materialverhaltens lautet der Ansatz für $\dot{\psi}_{(d)}$:

$$\dot{\psi}_{(d)} = \frac{\xi}{\varrho_0} (\overline{\underline{\mathbf{S}}} - \underline{\xi}) : \underline{\mathbf{D}} + \frac{1}{\varrho_0} (\underline{\mathbf{S}} - \overline{\underline{\mathbf{S}}}) : \underline{\mathbf{D}}$$

Daraus folgt

$$\dot{\psi}_{(h)} = \frac{1-\xi}{\varrho_0} \overline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\mathbf{D}} + \frac{\xi}{\varrho_0} \underline{\xi} : \underline{\mathbf{D}}$$

Dies führt nach Einsetzen in (6.42) mit (6.29) und (6.30) wiederum auf die Beziehungen (6.46) bis (6.50). Die Gleichungen (6.49) bis (6.50) stellen Restriktionen für die Auswahl der Materialfunktionen dar.

Eine Diskussion anderer Aufteilungen der Energieraten nach (6.42) findet man bei LEHMANN [67].

7. Bestimmung der Materialfunktionen

Die Freiwerte der Materialfunktionen werden mit Hilfe der Versuchsergebnisse aus Kapitel 3 bestimmt. Da es sich bei den untersuchten Proben um axialsymmetrische Vollproben mit kreisförmigen Querschnitt handelt, bedürfen die Differentialgleichungen des Stoffgesetzes einer entsprechenden Aufbereitung.

7.1 Axialsymmetrische Probleme in Zylinderkoordinaten

Zur Beschreibung rotationssymmetrischer Probleme wird ein Zylinderkoordinatensystem nach Abb. 7.1 eingeführt. Die Herleitung der in dieser Abbildung aufgeführten Beziehungen zwischen den Basisvektoren des raumfesten, kartesischen Koordinatensystems $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ und den raumfesten, krummlinigen ko- bzw. kontravarianten Basisvektoren $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ bzw. $(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$ wird in SZEPAN [127] beschrieben.

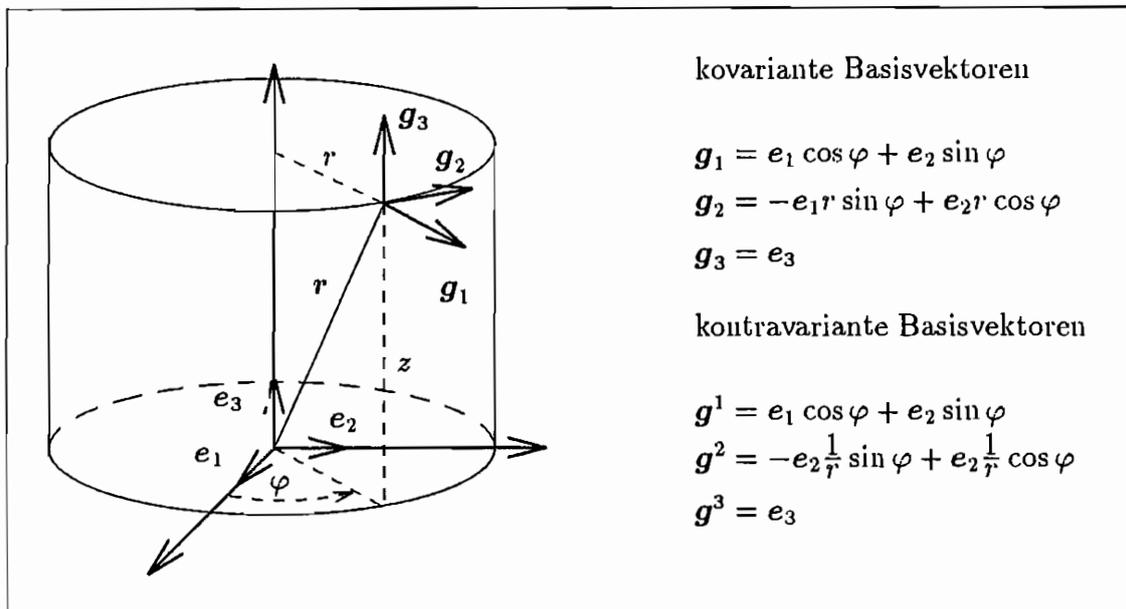


Abb. 7.1: Zylinderkoordinaten

Der Metriktensor und seine Inverse ergibt sich aus (4.5) und (4.6):

$$\underline{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta, \quad \underline{\mathbf{g}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}_\beta.$$

Der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} ist

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{g}_1 + \dot{\varphi}\mathbf{g}_2 + \dot{z}\mathbf{g}_3.$$

Zur Bestimmung des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten $\underline{\mathbf{D}}$ und des Rotationsgeschwindigkeitstensors $\underline{\mathbf{W}}$ nach Gleichung (4.13) ist die Kenntnis der kovarianten Ableitung des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} erforderlich. Mit den drei von Null verschiedenen Christoffelsymbolen

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -r, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\underline{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} + r^2 \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} \right) & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\dot{r}}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial r} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} + r^2 \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} \right) & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{pmatrix} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta \quad (7.1)$$

und

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} - r^2 \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} - 2r\dot{\varphi} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{z}}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} + 2\frac{\dot{\varphi}}{r} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial r} - \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} - r^2 \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} \right) & 0 \end{pmatrix} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta. \quad (7.2)$$

7.2 Homogener Zug

Die Kinematik der einaxialen homogenen Zugbelastung ist nach Abb. 7.2 darstellbar als

$$\begin{aligned} r &= \frac{R - R_a}{R_a} r_a + r_a \Rightarrow \dot{r} = \frac{\dot{r}_a}{r_a} r, \\ z &= \frac{l}{L} Z \Rightarrow \dot{z} = \frac{\dot{l}}{l} z. \end{aligned}$$

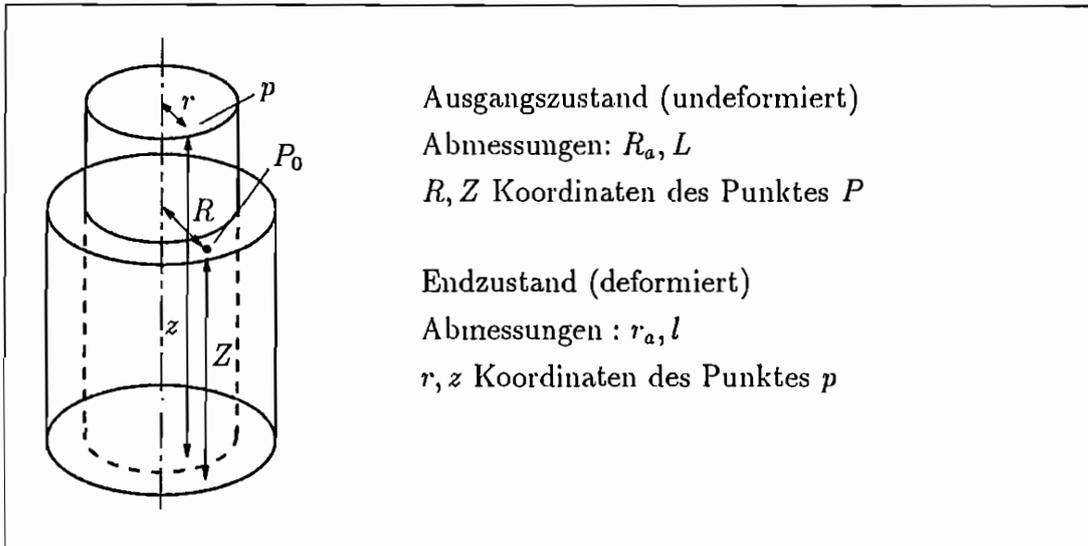


Abb. 7.2: Deformation des Kreiszyinders

Der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten ergibt sich zu

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \dot{r} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{r} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{l} \end{pmatrix} \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta.$$

Für den Rotationsgeschwindigkeitstensor erhält man, da keine Rotationen auftreten,

$$\underline{W} = \underline{0}.$$

Der Tensor der gewichteten CAUCHY-Spannungen ergibt sich für den homogenen Zug zu

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

Eine Voraussetzung für ein homogenes Deformationsverhalten ist, daß die Probe an jedem Ort eine konstante Temperatur aufweist. Dies bedeutet, daß der Temperaturgradient innerhalb des Probenkörpers Null ist.

Die Temperatur der Probe soll für eine hinreichend kleine Verformungsgeschwindigkeit als konstant betrachtet werden. Man spricht dann von einem isothermen Prozeß, für den $\dot{T} = 0$ gilt.

Bei großen Verformungsgeschwindigkeiten steht der dissipierenden Energie in Form von Wärme nicht genügend Zeit zur Verfügung, abzufließen. Die Wärme bleibt im wesentlichen am Ort ihrer Entstehung. Ein solcher Prozeß kann näherungsweise als adiabat, d.h. $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, betrachtet werden.

Für inkompressibles Materialverhalten ist die Dichte konstant. Es gilt dann:

$$\varrho = \varrho_0 \quad \text{und} \quad \underline{S} = \underline{\sigma}.$$

Weiterhin sollen thermoelastische Effekte keine Berücksichtigung finden.

Unter diesen Voraussetzungen können die Differentialgleichungssysteme für das elastische ((7.3)-(7.8)), elasto-plastische ((7.9)-(7.15)) und elasto-viskoplastische ((7.16)-(7.22)) Materialverhalten bei weggesteuerter Prozeßführung angegeben werden.

a) elastisches Differentialgleichungssystem und Anfangsbedingungen

$$\dot{l} = \text{vorgegeben} \quad ; \quad l(t=0) = 0 \quad (7.3)$$

$$\dot{r} = -r\nu \frac{\dot{l}}{l} \quad ; \quad r(t=0) = 0 \quad (7.4)$$

$$\dot{T} = 0 \quad , \quad T(t=0) = 0 \quad (7.5)$$

$$\dot{\sigma} = E \frac{\dot{l}}{l} \quad ; \quad \sigma(t=0) = 0 \quad (7.6)$$

$$\dot{\kappa} = 0 \quad ; \quad \kappa(t=0) = 0 \quad (7.7)$$

$$\dot{\rho} = 0 \quad ; \quad \rho(t=0) = 0 \quad (7.8)$$

b) elasto-plastisches Differentialgleichungssystem

$$\dot{l} = \text{vorgegeben} \quad (7.9)$$

$$\lambda = \frac{2a_2G\sqrt{6(g+g_\rho)}\dot{l} - \left(\frac{1}{2} + a_2\right)\frac{\partial g_\rho}{\partial \rho}\dot{\rho}}{\sqrt{g+g_\rho}(2a_2a_3\alpha G\sqrt{6(g+g_\rho)} + 4a_2G + (a_2 + \frac{1}{2})(a_3\frac{\partial g}{\partial T} + a_1\frac{\partial g}{\partial \kappa}))} \quad (7.10)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{2} \frac{(1-a_2)\dot{l} + (3a_2a_3\alpha\sqrt{g+g_\rho} - \sqrt{\frac{3}{2}})\lambda}{a_1 + \frac{1}{2}} r \quad (7.11)$$

$$\dot{T} = \begin{cases} 0 & \text{isothermer Prozeß} \\ a_3\sqrt{g}\lambda & \text{adiabater Prozeß} \end{cases} \quad (7.12)$$

$$\dot{\sigma} = 3a_2G \frac{\dot{l} - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + a_3\alpha\sqrt{g+g_\rho}\right)\lambda}{a_3 + \frac{1}{2}} \quad (7.13)$$

$$\dot{\kappa} = a_1\sqrt{g}\lambda \quad (7.14)$$

$$\dot{\rho} = \langle [c_1 - c_2 \exp(-c_3\kappa D)](\rho^\infty - \rho)^{c_4} \rangle \quad (7.15)$$

c) elasto-viskoplastisches Differentialgleichungssystem

$$\dot{l} = \text{vorgegeben} \quad (7.16)$$

$$\dot{r} = \frac{1}{2} \frac{(1 - a_2)\dot{l} + (a_2 a_3 \alpha \sqrt{g + g_\rho} - \sqrt{\frac{3}{2}})\Phi_{dyn}}{a_2 + \frac{1}{2}} r \quad (7.17)$$

$$\dot{T} = \begin{cases} 0 & \text{isothermer Proze\ss} \\ a_3 \sqrt{g} \Phi_{dyn} & \text{adiabater Proze\ss} \end{cases} \quad (7.18)$$

$$\dot{\sigma} = 3a_2 G \frac{\dot{l} - (a_2 \alpha \sqrt{g + g_\rho} + \sqrt{\frac{2}{3}})\Phi_{dyn}}{a_2 + \frac{1}{2}} \quad (7.19)$$

$$\dot{\sigma}_v = 3a_2 G \frac{\dot{l} - (a_2 \alpha \sqrt{g} + \sqrt{\frac{2}{3}})\Phi}{a_2 + \frac{1}{2}} \quad (7.20)$$

$$\dot{\kappa} = a_1 \sqrt{g} \Phi_{dyn} \quad (7.21)$$

$$\dot{\rho} = \langle [c_1 - c_2 \exp(-c_3 \kappa D)](\rho^\infty - \rho)^{c_4} \rangle \quad (7.22)$$

mit

$$a_1 = \frac{\delta}{\varrho_0}; \quad a_2 = \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}; \quad a_3 = \frac{\xi}{\varrho_0 c_p}$$

7.3 Materialfunktionen

Das Stoffgesetz besitzt als Freiwerte zur Anpassung an die experimentellen Daten die Parameter der Entwicklungsgleichungen der internen Variablen, die funktionale Form der Materialfunktionen und die Materialparameter.

7.3.1 Anpassungsstrategie

Das Ziel der Anpassungsstrategie ist es, die Materialfunktionen, die das quasistatische Verfestigungsverhalten, die Alterung des Materials und die viskosen Effekte beschreiben, getrennt voneinander zu bestimmen. Die Trennung der Effekte wird durch die Bestimmung der einzelnen Materialfunktionen im jeweils charakteristischen Proze\ssgeschwindigkeits- und Temperaturbereich erreicht.

Wenn die Struktur des Stoffgesetzes es erlaubt, die Materialfunktion und die unabhängigen Variablen der Materialfunktion durch experimentell observierbare Größen auszudrücken, kann eine Punktmenge der Materialfunktion in Abhängigkeit der zugehörigen unabhängigen Variablen angegeben werden. Eine nachfolgende Approximation der Punktmenge führt dann zur endgültigen Form der Materialfunktion.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Materialfunktion durch Ausprobieren oder durch Verwendung deterministischer oder stochastischer Optimierungsverfahren zu ermitteln. Eine Übersicht zu unterschiedlichen Optimierungsmethoden gibt MITTELBACH [90]. Da stochastische Optimierungsverfahren im Gegensatz zu deterministischen absolut konvergenzsicher sind, wird in dieser Arbeit eine Evolutionsstrategie zur Optimierung der unbekannt Materialparameter verwendet. Eine Übersicht zu verschiedenen Varianten der Evolutionsstrategien geben SCHÖNEBURG, HEINZMANN & FEDDERSON [121] und SCHWEFEL [116].

Die Bestimmung der Materialfunktionen und Materialparameter erfolgt in der Regel durch die Anpassung an experimentell gewonnene Daten. Aufgrund der Komplexität des zu integrierenden Differentialgleichungssystems können die Materialparameter nicht sukzessiv bestimmt werden. Zudem müssen für die funktionale Form und die Anfangswerte der einzelnen Materialfunktionen Ansätze gemacht werden, die bei schlechter Wahl zu einer unbefriedigenden Anpassung führen können. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, wird in einem ersten Anpassungsschritt eine kubische Splinefunktion zur Darstellung der Materialfunktion verwendet. Aus einer nachfolgenden Analyse kann dann ein analytischer Verlauf der Materialfunktion bestimmt werden.

7.3.2 Splinefunktionsdarstellung der Materialfunktion

Als Stützstellen des Splinefunktionsverlaufes werden die unabhängigen Variablen der Materialfunktion gewählt. Die Splinefunktionswerte an diesen Stützstellen geben die Materialfunktion wieder. Während der Anpassung werden die Splinefunktionswerte variiert. Die Vorzüge der Verwendung einer kubischen Splinefunktion zur Anpassung der unbekannt Materialfunktionen im Rahmen der Stoffgesetzintegration sind:

- Kubische Splinefunktionen weisen einen glatten Funktionsverlauf zwischen den Stützstellen auf.
- Eine Verbesserung der Approximation, d.h. des Anpassungsergebnisses, ist durch die Erhöhung der Anzahl der Stützstellen zu erreichen.
- Die Veränderung eines Splinefunktionswertes an der Stützstelle hat nur eine lokale Veränderung des Splinefunktionsverlaufes zur Folge.

Die vorteilhaften Eigenschaften, die eine Splinefunktionsdarstellung bietet, zeigt die Anpassung einer Materialfunktion, die nicht direkt auf observierbare Größen zurückzuführen ist oder die von mehreren Variablen abhängt. Analytische Ansätze können durch die vorher festgelegte funktionale Form zu unbefriedigenden Ergebnissen führen. Einerseits können die Anfangswerte der Materialparameter für die Optimierung so schlecht gewählt sein, daß das Optimum in angemessener Rechenzeit nicht erreicht werden kann. Andererseits kann die gewählte funktionale Form der Materialfunktion die gesuchte Lösung nicht beinhalten. Eine Splinefunktionsdarstellung kann bei einer ausreichenden Anzahl an Stützstellen durch die direkte Anpassung der Funktionswerte beliebige Kurvenverläufe wiedergeben.

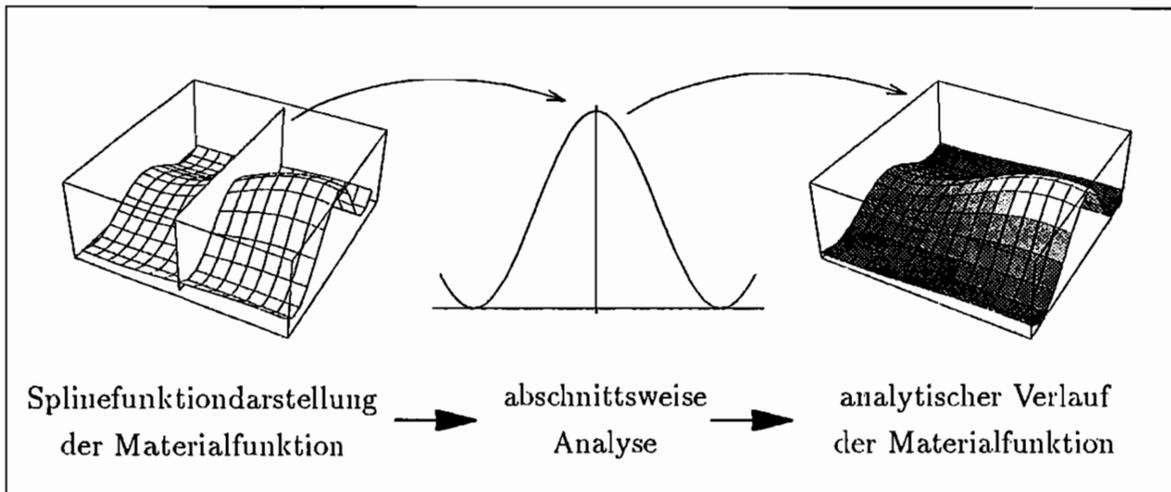


Abb. 7.3: Schematische Darstellung der Bestimmung einer analytischen Materialfunktion aus dem Splinefunktionsverlauf

Ist die optimale Splinefunktionsdarstellung gefunden, kann nach einer abschnittswisen Analyse des qualitativen und quantitativen Verlaufes eine analytische Funktion aufgestellt werden (Abb. 7.3). Auf diesem Wege gelangt man zu einer geeigneten Form der analytischen Materialfunktion und durch eine Anpassung an den Splinefunktionsverlauf zu guten Startwerten. Eine nachfolgende Optimierung der Parameter der analytischen Materialfunktion kann zu einer weiteren Verbesserung der Anpassung führen.

7.3.3 Isotrope Verfestigungsfunktion

Die isotrope Verfestigungsfunktion $g(\kappa, T)$ wird mit Hilfe von Experimenten bestimmt, die keine Beeinflußung durch Reckalterung oder viskose Effekte zeigen. Dies sind auf der einen Seite Versuche mit kleinen Deformationsgeschwindigkeiten ($\dot{\epsilon} \leq 10^{-5} \text{ s}^{-1}$), die als quasistatisch angesehen werden können, und auf der anderen Seite Versuche im Temperaturbereich, in dem die Reckalterung nicht auftritt ($25^\circ\text{C} \leq T \leq 50^\circ\text{C}; T \geq 700^\circ\text{C}$).

Für den homogenen Zugversuch ergibt sich aus der Fließbedingung (6.19) der Zusammenhang

$$g = \frac{2}{3}\sigma^2. \quad (7.23)$$

Um zu einer Darstellung der isotropen Verfestigungsfunktion in Abhängigkeit der Größen κ und T zu gelangen, werden die im Experiment ermittelten Spannungs-Dehnungskurven mit dem Ansatz

$$\sigma(\varepsilon) = b_1(1 - \exp(b_2\varepsilon)) + b_3\varepsilon + b_4 \quad (7.24)$$

approximiert. b_1 bis b_4 sind Kurvenparameter. Die Entwicklungsgleichung der isotropen Verfestigungsvariablen (6.21) vereinfacht sich mit $\beta = 0$ und $\delta = \rho_0$ zu

$$\kappa = \int \sigma \, d\varepsilon_i, \quad \kappa(\varepsilon_i = 0) = 0. \quad (7.25)$$

Ersetzt man in dieser Gleichung σ durch den Ausdruck (7.24) und verwendet als Näherung $\varepsilon \approx \varepsilon_i$, so kann (7.25) analytisch integriert werden. Die Beziehungen (7.23) und (7.25) ergeben für die Spannungs-Dehnungskurven mit $\dot{\varepsilon} = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ bei $T = 25^\circ\text{C}$, 50°C , 700°C und 800°C die zu approximierende Punktmenge $g = g(\kappa, T)$.

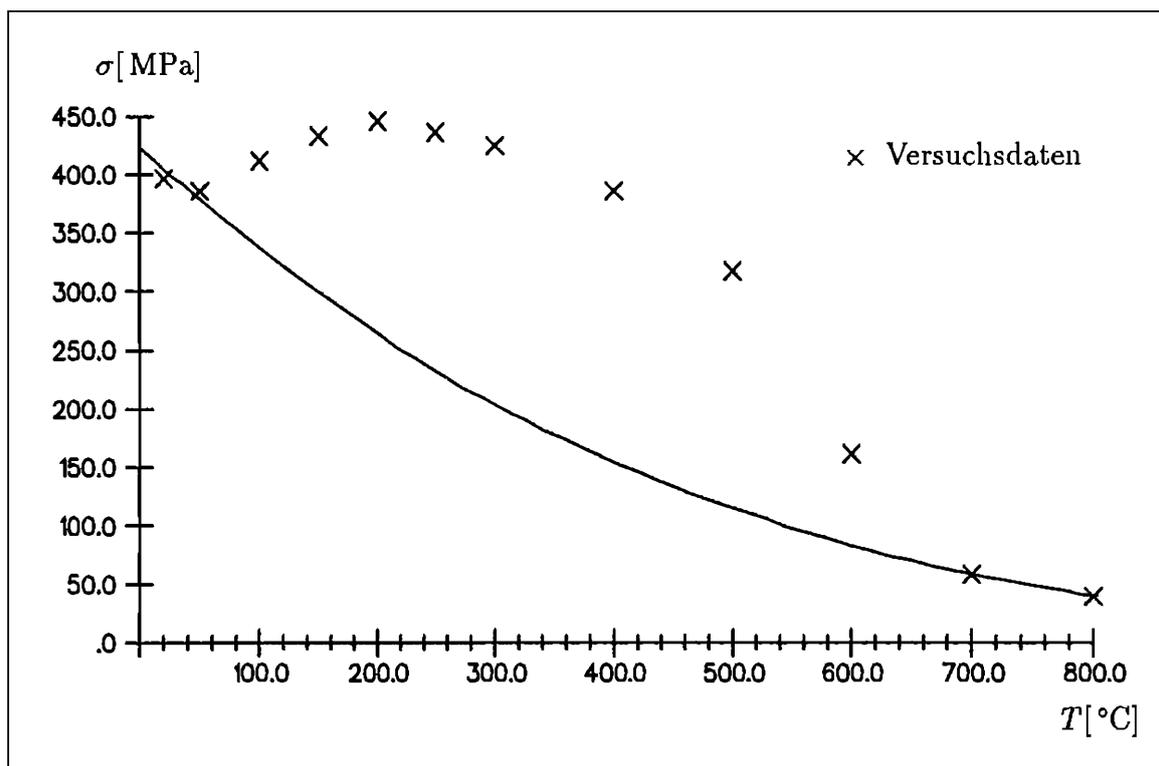


Abb. 7.4: Fließspannung (Versuchsdaten) und thermische Spannung (durchgezogene Linie) über Temperatur für $\varepsilon = 0.02$

Im Temperaturbereich $50^\circ\text{C} \leq T \leq 700^\circ\text{C}$ können die experimentellen Spannungs-Dehnungskurven aufgrund des Einflusses der Reckalterung nicht zur Modellierung der Verfestigungsfunktion g herangezogen werden. In diesem Bereich werden idealisierte, d.h. um die Reckalterung bereinigte, Kurven bestimmt:

In Abb. 7.4 ist die Fließspannung über der Temperatur für $\epsilon = 0.02$ dargestellt. Der Bereich der Reckalterung – zwischen 50°C und 700°C – ist durch die Werte, die oberhalb der durchgezogenen Linie liegen, gekennzeichnet (vgl. Abb. 2.4). Die durchgezogene Kurve stellt den Verlauf des thermischen Fließspannungsanteils dar. Für Kohlenstoffstähle ist dieser gegeben durch (DAHL [30], MACHERAUCH [72])

$$\sigma_{th} = R_0^* \left[1 - \frac{T}{T_0} \right]^4 .$$

Dabei ist R_0^* der Versetzungshinderniswiderstand bei $T = 0\text{K}$ und T_0 die Temperatur, ab der die gesamte Arbeit zur Überwindung eines Hindernisses thermisch aufgebracht wird.

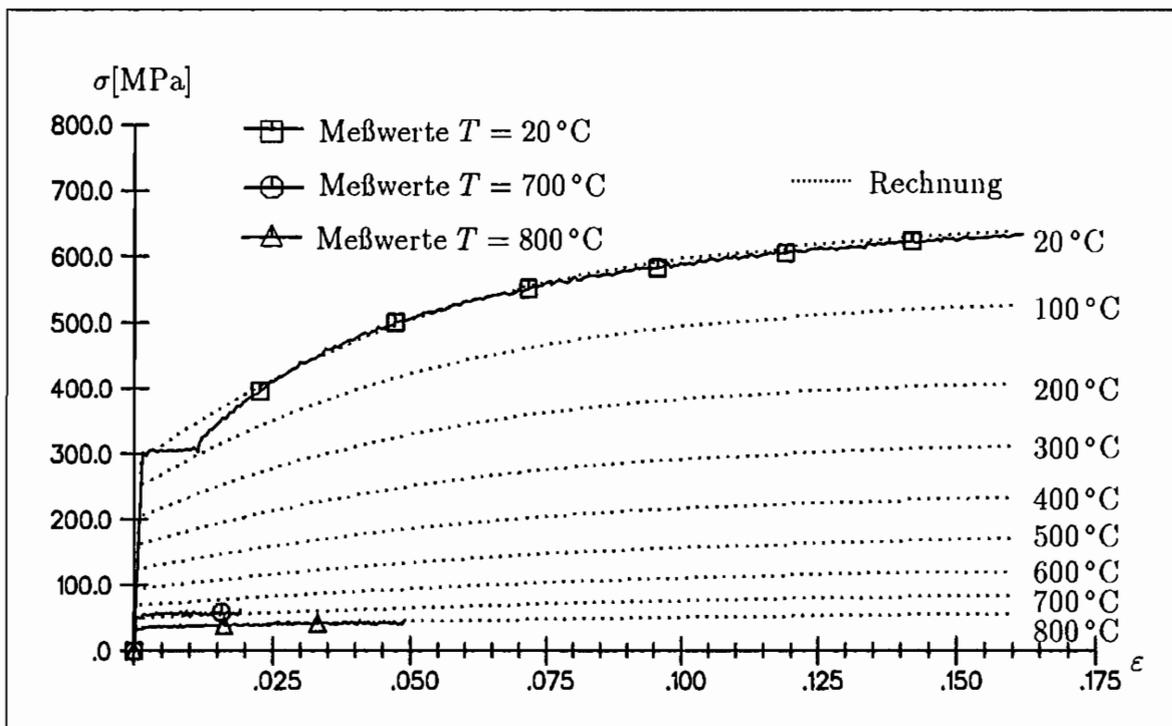


Abb. 7.5: Anpassung an quasistatische Versuche

Mit Hilfe der thermischen Spannung σ_{th} lassen sich im Temperaturbereich der Reckalterung idealisierte, d.h. um die Reckalterung bereinigte, Spannungs-Dehnungskurven bestimmen. Diese werden mit den Versuchsdaten für $T = 20^\circ\text{C}$, 50°C , 700°C und 800°C dazu verwendet, die Funktion g zu ermitteln.

Nach einer Splinefunktionsanpassung von g ist aus der Analyse des qualitativen Verlaufes der Ansatz

$$g = g_1(1 - g_2 \exp(-g_3\kappa)) + g_4\kappa + g_5$$

mit

$$\begin{aligned} g_1 &= g_{11}\left(1 - \frac{T}{g_{12}}\right)^{g_{13}} & , & \quad g_2 = g_{21}\left(1 - \frac{T}{g_{22}}\right)^{g_{23}} & , \\ g_3 &= g_{31} + g_{32}T + g_{33}T^2 & , & \quad g_4 = g_{41}\left(1 - \frac{T}{g_{42}}\right)^{g_{43}} & , \\ g_5 &= g_{51}\left(1 - \frac{T}{g_{52}}\right)^{g_{53}} \end{aligned} \quad (7.26)$$

hervorgegangen. Das Ergebnis der Anpassung ist in Abb. 7.5 dargestellt.

Der Verlauf der isotropen Verfestigungsfunktion g ist in Abb. 7.6 gegeben. Man erkennt, daß $\partial g/\partial\kappa > 0$ und $\partial g/\partial T < 0$ ist. Diese Eigenschaften von g stellen sicher, daß die Fließspannung in Abwesenheit der Reckalterung mit steigender Verfestigung zu- und mit steigender Temperatur abnimmt (DAHL & REES [31], DAHL & BELCHE [30], MACHERAUCH [72]).

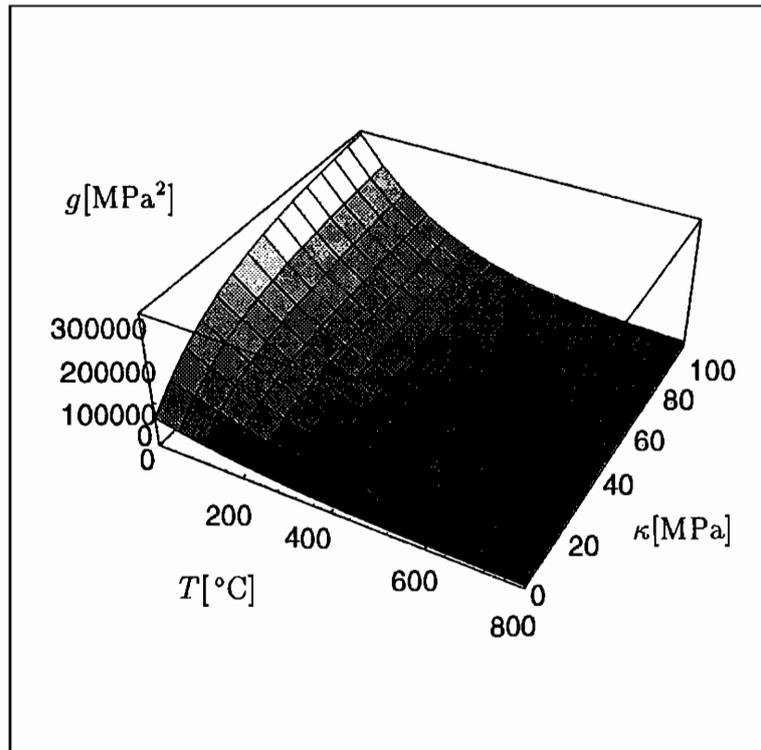


Abb. 7.6: Materialfunktion $g(T, \kappa)$

Die Materialparameter in (7.26) sind im Anhang C aufgeführt.

7.3.4 Statische Reckalterung

Die statische Reckalterung wird durch die interne Variable ρ im elasto-plastischen Stoffgesetz berücksichtigt.

$$\dot{\rho} = \langle [c_1 - c_2 \exp(-c_3 \kappa D)] (\rho^\infty - \rho)^{c_4} \rangle . \quad (7.27)$$

Die Abhängigkeiten der Evolutionsgleichung orientieren sich an den oben erläuterten mikrophysikalischen Ursachen des Verformungsverhaltens. Die zu ρ gehörige assoziierte Variable, die Materialfunktion g_ρ , bewirkt eine Aufweitung der Fließfläche, d.h. eine Erweiterung des elastischen Bereiches. Die Abhängigkeit dieser Materialfunktion sei auf

$$g_\rho = g_\rho(\rho, T)$$

beschränkt. Ein Ansatz ist

$$g_\rho = g_{\rho_1} \rho \quad \text{mit} \quad g_{\rho_1} = \text{konst.} \quad (7.28)$$

Für den einaxialen homogenen Zugversuch läßt sich aus der Fließbedingung (6.23) die Beziehung

$$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}(g + g_\rho)$$

für die Gesamtspannung und für den Spannungszuwachs

$$\Delta\sigma = \sigma - \sigma_{gl} = \sqrt{\frac{3}{2}}(\sqrt{g + g_\rho} - \sqrt{g}) \quad (7.29)$$

gewinnen. σ_{gl} ist die Gleichgewichtsspannung ohne statische Reckalterung. Die Evolutionsgleichung der statischen Reckalterungsvariablen (7.27) läßt sich für $T = \text{konst.}$, $\kappa = \text{konst.}$ und der Anfangsbedingung $\rho(t = 0) = 0$ integrieren:

$$\rho = \rho^\infty (1 - \exp(-[c_1 - c_2 \exp(-c_3 \kappa D)] t^{c_4})). \quad (7.30)$$

Mit den Gleichungen (7.28), (7.29) und (7.30) kann der Spannungszuwachs $\Delta\sigma$ als Funktion der isotropen Verfestigungsvariablen κ , der Temperatur T und der Zeit t angegeben werden.

Anpassung der Funktion ρ^∞

Den Grenz- bzw. Sättigungswert der statischen Reckalterungsvariablen ρ^∞ bestimmt man für Alterungszeiten $t \rightarrow \infty$:

$$\rho^\infty = \rho^\infty(\kappa, T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\rho}{1 - \exp(-[c_1 - c_2 \exp(-c_3 \kappa D)] t^{c_4})} .$$

Die rechte Seite dieser Gleichung kann einerseits durch den asymptotischen Verlauf des Spannungszuwachses $\Delta\sigma$ und Einbeziehung von (7.28), (7.29) und (7.30) für diskrete Werte von κ und T bestimmt werden. Andererseits können die Spannungs-Dehnungskurven im Reckalterungstemperaturbereich mit einer hinreichend kleinen Prozeßgeschwindigkeit zur Bestimmung von ρ^∞ herangezogen werden. Die Prozeßgeschwindigkeit muß so klein sein, daß eine vollständige Alterung des Materials gegeben ist. Geeignet sind Versuche mit einer Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon} \leq 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. (z.B. die experimentellen Spannungs-Dehnungskurven nach Abb. 3.14).

Das Vorgehen nach der zweiten Methode bedarf der Analyse des Spannungs-Dehnungskurvenverlaufes im Temperaturbereich der statischen Reckalterung. Für einen Meßpunkt auf der Spannungs-Dehnungskurve kann die Verfestigungsvariable κ , die Temperatur T und der Spannungszuwachs $\Delta\sigma$ angegeben werden. Durch Auflösung der Gleichung (7.29) nach ρ bzw. ρ^∞ für große Alterungszeiten läßt sich dann eine Punktmenge $\rho^\infty = \rho^\infty(\kappa, T)$ bestimmen. Die gewonnene Punktmenge wird durch eine bikubische Splinefunktion approximiert. Anschließend wird aus der Analyse des angepaßten Splinefunktionsverlaufes ein analytischer Ansatz für ρ^∞ gemacht. Als Ergebnis erhält man (Abb. 7.7)

$$\rho^\infty = \rho_1^\infty + \rho_2^\infty \exp(-\rho_3^\infty \kappa) \quad (7.31)$$

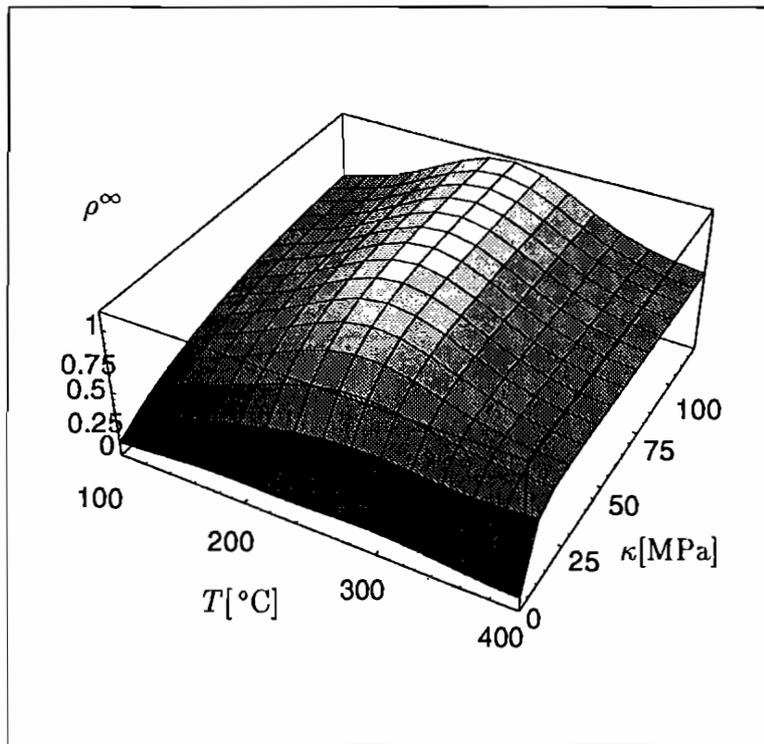
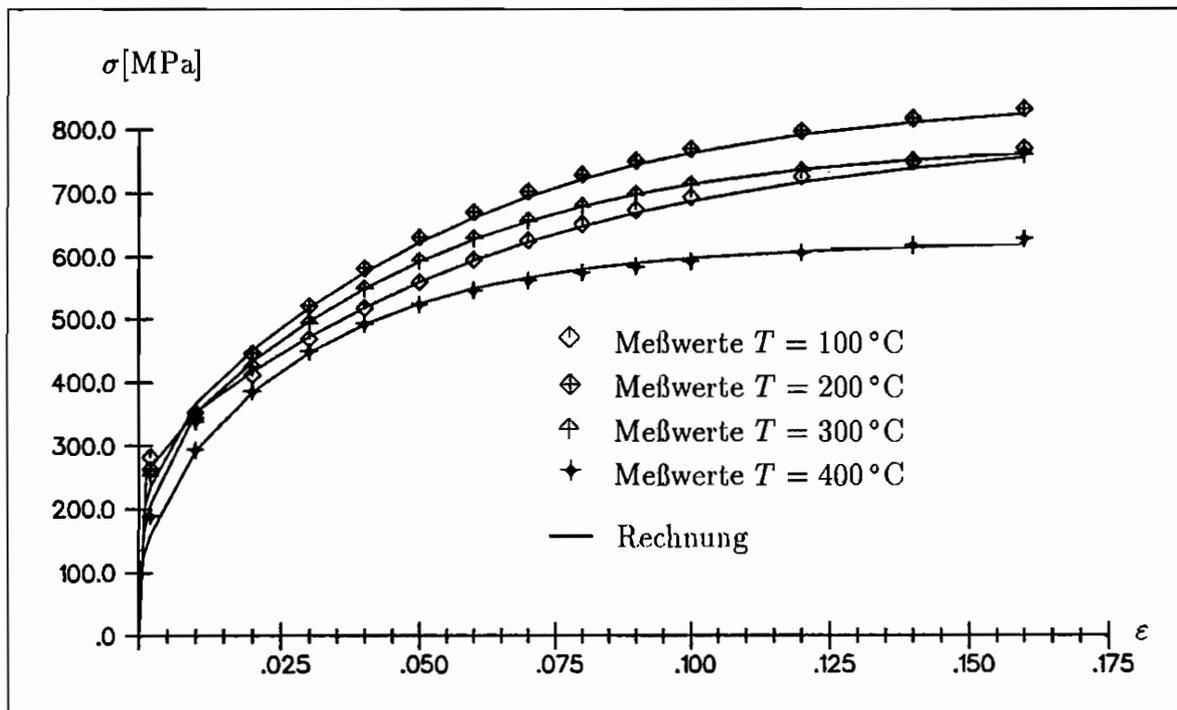
mit

$$\begin{aligned} \rho_1^\infty &= \rho_{11}^\infty + \rho_{12}^\infty \exp(-\rho_{13}^\infty (T - \rho_{14}^\infty)^2), \\ \rho_2^\infty &= -\rho_{21}^\infty - \rho_{22}^\infty \exp(-\rho_{23}^\infty (T - \rho_{24}^\infty)^2), \\ \rho_3^\infty &= -\rho_{31}^\infty + \rho_{32}^\infty T - \rho_{33}^\infty T^2 + \rho_{34}^\infty T^3. \end{aligned} \quad (7.32)$$

Die Materialparameter in (7.32) können im Anhang C nachgeschlagen werden.

Die Güte der Anpassung wird durch den Vergleich zwischen Experiment und Rechnung deutlich. In Abb. 7.8 sind monotone Zugversuche im Reckalterungstemperaturbereich dargestellt.

Die Dehnungsgeschwindigkeit dieser Experimente ist so klein, daß zu jedem Zeitpunkt von einer vollständigen Alterung des Materials ausgegangen werden kann. Die statische Reckalterungsvariable kann durch den Sättigungswert ρ^∞ ersetzt werden. Mit dem Ansatz (7.31) erhält man eine gute Anpassung der Versuchsdaten.

Abb. 7.7: Materialfunktion $\rho^\infty(\kappa, T)$ Abb. 7.8: Anpassung an monotone Zugversuche ($\dot{\epsilon} = 10^{-5} \text{s}^{-1}$)

Evolutionsgleichung der statischen Reckalterung

Die Freiwerte der Entwicklungsgleichung von ρ können mit Hilfe des Verlaufes der zeitlichen Fließspannungserhöhung $\Delta\sigma$ bei unterschiedlichen Dehnungs- und Temperaturwerten festgelegt werden (Abb. 3.23 bis 3.28).

Die Spannungserhöhung läßt sich mit den Beziehungen (7.28), (7.29) und (7.30) ausdrücken als

$$\Delta\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{g + g_{\rho_1} \rho^{\infty} (1 - \exp(-[c_1 - c_2 \exp(-c_3 \kappa D)] t^{c_4}))} - \sqrt{g} \right).$$

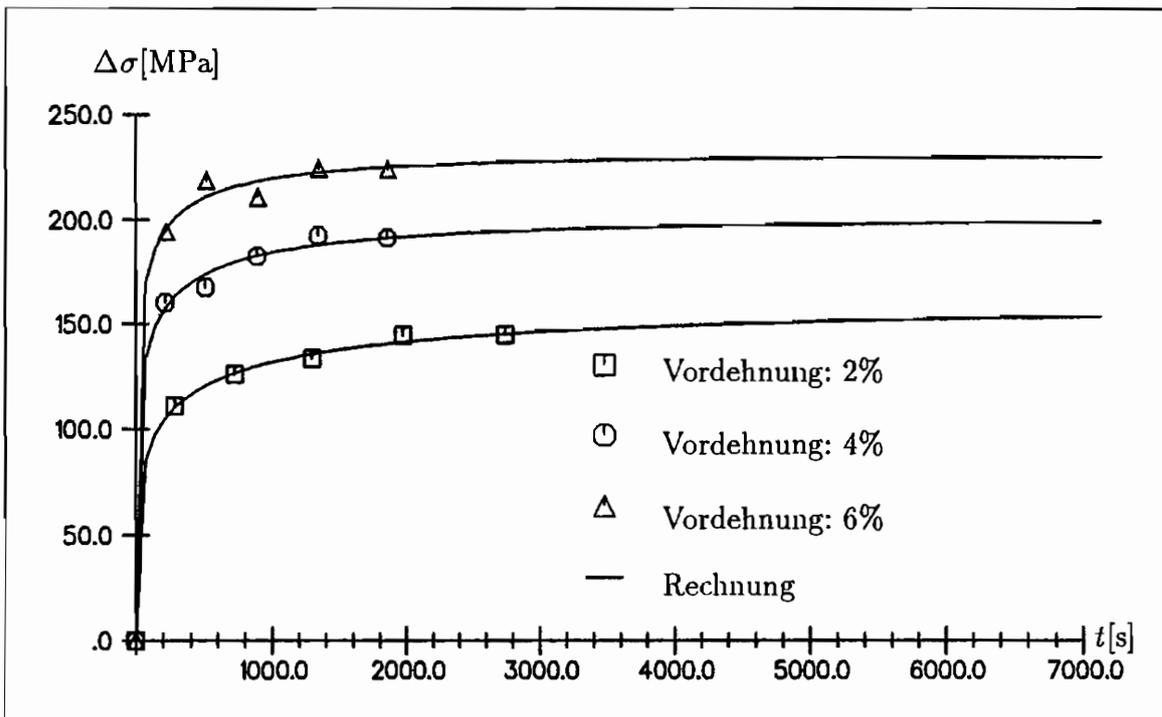


Abb. 7.9: Fließspannungserhöhung $\Delta\sigma$ als Funktion der Zeit für $T = 150^\circ\text{C}$

In Abb. 7.9 ist der Verlauf der Fließspannungserhöhung $\Delta\sigma$ bei $T = 150^\circ\text{C}$ und unterschiedliche Vordehnungen dargestellt. Man erkennt, daß die Anpassung zu einem befriedigenden Ergebnis führt. Die ermittelten Materialparameter sind im Anhang C aufgelistet.

Nebenbedingung der statischen Reckalterung

Die Nebenbedingung für das Auftreten der statischen Reckalterung ist nach (6.7)

$$\langle \dot{\rho} \rangle = \begin{cases} \dot{\rho} & , \text{ wenn } T_{\rho_u} < T < T_{\rho_o} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} .$$

Experimentelle Untersuchungen an Kohlenstoffstählen (MARKULA & HEISKANNEN [77], MARKULA [77], FAST [38], FETTWEIS [40]) zeigen als unteren Temperaturgrenzwert des Einsetzens der statischen Rekalterung

$$T_{\rho_u} \approx 100^\circ\text{C}. \quad (7.33)$$

Diese Temperatur entspricht einem spezifischen Schwellenwert aus dem Produkt von Löslichkeit des Kohlenstoffes und Diffusionskoeffizient (FAST [38]).

Wenn die obere Grenztemperatur T_{ρ_o} erreicht wird, beginnt der Prozeß der Überalterung bzw. die ungerichtete Diffusion der Fremdatome. Für Kohlenstoffstähle ist diese Temperatur (VAN DEN BEUKEL [132], SACHDEV [115], LI & LESLIE [69])

$$T_{\rho_o} \approx 300^\circ\text{C}. \quad (7.34)$$

7.3.5 Überspannungsfunktionen

Die Überspannungsfunktion gibt die Zunahme der Spannung bei Veränderung der Prozeßgeschwindigkeit an.

Überspannungsfunktion Φ

In dem Bereich des geschwindigkeitsabhängigen Materialverhaltens, in dem keine dynamische Reckalterung auftritt, beschreibt die Überspannungsfunktion Φ die Zunahme der Spannung bei Erhöhung der Prozeßgeschwindigkeit. Unterschiedliche funktionale Ansätze für Φ können bei BRUHNS & LEHMANN [11], BRUHNS [8] und ROTT [114] nachgeschlagen werden. In dieser Arbeit wird der Ansatz

$$\Phi(\Lambda, T) = u_1(1 - \exp(-u_2\Lambda^{u_3})) \quad (7.35)$$

gewählt.

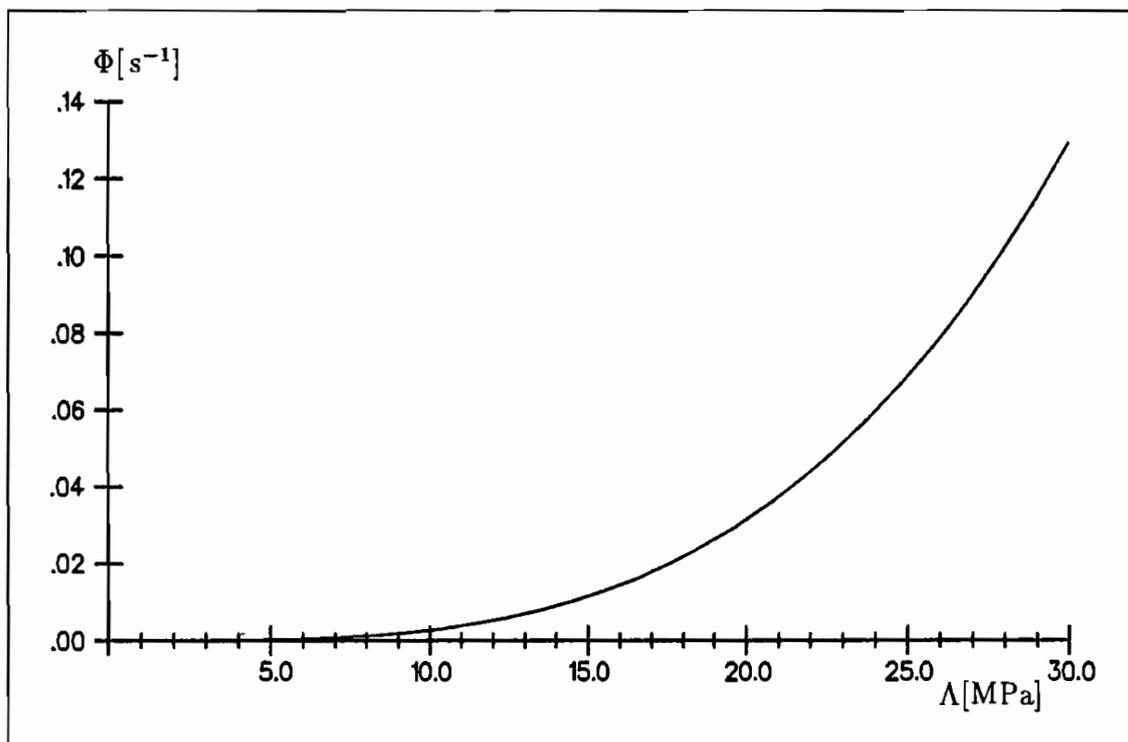


Abb. 7.10: Überspannungsfunktion Φ

Eine Anpassung an die experimentellen Daten des einaxialen Zugversuches bei $T = 20^\circ\text{C}$ ergibt den Verlauf nach Abb. 7.10. Rechnungen für unterschiedliche Temperaturniveaus und unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten zeigen Abb. 7.11 und Abb. 7.12.

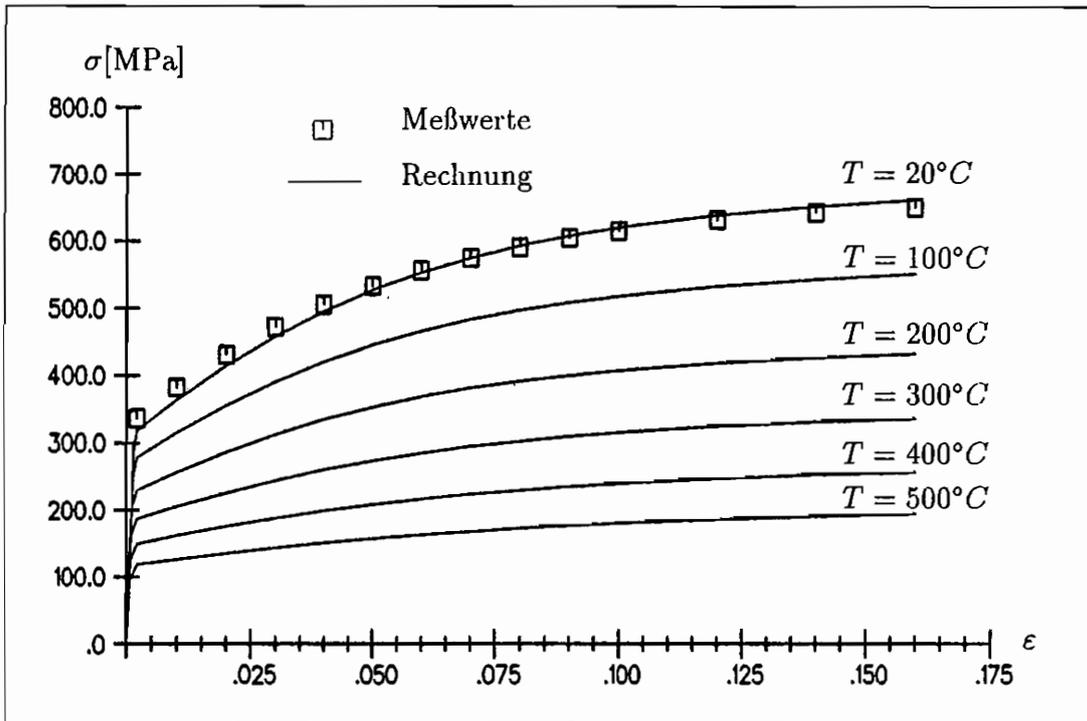


Abb. 7.11: Viskoplastisches Materialverhalten bei unterschiedlichen Temperaturen und $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$

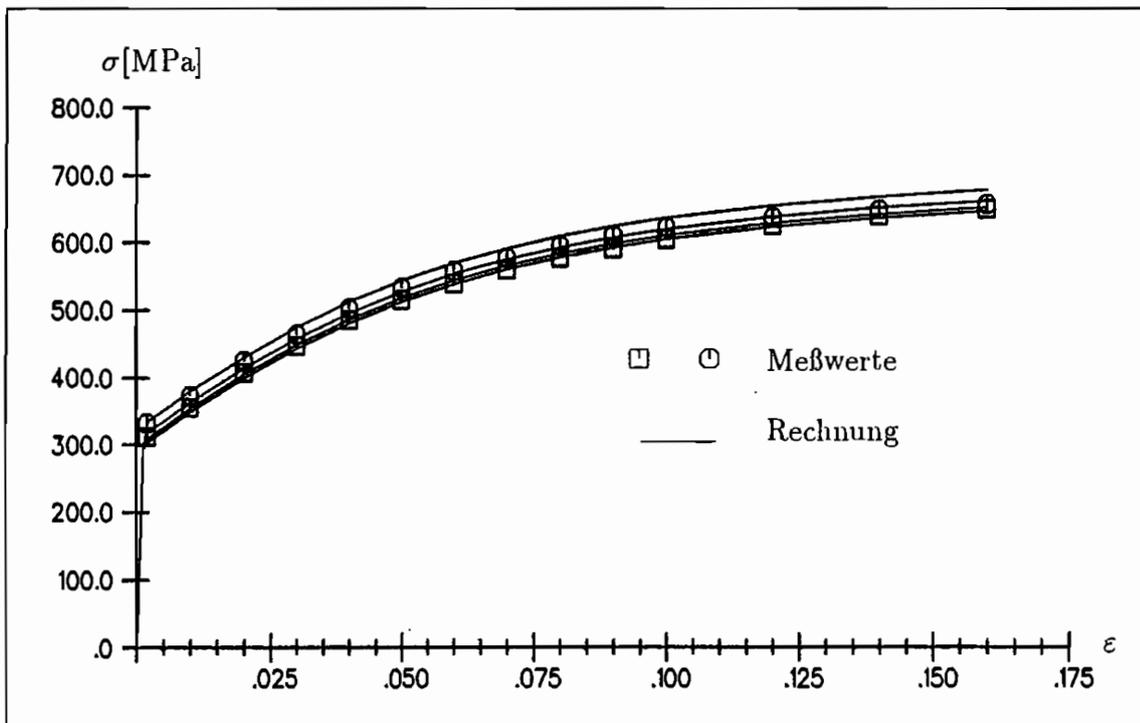


Abb. 7.12: Viskoplastisches Materialverhalten für $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, 10^{-3} s^{-1} (Messwerte), 10^{-2} s^{-1} (Messwerte), 10^{-1} s^{-1} und $T = 20^\circ\text{C}$

Es ist festzustellen, daß die Überspannungsfunktion nach (7.35) das typische viskoplastische Werkstoffverhalten unlegierter Kohlenstoffstähle über einen großen Temperatur- und Dehnungsgeschwindigkeitsbereich modellieren kann. Insbesondere wird die schwache Ratenabhängigkeit bei Raumtemperatur, wie sie auch von ZDEBEL [139], SZEPAN [127] und FELDMÜLLER [39] festgestellt worden ist, gut wiedergegeben.

Aufgrund der Temperaturabhängigkeit der Überspannung Λ kann das Materialverhalten bei unterschiedlichen Temperaturniveaus beschrieben werden. Eine differenziertere Anpassung kann durch die Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Materialparameter u_1 , u_2 und u_3 erzielt werden.

Überspannungsfunktion Φ_ρ

Die Überspannungsfunktion der dynamischen Reckalterung beschreibt die Abnahme der Spannung bei Erhöhung der Prozeßgeschwindigkeit. Nach 6.36 hat sie die Form:

$$\Phi_{dyn}(T, \Lambda_\rho) = h(\Lambda_\rho)\Phi(\Lambda, T) - \lll \Phi_\rho(\Lambda_\rho, T) \ggg \quad (7.36)$$

mit

$$\Phi_\rho(T, \Lambda_\rho = 0) = 0 \text{ und } h(\Lambda_\rho = 0) = 1.$$

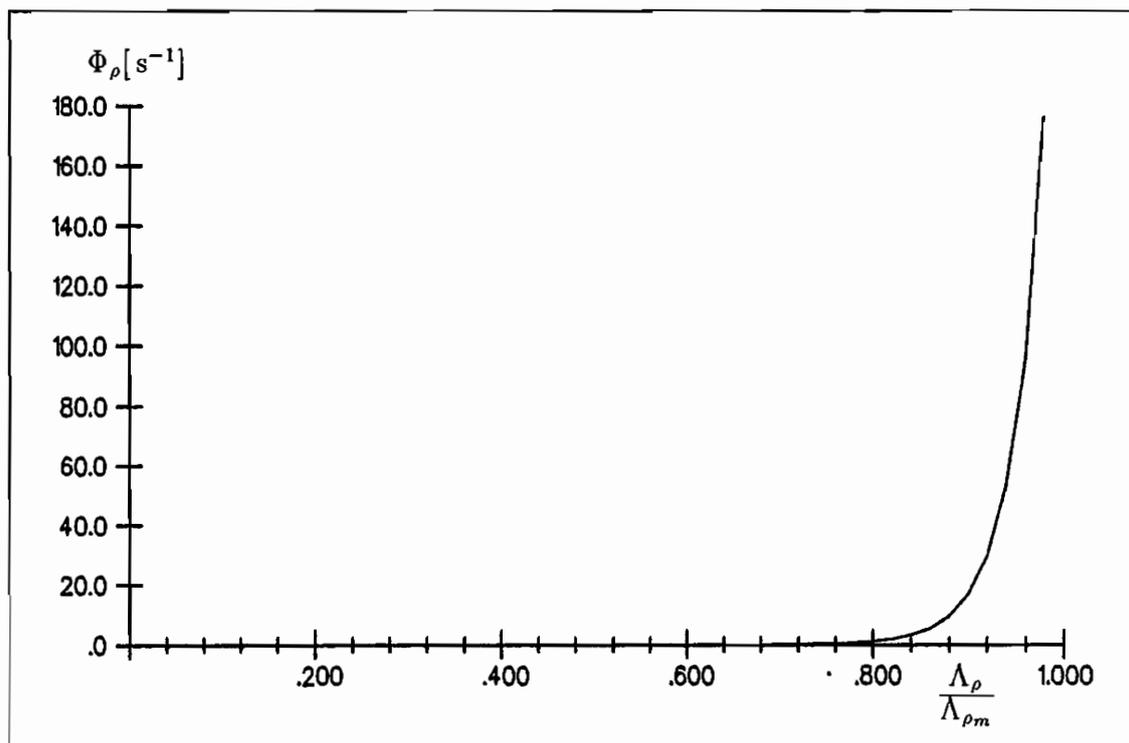


Abb. 7.13: Überspannungsfunktion Φ_ρ bei $T = 200^\circ\text{C}$

Die Beziehung (7.36) ist eine Erweiterung von (7.35). Als neue Materialfunktionen treten $h(\Lambda_\rho)$ und $\Phi_\rho(\Lambda_\rho, T)$ auf. Als Ansätze werden

$$h(\Lambda_\rho) = 1 + h_1(T) \frac{\Lambda_\rho}{\Lambda_{\rho m}} \quad (7.37)$$

und

$$\Phi_\rho(\Lambda_\rho, T) = d_1(T) \left\{ \exp \left[d_2(T) \left(\frac{\Lambda_\rho}{\Lambda_{\rho m}} \right)^{d_3(T)} \right] - 1 \right\} \quad (7.38)$$

mit

$$\Lambda_{\rho m} = \sqrt{g(\kappa, T) + g_\rho(\rho^\infty, T)} - \sqrt{g(\kappa, T)}$$

gewählt. Die in (7.36) ausgewiesene Nebenbedingung ist nach (6.37)

$$\lll \Phi_\rho \ggg = \begin{cases} \Phi_\rho, & \text{wenn } \Lambda_\rho \geq 0 \text{ und } T_{\rho u} < T < T_{\rho o} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Werte von $T_{\rho u}$ und $T_{\rho o}$ entsprechen denen nach (7.33) und (7.34).

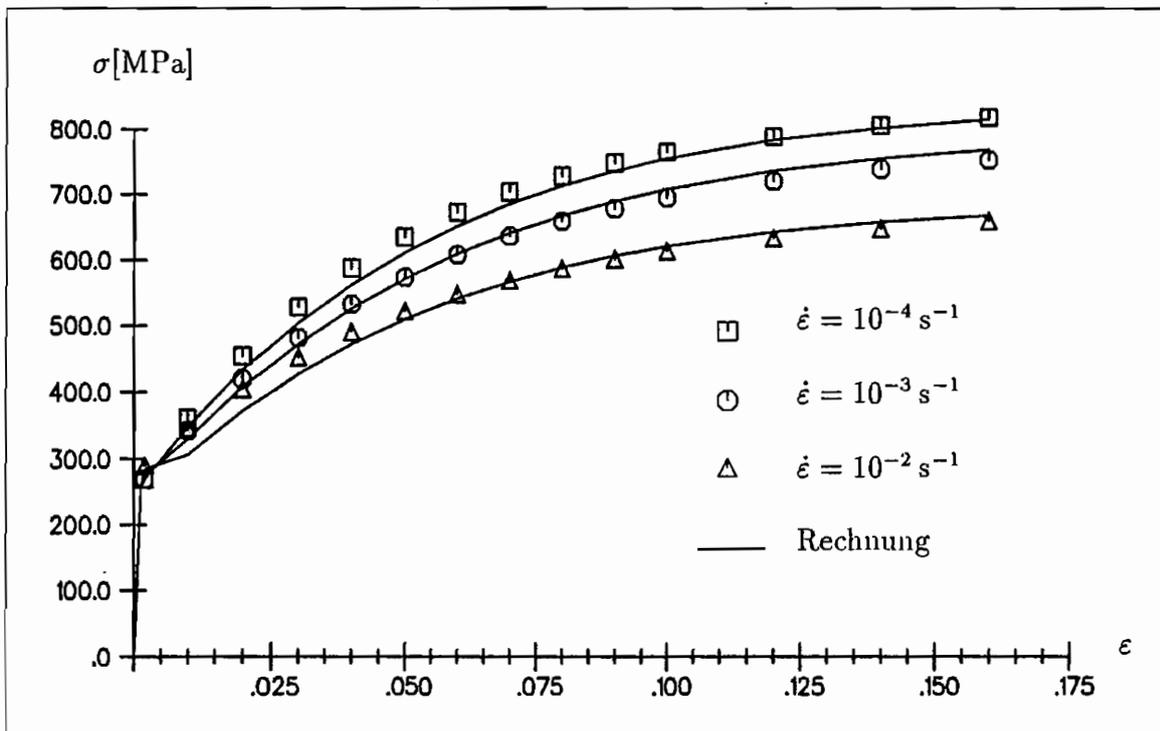


Abb. 7.14: Anpassung an unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten bei $T = 200^\circ\text{C}$

Die Überspannungsfunktion Φ_ρ ist in Abb. 7.13 dargestellt. Sie ist aus der Anpassung an Spannungs-Dehnungsverläufe bei $T = 200^\circ\text{C}$ und unterschiedlichen Dehnungsgeschwindigkeiten bestimmt worden (Abb. 7.14). Man erkennt das typische dynamische Reckal-

terungsverhalten: bei zunehmender Dehnungsgeschwindigkeit zeigen die Spannungs-Dehnungskurven einen flacheren Verlauf. Der Temperaturabhängigkeit der dynamischen Reckalterung wird durch die Temperaturabhängigkeit der Materialparameter $h(T)$, $d_1(T)$, $d_2(T)$ und $d_3(T)$ in (7.37) und (7.38) Rechnung getragen.

7.3.6 Weitere Materialfunktionen

Nachfolgend wird eine Auflistung temperaturabhängiger physikalischer Eigenschaften, die im Stoffgesetz nach Kapitel 6.2 verwendet werden, gegeben. Diese wurden nicht mittels der Experimente dieser Arbeit ermittelt, da sie entweder bei großen Deformationen zu vernachlässigen sind oder aufgrund der fehlenden Meßeinrichtungen nicht ermittelt werden konnten. Die nachfolgenden Größen sind durch eine Approximation der von RICHTER [111] aufgenommenen Meßkurven für St 37.8 bestimmt worden. Im Temperaturbereich von $25^\circ\text{C} \leq T \leq 800^\circ\text{C}$ geben folgende Anpassungen eine gute Approximation der Meßkurven:

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \left[213953 - 71.33 \cdot \frac{T}{^\circ\text{C}} + 3.16 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 7.46 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^3 \right] \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\
 G(t) &= \left[83262 - 29.95 \cdot \frac{T}{^\circ\text{C}} + 1.99 \cdot 10^{-3} \cdot \left(\frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 4.57 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^3 \right] \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\
 \rho(T) &= \left[7.85 \cdot 10^{-6} - 2.91 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{T}{^\circ\text{C}} - 6.86 \cdot 10^{-14} \cdot \left(\frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 4.82 \cdot 10^{-18} \cdot \left(\frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^3 \right] \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3} \\
 c_p(t) &= \left[0.468 \cdot 10^6 + 1.48 \cdot 10^2 \cdot \frac{T}{^\circ\text{C}} - 5.00 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + 1.62 \cdot 10^{-10} \cdot \left(\frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^3 \right] \frac{\text{N mm}}{\text{kg } ^\circ\text{C}} \\
 \alpha(T) &= \left[11.61 \cdot 10^{-6} + 5.93 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{T}{^\circ\text{C}} + 4.85 \cdot 10^{-13} \cdot \left(\frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 3.45 \cdot 10^{-15} \cdot \left(\frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^3 \right] \frac{1}{^\circ\text{C}} \\
 \lambda_f(T) &= \left[51.45 - 1.22 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{T}{^\circ\text{C}} - 3.88 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + 2.03 \cdot 10^{-8} \cdot \left(\frac{T}{^\circ\text{C}} \right)^3 \right] \frac{\text{N}}{\text{s } ^\circ\text{C}}.
 \end{aligned}$$

7.4 Verifikationsrechnungen

7.4.1 Übergangverhalten

Das Stoffgesetz zur Beschreibung des viskoplastischen Materialverhaltens mit Berücksichtigung der dynamischen Reckalterung ist so konzipiert, daß ein Übergang zum plastischen Modell mit statischer Reckalterung und zum viskoplastischen Modell ohne Reckalterung möglich ist. Die Grenzzustände können dabei nicht exakt, d.h. durch Übergänge zwischen den Stoffgesetzformulierungen, sondern nur auf numerischem Wege näherungsweise erreicht werden.

Plastisches Materialverhalten mit statischer Reckalterung ist zu erwarten, wenn sich die Verformungsgeschwindigkeit der quasistatischen Geschwindigkeit annähert. Der Übergang zum viskosen Verhalten ohne Reckalterung wird bei großen Verformungsgeschwindigkeiten erreicht. In Abb. 7.15 sind Rechnungen mit dem viskoplastischen Stoffgesetz mit Berücksichtigung der dynamischen Reckalterung für unterschiedliche Dehnungsgeschwindigkeiten dargestellt (durchgezogene Linien).

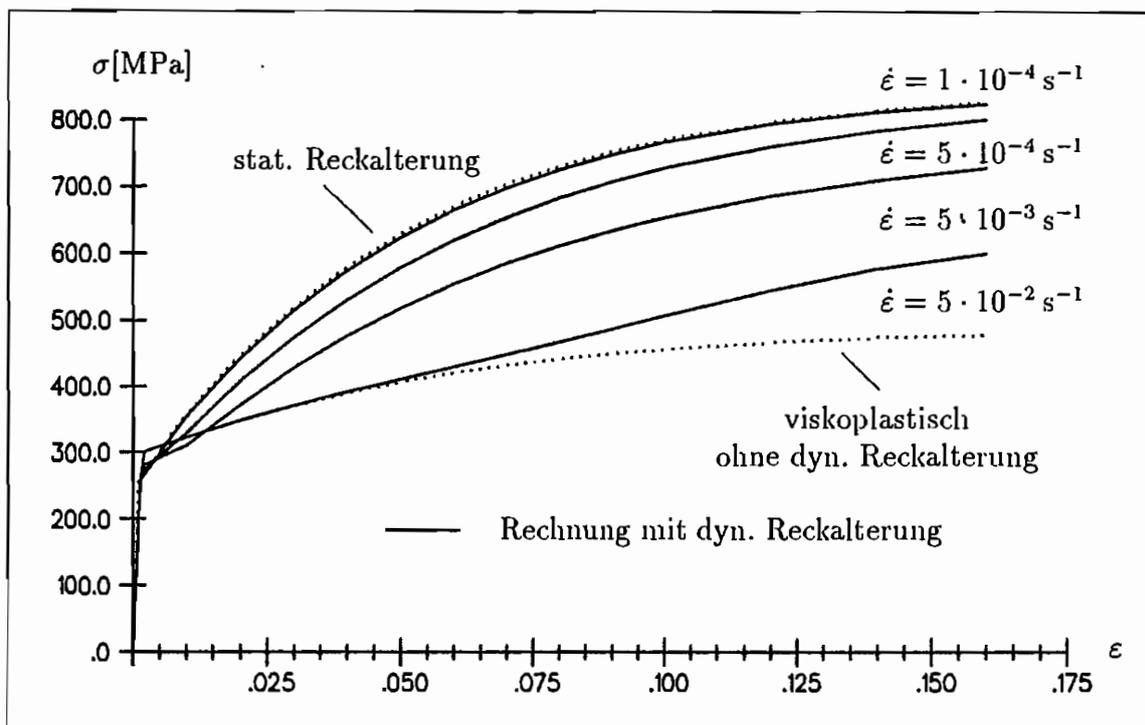


Abb. 7.15: Dynamisches Reckalterungsmodell bei unterschiedlichen Dehnungsgeschwindigkeiten ($T = 200 \text{ }^\circ\text{C}$)

Als Grenzverläufe sind Rechnungen mit dem plastischen Stoffgesetz mit statischer Reckalterung und dem viskoplastischen Stoffgesetz ohne dynamische Reckalterung abgebildet (gestrichelte Linien). Man erkennt, daß bei einer Dehnungsgeschwindigkeit von $\dot{\epsilon} =$

10^{-4} s^{-1} der Kurvenverlauf des viskosen dynamischen und des plastischen statischen Reckalterungsmodells nahezu übereinstimmen.

Bei zunehmender Dehnungsgeschwindigkeit nähern sich die Spannungs-Dehnungskurvenverläufe des viskosen dynamischen Reckalterungsmodells und des viskoplastischen Modells ohne Reckalterung an. Bei einer Dehnungsgeschwindigkeit von $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ stimmen die Kurvenverläufe bis zu der Dehnung $\epsilon = 0.7$ gut überein. Für Dehnungswerte $\epsilon > 0.7$ laufen die Kurven aufgrund des Einsetzens der Reckalterung auseinander.

Durch weitere Steigerung der Verformungsgeschwindigkeit verschiebt sich der Punkt des Auseinanderlaufens der Spannungs-Dehnungskurven zu größeren Dehnungswerten. Der Einfluß der dynamischen Reckalterung auf das Verformungsverhalten des Materials wird für große Geschwindigkeiten immer weiter zurückgedrängt.

7.4.2 Kriechen und Relaxation

Ein Vergleich der Simulation des Kriech- bzw. Relaxationsverhaltens durch das Stoffgesetz mit und ohne Berücksichtigung der dynamischen Reckalterung ist in den Abb. 7.16 und 7.17 bzw. Abb. 7.18 und 7.19 dargestellt.

In den Abb. 7.16 und 7.17 sind Kriechkurven ausgehend von unterschiedlichen Spannungsniveaus dargestellt. Die jeweiligen Spannungen sind durch einen monotonen spannungsgesteuerten Zugversuch mit einer Geschwindigkeit von $\dot{\sigma} = 100 \text{ MPa/s}$ und $T = 200^\circ\text{C}$ erreicht worden. Die Last wird dann bis zu einer Zeit von $t = 1000\text{s}$ konstant gehalten. Die Kriechdehnungen mit dynamischer Reckalterung sind für alle Spannungsniveaus geringer als die ohne Berücksichtigung der Reckalterung. Die Ursache dafür ist, daß durch die Zunahme der Überspannung Λ_p auch die Überspannungsfunktion Φ_p anwächst (s. Kapitel 6.5.1.1). Dies führt zu einer starken Verminderung der Kriechdehnungsrate nach (6.38) und somit zu einem geringen Kriechdehnungsendwert.

In den Abb. 7.18 und 7.19 sind Relaxationskurven nach einem monotonen Zugversuch mit unterschiedlichen Dehnungsgeschwindigkeiten und $T = 200^\circ\text{C}$ dargestellt. Die aufgebrachte Dehnung bis zum Beginn des Relaxationsprozesses beträgt $\epsilon = 0.03$. Die Verformung wird dann bis zu einer Zeit von $t = 50\text{s}$ konstant gehalten. Die Relaxationsrechnungen zeigen ein qualitativ ähnliches Verhalten wie die Rechnungen zum Kriechverhalten des Materials. Es ist festzustellen, daß der Spannungsabfall mit dynamischer Reckalterung deutlich geringer ist als der ohne Reckalterung. Die Ursache hierfür ist der Anstieg der Überspannungsfunktion Φ_p und der Überspannung Λ_p während des Relaxationsprozesses. Dies führt dazu, daß die Spannungsrate nach (6.40) abrupt abfällt und nach kurzer Zeit einen stationären Wert erreicht.

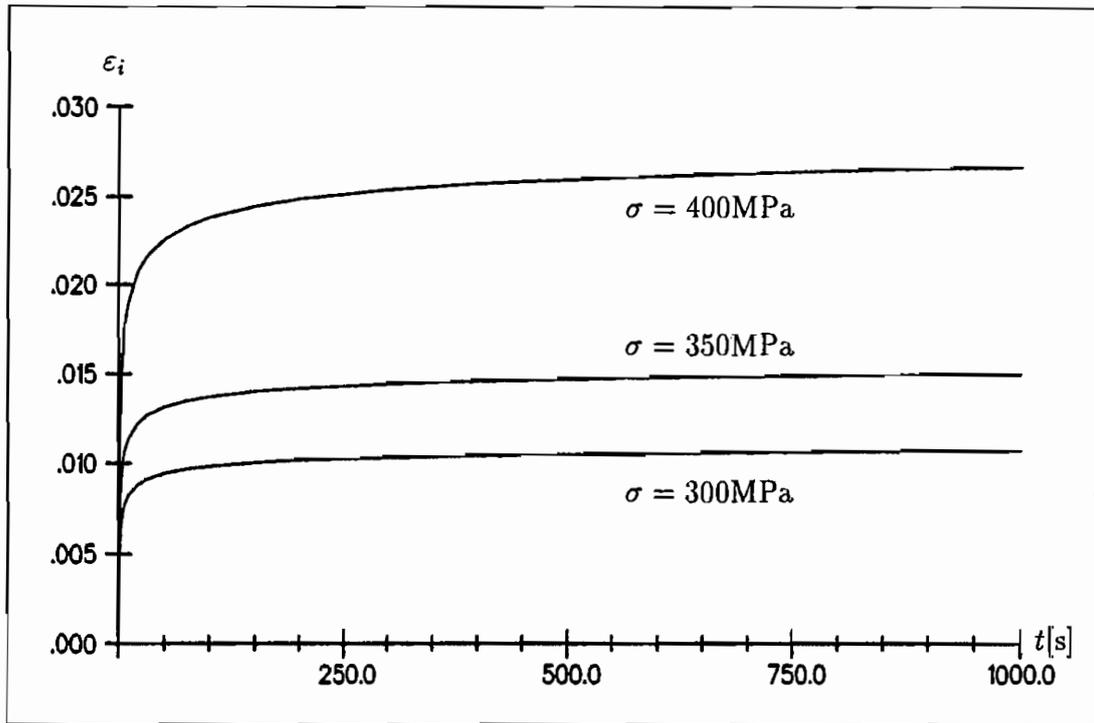


Abb. 7.16: Kriechversuche mit dem viskoplastischen Modells ohne Reckalterung ($T = 200\text{ }^\circ\text{C}$)

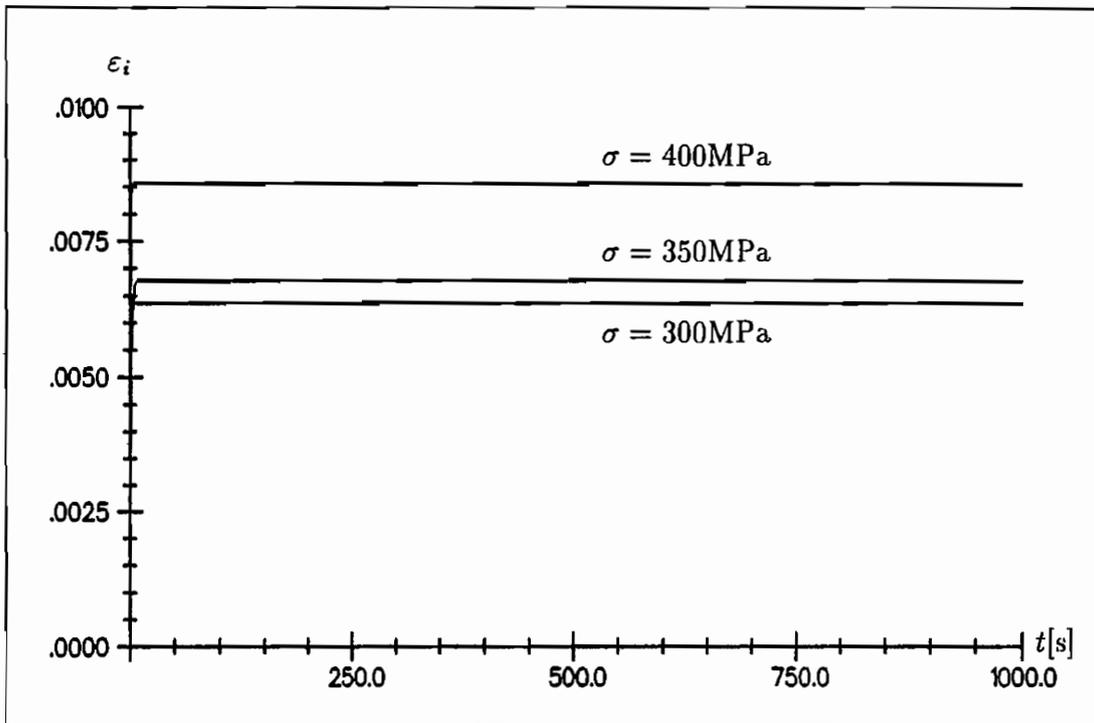


Abb. 7.17: Kriechversuche mit dem viskoplastischen Modells mit Reckalterung ($T = 200\text{ }^\circ\text{C}$)

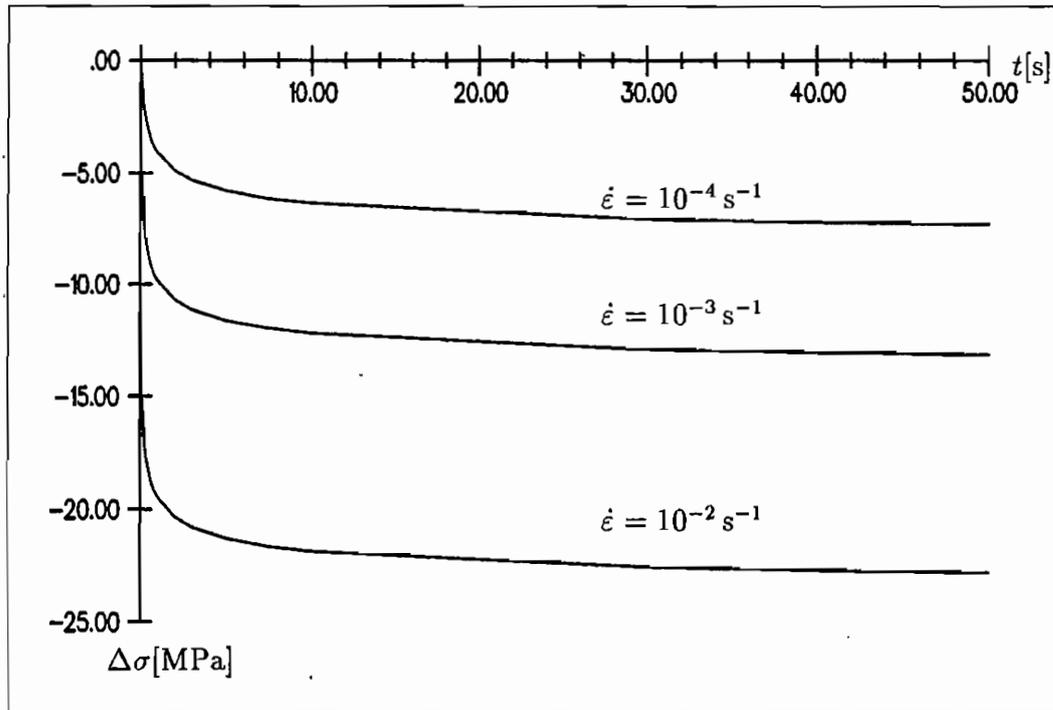


Abb. 7.18: Relaxationsversuche mit dem viskoplastischen Modells ohne Reckalterung ($T = 200 \text{ }^\circ\text{C}$)

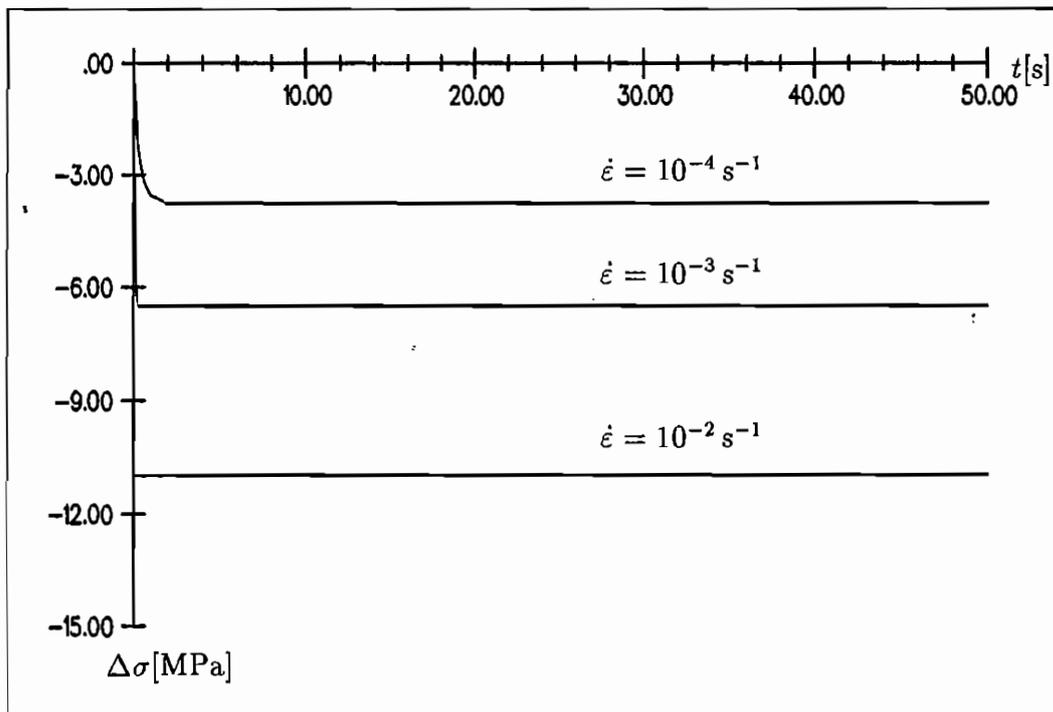


Abb. 7.19: Relaxationsversuche mit dem viskoplastischen Modells mit Reckalterung ($T = 200 \text{ }^\circ\text{C}$)

8. Finite-Elemente-Formulierung

8.1 Prinzip der virtuellen Arbeit

Der Ausgangspunkt für die Herleitung des Prinzips der virtuellen Arbeit ist die lokale, auf die momentane Konfiguration bezogene Formulierung des Impulssatzes

$$\operatorname{div} \underline{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Durch Skalarmultiplikation mit dem virtuellen Verschiebungsfeld $\delta \mathbf{u}$ und Integration über das aktuelle Volumen v erhält man das Prinzip der virtuellen Verrückung als schwache Formulierung des Gleichgewichts:

$$\int_v \operatorname{div}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dv + \int_v \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv = 0. \quad (8.1)$$

Benutzt man die Beziehung

$$\operatorname{div}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \delta \mathbf{u} = \operatorname{div}(\underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \mathbf{u}) - \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \operatorname{grad}(\delta \mathbf{u})$$

und wendet das Divergenztheorem

$$\int_v \operatorname{div} \underline{\boldsymbol{\sigma}} \, dv = \int_a \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \, da$$

und das Theorem von CAUCHY

$$\mathbf{t} \, da = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \, da$$

an, ergibt sich für (8.1):

$$\int_v \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \operatorname{grad} \delta \mathbf{u} \, dv = \int_a \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, da + \int_v \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv. \quad (8.2)$$

Berücksichtigt man die Symmetrie des CAUCHY-Spannungstensors $\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\boldsymbol{\sigma}}^T$ und die Vertauschbarkeit von Gradientenbildung und Variation, gelangt man zu

$$\int_v \underline{\boldsymbol{\sigma}} : \frac{1}{2} \delta(\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T) \, dv = \int_a \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, da + \int_v \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv. \quad (8.3)$$

Die linke Seite von (8.3) stellt die virtuelle Formänderungsarbeit δW dar. Die rechte Seite entspricht der virtuellen Arbeit aller äußeren flächenhaft und volumenhaft angreifenden Kräfte. Wenn auf dem Teil der Oberfläche ∂v_p die Spannungen und auf ∂v_u die Verschiebungen vorgegeben sind, so verschwindet wegen $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ auf ∂v_u der entsprechende Anteil des Oberflächenintegrals.

8.2 Numerische Lösungsmethoden

Die angestrebte Finite-Element-Formulierung berücksichtigt geometrische und physikalische Nichtlinearitäten. Diese begründen sich in einer mit jedem Lastschritt sich ändernden aktuellen Konfiguration und dem nichtlinearen Materialgesetz.

Das Grundproblem der nichtlinearen Berechnung ist die Ermittlung des Gleichgewichtszustandes eines Körpers, der den wirkenden Lasten entspricht. Eine Methode zur Lösung des Problems ist ein Inkrementalverfahren, das von der Annahme ausgeht, daß zu einem bestimmten Zeitpunkt t die Lösung bekannt ist und daß sie für einen Zeitpunkt $t + \Delta t$ gesucht wird, wobei Δt ein passend gewählter kleiner Zuwachs der Zeit ist. Zur Bestimmung des Gleichgewichtszustandes wird z.B. das modifizierte NEWTON-RAPHSON-Verfahren verwendet.

8.2.1 Update-Lagrange Formulierung

In der Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückung nach Gleichung (8.3) sind alle Größen auf die verformte Lage des Körpers bezogen. Da diese Lage nicht bekannt ist, wird für diesen Zustand eine Näherungslösung bestimmt, indem alle Variablen auf eine zuvor berechnete Gleichgewichtskonfiguration bezogen werden.

Als Gleichgewichtskonfigurationen können die Lösungen zu den Zeitpunkten $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t$ benutzt werden. Bezieht man sich auf die Konfiguration der unverformten Ausgangslage, spricht man von einer Total-Lagrange Formulierung. Wählt man die Konfiguration des zuletzt berechneten Schrittes, entspricht dies einer Update-Lagrange Formulierung. Im folgenden wird die Update-Lagrange Formulierung verwendet, da sie zu einer einfacheren Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix führt als die Total-Lagrange Formulierung.

Kennzeichnet man die aktuelle Konfiguration durch den Zeitpunkt $t + \Delta t$, wobei Δt das Zeitintervall eines Lastschrittes von der vorherigen Konfiguration zur aktuellen angibt, lautet die Formänderungsarbeit nach (8.3) zu diesem Zeitpunkt:

$$\delta W = \int_{t+\Delta t, v} {}^{t+\Delta t} \underline{\sigma} : \frac{1}{2} \delta (\text{grad} \mathbf{u} + (\text{grad} \mathbf{u})^T) {}^{t+\Delta t} dv$$

Die in der Formulierung auftretenden Größen sind danach zu unterscheiden, in welchem Zustand sie auftreten und in welchem Zustand sie gemessen werden. Der obere Index gibt an, in welcher Konfiguration die Größe auftritt, während der untere die Bezugskonfiguration wiedergibt. Sind beide Konfigurationen identisch, kann der untere Index entfallen. Koordinaten und Verschiebungen tragen zur Kennzeichnung der Konfiguration einen linken oberen Index. Die Zuwächse der Verschiebung von der Zeit t bis zur Zeit $t + \Delta t$ werden durch

$$\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}$$

beschrieben.

Mit der Definition des infinitesimalen Verzerrungstensors

$${}^{t+\Delta t}\underline{\epsilon} = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{u} + (\text{grad } \mathbf{u})^T)$$

ergibt sich für die virtuelle Formänderungsarbeit der Ausdruck:

$$\delta W = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\underline{\sigma} : \delta {}^{t+\Delta t}\underline{\epsilon} \, {}^{t+\Delta t}dv.$$

Die Größen auf der rechten Seite der Gleichung sind in der unbekanntem Konfiguration $t + \Delta t$ festgelegt. Es ist für die numerische Behandlung erforderlich, zu Spannungs- und Verzerrungsmaßen überzugehen, die sich auf die bekannte Konfiguration t beziehen und ebenfalls eine Darstellung der virtuellen Formänderungsarbeit δW ermöglichen. Solche energetisch konjugierten Größen sind der 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungs- und der GREEN Verzerrungstensor. Die Darstellung des 2. PIOLA-KIRCHHOFF Spannungstensors in der Konfiguration zum Zeitpunkt t ist:

$${}^{t+\Delta t}{}_{i}\underline{\mathbf{P}}_2 = J({}^{t+\Delta t}{}_{i}\underline{\mathbf{F}})^{-1} \cdot {}^{t+\Delta t}\underline{\sigma} \cdot ({}^{t+\Delta t}{}_{i}\underline{\mathbf{F}})^{-T}$$

mit

$$J = \frac{{}^{t+\Delta t}v}{{}^t v} = \frac{{}^t \rho}{{}^{t+\Delta t} \rho}.$$

Aus der Definition des GREEN Verzerrungstensor

$${}^{t+\Delta t}{}_{i}\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\text{Grad } \mathbf{u} + (\text{Grad } \mathbf{u})^T + (\text{Grad } \mathbf{u})^T \text{Grad } \mathbf{u})$$

folgt

$$\delta {}^{t+\Delta t}{}_{i}\underline{\mathbf{E}} = ({}^{t+\Delta t}{}_{i}\underline{\mathbf{F}})^T \cdot \delta {}^{t+\Delta t}\underline{\epsilon} \cdot {}^{t+\Delta t}{}_{i}\underline{\mathbf{F}}.$$

Man gelangt zu einer äquivalenten Darstellung der Formänderungsarbeit als Integral über das bekannte Gebiet ${}^t v$:

$$\delta W = \int_{{}^t v} {}^{t+\Delta t}{}_{i}\underline{\mathbf{P}}_2 : \delta {}^{t+\Delta t}{}_{i}\underline{\mathbf{E}} \, {}^t dv$$

Das Prinzip der virtuellen Arbeit lautet dann:

$$\int_{{}^t v} {}^{t+\Delta t}{}_{i}\underline{\mathbf{P}}_2 : \delta {}^{t+\Delta t}{}_{i}\underline{\mathbf{E}} \, {}^t dv = \int_{{}^t a} {}^{t+\Delta t}{}_{i}\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, {}^t da + \int_{{}^t v} {}^t \rho \, {}^{t+\Delta t}{}_{i}\mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, {}^t dv.$$

8.2.2 Inkrementelle Formulierung

Um das oben erwähnte modifizierte NEWTON-RAPHSON-Iterationsverfahren zur Bestimmung des Gleichgewichtszustandes durchzuführen, wird die Verschiebung \mathbf{u} durch die Folge $\mathbf{u}^{(k)}$ approximiert (Abb. 8.1):

$$\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u} \approx \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{u}^{(k)}, \quad (8.4)$$

mit

$$k = 1, 2, 3, \dots \quad \text{und} \quad \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0}.$$

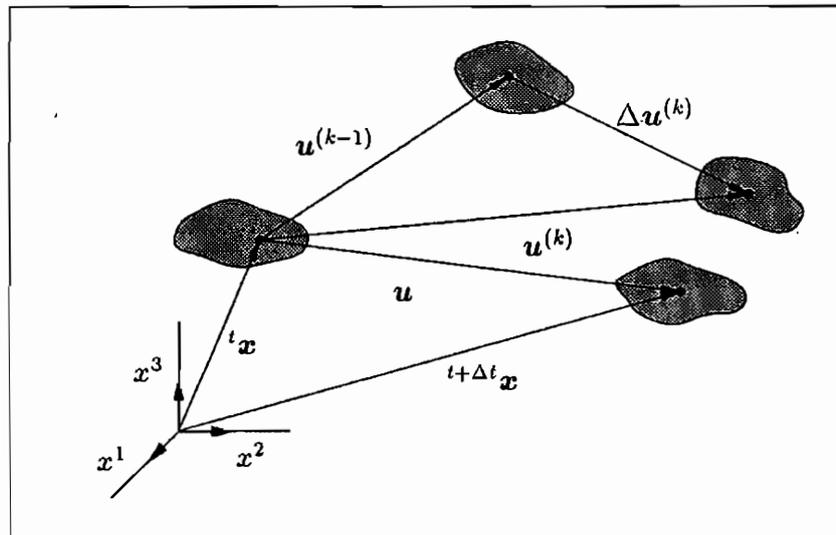


Abb. 8.1: Approximation der Verschiebung \mathbf{u} durch $\mathbf{u}^{(k)}$

Bildet man die Variation der Verschiebung, ergibt sich

$$\delta \mathbf{u} \approx \delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta(\Delta \mathbf{u}^{(k)}) = \delta \Delta \mathbf{u}^{(k)}.$$

Hierbei wurde berücksichtigt, daß die Variation der konstanten Verschiebung $\mathbf{u}^{(k-1)}$ für den Iterationsschritt k verschwindet.

Spaltet man den GREEN Verzerrungstensor bezüglich $\text{Grad} \mathbf{u}$ in einen linearen Anteil ${}^t \underline{\mathbf{e}}$ und nichtlinearen Anteil ${}^t \underline{\boldsymbol{\eta}}$ auf

$${}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{E}} = {}^t \underline{\mathbf{E}}^{(k)} = \underbrace{\frac{1}{2}(\text{Grad} \mathbf{u} + (\text{Grad} \mathbf{u})^T)}_{{}^t \underline{\mathbf{e}}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\text{Grad} \mathbf{u})^T \cdot \text{Grad} \mathbf{u}}_{{}^t \underline{\boldsymbol{\eta}}}$$

und bildet anschließend die Variation $\delta {}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{E}}$, ergibt sich mit (8.4)

$$\delta {}^{t+\Delta t} \underline{\mathbf{E}} \approx \delta {}^t \underline{\mathbf{E}}^{(k)} = \delta {}^t \underline{\mathbf{e}}^{(k)} + \delta {}^t \underline{\boldsymbol{\eta}}^{(k)} = \delta \Delta {}^t \underline{\mathbf{e}}^{(k)} + \delta \Delta {}^t \underline{\boldsymbol{\eta}}^{(k)}.$$

Dabei sind in

$$\begin{aligned}\delta\Delta_{\underline{t}}\underline{e}^{(k)} &= \frac{1}{2}(\delta\text{Grad}(\Delta\mathbf{u}^{(k)}) + \delta\text{Grad}(\Delta\mathbf{u}^{(k)})^T \\ &\quad + \delta\text{Grad}(\Delta\mathbf{u}^{(k)})^T \cdot \text{Grad}(\Delta\mathbf{u}^{(k-1)}) \\ &\quad + \text{Grad}(\Delta\mathbf{u}^{(k-1)})^T \cdot \delta\text{Grad}(\Delta\mathbf{u}^{(k)}))\end{aligned}$$

die in $\Delta\mathbf{u}^{(k)}$ linearen und in

$$\begin{aligned}\delta\Delta_{\underline{t}}\underline{\eta}^{(k)} &= \frac{1}{2}(\delta\text{Grad}(\Delta\mathbf{u}^{(k)})^T \cdot \text{Grad}(\Delta\mathbf{u}^{(k)}) \\ &\quad + \text{Grad}(\Delta\mathbf{u}^{(k)})^T \cdot \delta\text{Grad}(\Delta\mathbf{u}^{(k)}))\end{aligned}$$

die in $\Delta\mathbf{u}^{(k)}$ quadratischen Terme zusammengefaßt.

Der 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor läßt sich durch einen Anteil $\underline{P}_2^{(k-1)}$ und einen Zuwachs $\Delta\underline{P}_2^{(k)}$ annähern:

$${}^{t+\Delta t}\underline{P}_2 \approx \underline{P}_2^{(k)} = \underline{P}_2^{(k-1)} + \Delta\underline{P}_2^{(k)} \quad \text{mit } k = 1, 2, 3, \dots$$

Mit diesen Approximationen des Spannungs- und Verzerrungstensors kann das Prinzip der virtuellen Arbeit aufgeschrieben werden als

$$\begin{aligned}\int_{\underline{v}} \Delta\underline{P}_2^{(k)} : \delta\Delta_{\underline{t}}\underline{e}^{(k)} \, \text{d}\underline{v} + \int_{\underline{v}} \Delta\underline{P}_2^{(k)} : \delta\Delta_{\underline{t}}\underline{\eta}^{(k)} \, \text{d}\underline{v} + \int_{\underline{v}} \underline{P}_2^{(k-1)} : \delta\Delta_{\underline{t}}\underline{\eta}^{(k)} \, \text{d}\underline{v} = \\ \int_{\underline{a}} {}^{t+\Delta t}\underline{t} \cdot \delta\Delta\mathbf{u}^{(k)} \, \text{d}\underline{a} + \int_{\underline{v}} {}^t\underline{\rho} \, {}^{t+\Delta t}\underline{b} \delta\Delta\mathbf{u}^{(k)} \, \text{d}\underline{v} - \int_{\underline{v}} \underline{P}_2^{(k-1)} : \delta\Delta_{\underline{t}}\underline{e}^{(k)} \, \text{d}\underline{v}.\end{aligned}\tag{8.5}$$

8.2.3 Einbeziehung der Materialgleichungen

In der Formulierung des Prinzip der virtuellen Arbeit nach (8.5) müssen die Inkremente des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor $\Delta\underline{P}_2^{(k)}$ bestimmt werden. Dies geschieht mit Hilfe der konstitutiven Beziehungen.

Der Spannungszuwachs läßt sich durch numerische Integration mit dem expliziten EULER-Verfahren näherungsweise berechnen durch

$$\Delta\underline{P}_2^{(k)} \approx {}^t\underline{P}_2 \Delta t.\tag{8.6}$$

Für einen beliebigen Zeitpunkt τ kann die Beziehung

$${}^t\underline{\sigma} = \frac{\tau}{t} \underline{F} \cdot {}^\tau\underline{P}_2 \cdot \underline{F}^T, \quad t \leq \tau \leq t + \Delta t$$

angegeben werden. Bildet man die substantielle Zeitableitung, erhält man

$${}^t\dot{\underline{\sigma}} = \frac{\tau\dot{\rho}}{t\rho} \underline{F} \cdot {}^\tau\underline{P}_2 \cdot \underline{F}^T + \frac{\tau\rho}{t\rho} (\dot{\underline{F}} \cdot {}^\tau\underline{P}_2 \cdot \underline{F}^T + \underline{F} \cdot {}^\tau\dot{\underline{P}}_2 \cdot \underline{F}^T + \underline{F} \cdot {}^\tau\underline{P}_2 \cdot \dot{\underline{F}}^T).$$

Die substantielle Zeitableitung des Deformationsgradienten \underline{F} läßt sich mit Hilfe des Geschwindigkeitsgradiententensors $\underline{L} = \text{grad}\mathbf{v}$ angeben als

$$\dot{\underline{F}} = \underline{L} \cdot \underline{F}$$

In der Gleichung (8.6) wird die substantielle Zeitableitung des 2. PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor zum Zeitpunkt $\tau = t$ benötigt, für diesen Zeitpunkt gilt

$$\underline{F} = \underline{1}, \quad \dot{\underline{F}} = \underline{L} = \underline{D} + \underline{W}, \quad {}^t\underline{P}_2 = {}^t\underline{\sigma}.$$

Mit der mitrotierenden objektiven Zeitableitung des CAUCHY-Spannungstensors nach JAUMANN und ZAREMBA

$$\underline{\nabla} \underline{\sigma} = \dot{\underline{\sigma}} - \underline{W} \cdot \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \cdot \underline{W},$$

den Beziehungen

$$\underline{W} = \frac{1}{2}(\underline{L} - \underline{L}^T), \quad \underline{D} = \underline{L} + \underline{W}$$

und der Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho}/\rho = -\text{Sp}(\underline{D})$, ergibt sich dann

$${}^t\underline{P}_2 = {}^t\underline{\nabla} \underline{\sigma} + \text{Sp}({}^t\underline{D}) {}^t\underline{\sigma} - {}^t\underline{D} \cdot {}^t\underline{\sigma} - {}^t\underline{\sigma} \cdot {}^t\underline{D}^T \quad (8.7)$$

Die objektive Zeitableitung des CAUCHY-Spannungstensors ist durch das Stoffgesetz für den isothermen Prozeß gegeben als

$$\underline{\nabla} \underline{\sigma} = 2G(\underline{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Sp}(\underline{D}) \underline{1}) - 2G \frac{\underline{D}}{(i)} = \underline{C} \cdot \underline{D} - 2G \frac{\underline{D}}{(i)}. \quad (8.8)$$

Der Dehnungsgeschwindigkeitstensor \underline{D} läßt sich unter der Annahme zeitlich konstanter Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \text{konst.} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}}{\Delta t}$$

für $\tau = t$ schreiben als

$${}^t\underline{D} = \frac{1}{2\Delta t}(\text{Grad}\mathbf{u} + (\text{Grad}\mathbf{u})^T) = \frac{1}{\Delta t} \underline{\epsilon}_l. \quad (8.9)$$

Der Zuwachs des 2.PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensors nach (8.6) ergibt sich mit (8.7), (8.8), (8.9) und

$$\Delta \underline{\epsilon}_l^{(k)} = \frac{1}{2}(\text{Grad}(\Delta^{(k)}\mathbf{u}) + \text{Grad}(\Delta^{(k)}\mathbf{u})^T)$$

zu

$$\Delta \underline{P}_2^{(k)} \approx \underline{C} \cdot \Delta \underline{\epsilon}_l^{(k)} - 2G \Delta \underline{\epsilon}_l^{(k)} + \text{Sp}(\Delta \underline{\epsilon}_l^{(k)}) {}^t\underline{\sigma} - \Delta \underline{\epsilon}_l^{(k)} \cdot {}^t\underline{\sigma} - {}^t\underline{\sigma} \cdot \Delta \underline{\epsilon}_l^{(k)}.$$

8.2.4 Umsetzung in eine Finite-Elemente-Formulierung

Zur Aufstellung der Finite-Elemente-Matrizen werden dem isoparametrischen Konzept folgend die Koordinaten und Verschiebungen eines beliebigen Punktes innerhalb eines Elementes durch die Elementkoordinaten und -verschiebungen interpoliert. Die verwendete Interpolationsfunktion muß die wesentlichen (geometrischen) Randbedingungen erfüllen – die natürlichen (statischen) Randbedingungen werden im integralen Sinn erfüllt.

Als Ansatzfunktionen werden vollständige Polynomansätze gewählt. Der Grad der Polynome richtet sich nach der höchsten Ableitung m im Funktional des Variationsproblems. Die Ansatzfunktionen, die auch Formfunktionen genannt werden, müssen die Randbedingungen bis zur Ordnung $m-1$ erfüllen. Man spricht dann von einem C^{m-1} -Variationsproblem. Bei dem vorliegenden Variationsproblem ist eine C^0 -Stetigkeit erforderlich. Diese kann durch die Verwendung von LAGRANGESchen Polynomen erreicht werden.

Die Formfunktionen h_j des isoparametrischen 4-Knotenelementes sind in Abb. 8.2 dargestellt. Die analytische Form ist

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \\ h_2 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), \\ h_3 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \\ h_4 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta). \end{aligned}$$

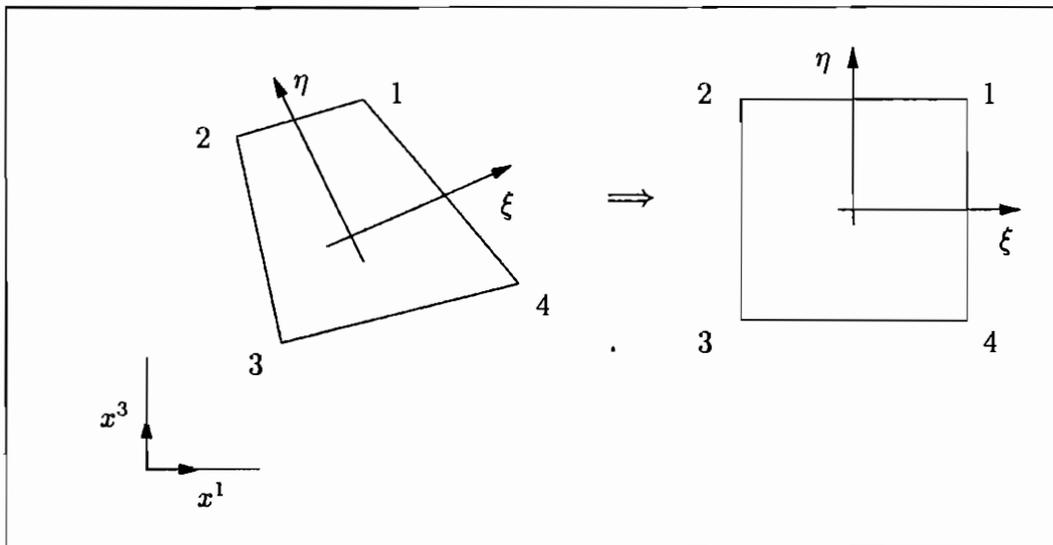


Abb. 8.2: Isoparametrisches 4-Knotenelement

Damit ergibt sich als Interpolation der Geometrie

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) \hat{x}_{i\alpha} \quad \alpha = 1, 2, 3$$

und der Verschiebung

$$u_\alpha = \sum_{i=1}^4 h_i(\xi, \eta) \hat{u}_{i\alpha} \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Das Prinzip der virtuellen Verrückung nach (8.5) läßt sich mit diesen Beziehungen in ein linearisiertes Gleichungssystem auf Elementebene überführen:

$$\left\{ \int_{\tau_V} [\underline{\mathbf{B}}_l^{(1)}]^T [\underline{\mathbf{C}}^*] [\underline{\mathbf{B}}_l^{(1)}] {}^t dv + \int_{\tau_V} [\underline{\mathbf{B}}_{nl}^{(1)}]^T [\underline{\mathbf{P}}_k^{(0)*}] [\underline{\mathbf{B}}_{nl}^{(1)}] {}^t dv \right\} [\Delta \hat{\mathbf{u}}^{(k)}] =$$

$$\int_{\sigma_a} [\underline{\mathbf{H}}^T [{}^{t+\Delta t} \mathbf{t}]^0] da - \int_{\tau_V} [\underline{\mathbf{B}}_l^{(1)}]^T [\underline{\mathbf{P}}_k^{(k-1)}] {}^t dv - \Delta t \int_{\tau_V} [\underline{\mathbf{B}}_l^{(1)}]^T [\underline{\mathbf{q}}] {}^t dv$$

mit

$$\int_{\tau_V} [\underline{\mathbf{B}}_l^{(1)}]^T [\underline{\mathbf{C}}^*] [\underline{\mathbf{B}}_l^{(1)}] {}^t dv = [\underline{\mathbf{K}}_l]$$

als inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix bei linearen Verzerrungen,

$$\int_{\tau_V} [\underline{\mathbf{B}}_{nl}^{(1)}]^T [\underline{\mathbf{P}}_k^{(0)*}] [\underline{\mathbf{B}}_{nl}^{(1)}] {}^t dv = [\underline{\mathbf{K}}_{nl}]$$

als inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix bei nichtlinearen Verzerrungen,

$$\int_{\sigma_a} [\underline{\mathbf{H}}^T [{}^{t+\Delta t} \mathbf{t}]^0] da = [\underline{\mathbf{R}}_p]$$

als äußerer Elementlastvektor,

$$\int_{\tau_V} [\underline{\mathbf{B}}_l^{(1)}]^T [\underline{\mathbf{P}}_k^{(k-1)}] {}^t dv = [\underline{\mathbf{F}}^{(k-1)}]$$

als Vektor der Lasten aus Elementspannungen und mit

$$\Delta t \int_{\tau_V} [\underline{\mathbf{B}}_l^{(1)}]^T [\underline{\mathbf{q}}] {}^t dv = [\underline{\mathbf{R}}_q]$$

als viskoplastischer Elementlastvektor.

Eine ausführliche Darstellung der Matrizen findet man bei ROTT[114]. In abkürzender Schreibweise erhält man das geometrisch und physikalisch linearisierte Gleichungssystem:

$$[\underline{\mathbf{K}}_l + \underline{\mathbf{K}}_{nl}] [\Delta \hat{\mathbf{u}}^{(k)}] = [\underline{\mathbf{R}}_p] - [\underline{\mathbf{F}}^{(k-1)}] - [\underline{\mathbf{R}}_q]$$

8.3 Strukturverhalten

Zur Berechnung des Strukturverhaltens ebener Probleme ist das vorliegende Materialmodell in das Finite-Elemente-Programm FEAP implementiert worden (TAYLOR & WRIGGERS [128], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [142, 143]). Dieses Programmpaket ist speziell zur Lösung nichtlinearer Probleme entwickelt worden.

8.3.1 Zugstab – Vergleich Stoffgesetzintegration/FE

Zur Kontrolle der Implementierung des Stoffgesetzes in die Finite-Elementformulierung wird ein Zugstab mit einem axialsymmetrischen Finiten-Element und den Differentialgleichungen der einaxialen Stoffgesetzformulierung nach Kapitel 7.2 gerechnet (Abb. 8.3). Es werden Vergleichsrechnungen im Bereich der statischen und dynamischen Reckalterung durchgeführt.

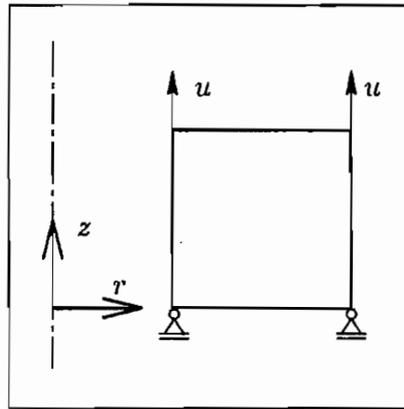


Abb. 8.3: FE-Modell Zugstab

Zur statischen Reckalterung werden weggesteuerte Prozesse mit der Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon} = 10^{-5} 1/s$ gefahren. Als Temperaturniveaus werden $T = 100^\circ\text{C}$, 200°C , 300°C und 400°C gewählt. Zusätzlich ist der Prozeß für $T = 20^\circ\text{C}$ gerechnet worden. Er dient als Vergleichsprozess zur Verdeutlichung des Ausmaßes der statischen Reckalterung.

In Abb. 8.4 sind die Spannungs-Dehnungskurven der Finiten-Element Rechnung und der Stoffgesetzintegration zusammengefaßt. Der Vergleich der Spannungs-Dehnungskurven zeigt eine gute Übereinstimmung der Finite-Elemente-Simulation mit der direkten Integration des Stoffgesetzes. Abb. 8.5 und 8.6 zeigen die Entwicklung der isotropen Verfestigungsvariablen κ und der Reckalterungsverfestigungsvariablen ρ . Der Verlauf der isotropen Verfestigungsvariablen zeigt ab einer Dehnung von $\epsilon = 7.5\%$ geringfügige Abweichungen zwischen FE-Simulation und Stoffgesetzintegration. Diese zeigen sich entsprechend bei der Entwicklung der Reckalterungsverfestigungsvariablen ρ in Abb. 8.6.

Zur dynamischen Reckalterung werden weggesteuerte Prozesse bei einer Temperatur von $T = 200^\circ\text{C}$ gefahren (Abb. 8.7). Es werden die Dehnungsgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, 10^{-3} s^{-1} und 10^{-2} s^{-1} untersucht. Die Stoffgesetzeintegration des elasto-plastischen Materialmodells und die FE-Rechnung zeigen eine sehr gute Übereinstimmung.

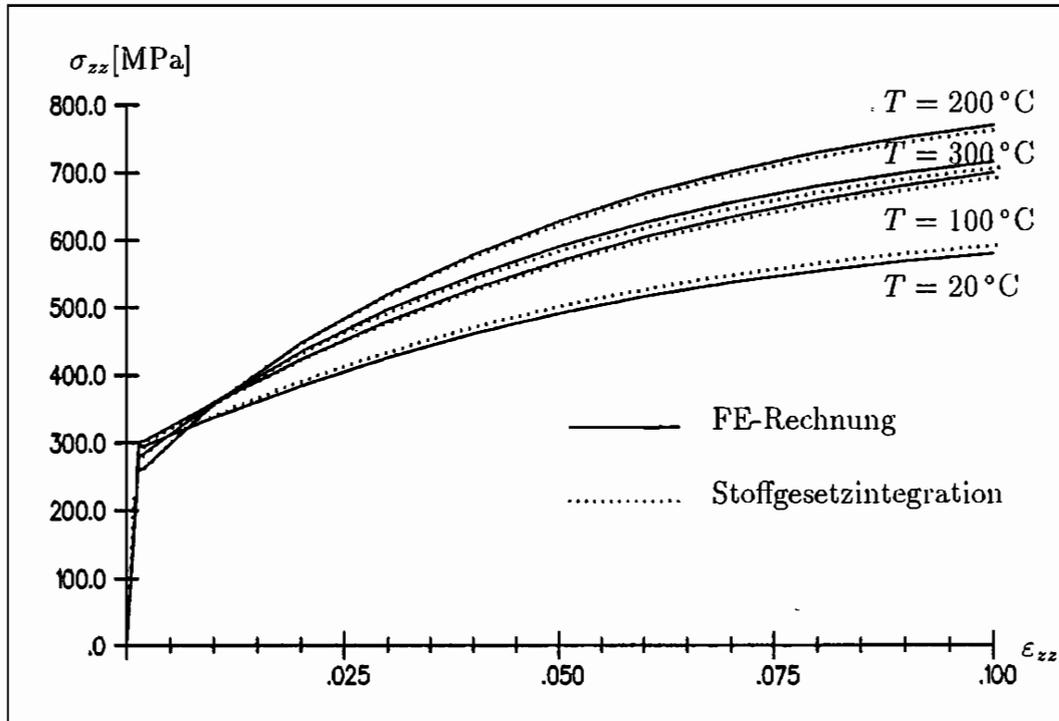


Abb. 8.4: Vergleich FE-Rechnung – Stoffgesetzeintegration: Spannung über Dehnung (statische Reckalterung)

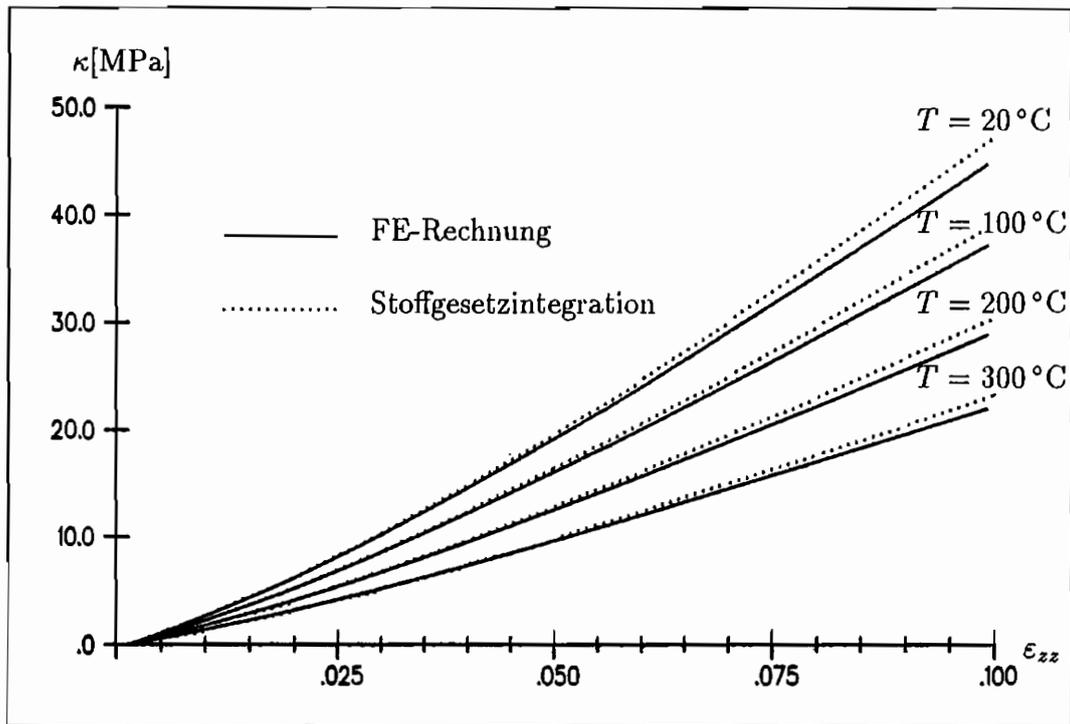


Abb. 8.5: Vergleich FE-Rechnung – Stoffgesetzintegration: Isotrope Verfestigungsvariable κ über Dehnung

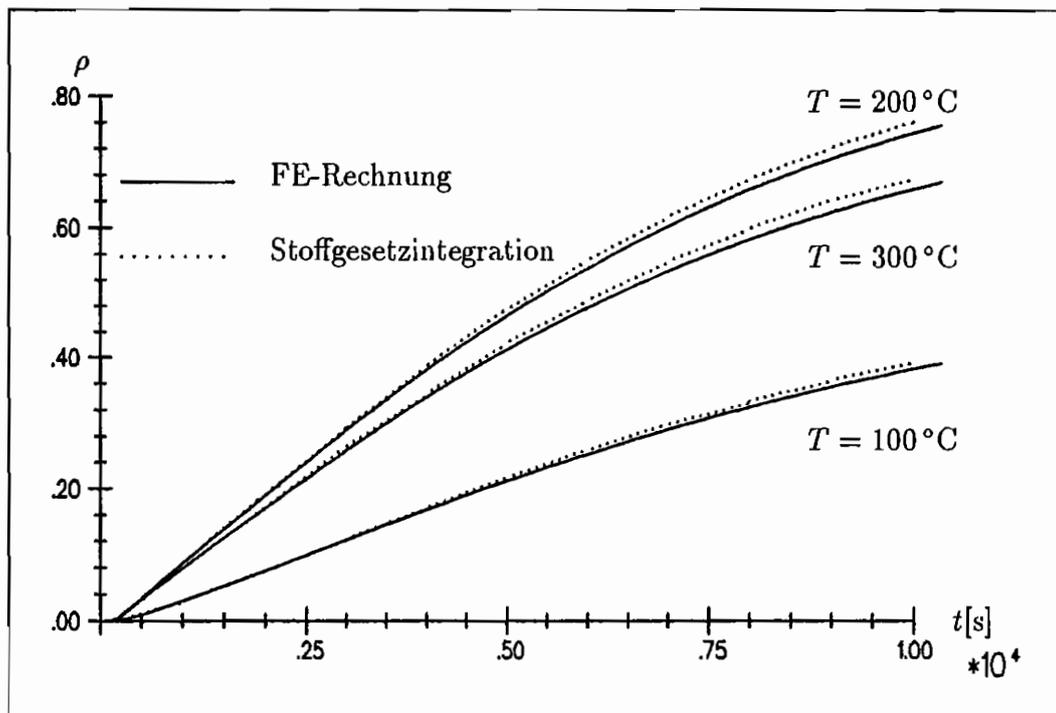


Abb. 8.6: Vergleich FE-Rechnung – Stoffgesetzintegration: Statische Reckalterungsvariable ρ über Zeit t

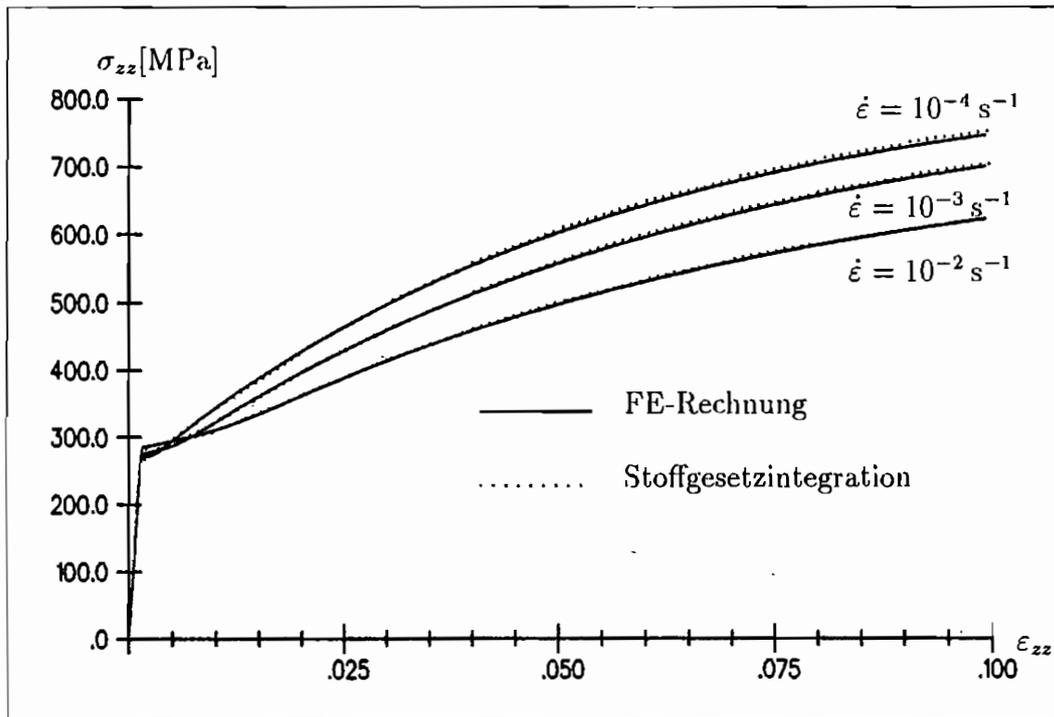


Abb. 8.7: Vergleich FE-Rechnung – Stoffgesetzintegration: Spannung über Dehnung (dynamische Reckalterung)

8.3.2 Gekerbter Zugstab

Als erstes Beispiel zur Analyse einer durch Alterung beeinflussten Struktur wird der gekerbte Zugstab untersucht. Aufgrund der Belastung und Geometrie kann der allgemeine dreidimensionale Spannungszustand durch den ebenen Spannungszustand angenähert werden. Die Geometrie des gekerbten Zugstabes, die FE-Diskretisierung und die Belastungsgeschichte sind in Abb. 8.8 dargestellt.

Nachdem eine Verformung bei Raumtemperatur aufgebracht worden ist – bei der keine Reckalterung auftritt – wird die Temperatur auf $T = 100^\circ\text{C}$ gesetzt. Der deformierte Körper ist in Abb. 8.9 mit einer fünffachen Vergrößerung dargestellt. Es ist eine Aufweitung der Kerböffnung und eine Starrkörperverschiebung der Mitte des Zugstabes nach oben zu beobachten.

Die VON MISES-Vergleichsspannung $\sigma_v = [1.5((\underline{\sigma} - \underline{\xi}) : (\underline{\sigma} - \underline{\xi}))]^{0.5}$ ist in Abb. 8.10 nach Aufbringung der Verformung und vor Beginn der Alterung dargestellt. Die Spannungsverteilung entspricht der zu erwartenden Verteilung eines gekerbten Bauteils. Im Kerbgrund tritt ein maximaler Spannungswert von $\sigma_v = 648 \text{ MPa}$ auf. Der obere Bereich der Flanken zeigt die geringste Materialbeanspruchung. Aus der Betrachtung des Verlaufes der isotropen Verfestigungsvariablen κ können Aussagen über die plastisch deformierten Gebiete des Körpers gemacht werden (Abb. 8.11). Die plastischen Bereiche befinden sich in der Nähe des Kerbgrundes, also in dem Bereich in dem die größte Vergleichsspannung auftritt. Der Maximalwert der isotropen Verfestigungsvariablen ist $\kappa = 65 \text{ MPa}$.

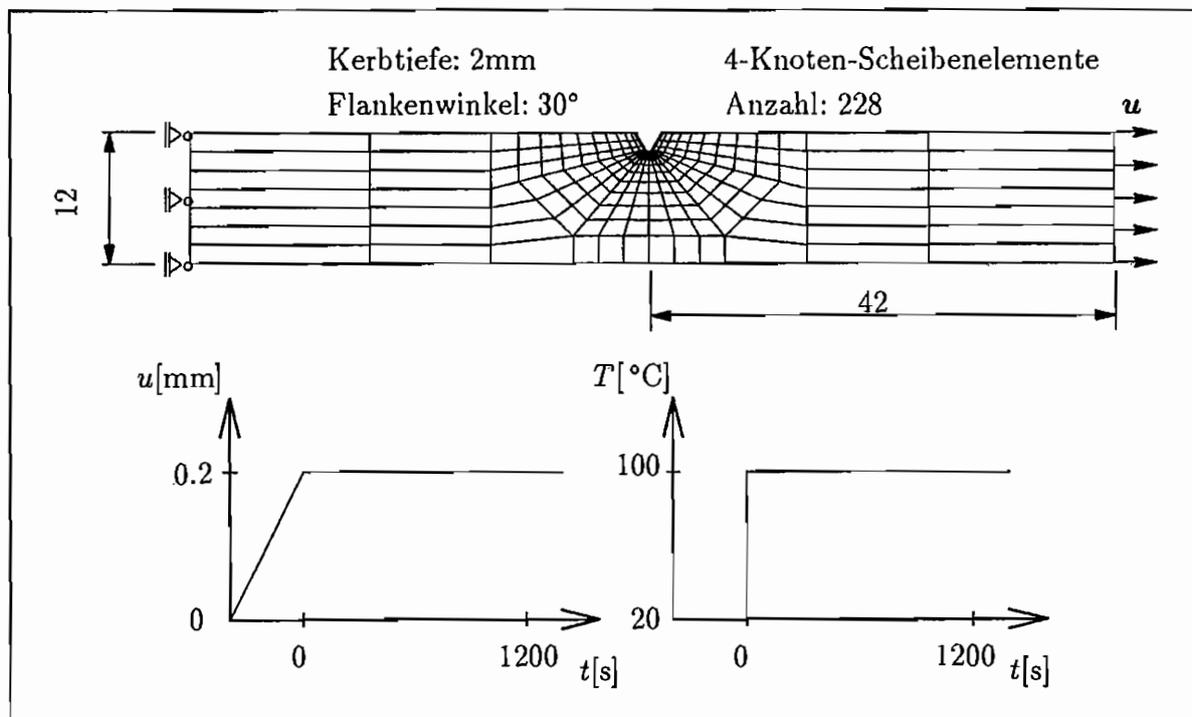


Abb. 8.8: Geometrie, Diskretisierung und Lastaufbringung

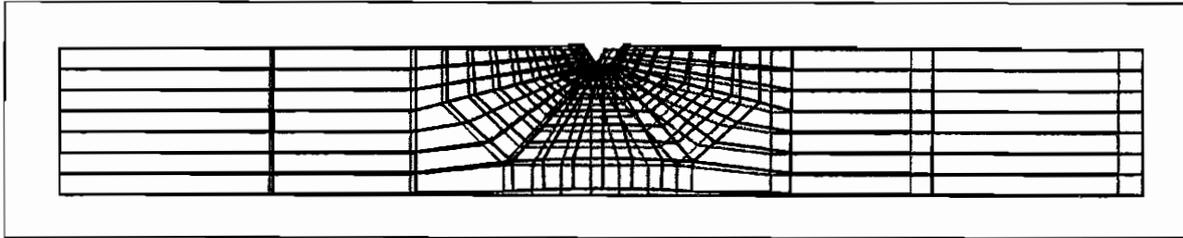


Abb. 8.9: Deformierter und undeformierter Zustand

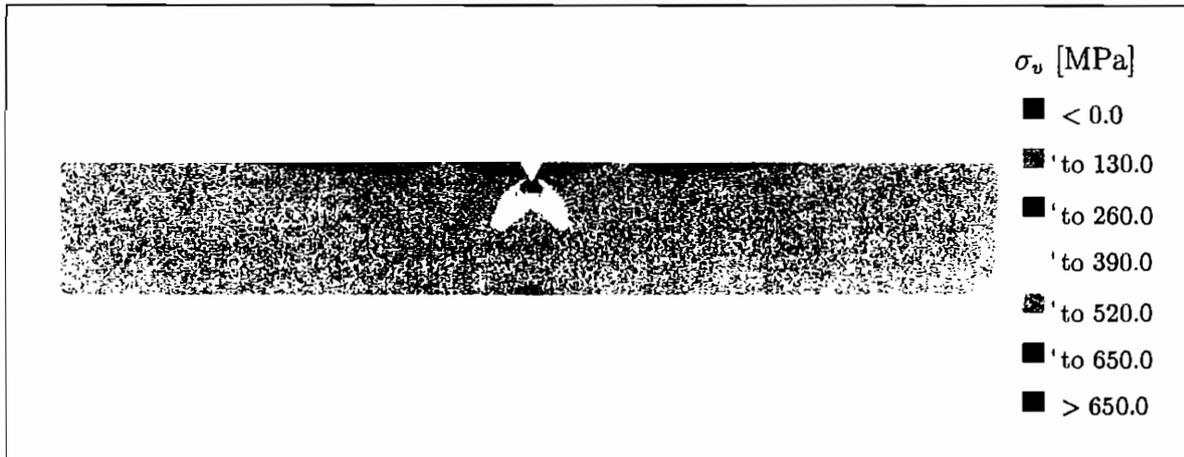


Abb. 8.10: Vergleichsspannung bei $t = 0$ s

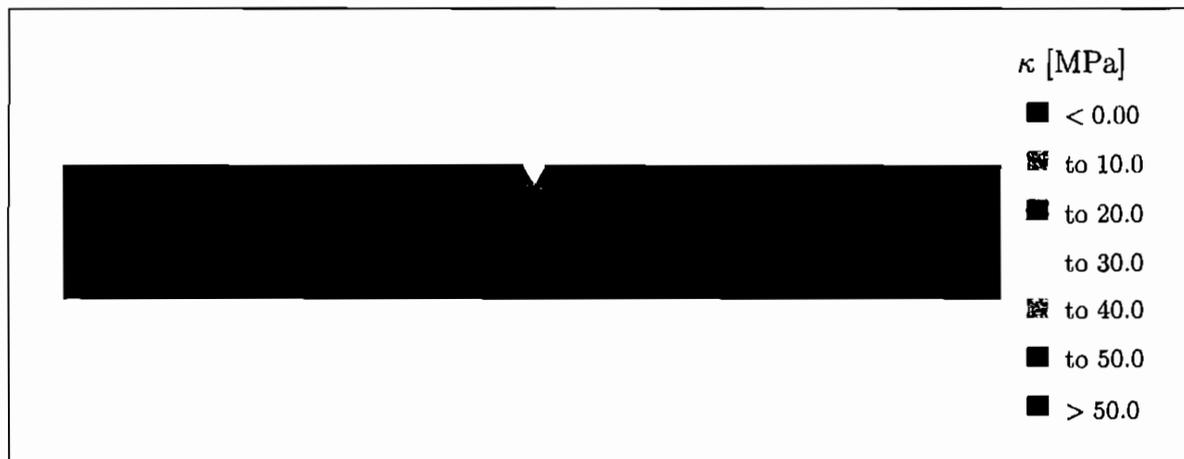


Abb. 8.11: Isotrope Verfestigungsvariable bei $t = 0$ s

Ab $t = 0$ s und $T = 100^\circ\text{C}$ beginnt der Prozeß der statischen Reckalterung. Für zunehmende Alterungszeiten ist die Entwicklung der statischen Reckalterungsvariablen ρ und der VON MISES-Vergleichsspannung σ_v in den Abb. 8.12 bis 8.17 dargestellt. Da die Entwicklung der statischen Reckalterungsvariablen ρ an plastische Deformationen gekoppelt ist, kann eine Entwicklung der statischen Reckalterungsvariablen nur in dem Bereich $\kappa > 0$ MPa auftreten. Der Bereich der plastischen Deformationen beschränkt sich auf ein kleines Gebiet unterhalb der Kerbe. Zur Verdeutlichung des Einflusses der statischen Reckalterung ist dieses Gebiet vergrößert in den Abb. 8.12 bis 8.17 herausgegriffen.

Für steigende Alterungszeiten ist eine Zunahme der Reckalterungsvariablen ρ festzustellen. Über die Materialfunktion g_ρ erhöht sich dabei die VON MISES-Vergleichsspannung σ_v . Das Gebiet $\rho > 0$ erstreckt sich, vom Kerbgrund aus beginnend (Abb. 8.12), über das gesamte Gebiet $\kappa > 0$ MPa (Abb. 8.17). Entsprechend ist ein Anwachsen der Vergleichsspannung σ_v festzustellen. Die qualitative Verteilung bleibt aber unbeeinflusst. Zur Verdeutlichung des Alterungseffektes sind die Maximalwerte der Alterungsvariablen und der Vergleichsspannung der Abb. 8.12 bis 8.17 in folgender Tabelle zusammengefaßt:

t [s]	ρ_{max}	σ_{vmax} [MPa]
0	0.00	546
30	0.05	556
60	0.10	565
180	0.24	594
360	0.37	623
600	0.46	648
1200	0.48	677

Die maximale Vergleichsspannung steigt bis zum Ende des Alterungsprozesses nach $t = 20$ min um fast 20 % an. Der stärkste Anstieg ist zwischen 180 und 360 Sekunden zu registrieren. Aufgrund der relativ geringen Alterungstemperatur von $T = 100^\circ\text{C}$ kann selbst nach $t = 1200$ s eine Zunahme von ρ und σ_v registriert werden.

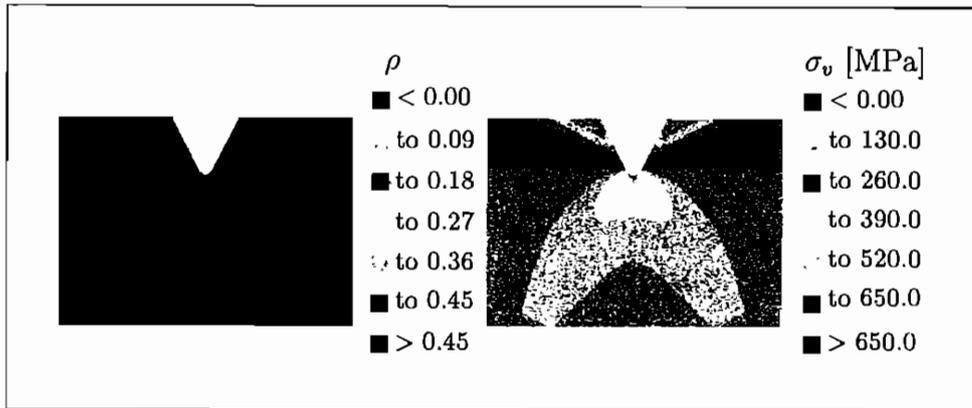


Abb. 8.12: Rekalterungsvariable und VON MISES-Vergleichsspannung bei $t = 30$ s

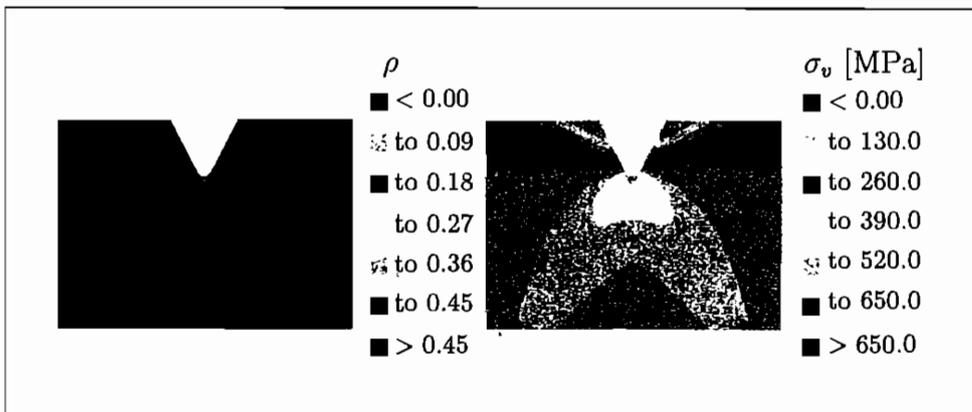


Abb. 8.13: Rekalterungsvariable und VON MISES-Vergleichsspannung bei $t = 60$ s

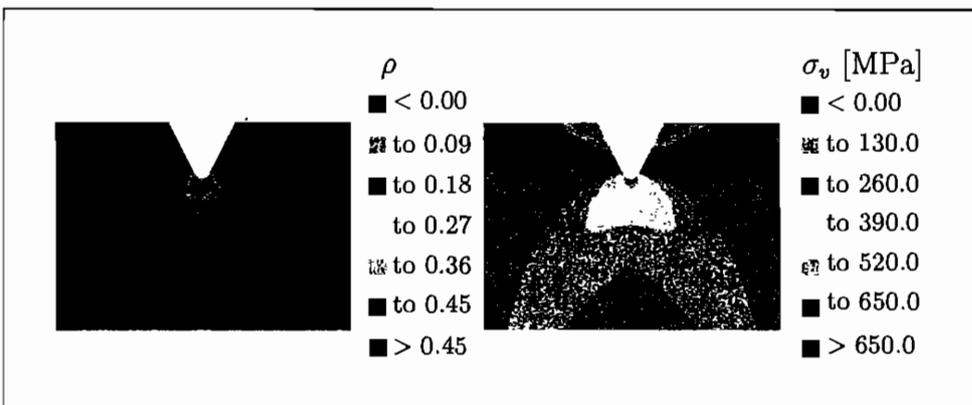


Abb. 8.14: Rekalterungsvariable und VON MISES-Vergleichsspannung bei $t = 180$ s

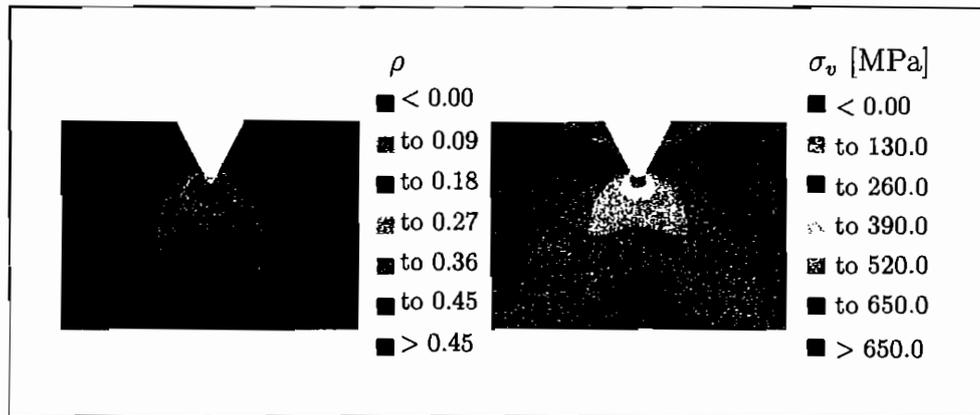


Abb. 8.15: Rekalterungsvariable und VON MISES-Vergleichsspannung bei $t = 360$ s

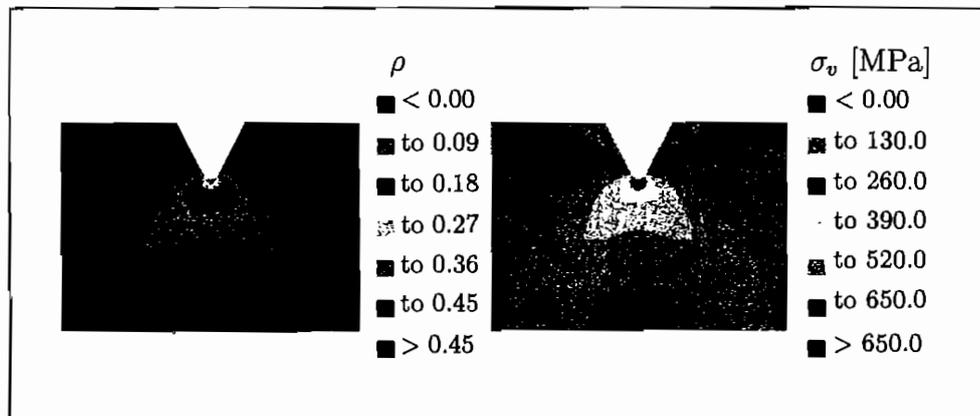


Abb. 8.16: Rekalterungsvariable und VON MISES-Vergleichsspannung bei $t = 600$ s

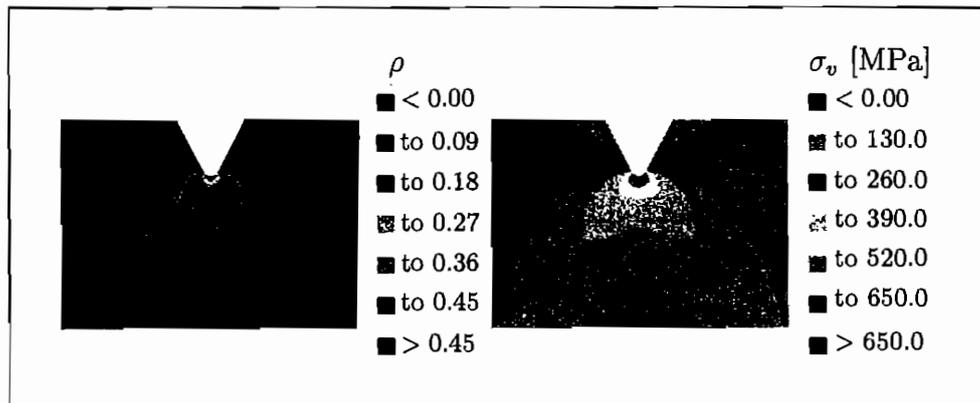


Abb. 8.17: Rekalterungsvariable und VON MISES-Vergleichsspannung bei $t = 1200$ s

8.3.3 Gelochte Scheibe

In diesem Kapitel wird der dynamische Reckalterungseffekt anhand der gelochten Scheibe untersucht. Vergleichsrechnungen, die qualitativ ähnliche Verläufe der Verformung und Spannung wiedergeben, finden sich u.a. bei ZIENKIEWICZ & TAYLOR [143]. Die Geometrie der Scheibe, die FE-Diskretisierung und die Belastungsgeschichte sind in Abb. 8.18 dargestellt.

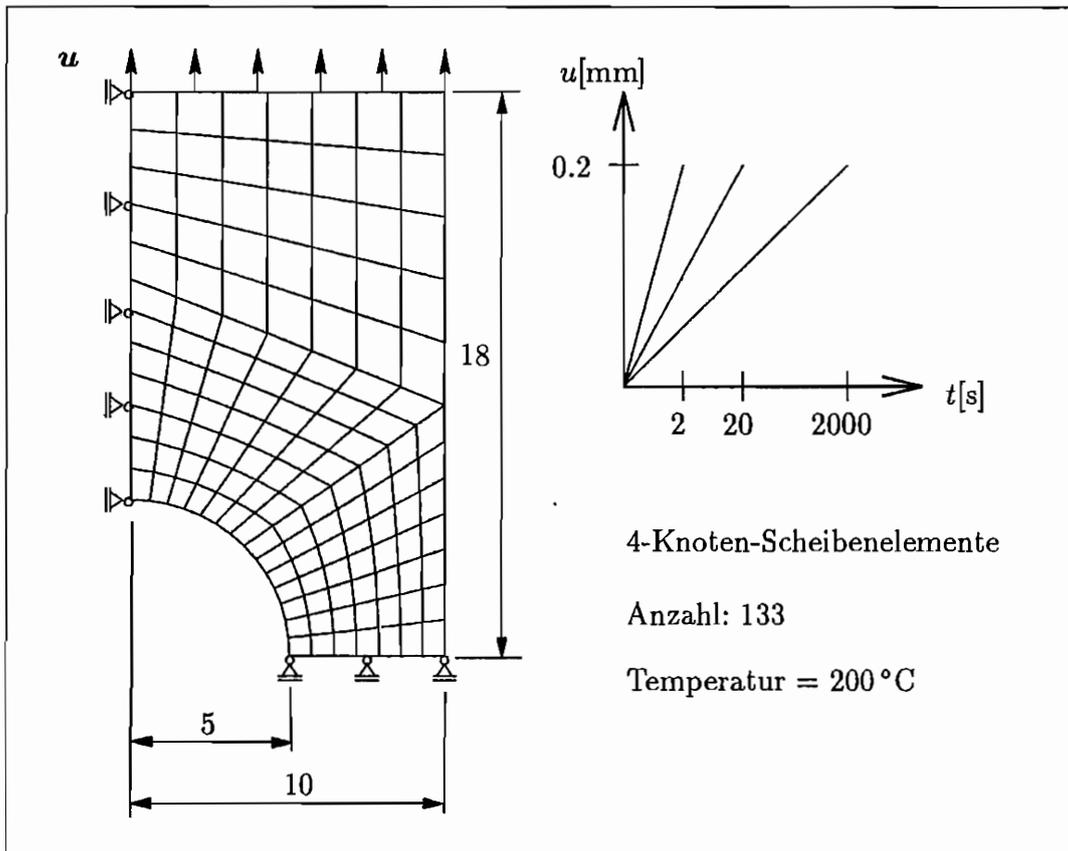


Abb. 8.18: Geometrie, Diskretisierung und Lastaufbringung

Aus Symmetriegründen wird nur ein Viertel der gesamten Scheibe betrachtet. Der Lochrand und die vertikale Außenseite sind frei verschieblich. Es wird eine konstante Verschiebung an der oberen horizontalen Außenseite aufgebracht. Es sind Rechnungen mit den drei Verformungsgeschwindigkeiten $\dot{u} = 10^{-1}$ mm/s, $\dot{u} = 10^{-2}$ mm/s und $\dot{u} = 10^{-4}$ mm/s durchgeführt worden.

Der verformte Zustand der Scheibe ist in Abb. 8.19 mit fünffacher Vergrößerung dargestellt. Das Loch geht in eine Ellipse über und die Scheibe verjüngt sich kontinuierlich bis zur horizontalen Symmetrieachse. Der Verlauf der isotropen Verfestigungsvariablen $\kappa > 0$ MPa in Abb. 8.19 kennzeichnet den Bereich der plastischen Verformung. Nur das Material, das sich in diesem Bereich befindet, wird von der Reckalterung beeinflusst.

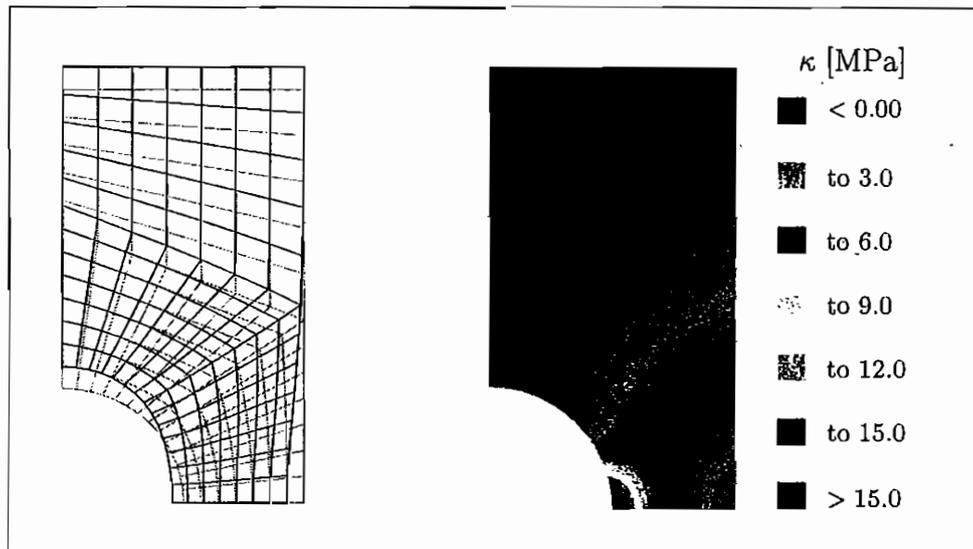


Abb. 8.19: Undeformierter und deformierter Zustand und isotrope Verfestigungsvariable

In den Abb. 8.20, 8.21 und 8.22 ist der Verlauf der VON MISES-Vergleichsspannung σ_v und die Reckalterungsverfestigungsvariable ρ nach der Aufbringung der Verschiebung $u = 0.2$ mm dargestellt. Das Extremum der Spannungsverteilung und der Reckalterungsvariablen zeigt sich am seitlichen Lochrand. Mit sinkender Verformungsgeschwindigkeit erkennt man eine zunehmende Vergleichsspannung im Gebiet des plastisch deformierten Materials. Diese Entwicklung kann auch an der Entwicklung des Bereiches $\rho > 0$ abgelesen werden, der für abnehmende Verformungsgeschwindigkeiten anwächst. Die Spannungszunahme folgt dabei der Entwicklung der Reckalterungsvariablen ρ . Zur Verdeutlichung des quantitativen Ausmaßes der dynamischen Reckalterung sind die maximalen Werte der Vergleichsspannung σ_v und der Reckalterungsvariablen ρ für die unterschiedlichen Verformungsgeschwindigkeiten in einer Tabelle zusammengestellt.

\dot{u} [mm/s]	σ_{vmax} [MPa]	ρ
10^{-1}	442	0.11
10^{-2}	533	0.51
10^{-4}	658	0.55

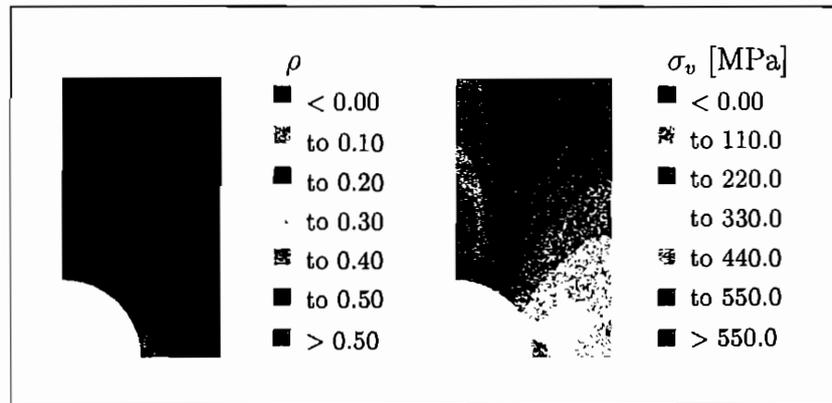


Abb. 8.20: Verformungsgeschwindigkeit $\dot{u} = 10^{-1}$ mm/s

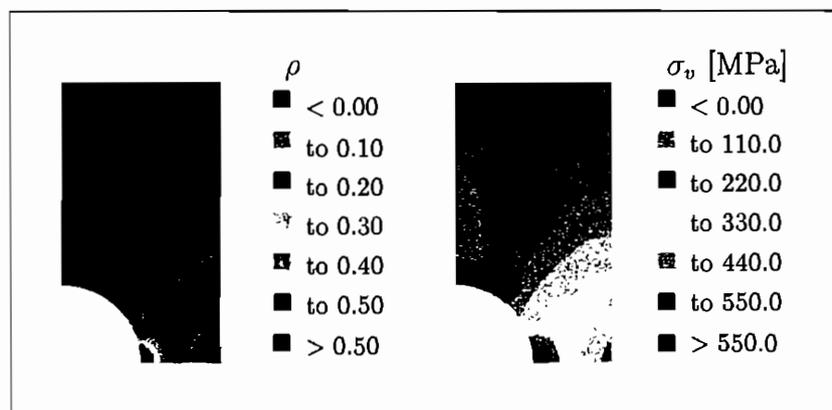


Abb. 8.21: Verformungsgeschwindigkeit $\dot{u} = 10^{-2}$ mm/s

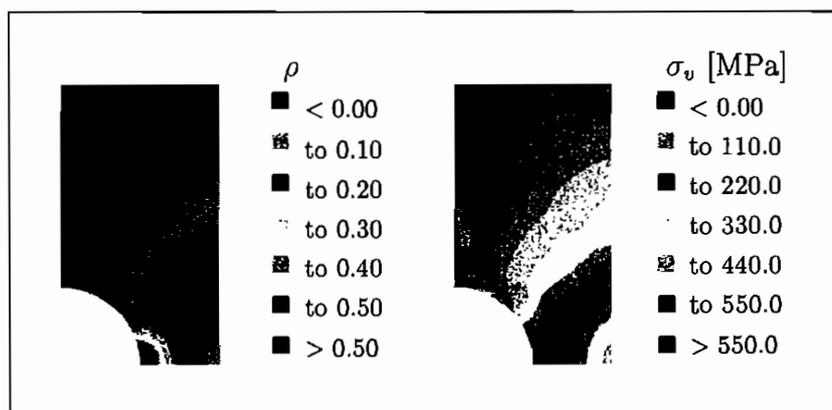


Abb. 8.22: Verformungsgeschwindigkeit $\dot{u} = 10^{-4}$ mm/s

9. Zusammenfassung und Ausblick

Auf Grundlage der durchgeführten Experimente und der Berücksichtigung mikromechanischer Erkenntnisse ist die Entwicklung eines elasto-plastischen bzw. eines elasto-viskoplastischen Stoffgesetzes zur Beschreibung der Reckalterung vorgestellt worden. Im Rahmen der klassischen irreversiblen Thermodynamik wurde die thermodynamische Konsistenz des Stoffgesetzes aufgezeigt. Durch eine physikalisch begründete Aufspaltung der Formänderungsenergie konnten Restriktionen für die Materialfunktionen aufgestellt werden. Neben einer zufriedenstellenden Anpassung der experimentellen Ergebnisse, ist das Stoffgesetz in der Lage, das durch die Reckalterung beeinflusste Kriech- und Relaxationsverhalten qualitativ korrekt zu beschreiben. Die phänomenologische Modellierung der Reckalterung ist so konzipiert, daß die dynamische Reckalterung – bei entsprechenden Randbedingungen – in die statische Reckalterung übergeht. Die Implementierung des Stoffgesetzes in ein FE-Programm und die durchgeführte Strukturanalyse verifizieren die im einaxialen Zugversuch gewonnenen Ergebnisse. Die Berechnungen des Spannungs- und Verformungszustandes des gekerbten Zugstabes und der gelochten Scheibe zeigen die Anwendbarkeit des Stoffgesetzes zur Berechnung komplexer Strukturen.

In dieser Arbeit ist die Beeinflussung des allgemeinen Verfestigungsverhaltens durch die Reckalterung in Abhängigkeit von Zeit, Temperatur, Verformungsgeschwindigkeit und Verformung untersucht worden. Weitergehende Betrachtungen könnten sich auf die Beschreibung der mit der Reckalterung einhergehenden instabilen Verformungsmechanismen, wie den gezackten Fließkurvenverlauf und die Wiederkehr des Lüdersbereiches, konzentrieren. Eine mikromechanische Beschreibung der inhomogenen Verformungsmechanismen findet sich bei BAIRD [4]. Einen Ansatz zur Beschreibung des gezackten Fließkurvenverlaufes innerhalb eines phänomenologischen Stoffgesetzes stellt WEGENER [133] dar.

Das Stoffgesetz ist in der Lage, eine allgemeine Temperaturentwicklung bei adiabater Prozeßführung zu geben. Da sich die experimentellen Daten auf Messungen von FELDMÜLLER [39] bei einer Ausgangstemperatur von $T_0 = 20^\circ\text{C}$ beschränken, wären experimentelle Untersuchungen und Anpassung des Temperatureanstiegs bei Ausgangstemperaturen im Reckalterungsbereich wünschenswert. Eine Anpassung der Temperaturentwicklung kann dabei über die konstitutive Beziehung für die dissipative Formänderungsleistung vorgenommen werden.

Um die quantitative Auswirkung der Reckalterung auf das Kriech- und Relaxationsverhalten zu bestimmen, müssen in diesen Bereichen neben experimentellen Untersuchungen auch Überlegungen zur Erweiterung des Stoffgesetzes angestellt werden. Die Überspannungsfunktionen könnten so modifiziert werden, daß das viskoplastische Verformungsver-

halten auf der einen Seite und das Kriech- und Relaxationsverhalten auf der anderen Seite durch unterschiedliche Materialfunktionen beschrieben werden (BRUHNS et. al. [10]) Das Kriechen des Materials ist in der Regel ein schädlicher Vorgang, der über längere Zeiträume zur Ribbildung und folglich zum Versagen eines Bauteils führen kann. Die Reckalterung bewirkt eine Herabsetzung der Kriechdehnung und hat somit einen positiven Einfluß auf Zeitdehngrenze und Zeitstandfestigkeit.

Obwohl von den meisten Experimentatoren keine oder nur eine geringe Wechselwirkung zwischen der kinematischen Verfestigung und der Reckalterung beobachtet werden konnte, könnte ein umfangreiches Versuchsprogramm hierüber genaueren Aufschluß geben. Durch die Hinzunahme der Reckalterungsvariablen in die Argumentliste der kinematischen Verfestigungsvariablen kann ein Einfluß der Reckalterung modelliert werden.

Eine experimentelle Analyse der abnehmenden Duktilität bzw. Verminderung der Dehngrenze im Reckalterungstemperaturbereich ist im Hinblick auf die Beeinflussung der Schädigung wünschenswert. Ansätze zur Berücksichtigung der Schädigung geben die Arbeiten von FELDMÜLLER [39] und SCHIESSE [117].

Abschließend kann festgestellt werden, daß die Reckalterung metallischer Werkstoffe eine Möglichkeit bietet, die Festigkeit von Materialien und Strukturen – selbst bei erhöhten Temperaturen – zu steigern. Eine Weiterentwicklung des vorgestellten Stoffgesetzes unter Berücksichtigung der oben angegebenen Punkte ist anzustreben.

A. Der Portevin-LeChatelier-Effekt

Der PORTEVIN-LECHATelier-Effekt äußert sich in einem unregelmäßigen Spannungs-Dehnungskurvenverlauf. Er begleitet die dynamische Reckalterung und ist ein Anzeichen inhomogener Verformung. Die mit steigender Dehngeschwindigkeit sinkenden Festigkeitswerte führen zu stark lokalisierenden Verformungen, d.h. zur Entstehung von Lüdersbändern.

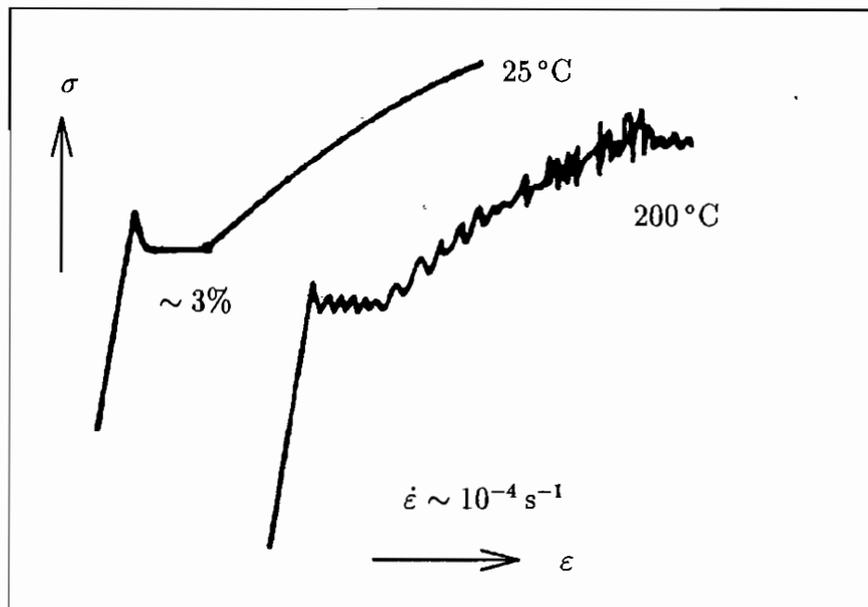


Abb.A.1: Spannung-Dehnungskurven für weichen Stahl (nach PINK et al. [105])

In Abb. A.1 ist die Fließkurve eines Metalls mit interstitiell gelösten Fremdatomen abgebildet. Die Zähnungen des PORTEVIN-LECHATelier-Effektes sind unregelmäßig und zeigen kein einheitliches Bild.

Die Spannungs-Dehnungskurven von substitutionellen Legierungen sind in Abb. A.2 dargestellt. Im Unterschied zu den Metallen mit interstitiell gelösten Fremdatomen weisen die Zähne einen regelmäßigeren Verlauf auf. Die Zähnungen vom Typ A und C_A entstehen dadurch, daß zwischen zwei benachbarten Zähnen sich ein Lüdersband von einem Ende der Probe zum anderen bewegt (BRINDLEY & WORHINGTON [7]). Ein diskontinuierliches Ausbreiten der Lüdersbänder führt zu Kurven mit den Zahntypen B und C_B . Jede Zacke steht für ein Stocken der Bewegung der Lüdersbänder. Allgemein kann festgestellt werden, daß bei einer Erhöhung der Temperatur die Zackenfolge-dichter wird (MAYER [84])

Abb. A.2 zeigt qualitativ den Verlauf von Fließkurven in Abhängigkeit von der Charakteristik der verwendeten Prüfmaschine. Kurven der Form a erhält man mit einer Prüfmaschine geringer Steifigkeit, die plötzliche Spannungsabfälle nicht registrieren kann. Einen ähnlichen Kurvenverlauf zeigen spannungsgesteuerte Versuche. Prüfmaschinen mit einer großen Steifigkeit liefern die Kurvenverläufe von b bis f. Die axiale Federkonstante ist bei diesen Maschinen größer als 10000 N/mm.

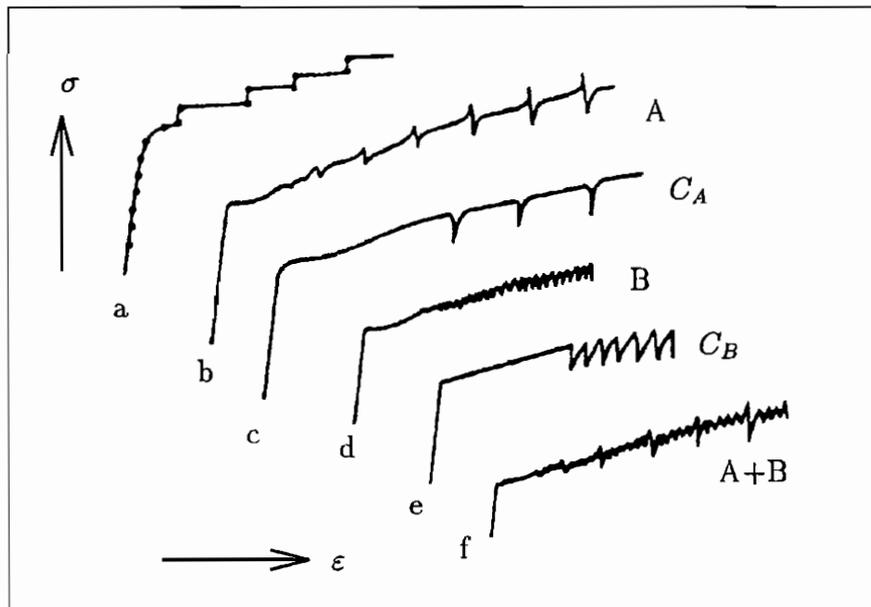


Abb. A.2: Spannung-Dehnungskurven für Substitutionslegierungen (nach PINK et al. [105])

B. Zustandsunabhängige objektive Zeitableitungen

Physikalische Größen – die durch Tensorfelder darstellbar sind – können entweder dem Ort (lokale Größen) oder dem Körperpunkt (substantielle Größen) zugeordnet werden. Die hier betrachteten physikalischen Größen sind im allgemeinen zeitabhängig. Zeitliche Änderungen können von einem Beobachter, der sich an einem festen Raumpunkt oder an einem festen Körperpunkt befindet unterschiedlich registriert werden. Man spricht von

- lokaler zeitlicher Ableitung (bei festgehaltenem Raumpunkt) und
- substantieller (materieller) zeitlicher Ableitung (bei festgehaltenem Körperpunkt).

Man kann natürlich die eine Beschreibung der zeitlichen Änderung in die andere übersetzen. Der Einfachheit halber sollen sich die Betrachtungen im folgenden auf Tensoren zweiter Stufe beschränken. Die Ergebnisse können ohne Schwierigkeiten auf Tensoren beliebiger Stufe übertragen werden (LEHMANN [60, 61]).

Ableitungen nach der Zeit im raumfesten Koordinatensystem

Es wird von der gemischt-varianten Darstellung

$$\underline{\mathbf{B}} = B^{\alpha}_{\beta}(x^{\rho}, t) \mathbf{g}_{\alpha}(x^{\rho}(t)) \otimes \mathbf{g}^{\beta}(x^{\rho}(t))$$

eines raumbezogenen Tensors ausgegangen. Die lokale Zeitableitung ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{B}} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(x^{\rho})} (B^{\alpha}_{\beta} \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \mathbf{g}^{\beta}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(x^{\rho})} B^{\alpha}_{\beta} \right) \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \mathbf{g}^{\beta}.$$

Die substantielle Zeitableitung des raumbezogenen Tensors erhält man mit

$$\frac{D}{dt} \underline{\mathbf{B}} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(\xi^r)} (B^{\alpha}_{\beta} \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \mathbf{g}^{\beta}) = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(x^{\rho})} B^{\alpha}_{\beta} + v^{\rho} B^{\alpha}_{\mu} |_{\rho} \right)}_{\dot{B}^{\alpha}_{\beta}} \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \mathbf{g}^{\beta}, \quad (\text{B.1})$$

wobei

$$\mathbf{v} = v^{\alpha} \mathbf{g}_{\alpha} = \frac{Dx^{\alpha}}{dt} \mathbf{g}_{\alpha}$$

die Geschwindigkeit des Körperpunktes gegenüber dem Beobachtungsraum darstellt.

Die nach (B.1) definierte Zeitableitung ist nicht invariant gegenüber Starrkörperdrehungen der Körperelemente, d.h. das Objektivitätsprinzip ist verletzt (LEHMANN [64]). Zu einer objektiven substantiellen Zeitableitung gelangt man, wenn die überlagerte Starrkörperrotation eliminiert wird. Für diese Ableitung wird ein neues Symbol eingeführt. Es ist

$$\overset{\nabla}{\underline{B}} = \dot{\underline{B}} - \underline{\Omega} \underline{B} + \underline{B} \underline{\Omega}, \quad (\text{B.2})$$

$$\overset{\nabla}{B^{\alpha}_{\cdot\beta}} = \dot{B}^{\alpha}_{\cdot\beta} - \Omega^{\alpha}_{\cdot\rho} B^{\rho}_{\cdot\beta} + B^{\alpha}_{\cdot\rho} \Omega^{\rho}_{\cdot\beta}, \quad (\text{B.3})$$

wobei $\underline{\Omega} = \underline{Q}^T \dot{\underline{Q}} = -\dot{\underline{Q}}^T \underline{Q}$ der Tensor der Rotationsgeschwindigkeit ist. \underline{Q} ist ein Orthogonaltensor, der die Rotationsgeschwindigkeit des Körperelementes repräsentiert. Dies ist die objektive substantielle Zeitableitung, die auf ZAREMBA und JAUMANN zurückgeht (JAUMANN [46]).

Ableitungen nach der Zeit im körperfesten Koordinatensystem

Es werden die zeitlichen Ableitungen eines körperbezogenen Tensors

$$\underline{B} = B^i_{\cdot j}(\xi^r, t) \mathbf{g}_i(\xi^r(t)) \otimes \mathbf{g}^j(\xi^r(t))$$

untersucht. Im körperfesten System können – wie im raumfesten Koordinatensystem – lokale und substantielle Differentialquotienten nach der Zeit aufgestellt werden. Hier sollen nur die substantiellen zeitlichen Ableitungen, d.h. bei festgehaltenen Körperkoordinaten, betrachtet werden, für die wird das Symbol \overline{D}/dt einführen wollen. Man unterscheidet zwischen:

1. der kovarianten zeitlichen Ableitung:

$$\frac{\overline{D}}{dt} \underline{B} = \frac{\overline{D}}{dt} (B^i_{\cdot j} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(\xi^r)} (B^i_{\cdot j} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j) \quad (\text{B.4})$$

und

2. der substantiellen Ableitung der Zahlenwerte des Tensors:

$$\frac{\overline{D}}{dt} (B^i_{\cdot j}) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(\xi^r)} (B^i_{\cdot j}) \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \dot{B}^i_{\cdot j} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j. \quad (\text{B.5})$$

Zur Bestimmung der kovarianten zeitlichen Ableitung ist die zeitliche Änderung der Basisvektoren zu ermitteln. Ausgehend von den Beziehungen

$$\frac{\overline{D}}{dt}g_{ij} = 2D_{ij} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{D}}{dt}g^{ij} = -2D^{ij}$$

zwischen den Basisvektoren und der Verzerrungsgeschwindigkeit \underline{D} der Körperelemente und mit der Forderung, daß die Rotation des Koordinatensystems eliminiert und nur relative Änderungen des Systems der Basisvektoren betrachtet werden sollen, erhält man nach einigen Umformungen die Darstellung

$$\frac{\overline{D}}{dt}g_i = D_i^j g_j \quad \text{bzw.} \quad \frac{\overline{D}}{dt}g^i = -D_j^i g^j.$$

Die kovariante zeitliche Ableitung nach (B.4) kann mit diesen Definitionen aufgeschrieben werden als

$$\frac{\overline{D}}{dt} (B^i_{,j} g_i \otimes g^j) = \underbrace{(B^i_{,j} + B^k_{,j} D_k^i - B^i_{,k} D_j^k)}_{\overset{\nabla}{B}^i_{,j}} g_i \otimes g^j. \quad (\text{B.6})$$

Für die ko- und kontravarianten Darstellungen ergeben sich:

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{B}^{ij} &= (B^{ij} + B^{kj} D_k^i + B^{ik} D_k^j) \\ \overset{\nabla}{B}_{ij} &= (B_{ij} - B_{kj} D_i^k - B_{ik} D_j^k) \end{aligned}$$

Die substantielle Ableitung der Zahlenwerte eines körperbezogenen Tensors läßt sich nach (B.5) angeben als

$$\frac{\overline{D}}{dt} (B^i_{,j}) g_i \otimes g^j = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(\xi^r)} (B^i_{,j}) g_i \otimes g^j = \overset{\nabla}{B}^i_{,j} g_i \otimes g^j.$$

Es ist zu beachten, daß für symmetrische Tensoren

$$B^{ij} = B^{ji}; \quad B^i_{,j} = B^i_{,j}; \quad B_{ij} = B_{ji}$$

nur jene zeitliche materielle Differentialquotienten wieder symmetrisch sind, die von der rein kovarianten oder der rein kontravarianten Darstellung abgeleitet werden.

Beziehungen zwischen körper- und raumbezogener Darstellung

In dieser Arbeit wird das Geschehen im Körper mittels eines allgemeinen krummlinigen raumfesten Koordinatensystems beschrieben. Deshalb ist es zweckmäßig, die zeitlichen

Ableitungen im körperfesten Koordinatensystem auf eine Darstellung im raumfesten System zu übertragen. Ausgehend von der Darstellung

$$\underline{\mathbf{B}} = B^i_{\cdot j}(\xi^r, t) \mathbf{g}_i(\xi^r(t)) \otimes \mathbf{g}^j(\xi^r(t))$$

lassen sich die Koeffizienten des körperbezogenen Tensors durch raumbezogene Größen als

$$B^i_{\cdot j} = B^{\alpha}_{\cdot \beta} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^j} \quad (\text{B.7})$$

angeben. Es gilt nun noch einen Ausdruck für die zeitliche Ableitung der rechten Seite von (B.7) zu finden. Dies geschieht über die Darstellung der zeitlichen Ableitungen der Ausdrücke $\partial x^{\alpha} / \partial \xi^i$ und $\partial \xi^i / \partial x^{\alpha}$. Diese sind

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{(\xi^r)} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^i}(\xi^r, t) = v^{\alpha}|_{\rho} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^i} \quad \text{bzw.} \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{(\xi^r)} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^{\alpha}}(\xi^r, t) = -v^{\rho}|_{\alpha} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^{\rho}}.$$

Damit erhält man für die substantielle Ableitung der Zahlenwerte eines körperbezogenen Tensors in raumbezogener Darstellung die Übergangsformeln

$$\begin{aligned} \dot{B}^i_{\cdot j} &= \left(\dot{B}^{\alpha}_{\cdot \beta} - B^{\rho}_{\cdot \beta} v^{\alpha}|_{\rho} + B^{\alpha}_{\cdot \rho} v^{\rho}|_{\beta} \right) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^j}, \\ \dot{B}^{ij} &= \left(\dot{B}^{\alpha\beta} - B^{\rho\beta} v^{\alpha}|_{\rho} - B^{\alpha\rho} v^{\beta}|_{\rho} \right) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{\beta}}, \\ \dot{B}_{ij} &= \left(\dot{B}_{\alpha\beta} + B_{\rho\beta} v^{\rho}|_{\alpha} + B_{\alpha\rho} v^{\rho}|_{\beta} \right) \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^j}. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke werden auch als OLDROYD-Ableitungen bezeichnet (OLDROYD [97, 98]). Die Transformation der kovarianten zeitlichen Ableitung nach Gleichung (B.6) in eine raumbezogene Darstellung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\mathbf{D}}}{dt} (\mathbf{B}^i_{\cdot j} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j) &= \left(\dot{B}^{\alpha}_{\cdot \beta} - W^{\alpha}_{\cdot \rho} + B^{\alpha}_{\cdot \beta} W^{\rho}_{\cdot \beta} \right) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^j} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \\ &= \left(\dot{B}^{\alpha}_{\cdot \beta} - W^{\alpha}_{\cdot \rho} + B^{\alpha}_{\cdot \beta} W^{\rho}_{\cdot \beta} \right) \mathbf{g}_{\alpha} \otimes \mathbf{g}^{\beta} \\ \underline{\mathbf{D}} &= \underline{\dot{\mathbf{B}}} - \underline{\mathbf{W}} \cdot \underline{\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{B}} \cdot \underline{\mathbf{W}}^T, \end{aligned}$$

wobei $W^{\alpha}_{\cdot \beta}$ der antimetrische Anteil des Gradienten des Geschwindigkeitsvektors

$$\begin{aligned} v^{\alpha}|_{\beta} &= \frac{1}{2} (v^{\alpha}|_{\beta} + v_{\beta}|\alpha) + \frac{1}{2} (v^{\alpha}|_{\beta} - v_{\beta}|\alpha) \\ &= D^{\alpha}_{\beta} + W^{\alpha}_{\cdot \beta} \end{aligned}$$

ist. Ein Vergleich zwischen der ZAREMBA-JAUMANN-Ableitung (B.2) und der Darstellung nach (B.8) offenbart, daß diese beiden Ableitungen für den Fall $\underline{\mathbf{\Omega}} = \underline{\mathbf{W}}$ identisch sind.

C. Materialparameter

Nachfolgend wird eine Auflistung der Materialfunktionen und der zugehörigen Materialparametern der Stoffgesetze nach Kapitel 6.2 gegeben

Isotrope Verfestigungsfunktion $g(\kappa, T)$

Als Ansatz für die isotrope Verfestigungsfunktion ist

$$g = g_1(1 - g_2 \exp(-g_3\kappa)) + g_4\kappa + g_5$$

mit

$$\begin{aligned} g_1 &= g_{11}\left(1 - \frac{T}{g_{12}}\right)^{g_{13}} & , & \quad g_2 = g_{21}\left(1 - \frac{T}{g_{22}}\right)^{g_{23}} & , \\ g_3 &= g_{31} + g_{32}T + g_{33}T^2 & , & \quad g_4 = g_{41}\left(1 - \frac{T}{g_{42}}\right)^{g_{43}} & , \\ g_5 &= g_{51}\left(1 - \frac{T}{g_{52}}\right)^{g_{53}} \end{aligned}$$

gewählt worden. Die Materialparameter sind

g_1	g_2	g_3
$g_{11} = 116739.98 \text{ MPa}^2$	$g_{21} = 1.8153194$	$g_{31} = 3.8802448 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}^{-2}$
$g_{12} = 2925.5872 \text{ }^\circ\text{C}$	$g_{22} = 1298.3803 \text{ }^\circ\text{C}$	$g_{32} = 1.1112559 \cdot 10^{-4} \text{ MPa}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
$g_{13} = 13.154613$	$g_{23} = 0.6340181$	$g_{33} = 1.6547861 \cdot 10^{-8} \text{ MPa}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$
g_4	g_5	
$g_{41} = 371.47465 \text{ MPa}$	$g_{51} = 156220.58 \text{ MPa}^2$	
$g_{42} = 3339.1626 \text{ }^\circ\text{C}$	$g_{52} = 1588.9095 \text{ }^\circ\text{C}$	
$g_{43} = 9.1919527$	$g_{53} = 7.4991205$	

Isotrope Rekalterungsverfestigungsfunktion $g_\rho(\rho, \kappa, T)$

Die Rekalterungsverfestigungsfunktion ist als lineare Funktion in Abhängigkeit von ρ angesetzt

$$g_\rho = g_{\rho_1} \rho \quad \text{mit} \quad g_{\rho_1} = 344348.87 \text{ MPa}^2$$

Statische Rekalterungsvariable $\rho(\rho, \kappa, T)$

Die Evolutionsgleichung der statischen Rekalterungsvariable ist

$$\dot{\rho} = \langle [c_1 - c_2 \exp(-c_3 \kappa D)] (\rho^\infty - \rho)^{c_4} \rangle$$

$$c_1 = 0.19368144, \quad c_2 = 0.1907041, \quad c_3 = 7612.0 \cdot 10^{-6} \text{ s/N},$$

$$c_4 = 0.858326877, \quad c_5 = 0.1506749$$

mit dem Diffusionskoeffizienten

$$D = D_0 \exp\left(\frac{Q_w c_5}{kT}\right)$$

$$D_0 = 2 \text{ mm}^2/\text{s}, \quad Q_w = 1.292914 \cdot 10^{-19} \text{ J}, \quad k = 1.38807 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{C}$$

und dem Grenzwert der statischen Rekalterungsvariablen

$$\rho^\infty = \rho_1^\infty + \rho_2^\infty \exp(-\rho_3^\infty \kappa)$$

und

$$\rho_1^\infty = \rho_{11}^\infty + \rho_{12}^\infty \exp(-\rho_{13}^\infty (T - \rho_{14}^\infty)^2),$$

$$\rho_2^\infty = -\rho_{21}^\infty - \rho_{22}^\infty \exp(-\rho_{23}^\infty (T - \rho_{24}^\infty)^2),$$

$$\rho_3^\infty = -\rho_{31}^\infty + \rho_{32}^\infty T - \rho_{33}^\infty T^2 + \rho_{34}^\infty T^3.$$

ρ_1^∞	ρ_2^∞	ρ_3^∞
$\rho_{11}^\infty = 0.6127427$	$\rho_{21}^\infty = 0.5601212$	$\rho_{31}^\infty = 9.87934 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}^{-1}$
$\rho_{12}^\infty = 0.5079273$	$\rho_{22}^\infty = 0.5022171$	$\rho_{32}^\infty = 2.08492 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
$\rho_{13}^\infty = 1.4642 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$	$\rho_{23}^\infty = 1.94206 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$	$\rho_{33}^\infty = 9.83459 \cdot 10^{-6} \text{ MPa}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$
$\rho_{14}^\infty = 244.8645 \text{ }^\circ\text{C}$	$\rho_{24}^\infty = 243.3009 \text{ }^\circ\text{C}$	$\rho_{34}^\infty = 1.65170 \cdot 10^{-8} \text{ MPa}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-3}$

Überspannungsfunktion $\Phi_v(\Lambda_v, T)$

Die Überspannungsfunktion ist gegeben durch den Ansatz

$$\Phi(\Lambda, T) = u_1 \left(1 - \exp\left(-u_2 \left(\frac{\Lambda}{\text{MPa}}\right)^{u_3}\right) \right)$$

mit

$$u_1 = 6.11095 \text{ s}^{-1}, \quad u_2 = 1.86440 \cdot 10^{-9}, \quad u_3 = 4.61220.$$

Überspannungsfunktion $\Phi_\rho(\Lambda_\rho, T)$

Die Überspannungsfunktion zur Modellierung des viskoplastischen Materialverhaltens mit Berücksichtigung der dynamischen Rekalterung hat die Form:

$$\Phi_{dyn}(T, \Lambda_\rho) = h(\Lambda_\rho) \Phi(\Lambda, T) - \lll \Phi_\rho(\Lambda_\rho, T) \ggg .$$

Dabei ist

$$h(\Lambda_\rho) = 1 + h_1(T) \frac{\Lambda_\rho}{\Lambda_{\rho m}}$$

und

$$\Phi_\rho(\Lambda_\rho, T) = d_1(T) \left\{ \exp \left[d_2(T) \left(\frac{\Lambda_\rho}{\Lambda_{\rho m}} \right)^{d_3(T)} \right] - 1 \right\}$$

mit

$$\Lambda_{\rho m} = \sqrt{g(\kappa, T) + g_\rho(\rho^\infty, T)} - \sqrt{g(\kappa, T)}$$

Aus der Anpassung im Temperaturbereich von $T = 100^\circ\text{C}$ bis $T = 400^\circ\text{C}$ ergeben sich die Materialparameter zu:

$$h(T) = h_1 + h_2 T + h_3 T^2 + h_4 T^3$$

mit

$$h_1 = -0.2578 \text{ s}^{-1}, \quad h_2 = 5.270 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \\ h_3 = -2.411 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}, \quad h_4 = 3.140 \cdot 10^{-8} \text{ }^\circ\text{C}^{-3}$$

und

$$d_1 = d_{11} + d_{12} T + d_{13} T^2 + d_{14} T^3$$

$$d_2 = d_{21} + d_{22} T + d_{23} T^2 + d_{24} T^3$$

$$d_3 = d_{31} + d_{32} T + d_{33} T^2 + d_{34} T^3$$

d_1	d_2	d_3
$d_{11} = -7.261341 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$	$d_{21} = 113.614$	$d_{31} = 5.10794$
$d_{12} = 1.33726 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$d_{22} = -2.08752 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$d_{32} = -4.693 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
$d_{13} = -7.314 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$	$d_{23} = 1.23331 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$	$d_{33} = 2.47445 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$
$d_{14} = 1.2658 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-3}$	$d_{24} = -2.166 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-3}$	$d_{34} = -4.667 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-3}$

D. Zusammenfassung des inelastischen Stoffgesetzes

Das elasto-plastische Stoffgesetz mit statischer Reckalterung

unabhängige Prozeßvariablen: $\underline{\sigma}, T$

abhängige Prozeßvariablen:

interne Variablen: $\underline{\xi}, \kappa, \rho$

andere: q, \dots

Konstitutive Beziehungen:

$$\text{Wenn } F_\rho = (\underline{\sigma}' - \underline{\xi}) : (\underline{\sigma}' - \underline{\xi}) - g(\kappa, T) - g_\rho(\rho, T) = 0$$

und $\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}}' + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} > 0$, dann

$$\underline{D} = \frac{1}{2G} \left\{ \underline{\dot{\sigma}}' + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \text{Sp}(\underline{\dot{\sigma}}') \underline{1} \right\} + \alpha \dot{T} \underline{1}$$

$$+ \frac{2(\underline{\sigma}' - \underline{\xi}) : \underline{\dot{\sigma}}' - \frac{\partial g}{\partial T} \dot{T} - \frac{\partial g}{\partial \rho} \dot{\rho}}{2(\underline{\sigma}' - \underline{\xi}) : (\zeta \underline{n} - \gamma \underline{\xi}) + \frac{\partial g}{\partial \kappa} \left[\frac{\delta}{\rho^0} (\underline{\sigma}' - \underline{\sigma}'_\rho - \underline{\xi}) : \underline{n} - \beta \kappa \right]} \underline{n}$$

$$\frac{\underline{D}}{(i)}$$

$$\underline{n} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} / \left\| \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\|$$

$$\underline{\dot{\xi}} = \zeta \frac{\underline{D}}{(i)} - \gamma \underline{\xi} \sqrt{\frac{\underline{D}}{(i)} : \frac{\underline{D}}{(i)}}$$

$$\dot{\kappa} = \frac{\delta}{\rho^0} (\underline{\sigma}' - \underline{\sigma}'_\rho - \underline{\xi}) : \frac{\underline{D}}{(i)} - \beta \kappa \sqrt{\frac{\underline{D}}{(i)} : \frac{\underline{D}}{(i)}}$$

$$\dot{\rho} = \langle [c_1 - c_2 \exp(-c_3 \kappa D)] (\rho^\infty - \rho)^{c_4} \rangle$$

$$\text{mit } \langle x \rangle = \begin{cases} x, & \text{wenn } T_{\rho_u} < T < T_{\rho_o} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$c_p \dot{T} = \dot{w}_{(a)} + \dot{w}_{(h)} - \frac{\partial \Psi^i}{\partial \kappa} \dot{\kappa} - \frac{\partial \Psi^i}{\partial \underline{\xi}} : \underline{\dot{\xi}} - \frac{1}{\rho} \text{div} q + r + T \left[\frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial T \partial \underline{S}} : \underline{\dot{S}} + \frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial T \partial \underline{\alpha}} : \underline{\dot{\alpha}} \right]$$

, sonst

$$\underline{D} = \underline{D}_{(r)}$$

$$\underline{\xi}^{\nabla} = \underline{0}$$

$$\dot{\kappa} = 0$$

$$\dot{\rho} = 0$$

$$c_p \dot{T} = -\frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \mathbf{q} + r + T \left[\frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial T \partial \underline{\sigma}} : \underline{\dot{\sigma}} \right]$$

Das elasto-viskoplastische Stoffgesetz mit dynamischer Reckalterung

unabhängige Prozeßvariablen: $\underline{\sigma}, T$

abhängige Prozeßvariablen:

interne Variablen: $\underline{\xi}, \kappa, \rho$

andere: $\bar{\underline{\sigma}}, \underline{\sigma}_v, \underline{q}, \dots$

Konstitutive Beziehungen:

Wenn $F = (\underline{\sigma}' - \underline{\xi}) : (\underline{\sigma}' - \underline{\xi}) - g(\kappa, T) - g_\rho(\rho^\infty, T) < 0$

und $\bar{F} = (\underline{\sigma}' - \underline{\xi}) : (\underline{\sigma}' - \underline{\xi}) - g(\kappa, T) \geq 0$, dann

$$\underline{D} = \frac{1}{2G} \left\{ \underline{\nabla} + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \text{Sp}(\underline{\nabla}) \underline{1} \right\} + \alpha \dot{T} \underline{1} + \underbrace{\lll \Phi_{dyn} \ggg}_{\underline{D}_{(i)}} \underline{n}$$

$$\underline{n} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} / \left\| \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right\|$$

$$\Lambda = \sqrt{f_v^2 - g(\kappa, T)}$$

$$\dot{\Lambda}_\rho = \sqrt{g(\kappa, T) + g_\rho(\rho_\infty, T) - f^2}$$

$$\Phi_{dyn} = h(\Lambda_\rho) \Phi(\Lambda, T) + \lll \Phi_\rho(\Lambda_\rho, T) \ggg$$

$$\text{mit } \lll x \ggg = \begin{cases} x, & \text{wenn } \Lambda \geq 0 \text{ und } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \lll x \ggg = \begin{cases} x, & \text{wenn } T_{\rho_u} < T < T_{\rho_o} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{\nabla} \underline{\xi} = \zeta \underline{D}_{(i)} - \gamma \underline{\xi} \sqrt{\underline{D}_{(i)} : \underline{D}_{(i)}}$$

$$\dot{\kappa} = \frac{\delta}{\rho_0} (\underline{\sigma}' - \underline{\sigma}'_v - \underline{\sigma}'_\rho - \underline{\xi}) : \underline{D}_{(i)} - \beta \rho \sqrt{\underline{D}_{(i)} : \underline{D}_{(i)}}$$

$$\dot{\rho} = \dot{\rho} = \langle [c_1 - c_2 \exp(-c_3 \kappa D)] (\rho^\infty - \rho)^{c_4} \rangle$$

$$\text{mit } \langle x \rangle = \begin{cases} x, & \text{wenn } v < v_\rho \wedge T > T_\rho \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$c_p \dot{T} = \dot{w}_{(d)} + \dot{w}_{(h)} - \frac{\partial \Psi^i}{\partial \kappa} \dot{\kappa} - \frac{\partial \Psi^i}{\partial \underline{\xi}} : \underline{\nabla} \underline{\xi} - \frac{1}{\rho} \text{div} \underline{q} + r + T \left[\frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial T \partial \underline{S}} : \underline{\nabla} \underline{S} + \frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial T \partial \underline{\alpha}} : \underline{\nabla} \underline{\alpha} \right]$$

, sonst

$$\underline{D} = \underline{D}_{(r)}$$

$$\underline{\overset{\nabla}{\xi}} = \underline{0}$$

$$\dot{\kappa} = 0$$

$$\dot{\rho} = 0$$

$$c_p \dot{T} = -\frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \mathbf{q} + r + T \left[\frac{\partial^2 \Psi^i}{\partial T \partial \underline{\sigma}} : \underline{\overset{\nabla}{\sigma}} \right]$$

Literaturverzeichnis

- [1] P.J. ARMSTRONG UND C.O. FREDERICK. A mathematical representation of the multiaxial bauschinger effect. Bericht, Research Development Department Berkely Nuclear Laboratories (1966).
- [2] M.F. ASHBY UND H.J. FROST. The kinetics of inelastic deformation above $0^{\circ}K$. In A.S. ARGON (Herausgeber), „Constitutive Equations in Plasticity“, Seiten 117–147 (1975).
- [3] J.D. BAIRD. *Metallurgical Reviews No. 149, Metals and Mater* 5, 1–18 (1971).
- [4] J.D. BAIRD. „The Inhomogeneity of Plastic Deformation“, Kapitel Dynamic Strain Aging, Seiten 191–222. ASM, Metals Park, OH (1973).
- [5] Y. BERGSTRÖM UND W. ROBERTS. The application of a dislocation model to dynamical strain ageing in α -iron containing interstitial atoms. *Acta Metallurgica* 19, 815–823 (1971).
- [6] B. J. BRINDLEY UND J. T. BARNBY. Dynamic strain aging in mild steel. *Acta Metallurgica* 14, 1765–1780 (1966).
- [7] B.J. BRINDLEY UND P.J. WORTHINGTON. Yield point phenomena in substitutional alloys. *Metallurgical Reviews No. 145, Metals and Mater* 15, 101–114 (1970).
- [8] O.T. BRUHNS. Constitutive modelling in the range of inelastic deformations. Bericht, Interatom (1984).
- [9] O.T. BRUHNS. On the constitutive relations of austenitic stainless steels. In C.S. DESAI, E. KREMPL, P.D. KIOUSIS UND T. KUNDU (Herausgeber), „Constitutive Laws for Engineering Materials - Theory and Applications, Vol. I“, Seiten 675–682. Elsevier, New York (1987).
- [10] O.T. BRUHNS, H. HÜBEL, U. KLEIN UND J. WORDSWORTH. The interatom model. In S. MURAKAMI J. FAN (Herausgeber), „Advances in Constitutive Laws for Engineering Materials“, Seiten 16–21. Pergamon Press (1988).
- [11] O.T. BRUHNS UND TH. LEHMANN. Optimum deformation rate in large inelastic deformation. In H. LIPPMANN (Herausgeber), „Metal Forming Plasticity“, Seiten 120–138. Springer Verlag, Berlin (1978).

- [12] E.P. CERNOCKY UND E. KREMPL. A theory of viscoplasticity based on infinitesimal total strain. *Acta Mechanica* **36**, 263–289 (1980).
- [13] J. L. CHABOCHE UND G. ROUSSELIER. On the plastic and viscoplastic constitutive equations - part i: Rules developed with internal variable concept. *Journal of Pressure Vessel Technique* **105**, 153–158 (1983).
- [14] J.L. CHABOCHE. On the constitutive equations of materials under monotonic or cyclic loadings. *Rech. Aéosp.* **5**, 31–45 (1983).
- [15] J.L. CHABOCHE. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity* **5**, 247–302 (1989).
- [16] J.L. CHABOCHE. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects. *International Journal of Plasticity* **7**, 661–678 (1991).
- [17] U.W. CHO UND W.N. FINDLEY. Creep and creep recovery of 304 stainless steel at low stresses and effects of aging. Bericht, Engineering Materials Research Laboratory Report EMRL-75, Brown University, Providence, RI (1980).
- [18] R. CLAUSIUS. Über eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie. *J.C. Poggendorffs Annalen der Physik (und Chemie)* **93**, 481 (1854).
- [19] B.D. COLEMAN UND M.E. GURTIN. Thermodynamics with internal state variables. *Journal of Chemical Physics* **47**, 597–613 (1967).
- [20] J.M. CORUM. Interim guidelines for detailed inelastic analysis of high-temperature reactor system components. Bericht, ORNL-5014, Oak Ridge National Laboratory (1974).
- [21] A.H. COTTRELL. Effect of solute atoms on the behavior of dislocations. Bericht, The Physical Society, London (1948).
- [22] A.H. COTTRELL. „Dislocations and Plastic Flow“. Clarendon, Oxford (1953).
- [23] A.H. COTTRELL. „A Note on the Portevin-Le Chatelier-Effect“. Dissertation, (1953).
- [24] A.H. COTTRELL UND B.A. BILBY. Dislocation theory of yielding and strain aging of iron. Seite 49. The Physical Society (1949).
- [25] A.H. COTTRELL UND M.A. JASWON. Proc. Roy. Soc. (1949).

- [26] L. J. CUDDY UND W. C. LESLIE. Some aspects of serrated yielding in substitutional solid solutions of iron. *Acta Metallurgica* **20**, 1157–1167 (1972).
- [27] Y.F. DAFALIAS. Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations. *Journal of Applied Mechanics* **50**, 561–565 (1983).
- [28] Y.F. DAFALIAS. The plastic spin concept and a simple illustration of its role in finite plastic transformations. *Mechanics of Materials* **3**, 223–233 (1984).
- [29] Y.F. DAFALIAS. The plastic spin. *Journal of Applied Mechanics* **52**, 865–871 (1985).
- [30] W. DAHL UND P. BELCHE. „Grundlagen der Festigkeit, der Zähigkeit und des Bruches“, Kapitel 2.3, Seiten 95–204. Verlag Stahleisen mbH, Düsseldorf (1983).
- [31] W. DAHL UND H. REES. „Die Spannungs-Dehnungs-Kurve von Stahl“. Verlag Stahleisen mbH, Düsseldorf (1976).
- [32] S.R. DE GROOT UND P. MAZUR. „Grundlagen der Thermodynamik irreversibler Prozesse“. BI, Mannheim, Zürich (1969).
- [33] P. DELOBELLE. Synthesis of the elastoviscoplastic behavior and modelization of an austenitic stainless steel over a large temperature range, under uniaxial and biaxial loadings, part i: Behavior. *International Journal of Plasticity* **9**, 65–85 (1993).
- [34] P. DELOBELLE. Synthesis of the elastoviscoplastic behavior and modelization of an austenitic stainless steel over a large temperature range, under uniaxial and biaxial loadings, part ii; phenomenological modelization. *International Journal of Plasticity* **9**, 87–118 (1993).
- [35] C. ECKART. The thermodynamics of irreversible processes, i. the simple fluid. *The physical review* **58**, 269–275 (1940).
- [36] C. ECKART. The thermodynamics of irreversible processes ii. fluid mixtures. *The physical review* **58**, 269–275 (1940).
- [37] J.D. ESHELBY. Dislocation in visco-elastic materials. *Philosophical Magazine* **6**, 953–963 (1961).
- [38] J.D. FAST. Verformungsalterung in Eisen und Stahl. *Phillips Technische Rundschau* **14**(1), 27–35 (1952).
- [39] A. FELDMÜLLER. „Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1991).

- [40] F. FETTWEIS. Über die Blaubrüchigkeit und das Altern des Eisens. *Stahl und Eisen* **39**(1), 1–7 (1919).
- [41] H.J. FROST UND M.F. ASHBY. „Deformation Mechanism Maps“. Pergamon Press (1982).
- [42] A.E. GREEN UND P.M. NAGHDI. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Archives for rational mechanics and analysis* **18**, 251–281 (1965).
- [43] GUILLET UND RÉVILLON. *Revue de Métallurgie* Seite 94 (1909).
- [44] G. T. HAHN. A model for yielding with special reference to the yield-point phenomena of iron and related bcc metals. *Acta Metallurgica* **10**, 727–738 (1962).
- [45] B.B. HUNDY. The strain-age hardening of mild steel. *Metallurgica* Seiten 203–211 (1956).
- [46] G. JAUMANN. Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze. In „Sitzungsbericht der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien“, Seiten 71–95 (1911).
- [47] A.S. KEH, Y. NAKADA UND W.C. LESLIE. In „Dislocation Dynamics“. Mc Graw-Hill, New York (1968).
- [48] E. KREMPL. An experimental study of room-temperature rate-sensitive, creep and relaxation of AISI type 304 stainless steel. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* **27**, 363–375 (1979).
- [49] E. KREMPL. The role of aging in the modeling of elevated temperature deformation. In B. WILSHIRE UND D.R.J. OWEN (Herausgeber), „Creep and Fracture of Engineering Materials and Structures“, Seiten 201–221, Swansea, UK (1981). Pineridge Press.
- [50] E. KREMPL. Isotropic and orthotropic formulations of the viscoplastic theory based on overstress. *Constitutive Laws for Engineering Materials - Theory and Applications I*, Krempl, E.; Kioussis, T., Elsevier Seiten 137–148 (1987).
- [51] E. KREMPL, E.P. CERNOCKY UND M.C.M. LUI. The representation of viscoplastic phenomena in constitutive equations. *Constitutive Equations in Viscoplasticity: Computational and Engineering Aspects. AMD* (ed. J.A. Stricklin; K.J. Saczalski), *ASME* **20**, 95–114 (1976).
- [52] E. KRÖNER UND C. TEODOSIU. Lattice defect approach to plasticity and viscoplasticity. In A. SAWCZUK (Herausgeber), „Problems of plasticity“, Seite 45. Noordhoff Int. Publ. (1974).

- [53] L. P. KUBIN UND Y. ESTRIN. Evolution of dislocation densities and the critical conditions for the Portevin-Le Chatelier effect. *Acta Metall. et Mater.* **38**(5), 697–708 (1990).
- [54] L. P. KUBIN UND Y. ESTRIN. The critical conditions for jerky flow. *Phys. Stat. Sol. (b)* **172**, 173–185 (1992).
- [55] E.B. KULA UND S.V. RADCLIFFE. Thermomechanical treatment of steel. *Journal of Metals* **15**, 755–762 (1963).
- [56] KURZWERNHART. *Stahl und Eisen* Seiten 849–857 (1896).
- [57] E.H. LEE. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of applied Mechanics* **36**, 1–6 (1969).
- [58] E.H. LEE. Some comments on elastic-plastic analysis. *International Journal of Solids and Structures* **17**, 859–872 (1981).
- [59] E.H. LEE UND D.T. LU. Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis. *Journal of applied Physics* **38**(1), 19–27 (1967).
- [60] TH. LEHMANN. Einige Betrachtungen zur Beschreibung von Vorgängen in der klassischen Kontinuumsmechanik. *Ingenieur-Archiv* **29**, 316–330 (1960).
- [61] TH. LEHMANN. Einige ergänzende Bemerkungen zur Beschreibung von Vorgängen in der klassischen Kontinuumsmechanik. *Ingenieur-Archiv* **31**, 371–384 (1962).
- [62] TH. LEHMANN. Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für grosse elasto-plastische Formänderungen. *Ingenieur Archiv* **41**, 297–310 (1972).
- [63] TH. LEHMANN. General frame for the definition of constitutive laws for large non-isothermic elastic-plastic and elastic-viscoplastic deformations. In TH. LEHMANN (Herausgeber), „The Constitutive Law in Thermoplasticity“, Seiten 379–463. CISM Courses and Lectures No. 281, Springer Verlag, Wien/New York (1984).
- [64] TH. LEHMANN. Ausarbeitungen zur Vorlesung Kontinuumsmechanik II an der Ruhr-Universität Bochum (1985).
- [65] TH. LEHMANN. On a generalized constitutive law for finite deformations in thermo-viscoplasticity. In C.S. DESAI, KREMPL E., P.D. KIOUSIS UND T. KUNDU (Herausgeber), „Constitutive Laws for Engineering Materials“, Seiten 173–184. Elsevier, New York/Amsterdam/London (1987).
- [66] TH. LEHMANN. On a phenomenological theory of large non-isothermal inelastic deformations of solids. Bombay (1987). Indian Society of Theoretical and Applied Mechanics.

- [67] TH. LEHMANN. On dissipation connected with plastic deformations. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **69**, T511–T513 (1989).
- [68] TH. LEHMANN. Some thermodynamical considerations on inelastic deformations including damage processes. *Acta Mechanica* **79**, 1–24 (1989).
- [69] C.C. LI UND W.C. LESLIE. Effects of dynamic strain aging on the subsequent mechanical properties of carbon steels. *Metallurgical Transactions A* **97**, 1765–1775 (1978).
- [70] C.P. LING UND P.G. MC CORMICK. A load perturbation method of examining dynamic strain ageing. *Acta Metallurgica* **41**, 3323–3330 (1993).
- [71] N. LOUAT. On the theory of the portevin-le chatelier effect. *Scripta Metallurgica* **15**, 1167–1170 (1981).
- [72] E. MACHERAUCH. „Praktikum der Werkstoffkunde“, Kapitel V 26: Temperatureinfluß auf die Streckgrenze, Seiten 127–133. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig (1990).
- [73] E. MACHERAUCH. „Praktikum der Werkstoffkunde“, Kapitel V 28: Statische Reckalterung, Seiten 138–140. Friedr. Vieweg-& Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig (1990).
- [74] D.B. MACVEAN. Die Elementararbeit im Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* **19**, 157–185 (1968).
- [75] G. MAIER. Incremental plastic analysis in the presence of large displacements and physical instabilizing effects. *International Journal of Solids and Structures* **7**, 345–372 (1971).
- [76] J. MANDEL. „Plasticité classique et viscoplasticité. Courses and Lectures No. 97, CISM, Udine“. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1971).
- [77] E.J. MARKULA. The effect of deformation at 100 – 500°C on the mechanical properties of carbon steels. Diplomarbeit, Institute of Technology in Finland (1965).
- [78] J. MARKULA UND HEISKANEN. The effect of straining at 100 – 500°C on the room temperature mechanical properties of carbon steels. *Jernkontorets Annaler* **150**, 298–312 (1960).
- [79] D. MARQUIS. Etude du couplage entre le vieillissement et la plasticité. Bericht, Lab. de Mécanique et Technologie, Université Paris 6, E.N.S. Cachan (1987).

- [80] D. MARQUIS. „Phenomenologie et Thermodynamique: couplages entre thermoélasticité, plasticité, vieillissement et endommagement“. Dissertation, Université Pierre et Marie-Curie (1989).
- [81] D. MARQUIS UND H. S. COSTA MATTOS. Modelling of plasticity and aging as coupled phenomena. *International Journal of Plasticity* **7**, 865–877 (1991).
- [82] D. MARQUIS UND J. LEMAITRE. Modelling elastoplasticity, damage and aging as coupled behaviours in engineering materials. *Int. Coll. Mechanisms and Mech. of Plast., Aussoies, F* Seiten 865–877 (1987).
- [83] E.F. MASUR. On tensor rates in continuum mechanics. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* **16**, 191–201 (1965).
- [84] M. MAYER. „Die dynamische Reckalterung von CuZn-, CuNi- und CuNiZn-Legierungen“. Dissertation, Universität Karlsruhe (1978).
- [85] P.G. MCCORMICK. A model for the portevin-le chatelier effect in substitutional alloys. *Acta Metallurgica* **20**, 351–354 (1972).
- [86] P.G. MCCORMICK. Theory of localization due to dynamic strain ageing. *Acta Metallurgica* **36**, 1165–1173 (1988).
- [87] J. MEIXNER. Zur Thermodynamik der irreversiblen Prozesse. *Zeitschrift der physikalischen Chemie B* **53**, 235–263 (1943).
- [88] E. MELAN. Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums. *Ingenieur Archiv* **9**, 116–126 (1938).
- [89] S. MESAROVIC. Dynamic strain aging and plastic instabilities. *Journal of Mechanics and Physics of Solids* **43**(5), 671–700 (1995).
- [90] M. MITTELBACH. „Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1995).
- [91] R. A. MULFORD UND U. F. KOCKS. New observations on the mechanism of strain ageing and jerky flow. *Acta Metallurgica* **27**, 1125–1134 (1979).
- [92] W. MUSCHIK. Thermodynamische Theorien, Überblick und Vergleich. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **61**, T213–T219 (1961).
- [93] W. MUSCHIK. „Skizze der thermodynamischen Theorien irreversibler Prozesse“, Kapitel 15.19. (1975).

- [94] P.M. NAGHDI UND W.L. WAINWRIGHT. On the time derivatives of tensors in mechanics of continua. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* **19**, 95–109 (1961).
- [95] Y. NAKADA UND A.S. KEH. Kinetics of sneek ordering and cottrell atmosphere formation in FE-N single crystals. *Acta metallurgica* **15**, 879–883 (1967).
- [96] R.W. ODGEN. „Non-linear elastic deformations“. John Wiley & Sohn (1984).
- [97] J.G. OLDROYD. On the formulation of rheological equations of state. In „Proceedings of the Royal Society of London (A) 200“, Seiten 523–541 (1950).
- [98] J.G. OLDROYD. Non-newtonian effects in steady motion of some idealized elastico-viscous liquids. In „Proceedings of the Royal Society of London (A) 245“, Seiten 278–297 (1958).
- [99] E.T. ONAT UND F.A. LECKIE. Representation of mechanical behavior in the presence of changing internal structure. *Journal of Applied Mechanics* **55**, 1–10 (1988).
- [100] P. PERZYNA. The constitutive equations for rate sensitive plastic materials. *Quarterly of Applied Mathematics* **20**, 321–332 (1963).
- [101] P. PERZYNA. On thermodynamic foundations of viscoplasticity. In U.S. LINDHOLM (Herausgeber), „Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads, IUTAM Symposium San Antonio“. Springer Verlag (1967).
- [102] P. PERZYNA. Thermodynamic theory of viscoplasticity. In C.-S. YIH (Herausgeber), „Advances in Applied Mechanics“. Academic Press (1971).
- [103] J. L. PETERSON. Strain age hardening in hypoeutectoid steels. *Trans. ASM* **56**, 304–317 (1963).
- [104] V.A. PHILLIPS. *Journal of the Institute of Metals* **81**, 649 (1952-1953).
- [105] E. PINK UND A. GRINBERG. Praktische Aspekte des Portevin-Le Chatelier-Effektes (I). *Aluminium* **9**, 687–691 (1984).
- [106] A. PORTEVIN UND F. LE CHATELIER. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Seances De L'Academie des Sciences* **176**, 507 (1923).
- [107] W. PRAGER. An elementary discussion of definitions of stress rates. *Quarterly of Applied Mathematics* **18**, 403–407 (1961).

- [108] S.V. RADCLIFFE UND E.B. KULA. Deformation, transformation and strength. In „Fundamentals of deformation processing“, Seiten 321–363. Proc. 9th Sagamore Army Materials Res. Conf. , New York (1962).
- [109] B. RANIECK UND O.T. BRUHNS. Bounds to bifurcation stresses in solids with non-associated plastic flow law at finite strain. *Journal of Mechanics, Physics and Solids* **29**, 153–172 (1981).
- [110] F REIF. „Physikalische Statistik und Physik der Wärme“, Kapitel 2,6,13,14. (1975).
- [111] F. RICHTER. Die wichtigsten physikalischen Eigenschaften von 52 Eisenwerkstoffen. Mannesmann Forschungsberichte, 650 (1974).
- [112] M.J. ROBERTS UND W.S. OWEN. unstable flow in martensite and ferrite. *metallurgical transactions* **1**, 3203–3213 (1970).
- [113] J. ROBIN. *Revue de Métallurgie* Seite 893 (1908).
- [114] U. ROTT. „Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1991).
- [115] A. K. SACHDEV. Dynamic strain aging of various steels. *Metallurgical Transactions A* **13A**, 1793–1797 (1982).
- [116] H.-P. SCHEFEL. „Evolutionstrategie und numerische Optimierung“. Dissertation, TU Berlin (1975).
- [117] P. SCHIESSE. „Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1994).
- [118] C.G. SCHMIDT UND A.K. MILLER. A unified phenomenological model for non-elastic deformation of type 316 stainless steel, part i. *Research Mechanica* **3**, 109–129 (1981).
- [119] C.G. SCHMIDT UND A.K. MILLER. A unified phenomenological model for non-elastic deformation of type 316 stainless steel, part ii. *Research Mechanica* **3**, 175–193 (1981).
- [120] G. SCHOECK UND A. SEEGER. The flow stress of iron and its dependence on impurities. *Acta metallurgica* **7**, 469–477 (1959).
- [121] E. SCHÖNEBURG, F. HEINZMANN UND S. FEDDERSON. „Genetische Algorithmen und Evolutionsstrategien: Eine Einführung in Theorie und Praxis der simulierten Evolutions“. Addison-Wesley GmbH (1994).

- [122] R.T. SHIELD UND H. ZIEGLER. On pragers hardening rule. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **9a** (1958).
- [123] F. SIDOROFF. The geometrical concept of intermediate configuration and elastic-plastic finite strain. *Archiwum Mechaniki Stosowanej* **25**, 299–308 (1973).
- [124] V.K. SIKKA, C.R. BRINKAMN UND H.E. MCCOY. Effect of thermal aging on tensile and creep properties of types 304 and 316 stainless steels. In A. SCHAEFER (Herausgeber), „Structural Materials for Service at Elevated Temperatures in Nuclear Power Generation“. ASME, New York (1975).
- [125] J.L. SNOEK. Effect of small quantities of carbon and nitrogen on the elastic and plastic properties of iron. *Physica* **8**, 711–733 (1941).
- [126] E. STOLTE UND W. HELLER. Stand der Kenntnisse über die Alterung von Stählen. *Stahl und Eisen* **90**(16), 861–868 (1970).
- [127] F. SZEPAN. „Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1989).
- [128] R.L. TAYLOR UND P. WRIGGERS. „FEAP, Description and Users-Manual“ (1990).
- [129] C. TRUESDELL. Corrections and additions to „the mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics“. *J. Rat. Mech. Anal.* **2** Seiten 593–616 (1953).
- [130] A. VAN DEN BEUKEL. Theory of the effect of dynamic strain aging. *Physica Status Solidi* **a30**, 197–206 (1975).
- [131] A. VAN DEN BEUKEL. On the mechanism of serrated yielding and dynamic strain ageing. *Acta Metallurgica* **28**, 965–969 (1980).
- [132] A. VAN DEN BEUKEL. The influence of static and dynamic strain aging on the temperature dependence of the flow stress in solid solutions. *Scripta Metallurgica* **17**, 659–663 (1983).
- [133] K. WEGENER. „Zur Berechnung großer plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Überspannungstyp“. Dissertation, Technische Universität Braunschweig (1991).
- [134] D.N. WILLIAMS. Interaction between the baushinger effect and strain aging. *Metallurgical Transactions A, ASM* **11A**, 1629–1631 (1980).
- [135] D.V. WILSON UND B. RUSSELL. The contribution of atmosphere locking to the strain-aging of low carbon steels. *Acta Metallurgica* **8**, 36–45 (1960).

- [136] D.V. WILSON UND B. RUSSELL. The contribution of precipitation to strain ageing in low carbon steels. *Acta Metallurgica* **8**, 468 – 479 (1960).
- [137] D.V. WILSON, B. RUSSELL UND J.D. ELSHELBY. Stress induced ordering and strain-ageing in low carbon steels. *Acta metallurgica* **7**, 628–631 (1959).
- [138] P. WYCLIFF, U. F. KOCKS UND J. D. EMBURY. On dynamic and static strain ageing in substitutional and interstitial alloys. *Scripta Metallurgica* **14**, 1349–1354 (1980).
- [139] U. ZDEBEL. „Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum (1984).
- [140] H. ZIEGLER. Some extremum principles in irreversible thermodynamics with application to continuum mechanics. In I.N. SNEDDON UND R. HILL (Herausgeber), „Progress in Solid Mechanics“ (1963).
- [141] H. ZIEGLER. Thermodynamics considerations in continuum mechanics. The 1964 Minta Martin Lecture, MIT und AIAA (1964).
- [142] O.C. ZIENKIEWICZ UND R.L. TAYLOR. „The Finite Element Method“, Band 1. McGraw-Hill Book Company, London, 4 Auflage (1989).
- [143] O.C. ZIENKIEWICZ UND R.L. TAYLOR. „The Finite Element Method“, Band 2. McGraw-Hill Book Company, London, 4 Auflage (1989).

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoelasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations.
Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter
Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen
Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung
orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei
endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter
elastoplastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauer:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung
von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with
Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates

- Nr. 18 Uwe Kohlberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausens:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Exremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente

- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Diemar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermosdiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen

- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Franja/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenebau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schießle:
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung

- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finite elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:
Mechanics of Irregular Shell Structures
- Nr. 96 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller
- Nr. 98 Ralf Podleschny:
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl
- Nr. 100 Marc Mittelbach:
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell
- Nr. 101 Ulrich Hoppe:
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie
- Nr. 102 Marcus Otto:
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen
- Nr. 103 Horst Lanzerath:
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode
- Nr. 104 Andreas Wichtmann:
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der Reckalterung

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 104**