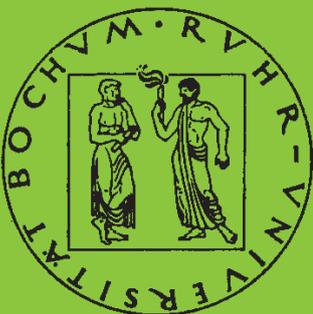


**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik**

**Ulrich Hoppe**

**Über grundlegende Konzepte der  
nichtlinearen Kontinuumsmechanik und  
Schalentheorie**

Heft Nr. 101



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Ulrich Hoppe

Über grundlegende Konzepte  
der nichtlinearen Kontinuumsmechanik  
und Schalentheorie

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 101

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

1996

Herausgeber:  
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum  
Schriftenreihe  
Universitätsstr. 150  
44780 Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1991–1995 am Institut für Mechanik, Lehrstuhl für Allgemeine Mechanik, der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf für die Anregung zu dieser Arbeit, für sein stetes Interesse und seine großzügige Unterstützung.

Herrn Prof. Dr. D. Braess (Fakultät für Mathematik) sei für die Übernahme des zweiten Berichtes und seine hilfreichen Bemerkungen gedankt.

Mein herzlicher Dank geht auch an Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns und Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Scherer als zusätzlicher bzw. fachfremder Berichter.

Schließlich möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Allgemeine Mechanik, insbesondere Herrn Dr. J. Makowski, für die gute Zusammenarbeit und wohlwollende Unterstützung bedanken.

Bochum, März 1996

U.H.

Tag der Einreichung: 5. Juli 1995  
Tag der mündlichen Prüfung: 7. März 1996

Referenten: Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf  
Prof. Dr. D. Braess

©1996 Ulrich Hoppe, Lerchenweg 3, 45549 Sprockhövel

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie oder Datenverarbeitung) oder aus Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

---

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden grundlegende Konzepte der Kontinuumsmechanik vorgestellt, die eine allgemeine Beschreibung von Mikrostrukturmodellen und Modellen mit nicht-lokalem Materialverhalten ermöglichen.

Die Kinematik der Deformationen wird in einer neuen, kovarianten Darstellung formuliert, aus der sich objektive Spannungs- und Dehnungsmaße, objektive Raten und hyperelastische konstitutive Beziehungen direkt ermitteln lassen. Für Kontinua mit Mikrostruktur und nicht-lokalem Materialverhalten wird ein einheitlicher, allgemeiner Rahmen angegeben, aus dem die Grundgleichungen dieser Modelle abgeleitet werden können. Insbesondere wird gezeigt, daß Schalen- und Kontinuumsmodelle in gleicher Weise hergeleitet werden können. Zusätzlich werden zwei unterschiedliche Methoden zur Herleitung der Schalengleichungen aus dem 3-dimensionalen Kontinuum vorgestellt.

---



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Nichtlineare Kontinuumsmechanik</b>	<b>5</b>
1	Grundlegende Konzepte . . . . .	7
1.1	Struktur des physikalischen Raumes . . . . .	7
1.2	Neoklassische Raumzeit . . . . .	12
1.3	Materieller Körper . . . . .	20
1.4	Bewegung des materiellen Körpers . . . . .	24
1.5	Beschreibung von Bewegungen . . . . .	29
1.6	Geschwindigkeit und Beschleunigung . . . . .	33
2	Kinematik der Deformationen . . . . .	35
2.1	Deformationsgradient . . . . .	35
2.2	Kovariante Dehnungstensoren . . . . .	49
2.3	Logarithmische Dehnungsmaße . . . . .	59
2.4	Raten der logarithmischen Dehnungsmaße . . . . .	60
2.5	Kontravariante Spannungstensoren . . . . .	63
2.6	Allgemeine Spannungsleistung . . . . .	65
2.7	Spannungsleistung bei Isotropie . . . . .	67
3	Die Doyle-Ericksen-Gleichung und ihre Interpretation . . . . .	69
3.1	Starre Bezugssysteme . . . . .	70
3.2	Kovariante Bezugssysteme . . . . .	74
4	Grundgleichungen nichtlinearer thermo-mechanischer Kontinua	79
4.1	Zustandsvariablen . . . . .	79

4.2	Thermo-mechanische Bilanzgleichungen . . . . .	80
4.3	Konstitutive Beziehungen . . . . .	83
4.4	Restriktionsprinzipien . . . . .	85
4.5	Abhängigkeit der konstitutiven Beziehungen von der Referenzkonfiguration . . . . .	88
<b>II</b>	<b>Ein allgemeines Prinzip der virtuellen Arbeit</b>	<b>91</b>
1	Einführung . . . . .	94
2	Grundlegende Struktur . . . . .	96
2.1	Basismannigfaltigkeit . . . . .	96
2.2	Zustandsmannigfaltigkeit . . . . .	97
2.3	Konfigurationsraum . . . . .	98
2.4	Globale Kräfte, globale virtuelle Arbeit . . . . .	99
2.5	Lokale Kräfte . . . . .	99
2.6	Kompatibilität von lokaler und globaler virtueller Arbeit	103
2.7	Invarianzbedingungen . . . . .	104
2.8	Beschreibung einer allgemeinen Methode zur Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen für Kontinua mit Mikrostruktur . . . . .	106
2.9	Formale Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	108
3	Anwendung auf die Kontinuumsmechanik . . . . .	110
3.1	Nichtlineare Elastodynamik . . . . .	110
3.2	Wärmeübertragung in kontinuierlichen Körpern . . .	118
3.3	Kontinua mit skalarer Mikrostruktur . . . . .	122
3.4	Kontinua mit affiner Mikrostruktur, mikromorphe Kontinua . . . . .	129
3.5	Polare Kontinua, Cosserat-Kontinua . . . . .	136
3.6	Elastische Kontinua 2.Grades . . . . .	144
4	Anwendungen auf die Schalentheorie . . . . .	151

4.1	Differentialgeometrie einer Fläche im Euklidischen Raum	151
4.2	Membrantheorie . . . . .	157
4.3	Schalentheorie mit vektorieller Mikrostruktur . . . . .	164
4.4	Cosserat-Schale . . . . .	169
4.5	Schalentheorie 2.Grades . . . . .	172
<b>III Methoden zur Herleitung von Schalengleichungen</b>		<b>179</b>
1	Einführung . . . . .	180
2	Methode der Zwangsbedingungen . . . . .	182
2.1	3-dimensionales Prinzip der virtuellen Arbeit . . . . .	182
2.2	Schalengeometrie in der Referenzplazierung . . . . .	186
2.3	Zwangsbedingungen . . . . .	190
2.4	Resultierende Schalengleichungen . . . . .	192
2.5	Beispiele . . . . .	194
2.6	Resultierender Drehimpulssatz . . . . .	201
2.7	Hyperelastische konstitutive Beziehungen . . . . .	203
2.8	Schalentheorie 2.Grades . . . . .	208
3	Methode der gewichteten Momente . . . . .	218
3.1	Lokaler Impulssatz . . . . .	219
3.2	Prinzip der gewichteten Spannungen . . . . .	220
3.3	Anwendung auf die Schalentheorie . . . . .	222
3.4	Resultierende Schalengleichungen . . . . .	224
4	Vergleich und Diskussion der beiden Methoden . . . . .	228
<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>		<b>231</b>
<b>A Tensoralgebra</b>		<b>233</b>
1	Grundbegriffe . . . . .	235
1.1	Mengen, Relationen, Funktionen . . . . .	235

1.2	Grundbegriffe der Algebra . . . . .	238
2	Tensoralgebra . . . . .	240
2.1	Vektorräume . . . . .	240
2.2	Affine Räume . . . . .	242
2.3	Lineare Abbildungen . . . . .	243
2.4	Dualraum . . . . .	245
2.5	Tensorräume . . . . .	246
2.6	Abbildungen auf Tensorräumen . . . . .	248
2.7	Metrische Vektorräume . . . . .	251
3	Zusammenstellung hilfreicher Formeln . . . . .	256
3.1	Schreibweise . . . . .	256
3.2	Tensoralgebra . . . . .	257
3.3	Tensoranalysis . . . . .	259
3.4	Satz von Stokes und abgeleitete Integralsätze . . . . .	260
<b>B</b>	<b>Mannigfaltigkeiten</b>	<b>261</b>
1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	261
1.1	Topologische Begriffe . . . . .	261
1.2	Mannigfaltigkeiten . . . . .	263
1.3	Tangentenvektoren . . . . .	266
1.4	Tangentialabbildung . . . . .	267
1.5	Tensoren auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	270
1.6	Differentialformen . . . . .	270

---

## Einleitung

Die Kontinuumsmechanik ist eine Feldtheorie zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens kontinuierlicher Körper. Eine solche Beschreibung beruht auf gewissen Konzepten oder Axiomen, die eine gemeinsame Basis für alle Kontinuumsmodelle bilden. Als grundlegende Konzepte faßt man u.a. die Begriffe eines *Raum-Zeit-Kontinuums* und eines *materiellen Körpers* auf. Von der Definition solcher Grundkonzepte hängt entscheidend ab, welche Tragweite eine Kontinuumstheorie hat.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, Beiträge zu einer erweiterten Beschreibung der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie zu liefern und grundlegende Konzepte zu benennen, auf deren Basis eine solche Beschreibung erfolgen kann.

Eine erweiterte Beschreibung der Kontinuumsmechanik wird hier unter den Gesichtspunkten *Verallgemeinerung* und *Vereinheitlichung* betrachtet. Eine Verallgemeinerung der Beschreibung soll eine Anwendung der kontinuumsmechanischen Modelle auf Problembereiche ermöglichen, die diesen bislang nicht zugänglich waren. Eine Vereinheitlichung der Beschreibung hat die Aufgabe, unterschiedliche Modellvorstellungen aus einem gemeinsamen Ansatz heraus zu erklären.

Die Möglichkeiten einer Erweiterung kontinuumsmechanischer Modelle lassen sich anhand der geometrischen Klassifizierung der Kontinuumsmechanik von KRÖNER [54] aufzeigen. In Abb. 0.1 sind drei Richtungen eingezeichnet, in denen grundsätzliche Verallgemeinerungen der mechanischen Modellvorstellungen möglich sind. Dieses sind Modelle mit zusätzlicher Mikrostruktur, Modelle mit nicht-lokaler Struktur und Modelle mit verallgemeinerter Makrostruktur.

Ein Mikrostrukturmodell erhält man, wenn zu den klassischen Zustandsvariablen Dichte, Temperatur und räumliche Lage noch weitere hinzugefügt werden, die aber im allgemeinen keine makroskopische Interpretation zulassen. Z.B. kann ein poröses Material mit einer skalaren Mikrostrukturvariable beschrieben werden, die ein Maß für die Porenverteilung im Material darstellt. Wichtig ist, daß diese Porenverteilung kein Parameter, sondern eine Variable ist, die sich während eines mechanischen Prozesses ändern kann. Ein Modell mit nicht-lokaler Struktur beschreibt ein Kontinuum, bei dem

die Wechselwirkungen zwischen materiellen Punkten nicht auf infinitesimale Umgebungen dieser Punkte beschränkt bleiben. Für solche Kontinua gilt das Cauchysche Postulat im allgemeinen nicht. Kontinua mit solcher Struktur erhält man beispielsweise, wenn die konstitutiven Beziehungen von Deformationsgradienten höherer Ordnung abhängen.

Ein Modell mit verallgemeinerter Makrostruktur ist ein Kontinuum mit nicht-Euklidischer oder noch schwächerer geometrischer Struktur. Ein klassisches Kontinuum wird gewöhnlich als Teilmenge des Euklidischen Raumes aufgefaßt und erhält somit auch dessen lineare Struktur. In der Versetzungstheorie oder der finiten Elasto-Plastizitätstheorie gibt es jedoch Konfigurationen, für die eine solche Einbettung nicht möglich ist. Um solche Probleme zu beschreiben, muß man ein allgemeineres Konzept eines materiellen Körpers verwenden.

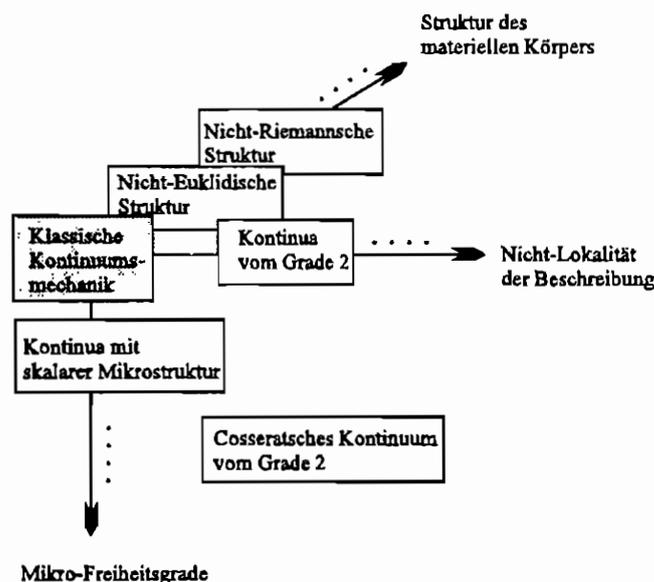


Abbildung 0.1: Geometrische Klassifizierung der Kontinuumsmechanik (nach KRÖNER)

Im ersten Kapitel dieser Arbeit werden zunächst die grundlegenden Konzepte der Kontinuumsmechanik beschrieben und auf die Kinematik der Deformationen angewendet. Als Grundkonzepte werden das Raum-Zeit-Konzept und das Konzept eines materiellen Körpers vorgestellt. Beide Konzepte sind gegenüber ihrer klassischen Darstellung verallgemeinert. Das Raum-Zeit-Konzept basiert nicht auf dem absoluten Raum, sondern auf einem Punktraum, auf dem ein beliebiger Beobachter und ein beliebiges Bezugssy-

---

stem eingeführt werden kann. Eine solche Beschreibung hat den Vorteil, daß sich Invarianzbedingungen (z.B. das Prinzip der materiellen Objektivität) in natürlicher Weise ergeben. Solche Invarianzbedingungen spielen in dieser Arbeit bei der Herleitung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen eine entscheidende Rolle.

Ein materiellen Körper wird hier als differenzierbare Mannigfaltigkeit definiert. Diese Definition erlaubt die Betrachtung einer allgemeinen Makrostruktur, wie sie z.B. zur Beschreibung einer nicht-Riemannschen Versetzungstheorie notwendig ist.

Nach der Definition weiterer Grundbegriffe ( Bewegung, Plazierung, usw.) wird eine Beschreibung der Kinematik nichtlinearer Deformationen vorgestellt, die auf eine Einbettung in den Euklidischen Raum verzichtet. Eine solche Beschreibung basiert auf der Tensoralgebra auf Mannigfaltigkeiten und der expliziten Verwendung von Metriktensoren. Im Gegensatz zur klassischen Darstellung werden Tangential- und Kotangentialräume nicht identifiziert. Eine ausführliche Erläuterung der verwendeten algebraischen Operationen wird im Anhang gegeben. Um eine strukturierte Beschreibung der Kinematik zu erhalten, werden verallgemeinerte *pull-back*- und *push-forward*-Abbildungen eingeführt. Mit diesen Abbildungen können nach einfachen Grundregeln beliebige objektive Deformations- und Dehnungstensoren hergeleitet werden. Die Definition einer sog. *Lie-Ableitung* ermöglicht es dann, diesen Tensoren objektive Zeitableitungen zuzuordnen, sowie diese mit leistungskonjugierten Spannungstensoren zu koppeln. Ein großer Teil der in der Literatur bekannten Spannungs- und Dehnungsgrößen wird auf einheitliche Weise dargestellt und in mehreren Diagrammen in Verbindung gebracht. Der Übergang zur klassischen Tensoralgebra wird eingehend erläutert, wobei mehrere kritische Anmerkungen zur klassischen Schreibweise gemacht werden. Anhand der sog. *Doyle-Ericksen-Gleichung* wird dann die allgemeine Form hyperelastischer Stoffgesetze diskutiert und in einer völlig neuen Weise interpretiert. Am Ende des ersten Kapitels folgt schließlich ein Überblick über die Grundgleichungen klassischer thermo-mechanischer Kontinua.

Das zweite Kapitel widmet sich der einheitlichen Beschreibung der Kontinua mit nicht-lokaler Struktur und Mikrostruktur. Es wird dort ein allgemeiner Rahmen aufgebaut, in den solche Modelle eingeordnet werden können. Dieser Rahmen wird als *allgemeines Prinzip der virtuellen Arbeit* formuliert, aber in seiner abstrakten mathematischen Darstellung hier nur skizziert.

Stattdessen wird auf der Grundlage dieses Prinzips eine anwendbare Methode vorgestellt, welche die Herleitung beliebiger Mikrostrukturmodelle ermöglicht. Ein wesentlicher Bestandteil dieser Methode sind die im ersten Kapitel hergeleiteten Invarianzbedingungen. Es wird an Beispielen aus der Kontinuumsmechanik und Schalentheorie demonstriert, wie sich die Methode auf unterschiedlichste Mikrostrukturmodelle anwenden läßt und zu welchen Ergebnissen sie führt. Dabei wird insbesondere gezeigt, daß die Darstellung einer Schalentheorie völlig äquivalent zur Kontinuumsmechanik geschehen kann. Diese einheitliche Beschreibung ist ein wesentlicher Aspekt der vorgestellten Methode.

Das dritte Kapitel befaßt sich ausschließlich mit der Schalentheorie. Während sich die Schalengleichungen im zweiten Kapitel ohne Zusatzannahmen aus Invarianzbedingungen ableiten lassen, soll im dritten Kapitel gezeigt werden, daß diese Schalengleichungen in allgemeiner Form auch aus den Gleichungen eines 3-dimensionalen Kontinuums gewonnen werden können. Dazu werden dort zwei Methoden, die *Methode der Zwangsbedingungen* und die *Methode der gewichteten Momente*, vorgestellt. Die Methode der Zwangsbedingungen leitet die Schalengleichungen aus einer kinematischen Annahme her. Hier wird diese Herleitung in allgemeiner Weise durchgeführt und dann sukzessive auf spezielle Schalenkinematiken eingeschränkt. Die Methode der gewichteten Momente leitet die Schalengleichungen aus den statischen Gleichungen des Kontinuums her. Es wird gezeigt, daß beide Methoden auf die gleiche Struktur der Schalengleichungen führen.

Im Anhang A sind verschiedene Definitionen und Begriffe zur Tensoralgebra auf Mannigfaltigkeiten bereitgestellt. Insbesondere findet sich dort ein ausführlicher Abschnitt über den Tensorkalkül auf metrischen Vektorräumen und eine kleine Sammlung hilfreicher Beziehungen und Rechenregeln.

Im Anhang B ist eine kurze Zusammenstellung von Begriffen und Definitionen über differenzierbare Mannigfaltigkeiten aufgeführt. Diese Zusammenstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern dient lediglich der Erläuterung hier verwendeter Begriffe.

## Kapitel I

# Nichtlineare Kontinuumsmechanik

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Grundlegende Konzepte . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1	Struktur des physikalischen Raumes . . . . .	7
1.1.1	Euklidischer Punktraum . . . . .	7
1.1.2	Euklidischer Raum . . . . .	9
1.1.3	Eigenschaften des Euklidischen Raumes . . . . .	10
1.1.4	Physikalischer Raum . . . . .	11
1.2	Neoklassische Raumzeit . . . . .	12
1.2.1	Beobachter, Bezugssystem . . . . .	14
1.2.2	Beobachterwechsel . . . . .	17
1.2.3	Relative Bewegung . . . . .	17
1.2.4	Invarianz bei Beobachterwechsel . . . . .	18
1.2.5	Objektivität relativer Bewegungen . . . . .	19
1.3	Materieller Körper . . . . .	20
1.3.1	Definition eines materiellen Körpers . . . . .	20
1.3.2	Koordinaten materieller Punkte . . . . .	22
1.4	Bewegung des materiellen Körpers . . . . .	24
1.4.1	Einbettung des materiellen Körpers in den Euklidischen Raum . . . . .	24
1.4.2	Parametrisierung der Einbettung . . . . .	25
1.4.3	Tangentialabbildung auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	27
1.4.4	Tangentialabbildung auf Euklidischen Räumen . . . . .	28
1.5	Beschreibung von Bewegungen . . . . .	29
1.5.1	Intrinsische Beschreibung . . . . .	29
1.5.2	Referentielle Beschreibung . . . . .	29

	1.5.3	Räumliche Beschreibung . . . . .	31
	1.5.4	Relative Beschreibung . . . . .	33
	1.6	Geschwindigkeit und Beschleunigung . . . . .	33
<b>2</b>		<b>Kinematik der Deformationen . . . . .</b>	<b>35</b>
	2.1	Deformationsgradient . . . . .	35
	2.1.1	<i>Pull-back</i> - und <i>push-forward</i> -Abbildungen . . . . .	38
	2.1.2	Kovariante Deformationsmaße . . . . .	41
	2.1.3	Übergang zur klassischen Schreibweise . . . . .	42
	2.1.4	Anmerkungen zu den Begriffen <i>ko-</i> und <i>kontra-</i> <i>variant</i> . . . . .	45
	2.1.5	Anmerkungen zum Ricci-Kalkül . . . . .	47
	2.1.6	Klassische Schreibweise der Metriktensoren . . . . .	48
	2.2	Kovariante Dehnungstensoren . . . . .	49
	2.2.1	Objektivität der Dehnungs- und Deformations- maße . . . . .	52
	2.2.2	Objektive Zeitableitungen . . . . .	54
	2.2.3	Interpretation der Lie-Ableitungen . . . . .	57
	2.2.4	Die Jaumannsche Rate . . . . .	57
	2.3	Logarithmische Dehnungsmaße . . . . .	59
	2.4	Raten der logarithmischen Dehnungsmaße . . . . .	60
	2.4.1	Referentielles Henckysches Dehnungsmaß . . . . .	60
	2.4.2	Räumliches Henckysches Dehnungsmaß . . . . .	61
	2.5	Kontravariante Spannungstensoren . . . . .	63
	2.6	Allgemeine Spannungsleistung . . . . .	65
	2.7	Spannungsleistung bei Isotropie . . . . .	67
<b>3</b>		<b>Die Doyle-Ericksen-Gleichung und ihre Interpretation . . . . .</b>	<b>69</b>
	3.1	Starre Bezugssysteme . . . . .	70
	3.2	Kovariante Bezugssysteme . . . . .	74
<b>4</b>		<b>Grundgleichungen nichtlinearer thermo-mechanischer Kontinua . . . . .</b>	<b>79</b>
	4.1	Zustandsvariablen . . . . .	79
	4.2	Thermo-mechanische Bilanzgleichungen . . . . .	80
	4.3	Konstitutive Beziehungen . . . . .	83
	4.4	Restriktionsprinzipien . . . . .	85
	4.4.1	Prinzip der materiellen Objektivität . . . . .	85

4.4.2	Entropieungleichung . . . . .	86
4.4.3	Beispiel . . . . .	87
4.5	Abhängigkeit der konstitutiven Beziehungen von der Referenzkonfiguration . . . . .	88
4.5.1	Objektivität und Isotropie . . . . .	89

# 1 Grundlegende Konzepte

## 1.1 Struktur des physikalischen Raumes

### 1.1.1 Euklidischer Punktraum

Der Raum unserer Anschauung ist ein 3-dimensionaler affiner Punktraum  $\mathcal{E}$ , dessen Elemente *Punkte* oder *Raumpunkte* heißen. Eine Beschränkung auf eine spezielle Dimension des Raumes  $\mathcal{E}$  ist nicht erforderlich, allerdings wird eine endliche Dimensionen grundsätzlich vorausgesetzt. Die Raumpunkte werden mit kleinen lateinischen Buchstaben  $a, b, c, \dots \in \mathcal{E}$  gekennzeichnet. Zu jedem Punktepaar  $(a, b)$  existiert ein nicht-negativer räumlicher Abstand  $d(a, b)$ , welcher durch die *Abstandsfunktion*

$$d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^{0+}$$

$$(a, b) \mapsto d(a, b) \geq 0$$

festgelegt ist. Die Abstandsfunktion <sup>1)</sup> definiert sich über folgende Eigenschaften:

- (i) Symmetrie:  $d(a, b) = d(b, a)$ ;
- (ii) Regularität:  $d(a, b) = 0$ , genau dann wenn  $a = b$ ;
- (iii) Dreiecksungleichung:  $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ .

Der Punktraum  $\mathcal{E}$  erhält durch die Abstandsfunktion eine metrische Struktur und wird als *metrischer Raum*  $(\mathcal{E}, d)$  bezeichnet.

<sup>1)</sup>Der Begriff *Metrik* anstelle des Abstandes wird hier vermieden, da *Metrik* später im Sinne einer metrischen Struktur eines Vektorraumes verwendet wird.

Eine Abbildung  $j : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ , welche die Abstände der Raumpunkte unverändert läßt, heißt *isometrische Abbildung* oder kurz *Isometrie* auf dem metrischen Raum. Die Menge  $\mathcal{J}$  aller Isometrien auf dem Punktraum  $\mathcal{E}$  ist definiert als

$$\mathcal{J} := \{j : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \mid d(j(a), j(b)) = d(a, b), \quad \forall a, b \in \mathcal{E}\}.$$

Die Menge aller Isometrien besitzt eine Gruppenstruktur bezüglich der Hintereinanderschaltung der Abbildung  $j : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ .  $\mathcal{J}$  wird daher auch als *Isometriegruppe* bezeichnet.

Für lineare metrische Räume besitzt die Isometriegruppe  $\mathcal{J}$  eine fixpunktfreie, transitive, kommutative Untergruppe  $\mathbb{E}$ , welche *Translationsgruppe* des Punktraumes heißt. Die Translationsgruppe erhält per Definition die Struktur eines Vektorraumes mit innerem Produkt. Jedem metrischen Raum  $(\mathcal{E}, d)$  läßt sich höchstens eine Translationsgruppe zuordnen (siehe NOLL [80]). Die Elemente von  $\mathbb{E}$  werden mit fetten lateinischen Buchstaben gekennzeichnet, z.B.  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{E}$ , und die Abbildung  $\mathbf{u}(a)$  wird speziell als  $a + \mathbf{u}$  notiert. Die Schreibweise  $b = a + \mathbf{u}$ <sup>2)</sup> unterstreicht die Darstellung von  $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$  als Verschiebungsvektor auf dem Punktraum.

Existiert eine Translationsgruppe, so kann jedem Punktepaar  $(a, b) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$  ein *Differenzvektor*  $\mathbf{d}(a, b) \in \mathbb{E}$  zugewiesen werden. Der Differenzvektor ist definiert als eine Abbildung

$$\mathbf{d} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}, \tag{1.1.1}$$

mit den Eigenschaften

(i)  $\mathbf{d}(a, c) = \mathbf{d}(a, b) + \mathbf{d}(b, c)$ ;

(ii) die Einschränkung  $\mathbf{d}_a : \{a\} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}$  ist bijektiv.

Aus der Eigenschaft (i) läßt sich sowohl  $\mathbf{d}(a, a) = \mathbf{0}$ , als auch  $\mathbf{d}(a, b) = -\mathbf{d}(b, a)$  ableiten. Mit Hilfe der Differenzabbildung wird  $\mathcal{E}$  zu einem affinen Punktraum mit Vektorraum  $\mathbb{E}$  (siehe auch DODSON & POSTON [34] und Anhang A).

---

<sup>2)</sup>Es sei darauf hingewiesen, daß im Gegensatz zu  $a + \mathbf{u}$  eine Addition zweier Punkte, z.B.  $a + b$ , weder definiert, noch sinnvoll ist.

Das innere Produkt  $\cdot: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Vektorraum  $\mathbb{E}$  wird als mit der metrischen Struktur auf  $\mathcal{E}$  verträglich vorausgesetzt. Es gilt

$$d(a, b) = \sqrt{\mathbf{d}(a, b) \cdot \mathbf{d}(a, b)}, \quad \forall a, b \in \mathcal{E}.$$

Die Länge eines Vektors  $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$  stimmt also mit dem Abstand des Punktepaars  $(a, a + \mathbf{u})$  auf  $\mathcal{E}$  überein.

### 1.1.2 Euklidischer Raum

Ein **Euklidischer Raum** ist ein metrischer Raum  $(\mathcal{E}^n, d)$  mit Translationsgruppe  $\mathbb{E}^n$  endlicher Dimension  $n$  (siehe BERTRAM [19]). Der Raum unserer Anschauung, auch *physikalischer Raum* genannt, wird als  $\mathcal{E}^3$  modelliert. Falls erforderlich, wird zwischen  $\mathcal{E}$  als Euklidischem Punktraum und  $\mathbb{E}$  als Euklidischem Vektorraum unterschieden.<sup>3)</sup>

Da  $\mathbb{E}$  ein inneres Produkt trägt, läßt sich eine Orthonormal-Basis  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  konstruieren, welche folgende Eigenschaft besitzt

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{für } i = j, \\ = 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Nach Auswahl einer beliebigen Basis  $\{\mathbf{a}_i\}$  — nicht notwendigerweise orthonormal — sind die Koordinaten eines Vektors  $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$  durch

$$u^i := \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{u}, \quad i = 1, \dots, n$$

festgelegt, wobei die  $\mathbf{a}^i$  die zu  $\mathbf{a}_j$  reziproken Basisvektoren sind, d.h. es gilt  $\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \delta_j^i$ . Der Übergang von den Raumpunkten zu ihren Koordinaten ist also durch die Auswahl eines Bezugspunktes  $a \in \mathcal{E}$  und einer Basis  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$  bestimmt:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}^n & \xrightarrow{\mathbf{d}_a} & \mathbb{E}^n & \xrightarrow{\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}} & \mathbb{R}^n \\ x & \longrightarrow & \mathbf{x} & \longrightarrow & (x^1, \dots, x^n) \end{array}$$

Die Abbildung  $\mathbf{d}_a: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}$  ist hier als Einschränkung von  $\mathbf{d}: \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}$  auf  $\{a\} \times \mathcal{E}$  zu verstehen. Der festgehaltene Punkt  $a$  wird Fußpunkt genannt und

<sup>3)</sup>Ohne Angabe der Dimension bezeichnen  $\mathbb{E}$  und  $\mathcal{E}$  hier immer die Räume  $\mathbb{E}^3$  bzw.  $\mathcal{E}^3$ .

$\{a\} \times \mathcal{E}$  wird als Tangentialraum  $T_a\mathcal{E}$  an  $\mathcal{E}$  in  $a$  bezeichnet. Da  $\mathbf{d}_a : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}$  gemäß (1.1.1) bijektiv ist, läßt sich durch  $\mathbf{d}_a^{-1}$  die lineare Struktur von  $\mathbb{E}$  auf  $T_a\mathcal{E}$  zurückziehen.

Durch die Hintereinanderschaltung

$$\mathbf{d}_b^{-1} \circ \mathbf{d}_a : T_a\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E} \rightarrow T_b\mathcal{E}$$

entsteht ein Euklidischer Parallelismus zwischen Tangentialräumen mit unterschiedlichen Fußpunkten. Damit kann eine Parallelverschiebung von Körpern auf  $\mathcal{E}$  definiert werden.

### 1.1.3 Eigenschaften des Euklidischen Raumes

Die physikalisch signifikante Eigenschaft des Euklidischen Raumes ist der geradlinig meßbare Abstand zweier Punkte. Dabei ist es unerheblich ob dieses Maß als Metrik, als Norm des Differenzvektors oder als Abstand im  $\mathbb{R}^n$  ausgedrückt wird, solange die unterschiedlichen Darstellungen miteinander verträglich sind. Wesentlich ist hingegen, daß der Abstand zweier Punkte invariant gegenüber Isometrien auf dem Punktraum ist.

Eine Isometrie  $j \in \mathcal{J}$  auf dem Punktraum induziert eine Transformation auf dem Vektorraum gemäß

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{j} & \mathcal{E} \\ \mathbf{d}_a \downarrow & & \downarrow \mathbf{d}_a \\ \mathbb{E} & \xrightarrow{\mathbf{d}_a \circ j \circ \mathbf{d}_a^{-1}} & \mathbb{E} \end{array} \quad (1.1.2)$$

Die entsprechende Transformation  $\mathbf{d}_a \circ j \circ \mathbf{d}_a^{-1} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  ist eine Drehung des Vektorraumes, welche durch den orthogonalen Tensor

$$\mathbf{Q} := \mathbf{d}_a \circ j \circ \mathbf{d}_a^{-1} \in SO(\mathbb{E})$$

dargestellt wird. Die Verwendung der speziellen orthogonalen Gruppe  $SO(\mathbb{E})$  anstatt der allgemeinen orthogonalen Gruppe  $O(\mathbb{E})$  dient zur Einschränkung auf orientierungserhaltende Rotationen. Auf dem linearen Raum  $(\mathbb{E}, \cdot)$  gilt die Definition

$$SO(\mathbb{E}) := \{\mathbf{Q} \in L(\mathbb{E}, \mathbb{E}) \mid \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \text{ und } \det \mathbf{Q} = +1\}.$$

Wird in das Diagramm (1.1.2) noch ein Wechsel des Fußpunktes einbezogen

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{E} & \xrightarrow{j} & \mathcal{E} \\
 \mathbf{d}_a \downarrow & & \downarrow \mathbf{d}_b \\
 \mathbb{E} & \xrightarrow{\mathbf{d}_b \circ j \circ \mathbf{d}_a^{-1}} & \mathbb{E}
 \end{array}$$

so induziert die Isometrie  $j \in \mathcal{J}$  eine Rotation *und* Translation des Vektorraumes  $\mathbb{E}$ . Die entsprechende Transformation auf dem Vektorraum lautet dann

$$\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{u} := \mathbf{d}_b \circ j \circ \mathbf{d}_a^{-1}(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{E}. \quad (1.1.3)$$

Die Gleichung (1.1.3) stellt die sog. *Euklidische Transformation* dar. Dieses ist die allgemeinste orientierungserhaltende Transformation auf  $\mathbb{E}$ , welche die entsprechenden Punktabstände auf  $\mathcal{E}$  unverändert läßt.

#### 1.1.4 Physikalischer Raum

Wie bereits erwähnt, dient der Euklidische Raum  $\mathcal{E}^3$  als Modell des physikalischen Raumes. Die Zuordnung von Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots \in \mathbb{E}$  zu den Raumpunkten  $a, b, \dots \in \mathcal{E}$  verlangt

- (i) die Festlegung eines Fuß- oder Basispunktes  $o \in \mathcal{E}$ , dem der Nullvektor  $\mathbf{0} \in \mathbb{E}$  zugeordnet wird;
- (ii) die Festlegung von  $n$  Punkten  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{E}$ , denen Vektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{E}$  derart zugeordnet werden, daß  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$  eine Vektorbasis von  $\mathbb{E}$  bildet.

Diese Festlegung geschieht durch Angabe der Abbildung  $\mathbf{d}_o : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}$ . Im Euklidischen Punktraum  $\mathcal{E}$  sind keine Punkte und keine Richtungen besonders ausgezeichnet, so daß die Festlegung (i–ii) immer willkürlich ist. Diese Eigenschaften lassen sich auf den physikalischen Raum übertragen. Die hier verwendete Raumvorstellung geht davon aus, daß der physikalische Raum

**homogen** (keine besonders ausgezeichneten Punkte)

und

**isotrop** (keine besonders ausgezeichneten Richtungen)

ist. Diese Annahme ist von konzeptioneller Natur und nicht überprüfbar, da der uns umgebende Raum nicht leer ist, sondern Körper enthält. Das Vorhandensein von Körpern bedingt auch das Vorhandensein besonders ausgezeichneter Punkte, z.B. Sonne, Erde. Entsprechendes gilt für die Richtungen.

Die Homogenität und Isotropie des Raumes erfordert Invarianzbedingungen für die Beschreibung physikalischer Prozesse im Vektorraum  $\mathbb{E}$ . Eine Beschreibung physikalischer Prozesse im Euklidischen Vektorraum  $\mathbb{E}$  darf nicht von der willkürlichen Wahl der Bezugspunkte und Bezugsrichtungen abhängen. Anders gesagt: Eine Beschreibung physikalischer Prozesse im Euklidischen Vektorraum  $\mathbb{E}$  muß invariant gegenüber einem Wechsel von Bezugspunkten oder Bezugsrichtungen sein.

## 1.2 Neoklassische Raumzeit

Der Raumbegriff wird nun zum Raumzeitbegriff erweitert. Der klassische Raumbegriff der Newtonschen Mechanik ist der *absolute* Raum. Er spielt bei der Mechanik träger Körper eine wichtige Rolle (siehe auch NOLL [78]), da die Definition eines Trägheitssystems ohne Bezug auf den absoluten Raum in einem Zirkelschluß endet (siehe BERTRAM [19]). Entscheidende Prinzipien der Kontinuumsmechanik, z.B. das Prinzip der materiellen Beobachterindifferenz, können im absoluten Raum allerdings nur *künstlich* eingeführt werden. Der Begriff des Beobachters und die Invarianzforderungen bei Beobachterwechsel machen in einem absoluten Raum keinen rechten Sinn. An ihre Stelle müssen andere Postulate treten, z.B. die Invarianz gegenüber Starrkörperbewegungen. Das Konzept des absoluten Raumes erfordert darüberhinaus das Postulat von unterschiedliche Invarianzbedingungen für die universellen und die konstitutiven Feldgleichungen.

Der hier verwendete neoklassische Raumzeitbegriff stellt ein Konzept dar, das allgemein genug ist, um die Begriffe Beobachter, Bezugssystem und Beobachterindifferenz sinnvoll zu beschreiben. Die folgenden Ausführungen nehmen Bezug auf die grundlegenden Arbeiten von NOLL [79], NOLL [80].

Ein **Ereignisraum**  $\mathcal{W}$  stellt eine Menge von Ereignissen  $e, f \in \mathcal{W}$  dar. Für

je zwei Ereignisse ist eine Zeitdifferenzfunktion

$$\Delta\bar{t} : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (e, f) \mapsto \Delta\bar{t}(e, f)$$

definiert, welche den zeitlichen Abstand zweier Ereignisse  $e$  und  $f$  beschreibt und die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i)  $\Delta\bar{t}(e, f) = -\Delta\bar{t}(f, e), \quad \forall e, f \in \mathcal{W};$
- (ii)  $\Delta\bar{t}(e, f) + \Delta\bar{t}(f, g) = \Delta\bar{t}(e, g), \quad \forall e, f, g \in \mathcal{W};$
- (iii) es gibt ein  $f \in \mathcal{W}$ , so daß  $\Delta\bar{t}(e, f) = t \quad \forall e \in \mathcal{W}, t \in \mathbb{R}.$

Man sagt, daß ein Ereignis  $e$  *früher als*, *später als* oder *gleichzeitig mit*  $f$  geschieht, je nachdem ob  $\Delta\bar{t}(e, f) > 0$ ,  $< 0$  oder  $= 0$ . Die Menge aller gleichzeitigen Ereignispaare sei

$$\mathcal{W}_{sim} := \{(e, f) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W} \mid \Delta\bar{t}(e, f) = 0\}. \quad (1.1.4)$$

Gleichzeitigkeit ist eine Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{W}$ . Die Äquivalenzklassen  $\tau$  heißen **Augenblicke** oder Momente (im zeitlichen Sinne) und bilden eine Zerlegung  $\mathcal{T}$  des Ereignisraumes, so daß gilt

$$\mathcal{W} = \bigcup \{\tau \mid \tau \in \mathcal{T}\}.$$

Falls  $e \in \tau$ , so sagt man, daß das Ereignis  $e$  im Augenblick  $\tau$  geschieht. Die Zeitdifferenz  $\Delta\bar{t}(e, f)$  zweier Ereignisse hängt nur von den Augenblicken  $\tau_e, \tau_f$  ab, in denen die Ereignisse geschehen. Aus diesem Grund kann die Zeitdifferenzfunktion  $\Delta\bar{t}$  auf den Klassen gleichzeitiger Ereignisse definiert werden

$$\Delta t : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta t(\tau_e, \tau_f) := \Delta\bar{t}(e, f), \quad \text{falls } e \in \tau_e, f \in \tau_f. \quad (1.1.5)$$

$\mathcal{T}$  wird durch die Abbildung (1.1.5) zu einem eindimensionalen Euklidischen Raum mit der Metrik  $|\Delta t|$ . Der zugehörige Translationsraum wird hier mit  $\mathbb{T}$  bezeichnet und *Zeit* genannt. Mathematisch gilt die Identifikation  $\mathbb{T} \equiv \mathbb{R}$ . Die durch ein  $t \in \mathbb{T}$  ausgeführte Translation auf  $\mathcal{T}$  wird notiert als

$$\tau_e + t = \tau_f, \quad \text{falls } t = \Delta t(\tau_e, \tau_f).$$

Der Übergang von  $\mathcal{T}$  nach  $\mathbb{T}$  entspricht physikalisch der Festlegung einer *Uhr*, d.h. der Wahl eines Bezugsaugenblickes  $\tau_0$  und einer positiven Orientierung.

Der räumliche Abstand zweier Ereignisse kann nur sinnvoll für gleichzeitige Ereignisse definiert werden. Dann ist die Abstandsfunktion eine Abbildung  $d : \mathcal{W}_{sim} \rightarrow \mathbb{R}^{0+}$ , welche die Menge aller gleichzeitigen Ereignispaare als Urmenge besitzt. Die Abstandsfunktion hat die folgenden Eigenschaften

(iv) die Einschränkung von  $d$  auf einen Augenblick  $\tau \in \mathcal{T}$  ist eine Euklidische Metrik, d.h., die Abbildung  $d_\tau : \tau \times \tau \rightarrow \mathbb{R}^{0+}$  stattet  $\tau$  mit der Struktur eines Euklidischen Punktraumes aus.

(v) die Dimension des zugehörigen Translationsraumes  $\mathbb{E}$  ist 3.

Eine Menge  $\mathcal{W}$  mit den o.g. Strukturen und Eigenschaften wird **neo-klassischer Ereignisraum** (*engl. neo-classical event-world*) genannt (siehe NOLL [79]).

In BERTRAM [19] wird statt des Ereignisraumes der Begriff Raum-Zeit-Kontinuum benutzt, welches dort als Faserbündel  $(\mathcal{W}, \pi, \mathcal{T})$  definiert ist. Dabei bilden  $\mathcal{T}$  die Basismannigfaltigkeit und  $\mathcal{W}$  den Bündelraum. Die Projektion  $\pi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{T}$  entspricht der Zuordnung der Äquivalenzklasse zu jedem Ereignis. Die Fasern  $\pi^{-1}(\tau)$  sind dann die Euklidischen Räume und  $\mathcal{E}$  ist typische Faser. In Abbildung Abb. 1.1 ist ein triviales Raumzeitbündel  $\mathcal{W} = \mathcal{T} \times \mathcal{E}$  skizziert und es ist angedeutet, daß Abstände nur zwischen gleichzeitigen Ereignissen, Zeitdifferenzen aber zwischen beliebigen Ereignissen gemessen werden können. Es ist weder möglich, Abstände zwischen beliebigen Ereignissen zu messen, noch kommt den Begriffen *Ort* und *Zeit* eine sinnvolle Bedeutung zu. Um diese Begriffe in ihrer üblichen Bedeutung einzuführen, ist es nötig, die bereits definierten, relativen Größen *Abstand* und *Zeitdifferenz* an einem Beobachter bzw. Bezugssystem festzumachen.

### 1.2.1 Beobachter, Bezugssystem

Ein **Beobachter** in der Ereigniswelt ist eine bijektive Abbildung

$$\Phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{T},$$

die mit den metrischen Strukturen auf  $\mathcal{W}, \mathcal{E}$  und  $\mathcal{T}$  verträglich ist, d.h., die Einschränkung auf gleichzeitige Ereignisse  $\Phi_\tau^{-1} : \mathcal{E} \times \{\tau\} \rightarrow \mathcal{W}$  läßt

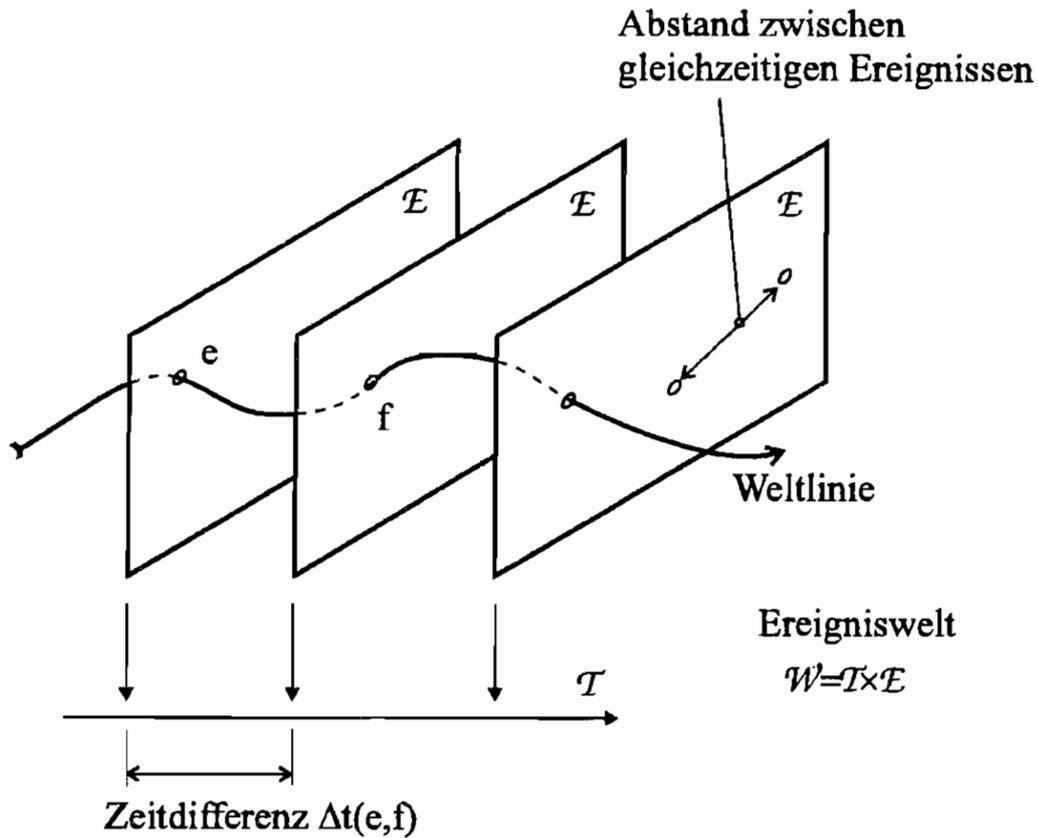


Abbildung 1.1: Eine triviale Struktur der Ereigniswelt

Abstände unverändert

$$d_{\tau}(\Phi_{\tau}^{-1}(x), \Phi_{\tau}^{-1}(y)) = d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathcal{E}$$

und die Umkehrabbildung läßt Zeitdifferenzen unverändert

$$\Delta \bar{t}(\Phi^{-1}(\cdot, \tau_e), \Phi^{-1}(\cdot, \tau_f)) = \Delta t(\tau_e, \tau_f), \quad \forall \tau_e, \tau_f \in \mathcal{T}.$$

Ein **Bezugssystem** erhält man, indem man auf  $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$  nach Auswahl eines Bezugspunktes  $o \in \mathcal{E}$  und eines Bezugsaugenblickes  $\tau_o \in \mathcal{T}$ , sowie entsprechender Orientierungen, die Abbildung

$$(\mathbf{d}_o, \Delta t_o) : \mathcal{E} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{T}, \quad (x, \tau) \mapsto (x, t) = (\mathbf{d}_o(x), \Delta t(\tau_o, \tau))$$

hinter die Beobachterabbildung schaltet

$$\Phi := (\mathbf{d}_o, \Delta t_o) \circ \Phi : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{T}. \tag{1.1.6}$$

Der Definition eines Beobachters kommt die eigentliche, physikalische Bedeutung zu, während die Definition eines Bezugssystems der einfacheren

mathematischen Beschreibung physikalischer Vorgänge dient. Es gibt unendlich viele Beobachter, darunter aber keinen, der besonders ausgezeichnet ist (BERTRAM [19]). Zu jedem Beobachter lassen sich beliebig viele Bezugssysteme konstruieren.

Durch Einführen eines Beobachters ergibt sich nun ein Sinn für den Abstandsbegriff nicht-gleichzeitiger Ereignisse (siehe Abb. 1.2). Allerdings hängen diese Abstände von der Wahl eines Beobachters ab. Das Konzept der

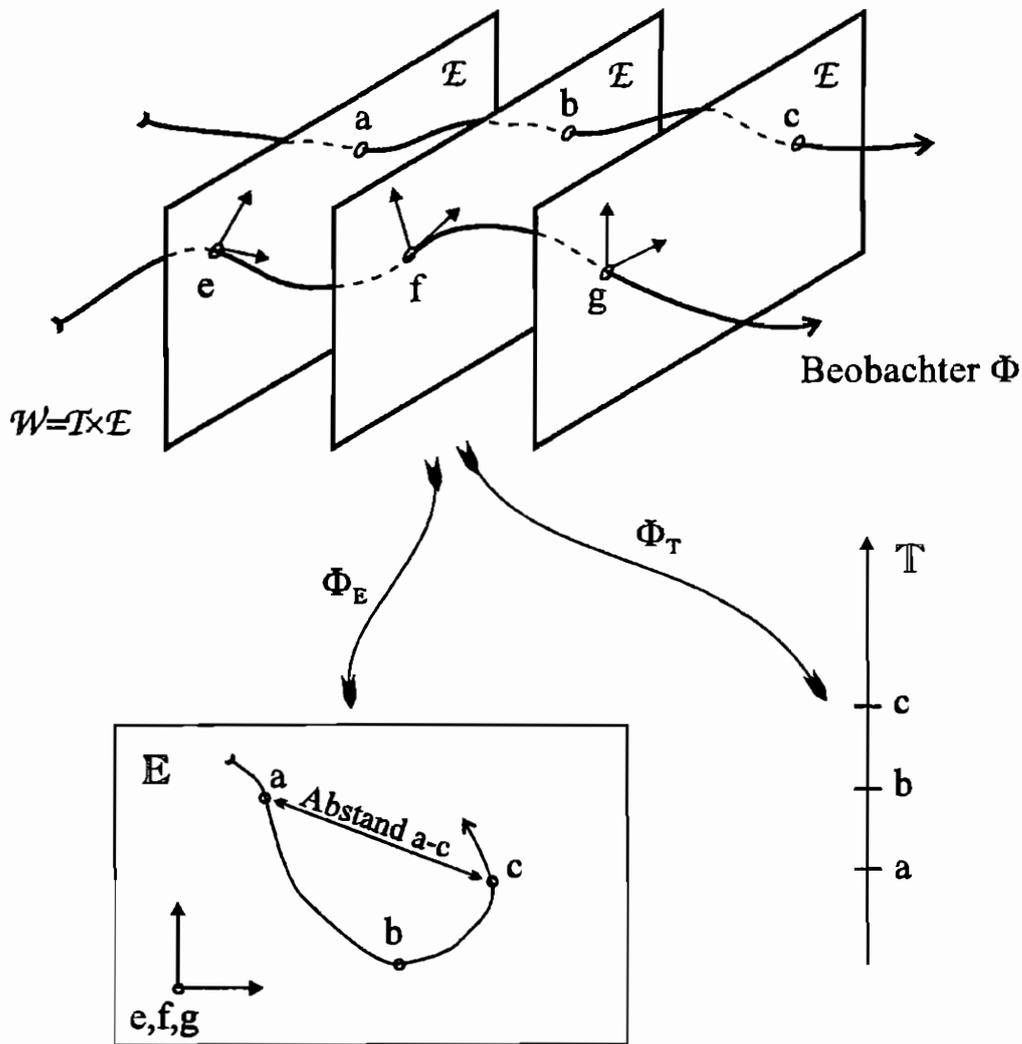


Abbildung 1.2: Ereignisraum  $\mathcal{W}$  und Beobachter  $\Phi$

neoklassischen Raumzeit ersetzt die absolute Raumzeit durch den (relativen) Beobachter und sein Bezugssystem. Die Begriffe *Ort* und *Zeit* verlieren ihre absolute Bedeutung. An ihre Stelle treten die Begriffe *Abstand* und *Zeitdifferenz*, die eine beobachterunabhängige, also objektive Bedeutung erhalten. Im Unterschied zur (speziellen) Relativitätstheorie ist hier die Gleichzeitig-

keit (1.1.4) eine objektive Eigenschaft von Ereignispaaren.

### 1.2.2 Beobachterwechsel

Die neoklassische Raumzeit besitzt eine innere Symmetrie bezüglich solcher Automorphismen (Isometrien), welche den räumlichen Abstand und die Zeitdifferenz zwischen Ereignissen unverändert lassen. Durch die Abbildung (1.1.6) läßt sich diese Symmetrie in die Bezugssysteme zurückziehen.

Ein Wertepaar  $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{E} \times \mathbb{T}$  bestimme Ort und Zeitpunkt eines Ereignisses  $e \in \mathcal{W}$  relativ zu einem Bezugssystem  $\Phi$ . Entsprechend bestimme  $(\mathbf{x}^+, t^+)$  dasselbe Ereignis bezüglich eines anderen Bezugssystems  $\Phi^+$ , welches einem Beobachter  $\Phi^+$  zugeordnet ist. Die allgemeinste orientierungserhaltende Transformation  $\mathbb{E} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{T}$ , welche die räumlichen und zeitlichen Abstände invariant läßt, ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+(t^+) &= \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t), & \forall \mathbf{c} \in \mathbb{E}, \mathbf{Q} \in SO(\mathbb{E}), \\ t^+ &= t + a, & \forall a \in \mathbb{T}. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Diese Transformation heißt raumzeitliche Euklidische Transformation oder Beobachterwechsel. Eine Größe, die bei Beobachterwechsel nicht verändert wird, heißt euklidisch invariant oder beobachterinvariant (*engl. frame-invariant*).

### 1.2.3 Relative Bewegung

Wird ein Beobachterwechsel als stetige und genügend oft differenzierbare Abbildung vorausgesetzt, so können entsprechende Transformationsregeln für Geschwindigkeiten und Beschleunigungen abgeleitet werden. Die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}^+$  im Bezugssystem  $\Phi^+$  ergibt sich mittels Zeitableitung als

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^+(t) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t)) \\ &= \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{v}, & \text{mit } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} \\ &= \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\mathbf{v} & \boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^{-1} \in Skw(\mathbb{E}) \\ &= \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}^+ - \mathbf{c}) + \mathbf{Q}\mathbf{v} \\ &= \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}^+ - \mathbf{c}) + \mathbf{Q}\mathbf{v} & \boldsymbol{\omega} = \text{axial}(\boldsymbol{\Omega}). \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

Hierbei ist  $\mathbf{\Omega} \in Skw(\mathbb{E})$  der schiefsymmetrische Spintensor der Drehung  $\mathbf{Q}$  und  $\boldsymbol{\omega}$  ist sein axialer Vektor. Eine weitere Zeitableitung ergibt die Transformationsregel für Beschleunigungen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}^+ &= \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{\Omega}\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{x}}) & (1.1.9) \\
 &= \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{\Omega}}(\mathbf{x}^+ - \mathbf{c}) + \mathbf{\Omega}(\dot{\mathbf{x}}^+ - \dot{\mathbf{c}}) + \dot{\mathbf{Q}}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{Q}\mathbf{a} \\
 &= \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{x}^+ - \mathbf{c}) + \mathbf{\Omega}(\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}^+ - \mathbf{c}) + \mathbf{Q}\mathbf{v}) + \mathbf{\Omega}\mathbf{Q}\mathbf{v} + \mathbf{Q}\mathbf{a} \\
 &= \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{x}^+ - \mathbf{c}) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{x}^+ - \mathbf{c}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}\mathbf{v} + \mathbf{Q}\mathbf{a} \\
 &= \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{x}^+ - \mathbf{c}) - \omega^2(\mathbf{x}^+ - \mathbf{c}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}\mathbf{v} + \mathbf{Q}\mathbf{a}, \\
 &\quad \text{mit } \mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}.
 \end{aligned}$$

(1.1.10)

Der Term  $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}\mathbf{v}$  heißt *Coriolisbeschleunigung*,  $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{x}^+ - \mathbf{c})$  heißt *Tangentialbeschleunigung* und  $-\omega^2(\mathbf{x}^+ - \mathbf{c})$  heißt *Zentripetalbeschleunigung*.

#### 1.2.4 Invarianz bei Beobachterwechsel

Nun sei  $\eta(\mathbf{x}, t)$  eine skalare Größe (oder ein skalares Feld). Eine skalare Größe heißt objektiv (auch *engl. frame-indifferent*), wenn sie sich bei Beobachterwechsel gemäß

$$\eta^+(\mathbf{x}^+, t^+) = \eta(\mathbf{x}, t)$$

transformiert. Das bedeutet, daß eine objektive skalare Größe immer auch euklidisch invariant ist. Beispiele skalarer Felder sind Temperatur- oder Massendichtefelder.

Es sei  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  eine vektorielle Größe (oder ein Vektorfeld). Eine vektorielle Größe heißt objektiv, wenn sie sich bei Beobachterwechsel gemäß

$$\mathbf{u}^+(\mathbf{x}^+, t^+) = \mathbf{Q}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1.1.11)$$

transformiert. Diese Transformationsregel läßt sich für solche räumlichen Vektoren, die vom Bezugspunkt unabhängig sind, direkt aus (1.1.7) ableiten. Die Unabhängigkeit vom Bezugspunkt muß vorausgesetzt werden, da dieser nicht für den Beobachter, sondern nur für das Bezugssystem definiert ist. Die Gültigkeit von (1.1.11) für nicht-kinematische Größen, z.B. Kräfte, kann nicht abgeleitet werden, sondern muß bei der Definition der jeweiligen

Kräfte postuliert werden. Die Tatsache, daß sich entsprechende Arbeits- oder Leistungsbilanzen letztlich objektiv, weil skalar, transformieren, rechtfertigt die Objektivitätspostulate nachträglich. <sup>4)</sup>

Nun sei  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  ein Tensor (oder Tensorfeld) zweiter Stufe. Er kann als bilineare Abbildung  $L(\mathbb{E} \times \mathbb{E}; \mathbb{R})$  betrachtet werden, die durch  $\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  definiert ist und je zwei Vektoren eine reelle Zahl zuordnet. Wird für die beiden Vektoren und die reelle Zahl Objektivität vorausgesetzt, so ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^+ \mathbf{u}^+ \cdot \mathbf{v}^+ &= \mathbf{A}^+ \mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{Q}^\top \mathbf{A}^+ \mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ &\Downarrow \\ \mathbf{Q}^\top \mathbf{A}^+ \mathbf{Q} &= \mathbf{A} \end{aligned}$$

die entsprechende Objektivitätsbedingung für Tensoren zweiter Stufe

$$\mathbf{A}^+(\mathbf{x}^+, t^+) = \mathbf{Q}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^\top. \quad (1.1.12)$$

Diese Definitionen können auf Tensoren höherer Stufe erweitert werden. Jedoch ist eine symbolische Darstellung (1.1.12) für Tensoren n-ter Stufe nicht möglich. Für jeden einfachen Tensor  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \dots \otimes \mathbf{z}$  gilt allerdings, daß er objektiv ist, falls er sich gemäß

$$\mathbf{a}^+ \otimes \mathbf{b}^+ \otimes \dots \otimes \mathbf{z}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{a} \otimes \mathbf{Q}\mathbf{b} \otimes \dots \otimes \mathbf{Q}\mathbf{z} \quad (1.1.13)$$

transformiert. Da jeder nicht-einfache Tensor als Linearkombination von einfachen Tensoren darstellbar ist, läßt sich (1.1.13) als Definition der Objektivität beliebiger Tensoren endlicher Stufe verwenden. Es sei vorweggenommen, daß (1.1.13) einer *push-forward* Abbildung des einfachen Tensors mit  $\mathbf{Q}$  entspricht.

### 1.2.5 Objektivität relativer Bewegungen

Die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  transformiert sich bei Beobachterwechsel gemäß (1.1.9) und läßt sich als Summe

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^+ &= \mathbf{Q}\mathbf{a} + \mathbf{a}_{n.obj.}, \\ \mathbf{a}_{n.obj.} &:= \ddot{\mathbf{c}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{x}^+ - \mathbf{c}) - \omega^2(\mathbf{x}^+ - \mathbf{c}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}\mathbf{v} \end{aligned}$$

<sup>4)</sup>Die Tatsache, daß ein Leistungsterm  $P = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$  eine skalare Größe darstellt, bedingt nicht, daß er auch objektiv sein muß. Wird für die Kraft  $\mathbf{f}$  Objektivität postuliert,  $\mathbf{f}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{f}$ , so folgt mit  $\mathbf{v}^+$  aus (1.1.8), daß  $P^+ = \mathbf{f}^+ \cdot \mathbf{v}^+$  nicht objektiv sein kann.

aus einem objektiven und einem nicht-objektiven Term  $\mathbf{a}_{n.obj.}$  darstellen. Wie man leicht sieht, wird die Beschleunigung genau dann zu einer objektiven Größe, wenn zu jedem Zeitpunkt sowohl  $\dot{\mathbf{Q}} = \ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}$  als auch  $\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$  gilt. Ein Bezugssystem, welches diese Eigenschaften besitzt, heißt **Galileisches Bezugssystem** oder **Trägheitssystem**. In einem Galileischen Bezugssystem ist die Beschleunigung eine indifferente Größe. Die Transformation zwischen Galileischen Bezugssystemen wird beschrieben durch

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^+ &= \mathbf{c} + \mathbf{v}_c t + \mathbf{Q}\mathbf{x}, & \forall \mathbf{c}, \mathbf{v}_c \in \mathbb{E}, \mathbf{Q} \in SO(\mathbb{E}), \\ t^+ &= t + a, & \forall a \in \mathbb{T},\end{aligned}$$

wobei  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{v}_c$ ,  $\mathbf{Q}$  zeitlich konstante Größen sind.

Selbst die Geschwindigkeit kann beim Wechsel zwischen bestimmten Bezugssystemen eine indifferente Größe sein. Die Geschwindigkeiten transformieren sich gemäß

$$\mathbf{v}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{v} + \mathbf{v}_{n.obj.}, \quad \mathbf{v}_{n.obj.} := \dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}^+ - \mathbf{c}).$$

Die spezielle Klasse von Bezugssystemen, für die der nicht-objektive Anteil  $\mathbf{v}_{n.obj.}$  verschwindet, heißt **raumfestes Bezugssystem**. Die Transformation zwischen raumfesten Bezugssystemen ist durch

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^+ &= \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{x}, & \forall \mathbf{c} \in \mathbb{E}, \mathbf{Q} \in SO(\mathbb{E}), \\ t^+ &= t + a, & \forall a \in \mathbb{T}\end{aligned}$$

definiert, wobei  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{Q}$  zeitlich konstant sind.

## 1.3 Materieller Körper

### 1.3.1 Definition eines materiellen Körpers

Die Materie oder der *materielle Körper* bildet neben Raum und Zeit ein weiteres grundlegendes Konzept der Mechanik. Der materielle Körper an sich ist nicht begreifbar. Er wird erst erfahrbar durch seine Plazierungen im Umgebungsraum (siehe auch TRUESDELL [119]). Daß es sich bei verschiedenen, z.B. deformierten, Plazierungen immer um denselben Körper handelt ist Voraussetzung.

---

**Übersicht 1.1** Bezugssysteme
 

---

Wechsel eines Bezugssystems  $\Phi \rightarrow \Phi^+$  :

Euklidische Transformation:  $\mathbf{x}^+ = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t)$

Galileische Transformation:  $\mathbf{x}^+ = \mathbf{c} + \mathbf{v}_c t + \mathbf{Q}\mathbf{x}(t)$

Starrkörper-Transformation:  $\mathbf{x}^+ = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{x}(t)$

Zeitverschiebung:  $t^+ = a + t$

Objektivität:

Skalare Felder:  $\eta^+(\mathbf{x}^+, t^+) = \eta(\mathbf{x}, t)$

Vektorfelder:  $\mathbf{u}^+(\mathbf{x}^+, t^+) = \mathbf{Q}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$

Tensorfelder:  $\mathbf{A}^+(\mathbf{x}^+, t^+) = \mathbf{Q}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T$ 


---

Während die inhaltliche Definition eines materiellen Körpers Gegenstand philosophischer Betrachtungen sein muß, kann seine mathematische Struktur exakt definiert werden. Die wesentlichen Eigenschaften, die einem kontinuierlichen materiellen Körper zugeschrieben werden sind die folgenden: Er bildet eine Menge von Teilchen, die **materielle Punkte** genannt werden; die Punkte sind in dem Körper in stetiger Weise angeordnet; sie bilden einen topologischen Raum, so daß es Sinn macht, von einer Umgebung materieller Punkte, einem Inneren, einem Rand und weiteren topologischen Begriffen zu sprechen. Zusätzlich zu den topologischen Eigenschaften wird der materiellen Körper mit einer differenzierbaren Struktur ausgestattet, welche hinreichend für die Anwendung analytischer Methoden (Tensoranalysis) sein soll. Das entsprechende mathematische Modell, das die geforderten topologischen und differenzierbaren Eigenschaften besitzt, ist eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit*. Eine mögliche Definition lautet daher (siehe BERTRAM [19], D.6.1):

*Ein materieller Körper ist eine kompakte, orientierte,  $n$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit  $\mathcal{B}$  mit einem stetigen, orientierbaren Rand  $\partial\mathcal{B}$ . Die Elemente von  $\mathcal{B}$  heißen materielle Punkte.*

Die Dimension dieser materiellen Mannigfaltigkeit liegt im Bereich  $n = 1, 2, 3$ . Im Falle  $n = 3$  ist der materielle Körper ein klassisches *Cauchy-Kontinuum*. Für  $n = 2$  kann man die materielle Mannigfaltigkeit als 2-dimensionale materielle Fläche interpretieren, und für  $n = 1$  stellt sie sich

als 1-dimensionale materielle Kurve dar. Die materielle Fläche dient hier als Modell einer direkten Beschreibung der Schalentheorie (siehe auch GURTIN & MURDOCH [45]), während die materielle Kurve als Ausgangspunkt für eine Beschreibung krummliniger Balken (*engl. rods*) verwendbar ist (siehe auch ANTMAN [10]).

Eine kurze Bemerkung zur Anwendbarkeit des Konzeptes eines materiellen Körpers in der Kontinuumsmechanik ist notwendig. Nicht jeder deformierbare Körper kann als materieller Körper modelliert werden. Die zugrundeliegende topologische Struktur läßt nur solche Deformationen zu, die diese Struktur nicht zerstören. Das heißt, der Körper kann beliebig gedehnt, gestaucht, verdreht oder verbogen werden, benachbarte Punkte bleiben bei diesen Deformationen stets benachbart. Ein Zerreißen des Körpers muß ausgeschlossen werden, da eine solche Deformation die topologische Struktur des Körpers verändert. Damit sind z.B. Vorgänge des turbulenten Fließens, der Gasdynamik oder der Dynamik der Gemische von vorn herein ausgeschlossen. Selbst finite plastische Deformationen können den Grundsätzen einer Beschreibung durch materielle Körper nicht unbedingt gerecht werden (siehe u.a. ANTHONY [7]).

### 1.3.2 Koordinaten materieller Punkte

Ein materieller Körper  $\mathcal{B}$  der Dimension  $n$  ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Karte oder Koordinatenabbildung  $\psi$  — wenn nicht anders vermerkt, sei  $C^\infty$ -Differenzierbarkeit vorausgesetzt — ordnet jedem materiellen Punkt  $\xi \in \mathcal{U}$  in einer offenen Umgebung  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  ein Koordinaten- $n$ -Tupel  $(\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$  zu. Die  $n$ -Tupel bilden einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}^n$ . Sie werden kurz mit  $\boldsymbol{\xi} := (\xi^1, \dots, \xi^n)$  bezeichnet, wobei  $\boldsymbol{\xi}$  als ein Vektor betrachtet werden kann, der auf die kanonische Basis  $\{\mathbf{e}_i := (0, \dots, \underset{i-1}{0}, \underset{i}{1}, \underset{i+1}{0}, \dots, 0)\}$  des  $\mathbb{R}^n$  bezogen ist. Die kanonische Darstellung ist dann  $\boldsymbol{\xi} = \xi^i \mathbf{e}_i$ .

■ **Anmerkung:** Eine kurze Anmerkung soll die physikalische Bedeutung der Koordinatenabbildung auf Mannigfaltigkeiten erläutern. Es sei  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  eine offene Umgebung eines Punktes  $p \in \mathcal{U}$ , die mit Koordinaten versehen ist. Aufgrund der topologischen (und somit auch *kontinuumsmechanischen*)

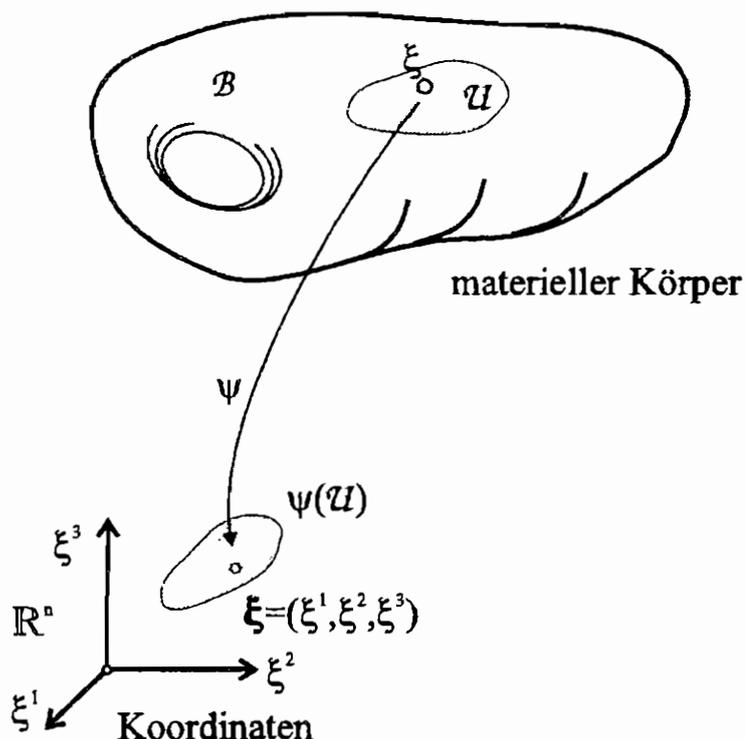


Abbildung 1.3: Materieller Körper und materielle Koordinaten

Eigenschaften des materiellen Körpers ist es sinnvoll die folgende Zuordnung von materiellen Punkten und Koordinaten zu fordern:

- Benachbarte <sup>5)</sup> Punkte sollen benachbarte Koordinaten haben !
- Jeder Punkt soll eine eindeutige Koordinate haben !

Es ist offensichtlich, daß diese Forderungen für die meisten Körper nicht global erfüllt werden können. Der materielle Körper muß daher in sich überschneidende offene Umgebungen aufgeteilt werden, für die jeweils eine eigene Karte konstruiert wird. Die Menge  $\{(\mathcal{U}_i, \psi_i)\}$  aller Karten, die eine Mannigfaltigkeit vollständig überdecken heißt *Atlas*. Wird eine entsprechende Differenzierbarkeit beim Übergang zwischen den Karten vorausgesetzt, so ist die resultierende mathematische Struktur eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit*. ■

<sup>5)</sup>Der Nachbarschaftsbegriff wird hier im Sinne einer offenen Umgebung verwendet. Die oben genannte Forderung entspricht also der Stetigkeit der Koordinatenabbildung: Es existiert eine offene Umgebung  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  von  $p \in \mathcal{B}$ , so daß  $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  eine stetige Abbildung ist, wobei  $\mathcal{V} = \psi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ .

Der Tangentialraum an den materiellen Körper  $\mathcal{B}$  im materiellen Punkt  $\xi$  wird mit  $T_\xi \mathcal{B}$  bezeichnet. Er bildet einen Vektorraum. Eine Basis des  $T_\xi \mathcal{B}$  wird durch die holonomen Tangentenvektoren  $\{\partial \xi_i, i = 1, \dots, n\}$  aufgespannt. Das Symbol  $\partial \xi_i \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^i}$  deutet darauf hin, daß Tangentenvektoren auch Operatoren (*Derivationen*) auf der Menge der Funktionen auf einer Mannigfaltigkeit sind (siehe CHOQUET-BRUHAT ET AL. [25]). Der Kotangentialraum wird mit  $T_\xi^* \mathcal{B}$  bezeichnet, die Gradientenvektorbasis heiße  $\{d\xi^i, i = 1, \dots, n\}$ . Die Tangentialabbildung  $T\psi|_\xi: T_\xi \mathcal{B} \rightarrow T_\xi \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$  weist jedem Tangentenvektor eine entsprechende Koordinatendarstellung zu. Da die Tangentialabbildung linear ist, ist sie durch Angabe der Abbildungen der entsprechenden Basisvektoren festgelegt. Für die holonome Tangentenvektorbasis gilt  $T\psi(\partial \xi_i) = \mathbf{e}_i$ , wobei  $\{\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n\}$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^n$  ist. Für die kotangentiale Abbildung  $T^*\psi|_\xi: T_\xi^* \mathcal{B} \rightarrow T_\xi^* \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$  findet man entsprechend  $T^*\psi(d\xi^i) = \mathbf{e}^i$ , wobei für die Orthonormalbasis  $\mathbf{e}^i \equiv \mathbf{e}_i$  zu setzen ist.

## 1.4 Bewegung des materiellen Körpers

### 1.4.1 Einbettung des materiellen Körpers in den Euklidischen Raum

Es wird nun die zeitabhängige Einbettung des materiellen Körpers in die Ereigniswelt  $\mathcal{W}$  betrachtet. Dabei sei  $\mathcal{B}$  ein materieller Körper und  $\mathcal{T}$  sei die Menge aller Zeitpunkte, dargestellt als affiner Raum. Die Abbildung

$$\bar{\kappa} : \mathcal{B} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{W} \quad (1.1.14)$$

wird **Bewegung** eines Körpers  $\mathcal{B}$  genannt, wenn für jeden materiellen Punkt  $\xi \in \mathcal{B}$  die Abbildung

$$\bar{\kappa} : \{\xi\} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{W}$$

eine Bahn in  $\mathcal{W}$  darstellt und die Beschränkung von (1.1.14) auf einen Augenblick  $\tau \in \mathcal{T}$  eine stetige *Einbettung*

$$\bar{\kappa}_\tau := \bar{\kappa}(\cdot, \tau) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{W}$$

in den Euklidischen Punktraum darstellt. Der Bewegungsbegriff ist somit beobachterunabhangig definiert.

Nun sei  $\Phi$  ein Beobachter. Die Hintereinanderschaltung einer Bewegung  $\kappa$  und einer Beobachterabbildung  $\Phi$  definiert eine Bewegung in bezug auf den Beobachter

$$\kappa_\Phi := \Phi \circ \bar{\kappa} : \mathcal{B} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{E} \times \mathcal{T}, \quad (\xi, \tau) \mapsto (x, \tau) = \Phi \circ \bar{\kappa}(\xi, \tau).$$

Die Abbildung  $\kappa_\Phi$  ist im zweiten Ausgang die Identität auf  $\mathcal{T}$ , während  $\kappa_{\Phi\tau} := \kappa_\Phi(\cdot, \tau) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$  eine Einbettung in den Beobachterraum darstellt. Sofern aus dem Kontext hervorgeht auf welchen Beobachter sich die Beschreibung bezieht, kann der Beobachtersuffix  $\Phi$  auch fortgelassen werden.

Jetzt sei mit  $\Phi$  ein Bezugssystem gegeben. Die Hintereinanderschaltung

$$\kappa_\Phi := \Phi \circ \bar{\kappa} : \mathcal{B} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{T}$$

ordnet jedem materiellen Punkt  $\xi \in \mathcal{B}$  zu jedem Augenblick  $\tau \in \mathcal{T}$  einen Ortsvektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$  und eine Uhrzeit  $t \in \mathbb{T}$  im Bezugssystem  $\Phi$  zu. Die Einschränkung auf ein Zeitargument  $t = \Delta t_o(\tau)$  definiert die Einbettung

$$\kappa_t := \Phi \circ \bar{\kappa}_{\Delta t_o^{-1}(t)} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{E} \quad (1.1.15)$$

des Körpers in den Euklidischen Vektorraum. In (1.1.15) wurde der Beobachtersuffix  $\Phi$  fortgelassen und als Zeitargument wurde  $t \in \mathbb{T}$  eingesetzt. Das Bild  $\mathcal{P}_t := \kappa_t(\mathcal{B}) \subset \mathbb{E}$  wird *Plazierung* des materiellen Körpers zum Zeitpunkt  $t$  im Bezugssystem  $\Phi$  genannt. Die Plazierung bildet (aufgrund der Eigenschaften der Einbettung) eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit des Euklidischen Vektorraumes  $\mathbb{E}$ .

### 1.4.2 Parametrisierung der Einbettung

Es sei  $\kappa_t$  eine Plazierung in  $\Phi$ . Eine Basis des Euklidischen Raumes  $\mathbb{E}^n$  wird durch die orthonormalen Vektoren  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  aufgespannt. Jeder Ortsvektor kann bezüglich der Basis als  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  dargestellt werden. Die Abbildung  $\kappa_t(\xi)$  weist jedem materiellen Punkt  $\xi \in \mathcal{B}$  einen Ortsvektor

$$\mathbf{x}(\xi, t) = x^i(\xi, t) \mathbf{e}_i = \kappa_t(\xi) \in \mathbb{E}^n$$

zu. Ferner ordnet die Karte  $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$  jedem materiellen Punkt  $\xi \in \mathcal{B}$  ein Koordinatentupel  $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$  zu. Die Verknüpfung der Karte mit der Bewegung.  $\kappa_t \circ \psi^{-1}$ , liefert eine parametrisierte Form der Bewegung

$$\kappa_t \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{E}, \quad (\xi^1, \dots, \xi^n) \mapsto \mathbf{x}(\xi^1, \dots, \xi^n).$$

Man beachte, daß die allgemeine Beschreibung der Bewegung ohne die Definition einer Parametrisierung auskam. Die Wahl von Koordinaten auf  $\mathcal{B}$  ist willkürlich und alle Koordinatenabbildungen sind gleichberechtigt. Ein physikalischer Prozeß darf nicht von der Wahl der beschreibenden Koordinaten abhängen; die Einfachheit der Beschreibung hängt aber sicherlich davon ab. Im  $\mathbb{R}^n$  können  $n - 1$  Koordinaten festgehalten werden, so daß nur eine Koordinate variiert wird, z.B.  $\xi^i$ . Das Bild von  $\xi^i$  ist eine Kurve

$$\mathbf{x} = \kappa_t \circ \psi^{-1}(\xi^1, \dots, \xi^i, \dots, \xi^n), \quad \xi^i \in [-\epsilon, \epsilon]$$

im Euklidischen Raum, welche Koordinatenlinie genannt wird.

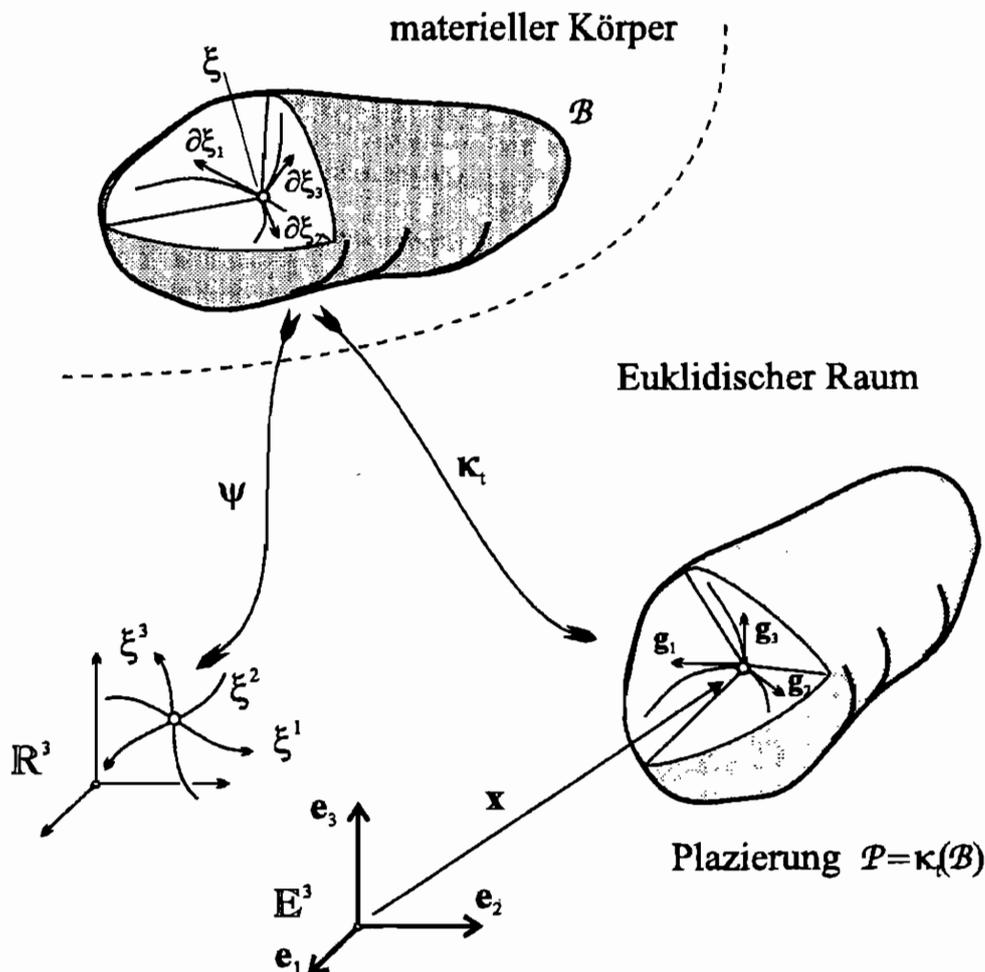


Abbildung 1.4: Einbettung eines materiellen Körpers in den  $\mathbb{E}^3$

Der Euklidische Raum ist auf natürliche Weise mit globalen Koordinaten ausgestattet, welche durch die Wahl der Basisvektoren auf  $\mathbb{E}$  festgelegt sind.

Es sei  $\phi$  eine globale Karte auf  $\mathbb{E}$ , die jedem Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$  ein Koordinatentupel

$$\phi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \mapsto (x^1, \dots, x^n)$$

zuweist. Wenn  $pr_i$  die übliche Projektion auf den  $i$ -ten Faktor eines kartesischen Produktes, hier  $\mathbb{R}^n$ , bezeichnet

$$pr_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x^1, \dots, x^i, \dots, x^n) \mapsto x^i,$$

so läßt sich durch Verknüpfung mit der Kartenabbildung eine Koordinatenprojektion  $\phi^i := pr_i \circ \phi$  erzeugen. Diese ordnet jedem Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{E}$  seine  $i$ -te Koordinate zu,

$$x^i = \phi^i(\mathbf{x}) := \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^i, \quad (1.1.16)$$

wobei  $\mathbf{e}^i$  die zu  $\mathbf{e}_i$  reziproke Basis darstellt. Die reziproke Basis läßt sich aus der Bedingung  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$  ermitteln. Es ist offensichtlich, daß gemäß (1.1.16) die Wahl einer Kartenabbildung auf  $\mathbb{E}$  eindeutig Basisvektoren festlegt und umgekehrt.

### 1.4.3 Tangentialabbildung auf Mannigfaltigkeiten

Es seien  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und  $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  sei ein Diffeomorphismus. Auf den Mannigfaltigkeiten seien Koordinatenabbildungen  $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\phi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben, so daß die Abbildung  $h$  durch  $\phi \circ h \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  lokal repräsentiert werden kann. Dieses läßt sich in folgendem kommutativen Diagramm darstellen:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{h} & \mathcal{N} \\ \psi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\phi \circ h \circ \psi^{-1}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Es bezeichne  $\xi^i$  Koordinaten auf  $\mathcal{M}$  und  $d\xi^i$  Kotangentenvektoren auf dem Kotangentialraum  $T_\xi^* \mathcal{M}$ . Entsprechend seien auf  $\mathcal{N}$  Koordinaten  $x^i$  und Tangentenvektoren  $\partial x_i$  definiert. Dann ist die Tangentialabbildung  $T_\xi h :$

$T_\xi \mathcal{M} \rightarrow T_x \mathcal{N}$ , mit  $x = h(\xi)$ , gegeben durch

$$T_\xi h = \frac{\partial(\phi^i \circ h \circ \psi^{-1})}{\partial \xi^j} \partial x_i \otimes d\xi^j, \quad (1.1.17)$$

wobei  $\phi^i$  die in (1.1.16) definierte Koordinatenprojektion bezeichne.

#### 1.4.4 Tangentialabbildung auf Euklidischen Räumen

Falls die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{N}$  in (1.1.17) mit dem Vektorraum  $\mathbb{E}$  identifiziert wird, ergibt sich eine einfachere Beschreibung, da der Tangentialraum  $T_x \mathbb{E}$  zu dem Vektorraum  $\mathbb{E}$  isomorph ist,  $T_x \mathbb{E} \cong \mathbb{E}$ . Die offensichtliche Konsequenz liegt darin, daß nun jede Basis des Vektorraumes  $\mathbb{E}$  auch eine Basis des Tangentialraumes darstellt. Wenn  $\mathbf{e}_i$  die orthonormale Basis des  $\mathbb{E}$  ist und  $x^i$  die entsprechende Koordinate darstellt, dann gilt  $\partial x_i \cong \mathbf{e}_i$ . Das Resultat aus (1.1.17) kann benutzt werden und führt auf

$$\mathbf{K} = T_\xi \boldsymbol{\kappa} = \frac{\partial(\phi^i \circ \boldsymbol{\kappa} \circ \psi^{-1})}{\partial \xi^j} \mathbf{e}_i \otimes d\xi^j,$$

wobei hier das Zeitargument in  $\boldsymbol{\kappa}_t$  der Kürze halber weggelassen ist. Der Tensor  $\mathbf{K}$  wird *intrinsischer* oder *materieller Deformationsgradient* genannt. Der Term  $g_j^i = \frac{\partial(\phi^i \circ \boldsymbol{\kappa} \circ \psi^{-1})}{\partial \xi^j}$  bestimmt die holonomen Basisvektoren  $\mathbf{g}_j = g_j^i \mathbf{e}_i$ , welche Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien  $\mathbf{x}(\xi^j)$  sind.

Da die Wahl der Koordinaten willkürlich ist, kann immer eine besonders einfache Koordinatendarstellung gefunden werden, falls die  $x^i$  die Bedingung

$$\xi^i \stackrel{!}{=} x^i := \phi^i \circ \boldsymbol{\kappa} \circ \psi^{-1}(\xi^1, \dots, \xi^n) \quad (1.1.18)$$

erfüllen. In diesem Fall vereinfacht sich der Term  $\frac{\partial(\phi^i \circ \boldsymbol{\kappa} \circ \psi^{-1})}{\partial \xi^j}$  zu  $\delta_j^i$ . Da ferner die Auswahl von Koordinaten auf  $\mathbb{E}$  äquivalent zu der Wahl von Basisvektoren ist, ergibt sich, daß zu (1.1.18) eine Vektorbasis  $\{\mathbf{g}_i\}$  mit der Eigenschaft

$$\xi^i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}^i, \quad \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$$

gehört. Die Koordinaten  $x^i$ , gegeben durch (1.1.18), heißen konvektive Koordinaten und die entsprechende Vektorbasis  $\{\mathbf{g}_i\}$  wird konvektive, natürliche oder Gaußsche Basis genannt.

## 1.5 Beschreibung von Bewegungen

### 1.5.1 Intrinsische Beschreibung

Die *intrinsische* oder *materielle Beschreibung* einer Bewegung ist definiert als zeitabhängige Einbettung eines materiellen Körpers in den Euklidischen Raum,

$$\kappa_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{E}. \quad (1.1.19)$$

Das Bild  $\mathcal{P}_t = \kappa_t(\mathcal{B})$  wird Plazierung von  $\mathcal{B}$  zum Zeitpunkt  $t$  genannt. Hierbei ist vorausgesetzt, daß alle Beschreibungen in einem Bezugssystem  $\Phi$  stattfinden. Die intrinsische Beschreibung ermöglicht es, der Bewegung eines materiellen Punktes  $\xi \in \mathcal{B}$  zu folgen. Die so erhaltene Kurve  $t \mapsto \kappa_t(\xi) \in \mathbb{E}$ , wird *Trajektorie* oder *Bahn* von  $\xi$  im Euklidischen Raum genannt. Wesentlich ist, daß das Argument  $\xi$  in der Beschreibung  $\mathbf{x} = \kappa_t(\xi)$  nur eine Bezeichnung für den entsprechenden materiellen Punkt ist. Das heißt, das Symbol  $\xi$  ist keine Koordinate oder Zahl, es ist ausschließlich eine Bezeichnung eines Punktes auf dem Körper, so, wie auch "Paris" eine Bezeichnung für einen Punkt auf dem Körper "Erde" ist. Selbstverständlich können dem Punkt  $\xi$  Koordinaten zugewiesen werden, aber es sollte immer unterschieden werden zwischen dem *eindeutigen* Punkt und seinen *willkürlich* gewählten Koordinaten.

### 1.5.2 Referentielle Beschreibung

Zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t = t_0$  nimmt der materielle Körper die Plazierung  $\mathcal{P}_0 = \kappa_{t_0}(\mathcal{B})$  ein. Dabei wird der materielle Punkt  $\xi$  in den räumlichen Punkt  $\mathbf{X} = \kappa_0(\xi)$  <sup>6)</sup> abgebildet. Anstatt auf den materiellen Punkt  $\xi$  zu verweisen, kann von ihm auch als demjenigen Punkt gesprochen werden, welcher zum Zeitpunkt  $t_0$  den Ort  $\mathbf{X}$  einnimmt. Der materielle Punkt wird also durch *Referenz* auf seine Lage in der Plazierung  $\mathcal{P}_0$  gekennzeichnet. Diese Plazierung wird daher **referentielle Plazierung** oder **Referenzplazierung** genannt. Die Verknüpfung der Abbildungen  $\kappa_0$  und  $\kappa_t$  ergibt dann die sogenannte **referentielle Beschreibung**  $\chi$

$$\chi_t := \kappa_t \circ \kappa_0^{-1} : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{P}_t, \quad \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x} = \chi_t(\mathbf{X}), \quad (1.1.20)$$

<sup>6)</sup>Zur Vereinfachung der Schreibweise wird  $\kappa_0 \equiv \kappa_{t_0}$  benutzt.

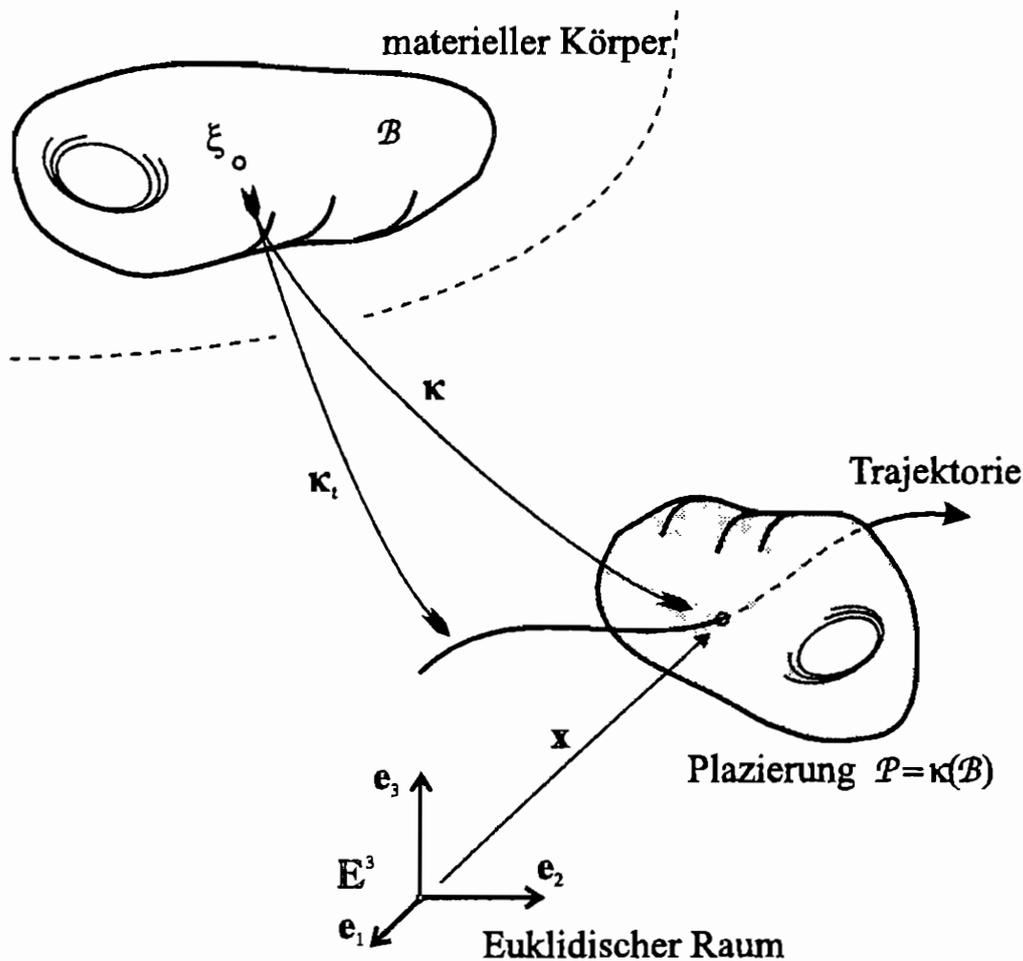


Abbildung 1.5: Intrinsische oder materielle Beschreibung

die auch als **Lagrangesche Beschreibung** bezeichnet wird. Die referentielle Beschreibung (1.1.20) kann zu einer Abbildung  $\chi_t : E \rightarrow E$  auf dem Euklidischen Raum fortgesetzt werden. Als Spezialfall erhält man  $X = \chi_0(X)$ , da  $\chi_0 = \kappa_0 \circ \kappa_0^{-1} = id_E$  gerade die Identität auf  $E$  darstellt. Die Referenzplatzierung ändert sich nicht mit der Zeit und ruht daher relativ zum Bezugssystem.

■ **Schreibweise:** Mit  $\mathcal{P}_t$  wird eine Platzierung zum Zeitpunkt  $t$  bezeichnet. Die Referenzplatzierung ist  $\mathcal{P}_0$ , d.h. es ist eine Platzierung zum Zeitpunkt  $t = t_0$ . Die momentane Platzierung wird dann einfach mit  $\mathcal{P}$  bezeichnet, da sie nicht zu einem definierten Zeitpunkt, sondern zu dem jeweils momentanen Zeitpunkt eingenommen wird. Entsprechend wird die Notation  $\kappa$  und  $\chi = \kappa \circ \kappa_0^{-1}$  für die intrinsische bzw. referentielle Beschreibung der momentanen Platzierung eingeführt. ■

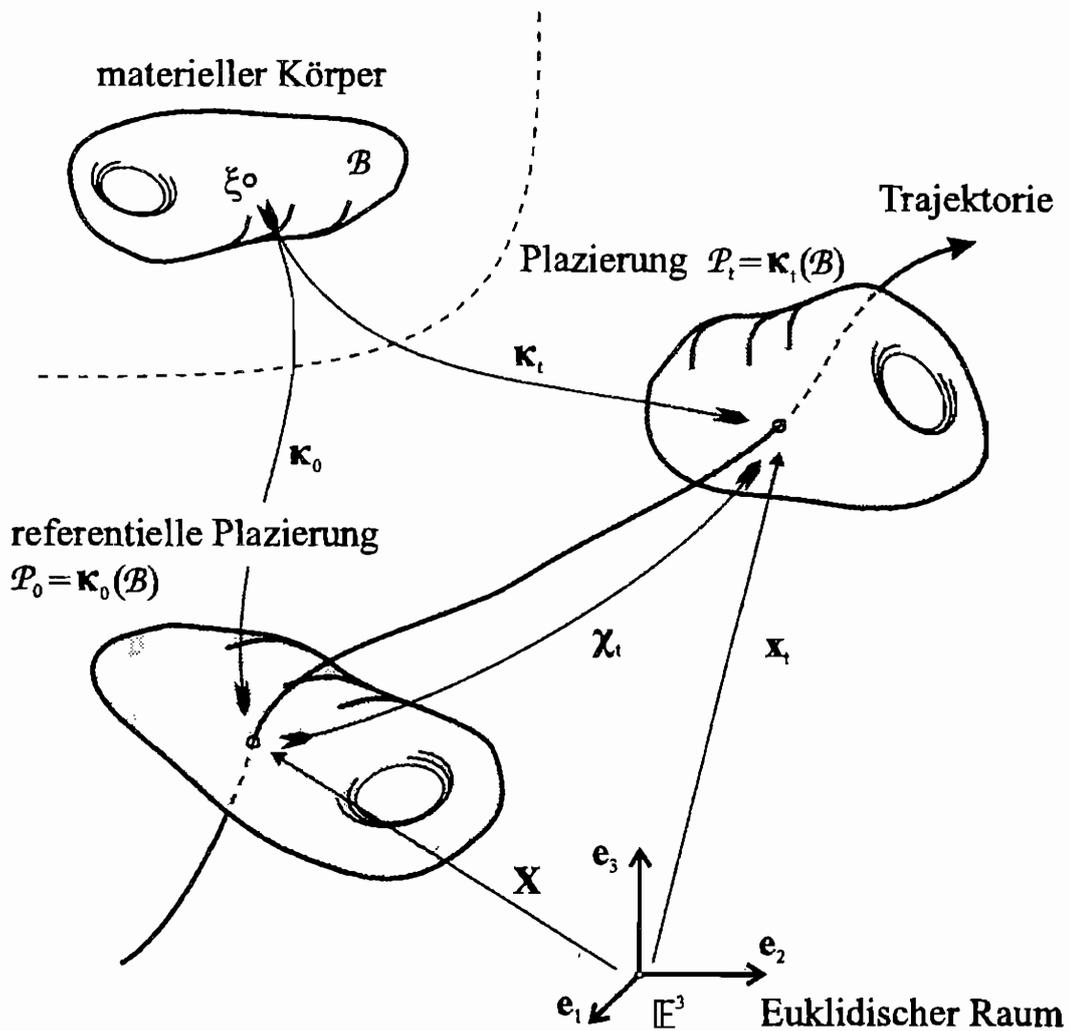


Abbildung 1.6: Referentielle oder Lagrangesche Beschreibung

### 1.5.3 Räumliche Beschreibung

Zum momentanen Zeitpunkt nimmt ein materieller Punkt  $\xi$  den räumliche Ort  $\mathbf{x} = \kappa(\xi)$  ein. Die Verknüpfung

$$\eta_t := \chi_t \circ \chi^{-1} = \kappa_t \circ \kappa^{-1} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}_t, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}(t)$$

beschreibt  $\mathbf{x}(t)$  als Position zum Zeitpunkt  $t$  jenes materiellen Punktes, der momentan den Ort  $\mathbf{x}$  einnimmt. Selbst wenn  $t$  festgehalten wird, kann sich  $\mathbf{x}(t)$  ändern, da sich aufgrund der Bewegung die materiellen Punkte ändern, welche momentan den Ort  $\mathbf{x}$  einnehmen. Dieses bedeutet, daß die Beschreibung der Position  $\mathbf{x}$  nicht von dem materiellen Punkt, sondern von dem räumlichen Ort abhängt. Diese Art der Beschreibung heißt daher *räumli-*

che oder *Eulersche Beschreibung*, wobei letzterer Ausdruck vor allem in der Strömungsmechanik gebräuchlich ist.

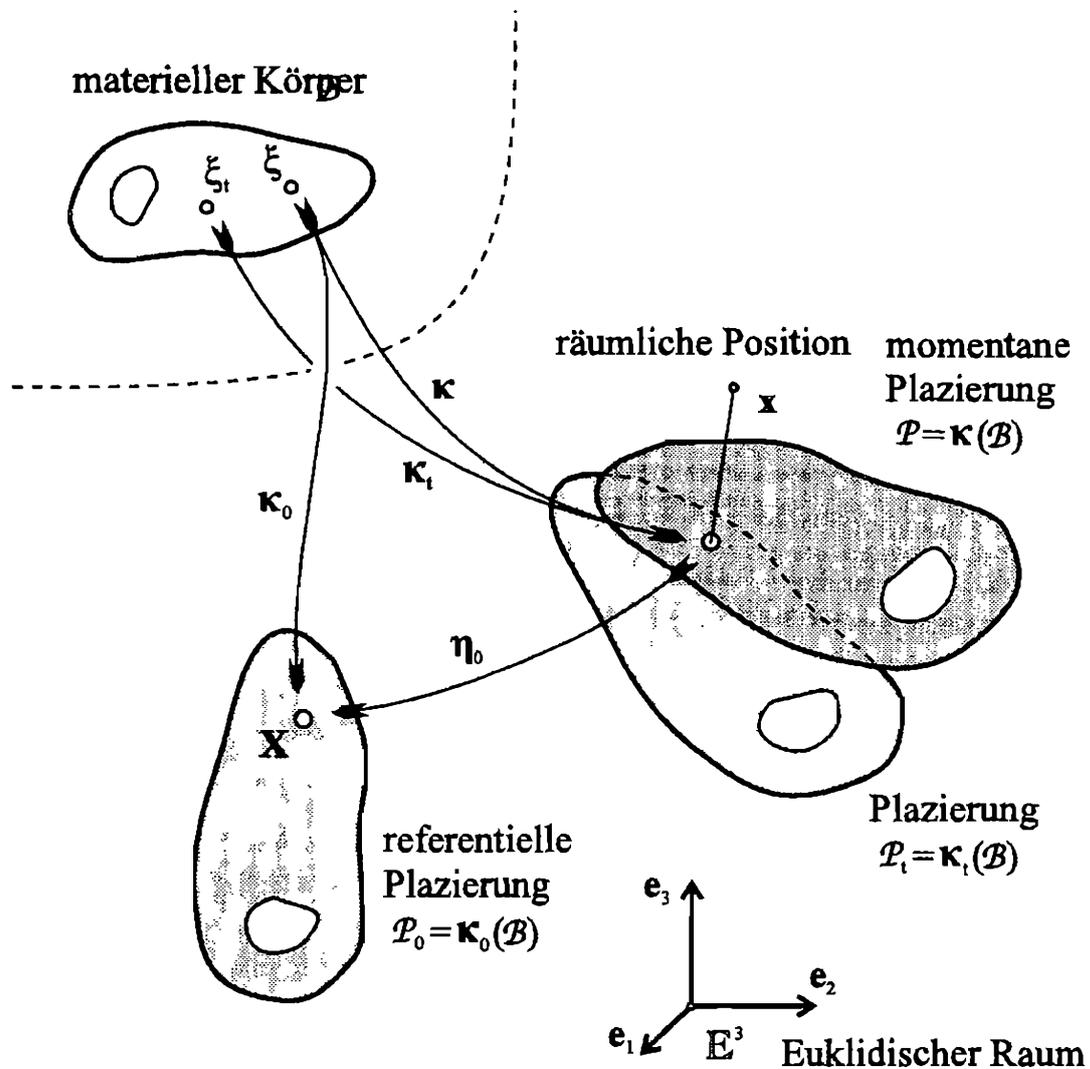


Abbildung 1.7: Räumliche oder Eulersche Beschreibung

Eine räumliche Beschreibung ist nur solange an einem Punkt  $x$  definiert, wie der Ort  $x$  von einem materiellen Punkt eingenommen wird. Allerdings kann die Abbildung auch hier wieder auf dem ganzen Euklidischen Raum fortgesetzt werden. Bei einem bewegten Körper ändert sich somit der Definitionsbereich der Abbildung  $\eta_t$  mit der Zeit. Aus diesem Grund ist die Eulersche Beschreibung vor allem für stationäre Probleme oder Probleme mit stationären Randbedingungen brauchbar, wie sie häufig in der Strömungsmechanik auftreten. In der Festkörpermechanik wird die Eulersche Beschreibung nur sehr selten eingesetzt. Allerdings werden dort die Begriffe

*räumliche* oder *Eulersche Beschreibung* oft in Verbindung mit einer referentiellen Beschreibung in bezug auf räumliche Koordinaten verwendet (siehe SMITH [111]). Diese Art der Beschreibung wird auch hier häufig benutzt und geht oft mit den Begriffen *push-forward* und *pull-back* einher.

### 1.5.4 Relative Beschreibung

Die Bewegung eines Körpers kann schließlich auch in bezug auf einen anderen bewegten Körper dargestellt werden. Dazu kann z.B. auch eine zeitabhängige Plazierung des materiellen Körpers dienen. Eine solche Beschreibung wird *relative Beschreibung* genannt und ist in der Fluidodynamik von großem Nutzen (siehe TRUESDELL [119]).

## 1.6 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Die Position eines materiellen Punktes  $\xi$  sei durch  $\mathbf{X}$  zum Zeitpunkt  $t_0$  und durch  $\mathbf{x}_t$  zum Zeitpunkt  $t$  gegeben. Die folgenden drei Beschreibungen werden betrachtet:

- (i) intrinsische Beschreibung:  $\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\kappa}(\xi, t)$ ;
- (ii) referentielle Beschreibung:  $\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ ;
- (iii) räumliche Beschreibung:  $\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ .

Die entsprechenden Geschwindigkeitsfelder ergeben sich durch partielle Differentiation nach der Zeit

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_t &= \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\kappa}(\xi, t)|_{\xi}, \\ \dot{\mathbf{x}}_t &= \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X}}, \\ \dot{\mathbf{x}}_t &= \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

Ein aufgesetzter Kreis ( $\overset{\circ}{\cdot}$ ) bezeichne die partielle Ableitung von  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$  bei festgehaltener räumlicher Position. Ein Punkt ( $\dot{\cdot}$ ) bezeichne die partielle Ableitung von  $\boldsymbol{\kappa}(\xi, t)$  oder  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$  bezüglich der Zeit bei festgehaltenem materiellen Punkt oder festgehaltener Referenzposition. Die Ableitung ( $\overset{\circ}{\cdot}$ ) heiße

räumliche Ableitung, während  $(\dot{\phantom{x}})$  materielle oder referentielle Ableitung genannt wird. Es soll hier die sonst gebräuchliche Notation  $\partial_t(\phantom{x})$  vermieden werden, da diese Notation suggeriert, daß  $\partial_t(\phantom{x})$  eine partielle Ableitung darstellt, während  $(\dot{\phantom{x}})$  eher einer totalen Ableitung ähnelt (siehe auch SMITH [111]). Da dieses nicht der Fall ist, wird für beide Ableitungen ein ähnliches Symbol verwendet.

Die Geschwindigkeiten sind in allen Beschreibungen gleich

$$\mathbf{v} = \dot{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{X}, t) = \dot{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{\xi}, t) \quad \forall \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\xi}),$$

sofern sie demselben materiellen Punkt zugeordnet sind. Es sei nun  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  ein beliebiges Vektorfeld in räumlicher Beschreibung. Die entsprechende referentielle Beschreibung ergibt sich dann aus  $\mathbf{u}_R = \mathbf{u} \circ \boldsymbol{\chi}$  oder  $\mathbf{u}_R = \mathbf{u}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)$ . Die materielle Ableitung liefert

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_R &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)|_{\mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)|_{\mathbf{x}} + (\text{grad } \mathbf{u}(\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), t)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

bzw. in einfacher Notation

$$\dot{\mathbf{u}}_R(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) + (\text{grad } \mathbf{u})(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{X}, t). \quad (1.1.21)$$

Die Gleichung (1.1.21) beschreibt ein Feld, das von den Variablen  $(\mathbf{X}, t)$  der Referenzplatzierung abhängt. Es kann in ein räumliches Feld transformiert werden, indem die Beziehung  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}_R \circ \boldsymbol{\chi}^{-1}$  benutzt wird. Diese liefert dann in eine wichtige Ableitung, welche referentielle Zeitableitung in bezug auf räumliche Koordinaten genannt wird und durch

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{u} \circ \boldsymbol{\chi})' \circ \boldsymbol{\chi}^{-1} \quad (1.1.22)$$

definiert ist. Eine solche Ableitung wird in dieser Arbeit häufig verwendet. Später wird (1.1.22) mit dem *push-forward* der materiellen Zeitableitung in die momentane Platzierung identifiziert. Eine solche Zeitableitung ist in der Kontinuumsmechanik fester Körper oftmals gemeint, wenn von einer räumlichen Zeitableitung gesprochen wird.

Die referentielle Zeitableitung eines räumlichen Vektorfeldes ist mit der räumlichen Zeitableitung durch die Beziehung

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + (\text{grad } \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

verbunden. Für den Spezialfall, wenn das Vektorfeld  $\mathbf{u}$  als Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  gegeben ist, erhält man die **D'Alembert-Euler Gleichung**

$$\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) + (\text{grad } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t),$$

in der  $\text{grad } \mathbf{v}$  den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten darstellt. Dieser wird auch mit  $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$  bezeichnet.

---

### Übersicht 1.2 Beschreibung von Bewegungen

---

Intrinsische Beschreibung:	$\mathbf{x}_t = \kappa(\xi, t)$	$\dot{\mathbf{u}}(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\xi, t) _{\xi}$
Referentielle Beschreibung:	$\mathbf{x}_t = \chi(\mathbf{X}, t)$	$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) _{\mathbf{X}}$
Räumliche Beschreibung:	$\mathbf{x}_t = \eta(\mathbf{x}, t)$	$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) _{\mathbf{x}}$
Referentielle Zeitableitung eines räumlichen Feldes	$\dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{u} \circ \chi)' \circ \chi^{-1}$	

---

## 2 Kinematik der Deformationen

### 2.1 Deformationsgradient

Es sei  $\mathcal{P}_0 \subset \mathbb{E}$  die Referenzplazierung eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  im Euklidischen Raum  $\mathbb{E}$  zu einem Zeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{T}$ . Der materielle Punkt  $X \in \mathcal{B}$  nehme dabei die Referenzposition  $\mathbf{X} \in \mathcal{P}_0$  ein. Die Bewegung des Körpers sei in referentieller Beschreibung als  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$  gegeben. Die momentane Position des Punktes  $X \in \mathcal{B}$  sei dann  $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$  und  $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}$  bezeichne die momentane Plazierung des materiellen Körpers. Die Abbildung  $\chi_t : \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{P}_t$  werde als glatt angenommen.

Die Tangentialabbildung  $T_{\mathbf{X}}\chi_t : T_{\mathbf{X}}\mathcal{P}_0 \rightarrow T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}_t$  ordnet jedem Tangentenvektor  $\mathbf{G}_A \in T_{\mathbf{X}}\mathcal{P}_0$  einen entsprechenden Tangentenvektor  $\mathbf{g}_a \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}_t$  zu und wird als referentieller Deformationsgradient  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) := T_{\mathbf{X}}\chi_t$  bezeichnet. Um die weitere Schreibweise zu vereinfachen, werden die entsprechenden Tangentialräume durch  $\mathbb{V} \equiv T_{\mathbf{X}}\mathcal{P}_0$  und  $\mathbb{W} \equiv T_{\mathbf{x}}\mathcal{P}$  abgekürzt. Die Symbole

$\mathbb{V}, \mathbb{W}$  wurden ausgewählt, um die Vektorraumstruktur der Tangentialräume hervorzuheben. Die Basisvektoren  $\mathbf{G}_A \in \mathbb{V}$  und  $\mathbf{g}_a \in \mathbb{W}$  bilden eine konvektive Basis bezüglich der materiellen Koordinaten  $\xi^i, i = 1, 2, 3$  auf  $\mathcal{B}$ . Dann läßt sich der Deformationsgradient als

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \delta_A^a \mathbf{g}_a \otimes \mathfrak{G}^A \quad (1.2.1)$$

darstellen. Die Vektoren  $\mathfrak{G}^A \in \mathbb{V}^*$  bezeichnen die Basisvektoren des dualen Vektorraumes  $\mathbb{V}^*$  und werden auch als Kovektoren bezeichnet. Einzelheiten zur Tensoralgebra auf den Dualräumen entnehme man dem Anhang. Die Notation in (1.2.1) basiert auf der folgenden Konvention:

■ **Summenkonvention:** (Einsteinsche Summenkonvention) Über alle Indizes, die diagonal wiederholt werden, z.B.  $u^a \mathbf{g}_a$ , soll eine Summe gebildet werden. Die Indexmenge entspricht dabei der Dimension des betrachteten Vektorraumes, z.B.  $u^a \mathbf{g}_a := \sum_{a=1}^3 u^a \mathbf{g}_a$ . Vielfach werden Großbuchstaben als Indizes für Größen in der Referenzkonfiguration verwendet, z.B.  $\mathbf{G}_A$ , wogegen Kleinbuchstaben auf Größen in der Momentankonfiguration verweisen, z.B.  $\mathbf{g}_a$ . ■

Der Deformationsgradient stellt einen Isomorphismus zwischen den Vektorräumen  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  dar. Es können die entsprechenden inversen, dualen und dual-inversen Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}, t) &= \delta_a^A \mathbf{G}_A \otimes \mathbf{g}^a : \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V}, \\ \mathbf{F}^*(\mathbf{X}, t) &= \delta_A^a \mathfrak{G}^A \otimes \mathbf{g}_a : \mathbb{W}^* \rightarrow \mathbb{V}^*, \\ \mathbf{F}^{-*}(\mathbf{X}, t) &= \delta_a^A \mathbf{g}^a \otimes \mathbf{G}_A : \mathbb{V}^* \rightarrow \mathbb{W}^*. \end{aligned}$$

definiert werden.

Der Euklidische Vektorraum  $\mathbb{E}$  ist mit einer kanonischen Metrik,  $\boldsymbol{\delta} = \delta_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$ , ausgestattet, wobei  $\delta_{ij}$  die Kronecker-Matrix bezeichnet. Die Metrik  $\boldsymbol{\delta}$  ist durch das innere Produkt auf  $\mathbb{E}$  induziert, d.h., es gilt

$$\langle \boldsymbol{\delta} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Die Tangentialräume  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  werden zunächst als metrische Vektorräume  $(\mathbb{V}, \mathbf{G})$  bzw.  $(\mathbb{W}, \mathbf{g})$  betrachtet. Durch Identifizierung der Tangentialräume mit dem Euklidischen Raum  $\mathbb{W} \equiv T_{\mathbf{x}} \mathcal{P} \cong \mathbb{E}$  bzw.  $\mathbb{V} \equiv T_{\mathbf{X}} \mathcal{P}_0 \cong \mathbb{E}$ , lassen sich die Metriktensoren  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{G}$  ebenfalls aus dem inneren Produkt ableiten. Es

gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= G_{AB} \mathfrak{G}^A \otimes \mathfrak{G}^B \in \mathcal{T}_2^0 \mathbb{V}, & \text{mit } G_{AB} &= \mathbf{G}_A \cdot \mathbf{G}_B, \\ \mathbf{g} &= g_{ab} \mathfrak{g}^a \otimes \mathfrak{g}^b \in \mathcal{T}_2^0 \mathbb{W}, & \text{mit } g_{ab} &= \mathbf{g}_a \cdot \mathbf{g}_b. \end{aligned}$$

Dieses bedeutet, daß die Metriktensoren  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{g}$  und  $\delta$  auf  $\mathbb{E}$  identisch sind.

Eine Identifizierung der Metriken soll zunächst vermieden werden, um kinematische Beziehungen auf Vektorräumen mit unterschiedlichen Metriken zu erarbeiten. Später wird gezeigt, warum solche Betrachtungen notwendig sind und welche Vorteile sie haben.

Auf einem metrischen Vektorraum kann die lineare Abbildung  $\mathbf{F} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  in einen symmetrischen und einen orthogonalen Anteil zerlegt werden. Da der orthogonale Anteil eine Isometrie zwischen den Vektorräumen  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  darstellt, hängt er offensichtlich von der Wahl der Metriken auf diesen Räumen ab (siehe Anhang A). Man erhält die Zerlegung von  $\mathbf{F}$  in den linken und rechten Strecktensor  $\mathbf{V}$  bzw.  $\mathbf{U}$  und den Rotationstensor  $\mathbf{R}$  aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{R}\mathbf{U} \quad \text{und} \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad \text{mit} \\ \mathbf{U} : \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{V}, & \mathbf{G}\mathbf{U} &= \mathbf{U}^*\mathbf{G}, \\ \mathbf{V} : \mathbb{W} &\rightarrow \mathbb{W}, & \mathbf{g}\mathbf{V} &= \mathbf{V}^*\mathbf{g}, \\ \mathbf{R} : \mathbb{V} &\rightarrow \mathbb{W}, & \mathbf{R}^*\mathbf{g} &= \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1}. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Wesentlich ist, daß eine Änderung der Metriken  $\mathbf{G}$  oder  $\mathbf{g}$  bei gleichbleibender Deformation  $\mathbf{F}$  eine Änderung der Zerlegungen (1.2.2) hervorruft, da  $\mathbf{R}$  immer die Rolle der Isometrie auf den Vektorräumen übernimmt. Die Komponentenschreibweise der Rotation und der Streckungen ist durch

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= U_B^A \mathbf{G}_A \otimes \mathfrak{G}^B, \\ \mathbf{V} &= V_b^a \mathfrak{g}_a \otimes \mathfrak{g}^b, \\ \mathbf{R} &= R_B^a \mathfrak{g}_a \otimes \mathfrak{G}^B \end{aligned}$$

gegeben, wobei die Komponenten die Bedingungen  $R_B^a U_C^B = \delta_C^a$  und  $V_b^a R_C^b = \delta_C^a$  erfüllen. Um die Komponentenschreibweise noch einfacher darzustellen, ist es sinnvoll, zusätzliche Basisvektoren auf den Tangentialräumen einzuführen. Die neuen Basisvektoren auf  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  erhält man durch Abbildung der Basisvektoren  $\mathbf{G}_A$  auf  $\mathbb{V}$  mit Hilfe der Streckung  $\mathbf{U}$ , sowie durch Abbildung der Basisvektoren  $\mathfrak{g}_a$  auf  $\mathbb{W}$  mit Hilfe von  $\mathbf{V}$ . Als Resultat entstehen

zwei neue Basisvektoren  $\hat{\mathbf{G}}_A = \mathbf{U}\mathbf{G}_A$  und  $\hat{\mathbf{g}}_a = \mathbf{V}\mathbf{g}_a$ , die durch entsprechende Streckungen aus den alten Vektoren hervorgehen und mit einem hochgestellten  $\hat{\phantom{x}}$  bezeichnet werden. Umgekehrt lassen sich mit Hilfe der inversen Abbildungen  $\mathbf{U}^{-1}$  und  $\mathbf{V}^{-1}$  entsprechende „gestauchte“ Basisvektoren  $\check{\mathbf{G}}_A = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{G}_A$  und  $\check{\mathbf{g}}_a = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{g}_a$  definieren, die mit einem hochgestellten  $\check{\phantom{x}}$  bezeichnet werden. Nun können die aus der polaren Zerlegung gewonnenen linearen Abbildungen in folgender Weise dargestellt werden

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= \hat{\mathbf{G}}_A \otimes \mathfrak{G}^A = \mathbf{G}_A \otimes \check{\mathfrak{G}}^A, \\ \mathbf{V} &= \hat{\mathbf{g}}_a \otimes \mathfrak{g}^a = \mathbf{g}_a \otimes \check{\mathfrak{g}}^a, \\ \mathbf{R} &= \delta_A^a \mathbf{g}_a \otimes \check{\mathfrak{G}}^A.\end{aligned}\tag{1.2.3}$$

Die Beziehungen zwischen den Basisvektoren auf  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$ , sowie den linearen Abbildungen, sind in dem kommutativen Diagramm (1.2.4) zusammengefaßt.

$$\begin{array}{ccccc} \check{\mathbf{g}}_a & \xrightarrow{\mathbf{V}} & \mathbf{g}_a & \xrightarrow{\mathbf{V}} & \hat{\mathbf{g}}_a \\ \uparrow \mathbf{R} & & \uparrow \mathbf{R} & & \uparrow \mathbf{R} \\ \mathbf{G}_A & \xrightarrow{\mathbf{U}} & \hat{\mathbf{G}}_A & \xrightarrow{\mathbf{U}} & \hat{\mathbf{G}}_A \end{array} \quad (1.2.4)$$

In gleicher Weise lassen sich auch entsprechende neue Kovektoren auf den dualen Räumen  $\mathbb{V}^*$  und  $\mathbb{W}^*$  konstruieren. Sie wurden in (1.2.3) bereits benutzt.

### 2.1.1 Pull-back- und push-forward-Abbildungen

Die Begriffe *pull-back* und *push-forward* wurden in die Mechanik hauptsächlich durch die Betrachtungen von MARS DEN & HUGHES [70] eingeführt. In deren differentialgeometrischer Beschreibung der Elastizitätstheorie werden diese Begriffe in ihrer ursprünglichen geometrischen Bedeutung benutzt: Es sei  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus zwischen zwei differenzierbaren,  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$ . Die *Vorwärtstransformation* (*push-forward*) eines Vektors  $\mathbf{u} \in T_p\mathcal{M}$  auf  $\mathcal{M}$  ist definiert als der Vektor

$(f_*\mathbf{u})_{f(p)} := (T_p f)\mathbf{u}$  auf  $T_{f(p)}\mathcal{N}$ , der durch die Tangentialabbildung  $T_p f : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)}\mathcal{N}$  auf  $\mathcal{N}$  erzeugt wird.

Die *Rückwärtstransformation* (pull-back) eines Kovektors  $\boldsymbol{\omega} \in T_{f(p)}^*\mathcal{N}$  auf  $\mathcal{N}$  ist definiert als ein Kovektor  $f^*\boldsymbol{\omega} \in T_p^*\mathcal{M}$  auf  $\mathcal{M}$  mit der Eigenschaft

$$(f^*\boldsymbol{\omega})|_p(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\omega}|_{f(p)}(f_*\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in T_p\mathcal{M}.$$

Mit Hilfe dieser beiden Definitionen können nun die Rückwärtstransformation (pull-back)  $f^*\mathbf{B}$  eines Tensorfeldes  $\mathbf{B} \in \mathcal{T}_s^r\mathcal{N}$  auf  $\mathcal{N}$  und die Vorwärtstransformation (push-forward)  $f_*\mathbf{A}$  eines Tensorfeldes  $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_s^r\mathcal{M}$  auf  $\mathcal{M}$  als Abbildungen mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} (f^*\mathbf{B})|_p(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s, f^*\boldsymbol{\omega}_1, \dots, f^*\boldsymbol{\omega}_r) \\ &= \mathbf{B}|_{f(p)}(f_*\mathbf{u}_1, \dots, f_*\mathbf{u}_s, \boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_r), \\ (f_*\mathbf{A})|_{f(p)}(f_*\mathbf{u}_1, \dots, f_*\mathbf{u}_s, \boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_r) \\ &= \mathbf{A}|_p(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s, f^*\boldsymbol{\omega}_1, \dots, f^*\boldsymbol{\omega}_r), \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

$$\forall \mathbf{u}_i \in T_p\mathcal{M}, \quad \boldsymbol{\omega}_j \in T_{f(p)}^*\mathcal{N}$$

definiert werden.

Diese Definitionen gelten, wie gesagt, unter der Voraussetzung, daß ein Diffeomorphismus  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  existiert. In der Kontinuumsmechanik treten nun viele Anwendungsfälle auf, bei denen die Verwendung der push-forward- und pull-back-Abbildung von Vorteil ist, wo aber kein solcher Diffeomorphismus existiert. Aus diesem Grunde wird die Definition der push-pull-Abbildungen hier auf isomorphe Abbildungen  $\mathbf{F} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  zwischen zwei Vektorräumen erweitert. Der pull-back  $\mathbf{F}^d\mathbf{B}$  eines Tensors  $\mathbf{B} \in \mathcal{T}_s^r\mathbb{W}$  und der push-forward  $\mathbf{F}_d\mathbf{A}$  eines Tensors  $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_s^r\mathbb{V}$  sind dann bezüglich des Isomorphismus  $\mathbf{F} \in Iso(\mathbb{V}; \mathbb{W})$  als Abbildungen mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^d\mathbf{B}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{F}^*\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \mathbf{F}^*\boldsymbol{\omega}_r) \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{F}\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{F}\mathbf{u}_s, \boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_r), \\ \mathbf{F}_d\mathbf{A}(\mathbf{F}\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{F}\mathbf{u}_s, \boldsymbol{\omega}_1, \dots, \boldsymbol{\omega}_r) \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s, \mathbf{F}^*\boldsymbol{\omega}_1, \dots, \mathbf{F}^*\boldsymbol{\omega}_r), \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

$$\forall \mathbf{u}_i \in \mathbb{V}, \quad \boldsymbol{\omega}_j \in \mathbb{W}^*$$

definiert. Man sieht, daß sich die algebraische Definition (1.2.6) und die geometrische Definition (1.2.5) entsprechen, wenn die isomorphe Abbildung

$\mathbf{F} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  als Tangentialabbildung  $T_p f : T_p \mathcal{M} \rightarrow T_{f(p)} \mathcal{N}$  eines Diffeomorphismus  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  dargestellt werden kann.

Aus (1.2.6) kann man herleiten, daß für den push-forward und pull-back eines Tensorproduktes die Regeln

$$\mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{u}) \otimes \mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{v}) \quad \text{und} \quad \mathbf{F}^\triangleleft(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{F}^\triangleleft(\mathbf{a}) \otimes \mathbf{F}^\triangleleft(\mathbf{b})$$

gelten. Damit lassen sich diese Abbildungen auf beliebige Tensoren anwenden. Für kovariante Tensoren  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{c}$  erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{C}) &= \mathbf{F}_\triangleright(C_{AB} \mathfrak{G}^A \otimes \mathfrak{G}^B) \\ &= C_{AB} (\mathbf{F}^{-*} \mathfrak{G}^A) \otimes (\mathbf{F}^{-*} \mathfrak{G}^B) = \mathbf{F}^{-*} \mathbf{C} \mathbf{F}^{-1}, \\ \mathbf{F}^\triangleleft(\mathbf{c}) &= \mathbf{F}^\triangleleft(c_{ab} \mathfrak{g}^a \otimes \mathfrak{g}^b) \\ &= c_{ab} (\mathbf{F}^* \mathfrak{g}^a) \otimes (\mathbf{F}^* \mathfrak{g}^b) = \mathbf{F}^* \mathbf{c} \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Für gemischt-variante Tensoren  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{U}) &= \mathbf{F}_\triangleright(U_B^A \mathbf{G}_A \otimes \mathfrak{G}^B) \\ &= U_B^A (\mathbf{F} \mathbf{G}_A) \otimes (\mathbf{F}^{-*} \mathfrak{G}^B) = \mathbf{F} \mathbf{U} \mathbf{F}^{-1}, \\ \mathbf{F}^\triangleleft(\mathbf{V}) &= \mathbf{F}^\triangleleft(V_b^a \mathfrak{g}_a \otimes \mathfrak{g}^b) \\ &= V_b^a (\mathbf{F}^{-1} \mathfrak{g}_a) \otimes (\mathbf{F}^* \mathfrak{g}^b) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{F} \end{aligned}$$

und für kontravariante Tensoren  $\mathbf{S}$  und  $\boldsymbol{\tau}$  ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{S}) &= \mathbf{F}_\triangleright(S^{AB} \mathbf{G}_A \otimes \mathbf{G}_B) \\ &= S^{AB} (\mathbf{F} \mathbf{G}_A) \otimes (\mathbf{F} \mathbf{G}_B) = \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^*, \\ \mathbf{F}^\triangleleft(\boldsymbol{\tau}) &= \mathbf{F}^\triangleleft(\tau^{ab} \mathfrak{g}_a \otimes \mathfrak{g}_b) \\ &= \tau^{ab} (\mathbf{F}^{-1} \mathfrak{g}_a) \otimes (\mathbf{F}^{-1} \mathfrak{g}_b) = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-*}, \end{aligned}$$

wobei mehrfach die Beziehung  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{F} \mathbf{b} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{F}^*$ ,  $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{V}$  benutzt wurde.

Die Einführung der pull-back- und push-forward-Abbildungen vereinfacht die symbolischen Operationen der Tensoralgebra. Es bestehen die folgenden Beziehungen zwischen isomorphen Abbildungen, z.B. dem Deformationsgradient  $\mathbf{F}$ , und der Überschiebung (siehe Anhang A) auf den Räumen  $\mathbb{V}$  oder  $\mathbb{W}$

$$\langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{F}^\triangleleft \mathbf{F}_\triangleright(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{F}_\triangleright(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{u}) \rangle, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{V}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{V}^*. \quad (1.2.7)$$

Ferner gelten die folgenden Regeln für die Hintereinanderschaltung und Invertierung von Abbildungen

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}\mathbf{U})_{\triangleright}(\mathbf{u}) &= \mathbf{R}_{\triangleright}(\mathbf{U}_{\triangleright}(\mathbf{u})), & \forall \mathbf{u} \in \mathbb{V}, \\ (\mathbf{R}\mathbf{U})^{\triangleleft}(\mathbf{v}) &= \mathbf{U}^{\triangleleft}(\mathbf{R}^{\triangleleft}(\mathbf{v})), & \forall \mathbf{v} \in \mathbb{W}, \\ \mathbf{F}^{\triangleleft}(\mathbf{v}) &= (\mathbf{F}^{-1})_{\triangleright}(\mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathbb{W}. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Für den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  stimmt die algebraische und die geometrische Definition der push-pull-Abbildungen überein, da der Deformationsgradient als Tangentialabbildung  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) := T_{\mathbf{X}}\chi_t$  definiert ist. Für lineare Abbildungen, die nicht Tangentialabbildungen sind, z.B. die Streckungen  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$ , die lokale Rotation  $\mathbf{R}$  oder die inkompatiblen elastischen bzw. plastischen Deformationen der finiten Elasto-Plastizitätstheorie, die sich aus der Zerlegung  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$  ergeben, existiert keine entsprechende geometrische push-pull-Abbildung. In diesem Fall können nur die algebraischen Definitionen (1.2.6) angewendet werden.

### 2.1.2 Kovariante Deformationsmaße

Der Metriktensor  $\mathbf{g} = g_{ab} \mathfrak{g}^a \otimes \mathfrak{g}^b$  ist ein kovarianter Tensor zweiter Stufe,  $\mathbf{g} \in \mathbb{W}^* \otimes \mathbb{W}^*$ , der in der momentanen Konfiguration definiert ist. Der pull-back von  $\mathbf{g}$  mit Hilfe des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  ergibt ein entsprechendes Deformationsmaß in der Referenzkonfigurationen

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\triangleleft}(\mathbf{g}) = \mathbf{F}^* \mathbf{g} \mathbf{F} = g_{ab} \mathfrak{G}^A \otimes \mathfrak{G}^B, \quad (1.2.9)$$

welches als rechter *Cauchy-Greenscher Deformationstensor* bekannt ist. Desweiteren erzeugt der push-forward des Metriktensors  $\mathbf{G} = G_{AB} \mathfrak{G}^A \otimes \mathfrak{G}^B$  der Referenzkonfiguration ein entsprechendes Maß in der Momentankonfiguration, gegeben durch

$$\mathbf{c} = \mathbf{F}_{\triangleright}(\mathbf{G}) = \mathbf{F}^{-*} \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1} = G_{AB} \mathfrak{g}^a \otimes \mathfrak{g}^b, \quad (1.2.10)$$

wobei  $\mathbf{c}$  gelegentlich als *Cauchyscher Deformationstensor* bezeichnet wird. Mit Hilfe der polaren Zerlegung von  $\mathbf{F}$  können folgende Beziehungen zwischen den vier kovarianten Tensoren  $\mathbf{C}, \mathbf{G}, \mathbf{c}, \mathbf{g}$  aufgestellt werden

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}_{\triangleright}(\mathbf{C}) \quad \mathbf{g} = \mathbf{R}_{\triangleright}(\mathbf{G}) \quad \mathbf{c} = \mathbf{V}_{\triangleright}(\mathbf{g}) = \mathbf{V}^{-*} \mathbf{g} \mathbf{V}^{-1}. \quad (1.2.11)$$

Wird ferner ein push-forward von  $\mathbf{C}$  mit  $\mathbf{R}$  und von  $\mathbf{G}$  mit  $\mathbf{U}$  durchgeführt, so ergeben sich zusätzlich

$$\check{\mathbf{g}} := \mathbf{R}_\triangleright(\mathbf{C}) \equiv \mathbf{V}^\triangleleft(\mathbf{g}) = \mathbf{V}^* \mathbf{g} \mathbf{V} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{G}} := \mathbf{U}_\triangleright(\mathbf{G}) = \mathbf{U}^{-*} \mathbf{G} \mathbf{U}^{-1}. \quad (1.2.12)$$

In dem kommutativen Diagramm (1.2.13) sind die verschiedenen kovarianten Tensoren dargestellt, die sich durch push-pull-Operationen aus dem Metrik-tensor  $\mathbf{G}$  gewinnen lassen.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{g} & \xrightarrow{\mathbf{V}_\triangleright} & \mathbf{c} & \xrightarrow{\mathbf{V}_\triangleright} & \hat{\mathbf{c}} \\ \uparrow \mathbf{R}_\triangleright & \nearrow \mathbf{F}_\triangleright & \uparrow \mathbf{R}_\triangleright & \nearrow \mathbf{F}_\triangleright & \uparrow \mathbf{R}_\triangleright \\ \mathbf{G} & \xrightarrow{\mathbf{U}_\triangleright} & \hat{\mathbf{G}} & \xrightarrow{\mathbf{U}_\triangleright} & \hat{\hat{\mathbf{G}}} \end{array} \quad (1.2.13)$$

In (1.2.14) sind hingegen jene kovarianten Tensoren aufgeführt, die sich durch push-pull-Operationen aus  $\mathbf{g}$  erzeugen lassen.

$$\begin{array}{ccccc} \check{\mathbf{g}} & \xrightarrow{\mathbf{V}_\triangleright} & \mathbf{g} & \xrightarrow{\mathbf{V}_\triangleright} & \mathbf{c} \\ \uparrow \mathbf{R}_\triangleright & \nearrow \mathbf{F}_\triangleright & \uparrow \mathbf{R}_\triangleright & \nearrow \mathbf{F}_\triangleright & \uparrow \mathbf{R}_\triangleright \\ \mathbf{C} & \xrightarrow{\mathbf{U}_\triangleright} & \mathbf{G} & \xrightarrow{\mathbf{U}_\triangleright} & \hat{\mathbf{G}} \end{array} \quad (1.2.14)$$

Die Diagramme (1.2.13) und (1.2.14) sind kommutativ, d.h., es lassen sich unterschiedliche Möglichkeiten für durch Verknüpfen der linearen Abbildungen ablesen. Diese genügen den algebraischen Eigenschaften der push-pull Abbildungen, wie sie in (1.2.8) dargestellt sind. So läßt sich z.B. der pull-back der Metrik  $\mathbf{g}$  durch  $\mathbf{F}$  als

$$\mathbf{F}^\triangleleft(\mathbf{g}) = (\mathbf{R}\mathbf{U})^\triangleleft(\mathbf{g}) = \mathbf{U}^\triangleleft(\mathbf{R}^\triangleleft(\mathbf{g})) = \mathbf{U}^\triangleleft(\mathbf{G}) = \mathbf{C}$$

schreiben. Diese Darstellungen kann man auch (1.2.14) entnehmen.

### 2.1.3 Übergang zur klassischen Schreibweise

Es folgt nun eine Erläuterung des Überganges von der Tensoralgebra auf Mannigfaltigkeiten zur klassischen Tensoralgebra auf Euklidischen Räumen.

Während die Tensoralgebra auf Mannigfaltigkeiten grundsätzlich zwischen Tangenten- und Kotangentenräumen unterscheidet, werden diese in der klassischen Schreibweise von vorn herein identifiziert. Diese Identifizierung basiert auf der Isomorphie zwischen Vektorraum und Dualraum, die durch das innere Produkt auf dem Euklidischen Raum gegeben ist.

Wie im Anhang A ausführlich beschrieben ist, ist die Abbildung eines Vektors  $\mathbf{a} = a^A \mathbf{G}_{,A} \in \mathbb{V}$  durch die lineare Abbildung  $\mathbf{F} = \delta_A^a \mathbf{g}_a \otimes \mathfrak{G}^A \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{W})$  als Überschiebung

$$\mathbf{F}\mathbf{a} = (\delta_A^a \mathbf{g}_a \otimes \mathfrak{G}^A)\mathbf{a} = \delta_A^a \mathbf{g}_a \langle \mathfrak{G}^A, \mathbf{a} \rangle = \delta_A^a a^A \mathbf{g}_a$$

definiert. Auf dem Euklidischen Raum kann die Überschiebung  $\langle \mathfrak{G}^A, \mathbf{a} \rangle$  auch als inneres Produkt zwischen zwei Vektoren in  $\mathbb{V}$  geschrieben werden

$$\langle \mathfrak{G}^A, \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{G}\mathbf{G}^A, \mathbf{a} \rangle = \mathbf{G}^A \cdot \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{V},$$

wobei nun der zu  $\mathbf{G}_{,A}$  reziproke Vektor  $\mathbf{G}^A$  benutzt wird. Das bedeutet, daß die Darstellung  $\mathbf{F} = \delta_A^a \mathbf{g}_a \otimes \mathfrak{G}^A$  auf einem inneren Produktraum durch  $\mathbf{F} = \delta_A^a \mathbf{g}_a \otimes \mathbf{G}^A$  ersetzt werden kann, falls die entsprechende Abbildung  $\mathbf{F}\mathbf{a}$  statt mit der Überschiebung nun mit dem inneren Produkt gebildet wird, d.h., es gilt

$$\mathbf{F}\mathbf{a} = (\delta_A^a \mathbf{g}_a \otimes \mathbf{G}^A)\mathbf{a} := \delta_A^a \mathbf{g}_a (\mathbf{G}^A \cdot \mathbf{a}) = \delta_A^a a^A \mathbf{g}_a.$$

■ **Schreibweise:** Um eindeutig zwischen linearen Abbildungen, die durch Überschiebung gebildet werden und solchen, die durch inneres Produkt gebildet werden, zu unterscheiden, werden fette *Sans-Serif*-Buchstaben, z.B.  $\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{C}$ , für die Überschiebungs-Abbildungen und fette Buchstaben mit Serifen, z.B.  $\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{C}$ , für die Abbildungen mit innerem Produkt verwendet.

■

Beim Übergang zur klassischen Schreibweise müssen die in Übersicht 1.3 aufgelisteten Ersetzungsregeln durchgeführt werden. Für den Deformationsgradienten  $\mathbf{F} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  ergeben sich nach Anwendung dieser Ersetzungsregeln die folgenden Darstellungen

$$\begin{aligned} \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{W}) \ni \mathbf{F} = \delta_A^a \mathbf{g}_a \otimes \mathfrak{G}^A &\rightsquigarrow \mathbf{F} = \delta_A^a \mathbf{g}_a \otimes \mathbf{G}^A \cong \mathbf{F} && \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{W}), \\ \text{Lin}(\mathbb{W}; \mathbb{V}) \ni \mathbf{F}^{-1} = \delta_a^A \mathbf{G}_{,A} \otimes \mathbf{g}^a &\rightsquigarrow \mathbf{F}^{-1} = \delta_a^A \mathbf{G}_{,A} \otimes \mathbf{g}^a \cong \mathbf{F}^{-1} && \in \text{Lin}(\mathbb{W}; \mathbb{V}), \\ \text{Lin}(\mathbb{W}^*; \mathbb{V}^*) \ni \mathbf{F}^* = \delta_{,A}^a \mathfrak{G}^A \otimes \mathbf{g}_a &\rightsquigarrow \mathbf{F}^* = \delta_{,A}^a \mathbf{G}^A \otimes \mathbf{g}_a \cong \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}^* \mathbf{g} && \in \text{Lin}(\mathbb{W}; \mathbb{V}), \\ \text{Lin}(\mathbb{V}^*; \mathbb{W}^*) \ni \mathbf{F}^{-*} = \delta_a^A \mathbf{g}^a \otimes \mathbf{G}_{,A} &\rightsquigarrow \mathbf{F}^{-*} = \delta_a^A \mathbf{g}^a \otimes \mathbf{G}_{,A} \cong \mathbf{g}^{-1} \mathbf{F}^{-*} \mathbf{G} && \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{W}). \end{aligned}$$

---

**Übersicht 1.3** Übergang von der Tensoralgebra auf Mannigfaltigkeiten zur klassischen Tensoralgebra auf Euklidischen Räumen
 

---

dualer Vektor	$\rightsquigarrow$	reziproker Vektor
$\mathfrak{G}^A \in \mathbb{V}^*$	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{G}^A := (\mathfrak{G}^A)^\sharp \in \mathbb{V}$
duale Paarung	$\rightsquigarrow$	inneres Produkt
$\langle \mathfrak{G}^A, \mathbf{G}_B \rangle = \delta_B^A$	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{G}^A \cdot \mathbf{G}_B = \delta_B^A$
duale Abbildung	$\rightsquigarrow$	transponierte Abbildung
$\mathfrak{G}^A = \delta_a^A \mathbf{F}^* \mathbf{g}^a$	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{G}^A = \delta_a^A \mathbf{F}^\top \mathbf{g}^a$
Transponierte	$\rightsquigarrow$	Transponierte
$\mathbf{F}^\top = G^{AB} g_{bc} \mathbf{G}_A \otimes \mathbf{g}^c$	$\rightsquigarrow$	$\mathbf{F}^\top = \delta_B^b \mathbf{G}^B \otimes \mathbf{g}_b$

---

Für den kovarianten Metriktensor  $\mathbf{G}$  erhält man

$$\mathbf{G} = G_{AB} \mathfrak{G}^A \otimes \mathfrak{G}^B \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{V}^*) \rightsquigarrow \mathbf{G}_A \otimes \mathbf{G}^A = \mathbf{I} \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{V}).$$

Der Metriktensor  $\mathbf{G}$  geht also in den Einheitstensor  $\mathbf{I}$  auf  $(\mathbb{V}, \cdot)$  über. Für den Einheitstensor  $\mathbf{I}$  auf  $\mathbb{V}$ , den dualen Einheitstensor  $\mathbf{I}^*$  auf  $\mathbb{V}^*$  und den inversen Metriktensor  $\mathbf{G}^{-1}$  findet man entsprechend

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{G}_A \otimes \mathfrak{G}^A \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{V}) && \rightsquigarrow && \mathbf{G}_A \otimes \mathbf{G}^A \equiv \mathbf{I} \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{V}), \\ \mathbf{I}^* &= \mathfrak{G}^A \otimes \mathbf{G}_A \in \text{Lin}(\mathbb{V}^*; \mathbb{V}^*) && \rightsquigarrow && \mathbf{G}^A \otimes \mathbf{G}_A \equiv \mathbf{I} \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{V}), \\ \mathbf{G}^{-1} &= G^{AB} \mathbf{G}_A \otimes \mathbf{G}_B \in \text{Lin}(\mathbb{V}^*; \mathbb{V}) && \rightsquigarrow && \mathbf{G}^A \otimes \mathbf{G}_A \equiv \mathbf{I} \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{V}). \end{aligned}$$

Dieses bedeutet, daß alle vier Tensoren  $\mathbf{I}, \mathbf{I}^*, \mathbf{G}$  und  $\mathbf{G}^{-1}$  durch denselben Tensor  $\mathbf{I}$  auf dem Raum  $(\mathbb{V}, \cdot)$  ersetzt werden. Der Übergang zur klassischen Schreibweise ist demnach *nicht* umkehrbar. Die vier Tensoren  $\mathbf{I}, \mathbf{I}^*, \mathbf{G}$  und  $\mathbf{G}^{-1}$  nennt man *assoziierte Tensoren*, weil sie durch das Herauf- bzw. Herunterziehen von Indizes mit Hilfe des Metriktensors auseinander hervorgehen. In (1.2.15) ist dargestellt, daß assoziierte Tensoren auf denselben Tensor der

klassischen Schreibweise abgebildet werden.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{I} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{G}) \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{V}) & \\
 & \downarrow & \\
 \mathbf{G} \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{V}^*) & \longrightarrow \mathbf{I} \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{V}) & \longleftarrow \mathbf{I}^* = (\mathbf{G})\mathbf{G}^{-1} \in \text{Lin}(\mathbb{V}^*; \mathbb{V}^*) \\
 & \uparrow & \\
 & \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{G})\mathbf{G}^{-1} \in \text{Lin}(\mathbb{V}^*; \mathbb{V}) & 
 \end{array} \tag{1.2.15}$$

Für die push-forward- und pull-back-Operationen erhält man in der klassischen Schreibweise die Beziehungen

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{F}_\flat(\mathbf{G}_A) = \mathbf{F}\mathbf{G}_A, & \rightsquigarrow & \mathbf{F}_\flat(\mathbf{G}_A) = \mathbf{F}\mathbf{G}_A, \\
 \mathbf{F}^\flat(\mathbf{g}_a) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{g}_a, & \rightsquigarrow & \mathbf{F}^\flat(\mathbf{g}_a) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{g}_a, \\
 \mathbf{F}^\flat(\mathbf{g}^a) = \mathbf{F}^*\mathbf{g}^a, & \rightsquigarrow & \mathbf{F}^\flat(\mathbf{g}^a) = \mathbf{F}^\top\mathbf{g}^a, \\
 \mathbf{F}_\flat(\mathbf{G}^A) = \mathbf{F}^{-*}\mathbf{G}^A, & \rightsquigarrow & \mathbf{F}_\flat(\mathbf{G}^A) = \mathbf{F}^{-\top}\mathbf{G}^A.
 \end{array}$$

Diese lassen sich in entsprechender Weise auf push-forward- und pull-back-Abbildungen von Tensoren erweitern. Es sei hier aber schon vorweggenommen, daß solche Abbildungen in der klassischen Schreibweise keinen Sinn machen. Dieses wird nun näher ausgeführt.

#### 2.1.4 Anmerkungen zu den Begriffen *ko-* und *kontravariant*

Die exakte Definition eines kovarianten bzw. kontravarianten Tensors ist im Anhang A dargestellt und wurde in den bisherigen Betrachtungen stets benutzt. Die Definition basiert auf der Unterscheidung zwischen einem Vektorraum und seinem Dualraum. Beispielsweise nennt man  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$  einen kontravarianten Vektor, während  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{V}^*$  kovarianter Vektor heißt. Diese Bezeichnungen stammen u.a. aus dem Ricci-Kalkül.

Falls nun die Räume  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{V}^*$  mit Hilfe des inneren Produktes identifiziert werden, geht die ursprüngliche Bedeutung der Begriffe *ko-* und *kontravariant*

verloren. Dieses kann an folgendem Beispiel deutlich gesehen werden: Ein kontravarianter Vektor  $\mathbf{u} = u^A \mathbf{G}_A \in \mathbb{V}$  und ein kovarianter Vektor  $\boldsymbol{\omega} = u_A \mathbf{G}^A$  werden in der klassischen Schreibweise durch

$$u^A \mathbf{G}_A = u_A \mathbf{G}^A \in \mathbb{V}$$

dargestellt. Beide Darstellungen repräsentieren denselben Vektor, und beide Basisvektoren  $\mathbf{G}_A$  und  $\mathbf{G}^A$  sind Elemente desselben Vektorraumes  $\mathbb{V}$ . In der kontinuumsmechanischen Literatur wird  $\mathbf{G}^A$  oft als kovarianter Vektor bezeichnet. Eine solche Bezeichnung rührt von dem früher ausschließlich verwendeten Ricci-Kalkül her, wird dort allerdings korrekt verwendet. In einer symbolischen Schreibweise sollte man solche Bezeichnungen allerdings vermeiden, denn  $\mathbf{G}^A$  als kovarianten Vektor zu bezeichnen ist nicht richtig. Für eine Darstellung der Tensoralgebra auf Euklidischen Räumen braucht man diese Bezeichnungen auch gar nicht. Spricht man von einem Tensor n-ter Stufe ist klar, welches Objekt gemeint ist. Erst beim Vorhandensein von Dualräumen muß zwischen ko- und kontravarianten Vektoren unterschieden werden.

Mit dieser Problematik ist eine weitere verbunden, die im Zusammenhang mit den pull-back- und push-forward-Abbildungen auftritt. Es wurde gezeigt, daß sich die pull-back-Abbildungen  $\mathbf{F}^\flat(\mathbf{g}_a)$  und  $\mathbf{F}^\flat(\mathbf{g}^a)$  in der klassischen Schreibweise als

$$\mathbf{F}^\flat(\mathbf{g}_a) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{g}_a \quad \text{und} \quad \mathbf{F}^\flat(\mathbf{g}^a) = \mathbf{F}^\top \mathbf{g}^a$$

darstellen lassen. Betrachtet man nun den pull-back des Vektors  $\mathbf{u} = u_a \mathbf{g}^a = u^a \mathbf{g}_a$ , so zeigt sich, daß die Rückwärtstransformation auf Euklidischen Räumen nicht mehr eindeutig definiert ist

$$\mathbf{F}^\flat(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^\flat(u^a \mathbf{g}_a) = u^a \mathbf{F}^{-1} \mathbf{g}_a \quad \neq \quad \mathbf{F}^\flat(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^\flat(u_a \mathbf{g}^a) = u_a \mathbf{F}^\top \mathbf{g}^a.$$

In der Literatur stellt sich dieses Problem häufig so dar: In der klassischen Schreibweise läßt sich der Einheitstensor als

$$\mathbf{i} = \mathbf{g}_a \otimes \mathbf{g}^a = g_{ab} \mathbf{g}^a \otimes \mathbf{g}^b \quad (1.2.16)$$

angeben. Einige Autoren bezeichnen die zweite Darstellung in (1.2.16) als Metriktensor  $\mathbf{g}$ . Für den pull-back der (identischen!) Größen  $\mathbf{i}$  und  $\mathbf{g}$  schreiben sie dann

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}^\flat(\mathbf{i}) = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{i} \mathbf{F} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^\flat(\mathbf{g}) = \mathbf{F}^\top \mathbf{g} \mathbf{F}.$$

Der Rückwärtstransport zweier identischer Größen führt demnach zu unterschiedlichen Ergebnissen. Man behilft sich oft damit, daß man zwischen den beiden pull-back-Operationen als dem kovarianten und dem gemischt-varianten pull-back unterscheidet. Diese Unterscheidung ist, wie oben festgestellt wurde, auf Euklidischen Räumen nicht sinnvoll.

Verwendet man dagegen die in dieser Arbeit dargestellte pull-back-Definition, so bekommt man sofort die *eindeutigen* Ergebnisse

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}^\flat(\mathbf{i}) = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{i}\mathbf{F} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^\flat(\mathbf{g}) = \mathbf{F}^*\mathbf{g}\mathbf{F},$$

die sich nach dem Übergang zur klassischen Schreibweise als

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{i}\mathbf{F} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{i}\mathbf{F} \quad (1.2.17)$$

darstellen lassen. In dieser Weise werden die genannten Probleme vermieden.

### 2.1.5 Anmerkungen zum Ricci-Kalkül

Der Ricci-Kalkül ist eine Darstellung der Tensoralgebra und Tensoranalysis, deren Operationen ausschließlich in Komponentenform definiert sind. Obwohl eine solche Schreibweise oft unübersichtlich oder unstrukturiert erscheint, befindet sie sich letztlich doch in Übereinstimmung mit der hier benutzten symbolischen Schreibweise. Im Ricci-Kalkül wird zwischen Vektoren und Kovektoren durch die Stellung der Indizes unterschieden. Die durch die Metrik induzierten Abbildungen zwischen Vektor- und Dualräumen sind als Herauf- und Herunterziehen von Indizes bekannt

$$\alpha^A = G^{AB}\alpha_B \quad \text{und} \quad u_A = G_{AB}u^B.$$

Eine solche Operation legt eine Beziehung zwischen den Komponenten  $u_A$  und  $u^A$  fest. Sie können nicht mehr unabhängig voneinander gewählt werden. Sind verschiedene Metrikkoeffizienten in den Kalkül eingebunden, so muß zwischen den Komponenten  $u_a$  und  $u_A$  unterschieden werden. Ihnen kommt aufgrund

$$u_A = G_{AB}u^B \quad \text{und} \quad u_a = g_{ab}u^b$$

eine unterschiedliche Bedeutung zu. Eine solche Komponentenschreibweise wird auch in dieser Arbeit benutzt. Man beachte, daß der Ausdruck  $\delta_a^A u^a \mathbf{G}_A$

nicht mit  $u^A \mathbf{G}_A$  gleichgesetzt werden darf, denn es gilt

$$\delta_a^A u^a \mathbf{G}_A = \delta_a^A g^{ab} G_{AC} u_b \mathbf{G}^C \quad \neq \quad u^A \mathbf{G}_A = u_C \mathbf{G}^C.$$

Der Ricci-Kalkül unterscheidet zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren entsprechend der Stellung der Indizes. Die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{T}_s^r \mathbb{V} \times \mathcal{T}_r^s \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch die Überschiebung von Tensoren repräsentiert. Ein inneres Produkt  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  wird im Ricci-Kalkül als

$$u^a v_a = g_{ab} u_b v_a$$

dargestellt, was der Beziehung  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{g}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  entspricht.

### 2.1.6 Klassische Schreibweise der Metriktensoren

Die in (1.2.9) – (1.2.12) definierten kovarianten Tensoren sollen nun in ihrer klassischen Schreibweise dargestellt werden. Für die Metriktensoren gilt der Übergang  $\mathbf{G} \rightsquigarrow \mathbf{I}$  und  $\mathbf{g} \rightsquigarrow \mathbf{i}$ . Dann findet man für die in der Referenzkonfiguration  $\mathbb{V}$  definierten Größen die klassischen Gegenstücke

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{F}^* \mathbf{g} \mathbf{F} &\rightsquigarrow \mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{i} \mathbf{F} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \\ \hat{\mathbf{G}} = \mathbf{U}^{-*} \mathbf{G} \mathbf{U}^{-1} &\rightsquigarrow \hat{\mathbf{G}} = \mathbf{U}^{-\top} \mathbf{I} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-2} =: \mathbf{B}, \\ \hat{\hat{\mathbf{G}}} = \mathbf{U}^{-*} \hat{\mathbf{G}} \mathbf{U}^{-1} &\rightsquigarrow \hat{\hat{\mathbf{G}}} = \mathbf{U}^{-\top} \mathbf{B} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{C}^{-2} = \mathbf{B}^2. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Für die Größen in der aktuellen Konfiguration erhält man entsprechend

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{g}} = \mathbf{V}^* \mathbf{g} \mathbf{V} &\rightsquigarrow \check{\mathbf{g}} = \mathbf{V}^\top \mathbf{i} \mathbf{V} = \mathbf{V}^\top \mathbf{V} = \mathbf{V}^2 =: \mathbf{b}, \\ \mathbf{c} \equiv \hat{\mathbf{g}} = \mathbf{V}^{-*} \mathbf{g} \mathbf{V}^{-1} &\rightsquigarrow \mathbf{c} = \mathbf{V}^{-\top} \mathbf{i} \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^{-2}. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

Der Deformationstensor  $\mathbf{b}$  wird auch *linker Cauchy-Greenscher Deformationstensor* genannt, und  $\mathbf{B}$  heißt *Fingerscher Deformationstensor*. Es zeigt sich, daß  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{b}$  die Inversen zu  $\mathbf{C}$  bzw.  $\mathbf{c}$  bilden, d.h., es gilt  $\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}$  und  $\mathbf{c} = \mathbf{b}^{-1}$ . Bei HAUPT & TSAKMAKIS [47] werden in diesem Zusammenhang zwei Klassen von Deformationsmaßen gebildet (siehe auch SVENDSEN & TSAKMAKIS [117]). Die eine Klasse ist aus den Metriken ableitbar, während die andere Klasse aus den inversen Metriken gebildet wird. Ähnliche Definitionen findet man auch bei ROUGEE [93]. Im Rahmen dieser Arbeit

ließe sich eine zweite Klasse von Deformationsmaßen bilden, indem die Rolle der Räume  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{V}^*$  vertauscht wird. Auf  $\mathbb{V}^*$  bildet nämlich  $\mathbf{G}^{-1}$  den Metriktensor. Alle hier gezeigten Herleitungen mittels der push-pull-Operationen können für die Metriken  $\mathbf{G}^{-1}$  und  $\mathbf{g}^{-1}$  wiederholt werden, womit man genau die in HAUPT & TSAKMAKIS [47] definierten Größen (und noch einige mehr) erhielte. Der Sinn eines solchen Vorgehens ist jedoch nicht verständlich, da, wie hier gezeigt wurde, assoziierte Tensoren beim Übergang zur klassischen Schreibweise auf die gleichen Größen führen. Die zwei Klassen reduzieren sich nämlich auf die in (1.2.18) und (1.2.19) gezeigten Tensoren.

## 2.2 Kovariante Dehnungstensoren

Ein verallgemeinerter Dehnungstensor  $\mathbf{E}_U = \mathbf{f}(\mathbf{U})$  oder  $\mathbf{E}_V = \mathbf{f}(\mathbf{V})$  ist ein tensorwertiges Maß der lokalen Deformation und besitzt folgende Eigenschaften:

- (i)  $\mathbf{f}$  ist objektiv;
- (ii)  $\mathbf{f}$  ist isotrop;
- (iii) es gilt  $\mathbf{f}(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{f}'(\mathbf{I}) = \mathbf{I}$ ;
- (iv)  $\mathbf{f}$  ist monoton steigend.

Die Konsistenzeigenschaft (iii) garantiert, daß alle Dehnungstensoren für kleine Deformationen dieselben Eigenschaften besitzen (siehe CURNIER & RAKOTOMANANA [30], WANG & TRUESDELL [123](S.227)). Aus den zuvor definierten kovarianten Metriktensoren lassen sich direkt Dehnungsmaße herleiten: Man zieht die Metrik  $\mathbf{g}$  mit der pull-back-Abbildung in eine beliebige Konfiguration zurück und bildet dort die Differenz mit dem entsprechenden push-forward der Metrik  $\mathbf{G}$ . Die Metrik  $\mathbf{g}$  gibt die Abstände materieller Punkte in der verformten Konfiguration an. Die Metrik  $\mathbf{G}$  beschreibt die entsprechenden Abstände in der unverformten Konfiguration. Nach Transformation in dieselbe Konfiguration gibt ihre Differenz ein Maß der Dehnung des Körpers an.

Zu diesem Zweck wird nun die Differenz der Größen in (1.2.14) und (1.2.13) gebildet. In (1.2.20) sind diese Dehnungsmaße aufgeführt. Der Faktor  $\frac{1}{2}$  dient

der Erfüllung der o.a. Konsistenzbedingung (iii).

$$\begin{array}{ccccc}
 \check{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\check{\mathbf{g}} - \mathbf{g}) & \xrightarrow{\mathbf{v}_b} & \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{c}) & \xrightarrow{\mathbf{v}_b} & \hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}) \\
 \uparrow \mathbf{R}_b & \nearrow \mathbf{F}_b & \uparrow \mathbf{R}_b & \nearrow \mathbf{F}_b & \uparrow \mathbf{R}_b \\
 \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) & \xrightarrow{\mathbf{u}_b} & \hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \hat{\mathbf{G}}) & \xrightarrow{\mathbf{u}_b} & \hat{\hat{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\hat{\mathbf{G}}})
 \end{array} \quad (1.2.20)$$

Die aus dem Diagramm entnehmbaren Dehnungsmaße sind im einzelnen: -  
Der *Greensche Dehnungstensor*  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^* \mathbf{g} \mathbf{F} - \mathbf{G}) \rightsquigarrow \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{i} \mathbf{F} - \mathbf{I})$$

- Der *Karni-Reinersche Dehnungstensor*  $\hat{\mathbf{E}}$  in der Referenzkonfiguration

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \hat{\mathbf{G}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{U}^* \mathbf{G} \mathbf{U}^{-1}) \rightsquigarrow \hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{U}^{-T} \mathbf{i} \mathbf{U}^{-1})$$

- Der Dehnungstensor  $\hat{\hat{\mathbf{E}}}$  in der Referenzkonfiguration

$$\hat{\hat{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{G}} - \hat{\hat{\mathbf{G}}}) = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{G}} - \mathbf{U}^* \hat{\mathbf{G}} \mathbf{U}^{-1}) \rightsquigarrow \hat{\hat{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{U}^{-T} \mathbf{B} \mathbf{U}^{-1})$$

- Der *Karni-Reinersche Dehnungstensor*  $\check{\mathbf{e}}$  in der aktuellen Konfiguration

$$\check{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\check{\mathbf{g}} - \mathbf{g}) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^* \mathbf{g} \mathbf{V} - \mathbf{g}) \rightsquigarrow \check{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{i}) = \frac{1}{2}(\mathbf{V}^T \mathbf{i} \mathbf{V} - \mathbf{i})$$

- Der *Almansische Dehnungstensor*  $\mathbf{e}$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{V}^* \mathbf{g} \mathbf{V}^{-1}) \rightsquigarrow \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{V}^{-T} \mathbf{i} \mathbf{V}^{-1})$$

- Der Dehnungstensor  $\hat{\mathbf{e}}$  in der aktuellen Konfiguration

$$\hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{V}^* \mathbf{c} \mathbf{V}^{-1}) \rightsquigarrow \hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \hat{\mathbf{c}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{V}^{-T} \mathbf{c} \mathbf{V}^{-1})$$

Anhand der klassischen Darstellung der Dehnungsgrößen kann leicht nachvollzogen werden, daß diese die obigen Bedingungen (i-iv) auch wirklich erfüllen. Neben den hier aufgeführten kovarianten Dehnungsmaßen lassen sich beliebige andere Maße konstruieren. Eine Vielzahl wenig bekannter Dehnungsmaße ist in CURNIER & RAKOTOMANANA [30] zusammengestellt.

Ihre Verwendbarkeit beschränkt sich allerdings auf Spezialfälle. Zwei universelle Dehnungsmaße, die nicht in das hier gezeigte Schema passen, sind die logarithmischen Dehnungstensoren

$$\mathbf{h} = \ln(\mathbf{V}) \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W},$$

$$\mathbf{H} = \ln(\mathbf{U}) \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}.$$

Diese werden auch als räumliches bzw. referentielles *Henckysches Dehnungsmaß* bezeichnet. Die bisher definierten Deformations- und Dehnungsmaße sind in nachfolgenden Tabellen zusammengestellt.

### Übersicht 1.4 Metriken und Deformationsmaße

Symbol	Beziehungen	Name
$\mathbf{G} \in \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^*$	$\mathbf{G}^* = \mathbf{G}$	Metrik der
$\mathbf{G} \equiv \mathbf{I} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$	$\mathbf{G}^\top = \mathbf{G}$	Referenzkonfiguration
$\mathbf{g} \in \mathbb{W}^* \otimes \mathbb{W}^*$	$\mathbf{g}^* = \mathbf{g}$	Metrik der
$\mathbf{g} \equiv \mathbf{i} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$	$\mathbf{g}^\top = \mathbf{g}$	Momentankonfiguration
$\mathbf{F} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*$	$\mathbf{F} = \text{Grad}(\mathbf{x})$	Deformationsgradient
$\mathbf{R} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*$	$\mathbf{R}^* \mathbf{g} \mathbf{R} = \mathbf{G}$	Rotationstensor
$\mathbf{R} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}$	$\mathbf{R}^\top = \mathbf{R}^{-1}$	
$\mathbf{U} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^*$	$\mathbf{U}^* \mathbf{G} = \mathbf{G} \mathbf{U}$	rechter Strecktensor
$\mathbf{U} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$	$\mathbf{U}^\top = \mathbf{U}, \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^\top \mathbf{F}$	
$\mathbf{V} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}^*$	$\mathbf{V}^* \mathbf{g} = \mathbf{g} \mathbf{V}$	linker Strecktensor
$\mathbf{V} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$	$\mathbf{V}^\top = \mathbf{V}, \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^\top$	
$\mathbf{C} \in \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^*$	$\mathbf{C} = \mathbf{F}^q(\mathbf{g}) = \mathbf{F}^* \mathbf{g} \mathbf{F}$	rechter Cauchy-Greenscher
$\mathbf{C} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$	$\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$	Deformationstensor
$\mathbf{c} \in \mathbb{W}^* \otimes \mathbb{W}^*$	$\mathbf{c} = \mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{G}) = \mathbf{F}^{-*} \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1}$	räumlicher Fingerscher
$\mathbf{c} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$	$\mathbf{c} = \mathbf{F}^{-\top} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{V}^{-2}$	Deformationstensor
$\hat{\mathbf{G}} \in \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^*$	$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{U}_\triangleright(\mathbf{G}) = \mathbf{U}^{-*} \mathbf{G} \mathbf{U}^{-1}$	referentieller Fingerscher
$\mathbf{B} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$	$\mathbf{B} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-\top} = \mathbf{U}^{-2}$	Deformationstensor
$\check{\mathbf{g}} \in \mathbb{W}^* \otimes \mathbb{W}^*$	$\check{\mathbf{g}} = \mathbf{V}^q(\mathbf{g}) = \mathbf{V}^* \mathbf{g} \mathbf{V}$	linker Cauchy-Greenscher
$\mathbf{b} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$	$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^\top = \mathbf{V}^2$	Deformationstensor

---

**Übersicht 1.5** Dehnungsmaße
 

---

Symbol	Beziehung	Name
$\mathbf{E} \in \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^*$	$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G})$	Greenscher Dehnungstensor
$\mathbf{E} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$	$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$	
$\hat{\mathbf{E}} \in \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^*$	$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \hat{\mathbf{G}})$	referentieller Karni-Reinerscher
$\hat{\mathbf{E}} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$	$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B})$	Dehnungstensor
$\mathbf{e} \in \mathbb{W}^* \otimes \mathbb{W}^*$	$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{c})$	Almansischer Dehnungstensor
$\mathbf{e} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$	$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{c})$	
$\check{\mathbf{e}} \in \mathbb{W}^* \otimes \mathbb{W}^*$	$\check{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\check{\mathbf{g}} - \mathbf{g})$	räumlicher Karni-Reinerscher
$\check{\mathbf{e}} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$	$\check{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{i})$	Dehnungstensor
$\mathbf{H} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$	$\mathbf{H} = \ln(\mathbf{U})$	referentieller Henckyscher Dehnungstensor
$\mathbf{h} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$	$\mathbf{h} = \ln(\mathbf{V})$	räumlicher Henckyscher Dehnungstensor

---

### 2.2.1 Objektivität der Dehnungs- und Deformationsmaße

Die Definition objektiver oder beobachter-indifferenter Größen wurde in (1.1.13) angegeben. Unter Verwendung der push-pull-Operationen lassen sich diese Definitionen einfacher schreiben. Es sei  $\mathbf{Q} \in SO(\mathbb{W})$  eine orthogonale Transformation auf dem metrischen Vektorraum  $\mathbb{W}$ , die zwei Bezugssysteme  $\Phi$  und  $\Phi^+$  ineinander überführt. Eine tensorielle Größe  $\mathbf{B} \in \mathcal{T}_s^r \mathbb{W}$  heißt objektiv, wenn sie sich gemäß

$$\mathbf{B}^+ = \mathbf{Q}_\triangleright(\mathbf{B})$$

transformiert. Will man diese Definition auf die zuvor definierten Dehnungs- und Deformationsmaße anwenden, so muß man in Betracht ziehen, ob diese Größen in der referentiellen oder momentanen Konfiguration definiert sind. Die Referenzplazierung  $\mathcal{P}_0$  wird von dem Körper zum Zeitpunkt  $t_0$  eingenommen. Zu diesem Zeitpunkt sei der Bezugssystemwechsel (1.1.7) durch  $\mathbf{X}^+ = \mathbf{c}_0 + \mathbf{Q}_0 \mathbf{X}$  beschrieben, wobei die Abkürzung  $\mathbf{Q}_0 := \mathbf{Q}(t_0)$  gelte. In der Momentanplazierung lautet die entsprechende Transformation  $\mathbf{x}^+ = \mathbf{c} + \mathbf{Q} \mathbf{x}$ , wobei  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{c}$  sich zeitlich ändern können.

Eine referentielle Größe  $\mathbf{A}$  soll nun objektiv heißen, wenn sie sich gemäß  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{Q}_{0\triangleright}(\mathbf{A})$  transformiert.

Der Deformationsgradient ist bezüglich  $\Phi^+$  als  $\mathbf{F}^+ = \text{Grad}^+(\mathbf{x}^+)$  definiert. Diese Beziehung läßt sich durch die materiellen Gradienten  $\mathbf{K} = \nabla \kappa$  und

$\mathbf{K}_0 = \nabla \mathbf{k}_0$  ausdrücken. Für den Deformationsgradienten gilt dann  $\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{K}_0^{-1}$ . Daraus kann man herleiten

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^+ &= \mathbf{K}^+(\mathbf{K}_0^+)^{-1} = (\nabla_{\mathbf{x}^+})(\nabla_{\mathbf{X}^+})^{-1} \\
&= (\nabla(\mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{x}))(\nabla(\mathbf{c}_0 + \mathbf{Q}_0\mathbf{X}))^{-1} \\
&= (\mathbf{Q}\nabla_{\mathbf{x}})(\mathbf{Q}_0\nabla_{\mathbf{X}})^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{K}\mathbf{K}_0^{-1}\mathbf{Q}_0^{-1} = \mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}_0^{-1} \quad (1.2.21) \\
&\Downarrow \\
\mathbf{F}^+ &= \mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}_0^{\mathbf{T}}.
\end{aligned}$$

In der Standardliteratur der Kontinuumsmechanik wird statt  $\mathbf{F}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}_0^{\mathbf{T}}$  oft die Beziehung  $\mathbf{F}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{F}$  angegeben. Dabei setzt man voraus, daß beide Bezugssysteme zum Zeitpunkt  $t_0$  übereinstimmen, d.h. es gilt  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$  und  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{0}$ . Wenn diese Annahme getroffen wird, gilt eine referentielle Größe als objektiv, falls sie  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$  erfüllt. Abgesehen von dem formalen Unterschied zwischen  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$  und  $\mathbf{A}^+ = \mathbf{Q}_{0\triangleright}(\mathbf{A})$  liefern beide Bedingungen das gleiche Objektivitätskriterium.

Für die aus der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten entstehenden Größen gelten folgende Objektivitätsaussagen

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}^+ &= \mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}_0^{\mathbf{T}} \quad \text{nicht objektiv,} \\
\mathbf{U}^+ &= \mathbf{Q}_0\mathbf{U}\mathbf{Q}_0^{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}_{0\triangleright}(\mathbf{U}) \quad \text{objektiv,} \\
\mathbf{V}^+ &= \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}} = \mathbf{Q}_{\triangleright}(\mathbf{V}) \quad \text{objektiv,} \\
\mathbf{R}^+ &= \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{Q}_0^{\mathbf{T}} \quad \text{nicht objektiv.}
\end{aligned} \quad (1.2.22)$$

Für die vielen verschiedenen Dehnungs- und Deformationstensoren kann man zeigen, daß der push-forward oder pull-back der Metrikensoren mit den in (1.2.22) gezeigten Abbildungen immer auf objektive Größen führt. Für den Cauchy-Greenschen Deformationstensor soll dieses exemplarisch gezeigt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^+ &= (\mathbf{F}^+)^{\triangleleft}(\mathbf{g}^+) = (\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}_0^{-1})^{\triangleleft}(\mathbf{Q}_{\triangleright}(\mathbf{g})) \\
&= (\mathbf{Q}_0)_{\triangleright}\mathbf{F}^{\triangleleft}\mathbf{Q}^{\triangleleft}\mathbf{Q}_{\triangleright}(\mathbf{g}) = (\mathbf{Q}_0)_{\triangleright}\mathbf{F}^{\triangleleft}(\mathbf{g}) \\
&= (\mathbf{Q}_0)_{\triangleright}(\mathbf{C}).
\end{aligned}$$

Aufgrund der Eigenschaften der push-pull-Abbildung gilt, daß somit auch alle weiteren Größen in dem Diagramm (1.2.14) objektiv sind.

### 2.2.2 Objektive Zeitableitungen

In diesem Abschnitt werden verschiedene objektive Zeitableitungen definiert, die sich in natürlicher Weise aus den push-forward- und pull-back-Abbildungen ergeben. Zunächst soll eine geometrische Definition der sog. Lie-Ableitung gegeben werden:

Ist  $\mathbf{c} \in \mathcal{T}_s^r \mathcal{M}$  ein  $C^1$ -Tensorfeld auf einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , dann ist die Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{c}$  von  $\mathbf{c}$  in Richtung eines Vektorfeldes  $\mathbf{v}$  auf  $\mathcal{M}$  definiert als

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{c} := \left( \frac{d}{dt} \phi_t^* (\mathbf{c}) \right) \Big|_{t=0},$$

wobei  $\phi_t$  den Fluß des Vektorfeldes  $\mathbf{v}$  bezeichnet.

Um diese Definition in der Kontinuumsmechanik sinnvoll anwenden zu können, ist es notwendig, sie auf solche Fälle zu verallgemeinern, in denen  $\phi_t$  nicht aus einem Vektorfeld bestimmbar ist. Hierzu dient im folgenden die bereits bekannte Definition einer pull-back- und push-forward-Abbildung:

Es sei  $\mathbf{F} \in Iso(\mathbb{V}; \mathbb{W})$  ein Isomorphismus zwischen den Vektorräumen  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  und  $\mathbf{c} \in \mathcal{T}_s^r \mathbb{W}$  ein zeitabhängiges Tensorfeld auf  $\mathbb{W}$ . Die (verallgemeinerte) Lie-Ableitung von  $\mathbf{c}$  bezüglich der Abbildung  $\mathbf{F}$  ist definiert als

$$\mathcal{L}_{\mathbf{F}} \mathbf{c} := \mathbf{F}_{\triangleright} \left( \frac{d}{dt} \mathbf{F}^{\triangleleft} (\mathbf{c}) \right), \quad \forall \mathbf{F} \in Iso(\mathbb{V}; \mathbb{W}), \quad \mathbf{c} \in \mathcal{T}_s^r \mathbb{W}. \quad (1.2.23)$$

Die Lie-Ableitung stellt eine Derivation auf dem Raum der zeitabhängigen Tensorfelder  $\mathcal{T}_s^r \mathbb{W}$  dar, da sie linear ist und die Leibniz-Regel erfüllt. Letztere besagt, daß  $\mathcal{L}_{\mathbf{F}} (\mathbf{a}\mathbf{b}) = \mathbf{a}\mathcal{L}_{\mathbf{F}} (\mathbf{b}) + \mathcal{L}_{\mathbf{F}} (\mathbf{a})\mathbf{b}$  gilt, was sich durch Einsetzen der Definition (1.2.23) leicht überprüfen läßt.

Aus den Eigenschaften der push-forward- und pull-back-Abbildungen lassen sich folgende Eigenschaften der Lie-Ableitung herleiten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{F}^{-1}} (\cdot) &= (\mathbf{F}^{-1})_{\triangleright} \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{F}^{-1})^{\triangleleft} (\cdot) \right) = (\mathbf{F})^{\triangleleft} \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{F})_{\triangleright} (\cdot) \right), \\ \mathcal{L}_{\mathbf{R}\mathbf{U}} (\cdot) &= (\mathbf{R}\mathbf{U})_{\triangleright} \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{R}\mathbf{U})^{\triangleleft} (\cdot) \right) = (\mathbf{R})_{\triangleright} \mathcal{L}_{\mathbf{U}} (\mathbf{R}^{\triangleleft} (\cdot)). \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

Als Isomorphismen kommen für die Lie-Ableitungen die Abbildungen  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{R}$  in Frage. Die Lie-Ableitung der Metriktensoren  $\mathbf{g} \in \mathcal{T}_2^0 \mathbb{W}$  und

$\mathbf{G} \in \mathcal{T}_2^0\mathbb{V}$  ergibt dann

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{g} &= \mathbf{F}^{-*}\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{F}^*\mathbf{g}\mathbf{F})\right)\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{g}} + \mathbf{F}^{-*}\dot{\mathbf{F}}^*\mathbf{g} + \mathbf{g}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \\
 &= \dot{\mathbf{g}} + \mathbf{l}^*\mathbf{g} + \mathbf{g}\mathbf{l}, \quad \text{mit } \mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \\
 \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\mathbf{g} &= \mathbf{R}^{-*}\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{R}^*\mathbf{g}\mathbf{R})\right)\mathbf{R}^{-1} = \dot{\mathbf{g}} + \mathbf{R}^{-*}\dot{\mathbf{R}}^*\mathbf{g} + \mathbf{g}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} \\
 &= \dot{\mathbf{g}} + \boldsymbol{\omega}^*\mathbf{g} + \mathbf{g}\boldsymbol{\omega}, \quad \text{mit } \boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1}, \\
 \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\mathbf{g} &= \mathbf{V}^{-*}\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{V}^*\mathbf{g}\mathbf{V})\right)\mathbf{V}^{-1} = \dot{\mathbf{g}} + \mathbf{V}^{-*}\dot{\mathbf{V}}^*\mathbf{g} + \mathbf{g}\dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} \\
 &= \dot{\mathbf{g}} + \boldsymbol{\lambda}^*\mathbf{g} + \mathbf{g}\boldsymbol{\lambda}, \quad \text{mit } \boldsymbol{\lambda} = \dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1}, \\
 \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G} &= \mathbf{U}^{-*}\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{U}^*\mathbf{G}\mathbf{U})\right)\mathbf{U}^{-1} = \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{U}^{-*}\dot{\mathbf{U}}^*\mathbf{G} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} \\
 &= \dot{\mathbf{G}} + \boldsymbol{\Lambda}^*\mathbf{G} + \mathbf{G}\boldsymbol{\Lambda}, \quad \text{mit } \boldsymbol{\Lambda} = \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{1.2.25}$$

Wie man aus (1.2.25) erkennt, können die entsprechenden Lie-Ableitungen sehr einfach mit Hilfe der Raten der linearen Abbildungen  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{R}$  ausgedrückt werden. Um objektive Zeitableitungen zu finden, macht man sich die Tatsache zunutze, daß der push-forward einer objektiven Größe wiederum objektiv ist. Geht man hierbei von der materiellen Zeitableitung des rechten Cauchy-Greenschen Deformationstensors  $\mathbf{C}$  aus, so erhält man durch push-forward mit  $\mathbf{F}$  die objektive Zeitableitung

$$\mathbf{F}_\triangleright(\dot{\mathbf{C}}) = \mathbf{F}_\triangleright\left(\frac{d}{dt}\mathbf{C}\right) = \mathbf{F}_\triangleright\left(\frac{d}{dt}\mathbf{F}^\triangleleft(\mathbf{g})\right) = \mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{g}. \tag{1.2.26}$$

Benutzt man statt  $\mathbf{F}$  andere Abbildungen aus dem Diagramm (1.2.14), so erhält man folgende objektive Zeitableitungen

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\check{\mathbf{G}} & \xrightarrow{\mathbf{V}_\triangleright} & \mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{g} & \xrightarrow{\mathbf{V}_\triangleright} & \mathcal{L}_{\mathbf{V}}\mathbf{F}\mathbf{C} \\
 \uparrow \mathbf{R}_\triangleright & \nearrow \mathbf{F}_\triangleright & \uparrow \mathbf{R}_\triangleright & \nearrow \mathbf{F}_\triangleright & \uparrow \mathbf{R}_\triangleright \\
 \dot{\mathbf{C}} & \xrightarrow{\mathbf{U}_\triangleright} & \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G} & \xrightarrow{\mathbf{U}_\triangleright} & \mathcal{L}_{\mathbf{U}\mathbf{U}}\hat{\mathbf{G}}
 \end{array} \tag{1.2.27}$$

Geht man ferner davon aus, daß die Metriken  $\mathbf{g}$  und  $\mathbf{G}$  durch die Euklidische Metrik induziert sind, so gilt  $\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{0}$  und  $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{0}$ . Unter dieser Voraussetzung vereinfachen sich einige Zeitableitungen. Für die Lie-Ableitung oder Oldroyd-Rate  $\mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{g}$  ergibt sich

$$\mathbf{F}_\triangleright(\dot{\mathbf{C}}) = \mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{g} = \dot{\mathbf{g}} + \mathbf{l}^*\mathbf{g} + \mathbf{g}\mathbf{l} = \mathbf{l}^*\mathbf{g} + \mathbf{g}\mathbf{l}.$$

Für die mitgedrehte Zeitableitung oder Green-Naghdi-Rate  $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}\check{\mathbf{g}}$  bekommt man einen Ausdruck, der sich nicht vereinfacht. Es gilt

$$\mathbf{R}_\triangleright(\dot{\mathbf{C}}) = \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\check{\mathbf{g}} = \dot{\check{\mathbf{g}}} + \boldsymbol{\omega}^* \check{\mathbf{g}} + \check{\mathbf{g}} \boldsymbol{\omega}.$$

Die Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G}$  der referentiellen Metrik bezüglich der Streckung  $\mathbf{U}$  führt auf

$$\mathbf{U}_\triangleright(\dot{\mathbf{C}}) = \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G} = \dot{\mathbf{G}} + \boldsymbol{\Lambda}^* \mathbf{G} + \mathbf{G} \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^* \mathbf{G} + \mathbf{G} \boldsymbol{\Lambda}. \quad (1.2.28)$$

Die Lie-Ableitung (1.2.28) besitzt eine interessante Eigenschaft, die sich aus der Symmetrie von  $\mathbf{U}$  ergibt. Beachtet man die Symmetriebedingung  $\mathbf{U}^* \mathbf{G} = \mathbf{G} \mathbf{U}$ , so ergibt die Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_{\mathbf{U}^{-1}}\mathbf{G}$  unter Verwendung der Beziehung  $(\mathbf{U}^{-1})^\cdot = -\mathbf{U}^{-1} \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1}$  das Resultat

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{U}^{-1}}\mathbf{G} &= \dot{\mathbf{G}} + \mathbf{U}^*(\mathbf{U}^{-*})^\cdot \mathbf{G} + \mathbf{G}(\mathbf{U}^{-1})^\cdot \mathbf{U} \\ &= \dot{\mathbf{G}} - \mathbf{U}^* \mathbf{U}^{-*} \dot{\mathbf{U}}^* \mathbf{U}^{-*} \mathbf{G} - \mathbf{G} \mathbf{U}^{-1} \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U} \\ &= -(\dot{\mathbf{U}}^* \mathbf{U}^{-*} \mathbf{G} + \mathbf{G} \mathbf{U}^{-1} \dot{\mathbf{U}}) = -(\mathbf{G} \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-*} \dot{\mathbf{U}}^* \mathbf{G}) \\ &= -\mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis setzt voraus, daß gilt  $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{0}$ . Unter dieser Voraussetzung kann nun für die Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_{\mathbf{U}\mathbf{U}}\hat{\mathbf{G}}$  eine sehr einfache Form gefunden werden. Mit (1.2.24)<sub>2</sub> bekommt man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{U}\mathbf{U}}\hat{\mathbf{G}} &= \mathbf{U}_\triangleright \mathcal{L}_{\mathbf{U}}(\mathbf{U}^{\wedge} \hat{\mathbf{G}}) = \mathbf{U}_\triangleright \mathcal{L}_{\mathbf{U}}(\mathbf{G}) \\ &= \mathbf{U}_\triangleright(-\mathcal{L}_{\mathbf{U}^{-1}}(\mathbf{G})) = -\mathbf{U}_\triangleright \mathcal{L}_{\mathbf{U}^{-1}}(\mathbf{U}^{\wedge} \hat{\mathbf{G}}) \\ &= -\mathcal{L}_{\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}}(\hat{\mathbf{G}}) = -\dot{\hat{\mathbf{G}}}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis vereinfacht auch die noch fehlende Zeitableitung  $\mathcal{L}_{\mathbf{V}\mathbf{F}\mathbf{C}}$ . Es gilt nämlich  $\mathbf{V}\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{U}$  und daraus kann man folgern

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{V}\mathbf{F}\mathbf{C}} &= \mathcal{L}_{\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{U}\mathbf{C}} = \mathbf{R}_\triangleright \mathcal{L}_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(\mathbf{R}^{\wedge} \mathbf{c}) = \mathbf{R}_\triangleright \mathcal{L}_{\mathbf{U}\mathbf{U}}(\hat{\mathbf{G}}) \\ &= -\mathbf{R}_\triangleright(\dot{\hat{\mathbf{G}}}) = -\mathbf{R}_\triangleright\left(\frac{d}{dt}(\mathbf{R}^{\wedge} \mathbf{c})\right) \\ &= -\mathcal{L}_{\mathbf{R}\mathbf{C}}. \end{aligned}$$

Nach dem Übergang zur klassischen Schreibweise findet man für die ver-

schiedenen objektiven Zeitableitungen folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G} &= \mathbf{\Lambda}^*\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{\Lambda} & \rightsquigarrow & \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G} = \mathbf{\Lambda}^\top + \mathbf{\Lambda} = \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}, \\
 \mathcal{L}_{\mathbf{UU}}\hat{\mathbf{G}} &= -\dot{\hat{\mathbf{G}}} & \rightsquigarrow & \mathcal{L}_{\mathbf{UU}}\hat{\mathbf{G}} = -\dot{\mathbf{B}}, \\
 \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\check{\mathbf{g}} &= \dot{\check{\mathbf{g}}} + \boldsymbol{\omega}^*\check{\mathbf{g}} + \check{\mathbf{g}}\boldsymbol{\omega} & \rightsquigarrow & \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\check{\mathbf{g}} = \dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega}^\top\mathbf{b} + \mathbf{b}\boldsymbol{\omega}, \\
 \mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{g} &= \mathbf{l}^*\mathbf{g} + \mathbf{g}\mathbf{l} & \rightsquigarrow & \mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{g} = \mathbf{l}^\top + \mathbf{l} = 2\mathbf{d}, \\
 \mathcal{L}_{\mathbf{VFC}} &= -\mathcal{L}_{\mathbf{RC}} & \rightsquigarrow & \mathcal{L}_{\mathbf{VFC}} = -(\dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega}^\top\mathbf{c} + \mathbf{c}\boldsymbol{\omega}).
 \end{aligned}$$

### 2.2.3 Interpretation der Lie-Ableitungen

Die objektiven Zeitableitungen, die hier durch Lie-Ableitungen gewonnen wurden, lassen eine eindeutige physikalische Interpretation zu. Man betrachte einen kovarianten Tensor  $\mathbf{m} = m_{ab}\mathbf{g}^a \otimes \mathbf{g}^b$ . Die duale Basis  $\mathbf{g}^a$  ist mit der dualen Basis der Referenzkonfiguration durch  $\mathbf{g}^a = \delta_A^a \mathbf{F}^{-*} \mathfrak{G}^A$  verbunden. Der Basisvektor  $\mathfrak{G}^A$  ist zeitlich konstant. Die materielle Zeitableitung des Tensors  $\mathbf{m}$  liefert den Ausdruck

$$\dot{\mathbf{m}} = \dot{m}_{ab}\mathbf{g}^a \otimes \mathbf{g}^b + m_{ab}\dot{\mathbf{g}}^a \otimes \mathbf{g}^b + m_{ab}\mathbf{g}^a \otimes \dot{\mathbf{g}}^b. \quad (1.2.29)$$

Die Zeitableitung der Basisvektoren  $\mathbf{g}^a$  erhält man aus

$$\dot{\mathbf{g}}^a = (\mathbf{F}^{-*}) \cdot \mathfrak{G}^A = -\mathbf{F}^{-*}\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-*}\mathfrak{G}^A = -(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1})^*\mathbf{g}^a = -\mathbf{l}^*\mathbf{g}^a. \quad (1.2.30)$$

Setzt man die Beziehung (1.2.30) in (1.2.29) ein, so ergibt sich nach kurzer Umstellung

$$\dot{m}_{ab}\mathbf{g}^a \otimes \mathbf{g}^b = \dot{\mathbf{m}} + \mathbf{l}^*\mathbf{m} + \mathbf{m}\mathbf{l} = \mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{m}, \quad (1.2.31)$$

also die Lie-Ableitung von  $\mathbf{m}$  bezüglich  $\mathbf{F}$ . Die Lie-Ableitung ist demnach die Zeitableitung einer Größe relativ zu einem Bezugssystem, das sich mit der Basis  $\{\mathbf{g}_a\}$  mitbewegt. Auf die Bedeutung solcher Bezugssysteme wird auch im Zusammenhang mit der Doyle-Ericksen-Gleichung eingegangen.

### 2.2.4 Die Jaumannsche Rate

Eine oft benutzte Rate, die sich aber nicht auf natürliche Weise aus den bisherigen Betrachtungen ergibt, ist die Jaumann-Rate  $\overset{\nabla}{\mathbf{m}}$ , die in klassischer

Schreibweise durch

$$\overset{\nabla}{\mathbf{m}} = \dot{\mathbf{m}} + \mathbf{w}^\top \mathbf{m} + \mathbf{m} \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{l}^\top) \quad (1.2.32)$$

definiert ist. Sie basiert auf der Verwendung des räumlichen Spintensors  $\mathbf{w}$  und bildet eine objektive Zeitableitung. Während bei den bisherigen Raten klar war, auf welche Basisvektoren sie sich beziehen, ist dieses hier nicht der Fall. Existiert eine lineare Abbildung  $\mathbf{P}$  mit  $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}$ , so ließe sich eine solche Basis durch  $\mathbf{P}\mathbf{g}_A$  festlegen. Die Abbildung  $\mathbf{P}$  muß aber zunächst aus der Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{w}\mathbf{P}$  gewonnen werden (siehe HAUPT & TSAKMAKIS [47]). Kennt man  $\mathbf{P}$ , so ließe sich schreiben

$$\overset{\nabla}{\mathbf{m}} := \mathcal{L}_{\mathbf{P}}\mathbf{m}.$$

Die Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_{\mathbf{P}}\mathbf{m}$  bezieht sich allerdings nicht auf die verformten Basisvektoren  $\mathbf{g}_a$ . Dieses sieht man durch Darstellung in Komponentenschreibweise. Zunächst findet man, daß  $\mathbf{w}$  durch

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{g}^{-1}\mathbf{l}^*\mathbf{g}) \in \text{Lin}(\mathbb{W}; \mathbb{W})$$

gegeben ist. Die Jaumann-Rate von  $\mathbf{m} = m_{ab}\mathbf{g}^a \otimes \mathbf{g}^b$  lautet dann

$$\overset{\nabla}{\mathbf{m}} = \dot{\mathbf{m}} + \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{g}^{-1}\mathbf{l}^*\mathbf{g})^* \mathbf{m} + \mathbf{m} \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{g}^{-1}\mathbf{l}^*\mathbf{g}).$$

Nach Umstellung der Terme findet man

$$\overset{\nabla}{\mathbf{m}} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{m}} + \mathbf{l}^*\mathbf{m} + \mathbf{I}\mathbf{m}) + \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{m}} + \mathbf{g}\mathbf{l}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{m} + \mathbf{m}\mathbf{g}^{-1}\mathbf{l}^*\mathbf{g}),$$

was unter der Voraussetzung  $\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{0}$  als Lie-Ableitung von  $\mathbf{m}$  und dem assoziierten Tensor  $\bar{\mathbf{m}} := \mathbf{g}^{-1}\mathbf{m}\mathbf{g}^{-1}$  geschrieben werden kann

$$\overset{\nabla}{\mathbf{m}} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{m} + \mathbf{g}(\mathcal{L}_{\mathbf{F}}\bar{\mathbf{m}})\mathbf{g}). \quad (1.2.33)$$

Beachtet man (1.2.31), so findet man für (1.2.33) die Komponentendarstellung

$$\overset{\nabla}{\mathbf{m}} = \frac{1}{2}(\dot{m}_{ab} + g_{ac}\dot{m}^{cd}g_{bd})\mathbf{g}^a \otimes \mathbf{g}^b. \quad (1.2.34)$$

Das Ergebnis (1.2.34) zeigt, daß die Jaumann-Rate keine Zeitableitung bezüglich der verformten Basis  $\mathbf{g}_a$  darstellt. Nur für kleine Dehnungsraten  $\dot{g}_{ac} \approx 1$  kann geschrieben werden  $g_{ac}\dot{m}^{cd}g_{bd} \approx \dot{m}_{ab}$ , womit (1.2.34) dann mit der Lie-Rate  $\mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{m}$  übereinstimmt.

### 2.3 Logarithmische Dehnungsmaße

Die logarithmischen oder Henckyschen Dehnungsmaße konnten nicht durch push-forward- oder pull-back-Abbildungen gewonnen werden. Für die spätere Herleitung der Spannungsleistung ist es aber von Bedeutung, in welchem Zusammenhang die Henckyschen Maße mit den Lie-Ableitungen stehen. Dieses soll hier untersucht werden. Die folgenden Betrachtungen sind in der klassischen Schreibweise dargestellt.

Es ist bekannt, daß der Logarithmus  $\ln \mathbf{U}$  eines symmetrischen, positiv definiten Tensors  $\mathbf{U}$  in

$$\ln \mathbf{U} = \ln(\lambda_i) \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (1.2.35)$$

zerlegt werden kann, wobei die  $\lambda_i$  die Eigenwerte und die  $\mathbf{n}_i$  die orthonormierten Eigenvektoren von  $\mathbf{U}$  sind. Ein Tensor  $\mathbf{U}$  heißt diagonalisierbar, wenn es einen invertierbaren Tensor  $\mathbf{A}$  und einen Diagonaltensor  $\mathbf{D} = \lambda_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$  gibt, so daß gilt

$$\mathbf{U} = \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1}, \quad (1.2.36)$$

wobei die  $\mathbf{e}_i$  die kartesische Basisvektoren des Euklidischen Raumes  $\mathbb{E}$  bezeichnen.

Ist  $\mathbf{U}$  nun symmetrisch, so gilt die Diagonaldarstellung

$$\mathbf{U} = \mathbf{\Theta} \mathbf{D} \mathbf{\Theta}^{-1} \quad \mathbf{\Theta} \in SO(\mathbb{E}), \quad \mathbf{U} \in Sym^+(\mathbb{E}), \quad (1.2.37)$$

in der  $\mathbf{\Theta}$  einen orthogonalen Tensor darstellt. Dieses Ergebnis kann aus (1.2.36) abgeleitet werden: Für den Diagonaltensor  $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{A}$  und die Transponierte  $\mathbf{D}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{U}^T \mathbf{A}^{-T}$  folgt wegen  $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$  die Beziehung  $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{U}^T \mathbf{A}^{-T}$ . Ist  $\mathbf{U}$  nun symmetrisch,  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ , so kann  $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{U}^T \mathbf{A}^{-T}$  nur erfüllt sein, wenn  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$  gilt. Dieses bedeutet aber, daß  $\mathbf{A}$  orthogonal sein muß.

Der Logarithmus eines Tensors ist isotrop, d.h. es gilt

$$\ln(\mathbf{\Theta} \mathbf{D} \mathbf{\Theta}^T) = \mathbf{\Theta} \ln(\mathbf{D}) \mathbf{\Theta}^T.$$

Dieses Ergebnis erhält man, wenn man  $\ln \mathbf{U}$  in eine Potenzreihe um  $\mathbf{U} = \mathbf{I}$  entwickelt

$$\ln(\mathbf{U}) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{U} + \alpha_2 \mathbf{U}^2 + \dots + \alpha_n \mathbf{U}^n + \dots \quad (1.2.38)$$

Die  $\alpha_n$  stellen skalare Koeffizienten dar. Die  $n$ -te Potenz von  $\mathbf{U}$  läßt sich als

$$\mathbf{U}^n = \mathbf{U}\mathbf{U}\mathbf{U}^{n-2} = (\mathbf{\Theta}\mathbf{D}\mathbf{\Theta}^\top)(\mathbf{\Theta}\mathbf{D}\mathbf{\Theta}^\top)\mathbf{U}^{n-2} = (\mathbf{\Theta}\mathbf{D}^2\mathbf{\Theta}^\top)\mathbf{U}^{n-2} \quad (1.2.39)$$

schreiben. Wendet man (1.2.39) rekursiv an, so findet man

$$\mathbf{U}^n = \mathbf{\Theta}\mathbf{D}^n\mathbf{\Theta}^\top.$$

Zusammen mit  $\mathbf{I} = \mathbf{\Theta}\mathbf{I}\mathbf{\Theta}^\top$  kann aus (1.2.38) auf die Isotropie der Logarithmusfunktion geschlossen werden

$$\ln(\mathbf{\Theta}\mathbf{D}\mathbf{\Theta}^\top) = \mathbf{\Theta}(\alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{D} + \alpha_2\mathbf{D}^2 + \dots)\mathbf{\Theta}^\top = \mathbf{\Theta}\ln(\mathbf{D})\mathbf{\Theta}^\top.$$

Aus der Reihenentwicklung erkennt man ferner, daß  $\ln(\mathbf{U})$  symmetrisch ist, d.h., es gilt

$$\ln(\mathbf{U})^\top = \ln(\mathbf{U}).$$

## 2.4 Raten der logarithmischen Dehnungsmaße

### 2.4.1 Referentielles Henckysches Dehnungsmaß

Hier wird zunächst das referentielle Henckysche Dehnungsmaß  $\mathbf{H} = \ln(\mathbf{U})$  betrachtet. Es soll eine Verbindung zwischen einer Rate von  $\mathbf{H}$  und den bereits bekannten Lie-Ableitungen gefunden werden. Aus verschiedenen Untersuchungen in der Literatur (siehe z.B. MACVEAN [63], LEHMANN & LIANG [59]) wird deutlich, daß eine solche Rate mit der Lie-Ableitung

$$\mathcal{L}_{\mathbf{U}}(\mathbf{G}) = \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}} \quad (1.2.40)$$

verbunden sein muß. Der genaue Zusammenhang wird nun abgeleitet.

Der Henckysche Tensor  $\mathbf{H}$  kann folgendermaßen als push-forward des Logarithmus des Diagonaltensors  $\mathbf{D}$  dargestellt werden

$$\ln(\mathbf{U}) = \mathbf{\Theta}\ln(\mathbf{D})\mathbf{\Theta}^\top = \mathbf{\Theta}_\triangleright(\ln(\mathbf{D})). \quad (1.2.41)$$

Der Rotationstensor  $\mathbf{\Theta} = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{e}_i$  überführt die kartesischen Basisvektoren in die Eigenvektoren von  $\mathbf{U}$ . Bildet man die Zeitableitung relativ zu den Eigenvektoren  $\mathbf{n}_i$ , so erhält man mit (1.2.41) die Beziehungen

$$\mathcal{L}_{\mathbf{\Theta}}\ln(\mathbf{U}) = \mathbf{\Theta}_\triangleright \frac{d}{dt} \mathbf{\Theta}^\triangleleft \ln(\mathbf{U}) = \mathbf{\Theta}_\triangleright \frac{d}{dt} \mathbf{\Theta}^\triangleleft \mathbf{\Theta}_\triangleright \ln(\mathbf{D}) = \mathbf{\Theta}_\triangleright \ln(\mathbf{D}) \dot{\phantom{D}}. \quad (1.2.42)$$

Hier muß nun die Ableitung  $\ln(\mathbf{D})'$  genauer betrachtet werden. Mit (1.2.35) findet man

$$\begin{aligned}\ln(\mathbf{D})' &= (\ln \lambda_i)' \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \\ &= \dot{\lambda}_i \lambda_i^{-1} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \\ &= \dot{\mathbf{D}} \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}^{-1} \dot{\mathbf{D}}.\end{aligned}\tag{1.2.43}$$

Aufgrund der Diagonalität von  $\mathbf{D}$  ergeben sich zwei verschiedene Darstellungen (1.2.43)<sub>3</sub>. Setzt man diese Zwischenergebnisse in (1.2.42) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Theta} \ln(\mathbf{U}) &= \Theta_{\flat} \ln(\mathbf{D})' = \Theta_{\flat} (\dot{\mathbf{D}} \mathbf{D}^{-1}) \\ &= \Theta \dot{\mathbf{D}} \mathbf{D}^{-1} \Theta^{\top} = \Theta \dot{\mathbf{D}} \Theta^{\top} \Theta \mathbf{D}^{-1} \Theta^{\top} \\ &= \Theta \dot{\mathbf{D}} \Theta^{\top} \mathbf{U}^{-1} = (\mathcal{L}_{\Theta} \mathbf{U}) \mathbf{U}^{-1}, \\ \Rightarrow \mathcal{L}_{\Theta} \ln(\mathbf{U}) &= (\mathcal{L}_{\Theta} \mathbf{U}) \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} (\mathcal{L}_{\Theta} \mathbf{U}).\end{aligned}\tag{1.2.44}$$

Die beiden Ergebnisse (1.2.44)<sub>4</sub> resultieren aus den zwei Darstellungen (1.2.43). Die Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_{\Theta} \mathbf{U}$  kann als

$$\mathcal{L}_{\Theta} \mathbf{U} = \dot{\mathbf{U}} + \boldsymbol{\omega}_{\Theta}^{\top} \mathbf{U} + \mathbf{U} \boldsymbol{\omega}_{\Theta}, \quad \boldsymbol{\omega}_{\Theta} = \dot{\Theta} \Theta^{-1} \in \text{Skw}(\mathbb{E})\tag{1.2.45}$$

geschrieben werden. Setzt man (1.2.45) in die zwei Darstellungen (1.2.44)<sub>4</sub> ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\Theta} \ln(\mathbf{U}) &= \dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} + \boldsymbol{\omega}_{\Theta}^{\top} + \mathbf{U} \boldsymbol{\omega}_{\Theta} \mathbf{U}^{-1}, \\ \mathcal{L}_{\Theta} \ln(\mathbf{U}) &= \mathbf{U}^{-1} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\Theta}^{\top} \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega}_{\Theta}.\end{aligned}\tag{1.2.46}$$

Die Summe aus den beiden Gleichungen (1.2.46) ergibt dann einen Ausdruck, der (1.2.40) entspricht. Man findet nämlich

$$\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \dot{\mathbf{U}}) = \mathcal{L}_{\Theta} \ln(\mathbf{U}) - \frac{1}{2}(\mathbf{U} \boldsymbol{\omega}_{\Theta} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\Theta}^{\top} \mathbf{U}).\tag{1.2.47}$$

Dieses Ergebnis wird später bei der Herleitung von leistungs-konjugierten Spannungs- und Dehnungsmaßen benutzt.

## 2.4.2 Räumliches Henckysches Dehnungsmaß

Der linke Strecktensor  $\mathbf{V}$  ist wie  $\mathbf{U}$  ein symmetrischer, positiv definiten Tensor. Aus der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten ist erkennbar,

daß sich  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{U}$  durch einen push-forward mit der Rotation  $\mathbf{R}$  unterscheiden. Unter Verwendung von (1.2.37) kann man nun schreiben

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^\top = \mathbf{R}_\triangleright(\mathbf{U}) = \mathbf{R}_\triangleright(\mathbf{\Theta}\mathbf{D}\mathbf{\Theta}^\top) = (\mathbf{R}\mathbf{\Theta})_\triangleright(\mathbf{D}). \quad (1.2.48)$$

Aufgrund der Isotropie der Logarithmusfunktion folgt aus (1.2.48) die Beziehung

$$\ln(\mathbf{V}) = \ln(\mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^\top) = \mathbf{R} \ln(\mathbf{U}) \mathbf{R}^\top,$$

die sich mit Hilfe der push-pull-Abbildungen einfach als

$$\ln(\mathbf{R}_\triangleright\mathbf{U}) = \mathbf{R}_\triangleright(\ln \mathbf{U}) \quad \text{und} \quad \ln(\mathbf{R}^\triangleleft\mathbf{V}) = \mathbf{R}^\triangleleft(\ln \mathbf{V})$$

schreiben lassen. Setzt man diese Beziehungen und (1.2.48) in (1.2.47) ein, so folgt

$$\mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G} = 2\mathcal{L}_{\mathbf{\Theta}}(\mathbf{R}^\triangleleft \ln(\mathbf{V})) - (\mathbf{R}^\top \mathbf{F} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{\Theta}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{R} + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{\Theta}}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{F}). \quad (1.2.49)$$

Wendet man nun auf beiden Seiten von (1.2.49) einen push-forward mit  $\mathbf{R}$  an, so gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\triangleright \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G} &= 2\mathbf{R}_\triangleright \mathcal{L}_{\mathbf{\Theta}}(\mathbf{R}^\triangleleft \ln(\mathbf{V})) \\ &\quad - \mathbf{R}^{-\top} (\mathbf{R}^\top \mathbf{F} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{\Theta}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{R} + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{\Theta}}^\top \mathbf{R}^\top \mathbf{F}) \mathbf{R}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.2.50)$$

Für den Term  $\mathbf{R}_\triangleright \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G}$  ergibt sich

$$\mathbf{R}_\triangleright \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G} = \mathbf{R}_\triangleright \mathbf{U}_\triangleright(\dot{\mathbf{C}}) = \mathbf{F}_\triangleright(\dot{\mathbf{C}}) = \mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{g} = 2\mathbf{d}, \quad \text{mit } \mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{1}^\top)$$

und für  $\mathbf{R}_\triangleright \mathcal{L}_{\mathbf{\Theta}}(\mathbf{R}^\triangleleft \ln(\mathbf{V}))$  kann man gemäß der Rechenregeln für Lie-Ableitungen schreiben

$$\mathbf{R}_\triangleright \mathcal{L}_{\mathbf{\Theta}}(\mathbf{R}^\triangleleft \ln(\mathbf{V})) = \mathcal{L}_{\mathbf{R}\mathbf{\Theta}} \ln(\mathbf{V}).$$

Setzt man diese Ergebnisse in (1.2.50) ein und vereinfacht den rechten Term in (1.2.50), so erhält man schließlich

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{g} = \mathcal{L}_{\mathbf{R}\mathbf{\Theta}} \ln(\mathbf{V}) - \frac{1}{2}(\mathbf{F} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{\Theta}} \mathbf{F}^{-1} + (\mathbf{F} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{\Theta}} \mathbf{F}^{-1})^\top). \quad (1.2.51)$$

Die Beziehung (1.2.51) verbindet die Lie-Rate  $\mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{g}$  mit der Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_{\mathbf{R}\mathbf{\Theta}} \ln(\mathbf{V})$  des räumlichen Henckyschen Dehnungstensors. Später wird auch diese Beziehung zur Darstellung der Spannungsleistung benutzt.

## 2.5 Kontravariante Spannungstensoren

Die spezifische Spannungsleistung  $\mathfrak{p}$  (per Masseneinheit) einer lokalen elastischen Deformation ist durch den Ausdruck

$$\rho_0 \mathfrak{p} = \frac{1}{2} \langle \mathbf{S}, \dot{\mathbf{C}} \rangle \quad (1.2.52)$$

gegeben. Hier bezeichnen  $\rho_0$  die referentielle Massendichte,  $\mathbf{S}$  den 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor und  $\mathbf{C}$  den rechten Cauchy-Greenschen Strecktensor. Der Spannungstensor  $\mathbf{S}$  tritt hier als eine zu  $\dot{\mathbf{C}}$  duale <sup>7)</sup> Größe in Erscheinung. Da  $\mathbf{C}$  kovariant ist, folgt, daß  $\mathbf{S}$  einen kontravarianten Tensor

$$\mathbf{S} = S^{AB} \mathbf{G}_A \otimes \mathbf{G}_B \in \text{Lin}(\mathbb{V}^*; \mathbb{V})$$

darstellt. Dieses Resultat ist physikalisch sinnvoll, da der Spannungstensor ein (kovariantes) Flächenelement  $d\mathbf{A}$  in einen Spannungsvektor  $\mathbf{f} = \mathbf{S}d\mathbf{A} \in \mathbb{V}$  abbildet.

Aus der Eigenschaft (1.2.7) der push-pull-Abbildungen kann man folgern, daß alle durch push-forward von  $\langle \mathbf{S}, \dot{\mathbf{C}} \rangle$  gebildeten Spannungs-Dehnungsrate-Paare die Spannungsleistung in objektiver Weise repräsentieren. Mit der Abbildung  $\mathbf{F}$  erhält man beispielsweise

$$\rho_0 \mathfrak{p} = \frac{1}{2} \langle \mathbf{S}, \mathbf{F}^* \mathbf{F}_\triangleright(\dot{\mathbf{C}}) \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{S}), \mathbf{F}_\triangleright(\dot{\mathbf{C}}) \rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\tau}, \mathcal{L}_{\mathbf{F}} \mathbf{g} \rangle,$$

wobei  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{S})$  den Kirchhoffschen Spannungstensor bezeichnet. Auf diese Weise können alle konjugierten Spannungsmaße durch push-forward von  $\mathbf{S}$  gewonnen werden. Bezieht man die Spannungsmaße auf ein Flächenelement der Momentankonfiguration, so lautet der entsprechende Ausdruck der Spannungsleistung

$$\rho \mathfrak{p} = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_0} \langle \mathbf{S}, \mathbf{F}^* \mathbf{F}_\triangleright(\dot{\mathbf{C}}) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_0} \langle \mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{S}), \mathbf{F}_\triangleright(\dot{\mathbf{C}}) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_0} \langle \boldsymbol{\tau}, \mathcal{L}_{\mathbf{F}} \mathbf{g} \rangle. \quad (1.2.53)$$

Das Dichteverhältnis  $\rho_0/\rho$  ist durch die Jacobideterminante

$$J = \det(\mathbf{F}) = \frac{\rho_0}{\rho}$$

<sup>7)</sup>Der Begriff *dual* ist hier in seiner exakten algebraischen Bedeutung zu sehen und muß von der *mechanischen* Bedeutung in HAUPT & TSAKMAKIS [47] unterschieden werden

bestimmt. Die Beziehungen (1.2.53) erfordern die Definition gewichteter Spannungstensoren

$$\boldsymbol{\Sigma} = J^{-1}\mathbf{S} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\boldsymbol{\tau}.$$

Hier ist  $\boldsymbol{\Sigma}$  der gewichtete 2.Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor und  $\boldsymbol{\sigma}$  der Cauchysche Spannungstensor. Beide Spannungen sind auf ein Flächenelement der Momentankonfiguration bezogen. Führt man den push-forward von  $\mathbf{S}$  oder  $\boldsymbol{\Sigma}$  mit den in (1.2.13) dargestellten Abbildungen durch, so ergibt sich folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \check{\boldsymbol{\tau}} \ (\check{\boldsymbol{\sigma}}) & \xrightarrow{\mathbf{V}_\triangleright} & \boldsymbol{\tau} \ (\boldsymbol{\sigma}) & \xrightarrow{\mathbf{V}_\triangleright} & \hat{\boldsymbol{\tau}} \ (\hat{\boldsymbol{\sigma}}) \\
 \uparrow \mathbf{R}_\triangleright & \nearrow \mathbf{F}_\triangleright & \uparrow \mathbf{R}_\triangleright & \nearrow \mathbf{F}_\triangleright & \uparrow \mathbf{R}_\triangleright \\
 \mathbf{S} \ (\boldsymbol{\Sigma}) & \xrightarrow{\mathbf{U}_\triangleright} & \hat{\mathbf{S}} \ (\hat{\boldsymbol{\Sigma}}) & \xrightarrow{\mathbf{U}_\triangleright} & \hat{\hat{\mathbf{S}}} \ (\hat{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}})
 \end{array} \quad (1.2.54)$$

Die in (1.2.54) in Klammern gesetzten Größen sind die entsprechenden gewichteten Spannungstensoren. Die wesentlichsten Spannungen und ihre klassischen Schreibweisen sind:

– Der 2.Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor  $\mathbf{S} \in \text{Lin}(\mathbb{V}^*; \mathbb{V})$ ;

– Der Cauchysche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Lin}(\mathbb{W}^*; \mathbb{W})$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{S}) = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^* \rightsquigarrow \boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^\top;$$

– Der Kirchhoffsche Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau} \in \text{Lin}(\mathbb{W}^*; \mathbb{W})$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}_\triangleright(\mathbf{S}) = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^* \rightsquigarrow \boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^\top = J\boldsymbol{\sigma};$$

– Der konvektive oder Besselingsche Spannungstensor  $\hat{\hat{\mathbf{S}}} \in \text{Lin}(\mathbb{V}^*; \mathbb{V})$

$$\hat{\hat{\mathbf{S}}} = \mathbf{U}\mathbf{U}_\triangleright(\mathbf{S}) = \mathbf{U}\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U}^* \rightsquigarrow \hat{\hat{\mathbf{S}}} = \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C};$$

Diese und weitere Spannungstensoren sind in der Übersicht 1.6 zusammengefaßt.

Wie bei den Dehnungsmaßen gibt es Spannungstensoren, die nicht aus (1.2.54) entnehmbar sind. Zu ihren wichtigsten Vertretern zählen der 1.Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor  $\mathbf{T}$  und der Biotsche Spannungstensor  $\mathbf{T}_{\text{Biot}}$ . Für

**Übersicht 1.6** Spannungstensoren

Symbol	Beziehung	Name
$\mathbf{S} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$		2.Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
$\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$	$\boldsymbol{\Sigma} = J^{-1}\mathbf{S}$	gewichteter 2.P-K. Spannungstensor
$\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T$	Kirchhoffscher Spannungstensor
$\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$	$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\boldsymbol{\tau}$	Cauchyscher Spannungstensor
$\check{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$	$\check{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{R}^T$	mitgedrehter 2.P-K. Spannungstensor
$\check{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$	$\check{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}^T = J^{-1}\check{\boldsymbol{\tau}}$	gewichteter mitgedrehter 2.P-K. Spannungstensor
$\hat{\mathbf{S}} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$	$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{R}^{-T}$	zurückgedrehter Kirchhoffscher Spannungstensor
$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$	$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}^{-T} = J^{-1}\hat{\mathbf{S}}$	zurückgedrehter Cauchyscher Spannungstensor
$\hat{\hat{\mathbf{S}}} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$	$\hat{\hat{\mathbf{S}}} = \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}$	konvektiver Spannungstensor
$\hat{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$	$\hat{\hat{\boldsymbol{\Sigma}}} = J^{-1}\hat{\hat{\mathbf{S}}}$	gewichteter konvektiver Spannungstensor
$\hat{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$	$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\tau}\mathbf{V}$	mitgedrehter konvektiver Spannungstensor
$\hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{W}$	$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = J^{-1}\hat{\boldsymbol{\tau}}$	gewichteter mitgedrehter konvektiver Spannungstensor
$\mathbf{T} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}$	$\mathbf{T} = \mathbf{F}\mathbf{S}$	1.P.-K. Spannungstensor

den 1.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor findet man aus der Spannungsleistung die Beziehung

$$\begin{aligned} \rho_0 \dot{\rho} &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{S}, \dot{\mathbf{C}} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{S}, (\dot{\mathbf{F}}^* \mathbf{g}\mathbf{F} + \mathbf{F}^* \mathbf{g}\dot{\mathbf{F}}) \rangle \\ &= \langle \mathbf{g}\mathbf{F}\mathbf{S}, \dot{\mathbf{F}} \rangle = \langle \mathbf{T}, \dot{\mathbf{F}} \rangle, \quad \text{mit } \mathbf{T} = \mathbf{g}\mathbf{F}\mathbf{S}. \end{aligned}$$

Diese Ableitung setzt die Symmetrie  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^*$  voraus. Im Unterschied zu den push-pull-Abbildungen ist bei dieser Art der Herleitung die Objektivität des Spannungstensors nicht gewährleistet.

## 2.6 Allgemeine Spannungsleistung

Wie bereits in (1.2.52) dargestellt, wird die spezifische Spannungsleistung aus der Kombination der jeweiligen Spannungstensoren und der Lie-Ableitung der entsprechenden Deformationsmaße gebildet. Für die spezifische

Spannungsleistung  $\rho_0 \mathbf{p}$  sind die entsprechenden Kombinationen in dem folgenden Diagramm dargestellt. Die Spannungsleistung  $\rho \mathbf{p}$  erhält man durch Verwendung der gewichteten Spannungstensoren.

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{1}{2} \langle \check{\boldsymbol{\tau}}, \mathcal{L}_{\mathbf{R}} \check{\mathbf{g}} \rangle & \xrightarrow{v_b} & \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\tau}, \mathcal{L}_{\mathbf{F}} \mathbf{g} \rangle & \xrightarrow{v_b} & -\frac{1}{2} \langle \hat{\boldsymbol{\tau}}, \mathcal{L}_{\mathbf{R}} \mathbf{c} \rangle \\
 \uparrow R_b & \nearrow F_b & \uparrow R_b & \nearrow F_b & \uparrow R_b \\
 \frac{1}{2} \langle \mathbf{S}, \dot{\mathbf{C}} \rangle & \xrightarrow{u_b} & \frac{1}{2} \langle \hat{\mathbf{S}}, \mathcal{L}_{\mathbf{U}} \mathbf{G} \rangle & \xrightarrow{u_b} & -\frac{1}{2} \langle \hat{\hat{\mathbf{S}}}, \dot{\mathbf{G}} \rangle
 \end{array} \quad (1.2.55)$$

Für diese Kombinationen lassen sich die folgenden klassischen Ausdrücke angeben:

- 2.Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor,  
rechter Cauchy-Greenscher Deformationstensor:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2\rho_0} \langle \mathbf{S}, \dot{\mathbf{C}} \rangle \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{p} = \frac{1}{2\rho_0} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}};$$

- zurückgedrehter Kirchhoffscher Spannungstensor,  
Lagrangescher Streckgeschwindigkeitstensor:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2\rho_0} \langle \hat{\mathbf{S}}, \mathcal{L}_{\mathbf{U}} \mathbf{G} \rangle \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{p} = \frac{1}{2\rho_0} \hat{\mathbf{S}} \cdot (\dot{\mathbf{U}} \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \dot{\mathbf{U}});$$

- konvektiver Spannungstensor,  
referentieller Fingerscher Deformationstensor:

$$\mathbf{p} = -\frac{1}{2\rho_0} \langle \hat{\hat{\mathbf{S}}}, \dot{\mathbf{G}} \rangle \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{p} = -\frac{1}{2\rho_0} \hat{\hat{\mathbf{S}}} \cdot \dot{\mathbf{B}};$$

- mitgedrehter gewichteter 2.P-K. Spannungstensor,  
linker Cauchy-Greenscher Deformationstensor:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2\rho} \langle \check{\boldsymbol{\sigma}}, \mathcal{L}_{\mathbf{R}} \check{\mathbf{g}} \rangle \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{p} = \frac{1}{2\rho} \check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{b} + \mathbf{b} \boldsymbol{\omega});$$

- Cauchyscher Spannungstensor,  
Eulerscher Streckgeschwindigkeitstensor:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2\rho} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{L}_{\mathbf{F}} \mathbf{g} \rangle \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{p} = \frac{1}{2\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{l}^T) = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d};$$

– mitgedrehter gewichteter konvektiver Spannungstensor,  
räumlicher Fingerscher Deformationstensor:

$$\mathbf{p} = -\frac{1}{2\rho} \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathcal{L}_{\mathbf{R}\mathbf{C}} \rangle \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{p} = -\frac{1}{2\rho} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{c} + \mathbf{c} \dot{\boldsymbol{\omega}}).$$

Als ein weiteres konjugiertes Paar läßt sich hier der „Jaumannsche“ Spannungstensor  $\mathbf{J}$  und die Jaumann-Rate  $\mathbf{P}_\triangleright(\dot{\mathbf{C}})$  einführen. Es gilt dann

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2\rho_0} \langle \mathbf{J}, \mathbf{P}_\triangleright(\dot{\mathbf{C}}) \rangle \quad \text{mit} \quad \mathbf{J} = \mathbf{P}_\triangleright(\mathbf{S}) = \mathbf{P}\mathbf{S}\mathbf{P}^*,$$

wobei die lineare Abbildung  $\mathbf{P}$  eine Lösung der Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{w}\mathbf{P}$  ist (siehe 2.2.4).

Zu den hier angegebenen Paaren aus Spannungen und Deformationsraten lassen sich, bis auf zwei Ausnahmen, entsprechende Deformationstensoren finden. Nur zu  $\mathcal{L}_{\mathbf{U}\mathbf{G}}$  und  $\mathcal{L}_{\mathbf{F}\mathbf{g}}$  existieren keine solche Tensoren. Die Metriken selbst können nicht als Deformationstensoren angesehen werden, zumal hier die früher gemachte Bedingung  $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{0}$  und  $\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{0}$  gilt, d.h., die Metriken sind konstant. Betrachtet man nun die oben hergeleiteten Ausdrücke für die logarithmischen Dehnungsmaße, so erkennt man, daß sich die gesuchten Größen  $\mathcal{L}_{\mathbf{U}\mathbf{G}}$  und  $\mathcal{L}_{\mathbf{F}\mathbf{g}}$  als Lie-Ableitungen der Henckyschen Dehnungstensoren auffassen lassen. Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{U}\mathbf{G}} &= 2\mathcal{L}_{\boldsymbol{\Theta}} \ln(\mathbf{U}) - (\mathbf{U}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\Theta}}^T\mathbf{U}), \\ \mathcal{L}_{\mathbf{F}\mathbf{g}} &= 2\mathcal{L}_{\mathbf{R}\boldsymbol{\Theta}} \ln(\mathbf{V}) - (\mathbf{F}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{F}^{-1} + (\mathbf{F}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{F}^{-1})^T), \end{aligned} \quad (1.2.56)$$

die in (1.2.47) bzw. (1.2.51) für den allgemeinen (anisotropen) Fall abgeleitet wurden. Sie sind offensichtlich u kompliziert, um eine sinnvolle Interpretation der Lie-Raten zu ergeben. Setzt man isotropes Materialverhalten voraus, so vereinfachen sich die entsprechenden Leistungsausdrücke enorm.

## 2.7 Spannungsleistung bei Isotropie

Bei Isotropie gilt, wie später noch gezeigt wird, daß die Tensoren  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\mathbf{V}$ , sowie  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{U}$  gleiche Hauptachsen besitzen. Dadurch entsteht folgende Kommutativität

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{V} = \mathbf{V}\boldsymbol{\sigma} \quad \text{und} \quad \mathbf{S}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{S}. \quad (1.2.57)$$

Die Beziehungen (1.2.57) ermöglichen es, einige Ausdrücke für die Spannungsleistung auf eine sehr einfache Form zurückzuführen. Für  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\mathbf{c}$  findet man

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\mathbf{c} &= \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{c} + \mathbf{c} \boldsymbol{\omega}) = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\dot{\mathbf{c}} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{V}^{-2} + \mathbf{V}^{-2} \boldsymbol{\omega}) \\ &= \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\mathbf{c}} - (\mathbf{V} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{V} \mathbf{V}^{-2} - \mathbf{V}^{-2} \mathbf{V} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{V}) \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\mathbf{c}}.\end{aligned}\tag{1.2.58}$$

Da  $\boldsymbol{\omega}$  schief-symmetrisch ist, gilt  $\boldsymbol{\omega}^T = -\boldsymbol{\omega}$ . Dieses wurde in (1.2.58)<sub>2</sub> ausgenutzt. Wegen der Kommutativität von  $\mathbf{V}$  und  $\boldsymbol{\sigma}$  kann für  $\mathbf{V} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{V}$  auch  $\mathbf{V}^2 \boldsymbol{\sigma}$  oder  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{V}^2$  geschrieben werden. Dadurch heben sich die eingeklammerten Terme in (1.2.58)<sub>2</sub> auf. Für den Ausdruck  $\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\mathbf{b}$  erhält man in der klassischen Schreibweise

$$\begin{aligned}\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\mathbf{b} &= \check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{b} + \mathbf{b} \boldsymbol{\omega}) = \check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot (\dot{\mathbf{b}} + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{V}^2 + \mathbf{V}^2 \boldsymbol{\omega}) \\ &= \check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\mathbf{b}} - (\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^2 - \mathbf{V}^2 \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{V}^{-1}) \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\mathbf{b}}.\end{aligned}\tag{1.2.59}$$

Die Spannungsleistung  $2\rho\mathbf{p} = \check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\mathbf{b}}$  stellt einen bekannten Ausdruck dar, der sich z.B. bei MACVEAN [63](8.33) finden läßt.

Die Ausdrücke  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{g}$  und  $\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G}$  vereinfachen sich bei Isotropie nicht. Dieses kommt daher, daß die entsprechenden Raten  $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  und  $\boldsymbol{\Lambda} = \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}$  im Gegensatz zu  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1}$  nicht schief-symmetrisch sind. Die Schief-Symmetrie bewirkt in (1.2.59)<sub>2</sub>, daß sich die rechten Terme gegenseitig aufheben. Dieses ist für  $\mathbf{l}$  und  $\boldsymbol{\Lambda}$  nicht der Fall.

Glücklicherweise liefern die logarithmischen Ausdrücke (1.2.56) genau jene Darstellungen, die Raten bezüglich der Rotationen  $\mathbf{R}$  bzw.  $\boldsymbol{\Theta}$  beinhalten. Bei Isotropie erhält man folgende Beziehungen

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G} &= 2\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathcal{L}_{\boldsymbol{\Theta}} \ln(\mathbf{U}) - \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U} \cdot (\mathbf{U}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\Theta}}^T\mathbf{U}) \\ &= 2\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathcal{L}_{\boldsymbol{\Theta}} \ln(\mathbf{U}) - \mathbf{S} \cdot (\mathbf{U}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\Theta}}\mathbf{U} + \mathbf{U}\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\Theta}}^T\mathbf{U}) \\ \frac{1}{2}\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G} &= \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathcal{L}_{\boldsymbol{\Theta}} \ln(\mathbf{U}).\end{aligned}\tag{1.2.60}$$

In (1.2.60)<sub>2</sub> wurde die Kommutativität von  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{U}$  benutzt. Die rechten Terme in (1.2.60)<sub>2</sub> heben sich aufgrund der Schief-Symmetrie von  $\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\Theta}}$  heraus. Die gleiche Herleitung kann nun für  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{F}}\mathbf{g}$  ausgeführt werden und

führt auf

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{F}\mathbf{G}} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}\Theta} \ln(\mathbf{V}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{F}\boldsymbol{\omega}_{\Theta}\mathbf{F}^{-1} + (\mathbf{F}\boldsymbol{\omega}_{\Theta}\mathbf{F}^{-1})^{\top}) \\
&= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}\Theta} \ln(\mathbf{V}) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{V}\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_{\Theta}\mathbf{R}^{\top}\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_{\Theta}\mathbf{R}^{\top}\mathbf{V}) \\
&= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}\Theta} \ln(\mathbf{V}) - \frac{1}{2}(\mathbf{V}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}^{-1} - \mathbf{V}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{V}) \cdot (\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}_{\Theta}\mathbf{R}^{\top}) \quad (1.2.61) \\
&= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}\Theta} \ln(\mathbf{V}).
\end{aligned}$$

Die in (1.2.60) und (1.2.61) vorkommenden Lie-Ableitungen sind die Hauptachsenableitungen von  $\ln(\mathbf{U})$  bzw.  $\ln(\mathbf{V})$ . Im isotropen Fall ergeben sich damit die folgenden Vereinfachungen:

$$\begin{array}{ll}
\text{Anisotropie} & \rightsquigarrow \text{Isotropie} \\
\rho_0\mathfrak{p} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{S}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{C}}} & \rightsquigarrow \rho_0\mathfrak{p} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{S}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{C}}} \\
\rho_0\mathfrak{p} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G} & \rightsquigarrow \rho_0\mathfrak{p} = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathcal{L}_{\Theta} \ln(\mathbf{U}) \\
\rho_0\mathfrak{p} = -\frac{1}{2}\hat{\mathbf{S}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{B}}} & \rightsquigarrow \rho_0\mathfrak{p} = -\frac{1}{2}\hat{\mathbf{S}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{B}}} \quad (1.2.62) \\
\rho\mathfrak{p} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{F}\mathbf{G}} & \rightsquigarrow \rho\mathfrak{p} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}\Theta} \ln(\mathbf{V}) \\
\rho\mathfrak{p} = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}\mathbf{C}} & \rightsquigarrow \rho\mathfrak{p} = \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}\mathbf{C}} \\
\rho\mathfrak{p} = -\frac{1}{2}\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}\mathbf{b}} & \rightsquigarrow \rho\mathfrak{p} = -\frac{1}{2}\check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\mathbf{b}}
\end{array}$$

### 3 Die Doyle-Ericksen-Gleichung und ihre Interpretation

Es sei  $\psi$  die Formänderungsenergie eines hyperelastischen Materiales, gegeben durch

$$\psi = \psi(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}). \quad (1.3.1)$$

Von DOYLE & ERICKSEN [35] wurde die Beziehung

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \quad (1.3.2)$$

aufgestellt, die seitdem als *Doyle-Ericksen-Gleichung* bekannt ist und sich mittlerweile zahlreicher Varianten erfreut. Gleichung (1.3.2) stellt eine konstitutive Beziehung dar, in welcher der Spannungstensor durch Ableitung nach einem Metriktensor definiert ist. Dieses ist gemeinsames Merkmal aller Varianten der Doyle-Ericksen-Gleichung. Anwendungen dieser Gleichungen wurden hauptsächlich durch die Arbeiten von MARSDEN & HUGHES [70], SIMO & MARSDEN [110], SIMO ET AL. [107] und SIMO [106] gegeben. Insbesondere SIMO [106] hat mit diesen Gleichungen eine Beschreibung der finiten Elasto-Plastizitätstheorie vorgestellt.

Der Hintergrund, vor dem die Doyle-Ericksen-Gleichung ihre eigentliche Bedeutung gewinnt, scheint nicht allen Anwendern klar zu sein. Sehr oft werden diese Gleichungen in einem Kontext gebraucht, in dem sie überflüssig sind und durch einfachere, klassische Formulierungen ersetzt werden können. Die Gleichung (1.3.1) macht keinen Sinn, wenn die Metrik  $\mathbf{g}$  als konstante Metrik des Euklidischen Raumes angesehen wird. ROUGEE [92](S.38) schreibt dazu: „... *the authors [Marsden, Simo] make use of a succession of skilful but non intrinsic and physically obscure mathematical arguments. First they state that  $e$  [hier:  $\psi$ ] is dependent on the space metric  $\mathbf{g}$  which in classical mechanics is a constant: what is the mathematical meaning of a function of a constant? ...*“

### 3.1 Starre Bezugssysteme

Es wurde zu Anfang des Kapitels dargestellt, daß zur kinematischen Beschreibung mechanischer Prozesse immer ein Bezugssystem  $\Phi$  notwendig ist, da sonst Begriffe wie der Ortsvektor keinen Sinn haben. Da die Wahl von Bezugssystemen beliebig ist, müssen bezogene Beschreibungen den Invarianzbedingungen gegenüber Bezugssystemwechsel genügen. Ein Bezugssystemwechsel ist eine isometrische Abbildung auf  $\mathbb{E}$ , gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+(t) &= \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}(t), & \mathbf{c}(t) \in \mathbb{E}, \quad \mathbf{Q}(t) \in SO(\mathbb{E}), \\ t^+ &= t + a, & a \in \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Repräsentiert man ein Bezugssystem  $\Phi$  durch einen Bezugspunkt und eine Basis des  $\mathbb{E}$ , z.B. durch  $\Phi = (\mathbf{p}, \{\mathbf{e}_i\})$ , so erzeugt der Bezugssystemwechsel

(1.3.3) ein Bezugssystem  $\Phi^+ = (\mathbf{p}^+, \{\mathbf{e}_i^+\})$ , gegeben durch

$$\mathbf{p}^+(t) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{p} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_i^+(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}_i.$$

Die Zeittranslation  $t^+ = t + a$  soll im folgenden unberücksichtigt bleiben. Man betrachte nun eine lokale Deformation, dargestellt durch den Deformationsgradienten  $\mathbf{F} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ . Bei Bezugssystemwechsel transformiert sich der Deformationsgradient entsprechend

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{E}, \bullet) & \xrightarrow{\mathbf{Q}(t)} & (\mathbb{E}, \bullet) \\ \uparrow \mathbf{F}(t) & & \uparrow \mathbf{F}^+(t) := \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(t)\mathbf{Q}_0^\top \\ (\mathbb{E}, \bullet) & \xrightarrow{\mathbf{Q}_0 := \mathbf{Q}(t_0)} & (\mathbb{E}, \bullet) \end{array}$$

Für die Momentan- und Referenzkonfiguration gelten die Transformationen (1.3.3) jeweils zu den Zeitpunkten  $t$  und  $t_0$ , zu denen der Körper die entsprechende Konfiguration einnimmt. Die obige Darstellung des Deformationsgradienten wurde auf andere Weise bereits in (1.2.21) eingeführt. Der Tensor  $\mathbf{F}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}_0^\top$  stellt einen Deformationsgradienten zwischen der Referenzplatzierung  $\mathcal{P}_0^+$  und der Momentanplatzierung  $\mathcal{P}^+$  dar.

Nun sei  $\psi(\mathbf{F})$  die spezifische Formänderungsenergie eines hyperelastischen Materiales. Bei Beobachterwechsel geht  $\psi(\mathbf{F})$  in die Darstellung  $\psi(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}_0)$  über. Dieses ist die Formänderungsenergie im Bezugssystem  $\Phi^+$ . Ein Tensor  $\mathbf{A}$  in der Referenzkonfiguration bezüglich  $\Phi$  geht in einen Tensor  $\mathbf{Q}_0 \triangleright (\mathbf{A})$  in der Referenzkonfiguration bezüglich  $\Phi^+$  über. Entsprechend erhält man für die materielle Zeitableitung  $\dot{\mathbf{A}}$  bezüglich  $\Phi$  nun die Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}_0} \mathbf{A}$  bezüglich  $\Phi^+$ . In Tab. 1.1 sind jene Beziehungen aufgeführt, die sich bei spezieller Wahl der Bezugssysteme ergeben. Bezieht man die oben dargestellten

i	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{Q}_0$	$\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}_0^\top$	$\psi(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}_0^\top)$	$\mathcal{L}_{\mathbf{Q}_0}(\mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{Q}_0^\top)$
(1)	$\mathbf{I}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{F}$	$\psi(\mathbf{F})$	$\dot{\mathbf{F}}$
(2)	$\mathbf{I}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{F}\mathbf{R}^\top = \mathbf{V}$	$\psi(\mathbf{V})$	$\mathcal{L}_{\mathbf{R}}\mathbf{V}$
(3)	$\mathbf{R}^\top$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{R}^\top\mathbf{F} = \mathbf{U}$	$\psi(\mathbf{U})$	$\dot{\mathbf{U}}$

Tabelle 1.1: Wechsel zwischen starren Bezugssystemen

Ausführungen über leistungskonjugierte Spannungs- und Dehnungsmaße in

die Betrachtung ein, so wird klar, daß die Beziehung

$$\mathfrak{p} = \frac{\partial \psi(\mathbf{F}^+)}{\partial \mathbf{F}^+} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{Q}_0} \mathbf{F}^+, \quad \text{mit } \mathbf{F}^+ = \mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{Q}_0 \quad (1.3.4)$$

die Spannungsleistung in bezug auf den Beobachter  $\Phi^+$  darstellt. Die Rate  $\mathcal{L}_{\mathbf{Q}_0} \mathbf{F}^+$  ergibt dabei die objektive Zeitableitung im Bezugssystem  $\Phi^+$ .

Für die Formänderungsenergie wird nun folgendes Prinzip aufgestellt:

**Prinzip der Forminvarianz:** Die funktionale Form der Formänderungsenergie  $\psi$  ist für alle starren Bezugssysteme (1.3.3) gleich (siehe auch BERTRAM [19](S.181)).

Setzt man Forminvarianz voraus, so gilt

- (a) Die Formänderungsenergie  $\psi$  ist isotrop, wenn sie invariant gegenüber Bezugssystemwechsel zum Zeitpunkt  $t_0$  ist. Da ein solcher Wechsel eine Drehung der Referenzkonfiguration beschreibt, bedeutet diese Bedingung, daß die Formänderungsenergie invariant gegenüber Drehungen der Referenzkonfiguration ist. Dies ist die klassische Definition eines isotropen Materialverhaltens.
- (b) Die Formänderungsenergie  $\psi$  ist objektiv, wenn sie invariant gegenüber Bezugssystemwechsel zum momentanen Zeitpunkt ist. Dieses bedeutet aber gerade  $\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{Q}\mathbf{F})$  und stellt somit die klassische Objektivitätsbedingung für eine skalarwertige Funktion dar.

In Tabelle Tab. 1.1 sind folgende Spezialfälle unterschieden:

- (1)  $\Phi^+$  ist das Ausgangsbezugssystem  $\Phi$ . Die Drehungen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{Q}_0$  sind gleich  $\mathbf{I}$ . Aus (a) und (b) folgt, daß diese Darstellung weder isotrop noch objektiv ist. Nimmt man die Spannungsleistung  $\rho_0 \mathfrak{p} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}}$  zu Hilfe, so gilt mit (1.3.4) die Beziehung

$$\rho_0 \mathfrak{p} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \rho_0 \frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \cdot \dot{\mathbf{F}}, \quad \text{daraus folgt } \mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}.$$

- (2) Zum Zeitpunkt  $t_0$  ist  $\Phi^+$  ein mitgedrehtes Bezugssystem, wobei die Drehung  $\mathbf{R}$  aus der polaren Zerlegung von  $\mathbf{F}$  stammt. Aus (a) und (b) folgt, daß die Darstellung  $\psi(\mathbf{V})$  isotrop, aber nicht objektiv ist. Die

Zeitableitung relativ zum Bezugssystem ist  $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\cdot)$ . Für die Rate  $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}\mathbf{V}$  findet man

$$\mathcal{L}_{\mathbf{R}}\mathbf{V} = \mathbf{R}((\mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R})\cdot)\mathbf{R}^T = \dot{\mathbf{V}} + \boldsymbol{\omega}^T\mathbf{V} + \mathbf{V}\boldsymbol{\omega}, \quad \text{mit } \boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T.$$

Im isotropen Fall gilt demnach  $\rho\mathbf{p} = \check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\mathbf{V}$ . Damit erhält man aus (1.3.4)

$$\rho\mathbf{p} = \check{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\mathbf{V} = \rho \frac{\partial\psi(\mathbf{V})}{\partial\mathbf{V}} \cdot \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\mathbf{V}, \quad \text{woraus folgt } \check{\boldsymbol{\sigma}} = \rho \frac{\partial\psi(\mathbf{V})}{\partial\mathbf{V}}.$$

- (3) Zum Zeitpunkt  $t$  stellt  $\Phi^+$  ein um  $\mathbf{R}$  zurückgedrehtes Bezugssystem dar. Die Referenzkonfigurationen stimmen überein, so daß die materielle Zeitableitung auch objektive Zeitableitung in  $\Phi$  ist. Aus (a) und (b) folgt, daß die Darstellung  $\psi(\mathbf{U})$  objektiv, aber nicht isotrop ist. Für die Deformationsrate  $\dot{\mathbf{U}}$  findet man die Beziehung

$$\dot{\mathbf{C}} = (\mathbf{U}\mathbf{U})\cdot = \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U} + \mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}.$$

Benutzt man nun  $\rho_0\mathbf{p} = \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot (\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U} + \mathbf{U}\dot{\mathbf{U}})$ , so erhält man aus (1.3.4)

$$\rho_0\mathbf{p} = \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot (\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U} + \mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}) = \rho_0 \frac{\partial\psi(\mathbf{U})}{\partial\mathbf{U}} \cdot \dot{\mathbf{U}},$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} \rho_0\mathbf{p} &= \frac{1}{2}\mathbf{S} \cdot (\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U} + \mathbf{U}\dot{\mathbf{U}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{S}\mathbf{U}^T \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{U}^T\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{U}}) \\ &= (\mathbf{U}\mathbf{S}) \cdot \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{R}^T\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{T}_{Biot} \cdot \dot{\mathbf{U}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_{Biot} = \rho_0 \frac{\partial\psi(\mathbf{U})}{\partial\mathbf{U}}.$$

Leztere Beziehung stellt eine objektive konstitutive Beziehung für anisotrope Materialien dar.

Die hier gezeigten Beispiele können natürlich auf beliebige starre Bezugssysteme erweitert werden. Wesentlich ist dabei nur, daß die Transformationen zwischen den Bezugssystemen durch orthogonale Abbildungen erzeugt werden. Der Bezugssystemwechsel muß also den Bedingungen (1.3.3) genügen.

Als weitere Beispiele kommen hier u.a. die Rotation  $\mathbf{P}$  aus der Jaumann-Rate, die Rotation  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^e \mathbf{R}^p$  der Green-Naghdi-Rate in der finiten Elasto-Plastizitätstheorie, sowie die Rotation der von SCHIECK & STUMPF [98] aufgestellten Rate in Betracht. Solche Bezugssysteme erlauben eine klassische Formulierung der konstitutiven Gesetze.

Nun betrachte man die folgende, in der Kontinuumsmechanik oft gebrauchte Formulierung: „Der Cauchysche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  ist ein Spannungstensor, der auf die verformte Basis  $\{\mathbf{g}_a\}$  bezogen ist,“ oder auch: „Die Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_{\mathbf{f}}\mathbf{e}$  ist die objektive Zeitableitung des Almansischen Dehnungstensors in bezug auf die verformte Basis  $\{\mathbf{g}_a\}$ .“

Solche und ähnliche Formulierungen findet man sehr häufig. Sie deuten an, daß die verformte Basis  $\{\mathbf{g}_a\}$  als ein (lokales) „Bezugssystem“ für die Beschreibung mechanischer Vorgänge dienen soll. Die Basis  $\{\mathbf{g}_a\}$  kann aber kein Bezugssystem im klassischen Sinne (1.3.3) darstellen, da die entsprechenden Transformationen bei Bezugssystemwechsel affin und somit nicht isometrisch sind.

Aus diesem Dilemma kann man sich befreien, indem die Klasse der zulässigen Bezugssysteme erweitert wird. Es wird nun gezeigt, daß diese Erweiterung direkt auf die Formulierung der Doyle-Ericksen-Gleichung und ihrer Varianten führt.

### 3.2 Kovariante Bezugssysteme

Man betrachte nun den Vektorraum  $\mathbb{E}$  ohne seine Euklidische Struktur, d.h. ohne sein inneres Produkt. Auf  $\mathbb{E}$  wird eine Metrik  $\mathbf{G}$  definiert. Ein kovarianter Bezugssystemwechsel ist eine Abbildung des  $(\mathbb{E}, \mathbf{G})$  in den  $(\mathbb{E}, \mathbf{G}^+)$ , so daß gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+(t) &= \mathbf{c}(t) + \boldsymbol{\Xi}(t)\mathbf{x}(t), & \mathbf{c}(t) \in \mathbb{E}, \quad \boldsymbol{\Xi}(t) \in Iso(\mathbb{E}; \mathbb{E}), \\ \mathbf{G}^+(t) &= \boldsymbol{\Xi}(t)_\flat \mathbf{G}(t), & \\ t^+ &= t + a, & a \in \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Dieser Bezugssystemwechsel ist nun gerade eine affine Transformation auf dem Raum  $\mathbb{E}$ . Wie man sich aber leicht überzeugen kann, werden bei dieser affinen Transformation Längen und Winkel beim Übergang von  $(\mathbb{E}^3, \mathbf{G})$  nach  $(\mathbb{E}^3, \mathbf{G}^+)$  nicht verändert. Diese Transformation ist somit isometrisch,

was allein daran liegt, daß die Metriken in der gleichen Weise transformiert werden wie der gesamte Raum. Wendet man den Bezugssystemwechsel jeweils auf die Referenzplatzierung und die Momentanplatzierung an, so ergibt sich das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{E}, \mathbf{g}) & \xrightarrow{\Xi(t)} & (\mathbb{E}, \mathbf{g}^+) \\
 \uparrow \mathbf{F}(t) & & \uparrow \mathbf{F}^+ = \Xi(t)\mathbf{F}(t)\Xi_0^{-1} \\
 (\mathbb{E}, \mathbf{G}) & \xrightarrow{\Xi_0 := \Xi(t_0)} & (\mathbb{E}, \mathbf{G}^+)
 \end{array} \quad (1.3.6)$$

Die Formänderungsenergie  $\psi$  muß als Funktion des Deformationsgradienten und der Metriken definiert werden. Ihre funktionale Form ist dann durch

$$\psi(\mathbf{F}, \mathbf{g}, \mathbf{G}) \quad (1.3.7)$$

gegeben, was genau (1.3.1) entspricht. Wie kann man sich die Abhängigkeit der Formänderungsenergie von den Metriken vorstellen?

Für ein Hookesches Material findet man beispielsweise die Formänderungsenergie

$$\psi = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)I_{\mathbf{E}}^2 - 2\mu II_{\mathbf{E}},$$

worin die beiden Invarianten nun durch

$$I_{\mathbf{E}} = \langle \mathbf{G}^{-1}, \mathbf{E} \rangle \quad \text{und} \quad II_{\mathbf{E}} = \langle \mathbf{G}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{G}^{-1}, \mathbf{E} \rangle$$

gegeben sind. Man beachte, daß hier im klassischen Fall  $I_{\mathbf{E}} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{E}$  gilt. Die hier gezeigte Formänderungsenergie ist gegenüber den Transformationen (1.3.5) invariant. Es gilt z.B. für  $I_{\mathbf{E}}$

$$I_{\mathbf{E}}^+ = \langle (\mathbf{G}^+)^{-1}, \mathbf{E}^+ \rangle = \langle \Xi_0 \mathbf{G}^{-1} \Xi_0^*, \Xi_0^{-*} \mathbf{E} \Xi_0^{-1} \rangle = \langle \mathbf{G}^{-1}, \mathbf{E} \rangle = I_{\mathbf{E}}.$$

Gleiches findet man für  $II_{\mathbf{E}}$ , womit die Invarianz bestätigt ist.

Wie bei den starren Bezugssystemen stellt man nun folgendes Prinzip auf:

**Prinzip der Forminvarianz:** Die funktionale Form der Formänderungsenergie  $\psi(\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{g})$  ist für alle kovarianten Bezugssysteme (1.3.5) gleich.

Für eine spezielle Auswahl von Abbildungen  $\Xi$  und  $\Xi_0$  werden nun Interpretationen gegeben:

(1) Setzt man  $\Xi_0 = \mathbf{F}$  und  $\Xi = \mathbf{I}$ , so bedeutet dies, daß ein Bezugssystem ausgewählt wird, welches sich mit der Basis  $\{\mathbf{g}_a\}$  bewegt. Für ein solches Bezugssystem gilt

Abbildungen:	$\Xi = \mathbf{I}$ und $\Xi_0 = \mathbf{F}$ ,	
Metriken:	$\mathbf{g}^+ := \Xi_{\triangleright}(\mathbf{g}) = \mathbf{g}$ ,	
	$\mathbf{G}^+ := \Xi_{0\triangleright}(\mathbf{G}) = \mathbf{F}_{\triangleright}(\mathbf{G}) = \mathbf{c}$ ,	
Deformationsgradient:	$\mathbf{F}^+ := \Xi \mathbf{F} \Xi_0^{-1} = \mathbf{I} \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}$ ,	
Formänderungsenergie:	$\psi(\mathbf{F}^+, \mathbf{g}^+, \mathbf{G}^+) = \psi(\mathbf{I}, \mathbf{g}, \mathbf{c})$ ,	
objektive Zeitableitung:	$\mathcal{L}_{\Xi_0} \mathbf{g}^+ = \mathcal{L}_{\mathbf{F}} \mathbf{g}$ ,	(1.3.8)
Spannungsleistung:	$\rho \mathfrak{p} = \rho \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}}, \mathcal{L}_{\mathbf{F}} \mathbf{g} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{L}_{\mathbf{F}} \mathbf{g} \rangle$ ,	
konstitutive Beziehung:	$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}}$ .	

Die Doyle-Ericksen-Formel  $\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}}$  ergibt sich also, wenn man die mitbewegte Basis  $\{\mathbf{g}_a\}$  als Bezugssystem verwendet. Man beachte, daß die Lie-Ableitungen  $\mathcal{L}_{\mathbf{F}} \mathbf{c}$  und  $\mathcal{L}_{\mathbf{F}} \mathbf{I}$  null sind. Dieses gilt im weiteren für alle Ableitungen  $\mathcal{L}_{\Xi_0}(\Xi_{0\triangleright} \mathbf{G})$  und  $\mathcal{L}_{\Xi_0} \mathbf{I}$ , so daß in der Spannungsleistung immer nur eine Rate, nämlich  $\mathcal{L}_{\Xi_0}(\Xi_{\triangleright} \mathbf{g})$ , auftreten wird.

(2) Wählt man  $\Xi_0 = \mathbf{I}$  und  $\Xi = \mathbf{F}^{-1}$ , so ist das Bezugssystem der Basis  $\{\mathbf{G}_A\}$  angeheftet. Man findet

Abbildungen:	$\Xi = \mathbf{F}^{-1}$ und $\Xi_0 = \mathbf{I}$ ,	
Metriken:	$\mathbf{g}^+ := \Xi_{\triangleright}(\mathbf{g}) = (\mathbf{F}^{-1})_{\triangleright} \mathbf{g} = \mathbf{C}$ ,	
	$\mathbf{G}^+ := \Xi_{0\triangleright}(\mathbf{G}) = \mathbf{I}_{\triangleright}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$ ,	
Deformationsgradient:	$\mathbf{F}^+ := \Xi \mathbf{F} \Xi_0^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{I} = \mathbf{I}$ ,	
Formänderungsenergie:	$\psi(\mathbf{F}^+, \mathbf{g}^+, \mathbf{G}^+) = \psi(\mathbf{I}, \mathbf{C}, \mathbf{G})$ ,	(1.3.9)
objektive Zeitableitung:	$\mathcal{L}_{\Xi_0} \mathbf{g}^+ = \dot{\mathbf{C}}$ ,	
Spannungsleistung:	$\rho_0 \mathfrak{p} = \rho_0 \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}, \dot{\mathbf{C}} \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{S}, \dot{\mathbf{C}} \rangle$ ,	
konstitutive Beziehung:	$\mathbf{S} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}}$ .	

Dieses ist die klassische Lagrangesche Darstellung des hyperelastischen Materialgesetzes. Das Bezugssystem stimmt hier gerade mit der Referenzkonfiguration überein.

(3) Setzt man nun  $\Xi_0 = \mathbf{R}$  und  $\Xi = \mathbf{V}^{-1}$ , so heftet man das Bezugssystem der Basis  $\{\check{\mathbf{g}}_a\}$  an. Dieses ist nun ein mitgedrehtes Bezugssystem. Hier findet man

Abbildungen:	$\Xi = \mathbf{V}^{-1}$ und $\Xi_0 = \mathbf{R}$ ,	(1.3.10)
Metriken:	$\mathbf{g}^+ := \Xi_{\triangleright}(\mathbf{g}) = (\mathbf{V}^{-1})_{\triangleright}\mathbf{g} = \check{\mathbf{g}}$ , $\mathbf{G}^+ := \Xi_{0\triangleright}(\mathbf{G}) = \mathbf{R}_{\triangleright}(\mathbf{G}) = \mathbf{g}$ ,	
Deformationsgradient:	$\mathbf{F}^+ := \Xi\mathbf{F}\Xi_0^{-1} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}$ ,	
Formänderungsenergie:	$\psi(\mathbf{F}^+, \mathbf{g}^+, \mathbf{G}^+) = \psi(\mathbf{I}, \check{\mathbf{g}}, \mathbf{g})$ ,	
objektive Zeitableitung:	$\mathcal{L}_{\Xi_0}\mathbf{g}^+ = \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\check{\mathbf{g}}$ ,	
Spannungsleistung:	$\rho\mathbf{p} = \rho\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial\check{\mathbf{g}}}, \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\check{\mathbf{g}} \right\rangle = \frac{1}{2}\langle \check{\boldsymbol{\sigma}}, \mathcal{L}_{\mathbf{R}}\check{\mathbf{g}} \rangle$ ,	
konstitutive Beziehung:	$\check{\boldsymbol{\sigma}} = 2\rho\frac{\partial\psi}{\partial\check{\mathbf{g}}}$ .	

Diese konstitutive Beziehung kann in klassischer Form als  $\check{\boldsymbol{\sigma}} = 2\rho\frac{\partial\psi}{\partial\check{\mathbf{g}}}$  geschrieben werden. Sie bildet eine Grundgleichung für isotrope hyperelastische Materialien und kann u.a. in TRUESDELL & NOLL [121] und WANG & TRUESDELL [123] gefunden werden.

(4) Wählt man  $\Xi = \mathbf{R}^{-1}$  und  $\Xi_0 = \mathbf{U}$ , so entspricht das Bezugssystem der Basis  $\{\hat{\mathbf{G}}_A\}$ . Die entsprechende Formulierung lautet nun

Abbildungen:	$\Xi = \mathbf{R}^{-1}$ und $\Xi_0 = \mathbf{U}$ ,
Metriken:	$\mathbf{g}^+ := \Xi_{\triangleright}(\mathbf{g}) = (\mathbf{R}^{-1})_{\triangleright}\mathbf{g} = \mathbf{G}$ , $\mathbf{G}^+ := \Xi_{0\triangleright}(\mathbf{G}) = \mathbf{U}_{\triangleright}(\mathbf{G}) = \hat{\mathbf{G}}$ ,
Deformationsgradient:	$\mathbf{F}^+ := \Xi\mathbf{F}\Xi_0^{-1} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}$ ,
Formänderungsenergie:	$\psi(\mathbf{F}^+, \mathbf{g}^+, \mathbf{G}^+) = \psi(\mathbf{I}, \mathbf{G}, \hat{\mathbf{G}})$ ,
objektive Zeitableitung:	$\mathcal{L}_{\Xi_0}\mathbf{g}^+ = \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G}$ ,
Spannungsleistung:	$\rho_0\mathbf{p} = \rho_0\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{G}}, \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G} \right\rangle = \frac{1}{2}\langle \hat{\mathbf{S}}, \mathcal{L}_{\mathbf{U}}\mathbf{G} \rangle$ ,
konstitutive Beziehung:	$\hat{\mathbf{S}} = 2\rho_0\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{G}}$ .

Diese Beziehung kann in der Literatur nicht gefunden werden. Ihr kommt aber eine Bedeutung zu, da der Spannungstensor  $\hat{\mathbf{S}}$  bei Isotropie zu  $\mathcal{L}_{\ominus}\ln(\mathbf{U})$

konjugiert ist. Die Beziehung  $\hat{\mathbf{S}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\mathbf{G}}}$  liefert ein entsprechendes konstitutives Gesetz.

(5) Setzt man nun  $\Xi = \mathbf{UR}^{-1}$  und  $\Xi_0 = \mathbf{UU}$ , so wird die Basis  $\{\hat{\mathbf{G}}_A\}$  als Bezugssystem benutzt. Es ergibt sich

Abbildungen:	$\Xi = \mathbf{UR}^{-1}$ und $\Xi_0 = \mathbf{UU}$ ,
Metriken:	$\mathbf{g}^+ := \Xi_{\triangleright}(\mathbf{g}) = (\mathbf{UR}^{-1})_{\triangleright} \mathbf{g} = \hat{\mathbf{G}}$ , $\mathbf{G}^+ := \Xi_{0\triangleright}(\mathbf{G}) = (\mathbf{UU})_{\triangleright} \mathbf{G} = \hat{\hat{\mathbf{G}}}$ ,
Deformationsgradient:	$\mathbf{F}^+ := \Xi \mathbf{F} \Xi_0^{-1} = \mathbf{UR}^{-1} \mathbf{FU}^{-1} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}$ ,
Formänderungsenergie:	$\psi(\mathbf{F}^+, \mathbf{g}^+, \mathbf{G}^+) = \psi(\mathbf{I}, \hat{\mathbf{G}}, \hat{\hat{\mathbf{G}}})$ ,
objektive Zeitableitung:	$\mathcal{L}_{\Xi_0} \mathbf{g}^+ = \mathcal{L}_{\mathbf{UU}} \hat{\mathbf{G}} = -\dot{\hat{\mathbf{G}}}$ ,
Spannungsleistung:	$\rho_0 \mathfrak{p} = -\rho_0 \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\mathbf{G}}}, \dot{\hat{\mathbf{G}}} \right\rangle = -\frac{1}{2} \langle \hat{\mathbf{S}}, \dot{\hat{\mathbf{G}}} \rangle$ ,
konstitutive Beziehung:	$\hat{\mathbf{S}} = -2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \hat{\mathbf{G}}}$ .

Diese konstitutive Beziehung für den konvektiven Spannungstensor findet man in TRUESDELL & NOLL [121]. In der klassischen Schreibweise ist  $\hat{\mathbf{G}}$  durch  $\mathbf{B}$  zu ersetzen.

(6) Schließlich wird  $\Xi = \mathbf{V}$  und  $\Xi_0 = \mathbf{VF}$  eingesetzt. Das Bezugssystem ist nun an die Basis  $\{\hat{\mathbf{g}}_a\}$  gekoppelt und man findet

Abbildungen:	$\Xi = \mathbf{V}$ und $\Xi_0 = \mathbf{VF}$ ,
Metriken:	$\mathbf{g}^+ := \Xi_{\triangleright}(\mathbf{g}) = (\mathbf{V})_{\triangleright} \mathbf{g} = \mathbf{c}$ , $\mathbf{G}^+ := \Xi_{0\triangleright}(\mathbf{G}) = (\mathbf{VF})_{\triangleright} \mathbf{G} = \hat{\mathbf{c}}$ ,
Deformationsgradient:	$\mathbf{F}^+ := \Xi \mathbf{F} \Xi_0^{-1} = \mathbf{VF}(\mathbf{VF})^{-1} = \mathbf{I}$ ,
Formänderungsenergie:	$\psi(\mathbf{F}^+, \mathbf{g}^+, \mathbf{G}^+) = \psi(\mathbf{I}, \mathbf{c}, \hat{\mathbf{c}})$ ,
objektive Zeitableitung:	$\mathcal{L}_{\Xi_0} \mathbf{g}^+ = \mathcal{L}_{\mathbf{VFC}} = -\mathcal{L}_{\mathbf{RC}}$ ,
Spannungsleistung:	$\rho \mathfrak{p} = -\rho \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{c}}, \mathcal{L}_{\mathbf{RC}} \right\rangle = -\frac{1}{2} \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathcal{L}_{\mathbf{RC}} \rangle$ ,
konstitutive Beziehung:	$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = -2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{c}}$ .

Diese Beziehung ist von SANSOUR [94] als konstitutives Gesetz für eine räumliche Beschreibung eingeführt worden. Man erkennt, daß eine solche räumliche Beschreibung auf die Basisvektoren  $\hat{\mathbf{g}}_a$  bezogen ist.

Aus diesen Beispielen sieht man sehr deutlich, daß man für die Doyle-Ericksen-Gleichung und ihre Varianten eine einfache Interpretation findet, wenn ein kovarianter Bezugssystemwechsel (1.3.5) zugelassen wird. Damit kommt auch den Metriken eine wesentliche Bedeutung zu. Sie bewirken, daß die Abbildungen zwischen den metrischen Vektorräumen isometrisch bleiben, obwohl die eigentliche Transformation  $(1.3.5)_1$  affin ist. Somit sind auch beliebig mitbewegte Bezugssysteme erlaubt. Die Zeitableitung bezüglich solcher Bezugssysteme ist durch die entsprechende Lie-Ableitung gegeben. Die Doyle-Ericksen-Gleichung stellt dann nichts anderes als die Formulierung der Beziehung  $\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}$  bezüglich der mitbewegten Basis  $\{\mathbf{g}_a\}$  dar. Die klassischen Transformationsgleichungen der starren Bezugssysteme sind in den kovarianten Transformationsgleichungen als Sonderfälle enthalten.

Das hier vorgestellte Konzept der kovarianten Bezugssysteme ist neu und stellt ein wichtiges Hilfsmittel zur kinematischen Beschreibung von Deformationen dar. Es ermöglicht, die Bedeutung der Metriken in der Formänderungsenergie zu verstehen und hat direkte Anwendung auf aktuelle Fragestellungen in der Kontinuumsmechanik. So ist z.B. die Formulierung von Stoffgesetzen auf der Zwischenkonfiguration einer finiten elasto-plastischen Deformation mit diesem Konzept möglich.

## 4 Grundgleichungen nichtlinearer thermo-mechanischer Kontinua

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Grundgleichungen nichtlinearer thermo-mechanischer Kontinua zusammengestellt. Es wird gezeigt warum konstitutive Beziehungen aufgestellt werden müssen und welchen Prinzipien diese gehorchen. Aus den Objektivitäts- und Symmetriebedingungen werden jene Eigenschaften isotroper Materialien erklärt, die in den letzten Abschnitten bereits zur Anwendung kamen.

### 4.1 Zustandsvariablen

Der thermodynamische Gleichgewichtszustand eines Kontinuums ohne Mikrostruktur ist durch die Angabe der 3 Felder

- (1) Massendichte  $\rho(\mathbf{X}, t)$ ,
- (2) Ortsvektor  $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ ,
- (3) Temperatur  $\theta(\mathbf{X}, t)$

vollständig bestimmt. Diese Felder sind in einem Bezugssystem  $\Phi$  definiert und können in materieller, referentieller oder räumlicher Beschreibung dargestellt werden. Das Ziel einer thermo-mechanischen Kontinuumstheorie ist die Bestimmung dieser Felder (siehe MÜLLER [74]). Die Feldgrößen  $\{\rho, \mathbf{x}, \theta\}$  heißen Zustandsvariablen des thermo-mechanischen Systems. Die Angabe eines Satzes von Zustandsvariablen legt das physikalische Modell eines realen Systems fest. Die allgemeinen und konstitutiven Feldgleichungen können immer nur im Rahmen eines solchen Modelles erstellt werden. Im nächsten Kapitel wird die Auswahl von Zustandsvariablen eine wichtige Rolle bei der Bildung von Mikrostrukturmodellen spielen.

Verzichtet man auf die Betrachtung thermischer Eigenschaften eines Systems, so sind die Zustandsvariablen  $\{\rho, \mathbf{x}\}$  ausreichend. Durch Verwendung einer referentiellen Beschreibung und unter Einbeziehung des Massenerhaltungssatzes kann man die Zustandsvariablen  $\{\rho, \mathbf{x}\}$  gewöhnlich auf  $\{\mathbf{x}\}$  reduzieren. Das Massendichtefeld ist dann nicht mehr Gegenstand der Betrachtungen. Eine solche Vorgehensweise wird u.a. im 2.Kapitel angewendet.

## 4.2 Thermo-mechanische Bilanzgleichungen

Um die 3 Felder  $\{\rho, \mathbf{x}, \theta\}$  zu bestimmen, werden in der Kontinuumsmechanik 4 allgemeine Feldgleichungen postuliert. Diese Feldgleichungen heißen *allgemein*, weil sie für alle Materialien in der jeweiligen Modellklasse gelten. Dieses bedeutet nicht, daß sie universell sind. Die Gültigkeit der hier vorgestellten Feldgleichungen ist auf die Modellvorstellung eines thermo-mechanischen Kontinuums beschränkt.

Im folgenden sind die Felder  $\{\rho, \mathbf{x}, \theta\}$  in räumlicher Beschreibung dargestellt, d.h. die Felder sind über der momentanen Plazierung  $\mathcal{P}$  eines materiellen Körpers definiert. Die allgemeinen Feldgleichungen lauten:

## (i) Massenerhaltungssatz

$$\begin{aligned} m(\mathcal{P}) &= \int_{\mathcal{P}} \rho dv \\ \dot{m}(\mathcal{P}) &= 0 \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Die Größe  $m(\mathcal{P})$  heißt Masse des Körpers  $\mathcal{P}$ . Der Massenerhaltungssatz besagt, daß sich die Masse eines Körper während eines thermo-mechanischen Prozesses nicht ändert. Gleichung (1.4.1) gilt auch für beliebige Teilkörper. Ist das Dichtefeld genügend glatt, so kann man aus (1.4.1) die Kontinuitätsgleichung

$$0 = \dot{\rho} + \rho \operatorname{div}(\dot{\mathbf{x}})$$

folgern.

## (ii) Impulsbilanz

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\mathcal{P}) &= \int_{\mathcal{P}} \rho \dot{\mathbf{x}} dv \\ \mathfrak{F}(\mathcal{P}) &= \int_{\mathcal{P}} \mathbf{f} dv + \int_{\partial\mathcal{P}} \boldsymbol{\sigma}_n da \\ [\mathfrak{L}]_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{F} dt \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

$\mathfrak{L}(\mathcal{P})$  bezeichnet die Bewegungsgröße oder den Impuls eines Körpers  $\mathcal{P}$ , auf den die äußere Kraft  $\mathfrak{F}(\mathcal{P})$  wirkt.  $\mathbf{f}$  ist die Volumenkraftdichte,  $\boldsymbol{\sigma}_n$  die Randspannung. Die Beziehung (1.4.2)<sub>3</sub> stellt die Impulsbilanz (*engl. impulse-momentum law*, siehe ANTMAN [10]) dar. Diese gilt auch für unstetige zeitliche Verläufe der Kraft. Bei stetigen Verläufen kann man die Beziehung auf den Impulssatz  $\dot{\mathfrak{L}} = \mathfrak{F}$  reduzieren.

Durch Einführen eines Spannungstensorfeldes  $\boldsymbol{\sigma}$  läßt sich der Impulssatz auf Teilkörper  $\mathcal{P}^{sub}$  einschränken. Unter Voraussetzung des Cauchyschen Postulats  $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  auf  $\partial\mathcal{P}^{sub}$  erhält man dann den lokalen Impulssatz

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f} \quad \text{auf } \mathcal{P}^{sub}. \quad (1.4.3)$$

## (iii) Drehimpulsbilanz

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathcal{P}) &= \int_{\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \rho \dot{\mathbf{x}} dv \\ \mathfrak{T}(\mathcal{P}) &= \int_{\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \mathbf{f} dv + \int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}_n da \\ [\mathfrak{A}]_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{T} dt \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

$\mathfrak{A}(\mathcal{P})$  bezeichnet den Drehimpuls eines Körpers  $\mathcal{P}$  auf den das äußere Moment  $\mathfrak{T}(\mathcal{P})$  wirkt. Die Beziehung (1.4.4)<sub>3</sub> stellt die allgemeine Drehimpuls- oder Drallbilanz dar, die auch für unstetige Verläufe von  $\mathfrak{T}$  gilt. Setzt man hier stetige Verläufe von  $\mathfrak{T}$  voraus, so läßt sich (1.4.4)<sub>3</sub> als Drehimpulssatz  $\dot{\mathfrak{A}} = \mathfrak{T}$  schreiben. Unter Voraussetzung des Cauchyschen Postulats  $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  können (1.4.4)<sub>1,2</sub> auf beliebige Teilkörper  $\mathcal{P}^{sub}$  eingeschränkt werden. Lokal erhält man aus dem Drallsatz dann die Bedingung

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \text{auf } \mathcal{P}^{sub}. \quad (1.4.5)$$

Der Drallsatz für ein thermo-mechanisches Kontinuum ohne Mikrostruktur bedingt also die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors. Für Kontinua mit Mikrostruktur ist dieses oft nicht der Fall.

#### (iv) Energiebilanz

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(\mathcal{P}) &= \int_{\mathcal{P}} \rho e dv \\ \mathfrak{K}(\mathcal{P}) &= \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv \\ \mathfrak{P}(\mathcal{P}) &= \int_{\mathcal{P}} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv + \int_{\partial \mathcal{P}} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \dot{\mathbf{x}} da \\ \mathfrak{Q}(\mathcal{P}) &= \int_{\mathcal{P}} r dv + \int_{\partial \mathcal{P}} q_n da \\ [\mathfrak{K} + \mathfrak{E}]_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} (\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}) dt \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

$\mathfrak{E}(\mathcal{P})$  bezeichnet die innere Energie,  $\mathfrak{K}(\mathcal{P})$  die kinetische Energie,  $\mathfrak{P}(\mathcal{P})$  die zugeführte mechanische Leistung und  $\mathfrak{Q}(\mathcal{P}_{sub})$  die zugeführte Wärme eines Körpers  $\mathcal{P}$ . Die Größe  $e$  heißt spezifische innere Energie,  $r$  heißt spezifische Wärmeerzeugung, und  $q_n$  heißt Wärmezufuß. Die Gleichung (1.4.6)<sub>5</sub> stellt die allgemeine Energiebilanz dar, die auch für zeitlich unstetige Verläufe der Wärme- und Leistungszufuhr gültig ist. Für stetige Verläufe geht (1.4.6)<sub>5</sub> in den Energiesatz  $\dot{\mathfrak{E}} + \dot{\mathfrak{K}} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$  über. Für den Wärmezufuß fordert man die Gültigkeit des Cauchyschen Postulats und definiert einen Wärmestromvektor  $\mathbf{q}$ . Es gilt dann  $q_n = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  auf  $\partial \mathcal{P}^{sub}$ , wobei das Minuszeichen festlegt, daß ein nach außen gerichteter Wärmestromvektor einen Energieabfluß (negativ) bewirkt. Mit Hilfe von  $\mathbf{q}$  kann man den Energiesatz in der lokalen Form

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{d} - \text{div}(\mathbf{q}) + r \quad \text{auf } \mathcal{P}^{sub} \quad (1.4.7)$$

schreiben.

Um die allgemeinen Bilanzgleichungen auf Teilkörper  $\mathcal{P}^{sub} \subset \mathcal{P}$  einschränken und entsprechende lokale Feldgleichungen aufstellen zu können, mußten 3 neue Felder definiert werden. Diese Felder sind

- (1) der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)$ ,
- (2) der Wärmestromvektor  $\mathbf{q}(\mathbf{X}, t)$ ,
- (3) die spezifische innere Energie  $e(\mathbf{X}, t)$ .

Für den Spannungstensor bzw. den Wärmestromvektor gelten die Randbedingungen

- (a)  $\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  auf  $\partial \mathcal{P}^{sub}$ ,
- (b)  $q_n = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  auf  $\partial \mathcal{P}^{sub}$ ,

wobei auf den Außenrändern die Größen  $q_n = \overset{*}{q}$  und  $\boldsymbol{\sigma}_n = \overset{*}{\boldsymbol{\sigma}}$  vorgeschrieben werden können. Die Wärmeerzeugung  $r$  und die Volumenkraftdichte  $f$  werden als gegeben betrachtet. Neben den Randbedingungen können Anfangsbedingungen und Sprungbedingungen vorgeschrieben werden. Letztere gelten für unstetige Übergänge von Feldgrößen. Die Summe aller Rand-, Anfangs- und Sprungbedingungen wird Nebenbedingungen der allgemeinen Feldgleichungen genannt.

### 4.3 Konstitutive Beziehungen

Durch die Hinzunahme der 3 neuen Feldgrößen  $\{e, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}\}$  zu den drei Zustandsgrößen  $\{\rho, \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}\}$  ist ein unterbestimmtes Gleichungssystem entstanden. Die vorhandenen Gleichungen reichen nicht aus, um alle 6 Feldgrößen eindeutig zu bestimmen. Aus diesem Grunde postuliert man für die 3 neuen Feldgrößen  $\{e, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}\}$  konstitutive Beziehungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{f}_\sigma \Big|_{s=0}^t (\mathbf{x}(\mathbf{Y}, t-s), \rho(\mathbf{Y}, t-s), \boldsymbol{\theta}(\mathbf{Y}, t-s), \mathbf{X}, t), \\ \mathbf{q}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{f}_q \Big|_{s=0}^t (\mathbf{x}(\mathbf{Y}, t-s), \rho(\mathbf{Y}, t-s), \boldsymbol{\theta}(\mathbf{Y}, t-s), \mathbf{X}, t), \\ e(\mathbf{X}, t) &= f_e \Big|_{s=0}^t (\mathbf{x}(\mathbf{Y}, t-s), \rho(\mathbf{Y}, t-s), \boldsymbol{\theta}(\mathbf{Y}, t-s), \mathbf{X}, t), \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

welche die funktionale Abhängigkeit dieser Felder von den Zustandsvariablen angeben. Die Gleichungen (1.4.8) stellen eine allgemeine Form dieser konstitutiven Beziehungen dar. Die Funktionale haben ein Gedächtnis für die Zustandsgeschichte, da sie von dem gesamten zeitlichen Verlauf der Zustandsgrößen abhängen. Aus Gründen der Kausalität ist nur die Beschränkung  $s \leq t$  auferlegt. Ferner hängen die Funktionale von den Zustandsfeldern in nicht-lokaler Form ab, d.h. eine konstitutive Größe am Punkt  $\mathbf{X}$  kann von den Zustandsfeldern an allen Punkten  $\mathbf{Y} \in \mathcal{P}$  im Körper abhängen. Desweiteren sind die Funktionale selbst abhängig von Ort und Zeit. Dieses bedeutet, daß an verschiedenen Orten im Körper und zu verschiedenen Zeiten unterschiedliche konstitutive Beziehungen gelten können.

Die Formulierung von konstitutiven Beziehungen wird in ihrer Allgemeinheit durch drei grundsätzliche Postulate eingeschränkt:

- (1) Prinzip der Determiniertheit,
- (2) Prinzip der lokalen Wirkung,
- (3) Prinzip der materiellen Objektivität.

Diese Postulate sind in axiomatischer Form zuerst von NOLL [77] in der Theorie einfacher Materialien aufgestellt worden. Darüberhinaus gibt es noch (wenige) grundsätzlichere Aussagen, z.B. das Prinzip der Äquipräsenz von TRUESDELL, die hier aber nicht betrachtet werden. Die beiden ersten Postulate der Theorie einfacher Materialien lauten im Original (siehe TRUESDELL & NOLL [121]):

**Principle of determinism for stress:** *The stress in a body is determined by the history of the motion of that body.*

Die Gleichungen (1.4.8) sind bereits so gewählt, daß sie dieses Prinzip erfüllen.

**Principle of local action:** *In determining the stress at a given particle  $\mathbf{X}$ , the motion outside an arbitrary neighborhood of  $\mathbf{X}$  may be disregarded.*

Dieses Prinzip erlaubt, die allgemeine nicht-lokale Darstellung (1.4.8) auf eine Umgebung des Punktes  $\mathbf{X}$  zu begrenzen. Geschieht dieses durch eine Reihenentwicklung mittels Deformationsgradienten bis zur Ordnung  $n$ , z.B.

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}} \Big|_{s=0}^t (\mathbf{x}(\mathbf{X}, t - s), \text{Grad}(\mathbf{x}(\dots)), \text{Grad}^2(\mathbf{x}(\dots)), \dots),$$

so spricht man von einem Material  $n$ -ten Grades. Ein Material 1. Grades wird demnach durch die konstitutiven Beziehungen

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}} \Big|_{s=0}^t (\mathbf{x}(\mathbf{X}, t-s), \rho(\dots), \theta(\dots), \mathbf{F}(\dots), \mathbf{g}(\dots), \mathbf{X}), \\ \mathbf{q}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{f}_{\mathbf{q}} \Big|_{s=0}^t (\mathbf{x}(\mathbf{X}, t-s), \rho(\dots), \theta(\dots), \mathbf{F}(\dots), \mathbf{g}(\dots), \mathbf{X}), \\ e(\mathbf{X}, t) &= f_e \Big|_{s=0}^t (\mathbf{x}(\mathbf{X}, t-s), \rho(\dots), \theta(\dots), \mathbf{F}(\dots), \mathbf{g}(\dots), \mathbf{X}),\end{aligned}$$

mit  $\mathbf{g} = \text{Grad}(\theta)$  beschrieben. Die Feldgrößen  $\{e, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}\}$  hängen von den Zustandsgrößen  $\{\rho, \mathbf{x}, \theta\}$  nur noch über die Geschichte der Zustandsgrößen und ihrer Gradienten erster Ordnung ab. Solche Materialien bezeichnet man als *einfache* Materialien.

## 4.4 Restriktionsprinzipien

Um die sehr allgemeine Form der konstitutiven Beziehungen weiter einzuschränken, sucht man nach Restriktionsprinzipien, die für eine möglichst große Klasse von Materialien gültig sind. Dies ist u.a. Aufgabe der Materialtheorie. Ziel ist es, die allgemeine Struktur der konstitutiven Beziehungen so weit einzuschränken, bis eine geringe Anzahl von unbekanntem Parametern oder Funktionsverläufen durch experimentelle Untersuchungen bestimmbar wird.

Die wesentlichen Restriktionsprinzipien sind hierbei

- (1) das Prinzip der materiellen Objektivität,
- (2) die Entropieungleichung.

Für spezielle Klassen von Materialien kann zusätzlich noch eine Betrachtung der Symmetrie des Materialverhaltens vorgenommen werden.

### 4.4.1 Prinzip der materiellen Objektivität

Dieses wichtige Prinzip fordert, daß konstitutive Gesetze gegenüber einem Bezugssystemwechsel invariant sein müssen. Wird ein konstitutives Gesetz durch einen thermodynamischen Prozeß  $(\rho, \mathbf{x}, \theta)$  in einem Bezugssystem  $\Phi$  erfüllt, so muß dieses Gesetz auch durch jeden Äquivalenzprozeß  $(\rho^+, \mathbf{x}^+, \theta^+)$

in einem Bezugssystem  $\Phi^+$  erfüllt werden. Ein thermodynamischer Prozeß  $(\rho^+, \mathbf{x}^+, \theta^+)$  in  $\Phi^+$  heißt Äquivalenzprozeß von  $(\rho, \mathbf{x}, \theta)$  in  $\Phi$ , wenn für die Feldgrößen die Beziehungen

$$\begin{aligned}\rho^+ &= \rho, \\ \theta^+ &= \theta, \\ \mathbf{x}^+ &= \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{x}, \\ t^+ &= t - a,\end{aligned}\tag{1.4.9}$$

gelten, wobei  $\mathbf{c}(t)$  eine räumliche Translation,  $\mathbf{Q}(t)$  eine räumliche Rotation und  $a$  eine Zeitverschiebung bedeuten.

#### 4.4.2 Entropieungleichung

Unter allen thermodynamischen Prozessen  $(\rho, \mathbf{x}, \theta)$ , die die Bilanzgleichungen und konstitutiven Beziehungen erfüllen, befinden sich solche, die in der Natur nicht vorkommen oder dort nur irreversibel ablaufen. Solche Prozesse werden durch die Forderung nach einer Bilanzierung der Entropie ausgeschlossen. Die Entropieungleichung besagt

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}(\mathcal{P}) &= \int_{\mathcal{P}} \rho \eta \, dv, \\ \mathfrak{J}(\mathcal{P}) &= \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{\theta} r \, dv - \int_{\partial \mathcal{P}} \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, da, \\ [\mathfrak{H}]_{t_1}^{t_2} &\geq \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{J} \, dt,\end{aligned}\tag{1.4.10}$$

wobei  $\eta$  die spezifische Entropie ist.  $\mathfrak{H}(P)$  bezeichnet die Entropie des Körpers  $\mathcal{P}$  und  $\mathfrak{J}(\mathcal{P})$  steht für die Summe aus Entropieerzeugung und Entropiezufluß. Die Entropieungleichung (1.4.10) gilt für beliebige Zeitverläufe der Größe  $\mathfrak{J}$ . Setzt man glatte Verläufe und die Einschränkung auf Teilkörper  $\mathcal{P}^{sub}$  voraus, so kann die Entropieungleichung in der lokalen Form

$$\rho \dot{\eta} \geq \frac{1}{\theta} \mathbf{r} - \operatorname{div} \left( \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \right)$$

geschrieben werden. Die spezifische Entropie tritt hier als neue Feldgröße auf und muß aus einer konstitutiven Beziehung

$$\eta(\mathbf{X}, t) = f_{\eta} \Big|_{s=0}^t (\mathbf{x}, \mathbf{F}, \rho, \theta, \mathbf{g}, \mathbf{X})$$

bestimmt werden.

### 4.4.3 Beispiel

Die Anwendung der Entropieungleichung zur Einschränkung der Form einer konstitutiven Beziehung wird nun an einem Beispiel nachvollzogen. Hierzu wird angenommen, daß die konstitutiven Beziehungen zunächst als

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}_S(\mathbf{C}, \rho, \mathbf{g}, \theta, \dot{\theta}),$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}_q(\mathbf{C}, \rho, \mathbf{g}, \theta, \dot{\theta}),$$

$$\eta(\mathbf{X}, t) = f_\eta(\mathbf{C}, \rho, \mathbf{g}, \theta, \dot{\theta}),$$

$$e(\mathbf{X}, t) = f_e(\mathbf{C}, \rho, \mathbf{g}, \theta, \dot{\theta})$$

gegeben sind. In dieser Form erfüllen sie bereits das Prinzip der materiellen Objektivität, denn statt des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  wird hier der rechte Cauchy-Green-Deformationstensor  $\mathbf{C}$  benutzt. Die Beziehungen stellen ein einfaches Material dar, das von der Geschichte des Temperaturfeldes nur über die erste Zeitableitung  $\dot{\theta}$  abhängt. Im folgenden seien die Feldgrößen in referentieller Beschreibung gegeben, so daß  $(\dot{\phantom{x}})$  die materielle Zeitableitung der jeweiligen Feldgröße darstellt.

Die Energiebilanz und die Entropieungleichung lassen sich lokal als

$$\rho \dot{e} = \frac{\rho}{2\rho_0} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} - \operatorname{div}(\mathbf{q}) + r \quad \text{und} \quad \rho \dot{\eta} \geq \frac{1}{\theta} r - \operatorname{div}\left(\frac{1}{\theta} \mathbf{q}\right)$$

schreiben. Für den rechten Term findet man

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\theta} \mathbf{q}\right) = \frac{1}{\theta} \operatorname{div}(\mathbf{q}) - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g}.$$

Durch die Energiebilanz kann nun  $r$  in der Entropieungleichung eliminiert werden

$$\rho \theta \dot{\eta} \geq \rho \dot{e} - \frac{\rho}{2\rho_0} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g},$$

wobei man nach weiterer Umformung den Ausdruck

$$-\rho(e - \theta\eta) \cdot -\rho \dot{\theta} \eta + \frac{\rho}{2\rho_0} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad (1.4.11)$$

findet. Definiert man nun die spezifische freie Energie  $\psi := e - \theta\eta$ , so entsteht aus (1.4.11) die Ungleichung

$$-\rho \dot{\psi} - \rho \dot{\theta} \eta + \frac{\rho}{2\rho_0} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0. \quad (1.4.12)$$

Die materielle Zeitableitung der freien Energie  $\psi$  ergibt

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \cdot \dot{\mathbf{C}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \ddot{\theta}} \ddot{\theta}.$$

Setzt man dieses nun in (1.4.12) ein, so bekommt man

$$\left(-\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\rho}{2\rho_0} \mathbf{S}\right) \cdot \dot{\mathbf{C}} - \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta\right) \dot{\theta} + \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} - \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{g}} \cdot \dot{\mathbf{g}} - \frac{\partial \psi}{\partial \ddot{\theta}} \ddot{\theta} \geq 0. \quad (1.4.13)$$

Nun argumentiert man folgendermaßen: Die Ungleichung (1.4.13) muß für alle thermodynamischen Prozesse  $\{\rho, \mathbf{x}, \theta\}$  erfüllt sein. Lassen sich nun spezielle Prozesse erzeugen, die  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$  bzw.  $\mathbf{g} = \dot{\mathbf{g}} = \mathbf{0}$  bewirken, so muß auch

$$\mathbf{S} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (1.4.14)$$

gelten, damit die Ungleichung identisch erfüllt ist. In ähnlicher Weise können die weiteren Bedingungen

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \text{Grad}(\theta) \leq 0$$

gefunden werden. Die Beziehung (1.4.14) ist im Zusammenhang mit der *Doyle-Ericksen*-Gleichung schon bekannt und soll hier den Schlußpunkt dieses Beispiels bilden. Eine Fortführung solcher thermodynamischen Betrachtungen findet man u.a. in MÜLLER [74], TRUESDELL [120] oder dem hervorragenden Übersichtsartikel von HUTTER [50].

## 4.5 Abhängigkeit der konstitutiven Beziehungen von der Referenzkonfiguration

Viele konstitutive Beziehungen lassen sich mit Hilfe einer Referenzkonfiguration sehr einfach formulieren. Betrachtet man z.B. ein homogenes elastisches Material, dessen 2.Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor durch die konstitutive Beziehung

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}_S(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))$$

beschrieben wird, so ist die Abhängigkeit von der Referenzkonfiguration durch die Verwendung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  gegeben, da dieser in

bezug auf eine Referenzplatzierung  $\mathcal{P}_0$  definiert ist. Stellt nun  $\bar{\mathcal{P}}_0$  eine andere Referenzplatzierung mit Deformationsgradient  $\bar{\mathbf{F}}$  dar, so gilt

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\mathbf{P},$$

wobei  $\mathbf{P}$  den relativen Deformationsgradienten zwischen den beiden Platzierungen beschreibt. Die konstitutive Beziehung läßt sich in bezug auf die Referenzplatzierung  $\bar{\mathcal{P}}_0$  als

$$\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathbf{f}}_{\mathbf{S}}(\mathbf{F}\mathbf{P})$$

schreiben. Es gibt nun verschiedene Klassen von Materialien, für die die konstitutiven Beziehungen invariant gegenüber einem Wechsel der Referenzkonfiguration sind. Für diese Materialien gilt dann

$$\bar{\mathbf{f}}_{\mathbf{S}}(\mathbf{F}\mathbf{P}) = \mathbf{f}_{\mathbf{S}}(\mathbf{F}), \quad \forall \mathbf{P} \in \mathcal{G},$$

wobei die Transformation  $\mathbf{P}$  ein Element einer materialabhängigen Gruppe  $\mathcal{G}$  ist. Diese Gruppe wird Symmetriegruppe des betreffenden Materiales genannt. Die Materialien können nun in Klassen mit verschiedenen Symmetriegruppen eingeteilt werden. Ist  $\mathcal{G} = SO(\mathbb{E})$ , so heißt das Material isotrop. Ist  $\mathcal{G} = \{id_{\mathbb{E}}\}$ , so nennt man das Material anisotrop. Zwischen Isotropie und Anisotropie gibt es eine Vielzahl von Klassen mit geringer Symmetrie. Für Festkörper stellt die Isotropie die umfassendste Symmetriegruppe dar. Für Fluide ist dies die spezielle lineare Gruppe  $SL(\mathbb{E}) := \{\mathbf{P} \mid \det(\mathbf{P}) = 1\}$ . Das bedeutet, die konstitutiven Gleichungen eines solchen Fluids können auf jede Referenzkonfiguration mit gleicher Massendichte bezogen werden: Man nehme ein Gefäß mit Wasser, messe den Wasserdruck an einer bestimmten Stelle, rühre das Wasser durch und messe dann erneut: Besitzt die Flüssigkeit die Symmetriegruppe  $SL(\mathbb{E})$ , so ergeben beide Messungen keinen Unterschied.

#### 4.5.1 Objektivität und Isotropie

Für die häufig vorkommenden isotropen Materialien soll kurz gezeigt werden, welche Einschränkungen der konstitutiven Beziehungen durch Objektivität und Isotropie entstehen. Ein einfaches, homogenes, elastisches Material wird durch die konstitutive Beziehung

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F})$$

beschrieben. Ist das Material isotrop, so gilt

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{F}) = \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{F}\mathbf{Q}), \quad \forall \mathbf{Q} \in SO(\mathbb{E}). \quad (1.4.15)$$

Die Gleichung (1.4.15) muß für beliebige Rotationen  $\mathbf{Q}$  gelten. Speziell kann man hier  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^\top$  setzen, wobei  $\mathbf{R}$  der Rotationstensor aus der polaren Zerlegung  $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$  ist. Dann folgt mit (1.4.15) die Bedingung  $\mathbf{f}_\sigma(\mathbf{V}\mathbf{R}) = \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{V})$ . Diese kann nur erfüllt sein, wenn

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{V}) \quad (1.4.16)$$

gilt. Wendet man auf die Beziehung (1.4.16) nun das Prinzip der materiellen Objektivität an, so ist zu fordern

$$\mathbf{Q}\mathbf{f}_\sigma(\mathbf{V})\mathbf{Q}^\top = \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^\top). \quad (1.4.17)$$

Ein isotropes Material muß daher über eine isotrope Tensorfunktion  $\mathbf{f}_\sigma$  vom linken Strecktensor  $\mathbf{V}$  abhängen. Eine solche Tensorfunktion wird allgemein durch

$$\mathbf{f}_\sigma(\mathbf{V}) = \phi_0(I_V, II_V, III_V)\mathbf{I} + \phi_1(I_V, II_V, III_V)\mathbf{V} + \phi_2(I_V, II_V, III_V)\mathbf{V}^2$$

dargestellt, wobei die skalaren Größen  $\phi_i$  Funktionen der Hauptinvarianten von  $\mathbf{V}$  sein können. Die Form (1.4.17) bedingt ferner, daß  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\mathbf{V}$  kollinear sind, d.h., sie besitzen die gleichen Hauptachsen und es gilt  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{V} = \mathbf{V}\boldsymbol{\sigma}$ . Ein ähnliches Resultat läßt sich für den 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor  $\mathbf{S}$  und den rechten Strecktensor  $\mathbf{U}$  herleiten.

## Kapitel II

# Ein allgemeines Prinzip der virtuellen Arbeit

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einführung</b> . . . . .	<b>94</b>
<b>2</b>	<b>Grundlegende Struktur</b> . . . . .	<b>96</b>
2.1	Basismannigfaltigkeit . . . . .	96
2.2	Zustandsmannigfaltigkeit . . . . .	97
2.3	Konfigurationsraum . . . . .	98
2.4	Globale Kräfte, globale virtuelle Arbeit . . . . .	99
2.5	Lokale Kräfte . . . . .	99
2.5.1	Lokale Konfiguration, Spannungen . . . . .	101
2.6	Kompatibilität von lokaler und globaler virtueller Arbeit	103
2.7	Invarianzbedingungen . . . . .	104
2.8	Beschreibung einer allgemeinen Methode zur Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen für Kontinua mit Mikrostruktur . . . . .	106
2.9	Formale Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	108
<b>3</b>	<b>Anwendung auf die Kontinuumsmechanik</b> . . . . .	<b>110</b>
3.1	Nichtlineare Elastodynamik . . . . .	110
3.1.1	(M1) Geometrische and physikalische Struktur . . . . .	110
3.1.2	(M2) Nicht-Lokalität der Abbildung . . . . .	111
3.1.3	(M3) Lokale virtuelle Arbeit . . . . .	111
3.1.4	(M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	113
3.1.5	(M5) Invarianzbedingungen . . . . .	115
3.2	Wärmeübertragung in kontinuierlichen Körpern . . . . .	118

3.2.1	(M1) Geometrische und physikalische Struktur .	119
3.2.2	(M2) Nicht-Lokalität der Abbildung . . . . .	119
3.2.3	(M3) Die lokale virtuelle Arbeit . . . . .	120
3.2.4	(M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	121
3.2.5	(M5) Invarianzbedingungen . . . . .	121
3.3	Kontinua mit skalarer Mikrostruktur . . . . .	122
3.3.1	(M1) Geometrische and physikalische Struktur .	123
3.3.2	(M2) Nicht-Lokalität der Abbildung . . . . .	123
3.3.3	(M3) Die lokale virtuelle Arbeit . . . . .	124
3.3.4	(M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	124
3.3.5	(M5) Invarianzbedingungen . . . . .	125
3.3.6	Interpretation der Zustandsvariablen . . . . .	126
3.4	Kontinua mit affiner Mikrostruktur, mikromorphe Kontinua . . . . .	129
3.4.1	(M1) Geometrische and physikalische Struktur .	129
3.4.2	(M2) Nicht-Lokalität der Abbildung . . . . .	130
3.4.3	(M3) Die lokale virtuelle Arbeit . . . . .	130
3.4.4	(M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	131
3.4.5	(M5) Invarianzbedingungen . . . . .	132
3.5	Polare Kontinua, Cosserat-Kontinua . . . . .	136
3.5.1	(M1) Geometrische and physikalische Struktur .	136
3.5.2	(M2) Nicht-Lokalität der Abbildung . . . . .	138
3.5.3	(M3) Die lokale virtuelle Arbeit . . . . .	139
3.5.4	(M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	141
3.5.5	(M5) Invarianzbedingungen . . . . .	142
3.6	Elastische Kontinua 2.Grades . . . . .	144
3.6.1	(M1) Geometrische and physikalische Struktur .	145
3.6.2	(M2) Nicht-Lokalität der Abbildung . . . . .	145
3.6.3	(M3) Die lokale virtuelle Arbeit . . . . .	146
3.6.4	(M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	149

	3.6.5	(M5) Invarianzbedingungen . . . . .	150
<b>4</b>		<b>Anwendungen auf die Schalentheorie . . . . .</b>	<b>151</b>
	4.1	Differentialgeometrie einer Fläche im Euklidischen Raum	151
	4.1.1	Die eingebettete Fläche . . . . .	152
	4.1.2	Inklusion und Projektion . . . . .	153
	4.1.3	Christoffel-Symbole . . . . .	154
	4.1.4	Flächengradient und tangentielle Ableitung . . .	155
	4.1.5	Flächendivergenz . . . . .	156
	4.2	Membrantheorie . . . . .	157
	4.2.1	(M1) Geometrische and physikalische Struktur .	157
	4.2.2	(M2) Nicht-Lokalität der Abbildung . . . . .	157
	4.2.3	(M3) Lokale virtuelle Arbeit . . . . .	158
	4.2.4	(M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedin- gungen . . . . .	158
	4.2.5	(M5) Invarianzbedingungen . . . . .	159
	4.2.6	Bezug zur traditionellen Darstellung . . . . .	160
	4.2.7	Push-pull-Abbildungen in der Schalentheorie . .	162
	4.3	Schalentheorie mit vektorieller Mikrostruktur . . . . .	164
	4.3.1	(M1) Geometrische und physikalische Struktur .	164
	4.3.2	(M2) Nicht-Lokalität der Abbildung . . . . .	165
	4.3.3	(M3) Lokale virtuelle Arbeit . . . . .	165
	4.3.4	(M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedin- gungen . . . . .	165
	4.3.5	(M5) Invarianzbedingungen . . . . .	166
	4.3.6	Schalenmodell nach der Normalentheorie . . . .	169
	4.4	Cosserat-Schale . . . . .	169
	4.4.1	(M1) Geometrische und physikalische Struktur .	169
	4.4.2	(M2) Nicht-Lokalität der Abbildung . . . . .	170
	4.4.3	(M3) Lokale virtuelle Arbeit . . . . .	170
	4.4.4	(M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedin- gungen . . . . .	171
	4.4.5	(M5) Invarianzbedingungen . . . . .	171
	4.5	Schalentheorie 2.Grades . . . . .	172
	4.5.1	(M1) Geometrische und physikalische Struktur .	172
	4.5.2	(M2) Nicht-Lokalität der Abbildung . . . . .	172

4.5.3	(M3) Lokale virtuelle Arbeit . . . . .	173
4.5.4	(M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	175
4.5.5	(M5) Invarianzbedingungen . . . . .	175

## 1 Einführung

In dem 1. Kapitel wurden die Grundgleichungen eines thermo-mechanischen Kontinuums vorgestellt. Sie bilden eine verbreitete Modellvorstellung und können zusammen mit unterschiedlichen konstitutiven Beziehungen auf vielfältige Probleme in der Mechanik angewendet werden. Reicht eine Veränderung der konstitutiven Beziehungen nicht mehr aus, um ein Problem zu beschreiben, so muß evtl. eine erweiterte Modellvorstellung benutzt werden. Eine solche Erweiterung bedeutet beispielsweise

- die Einbeziehung zusätzlicher Zustandsvariablen, die neben der Makrostruktur auch eine Mikrostruktur des Kontinuums beschreiben;
- die Betrachtung andersartiger materieller Körper. Diese können z.B. 1- oder 2-dimensionale Körper sein; es kann sich aber auch um ein völlig anderes Grundkonzept eines materiellen Körpers handeln, z.B. ein Mischungskörper;
- die Betrachtung einer nicht-lokalen Beschreibung durch Hinzunahme von Deformationsgradienten höherer Ordnung.

Will man solche erweiterte Modellvorstellungen verwenden, so stellt sich die Frage, wie man an die Grundgleichungen des erweiterten Kontinuumsmodells gelangt.

Als Antwort auf diese Frage wird hier ein allgemeines Prinzip der virtuellen Arbeit vorgestellt, das für einen beliebigen materiellen Körper, für eine beliebige Mikrostruktur und für einen beliebigen Grad der Nicht-Lokalität gültig ist. Mit Hilfe einer Kompatibilitätsbedingung und mehrerer Invarianzbedingungen können mit Hilfe dieses Prinzips sämtliche Gleichgewichts- und Randbedingungen gewonnen werden. Dieses allgemeine Prinzip

ist an Formulierungen in der analytischen Mechanik angelehnt. Der materielle Körper wird durch eine Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  beschrieben, die Makro- und Mikrostruktur ist durch eine Zustandsmannigfaltigkeit  $\mathcal{Q}$  gegeben und die Konfigurationen sind glatte Abbildungen aus  $\mathcal{M}$  in  $\mathcal{Q}$ . Im Gegensatz zur analytischen Mechanik ist der Konfigurationsraum hier aber von unendlicher Dimension.

Eine differentialgeometrische Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit wurde detailliert von EPSTEIN & SEGEV [37] vorgenommen und ist teilweise auch in MARSDEN & HUGHES [70] veröffentlicht. Die von EPSTEIN & SEGEV [37] vorgeschlagene geometrische Struktur wird in dieser Arbeit übernommen und auf dynamische Mikrostrukturprobleme und die Schalentheorie erweitert. Die Arbeiten von SEGEV [102], SEGEV [103] über die Formulierung von Spannungen in einer invarianten Beschreibung der Kontinuumsmechanik finden hier erstmals breite Anwendung. Der in SEGEV [104] beschriebene allgemeine Rahmen für diverse Kontinuumsmodelle wird hier benutzt und auf Mikrostrukturprobleme erweitert. Dieser allgemeine Rahmen basiert mathematisch auf einem Jet-Bündel-Formalismus, welcher hier nur in Ansätzen dargestellt wird und teilweise dem in SEGEV [103] entspricht. Da die in SEGEV [103] oder MAKOWSKI ET AL. [64] hergeleiteten formalen Gleichgewichtsbedingungen in ihrer Allgemeinheit keinen Einblick in die Struktur spezieller Kontinuumsmodelle gestatten, wird auf eine derart allgemeine Herleitung verzichtet. Stattdessen soll hier der allgemeine Rahmen in eine Methode umgesetzt werden, welche die direkte Herleitung der Grundgleichungen für beliebige Mikrostruktur- und Schalenmodelle ermöglicht. Die Anwendung dieser Methode wird ausführlich an zahlreichen Beispielen demonstriert.

Neben den bereits zitierten Arbeiten existieren noch andere Ansätze einer geometrischen Verallgemeinerung des Prinzips der virtuellen Arbeit. Hier sind vor allem die Arbeiten von SCHWARZ [100], SCHWARZ [101] zu nennen, die sich auch mit dem Aspekt der Nicht-Lokalität in der Kontinuumsmechanik befassen. Ferner sei POMMARET [91] insbesondere bezüglich der Jet-Bündel-Formulierung erwähnt. Dort sind auch viele kritische Anmerkungen zur geometrischen Formulierung der Kontinuumsmechanik zu finden.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit entspricht einer Lagrangeschen Formulierung der Feldtheorie und kann sicherlich als wesentlichster geometrischer

Ansatz gelten. Die Bedeutung Hamiltonscher Formulierungen (siehe GÜNTHER [44], SIMO ET AL. [107]) ist in der Kontinuumsmechanik weit geringer als in der analytischen Mechanik. Dieses erklärt sich daraus, daß sich die symplektische Struktur auf dem endlich-dimensionalen Konfigurationsraum der klassischen Hamiltonschen Mechanik nicht unbedingt auch auf den  $\infty$ -dimensionalen Konfigurationsraum der Kontinuumsmechanik übertragen läßt.

## 2 Grundlegende Struktur

### 2.1 Basismannigfaltigkeit

Die Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ist eine  $m$ -dimensionale, glatte und orientierte Mannigfaltigkeit mit einem glatten, orientierten Rand  $\partial\mathcal{M}$ . Hier kommen Basismannigfaltigkeiten der Dimension  $m = 0, \dots, 4$  zur Anwendung, wobei grundsätzlich zwei verschiedene Fälle unterschieden werden: Ein statisches Kontinuumsmodell beruht auf einer Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  der Dimensionen  $m = 1, 2, 3$ , während zur Beschreibung von dynamischen (zeitabhängigen) Kontinuumsmodellen die Dimensionen  $m = 2, 3, 4$  betrachtet werden.

Im Falle einer statischen Beschreibung entspricht die Basismannigfaltigkeit einer materiellen Kurve ( $m=1$ ), einer materiellen Fläche ( $m=2$ ) oder einem materiellen Raumkörper ( $m=3$ ). Bei einer dynamischen Beschreibung kommt die Zeit als weitere Dimension hinzu. Dann läßt sich die Basismannigfaltigkeit als kartesisches Produkt aus einem  $m$ -dimensionalen Körperkontinuum  $\mathcal{B}$  und einem 1-dimensionalen Zeitintervall  $[\tau_1, \tau_2]$  interpretieren.

Setzt man die Existenz einer Einbettung des materiellen Körpers in den Euklidischen Raum voraus, so kann statt des materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  eine Plazierung  $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}$  verwendet werden. In einem Bezugssystem  $\Phi$  läßt sich der materielle Körper dann z.B. mit seiner Referenzplazierung  $\mathcal{P}_0 = \kappa(\mathcal{B})$  identifizieren. Ferner kommt jedem zeitlichen Moment  $\tau \in \mathcal{T}$  ein Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  bezüglich der Uhr des Bezugssystem  $\Phi$  zu. Ein entsprechendes Zeitintervall in  $\mathbb{T}$  wird mit  $\mathcal{J} = [t_1, t_2]$  bezeichnet. Der Rand von  $\mathcal{J}$  ist die Menge  $\partial\mathcal{J} = \{t_1, t_2\}$ . Die Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ist dann isomorph zur Produktmannigfaltigkeit  $\mathcal{M} \cong \mathcal{J} \times \mathcal{P}_0$  und deren Rand ist durch  $\partial\mathcal{M} \cong$

$(\mathcal{J} \times \partial\mathcal{P}_0) \cup (\partial\mathcal{J} \times \mathcal{P}_0)$  gegeben.

Einige mögliche Interpretationen der Basismannigfaltigkeit sind in Tab. 2.1 aufgeführt. Ein ähnlicher Ansatz zur allgemeinen Darstellung beliebiger

dim $\mathcal{M}$	dim $\mathcal{J} \times \mathcal{P}_0$	Interpretation
1	(1, 0)	klassische analytische Punktmechanik
1	(0, 1)	Statik materieller Kurven (z.B. Balken, Seile)
1	(1, 1)	Dynamik materieller Kurven (z.B. Balken, Seile)
2	(0, 2)	Statik materieller Flächen (z.B. Membranen, Schalen)
3	(1, 2)	Dynamik materieller Flächen (z.B. Membranen, Schalen)
3	(0, 3)	Statik mat. Volumenkörper (z.B. Festkörper, Fluide)
4	(1, 3)	Dynamik mat. Volumenkörper (z.B. Festkörper, Fluide)

Tabelle 2.1: Interpretation der Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$

Kontinua ist bereits in den fundamentalen Arbeiten der Gebrüder Cosserat zu finden (siehe COSSERAT & COSSERAT [29]). Sie schreiben , „ *a deformable medium is an ensemble with three parameters  $\rho_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . When there is motion, the time  $t$  must be added to these geometric parameters.*“ Dieses Zitat stammt aus BADUR & STUMPF [12], wo weitere historische Anmerkungen zu finden sind.

## 2.2 Zustandsmannigfaltigkeit

Die Zustandsmannigfaltigkeit  $\mathcal{Q}$  ist eine  $n$ -dimensionale, glatte Mannigfaltigkeit. Ein Punkt auf dieser Mannigfaltigkeit soll den physikalischen Zustand eines materiellen Teilchens vollständig beschreiben. Die Zustandsmannigfaltigkeit wird hauptsächlich als Produktmannigfaltigkeit aus Tensorräumen und/oder Lieschen Gruppen konstruiert. Ein einfaches Beispiel ist die Zustandsmannigfaltigkeit  $\mathcal{Q} = \mathbb{E}$ , d.h.,  $\mathcal{Q}$  wird als Euklidischer Raum dargestellt. Der physikalische Zustand eines materiellen Punktes  $X$  ist dann durch Angabe eines Ortsvektors  $\mathbf{x}$  aus  $\mathbb{E}$  vollständig bestimmt. Komplexere Modelle erhält man, indem der Zustandsmannigfaltigkeit weitere Zustandsgrößen hinzugefügt werden. Die meisten dieser zusätzlichen Größen werden als Mikrostruktur-Variablen angesehen. Einige Möglichkeiten zeigt Tab. 2.2 auf.

$\mathcal{Q}$	Interpretation
$\mathbb{E}$	Dynamik klassischer Kontinua
$\mathbb{E} \times \mathbb{T}$	Thermomechanik klassischer Kontinua
$\mathbb{E} \times \mathbb{R}$	Kontinua mit Poren, Defekten oder granularer Struktur
$\mathbb{E} \times SO(\mathbb{E})$	Cosserat-Kontinua, polare Kontinua
$\mathbb{E} \times \mathbb{E}$	Kontinua mit vektorieller Mikrostruktur
$\mathbb{E} \times GL(\mathbb{E})$	Kontinua mit affiner Mikrostruktur, mikromorphe Kontinua
$\mathbb{E} \times P(2)$	Flüssigkeitskristalle

Tabelle 2.2: Interpretation der Zustandsmannigfaltigkeit  $\mathcal{Q}$ 

### 2.3 Konfigurationsraum

Eine Konfiguration eines kontinuierlichen Körpers wird durch Zuweisung eines Zustandes  $q(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{Q}$  zu jedem Körper- und Zeitpunkt beschrieben. Diese Zuordnung soll genügend glatt und differenzierbar erfolgen. Eine **Konfiguration** ist dann eine glatte, differenzierbare Abbildung  $q : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q}$  aus der Basismannigfaltigkeit in den Zustandsraum. Die Menge aller Konfigurationen

$$\mathcal{C} := C^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{Q}) = \{q : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q} \mid q - \text{glatt, differenzierbar}\} \quad (2.2.1)$$

heißt **Konfigurationsraum**  $\mathcal{C}$ . Ein Punkt  $q \in \mathcal{C}$  des Konfigurationsraumes stellt also den Zustand des *gesamten* Körpers dar. Setzt man  $C^\infty$ -Glattheit und Kompaktheit von  $\mathcal{M}$  voraus, dann trägt  $C^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{Q})$  die Struktur einer glatten,  $\infty$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit (siehe BINZ ET AL. [20] (Theorem 5.4.1)).

Da die Basismannigfaltigkeit eine Produktstruktur  $\mathcal{M} = \mathcal{J} \times \mathcal{P}_0$  besitzt, läßt sich folgender Isomorphismus auf dem Konfigurationsraum konstruieren

$$C^\infty(\mathcal{J} \times \mathcal{P}_0, \mathcal{Q}) \cong C^\infty(\mathcal{J}, C^\infty(\mathcal{P}_0, \mathcal{Q})). \quad (2.2.2)$$

Gemäß (2.2.2) lassen sich die Zustände  $q(\mathbf{X}, t)$  auch als 1-parametrische Schar von Abbildungen  $q_t(\mathbf{X}) \in C^\infty(\mathcal{P}_0; \mathcal{Q})$  darstellen. Die Rolle des Parameters übernimmt dabei die Zeit.

Nun betrachte man den Tangentialraum  $T_q \mathcal{C}$  an die  $\infty$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathcal{C}$  im Punkt  $q \in \mathcal{C}$ . In BINZ ET AL. [20] und EPSTEIN & SEGEV

[37] wird gezeigt, daß der Tangentialraum  $T_q C^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{Q})$  als die Menge

$$\{\delta q \in C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{Q}) \mid \pi_{\mathcal{Q}} \circ \delta q = q\} \quad (2.2.3)$$

angesehen werden kann. Die Abbildung  $\delta q$  heißt virtuelle Konfiguration des Körpers. Die Menge aller virtuellen Konfigurationen auf  $\mathcal{M}$  ist in natürlicher Weise isomorph zum Tangentialbündel des Konfigurationsraumes, d.h., es gilt

$$TC^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{Q}) \cong C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{Q}). \quad (2.2.4)$$

Wertet man die virtuelle Konfiguration an einem Punkt  $p \in \mathcal{M}$  aus, so erhält man die virtuelle Zustandsänderung  $\delta q(p) \in T_{q(p)}\mathcal{Q}$  des Zustandes  $q(p) \in \mathcal{Q}$ . Für  $\mathcal{M} \equiv \mathcal{P}_0$  und  $\mathcal{Q} \equiv \mathbb{E}$  ist der Zustand eines Punktes  $p \equiv \mathbf{X} \in \mathcal{P}_0$  als räumliche Position  $\mathbf{x}(\mathbf{X}) \in \mathbb{E}$  gegeben. Die Größe  $\delta q(p)$  ist dann die virtuelle Positionsänderung  $\delta \mathbf{x}(\mathbf{X})$ , die auch als virtuelle Verschiebung bezeichnet wird.

## 2.4 Globale Kräfte, globale virtuelle Arbeit

Der Kotangentialraum  $T_q^* C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{Q})$  sei algebraischer Dualraum zu  $T_q C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{Q})$ . Eine (globale) **Kraft** ist ein Element  $f \in T_q^* C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{Q})$  des Kotangentialbündels. Die Überschiebung einer Kraft  $f \in T_q^* C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{Q})$  mit einer virtuellen Konfiguration  $\delta q \in T_q C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{Q})$  ergibt eine reelle Zahl, welche globale **virtuelle Arbeit** heißt und durch

$$\delta W_g = f(\delta q) = \langle f, \delta q \rangle \quad (2.2.5)$$

gegeben ist.

## 2.5 Lokale Kräfte

Eine globale virtuelle Konfiguration  $\delta q \in T_q \mathcal{C}$  erlaubt, wie oben angegeben, die Darstellung  $\{\delta q \in C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{Q}) \mid \pi_{\mathcal{Q}} \circ \delta q = q\}$ . Eine solche Darstellung läßt sich auf Untermannigfaltigkeiten von  $\mathcal{M}$  einschränken. Die virtuelle Konfiguration beschreibt lokal, z.B. in einem Punkt  $p \in \mathcal{M}$ , die virtuelle Zustandsänderung  $\delta q(p)$ . Eine solche lokale Darstellung ist für die Kräfte  $f \in T_q^* \mathcal{C}$  nicht möglich, da i.a. gilt  $T_q^* \mathcal{C} \neq C^\infty(\mathcal{M}; T^* \mathcal{Q})$ . Es ist daher möglich

einer Konfiguration  $q \in \mathcal{C}$  eine Kraft  $f$  zuzuweisen, es ist aber nicht möglich, diese Kraft auf Untermannigfaltigkeiten von  $\mathcal{M}$  einzuschränken. Diese formale Erkenntnis ist in der Kontinuumsmechanik in praktischer Weise bekannt und soll an dem folgenden Beispiel erläutert werden:

■ **Beispiel:** In der klassischen Kontinuumsmechanik wird die globale Kraft  $f$  auf einen Körper  $\mathcal{P}_0$  in seiner Referenzplatzierung als

$$f(\mathcal{P}_0) := \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{f} \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_0} \mathbf{t} \, dA \quad (2.2.6)$$

postuliert (siehe TRUESDELL [119]). Gleichung (2.2.6) enthält Volumenkräfte  $\mathbf{f}$  und Kontaktspannungen  $\mathbf{t}$ , wobei letztere nur auf dem Rand  $\partial\mathcal{P}_0$  vorgegeben sind. Die Volumenkräfte sind Fernwirkungskräfte, die über unendlich große Distanzen wirken. Die Kontaktspannungen sind Nahwirkungskräfte, die auf infinitesimal kleinen Distanzen wirken. Eine Betrachtung von Feldkräften dazwischenliegender Reichweite ist in der klassischen Kontinuumsmechanik durch das Postulat (2.2.6) ausgeschlossen. Ihre Verwendung wäre auch mit dem Cauchyschen Postulat nicht mehr verträglich. Weitere Anmerkungen zur Einteilung der Kräfte findet man in BERTRAM [19](p.179ff).

Betrachtet man nun die globale Kraft  $f(\mathcal{P}_0^{sub})$  auf einen Teilkörper  $\mathcal{P}_0^{sub}$  von  $\mathcal{P}_0$ , so ist bekannt, daß die Einschränkung der Felder  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{f}$  aus (2.2.6) auf den Teilkörper  $\mathcal{P}_0^{sub}$  nicht das richtige Resultat liefert, d.h. es gilt

$$f(\mathcal{P}_0^{sub}) \neq \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \mathbf{f} \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_{0,e}^{sub}} \mathbf{t} \, dA, \quad (2.2.7)$$

wobei  $\partial\mathcal{P}_{0,e}^{sub}$  den äußeren (*engl. external*) Randbereich  $\partial\mathcal{P}_0^{sub} \cap \partial\mathcal{P}_0$  von  $\mathcal{P}_0^{sub}$  bezeichnet. Würde (2.2.7) gelten, so könnte man durch Grenzwertbildung die globale Kraft auf eine infinitesimale Umgebung eines Punktes  $\mathbf{X}$  einschränken. Das Ergebnis lieferte ein Kraftfeld  $f(\mathbf{X})$ . Dieses ist der Erfahrung nach nicht möglich. Stattdessen muß (2.2.7) durch den Term

$$\int_{\partial\mathcal{P}_{0,i}^{sub}} \mathbf{t}_n \, dA \quad (2.2.8)$$

erweitert werden. Die Spannung  $\mathbf{t}_n$  wirkt auf dem inneren, durch das Herausschneiden des Teilkörpers erzeugten Rand  $\partial\mathcal{P}_{0,i}^{sub}$  und heißt Schnittspannung. Nach dem Postulat und Lemma von Cauchy hängt die Schnittspannung von der Schnittgeometrie nur durch den Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der Schnittfläche  $\partial\mathcal{P}_{0,i}^{sub}$  ab. An einem Punkt  $\mathbf{X} \in \mathcal{P}_0$  ist die Schnittspannung  $\mathbf{t}_n$  durch

$\mathbf{t}_n = \mathbf{T}\mathbf{n}$  gegeben, wobei  $\mathbf{T}$  den 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor bezeichnet.

Dann lautet die vollständige Form von (2.2.7)

$$f(\mathcal{P}_0^{sub}) = \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \mathbf{f} \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_{0,e}^{sub}} \mathbf{t} \, dA + \int_{\partial\mathcal{P}_{0,i}^{sub}} \mathbf{T}\mathbf{n} \, dA. \quad (2.2.9)$$

Erst die Kenntnis der Spannungen in einem Körper ermöglicht es, die Kräfte auf Teilkörper einzuschränken!

Sicherlich fragt man sich, warum ein umständlicher Weg über solche Einschränkungen gegangen wird, wo doch (2.2.6) und (2.2.9) wohlbekannt Formeln sind und das Cauchy'sche Postulat als ein grundlegender Bestandteil der Kontinuumsmechanik angesehen wird. Dem ist aber nicht immer so. Schon einfache Mikrostrukturmodelle verlassen den Gültigkeitsbereich dieses Postulates: *„Equilibrium equations and boundary conditions for second grade hyperelastic materials. in which the stored energy  $\psi$  is a function of the first and second deformation gradient  $\mathbf{F}$  and  $\nabla\mathbf{F}$ , were first obtained by Toupin in two early papers. The principle of virtual work was used to establish a set of equations valid for equilibrium. This approach leads, among other things, to highly non standard boundary conditions implying that traction on a given surface of normal  $\mathbf{n}$  is no longer simply given by  $\mathbf{T}\mathbf{n}$ , where  $\mathbf{T}$  is the stress tensor, but by an expression with apparently little physical interpretation.“* aus FORTE & VIANELLO [39](S.409f). ■

Das Cauchy'sche Postulat wird in dem allgemeinen Prinzip der virtuellen Arbeit nicht vorausgesetzt, sondern bildet ein Ergebnis der Betrachtungen. Will man aber das Cauchy-Postulat vermeiden, so muß ein anderer, allgemeingültiger Weg für eine lokale Beschreibung gefunden werden. Ein solcher wird nun aufgezeigt.

### 2.5.1 Lokale Konfiguration, Spannungen

Die allgemeine Darstellung des Prinzips der virtuellen Arbeit erfordert die Verwendung eines Jet-Bündel-Formalismus, der im Rahmen dieser Arbeit aber nicht bereitgestellt werden kann. Es sollen daher nur die wichtigsten Merkmale einer solchen Darstellung aufgezeigt werden. Die differentialgeometrischen Grundbegriffe der Faser- und Jet-Bündel findet man u.a. in CHOQUET-BRUHAT ET AL. [25], DE LEON & RODRIGUEZ [32]. HUSEMOLLER

[49], LANG [57]. Die hier verwendete Notation ist teilweise an SAUNDERS [96] und KUPERSCHMIDT [56] angelehnt.

Es sei  $(\mathcal{M} \times \mathcal{Q}, \pi, \mathcal{M})$  ein triviales Faserbündel mit Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , kanonischer Projektion  $\pi \equiv pr_1$  und Bündelmannigfaltigkeit  $\mathcal{M} \times \mathcal{Q}$ . Ein Schnitt  $\phi \in \mathfrak{s}(\pi)$  des Bündels ist eine glatte Abbildung  $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{Q}$ , für die gilt  $\pi \circ \phi = id_{\mathcal{M}}$ . Da hier eine triviale Struktur des Faserbündels vorausgesetzt ist, kann ein Schnitt  $\phi$  global als  $\phi = (id_{\mathcal{M}}, q)$  dargestellt werden, wobei  $q \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{Q})$  eine Konfiguration ist. Das Tangentialbündel  $\tau_{\mathcal{M} \times \mathcal{Q}}$  steht mit dem Bündel  $\pi$  in folgendem Zusammenhang

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \times \mathcal{Q} & \xleftarrow{\tau_{\mathcal{M} \times \mathcal{Q}} \cong \tau_{\mathcal{M}} \times \tau_{\mathcal{Q}}} & T(\mathcal{M} \times \mathcal{Q}) \cong T\mathcal{M} \times T\mathcal{Q} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_* \\ \mathcal{M} & \xleftarrow{\tau_{\mathcal{M}}} & T\mathcal{M} \end{array}$$

Eine virtuelle Konfiguration  $\delta q \in C^\infty(\mathcal{M}; T\mathcal{Q})$  ist ein Element des Vertikalbündels  $V\pi$ , welches als

$$V\pi := \{ \delta q \in T(\mathcal{M} \times \mathcal{Q}) \mid \pi_*(\delta q) = 0 \in T_{\tau_{\mathcal{M}}(\pi_*(\delta q))}\mathcal{M} \}$$

definiert ist. Aufgrund der trivialen Struktur von  $\pi$  läßt sich das Vertikalbündel auch als pull-back  $q^*\tau_{\mathcal{Q}}$  des Tangentialbündels  $(T\mathcal{Q}, \tau_{\mathcal{Q}}, \mathcal{Q})$  mit  $q : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q}$  auffassen. Eine solche Darstellung wird in SEGEV [103] benutzt.

Nun bildet man die  $k$ -te Erweiterung der Konfigurationen auf das  $k$ -Jet-Bündel  $(J^k(\mathcal{M}, \mathcal{Q}), \pi^k, \mathcal{M})$ . Das 0-Jet-Bündel ist dabei gerade das Bündel  $(\mathcal{M} \times \mathcal{Q}, \pi, \mathcal{M})$ . Ein Schnitt  $\mathfrak{s}(\pi)$  wird auf einen Schnitt  $\mathfrak{s}(\pi^k)$  durch die Abbildung

$$j^k : \mathfrak{s}(\pi) \rightarrow \mathfrak{s}(\pi^k) \tag{2.2.10}$$

erweitert. Sind auf den Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{Q}$  lineare Zusammenhänge definiert, so kann (2.2.10) durch die iterierte kovariante Ableitung  $\bar{\nabla}^k$  (siehe EELLS & LEMAIRE [36]) dargestellt werden

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}^k : C^\infty(\mathcal{M}; \mathcal{Q}) &\rightarrow C^\infty(\oplus_{j=0}^k Lin_j(\tau_{\mathcal{M}}, \pi)), \\ q &\mapsto (q, \nabla q, \dots, \nabla^k q). \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Die  $k$ -te Erweiterung  $j^k q$  der Konfiguration  $q$  heißt **lokale Konfiguration**  $k$ . Grades und wird mit  $\mathfrak{F} := j^k q$  bezeichnet.

Wendet man diese Erweiterung auf virtuelle Konfigurationen  $\delta q$  an, so erhält man  $\delta \mathfrak{F} := j^k(\delta q)$  mit der Darstellung

$$\nabla^k(\delta q) \in C^\infty(\text{Lin}_j(\tau_{\mathcal{M}}, q^*\tau_Q)).$$

Die zu  $\nabla^k(\delta q)$  dualen Größen  $\sigma^k \in C^\infty(\text{Lin}_j(\tau_{\mathcal{M}}, q^*\tau_Q))^*$  nennt man lokale Kräfte oder **Spannungen**  $k$ . Grades, und das  $k$ -Tupel  $\mathfrak{T} := (\sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^k)$  heißt Spannung oder lokale Kraft. Die Spannungen ergeben bei Überschiebung mit der lokalen virtuellen Konfiguration die lokale virtuelle Arbeit

$$\delta W_l = \mathfrak{T}(\delta \mathfrak{F}) = \langle \mathfrak{T}, \delta \mathfrak{F} \rangle. \quad (2.2.12)$$

Nimmt man an, daß die Spannungen  $\mathfrak{T}$  als Dichten  $\mathfrak{t}$  auf  $\mathcal{M}$  beschrieben werden können, dann hat (2.2.12) die Darstellung

$$\delta W_l = \int_{\mathcal{M}} \langle \mathfrak{t}, j^k(\delta q) \rangle dV, \quad (2.2.13)$$

wobei  $dV$  die entsprechende Volumenform auf  $\mathcal{M}$  ist.

## 2.6 Kompatibilität von lokaler und globaler virtueller Arbeit

Nach SEGEV [103] stellen die lokale und globale virtuelle Arbeit eine Beschreibung derselben physikalischen Gegebenheit dar. Es wird daher postuliert, daß beide Beschreibungen kompatibel zueinander sind, so daß die virtuelle Arbeit

$$f(\delta q) = \mathfrak{T}(\delta \mathfrak{F}) \quad (2.2.14)$$

übereinstimmt. Die Kompatibilität erfordert, daß die globalen und lokalen Kräfte die Bedingung

$$\langle f, \delta q \rangle = \langle \mathfrak{T}, j^k(\delta q) \rangle = \int_{\mathcal{M}} \langle \mathfrak{t}, j^k(\delta q) \rangle dV$$

erfüllen. Mit einem dualen Operator  $(j^k)^*$  kann man schreiben  $f = (j^k)^*\mathfrak{T}$ . Diese Kompatibilitätsbedingung dient später zum Auffinden von Gleichgewichtsbedingungen.

## 2.7 Invarianzbedingungen

Im 1. Kapitel wurde gezeigt, daß eine Beschreibung der Mechanik im Euklidischen Raum  $\mathbb{E}$  immer von der Wahl eines Bezugssystems  $\Phi$  abhängt. Da die Wahl eines Bezugssystems beliebig ist, müssen grundlegende Prinzipien der Mechanik entweder unabhängig von Bezugssystemen definiert oder invariant gegenüber Bezugssystemwechsel sein. Dieser Invarianzbedingung muß auch die Kompatibilität (2.2.14) der lokalen und globalen virtuellen Arbeit genügen.

Ein Bezugssystemwechsel (1.1.7) kann als Wirkung einer Lie-Gruppe  $\mathcal{G}$  auf die Zustandsmannigfaltigkeit  $\mathcal{Q}$  dargestellt werden. Die Wirkung ist durch die Abbildung  $\psi : \mathcal{G} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$  gegeben, so daß  $\psi_g : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$  für jedes  $g \in \mathcal{G}$  einen Diffeomorphismus darstellt. Als Gruppen aus (1.1.7) kommen die Translations- und Rotationsgruppe in Frage. Die Wirkung der Lie-Gruppe auf die Zustandsmannigfaltigkeit  $\mathcal{Q}$  induziert eine Wirkung  $\Psi : \mathcal{G} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  auf den Konfigurationsraum  $\mathcal{C}$ , die durch  $\Psi(g, q) = \psi_g \circ q$ , gegeben ist (siehe SEGEV [102]).

Eine Kraft  $f \in T_q^* \mathcal{C}$  heißt nun  $\mathcal{G}$ -invariant, wenn die virtuelle Arbeit invariant gegenüber dem pull-back von  $f$  durch  $T^* \Psi$  ist, d.h. wenn gilt

$$T_{e,q}^* \Psi(f)(\xi, \delta q) = f(\delta q), \quad (2.2.15)$$

für alle  $\xi$  in der Lie-Algebra von  $\mathcal{G}$ . In (2.2.15) bezeichnet  $e$  das Neutralelement von  $\mathcal{G}$ . Es wurde von SEGEV [102] gezeigt, daß die Bedingung (2.2.15) äquivalent zur folgenden Bedingung ist

$$f(\xi \circ q) = 0, \quad \forall \xi \in T_e \mathcal{G}. \quad (2.2.16)$$

Die Größen  $\xi$  nennt man auch infinitesimale Erzeugende der Gruppe  $\mathcal{G}$  (siehe EULER & STEEB [38]). Die Rotationsgruppe  $SO(\mathbb{E})$  und die Translationsgruppen auf  $\mathbb{E}$  und  $\mathbb{T}$  können in der Umgebung des jeweiligen Neutralelementes durch

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\epsilon_1) &= \mathbf{I} + \epsilon_1 \mathbf{\Omega} + o(\epsilon_1) && \text{Rotationsgruppe auf } \mathbb{E}, \quad \mathbf{\Omega} \in \mathfrak{so}(\mathbb{E}), \\ \mathbf{c}(\epsilon_2) &= \mathbf{0} + \epsilon_2 \mathbf{c} && \text{Translationsgruppe auf } \mathbb{E}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{E}, \\ \mathbf{a}(\epsilon_3) &= \mathbf{0} + \epsilon_3 && \text{Translationsgruppe auf } \mathbb{T}, \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

beschrieben werden. Die  $\epsilon_i$  sind skalare Parameter. Die infinitesimalen Erzeugenden der Gruppen sind durch  $\xi = \left. \left( \frac{d}{d\epsilon} g \right) \right|_{\epsilon=0}$  definiert, wobei  $g$  die

jeweilige Gruppenabbildung in (2.2.17) und  $\epsilon$  den entsprechenden Parameter bedeuten. Betrachtet man nun (1.1.7) im Zusammenhang mit (2.2.17), so ergeben die Ableitungen  $(\frac{d}{d\epsilon_i}\mathbf{x}^+)|_{\epsilon_{1,2,3}=0}$  und  $(\frac{d}{d\epsilon_i}t^+)|_{\epsilon_{1,2,3}=0}$  die folgenden drei infinitesimalen Transformationen

$$\begin{aligned} i = 1 : \quad \tilde{\mathbf{x}}^+ &= \mathbf{\Omega}\mathbf{x} \quad \text{und} \quad \tilde{t}^+ = 0, \\ i = 2 : \quad \tilde{\mathbf{x}}^+ &= \mathbf{c} \quad \text{und} \quad \tilde{t}^+ = 0, \\ i = 3 : \quad \tilde{\mathbf{x}}^+ &= \dot{\mathbf{x}} \quad \text{und} \quad \tilde{t}^+ = 1, \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

wobei eine hochgestellte Tilde die entsprechenden infinitesimalen Größen bezeichnet. Die Invarianz gegenüber räumlichen Transformationen erfordert, daß (2.2.16) für die virtuellen Felder  $\delta\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}^+$  in (2.2.18)<sub>1,2</sub> gilt. Für die Invarianz gegenüber zeitlicher Translation gilt (2.2.16) nicht, sondern die schwächere Bedingung

$$f(\xi \circ q) = \mathfrak{T}(j^*(\xi \circ q)), \quad \forall \xi \in T_e\mathcal{G}.$$

Diese Bedingung ist durch (2.2.16) immer erfüllt.

Die Invarianzbedingungen ermöglichen es Gleichgewichtsbedingungen aus dem allgemeinen Prinzip der virtuellen Arbeit abzuleiten. Dieses entspricht der Vorgehensweise in der analytischen Mechanik. Man geht dort von der Lagrangeschen Funktion aus. Die entsprechenden Invarianzbedingungen erhält man dann aus dem Noetherschen Theorem (siehe NOETHER [76], DESLOGE & KARCH [33]). Eine Anwendung des Noetherschen Theorems auf eine Lagrangesche Formulierung der Kontinuumsmechanik ist in GOLEBIEWSKA-HERRMANN [41] dargestellt. Die Invarianzbedingungen führen dort auf Erhaltungssätze. Eine detaillierte Klassifikation entsprechender Invarianzbedingungen und Erhaltungssätze findet man in OLVER [84], OLVER [85]. Die Noethersche Form der Invarianzbedingungen stimmt mit den in dieser Arbeit verwendeten Bedingungen überein, falls sich die virtuelle Arbeit aus einer Lagrangeschen Funktion ableiten läßt. Ist das nicht der Fall, erhält man anstatt der Erhaltungssätze nur Gleichgewichtsbedingungen.

## 2.8 Beschreibung einer allgemeinen Methode zur Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen für Continua mit Mikrostruktur

Eine präzise Formulierung eines allgemeinen Prinzips der virtuellen Arbeit wurde hier nur angedeutet und ist in ihrer Allgemeinheit noch nicht vollständig geklärt. Führt man sie vollständig aus, so ließen sich für Basismannigfaltigkeiten  $\mathcal{M}$  und Zustandsräume  $\mathcal{Q}$  die Gleichgewichtsbedingungen allgemein herleiten. Mittels Spezifizierung von  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{Q}$  könnten diese formalen Bedingungen dann in eine anwendbare Form überführt werden.

Obwohl die allgemeine, formale Herleitung hier nicht gegeben ist, lassen sich dennoch entsprechende Schritte der Herleitung nach vorheriger Festlegung von  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{Q}$  durchführen. Die Anwendung auf unterschiedliche Bereiche der Mikrostrukturmechanik und Schalentheorie liefert in einfacher und plausibler Weise die Gleichgewichtsbedingungen des jeweiligen Kontinuumsmodells. Um deutlich zu machen, daß dabei die immer gleiche Methodik verwendet wird, soll diese anhand der folgenden (rezeptartigen) Einzelschritte zunächst herausgearbeitet werden:

- (M1) Der erste Schritt besteht darin, die Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  und den Zustandsraum  $\mathcal{Q}$  auszuwählen. Die Basismannigfaltigkeit bestimmt die *geometrische Modellierung* des Problemes und damit auch den Träger für die Zustandsfelder. Folgende Beispiele werden später im einzelnen betrachtet:

$\mathcal{M} = \mathcal{P}_0$  : Die Basismannigfaltigkeit ist eine Platzierung eines 3-dimensionalen Körpers, also Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{E}$ ;

$\mathcal{M} = \mathcal{J} \times \mathcal{P}_0$  : Die Basismannigfaltigkeit ist Produktmannigfaltigkeit, bestehend aus einer Platzierung und einem Zeitintervall;

$\mathcal{M} = \mathcal{S}_0$  : Die Basismannigfaltigkeit ist eine Fläche, also eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{E}$ ;

$\mathcal{M} = \mathcal{J} \times \mathcal{S}_0$  : Die Basismannigfaltigkeit ist Produktmannigfaltigkeit aus einer Fläche und einem Zeitintervall.

Die Wahl der Basismannigfaltigkeit ist nicht unbedingt an die wirkliche Struktur eines materiellen Körpers gebunden. Z.B. ist eine Schale

ein realer 3-dimensionaler Körper, dessen Feldgleichungen sich unter gewissen Voraussetzungen (siehe Kapitel 3) auf eine 2-dimensionale Form reduzieren lassen. Modelliert man die Schale als Fläche,  $\mathcal{M} = \mathcal{S}_0$ , so erhält man solche Schalengleichungen direkt.

Die Wahl des Zustandsraumes bestimmt die physikalische Modellierung des Problems. Als Zustandsraum  $\mathcal{Q}$  werden die in Tab. 2.2 beschriebenen (Produkt-)Mannigfaltigkeiten betrachtet. Bis auf  $SO(\mathbb{E})$  und  $\mathbb{P}(2)$  handelt es sich dabei durchweg um Produkte linearer Räume, was den Begriff Zustandsraum rechtfertigt, der hier synonym zum Begriff Zustandsmannigfaltigkeit verwendet wird.

Eine Konfiguration  $q : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q}$  ist dann als Abbildung zwischen den oben aufgeführten Mengen gegeben. Eine virtuelle Konfiguration  $\{\delta q \in C(\mathcal{M}; T\mathcal{Q}) \mid \pi_{\mathcal{Q}} \circ \delta q = q\}$  läßt sich problemlos ermitteln, da das Tangentialbündel  $T\mathcal{Q}$  für die aufgeführten Beispiele von  $\mathcal{Q}$  einfach zu konstruieren ist.

- (M2) Der nächste Schritt erfordert die Aufstellung der lokalen virtuellen Konfigurationen. Diese waren ja als  $k$ -Erweiterungen  $j^k(\delta q)$  der entsprechenden globalen virtuellen Konfigurationen definiert. Da nun alle virtuellen Konfigurationen vektorwertig sind und der Träger  $\mathcal{M}$  dieser Vektorfelder eine kompakte Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{E}$  darstellt, lassen sich die Erweiterungen als Gradienten dieser Vektorfelder schreiben. Die Ordnung der verwendeten Gradienten bestimmt über den Grad der Nicht-Lokalität der Beschreibung.
- (M3) Mittels der lokalen virtuellen Konfigurationen wird nun die lokale virtuelle Arbeit aufgestellt. Zu diesem Zweck müssen die Spannungen oder lokalen Kräfte benannt werden. Sie treten als zu den lokalen virtuellen Konfigurationen duale Größen in Erscheinung und werden als Dichten über  $\mathcal{M}$  gebildet. Die Aufstellung der entsprechenden Dualräume bereitet für die verwendeten Vektorräume keine Schwierigkeit.

Die lokale virtuelle Arbeit ergibt sich dann als Integral der Dichten über die Basismannigfaltigkeit. Besteht die Basismannigfaltigkeit aus Raum und Zeit, wird auf natürliche Weise ein Wirkungsintegral erzeugt.

Die Kompatibilität von lokaler und globaler virtueller Arbeit kann zunächst als formale Gleichung geschrieben werden. Durch entsprechende

Transformation mit dem Satz von Stokes und der partiellen Integration kann die zugehörige Struktur der globalen Kräfte bestimmt werden.

- (M4) Bei der globalen und lokalen virtuellen Arbeit handelt es sich um eine Größe, die auf einen Teilkörper eingeschränkt werden kann. Aus der Einschränkung entstehen lokale Gleichungen, nämlich Gleichgewichtsbedingungen und Randbedingungen. Die Gleichgewichtsbedingungen entsprechen in ihrer Zahl der Dimension des Zustandsraumes.
- (M5) Durch Anwendung der Invarianzbedingungen (2.2.16) können weitere Gleichgewichtsbedingungen gefunden oder bestehende eingeschränkt werden.

## 2.9 Formale Gleichgewichtsbedingungen

Bevor die allgemeine Methode auf verschiedene Modelle in der Kontinuumsmechanik angewandt wird, soll zunächst die allgemeine Form der hier auftretenden Gleichgewichtsbedingungen diskutiert werden. Hierzu wird angenommen, daß die Basismannigfaltigkeit als Produkt  $\mathcal{M} = \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}$  gegeben ist. Der Zustandsraum sei einfach die Menge der reellen Zahlen,  $\Omega = \mathbb{R}$ . Eine globale Konfiguration ist dann ein skalares Feld  $\phi : \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine virtuelle globale Konfiguration ist ebenso als skalares Feld  $\delta\phi : \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  darstellbar.<sup>1)</sup> Die lokale Konfiguration  $\mathfrak{F}$  eines *einfachen* Materials ist durch

<sup>1)</sup>Anmerkung zu virtuellen Feldern: Es sei  $u(\mathbf{X}, t) \in \Omega$  eine Zustandsvariable im Punkt  $(\mathbf{X}, t) \in \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}$ . Die virtuelle Zustandsvariable  $\delta u(\mathbf{X}, t)$  ist ein Element des Tangentialraumes  $T_{u(\mathbf{X}, t)}\Omega$ . Wird als Zustandsraum der Euklidische Raum  $\Omega = \mathbb{E}^3$  gewählt, so sind die Zustandsvariablen Vektoren  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{E}^3$ , z.B. Verschiebungsvektoren. Da nun der Tangentialraum an den Euklidischen Vektorraum zu dem Vektorraum isomorph ist,  $T_{\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}\mathbb{E}^3 \cong \mathbb{E}^3$ , ist jede virtuelle Verschiebung selbst wiederum ein Vektor,  $\delta\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{E}^3$ . Dieses ist aber im allgemeinen nicht richtig. Ist die Zustandsmannigfaltigkeit kein linearer Raum, sondern z.B. die Rotationsgruppe  $\Omega = SO(\mathbb{E}^3)$ , so ist der Tangentialraum  $T_{\mathbf{R}(\mathbf{X}, t)}SO(\mathbb{E}^3)$  nicht mehr isomorph zu  $SO(\mathbb{E}^3)$ , sondern zu der Lieschen Algebra  $\mathfrak{so}(\mathbb{E}^3)$ . Während die Elemente von  $SO(\mathbb{E}^3)$  orthogonale Tensoren sind, sind die Elemente von  $\mathfrak{so}(\mathbb{E}^3)$  schiefsymmetrische Tensoren. Rotationen und virtuelle Rotationen sind also Elemente zweier verschiedener Räume. Beachtet man diese Tatsache nicht, kann es zu unsinnigen Definitionen kommen, wie sie in MAKOWSKI & STUMPF [68] beschrieben sind.

In ingenieurmäßigen Darstellungen hilft man sich oft damit, virtuelle Größen als (infinitesimal) kleine, gedachte Änderungen der jeweiligen Zustandsgrößen aufzufassen. Dadurch wird automatisch gewährleistet, daß man den Tangentialraum an den Zustandsraum nicht verläßt. Beachtet man aber, daß virtuelle und reale Größen aus i.a. unterschiedlichen Räumen stammen,

das skalare Feld  $\phi$  und seine Ableitungen 1. Ordnung bezüglich der Koordinaten der Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  gegeben. Für die Darstellung  $\mathcal{M} = \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}$  sind dies die Ableitungen nach dem Ortsvektor  $\mathbf{X} \in \mathcal{P}_0$  und die Ableitungen nach der Zeit  $t \in \mathcal{J}$ . Die lokale Konfiguration läßt sich dann als

$$\mathfrak{F} = (\phi, \text{Grad}(\phi), \dot{\phi}) \quad (2.2.19)$$

darstellen. Zur entsprechenden Form der lokalen virtuellen Arbeit findet man, indem die Kontraktion von  $\delta\mathfrak{F} = (\delta\phi, \text{Grad}(\delta\phi), \delta\dot{\phi})$  mit den dazu dualen Dichten  $(\gamma, \boldsymbol{\eta}, \psi)$  über dem Träger  $\mathcal{M}$  integriert wird

$$\delta W_l = \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (\gamma \delta\phi + \boldsymbol{\eta} \cdot \text{Grad}(\delta\phi) + \psi \delta\dot{\phi}) dV dt. \quad (2.2.20)$$

Hier sind  $\gamma, \psi$  skalare Dichtefelder über  $\mathcal{P}_0$  und  $\boldsymbol{\eta}$  ist eine vektorwertige Dichte über  $\mathcal{P}_0$ . Nach einer formalen Transformation von (2.2.20) mittels des Satzes von Stokes und der partiellen Integration erhält man

$$\begin{aligned} \delta W_l &= \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (\gamma - \text{Div}(\boldsymbol{\eta}) - \dot{\psi}) \delta\phi dV dt \\ &\quad + \int_{\mathcal{J}} \int_{\partial\mathcal{P}_0} \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n} \delta\phi dS dt + [\int_{\mathcal{P}_0} \psi \delta\phi dV]_{\partial\mathcal{J}}. \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Der Ausdruck (2.2.21) bestimmt die zulässige Form der globalen virtuellen Arbeit. Aufgrund der Kompatibilität  $\delta W_l = \delta W_g$  und der Einschränkung von (2.2.21) auf Teilkörper, muß die globale virtuelle Arbeit die Form

$$\begin{aligned} \delta W_g &= \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} \beta \delta\phi dV dt + \int_{\mathcal{J}} \int_{\partial\mathcal{P}_0} \eta_n \delta\phi dS dt \\ &\quad + [\int_{\mathcal{P}_0} \psi_t \delta\phi dV]_{\partial\mathcal{J}} \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

annehmen. Hierin sind  $\beta, \eta_n$  und  $\psi_t$  Skalarfelder. Die Kompatibilität von (2.2.22) mit (2.2.20) und die Einschränkung der Gleichungen auf beliebige Teilkörper  $\mathcal{P}_0^{sub} \subset \mathcal{P}_0$  und Teilintervalle  $\mathcal{J}^{sub} \subset \mathcal{J}$  führt auf die lokalen Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \gamma - \beta - \text{Div}(\boldsymbol{\eta}) \quad \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}, \\ \eta_n &= \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf } \partial\mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}, \\ \psi_t &= \psi \quad \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \partial\mathcal{J}. \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

---

so sind auch finite Größen als virtuelle Größen zugelassen. In HARTMANN [46] findet man dazu verschiedene Beispiele aus der Strukturmechanik.

Gleichung (2.2.23)<sub>2</sub> stellt eine Randbedingung auf dem Körper  $\mathcal{P}_0$  dar, während (2.2.23)<sub>3</sub> als Randbedingung auf dem Zeitintervall angesehen wird. Letztere entspricht einer Anfangs- und Endbedingung für den zeitlichen Verlauf der Größe  $\psi$ . Die Beziehung (2.2.23)<sub>1</sub> gibt eine allgemeine (skalare) Form einer Gleichgewichtsbedingung an, wie sie allen hier gezeigten Kontinuumsmodellen gemein ist. Die Größe  $\psi$  wird darin lokal bilanziert. Die Größe  $\gamma$  heißt interner Zuwachs von  $\psi$ ,  $\eta$  ist der Abfluß von  $\psi$  durch die Ränder eines Körperelementes und  $-\beta$  ist der externe Zuwachs von  $\psi$ . Ein interner und externer Zuwachs wird in der klassischen Kontinuumsmechanik nicht betrachtet. Dort ist der interne Zuwachs nicht vorhanden und der externe wird allgemein als *der* Zuwachs (*engl. supply*) bezeichnet (siehe TRUESDELL & TOUPIN [122](Sec.157)). Die Tatsache, daß hier zwei unterschiedliche Zuwachsarten auftreten ist für Mikrostrukturmodelle von entscheidender Bedeutung und macht u.a. die weitreichende Anwendbarkeit dieser Methode aus.

### 3 Anwendung auf die Kontinuumsmechanik

#### 3.1 Nichtlineare Elastodynamik

##### 3.1.1 (M1) Geometrische and physikalische Struktur <sup>2)</sup>

Die Konfiguration eines elastischen Körpers ist durch Angabe seiner Bewegung  $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  in einem Bezugssystem vollständig bestimmt. Die Geometrie der Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  wird als Produkt aus einer Referenzplatzierung  $\mathcal{P}_0$  und einem Zeitintervall  $\mathcal{J} = [t_1, t_2] \subset \mathbb{T}$  angenommen. Ein Punkt  $p \in \mathcal{M}$  ist dann durch das Paar  $(\mathbf{X}, t)$  gegeben.

Die physikalische Struktur des Problems schlägt sich in der Modellierung der Zustandsmannigfaltigkeit  $\mathcal{Q}$  nieder. In der Elastodynamik ist, wie bereits gesagt, der Zustand eines Punktes  $p = (\mathbf{X}, t)$  durch Angabe seiner räumlichen Lage  $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{E}$  bestimmt. Der Zustandsraum wird also als  $\mathcal{Q} = \mathbb{E}$  spezifiziert. Eine globale Konfiguration ist dann eine Abbildung  $q : \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{E}$ , also nichts anderes als die referentielle Beschreibung der Bewegung.

---

<sup>2)</sup>Die Bezeichnungen (M1)–(M5) beziehen sich auf Abschnitt 2.8

Die virtuellen globalen Konfigurationen  $\delta q$  sind Abbildungen aus  $\mathcal{M}$  in  $T\Omega$ . Im Punkt  $p \in \mathcal{M}$  ist  $\delta q(p)$  dann gerade eine Abbildung  $\delta q(p) : \{p\} \rightarrow T_{q(p)}\Omega$ . Aufgrund der linearen Struktur von  $\Omega = \mathbb{E}$  findet man, daß  $T_{q(p)}\Omega$  der Tangentialraum  $T_{\mathbf{x}}\mathbb{E} \cong \mathbb{E}$  ist. Die virtuellen globalen Konfigurationen sind also wiederum  $\mathbb{E}$ -wertige Vektorfelder auf  $\mathcal{M}$ .

### 3.1.2 (M2) Nicht-Lokalität der Abbildung

Wir betrachten hier zunächst nur solche Materialien, die durch Gradienten 1. Ordnung beschrieben werden. Solche Materialien heißen *einfache* Materialien oder Materialien 1. Grades, siehe NOLL [77]. Die lokalen virtuellen Konfigurationen dieser Materialien können durch  $\delta q$  und deren erste Ableitungen bezüglich der Koordinaten von  $\mathcal{M}$  gebildet werden. Durch die Produktstruktur von  $\mathcal{M}$  spalten sich die Ableitungen in natürlicher Weise in  $\text{Grad}(\mathbf{x})$  und  $\dot{\mathbf{x}}$  auf, wobei  $\text{Grad}(\mathbf{x})$  die tensorielle Darstellung der Ableitung bezüglich der Ortskoordinaten  $X^I$  und  $\dot{\mathbf{x}}$  die Ableitung bezüglich der Zeit  $t$  bezeichnen. An einem Punkt  $p = (\mathbf{X}, t)$  ist die lokale Konfiguration dann durch

$$\mathfrak{F}(\mathbf{X}, t) = (\mathbf{x}, \text{Grad}(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}})|_{(\mathbf{X}, t)}$$

gegeben. Die virtuelle lokale Konfiguration ergibt sich nach Betrachtung der entsprechenden Tangentialräume, die hier allerdings wieder trivial sind. Beachtet man zudem die Vertauschbarkeit von  $\delta$ -Operator und Ableitung, so läßt sich folgendes schreiben

$$\delta \mathfrak{F}(\mathbf{X}, t) = (\delta \mathbf{x}, \text{Grad}(\delta \mathbf{x}), \delta \dot{\mathbf{x}})|_{(\mathbf{X}, t)} \in (\mathbb{E}, \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}, \mathbb{E}). \quad (2.3.1)$$

Ein entsprechendes nicht-lokales Modell würde höhere Ableitungen von  $\delta \mathbf{x}$  enthalten, insbesondere kämen dann auch gemischte Ableitungen, z.B.  $\text{Grad}(\delta \dot{\mathbf{x}})$ , vor.

### 3.1.3 (M3) Lokale virtuelle Arbeit

Im Zusammenhang mit der virtuellen Konfiguration  $\delta \mathfrak{F}$  wird nun eine lokale Kraftdichte  $\mathfrak{t}$  (hier: Volumenkraftdichte über  $\mathcal{P}_0$ ) eingeführt. Diese lokale Dichte bildet an jedem Punkt  $p \in \mathcal{M}$  eine zu  $\delta \mathfrak{F}$  duale Abbildung. Da die

virtuelle lokale Konfiguration als Tupel aus linearen Räumen gegeben ist, bereitet die Darstellung von  $\mathbf{t}$  keine Schwierigkeiten. Die lokale Kraftdichte  $\mathbf{t}$  ist ebenso ein Element aus  $(\mathbb{E}, \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}, \mathbb{E})$  wie  $\delta \mathfrak{F}$ , wenn die Überschiebung  $\langle \mathbf{t}, \delta \mathfrak{F} \rangle$  durch das innere Produkt auf  $\mathbb{E}$  ausgeführt wird. Die lokale Kraft  $\mathfrak{T}$  ergibt sich aus der Dichte  $\mathbf{t}$  durch Integration über  $\mathcal{P}_0$ .  $\mathfrak{T}$  ist nicht als Funktion von  $p \in \mathcal{M}$  anzusehen, sondern, gemäß Definition, als Funktion von  $\mathfrak{q} \in \mathcal{C}$ .

Die Dichte  $\mathbf{t}$  wird nun als

$$\mathbf{t} = (\mathbf{h}, -\mathbf{T}, \mathbf{p}) \in (\mathbb{E}, \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}, \mathbb{E})$$

dargestellt. Es handelt sich hier zunächst nur um die Zuordnung von Symbolen. Wird nun die virtuelle lokale „Arbeit“  $\delta W_l$  gebildet, so ergibt sich

$$\delta W_l = \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{x} - \mathbf{T} \cdot \text{Grad}(\delta \mathbf{x}) + \mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}) dV dt. \quad (2.3.2)$$

An dieser Stelle erkennt man schon, daß  $\mathbf{T}$  als 1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor und  $\mathbf{p}$  als Impulsdichte interpretierbar sind. Das negative Vorzeichen von  $\mathbf{T}$  dient ausschließlich dazu,  $\mathbf{T}$  als Spannungszufluß zu kennzeichnen. Die Kraftdichte  $\mathbf{h}$  kann in der Elastodynamik nicht interpretiert werden. Diese Tatsache wird weiter unten deutlich.

Es sei noch angemerkt, daß (2.3.2) kein Arbeitsintegral sondern ein Wirkungsintegral darstellt. Ob ein Arbeits- oder Wirkungsintegral vorliegt, hängt von der Interpretation der Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ab. Bildet diese ein Raum-Zeit-Kontinuum, so erhält man statt des Prinzip der virtuellen Arbeit das Prinzip der kleinsten Wirkung oder Hamiltonsche Prinzip (siehe BEDFORD [18]). Beide Formulierungen sind in dem allgemeinen Prinzip der virtuellen Arbeit vereinheitlicht.

Auch das in (2.3.2) aufgeführte Zeitintegral  $\int_{\mathcal{J}} \equiv \int_{t_1}^{t_2}$  bedarf einer Anmerkung. Die Randbedingungen auf  $\partial \mathcal{J} \equiv \{t_1, t_2\}$  erfordern die Angabe einer Anfangsbedingung im Zustand  $t = t_1$  und einer Endbedingung im Zustand  $t = t_2$ . Letztere Bedingung ist aber i. a. nicht bekannt, da die endgültige Konfiguration des Körpers erst durch Lösen des Randwertproblems ermittelbar ist. Diese Schwierigkeit kann man umgehen, wenn als Endzeitpunkt ein unendlich großer Wert  $t_2 \rightarrow \infty$  eingesetzt wird. Für einen solchen Zeitpunkt kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß die Bewegung des Körpers zur Ruhe gekommen ist. Die entsprechende Form des

Prinzips der virtuellen Arbeit lautet dann

$$\delta W_l = \int_{t_1=0}^{\infty} \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{x} - \mathbf{T} \cdot \text{Grad}(\delta \mathbf{x}) + \mathbf{p} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}) dV dt. \quad (2.3.3)$$

### 3.1.4 (M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen

Die Kompatibilität der lokalen und globalen virtuellen Arbeit liefert die spezifische Form der globalen Kräfte. Dazu muß die lokale virtuelle Arbeit in einen Ausdruck  $\langle \mathbf{f}, \delta \mathbf{q} \rangle$  umgeformt werden, der die globale virtuelle Konfiguration  $\delta \mathbf{q} \equiv \delta \mathbf{x}$  enthält. Diese Umformung geschieht mit Hilfe des Satzes von Stokes und der partiellen Integration von (2.3.3). Man erhält schließlich

$$\begin{aligned} \delta W_l = & \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{x} + \text{Div}(\mathbf{T}) \cdot \delta \mathbf{x} - \dot{\mathbf{p}} \cdot \delta \mathbf{x}) dV dt \\ & + \int_{\mathcal{J}} \int_{\partial \mathcal{P}_0} (-\mathbf{T} \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{x} dS dt + [\int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{x} dV]_{\partial \mathcal{J}}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Wenn nun (2.3.4) mit der globalen virtuellen Arbeit übereinstimmt und wenn dieses für beliebige Teilkörper  $\mathcal{P}_0^{sub}$  gelten soll, dann muß die globale virtuelle Arbeit  $\delta W_g$  die folgende Form aufweisen

$$\begin{aligned} \delta W_g = & \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (.) \cdot \delta \mathbf{x} dV dt + \int_{\mathcal{J}} \int_{\partial \mathcal{P}_0} (.) \cdot \delta \mathbf{x} dS dt \\ & + [\int_{\mathcal{P}_0} (.) \cdot \delta \mathbf{x} dV]_{\partial \mathcal{J}}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

An den freien Stellen  $(.)$  in (2.3.5) können nun die entsprechenden globalen Kraftdichten eingefügt werden. Dieses geschieht zunächst rein formal, da sich die Größen erst innerhalb der Gleichgewichtsbedingungen interpretieren lassen. Aufgrund der Erfahrung mit den bekannten Grundgleichungen der Elastodynamik kann man hier jedoch die Ergebnisse vorwegnehmen. Die in (2.3.5) einzusetzenden Größen sind die Volumenkraftdichte  $\mathbf{f}$ , die Randspannung  $\mathbf{t}$  und die Impulsdichte  $\mathbf{p}_t$ . Diese Größen sind nur auf den entsprechenden Gebieten von (2.3.5) erklärt. So wird die Volumenkraftdichte auf  $\mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}$ , die Randspannung auf  $\partial \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}$  und die Impulsdichte auf  $\mathcal{P}_0 \times \partial \mathcal{J}$  vorgeschrieben. Die Impulsdichte ist also nur durch ihre Anfangs- und Endwerte auf  $\mathcal{P}_0$  gegeben. Nach Einsetzen in (2.3.5) erhält man

$$\begin{aligned} \delta W_g = & \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (-\mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{x} dV dt + \int_{\mathcal{J}} \int_{\partial \mathcal{P}_0} (-\mathbf{t}) \cdot \delta \mathbf{x} dS dt \\ & + [\int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{p}_t \cdot \delta \mathbf{x} dV]_{\partial \mathcal{J}}, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

wobei die negativen Vorzeichen dafür sorgen, daß  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{t}$  als Zuflüsse der jeweiligen Kraftdichten interpretiert werden können. Dieses stimmt mit der üblichen Interpretation in der Kontinuumsmechanik überein.

Aus der Kompatibilität der lokalen und globalen virtuellen Arbeit (2.3.6) und (2.3.4) folgen unter der Voraussetzung, daß diese für beliebige Teilkörper  $\mathcal{P}_0^{sub}$  und Teilintervalle  $\mathcal{J}^{sub}$  gilt, die lokalen Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{h} + \text{Div}(\mathbf{T}) + \mathbf{f} && \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}, \\ \mathbf{t} &= \mathbf{T}\mathbf{n} && \text{auf } \partial\mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}, \\ \mathbf{p}_t &= \mathbf{p} && \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \partial\mathcal{J}. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Die lokalen Dichten  $\mathbf{t} = (\mathbf{h}, \mathbf{T}, \mathbf{p})$  können aus (2.3.7) nicht bestimmt werden. Sie folgen aus zusätzlichen Gleichungen, den konstitutiven Beziehungen, welche die Dichten in einen funktionalen Zusammenhang mit den lokalen Konfigurationen bringen, d.h.  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_f(\mathfrak{F})$ . Für den Spannungstensor  $\mathbf{T}$  lautet der funktionale Zusammenhang  $\mathbf{T} = \mathbf{T}_f(\mathbf{x}, \text{Grad}(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}})$ . Dieses Funktional unterliegt den üblichen Invarianzbedingungen.

Während konstitutive Beziehungen für den Spannungstensor  $\mathbf{T}$  als bekannt vorausgesetzt werden können, findet die Größe  $\mathbf{h}$  und ihre konstitutive Realisierung keine Erwähnung in der Literatur. Wie bereits gesagt, hat  $\mathbf{h}$  in der klassischen Kontinuumsmechanik keine Bedeutung. Für Kontinua mit Mikrostruktur wird  $\mathbf{h}$  zum Träger der Wechselwirkung zwischen der Mikro- und Makrostruktur. Im Zusammenhang mit den sog. Pseudo-Kräften aufgrund von Inhomogenitäten (siehe Arbeiten von MAUGIN, z.B. MAUGIN [71]) scheint eine elegante Interpretation der intrinsischen Kraftdichte  $\mathbf{h}$  möglich. Auf entsprechende Einzelheiten wird hier aber nicht eingegangen.

Die konstitutive Beziehung für die Impulsdichte  $\mathbf{p}$  wird als

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_f(\mathbf{x}, \text{Grad}(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}}) := \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \tag{2.3.8}$$

angenommen, wobei  $\rho_0$  die Massendichte in bezug auf die Plazierung  $\mathcal{P}_0$  darstellt. Es ist wichtig, (2.3.8) als konstitutive Beziehung zu interpretieren und nicht als allgemein gültige Definition darzustellen. In der Schalentheorie zeigt sich nämlich, daß (2.3.8) auf gewichteten Schalenmittelflächen nicht mehr gültig ist, sondern durch andere *konstitutive* Beziehungen ersetzt werden muß.

### 3.1.5 (M5) Invarianzbedingungen

Abschließend werden nun die Invarianzbedingungen (2.2.18) auf die hier vorliegende Form des allgemeinen Prinzips der virtuellen Arbeit angewandt. Dieses geschieht entweder durch Betrachtung der Wirkung von (2.2.18) auf die globale virtuelle Arbeit oder, was äquivalent bzw. kompatibel ist, durch Betrachtung der Wirkung auf die lokale virtuelle Arbeit.

**Invarianz gegenüber räumlicher Translation.** Die virtuelle Arbeit ist invariant gegenüber räumlichen Translationen, wenn  $\delta W = 0$  für alle  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{c} = \text{const}$  gilt. Diese Invarianzbedingung soll nun auf die lokale virtuelle Arbeit angewendet werden. Dann gilt

$$\begin{aligned} \delta W_l &= \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{T} \cdot \text{Grad}(\mathbf{c}) + \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{c}}) dV dt = 0, \\ &\Leftrightarrow \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{h} \cdot \mathbf{c} dV dt = 0, \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

weil der Gradient und die Zeitableitung eines konstanten Vektorfeldes identisch null sind. Da (2.3.9) auch auf beliebige Teilkörper zutreffen muß, kann aus (2.3.9)<sub>2</sub> auf die Bedingung  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  geschlossen werden. Nun wird klar, warum  $\mathbf{h}$  keine Interpretation in der Elastodynamik besitzt.

Setzt man  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  in die Gleichgewichtsbedingung (2.3.7)<sub>1</sub> ein, so erhält man die lokale Form des Impulssatzes

$\dot{\mathbf{p}} = \text{Div}(\mathbf{T}) + \mathbf{f} \quad \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}. \quad (2.3.10)$
---

Setzt man das konstante Vektorfeld  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{c}$  in die globale virtuelle Arbeit ein und klammert  $\mathbf{c}$  aus den Integralen aus, so ergibt sich

$$\int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (-\mathbf{f}) dV dt + \int_{\mathcal{J}} \int_{\partial \mathcal{P}_0} (-\mathbf{t}) dS dt + [\int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{p} dV]_{\partial \mathcal{J}} = \mathbf{0}. \quad (2.3.11)$$

Führt man nun  $\mathfrak{F}$  als Kraft und  $\mathfrak{L}$  als Impuls gemäß

$$\mathfrak{F} := \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{f} dV + \int_{\partial \mathcal{P}_0} \mathbf{t} dS \quad \mathfrak{L} := \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{p} dV \quad (2.3.12)$$

ein, so liefert (2.3.11) mit  $\mathcal{J} = [t_1, t_2]$  die Impulsbilanz (*engl. impulse-momentum law*)

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{F} dt = [\mathfrak{L}]_{t_1}^{t_2}. \quad (2.3.13)$$

Diese war bereits in Kapitel I als Postulat aufgeführt worden.

**Invarianz gegenüber räumlicher Drehung.** Die Invarianz gegenüber räumlichen Drehungen fordert, daß gilt  $\delta W_l = 0$  für alle  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{\Omega} \mathbf{x}$ , wobei  $\mathbf{\Omega} \in Skw(\mathbb{E}^3)$  ein beliebiges, konstantes, schiefssymmetrisches Tensorfeld ist. Wendet man diese Bedingung auf (2.3.3) an, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta W_l &= \int_J \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{T} \cdot \text{Grad}(\mathbf{\Omega} \mathbf{x}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{\Omega} \dot{\mathbf{x}}) dV dt = 0, \\ &\Leftrightarrow \int_J \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega} \mathbf{F} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{\Omega} \dot{\mathbf{x}}) dV dt, \\ &\Leftrightarrow \int_J \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{T} \mathbf{F}^\top + \mathbf{p} \otimes \dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{\Omega} dV dt = 0, \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

wobei  $\mathbf{F} = \text{Grad}(\mathbf{x})$  hier als Symbol für den referentiellen Deformationsgradienten steht. Um nun aus Gleichung (2.3.14)<sub>3</sub> eine lokale Gleichgewichtsbedingung zu ermitteln, ist folgendes Vorwissen nötig:

Es sei  $\mathbf{A}$  ein symmetrischer Tensor,  $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$ , und  $\mathbf{\Omega}$  ein schiefssymmetrischer Tensor,  $\mathbf{\Omega}^\top = -\mathbf{\Omega}$ . Dann gilt  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$ , weil aus  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{\Omega} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{\Omega})^\top$  sofort die Gleichung  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{\Omega} = \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{\Omega}^\top = \mathbf{A} \cdot (-\mathbf{\Omega})$  folgt, die nur wahr sein kann, wenn  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{\Omega} = 0$  gilt.

Die Bedingung (2.3.14)<sub>3</sub> ist erfüllt, wenn  $(\mathbf{T} \mathbf{F}^\top + \mathbf{p} \otimes \dot{\mathbf{x}})$  symmetrisch ist. Da nun für  $\mathbf{p} \otimes \dot{\mathbf{x}}$  mittels der o.g. konstitutiven Beziehung der symmetrische Ausdruck  $\rho_0 \dot{\mathbf{x}} \otimes \dot{\mathbf{x}}$  geschrieben werden kann, folgt, daß letztlich  $\mathbf{T} \mathbf{F}^\top$  symmetrisch sein muß, d.h., es gilt

$$\mathbf{T} \mathbf{F}^\top = \mathbf{F} \mathbf{T}^\top. \quad (2.3.15)$$

Die Bedingung (2.3.15) fordert die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors.

Wendet man diese Invarianzbedingung auf die globale virtuelle Arbeit an, so erhält man

$$\begin{aligned} \delta W_g &= \int_J \int_{\mathcal{P}_0} (-\mathbf{f}) \cdot \mathbf{\Omega} \mathbf{x} dV dt + \int_J \int_{\partial \mathcal{P}_0} (-\mathbf{t}) \cdot \mathbf{\Omega} \mathbf{x} dS dt \\ &\quad + [\int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{p} \cdot \mathbf{\Omega} \mathbf{x} dV]_{\partial J} = 0. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Nun kann jede Abbildung  $\mathbf{\Omega} \mathbf{x}$  mittels des axialen Vektors  $\boldsymbol{\omega} = \text{axial}(\mathbf{\Omega})$  als  $\mathbf{\Omega} \mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$  geschrieben werden. Für den Term  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{\Omega} \mathbf{x}$  in (2.3.16) erhält man dann  $\mathbf{f} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$  oder  $(\mathbf{x} \times \mathbf{f}) \cdot \boldsymbol{\omega}$ . Entsprechendes gilt für die anderen Terme in (2.3.16). Da  $\boldsymbol{\omega}$  ein konstantes Vektorfeld ist, kann es vor die Integrale gezogen werden. Der verbleibende Rest liefert

$$-\int_J \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{x} \times \mathbf{f} dV dt - \int_J \int_{\partial \mathcal{P}_0} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dS dt + [\int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{x} \times \mathbf{p} dV]_{\partial J} = \mathbf{0}. \quad (2.3.17)$$

Definiert man nun das äußere Moment  $\mathfrak{T}$  und den Drehimpuls  $\mathfrak{A}$  als

$$\begin{aligned}\mathfrak{T} &:= \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{x} \times \mathbf{f} \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_0} \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, dS, \\ \mathfrak{A} &:= \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{x} \times \mathbf{p} \, dV = \int_{\mathcal{P}_0} \rho_0 \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} \, dV,\end{aligned}\tag{2.3.18}$$

so ergibt sich aus (2.3.17) die Drehimpulsbilanz (*engl. angular impulse-momentum law*)

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{T} \, dt = [\mathfrak{A}]_{t_1}^{t_2}.\tag{2.3.19}$$

**Invarianz gegenüber zeitlicher Translation.** Die Invarianz gegenüber zeitlicher Translation fordert, daß die Gleichung  $\delta W_g^* = \delta W_l$  für alle  $\delta \mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}}$  gültig ist. Setzt man diese Bedingung in die virtuelle Arbeit ein, so folgt

$$\begin{aligned}& \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (-\mathbf{T} \cdot \text{Grad}(\dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{p} \cdot \ddot{\mathbf{x}}) \, dV \, dt \\ &= \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (-\mathbf{f}) \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dV \, dt + \int_{\mathcal{J}} \int_{\partial\mathcal{P}_0} (-\mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dS \, dt \\ & \quad + [\int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dV]_{\partial\mathcal{J}}.\end{aligned}\tag{2.3.20}$$

Mit der spezifischen kinetischen Energie  $\mathfrak{k} = \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}}$  und der spezifischen Spannungsleistung  $\mathfrak{w} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}}$  ergeben sich für die kinetische Energie  $\mathfrak{K}$ , die Spannungsleistung  $\mathfrak{W}$  und die Leistung der äußeren Kräfte  $\mathfrak{P}$  folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned}\mathfrak{K} &:= \int_{\mathcal{P}_0} \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dV = \int_{\mathcal{P}_0} \frac{1}{2} \rho_R \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dV, \\ \mathfrak{W} &:= \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} \, dV = \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{T} \cdot \text{Grad}(\dot{\mathbf{x}}) \, dV, \\ \mathfrak{P} &:= \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_0} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dS.\end{aligned}\tag{2.3.21}$$

Formt man den letzten Term in (2.3.20) mittels partieller Integration um, so erhält man  $\int_{t_1}^{t_2} 2\dot{\mathfrak{K}} \, dt$ . Damit kann (2.3.20) nun als die lokale Leistungsbilanz

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{W} + \dot{\mathfrak{K}}\tag{2.3.22}$$

geschrieben werden. Ist das betrachtete Material hyper-elastisch, so existiert ein Potential  $\psi$ , die spezifische Formänderungsenergie, aus der die Spannung  $\mathbf{T}$  gemäß

$$\mathbf{T} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}\tag{2.3.23}$$

abgeleitet werden kann. In diesem Fall ist die spezifische Spannungsleistung als  $\mathfrak{w} = \rho_0 \dot{\psi}$  darstellbar und die Spannungsleistung kann als  $\mathfrak{W} = \dot{\Psi}$  geschrieben werden, wobei  $\Psi = \int_{\mathcal{P}_0} \rho_0 \psi dV$  die Formänderungsenergie des Körpers bezeichnet. Dann läßt sich für die Leistungsbilanz schließlich

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{P} dt = [\Psi + \mathfrak{K}]_{t_1}^{t_2}. \quad (2.3.24)$$

### 3.2 Wärmeübertragung in kontinuierlichen Körpern

Es wird nun gezeigt, daß das allgemeine Prinzip der virtuellen Arbeit den ersten Hauptsatz der Thermodynamik liefert, wenn eine weitere Zustandsvariable hinzugenommen wird. Diese Zustandsvariable ist nicht die Temperatur, sondern eine skalare Feldgröße mit der physikalischen Dimension der Zeit. Die Verwendung einer solchen Zustandsvariable in der Kontinuumsmechanik ist ungewöhnlich, aber nicht neu.

Die Beschreibung dissipativer Prozesse im Rahmen einer Lagrangeschen Formulierung ist ein interessantes Gebiet der gegenwärtigen Fachliteratur. Beispiele für die Anwendung des Hamiltonschen Prinzips auf dissipative Systeme können in einigen (klassischen) Monographien, z.B. MORSE & FESHBACH [73], gefunden werden. Neuere Versuche die Kontinuumsmechanik und Thermodynamik mit Hilfe Lagrangescher Formulierungen zu vereinen finden sich bei ALBERT [3] und insbesondere bei ANTHONY [4]. Eine Übersicht verschiedener Ansätze gibt KOTOWSKI [52], der die Ansätze von ANTHONY (siehe u.a. ANTHONY [5], ANTHONY [6]) als die allgemeinsten und vielversprechendsten herausstellt. Betrachtet man den methodischen Ansatz von ANTHONY [6] (z.B. Fig.5, S.519), so fallen Übereinstimmungen mit der hier verwendeten Methodik auf, obwohl die einzelnen Anwendungsbereiche (hier: Mikrostruktur, dort: Thermodynamik) und die Wahl der Zustandsräume (bei ANTHONY werden komplexe Zustandsvariable verwendet) grundsätzlich verschieden sind.

Die nachfolgend vorgestellte Formulierung hat das Ziel, die Gleichgewichtsbedingungen für den thermo-elastischen Körper als *direkte* Konsequenz der Invarianzbedingungen zu ermitteln. Diese Zielsetzung muß streng von solchen Variationsformulierungen unterschieden werden, die ein Prinzip der virtuellen Arbeit aus *a priori* gegebenen Gleichgewichtsbedingungen ableiten. Eine solches Vorgehen stellt eine mathematische Umformulierung der

Gleichgewichtsbedingungen dar, deren Beziehungen von ANTMAN & OSBORNE [11] klar herausgearbeitet wurden. Der physikalische Inhalt beider Formulierungen ist gleich. Derartige Variationsprinzipie für thermo-elastische Körper findet man u.a. in BATRA [16].

### 3.2.1 (M1) Geometrische und physikalische Struktur

Die Basismannigfaltigkeit sei hier wieder als Produktmannigfaltigkeit  $\mathcal{M} = \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}$  vorausgesetzt. Als Zustandsraum  $\mathcal{Q}$  wird nun das kartesische Produkt  $\mathcal{Q} = \mathbb{E} \times \mathbb{R}$  benutzt. Dabei stellt  $\mathbb{R} \equiv \mathbb{T}$  die Zeit als 1-dimensionalen Euklidischen Raum dar. Eine globale Konfiguration ist dann eine Abbildung

$$q : \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{R}, \quad (\mathbf{X}, t) \mapsto (\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \tau(\mathbf{X}, t)).$$

Die Tangentialräume an den Zustandsraum im Punkt  $q(p)$ ,  $p \in \mathcal{M}$ , sind auch hier trivial. Es gelten die Isomorphismen  $T_{\mathbf{x}}\mathbb{E} \cong \mathbb{E}$  und  $T_{\tau}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ . Eine lokale Konfiguration ist dann eine Abbildung

$$q : \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J} \rightarrow (T_{\mathbf{x}}\mathbb{E} \cong \mathbb{E}) \times (T_{\tau}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}), \quad (\mathbf{X}, t) \mapsto (\delta\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \delta\tau(\mathbf{X}, t)).$$

Die Verwendung eines Skalarfeldes  $\tau(\mathbf{X}, t)$  mit der Dimension der Zeit ist in der Kontinuumsmechanik ungewöhnlich, zumal hier auch dessen Variation  $\delta\tau$ , Zeitableitung  $\dot{\tau}$  und Gradient  $\text{Grad}(\tau)$  gebildet wird. In den klassischen Variationsprinzipien ist eine virtuelle Änderung der Zeit nicht zulässig. Dort spielt die Zeit nur die Rolle eines Parameters. Anders hingegen in raum-zeitlichen Beschreibungen der Relativitätstheorie, wo die Variation der Eigenzeit eines Beobachters eine sinnvolle Operation darstellt. In der klassischen Lagrangeschen Mechanik führt eine Variation der Raum- und Zeitvariablen auf eine homogene Formulierung, wie sie in POMMARET [91] diskutiert wird. Auch WOZNIAK [124] benutzt virtuelle Zeitvariable im Zusammenhang mit Wirkungsintegralen in der Kontinuumsmechanik.

### 3.2.2 (M2) Nicht-Lokalität der Abbildung

Hier gelte wieder die Beschränkung auf einfache Materialien. Dann ist die lokale Konfiguration durch

$$\mathfrak{F} = (\mathbf{x}, \text{Grad}(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}}, \tau, \text{Grad}(\tau), \dot{\tau}) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \times \mathbb{E} \times \mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \mathbb{R}$$

gegeben. Die zur Konstruktion der virtuellen lokalen Konfiguration benötigten Tangentialräume sind auch hier isomorph zu den entsprechenden Vektorräumen. Die virtuelle lokale Konfiguration kann daher als

$$\delta\mathfrak{F} = (\delta\mathbf{x}, \text{Grad}(\delta\mathbf{x}), \delta\dot{\mathbf{x}}, \delta\boldsymbol{\tau}, \text{Grad}(\delta\boldsymbol{\tau}), \delta\dot{\boldsymbol{\tau}})$$

dargestellt werden.

### 3.2.3 (M3) Die lokale virtuelle Arbeit

Die lokalen Kraftdichten  $\mathbf{t}$  werden als zu  $\delta\mathfrak{F}$  duale Abbildungen bestimmt. Zunächst kann formal geschrieben werden

$$\mathbf{t} = (\mathbf{h}, -\mathbf{T}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}, e) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \times \mathbb{E} \times \mathbb{R} \times \mathbb{E} \times \mathbb{R},$$

wobei die Kontraktion  $\langle \mathbf{t}, \delta\mathfrak{F} \rangle$  durch das innere Produkt auf  $\mathbb{E}$  bzw. die Multiplikation auf  $\mathbb{R}$  ausgeführt wird. Die Größen  $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{q}, e$  sind hier nur symbolisch eingeführt. Es wird später deutlich, daß  $\boldsymbol{\omega}$  die spezifische Spannungsleistung,  $\mathbf{q}$  den Wärmestromvektor <sup>3)</sup> und  $e$  die spezifische innere Energie darstellen.

Nun wird die lokale virtuelle Arbeit gemäß  $\delta W_l = \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} \langle \mathbf{t}, \delta\mathfrak{F} \rangle dV dt$  gebildet. Sie führt auf

$$\delta W_l(\delta\mathbf{x}, \delta\boldsymbol{\tau}) = \delta W_l(\delta\mathbf{x}) + \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (\boldsymbol{\omega} \delta\boldsymbol{\tau} + \mathbf{q} \cdot \text{Grad}(\delta\boldsymbol{\tau}) + e \delta\dot{\boldsymbol{\tau}}) dV dt, \quad (2.3.25)$$

wobei  $\delta W_l(\delta\mathbf{x})$  den in (2.3.2) gegebenen Ausdruck der lokalen virtuellen Arbeit bezeichnet. Nach Anwendung des Satzes von Stokes und partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} \delta W_l(\delta\mathbf{x}, \delta\boldsymbol{\tau}) &= \delta W_l(\delta\mathbf{x}) + \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (\boldsymbol{\omega} - \text{Div}(\mathbf{q}) - \dot{e}) \delta\boldsymbol{\tau} dV dt \\ &\quad + \int_{\mathcal{J}} \int_{\partial\mathcal{P}_0} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \delta\boldsymbol{\tau} dS dt + [\int_{\mathcal{P}_0} e \delta\boldsymbol{\tau} dV]_{\partial\mathcal{J}}. \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

<sup>3)</sup>In TRUESDELL [120] wird die Bezeichnung  $\mathbf{h} = -\mathbf{q}$  für den Wärmestromvektor verwendet. Ist  $\mathbf{n}$  das äußere Normalenvektorfeld auf dem Rand  $\partial\mathcal{P}_0$ , so gibt  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  den abfließenden Wärmestrom an, wogegen  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$  den zufließenden Wärmestrom beschreibt. Die Wahl zwischen  $\mathbf{h}$  oder  $\mathbf{q}$  bestimmt das Vorzeichen in Gleichung (2.3.28)<sub>2</sub>.

### 3.2.4 (M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen

Die zu Gleichung (2.3.26) kompatible Form der globalen virtuellen Arbeit wird folgendermaßen angesetzt

$$\begin{aligned} \delta W_g(\delta \mathbf{x}, \delta \tau) = & \delta W_g(\delta \mathbf{x}) + \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (-r) \delta \tau \, dV \, dt + \int_{\mathcal{J}} \int_{\partial \mathcal{P}_0} (-q_n) \delta \tau \, dS \, dt \\ & + \left[ \int_{\mathcal{P}_0} e_t \delta \tau \, dV \right]_{\partial \mathcal{J}}. \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

Die Größe  $r$  interpretiert man später als die spezifische Wärmeerzeugung,  $q_n$  als den Wärmeeinfluss und  $e_t$  stellt die Anfangsbedingungen für die spezifische innere Energie  $e$  dar. Die negativen Vorzeichen von  $r$  und  $q$  in (2.3.27) entsprechen der Konvention, daß zufließende Energie positiv gezählt wird.

Aufgrund der Kompatibilität  $\delta W_g(\delta \mathbf{x}, \delta \tau) = \delta W_l(\delta \mathbf{x}, \delta \tau)$  erhält man aus (2.3.27) und (2.3.26) durch Einschränkung auf beliebige Teilkörper  $\mathcal{P}_0^{sub}$  und Teilintervalle  $\mathcal{J}^{sub}$  zwei Gleichgewichtsbedingungen und vier Randbedingungen. Die auf die Zustandsgröße  $\mathbf{x}$  bezogenen Bedingungen sind bereits in (2.3.7) vorgestellt worden. Als weitere Bedingungen kommen nun

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \mathfrak{w} - \text{Div}(\mathbf{q}) + r && \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}, \\ q_n &= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} && \text{auf } \partial \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}, \\ e_t &= e && \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \partial \mathcal{J} \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

hinzu. Die Gleichung (2.3.28)<sub>1</sub> stellt den lokalen Energiesatz dar.

### 3.2.5 (M5) Invarianzbedingungen

Die Bedingungen für Invarianz gegenüber räumlicher Translation und Rotation sind, daß  $\delta W_l = 0$  gilt für  $(\delta \mathbf{x}, \delta \tau) = (\mathbf{c}, 0)$  bzw.  $(\delta \mathbf{x}, \delta \tau) = (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}, 0)$ . Es ist ersichtlich, daß diese Bedingungen den auf  $\delta \tau$  bezogenen Teil der virtuellen Arbeit unberücksichtigt lassen und damit zu den Resultaten (2.3.10) und (2.3.15) führen.

Dagegen liefert die Invarianz gegenüber zeitlicher Translation neue Ergebnisse. Diese Invarianzbedingung fordert, daß  $\delta W_l = \delta W'_g$  für die Felder  $(\delta \mathbf{x}, \delta \tau) = (\dot{\mathbf{x}}, 1)$  gültig ist. Dann kann man aus (2.3.25) und (2.3.27) die

Beziehung

$$\begin{aligned} \delta W_l(\dot{\mathbf{x}}) + \int_J \int_{\mathcal{P}_0} \mathfrak{w} \, dV dt &= \delta W_g(\dot{\mathbf{x}}) + \int_J \int_{\mathcal{P}_0} (-r) \, dV dt \\ &+ \int_J \int_{\partial \mathcal{P}_0} (-q_n) \, dS dt + [\int_{\mathcal{P}_0} e_t \delta \tau \, dV]_{\partial J} \end{aligned}$$

herleiten. Um diese Gleichung übersichtlicher zu schreiben, definiert man die Größe

$$\Omega := \int_{\mathcal{P}_0} r \, dV + \int_{\partial \mathcal{P}_0} q_n \, dS, \quad (2.3.29)$$

welche die in einer Zeiteinheit zugeführte Wärmeenergie (*engl. heating*) darstellt. Das linke Integral in (2.3.29) beschreibt die Wärmeerzeugung im Körper (*engl. body heating*), die z.B. durch Zuführung von Strahlungsenergie erfolgen kann. Das rechte Integral beschreibt die über den Körperperrand zufließende Wärmemenge (*engl. contact heating*) (siehe u.a. TRUESDELL [120]). Führt man zusätzlich noch die innere Energie des Körpers als

$$\mathfrak{E} := \int_{\mathcal{P}_0} e \, dV$$

ein, so kann die Invarianzbedingung als

$$\int_J (-\mathfrak{W} + \dot{\mathfrak{K}} + \int_{\mathcal{P}_0} \mathfrak{w} \, dV) dt = \int_J (-\mathfrak{P} - \Omega + 2\dot{\mathfrak{K}}) dt + [\mathfrak{E}]_{\partial J} \quad (2.3.30)$$

geschrieben werden. Nach kurzer Umstellung der Terme erhält man aus (2.3.30) die Beziehung

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathfrak{W} + \Omega) dt = [\mathfrak{E}]_{t_1}^{t_2}. \quad (2.3.31)$$

Gleichung (2.3.31) stellt die globale Form der Energiebilanz für den Körper  $\mathcal{P}_0$  dar.

### 3.3 Kontinua mit skalarer Mikrostruktur

Die Kontinua mit skalarer Mikrostruktur haben einen breiten Anwendungsbereich in der Mechanik. Sie wurden zuerst zur Modellierung von Substanzen mit kontinuierlich verteilten Hohlräumen (*engl. continua with voids*), auch poröse Materialien genannt, eingesetzt. Darüberhinaus eignen sich diese Modelle auch zur Beschreibung von Flüssigkeiten mit fein verteilten Gasblasen,

von granularen Materialien und sogar zur Modellierung des Schädigungsverhaltens von Festkörpern, sofern die Mikrodefekte als Mikroporen gedacht werden (siehe MARKOV [69]).

Allen Modellen ist die gleiche Struktur der Feldgleichungen gemein. Sie unterscheiden sich selbstverständlich in der Interpretation der einzelnen Zustandsvariablen und in der Realisierung entsprechender konstitutiver Gleichungen. Diese beide Aspekte sind nicht aus einem verallgemeinerten theoretischen Modell ableitbar, sondern sind Gegenstand experimenteller Untersuchungen.

### 3.3.1 (M1) Geometrische and physikalische Struktur

Der folgenden Herleitung liegt weiterhin die Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M} = \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}$  zugrunde. Ein thermo-mechanisches Kontinuum mit skalarer Mikrostruktur wird durch einen Zustandsraum  $\mathcal{Q} = \mathbb{E} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  beschrieben. Eine globale Konfiguration ist dann eine Abbildung

$$q : \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad (\mathbf{X}, t) \mapsto (\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \tau(\mathbf{X}, t), \nu(\mathbf{X}, t)),$$

wobei die Zustandsvariable  $\nu(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{R}$  die skalare Mikrostruktur beschreibt. Diese Mikrostrukturvariable ist als differenzierbares Skalarfeld über der Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M} = \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}$  definiert und steht gleichberechtigt neben den „Makro“-Variablen  $(\mathbf{x}, \tau)$ . Der Mikrostruktur wird im Rahmen dieser allgemeinen Methode *keine* Sonderrolle zugeordnet. Es werden z.B. *keine* speziellen Invarianzbedingungen für die Mikrostruktur aufgestellt. Dieses macht den vereinheitlichenden Charakter dieser Methode aus.

### 3.3.2 (M2) Nicht-Lokalität der Abbildung

Auch hier gelte die Beschränkung auf einfache Materialien. Eine lokale Konfiguration wird dann durch folgende Abbildungen dargestellt

$$\mathfrak{F} = (\mathbf{x}, \text{Grad}(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}}, \tau, \text{Grad}(\tau), \dot{\tau}, \nu, \text{Grad}(\nu), \dot{\nu}).$$

Die virtuelle lokale Konfiguration kann wie bisher durch Voranstellen des  $\delta$ -Symbols an die Zustandsvariablen gebildet werden, da auch hier alle Tangentialräume  $T_{q(p)}\mathcal{Q} = T_{\mathbf{x}}\mathbb{E} \times \dots \times T_{\nu}\mathbb{R}$  zu den entsprechenden Vektorräumen  $\mathbb{E}$  oder  $\mathbb{R}$  isomorph sind.

### 3.3.3 (M3) Die lokale virtuelle Arbeit

Nun führt man die lokalen Dichten

$$\mathfrak{t} = (\mathbf{h}, -\mathbf{T}, \mathbf{p}, \mathfrak{w}, \mathbf{q}, e, g, -\mathbf{k}, \kappa)$$

ein. Diese stammen aus dem Dualraum zu  $T_{\mathfrak{q}(p)}\mathcal{Q}$ , welcher über das innere Produkt auf  $\mathbb{E}$  mit  $T_{\mathfrak{q}(p)}\mathcal{Q} = T_{\mathbf{x}}\mathbb{E} \times \dots \times T_{\mathbf{v}}\mathbb{R}$  identifiziert wird. Die neuen Größen  $(g, -\mathbf{k}, \kappa)$  erhalten ihre Bedeutung erst, wenn der skalaren Mikrostruktur eine spezifische Interpretation zugewiesen wird. Allgemein soll von  $g$  als intrinsischer Mikro-Volumenkraftdichte, von  $\mathbf{k}$  als Mikro-Spannung und von  $\kappa$  als Mikro-Impulsdichte gesprochen werden.

Die entsprechende Form der lokalen virtuellen Arbeit ist dann

$$\begin{aligned} \delta W_l(\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\tau}, \delta \mathbf{v}) &= \delta W_l(\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\tau}) \\ &+ \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (g \delta \mathbf{v} - \mathbf{k} \cdot \text{Grad}(\delta \mathbf{v}) + \kappa \delta \dot{\mathbf{v}}) dV dt, \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

worin  $\delta W_l(\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\tau})$  die lokale virtuelle Arbeit (2.3.25) bezeichnet. Das negative Vorzeichen von  $\mathbf{k}$  deutet an, daß diese Größe als ein Spannungs-Zufluß angesehen wird.

### 3.3.4 (M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen

Wendet man den Satz von Stokes und die partielle Integration auf (2.3.32) an, so kann man die lokale virtuelle Arbeit in die Form

$$\begin{aligned} \delta W_l(\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\tau}, \delta \mathbf{v}) &= \delta W_l(\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\tau}) + \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (g + \text{Div}(\mathbf{k}) - \dot{\kappa}) \delta \mathbf{v} dV dt \\ &+ \int_{\mathcal{J}} \int_{\partial \mathcal{P}_0} (-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} \delta \mathbf{v} dS dt + [\int_{\mathcal{P}_0} \kappa \delta \mathbf{v} dV]_{\partial \mathcal{J}} \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

überführen. Aufgrund der Kompatibilität von lokaler und globaler virtueller Arbeit und der Einschränkung der Arbeitsterme auf Teilkörper  $\mathcal{P}_0^{sub}$  und Teilintervalle  $\mathcal{J}^{sub}$  muß die globale virtuelle Arbeit von der Form

$$\begin{aligned} \delta W_g(\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\tau}, \delta \mathbf{v}) &= \delta W_g(\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\tau}) + \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (-l) \delta \mathbf{v} dV dt \\ &+ \int_{\mathcal{J}} \int_{\partial \mathcal{P}_0} (-k_n) \delta \mathbf{v} dS dt + [\int_{\mathcal{P}_0} \kappa_t \delta \mathbf{v} dV]_{\partial \mathcal{J}} \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

sein. Die Größen  $l$ ,  $k_n$  und  $\kappa_t$  sind die entsprechenden globalen Kraftdichten. Insbesondere wird  $l$  als externe Mikro-Volumenkraftdichte bezeichnet.

Die Kompatibilität von (2.3.32) und (2.3.34) führt auf 3 Gleichgewichtsbedingungen und 6 Randbedingungen. Zusätzlich zu (2.3.7) und (2.3.28) ergeben sich die neuen Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{k}} &= \text{Div}(\mathbf{k}) + \mathbf{g} + \mathbf{l} && \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \mathcal{I}, \\ k_n &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} && \text{auf } \partial\mathcal{P}_0 \times \mathcal{I}, \\ \kappa_t &= \kappa && \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \partial\mathcal{I}.\end{aligned}\tag{2.3.35}$$

Die Mikro-Impulsdichte  $\kappa$  wird durch ein konstitutives Gesetz der allgemeinen Form  $\kappa = \kappa_f(\mathfrak{F})$  beschrieben. Üblicherweise nimmt man  $\kappa$  aber nur als Funktion von  $\dot{\mathbf{v}}$  an, was sicherlich durch die Analogie zu  $\mathbf{p} = \rho_0 \dot{\mathbf{x}}$  initiiert ist. Der entsprechende Ansatz lautet dann

$$\kappa = \mu \dot{\mathbf{v}},\tag{2.3.36}$$

worin  $\mu$  eine Mikro-Trägheitsdichte darstellt, die i.a. als nicht-konstantes Skalarfeld auftritt.

### 3.3.5 (M5) Invarianzbedingungen

**Invarianz gegenüber räumlicher Translation und Rotation.** Die Bedingung für Invarianz der virtuellen Arbeit gegenüber räumlicher Translation und Rotation ist, daß gilt  $\delta W_l = 0$  für  $(\delta \mathbf{x}, \delta \tau, \delta \mathbf{v}) = (\mathbf{c}, 0, 0)$  und  $(\delta \mathbf{x}, \delta \tau, \delta \mathbf{v}) = (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}, 0, 0)$ . Dieses bedeutet, daß die skalare Zustandsvariable  $\mathbf{v}$  durch die räumlichen Transformationen nicht geändert wird. Aus diesen beiden Invarianzbedingungen folgen demnach die Gleichgewichtsbedingungen (2.3.10) und (2.3.15).

**Invarianz gegenüber zeitlicher Translation.** Die Bedingung für Invarianz der virtuellen Arbeit gegenüber zeitlicher Translation erfordert, daß  $\delta W_l = \delta W_g$  für alle  $(\delta \mathbf{x}, \delta \tau, \delta \mathbf{v}) = (\dot{\mathbf{x}}, 1, \dot{\mathbf{v}})$  gilt. Aus (2.3.32) und (2.3.34) folgt zunächst

$$\begin{aligned}\delta W_g(\dot{\mathbf{x}}, \tau = 1) &+ \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (-l) \dot{\mathbf{v}} \, dV dt + \int_{\mathcal{J}} \int_{\partial\mathcal{P}_0} (-k_n) \dot{\mathbf{v}} \, dS dt + \left[ \int_{\mathcal{P}_0} \kappa_t \dot{\mathbf{v}} \, dV \right]_{\partial\mathcal{I}} \\ &= \delta W_l(\dot{\mathbf{x}}, \tau = 1) + \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (g \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{k} \cdot \text{Grad}(\dot{\mathbf{v}}) + \kappa \ddot{\mathbf{v}}) \, dV dt,\end{aligned}\tag{2.3.37}$$

worin  $\delta W_l(\dot{\mathbf{x}}, \tau = 1)$  und  $\delta W_g(\dot{\mathbf{x}}, \tau = 1)$  auf die entsprechenden Terme des thermoelastischen Kontinuums hinweisen. Führt man nun die kinetische

Energie  $\mathfrak{K}_v$ , die externe Leistung  $\mathfrak{P}_v$  und die Spannungsleistung  $\mathfrak{W}_v$  ein, die gemäß

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_v &:= \int_{\mathcal{P}_0} \frac{1}{2} \mu \dot{v} \dot{v} dV, \\ \mathfrak{P}_v &:= \int_{\mathcal{P}_0} l \dot{v} dV + \int_{\partial \mathcal{P}_0} k_n \dot{v} dS, \\ \mathfrak{W}_v &:= \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{k} \cdot \text{Grad}(\dot{v}) - g \dot{v} + \frac{1}{2} \dot{\mu} \dot{v} \dot{v}) dV\end{aligned}\quad (2.3.38)$$

definiert sind, so ergeben sich aus (2.3.37) die Gesamtgrößen

$$\begin{aligned}\mathfrak{K} &= \int_{\mathcal{P}_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \mu \dot{v} \dot{v} dV, \\ \mathfrak{P} &= \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{x}} + l \dot{v} dV + \int_{\partial \mathcal{P}_0} \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{x}} + k_n \dot{v} dS, \\ \mathfrak{W} &= \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} + (\mathbf{k} \cdot \text{Grad}(\dot{v}) - g \dot{v} + \frac{1}{2} \dot{\mu} \dot{v} \dot{v}) dV.\end{aligned}\quad (2.3.39)$$

Die spezifische Spannungsleistung der Mikro- und Makrovariablen kann nun als

$$\mathfrak{w} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{k} \cdot \text{Grad}(\dot{v}) + \left(\frac{1}{2} \dot{\mu} \dot{v} - g\right) \dot{v} \quad (2.3.40)$$

geschrieben werden. Setzt man (2.3.40) schließlich in (2.3.28)<sub>1</sub> ein, so erhält man die lokale Energiebilanz für ein Kontinuum mit skalarer Mikrostruktur

$$\dot{e} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \mathbf{k} \cdot \text{Grad}(\dot{v}) + \left(\frac{1}{2} \dot{\mu} \dot{v} - g\right) \dot{v} - \text{Div}(\mathbf{q}) + r. \quad (2.3.41)$$

### 3.3.6 Interpretation der Zustandsvariablen

Die oben abgeleiteten allgemeinen Feldgleichungen für ein Kontinuum mit skalarer Mikrostruktur werden nun anhand der Modellvorstellungen von porösen Materialien und von Materialien mit Mikrodefekten erläutert.

Ein kontinuumsmechanisches Modell für poröse Körper oder granulare Materialien beschreibt das Verhalten einer Matrix aus herkömmlichem (elastischem) Material welches kontinuierlich verteilte Hohlräume aufweist (siehe NUNZIATO & COWIN [83]). Anwendungsgebiete solcher Materialmodelle sind u.a. die Felsmechanik, die Bodenmechanik und die Keramik. Von GOODMAN & COWIN [42] wird ein Modell für die Anwendung auf fließende

granulare Stoffe vorgestellt. CIARLETTA & SCALIA [28] haben ein Modell poröser Stoffe auf die Thermodynamik piezo-elektrischer Materialien angewandt. Sie schreiben dazu: „*The theory of materials with voids seems to be an adequate tool to describe the behavior of piezoelectric bodies (such as piezoceramics, piezoelectric powders, etc.) because of the fact that most materials of interest are made of granules.*“ In CIARLETTA & SCALIA [27] wird die hier gezeigte Modellvorstellung auf nicht-einfache, nichtlineare thermoelastische Körper erweitert.

Allen Modellen ist gemein, daß die Zustandsvariable  $\mathbf{x}$  die Deformation des Matrixmaterialies beschreibt, während die Mikrostrukturvariable  $\nu$  als Volumenverhältnis zwischen Matrix- und Hohlraumvolumen dient. Wenn  $\gamma$  die Massendichte des Matrixmaterialies darstellt und für das Volumenverhältnis  $\nu$  Werte im Bereich  $0 < \nu \leq 1$  zugelassen werden, dann kann die Massendichte  $\rho$  des porösen Stoffes als

$$\rho = \nu\gamma \quad (2.3.42)$$

angegeben werden. Die Zustandsvariablen  $(\mathbf{x}, \nu)$  legen dann die räumliche Position und das Volumenverhältnis für jeden materiellen Punkt  $\mathbf{X}$  fest. Für ein Material mit geringer Porosität gilt näherungsweise  $\nu \cong 1$ . Ein Material mit fast homogener Verteilung des Porenvolumens kann näherungsweise durch  $\text{Grad}(\nu) \cong 0$  beschrieben werden.

Die Interpretation der dualen Größen kann in NUNZIATO & COWIN [83] gefunden werden, wo interessante gedankliche Experimente im Zusammenhang mit großen Hohlräumen in Materialien angestellt werden. MACKENZIE [62] hat solche Untersuchungen an kugelförmigen Hohlräumen durchgeführt. Seine Ergebnisse werden von NUNZIATO & COWIN [83] auf poröse Materialien übertragen, indem die finite Porengeometrie auf einen (infinitesimal) kleinen Maßstab bezogen wird, da sich in einem Kontinuumsmodell poröser Stoffe an jedem materieller Punkt eine Pore befindet. Aus solchen Betrachtungen leiten NUNZIATO & COWIN (S.195) ab, daß „*g is a pressure acting on the void which depends on the configuration of the void, the stress state in the matrix, and the material properties of the matrix.*“ Weiterhin finden sie, daß die äußere Mikrokraft  $l$  interpretiert werden kann als „*a pressure which is related to the pressure applied at the inner surface of the void, i.e., an externally controlled pore pressure.*“ Die Mikrospannung  $\mathbf{k}$ , sie wird dort „*equilibrated stress*“ genannt, ergibt sich als „*resultant force in the matrix*“

*acting on a void as a result of its interaction with neighboring voids.*“

Aus (2.3.41) ist ersichtlich, daß die Mikrospannung  $\mathbf{k}$  über den Term  $\mathbf{k} \cdot \text{Grad}(\mathbf{v})$  in die Spannungsleistung eingeht. Für eine nahezu homogene Porenverteilung,  $\text{Grad}(\mathbf{v}) \cong 0$ , ist der Einfluß von  $\mathbf{k}$  auf die Energiebilanz also gering. NUNZIATO & COWIN stellen dazu fest: „ $\mathbf{k}$  can only become important if the void distribution is grossly non-uniform or if the initial void volume is large.“ Ferner schreiben sie: „for isotropic materials, all homogeneously-deformed, equilibrium states are also states of uniform porosity.“

Die Anwendbarkeit des hier beschriebenen Kontinuumsmodelles auf reale Gegebenheiten hängt zunächst davon ab, ob die Grundkonzepte dieses Modelles auf die Realität zutreffen. Hierbei ist entscheidend, ob der betrachtete Stoff als materieller Körper modelliert werden kann oder nicht. Ein poröser Festkörper, der von einer Flüssigkeit durchtränkt wird, fällt sicherlich aus diesem konzeptionellen Rahmen heraus, wenn die separaten Bewegungen von Festkörper und Flüssigkeit betrachtet werden. Zwei infinitesimal benachbarte Körperpunkte, der eine zur Flüssigkeit, der andere zum Festkörper gehörend, befinden sich nach einiger Zeit nicht mehr unbedingt in unmittelbarer Nachbarschaft. Die dem materiellen Körper zugrundeliegende Topologie ist damit zerstört und der konzeptionelle Rahmen verlassen.

Eine Beschreibung saturierter poröser Stoffe bedarf also eines anderen Grundkonzeptes als dem des materiellen Körpers. Ein mögliches Konzept ist ein Mischungskörper (siehe TRUESDELL & TOUPIN [122]), das ist ein Mehrkomponentenkontinuum, dessen stoffliche Zusammensetzung über Volumenanteile modelliert wird. Jede Komponente ist für sich ein materieller Körper, d.h. materielle Punkte verschiedener Komponenten können denselben räumlichen Ort einnehmen. Ein solches Grundkonzept verändert selbstverständlich alle abgeleiteten Konzepte und Definitionen. So kommt z.B. dem Begriff der materiellen Ableitung eines Körperpunktes keine Bedeutung mehr zu. An dessen Stelle tritt nun die Mischungsgeschwindigkeit. Eine grundlegende Einführung in die Mischungstheorie findet sich in TRUESDELL & TOUPIN [122]. Die Anwendung der Mischungstheorie auf saturierte poröse Stoffe stellt DE BOER [31] dar. Dort wird auch eine interessante historische Übersicht über dieses Gebiet gegeben. Um ein Anwendungsgebiet der Mischungstheorie zu nennen, sei auf HAWKINS & BEDFORD [48] verwiesen, wo ozeanische Sedimente betrachtet werden. Ihre Durchtränkung mit blasenhaltigen Flüssigkeiten verändert die akustischen Eigenschaften, die

insbesondere für die Seismographie bedeutsam sind.

Ein ganz anderes Anwendungsgebiet für die Kontinua mit skalarer Mikrostruktur bildet die Beschreibung des Schädigungsverhaltens von Festkörpern. Eine detaillierte Beschreibung solcher Modelle findet man in MARKOV [69] und den dort gegebenen Literaturverweisen. Die Mikrostrukturvariable  $\nu$  beschreibt ein Schädigungsverhalten, wenn der Mikro-Verzerrungstensor  $\alpha$  als kugelförmig angenommen wird, d.h.  $\alpha = \nu \mathbf{I}$ . Dann tritt  $\nu$  als skalare Schädigungsvariable in Erscheinung. Obwohl die Interpretationen der Mikrospannungen und Mikrokräfte nun andere sind, lassen sich hier abgeleitete Schlußfolgerungen direkt auf das Schädigungsmodell übertragen. In MARKOV [69] finden sich z.B. Anmerkungen, daß  $\mathbf{k}$  — der Mikro-Spannungstensor wird dort *hyperstress field* genannt — null ist, falls das Schädigungsfeld homogen ist.

Diese Beispiele zeigen deutlich, daß eine allgemein hergeleitete Feldtheorie der Kontinua mit Mikrostruktur eine Bedeutung besitzt, die über den Anwendungsbereich einzelner Modellvorstellungen hinausgeht. Schlußfolgerungen, die auf eine Modellvariante zutreffen, können leicht auf andere Modellvarianten übertragen werden, wenn die Interpretation der zugrundeliegenden Größen entsprechend geändert wird. Dieses hilft, sich von der immer gleichartigen Herleitung der Feldtheorie zu befreien und sich den wesentlichen mechanischen Aufgaben zu widmen: Die physikalische Interpretation der verwendeten Größen und die Aufstellung experimentell begründeter konstitutiver Beziehungen.

### 3.4 Kontinua mit affiner Mikrostruktur, mikromorphe Kontinua

#### 3.4.1 (M1) Geometrische and physikalische Struktur

Ein Kontinuum mit affiner Mikrostruktur ist ein klassisches Kontinuum mit einer Mikrostruktur, die durch ein Tensorfeld  $\mathbf{A} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$  gebildet wird. Die Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  dieses Kontinuums wird wiederum durch die Produktmannigfaltigkeit  $\mathcal{M} = \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}$  dargestellt. Der Zustandsraum eines thermo-elastischen Körpers mit affiner Mikrostruktur ist als  $\mathcal{Q} = \mathbb{E} \times \mathbb{R} \times$

$\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$  gegeben. Eine globale Konfiguration wird dann durch

$$q : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{R} \times \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}, \quad (\mathbf{X}, t) \mapsto (\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \tau(\mathbf{X}, t), \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)) \quad (2.3.43)$$

beschrieben. Die Dimension des Zustandsraumes ist  $\dim \mathcal{Q} = 13$ , wovon 9 skalare Zustandsgrößen der Mikrostruktur zugerechnet werden. Die Konstruktion des Tangentialraumes  $T_{q(p)}\mathcal{Q}$  fällt auch hier nicht schwer. Der Tangentialraum  $T_{\mathbf{A}} \text{Lin}(\mathbb{E}; \mathbb{E})$  ist auf natürliche Weise isomorph zu  $\text{Lin}(\mathbb{E}; \mathbb{E})$ . Es gilt also

$$T_{q(p)}\mathcal{Q} \cong (T_{\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}\mathbb{E}) \times (T_{\tau(\mathbf{X}, t)}\mathbb{R}) \times (T_{\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)}(\mathbb{E} \otimes \mathbb{E})) \cong \mathbb{E} \times \mathbb{R} \times \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}.$$

Die virtuellen Größen lassen sich daher aus den gleichen Räumen wie die realen Größen entnehmen. Für die virtuelle globale Konfiguration erhält man

$$\delta q : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{R} \times \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}, \quad (\mathbf{X}, t) \mapsto (\delta \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \delta \tau(\mathbf{X}, t), \delta \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)).$$

### 3.4.2 (M2) Nicht-Lokalität der Abbildung

Hier gilt wieder die Beschränkung auf einfache Materialien. Die lokale Konfiguration in  $p \in \mathcal{M}$  ist durch

$$\mathfrak{F}(p) = (\mathbf{x}, \text{Grad}(\mathbf{x}), \dot{\mathbf{x}}, \tau, \text{Grad}(\tau), \dot{\tau}, \mathbf{A}, \text{Grad}(\mathbf{A}), \dot{\mathbf{A}})|_{(\mathbf{x}, t)} \quad (2.3.44)$$

bestimmt. Der Term  $\text{Grad}(\mathbf{A}) \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$  stellt einen Tensor 3. Stufe dar. Da in (2.3.44) nur Elemente linearer Räume vorkommen, sind die Räume der virtuellen lokalen Konfiguration mit denen aus (2.3.44) identisch.

### 3.4.3 (M3) Die lokale virtuelle Arbeit

Die zu  $\delta \mathfrak{F}(p)$  dualen lokalen Kraftdichten  $\mathfrak{t}(p)$  entstammen den gleichen Räumen wie  $\delta \mathfrak{F}(p)$  selbst. Die Kontraktion wird durch das innere Produkt gebildet. Als Kraftdichte  $\mathfrak{t}(p)$  verwendet man die Größen

$$\mathfrak{t}(p) = (\mathbf{h}, -\mathbf{T}, \mathbf{p}, \mathfrak{w}, \mathbf{q}, e, \mathbf{H}, -\mathbb{T}, \mathbf{P}).$$

Da  $\text{Grad}(\delta \mathbf{A})$  einen Tensor 3.Stufe darstellt, muß die konjugierte Größe ebenfalls ein Tensor 3.Stufe sein. Dieser wird mit  $\mathbb{T}$ <sup>4)</sup> bezeichnet. Die lokale virtuelle Arbeit lautet dann

$$\delta W_l = \delta W_l(\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\tau}) + \int_J \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{A} - \mathbb{T} \cdot \text{Grad}(\delta \mathbf{A}) + \mathbf{P} \cdot \delta \dot{\mathbf{A}}) dV dt, \quad (2.3.45)$$

worin sich  $\delta W_l(\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\tau})$  wieder auf (2.3.25) bezieht. Der Tensor  $\mathbb{T}$  wird allgemein als Hyper-Spannungstensor bezeichnet. Sein negatives Vorzeichen kennzeichnet ihn als zufließende Größe. Die Tensoren  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{H}$  sind Tensoren 2.Stufe und werden als Mikro-Impulsdichte bzw. intrinsische Mikro-Volumenkraftdichte bezeichnet.

Die formale Transformation von (2.3.45) mittels des Satzes von Stokes und der partiellen Integration ist hier etwas komplizierter als sonst, da Tensoren 3.Stufe berücksichtigt werden müssen. Die entsprechenden algebraischen Rechenregeln können jedoch leicht hergeleitet werden und finden sich im Anhang. Als Resultat erhält man hier

$$\begin{aligned} \delta W_l = & \delta W_l(\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\tau}) + \int_J \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{H} + \text{Div}(\mathbb{T}) - \dot{\mathbf{P}}) \cdot \delta \mathbf{A} dV dt \\ & + \int_J \int_{\partial \mathcal{P}_0} (-\mathbb{T} \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{A} dS dt + [\int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{A} dV]_{\partial J}. \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

Wie man sieht, läßt sich die Divergenzoperation in der gleichen Weise wie bei Tensoren 2.Stufe schreiben. Dieses ist eine wesentliche Vereinfachung gegenüber der unhandlichen Komponentenschreibweise.

#### 3.4.4 (M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen

Die zu (2.3.46) kompatible Form der globalen virtuellen Arbeit kann nun als

$$\begin{aligned} \delta W_g = & \delta W_g(\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\tau}) + \int_J \int_{\mathcal{P}_0} (-\mathbf{B}) \cdot \delta \mathbf{A} dV dt \\ & + \int_J \int_{\partial \mathcal{P}_0} (-\mathbf{T}_n) \cdot \delta \mathbf{A} dS dt + [\int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{P}_t \cdot \delta \mathbf{A} dV]_{\partial J} \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

eingeführt werden, wobei  $\delta W_g(\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\tau})$  wiederum (2.3.27) ersetzt. Die tensorielle Größe  $\mathbf{B}$  ist der äußere Mikro-Volumenkrafttensor und  $\mathbf{T}_n$  bildet den

<sup>4)</sup>Dieses Symbol ist bereits als Mengensymbol für die *Zeit* verwendet worden. Die Doppelbeutung sollte aber keine Probleme bereiten, da die jeweilige Bedeutung aus dem Kontext klar hervorgeht.

Mikro-Randkrafttensor.  $\mathbf{P}_t$  stellt den entsprechenden Randwert von  $\mathbf{P}$  auf dem Rand  $\partial\mathcal{J}$  dar. Aus der Kompatibilität von (2.3.47) und (2.3.46) und der Einschränkung auf Teilgebiete  $\mathcal{P}_0^{sub}$  und Teilintervalle  $\mathcal{J}^{sub}$  kann man 3 Gleichgewichtsbedingungen und 6 Randbedingungen ableiten. Neben den Bedingungen (2.3.7) und (2.3.15) erhält man hier

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}} &= \mathbf{H} + \text{Div}(\mathbb{T}) + \mathbf{B} && \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}, \\ \mathbf{T}_n &= \mathbb{T}\mathbf{n} && \text{auf } \partial\mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}, \\ \mathbf{P}_\tau &= \mathbf{P} && \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \partial\mathcal{J}. \end{aligned} \quad (2.3.48)$$

Ähnlich wie bei der skalaren Mikrostruktur wird für den Mikro-Impulstensor  $\mathbf{P}$  oft ein Ansatz

$$\mathbf{P} = \dot{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Xi} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\Xi}^\top, \quad \boldsymbol{\Xi} = \text{konst.} \quad (2.3.49)$$

gemacht, worin  $\boldsymbol{\Xi}$  einen Mikro-Trägheitstensor beschreibt. Dieser wird gewöhnlich als symmetrischer Tensor 2.Stufe angenommen (siehe CAPRIZ & PODIO-GUIDUGLI [24]).

### 3.4.5 (M5) Invarianzbedingungen

**Invarianz gegenüber räumlicher Translation und Rotation.** Die Invarianz gegenüber räumlicher Translation erfordert, daß  $\delta W_I = 0$  gilt für  $(\delta\mathbf{x}, \delta\boldsymbol{\tau}, \delta\mathbf{A}) = (\mathbf{c}, 0, 0)$ . Diese Bedingung liefert keine neuen Resultate, sondern führt auf den Impulssatz (2.3.10).

Die Invarianz gegenüber räumlicher Rotation erfordert, daß  $\delta W_I = 0$  gilt für  $(\delta\mathbf{x}, \delta\boldsymbol{\tau}, \delta\mathbf{A}) = (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}, 0, \boldsymbol{\Omega}\mathbf{A})$ . Setzt man diese Bedingung in (2.3.45) ein, so ergibt sich nach kurzer Umformung

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} & \left( -\mathbf{T}\mathbf{F}^\top \cdot \boldsymbol{\Omega} + \rho \dot{\mathbf{x}} \otimes \dot{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\Omega}\mathbf{A} \right. \\ & \left. - \mathbb{T} \cdot \text{Grad}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}) + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{A}} \right) dV dt = 0. \end{aligned}$$

Klammert man nun den Tensor  $\boldsymbol{\Omega}$  aus, so bleibt

$$\int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} \left( -\mathbf{T}\mathbf{F}^\top + \mathbf{H}\mathbf{A}^\top - \mathbb{T}^I(\mathbf{A}, I)^\top + \dot{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Xi}\dot{\mathbf{A}}^\top \right) \cdot \boldsymbol{\Omega} dV dt = 0. \quad (2.3.50)$$

Da (2.3.50) für jeden Teilkörper  $\mathcal{P}_0^{sub}$  und jedes Teilintervall  $\mathcal{J}^{sub}$  gelten muß, kann auf die lokale Bedingung

$$\text{skw}(\mathbf{T}\mathbf{F}^\top - \mathbf{H}\mathbf{A}^\top + \mathbb{T}^I(\mathbf{A}, I)^\top) = \mathbf{0} \quad (2.3.51)$$

geschlossen werden. Der Trägheitsterm aus (2.3.50) fällt heraus, da aufgrund der Symmetrie des Mikro-Trägheitstensors die Beziehung  $\dot{\mathbf{A}}\boldsymbol{\Xi}\dot{\mathbf{A}}^\top \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$  gilt. Die Bedingung (2.3.51) besagt, daß der in Klammern stehende Ausdruck symmetrisch sein muß. In der klassischen Kontinuumsmechanik bliebe von (2.3.51) lediglich  $\mathbf{T}\mathbf{F}^\top$  übrig. Die Bedingung (2.3.51) entspräche dann der Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors. Diese gilt hier nicht. Stattdessen läßt sich (2.3.51) als Bestimmungsgleichung für den schiefsymmetrischen Teil des Cauchyschen Spannungstensors auffassen. Es gilt nämlich

$$skw(\mathbf{T}\mathbf{F}^\top) = skw(\mathbf{H}\mathbf{A}^\top - \mathbb{T}^I(\mathbf{A},_I)^\top). \quad (2.3.52)$$

Die Gleichung (2.3.51) entspricht aufgrund der Schiefsymmetrie 3 skalaren Gleichungen. Anstatt den schiefsymmetrischen Teil von  $\mathbf{T}\mathbf{F}^\top$  zu bestimmen, verwendet man diese Gleichungen gewöhnlich um die 9 unbekanntenen Komponenten des Tensors  $\mathbf{H}$  durch 6 Unbekannte eines symmetrischen Tensors  $\mathbf{Z}$  zu ersetzen. Eine solche Vorgehensweise ist in CAPRIZ & PODIO-GUIDUGLI [24], CAPRIZ & GUIDUGLI [23] und G. CAPRIZ [40] zu finden. Der zu diesem Zweck eingeführte symmetrische Tensor  $\mathbf{Z}$  wird als

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &:= -\mathbf{T}\mathbf{F}^\top + \mathbf{H}\mathbf{A}^\top - \mathbb{T}^I(\mathbf{A},_I)^\top \quad \text{oder} \\ &:= (-\mathbf{F}\mathbf{T}^\top + \mathbf{A}\mathbf{H}^\top - \mathbf{A},_I(\mathbb{T}^I)^\top), \quad \text{da } skw(\mathbf{Z}) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.3.53)$$

definiert. Mechanisch spielt  $\mathbf{Z}$  die Rolle eines neuen Spannungstensors, der Mikro- und Makrospannungen umfaßt. In der Schalentheorie ist ein solcher Spannungstensor als effektiver Spannungstensor bekannt (siehe SIMO ET AL. [108]). Transponiert man nun (2.3.48)<sub>1</sub> und überschiebt dann von links mit  $\mathbf{A}$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{H}^\top &= -\mathbf{A}(\text{Div}(\mathbb{T}))^\top - \mathbf{A}\mathbf{B}^\top + \mathbf{A}\dot{\mathbf{P}}^\top, \\ &= -\mathbf{A}(\mathbb{T}^I|_I)^\top - \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{A}\boldsymbol{\Xi}\dot{\mathbf{A}}^\top, \end{aligned} \quad (2.3.54)$$

worin  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{A}\mathbf{B}^\top$  nun als eine neue Mikro-Volumenkraftdichte eingeführt wurde. Der Term  $\mathbb{T}^I|_I$  ist die kovariante Ableitung von  $\mathbb{T}^I = \mathbb{T}\mathbf{G}^I$ . Um den Trägheitsterm in (2.3.54) einfacher manipulieren zu können, definiert man einen neuen Trägheitstensor  $\boldsymbol{\Theta}$  und ein Feld  $\mathbf{W}$  (*engl. wrench field*) gemäß

$$\boldsymbol{\Theta} := \mathbf{A}\boldsymbol{\Xi}\mathbf{A}^\top \quad \text{und} \quad \mathbf{W} := \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^{-1}. \quad (2.3.55)$$

Eine kurze Transformation ergibt, daß die materielle Zeitableitung  $\dot{\Theta}$  als

$$\dot{\Theta} = \mathbf{W}\Theta + \Theta\mathbf{W}^T = 2 \text{ sym}(\mathbf{W}\Theta) \quad (2.3.56)$$

darstellbar ist. Gleichung (2.3.56) bildet eine Evolutionsgleichung für den Mikro-Trägheitstensor  $\Theta$ . CAPRIZ [22] merkt an, daß (2.3.56) auch als Erhaltungsgesetz für die Mikroträgheit postuliert werden kann. Hier tritt es allerdings als Ergebnis von (2.3.55) auf.

Nach dem Einsetzen von (2.3.54)<sub>2</sub> in (2.3.53)<sub>2</sub> erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} + \mathbf{F}\mathbf{T}^T + (\mathbf{A},_I)(\mathbb{T}^I)^T &= -\mathbf{A}(\mathbb{T}^I|_I)^T - \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{A}\Xi\dot{\mathbf{A}}^T \quad \text{oder} \\ \mathbf{A}\Xi\dot{\mathbf{A}}^T &= \mathbf{Z} + \mathbf{F}\mathbf{T}^T + (\mathbf{A}(\mathbb{T}^I)^T)|_I + \bar{\mathbf{B}}. \end{aligned} \quad (2.3.57)$$

Um die kovariante Ableitung von  $(\mathbf{A}(\mathbb{T}^I)^T)$  in rein symbolischer Form zu schreiben, definiert man einen Mikro-Spannungstensor  $\bar{\mathbb{T}} := \mathbf{A}(\mathbb{T}^I)^T \otimes \mathbf{G}_I$ . Dann läßt sich  $(\mathbf{A}(\mathbb{T}^I)^T)|_I$  als  $\text{Div}(\bar{\mathbb{T}})$  darstellen. Den Trägheitsterm in (2.3.57)<sub>2</sub> kann man durch die neuen Größen aus (2.3.55) ersetzen. Nach kurzer Umformung ergibt sich

$$\mathbf{A}\Xi\dot{\mathbf{A}}^T = \Theta(\mathbf{W}\mathbf{W} + \dot{\mathbf{W}})^T. \quad (2.3.58)$$

Setzt man letztlich (2.3.58) in (2.3.57)<sub>2</sub> ein, so erhält man als Endergebnis die Gleichgewichtsbedingung

$$\Theta(\mathbf{W}\mathbf{W} + \dot{\mathbf{W}})^T = \mathbf{Z} + \mathbf{F}\mathbf{T}^T + \text{Div}(\bar{\mathbb{T}}) + \bar{\mathbf{B}}. \quad (2.3.59)$$

**Invarianz gegenüber zeitlicher Translation.** Die Invarianz gegenüber zeitlicher Translation ist erfüllt, wenn gilt  $\delta W_g = \delta W_l$  für  $(\delta \mathbf{x}, \delta \tau, \delta \mathbf{A}) = (\dot{\mathbf{x}}, 1, \dot{\mathbf{A}})$ . Setzt man diese Bedingung in die entsprechenden Ausdrücke ein, so ergibt sich die globale Form der Energiebilanz für mikromorphe Kontinua, welche u.a. die folgenden Terme enthält

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_A &= \int_{\mathcal{P}_0} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{A}}\Xi \cdot \dot{\mathbf{A}} \, dV, \\ \mathfrak{P}_A &= \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{A}} \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_0} \mathbf{T}_n \cdot \dot{\mathbf{A}} \, dS, \\ \mathfrak{W}_A &= \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbb{T} \cdot \text{Grad}(\dot{\mathbf{A}}) - \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{A}}) \, dV. \end{aligned} \quad (2.3.60)$$

Die Größen  $\mathfrak{K}_A$ ,  $\mathfrak{P}_A$  und  $\mathfrak{W}_A$  sind die kinetische Energie, die Leistung äußerer Kräfte und die Spannungsleistung der Mikrostrukturvariable. Durch die übliche Einschränkung auf Teilkörper und Teilintervalle erhält man aus der globalen Energiebilanz die lokale Form

$$\dot{e} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \mathbb{T} \cdot \text{Grad}(\dot{\mathbf{A}}) - \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \text{Div}(\mathbf{q}) + r. \quad (2.3.61)$$

Leider enthält (2.3.61) noch die Größen  $\mathbf{H}$  und  $\mathbb{T}$ , welche durch  $\mathbf{Z}$  und  $\bar{\mathbb{T}}$  ersetzt werden müssen, um Gleichung (2.3.53) direkt zu erfüllen. Dieses erreicht man, indem zunächst  $\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{A}}$  gemäß

$$\mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{H} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \quad (2.3.62)$$

umgeformt wird. Für  $\mathbb{T} \cdot \text{Grad}(\dot{\mathbf{A}})$  kann man mit Hilfe einiger Rechenregeln für Tensoren 3.Stufe den folgenden Ausdruck herleiten

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \cdot \text{Grad}(\dot{\mathbf{A}}) &= \mathbb{T} \cdot \text{Grad}(\dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}) = \mathbb{T} \cdot \text{Grad}(\mathbf{W} \mathbf{A}) \\ &= \mathbb{T} \cdot (\text{Grad}(\mathbf{W})^T \mathbf{A})^T + \mathbb{T} \cdot \mathbf{W} \text{Grad}(\mathbf{A}) \\ &= \bar{\mathbb{T}} \cdot \text{Grad}(\mathbf{W}^T) + \mathbb{T}^I (\mathbf{A}_{,I})^T \cdot \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (2.3.63)$$

Nachdem nun (2.3.63) und (2.3.62) in die Energiebilanz (2.3.61) eingesetzt wurden, kann  $\mathbf{H} \mathbf{A}^T$  durch den Ausdruck (2.3.53)<sub>1</sub> ersetzt werden. Als Zwischenergebnis bekommt man

$$\dot{e} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} - \mathbf{T} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{W} + \bar{\mathbb{T}} \cdot \text{Grad}(\mathbf{W}^T) - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{W} - \text{Div}(\mathbf{q}) + r. \quad (2.3.64)$$

Nun wird noch die Spannungsleistung  $\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}}$  durch  $\mathbf{T} \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$  ersetzt, wobei man beachte, daß  $\boldsymbol{\tau} := \mathbf{T} \mathbf{F}^T$  den Kirchhoffschen Spannungstensor definiert. Mit Hilfe des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$  bekommt man dann das endgültige Resultat

$$\dot{e} = \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{l} - \mathbf{W}) + \bar{\mathbb{T}} \cdot \text{Grad}(\mathbf{W}^T) - \mathbf{Z} \cdot \mathbf{W} - \text{Div}(\mathbf{q}) + r. \quad (2.3.65)$$

Hier ist sehr schön zu erkennen, daß der Makro-Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  zu  $(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} - \dot{\mathbf{A}} \mathbf{A}^{-1})$ , also zur Mikro- und Makrodeformation leistungs-konjugiert ist.

Kontinua mit affiner Mikrostruktur heißen auch mikromorphe Kontinua. Aus [55] erhält man eine gute Übersicht über die verschiedenen Anwendungsgebiete der mikromorphen Kontinua. Herausgestellt werden soll hier

nur die Anwendbarkeit auf die Kontinuumstheorie der Versetzungen. Hierzu findet man weitere Informationen in LE & STUMPF [58] und dortigen Literaturverweisen.

### 3.5 Polare Kontinua, Cosserat-Kontinua

#### 3.5.1 (M1) Geometrische and physikalische Struktur

Ein polares Kontinuum, auch Cosserat-Kontinuum (COSSERAT & COSSERAT [29]) genannt, ist ein Sonderfall eines Kontinuums mit affiner Mikrostruktur. Während die Mikrovariable  $\mathbf{A}$  eines Kontinuums mit affiner Mikrostruktur ein Tensor 2.Stufe, also ein Element aus  $\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$  ist, ist die entsprechende Mikrovariable  $\mathbf{Q}$  eines polaren Kontinuums ein orthogonaler Tensor. In dieser Arbeit wird  $\mathbf{Q}$  auf die speziellen orthogonalen Tensoren  $SO(\mathbb{E})$  eingeschränkt. Diese sind solche Tensoren, die bei einer Drehung eines orientierten Dreibeins die Orientierung beibehalten.

Für die Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  wird der übliche Ansatz  $\mathcal{M} = \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}$  gemacht. Eine globale Konfiguration ist nun eine Abbildung

$$q : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{Q} = \mathbb{E} \times \mathbb{R} \times SO(\mathbb{E}), \quad (\mathbf{X}, t) \mapsto (\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \tau(\mathbf{X}, t), \mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)).$$

Um eine globale virtuelle Konfiguration zu erhalten, muß der Tangentialraum an  $\mathcal{Q}$  in einem Punkt  $q(p)$ ,  $p \in \mathcal{M}$  konstruiert werden. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} T_{q(p)}\mathcal{Q} &\cong T_{q(\mathbf{X}, t)}(\mathbb{E} \times \mathbb{R} \times SO(\mathbb{E})) \\ &\cong (T_{\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}\mathbb{E}) \times (T_{\tau(\mathbf{X}, t)}\mathbb{R}) \times (T_{\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)}SO(\mathbb{E})). \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität der Räume  $\mathbb{E}$  und  $\mathbb{R}$  erhält man die Identifikation

$$T_{q(p)}\mathcal{Q} \cong \mathbb{E} \times \mathbb{R} \times (T_{\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)}SO(\mathbb{E})),$$

in der einzig der Tangentialraum  $T_{\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)}SO(\mathbb{E})$  eine Besonderheit darstellt. Die Gruppe der speziellen orthogonalen Transformationen  $SO(\mathbb{E})$  bildet keinen linearen Raum, sondern eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die virtuellen Größen  $\delta\mathbf{Q}$  sind daher keine Elemente aus  $SO(\mathbb{E})$ .

■ **Anmerkung zu  $SO(\mathbb{E})$ :** Die Gruppe der speziellen orthogonalen Transformationen auf  $\mathbb{E}$  ist definiert als

$$SO(\mathbb{E}) := \{\mathbf{Q} \in Iso(\mathbb{E}; \mathbb{E}) \mid \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \text{ und } \det \mathbf{Q} = +1\}. \quad (2.3.66)$$

Die Menge  $SO(\mathbb{E})$  besitzt die Struktur einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Dieses kann wie folgt erläutert werden: Eine lineare Abbildung  $\mathbf{A} \in Iso(\mathbb{E}; \mathbb{E})$  wird durch 9 Komponenten bezüglich einer Basis des  $\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$  bestimmt. Eine Rotation  $\mathbf{Q} \in SO(\mathbb{E})$  wird gemäß (2.3.66) durch unabhängige 3 Komponenten festgelegt. Man betrachte nun den 9-dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^9$ , dessen Punkte die Komponenten von Tensoren 2.Stufe sind. Ein Punkt  $A$  repräsentiere dann die Komponenten eines Tensors  $\mathbf{A}$  bezüglich der Basis  $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j\}$  mit  $i, j = 1, 2, 3$ . Ein Punkt  $Q$  mit den Koordinaten  $(x^1, \dots, x^9)$  repräsentiert eine Rotation  $\mathbf{Q}$ , falls die Koordinaten die Bedingungen  $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$  und  $det(\mathbf{Q}) = +1$  erfüllen. Die Bedingungen können aber auch als 6 skalare Gleichungen  $f_i(x^1, \dots, x^9) = 0$  geschrieben werden. Jede Gleichung entspricht einer Hyperfläche im  $\mathbb{R}^9$ . Die Schnittmenge aller 6 Hyperflächen bildet eine 3-dimensionale Untermannigfaltigkeit der  $\mathbb{R}^9$ , deren Punkte Elemente aus  $SO(\mathbb{E})$  darstellen (siehe STUELPNAGEL [113]).

Eine Karte  $(\mathcal{U}, \phi)$ , mit  $\mathcal{U} \subseteq SO(\mathbb{E})$  und  $\phi : SO(\mathbb{E}) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , welche die Mannigfaltigkeit  $SO(\mathbb{E})$  vollständig überdeckt, existiert nicht. Wie bei allen nicht-trivialen Mannigfaltigkeiten, überdecken die einzelnen Karten nur Teilbereiche von  $SO(\mathbb{E})$ . Solche Karten werden auch Parametrisierungen der Rotationsgruppe genannt. Bekannt sind u.a. die Eulerschen Winkel, die Euler-Rodriguez-Parameter und die Cayley-Klein-Parameter. Um  $SO(\mathbb{E})$  vollständig zu überdecken bedarf es immer mehrerer solcher Karten.

Die Menge  $SO(\mathbb{E})$  besitzt die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und eine Gruppenstruktur bezüglich der Hintereinanderschaltung von Rotationen. Ist die Gruppenstruktur mit der differenzierbaren Struktur verträglich, d.h. sind die Gruppenabbildungen Diffeomorphismen, so nennt man diese Struktur eine Liesche Gruppe. Der Tangentialraum  $T_{\mathbf{I}}SO(\mathbb{E})$  an die Liesche Gruppe im Neutralelement  $\mathbf{I}$  ist isomorph zur Lieschen Algebra  $\mathfrak{so}(\mathbb{E})$ , welche hier als

$$\mathfrak{so}(\mathbb{E}) := \{\mathbf{\Omega} \in Lin(\mathbb{E}; \mathbb{E}) \mid \mathbf{\Omega}^T + \mathbf{\Omega} = \mathbf{0}, \text{ tr } \mathbf{\Omega} = 0\} \quad (2.3.67)$$

<sup>5)</sup> erklärt ist. Die Lie-Klammer  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{so}(\mathbb{E}) \times \mathfrak{so}(\mathbb{E}) \rightarrow \mathfrak{so}(\mathbb{E})$  ist durch

$$[\mathbf{\Omega}, \mathbf{W}] := \mathbf{\Omega}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{\Omega}$$

---

<sup>5)</sup>Für die orthogonale Gruppe  $O(\mathbb{E}) := \{\mathbf{Q} \in Iso(\mathbb{E}; \mathbb{E}) \mid \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T\}$  erhält man die Liesche Algebra  $\mathfrak{o}(\mathbb{E}) := \{\mathbf{\Omega} \in Lin(\mathbb{E}; \mathbb{E}) \mid \mathbf{\Omega}^T + \mathbf{\Omega} = \mathbf{0}\}$ . Im Gegensatz zu  $\mathfrak{so}(\mathbb{E})$  fehlt hier die Bedingung  $\text{tr } \mathbf{\Omega} = 0$ . Da aber jede schiefsymmetrische Matrix auch spurlos ist, es gilt nämlich  $\text{tr } \mathbf{\Omega} = \text{tr } \mathbf{\Omega}^T = \text{tr}(-\mathbf{\Omega}) = 0$ , folgt sofort, daß  $\mathfrak{so}(\mathbb{E}) \equiv \mathfrak{o}(\mathbb{E})$  gilt (siehe LUCHA & SCHÖBERL [61]).

definiert. Für jede Rotation  $\mathbf{Q} \in SO(\mathbb{E})$  und jeden Tangentenvektor  $\Psi \in T_{\mathbf{I}}SO(\mathbb{E})$  ist eine Tangentialabbildung  $T\mathbf{Q}_{\mathbf{I}} : T_{\mathbf{I}}SO(\mathbb{E}) \rightarrow T_{\mathbf{Q}}SO(\mathbb{E})$  durch  $T\mathbf{Q}_{\mathbf{I}}(\Psi) = \mathbf{Q}\Psi$  beschrieben. Die Umkehrabbildung  $T\mathbf{Q}_{\mathbf{Q}^{-1}} : T_{\mathbf{Q}}SO(\mathbb{E}) \rightarrow T_{\mathbf{I}}SO(\mathbb{E})$  ist durch  $T\mathbf{Q}_{\mathbf{Q}^{-1}}(\Lambda) = \Lambda\mathbf{Q}^{-1}$  gegeben. Schaltet man diese beiden Abbildungen hintereinander, so entsteht ein Endomorphismus auf  $T_{\mathbf{I}}SO(\mathbb{E}) \cong \mathfrak{so}(\mathbb{E})$ , welcher adjungierte Darstellung genannt wird. Die adjungierte Darstellung  $\text{ad} : \mathfrak{so}(\mathbb{E}) \rightarrow \mathfrak{so}(\mathbb{E})$  ist durch  $\text{ad}(\Psi) = \mathbf{Q}\Psi\mathbf{Q}^T$ ,  $\mathbf{Q} \in SO(\mathbb{E})$  gegeben. ■

Wie oben dargestellt, kann ein Element  $\delta\mathbf{Q}(\mathbf{X}, t)$  des Tangentialraumes  $T_{\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)}SO(\mathbb{E})$  durch  $\delta\mathbf{Q} = (\delta\Psi)\mathbf{Q}$  gebildet werden. Hier ist  $\delta\Psi \in \mathfrak{so}(\mathbb{E})$  ein schiefsymmetrischer Tensor. Seine adjungierte Darstellung lautet  $\delta\hat{\Psi} = \mathbf{Q}(\delta\Psi)\mathbf{Q}^T$ . Man kann dieses auch folgendermaßen erläutern: Überschiebt man  $\delta\mathbf{Q}$  von rechts mit  $\mathbf{I} = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}$ , so erhält man

$$\delta\mathbf{Q} = \delta\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \delta\Psi\mathbf{Q}, \quad \text{mit } \delta\Psi := \delta\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T. \quad (2.3.68)$$

Der Term  $\delta\Psi$  ist als *ein* Symbol anzusehen und darf nicht als virtuelle Änderung von  $\Psi$  gedeutet werden, da eine Größe  $\Psi$  *nicht* definiert ist. Stattdessen kann man aber die Variation

$$\delta(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T) = \delta\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}(\delta\mathbf{Q})^T = \mathbf{0}, \quad \text{da } \delta(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T) = \delta(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

bilden und erhält aus der linken Gleichung das Ergebnis  $\delta\Psi + (\delta\Psi)^T = \mathbf{0}$ , d.h.  $\delta\Psi$  ist schiefsymmetrisch. In gleicher Weise läßt sich die adjungierte Darstellung erzeugen, indem  $\delta\mathbf{Q}$  in (2.3.68) von links mit  $\mathbf{I} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$  überschoben wird.

### 3.5.2 (M2) Nicht-Lokalität der Abbildung

Auch hier gelte die Beschränkung auf einfache Materialien. Eine lokale virtuelle Konfiguration wird dann punktweise durch die Größen

$$\delta\mathfrak{F}(p) = (\delta\mathbf{x}, \text{Grad}(\delta\mathbf{x}), \delta\dot{\mathbf{x}}, \delta\boldsymbol{\tau}, \text{Grad}(\delta\boldsymbol{\tau}), \delta\dot{\boldsymbol{\tau}}, \delta\mathbf{Q}, \text{Grad}(\delta\mathbf{Q}), \delta\dot{\mathbf{Q}})|_{(\mathbf{x}, t)}$$

festgelegt. Die Berechnung der beiden letzten Terme erfolgt nach (2.3.68) und ergibt

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{Q}} &= \delta\dot{\Psi}\mathbf{Q} + \delta\Psi\dot{\mathbf{Q}}, \\ \text{Grad}(\delta\mathbf{Q}) &= \delta\mathbf{Q}_{,A} \otimes \mathbf{G}^A, \quad \text{mit } \delta\mathbf{Q}_{,A} = \delta\Psi_{,A}\mathbf{Q} + \delta\Psi\mathbf{Q}_{,A}. \end{aligned} \quad (2.3.69)$$

### 3.5.3 (M3) Die lokale virtuelle Arbeit

Setzt man nun die Ausdrücke (2.3.68) und (2.3.69) in die lokale virtuelle Arbeit (2.3.46) ein, indem man dort die affine Mikrostrukturvariable durch  $\delta\mathbf{Q}$  ersetzt, so erhält man

$$\delta W_l = \delta W_l(\delta\mathbf{x}, \delta\boldsymbol{\tau}) + \int_J \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{Q} - \mathbb{T} \cdot \text{Grad}(\delta\mathbf{Q}) + \mathbf{P} \cdot \delta\dot{\mathbf{Q}}) dV dt. \quad (2.3.70)$$

Behandelt man die globale virtuelle Arbeit (2.3.47) in derselben Weise, so kann man schreiben

$$\begin{aligned} \delta W_g = & \delta W_g(\delta\mathbf{x}, \delta\boldsymbol{\tau}) + \int_J \int_{\mathcal{P}_0} (-\mathbf{B}) \cdot \delta\mathbf{Q} dV dt \\ & + \int_J \int_{\partial\mathcal{P}_0} (-\mathbf{T}_n) \cdot \delta\mathbf{Q} dS dt + [\int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{P}_t \cdot \delta\mathbf{Q} dV]_{\partial J}. \end{aligned} \quad (2.3.71)$$

Da in den Gleichungen (2.3.71) und (2.3.70) nur  $\delta\mathbf{A}$  durch  $\delta\mathbf{Q}$  ersetzt wurde, könnte man meinen, polare Kontinua werden durch dieselben Gleichgewichtsbedingungen wie affine Kontinua beschrieben. Dieses stimmt nicht, weil die virtuelle Rotation  $\delta\mathbf{Q}$  nur 3 unabhängige skalare Größen enthält. Deshalb liefern die Gleichungen (2.3.71) und (2.3.70) keine 9, sondern nur 3 unabhängige Gleichgewichtsbedingungen. Eine formal einfache Möglichkeit diese Gleichgewichtsbedingungen zu beschreiben besteht darin, die 9 Gleichungen des affinen Kontinuums durch die 6 Zwangsbedingungen  $\delta\mathbf{A}\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}\delta\mathbf{A}^\top = \mathbf{0}$  zu ergänzen. Diese Möglichkeit erlaubt allerdings keinen Einblick in die spezifische Struktur der Gleichgewichtsbedingungen polarer Kontinua. Es muß also ein Weg gefunden werden, die 3 unabhängigen virtuellen Größen der Variable  $\delta\boldsymbol{\Psi}$  separat darzustellen. Dieses geschieht, indem man statt der virtuellen Größe  $\delta\boldsymbol{\Psi}$  deren axialen Vektor  $\delta\boldsymbol{\psi} = \text{axial}(\delta\boldsymbol{\Psi})$  benutzt. Der axiale Vektor  $\boldsymbol{\omega}$  eines schiefssymmetrischen Tensors  $\boldsymbol{\Omega}$  ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{axial} : Skw(\mathbb{E}) &\rightarrow \mathbb{E}, & \boldsymbol{\Omega} &\mapsto \boldsymbol{\omega} = \text{axial}(\boldsymbol{\Omega}), \\ & & \text{mit } \boldsymbol{\Omega}\mathbf{u} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{E}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der axialen Vektoren läßt sich die Liesche Algebra  $\mathfrak{so}(\mathbb{E})$  in äquivalenter Weise darstellen.

Es seien im folgenden  $\delta\boldsymbol{\psi} = \text{axial}(\delta\boldsymbol{\Psi})$  der zu  $\delta\boldsymbol{\Psi}$  gehörige axiale Vektor und  $\mathbf{d}_A := \mathbf{Q}\mathbf{G}_A$  die um  $\mathbf{Q}$  gedrehten natürlichen Basisvektoren  $\mathbf{G}_A$ . Zunächst sollen die drei Terme  $\mathbb{T} \cdot \text{Grad}(\delta\mathbf{Q})$ ,  $\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{P} \cdot \delta\dot{\mathbf{Q}}$  mit Hilfe

des axialen Vektors  $\delta\boldsymbol{\psi}$  dargestellt werden. Für den ersten Term findet man

$$\begin{aligned}\mathbb{T} \cdot \text{Grad}(\delta\mathbf{Q}) &= (\mathbb{T}^A \otimes \mathbf{G}_A) \cdot (\delta\mathbf{Q}_{,B} \otimes \mathbf{G}^B) \\ &= \mathbb{T}^B \cdot \delta\mathbf{Q}_{,B} = (\mathbb{T}^{AB} \otimes \mathbf{G}_A) \cdot \delta\mathbf{Q}_{,B} = \mathbb{T}^{AB} \cdot \delta\mathbf{Q}_{,B} \mathbf{G}_A.\end{aligned}$$

Der Ausdruck  $\delta\mathbf{Q}_{,B} \mathbf{G}_A$  läßt sich folgendermaßen umformen

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{Q}_{,B} \mathbf{G}_A &= (\delta\Psi_{,B} \mathbf{Q} + \delta\Psi \mathbf{Q}_{,B}) \mathbf{G}_A \\ &= \delta\Psi_{,B} \mathbf{d}_A + \delta\Psi \mathbf{Q}_{,B} \mathbf{G}_A \\ &= \delta\boldsymbol{\psi}_{,B} \times \mathbf{d}_A + \delta\boldsymbol{\psi} \times \mathbf{d}_{A|B}, \quad \text{mit } \mathbf{d}_{A|B} = \mathbf{d}_{A,B} - \Gamma_{AB}^C \mathbf{d}_C.\end{aligned}$$

Dann gilt für den Ausdruck  $\mathbb{T} \cdot \text{Grad}(\delta\mathbf{Q})$

$$\begin{aligned}\mathbb{T} \cdot \text{Grad}(\delta\mathbf{Q}) &= \mathbb{T}^{AB} \cdot (\delta\boldsymbol{\psi}_{,B} \times \mathbf{d}_A + \delta\boldsymbol{\psi} \times \mathbf{d}_{A|B}) \\ &= (\mathbf{d}_A \times \mathbb{T}^{AB}) \cdot \delta\boldsymbol{\psi}_{,B} + (\mathbf{d}_{A|B} \times \mathbb{T}^{AB}) \cdot \delta\boldsymbol{\psi}.\end{aligned}\quad (2.3.72)$$

Der erste Term in  $(2.3.72)_2$  initiiert die Definition eines Momentenspannungstensors  $\boldsymbol{\mu} := \boldsymbol{\mu}^B \otimes \mathbf{G}_B = (\mathbf{d}_A \times \mathbb{T}^{AB}) \otimes \mathbf{G}_B$ . Mit diesem läßt sich der zweite Term in  $(2.3.72)_2$  als

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}_{A|B} \times \mathbb{T}^{AB}) &= (\mathbf{d}_A \times \mathbb{T}^{AB})|_B - \mathbf{d}_A \times \mathbb{T}^{AB}|_B \\ &= \boldsymbol{\mu}^B|_B - \mathbf{d}_A \times \mathbb{T}^{AB}|_B \\ &= \text{Div}(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{d}_A \times \mathbb{T}^{AB}|_B\end{aligned}\quad (2.3.73)$$

schreiben und man erhält anstatt  $(2.4.60)$  die übersichtliche Form

$$\mathbb{T} \cdot \text{Grad}(\delta\mathbf{Q}) = \boldsymbol{\mu} \cdot \text{Grad}(\delta\boldsymbol{\psi}) + \text{Div}(\boldsymbol{\mu}) \cdot \delta\boldsymbol{\psi} - (\mathbf{d}_A \times \mathbb{T}^{AB}|_B) \cdot \delta\boldsymbol{\psi}.\quad (2.3.74)$$

In entsprechender Weise können nun auch  $\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{P} \cdot \delta\dot{\mathbf{Q}}$  umgeformt werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{Q} &= \mathbf{H}^A \cdot \delta\mathbf{Q} \mathbf{G}_A = \mathbf{H}^A \cdot (\delta\boldsymbol{\psi} \times \mathbf{d}_A) \\ &= (\mathbf{d}_A \times \mathbf{H}^A) \cdot \delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{m} \cdot \delta\boldsymbol{\psi} \quad \text{mit } \mathbf{m} := \mathbf{d}_A \times \mathbf{H}^A, \\ \mathbf{P} \cdot \delta\dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{P}^A \cdot \delta\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{G}_A = \mathbf{P}^A \cdot (\delta\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{d}_A + \delta\boldsymbol{\psi} \times \dot{\mathbf{d}}_A) \\ &= (\mathbf{d}_A \times \mathbf{P}^A) \cdot \delta\dot{\boldsymbol{\psi}} + (\dot{\mathbf{d}}_A \times \mathbf{P}^A) \cdot \delta\boldsymbol{\psi} \\ &=: \mathbf{s} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{\psi}} + \dot{\mathbf{s}} \cdot \delta\boldsymbol{\psi} - (\mathbf{d}_A \times \dot{\mathbf{P}}^A) \cdot \delta\boldsymbol{\psi} \quad \text{mit } \mathbf{s} := \mathbf{d}_A \times \mathbf{P}^A,\end{aligned}\quad (2.3.75)$$

wobei hier die kinematischen Beziehungen

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{Q} \mathbf{G}_A &= \delta \Psi \mathbf{Q} \mathbf{G}_A = \delta \Psi \mathbf{d}_A = \delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{d}_A, \\ \delta \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{G}_A &= \delta \dot{\Psi} \mathbf{d}_A + \delta \Psi \dot{\mathbf{d}}_A = \delta \dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{d}_A + \delta \boldsymbol{\psi} \times \dot{\mathbf{d}}_A\end{aligned}$$

verwendet wurden. Die beiden neuen vektoriellen Größen  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{s}$  in (2.3.75) heißen intrinsischer Momentenvektor bzw. Drallvektor. Der Term  $\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{Q}$  aus (2.3.71) läßt sich analog zu  $\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{Q}$  umformen und führt auf die neue Größe  $\mathbf{l} := \mathbf{d}_A \times \mathbf{B}^A$ , welche Momentenlastvektor genannt wird.

Setzt man die Beziehungen (2.3.74) und (2.3.75) in (2.3.70) und (2.3.71) ein, so ergeben sich nach einigen algebraischen Umformungen die Gleichungen

$$\begin{aligned}\delta W_l &= \delta W_l(\delta \mathbf{x}, \delta \tau) + \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\mu} \cdot \text{Grad}(\delta \boldsymbol{\psi}) + \mathbf{s} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{\psi}}) dV dt, \\ \delta W_g &= \delta W_g(\delta \mathbf{x}, \delta \tau) + \int_{\mathcal{J}} \int_{\mathcal{P}_0} (-1) \cdot \delta \boldsymbol{\psi} dV dt - \int_{\mathcal{J}} \int_{\partial \mathcal{P}_0} \boldsymbol{\mu}_n \cdot \delta \boldsymbol{\psi} dS dt \\ &\quad - [\int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{s}_t \cdot \delta \boldsymbol{\psi} dV]_{\partial \mathcal{J}}.\end{aligned}\tag{2.3.76}$$

### 3.5.4 (M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen

Aus der Kompatibilität von (2.3.76)<sub>1</sub> mit (2.3.76)<sub>2</sub> lassen sich 3 Gleichgewichtsbedingungen und 9 Randbedingungen ableiten. Neben (2.3.7) und (2.3.28) sind dies die folgenden Bedingungen für die Mikrostruktur

$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}} &= \mathbf{m} + \text{Div}(\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{l} \quad \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}, \\ \boldsymbol{\mu}_n &= \boldsymbol{\mu} \mathbf{n} \quad \text{auf } \partial \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}, \\ \mathbf{s}_t &= \mathbf{s} \quad \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \partial \mathcal{J}.\end{aligned}$	(2.3.77)
---	----------

Die  $\mathbb{E}$ -wertige Gleichgewichtsbedingung (2.3.77)<sub>1</sub> entspricht 3 skalaren Gleichgewichtsbedingungen. Dieses macht den Unterschied zu dem mikromorphen Kontinuum deutlich, wo 9 skalare Gleichgewichtsbedingungen für die Mikrostruktur auftraten.

Man mag sich nun die Frage stellen, warum der Zustandsraum  $\mathcal{Q} = \mathbb{E} \times \mathbb{R} \times SO(\mathbb{E})$  nicht von Anfang an durch einen Raum  $\mathcal{Q} = \mathbb{E} \times \mathbb{R} \times \mathbb{E}$  ersetzt wurde, indem anstatt der Rotation  $\mathbf{Q} \in SO(\mathbb{E})$  ein Rotationsvektor  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{E}$  benutzt wird. In Schalentheorien finiter Rotationen finden sich solche Ansätze gelegentlich. Der Rotationsvektor  $\boldsymbol{\psi}$  ist ein Eigenvektor von  $\mathbf{Q}$ , d.h. es gilt  $\mathbf{Q}\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}$ , und sein Betrag  $\psi := |\boldsymbol{\psi}|$  entspricht dem Drehwinkel um

die Drehachse  $\mathbf{e}_Q = \boldsymbol{\psi}/\psi$ . Mit dem Rotationsvektor  $\boldsymbol{\psi}$  kann die Drehung  $\mathbf{Q}\mathbf{u}$  eines Vektors  $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$  durch

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} = \mathbf{u} + \frac{\sin(\psi)}{\psi}(\boldsymbol{\psi} \times \mathbf{u}) + \frac{1 - \cos(\psi)}{\psi^2}(\boldsymbol{\psi} \times (\boldsymbol{\psi} \times \mathbf{u}))$$

dargestellt werden (siehe z.B. SIMO & FOX [109], SANSOUR & BUFFLER [95]). Glaubt man aber, daß durch diese Darstellung eine Betrachtung der Mannigfaltigkeit  $SO(\mathbb{E})$  überflüssig wird, da nun eine  $\mathbb{E}$ -wertige Zustandsgröße vorhanden ist, so macht man einen grundsätzlichen Fehler. Es sei hier auf MAKOWSKI & STUMPF [68] verwiesen, wo einige Auswirkungen dieser „Identifikation“ von  $SO(\mathbb{E})$  mit  $\mathbb{E}$  beschrieben sind. In der Schalentheorie führt dieser Fehler darauf, daß man anstatt einer Cosserat-Schale ein 1-Direktor-Modell bekommt. Beide Modelle verfügen zwar über 6 Freiheitsgrade, sind aber in ihrer Struktur grundsätzlich verschieden. Auf beide Modelle wird später eingegangen.

### 3.5.5 (M5) Invarianzbedingungen

**Invarianz gegenüber räumlicher Translation.** Diese Invarianzbedingung liefert keine neuen Erkenntnisse, da aus dem Einsetzen von  $(\delta\mathbf{x}, \delta\boldsymbol{\tau}, \delta\boldsymbol{\psi}) = (\mathbf{c}, 0, \mathbf{0})$  in  $\delta W_I = 0$  gerade der Impulssatz (2.3.10) folgt.

**Invarianz gegenüber räumlicher Rotation.** Diese Invarianzbedingung erfordert, daß gilt  $\delta W_I = 0$  für alle  $(\delta\mathbf{x}, \delta\boldsymbol{\tau}, \delta\boldsymbol{\psi}) = (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}, 0, \boldsymbol{\omega})$ , wobei  $\boldsymbol{\omega}$  durch  $\boldsymbol{\omega} = \text{axial}(\boldsymbol{\Omega})$  gegeben ist. Die Bedingung  $\delta\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\omega}$  kann aus den Transformationseigenschaften von  $\mathbf{Q}$  hergeleitet werden. Allgemein müßte man Invarianz von  $\delta W_I = 0$  gegenüber  $\delta\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}$  fordern. Nun gilt aber

$$\delta\mathbf{d}_A = \delta\mathbf{Q}\mathbf{G}_A = \delta\boldsymbol{\psi} \times \mathbf{d}_A,$$

woraus mit  $\delta\mathbf{Q} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}$  sofort die Beziehung

$$\delta\mathbf{d}_A = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}\mathbf{G}_A = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{d}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_A$$

folgt. Dieses bedeutet aber gerade, daß die Beziehung  $\delta\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\omega}$  in die Invarianzbedingung eingesetzt werden muß.

Hier liegt auch der Unterschied zur falschen „Identifikation“ der Rotationen  $\mathbf{Q}$  mit den Rotationsvektoren  $\boldsymbol{\psi}$ . Wäre  $\mathcal{Q} = \mathbb{E} \times \mathbb{R} \times \mathbb{E}$  der entsprechende

Zustandsraum, dann lieferte  $\delta\psi = \mathbf{\Omega}\psi$  die korrekte Beziehung für die Invarianzbedingung, was im weiteren Verlauf zu völlig anderen Ergebnissen führen würde.

Nach dem Einsetzen der Invarianzbedingung  $(\delta\mathbf{x}, \delta\boldsymbol{\tau}, \delta\boldsymbol{\psi}) = (\mathbf{\Omega}\mathbf{x}, 0, \boldsymbol{\omega})$  erhält man aus der lokalen virtuellen Arbeit die Gleichung

$$\delta W_l = \int_J \int_{\mathcal{P}_0} (-\mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}\mathbf{F} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}) dV dt = 0. \quad (2.3.78)$$

Da diese Gleichung für beliebige Teilkörper  $\mathcal{P}_0^{sub}$  und beliebige Teilintervalle  $\mathcal{J}^{sub}$  gelten muß, folgert man die punktweise Bedingung

$$\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}\mathbf{F}.$$

Eine kurze Transformation liefert dann

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{\Omega}\mathbf{F} = \mathbf{T}\mathbf{F}^\top \cdot \boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\tau}^a \otimes \mathbf{d}_a) \cdot \boldsymbol{\Omega} \\ &= \boldsymbol{\tau}^a \cdot \boldsymbol{\Omega}\mathbf{d}_a = \boldsymbol{\tau}^a \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{d}_a) = (\mathbf{d}_a \times \boldsymbol{\tau}^a) \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &\Downarrow \\ \mathbf{m} &= \mathbf{d}_a \times \boldsymbol{\tau}^a = \text{axial}(\text{skw}(\boldsymbol{\tau})), \end{aligned} \quad (2.3.79)$$

wobei  $\boldsymbol{\tau}$  der Kirchhoffsche Spannungstensor ist. Für  $\boldsymbol{\tau}$  kann natürlich auch der Cauchysche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\boldsymbol{\tau}$  eingesetzt werden. Bis auf die Gewichtung  $J = \rho_0/\rho$  sind die folgenden Aussagen über  $\boldsymbol{\tau}$  auch auf  $\boldsymbol{\sigma}$  übertragbar.

Das Resultat (2.3.79)<sub>3</sub> besagt, daß der intrinsische Momentenvektor  $\mathbf{m}$  keine unabhängige Größe ist, sondern durch den axialen Vektor des schiefsymmetrischen Anteiles von  $\boldsymbol{\tau}$  bestimmt ist. Dieser Anteil ist für nicht-polare Kontinua identisch null. Nach dem Einsetzen dieses Ergebnisses in (2.3.77)<sub>1</sub> erhält man die endgültige Form des Mikro-Momentengleichgewichtes

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{d}_a \times \boldsymbol{\tau}^a + \text{Div}(\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{l} \quad \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \mathcal{J}. \quad (2.3.80)$$

**Invarianz gegenüber zeitlicher Translation.** Diese Invarianzbedingung erfordert, daß gilt  $\delta W_l = \delta W_g$  für alle  $(\delta\mathbf{x}, \delta\boldsymbol{\tau}, \delta\boldsymbol{\psi}) = (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{1}, \boldsymbol{\psi})$ . Setzt man diese Beziehung in die entsprechenden Gleichungen ein, so ergeben sich neben den bereits bekannten Termen (2.3.30) folgende zusätzliche Größen für

die kinetische Energie, die Leistung äußerer Momente und die Spannungsleistung

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_\psi &:= \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{s} \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} \, dV, \\ \mathfrak{P}_\psi &:= \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{l} \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_0} \boldsymbol{\mu}_n \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} \, dS, \\ \mathfrak{W}_\psi &:= \int_{\mathcal{P}_0} (\boldsymbol{\mu} \cdot \text{Grad}(\dot{\boldsymbol{\psi}}) - \mathbf{m} \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}}) \, dV.\end{aligned}\tag{2.3.81}$$

Der Index  $(\cdot)_\psi$  verweist hier auf die entsprechenden Anteile aufgrund der polaren Mikrostruktur. Addiert man diese Größen zu der Energiebilanz in (2.3.30) und setzt ihre Gültigkeit für beliebige Teilkörper und Teilintervalle voraus, so erhält man punktweise die Energiebilanz

$$\dot{e} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} + \boldsymbol{\mu} \cdot \text{Grad}(\dot{\boldsymbol{\psi}}) - \mathbf{m} \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} - \text{Div}(\mathbf{q}) + r.\tag{2.3.82}$$

Bislang beinhaltet Gleichung (2.3.82) aber noch nicht die Invarianzbedingung (2.3.79)<sub>3</sub>. Setzt man diese ein, so ergibt sich nach kurzer Umformung

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \mathbf{T}\mathbf{F}^\top \cdot \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} + \boldsymbol{\mu} \cdot \text{Grad}(\dot{\boldsymbol{\psi}}) - (\mathbf{d}_a \times \boldsymbol{\tau}^a) \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} - \text{Div}(\mathbf{q}) + r \\ &= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{l} + \boldsymbol{\mu} \cdot \text{Grad}(\dot{\boldsymbol{\psi}}) - \boldsymbol{\tau}^a \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}}\mathbf{d}_a - \text{Div}(\mathbf{q}) + r \\ &= \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{w} - \dot{\boldsymbol{\Psi}}) + \boldsymbol{\mu} \cdot \text{Grad}(\dot{\boldsymbol{\psi}}) - \text{Div}(\mathbf{q}) + r,\end{aligned}\tag{2.3.83}$$

worin zur vereinfachten Schreibweise der Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{l} := \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  und seine Zerlegung in den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{d} := \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^\top)$  und den Spintensor  $\mathbf{w} := \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^\top)$  benutzt wurden. Aus (2.3.83)<sub>3</sub> wird deutlich, daß der symmetrische Anteil des Kirchhoffschen Spannungstensors  $\boldsymbol{\tau}$  Arbeit an dem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor und der unsymmetrische Anteil von  $\boldsymbol{\tau}$  Arbeit an der Differenz von Makro- und Mikrospin leisten.

### 3.6 Elastische Kontinua 2.Grades

Ein Kontinuum 2.Grades beschreibt einen Körper mit nicht-einfachem Materialverhalten. Die Mikrostruktur solcher Kontinua ist die gleiche wie bei den einfachen Materialien. Die lokale Konfiguration wird aber durch Ableitungen bis zur 2. Ordnung bezüglich der Koordinaten der Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  beschrieben. Die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen sind komplexer und werden durch mehrfache Anwendung des Satzes von Stokes

bzw. der partiellen Integration gewonnen. Als Beispiel für die Herleitung der Gleichungen eines Kontinuums 2.Grades soll hier die Statik elastischer Kontinua dienen.

### 3.6.1 (M1) Geometrische and physikalische Struktur

Als Basismannigfaltigkeit wird hier  $\mathcal{M} = \mathcal{P}_0$  betrachtet, was der Statik 3-dimensionaler Kontinua entspricht. Der Zustandsraum sei  $\mathcal{Q} = \mathbb{E}$ . Der Zustand des Körpers wird also durch seine Lage im Raum vollständig bestimmt. Dieses entspricht der Betrachtung elastischer Körper. Eine globale Konfiguration des Körpers ist durch die Abbildung

$$q : \mathcal{M} = \mathcal{P}_0 \rightarrow \mathcal{Q} = \mathbb{E}, \quad \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{X})$$

festgelegt. Für die globalen virtuellen Konfigurationen  $\delta q$  kann man nun wieder  $\delta q(p) : \{p\} \rightarrow T_{q(p)}\mathcal{Q} \cong \mathbb{E}, \mathbf{X} \mapsto \delta \mathbf{x}(\mathbf{X})$  ansetzen, was zwar der bisherigen Vorgehensweise entspräche, aber hier nicht (ganz) richtig ist. Bisher hatte eine solche Konstruktion funktioniert, weil die virtuellen Größen Elemente des Vertikalbündels der 1.Jet-Mannigfaltigkeit  $J^1\pi$  von  $(\mathcal{M} \times \mathcal{Q}, \pi, \mathcal{M})$  waren. Bei den Materialien 2.Grades wird nun aber die 2.Jet-Mannigfaltigkeit  $J^2\pi$  benutzt, deren Vertikalbündel eine reichhaltigere Struktur als die von  $J^1\pi$  besitzt (siehe SAUNDERS [96]). Im Rahmen dieser Arbeit wird auf diese geometrischen Aspekte nicht weiter eingegangen.

Der in der globalen virtuellen Konfiguration fehlende Term ist die Normalenableitung  $\partial_n(\delta \mathbf{x})$ , welche auf dem Rand  $\partial\mathcal{P}_0$  erklärt ist. Auf diesen Term wird später detailliert eingegangen.

### 3.6.2 (M2) Nicht-Lokalität der Abbildung

Wie bereits gesagt, bedeutet die Beschreibung von Materialien 2.Grades, daß Ableitungen der Zustandsvariablen bis zur Ordnung 2 in Betracht gezogen werden. Die lokale virtuelle Konfiguration wird dann punktweise durch die Größen

$$\delta \mathfrak{F}(p) = (\delta \mathbf{x}, \text{Grad}(\delta \mathbf{x}), \text{Grad}(\text{Grad}(\delta \mathbf{x})))|_{\mathbf{x}}$$

beschrieben. Für den Term  $\text{Grad}(\text{Grad}(\delta \mathbf{x}))$  wird im folgenden kurz  $\text{Grad}(\delta \mathbf{F})$  gesetzt, wobei  $\mathbf{F} = \text{Grad}(\mathbf{x})$  der referentielle Deformationsgradient ist.

### 3.6.3 (M3) Die lokale virtuelle Arbeit

Die lokale virtuelle Arbeit eines elastischen Kontinuums 2. Grades wird durch den Ausdruck

$$\delta W_{2l}(\delta \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{x} - \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{F} - \mathbb{H} \cdot \text{Grad}(\delta \mathbf{F})) dV. \quad (2.3.84)$$

beschrieben. Die lokalen Kraftdichten  $\mathbf{t} = (\mathbf{h}, -\mathbf{T}, -\mathbb{H})$  haben den Wertebereich  $(\mathbb{E}, \mathcal{T}_2\mathbb{E}, \mathcal{T}_3\mathbb{E})$ . Die Größe  $\mathbb{H}$  ist ein Tensor 3. Stufe und wird als Hyperspannungstensor bezeichnet. Sein negatives Vorzeichen definiert ihn als zufließende Größe.

Wendet man nun den Satz von Stokes auf (2.3.84) an, so erhält man für  $\mathbf{T} \cdot \text{Grad}(\delta \mathbf{x})$  die bereits bekannten Ergebnisse. Neu ist dagegen die Transformation von  $\mathbb{H} \cdot \text{Grad}(\delta \mathbf{F})$ . Hierfür findet man zunächst die Identität

$$\mathbb{H} \cdot \text{Grad}(\delta \mathbf{F}) = \text{Div}(\mathbb{H}^{\text{T}312} \delta \mathbf{F}) - \text{Div}(\mathbb{H}) \cdot \delta \mathbf{F}, \quad (2.3.85)$$

die für Tensoren 3. Stufe aus den bekannten Identitäten hergeleitet werden kann. <sup>6)</sup>

Mit der Identität (2.3.85) und dem Satz von Stokes erhält man folgendes Zwischenergebnis

$$\int_{\mathcal{P}_0} \mathbb{H} \cdot \text{Grad}(\delta \mathbf{F}) dV = - \int_{\mathcal{P}_0} \text{Div}(\mathbb{H}) \cdot \delta \mathbf{F} dV + \int_{\partial \mathcal{P}_0} \mathbb{H} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{F} dS, \quad (2.3.86)$$

worin  $\mathbf{n}$  den nach außen weisenden Normalenvektor auf der Randfläche  $\partial \mathcal{P}_0$  bezeichnet. Für die lokale virtuelle Arbeit kann nun geschrieben werden

$$\delta W_{2l}(\delta \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{x} - [\mathbf{T} - \text{Div}(\mathbb{H})]) \cdot \delta \mathbf{F} dV - \int_{\partial \mathcal{P}_0} \mathbb{H} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{F} dS. \quad (2.3.87)$$

In TOUPIN [118] wurde gezeigt, daß es sinnvoll ist, einen verallgemeinerten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}}$  gemäß

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{T} - \text{Div}(\mathbb{H}) \quad (2.3.88)$$

<sup>6)</sup>Die Transposition von Tensoren höherer Stufe als 2 wird in dieser Arbeit durch Angabe der Permutation der einzelnen Vektoren gekennzeichnet. Man findet z.B. für  $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c})^{\text{T}312}$  durch entsprechende Permutation das Resultat  $\mathbf{c} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ . Diese Schreibweise läßt sich auf Tensoren beliebiger Stufe erweitern. Definiert man zusätzlich noch die Kurzform  $\mathbb{K}^{\text{T}} := \mathbb{K}^{\text{T}n12\dots(n-1)}$  für Tensoren n. Stufe, so ist auch die übliche Transposition  $\mathbf{A}^{\text{T}} := \mathbf{A}^{\text{T}21}$  von Tensoren 2. Stufe in diese Schreibweise eingebunden.

einzuführen, um später die Gleichgewichtsbedingungen in bekannter Form schreiben zu können.

Dem Randintegral in (2.3.87) muß große Aufmerksamkeit geschenkt werden: Der Deformationsgradient  $\delta\mathbf{F} = \text{Grad}(\delta\mathbf{x})$  kann nicht in der üblichen Weise integriert werden, da hier das Integral nur über dem Rand  $\partial\mathcal{P}_0$ , sonst aber über dem Volumen  $\mathcal{P}_0$  definiert ist. Daher muß der Gradient zunächst in folgende Bestandteile zerlegt werden

$$\delta\mathbf{F} = \text{Grad}(\delta\mathbf{x}) = \text{Grad}_S(\delta\mathbf{x}) + \partial_n(\delta\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}. \quad (2.3.89)$$

Hier bezeichnet  $\text{Grad}_S(\delta\mathbf{x})$  den Flächengradienten und  $\partial_n(\delta\mathbf{x})$  die Normalenableitung bezüglich der Randfläche  $S = \partial\mathcal{P}_0$ . Die Definitionen dieser Operatoren werden in (2.4.5) angegeben. Das Randintegral in (2.3.87) kann nun formal als

$$\int_{\partial\mathcal{P}_0} \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{F} \, dS = \int_{\partial\mathcal{P}_0} \mathbf{H} \cdot (\text{Grad}_S(\delta\mathbf{x}) + \partial_n(\delta\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}) \, dS, \quad (2.3.90)$$

geschrieben werden, wobei  $\mathbf{H} := \mathbb{H}\mathbf{n}$  zur kürzeren Schreibweise eingeführt wurde. Der letzte Term in (2.3.90) läßt sich als  $\mathbf{H}\mathbf{n} \cdot \partial_n(\delta\mathbf{x})$  schreiben, kann aber nicht weiter vereinfacht oder integriert werden. Dagegen kann auf den Term  $\mathbf{H} \cdot \text{Grad}_S(\delta\mathbf{x})$  ein Integralsatz angewendet werden. Zunächst muß man sich aber klar machen, daß in dem inneren Produkt  $\mathbf{H} \cdot \text{Grad}_S(\delta\mathbf{x})$  nur solche Anteile von  $\mathbf{H}$  einen Beitrag liefern, die tangential zur Fläche  $S := \partial\mathcal{P}_0$  sind. Diese Anteile erhält man durch Projektion von  $\mathbf{H}$  gemäß

$$\mathbf{H}_S := \mathbf{H}(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (2.3.91)$$

Mit dem Tensor  $\mathbf{H}_S$  findet man nun die folgenden Identitäten

$$\mathbf{H} \cdot \text{Grad}_S(\delta\mathbf{x}) = \mathbf{H}_S \cdot \text{Grad}_S(\delta\mathbf{x}) = -\text{Div}_S(\mathbf{H}_S) \cdot \delta\mathbf{x} + \text{Div}_S(\mathbf{H}_S^T \delta\mathbf{x}), \quad (2.3.92)$$

worin  $\text{Div}_S$  den in (2.4.21) definierten Flächen-Divergenzoperator bezeichnet. Setzt man nun  $\mathbf{H}_S$  aus (2.3.91) in  $\text{Div}_S(\mathbf{H}_S)$  ein, so erhält man die Beziehung

$$\text{Div}_S(\mathbf{H}_S) = \text{Div}_S(\mathbf{H}) + (\text{tr}\mathbf{B})\mathbf{H}\mathbf{n}, \quad (2.3.93)$$

welche den Krümmungstensor  $\mathbf{B}$  der Randfläche  $\partial\mathcal{P}_0$  enthält. Setzt man in (2.3.93) für  $\mathbf{H}$  nun wieder  $\mathbb{H}\mathbf{n}$  ein und beachtet die Beziehung

$$\text{Div}_S(\mathbf{H}) = \text{Div}_S(\mathbb{H}\mathbf{n}) = \text{Div}_S(\mathbb{H}^T \mathbf{n}) - \mathbb{H}[\mathbf{B}^T],$$

so entsteht aus (2.3.93) das Zwischenergebnis

$$\operatorname{Div}_S(\mathbf{H}_S) = \operatorname{Div}_S(\mathbb{H}^{\top 132})\mathbf{n} - \mathbb{H}[\mathbf{B}^\top - (\operatorname{tr}\mathbf{B})\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}]. \quad (2.3.94)$$

Fügt man (2.3.94) in (2.3.92) und dann in (2.3.90) ein, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{P}_0} \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{F} \, dS &= \int_{\partial\mathcal{P}_0} \left( -\operatorname{Div}_S(\mathbb{H}^{\top 132})\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{n} \cdot \partial_n(\delta\mathbf{x}) \right) dS \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{P}_0} \mathbb{H}[\mathbf{B}^\top - \operatorname{tr}(\mathbf{B})\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \cdot \delta\mathbf{x} \, dS \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{P}_0} \operatorname{Div}_S(\mathbf{H}_S^\top \delta\mathbf{x}) \, dS. \end{aligned} \quad (2.3.95)$$

Das letzte Integral in (2.3.95) erlaubt die Anwendung des Satzes von Stokes. Für glatte und geschlossene Randflächen gilt  $\int_{\partial\mathcal{P}_0} \operatorname{Div}_S(\mathbf{H}_S^\top \delta\mathbf{x}) \, dS = \mathbf{0}$ . Ist die Randfläche nicht glatt, aber läßt sich in endlich viele glatte Teilflächen zerlegen, so ergibt das Integral  $\int_{\partial\mathcal{P}_0} \operatorname{Div}_S(\mathbf{H}_S^\top \delta\mathbf{x}) \, dS$  auf jeder Teilfläche  $\mathcal{S}_i$  den Ausdruck

$$\int_{\mathcal{S}_i} \operatorname{Div}_S(\mathbf{H}_S^\top \delta\mathbf{x}) \, dS = \int_{\partial\mathcal{S}_i} \mathbf{H}_S \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{x} \, ds.$$

In Abb. 2.1 ist eine Zerlegung einer nicht-glaten Oberfläche eines Körpers  $\mathcal{P}_0$  in zwei glatte Teilflächen dargestellt. Da die Normalenvektoren  $\mathbf{v}_i$  auf den Randkurven  $\partial\mathcal{S}_i$  nicht entgegengesetzt ausgerichtet sind, d.h.  $\mathbf{v}_1 \neq -\mathbf{v}_2$ , ergibt die Summe beider Randintegrale i.a. einen von Null verschiedenen Wert. Auf solchen Randkurven, auf denen sich der Normalenvektor  $\mathbf{v}$  sprunghaft ändert, definiert man nun die Doppelklammer

$$\llbracket \mathbf{H}_S \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{x} \rrbracket_{\partial\mathcal{S}} := (\mathbf{H}_S \mathbf{v}_2 \cdot \delta\mathbf{x})_{\partial\mathcal{S}_2} - (\mathbf{H}_S \mathbf{v}_1 \cdot \delta\mathbf{x})_{\partial\mathcal{S}_1}.$$

Dann läßt sich das Integral  $\int_{\partial\mathcal{P}_0} \operatorname{Div}_S(\mathbf{H}_S^\top \delta\mathbf{x}) \, dS$  als Kurvenintegral über alle Unstetigkeitskurven  $\partial\mathcal{S}$  schreiben

$$\int_{\partial\mathcal{P}_0} \operatorname{Div}_S(\mathbf{H}_S^\top \delta\mathbf{x}) \, dS = \int_{\partial\mathcal{S}} \llbracket \mathbf{H}_S \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{x} \rrbracket \, ds.$$

Sind keine Unstetigkeiten vorhanden, dann gilt für den Normalenvektor  $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$  und die Doppelklammer wird zu null.

Mit diesem Ergebnis erhält man nun aus (2.3.87) die endgültige Form der lokalen virtuellen Arbeit

$$\begin{aligned} \delta W_{2l}(\delta\mathbf{x}) &= \int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{h} + \operatorname{Div}(\tilde{\mathbf{T}})) \cdot \delta\mathbf{x} \, dV + \\ &\quad + \int_{\partial\mathcal{P}_0} \left( -\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{n} + \operatorname{Div}_S(\mathbb{H}^{\top 132})\mathbf{n} - \mathbb{H}[\mathbf{B}^\top - \operatorname{tr}(\mathbf{B})\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \right) \cdot \delta\mathbf{x} \, dS \\ &\quad - \int_{\partial\mathcal{P}_0} \mathbb{H}[\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] \cdot \partial_n(\delta\mathbf{x}) \, dS - \int_{\partial\mathcal{S}} \llbracket \mathbf{H}_S \mathbf{v} \cdot \delta\mathbf{x} \rrbracket \, ds. \end{aligned} \quad (2.3.96)$$

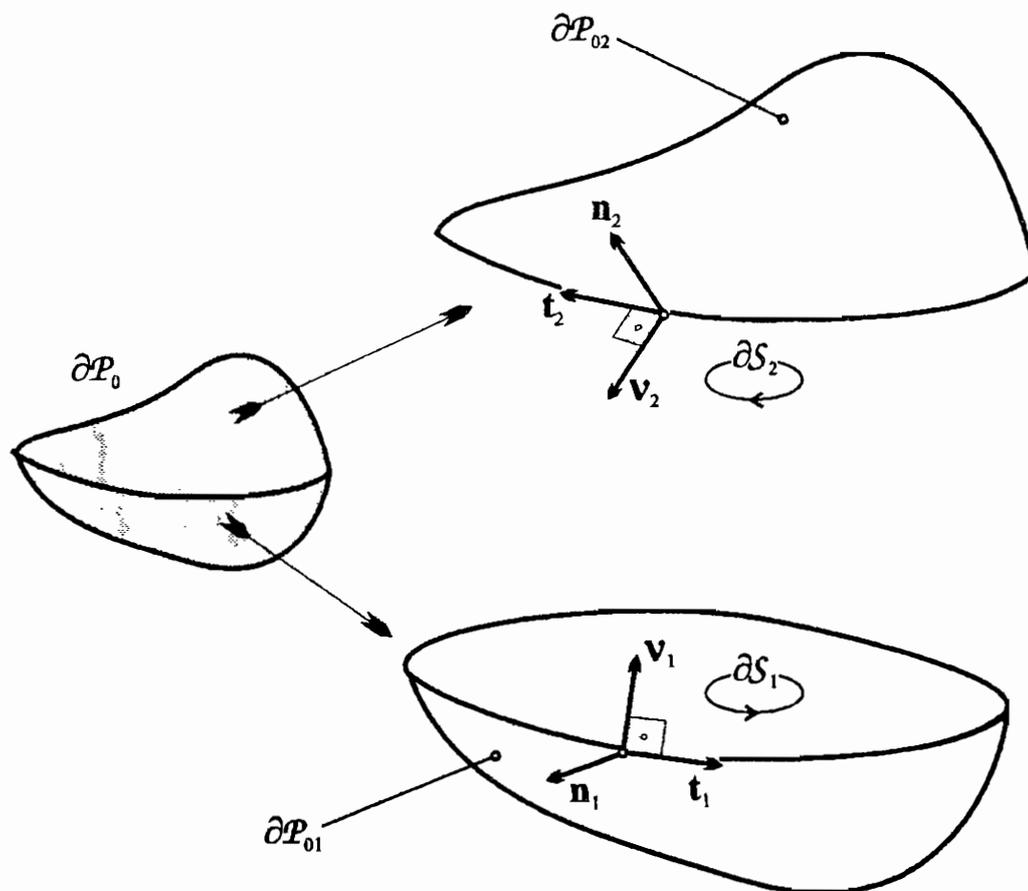


Abbildung 2.1: Randkurven nicht-glatte Oberflächen

### 3.6.4 (M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen

Hier soll nun wieder von glatten Oberflächen ausgegangen werden, so daß der Unstetigkeitsterm in (2.3.96) zu null wird. Dann ist eine globale virtuelle Arbeit, die zu (2.3.96) kompatibel ist, durch folgenden Ausdruck gegeben

$$\delta W_{2g}(\delta \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{P}_0} (-\mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{x} \, dV + \int_{\partial \mathcal{P}_0} (-\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{t}} \cdot \partial_n \delta \mathbf{x}) \, dS. \quad (2.3.97)$$

Die Normalenableitung von  $\delta \mathbf{x}$  tritt in (2.3.97) als unabhängige Randvariable auf. Dieses ist ein prinzipieller Unterschied zur klassischen Kontinuumsmechanik, wo am Rand  $\partial \mathcal{P}_0$  außer den Randspannungen keine weiteren Größen vorgeschrieben werden können.

Die Kompatibilität von (2.3.97) und (2.3.96) führt zusammen mit der Einschränkung der virtuellen Arbeit auf beliebige Teilkörper zu einer Gleichgewichtsbedingung und zwei Randbedingungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \mathbf{h} + \text{Div}(\tilde{\mathbf{T}}) + \mathbf{f}, & \text{auf } \mathcal{P}_0, \\
\mathbf{t} &= (\tilde{\mathbf{T}} - \text{Div}_s(\mathbb{H}^{\text{T}132}))\mathbf{n} + \mathbb{H}[\mathbf{B}^\text{T} - \text{tr}(\mathbf{B})\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}], & \text{auf } \partial\mathcal{P}_0, \\
\tilde{\mathbf{t}} &= \mathbb{H}[\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}], & \text{auf } \partial\mathcal{P}_0.
\end{aligned} \tag{2.3.98}$$

Die Randspannungen  $\mathbf{t}$  sind durch die Beziehung (2.3.98)<sub>2</sub> ins Gleichgewicht gesetzt. In dieser Beziehung hängen nur die Terme  $\tilde{\mathbf{T}} - \text{Div}_s(\mathbb{H}^{\text{T}132})$  vom Normalenvektor der Schnittfläche ab, während in die übrigen Terme die Krümmung  $\mathbf{B}$  dieser Fläche eingeht. Die Randspannungen  $\mathbf{t}$  hängen also geometrisch von dem Normalenvektor *und* der Krümmung der Schnittfläche ab. Das Cauchysche Postulat besitzt hier keine Gültigkeit mehr.

### 3.6.5 (M5) Invarianzbedingungen

**Invarianz gegenüber räumlicher Translation.** Die Invarianz gegenüber räumlicher Translation ist erfüllt, wenn gilt  $\delta W_{2l} = 0$  für alle  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{c}$ . Aus dieser Bedingung folgt sofort  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ . Damit nimmt (2.3.98)<sub>1</sub> die bekannte klassische Form

$$\mathbf{0} = \text{Div}(\tilde{\mathbf{T}}) + \mathbf{f}, \quad \text{auf } \mathcal{P}_0 \tag{2.3.99}$$

an. Man beachte aber, daß diese Form nur erreicht wurde, weil  $\tilde{\mathbf{T}}$  als ein verallgemeinerter Spannungstensor definiert wurde. Setzt man die Definitionsgleichung (2.3.88) in (2.3.99) ein, so entsteht

$$\text{Div}(\text{Div}(\mathbb{H})) = \text{Div}(\mathbf{T}) + \mathbf{f}, \quad \text{auf } \mathcal{P}_0.$$

Diese Form zeigt deutlich den Unterschied zum klassischen Kontinuum.

**Invarianz gegenüber räumlicher Rotation.** Die Invarianz gegenüber räumlichen Drehungen ist erfüllt, wenn gilt  $\delta W_{2l} = 0$  für alle  $\delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}$ . Durch Einsetzen erhält man sofort die punktweise Bedingung

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} \cdot \text{Grad}(\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) + \mathbb{H} \cdot \text{Grad}(\boldsymbol{\Omega} \mathbf{F}) &= 0 \\
&= \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} \mathbf{F} + \mathbb{H}^A \mathbf{F}_{,A}^\text{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} \\
&= (\mathbf{T} \mathbf{F}^\text{T} + \mathbb{H}^A \mathbf{F}_{,A}^\text{T}) \cdot \boldsymbol{\Omega} \\
\Leftrightarrow \text{skw}(\mathbf{T} \mathbf{F}^\text{T}) &= -\text{skw}(\mathbb{H}^A \mathbf{F}_{,A}^\text{T}).
\end{aligned} \tag{2.3.100}$$

Der schiefsymmetrische Anteil des Kirchhoffschen Spannungstensors  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}\mathbf{F}^T$  ist also durch den schiefsymmetrischen Anteil von  $\mathbb{H}^A \mathbf{F}_{,A}^T$  bestimmt. Diese Beziehung zeigt einerseits, daß die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors hier nicht gilt, andererseits ermöglicht sie eine interessante Interpretation des mikromorphen Kontinuums, die zuerst von BEATTY & CHEVERTON [17] gegeben wurde: Legt man dem mikromorphen Kontinuum die Zwangsbedingung auf, daß die Mirkovvariable  $\mathbf{A}$  gerade die lokale Deformation  $\mathbf{F}$  des klassischen Kontinuums beschreibt, so erhält man aus (2.3.51) mit  $\mathbf{H} = \mathbf{0}$  sofort die Beziehung (2.3.100)<sub>4</sub>. Ein Kontinuum 2.Grades läßt sich durch diese Zwangsbedingung als ein Kontinuum mit affiner Mikrostruktur auffassen.

## 4 Anwendungen auf die Schalentheorie

Es wird nun gezeigt, wie sich das allgemeine Prinzip der virtuellen Arbeit auf verschiedene Schalenmodelle anwenden läßt. Die Betrachtung erstreckt sich auf Membranen, Schalen mit vektorieller Mikrostruktur, Cosserat-Schalen und Schalenmodelle 2.Grades. Der einzige (!) Unterschied zur 3-dimensionalen Kontinuumsmechanik besteht darin, daß die Schalenfläche ein 2-dimensionaler Körper ist. Schalentheorie ist also eine kontinuumsmechanische Feldtheorie auf einem 2-dimensionalen Träger, der Schalenfläche. Um die Ausführungen abzukürzen, werden die Betrachtungen auf die Statik beschränkt. Eine entsprechende dynamische Formulierung kann aus den Betrachtungen des 3-dimensionalen Kontinuums leicht auf die Schalen übertragen werden.

### 4.1 Differentialgeometrie einer Fläche im Euklidischen Raum

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Begriffe und Definitionen über materielle Flächen im 3-dimensionalen Euklidischen Raum besprochen. Diese werden später zur koordinatenfreien Beschreibung verschiedener Schalenmodelle benötigt. In der traditionellen Schalentheorie werden die meisten differentialgeometrischen Beschreibungen in Komponentenschreibweise aus-

geführt. Die so entstehenden Gleichungen sind oft unübersichtlich und lassen sich kaum mit den entsprechenden Gleichungen der 3-dimensionalen Kontinuumsmechanik vergleichen. Hier wird nun gezeigt, daß sich die Schalentheorie in gleicher Weise wie die Kontinuumstheorie darstellen läßt, wenn der 3-dimensionale materielle Körper  $\mathcal{P}$  durch eine 2-dimensionale Fläche  $\mathcal{S}$  ersetzt wird. Demnach unterscheiden sich die beiden Theorien nur durch eine unterschiedliche Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ .

Um die Ähnlichkeit von Schalen- und 3D-Kontinuumstheorie nicht durch die unhandliche Komponentenschreibweise zu verdecken, werden hier zunächst die Divergenz- und Gradientenoperationen auf Flächen erklärt. Die vorgestellte Schreibweise orientiert sich an der grundlegenden Arbeit von GURTIN & MURDOCH [45].

#### 4.1.1 Die eingebettete Fläche

Es sei  $\kappa : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{E}$  eine Einbettung einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{F}$  in den Euklidischen Raum  $\mathbb{E}$ . Die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{F}$  heiße materielle Fläche, wenn sie einen materiellen Körper  $\mathcal{B}$  der Dimension  $\dim \mathcal{B} = 2$  darstellt. Es sei  $(\mathcal{U}, \phi)$  eine Karte in der Umgebung eines Punktes  $Y \in \mathcal{U} \subset \mathcal{F}$ . Dann weist  $\phi$  dem Punkt  $Y$  die materiellen Koordinaten

$$\phi : \mathcal{U} \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(Y) = (\xi^1, \xi^2) \quad (2.4.1)$$

zu. Die Hintereinanderschaltung von  $\phi$  mit der Koordinatenprojektion  $pr_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ergibt die Koordinatenfunktion

$$\phi^\alpha := pr_\alpha \circ \phi : \mathcal{U} \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi^\alpha(Y) = \xi^\alpha, \quad (2.4.2)$$

wobei die griechischen Indizes Werte aus  $\{1, 2\}$  annehmen. Der Tangentialraum  $T_Y \mathcal{F}$  an  $\mathcal{F}$  in  $Y$  wird durch die natürlichen Basisvektoren  $\{\partial \xi_\alpha\}$  aufgespannt. Die entsprechenden dualen Basisvektoren, die Kotangentenvektoren, werden mit  $\{d\xi^\beta\} \in T_Y^* \mathcal{F}$  bezeichnet.

Das Bild  $\mathcal{S} := \kappa(\mathcal{F})$  definiert eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{E}$  und wird Fläche (*engl. surface*) im Euklidischen Raum genannt. Die Fläche  $\mathcal{S}$  stellt zwar eine Untermannigfaltigkeit des Vektorraumes  $\mathbb{E}$  dar, bildet aber im allgemeinen keinen Untervektorraum.

Wird  $\kappa_t : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{E}$  als Bewegung der materiellen Fläche im Raum interpretiert, so kann ähnlich wie in der 3-dimensionalen Kontinuumsmechanik eine

Abbildung  $\kappa_0 : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{E}$  als Referenzabbildung ausgewählt werden. Diese Abbildung weist der materiellen Fläche die Referenzplatzierung  $\mathcal{S}_0 := \kappa_0(\mathcal{F})$  zu. Die Referenzplatzierung kann mit der materiellen Fläche identifiziert werden.

Ein materieller Punkt  $Y \in \mathcal{F}$  werde durch  $\kappa_0$  in den Raumpunkt  $\mathbf{Y} \in \mathbb{E}$  abgebildet. Der Tangentialraum  $T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0$  an  $\mathcal{S}_0$  in  $\mathbf{Y}$  ist auf natürliche Weise Untervektorraum von  $T_{\mathbf{Y}}\mathbb{E} \cong \mathbb{E}$ . Das orthogonale Komplement von  $T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0$  ist der Orthogonalraum  $T_{\mathbf{Y}}^\perp\mathcal{S}_0$ . Der Tangentialraum  $T_{\mathbf{Y}}\mathbb{E} \cong \mathbb{E}$  kann dann in die direkte Summe

$$\boxed{T_{\mathbf{Y}}\mathbb{E} \cong \mathbb{E} = T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0 \oplus T_{\mathbf{Y}}^\perp\mathcal{S}_0} \quad (2.4.3)$$

zerlegt werden. Da  $T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0$  die Dimension 2 hat, gilt  $\dim T_{\mathbf{Y}}^\perp\mathcal{S}_0 = 1$ .

Die natürliche oder Gaußsche Basis des  $T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0$  wird als  $\{\mathbf{A}_\Sigma\}$  geschrieben und ist durch

$$\mathbf{A}_\Sigma := \frac{\partial}{\partial \xi^\Sigma}(\kappa_0 \circ \phi^{-1}) \quad (2.4.4)$$

definiert. Eine Basis des Orthogonalraumes legt man durch

$$\mathbf{A}_n = \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2|}, \quad \text{d.h., es gilt } |\mathbf{A}_n| = 1 \quad (2.4.5)$$

fest. Der Tangentialraum  $T_{\mathbf{Y}}\mathbb{E}$  wird dann durch die Basis  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_n\}$  aufgespannt.

#### 4.1.2 Inklusion und Projektion

Ein Element aus  $T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0$  ist ein Tangentenvektor an  $\mathcal{S}_0$  in  $\mathbf{Y}$ . Solch ein Tangentenvektor  $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0$  läßt sich bezüglich der natürlichen Basis  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2\}$  als  $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{A}_\alpha$  darstellen und besitzt die Komponenten  $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$ . Der Vektor  $\mathbf{u}$  kann aber auch als Vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$  angesehen werden, indem eine Darstellung  $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{A}_\alpha + 0\mathbf{A}_n$  mit den Komponenten  $(u^1, u^2, 0) \in \mathbb{R}^3$  gewählt wird. Die entsprechende Umwandlung ist durch die Inklusion  $\mathbb{I} : T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{E}$  gegeben. Andererseits kann jeder 3-dimensionale Vektor  $\mathbf{w} \in \mathbb{E}$  durch Projektion in einen Vektor in  $T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0$  überführt werden. Die Projektion  $\mathbb{P} \in \text{Lin}(\mathbb{E}; T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0)$  erfüllt die Beziehung

$$(\mathbb{I}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbb{P}\mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0, \mathbf{w} \in \mathbb{E}. \quad (2.4.6)$$

Mit dem Einheits-Normalenvektor  $\mathbf{A}_n$  auf der Fläche  $S_0$  im Punkt  $\mathbf{Y}$  läßt sich die Projektion und Inklusion folgendermaßen darstellen

$$\mathbb{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_n \otimes \mathbf{A}_n. \quad (2.4.7)$$

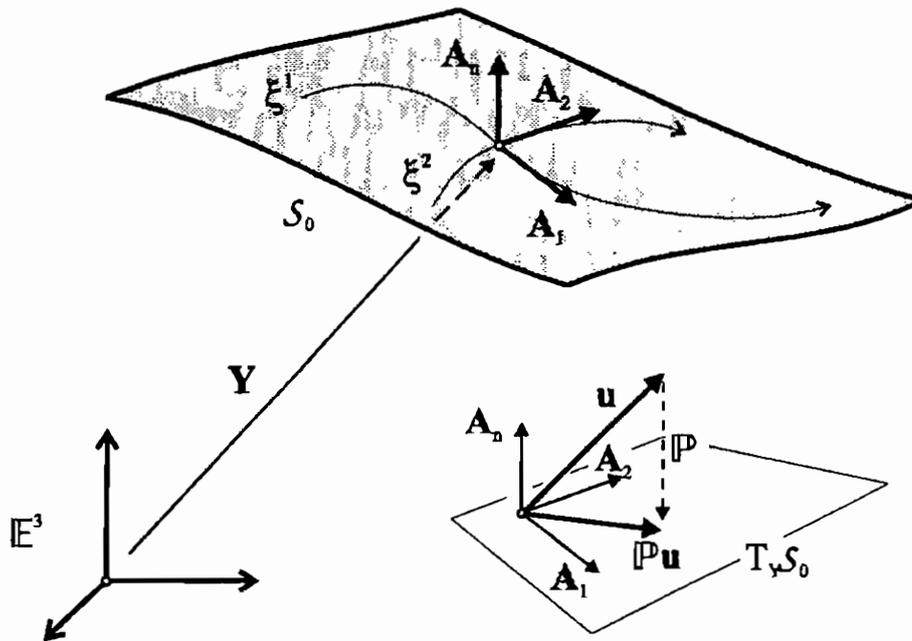


Abbildung 2.2: Basisvektoren auf der Referenzfläche

### 4.1.3 Christoffel-Symbole

Die Christoffel-Symbole  $\Gamma_{\Omega\Theta}^{\Sigma}$  auf der Fläche  $S_0$  sind die Zusammenhangskoeffizienten des *Levi-Civita*-Zusammenhangs, der durch die Flächenmetrik  $\mathbf{A} = A_{\Sigma\Omega} \mathbf{A}^{\Sigma} \otimes \mathbf{A}^{\Omega}$  induziert wird. Man definiert

$$\Gamma_{\Omega\Theta}^{\Sigma} := \frac{1}{2} A^{\Sigma\Xi} (A_{\Xi\Omega,\Theta} + A_{\Theta\Xi,\Omega} - A_{\Omega\Theta,\Xi}). \quad (2.4.8)$$

Mit Hilfe der Christoffel-Symbole lassen sich die Ableitungen der Basisvektoren  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_n\}$  nach den Flächenkoordinaten  $\xi^\Omega$  als

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{\Sigma, \Omega} &= \Gamma_{\Sigma\Omega}^\Theta \mathbf{A}_\Theta + \Gamma_{\Sigma\Omega}^3 \mathbf{A}_n, \\
 &= \Gamma_{\Sigma\Omega}^\Theta \mathbf{A}_\Theta + B_{\Sigma\Omega} \mathbf{A}_n, \quad \text{mit } B_{\Sigma\Omega} := \Gamma_{\Sigma\Omega}^3, \\
 \mathbf{A}_{,\Omega}^\Sigma &= -\Gamma_{\Omega\Theta}^\Sigma \mathbf{A}^\Theta - \Gamma_{\Omega 3}^\Sigma \mathbf{A}_n, \\
 &= -\Gamma_{\Omega\Theta}^\Sigma \mathbf{A}^\Theta + B_{\Omega}^\Sigma \mathbf{A}_n, \quad \text{mit } B_{\Omega}^\Sigma := -\Gamma_{\Omega 3}^\Sigma, \\
 \mathbf{A}_{n, \Omega} &= \Gamma_{3\Omega}^\Theta \mathbf{A}_\Theta + \Gamma_{3\Omega}^3 \mathbf{A}_n, \\
 &= -B_{\Omega}^\Theta \mathbf{A}_\Theta, \quad \text{mit } \Gamma_{3\Omega}^3 = 0,
 \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

schreiben.

#### 4.1.4 Flächengradient und tangentielle Ableitung

Es sei  $\mathbf{u} : S_0 \rightarrow \mathbb{E}$  ein räumliches Vektorfeld auf der Fläche  $S_0$ , so daß  $\mathbf{u}(\mathbf{Y}) \in \mathbb{E}$  die Feldgröße an der Stelle  $\mathbf{Y} \in S$  angibt. Der Flächengradient des Vektorfeldes,  $\text{Grad}_S(\mathbf{u})$ , ist ein Tensorfeld, das durch

$$\text{Grad}_S(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{,\Sigma} \otimes \mathbf{A}^\Sigma, \quad \text{mit } \mathbf{u}_{,\Sigma} := \frac{\partial}{\partial \xi^\Sigma} \mathbf{u}(\mathbf{Y}(\xi^1, \xi^2)) \tag{2.4.10}$$

definiert ist. Stellt man  $\mathbf{u}(\mathbf{Y}) \in \mathbb{E}$  bezüglich der Basis  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_n\}$  als

$$\mathbf{u} = u^\Sigma \mathbf{A}_\Sigma + u^3 \mathbf{A}_n \tag{2.4.11}$$

dar, so läßt sich der Flächengradient  $\text{Grad}_S(\mathbf{u})$  wie folgt in Komponentenform schreiben

$$\begin{aligned}
 \text{Grad}_S(\mathbf{u}) &= (u^\Sigma \mathbf{A}_\Sigma + u^3 \mathbf{A}_n)_{,\Omega} \otimes \mathbf{A}^\Omega, \\
 &= ((u^\Theta|_\Omega - u^3 B_{\Omega}^\Theta) \mathbf{A}_\Theta + (u^\Sigma B_{\Sigma\Omega} + u^3_{,\Omega}) \mathbf{A}_n) \otimes \mathbf{A}^\Omega, \tag{2.4.12}
 \end{aligned}$$

wobei  $u^\Theta|_\Omega$  die kovariante Ableitung von  $u^\Theta \in C(S_0; \mathbb{R})$  bezeichnet. Sie ist als

$$u^\Theta|_\Omega := u^\Theta_{,\Omega} + u^\Sigma \Gamma_{\Sigma\Omega}^\Theta \tag{2.4.13}$$

definiert. Der Flächengradient  $\text{Grad}_S(\mathbf{u})$  spaltet sich in einen tangentialen und einen orthogonalen Anteil auf. Der erste bildet die tangentielle Ableitung

$D_s(\cdot)$ , die durch Projektion des Flächengradienten in den Tangentialraum definiert ist

$$D_s \mathbf{u} = \mathbb{P}(\text{Grad}_s \mathbf{u}). \quad (2.4.14)$$

Aus (2.4.12) und (2.4.7) kann die Komponentendarstellung

$$D_s \mathbf{u} = (u^\Theta|_\Omega - u^3 B_\Omega^\Theta) \mathbf{A}_\Theta \otimes \mathbf{A}^\Omega \quad (2.4.15)$$

gefunden werden. Gleichung (2.4.15) zeigt, daß für ein tangenciales Vektorfeld  $\mathbf{u} \in T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0$ , d.h.  $u^3 = 0$ , die tangentiale Ableitung genau der kovarianten Ableitung entspricht.

Die tangentiale Ableitung des Einheits-Normalenvektors  $\mathbf{A}_n$  ergibt den Flächen-Krümmungstensor  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = -D_s \mathbf{A}_n = B_\Sigma^\Omega \mathbf{A}_\Omega \otimes \mathbf{A}^\Sigma, \quad (2.4.16)$$

dessen Spur als mittlere Krümmung  $H$  bezeichnet wird

$$H = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{B}) = \frac{1}{2} (B_1^1 B_2^2 - B_1^2 B_2^1). \quad (2.4.17)$$

Mit (2.4.16) kann die tangentiale Ableitung von (2.4.11) als

$$D_s \mathbf{u} = D_s(u^\Sigma \mathbf{A}_\Sigma) - u^3 \mathbf{B} \quad (2.4.18)$$

geschrieben werden.

#### 4.1.5 Flächendivergenz

Die Divergenz eines räumlichen Vektorfeldes  $\mathbf{u} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  ist als

$$\text{Div} \mathbf{u} = \text{tr}(\text{Grad} \mathbf{u}) \quad (2.4.19)$$

definiert. In Komponentenschreibweise ergibt sich

$$\text{Div} \mathbf{u} = \text{tr}(\mathbf{u}_{,I} \otimes \mathbf{G}^I) = \text{tr}(u^J|_I \mathbf{G}_J \otimes \mathbf{G}^I) = u^J|_J. \quad (2.4.20)$$

Wird nun der räumliche Gradient (2.4.19) durch die tangentiale Ableitung ersetzt, so erhält man die Flächendivergenz  $\text{Div}_s$ . Für ein Vektorfeld  $\mathbf{u} : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{E}$  definiert man

$$\text{Div}_s \mathbf{u} = \text{tr}(D_s \mathbf{u}). \quad (2.4.21)$$

In Komponentenschreibweise liet sich (2.4.21) als

$$\operatorname{Div}_S \mathbf{u} = \operatorname{tr}((u^\ominus|_\Omega - u^3 B_\Omega^\ominus) \mathbf{A}_y \otimes \mathbf{A}^\Omega) = u^\Omega|_\Omega - u^3 \operatorname{tr}(\mathbf{B}). \quad (2.4.22)$$

Mit Hilfe von (2.4.17) ist es nun möglich, die Flächendivergenz von  $\mathbf{u}$  in einen tangentialen und einen orthogonalen Anteil zu spalten

$$\operatorname{Div}_S \mathbf{u} = \operatorname{Div}_S(u^\Sigma \mathbf{A}_\Sigma) - 2Hu^3. \quad (2.4.23)$$

## 4.2 Membrantheorie

### 4.2.1 (M1) Geometrische and physikalische Struktur

Die Membranen bilden das direkte Gegenstück zur klassischen Kontinuumsmechanik ohne Mikrostruktur. Die Basismannigfaltigkeit wird durch die Referenzfläche  $\mathcal{S}_0$  dargestellt, wenn man sich auf die Statik der Membranen beschränkt. Der Zustandsraum ist durch  $\mathcal{Q} = \mathbb{E}$  gegeben, entspricht also dem Zustandsraum zur Beschreibung eines elastischen Kontinuums. Eine globale Konfiguration der Membran ist

$$\mathfrak{q} : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{E}, \quad \mathbf{Y} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{Y}),$$

wobei  $\mathbf{Y}$  einen Punkt auf der Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}_0$  bezeichnet, die hier mit dem materiellen Schalenkörper identifiziert wird. Eine globale virtuelle Konfiguration ist dann

$$\delta\mathfrak{q}(p) : \{\mathbf{Y}\} \rightarrow T_{\mathbf{x}(\mathbf{Y})}\mathbb{E} \cong \mathbb{E}, \quad \mathbf{Y} \mapsto \delta\mathbf{x}(\mathbf{Y}).$$

Der einzige Unterschied zur 3-dimensionalen Kontinuumsmechanik besteht bislang darin, daß die entsprechenden Felder hier über einer Fläche  $\mathcal{S}_0$  definiert sind, während sie es dort über einem Volumen  $\mathcal{P}_0$  waren.

### 4.2.2 (M2) Nicht-Lokalität der Abbildung

Die Betrachtung bleibt hier auf einfache Schalen beschränkt. Eine lokale virtuelle Konfiguration ist dann durch  $\delta\mathbf{x}$  und dessen Ableitungen bezüglich der Koordinaten  $\xi^\Sigma$  der Schalenreferenzfläche gegeben. Letztere bilden

genau den Flächengradienten von  $\delta \mathbf{x}$ , so daß gilt

$$\delta \mathfrak{F} = (\delta \mathbf{x}, \text{Grad}_S(\delta \mathbf{x})).$$

Der Gradient  $\text{Grad}_S(\delta \mathbf{x})(\mathbf{Y})$  ist ein Element von  $\mathbb{E} \otimes T_{\mathbf{Y}}S_0$  und kann in bezüglich der natürlichen Basis  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2\}$  von  $T_{\mathbf{Y}}S_0$  als

$$\text{Grad}_S(\delta \mathbf{x})(\mathbf{Y}) = \delta \mathbf{x}_{,\Sigma} \otimes \mathbf{A}^\Sigma$$

geschrieben werden.

### 4.2.3 (M3) Lokale virtuelle Arbeit

Da der Flächengradient  $\text{Grad}_S(\delta \mathbf{x})(\mathbf{Y})$  seine Werte in  $\mathbb{E} \otimes T_{\mathbf{Y}}S_0$  hat, kann eine entsprechende duale Größe in  $\mathbb{E} \otimes T_{\mathbf{Y}}^*S_0$  definiert werden. Da nun aber  $T_{\mathbf{Y}}S_0$  in  $\mathbb{E}$  eingebettet ist, kann auf  $T_{\mathbf{Y}}S_0$  das innere Produkt des Euklidischen Raumes übertragen werden. Dann kann man für die lokale virtuelle Arbeit folgendes schreiben

$$\delta W_l(\delta \mathbf{x}) = \int_{S_0} (\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{x} - \mathbf{T} \cdot \text{Grad}_S(\delta \mathbf{x})) dA. \quad (2.4.24)$$

Hier ist  $dA$  ein differentielles Flächenelement der Referenzfläche  $S_0$  und  $\mathbf{T}$  stellt das Gegenstück zum 1.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor dar. Man beachte, daß gilt  $\mathbf{T} \in \mathbb{E} \otimes T_{\mathbf{Y}}S_0$ .

Wendet man den Satz von Stokes auf (2.4.24) an und beachtet dabei die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Regeln für die Divergenz und den Gradienten auf Flächen, so erhält man

$$\delta W_l(\delta \mathbf{x}) = \int_{S_0} (\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{x} + \text{Div}_S(\mathbf{T})) \cdot \delta \mathbf{x} dA - \int_{\partial S_0} \mathbf{T} \mathbf{v}_0 \cdot \delta \mathbf{x} ds_0. \quad (2.4.25)$$

Hier ist  $\partial S_0$  der Rand der Schalenreferenzfläche,  $ds_0$  ein Linienelement auf dem Rand und  $\mathbf{v}_0$  der nach außen weisende Normalenvektor der Randkurve. Ist  $\mathbf{t}_0$  Einheits-Tangentenvektor an die Randkurve, so gilt  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{A}_n \times \mathbf{t}_0$ .

### 4.2.4 (M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen

Die zu (2.4.25) kompatible Form der globalen virtuellen Arbeit lautet

$$\delta W_g(\delta \mathbf{x}) = \int_{S_0} (-\mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{x} dA + \int_{\partial S_0} (-\mathbf{t}) \cdot \delta \mathbf{x} ds_0, \quad (2.4.26)$$

worin  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{t}$  Kraftdichten sind, die nun auf die Referenzfläche bzw. die Randkurve bezogen sind. Aus (2.4.26) und (2.4.25) gewinnt man durch die übliche Einschränkung auf beliebige Teilflächen  $\mathcal{S}_0^{sub}$  die folgenden Gleichgewichts- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}_{\mathcal{S}}(\mathbf{T}) + \mathbf{f} + \mathbf{h} &= \mathbf{0} & \text{auf } \mathcal{S}_0, \\ \mathbf{T}\mathbf{v}_0 &= \mathbf{t} & \text{auf } \partial\mathcal{S}_0. \end{aligned} \quad (2.4.27)$$

Diese Ergebnisse entsprechen formal den Ergebnissen für 3-dimensionale elastische Kontinua. Es wird später gezeigt, wie sich diese Ergebnisse in der traditionellen Schreibweise der Schalentheorie darstellen.

#### 4.2.5 (M5) Invarianzbedingungen

**Invarianz gegenüber räumlicher Translation.** Diese Invarianzbedingung erfordert, daß gilt  $\delta W_I = 0$  für alle  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{c}$ . Dann folgt aus (2.4.24) sofort

$$\int_{\mathcal{S}_0} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{T} \cdot \operatorname{Grad}_{\mathcal{S}}(\mathbf{c})) dA = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{h} = \mathbf{0}.$$

**Invarianz gegenüber räumlicher Rotation.** Hier ist zu fordern, daß gilt  $\delta W_I = 0$  für alle  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{\Omega}\mathbf{x}$ . Aus (2.4.24) folgt nun

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{T} \cdot \operatorname{Grad}_{\mathcal{S}}(\mathbf{\Omega}\mathbf{x}) dA = 0 & \rightarrow \mathbf{T}\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{\Omega} = \mathbf{0} \\ \text{oder } \mathbf{T}\mathbf{F}^T &= \mathbf{F}\mathbf{T}^T. \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  ist hier durch  $\mathbf{F} = \mathbf{x}_{,\Sigma} \otimes \mathbf{A}^{\Sigma}$  definiert. In der 3-dimensionalen Kontinuumsmechanik bedeutet die Bedingung  $\mathbf{T}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{T}^T$  die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^T$ . Auch hier läßt sich ein solcher Tensor definieren:

Es bezeichne  $\mathbf{a}_{\sigma} = \mathbf{x}_{,\sigma}$  die natürliche Basis der verformten Fläche  $\mathcal{S} := \{\mathbf{x}(\mathbf{Y}) \mid \mathbf{Y} \in \mathcal{S}_0\}$ . Die Größen  $a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_{\alpha} \cdot \mathbf{a}_{\beta}$  und  $A_{\Sigma\Omega} = \mathbf{A}_{\Sigma} \cdot \mathbf{A}_{\Omega}$  bezeichnen die Komponenten der jeweiligen Metriktensoren auf  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{S}$  bzw.  $T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0$ . Die Jacobi-Determinante  $J$  ist nun durch

$$J = \det(\mathbf{F}) = \sqrt{\frac{a}{A}} \quad \text{mit } a = \det(a_{\alpha\beta}), \quad A = \det(A_{\Sigma\Omega})$$

gegeben. Der Spannungstensor  $\mathbf{T}$  habe die Darstellung  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^\Sigma \otimes \mathbf{A}_\Sigma$  oder  $\mathbf{T} = T^{\alpha\Sigma} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{A}_\Sigma + T^{3\Sigma} \mathbf{a}_n \otimes \mathbf{A}_\Sigma$ . Man denke daran, daß gilt  $\mathbf{T}(\mathbf{Y}) \in \mathbb{E} \otimes T_{\mathbf{Y}} \mathcal{S}_0$ . Nun kann man einen Cauchyschen Spannungstensor für die Membranschale gemäß

$$\mathbf{n} := J^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^\top = J^{-1} (T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta + T^{3\beta} \mathbf{a}_n \otimes \mathbf{a}_\beta)$$

definieren. Die Komponenten von  $\mathbf{n}$  zerlegt man in die beiden Anteile

$$\mathbf{n} = n^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta + q^\beta \mathbf{a}_n \otimes \mathbf{a}_\beta,$$

welche die Membranspannungen und transversalen Schubspannungen in der Schale beschreiben. Man sieht sofort, daß die Komponenten von  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{n}$  durch

$$JT^{\alpha\Sigma} = n^{\alpha\sigma} \quad \text{und} \quad JT^{3\Sigma} = q^\sigma \quad (2.4.29)$$

miteinander verbunden sind. Die Invarianzbedingung (2.4.28) sagt dann nichts anderes, als daß die Membranspannungen symmetrisch und die transversalen Schubspannungen null sind

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad \rightarrow \quad n^{\alpha\beta} = n^{\beta\alpha} \quad \text{und} \quad q^\beta = 0. \quad (2.4.30)$$

#### 4.2.6 Bezug zur traditionellen Darstellung

In der Schalenliteratur würde die Gleichgewichtsbedingung (2.4.27)<sub>1</sub> in der folgenden Weise geschrieben

$$\mathbf{T}^\Sigma|_\Sigma + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (2.4.31)$$

Hier wurde bereits  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  eingesetzt. Die Gleichung (2.4.31) nennt man eine gemischte Schalengleichung, da der Spannungsvektor  $\mathbf{T}^\Sigma$  der verformten Schale auf die Basisvektoren  $\mathbf{A}_\Sigma$  der Referenzfläche bezogen ist. Drückt man den Spannungsvektor in bezug auf die Basisvektoren  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_n\}$  aus, so ergibt sich die bereits bekannte Beziehung

$$\mathbf{T}^\Sigma = T^{\alpha\Sigma} \mathbf{a}_\alpha + T^{3\Sigma} \mathbf{a}_n. \quad (2.4.32)$$

Die Komponentendarstellung der Flächen-Divergenz von  $\mathbf{T}$  ist

$$\text{Div}_s(\mathbf{T}) = \mathbf{T}^\Sigma|_\Sigma = \mathbf{T}^\Sigma_{,\Sigma} + \mathbf{T}^{\Omega\Gamma\Sigma}_{\Omega\Sigma}, \quad (2.4.33)$$

worin  $\Gamma_{\Omega\Sigma}^\Sigma$  die Christoffel-Symbole auf der Referenzfläche darstellen. Diese können mit Hilfe von  $A = \det(A_{\Sigma\Omega})$  durch den Ausdruck

$$\Gamma_{\Omega\Sigma}^\Sigma = \frac{1}{\sqrt{A}}(\sqrt{A})_{,\Omega} \quad (2.4.34)$$

bestimmt werden. Eine einfache Rechnung liefert nun (2.4.31) in Komponentenform

$$\begin{aligned} T^{\alpha\Sigma}_{,\Sigma} - T^{3\Sigma}b_\sigma^\alpha + T^{\phi\Sigma}\gamma_{\phi\sigma}^\alpha + T^{\alpha\Omega}\Gamma_{\Omega\Sigma}^\Sigma + f^\alpha &= 0, \\ T^{3\Sigma}_{,\Sigma} + T^{\alpha\Sigma}b_{\alpha\Sigma} + T^{3\Omega}\Gamma_{\Omega\Sigma}^\Sigma + f^3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.4.35)$$

wobei  $\gamma_{\phi\sigma}^\alpha$  die Christoffel-Symbole in bezug auf die verformte Fläche darstellen. Bezeichnet man nun eine *gemischte* kovariante Ableitung mit

$$T^{\alpha\Sigma}|_\Sigma = T^{\alpha\Sigma}_{,\Sigma} + T^{\phi\Sigma}\gamma_{\phi\sigma}^\alpha + T^{\alpha\Omega}\Gamma_{\Omega\Sigma}^\Sigma \quad \text{und} \quad T^{3\Sigma}|_\Sigma = T^{3\Sigma}_{,\Sigma} + T^{3\Omega}\Gamma_{\Omega\Sigma}^\Sigma,$$

so kann man (2.4.35) in der traditionellen Form

$$\begin{aligned} T^{\alpha\Sigma}|_\Sigma - T^{3\Sigma}b_\sigma^\alpha + f^\alpha &= 0, \\ T^{3\Sigma}|_\Sigma + T^{\alpha\Sigma}b_{\alpha\Sigma} + f^3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.36)$$

präsentieren.

Die Komponenten des 1.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors  $\mathbf{T}$  lassen sich nur schwer in ihrer physikalischen Bedeutung interpretieren. Darum schreibt man die Schalengleichungen oft in ihrer Eulerschen Form, <sup>7)</sup> in der man dann den Cauchyschen Spannungstensor  $\mathbf{n} = J^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^\top$  benutzt, dessen Komponenten bereits als Membran- und Schubspannungen gedeutet werden konnten. Die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen für die Eulersche Beschreibung lassen sich direkt durch Einsetzen von  $\mathbf{T} = J\mathbf{n}\mathbf{F}^{-\top}$  in (2.4.27)<sub>1</sub> gewinnen. Zu diesem Zweck leitet man sich die folgende Identität her

$$\text{Div}_S(J\mathbf{n}\mathbf{F}^{-\top}) = \text{Grad}_S(\mathbf{n})[J\mathbf{F}^{-\top}] + \mathbf{n}\text{Div}_S(J\mathbf{F}^{-\top}), \quad (2.4.37)$$

welche man dann mittels der folgenden Beziehung der Flächengradienten auf  $\mathcal{S}_0$  und  $\mathcal{S}$

$$\text{Grad}_S(\cdot) = \text{grad}_S(\cdot)\mathbf{F} \quad (2.4.38)$$

<sup>7)</sup>Unter einer Eulerschen Beschreibung versteht man in der Schalentheorie fast immer eine räumliche Beschreibung in bezug auf referentielle Koordinaten. Dieses ist also nichts anders als eine Lagrangesche Beschreibung mit einem nachfolgenden *push-forward* in die aktuelle Konfiguration.

in das Zwischenergebnis

$$\operatorname{Div}_g(J\mathbf{nF}^{-T}) = J \operatorname{div}_g(\mathbf{n}) + Jb_\alpha^\alpha \mathbf{n}\mathbf{a}_n \quad (2.4.39)$$

überführen kann. Der letzte Term in (2.4.39) wird zu null, da gilt  $\mathbf{n}\mathbf{a}_n = \mathbf{n}^\beta (\mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_n) = \mathbf{0}$ . Setzt man (2.4.39) nun in (2.4.27)<sub>1</sub> ein und beachtet, daß  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  aufgrund der ersten Invarianzbedingung gilt, so folgt

$$\operatorname{div}_g(\mathbf{n}) + \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \text{mit } \mathbf{p} = J^{-1}\mathbf{f}. \quad (2.4.40)$$

Die Bezeichnung  $\mathbf{p}$  für den Flächenlastvektor entspricht der traditionellen Schreibweise in der Schalentheorie. Daß sich diese Schreibweise mit anderen Definitionen (z.B. Impulsdichte  $\mathbf{p}$ ) überschneidet, ist hier leider nicht zu vermeiden. In Komponentendarstellung läßt sich (2.4.40) in Form von 3 Komponentengleichungen darstellen. Dies sind

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta}|_\beta - q^\beta b_\beta^\alpha + p^\alpha &= 0, \\ n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + q^\beta|_\beta + p^3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

Bezieht man nun noch das Resultat  $q^\beta = 0$  aus der zweiten Invarianzbedingung ein, so erhält man die üblichen Gleichgewichtsbedingungen für die Membranschale

$\begin{aligned} n^{\alpha\beta} _\beta + p^\alpha &= 0 \\ n^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + p^3 &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.42)$
--

#### 4.2.7 Push-pull-Abbildungen in der Schalentheorie

Die Äquivalenz der Struktur von Membranmodell und klassischem 3-dimensionalen Kontinuumsmodell legt nahe, daß sich in beiden Fällen Lagrangesche und „Eulersche“ Beschreibungen durch *pull-back* und *push-forward* ineinander überführen lassen. Solche Abbildungen sind in der Schalentheorie bisher nicht zu finden. Dieses liegt wohl an der unübersichtlichen Struktur der traditionellen Komponentenschreibweise, die eine effektive Anwendung solcher Abbildungen unmöglich macht.

Geht man von der virtuellen Arbeit des Spannungstensor  $\mathbf{n}$  aus, die durch

$$\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}_g(\delta\mathbf{x}) = \mathbf{n}^\beta \cdot \delta\mathbf{x}_{,\beta} = \mathbf{n}^\beta \cdot \delta\mathbf{a}_\beta \quad (2.4.43)$$

beschrieben wird, so läßt sich durch Einsetzen der Komponenten von  $\mathbf{n}$  die Schreibweise

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad}_s(\delta \mathbf{x}) = n^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \cdot \delta \mathbf{a}_\beta = \frac{1}{2} n^{\alpha\beta} \delta a_{\alpha\beta} \quad (2.4.44)$$

finden. Die rechte Seite von (2.4.44) ist gleich der linken, da  $n^{\alpha\beta}$  symmetrisch ist. Gleichung (2.4.44) setzt die Membranspannungen in Beziehung zum Metriktensor  $\mathbf{a} = a_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta$  auf der verformten Schalenfläche. Benutzt man die Metrik  $\mathbf{A} = A_{\Sigma\Omega} \mathbf{A}^\Sigma \otimes \mathbf{A}^\Omega$  der Referenzfläche, sowie deren push-forward  $\mathbf{c} = \mathbf{F}_\flat(\mathbf{A})$  durch den Flächengradienten  $\mathbf{F}$ , so kann man einen Dehnungstensor  $\boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{c})$  definieren, der dem Almansischen Dehnungstensor der Kontinuumsmechanik entspricht. Man findet dann

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad}_s(\delta \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}, \quad \text{mit } \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{F}_\flat(\mathbf{A})). \quad (2.4.45)$$

Nutzt man nun die *pull-back*-Abbildung, um aus  $\boldsymbol{\gamma}$  einen Lagrangeschen Dehnungstensor zu definieren, so findet man

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{F}^\flat(\boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{F}^\top \boldsymbol{\gamma} \mathbf{F} = \frac{1}{2}(a_{\sigma\omega} - A_{\Sigma\Omega}) \mathbf{A}^\Sigma \otimes \mathbf{A}^\Omega. \quad (2.4.46)$$

Dieser Dehnungstensor entspricht dem Greenschen Dehnungstensor in der Kontinuumsmechanik. Wendet man die gleiche Abbildung auf die Spannung  $\mathbf{n}$  an, so ergibt sich

$$\mathbf{N} = J \mathbf{F}^\flat(\mathbf{n}) = J \mathbf{F}^{-1} \mathbf{n} \mathbf{F}^{-\top} = J n^{\sigma\omega} \mathbf{A}_\Sigma \otimes \mathbf{A}_\Omega. \quad (2.4.47)$$

Die Jacobi-Determinante wird zur Gewichtung von  $\mathbf{n}$  in (2.4.47) benutzt, damit die Spannungen in der Referenzkonfiguration auch auf die Flächenelemente dieser Konfiguration bezogen werden können. Für die virtuelle Arbeit der Spannungen lassen sich nun folgende äquivalente Ausdrücke schreiben

$$\mathbf{T} \cdot \text{Grad}_s(\delta \mathbf{x}) = \mathbf{N} \cdot \delta \boldsymbol{\Gamma} = J \mathbf{n} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.4.48)$$

die jeweils die gemischte, Lagrangesche bzw. Eulersche Darstellung repräsentieren.

Man sieht an diesem kurzen Beispiel, daß eine Formulierung der Schalentheorie im Stile der Kontinuumsmechanik von der Anwendung der push-pull-Abbildungen und der Lie-Ableitung profitieren kann. Das Auffinden objektiver

Zeitableitungen von Tensoren, die auf der aktuellen Fläche definiert sind, wird zu einer bloßen Anwendung der im ersten Kapitel vorgestellten Operationen. Die in STUMPF & BADUR [115] aufgeführten Beziehungen zwischen Lagrangeschen und Eulerschen Größen und deren objektiven Raten lassen sich auf diese Weise herleiten.

## 4.3 Schalentheorie mit vektorieller Mikrostruktur

### 4.3.1 (M1) Geometrische und physikalische Struktur

Eine Schale mit vektorieller Mikrostruktur ist eine Membranschale, der in jedem Flächenpunkt ein Vektor  $\mathbf{d}$  angeheftet ist. Diesen Vektor nennt man Zeiger oder Direktor. Das so entstehende Schalenmodell nennt man auch Direktor-Modell. Die manchmal verwendete Bezeichnung *Cosserat-Schale* sollte vermieden werden, da eine Cosserat-Schale ein ganz anderes Schalenmodell bezeichnet (siehe (4.4)).

Die Basismannigfaltigkeit sei nun  $\mathcal{M} = \mathcal{S}$ , d.h. die verformte Schalenfläche wird nun als Träger der Feldgrößen benutzt. Dieses entspricht der sog. Eulerschen Beschreibung in der Schalentheorie. Eine globale Konfiguration der Direktor-Schale ist durch

$$\mathbf{q} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{E}, \quad \mathbf{y} \mapsto (\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{d}(\mathbf{y})) \quad (2.4.49)$$

gegeben, wobei  $\mathbf{y}$  einen Punkt auf der Fläche  $\mathcal{S}$  darstellt. Es sei angemerkt, daß eine Erweiterung auf Schalen mit  $n$  Zeigern durch Verwendung einer Konfiguration

$$\mathbf{q} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{E} \times \dots \times \mathbb{E}, \quad \mathbf{y} \mapsto (\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{d}_1(\mathbf{y}), \dots, \mathbf{d}_n(\mathbf{y}))$$

geschehen kann. Die globale virtuelle Konfiguration der 1-Direktor-Schale entspricht (2.4.49), da gilt

$$T_{\mathbf{q}(p)}(\mathbb{E} \times \mathbb{E}) \cong T_{\mathbf{x}(\mathbf{y})}\mathbb{E} \times T_{\mathbf{d}(\mathbf{y})}\mathbb{E} \cong \mathbb{E} \times \mathbb{E}.$$

Eine virtuelle globale Konfiguration ist dann durch die  $\mathbb{E}$ -wertigen Felder  $(\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{d})$  gegeben.

### 4.3.2 (M2) Nicht-Lokalität der Abbildung

Es wird hier nur ein *einfaches* Schalenmodell betrachtet. Die lokale virtuelle Konfiguration ist punktweise durch

$$\delta \mathfrak{F}(p) = (\delta \mathbf{x}, \text{grad}_{\mathcal{S}}(\delta \mathbf{x}), \delta \mathbf{d}, \text{grad}_{\mathcal{S}}(\delta \mathbf{d}))|_y$$

bestimmt. Man beachte, daß sich die Gradienten auf die verformte Fläche  $\mathcal{S}$  beziehen.

### 4.3.3 (M3) Lokale virtuelle Arbeit

Aus den lokalen virtuellen Konfigurationen läßt sich nun die lokale virtuelle Arbeit bilden. Man findet den folgenden Ausdruck

$$\delta W_l = \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{x} - \mathbf{n} \cdot \text{grad}_{\mathcal{S}}(\delta \mathbf{x}) + \mathbf{c} \cdot \delta \mathbf{d} - \mathbf{m} \cdot \text{grad}_{\mathcal{S}}(\delta \mathbf{d})) da, \quad (2.4.50)$$

in dem  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{c}$  als Mikro-Spannungstensor bzw. intrinsischer Mikro-Kraftvektor eingeführt wurden. Das Symbol  $da$  bezeichnet ein Flächenelement der verformten Schalenfläche. Wendet man den Satz von Stokes auf (2.4.50) an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta W_l = \int_{\mathcal{S}} [(\mathbf{h} + \text{div}_{\mathcal{S}}(\mathbf{n})) \cdot \delta \mathbf{x} + (\mathbf{c} + \text{div}_{\mathcal{S}}(\mathbf{m})) \cdot \delta \mathbf{d}] da \\ - \int_{\partial \mathcal{S}} (\mathbf{n} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{x} + \mathbf{m} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{d}) ds. \end{aligned} \quad (2.4.51)$$

### 4.3.4 (M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen

Ein zu (2.4.51) kompatibler Ausdruck der globalen virtuellen Arbeit muß folgende Form haben

$$\delta W_g = \int_{\mathcal{S}} (-\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{x} - \mathbf{l} \cdot \delta \mathbf{d}) da + \int_{\partial \mathcal{S}} (-\mathbf{n}_v \cdot \delta \mathbf{x} - \mathbf{m}_v \cdot \delta \mathbf{d}) ds. \quad (2.4.52)$$

Hier bezeichnen  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{l}$  die äußere Flächenlast bzw. die Mikro-Flächenlast der Schale. Setzt man (2.4.52) und (2.4.51) gleich und verlangt die übliche Einschränkung auf Teilflächen  $\mathcal{S}^{sub}$ , so erhält man die Gleichgewichts-

und Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}_S(\mathbf{n}) + \mathbf{p} + \mathbf{h} &= \mathbf{0} && \text{auf } S, \\
 \operatorname{div}_S(\mathbf{m}) + \mathbf{c} + \mathbf{l} &= \mathbf{0} && \text{auf } S, \\
 \mathbf{n}\mathbf{v} &= \mathbf{n}_v && \text{auf } \partial S, \\
 \mathbf{m}\mathbf{v} &= \mathbf{m}_v && \text{auf } \partial S.
 \end{aligned} \tag{2.4.53}$$

Bei einem  $n$ -Direktor-Modell hätte man an dieser Stelle  $2(n+1)$  Gleichungen bekommen.

#### 4.3.5 (M5) Invarianzbedingungen

**Invarianz gegenüber räumlicher Translation.** Diese Invarianzbedingung ist erfüllt, wenn gilt  $\delta W_I = 0$  für alle  $(\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{d}) = (\mathbf{c}, \mathbf{0})$ . Diese Bedingung beeinflusst nur Gleichung (2.4.53)<sub>1</sub> und liefert das bekannte Resultat  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ . Damit kann (2.4.53)<sub>1</sub> als die Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{div}_S(\mathbf{n}) + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \text{auf } S \tag{2.4.54}$$

geschrieben werden.

**Invarianz gegenüber räumlicher Rotation.** Die Invarianz gegenüber räumlichen Drehungen bedingt, daß  $\delta W_I = 0$  für alle  $(\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{d}) = (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}, \boldsymbol{\Omega} \mathbf{d})$  gilt. Setzt man diese Bedingung in (2.4.50) ein, so erhält man

$$\delta W_I = \int_S (-\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega} \operatorname{grad}(\mathbf{x}) + \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\Omega} \mathbf{d} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\Omega} \operatorname{grad}(\mathbf{d})) da = 0.$$

Dieses muß für jede Teilfläche  $S^{sub}$  gelten, so daß folgt

$$(-\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{n}^\alpha + \mathbf{d} \times \mathbf{c} - \mathbf{d}_{,\alpha} \times \mathbf{m}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \text{mit } \boldsymbol{\omega} = \operatorname{axial}(\boldsymbol{\Omega}). \tag{2.4.55}$$

Aus (2.4.55) erkennt man, daß einige Komponenten des intrinsischen Mikro-Kraftvektors durch

$$\mathbf{d} \times \mathbf{c} = \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{n}^\alpha + \mathbf{d}_{,\alpha} \times \mathbf{m}^\alpha \tag{2.4.56}$$

festgelegt sind. Da diese Festlegung in (2.4.56) aber über das Vektorprodukt von  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{c}$  geschieht, ist es klar, daß die Komponente  $c^3 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$  nicht durch (2.4.56) bestimmt ist.

Der übliche Weg, die Beziehung (2.4.56) in die Gleichgewichtsbedingung (2.4.53)<sub>2</sub> einzubeziehen, führt über die Definition folgender Größen

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{m}}^\alpha &:= \mathbf{d} \times \mathbf{m}^\alpha, & \text{mit } \tilde{\mathbf{m}}^\alpha|_\alpha &= \mathbf{d}_{,\alpha} \times \mathbf{m}^\alpha + \mathbf{d} \times \mathbf{m}^\alpha|_\alpha, \\ \tilde{\mathbf{l}} &:= \mathbf{d} \times \mathbf{l}.\end{aligned}\tag{2.4.57}$$

Der Tensor  $\tilde{\mathbf{m}} := \tilde{\mathbf{m}}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha$  wird Momententensor genannt und  $\tilde{\mathbf{l}}$  heißt äußeres Moment. Bildet man nun das Vektorprodukt von  $\mathbf{d}$  mit (2.4.53)<sub>2</sub>, so erhält man in wenigen Schritten

$$\begin{aligned}\mathbf{d} \times (\mathbf{m}^\alpha|_\alpha + \mathbf{c} + \mathbf{l}) &= \mathbf{0}, \\ \Leftrightarrow \mathbf{d} \times \mathbf{m}^\alpha|_\alpha + \mathbf{d} \times \mathbf{c} + \tilde{\mathbf{l}} &= \mathbf{0}, \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{m}}^\alpha|_\alpha - \mathbf{d}_{,\alpha} \times \mathbf{m}^\alpha + \mathbf{d} \times \mathbf{c} + \tilde{\mathbf{l}} &= \mathbf{0}, \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{m}}^\alpha|_\alpha + \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{n}^\alpha + \tilde{\mathbf{l}} &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{2.4.58}$$

Gleichung (2.4.58)<sub>4</sub> wird gewöhnlich als Momentengleichgewicht der Direktor-Schale aufgefaßt. Später wird auf diese Gleichung noch einmal eingegangen.

In (2.4.45) wurde gezeigt, daß die Herleitung von Dehnungsmaßen für die Schale eine einfache Angelegenheit ist, wenn die entsprechenden Spannungsmaße symmetrisch sind. Aufgrund (2.4.55) ist aber weder  $\mathbf{m}$  noch  $\mathbf{n}$  i.a. symmetrisch. Betrachtet man aber nun (2.4.55) genauer, so stellt sich diese Gleichung gerade als Symmetriebedingung heraus. Formt man die dort enthaltenen Vektorprodukte etwas um, so bekommt man

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{n}^\alpha - \mathbf{d} \times \mathbf{c} - \mathbf{m}^\alpha \times \mathbf{d}_{,\alpha}) \cdot \boldsymbol{\omega} &= 0, \\ \Rightarrow \text{skw}(\mathbf{n}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha - \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} - \mathbf{d}_{,\alpha} \otimes \mathbf{m}^\alpha) &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{2.4.59}$$

Der eingeklammerte Term in (2.4.59)<sub>2</sub> muß also symmetrisch sein. Diesen Term kann man nun als Effektiv-Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{n}}$  definieren

$$\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha - \mathbf{c} \otimes \mathbf{d} - \mathbf{d}_{,\alpha} \otimes \mathbf{m}^\alpha.\tag{2.4.60}$$

Diese Definition stimmt genau mit der von SIMO ET AL. [108] überein,<sup>8)</sup> welche wiederum von anderen Autoren übernommen wurde. Mit Hilfe dieses Effektiv-Spannungstensor lassen sich entsprechende Dehnungsgrößen leicht ableiten. Im 3. Kapitel werden einige dieser Dehnungsmaße näher erläutert.

<sup>8)</sup>In SIMO ET AL. [108] werden die Symbole  $\mathbf{l}$  und  $\tilde{\mathbf{m}}^\alpha$  für die hier benutzten Größen  $-\mathbf{c}$  und  $\mathbf{m}^\alpha$  verwendet.

Für das 1-Direktor-Schalenmodell wurden bisher die beiden Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^\alpha|_\alpha + \mathbf{p} &= \mathbf{0}, \\ \tilde{\mathbf{m}}^\alpha|_\alpha + \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{n}^\alpha + \tilde{\mathbf{l}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.4.61)$$

hergeleitet. Die Gleichung (2.4.61)<sub>2</sub> ergab sich aus der Kombination von Gleichgewichtsbedingung (2.4.53)<sub>2</sub> und Invarianzbedingung (2.4.56). Nun wurde aber angemerkt, daß (2.4.53)<sub>2</sub> aus 3 unabhängigen skalaren Gleichungen besteht, während (2.4.56) nur zwei unabhängige Gleichungen enthält, da alle Komponenten in bezug auf den Direktor  $\mathbf{d}$  durch das Vektorprodukt zu null werden. Aus diesem Grund repräsentiert (2.4.60)<sub>2</sub> nicht 3 sondern nur 2 Gleichgewichtsbedingungen. Die fehlende dritte Bedingung muß die Komponente  $c^3 = \mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$  enthalten. Sie ist demnach die Komponentengleichung von (2.4.53)<sub>2</sub> in Richtung von  $\mathbf{d}$ , d.h., es gilt

$$\mathbf{m}^\beta|_\beta \cdot \mathbf{d} + c^3 + l^3 = 0. \quad (2.4.62)$$

Formt man den linken Term in (2.4.62) gemäß der Produktregel der Differentialrechnung um, so ergibt sich

$$(\mathbf{m}^\beta \cdot \mathbf{d})|_\beta - \mathbf{m}^\beta \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + c^3 + l^3 = 0. \quad (2.4.63)$$

Gleichung (2.4.63) bildet die fehlende 6. Gleichgewichtsbedingung. Diese Bedingung spielt in SIMO ET AL. [108] eine wesentliche Rolle, wird dort aber nicht explizit erwähnt.

SIMO ET AL. [108] bemerken, daß die Verwendung der Größe  $\delta\mathbf{d}$  in ihrem numerischen Modell zu Schwierigkeiten bei dünnen Schalen führt und schlagen eine multiplikative Zerlegung  $\mathbf{d} = \lambda\mathbf{t}$  des Zeigers in einen Streckfaktor  $\lambda$  und einen starren Zeiger  $\mathbf{t}$  vor. Die entsprechende virtuelle Größe lautet dann  $\delta\mathbf{d} = \lambda\delta\mathbf{t} + \delta\lambda\mathbf{t}$ . Im Zusammenhang mit  $\delta\lambda$  definieren sie in SIMO ET AL. [108](3.9) ohne weitere Erklärung die neuen Spannungsresultierenden  $\check{\mathbf{m}}^{3\beta} := \mathbf{m}^\beta \cdot \mathbf{d}$  und  $\check{l}^3 := \mathbf{m}^\beta \cdot \mathbf{d}_{,\beta} - c^3$ .<sup>9)</sup> Hier wird deutlich, daß die zu  $\delta\lambda$  gehörende Gleichung gerade (2.4.63) ist, während  $\delta\mathbf{t}$  mit (2.4.61)<sub>2</sub> gekoppelt ist. Die multiplikative Zerlegung  $\mathbf{d} = \lambda\mathbf{t}$  garantiert also, daß die Gleichgewichtsbedingung (2.4.63) unabhängig von  $\delta\mathbf{t}$  erfüllt werden kann.

<sup>9)</sup>In SIMO ET AL. [108] lauten die entsprechenden Bezeichnungen  $c^3 \equiv -\mathbf{l} \cdot \mathbf{d}$  und  $\mathbf{m}^\beta \equiv \check{\mathbf{m}}^\beta$ .

Es zeigt sich hier durch die strukturierte Herleitung der Gleichgewichts- und Invarianzbedingungen sehr schön, daß eine solche multiplikative Zerlegung des Zeigers  $\mathbf{d}$  zwingend notwendig ist, um die 9 skalaren Gleichungen (2.4.53)<sub>2</sub>, (2.4.56) und (2.4.61)<sub>1</sub> auf 6 unabhängige skalare Gleichungen zu reduzieren.

### 4.3.6 Schalenmodell nach der Normalentheorie

Wählt man als Zeiger  $\mathbf{d}$  genau den Normalenvektor  $\mathbf{a}_n$  der verformten Schalenfläche aus, so vereinfachen sich die Schalengleichungen enorm. Der Momentenspannungstensor enthält nun nur noch Komponenten, die tangential zur Schalenfläche liegen

$$\bar{\mathbf{m}}^\alpha = \mathbf{a}_n \times (m^{\beta\alpha} \mathbf{a}_\beta + m^{3\alpha} \mathbf{a}_n) = \epsilon_{\beta\delta} m^{\beta\alpha} \mathbf{a}^\delta. \quad (2.4.64)$$

Die 6. Gleichung (2.4.63) entfällt. Das Schalenmodell wird also durch 5 unabhängige Gleichungen beschrieben. Neben (2.4.61)<sub>1</sub> sind dieses 2 unabhängige Gleichungen, die aus (2.4.58)<sub>4</sub> folgen. Durch Einsetzen von (2.4.64) erhält man

$$\begin{aligned} m^{\alpha\beta} |_\beta - q^\alpha + l^\alpha &= 0, \\ \epsilon_{\alpha\beta} (m^{\alpha\delta} b_\delta^\beta + n^{\alpha\beta}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.65)$$

Man beachte, daß (2.4.65) nur 2 unabhängige Gleichungen bereitstellt. Die dritte Gleichung muß als Zwangsbedingung verwendet werden oder dient dazu eine überzählige Komponente zu entfernen. Der vollständige Satz von Gleichungen ist als Schalentheorie mit Normalenhypothese (Kirchhoff-Love-Hypothese) bekannt.

## 4.4 Cosserat-Schale

### 4.4.1 (M1) Geometrische und physikalische Struktur

Die Basismannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  sei wieder als Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}_0$  gegeben. Die Zustandsmannigfaltigkeit der Cosserat-Schale entspricht der des Cosserat-Kontinuums. Eine Cosserat-Schale ist also eine Membran mit polarer Mikrostruktur. Eine globale Konfiguration ist durch

$$\mathfrak{q} : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{E} \times SO(\mathbb{E}), \quad \mathbf{Y} \mapsto (\mathbf{x}(\mathbf{Y}), \mathbf{Q}(\mathbf{Y}))$$

gegeben. Es gelten hier insbesondere die Bemerkungen, die über die nicht-lineare Struktur der Rotationsgruppe  $SO(\mathbb{E})$  gemacht wurden. Eine globale virtuelle Konfiguration ist durch

$$\begin{aligned} \delta q(p) : \mathcal{S} &\rightarrow T_{q(p)}\mathcal{Q} \cong \mathbb{E} \times T_{\mathbf{Q}(\mathbf{Y})}SO(\mathbb{E}), \\ \mathbf{Y} &\mapsto (\delta \mathbf{x}(\mathbf{Y}), \delta \Psi \mathbf{Q}(\mathbf{Y})), \quad \delta \Psi \in \mathfrak{so}(\mathbb{E}) \end{aligned}$$

gegeben und man rufe sich in Erinnerung, daß ein schiefsymmetrischer Tensor  $\delta \Psi$  durch seinen axialen Vektor  $\delta \psi$  repräsentiert werden kann. Im Zusammenhang mit den polaren Kontinua wurde betont, daß die Darstellung von  $\delta \Psi$  durch  $\delta \psi$  zulässig ist, wenn man die Unterschiede bei den Invarianzbedingungen beachtet.

#### 4.4.2 (M2) Nicht-Lokalität der Abbildung

Hier gilt wieder die Beschränkung auf einfache Materialien. Eine lokale virtuelle Konfiguration läßt sich dann als

$$\delta \mathfrak{F}(p) = (\delta \mathbf{x}, \text{Grad}_g(\delta \mathbf{x}), \delta \psi, \text{Grad}_g(\delta \psi))$$

darstellen.

#### 4.4.3 (M3) Lokale virtuelle Arbeit

Entsprechend (2.4.50) erhält man nun die lokale virtuelle Arbeit in gemischter Form

$$\delta W_l = \int_{\mathcal{S}_0} (\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{x} - \mathbf{N} \cdot \text{Grad}_g(\delta \mathbf{x}) + \mathbf{c} \cdot \delta \psi - \mathbf{M} \cdot \text{Grad}_g(\delta \psi)) dA. \quad (2.4.66)$$

Die Spannungstensoren  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{M}$  beschreiben resultierende Spannungen bzw. resultierende Momente in der Schale. Wendet man auf (2.4.66) den Satz von Stokes an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta W_l &= \int_{\mathcal{S}_0} [(\mathbf{h} + \text{Div}_g(\mathbf{N})) \cdot \delta \mathbf{x} + (\mathbf{c} + \text{Div}_g(\mathbf{M})) \cdot \delta \psi] dA \\ &\quad - \int_{\partial \mathcal{S}_0} (\mathbf{N} \mathbf{v}_0 \cdot \delta \mathbf{x} + \mathbf{M} \mathbf{v}_0 \cdot \delta \psi) ds_0. \end{aligned} \quad (2.4.67)$$

#### 4.4.4 (M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen

Eine zu (2.4.67) kompatible Form der globalen virtuellen Arbeit ist durch

$$\delta W_g = \int_{S_0} (-\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{x} - \mathbf{l} \cdot \delta \boldsymbol{\psi}) dA + \int_{\partial S_0} (-\mathbf{N}_v \cdot \delta \mathbf{x} - \mathbf{M}_v \cdot \delta \boldsymbol{\psi}) ds_0 \quad (2.4.68)$$

gegeben. Die Größen  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{l}$  lassen sich als äußere Flächenlast bzw. äußeres Flächenmoment interpretieren. Durch Gleichsetzen von (2.4.68) und (2.4.67) erhält man unter den üblichen Voraussetzungen die folgenden Gleichgewichts- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} \text{Div}_S(\mathbf{N}) + \mathbf{p} + \mathbf{h} &= \mathbf{0} & \text{und} & & \mathbf{N}\mathbf{v}_0 &= \mathbf{N}_v, \\ \text{Div}_S(\mathbf{M}) + \mathbf{m} + \mathbf{l} &= \mathbf{0} & \text{und} & & \mathbf{M}\mathbf{v}_0 &= \mathbf{M}_v. \end{aligned} \quad (2.4.69)$$

Im Vergleich mit (2.4.53) stellen diese Gleichungen noch keine Besonderheit der Cosserat-Schale gegenüber dem Direktor-Modell dar.

#### 4.4.5 (M5) Invarianzbedingungen

**Invarianz gegenüber räumlicher Translation.** Die Invarianz gegenüber räumlicher Translation wird erfüllt, wenn gilt  $\delta W_l = 0$  für alle  $(\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\psi}) = (\mathbf{c}, \mathbf{0})$ . Durch Einsetzen in (2.4.66) ermittelt man sofort  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ . Damit gilt die Gleichgewichtsbedingung

$$\text{Div}_S(\mathbf{N}) + \mathbf{p} = \mathbf{0}.$$

**Invarianz gegenüber räumlicher Rotation.** Diese Invarianzbedingung erfordert, daß gilt  $\delta W_l = 0$  für alle  $(\delta \mathbf{x}, \delta \boldsymbol{\psi}) = (\boldsymbol{\Omega}\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ , mit  $\boldsymbol{\omega} = \text{axial}(\boldsymbol{\Omega})$ . Diese Bedingung macht den hauptsächlichen Unterschied zur Direktor-Schale aus. Eine Begründung dieser Bedingung wurde bereits beim Cosserat-Kontinuum gegeben. Durch Einsetzen in (2.4.66) findet man nun

$$\delta W_l(\delta \mathbf{x}) = \int_{S_0} (-\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\Omega}\mathbf{F} + \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}) dA = 0, \quad \text{mit } \boldsymbol{\omega} = \text{axial}(\boldsymbol{\Omega}). \quad (2.4.70)$$

Gilt nun (2.4.70) für beliebige Teilflächen  $S_0^{sub}$ , so muß  $\mathbf{m}$  gerade durch

$$\mathbf{m} = \mathbf{x}_{,\alpha} \times \mathbf{N}^\alpha \quad (2.4.71)$$

bestimmt sein. Diese Bestimmungsgleichung ist von großer Bedeutung. Im Gegensatz zu (2.4.56) liefert die Invarianzbedingung der Cosserat-Schale eine Gleichung, aus der die Größe  $\mathbf{m}$  vollständig bestimmt werden kann. Wird (2.4.71) in (2.4.69)<sub>2</sub> eingesetzt, so entsteht das Resultat

$$\text{Div}_S(\mathbf{M}) + \mathbf{x}_{,\alpha} \times \mathbf{N}^\alpha + \mathbf{l} = \mathbf{0}. \quad (2.4.72)$$

In etwas anderer Schreibweise erhält man daraus

$$\mathbf{M}^\beta|_\beta + \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{N}^\alpha + \mathbf{l} = \mathbf{0}. \quad (2.4.73)$$

Diese Gleichung entspricht zwar (2.4.58)<sub>4</sub>, aber sie ersetzt hier die Gleichung (2.4.69)<sub>2</sub> vollständig, was bei der Direktor-Schale nicht der Fall war.

## 4.5 Schalentheorie 2.Grades

### 4.5.1 (M1) Geometrische und physikalische Struktur

Als Basismannigfaltigkeit diene wieder die Schalenreferenzfläche  $S_0$ . Der Zustand der Schale 2.Grades soll durch ihre Plazierungen im Euklidischen Raum beschrieben werden. Dann ist der Zustandsraum einer Schale 2.Grades derselbe wie bei einer Membranschale, es gilt also  $\mathcal{Q} = \mathbb{E}$ . Eine globale Konfiguration wird demnach durch

$$\mathfrak{q} : S_0 \rightarrow \mathbb{E}, \quad \mathbf{Y} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{Y})$$

beschrieben. Für die globalen virtuellen Konfigurationen gilt die entsprechende Bemerkung zu den 3-dimensionalen Kontinua. Aufgrund der Struktur eines Kontinuums 2.Grades umfaßt das Vertikalbündel der Mannigfaltigkeit  $J^2\pi$  neben den Größen  $\delta\mathbf{x} \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{E}$  noch weitere, nämlich die Normalenableitungen  $\partial_\nu\delta\mathbf{x}$ . Dieses wird im Verlauf der Herleitungen deutlich gemacht.

### 4.5.2 (M2) Nicht-Lokalität der Abbildung

Die Schalentheorie 2.Grades wird durch Ableitungen der Zustandsvariablen bis zur Ordnung 2 gebildet. Eine lokale virtuelle Konfiguration kann als

$$\delta\mathfrak{F} = (\delta\mathbf{x}, \text{Grad}_S(\delta\mathbf{x}), \text{Grad}_S(\text{Grad}_S(\delta\mathbf{x})))$$

geschrieben werden. An einem Punkt  $p \in \mathcal{M}$ , d.h. hier  $\mathbf{Y} \in \mathcal{S}_0$ , nimmt die lokale virtuelle Konfiguration Werte in  $\delta\mathfrak{F}(p) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \times \mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$  an. Wegen des inneren Produktes auf  $\mathbb{E}$  können auch die dualen Größen  $\mathfrak{t}(p)$  in diesem Raum definiert werden.

### 4.5.3 (M3) Lokale virtuelle Arbeit

Bezeichnet man die dualen Größen  $\mathfrak{t}$  in der gleichen Weise wie bei dem 3-dimensionalen Kontinuum 2.Grades, so lautet die lokale virtuelle Arbeit

$$\delta W_{2l}(\delta \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{S}_0} (\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{x} - \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{F} - \mathbb{H} \cdot \text{Grad}_s(\delta \mathbf{F})) dA. \quad (2.4.74)$$

Hier wurde  $\delta \mathbf{F} := \text{Grad}_s(\delta \mathbf{x})$  als Abkürzung der Schreibweise verwendet. Formt man (2.4.74) mit dem Satz von Stokes um, so ergibt sich

$$\delta W_{2l}(\delta \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{S}_0} (\mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{x} - (\mathbf{T} - \text{Div}_s(\mathbb{H})) \cdot \delta \mathbf{F}) dA - \int_{\partial \mathcal{S}_0} \mathbb{H} \mathbf{v}_0 \cdot \delta \mathbf{F} ds_0. \quad (2.4.75)$$

Ähnlich wie bei der 3-dimensionalen Theorie lassen sich ein neue Spannungstensor  $\tilde{\mathbf{T}} := \mathbf{T} - \text{Div}(\mathbb{H})$  und die Schreibweise  $\mathbf{H} := \mathbb{H} \mathbf{v}_0$  einführen. Der rechte Term von (2.4.75) enthält den Flächengradienten  $\delta \mathbf{F} := \text{Grad}_s(\delta \mathbf{x})$ , der hier auf die Randkurve  $\partial \mathcal{S}_0$  eingeschränkt ist. Um den Satz von Stokes ein zweites Mal anwenden zu können, muß  $\delta \mathbf{F}$  in einen entsprechenden Anteil normal und tangential zur Randkurve zerlegt werden. Dieses geschieht durch die Zerlegung

$$\delta \mathbf{F} = \text{Grad}_s(\delta \mathbf{x}) = \partial_s(\delta \mathbf{x}) \otimes \mathbf{t}_0 + \partial_\nu(\delta \mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}_0, \quad (2.4.76)$$

worin die Indizes  $s$  und  $\nu$  die tangential bzw. normale Ableitung kennzeichnen. Durch diese Zerlegung spaltet sich der Term  $\mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{F}$  in die Summe

$$\int_{\partial \mathcal{S}_0} \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{F} ds_0 = \int_{\partial \mathcal{S}_0} (\mathbf{H} \cdot (\partial_s(\delta \mathbf{x}) \otimes \mathbf{t}_0 + \partial_\nu(\delta \mathbf{x}) \otimes \mathbf{v}_0)) ds_0. \quad (2.4.77)$$

Zerlegt man nun auch den Tensor  $\mathbf{H}$  in bezug auf das Darboux-Dreibein  $\{\mathbf{t}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{A}_n\}$  der Randkurve  $\partial \mathcal{S}_0$ , so entsteht

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_n \otimes \mathbf{A}_n + \mathbf{H}_t \otimes \mathbf{t}_0 + \mathbf{H}_\nu \otimes \mathbf{v}_0. \quad (2.4.78)$$

Nach dem Einsetzen von (2.4.78) in (2.4.77) und anschließender partieller Integration erhält man nun

$$\begin{aligned} \int_{\partial S_0} \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{F} \, ds_0 &= \int_{\partial S_0} (\mathbf{H}_t \cdot \partial_s(\delta \mathbf{x}) + \mathbf{H}_v \cdot \partial_v(\delta \mathbf{x})) \, ds_0, \\ &= \int_{\partial S_0} (-\partial_s(\mathbf{H}_t) \cdot \delta \mathbf{x} + \mathbf{H}_v \cdot \partial_v(\delta \mathbf{x})) \, ds_0 + \llbracket \mathbf{H}_t \cdot \delta \mathbf{x} \rrbracket_{p_i}, \end{aligned}$$

worin der Term  $\llbracket \mathbf{H}_t \cdot \delta \mathbf{x} \rrbracket$  die sprunghafte Änderung von  $\mathbf{H}_t$  in nicht-glat-ten Punkten  $p_i$  des Randes  $\partial S_0$  beschreibt. Dieses sind solche Punkte, in denen sich der Tangentenvektor  $\mathbf{t}_0$  sprunghaft ändert (siehe Abb. 2.3). Als

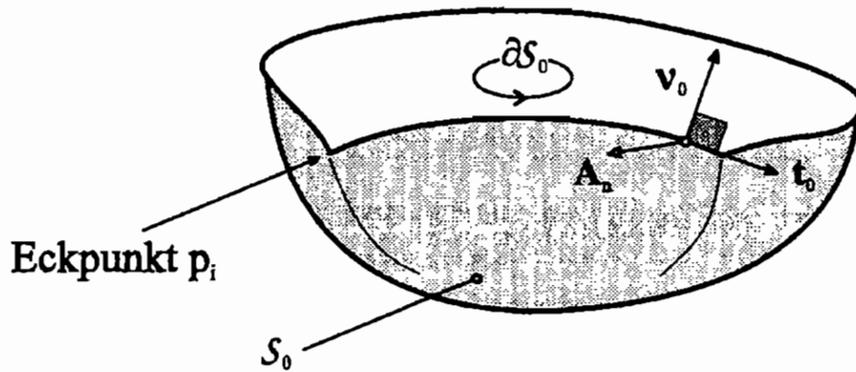


Abbildung 2.3: Eckpunkte nicht-glatte Randkurven

Zwischenergebnis kann die folgende Form der lokalen virtuellen Arbeit geschrieben werden

$$\begin{aligned} \delta W_{2l}(\delta \mathbf{x}) &= \int_{S_0} (\mathbf{h} + \text{Div}_S(\tilde{\mathbf{T}})) \cdot \delta \mathbf{x} \, dA + \int_{\partial S_0} (-\tilde{\mathbf{T}} \mathbf{v}_0 \cdot \delta \mathbf{x} \\ &\quad - \partial_s(\mathbf{H}_t) \cdot \delta \mathbf{x} + \mathbf{H}_v \cdot \partial_v(\delta \mathbf{x})) \, ds_0 + \llbracket \mathbf{H}_t \cdot \delta \mathbf{x} \rrbracket_{p_i}. \end{aligned} \quad (2.4.79)$$

Die Ableitungen  $\partial_s$  und  $\partial_v$  auf dem Rand  $\partial S_0$  können explizit ausgeführt werden, indem man die entsprechenden Randterme bezüglich des Darboux-Dreibehns darstellt und die bekannten Darboux'schen Ableitungsgleichungen verwendet. Als Ergebnis bekäme man Terme, welche die Normalenkrümmung, die geodetische Krümmung und die Torsion der Randkurve einbeziehen. Eine explizite Darstellung dieser Ergebnisse soll hier unterbleiben, um die entsprechenden Gleichungen übersichtlich zu halten.

#### 4.5.4 (M4) Kompatibilität und Gleichgewichtsbedingungen

Eine zu (2.4.79) kompatible Form der globalen virtuellen Arbeit sieht wie folgt aus

$$\delta W_{2g}(\delta \mathbf{x}) = \int_{S_0} (-\mathbf{f}) \cdot \delta \mathbf{x} \, dA + \int_{\partial S_0} (-\mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{t}} \cdot \partial_\nu \delta \mathbf{x}) \, ds_0. \quad (2.4.80)$$

Es wird aus der Struktur von (2.4.79) deutlich, daß die Randnormalenableitungen  $\partial_\nu \delta \mathbf{x}$  ein unabhängiges virtuelles Feld darstellen. Setzt man nun (2.4.80) und (2.4.79) gleich und läßt die Einschränkung auf beliebige Teilflächen  $S_0^{sub}$  zu, dann ergeben sich die folgenden Gleichgewichts- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{h} + \text{Div}_S(\tilde{\mathbf{T}}) + \mathbf{f}, & \text{auf } S_0, \\ \mathbf{t} &= \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{v}_0 - \partial_s \mathbf{H}_t, & \text{auf } \partial S_0, \\ \tilde{\mathbf{t}} &= \mathbf{H}_\nu, & \text{auf } \partial S_0. \end{aligned} \quad (2.4.81)$$

Die Eckbedingungen  $[[\mathbf{H}_t \cdot \delta \mathbf{x}]]_{p_i} = 0$  könnte man als vierte Bedingung hinzunehmen. Sie bleibt aber unberücksichtigt, da sie auf die folgenden Ausführungen keinen Einfluß hat.

Aus (2.4.81) wird deutlich, daß auf dem Rand  $\partial S_0$  6 skalare Randbedingungen, nämlich  $\mathbf{t}$  und  $\tilde{\mathbf{t}}$ , vorgeschrieben werden müssen. Dieses stimmt aber nicht mit den Erkenntnissen der Kirchhoff-Love-Schalentheorie überein, wo man gezeigt hat,<sup>10)</sup> daß nur 4 skalare Größen auf dem Rand vorgeschrieben werden dürfen. Warum dieses so sein muß, wird nun mit Hilfe der Invarianzbedingungen geklärt.

#### 4.5.5 (M5) Invarianzbedingungen

**Invarianz gegenüber räumlichen Translationen.** Die Invarianz gegenüber Verschiebungen im Raum fordert, daß gilt  $\delta W_{2l} = 0$  für alle  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{c}$ . Unter dieser Bedingung folgt aus (2.4.81)<sub>1</sub> die Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{0} = \text{Div}_S(\tilde{\mathbf{T}}) + \mathbf{f}, \quad \text{auf } S_0. \quad (2.4.82)$$

<sup>10)</sup>Entsprechende Literaturverweise finden sich im 3.Kapitel.

**Invarianz gegenüber räumlichen Rotationen.** Diese Invarianzbedingung erfordert, daß  $\delta W_{2l} = 0$  gilt für alle  $\delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}$ . Setzt man dieses in (2.4.81)<sub>1</sub> ein, so folgt unter den üblichen Voraussetzungen die Bedingung

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \text{Grad}_S(\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) + \mathbb{H} \cdot \text{Grad}_S(\boldsymbol{\Omega} \mathbf{F}) &= 0, \\ \Rightarrow \text{skw}(\tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^\top + \text{Div}(\mathbb{H}^\alpha \mathbf{F}^\top \otimes \mathbf{A}_\alpha)) &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.4.83)$$

Definiert man nun ähnlich wie im 3-dimensionalen Fall (siehe TOUPIN [118]) einen verallgemeinerten Kirchhoffschen Spannungstensor  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  und einen Momententensor  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^\Sigma \otimes \mathbf{A}_\Sigma$ , so gilt

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^\top, \quad \boldsymbol{\mu}^\Sigma \otimes \mathbf{A}_\Sigma = \text{skw}(\mathbb{H}^\Sigma \mathbf{F}^\top) \otimes \mathbf{A}_\Sigma. \quad (2.4.84)$$

Mit diesen Größen kann die Invarianzbedingung (2.4.83)<sub>2</sub> nun sehr einfach als

$$\text{skw}(\tilde{\boldsymbol{\tau}}) = \text{Div}_S(\boldsymbol{\mu}) \quad (2.4.85)$$

geschrieben werden.

Nun soll die Bedeutung dieser Invarianzbedingung für die Vorschreibbarkeit von Randbedingungen auf  $\partial \mathcal{S}_0$  untersucht werden. Zu diesem Zweck wird die Invarianz gegenüber räumlichen Drehungen als Bedingung für die globale virtuelle Arbeit geschrieben. Es muß entsprechend gelten  $\delta W_{2g} = 0$  für alle  $\delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}$ . Aus der globalen virtuellen Arbeit bekommt man nun

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} \, dA + \int_{\partial \mathcal{S}_0} (\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{t}} \cdot \partial_\nu(\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x})) \, ds_0 &= 0, \\ \Rightarrow \int_{\mathcal{S}_0} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} \, dA + \int_{\partial \mathcal{S}_0} (\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega} \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\nu}) \, ds_0 &= 0, \end{aligned} \quad (2.4.86)$$

worin  $\boldsymbol{\nu} = \partial_\nu \mathbf{x}$  den Normalenvektor der verformten Randkurve  $\partial \mathcal{S}$  bezeichnet. Nach einer kurzen Herleitung, die (2.4.82) und (2.4.84) in Betracht zieht, erhält man aus (2.4.86)<sub>2</sub> die Bedingung

$$\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\nu}_0 + \text{skw}(\mathbf{x} \otimes \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\nu}_0 + (\mathbf{x} \otimes \mathbf{t}) + (\boldsymbol{\nu} \otimes \tilde{\mathbf{t}})) = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial \mathcal{S}_0. \quad (2.4.87)$$

Weil  $\boldsymbol{\mu}^\alpha$  nun gerade als schief-symmetrischer Teil des Hyper-Spannungstensors  $\mathbb{H}^\alpha \mathbf{F}^\top$  definiert ist, ist der Term  $\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\nu}_0$  in (2.4.87) ebenfalls schief-symmetrisch. Demnach kann er durch seinen axialen Vektor repräsentiert werden. Dann vereinfacht sich (2.4.87) zu

$$\text{axial}(\boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\nu}_0) + \mathbf{x} \times \tilde{\mathbf{T}} \boldsymbol{\nu}_0 + \mathbf{x} \times \mathbf{t} = \tilde{\mathbf{t}} \times \boldsymbol{\nu} \quad \text{auf } \partial \mathcal{S}_0. \quad (2.4.88)$$

Diese Gleichung liefert das gewünschte Resultat: Betrachtet man die Größen auf der linken Seite als auf dem Rand gegeben bzw. als dort bestimmbar, so muß auf der rechten Seite eine abhängige Größe stehen. Dieses bedeutet nun nicht, daß  $\tilde{\mathbf{t}}$  durch Gleichung (2.4.88) vollständig bestimmt ist. Aus (2.4.88) sind nur zwei Komponenten von  $\tilde{\mathbf{t}}$  bestimmbar. Die Komponente  $\tilde{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}$  in Richtung der Randnormalen  $\mathbf{v}$  bleibt unbestimmt und ist somit als Randbedingung vorschreibbar. Es gibt also insgesamt 4 vorschreibbare Randbedingungen in einer Schalentheorie 2.Grades. Dieses Ergebnis kann also auch ohne Bezug auf die spezielle Kinematik der Kirchhoff-Love-Schalentheorie gewonnen werden. Darüberhinaus erhält man durch die Gleichung (2.4.88) einen Anhaltspunkt, welche statischen Größen auf dem Rand vorge-schrieben werden müssen. In der Kirchhoff-Love-Schalentheorie ist die Frage nach der Wahl der 4.Randgröße bislang nicht eindeutig beantwortet.



# Methoden zur Herleitung von Schalengleichungen aus der 3- dimensionalen Kontinuumsmechanik

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>180</b>
<b>2</b>	<b>Methode der Zwangsbedingungen</b>	<b>182</b>
2.1	3-dimensionales Prinzip der virtuellen Arbeit	182
2.2	Schalengeometrie in der Referenzplatzierung	186
2.3	Zwangsbedingungen	190
2.4	Resultierende Schalengleichungen	192
2.5	Beispiele	194
2.5.1	Statisches Multi-Vektor-Modell	194
2.5.2	Lineares Multi-Vektor-Modell	197
2.5.3	Multi-Direktor-Modell	197
2.5.4	Komponenten der Spannungsergebnisse und Dehnungen	198
2.5.5	Anmerkung zu degenerierten Schalenelementen	200
2.6	Resultierender Drehimpulssatz	201
2.7	Hyperelastische konstitutive Beziehungen	203
2.7.1	Zwangsbedingungen und Reaktionskräfte	204
2.8	Schalentheorie 2.Grades	208
2.8.1	Zwangsbedingungen	208
2.8.2	Resultierende Schalengleichungen	209
2.8.3	Beispiel: Kirchhoff-Love-Schalentheorie	213
<b>3</b>	<b>Methode der gewichteten Momente</b>	<b>218</b>

3.1	Lokaler Impulssatz . . . . .	219
3.2	Prinzip der gewichteten Spannungen . . . . .	220
3.3	Anwendung auf die Schalentheorie . . . . .	222
3.4	Resultierende Schalengleichungen . . . . .	224
3.4.1	Beispiel: Schalenmodell von LIBAI und SIMMONDS	224
4	Vergleich und Diskussion der beiden Methoden . . . . .	228

---

## 1 Einführung

Aus dem allgemeinen Prinzip der virtuellen Arbeit lassen sich die Schalengleichungen unter Annahme verschiedener Mikrostrukturen direkt ableiten. Eine Schale ist dort als ein 2-dimensionaler materieller Körper definiert. Um die Feldgleichungen einer Schale aufzustellen, benötigt man keine Annahmen über die 3-dimensionale Schalengeometrie. Folglich erhält man aber auch keinen Zusammenhang der 2-dimensionalen Schalen Größen mit denen einer 3-dimensionalen Kontinuumsmechanik. Diese Tatsache bereitet große Schwierigkeiten bei der Aufstellung konstitutiver Beziehungen, da die bekannten Materialgesetze der Kontinuumsmechanik nicht unmittelbar auf jene Schalenmodelle übertragen werden können.

Aus diesen Gründen wird eine *direkte Methode* zur Herleitung der Schalengleichungen (siehe z.B. NAGHDI [75]) selten benutzt. Sehr häufig werden die Schalengleichungen unter der Annahme bestimmter Kinematiken aus den Gleichungen eines 3-dimensionalen Kontinuums hergeleitet. Betrachtet man solche Herleitungen genauer, so zeigt sich, daß man zwei wesentliche Methoden unterscheiden kann: die **Methode der Zwangsbedingungen** und die **Methode der gewichteten Momente**.

Die Methode der Zwangsbedingungen enthält solche Herleitungen, die von einer kinematischen Annahme über die Schalenverformung ausgehen. Dabei soll schon hier betont werden, daß der Begriff *kinematische Annahme* irreführend ist, da es sich hierbei um eine *Zwangsbedingung* eines 3-dimensionalen Kontinuums handelt. Diese Tatsache ist u.a. von WOZNIAK [125] und ANTMAN & MARLOW [8] besonders betont worden. Die durch diese Zwangsbedingungen hervorgerufenen Reaktionsspannungen leisten bei der Verformung eines Kontinuums keine Arbeit. Leitet man die resultierenden

Schalengleichungen aus einem Arbeitsprinzip (z.B. dem Prinzip der virtuellen Arbeit) her, so bleiben die Reaktionsspannungen unberücksichtigt. Die Bedeutung der Reaktionsspannungen ist umso wichtiger, je restriktiver die kinematische Annahme (Zwangsbedingung) ist.

Es wird hier eine Methode der Zwangsbedingungen vorgestellt, mit der die Schalengleichungen zunächst aus einem allgemeinen kinematischen Ansatz hergeleitet werden. Später wird dieser Ansatz sukzessive spezifiziert, um so eine Vielzahl bekannter Schalenmodelle zu erhalten. Es zeigt sich dabei, daß die resultierenden Schalengleichungen der unterschiedlichen Modelle dieselbe Grundstruktur aufweisen.

Als spezielle kinematische Ansätze wird auf die Reissner-Mindlin- und Kirchhoff-Love-Hypothesen eingegangen. Schalentheorien, welche auf der Reissner-Mindlin-Hypothese beruhen, werden gegenwärtig häufig zu numerischen Berechnungen eingesetzt. Solche Modelle nennt man auch *Zeiger-* oder *Direktor-*Modelle, wobei diese Begriffe andeuten, daß eine solche Schale als materielle Fläche mit vektorieller Mikrostruktur gedacht werden kann. Manche dieser Zeigermodelle unterscheiden sich nur durch unterschiedliche Parametrisierungen des Zeigers. So wird in SIMO ET AL. [108] neben einer kartesischen Zerlegung des Zeigers auch eine Zerlegung in zwei finite Rotationen und eine Streckung betrachtet. Dieses entspricht einer Darstellung in kartesischen Koordinaten bzw. in Kugelkoordinaten. Es wird hier davon ausgegangen, daß es für das mechanische Modell einer Schale irrelevant ist, in welchen Koordinaten die Schalengleichungen letztlich beschrieben werden, solange sich die Koordinaten eindeutig ineinander umrechnen lassen. Für eine numerische Betrachtung eines Schalenmodelles ist die Frage der Parametrisierung allerdings von großer Bedeutung. Es muß daher klar zwischen dem rein mechanischen und dem numerischen Schalenmodell unterschieden werden. Als weitere Vertreter der Reissner-Mindlinschen Schalenmodelle seien hier noch SIMO & FOX [109], GRUTTMANN ET AL. [43], BASAR & DING [13] genannt.

Die Kirchhoff-Love-Schale (siehe KOITER [51]) entspricht den im 2.Kapitel besprochenen Schalenmodellen 2.Grades. Bei diesen Schalen wird als Zwangsbedingung angenommen, daß Normalen zur unverformten Schalenfläche nach der Verformung normal bleiben und ihre Länge nicht ändern. Verschiedene Aspekte dieser Theorie finden sich u.a. in PIETRASZKIEWICZ &

SZWABOWICZ [90], SCHMIDT & STUMPF [99], PIETRASZKIEWICZ [86], PIETRASZKIEWICZ [87], STUMPF [114], NOLTE ET AL. [81], BASAR & KRÄTZIG [15]. Eine modifizierte Zwangsbedingung für große Dehnungen wird in SCHIECK ET AL. [97] betrachtet. Eine Schalentheorie finiter Rotationen und finiter Dehnungen, die auch die Dehnung der Schalennormalen berücksichtigt, findet man in STUMPF & MAKOWSKI [116].

Die genannten Modelle können im Rahmen der Methode der Zwangsbedingungen einheitlich entwickelt werden. Darüberhinaus gibt es Schalenmodelle, die zwar aus dem 3-dimensionalen Kontinuum hergeleitet sind, deren Herleitung aber nicht auf einer Zwangsbedingung beruht.

Ein Beispiel für solche Modelle ist die Cosserat-Schale, die bereits im 2. Kapitel als Schalenmodell mit polarer Mikrostruktur vorgestellt wurde. Sie bildet eine 6-parametrische Schalentheorie mit 3 translatorischen und 3 rotatorischen Freiheitsgraden und kann u. a. in MAKOWSKI & STUMPF [66], MAKOWSKI & STUMPF [67], CHROSCIELEWSKI ET AL. [26] gefunden werden. Ihre Herleitung wird hier anhand der Methode der gewichteten Momente demonstriert. Diese Methode geht nicht von dem 3-dimensionalen Prinzip der virtuellen Arbeit aus, sondern reduziert die 3-dimensionalen Gleichgewichtsbedingungen direkt auf eine 2-dimensionale Form.

## 2 Methode der Zwangsbedingungen

### 2.1 3-dimensionales Prinzip der virtuellen Arbeit

In diesem Kapitel wird die Referenzplatzierung  $\mathcal{P}_0$  eines materiellen Körpers als ausschließliche Bezugsplatzierung für die Beschreibung einer Schalentheorie festgelegt. Aus diesem Grund kann ein materieller Körper  $\mathcal{B}$  mit seiner Referenzplatzierung  $\mathcal{P}_0 = \kappa_0(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{E}^3$  in dem Euklidischen Vektorraum identifiziert werden. Es wird also zwischen dem Körper und seinen Platzierungen nicht mehr unterschieden, so daß  $\mathcal{P}_0$  nun Körper und  $\partial\mathcal{P}_0$  Rand des Körpers heiße. Die Symbole  $dV$  und  $\mathbf{n} dS$  bezeichnen das Volumenelement und das orientierte Flächenelement auf dem Körper  $\partial\mathcal{P}_0$ . Alle Körper und Teilkörper seien, falls nicht anders vermerkt,  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten.

Ein materieller Punkt  $\xi \in \mathcal{B}$  wird mit dem entsprechenden Ortsvektor  $\mathbf{X} \in$

$\mathbb{E}^3$  in der Referenzplatzierung identifiziert. <sup>1)</sup> Dem materiellen Punkt  $\xi \in \mathcal{B}$  sind die konvektiven Koordinaten  $(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathbb{R}^3$  zugeordnet.

Die Bewegung des Körpers wird bezüglich der Referenzplatzierung durch die Abbildung  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$  beschrieben. Das entsprechende materielle Geschwindigkeitsfeld  $\dot{\mathbf{x}}$  ist punktweise definiert als  $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) := (\frac{d}{dt}\boldsymbol{\chi})(\mathbf{X}, t)$ . Das Deformationsgradientenfeld  $\mathbf{F}$  ist punktweise definiert als  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) := (\text{Grad } \boldsymbol{\chi})(\mathbf{X}, t)$ . Der Definitionsbereich ist jeweils  $\mathcal{P}_0 \times [t_1, t_2]$ , wobei  $[t_1, t_2] \subset \mathbb{T}$  ein abgeschlossenes Zeitintervall darstellt.

Die Volumenkraftdichte ist bezüglich des Volumens auf  $\mathcal{P}_0$  definiert und wird mit  $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$  bezeichnet. Der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor wird als  $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$  geschrieben und  $\mathbf{t}_n = \mathbf{T}\mathbf{n}$  bezeichne die entsprechende Kontaktspannung auf einer durch den Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{n}$  orientierten, infinitesimalen Fläche. Schließlich gibt  $\rho_0(\mathbf{X}, t)$  das Massendichtefeld bezogen auf das Volumen in der Referenzplatzierung an.

Die lokale Form des Impuls- und Drehimpulssatzes lautet

$$\begin{aligned} \text{Div } \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) &= \rho_0(\mathbf{X}, t)\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t), \\ \mathbf{T}(\mathbf{X}, t)\mathbf{F}^\top(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{T}^\top(\mathbf{X}, t), \\ \forall (\mathbf{X}, t) &\in \mathcal{P}_0 \times [t_1, t_2]. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Um einen vollständigen Satz von Gleichungen zu erhalten, welche die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluß äußerer Kräfte beschreiben, müssen die Gleichungen (3.2.1) durch ein konstitutives Gesetz und Nebenbedingungen ergänzt werden. Die Nebenbedingungen bestehen aus Randbedingungen, Anfangsbedingungen und Übergangs- oder Sprungbedingungen. Letztere treten bei Unstetigkeiten auf und werden im Zusammenhang mit Schalen höheren Grades angesprochen. Es gelten die folgenden Randbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) &= \overset{*}{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t), & \forall (\mathbf{X}, t) \in \partial\mathcal{P}_{0,d} \times \mathbb{T}, \\ \mathbf{T}(\mathbf{X}, t)\mathbf{n}(\mathbf{X}, t) &= \overset{*}{\mathbf{t}}_n(\mathbf{X}, t), & \forall (\mathbf{X}, t) \in \partial\mathcal{P}_{0,f} \times \mathbb{T}, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

wobei  $\partial\mathcal{P}_{0,d}$  und  $\partial\mathcal{P}_{0,f}$  jene zwei komplementären Bereiche des Randes  $\partial\mathcal{P}_0$  kennzeichnen, an denen jeweils kinematische Größen (*displacements*) oder statische Größen (*forces*) vorgeschrieben sind. Die vorgeschriebenen Randgrößen sind in (3.2.2) durch einen darübergestellten Stern gekennzeichnet.

<sup>1)</sup>Alle Platzierungen beziehen sich auf dasselbe Bezugssystem  $\Phi$ . Ein Bezugssystemwechsel wird hier nicht betrachtet.

Die zu (3.2.1) gehörenden Anfangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0) &= \mathbf{x}_0^*(\mathbf{X}), & \forall \mathbf{X} \in \mathcal{P}_0, \\ \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t_0) &= \dot{\mathbf{v}}_0^*(\mathbf{X}), & \forall \mathbf{X} \in \mathcal{P}_0, \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

wobei  $t_0 \in \mathbb{T}$  den Zeitpunkt angibt, welcher  $\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t_0)$  erfüllt. Dieses ist genau der Zeitpunkt, zu dem der materielle Körper die Referenzplatzierung einnimmt.

Der Rand  $\partial\mathcal{P}_0$  des Körpers läßt sich in die komplementären Teilränder  $\partial\mathcal{P}_0 = \partial\mathcal{P}_{0,d} \cup \partial\mathcal{P}_{0,f}$ , mit  $\partial\mathcal{P}_{0,d} \cap \partial\mathcal{P}_{0,f} = \emptyset$ , zerlegen. Der Rand eines Teilkörpers  $\partial\mathcal{P}_0^{sub}$  kann hingegen aus bis zu drei komplementären Teilrändern bestehen:  $\partial\mathcal{P}_0^{sub} = \partial\mathcal{P}_{0,i}^{sub} \cup \partial\mathcal{P}_{0,d}^{sub} \cup \partial\mathcal{P}_{0,f}^{sub}$ . Dabei ist  $\partial\mathcal{P}_{0,i}^{sub}$  der *innere Rand* des Teilkörpers,  $\partial\mathcal{P}_{0,i}^{sub} := \partial\mathcal{P}_0^{sub} \setminus \partial\mathcal{P}_0$ . Falls gilt  $\partial\mathcal{P}_0^{sub} \cap \partial\mathcal{P}_0 = \emptyset$ , dann besteht  $\partial\mathcal{P}_0^{sub}$  nur aus einem inneren Rand. Auf dem inneren Rand gelten nur statische Randbedingungen entsprechend (3.2.2)<sub>2</sub>, sofern  $\mathbf{t}_n^*$  durch  $\mathbf{t}_n$  ersetzt wird. Die Spannungen  $\mathbf{t}_n$  sind nicht vorschreibbar. Sie können nur aus dem Spannungstensor  $\mathbf{T}$  — und somit erst durch Lösung des Gesamtproblem — ermittelt werden. Die zwei anderen Teilränder sind als  $\partial\mathcal{P}_{0,d}^{sub} := \partial\mathcal{P}_0^{sub} \cap \partial\mathcal{P}_{0,d}$  und  $\partial\mathcal{P}_{0,f}^{sub} := \partial\mathcal{P}_0^{sub} \cap \partial\mathcal{P}_{0,f}$  definiert. Die entsprechende Einteilung der Randbereiche ist in Abb. 3.1 skizziert.

Die globale Form der lokalen Gleichungen (3.2.1) wird oft als grundlegende Form angegeben, da sie schwächere Stetigkeitsanforderungen an das Spannungstensorfeld  $\mathbf{T}$  stellt. Für jeden Teilkörper  $\mathcal{P}_0^{sub} \subseteq \mathcal{P}_0$  und jedes Zeitintervall  $[t_1, t_2] \in \mathbb{T}$  gelten die folgenden, globalen (oder integralen) Formulierungen des Impulssatzes

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \mathbf{f} \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_{0,i}^{sub}} \mathbf{T} \mathbf{n} \, dS + \int_{\partial\mathcal{P}_{0,f}^{sub}} \mathbf{t}_n^* \, dS \right) dt = \left[ \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \, dV \right]_{t_1}^{t_2} \quad (3.2.4)$$

und des Drehimpulssatzes

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \mathbf{x} \times \mathbf{f} \, dV + \int_{\partial\mathcal{P}_{0,i}^{sub}} \mathbf{x} \times \mathbf{T} \mathbf{n} \, dS + \int_{\partial\mathcal{P}_{0,f}^{sub}} \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n^* \, dS \right) dt = \left[ \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \rho_0 \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} \, dV \right]_{t_1}^{t_2}. \quad (3.2.5)$$

Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes und des Cauchyschen Postulates, sowie der Einbeziehung der Rand- und Anfangsbedingungen, lassen

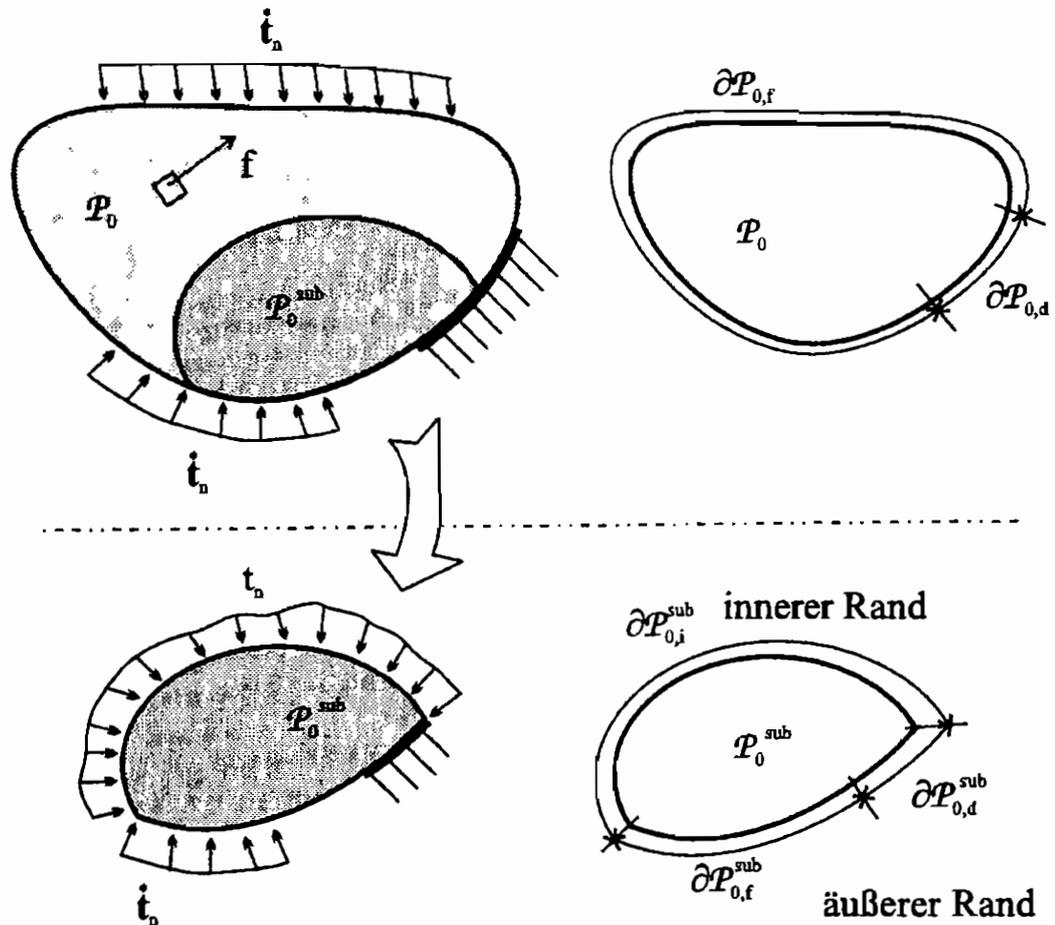


Abbildung 3.1: Randbezeichnungen

sich aus den globalen Feldgleichungen die entsprechenden lokalen Gleichungen (3.2.1) herleiten.

Für die Entwicklung der Schalengleichungen mit Hilfe der Methode der Zwangsbedingungen ist das Prinzip der virtuellen Arbeit von Bedeutung. Es läßt sich aus dem Impulssatz (3.2.1)<sub>1</sub> ableiten. Nach dem innerem Produkt von (3.2.1)<sub>1</sub> mit einer Testfunktion  $\delta\mathbf{x} : \mathcal{P}_0 \times [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{E}$  entsteht eine skalare Feldgleichung, welche über das Gebiet  $\mathcal{P}_0 \times [t_1, t_2]$  integriert wird. Es wird dabei vorausgesetzt, daß die Testfunktion kinematisch zulässig ist, d.h., sie erfüllt homogene Randbedingungen  $\delta\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0}$  für alle  $\mathbf{X} \in \partial\mathcal{P}_d$ . Nach Einbeziehung der Rand- und Anfangsbedingungen, sowie nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes ergibt sich für einen Teilkörper  $\mathcal{P}_0^{\text{sub}}$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} (\mathbf{T} \cdot \nabla \delta \mathbf{x} - \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}) dV dt = \\
\int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{x} dV + \int_{\partial \mathcal{P}_{0,i}^{sub}} \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{x} dS + \int_{\partial \mathcal{P}_{0,f}^{sub}} \mathbf{t}_n^* \cdot \delta \mathbf{x} dS \right) dt \\
- \left[ \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \rho \dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} dV \right]_{t_1}^{t_2}.
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Die Feldgleichung (3.2.6) wird als *Prinzip der virtuellen Arbeit* oder *Prinzip der virtuellen Leistung* bezeichnet (vergl. ANTMAN [10]). Das Prinzip (3.2.6) dient später als Grundlage der Methode der Zwangsbedingungen.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit setzt die Integrierbarkeit des Spannungstensorfeldes  $\mathbf{T}$  voraus. Diese Voraussetzung ist schwächer als die Forderung nach Differenzierbarkeit von  $\mathbf{T}$ , welche für die lokalen Feldgleichungen (3.2.1) gilt. Wenn das Prinzip der virtuellen Arbeit nun aus den lokalen Feldgleichungen mit Hilfe der Testfunktion  $\delta \mathbf{x}$  hergeleitet wird, so erhält man zwar Gleichung (3.2.6), aber die restriktiven Stetigkeitsanforderungen der lokalen Feldgleichungen gelten weiterhin. Ein Weg, das Prinzip der virtuellen Arbeit direkt aus den globalen Feldgleichungen herzuleiten, wurde erstmals von ANTMAN & OSBORNE [11] aufgezeigt.

## 2.2 Schengeometrie in der Referenzplazierung

Der Begriff *Schale* wurde in Kapitel II für einen 2-dimensionalen Körper  $\mathcal{S}$  eingeführt, dessen Plazierungen Flächen im  $\mathbb{E}^3$  sind. In der Schalenliteratur wird der Schalenbegriff jedoch ebenso für das resultierende 2-dimensionale Modell, wie für das zu beschreibende 3-dimensionale Kontinuum verwendet. Um Verwechslungen zu vermeiden, soll letzteres hier als Schalenkörper  $\mathcal{K}$  bezeichnet werden. Ein Schalenkörper  $\mathcal{K}$  sei ein gewöhnlicher <sup>2)</sup> 3-dimensionaler Körper  $\mathcal{P}$  mit der folgenden, besonderen Geometrie: Der Körper besitzt eine unterscheidbare (hier: materielle) reguläre Fläche  $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{K}_0$ , welche Schalenreferenzfläche (kurz: Referenzfläche) genannt wird. <sup>3)</sup> Es werden solche Karten  $\psi$  auf  $\mathcal{K}_0$  gewählt, welche einem materiellen Punkt  $\mathbf{X} \in \mathcal{K}_0$  Koordinaten  $\psi : \mathbf{X} \mapsto (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  zuweisen, deren Einschränkung auf  $\xi^3 = 0$  immer auch eine Karte für die Referenzfläche  $\mathcal{S}_0$  darstellt. Dann bezeichnen

<sup>2)</sup>Der Begriff *gewöhnlich* soll in diesem Zusammenhang auf das klassische Cauchy-Kontinuum verweisen. Ein Kontinuum mit Mikrostruktur sei also ausgeschlossen.

<sup>3)</sup>Die Referenzfläche  $\mathcal{S}_0$  muß nicht eine Schalenmittelfläche sein.

die  $(\xi^\alpha, \alpha = 1, 2)$  die Koordinaten auf der Referenzfläche. Ein Punkt auf der Referenzfläche wird als  $Y \in \mathcal{S}_0$  notiert, der zugehörige Ortsvektor ist  $\mathbf{Y} \in \mathbb{E}$ . Es gilt also

$$\mathbf{Y}(\xi^\alpha) = \mathbf{X}(\xi^\alpha, \zeta = 0), \quad (3.2.7)$$

wobei von nun an zur vereinfachten Schreibweise  $\zeta \equiv \xi^3$  gesetzt wird.

Durch die Einführung der Referenzfläche teilt sich der Vektorraum  $\mathbb{E}^3$  lokal in die direkte Summe aus Tangentialraum  $T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0$  und orthogonalem Komplement  $T_{\mathbf{Y}}^\perp\mathcal{S}_0$  (siehe (2.4.3)). Eine Basis des  $T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0$  ist durch die Vektoren

$$\mathbf{A}_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{Y}(\xi^\alpha) \in T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0 \quad (3.2.8)$$

gegeben. Die Dimension des Vektorraumes  $T_{\mathbf{Y}}\mathcal{S}_0$  ist 2. Der orthonormale Vektor

$$\mathbf{A}_n = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \mathbf{A}_\alpha \times \mathbf{A}_\beta \quad (3.2.9)$$

bildet eine Basis des 1-dimensionalen orthogonalen Komplements  $T_{\mathbf{Y}}^\perp\mathcal{S}_0$ . Es wird angenommen, daß die Referenzgeometrie einer Schale durch das Ortsvektorfeld

$$\mathbf{X}(Y, \zeta) = \mathbf{Y}(Y) + \zeta \mathbf{A}_n(Y), \quad \zeta \in [-h_0^-(Y), +h_0^+(Y)] \quad (3.2.10)$$

vollständig beschrieben werden kann. Dabei ist  $h_0(Y) = h_0^-(Y) + h_0^+(Y)$  die Schalendicke am Punkt  $Y$  in der Referenzplatzierung. Die Größen  $h_0^-(Y)$  und  $h_0^+(Y)$  beschreiben die Schalendicken von der Referenzfläche bis zur unteren bzw. oberen Schalenrandfläche.

Der Rand eines Schalenkörpers  $\mathcal{K}_0$  läßt sich also gemäß der Voraussetzung (3.2.10) in drei Teilränder zerlegen

$$\partial\mathcal{K}_0 = \partial\mathcal{K}_0^+ \cup \partial\mathcal{K}_0^- \cup \partial\mathcal{K}_0^\circ. \quad (3.2.11)$$

Diese Teilränder heißen obere Schalenrandfläche  $\partial\mathcal{K}_0^+$ , untere Schalenrandfläche  $\partial\mathcal{K}_0^-$  und seitliche Schalenrandfläche  $\partial\mathcal{K}_0^\circ$ . Die Ortsvektoren an diese Randflächen sind definiert durch

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^\pm(Y) &:= \mathbf{X}(Y, \zeta = \pm h_0^\pm), \\ \mathbf{X}^\circ(s, \zeta) &:= \mathbf{Y}(s) + \zeta \mathbf{A}_n(s), \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

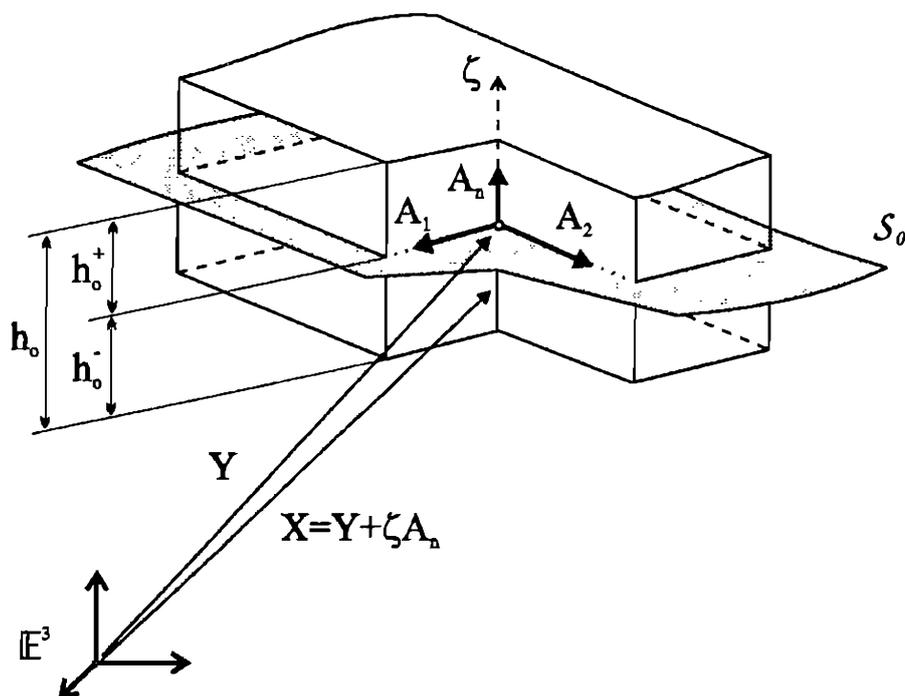


Abbildung 3.2: Kinematik der Referenzplatzierung

wobei  $s$  der Bogenlängenparameter entlang der Randkurve von  $\partial\mathcal{S}_0$  ist. Die Ableitung von  $\mathbf{Y}(s)$  nach der Bogenlänge  $s$  ermöglicht das Aufstellen eines *Darboux*-Dreibeins  $\{\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\tau}_0, \mathbf{A}_n\}$  an jedem Randpunkt  $Y \in \partial\mathcal{S}_0$ . Das Dreibein ist durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_0(s) &= \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{Y}(\xi^\beta(s)) = \tau_0^\beta \mathbf{A}_\beta, & \tau_0^\beta &= \frac{\partial}{\partial s} \xi^\beta(s), \\ \mathbf{v}_0(s) &= \boldsymbol{\tau}_0 \times \mathbf{A}_n, & v_{0\beta} &= -\epsilon_{\alpha\beta} \tau_0^\alpha, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

festgelegt.

Statische Randbedingungen können auf dem Rand  $\partial\mathcal{K}_{0,f} = \partial\mathcal{K}_0^+ \cup \partial\mathcal{K}_0^- \cup \partial\mathcal{K}_{0,f}^\circ$  vorgeschrieben werden. Kinematische Randbedingungen sind nur auf  $\partial\mathcal{K}_{0,d} = \partial\mathcal{K}_{0,d}^\circ$  zulässig. Dieses bedeutet, daß auf der oberen und unteren Schalenrandfläche immer nur statische Randbedingungen vorgeschrieben werden, während sich die seitliche Schalenrandfläche  $\partial\mathcal{K}^\circ$  in Bereiche statischer bzw. kinematischer Randbedingungen,  $\partial\mathcal{K}_0^\circ = \partial\mathcal{K}_{0,f}^\circ \cup \partial\mathcal{K}_{0,d}^\circ$ , aufteilt. Die Einschränkung kinematischer Randbedingungen auf die seitliche Schalenrandfläche bildet eine Grundannahme der Schalentheorie. <sup>4)</sup>

<sup>4)</sup>Die Schalengeometrie kann in kompakter Form als nicht-triviales Faserbündel  $(\mathbb{E}^3, \pi, \mathcal{S})$  beschrieben werden. Aus der Bündelgeometrie, insbesondere den horizontalen und vertikalen Räumen, lassen sich viele Eigenschaften der Schalenkinematik direkt herleiten.

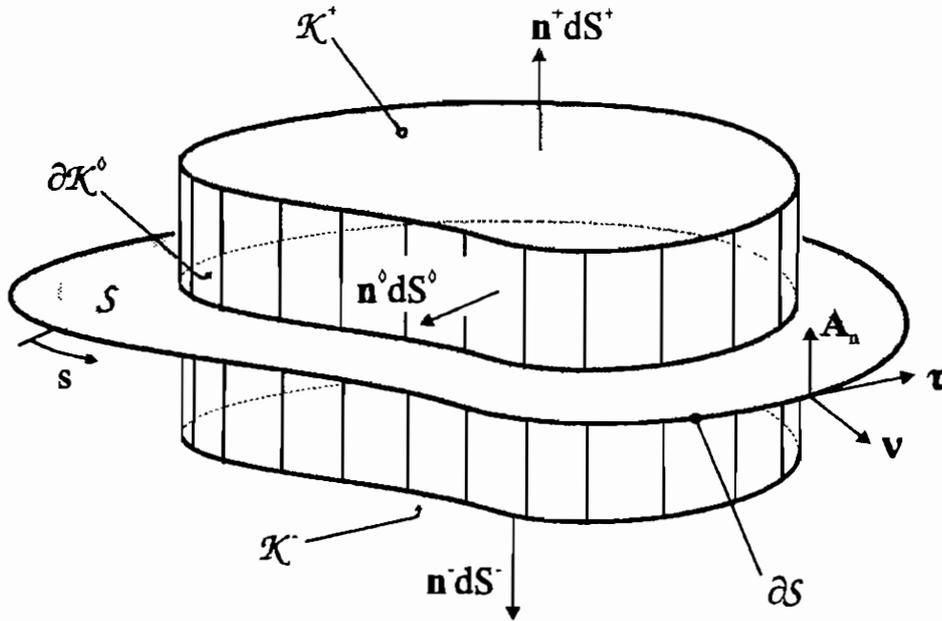


Abbildung 3.3: Schalen geometrie

Das Volumenelement  $dV$  und das Flächenelement  $dA$  auf der Referenzfläche sind durch

$$dV = j dA, \quad j(Y, \zeta) = 1 - 2\zeta H_0 + \zeta^2 K_0, \quad (3.2.14)$$

miteinander verbunden, wobei  $H_0$  und  $K_0$  die Hauptkrümmung bzw. die Gaußsche Krümmung der Referenzfläche symbolisieren (siehe z.B. BASAR & KRÄTZIG [14]). Die orientierten Flächenelemente auf den Schalenrandflächen sind durch

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^\pm dS^\pm &= (\mathbf{G}^3 - h_{0,\beta} \mathbf{G}^\beta) |_\pm^\pm j^\pm dA, \\ \mathbf{n}^\circ dS^\circ &= \mathbf{G}^\beta j d\zeta \nu_\beta ds, \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

gegeben.  $\mathbf{G}^i$  ist die zu  $\mathbf{G}_i := \partial \chi(\xi^k) / \partial \xi^i$  reziproke Basis und  $h_0 : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$  stellt die Schalendicke dar. Die Beziehungen (3.2.14) und (3.2.15) dienen im folgenden zur Zerlegung der Definitionsbereiche der Feldgleichung (3.2.6).

Dazu wird das Volumenintegral als ein Flächenintegral über  $S_0$  und ein Integral über das orthogonale Komplement  $S_0^\perp$  geschrieben

$$\int_{\mathcal{K}_0} \dots dV = \int_{S_0} \int_{-}^{+} \dots j d\zeta dA. \quad (3.2.16)$$

Das Flächenintegral über die Randflächen wird in eine Summe von Flächenintegralen über die drei Teilränder

$$\int_{\partial\mathcal{K}_0} \dots \mathbf{n} dS = \int_{\partial\mathcal{K}_0^+} \dots \mathbf{n}^+ dS^+ + \int_{\partial\mathcal{K}_0^-} \dots \mathbf{n}^- dS^- + \int_{\partial\mathcal{K}_0^\circ} \dots \mathbf{n}^\circ dS^\circ \quad (3.2.17)$$

zerlegt. Das Symbol  $\int_{-}^{+}$  dient als Kurzform des Integrales  $\int_{-h_0^+}^{+h_0^+}$ . Die in (3.2.16)–(3.2.17) aufgeführten Zerlegungen gelten sinngemäß auch für die Teilkörper  $\mathcal{K}_0^{sub}$ .

## 2.3 Zwangsbedingungen

Es wird nun die grundlegende Annahme getroffen, daß sich die Bewegung der Schale vollständig durch eine Zwangsbedingung der expliziten Form

$\mathbf{x}(X, t) = \mathbf{b}(q(Y, t), X)$	(3.2.18)
---	----------

beschreiben läßt. Die Größe  $q(Y, t)$  stellt hierbei eine allgemeine Variable <sup>5)</sup> dar, welche als zeitabhängiges Feld über der Referenzfläche definiert ist. Der Wertebereich von  $q$  wird weiter unten festgelegt. Eine Interpretation dieser Variablen wird erst vorgenommen, wenn spezifische Schalenmodelle betrachtet werden. Um die folgenden Herleitungen nicht zu abstrakt werden zu lassen, kann man die Größe  $q$  in der Zwischenzeit als Zeiger (*director*) auf der Schalenfläche interpretieren, wie sie z.B. in den Modellen von NAGHDI [75], SIMO & FOX [109] Verwendung finden. Allerdings soll im Auge behalten werden, daß die Methode der Zwangsbedingungen ohne eine spezifische kinematische Modellvorstellung auskommt. Nur durch diese Allgemeinheit können eine Vielzahl von Schalenmodellen in einen einheitlichen Ansatz aufgenommen werden.

---

<sup>5)</sup>Die Beschränkung auf *eine* Variable  $q$  dient der übersichtlichen Schreibweise bei den weiteren Herleitungen. Stattdessen hätte man auch eine endliche Anzahl  $A = 1, \dots, n$  von Variablen  $q_A$  einführen können.

Die Zwangsbedingung (3.2.18) kann nicht willkürlich gewählt werden. Sie muß einerseits die Bedingung  $\det \mathbf{F} > 0$  für den Deformationsgradienten erfüllen und muß andererseits die 3-dimensionalen kinematischen Randbedingungen *a priori* befriedigen. Letztere Bedingung wird in der Schalentheorie oft invertiert: Es werden nämlich häufig nur solche kinematischen Randbedingungen zugelassen, welche von vorn herein mit den kinematischen Zwangsbedingungen verträglich sind. Dieses bedeutet leider auch, daß nicht das Modell dem Problem, sondern das Problem dem Modell angepaßt wird. Es wird nun festgelegt, daß die allgemeinen kinematischen Variablen  $\mathfrak{q}$  Werte in einem Vektorraum  $\mathbb{V}$  mit innerem Produkt und der Dimension  $m$  annehmen. Unter dieser Voraussetzung können jene Terme aus (3.2.6) entwickelt werden, die durch die Zwangsbedingung (3.2.18) bestimmt sind. Im einzelnen sind dieses die Terme  $\delta \mathbf{x}$ ,  $\text{Grad}(\delta \mathbf{x})$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$  und  $\delta \dot{\mathbf{x}}$ .

Mit (3.2.18) ergibt sich für die virtuelle Änderung des Ortsvektorfeldes ein Ausdruck in Abhängigkeit von der Variablen  $\mathfrak{q}$

$$\delta \mathbf{x}(\xi^\alpha, \zeta, \mathfrak{q}(\xi^\alpha), \delta \mathfrak{q}) = \partial_{\mathfrak{q}} \mathbf{b} \delta \mathfrak{q} = \mathbb{B} \delta \mathfrak{q}, \quad \text{mit } \mathbb{B} := \partial_{\mathfrak{q}} \mathbf{b}. \quad (3.2.19)$$

Dabei wurde in (3.2.19) ein linearer Operator  $\mathbb{B} \in \mathbb{E}^3 \otimes \mathbb{V} \cong \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{E}^3)$  eingeführt. Die Ableitungen der Zwangsbedingung in bezug auf die Koordinaten der Referenzfläche  $\xi^\beta$  bzw. die Koordinate  $\zeta$  in Dickenrichtung lauten

$$\mathbf{b}_{,\beta} = \mathbb{B} \mathfrak{q}_{,\beta} + (\partial_\beta \mathbf{b}) \quad \mathbf{b}_{,\zeta} = \partial_\zeta \mathbf{b}. \quad (3.2.20)$$

Der Gradient der virtuellen Verschiebung  $\text{Grad}(\delta \mathbf{x})$  kann als  $\text{Grad}(\delta \mathbf{x}) = \delta \mathbf{x}_{,i} \otimes \mathbf{G}^i$  geschrieben werden. Zusammen mit (3.2.20) erhält man dann für die Richtungsableitung von  $\delta \mathbf{x}$

$$\delta \mathbf{x}_{,i} = (\mathbb{B} \delta \mathfrak{q})_{,i} = \mathbb{B}_{,i} \delta \mathfrak{q} + \mathbb{B} \delta \mathfrak{q}_{,i}, \quad \text{mit } \delta \mathfrak{q}_{,\zeta} = 0. \quad (3.2.21)$$

Der Term  $\mathbf{T} \cdot \text{Grad}(\delta \mathbf{x})$  kann als

$$\mathbf{T} \cdot \text{Grad}(\delta \mathbf{x}) = \mathbb{B}_{,i}^\top \mathbf{T}^i \cdot \delta \mathfrak{q} + \mathbb{B}^\top \mathbf{T}^\alpha \cdot \delta \mathfrak{q}_{,\alpha} \quad (3.2.22)$$

geschrieben werden. Es gilt die Bezeichnung  $\mathbf{T}^i := \mathbf{T} \mathbf{G}^i$  bzw.  $\mathbf{T}^\alpha := \mathbf{T} \mathbf{A}^\alpha$  für den Spannungsvektor des 1.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^i \otimes \mathbf{G}_i$ .

Die zeitliche Ableitung der Zwangsbedingung liefert

$$\dot{\mathbf{x}} = \partial_{\mathfrak{q}} \mathbf{b} \dot{\mathfrak{q}} = \mathbb{B} \dot{\mathfrak{q}}. \quad (3.2.23)$$

Aus (3.2.19) folgt damit schließlich der Ausdruck

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbb{B} \delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbb{B} \delta \dot{\mathbf{q}} \quad (3.2.24)$$

für die zeitliche Änderung der virtuellen Verschiebung.

Die Beziehungen (3.2.19)–(3.2.24) lassen sich nun in das Prinzip der virtuellen Arbeit einsetzen. Aus (3.2.19) ist ersichtlich, daß die allgemeinen kinematischen Variablen nur von den Koordinaten der Referenzfläche abhängen. Somit können diese Variablen aus einem Integral in Schalendickenrichtung ausgeklämmert werden. Da der übrige Term nun keine kinematischen Variablen mehr enthält, kann er (formal) ausintegriert werden. Durch diese Schritte läßt sich das Prinzip der virtuellen Arbeit von seiner 3-dimensionalen Form auf eine 2-dimensionale Form reduzieren. Dieses wird nun ausgeführt.

## 2.4 Resultierende Schalegleichungen

Zunächst werden die Zerlegungen der Integrationsgebiete aus (3.2.16) in das Prinzip der virtuellen Arbeit (3.2.6) eingesetzt

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{S_0^{sub}} \int_{-}^{+} (\mathbf{T} \cdot \text{Grad}(\delta \mathbf{x}) - \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}})_j d\zeta dA \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{S_0^{sub}} \left( \int_{-}^{+} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{x}_j d\zeta \pm \mathbf{p}^{\pm} \cdot \delta \mathbf{x}_j^{\pm} \right) dA \right. \\ & \left. + \int_{\partial S_0^{sub,i}} \int_{-}^{+} \mathbf{T}^{\beta} \cdot \delta \mathbf{x}_j d\zeta \nu_{\beta} ds + \int_{\partial S_0^{sub,f}} \int_{-}^{+} \mathbf{t}_n^* \cdot \delta \mathbf{x}_j^{\circ} d\zeta ds \right] dt. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Gemäß der traditionellen Notation in der Schalentheorie wurden die Randspannungen am oberen und unteren Schalenrand mit  $\mathbf{p}^{\pm} \equiv \mathbf{t}_n^{\pm}$  bezeichnet. Die Kräfte  $\mathbf{t}_n^{\circ} dS^{\circ}$  an den inneren seitlichen Schalenrandflächen,  $\partial \mathcal{P}^{\circ}$ , wurden gemäß (3.2.16) durch  $\mathbf{T}^{\beta} \cdot \delta \mathbf{x}_j d\zeta \nu_{\beta} ds$  ersetzt.

Aus (3.2.25) lassen sich nun die Spannungsergebnisse durch Integration in Schalendickenrichtung ermitteln. Im einzelnen treten folgende Terme auf:

(i) Die Integration der internen virtuellen Arbeit liefert mit (3.2.22) den Ausdruck

$$\int_{-}^{+} \mathbf{T} \cdot \text{Grad}(\delta \mathbf{x}) \mu d\zeta = \left( \int_{-}^{+} \mathbb{B}_{,i}^{\top} \mathbf{T}^i_j d\zeta \right) \cdot \delta \mathbf{q} + \left( \int_{-}^{+} \mathbb{B}^{\top} \mathbf{T}^{\alpha}_j d\zeta \right) \cdot \delta \mathbf{q}_{,\alpha} \quad (3.2.26)$$

und führt direkt auf die beiden folgenden Spannungsergebnisse

$$\begin{aligned} m(\xi^\alpha, t) &:= \int_{-}^{+} \mathbb{B}_{,i}^T \mathbf{T}^i j \, d\zeta, \\ m^\alpha(\xi^\alpha, t) &:= \int_{-}^{+} \mathbb{B}^T \mathbf{T}^\alpha j \, d\zeta. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

(ii) Der nächste Term in (3.2.25) ist die virtuelle kinetische Energie. Mit Hilfe von (3.2.23) und (3.2.24) ergibt sich

$$\int_{-}^{+} \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} j \, d\zeta = \left( \int_{-}^{+} \rho_0 \dot{\mathbb{B}}^T \dot{\mathbf{x}} j \, d\zeta \right) \cdot \delta \mathbf{q} + \left( \int_{-}^{+} \rho_0 \mathbb{B}^T \dot{\mathbf{x}} j \, d\zeta \right) \cdot \delta \dot{\mathbf{q}}. \quad (3.2.28)$$

Die Integration über die Dicke liefert zwei weitere Resultierende

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\xi^\alpha, t) &:= \int_{-}^{+} \rho \dot{\mathbb{B}}^T \dot{\mathbf{x}} j \, d\zeta, \\ \mathbf{k}(\xi^\alpha, t) &:= \int_{-}^{+} \rho \mathbb{B}^T \dot{\mathbf{x}} j \, d\zeta. \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

(iii) Die äußere virtuelle Arbeit der Volumenkräfte und der Flächenlasten auf der oberen und unteren Schalenfläche werden zusammengefaßt

$$\int_{-}^{+} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{x} j \, d\zeta \pm [\mathbf{p}^\pm \cdot \mathbf{w} j^\pm] = \left( \int_{-}^{+} \mathbb{B}^T \mathbf{f} j \, d\zeta \pm [\mathbb{B}^T \mathbf{p}^\pm j^\pm] \right) \cdot \delta \mathbf{q}. \quad (3.2.30)$$

Aus ihnen resultiert die Last

$$\mathbb{L}(\xi^\alpha, t) := \int_{-}^{+} \mathbb{B}^T \mathbf{f} j \, d\zeta \pm [\mathbb{B}^T \mathbf{p}^\pm j^\pm]. \quad (3.2.31)$$

(iv) Die virtuelle Arbeit der inneren Spannungen auf dem seitlichen Schalenrand kann mit Hilfe des Normalenvektors  $\mathbf{v}_0$  der Randkurve dargestellt werden

$$\int_{-}^{+} \mathbf{T}^\beta \cdot \delta \mathbf{x} j \, d\zeta \mathbf{v}_{0\beta} = \left( \int_{-}^{+} \mathbb{B}^T \mathbf{T}^\beta j \, d\zeta \right) \cdot \delta \mathbf{q} \mathbf{v}_{0\beta}. \quad (3.2.32)$$

Die Integration führt auf eine resultierende Größe  $m_{\mathbf{v}}$ , die offensichtlich mit (3.2.27)<sub>2</sub> zusammenhängt, da der Normalenvektor  $\mathbf{v}_0$  auf  $\partial \mathcal{S}_0$  nicht von der Dickenkoordinate abhängt. Somit gilt

$$m_{\mathbf{v}}(s, t) := \int_{-}^{+} \mathbb{B}^T \mathbf{T}^\beta j \, d\zeta \mathbf{v}_{0\beta} = m^\beta \mathbf{v}_{0\beta} \quad (3.2.33)$$

(v) Als letzter Term in (3.2.25) treten die äußeren Spannungen auf jenem Teil der Seitenfläche  $\partial \mathcal{P}^\circ$  auf, auf dem statische Randbedingungen vorge-schrieben sind

$$\int_{-}^{+} \mathbf{t}_n^* \cdot \delta \mathbf{x} j^\circ \, d\zeta = \left( \int_{-}^{+} \mathbb{B}^T \mathbf{t}_n^* j^\circ \, d\zeta \right) \cdot \delta \mathbf{q}. \quad (3.2.34)$$

Die entsprechende vorschreibbare Spannungserresultierende ist dann

$$\overset{*}{\mathfrak{m}}_{\nu}(s, t) := \int_{-}^{+} \mathbb{B}^T \overset{*}{\mathfrak{t}}_{nj}^{\circ} d\zeta_{\nu\beta}. \quad (3.2.35)$$

Nun können alle oben definierten Resultierenden in das 3-dimensionale Prinzip der virtuellen Arbeit (3.2.25) eingesetzt werden. Als Ergebnis erhält man das 2-dimensionale oder *resultierende Prinzip der virtuellen Arbeit*

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{S}_0^{sub}} (\mathfrak{m} \cdot \delta \mathfrak{q} + \mathfrak{m}^{\alpha} \cdot \delta \mathfrak{q}_{,\alpha} - \mathfrak{d} \cdot \delta \mathfrak{q} - \mathfrak{k} \cdot \delta \dot{\mathfrak{q}}) dA dt \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{\mathcal{S}_0^{sub}} \mathfrak{l} \cdot \delta \mathfrak{q} dA + \int_{\partial \mathcal{S}_{0,i}^{sub}} \mathfrak{m}_{\nu} \cdot \delta \mathfrak{q} ds + \int_{\partial \mathcal{S}_{0,f}^{sub}} \overset{*}{\mathfrak{m}}_{\nu} \cdot \delta \mathfrak{q} ds \right) dt, \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

wobei auf dem Rand  $\partial \mathcal{S}_{0,d}^{sub}$  gilt  $\delta \mathfrak{q} = 0$ .

Durch Anwendung des Greenschen Satzes auf (3.2.36) ergeben sich die lokalen Schalengleichungen

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}^{\beta}|_{\beta} - \mathfrak{m} + \mathfrak{l} &= \mathfrak{d} - \dot{\mathfrak{k}}, & \text{auf } \mathcal{S}_0 \times [t_1, t_2] \\ \mathfrak{m}_{\nu} &= \mathfrak{m}^{\beta} \nu_{\beta}, & \text{auf } \partial \mathcal{S}_{0,i}^{sub} \times [t_1, t_2], \\ \overset{*}{\mathfrak{m}}_{\nu} &= \mathfrak{m}^{\beta} \nu_{\beta}, & \text{auf } \partial \mathcal{S}_{0,f} \times [t_1, t_2], \\ \delta \mathfrak{q} &= 0, & \text{auf } \partial \mathcal{S}_{0,d} \times [t_1, t_2], \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

welche für jede Teilfläche  $\mathcal{S}_0^{sub}$  der Referenzfläche  $\mathcal{S}_0$  gültig sind. Die Anfangsbedingungen werden hier der Kürze halber weggelassen. Die 2-dimensionalen Schalengleichungen (3.2.37) stellen einen Satz von allgemeinen Gleichungen dar, welche für solche Schalenmodelle gültig sind, die aus den Zwangsbedingungen (3.2.18) abgeleitet werden. Durch Spezifizierung dieser Gleichungen anhand aus der Literatur bekannter kinematischer Annahmen werden nun Beispiele unterschiedlicher Schalenmodelle vorgestellt. Allen folgenden Schalenmodellen ist jedoch die in (3.2.37) aufgeführte Struktur gemein.

## 2.5 Beispiele

### 2.5.1 Statisches Multi-Vektor-Modell

Als erstes Beispiel wird eine Zwangsbedingung gewählt, bei der die kinematische Variable  $\mathfrak{q} \in \mathbb{V}$  als direkte Summe von  $n+1$  räumlichen Vektoren  $\mathfrak{u}_i \in \mathbb{E}$

dargestellt wird. Dieses Modell soll *Multi-Vektor-Modell* heißen. Nach einigen Einschränkungen wird deutlich, daß dieses Modell als Sonderfall die sogenannten *Multi-Direktor-Modelle* enthält, die derzeit in der Schalentheorie besonders populär sind. Die Zwangsbedingung des Multi-Vektor-Modelles lautet

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}(\xi^\alpha) \in \mathbb{V} &= \underbrace{\mathbb{E} \oplus \mathbb{E} \oplus \dots \oplus \mathbb{E}}_{(n+1) \text{ mal}}, \\ \mathfrak{q} &= (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n), \\ \mathbf{x} &= \mathbf{b}(\mathbf{u}_i(\xi^\alpha); \xi^\alpha, \zeta). \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

Die allgemeine kinematische Variable  $\mathfrak{q}$  wird durch ein  $(n+1)$ -Tupel von  $\mathbb{E}$ -wertigen Vektoren,  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ , dargestellt. Die virtuelle Verschiebung läßt sich durch Variation des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  nach den Variablen  $\mathbf{u}_j$  ermitteln

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} &= \mathbb{B} \delta \mathfrak{q} = \sum_{j=0}^n \mathbf{B}_j \delta \mathbf{u}_j \quad \text{mit } \mathbf{B}_j = \partial_{\mathbf{u}_j} \mathbf{b}, \\ \mathbb{B} &= (\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n), \\ \mathbf{B}_i(\xi^\alpha, \zeta) &\in \text{Lin}(\mathbb{E}; \mathbb{E}) \cong \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}. \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

Es ergibt sich, daß der lineare Operator  $\mathbb{B}$  nun als  $(n+1)$ -Tupel aus  $\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$ -wertigen Tensoren,  $(\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n)$ , darstellbar ist. Unter dieser Voraussetzung können auch alle resultierenden Größen als  $(n+1)$ -Tupel angegeben werden. Die Betrachtungen werden auf statische Größen beschränkt, um die Ausführungen übersichtlich zu halten.

Durch Einsetzen der Zwangsbedingung (3.2.38) oder (3.2.39) in die Ausdrücke (3.2.27) und (3.2.31) erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(\xi^\beta, t) &:= \int_{-}^{+} \mathbb{B}_{,i}^{\top} \mathbf{T}^i j \, d\zeta = (\mathbf{m}^0, \mathbf{m}^1, \dots, \mathbf{m}^n), \\ \text{mit } \mathbf{m}^j &= \int_{-}^{+} \mathbf{B}_{j,i}^{\top} \mathbf{T}^i j \, d\zeta, \end{aligned} \quad (3.2.40)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}^\alpha(\xi^\beta, t) &:= \int_{-}^{+} \mathbb{B}^{\top} \mathbf{T}^\alpha j \, d\zeta = (\mathbf{m}^{0\alpha}, \mathbf{m}^{1\alpha}, \dots, \mathbf{m}^{n\alpha}), \\ \text{mit } \mathbf{m}^{j\alpha} &= \int_{-}^{+} \mathbf{B}_j^{\top} \mathbf{T}^\alpha j \, d\zeta, \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}(\xi^\beta, t) &:= \int_{-}^{+} \mathbb{B}^{\top} \mathbf{f} j \, d\zeta \pm [\mathbb{B}^{\top} \mathbf{p}^\pm j^\pm] = (l^0, l^1, \dots, l^n), \\ \text{mit } l^j &= \int_{-}^{+} \mathbf{B}_j^{\top} \mathbf{f} j \, d\zeta \pm [\mathbf{B}_j^{\top} \mathbf{p}^\pm j^\pm]. \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

Setzt man diese Ausdrücke in das Prinzip der virtuellen Arbeit ein und klammert die entsprechenden virtuellen Größen  $\delta \mathbf{u}_j$  aus, so ergeben sich  $(n+1)$  unabhängige Gleichgewichtsbedingungen und Randbedingungen. Im einzelnen sind dies

$$\left. \begin{array}{ll} \mathbf{m}^{j\beta}|_{\beta} + \mathbf{l}^j = \mathbf{m}^j & \text{auf } \mathcal{S}_0^{sub} \\ \mathbf{m}^{j\beta} \mathbf{v}_{\beta} = \mathbf{m}_{\mathbf{v}}^{*j} & \text{auf } \partial \mathcal{S}_{0,f}^{sub} \\ \mathbf{m}^{j\beta} \mathbf{v}_{\beta} = \mathbf{m}_{\mathbf{v}}^j & \text{auf } \partial \mathcal{S}_{0,i}^{sub} \\ \mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j^* & \text{auf } \partial \mathcal{S}_{0,d}^{sub} \end{array} \right\} \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (3.2.43)$$

Obwohl die Gleichungen (3.2.43) aufgrund ihrer Form vielen Schalenmodellen sehr ähnlich sehen, unterscheiden sie sich inhaltlich deutlich von den Gleichungen gebräuchlicher Schalenmodelle. Dieses liegt daran, daß die Zwangsbedingung (3.2.38) wesentlich allgemeiner ist als herkömmliche Schalenkinematiken. Durch Einschränkung auf den Fall  $n = 1$  kann man das leicht verdeutlichen. Für  $n = 1$  gibt es nur zwei kinematische Variablen,  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$ . Interpretiert man  $\mathbf{u}_0$  als Ortsvektor zur verformten Schalenreferenzfläche,  $\mathbf{y} \equiv \mathbf{u}_0$ , und  $\mathbf{u}_1$  als ein Zeiger (Direktor),  $\mathbf{d} \equiv \mathbf{u}_1$ , so entspricht die Wahl der kinematischen Variablen jenem Zeigermodell

$$\mathbf{x}(\xi^{\alpha}, \zeta) = \mathbf{y}(\xi^{\alpha}) + \zeta \mathbf{d}(\xi^{\alpha}), \quad (3.2.44)$$

das in der Literatur häufig zu finden ist (siehe u.a. NAGHDI [75], SIMO & FOX [109]). Ein Vergleich mit (3.2.38) zeigt jedoch, daß die Kinematik der Zwangsbedingung (3.2.44) wesentlich restriktiver als (3.2.38) ist, weil

- (i) die Zwangsbedingung (3.2.38) nichtlinear von den kinematischen Variablen abhängen kann;
- (ii) die Zwangsbedingung (3.2.38) Tensorfunktionen  $\mathbf{B}_j(\xi^{\alpha}, \zeta)$  beinhaltet, wogegen in (3.2.44) nur skalare Funktionen (nämlich Potenzen von  $\zeta$ ) stehen.

Um letztlich auf die klassische Form der Multi-Direktor-Modelle zu kommen, muß die Zwangsbedingung (3.2.38) weiter eingeschränkt werden.

### 2.5.2 Lineares Multi-Vektor-Modell

Die erste Einschränkung von (3.2.38) sei derart, daß die Zwangsbedingung nur noch linear von den kinematischen Variablen abhängt. Daraus folgt

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}_i(\xi^\beta), \xi^\beta, \zeta) = \sum_{j=0}^n \mathbf{D}_j(\xi^\beta, \zeta) \mathbf{u}_j(\xi^\beta), \quad (3.2.45)$$

wobei die  $\mathbf{D}_j(\xi^\beta, \zeta)$  Tensorfelder zweiter Stufe sind, welche nicht von den kinematischen Variablen  $\mathbf{u}_j$  abhängen. Die virtuelle Verschiebung lautet dann

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x} &= \sum_{j=0}^n \partial_{\mathbf{u}_j} \mathbf{b}(\mathbf{u}_i(\xi^\beta), \xi^\beta, \zeta) \delta \mathbf{u}_j = \sum_{j=0}^n \mathbf{D}_j(\xi^\beta, \zeta) \delta \mathbf{u}_j(\xi^\beta) \\ \text{oder } \mathbf{B}_j &= \mathbf{D}_j(\xi^\beta, \zeta), \quad \text{siehe (3.2.39)}. \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

Trotz der Linearität ist die Zwangsbedingung (3.2.45) noch nicht direkt mit (3.2.44) vergleichbar, da die  $\mathbf{D}_j$  tensorwertige Funktionen aller drei Koordinaten  $\{\xi^\alpha, \zeta\}$  sind. Schließlich sollen diese Funktionen auf skalarwertige eingeschränkt werden.

### 2.5.3 Multi-Direktor-Modell

Eine Einschränkung der Zwangsbedingung (3.2.45) auf skalarwertige Funktionen erreicht man, indem die  $\mathbf{D}_j$  durch das Produkt aus reellen Funktionen  $f_j$  und dem Einheitstensor  $\mathbf{I}$  ersetzt werden

$$\mathbf{D}_j(\xi^\alpha, \zeta) = f_j(\xi^\alpha, \zeta) \mathbf{I}. \quad (3.2.47)$$

Die Funktion  $f_j(\xi^\alpha, \zeta)$  hängt vom Ort auf der Referenzfläche ab. Das bedeutet, an verschiedenen Orten kann ein unterschiedlicher funktionaler Zusammenhang in Abhängigkeit von  $\zeta$  gegeben sein. Dieses ist in traditionellen Schalenmodellen nicht vorgesehen. Dort gilt gewöhnlich dieselbe Kinematik an jedem Ort der Referenzfläche. Beschränkt man die Funktionen  $f_j$  schließlich nur auf eine Abhängigkeit von der Dickenkoordinate,  $f_j(\zeta)$ , so lassen sich u.a. folgende Ansätze formulieren:

$$\begin{aligned} \text{Fourierreihe: } f_j(\zeta) &= a_j \sin^j(\zeta) + b_j \cos^j(\zeta), \\ \text{Potenzreihe: } f_j(\zeta) &= a_j(\zeta)^j. \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

Das übliche Multi-Direktor-Modell erhält man nun als Potenzreihe mit konstanten Koeffizienten,  $a_j = 1$ . Die Zwangsbedingung des Multi-Direktor-

Modelles lautet dann

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}_i(\xi^\beta), \zeta) = \sum_{j=0}^n (\zeta)^j \mathbf{u}_j(\xi^\beta), \quad (3.2.49)$$

wobei gewöhnlich  $\mathbf{y} \equiv \mathbf{u}_0$  und  $\mathbf{d}_i \equiv \mathbf{u}_i, \forall i \geq 1$  geschrieben wird. Die Tensorfunktion  $\mathbf{B}_j$  aus (3.2.39) und die entsprechenden Ableitungen, die in (3.2.40)–(3.2.42) zur Definition der Resultierenden benötigt werden, sind nun trivial:

$$\mathbf{B}_j = (\zeta)^j \mathbf{I} \quad \mathbf{B}_0 = \mathbf{I} \quad \mathbf{B}_{j,i} = \mathbf{B}_{j,\xi} = j\zeta^{j-1} \mathbf{I}. \quad (3.2.50)$$

Nach dem Einsetzen von (3.2.50) in die Ausdrücke (3.2.40)–(3.2.42) ergibt sich entsprechend (3.2.43) ein Satz von Gleichungen, der formal keinen Unterschied zu (3.2.43) aufweist. In der Literatur wird dieser Satz von Gleichungen häufig etwas anders geschrieben. Weil nämlich die kinematische Variable  $\mathbf{u}_0$  als Ortsvektor interpretiert wird, während die anderen Variablen Zeiger sind, führt man für alle mit 0 indizierten Resultierenden eine spezielle Schreibweise ein:

$$\mathbf{n}^\beta := \mathbf{m}^{0\beta} \quad \mathbf{p} := \mathbf{l}^0 \quad \mathbf{n}_\nu^* := \mathbf{m}_\nu^{0*}. \quad (3.2.51)$$

Damit lassen sich die Gleichungen (3.2.43) in der traditionellen Weise schreiben:

$$\begin{array}{lll} j = 0 : & j = 1, \dots, n : & \\ \mathbf{n}^\beta|_\beta + \mathbf{p} = \mathbf{0}, & \mathbf{m}^{j\beta}|_\beta + \mathbf{l}^j = \mathbf{m}^j, & \text{auf } \mathcal{S}_0^{sub}, \\ \mathbf{n}^\beta \nu_\beta = \mathbf{n}_\nu^*, & \mathbf{m}^{j\beta} \nu_\beta = \mathbf{m}_\nu^{j*}, & \text{auf } \partial \mathcal{S}_{0,f}^{sub}, \\ \mathbf{n}^\beta \nu_\beta = \mathbf{n}_\nu, & \mathbf{m}^{j\beta} \nu_\beta = \mathbf{m}_\nu^j, & \text{auf } \partial \mathcal{S}_{0,i}^{sub}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}^*, & \mathbf{d}_j = \mathbf{d}_j^*, & \text{auf } \partial \mathcal{S}_{0,d}^{sub}. \end{array} \quad (3.2.52)$$

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die Gleichungen (3.2.52) und (3.2.43) die gleiche formale Struktur aufweisen, ihre jeweilige Bedeutung ist jedoch unterschiedlich und hängt von der verwendeten Zwangsbedingung ab.

#### 2.5.4 Komponenten der Spannungsresultierenden und Dehnungen

Die Spannungsresultierenden in (3.2.52) oder solche, die durch allgemeinere Zwangsbedingungen gewonnen werden, lassen sich in Komponenten in bezug

auf verschiedene Basisvektoren darstellen. Das Ein-Direktor-Modell liefert sofort eine Basis  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{d}\}$  des Schalenraumes durch Ableitung der Zwangsbedingung nach den drei konvektiven Koordinaten  $\xi^i$ . Die Spannungsergebnisse können in bezug auf diese Basis wie folgt zerlegt werden

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^\beta &= n^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha + n^{3\beta} \mathbf{d}, \\ \mathbf{m}^\beta &= m^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha + m^{3\beta} \mathbf{d}, \\ \mathbf{m} &= m^\alpha \mathbf{a}_\alpha + m^3 \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (3.2.53)$$

Hierbei wird  $n^{\alpha\beta}$  die resultierende Membranspannung,  $n^{3\beta}$  transversale Schubspannung,  $m^{\alpha\beta}$  resultierendes Biegemoment und  $m^3$  resultierende Spannung in Dickenrichtung genannt (siehe SIMO & FOX [109]).

Eine andere Zerlegung der Resultierenden kann sich z.B. auf die Basis  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_n\}$  beziehen, wobei  $\mathbf{a}_n$  der Einheitsnormalenvektor auf der verformten Schalenfläche ist. In bezug auf diese Basis läßt sich eine einfache mechanische Interpretation der Schnittgrößen finden. Eine solche Zerlegung findet sich u.a. in KRÄTZIG [53].

Die Zerlegung der Spannungsergebnisse in Komponenten kann also bezüglich unterschiedlicher Basen geschehen. Welche Basis bevorzugt wird, hängt von dem Ziel dieser Zerlegung ab. Für eine eindeutige mechanische Interpretation der Größen sind andere Basen vorzuziehen als für eine einfache programmtechnische Umsetzung der Feldgleichungen.

Sind die Komponenten der Resultierenden aber erst einmal gewählt, so folgen die entsprechenden Dehnungsgrößen fast zwangsläufig aufgrund ihrer Arbeitskonjugiertheit. Für die in (3.2.53) definierten Komponenten ergibt sich aus der spezifischen inneren virtuellen Arbeit der Ausdruck

$$\begin{aligned} \delta w_i &= \mathbf{n}^\beta \cdot \delta \mathbf{y}_{,\beta} + \mathbf{m}^\beta \cdot \delta \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{d} \\ &= (n^{\alpha\beta} \mathbf{y}_{,\alpha} + n^{3\beta} \mathbf{d}) \cdot \delta \mathbf{y}_{,\beta} + (m^{\alpha\beta} \mathbf{y}_{,\alpha} + m^{3\beta} \mathbf{d}) \cdot \delta \mathbf{d}_{,\alpha} \\ &\quad + (m^\alpha \mathbf{y}_{,\alpha} + m^3 \mathbf{d}) \cdot \delta \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

Nachdem der Term  $\mathbf{d}_{,\alpha}$  in bezug auf die Basis  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{d}\}$  mittels

$$\mathbf{d}_{,\beta} = \lambda_\beta^\gamma \mathbf{y}_{,\gamma} + \lambda_\beta^3 \mathbf{d} \quad (3.2.55)$$

zerlegt ist, erhält man aus (3.2.54) die bekannten Dehnungsgrößen

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= \mathbf{y}_{,\alpha} \cdot \mathbf{y}_{,\beta}, & \gamma_\alpha &= \mathbf{y}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}, & \kappa_{\alpha\beta} &= \mathbf{y}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta}, \\ \kappa_{3\alpha} &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha}, & \lambda &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (3.2.56)$$

Die Dehnungsmaße (3.2.56) sind für die Ein-Direktor-Modelle sehr gebräuchlich (siehe u.a. NAGHDI [75], SIMO & FOX [109]). Man erkennt hier, daß die Festlegung von Spannungs- und Dehnungsmaßen im Rahmen der Methode der Zwangsbedingungen durch die kinematische Annahme weitgehend vorbestimmt ist.

### 2.5.5 Anmerkung zu degenerierten Schalenelementen

Degenerierte Schalenelemente werden von Verfechtern der traditionellen Schalentheorien oft nicht als vollwertige Schalenmodelle betrachtet, da bei ihnen die Reduktion auf 2-dimensionale Gleichungen numerisch ausgeführt wird. Es soll hier gezeigt werden, daß sich auch degenerierte Schalenmodelle mit der Methode der Zwangsbedingungen herleiten lassen.

Die degenerierten Schalenelemente basieren auf einer kinematischen Annahme, welche den Interpolationsfunktionen der Methode der Finiten Elemente entnommen ist. Diese Interpolationsfunktionen können als eine spezielle lineare Zwangsbedingung (3.2.47) aufgefaßt werden, wenn die zugehörigen kinematischen Variablen folgendermaßen interpretiert werden: Die Variablen  $\mathbf{u}_i$  sollen hier als  $\mathbf{x}_A$  bezeichnet werden. Sie stellen Ortsvektoren an den Schalenraum in diskreten Punkten  $\zeta_A \in [-h_0^-, +h_0^+]$  dar, so daß gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_A(\xi^\beta) &= \mathbf{x}(\xi^\beta, \zeta_A), \\ \text{mit } -h_0^- &\equiv \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_A < \dots < \zeta_n \equiv +h_0^+. \end{aligned} \quad (3.2.57)$$

Die Schalenkinematik wird durch eine Interpolation der diskreten Ortsvektoren beschrieben. Dabei sollen Lagrange-Polynome  $N_A(\zeta)$ , z.B. die gebräuchlichen Formfunktionen aus der Methode der Finiten Elemente, als Interpolationsfunktionen dienen. Die Zwangsbedingung lautet dann

$$\mathbf{x}(\xi^\beta, \zeta) = \sum_{A=1}^n N_A(\zeta) \mathbf{x}_A(\xi^\beta). \quad (3.2.58)$$

Die Kinematik (3.2.58) ist ein Beispiel der linearen Zwangsbedingung (3.2.47), sofern die Funktionen  $f_A(\xi^\beta, \zeta) = N_A(\zeta)$  benutzt werden. Für zwei Variablen  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  lassen sich z.B. die folgenden Interpolationsfunktionen verwenden

$$N_1(\zeta) = \frac{h_0^+ - \zeta}{h_0} \quad \text{und} \quad N_2(\zeta) = \frac{\zeta + h_0^-}{h_0}. \quad (3.2.59)$$

Mit  $h_0^+ = +1$ ,  $h_0^- = -1$  und  $h_0 = 2$  erhält man die üblichen Formfunktionen  $N_1 = \frac{1}{2}(1 - \zeta)$  und  $N_2 = \frac{1}{2}(\zeta - 1)$ .

Die Zwangsbedingungen (3.2.58) und (3.2.49) sind äquivalent, d.h. beschreiben dieselbe Zwangsbedingung und lassen sich eindeutig ineinander umrechnen. Für ein 1-Direktor-Modell und ein degeneriertes Schalenmodell mit zwei Knoten findet man

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \zeta \mathbf{d} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = N_1(\zeta) \mathbf{x}_1 + N_2(\zeta) \mathbf{x}_2. \quad (3.2.60)$$

Die beiden Ansätze sind äquivalent, wenn sich die Variablen entsprechend

$$\mathbf{y} = \frac{1}{h_0} (h_0^+ \mathbf{x}_1 + h_0^- \mathbf{x}_2) \quad \text{und} \quad \mathbf{d} = \frac{1}{h_0} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (3.2.61)$$

ineinander umrechnen lassen. Es besteht also hinsichtlich der mechanischen Eigenschaften kein Unterschied zwischen äquivalenten degenerierten und klassischen Schalenmodellen. Solche Unterschiede mag es aber bezüglich der numerischen Eigenschaften geben. Bei den degenerierten Modellen wird die Integration der Feldgleichungen über die Schalendicke numerisch ausgeführt. Dort hängt es dann von dem jeweiligen Integrationsalgorithmus ab, ob die numerischen Ergebnisse mit denen einer expliziten Integration übereinstimmen.

Ob äquivalente Zwangsbedingungen zu äquivalenten Lösungen führen, ist hier kein Problem der Schalenmechanik, sondern der numerischen Implementation der entsprechenden Schalengleichungen. Erste Ansätze bezüglich degenerierter Elemente stammen von AHMAD ET AL. [2]. Danach umgingen ZIENKIEWICZ ET AL. [126] die zeitaufwendige numerische Integration durch eine explizite Integration mit starker Vereinfachung der Jacobideterminante  $J = \det \mathbf{F}$  und besonders ihrer Inversen  $J^{-1}$ . MILFORD & SCHNOBRICH [72] benutzten eine Reihenentwicklung von  $J^{-1}$  bis zum linearen Term und STANLEY ET AL. [112] betrachteten den vollständigen Ausdruck. Ein Vergleich der verschiedenen Approximationsstufen findet sich in BÜCHTER & RAMM [21], wo auch entsprechende numerische Beispiele ausführlich untersucht werden. BÜCHTER & RAMM [21] stellen schließlich fest: „*the only difference between shell theory and degeneration concept remains in the kind of discretization.*“

## 2.6 Resultierender Drehimpulssatz

Die bisher gemachten Betrachtungen basieren auf dem Prinzip der virtuellen Arbeit, dessen Erfüllung unter Berücksichtigung der Randbedingungen

auch die Erfüllung des Impulssatzes bedingt. In der Kontinuumsmechanik ohne Mikrostruktur wird der Drehimpulssatz nicht in die virtuelle Arbeit einbezogen. Der Drehimpulssatz muß also explizit befriedigt werden. Dieses geschieht gewöhnlich, indem die lokale Bedingung

$$\mathbf{F}\mathbf{T}^\top - \mathbf{T}\mathbf{F}^\top = \mathbf{0}, \quad (3.2.62)$$

welche die Symmetrie des Cauchyschen oder 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors fordert, von den konstitutiven Beziehungen *a priori* erfüllt wird. Die Bedingung (3.2.62) wird damit zur Einschränkung der Klasse zulässiger Stoffgesetze (*engl. constitutive restriction*). Diese Vorgehensweise nutzt man auch in der Schalentheorie. Dort wird die lokale Form des Drehimpulssatzes als Einschränkung der 2-dimensionalen Stoffgesetze verwendet (siehe u.a. SIMO & FOX [109]).

Um durch (3.2.62) die Klasse der 2-dimensionalen Stoffgesetze einzuschränken, muß (3.2.62) zunächst auf eine resultierende Form gebracht werden. Der 1. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor  $\mathbf{T}$  läßt sich als  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^i \otimes \mathbf{G}_i$  und der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  läßt sich als  $\mathbf{F} = \mathbf{x}_{,i} \otimes \mathbf{G}^i$  darstellen. Da der Tensor  $\mathbf{F}\mathbf{T}^\top - \mathbf{T}\mathbf{F}^\top$  schiefsymmetrisch ist, kann (3.2.62) mit Hilfe des axialen Vektors als  $\mathbf{x}_{,i} \times \mathbf{T}^i = \mathbf{0}$  geschrieben werden. Mit den entsprechenden Ausdrücken für  $\mathbf{x}_{,i}$  folgt

$$\mathbf{x}_{,i} \times \mathbf{T}^i = (\mathbb{B}_{\alpha,\beta} + \partial_\beta \mathbf{b}) \times \mathbf{T}^\alpha + (\partial_\zeta \mathbf{b}) \times \mathbf{T}^3 = \mathbf{0}. \quad (3.2.63)$$

Als Beispiel soll hier die Zwangsbedingung (3.2.49) benutzt werden. Dann läßt sich (3.2.63) wie folgt vereinfachen

$$\sum_{i=0}^n ((\zeta)^i \mathbf{u}_{i,\alpha} \times \mathbf{T}^\alpha + i(\zeta)^{i-1} \mathbf{u}_i \times \mathbf{T}^3) = \mathbf{0}. \quad (3.2.64)$$

Für ein Multi-Direktor-Modell ist eine solche Beziehungen u.a. in KRÄTZIG [53] zu finden. Nach Beschränkung auf das übliche Ein-Direktor-Modell, also  $\mathbf{y} := \mathbf{u}_0$  und  $\mathbf{d} := \mathbf{u}_1$ , ergibt sich aus (3.2.64) der Ausdruck

$$\mathbf{y}_{,\alpha} \times \mathbf{T}^\alpha + \zeta \mathbf{d}_{,\alpha} \times \mathbf{T}^\alpha + \mathbf{d} \times \mathbf{T}^3 = \mathbf{0}. \quad (3.2.65)$$

Mit den früheren Definitionen der Spannungsresultierenden bekommt man aus (3.2.65) nach Integration über die Schalendicke den Ausdruck

$$\mathbf{y}_{,\alpha} \times \mathbf{n}^\alpha + \mathbf{d}_{,\alpha} \times \mathbf{m}^\alpha + \mathbf{d} \times \mathbf{m} = \mathbf{0}. \quad (3.2.66)$$

Gleichungen der Art (3.2.66) dienen in Kapitel II zur Elimination unbekannter Schnittgrößen und ließen sich durch Kombination mit anderen Gleichgewichtsbedingungen auf verschiedene Arten darstellen. In SIMO & FOX [109], SIMO ET AL. [108] wird (3.2.66) zur Definition eines symmetrischen, 2-dimensionalen Spannungstensors, dem effektiven Spannungstensor, benutzt. Letztlich dient (3.2.66) als Einschränkung der Form der zulässigen konstitutiven Gleichungen.

## 2.7 Hyperelastische konstitutive Beziehungen

Es soll am Beispiel hyperelastischer Materialien gezeigt werden, in welcher Weise die Methode der Zwangsbedingungen die Formulierung konstitutiver Gleichungen für Schalen beeinflusst. Ein 3-dimensionales hyperelastisches konstitutives Gesetz ist durch Angabe einer (spezifischen) Formänderungsenergie  $w = w(\mathbf{F})$ , abhängig vom Deformationsgradienten  $\mathbf{F} = \mathbf{x}_{,i} \otimes \mathbf{G}^i$ , vollständig bestimmt. Die Einflüsse und Vereinfachungen durch Symmetrieeigenschaften des Materiales bleiben hier unberücksichtigt.

Die Zwangsbedingung (3.2.18) erlegt dem 3-dimensionalen Deformationsgradienten eine Abhängigkeit von der verallgemeinerten kinematischen Variablen  $\mathfrak{q}$  durch

$$\mathbf{x}_{,\alpha} = \mathbb{B}\mathfrak{q}_{,\alpha} + \partial_{\alpha}\mathbf{b} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_{,\zeta} = \partial_{\zeta}\mathbf{b} \quad (3.2.67)$$

auf. Wird diese Zwangsbedingung auf das 3-dimensionale konstitutive Gesetz angewandt, so läßt sich nach Integration über die Schalendicke eine entsprechende 2-dimensionale Form  $\phi$  finden

$$\phi(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_{,\alpha}; \xi^{\beta}) = \int_{-}^{+} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{,\alpha}, \mathbf{x}_{,\zeta}; \xi^{\beta}, \zeta) j d\zeta. \quad (3.2.68)$$

Die Spannungsergebnisse können aus dieser Form durch Differentiation nach den arbeitskonjugierten kinematischen Variablen ermittelt werden

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}^{\alpha} &= \frac{\partial \phi(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_{,\alpha})}{\partial \mathfrak{q}_{,\alpha}}, \\ \mathfrak{m} &= \frac{\partial \phi(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}_{,\alpha})}{\partial \mathfrak{q}}. \end{aligned} \quad (3.2.69)$$

Mit dem Beispiel eines Ein-Direktor-Modelles resultiert aus (3.2.68) die fol-

gende 2-dimensionale Formänderungsenergie

$$\phi = \phi(\mathbf{y}_{,\alpha}, \mathbf{d}_{,\alpha}, \mathbf{d}), \quad \text{wegen} \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} + \zeta \mathbf{d}. \quad (3.2.70)$$

Die drei Spannungsergebnisse, die Membranspannung  $\mathbf{n}^\alpha$ , die Momentenspannung  $\mathbf{m}^\alpha$  und die Dickenspannung  $\mathbf{m}$ , ergeben sich dann gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^\alpha &= \frac{\partial \phi(\mathbf{d}, \mathbf{y}_{,\alpha}, \mathbf{d}_{,\alpha})}{\partial \mathbf{y}_{,\alpha}}, \\ \mathbf{m}^\alpha &= \frac{\partial \phi(\mathbf{d}, \mathbf{y}_{,\alpha}, \mathbf{d}_{,\alpha})}{\partial \mathbf{d}_{,\alpha}}, \\ \mathbf{m} &= \frac{\partial \phi(\mathbf{d}, \mathbf{y}_{,\alpha}, \mathbf{d}_{,\alpha})}{\partial \mathbf{d}}. \end{aligned} \quad (3.2.71)$$

Anstatt der kinematischen Variablen  $\mathbf{y}_{,\alpha}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{d}_{,\alpha}$  lassen sich natürlich auch entsprechende Dehnungsmaße verwenden.

Mit Hilfe der Methode der Zwangsbedingungen ist somit aus den 3-dimensionalen Feldgleichungen durch Integration über die Schalendicke ein komplettes 2-dimensionales Randwertproblem entstanden. Da nach Auswahl einer Zwangsbedingung der Weg der Reduktion der allgemeinen und konstitutiven Feldgleichungen weitgehend vorbestimmt ist, ist diese Methode bei der Entwicklung von Schalenmodellen besonders beliebt. Überraschend ist allerdings, daß trotz der häufigen Anwendung dieser Methode nur wenig über die mechanische Bedeutung der kinematischen Annahme als *Zwangsbedingung* ausgesagt wird.

### 2.7.1 Zwangsbedingungen und Reaktionskräfte

Ein Körper, dem eine Zwangsbedingung auferlegt ist, entwickelt in seiner Gleichgewichtslage Spannungen, welche sich nicht vollständig aus den konstitutiven Gleichungen bestimmen lassen. Im klassischen Fall (siehe TRUESDELL & NOLL [121], ANTMAN [9]) wird einem Körper eine *einfache* Zwangsbedingung (*Local Constraint Principle*) der Form

$$\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}) = 0 \quad (3.2.72)$$

auferlegt. Diese Zwangsbedingung ist eine *konstitutive Annahme* und muß daher in eine objektive Form, z.B.  $\kappa(\mathbf{C}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}) = 0$ , überführt werden.

Beispielsweise bedingt die Inkompressibilität die Zwangsbedingung

$$\det(\mathbf{C}) = 1. \quad (3.2.73)$$

Hier ist  $\mathbf{C}$  der rechte Cauchy-Greensche Deformationstensor. Die Spannung in einem inkompressiblen Körper ist durch

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_A - p\mathbf{C}^{-1} \quad (3.2.74)$$

gegeben, wobei  $p$  den Druck darstellt. Die unkonventionelle Form (3.2.74) resultiert aus der Verwendung des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors anstelle des Cauchyschen Spannungstensors. Der Term  $\mathbf{S}_R = -p\mathbf{C}^{-1}$  beschreibt die *Reaktionsspannung* aufgrund der Inkompressibilität. Die Reaktionsspannung kann nicht durch ein konstitutives Gesetz bestimmt werden, da ein allseitiger Druck keine Verformung eines inkompressiblen Materiales hervorruft, d.h., es existieren keine entsprechenden Dehnungsgrößen. Eine Bestimmung der vorhandenen Reaktionsspannungen ist nur durch Lösen der Gleichgewichtsbedingungen möglich. Das Prinzip der lokalen Zwangsbedingungen fordert, daß die Reaktionsspannungen orthogonal zur Hyperfläche der Zwangsbedingungen im Zustandsraum stehen (siehe TRUESDELL & NOLL [121]). Die  $m$  Zwangsbedingungen

$$\kappa_\lambda(\mathbf{C}, \mathbf{x}) = 0, \quad \lambda = 1, \dots, m \quad (3.2.75)$$

schränken den Strecktensor  $\mathbf{C}$  auf eine  $(6-m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathcal{K}(\mathbf{x})$  im 6-dimensionalen Raum  $Sym^+(\mathbb{E})$  ein (siehe ANTMAN & MARLOW [8]). Wenn auf  $\mathcal{K}(\mathbf{x})$  die krummlinigen Koordinaten  $\boldsymbol{\psi} = (\psi^1, \dots, \psi^{6-m})$  gewählt werden und die  $\boldsymbol{\phi} = (\phi^1, \dots, \phi^m)$  Koordinaten des Orthogonalraumes in der Nachbarschaft von  $\mathcal{K}$  darstellen, dann liegt  $\mathbf{C} = \vec{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\phi})$  genau auf  $\mathcal{K}$ , wenn  $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$  gilt. In der Nähe von  $\mathcal{K}$  läßt sich die Spannung  $\mathbf{S}$  in einen aktiven und einen reaktiven Anteil

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}_A(\mathbf{x}, t) + \mathbf{S}_R(\mathbf{x}, t) \quad (3.2.76)$$

zerlegen, wobei die reaktive Spannung  $\mathbf{S}_R$  orthogonal zu  $\mathcal{K}$  ist, während  $\mathbf{S}_A$  tangential an  $\mathcal{K}$  liegt. Daraus folgt, daß die virtuelle Spannungsleistung  $\delta w_R$  der reaktiven Spannungen  $\mathbf{S}_R$  zu *null* wird, falls der virtuelle Strecktensor  $\delta\mathbf{C}$  tangential an  $\mathcal{K}$  liegt

$$\delta w_R(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}_R(\mathbf{x}, t) \cdot \delta\mathbf{C}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.2.77)$$

für  $\delta\mathbf{C}(\mathbf{x}, t) \in \text{span}\left\{\frac{\partial \vec{\mathbf{C}}}{\partial \psi^i}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t), \mathbf{0})\right\}$ .

ANTMAN & MARLOW [8] haben die Theorie lokaler Zwangsbedingungen kritisch bezüglich der in diesem Kapitel verwendeten Art von Zwangsbedingungen untersucht und ein *Prinzip der globalen Zwangsbedingungen* formuliert. Im Unterschied zu den lokalen Zwangsbedingungen wird dabei eine Bedingung der Form

$$\eta(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)) = 0 \quad (3.2.78)$$

zugelassen. Die Kompatibilitätsbedingungen brauchen im Gegensatz zu den lokalen Zwangsbedingungen nicht berücksichtigt werden. Die Lösungsmenge  $\mathcal{H}$  ist Teilmenge aller Plazierungen und enthält alle  $\mathbf{x}$ , die (3.2.78) erfüllen. Für Körper, welche die Zwangsbedingung (3.2.78) beinahe erfüllen, soll wieder ein Ansatz

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{z} \in \mathcal{H} \quad (3.2.79)$$

gemacht werden, wobei  $\mathbf{w}$  ein Vektor ist, der *nicht* tangential an  $\mathcal{H}$  liegt. Das Prinzip der globalen Zwangsbedingungen schreibt nun die folgenden konstitutiven Einschränkungen vor

$$\begin{aligned} \text{Grad}(\mathbf{w}) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}_A + \mathbf{T}_R, \\ \int_{\mathcal{P}_0} \mathbf{T}_R \cdot \text{Grad}(\delta \mathbf{x}) dV &= 0, \quad \forall \delta \mathbf{x} \text{ tangential an } \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (3.2.80)$$

Die Aussage (3.2.80)<sub>3</sub> ist im Zusammenhang mit Herleitungen aufgrund der Methode der Zwangsbedingungen von wesentlicher Bedeutung. Die in (3.2.19) verwendeten virtuellen Verschiebungen sind tangential an die von  $\mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{x}) = 0$  definierte Mannigfaltigkeit  $\mathcal{H}$ , d.h., das Vektorfeld  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$  erfüllt *a priori* die Zwangsbedingungen. Dadurch finden die reaktiven Spannungen keinen Eingang in das Prinzip der virtuellen Arbeit und letztendlich auch keinen Eingang in die resultierenden Schalengleichungen. Müssen die virtuellen Verschiebungen nun aber geometrisch zulässig sein *und* die Zwangsbedingung *a priori* erfüllen? Dazu schreiben ANTMAN & MARLOW [8] (S. 272): „*Since this principle [global constraint principle] is a constitutive restriction,  $\delta \mathbf{x}$  need not to satisfy any boundary conditions, which merely characterize the environment in which the body is placed. In contrast, the Principle of Virtual Power [Work], a fundamental law of mechanics, holds for all  $\delta \mathbf{x}$  satisfying ... [the boundary conditions]; these  $\delta \mathbf{x}$  need not to be tangent to  $\mathcal{H}$ . If, however, the  $\delta \mathbf{x}$  is taken to be tangent to  $\mathcal{H}$ , then ... [the Principle of Virtual Work] is independent of  $\mathbf{T}_R$ . Equations for  $\mathbf{T}_R$  are*

obtained by using ... [the Principle of Virtual Work] for  $\delta \mathbf{x}$  not tangent to  $\mathcal{H}$ ." <sup>6)</sup>

Als Beispiel soll nun die Zwangsbedingung  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \zeta \mathbf{d}$  aus (3.2.44) dienen. Wird diese in (3.2.80)<sub>3</sub> eingesetzt, so ergibt sich die Gleichung

$$\int_{\mathcal{P}_0} (\mathbf{T}_{\mathcal{R}}^\alpha \cdot (\delta \mathbf{y}_{,\alpha} + \zeta \delta \mathbf{d}_{,\alpha}) + \mathbf{T}_{\mathcal{R}}^3 \cdot \delta \mathbf{d}) dV = 0. \quad (3.2.81)$$

Nach Einführung der Schalengeometrie, Integration in Dickenrichtung und Ersetzen der Spannungsergebnisse durch die Symbole aus (3.2.40)–(3.2.42) erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{\mathcal{R}}^\beta|_\beta &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{m}_{\mathcal{R}}^\beta|_\beta &= \mathbf{m}_{\mathcal{R}}. \end{aligned} \quad (3.2.82)$$

Diese Bedingungsgleichungen müssen von den reaktiven Spannungen erfüllt werden. Sie garantieren gleichzeitig, daß die reaktiven Spannungen nicht in die resultierenden Schalengleichungen (3.2.43) eingehen. Zusätzlich zu (3.2.82) erfüllen die reaktiven Spannungen das 3-dimensionale, unterbestimmte Randwertproblem

$$\begin{aligned} \text{Div}(\mathbf{T}_{\mathcal{R}}) &= -\text{Div}(\mathbf{T}_{\mathcal{A}}) - \mathbf{f} + \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}, \\ \mathbf{T}_{\mathcal{R}} \mathbf{v} &= \mathbf{T}_{\mathcal{A}} \mathbf{v} + \mathbf{t}^*, \quad \text{auf } \partial \mathcal{P}_f. \end{aligned} \quad (3.2.83)$$

Hierbei sind die rechten Seiten in (3.2.83) aus der Lösung des primären Problems (3.2.1)<sub>1</sub> und (3.2.2) bekannt. Das Vorhandensein von reaktiven Spannungen ist eine wesentliche Eigenschaft aller Schalenmodelle, die mittels Zwangsbedingungen hergeleitet sind. Die reaktiven Spannungen dienen als „*measures of the discrepancy between the solutions of the constrained problem and the solution of the original unconstrained problem.*“ (ANTMAN & MARLOW [8]).

Die reaktiven Spannungen lassen sich als Maß für die Güte der Approximation des Kontinuums durch die Schale verwenden. Solche Fehlerabschätzungen werden gewöhnlich über die Formänderungsarbeit vorgenommen. Man muß jedoch beachten, daß die reaktiven Spannungen aufgrund der Zwangsbedingung keine Arbeit leisten, also durch solche Betrachtungen nicht abgeschätzt werden können. ANTMAN & MARLOW [8] schreiben dazu: „*For thin bodies with traction-free lateral surfaces, these estimates typically show that the*

<sup>6)</sup>Die ursprüngliche Notation ist gegen die hier verwendete Notation getauscht.

*constrained position field accurately approximates the position field for an unconstrained body and that the resultants are accurate, but offer no similar statement about the stress field computed from the constrained position field (i.e., about the active stress). The role of the reactive stress is not considered in such analyses.“*

## 2.8 Schalentheorie 2.Grades

### 2.8.1 Zwangsbedingungen

Die Zwangsbedingung (3.2.18) gehört zur Klasse der Materialien 1.Grades, der sog. einfachen Materialien (*engl. simple materials*). Eine Zwangsbedingung für Materialien 2.Grades läßt sich konstruieren, indem die Funktion  $\mathbf{b}$  nicht nur von den kinematischen Variablen  $\mathfrak{q}$ , sondern auch von deren ersten Ableitungen  $\mathfrak{q}_{,\alpha}$  in bezug auf die Koordinaten  $\xi^\alpha$  der Referenzfläche abhängig gemacht wird. Eine solche Zwangsbedingung findet sich beispielsweise in dem Kirchhoff-Love-Ansatz

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi^\alpha, \zeta) &= \mathbf{y}(\xi^\alpha) + \zeta \mathbf{a}_n(\xi^\alpha), \\ \text{mit } \mathbf{a}_n &= \mathbf{a}_n(\mathbf{y}_{,\beta}) = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \mathbf{y}_{,\alpha} \times \mathbf{y}_{,\beta}. \end{aligned} \tag{3.2.84}$$

Hier hängt der Ortsvektor  $\mathbf{x}$  an den Schalenraum von der Position auf der verformten Referenzfläche  $\mathbf{y}$  und deren ersten Ableitungen  $\mathbf{y}_{,\alpha}$  ab.

Mit der Beschränkung auf statische Probleme lautet die allgemeine Form der Zwangsbedingung für Schalen 2.Grades

$\mathbf{x}(\xi^\alpha, \zeta) = \mathbf{b}(\mathfrak{q}(\xi^\alpha), \mathfrak{q}_{,\beta}(\xi^\alpha); \xi^\alpha, \zeta). \tag{3.2.85}$
--

Ähnlich wie in (3.2.19)-(3.2.22) sollen zunächst die Terme  $\delta\mathbf{x}$  und  $\text{Grad}(\delta\mathbf{x})$  in Abhängigkeit von den kinematischen Variablen beschrieben werden. Für die virtuelle Verschiebung ergibt sich aus der Zwangsbedingung (3.2.85)

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x} &= (\partial_{\mathfrak{q}} \mathbf{b}) \delta\mathfrak{q} + (\partial_{\mathfrak{q}_{,\beta}} \mathbf{b}) \delta\mathfrak{q}_{,\beta} \\ &= \mathbb{B} \delta\mathfrak{q} + \mathbb{B}^\beta \delta\mathfrak{q}_{,\beta}, \quad \text{mit } \mathbb{B}^\beta = \partial_{\mathfrak{q}_{,\beta}} \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{3.2.86}$$

wobei  $\mathbb{B}^\beta \delta\mathfrak{q}_{,\beta}$  als zusätzlicher Term im Vergleich zu (3.2.19) auftritt. Die

Ableitung von (3.2.86) in bezug auf die Koordinaten  $\xi^i$  führt auf

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}_{,i} &= (\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{b})_{,i} \delta \mathbf{q} + (\partial_{\mathbf{q}} \mathbf{b}) \delta \mathbf{q}_{,i} + (\partial_{\mathbf{q},\beta} \mathbf{b})_{,i} \delta \mathbf{q}_{,\beta} + (\partial_{\mathbf{q},\beta} \mathbf{b}) \delta \mathbf{q}_{,\beta i} \\ &= \mathbb{B}_{,i} \delta \mathbf{q} + \mathbb{B} \delta \mathbf{q}_{,i} + \mathbb{B}^{\beta}_{,i} \delta \mathbf{q}_{,\beta} + \mathbb{B}^{\beta} \delta \mathbf{q}_{,\beta i} \\ &\text{mit } \delta \mathbf{q}_{,3} \equiv \delta \mathbf{q}_{,\zeta} = 0 \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{q}_{,\beta 3} = 0.\end{aligned}\quad (3.2.87)$$

Der Term  $\delta \mathbf{x}_{,i}$  bestimmt den Gradienten  $\text{Grad}(\delta \mathbf{x})$ , denn in bezug auf die Basis  $\mathbf{G}_i = \boldsymbol{\chi}_{,i}$  gilt  $\text{Grad}(\delta \mathbf{x}) = \delta \mathbf{x}_{,i} \otimes \mathbf{G}^i$ . Zwecks einfacher Schreibweise werden folgende Bezeichnungen eingeführt

$$\mathbb{B}_i := \mathbb{B}_{,i} \quad \text{und} \quad \mathbb{B}_i^{\beta} := \mathbb{B}^{\beta}_{,i}. \quad (3.2.88)$$

Damit ergibt sich schließlich aus (3.2.87)

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}_{,\alpha} &= \mathbb{B}_{\alpha} \delta \mathbf{q} + \mathbb{B} \delta \mathbf{q}_{,\alpha} + \mathbb{B}_{\alpha}^{\beta} \delta \mathbf{q}_{,\beta} + \mathbb{B}^{\beta} \delta \mathbf{q}_{,\beta \alpha}, \\ \delta \mathbf{x}_{,\zeta} &= \mathbb{B}_{\zeta} \delta \mathbf{q} + \mathbb{B}_{\zeta}^{\beta} \delta \mathbf{q}_{,\beta},\end{aligned}\quad (3.2.89)$$

wobei der Index  $\zeta$  auch durch den Index 3 ersetzt werden kann.

## 2.8.2 Resultierende Schalengleichungen

Die Spannungsresultierenden lassen sich analog zu denen aus (3.2.25) durch Integration über die Schalendicke gewinnen. Dabei zeigt sich, daß aufgrund der Zwangsbedingung (3.2.85) Resultierende zusätzlich zu denen in (3.2.27) - (3.2.34) auftreten. Insgesamt ergeben sich folgende Terme:

(i) Die Integration der internen virtuellen Arbeit liefert

$$\begin{aligned}\int_{-}^{+} \mathbf{T}^i \cdot \delta \mathbf{x}_{,i j} d\zeta &= \left( \int_{-}^{+} (\mathbb{B}_i)^{\top} \mathbf{T}^i j d\zeta \right) \cdot \delta \mathbf{q} + \left( \int_{-}^{+} \mathbb{B}^{\top} \mathbf{T}^{\alpha} j d\zeta \right) \cdot \delta \mathbf{q}_{,\alpha} \\ &+ \left( \int_{-}^{+} (\mathbb{B}_i^{\alpha})^{\top} \mathbf{T}^i j d\zeta \right) \cdot \delta \mathbf{q}_{,\alpha} + \left( \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^{\beta})^{\top} \mathbf{T}^{\alpha} j d\zeta \right) \cdot \delta \mathbf{q}_{,\beta \alpha}.\end{aligned}\quad (3.2.90)$$

Daraus lassen sich die folgenden vier Spannungsresultierenden entnehmen

$$\begin{aligned}m(\xi^{\alpha}) &:= \int_{-}^{+} (\mathbb{B}_i)^{\top} \mathbf{T}^i j d\zeta, \\ m^{\alpha}(\xi^{\alpha}) &:= \int_{-}^{+} \mathbb{B}^{\top} \mathbf{T}^{\alpha} j d\zeta, \\ \tilde{m}^{\alpha}(\xi^{\alpha}) &:= \int_{-}^{+} (\mathbb{B}_i^{\alpha})^{\top} \mathbf{T}^i j d\zeta, \\ m^{\alpha\beta}(\xi^{\alpha}) &:= \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^{\beta})^{\top} \mathbf{T}^{\alpha} j d\zeta.\end{aligned}\quad (3.2.91)$$

(ii) Die äußere virtuelle Arbeit der Volumenkräfte und Flächenlasten auf der oberen und unteren Schalenfläche ergibt

$$\int_{-}^{+} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{x} j \, d\zeta \pm [\mathbf{p}^{\pm} \cdot \delta \mathbf{x} j^{\pm}] = \left( \int_{-}^{+} \mathbb{B}^T \mathbf{f} j \, d\zeta \pm [\mathbb{B}^T \mathbf{p}^{\pm} j^{\pm}] \right) \cdot \delta \mathbf{q} \\ + \left( \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^{\alpha})^T \mathbf{f} j \, d\zeta \pm [(\mathbb{B}^{\alpha})^T \mathbf{p}^{\pm} j^{\pm}] \right) \cdot \delta \mathbf{q}_{,\alpha}. \quad (3.2.92)$$

Die entsprechenden zwei Resultierenden sind

$$\mathbb{I}(\xi^{\alpha}) := \int_{-}^{+} \mathbb{B}^T \mathbf{f} j \, d\zeta \pm [\mathbb{B}^T \mathbf{p} j]_{-}^{+}, \quad (3.2.93) \\ \mathbb{I}^{\alpha}(\xi^{\beta}) := \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^{\alpha})^T \mathbf{f} j \, d\zeta \pm [(\mathbb{B}^{\alpha})^T \mathbf{p} j]_{-}^{+}.$$

(iii) Auf dem Rand  $\partial \mathcal{S}$  der Schalenfläche wird die Zwangsbedingung als

$$\mathbf{x}(s, \zeta) = \mathbf{b}(q(s), q'(s), q_{\nu}(s); s, \zeta) \quad (3.2.94)$$

beschrieben, wobei  $s \in \mathbb{R}^+$  der Bogenlängenparameter der Randkurve ist und  $(.)'$  die Ableitung bezüglich  $s$  darstellt. Das Symbol  $q_{\nu}$  steht für die Ableitung von  $q$  in Richtung der Randnormalen  $\boldsymbol{\nu}$ . Diese Ableitung ist auf  $\mathcal{S}$  erklärt.  $q_{\nu}$  ist die Einschränkung des Bildes dieser Normalenableitung auf den Rand  $\partial \mathcal{S}$ . Es ist bekannt, daß  $q_{\nu}$  auf dem Rand als kinematische Randbedingung vorgeschrieben werden muß. Bei der Kirchhoff-Love-Schalentheorie tritt  $q_{\nu}$  als vierte skalare Randbedingung auf. Die entsprechende Wahl des Randparameters ist allerdings nicht eindeutig und hängt u.a. auch von dessen mechanischer Interpretation ab (siehe PIETRASZKIEWICZ & SZWABOWICZ [90], STUMPF [114], MAKOWSKI & PIETRASZKIEWICZ [65]). Die virtuelle Änderung von  $\mathbf{x}$  auf dem Rand  $\partial \mathcal{S}$  ergibt sich aus (3.2.94) durch Variation

$$\delta \mathbf{x}(s, \zeta) = \mathbb{B}(s, \zeta) \delta q(s) + \mathbb{B}^{\tau}(s, \zeta) \delta q'(s) + \mathbb{B}^{\nu}(s, \zeta) \delta q_{\nu}(s), \quad (3.2.95)$$

wobei  $\mathbb{B}^{\tau} = \partial_{q'} \mathbf{b}$  und  $\mathbb{B}^{\nu} = \partial_{q_{\nu}} \mathbf{b}$  die Ableitungen nach den entsprechenden Randvariablen darstellen. Die virtuelle Arbeit der inneren Spannungen auf der seitlichen Schalenfläche ist

$$\int_{-}^{+} \mathbf{T}^{\beta} \cdot \delta \mathbf{x} j \, d\zeta \nu_{\beta} = \left( \int_{-}^{+} \mathbb{B}^T \mathbf{T}^{\beta} j \, d\zeta \right) \cdot \delta \mathbf{q} \cdot \nu_{\beta} \\ + \left( \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^{\tau})^T \mathbf{T}^{\beta} j \, d\zeta \right) \cdot \delta q' \nu_{\beta} + \left( \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^{\nu})^T \mathbf{T}^{\beta} j \, d\zeta \right) \cdot \delta q_{\nu} \nu_{\beta}. \quad (3.2.96)$$

Aus (3.2.96) können drei Spannungsergebnisse abgeleitet werden

$$\begin{aligned}
 m_v(s) &:= \left( \int_{-}^{+} \mathbb{B}^T \mathbf{t}^\beta j \, d\zeta \right) v_\beta = m^\beta v_\beta, \\
 m_v^\tau(s) &:= \left( \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^\tau)^T \mathbf{t}^\beta j \, d\zeta \right) v_\beta = m^{\tau\beta} v_\beta, \\
 m_v^\nu(s) &:= \left( \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^\nu)^T \mathbf{t}^\beta j \, d\zeta \right) v_\beta = m^{\nu\beta} v_\beta.
 \end{aligned} \tag{3.2.97}$$

(iv) Als letzter Term in (3.2.25) treten die äußeren Randspannungen auf dem Teil der seitlichen Fläche  $\partial\mathcal{K}^\circ$  auf, wo statische Randbedingungen vorgeschrieben sind. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int_{-}^{+} \mathbf{t}_n \cdot \delta \mathbf{x} j^\circ \, d\zeta &= \left( \int_{-}^{+} \mathbb{B}^T \mathbf{t}_n j^\circ \, d\zeta \right) \cdot \delta \mathbf{q} + \left( \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^\tau)^T \mathbf{t}_n j^\circ \, d\zeta \right) \cdot \delta \mathbf{q}' \\
 &\quad + \left( \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^\nu)^T \mathbf{t}_n j^\circ \, d\zeta \right) \cdot \delta \mathbf{q}_\nu.
 \end{aligned} \tag{3.2.98}$$

Die drei Spannungsergebnisse sind, ähnlich wie in (3.2.97), gegeben durch

$$\begin{aligned}
 m_v^*(s) &:= \int_{-}^{+} \mathbb{B}^T \mathbf{t}_n j \, d\zeta, \\
 m_v^{\tau*}(s) &:= \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^\tau)^T \mathbf{t}_n j \, d\zeta, \\
 m_v^{\nu*}(s) &:= \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^\nu)^T \mathbf{t}_n j \, d\zeta.
 \end{aligned} \tag{3.2.99}$$

Die oben definierten Spannungsergebnisse lassen sich in das 3-dimensionale Prinzip der virtuellen Arbeit einfügen. Nach dem Ersetzen der 3-dimensionalen Größen und der Integration über die Schalendicke entsteht die 2-dimensionale Gleichung

$$\begin{aligned}
 &\int_S (m \cdot \delta \mathbf{q} + m^\alpha \cdot \delta \mathbf{q}_{,\alpha} + \tilde{m}^\alpha \cdot \delta \mathbf{q}_{,\alpha} + m^{\beta\alpha} \cdot \delta \mathbf{q}_{,\alpha\beta}) \, dA \\
 &= \int_S (\mathbb{I} \cdot \delta \mathbf{q} + \mathbb{I}^\alpha \cdot \delta \mathbf{q}_{,\alpha}) \, dA + \int_{\partial S_i} (m_v \cdot \delta \mathbf{q} + m_v^\tau \cdot \delta \mathbf{q}' + m_v^\nu \cdot \delta \mathbf{q}_\nu) \, ds \\
 &\quad + \int_{\partial S_f} (m_v^* \cdot \delta \mathbf{q} + m_v^{\tau*} \cdot \delta \mathbf{q}' + m_v^{\nu*} \cdot \delta \mathbf{q}_\nu) \, ds,
 \end{aligned} \tag{3.2.100}$$

wobei die Bezeichnungen der entsprechenden Gebiete aus (3.2.36) übernommen wurden.

Nach Anwendung des Stokes'schen Satzes auf (3.2.100) erhält man zunächst

das Zwischenergebnis

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{S}} ((m - m^\alpha|_\alpha - \tilde{m}^\alpha|_\alpha) \cdot \delta q - m^{\beta\alpha}|_\beta \cdot \delta q_{,\alpha}) dA \\
 & + \int_{\partial\mathcal{S}} ((m^\alpha \nu_\alpha + \tilde{m}^\alpha \nu_\alpha) \cdot \delta q + m^{\beta\alpha} \nu_\beta \cdot \delta q_{,\alpha}) ds \\
 & = \int_{\mathcal{S}} (\mathbb{I} - \mathbb{I}^\alpha|_\alpha) \cdot \delta q dA + \int_{\partial\mathcal{S}} ([m_\nu - (m_\nu^\tau)'] \cdot \delta q + m_\nu^\nu \cdot \delta q_\nu) ds \\
 & + \int_{\partial\mathcal{S}_f} ([\tilde{m}_\nu^* - (\tilde{m}_\nu^\tau)^*]' \cdot \delta q + \tilde{m}_\nu^\nu \cdot \delta q_\nu) ds \tag{3.2.101} \\
 & + \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbb{I}^\alpha \nu_\alpha \cdot \delta q ds + \llbracket (m_\nu^\tau) \cdot \delta q \rrbracket_{\partial\partial\mathcal{S}_o} + \llbracket (\tilde{m}_\nu^\tau)^* \cdot \delta q \rrbracket_{\partial\partial\mathcal{S}_f}.
 \end{aligned}$$

Die Doppelklammern  $\llbracket \dots \rrbracket$  bezeichnen die Übergangsbedingungen auf der endlichen Anzahl von Ecken der Schalenrandfläche  $\partial\mathcal{S}$ . Zum Beispiel bezeichnet  $\llbracket \mathbf{u}(s_i) \rrbracket = \mathbf{u}(s_i^+) - \mathbf{u}(s_i^-)$  den Übergang von  $\mathbf{u}(s)$  zwischen beiden Seiten des Eckpunktes  $s_i$ . Solche Terme entstehen durch Integration des Randintegrals  $\int \mathbf{u}' ds$  über nicht-glatte ( $C^1$ -unstetige) Randkurven. Ein solches Integral muß in eine endliche Summe von Kurvenintegralen über glatte Randbereiche und Übergangsbedingungen an den Unstetigkeitsstellen aufgeteilt werden.

Die Anwendung des Satzes von Stokes auf dem Rand  $\partial\mathcal{S}$  wird durch Aufspaltung des Termes

$$\int_{\partial\mathcal{S}} m^{\beta\alpha} \nu_\beta \cdot \delta q_{,\alpha} ds = \int_{\partial\mathcal{S}} (m^{\tau\beta} \nu_\beta \cdot \delta q' + m^{\nu\beta} \nu_\beta \cdot \delta q_\nu) ds \tag{3.2.102}$$

in einen tangentialen und normalen Teil ermöglicht. Nach Anwendung des Integralsatzes auf (3.2.102) und Berücksichtigung der Übergangsbedingung folgt aus (3.2.101) die endgültige Form

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{S}} (m - m^\alpha|_\alpha - \tilde{m}^\alpha|_\alpha + m^{\beta\alpha}|_{\beta\alpha}) \cdot \delta q dA \\
 & + \int_{\partial\mathcal{S}} ((-m^{\beta\alpha}|_\beta + m^\alpha + \tilde{m}^\alpha) \nu_\alpha \cdot \delta q - (m^{\nu\beta} \nu_\beta)' \cdot \delta q + m^{\nu\beta} \nu_\beta \cdot \delta q_\nu) ds \\
 & = \int_{\mathcal{S}} (\mathbb{I} - \mathbb{I}^\alpha|_\alpha) \cdot \delta q dA + \int_{\partial\mathcal{S}_i} ([m_\nu - (m_\nu^\tau)'] \cdot \delta q + m_\nu^\nu \cdot \delta q_\nu) ds \\
 & + \int_{\mathcal{S}_f} ([\tilde{m}_\nu^* - (\tilde{m}_\nu^\tau)^*]' \cdot \delta q + \tilde{m}_\nu^\nu \cdot \delta q_\nu) ds \tag{3.2.103} \\
 & + \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbb{I}^\alpha \nu_\alpha \cdot \delta q ds + \llbracket m_\nu^\tau \cdot \delta q \rrbracket_{\partial\partial\mathcal{S}_i} + \llbracket (\tilde{m}_\nu^\tau)^* \cdot \delta q \rrbracket_{\partial\partial\mathcal{S}_f} - \llbracket m^{\tau\beta} \nu_\beta \cdot \delta q \rrbracket_{\partial\partial\mathcal{S}}.
 \end{aligned}$$

Aus (3.2.103) können die Gleichgewichtsbedingungen auf  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}_f$  und  $\partial\mathcal{S}_i$ , und die Übergangsbedingungen in  $\partial\partial\mathcal{S}_i$  und  $\partial\partial\mathcal{S}_f$  abgelesen werden. Um

die folgenden Gleichungen zu vereinfachen, wird eine Größe

$$\mathbb{t}^\alpha := m^\alpha + \tilde{m}^\alpha - m^{\beta\alpha}|_\beta \quad (3.2.104)$$

eingeführt. Die lokalen Gleichgewichtsbedingungen lauten dann

$$\begin{aligned} m - \mathbb{t}^\alpha|_\alpha &= \mathbb{l} - \mathbb{l}^\alpha|_\alpha && \text{auf } \mathcal{S}, \\ \mathbb{t}^\alpha \nu_\alpha - (m^{\tau\beta} \nu_\beta)' &= \tilde{m}_\nu^* - (\tilde{m}_\nu^\tau)' + \mathbb{t}^\alpha \nu_\alpha && \text{auf } \partial\mathcal{S}_f, \\ m^{\nu\beta} \nu_\beta &= \tilde{m}_\nu^* && \text{auf } \partial\mathcal{S}_f, \\ \llbracket \tilde{m}_\nu^\tau \rrbracket &= \llbracket m^{\tau\beta} \nu_\beta \rrbracket && \text{auf } \partial\partial\mathcal{S}_f, \\ q &= \tilde{q} \quad q_\nu = \tilde{q}_\nu && \text{auf } \partial\mathcal{S}_d. \end{aligned} \quad (3.2.105)$$

Auf den Innenrändern gelten entsprechend

$$\begin{aligned} \mathbb{t}^\alpha \nu_\alpha - (m^{\tau\beta} \nu_\beta)' &= m_\nu - (m_\nu^\tau)' + \mathbb{l}^\alpha \nu_\alpha && \text{auf } \partial\mathcal{S}_i, \\ m^{\nu\beta} \nu_\beta &= m_\nu^* && \text{auf } \partial\mathcal{S}_i, \\ \llbracket m_\nu^\tau \rrbracket &= \llbracket m^{\tau\beta} \nu_\beta \rrbracket && \text{auf } \partial\partial\mathcal{S}_i. \end{aligned} \quad (3.2.106)$$

Die Gleichungen (3.2.105) und (3.2.106) sind die allgemeinen zweidimensionalen statischen Gleichgewichtsbedingungen, Randbedingungen und Übergangsbedingungen einer Schalentheorie 2.Grades. Die kinematischen Randbedingungen auf  $\partial\mathcal{S}_d$  werden durch Angabe der Funktionen  $q(s)$  und  $q_\nu(s)$  festgelegt.

Diese Gleichungen gelten für beliebige Schalentheorien 2.Grades. Als Sonderfall soll nun dargestellt werden, wie die entsprechenden Gleichungen für die Kirchhoff-Lovesche Zwangsbedingung aussehen.

### 2.8.3 Beispiel: Kirchhoff-Love-Schalentheorie

Die Zwangsbedingung des Kirchhoff-Love-Modelles ist durch

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_{,\beta}; \xi^\alpha, \zeta) &= \mathbf{y}(\xi^\alpha) + \zeta \mathbf{a}_n(\mathbf{y}_{,\beta}; \xi^\alpha), \\ \text{mit } \mathbf{a}_n &= \mathbf{a}_n(\mathbf{y}_{,\beta}) = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \mathbf{y}_{,\alpha} \times \mathbf{y}_{,\beta} \end{aligned} \quad (3.2.107)$$

gegeben. Die Deformation eines Kontinuums wird in einer solchen Weise eingeschränkt, daß Schnittgeraden senkrecht zur Schalenreferenzfläche auch

nach einer Verformung des Kontinuums gerade und senkrecht zur Schalenfläche bleiben. Anstatt der Zwangsbedingung (3.2.107) läßt sich auch ein 1-Direktor-Modell,  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \zeta \mathbf{d}$ , mit den zusätzlichen Bedingungen

$$\mathbf{d} \cdot \delta \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}_{,\alpha} \cdot \delta \mathbf{d} + \delta \mathbf{y}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (3.2.108)$$

benutzen (siehe ANTMAN & MARLOW [8]). Die Variation der Zwangsbedingung (3.2.107) bezüglich der kinematischen Variablen  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{y}_{,\beta}$  liefert die folgenden tensorwertigen Größen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{B}^\beta$

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= (\partial_{\mathbf{y}} \mathbf{b}) =: \mathbf{B} = \mathbf{I}, \\ \mathbb{B}^\beta &= \partial_{\mathbf{y}_{,\beta}} \mathbf{b} =: \zeta \mathbf{B}^\beta = (-\mathbf{a}^\beta \otimes \mathbf{a}_n) \zeta. \end{aligned} \quad (3.2.109)$$

Aus (3.2.109) können durch Ableitung bezüglich der Koordinaten  $\xi^i$  die zu (3.2.87) analogen Ausdrücke gewonnen werden

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_i &= (\partial_{q_i} \mathbf{b})_{,i} =: \mathbf{B}_i = \mathbf{0}, \\ \mathbb{B}_\alpha^\beta &= (\partial_{q_{,\beta}} \mathbf{b})_{,\alpha} =: \zeta \mathbf{B}_\alpha^\beta = -\zeta (\mathbf{a}^\beta \otimes \mathbf{a}_n)_{,\alpha} \\ &= \zeta (\Gamma_{\alpha\gamma}^\beta \mathbf{a}^\gamma \otimes \mathbf{a}_n - b_\alpha^\beta \mathbf{a}_n \otimes \mathbf{a}_n + b_\alpha^\gamma \mathbf{a}^\beta \otimes \mathbf{a}_\gamma), \\ \mathbb{B}_\xi^\beta &= (\partial_{q_{,\beta}} \mathbf{b})_{,\xi} = \mathbf{B}^\beta. \end{aligned} \quad (3.2.110)$$

Die weiteren Größen  $\mathbb{B}^\tau$  und  $\mathbb{B}^\nu$  hängen von der Wahl der Randvariablen  $q_\nu$  ab. Aus (3.2.108) ist ersichtlich, daß die 6 skalaren kinematischen Variablen  $\{\mathbf{y}, \mathbf{d}\}$  mit den zwei zusätzlichen Zwangsbedingungen auf insgesamt vier unabhängige kinematische Größen führen, die als kinematische Randbedingungen vorgeschrieben werden müssen (siehe auch PIETRASZKIEWICZ & SZWABOWICZ [90], BASAR & KRÄTZIG [14]). Drei dieser vier Variablen sind durch den Ortsvektor  $\mathbf{y}$  an die Schalenreferenzfläche  $\mathcal{S}$  gegeben. Die Wahl der vierten Variable ist nicht eindeutig. Bezüglich der Auswahl des vierten Freiheitsgrades, seiner mechanischen Interpretation und der Frage, welche statischen Größen zu ihm arbeitskonjugiert sind, sei auf NOVOZHILOV & SHAMINA [82], MAKOWSKI & PIETRASZKIEWICZ [65], PIETRASZKIEWICZ [89] und dortige Literaturhinweise verwiesen. Um die Brauchbarkeit der Methode der Zwangsbedingungen bei der Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen der Kirchhoff-Love Schalentheorie zu demonstrieren, soll hier der skalare Parameter  $n_\nu$  ausgewählt werden (siehe STUMPF [114]). Es interessieren nur die kinematischen Eigenschaften von  $n_\nu$ , insbesondere die Form der Größen  $\mathbf{B}^\tau$  und  $\mathbf{B}^\nu$ , welche die virtuelle Änderung des Normalenvektors  $\delta \mathbf{a}_n = \mathbf{B}^\tau \delta \mathbf{y}' + \mathbf{B}^\nu \delta n_\nu$  bestimmen. In der o.g. Literatur finden sich

die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\mathbb{B}^\tau &= a_\nu^{-1}(\mathbf{v}_R \times \mathbf{a}_n) \otimes \mathbf{a}_n =: \mathbf{B}^\tau, \\ \mathbb{B}^\nu &= a_\nu^{-1}(\mathbf{y}' \times \mathbf{a}_n) =: \mathbf{B}^\nu,\end{aligned}\tag{3.2.111}$$

wobei  $a_\nu$  als skalare Größe  $a_\nu := (\mathbf{y}' \times \mathbf{a}_n) \cdot \mathbf{v}_R$  definiert ist (siehe PIETRASZKIEWICZ [88]).

In den traditionellen Arbeiten über die Kirchhoff-Love Schalentheorien werden die folgenden Spannungsergebnisse  $N^{\alpha\beta}$  und  $M^{\alpha\beta}$  verwendet

$$\begin{aligned}N^{\alpha\beta} &= \int_-^+ T^{\alpha\beta} j \, d\zeta, \\ M^{\alpha\beta} &= \int_-^+ \zeta T^{\alpha\beta} j \, d\zeta.\end{aligned}\tag{3.2.112}$$

Eine Spannung in Dickenrichtung wird üblicherweise vernachlässigt. Die resultierenden Größen (3.2.112) können nun zur Bestimmung der allgemeinen Schnittgrößen (3.2.91) benutzt werden. Es gelten die folgenden Zusammenhänge

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^\beta &= \int_-^+ \mathbf{T}^\beta j \, d\zeta = \int_-^+ T^{\alpha\beta} \mathbf{g}_{\alpha j} \, d\zeta = \int_-^+ T^{\alpha\beta} (\mathbf{a}_\alpha + \zeta \mathbf{a}_{n,\alpha}) j \, d\zeta \\ &= \int_-^+ T^{\alpha\beta} j \, d\zeta \mathbf{a}_\alpha + \int_-^+ \zeta T^{\alpha\beta} j \, d\zeta \mathbf{a}_{n,\alpha} \\ &= N^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha + M^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{n,\alpha}, \\ \mathbf{M}^\beta &= \int_-^+ \zeta \mathbf{T}^\beta j \, d\zeta = \int_-^+ \zeta T^{\alpha\beta} (\mathbf{a}_\alpha + \zeta \mathbf{a}_{n,\alpha}) j \, d\zeta \\ &= \int_-^+ \zeta T^{\alpha\beta} j \, d\zeta \mathbf{a}_\alpha + o(\zeta) = M^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha + o(\zeta).\end{aligned}\tag{3.2.113}$$

Nach dem Einsetzen in (3.2.91) ergeben sich die Schnittgrößen

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}(\xi^\alpha) &= \int_-^+ (\mathbb{B}_i)^\top \mathbf{T}^i j \, d\zeta = \mathbf{0}, \\ \mathfrak{m}^\alpha(\xi^\alpha) &= \int_-^+ \mathbb{B}^\top \mathbf{T}^\alpha j \, d\zeta = \int_-^+ \mathbf{T}^\alpha j \, d\zeta = \mathbf{N}^\alpha, \\ \tilde{\mathfrak{m}}^\alpha(\xi^\alpha) &= \int_-^+ (\mathbb{B}_\beta^\alpha)^\top \mathbf{T}^\beta j \, d\zeta = (\mathbf{B}_\beta^\alpha)^\top \int_-^+ \zeta \mathbf{T}^\beta j \, d\zeta = (\mathbf{B}_\beta^\alpha)^\top \mathbf{M}^\beta, \\ \mathfrak{m}^{\alpha\beta}(\xi^\alpha) &= \int_-^+ (\mathbb{B}^\beta)^\top \mathbf{T}^\alpha j \, d\zeta = (\mathbf{B}^\beta)^\top \int_-^+ \zeta \mathbf{T}^\alpha j \, d\zeta = (\mathbf{B}^\beta)^\top \mathbf{M}^\alpha.\end{aligned}\tag{2.8.3}$$

In (2.8.3) werden die in (3.2.110) definierten Terme verwendet. Die Resultate

tierenden aufgrund der äußeren Lasten lauten

$$\begin{aligned}
 \mathbb{I}(\xi^\alpha) &= \int_{-}^{+} \mathbb{B}^\top \mathbf{f} j \, d\zeta \pm [\mathbb{B}^\top \mathbf{p}^\pm j^\pm] = \int_{-}^{+} \mathbb{B}^\top \mathbf{f} j \, d\zeta \pm [\mathbb{B}^\top \mathbf{p}^\pm j^\pm] =: \mathbf{p}, \\
 \mathbb{I}^\alpha(\xi^\beta) &= \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^\alpha)^\top \mathbf{f} j \, d\zeta \pm [(\mathbb{B}^\alpha)^\top \mathbf{p}^\pm j^\pm] \\
 &= (\mathbf{B}^\alpha)^\top \left( \int_{-}^{+} \zeta \mathbf{f} j \, d\zeta \pm [h_0^\pm \mathbf{p}^\pm j^\pm] \right) =: (\mathbf{B}^\alpha)^\top \mathbf{h},
 \end{aligned} \tag{3.2.114}$$

wobei die Symbole  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{h}$  entsprechend der üblichen Notation (siehe PIETRASZKIEWICZ [88]) eingeführt sind. Schließlich sollen noch die Randterme (3.2.99) gemäß der Kirchhoff-Love-Hypothese angepaßt werden. Durch Einsetzen von (3.2.112) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{m}_\nu^*(s) &= \int_{-}^{+} \mathbb{B}^\top \mathbf{t}_n^* j \, d\zeta = \int_{-}^{+} \mathbf{t}_n^* j \, d\zeta =: \mathbf{T}, \\
 \mathfrak{m}_\nu^{\tau*}(s) &= \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^\tau)^\top \mathbf{t}_n^* j \, d\zeta = (\mathbf{B}^\tau)^\top \int_{-}^{+} \zeta \mathbf{t}_n^* j \, d\zeta =: (\mathbf{B}^\tau)^\top \mathbf{H}, \\
 \mathfrak{m}_\nu^{\nu*}(s) &= \int_{-}^{+} (\mathbb{B}^\nu)^\top \mathbf{t}_n^* j \, d\zeta = (\mathbf{B}^\nu)^\top \int_{-}^{+} \zeta \mathbf{t}_n^* j \, d\zeta =: (\mathbf{B}^\nu)^\top \mathbf{H}.
 \end{aligned} \tag{3.2.115}$$

Auch hier wurden gemäß der übliche Notation die Symbole  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{T}$  eingeführt (siehe PIETRASZKIEWICZ [88]).

Die in (3.2.104) definierte Spannungsergebnierende  $\mathfrak{t}^\alpha$  wird im Rahmen der Kirchhoff-Love-Theorie als  $\mathbf{T}^\alpha$  bezeichnet. Da dieses Symbol hier aber im Zusammenhang mit dem ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor benutzt wird, soll statt  $\mathbf{T}^\alpha$  die Bezeichnung  $\bar{\mathbf{T}}^\alpha$  verwendet werden. Die Spannungsergebnierende  $\bar{\mathbf{T}}^\alpha$  ergibt sich aus (3.2.104) durch Einsetzen der oben genannten Größen

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{T}}^\alpha &= \mathbf{N}^\alpha + (\mathbf{B}_\beta^\alpha)^\top \mathbf{M}^\beta - [(\mathbf{B}^\alpha)^\top \mathbf{M}^\beta]_\beta \\
 &= \mathbf{N}^\alpha + (\mathbf{B}_\beta^\alpha)^\top \mathbf{M}^\beta - (\mathbf{B}^\alpha|_\beta)^\top \mathbf{M}^\beta - (\mathbf{B}^\alpha)^\top \mathbf{M}^\beta|_\beta \\
 &= \mathbf{N}^\alpha - (\mathbf{B}^\alpha)^\top \mathbf{M}^\beta|_\beta \\
 &= \mathbf{N}^\alpha + (\mathbf{M}^\beta|_\beta \cdot \mathbf{a}^\alpha) \mathbf{a}_n \\
 &= N^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha + M^{\alpha\beta} \mathbf{a}_{n,\alpha} + ((M^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha)|_\beta \cdot \mathbf{a}^\alpha) \mathbf{a}_n.
 \end{aligned} \tag{3.2.116}$$

Mit (3.2.116) kann die Gleichgewichtsbedingung (3.2.105)<sub>1</sub> nun direkt für die Kirchhoff-Love-Zwangsbedingung hingeschrieben werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 -\bar{\mathbf{T}}^\alpha|_\alpha &= \mathbf{p} - [(\mathbf{B}^\alpha)^\top \mathbf{h}]|_\alpha \quad \text{oder} \\
 -\bar{\mathbf{T}}^\alpha|_\alpha &= \mathbf{p} + [(\mathbf{h} \cdot \mathbf{a}^\alpha) \mathbf{a}_n]|_\alpha.
 \end{aligned} \tag{3.2.117}$$

---

**Übersicht 3.1** Spezifizierung der allgemeinen Größen einer Schalentheorie 2. Grades am Beispiel der Kirchhoff-Love-Schalentheorie
 

---

Kinematische Größen:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{B} &= \mathbf{B} = \mathbf{I} & \mathbb{B}_i &= \mathbf{B}_i = \mathbf{0} \\
 \mathbb{B}^\beta &= \zeta \mathbf{B}^\beta = -\zeta(\mathbf{a}^\beta \otimes \mathbf{a}_n) & \mathbb{B}_\alpha^\beta &= \zeta \mathbf{B}_\alpha^\beta = -\zeta(\mathbf{a}^\beta \otimes \mathbf{a}_n)_{,\alpha} \\
 \mathbb{B}_\xi^\beta &= \mathbf{B}^\beta = -(\mathbf{a}^\beta \otimes \mathbf{a}_n) \\
 \mathbb{B}^\tau &= \mathbf{B}^\tau = a_\nu^{-1}(\boldsymbol{\nu}_R \times \mathbf{a}_n) \otimes \mathbf{a}_n & \mathbb{B}^\nu &= \mathbf{B}^\nu = a_\nu^{-1}(\mathbf{y}' \times \mathbf{a}_n) \\
 a_\nu &= (\mathbf{y}' \times \mathbf{a}_n) \cdot \boldsymbol{\nu}_R
 \end{aligned}$$

Statische Größen

$$\begin{aligned}
 m(\xi^\alpha) &= \mathbf{0} & m^\alpha(\xi^\alpha) &= \mathbf{N}^\alpha \\
 \bar{m}^\alpha(\xi^\alpha) &= (\mathbf{B}_\beta^\alpha)^\top \mathbf{M}^\beta & m^{\alpha\beta}(\xi^\alpha) &= (\mathbf{B}^\beta)^\top \mathbf{M}^\alpha \\
 l(\xi^\alpha) &= \mathbf{p} & l^\alpha(\xi^\beta) &= (\mathbf{B}^\alpha)^\top \mathbf{h} \\
 m_\nu^*(s) &= \mathbf{T} & m_\nu^{*\alpha}(s) &= (\mathbf{B}^\tau)^\top \mathbf{H} \\
 m_\nu^{*\nu}(s) &= (\mathbf{B}^\nu)^\top \mathbf{H}
 \end{aligned}$$

---

 Notation gemäß PIETRASZKIEWICZ [88].
 

---

Die Gleichgewichtsbedingung (3.2.117) ist als Lagrangesche Gleichgewichtsbedingung der Kirchhoff-Love-Schalentheorie bekannt und kann in dieser Form in PIETRASZKIEWICZ [88] gefunden werden. Die Definition der Resultierenden  $\bar{\mathbf{T}}^\alpha$  ermöglicht eine solche Schreibweise der Gleichgewichtsbedingung (3.2.117), die der entsprechenden Bedingung der Schalenmodelle 1. Grades ähnelt. Warum diese Ähnlichkeit erwünscht ist, ist nicht offensichtlich, da sich die Strukturen dieser beiden Modelle fundamental unterscheiden. Wird die Gleichgewichtsbedingung (3.2.117) etwas umgestellt, so erhält man

$$((\mathbf{B}^\alpha)^\top (\mathbf{M}^\beta|_\beta + \mathbf{h}))|_\alpha + (\mathbf{N}^\alpha|_\alpha + \mathbf{p}) = \mathbf{0}. \quad (3.2.118)$$

Aus (3.2.118) wird deutlich, daß Spannungen und Momente in einer einzigen Gleichung miteinander durch höhere Ableitungen gekoppelt sind. Dieses macht das Wesen eines Kontinuums 2. Grades aus. Daher sollte man die Darstellung (3.2.118) der Darstellung (3.2.117) vorziehen.

Die Randgleichung (3.2.105)<sub>2</sub> kann durch Einsetzen der oben definierten

Größen wie folgt spezifiziert werden

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{T}}^\alpha \mathbf{v}_\alpha - (\mathfrak{m}^{\tau\beta} \mathbf{v}_\beta)' &= \mathfrak{m}_v - (\mathfrak{m}_v^\tau)' + \mathbb{I}^\alpha \mathbf{v}_\alpha, \\
 \mathbf{T}^\alpha \mathbf{v}_\alpha - ((\mathbf{B}^\tau)^\top \mathbf{M}^\beta \mathbf{v}_\beta)' &= (\mathbf{B}^\alpha)^\top \mathbf{h} \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{T} - ((\mathbf{B}^\tau)^\top \mathbf{H})', \\
 \mathbf{T}^\alpha \mathbf{v}_\alpha - (a_v^{-1}(\mathbf{a}_n \times \mathbf{M}^\beta) \cdot \mathbf{v}_R \mathbf{v}_\beta \mathbf{a}_n)' &= -(\mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{h}) \mathbf{a}_n \mathbf{v}_\alpha \\
 &\quad + \mathbf{T} - (a_v^{-1}(\mathbf{a}_n \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{v}_R \mathbf{a}_n)'.
 \end{aligned} \tag{3.2.119}$$

Der Ausdruck (3.2.119)<sub>3</sub> kann direkt mit Gleichung (7) in PIETRASZKIEWICZ [88] verglichen werden. Dieses gilt auch für die Randbedingung, welche mit der vierten Variable gekoppelt ist. Aus (3.2.105)<sub>3</sub> läßt sich ableiten

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{m}^{\nu\beta} \mathbf{v}_\beta &= \mathfrak{m}_v^\nu, \\
 (\mathbf{B}^\nu)^\top \mathbf{M}^\beta \mathbf{v}_\beta &= (\mathbf{B}^\nu)^\top \mathbf{H}, \\
 a_v^{-1}(\mathbf{a}_n \times \mathbf{M}^\beta) \cdot \mathbf{y}' \mathbf{v}_\beta &= a_v^{-1}(\mathbf{a}_n \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{y}'.
 \end{aligned} \tag{3.2.120}$$

Die restlichen Bedingungen aus (3.2.105) sind Übergangsbedingungen, die sich in der gleichen Weise spezifizieren lassen. Auf eine explizite Angabe soll hier verzichtet werden.

Es kann also festgestellt werden, daß sich die formale Herleitung der Kirchhoff-Love-Schalentheorie als Beispiel eines Kontinuums mit Zwangsbedingungen 2.Grades ohne Schwierigkeiten durchführen läßt. Bei der Angabe der entsprechenden Form der Zwangsbedingung muß auch die Auswahl einer Randvariable getroffen werden. Dieses gilt nicht nur für die Kirchhoff-Love-Schale, sondern ist ein Erfordernis jeder Schalentheorie 2.Grades.

### 3 Methode der gewichteten Momente

Wie bereits vorausgeschickt, geht die Methode der gewichteten Momente nicht von dem Prinzip der virtuellen Arbeit, sondern von dem Impulsatz des 3-dimensionalen Kontinuums aus. Sie umgeht damit die genannten Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit Reaktionsspannungen bei den Zwangsbedingungen auftreten.

### 3.1 Lokaler Impulssatz

Die lokale Form des Impulssatzes war bereits in (3.2.1) und die entsprechende Randbedingung war in (3.2.2) angegeben worden. Sie seien hier noch einmal wiederholt

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}(\mathbf{T}) + \mathbf{f} &= \rho_0 \dot{\mathbf{x}} && \text{auf } \mathcal{P}_0 \times \mathbb{T}, \\ \mathbf{T}\mathbf{n} &= \mathbf{t}_n^* && \text{auf } \partial\mathcal{P}_{0,f} \times \mathbb{T}. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Nun sei  $\mathbb{H} : \mathcal{P}_0 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{E}$  ein (genügend) glattes Operatorfeld, das über der Referenzplatzierung  $\mathcal{P}_0$  und der Zeit  $\mathbb{T}$  definiert ist. Der lineare Operator  $\mathbb{H}(\mathbf{X}, t)$  nimmt Werte in dem linearen Raum  $\mathbb{V} \otimes \mathbb{E}$  an, wobei  $\mathbb{V}$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit innerem Produkt ist.  $\mathbb{H}$  soll *gewichteter Operator* heißen. Er stellt ein Feld linearer Abbildungen  $\operatorname{Lin}(\mathbb{E}; \mathbb{V})$  dar. Wird der Operator  $\mathbb{H}$  von links auf die Gleichungen (3.3.1) angewandt – die entsprechende Abbildung sei punktweise definiert – so erhält man zunächst das formale Resultat

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\operatorname{Div}(\mathbf{T})) + \mathbb{H}\mathbf{f} &= \rho_0 \mathbb{H}\ddot{\mathbf{x}}, \\ \mathbb{H}\mathbf{T}\mathbf{n} &= \mathbb{H}\mathbf{t}_n^*. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Aufgrund der Differenzierbarkeit von  $\mathbb{H}$  kann der linke Term in (3.3.2)<sub>1</sub> gemäß der Identität

$$\mathbb{H}(\operatorname{Div} \mathbf{T}) = \operatorname{Div}(\mathbb{H}\mathbf{T}) - \operatorname{Grad} \mathbb{H}[\mathbf{T}] \quad (3.3.3)$$

umgeformt werden. Für den rechten Term in (3.3.2)<sub>1</sub> folgt aus der Produktregel die Identität

$$\rho_0 \mathbb{H}\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}(\rho_0 \mathbb{H}\dot{\mathbf{x}}) - \dot{\rho}_0 \mathbb{H}\dot{\mathbf{x}} \quad \text{wegen } \dot{\rho}_0 = 0. \quad (3.3.4)$$

Damit lautet der gewichtete Impulssatz

$$\operatorname{Div}(\mathbb{H}\mathbf{T}) - \operatorname{Grad} \mathbb{H}[\mathbf{T}] + \mathbb{H}\mathbf{f} - \frac{d}{dt}(\rho_0 \mathbb{H}\dot{\mathbf{x}}) + \dot{\rho}_0 \mathbb{H}\dot{\mathbf{x}} = 0. \quad (3.3.5)$$

Nun werden die Gleichungen (3.3.5) und (3.3.2)<sub>2</sub> über einen Teilbereich  $\mathcal{P}_0^{\text{sub}} \times [t_1, t_2]$  des Definitionsbereiches  $\mathcal{P}_0 \times \mathbb{T}$  integriert

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{P}_0^{\text{sub}}} \operatorname{Div}(\mathbb{H}\mathbf{T}) - \operatorname{Grad} \mathbb{H}[\mathbf{T}] + \mathbb{H}\mathbf{f} - \frac{d}{dt}(\rho_0 \mathbb{H}\dot{\mathbf{x}}) + \dot{\rho}_0 \mathbb{H}\dot{\mathbf{x}} \, dV dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\mathcal{P}_0^{\text{sub},f}} (\mathbb{H}\mathbf{t}_n^* - \mathbb{H}\mathbf{T}\mathbf{n}) \, dS dt = 0 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes und der partiellen Integration folgt aus (3.3.6)

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} -\text{Grad } \mathbb{H}[\mathbf{T}] + \mathbb{H}\mathbf{f} + \rho_0 \mathbb{H}\dot{\mathbf{x}} \, dV dt \\
 & - \left[ \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \rho_0 \mathbb{H}\dot{\mathbf{x}} \, dV \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\mathcal{P}_0^{sub}} \mathbb{H}\mathbf{T}\mathbf{n} \, dS dt \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\mathcal{P}_{0,f}^{sub}} (\mathbb{H} \mathbf{t}_n^* - \mathbb{H}\mathbf{T}\mathbf{n}) \, dS dt = 0.
 \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Auf der Randfläche  $\partial\mathcal{P}_{0,f}^{sub}$  heben sich die beiden  $\mathbb{H}\mathbf{T}\mathbf{n}$ -Terme in (3.3.6) heraus. Die verbleibende Randfläche  $\partial\mathcal{P}_0^{sub} \setminus \partial\mathcal{P}_{0,f}^{sub}$  setzt sich aus dem inneren Rand  $\partial\mathcal{P}_{0,i}^{sub}$  und der Randfläche  $\partial\mathcal{P}_{0,d}^{sub}$  mit vorgeschriebenen Verschiebungen zusammen. Anders als bei dem Prinzip der virtuellen Arbeit (3.2.6), wo der Term  $\int_{\partial\mathcal{P}_{0,d}^{sub}} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \delta\mathbf{x} \, dS$  aufgrund der Bedingung  $\delta\mathbf{x} = 0$  entfällt, bleibt in (3.3.7) die entsprechende gewichtete Spannung auf  $\partial\mathcal{P}_{0,d}^{sub}$  erhalten. Die Vereinigungsmenge der Randflächen  $\partial\mathcal{P}_{0,d}^{sub}$  und  $\partial\mathcal{P}_{0,i}^{sub}$  sei  $\partial\mathcal{P}_{0,di}^{sub}$ . Damit läßt sich (3.3.7) nun als (3.3.8) schreiben.

Es wird nun gezeigt, daß die rein formale Transformation der Grundgleichungen (3.3.2) in die Form (3.3.8) auf eine prinzipielle Aussage der Mechanik führt.

### 3.2 Prinzip der gewichteten Spannungen

Die formale Transformation der Grundgleichungen (3.3.2) mittels des Operatorfeldes  $\mathbb{H}$  führt auf Gleichung (3.3.8), welche als *theorem of stress means* (siehe TRUESDELL & NOLL [121] (216.2)) bekannt ist. Sie soll hier als *Prinzip der gewichteten Spannungen* <sup>7)</sup> bezeichnet werden und lautet

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} (-\text{Grad } \mathbb{H}[\mathbf{T}] + \mathbb{H}\mathbf{f} + \rho_0 \mathbb{H}\dot{\mathbf{x}}) \, dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\mathcal{P}_{0,f}^{sub}} \mathbb{H} \mathbf{t}_n^* \, dS dt \\
 & - \left[ \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \rho_0 \mathbb{H}\dot{\mathbf{x}} \, dV \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\mathcal{P}_{0,di}^{sub}} \mathbb{H}\mathbf{T}\mathbf{n} \, dS dt = 0.
 \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

Wird die Gleichung (3.3.8) nicht aus dem Impulssatz abgeleitet, sondern als

<sup>7)</sup>Die exakte Übersetzung von *stress means* lautet *Spannungsmittelwerte*. Diese Bezeichnung wird in TRUESDELL & NOLL [121] im Zusammenhang mit Arbeiten von SIGNORINI und MAXWELL benutzt. Sie soll hier nicht verwendet werden, da der Operator  $\mathbb{H}$  hier nicht speziell zur Mittelwertbildung, sondern zur allgemeinen Gewichtung der Spannungsverläufe dient.

grundlegendes Prinzip postuliert, so lassen sich ihrerseits der Impulssatz, der Drehimpulssatz und der Energiesatz daraus ableiten. Diese Ableitung hängt nur von der Wahl des Operators  $\mathbb{H}$  ab. Die Herleitung jener drei Sätze geschieht folgendermaßen:

**(i) Impulssatz** Wird als Vektorraum  $\mathbb{V}$  der Euklidische Vektorraum  $\mathbb{E}$  gewählt, so bildet der Operator  $\mathbb{H}$  ein Tensorfeld über  $\mathcal{P}_0 \times \mathbb{T}$  mit Werten in  $\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$ . Benutzt man ferner den Einheitstensor  $\mathbf{I} \in \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$  als konstantes Operatorfeld  $\mathbb{H}$ , so folgt aus (3.3.8) der globale Impulssatz

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \mathbf{f} \, dV \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \mathcal{P}_{0,f}^{sub}} \dot{\mathbf{t}}_n \, dS \, dt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \mathcal{P}_{0,di}^{sub}} \mathbf{T} \mathbf{n} \, dS \, dt = \left[ \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dV \right]_{t_1}^{t_2}. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Dieses Ergebnis überrascht nicht, da  $\mathbb{H} = \mathbf{I}$  in (3.3.2) voraussetzungsgemäß den lokalen Impulssatz liefert.

**(ii) Drehimpulssatz** Nun nehme  $\mathbb{H}$  wiederum Werte in  $\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$  an, sei aber jetzt als zu  $\mathbf{x}$  adjungierter Operator  $\mathbf{\Omega}$  definiert, so daß gilt  $\mathbf{x} = \text{axial}(\mathbf{\Omega})$ . Für jeden Vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{E}$  gilt dann  $\mathbf{\Omega} \mathbf{u} = \mathbf{x} \times \mathbf{u}$ . Dann folgt mit  $\mathbb{H} = \mathbf{\Omega}$  aus (3.3.8) der Drehimpulssatz. Zunächst ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} (-\text{Grad } \mathbf{\Omega}[\mathbf{T}] + \mathbf{x} \times \mathbf{f} + \rho \dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}}) \, dV \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \mathcal{P}_{0,f}^{sub}} \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{t}}_n \, dS \, dt \\ - \left[ \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} (\rho \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}) \, dV \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \mathcal{P}_{0,id}^{sub}} \mathbf{x} \times \mathbf{T} \mathbf{n} \, dS \, dt = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Da  $\mathbf{\Omega}$  schiefssymmetrisch ist,  $\mathbf{\Omega} \in \text{Skw}(\mathbb{E})$ , gilt  $\mathbf{\Omega}^\top = -\mathbf{\Omega}$ . Damit kann der Term  $\text{Grad } \mathbf{\Omega}[\mathbf{T}]$  folgendermaßen umgeformt werden

$$\begin{aligned} \text{Grad } \mathbf{\Omega}[\mathbf{T}] &= (\mathbf{\Omega}_{,A} \cdot (\mathbf{T}^B \otimes \mathbf{G}_B)) \mathbf{G}^A \\ &= ((\mathbf{\Omega}_{,A} \mathbf{T}^B) \cdot \mathbf{G}_B) \mathbf{G}^A \\ &= -((\mathbf{\Omega}_{,A} \mathbf{T}^B) \cdot \mathbf{G}_B) \mathbf{G}^A \\ &= -((\mathbf{x}_{,A} \times \mathbf{T}^B) \cdot \mathbf{G}_B) \mathbf{G}^A \\ &= \text{axial}(\mathbf{T} \mathbf{F}^\top - \mathbf{F} \mathbf{T}^\top) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Der Term  $\text{Grad } \mathbf{\Omega}[\mathbf{T}]$  verschwindet also gerade dann, wenn die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors gilt. Zusätzlich entfällt der Term  $\dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}}$

in (3.3.10) gemäß der Definition des Kreuzproduktes, so daß letztlich aus (3.3.8) der globale Drehimpulssatz folgt

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \mathbf{x} \times \mathbf{f} \, dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \mathcal{P}_{0,i}^{sub}} \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n^* \, dS dt \\ & - \left[ \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \rho \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} \, dV \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \mathcal{P}_{0,di}^{sub}} \mathbf{x} \times \mathbf{Tn} \, dS dt = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

**(iii) Energiesatz** Es sei  $\mathbb{H}$  wieder ein Operatorfeld mit Werten in  $\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}$  und definiert als  $\mathbb{H} = \mathbf{c} \otimes \dot{\mathbf{x}}$ , wobei  $\mathbf{c}$  ein konstanter Vektor sei. Nach dem Einsetzen von  $\mathbb{H}$  in (3.3.8) und einer kurzer Umformung, wobei insbesondere  $\mathbf{c} \otimes$  vor das Integral gezogen wird, ergibt sich schließlich der Energiesatz oder die Leistungsbilanz

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} (-\text{Grad}(\dot{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \rho \ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \, dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \mathcal{P}_{0,f}^{sub}} \mathbf{t}_n^* \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dS dt \\ & - \left[ \int_{\mathcal{P}_0^{sub}} \rho \ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dV \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \mathcal{P}_{0,di}^{sub}} (\mathbf{Tn}) \cdot \dot{\mathbf{x}} \, dS dt = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

### 3.3 Anwendung auf die Schalentheorie

Das Prinzip der gewichteten Spannungen wird nun zur Herleitung allgemeiner Schalentheorien benutzt. Es gelten die Annahmen, die in (3.2.7) - (3.2.17) bezüglich der Geometrie eines Schalenkörpers getroffen wurden. Nach dem Einsetzen der entsprechenden geometrischen Beziehungen in (3.3.8) entsteht der folgende Ausdruck

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{K}_0^{sub}} \int_{-}^{+} (-\text{Grad} \mathbb{H}[\mathbf{T}] + \rho_0 \mathbb{H} \dot{\mathbf{x}}) j \, d\zeta dA dt \\ & - \left[ \int_{\mathcal{K}_0^{sub}} \int_{-}^{+} \rho_0 \mathbb{H} \dot{\mathbf{x}} j \, d\zeta dA \right]_{t_1}^{t_2} \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{K}_0^{sub}} \left( \int_{-}^{+} \mathbb{H} \mathbf{f} j \, d\zeta \pm (\mathbb{H} \mathbf{t}_n^*)^\pm j^\pm \right) dA dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \mathcal{K}_{0,di}^{sub}} \int_{-}^{+} \mathbb{H} \mathbf{t}_n j \, d\zeta ds dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial \mathcal{K}_{0,f}^{sub}} \int_{-}^{+} \mathbb{H} \mathbf{t}_n j^\circ \, d\zeta ds dt = 0. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Aus den einzelnen Termen werden nun durch Integration über die Schalenstärke die Spannungsergebnisse gewonnen. Die hierbei entstehenden

gewichteten Spannungsergebnissen werden *gewichtete Momente* genannt. Im einzelnen ergeben sich folgende Ausdrücke:

(i) Der Gradient des gewichteten 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors kann als

$$\int_{\mathcal{K}_0^{sub}} \int_{-}^{+} \text{Grad } \mathbb{H}[\mathbf{T}]j \, d\zeta \, dA = \int_{\mathcal{K}_0^{sub}} \int_{-}^{+} \mathbb{H}_{,i} \mathbf{T}^i j \, d\zeta \, dA \quad (3.3.15)$$

geschrieben werden. Die Auswertung des Dickenintegrals führt auf das gewichtete Moment  $\mathfrak{m}$ , definiert als

$$\mathfrak{m} := \int_{-}^{+} \mathbb{H}_{,i} \mathbf{T}^i j \, d\zeta \quad \text{auf } \mathcal{K}_0. \quad (3.3.16)$$

(ii) Die äußeren Lasten, das sind die Volumenkraftdichte  $\mathbf{f}$  und die Flächenlast  $\mathbf{t}_n$ , gehen in folgende Terme ein

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_0^{sub}} \left( \int_{-}^{+} \mathbb{H} \mathbf{f} j \, d\zeta \pm (\mathbb{H} \mathbf{t}_n)^{\pm} j^{\pm} \right) dA, \\ \int_{\partial \mathcal{K}_{0,f}^{sub}} \int_{-}^{+} \mathbb{H} \mathbf{t}_n j^{\circ} \, d\zeta \, ds. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Nach Integration über die Schalendicke definiert der erste Term die gewichteten Flächenlastmomente  $\mathfrak{l}$ , die aus der Volumenkraft und den Flächenlasten auf der oberen und unteren Randfläche gebildet werden. Der zweite Term in (3.3.17) liefert gewichtete Randmomente  $\mathfrak{m}_v$ , die aus den vorgeschriebenen Randspannungen der seitlichen Schalenrandfläche resultieren. Die beiden Definitionen lauten

$$\begin{aligned} \mathfrak{l} &:= \int_{-}^{+} \mathbb{H} \mathbf{f} j \, d\zeta + [\mathbb{H} \mathbf{t}_n j]_{-}^{+} \quad \text{auf } \mathcal{K}_0, \\ \mathfrak{m}_v &:= \int_{-}^{+} (\mathbb{H} \mathbf{t}_n j)|_{\partial \mathcal{K}_{0,f}^{sub}} \, d\zeta \quad \text{auf } \partial \mathcal{K}_{0,f}. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

(iii) Auf dem Rand  $\partial \mathcal{K}_{0,di}^{sub}$  sind keine Spannungen vorgeschrieben. Die Randspannungen  $\mathbf{t}_n$  ergeben sich aus dem Spannungstensor  $\mathbf{T}$  gemäß  $\mathbf{t}_n = \mathbf{T} \mathbf{n}$ . Mit der Beziehung (3.2.15)<sub>2</sub> erhält man

$$\int_{\partial \mathcal{K}_{0,di}^{sub}} \int_{-}^{+} \mathbb{H} \mathbf{t}_n j \, d\zeta \, ds = \int_{\partial \mathcal{K}_{0,di}^{sub}} \int_{-}^{+} \mathbb{H} \mathbf{T}^{\beta} j \, d\zeta \, \nu_{\beta} \, ds. \quad (3.3.19)$$

Daraus folgt die Definition des gewichteten Momentes  $\mathfrak{m}^{\beta}$

$$\mathfrak{m}^{\beta} := \int_{-}^{+} (\mathbb{H} \mathbf{T}^{\beta} j)|_{\partial \mathcal{K}_{0,di}^{sub}} \, d\zeta \quad \text{auf } \partial \mathcal{S}_{0,di}^{sub}. \quad (3.3.20)$$

(iv) Die beiden dynamischen Terme in (3.3.8) sind

$$\int_{\mathcal{X}_0^{sub}} \int_{-}^{+} \rho_0 \dot{H} \dot{x}^j d\zeta dA \quad \text{und} \quad \int_{\mathcal{X}_0^{sub}} \int_{-}^{+} \rho_0 H \dot{x}^j d\zeta dA. \quad (3.3.21)$$

Sie führen auf die zwei gewichteten Momente  $\mathfrak{d}$  und  $\mathfrak{k}$ , definiert als

$$\begin{aligned} \mathfrak{d} &:= \int_{-}^{+} \rho_0 \dot{H} \dot{x}^j d\zeta && \text{auf } \mathcal{S}_0 \\ \mathfrak{k} &:= \int_{-}^{+} \rho_0 H \dot{x}^j d\zeta && \text{auf } \mathcal{S}_0. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

### 3.4 Resultierende Schalengleichungen

Nach dem Einsetzen der resultierenden Momente (3.3.16), (3.3.18), (3.3.20) und (3.3.22) in das Prinzip der gewichteten Spannungen (3.3.8) ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{S}_0^{sub}} (-\mathfrak{m} + \mathfrak{l} + \mathfrak{d}) dAdt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\mathcal{S}_{0,di}^{sub}} \mathfrak{m}^\beta \nu_\beta dsdt \\ - \left[ \int_{\mathcal{S}_0^{sub}} \mathfrak{k} dA \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\mathcal{S}_{0,f}^{sub}} \mathfrak{m}^*_{\nu} dsdt = 0. \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

Die Randterme können durch Anwendung des Greenschen Satzes integriert werden und liefern

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathcal{S}_0^{sub}} (\mathfrak{m}^\beta|_\beta - \mathfrak{m} + \mathfrak{l} + \mathfrak{d} - \dot{\mathfrak{k}}) dAdt \\ + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\mathcal{S}_{0,f}^{sub}} (\mathfrak{m}^*_{\nu} - \mathfrak{m}^\beta \nu_\beta) dsdt = 0. \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

Unter der üblichen Annahme, daß (3.3.24) für jeden Teilkörper gilt, folgt, daß die beiden eingeklammerten Terme in (3.3.24) unabhängig voneinander zu null werden müssen. Dann gilt

$\begin{aligned} \mathfrak{m}^\beta _\beta - \mathfrak{m} + \mathfrak{l} = \dot{\mathfrak{k}} - \mathfrak{d} && \text{auf } \mathcal{S}_0 \times \mathbb{T} \\ \mathfrak{m}^*_{\nu} = \mathfrak{m}^\beta \nu_\beta && \text{auf } \partial\mathcal{S}_{0,f} \times \mathbb{T}. \end{aligned}$	(3.3.25)
---	----------

#### 3.4.1 Beispiel: Schalenmodell von Libai und Simmonds

Als Beispiel für die Anwendung der Methode der gewichteten Momente wird nun gezeigt, daß die Schalengleichungen von LIBAI & SIMMONDS [60] (siehe

auch SIMMONDS [105]) nach Wahl des  $\mathbb{H}$ -Operators direkt hergeleitet werden können. Hierzu wird angenommen, daß der  $\mathbb{H}$ -Operator ein 2-Tupel aus Tensoren 2. Stufe sei, welches als

$$\begin{aligned} \mathbb{H} := (\mathbf{H}_0, \mathbf{H}_1) := (\mathbf{I}, \text{axial}^{-1}(\mathbf{x})) : \quad \mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E} \times \mathbb{E}, \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbb{H}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{I}\mathbf{a}, \mathbf{x} \times \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

definiert ist. Aufgrund (3.3.9)-(3.3.11) wird deutlich, daß ein solches Modell sowohl den Impulssatz, wie auch den Drehimpulssatz bei der Gewichtung berücksichtigt. Zwecks Übersichtlichkeit der nun folgenden Herleitungen ist es sinnvoll, den Ortsvektor  $\mathbf{x}$  in die Summe

$$\mathbf{x}(\xi^\alpha, \zeta) = \mathbf{y}(\xi^\alpha) + \mathbf{z}(\xi^\alpha, \zeta) \quad (3.3.27)$$

zu zerlegen. Dabei ist  $\mathbf{y}(\xi^\alpha)$  der Ortsvektor an die verformte Schalenmittelfläche und  $\mathbf{z}(\xi^\alpha, \zeta) \in \mathbb{E}$  ist als Differenzvektor  $\mathbf{z} := \mathbf{x} - \mathbf{y}$  definiert (siehe Abb. 3.4). Es ist zu beachten, daß die Zerlegung (3.3.27) keine Einschränkung der Schalenkinematik darstellt, wie es z.B.  $\mathbf{x}(\xi^\alpha, \zeta) = \mathbf{y}(\xi^\alpha) + \zeta \mathbf{d}(\xi^\alpha)$  tut, da  $\mathbf{z}(\xi^\alpha, \zeta)$  jede beliebige Kinematik abbilden kann. Wegen der 2-Tupel-form des Operators  $\mathbb{H}$  ergeben sich alle in (3.3.15)-(3.3.22) definierten gewichteten Momente ebenso als 2-Tupel vektorieller Größen, z.B.  $\mathfrak{m} = (\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1)$ . Die Indizierung (0,1) anstatt (1,2) entspricht der gebräuchlichen Bezeichnung *Momente nullter Ordnung* bzw. *Momente erster Ordnung*.

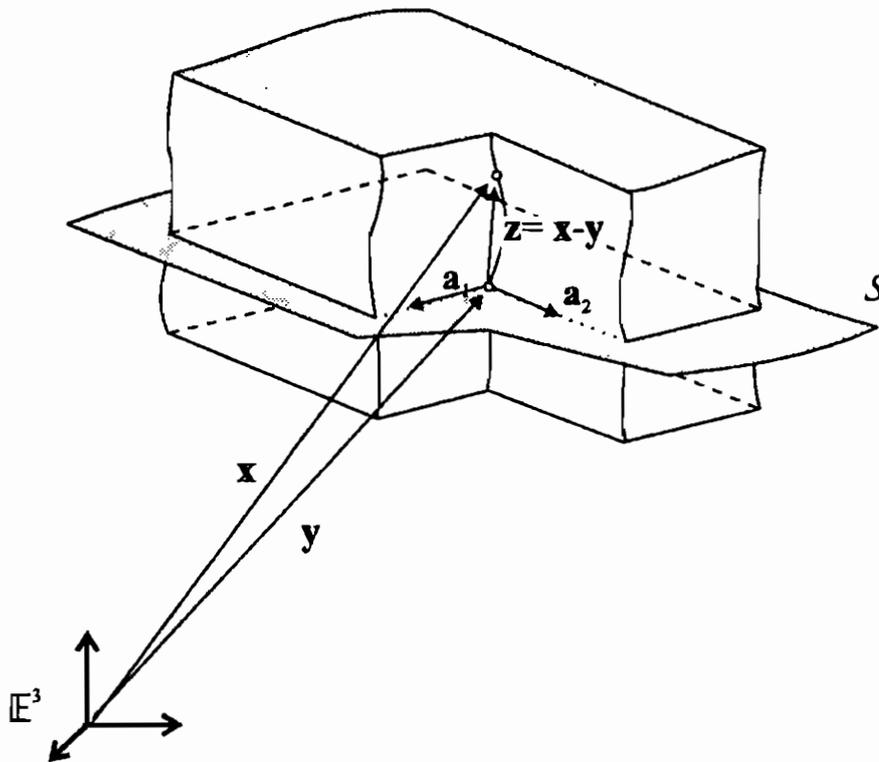
Der tensorwertige Operator  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}$  definiert jene Spannungsergebnisse, die aus dem Impulssatz durch Integration über die Schalendicke gewonnen werden. Der Operator  $\mathbf{H}_1 = \text{axial}^{-1}(\mathbf{x})$  definiert hingegen solche Resultierenden, die aus dem Drehimpulssatz gewonnen werden. Für die in (3.3.15)-(3.3.22) definierten gewichteten Momente ergeben sich nun folgende Ausdrücke:<sup>8)</sup>

(i) Für die Größe  $\mathfrak{m}$  findet man

$$\mathfrak{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_0 \\ \mathbf{m}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-}^{+} \mathbf{I}_{,i} \mathbf{T}^i{}_j d\zeta \\ \int_{-}^{+} \mathbf{x}_{,i} \times \mathbf{T}^i{}_j d\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.3.28)$$

Das Verschwinden von  $\mathbf{m}_1$  ist durch die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors begründet. In der 3-dimensionalen Kontinuumsmechanik gilt (3.2.1)<sub>2</sub> oder alternativ  $\mathbf{x}_{,i} \times \mathbf{T}^i = \mathbf{0}$ . Dieses Resultat des

<sup>8)</sup>Die 2-Tupel werden im folgenden in Spaltenschreibweise notiert, d.h.  $\begin{pmatrix} \mathbf{m}_0 \\ \mathbf{m}_1 \end{pmatrix}$  anstatt  $(\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1)$ .


 Abbildung 3.4: Definition des Vektors  $z$ 

Drehimpulssatzes wird also in den gewichteten Momenten berücksichtigt.

- (ii) Die Größe  $\mathfrak{l}$  enthält die Kontaktspannungen  $\mathfrak{t}_n^*$  und Volumenkraftdichten  $\mathfrak{f}$ , die aufgrund äußerer Einflüsse auf die Schale wirken. Durch Integration über die Schalendicke ergeben sich die folgenden resultierenden Größen

$$\mathfrak{l} = \begin{pmatrix} \mathfrak{l}_0 \\ \mathfrak{l}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-}^{+} \mathfrak{f}_j d\zeta + [\mathfrak{t}_{nj}^*]_{-}^{+} \\ \int_{-}^{+} \mathbf{x} \times \mathfrak{f}_j d\zeta + [\mathbf{x} \times \mathfrak{t}_{nj}^*]_{-}^{+} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathfrak{l} + \mathbf{y} \times \mathbf{p} \end{pmatrix}. \quad (3.3.29)$$

Hier ist  $\mathbf{p}$  als übliches Symbol für die Flächenlasten eingeführt worden. Die Größe  $\mathfrak{l} := \int_{-}^{+} \mathbf{z} \times \mathfrak{f}_j d\zeta + [\mathbf{z} \times \mathfrak{t}_{nj}^*]_{-}^{+}$  bildet die äußere Momentenlast auf der Schalenreferenzfläche.

- (iii) Das gewichtete Moment  $\mathfrak{m}^\beta$  erlaubt folgende Darstellung

$$\mathfrak{m}^\beta = \begin{pmatrix} \mathfrak{m}_0^\beta \\ \mathfrak{m}_1^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-}^{+} \mathbf{T}^{\beta j} d\zeta \\ \int_{-}^{+} \mathbf{z} \times \mathbf{T}^{\beta j} d\zeta + \mathbf{y} \times \mathbf{N}^\beta \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mathbf{N}^\beta \\ \mathbf{M}^\beta + \mathbf{y} \times \mathbf{N}^\beta \end{pmatrix}.$$

Die Größe  $\mathbf{N}^\beta$  ist ein Spannungstensor, der als Komponenten die resultierenden Normal-, Schub- und Dickenspannungen enthält. Die Größe  $\mathbf{M}^\beta$  beschreibt die Momentenspannungen, welche sich in resultierende Biege-, Torsions- und Drillmomente aufteilen lassen.

- (iv) Die Spannungsresultierende  $\mathbb{k}$  berücksichtigt den gewichteten Impuls und Drehimpuls des Schalenkörpers

$$\mathbb{k} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_0 \\ \mathbf{k}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-}^{+} \rho_0 \dot{\mathbf{x}}_j d\zeta \\ \int_{-}^{+} \rho_0 \mathbf{z} \times \dot{\mathbf{x}}_j d\zeta + \mathbf{y} \times \mathbf{k} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{w} + \mathbf{y} \times \mathbf{k} \end{pmatrix}.$$

Die Größen  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{w}$  sind die gewichtete Impulsdichte bzw. der gewichtete Drall, auch Spinvektor genannt.

- (vi) Schließlich bleibt nur noch  $\mathbf{d}$  zu spezifizieren. Das Einsetzen des  $\mathbb{H}$ -Operators liefert

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-}^{+} \rho_0 \dot{\mathbf{l}} \dot{\mathbf{x}}_j d\zeta \\ \int_{-}^{+} \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}}_j d\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (3.3.30)$$

Eine Interpretation der Größe  $\mathbf{d}$  ist hier nicht möglich, da die Vektoren  $\mathbf{d}_0$  und  $\mathbf{d}_1$  in diesem Modell nicht in Erscheinung treten.

Nach dem Einsetzen der unter (i-v) definierten gewichteten Momente in (3.3.25)<sub>1</sub> ergeben sich die folgenden resultierenden Schalengleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^\beta|_\beta + \mathbf{p} &= \dot{\mathbf{k}}, \\ (\mathbf{M}^\beta + \mathbf{y} \times \mathbf{N}^\beta)|_\beta + (\mathbf{l} + \mathbf{y} \times \mathbf{p}) &= \frac{d}{dt}(\mathbf{w} + \mathbf{y} \times \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3.3.31)$$

Die letzte Gleichung kann noch weiter vereinfacht werden. Durch Einsetzen von (3.3.31)<sub>1</sub> in (3.3.31)<sub>2</sub> heben sich entsprechende Terme heraus und es entstehen die beiden Schalengleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^\beta|_\beta + \mathbf{p} &= \dot{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{M}^\beta|_\beta + \mathbf{y}_{,\beta} \times \mathbf{N}^\beta + \mathbf{l} &= \dot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

welche in LIBAI & SIMMONDS [60] oder CHROSCIELEWSKI ET AL. [26] verwendet werden.

**Anmerkung.** Die Feldgleichungen (3.3.32) entsprechen denen von LIBAI & SIMMONDS [60] nur in bezug auf die statischen Terme. Die dynamischen Größen sind unterschiedlich, da LIBAI und SIMMONDS ihre Feldgrößen auf eine Schalenfläche beziehen, die *keine* materielle Fläche darstellt. Sie verwenden eine Referenzfläche, die als gewichtete Fläche definiert ist. Hier hingegen, wurde  $\mathcal{S}$  grundsätzlich als materielle Fläche eingeführt. Damit sind in dieser Arbeit alle Zeitableitungen mit konstantem Ortsargument  $\xi^\alpha$  auch immer materielle Zeitableitungen. In der Arbeit von LIBAI & SIMMONDS [60] sind die Zeitableitungen *nicht* materiell. Diese Tatsache muß bedacht werden, denn Zeitableitung und Dickenintegration verhalten sich bei nicht-materieller Darstellung *nicht* kommutativ.

## 4 Vergleich und Diskussion der beiden Methoden

Zunächst fällt auf, daß die Methode der Zwangsbedingungen und die Methode der gewichteten Momente zu formal identischen Schalengleichungen (3.2.37) bzw. (3.3.25) führen. Selbst die Definition der Spannungsresultierenden ist formal identisch:

Methode der Zwangsbedingungen	Methode der gewichteten Momente
$m^\alpha := \int_{-}^{+} \mathbb{B}^\top \mathbf{T}^\alpha j d\zeta$	$m^\beta := \int_{-}^{+} \mathbb{H} \mathbf{T}^\beta j d\zeta,$
$m := \int_{-}^{+} \mathbb{B}_{,i}^\top \mathbf{T}^i j d\zeta$	$m := \int_{-}^{+} \mathbb{H}_{,i} \mathbf{T}^i j d\zeta.$

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Methoden ist allerdings, daß der Operator  $\mathbb{H}$  in der Methode der gewichteten Momente als primäre Größe betrachtet wird, während der Operator  $\mathbb{B}$  in der Methode der Zwangsbedingungen aus der Funktion  $\mathbf{b}$  abgeleitet wird. Daraus resultieren verschiedene Stetigkeitsanforderungen an die Operatoren.

Wesentlicher als die unterschiedliche Stetigkeit ist die Tatsache, daß die Methode der gewichteten Momente keine Reaktionsspannungen hervorruft. Die Gleichungen (3.3.1) gelten exakt und werden auf eine gewichtete 2-dimensionale Form (3.3.25) überführt. Dagegen gelten für die Methode der

Zwangsbedingungen die 3-dimensionalen Gleichungen (3.2.83), aus denen die reaktiven Spannungen durch Multiplikation mit den zulässigen virtuellen Verschiebungen eliminiert werden. Diese sind aber nicht null, sondern bleiben unbestimmt.

Die Methode der gewichteten Momente soll aus diesem Grund als statisch exakt bezeichnet werden. Die Kinematik dieser Methode ist unbestimmt. Man kann zwar zu jedem resultierenden Spannungsvektor einen entsprechenden Verschiebungsvektor definieren, es bleibt aber unbestimmt, wie dieser Vektor von den 3-dimensionalen Verschiebungen abhängt. Die Methode der gewichteten Momente ist dagegen kinematisch exakt, da die gewählte Kinematik als Zwangsbedingung identisch erfüllt wird. Die daraus resultierenden Spannungen und die Gleichgewichtsbedingungen vernachlässigen aber reaktive Anteile.

Die Methode der gewichteten Momente erscheint somit als ein interessanter Ansatz zur Formulierung von Schalenmodellen. Es muß jedoch zukünftig geklärt werden, in welcher Weise sich mit dieser Methode kinematische Größen und konstitutive Beziehungen zu den Gleichgewichtsbedingungen finden lassen.



## Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde eine kovariante Beschreibung der modernen Kontinuumsmechanik unter Berücksichtigung von Mikrostruktur und nicht-lokalem Materialverhalten gegeben. Es wurden allgemeine Methoden zur Entwicklung der Feldgleichungen für Kontinua mit Mikrostruktur und Schalentheorien vorgestellt und an diversen Beispielen erläutert.

Die hier aufgestellte Beschreibung der Kinematik von Deformationen basiert vollständig auf Abbildungen zwischen metrischen Vektorräumen und läßt sich daher auf solche Körper anwenden, für die eine Einbettung in den Euklidischen Raum nicht möglich ist. Als Anwendungsbereiche können hier die finite Elasto-Plastizitätstheorie und die nichtlineare Kontinuumsmechanik der Versetzungen genannt werden. Die in dieser Arbeit definierten *push-forward*- und *pull-back*-Operationen ermöglichen eine einfache und strukturierte Darstellung der Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Deformations- und Dehnungsmaßen. Vor allem aber ist die *Lie-Ableitung* ein wesentliches Hilfsmittel bei der Suche nach objektiven Dehnungsraten und konjugierten Spannungstensoren. Die Definitionen der Lie-Ableitung und der push-pull-Operationen konnten hier in eindeutiger Weise angegeben werden. Es wurde gezeigt, daß die verwendeten Definitionen nicht zu den in der Literatur bekannten Inkonsistenzen führen. Es wurde ferner demonstriert, wie man den Übergang zur klassischen Schreibweise ausführen muß. Die hier vorgestellte Interpretation der *Doyle-Ericksen-Gleichung* und ihrer Varianten erlaubt eine völlig neue Betrachtung der Rolle der Metrikensoren in einer kovarianten Formulierung. Die übliche Beschreibung der Kinematik und der konstitutiven Beziehungen in *mitbewegten* Bezugssystemen muß vor diesem Hintergrund kritisch überprüft werden. Eine solche Überprüfung auf dem Gebiet der finiten Elasto-Plastizitätstheorie ist bereits Gegenstand weiterer Untersuchungen.

Das im zweiten Kapitel betrachtete *allgemeine Prinzip der virtuellen Arbeit* ermöglicht die Herleitung der Feldgleichungen unterschiedlicher Kontinua mit Mikrostruktur und Schalentheorien aus einem *gemeinsamen* Ansatz. Dieser gemeinsame Rahmen basiert auf einer differentialgeometrischen Beschreibung der Kontinuumsmechanik als Abbildung zwischen einer Basismannigfaltigkeit und einer Zustandsmannigfaltigkeit. Die abstrakte geome-

trische Struktur wurde hier nur in Ansätzen skizziert. Ihre vollständige Entwicklung bedarf weiterer Untersuchungen. Stattdessen wurde der formale Ansatz als (rezeptartige) Methode präsentiert, die sich auf eine Vielzahl verschiedener Kontinuums- und Schalenmodelle anwenden läßt. Diese Methode ermöglicht eine Erweiterung kontinuumsmechanischer Modelle entsprechend der Klassifizierung von KRÖNER. Es zeigte sich, daß die Herleitung der allgemeinen Feldgleichungen solcher Modelle allein von den angenommenen Zustandsvariablen, der geometrischen Struktur der Basismannigfaltigkeit und den Invarianzbedingungen abhängt. Es werden keine weiteren Postulate benötigt. Diese Tatsache macht den universellen Charakter eines solchen Ansatzes aus. Weitere Untersuchungen auf diesem Gebiet sollten klären, ob dieser Rahmen allgemein genug ist, um eine vollständige thermodynamische Beschreibung zu ermöglichen, und welche Rolle der Temperatur in einem solchen Zusammenhang zukommt. Ein vollständig entwickelter Rahmen sollte letztlich zu einer übersichtlichen Klassifizierung der verschiedenen Modellvarianten in der Kontinuumsmechanik, der Schalentheorie und der Balkentheorie führen. Die Balkentheorie erhält man aus dem allgemeinen Rahmen durch Betrachtung einer 1-dimensionalen Körpermannigfaltigkeit.

Eine Klassifizierung von Schalenmodellen fällt insofern schwer, da der Zusammenhang von 3-dimensionaler Schalenkinematik und 2-dimensionaler Mikrostruktur nicht immer eindeutig ist. Im dritten Kapitel wurden daher zwei zusätzliche Methoden vorgestellt, die eine Herleitung der Feldgleichungen allgemeiner Schalenmodelle aus den Feldgleichungen eines 3-dimensionalen Kontinuums ermöglichen. Mit diesen Methoden lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen fast aller bekannten Schalenmodelle herleiten. Es wurde gezeigt, daß die Verwendung einer angenommenen Schalenkinematik einer Zwangsbedingung gleichkommt. Dadurch entstehen reaktive Spannungen, deren Bedeutung in der Literatur bisher kaum Beachtung fand. Durch Anwendung der Methode der gewichteten Momente können diese reaktiven Spannungen vermieden werden. Allerdings ist dann die Schalenkinematik weitgehend unbestimmt oder kann nur in gewichteter Form angegeben werden. Weitere Untersuchungen müssen klären, ob sich auf der Basis der Methode der gewichteten Momente eine vollständige Schalentheorie entwickeln läßt. Diese hätte aufgrund der genannten Eigenschaften Vorteile gegenüber den herkömmlichen Formulierungen.

## Anhang A

# Tensoralgebra

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Grundbegriffe</b>	<b>235</b>
1.1	Mengen, Relationen, Funktionen	235
1.1.1	Grundbegriffe der Mengenlehre	235
1.1.2	Relationen	236
1.1.3	Funktionen	237
1.2	Grundbegriffe der Algebra	238
1.2.1	Mengen mit inneren Verknüpfungen	238
1.2.2	Mengen mit äußeren Verknüpfungen	239
<b>2</b>	<b>Tensoralgebra</b>	<b>240</b>
2.1	Vektorräume	240
2.1.1	Lineare Abhängigkeit	240
2.1.2	Untervektorräume	241
2.1.3	Direkte Summe	241
2.2	Affine Räume	242
2.2.1	Definition und Bezeichnungen	242
2.2.2	Koordinaten	243
2.2.3	Kartenwechsel	243
2.3	Lineare Abbildungen	243
2.3.1	Definition und Bezeichnungen	243
2.3.2	Multilineare Abbildungen	245
2.3.3	Derivationen	245
2.4	Dualraum	245
2.5	Tensorräume	246
2.5.1	Tensorprodukt	246

---

	2.5.2	Bezeichnungen . . . . .	247
	2.5.3	Grundoperationen auf Tensorräumen . . . . .	247
2.6		Abbildungen auf Tensorräumen . . . . .	248
	2.6.1	Basisvektoren . . . . .	248
	2.6.2	Wechsel der Basisvektoren . . . . .	248
	2.6.3	Lineare Abbildungen durch Tensoren . . . . .	249
	2.6.4	Duale Abbildung . . . . .	249
	2.6.5	Inverse und dual-inverse Abbildung . . . . .	250
2.7		Metrische Vektorräume . . . . .	251
	2.7.1	Bezeichnungen . . . . .	251
	2.7.2	Inneres Produkt . . . . .	253
	2.7.3	Transponierte Abbildung . . . . .	253
	2.7.4	Orthogonale Abbildungen . . . . .	254
	2.7.5	Symmetrische Abbildungen . . . . .	254
	2.7.6	Reziproke Basis . . . . .	255
<b>3</b>		<b>Zusammenstellung hilfreicher Formeln . . . . .</b>	<b>256</b>
	3.1	Schreibweise . . . . .	256
	3.2	Tensoralgebra . . . . .	257
	3.2.1	Lineare Abbildungen und inneres Produkt . . . . .	257
	3.2.2	Transposition . . . . .	257
	3.2.3	Spur . . . . .	258
	3.2.4	Determinante . . . . .	258
	3.2.5	Inverse Abbildung . . . . .	258
	3.2.6	Dachprodukt und Kreuzprodukt . . . . .	258
	3.2.7	Hodge-Operator auf $\mathbb{E}$ . . . . .	258
	3.3	Tensoranalysis . . . . .	259
	3.3.1	Gradient . . . . .	259
	3.3.2	Divergenz . . . . .	259
	3.4	Satz von Stokes und abgeleitete Integralsätze . . . . .	260

---

# 1 Grundbegriffe

## 1.1 Mengen, Relationen, Funktionen

### 1.1.1 Grundbegriffe der Mengenlehre

**Mengen.** Eine Menge ist eine Zusammenfassung gewisser Dinge zu einem Ganzen. Die zusammengefaßten Dinge heißen **Elemente**. Ist  $a$  ein Element der Menge  $\mathcal{M}$ , so schreibt man  $a \in \mathcal{M}$ . Zwei Mengen  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Man schreibt dann  $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ . Eine Menge, deren Elemente wiederum Mengen sind, heißt **Mengensystem**.

**Teilmengen.** Gilt für alle  $x \in \mathcal{M}$  auch  $x \in \mathcal{N}$  so heißt  $\mathcal{M}$  **Teilmenge** von  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ . Gilt außerdem auch  $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$ , so heißt  $\mathcal{M}$  **echte** Teilmenge von  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ . Die Beziehung  $\subseteq$  heißt **Inklusion**.

**Spezielle Mengen.** Die **leere Menge**  $\emptyset$  ist eine Menge ohne Elemente

$$\emptyset := \{x \mid x \neq x\}.$$

Die **Potenzmenge**  $P(\mathcal{M})$  zu einer Menge  $\mathcal{M}$  ist das Mengensystem aller Teilmengen von  $\mathcal{M}$

$$P(\mathcal{M}) := \{\mathcal{X} \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}\}.$$

Die Mengen  $\emptyset$  und  $\mathcal{M}$  sind stets Elemente von  $P(\mathcal{M})$ .

**Vereinigung, Durchschnitt und Differenz.**  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  seien Mengen. Dann heißt die Menge

- (i)  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x \mid x \in \mathcal{A} \text{ und } x \in \mathcal{B}\}$  die **Durchschnittsmenge** von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ ;
- (ii)  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x \mid x \in \mathcal{A} \text{ oder } x \in \mathcal{B}\}$  die **Vereinigungsmenge** von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ ;
- (iii)  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \{x \mid x \in \mathcal{A} \text{ und } x \notin \mathcal{B}\}$  die **Differenz** oder  $\mathcal{A}$  ohne  $\mathcal{B}$ ;

Für Mengen  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  gelten die folgenden Beziehungen

$$\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}),$$

$$\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}).$$

Sind  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  Teilmengen einer Menge  $\mathcal{X}$ , so gelten

$$\mathcal{X} \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = (\mathcal{X} \setminus \mathcal{A}) \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{B}),$$

$$X \setminus (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = (X \setminus \mathcal{A}) \cup (X \setminus \mathcal{B}).$$

Diese Beziehungen werden Formeln von *de Morgan* genannt.

**Kartesisches Produkt.** Ein geordnetes Paar  $(x, y)$  zweier Elemente  $x, y$  ist eine Menge

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Während für die ungeordnete Menge  $\{x, y\}$  die Reihenfolge der Elemente keine Rolle spielt,  $\{x, y\} = \{y, x\}$ , gilt für die geordnete Menge  $(x, y) \neq (y, x)$ , falls  $x \neq y$ .

Das **kartesische Produkt**  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  zweier Mengen  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  ist wiederum eine Menge, definiert als

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{(x, y) \mid x \in \mathcal{A} \text{ und } y \in \mathcal{B}\}.$$

Für drei Mengen  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  gelten die folgenden Beziehungen

$$(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \times \mathcal{C} = (\mathcal{A} \times \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \times \mathcal{C}),$$

$$(\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \times \mathcal{C} = (\mathcal{A} \times \mathcal{C}) \setminus (\mathcal{B} \times \mathcal{C}),$$

$$(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \cap (\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = (\mathcal{C} \cap \mathcal{A}) \times (\mathcal{C} \cap \mathcal{B}).$$

**Zerlegung.** Ein Mengensystem  $\mathcal{M} \subseteq P(\mathcal{A})$  heißt **Zerlegung** von  $\mathcal{A}$ , falls gilt

- (i)  $\emptyset \notin \mathcal{M}$ ;
- (ii)  $\mathcal{M}$  ist disjunkt, d.h.  $X \cap Y = \emptyset$ ,  $\forall X, Y \in \mathcal{M}$ ;
- (iii)  $\bigcup \mathcal{M} = \mathcal{A}$ .

Die Vereinigung  $\bigcup \mathcal{M}$  eines Mengensystems bedeutet die Vereinigung aller in  $\mathcal{M}$  enthaltenen Mengen.

### 1.1.2 Relationen

Eine **binäre Relation**  $\mathcal{R}$  auf einer Menge  $\mathcal{A}$  ist eine Teilmenge von  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ . Trifft die binäre Relation auf das Paar  $(x, y)$  zu, d.h.  $(x, y) \in \mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ , so schreibt man auch  $x\mathcal{R}y$ . Eine binäre Relation  $\mathcal{R}$  auf  $\mathcal{A}$  heißt

- (i) **reflexiv**, falls  $\forall x \in \mathcal{A}$  gilt  $(x, x) \in \mathcal{R}$ ;
- (ii) **symmetrisch**, falls  $\forall (x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$ ,

- (iii) **antisymmetrisch**, falls  $\forall (x, y) \in \mathcal{R} \text{ und } (y, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y$ ,
- (iv) **transitiv**, falls  $\forall (x, y) \in \mathcal{R} \text{ und } (y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$ ,
- (v) **konnex**, falls  $\forall x, y \in \mathcal{A} \exists (x, y) \in \mathcal{R} \text{ oder } (y, x) \in \mathcal{R}$ .

Eine Relation  $\mathcal{R}$  auf  $\mathcal{A}$  heißt

- (a) **Äquivalenzrelation**, wenn  $\mathcal{R}$  reflexiv, symmetrisch und transitiv ist;
- (b) **Quasiordnung**, wenn  $\mathcal{R}$  reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist;
- (c) **Ordnungsrelation**, wenn  $\mathcal{R}$  eine Quasiordnung und konnex ist.

Es sei  $K_{\mathcal{R}}$  eine Äquivalenzrelation auf  $\mathcal{A}$ . Die Klassen

$$[c]_{\mathcal{R}} := \{b \in \mathcal{A} \mid bK_{\mathcal{R}}c\}$$

heißen **Äquivalenzklassen** oder Restklassen von  $c$  bezüglich der Relation  $K_{\mathcal{R}}$ . Die Menge

$$\mathcal{A}/\mathcal{R} := \{[c]_{\mathcal{R}} \mid c \in \mathcal{A}\}$$

heißt **Quotient** von  $\mathcal{A}$  bezüglich  $\mathcal{R}$ .

### 1.1.3 Funktionen

Eine Relation  $f$  zwischen zwei Mengen  $\mathcal{X}$  and  $\mathcal{Y}$  heißt **Funktion** oder **Abbildung**, falls gilt

- (i) für alle  $x \in \mathcal{X}$  gibt es ein  $y \in \mathcal{Y}$ , so daß  $(x, y) \in f$ ;
- (ii) aus  $(x, y) \in f$  und  $(x, z) \in f$  folgt  $y = z$ .

Das **Bild** von  $f$  ist  $f(\mathcal{X}) := \{f(x) \mid x \in \mathcal{X}\}$ . Der **Definitionsbereich** von  $f$  ist  $\mathcal{X}$ . Die **inverse Relation** von  $f$  ist  $f^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in f\} \subseteq \mathcal{Y} \times \mathcal{X}$ . Die inverse Relation  $f^{-1}$  braucht keine Funktion zu sein!

Eine Funktion  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  heißt

- (i) **injektiv**, falls aus  $x_1 \neq x_2$  folgt  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ;
- (ii) **surjektiv**, falls es für jedes  $y \in \mathcal{Y}$  ein  $x \in \mathcal{X}$  gibt, so daß  $y = f(x)$ ;
- (iii) **bijektiv**, falls  $f$  surjektiv und injektiv ist.

## 1.2 Grundbegriffe der Algebra

### 1.2.1 Mengen mit inneren Verknüpfungen

**Innere Verknüpfung.** Eine innere Verknüpfung auf einer Menge  $\mathcal{S}$  ist eine Abbildung aus  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$  in  $\mathcal{S}$ . Im folgenden sei eine innere Verknüpfung  $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  durch  $(x, y) \mapsto x \oplus y$  gegeben und als Addition bezeichnet. Eine innere Verknüpfung

- (i) heißt **kommutativ**, falls  $x \oplus y = y \oplus x$  für alle  $x, y \in \mathcal{S}$  gilt;
- (2) heißt **assoziativ**, falls  $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$  für alle  $x, y, z \in \mathcal{S}$  gilt;
- (3) besitzt ein **neutrales Element**  $e$ , falls es ein  $e \in \mathcal{S}$  gibt, so daß  $x \oplus e = e \oplus x = x$  für alle  $x \in \mathcal{S}$ ;
- (4) besitzt ein **inverses Element**  $x^{-1}$  zu jedem  $x \in \mathcal{S}$ , falls für jedes  $x \in \mathcal{S}$  ein  $x^{-1} \in \mathcal{S}$  existiert, so daß  $x^{-1} \oplus x = x \oplus x^{-1} = e$ . Ein Element  $x$  für welches ein inverses Element existiert wird **regulär** genannt. Die Assoziativität bedingt die Eindeutigkeit eines inversen Elementes.

Es sei  $(x, y) \mapsto x \odot y$  eine zweite innere Verknüpfung, welche Multiplikation heißen soll. Die Multiplikation heißt **distributiv** bezüglich der Addition, falls gilt

$$x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z) \quad \text{und} \quad (y \oplus z) \odot x = (y \odot x) \oplus (z \odot x).$$

Im Falle der Addition wird das neutrale Element gewöhnlich mit 0 und das inverse Element mit  $-x$  bezeichnet.

**Gruppe.** Eine Gruppe  $(\mathcal{S}; \oplus)$  ist eine Menge  $\mathcal{S}$  mit innerer Verknüpfung  $\oplus$  und den Eigenschaften

- 1)  $(\mathcal{S}; \oplus)$  ist assoziativ;
- 2)  $(\mathcal{S}; \oplus)$  besitzt ein neutrales Element;
- 3) Jedes  $x \in \mathcal{S}$  ist regulär.

Ist  $(\mathcal{S}; \oplus)$  zudem noch kommutativ, so nennt man die Gruppe eine **Abelsche Gruppe**. Gilt nur 1), so bildet  $(\mathcal{S}; \oplus)$  eine **Halbgruppe**.

**Ring.** Ein Ring  $(\mathcal{S}; \odot, \oplus)$  ist eine Menge  $\mathcal{S}$  mit zwei inneren Verknüpfungen, für die gilt

- 1)  $(\mathcal{S}; \oplus)$  ist eine Abelsche Gruppe;
- 2)  $(\mathcal{S}; \odot)$  ist assoziativ;
- 3)  $(\mathcal{S}; \odot, \oplus)$  ist distributiv bezüglich der Addition.

**Körper.** Ein Körper  $(\mathcal{K}; \odot, \oplus)$  ist eine Menge  $\mathcal{S}$  mit zwei inneren Verknüpfungen  $\oplus$  und  $\odot$ , für die gilt

- 1)  $(\mathcal{K}; \odot, \oplus)$  ist ein Ring;
- 2)  $(\mathcal{K} \setminus \{0\}; \odot)$  ist eine Abelsche Gruppe und 0 ist Neutralelement bezüglich der Addition.

## 1.2.2 Mengen mit äußeren Verknüpfungen

**Äußere Verknüpfung.** Eine äußere Verknüpfung auf einer Menge  $\mathcal{V}$  ist eine Abbildung aus  $\mathcal{K} \times \mathcal{V}$  in  $\mathcal{V}$ . Die Menge  $\mathcal{K}$  heißt dann Operatorenbereich von  $\mathcal{V}$ .

**Vektorraum.** Eine Menge  $(\mathcal{V}; +)$  heißt Vektorraum über dem Körper  $(\mathcal{K}; \odot, \oplus)$ , falls es eine äußere Verknüpfung  $\mathcal{K} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ ,  $(\lambda, \mathbf{u}) \mapsto \lambda \mathbf{u}$ , (Skalarmultiplikation) gibt, so daß gilt

- 1)  $(\mathcal{K}; \odot, \oplus)$  ist ein Körper;
- 2)  $(\mathcal{V}; +)$  ist eine Abelsche Gruppe;
- 3) die äußere Verknüpfung hat die Eigenschaften

$$\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}, \quad \forall \lambda \in \mathcal{K}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

$$(\lambda \oplus \mu)\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{u}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathcal{K}, \mathbf{u} \in \mathcal{V},$$

$$(\lambda \odot \mu)\mathbf{u} = \lambda(\mu \mathbf{u}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathcal{K}, \mathbf{u} \in \mathcal{V},$$

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad 1 \text{ ist neutrales Element von } (\mathcal{K}; \odot), \mathbf{u} \in \mathcal{V}.$$

Als Körper wird hier ausschließlich der Körper der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  betrachtet. Ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  heißt **reeller Vektorraum**. Vektorräume werden in dieser Arbeit mit *blackboard-bold*-Buchstaben gekennzeichnet, z.B.  $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$ . Die Vektoren werden in Fettschrift notiert, z.B.  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{z}$ .

**Algebra.** Ein Vektorraum  $(\mathcal{V}; +)$  über dem Körper  $(\mathcal{K}; \odot, \oplus)$  bildet eine Algebra, wenn eine weitere innere Verknüpfung  $\circ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  existiert, so daß gilt

- 1)  $(\mathcal{V}, \circ)$  ist abgeschlossen:  $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V};$

- 2)  $(\mathcal{V}, \circ)$  ist bilinear:

$$(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) \circ \mathbf{w} = \lambda(\mathbf{u} \circ \mathbf{w}) + \mu(\mathbf{v} \circ \mathbf{w}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathcal{K}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V},$$

$$\mathbf{u} \circ (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{u} \circ \mathbf{v}) + \mu(\mathbf{u} \circ \mathbf{w}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathcal{K}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V};$$

3)  $(\mathcal{V}, \circ)$  ist kommutativ:

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V};$$

4)  $(\mathcal{V}, \circ)$  ist assoziativ:

$$\mathbf{u} \circ (\mathbf{v} \circ \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \circ \mathbf{v}) \circ \mathbf{w}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}.$$

**Liesche Algebra.** Ein Vektorraum  $(\mathcal{V}; +)$  über dem Körper  $(K; \odot, \oplus)$  bildet eine Liesche Algebra, wenn eine innere Verknüpfung  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  existiert, welche Liesche Klammer genannt wird und die folgenden Eigenschaften besitzt

1)  $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$  ist abgeschlossen:  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \in \mathcal{V}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V};$

2)  $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$  ist bilinear:

$$[(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}), \mathbf{w}] = \lambda [\mathbf{u}, \mathbf{w}] + \mu [\mathbf{v}, \mathbf{w}], \quad \forall \lambda, \mu \in \mathcal{K}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V},$$

$$[\mathbf{u}, (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w})] = \lambda [\mathbf{u}, \mathbf{v}] + \mu [\mathbf{u}, \mathbf{w}], \quad \forall \lambda, \mu \in \mathcal{K}, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V};$$

3)  $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$  ist schief-kommutativ:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}], \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V};$$

4)  $(\mathcal{V}, [\cdot, \cdot])$  erfüllt die Jacobische Identität:

$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}.$$

## 2 Tensoralgebra

### 2.1 Vektorräume

#### 2.1.1 Lineare Abhängigkeit

Es sei  $\mathcal{V}$  ein reeller Vektorraum. Eine nichtleere Menge  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  von  $n$  Vektoren des Vektorraumes  $\mathcal{V}$  ist **linear abhängig**, wenn es reelle Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  gibt, die nicht sämtlich Null sind, so daß gilt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Wird diese Bedingung nur für solche  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  erfüllt, die sämtlich Null sind, so ist die Menge  $\mathcal{S}$  **linear unabhängig**.

Eine Vektorsumme der Form  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i$  heißt **Linearkombination** der Vektoren  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ . Sind die Koeffizienten  $\lambda_i$  sämtlich Null, so heißt die Linearkombination **trivial**.

Die größte Anzahl von linear unabhängigen Vektoren eines Vektorraumes  $\mathbb{V}$  heißt **Dimension** von  $\mathbb{V}$ , geschrieben:  $\dim \mathbb{V}$ .

Die Menge  $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  heißt **Basis** des Vektorraumes  $\mathbb{V}$ , falls  $\mathcal{S}$  linear unabhängig ist und sich mit jedem weiteren Vektor  $\mathbf{v} \notin \mathcal{S}$  eine lineare Abhängigkeit für  $\mathcal{S} \cup \{\mathbf{v}\}$  ergibt.

Eine Teilmenge  $\mathcal{S}$  eines Vektorraumes  $\mathbb{V}$  ist somit eine Basis, falls gilt:

- 1)  $\mathcal{S}$  ist linear unabhängig;
- 2) Jeder Vektor aus  $\mathbb{V}$  läßt sich als Linearkombination aus Elementen von  $\mathcal{S}$  darstellen.

Wenn  $\mathcal{S}$  eine Basis von  $\mathbb{V}$  darstellt, dann ist die Darstellung eines Vektors  $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$  als Linearkombination aus  $\mathcal{S}$  eindeutig.

Jede Basis eines Vektorraumes  $\mathbb{V}$  hat die gleiche Anzahl an Elementen, nämlich  $\dim \mathbb{V}$ .

## 2.1.2 Untervektorräume

Eine nichtleere Teilmenge  $\mathbb{W}$  eines Vektorraumes  $\mathbb{V}$  heißt **Untervektorraum** von  $\mathbb{V}$ , falls  $\mathbb{W}$  selbst ein Vektorraum ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß  $\mathbb{W}$  bezüglich der Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, d.h.  $\mathbf{w} + \mathbf{z} \in \mathbb{W}$  und  $\lambda \mathbf{w} \in \mathbb{W}$  für alle  $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{W}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Die Durchschnittsmenge zweier Untervektorräume ist wiederum ein Untervektorraum.

Ist  $\mathbb{W}$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{V}$  und  $\mathcal{Z}$  eine Basis von  $\mathbb{W}$ , so läßt sich eine Basis von  $\mathbb{V}$  als  $\mathcal{S} \cup \mathcal{Z}$  darstellen.

Ist  $\mathbb{W}$  ein Untervektorraum von  $\mathbb{V}$ , so gilt  $\dim \mathbb{W} \leq \dim \mathbb{V}$ .

Es seien  $\mathbb{W}, \mathbb{X}$  Untervektorräume von  $\mathbb{V}$ . Falls  $\dim(\mathbb{W} + \mathbb{X})$  endlich ist, dann gilt

$$\dim(\mathbb{W} + \mathbb{X}) + \dim(\mathbb{W} \cap \mathbb{X}) = \dim \mathbb{W} + \dim \mathbb{X}.$$

## 2.1.3 Direkte Summe

Es seien  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  zwei Vektorräume. Der Vektorraum

$$\mathbb{V} + \mathbb{W} := \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in \mathbb{V} \text{ und } \mathbf{w} \in \mathbb{W}\}$$

heißt **Summe** (Kompositum) von  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$ . Sind die beiden Vektorräume disjunkt,  $\mathbb{V} \cap \mathbb{W} = \emptyset$ , dann wird  $\mathbb{V} + \mathbb{W}$  die **direkte Summe** aus  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  genannt und mit  $\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}$  bezeichnet.

Für Vektorräume  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  endlicher Dimension gilt

$$\dim(\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}) = \dim(\mathbb{V}) + \dim(\mathbb{W}).$$

Die direkte Summe läßt sich auch aus dem kartesischen Produkt  $\mathbb{V} \times \mathbb{W}$  zweier Vektorräume  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  konstruieren. Dazu definiert man die beiden Verknüpfungen

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}', \mathbf{w}') = (\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w} + \mathbf{w}') \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in \mathbb{V}, \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbb{W},$$

$$\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\lambda\mathbf{v}, \lambda\mathbf{w}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die 2-Tupel  $(\mathbf{v}, 0)$  und  $(0, \mathbf{w})$  sind Elemente der disjunkten Mengen  $\mathbb{V} \times \emptyset$  bzw.  $\emptyset \times \mathbb{W}$ , welche mit obigen Verknüpfungen auf die direkte Summe  $\mathbb{V} \oplus \mathbb{W}$  führen.

## 2.2 Affine Räume

### 2.2.1 Definition und Bezeichnungen

Ein **affiner Raum**  $\mathcal{E}$  über einem Vektorraum  $\mathbb{V}$  ist eine nichtleere Menge von Punkten mit einer Abbildung

$$\mathbf{d} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{V},$$

welche Differenzfunktion genannt wird und folgende Eigenschaften besitzt:

$$(i) \quad \mathbf{d}(x, y) + \mathbf{d}(y, z) = \mathbf{d}(x, z), \quad \forall x, y, z \in \mathcal{E};$$

(ii) die Einschränkung  $\mathbf{d}_x : \{x\} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{V} : y \mapsto \mathbf{d}_x(y)$  ist bijektiv.

Für alle  $x = y = z$  folgt mit  $\mathbf{d}(x, x) + \mathbf{d}(x, x) = \mathbf{d}(x, x)$  die Eigenschaft  $\mathbf{d}(x, x) = \mathbf{0}$ . Gilt insbesondere  $x = z$ , so folgt aus  $\mathbf{d}(x, y) + \mathbf{d}(y, x) = \mathbf{d}(x, x) = \mathbf{0}$  die Schief-Symmetrie  $\mathbf{d}(x, y) = -\mathbf{d}(y, x)$ .

Die Bijektion  $\mathbf{d}_x$  kann benutzt werden, um die lineare Struktur von  $\mathbb{V}$  auf  $\{x\} \times \mathcal{E}$  zurückzuziehen. Auf  $\{x\} \times \mathcal{E}$  lassen sich dann die Verknüpfungen

$$(x, y) + (x, z) = \mathbf{d}_x^{-1}(\mathbf{d}_x(x, y) + \mathbf{d}_x(x, z)),$$

$$\lambda(x, y) = \mathbf{d}_x^{-1}(\lambda\mathbf{d}_x(x, y)).$$

definieren. Die Menge  $\{x\} \times \mathcal{E}$  mit einer solchen linearen Struktur heißt **Tangentialraum an  $\mathcal{E}$  im Punkt  $x$**  und wird auch als  $T_x\mathcal{E}$  bezeichnet. Die (Tangenten-) Vektoren in  $T_x\mathcal{E}$  nennt man auch **gebundene Vektoren im Punkte  $x$** ; dagegen heißen die Vektoren aus  $\mathbb{V}$  auch **freie Vektoren**.

Die **Dimension**  $\dim \mathcal{E}$  eines affinen Raumes  $\mathcal{E}$  ist definiert als Dimension des entsprechenden Vektorraumes  $\mathbb{V}$ .

## 2.2.2 Koordinaten

Nach Auswahl eines willkürlichen Bezugspunktes  $x \in \mathcal{E}$  wird jedem Punkt  $a$  des Tangentialraumes  $T_x \mathcal{E}$  ein Vektor  $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$  zugewiesen. Nach Auswahl einer Basis des Vektorraumes  $\mathbb{V}$  kann jeder Vektor  $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$  durch ein Koordinaten- $n$ -Tupel  $(a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$  beschrieben werden. Es sei hier  $\dim \mathbb{V} = n$ . Die Zuweisung von Koordinaten an Raumpunkte in  $\mathcal{E}$  hängt also von der Wahl eines Bezugspunktes und einer Basis ab. Eine Koordinatenabbildung  $\phi_x$  oder Karte auf (der linearen Mannigfaltigkeit)  $\mathcal{E}$  läßt sich als Hintereinanderschaltung der Abbildungen

$$\begin{aligned} \phi_x : \mathcal{E} &\xrightarrow{a} T_x \mathcal{E} \xrightarrow{\mathbf{d}_x} \mathbb{V} \xrightarrow{\text{basis}} \mathbb{R}^n \\ a \mapsto (x, a) &\mapsto \mathbf{d}_x(a) \equiv \mathbf{a} \mapsto (a^1, \dots, a^n) = \phi_x(a) \end{aligned}$$

darstellen.

## 2.2.3 Kartenwechsel

Es sei  $\phi_a$  eine Karte auf  $\mathcal{E}$  mit dem Bezugspunkt  $a \in \mathcal{E}$  und der Basis  $\{\mathbf{b}_i\} \in \mathbb{V}$ . Ferner sei  $\bar{\phi}_a$  durch eine weitere Karte auf  $\mathcal{E}$  mit dem Bezugspunkt  $\bar{a} \in \mathcal{E}$  und der Basis  $\{\bar{\mathbf{b}}_i\} \in \mathbb{V}$  gegeben. Der Basiswechsel werde durch die Matrix  $[B_i^j]$  als  $\bar{\mathbf{b}}_i = B_i^j \mathbf{b}_j$  beschrieben. Einem Punkt  $x \in \mathcal{E}$  werden je nach Bezugspunkt die Vektoren  $\mathbf{x} := \mathbf{d}(a, x) \in T_a \mathcal{E}$  bzw.  $\bar{\mathbf{x}} := \mathbf{d}(\bar{a}, x) \in T_{\bar{a}} \mathcal{E}$  zugewiesen. Auf  $\mathbb{V}$  sind die beiden Vektoren  $\mathbf{x}$  und  $\bar{\mathbf{x}}$  durch  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$  verknüpft, wobei der Vektor  $\mathbf{a}$  als  $\mathbf{a} := \mathbf{d}(a, \bar{a})$  definiert ist. Die Beziehung  $\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{a} = \mathbf{x}$  läßt sich wie folgt in den Basisvektoren darstellen

$$\bar{x}^i \bar{\mathbf{b}}_i + a^j \mathbf{b}_j = x^k \mathbf{b}_k \quad \rightarrow \quad (\bar{x}^i B_i^j + a^j) \mathbf{b}_j = x^j \mathbf{b}_j.$$

Bezeichnet man mit  $\bar{\mathbf{x}}$  die Darstellung der Komponenten  $\bar{x}^i$  in bezug auf die Basis  $\{\mathbf{b}_i\}$ , d.h. es gilt  $\bar{\mathbf{x}} := \bar{x}^i \mathbf{a}_i$ , und bildet  $\mathbf{B} = B_i^j \mathbf{b}_j \otimes \mathbf{b}^i$  die tensorielle Darstellung der Matrix des Basiswechsels, so läßt sich das Transformationsverhalten bei Kartenwechsel als

$$\mathbf{x} = \mathbf{B} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{a} \quad \text{oder} \quad \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

darstellen.

## 2.3 Lineare Abbildungen

### 2.3.1 Definition und Bezeichnungen

Es sei  $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  eine Abbildung zwischen Vektorräumen  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$ . Die Abbildung  $f$  heißt **lineare Abbildung** von  $\mathbb{V}$  in  $\mathbb{W}$ , falls für alle  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{V}$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$1) \quad f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2);$$

$$2) f(\lambda \mathbf{v}_1) = \lambda f(\mathbf{v}_1).$$

Ist  $\mathbb{V} = \mathbb{W}$ , so bezeichnet man die lineare Abbildung auch als **lineare Transformation** oder **linearen Operator** von  $\mathbb{V}$ .

Ist  $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$ , so heißen  $\mathbf{w}$  das Bild von  $\mathbf{v}$  bezüglich  $f$  und  $\mathbf{v}$  das Urbild bezüglich  $\mathbf{w}$ . Eine lineare Abbildung heißt ein **Isomorphismus** zwischen  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$ , falls sie bijektiv ist. Man sagt dann, daß  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  isomorph sind und schreibt dies kurz  $\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$ .

Ist  $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  eine lineare Abbildung, so heißen  $f\mathbb{V} \subset \mathbb{W}$  die Bildmenge (Bildraum) von  $f$  und  $f^{-1}\{\mathbf{0}\} \subset \mathbb{V}$  der Kern von  $f$ . Eine lineare Abbildung  $f$  ist umkehrbar eindeutig, falls  $f^{-1}\{\mathbf{0}\} = \mathbf{0}$ .

Für eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen  $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  gilt  $\dim \mathbb{V} = \dim f\mathbb{V} + \dim f^{-1}\{\mathbf{0}\}$ .

Eine lineare Abbildung  $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  ist bereits durch die Bildmenge  $f\mathcal{B}$  einer Basis  $\mathcal{B}$  von  $\mathbb{V}$  eindeutig bestimmt.

Die Menge der linearen Abbildungen  $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  wird als  $Lin(\mathbb{V}; \mathbb{W})$  bezeichnet. Die linearen Transformationen schreibt man entsprechend als  $Lin(\mathbb{V}; \mathbb{V})$  oder kurz als  $Lin(\mathbb{V})$ .

Eine Abbildung  $f$  bezeichnet man als

ein **Homomorphismus**, falls  $f \in Lin(\mathbb{V}; \mathbb{W})$ ;

ein **Isomorphismus**,  $f \in Iso(\mathbb{V}; \mathbb{W})$ , falls  $f \in \{Lin(\mathbb{V}; \mathbb{W}) \mid f \text{ ist bijektiv}\}$ ;

ein **Endomorphismus**, falls  $f \in Lin(\mathbb{V}; \mathbb{V})$ ;

ein **Automorphismus**, falls  $f \in Iso(\mathbb{V}; \mathbb{V})$ .

Die Automorphismen bilden eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderschaltung (nicht bezüglich der Addition!), welche allgemeine lineare Gruppe (*general linear group*) genannt wird. Sie wird mit  $GL(m, \mathbb{V})$  bezeichnet, wobei  $m$  die Dimension des Vektorraumes  $\mathbb{V}$  angibt.

Die linearen Abbildungen  $Lin(\mathbb{V}; \mathbb{W})$  bilden einen Vektorraum, indem man die Summe zweier linearer Abbildungen  $f$  und  $g$  als punktweise Verknüpfung

$$(f + g)(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}) + g(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$$

und die Skalarmultiplikation von  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $f$  als

$$(\lambda f)(\mathbf{v}) = f(\lambda \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$$

definiert.

### 2.3.2 Multilineare Abbildungen

Es seien  $\mathbb{V}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}$  lineare Räume. Eine Abbildung  $f : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{Z}$  heißt **bilinear**, falls sie in jedem Argument linear ist. Das heißt

$$f(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \lambda_1 f(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + \lambda_2 f(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}),$$

$$f(\mathbf{v}, \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2) = \lambda_1 f(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1) + \lambda_2 f(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2),$$

für alle  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{V}$ ,  $\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{W}$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Die Erweiterung dieser Definition auf Abbildungen von mehr als zwei Variablen geschieht entsprechend. Solche Abbildungen werden **multilinear** genannt. Eine multilineare Abbildung  $f : \underbrace{\mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V}}_n \rightarrow \mathbb{W}$  wird kurz mit  $Lin_n(\mathbb{V}; \mathbb{W})$  bezeichnet.

### 2.3.3 Derivationen

Es sei  $\mathcal{A}$  eine Algebra auf dem reellen Vektorraum  $\mathbb{V}$  und  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u}\mathbf{v} \in \mathbb{V}$  sei die entsprechende algebraische Verknüpfung. Ferner sei  $f$  ein Endomorphismus,  $f \in Lin(\mathbb{V})$ , auf  $\mathbb{V}$ . Wenn die lineare Abbildung und die Verknüpfung die Leibnizregel

$$f(\mathbf{u}\mathbf{v}) = f(\mathbf{u})\mathbf{v} + \mathbf{u}f(\mathbf{v}) \tag{1.2.1}$$

erfüllen, dann nennt man  $f$  eine **Derivation** auf der Algebra  $\mathcal{A}$ .

Beispiel: Es sei  $C^\infty$  der Vektorraum der glatten reell-wertigen Funktionen. Auf  $C^\infty$  kann die lineare Struktur wiederum punktweise erklärt werden. Der Funktionenraum bildet eine Algebra bezüglich der Verknüpfungen  $\lambda f$ ,  $f + g$  und  $fg$ . Die übliche Ableitung  $f'$  einer Funktion ist eine Derivation, da sie eine lineare Abbildung  $(\cdot)' : C^\infty \rightarrow C^\infty$  darstellt und die Leibnizregel  $(fg)' = f'g + g'f$  erfüllt. Die Eigenschaften von Derivationen sind im Zusammenhang mit objektiven Zeitableitungen von Bedeutung.

## 2.4 Dualraum

Es sei  $\mathbb{V}$  ein Vektorraum über den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ . Die Menge  $Lin(\mathbb{V}; \mathbb{R})$  aller Abbildungen von  $\mathbb{V}$  in  $\mathbb{R}$  heißt **Dualraum** von  $\mathbb{V}$  und wird mit  $\mathbb{V}^*$  bezeichnet. Die Elemente von  $\mathbb{V}^*$  heißen **Linearformen**, **lineare Funktionale** oder **Kovektoren**.

Ist  $\dim \mathbb{V}$  endlich, so gilt  $\dim \mathbb{V}^* = \dim \mathbb{V}$ .

Für jeden Kovektor  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{V}^*$  und jeden Vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$  wird die Abbildung  $\boldsymbol{\omega} \in Lin(\mathbb{V}; \mathbb{R})$  als  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R}$  geschrieben. Betrachtet man nun  $\mathbb{V}^*$  seinerseits als Vektorraum, so bilden die linearen Funktionale  $Lin(\mathbb{V}^*; \mathbb{R})$  den Bidualraum  $\mathbb{V}^{**} := (\mathbb{V}^*)^*$ . Hat  $\mathbb{V}$  endliche Dimension, so läßt sich der Bidualraum  $\mathbb{V}^{**}$  mit dem Vektorraum  $\mathbb{V}$  identifizieren. Die entsprechende Abbildung kann dann als  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\omega}) \in \mathbb{R}$  geschrieben werden, so daß ein Vektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$  nun seinerseits ein lineares Funktional  $\mathbf{u} \in Lin(\mathbb{V}^*; \mathbb{R})$  darstellt.

Die formale Doppeldeutigkeit in den Abbildungen  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\omega})$  und  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{u})$  wird durch folgende Schreibweise vermieden:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V}^* \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R} \quad \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{u} \rangle := \boldsymbol{\omega}(\mathbf{u}) \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{V}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{V}^*.$$

Die Klammer  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  wird **Überschiebung**, Kontraktion oder duale Paarung (*engl. duality pairing*) genannt.

## 2.5 Tensorräume

### 2.5.1 Tensorprodukt

Das Tensorprodukt  $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$  zweier Vektorräume  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  ist durch folgende Eigenschaften beschrieben:

(i) Es gibt eine bilineare Abbildung

$$\otimes : \mathbb{V} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \otimes \mathbf{w},$$

welche  $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$  als ein Vektorraum erzeugt;

(ii) Zu jeder bilinearen Abbildung  $f \in \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W}; \mathbb{Z})$  gibt es eine eindeutige Abbildung  $\bar{f} \in \text{Lin}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}; \mathbb{Z})$  mit  $f = \bar{f} \circ \otimes$  (siehe (1.2.2)).

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{V} \times \mathbb{W} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\
 \otimes \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\
 \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} & & 
 \end{array}
 \tag{1.2.2}$$

Ist  $\{\mathbf{v}_i\}$  eine Basis von  $\mathbb{V}$  und  $\{\mathbf{w}_j\}$  eine Basis von  $\mathbb{W}$ , so bildet  $\{\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_j\}$  eine Basis von  $\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ .

Es besteht ein kanonischer Isomorphismus zwischen

$$\text{Lin}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}; \mathbb{Z}) \cong \text{Lin}(\mathbb{V}, \mathbb{W}; \mathbb{Z}) \cong \text{Lin}(\mathbb{V}; \text{Lin}(\mathbb{W}; \mathbb{Z}))$$

und ferner zwischen

$$\text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{W}^*) \cong \mathbb{W}^* \otimes \mathbb{V}^* \quad \text{und} \quad \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{W}^* \cong (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})^*.$$

### 2.5.2 Bezeichnungen

Ein Tensorprodukt zwischen den Vektorräumen  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{V}^*$  von der Gestalt

$$\underbrace{\mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \dots \otimes \mathbb{V}}_r \otimes \underbrace{\mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^* \otimes \dots \otimes \mathbb{V}^*}_s \quad (1.2.3)$$

wird kurz als  $\mathcal{T}_{r,s}^r \mathbb{V}$  bezeichnet.  $\mathcal{T}_{r,s}^r \mathbb{V}$  bildet einen Tensorraum (Vektorraum), dessen Elemente  $s$ -fach **kovariante** und  $r$ -fach **kontravariante** Tensoren auf  $\mathbb{V}$  genannt werden.

Die Dimension des Tensorraumes ist  $\dim(\mathcal{T}_{r,s}^r \mathbb{V}) = (\dim \mathbb{V})^{r+s}$ . Ein Tensor aus  $\mathcal{T}_{r,s}^r \mathbb{V}$  wird Tensor der Stufe  $(r+s)$  genannt.

Für Tensorräume nullter und erster Stufe gelten die folgenden Übereinstimmungen

$$\mathcal{T}_0^0 \mathbb{V} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{T}_0^1 \mathbb{V} = \mathbb{V}, \quad \mathcal{T}_1^0 \mathbb{V} = \mathbb{V}^*.$$

Sind die Vektorräume anders als in (1.2.3) angeordnet, z.B.

$$\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^*,$$

so wird die Schreibweise  $\mathcal{T}_{2,1}^{1,1} \mathbb{V}$  gewählt, welche die Reihenfolge der Räume eindeutig angibt.

Die Tensoren werden hauptsächlich durch fette Großbuchstaben, z.B.  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{F}$ , gekennzeichnet.

### 2.5.3 Grundoperationen auf Tensorräumen

Jeder Tensorraum ist ein Vektorraum. Auf ihm sind die Operationen

$$\text{Addition } \mathbf{A} + \mathbf{B}, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}_{r,s}^r \mathbb{V},$$

$$\text{Skalarmultiplikation } \lambda \mathbf{A}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{A} \in \mathcal{T}_{r,s}^r \mathbb{V},$$

in der üblichen Weise definiert. Die Tensoren bilden eine Algebra über dem Körper der reellen Zahlen, wenn als zusätzliche Operation die Hintereinanderschaltung

$$(\mathbf{ST})\mathbf{u} = \mathbf{S}(\mathbf{T}\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{S} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*, \mathbf{T} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{U}^*, \mathbf{u} \in \mathbb{U}$$

eingeführt wird. Die Hintereinanderschaltung von Tensoren ist im allgemeinen nicht kommutativ, d.h.  $(\mathbf{ST}) \neq (\mathbf{TS})$ .

Schreibweise: Um eine Verwechslung zwischen der Hintereinanderschaltung von Tensoren und ihrer Anwendung als multilineare Abbildungen auszuschließen, wird für letztere Operation die Schreibweise  $\mathbf{A}[\mathbf{B}]$  anstatt  $\mathbf{A}(\mathbf{B})$  gewählt. Ist  $\mathbf{B} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$  und  $\mathbf{A} \in \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^*$ , so beschreibt  $\mathbf{A}[\mathbf{B}]$  die Operation  $\text{Lin}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}; \mathbb{W})$ . Dagegen wird  $\mathbf{A}(\mathbf{B})$  gleichbedeutend mit  $\mathbf{AB}$  benutzt und beschreibt hier die Hintereinanderschaltung der Abbildungen  $\mathbf{A} \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^*)$  und  $\mathbf{B} \in \text{Lin}(\mathbb{V}^*; \mathbb{V})$ .

Von der Schreibweise  $\mathbf{A}[\mathbf{u}]$  wird dann eine Ausnahme gemacht, wenn es sich bei dem Operanden  $\mathbf{u}$  um einen Vektor aus  $\mathbb{V}$  oder  $\mathbb{V}^*$  handelt. In diesem Fall gilt also  $\mathbf{A}\mathbf{u} \equiv \mathbf{A}[\mathbf{u}]$ , da eine Verwechslung mit der Hintereinanderschaltung ausgeschlossen ist und  $\mathbf{A}\mathbf{u}$  eine verbreitete Schreibweise darstellt.

## 2.6 Abbildungen auf Tensorräumen

### 2.6.1 Basisvektoren

Es sei  $\{\mathbf{G}_A, A = 1, \dots, \dim \mathbb{V}\}$  eine Basis des Vektorraumes  $\mathbb{V}$  und  $\{\mathbf{g}_a, a = 1, \dots, \dim \mathbb{W}\}$  eine Basis des Vektorraumes  $\mathbb{W}$ . Die dualen Basen zu  $\{\mathbf{G}_A\}$  und  $\{\mathbf{g}_a\}$  werden als  $\{\mathfrak{G}^A\}$  bzw.  $\{\mathfrak{g}^a\}$  bezeichnet. Es sind dies jene Basisvektoren der Dualräume  $\mathbb{V}^*$  bzw.  $\mathbb{W}^*$ , welche die Beziehungen

$$\langle \mathfrak{G}^A, \mathbf{G}_B \rangle_{\mathbb{V}} = \delta_B^A \quad \text{und} \quad \langle \mathfrak{g}^a, \mathbf{g}_b \rangle_{\mathbb{W}} = \delta_b^a, \quad (1.2.4)$$

erfüllen. Das Kronecker-Symbol  $\delta_b^a$  bezeichnet die Komponenten  $\delta_b^a = 1$  für  $a = b$  und  $\delta_b^a = 0$  für  $a \neq b$ .

### 2.6.2 Wechsel der Basisvektoren

Da die Wahl einer Basis auf einem Vektorraum beliebig ist, kommt dem Basiswechsel eine besondere Bedeutung zu. Es sei  $\{\bar{\mathbf{G}}_A\}$  eine weitere Basis für den Vektorraum  $\mathbb{V}$ . Ferner sei  $\mathbf{v} = v^A \mathbf{G}_A$ <sup>1)</sup> ein Vektor in  $\mathbb{V}$ . Die Basis  $\bar{\mathbf{G}}_B$  hängt linear von der Basis  $\mathbf{G}_A$  ab und kann durch die Gleichung

$$\bar{\mathbf{G}}_A = \bar{G}_A^B \mathbf{G}_B \quad (1.2.5)$$

beschrieben werden. Wird der Vektor  $\mathbf{v}$  nun bezüglich der Basis  $\{\bar{\mathbf{G}}_B\}$  als  $\mathbf{v} = \bar{v}^B \bar{\mathbf{G}}_B$  dargestellt, so ergibt sich für die Komponenten folgendes Transformationsverhalten bei Basiswechsel

$$v^A = \bar{G}_B^A \bar{v}^B. \quad (1.2.6)$$

Für die dualen Basisvektoren läßt sich das Transformationsverhalten aus  $\langle \mathfrak{G}^A, \mathbf{G}_B \rangle_{\mathbb{V}} = \delta_B^A$  ableiten. Man findet dann

$$\langle \bar{\mathfrak{G}}^A, \bar{\mathbf{G}}_B \rangle = \langle \bar{\mathfrak{G}}^A, \bar{G}_B^C \mathbf{G}_C \rangle = \langle \mathfrak{G}^A, \mathbf{G}_B \rangle \rightarrow \bar{\mathfrak{G}}^A = \bar{G}_B^A \mathfrak{G}^B. \quad (1.2.7)$$

Für die Komponenten eines Kovektors  $\boldsymbol{\omega} = \omega_A \mathfrak{G}^A = \bar{\omega}_B \bar{\mathfrak{G}}^B$  gilt dann die Transformationsregel

$$\omega_A \bar{G}_B^A = \bar{\omega}_B. \quad (1.2.8)$$

Aus (1.2.5)-(1.2.8) wird ersichtlich, daß sich kovariante Basisvektoren und kontravariante Komponenten in gleicher Weise transformieren. Dasselbe gilt für kontravariante Basisvektoren und kovariante Komponenten.

<sup>1)</sup>Über sich diagonal wiederholende Indizes wird gemäß der Einsteinschen Summationskonvention summiert, d.h. es gilt  $v^A \mathbf{G}_A = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{G}_i, n = \dim \mathbb{V}$ .

Die hergeleiteten Transformationsregeln gelten für Tensorfelder punktweise. Dagegen sind in der Literatur oft Regeln der Art

$$\bar{\mathbf{g}}_a = \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^a} \mathbf{g}_b$$

zu finden. Diese gelten für Tensorfelder und beziehen sich speziell auf holonome Basisvektoren. Die hier aufgestellten Transformationsregeln sind auch für anholonome Basisvektoren gültig.

### 2.6.3 Lineare Abbildungen durch Tensoren

Es sei  $\mathbf{C} \in \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^*$  eine lineare Abbildung  $Lin(\mathbb{V}; \mathbb{V}^*)$ , dargestellt durch  $\mathbf{C} = C_{IJ} \mathfrak{G}^I \otimes \mathfrak{G}^J$ . Für ein  $\mathbf{u} = u^K \mathbf{G}_K \in \mathbb{V}$  wird die Abbildung  $\mathbf{C}\mathbf{u}$  wie folgt durch Überschieben ausgeführt

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = C_{IJ} \mathfrak{G}^I u^K \langle \mathfrak{G}^J, \mathbf{G}_K \rangle_{\mathbb{V}} = C_{IJ} u^J \mathfrak{G}^I \in \mathbb{V}^*.$$

Es sei  $\mathbf{U}$  im folgenden ein Endomorphismus  $Lin(\mathbb{V}; \mathbb{V})$ , welcher als gemischter Tensor zweiter Stufe gegeben ist:

$$\mathbf{U} = U_J^I \mathbf{G}_I \otimes \mathfrak{G}^J \in \mathcal{T}_{-1}^1 \mathbb{V} \cong \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^* \cong Lin(\mathbb{V}; \mathbb{V}). \quad (1.2.9)$$

Die Abbildung eines Vektors  $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$  durch  $\mathbf{U}$  läßt sich als

$$\begin{aligned} \mathbf{U}\mathbf{a} &= (U_J^I \mathbf{G}_I \otimes \mathfrak{G}^J)(a^K \mathbf{G}_K) = (U_J^I a^K \mathbf{G}_I \otimes \mathfrak{G}^J) \mathbf{G}_K \\ &= U_J^I a^K \mathbf{G}_I \langle \mathfrak{G}^J, \mathbf{G}_K \rangle = U_J^I a^J \mathbf{G}_I \in \mathbb{V}. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

schreiben. Ein Tensor  $\mathbf{F}$  stelle eine Abbildung aus  $\mathbb{V}$  in  $\mathbb{W}$  dar und sei als

$$\mathbf{F} = F_j^i \mathbf{g}_i \otimes \mathfrak{G}^j \in \mathcal{T}_0^1 \mathbb{W} \otimes \mathcal{T}_1^0 \mathbb{V} \cong \mathbb{W} \otimes \mathbb{V}^* \cong Lin(\mathbb{V}; \mathbb{W}) \quad (1.2.11)$$

gegeben. Das Ausführen der Operation  $\mathbf{F}\mathbf{a}$  für ein  $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$  geschieht wie in (1.2.10). Als Resultat ergibt sich hier  $F_j^i a^j \mathbf{g}_i \in \mathbb{W}$ .

### 2.6.4 Duale Abbildung

Jeder linearen Abbildung  $\mathbf{F} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$  läßt sich eine duale oder adjungierte Abbildung  $\mathbf{F}^* : \mathbb{W}^* \rightarrow \mathbb{V}^*$  zuordnen, welche den Dualraum  $\mathbb{W}^*$  als Definitionsbereich und den Dualraum  $\mathbb{V}^*$  als Wertebereich besitzt. Die duale Abbildung definiert sich über die Beziehung

$$\langle \mathbf{F}^* \boldsymbol{\omega}, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{V}} = \langle \boldsymbol{\omega}, \mathbf{F}\mathbf{a} \rangle_{\mathbb{W}} \in \mathbb{R}, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{W}^*, \mathbf{a} \in \mathbb{V}. \quad (1.2.12)$$

Man kann zeigen, daß die duale Abbildung folgende Eigenschaften bezüglich der drei Grundoperationen auf Tensorräumen besitzt

$$(\mathbf{H}\mathbf{F})^* = \mathbf{F}^* \mathbf{H}^*, \quad \forall \mathbf{F} \in Lin(\mathbb{V}; \mathbb{W}), \mathbf{H} \in Lin(\mathbb{W}; \mathbb{G}).$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{F} + \mathbf{G})^* &= \mathbf{F}^* + \mathbf{G}^*, \quad \forall \mathbf{F}, \mathbf{G} \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{W}), \\ (\lambda \mathbf{F})^* &= \lambda \mathbf{F}^*, \quad \forall \mathbf{F} \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{W}), \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Für die biduale Abbildung  $\mathbf{F}^{**} \equiv (\mathbf{F}^*)^*$  gilt die Identifikation  $\mathbf{F}^{**} = \mathbf{F}$ , da nämlich der Bidualraum  $\mathbb{V}^{**}$  auf endlich-dimensionalen Vektorräumen mit dem Vektorraum  $\mathbb{V}$  identifiziert wird. Die tensorielle Darstellung der dualen Abbildung  $\mathbf{F}^*$  lautet

$$\mathbf{F}^* = F_j^i \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}_i \in \mathcal{T}_0^1 \mathbb{V} \otimes \mathcal{T}_0^1 \mathbb{W} \cong \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{W} \cong \text{Lin}(\mathbb{W}^*; \mathbb{V}^*). \quad (1.2.13)$$

Aus (1.2.13) wird deutlich, daß die duale Abbildung  $\mathbf{F}^*$  durch vertauschen der Reihenfolge der Basisvektoren von  $\mathbf{F}$  erzeugt wird. Die duale Abbildung darf nicht mit der Transponierten eines Tensors verwechselt werden, welche nur auf Vektorräumen mit innerem Produkt definiert werden kann.

### 2.6.5 Inverse und dual-inverse Abbildung

Falls  $\mathbf{F}$  einen Isomorphismus zwischen den Vektorräumen  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  bildet,  $\mathbf{F} \in \text{Iso}(\mathbb{V}; \mathbb{W})$ , gibt es eine eindeutige inverse Abbildung  $\mathbf{F}^{-1}$ . Die Bildmenge von  $\mathbf{F}^{-1}$  ist  $\mathbb{V} = \mathbf{F}^{-1}\mathbb{W}$ . Die Hintereinanderschaltung von  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{F}^{-1}$  führt auf Identitäten auf  $\mathbb{V}$  oder  $\mathbb{W}$ , je nachdem in welcher Reihenfolge die Hintereinanderschaltung ausgeführt wird

$$\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = id_{\mathbb{V}} = \mathbf{I} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} = id_{\mathbb{W}} = \mathbf{i}. \quad (1.2.14)$$

Die tensorielle Darstellung der inversen Abbildung lautet

$$\mathbf{F}^{-1} = [F^{-1}]_j^i \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^j \in \mathcal{T}_0^1 \mathbb{V} \otimes \mathcal{T}_1^0 \mathbb{W} \cong \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}^* \cong \text{Lin}(\mathbb{W}; \mathbb{V}). \quad (1.2.15)$$

Hier deutet  $[F^{-1}]_j^i$  symbolisch auf die Komponenten der invertierten Komponentenmatrix hin. Diese Matrix läßt sich aus dem Gleichungssystem  $[F^{-1}]_j^i F_K^j = \delta_K^i$  ermitteln.

Da die Inverse  $\mathbf{F}^{-1}$  eine lineare Abbildung  $\text{Lin}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$  darstellt, kann man ihre entsprechende duale Abbildung erzeugen. Ist andererseits die duale Abbildung  $\mathbf{F}^*$  invertierbar, so läßt sich ihre Inverse erzeugen. Als Resultat erhält man in beiden Fällen die dual-inverse Abbildung  $\mathbf{F}^{-*}$ .

Die dual-inverse Abbildung hat den Definitionsbereich  $\mathbb{V}^*$  und den Wertebereich  $\mathbb{W}^*$ . Sie definiert sich über folgende Beziehung

$$\langle \mathbf{F}^{-*} \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{W}} = \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}^{-1} \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{V}} \in \mathbb{R}, \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{V}^*, \mathbf{v} \in \mathbb{W}. \quad (1.2.16)$$

Die Bezeichnung  $\mathbf{F}^{-*}$  legt nahe, daß die Operationen  $\langle \rangle^*$  und  $\langle \rangle^{-1}$  auf  $\text{Iso}(\mathbb{V}; \mathbb{W})$  kommutieren, d.h. sie erfüllen  $(\mathbf{F}^{-1})^* = (\mathbf{F}^*)^{-1}$ .

Die tensorielle Darstellung der dual-inversen Abbildung lautet

$$\mathbf{F}^{-*} = [F^{-1}]_j^i \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{G}_i \in \mathcal{T}_1^0 \mathbb{W} \otimes \mathcal{T}_0^1 \mathbb{V} \cong \mathbb{W}^* \otimes \mathbb{V} \cong \text{Lin}(\mathbb{V}^*; \mathbb{W}^*). \quad (1.2.17)$$

Die Hintereinanderschaltung von dualer und dual-inverser Abbildung erzeugt Identitäten auf den Dualräumen  $\mathbb{V}^*$  und  $\mathbb{W}^*$

$$\mathbf{F}^{-*} \mathbf{F}^* = id_{\mathbb{V}^*} = \mathbf{i}^* \quad \text{und} \quad \mathbf{F}^* \mathbf{F}^{-*} = id_{\mathbb{W}^*} = \mathbf{I}^*. \quad (1.2.18)$$

Definitions- und Wertebereiche der bis jetzt definierten Abbildungen finden sich im Diagramm (1.2.19) wieder.

$$\begin{array}{ccc}
 \{\mathbf{G}_A\} \in \mathbb{V} & \begin{array}{c} \xleftarrow{F^{-1}} \\ \xrightarrow{F} \end{array} & \mathbb{W} \ni \{\mathbf{g}_a\} \\
 \vdots & & \vdots \\
 \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{I}} \in \mathbb{R} & & \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{J}} \in \mathbb{R} \\
 \vdots & & \vdots \\
 \{\mathbf{G}^A\} \in \mathbb{V}^* & \begin{array}{c} \xleftarrow{F^*} \\ \xrightarrow{F^{-*}} \end{array} & \mathbb{W}^* \ni \{\mathbf{g}^a\}
 \end{array} \tag{1.2.19}$$

## 2.7 Metrische Vektorräume

### 2.7.1 Bezeichnungen

Eine Bilinearform  $f$  auf einem Vektorraum  $\mathbb{V}$ ,  $f \in \text{Lin}_2(\mathbb{V}; \mathbb{R})$ , heißt

- (a) **symmetrisch**, falls  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ ;
- (b) **schiefsymmetrisch**, falls  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ ;
- (c) **nicht-entartet**, falls aus  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{V}$  folgt  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ;
- (d) **positiv definit**, falls  $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0 \quad \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ;
- (e) **negativ definit**, falls  $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0 \quad \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ .

Dann unterscheidet man folgende, wesentliche Arten von Bilinearformen:

- (i) Eine **Metrik** auf  $\mathbb{V}$  ist eine symmetrische, nicht-entartete Bilinearform.
- (ii) Ein **inneres Produkt** auf  $\mathbb{V}$  ist eine positiv oder negativ definite Metrik.
- (iii) Eine **symplektische Struktur** auf  $\mathbb{V}$  ist eine schiefsymmetrische, nicht-entartete Bilinearform.

Wir beschränken uns hier auf positiv definite Metriken, welche auch Euklidische Metriken genannt werden. Eine solche Metrik  $\mathcal{G}$  ist eine Bilinearform  $\mathcal{G} \in \text{Sym}^+(\mathbb{V} \times \mathbb{V}; \mathbb{R})$ . Ihre tensorielle Darstellung lautet

$$\mathbf{G} = G_{IJ} \mathbf{G}^I \otimes \mathbf{G}^J \in \mathcal{T}_2^0 \mathbb{V} \cong \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^* \cong \text{Lin}(\mathbb{V} \times \mathbb{V}; \mathbb{R}) \quad \text{mit } G_{IJ} = G_{JI}. \tag{1.2.20}$$

Ein Vektorraum  $\mathbb{V}$ , welcher mit einer Metrik  $\mathbf{G}$  ausgestattet ist, wird als metrischer Vektorraum  $(\mathbb{V}, \mathbf{G})$  bezeichnet. Zur Vereinfachung schreibt man oft nur  $\mathbb{V}$  statt  $(\mathbb{V}, \mathbf{G})$ , sofern sich die metrische Struktur aus dem Sinnzusammenhang ergibt.

Für zwei Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$  läßt sich die Bilinearform  $\mathcal{G}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  als Überschiebung  $(\mathbf{G}\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\mathbb{V}}$  darstellen. Hier kommt nun wieder die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes zum Ausdruck. Während  $\mathcal{G}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  eindeutig die Bilinearform  $\text{Lin}(\mathbb{V} \times \mathbb{V}; \mathbb{R})$  bezeichnet, liefert der schon bekannte Isomorphismus

$$\text{Lin}(\mathbb{V} \times \mathbb{V}; \mathbb{R}) \cong \text{Lin}(\mathbb{V}; \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{R})) \cong \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{V}^*), \quad \text{da } \mathbb{V}^* := \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{R})$$

noch eine andere Interpretation der Metrik. Sie kann als Abbildung  $\text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{V}^*)$  benutzt werden, um Vektoren  $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$  in den Dualraum  $\mathbb{V}^*$  abzubilden. Diese Abbildung wird als  $\mathbf{a}^{\flat} = \mathbf{G}\mathbf{a} \in \mathbb{V}^*$  geschrieben. Sie entspricht im Ricci-Kalkül dem Heraufziehen von Indizes.

Da die Metrik  $\mathbf{G}$  als positiv definit festgelegt wurde, kann man die Inverse

$$\mathbf{G}^{-1} = G^{IJ} \mathbf{G}_I \otimes \mathbf{G}_J \in \mathcal{T}_0^2 \mathbb{V} \cong \mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \cong \text{Lin}(\mathbb{V}^* \times \mathbb{V}^*; \mathbb{R}), \quad \text{mit } G^{IJ} = G^{JI}. \quad (1.2.21)$$

bilden. Hier kann nun die Identifizierung

$$\text{Lin}(\mathbb{V}^* \times \mathbb{V}^*; \mathbb{R}) \cong \text{Lin}(\mathbb{V}^*; \text{Lin}(\mathbb{V}^*; \mathbb{R})) \cong \text{Lin}(\mathbb{V}^*; \mathbb{V})$$

vorgenommen werden. Die inverse Metrik  $\mathbf{G}^{-1}$  bildet Kovektoren  $\alpha \in \mathbb{V}^*$  in den Vektorraum  $\mathbb{V}$  ab. Diese Operation entspricht dem Herunterziehen von Indizes im Ricci-Kalkül und wird als  $\alpha^{\sharp} = \mathbf{G}^{-1}\alpha \in \mathbb{V}$  notiert. In Komponentendarstellung sehen diese Abbildungen wie folgt aus:

$$\mathbf{u}^{\flat} = \mathbf{G}\mathbf{u} = G_{IJ} \mathfrak{G}^I \otimes \mathfrak{G}^J (u^K \mathbf{G}_K) = G_{IJ} u^J \mathfrak{G}^I = u_I \mathfrak{G}^I, \quad (1.2.22)$$

$$\alpha^{\sharp} = \mathbf{G}^{-1}\alpha = G^{IJ} \mathbf{G}_I \otimes \mathbf{G}_J (\alpha_K \mathfrak{G}^K) = G^{IJ} \alpha_J \mathbf{G}_I = \alpha^I \mathbf{G}_I. \quad (1.2.23)$$

Hier wurde Gebrauch von der Konvention gemacht, daß obere und untere Indizes durch die Operationen

$$u_I = G_{IJ} u^J \quad \text{und} \quad \alpha^J = G^{IJ} \alpha_J$$

verbunden sind. Wird diese Konvention des Ricci-Kalküls vorausgesetzt, so müssen zwei Auswirkungen bedacht werden:

- 1) Zwei Komponenten  $u^I$  und  $u_J$  können nicht mehr unabhängig voneinander gewählt werden.
- 2) Bei Verwendung von zwei Metriken muß kenntlich gemacht werden, welche Metrik für das Herauf- oder Herunterziehen benutzt wurde. Sind  $g_{IJ}$  nun die Komponenten eines weiteren Metriktensors, so führt  $u_K = g_{KJ} u^J$  auf einen Konflikt mit  $u_I = G_{IJ} u^J$ , da allgemein  $u_K \neq u_I$  für  $I = K$  gilt. Um dies zu vermeiden, können die  $u_K$  allerdings nicht mit z.B.  $\bar{u}_K$  bezeichnet werden, da dann obige Konvention verletzt wäre. Als Abhilfe aus diesem Dilemma wird hier eine Bezeichnung verwendet, die bestimmte Indizes für bestimmte Metriken reserviert. Benutzt man für  $g_{ij}$  kleine Indexbuchstaben und für  $G_{IJ}$  große, kann  $u_i = g_{ij} u^j$  nun nicht mehr mit  $u_I = G_{IJ} u^J$  verwechselt werden.

Aus der Symmetrie der Metrik kann direkt gefolgert werden, daß die Metriktensoren und die dualen Metriktensoren identisch sind

$$\mathbf{G}^* = \mathbf{G} \in \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}^* \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^{-*} = \mathbf{G}^{-1} \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}.$$

### 2.7.2 Inneres Produkt

Auf jedem metrischen Raum läßt sich ein positiv definites <sup>2)</sup> inneres Produkt

$$\cdot: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \langle \mathbf{G}\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{V}} \quad (1.2.24)$$

erzeugen. In entsprechender Weise kann auch auf dem Dualraum ein inneres Produkt

$$\cdot: \mathbb{V}^* \times \mathbb{V}^* \rightarrow \mathbb{R} \quad (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \mapsto \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} := \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{G}^{-1}\boldsymbol{\beta} \rangle_{\mathbb{V}} \quad (1.2.25)$$

gebildet werden. Falls verschiedene metrische Räume oder verschiedene Metriken auf einem Raum betrachtet werden, muß man kennzeichnen, durch welche Metrik das innere Produkt generiert wurde:

$$\mathbf{a} \cdot_{\mathbf{G}} \mathbf{b} := \langle \mathbf{G}\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_{\mathbb{V}}.$$

### 2.7.3 Transponierte Abbildung

Zu jeder linearen Abbildung  $\mathbf{F} \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{W})$  zwischen Vektorräumen mit innerem Produkt läßt sich eine **transponierte** oder Hilbertraum-adjungierte Abbildung bilden. Diese wird mit  $\mathbf{F}^T$  bezeichnet und definiert sich über die Beziehung

$$\mathbf{F}^T \mathbf{u} \cdot_{\mathbf{G}} \mathbf{a} = \mathbf{u} \cdot_{\mathbf{g}} \mathbf{F}\mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{u} \in (\mathbb{W}, \mathbf{g}); \quad \mathbf{a} \in (\mathbb{V}, \mathbf{G}); \quad \mathbf{F} \in \text{Lin}(\mathbb{V}; \mathbb{W}). \quad (1.2.26)$$

Man erkennt, daß  $\mathbf{F}^T$  eine lineare Abbildung aus  $\text{Lin}(\mathbb{W}; \mathbb{V})$  ist. Ein Vergleich von (1.2.26) mit (1.2.24) führt auf

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} &= \langle \mathbf{G}\mathbf{F}^T \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{V}}, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}\mathbf{a} &= \langle \mathbf{g}\mathbf{u}, \mathbf{F}\mathbf{a} \rangle_{\mathbb{W}} = \langle \mathbf{F}^* \mathbf{g}\mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{V}} = \langle \mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^* \mathbf{g}\mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle_{\mathbb{V}}. \end{aligned}$$

Daraus ermittelt man die Beziehung

$$\mathbf{F}^T = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^*\mathbf{g}. \quad (1.2.27)$$

Die Definition von  $\mathbf{F}^T$  aus (1.2.27) gibt eine eindeutige Darstellung der Abhängigkeit der transponierten Abbildung von den Metriken der beiden Räume  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$ .

■ **Anmerkung:** Sind die Abbildung  $\mathbf{F}$  und die Metriken  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{g}$  Funktionen der Zeit, so gilt die Kommutativität von Zeitableitung und Transposition, also  $\dot{\mathbf{F}}^T = (\mathbf{F}^T)^\cdot$ ,

<sup>2)</sup>Positive Definitheit gilt nach Einschränkung auf Euklidische Metriken.

nicht mehr. Dieses ist für die Anwendung sehr wichtig, da eine solche Kommutativität oft unterstellt wird.

Aus (1.2.27) erhält man durch Zeitableitung

$$(\mathbf{F}^\top)^\cdot = (\mathbf{G}^{-1})^\cdot \mathbf{F}^* \mathbf{g} + \mathbf{G}^{-1} \dot{\mathbf{F}}^* \mathbf{g} + \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}^* \dot{\mathbf{g}}. \quad (1.2.28)$$

Vergleicht man nun (1.2.28) mit der Transposition der Zeitableitung

$$(\dot{\mathbf{F}})^\top = \mathbf{G}^{-1} \dot{\mathbf{F}}^* \mathbf{g}, \quad (1.2.29)$$

so ergibt sich die Beziehung

$$(\mathbf{F}^\top)^\cdot = (\dot{\mathbf{F}})^\top + \mathbf{F}^\top \mathbf{g}^{-1} \dot{\mathbf{g}} - \mathbf{G}^{-1} \dot{\mathbf{G}} \mathbf{F}^\top. \quad (1.2.30)$$

Aus (1.2.30) geht hervor, daß Transposition und Zeitableitung nicht kommutieren, wenn die verwendeten Metriken zeitabhängig sind. ■

## 2.7.4 Orthogonale Abbildungen

Es zeigt sich, daß auf metrischen Vektorräumen die Definitions- und Wertebereiche der Abbildungen  $\mathbf{F}^\top$  und  $\mathbf{F}^{-1}$  übereinstimmen. Dann macht die folgende Frage Sinn: Gibt es Abbildungen  $\mathbf{R} \in Iso(\mathbb{V}; \mathbb{W})$  für welche die Abbildungen  $\mathbf{R}^\top$  und  $\mathbf{R}^{-1}$  übereinstimmen? Es gibt sie und man nutzt die Übereinstimmung  $\mathbf{R}^\top = \mathbf{R}^{-1}$  zur Definition einer neuen Menge von Abbildungen. Eine Abbildung  $\mathbf{R}$  heißt orthogonal, wenn sie ein Element aus

$$O(\mathbb{V}; \mathbb{W}) = \{\mathbf{R} \in Iso(\mathbb{V}; \mathbb{W}) \mid \mathbf{R}^\top = \mathbf{R}^{-1}\}$$

ist. Eine orthogonale Abbildung stellt eine Isometrie auf den Vektorräumen dar. Ist  $\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{a}$  und  $\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{b}$ , dann folgt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{g}\mathbf{R}\mathbf{a}, \mathbf{R}\mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{R}^* \mathbf{g}\mathbf{R}\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \\ &= \langle \mathbf{G}\mathbf{R}^\top \mathbf{g}^{-1} \mathbf{g}\mathbf{R}\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{G}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{G}\mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle. \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

Längen und Winkel ändern sich bei orthogonalen Transformationen also nicht. Mit Hilfe des inneren Produktes auf  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  schreibt man (1.2.31) auch als

$$\mathbf{u} \cdot_{\mathbf{g}} \mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{a} \cdot_{\mathbf{g}} (\mathbf{R}\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot_{\mathbf{G}} (\mathbf{R}^\top \mathbf{R}\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot_{\mathbf{G}} (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{R}\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot_{\mathbf{G}} \mathbf{b}. \quad (1.2.32)$$

Die Orthogonalität einer Abbildung wird wesentlich durch die Metriken  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{g}$  bestimmt. Daher nennt man eine orthogonale Abbildung auch manchmal  $(\mathbf{G}, \mathbf{g})$ -orthogonal (siehe SIMO & MARSDEN [110]).

## 2.7.5 Symmetrische Abbildungen

Auf einem metrischen Vektorraum wird ein Endomorphismus  $\mathbf{U} \in Lin(\mathbb{V})$  symmetrisch genannt, falls gilt

$$\mathbf{U}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{U}\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}^\top. \quad (1.2.33)$$

Entsprechend heißt ein Endomorphismus schiefsymmetrisch, falls gilt  $\mathbf{U} = -\mathbf{U}^\top$ . Aus (1.2.27) folgt, daß eine Abbildung  $\mathbf{U} \in Lin(\mathbb{V}, \mathbf{G})$  genau dann symmetrisch oder schiefsymmetrisch ist, wenn  $\mathbf{G}\mathbf{U} = \mathbf{U}^* \mathbf{G}$  bzw.  $\mathbf{G}\mathbf{U} = -\mathbf{U}^* \mathbf{G}$  gilt.

### 2.7.6 Reziproke Basis

Auf den Vektorräumen  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  mit innerem Produkt läßt sich eine Basis  $\{\mathbf{G}^B\}$  bzw.  $\{\mathbf{g}^b\}$  definieren, welche reziprok zur Basis  $\{\mathbf{G}_A\}$  bzw.  $\{\mathbf{g}_a\}$  ist. Die Definition folgt aus den Beziehungen

$$\mathbf{G}_A \cdot \mathbf{G}^B = \delta_A^B \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_a \cdot \mathbf{g}^b = \delta_a^b. \quad (1.2.34)$$

Aus (1.2.24) kann man schließen, daß zwischen der reziproken Basis und der ursprünglichen Basis die folgende Beziehung besteht

$$\mathbf{G}^A = G^{AB} \mathbf{G}_B \in \mathbb{V} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}^a = g^{ab} \mathbf{g}_b \in \mathbb{W}. \quad (1.2.35)$$

Gemäß (1.2.35) hängt die reziproke Basis  $\{\mathbf{g}^a\}$  linear von der Basis  $\{\mathbf{g}_b\}$  ab. Das heißt  $\{\mathbf{g}^a\}$  bildet eine alternative Basis desselben Vektorraumes.

Die reziproke Basis kann aus der dualen Basis durch Abbildung mit dem inversen Metriktenor gewonnen werden

$$\mathbf{G}^{-1} \mathfrak{G}^A = (G^{BC} \mathbf{G}_B \otimes \mathbf{G}_C) \mathfrak{G}^A = G^{AB} \mathbf{G}_B =: \mathbf{G}^A. \quad (1.2.36)$$

Wendet man diese Erkenntnis auf die duale Abbildung an, so zeigt sich, daß die transponierte Abbildung eine Abbildung zwischen den reziproken Basisvektoren bildet

$$\mathfrak{G}^A = \mathbf{F}^* \mathbf{g}^a \quad \longrightarrow \quad \mathbf{G}^A = \mathbf{G}^{-1} \mathfrak{G}^A = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}^* \mathbf{g} \mathbf{g}^{-1} \mathbf{g}^a = \mathbf{F}^T \mathbf{g}^a, \quad (1.2.37)$$

Die reziproken Basisvektoren  $\mathbf{g}^a$  und  $\mathbf{G}^A$  sind also durch

$$\mathbf{G}^A = \mathbf{F}^T \mathbf{g}^a \quad \text{und} \quad \mathbf{g}^a = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G}^A, \quad \forall \mathbf{g}_a = \mathbf{F} \mathbf{G}_A. \quad (1.2.38)$$

miteinander verknüpft. Die Beziehung zwischen Metrik, dualer und transponierter Abbildung ist zusammenfassend in Abb. 1.2.39 dargestellt.

$$\begin{array}{ccc} \{\mathbf{G}^A\} \in \mathbb{V} & \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathbf{F}^T} \\ \xrightarrow{\mathbf{F}^{-T}} \end{array} & \mathbb{W} \ni \{\mathbf{g}^a\} \\ \mathbf{G} \updownarrow \mathbf{G}^{-1} & & \mathbf{g} \updownarrow \mathbf{g}^{-1} \\ \{\mathfrak{G}^A\} \in \mathbb{V}^* & \begin{array}{c} \xleftarrow{\mathbf{F}^*} \\ \xrightarrow{\mathbf{F}^{-*}} \end{array} & \mathbb{W}^* \ni \{\mathfrak{g}^a\} \end{array} \quad (1.2.39)$$

Es sei schließlich noch angemerkt, daß in der angewandten Tensorrechnung einige Verwirrung über die Verwendung der Begriffe *ko-* und *kontravariant* herrscht. Die kontravarianten Vektoren  $\mathbf{a} = a^I \mathbf{G}_I \in \mathbb{V}$  und die kovarianten Vektoren  $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_J \mathbf{g}^J \in \mathbb{V}^*$  stellen Objekte aus verschiedenen Räumen dar, die eindeutig als solche identifizierbar sind. Nun werden in der Literatur aber auch die Vektoren  $\boldsymbol{\alpha}^{\flat} = \mathbf{G}^{-1} \boldsymbol{\alpha} = \alpha_J \mathbf{G}^J \in \mathbb{V}$  als kovariant bezeichnet, obwohl, wie bereits gesehen, die reziproke Basis  $\mathbf{G}^J$  eine Basis von  $\mathbb{V}$  und nicht von  $\mathbb{V}^*$  ist. Dieses Dilemma tritt immer dann auf, wenn das Transformationsverhalten als Kriterium für Ko- oder Kontravarianz herangezogen wird. Dieses Kriterium, welches für das Ricci-Kalkül bestimmt ist, sollte im invarianten Kalkül nicht angewendet werden.

## 3 Zusammenstellung hilfreicher Formeln

### 3.1 Schreibweise

In der folgenden Formelsammlung bezeichnet  $\mathcal{T}^n \mathbb{E}$  die Menge aller Tensoren n.Stufe auf dem Euklidischen Vektorraum  $\mathbb{E}$ . Speziell schreibt man für

- skalare Größen:  $\lambda, \mu, \dots \in \mathcal{T}^0 \mathbb{V} \equiv \mathbb{R}$ ;
- Vektoren:  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots \in \mathcal{T}^1 \mathbb{V} \equiv \mathbb{V}$ ;
- Tensoren 2.Stufe:  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots \in \mathcal{T}^2 \mathbb{V}$ ;
- Tensoren 3.Stufe:  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots \in \mathcal{T}^3 \mathbb{V}$ ;
- Tensoren n.Stufe:  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots \in \mathcal{T}^n \mathbb{V}$ .

Die lineare Abbildung eines Tensors  $\mathbf{B}$  m.Stufe durch einen Tensor  $\mathbf{A}$  n.Stufe,  $n > m$ , wird mit  $\mathbf{A}[\mathbf{B}] \in \mathcal{T}^{n-m} \mathbb{V}$  bezeichnet. Speziell schreibt man für  $m = 0$ :  $\mathbf{A}[\lambda] =: \lambda \mathbf{A}$  und für  $m = 1$ :  $\mathbf{A}[\mathbf{u}] =: \mathbf{A}\mathbf{u}$ .

Das innere Produkt  $\cdot: \mathcal{T}^r \mathbb{V} \times \mathcal{T}^r \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$  ordnet zwei Tensoren  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  gleicher Stufe die reelle Zahl  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  zu. Die Hintereinanderschaltung von Tensoren (multilinearen Abbildungen)  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  lautet  $\mathbf{A}\mathbf{B}$ . Das Tensorprodukt oder dyadische Produkt zweier Tensoren  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  wird als  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  bezeichnet.

Für einige Tensoren wird in der Formelsammlung eine Darstellung der Form  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2$  oder  $\mathbf{B} = \mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2 \otimes \mathbf{b}_3$  gegeben.

Das Symbol  $\mathbf{I}$  bezeichnet den Einheitstensor auf  $\mathbb{E}$ .

## 3.2 Tensoralgebra

### 3.2.1 Lineare Abbildungen und inneres Produkt

$Au = (a_1 \otimes a_2)u = (a_2 \cdot u)a_1$	$Au = (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3)u = (a_3 \cdot u)a_1 \otimes a_2$
$A[B] = (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3)[b_1 \otimes b_2]$ $= (a_3 \cdot b_2)(a_2 \cdot b_1)a_1 = (Ab_2)b_1$	
$A[I] = A \cdot I = tr(A)$	$(u \otimes v) \cdot A = u \cdot Av$
$(u \otimes v) \cdot I = u \cdot v$	$(u \otimes A)v = u \otimes Av$
$(u \otimes A)[B] = (A \cdot B)u$	$(u \otimes A)[I] = (A \cdot I)u = tr(A)u$
$(u \otimes A) \cdot B = u \cdot B[A]$	$(A \otimes u)v = (u \cdot v)A$
$(A \otimes u)[B] = ABu$	$(A \otimes u)[I] = Au$
$(A \otimes u) \cdot B = A \cdot (Bu)$	$(A \otimes u)v = (u \cdot v)A$
$(A \otimes u)[B] = A[Bu] = ABu$	$(A \otimes u)[I] = Au$
$(A \otimes u)[B] = A[Bu]$	$(u \otimes A)v = u \otimes Av$
$(u \otimes A)[B] = u \otimes A[B]$	$(u \otimes A)[B] = (A \cdot B)u$
$(A \otimes B)u = A \otimes Bu$	$(A \otimes B)[C] = (B \cdot C)A$
$(A \otimes B)[A] = AA[B]$	

### 3.2.2 Transposition

$u \cdot Av = v \cdot A^T u$	$(A^T)^T = A$
$(\lambda A)^T = \lambda A^T$	$(A + B)^T = A^T + B^T$
$(AB)^T = B^T A^T$	$(A^T \cdot B^T) = A \cdot B$
$(u \otimes v)^T = v \otimes u$	$A \cdot BC = AC^T \cdot B$
$(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3)^{T321} := (a_3 \otimes a_2 \otimes a_1)$	$A \cdot Bv = v \cdot B^{T312}[A]$

## 3.2.3 Spur

$tr(\mathbf{A}) := \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}$	$tr(\mathbf{AB}) = \mathbf{I} \cdot \mathbf{AB} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$
$tr(\mathbf{I}) = 3$	$tr(\lambda \mathbf{A}) = \lambda tr(\mathbf{A})$
$tr(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	$tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$
$tr(\mathbf{A}^T) = tr(\mathbf{A})$	$tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$

## 3.2.4 Determinante

$det(\mathbf{A})[(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}] = (\mathbf{A}\mathbf{u} \times \mathbf{A}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A}\mathbf{w}$	$det(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = 0$
$det(\lambda \mathbf{A}) = \lambda^3 det(\mathbf{A})$	$det(\mathbf{I}) = 1$
$det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{BA}) = det(\mathbf{A})det(\mathbf{B})$	$det(\mathbf{A}^T) = det(\mathbf{A})$
$det(\mathbf{A}) = \frac{1}{6} \{[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{1})^2 - \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}] \mathbf{1} - 2(\mathbf{A} \cdot) \mathbf{A}^T + 2\mathbf{A}^T \mathbf{A}^T\} \cdot \mathbf{A}$	

## 3.2.5 Inverse Abbildung

$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$	$(\lambda \mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \mathbf{A}^{-1}$
$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$	$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
$det(\mathbf{A}^{-1}) = (det(\mathbf{A}))^{-1}$	

## 3.2.6 Dachprodukt und Kreuzprodukt

$\mathbf{A}\mathbf{u} \times \mathbf{A}\mathbf{v} = det(\mathbf{A})(\mathbf{A}^{-1})^T(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$	$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$
$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$	
$(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{u}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{z} \cdot \mathbf{w})$	

3.2.7 Hodge-Operator auf  $\mathbb{E}$ 

$*(\mathbf{A}\mathbf{u} \wedge \mathbf{A}\mathbf{v}) = det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$	$*(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$
$*(\mathbf{A}\mathbf{u} \wedge \mathbf{A}\mathbf{v} \wedge \mathbf{A}\mathbf{w}) = det(\mathbf{A})(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$	$*(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

### 3.3 Tensoranalysis

#### 3.3.1 Gradient

$\nabla(\lambda\mu) = \mu\nabla\lambda + \lambda\nabla\mu$	$\nabla\mathbf{u} = u_{,i} \otimes \mathbf{g}^i$
$\nabla(\lambda\mathbf{u}) = \mathbf{u} \otimes \nabla\lambda + \lambda\nabla\mathbf{u}$	$\nabla(\lambda\mathbf{A}) = \mathbf{A} \otimes \nabla\lambda + \lambda\nabla\mathbf{A}$
$\nabla(\lambda\mathbf{A}) = \mathbf{A} \otimes \nabla\lambda + \lambda\nabla\mathbf{A}$	$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{u})^T \mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T \mathbf{u}$
$\nabla(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = (\nabla\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^{T132} + \mathbf{a} \otimes \nabla\mathbf{b}$	$\nabla(\mathbf{A}\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{A})^{T132}\mathbf{u} + \mathbf{A}(\nabla\mathbf{u})$
$\nabla(\mathbf{A}\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{A})^{T1243}\mathbf{u} + \mathbf{A}(\nabla\mathbf{u})$	$\nabla(\mathbf{A}\mathbf{B}) = ((\nabla\mathbf{A})^{T132}\mathbf{B})^{T132} + \mathbf{A}(\nabla\mathbf{B})$
$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\nabla\mathbf{A})^{T312}[\mathbf{B}]$ $+ (\nabla\mathbf{B})^{T312}[\mathbf{A}]$	
$\nabla(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) = (\nabla\mathfrak{A})^{Tn12..n-1}[\mathfrak{B}]$ $+ (\nabla\mathfrak{B})^{Tn12..n-1}[\mathfrak{A}]$	

#### 3.3.2 Divergenz

$div(\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{u})[\mathbf{I}] = \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{I} = tr(\nabla\mathbf{u})$	$div(\mathfrak{A}) = (\nabla\mathfrak{A})[\mathbf{I}]$
$div(\lambda\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla\lambda + \lambda div(\mathbf{u})$	$div(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\nabla\mathbf{u})\mathbf{v} + div(\mathbf{v})\mathbf{u}$
$div(\mathbf{A}\mathbf{u}) = div(\mathbf{A}^T) \cdot \mathbf{u} + \mathbf{A}^T \cdot \nabla\mathbf{u}$	$div(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \nabla\mathbf{A}[\mathbf{B}] + \mathbf{A}div(\mathbf{B})$
$div(\mathbf{A}[\mathbf{B}]) = div(\mathbf{A}^{T231}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}^{T231}[\nabla\mathbf{B}]$	
$div(\mathbf{A}^{T312}[\mathbf{B}]) = div(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A}[\nabla\mathbf{B}]$	
$div(\mathbf{A}\mathbf{u}) = div(\mathbf{A}^{T132})\mathbf{u} + \mathbf{A}[\nabla\mathbf{u}^T]$ $= div(\mathbf{A}^{T132})\mathbf{u} + \mathbf{A}^{T132}[\nabla\mathbf{u}]$	
$div(\mathfrak{A}\mathbf{u}) = div(\mathfrak{A}^{T12..n(n-1)})\mathbf{u}$ $+ \mathfrak{A}^{T12..n(n-1)}[\nabla\mathbf{u}]$	
$div(\mathfrak{A}[\mathbf{B}]) = div(\mathfrak{A}^{T12..n(n-2)}) \cdot \mathbf{B}$ $+ \mathfrak{A}^{T12..n(n-2)}[\nabla\mathbf{B}]$	

### 3.4 Satz von Stokes und abgeleitete Integralsätze

Volumen $\mathcal{P}$	$\mathbf{n}$ - Normaleneinheitsvektor auf $\partial\mathcal{P}$
$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div}(\mathbf{u}) \, dv$	$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{A} \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div}(\mathbf{A}) \, dv$
$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{A} \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div}(\mathbf{A}) \, dv$	$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{n} \, da = \mathbf{0}$
$\int_{\partial\mathcal{P}} f \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{P}} \nabla f \, dv$	$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{n} \times \mathbf{v} \, da = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{rot}(\mathbf{v}) \, dv$
Flächen $\mathcal{S}$	$\mathbf{t}$ - Tangenteneinheitsvektor an $\partial\mathcal{S}$
$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, da$	$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{A} \mathbf{t} \, ds = \int_{\mathcal{S}} \operatorname{rot}(\mathbf{A}) \mathbf{n} \, da$
$\int_{\partial\mathcal{S}} f \, ds = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \times (\nabla f) \, da$	
$\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{v} \times \mathbf{t} \, ds = \int_{\mathcal{S}} \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, da - \int_{\mathcal{S}} (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{n} \, da$	

# Mannigfaltigkeiten

## Inhaltsverzeichnis

---

1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten . . . . .	261
1.1	Topologische Begriffe . . . . .	261
1.2	Mannigfaltigkeiten . . . . .	263
1.2.1	Topologische Mannigfaltigkeit . . . . .	263
1.2.2	Differenzierbare Mannigfaltigkeit . . . . .	263
1.2.3	Glatte Abbildungen auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	265
1.3	Tangentenvektoren . . . . .	266
1.4	Tangentialabbildung . . . . .	267
1.4.1	Tangentialbündel . . . . .	269
1.4.2	Kotangentialraum . . . . .	269
1.5	Tensoren auf Mannigfaltigkeiten . . . . .	270
1.6	Differentialformen . . . . .	270
1.6.1	Integration von Differentialformen . . . . .	272
1.6.2	Lie-Ableitung . . . . .	273

---

## 1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

### 1.1 Topologische Begriffe

**Topologischer Raum.** Eine Topologie auf einer Menge  $\mathcal{M}$  ist ein Mengensystem  $\mathfrak{T}$  aus Teilmengen von  $\mathcal{M}$ , welche **offen** heißen und folgende Eigenschaften besitzen:

(1a) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen;

(2a) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen;

(3a) Die leere Menge  $\emptyset$  und  $\mathcal{M}$  sind offen.

Das Paar  $(\mathcal{M}, \mathcal{T})$  wird als topologischer Raum bezeichnet.

Eine Teilmenge  $\mathcal{A}$  aus  $\mathcal{M}$  heißt genau dann **abgeschlossen**, wenn das Komplement  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}$  offen ist. Für abgeschlossene Mengen gilt:

(1b) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen;

(2b) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen;

(3b) Die leere Menge  $\emptyset$  und  $\mathcal{M}$  sind abgeschlossen.

**Umgebung.** Jede Menge  $\mathcal{U}(x)$ , die eine offene Menge  $\mathcal{V}$  mit  $x \in \mathcal{V}$  enthält, heißt Umgebung von  $x$ .

**Inneres, Abschluß, Rand.** Das Innere (*engl. interior*)  $int(\mathcal{A})$  einer Teilmenge  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$  ist die Vereinigung aller offenen Mengen, die in  $\mathcal{A}$  enthalten sind. Aus (2a) folgt, daß  $int(\mathcal{A})$  eine offene Menge ist.

Der Abschluß (*engl. closure*)  $cl(\mathcal{A})$  ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die  $\mathcal{A}$  enthalten. Aus (1b) folgt, daß  $cl(\mathcal{A})$  abgeschlossen ist.

Der **Rand**  $\partial\mathcal{A}$  von  $\mathcal{A}$  ist die Menge  $\partial\mathcal{A} = cl(\mathcal{A}) \cap int(\mathcal{A})$ .

Ein Punkt  $x \in \mathcal{A}$  heißt **Randpunkt**, wenn  $x \in \partial\mathcal{A}$ .

Ein Punkt  $x \in \mathcal{A}$  heißt **innerer Punkt**, wenn  $x \in int(\mathcal{A})$ .

Ein Punkt  $x$  heißt **äußerer Punkt**, wenn  $x \notin cl(\mathcal{A})$ .

**Trennbarkeit.** Ein topologischer Raum  $\mathcal{M}$  heißt **separiert** oder **Hausdorff-Raum**, falls zwei verschiedene Punkte  $p, q \in \mathcal{M}$  Umgebungen  $\mathcal{A} \ni p, \mathcal{B} \ni q$  besitzen, die disjunkt sind:  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ .

**Dichtheit.** Eine Menge  $\mathcal{A}$  heißt **dicht** in  $\mathcal{M}$ , wenn gilt  $cl(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$ . Dieses bedeutet, daß jede Umgebung eines Punktes von  $\mathcal{M}$  einen Punkt von  $\mathcal{A}$  enthält.

**Zusammenhang.** Eine Teilmenge  $\mathcal{A}$  eines topologischen Raumes  $\mathcal{M}$  heißt **zusammenhängend**, wenn  $\mathcal{A}$  nicht in  $\mathcal{A} = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$  zerlegt werden kann, wobei  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  nichtleere offene Mengen mit  $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \emptyset$  sind.

**Überdeckung, Kompaktheit.** Eine Mengensystem  $\mathfrak{A}$  von Teilmengen eines topologischen Raumes  $\mathcal{M}$  heißt **Überdeckung** von  $\mathcal{M}$ , falls  $\mathcal{M} = \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathcal{A}$ . Ist jedes  $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$  offen, so heißt  $\mathfrak{A}$  **offene Überdeckung** von  $\mathcal{M}$ . Eine Teilmenge  $\mathcal{N}$  eines topologischen Raumes heißt genau dann **kompakt**, wenn jede Überdeckung von  $\mathcal{N}$  durch offene Mengen ein

endliches Teilsystem enthält, das bereits  $\mathcal{N}$  überdeckt.

Eine Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

**Stetigkeit.** Es seien  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  topologische Räume. Eine Abbildung  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  heißt **stetig** im Punkt  $x$ , wenn zu jeder Umgebung  $\mathcal{V}$  von  $f(x)$  eine Umgebung  $\mathcal{U}$  von  $x$  existiert, so daß  $f(y) \subseteq \mathcal{V}$  für alle  $y \in \mathcal{U} \cap \mathcal{M}$  gilt.

**Homöomorphismus.** Eine Abbildung  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  heißt ein Homöomorphismus, wenn  $f$  bijektiv ist und sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  stetig sind. Ein Homöomorphismus bildet offene Mengen auf offene Mengen ab.

Zwei topologische Räume  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  heißen genau dann **homöomorph**, wenn ein Homöomorphismus  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  existiert. Homöomorphe topologische besitzen die gleichen topologischen Eigenschaften.

## 1.2 Mannigfaltigkeiten

### 1.2.1 Topologische Mannigfaltigkeit

**Karte, Atlas.** Es sei  $\mathcal{M}$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{U}$  eine offene Umgebung eines Punktes  $p \in \mathcal{M}$ . Gibt es für ein bestimmtes  $n$  einen Homöomorphismus  $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , so wird das Paar  $(\mathcal{U}, \psi)$  eine Karte der Dimension  $n$  genannt. Die Kartenabbildung ordnet dem Punkt  $p$  ein  $n$ -Tupel  $(x^1, \dots, x^n) = \psi(p) \in \mathbb{R}^n$  aus reellen Zahlen zu, welche Koordinaten von  $p$  heißen.

Ein Atlas  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathcal{M}$  ist eine Menge von Karten  $\{\mathcal{U}_\alpha, \psi_\alpha\}$ , so daß die offenen Umgebungen  $\mathcal{U}_\alpha$  eine offene Überdeckung von  $\mathcal{M}$  darstellen.

Eine topologische Mannigfaltigkeit  $(\mathcal{M}, \mathfrak{A})$  ist ein Hausdorff-Raum  $\mathcal{M}$  mit einer Überdeckung durch einen Atlas  $\mathfrak{A}$ . Die Dimension der Mannigfaltigkeit ist die Dimension ihrer Karten.

**Kartenwechsel.** Es seien  $(\mathcal{U}_1, \psi_1), (\mathcal{U}_2, \psi_2)$  zwei Karten auf  $\mathcal{M}$ , deren Durchschnitt  $\mathcal{W} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset$  nicht leer ist. Ein Punkt  $p \in \mathcal{W}$  besitze die Koordinaten  $\psi_1(p) = (x^1, \dots, x^n)$  und  $\psi_2(p) = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$  bezüglich der jeweiligen Karte. Der Kartenwechsel  $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(\mathcal{W}) \rightarrow \psi_2(\mathcal{W})$  bildet einen Homöomorphismus zwischen den entsprechenden Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.2.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeit

**Glattheit einer Abbildung.** Eine Abbildung  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf einer offenen Teilmenge  $\Omega$  des  $\mathbb{R}^n$  heißt  $C^k$ -Abbildung, falls alle Komponenten  $f^i$  von  $(f^1, \dots, f^n)$  stetige partielle Ableitungen bis zur Ordnung  $k$  besitzen. Die  $C^0$ -Abbildungen sind gera-

de alle stetigen Abbildung. Die  $C^\infty$ -Abbildungen besitzen stetige partielle Ableitungen beliebiger Ordnung.  $C^\infty$ -Abbildungen heißen auch **glatte** Abbildungen.

**Differenzierbare Mannigfaltigkeit.** Ist die Abbildung  $\psi_2 \circ \psi_1^{-1} : \psi_1(W) \rightarrow \psi_2(W)$  eines Kartenwechsels (siehe oben) eine  $C^k$ -Abbildung, so heißen die beiden Karten  $C^k$ -kompatibel. Ein Atlas  $\mathcal{A}$  heißt  $C^k$ -Atlas, wenn alle seine Karten  $C^k$ -kompatibel sind.

Eine differenzierbare  $C^k$ -Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einem  $C^k$ -Atlas. Eine differenzierbare  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit wird auch als **glatte Mannigfaltigkeit** bezeichnet.

**Untermannigfaltigkeit, Produktmannigfaltigkeit.** Es sei  $\mathcal{M}$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Menge  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$  heißt  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\mathcal{M}$ , wenn es für jedes  $y \in \mathcal{N}$  eine Karte  $(\mathcal{U}, \phi)$  auf  $\mathcal{M}$  mit  $y \in \mathcal{U}$  gibt, so daß  $\phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{N}) = \phi(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{R}^k \times 0^{n-k})$  gilt.

Es seien  $(\mathcal{M}_1, \mathcal{A}_1)$  und  $(\mathcal{M}_2, \mathcal{A}_2)$  zwei Mannigfaltigkeiten. Die Produktmannigfaltigkeit  $(\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$  besteht aus der Menge  $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$  und der differenzierbaren Struktur, die durch den Atlas  $\{(\mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2, \phi_1 \times \phi_2) \mid (\mathcal{U}_i, \phi_i) \text{ ist Karte von } (\mathcal{M}_i, \mathcal{A}_i), i = 1, 2\}$  erzeugt wird.

**Mannigfaltigkeit mit Rand.** Es bezeichne  $\mathbb{R}_-^n$  den Halbraum  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \leq 0\}$  und  $\partial\mathbb{R}_-^n := 0 \times \mathbb{R}^{n-1}$  seinen Rand.

Sei  $\mathcal{M}$  ein topologischer Raum. Ein Homöomorphismus  $\phi$  einer offenen Teilmenge  $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$  auf eine in  $\mathbb{R}_-^n$  oder  $\mathbb{R}^n$  offene Teilmenge des  $\mathbb{R}_-^n$  bzw.  $\mathbb{R}^n$  heißt **berandete  $n$ -dimensionale Karte** für  $\mathcal{U}$ . Entsprechend wird ein **berandeter Atlas** und eine **berandete Mannigfaltigkeit** definiert.

Es sei  $\mathcal{M}$  eine berandete Mannigfaltigkeit. Ein Punkt  $x \in \mathcal{M}$  heißt **Randpunkt** von  $\mathcal{M}$ , wenn er durch eine Karte  $(\mathcal{U}, \phi)$  um  $x$  auf einen Randpunkt  $\phi(x)$  von  $\phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}_-^n$  abgebildet wird. Die Menge  $\partial\mathcal{M}$  aller Randpunkte heißt **Rand** der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ .

Der Rand  $\partial\mathcal{M}$  einer berandeten Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  wird durch die Einschränkung

$$\phi|_{\mathcal{U} \cap \partial\mathcal{M}} : \mathcal{U} \cap \partial\mathcal{M} \rightarrow \partial(\phi(\mathcal{U})) \subset \partial\mathbb{R}_-^n \cong \mathbb{R}^{n-1}$$

der Karten von  $\mathcal{M}$  eine zu einer  $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit.

**Orientierbarkeit.** Es seien  $(\mathcal{U}_1, \psi_1), (\mathcal{U}_2, \psi_2)$  zwei Karten zur Beschreibung des Punktes  $p \in \mathcal{M}$  auf einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ . Der Punkt  $p$  habe die lokalen Koordinaten  $\psi_1(p) = (x^1, \dots, x^n)$  und  $\psi_2(p) = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$  bezüglich der jeweiligen Karte. Die Kartenwechsel  $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$  und  $\psi_1 \circ \psi_2^{-1}$  liefern die Transformationsbeziehungen

$$x^i = x^i(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \quad \text{und} \quad \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  heißt orientierbar, wenn es einen Atlas  $\mathfrak{A}$  von  $\mathcal{M}$  gibt, so daß alle Funktionaldeterminanten

$$J(x^1, \dots, x^n) = \frac{\partial(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)}(x^1, \dots, x^n)$$

für jeden Kartenpunkt und jede Kartentransformation positiv sind. Ein solcher Atlas heißt **orientiert**. Eine orientierte Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit mit einem orientiertem Atlas.

### 1.2.3 Glatte Abbildungen auf Mannigfaltigkeiten

**Diffeomorphismus.** Es sei  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  eine stetige Abbildung zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Es sei  $(\mathcal{U}, \phi)$  eine Karte in der Umgebung von  $p \in \mathcal{M}$  und  $(\mathcal{V}, \psi)$  eine Karte in der Umgebung von  $q = f(p) \in \mathcal{N}$ . Die Abbildung  $f$  besitzt die Glattheit  $C^k$ , wenn die durch die Karten

$$\begin{array}{ccc} p \in \mathcal{U} \subset \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & q \in \mathcal{V} \subset \mathcal{N} \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ (\phi^1(p), \dots, \phi^m(p)) \in \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \phi^{-1}} & (\psi^1(q), \dots, \psi^n(q)) \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

induzierte Abbildung  $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  von der Glattheit  $C^k$  ist. Sind die Kartenwechsel selbst genügend glatt, so ist die Glattheit von  $f$  unabhängig von verwendeten Karten und  $f$  heißt  $C^k$ -Abbildung aus  $\mathcal{M}$  in  $\mathcal{N}$ ,  $f \in C^k(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ .

Eine  $C^k$ -Abbildung  $f \in C^k(\mathcal{M}; \mathcal{N})$  wird  **$C^k$ -Diffeomorphismus** genannt,  $f \in \text{Diff}^k(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ , falls  $f$  bijektiv ist und  $f^{-1} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  auch von der Glattheit  $C^k$  ist. Zwei Mannigfaltigkeiten zwischen denen ein Diffeomorphismus erklärt ist, heißen **diffeomorph**.

**Kurven.** Es sei  $\mathcal{M}$  eine  $m$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{J}$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}$ . Eine Kurve  $c$  ist eine stetige Abbildung  $c : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{M}$ . Eine Kurve besitzt die Glattheit  $C^k$ , wenn für jede Karte  $(\mathcal{U}, \phi)$  auf  $\mathcal{M}$  mit  $c(\mathcal{J}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$  die Abbildung  $\phi \circ c : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}^m$  von der Glattheit  $C^k$  ist.

**Funktionen.** Es sei  $\mathcal{M}$  eine  $m$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt  $C^k$ -Funktion auf  $\mathcal{M}$ , falls die lokalen Darstellungen  $f \circ \phi_\alpha^{-1} : \mathcal{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$  für alle Karten  $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$  die Glattheit  $C^k$  besitzen. Die Menge der  $C^k$ -Funktionen auf  $\mathcal{M}$  wird als  $C^k(\mathcal{M}; \mathbb{R})$  bezeichnet, wobei  $C(\mathcal{M}; \mathbb{R})$  oft als Kürzel für  $C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R})$  verwendet wird.

$C(\mathcal{M}; \mathbb{R})$  besitzt die Struktur einer Algebra über den reellen Zahlen. Die entsprechenden Verknüpfungen sind punktweise definiert

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in C(\mathcal{M}; \mathbb{R}), \quad x \in \mathcal{M},$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x)), \quad \forall f \in C(\mathcal{M}; \mathbb{R}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{M},$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad \forall f, g \in C(\mathcal{M}; \mathbb{R}), \quad x \in \mathcal{M}.$$

### 1.3 Tangentenvektoren

**Geometrische Interpretation.** Es sei  $\mathcal{M}$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $\mathcal{J}$  ein offenes Intervall von  $\mathbb{R}$  mit dem Parameter  $\epsilon \in \mathcal{J}$ . Ferner sei  $\mathcal{C}_x\mathcal{M}$  die Menge aller glatter Kurven auf  $\mathcal{M}$  durch  $x \in \mathcal{M}$ . Zwei Kurven  $c_1, c_2 \in \mathcal{C}_x\mathcal{M}$  heißen **tangential äquivalent** im Punkt  $x \in \mathcal{M}$ , geschrieben  $c_1 K c_2$ , wenn gilt

$$1) \quad c_1(\epsilon = 0) = c_2(\epsilon = 0) = x,$$

$$2) \quad \frac{d}{d\epsilon} \phi^i \circ c_1 \Big|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} \phi^i \circ c_2 \Big|_{\epsilon=0}, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Tangentiale Äquivalenz ist eine kartenunabhängige Eigenschaft.

Die Äquivalenzklassen  $[c_1] \in \mathcal{C}_x\mathcal{M}/K$  heißen (geometrisch definierte) Tangentialvektoren von  $\mathcal{M}$  in  $x$  und  $T_x^{geom}\mathcal{M} := \mathcal{C}_x\mathcal{M}/K$  heißt (geometrisch definierter) Tangentialraum.

Der Tangentialraum  $T_x^{geom}\mathcal{M}$  trägt die Struktur eines reellen Vektorraumes mit den Verknüpfungen

$$1) \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 := [\phi^{-1} \circ (\phi \circ c_1 + \phi \circ c_2)];$$

$$2) \quad \lambda \mathbf{v} := [\phi^{-1} \circ (\lambda \phi \circ c)].$$

**Algebraische Interpretation.** Es sei  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  ein  $C^\infty$ -Funktional auf der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ . Man schreibt auch  $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ . Eine Derivation auf  $C^\infty(\mathcal{M})$  im Punkt  $x \in \mathcal{M}$  ist eine Abbildung  $\mathbf{v} : C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ , welche

(i) linear ist, d.h.

$$\mathbf{v}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathbf{v}(f) + \mu \mathbf{v}(g), \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{M}), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

und

(ii) die Leibniz-Regel erfüllt

$$\mathbf{v}(fg) = \mathbf{v}(f)g(x) + f(x)\mathbf{v}(g), \quad \forall f, g \in C^\infty(\mathcal{M}).$$

Die Menge aller Derivationen im Punkt  $x \in \mathcal{M}$  wird mit  $D_x\mathcal{M}$  bezeichnet.  $D_x\mathcal{M}$  trägt die Struktur eines reellen Vektorraumes, wobei Addition und Skalarmultiplikation auf  $D_x\mathcal{M}$  durch

- (a)  $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)(f) := \mathbf{v}_1(f) + \mathbf{v}_2(f), \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in D_x\mathcal{M}, f \in C(\mathcal{M});$   
 (b)  $\lambda\mathbf{v}(f) := \mathbf{v}(\lambda f), \quad \forall \mathbf{v} \in D_x\mathcal{M}, \lambda \in \mathbb{R}$

erklärt sind.

### Äquivalenz der geometrischen und algebraischen Interpretation

Die geometrische und die algebraische Darstellung der Tangentenvektoren können miteinander identifiziert werden. Dies geschieht mittels der linearen Abbildung  $\mu : T_x^{geom}\mathcal{M} \rightarrow D_x\mathcal{M}$ , die durch

$$[\mu(\mathbf{v})](f) := \frac{d}{d\epsilon} f(c(\epsilon)) \Big|_{\epsilon=0} \quad \text{mit } [c] = \mathbf{v} \quad (2.1.1)$$

gegeben ist und einen Isomorphismus  $T_x^{geom}\mathcal{M} \cong D_x\mathcal{M}$  darstellt. Für die Dimensionen dieser Räume gilt  $\dim(T_x^{geom}\mathcal{M}) = \dim(D_x\mathcal{M}) = \dim(\mathcal{M})$ .

Der Tangentialraum  $T_x\mathcal{M}$  im Punkt  $x$  an die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  wird hier als  $T_x\mathcal{M} := D_x\mathcal{M}$  definiert. Die Tangentialvektoren sind dann Derivationen auf  $\mathcal{M}$ , können aber auch als geometrische Tangentenvektoren interpretiert werden.

Der Tangentialraum  $T_x\mathcal{M}$  ist ein reeller Vektorraum der Dimension  $n = \dim(\mathcal{M})$ .

## 1.4 Tangentialabbildung

**Tangentialabbildung, Differential.** Es sei  $f \in C(\mathcal{M}; \mathcal{N})$  eine glatte Abbildung zwischen einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  und einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{N}$ . In jedem Punkt  $x \in \mathcal{M}$  ist dann auf natürliche Weise eine Abbildung

$$T_x f : T_x\mathcal{M} \rightarrow T_{f(x)}\mathcal{N}$$

gegeben, welche **Tangentialabbildung** in  $x$  (geschrieben  $T_x f$ ) oder **Differential** von  $f$  im Punkt  $x$  (geschrieben  $df_x, f_*(x)$ ) genannt wird. Die Tangentialabbildung wird entsprechend der jeweiligen Interpretation der Tangentenvektoren definiert. Ist z.B.  $c$  eine Kurve durch  $x \in \mathcal{M}$  und  $f \circ c$  die durch  $f$  induzierte Kurve durch  $f(x) \in \mathcal{N}$ , so ist  $T_x f$  diejenige lineare Abbildung, die den Tangentenvektoren  $[c]_x$  die entsprechenden Tangentenvektoren  $[f \circ c]_{f(x)}$  zuweist.

**Regulärer Punkt.** Ein Punkt  $x \in \mathcal{M}$  heißt regulärer Punkt von  $f \in C(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ , wenn die Tangentialabbildung  $T_x f : T_x\mathcal{M} \rightarrow T_{f(x)}\mathcal{N}$  eine Surjektion ist. Das bedeutet, daß die Gleichung  $(T_x f)\mathbf{u} = \mathbf{v}$  für jeden Vektor  $\mathbf{v} \in T_{f(x)}\mathcal{N}$  eine Lösung  $\mathbf{u} \in T_x\mathcal{M}$  besitzt. Ein Punkt  $y \in \mathcal{N}$  heißt genau dann regulärer Wert von  $f \in C(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ , wenn jeder Punkt  $x$  mit  $y = f(x)$  ein regulärer Punkt von  $f$  ist.

**Submersion.** Eine Abbildung  $f \in C(\mathcal{M}; \mathcal{N})$  heißt Submersion, wenn die Tangentialabbildung  $T_x f$  für jedes  $x \in \mathcal{M}$  eine Surjektion ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß jeder Punkt  $x \in \mathcal{M}$  ein regulärer Punkt ist.

**Immersion.** Eine Abbildung  $f \in C(\mathcal{M}; \mathcal{N})$  heißt Immersion, wenn die Tangentialabbildung  $T_x f$  für jedes  $x \in \mathcal{M}$  eine Injektion ist. Dieses bedeutet, daß aus  $(T_x f)u = 0$  folgt  $u = 0$ .

**Einbettung.** Eine Abbildung  $f \in C(\mathcal{M}; \mathcal{N})$  heißt Einbettung, wenn  $f$  eine bijektive Immersion und die inverse Abbildung  $f^{-1}$  stetig ist.

Ist  $f$  eine Einbettung, dann bildet die Bildmenge  $f(\mathcal{M})$  eine Untermannigfaltigkeit von  $\mathcal{N}$  mit  $\dim f(\mathcal{M}) = \dim \mathcal{M}$ .

**Whitneyscher Einbettungssatz.** Es sei  $\mathcal{M}$  eine reelle  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer abzählbaren Basis. Dann existiert eine Einbettung  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ .

**Darstellung der Tangentenvektoren.** Es sei  $(\mathcal{U}, \phi)$  eine Karte in der Umgebung eines Punktes  $x$  auf der  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ . Dem Punkt  $x$  seien die Koordinaten

$$\mathbf{x} = \phi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$$

zugewiesen. Die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^m$  ist durch die  $m$  Vektoren

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_m = (0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$$

gegeben. Da  $\phi \in C(\mathcal{U}; \mathbb{R}^m)$  ein Diffeomorphismus ist, stellt  $\phi$  auch eine (lokale) Einbettung von  $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$  in  $\mathbb{R}^m$  dar. Mit Hilfe der Tangentialabbildung  $T_x \phi : T_x \mathcal{U} \rightarrow T_{\phi(x)} \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$  läßt sich eine Tangentenbasis  $\partial \mathbf{x}_i$  auf  $T_x \mathcal{M}$  erzeugen, welche

$$(T_x \phi)(\partial \mathbf{x}_i) = \mathbf{e}_i$$

erfüllt. Die Schreibweise  $\partial \mathbf{x}_i$  ist rein formal. Gebräuchlich ist auch  $\partial_i$  oder  $\partial / \partial x^i$ .

Alle Schreibweisen heben den Eigenschaft von  $\partial \mathbf{x}_i$  als Derivation hervor. Ist  $h \in C(\mathcal{M}; \mathbb{R})$  eine Funktion auf  $\mathcal{M}$  dann liefert  $u(h)$  die Funktion

$$u(h) = (u^i \partial \mathbf{x}_i)(h) = u^i \frac{\partial h(x^1, \dots, x^m)}{\partial x^i} \in C(\mathcal{M}; \mathbb{R}).$$

Wird für  $h$  speziell die Koordinatenfunktion  $\phi^j = pr^j \circ \phi$  verwendet, wobei  $pr^j : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  die Projektion auf den  $j$ -ten Faktor eines kartesischen Produktes ist, so ergibt sich für  $u(\phi^j)$

$$u(\phi^j) = (u^i \partial \mathbf{x}_i)(\phi^j) = u^i \frac{\partial pr^j(x^1, \dots, x^m)}{\partial x^i} = u^i \delta_i^j \in C(\mathcal{M}; \mathbb{R}).$$

Es gilt also  $\partial \mathbf{x}_i(\phi^j) = \delta_i^j$ .

### 1.4.1 Tangentialbündel

Das Tangentialbündel  $T\mathcal{M}$  der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ist die Menge aller Paare  $(x, \mathbf{u})$ , mit  $x \in \mathcal{M}$  und  $\mathbf{u} \in T_x\mathcal{M}$ . Das Tangentialbündel  $T\mathcal{M}$  ist in natürlicher Weise eine  $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit der Karte

$$T\phi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \rightarrow \phi(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n \quad \text{gegeben durch}$$

$$T\phi(\mathbf{v})(x) = (\phi(x), (T_x\phi)(\mathbf{u})(x)), \quad \forall \mathbf{u} \in T_x\mathcal{M}.$$

Hier ist  $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  die kanonische Projektion  $\pi(x, \mathbf{u}) = x$ , mit  $\mathbf{u} \in T_x\mathcal{M}$ .

Die Schreibweise  $T\mathcal{M}$  für das Tangentialbündel ist eine Kurzform der Schreibweise  $(T\mathcal{M}, \pi, \mathcal{M})$ , welche gewöhnlich für Faserbündel verwendet wird.

**Vektorfelder.** Ein Vektorfeld  $\mathbf{u}$  auf einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ist die Zuordnung eines Tangentenvektors  $\mathbf{u} \in T_x\mathcal{M}$  zu jedem Punkt  $x \in \mathcal{M}$ . Ist  $\{\partial x_i\}$  eine natürliche Basis auf  $T_x\mathcal{M}$ , so ist das Vektorfeld  $\mathbf{u} = u^i \partial x_i$  von der Glattheit  $C^k$ , falls die Komponentenfunktionen  $u^i \in C(\mathcal{M}; \mathbb{R})$  von der Glattheit  $C^k$  sind.

Ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  läßt sich auch als ein Schnitt (*engl. section*)  $\mathbf{u} \in \mathfrak{s}(T\mathcal{M})$  des Tangentialbündels  $T\mathcal{M}$  auffassen. Ein Schnitt  $s \in \mathfrak{s}(T\mathcal{M}, \pi, \mathcal{M})$  eines Bündels ist eine Abbildung  $s : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ , die  $\pi \circ s = id_{\mathcal{M}}$  erfüllt.

### 1.4.2 Kotangentialraum

Ein Kotangentenvektor  $\boldsymbol{\omega}$  im Punkt  $x$  einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ist ein lineares Funktional auf dem Tangentialraum  $T_x\mathcal{M}$ .

$$\boldsymbol{\omega}(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda \boldsymbol{\omega}(\mathbf{u}) + \mu \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_x\mathcal{M}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Der Kotangentialraum  $T_x^*\mathcal{M}$  besteht aus allen Kotangentenvektoren im Punkt  $x \in \mathcal{M}$ . Der Kotangentialraum bildet den (algebraisch) dualen Raum zu  $T_x\mathcal{M}$ . Entsprechend den Sätzen der linearen Algebra ist  $\dim T_x^*\mathcal{M} = \dim T_x\mathcal{M}$ .

Auf  $T_x^*\mathcal{M}$  gibt es eine natürliche Basis  $\{dx^i\}$  bezüglich der Karte  $(\mathcal{U}, \phi)$ , die

$$dx^i(\partial x_j) = \delta_j^i$$

erfüllt. Ein Kovektor  $\boldsymbol{\omega}$  läßt sich dann als  $\boldsymbol{\omega} = \omega_i dx^i$  darstellen und  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{u})$  ergibt das Resultat

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{u}) = (\omega_i dx^i)(u^j \partial x_j) = \omega_i u^i.$$

**Kotangentialbündel, 1-Formen.** Die Menge aller Paare  $(x, \boldsymbol{\omega})$ , mit  $x \in \mathcal{M}$  und  $\boldsymbol{\omega} \in T_x^*\mathcal{M}$ , heißt Kotangentialbündel  $T^*\mathcal{M}$ . Mit einer Bündelkarte, die entsprechend

der von  $T\mathcal{M}$  definiert ist, wird  $T^*\mathcal{M}$  zu einer  $2m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit. Die Schnitte  $\omega \in \mathfrak{s}(T^*\mathcal{M})$  des Bündels  $(T^*\mathcal{M}, \pi^*, \mathcal{M})$  heißen (differentielle) 1-Formen auf  $\mathcal{M}$ . Eine 1-Form ist eine Zuweisung von Kotangentenvektoren  $\omega \in T_x^*\mathcal{M}$  zu jedem Punkt  $x \in \mathcal{M}$ .

## 1.5 Tensoren auf Mannigfaltigkeiten

**Tensorprodukt.** Analog zur Definition auf linearen Räumen wird ein auf dem Tangentialraum  $T_x\mathcal{M}$  im Punkt  $x$  an eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ein Tensorprodukt  $\otimes$  eingeführt (siehe (1.2.3)). Ein Tensorprodukt von Typ

$$\underbrace{T_x\mathcal{M} \otimes T_x\mathcal{M} \otimes \dots \otimes T_x\mathcal{M}}_r \otimes \underbrace{T_x^*\mathcal{M} \otimes T_x^*\mathcal{M} \otimes \dots \otimes T_x^*\mathcal{M}}_s$$

heißt  $s$ -fach kovariant und  $r$ -fach kontravariant und wird mit  $\mathcal{T}_{r,s}^r(T_x\mathcal{M})$  bezeichnet. Voraussetzung für diese Bezeichnung ist, daß  $T_x^*\mathcal{M}$  der Dualraum zu  $T_x\mathcal{M}$  ist.

Als Sonderfälle hat man

$$\mathcal{T}_0^0(T_x\mathcal{M}) = \mathbb{R},$$

$$\mathcal{T}_0^1(T_x\mathcal{M}) = T_x\mathcal{M},$$

$$\mathcal{T}_1^0(T_x\mathcal{M}) = T_x^*\mathcal{M}.$$

**Tensorfelder.** Ein Tensorfeld auf einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ist die Zuweisung von Tensoren  $\mathcal{T}_s^r(T_x\mathcal{M})$  zu jedem Punkt  $x \in \mathcal{M}$ . Die Menge aller Paare  $(x, \mathbf{A})$ , mit  $\mathbf{A} \in \mathcal{T}_s^r(T_x\mathcal{M})$  wird  $(r,s)$ -Tensorbündel  $\mathcal{T}_s^r\mathcal{M}$  genannt. Das Tensorbündel besitzt die Struktur einer  $((s+r+1)m)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit. Ein Bündelatlas wird auf natürliche Weise durch das Tensorprodukt generiert (siehe ABRAHAM ET AL. [1], S.349ff.). Ein Tensorfeld läßt sich dann als Schnitt  $\mathfrak{s}(\mathcal{T}_s^r\mathcal{M})$  eines Tensorbündels darstellen. Für die Schnitte von Tensorbündeln wird hier die Schreibweise  $\mathcal{T}_s^r\mathcal{M} := \mathfrak{s}(\mathcal{T}_s^r\mathcal{M})$  eingeführt.

Speziell erhält man als

$$\mathcal{T}_0^0\mathcal{M} = C(\mathcal{M}; \mathbb{R}), \text{ Funktionen auf } \mathcal{M};$$

$$\mathcal{T}_0^1\mathcal{M} = \mathfrak{s}(T\mathcal{M}), \text{ Vektorfelder auf } \mathcal{M};$$

$$\mathcal{T}_1^0\mathcal{M} = \mathfrak{s}(T^*\mathcal{M}), \text{ 1-Formen auf } \mathcal{M}.$$

## 1.6 Differentialformen

Eine alternierende Differentialform  $\omega$  vom Grade  $k$ , kurz  $k$ -Form, auf einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist ein schief-symmetrisches Tensorfeld (alternierende Multilinearform)

vom Typ  $\mathcal{T}_k^0\mathcal{M}$ , d.h. es gilt

$$\omega(\mathbf{u}_{\rho(1)}, \mathbf{u}_{\rho(2)}, \dots, \mathbf{u}_{\rho(k)}) = \text{sign}(\rho)\omega(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k), \quad \forall \mathbf{u}_i \in T_x\mathcal{M}. \quad (2.1.2)$$

Hierbei ist  $\rho$  eine Permutation von  $(1, 2, \dots, k)$  und  $\text{sign}(\rho)$  gibt das Vorzeichen der Permutation an. Es gilt  $\text{sign}(\rho) = +1$  für gerade und  $\text{sign}(\rho) = -1$  für ungerade Permutationen. Aus (2.1.2) ist ersichtlich, daß aus zwei gleichen Vektoren  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j$  das Resultat  $\omega(\dots, \mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}, \dots) = 0$  folgt.

Die alternierenden  $k$ -linearen Abbildungen (kurz:  $k$ -Formen) auf  $T_x\mathcal{M}$  werden auch mit  $\wedge^k T_x\mathcal{M}$  bezeichnet. Eine 2-Form  $\omega \in \wedge^2 T_x\mathcal{M}$  ist ein schiefsymmetrischer Tensor aus  $\mathcal{T}_2^0(T_x\mathcal{M})$  mit der Eigenschaft

$$\omega(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = -\omega(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1).$$

Für alternierende 0- und 1-Formen gilt die Identifikation  $\wedge^0 T_x\mathcal{M} = \mathbb{R}$  und  $\wedge^1 T_x\mathcal{M} = T_x^*\mathcal{M}$ .

**Dachprodukt.** Für alternierende Formen gibt es ein spezielles Produkt  $\wedge$ , das Dachprodukt (*engl. wedge product*), welches eine innere Verknüpfung auf dem Formenraum darstellt. Für zwei alternierende Formen  $\omega \in \wedge^k T_x\mathcal{M}$  und  $\eta \in \wedge^l T_x\mathcal{M}$  ist das Dachprodukt  $\omega \wedge \eta$  eine  $(k+l)$ -Form, gegeben durch

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta)(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{k+l}) \\ = \frac{1}{k!l!} \sum_{\rho} \text{sign}(\rho)\omega(\mathbf{u}_{\rho(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\rho(k)})\eta(\mathbf{u}_{\rho(k+1)}, \dots, \mathbf{u}_{\rho(k+l)}), \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

wobei  $\mathbf{u}_i \in T_x\mathcal{M}$ . Für 1-Formen  $\omega, \eta \in \wedge^1 T_x\mathcal{M}$  findet man  $\omega \wedge \eta = \omega \otimes \eta - \eta \otimes \omega$ .

Für das Dachprodukt gelten

das Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta) \wedge \mu = \omega \wedge (\eta \wedge \mu), \quad \forall \omega \in \wedge^k T_x\mathcal{M}, \quad \eta \in \wedge^l T_x\mathcal{M}, \\ \mu \in \wedge^p T_x\mathcal{M}; \end{aligned}$$

die Distributivgesetze

$$\begin{aligned} \omega \wedge (\eta + \mu) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \mu, \quad \forall \omega \in \wedge^k T_x\mathcal{M}, \quad \eta, \mu \in \wedge^l T_x\mathcal{M}, \\ (\eta + \mu) \wedge \omega = \eta \wedge \omega + \mu \wedge \omega, \quad \forall \omega \in \wedge^k T_x\mathcal{M}, \quad \eta, \mu \in \wedge^l T_x\mathcal{M}; \end{aligned}$$

die (Anti-)Kommutativität

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega, \quad \forall \omega \in \wedge^k T_x\mathcal{M}, \quad \eta \in \wedge^l T_x\mathcal{M}.$$

**Differentialformen.** Aus der stetigen Zuweisung von Multilinearformen zu jedem Punkt  $x$  einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  ergeben sich Formenfelder, die Differentialformen oder differenzierbare Formen genannt werden. Die Menge der differenzierbaren  $k$ -Formen (kurz:  $k$ -Formen) auf  $\mathcal{M}$  wird mit  $\Omega^k\mathcal{M}$  bezeichnet. Speziell gilt  $\Omega^1\mathcal{M} \equiv \mathcal{T}_1^0\mathcal{M}$  und  $\Omega^0\mathcal{M} \equiv C(\mathcal{M}; \mathbb{R})$ . Für Differentialformen läßt sich das Dachprodukt  $\wedge : \Omega^k\mathcal{M} \times \Omega^l\mathcal{M} \rightarrow \Omega^{k+l}\mathcal{M}$  punktweise aus den Multilinearformen übertragen

$$(\omega \wedge \eta)(x) = \omega(x) \wedge \eta(x), \quad \forall \omega \in \Omega^k\mathcal{M}, \quad \eta \in \Omega^l\mathcal{M}.$$

**Cartansche Ableitung.** Die Cartansche Ableitung einer  $p$ -Form  $\omega \in \Omega^p\mathcal{M}$  ist eine  $(p+1)$ -Form, welche als  $d\omega$  bezeichnet wird und durch folgende Eigenschaften bestimmt ist

- (i) Der Operator  $d$  ist linear;
- (ii) Differentialbedingung: Ist  $f$  eine 0-Form,  $f \in \Omega^0\mathcal{M}$ , dann gilt  $df(\mathbf{u}) = \mathbf{u}(f)$  für jedes Vektorfeld  $\mathbf{u} \in \mathcal{T}_0^1\mathcal{M}$ ;
- (iii) Identität von Poincaré:  $d(d\omega) = 0$ ;
- (iv) Produktregel:  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$  für  $\omega \in \Omega^p\mathcal{M}$ .

**Inneres Produkt.** Das innere Produkt  $\lrcorner : \mathcal{T}_0^1\mathcal{M} \times \Omega^k\mathcal{M} \rightarrow \Omega^{k-1}\mathcal{M}$  zwischen einem Vektorfeld  $\mathbf{u}$  und einer  $k$ -Form  $\omega$  auf  $\mathcal{M}$  liefert eine  $(k-1)$ -Form, die durch

$$(\mathbf{u} \lrcorner \omega)(x)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}) = \omega(x)(\mathbf{u}(x), \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \in T_x\mathcal{M},$$

definiert ist. Für 0-Formen gilt speziell  $\mathbf{u} \lrcorner f = 0$ .

Der Operator  $\mathbf{u} \lrcorner : \Omega^k\mathcal{M} \rightarrow \Omega^{k-1}\mathcal{M}$  bildet eine Derivation auf dem Formenraum, da er linear ist und die Produktregel

$$\mathbf{u} \lrcorner (\omega \wedge \eta) = \mathbf{u} \lrcorner \omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (\mathbf{u} \lrcorner \eta), \quad \forall \omega \in \Omega^k\mathcal{M}$$

erfüllt. Die Hintereinanderschaltung von inneren Produkten ist eine schief-symmetrische Verknüpfung

$$\mathbf{u} \lrcorner \mathbf{v} \lrcorner = -\mathbf{v} \lrcorner \mathbf{u} \lrcorner.$$

### 1.6.1 Integration von Differentialformen

Es sei  $\mathcal{M}$  eine  $m$ -dimensionale, kompakte und orientierte Mannigfaltigkeit. Das Integral  $\int_{\mathcal{M}} \omega$  über eine stetige  $m$ -Form  $\omega$  ist folgendermaßen definiert:

- (i) Aus der Kompaktheit von  $\mathcal{M}$  folgt, daß endlich viele Karten  $(\mathcal{U}_i, \phi_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  für eine Überdeckung von  $\mathcal{M}$  ausreichen. Diese Karten gehören demselben orientierten Atlas  $\mathcal{A}$  an.

(ii) Für die  $N$  offenen Umgebungen wird eine Zerlegung der Eins  $\{z_i\}$  gewählt, d.h. es gilt

$$\sum_{i=1}^N z_i(x) = 1, \quad \forall x \in \mathcal{M}.$$

Die Funktionen  $z_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig, erfüllen  $0 \leq z_i(x) \leq 1$  und sind außerhalb einer kompakten Teilmenge von  $\mathcal{U}_i$  identisch null.

(iii) Das Integral  $\int_{\mathcal{M}} \omega$  ist dann durch

$$\int_{\mathcal{M}} \omega := \sum_{i=1}^N \int_{\mathcal{U}_i} \omega z_i$$

definiert und kann nunmehr innerhalb des Gültigkeitsbereiches jeder einzelnen Karte, z.B.  $\omega = \rho(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ , gemäß

$$\int_{\mathcal{U}_i} \omega z_i = \int_{\phi_i(\mathcal{U}_i)} z_i \rho(x) dx^1 dx^2 \dots dx^m$$

im klassischen Sinne ausgewertet werden.

Die Definition von  $\int_{\mathcal{M}} \omega$  ist unabhängig von der Wahl der Überdeckung und der entsprechenden Zerlegung der Eins.

**Satz von Stokes.** Es sei  $\mathcal{M}$  eine  $m$ -dimensionale kompakte und orientierte Mannigfaltigkeit mit orientiertem Rand  $\partial\mathcal{M}$ . Für eine  $(m-1)$ -Form der Glattheit  $C^1$  auf  $\mathcal{M}$  gilt für  $m \geq 1$

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} d\omega.$$

## 1.6.2 Lie-Ableitung

Es sei  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}_0^1\mathcal{M}$  ein Vektorfeld auf einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ . Die Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}$  ist eine Abbildung

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} : \mathcal{T}_q^p\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{T}_q^p\mathcal{M}$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$(1) \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\lambda\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\mathbf{A}) + \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\mathbf{B}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}_q^p\mathcal{M};$$

$$(2a) \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(f) = \langle df, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}(f), \quad \forall f \in C^\infty(\mathcal{M}; \mathbb{R});$$

$$(2b) \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = [\mathbf{v}, \mathbf{u}] = \mathbf{v} \circ \mathbf{u} - \mathbf{u} \circ \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{T}_0^1\mathcal{M};$$

$$(3) \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\mathbf{B}), \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{T}_q^p\mathcal{M};$$

$$(4) \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\langle \omega, \mathbf{u} \rangle) = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{v}}\omega, \mathbf{u} \rangle + \langle \omega, \mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} \rangle, \quad \forall \omega \in \mathcal{T}_1^0\mathcal{M}, \mathbf{u} \in \mathcal{T}_0^1\mathcal{M}.$$

Durch (2) und (4) ist die Lie-Ableitung von Tangentenvektoren und 1-Formen bestimmt. Mit (3) kann diese durch das Tensorprodukt auf Tensoren beliebiger Stufe erweitert werden.



# Literaturverzeichnis

- [1] ABRAHAM, R., MARSDEN, J. AND RATIU, T.: *Manifolds, tensor analysis, and applications*; second ed., vol. 75 of *Applied Mathematical Sciences* Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [2] AHMAD, S., IRONS, B. M. AND ZIENKIEWICZ, O. C.: Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axi-symmetric problems; In *Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics* (1968).
- [3] ALBERT, H.: An Extension of Hamilton's Principle for Dissipative Continua; *Z. Angew. Math. Mech.* 72 (1992), 407-414.
- [4] ANTHONY, K.-H.: A new approach to thermodynamics of irreversible processes by means of Lagrange-formalism; In *Disequilibrium and Self-Organisation* (1986), C. W. Kilminster, Ed., D. Reidel Publ. Comp., pp. 75-92.
- [5] ANTHONY, K.-H.: Entropy and dynamical stability. A method due to Lagrange-formalism as applied to thermodynamics of irreversible processes; In *Trends in Application of Mathematics to Mechanics* (1988), J. F. Besseling and W. Eckhaus, Eds., Springer-Verlag, Berlin, p. 297.
- [6] ANTHONY, K.-H.: Unification of Continuum Mechanics and Thermodynamics by Means of Lagrange-Formalism; *Arch. Mech.* 41,4 (1989), 511-534.
- [7] ANTHONY, K. H.: Ansätze zur Plastizitätstheorie; In *Große plastische Formänderungen, Bad Honnef 1994* (1994), O. T. Brühns, Ed., vol. 93 of *Mitt. Inst. für Mech., Ruhr-Universität Bochum*.
- [8] ANTMAN, S. AND MARLOW, R.: Material Constraints, Lagrange Multipliers, and Compatibility. Application to Rod and Shell Theories; *Arch. Rational Mech. Anal.* 116 (1991), 257-299.
- [9] ANTMAN, S. S.: Material Constraints in continuum mechanics; *Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* 70(8) (1982), 256-264.
- [10] ANTMAN, S. S.: *Nonlinear Problem of Elasticity*; vol. 107 of *Applied Mathematical Sciences* Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [11] ANTMAN, S. S. AND OSBORNE, J. E.: The principle of virtual work and integral laws of motion; *Arch. Rational Mech. Anal.* 69 (1979), 231-262.

- [12] BADUR, J. AND STUMPF, H.: On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory; *Mitt. Inst. für Mech., Ruhr-Universität Bochum* 72 (1989).
- [13] BASAR, Y. AND DING, Y.: Finite-Rotation Elements for the Nonlinear Analysis of Thin Shell Structures; *Int. J. Solids Struct.* (1990), 83–97.
- [14] BASAR, Y. AND KRÄTZIG, W. B.: *Mechanik der Flächentragwerke*; Friedr. Vieweg & Sohn, 1985.
- [15] BASAR, Y. AND KRÄTZIG, W. B.: A consistent shell theory for finite deformation; *Acta Mechanica* 76 (1986), 73–87.
- [16] BATRA, G.: On a Principle of Virtual Work for Thermo-Elastic Bodies; *J. Elasticity* 21 (1989), 1331–1346.
- [17] BEATTY, M. F. AND CHEVERTON, K. J.: The Basic Equations for a Grade 2 Material Viewed as an Oriented Continuum; *Arch. Mechanicum* 28 (1976), 205–213.
- [18] BEDFORD, A.: *Hamilton's Principle in Continuum Mechanics*; Pitman, 1985.
- [19] BERTRAM, A.: *Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik*; Bibliographisches Institut, Wissenschaftsverlag, 1989.
- [20] BINZ, E., SNIATYCKI, J. AND FISCHER, H.: *Geometry of Classical Fields*; North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [21] BÜCHTER, N. AND RAMM, E.: Shell theory versus degeneration in large rotation finite element analysis; *Int. J. Numerical Meth. Engng.* 43 (1992), 39–61.
- [22] CAPRIZ, G.: *Continua with Microstructure*; Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [23] CAPRIZ, G. AND GUIDUGLI, P. P.: Formal Structure and Classification of Theories of Oriented Materials; *Annali di Matematica* (1977), 17–39.
- [24] CAPRIZ, G. AND PODIO-GUIDUGLI, P.: Discrete and Continuous Bodies with Affine Structure; *Annali di Matematica* 4(61) (1976), 195–211.
- [25] CHOQUET-BRUHAT, Y., DEWITT-MORETTE, C. AND DILLARD-BLEICK, M.: *Analysis, Manifolds and Physics*; North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [26] CHROSCIELEWSKI, J., MAKOWSKI, J. AND STUMPF, H.: Genuinely Resultant Shell Finite Elements Accounting for Geometric and Material Non-Linearity; *Int. J. Numerical Meth. Engng.* 35 (1992), 63–94.
- [27] CIARLETTA, M. AND SCALIA, A.: On the Nonlinear Theory of Nonsimple Thermoelastic Materials with Voids; *Z. Angew. Math. Mech.* 73 (2) (1993), 67–75.
- [28] CIARLETTA, M. AND SCALIA, A.: Thermodynamic Theory for Porous Piezoelectric Materials; *Meccanica* 28 (1993), 303–308.

- [29] COSSERAT, E. AND COSSERAT, F.: *Theorie des Corps Deformables*; Hermann et Fils, Paris, 1909.
- [30] CURNIER, A. AND RAKOTOMANANA, L.: Generalized Strain and Stress Measures: Critical Survey and New Results: *Engineering Transactions* 39, 3-4 (1991), 461-538.
- [31] DE BOER, R.: *Theorie poröser Medien - historische Entwicklung und gegenwärtiger Stand*; Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen 53. Universität-Gesamthochschule Essen, 1991.
- [32] DE LEON, M. AND RODRIGUEZ, P.: *Generalized Classical Mechanics and Field Theory*; North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [33] DESLOGE, E. AND KARCH, R.: Noether's Theorem in Classical Mechanics; *American Journal of Physics* 45. 4 (1977), 336-339.
- [34] DODSON, C. T. J. AND POSTON, T.: *Tensor Geometry*; second ed. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1991.
- [35] DOYLE, T. AND ERICKSEN, J.: Nonlinear Elasticity; In *Advances in Applied Mechanics* 4 (1956), Academic Press, New York.
- [36] EELLS, J. AND LEMAIRE, L.: A Report on Harmonic Maps; *The Bulletin of the London Mathematical Society* 10 (1978), 1-68.
- [37] EPSTEIN, M. AND SEGEV, R.: Differentiable Manifolds and the Principle of Virtual Work in Continuum Mechanics; *J. Math. Phys.* 21(5) (1980), 1243-1245.
- [38] EULER, N. AND STEEB, W.-H.: *Continuous Symmetries. Lie Algebras and Differential Equations*; Bibliographisches Institut, Wissenschaftsverlag, 1992.
- [39] FORTE, S. AND VIANELLO, M.: On Surface Stresses and Edge Forces; *Rendiconti di Matematica, Serie VII* 8 (1988), 409-426.
- [40] G. CAPRIZ, P. PODIO-GUIDUGLI, W. W.: On Balance Equations for Materials with Affine Structure; *Meccanica* 17 (1982), 80-84.
- [41] GOLEBIEWSKA-HERRMANN, A.: On Conservation Laws of Continuum Mechanics; *Int. J. Solids Struct.* 17 (1981), 1-9.
- [42] GOODMAN, M. A. AND COWIN, S. C.: A Continuum Theory for Granular Materials; *Arch. Rational Mech. Anal.* 44 (1971), 249-266.
- [43] GRUTTMANN, F., STEIN, E. AND P. WRIGGERS: Theory and numerics of thin elastic shells with finite rotations; *Ing.-Arch.* 59 (1989), 54-67.
- [44] GÜNTHER, C.: The Polysymplectic Hamiltonian Formalism in Field Theory and Calculus of Variations; *Journal of Differential Geometry* 25 (1987), 23-53.

- [45] GURTIN, M. E. AND MURDOCH, I.: A Continuum Theory of Elastic Material Surfaces; *Arch. Rational Mech. Anal.* 57 (1974/75), 291–323.
- [46] HARTMANN, F.: *The Mathematical Foundation of Structural Mechanics*; Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [47] HAUPT, P. AND TSAKMAKIS, C.: On the application of dual variables in continuum mechanics; *Continuum Mech. Thermodyn.* 1 (1989), 165–196.
- [48] HAWKINS, J. AND BEDFORD, A.: Variational Theory of Bubbly Media with a Distribution of Bubble Sizes - II. Porous Solids; *Int. J. Engng. Sci.* 30, 9 (1992), 1177–1186.
- [49] HUSEMOLLER, D.: *Fibre Bundles*; Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [50] HUTTER, K.: The Foundation of Thermodynamics, Its Basic Postulates and Implications. A Review of Modern Thermodynamics; *Acta Mechanica* 27 (1977), 1–54.
- [51] KOITER, W. T.: On the nonlinear theory of thin elastic shells; *Proc. Kon. Ned. Ak. Wet.* 69 (B) (1966), 1–54.
- [52] KOTOWSKI, R.: Hamilton's Principle in Thermodynamics; *Arch. Mechanicum* 44, 2 (1992), 203–215.
- [53] KRÄTZIG, W.: 'Best' Transverse Shearing and Stretching Shell Theory for Nonlinear Finite Element Simulations; *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 103 (1993), 135–160.
- [54] KRÖNER, E.: Interrelations between Various Branches of Continuum Mechanics; In *Mechanics of Generalized Continua* (1967).
- [55] KRÖNER, E., Ed. *Mechanics of Generalized Continua* (1968), IUTAM Symposium, Springer-Verlag, Berlin.
- [56] KUPERSCHMIDT, B. A.: Geometry of jet bundles and the structure of Lagrangian and Hamiltonian formalism; In *Geometric Methods in Mathematical Physics*, vol. 775 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1980, pp. 162–218.
- [57] LANG, S.: *Differential Manifolds*; Addison-Wesley, 1972.
- [58] LE, K. C. AND STUMPF, H.: Nonlinear continuum theory of dislocations; *Int. J. Engng. Sci.* 34, 3 (1996), 339–358.
- [59] LEHMANN, T. AND LIANG, H.: The Stress Conjugate to Logarithmic Strain In V; *Z. Angew. Math. Mech.* 73 (12) (1993), 357–363.
- [60] LIBAI, A. AND SIMMONDS, J. G.: *Nonlinear Elastic Shell Theory*, vol. 23 of *Advances in Applied Mechanics* Academic Press, New York, 1983.

- [61] LUCHA, W. AND SCHÖBERL, F. F.: *Gruppentheorie*, vol. 697 of *B.I.-Hochschultaschenbuch* Bibliographisches Institut, Wissenschaftsverlag, 1993.
- [62] MACKENZIE, J. K.: The Elastic Constants of a Solid Containing Spherical Holes; *Proc. Phys. Soc. B63* (1950), 2–11.
- [63] MACVEAN, D.: Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren; *Z. Angew. Math. Phys.* 19 (1968), 157–185.
- [64] MAKOWSKI, J., HOPPE, U. AND STUMPF, H.: On Intrinsic Geometry of Continua with Microstructure; *Z. Angew. Math. Mech.* 73 (4-5) (1993), T337–T339.
- [65] MAKOWSKI, J. AND PIETRASZKIEWICZ, W.: Work-Conjugate Boundary Conditions in the Nonlinear Theory of Thin Shells; *J. Appl. Mech.* 56 (1989), 395–401.
- [66] MAKOWSKI, J. AND STUMPF, H.: Finite axisymmetric deformation of shells of revolution with application to flexural buckling of circular pplates; *Ing.-Arch.* 39 (1989), 456–472.
- [67] MAKOWSKI, J. AND STUMPF, H.: Buckling equations of elastic shells with rotational degrees of freedom undergoing finite strain deformation; *Int. J. Solids Struct.* 26 (1990), 353–368.
- [68] MAKOWSKI, J. AND STUMPF, H.: On the 'symmetry' of tangent operators in nonlinear mechanics; *Z. Angew. Math. Mech.* 75(3) (1995), 189–198.
- [69] MARKOV, K. Z.: On a microstructural model of damage in solids; *Int. J. Engng. Sci.* 33(1) (1995), 139–150.
- [70] MARSDEN, J. AND HUGHES, T.: *Mathematical Foundation of Elasticity*; Prentice-Hall, 1983.
- [71] MAUGIN, G.: Eshelby stress in elastoplasticity and ductile fracture; *Int. J. Plasticity Vol.10, No.4* (1994), 393–408.
- [72] MILFORD, R. V. AND SCHNOBRICH, W. C.: Degenerated isoparametric finite elements using explicit integration; *Int. J. Numerical Meth. Engng.* 23 (1986), 133–154.
- [73] MORSE, P. M. AND FESHBACH, H.: *Methods of theoretical physics*, vol. 1,2 McGraw-Hill, New York, 1953.
- [74] MÜLLER, I.: Thermodynamic theories of thermoelasticity and special cases of thermoplasticity; *Course at International Center for Mechanical Sciences, Udine The Laplace Session* (July 19-30, 1982).
- [75] NAGHDI, P. M.: The theory of plates and shells; In *Handbuch der Physik* (1972), S. Flügge and C. Truesdell, Eds., vol. VI a.2 of *Encyclopedia of physics*, Springer-Verlag, Berlin.

- [76] NOETHER, E.: Invariante Variationsprobleme; *Kgl. Ges. Wiss. Nachr. Göttingen, Math.-Physik Kl. 2* (1918), 235–257.
- [77] NOLL, W.: A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media; *Arch. Rational Mech. Anal. 2* (1958), 197–226.
- [78] NOLL, W.: Space-Time Structures in Classical Mechanics; In *Delaware Seminar on the Foundation of Physics* (1967), Springer-Verlag, Berlin.
- [79] NOLL, W.: Lectures on the Foundation of Continuum Mechanics and Thermodynamics; *Arch. Rational Mech. Anal. 52* (1973), 62–92.
- [80] NOLL, W.: *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics. Selected Papers*; Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [81] NOLTE, L.-P., MAKOWSKI, J. AND STUMPF, H.: On the derivation and comparative analysis of large rotation shell theories; *Ing.-Arch. 56* (1986), 145–160.
- [82] NOVOZHILOV, V. V. AND SHAMINA, V. A.: On kinematic boundary conditions in non-linear elasticity problems; *Mech. Solids 5* (1975), 63–74.
- [83] NUNZIATO, J. AND COWIN, S.: A Nonlinear Theory of Elastic Materials with Voids; *Arch. Rational Mech. Anal. 72* (1979), 175–201.
- [84] OLVER, P. J.: Conservation Laws in Elasticity: I. General Results; *Arch. Rational Mech. Anal. 85* (1984), 112–129.
- [85] OLVER, P. J.: Conservation Laws in Elasticity: II. Linear Homogeneous Isotropic Elastostatics; *Arch. Rational Mech. Anal. 85* (1984), 131–160.
- [86] PIETRASZKIEWICZ, W.: Lagrangian Description and Incremental Formulation in the Non-Linear Theory of Thin Shells; *Int. J. Non-Linear Mechanics 19*, no.2 (1984), 115–140.
- [87] PIETRASZKIEWICZ, W.: Geometrically Nonlinear Theories of Thin Elastic Shells; *Advances in Mechanics 12*, No.1 (1989), 51–130.
- [88] PIETRASZKIEWICZ, W.: Explicit Lagrangian Incremental and Bucking Equations for the Non-Linear Theory of Thin Shells; *Int. J. Non-Linear Mechanics 28*, 2 (1993), 209–220.
- [89] PIETRASZKIEWICZ, W.: Work-Conjugate Boundary Conditions Associated with the Total Rotation Angle of the Shell Boundary; *J. Appl. Mech. 60* (1993), 785–786.
- [90] PIETRASZKIEWICZ, W. AND SZWABOWICZ, M. L.: Entirely Lagrangian Nonlinear Theory of Thin Shells; *Acta Mechanica 33*, no.2 (1981), 273–288.
- [91] POMMARET, J. F.: *Lie Pseudogroups and Mechanics*; vol. 16 of *Mathematics and its Applications* Gordon and Breach Science Publ., 1988.

- [92] ROUGEE, P.: A New Lagrangian Intrinsic Approach to Large Deformations in Continuous Media; *Europ. J. Mech. (A: Solids)* 10 (1) (1991), 15–39.
- [93] ROUGEE, P.: Kinematics of Finite Deformations; *Arch. Mechanicum* ? (1992), 117–132.
- [94] SANSOUR, C.: On the spatial description in elasticity and the Doyle-Ericksen formula; *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 107 (1993), 239–249.
- [95] SANSOUR, C. AND BUFFLER, H.: An Exact Rotation Shell Theory, its Mixed Variational Formulation and its Finite Element Implementation; *Int. J. Numerical Meth. Engng.* 34 (1992), 73–115.
- [96] SAUNDERS, D. J.: *The Geometry of Jet Bundles*, vol. 142 of *London Mathematical Society Lecture Notes* Cambridge University Press, 1989.
- [97] SCHIECK, B., PIETRASZKIEWICZ, W. AND STUMPF, H.: Theory and Numerical Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Strains; *Int. J. Solids Struct.* 29, no.6 (1992), 689–709.
- [98] SCHIECK, B. AND STUMPF, H.: The Appropriate Corotational Rate, Exact Formula for the Plastic Spin and Constitutive Model for Finite Elastoplasticity; *Int. J. Solids Struct.* 32, 24 (1995), 3643–3667.
- [99] SCHMIDT, R. AND STUMPF, H.: On the stability and post-buckling of thin elastic shells with unrestricted rotations; *Mec. Res. Comm.* 11 (1984), 105–114.
- [100] SCHWARZ, G.: The Existence of a Symmetric Stress Tensor in a Non-local Description of Continuum Mechanics; *Mannheimer Manuskripte* 126 (1991).
- [101] SCHWARZ, G.: Hodge Theory and the Characterization of Symmetries in a Non-Local Description of Continuum Mechanics; *Materials Science Forum* 123-125 (1993), 225–234.
- [102] SEGEV, R.: On the Definition of Forces in Continuum Mechanics; In *Dynamical Systems and Microphysics; Proc. 3rd Int. Sem. on Mathematical Theory of Dynamical Systems and Microphysics* (1984), A. Blaquiere and G. Leitmann, Eds., Academic Press, New York.
- [103] SEGEV, R.: Forces and the Existence of Stresses in Invariant Continuum Mechanics; *J. Math. Phys.* 27(1) (1986), 163–170.
- [104] SEGEV, R.: On Statical Theories and Models; *Arch. Rational Mech. Anal.* 111 (1990), 211–223.
- [105] SIMMONDS, J. G.: The nonlinear thermodynamical theory of shells: Descent from 3-dimensions without thickness expansion; In *Flexible Shells, Theory and Application* (1984), E. L. Axelrad and F. A. Emmerling, Eds., Springer-Verlag, Berlin, pp. 1–11.

- [106] SIMO, J.: A Framework for Finite Strain Elastoplasticity based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition: Part I. Continuum Formulation; *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 66 (1988), 199–219.
- [107] SIMO, J., MARSDEN, J. AND KRISHNAPRASAD, P.: The Hamiltonian Structure of Nonlinear Elasticity: The Material and Convective Representations of Solids, Rods, and Plates; *Arch. Rational Mech. Anal.* 104 (1988), 125–183.
- [108] SIMO, J., RIFAI, M. AND FOX, D.: On A Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part IV: Variable Thickness Shells With Through-The-Thickness Stretching; *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 81 (1990), 91–126.
- [109] SIMO, J. C. AND FOX, D. D.: On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parametrization; *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 72 (1989), 267–304.
- [110] SIMO, J. C. AND MARSDEN, J. E.: On the Rotated Stress Tensor and the Material Version of the Doyle-Ericksen Formula; *Arch. Rational Mech. Anal.* 86 (1984), 213–231.
- [111] SMITH, D. R.: *An Introduction to Continuum Mechanics – after Truesdell and Noll*, vol. 22 of *Solid Mechanics and its Application* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [112] STANLEY, G. M., PARK, K. C. AND HUGHES, T. J. R.: Continuum based resultant shell elements; In *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures* (1986), T. J. R. H. et al., Ed., Pineridge Press, Swansea, pp. 1–45.
- [113] STUELPNAGEL, J.: On the Parametrisation of the 3-Dimensional Rotation Group; *SIAM Review* 6/4 (1964).
- [114] STUMPF, H.: General concept of the analysis of thin elastic shells; *Z. Angew. Math. Mech.* 64 (1986), 337–350.
- [115] STUMPF, H. AND BADUR, J.: On Objective Surface Rates; *Q. Appl. Math.* LI(1) (1993), 161–181.
- [116] STUMPF, H. AND MAKOWSKI, J.: On large strain deformations of shells; *Acta Mechanica* 45 (1986), 153–168.
- [117] SVENDSEN, B. AND TSAKMAKIS, C.: A local differential geometric formulation of dual stress-strain pairs and time derivatives; *Arch. of Mechanics* 46 (1-2) (1994), 49–91.
- [118] TOUPIN, R. A.: Theories of Elasticity with Couple-stress; *Arch. Rational Mech. Anal.* 17 (1964), 85–112.
- [119] TRUESDELL, C.: *The Elements of Continuum Mechanics*; Springer-Verlag, Berlin, 1984.

- [120] TRUESDELL, C.: *Rational Thermodynamics*; second ed. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [121] TRUESDELL, C. AND NOLL, W.: The Non-Linear Field Theories of Mechanics; In *Encyclopaedia of Physics III 3*. Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [122] TRUESDELL, C. AND TOUPIN, R.: The Classical Field Theories; In *Principles of Classical Mechancis and Field Theory*. S. Flügge, Ed., vol. III 1 of *Encyclopedia of Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1960, pp. 226-793.
- [123] WANG, C.-C. AND TRUESDELL, C.: *Introduction to Rational Elasticity*, Noordhoff International Publishing, 1973.
- [124] WOZNIAK, C.: *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych (in polish)*; Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1969.
- [125] WOZNIAK, C.: Constraint continuous media. Part I.II.III; *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn.* 21(1;2:3) (1973), 109:167:175.
- [126] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. AND TOO, J. M.: Reduced integration technique in general analysis of plates and shells; *Int. J. Numerical Meth. Engng.* 3 (1971), 275-290.



## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1      Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2      Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations.  
Basic Concepts
- Nr. 3      Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten  
Stoffverhalten
- Nr. 4      Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen  
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5      Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter  
Profilmittellinie
- Nr. 6      Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen  
Formänderungen
- Nr. 7      H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung  
orthotroper Platten
- Nr. 8      Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9      Berend Fischer:  
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei  
endlichen Verzerrungen
- Nr. 10      Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11      Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12      Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter  
elastoplastischer Wellen
- Nr. 13      Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14      Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15      Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung  
von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16      Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen  
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17      H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with  
Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates

- Nr. 18 Uwe Kohlberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Exremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente

- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzipie der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Diemar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebek:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien  
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis:  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:  
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:  
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:  
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen

- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:  
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:  
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:  
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:  
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:  
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:  
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:  
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenebau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:  
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé:  
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84 U. Kikillus:  
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85 T. Guo:  
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material
- Nr. 86 Achim Menne:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen
- Nr. 88 Jörg Körber:  
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schieße:  
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung

- Nr. 90      Egbert Schopphoff:  
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91      Christoph Beerens:  
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92      K. C. Le/H. Stumpf:  
Finite elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93      O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994
- Nr. 94      Armin Lenzen:  
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen
- Nr. 95      J. Makowski/H. Stumpf:  
Mechanics of Irregular Shell Structures
- Nr. 96      J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells
- Nr. 97      W. Krings/A. Lenzen/u. a.:  
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller
- Nr. 98      Ralf Podleschny:  
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse
- Nr. 99      Bernd Westerhoff:  
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl
- Nr. 100      Marc Mittelbach:  
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell
- Nr. 101      Ulrich Hoppe:  
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 101**