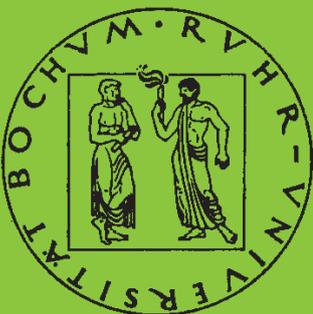


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Bernd Westerhoff

**Eine Untersuchung zum
geschwindigkeitsabhängigen Verhalten
von Stahl**

Heft Nr. 99



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

BERND WESTERHOFF

**Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen
Verhalten von Stahl**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr.99
Juli 1995

Herausgeber:
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum
Schriftenreihe
Universitätsstraße 150
44780 Bochum

© Dr.-Ing. Bernd Westerhoff
Bergstraße 90
44575 Castrop-Rauxel

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie oder DV-Verarbeitung) des Werkes oder auch von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Technische Mechanik der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns danke ich für die Betreuung meiner Arbeit und für die Freizügigkeit, mit der ich an der Universität arbeiten konnte. Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich für sein Interesse an der Arbeit und für die Übernahme des zweiten Referates.

Allen meinen aktuellen und ehemaligen Kollegen des Instituts sei an dieser Stelle herzlichst gedankt. Hervorheben möchte ich Herrn Dr.-Ing. U. Rott, der mich in den Lehrstuhlbetrieb einführte und förderte, und Herrn Dr.-Ing. J. Pohé, dessen Ratschläge mir in der Anfangszeit meiner Tätigkeit sehr geholfen haben. Herr Dr.-Ing. Peer Schieße und Herr Dipl.-Ing. Marc Mittelbach standen mir mit ihrem fachlichen Rat zur Seite. Besonderer Dank gilt auch dem „nichtwissenschaftlichen Personal“ Frau Helga Brockmeyer, Herrn Peter Grundmann, Herrn Uli Böhme und Herrn Stefan Seifert, welches mir bei dem Aufbau der Versuche zur Seite stand und mir immer die nötigen Aufmunterungen gab.

Bochum, Juli 1995

Bernd Westerhoff

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns

Prof. Dr.-Ing. H. Waller

Tag der Einreichung : 31. Mai 1995

Tag der mündlichen Prüfung : 14. Juli 1995

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird das geschwindigkeitsabhängige Verhalten von Stahl untersucht. Dazu werden zunächst einaxiale Experimente bei Raumtemperatur durchgeführt. Neben monotonen und zyklischen Versuchen bei verschiedenen Geschwindigkeiten werden die Ergebnisse von Kriech- und Relaxationsversuchen vorgestellt. Zur Überprüfung und Verbesserung von inelastischen Materialgesetzen werden in komplexen Lastpfaden Zyklen und Prozesse mit Haltezeiten kombiniert.

Im theoretischen Teil der Arbeit wird ein phänomenologisches Stoffgesetz aufgegriffen, dem eine Separation der inelastischen Verzerrungsrate zu Grunde liegt. Ein Anteil wird mit einem Basismodell der klassischen Plastizitätstheorie beschrieben. Ein Überspannungsmodell wird diesem Modell überlagert. Umfangreiche Verifikationsrechnungen erlauben eine Beurteilung des Stoffgesetzes.

Die Berechnung von komplexen ebenen Strukturen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode wird im dritten Hauptteil erläutert und auf die Problematik des geometrisch sowie physikalischen nichtlinearen Verhaltens eingegangen.

Summary

The rate-sensitive behavior of stainless steel was investigated by uniaxial tests. The experimental study at room-temperature includes monotonic and cyclic tests at various stress - and strain-rates and also creep- and relaxation- tests. Undergoing complex loading-paths cyclic tests are combined with residence-time processes.

In the theoretical part of the thesis a constitutive law is presented, which divides the inelastic strain-rate into two parts. The first part describes the basic-model with the classical plasticity-theory. A model with overstress is used for the second part. The performance of the model is shown by the calculations of the complex loading-paths.

The model has been implemented in a Finite-Element program with special regard of the geometrically und physically non-linear problems.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Experimente	3
2.1	Einleitung	3
2.2	Werkstoff	4
2.3	Experimentelle Ausstattung	6
2.3.1	Prüfmaschine	6
2.3.2	Meßeinrichtungen	8
2.3.3	Kalibrierung und Optimierung	13
2.3.4	Vorbereitung	13
2.4	Ergebnisse	15
2.4.1	Elastische Kenngrößen	17
2.4.2	Monotone Versuche ohne Haltezeiten	22
2.4.3	Nichtmonotone Versuche ohne Haltezeiten	26
2.4.4	Montone Versuche mit Haltezeiten	36
2.4.5	Nichtmonotone Versuche mit Haltezeiten	45
2.5	Schlußfolgerung	49
3	Theorie	50
3.1	Einleitung	50
3.2	Plastische Basismodelle	52
3.2.1	Allgemeines	52

3.2.2	Verfestigungsvariablen	55
3.2.3	Anwendungen	58
3.3	Viskoplastische Modelle	70
3.3.1	Einleitung	70
3.3.2	IA-Modell	70
3.3.3	Modell von <i>Rott</i>	73
3.3.4	Änderung am Modell von <i>Rott</i>	78
3.3.5	Verifikationsrechnungen	88
3.4	Schlußfolgerung	99
4	Numerik	100
4.1	Einleitung	100
4.2	Prinzip der Gewichteten Residuen	101
4.2.1	Finite Verfahren	102
4.2.2	Aufbereitung des Problems	105
4.3	Lineares Problem	107
4.4	Nichtlineares Problem	109
4.4.1	Gleichgewichtsiteration	109
4.4.2	Update-Lagrangesche Formulierung	110
4.4.3	Inkrementelle Formulierung	112
4.4.4	Werkstoffgesetz	114
4.5	Umsetzung in eine Finite-Elemente Formulierung	118
4.5.1	Allgemeines	118
4.5.2	FEAP	118
4.6	Strukturelemente	120
4.6.1	Axialsymmetrische Strukturen	120
4.6.2	Ebener Spannungszustand	122
4.6.3	Ebener Verzerrungszustand	124

4.7	Ergebnisse	125
4.7.1	Axialsymmetrische Strukturen	125
4.7.2	Ebener Spannungszustand	128
4.7.3	Ebener Verzerrungszustand	132
4.8	Schlußfolgerung	135
5	Ausblick	136
A	Schliffbilder	138
B	Parameter	143
B.1	Modell Chaboche	143
B.2	IA-Modell (plastisch)	143
B.3	Zwei-Flächen-Modell	144
B.4	Modifiziertes Modell von <i>Rott</i>	144
C	FEAP	145
C.1	Elementprogramm	145
C.1.1	isw=1	146
C.1.2	isw=2	147
C.1.3	isw=3	148
C.1.4	isw=4	148
C.1.5	isw=5	149
C.1.6	isw=6	149
C.1.7	isw=8	149
C.2	Befehlsfolge	149

Bezeichnungen

Abkürzungen:

IA	=	IA-Modell (Kap. 3.2.3/3.3.2)
2FM	=	Zwei-Flächen-Modell (Kap. 3.2.3/3.3.4)
CHA	=	Chaboche-Modell (Kap. 3.2.3)
RM	=	Modell von <i>Rott</i> (Kap. 3.3.3)
MRM	=	Modifiziertes Modell von <i>Rott</i> (Kap. 3.3.4)

Lateinische Symbole

Symbol	Bezeichnung	Modell / Bemerkung
A	Materialfunktion	RM, MRM
a_0	Materialparameter	MRM
a_1	Materialparameter	RM, MRM
a_1	Materialfunktion	RM
a_2	Materialparameter	RM
a_2	Materialfunktion	RM
b_1	Materialparameter	CHA, RM, MRM
b_2	Materialparameter	CHA, RM, MRM
b_3	Materialparameter	MRM
B	Materialfunktion	RM, MRM
b	Materialfunktion	kinematische Verfestigung
c	Materialparameter	RM
c	Materialfunktion	kinematische Verfestigung
c_0	Materialparameter	IA, RM, MRM, 2FM
c_1	Materialparameter	CHA, IA, 2FM
c_2	Materialparameter	CHA, IA, 2FM
c_3	Materialparameter	2FM

Symbol	Bezeichnung	Modell / Bemerkung
c_4	Materialparameter	2FM, IA
c_5	Materialparameter	2FM, IA
c_6	Materialparameter	2FM
d	Materialfunktion	isotrope Verfestigung
d	Materialparameter	CHA, RM
d_3	Materialfunktionen	RM
d_4	Materialfunktionen	RM
d_5	Materialfunktionen	RM
d_6	Materialfunktionen	RM
E	Elastizitätsmodul	global
E_t	Tangentenmodul	global
e	Materialfunktion	isotrope Verfestigung
F	Fließfläche	global
f	Funktion	global
G	Schubmodul	global
G	Materialparameter	RM
g	Isotrope Verfestigungvariable	global
K	Faktor	global
l_1	Materialparameter	MRM
l_2	Materialparameter	MRM
m	Materialparameter	2FM
n	Normalenvektor	global
p	Akkumulierte plastische Dehnung	global
p	Funktion	IA
p_1	Materialparameter	MRM
p_2	Materialparameter	MRM
p_3	Materialparameter	MRM
p_4	Materialparameter	MRM
Q	Materialparameter	CHA

Symbol	Bezeichnung	Modell / Bemerkung
q	Funktion	IA, 2FM
q_i	Interne Variablen	global
R	Isotrope Verfestigung	global
r	Materialparameter	CHA
v	Prozeßgeschwindigkeit	RM, MRM
v_0	Kleinste Prozeßgeschwindigkeit	RM, MRM
W	Plastische Arbeit	global
w	Materialfunktion	kinematische Verfestigung

Griechische Symbole

Symbol	Bezeichnung	Modell / Bemerkung
ν	Querkontraktionszahl	global
σ	Spannung	global
σ	Überspannung	global
σ_r	Spannungsniveau	MRM
ε	Dehnung	global
ξ	Kinematische Verfestigung	global
λ	Multiplikationsfaktor	global
λ	Funktion	2FM
Λ	Überspannung	global
$\tilde{\Lambda}$	Normierung der Überspannung	RM
Λ^*	Experimentelle Überspannung	mRM
β	Materialparameter	CHA
β	Funktion	IA
κ	Inelastische Arbeit	global
Δ	Materialfunktion	2FM
Δ	Verhältnis der Überspannung	MRM
δ	Abstand Fließ- zur Grenzfläche	2FM
τ	Funktion	2FM

Φ	Überspannungsfunktion	IA
Φ_1	Überspannungsfunktion	IA
Φ_2	Überspannungsfunktion	IA
γ	Materialparameter	IA
Δ	Strukturgedächtnisfunktion	IA, RM
α	Materialparameter	IA

Indizes

$()_e$	Elastische Größen	global
$()_i$	Inelastische Größen	global
$()'$	Deviator eines Tensors	global
$()_0$	Größen an der Fließgrenze	global
$\tilde{()}$	Größen der Grenzfläche	2FM, MRM
$()_{in}$	Anfangsgrößen eines inelastischen Schrittes	global
$\bar{()}$	Geschwindigkeitsunabhängige Größen	global
$()_{pl}$	Geschwindigkeitsunabhängige Größen	RM
$()_v$	Geschwindigkeitsabhängige Größen	RM

Vereinbarungen

$\dot{()}$	Zeitliche Ableitung von x
$Sp(\mathbf{x})$	Spur des Tensors x
$\mathbf{1}$	Einstensor
$\ \mathbf{x}\ = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$	Norm des Tensors x
$\langle x \rangle$	Nebenbedingung
$\langle\langle x \rangle\rangle$	Nebenbedingung

Kapitel 1

Einleitung

Die gestiegenen Anforderungen an Sicherheit und Umweltschutz verlangen eine stetige Weiterentwicklung und Überprüfung vorhandener Materialgesetze für metallische Werkstoffe. Einfache Modellrechnungen mit linearem Verformungsverhalten sind in einigen Anwendungsfällen nicht mehr ausreichend, da Sicherheitsnormen strenger gefaßt sind, oder die Wirtschaftlichkeit einer Konstruktion höhere Belastungen bei gleichem Materialbedarf fordert. Aus diesem Grund treten Materialgesetze weiter in den Vordergrund, die in der Lage sind, das Verformungsverhalten in den Grenzbereichen der Belastung realistisch zu beschreiben. Unter diesen Bedingung zeigen metallische Werkstoffe stark nichtlineares Verhalten.

Ziel dieser Arbeit war es, mit verbesserten Meßmethoden einfache Versuche an einem ausgewählten Werkstoff durchzuführen, die Versuchsergebnisse auszuwerten und ein mathematisches Modell zur Beschreibung des Verformungsverhaltens auszubauen. Nach der Ermittlung der Materialparameter des Modells sollten einige Beispielsrechnungen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode durchgeführt werden, um die Anwendbarkeit der Materialgesetze auch im alltäglichen Gebrauch zu zeigen.

Die experimentellen Untersuchungen, die Gegenstand des zweiten Kapitels der vorliegenden Arbeit sind, sollen die Basis für eine mathematischen Beschreibung eines Werkstoffes bilden. Vorgestellt werden Versuche an einem ausgewählten Stahl, der mit einaxialen Zug-Druckversuchen bei Raumtemperatur beansprucht wird. Besonderes Augenmerk wird auf die Abhängigkeit des Materials von der Verformungsgeschwindigkeit gelegt. Desweiteren wird die Antwort des Werkstoffes bei Versuchen mit Lastwechseln und Zeitstandversuchen über mehrere Tage aufgenommen. Höhere Genauigkeiten der Meßmethoden und die Anwendungsbreite dieser Versuchsreihe unterscheiden sich von bisherigen Untersuchungen

zu diesem Thema.

Die Umsetzung der Erkenntnisse aus den Versuchen wird im dritten Kapitel erläutert. Hierfür werden einige bekannte Stoffgesetze zur Beschreibung des inelastischen Verformungsverhaltens aufgegriffen und miteinander verglichen. Alle Modelle sind phänomenologischer Natur. Schließlich wird ein auf den Ideen von *Rott* basierendes Materialmodell mit den erweiterten Erfahrung aus den Versuchen ausgebaut und angewendet. Dieses Modell verbindet die Eigenschaften eines klassischen Zwei-Flächen-Modells mit einem Überspannungsmodell. Dabei kann das Zwei-Flächen-Modell als plastische Basismodell gegen andere Modelle ausgetauscht werden.

Der vierte Teil beinhaltet die Implementierung des Stoffgesetzes in ein semi-kommerzielles Finite-Elemente-Programm (FEAP). Die begleitenden theoretischen Grundlagen zeigen die Probleme auf, die bei der Berücksichtigung einer geometrischen und physikalischen Nichtlinearität entstehen. Für drei verschiedene ebene Strukturelemente wird dieser Einbau realisiert. Mit Nachrechnungen und Vergleichen mit der direkten Integration des Materialgesetzes wird der erfolgreiche Einbau verifiziert. Es schließen sich einige Berechnungen größerer Strukturen an, die die Anwendbarkeit der komplexen und mathematisch aufwendigen Beschreibung des inelastischen Verhaltens von Stahl zeigen.

Zu den drei Hauptteilen der Arbeit kommt eine werkstoffkundliche Untersuchung von verschiedenen Schnitten unterschiedlich belasteter Proben hinzu. Die Arbeit wird beendet mit einer Übersicht der Parameter.

Kapitel 2

Experimente

2.1 Einleitung

Das erste Kapitel dieser Arbeit beschäftigt sich mit den experimentellen Arbeiten und der Aufbereitung der Daten für die Stoffgesetzentwicklung. Die Versuche wurden an einer hydraulischen Prüfmaschine mit zylindrischen Proben durchgeführt. Da eine Beschreibung der Prüfmaschine, der Steuerelektronik und der Meßtechnik bereits von *Kikillus* [35] ausführlich durchgeführt wurde, wird dies im folgenden nur kurz erläutert. Dort, wo es nötig erscheint, wird näher auf die geänderten Versuchsbedingungen und die Überlegungen zur Auswertung der Ergebnisse eingegangen.

Da die zur Verfügung stehenden Proben keine Vorrichtungen zur Aufnahme externer Aufnehmer hatten, mußte eine neue Meßmethodik entwickelt werden. Die eingesetzten Instrumente erlaubten einen Einsatz ohne störende Randeinflüsse in einem Bereich der Probe, in dem homogene Verformungen zu erwarten waren. Infolge der veränderten Meßkette und aufgrund der Variation der Prozeßgeschwindigkeit mußte die neue Regelstrecke optimiert werden.

Die Weiterverarbeitung der Meßdaten für die Anpassung der Stoffgesetze soll in diesem Kapitel ebenfalls aufgegriffen werden. Hier wird auf die Berechnungen der Dehnung, Spannung, Elastizitätsmodul, etc. eingegangen und die Ergebnisse der einfachen Versuche mit den entsprechenden Normen verglichen, um die Qualität der Meßreihe zu überprüfen.

2.2 Werkstoff

Gemäß dem Ziel dieser Arbeit wurde ein Stahl untersucht, der zum einen eine deutliche Geschwindigkeitsabhängigkeit und die damit verbundenen Phänomene zeigte und zum anderen in der Praxis nach wie vor eingesetzt wird. Ausgewählt wurde der hochwarmfeste austenitische Stahl X6CrNi 1811. Dieser Stahl mit der Werkstoffnummer 1.4948 wird in den Normen DIN 17459 und 171460 festgelegt [20]. Die Einsatzgebiete dieses Werkstoffes sind der Dampfkesselbau, der Druckbehälterbau, der Apparatebau oder der Leitungsbau in der chemischen Industrie und der Kraftwerkstechnik. Das Material zeichnet sich dadurch aus, daß bei hohen Temperaturen unter langzeitiger mechanischer Beanspruchung gute Festigkeitseigenschaften vorhanden sind. Bei Raumtemperatur zeigt sich ebenfalls ein ausgeprägtes Verfestigungsverhalten, sowie eine Abhängigkeit der Spannung von der Geschwindigkeit oder anderen Phänomenen wie Kriechen und Relaxation.

Obwohl in der Literatur ([39, 40] und Angaben in [31]) unter der Bezeichnung *AISI Type 304 stainless steel* ausführlich untersucht worden ist, hielten wir eine weitere Untersuchung für sinnvoll. Dies kann vor allem damit begründet werden, daß verbesserte Meßmethoden genauere und umfangreichere Untersuchungen zulassen. Auf der anderen Seite existieren für diesen Stahl wenige Untersuchungen, die den Einfluß der Prozeßgeschwindigkeit auf Effekte wie Verfestigung oder Erreichen eines Sättigungszustandes beschreiben.

Damit eine reproduzierbare Versuchsreihe durchgeführt werden konnte, wurden Stichproben der Charge entnommen und mit Hilfe einer Spektralanalyse untersucht (Tabelle 1.1). Die ermittelten Daten deckten sich mit denen der Literatur [81]. Geringe Abweichungen der Analyse einzelner Proben untereinander deuteten darauf hin, daß alle Proben mit großer Wahrscheinlichkeit aus einer Charge stammen.

Fe	C	Mn	Cr	Mo	Ni	V
68.78	0.0616	1.17	17.84	0.0704	11.49	0.0526

Tabelle 2.1: Zusammensetzung von X6CrNi 18 11 (1.4948)

Die Proben wurden aus geschmiedeten Stangenmaterial ausgeschnitten, vorgedreht und die Auflageflächen plangedreht. Für eine technisch genaue Oberfläche wurden die Versuchsmittel mit einer Toleranz von H7 auf einer CNC-Drehmaschine abgedreht. Eine

Härtemessung der Probanden und Schlibfbilder von Querschnittsflächen wurden nach den Versuchen an einigen ausgewählten Proben durchgeführt. Die Auswertungen dieser werkstofftechnischen Untersuchungen werden im Anhang A vorgestellt.

Der Stahl wurde vor den Versuchen bei 900°C zwei Stunden in Vakuum normalisiert, um herstellungsbedingte Verfestigungen und Texturen abzubauen. Die Spektralanalyse und die Normalisierung des Materials wurde von der Firma *Härterei VTN GmbH Witten* durchgeführt.

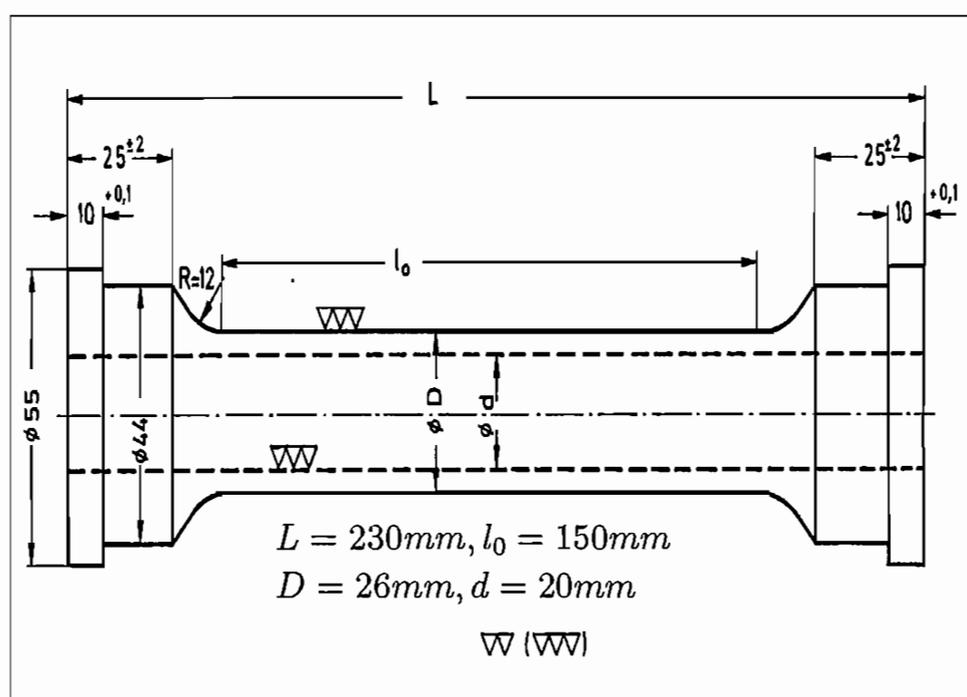


Abb. 2.1 : *Probenform*

Die Abbildung 2.1 gibt die Form der zylindrischen Proben wieder. Die Erweiterung im Kopf- und Fußbereich der Probe diente zur Aufnahme in die Prüfmaschine. Die Wanddicke von 3 mm und das damit verbundene Verhältnis Wanddicke zu mittlerem Probenradius von 0.26 beschränkte die Einsatzfähigkeit auf reine Zugversuche. Infolge der größeren Querschnittsflächen beeinflussen Fertigungstoleranzen weniger stark die Ergebnisse und Schlibfbilder sind genauer auszuwerten.

2.3 Experimentelle Ausstattung

2.3.1 Prüfmaschine

Allgemeines

Die Experimente wurden an einer servo-hydraulischen Prüfmaschine mit digitaler Regel-elektronik der Firma *Schenck* am Lehrstuhl für Technische Mechanik durchgeführt. Diese Prüfmaschine ist dafür ausgelegt, sowohl Versuche mit einaxialer Zug-Druck-Belastung als auch Versuche mit mehraxialer Belastung aus Torsion und Innendruck durchzuführen.

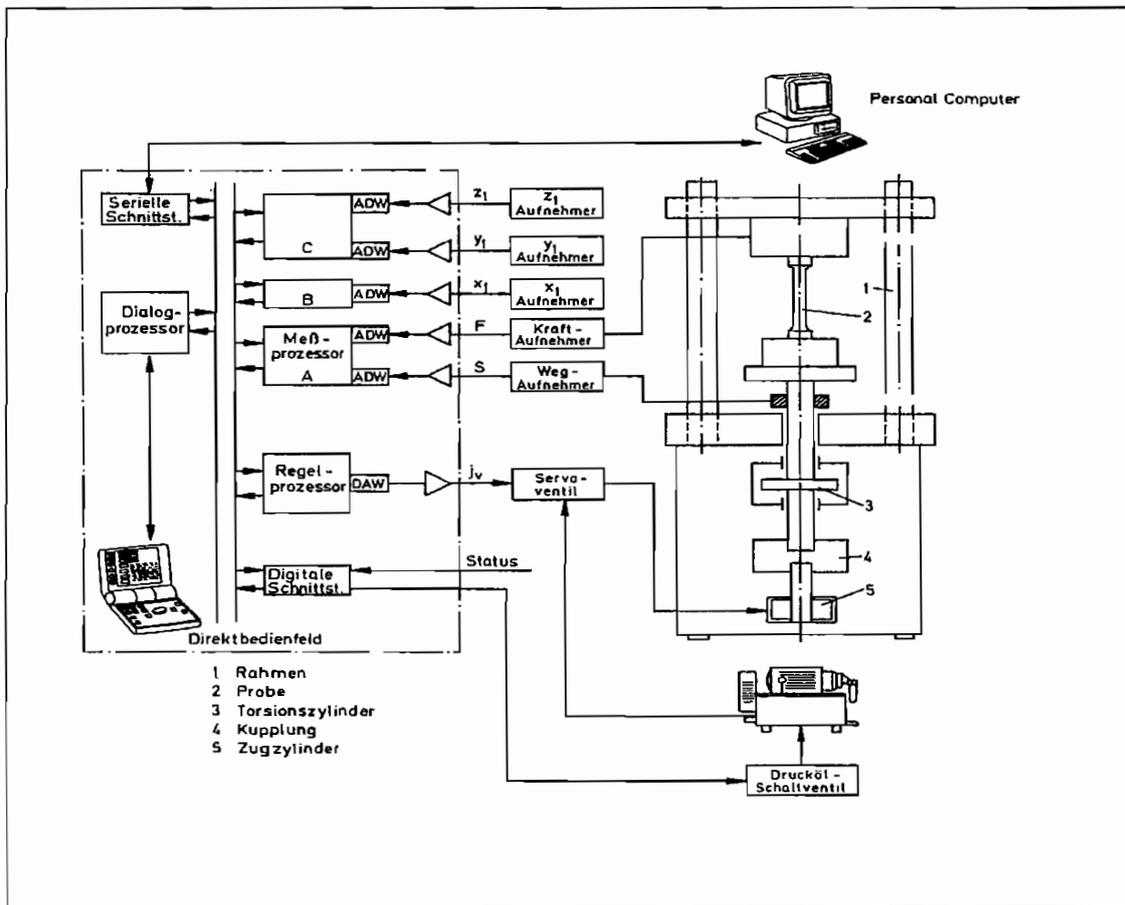


Abb. 2.2 : Prüfmaschine für einaxiale Versuche

Neben der Probenform, die im vorherigen Kapitel beschrieben worden ist, besteht die Möglichkeit, durch einen Wechsel der Einspannungsvorrichtung andere Versuchskörper zu untersuchen. Mit Hilfe eines Klappofens können geregelte Temperaturbelastungen bis 1000° C aufgebracht werden. Zusätzlich kann der Proband dann den oben genannten mechanischen Beanspruchungen unterworfen werden.

Aufbau

Die Abbildung 2.2 zeigt schematisch den Aufbau der Prüfgeräte für die reinen Zug-Druck-Versuche. Kernstück der Anlage bildete die Regelelektronik S56, links im Bild, die über das Bedienfeld oder einen Personalcomputer (PC) angesteuert wurde. Der Dialog mit den verschiedenen Aufnehmern geschah über Analog-Digital-Wandler. Die Regelung der Versuche erfolgte über Kraft- oder Wegaufnehmer, die maschinenintern oder -extern angeschlossen waren. Die geschlossene Regelkette bestand somit aus den Aufnehmern, digitalen Meßverstärkern, dem Hydraulikaggregat und PID-Reglern. Die Meßdaten konnten über einen Drucker oder einen elektronischen Massenspeicher aufgenommen werden.

Steuerung

Die Steuerung der Versuche wurde in den meisten Fällen mit Rampen realisiert. Bei einer Rampe wurde die Maschine vom PC aus veranlaßt, mit einer vorgegebenen Geschwindigkeit auf einen absoluten Endwert zu fahren. Nachdem der Endwert erreicht worden ist, mußte eine neue Rampe mit den entsprechenden Werten gestartet werden. Durch die Aneinanderreihung von verschiedenen Rampen konnten somit beliebige Versuchspfade realisiert werden. Bei Versuchen mit hohen Geschwindigkeiten ist diese Prozedur nicht unproblematisch, da einige Experimente mit periodischen, dreieckförmigen Vorgaben durchgeführt wurden. Der Vorteil dieser Versuchssteuerung bestand darin, daß bei zyklischen Versuchen die Umschaltung direkt mit der Elektronik und nicht mit dem Rechner erfolgte. Dieser konnte dann ausschließlich zur Meßdatenerfassung genutzt werden. Dieses nicht zu unterschätzende Feature wird im Abschnitt 2.4.3 nochmals aufgegriffen.

Software

Die Elektronik der Prüfmaschine verfügt über einen Satz von Grundbefehlen, die über den PC angesprochen werden können. Diese Befehle steuern z.B. die Wahl einer Regelgröße oder das Schalten des Servoventils und bedürfen in der Regel einer längeren

Einarbeitungszeit. Aus diesem Grund wurde eine Unterprogramm-bibliothek entwickelt, welche Funktionsgruppen wie das Fahren einer Rampe mit vorgegebenen Endwert und Geschwindigkeit zu einem einzigen Programm zusammenfassen. Der Experimentator hat nun die Möglichkeit, mit Hilfe eines in einem BASIC-Dialekt geschriebenen Programmes seine Versuchspfade ablaufen zu lassen. Hierbei müssen neben dem Versuchsablauf auch die Meßdatenerfassung und die Sicherungsmaßnahmen beachtet werden. Insbesondere die flankierenden Sicherungsmaßnahmen, wie das Abschalten der Maschine bei Überschreiten einer Grenze oder bei zu hohen Regelabweichungen gewinnen bei Langzeitversuchen an Bedeutung, da eine Zerstörung der Meßaufnehmer hohe Kosten für Wiederbeschaffung und Arbeitsausfall verursachen würde.

Meßdaten

Die in einem binären Format abgelegten Daten konnten nach den Versuchen gewandelt, mit entsprechenden Programmen bearbeitet und mit Grafiksoftware ausgewertet werden. Die vorbereiteten Versuchsprotokolle wurden in eine relationale Datenbank übertragen. Die Indizierung dieser Datenbank erlaubte einen schnellen Überblick über Versuchsgruppen, um z.B. fehlende Experimente zu ergänzen. Ein weiterer Vorteil besteht in der Austauschbarkeit und Vergleichbarkeit mit anderen experimentellen Untersuchungen.

Bei Versuchen mit hoher Geschwindigkeit (ab $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \frac{1}{s}$) war es nicht möglich, die gemessenen Daten während des Versuches auszugeben oder abzuspeichern. Das Zubehör der Prüfmaschine stellt hierfür einen Meßpuffer mit einer Aufnahme-rate von 5000 Messungen pro Sekunde bei maximal 2048 Messungen von Kraft und Weg zur Verfügung. Dieser Meßpuffer wurde vor den Versuchen gestartet und nach Versuchsende ausgewertet, arbeitete also unabhängig von dem Steuerungsrechner. Er konnte auch dazu benutzt werden, das Verhalten des Materials (z.B. beim Umschalten von Zug- auf Druckbelastung oder zu Beginn einer Haltezeit) genau auszuwerten.

2.3.2 Meßeinrichtungen

Die Prüfmaschine verfügt über interne Aufnehmer zur Messung von Kraft und Torsionsmoment bzw. Weg und Verdrehung. Bei Benutzung der internen Wegaufnehmer traten allerdings Störeinflüsse auf, da die Probenverformung infolge der elastischen Verformung

der Maschine (Traverse), der Einspannung und der Probenradien verfälscht wiedergegeben wurde. Die Verwendung von externen Aufnehmern, die direkt auf die Probe appliziert wurden, ließen genauere Messungen zu. Für diese Meßreihe wurden Anklemmdehnungsaufnehmer des Typs DD1 der Firma *Hottlinger* eingesetzt, die in der Abbildung 2.3 schematisch dargestellt sind.

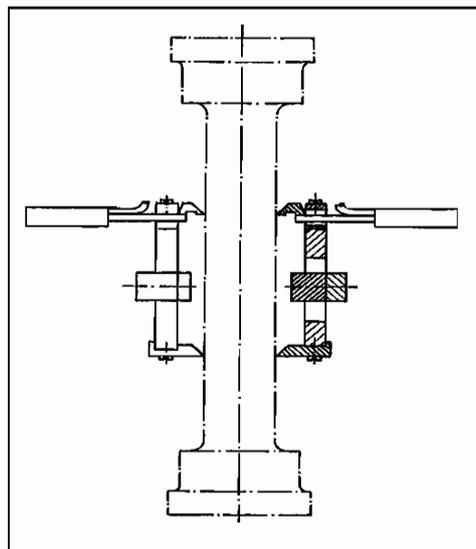


Abb. 2.3 : Anklemmdehnungsaufnehmer

Die Verformung der Probe wurde zwischen den Tastspitzen gemessen, wobei die untere Spitze fest anlag und die obere die Verformung über ein elastisches Element an Dehnungsmessstreifen (DMS) weitergab. Durch den Einsatz zweier gegenüber angebrachter Aufnehmer sollte eine Kompensation einer möglichen Biegung der Probe erreicht werden. Das Eigengewicht der Meßapparatur wurde durch Gegengewichte ausgeglichen, und mit Spiralfedern wurde ein geringer radialer Anpreßdruck der Spitzen aufgebracht. Das Signal der zu einer Vollbrücke geschalteten DMS der Aufnehmer wurde über einen analogen Meßverstärker der Elektronik der Prüfmaschine zugeführt.

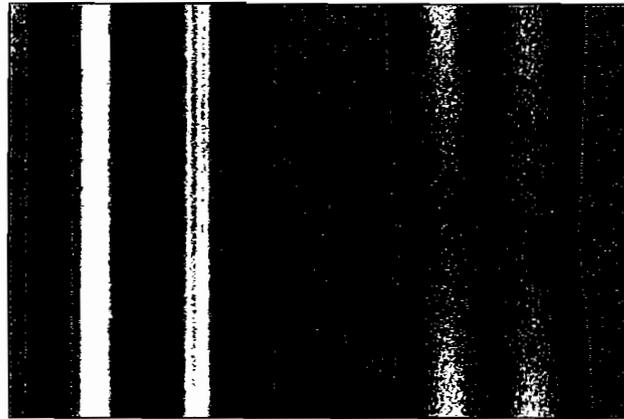


Abb. 2.4 : Oberflächenveränderung nach 30% axialer Dehnung

Da bei plastischen Deformationen eine Änderung der Rauheit der Oberfläche zu beobachten war (Abbildung 2.4), konnte kein stabiles Regelungsverhalten bei weggesteuerten Versuchen erreicht werden. Die Tastspitzen rutschten in die entstehenden Kerben und erzeugten starke Änderungen des Istwertes. Die Maschine war daraufhin nicht mehr in der Lage, dies auszuregeln. Aus diesem Grund wurde der Verfahrenweg des Hydraulikzylinders mit induktiven Aufnehmern geregelt, welche zwischen den Einspannvorrichtungen eingebaut wurden. Die Wegaufnehmer W 5 TK und W 10 TK der Firma *Hottinger* lassen Verfahrenwege von 10 oder 20 mm zu.

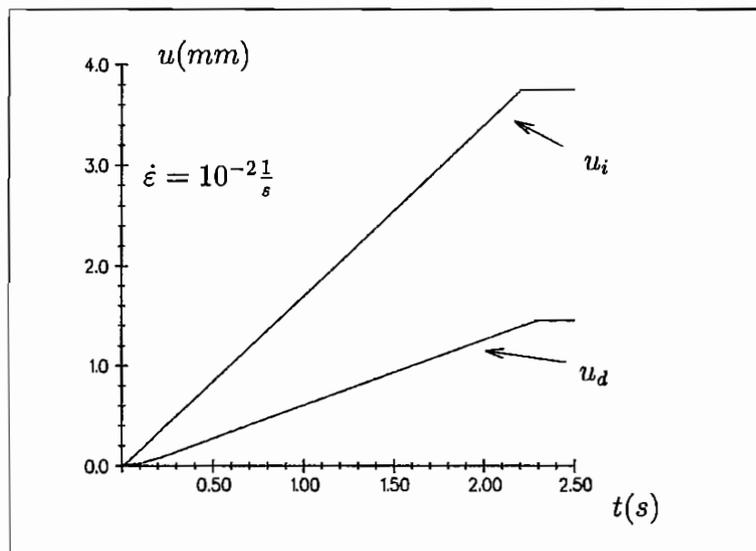


Abb. 2.5 : interne und externe Wegaufnehmer ($\dot{\epsilon} = 10^{-2} \frac{1}{s}$)

Die Grafik 2.5 zeigt den geregelten Weg am induktiven Aufnehmer (u_i) und die 'Antwort' des Systems im homogen Bereich der Probe, die mit dem Anklemmdehnungsaufnehmern (u_d) gemessen wurde. Es ist zu erkennen, daß mit dieser Anordnung eine konstante Geschwindigkeit in der Probenmitte vorgegeben werden konnte. Beachtenswert ist auch die verhältnismäßig hohe Geschwindigkeit, für die dies erreicht wurde. Ein weiterer Vorteil dieser Anordnung bestand darin, daß drei unabhängige Wegaufnehmer (zu den beiden oben genannten zusätzlich der maschineninterne Aufnehmer) zur Verfügung standen. Somit konnten die jeweils anderen einen Ausfall eines Meßinstrumentes kompensieren oder können bei zu großen Abweichungen als Überprüfung hinzugezogen werden.

Die Genauigkeitsklasse der Anklemmdehnungsaufnehmer, welche die prozentuale Abweichung des Endwertes von tatsächlichen Wert angeben [66], liegt bei 0.1. Die induktiven Aufnehmer sind in Genauigkeitsklasse 0.2 zugeordnet.

Durch die Verwendung von verschiedenen Halterungen konnte die Meßlänge und somit der Meßdehnungsbereich variiert werden. Allerdings wurde bei dieser Versuchsreihe die Länge auf 60 mm festgelegt, um Kalibrierungsfehler zu vermeiden.

Obwohl der maximale Verfahrweg der Aufnehmer ± 2.5 mm betrug, wurde bei den Versuchen nur ± 2 mm genutzt, da die größten Linearitätsabweichungen in den Grenzbereichen der Aufnehmer zu erwarten waren. Es ergab sich folgender Meßbereich:

$$\Delta \varepsilon = \pm 3.3 \%$$

Bei zyklischen Versuchen reduzierte sich dieser Bereich auf ± 1.3 %, da bei größeren Dehnungsbreiten die Proben im Druckbereich nach ca. 10 Zyklen ausknickten.

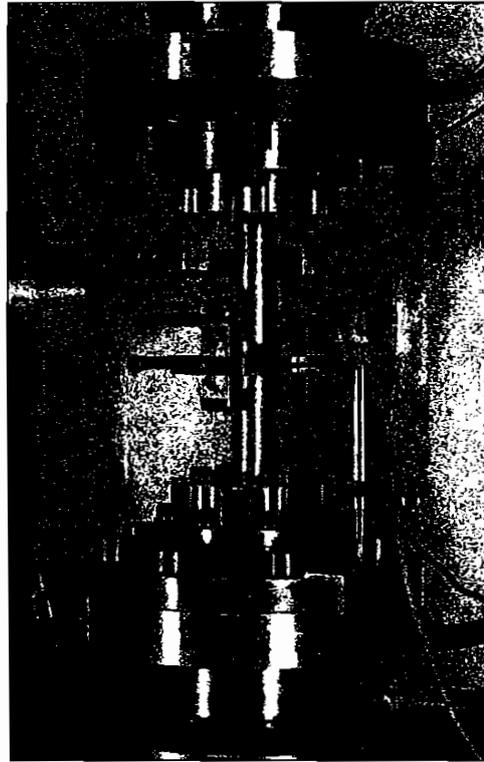


Abb. 2.6 : Meßapparatur

Die Abbildung 2.6 zeigt die gesamte Meßapparatur mit den induktiven Wegaufnehmern rechts im Bild. Für reine Zugversuche konnte der Meßbereich entsprechend erweitert werden. Bei kraftgesteuerten Versuchen bestand die Möglichkeit, die Aufnehmer während des Versuches umzusetzen, so daß größere Verformungen gemessen werden konnten. Bei derartigen Versuchen konnte die maximale Leistung der Maschine ausgenutzt werden:

$$\Delta F = \pm 160 \text{ kN}$$

Die Breite des Geschwindigkeitsbereiches erstreckte sich in der Wegregelung über:

$$\dot{\epsilon} = 10^{-5} - 10^{-1} \frac{1}{s},$$

in der Kraftregelung über:

$$\dot{\sigma} \approx 1 - 100 \text{ MPa/s} .$$

Ab einer Geschwindigkeit von $\dot{\epsilon} = 10^{-1} \frac{1}{s}$ konnte an den Anklemmdehnungsaufnehmern keine konstante Geschwindigkeit erzielt werden, weil die Trägheit des Meßsystems zu groß

wurde. Eine Veränderung der Probengeometrie könnte Abhilfe schaffen. Die Leistung der Prüfmaschine ließe es dann zu, den Geschwindigkeitsbereich um den Faktor 5 nach oben zu verschieben.

2.3.3 Kalibrierung und Optimierung

Vor dem Beginn einer Versuchsreihe wurden alle Meßinstrumente kalibriert. Die Einstellung der Kraftmeßdose geschah mit einem Kalibriergerät der Firma *Hottinger*. Dieses hochgenaue Instrument der Genauigkeitsklasse 0.025 hat den Vorteil, daß die Aufnehmer nicht mit mechanischen Größen beaufschlagt werden, also unabhängig von der Meßkette eingerichtet werden können. Die externen Anklemmdehnungsaufnehmer wurden mit einem Kalibrierstab eingerichtet. Hierzu wurden auf einen Rundstab in einem definierten Abstand Kerben eingedreht. Durch entsprechende Umsetzung der Tastspitzen konnte eine Verstimmung erzielt werden. Diese grobe Einstellung wurde mit Hilfe einer durchgeschnittenen Probe, die um einen bestimmten Betrag an einer mechanischen Prüfmaschine verfahren wurde, überprüft und gegebenenfalls korrigiert. Der Aufnehmer an dieser Maschine ist der Genauigkeitsklasse 0.0002 zugeordnet, so daß diese Methode zur Einstellung des ungenaueren Aufnehmers genutzt werden konnte.

Die Optimierung der Regelparameter hängt im wesentlichen von der verwendeten Meßkette ab. Über die Prüfmaschine läßt sich mit Hilfe eines PID-Reglers die optimale Anpassung des Soll- an den Istwert finden. Die besondere Schwierigkeit bestand neben den bereits besprochenen Wegaufnehmern in der Tatsache, daß eine Regelung für den gesamten Geschwindigkeitsbereich der Maschine zu suchen war. Für die manuelle Einstellung der Parameter wurde das Übertragungsverhalten mit Hilfe eines FFT (Fast-Fourier-Transformation)-Analysators CF-350 der Firma *Ono Sokki* aufgenommen und entsprechend eingestellt. Eine ausführlichere Beschreibung der Optimierung findet sich bei *Kikillus* [35].

2.3.4 Vorbereitung

Da eine optimale Regelung mit der Prüfmaschine nur dann gewährleistet werden konnte, wenn das Hydrauliköl seine Betriebstemperatur erreicht hatte, wurde vor den Versuchs-

reihen die Maschine ohne Versuchskörper ca. 3 Stunden in Betrieb gesetzt. In dieser Zeit begann bereits die Kühlung der Einspannköpfe, die die Probe von der Erwärmung der Maschine abschirmte. Nach Beendigung der Warmlaufphase wurde die Probe eingespannt und in diesem Zustand eine weitere Stunde belassen, damit sich eine stationäre Temperatur im Probanten einstellen konnte.

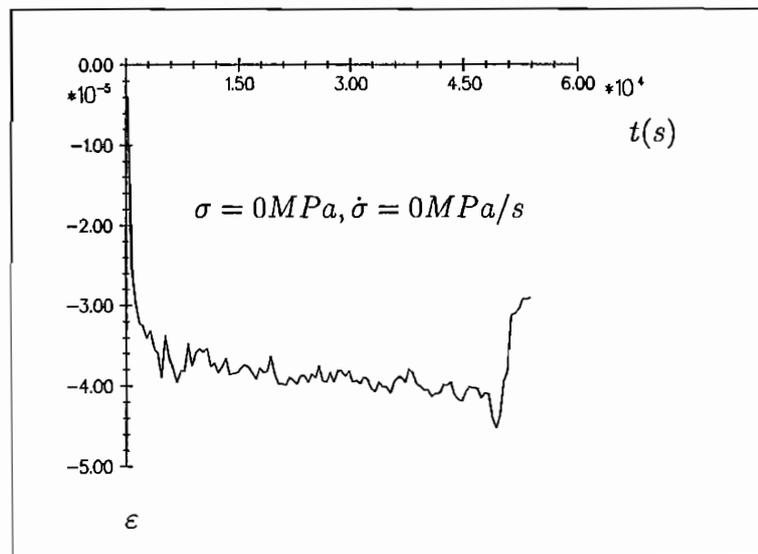


Abb. 2.7 : Veränderung der Dehnung ohne Belastung

Die Probentemperatur war maßgeblich von der Temperatur und dem Volumenstrom des Kühlwassers abhängig, so daß Schwankungen hierbei als mögliche Fehlerquellen anzusehen waren. Die Grafik 2.7 zeigt die Verformung einer unbelasteten Probe innerhalb von ca. 16 Stunden über Nacht. Nach ungefähr 5000 s wurde ein nahezu konstanter Wert erreicht. Die geringe Abnahme im weiteren Verlauf der Kühlung wurde nach 50000 s unterbrochen. Der Grund hierfür war nicht eindeutig nachzuvollziehen, anzunehmen ist, daß eine Veränderung der Flüssigkeitstemperatur oder des Flüssigkeitsstromes verantwortlich sein könnte. Eine andere Ursache für eine Verfälschung des Ergebnisses könnte eine Drift des Meßverstärkers sein. Trotzdem sind die Veränderungen aufgrund wechselnder Umgebungsbedingungen von sekundärer Natur, was an der Größenordnung der Dehnung zu erkennen ist.

Die Vorbereitung der Wegaufnehmer beschränkte sich auf das Anschleifen der Tastspitzen und auf das exakte Ausrichten der Aufnehmer mit Hilfe der Gegengewichte vor jedem Versuch.

2.4 Ergebnisse

Die Auswahl der Experimente orientierte sich zunächst an die spätere Anpassung an elastisch viskoplastische Stoffgesetze. Die gebräuchlichsten Materialgesetze basieren auf einer quasistatischen Theorie, der dann ein Überspannungsmodell überlagert wird. Der geschwindigkeitsunabhängige Teil konnte im Experiment nur unzureichend wiedergegeben werden, da der Werkstoff auch bei der geringst möglichen Prozeßgeschwindigkeit ratenabhängige Phänomene wie Kriechen oder Relaxation zeigte. Trotz dieser Einschränkung wurde mit der Dehnungsrate von $\dot{\epsilon} = 10^{-5\frac{1}{s}}$ ein Satz von Experimenten durchgeführt, die zur Anpassung des quasistatischen Modells dienten. Im weiteren Verlauf wurde die Abhängigkeit der Spannung von der Prozeßgeschwindigkeit bei monotonen Zugversuchen und Kriechversuchen mit unterschiedlichen Vorgeschichten untersucht. Mit diesem Satz an Experimenten kann eine Grundanpassung der viskoplastischen Stoffgesetze erfolgen. Die weiteren Untersuchungen hatten zum Ziel, den Einfluß von Haltezeiten oder Geschwindigkeitswechseln auf das zyklische Verhalten des Materials zu überprüfen. Die Präsentation der Ergebnisse ist deshalb unterteilt in vier Gruppen. Es wird unterschieden zwischen monotonen und nichtmonotonen Versuchen und zwischen Versuchen mit und ohne Haltezeiten [38].

An 66 Proben wurden insgesamt 97 unterschiedliche Experimente unternommen. Von diesen Versuchen mißlingen sechs Versuche aufgrund eines Software-Fehlers oder unkorrekt befestigter Meßaufnehmer, und die Ergebnisse von zwei Versuchen widersprachen trotz fehlerfreier Regelung anderen vergleichbaren Experimenten, so daß sie in der Auswertung nicht berücksichtigt wurden. Die mögliche Ursache dieser Ausschusses war auf eine Vorbelastung infolge der spanenden Fertigungsverfahren oder auf einen Fehler bei der Wärmebehandlung zurückzuführen.

Reproduzierbarkeit

Bevor komplexe Belastungspfade gefahren werden konnten, wurde die Reproduzierbarkeit von Versuchen unter gleichen Bedingungen überprüft. Dies bildete eine wichtige Grundlage, Fehler in der Meßmethode oder in der Auswertung zu erkennen und zu beseitigen.

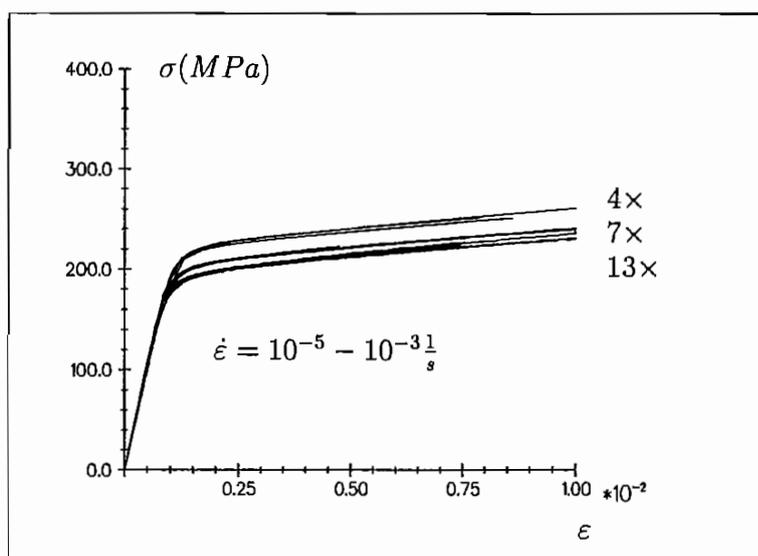


Abb. 2.8 : monotone, dehnungsgesteuerte Versuche

Die erste Abbildung zeigt monotone Zugversuche für drei verschiedene Dehnungsraten, die je eine Dekade auseinander liegen. Für diese Geschwindigkeiten sind jeweils 13, 7 und 4 Versuche übereinander eingezeichnet. Jeder Versuch war eindeutig einem Bereich zuzuordnen. Der Streubereich war allerdings so groß, daß Versuche mit dazwischen liegenden Geschwindigkeiten in dem unteren Bereich ($10^{-5} - 10^{-4} \frac{1}{s}$) nicht eindeutig zu unterscheiden waren. Eine ähnliche Übereinstimmung lieferten monotone, spannungsgesteuerte Zugversuche.

Der nächsten Grafik sind verschiedene Kriechversuche zu entnehmen. Der Scharparameter dieser Abbildung ist die Geschwindigkeit, mit der auf das Niveau von 250 MPa gefahren wurde. Die etwas größeren Abweichungen der Versuche untereinander waren auf die Empfindlichkeit der Kriechversuche auf ihre Vorgeschichte zurückzuführen. Da schon kleine Veränderungen des Weges im inelastischen Bereich große Spannungsänderungen hervorriefen, war es schwierig, das gleiche Niveau für verschiedene Versuche zu erreichen.

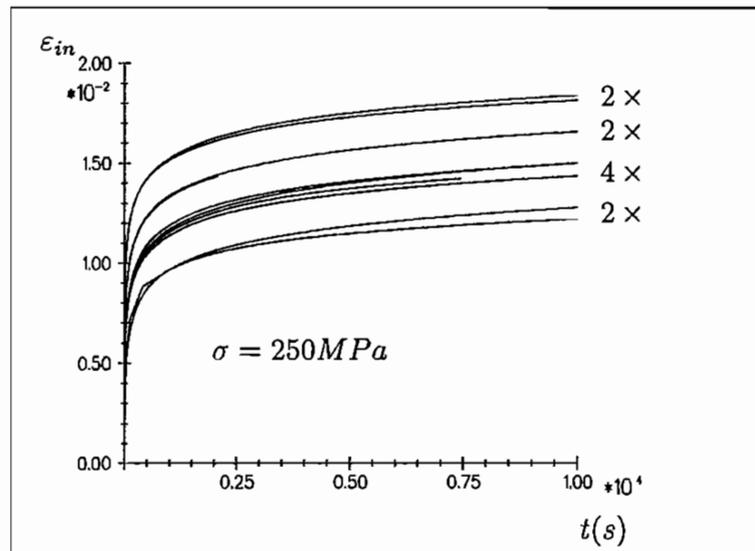


Abb. 2.9 : Kriechversuche mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten

2.4.1 Elastische Kenngrößen

Elastizitätsmodul

Die Bestimmung eines Elastizitätsmoduls erfordert die Kenntnis der Querschnittsfläche. Da die Außen- und Innendurchmesser im Rahmen der Fertigungstoleranzen streuten, wurde vor Versuchsbeginn jede Probe an drei Punkten vermessen. Die Unterschiede der über die Meßlänge gemittelten Werte der Querschnittsflächen konnten nicht vernachlässigt werden. Somit mußte jeder Versuch individuell auf die Probe abgestimmt werden.

Für die Auswertung der Versuche wurde zunächst die Steigung der Kraft- Verschiebungskurve berechnet. Da sich das Material zu Beginn der Belastung erwartungsgemäß nahezu linear bzgl. Kraft und Verformung verhielt, genügte eine einfache Regression zur Ermittlung des Gradienten. Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch ein Ergebnis der Berechnung. Der Scharparameter der Kurven ist die Größe des Regressionsintervalls.

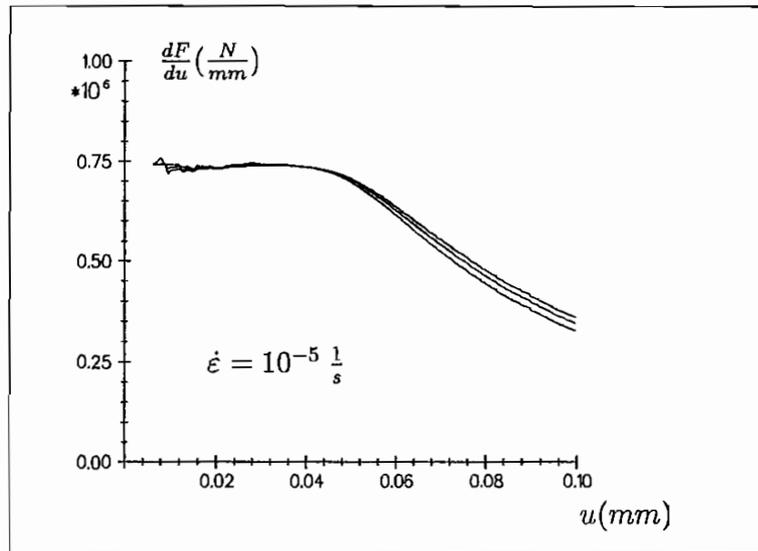


Abb. 2.10 : Steigung einer Kraft-Verschiebungskurve

Nachdem die Steigung zu Beginn des Versuches streute, konnte nach ungefähr 0.02mm ein Bereich konstanter Steigung identifiziert werden. Aus diesem Bereich wurde ein mittlerer Wert herausgegriffen, mit dem der tatsächliche Verschiebungsnulldpunkt bestimmt wurde. Dies war deshalb nötig, da ein exakter Nullabgleich der Meßinstrumente vor den Versuchen kaum möglich war.

Mit dem Hookeschen Gesetz wurde im weiteren, unter Berücksichtigung der variierenden Größen l_0 und A , der Elastizitätsmodul für jede Probe ausgerechnet. Es ergab sich im Mittel folgender Wert:

$$E = 206000\text{MPa} \pm 1.5\%$$

Dieser Wert lag geringfügig über dem, der in [42] für austenitische Stähle angegeben wird. Die exakte Bestimmung des Elastizitätsmoduls wurde bei höheren Geschwindigkeiten allerdings erschwert, da sich der Bereich konstanter Steigung gemäß Abbildung 2.10 verringerte.

Bei der Berechnung der Spannung wurde Volumenkonstanz im gesamten Bereich angenommen. Hierbei wurde die Volumenänderung aufgrund der elastischen Dehnungsanteile vernachlässigt. Unter dieser Voraussetzung berechnete sich die Spannung zu:

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right) \quad (2.1)$$

mit

$$A_0 = \Pi(r_a^2 - r_i^2) \quad (2.2)$$

Fließgrenze

Die Ermittlung von Fließgrenzen wurde in der Literatur ([60, 30, 84],etc.) ausführlich behandelt. Die meisten Veröffentlichungen zu diesem Thema beschäftigten sich mit der Bestimmung von Fließflächen, also mit mehraxialen Problemen. Hierbei wurden einige Methoden etabliert, die i.a. davon ausgehen, daß der Proband beim Auftreten der ersten inelastischen Deformationen entlastet oder der Versuch unterbrochen wird. Im ersten Fall wurde z.B. die Breite der entstehenden Hystereseschleife zwischen Be- und Entlastung als Bewertungsgrundlage genommen. Im zweiten Fall wurde die Kriechdehnung innerhalb eines vorgegebenen Zeitintervalls für mehrere Spannungspunkte aufgenommen. Überschreite die Dehnung einen vorher definierten Wert, so war die Fließgrenze erreicht. Die erwähnten Meßmethoden verlangen allerdings eine Unterbrechung des Versuchs, die die Anfangsbedingungen für den weiteren Versuchsablauf gegebenenfalls nachhaltig verändern könnte.

Deshalb wurden bei dieser Meßreihe die Proportionalitätsgrenzen aus den monotonen Zugversuchen bestimmt. Hierzu wurde eine Parallele zur elastischen Gerade im Abstand einer sogenannten Off-Set-Dehnung gezogen (Abbildung 2.11).

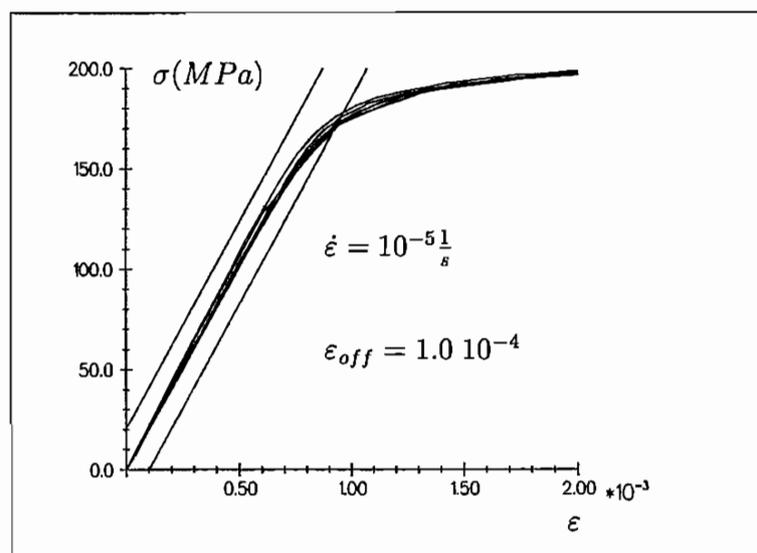


Abb. 2.11 : technische Elastizitätsgrenze

Die Ordinate des Schnittpunktes dieser Geraden mit den Versuchskurven ergab die gesuchte Spannung. Diese auch in der DIN 50 145 für Zugversuche [20] angegebene Methode liefert folgende in der Technik gebräulichen Werte:

$$\varepsilon_{off} = 10^{-2} \Rightarrow 1\% - Grenze$$

$$\varepsilon_{off} = 2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow 0.2\% - Grenze$$

$$\varepsilon_{off} = 10^{-4} \Rightarrow \text{technische Elastizitätsgrenze}$$

Im Vergleich dazu wurden mit den oben erwähnten speziellen Methoden Off-Set-Dehnungen im μ -Bereich erzielt.

Die obere Abbildung 2.11 zeigt eine Streuung der Schnittpunkte mit den verschobenen Off-Set-Geraden über einen Bereich von rund 10MPa . Dieser Streubereich ist im wesentlichen damit zu begründen, daß die verschobene Elastizitätsgerade nur für eine mittlere Steigung und nicht individuell für jede Kurve berücksichtigt wurde. Für eine genauere Identifikation der Fließgrenze wurde für die Meßreihe die plastische Dehnung für jeden Versuch ermittelt. Die folgende Abbildung zeigt das Ergebnis für sechs verschiedene Geschwindigkeiten.

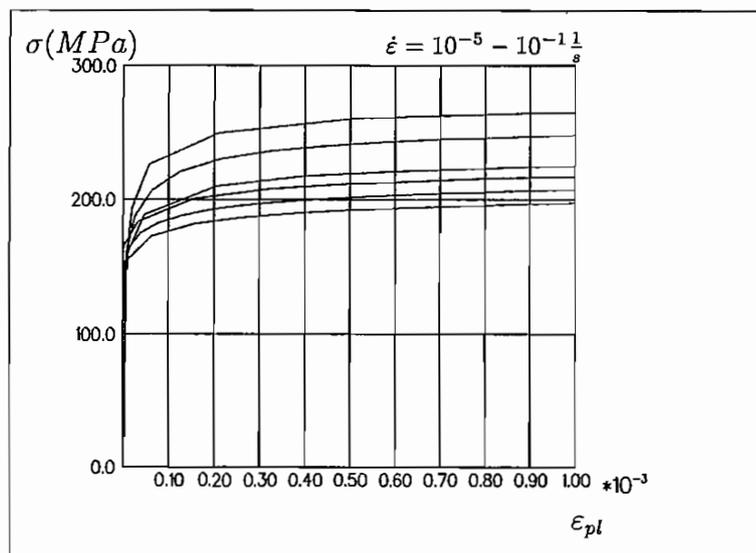


Abb. 2.12 : Spannung über plastische Dehnung ($\dot{\varepsilon} = 10^{-5} - 10^{-1} \frac{1}{s}$)

Die vertikalen Rasterlinien entsprechen in dieser Darstellungsart den Off-Set-Dehnungen. Aufgrund der starken Krümmung in dem Anfangsbereich verfälschte eine lineare Interpolation die Spannung zwischen zwei Meßpunkten. Der Grafik ist zu entnehmen, daß neben

der Wahl der Off-Set-Dehnung auch die Prozeßgeschwindigkeit ein beeinflussender Faktor bei der Angabe der Fließgrenze war. Mit sinkender Dehnungsrate fiel die Elastizitätsgrenze nichtlinear ab (Abbildung 2.13).

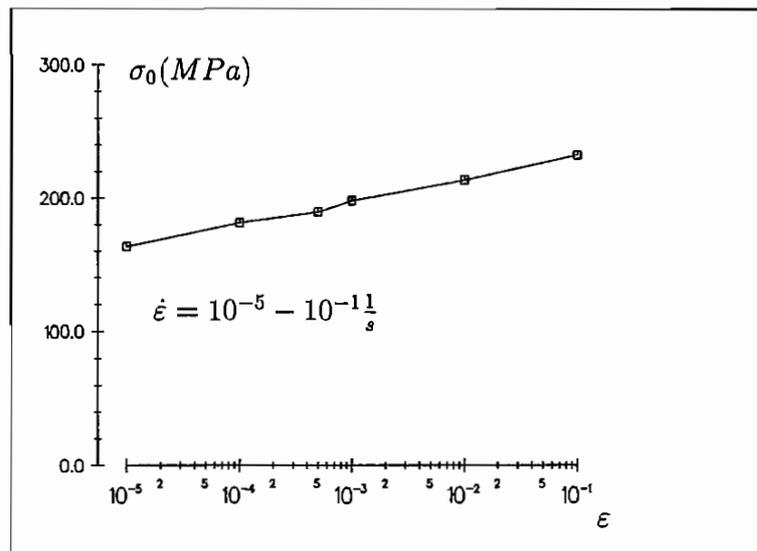


Abb. 2.13 : Fließspannung über Dehnungsrate ($\epsilon_{off} = 10^{-4}$)

In der Literatur ist hauptsächlich die für den Ingenieur wichtige Spannung $\sigma_{0.2}$ aufgeführt. Die Norm gibt für diesen Wert mindestens 185MPa bei einer oberen Grenze der Geschwindigkeit von $2.5 \cdot 10^{-3} \frac{1}{s}$ an. Die folgende Tabelle zeigt die ermittelten Versuchsdaten in Abhängigkeit von der Dehnungsrate.

$\dot{\epsilon} (\frac{1}{s})$	10^{-5}	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
$\sigma_0(\text{MPa})$	203.7	213.62	223.40	231.58	254.70	265.00

Tabelle 2.2: Spannung bei $\epsilon = 0.2\%$ plastischer Dehnung

Die Abweichung von dem Normwert ist auf die fehlende Geschwindigkeitsangabe, auf einen Sicherheitsbereich und auf die nicht exakt normgerechten Versuchsbedingungen zurückzuführen.

Da für die spätere Berechnung eine möglichst genaue Bestimmung erforderlich war, wurde die Off-Set-Dehnung auf $\epsilon_{off} = 2 \cdot 10^{-5}$ herabgesetzt. Dementsprechend sank die Fließgrenze bei der geringsten Dehnungsgeschwindigkeit auf einen mittleren Wert von 164.2MPa .

Da aber auch bei dieser Rate geschwindigkeitsabhängige Effekte zu beobachten waren (Kapitel 2.4.4), war ein weiteres Absinken der Fließgrenze zu erwarten. Die exakte Ermittlung hängt in sehr starkem Maße von der verwendeten Meßmethode und letztlich von der Genauigkeit der Beobachtung des Experimentators ab. Durch eine Verbesserung der Meßmethoden kann die Off-Set-Dehnung weiter herabgesetzt und die Fließgrenze gesenkt werden. Es ist dann allerdings fragwürdig, ob überhaupt ein Bereich konstanter Steigung zu identifizieren ist.

2.4.2 Monotone Versuche ohne Haltezeiten

In der ersten Versuchsgruppe werden dehnungs- und spannungsgesteuerte monotone Zugversuche gezeigt. Die Abbildung 2.14 zeigt zunächst dehnungsgesteuerte Versuche für verschiedene Geschwindigkeiten. Wie erwartet, war bei diesem Material keine ausgeprägte Streckgrenze zu erkennen. Grundsätzlich zeigte das Material eine deutliche Abhängigkeit von der Prozeßgeschwindigkeit. Auffällig war das instabile Verhalten der Kurve mit der höchsten Geschwindigkeit $\dot{\epsilon} = 10^{-1\frac{1}{2}}_s$. Die schon im Kapitel 2.3.2 angesprochene Problematik zeigt sich in dieser Grafik.

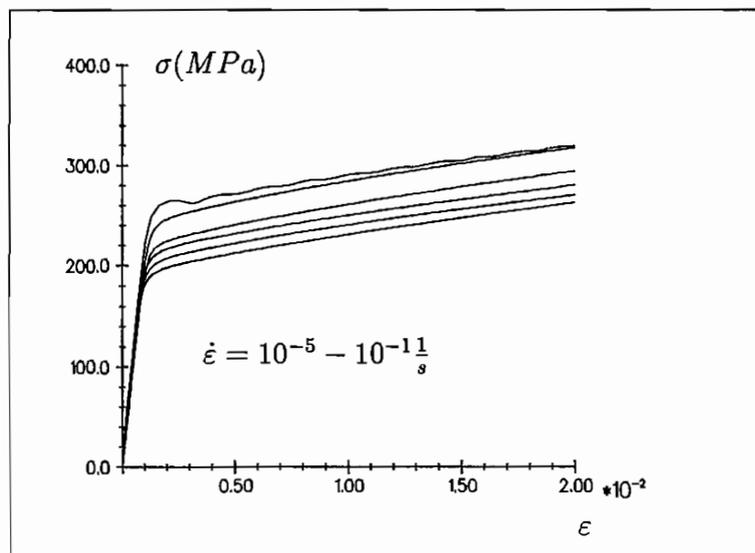


Abb. 2.14 : Dehnungsgesteuerte Zugversuche ($\dot{\epsilon} = 10^{-5}, 10^{-4}, 5 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1\frac{1}{2}}_s$)

Die Zunahme der Spannung pro Dekade der Geschwindigkeit war nichtlinear, wie es der logarithmischen Darstellung 2.15 zu entnehmen ist. Dort wurde die Spannung bei einer

Dehnung von $\epsilon = 1.0\%$ aufgenommen. Der Abstand zwischen zwei Kurven nahm für größere Geschwindigkeiten zu.

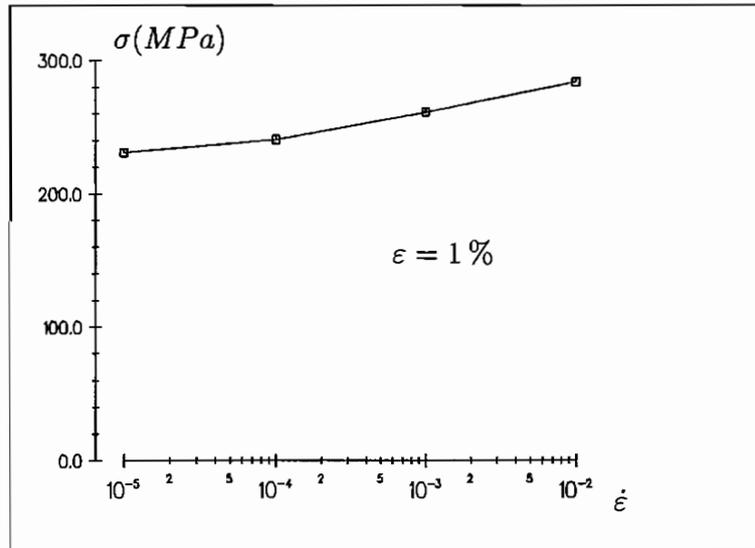


Abb. 2.15 : Dehnungsgesteuerte Zugversuche

Eine prinzipiell ähnliche Form hatten die kraftgesteuerten Versuche bei verschiedenen Geschwindigkeiten (Abb 2.16). Da diese Versuche fast ausschließlich für Kriechversuche dienten, wiesen einige Experimente nur sehr geringe Dehnungen auf. Die kraftgesteuerten Versuchen zeigten die gleichen Eigenschaften wie die bei der Dehnungssteuerung. Die Kurven mit den geringeren Geschwindigkeiten lagen näher beieinander als die mit höheren Geschwindigkeiten.

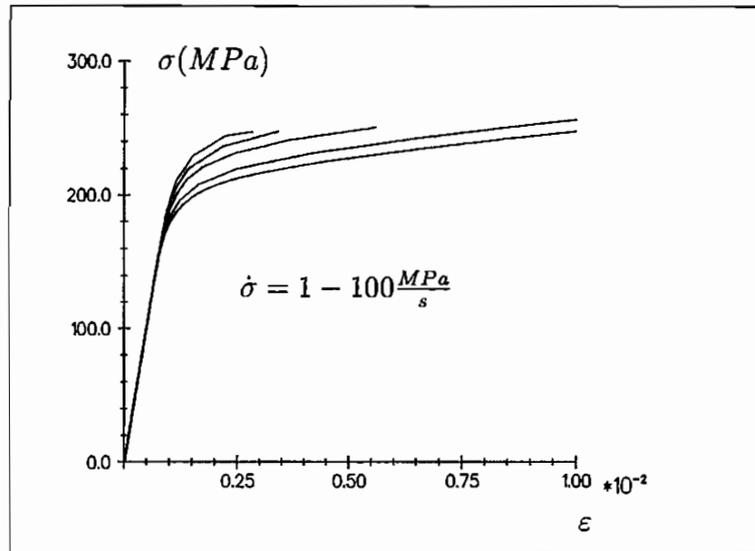


Abb. 2.16 : Kraftgesteuerte Zugversuche ($\dot{\sigma} = 1, 10, 30, 50, 100 \frac{MPa}{s}$)

Der Fehler, der durch die Kraftregelung im Vergleich zur Spannungsregelung auftrat, wurde erst im einem Bereich ab 300 MPa signifikant. Die Abbildung 2.17 zeigt die tatsächliche Kraftgeschwindigkeit verglichen mit der idealen Spannungsrate (---). Die meisten kraftgesteuerten Versuche wurden allerdings bei moderaten Spannungen durchgeführt.

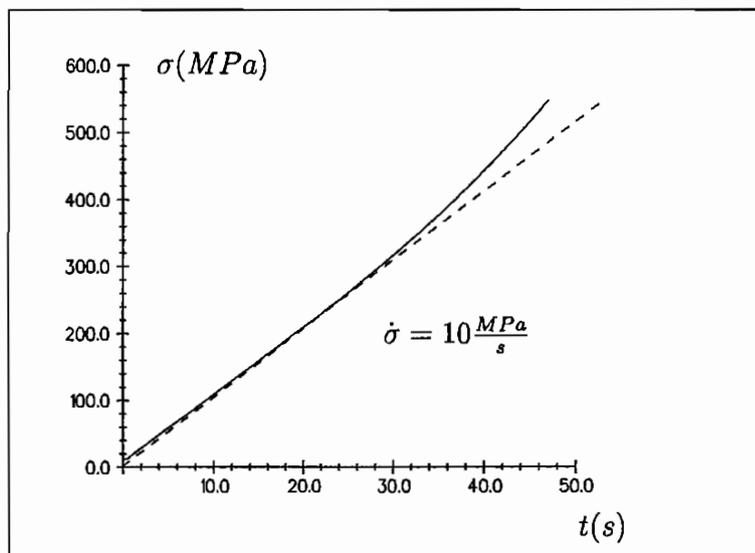


Abb. 2.17 : Unterschied Kraft- zur Spannungssteuerung

Bei einer Änderung der Geschwindigkeit während der Belastung reagierte das Material in der Weise, daß die niedrigste Geschwindigkeit erreicht, die höchste aber unterschritten

wurde. Die Abbildung 2.18 zeigt einen derartigen Versuch mit den jeweiligen Grenzgeschwindigkeiten (---).

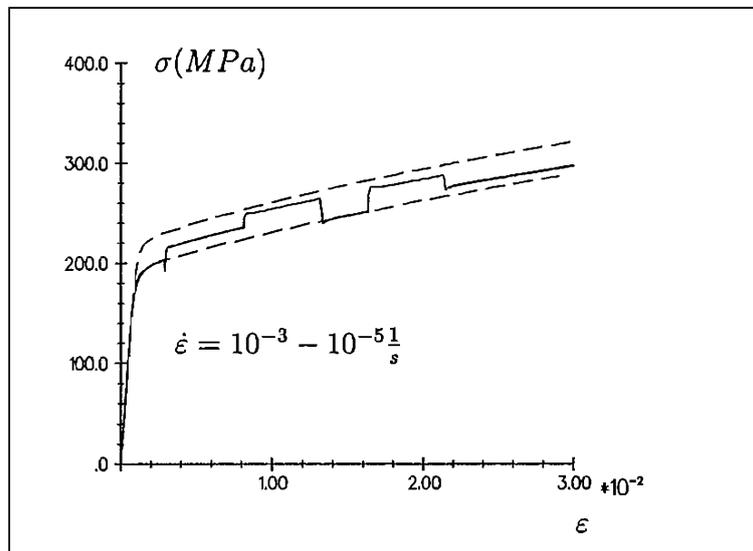


Abb. 2.18 : Zugversuch mit Geschwindigkeitswechseln

Bei den monotonen Zugversuchen zeigte sich, daß die Kurven mit geringer Geschwindigkeit näher zusammenlagen als die mit höheren Dehnungsraten. Somit war zu erwarten, daß die Abweichungen bei einem Geschwindigkeitswechsel bei niedrigen Dehnungsraten geringer ausfallen.

Die Abbildung 2.19 illustriert schließlich einen Zugversuch bis zum Bruch der Probe. Da die Aufnehmer nicht in der Lage waren, dermaßen große Verformungen zu messen, mußten sie während des Versuches umgestellt werden. Dies erklärt die Relaxationsphasen in der Belastung.

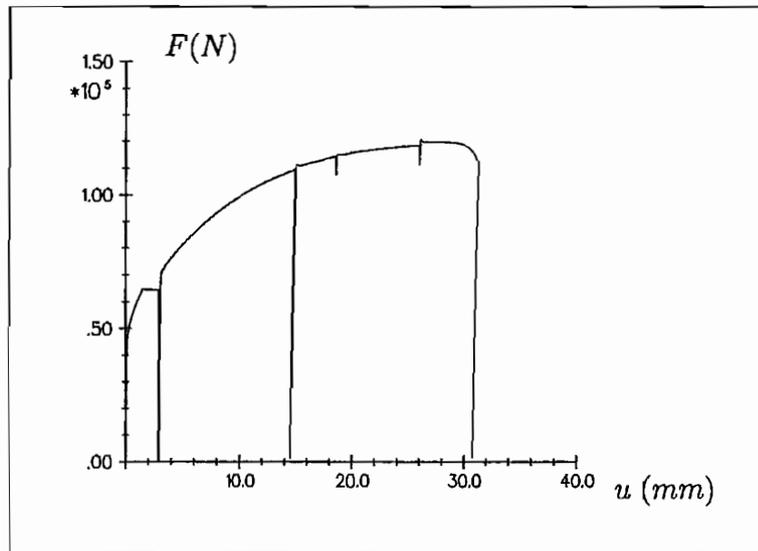


Abb. 2.19 : *monotoner Zugversuch bis zum Bruch der Probe*

Die Ordinate enthält in der Abbildung die Kraft und nicht wie üblich die Spannung über den Weg, da die Einschnürung in der Mitte der Probe keine exakte Bestimmung der Dehnung zuließ. Dies erschwerte auch die Bestimmung einer Bruchdehnung und den Vergleich mit der Norm, so daß an dieser Stelle darauf gänzlich verzichtet wurde.

2.4.3 Nichtmonotone Versuche ohne Haltezeiten

Umschaltverhalten

In dieser Versuchsreihe mußten sehr viele Versuche gefahren werden, bei denen die Regelgröße abrupte Änderungen erfuhr. Beispiele dafür waren Experimente mit Belastungsumkehr oder die Umschaltung auf Versuche mit Haltezeit. Bei geringen Geschwindigkeiten und damit verbundenen längeren Versuchszeiten oder bei geschwindigkeitsunempfindlichen Materialien konnten die Umschaltzeiten vernachlässigt werden. Bei hohen Geschwindigkeiten war es allerdings notwendig, das Umschaltverhalten der Maschine und die Antwort des Materials genauer zu untersuchen.

Das erste Bild zeigt einen Soll-Istwert Vergleich bei einem weggesteuerten Versuch, aufgetragen über der Zeit, bei einem Versuch mit Belastungsumkehr.

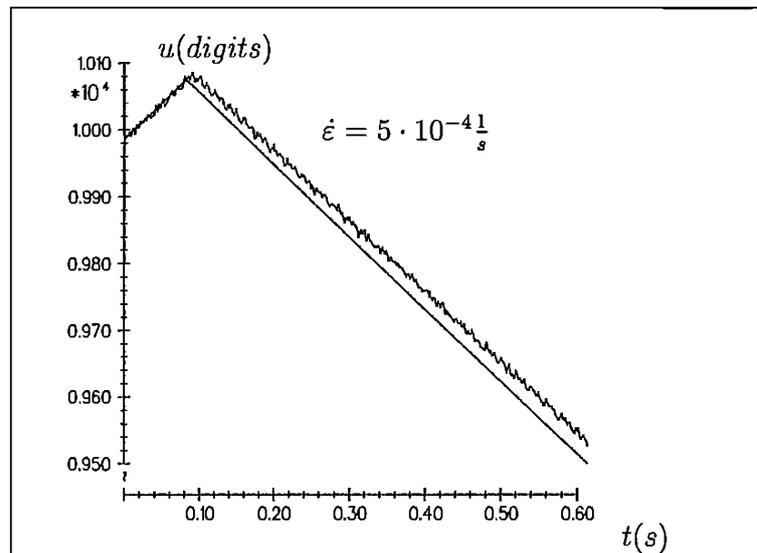


Abb. 2.20 : Soll-Istwert-Vergleich

Das Material reagierte etwa 0.01 s später auf die Belastungsänderung. Dies hatte eine Verschiebung des Umkehrpunktes von 0.001% Dehnung zur Folge. Bei höheren Geschwindigkeiten ($\dot{\epsilon} = 10^{-1} \frac{1}{s}$) lag die Zeit für einen Belastungspfad im Bereich von 0.1 s, so daß Umschaltzeiten der obengenannten Größenordnung das Meßergebnis stark beeinträchtigen konnten. Der oben abgebildete Versuch wurde mit einer dreieckförmigen Vorgabe realisiert, da der Stop und der Neustart der Rampen in der Relation zur Zyklendauer sehr viel Zeit in Anspruch nahm. Dieses Problem war auf die Kommunikation zwischen Rechner und Elektronik der Prüfmaschine zurückzuführen.

Es entstanden dadurch bei Versuchen mit hohen Geschwindigkeiten kurze, ungewollte Haltezeiten während der Belastung, in denen das Material relaxierte. Das nächste Abbildungspaar zeigt vergleichend einen Versuch mit einer Rampensteuerung und einer Dreiecksteuerung im Umschaltpunkt der Maschine.

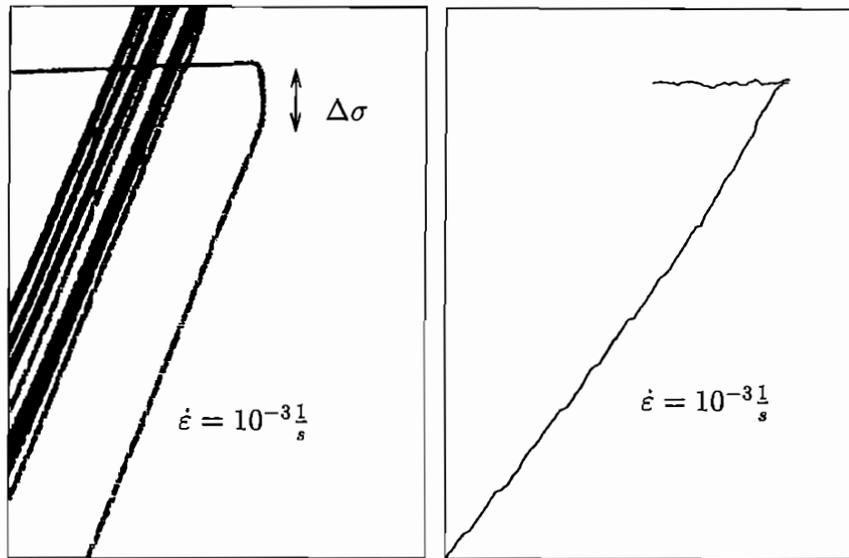


Abb. 2.21 : Vergleich von Rampen- und Dreiecksteuerung

Für die Dehnungsgeschwindigkeit von $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \frac{1}{s}$ war bei der Rampensteuerung (linkes Bild) eine Relaxation des Materials um den Betrag $\Delta\sigma$ zu erkennen, welcher bei der anderen Steuerungsart entfiel. Die linke Abbildung wurde mit einem XY-Schreiber analog aufgenommen, die Rechte mit dem Meßpuffer mit einer Aufnahmezeit von $\Delta t = 6 \cdot 10^{-4} s$ (dies erklärt auch den zitterigen Verlauf).

Bei der Annahme einer Theorie mit Fließgrenze für den quasistatischen Anteil und einer Überspannungstheorie für den geschwindigkeitsabhängigen Teil befindet sich der aktuelle Spannungspunkt nach der Entlastung nicht auf der Fließfläche, sondern erreicht diese erst nach weiterer Entlastung. Es stellt sich somit die Frage, wie sich das Material bis zum Auftreffen auf die Fließfläche verhielt.

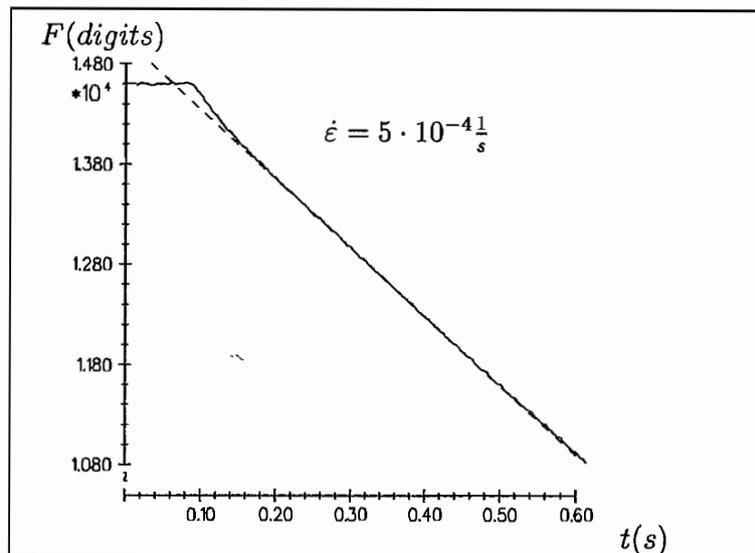


Abb. 2.22 : Entlastung bei einem zyklischen Versuch

Bis auf einer kurzen Phase direkt nach der Entlastung, nahm die Kraft linear ab (gestrichelte Kurve). Da der Anfangswert nicht sehr stark von dieser Geraden abwich, war die Annahme gerechtfertigt, daß das Material reinelastisch bis zur Fließgrenze und natürlich darüber hinaus entlastet wurde.

Ähnliche Untersuchungen befaßten sich auch mit der Materialantwort am Beginn einer Haltezeit. Die Umschaltung auf einen konstanten Wert setzte unmittelbar ein, so daß auch hier die Vorgaben erfüllt wurden.

Ergebnisse

Bei der Versuchsgruppe dieses Kapitels wurden Experimente durchgeführt, die mindestens einem Belastungswechsel unterlagen. Es wurde hierbei unterschieden zwischen Versuchen mit symmetrischen und unsymmetrischen Belastungen. Unsymmetrische Belastungen waren z.B. kurze Zwischenentlastungen während eines sonst monotonen Zugversuches. Abbildung 2.23 zeigt einen derartigen Versuch, bei dem eine monotone Belastung durch kurze, in Breite variierende Entlastungen gestört wurde. Es fiel auf, daß der monotone Zugversuch nach den Entlastungen fast unverändert fortgesetzt wurde. Die Entlastungsbreite reichte nicht aus, um eine merkliche Verfestigung des Materials zu erzielen. Trotz

der hohen Dehnungsrate fand nur ein geringes Überschwingen der Kurven im inelastischen Bereich nach den Entlastungen statt.

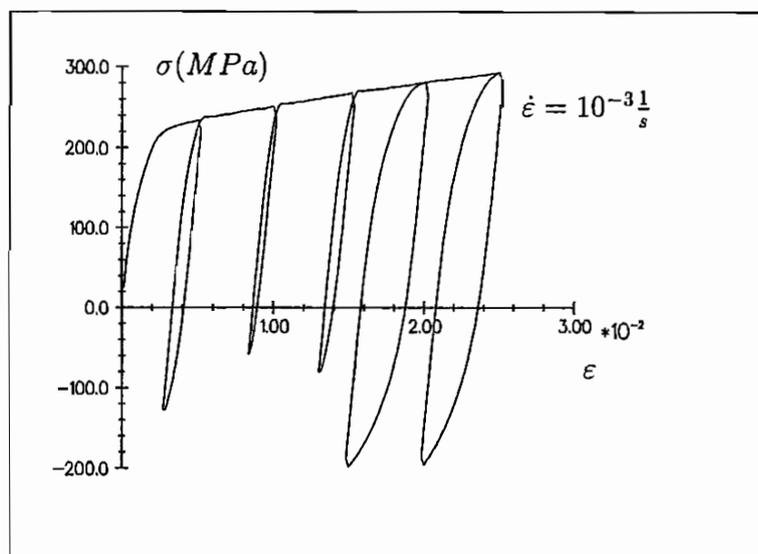


Abb. 2.23 : Zugversuch mit Zwischenentlastung

Mit solchen Experimenten kann später die Qualität von Stoffgesetzen überprüft werden, da bei einigen Stoffgesetzen Probleme auftreten, wenn kurz nach dem Wiedereintreten in den inelastischen Bereich nach einer Entlastung eine erneute Belastungsumkehr erfolgt. Diese Materialgesetze arbeiten mit sogenannten Update-Algorithmen, die eine Modellierung des Überganges in den inelastischen Bereich nach einer Veränderung der Belastungsrichtung erlauben. Die Algorithmen nutzen hierbei die im letzten Belastungsschritt verrichtete inelastische Arbeit. Ist diese nahe Null wie in den abgebildeten Versuchen, so überschätzt das Stoffgesetz die Veränderung bei erneuter Belastung. Bei diesen Versuchen wurde deswegen bewußt die Dehnungsbreite der Entlastung variiert, um eine genauere Anpassung hierfür zu finden.

Die größte Gruppe dieser Versuchsart bildeten allerdings Experimente mit symmetrischen Belastungen. Hierbei wurden neben dem Verhalten nach mehrfacher zyklischer Belastung auch der Geschwindigkeitseinfluß untersucht. Da die höchsten Dehnungsraten (ab $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \frac{1}{s}$) nur mit einem Meßpuffer aufgenommen werden konnten, ließen sich mit diesen Geschwindigkeiten ausschließlich monotone Versuche durchführen.

Für die geringste Dehnungsgeschwindigkeit wurden zunächst zyklische Versuche ohne Mitteldehnung mit verschiedenen Dehnungsbreiten gefahren (Abb. 2.24).

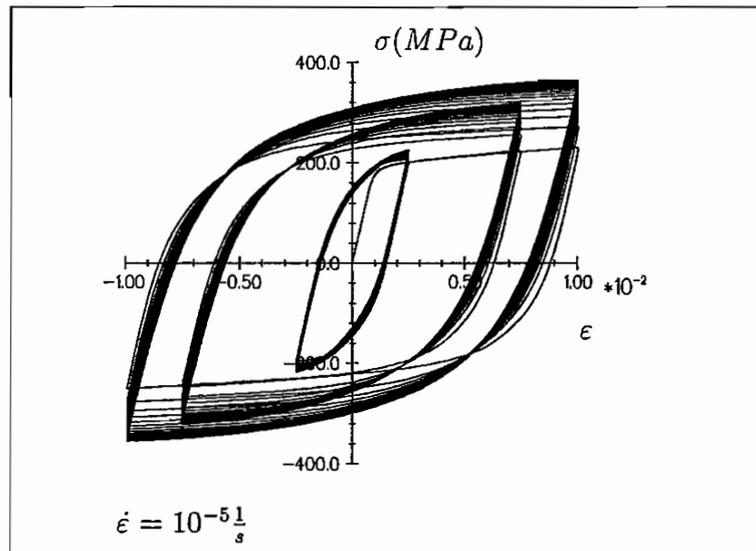


Abb. 2.24 : Zyklische Versuche

Von Interesse war bei diesen Versuchen die Entwicklung der Spannung am Umkehrpunkt der Belastung mit zunehmender Zyklenzahl. Die nächste Abbildung zeigt den Verlauf.

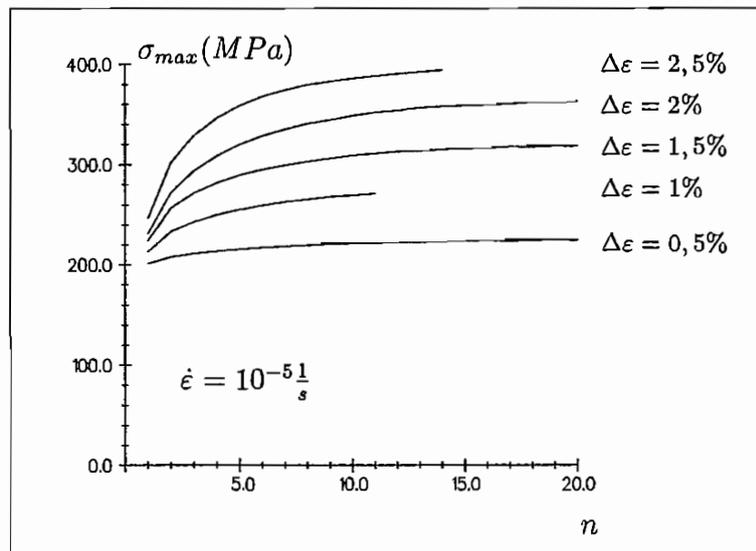


Abb. 2.25 : Zyklische Versuche

Nach ungefähr 20 Zyklen stagnierte die Zunahme der Spannung, d.h. die Spannungs-Dehnungskurve weitete sich nicht mehr auf. Dies ist bei Raumtemperatur eine durchaus übliche Entwicklung [33].

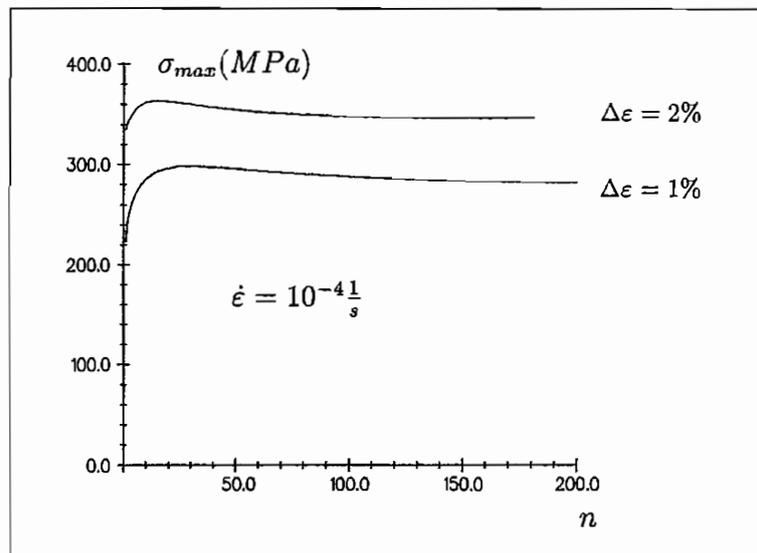


Abb. 2.26 : Abnahme der Spannung

Wurde nun die Belastung fortgesetzt, so fiel die Spannung ab und erreichte erst nach ca. 150 Zyklen einen konstanten Wert. Die Abnahme der Spannung betrug bei allen Versuchen ohne Haltezeit ca. 10 %. Der Effekt der Abnahme der Spannung ist auf Erholungseffekte zurückzuführen, die aufgrund der Materialschädigung möglich werden. Dieser Gesichtspunkt wird auch bei den Versuchen mit Haltezeit im Kapitel 2.4.5 nochmals aufgegriffen.

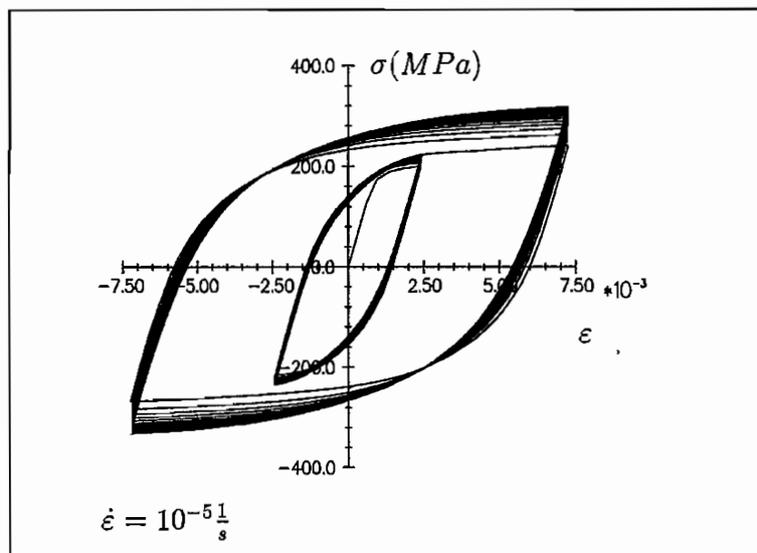


Abb. 2.27 : Dehnungsbreitenwechsel

Die Dehnungsbreite kann auch während des Versuches erhöht bzw. verringert werden, wie es das Ergebnis des Versuches in Abbildung 2.27 wiedergibt.

Der Verlauf der maximalen Spannung pro Zyklus näherte sich dem Wert des Versuches ohne Wechsel an, blieb aber offenbar etwas unter seinem Endniveau. Der Abfall der Spannung und das Erreichen eines Sättigungszyklusses war ebenfalls trotz des Wechsels deutlich zu erkennen.

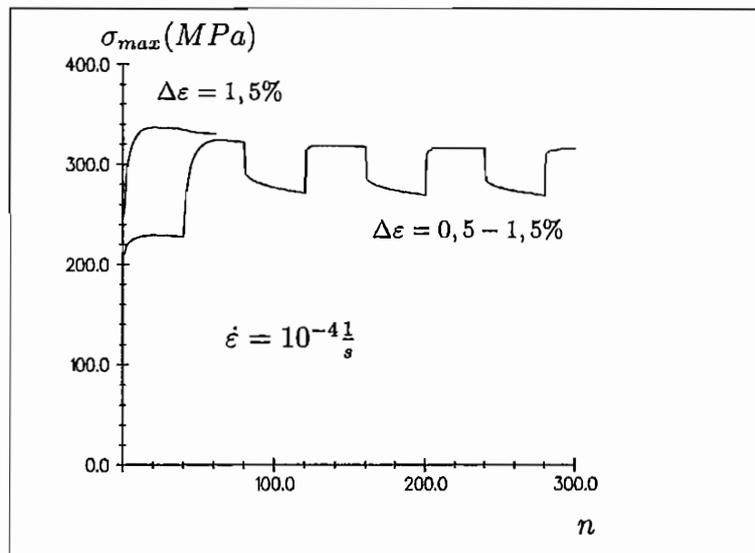


Abb. 2.28 : Vergleich mit und ohne Wechsel

Der Einfluß der Geschwindigkeit auf das Verfestigungsverhalten wurde in der nächsten Grafik veranschaulicht. Hier wurde für zwei Dehnungsbreiten und für verschiedene Dehnungsraten die Entwicklung der Spannung am Umkehrpunkt aufgetragen.

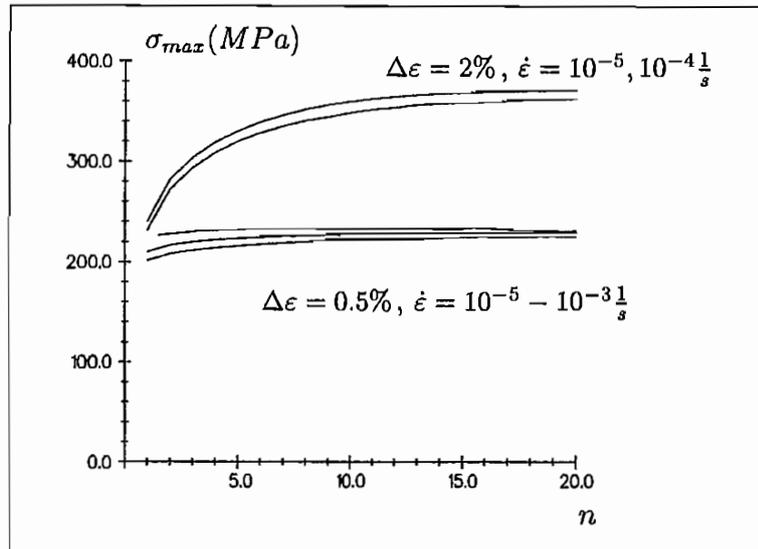


Abb. 2.29 : Vergleich bei versch. Geschwindigkeiten

Der Verlauf und der Abstand der Kurven der größeren Schwingbreite blieb nahezu konstant. Bei der kleineren Dehnungsbreite näherten sich die Kurven einander an.

Bestätigung fand diese Aussage, wenn die maximale Spannung über der halben Dehnung schwingbreite aufgetragen wurde. Der Scharparameter ist die Dehnungsgeschwindigkeit.

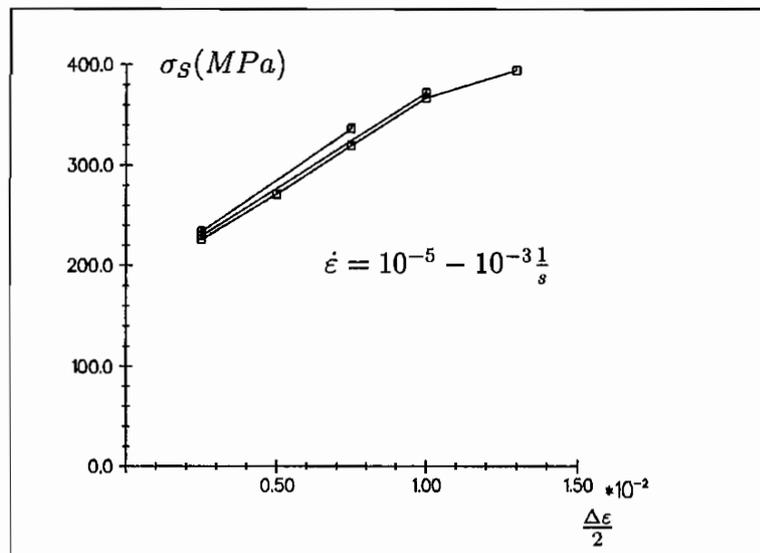


Abb. 2.30 : Sättigungskurve

Die Angabe σ_s sollte auf die Sättigungsspannung hinweisen, obwohl das Maximum der Spannung um Umkehrpunkt gemeint ist. Diese Bezeichnung hat insofern Bedeutung, daß

viele Materialgesetze nicht in der Lage sind, eine Abnahme dieser Spannung zu beschreiben. Die Anpassung dieser Stoffgesetze wäre also nur bis zum Maximum möglich.

Um realistische Belastungsprofile zu untersuchen, wurden zyklische Versuche mit Geschwindigkeitswechseln gefahren.

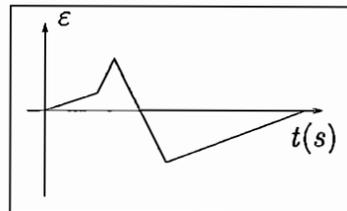


Abb. 2.31 : *Geschwindigkeitsvorgabe*

Als Beispiel einer solchen Versuchsart wurde die oben abgebildete Geschwindigkeitsvorgabe nachgefahren. Hier wurde besonders darauf geachtet, daß die Vorgabe unsymmetrisch in der Periode war und daß der Geschwindigkeitssprung möglichst groß ausfiel (Faktor 100).

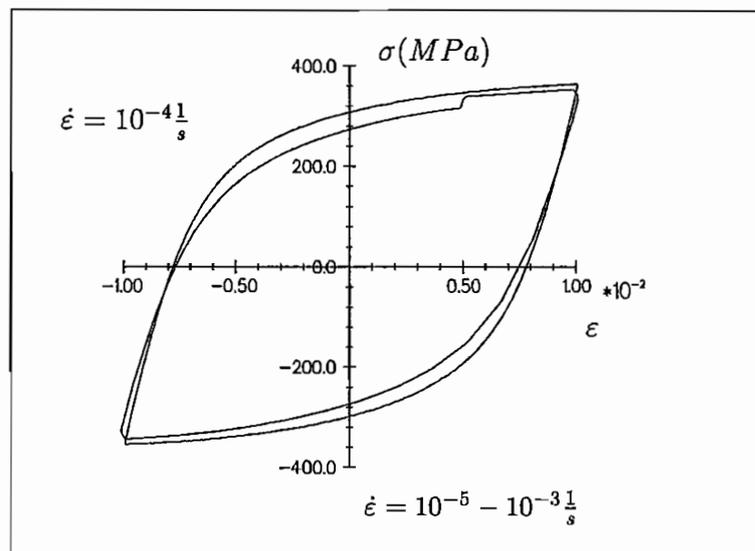


Abb. 2.32 : *Vergleich des letzten Zyklus mit und ohne Wechsel der Geschwindigkeit*

Das Ergebnis im Sättigungszyklus ist in der Abbildung 2.32 zu sehen. Zum Vergleich wurde dort ein Versuch mit einer Geschwindigkeit angegeben, die genau zwischen den

wechselnden Geschwindigkeit lag. Obwohl die Geschwindigkeit über ein Großteil der Periode höher war, wurde nahezu das gleiche Endniveau der Spannung des langsameren Versuches erreicht.

2.4.4 Montone Versuche mit Haltezeiten

In diesem Kapitels werden Versuche vorgestellt, die nach einer reinen monotonen Belastung in der Kraft- oder Wegregelung angehalten wurden. Experimente, bei denen die Spannung konstant gehalten wird, werden Kriechversuche genannt. Bei Versuchen mit einer konstanten Kraft spricht man von Totlastversuchen. Da bei derartigen Versuchen aber die Dehnung weiter wächst, steigt somit auch die Spannung. Die hier gezeigten Experimente waren also Versuche mit sehr kleinen Spannungsgeschwindigkeiten. Das Bild 2.33 zeigt den Verlauf der Spannung bei einem Versuch, bei dem die Kraft schrittweise erhöht wurde.

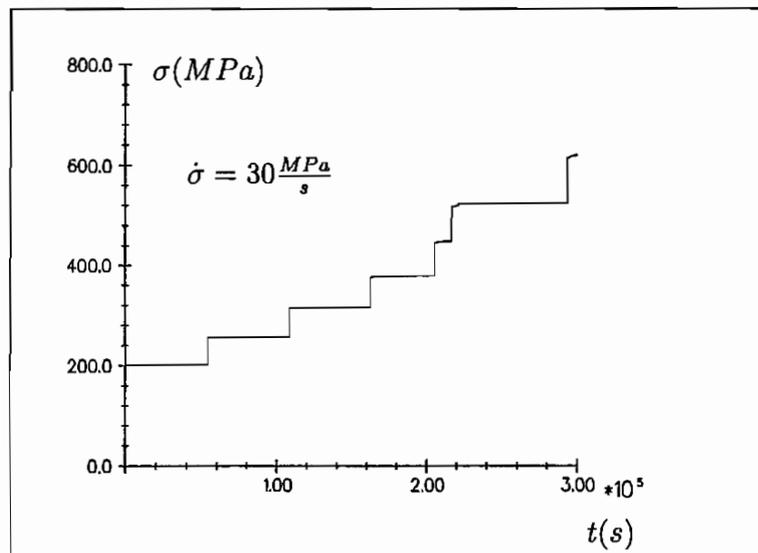


Abb. 2.33 : Spannungsvorgabe

Nur im Anfangsbereich nach jeder Erhöhung war eine leichte Änderung der Rate zu erkennen. Ansonsten wurde die vorgegebene Spannung unter Berücksichtigung der Größenordnung der Abweichungen eingehalten. Kriechversuche wurden von vielen Experimentatoren

mit einfachen Maschinen durchgeführt, die den Probanden in einen steifen Rahmen einspannten und die Prüflast über ein Hebelsystem mit einem Gewicht aufbrachten. Die Realisierung einer Spannungsregelung war z.B. rein mechanisch dann mit einer Kurvenscheibe zu erreichen. Der Hebelarm des Gewichtes wurde dann gemäß der Verlängerung der Probe variiert [6]. Das Problem derartiger Versuche bestand darin, daß die Vorgeschichte nicht oder nur unzureichend zu steuern war.

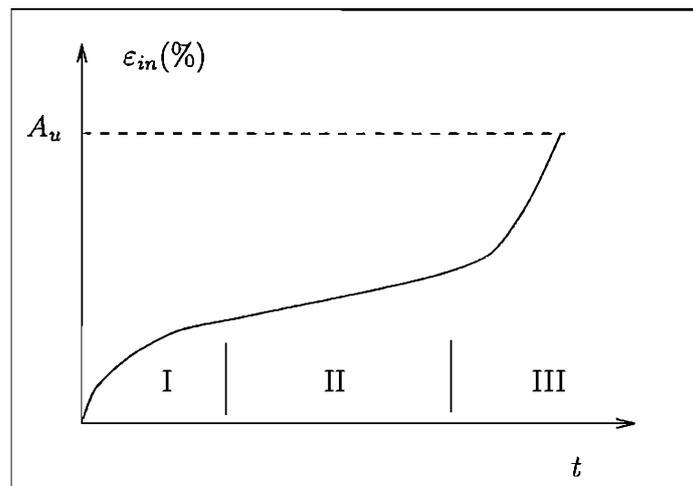


Abb. 2.34 : Kriechbereiche

Die zunehmende Dehnung bei diesen Versuchen läßt sich i.a. in drei Bereiche unterschiedlicher Steigung einteilen (Abb 2.34). Die Dehnungsrate fällt im I. Bereich dem sogenannten primären Bereich ab. Danach ist die Steigung der Dehnung im sekundären Bereich konstant, und im tertiären Abschnitt führt ein Anstieg der Steigung schließlich zum Bruch bei der Dehnung A_u . Der tertiäre Kriechbereich wurde bei diesen Versuchen nicht erreicht. Wie andere Untersuchungen zeigten, wird der dritte Bereich erst bei höheren Temperaturen als Folge thermisch aktivierter Prozesse erreicht. Charakteristisch war bei allen Versuchen ein ausgeprägter Abschnitt konstanter Steigung. Die DIN 50118 definiert derartige Versuche als Zeitstandversuche unter Zugbeanspruchung [19].

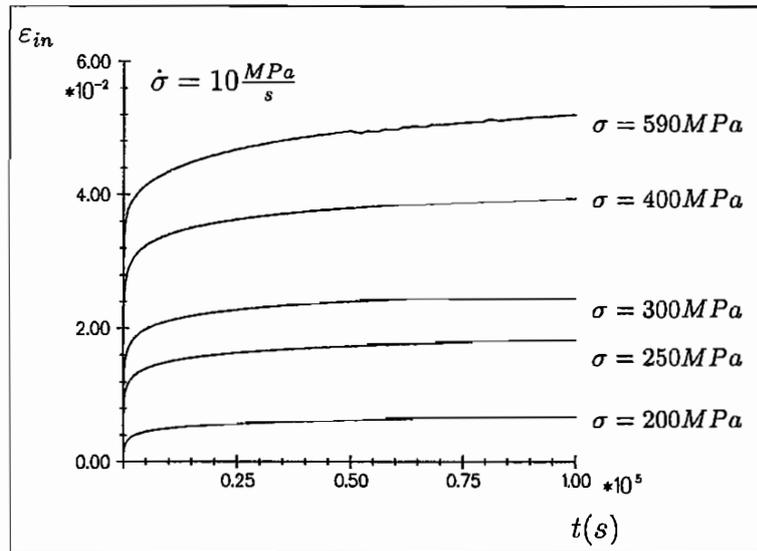


Abb. 2.35 : Kriechversuche bei versch. Spannungsniveaus

Bei Kriechversuchen spielte die Prozeßführung des monotonen Zugversuches bis zum Beginn der Haltezeit eine entscheidene Rolle. Abbildung 2.35 zeigt die Entwicklung der Kriechdehnung (der Dehnung, die nach dem Anhalten des Versuches auftrat) für verschiedene Spannungsniveaus. Höhere Spannungen als 550 MPa konnten für diese Geschwindigkeit nicht erreicht werden, da die Probe vorher brach.

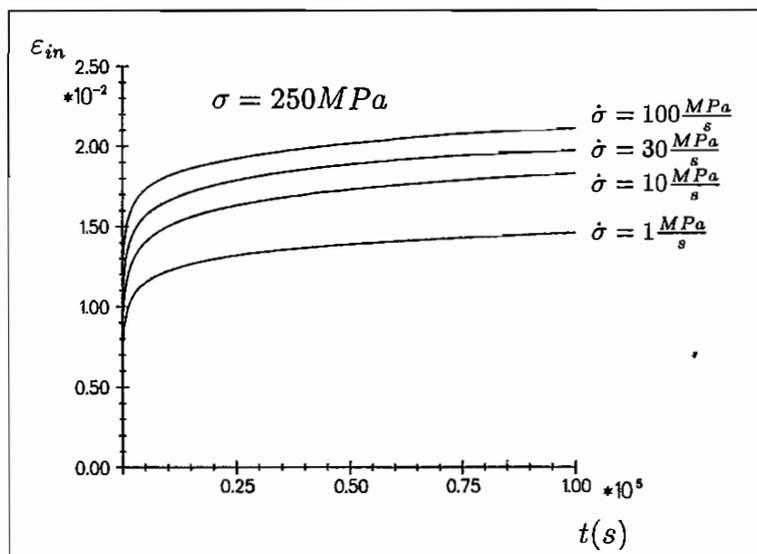


Abb. 2.36 : Kriechversuche bei versch. Spannungsgeschwindigkeiten

Neben dem Niveau der Spannung wurde in einer weiteren Versuchsreihe auch die Geschwindigkeit des Zugversuches variiert. Auch hier zeigte sich ein erkennbaren Einfluß auf die Entwicklung der Kriechdehnung (2.36).

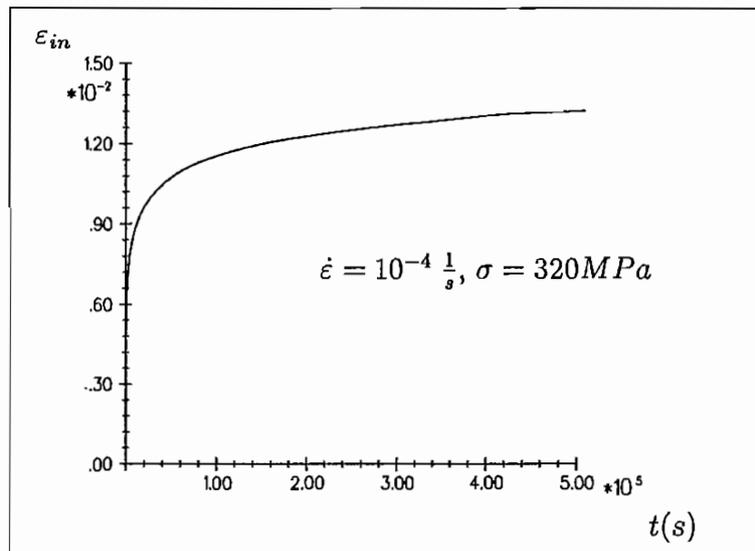


Abb. 2.37 : Ergebnisse bei längerer Haltezeit

Längere Haltezeiten zeigten keine wesentlichen Änderungen im Verhalten des Materials. Die Abbildung 2.37 stellt die Entwicklung bei einem Kriechversuch von fast sechs Tagendar. Bei diesem Versuch wurde auch die Steuerungart des monotonen Zugversuches geändert. In dieser Testreihe wurden die monotonen Versuche nicht kraft- sondern wegge-regelt gefahren. Vorteil einer solchen Versuchsteuerung war, daß hiermit der Fehler in der Vorgeschichte entfiel, der aufgrund der Kraft- anstatt der Spannungsregelung entstand. Auch der Vergleich mit nicht-monotonen Versuchen gestaltete sich einfacher, da in diesem Bereich ausschließlich wegge-regelte Versuche gemessen wurden. Die folgende Abbildung zeigt die Meßkurven der anderen Versuche, bei denen eine wegge-regelte Vorgeschichte vorlag.

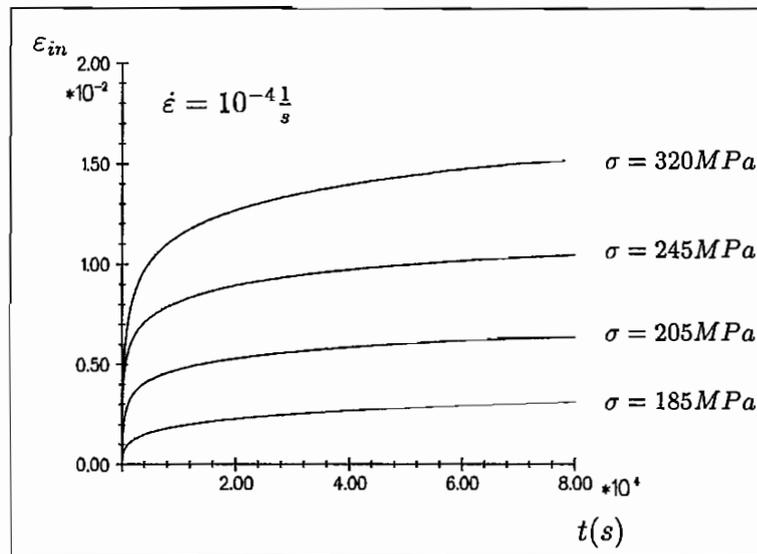


Abb. 2.38 : Kriechversuche bei versch. Spannungsniveaus (wegeregelt)

Der Nachteil bestand darin, daß das angestrebte Spannungsniveau nicht immer reproduziert werden konnte, da zum einen die Maschine von Weg- in Kraftregelung umschalten mußte, und zum anderen geringe Abweichung der Kraft hohe Wegabweichungen bewirkten.

Die nächste Grafik stellt einen Versuch dar, bei dem die Last schrittweise erhöht wurde. Zwischenzeitlich wurde der Versuch angehalten und es akkumulierte eine Kriechdehnung.

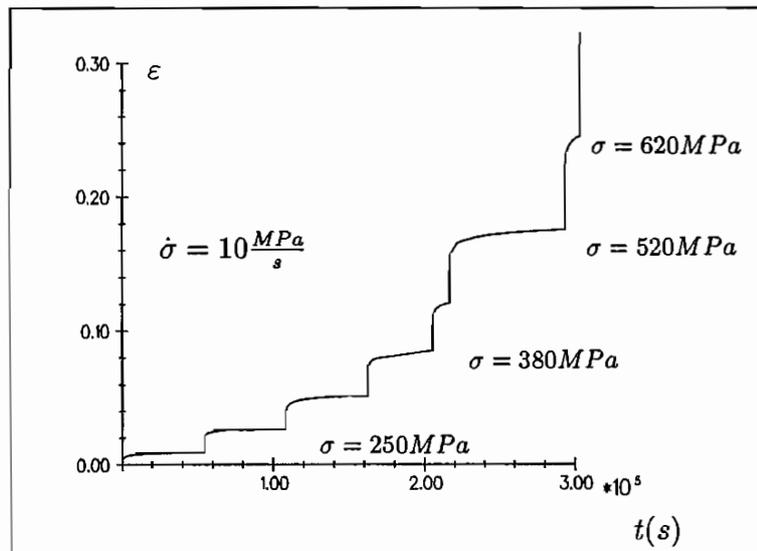


Abb. 2.39 : Gesamtdehnung bei Kriechen und Lasterhöhung

Die Haltezeiten waren bei den ersten drei Zwischenstopps zunächst konstant und wurden im weiteren Verlauf des Experimentes variiert.

Vergleicht man einen solchen Versuch mit einem Experiment ohne Erhöhung (Abb. 2.40), so zeigte sich, daß trotz der anderen Vorgeschichte nach der gleichen Zeit die gleiche Dehnung erreicht wurde. Das anfängliche niedrigere Niveau hatte kaum Einfluß auf die weitere Entwicklung des Materials.

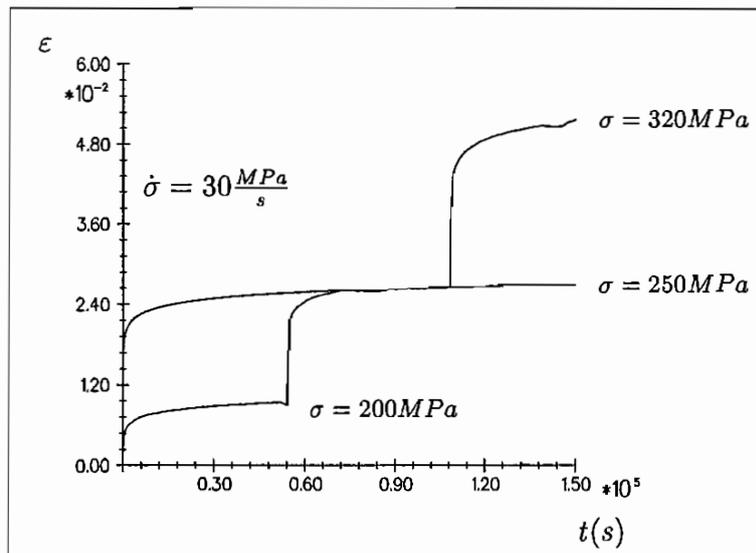


Abb. 2.40 : Vergleich zwischen Versuch mit und ohne Lasterhöhung

Die monotonen Versuche mit Haltezeiten konnten nun dazu benutzt werden, eine bessere Näherung für eine quasistatische Kurve zu erhalten.

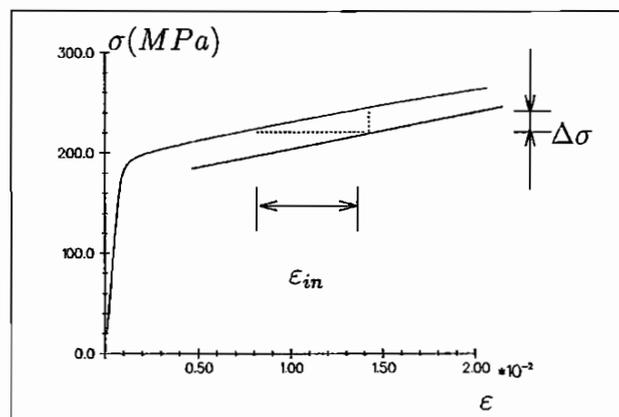


Abb. 2.41 : Ermittlung einer quasistatischen Zugkurve

Für einige Spannungspunkte konnte die Entwicklung der Gesamtdehnung nach einer vorgeschriebenen Zeit aufgezeichnet werden. Wenn die Existenz einer quasistatischen Kurve vorausgesetzt wird, wird diese nach einer unendlichen langen Haltezeit erreicht. Die Abbildung 2.42 zeigt das Ergebnis solcher Überlegungen für einige Kriechversuche. Unter der Voraussetzung, daß der Kurvenverlauf seine Form qualitativ bei allen Geschwindigkeiten beibehält, ließ sich daraus eine quasistatische Zugkurve ermitteln, die eine bessere Näherung als die Kurve mit der geringsten Dehnungsrate darstellte.

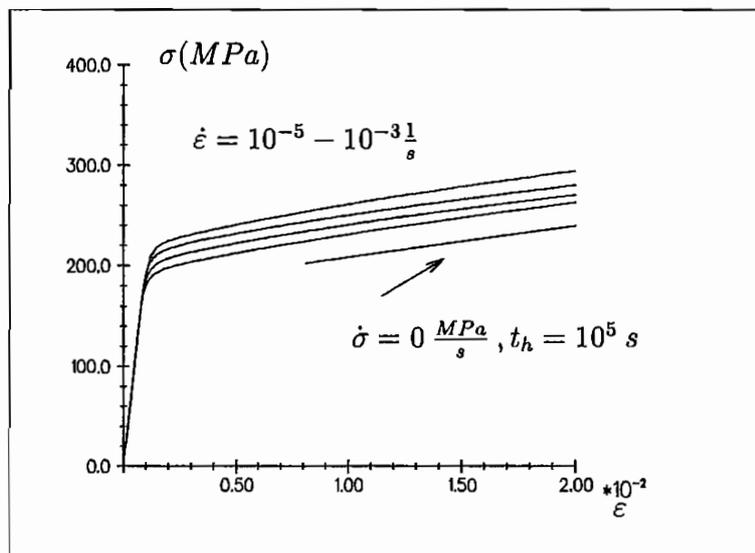


Abb. 2.42 : Zugversuche und Kriechversuche

Die nächsten Bilder zeigen Relaxationsversuche, also Experimente, bei denen nach einem monotonen Versuch der Weg konstant gehalten wurde. Da die gleichen Mechanismen sowohl für das Kriechen als auch für das Relaxieren des Materials verantwortlich waren, wurde nur eine begrenzte Zahl an Versuchen gefahren. Die erste Abbildung verdeutlicht das Relaxationsverhalten nach monotonen Zugversuchen bis 3% Dehnung bei verschiedenen Geschwindigkeiten.

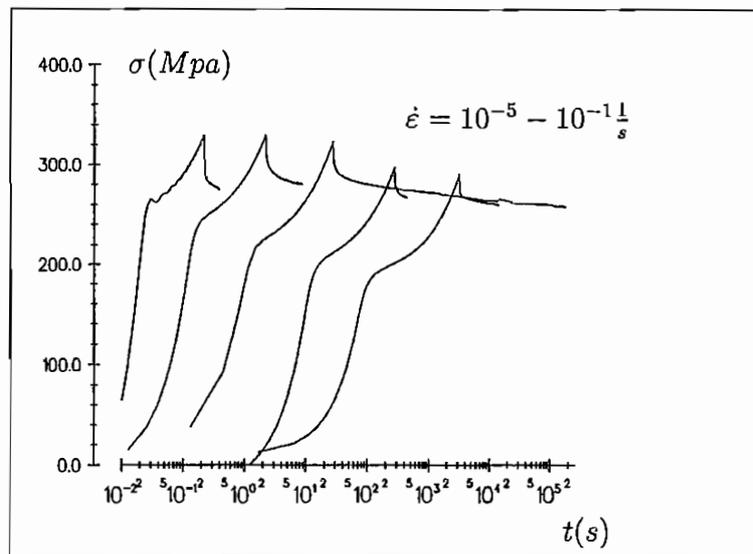


Abb. 2.43 : Relaxationsversuche

Die logarithmische Darstellung erlaubt einen Vergleich der einzelnen Versuche. Für alle Geschwindigkeiten konvergierten die Kurven gegen einen Endwert, der sich für unendlich langsame Prozeßführung einstellte. Die Werte wichen aber dennoch von den Daten der Kriechkurven ab, wie die Tabelle 2.44 zeigt, in der der absolute Spannungswert nach 10000s Haltezeit für drei verschiedenen Geschwindigkeiten miteinander verglichen wurde.

Prozeß	Relaxation			Kriechen
Haltezeit	10000s			100000s
Geschwindigkeit	$\dot{\epsilon} = 10^{-5} \frac{1}{s}$	$\dot{\epsilon} = 10^{-4} \frac{1}{s}$	$\dot{\epsilon} = 10^{-3} \frac{1}{s}$	
Spannung	254.2 (MPa)	257.77(MPa)	265.04 (MPa)	270.05 (MPa)

Tabelle 2.3: Spannungswerte bei verschiedenen Prozessen

Der Wert aus den quasistatischen Kriechkurven lag im Mittel etwas höher als bei der Relaxation. Da dieser Wert nach einer Haltezeit von 10^5s ermittelt wurde, ließ sich daraus schließen, daß der Abbau einer Überspannung im Relaxationsversuch deutlich schneller erfolgte. Die nächste Abbildung verdeutlicht diesen Sachverhalt. Dort wurde die relative Abnahme der Spannung über der Haltezeit aufgetragen. Schon nach sehr kurzer Zeit nahm der Gradient der Spannung merklich ab.

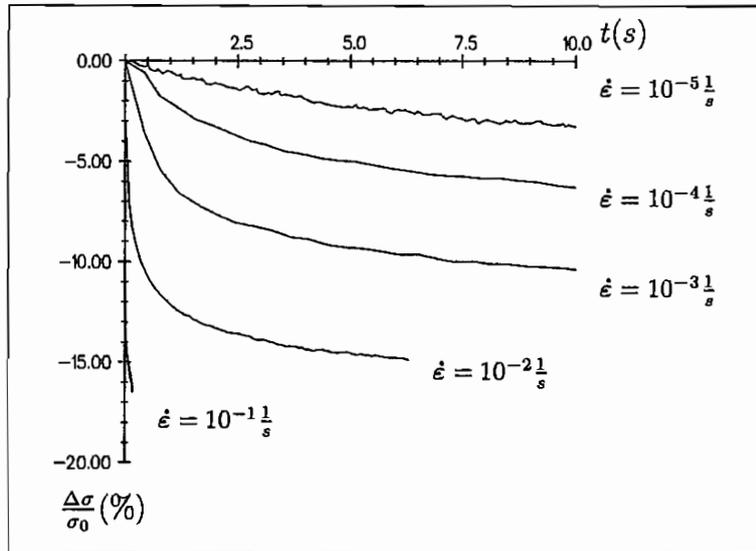


Abb. 2.44 : relative Abnahme der Spannung bei Relaxationsversuchen

Die letzte Grafik dieses Kapitels zeigt das Relaxationsverhalten bei dem monotonen Zugversuch bis zum Bruch der Probe aus Kapitel 2.4.2.

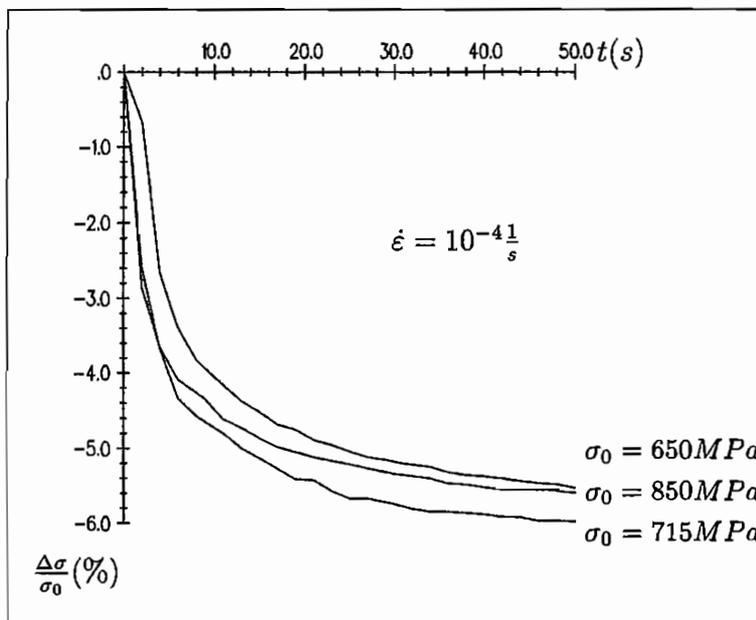


Abb. 2.45 : Relaxation bei verschiedenen Spannungsniveaus

Der Versuch wurde bei den drei Spannungsniveaus 650, 715 MPa und 850 MPa angehalten. Die relative Abnahme zeigte keine eindeutige Zuordnung zu den Anfangsniveaus. Die

Relaxation hing unwesentlich von der Anfangsspannung, mehr aber von der Geschwindigkeit des monotonen Zugversuches ab.

2.4.5 Nichtmonotone Versuche mit Haltezeiten

Ziel dieser Untersuchungen war es, den Einfluß verschiedener Halteprozesse auf das zyklische Verhalten näher zu untersuchen oder inwiefern eine zyklische Vorbelastung die Entwicklung der Kriechdehnung oder des Spannungsabfalles bei Relaxation beeinflusste.

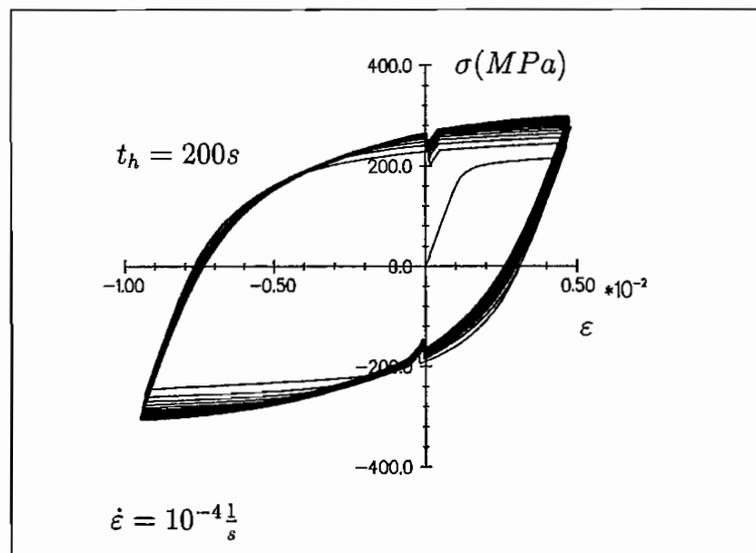


Abb. 2.46 : *Zyklen mit Relaxation*

Zu Beginn wird ein zyklischer Versuch gezeigt, der im Nulldurchgang der Dehnung gestoppt wurde. Die Relaxationsphase betrug 200 s und es wurde mit einer negativen Mitteldehnung gefahren. Während der Haltezeit im Zugbereich fiel die Spannung stärker ab als im Druckbereich. Der höhere akkumulierte Dehnung seit Beginn des inelastischen Schrittes war der Grund für diese Entwicklung.

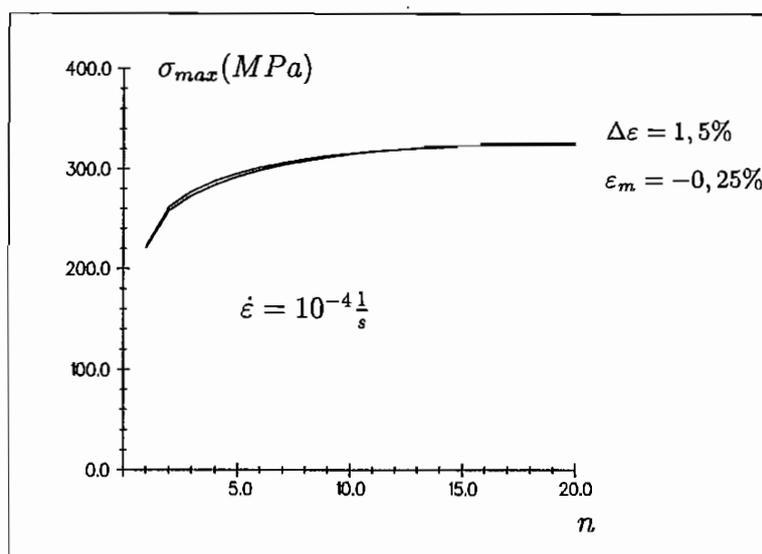


Abb. 2.47 : Vergleich mit und ohne Relaxation

Wurde das Wachstum der Maximalspannung pro Zyklus mit dem Ergebnis ohne Haltezeit verglichen, so ergab sich nahezu der gleiche Verlauf, die Relaxation hatte also kein Einfluß auf das Verfestigungsverhalten.

Schloß sich dem monotonen Zugversuchen mit Haltezeit zusätzlich ein zyklischer Versuch an, wie es in der folgenden Abbildung dargestellt ist, so ergab sich nachfolgender Verlauf der maximalen Spannung.

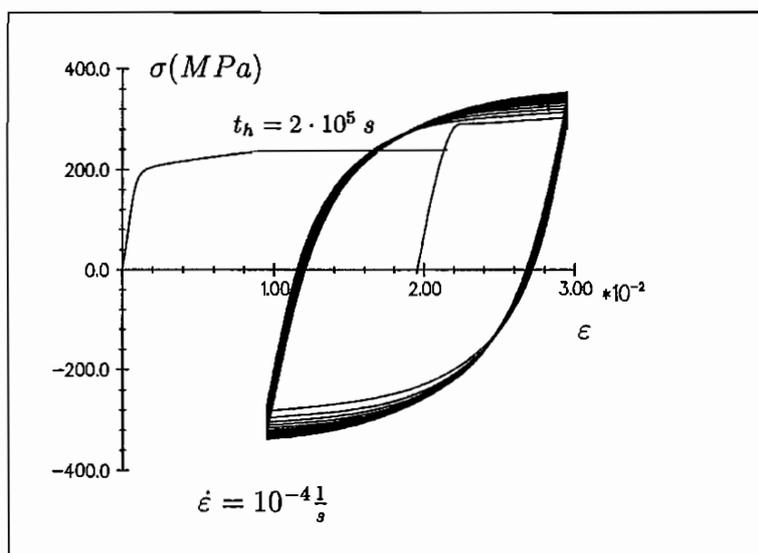


Abb. 2.48 : Zyklen nach Kriechen

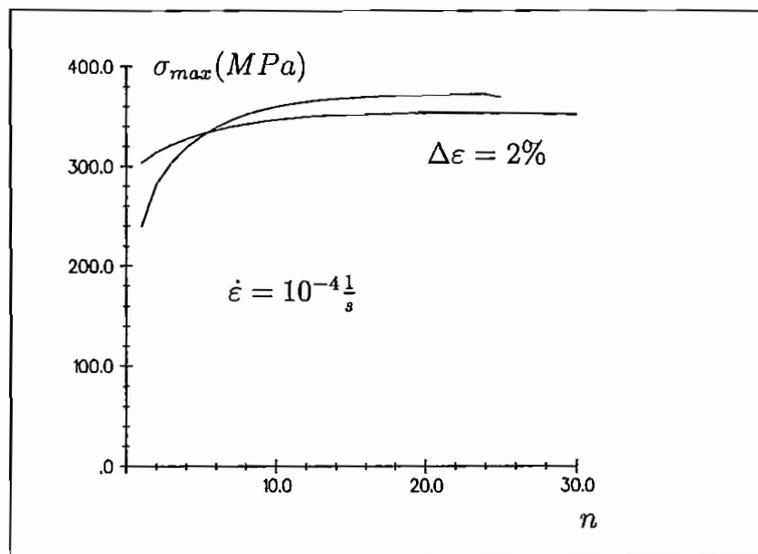


Abb. 2.49 : Vergleich mit Versuch ohne Vorgeschichte

Der Vergleich mit einem Versuch ohne eine Vorbelastung zeigte, daß die Verfestigung infolge der zyklischen Belastung deutlich geringer war. War die zyklische Vorbelastung größer, so fand eine Entfestigung des Materials direkt im ersten Zyklus statt. Die nächste Grafik zeigt dies für einen Versuch mit einer Gesamtdehnung von 23% nach einem Kriechversuch im Vergleich mit anderen zyklischen Versuchen.

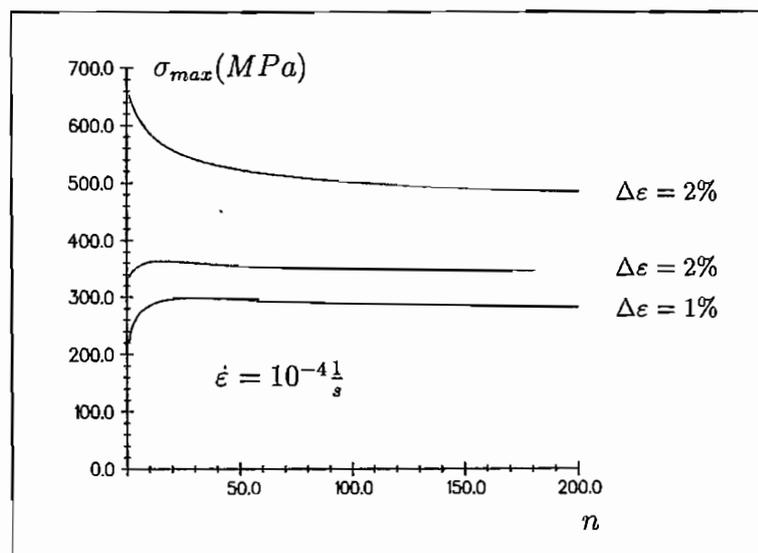


Abb. 2.50 : Entwicklung nach Kriechen

Die rapide Abnahme der Spannung hielt selbst nach 200 Zyklen nicht inne, lag aber dennoch ca. 60 % höher als bei dem Versuch ohne Mitteldehnung.

Der Einfluß von zyklischer Vorbelastung auf Kriechversuche wird in der nächsten Grafik vorgestellt. Die obere Kurve zeigt einen Kriechversuch mit einem monotonen Zugversuch bis 300MPa als Vorgeschichte. Die untere Kurve hingegen stellt einen Kriechversuch bei dem gleichen Spannungsniveau dar, bei dem allerdings die Vorgeschichte zyklische Experimente waren. Infolge der veränderten Vorgeschichte akkumulierte wesentlich weniger Kriechdehnung.

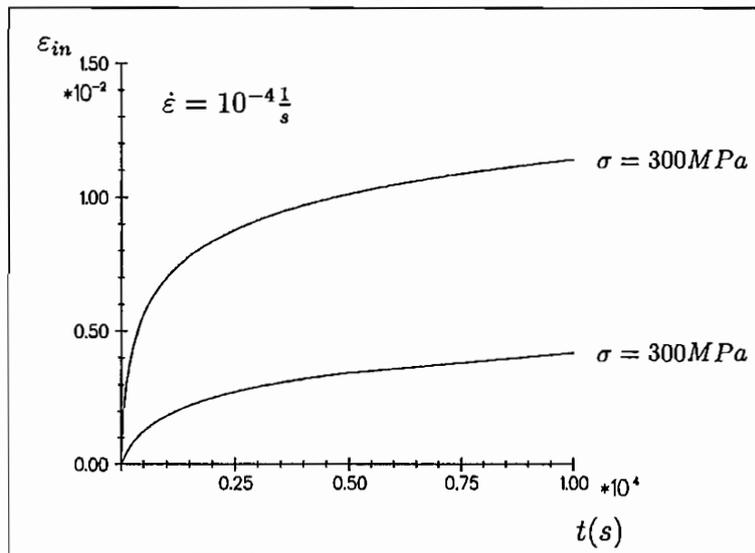


Abb. 2.51 : Kriechen nach zyklischer Vorbelastung

2.5 Schlußfolgerung

Die Untersuchungen können die Basis für eine Weiterentwicklung von Stoffgesetzen sein. Die gute Reproduzierbarkeit der Versuche sichert die Verwendung für die Entwicklung mathematischer Modelle.

Eine Aufspaltung in einen linear elastischen und einen inelastischen Anteil bestätigen die Experimente. Die Geschwindigkeitsabhängigkeit ist bei monotonen Versuchen signifikant, verliert aber ihren Einfluß bei wiederholter Belastung. Bei derartigen zyklischen Versuchen verfestigt das Material zunächst und nach ca. 20 Zyklen tritt es in eine Entfestigungsphase ein, ohne daß ein stabiler Zustand erreicht wird.

Wird ein Kriechversuch durchgeführt, so akkumuliert auch bei Raumtemperatur eine meßbare Kriechdehnung. Diese ist abhängig von der Haltelast und der Geschwindigkeit, mit der diese Last angefahren wird. Die inelastische Dehnungsrate hat zu Beginn der Haltezeit einen sehr großen Wert und fällt auf nahezu Null im weiteren Verlauf ab.

Kapitel 3

Theorie

3.1 Einleitung

Nach der experimentellen Darstellung des Verhaltens des Werkstoffes soll im dritten Kapitel die mathematische Modellierung der Materialantwort auf äußere Belastungen im Vordergrund stehen.

Hierzu wird ein viskoplastisches Stoffgesetz von *Rott* [68] aufgegriffen und gemäß den experimentellen Ergebnissen verändert. Dieses Materialmodell ist in der Lage, verschiedene plastische Basismodelle unabhängig vom viskoplastischen Modell zu verwenden. Aus diesem Grund werden in dem Kapitel einige plastische Modelle vorgestellt und verglichen. Es schließt sich eine kurze Einführung in viskoplastische Theorien an. Danach folgt ein Vorschlag einer Modifikation des Modells nach *Rott* und beendet wird dieses Kapitel mit Verifikationsrechnungen.

Bevor jedoch näher auf die einzelnen Stoffgesetze eingegangen wird, sollen einige Grundannahmen festgelegt werden, die die Auswahl der zur Verfügung stehenden Materialmodelle beschränken.

Voraussetzungen:

- es werden nur kleine Formänderungen betrachtet
- bis zu einer Grenze (Fließgrenze) verhält sich das Material linear-elastisch
- oberhalb dieser Grenze verhält sich das Material elastisch-viskoplastisch
- alle Prozesse verlaufen hinreichend langsam, so daß Trägheitseffekte vernachlässigt werden können

-
- alle Prozesse verlaufen isotherm
 - das Material ist im Ursprungszustand isotrop
 - plastische Inkompressibilität

Diese Voraussetzungen wurden bei den Versuchen nach Möglichkeit eingehalten oder sind durch diese bestätigt worden. Der linear-elastische Anteil wird mit dem hypoelastischen Stoffgesetz der Form

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e = \frac{1}{2G} \left\{ \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{1} \right\} \quad (3.1)$$

beschrieben. Der Elastizitätsmodul E der Gleichung (3.1) wurde im Kapitel 2.4.1 bestimmt und ist im Anhang aufgeführt. Hinzu kommt die Querkontraktionszahl ν für die späteren FE-Rechnungen, die der Literatur entnommen wurde [31]. Die fettgedruckten Größen sind Tensoren erster oder höherer Ordnung.

3.2 Plastische Basismodelle

3.2.1 Allgemeines

In diesem Kapitel sollen die plastischen Basismodelle, die in dieser Arbeit Verwendung finden, vorgestellt werden. Da die Herleitung solcher Materialmodelle mittlerweile zu den Grundlagen der Kontinuumsmechanik gehört, wird für ein eingehenderes Studium auf die Literaturangaben in diesem Kapitel verwiesen.

Die Grundlage der Beschreibung von inelastischem Materialverhalten bildet die additive Aufspaltung der Verzerrungsgeschwindigkeit in einen elastischen reversiblen und einen plastischen irreversiblen Anteil.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_i \quad (3.2)$$

Da bei kleinen Verzerrungen der Green-Verzerrungstensor mit dem Almansi-Verzerrungstensor zusammenfällt, wird keine Unterscheidung in der Bezeichnung gemacht.

Der zweite Anteil der Aufspaltung tritt erst dann auf, wenn eine sogenannte Fließbedingung erfüllt ist. Als Folge von inelastischen Deformationen verfestigt sich das Material, was zu einer Veränderung dieser Bedingung führt. Beschrieben werden diese Änderungen durch sogenannte interne Variable q_i , die zur Interpretation mikroskopischer Mechanismen herangezogen werden können. Sie sind von der Prozeßgeschichte abhängig und können im Gegensatz zu den externen Variablen wie Weg oder Temperatur nicht vorgegeben werden. Ohne Berücksichtigung des Temperatureinflusses entsteht eine Fläche im 6-dimensionalen Spannungsraum :

$$F = f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}_i) = 0 \quad (3.3)$$

Alternativ lassen sich auch Theorien im Dehnungsraum [7] angeben.

Durch den Ersatz der Spannungskomponenten durch die Invarianten des Tensors kann eine erheblich einfachere Beschreibung erreicht werden. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß die erste Invariante des Spannungstensors aufgrund der plastischen Inkompressibilität verschwindet und die dritte Invariante erfahrungsgemäß bei metallischen Werkstoffen nur geringen Einfluß auf die Ergebnisse hat. Wird ein linearer Ansatz in der zweiten Invarianten für die Funktion F gewählt, so ergibt sich eine quadratische Form der Fließfläche:

$$F = (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\xi}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\xi}) - g = 0 \quad (3.4)$$

Die Gestalt- und die Lageänderung der Fläche, die auf *Melan-Prager-Ziegler-Shield* ([65], et.al.) zurückgeht, kann als isotrope Verfestigung (\sqrt{g}) und als kinematische Verfestigung ($\boldsymbol{\xi}$) identifiziert werden. Sie bezeichnen den Radius des Kreises und den Ortsvektor des Ursprunges in der π -Ebene (Bild 3.1). Auf die Einbeziehung einer anisotropen Verfestigung, also einer Gestaltänderung der Fließfläche, wird verzichtet. Andere Theorien gehen davon aus, daß Fließen unmittelbar nach Auftreten der ersten Deformationen auftritt. Somit reduziert sich die Fließfläche auf einen Punkt und die isotrope Verfestigung wird zu Null. Dies trifft insbesondere bei Werkstoffen auf, die schon bei Raumtemperaturen kriechen [63].

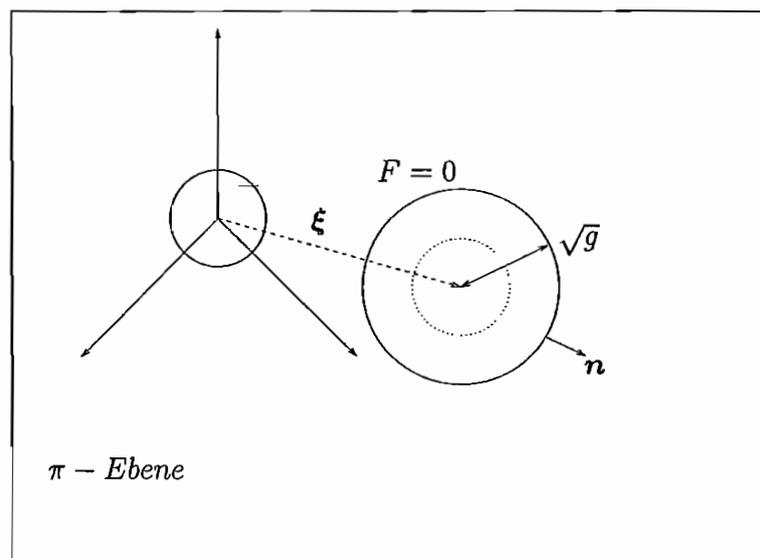


Abb. 3.1 : Fließfläche mit isotroper und kinematischer Verfestigung

Die Berechnung der internen Variablen geschieht i.a. über Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit, die zusätzlich angegeben werden müssen. Derartige Formulierungen werden als inkrementelle Theorien bezeichnet, auf die sich in dieser Arbeit beschränkt werden soll. Die umfangreiche Diskussion über die Verwendung von finiten oder inkrementellen Ansätzen wird in [54] von *Naghdi* zusammengefaßt.

Neben der Fließbedingung muß bei fortgesetzter Belastung gewährleistet werden, daß die Richtung der Spannungsänderung außerhalb der konvexen Fließfläche verläuft, damit

inelastische Deformationen auftreten. Aus diesem Grund muß die Gültigkeit der Belastungsbedingung überprüft werden:

$$\dot{\sigma} \cdot \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\|} = \dot{\sigma} \cdot \mathbf{n} > 0 \quad (3.5)$$

Unter Verwendung von sogenannten *McCauley*-Klammern, die an die Berücksichtigung der Fließ- und Belastungsbedingung erinnern:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x, & \text{wenn } F(\sigma) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\sigma} \cdot \mathbf{n} > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.6)$$

erfolgt die Berechnung der Dehnungsrate in Gleichung (3.2) unter der Annahme, daß der inelastische Verzerrungsgeschwindigkeitsanteil proportional zu dem Normalenvektors auf der Fließfläche ist:

$$\dot{\varepsilon}_i = \langle \lambda \mathbf{n} \rangle \quad (3.7)$$

Diese als Normalenregel bezeichnete Berechnung der unbekanntenen Größe $\dot{\varepsilon}_i$ wird aus der Theorie des plastischen Potentials hergeleitet [32, 8]. Hiernach entsteht die Spannung σ aus einem gegebenen Verformungszustand nur dann, wenn die plastische Arbeit

$$W = \hat{\sigma} \cdot \varepsilon_i \quad (3.8)$$

ein Maximum annimmt. Hierbei weicht die Größe $\hat{\sigma}$ von der tatsächlichen Spannung ab, erfüllt aber ebenfalls die Fließbedingung (3.3). Die Lösung einer solchen Extremwertaufgabe mit der Fließbedingung als Nebenbedingung findet sich mit der *Lagrangeschen Multiplikationsmethode*, und λ wird dementsprechend *Lagrangescher Multiplikationsfaktor* genannt. Nach dieser Lösungsmethode stellt die Fließregel der Gleichung (3.7) eine hinreichende Bedingung für die Lösung der Extremwertaufgabe dar, wenn $\hat{\sigma} = \sigma$ erfüllt ist. Die Funktion F wird als plastisches Potential bezeichnet. Die aus dieser Theorie abgeleiteten Fließregeln werden assoziierte Fließregeln genannt, die in dieser Arbeit behandelt werden.

Eine Erweiterung der Normalenregel findet sich bei *Lehmann* [45, 44]. Diese bewirkt eine Veränderung der Verzerrungsinkremente infolge des erzeugten Spannungszustandes. Die Formulierung der Normalenregel wurde bei einigen Arbeiten erfolgreich angewendet

[76, 86] und auch von anderen Autoren aufgenommen [48], wird aber hier nicht weiter berücksichtigt.

Eine andere Definition einer Fließregel besteht darin, sie nicht in Richtung der Flächennormalen, sondern in Richtung des Translationsvektors der Fließfläche [87] anzusetzen. Dies führt bei Verwendung einer Fließfläche nach Gleichung (3.4) allerdings zu gleichen Ergebnissen.

Zur endgültigen Bestimmung der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeit kann λ aus der Konsistenzbedingung $\dot{F} = 0$, die das Verbleiben des Spannungspunktes auf der Fließfläche sichert, bestimmt werden:

$$\dot{F} = 0 = 2(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\xi}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\sigma}}' - \dot{\boldsymbol{\xi}}) - \dot{g}. \quad (3.9)$$

Ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit führen derlei Ansätze auf folgende Form für λ :

$$\lambda = \left\langle \frac{A}{K} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{n} \right\rangle + \left\langle \left\langle \frac{B}{K} \Lambda \right\rangle \right\rangle \quad (3.10)$$

Der noch unbekannte Faktor K hängt von der Wahl der internen Variablen bzw. von den Materialfunktionen ab.

3.2.2 Verfestigungsvariablen

Kinematische Verfestigung

Die ersten Ansätze für die kinematische Verfestigung gehen auf *Prager* und *Ziegler* [64, 87] zurück, wobei die Entwicklungsgleichungen von der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeit abhängig gemacht werden:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = c \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i \quad (3.11)$$

Die Funktion c ist zunächst konstant, was zu einer linearen Verfestigung führt. *Eisenberg*, *Philips* [24] und *Backhaus* [4] machen die Funktion c von der Prozeßgeschichte abhängig, so daß eine nicht-lineare Verfestigung entsteht.

$$\xi = c(p) \varepsilon_i \quad (3.12)$$

bzw.

$$\dot{\xi} = c(p) \dot{\varepsilon}_i \quad (3.13)$$

Die Größe p gibt eine akkumulierte plastische Dehnung oder eine Vergleichsdehnung wieder, die immer positiv ist:

$$p = \sqrt{\dot{\varepsilon}_i \cdot \dot{\varepsilon}_i} = \|\dot{\varepsilon}_i\|. \quad (3.14)$$

Eine andere Möglichkeit, nichtlineare Verfestigungsregeln zu erhalten, besteht darin, die Evolutionsgleichung um Begrenzungs- oder Erholungsterme zu erweitern [2, 14]:

$$\dot{\xi} = c(p) \dot{\varepsilon}_i - b(p) \xi \quad (3.15)$$

bzw.

$$\dot{\xi} = c(p) \dot{\varepsilon}_i - b(p) \varepsilon_i \quad (3.16)$$

Mróz, et.al. [53] ersetzen hier im zweiten Term die kinematische Verfestigung durch die plastische Dehnung (3.16). Diese Ansätze erlauben die Modellierung einer Entfestigung des Materials, wie es z.B. infolge von Werkstoffschädigung auftreten kann. Formal entstehen diese Ansätze durch partielle Differentiation des finiten Ansatzes (3.12).

$$\dot{\xi} = c \dot{\varepsilon}_i - b(p) \xi - \beta \|\xi\|^{r-1} \xi \quad (3.17)$$

Nouhailhas [55] verwendet einen weiteren Erholungsterm, der nichtlinear in ξ ist (3.17) und bei dem β konstant ist. Die Entwicklungsgleichung für ξ wird dadurch aber geschwindigkeitsabhängig, was die Verwendung auf viskoplastische Modelle reduziert. In dieser Arbeit wird auch eine Idee von *Chaboche* [47] aufgegriffen, die kinematische Verfestigung additiv in mehrere interne Variablen aufzuteilen. Für diese wird dann jeweils ein Ansatz der Form (3.15) gemacht:

$$\dot{\xi} = \sum_i \dot{\xi}_i \quad (3.18)$$

I.a. wird mit zwei Variablen gerechnet. Die Aufteilung bewirkt, daß eine Variable stärker für die Verfestigung verantwortlich ist, die zweite hingegen stärker den Erholungsterm berücksichtigt. Die anderen Anteile dienen der Modellierung der Übergangphasen.

Bei der Verwendung von zusätzlichen internen Variablen besteht die Möglichkeit, die kinematische Verfestigung mit diesen Größen zu kombinieren und in die obigen Ansätze einzubauen. *Bruhns, et.al.*[9] verwendet eine sogenannte Strukturgedächtnisfunktion Δ zur besseren Beschreibung von nicht-radialen Prozessen:

$$\dot{\xi} = c(\kappa, \Delta) \dot{\epsilon}_i \quad (3.19)$$

Hierbei wird zur Beschreibung der Vorgeschichte nicht die akkumulierte Dehnung, sondern die inelastische Arbeit κ benutzt.

$$\dot{\kappa} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\epsilon}_i = (\sigma' - \xi) \cdot \dot{\epsilon}_i \quad (3.20)$$

Andere Modifikationen der kinematischen Verfestigung bestehen darin, weitere die Fließfläche umschließende Flächen einzuführen. Für diese Flächen werden dann geeignete Evolutionsgleichungen aufgestellt. Die Ansätze ähneln denen der Gleichung (3.19), wobei die Größe Δ dann von den anderen Flächen z.B. als Abstand abhängt. Das vorgestellte Zwei-Flächen-Modell in Kapitel 3.2.3 geht näher auf diesen Sachverhalt ein.

Isotrope Verfestigung

Bei der Wahl des Evolutionsgesetzes für die isotrope Verfestigung entstand eine ähnliche Vielfalt wie bei der kinematischen Materialverfestigung. Die anfänglichen konstanten Werte wurden in der weiteren Entwicklung von der Prozeßgeschichte abhängig gemacht. Einen einfachen Ansatz macht *Krieg* in [41]:

$$\dot{R} = d(p) \quad (3.21)$$

Dabei ist $R = \sqrt{g}$ die isotrope Verfestigung. Der Vereinfachung halber wird im weiteren keine Unterscheidung bei der Bezeichnung der beiden Größen gemacht. Wird die Fließbedingung in R ausgedrückt, so entsteht folgende Form:

$$F = (\sigma' - \xi) \cdot (\sigma' - \xi) - R^2 = 0. \quad (3.22)$$

Die zeitliche Änderung der Verfestigung ist direkt von der akkumulierten plastischen Dehnung (3.14) abhängig. Zur Beschreibung insbesondere von zyklischer Ver- und Entfestigung wird folgender Vorschlag überlegt [14, 85]:

$$\dot{R} = d(p) - e(p) R \quad (3.23)$$

Die Verfestigung wird analog zu (3.15) um einen Erholungsterm ergänzt. Ein anderer Weg findet sich bei *Hill* [32]. Dort wird für die isotrope Verfestigung nicht direkt eine Evolutionsgleichung angegeben, sondern durch eine von der inelastischen Arbeit κ abhängige Materialfunktion ersetzt. Für diese Größe wird dann eine zusätzliche Differentialgleichung verwendet:

$$g(\kappa) = R^2 = d^2 + e(\kappa) \quad (3.24)$$

Variationen werden hierbei insbesondere bei der Materialfunktion $b(\kappa)$ durchgeführt [9].

3.2.3 Anwendungen

Die inkrementellen Ansätze verlangen eine numerische Lösung des entstandenen Differentialgleichungssystems. Wird das allgemein dreidimensionale Problem auf den einaxialen Zugversuch reduziert, so läßt sich das Gleichungssystem erster Ordnung numerisch integrieren. Die so erhaltenen Ergebnisse können mit den experimentellen Daten verglichen und die Parameter der Materialfunktionen entsprechend geändert werden. Die Änderungen der Parameter werden durch ein Optimierungsverfahren gesteuert, bis eine zufriedenstellende Anpassung oder ein geeignetes Fehlermaß erreicht wird. Zur Lösung dieser nichtlinearen Probleme wird ein Gradientenverfahren [74] und eine Evolutionsstrategien [67] eingesetzt. Die numerische Integration erfolgt mit einem *Runge-Kutta*-Algorithmus nach *Dormand* und *Prince* [22, 23], der sich im Vergleich zu den veralteten Varianten vierter oder fünfter Ordnung bewährt hat.

Modell nach Chaboche

Aus der Vielzahl von Varianten dieses Modells wird eine herausgegriffen, die die grundlegenden Eigenschaften wiedergibt. In der Folgezeit wurde dieses Modell erweitert, um

spezielle Eigenschaften eines Werkstoffes genauer zu beschreiben. Hier sind insbesondere die Beschreibung von zyklischem Kriechen (Ratchetting) oder die Berücksichtigung der Schädigung des Materials zu erwähnen. Für die in dieser Arbeit angestrebten Vergleiche wird auf diese Probleme nur peripher eingegangen.

Das Differentialgleichungssystem lautet:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_e + \left\langle \frac{\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n}}{K} \right\rangle \mathbf{n} \quad (3.25)$$

$$\dot{\xi} = \sum_i \dot{\xi}_i, \quad i = 2 \quad (3.26)$$

$$\dot{\xi}_i = c_i \dot{\epsilon}_i - b_i \|\dot{\epsilon}_i\| \xi_i \quad (3.27)$$

$$\dot{R} = d(Q - R) \|\dot{\epsilon}_i\| \quad (3.28)$$

mit

$$F = (\sigma' - \xi) \cdot (\sigma' - \xi) - (R + R_0)^2 = 0 \quad (3.29)$$

$$K = \sum_i c_i - \sum_i b_i \xi_i \cdot \mathbf{n} \quad (3.30)$$

Bei der Reduktion des Differentialgleichungssystems auf den einaxialen Fall ist zu beachten, daß bei dem Modell der Tensor der kinematischen Verfestigung nicht von vorn herein als Deviator eingeführt wird. Vergleicht man die einaxialen Stoffgesetze oder die spätere Finite-Elemente-Formulierung mit den anderen Modellen, so müssen die Parameter an den betreffenden Stellen geändert werden.

Im Stoffgesetz gibt R_0 den Wert der Fließgrenze an, und p bezeichnet die akkumulierte plastische Dehnung gemäß Gleichung (3.14). Die Materialparameter der kinematischen Verfestigung sind konstant. In den erweiterten Versionen dieses Materialmodells werden \dot{R} und $\dot{\xi}_i$ um einen weiteren nichtlinearen Erholungsterm ergänzt. Diese ratenunabhängigen Terme dienen dem übergeordneten viskoplastischen Modell der Materialerholung bei kleinen Prozeßgeschwindigkeit. Der Wert Q gibt den Sättigungswert der Spannung bei zyklischem Materialverhalten an. Hierfür werden in einer anderen Variante zusätzliche Entwicklungsgleichungen angegeben, die eine Dehnungsgedächtnisfläche beschreiben.

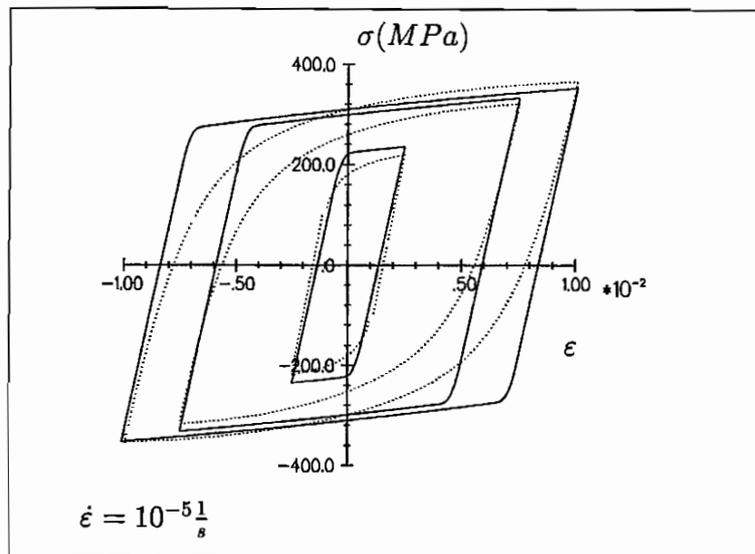


Abb. 3.2 : Sättigungszyklus (Experiment: \cdots , Rechnung: $—$)

Durch die Verwendung von Materialkonstanten zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens ist die Form der zyklischen Kurven in den Übergangsbereichen unzufriedenstellend. Die Abbildung 3.2 zeigt den letzten Zyklus für drei verschiedene Dehnungsschwingbreiten. Es ist allerdings zu erwähnen, daß die Anpassung in diesen wie auch in den folgenden Fällen an die Sättigungsspannung im positiven Dehnungsbereich erfolgt. Die Form der Kurven geht nicht in die Optimierung der Materialparameter ein. Eine erweiterte Optimierung, die auch die Übergangsbereiche berücksichtigt, würde eine Verbesserung ergeben, aber auch die Rechenzeit erheblich erhöhen. Ein Vorteil der konstanten Materialparameter besteht darin, daß die Differentialgleichungen für die Verfestigungen z.T. direkt zu integrieren sind, was die Anpassung erleichtert.

Die folgende Abbildung zeigt die angepaßten Sättigungskurven im Vergleich mit den experimentellen Daten.

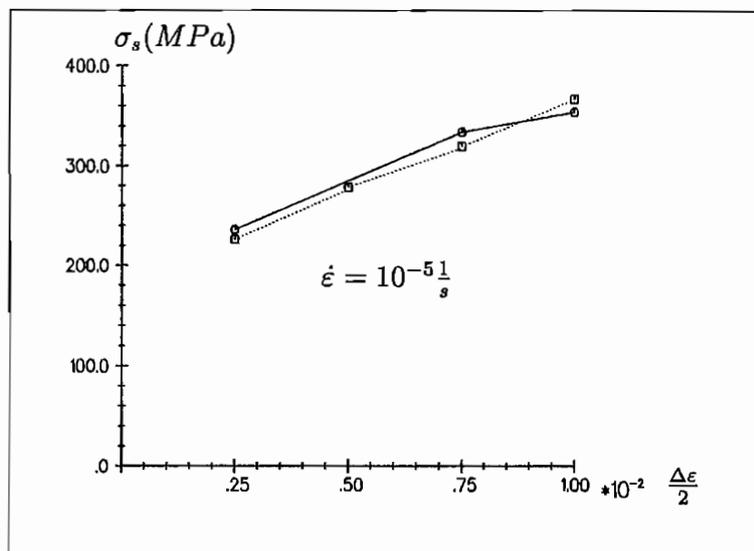


Abb. 3.3 : Sättigungskurve (Experiment: ···, Rechnung: —)

Die Übereinstimmung ist hier als zufriedenstellend zu bezeichnen. Neben der Betrachtung der Sättigungsspannung ist die Untersuchung der Zyklenzahl, bei der diese Spannung erreicht wird, ein Hinweis auf die Qualität des verwendeten Stoffgesetzes. In der nachfolgenden Tabelle werden die drei plastischen Basismodelle dieser Arbeit mit dem experimentellen Ergebnis bei drei verschiedenen Dehnungsbreiten verglichen.

$\frac{\Delta \epsilon}{2}$	Experiment	Chaboche	IA-Modell	2-Flächen-Modell
0.25%	21	62	25	48
0.75%	26	70	91	41
1.00%	24	63	76	36

Abb. 3.4 : Anzahl der Zyklen bis zum Erreichen des Sättigungszustandes

Bei der Berechnung wird ein Zustand als gesättigt angenommen, wenn die Zunahme pro Zyklus weniger als 0.2% bezogen auf den Wert im letzten Zyklus beträgt. Verglichen wird dieser Wert mit den Daten des Experimentes beim Auftreten des ersten Abfalles der maximalen Spannung pro Zyklus.

Das Modell von *Chaboche* erreicht den Sättigungszustand nach einer deutlich höheren

Anzahl an Zyklen als im Experiment. Die Anzahl bleibt aber bei verschiedenen Schwingbreiten nahezu konstant. Der Vergleich mit dem Experiment unterliegt allerdings einer gewissen Willkür, da der Abbruchwert für das Erreichen des Sättigungszustandes in der Rechnung frei gewählt werden kann.

Die Daten der anderen Stoffgesetze werden später besprochen. Die Materialparameter, die durch die Optimierung erreicht wurden, sind im Anhang aufgeführt.

IA-Modell

Das von *Bruhns, et.al.* [11, 9] entwickelte Modell soll das Verhalten von austenitischem Stahl bei hohen Temperaturen simulieren. Da dieses Material geschwindigkeitsabhängig ist, war die Konzeption auf ein Überspannungsmodell ausgerichtet. Für eine unendlich langsame Prozeßführung geht dieses Modell in eine geschwindigkeitsunabhängige Variante über, welche im folgenden vorgestellt wird:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_e + \left\langle \frac{\dot{\sigma} \cdot n}{K} \right\rangle n \quad (3.31)$$

$$\dot{\xi} = c(\kappa, \Delta) \dot{\epsilon}_i \quad (3.32)$$

$$\dot{\kappa} = (\sigma' - \xi) \cdot \dot{\epsilon}_i \quad (3.33)$$

mit

$$F = (\sigma' - \xi) \cdot (\sigma' - \xi) - g(\kappa) = 0 \quad (3.34)$$

$$K = c(\kappa) + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \kappa} \quad (3.35)$$

Die isotrope Verfestigung wird hier nicht direkt als interne Variable angegeben, sondern berechnet sich aus der inelastischen Arbeit mit Hilfe einer Materialfunktion:

$$g(\kappa) = g_0 + (g_\infty - g_0) (1 - e^{-c_1 \kappa}) \quad (3.36)$$

Die Funktion g erreicht für $\kappa \rightarrow \infty$ den Sättigungswert g_∞ .

Die Nichtlinearität der kinematischen Verfestigung wird über eine Materialfunktion eingeführt, die neben der inelastischen Arbeit auch von der Strukturgedächtnisfunktion abhängt:

$$c(\kappa, \Delta) = c_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \kappa} + w(\Delta(\kappa)), \quad (3.37)$$

wobei in

$$w(\Delta(\kappa)) = \frac{2}{3} \frac{E \cdot E_t}{E - E_t} - c_0, \quad (3.38)$$

E_t den Tangentenmodul bezeichnet, der aus geeigneten Funktionen (siehe Anhang) berechnet werden kann.

Die Strukturgedächtnisfunktion bestimmt sich aus der im letzten inelastischen Lastschritt verrichteten Arbeit:

$$\Delta(\kappa) = p_i \int_{\kappa_{in}}^{\kappa} \sqrt{\frac{g_0}{g}} d\kappa^* + q_i \quad (3.39)$$

Dabei ist κ_{in} der Anfangswert der plastischen Arbeit zu Beginn des i -ten inelastischen Belastungsschrittes. Die Werte der Parameter p und q für den nächsten inelastischen Schritt ergeben sich aus:

$$p_{i+1} = \min\{p_i; \frac{1}{4}(\text{sign}(\beta)\sqrt{|\beta|} + 3)\} \quad (3.40)$$

$$q_{i+1} = \frac{1}{2}\Delta(\kappa_{in,i+1}) \{\text{sign}(\beta)\sqrt{|\beta|} + 1\} \quad (3.41)$$

$$\beta = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{i+1} \quad (3.42)$$

Die Strukturgedächtnisfunktion Δ dient dazu, die Übergangsphase vom elastischen Bereich in den inelastischen Bereich zu modellieren. Bei einaxialen Versuchen bedeutet dies, daß beim Wiedereintreten in den plastischen Bereich ein gerundeter Übergang im $\sigma - \varepsilon$ Diagramm entsteht. Probleme zeigen sich bei nur kurzer Entlastung in den inelastischen Bereich. Für diese Fälle muß die Entwicklungsgleichung (3.39) um einen Term erweitert werden [50].

Die Ergebnisse der Anpassung sind einem DFG-Abschlußbericht [13] entnommen:

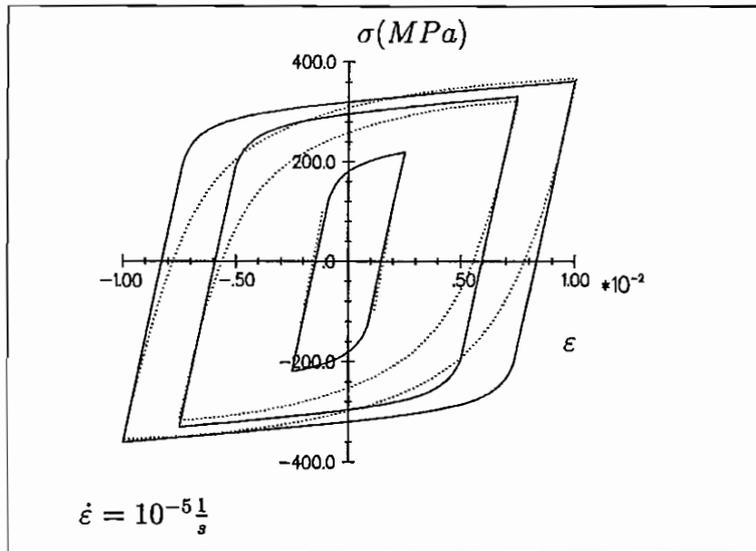


Abb. 3.5 : Sättigungszyklus (Experiment: \cdots , Rechnung: $-$)

Die Grafik 3.5 zeigt einen qualitativ besseren Verlauf im Vergleich zu dem vorher vorgestellten Stoffgesetz. Der Übergang vom elastischen zum inelastischen Bereich ist hierbei deutlich weicher, ohne daß die Qualität der Anpassung an die Sättigungsspannung beeinträchtigt wird (Abb.3.6).

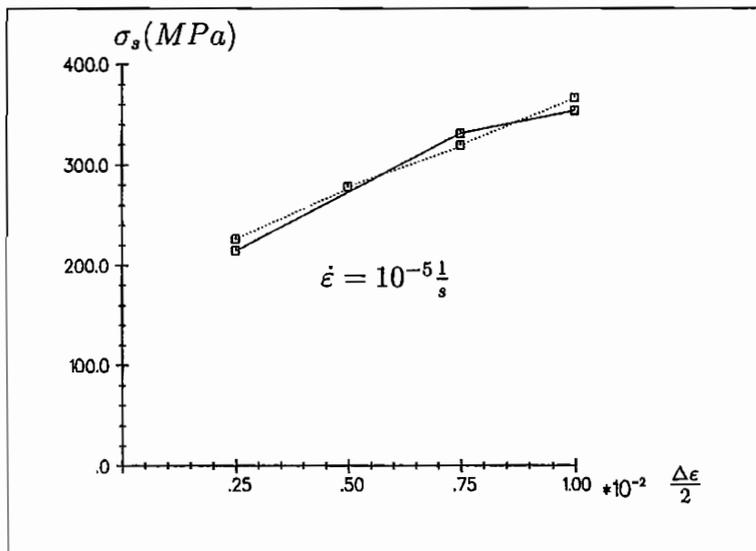


Abb. 3.6 : Sättigungskurve (Experiment: \cdots , Rechnung: $-$)

Die in der Tabelle 3.2.3 angegebene Entwicklung der Zyklenzahl bis zum Erreichen des Sättigungszustandes ist allerdings bei diesem Stoffgesetz als unzufriedenstellend zu bezeichnen, da keine konstante Anzahl erreicht wird. Zudem liegen die Werte bei größeren Dehnungsamplituden deutlich über den experimentellen Daten.

Zwei-Flächen-Modell

Durch die Einführung einer zweiten gedachten Fläche neben der Fließfläche kann eine bessere Beschreibung des Verhaltens bei zyklischen Versuchen erreicht werden. Grundlage einer solchen Erweiterung eines Einflächenmodells bildet der phänomenologische Sachverhalt, daß ein Material nach einer hinreichend großen Anzahl an Lastwechseln nicht weiter verfestigt, also einen Sättigungszustand erreicht. Führt man nun eine zweite Fläche ein, die diesen Grenzzustand beschreibt, so kann die eigentliche Entwicklung der Fließfläche durch die Annäherung an den Grenzzustand optimiert werden. Es ist naheliegend, eine solche Grenzfläche ähnlich der Fließfläche einzuführen. Demnach ist es denkbar, daß die Grenzfläche auch von einer kinematischen und einer isotropen Verfestigungsvariablen abhängt.

Die Entwicklung von derartigen Stoffgesetzen geht auf *Mróz* [52] zurück, der eine beliebige Anzahl an Hyperflächen im Spannungsraum einführte. Weite Verbreitung fanden danach die auf diesen Grundlagen beruhende Stoffgesetze von *Dafalias, Popov* [16, 17] und *Krieg* [41], die die ersten Zwei-Flächen-Modelle entwickelten. Sie benutzen für die Grenzfläche lineare isotrope und kinematische Verfestigungsregeln. In der weiteren Entwicklung wurden nicht-lineare Verfestigungen eingeführt und die Modelle um zusätzliche Flächen erweitert. Drei- oder Mehrflächenmodelle arbeiten mit Zwischenflächen zwischen Grenz- und Fließfläche, die eine genauere Beschreibung des Materialverhaltens bei nicht-radialen Problemen ermöglichen [78, 3]. *Pape* [57] und später *Kikillus* [35] führen ein Modell mit einer zusätzlichen Mikrofläche neben der Grenzfläche ein. Sie setzen das Modell erfolgreich zur Beschreibung von zweiaxialen Versuchen mit komplexen Lastpfaden ein. Eine weitere Möglichkeit der Berücksichtigung anderer Flächen besteht darin, Flächen im Dehnungsraum zu definieren. Diese Variante wurde schon im Abschnitt 3.2.3 bei den Stoffgesetzen von *Chaboche* erwähnt. Einige Materialmodelle mit nichtlinearen kinematischen Verfestigungsregeln lassen sich als Mehrflächenmodelle identifizieren.

Das hier vorgestellte Modell wurde von *Bruhns* und *Müller* [12] entwickelt. Es ist ein Zwei-Flächen-Modell mit nichtlinearer kinematischer und isotroper Verfestigung der Grenzfläche. Es basiert auf den schon erwähnten Arbeiten von *Dafalias* und *Popov*.

Die Gleichungen für die Entwicklung der Fließfläche sind formal identisch mit den bereits vorgestellten Modellen.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_e + \left\langle \frac{\dot{\sigma} \cdot n}{K} \right\rangle n \quad (3.43)$$

$$\dot{\xi} = c(\kappa, \delta) \dot{\epsilon}_i \quad (3.44)$$

$$\dot{\kappa} = (\sigma' - \xi) \cdot \dot{\epsilon}_i \quad (3.45)$$

mit

$$K = c(\kappa, \delta) + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \kappa} \quad (3.46)$$

$$F = (\sigma' - \xi) \cdot (\sigma' - \xi) - g(\kappa) = 0 \quad (3.47)$$

Die Grenzfläche soll in Analogie zur Fließfläche folgendermaßen beschrieben werden (die Daten unterscheiden sich durch $\tilde{\cdot}$ von den Daten der Fließfläche):

$$\dot{\tilde{\xi}} = \dot{\xi} - (c - \tilde{c}) \frac{p(\lambda - 1) n + (\tilde{\xi} - \xi) \frac{\dot{\sigma} \cdot n}{K}}{p(\lambda - 1) + (\tilde{\xi} - \xi) \cdot n} \quad (3.48)$$

$$\dot{\tilde{\kappa}} = \sqrt{\frac{g}{\tilde{g}}} \dot{\kappa} \quad (3.49)$$

mit

$$\tilde{F} = (\tilde{\sigma}' - \tilde{\xi}) \cdot (\tilde{\sigma}' - \tilde{\xi}) - \tilde{g}(\tilde{\kappa}) = 0 \quad (3.50)$$

Die Materialfunktion c wird von der Entfernung zwischen der Fließ- und der Grenzfläche abhängig gemacht. Somit gelingt die Einflußnahme auf die Fließfläche:

$$c(\kappa, \delta) = c_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \kappa} + w(\kappa, \delta) \quad (3.51)$$

mit

$$w(\delta, \delta_{in}) = \frac{c_3 \delta_{in}^q e^{-c_4 \sqrt{\tau}}}{\sqrt{\tau}} \quad (3.52)$$

$$\delta = \| \tilde{\sigma} - \sigma \| \quad (3.53)$$

Die Größe δ ist der Abstand von Fließ- zur Grenzfläche und δ_{in} ist der Anfangsabstand eines jeweiligen inelastischen Schrittes. Darüberhinaus wird angenommen, daß die Richtung der Normalenvektoren gleich ist. Mit dieser Annahme kann die Spannung der Grenzfläche $\tilde{\sigma}$ berechnet werden.

$$\tilde{\sigma}' = \lambda(\sigma' - \xi) + \tilde{\xi} \quad (3.54)$$

Die folgende Abbildung verdeutlicht den Sachverhalt für ein allgemeines Problem. Zur Vertiefung der Herleitung der Materialgleichungen oder des Problems des Berührens der Flächen, wird an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen [12].

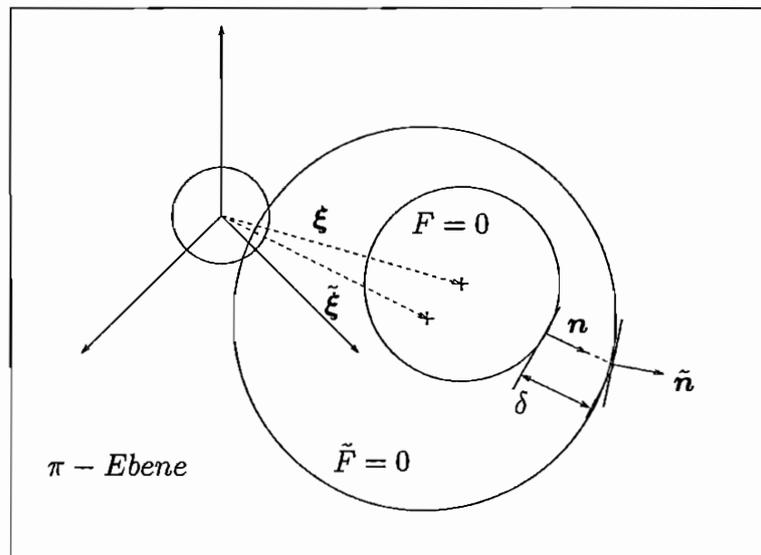


Abb. 3.7 : Fließ- und Grenzfläche

Die Funktion w kann als Linearitätsabweichung der kinematischen Verfestigung gedeutet werden. Diese Art der Formulierung eines Stoffgesetzes ist somit verwandt mit denen der nichtlinearen Verfestigungen. Die fehlenden Parameter der Gleichung 3.52 ergeben sich zu:

$$\tau = \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\delta_{in} - \delta}{\delta_{in}} \right) \right], \quad q = \frac{1}{m} \ln[(1 + \delta)\delta_{in}] \quad (3.55)$$

Die Größe τ führt zu Problemen zu Beginn eines inelastischen Lastschrittes. Da in dieser Belastungsphase δ gegen δ_{in} strebt, wird w in Gleichung (3.52) sehr groß. Dies muß bei der Programmierung berücksichtigt werden.

Die Materialfunktionen für die isotrope Verfestigung haben die gleiche Form:

$$g(\kappa) = g_0 + \frac{2c_0\kappa}{c_1\kappa + c_2}, \quad \tilde{g}(\tilde{\kappa}) = \tilde{g}_0 + \frac{2c_0\tilde{\kappa}}{c_5\tilde{\kappa} + c_6} \quad (3.56)$$

Zusätzlich werden zur besseren Übersicht noch weitere Abkürzungen eingeführt:

$$p = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\xi}\|, \quad \lambda = \sqrt{\frac{g}{\tilde{g}}} \quad (3.57)$$

$$\tilde{c}(\kappa) = c_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \kappa} \quad (3.58)$$

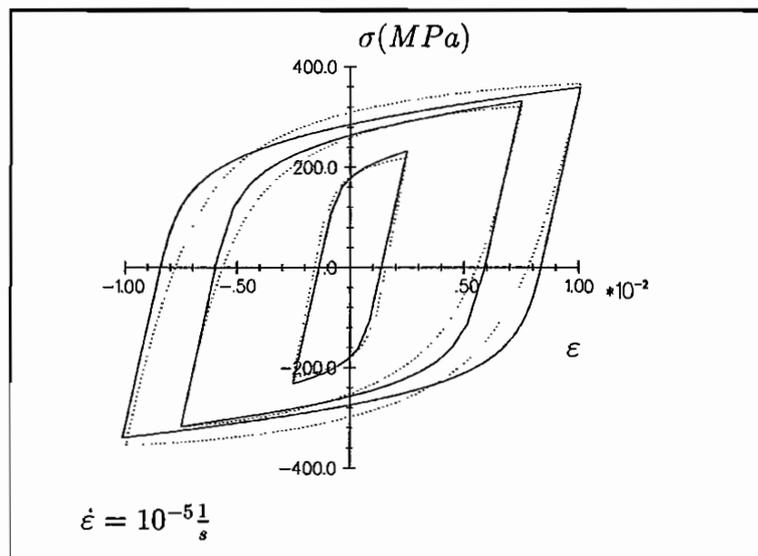


Abb. 3.8 : Sättigungszyklus (Experiment: \cdots , Rechnung: $—$)

Das Resultat der aufwendigeren Formulierung des Stoffgesetzes zeigt sich in den Abbildungen 3.8 und 3.9. Die Form der Sättigungszyklen im Spannungs-Dehnungsdiagramm ist deutlich verbessert gegenüber den vorher dargestellten Modellen. Die Optimierung der Parameter führt bezüglich der Sättigungsspannung nach Abbildung 3.9 ebenfalls zu zufriedenstellenden Ergebnissen.

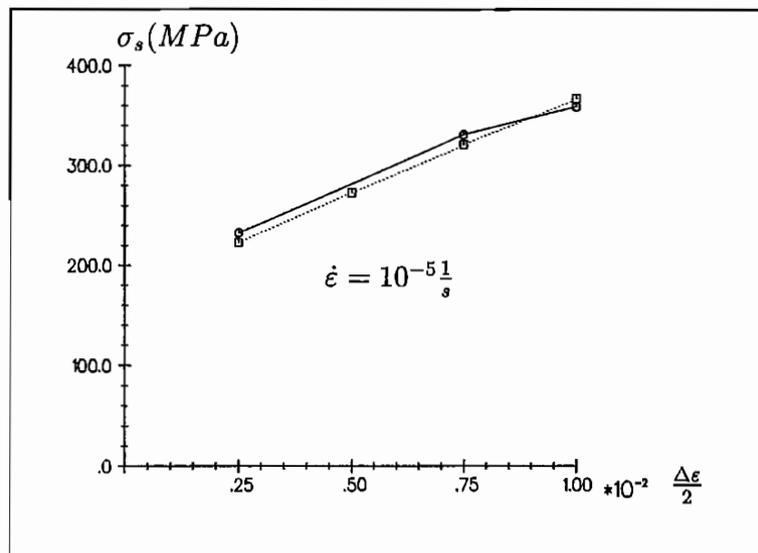


Abb. 3.9 : Sättigungskurve (Experiment: \cdots , Rechnung: $—$)

Neben der besseren Simulation des Verlaufes der Spannungs-Dehnungs-Kurven erreicht das Modell die Saturationspunkte nach einer geringeren Zyklenzahl als bei den anderen Modellen. Die Anzahl liegt zwar nach wie vor über den experimentellen Werten, ist aber fast konstant für verschiedene Dehnungsschwingbreiten (siehe Kapitel 3.2.3).

Für die angestrebte Kombination mit einem viskoplastischen Modell ist das Zwei-Flächen-Modell ausgewählt worden. Einige Verifikationsrechnungen folgen deswegen im Kapitel 3.3.5.

3.3 Viskoplastische Modelle

3.3.1 Einleitung

Wie die experimentellen Ergebnisse dieser Arbeit zeigen, weist das Material ein geschwindigkeitsabhängiges Deformationsverhalten auf. Dies müssen auch die mathematischen Modelle zur Simulation des Verhaltens nachbilden, so daß die vorgestellten plastischen Basismodelle entsprechend erweitert oder komplett neue Theorien entwickelt werden müssen. Eine Auswahl von Modellen zur Beschreibung von geschwindigkeitsabhängigen Phänomenen werden von *Rott* in [69] vorgestellt.

Zur besseren Einführung in die Problematik wird zunächst allerdings ein Überspannungsmodell exemplarisch vorgestellt. Es folgt eine Erläuterung des Modells von *Rott* und anschließend die aus den experimentellen Beobachtungen abgeleiteten Änderungen an diesem Modell.

3.3.2 IA-Modell

Allgemeines

Als typisches Beispiel eines Überspannungsmodells soll das IA-Modell vorgestellt werden, dessen plastische Variante bereits im Kapitel 3.2.3 erläutert worden ist. Die Grundgedanken derartiger Materialmodelle bestehen darin, die Spannung in zwei Anteile aufzuspalten:

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.59)$$

Hierbei bezeichnet $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ die statische Gleichgewichtsspannung, die der Fließbedingung und der Normalenregel des plastischen Basismodells gehorcht:

$$\bar{F} = f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}' - \boldsymbol{\xi}) - g(\kappa) = (\bar{\boldsymbol{\sigma}}' - \boldsymbol{\xi}) \cdot (\bar{\boldsymbol{\sigma}}' - \boldsymbol{\xi}) - g(\kappa) = 0 \quad (3.60)$$

$$\dot{\epsilon}_i = \langle \lambda \bar{\mathbf{n}} \rangle = \left\langle \lambda \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}}{\left\| \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right\|} \right\rangle \quad (3.61)$$

Die andere Komponente $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$ bestimmt den Abstand zu der tatsächlich anliegenden Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ und wird als Überspannung bezeichnet. Diese Theorien gehen auf *Perzyna* [59] zurück. Da $\boldsymbol{\sigma}$ außerhalb der Fließfläche liegt, kann die Fließbedingung nicht erfüllt werden:

$$F = f(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\xi}) - g(\kappa) = (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\xi}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\xi}) - g(\kappa) > 0. \quad (3.62)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \langle\langle \Phi \mathbf{n} \rangle\rangle = \langle\langle \Phi \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \rangle\rangle \quad (3.63)$$

Entsprechend ändert sich auch die Normalenregel und der Multiplikationsfaktor. Dieser kann jetzt nicht mehr über die Konsistenzbedingung bestimmt werden, so daß eine neue Materialfunktion definiert werden muß. Auch die Bedingung für das Auftreten inelastischer, in diesem Fall viskoplastischer Deformationen, muß geändert werden.

$$\langle\langle x \rangle\rangle = \begin{cases} x, & \text{wenn } \Lambda \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.64)$$

Hierbei ist Λ die mit dem Normalenvektor multiplizierte Überspannung, also der Abstand von der Fließfläche zum aktuellen Spannungspunkt. Zur Vereinfachung wird Λ in dieser Arbeit als Überspannung bezeichnet:

$$\Lambda = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}' - \bar{\boldsymbol{\sigma}}'), \quad (3.65)$$

oder ausmultipliziert und unter Verwendung der Fließfläche (3.62) folgt:

$$\Lambda = \sqrt{f} - \sqrt{g} = \|\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\xi}\| - \sqrt{g}. \quad (3.66)$$

Mit dem plastischen Modell aus Kapitel 3.2.3 entstehen die konstitutiven Gleichungen wie folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \langle\langle \Phi \rangle\rangle \mathbf{n} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= c(\kappa, \Delta) \langle\langle \Phi \rangle\rangle \mathbf{n} \\ \dot{\kappa} &= (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\xi}) \cdot \langle\langle \Phi \rangle\rangle \mathbf{n} \\ \dot{\Delta} &= p_i \sqrt{\frac{g_0}{g}} \dot{\kappa} \end{aligned}$$

Materialfunktionen

Die Funktion Φ muß als geschwindigkeitsabhängige Größe von der Überspannung abhängig sein. Die ersten Vorschläge für Φ gehen auf Modelle zur Beschreibung von sekundärem Kriechen auf *Andrade* zurück [56, 47]. Motiviert durch experimentelle Untersuchungen wählt *Norton* eine Form mit einer exponentiellen Abhängigkeit der Dehnungsgeschwindigkeit von der Spannung. Diese Gedanken werden auch bei der Formulierung der Überspannungsfunktion Φ aufgegriffen:

$$\Phi(\Lambda) = \gamma \frac{\Lambda}{E} \left(1 + \frac{\Lambda}{c_4} \right)^{c_5}, \quad (3.67)$$

wobei c_4, c_5 und γ noch näher zu bestimmende Parameter sind und E den Elastizitätsmodul bezeichnet. Andere Ansätze für Φ finden sich in [59]. Die Exponentialfunktionen (3.67) sind in der Lage, die Abhängigkeit der Spannung von der Geschwindigkeit oder Prozesse mit Haltezeit zu simulieren. Mit der Annahme der Richtungsgleichheit der Normalenvektoren n und \bar{n} lassen sich die inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten und damit alle anderen Größen (in diesem Fall ξ und κ in (3.32) und (3.33)) bestimmen.

Die Funktionen liefern gute Ergebnisse bei der Anpassung an monotone Zugversuche bei verschiedenen Geschwindigkeiten. Schwierigkeiten treten bei der Modellierung von Kriechversuchen auf, weil die Überspannung:

$$\dot{\Lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\sigma} - K \Phi, \quad (3.68)$$

im einaxialen Fall bei verschwindender Prozeßgeschwindigkeit rapide abfällt. Dies führt nach kurzer Zeit zu einer stationären Kriechdehnung und schränkt die Anpassung an derartige Versuche erheblich ein. Eine erweiterte Version spaltet aus diesem Grund die Überspannungsfunktion Φ in zwei Anteile auf [10]:

$$\Phi = \frac{1}{2} [(\Phi_1 - \Phi_2) \tanh(\alpha \dot{\Lambda}) + \Phi_1 + \Phi_2] \quad (3.69)$$

Hierbei wird sowohl für Φ_1 als auch für Φ_2 ein Ansatz der Form (3.67) gemacht. Die Abhängigkeit von $\dot{\Lambda}$ in (3.69) führt dazu, daß der Einfluß von Φ_1 bei monotonen Zugversuchen ($\dot{\Lambda} > 0$) stärker ist, bei Kriechversuchen ($\dot{\Lambda} < 0$) hingegen der Einfluß von Φ_2 überwiegt. Allerdings entsteht durch die Ratenabhängigkeit der Materialfunktionen das Problem, daß das zu lösende Differentialgleichungssystem nicht mehr nach den Größen

erster Ordnung aufzulösen ist. Dies verlangt eine iterative Lösung und ergibt einen Anstieg der Rechenzeit, was insbesondere bei Rechnungen mit der Finite-Elemente-Methode negative Auswirkungen hat.

Eine andere Möglichkeit, geschwindigkeitsabhängiges Verhalten zu berücksichtigen, ist die Einführung von Erholungstermen bei der Entwicklung der Verfestigungen, wie sie schon im Kapitel 3.2 angesprochen worden ist.

3.3.3 Modell von Rott

Allgemeines

Die viskoplastischen Modelle vom Überspannungstyp genügen in der Praxis zur Beschreibung einzelner Phänomene. Soll allerdings eine Vielzahl von Beobachtungen in die Modellformulierung eingebracht werden, reichen die einfachen Ansätze nicht mehr aus. Erweiterte Formen der Stoffgesetze führen zu anderen Problemen, wie z.B. die oben beschriebene Ratenabhängigkeit. Zum anderen bedarf die gegenseitige Beeinflussung der Materialparameter dieser Modelle einer langwierigen Anpassung oder macht diese gänzlich unmöglich. Ein einfaches Beispiel hierfür ist die gleichzeitige Anpassung an monotone Zugversuche mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten und an Kriechversuche. Die Einführung der Funktionen Φ_2 beim IA-Modell konnte letztlich keine befriedigenden Ergebnisse liefern. Umfangreiche Erfahrungen mit Materialanpassungen und die damit verbundenen Schwierigkeiten veranlaßten Rott, ein neues Stoffgesetz zu formulieren. Dazu spaltet er die inelastischen Verzerrungsraten in zwei weitere Komponenten auf:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i &= \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{pl} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_v \\ & &= \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e + \langle \lambda \mathbf{n} \rangle + \langle\langle \Phi \mathbf{n} \rangle\rangle\end{aligned}$$

Die erste Komponente geht im Grenzfall quasistatischer Prozeßgeschwindigkeit in die plastische Dehnungsrate über und die zweite Komponente verschwindet dann vollständig. Die Entwicklungsgleichungen des plastischem Basismodells für die internen Variablen zur Beschreibung der ratenunabhängigen Phänomene können beibehalten werden. Hinzu kommt der viskose Anteil, der mit einem Überspannungsmodell beschrieben wird. Das entstehende Problem besteht darin, daß die Gleichgewichtsspannung $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ nicht mehr aus der Fließbedingung zu bestimmen ist. Für sie muß eine weitere Evolutionsgleichung angegeben werden. Pitzer macht in [62] zunächst folgenden Ansatz:

$$\dot{\sigma}' = \langle A \dot{\sigma}' + B (\sigma' - \bar{\sigma}') \rangle \quad (3.70)$$

Der erste Teil soll bei reinen Belastungsprozessen überwiegen. Bei Kriechprozessen mit $\dot{\sigma} = 0$ ist ausschließlich der zweite Term für die Entwicklung der Gleichgewichtsspannung verantwortlich und ist dort geschwindigkeits- oder zeitabhängig. Dieser scheinbare Widerspruch ist anhand der Grafik 3.10 erklärbar.

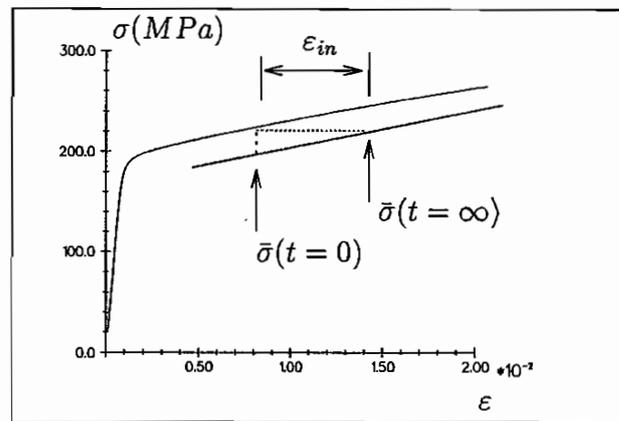


Abb. 3.10 : Entwicklung der Gleichgewichtsspannung im Kriechversuch

Die Gleichgewichtsspannung muß im Kriechversuch weiter anwachsen und mit ihr auch die internen Variablen, da auch die inelastische Arbeit ansteigt. Die „Gleichgewichts“-Spannung ist also nicht gleichzusetzen mit einer geschwindigkeitsunabhängigen Spannung. Auch für Belastungsprozesse mit einer von Null verschiedenen Prozeßgeschwindigkeit trifft dies zu, wie die spätere Angabe der Funktion A zeigen wird.

Probleme bereitet allerdings die Nebenbedingung $\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n} > 0$ in Gleichung (3.6). Wird der Multiplikationsfaktor λ über die Konsistenzbedingung (3.9) bestimmt:

$$\lambda = \left\langle \frac{A}{K} \dot{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{B}{K} \Lambda \right\rangle, \quad (3.71)$$

und dort $\dot{\sigma}$ durch die Entwicklungsgleichung (3.70) ersetzt, läßt sich $\dot{\sigma}$ in der Bedingung mit Hilfe der Zerlegung der Verzerrungsraten ersetzen:

$$\frac{1}{\frac{1}{2G} + \left\langle \frac{A}{K} \right\rangle} \left\{ \dot{\epsilon} \cdot \mathbf{n} - \left\langle \frac{B}{K} (\sigma' - \bar{\sigma}') \cdot \mathbf{n} \right\rangle - \langle\langle \Phi \rangle\rangle \right\} > 0 \quad (3.72)$$

Diese Bedingung ist nicht mehr erfüllt, wenn der Klammerausdruck negativ wird. Tritt dieser Fall ein, so entsteht folgende Zwangsbedingung:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} \cdot \mathbf{n} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2G} \{ \dot{\epsilon} \cdot \mathbf{n} - \langle\langle \Phi \rangle\rangle \} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \dot{\epsilon} \cdot \mathbf{n} &\leq \langle\langle \Phi \rangle\rangle \end{aligned}$$

Für einen Prozeß mit einer positiven Dehnungsrate kann bei entsprechender Wahl von Φ durch diese Bedingung eine negative Spannungsrate gefordert werden. Infolge dieser Einschränkung sind nicht alle dehnungsgesteuerten Versuche eindeutig.

Aus diesem Grund wird die Entwicklungsgleichung von Rott in [69] entsprechend modifiziert:

$$\dot{\sigma}' = \langle A \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} + \langle\langle B (\sigma' - \bar{\sigma}') \rangle\rangle + \frac{\|\bar{\sigma}' - \xi\|}{\|\sigma' - \xi\|} (\sigma' - \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}) \quad (3.73)$$

Durch die Erweiterung der Gültigkeit der Funktion B auf Prozesse, die trotz nichterfüllter Belastungsbedingung sich nicht im elastischen Bereich befinden, entfällt die Zwangsbedingung. Der Proportionalitätsfaktor ändert sich entsprechend:

$$\lambda = \left\langle \frac{A}{K} \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \right\rangle + \langle\langle \frac{B}{K} \Lambda \rangle\rangle \quad (3.74)$$

Der Vorteil einer solchen Formulierung eines Stoffgesetzes zeigt sich bei der Entwicklung der Überspannung im Kriechversuch. Diese läßt sich mit Gleichung (3.65) durch Differentiation herleiten:

$$\dot{\Lambda} = \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} (1 - \langle A \rangle) - \langle\langle B \Lambda \rangle\rangle \quad (3.75)$$

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\Lambda} = -B \Lambda \quad (3.76)$$

Die Funktion B modelliert bei Kriechprozessen die Abnahme der Überspannung, so daß eine getrennte Anpassung möglich ist. Der Vorteil gegenüber den herkömmlichen Überspannungsmodellen besteht darin, daß nicht ein und dieselbe Funktion Φ für Belastungs- und Entlastungsprozesse verantwortlich ist.

Zusammenfassend entsteht folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\sigma}} &= \langle A \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} + \langle\langle B (\sigma' - \bar{\sigma}') \rangle\rangle + \frac{\|\bar{\sigma}' - \xi\|}{\|\sigma' - \xi\|} (\dot{\sigma}' - \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}) \\
\dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}_e + \lambda \mathbf{n} + \langle\langle \Phi \rangle\rangle \mathbf{n} \\
\dot{\xi} &= c(\kappa, \Delta) \lambda \mathbf{n} \\
\dot{\kappa} &= (\sigma' - \xi) \cdot \lambda \mathbf{n} \\
\dot{\Delta} &= p_i \sqrt{\frac{g_0}{g}} \dot{\kappa} + q_i
\end{aligned}$$

Das zentrale Problem des Materialgesetzes besteht darin, daß die Spannungs-Dehnungs-Beziehung nicht analytisch invertierbar ist. Bei dehnungsgesteuerten Prozessen ist man demnach auf iterative Lösungen angewiesen. Zudem stellt sich die Frage, ob die Lösung der Gleichungen eindeutig ist. *Rott* beschäftigte sich intensiv mit diesen Problemen und berücksichtigte dies bei der Herleitung der Materialfunktion.

Materialfunktionen

Neben den im Kapitel 3.2.3 vorgestellten Materialfunktionen für die Verfestigungsanteile des Stoffgesetzes treten die Funktionen A und B zur Beschreibung der Gleichgewichtsspannung in den Vordergrund.

Die Bestimmung der Funktion A geschieht mit monotonen Zugversuchen, wobei zunächst die Anteile von B und Φ vernachlässigt werden, da ihr Einfluß bei diesen Prozessen gering ist. *Rott* macht einen Produktansatz für A der Form:

$$A = a_1(\Lambda) \cdot a_2(v). \quad (3.77)$$

Die von der Überspannung Λ abhängige Funktion a_1 läßt sich mit einer hyperbolischen Tangensfunktion darstellen:

$$a_1(\Lambda) = \frac{1-G}{\tanh c - 1} \{ \tanh(d\Lambda + c) - 1 \} + G \quad (3.78)$$

In der Formel sind c und d Parameter und G ein Grenzwert für eine unendlich große Verformungsgeschwindigkeit.

Die Funktion a_2 ist abhängig von einer neuen Größe, der Prozeßgeschwindigkeit. Sie kann z.B. die Norm der Spannungsgeschwindigkeiten sein und läßt eine Beeinflussung der skalaren Materialfunktion durch die Geschwindigkeiten zu.

$$v = \dot{\sigma} \cdot n \quad (3.79)$$

Diehl und Fornefeld [21, 29] führen ähnliche Variablen ein und beschreiben damit das Verhältnis von den beweglichen zu den gesamten Versetzungen.

Für die davon abhängige Funktion wird ein Exponentialansatz gemacht, der alle Nebenbedingungen erfüllt:

$$a_2(v) = \begin{cases} c_1 e^{a_1 v^{b_1}} + c_2 e^{a_2 v^{b_2}}, & \text{wenn } v_0 < v < v_\infty \\ 1, & \text{wenn } v \leq v_0 \end{cases} \quad (3.80)$$

Dabei ist v_0 die Geschwindigkeit, für die quasistatisches Verhalten angenommen werden kann, und v_∞ die maximal erreichbare Geschwindigkeit. a_1 und a_2 sind in dieser Gleichung feste Parameter und sind unabhängig von den Materialfunktionen a_1 und a_2 aus den Gleichungen (3.78) und (3.80).

Die Funktion Φ wird analog zum Überspannungsmodell als eine von der Überspannung abhängige Exponentialfunktion angesetzt:

$$\Phi(\Lambda) = e^{d_1(\Lambda/\tilde{\Lambda})^{d_2}} - 1. \quad (3.81)$$

Dabei dient $\tilde{\Lambda}$ der Normierung von Λ und wird mit 1 MPa festgelegt.

Für B wird eine Funktion gewählt, deren Einfluß nach dem Erreichen eines stationären Wertes $\sqrt{f^*}$ für die Verfestigung gänzlich verschwindet:

$$B(\sqrt{f}, \|\dot{\sigma}\|) = \begin{cases} d_3 \tanh(d_4 \sqrt{f} + d_5) + d_6, & \text{wenn } \sqrt{f} \geq \sqrt{f^*} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.82)$$

Diese Funktion ist abhängig von der Verfestigung des Materials (\sqrt{f}) und der anliegenden Spannung ($\|\dot{\sigma}\|$), die über Polynomansätze für d_3 bis d_6 eingeht. Die letztere Größe führt beim Halten der Spannung im Nulldurchgang oder ähnlichen Prozessen zu Schwierigkeiten, da dann B verschwindet oder einen für alle Prozesse konstanten Wert annimmt. Durch die Polynomansätze für die Parameter erhöht sich die Anzahl der Kenngrößen für B auf zwölf.

3.3.4 Änderung am Modell von Rott

Allgemeines

Der Vorteil des von Rott vorgeschlagenen Stoffgesetzes besteht in der weitgehenden Trennung der Anpassung von plastischen und viskoplastischen Phänomenen. Die Kombination aus einem plastischen Basismodell und einem Überspannungsmodell erweist sich als sehr praktikabel, da die Vorteile beider Modellgruppen ausgenutzt werden können. In der Praxis ist die Bestimmung der Materialparameter allerdings sehr mühsam, da viele Parameter anzupassen sind. Trotz der Aufspaltung des Modells und der damit verbundenen getrennten Anpassung ist die Ermittlung der Materialfunktionen A und B unübersichtlich. Zum anderen führt die Verwendung einer von der Spannung abhängigen Prozeßgeschwindigkeit bei den FE-Rechnungen zu längeren Rechenzeiten als bei anderen Stoffgesetzen. Wegen dieser Schwierigkeiten des Materialsmodells erscheint eine Modifikation sinnvoll. Zusätzlich erlauben die experimentellen Untersuchungen eine differenziertere Beschreibung der Materialfunktionen. Die grundlegenden Annahmen des Materialgesetzes werden übernommen und nur an einer Stelle geringfügig erweitert:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\sigma}} &= \langle A \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} + \langle\langle B (\sigma' - \bar{\sigma}') \rangle\rangle \\ \dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}_e + \frac{\dot{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n}}{K} + \langle\langle \Phi \rangle\rangle \mathbf{n}\end{aligned}$$

Der Unterschied besteht in der Einschränkung der zweiten Nebenbedingung. Die erste Nebenbedingung wird unverändert dem plastischen Basismodell entnommen, und die zweite beschränkt jetzt den Einfluß von B und Φ a priori auf reine Entlastungsprozesse.

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x, & \text{wenn } F(\bar{\sigma}) = 0 \text{ und } \dot{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n} > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.83)$$

$$\langle\langle x \rangle\rangle = \begin{cases} x, & \text{wenn } F(\sigma) \geq 0 \text{ und } \dot{\sigma} \cdot \mathbf{n} \leq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.84)$$

Diese Nebenbedingungen wird auch von Rott vorgeschlagen, allerdings führt er sie zusätzlich ein und beschränkt ihre Anwendung auf die Funktion B .

Für den einaxialen Fall reduziert sich das Gleichungssystem auf:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{2}{3} \left\langle \frac{A \dot{\sigma}}{K} \right\rangle + \frac{2}{3} \langle\langle \frac{B}{K} \rangle\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \langle\langle \Phi \rangle\rangle$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{2}{3} \dot{\sigma} (1 - A) + \langle\langle B \Lambda \rangle\rangle$$

Funktion A

Ausgangspunkt der Anpassung der Funktion A sind die monotonen Zugversuche bei verschiedenen Geschwindigkeiten. Da in der Formulierung des Stoffgesetzes die Überspannung für die Entwicklung der Zugversuche eine entscheidene Rolle spielt, soll aus den Experimenten eine möglichst genaue Näherung hierfür ermittelt werden. Dazu werden die Abstände zwischen den monotonen Zugversuchen (σ_i) und die als quasistatisch angenommene Kurve (σ_{st}) ermittelt, dessen Herleitung in Kapitel 2.4.4 erklärt wurde.

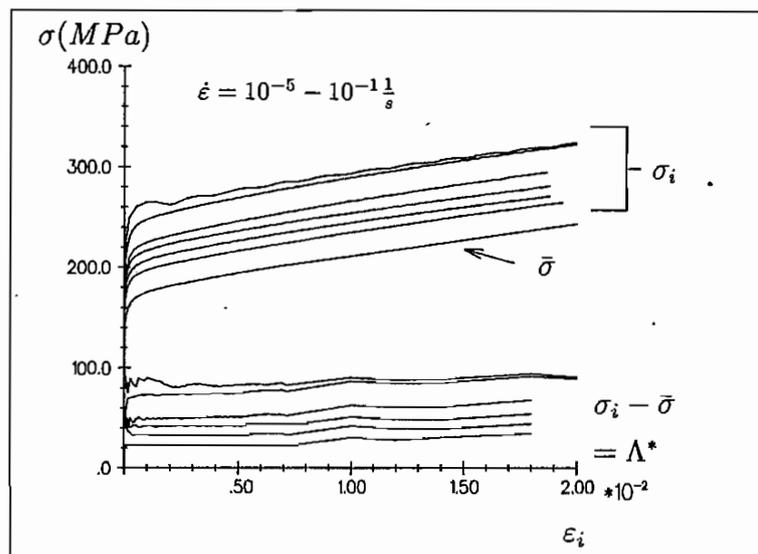


Abb. 3.11 : Differenz der monotonen Zugversuche

Um die Vergleichbarkeit der Kurven zu gewährleisten, werden die vertikalen Abstände der Spannungen bei identischen plastischen Dehnungen berechnet. Es lassen sich folgende Phänomene erkennen:

- unmittelbar nach Eintritt in den inelastischen Bereich ist eine Überspannung aufgebaut,

- danach bleibt der Abstand der Kurven und somit die Überspannung nahezu konstant.

Der Aufbau der Überspannung geschieht zu Beginn des Auftretens inelastischer Deformationen. In der nächsten Abbildung 3.12 ist deshalb dieser Bereich hervorgehoben.

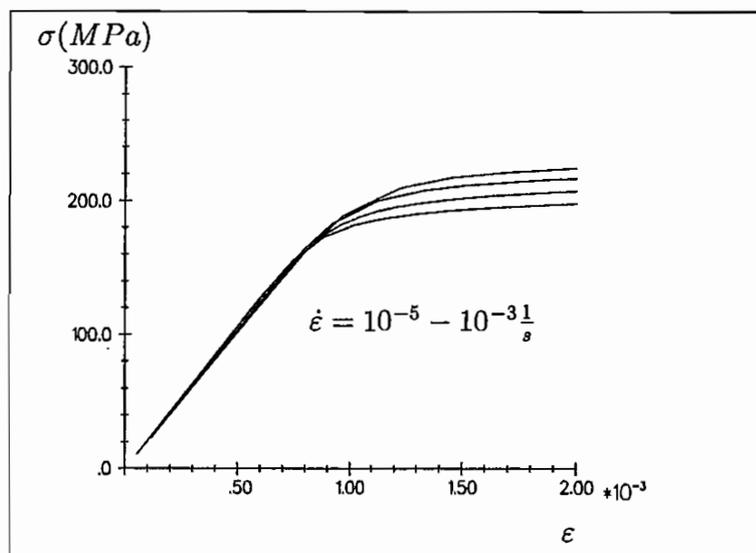


Abb. 3.12 : Anfangsbereich der monotonen Zugversuche

Die unterschiedliche Entwicklung der Kurven ist auf eine differierende Anfangssteigung zurückzuführen. Betrachtet man unter diesem Gesichtspunkt die Entwicklungsgleichung für die Überspannung und die Gleichgewichtsspannung im einaxialen Fall für reine Belastung,

$$\dot{\Lambda} = \frac{2}{3} \dot{\sigma} (1 - A), \quad (3.85)$$

$$\dot{\sigma} = \langle A \dot{\sigma} \rangle, \quad (3.86)$$

so folgt, daß A zu Beginn des inelastischem Bereiches kleiner als Eins und größer als Null sein muß. Damit der Aufbau der Überspannung möglichst rasch erfolgen kann, muß A nahe Null sein. Nach kurzer Zeit sollte A allerdings für **alle** Geschwindigkeiten den Wert Eins annehmen, damit die Überspannung nicht mehr zunimmt. Für die Form der Funktion bedeutet dies, daß die Funktion zu Beginn des inelastischen Prozesses den Wert Null oder einen Wert nahe Null haben muß. Sobald die von der Geschwindigkeit abhängige Überspannung aufgebaut ist, nimmt A den Wert Eins an. Deshalb wird für A eine

Funktion entwickelt, die im Gegensatz zur Annahme bei *Rott* nur von einer normierten Überspannung abhängig ist. Die normierte Überspannung Δ ist eine auf die experimentell ermittelte Überspannung bezogene dimensionslose Größe:

$$\Delta = \frac{\Lambda}{\Lambda^*} \quad (3.87)$$

Λ^* bezeichnet die experimentelle Überspannung, für die aufgrund des großen Geschwindigkeitsbereiches von drei Dekaden eine Exponentialfunktion gewählt wird:

$$\Lambda^* = l_1 (v + v_0)^{l_2} \quad (3.88)$$

Die Werte der Parameter sind dem Anhang zu entnehmen und direkt den Experimenten entnommen. v_0 ist die kleinste Geschwindigkeit, die aus mathematischen Gründen in Gleichung (3.87) eingeführt werden muß und auf $v_0 = 10^{-9} \frac{1}{s}$ festgelegt wird. Die folgende Grafik zeigt einen Vergleich mit der experimentellen Kurve:

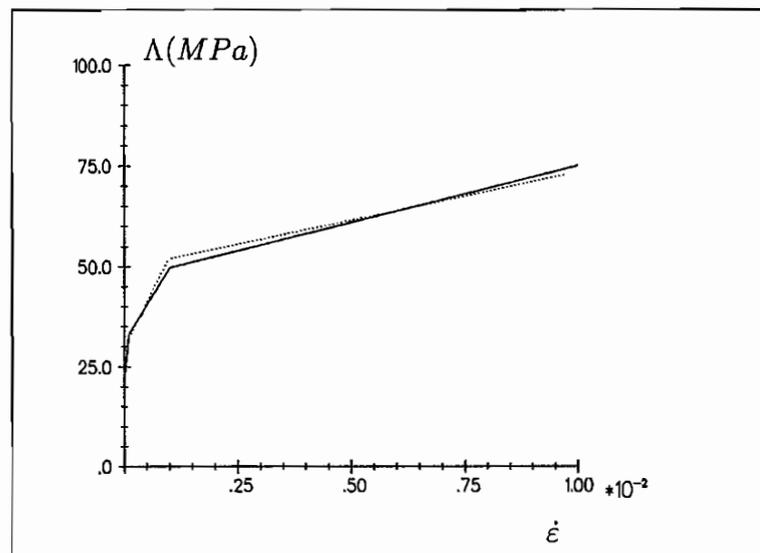


Abb. 3.13 : Funktion Λ^* (Experiment: ···, Rechnung: —)

Als Prozeßgeschwindigkeit wird eine an die Dehnungsgeschwindigkeit gekoppelte Größe verwendet, was bei der Anpassung an weggesteuerte Versuche zeitaufwendige Iterationen vermeidet.

$$v = |\dot{\epsilon} \cdot \mathbf{n}| \quad \text{oder einaxial} \quad v = \sqrt{\frac{2}{3}} |\dot{\epsilon}| \quad (3.89)$$

Die Funktion A wird mit einer hyperbolischen Tangensfunktion berechnet. Dieser Funktionstyp liefert hinreichend große Gradienten, um die extremen Sprünge zu Beginn des inelastischen Bereiches zu simulieren.

$$A = \frac{1}{2} \tanh [a_0 (\Delta - 1)] + a_1 \quad (3.90)$$

Diese Funktion nimmt einen Wert nahe Null an, solange die berechnete Überspannung kleiner als die experimentelle ist. Wird die experimentelle Überspannung erreicht oder überschritten wird $A \approx 1$ und die Überspannung wächst nach Gleichung (3.85) nicht weiter an. Diese Gleichungen zur Bestimmung von A führen allerdings dazu, daß bei verschwindender Prozeßgeschwindigkeit nach wie vor eine Überspannung aufgebaut wird, da Λ^* nie zu Null wird. Somit wird die plastische Dehnungsrate im Grenzbereich der quasistatischen Prozeßführung nicht geschwindigkeitsunabhängig, sondern erreicht diesen Zustand nur näherungsweise.

Die mit dieser Funktion berechneten monotonen Zugkurven stimmen mit den Versuchsergebnissen überein. Eine Nachoptimierung liefert nach kurzer Zeit eine über den gesamten Bereich zufriedenstellende Lösung (Abb. 3.14).

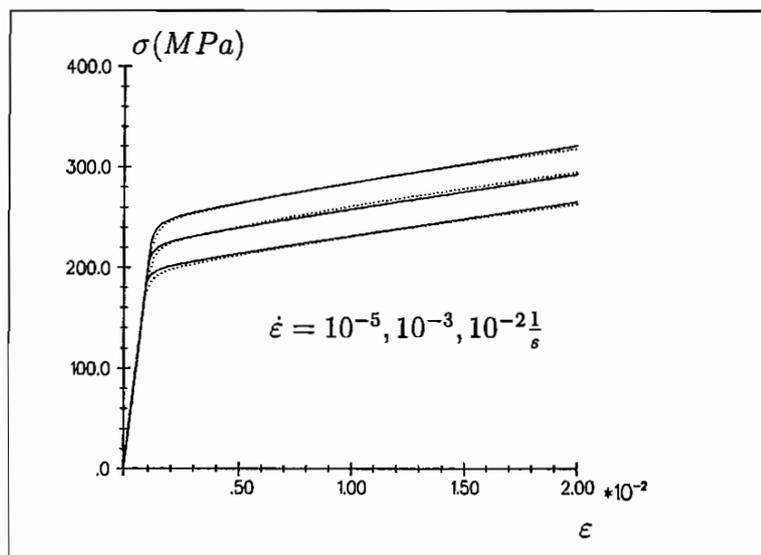


Abb. 3.14 : Zugversuche mit versch. Geschwindigkeiten (Experiment: \cdots , Rechnung: $—$)

Auffällig ist bei der Anpassung, daß neben der Endsteigung der Zugversuche auch die Anfangsbereiche nahezu übereinstimmen. Als plastisches Basismodell wird hierbei das im Kapitel 3.2.3 vorgestellte Zwei-Flächen-Modell gewählt.

Funktionen B und Φ

Diese Funktionen dienen der Anpassung an Versuche mit Haltezeiten, da der Einfluß von Φ auf monotone Zugversuche gering ist. Betrachtet man die Kriechkurven, die im experimentellen Teil gezeigt werden, so sind folgende für die Stoffgesetzentwicklung wichtige Beobachtungen zu machen:

- Kriechdehnungen sind abhängig vom Anfangsspannungsniveau
- Kriechdehnungen sind abhängig von der Geschwindigkeit des monotonen Versuches
- Die Kriechdehnungsrate nimmt nach kurzer Zeit stark ab

Die Beobachtung zeigt, daß die Entwicklung der Kriechdehnung (oder allgemeiner ein Prozeß mit Haltezeit) in zwei Abschnitte zu unterteilen ist. Zum einen die spontan nach dem Beginn der Haltezeit einsetzende Entwicklung und danach ein Abschnitt, in dem der Gradient stark abfällt. Betrachtet man unter diesen Gesichtspunkt das Stoffgesetz bei reiner Entlastung:

$$\dot{\Lambda} = -B \Lambda, \quad (3.91)$$

$$\dot{\epsilon}_i = \frac{2}{3} \frac{B}{K} \Lambda + \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi. \quad (3.92)$$

so bietet sich die Zuordnung der Materialfunktionen B und Φ zu den beiden Abschnitten an.

Die entscheidene Größe ist die Spannung, bei der der Kriechversuch angehalten wird. Bei monotonen, einaxialen Versuchen reduziert sich die Beschreibung auf die anliegende Spannung in Zugrichtung. Bei mehraxialen Versuchen oder beim Auftreten von Lastwechseln muß die diesen Effekt beschreibende Größe anders formuliert werden. Eine Möglichkeit der Beschreibung ist:

$$\sigma_r = \|\boldsymbol{\sigma}\| - \|\boldsymbol{\sigma}_{0_i}\| \quad \text{einaxial} \quad \sigma_r = \frac{2}{3} |\sigma - \sigma_{0_i}| \quad (3.93)$$

Die Größe σ_r ist bei monotonen Versuchen die Differenz zwischen der anliegenden Spannung und der Fließgrenze. Zu Beginn jedes inelastischen Schrittes muß der Subtrahend σ_{0_i} aus den Werten an der Fließgrenze neu berechnet werden. Der Einfluß der zunehmenden Verfestigung und der damit verbundenen Kriechneigung wird mit σ_{0_i} berücksichtigt.

Eine andere bestimmende Größe ist die Geschwindigkeit des monotonen Zugversuches und damit verbunden die Überspannung, die im Kriechversuch abgebaut wird.

Da die Überspannung nur sehr langsam abgebaut wird, ist es naheliegend, die Entwicklung der spontan auftretenden Dehnung mit der Funktion Φ zu modellieren. B obliegt dann der Abbau der Überspannung bzw. bei Kriechversuchen der Gestaltung der Dehnung nach längerer Haltezeit. Neben Kriechversuchen sind die gleichen Phänomene auch bei Relaxtionsversuchen oder generell bei Geschwindigkeitswechseln zu niedrigeren Geschwindigkeiten zu beobachten.

Der Einfluß von Φ muß sich aber bei Kriechversuchen nach kurzer Zeit abbauen. Da weder Λ noch eine andere Größe des Materialmodells geeignet ist, wird das Stoffgesetz um eine Evolutionsgleichung für Φ erweitert:

$$\dot{\Phi} = \langle\langle -p_1 \Phi + p_2 \sigma_r \rangle\rangle \quad (3.94)$$

Für $p_1 > 0$ nimmt die Funktion ab dem Beginn des Kriechens ab und erreicht im weiteren eine von der Ausgangsspannung abhängige Steigung $p_2 \sigma_r$. Der Anfangswert von Φ zu Beginn des Entlastungsprozesses wird während der Belastung aufgebaut und muß eine Funktion der Überspannung und der effektiven Spannung sein:

$$\Phi = \langle p_3 \sigma_r^{p_4} \Lambda \rangle \quad (3.95)$$

Nur mit einem derartigen Ansatz ist es möglich, die spontan auftretende Kriechdehnung zu modellieren und den Einfluß danach direkt abzubauen. Φ verliert mit dieser Entwicklung ihre ursprüngliche Aufgabe, die darin bestand, die Überspannung zu steuern. Diese Aufgabe hat die Funktion A übernommen, die somit zur Überspannungsfunktion wird. Somit ist die Beibehaltung der Bezeichnung für Φ etwas unglücklich.

Die Funktion B schließlich steuert den Abbau der Überspannung, wobei der Einfluß der anliegenden Spannung nicht unberücksichtigt bleiben darf, weil die Steigungen der Kriechdehnungen weiterhin vom Anfangsniveau abhängen. Ein einfacher Exponentialansatz genügt für diese Materialfunktion:

$$B = b_1 \Lambda^{b_2} \sigma_r^{b_3} \quad (3.96)$$

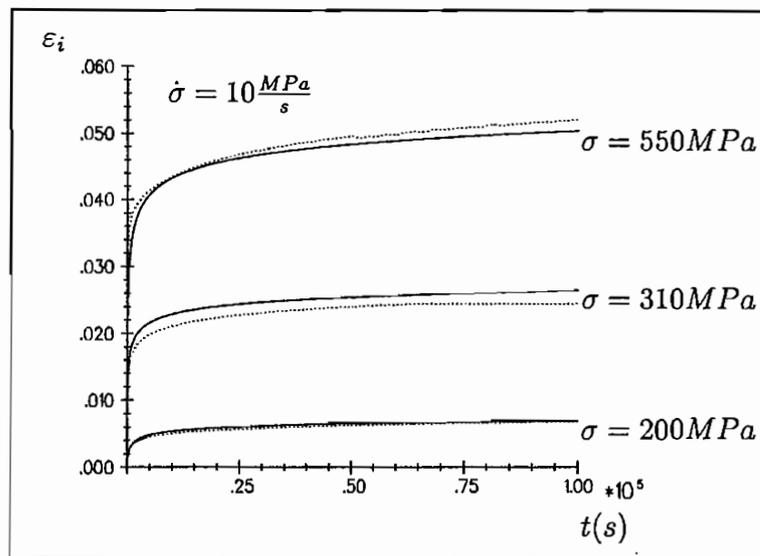


Abb. 3.15 : Kriechversuche (Experiment: \cdots , Rechnung: $—$)

Die Anpassung erfolgt gleichzeitig an drei Kriechversuche mit gleicher Geschwindigkeit im monotonen Zugversuch aber unterschiedlichem Spannungsniveau. Eine Übereinstimmung konnte sowohl im Anfangsbereich als auch zum Ende der Messung erreicht werden.

Zusammenfassung

Wählt man als plastisches Basismodell das in Kapitel 3.2.3 vorgestellte Zwei-Flächen-Modell, so entsteht folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\sigma}} &= \langle A \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} + \langle\langle B (\sigma' - \bar{\sigma}') \rangle\rangle \\
 \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}_e + \frac{\dot{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n}}{K} \mathbf{n} + \langle\langle \Phi_0 \rangle\rangle \mathbf{n} \\
 \dot{\Phi} &= \langle\langle -p_1 \Phi + p_2 \sigma_r \rangle\rangle \\
 \dot{\xi} &= c(\kappa, \delta) \frac{\dot{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n}}{K} \mathbf{n} \\
 \dot{\kappa} &= \sqrt{g} \frac{\dot{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n}}{K} \\
 \dot{\tilde{\xi}} &= \dot{\xi} - (c - \bar{c}) \frac{p(\lambda - 1) \mathbf{n} + (\tilde{\xi} - \xi) \frac{\dot{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n}}{K}}{p(\lambda - 1) + (\tilde{\xi} - \xi) \cdot \mathbf{n}} \\
 \dot{\bar{\kappa}} &= \sqrt{\frac{g}{\bar{g}}} \dot{\kappa}
 \end{aligned}$$

Die zugehörigen Nebenbedingungen lauten:

$$\begin{aligned}
 \langle x \rangle &= \begin{cases} x, & \text{wenn } F(\bar{\sigma}) = 0 \text{ und } \dot{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n} > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
 \langle\langle x \rangle\rangle &= \begin{cases} x, & \text{wenn } F(\sigma) \geq 0 \text{ und } \dot{\sigma} \cdot \mathbf{n} \leq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Die Materialfunktionen, deren Parameter im Anhang aufgeführt sind, lauten:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \tanh[a_0 (\Delta - 1)] + a_1 \\
 B &= b_1 \Lambda^{b_2} \sigma_r^{b_3} \\
 \Phi &= \langle p_3 \sigma_r^{p_4} \Lambda \rangle \\
 \sigma_r &= \|\sigma\| - \|\sigma_{0i}\| \\
 \Delta &= \frac{\lambda}{\Lambda^*} \quad \text{mit} \quad \Lambda^* = l_1 (v + v_0)^{l_2} \\
 v &= \sqrt{\varepsilon \cdot \mathbf{n}} \\
 K &= c(\kappa, \delta) + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \kappa} \\
 c &= c_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \kappa} + w = \frac{2}{3} \frac{E E_{t\infty}}{E - E_{t\infty}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w &= \frac{c_3 \delta_{in}^q e^{-c_4 \sqrt{\tau}}}{\sqrt{\tau}} \\
\delta &= \|\tilde{\sigma} - \sigma\| \\
\tau &= \tan \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\delta_{in} - \delta}{\delta_{in}} \right) \right] \\
q &= \frac{1}{m} \ln[(1 + \delta)\delta_{in}] \\
g &= g_0 + \frac{2c_0 \kappa}{c_1 \kappa + c_2} \quad \text{mit } g_0 = \frac{2}{3} \sigma_0^2 \\
\tilde{g} &= \tilde{g}_0 + \frac{2c_0 \tilde{\kappa}}{c_5 \tilde{\kappa} + c_6} \quad \text{mit } \tilde{g}_0 = \frac{2}{3} \tilde{\sigma}_0^2 \\
p &= \frac{1}{2} \|\sigma - \xi\| \\
\lambda &= \sqrt{\frac{g}{\tilde{g}}} \\
\tilde{c} &= c_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{\kappa}}
\end{aligned}$$

3.3.5 Verifikationsrechnungen

Neben den einfachen Versuchen, die zur Ermittlung der Parameter benötigt werden, sind für dieses Kapitel einige Nachrechnungen komplizierter Lastpfade durchgeführt worden. Dafür wird das in Abschnitt 3.3.4 beschriebene viskoplastische Modell verwendet. Als plastisches Basismodell dient hauptsächlich das in Abschnitt 3.2.3 vorgestellte Zwei-Flächen-Modell (*2FM*). Daneben sind einige Vergleichsrechnungen mit dem IA-Modell (*IA*) als plastisches Basismodell durchgeführt worden. Die Ordnungskriterien des experimentellen Teils werden in diesem Kapitel übernommen, damit direkte Vergleiche möglich sind. Einige Graphen zeigen die experimentellen Befunde und die Simulationsrechnung in einer Abbildung.

Monotone Versuche ohne Haltezeiten

Die erste Abbildung 3.16 zeigt monotone Zugversuche mit verschiedenen Geschwindigkeiten bis zwei Prozent Dehnung. Neben den schon vorgestellten Kurven mit den Dehnungsgeschwindigkeiten von $10^{-5}\frac{1}{s}$ bis $10^{-2}\frac{1}{s}$ ist zusätzlich ein Zugversuch mit $10^{-9}\frac{1}{s}$ eingezeichnet. Darüberhinaus ist die berechnete Gleichgewichtsspannung der monotonen Versuche und die experimentelle Näherung angegeben.

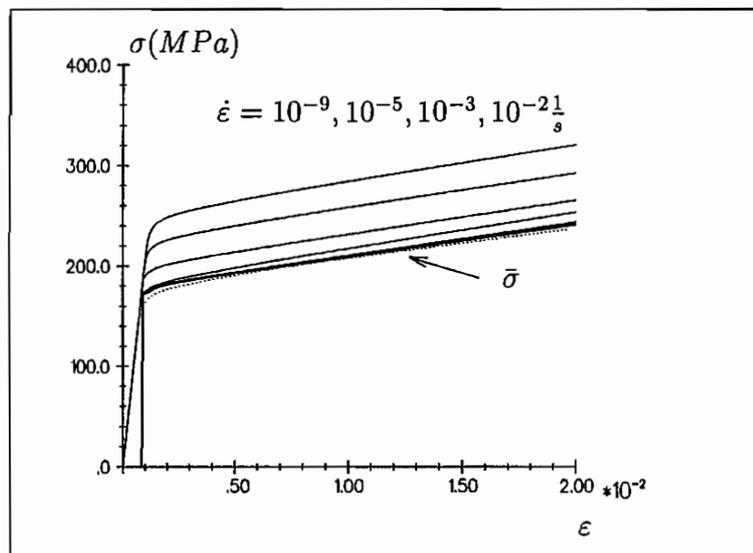


Abb. 3.16 : Monotone Zugversuche (*Experiment: ...*, *Rechnung: —*)/ *2FM*

Bei der Berechnung mit der kleinsten Geschwindigkeit treten numerische Probleme bei der Integration auf, was an der Endsteigung der Kurve zu erkennen ist. Grundsätzlich kon-

vergieren die Zugversuche für kleinere Geschwindigkeiten gegen die quasistatische Kurve und die Gleichgewichtsspannung ist während des Belastungsprozesses nahezu ratenunabhängig.

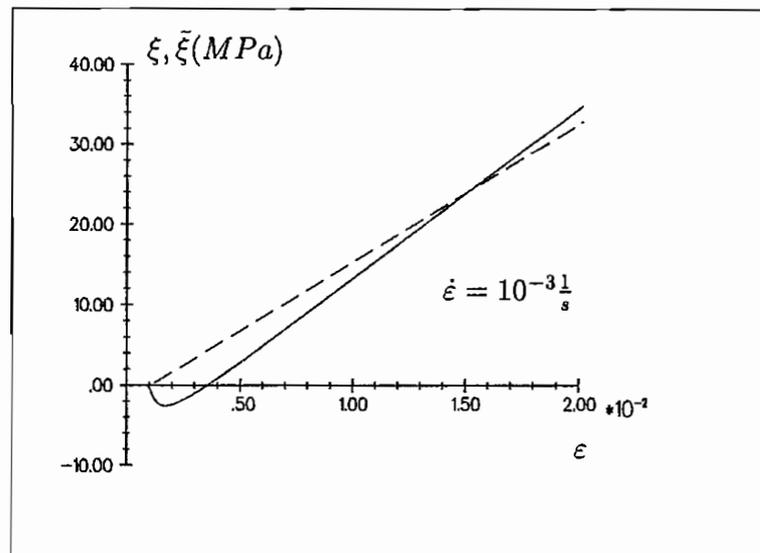


Abb. 3.17 : Kinematische Verfestigung ($\bar{\xi}$: --, ξ : -) / 2FM

Die Abbildung 3.17 zeigt die kinematischen Verfestigungen der Fließ- und der Grenzfläche. Auffällig ist die negative kinematische Verfestigung der Fließfläche zu Beginn des inelastischen Bereiches. Im weiteren Verlauf nähern sich die Kurven an.

Da das Modell von *Rott* auf spontane Geschwindigkeitsänderungen sehr träge reagiert, sind einige Versuche mit Geschwindigkeitswechseln im Lastpfad nachgerechnet worden. Die folgenden beiden Abbildungen zeigen einen montonen Zugversuch im Vergleich mit den experimentellen Daten für die zwei verschiedenen Basismodelle.

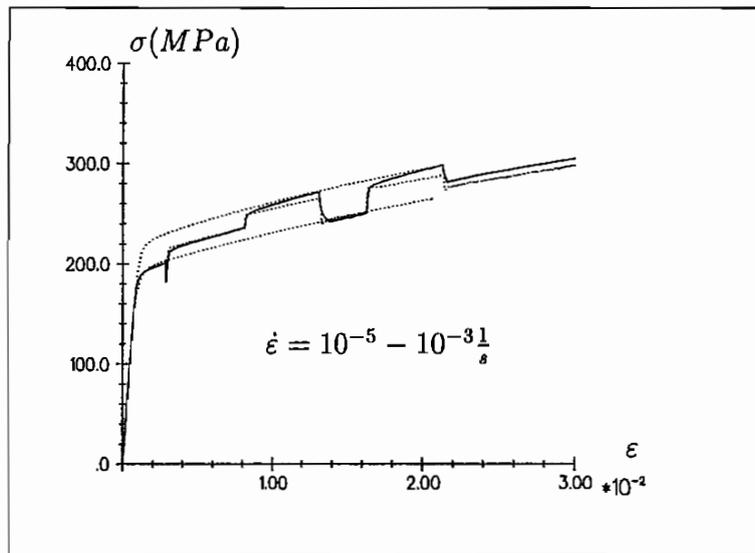


Abb. 3.18 : Geschwindigkeitswechsel (Experiment: \cdots , Rechnung: $---$)/ IA

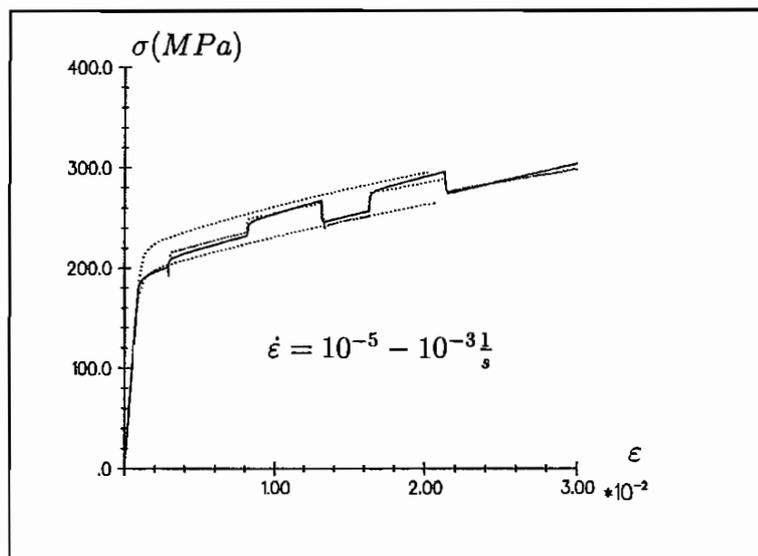


Abb. 3.19 : Geschwindigkeitswechsel (Experiment: \cdots , Rechnung: $---$)/ 2FM

Mit beiden plastischen Basismodellen können zufriedenstellende Ergebnisse ermittelt werden. Auffällig sind die unterschiedlichen Steigungen bei Be- und Entlastung, die aufgrund der Wahl der Nebenbedingungen entstehen. Dabei ist die Steigung bei einer Entlastung geringer als im Experiment, was bei Relaxationsversuchen, wie später noch gezeigt wird, allerdings nicht unproblematisch ist.

Nichtmonotone Versuche ohne Haltezeiten

Wie schon erwähnt, entstehen Schwierigkeiten bei dem IA-Modell, wenn kurze Entlastungen in einem monotonen Zugversuch eingebracht werden. Die Implementierung des Zwei-Flächen-Modells schafft Abhilfe, wie die Abbildung 3.20 verdeutlicht.

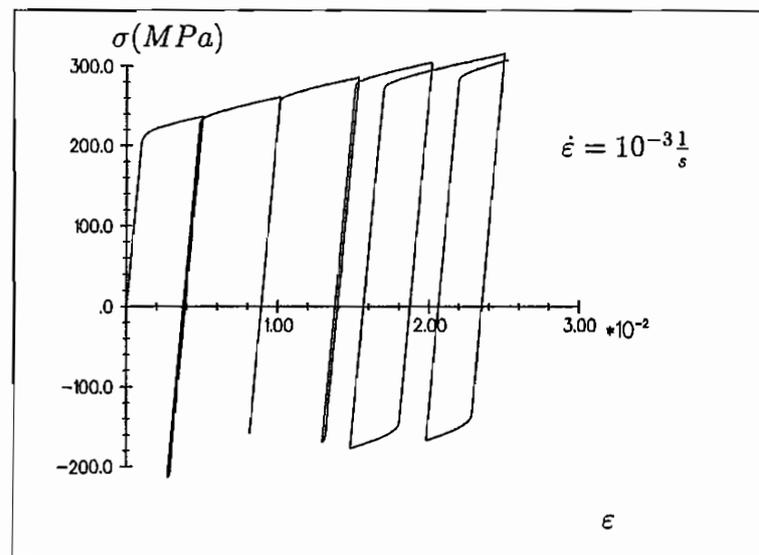
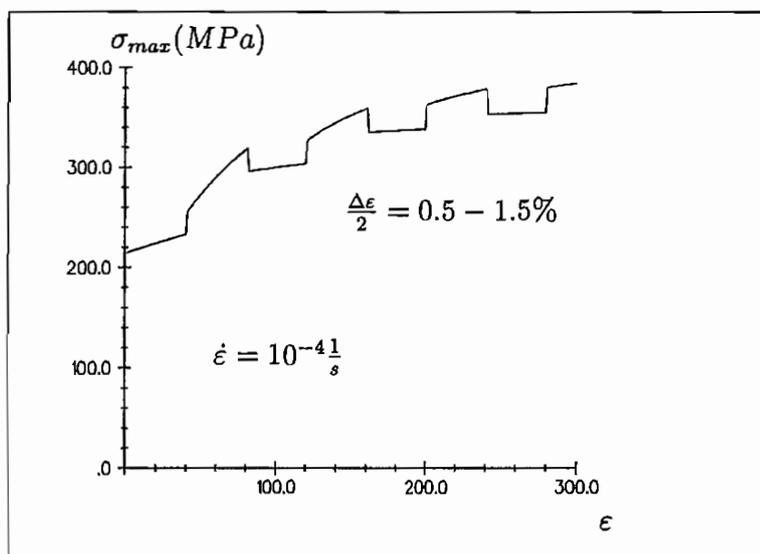


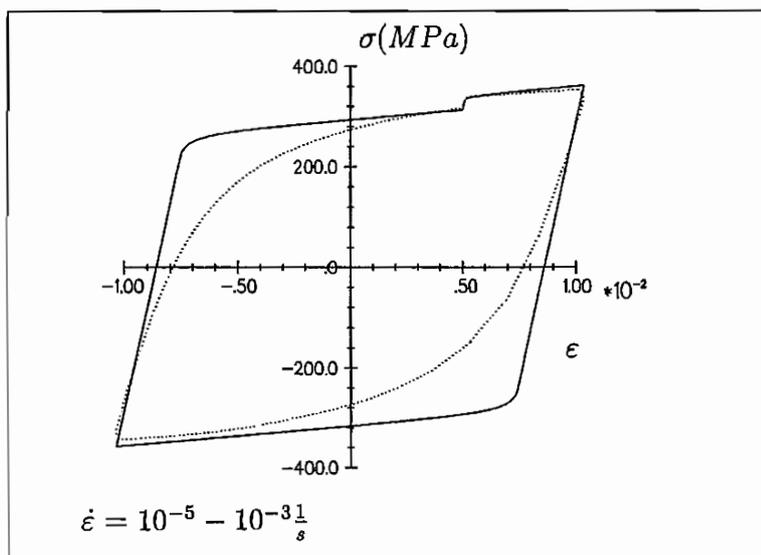
Abb. 3.20 : Zugversuch mit Zwischenentlastung / 2FM

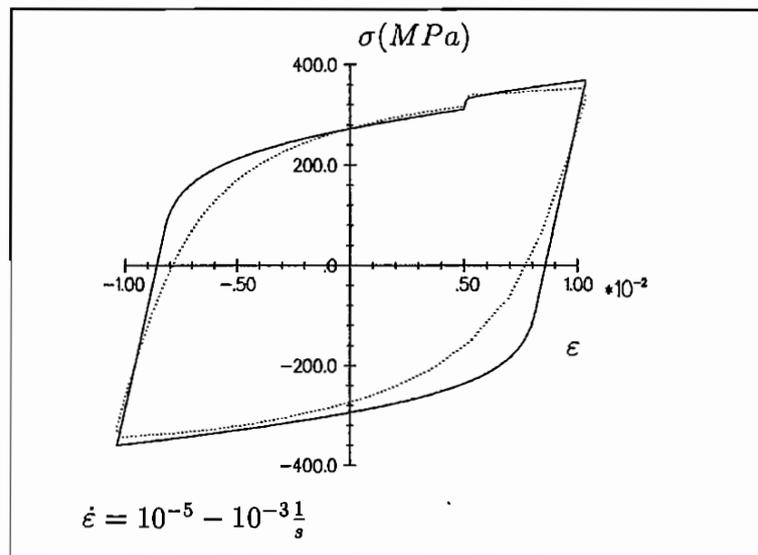
Die kurzen Zwischenentlastungen im ersten Teil des Versuches können nicht exakt nachgebildet werden, weil bei der Entlastung der plastische Druckbereich nicht oder zu wenig erreicht wird. Bei größeren Entlastungsbreiten wird allerdings die monotone Zugkurve nach der Wiederbelastung nicht direkt erreicht. Der Grund ist in der anfänglichen negativen kinematischen Verfestigung zu suchen, die eine Absinken der Hysterese bewirkt. Die Versuche mit Dehnungsbreitenwechseln sind nur sehr schwer miteinander zu vergleichen, da der Wechsel im Experiment nach einer vorgegebenen Zyklenzahl erfolgte. Aufgrund der großen Unterschiede bei der Entwicklung der Zyklenzahl während der Rechnung (vgl. Kapitel 3.2.3) sind Vergleiche somit nur bedingt möglich.

Abb. 3.21 : *Dehnungsbreitenwechsel / IA*

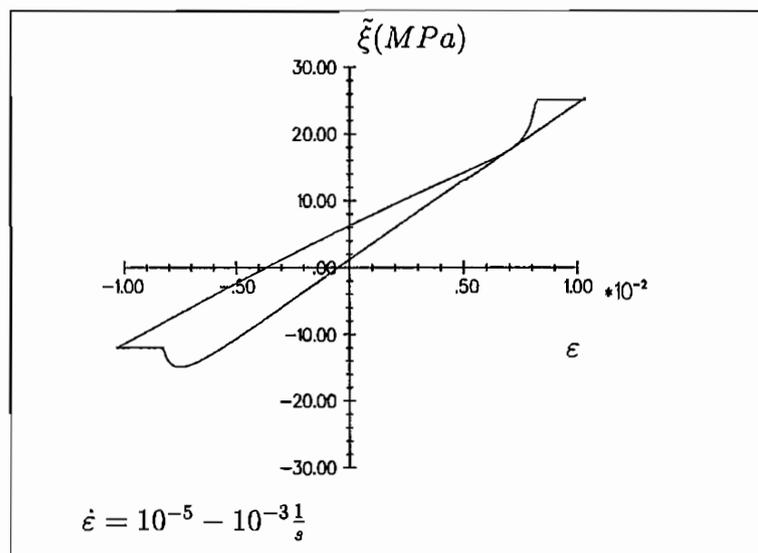
Da in den vorgestellten Stoffgesetzen keine Möglichkeit der Erholung des Materials bei zyklischen Versuchen eingebaut ist, beschränkt sich die Simulation auf die Entwicklung bis zum Maximum der Spannung.

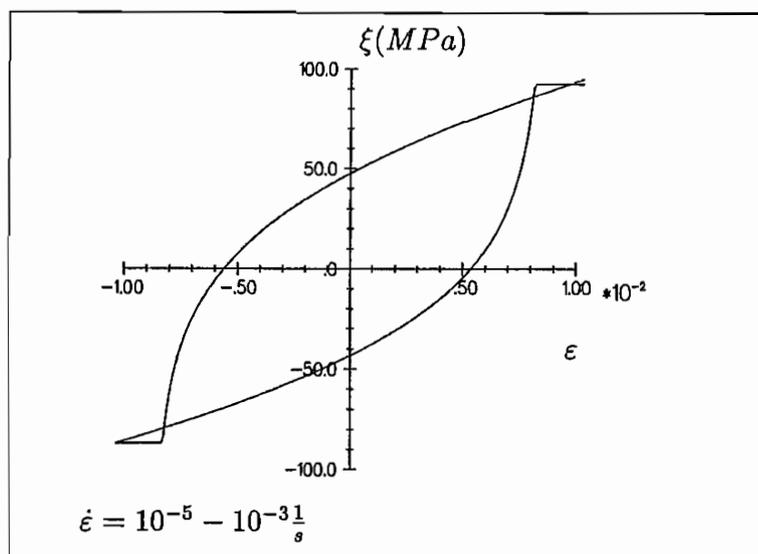
Den Einfluß eines Geschwindigkeitswechsels während des Versuches zeigen die Abbildungen 3.22 und 3.23. Dargestellt sind die Sättigungszyklen der Versuche im Vergleich mit den Experimenten.

Abb. 3.22 : *Letzter Zyklus (Experiment: ···, Rechnung: —) / IA*

Abb. 3.23 : *Letzter Zyklus (Experiment: ···, Rechnung: —) / 2FM*

Die Gegenüberstellung der einzelnen plastischen Basismodelle zeigt den Vorteil der verbesserten Form der Kurven beim Zwei-Flächen-Modell. Beide Modelle sind in der Lage, den Wechsel der Geschwindigkeit nachzubilden und dabei einen Verfestigungszustand gemäß dem Experiment zu erlangen. Für diese Versuche sind in den nächsten beiden Abbildungen die kinematischen Verfestigungen im gleichen Zustand abgebildet. Erwartungsgemäß stagniert die Translation der Grenzfläche.

Abb. 3.24 : *Letzter Zyklus / 2FM*

Abb. 3.25 : *Letzter Zyklus / 2FM*

Die erste Abbildung illustriert den Verlauf der kinematischen Verfestigung der Fließfläche, die Abbildung 3.25 die der Grenzfläche. Dabei ist analog zu den monotonen Zugversuchen im Druckbereich zunächst eine Entfestigung zu erkennen.

Monotone Versuche mit Haltezeiten

Die Anpassung der Kriechkurven erfolgt an Versuche bei unterschiedlichen Spannungsniveaus. Demgegenüber wird in der nächsten Abbildung 3.26 die Nachrechnung für verschiedene Geschwindigkeiten in der Vorgeschichte des Versuches dargestellt.

Es wird eine qualitative Übereinstimmung erreicht, die Werte weichen aber insbesondere bei höheren Geschwindigkeiten stärker voneinander ab. Dies ist darauf zurückzuführen, daß bei der Anpassung das Spannungsniveau stärker als die Geschwindigkeit bzw. die Überspannung betont worden ist. Da die Experimente zeigen, daß die Haltespannung größeren Einfluß als die Überspannung hat, ist die Vorgehensweise zu rechtfertigen.

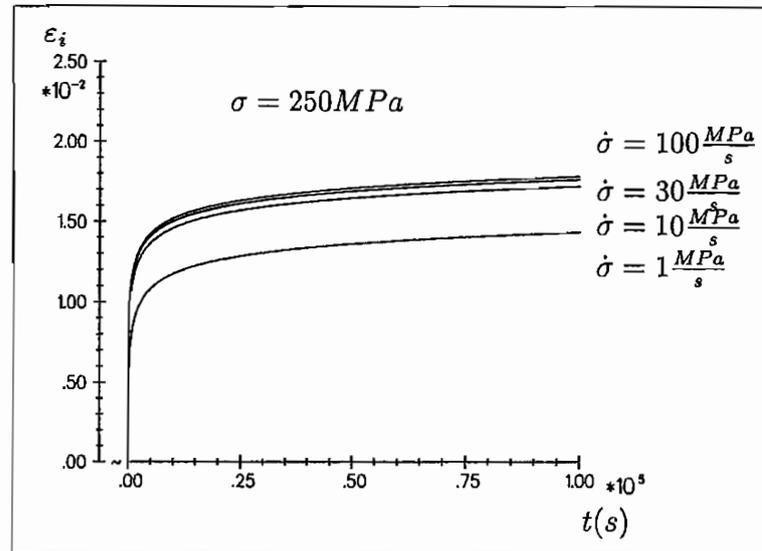


Abb. 3.26 : Variierende Geschwindigkeit / IA

Die Abbildung 3.27 illustriert einen Kriechversuch mit Lasterhöhung. Auf einen Vergleich mit der experimentellen Kurve wird verzichtet, da die Abweichungen erheblich sind. Die gemessenen Werte liegen nahezu doppelt so hoch wie die berechneten, was auf die Einschnürung und den anschließenden Bruch der Probe zurückzuführen ist.

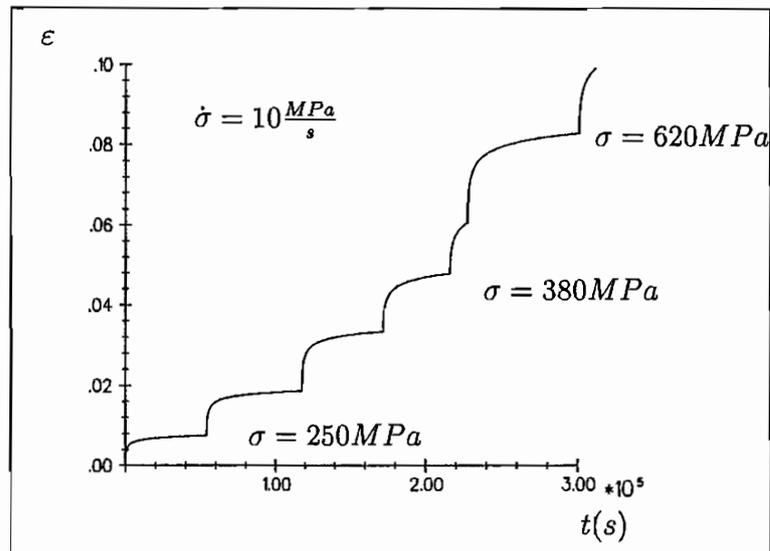


Abb. 3.27 : Lasterhöhung / IA

Neben den Kriechversuchen ist in der Abbildung 3.28 das Resultat von Relaxationsrechnungen abgebildet. Den spontanen Abfall der Spannung zu Beginn der Haltezeit kann die

Berechnung nicht wiedergeben. Allerdings stimmt die Größenordnung überein und das konstante Spannungsniveau wird aufgrund des Stoffgesetzaufbaus im weiteren Verlauf der Rechnung erreicht. Ähnliche Probleme treten ebenfalls bei den Geschwindigkeitswechsell auf, wie schon Abschnitt 3.3.5 erwähnt.

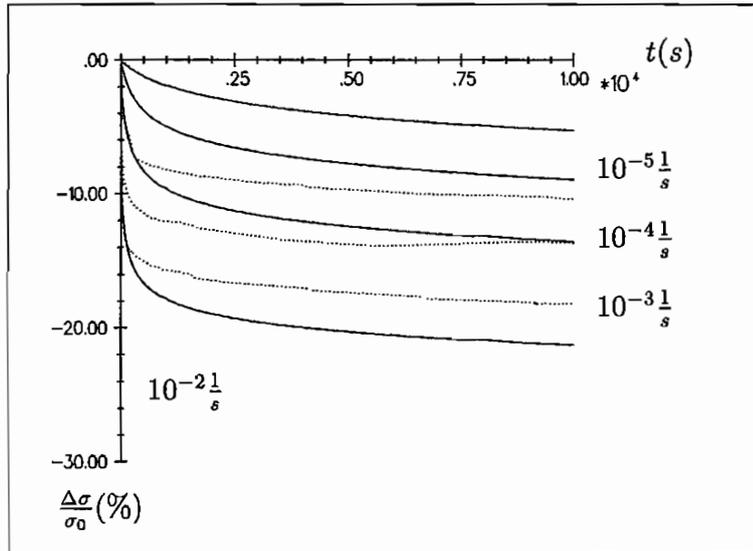


Abb. 3.28 : Relaxationskurven (Experiment: \cdots , Rechnung: $—$)/ IA

Nichtmonotone Versuche mit Haltezeiten

Zuletzt werden noch einige Versuche gezeigt, bei denen ein Experiment mit Haltezeit mit einem zyklischen Versuch kombiniert wird. Die erste Simulationsrechnung stellt die typische Lastgeschichte einer Dampfturbine dar. Während des Nulldurchgangs der Dehnung wird der Versuch angehalten und das Material relaxierte 200 s.

Das Modell von *Rott* überschätzte die Phasen der Relaxation und reagierte mit einem Auswandern der Hysterese in negativer Richtung [51]. Dieser im Experiment nicht zu beobachtende Effekt entfällt bei der Verwendung des modifizierten Modells (Abb. 3.29).

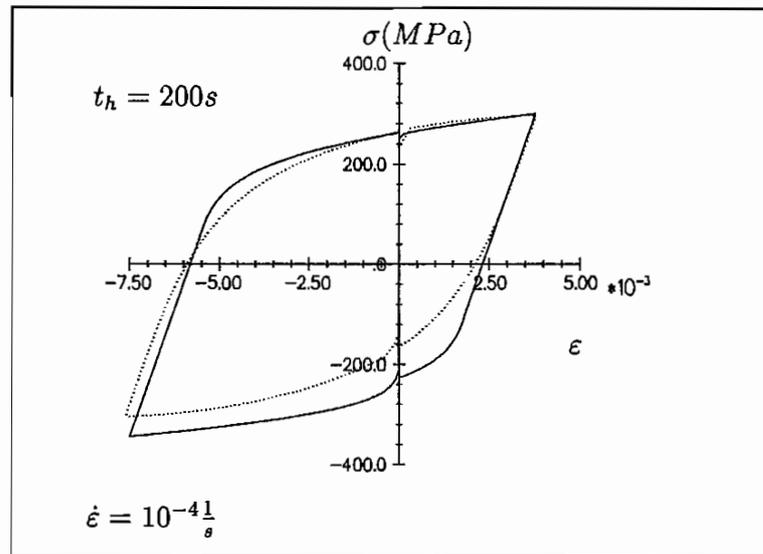


Abb. 3.29 : Letzter Zyklus (Experiment: \cdots , Rechnung: $-$)/ 2FM

Die nächsten beiden Abbildungen zeigen Nachrechnungen komplexer Lastpfade bestehend aus Kriechversuchen und zyklischen Versuchen. Sie verdeutlichen die Anwendbarkeit dieses Materialmodells für Rechnungen mit geschwindigkeitsabhängigen und -unabhängigen Phänomenen.

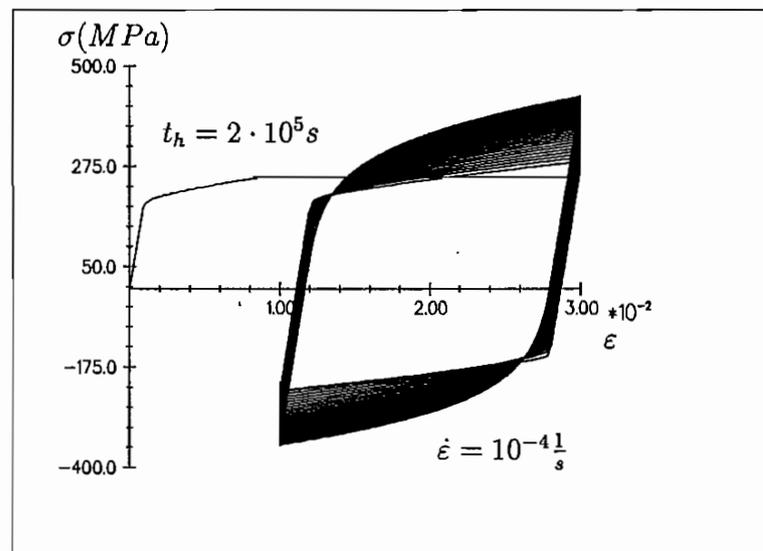


Abb. 3.30 : Zyklen nach Kriechversuch / 2FM

Die nächste Grafik zeigt die Auswirkungen der zyklischen Vorbelastung auf die Entwicklung der Kriechdehnungen.

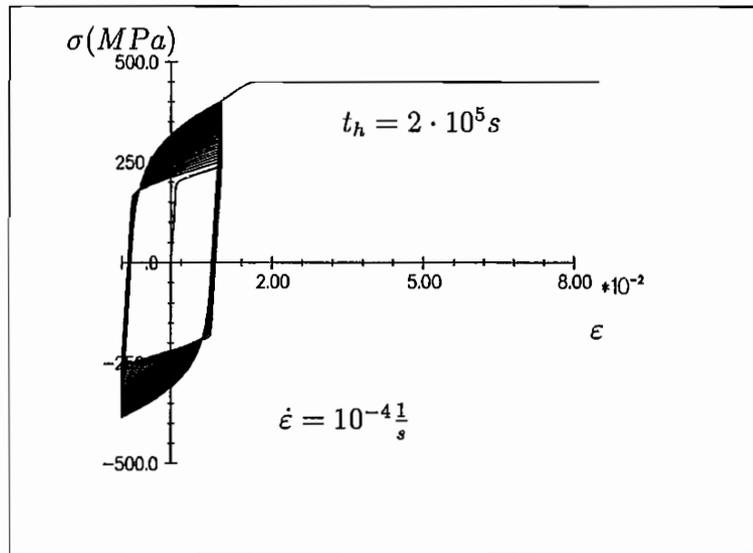


Abb. 3.31 : Kriechen nach Zyklen / 2FM

3.4 Schlußfolgerung

Die drei vorgestellten plastischen Basismodelle lassen sich mit einer hinreichenden Genauigkeit an die experimentellen Ergebnisse anpassen, obwohl die Qualität der Wiedergabe erheblich differierte. Die Entscheidung für eines dieser Stoffgesetze hängt aber von dem jeweiligen Anwendungsfall ab. Für schnelle Überschlagsrechnungen ist das Modell von Chaboche zu empfehlen, da die Bestimmung der Parameter z.T. analytisch erfolgen kann und die Rechenzeit sehr gering ist. Für eine präzise Simulation auch komplexer Lastpfade und nichtproportionaler Belastungen ist das Zwei-Flächen-Modell besser geeignet. Der deutlich größere Aufwand bei der Ermittlung der Materialparameter und die höhere Rechenzeit beschränken den Einsatzbereich. Das IA-Modell ist ein Kompromiß aus beiden Modellen. Es vereinigt einige Vorteile beider Modelle, erreicht aber nicht die Qualität des Mehr-Flächen-Modells.

Die Weiterentwicklung des viskoplastischen Stoffgesetzes von *Rott* kann einige Schwierigkeiten des Ursprungsmodells beheben. Die Ermittlung der Materialfunktion A beschränkt sich auf die Bestimmung einer Funktion für die experimentelle Überspannung. Die Funktionen B und Φ können einzelnen Phasen des Kriechversuches zugeordnet werden, wenngleich eine strikte Trennung nicht möglich ist. Der wesentliche Vorteil des gesamten Konzeptes des Modells liegt allerdings in der Verwendung eines beliebigen plastischen Basismodells. Die Vorteile von Mehr-Flächenmodellen sind somit ohne Veränderung der Materialparameter auch bei geschwindigkeitsabhängigem Verhalten anwendbar. Dies ermöglicht auch die Implementierung eines geschwindigkeitsunabhängigen Stoffgesetzes in eine Finite-Elemente-Formulierung, welche bisher mit sehr großen Schwierigkeiten verbunden war. Das nächste Kapitel beschreibt den Einbau in ein verbreitetes FEM-Programm.

Kapitel 4

Numerik

4.1 Einleitung

Der letzte Hauptteil der Arbeit zeigt die Implementierung der Stoffgesetze in ein semi-kommerzielles Finite-Elemente Programm (FEAP) und einige Beispielsrechnungen. Dabei soll der Einsatz der komplexen Materialmodelle zur Lösung praktischer Problemen betont werden.

Da das vorliegende Problem geometrisch sowie physikalisch nichtlinear ist, müssen einige Erweiterungen der herkömmlichen Formulierung durchgeführt werden. Zur besseren Einführung in die Methodik soll kurz das lineare Problem angesprochen, bevor im weiteren auf die Erweiterung auf das nichtlineare Problem, die Schnittstellen für das Stoffgesetz und anderer begleitender Schwierigkeiten eingegangen wird.

4.2 Prinzip der Gewichteten Residuen

Das im zweiten Kapitel formulierte Stoffgesetz wird über ein Differentialgleichungssystem beschrieben. Die Lösung des Systems ist im einaxialen Fall durch Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung für eine konstante Geschwindigkeit zu ermitteln. Die Methode versagt, falls die Lösung in einem beliebigen Gebiet V mit der Berandung A gesucht wird:

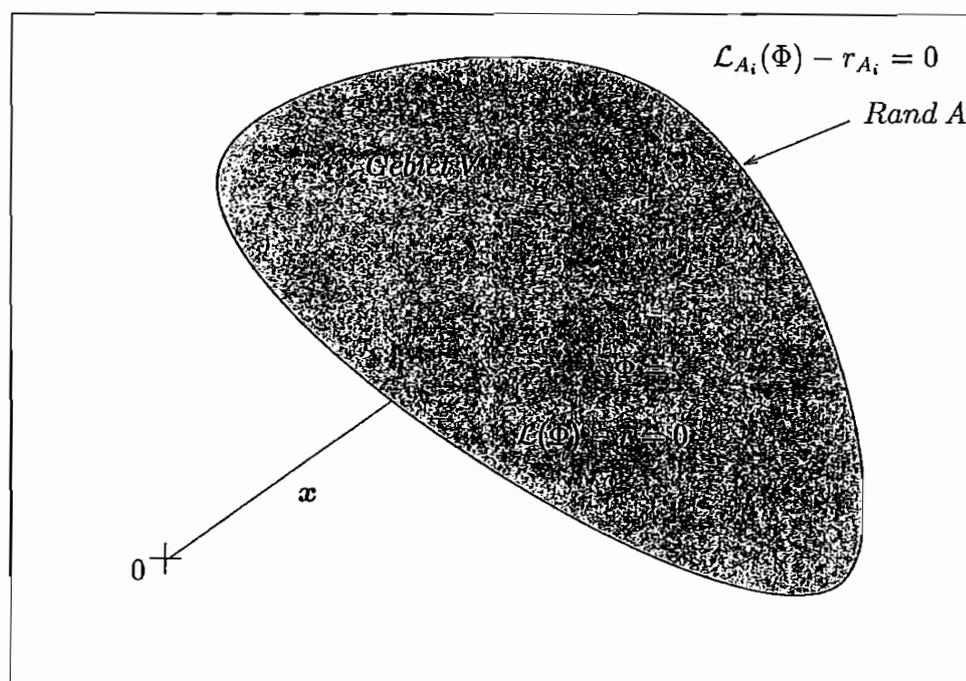


Abb. 4.1 : Problemstellung

Mathematisch stellt sich das Problem wie folgt:

$$\mathcal{L}(\Phi) - r = 0 \quad \text{in } V \quad (4.1)$$

Der Differentialoperator \mathcal{L} enthält die gesuchte Lösung Φ selbst und die Ableitungen von Φ bis zum Grad $2m$. Zur Bestimmung der Lösung sind in jedem Punkt der Berandung m unabhängige Randbedingungen zu erfüllen:

$$\mathcal{L}_{A_i}(\Phi) - r_{A_i} = 0 \quad \text{auf } A \quad (4.2)$$

Im Hinblick auf Näherungsfunktionen für Φ ist es nützlich, die Randbedingungen in zwei Bereiche zu unterteilen, in

- primäre oder wesentliche Randbedingungen und
- sekundäre oder natürliche Randbedingungen.

Die primären Randbedingungen enthalten die Ableitungen bis zum Grad $m - 1$. Höhere Ableitungen von Φ sind demnach den sekundären Randbedingungen zuzuschreiben. Wenn diese mathematische Einteilung z.B. auf die Statik übertragen wird, so sind bei der Formulierung des Problems in Verschiebungen ($\Phi = \Phi(u)$) primäre Randbedingungen geometrischer Natur, sekundäre Randbedingungen statischer Natur.

4.2.1 Finite Verfahren

Einteilung

Die heutzutage übliche Art, das obenstehende Problem zu lösen, besteht in den sogenannten finiten Verfahren, bei denen das betrachtete Gebiet in irgendeiner Weise diskretisiert wird. Die wichtigsten Vertreter dieser Klasse sind:

- Finite Elemente Methode (FEM)
- Finite Differenzen Methode (FD)
- Randelemente Methode (BEM)

Die Gemeinsamkeit dieser Verfahren besteht darin, daß sich alle auf das *Prinzip der gewichteten Residuen* zurückführen lassen [73]. Bei dieser Methode [28] definiert man eine spezielle Fehlerfunktion R , versieht diese mit einer bestimmten Wichtung w und fordert, daß sich der daraus ergebende Mittelwert über das gesamte Gebiet verschwindet:

$$\int_V R w \, dV = 0 \quad (4.3)$$

Der Fehler kann z.B. die Differenz zwischen dem Differentialoperator \mathcal{L} , der auf die Funktion $\tilde{\Phi}$ angewendet wird, und dem tatsächlichen Wert r sein:

$$R = \mathcal{L}(\tilde{\Phi}) - r \quad (4.4)$$

Analoges Vorgehen auf dem Rand ergibt eine Erfüllung der Randbedingungen im Mittel:

$$\int_A R_A w \, dA = 0 \quad (4.5)$$

$$R_A = \mathcal{L}_A(\tilde{\Phi}) - r_A \quad (4.6)$$

Die Ansatzfunktionen $\tilde{\Phi}$ haben folgende Form:

$$\tilde{\Phi} = \sum_i a_i f_i, \quad (4.7)$$

wobei die Funktionen f_i linear unabhängig sind und die Koeffizienten a_i so zuwählen sind, daß der gewichtete Rest in Gleichung (4.3) und (4.5) verschwindet.

Die exakte Lösung ist erreicht, wenn R und R_B Null sind, was aber nur in den wenigsten Fällen möglich sein wird. Bei komplexen technischen Anwendungen sowie bei aufwendigen Differentialgleichungen muß auf Näherungsmethoden zurückgegriffen werden. Möglich ist es allerdings, Teilprobleme exakt und den Rest näherungsweise zu erfüllen, was auf zwei Gruppen der Beschreibung führt:

- exakte Erfüllung von R , näherungsweise Erfüllung von R_B
- exakte Erfüllung von R_B , näherungsweise Erfüllung von R .

Die erste Gruppe führt auf die Randelementeverfahren (BEM), bei denen die Differentialgleichung im Gebiet exakt und die Randbedingung im Mittel erfüllt ist. Die andere Gruppe umfaßt die Verfahren der Finiten Elemente und der Finiten Differenzen, auf die näher eingegangen wird.

Wichtungsfunktionen

Neben der Wahl geeigneter Ansatzfunktionen kann die Wichtungsfunktion variiert werden. Dabei haben sich einige Verfahren etabliert, die im folgenden kurz vorgestellt werden.

• Kollokationsverfahren

Bei dieser Methode wird die Wichtungsfunktion gleich einem Dirac-Impuls gesetzt, dies führt auf das Verfahren der Finiten Differenzen [49].

$$w(x) = \delta(x - x_i) \quad (4.8)$$

Diese Berechnungsmethode wird bei komplexen instationären Strömungsvorgängen eingesetzt. Da lineare Ansätze benutzt werden und keine Integrale auszuwerten sind, ist die Handhabung einfach. Allerdings führt die Methode i.a. zu ungenauen Lösungen und zu Schwierigkeiten bei gekrümmten oder irregulären Rändern.

- **Elementkollokationsverfahren**

Dieses auch unter dem Namen *Sub-Domain-Methode* [75] bekannte Verfahren setzt in verschiedenen Bereichen unterschiedliche, aber einfache Wichtungsfunktionen an:

$$\begin{aligned} w(x) &= 1 && \text{in } V_i \\ w(x) &= 0 && \text{in } V_j. \end{aligned}$$

Das Problem reduziert sich auf die Integration des Differentialoperators in einem vorgegebenen Gebiet.

- **Galerkinsche Methode**

Hierbei werden die Wichtungsfunktionen gleich den Ansatzfunktionen gewählt:

$$w(x) = f_i(x). \quad (4.9)$$

Die Schwierigkeiten bei der Verwendung dieser Methode bestehen darin, daß i.a. keine symmetrischen Koeffizientenmatrizen entstehen und die Ansatzfunktionen erweiterten Stetigkeitsanforderungen genügen müssen [37].

- **Methode der kleinsten Quadrate**

Zuletzt noch ein Beispiel, bei dem die Wichtungsfunktion gleich dem Differentialoperator selbst gesetzt wird. Der Name der Methode entstand durch die quadratische Form des Differentialoperators im Fehlerquadrat:

$$w(x) = \mathcal{L}(a_i f_i(x)) \quad (4.10)$$

Eine Kombination der letzten beiden Methoden wird von *Pitzer* in [61] durchgeführt. Er wendet diese Formulierung auf inelastische Stoffgesetze an.

Neben den vorgestellten Methoden lassen sich eine Vielzahl anderer Ansätze angeben. So ist z.B. möglich, für w Polynome anzusetzen, oder die Gewichtsfunktionen unabhängig von den Ansatzfunktionen einzuführen (vgl. *Petrov-Galerkin* [75]). Ein Vergleich der einzelnen Methoden findet sich bei [15] oder bei [82].

4.2.2 Aufbereitung des Problems

In diesem Kapitel wird das Prinzip der gewichteten Residuen auf unser Problem übertragen. Der Ausgangspunkt für eine Formulierung bildet der Impulssatz für ein ruhendes, verformtes Körperelement:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (4.11)$$

Diese Differentialgleichung kann in das Prinzip der gewichteten Residuen eingesetzt werden:

$$\mathbf{R} = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}, \quad (4.12)$$

und es folgt

$$\int_V (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{w} \, dV + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \, dV = 0. \quad (4.13)$$

Eine partielle Integration des ersten Terms liefert dann:

$$\int_{A_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{w} \, dA_2 - \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{div} \mathbf{w} \, dV + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \, dV = 0. \quad (4.14)$$

In Gleichung (4.14) kennzeichnet A_2 den Teil des Randes, auf dem eine Randbedingung vorgegeben ist. Mit dem *Cauchy*-Theorem für die Oberflächenlasten des Körpers:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}, \quad (4.15)$$

folgt dann weiter:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{div} \mathbf{w} \, dV = \int_{A_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} \, dA_2 + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{w} \, dV. \quad (4.16)$$

Wenn die Wichtungsfunktionen gleich den Ansatzfunktionen gesetzt werden und gefordert wird, daß der gesamte Ausdruck minimal wird, entsteht die gleiche Formulierung wie man sie aus der Minimierung des Variationsfunktional erhalten hätte. Diese zeigt die innere Verwandtschaft aller hier vorgestellten Methoden [88, 72]:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} \delta(\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T) \, dV = \int_A \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV. \quad (4.17)$$

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \int_A \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA + \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV. \quad (4.18)$$

Der letzte Ausdruck wird auch als *Prinzip der virtuellen Verschiebung* bezeichnet. Dabei beschreibt δx eine virtuelle, infinitesimal kleine Änderung der Größe x . Der erste Term in Gleichung (4.18) ist die virtuelle Formänderungsenergie $\delta \mathbf{W}$.

4.3 Lineares Problem

Zum besseren Verständnis der Problematik wird zunächst das lineare Problem kurz vorgestellt, da hier auf Bekanntes zurückgegriffen werden kann. Zudem wird mit der Notation vertraut gemacht, die die Matrizen von den Tensoren durch eckige Klammern unterscheidet.

Für eine Finite-Elemente-Formulierung ist es nötig, den zu berechnenden Körper in Elemente zu unterteilen, die in Knotenpunkten miteinander verbunden sind. Die Verschiebungen der n Knoten jedes Elementes werden durch ein beliebig wählbares lokales Koordinatensystem (x_1, x_2, x_3) beschrieben. Eine Verschiebungsinterpolationsmatrix $[\mathbf{H}]$ schafft dann eine Verbindung zu dem globalen Koordinatensystem (u, v, w) :

$$[\mathbf{u}^{(m)}(x_1, x_2, x_3)] = [\mathbf{H}^{(m)}(x_1, x_2, x_3)] [\hat{\mathbf{u}}^{(m)}]. \quad (4.19)$$

Der Vektor $[\hat{\mathbf{u}}^{(m)}]$ enthält die globalen Koordinaten der Verschiebungen der Knotenpunkte und hat die Dimension $3n$. Der hochgestellte Index (m) kennzeichnet die Formulierung auf Elementebene.

$$[\hat{\mathbf{u}}^T] = [u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_n, v_n, w_n] \quad (4.20)$$

Der Verzerrungsmatrix wird mit Hilfe der Verzerrungsverschiebungsmatrix $[\mathbf{B}^{(m)}]$ aus den Knotenpunktsverschiebungen berechnet. Die Verbindung zu den Elementspannungen liefert letztlich das Stoffgesetz mit der Elastizitätsmatrix $[\mathbf{C}^{(m)}]$:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}] = [\mathbf{B}^{(m)}] [\hat{\mathbf{u}}^{(m)}], \quad (4.21)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}^{(m)}] = [\mathbf{C}^{(m)}] [\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}]. \quad (4.22)$$

Somit kann das Prinzip der virtuellen Verrückungen nach (4.18) umgeformt werden und in den neuen Größen beschrieben werden:

$$\left\{ \int_V [\mathbf{B}^{(m)T}] [\mathbf{C}^{(m)}] [\mathbf{B}^{(m)}] dV \right\} [\hat{\mathbf{u}}^{(m)}] = \int_A [\mathbf{H}^{(m)T}] [\mathbf{p}^{(m)}] dA + \int_V [\mathbf{H}^{(m)T}] \rho [\mathbf{f}^{(m)}] dV. \quad (4.23)$$

Die Integrale können analytisch oder numerisch gelöst werden, die einzelnen Matrizen auf Elementebene zusammengebaut werden und das Gleichungssystem mit den Knotenverschiebungen gelöst werden:

$$[\mathbf{K}] [\hat{\mathbf{u}}] = [\mathbf{R}]. \quad (4.24)$$

Dabei ist $[\mathbf{K}]$ die Steifigkeitsmatrix des Systems, und der Lastvektor $[\mathbf{R}]$ setzt sich aus dem Vektor der Oberflächenkräfte und dem Volumenkraftvektor zusammen.

Dieses Gleichungssystem gilt wie erwähnt unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungen und linear elastischem Materialverhalten. Die lineare Gleichung in $[\hat{\mathbf{u}}]$ besagt, daß eine Änderung des Lastvektors auf $\alpha[\mathbf{R}]$ eine entsprechende Änderung des Verschiebungsvektors auf $\alpha[\hat{\mathbf{u}}]$ zur Folge hat. Bei der Behandlung nichtlinearer Probleme gilt dieser Zusammenhang nicht mehr.

Die Unterschiede, die bei der Erweiterung der Aufgabe auftreten, zeigen sich in drei Punkten. Bei einer geometrischen Nichtlinearität ist die Integration bei der Berechnung der Steifigkeitsmatrix und der Lastvektoren in einfacher Form nicht mehr möglich. Dies ist damit zu begründen, daß die Integration über das Ausgangsvolumen bzw. der Ausgangsoberfläche stattfand und die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix $[\mathbf{B}]$ bei der Berechnung konstant blieb. Der zweite Punkt betrifft das Stoffgesetz und somit die Spannungs-Verzerrungs-Matrix $[\mathbf{C}]$, die unter der Annahme nichtelastischem Verhaltens veränderlich ist. Zuletzt können auch die Randbedingungen zeitlich abhängig sein.

4.4 Nichtlineares Problem

4.4.1 Gleichgewichtsiteration

Der Ansatz zur Lösung der neuen Probleme besteht darin, zu jedem Zeitpunkt t einen Gleichgewichtszustand zwischen den äußeren Lasten und den tatsächlichen vorhandenen Knotenlasten zu erreichen. Die Gleichung

$${}^t[\mathbf{R}] - {}^t[\mathbf{F}] = \mathbf{0}, \quad (4.25)$$

$${}^t[\mathbf{F}] = \int_V {}^t[\mathbf{B}]^T {}^t[\boldsymbol{\sigma}] \, dV, \quad (4.26)$$

mit $[\mathbf{R}]$ als Vektor der äußeren Last und $[\mathbf{F}]$ als Vektor der Knotenpunktkräfte, die aus den Spannungen im Element abgeleitet sind, beschreibt diesen Zustand zum Zeitpunkt t . Sie ist in der linearen Theorie aufgrund der kleinen Formänderungen erfüllt, während die Zeit als neue Variable nur einzelne Laststufen angibt. Bei nichtlinearem Verhalten muß hingegen versucht werden, die Gleichung iterativ zu erfüllen. Dies wird mit Hilfe eines Inkrementalverfahrens realisiert.

Die Inkrementallösung geht davon aus, daß zu einem Zeitpunkt t die Lösung bekannt ist und eine Lösung zu einem Zeitpunkt $t + \Delta t$ gesucht wird, also die Gleichung

$${}^{t+\Delta t}[\mathbf{R}] - {}^{t+\Delta t}[\mathbf{F}] = \mathbf{0} \quad (4.27)$$

erfüllt werden muß. Hierbei ist $[\mathbf{R}]$ bekannt, und $[\mathbf{F}]$ setzt sich aus dem bekannten Term ${}^t[\mathbf{F}]$ und einem unbekanntem Zuwachs $\Delta[\mathbf{F}]$ zusammen. Dieser Zuwachs ist näherungsweise

$$\Delta[\mathbf{F}] = {}^t[\mathbf{K}] [\mathbf{u}]. \quad (4.28)$$

Aus der so entstandenen Gleichung kann ein Verschiebungszuwachs berechnet werden, der zu der vorhandenen Verschiebung addiert wird:

$${}^{t+\Delta t}[\mathbf{u}] = {}^t[\mathbf{u}] + \Delta[\mathbf{u}]. \quad (4.29)$$

Die neue Gesamtverschiebung bestimmt ein neues $[\mathbf{F}]$ und somit wiederum einen Verschiebungszuwachs. Dieses Iterationsschema wird solange fortgesetzt, bis der Verschiebungszuwachs Null wird oder ein Fehlermaß unterschritten hat. Das Verfahren heißt modifizierte

Newton-Raphson-Iteration, auf dessen mathematische Herleitung hier aber auf die Literatur [5] verwiesen werden soll.

Modifizierte Newton-Raphson-Iteration:

$${}^t[\mathbf{K}] \Delta[\mathbf{u}]^{(i)} = {}^{t+\Delta t}[\mathbf{R}] - {}^{t+\Delta t}[\mathbf{F}]^{(i-1)} \quad (4.30)$$

$${}^{t+\Delta t}[\mathbf{u}]^{(i)} = {}^{t+\Delta t}[\mathbf{u}]^{(i-1)} + \Delta[\mathbf{u}]^{(i)} \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.31)$$

Der Index (i) gibt den aktuellen Iterationschritt an, wobei folgende Anfangsbedingungen gelten:

$${}^{t+\Delta t}[\mathbf{u}]^0 = {}^t[\mathbf{u}] \quad , \quad {}^{t+\Delta t}[\mathbf{F}]^0 = {}^t[\mathbf{F}]. \quad (4.32)$$

Die Verwendung einer solchen Iteration verlangt allerdings, daß das Prinzip der virtuellen Verschiebung darauf abgestimmt wird. Dieser Sachverhalt wird im Kapitel 4.4.3 vertieft.

4.4.2 Update-Lagrangesche Formulierung

Alle Größen der Gleichung (4.18) sind auf die verformte Lage des Körpers bezogen. Da diese Konfiguration nicht bekannt ist, muß eine Transformationen aller Größen des Stoffgesetzes auf die bekannte Lage zu Beginn eines Lastschrittes stattfinden. Die virtuelle Formänderungsenergie aus der Gleichung (4.18) für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ bezogen auf den Zeitpunkt $t + \Delta t$ lautet:

$$\delta W = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} \delta(\text{grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u} + (\text{grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u})^T) {}^{t+\Delta t}dV. \quad (4.33)$$

Die Differenz Δt gibt das Zeitintervall eines Lastschrittes an.

Bei der Formulierung des Problems muß unterschieden werden, auf welchem Zustand sich eine Größe bezieht und in welchem Zustand sich die Größe befindet. Aus diesem Grund werden auf der linken Seite der Tensoren zusätzliche Indizes eingeführt. Dabei gibt der obere die aktuelle Konfiguration des Körpers an und der untere die Bezugsconfiguration. Mit dem infinitesimalen Verzerrungstensor

$$\mathbf{e}_{t+\Delta t}^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} (\text{grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u} + (\text{grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u})^T) \quad (4.34)$$

folgt dann für die virtuelle Formänderungsarbeit

$$\delta W = \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{e}_{t+\Delta t}^{t+\Delta t} {}^{t+\Delta t}dV. \quad (4.35)$$

Da $\boldsymbol{\sigma}$ und \boldsymbol{e} auf die unbekannte Konfiguration zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ bezogen sind, bedarf es geeigneter Spannungs- und Verzerrungsmaße, um dieses Problem zu behandeln. Ein Spannungsmaß bezogen auf die bekannte Konfiguration zum Zeitpunkt t ist der 2.Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor \boldsymbol{S} :

$${}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{S} = J({}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{F}^{-1})({}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{\sigma})({}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{F}^{-1})^T \quad (4.36)$$

mit

$$J = \frac{{}^{t+\Delta t}V}{{}^tV} = \frac{{}^t\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho}. \quad (4.37)$$

Der Deformationsgradient gibt die Änderung der aktuellen Koordinaten bezogen auf den Zustand zu Beginn des Lastschrittes wieder:

$${}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{F} = \frac{\partial^{t+\Delta t}x_\alpha}{\partial^t x_\beta} \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta. \quad (4.38)$$

Die Vorgehensweise, den Spannungstensor auf die Konfiguration zur Zeit t zu beziehen, nennt man Update-Lagrangesche Formulierung. Eine andere Möglichkeit besteht darin, als Referenzkonfiguration den Ausgangszustand zu wählen (Totale-Lagrangesche Formulierung). Der Vorteil der Einführung des 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor besteht darin, daß er im Gegensatz zu dem Cauchyschen Spannungstensor gegenüber Starrkörperverschiebungen invariant ist [1].

Der Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor ist ein dem 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor entsprechendes Verzerrungsmaß.

$${}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\text{Grad}^{t+\Delta t}\boldsymbol{u} + (\text{Grad}^{t+\Delta t}\boldsymbol{u})^T) + (\text{Grad}^{t+\Delta t}\boldsymbol{u})^T \text{Grad}^{t+\Delta t}\boldsymbol{u}. \quad (4.39)$$

Die Verknüpfung mit dem infinitesimalen Verzerrungstensor \boldsymbol{e} liefert folgende Umformung:

$$({}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{F})^{-T} \delta^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{\epsilon} ({}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{F})^{-1} = \frac{1}{2} \delta(\text{grad}^{t+\Delta t}\boldsymbol{u} + (\text{grad}^{t+\Delta t}\boldsymbol{u})^T) \quad (4.40)$$

$$({}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{F})^{-T} \delta^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{\epsilon} ({}^{t+\Delta t}{}_t\boldsymbol{F})^{-1} = \delta_{t+\Delta t}^{t+\Delta t}\boldsymbol{e}. \quad (4.41)$$

Damit läßt sich die virtuelle Formänderungsarbeit als Integral über das bekannte Gebiet V darstellen

$$\delta W = \int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t} \mathbf{S} \cdot \delta {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon} {}^t dV. \quad (4.42)$$

Mit der auf das Ausgangsvolumen bezogenen Belastung \mathbf{p} lautet das vollständige Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t} \mathbf{S} \cdot \delta {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon} {}^t dV = \int_{{}^0A} {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} \cdot \delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} {}^0 dA + \int_{{}^tV} {}^t \rho \cdot {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} \cdot \delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} {}^t dV. \quad (4.43)$$

In der Gleichung (4.43) wird erreicht, daß alle Variablen auf die bekannte Konfiguration zur Zeit t bezogen sind.

Wird der Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ zur besseren Handhabung in einen linearen Teil \mathbf{e} und einen nichtlinearen Teil $\boldsymbol{\eta}$ aufgespalten:

$$\delta {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon} = \delta_t \boldsymbol{\varepsilon} = \delta_t \mathbf{e} + \delta_t \boldsymbol{\eta} \quad (4.44)$$

mit

$$\delta_t \mathbf{e} = \frac{1}{2} \delta (\text{Grad} \mathbf{u} + (\text{Grad} \mathbf{u})^T) \quad ; \quad \delta_t \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} \delta ((\text{Grad} \mathbf{u})^T \text{Grad} \mathbf{u}), \quad (4.45)$$

nimmt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen aus Gleichung (4.43) folgende Form an

$$\int_{{}^tV} {}^t \mathbf{S} \cdot \delta_t \mathbf{e} {}^t dV + \int_{{}^tV} {}^t \mathbf{S} \cdot \delta_t \boldsymbol{\eta} {}^t dV = \delta A_V + \delta A_A. \quad (4.46)$$

In Gleichung (4.46) sind für die volumen- und flächenhaft verteilt angreifenden Lasten die Abkürzungen A_V und A_A eingeführt worden.

4.4.3 Inkrementelle Formulierung

Neben der linearisierten Form wird, wie schon erwähnt, eine inkrementelle Formulierung der Spannungen sowie der Verzerrungen benötigt, damit geeignete Iterationsmethoden zur Anwendung kommen können. Gemäß dem modifizierten Newton-Raphson Verfahren wird die Verschiebung \mathbf{u} zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ angenähert durch

$${}^{(i)} \mathbf{u} = {}^{(i-1)} \mathbf{u} + \Delta {}^{(i)} \mathbf{u}. \quad (4.47)$$

Bei der Variation der Verschiebung entfällt die im aktuellen Iterationsschritt konstante Größe $\delta^{(i-1)}\mathbf{u}$

$$\delta^{(i)}\mathbf{u} = \delta^{(i-1)}\mathbf{u} + \Delta^{(i)}\mathbf{u} = \delta \Delta^{(i)}\mathbf{u}. \quad (4.48)$$

Damit können die Variationen des linearem und nichtlinearem Anteils des Verzerrungstensors umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \delta \Delta_t^{(i)}\mathbf{e} &= \frac{1}{2} (\delta \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u}) + \delta \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u})^T \\ &\quad + \delta \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u})^T \text{Grad}^{(i-1)}\mathbf{u} \\ &\quad + \text{Grad}^{(i-1)}\mathbf{u}^T \delta \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u})), \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \delta \Delta_t^{(i)}\boldsymbol{\eta} &= \frac{1}{2} (\delta \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u})^T \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u}) \\ &\quad + \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u})^T \delta \text{Grad}(\Delta^{(i)}\mathbf{u})). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Die Zerlegung der Spannungen folgt analog

$$\Delta^{(i)}\mathbf{S} = {}^{(i)}\mathbf{S} - {}^{(i-1)}\mathbf{S}. \quad (4.51)$$

Die inkrementelle Formulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen ohne Berücksichtigung des Materialgesetzes lautet:

$$\begin{aligned} &\int_{tV} \Delta^{(i)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta_t^{(i)}\mathbf{e} \, {}^t dV + \int_{tV} \Delta^{(i)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta_t^{(i)}\boldsymbol{\eta} \, {}^t dV \\ &+ \int_{tV} {}^{(i-1)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta_t^{(i)}\boldsymbol{\eta} \, {}^t dV = \delta A_V + \delta A_A - \int_{tV} {}^{(i-1)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta_t^{(i)}\mathbf{e} \, {}^t dV. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Diese Formulierung beinhaltet zum einen die geometrische Nichtlinearität über den Verzerrungs- und den Spannungstensor und zum anderen die inkrementelle Formulierung für die modifizierte Newton-Raphson-Iteration. Im nächsten Schritt folgt die Berücksichtigung einer physikalischen Nichtlinearität über das Stoffgesetz.

4.4.4 Werkstoffgesetz

Das Werkstoffgesetz gemäß Kapitel 3 ist im Gegensatz zur linearen Gleichung (4.22) in den Raten formuliert:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \mathbf{D} - 2G \mathbf{D}_i. \quad (4.53)$$

Es liefert den Zusammenhang zwischen einer noch näher zu beschreibenden objektiven Zeitableitung des Kirchhoffschen Spannungstensors und dem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} bzw. seinem inelastischen Anteil \mathbf{D}_i . In diesem Kapitel ist die Verbindung zu dem 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor \mathbf{S} aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen herzuleiten. Die grundlegende Annahme dabei ist, den Spannungszuwachs $\Delta \mathbf{S}$ in Gleichung (4.52) folgendermaßen anzunähern

$$\Delta_t \mathbf{S} \approx {}_t^i \dot{\mathbf{S}} \Delta t. \quad (4.54)$$

Dieses Vorgehen entspricht einer einfachen numerischen Integration des Spannungszuwachses nach Euler [79].

Der Cauchy-Spannungstensor kann mit Hilfe der schon erwähnten Beziehung (4.36) für einen beliebigen Zeitpunkt τ durch den 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor ersetzt werden

$${}_\tau \boldsymbol{\sigma} = \frac{{}_\tau \rho}{{}_t \rho} \mathbf{F} {}_t \mathbf{S} \mathbf{F}^T, \quad t \leq \tau \leq t + \Delta t. \quad (4.55)$$

Die in (4.54) benutzte substantielle Zeitableitung der Gleichung ergibt für den Cauchy-Spannungstensor

$${}_\tau \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{{}_\tau \dot{\rho}}{{}_t \rho} \mathbf{F} {}_t \mathbf{S} \mathbf{F}^T + \frac{{}_\tau \rho}{{}_t \rho} (\dot{\mathbf{F}} {}_t \mathbf{S} \mathbf{F}^T + \mathbf{F} {}_t \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T + \mathbf{F} {}_t \mathbf{S} \dot{\mathbf{F}}^T). \quad (4.56)$$

Die substantielle Ableitung des Deformationsgradienten \mathbf{F} läßt sich mit Hilfe des Geschwindigkeitsgradiententensors $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$ auf

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F} \quad (4.57)$$

zurückführen. Die explizite Euler-Integration nach Gleichung (4.54) verlangt die Kenntnis von \mathbf{S} zum Zeitpunkt $\tau = t$. Zu Beginn des Lastschrittes gelten folgende vereinfachende Beziehungen:

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} \Rightarrow \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}, \quad J = 1 \quad (4.58)$$

und man erhält aus Gleichung (4.56)

$${}^t\dot{\mathbf{S}} = {}^t\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{{}^t\dot{\rho}}{{}^t\rho} {}^t\boldsymbol{\sigma} - {}^t\mathbf{L} {}^t\boldsymbol{\sigma} - {}^t\boldsymbol{\sigma} {}^t\mathbf{L}^T, \quad (4.59)$$

oder mit

$$\frac{{}^t\dot{\rho}}{{}^t\rho} = \text{Sp}(\mathbf{D}) \quad (4.60)$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \text{Sp}(\mathbf{D}) \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{L}^T. \quad (4.61)$$

An dieser Stelle muß die substantielle Zeitableitung des Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ durch eine objektive Zeitableitung im Stoffgesetz (4.53) ersetzt werden. Die Verwendung einer objektiven Zeitableitung verhindert, daß Starrkörperrotationen die Wiedergabe des eigentlichen Verformungszustandes verfälschen. Die ersten Ansätze, dies mit einer geeigneten Zeitableitung zu berücksichtigen, gehen auf *Lee, Mallett, Wertheimer* [43] zurück. Eine weit verbreitete Variante dieser Zeitableitung wurde von *Jaumann* und *Zaremba* entwickelt und soll hier benutzt werden. Die Verwendung dieser Ableitung führt allerdings im ebenen Scherversuch zu einem oszillierenden Spannungsverlauf [45]. *Körber* [37] rechnete deshalb mit einer Variante von *Paulun* und *Pecherski* [58]. Eine Aufzählung objektiver Zeitableitungen findet sich bei *Wegener* [80].

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{W} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{W} \quad (4.62)$$

In Gleichung (4.62) gibt \mathbf{W} den Spintensor an, der sich aus der Geschwindigkeitsgradiententensors \mathbf{L} berechnen läßt. Nutzt man darüberhinaus

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad , \quad \mathbf{D} = \mathbf{L} + \mathbf{W}, \quad (4.63)$$

so folgt aus Gleichung (4.61)

$$\dot{\mathbf{S}} = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} + \text{Sp}(\mathbf{D}) \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}^T, \quad (4.64)$$

oder für den Spannungszuwachs nach Beziehung (4.54)

$$\Delta {}_t\mathbf{S} \approx \Delta t (\mathbf{C} \mathbf{D} - 2G \mathbf{D}_i + \text{Sp}(\mathbf{D}) \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{D}^T). \quad (4.65)$$

Der Dehnungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} kann unter der Annahme zeitlich konstanter Geschwindigkeit durch den Verzerrungstensor ersetzt werden. Zum betrachteten Zeitpunkt $\tau = t$ fallen die aktuellen Koordinaten mit denen der Referenzkonfiguration zusammen, d.h.

$${}_t\mathbf{D} = \frac{1}{2\Delta t} (\text{Grad} \mathbf{u} + (\text{Grad} \mathbf{u})^T) = \frac{1}{\Delta t} {}_t\boldsymbol{\varepsilon}_l. \quad (4.66)$$

Letztlich ergibt sich die folgende Gleichung für den Zuwachs des 2.Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors

$$\Delta {}_t\mathbf{S} \approx {}_t\mathbf{C} {}_t\boldsymbol{\varepsilon}_l - (\mathbf{C}_i \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{W}^p \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{W}^p) \Delta t + \text{Sp}({}_t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_l) {}_t\boldsymbol{\sigma} - {}_t\boldsymbol{\varepsilon}_l {}_t\boldsymbol{\sigma} - {}_t\boldsymbol{\sigma} {}_t\boldsymbol{\varepsilon}_l, \quad (4.67)$$

die wiederum in das Prinzip der virtuellen Arbeit (4.52) für einen Zeitschritt eingesetzt werden kann:

$$\begin{aligned} & \int_{{}_tV} \{ {}_t\mathbf{C} {}_t\boldsymbol{\varepsilon}_l + \text{Sp}({}_t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_l) {}_t\boldsymbol{\sigma} - {}_t\boldsymbol{\varepsilon}_l {}_t\boldsymbol{\sigma} - {}_t\boldsymbol{\sigma} {}_t\boldsymbol{\varepsilon}_l \} \cdot \delta {}_t\mathbf{e} {}^t dV + \int_{{}_tV} {}_t\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta {}_t\boldsymbol{\eta} {}^t dV \\ & = \delta A_V + \delta A_A - \int_{{}_tV} {}_t\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta {}_t\mathbf{e} {}^t dV + \Delta t \int_{{}_tV} \mathbf{C}_i \boldsymbol{\sigma} \delta {}_t\mathbf{e} {}^t dV. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Die entstandene Gleichung kann für verschiedene Strukturelemente in ein lineares Gleichungssystem überführt werden. Wenn die volumenhaft verteilt angreifenden Lasten unberücksichtigt bleiben, geht (4.68) in die folgende Matrixgleichung über:

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{{}_tV} [{}^{(1)}\mathbf{B}_l]^T [\mathbf{C}] [{}^{(1)}\mathbf{B}_l] {}^t d^tV + \int_{{}_tV} [\mathbf{B}_{nl}]^T [{}^{(0)}\mathbf{S}^*] [\mathbf{B}_{nl}] {}^t d^tV \right\} [\Delta {}^{(i)}\mathbf{u}] \\ & = \int_A [\mathbf{H}]^T [\mathbf{p}] {}^t d^tA - \int_{{}_tV} [{}^{(i)}\mathbf{B}_l]^T [{}^{(i-1)}\mathbf{S}] {}^t d^tV - \left\{ \Delta t \int_{{}_tV} [{}^{(1)}\mathbf{B}_l]^T [\mathbf{q}] {}^t d^tV \right\} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Der erste Teil in der Gleichung entspricht der bekannten linearen Steifigkeitsmatrix, und der zweite Teil resultiert aus der geometrischen Nichtlinearität. Die rechte Seite enthält

zunächst den bekannten Lastvektor, dann den Ungleichgewichtsvektor und schließlich einen Anteil, der die physikalische Nichtlinearität berücksichtigt, also stoffgesetzabhängig ist. Die Integrale werden mit einer Gauß-Quadratur ausgewertet. Die einzelnen Matrizen sind ausführlich bei *Rott* [69] aufgeführt.

$$[\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_{nl}] [\Delta {}^t \hat{\mathbf{u}}] = [\mathbf{R}] - [{}^{(i-1)} \mathbf{F}] - [\mathbf{R}_q] \quad (4.70)$$

4.5 Umsetzung in eine Finite-Elemente Formulierung

4.5.1 Allgemeines

Die Umsetzung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen in eine geeignete Finite-Elemente Formulierung geschieht mit Hilfe des isoparametrischen Konzeptes. Dieses Konzept besagt, daß sowohl die Elementkoordinaten als auch die Elementverschiebungen mit denselben Formfunktionen interpoliert werden:

$$x^\alpha = \sum_{i=1}^n h_i x_i^\alpha \quad : \quad u^\alpha = \sum_{i=1}^n h_i u_i^\alpha. \quad (4.71)$$

In der Gleichung (4.71) wird eine neue Bezeichnungsweise eingeführt. Der Index α bezeichnet die globale Koordinatenrichtung, der Index i legt die jeweilige Nummer des Knotens im Element fest. Die Formfunktionen h haben in den natürlichen oder lokalen Koordinaten an den Knoten i jeweils den Wert Eins, an den anderen Knoten des Elementes den Wert Null.

Die Approximation der Verschiebung wird i.a. mit Polynomen realisiert, da diese leicht zu differenzieren sind. Eine grundsätzliche Anforderung an die Ansatzfunktionen besteht darin, daß vollständige Polynome verwendet werden. Darüberhinaus müssen die Funktionen die wesentlichen (geometrischen) Randbedingungen erfüllen. Die natürlichen (statischen) Randbedingungen werden bei der Herleitung des Problems identisch erfüllt.

Der Grad der Polynome richtet sich nach der höchsten Ableitung m im Funktional des Variationsproblems. Man spricht von einem $C^{(m-1)}$ -Variationsproblem. Die Ansatzfunktionen müssen die Ableitungen bis $m - 1$ enthalten, damit sie die wesentlichen Randbedingungen befriedigen. Zur Lösung unseres Variationsproblems wird ein Polynomansatz erster Ordnung erstellt, der die genannten Bedingungen erfüllt.

4.5.2 FEAP

Nachdem die Stoffgesetze in ein selbstgeschriebenes Finite-Elemente-Programm implementiert worden sind, wurde in einem weiteren Schritt ein semi-kommerzielles Programm verwendet. Das von *Taylor* [90, 89] entwickelte Programmpaket ist speziell zur Lösung nichtlinearer Probleme ausgelegt worden. Die Implementierung von Stoffgesetzen der vorgestellten Art wurde im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt.

Der Einbau benutzereigener Strukturen findet auf Elementebene statt, so daß dem Anwender die Arbeit des Zusammenbauens der Elementmatrizen, die Lösung des Gleichungssystems oder die Speicherplatzverwaltung für die Elementdaten erspart bleibt. Dem modular aufgebauten Programm müssen ausschließlich vom Benutzer her die Elementdaten und die Matrizen der Gleichung (4.70) zur Verfügung gestellt werden. Im Anhang wird näher auf die Bedeutung der einzelnen Matrizen eingegangen.

4.6 Strukturelemente

In diesem Abschnitt sollen für drei ebene Strukturelemente die vereinfachenden Annahmen kurz erläutert werden. Dort, wo es möglich ist, wird ein Vergleich mit den Ergebnissen des dritten Kapitels gezeigt. Untersucht werden der ebene Spannungs- sowie der ebene Verzerrungszustand. Bei der Verwendung von Zylinderkoordinaten zur Beschreibung des Problems können auch axialsymmetrische Strukturen unter axialsymmetrischen Lasten berechnet werden, mit dessen Behandlung dieser Abschnitt beginnen soll.

4.6.1 Axialsymmetrische Strukturen

Zu Beginn wird ein Ringelement gezeigt, daß mit axialsymmetrischen Lasten beaufschlagt werden kann. Dazu müssen die kartesischen Koordinaten auf Zylinderkoordinaten transformiert werden.

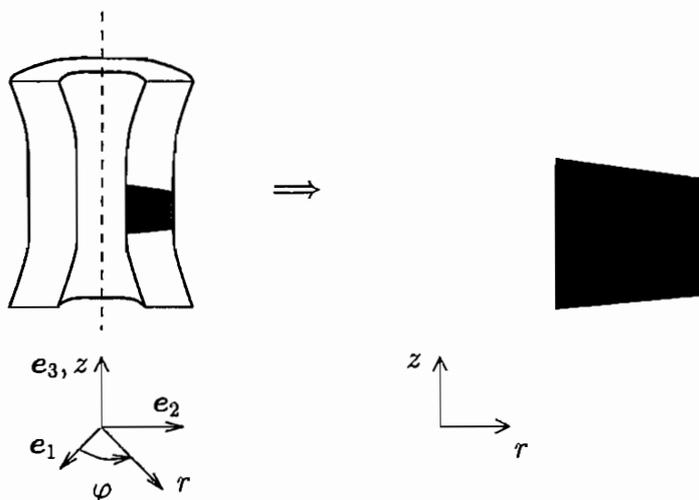


Abb. 4.2 : Ringelement aus [37]

Mit einer Metrik in kontravarianter Form lassen sich die Basisvektoren in das neue Koordinatensystem umrechnen. Eine ausführliche Beschreibung dieser Berechnung findet sich in der Literatur [18, 36, 70].

Unter der Voraussetzung der Rotationssymmetrie verschwinden die Schubspannungskomponenten $\sigma_{r\varphi}$ und $\sigma_{\varphi z}$, und es ergibt folgender Spannungstensor:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\varphi\varphi} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Die folgenden Abbildungen zeigen Vergleiche zwischen der direkten Integration des einaxialen Stoffgesetzes und der Finite-Elemente-Simulation. Die Struktur besteht aus einem Element, dessen Lagerung so gewählt wird, daß ein einaxialer Spannungszustand erreicht wird. Der Verschiebung wird in 200 Lastschritten aufgebracht. Aufgenommen sind in der Abbildung 4.3 die Kurven für drei verschiedene Geschwindigkeiten.

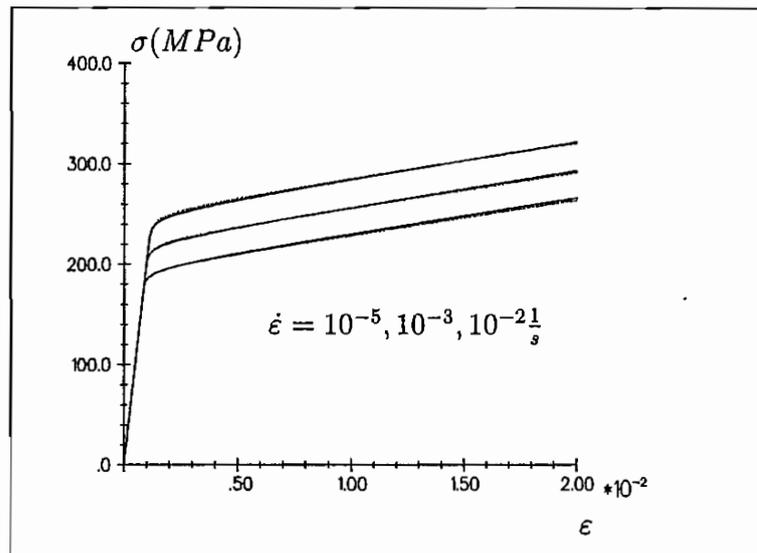


Abb. 4.3 : Vergleich (FEM: \cdots , Rechnung: $—$)

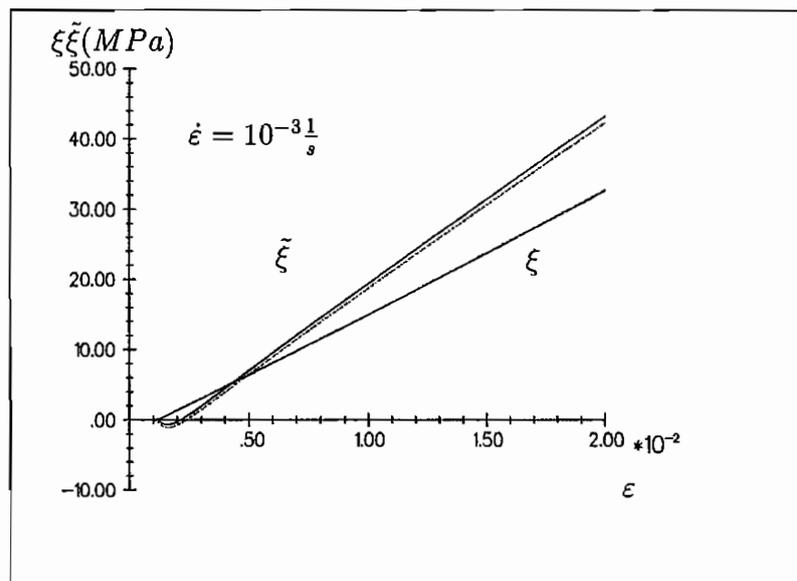


Abb. 4.4 : Vergleich der kinematische Verfestigungen (FEM: \cdots , Rechnung: $—$)

Für den gleichen Versuch werden in den Abbildungen 4.4 und 4.5 die Entwicklungen der internen Variablen gezeigt.

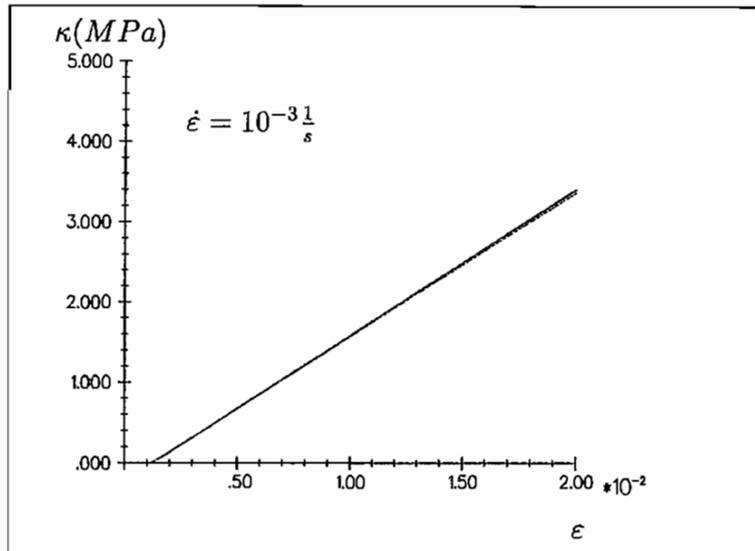


Abb. 4.5 : Vergleich der isotropen Verfestigungen (FEM: ···, Rechnung: —)

In allen Abbildungen wird deutlich, daß die Implementierung des Stoffgesetzes für den einaxialen Fall erfolgreich gelang. Geringe Anweichungen sind in den Endbereichen bei der Verwendung der Jaumannschen-Zeitableitung zu erwarten.

4.6.2 Ebener Spannungszustand

Zur Erfüllung der Voraussetzungen eines ebenen Spannungszustandes muß die Dicke der Scheibe in z-Richtung wesentlich kleiner sein als die Abmessungen in den anderen beiden Richtungen.

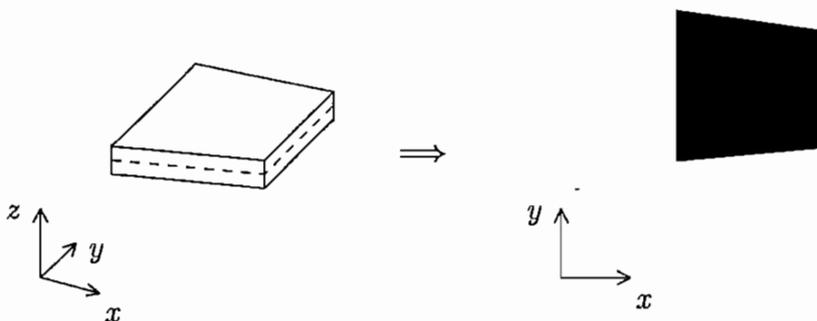


Abb. 4.6 : Scheibenelement aus [37]

Unter dieser Bedingung treten keine Normal- und Schubspannungen senkrecht zur x-y-Ebene auf, und die verbleibenden Spannungen sind unabhängig von der z-Komponente. Eine weitere Annahme besteht darin, daß Punkte, die im unverformten Zustand übereinander liegen auch im verformten Zustand übereinanderliegen werden. Dadurch sind die Verschiebungen der Mittelfläche in x- und in y-Richtungen unabhängig von der z-Komponente. Um nicht die Verschiebung in z-Richtung als neue Größe im Prinzip der virtuellen Verschiebungen berücksichtigen zu müssen, werden ihre Ableitungen als klein gegenüber den anderen Ableitungen angenommen [34, 83]. Der Spannungstensor in kartesischen Koordinaten nimmt dann folgende Form an:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Berechnung von monotonen Zugversuchen zeigt die gleichen Ergebnisse wie bei den axialsymmetrischen Problemen, so daß auf eine grafische Aufbereitung verzichtet wird.

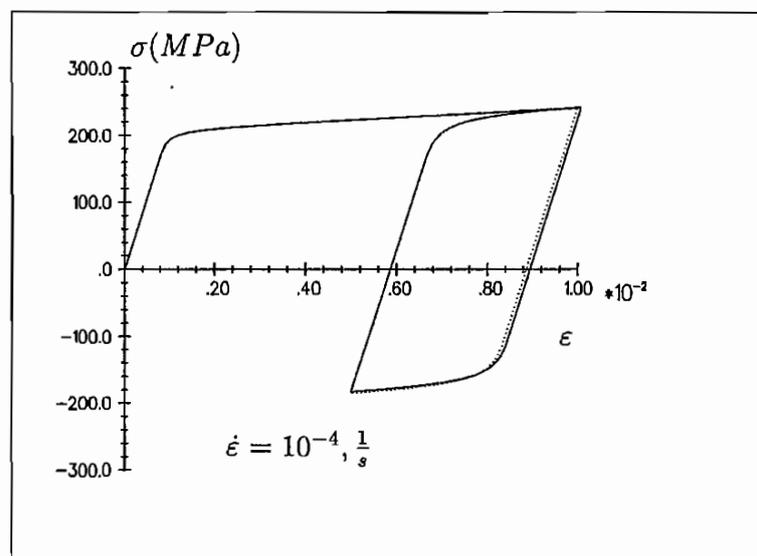


Abb. 4.7 : Zyklischer Versuch erster Zyklus (FEM: \cdots , Rechnung: $—$)

Die Abbildung 4.7 zeigt einen Vergleich mit der Stoffgesetzintegration bei einem zyklischen Versuch mit Mitteldehnung. Dabei wird die Entwicklung im ersten Zyklus vergleichend dargestellt.

4.6.3 Ebener Verzerrungszustand

Ein ebener Verzerrungszustand liegt vor, wenn die Verschiebungen und damit die Dehnungen in der z -Richtung Null sind [46]. Der Einbau in das Finite-Elemente-Programm wird dadurch erleichtert, daß keine Unterschiede bei den Matrizen zur Beschreibung des inelastischen Verhaltens existieren. Die Abweichung treten ausschließlich bei den elastischen Anteilen auf.

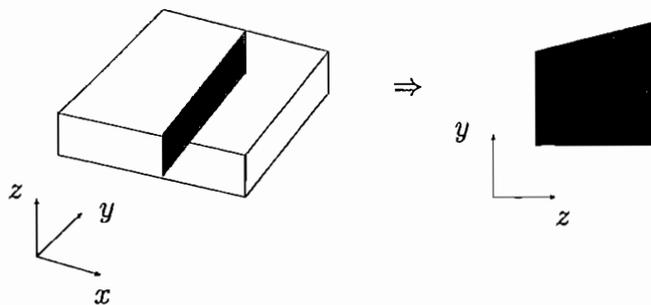


Abb. 4.8 : *Scheibenelement aus [37]*

Unter diesen Voraussetzungen entsteht ein räumlicher Spannungszustand. Das zu integrierende Differentialgleichungssystem muß somit um eine Komponente gegenüber dem ebenen Spannungszustand erweitert werden.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

4.7 Ergebnisse

4.7.1 Axialsymmetrische Strukturen

Bei dem ersten Berechnungsbeispiel handelt es sich um ein Dämpfungssystem. Dabei wird die translatorische Bewegung des Kolbens in einem mit einer Flüssigkeit gefüllten Zylinder gedämpft. Durch das Eindringen des Kolbens in die Flüssigkeit wird ein Innendruck p_i auf die Zylinderwand erzeugt.

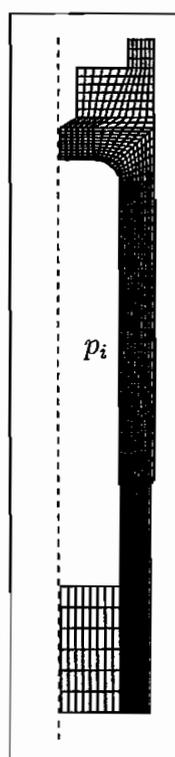


Abb. 4.9 : Zylinder unter Innendruck

Die kritischen Bereiche der Struktur, in denen plastische Verformungen zu erwarten sind, werden bei der Diskretisierung besonders fein unterteilt. Die Abbildung 4.9 zeigt die Unterteilung der Struktur in die Elemente. Der von unten in den Zylinder axial eindringende Kolben ist nicht zusätzlich modelliert worden.

Die Last wird in mehreren Schritten bis zur Bruchspannung erhöht. In den folgenden Abbildungen ist die Entwicklung des plastischem Bereiches zu erkennen.

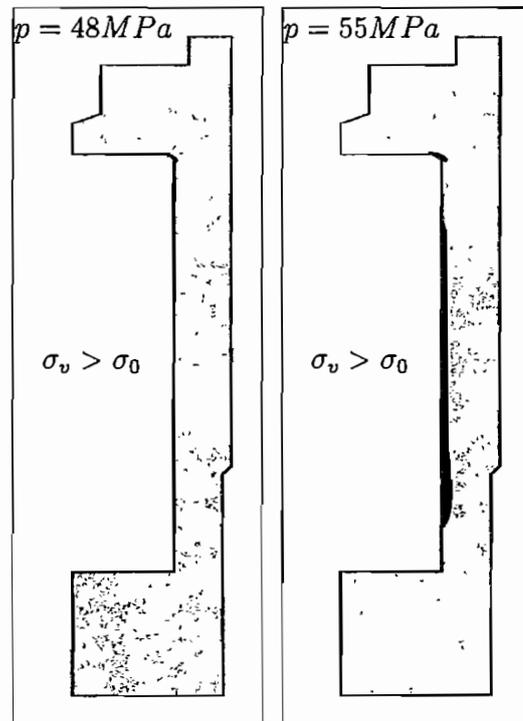


Abb. 4.10 : Zylinder unter Innendruck

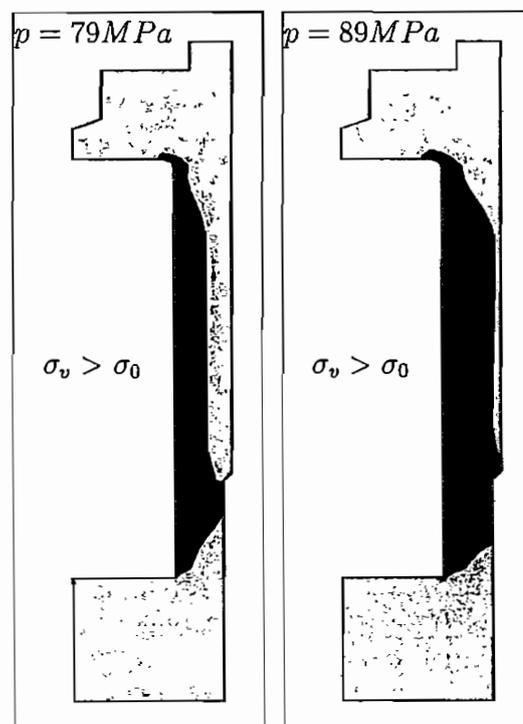


Abb. 4.11 : Zylinder unter Innendruck

Durch die starke Krümmung im Übergang von Zylinderfuß zu Zylinderwand entstehen dort die ersten Spannungsspitzen. Im Verlauf der Belastung verfestigt das Material an dieser Stelle, und der Bereich weitet sich nicht weiter auf. Das Maximum der Vergleichsspannung wird an der Zylinderwand im Bereich der Schwächung des Querschnittes erreicht.

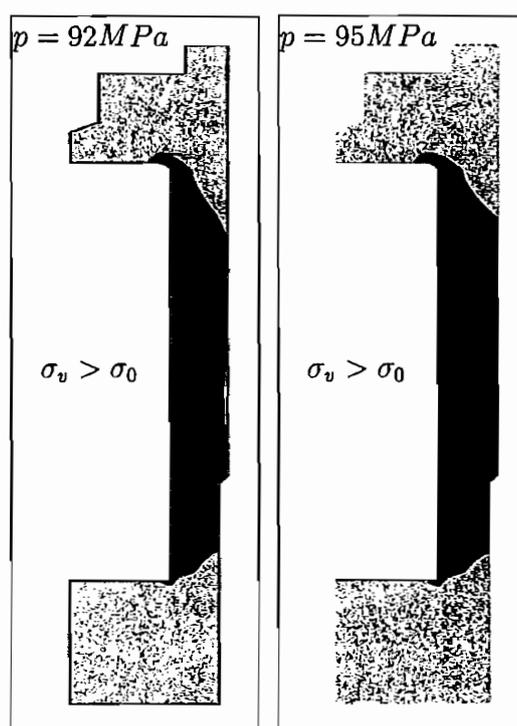


Abb. 4.12 : Zylinder unter Innendruck

Nach ungefähr $80 MPa$ Innendruck wächst der Bereich plastischer Verformung rapide an und bei $95 MPa$ wird die Bruchspannung überschritten. Interessant ist das offensichtlich nichtlineare Fortschreiten der Plastifizierung des Zylinders.

Das Beispiel zeigt die Anwendbarkeit des inelastischen Stoffgesetzes. Entscheidend ist hierbei die Verlagerung des Maximums, was die elastische Theorie nicht wiedergeben kann. Die letzte Abbildung des Zylinders zeigt die Verteilung der Vergleichsspannung beim Bruch des Materials, in der die Verlagerung des Maximums auf die Zylinderwand deutlich wird.

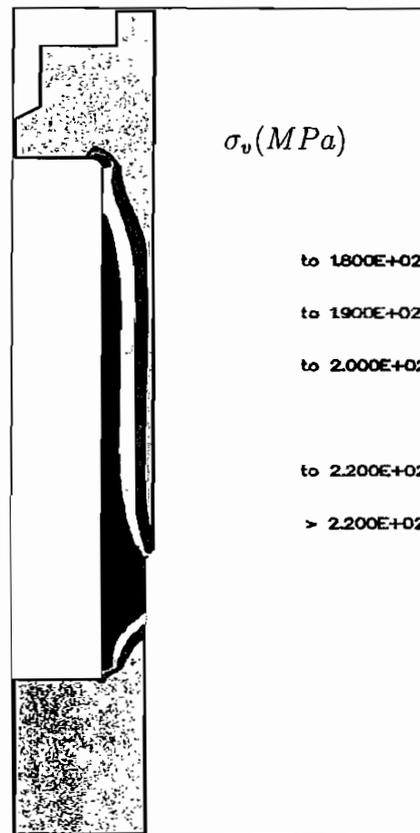


Abb. 4.13 : Zylinder unter Innendruck

4.7.2 Ebener Spannungszustand

Als Beispiel für einen ebenen Spannungszustand wird eine Pleuelstange eines Kraftfahrzeugmotors untersucht. Die Abbildung 4.14 zeigt das Netz mit 528 Elementen, die Randbedingungen und die Belastungen. Aufgrund der geringen Beanspruchungen in der Stegmitte der Pleuelstange wird auf eine Finite Elemente - Unterteilung verzichtet.

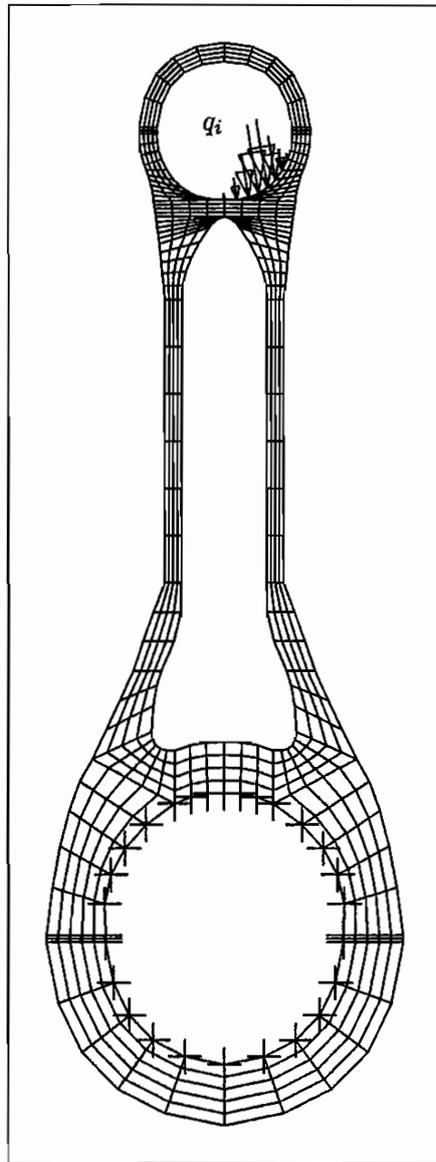


Abb. 4.14 : Pleuelstange

Die Richtung der Belastung entspricht einer Schrägstellung der Pleuelstange gegenüber der Verbindungsgerade der Lagermittelpunkte von 10° . Die Last wird sinusförmig eingeleitet. Die unsymmetrische Lasteinleitung bedingt die Generierung der gesamten Struktur.

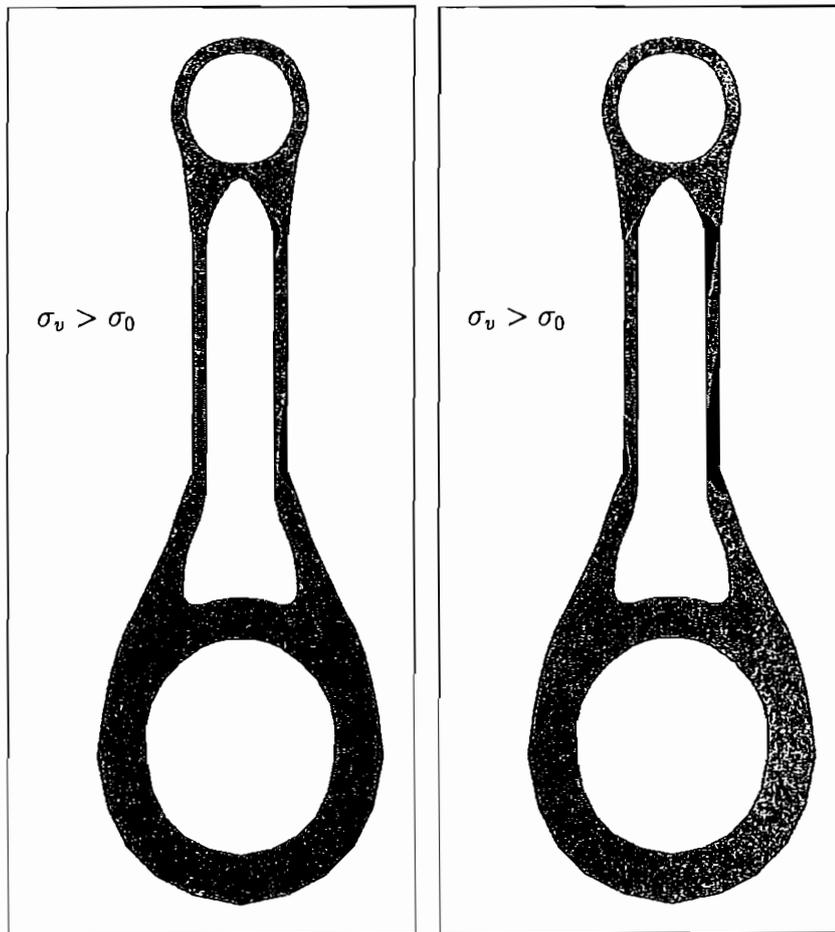


Abb. 4.15 : Pleuelstange ($\sigma_{max} = 1.30 \sigma_0 / 1.45 \sigma_0$)

Die Abbildungen zeigen die Entwicklung der plastischen Zone bei stufenweiser Erhöhung der Last. Bei der Berechnung wird ein viskoplastisches Stoffgesetz gewählt.

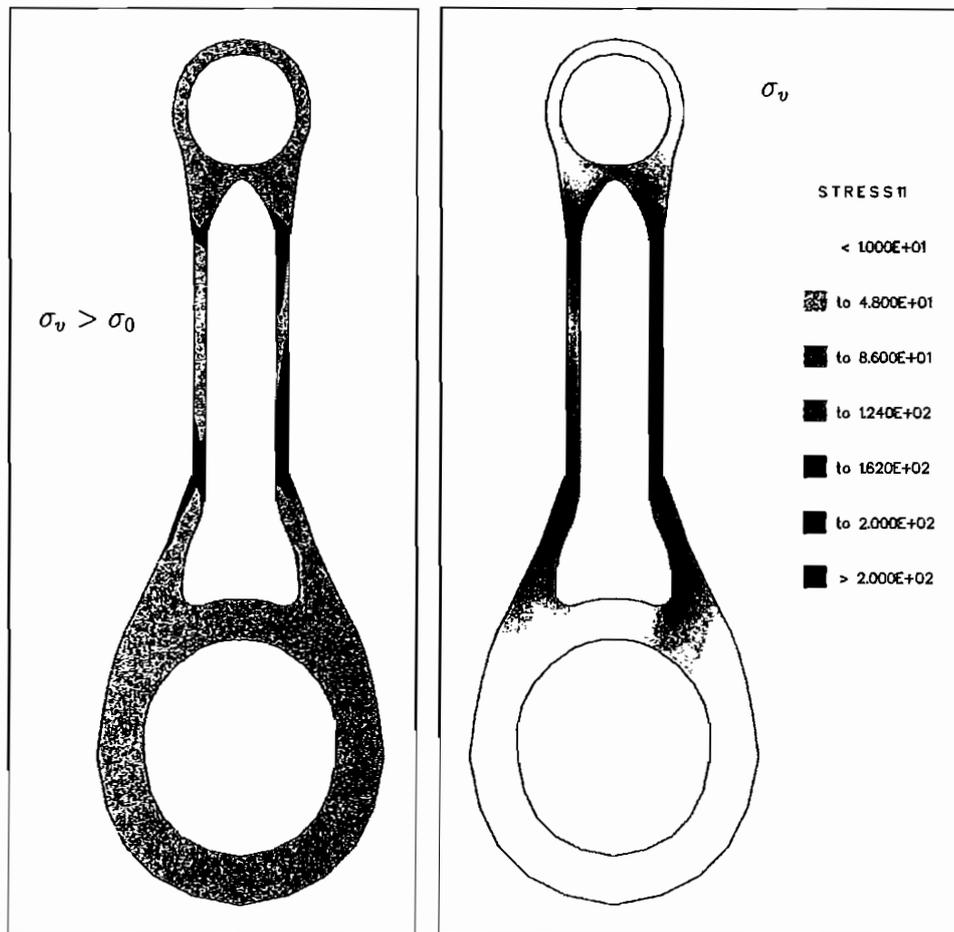


Abb. 4.16 : Pleuelstange ($\sigma_{max} = 1.65 \sigma_0$)

Die linke Grafik der Abbildung 4.16 zeigt die Entwicklung der plastischen Zone bei der maximalen Last. Die rechte Grafik illustriert die Verteilung der Vergleichsspannung. Im Bereich des Steges treten die größten Vergleichsspannungen auf. Im Vergleich zur elastischen Lösung verfestigt die linke Seite des Mittelsteiges und die Spannung im rechten Steg steigt auf deutlich höhere Werte im Vergleich zum Maximum an.

4.7.3 Ebener Verzerrungszustand

Als typisches Beispiel für einen ebenen Verzerrungszustand wird versucht, das Verformungsverhalten einer Schiene in der Querschnittsfläche unter Belastungen in der Querschnittsfläche zu simulieren. Bild 4.17 zeigt die Diskretisierung der Schiene, wobei aufgrund der unsymmetrischen Belastung der komplette Querschnitt in finite Elemente unterteilt wird.

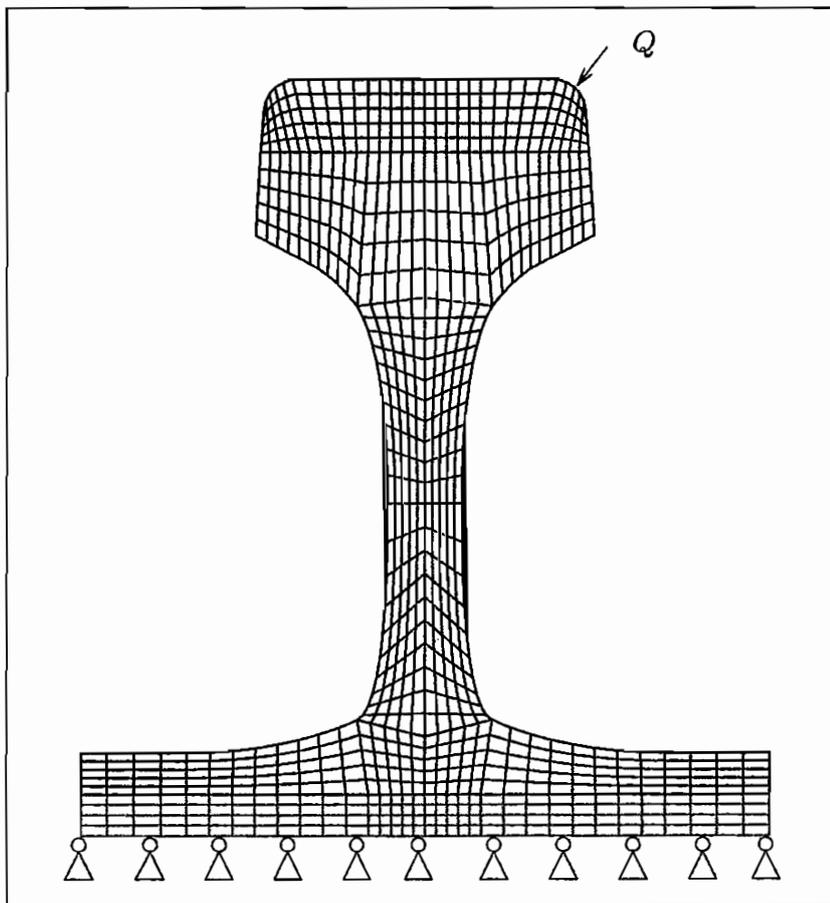


Abb. 4.17 : Schiene nach UIC 60

Die Bettung der Schiene wird vereinfachend mit einer elastischen Materialschicht modelliert. Als Bettungsmodul wird ein mittlerer Wert aus den mehreren Bettungsschichten des Oberbaus und der Schwelle berechnet. Die Linienlast bei dem ebenen Verzerrungszustand wird aus einem über die Lokomotivlänge gemittelten Wert berechnet [25]. Diese Annahme berücksichtigt somit nicht die Durchbiegung der Schiene zwischen zwei Schwellen.

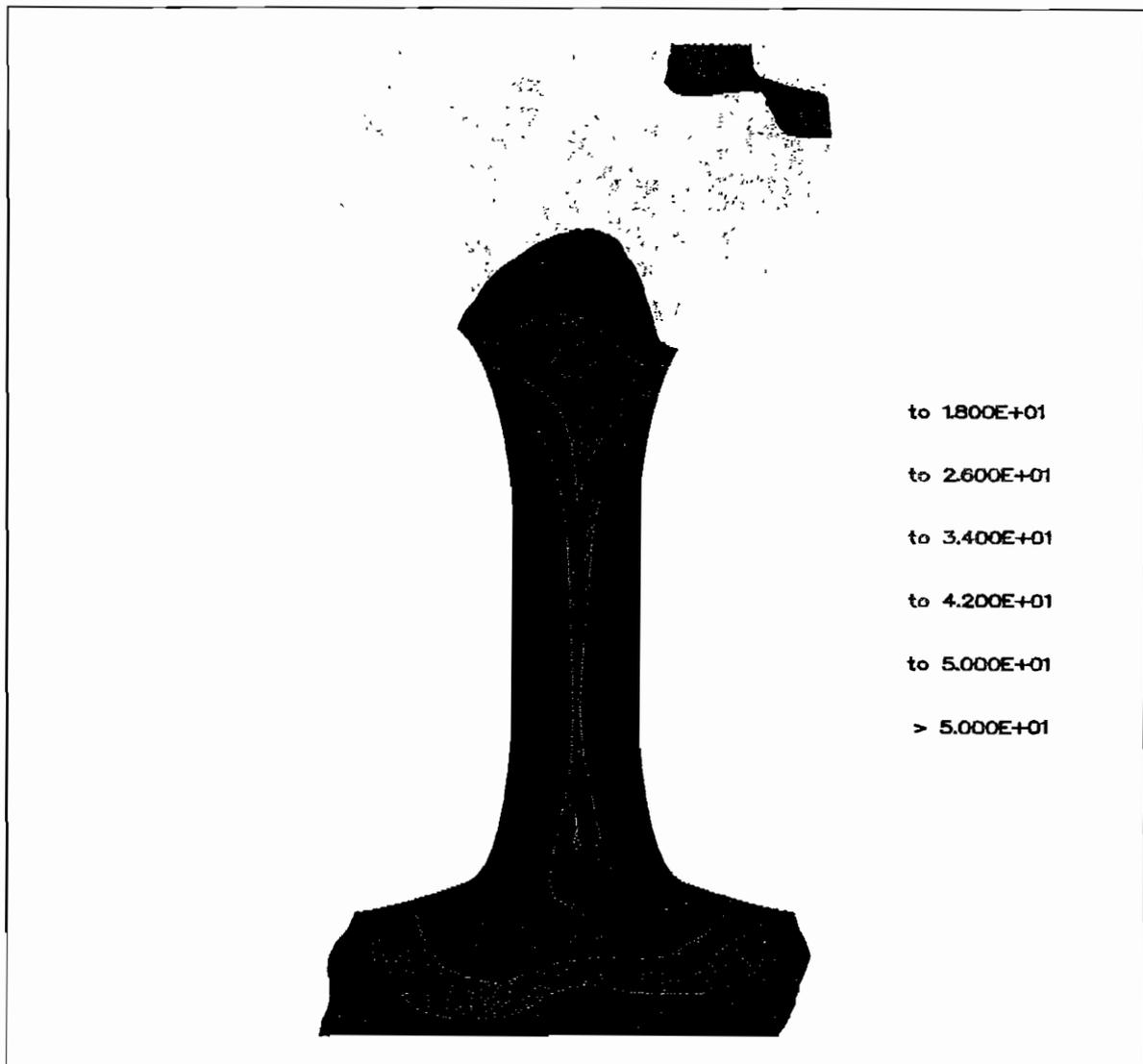


Abb. 4.18 : Vergleichsspannung ($\sigma_{vmax} = 1.5 \sigma_0$)

Der Lastfall nach *Fiedler* [27] entspricht der statischen Belastung infolge des Lokomotivgewichtes und einer radialen Kraft bei einer Fahrt in einem Gleisbogen. Die Belastung wird auf den vierfachen Wert der Nennlast gesteigert.

Dabei wird maximal die Fließspannung um 50 % überschritten. Die größten Beanspruchungen und damit die ersten plastischen Verformungen zeigen sich im Steg der Schiene und in den Krafteinleitungsstellen. Die Abbildung 4.19 zeigt die verformte Schiene bei dreifacher Vergrößerung der Verschiebung.

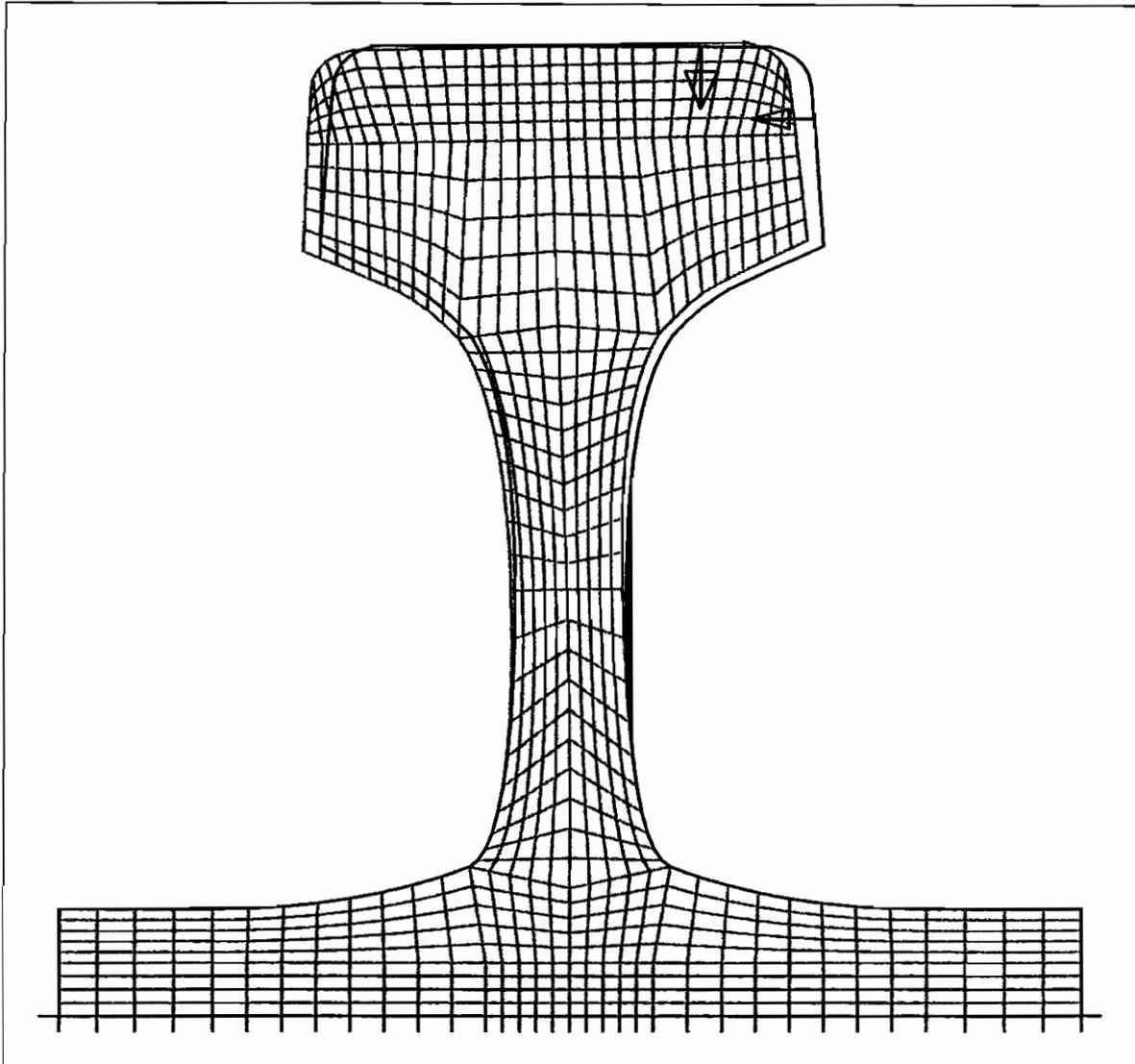


Abb. 4.19 : *Verformte Lage in dreifacher Vergrößerung*

4.8 Schlußfolgerung

In diesem Kapitel wurde gezeigt, daß der Einbau des modifizierten Modells von *Rott* in ein Finite-Elemente-Konzept erfolgreich gelang. Die geometrisch und physikalisch nicht-linearen Probleme wurden durch eine erweiterte Formulierung der Methode gelöst. Die Einbindung eines Mehr-Flächen-Modells in die Finite-Elemente-Analyse gelang mit dem viskoplastischen Materialmodell. Mit dem Einbau in ein semikommerzielles Programm ohne Veränderung des Steuerungsprogrammes wurde die Basis für strukturelle Erweiterungen geschaffen.

Die Berechnungen verdeutlichen insbesondere die Möglichkeit derartiger Stoffgesetzformulierung. Die Ermittlung der Materialparameter aus einfachen Grundversuchen führte zu einer mehraxialen Analyse in einem Finite-Elemente-Programm. Die Beispielsberechnungen mit dem aufwendigen Stoffgesetz zeigten die Verwendbarkeit auch für praktische Berechnungen im Ingenieurwesen. Dabei profitieren die Berechnungsmethoden in zunehmenden Maße von den hohen Rechenleistungen heutiger Computer. Die Auslegung von Bauteilen kann material- und somit kostengünstiger durchgeführt werden.

Kapitel 5

Ausblick

Aufbauend auf dieser Arbeit können in den drei angesprochenen Bereichen weitere Untersuchungen unternommen werden.

Auf der experimentellen Seite können weitere zyklische Versuche und Relaxationsversuche bei hohen Geschwindigkeiten ($\dot{\epsilon} = 10^{-2} \frac{1}{s}$) durchgeführt werden. Dies setzt aber eine Trennung der Meßdatenerfassung von der Versuchssteuerung voraus. Desweiteren können die meistens Proben aufgrund der kleinen Formänderungen und der bekannten Vorgeschichte weiter verwendet werden. Aufbauend auf den einaxialen Experimenten können mehraxiale Versuche mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten gefahren werden. Das zyklische Verhalten bei mehraxialen Versuchen wurde bereits von *Kikillus* ausführlich untersucht. Erhöhte Temperaturen führen insbesondere bei Kriechversuchen zu Unterschieden in der Entwicklung der Dehnung und dem Erreichen des tertiären Bereiches.

Durch die Konzeption des Stoffgesetzes ist es möglich, das plastische Basismodell auszutauschen, ohne daß eine Nachoptimierung der Parameter des geschwindigkeitsabhängigen Modells nötig ist. Somit können andere Mehr-Flächen-Modelle eingebaut werden, die z.B. zyklisches Kriechen beschreiben. Das Stoffgesetz ist nach der Durchführung der entsprechenden Versuche zur Berechnung nichtisothermer Prozesse zu erweitern. Desweiteren zeigen schon die Experimente die Notwendigkeit der Berücksichtigung der Schädigung, um Erholungseffekte hinreichend genau beschreiben zu können. Dazu kann auf die Materialgesetze von *Feldmüller* [26], der eine isotrope Schädigungsverteilung berücksichtigte, oder von *Schieße* [71], der allgemein anisotrop geschädigte Kontinua betrachtete, zurückgegriffen werden.

Ein praktisches Problem bei der Integration des Stoffgesetzes besteht darin, daß spannungsgesteuerte Versuche deutlich höhere Rechenzeiten benötigen, da die konstitutiven

Gleichungen nicht eindeutig nach den Raten aufzulösen sind. Ein Konvergenzbeschleuniger kann hier Abhilfe schaffen.

Das Finite-Elemente-Programm kann um weitere Strukturelemente erweitert werden. Das axialsymmetrische Element wird z.Z. um die Torsion erweitert und die Erstellung eines dreidimensionalen Elementes ermöglicht die Berechnung komplexer Geometrien. Der Verwendung eines Praediktor-Korrektor-Verfahrens verringert die Rechenzeit insbesondere bei großen plastischen Verformungen.

Anhang A

Schliffbilder

Für eine Härtemessung und für die Schliffbilder wurden nach den Versuchen einige ausgewählte Proben durchgeschnitten und von verschiedenen Schnitten Schliffbilder erstellt. Für eine mehrdimensionale Untersuchung wurden neben den üblichen Schnittflächen mit einer axialen Flächennormalen auch tangentiale Schnitte (siehe Abb.1.1) betrachtet.

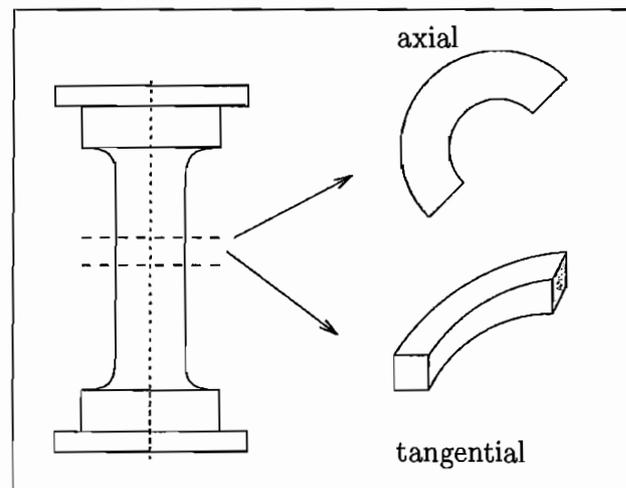


Abb. 1.1 : *Schnittflächen*

Die ersten Schliffbilder zeigen die axialen Schnitte zweier Proben unterschiedlicher Verformungszustände.

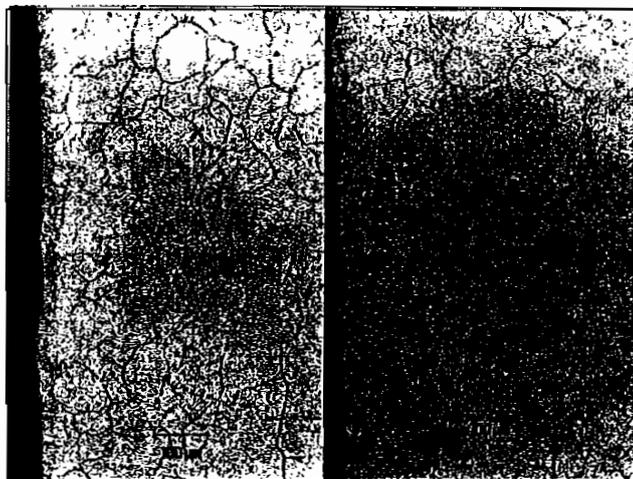


Abb. 1.2 : Axialer Schnitt bei zwei Proben

Dabei erfuhr die linke Probe (V1) eine Gesamtdehnung von ca. 35% bei einem monotonen Zugversuch mit der maximalen Geschwindigkeit der Maschine ($\dot{\epsilon} \approx 10^0 \frac{1}{s}$). Die andere Probe (V2) wurde bei einer Spannung von 250MPa angehalten, und es akkumulierte eine Dehnung von insgesamt 2.24%. Der erste Vergleich zeigte nur sehr geringe Unterschiede zwischen den Schlifflinien. Offensichtlich ist, daß das Gefüge bei der höher belasteten Probe feiner geworden war. Bei einer weiteren Vergrößerung um den Faktor 10 war eine Verbreiterung der Korngrenzen zu erkennen.

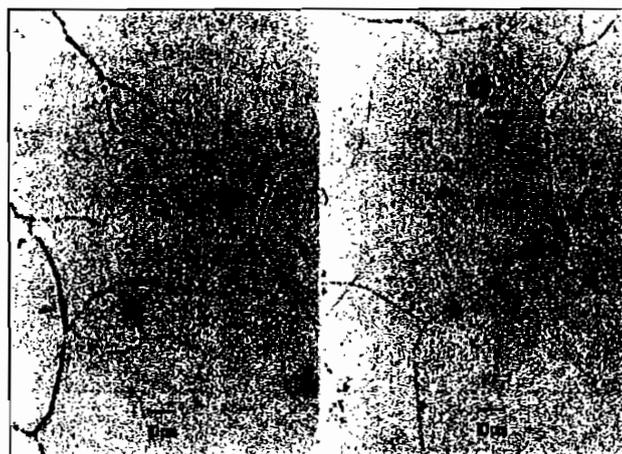


Abb. 1.3 : Korngrenzenerweiterung

Dies war ein typisches Zeichen für die vorgeschrittene plastische Verformung. Die Breite der Korngrenzen wurde ungefähr verdoppelt. Die Härte wurde nach Vickers [19] an drei

verschiedenen Punkten der Probe von innen nach außen nach Norm gemessen. Die folgende Tabelle zeigt die Ergebnisse :

Versuch	innen	mitte	außen
V1	269	286	285
V2	196	180	195

Tabelle A.1: Härteprüfung nach Vickers

Die Messung erfolgte mit einer Prüfkraft von $0.5N$ und einer Haltezeit von $10s$ im Kleinlastbereich. Obwohl die Härte kein eindeutiges physikalisches Maß darstellt, läßt sich dennoch eine Aussage über den Verformungszustand gewinnen, da die größere Verfestigung der ersten Probe auch eine größere Härte hervorrief.

Die axialen Schnitte zeigen erwartungsgemäß ein etwas anderes Aussehen. Der Belastungsrichtung ist in der Abbildung eingezeichnet und man erkennt eine längliche Form der Körner parallel zur Belastungsrichtung.

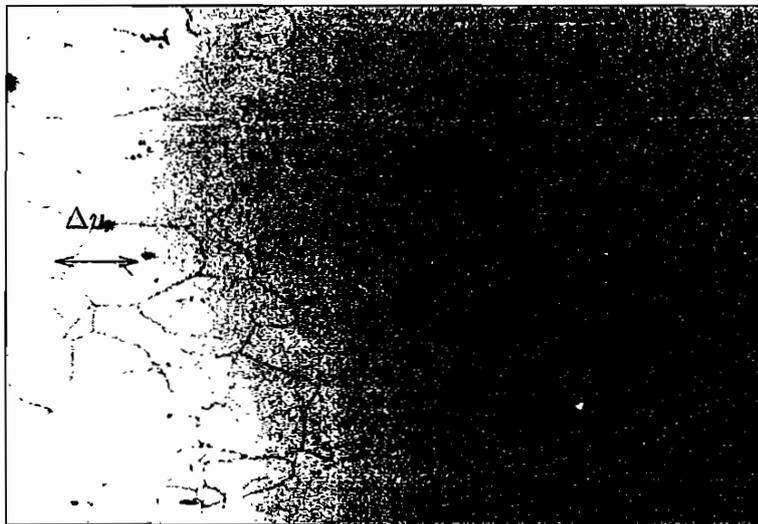


Abb. 1.4 : Tangentialer Schnitt bei Probe V1

Die letzten zwei Schlifffbilder zeigen die gleiche Probe in der gleichen Schnittfläche. In der Abbildung 1.5 ist die verstärkte Anlagerung von Kohlenstoffatomen an den Korngrenzen zu erkennen.



Abb. 1.5 : *Tangentialer Schnitt bei Probe V1*

Die letzte Abbildung zeigt eine deutliche Auswirkung der Verformung auf die Körner. Die nahezu im Winkel von 45° zu der Belastungsrichtung entstehenden Riefen sind auf die Abscherung der Körner zurückzuführen.



Abb. 1.6 : *Tangentialer Schnitt bei Probe V1*

Auf die Auswertung der Schliffbilder wird nicht weiter eingegangen, da eine umfangreichere Untersuchung und Auswertung nicht das Ziel dieser Arbeit ist. Vielmehr sollen die Abbildungen als Anstoß und als Test für weitere Experimente in diesem Bereich dienen.

So ließen sich z.B. die Schliffbilder mit Hilfe einer CCD-Kamera erfassen und mit geeigneten Computerprogrammen auf verschiedene Schädigungsmechanismen auswerten. Die Schliffbilder wurden am Institut für Werkstofftechnik der Ruhr-Universität Bochum erstellt.

Anhang B

Parameter

B.1 Modell Chaboche

Kinematische Verfestigung:

$$c_1 = 1.207 \cdot 10^5 \text{ [MPa]}$$

$$b_1 = 6.538 \cdot 10^3 \text{ [-]}$$

$$c_2 = 4.493 \cdot 10^3 \text{ [MPa]}$$

$$b_2 = 51.672 \text{ [-]}$$

Isotrope Verfestigung:

$$R_0 = 156.465 \text{ [MPa]}$$

$$d = 0.893 \text{ [-]}$$

$$Q = 137.768 \text{ [MPa]}$$

B.2 IA-Modell (plastisch)

Isotrope Verfestigung:

$$g_0 = 15000.0 \text{ [MPa}^2\text{]}$$

$$g_\infty = 69354.0 \text{ [MPa}^2\text{]}$$

$$c_1 = 0.0025 \text{ [MPa}^{-1}\text{]}$$

Kinematische Verfestigung:

$$c_0 = 2373.66 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{a \varepsilon^2 + b \varepsilon + c}{d + \varepsilon}$$

$$\Rightarrow E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = a + \frac{d(b - ad) - c}{(d + \varepsilon)^2}$$

$$a = 3500.0 \text{ [MPa]}$$

$$b = 190.41 \text{ [MPa]}$$

$$c = -0.11889 \text{ [MPa]}$$

B.3 Zwei-Flächen-Modell

	Isotrope Verfestigung:	Kinematische Verfestigung:
Fließfläche:	$c_1 = 1.0222 \text{ [MPa}^{-1}\text{]}$	$c_3 = 74.854 \text{ [-]}$
	$c_2 = 0.0601 \text{ [s}^{-1}\text{]}$	$c_4 = 3.8450 \text{ [-]}$
	$\sigma_0 = 167.99 \text{ [MPa]}$	$m = 8.499 \text{ [-]}$
		$E_{t\infty} = 3180.21 \text{ [MPa]}$
Grenzfläche:	$c_5 = 0.0227 \text{ [MPa}^{-1}\text{]}$	
	$c_6 = 5.0729 \text{ [s}^{-1}\text{]}$	
	$\tilde{\sigma}_0 = 231.71 \text{ [MPa]}$	

B.4 Modifiziertes Modell von *Rott*

Funktionen A und B :	Funktionen Φ und Δ :
$a_0 = 14.926 \text{ [-]}$	$p_1 = 0.2216 \text{ [s}^{-1}\text{]}$
$a_1 = 10^{-9} \text{ [-]}$	$p_2 = 2.9731 \cdot 10^{-12} \text{ [MPa}^{-1} \text{ s}^{-1}\text{]}$
$b_1 = 6.093 \cdot 10^{-4} \text{ [-]}$	$p_3 = 7.7837 \cdot 10^{-8} \text{ [MPa}^{-2} \text{ s}^{-1}\text{]}$
$b_2 = 7.3407 \text{ [-]}$	$p_4 = 0.6383 \text{ [-]}$
$b_3 = -5.5116 \text{ [MPa}^{-2} \text{ s}^{-1}\text{]}$	$l_1 = 152.63 \text{ [-]}$
	$l_2 = 0.2341 \text{ [MPa]}$

Anhang C

FEAP

Das Finite-Elemente-Programm FEAP wurde zur Lösung nichtlinearer Probleme entwickelt. Es steht eine Schnittstelle zur Eingabe benutzereigener Elemente zur Verfügung. Die Eingabe beschränkt sich auf die Programmierung der Matrizen auf Elementebene. Der Zusammenbau, die Dreieckszerlegung und die Lösung des Gleichungssystems oder die Gleichgewichtsiteration übernimmt das Hauptprogramm. Im folgenden wird das vom Benutzer zu erstellende Unterprogramm beschrieben, danach folgt eine kurze Erläuterung der Befehlsfolge zur Lösung nichtlinearer Probleme. Exemplarisch wird das Strukturelement Nummer sechs für den ebenen Spannungs- und Verzerrungszustand herausgegriffen.

C.1 Elementprogramm

Der Nutzer von FEAP muß dem Programm einige Matrizen zur Verfügung stellen. Dazu wird in FORTRAN77 ein Unterprogramm mit folgender Kopfzeile erzeugt:

```
subroutine elmt06(d,ul,xl,ix,tl,s,p,ndf,ndm,nst,isw)
```

Die Bedeutung der Parameter der Übergabe ist wie folgt:

d : Feld mit den Materialdaten
 ul : Feld mit den Knotenverschiebungen
 xl : Feld mit den Knotenkoordinaten
 ix : Feld mit den globalen Knotennummern
 tl : Elementtemperatur
 s : Steifigkeitsmatrix
 p : Elementvektor
 ndf : Anzahl der Freiheitsgrade im Element
 ndm : Dimension des Problems
 nst : Elementgrößenvektor
 isw : Steuerparameter

Zusätzlich werden einige Parameter über COMMON-Blöcke dem Hauptprogramm bereit gestellt (siehe S.143 in [77]).

Dem Steuerparameter `isw` kommt dabei eine entscheidene Bedeutung zu. In Abhängigkeit dieser Variable verlangt FEAP die Elementmatrizen oder einige andere spezifische Informationen wie z.B. Materialdaten. Die Bedeutung der einzelnen Werte für die Steuervariable lauten wie folgt:

`isw = 1` : Materialdaten und Vorbelegungen
`isw = 2` : Abspeicherung der Gedächtnisvariablen
`isw = 3` : Berechnung der Steifigkeitsmatrix
`isw = 4` : Ausgabe der berechneten Größen Eine genauere Beschreibung folgt
`isw = 5` : Berechnung einer Massenmatrix
`isw = 6` : Berechnung des Ungleichgewichtsvektors
`isw = 8` : Grafische Ausgabe der Spannungen

in den nächsten Abschnitten.

C.1.1 `isw=1`

Hierbei werden die Daten aus dem Eingabefile nach dem Makro `mate` eingelesen. Für das Element 6 sind das:

```

mate
1,6
ngauss1,ngauss2,dicke
matdat,nlaw,nstruktur,nsteuer
  
```

Die Größen `ngauss1` und `ngauss2` geben die Anzahl der Gaußpunkte zur Berechnung und zur Ausgabe der Spannungen an. Bei dem hier vorliegenden zweidimensionalen Problem und der Beschränkung auf vier Knoten pro Element existieren bei der Angabe von `ngauss1=2` insgesamt vier Gaußpunkte pro Element. Ablegt werden diese Größen auf die

Stellen 16 und 17 des Materialdatenfeldes `d` und stehen so bei jedem Aufruf unmittelbar zur Verfügung.

Die Größe `dicke` gibt bei einem ebenen Verzerrungszustand die Elementdicke an und ist auf der Position Nummer 18 von `d` abgelegt. Bei einem ebenen Spannungszustand ist der Wert auf eins festgelegt.

Die String-Variable `matdat`, der Länge vier, bezeichnet die Datei mit den Materialdaten. Diese muß im Ordner `mat.dir` stehen und ist so aufgebaut, daß nach einer Kommentarzeile die Anzahl der Materialdaten bestimmt wird. Es folgen die Materialdaten selbst, die dann auf die ersten 15 Stellen des Feldes `d` abgelegt werden.

Die Größe `nlaw` gibt das verwendete Stoffgesetz an und ist wie die folgenden Werte auf dem benutzereigenen COMMON-Block `daten4` abgelegt. `nstruktur` unterscheidet den ebenen Verzerrungszustand (`nstruktur=0`) vom ebenen Spannungszustand (`nstruktur=1`). `nsteuer` steuert die Ausgabe der Spannungen oder anderer Größen in eine Datei.

Desweiteren muß an dieser Stelle die Anzahl der sogenannten Gedächtnis-Variablen festgelegt werden. Als Gedächtnis-Variablen werden alle Variablen im Element bezeichnet, die im nächsten Lastschritt zur Berechnung benötigt werden. Da hier eine Update-Lagrangesche Formulierung gewählt wird, sind dies die zunächst Spannungsgrößen (Cauchy- und 2te.Piola-Kirchhoff Spannungen) und die internen Variablen. Darüberhinaus müssen zur Bestimmung des aktuellen Verschiebungsinkrementes die Verschiebungen gespeichert werden. Abgelegt werden diese Größen auf dem Feld `m` im unbenannten COMMON-Block. Dazu muß dort der Speicherplatz reserviert werden. Dies geschieht mit der Belegung der Variable `nh1` des COMMON-Blockes `/hdata/` mit der Gesamtanzahl der Gedächtnis-Variablen.

C.1.2 isw=2

Beim Aufruf des Makros `chec` wird die Steuervariable mit zwei belegt. Dabei erfolgt ausschließlich die Berechnung und die Abspeicherung der Gedächtnis-Variablen auf das Feld `m` im unbenannten COMMON-Block. Die Größe `nh1` fungiert jetzt als Zeiger, ab dem der Speicherplatz in `m` freigehalten wird.

Die Abspeicherung muß ausgelagert werden, da während der Gleichgewichtsiteration nur die Größen zu Beginn des Lastschrittes benötigt werden. Daraus folgt, daß der Aufruf direkt nach Iteration stattfinden muß, um die Anfangsgrößen für den nächsten Lastschritt festzulegen.

Die Berechnung der Spannung erfolgt über die Integration der konstitutiven Gleichungen aus dem Verschiebungsfeld. Dabei werden die gleichen numerischen Integrationen wie bei der Anpassung im Kapitel 3.2.3 benutzt. Dafür verzweigt das Programm in die Routine `stre06`, die auch bei anderen Aufrufen benutzt wird.

C.1.3 `isw=3`

Hierbei wird die Steifigkeitsmatrix gemäß Gleichung (4.69) berechnet und auf dem Feld `s` abgelegt. Diese besteht zum einen aus dem Anteil:

$$[\mathbf{K}_l] = \int_V [{}^{(1)}\mathbf{B}_l]^T [\mathbf{C}] [{}^{(1)}\mathbf{B}_l]^t d^tV$$

Bei einigen Stoffgesetzen können die konstitutiven Gleichungen nicht eindeutig nach den Dehnungsraten aufgelöst werden, weshalb dies in der obigen Gleichung berücksichtigt werden muß. Zudem entsteht durch die Nichtlinearität des Problems eine unsymmetrische Matrix.

Zusätzlich wird noch folgender Anteil benötigt:

$$[\mathbf{K}_{nl}] = \int_V [\mathbf{B}_{nl}]^T [{}^{(0)}\mathbf{S}^*] [\mathbf{B}_{nl}]^t d^tV$$

Da die Steifigkeitsmatrix als „Startrichtung“ für die Gleichgewichtsiteration dient, können die unsymmetrischen Anteile vernachlässigt werden. Das zugehörige Makro heißt `tang`.

Neben der Steifigkeitsmatrix wird hierbei auch der Elementvektor `p` um den inelastischen Anteil aus Gleichung (4.69) ergänzt.

$$[\mathbf{R}_q] = \int_V [{}^{(1)}\mathbf{B}_l]^T [\mathbf{q}]^t d^tV$$

C.1.4 `isw=4`

Bei der Wahl vier werden Spannungen oder andere Größen ausgegeben, wenn der Befehl `stre` ausgeführt wird. Ausgegeben wird auf den Dateien, dessen Nummern über den COMMON-Block `/iofile/` übergeben werden. Zum anderen kann eine benutzerdefinierte Ausgabe gemäß der Variable `nsteuer` auf einer anderen Datei erfolgen.

C.1.5 isw=5

Bei Problemen, bei denen Trägheitseffekte nicht zu vernachlässigen sind, kann an dieser Stelle eine Massenmatrix angegeben werden. Der Aufruf erfolgt über die Makros `lmas` oder `cmas`, in Abhängigkeit welche Art von Matrix eingegeben wird.

C.1.6 isw=6

Hierbei wird der Ungleichgewichtsvektor der Iteration berechnet und dem Hauptprogramm nach dem Aufruf des Makros `form` zur Verfügung gestellt. Der Elementvektor `p` wird um den folgenden Anteil ergänzt:

$$[{}^{(i-1)}\mathbf{F}] = \int_V [{}^{(i)}\mathbf{B}_l]^T [{}^{(i-1)}\mathbf{S}]^t d^tV$$

C.1.7 isw=8

Dieser Programmteil wird benötigt, wenn Spannungen grafisch ausgegeben werden sollen. Das Makro lautet dann `plot,stre` und es wird weiter in das Unterprogramm `stcn06` verzweigt. Das Programm muß FEAP dann die Werte der ausgegebenen Daten an den Knoten und nicht wie abgespeichert an den Gaußpunkten zur Verfügung stellen.

C.2 Befehlsfolge

Die Lösung des Problems bedarf einer festgelegten Reihenfolge der Makro-Befehle in FEAP:

<code>dt, ,1.0</code>	Festlegen des Zeitschrittes
<code>loop, ,20</code>	Schleife über alle Lastschritte
<code>tang</code>	Berechnung der Steifigkeitsmatrix
<code>loop, ,50</code>	Schleife über alle Iterationschritte
<code>form</code>	Berechnung des Ungleichgewichtes
<code>solv</code>	Lösung des Gleichungssystems
<code>next</code>	
<code>chec</code>	Abspeicherung der Gedächtnisvariablen
<code>stre,all</code>	Ausgabe der Spannung (optional)

```

newf      Erhöhung der Last um ein Inkrement
next

```

Gerechnet wird pro Lastschritt mit dem Lastinkrement, das in der Eingabedatei mit dem Makro `forc` festgelegt wird. damit ergibt sich die Geschwindigkeit aus dem Quotienten aus Lastinkrement und Zeitinkrement. Bei dieser Befehlsfolge kann das Lastinkrement nicht erhöht werden. Dazu muß die Reihe folgenermaßen erweitert werden:

```

prop      Festlegen der Proportionallast
1,1,,1.d8,1
dt,,1.0   Festlegen des Zeitschrittes
loop,,20  Schleife über alle Lastschritte
  time    Aktualisieren der Zeit und Last
  tang    Berechnung der Steifigkeitsmatrix
loop,,50  Schleife über alle Iterationschritte
  form    Berechnung des Ungleichgewichtes
  solv    Lösung des Gleichungssystems
next
chec      Abspeicherung der Gedächtnisvariablen
stre,all  Ausgabe der Spannung (optional)
next

```

Durch die Veränderung des Zeitschrittes ist es möglich, die Last beliebig zu ändern, wobei die Geschwindigkeit konstant bleibt.

Literaturverzeichnis

- [1] F.R.S. Argyris and H.-P. Mlejnek. *Die Methode der finiten Elemente*, volume 2. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1987. IX, pp.614.
- [2] P.J. Armstrong and C.O. Frederick. A mathematical representation of multiaxial bauschinger effect. Rd/b/n 731, G.E.G.B., 1960.
- [3] G. Backhaus. Zur analytischen Darstellung des Materialverhaltens im plastischen Bereich. *ZAMM*, 51:471–477, 1971.
- [4] G. Backhaus. Zur analytischen Erfassung des allgemeinen Bauschingereffektes. *Acta Mechanica*, 14:31 – 42, 1972.
- [5] K.-J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin, New York, 1982. XVI, pp.820.
- [6] Hans Berns. *Stahlkunde für Ingenieure: Gefüge, Eigenschaften, Anwendungen*. Wissenschaftsver., Berlin, 2., korrigierte aufl. edition, 1993.
- [7] D. Besdo. Zur Formulierung von Stoffgesetzen der Plastomechanik für plastisch anisotrope/elastisch isotrope Medien im Dehnungsraum. *ZAMM*, 60:T101–T102, 1980.
- [8] Josef Betten. *Tensorrechnung für Ingenieure*. Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 2 edition, 1986.
- [9] B. Böcke et. al. New constitutive equations to describe infinitesimal elastic-plastic deformations. Technical Report 68.05503.9, INTERATOM, 1982.
- [10] O. T. Bruhns and et.al. The Interatom model. In J. Fan and S. Murakami, editors, *Advances in Constitutive Laws for Engineering Materials*, International Academic Press, pages 16–21, Beijing, 1989.

- [11] O.T. Bruhns. Constitutive modelling in the range of inelastic deformations. Technical Report 68.09030, INTERATOM, 1984. 33-63.
- [12] O.T. Bruhns and I. Müller. Some remarks on the application of a two-surface model in plasticity. *Acta Mechanica*, 53:81-100, 1984.
- [13] O.T. Bruhns and B. Westerhoff. Inelastisches Materialverhalten. Technical Report Br 580 / 4-3, DFG-Forschungsvorhaben, Juli 1993.
- [14] J. L. Chaboche. Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity. *International Journal of Plasticity*, 2(2):149-188, 1986.
- [15] L. Collatz and J. Albrecht. *Aufgaben aus der Angewandten Mathematik II*. Uni-Text. Vieweg, Braunschweig, 1973. pp. 141.
- [16] Y. F. Dafalias and E. P. Popov. A model of nonlinearly hardening materials for complex loading. *Acta Mechanica*, 21:173-192, 1975.
- [17] Y. F. Dafalias and E. P. Popov. Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 45:645-650, 1976.
- [18] Reint de Boer. *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Hochschultext. Springer, Berlin, New York [u.a.], 1982. IX, pp. 287.
- [19] Hrsg.: DIN Deutsches Institut für Normung. Materialprüfnormen für metallische Werkstoffe. 1. Bescheinigungen, Prüfgeräte, Prüfmaschinen, erzeugnisformunabhängige mechanische-technologische Prüfverfahren DIN-Taschenbuch 19, Beuth, 1990.
- [20] Hrsg.: DIN Deutsches Institut für Normung. Stahl und Eisen. Gütenormen: 5. Nichtrostende Stähle und andere hochlegierte Stähle DIN-Taschenbuch 405, Beuth, 1993.
- [21] Herbert Diehl. *Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, June 1989. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 66.
- [22] J. R. Dormand and P. J. Prince. A family of embedded runge-kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1):19-26, 1980.

- [23] J. R. Dormand and P. J. Prince. A reconsideration of some embedded runge-kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 15:203–211, 1986.
- [24] M. A. Eisenberg and A. Phillips. On nonlinear kinematic hardening. *Acta Mechanica*, 5:1–13, 1967.
- [25] J. Eisenmann, editor. *Forschungsarbeiten auf dem Gebiet des Eisenbahn- und Straßenoberbaus*. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1974.
- [26] Andreas Feldmüller. *Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, April 1991. Mitteilung aus dem Institut für Mechanik Nr. 75.
- [27] J. Fiedler. *Grundlagen der Bahntechnik*. Werner Ingenieur Texte. Werner Verlag, 3 edition, 1991.
- [28] B.A. Finlayson and L.E. Scriven. The method of weighted residuals - a review. *Applied Mechanics Reviews*, 19:735–747, 1966.
- [29] Werner Fornefeld. *Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, January 1990. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 73.
- [30] N. K. Gupta and H. A. Lauert. A study of yield surfaces upon reversal of loading under biaxial stress. *ZAMM*, 63:497–504, 1983.
- [31] P. Haupt, M. Korzen, and H. Bumb. Inelastisches Werkstoffverhalten: Experimentell beobachtete Phänomene und mathematische Modellierung. BMFT-Vorhaben 1500 516, Technische Hochschule Darmstadt, June 1985.
- [32] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity*. The Oxford Engineering Science Series. Clarendon Press, Oxford, 1950. IX, pp. 355.
- [33] E. Hornbogen and H. Warlimont. *Metallkunde: Aufbau und Eigenschaften von Metallen und Legierungen*. Springer, Berlin, 2. edition, 1991.
- [34] Karl-Josef Jakobi. *Die Berechnung großer elasto-plastischer Verformungen nach der Methode der Finiten Elemente auf der Basis eines erweiterten Variationsprinzips*.

- PhD thesis, Universität-Gesamthochschule Siegen, 1982. Fachbereich Maschinetechnik 1.
- [35] Uwe Kikillus. *Ein Beitrag zum zyklischen Verhalten von CK15*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, Mai 1993. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 84.
- [36] Eberhard Klingbeil. *Tensorrechnung für Ingenieure*. B.I.-Wiss., Mannheim, u.a., 2 edition, 1989. pp. 197.
- [37] Jörg Körber. *Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, April 1994. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 88.
- [38] M. Korzen. *Beschreibung des inelastischen Materialverhaltens im Rahmen der Kontinuumsmechanik: Vorschlag einer Materialgleichung vom viskoelastisch-plastischen Typ*. PhD thesis, Technische Hochschule Darmstadt, 1988. Fachbereich Mechanik.
- [39] E. Krempl. An experimental study of room-temperature rate-sensitivity, creep and relaxation of aisi type 304 stainless steel. *J. Mech. Phys. Solids*, 27(2):363–375, 1979.
- [40] E. Krempl and V. V. Kallianpur. Some critical uniaxial experiments for viscoplasticity at room temperature. *J. Mech. Phys. Solids*, 32(4):301–314, 1984.
- [41] R. D. Krieg. A practical two surface plasticity theory. *Journal of Applied Mechanics*, 45:641–645, 1975.
- [42] W. Beitz ; K.-H. Küttner, editor. *Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer, Berlin [u.a.], 17. neubearb. Aufl. edition, 1990.
- [43] E.H. Lee, R.L. Mallett, and T.B. Wertheimer. Stress analysis for anisotropic hardening in finite-deformation plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 50:554–560, 1983.
- [44] Theodor Lehmann. Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für große elasto-plastische Formänderungen. *Ingenieur-Archiv*, 41:297–310, 1972.

- [45] Theodor Lehmann. Zu einigen nicht-linearen Stoffgesetzen für plastische Formänderungen. *Rheol. Acta*, 11:4–12, 1972.
- [46] Theodor Lehmann. *Elemente der Mechanik II: Elastostatik*, volume 15 of *Studienbücher Naturwissenschaft und Technik*. Vieweg, Braunschweig, 1975.
- [47] Jean Lemaitre and Jean-Louis Chaboche. *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, 1990. XXV, pp.556.
- [48] G. Maier. Incremental plastic analysis in the presence of large displacements and physical instabilizing effects. *Int. J. Solids Structures*, 7:345–377, 1971.
- [49] Dietrich Marsal. *Finite Differenzen und Elemente: Numerische Lösung von Variationsproblemen und partiellen Differentialgleichungen*. Springer, Berlin u.a., 1989. XVI, pp.300.
- [50] Marc Mittelbach. Einige Bemerkungen zur Strukturgedächtnisfunktion. Interner Arbeitsbericht, 1992.
- [51] Marc Mittelbach and O. T. Bruhns. Anpassung von Stoffgesetzen für das inelastische Verhalten metallischer Werkstoffe an Versuchsdaten und vergleichende Bewertung. Arbeitsbericht AG-Stoffgesetze, 1991/92.
- [52] Z. Mróz. On the description of anisotropic workhardening. *J. Mech. Phys. Solids*, 15:163–175, 1967.
- [53] Z. Mróz, H. P. Shrivastava, and R. N. Dubey. A non-linear hardening model. *Acta Mechanica*, 25:51–61, 1975.
- [54] P. M. Naghdi. Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity. In E. H. Lee and P. S. Symonds, editors, *Plasticity*, Structural Mechanics Series, pages 121–169, Pergamon, Oxford [u.a.], 1960. 2. Symposium on Naval Structural Mechanics.
- [55] D. Nouailhas. Unified modelling of cyclic visoplasticity: Application to austenitic stainless steel. *International Journal of Plasticity*, 5:501–520, 1989.
- [56] Folke K. G. Odquist. *Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture*. Clarendon Press, Oxford, 2 edition, 1974. IX, pp. 200.

- [57] Andreas Pape. *Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, 1988. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 57.
- [58] J. E. Paulun and R. B. Pecherski. On the relation for plastic spin. *Archive of Applied Mechanics*, 62:376–385, 1992.
- [59] P. Perzyna. Fundamental problems in viscoplasticity. In G. Kuertig, editor, *Advances in Applied Mechanics*, volume 9, pages 243–377. Academic Press, New York, London, 1966.
- [60] A. Phillips. *The Foundations of Plasticity*, pages 187–272. Number No. 241 in Courses and Lectures. International Centre for Mechanical Sciences, 1979.
- [61] Martin Pitzer. *Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines Stoffgesetzes*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, 1988. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 61.
- [62] Martin Pitzer. Vortrag. Lehrstuhl für Technische Mechanik, 1990.
- [63] Jörg Pohé. *Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, February 1993. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 83.
- [64] W. Prager. Der Einfluß der Verformung auf die Fließbedingung zähplastischer Körper. *ZAMM*, 15:76–80, 1935.
- [65] W. Prager. A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids. *Journal of Applied Mechanics*, 23:493–496, 1956.
- [66] Pfeifer Profos. *Handbuch der industriellen Meßtechnik*. Oldenbourg, 1990.
- [67] Ingo Rechenberg. *Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*. Number 15 in problemata. Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Cannstatt, 1973. pp. 170.
- [68] U. Rott and O.T. Bruhns. A viscoplastic model with a smooth transition to describe rate-independent plasticity. *International Journal of Plasticity*, 10(4):347–362, 1994.

- [69] Ulfert Rott. *Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, April 1991. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 76.
- [70] Ulfert Rott and Werner Fornefeld. Internes Arbeitspapier zum FE-Programm BRUNS. Lehrstuhl für Technische Mechanik, 1989.
- [71] Peer Schieße. *Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, April 1994. Mitteilung aus dem Institut für Mechanik Nr. 89.
- [72] G. Schmid. Die Methode der finiten Elemente als Sonderfall der Methode der gewichteten Residuen. *ZAMM*, 52:461–469, 1972.
- [73] G. Schmid. Herleitung finiter Verfahren aus der Methode der gewichteten Residuen. *KIB-Mitteilungen, Bochum*, 82(3):1–17, 1982.
- [74] Christian Scholz. *Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, December 1989. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 71.
- [75] Larry J. Segerlind. *Applied Finite Element Analysis*. Wiley & Sons, New York u.a., 2 edition, 1984. XIV, pp. 427.
- [76] Frank Szepan. *Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung*. PhD thesis, Ruhr-Universität Bochum, December 1989. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 70.
- [77] R.J. Taylor. *FEAP, Description and Users-Manual*. University of California, Berkley, 2 edition, January 1990.
- [78] Ch. Tsakmakis. *Über inkrementelle Materialgleichungen zur Beschreibung großer inelastischer Deformationen*. 36, TH Darmstadt, VDI-Fortschrittsberichte, December 1987. Reihe 18.
- [79] H. Waller and W. Krings. *Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik*. BI, Mannheim [u.a.], 1974. pp. 377.

- [80] Konrad Wegener. *Zur Berechnung großer plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Überspannungstyp*. PhD thesis, Technische Universität Braunschweig, 1991. Institut für Allgemeine Mechanik und Festigkeitslehre.
- [81] Claus W. Wegst. *Stahlschlüssel*. Verl. Stahlschlüssel Wegst, Marbach, 16., vollst. neu bearb. u. erw. Aufl. edition, 1992.
- [82] B. Westerhoff. Das Prinzip der gewichteten Residuen als Ausgangspunkt finiter Verfahren. Interner Arbeitsbericht, 1991.
- [83] B. Westerhoff. Entwicklung eines Finite-Elemente-Programms zur Berechnung einer gelochten Scheibe bei viskoplastischem Materialverhalten. Diplomarbeit am Lehrstuhl für Mechanik 1, February 1991.
- [84] Han C. Wu and C. Yeh Wei. On the experimental determination of yield surfaces and some results of annealed 304 stainless steel. *International Journal of Plasticity*, 7:803–826, 1992.
- [85] JR. Zaverl and D. Lee. Constitutive relations for nuclear reactor core materials. *J. Engng. Mater. Technol*, 75:14, 1978.
- [86] Uwe Zdebel. *Theoretische und experimentelle Untersuchung zu einem thermoplastischen Stoffgesetz*. 43, Ruhr-Universität Bochum, December 1984. Mitteilung 3n aus dem Institut für Mechanik Nr. 43.
- [87] Hans Ziegler. A modification of Prager's hardening rule. *Quarterly of Applied Mathematics*, 17:55–65, 1959.
- [88] O.C. Zienkiewicz. *Methode der finiten Elemente*. Hanser, 1975.
- [89] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The finite element method*, volume 2. McGraw-Hill, London [u.a.], 4. ed. edition, 1991.
- [90] R.L. Zienkiewicz, O.C. and Taylor. *The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems*, volume 1. McGraw-Hill, London u.a., 4. edition, 1989.

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen (Dezember 1976)
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations.
Basic Concepts (Juni 1978)
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
Stoffverhalten (Januar 1976)
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen
Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen (Januar 1976)
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter
Profilmittellinie (Februar 1976)
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen
Formänderungen (Januar 1977)
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung
orthotroper Platten (März 1977)
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen (April 1977)
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei
endlichen Verzerrungen (April 1977)
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells (Mai 1977)
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung (Juni 1977)
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter
elastoplastischer Wellen (Juli 1977)
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity (März 1978)
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
(Juli 1978)
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung
von Spannungsrestriktionen (August 1979)
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen
Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen (Juli 1979)

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates (Dezember 1979)
- Nr. 18 Uwe Kohlberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates (Juli 1979)
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken (Januar 1980)
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods (März 1980)
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity (Juni 1980)
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung (Dezember 1980)
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode (Februar 1981)
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen (Februar 1981)
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems (März 1981)
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells (Juni 1981)
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast (September 1981)
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem (September 1981)
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft (November 1981)
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem (Dezember 1981)
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory (Juni 1982)
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen (Juli 1982)
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität (Dezember 1982)

- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells (Dezember 1982)
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente (März 1983)
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten (Juli 1983)
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse (August 1983)
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen (November 1983)
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen (Dezember 1983)
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode (Dezember 1983)
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden (Februar 1984)
- Nr. 42 Diemar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme (Februar 1984)
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz (Dezember 1984)
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermoeffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent (April 1985)
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme (Juni 1985)
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems (Juli 1985)
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren (August 1985)
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY (Oktober 1985)
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung (Dezember 1985)

- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern (Februar 1987)
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihr experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte (März 1987)
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity (Juli 1987)
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie (Dezember 1987)
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich (Januar 1988)
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells (März 1988)
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods (April 1988)
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells (Mai 1988)
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken (Juni 1988)
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last (Juli 1988)
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen (August 1988)
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes (Juli 1988)
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory (Dezember 1988)
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988 (Januar 1989)
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics (Juli 1989)
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten (Juni 1989)
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder (Juni 1989)
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode (November 1989)

- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme (November 1989)
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien (November 1989)
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung (Dezember 1989)
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltungsoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen (Dezember 1989)
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory (Dezember 1989)
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells (Januar 1990)
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems (April 1990)
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua (April 1991)
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen (April 1991)
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1991)
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991 (Dezember 1991)
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenebau (Mai 1992)
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie (Juli 1992)
- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis (Februar 1993)
- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15 (Mai 1993)
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material (Juni 1993)

- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern (Januar 1994)
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen (Januar 1994)
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle (April 1994)
- Nr. 89 Peer Schießle:
ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung (April 1994)
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule (Juli 1994)
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik (Juli 1994)
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finite elastoplasticity with microstructure (November 1994)
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994 (Dezember 1994)
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen (Dezember 1994)
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:
Mechanics of Irregular Shell Structures (Dezember 1994)
- Nr. 96 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells (Dezember 1994)
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.:
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller (Februar 1995)
- Nr. 98 Ralf Podleschny:
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse (April 1995)
- Nr. 99 Bernd Westerhoff:
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl (Juli 1995)

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 99**