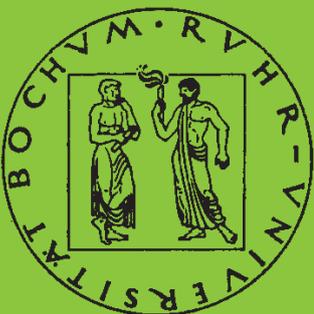


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

**W. Krings
A. Lenzen**

**Festschrift zum 60. Geburtstag von
Heinz Waller**

Heft Nr. 97



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller

Krings W., Lenzen A. u. a.

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 97
1995

Herausgeber:
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum
Schriftenreihe
Universitätsstr. 150
44780 Bochum

© 1995 Krings W., Lenzen A. u. a.

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikro-
kopie) bedarf der vorherigen Zustimmung der Autoren.

Vorwort

Da Herr Professor Dr.-Ing. Heinz Waller, Ruhr – Universität Bochum Institut für Mechanik Arbeitsgruppe Numerisches Rechnen in der Mechanik und Simulationstechnik, sein 60. Lebensjahr vollendet, ist ihm die vorliegende Festschrift gewidmet.

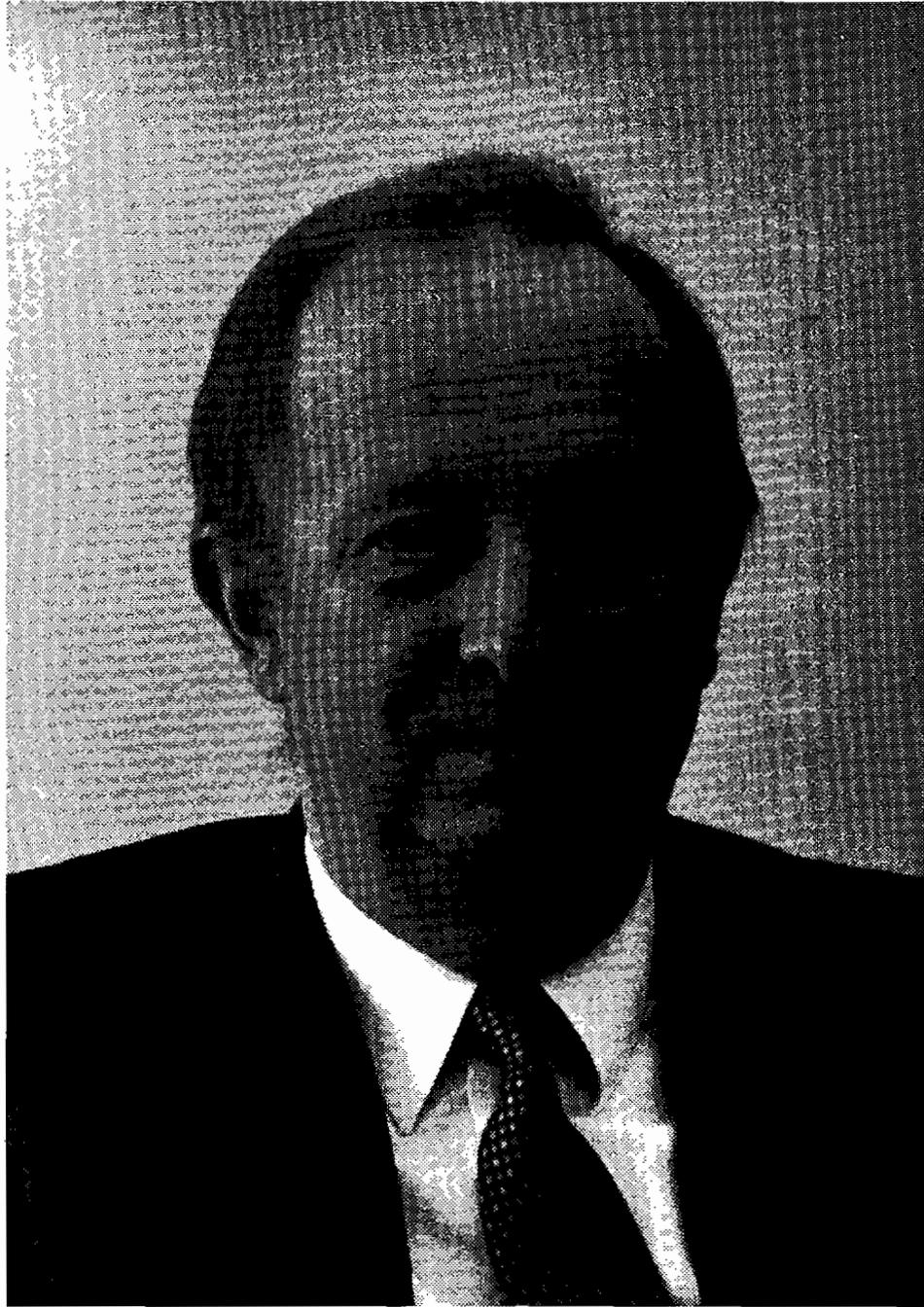
Die Autoren, fast alles (ehemalige) Mitarbeiter der Arbeitsgruppe Heinz Waller, berichten in ihren Beiträgen über die weitgefächerten Arbeitsgebiete von Heinz Waller und Anwendungen in der Praxis.

Herrn Professor Dr.-Ing. O.T. Bruhns sei für die einleitenden Worte der Festschrift und seine Unterstützung gedankt.

Den Verfassern der Aufsätze danken wir für die Zeit und Mühe, die sie neben ihren üblichen Aufgaben gefunden haben.

Bochum, Februar 1995

Wolfgang Krings, Armin Lenzen



Heinz Waller ★ 2. März 1935 ★ 60 Jahre

Lebenslauf von Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

- 2.3.1935 Geboren in Horneburg, Kreis Stade
- Eltern: Wilhelm Waller
Maria Waller, geb. Rathjen
- 1941 – 1946 Grundschule in Horneburg
- 1946 – 1955 Oberschule in Stade
- 2.3.1955 Reifeprüfung
- April – Oktober 1955 Praktikum bei der Firma Hans STILL AG in Hamburg
- 1955 – 1961 Studium der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Hannover (Zusätzliche Vertiefung in den Fächern Regelungstechnik, Datenverarbeitung und numerische Mathematik)
In den Semesterferien Tätigkeiten bei den Firmen:
Hans STILL AG, Hamburg,
BROWN, BOVERIE u. CIE., Mannheim,
BRITISH INSULATED CALLENDERS CABELS Ltd.,
London
- 14.4.1961 Diplom-Hauptprüfung an der Technischen Hochschule Hannover
- April – September 1961 Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Lehrstuhl für Mechanik der Technischen Hochschule Hannover
- Oktober 1961 – November 1967 Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl A für Mechanik der Technischen Hochschule Hannover (Mitarbeit bei den Vorlesungen und Übungen in Mechanik, Regelungstechnik und Maschinendynamik. Betreuung der elektronischen Meß- und Regelungstechnik im Institut für Mechanik)
- 21.12.1966 Promotion in der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität Hannover
- November 1967 – April 1972 Akademischer Rat am Lehrstuhl B für Mechanik der Technischen Universität Hannover (Planung und Aufbau eines neuen Institutsgebäudes mit Versuchsfeld, Einrichtung eines Hybridrechenzentrums, Einsatz von elektronischen Meß- und Rechengegeräten für wissenschaftliche Forschungen)
- seit 4.4.1972 Wissenschaftlicher Rat und Professor – ab 1.1.1981 C3-Professor – und Leiter der Arbeitsgruppe „Numerisches Rechnen in der Mechanik und Simulationstechnik“ am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum
- seit 20.12.1961 verheiratet mit Sybille Waller, geb. Stephan,
drei Kinder, geboren 1963, 1965, 1973

Beruflicher Werdegang von Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

Heinz Waller wurde am 2. März 1935 in Horneburg, Kreis Stade geboren, besuchte dort die Volksschule und danach bis zum Abitur 1955 die Oberschule in Stade.

Relativ früh hat er sich für ein Studium der Ingenieurwissenschaften entschieden und hat deshalb nach dem Abitur bis zum Beginn des Wintersemesters bei der Firma Still AG in Hamburg das notwendige Grundpraktikum abgelegt. Er hatte sich für die Elektrotechnik entschieden, damals noch ein Studiengang im Rahmen des Maschinenbaus. Zum Studium ist er dann an die Technische Hochschule nach Hannover gegangen und hat hier im April 1961 die Diplom-Hauptprüfung abgelegt. Während seines Studiums hat er sich insbesondere für die Fachgebiete Schwingungs- und Regelungstechnik, Systemtheorie und Meßtechnik interessiert. Als zusätzliche Vertiefung wählte er die Fächer Regelungstechnik, Datenverarbeitung und numerische Mathematik. Besonders hervorgehoben werden sollte, daß er zu den ersten begeisterten Hörern der seinerzeit in Hannover neu eingerichteten Vorlesungen über Datenverarbeitung und Informationstheorie gehört hat - Fächer, die ihn bis heute nicht losgelassen haben. Zur Verbesserung seiner Englischkenntnisse - wie er selbst sagt - hat er einen Teil seines Praktikums in London abgeleistet - auch dies war zur damaligen Zeit absolut unüblich und mit großem Aufwand verbunden.

Sein weiterer beruflicher Werdegang wurde in starkem Maße während seiner Tätigkeit als wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl für Mechanik geprägt. Lehrstuhlinhaber war damals Eduard Pestel, der insbesondere durch seine offene und direkte Art einen bleibenden Eindruck bei dem jungen Studenten Heinz Waller hinterlassen hat. Dieser Eindruck war so stark, daß er nach seinem Examen als wissenschaftlicher Assistent an den Lehrstuhl von Pestel gegangen ist. Hier hat er die Mechanik von Grund auf gelernt, daneben aber auch die Übungen in Regelungstechnik und Maschinendynamik betreut. Wegen seiner Ausbildung in der Elektrotechnik wurde ihm außerdem auch das Analogrechnen sowie die elektronische Meßtechnik des Lehrstuhls anvertraut.

Geprägt durch seinen Lehrer hat sich Heinz Waller in seiner Forschung dann der Berechnung elastischer Platten mittels Finiter Elemente zugewandt, wobei die Diskretisierung damals noch recht grob in Form von Gitterrostmodellen erfolgte. Seine in dieser Zeit entstandene Dissertation "Beitrag zur Berechnung dünner, isotroper, elastischer Platten nach dem Gitterrostverfahren" faßt diese Arbeiten zusammen. Das Promotionsverfahren wird im Dezember 1966 abgeschlossen. Im darauffolgenden Jahr zeichnet sich ein struktureller Wandel in der Mechanik der Fakultät für Maschinenbau ab. Der Lehrstuhl von Pestel wird aufgespalten, ein zweiter Lehrstuhl entsteht, Lehrstuhlinhaber wird Oskar Mahrenholtz. Ein neues Institutsgebäude für die Mechanik wird gebaut und Heinz Waller wird als Akademischer Rat bei Oskar Mahrenholtz ein großer Teil der Planungsaufgaben für diesen Institutsneubau übertragen. Zusammen mit dem Kollegen Bodo Dirr wurden eine Vielzahl von Experimentierfeldern eingerichtet und mit den notwendigen Datennetzen verbunden. Zudem wurde das neue Institut mit einem Hybrid-Rechenzentrum ausgestattet, dessen Leitung Waller übertragen wurde.

1968 folgte sein ehemaliger Oberingenieur aus der Zeit bei Eduard Pestel, Theodor Lehmann, der zwischenzeitlich auf den Lehrstuhl für Baumechanik der TH Hannover berufen worden war, einem Ruf an die Ruhr-Universität in Bochum, um dort am Aufbau der neugegründeten Universität mitzuwirken. Dieser erinnerte sich an seinen ehemaligen Mitarbeiter und holte Heinz Waller im April 1972 als Wiss. Rat und Professor für das Fachgebiet "Numerisches Rechnen in der Mechanik" nach Bochum. Es folgten abermals arbeitsreiche Jahre des Aufbaus seines

Fachgebietes, des Instituts für Mechanik sowie der seinerzeitigen Fakultät für "Maschinenbau und Konstruktiven Ingenieurbau". Mit der Einrichtung seiner Arbeitsgruppe für "Numerisches Rechnen in der Mechanik und Simulationstechnik", die er seither leitet, wurde sein Arbeitsgebiet in Forschung und Lehre am Institut für Mechanik sichtbar verankert.

Neben seinem Einsatz beim Aufbau des Institutes hat sich Heinz Waller insbesondere der Entwicklung einer modernen Lehre verpflichtet gefühlt. Ausgehend von Lehrveranstaltungen über "Analogrechnen im Ingenieurwesen" sowie "Digitale und hybride Simulation technischer, insbesondere mechanischer Systeme" und "Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik" hat er bald auch Vorlesungen zur "Maschinendynamik" sowie über "Technische Mechanik I, II" für Studenten der Elektrotechnik aufgebaut. Die Vielzahl der in diesem Zusammenhang entstandenen Lehrbücher geben ein beredtes Zeugnis seines intensiven Arbeitseinsatzes wider.

In seiner Forschung hat sich Heinz Waller, geprägt durch seine Ausbildung und seine Lehrer, stets als ein über die Grenzen des eigenen Fachgebietes hinaus wirkendes Bindeglied im Ingenieurwesen verstanden. Seine herausragenden wissenschaftlichen Leistungen hat er deshalb im Bereich der numerischen Methoden, etwa der FEM oder der BEM sowie der Fourier-Transformation aufgestellt. Im Verlaufe der Jahre hat er sich daneben auch intensiv mit den Problemen der Regelungstechnik, der Systemtheorie und der Identifikation auseinander gesetzt. In zahlreichen Veröffentlichungen hat er diese Ergebnisse seiner Forschung der wissenschaftlichen Öffentlichkeit mitgeteilt. Eine ganze Reihe von wissenschaftlichen Mitarbeitern ist durch seine Schule gegangen. Viele von ihnen sind heute selbst Professoren an Universitäten oder Fachhochschulen. Sie, wie auch seine Kollegen in den drei Ingenieurfacultäten der Ruhr-Universität Bochum, schätzen an ihm sein Engagement für die Lehre und seinen Einsatz für die Institution, sein ausgewogenes und klares Urteil, seine Prinzipientreue und seinen häufig aufmunternden Humor. Sie schätzen in ihm einen engagierten Wissenschaftler und liebenswürdigen Kollegen und Vorgesetzten. Als sichtbarer Ausdruck seines Wirkens, der Hochachtung und Dankbarkeit mögen die ihm mit dieser Festschrift gewidmeten Beiträge für sich selbst sprechen.

Bochum, Februar 1995

Otto Bruhns

Veröffentlichungen von Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

1. Promotionsarbeit

Waller, H.: Beitrag zur Berechnung dünner, isotroper, elastischer Platten nach dem Gitterrostverfahren. Dissertation TU Hannover 1966.

2. Bücher

1. Waller, H. und Krings, W.: Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik. BI-Verlag. Bibliographisches Institut. Mannheim – Wien – Zürich 1975.
2. Waller, H. und Hilgers, P.: Mikroprozessoren. Vom Bauteil zur Anwendung. BI Wissenschaftsverlag. Reihe Informatik, Band 29. Bibliographisches Institut. Mannheim – Wien – Zürich 1979. 2. Auflage 1984.
3. Waller, H. und 5 studentische Mitarbeiter: Technische Mechanik kurzgefaßt. BI-Verlag. Bibliographisches Institut. Mannheim – Wien – Zürich 1987. 2. Auflage 1990.
4. Waller, H. und Schmidt, R.: Schwingungslehre für Ingenieure – Theorie, Simulation, Anwendung. BI-Verlag. Bibliographisches Institut. Mannheim – Wien – Zürich 1989.

3. Filme

1. Arbeitsgruppe numerisches Rechnen in der Mechanik:
Waller, H., Krings, W. und Michel, H.J.: Instationäre Platten- und Scheibenschwingungen. Institut für den wissenschaftlichen Film, Göttingen 1975.
2. Arbeitsgruppe numerisches Rechnen in der Mechanik und Simulationstechnik:
Waller, H., Fritz, M. und Michel, H.J.: Simulation von Stabschwingungen. Institut für den wissenschaftlichen Film, Göttingen 1980.

4. Aufsätze, Berichte und Buchbeiträge

1. Waller, H.: Elektronische Analogrechner und ihre Anwendung für die Simulation stetiger Systeme. Simulation technischer Systeme Band I. Grundlagen der Simulation. Hrsg. A. Schöne. Carl Hanser Verlag. München 1974
2. Waller, H.: Erweiterung der Möglichkeiten des Analogrechners durch digitale Zusatzeinrichtungen. Simulation technischer Systeme Band I. Grundlagen der Simulation. Hrsg. A. Schöne. Carl Hanser Verlag. München 1974.
3. Waller, H.: Einführung in die Simulationstechnik mit Hybridrechenanlagen. Simulation technischer Systeme Band I. Grundlagen der Simulation. Hrsg. A. Schöne. Carl Hanser Verlag. München 1974
4. Dirr, B. und Waller, H.: über die statische Berechnung von Scheiben und Platten nach dem Gitterrostverfahren. Fortschritt-Berichte. VDI-Zeitschrift, Reihe 4 Nr. 7 (1968).
5. Dirr, B. und Waller, H.: über eine Konvergenzuntersuchung an finiten Elementen. Abhandlung der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft. Band XX (1968).
6. Dirr, B. und Waller, H.: Zum Problem der Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenformen elastischer ebener Kontinua. Ing. Archiv 1974, Heft 2/3.
7. Krings, W. und Waller, H.: Berechnung instationärer Tragwerkschwingungen mit Hilfe von Matrizenfunktionen. Die Bautechnik. Januar 1974, Heft 1, Ausgabe A.

8. Hilgers, P. und Waller, H.: Iterative Parameteroptimierung mit hybriden Analogrechnern. Elektronische Rechanlagen. Juni 1974.
9. Krings, W. und Waller, H.: Instationäre Schwingungen linearer Systeme. Institut für den konstruktiven Ingenieurbau. Ruhr-Universität Bochum. Finite Element Methoden. Mitteilung Nr. 74-1, März 1974.
10. Krings, W. und Waller, H.: Numerisches Berechnen mechanischer Einschwingvorgänge. Eine Anwendung der schnellen Fourier-Transformation. VDI-Zeitschrift Nr. 17, Dez. 1974.
11. Krings, W. und Waller, H.: über die numerische Berechnung von gedämpften Schwingungssystemen bei nichtperiodischen Erregungen. Die Bautechnik 1975.
12. Fritz, M. und Waller, H.: Die Simulation von Stabwerkschwingungen mit dem Analogrechner. VDI-Zeitschrift Nr. 117 (1975).
13. Krings, W. und Waller, H.: Numerisches Berechnen von Schwingungs- und Kriechproblemen mit der LAPLACE-Transformation. Ingenieur-Archiv 44 (1975).
14. Hilgers, P. und Waller, H.: Die Synthese iterativer Optimierer und ihre Simulation mit dem hybriden Analogrechner. Messen, Steuern, Regeln. Februar und März 1976.
15. Waller, H.: Numerische Berechnung von Schwingungen mit Hilfe der LAPLACE-Transformation. (Eine Anwendung der (schnellen) Fast-Fourier-Transformation). Vortrag der GAMM-Tagung 1975. ZAMM 56, T 83 - T 85 (1976).
16. Waller, H.: The Application of the Fast-Fourier-Transformation for the Simulation of Linear Systems. Proceedings of the 8th AICA Congress 1976 in Delft. Simulation of Systems. L. Decker, editor. North-Holland Publishing Company (1976).
17. Goßmann, E., Krings, W. und Waller, H.: Numerische Behandlung linearer Tragwerksschwingungen bei deterministischen und stochastischen Erregungen. Konstruktiver Ingenieurbau. Berichte aus dem Institut für konstruktiven Ingenieurbau der RUB Bochum 1976 Heft 25/26.
18. Krings, W., Truppat, V. und Waller, H.: Berechnung der Durchbiegung und der Biegemomente einer stoßartig belasteten Biegeplatte mit dem Gitterrostverfahren und ihre experimentelle Überprüfung. VDI-Z 118 (1976) Nr. 24 Dez. (II.).
19. Goßmann, E. und Waller, H.: Numerische Berechnung linearer Tragwerkschwingungen bei deterministischen und stochastischen Winderregungen einschließlich numerischer Simulationsverfahren. 1. Berichtskolloquium des DFG-Schwerpunktprogrammes „Bauwerke unter aerodynamischer Belastung“. Technische Universität München. 1976.
20. Goßmann, E. und Waller, H.: Simulation mehrfachkorrelierter Zufallsschwingungen. Eine Anwendung für Wind und deren Grenzen. Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der Technischen Hochschule Darmstadt. Heft 26, 1977. Verlag W. Ernst und Sohn. Berlin - München - Düsseldorf.
21. Goßmann, E., Krings, W. und Waller, H.: On suitable Formulations of the Method of Modal Analysis for Numerical Calculations. International Journal for Numerical Methods in Engineering 1978, vol. 12, p 795-808.
22. Goßmann, E. und Waller, H.: Numerische Berechnungen nichtdeterministischer Schwingungen. VDI-Kolloquium: Aeroelastische Probleme außerhalb der Luft- und Raumfahrt. März 1978, Hannover. Mitteilungen des Curt Risch Instituts der Technischen Hochschule Hannover.

23. Hilgers, P. und Waller, H.: Mikroprozessoren in der Strukturtechnik? Tagungsbericht: Finite Elemente in der Baupraxis. Hannover, April 1978. Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn. Berlin – München – Düsseldorf.
24. Goßmann, E. und Waller, H.: Dynamische Belastung von Tragwerken durch Wind. DFG–Abschlußbericht zum Schwerpunktprogramm „Bauwerke unter aerodynamischer Belastung“ Bochum, April 1978.
25. Goßmann, E. und Waller, H.: Leistungsspektren von Wind. Numerische Berechnung, Schätzung und Einfluß auf die Systemantwort. Beiträge zum 3. Schwerpunktkonferenz der DFG: „Bauwerke unter aerodynamischer Belastung“ Oktober 1978. Institut für Beton und Stahlbeton. Universität Karlsruhe, o. Prof. Dr.-Ing. F.P. Müller.
26. Waller, H.: Tendenzen in der Entwicklung elektronischer Rechner und die Auswirkungen auf das Ingenieurwesen. VDI-Zeitschrift 120 (1978) Nr. 19.
27. Krings, W. und Waller, H.: Zur Berechnung von Bauwerksschwingungen bei Kernkraftwerken. Nützliche Integrationsformeln und Vorschläge für die Rechnerkontrolle bei der modalen Analyse. Bauingenieur 54 (1979).
28. Krings, W. und Waller, H.: Contribution to the Numerical Treatment of Partial Differential Equations with the Laplace–Transformation. Intern. Journal for Numerical Methods in Engineering 14 (1979), p. 1183-1196.
29. Waller, H.: Kierunki rozwoju elektronicznych maszyn matematycznych. Technika Zagraniczna 3-4, 1979.
30. Goßmann, E. und Waller, H.: Rechnergestützte Schwingungsanalyse mit Hilfe der FOURIER–Transformation. VDI–Zeitschrift 122, Nr. 11/12, 1980.
31. Goßmann, E. und Waller, H.: Kovarianzanalyse mehrfachkorrelierter Strukturschwingungen. Konstruktiver Ingenieurbau, Berichte aus dem Institut für konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr–Universität Bochum. Heft 35/36 (1981) (Gebäudeaerodynamik, DFG–Kolloquium an der Ruhr–Universität Bochum 19. und 20. März 1981).
32. Goßmann, E. und Waller, H.: Zur Behandlung von Zufallsschwingungen mechanischer Bauteile infolge mehrfachkorrelierter stochastischer Erregungen. Ingenieur-Archiv 52, (1982).
33. Krings, W. und Waller, H.: Eine Lösungsmethode für Finite–Element–Bewegungsgleichungen bei nichtlinearem Stoffverhalten. Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Ing. K.H. Schrader. RUB 1982. Rudolf Müller Verlagsgesellschaft, Köln.
34. Goßmann, E. und Waller, H.: Analysis of multi–correlated wind–excited vibrations of structures using the covariance method. Engineering Structures 1983 vol. 5.
35. Waller, H.: Zur Berechnung finiter Elemente mit Hilfe der Taylor–Reihe. ZAMM 1984.
36. Bouchard, D. und Waller, H.: Ein an die diskrete Fourier–Transformation angepaßtes Verfahren zur Bestimmung der modalen Parameter einer Struktur. Tagung: Dynamische Probleme – Modellierung und Wirklichkeit. Okt. 1984. Curt Risch Institut Technische Universität Hannover.
37. Goßmann, E. und Waller, H.: Übersicht über numerische Integrationsmethoden für mechanische Schwingungsprobleme. Forschung im Ingenieurwesen, VDI-Z Bd. 50, Nr.5, 1984.

38. Kind, R., Neumann, C. und Waller, H.: Rechnerische Simulation des Schwingungsverhaltens von Einsäulentrennschaltern im Kurzschlußfall. *etz-Archiv* Bd. 6, H. 10, Okt. 1984.
39. Kraft, A. und Waller, H.: Zur Anwendung der elektrischen Netzwerksynthese für den optimalen Entwurf schwingungsfähiger Konstruktionen, *Forschung im Ingenieurwesen (VDI-Z)* 1985).
40. Becker, P. und Waller, H.: Ein Vergleich der Methoden der Finiten Elemente und der Boundary-Elemente bei der numerischen Berechnung von Schallfeldern, *Acustica* März 1986 (vol. 60).
41. Adrian, F.W., Anrecht, J., Fister, W., Michel, H.J. und Waller, H.: Digitale Fernsehbildauswertung von Funkblitzaufnahmen zum Erfassen der Strömungsgeschwindigkeit in Kanälen, *Forschung im Ingenieurwesen* Nr. 2, 1987 VDI.
42. Geis, M., Schmidt, R. und Waller, H.: Schadensfrüherkennung an Großmaschinen durch Systemidentifikation, *BWK (Brennstoff, Wärme, Kraft)* VDI-Z 6/86.
43. Niemann, H.-J. und Waller, H.: Forschungslinien zur Dämpfung. *SFB 151 Berichte* Nr. 6, März 1987. *Tagung Baudynamik: Forschung und Praxis*.
44. Renker, G. und Waller, H.: Dämpfung von Stahlbeton, Modelle und Identifikation. *SFB 151 Berichte* Nr. 6, März 1987. *Tagung Baudynamik: Forschung und Praxis*, Bochum
45. Schmidt, R. und Waller, H.: Identifikation und Modellierung eines Turboblocks, *Mitt. d. Curt Risch Inst. der Universität Hannover* 1987, *Dynamische Probleme – Modellierung und Wirklichkeit*.
46. Schmidt, R. und Waller, H.: Fault Detection on Turbomaschinery by Systemidentifikation, *5 th Int. Symposium Technical Diagnostics 1987 Paderborn*, VDI-Bericht 644 (1987).
47. Niemann, H.J., Renker, G. und Waller, H.: Identifikation und Modellierung des Schwingungsverhaltens von Tragwerken unter besonderer Berücksichtigung der Dämpfung. *SFB 151 Berichte* Nr. 11 August 1988, Bochum.
48. Malter, B., Schmidt, R. und Waller, H.: Digitale Simulation. *ST-Computer*, Februar 1989.
49. Renker, G., Stapelfeld, H. und Waller, H.: Zur numerischen Berechnung von dynamisch belasteten rotationssymmetrischen Flächentragwerken. *Bauingenieur* 61, 1989.
50. Schmidt, R. und Waller, H.: The Application of State Observers in Structural Dynamics. *Proceedings of the European Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, Aachen 1989.
51. Schmidt, R. und Waller, H.: The Application of State Observers in Structural Dynamics. *Proceedings of the European Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics*, *Journal of mechanical systems and signal processing* 1990.
52. Schmidt, R. und Waller, H.: Zur Anwendung von Zustandsbeobachtern in der Strukturodynamik. *ZAMM* 1990
53. Renker, G., Schmidt, R. und Waller, H.: Meßwerterfassung und -analyse und Identifikation bei Schwingungssystemen / Programmsystem: *Modid. SFB 151 Berichte* Nr.16, März 1990, Bochum.

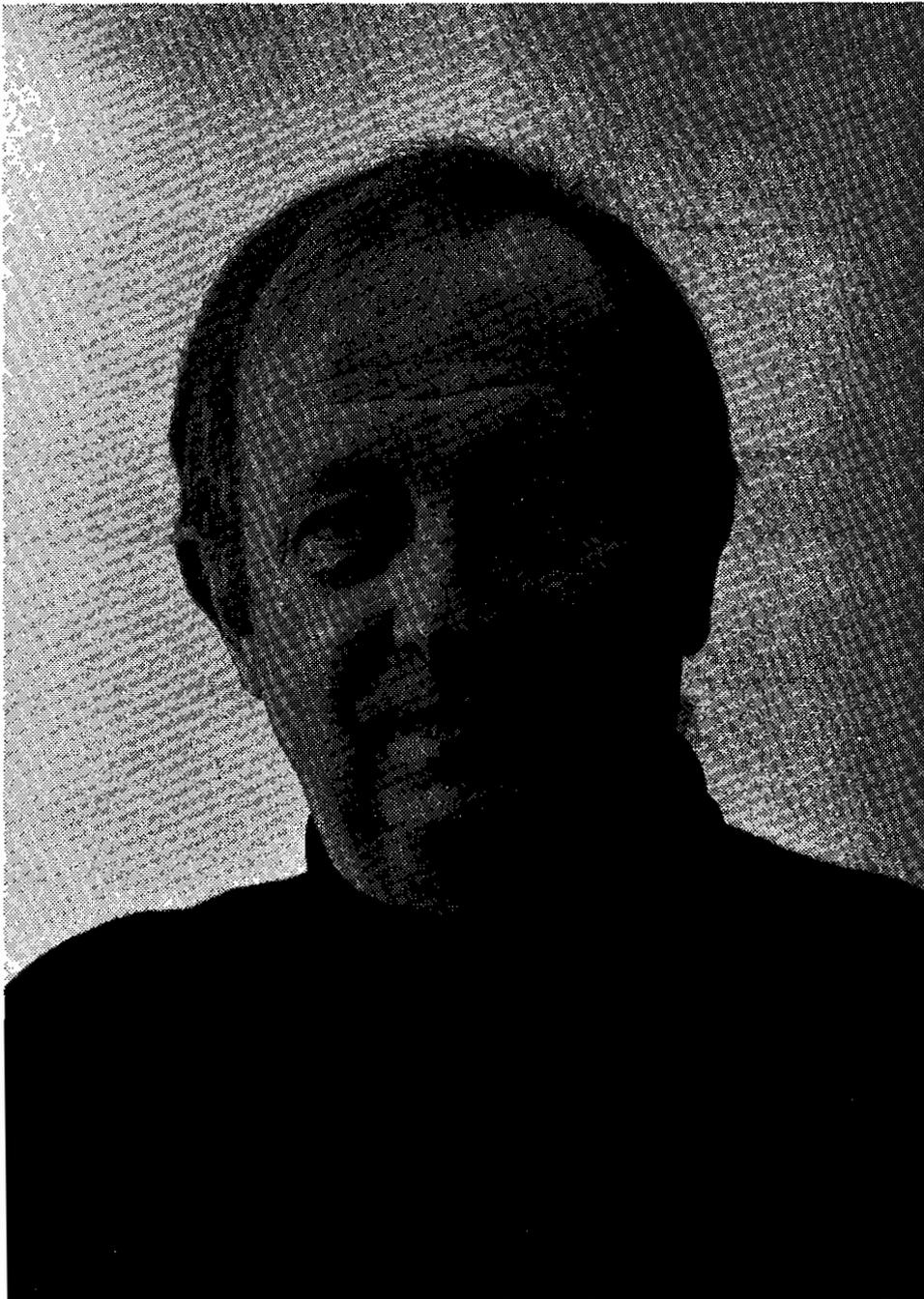
54. Renker, G. und Waller, H.: Time domain identification of nonlinear vibrational systems. Proceedings Eurodyn 1990.
55. Schmidt, R. und Waller, H.: Fault detection and localisation by vibration monitoring with observers. Proceedings Eurodyn 1990.
56. Renker, G. und Waller, H.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum Dämpfungsverhalten von Stahlbetonkonstruktionen – Ein nichtlineares Identifikationsproblem. VDI-Z, Forschung im Ingenieurwesen Bd. 57, 1991.
57. Bouchard, D., Schmidt, R. und Waller, H.: The Bloc Sum Transformation – A New Special Discrete Fourier Transformation Method for the Analysis of Vibrations. Analytical and Experimental Modal Analysis 6, 1992.
58. Frania, R.H. und Waller, H.: Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Korbspannungsprobleme im Maschinenbau. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB, Heft 81, Mai 1992.
59. Beerens, Chr. und Waller, H.: Zur Modellierung der Dämpfung. Festschrift Krätzig, 60 Jahre, Sonderforschungsbereich Tragwerksdynamik, Ruhr-Universität Bochum, SFB 151 Berichte Nr. 23, Nov. 1992.
60. Folchert, U.; Menne, A. und Waller, H.: Hochdynamischer Versuchsstand zur Identifikation von Antriebssträngen. Antriebstechnik, Febr. 1993.
61. Folchert, U., Menne, A. und Waller, H.: Experimental Identification of Dynamic Characteristics of Hydrodynamic Torque Converters and Couplings. ASME- (The American Society of Mechanical Engineers) paper 94-GT-360 (Presented at the International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition, The Hague, Netherlands, June 13-16, 1994).
62. Folchert, U., Menne, A. und Waller, H.: Dynamisches Verhalten von hydrodynamischen Wandlern und Kupplungen – Modellierung und experimentelle Untersuchungen. VDI-Tagung: Hydraulische Leistungsübertragung, 6.-7. Okt. 1994, Bochum. VDI-Berichte 1132, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1994.
63. Waller, H. und Beerens, Chr.: Damping, Chapter 3.3 Dynamics of Civil Engineering Structures, Ed.: SFB 151 (Hrsg. Krätzig et al.), Balkema Verlag, Rotterdam, Brookfield, 1995.
64. Waller, H. und Beerens, Chr.: Experimental Methods and Identification, Chapter 10, Ed.: SFB 151 (Hrsg. Krätzig et al.), Balkema Verlag, Rotterdam, Brookfield, 1995.
65. Waller, H. und Beerens, Chr.: Dämpfungsmodelle – Theorie und Anwendung. SFB 151-Abschlußbuch (Hrsg. Krätzig et al.), VCH-Verlagsgesellschaft, Weinheim, 1995.
66. Behrens, H., Folchert, U., Menne, A. und Waller, H.: Identifikation nichtlinearer Systeme durch bereichsweise lineare Modelle am Beispiel hydrodynamischer Wandler und Kupplungen. SIRM 95 (Schwingungen in rotierenden Maschinen), Kaiserslautern (Hrsg. H. Irretier, R. Nordmann und H. Springer), Fr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, 1995.

Namensliste der Promotionen

wissenschaftlichen Mitarbeiter der Arbeitsgruppe von Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller
als erster Referent begutachtet

1. Krings, W.: Beitrag zur Finiten-Element-Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten.
13. November 1975
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 3.
2. Hilgers, P.: Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse.
6. Juni 1978
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 14.
3. Goßmann, E.: Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen.
17. Februar 1981
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 24.
4. Piltner, R.: Spezielle Finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen.
29. Juni 1982
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 32.
5. Kraft, A.: Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten.
18. Juli 1983
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 36.
6. Becker, P.: Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden.
16. Februar 1984
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 41.
7. Bouchard, D.: Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme.
16. Februar 1984
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 42.
8. Schmidt, R.: Zur Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen.
15. Juli 1988
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 60.
9. Renker, G.: Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Strukturen.
31. Oktober 1989
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 68.
10. Geis, M.: Zur Berechnung ebener elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode.
31. Oktober 1989
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 67.

11. Zhang, M.: Zur Beschreibung und Identifikation von mechanischen Schwingungssystemen mit nichtlinearen Strukturdämpfungen.
25. Oktober 1990
VDI-Fortschritt-Berichte Reihe 11 Nr. 139 (1990)
 12. Folchert, U.: Identifikation der dynamischen Eigenschaften hydrodynamischer Kupplungen.
17. Dezember 1993
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 87.
 13. Menne, A.: Identifikation der dynamischen Eigenschaften hydrodynamischer Wandler.
17. Dezember 1993
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 86.
 14. Beerens, Chr.: Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik.
8. Juli 1994
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 91.
 15. Lenzen, A.: Untersuchungen von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung – Erfassung von Strukturveränderungen.
25. November 1994
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik der RUB Heft 94.
- ca. 50 begutachtete Promotionen als Korreferent



Heinz Waller

Inhaltsverzeichnis

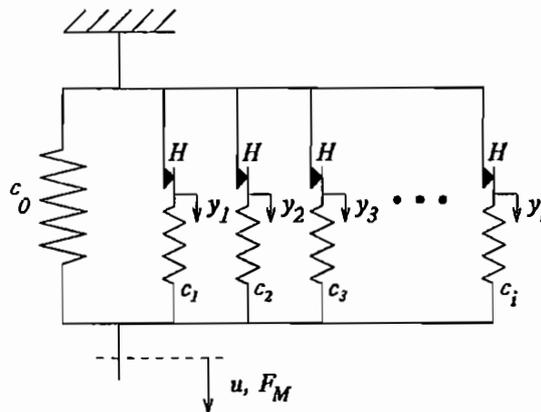
1 Realisierung des Masingelementes zur Modellierung amplitudenabhängiger Dämpfung, Christoph Beerens	1
2 Digitale Regelung sekundärgeregelter hydrostatischer Antriebe in einem hochdynamischen Verspannungsprüfstand, Behrens H. u. Steinhausen J.	9
3 Schwingungsuntersuchung mit Breitbanderregung, Block-Summen-FFT und explizite Auswerte-Formel, Dietmar Bouchard	15
4 Statische 3D Spannungsberechnung mit BEM/FEM, Eckstein A. u. Lanzerath H.	23
5 Zur Identifikation der dynamischen Eigenschaften hydrodynamischer Kupplungen, Uwe Folchert	35
6 Abschätzung des Risikos der Gesundheitsgefährdung beim Hantieren von schwingenden Arbeitsgeräten mit Hilfe eines mechanischen Systems, Martin Fritz	43
7 Zur Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren mit der Randelementemethode, Michael Geis	51
8 Materialidentifikation von Schlauchsegmenten in der Dialysetechnik, Hilgers P. u. Silber G. u. Steinbach B.	61
9 Zur Berücksichtigung der Dämpfung bei der FE-Modellierung von U-Bahntunneln, Alfred Kraft	73
10 Physikalisch nichtlineare Stabberechnungen nach Eurocode 2, Wolfgang Krings	79
11 Die dynamischen Einflußzahlen zur Lokalisation von Veränderungen an dynamischen Systemen, Armin Lenzen	85
12 Überlegungen zur modalen Reduktion, Bertold List	93
13 Vereinfachte, mathematische Abbildung hydrodynamischer Wandler in Antriebssystemen, Achim Menne	97

14	Elektrorheologische Fluide, ein Einblick, Johannes Moosheimer	105
15	New developments in enhanced strain finite elements for linear and non-linear applications, Reinhard Piltner	115
16	Die Identifikation nichtlinearer Systeme, Renker G. u. Zhang M.	127
17	Schwingungsüberwachung mit Zustandsbeobachtern, Reinhard Schmidt	139
18	Regelungen in der Strukturdynamik, Michael Straßberger	145
19	Autorenverzeichnis	153

Realisierung des Masingelementes zur Modellierung amplitudenabhängiger Dämpfung

Christoph Beerens

Das Masing-Modell wurde schon in den 20er Jahren als Modell für amplitudenabhängige Werkstoffdämpfung von G. Masing entwickelt [1, 2, 3, 4] und von einer ganzen Reihe von Autoren für die phänomenologische Modellierung z.B. metallischer Werkstoffe und reibgedämpfter Strukturen verwandt, u.a. in [5, 6, 7, 8, 9]. Es ist aus N Prandtl-Strängen und einer linearen Feder aufgebaut, alle diese Elemente sind parallel angeordnet.



Die Evolutionsgleichung des Masing-Modells ist eine Summierung der linearen Federkraft, der rein elastischen und der gleitenden Anteile aus den Coulomb-Elementen:

$$F_M = c_0 u + \sum_{i=n+1}^N \frac{H_i}{N} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{N} u \quad (0.1)$$

Die c_i und H_i können beide über eine Verteilungsfunktion bestimmt sein, aber es soll gelten $N \rightarrow \infty$ und $c_i = \text{const.}$ mit einer allgemeinen Verteilung Φ für die H_i . Damit wird die Elementkraft zu:

$$F_M = c_0 u + cu \int_{cu}^{\infty} \Phi(\eta) d\eta + \int_0^{cu} \eta \Phi(\eta) d\eta \quad (0.2)$$

Die Verteilungsfunktion $\Phi(\eta)$ der Haftkräfte ist nun anhand der Erstbelastungskurve,

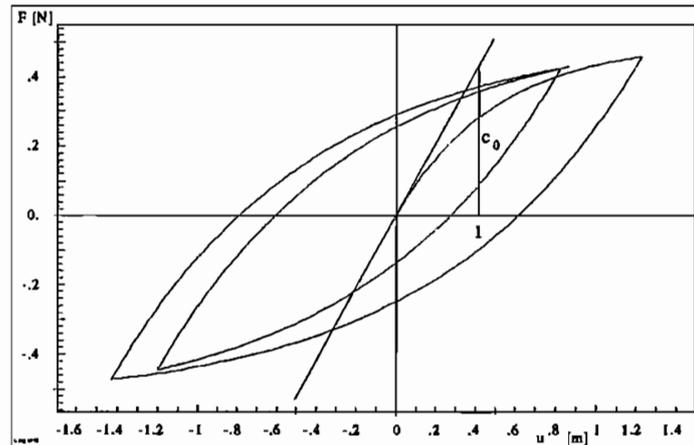


Abbildung 0.1: Erstbelastungskurve

Abb. 0.1, analytisch berechenbar durch:

$$\Phi = -\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 F}{du^2} \quad (0.3)$$

Problematisch an dieser Gleichung in Bezug auf die praktische Anwendung ist, daß es nur sehr schwer möglich ist, Meßwerte zu erhalten, die die erforderlichen für die Analyse benötigten Eigenschaften haben. Beispiele für experimentell zu gewinnende Erstbelastungskurven sind die Erstbelastung eines Stahlbetonbauteils oder die Belastung eines spannungsarmgeglühten Stahlbauteils. Das dabei weiterhin auftretende praktische Problem ist die Berechnung der Krümmung $d^2 F/du^2$ aus den in der Regel relativ stark aufgerauhten Kurvenzügen.

Dieses Modell soll nun mit einer erstmaligen analytischen Lösung vorgestellt werden, die den bisher üblichen Einschränkungen nicht mehr unterliegt. Anschließend werden die Eigenschaften des Modells in Bezug auf seine Parameter und insbesondere die Dämpfung diskutiert. Mit dem vorliegenden Ansatz wird vor allem die Modellierung der Dämpfung von Stahlbeton verbessert. Ausgehend von den in der Literatur schon vorliegenden Untersuchungen und Erfahrungen konnte das Masingelement als geeignetes Modell für die nicht-linearen Anteile der Dämpfung dieses Werkstoffes bezeichnet werden [10, 11, 12, 13, 14, 8].

Analytische Lösung

Zur Erzielung einer realitätsnahen phänomenologischen Dämpfungscharakteristik wird für diese Arbeit ein Masingelement mit unendlich vielen Prandtl-Strängen konstanter Federkraft k_1 und exponentieller Verteilung der variablen Haftkräfte H gewählt. Die unendlich vielen Prandtl-Stränge werden erst durch die Exponentialverteilung handhabbar gemacht, denn sie beinhaltet implizit die notwendige Normierung, so daß das Intervall der Haftkräfte H von 0 bis ∞ reicht und dennoch eine endliche Haftkraft gegeben ist.

Die Lösungsproblematik bleibt aber dennoch bestehen. Hier wird über die Gedächtnisfunktion der Weg beschritten, stückweise lösbare Integrale über das gesamte Element zu berechnen. Damit wird das bisher als nicht realisierbar betrachtete Modell (z.B. [15, 7]) durch die analytische Lösung der Integrale der Gedächtnisfunktion anwendbar gemacht. Phänomene wie der Bauschinger-Effekt lassen sich damit modellieren, indem lediglich zwei Parameter variiert werden.

Zur Ermittlung der Gesamtkraft des Elementes muß nun über alle Stränge integriert werden, d.h. die Gedächtnisfunktion, die aus einer Verformungsgeschichte entstanden ist, muß bekannt und integrierbar sein. Die praktikabelste Darstellung der Gedächtnisfunktion des gewählten Modells mit kontinuierlicher exponentieller Verteilung der Haftkräfte ist, die aktuelle Strangkraft über der Verteilungskordinate η der Exponentialverteilung $\Phi(\eta) = \alpha e^{-\alpha\eta}$ darzustellen, Abb. 0.2. Wegen der Reibelemente handelt es sich um ein nichtschwindendes Gedächtnis. Zur besseren Handhabung kann man die Haftgrenze im Strang an der Stelle η zu $H = \eta$ setzen, wegen der weiterhin freien anderen Parameter spielt diese Definition keine verfälschende Rolle. Damit ist nun die Linie $H = \eta$ bzw. $H = -\eta$ auch gleichzeitig die an einer Stelle η maximal erreichbare Haftkraft H , ab der dann Gleiten einsetzt.

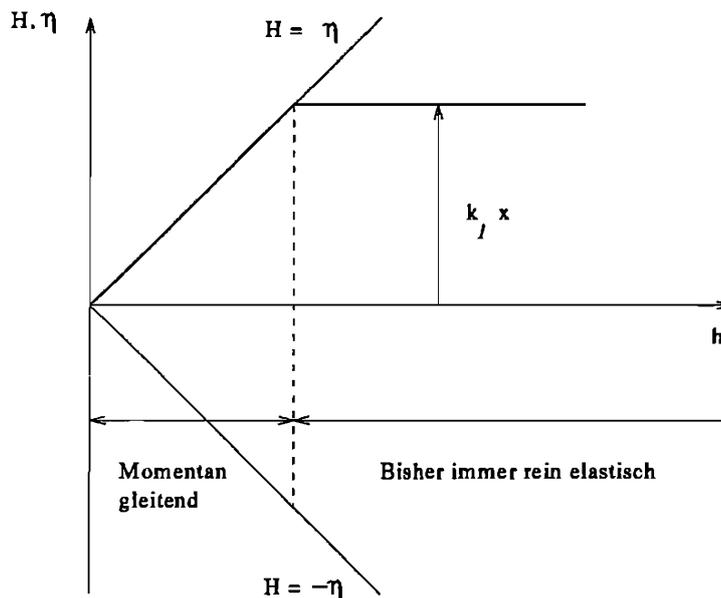


Abbildung 0.2: Gedächtnisfunktion nach einfacher Verschiebung

Beginnt man aus einer unverformten Lage heraus eine Belastung/Verschiebung des Masingelementes, so fangen die Stränge an zu gleiten, die die Gleichung $\eta < k_1 x$ mit η der Verteilungskordinate des Masingelementes, k_1 der konstanten Federkraft in allen Prandtl-Strängen und x der Verformung des Elementes erfüllen. Alle übrigen Stränge bleiben elastisch, so daß sich Abb. 0.3 ergibt.

Bei weiterer Verformungszunahme vergrößert sich nur noch die Anzahl der gleitenden Stränge, die Form der Gedächtnisfunktion bleibt erhalten. Anders bei Verformungsrich-

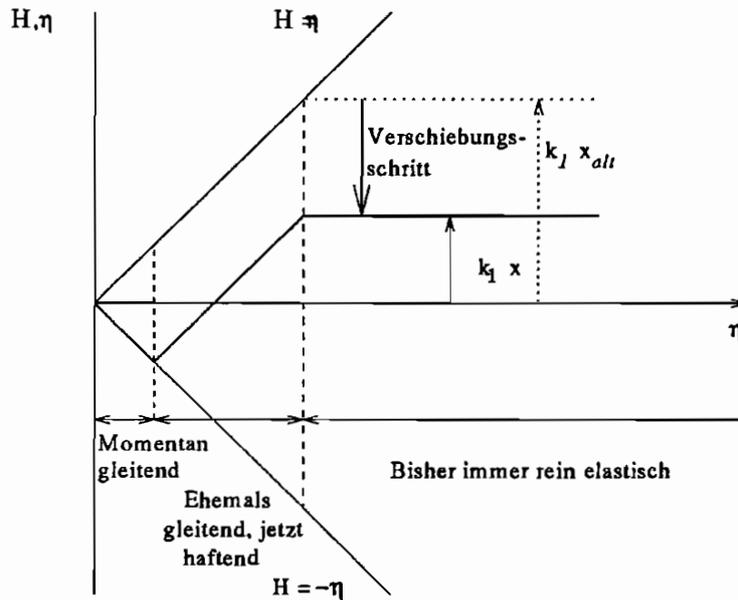


Abbildung 0.3: Gedächtnisfunktion nach Richtungsumkehr der Verschiebung

tungswechsel: Die bisher gleitenden Stränge haften sofort wieder, für η nahe 0 aber setzt sogleich Gleiten in die andere Richtung ein, wenn an einer Stelle η die Haftkraft $H = \pm\eta$ erreicht wird, dargestellt in Abb. 0.4.

Auf diese Art kann nun eine vielfach gezackte Gedächtnisfunktion entstehen, wenn die Verformung monoton abklingt, Abb. 0.5. Jede neue Überschreitung einer lokalen Amplitude löscht alle Anteile der Gedächtnisfunktion, die aus kleineren Amplituden resultieren, bei $x > |x_{max}|$ ergibt sich wieder die vorletzte Abb. 0.2, bei $-x \geq |x_{max}|$ muß diese Gedächtnisfunktion um die Abszisse gespiegelt gedacht werden. Die Gedächtnisfunktion kann auch als der Ort aller Reibelementspitzen nach einer entsprechenden Belastungsgeschichte interpretiert werden. Bei Gleiten findet dann keine weitere Verschiebung statt, die Reibspitze bleibt auf der Geraden $H = \pm\eta$ stehen. Zur Berechnung der Gesamtkraft des Elementes müssen nun nur noch die einzelnen Anteile mit einer Exponentialverteilung

$$\Phi(x) = \alpha e^{-\alpha x} ; \int_0^{\infty} \Phi(x) = 1 \quad (0.4)$$

bewertet werden, womit dann die Gesamtkraft des Elementes insgesamt endlich bleibt. Damit wird der differentielle Kraftanteil an einer Stelle η mit

$$H(\eta) = p\eta + q, \quad (0.5)$$

der Geradengleichung der Gedächtnisfunktion an der Stelle η :

$$h(\eta) = \alpha e^{-\alpha\eta} H(\eta) = \alpha e^{-\alpha\eta} (p\eta + q) \quad (0.6)$$

Die Integration aller Stränge über das Intervall $\eta_{k+1} \leq \eta < \eta_k$, in dem für die Gedächtnisfunktion die k-te Geradengleichung (Abb. 0.5)

$$H(\eta) = p_k\eta + q_k \quad (0.7)$$

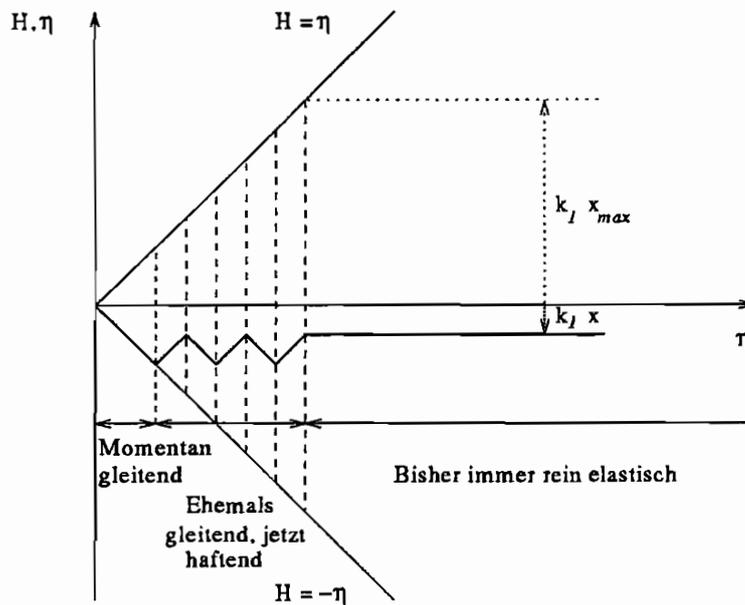


Abbildung 0.4: Gedächtnisfunktion nach monoton abklingender Schwingung

gilt, liefert nun einen Kraftanteil F_{Mk} für die Gesamtkraft F_M im k -ten Anteil der Gedächtnisfunktion:

$$F_{Mk} = \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \alpha e^{-\alpha\eta} (p_k \eta + q_k) d\eta \quad (0.8)$$

Das Integral läßt sich auflösen und liefert analytisch die Kraft im Masingelement, die aus Verschiebung und Gedächtnisfunktion resultiert:

$$\begin{aligned} F_{Mk} &= \int_{\eta_{k+1}}^{\eta_k} \alpha e^{-\alpha\eta} (p_k \eta + q_k) d\eta \\ &= \int_{\eta_{k+1}}^{\eta_k} e^{-\alpha\eta} p_k \eta d\eta + \alpha q_k \int_{\eta_{k+1}}^{\eta_k} e^{-\alpha\eta} d\eta \\ &= \alpha p_k \left[\frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha\eta} (-\alpha\eta - 1) \right]_{\eta_{k+1}}^{\eta_k} + \alpha q \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha\eta} \right]_{\eta_{k+1}}^{\eta_k} \\ &= \frac{p_k}{\alpha} e^{-\alpha\eta_{k+1}} (1 + \alpha\eta_{k+1}) - e^{-\alpha\eta_k} (1 + \alpha\eta_k) + q (e^{-\alpha\eta_{k+1}} - e^{-\alpha\eta_k}) \\ &= e^{-\alpha\eta_{k+1}} \left(\frac{p_k}{\alpha} + p_k \eta_{k+1} + q_k \right) - e^{-\alpha\eta_k} \left(\frac{p_k}{\alpha} + p_k \eta_k + q_k \right) \end{aligned} \quad (0.9)$$

Mit dieser analytischen Lösung des Teilintegrals über die bewertete Gedächtnisfunktion ist für jede beliebige Gedächtnisfunktion die Gesamtkraft F_M berechenbar. Die Summe über alle n Geraden oder Anteile der Gedächtnisfunktion ergibt diese Gesamtkraft F_M :

$$F_M = \sum_{k=0}^n F_{Mk} = \sum_{k=0}^n \left(\int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \alpha e^{-\alpha\eta} (p_k \eta + q_k) d\eta \right) \quad (0.10)$$

Das Vorgehen für die Berechnung des Masingelementes ist nun:

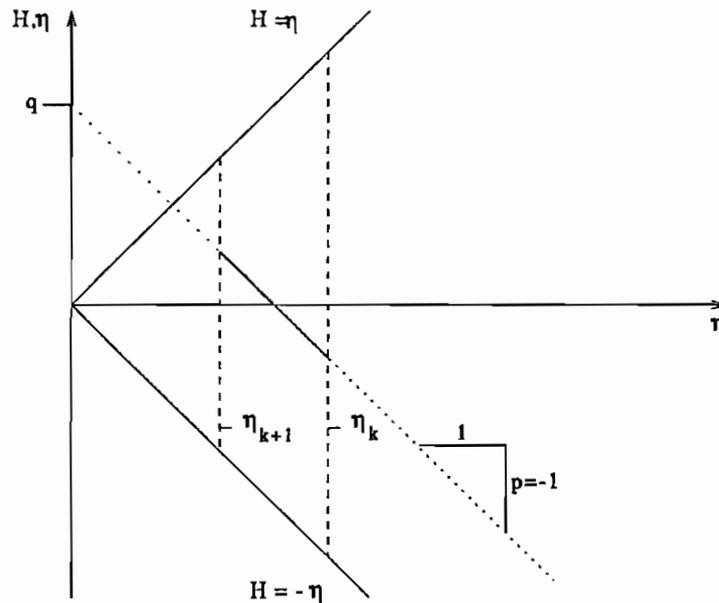


Abbildung 0.5: k -tes Stück der Gedächtnisfunktion $H = p_k \eta + q_k$ im Intervall $\{ \eta_{k+1}, \eta_k \}$

1. Festlegung eines Anfangszustandes für die Gedächtnisfunktion H_0 , die Gesamtkraft F_{M0} und die Systemgrößen.
2. Berechnung der neuen Gesamtkraft F_{Mi} anhand der vorgegebenen neuen Verschiebung x_i und der alten Gedächtnisfunktion H_{i-1} des vorhergehenden Iterationsschrittes $i-1$. Wegen des perfekten Gedächtnisses des Masingelementes kann die Iteration im Rahmen einer Einschnittformel wie z.B. Euler- oder Runge-Kutta-Verfahren erfolgen.
3. Berechnung und Abspeicherung aller Anteile der neuen Gedächtnisfunktion H_i und der aktuellen Elementkraft F_{Mi} als Basis für einen neuen Iterationsschritt $i+1$.
4. Nach vollständiger Berechnung eines Iterationsschrittes i beginnt die Rechnung von vorne mit $i = i+1$ und Punkt 2.

Die bisherige Literatur, z.B. [16, 5, 6, 7], ging im Falle von n -parametrischen Modellen für nichtlineare Dämpfung wie dem Masing-, Iwan- und Biot-Modell generell davon aus, daß diese Modelle ohne starke Einschränkungen nicht praktisch eingesetzt werden können. Der Vorteil des hier erarbeiteten Vorgehens liegt in folgenden Punkten:

- Bisher übliche stückweise Linearisierungen der beteiligten Funktionen entfallen ersatzlos [8, 17].
- Beschränkungen der Verteilungsfunktion auf andere Intervalle als $\{0, \infty\}$ entfallen ersatzlos [8].

- Die Erfassung der inneren Variablen bei der Berechnung bereitete mit wachsender Anzahl der Teilstränge schnell Probleme [8, 17]. Eine große Anzahl innerer Variablen ist hier nicht mehr erforderlich, da unendlich viele Teilstränge mit *einer* Gedächtnisfunktion erfaßt sind, deren Parameterzahl das vierfache der Anzahl ihrer Teilstücke beträgt, in der Regel nach eigenen Versuchen nicht über 100, was mit dem vorliegenden Algorithmus problemlos zu handhaben ist. Es ist kein neuer Ansatz erforderlich für „längere“ Gedächtnisfunktionen, lediglich eine höhere Dimensionierung der Felder und mehr Rechenzeit.

Beim hier vorliegenden Ansatz ist nun erstmals auf dem Weg, die $n = \infty$ Parameter über eine Exponentialverteilung zu erfassen, durchgängig eine unendliche Anzahl innerer Variablen des Masingmodells gegeben, die aber rechentechnisch keine Probleme mehr bereitet wie bisher immer angenommen. Einer praktischen Anwendung des Masingmodells im ursprünglichen Sinne steht damit nichts mehr im Wege.

Literaturverzeichnis

- [1] G. Masing. Zur HEYN'schen Theorie der Verfestigung der Metalle durch verborgenen elastische Spannungen. *Wissenschaftl. Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern*, 3(1):231–239, 1923/1924.
- [2] G. Masing. Berechnung von Dehnungs- und Stauchungslinien auf Grund von inneren Spannungen. *Wissenschaftl. Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern*, 5(2):135–141, 1926/1927.
- [3] G. Masing. Eigenspannungen und Verfestigung beim Messing. In *Proceedings of the Second International Congress of Applied Mechanics*, pages 332–335, 1926.
- [4] G. Masing, W. Manksch. Über das Verhalten von kalt gerecktem Messing bei Zug- und Stauchbelastung. *Wissenschaftl. Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern*, 5(2):142–155, 1926/1927.
- [5] W.D. Iwan. On a Class of Models for the Yielding Behaviour of Continuous and Composite Systems. *J. of Appl. Mech.*, 34(3):612–617, 1967.

- [6] H. Kolsch; D. Ottl. Modellierung und numerische Simulation von Federelementen mit statischer Hysterese. Technical report, Curt-Risch-Inst. der Univ. Hannover, 1990.
- [7] D. Ottl. Schwingungen mechanischer Systeme mit Strukturdämpfung. *VDI Forschungshefte*, 603:3–36, 1981.
- [8] G. Renker. *Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme*. Dissertation, Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1989.
- [9] Z. Wang.; C. Laird. Relationship between loading process and masing behaviour in cyclic deformation. *Mat. Sci. Eng. A*, 101:L1–L5, 1988.
- [10] R. Dieterle. *Modelle für das Dämpfungsverhalten von schwingenden Stahlbetonträgern in gerissenem und ungerissenem Zustand*. Dissertation, ETH Zürich, Zürich, 1981.
- [11] R. Dieterle; H. Bachmann. *Versuche über den Einfluß der Ribbildung auf die dynamischen Eigenschaften von Leichtbeton- und Betonbalken*. ETH, Institut f. Baustatik und Konstr., Zürich, 1979.
- [12] R. Flesch. *Das Dämpfungsverhalten schwingender Stahlbetontragwerke*. Dissertation, Univ. Wien, Wien, 1980.
- [13] H. Lenk. *Über das Schwingungsverhalten von Spannbeton- und Stahlbetonbalken*. Dissertation, Univ. Stuttgart, Stuttgart, 1964.
- [14] I.F. Meyer. *Ein werkstoffgerechtes Schädigungsmodell und Stababschnittselement für Stahlbeton unter zyklischer nichtlinearer Beanspruchung*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1988.
- [15] O. Mahrenholtz; L. Gaul. *Dämpfungsfragen*. VDI-Bildungswerk, 1983.
- [16] R. Ahrens. *Innere Variablen in linear-viskoelastischen Schwingungssystemen*. Dissertation, TU Braunschweig, Braunschweig, 1992.
- [17] M. Zhang. *Zur Beschreibung und Identifikation von mechanischen Schwingungssystemen mit nichtlinearen Strukturdämpfungen*. Dissertation, Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum, Bochum, 1990.

Digitale Regelung sekundärgeregelter hydrostatischer Antriebe in einem hochdynamischen Verspannungsprüfstand

Behrens H. u. Steinhausen J.

1 Der Versuchsstand

Im Rahmen des SFB 278 (hydrodynamische Leistungsübertragung) ist am Institut für Mechanik, Arbeitsgruppe Numerische Methoden Prof. Waller, ein hochdynamischer Verspannungsprüfstand als Kupplungs- und Wandler Prüfstand realisiert worden. Dabei lag der Schwerpunkt bei der Planung des Versuchsstands auf einer sehr hohen Dynamik der Antriebsmaschinen sowie einer genauen Regelung und Meßwerterfassung.

Aufgrund ihrer kompakten Bauweise und hohen Dynamik sind als Antriebsmaschinen zwei unabhängig voneinander sekundärgeregelte Axialkolbenmaschinen (Hydrostaten) ausgewählt worden.

Der Versuchsstand mit seinen zwei Antriebseinheiten und den dazwischen angeordneten Prüfbobjekten ist modular aufgebaut. Auf einem sechs Meter langen Grundrahmen aus einer torsionssteifen Schweißkonstruktion sind die verschiedenen Aufbauten in separaten Lagerungen verschieblich angeordnet. Somit sind unterschiedliche Versuchsaufbauten mit verschiedenen Prüfbobjekten möglich und in der Länge variierbar. Auch die Maschinen sind in separaten Vorrichtungen verschiebbar angeordnet.

Die hydraulische Anlage besteht aus einer Primäreinheit mit Öltank sowie den zwei Sekundäreinheiten. Die Primäreinheit (85 kW installierte elektr. Leistung) erzeugt einen konstanten Druck von 300 bar hochdruckseitig. Der Niederdruck beträgt 15 bar.

Die AKM's können im Vier-Quadrantenbetrieb betrieben werden, d.h. als Motor oder Bremse, links- sowie rechtsdrehend.

2 Sekundärgeregelte Axialkolbeneinheiten

Den hydrostatischen Antrieb des Versuchsstandes bildet für An- und Abtriebsseite jeweils eine Axialkolbenmaschine (AKM) in Schrägscheibenbauart mit einer maximalen Leistung von 200 kW (max. 1050 Nm bei 1860 U/min). Die 9 Kolben der Sekundäreinheit sind um 4 Grad geneigt auf einem Kegelmantel in Trommelbauart um die Abtriebswelle angeordnet. Die Steuerung der Ölförderung erfolgt über eine feststehende Steuerscheibe. Sie besitzt zwei halbkreisförmige sich gegenüberliegende Schlitze, die zum einen mit Hochdruck zum anderen mit Niederdruck beaufschlagt sind. Arbeitet die Einheit als Pumpe, sind die Anschlüsse der Steuerscheibe entsprechend mit der Druckleitung bzw. der Versorgungsleitung (Tank) verbunden.

Die Kolben stützen sich über Kugelgelenke mit Gleitschuhen gegen die von -15° bis $+15^\circ$ verstellbare Schrägscheibe ab. Eine Verstellung des Schrägscheibenwinkels aus der Nullage heraus bewirkt, daß ein Moment um die Drehachse an der Abtriebswelle erzeugt wird. Das Moment ist proportional zum Schwenkwinkel. Ist die Last an der Abtriebswelle geringer als das erzeugte Drehmoment, so setzt sich die Maschine in Bewegung. Mit der Verstellung der Schrägscheibe ändert sich aber auch der Kolbenhub. Dies bedeutet bei drehender Maschine eine Veränderung des Ölvolumenstroms.

Die Verstellung der Schrägscheibe erfolgt über einen im Gehäuse integrierten Stellzylinder. Das maximale Drehmoment wird von der Druckdifferenz an den Anschlüssen bestimmt. Die abgegebene Leistung wird auf der mechanischen Seite durch die Größen Moment und Drehzahl, auf der hydraulischen durch die Größen Druck und Fördervolumen bestimmt.

Die Axialkolbenmaschinen werden am Versuchsstand als Sekundäreinheiten verwendet. Bei der Sekundärregelung handelt es sich um ein System mit eingepprägtem Druck im Gegensatz zu konventionellen Systemen, bei denen ein eingepprägter Volumenstrom vorliegt. Systeme mit eingepprägtem Volumenstrom reagieren auf Lastschwankungen mit einer Veränderung des Arbeitsdruckes, Systeme mit eingepprägten Druck hingegen mit einer Veränderung des Förderstromes. Die Regelung der Drehzahl eines an das Konstantdrucknetz angeschlossenen Axialkolbenmotors erfolgt über den Schwenkwinkel der Schrägscheibe, also über eine Verstellung der jeweiligen Sekundäreinheit. Schwankende Drehmomente (Hohe Dynamik der Antriebseinheiten) verursachen daher ausschließlich Volumenstromänderungen. Der Betriebsdruck bleibt nahezu konstant und ist im wesentlichen vom Ladezustand der im System eingebauten Hydrospeicher abhängig. Diese werden von der Primäreinheit versorgt und dienen zur Energiespeicherung. Jede Sekundäreinheit des Versuchsstandes hat jeweils einen Speicher im Hochdruck- und einen im Niederdruckkreislauf.

Wird eine der beiden Sekundärmaschinen als Bremse eingesetzt, so arbeitet sie im Pumpenbetrieb. Die mechanische Leistung wird in hydraulische umgewandelt und dem Netz wieder zugeführt. Dadurch brauchen durch die Primäreinheit nur die Verluste gedeckt zu werden, die an Motor, Pumpe und im Versuchsaufbau (z.B.: Dissipation in der hydrodynamischen Kupplung) entstehen.

3 Analoge Regelung der Sekundäreinheiten

Die zwei Maschinen im Versuchsstand werden unabhängig voneinander über je eine analoge Regelkarte geregelt. Der entsprechende Regelmodus, Drehzahl- oder Momentenregelung, einer Maschine kann über diese Regelkarte eingestellt werden. Überwacht wird die gesamte Anlage durch eine SPS. Mit dieser wird die Betriebssicherheit des Versuchsstands gewährleistet.

Der Betrieb der Hydrostaten im Verspannungsprüfstand erlaubt eine freie Einstellung des Regelmodus der Maschinen. Es sind alle Kombinationen aus Drehzahl- oder Drehmomentregelung wählbar. Ausgeschlossen ist die Kombination Momentenregelung auf beiden Maschinen gleichzeitig. Diese Einstellung ist über die SPS ausgeschlossen. Sie führt zu undefinierten Betriebszuständen. Bei schlupfbehafteten Antriebssträngen im Verspannungsprüfstand bietet sich die Drehzahl - Drehzahlregelung der Maschinen an.

Die analoge Regelung des AKM's erfolgt über einen inneren und einen äußeren Regelkreis. Die Drehzahl wird mit hochauflösenden Inkrementalgebern (4000 Striche/360 Grad) an der Maschinenachse gemessen. Der eingestellte Schwenkwinkel wird über eine schiefe Ebene durch einen Weggeber am Stellkolben gemessen. Der innere Regelkreis besteht aus einem PD-Regler zur Regelung des Schwenkwinkels. Der äußere Regelkreis (Drehzahl- bzw. Drehmomentregler) wird durch einen PID-Regler gebildet, dessen Ausgang der Sollwerteingang des PD-Reglers ist. Es handelt sich hierbei um eine Kaskadenregelung.

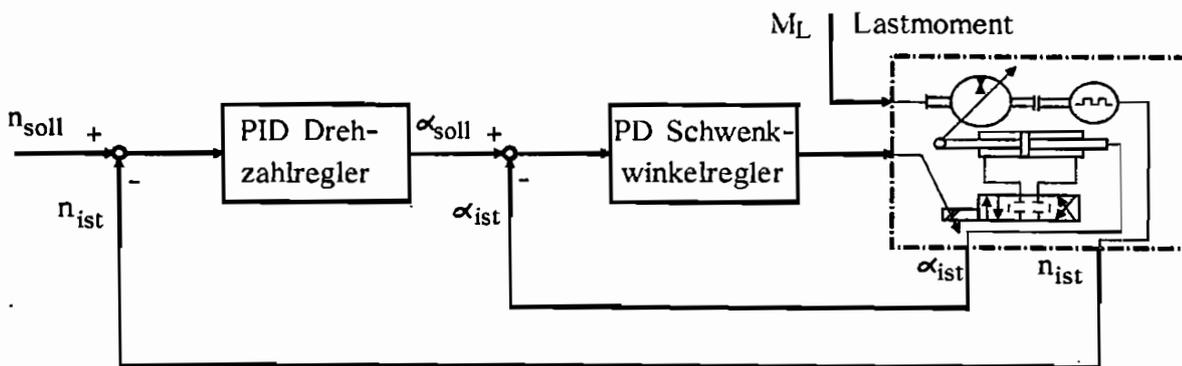


Abbildung 1: Analoge Regelung der Antriebseinheit (Kaskadenregelung)

Der Drehzahlsollwert für die Regelung wird in Echtzeit von einem Digitalrechner vorgegeben.

Um die Dynamik der Anlage an die unterschiedlichen Prüfobjekte und Meßbedingungen bzw. an schnelle Sollwertänderungen bei instationären Messungen anpassen zu können, sind die Reglerkoeffizienten der einzelnen Regler getrennt voneinander einstellbar. Beim inneren Regelkreis sind dies der P- und D-Anteil des Schwenkwinkelreglers, und beim äußeren Kreis der P-, I- und D-Anteil des Drehzahl-/Drehmomentreglers. Die verschiedenen Anteile lassen sich zwar verstellen, können aber nicht ausgeschaltet werden. Somit kann ihr Einfluß nur abgeschwächt oder verstärkt werden.

Um die Maschinen vor eventuellen Sollwertsprüngen zu schützen, sind den Drehzahlreglern jeweils Rampenfunktionen vorgeschaltet, die nur eine bestimmte Dynamik der Anlage zulassen. Diese Rampen können auf der Reglerkarte nicht abgeschaltet werden. Bei instationären Messungen mit hoher Dynamik (schnelle Sollwertänderungen) sind die Grenzen der analogen Regelung hinsichtlich ihrer Dynamik schnell erreicht. Dabei weist der Regler ein viel trägers Verhalten als die Maschinen auf.

Um nun die Nachteile des analogen Reglers ausschließen zu können, ist der Versuchsstand um zwei digitale Drehzahlregler, die dem analogen Regler parallelgeschaltet worden sind, erweitert worden.

4 Digitale Regelung des Versuchsstands

Bei dem digitalen Regler handelt es sich um einen allgemeinen PID-Regelalgorithmus mit verzögertem Differentialanteil, bei dem über die Wahl der Regelkoeffizienten unterschiedliche Regler eingestellt werden können. Anders als beim analogen Regler lassen sich beim digitalen bestimmte Anteile ganz unterdrücken. Man erhält z.B. ohne I-Anteil nur ein PD-Regelverhalten. Es sind die folgenden Einstellungen möglich: P-, PI-, PD- und PID-Regler. Der P-Regler ist ein schneller Regler mit einer bleibenden Regelabweichung. Bei Störungen erhält man nur eine geringe Ausregelung. Eine sehr kurze Anregelzeit mit einer höheren statischen Verstärkung besitzt der PD-Regler. Aber auch bei diesem Regler bleibt eine Regelabweichung. Der PI-Regler ist ein in antriebstechnischen Regelungen sehr verbreiteter Regler, der Störungen völlig ausregelt. Dabei ist er aber oft nicht schnell genug. Bei I-Gliedern in der Regelstrecke neigt er schnell zu Instabilitäten. Der PID-Regler kompensiert die Instabilität des PI-Reglers. Er ist sehr schnell und regelt Störungen völlig aus. Befindet sich ein I-Glied in der Regelstrecke, dann ist die Anwendung eines reinen I-Reglers nicht möglich, da der geschlossene Reglerkreis instabil wird. Aus der idealisierten Gleichung des PID-Reglers

$$u(t) = K \cdot \left[e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (1)$$

ergibt sich die folgende Übertragungsfunktion im Bildbereich:

$$G_R = K_R \cdot \left[1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{1 + T_V s} \right] \quad (2)$$

Um die digitale Reglergleichung zu erhalten, wird die z-Transformation durchgeführt. Dabei erfolgt die Integration nach der Trapez-Integration (Tustin-Formel), und der D-Anteil wird über den Differenzenquotienten abgebildet. Nach einer inversen z-Transformation ergibt sich die Differenzgleichung des digitalen PID-Reglers:

$$u(k) = (1 - c_1) \cdot u(k-1) + c_1 \cdot u(k-2) + q_0 \cdot e(k) + q_1 \cdot e(k-1) + q_2 \cdot e(k-2) \quad (3)$$

mit $e(k) = n_{soll}(k) - n_{ist}(k)$ (Regelabweichung)

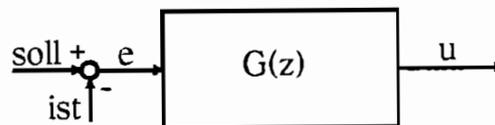


Abbildung 2: Blockschaltbild des Reglers

Die Koeffizienten c_1 , q_0 , q_1 und q_2 der Gleichung (3) ergeben sich aus den Parametern K_R , T_I , T_D und T_V des analogen Reglers. Dadurch können Erkenntnisse der analogen Regelungstechnik mit Einschränkungen auf digitale Regler angewendet werden.

Als digitaler Regelalgorithmus ist ein aus der Übertragungsfunktion eines analogen Reglers (2) hergeleiteter PID-Regler gewählt worden, da die Regelstrecke, bestehend aus den hydrostatischen Antrieben, nicht genau genug mathematisch abgebildet werden kann. Es ist so eine genaue Reglerauslegung nicht durchführbar. Auch

müssen eine große Anzahl von unterschiedlichen Störgrößen zugelassen werden, da unterschiedliche Prüfobjekte, wie hydrodynamische Kupplungen oder Wandler, verschiedene Antriebsstränge, etc., auf dem Versuchsstand getestet werden. Außerdem sollen große Betriebsbereiche der Anlage mit hoher Geschwindigkeit durchfahren werden.

Mit dem allgemeinen digitalen PID-Algorithmus läßt sich der Regler soweit den Gegebenheiten anpassen, daß er im geschlossenen Regelkreis mit der gewünschten Dynamik stabil betrieben werden kann.

Es ergibt sich mit dem digitalen Drehzahlregler ein neuer Aufbau der Regelung. Im inneren Regelkreis wird auch weiterhin der Schwenkwinkel analog geregelt (PD-Regler). Dadurch kann die Betriebssicherheit des Versuchsstands auch weiterhin durch die SPS überwacht werden. Im äußeren Regelkreis arbeitet jetzt der digitale Drehzahlregler.

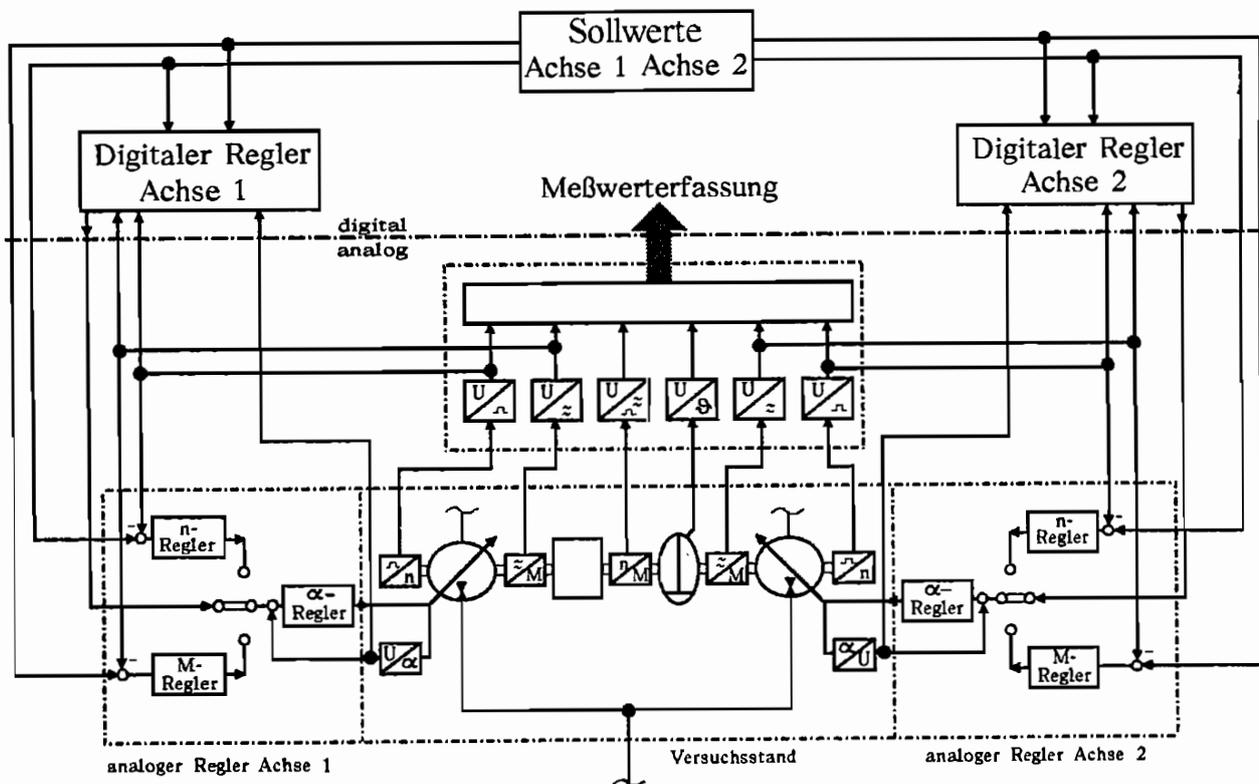


Abbildung 3: Digitale und analoge Regelung des Versuchsstands

Das bestehende Meßwerterfassungssystem des Versuchsstands (VMEbus-Rechner mit Host-CPU und zwei in Echtzeit laufende Target CPUs, A/D- und D/A-Wandler, Sample&Hold, analoge Filterkarten mit 512 Hz Eckfrequenz) ist um zwei Target-CPU's erweitert worden, auf denen in Echtzeit unabhängig voneinander je ein digitaler Regelalgorithmus läuft. Somit kann jede Maschine für sich mit unterschiedlichen Reglereinstellungen geregelt werden. Die Abtastfrequenz der Meßwerterfassung sowie der digitalen Regelung beträgt 2000 Hz, wobei dies variabel, den Anforderungen entsprechend, eingestellt werden kann. Ist- und Sollwerte des jeweiligen Reglers werden zu Beginn eines Abtastschritts eingelesen, wobei die Sollwerte ebenfalls in Echtzeit durch eine Routine für jeden Abtastschritt entsprechend der Vorgaben

neu berechnet werden. Es können verschiedene Sollwertfunktionen als Erregungen am Versuchsstand gewählt werden, z.B. Rampen mit unterschiedlicher Steilheit, Sinus- und Trapezerreregungen mit variabler Frequenz und Amplitude, Sinussweeperreregungen. Die Istwerte der Maschinen werden über einen A/D-Wandlers zu Beginn eines jeden Schrittes eingelesen.

Der neu berechnete Reglerausgang wird dem analogen Schwenkwinkelregler im nächsten Abtastschritt über einen D/A-Wandler als Sollwerteingang vorgegeben.

5 Ergebnisse

Der Versuchsstand ist um ein wichtiges Werkzeug, die digitale Regelung, erweitert worden. Er kann nach wie vor bei stationären Messungen sowie bei geringer Dynamik mit der analogen Regelung betrieben werden. Dies hat den Vorteil, daß alle ursprünglichen Anwendungsfälle (z.B. Betrieb von Hand oder über eine Fernbedienung) weiterhin möglich sind. Durch das Prinzip der Sekundärregelung sind hochdynamische Vorgänge an den Antriebseinheiten überhaupt möglich. Aber erst durch die digitale Regelung können diese Möglichkeiten ausgeschöpft werden. Bei speziellen Sollwertverläufen (instationäre Messungen) und einer geforderten hohen Dynamik der Maschine kann der digitale Regler eingesetzt und den Bedingungen angepaßt werden. Dabei liegt der Hauptvorteil in der schnellen und einfachen Anpassung des Reglerverhaltens an die Gegebenheiten. Es kann zwischen verschiedenen Reglern mit entsprechenden Parametersätzen umgeschaltet werden. Dies kann als Vorstufe für eine adaptive Regelung dienen.

Gegenüber dem analogen Regler besitzt der digitale Regler sehr variable Einstellmöglichkeiten und bietet eine höhere Dynamik. Dies macht sich besonders bei Rampen- und Sinus/Trapezerreregungen bemerkbar. Bei Rampenfunktionen als Erregungen der Maschinen erhält man wesentlich schärfere Übergänge. Dies ist besonders bei der Identifikation nichtlinearer Systeme von großer Bedeutung, um genug Informationen in der Systemantwort zu erhalten.

Literatur

- [1] Isermann, R., 1988, *Digitale Regelsysteme*, Band I und II, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York / London / Paris / Tokyo
- [2] Feuser, A., Kordak, R., Liebler G., 1989, *Hydrostatische Antriebe mit Sekundärregelung*, Der Hydraulik Trainer Band 6, Mannesmann Rexroth GmbH, Lohr am Main
- [3] Unbehauen, H., 1987, *Regelungstechnik I, II und III*, Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden

Schwingungsuntersuchung mit Breitbanderregung, Block-Summen-FFT und explizite Auswerte-Formel

Dietmar Bouchard

Zusammenfassung

Mit der Entwicklung der Digitalrechner und der FFT, einer schnellen (*fast*) diskreten Fourier-Transformation (DFT), wurde in der experimentellen Modalanalyse die klassische Methode der stationären harmonischen Erregung immer weiter verdrängt. Versuche mit freien Schwingungen oder breitbandiger Erregung erlauben es alle Eigenschwingungen (*Moden*) in einem bestimmten Frequenzbereich gleichzeitig zu untersuchen. Die Trennung erfolgt rechnerisch im Anschluß an die Messung. Aus den Spektren der freien Schwingungen oder den Frequenzgangfunktionen werden die Eigenfrequenz, Dämpfung und Eigenform bestimmt. Da bei der FFT zwischen Maximalfrequenz, Frequenzauflösung und Meßzeit ein fester Zusammenhang besteht ist die Wahl der Erregungsfunktion eingeschränkt. Bei der hier beschriebenen Block-Summen-FFT wird durch blockweise Addition der gemessenen Zeitfunktion die Erfassung längerer Meßsignale möglich ohne Fehler oder Einschränkungen. Erregung und Meßzeit können damit optimal an den Versuch angepaßt werden. Die Bestimmung der Schwingungsparameter (Eigenfrequenz, Dämpfung, Eigenform) ist bei den gebräuchlichen Verfahren schnell aber nicht sehr genau, oder sie erfordert viele Frequenzspektren und umfangreiche Erfahrungen des Benutzers. Das hier vorgestellte Verfahren, das mit expliziten Formeln arbeitet, in die jeweils einige Spektralwerte um eine Spitze im Frequenzbereich eingesetzt werden ist sehr schnell bei hoher Genauigkeit und erfordert zur Auswertung nur jeweils ein Spektrum. Wegen der Unterschiede zwischen der Messung freier Schwingungen und der erregter Schwingungen mit anschließender Frequenzgangbestimmung gibt es zwei Varianten des Verfahrens, die sich nur unwesentlich unterscheiden.

1 Explizite Formeln für freie Schwingungen

1.1 Berechnung der diskreten Transformierten

Weil die Modalanalyse ein schwingendes System in Ein-Massen-Schwinger zerlegt, deren Schwingungen überlagert sind, kann zunächst von einem System mit einem Freiheitsgrad ausgegangen werden. Die freie Schwingung des linearen, viskos gedämpften systems wird in komplexer Schreibweise beschrieben durch:

$$x(t) = x_o \cdot e^{(j\Omega - \Delta) t} + x_o^* \cdot e^{(-j\Omega - \Delta) t} \quad (1)$$

Hierin ist x_o^* der konjugiert komplexe Wert zu x_o . Bei der freien Schwingung braucht nur ein Ausschnitt gemessen zu werden, weil die Funktion in jedem Abschnitt gleich ist, bis auf die Größe der komplexen Amplitude. Durch die DFT und die Rahmenbedingungen wird die Zeit T gegeben, für die die Transformation in den Frequenzbereich erfolgt. Aus der Diskretisierung im Zeit- und Frequenzbereich folgt die Periodizität in beiden Bereichen. Damit ergeben sich noch einige Ergänzungen zur analytischen Transformation, so daß das Ergebnis der diskreten Transformation durch folgende Gleichung vollständig beschrieben wird:

$$\begin{aligned}
 X(\omega) = & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{x_o}{j(\Omega - \omega + k 2 \omega_s) - \Delta} \cdot (e^{(j(\Omega - \omega + k 2 \omega_s) - \Delta) T} - 1) \right. \\
 & \left. + \frac{x_o^*}{j(-\Omega - \omega + k 2 \omega_s) - \Delta} \cdot (e^{(j(-\Omega - \omega + k 2 \omega_s) - \Delta) T} - 1) \right] \\
 & - \left[\frac{\pi x_o}{2 \omega_s} \cdot (e^{(j(\Omega - \omega) - \Delta) T} - 1) \right] - \left[\frac{\pi x_o^*}{2 \omega_s} \cdot (e^{(j(-\Omega - \omega) - \Delta) T} - 1) \right] \quad (2)
 \end{aligned}$$

Hierin ist ω_s die Grenzfrequenz nach dem Abtasttheorem von Shannon, die von den Zeitabständen zwischen den diskreten Meßwerten abhängt ($\omega_s = \pi / T_D$).

1.2 Auswerte-Formeln für Spektren freier Schwingungen

Da (3) nicht aufgelöst werden kann, wird als Näherung nur der Term verwendet, der im Bereich der Schwingungsfrequenz maximal ist:

$$\overset{\approx}{X}(\omega) = \frac{x_o}{\Delta - j(\omega - \Omega)} (e^{(j(\Omega - \omega) - \Delta) T} - 1) \quad \text{mit} \quad X(\omega) \approx X(\omega) \quad \text{für} \quad \omega \approx \Omega \quad (3)$$

Diese Gleichung läßt sich, wenn zwei benachbarte Frequenzen ω_k und ω_{k+1} eingesetzt werden, nach der Frequenz und Dämpfung (dem komplexen Eigenwert) des Systems umstellen. Statt der Näherungsfunktion wird hier einfach X geschrieben:

$$\Omega - j\Delta = \omega_k + \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{X(\omega_{k+1})}{X(\omega_{k+1}) - X(\omega_k)} \quad (4)$$

Zur Bestimmung der komplexen Amplitude kann (3) direkt aufgelöst werden:

$$x_o = \frac{j(\Omega - \omega_k) - \Delta}{e^{(j(\Omega - \omega_k) - \Delta) T} - 1} \cdot X(\omega_k) \quad (5)$$

Optimale Ergebnisse werden erreicht durch das Einsetzen der Werte, die der Schwingungsfrequenz am nächsten sind ($\omega_k \leq \Omega \leq \omega_{k+1}$).

Diese Formeln lassen sich noch erweitern, so daß mehr als nur zwei Werte der Frequenzfunktion eingesetzt werden können:

$$\Omega - j\Delta = \omega_k + (m-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{m-1} (-1)^n \cdot \binom{m-2}{n-1} \cdot X(\omega_{k+m-n})}{\sum_{n=1}^m (-1)^n \cdot \binom{m-1}{n-1} \cdot X(\omega_{k+m-n})} \quad (6)$$

$$x_o = \frac{-j}{(m-1)!} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{m-1} \cdot \prod_{n=1}^m [\Omega - \omega_{k+m-n} - j\Delta] \cdot \sum_{n=1}^m (-1)^n \cdot \binom{m-1}{n-1} \cdot X(\omega_{k+m-n}) \quad (7)$$

Der Vorteil ist dabei, daß der Einfluß von den in der Näherungsgleichung (3) nicht berücksichtigten Termen, besser unterdrückt werden kann. Bei drei Werten hat durch die Differenz-

bildung eine überlagerte Konstante im Frequenzbereich keinen Einfluß auf die Ergebnisse, bei vier Werten eine lineare Funktion. Der Nachteil ist dabei, daß durch die Verwendung auch betragsmäßig kleinerer Werte der Einfluß des Meß-Rauschens zunimmt. Bei praktischen Versuchen brachten mehr als vier Werte in der Regel keine Verbesserung der Ergebnisse.

2 Explizite Formeln für erregte Schwingungen

2.1 Unterschiede zur Messung freier Schwingungen

Anders als bei der freien Schwingung, bei der sich die Schwingungsfunktion über die Zeit nicht ändert (nur die Amplitude nimmt ab), hängt die erregte Schwingung von der momentanen und der vorangegangenen Erregung ab. Der Erregung muß die Antwort zugeordnet werden können. Das Messen eines beliebigen Ausschnitts führt zu Fehlern, wie dies in Bild 1 an einer impulserregten Schwingung veranschaulicht wird. Im oberen Fall wird die Erregung vollständig, die Antwort fast vollständig erfaßt. Im unteren Fall wird zwar die Erregung vollständig, die Antwort aber nur zu einem kleinen Teil gemessen. Werden nun jeweils beide Funktionen in den Frequenzbereich transformiert und daraus die Frequenzgangfunktionen bestimmt, so unterscheiden sich die Ergebnisse erheblich. Die zeitliche Verschiebung des Impulses bewirkt nur eine Phasendrehung seines Spektrums. Bei der Frequenzgangberechnung geht diese Information jedoch wieder verloren, so daß eine Interpretation der Unterschiede im Frequenzbereich nicht mehr möglich ist. Bei der Betrachtung der erregten Schwingungen wird deshalb von der analytischen Frequenzgangfunktion ausgegangen, wie sie durch vollständige Erfassung beider Signale bestimmt werden kann.

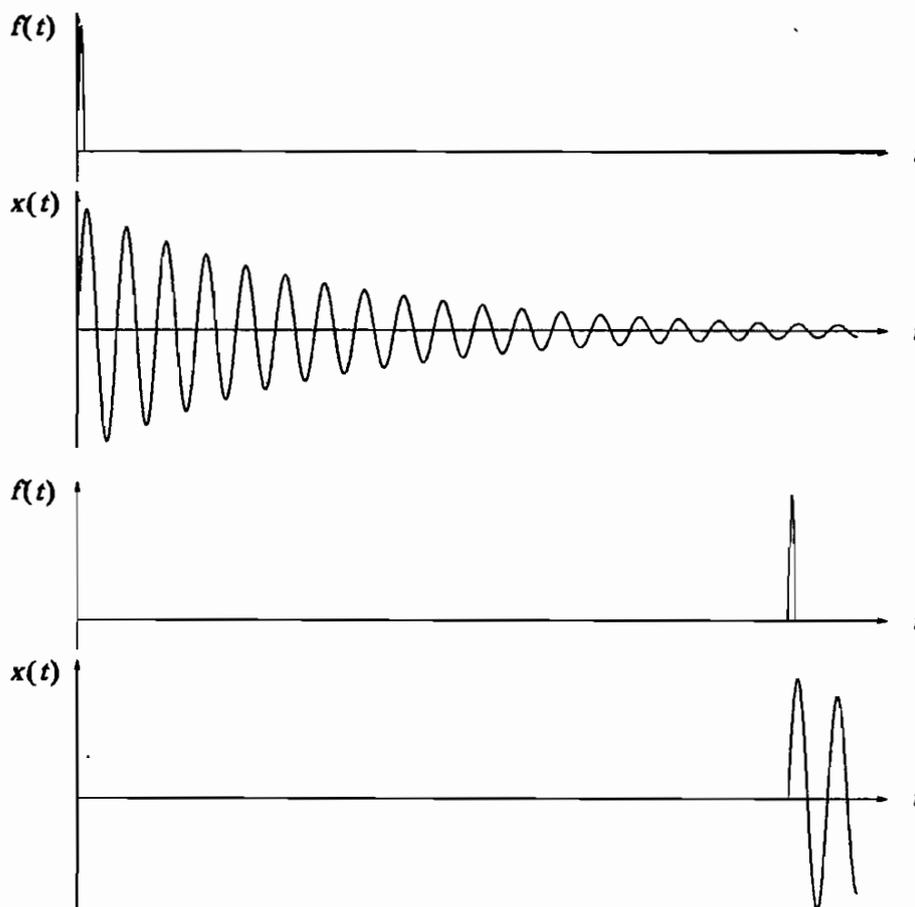


Bild 1: Unterschiedliche Beschneidung einer impulserregten Schwingung im Meßfenster

2.2 Berechnung der Frequenzgangfunktion

Für den Einmassenschwinger wird eine harmonische Erregung angenommen. Mit dem Ansatz der harmonischen Antwort kann das Systemverhalten in Abhängigkeit von der Frequenz durch die Frequenzgangfunktion $H(\omega)$ beschrieben werden:

$$m \ddot{x} + d \dot{x} + k x = f(t) = F(\omega) \cdot e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad x(t) = X(\omega) \cdot e^{j\omega t} \quad (8)$$

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{-\omega^2 m + j\omega d + k} \quad (9)$$

Nach Lösen des Eigenwert-Problems, das die Eigenwerte, die Parameter der freien Schwingung liefert, wird die Frequenzgangfunktion in zwei konjugiert komplexe Funktionen aufgespalten:

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2}, \quad \Delta = \frac{d}{2m}, \quad h_o = \frac{1}{2j\Omega m} \quad (10)$$

$$H(\omega) = \frac{1/m}{(j\omega - j\Omega + \Delta)(j\omega + j\Omega + \Delta)} = \frac{h_o}{j\omega - j\Omega + \Delta} + \frac{h_o^*}{j\omega + j\Omega + \Delta} \quad (11)$$

2.3 Auswerte-Formeln für Frequenzgänge breitbanderregter Schwingungen

Durch analoges Vorgehen wie bei der freien Schwingung können aus dem Frequenzgang zwei Formeln zur Bestimmung der Schwingungsparameter abgeleitet werden:

$$\Omega - j\Delta = \omega_k + \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{h(\omega_{k+1})}{h(\omega_{k+1}) - h(\omega_k)} \quad (12)$$

$$h_o = [j(\Omega - \omega_k) - \Delta] \cdot H(\omega_k) \quad (13)$$

Sie lassen sich ebenfalls auf die Verwendung von mehr als zwei Werten im Frequenzbereich erweitern:

$$\Omega - j\Delta = \omega_k + (m-1) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{m-1} (-1)^n \cdot \binom{m-2}{n-1} \cdot H(\omega_{k+m-n})}{\sum_{n=1}^m (-1)^n \cdot \binom{m-1}{n-1} \cdot H(\omega_{k+m-n})} \quad (14)$$

$$h_o = \frac{j}{(m-1)!} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{m-1} \cdot \prod_{n=1}^m [\Omega - \omega_{k+m-n} - j\Delta] \cdot \sum_{n=1}^m (-1)^n \cdot \binom{m-1}{n-1} \cdot H(\omega_{k+m-n}) \quad (15)$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich nur wenig von denen zur Auswertung freier Schwingungen (6) und (7), sind jedoch etwas einfacher, weil hierin nicht der Einfluß einer begrenzten Meßzeit berücksichtigt werden muß.

2.4 Anwendung der Auswerteverfahren

Die expliziten Auswerte-Formeln bieten bei geringem Rechenaufwand ein Maximum an Genauigkeit. Die einzusetzenden Spitzenwerte können manuell oder durch eine einfache Maximalwertsuche bestimmt werden. Die Fehler durch eng benachbarte Eigenfrequenzen können durch iterative Auswertung [Waller, Schmidt 527] eliminiert werden. Zu beachten ist ferner, daß die Gleichungen für Weg-Frequenzgänge hergeleitet wurden. Die Anwendung auf Geschwindigkeits- oder Beschleunigungs-Frequenzgänge wird möglich durch eine Umrechnung der benutzten Werte (Multiplikation mit $j\omega$ bzw. $-\omega^2$).

3 Block-Summen-FFT

3.1 Gleichungen

Bei der Herleitung des Verfahrens der Block-Summen-FFT wird von der Diskreten-Fourier-Transformation (DFT) ausgegangen. Diese kann für eine beliebige gemessene Funktion $f(t)$ angewendet werden. Bild 2 zeigt schematisch eine Erregungsfunktion und die Antwort eines Systems mit zwei Freiheitsgraden. Als Erregung dient eine harmonische Funktion mit kontinuierlicher Frequenzänderung (Sweep). Die Meßzeit T resultiert aus dem vollständigen Abklingen der Schwingungsantwort. Die Stützstellenzahl N folgt aus der notwendigen Maximalfrequenz die gemessen werden soll.

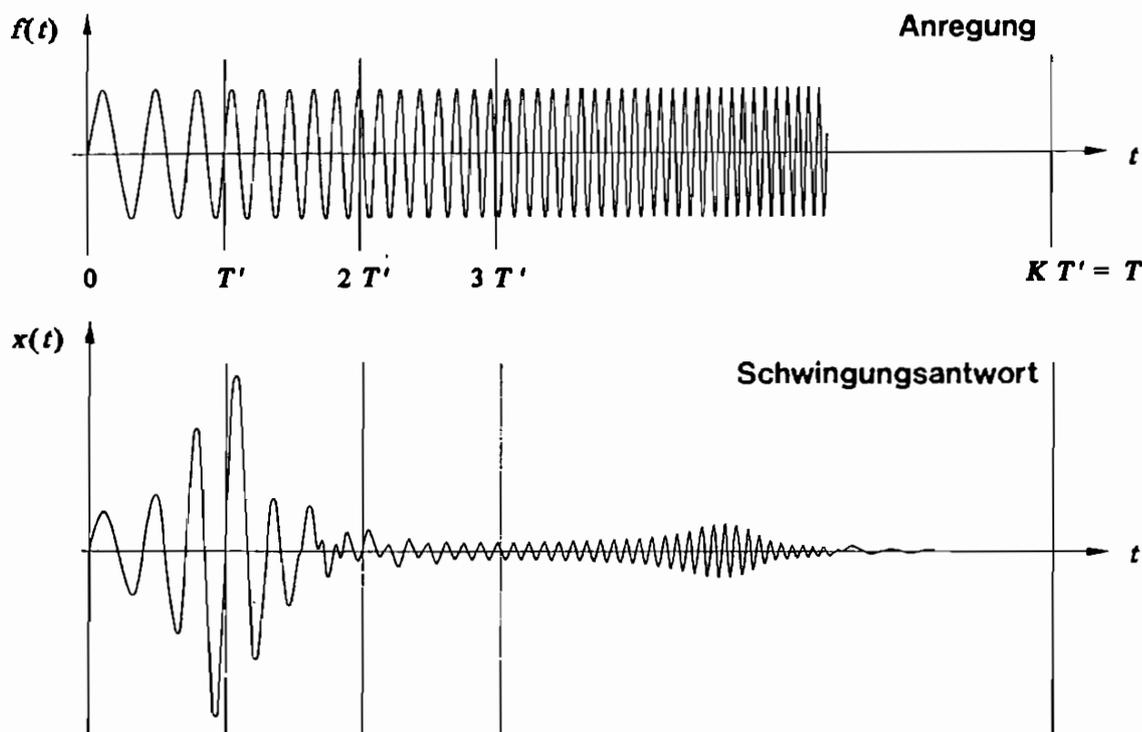


Bild 2: Erregungsfunktion und Antwort aufgeteilt in Zeitblöcke

Die abgetasteten Funktionen werden mit der DFT in den Frequenzbereich transformiert. Die Transformationsgleichung wird hier für eine Funktion aufgestellt:

$$F\left(m \frac{2\pi}{T}\right) = \frac{T}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(n \frac{T}{N}\right) e^{-j2\pi \frac{m n}{N}} \quad (16)$$

Für die Auswertung der Schwingungen würde eine Frequenzdiskretisierung ω'_D ausreichen, wie sie aus der Transformation eines Blocks der Länge T' resultiert. Die sich aus der

K mal längeren Gesamtmeßzeit T ergebende Auflösung ist ω_D . Beide Größe stehen im umgekehrten Verhältnis zueinander.

$$T = K \cdot T', \quad N = K \cdot N', \quad m = K \cdot m' \quad \Rightarrow \quad \omega_D = K \cdot \omega_{D'} = K \cdot \frac{2 \pi}{T} = \frac{2 \pi}{T'} \quad (17)$$

Eingesetzt in die Transformationsgleichung ergibt sich eine Beziehung die in eine innere und eine äußere Summationen aufgespalten werden kann:

$$F\left(m \frac{2 \pi}{K T'}\right) = \sum_{k=0}^{K-1} \left[\frac{T'}{N'} \sum_{n'=0}^{N'-1} f\left(n' \frac{T'}{N'} + k T'\right) e^{-j 2 \pi \left(\frac{m n'}{K N'} + \frac{k m}{K}\right)} \right] \quad (18)$$

$$F\left(m' \frac{2 \pi}{T'}\right) = \frac{T'}{N'} \sum_{n'=0}^{N'-1} \left[\sum_{k=0}^{K-1} f\left(n' \frac{T'}{N'} + k T'\right) \right] e^{-j 2 \pi \frac{m' n'}{N'}} \quad (19)$$

Unter Berücksichtigung der Periodizitäten läßt sich die Reihenfolge der Summation austauschen. Die innere Summe stellt eine lückenlose Summation der jeweils um T' verschobenen Abschnitte der gemessenen Zeitfunktion dar. Da sich die (äußere) Transformationssumme nicht von der in (16) unterscheidet, kann für die Transformation einer solchen Block-Summen-Funktion jeder normale FFT Algorithmus verwendet werden. Damit ist auch gewährleistet das die normalen Eigenschaften der DFT und damit der FFT erhalten bleiben. Bei Anwendung eines Exponentialfensters ist dieses jedoch über die ganze Funktion zu legen.

3.2 Praktische Messungen

Das Verfahren ist wegen der Vorteile des gleichzeitigen Zeit- und Genauigkeitsgewinns programmiert und angewendet worden. Im Folgenden soll an einigen Beispielen der Vorteil bei der Untersuchung von Karosserien durch die Verlängerung der Meßzeit gezeigt werden. Die Bilder zeigen Frequenzgänge und die zugehörigen Kohärenzfunktionen. In Bild 3 ist das Ergebnis eines Versuchs mit stationärem bandbegrenzten Rauschen und herkömmlicher FFT- Auswertung (mit Hanning-Fenster, 50 Mittelungen, H1-Methode) gezeigt. Auffallend

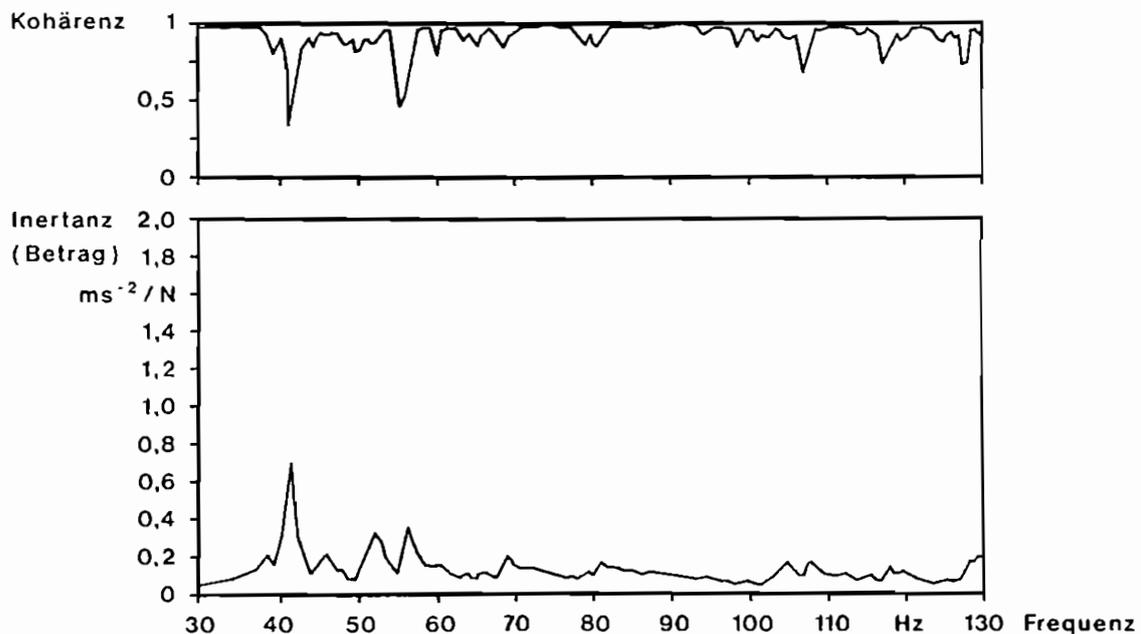


Bild 3: Messung mit stationärem Rauschen und herkömmlicher FFT-Auswertung

sind die Einbrüche der Kohärenz im Bereich der Resonanzspitzen. In den kurzen Ausschnitten von jeweils 2 s Meßzeit werden große Teile der Ausschwingvorgänge nicht erfaßt. Zusätzlich wird das darin enthaltene Ausschwingen auf die jeweils vorangegangene Erregung der gemessenen zugeordnet. Das zweite Beispiel in Bild 4 zeigt eine Messung mit mittelschneller Gleitfrequenz-Erregung. In diesem Fall wurden Anregungs- und Meßzeit (9 s und 12 s) optimal auf das System abgestimmt. Trotz stark verkürzter Versuchszeit sind die Resonanzspitzen deutlicher und die Kohärenz nahezu optimal.

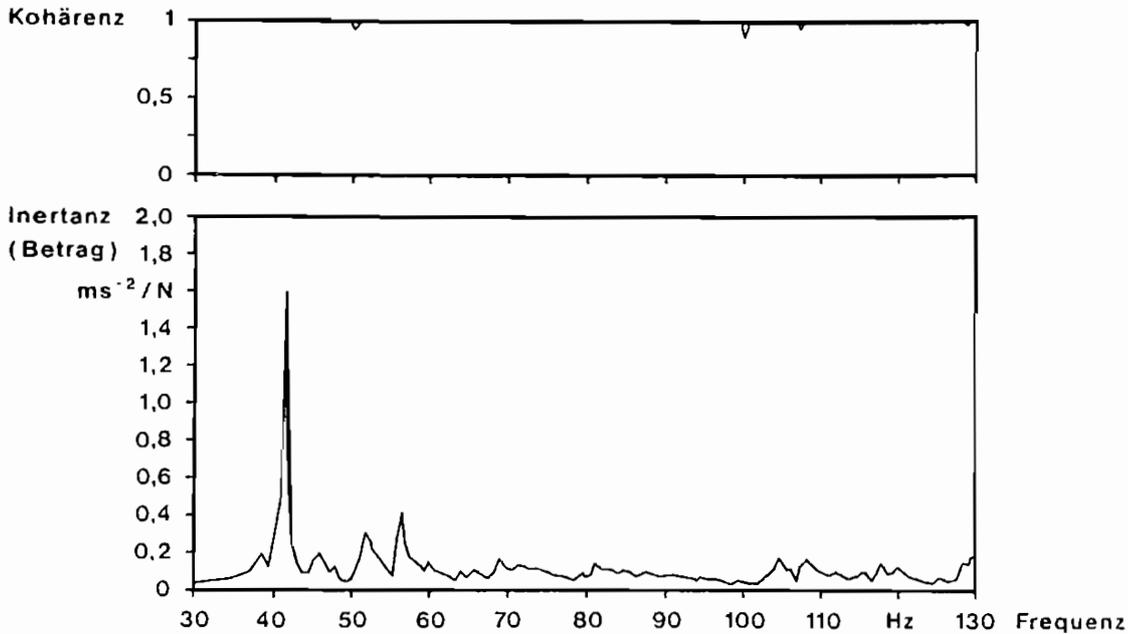


Bild 4: Messung mit Gleitfrequenz-Erregung und Block-Summen-FFT-Auswertung

Zum Abschluß ist in Bild 5 eine Eigenform einer Rohkarosserie dargestellt, die aus Messungen mit der Block-Summen-FFT ermittelt wurden.

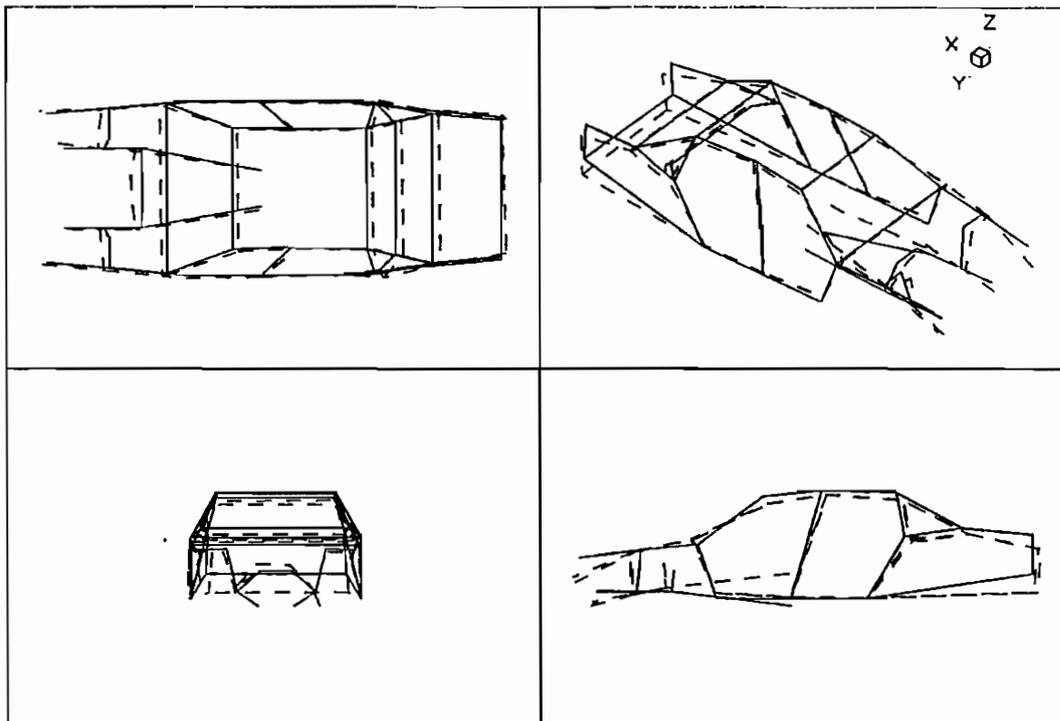


Bild 5: 1. Biegung einer Rohkarosserie

Statische 3D Spannungsberechnung mit BEM/FEM

Lanzerath H. u. Eckstein A.

Zusammenfassung

Die 3D Spannungsberechnung mittels BEM (Boundary Element Method) erfolgt in einer Nachlaufrechnung im Anschluß an die Bestimmung der Randverschiebungen und Randspannungen. Liegt der Quellpunkt \bar{x}^i , an dem die Spannung bestimmt werden soll, im Innern des Körpers, sind lediglich reguläre Integrale auf dem Rand zu bestimmen.

Nähert sich der Quellpunkt jedoch dem Rand, werden die Integranden starksingulär $O(\frac{1}{r^2})$ bzw. hypersingulär $O(\frac{1}{r^3})$. Zur Integration sind dann spezielle Verfahren einzusetzen. Dabei werden zwei Fälle unterschieden: der Quellpunkt ist in Randnähe (fastsinguläre Integrale) oder liegt auf dem Rand. Verfahren zur Integration dieser Fälle werden kurz dargestellt.

Die Darstellungen bleiben auf die Elastostatik beschränkt, ohne dabei die Problematik zu vereinfachen. Eine Erweiterung auf dynamische Berechnungen ist sofort möglich, da die Singularitäten in den statischen Anteilen auftreten.

Bei der FEM (Finite Elemente Methode) berechnen sich die Spannungen ebenfalls in einer Nachlaufrechnung, jedoch -im Gegensatz zur BEM- nur aus den Verschiebungen der Struktur. Durch die elementweise Bestimmung der Spannungen können selbst bei einem kompatiblen Netz von Elementen Spannungsdiskontinuitäten von Element zu Element auftreten, obwohl die Verschiebungen dort kontinuierlich sind.

1 Theoretische Grundlagen BEM

Zur Spannungsberechnung mittels BEM ist die Kenntnis sämtlicher Randgrößen (Randverschiebungen und Randspannungen) erforderlich. Die Berechnung der unbekannt Randgrößen mit Hilfe der bekannten Randgrößen ist folglich der erste Berechnungsschritt.

1.1 Berechnung der unbekannt Randgrößen

Die Ausgangsgleichung für die Formulierung von Randwertproblemen der Elastostatik mit Randelementen ist die Somigliana-Identität

$$\underline{e}^i \bar{u}^i + \int_{\Gamma} \underline{p}^* \bar{u} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \underline{u}^* \bar{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{u}^* \bar{p} \, d\Gamma \quad . \quad (1)$$

Darin stellen \underline{u}^* und \underline{p}^* die Fundamentallösungen des Vollraums (Kelvin-Lösung) dar. \bar{b} sind die Volumenkräfte, \bar{u} die Verschiebungen und \bar{p} die Randspannungen. Γ ist der Rand des Körpers, Ω

sein inneres Gebiet. Die Matrix \underline{c} der integralfreien Glieder ist von der Geometrie der Oberfläche in der Umgebung des Quellpunktes \vec{x}^i abhängig, braucht aber nicht explizit berechnet zu werden (Starrkörperbetrachtungen). Für Innenpunkte ist \underline{c} gleich der Einheitsmatrix.

Im folgenden werden Volumenlasten nicht berücksichtigt: $\vec{b} = \vec{0}$. Die Gleichung enthält somit neben den integralfreien Gliedern nur noch Randintegrale.

Zur numerischen Lösung der Gleichungen wird der Rand des Gebietes Γ in Elemente eingeteilt. Für die Randverschiebungen und Randspannungen werden lokale Ansätze gewählt, die als Koeffizienten die jeweiligen Knotenwerte enthalten

$$\vec{u} = \underline{N}^T \vec{u}^{(e)} \quad \vec{p} = \underline{N}^T \vec{p}^{(e)} \quad . \quad (2)$$

\vec{u}_j und \vec{p}_j sind Knotenverschiebungen und Knotenrandspannungen, \underline{N} die Matrix der Formfunktionen des jeweiligen Elementes. Für eine Zerlegung des Randes in n Elemente folgt

$$\underline{c}^i \vec{u}^i + \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \vec{u} \, d\Gamma \right) = \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} \underline{u}^* \vec{p} \, d\Gamma \right) \quad (3)$$

bzw. mit den lokalen Ansätzen

$$\underline{c}^i \vec{u}^i + \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \underline{N}^T \, d\Gamma \right) \vec{u}_j = \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} \underline{u}^* \underline{N}^T \, d\Gamma \right) \vec{p}^{(e)} \quad . \quad (4)$$

Abkürzend kann geschrieben werden

$$\underline{c}^i \vec{u}^i + \sum_{j=1}^n \underline{h}_{ij} \vec{u}^{(e)} = \sum_{j=1}^{nq} \underline{g}_{ij} \vec{p}^{(e)} \quad . \quad (5)$$

Diese Gleichung gilt für jeden Quellpunkt \vec{x}^i . Jeder Randpunkt kann als Quellpunkt angenommen werden. Das Ergebnis ist nach zusammenfassen der entsprechenden Koeffizienten von \underline{h}_{ij} und \underline{c}^i ein Gleichungssystem in der abgekürzten Form

$$\underline{G} \vec{p} = \underline{H} \vec{u} \quad . \quad (6)$$

Dieses Gleichungssystem ist unabhängig von der Art des Randwertproblems. Werden nun Randbedingungen berücksichtigt treten sowohl auf der rechten als auch auf der linken Seite der Gleichung unbekannte und bekannte Randgrößen auf. Zur Bestimmung der unbekanntenen Größen ist eine Umordnung des Gleichungssystems erforderlich

$$\underline{A} \vec{x} = \vec{f} \quad . \quad (7)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert die unbekanntenen Randgrößen.

1.2 Spannungsberechnung

Mit den bekannten Randgrößen werden in einer Nachlaufrechnung die Spannungen direkt bestimmt. Dabei ist je nach Lage des Quellpunktes \vec{x}^i , an dem die Spannungen bestimmt werden sollen, eine Fallunterscheidung erforderlich.

1.3 Grundlagen der Spannungsberechnung

Der Spannungszustand im Innern eines homogenen Körpers aus isotropem Material kann mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes und mit $\varepsilon_{ij} = \text{def } \vec{u}$ über die Verschiebungen ausgedrückt werden. Für Innenpunkte gilt:

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{m,m} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad . \quad (8)$$

Diese Gleichung kann auf zwei Arten gelöst werden. Zum einen durch numerische Differentiation des Verschiebungsfeldes, zum anderen durch das Einsetzen der abgeleiteten Somigliana-Identität.

Die letztere Methode liefert eine Randintegralgleichung zur Bestimmung des Spannungstensors, die Somigliana-Spannungsidentität.

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} S_{ijk} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} D_{ijk} u_k d\Gamma \quad . \quad (9)$$

S_{ijk} und D_{ijk} stellen die Fundamentalspannungskerne dar. Diese Identität gilt für Punkte im Innern des Körpers. Für Randpunkte wird später eine andere Identität hergeleitet.

1.4 Fallunterscheidung nach der Lage des Quellpunktes

1.4.1 Quellpunkt \vec{x}^i ist im Innern des Körpers

Für das Innere des Körpers treten keine Singularitäten in den Spannungskernen auf. Die Somigliana-Spannungsidentität kann mit dem Standard-Gauß-Verfahren ausgewertet werden.

1.4.2 Quellpunkt \vec{x}^i ist im Innern, aber in Randnähe (Abb. 1)

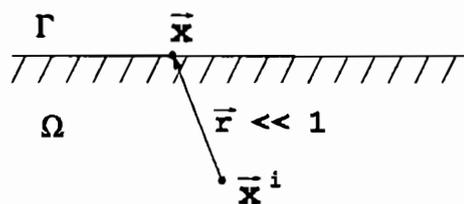


Abbildung 1: Quellpunkt in Randnähe

Die Integrationskerne sind im mathematischen Sinn zwar regulär, sie ändern sich aber um den Quellpunkt sehr stark. Das Standard-Gauß-Verfahren ist nur mit sehr hohen Stützstellenzahlen für diese *fastsingulären Integrale* einsetzbar und daher nicht effektiv. Effektiverere Integrationsverfahren sind deshalb erforderlich. Eines dieser Verfahren, die *Radiale Transformation*, wird hier in der Anwendung auf ebene Elemente dargestellt. Für gekrümmte Elemente ist diese Methode zu erweitern und führt zur *PART-Methode* [4].

Radiale Transformation

Gesucht sind die Integrale der Spannungskerne auf dem Rand Γ . Bei einer Elemententeilung des Randes müssen die Integrale über die Elemente bestimmt und addiert werden. Der Rand wird in zwei Teile aufgeteilt. Auf einem Teil kann die Integration regulär stattfinden, auf dem anderen Teil müssen fastsinguläre Integrale berechnet werden. Hier wird nur der letztere Rand betrachtet. Für die Integrale über ein Element kann abkürzend geschrieben werden

$$I = \int_{\Gamma} \frac{f}{r^{\alpha}} d\Gamma \quad (\alpha = 1, 2, 3 \text{ bei } 3D - BEM) \quad (10)$$

Im folgenden werden die Lösungsschritte kurz dargestellt.

a.) Transformation in das lokale Koordinatensystem

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{f}{r^{\alpha}} J d\xi_1 d\xi_2 \quad (J = \text{Jacobi - Determinate}) \quad (11)$$

b.) Ermittlung des Projektionspunktes (Abb. 2)

Zuerst muß der Punkt des Elements ermittelt werden, der zum Quellpunkt den geringsten Abstand hat. Dazu wird der Durchstoßpunkt einer Geraden, die in Richtung der Flächennormale des Elementes zeigt, mit der Elementebene bestimmt. Je nach Lage des Projektionspunktes zum Element ist eine Fallunterscheidung erforderlich. Hier soll der Projektionspunkt \bar{x}^i im Element liegen.

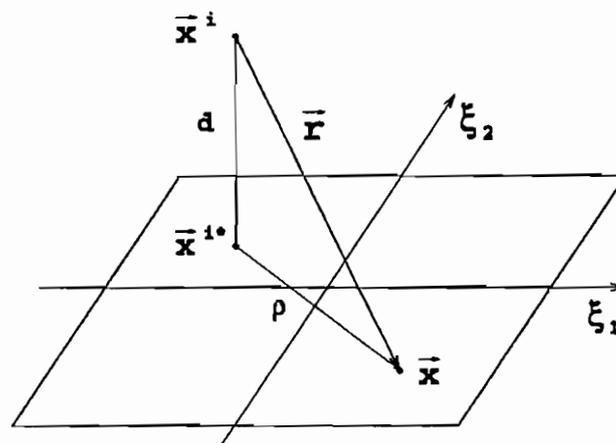


Abbildung 2: Projektion des Quellpunktes auf das Element

c.) Einführung von Polarkoordinaten und Aufteilung des Integrationsgebietes (Abb. 3)

Die Einführung von Polarkoordinaten fordert eine Aufteilung des Integrationsgebietes in Teilintervalle. Die Integrale über die Teilintervalle müssen berechnet und addiert werden. Diese ergeben das Integral über das Element.

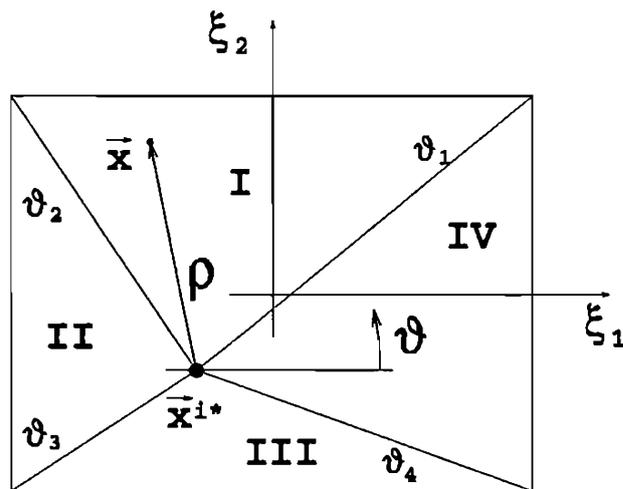


Abbildung 3: Aufteilung des Integrationsgebiet in Teilintervalle I_j

$$I_j = \int_{\vartheta_j}^{\vartheta_{j+1}} \int_0^{\bar{\rho}_j} \frac{f}{r^\alpha} J \rho \, d\rho \, d\vartheta \tag{12}$$

d.) Radialtransformation

R wird als neue Variable eingeführt

$$\rho \, d\rho = r'^\alpha \, dR = \sqrt{\rho^2 + d^2}^\alpha \, dR \tag{13}$$

Damit folgt für das innere Integral aus I_j

$$I(\vartheta) = \int_0^{\bar{\rho}_j} \frac{f}{r^\alpha} J \rho \, d\rho = \int_{R(0)}^{R(\bar{\rho}_j)} \frac{f}{r^\alpha} J r'^\alpha \, dR \quad \text{mit: } R = \int \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + d^2}^\alpha} \tag{14}$$

Das Integral wird durch r'^α regularisiert. Die Integration kann mit dem Standard-Gauß-Verfahren durchgeführt werden. R wird analytisch für verschiedene α bestimmt. Da die Spannungskerne unterschiedliche Ordnungen α aufweisen, ist es zur effektiven Berechnung sinnvoll, für alle Kerne eine einheitliche Radialtransformation zu verwenden. In der Praxis hat sich die $L^{-\frac{1}{2}}$ Transformation bewährt [2].

1.4.3 Der Quellpunkt \bar{x}^i liegt auf dem Rand des Körpers

Wandert der Quellpunkt auf den Rand, ergeben sich integralfreie Glieder bei den Ableitungen der Verschiebungen. Diese sind nur bei einem glatten Rand für alle Verschiebungsableitungen gleich. Für andere Ränder ist deshalb die Anwendung der Spannungsidentität ähnlich wie bei Innenpunkten nicht direkt möglich. Eine andere Darstellung wird nun gezeigt.

Ausgangspunkt ist die Somigliana-Identität für einen Innenpunkt

$$u_j^i + \int_\Gamma p_{ij}^* u_j \, d\Gamma = \int_\Gamma u_{ij}^* p_j \, d\Gamma \tag{15}$$

Durch Einführung eines neuen Randes γ_ϵ wird der Quellpunkt ausgeschlossen [3],[4],[5]. Als Ausschlußgebiet wird eine Kugel mit Radius ϵ um diesen Punkt gewählt (Abb. 4). Mit der Grenzbetrachtung $\epsilon \rightarrow 0$ findet der Übergang des Quellpunktes auf den Rand statt

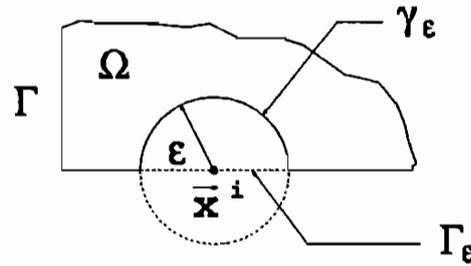


Abbildung 4: Ausschluss des Quellpunktes durch Einführung eines neuen Randes

$$\int_{(\Gamma-\Gamma_\epsilon)+\gamma_\epsilon} [p_{ij}^* u_j - u_{ij}^* p_j] d\Gamma = 0 \quad . \quad (16)$$

Nun werden die Fundamentallösungen nach den Ortskoordinaten abgeleitet

$$\int_{(\Gamma-\Gamma_\epsilon)+\gamma_\epsilon} [p_{ikj}^* u_j - u_{ikj}^* p_j] d\Gamma = 0 \quad . \quad (17)$$

Außerdem werden u_j und p_j in Taylor-Reihen entwickelt

$$u_j(x) = u_j(x^i) + u_{j,h}(x^i)(x_h - x_h^i) + O(r^2) \quad u_j \in C^1 \quad (18)$$

$$p_j(x) = \sigma_{jh}(x)n_h(x) = \sigma_{jh}(x^i)n_h(x) + O(r^1) \quad p_j \in C^0 \quad . \quad (19)$$

Der Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ liefert schließlich die *hypersinguläre Identität*

$$c_{ikjh}^i u_{j,h}^i + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{(\Gamma-\Gamma_\epsilon)} [p_{ikj}^* u_j - u_{ikj}^* p_j] d\Gamma + u_j^i \frac{b_{ikj}^i}{\epsilon} \right\} = 0 \quad . \quad (20)$$

Die integralfreien Terme c_{ikj}^i und b_{ikj}^i sind nur von der Geometrie um den Quellpunkt abhängig.

a.) Hypersinguläres Integral und integralfreies Glied b_{ikj}^i

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{(\Gamma_\epsilon-\Gamma_\epsilon)} p_{ikj}^* u_j d\Gamma + u_j^i \frac{b_{ikj}^i}{\epsilon} \right\} \quad (21)$$

Darin ist Γ_ϵ der Teil des Randes, der nicht regulär ist und somit den Quellpunkt enthält. Die Einführung von Polarkoordinaten und die Wahl eines Elementansatzes $\vec{u} = \underline{N}^T \vec{u}^{(e)}$ führt zu

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\epsilon,\vartheta)}^{\bar{\rho}(\vartheta)} F_{ikj} d\rho d\vartheta + N^i \frac{b_{ikj}^i}{\epsilon} \right\} \quad (22)$$

mit $F_{ikj} = p_{ikj}^* N J \rho = O(\frac{1}{\rho^2})$.

F_{ikj} wird nun in eine Laurent-Reihe entwickelt

$$F_{ikj}(\rho, \vartheta) = \frac{F_{ikj-2}(\vartheta)}{\rho^2} + \frac{F_{ikj-1}(\vartheta)}{\rho} + O(1) \quad . \quad (23)$$

Das führt zu

$$\begin{aligned} I = & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\epsilon,\vartheta)}^{\bar{\rho}(\vartheta)} F_{ikj} d\rho d\vartheta - \left[\frac{F_{ikj-2}}{\rho^2} + \frac{F_{ikj-1}}{\rho} \right] d\rho d\vartheta \right. \\ & \left. + \int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\epsilon,\vartheta)}^{\bar{\rho}(\vartheta)} \frac{F_{ikj-1}}{\rho} d\rho d\vartheta + \left[\int_0^{2\pi} \int_{\alpha(\epsilon,\vartheta)}^{\bar{\rho}(\vartheta)} \frac{F_{ikj-2}}{\rho^2} d\rho d\vartheta + N^i \frac{b_{ikj}^i}{\epsilon} \right] \right\} \quad . \quad (24) \end{aligned}$$

Zuletzt wird der Grenzübergang durchgeführt [4],[5]. Dabei heben sich Anteile von $\frac{F_{ikj-2}}{\rho^2}$ und $\frac{b_{ikj}^i}{\epsilon}$ gegeneinander auf und fallen weg. Die analytische Integration der letzten Terme bezüglich ρ liefert die endgültige Formulierung

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\rho}(\vartheta)} F_{ikj} d\rho d\vartheta - \left[\frac{F_{ikj-2}}{\rho^2} + \frac{F_{ikj-1}}{\rho} \right] d\rho d\vartheta + \int_0^{2\pi} F_{ikj-1} \ln \left| \frac{\bar{\rho}(\vartheta)}{\beta(\vartheta)} \right| d\vartheta - \int_0^{2\pi} F_{ikj-2} \left[\frac{\gamma(\vartheta)}{\beta^2(\vartheta)} + \frac{1}{\bar{\rho}(\vartheta)} \right] d\vartheta \quad (25)$$

Die darin auftretenden Koeffizienten ergeben sich aus einer Reihenentwicklung der unteren Integrationsgrenze $\rho = \alpha(\epsilon, \vartheta) = \epsilon\beta(\vartheta) + \epsilon^2\gamma(\vartheta) + O(\epsilon^2)$. Alle Integranden sind regulär. Die Integration wird mit dem Standard-Gauß-Verfahren durchgeführt.

b.) Starksinguläres Integral

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{(\Gamma_\epsilon - \Gamma_\epsilon)} u_{ikj}^* p_j d\Gamma \right\} \quad (26)$$

Die resultierende Funktion F_{ikj} wird in eine Laurent-Reihe entwickelt

$$F_{ikj}(\rho, \vartheta) = \frac{F_{ikj-1}}{\rho} + O(1) \quad (27)$$

Die Grenzbetrachtung führt zu (25), allerdings mit $F_{ikj-2} = 0$. Mit den bekannten Verschiebungsableitungen ist nach (8) der Spannungstensor bekannt. Für den Sonderfall, daß der Quellpunkt auf einem glatten Rand liegt, gilt $c_{ikjh}^i u_{j,h}^i = 0.5 u_{i,j}$. D.h. alle Verschiebungsableitungen haben den gleichen integralfreien Term. Die Berechnung der Integrale kann daher auch direkt mit den Spannungsidentitäten aus (9) erfolgen.

2 Theoretische Grundlagen FEM

Für die Spannungsberechnung mittels FEM müssen die Verschiebungen einer Struktur bekannt sein. Diese bestimmen sich aus dem Gleichungssystem

$$\underline{K} \vec{u} = \vec{f} \quad (28)$$

mit der Steifigkeitsmatrix \underline{K} , dem Lastvektor \vec{f} und dem Vektor der gesuchten Knotenverschiebungen \vec{u} .

Die Spannungen an einem beliebigen Punkt eines Elements werden mit der gebräuchlichen Spannungs-Verschiebungs-Beziehung

$$\sigma = \underline{E} \underline{B} \vec{u}^{(e)} \quad (29)$$

berechnet, wobei \underline{E} die Elastizitätsmatrix, \underline{B} die Verzerrungs-Verschiebungsmatrix und $\vec{u}^{(e)}$ die Knotenverschiebungen des Elements darstellen.

Nach (29) werden die Elementspannungen aus Ableitungen der Verschiebungen berechnet. Bei einer groben FEM-Diskretisierung können sich dadurch die Spannungen an zwei benachbarten Elementen erheblich unterscheiden. Die Spannungsunterschiede an den Elementgrenzen nehmen ab, wenn die Elemente-Idealisierung verfeinert wird. Ferner können die Spannungen an den Rändern gemittelt werden. Die erstgenannte Lösungsmöglichkeit führt im allgemeinen schnell zu wesentlich mehr Rechenaufwand. Bei der letzteren können größere Fehler auftreten.

Um die Spannungen möglichst genau aus den berechneten Verschiebungen zu erhalten, können diese global oder lokal geglättet werden.

2.1 Globale Glättung

Allgemein erfordert die Methode der finiten Elemente die Minimierung eines Funktionals, das durch stückweise stetige Funktionen beschrieben wird. In gleicher Weise wird eine Glättungsfunktion g für die Spannungen formuliert

$$g = \sum_{i=1}^n \tilde{N}_i \tilde{\sigma}_i \quad . \quad (30)$$

\tilde{N}_i sind die Formfunktionen der geglätteten Spannungen, $\tilde{\sigma}_i$ die geglätteten Spannungen und n die Anzahl der Knoten pro Element.

Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate ergibt, auf alle Elemente ne angewendet, das Funktional

$$\chi = \sum_{ne} \int_{(V)} (\sigma - g)^2 dV \quad , \quad (31)$$

das minimiert werden kann, indem gefordert wird:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tilde{\sigma}_i} = 0 \quad . \quad (32)$$

Damit ist es möglich für jedes Element die *Glättungsmatrix*

$$\underline{S}^{(e)} = \begin{pmatrix} \int_{(V)} \tilde{N}_1 \tilde{N}_1 dV & \dots & \int_{(V)} \tilde{N}_1 \tilde{N}_n dV \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{(V)} \tilde{N}_n \tilde{N}_1 dV & \dots & \int_{(V)} \tilde{N}_n \tilde{N}_n dV \end{pmatrix} \quad (33)$$

und den dazugehörigen *Lastvektor*

$$\vec{F}^{(e)} = \begin{pmatrix} \int_{(V)} \tilde{N}_1 \underline{E} \underline{B} \vec{u}^{(e)} dV \\ \vdots \\ \int_{(V)} \tilde{N}_n \underline{E} \underline{B} \vec{u}^{(e)} dV \end{pmatrix} \quad (34)$$

zu berechnen. Werden die Glättungsmatrix und der Lastvektor in der üblichen Weise über das gesamte Gebiet miteinander verknüpft (analog \underline{K} und \vec{f}), berechnen sich die geglätteten Spannungen aus dem Gleichungssystem

$$\underline{S} \vec{\sigma} = \vec{F} \quad . \quad (35)$$

2.2 Lokale Glättung

Das Prinzip der globalen Gättung auf jedes Element angewendet ergibt

$$\underline{G}^{(e)} \tilde{\sigma}^{(e)} = \vec{F}^{(e)} \quad . \quad (36)$$

Es läßt sich zeigen, daß die Spannungen in gewissen Punkten des Elements besser mit den exakten Werten übereinstimmen als in anderen [7]. Für 3D-Elemente entsprechen diese Punkte den 2x2x2 Gauß-Punkten. Es ist jedoch üblich, die Spannungen an den Elementknoten anzugeben. Für Elemente mit konstanter Jacobi-Determinante können bei Verwendung von linearen Glättungsformfunktionen \tilde{N}_i , $i = 1, \dots, 8$ die Spannungen an den Eckknoten $\tilde{\sigma}_i$, $i = 1, \dots, 8$ durch Inter-/Extrapolation der Spannungen an den Gaußpunkten σ_i , $i = I, \dots, VIII$ berechnet werden. Mit (36) ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\sigma}_8 \end{pmatrix} = \underline{G} \begin{pmatrix} \sigma_I \\ \vdots \\ \sigma_{VIII} \end{pmatrix} \quad . \quad (37)$$

Die Spannungen an den Elementrändern sind damit jedoch unstetig. Durch Mittelung kann dies ausgeglichen werden.

3 Numerische Beispiele

3.1 Würfel unter Normalspannung (Abb. 5)

Ein Würfel wird bis auf zwei gegenüberliegende Seiten jeweils in Richtung der Flächennormalen eingespannt. An den freien Seiten wird eine entgegengesetzte, jedoch vom Betrag gleich große Verschiebung u_x vorgegeben. Dadurch entsteht im Würfel überall die gleiche Längsspannung. Die Berechnung wird mit $\nu = 0$ durchgeführt, damit ein Vergleich mit der Stabtheorie möglich ist. Die Kurve (Abb. 5) stellt die auf die analytische Lösung (Stabtheorie) normierten Längsspannungen (BEM, 6 Elemente) nahe einer der verschobenen Endflächen ($x \ll 1$) dar.

3.2 Balken unter Querbelastung (Abb. 6,7,8)

Ein einseitig fest eingespannter Balken ($H=2$, $B=2$, $L=20$) wird am freien Ende durch eine parabolische Flächenlast p_z in z-Richtung belastet (Abb. 6). In den Diagrammen (Abb. 7,8) sind die Normalspannungen und die Schubspannungen für $x=0$, $x=5$, $x=10$ und $x=15$ in der Balkenmitte ($y=0$) von $z = -\frac{H}{2}$ bis $z = \frac{H}{2}$ dargestellt. Die Spannungen sind zum einen mit der BEM, zum anderen mit der FEM (lokal geglättet) berechnet und auf die entsprechenden Spannungen an der Einspannstelle ($x=0$) normiert. Die Berechnungen werden mit $\nu = 0$ durchgeführt.

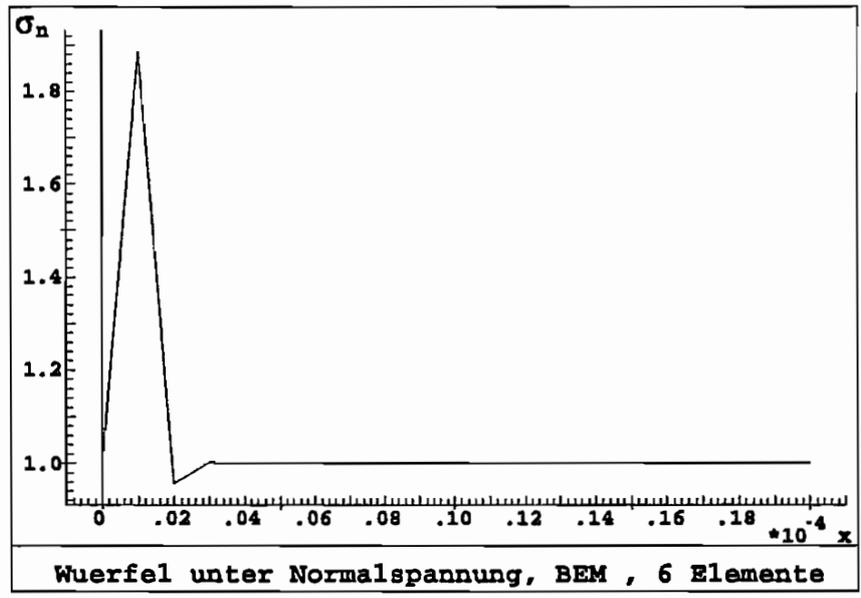


Abbildung 5: 1. Rechenbeispiel: Würfel

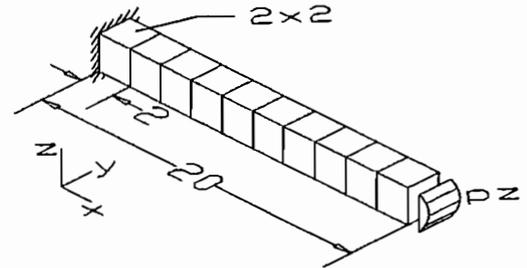


Abbildung 6: BEM/FEM Modell eines einseitig eingespannten Balkens

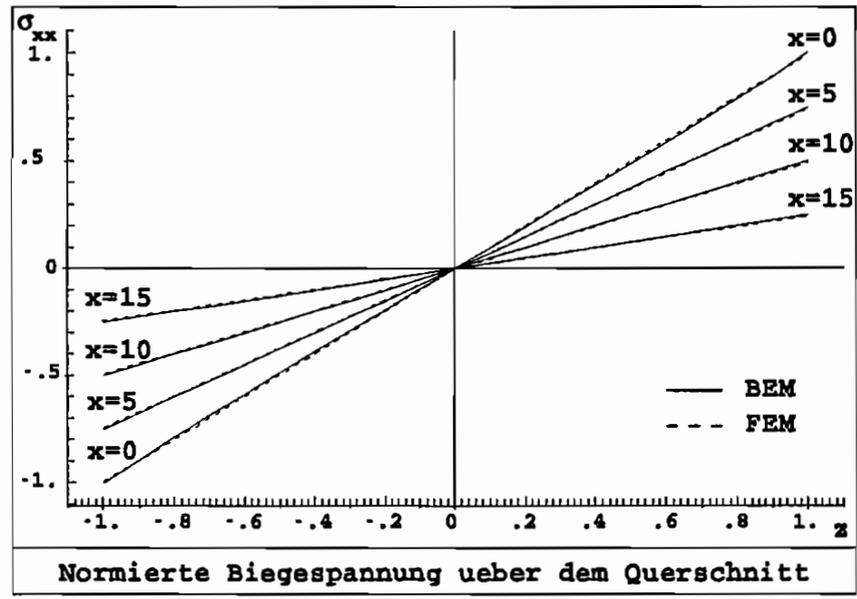


Abbildung 7: 2. Rechenbeispiel: einseitig eingespannter Balken: $\sigma_{xx}(z)$

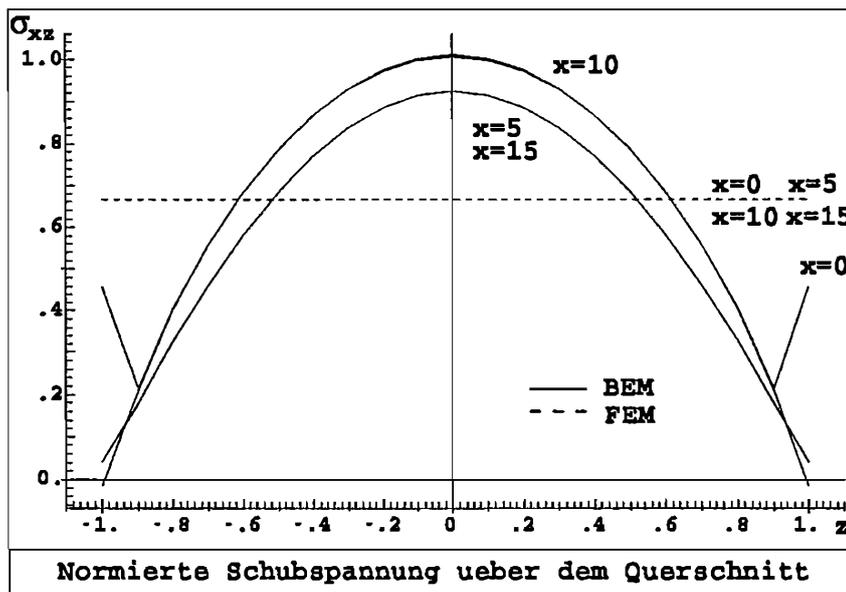


Abbildung 8: 2. Rechenbeispiel: einseitig eingespannter Balken: $\sigma_{xz}(z)$

Literatur

- [1] K. Hayami, C. Brebbia: *Quadrature Methods for Singular and Nearly Singular Integrals in 3-D Boundary Element Method*, Boundary Elements X, Vol.1, Computational Mechanics Publications with Springer Verlag, 237-264, 1988
- [2] K. Hayami, H. Matsumoto, K. Moroga: *Improvement and Implementation of PART: Numerical Quadrature for Nearly Singular Boundary Element Integrals*, Boundary Elements XIV, Vol.1, Computational Mechanics Publications with Springer Verlag, 605-617, 1992
- [3] M. Guiggiani, A. Gigante: *A General Algorithm for Multidimensional Cauchy Principal Value Integrals in the Boundary Element Method*, J. of Appl. Mechanics, Vol.57, 906-915, 1990
- [4] M. Guiggiani, G. Krishnasamy, T.J. Rudolphi, F.J. Rizzo: *A General Algorithm for the Numerical Solution of Hypersingular Boundary Integral Equations*, J. of Appl. Mechanics, Vol.59, 604-614, 1992
- [5] O. Huber, A. Lang, G. Kuhn: *Evaluation of the stress tensor in 3D elastostatics by direct solving of hypersingular integrals*, Comp. Mechanics, Vol.12, 39-50, 1993
- [6] E. Hinton, J.S. Campbell: *Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method*, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.8, 461-480, 1974
- [7] J. Barlow: *Optimal stress locations in finite element models*, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.10, 243-251, 1976

Zur Identifikation der dynamischen Eigenschaften hydrodynamischer Kupplungen

Uwe Folchert

Zusammenfassung

Es werden die dynamischen Eigenschaften hydrodynamischer Kupplungen am Beispiel einer Voith-Turbokupplung 422 TH untersucht und in geeigneten mathematischen Modellen dargestellt. Dabei wird der Betriebsbereich in Teilbereiche aufgeteilt. Lineare Modelle im Frequenz- und Zeitbereich werden mit Methoden der Identifikation bestimmt. Durch Kopplung der Teilmodelle lassen sich Simulationen über große Betriebsbereiche durchführen. Abschließend wird kurz auf ein theoretisches Modell eingegangen.

1 Einleitung

Eine hydrodynamische Kupplung ist ein Element eines Antriebsstranges und hat die Aufgabe, die Leistung eines Antriebsmotors aufzunehmen und an eine Arbeitsmaschine weiterzuleiten. Dabei kommt es neben einem stationären Leistungsfluß zu instationären Wechselwirkungen zwischen Antriebsmotor und Arbeitsmaschine. Hydrodynamische Kupplungen werden häufig als stoß- und schwingungsdämpfende Übertragungselemente in Antriebssträngen eingesetzt, um Anfahr- und Drehschwingungsprobleme zu vermindern.

Zur genauen Auslegung oder zur Beurteilung eines Antriebssystems sind Modelle für das dynamische Verhalten aller Einzelkomponenten erforderlich. Im Rahmen des Sonderforschungsbereiches 278 "Hydrodynamische Leistungsübertragung" wurde an der Ruhr-Universität Bochum ein hochdynamischer Versuchstand aufgebaut, mit dem das dynamische Verhalten unter anderem auch von hydrodynamischen Kupplungen untersucht werden kann. Über die Anwendung geeigneter Methoden der Systemidentifikation und deren Ergebnisse [2,6] soll hier berichtet werden.

2 Die Identifikationsaufgabe

Ziel ist es, das dynamische Verhalten der hydrodynamischen Kupplung zu untersuchen und in geeigneten Modellen darzustellen. Eine wesentliche Voraussetzung für eine Identifikation ist die Definition einer Systemgrenze und damit die Festlegung der Ein- und Ausgangsgrößen des Systems. Um das Verhalten der hydrodynamischen Kupplung allein betrachten zu können, wird diese als Teilsystem aus dem Gesamtsystem herausgeschnitten (Bild 1). Die relevanten Systemgrößen an der Teilsystemgrenze sind dann die Drehzahlen und die Momente an der An- und Abtriebswelle. Ein geeignetes mathematisches Modell

muß dann die Beziehungen zwischen Drehzahlen und Momenten beschreiben.

Ein Modell kann im allgemeinen sowohl das stationäre als auch das dynamische Verhalten wiedergeben. In einem stationären Kennfeld wird das stationär übertragene Moment der Kupplung in Abhängigkeit von der Pumpen- und der Turbindrehzahl dargestellt. Bei dynamischen Vorgängen weichen die Momentenverläufe vom stationären Kennfeld ab. Es kann sich dabei um kleine Schwankungen um einen stationären Betriebspunkt oder um das Durchfahren großer Betriebsbereiche handeln.

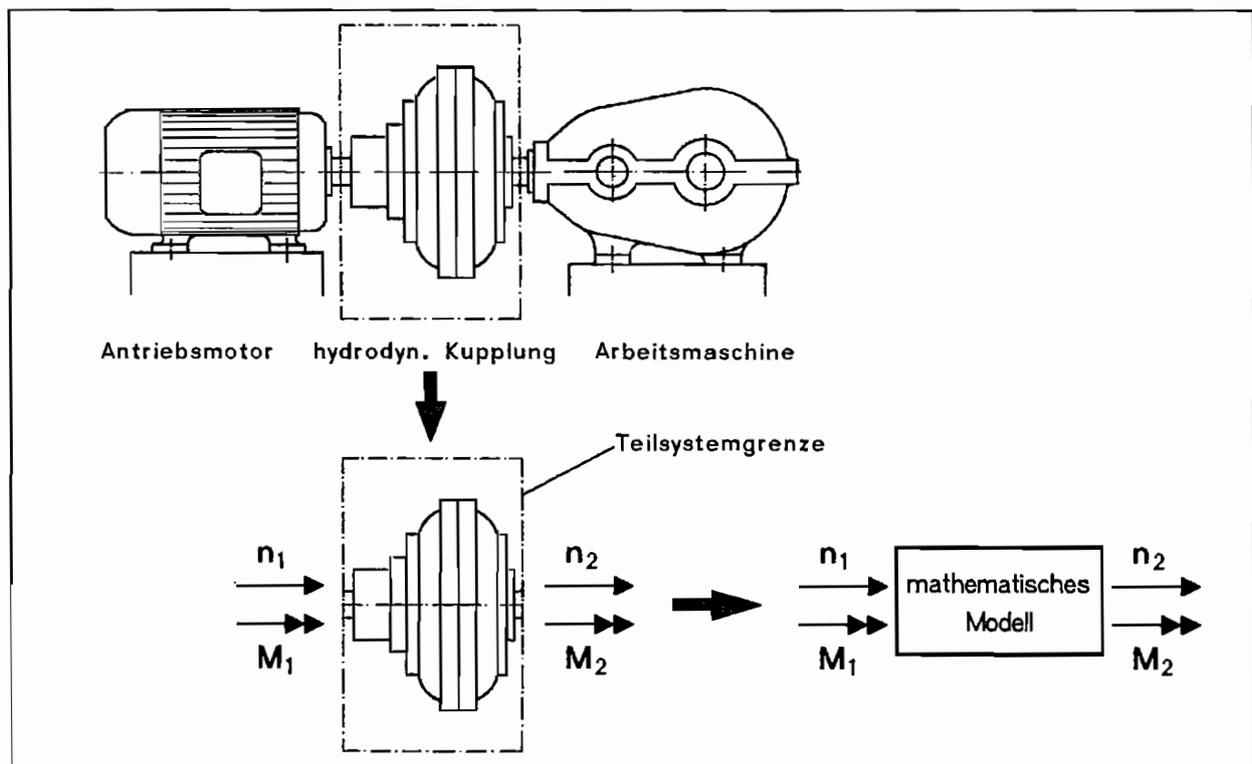


Bild 1: Die Identifikationsaufgabe: Vom Teilsystem zum mathematischen Modell

Bei einer hydrodynamischen Kupplung handelt es sich um ein nichtlineares System. Bereits das stationäre Kennfeld stellt einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen den Drehzahlen und dem übertragenen Moment dar; zusätzlich ist das dynamische Verhalten vom jeweiligen Betriebspunkt abhängig. Ursachen hierfür sind komplexe Strömungsvorgänge im Inneren der Kupplung.

Es wurde eine serienmäßige Voith-Turbokupplung 422 TH untersucht. Es handelt sich um den Grundtyp T mit Stauraum. Sie wird eingesetzt als Anlaufkupplung, als Überlastschutz sowie zur Stoß- und Schwingungsdämpfung. Sie wird vorwiegend mit Teilfüllung betrieben, um den Einsatzbereich zu vergrößern.

3 Modellierung und Identifikation

Die Vorgehensweise bei der Modellbestimmung durch eine experimentelle Identifikation besteht darin, zunächst einen Modellansatz festzulegen und diesen dann durch Messungen am realen System anzupassen und zu optimieren. Die

Festlegung des Modellansatzes ist ein wesentlicher Schritt bei der Identifikation. Der Modellansatz kann aus einer theoretischen Analyse der technisch-physikalischen Gegebenheiten hervorgehen. Für die Kupplung kann z.B. eine eindimensionale Stromfadentheorie angewendet werden. In vielen Fällen sind jedoch nicht alle physikalischen Effekte bekannt oder die Zusammenhänge sind, wie bei den Strömungsvorgängen in der Kupplung, sehr komplex. Möglich sind dann auch allgemeine mathematische Modellansätze. Diese werden auch "Black-box"-Modelle genannt, da keine direkten Bezüge zu den physikalischen Vorgängen mehr bestehen. Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich, wenn das zu identifizierende System als linear bzw. in Bereichen als linearisierbar angesehen werden kann.

Die Vorgehensweise der bereichsweisen Linearisierung wird für die hydrodynamische Kupplung angewendet. Dazu wird der Betriebsbereich der Kupplung in Teilbereiche unterteilt und für jeden Teilbereich wird ein lineares Teilmodell bestimmt. Die Identifikation besteht aus einem experimentellen und einem numerischen Teil. Voraussetzung ist ein Versuchsstand, der dynamische Messungen an dem Teilsystem "Kupplung" ermöglicht. Aus der Messung der Ein- und Ausgangsgrößen, also der Drehzahlen und der Momente, bei dynamischer Erregung, läßt sich das Übertragungsverhalten des Teilsystems ermitteln. Speziell können bei harmonischer Erregung durch Frequenzgangmessungen Übertragungsfunktionen im Frequenzbereich bestimmt werden. Aus den gemessenen Übertragungsfunktionen kann ein mathematisches Übertragungsmodell geschätzt werden, wenn ein geeigneter mathematischer Modellansatz vorliegt.

Eine geeignete mathematische Beschreibung im Frequenzbereich ist die sogenannte "Vierpol"-Darstellung. Dabei verknüpft eine Übertragungsmatrix die Ausgangsgrößen mit den Eingangsgrößen. Die Beziehung zwischen den Drehzahlen und den Momenten im Frequenzbereich wird hier als "Dynamische Dämpfungsmatrix $D(\Omega)$ " bezeichnet und stellt ein grundlegendes Übertragungsmodell für weitere Betrachtungen dar:

$$\begin{bmatrix} M_1(\Omega) \\ M_2(\Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}(\Omega) & d_{12}(\Omega) \\ d_{21}(\Omega) & d_{22}(\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1(\Omega) \\ n_2(\Omega) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$M(\Omega) = D(\Omega) N(\Omega) \quad (2)$$

Die Elemente dieser Übertragungsmatrix sind komplexe gebrochen-rationale Funktionen und werden hier "Dynamische Dämpfungsfunktionen" genannt:

$$d_{ij}(\Omega) = \frac{[b_0 + b_1(i\Omega) + b_2(i\Omega)^2 + \dots + b_n(i\Omega)^n]_{ij}}{a_0 + a_1(i\Omega) + a_2(i\Omega)^2 + \dots + a_m(i\Omega)^m} = \frac{Z_{ij}(\Omega)}{N(\Omega)} \quad (3)$$

Die Polynomkoeffizienten können durch eine Parameterschätzung aus gemessenen Übertragungsfunktionen bestimmt werden. Hierfür wurde die Methode der

gewichteten Fehlerquadrate angewendet. Nach einer Erweiterung der Gl. 1 mit dem gemeinsamen Nennerpolynom $N(\Omega)$ lässt sich die Inverse Fourier-Transformation anwenden, die auf Differentialgleichungen für die Momente im Zeitbereich führt:

$$\begin{aligned}
 a_0 M_1(t) + a_1 \dot{M}_1(t) + \dots &= b_{011} n_1(t) + b_{111} \dot{n}_1(t) + \dots + b_{n11} n_1^{(n)}(t) \\
 &+ b_{012} n_2(t) + b_{112} \dot{n}_2(t) + \dots + b_{n12} n_2^{(n)}(t) \\
 a_0 M_2(t) + a_1 \dot{M}_2(t) + \dots &= b_{021} n_1(t) + b_{121} \dot{n}_1(t) + \dots + b_{n21} n_1^{(n)}(t) \\
 &+ b_{022} n_2(t) + b_{122} \dot{n}_2(t) + \dots + b_{n22} n_2^{(n)}(t)
 \end{aligned} \tag{4}$$

Für numerische Simulationen ist eine weitere algebraische Transformation in den Zustandsraum vorteilhaft, da man dann ein Matrizen-Differentialgleichungssystem 1. Ordnung erhält (m_0, n_0 : stationärer Betriebspunkt):

$$\begin{aligned}
 \dot{z}(t) &= A z + B (n - n_0) \\
 z(t_0) &= z_0 \\
 m(t) &= C z + D (n - n_0) + E \dot{n} + m_0
 \end{aligned} \tag{5}$$

Die experimentelle Bestimmung der Dynamischen Dämpfungsmatrix für einen speziellen Betriebspunkt erfolgt durch Frequenzgangmessungen an dem speziell hierfür ausgelegten Versuchsstand [3]. Da die Dynamische Dämpfungsmatrix aus vier Elementen besteht, sind zwei linear-unabhängige Messungen erforderlich. Dazu wird bei der ersten Messung die Pumpendrehzahl sinusförmig erregt und bei der zweiten Messung die Turbinendrehzahl. Die Zeitverläufe der beiden Drehzahlen und der beiden Momente werden gemessen und es werden dann die komplexen Amplituden aus beiden Messungen bestimmt.

An dieser Stelle findet die eigentliche Linearisierung des nichtlinearen Verhaltens statt. Ein reales nichtlineares System reagiert auf harmonische Erregung nicht nur mit harmonischen Antworten der gleichen Frequenz, sondern es treten auch höherharmonische Anteile und Störungen auf. Diese werden durch einen geeigneten Schätzalgorithmus herausgefiltert und es wird nur der harmonische Anteil der Systemantwort berücksichtigt. Die vier Dämpfungsfunktionen können dann für jeden der gemessenen Frequenzpunkte berechnet werden.

4 Ergebnisse der Identifikation

Die grundlegenden Modelle zur Beschreibung der dynamischen Eigenschaften im Frequenzbereich sind die Dynamischen Dämpfungsmatrizen. Sie geben die Beziehung zwischen den Momenten und den Drehzahlen an und bestehen aus vier komplexen Funktionen. Diese sind in Bild 2 für einen speziellen Betriebspunkt dargestellt. Die Symbole kennzeichnen die gemessenen Frequenzpunkte, die durchgezogenen Verläufe ergeben sich aus den geschätzten Übertragungspolynomen.

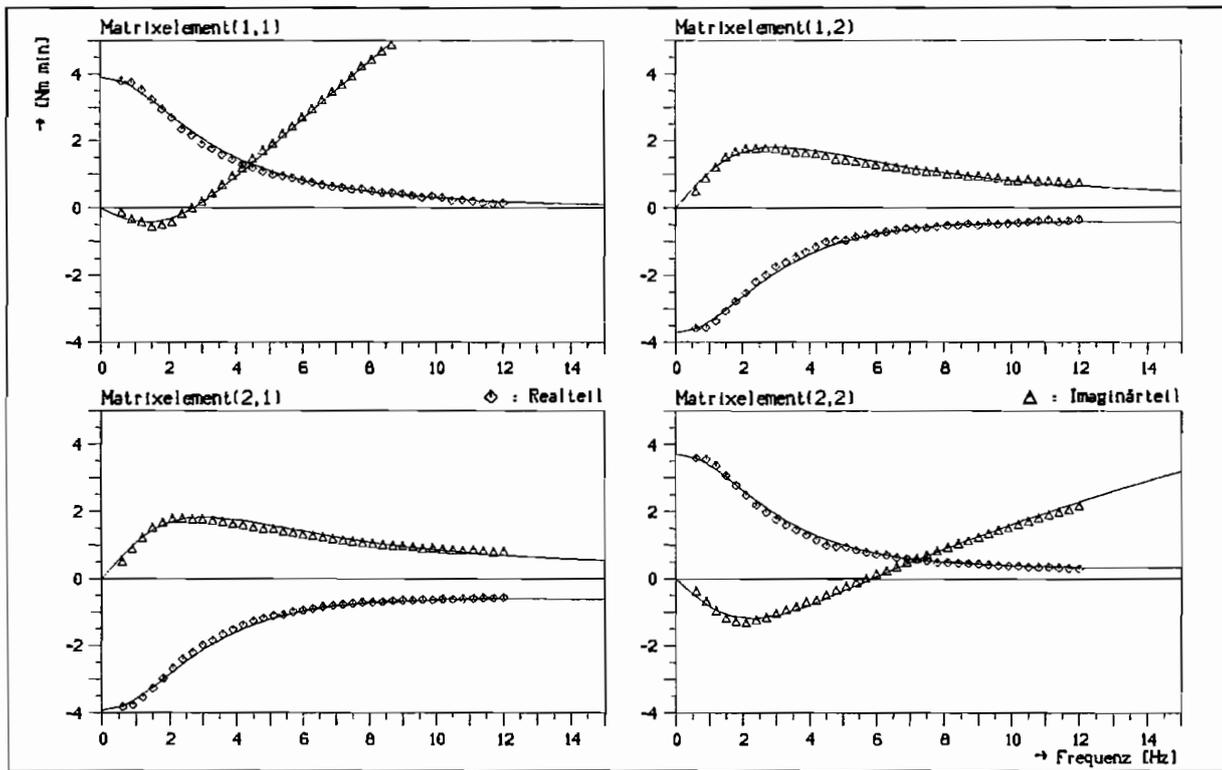


Bild 2: Dynamische Dämpfungsmatrix für eine Pumpendrehzahl $n_p = 900 \text{ min}^{-1}$, Drehzahlverhältnis $\nu = 0.95$, Füllungsgrad 76 %

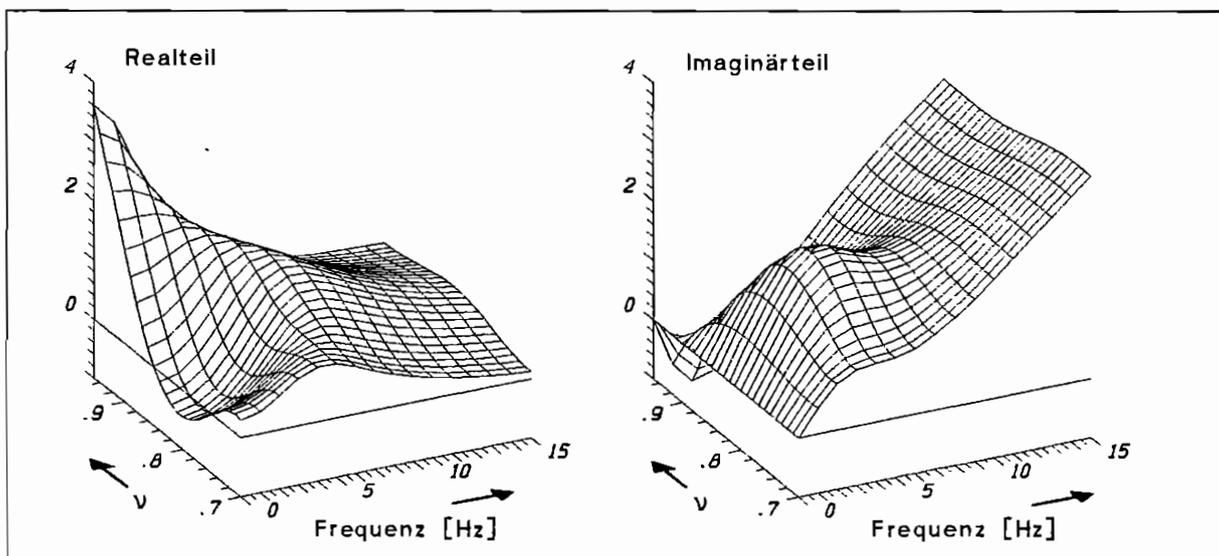


Bild 3: Dynamische Dämpfungsfunktion d_{22} in Abhängigkeit vom Drehzahlverhältnis $\nu = 0.7 - 0.95$

Es wurden Dynamische Dämpfungsmatrizen für die verschiedensten Betriebspunkte bestimmt [2]. Dabei zeigte sich, daß die Verläufe der Dynamischen Dämpfungsfunktionen stark von den Betriebsparametern wie Pumpendrehzahl, Drehzahlverhältnis und Füllungsgrad, abhängig sind. Einige Eigenschaften sind jedoch charakteristisch. Die Werte der Realteile am Nullpunkt der Frequenzachse entsprechen der Steigung des stationären Kennfeldes. Die Anstiege der

Imaginärteile in den Diagonalelementen sind auf Trägheitswirkungen zurückzuführen. So lassen sich aus den Steigungen dieser Imaginärteile bei höheren Frequenzen die pumpen- und turbinenseitigen Trägheitsmassen bestimmen. Darin äußert sich dann auch eine ungleichmäßige Verteilung bzw. eine Verschiebung der Betriebsflüssigkeit bei Teilfüllung. Die starke Abhängigkeit der Dynamischen Dämpfungsmatrix vom Drehzahlverhältnis ist in Bild 3 dargestellt.

Die Dynamischen Dämpfungsmatrizen können in Form der approximierten komplexen Funktionen direkt für Berechnungen eines Antriebsstranges im Frequenzbereich eingesetzt werden. Es lassen sich so Schwingungen des Antriebsstranges für einen Betriebspunkt der Kupplung berechnen. Sollen Berechnungen im Zeitbereich durchgeführt werden, so können die in den Zeitbereich transformierten Zustandsmodelle verwendet werden. Je nach Größe des durchfahrenen Betriebsbereiches müssen mehrere dieser Teilmodelle hintereinander geschaltet werden. Ein Beispiel für eine Simulation im Zeitbereich ist in Bild 4 gezeigt. Als Eingangsgrößen dienen die Drehzahlen, die Momente werden berechnet. Es wird dazu abhängig vom Betriebsbereich zwischen 8 Teilmodellen umgeschaltet. Abweichungen von den gemessenen Momentenverläufen resultieren aus der Linearisierung bei der Teilmodellbestimmung und hängen im wesentlichen von der Krümmung des stationären Kennfeldes ab.

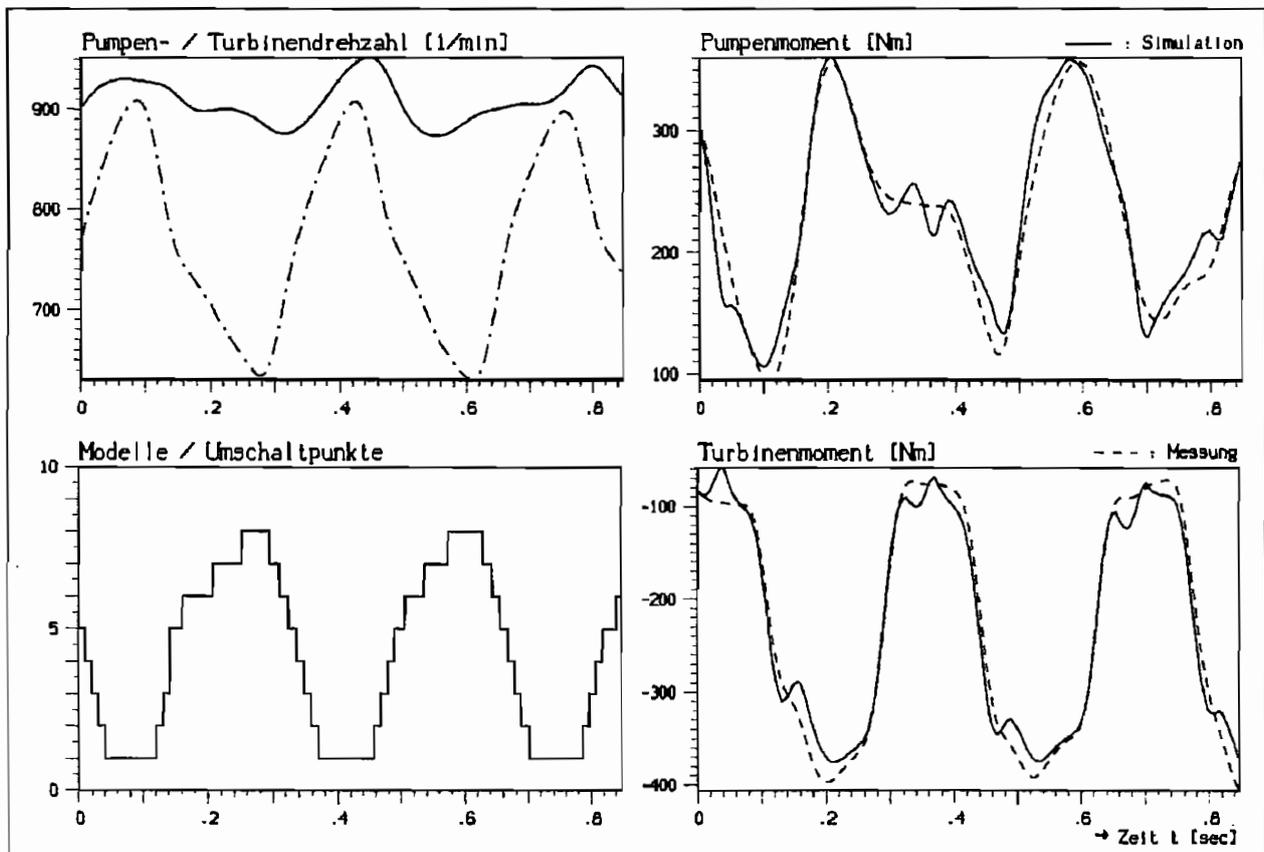


Bild 4: Simulation über großen Betriebsbereich im Zeitbereich:

- a) Pumpendrehzahl (durchgezogen) und Turbinendrehzahl (strichpunkt-
tiert) als Eingabe für die Simulation, b+d) Simulation und Meßwerte
der Momente, c) Schaltpunkte der verwendeten 8 Teilmodelle

5 Weitere Modellansätze und Ausblick

Den relativ genauen Modellen durch die hier gezeigte experimentelle Identifikation steht der hohe Aufwand der vielfachen Teilmodellbestimmung für einen großen Betriebsbereich der hydrodynamischen Kupplung gegenüber. Es hat auch immer Bestrebungen gegeben, alleine aus den Konstruktionsdaten einer Kupplung durch eine theoretische Modellbildung das dynamische Verhalten bestimmen zu können. Bekannte Ansätze kommen aus der eindimensionalen Stromfadentheorie [1,4]. Obwohl sich das stationäre Verhalten mit dieser Theorie nicht befriedigend berechnen läßt, - besonders nicht bei teilgefüllten Kupplungen - kann sie für Berechnungen des dynamischen Verhaltens bei kleinem Schlupf im Nennbetriebsbereich dennoch herangezogen werden.

Aus der eindimensionalen Stromfadentheorie ergibt sich durch Linearisierung um den Betriebspunkt $P_0(M_0, \omega_{P0}, s)$ für das komplexe Wechsellmoment $\hat{M}(\Omega)$:

$$\hat{M}(\Omega) = \frac{M_0}{\omega_{P0} s} \left[\left\{ \frac{s r_a^2}{r_a^2 - (1-s)r_i^2} + \frac{\sigma}{i\Omega + (2-\beta)\sigma} \right\} \hat{\omega}_P(\Omega) - \left\{ \frac{s r_i^2}{r_a^2 - (1-s)r_i^2} + \frac{\sigma(1-s)}{i\Omega + (2-\beta)\sigma} \right\} \hat{\omega}_T(\Omega) \right] \quad (6)$$

(s: Schlupf, $\omega_{P/T}$: Pumpen-/Turbinenwinkelgeschwindigkeit, $r_{a/i}$: äußerer/innerer Abstand des mittleren Stromfadens, $\sigma = A Q_0 C_R / L$, A: Kanalquerschnitt, L: Länge des mittleren Stromfadens, $(Q_0 C_R)$: bezogener Volumenstrom aus stationärem Anteil, [3])

Das Wechsellmoment $\hat{M}(\Omega)$ entspricht den Momenten $M_1(\Omega)$ bzw. $M_2(\Omega)$ in Gl.(1), jedoch ohne die Trägheitsmassen der Kupplung. Vergleicht man diese Gleichung mit Gl. (3), so zeigt sich auch hier eine gebrochen-rationale Funktion, jedoch mit einem geringeren Polynomgrad, als er bei den Dynamischen Dämpfungsmatrizen verwendet wurde. Damit ergeben sich bereits Einschränkungen in der Genauigkeit dieser Modellbeschreibung.

Neben den Unsicherheiten in der erforderlichen Festlegung eines mittleren Stromfadens, muß der Parameter β geeignet gewählt werden. Der Parameter β soll die Abhängigkeit der Widerstandsziffer von der Reynolds beschreiben und kann näherungsweise zwischen 0 bei turbulenter Stömung und 1 bei laminarer Strömung liegen.

Durch Parameterstudien kann man nun feststellen, daß der β -Beiwert einen wesentlichen Einfluß auf das Übertragungsverhalten im unteren Frequenzbereich und speziell bei $\Omega=0$ hat. Es ist daher möglich, den β -Beiwert zur Anpassung zu verwenden und damit eine Verbesserung der theoretischen Berechnung anhand stationärer Messungen vorzunehmen. Da der Realteil der Dynamischen Dämpfungsfunktionen bei $\Omega=0$ der Steigung der Kennlinie entspricht, kann man für diesen Fall eine Gleichung für β herleiten:

$$\beta = 2 - (1-s) \left(\frac{\partial M}{\partial n_T} \Big|_{P_0} \frac{\omega_{P0} s}{M_0} - \frac{s r_i^2}{r_a^2 - (1-s)r_i^2} \right)^{-1} \quad (7)$$

Darin ist die Steigung der stationären Kennlinie im Betriebspunkt enthalten, die man aus einer Messung der Kennlinie leicht ermitteln kann.

Für Untersuchungen des Schwingungsverhaltens im Nennbetriebsbereich erscheint damit der theoretische Ansatz aus der eindimensionalen Stromfadentheorie als brauchbar, wenn zusätzlich die vorgeschlagene Anpassung des β -Beiwertes durchgeführt wird. Weitere Untersuchungen an anderen Kupplungen müssen dies jedoch noch bestätigen.

Will man auch hochdynamische Vorgänge über große Betriebsbereiche, wie z. B. Blockiervorgänge mit extremen Beschleunigungen simulieren, so stoßen auch die identifizierten linearen Teilmodelle an Grenzen. Das Verhalten läßt sich dann nicht mehr bereichsweise linearisieren, sondern es sind die nichtlinearen Eigenschaften über den gesamten durchfahrenen Betriebsbereich zu erfassen. Besonders großen Einfluß haben bei solchen Vorgängen Stauräume und der Füllungsgrad der Kupplung. Die bisher bekannten theoretischen Ansätze sind nicht mehr geeignet, da sie die Verteilung und die Verlagerung der Betriebsflüssigkeit in Arbeits- und Stauraum der Kupplung nicht berücksichtigen.

Eine Verbesserung der Modellierung ist nur in der Anwendung nichtlinearer Modellansätze zu sehen. Dabei sollten möglichst viele Kenntnisse über die Strömungsvorgänge in die Modellierung einfließen. Besonders zu berücksichtigen sind Teilfüllungs- und Stauraumeffekte. Die Identifikation nichtlinearer Modellansätze stellt jedoch auch an die Versuchs- und Meßtechnik hohe Anforderungen, so daß auch hier weitere Arbeiten erforderlich sind.

Literaturverzeichnis

- [1] Dien, R., 1992, "Torsionsschwingungsverhalten einer hydrodynamischen Kupplung", MTZ 53.
- [2] Folchert, U., 1993, "Identifikation der dynamischen Eigenschaften hydrodynamischer Kupplungen", Dissertation Ruhr-Universität Bochum.
- [3] Folchert, U., Menne, A., Waller, H., 1993, "Hochdynamischer Versuchsstand zur Identifikation von Antriebssträngen", Antriebstechnik, Nr. 2, S. 43-44.
- [4] Hasselgruber, H., 1965, "Zum Drehschwingungsverhalten der hydrodynamischen Kupplung", Industrie-Anzeiger, 87. Jahrgang, Nr. 8, S. 121-123., Nr. 25, S. 436-438.
- [5] Isermann, R., 1988, "Identifikation dynamischer Systeme," Band I und II, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York/London/Paris/Tokyo.
- [6] Menne, A., 1993, "Identifikation der dynamischen Eigenschaften hydrodynamischer Wandler", Dissertation Ruhr-Universität Bochum.
- [7] Unbehauen, R., 1990, "Systemtheorie, Grundlagen für Ingenieure", R. Oldenbourg Verlag, München/Wien.
- [8] Waller, H., Schmidt, R., 1989, "Schwingungslehre für Ingenieure, Theorie, Simulation, Anwendung", BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich

Abschätzung des Risikos der Gesundheitsgefährdung beim Hantieren von schwingenden Arbeitsgeräten mit Hilfe eines mechanischen Systems

Martin Fritz

Zusammenfassung: Epidemiologischen Untersuchungen ist zu entnehmen, daß beim Hantieren mit schwingenden Geräten das schwingungsbedingte Erkrankungsrisiko mit der beruflichen Expositionsdauer und der Belastungshöhe zunimmt. Es wird angenommen, daß wohl ein enger Zusammenhang zwischen der vom Hand-Arm-System während der Schwingungsbelastung dissipierten Energie und dem Risiko besteht. Deshalb wird hier eine Methode aufgezeigt, mit der sich aus den Bewegungen des Gerätegriffes und der Impedanz des Hand-Arm-Systems die dissipierte Energie berechnen läßt. Weiter wird gezeigt, wie anhand der dissipierten Energie und dem Frequenzspektrum der Belastung das Gesundheitsrisiko abgeschätzt werden kann.

Stichwörter: Hand-Arm-Schwingungen, Berufskrankheiten, Simulation, mechanisches Schwingungssystem, dissipierte Energie

Einleitung

Bei Arbeiten mit Bohrmaschinen, Kettensägen, Schleifern etc. werden Schwingungen auf das Hand-Arm-System übertragen. Diese Schwingungsbelastungen können bei täglich mehrstündiger Exposition nach mehreren Jahren Schädigungen im Hand-Arm-System verursachen, die in Form von Nervenfunktionsstörungen, Durchblutungsstörungen in den Fingern, degenerativen Veränderungen der Gelenke und Muskelatrophien auftreten. In der Bundesrepublik Deutschland können bei Vorliegen einer entsprechenden Arbeitsanamnese die Gelenkveränderungen gemäß der Berufskrankheiten-Verordnung als Berufskrankheit BK 2103 und die Durchblutungsstörungen als BK 2104 anerkannt werden.

Anhand epidemiologischer Untersuchungen konnte gezeigt werden, daß die Wahrscheinlichkeit, daß eine der beiden Berufskrankheiten sich entwickelt, mit der Höhe der Schwingungsbelastung und der gesamten beruflichen Expositionsdauer zunimmt [2]. Zur Beurteilung der Belastung wird gemäß der Richtlinie ISO 5349 die gewichtete Schwingbeschleunigung a_{HW} oder in der Bundesrepublik Deutschland gemäß VDI-Richtlinie 2057 die Bewertete Schwingstärke KH herangezogen. Mit Hilfe der Kenngrößen a_{HW} oder KH werden die zur Beschreibung einer Maschinenschwingung notwendigen Angaben des Frequenzspektrums und der Schwingbeschleunigungen auf eine Zahl reduziert. Der Umgang mit den beiden Kenngrößen hat sich als praktisch erwiesen. Ähnlich werden in der Strömungsmechanik die Strömungsverhältnisse an einem Körper anhand einer Kennzahl, nämlich der Reynolds-Zahl, beurteilt. Zur Ermittlung der Reynolds-Zahl werden physikalische Größen miteinander verrechnet. Dagegen sind die Kenngrößen das Ergebnis einer Vermischung von physikalischen Größen und Empfindungsgrößen, welche durch den gefühlsmäßigen Vergleich von sinusförmigen Schwingungen ermittelt wurden. Es ist fraglich, ob die Kenngrößen noch ein Maß für die Höhe der Schwingungsbelastungen sein können, als das sie häufig

benutzt werden. Auch erweist sich die fehlende Frequenzangabe eher als Nachteil, da insbesondere Geräteschwingungen unterhalb von 50 Hz die BK 2103 hervorrufen können, während hohe Frequenzen zur BK 2104 führen.

Schon während der aktuellen Arbeitssituation sinken durch das Anfassen der Gerätegriffe die Fingerhauttemperaturen, was auf eine Verringerung der Fingerdurchblutung hindeutet. Es wird angenommen, daß diese momentanen Durchblutungs-minderungen erste Anzeichen der bei arbeitsbedingter Wiederholung der Tätigkeit sich entwickelnden chronischen Durchblutungsstörungen sind. Die Temperaturabnahme wird ganz wesentlich von den ausgeübten Handkräften beeinflusst [3, 4, 11]. Nur bei Handkräften unter 30 N ist ein Einfluß der Schwingung auf die Temperaturabnahme feststellbar [10]. Handkräfte werden bisher nicht bei der Ermittlung der Kenngrößen berücksichtigt.

Von den schwingenden Arbeitsgeräten wird Energie auf das Hand-Arm-System übertragen. Ein Teil dieser Energie wird vom Hand-Arm-System absorbiert und dissipiert. Lidström [7] hat diesen Energieanteil, bezogen auf eine Zeiteinheit, mittels eines speziellen Meßgriffes erfaßt und zeigte, daß ein Zusammenhang zwischen der Höhe der dissipierten Energie und dem Risiko der Entstehung einer Vibrationskrankheit wahrscheinlich ist. Auch Burström und Lundström [1] sind der Meinung, daß der gesundheitsschädliche Effekt der Schwingungsbelastung stärker mit der dissipierten Energie als mit der gewichteten Beschleunigung a_{hw} korreliert. Deshalb wird in der vorliegenden Studie ein Weg beschrieben, wie die dissipierte Energie unter Beachtung des Einflusses der Handkräfte auf die mechanischen Eigenschaften des Hand-Arm-Systems ermittelt werden kann.

Mechanisches Schwingungsmodell

In Abb. 1 ist ein einfaches mechanisches Schwingungssystem dargestellt. Dieses System stellt kein Modell des Hand-Arm-Systems dar, es soll nur das Verständnis der Rechenschritte erleichtern.

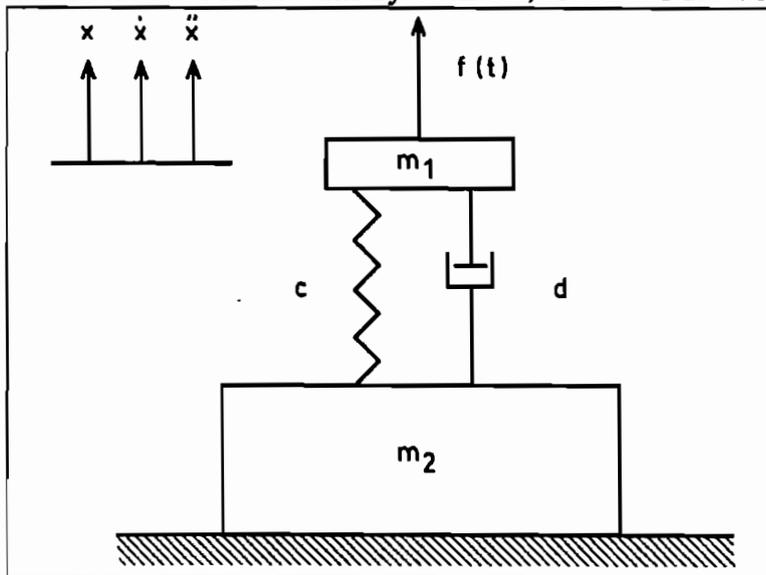


Abb. 1: Mechanisches Schwingungssystem mit linearen Eigenschaften, Schwingungserregung durch die Kraft $f(t)$

Die Masse m_1 stützt sich über die Feder c und den Dämpfer d gegen die feststehende Masse m_2 ab. Auf die Masse m_1 wirkt die zeitabhängige Kraft $f(t)$. Um den Zusammenhang zwischen den Bewegungen der Masse m_1 und der Kraft $f(t)$ zu beschreiben, wird mit Hilfe des zweiten Newton'schen Axioms die Bewegungsgleichung für die Masse m_1 hergeleitet. Sie lautet

$$m_1 \ddot{x} + d \dot{x} + c x = f(t) \quad \text{Gl. 1}$$

mit x als Auslenkung der Masse m_1 , \dot{x} als Geschwindigkeit und \ddot{x} als Beschleunigung. Die Kraft $f(t)$ soll zur besseren Übertragbarkeit der Ergebnisse auf das Hand-Arm-System möglichst ähnlich sein der Kraft, die von dem schwingenden Arbeitsgerät auf die Hand übertragen wird. Die Kraft ergibt sich aus gerätetypischen, periodischen Schwingungen und einer zufallsbedingten Störkraft. Wird die Periodendauer lang genug gewählt, so kann auch diese verrauschte Kraft dargestellt werden durch die Überlagerung harmonischer Funktionen. Nach Waller und Krings [12] kann zur Rechen- erleichterung der Kraft zunächst ein Imaginärteil hinzugefügt und der Zeitverlauf in exponentieller Schreibweise dargestellt werden. Es ist

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \hat{F}_i e^{j\omega_i t} \quad \text{Gl. 2}$$

mit \hat{F}_i als komplexer Amplitude des zeitabhängigen Kraftanteils. Die Lösung für x in der Bewegungsgleichung Gl. 1 setzt sich zusammen aus dem Eigenschwingungsanteil und der sogenannten Dauerlösung, welche die Schwingungsantwort der Masse m_1 auf die Erregung durch die periodisch veränderlichen Kraftanteile darstellt [13].

$$x = x_{\text{Eigen}} + x_{\text{Dauer}}$$

Bei der gegebenen Erregung durch die Kraft $f(t)$ lautet dann der Zeitverlauf von x

$$x(t) = \hat{x}_0 e^{\lambda t} + \sum_{i=1}^n \hat{x}_i e^{j\omega_i t} \quad \text{Gl. 3}$$

In dieser Gleichung sind

\hat{x}_0 = Amplitude der Eigenschwingungen der Masse m_1

und \hat{x}_i = komplexe Amplituden der erzwungenen Schwingungen

In das mechanische Schwingungssystem (Abb. 1) ist neben der Feder auch ein Dämpfer eingebaut. Dies bedeutet, daß die Eigenschwingungen des Systems nach einiger Zeit abgeklungen sind. Diese Zeit ist um so kürzer, je größer die Dämpfung d ist. Nach dem Abklingen der Eigenschwingungen schwingt die Masse m_1 im Rhythmus der Erregerkraft.

Da das Schwingungssystem in Abb. 1 ein System mit linearen Eigenschaften ist, ist es für die weiteren Betrachtungen ausreichend, nur noch einen harmonischen Anteil der Kraft sowie der Schwingungsantwort der Masse m_1 zu betrachten. Auch wird die exponentielle Schreibweise aufgegeben. Es ist dann

$$f(t) = \hat{F} \cos(\omega t) \quad \text{Gl. 4}$$

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{Gl. 5}$$

und für die Geschwindigkeit

$$\dot{x}(t) = -\omega \hat{x} \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{Gl. 6}$$

$$= \hat{v} \cos(\omega t + \psi), \quad \psi = \varphi + 90^\circ \quad \text{Gl. 6a}$$

mit ω als Erregerfrequenz und φ als Phasenverschiebung zwischen der Kraft und der Auslenkung.

Berechnung der dissipierten Energie

Bei dem betrachteten Schwingungssystem kann Energie nur durch den eingebauten Dämpfer dissipiert werden (Abb. 1). Diese Energie ergibt sich aus

$$E_D = d \int_0^t \dot{x} \dot{x} dt \quad \text{Gl. 7}$$

Bei erzwungenen periodischen Schwingungen hat die Geschwindigkeit den in Gl. 6 gegebenen Zeitverlauf, und die Höhe der während einer Schwingungsperiode T dissipierten Energie beträgt

$$E_D = d \omega^2 \hat{x}^2 \int_0^T [\sin(\omega t + \varphi)]^2 dt \quad \text{Gl. 7a}$$

Nach Lösung des Integrals und einiger Umformungen ergibt sich eine einfache Gleichung zur Berechnung der Energie. Daraus ist zu entnehmen, daß die Energie neben der Dämpfung d über die Phasenverschiebung auch von der Federsteifigkeit c abhängt, obwohl sie nur vom Dämpfer dissipiert wird.

Durch die Kraft $f(t)$ wird der Masse m_1 Arbeit zugeführt. Diese ist

$$W = \int_0^t f(t) \dot{x} dt \quad \text{Gl. 8}$$

Bei einer Kraft mit dem in Gl. 4 gegebenen Zeitverlauf wird der Masse m_1 während einer Schwingungsperiode die Arbeit

$$W = -0.5 T \omega \hat{F} \hat{x} \sin \varphi \quad \text{Gl. 8a}$$

zugeführt. Die Arbeit der Erregerkraft ist genau gleich dem Betrag der vom System dissipierten Energie. Wird die Arbeit auf eine Periodendauer T bezogen, so ergibt sich nach Einsetzen der Geschwindigkeit (Gl. 6a) die Leistung der Erregerkraft als

$$P = 0.5 \hat{F} \hat{v} \cos \psi \quad \text{Gl. 9}$$

Die Kräfte der Hand

Die Hände üben Greif- und Andruckkräfte auf die Maschinengriffe aus. Die Greifkraft wird ausgeübt, um ein Entgleiten des Griffes zu vermeiden. Sie wird von den Innenseiten der Hand und der Finger auf den Griff übertragen. Hierdurch wird der Griff wie von einer Zange festgehalten. Die Greifkraft leistet keinen Beitrag zu der oben hergeleiteten Arbeit (Gl. 8), da durch sie keine Massenanteile der Hand oder des Armes bewegt werden. Mit der Andruckkraft wird das Arbeitsgerät von der Hand gegen das Werkstück gedrückt. Mit einer gleich großen, aber entgegengesetzten Kraft muß sich der Arbeiter gegen den Boden abstützen. Auch durch die Andruckkraft werden keine Körpermassen bewegt, so daß sie keinen Beitrag zur Arbeit leistet.

Zum Ausüben von Greif- und Andruckkraft werden Muskeln in Hand, Unter- und Oberarm angespannt. Einige dieser Muskeln überspannen das Hand- und das Ellbogengelenk. Durch ihre Aktivität werden die Bewegungsmöglichkeiten in beiden Gelenk eingeschränkt und somit die

mechanischen Eigenschaften des Hand-Arm-Systems beeinflußt. Das System wird steifer. Auch werden die Muskeln mit ihrer dämpfenden Wirkung stärker in den Schwingungsablauf des Hand-Arm-Systems eingebunden.

Impedanz des Hand-Arm-Systems

Während die Greif- und Andruckkräfte von der Hand auf den Gerätegriff ausgeübt werden, überträgt das schwingende Arbeitsgerät zeitlich veränderliche Kräfte auf die Hand. Die Frequenzanteile dieser Kräfte können zwischen 6.3 Hz und 1000 Hz liegen. Bei diesen relativ hohen Frequenzen ist es den Armmuskeln nicht möglich, durch aktives Anspannen den Kräften des Arbeitsgerätes entgegen zu wirken. Daher führen diese Kräfte zu den meßbaren Bewegungen des Hand-Arm-Systems. Es sind damit genau die Erregerkräfte, welche bei der Berechnung der Arbeit (Gl. 8) berücksichtigt werden müssen.

Die zeitlich veränderlichen Kräfte der Arbeitsgeräte sind auch die Kräfte, die zur Ermittlung der Beschleunigungsadmittanz, der Impedanz [6] oder der Wegadmittanz des Hand-Arm-Systems gemessen werden. An diesen Systemkenngrößen läßt sich ablesen, daß bezüglich der Gerätekräfte das Hand-Arm-System nahezu lineare Eigenschaften hat. Die Systemkenngrößen sind jedoch abhängig von der Erregungsfrequenz und der Schwingungsrichtung. In Abb. 2 ist als Beispiel der Zusammenhang zwischen der Impedanz des Hand-Arm-Systems und der Erregerfrequenz bei unterschiedlich hohen Greifkräften dargestellt. Die Kraftabhängigkeit der Impedanz ist die Folge der zuvor beschriebenen Veränderungen der mechanischen Eigenschaften des Hand-Arm-Systems durch die Muskelanspannung.

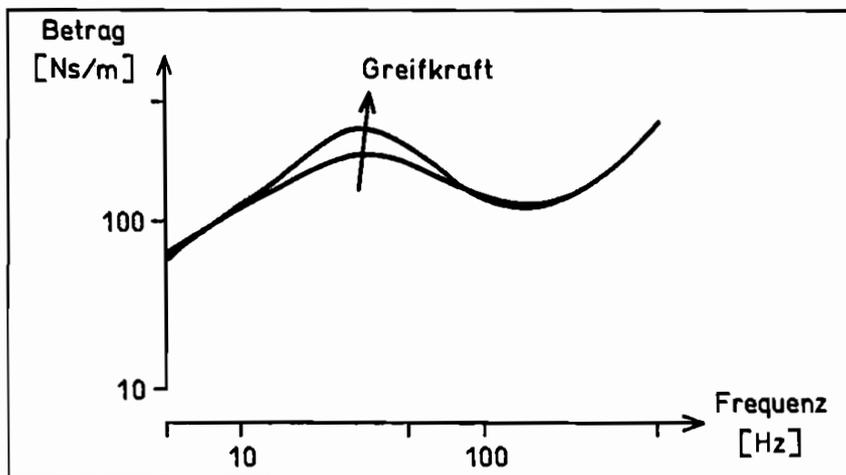


Abb. 2: Einfluß der Erregerfrequenz und der Greifkraft auf die Impedanz des Hand-Arm-Systems bei Schwingungen in Längsrichtung des Unterarmes, dargestellt ist der Betrag $|Z|$ nach Hesse [6]

Wird in der Gleichung für die auf eine Periode bezogene Arbeit (die Leistung, Gl. 9), die Amplitude der Erregerkraft durch den Betrag der Impedanz $|Z| = \hat{F}/\hat{v}$ ersetzt, so ist

$$P = 0.5 |Z| \hat{v}^2 \cos \psi \quad \text{Gl. 10}$$

und es können bei der Berechnung der Leistung über die Impedanz Einflüsse von Greif- und Andruckkraft berücksichtigt werden.

Diskussion

Die dissipierte Energie und die von der Erregerkraft erbrachte Arbeit bzw. Leistung wurden für ein einfaches mechanisches Schwingungssystem hergeleitet. Dies geschah nur für einen einzelnen

Frequenzanteil der Erregerkraft. Da aber das System in Abb. 1 lineare Eigenschaften hat, ist seine Schwingungsantwort auf die Gesamterregung gleich der Summe der Antworten auf die einzelnen Frequenzanteile der Erregerkraft. Dies bedeutet, daß auch die gesamte dissipierte Energie gleich der Summe der einzelnen frequenzbezogenen Energieanteile ist.

Zur Simulation des Schwingungsverhaltens des Hand-Arm-Systems ist ein einfaches Modell wie das Schwingungssystem in Abb. 1 nur unzureichend geeignet. Ein zufriedenstellendes Ergebnis wird mit Hilfe komplexerer Modelle erreicht [4]. Dabei zeigt sich, daß das Hand-Arm-System ein System mit hoher Dämpfung ist. Seine Eigenschwingungen klingen schon nach kurzer Zeit ab. Auch für diese Modelle lassen sich Gleichungen für die dissipierte Energie oder die von der Erregerkraft zugeführte Leistung aufstellen [5]. Die Gleichungen sind in ihrer Form sehr ähnlich den obigen Gleichungen, so daß zum Aufzeigen des Rechenweges das einfache Modell ausreichend ist.

Auf Veränderungen der Höhe der Erregerkraft reagiert das Hand-Arm-System mit einer proportionalen Erhöhung der Geschwindigkeit. Die Impedanz als Quotient aus diesen beiden Größen ist konstant. Die Erregung ist nicht nur durch die Höhe der Kraft, sondern auch die durch ihre Richtung und ihre Frequenzen gekennzeichnet. Die Impedanz nimmt, jedoch richtungsabhängig unterschiedlich stark, mit der Frequenz zu, wobei im Bereich um 40 Hz ein relatives Maximum erreicht wird. Für die Energie folgt hieraus, daß sie mit der Schwingungsintensität ansteigt und sich bei gleichbleibender Intensität über den betrachteten Frequenzbereich tendenziell wie die Impedanz verhält. Nicht konstant ist die Impedanz bei Veränderung der Armhaltung oder der Greif- und Andruckkräfte. Der Einfluß der Armhaltung ist geringer als der Einfluß der Kräfte. Analog zur Impedanz ergeben sich für die Energie in Abhängigkeit von der Armhaltung und von Greif- und Andruckkräften unterschiedliche Werte. Somit wird die berechnete Energie über den Frequenzbereich von 6.3 Hz bis 1000 Hz die gleichen Abhängigkeiten von den verschiedenen Belastungsfaktoren zeigen wie die von Burström und Lundström [1] in Laborversuchen gemessene, vom Hand-Arm-System dissipierte, zeitbezogene Energie.

Im Gegensatz zur Leistung müssen bei der Ermittlung der gewichteten Beschleunigung a_{hw} oder Bewerteten Schwingstärke KH die Handkräfte nicht berücksichtigt werden. Es wird jetzt jedoch allgemein anerkannt, daß die Handkräfte ein wesentlicher Risikofaktor bei der Entstehung der schwingungsbedingten Gelenksveränderungen oder der Durchblutungsstörungen in den Händen sind. Um den Nachteil der Schwingstärke bei der Risikoabschätzungen zu vermeiden, wurde vom Normungsausschuß NALS/VDI - C 7.4 [8] ein Änderungsvorschlag erarbeitet. Dieser sieht vor, daß die Schwingstärke KH mit einem Faktor, der sich aus der Summe von Greif- und Andruckkraft ergibt, multipliziert werden soll. Dieser Gewichtungsfaktor soll für alle Frequenzen gleich groß sein. Bei der Impedanz konnten dagegen signifikante kraftabhängige Veränderungen nur unterhalb von 100 Hz ermittelt werden [6]. Außerdem sind die Einflüsse der Handkräfte unterschiedlich groß in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz und der Schwingungsrichtung. Diese Effekte sollten auch bei dem kraftabhängigen Gewichtungsfaktor berücksichtigt werden. In der vorgeschlagenen Form kann er nur als erster Schritt zur Berücksichtigung der Handkräfte bei der Abschätzung des Gesundheitsrisikos von Hand-Arm-Schwingungen sein.

Lidström [7] ermittelte einen Anstieg der Häufigkeit vibrationsbedingter Schädigungen bei Zunahme der dem Hand-Arm-System zugeführten Leistung. Die Berücksichtigung der Leistung setzt jedoch voraus, daß bei den Erkrankten die Dauer der beruflichen Schwingungsexposition gleich lang

war. Diese Bedingung entfällt, wenn statt der Leistung die dissipierte Energie als Kriterium für die Risikoabschätzung genommen wird. Die gesamte während der Berufstätigkeit dissipierte Energie ergibt sich durch Multiplikation der Leistungen der benutzten Arbeitsgeräte mit den entsprechenden Expositionsauern. Um eine zufriedenstellende Korrelation zwischen Energie und Gesundheitsrisiko zu erreichen, werden beim Ermitteln der Arbeitszeit sicherlich noch Zu- oder Abschläge gemäß dem Einhalten von erholungsrelevanten Arbeitspausen mit einberechnet werden müssen.

Die Angabe der Leistung oder der dissipierten Energie ist eine Einwertangabe und enthält keine Information über die Erregerfrequenzen. Dieser Nachteil ließe sich vermeiden, indem bei den technischen Daten eines Arbeitsgerätes nicht nur ein Wert für die übertragene Leistung angegeben wird, sondern die in den einzelnen $1/3$ Oktavbändern des Frequenzspektrums der Schwingungen übertragenen Leistungen. Hieraus muß über die berufliche Expositionsauer die gesamte dissipierte Energie berechnet werden. Anhand eines Diagramms, wie es in Abb. 3 skizziert ist, kann dann die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Berufskrankheit ermittelt werden. Die schraffierten Bereiche ermöglichen eine Abschätzung, welche von beiden Berufskrankheiten entstehen kann. Doch sind zur sicheren Abschätzung der Wahrscheinlichkeit noch mehrere offene Fragen zu beantworten.

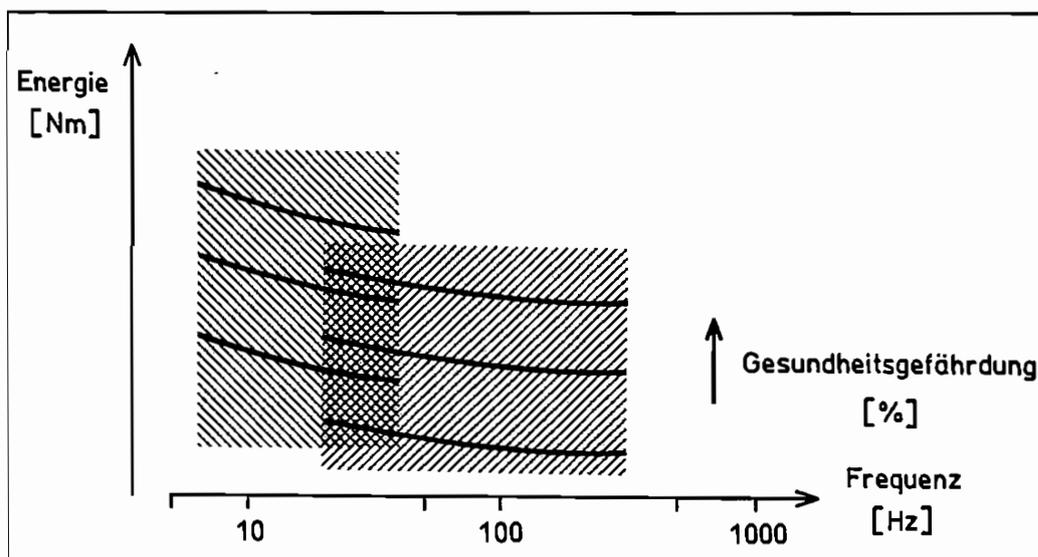


Abb. 3: Vorschlag für ein Diagramm zur Abschätzung des Gesundheitsrisikos in % anhand der dissipierten Energie und der Erregerfrequenz, Gefährdung bezüglich der

 BK 2103,
  BK 2104

Fraglich ist, ob der maximale frequenzbezogene Energiewert oder die Summe der Energien aller Frequenzbänder, bezogen auf die Mittenfrequenz des Spektrums des Arbeitsgerätes, ausschlaggebend ist für die Entstehung der Berufskrankheit. Auch muß geklärt werden, ob der Gefährdungswert der Energie für alle Frequenzbänder gleich hoch ist, wie von Burström und Lundström [1] angenommen. Da aber hochfrequente Schwingungen weniger weit in das Hand-Arm-System eindringen, ist es ebenso möglich, daß die mit Zunahme der Frequenz kleiner werdenden Gewebereiche schon bei niedrigen Energien mit der Schwingungsdämpfung überfordert und damit gefährdet sind. Weiter stellt sich die Frage, ob bei Schwingungen mit ausschließlich hohen Frequenzen die Schwingung selbst überhaupt gesundheitsgefährdend ist. Die Untersuchungen von Reynolds et al. [9] zeigen, daß in den $1/3$ Oktavbändern oberhalb von 125 Hz kaum noch Energie

vom Hand-Arm-System dissipiert wird. Die logische Folgerung hieraus ist, daß hochfrequente Schwingungsbelastungen als rein statische Belastung zu betrachten sind.

Anhand der Ergebnisse von Lidström [7] lassen sich diese Fragen nicht zufriedenstellend beantworten. Doch sind von unterschiedlichen Forschergruppen und Institutionen Daten über Schwingungsbelastungen und Expositionsdauern gesammelt worden, um einen Zusammenhang zwischen der gewichteten Beschleunigung a_{hw} bzw. Bewerteten Schwingstärke KH und der Gesundheitsgefährdung zu finden. Eine erneute Analyse dieser Daten könnte auch die obigen Fragen beantworten.

Literatur

- [1] BURSTRÖM, L.; LUNDSTRÖM, R.: Absorption of Energy in the Human Hand and Arm. *Ergonomics* 37 (1994) 5, 879 - 890.
- [2] DUPUIS, H.: Wirkung mechanischer Schwingungen auf das Hand-Arm-System - Literaturanalyse. Forschungsbericht 348, BAU, Wirtschaftsverlag NW, Bremerhaven 1982.
- [3] DUPUIS, H.: Combined Effects of Hand-Arm Vibration, Air Temperature, Noise and Static Load on Skin Temperature. In: OKADA, A.; MANNINEN, O. (eds): *Recent Advances in Researches on the Combined Effects of Environmental Factors*. Kyoei Co, Ltd., Kanazawa 1987, 295 - 307.
- [4] FRITZ, M.: Ermittlung von Beanspruchungen des Hand-Arm-Systems bei Schwingungsbelastungen mit Hilfe von biomechanischen und physiologischen Methoden. *Fortschritt-Berichte VDI-Z.*, Reihe 17, Nr. 71, VDI-Verlag, Düsseldorf 1991a.
- [5] FRITZ, M.: An Improved Biomechanical Model for Simulating the Strain of the Hand-Arm System Under Vibration Stress. *J. Biomechanics* 24 (1991b) 12, 1165 - 1171.
- [6] HESSE, M.: Die Antwort des Hand-Arm-Systems auf stochastische Erregung und ihre Anwendung im Schwingungsschutz. Dissertation Universität Dortmund 1989.
- [7] LIDSTRÖM, I.-M.: Vibration Injury in Rock Drillers, Chisellers and Grinders. Some Views on the Relationship Between the Quantity of Energy Absorbed and the Risk of Occurrence of Vibration Injury. In: WASSERMAN, D.E.; TAYLOR, W.; CURRY, M.G. (eds): *Proceedings of the International Occupational Hand-Arm Vibration Conference 1975*. DHEW (NIOSH), Publ. 77-170, Cincinnati, USA 1977, 77 - 83.
- [8] Normungsausschuß NALS/VDI - C 7.4: Messung und Bewertung der Greif- und Andruckkräfte zur Beurteilung der Vibrationsbelastung - Vorschlag zum Normenentwurf (nicht veröffentlicht, 1994)
- [9] REYNOLDS, D.D.; WASSERMAN, D.E.; BASEL, R.; TAYLOR, W.: Energy Entering the Hands of Operators of Pneumatic Tool Used in Chipping and Grinding Operations. In: BRAMMER, A.J.; TAYLOR, W. (eds): *Vibration Effects on the Hand and Arm in Industry*. John Wiley & Sons, New York 1981, 133 - 146.
- [10] SCHEFFER, M.: Wirkung von Greif- Andruckkraft unter Schwingungsbelastung. Hauptverband der gewerblichen Berufsgenossenschaften, Sankt Augustin 1992, 7 - 122.
- [11] SCHWARZLOSE, H.: Zur Beanspruchung des Menschen durch Hand-Arm-Vibrationen bei verschiedenen Umgebungstemperaturen unter besonderer Berücksichtigung der Tätigkeit von Steinmetzen. *Fortschritt-Berichte VDI-Z.*, Reihe 11, Nr. 55, VDI-Verlag, Düsseldorf 1983.
- [12] WALLER, H.; KRINGS, W.: *Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik*. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, B.I.-Wissenschaftsverlag 1975.
- [13] WALLER, H.; SCHMIDT, R.: *Schwingungslehre für Ingenieure - Theorie, Simulation, Anwendungen*. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich, B.I.-Wissenschaftsverlag 1989.

Zur Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren mit der Randelementemethode

Michael Geis

ZUSAMMENFASSUNG

Die Berechnung von Rißproblemen mit numerischen Methoden macht es erforderlich, das spezielle Lösungsverhalten an den Rißspitzen möglichst exakt wiederzugeben. Zu diesem Zweck können bei der Randelementmethode sogenannte Quarter-Point-Elemente verwendet werden, mit denen sich die Quadratwurzel-Charakteristik der Rißrandverschiebungen wesentlich besser wiedergeben läßt als mit Standard-Elementen. Eine analytische Auswertung der Randintegrale anstelle numerischer Integration ermöglicht es, auf die Diskretisierung von Teilgebieten und damit auf zusätzliche Innenränder in der Rißachse zu verzichten. Hierdurch wird eine Beeinflussung der Rißrandverschiebung infolge ungenauer Wiedergabe des singulären Spannungsverlaufes durch die Innenrandelemente ausgeschlossen und die Anzahl der Systemfreiheitsgrade reduziert. Mit einer Näherungsformel können K-Faktoren direkt aus den Knotenverschiebungen der Rißspitzen-Elemente berechnet werden. An Beispielen wird aufgezeigt, daß die Ergebnisse gute Übereinstimmung mit Vergleichswerten aus der Literatur aufweisen.

EINLEITUNG

In der linear-elastischen Bruchmechanik ist der Spannungsintensitätsfaktor (K-Faktor, SIF) eines der meistverwendeten Maße für die Belastung eines Risses [7]. Das Verhältnis des K-Faktors eines belasteten Bauteils zu einem materialspezifischen, kritischen Wert K_{krit} dient als Maß dafür, ob ein Riß bekannter Geometrie sich unter vorgegebener Last ausbreitet oder nicht.

Es bieten sich mehrere Möglichkeiten an, K-Faktoren zweidimensionaler Rißprobleme mittels der Randelementmethode (REM, BEM) [1] zu berechnen. Blandford, Ingraffea und Liggett [2] verwendeten hierzu erstmals "Quarter-Point-Randelemente" (QP-Elemente), teilweise mit einem singulären Randspannungsansatz (sog. TSQP-Elemente), mit denen sich Verschiebungs- und Spannungsverläufe in der Nähe der Rißspitze besser wiedergeben lassen als mit Standardelementen. Die mit ihrer Formel direkt aus den Knotenverschiebungen der QP-Elemente berechneten K-Faktoren weichen jedoch in Abhängigkeit vom Verhältnis der Elementlänge zur Rißlänge bis zu ca. 16 % von den exakten Vergleichslösungen ab.

Martinez und Dominguez [3] und auch Smith [4] berechneten K-Faktoren aus den Knotenspannungen der TSQP-Elemente und erzielten dabei eine wesentlich bessere Genauigkeit der Ergebnisse.

In Abb. 11 ist beispielhaft ein Rißproblem dargestellt. Die Diskretisierung dieses Problems mit QP- und TSQP-Elementen an den Rißspitzen erfordert die Auftei-

lung des betrachteten Gebietes in zwei Teilgebiete mit einem gemeinsamen Innenrand (Abb. 1.2).

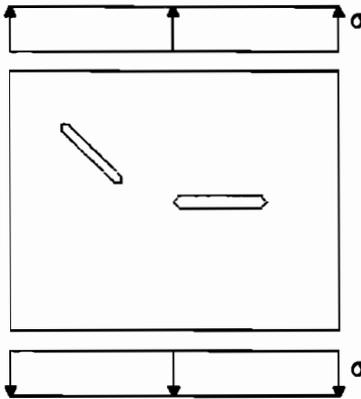


Abb. 1.1: Ribproblem

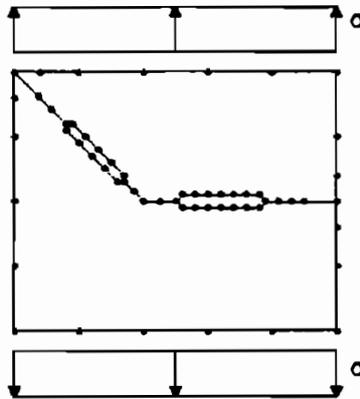


Abb. 1.2: Diskretisierung mit TSQP- und QP Elementen

Eine andere Möglichkeit wurde von Snyder und Cruse [5] vorgeschlagen und wird u.a. auch von Mews [6] verwendet: Anstelle der Referenzlösung der unendlichen Scheibe, der Kelvin-Lösung, wird diejenige Greensche Funktion der unendlichen Scheibe mit Rib verwendet. Dieses Verfahren benötigt keine Diskretisierung des Risses mehr und liefert dabei sehr exakte Ergebnisse. Die Untersuchung einer Scheibe mit mehreren Rissen erfordert allerdings die Einführung von je einem Teilgebiet für jeden Rib und damit ebenfalls die Diskretisierung zusätzlicher Innenränder (Abb. 1.3).

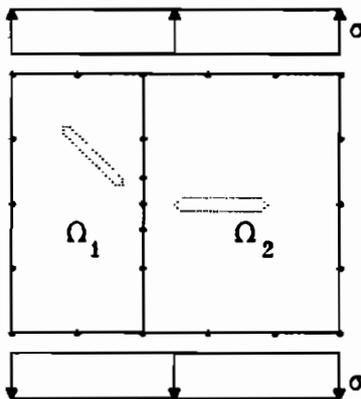


Abb. 1.3: Diskretisierung mit spezieller Fundamentallösung

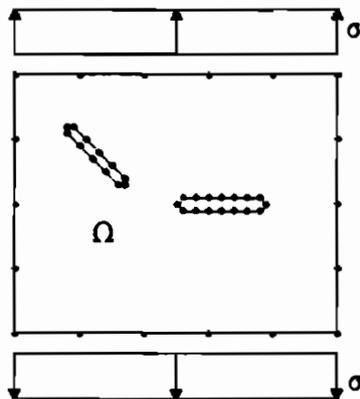


Abb. 1.4: Diskretisierung mit QP-Elementen

Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, K-Faktoren von nicht-symmetrischen Scheiben und von solchen mit Mehrfachrissen zu berechnen, ohne Innenränder und ohne spezielle Referenzlösungen zu verwenden (Abb. 1A). Die Randintegration wird in diesem Fall nicht, wie allgemein üblich, numerisch, sondern analytisch durchgeführt. Dadurch wird es möglich, mit einer vergleichsweise geringen Anzahl von Randknoten bereits recht genaue Ergebnisse zu erzielen.

RANDELEMENTMETHODE IN DER ELASTOSTATIK

Die Randintegralgleichung der Elastostatik läßt sich im Fall verschwindender Volumenkräfte darstellen als:

$$c_{ki}(A,K) u_i(K) = \int_{\Gamma} U_{ki}^*(A,X) p_i(X) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^*(A,X) u_i(X) d\Gamma \quad (1)$$

mit	u_i	- Verschiebungen
	p_i	- Randspannungen
	U_{ki}^*	- Fundamentallösung (-verschiebung)
	p_{ki}^*	- Fundamental-Randspannung
	c_{ki}	- Konstante, abhängig von der Lage des Knotens
	K	- Randknoten
	A	- Aufpunkt von U^*
	X	- Integrationspunkt

Hinsichtlich der Herleitung dieser Gleichung, der Form der Fundamentallösung etc. wird auf die Standardliteratur, z.B. [1], verwiesen.

Der Zusammenhang zwischen den Randschnittgrößen in den Element-Punkten X und den Rand-Knoten K wird mit Ansatzfunktionen Φ angenähert:

$$u_i(X) = \Phi^u(X,K) u_i(K) \quad (2)$$

$$p_i(X) = \Phi^p(X,K) p_i(K) \quad (3)$$

Einsetzen dieser Ansatzfunktionen in die Randintegralgleichung (1) führt auf:

$$G_{ki}(A,K) p_i(K) - H_{ki}(A,K) u_i(K) = 0 \quad (4)$$

Dabei werden die Randintegrale in den Matrizen \underline{G} und \underline{H} zusammengefaßt:

$$G_{ki}(A,K) = \int_{\Gamma} U_{ki}^*(A,X) \Phi^p(X,K) d\Gamma \quad (5)$$

$$H_{ki}(A,K) = \int_{\Gamma} p_{ki}^*(A,X) \Phi^u(X,K) d\Gamma + c_{ki}(A,K) \quad (6)$$

Man erhält ein lineares Gleichungssystem, mit dem die unbekanntes Randschnittgrößen berechnet werden können: .

$$\underline{G} \underline{p} - \underline{H} \underline{u} = \underline{0} \quad (7)$$

ANWENDUNG IN DER BRUCHMECHANIK

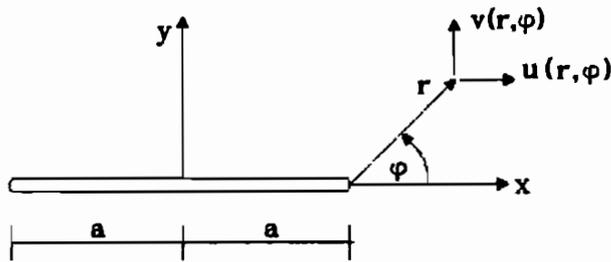


Abb. 2: Griffith-Riß

Betrachtet wird der in Abb. 2 schematisch dargestellte Griffith-Riß. Als Maß für die Intensität der Spannungsfelder in Rißnähe dienen die Spannungsintensitätsfaktoren K_I und K_{II} . Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Faktoren und den Rißrandverschiebungen u parallel und v senkrecht zur Rißachse in unmittelbarer Nähe der Rißspitze ($r \ll a$) hat allgemein die Form [7]:

$$u(r, \varphi = \pi) \approx \frac{1+\nu}{4G} K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \quad (8)$$

$$v(r, \varphi = \pi) \approx \frac{1+\nu}{4G} K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \quad (9)$$

Für den Griffith-Riß in der unendlichen Scheibe unter einachsiger Zugbelastung erhält man den exakten Zusammenhang durch Hinzufügen eines Terms der Form (r^2/a) in der Wurzel:

$$v(r, \varphi = \pi) = \frac{1+\nu}{4G} K_I \sqrt{\frac{2ra - r^2}{\pi a}} \quad (10)$$

Diese Wurzel-Charakteristik der Verschiebungen läßt sich mit linearen oder quadratischen Ansatzfunktionen Φ nur unzureichend wiedergeben. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, Quarter-Point-Elemente zu verwenden.

Quarter-Point-Elemente weisen neben einem konstanten und einem linearen auch einen Wurzel-Term in den Ansatzfunktionen auf, so daß sich eine wesentlich bessere Übereinstimmung mit den exakten Rißrand-Verschiebungen erzielen läßt:

$$v(r) = v_a + \sqrt{(r/l)} (-3v_a + 4v_b - v_c) + (r/l) (2v_a - 4v_b + 2v_c) \quad (11)$$

Sie besitzen wie jene mit quadratischem Ansatz drei Knotenpunkte, jedoch befindet sich der zweite Knoten nicht in der Elementmitte, sondern bei einem Viertel der Elementlänge (Abb. 3).

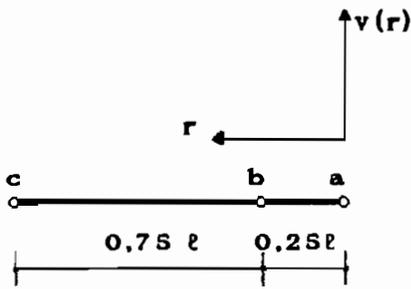


Abb. 3: Quarter-Point-Element

Die Diskretisierung des gesamten Risses wird nun ohne Verwendung zusätzlicher Innenränder durchgeführt werden. Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, daß neben einer wesentlichen Reduzierung der Systemfreiheitsgrade eine Beeinflussung der Ergebnisse infolge ungenauer Beschreibung der Schnittgrößenverläufe auf den Innenrändern ausgeschlossen wird. Eine Verwendung spezieller, singularer Spannungsansätze für Innenrandelemente kann entfallen.

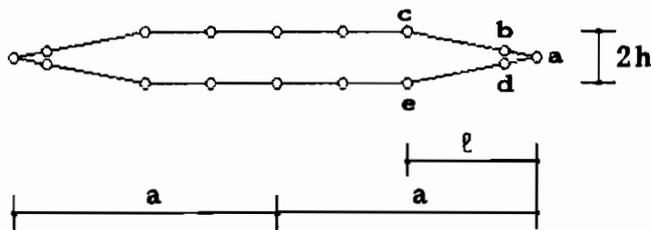


Abb. 4: Diskretisierung eines Risses mit 8 Elementen

Allerdings dürfen nun wegen der Zugehörigkeit beider Rißränder zu demselben Gebiet Ω gegenüberliegende Randknoten (wie z.B. Knoten c und e in Abb. 4) keine identischen Koordinaten haben. Die Diskretisierung geschieht daher in der hier beispielhaft dargestellten Form mit einem vorgegebenen Rißflankenabstand von:

$$2h \approx 1/1000 \tag{12}$$

Die Randintegrale (5) und (6) zur Aufstellung der Matrizen \underline{G} und \underline{H} wurden für gerade Elemente analytisch ausgewertet und die entsprechenden Ausdrücke in den Randelement-Programmcode übernommen. Bei der Berechnung entfällt daher jegliche numerische Integration, so daß hierdurch mögliche Ungenauigkeiten bei randnahen Knoten vermieden werden.

BERECHNUNG VON K-FAKTOREN

Umstellen der Gleichungen (8) und (9) für die Verschiebungsverläufe liefert die bekannten einfachen Näherungs-Ausdrücke zur Berechnung von K-Faktoren aus den Randverschiebungen in unmittelbarer Nähe der Rißspitze ($r \ll a$):

$$K_I \approx \frac{4G}{1+\chi} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} v(r) \quad (13)$$

$$K_{II} \approx \frac{4G}{1+\chi} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} u(r) \quad (14)$$

Um eine verbesserte Näherung K^* für den gesamten Bereich $[0 \leq r \leq a]$ zu erhalten, können diese Ausdrücke um lineare Funktionen Cr und Dr erweitert werden:

$$K_I^* = \frac{4G}{1+\chi} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} v(r) + Cr \quad (15)$$

$$K_{II}^* = \frac{4G}{1+\chi} \sqrt{\frac{\pi}{2r}} u(r) + Dr \quad (16)$$

In die erste dieser beiden Gleichungen werden nun die Knotenverschiebungen v_a , v_b und v_c des QP-Elementes eingesetzt:

$$v(0) = v_a \quad v(1/4) = v_b \quad v(1) = v_c \quad (17)$$

Damit erhält man folgende Gleichungen für K_I^* mit der unbekanntenen Konstanten C:

$$K_I^* = \frac{4G}{1+\chi} \sqrt{\frac{2\pi}{1}} v_b + \frac{C \cdot 1}{4} \quad (18)$$

$$K_I^* = \frac{4G}{1+\chi} \sqrt{\frac{\pi}{21}} v_c + C \cdot 1 \quad (19)$$

Elimination von C und Berücksichtigung einer möglichen Starrkörperverschiebung ($v \neq 0$) führt auf den Ausdruck zur direkten Berechnung von K^* aus den Knotenverschiebungen:

$$K_I^* = \frac{4G}{1+\chi} \sqrt{\frac{\pi}{21}} \left\{ \frac{8}{3} v_b - \frac{1}{3} v_c - \frac{7}{3} v_a \right\} \quad (20)$$

Die hier geschilderte Vorgehensweise entspricht einer Berechnung von K_I für die Element-Knoten b und c mit der einfachen Näherung aus Gl. (13) und anschließender linearer Extrapolation für den Punkt $r=0$, d.h. für die Rißspitze.

Für nicht-symmetrische Systeme werden die Knoten des gegenüberliegenden Randelementes einbezogen, man erhält:

$$K_I^* = \frac{2G}{1+\chi} \sqrt{\frac{\pi}{21}} \left\{ \frac{8}{3} (v_b - v_d) - \frac{1}{3} (v_c - v_e) \right\} \quad (21)$$

Diese Gleichung wird analog für die Verschiebungen parallel zur Rißachse, d.h. für die Rißöffnungsart II aufgestellt:

$$K_{II}^* = \frac{2G}{1+\chi} \sqrt{\frac{\pi}{21}} \left\{ \frac{8}{3} (u_b - u_d) - \frac{1}{3} (u_c - u_e) \right\} \quad (22)$$

Zur Abschätzung der Genauigkeit wurden die exakten Verschiebungen des Griffith-Risses in der unendlichen Scheibe unter Zugbelastung, wie sie in Gl. (11) angegeben waren, für verschiedene Elementlängen in die Näherungsformeln eingesetzt. Die Abweichung der hier vorgestellten Näherung K^* von der exakten Lösung beträgt in diesem Fall maximal 1,15 %.

BEISPIELE

1. schräger Innenriß

Untersucht wird der in Abb. 5 dargestellte schräge Riß der Länge $2a$ unter einem Winkel von 45° in der unendlichen Scheibe unter einachsiger Zugbelastung.

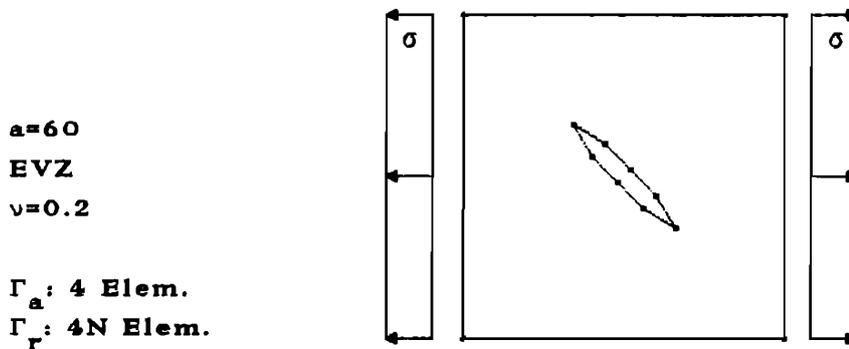


Abb. 5: Riß in der unendlichen Scheibe unter 45°

Die exakten dimensionslosen Spannungsintensitätsfaktoren lauten hier

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma \sqrt{\pi a}} = F_{II} = \frac{K_{II}}{\sigma \sqrt{\pi a}} = 0.500 \quad (23)$$

Die Rißlänge in diesem Beispiel beträgt $a=60$, die unendliche Scheibe wird durch ein Quadrat mit der Kantenlänge 1600 dargestellt. Bereits die Diskretisierung mit insgesamt 12 Elementen, d.h. je 2 gleichlangen Elementen pro Rißlänge a und 4 Elementen für den Außenrand, liefert K-Faktoren mit einer Genauigkeit von etwa 1% (Tab. 1). Für zunehmende Elementanzahl konvergieren die Ergebnisse gegen die exakte Lösung.

Elementanzahl	F_I^*	Abw.	F_{II}^*	Abw.
8	0.4840	-3.1%	0.4697	-6.1%
12	0.4967	-0.7%	0.4942	-1.2%
16	0.4984	-0.3%	0.4971	-0.6%
29	0.4991	-0.2%	0.4982	-0.4%

Tab. 1: Berechnung mit Gl. (21), (22)

2. schräger Randriß

a=60
 b=120
 EVZ
 ν=0.3

Γ_a: 16 Elem.
 Γ_r: 10 Elem.

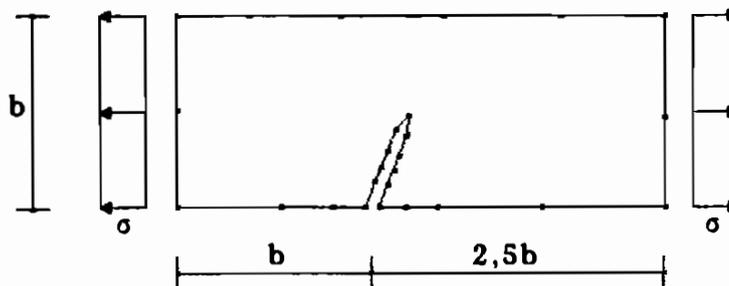


Abb. 6: Gezogener Streifen mit schrägem Randriß

Weiterhin wird ein gezogener Streifen der Höhe b und der Länge $2,5b$ mit schrägem Randriß unter einem Winkel von $67,5^\circ$ betrachtet. Wie in Abb. 6 dargestellt ist, wurde für das Rechenmodell die Höhe $b=120$ und die Rißlänge $a=50$ verwendet. Der Rißrand wurde hier in zwei mal 5 Randelemente unterschiedlicher Länge, der äußere Rand in 16 Elemente unterteilt. Die Ergebnisse der Randelementberechnungen sind in Tab. 2 den von Rooke and Cartwright [8] in ihrem "Compendium of Stress Intensity Factors" veröffentlichten K-Faktoren gegenübergestellt. Die Abweichungen betragen weniger als 1%.

	F_I^*	Abw.	F_{II}^*	Abw.
Vergleichswert	2.258	—	0.494	—
REM	2.265	+0.3%	0.495	+0.2%

Tab.2 : gezogener Streifen mit Randriß

Bewertung

Mit dem beschriebenen Verfahren können zweidimensionale K-Faktoren sowohl für nicht-symmetrische Rißprobleme als auch für solche mit Mehrfachrissen berechnet werden, ohne daß eine Diskretisierung von Innenrändern erforderlich wird. In vielen Fällen bedeutet dies eine wesentliche Reduzierung der Knotenzahl und damit des Rechenaufwandes.

Literatur

- [1] Brebbia, C.A., Telles, J.F.C. and Wrobel, L.C.: 'Boundary Element Techniques', Springer Berlin, Heidelberg 1984
- [2] Blandford, G.E., Ingraffea, A.R. and Liggett, J.A.: 'Two-Dimensional Stress Intensity Factor Computations using the Boundary Element Method', Int. Journal of num. Meth. in Engineering, Vol.17, S. 387-404, 1981.
- [3] Martinez, J. und Dominguez, J.: 'On the Use of Quarter-Point Boundary Elements for Stress Intensity Factor Computations', Int. Journal of num. Meth. in Engineering., Vol. 20, S. 1941-1950, 1984.
- [4] Smith, R.N.L.: 'The solution of mixed-mode fracture problems using the boundary element method', Vortrag auf der BEM IX Conference, Stuttgart 1987.
- [5] Snyder, M.D. and Cruse, T.A.: 'Boundary integral equation analysis of cracked anisotropic plates', Int. Journal of Fracture, Vol. 11, S. 315-328, 1975.
- [6] Mews, H.: 'Calculation of Stress Intensity Factors for Various Crack Problems with the Boundary Element Method', in: Boundary Elements IX, Vol.2, S. 259-278, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987.
- [7] Hahn, H.G.: 'Bruchmechanik', Teubner-Studienbücher Mechanik, Stuttgart 1976.
- [8] Rooke, D.P., Cartwright, D.J.: 'Compendium of Stress Intensity Factors', Hillington Press, Uxbridge, Middx 1976.

Materialidentifikation von Schlauchsegmenten in der Dialysetechnik

Hilgers P. u. Silber G. u. Steinbach B.

1 Einleitung

Bei Organersatz- oder Überbrückungsverfahren wird der menschliche Kreislauf durch ein Extrakorporalsystem erweitert. Blut wird durch elastische, transparente Leitungen aus Kunststoff medizinischer Qualität zum Austauschelement und zurück zum Körper gepumpt. Beispiele sind die Herz-Lungen-Maschine bei Operationen am offenen Herzen und die Dialysemaschine bei der Nierenersatztherapie.

Forderungen an das Extrakorporalsystem sind neben Verfahrenseffektivität und -sicherheit die Sterilität, aber auch geringer Aufwand. Zur Sicherheit finden über die Behandlungsdauer punktuell Überwachungen des Blutdrucks im extrakorporalen Kreislauf statt. Die Übertragung des Druckes vom sterilen Einmalartikel zum unsterilen Drucksensor erfolgt beispielsweise mit einer Luftsäule über eine Zweigleitung. Zur Aufrechterhaltung der Sterilität ist in diese ein Luftfilter integriert. Wünschenswert wäre die Vermeidung dieser aufwendigen Ableitung und Bestimmung des Schlauchinnendruckes durch Messung der Aussenkraft. Diese Messung wird durch das Verhalten der eingesetzten dickwandigen Schläuche mit starker Relaxation erschwert. Genaue Kenntnis dieses Verhaltens verspricht jedoch eine Lösung. In der vorliegenden Schrift wird gezeigt, wie experimentelle Ergebnisse durch theoretische Ansätze nachgebildet werden. Damit wird die Voraussage der Relaxation und damit Elimination der Störeinflüsse ermöglicht. Die Arbeit ist ein Beispiel für die Zusammenarbeit zwischen Industrie und Hochschule.

2 Materialgesetze

Polymerwerkstoffe und hier insbesondere thermoplastische Kunststoffe wie PVC, PUR, Polypropylen etc. sind makroskopisch im wesentlichen durch die drei Phänomene „Kriechen“, „Relaxation“ und „Retardation“ gekennzeichnet. Beim Kriechen nimmt die Verformung des Bauteiles trotz konstanter Belastung zu, bei der Spannungsrelaxation nimmt die Spannung im Bauteil bei konstanter Dehnung ab und bei der Retardation (oder auch Deformationsrelaxation) geht die

Deformation des Teiles bei plötzlicher Entlastung nur allmählich (und auch nicht unbedingt vollständig) zurück. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von „Stoffen mit Gedächtnis“, die sich je nach ihrer „Gedächtnisstruktur“ an ihre „Verformungsgeschichte“ besser oder schlechter erinnern können und demzufolge auf aktuelle Belastungs- oder Verformungsprozesse materialspezifisch - im vorliegenden Fall „viskoelastisch“ - reagieren.

Im folgenden werden drei Möglichkeiten von Materialgesetzstrukturen für derartige Materialien angegeben. Die erste Möglichkeit geht von (dreidimensionalen) Funktionaldarstellungen aus, die in axiomatisch strenger Weise mit Hilfe der Prinzipien der „Rationalen Mechanik“ entwickelt werden. Zum zweiten wird auf „Rheologische Modelle“ Bezug genommen, wonach ein (viskoelastisch reagierender) Körper aus Feder- und Dämpferelementen aufgebaut gedacht wird. Die dritte Variante von Stoffgesetzen wird über rheologische Modelle motiviert, nimmt aber wieder in strengem Maße Bezug auf die Prinzipien der Rationalen Mechanik. Alle drei Möglichkeiten haben gemeinsam, daß die Zuordnungen zwischen Spannungen und Verzerrungen durch sogenannte Nachwirkungsintegrale gekennzeichnet sind, deren „Integralkerne“ die jeweilige Gedächtnisstruktur des Materials repräsentieren. Im Gegensatz zu den Rheologischen Modellen, deren Kerne allein durch Exponentialfunktionen aufgebaut werden, können die Integralkerne der beiden anderen Stoffgesetzvarianten im Sinne des „Prinzips des schwindenden Gedächtnisses“ beliebige Zeitfunktionen sein.

2.1 Funktionaldarstellungen

COLEMAN und NOLL geben in [3] basierend auf den Prinzipien der „Rationalen Mechanik“ ein materialtheoretisches Konzept für die Klasse viskoelastischer Materialien an. Zunächst lautet das allgemeine Materialgesetz für den Spannungstensor S am materiellen Punkt X in der Referenzlage X eines (homogenen) Körpers zur Gegenwartszeit t im Falle „Einfacher Stoffe“ [12]

$$S(X, t) = \int_{\tau=-\infty}^t \mathbf{f} \langle F(X, \tau) \rangle \quad (2.1)$$

Darin bedeuten \mathbf{f} ein (tensorwertiges) Funktional der Deformationsgradientengeschichte F über die gesamte Geschichte $-\infty \leq \tau \leq t$, $F := \mathbf{x}\nabla$ mit $\mathbf{X} = \mathbf{X}(X, \tau)$ der Lage des materiellen Punktes X in der Momentankonfiguration X und ∇ dem (materiellen) NABLA-Operator sowie τ der Vergangenheitszeit. Die momentanen Spannungen hängen demnach von der Deformationsgradientengeschichte der entferntesten Vergangenheit ($\tau = -\infty$) bis zur Gegenwart ($\tau = t$) ab.

Für isotropes Material geht (2.1) unter Berücksichtigung des „Prinzips des schwindenden Gedächtnisses“ (Fading memory) sowie der Zeittransformation

$\tau = t - s$ über in die in den momentanen Verzerrungen \mathbf{G} nichtlineare und in der Verzerrungsdifferenzgeschichte \mathbf{G}_d^t lineare Stoffgleichung [3]

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}[\mathbf{G}(\mathbf{X}, t)] + \int_{s=0}^{\infty(4)} \mathbf{K}[s, \mathbf{G}(\mathbf{X}, t)] \cdot \mathbf{G}_d^t(\mathbf{X}, s) ds \quad (2.2)$$

Darin gelten die Abkürzungen

$$\mathbf{G}_d^t(s) := \mathbf{G}(t - s) - \mathbf{G}(t)$$

mit dem rechten GREENSchen Verzerrungstensor

$$\mathbf{G} := \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H})$$

und dem Verschiebungsgradienten $\mathbf{H} = \mathbf{I} - \mathbf{F}$, \mathbf{K} ist eine vierstufig-tensorwertige Tensorfunktion von \mathbf{G} und $\mathbf{f}(\mathbf{G}) = \Psi_0 \mathbf{I} + \Psi_1 \mathbf{G} + \Psi_2 \mathbf{G}^2$ eine zweistufig-tensorwertige Tensorfunktion von \mathbf{G} mit den drei Materialfunktionen $\Psi_i = \hat{\Psi}_i(G_I, G_{II}, G_{III})$ ($i=0,1,2$) der drei Grundinvarianten G_j ($j=I,II,III$) des Tensors \mathbf{G} . \mathbf{I} ist der (isotrope) Einheitstensor zweiter Stufe.

2.2 Lineare Viskoelastizität

Materialgesetze für die lineare Viskoelastizität extrahiert man aus (2.2) indem zunächst im Sinne einer „physikalischen Linearität“ in den Verzerrungen \mathbf{G} und \mathbf{G}_d^t gefordert wird

$$\mathbf{K}(s, \mathbf{G}) \equiv \mathbf{K}_0(s) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(s) \mathbf{I}_i \quad (2.4)$$

Hierin bedeuten \mathbf{I}_i ($i=1,2,3$) die drei voneinander unabhängigen isotropen Tensoren vierter Stufe [10,11]. Unter Beachtung von (2.4) sowie

$$\mathbf{f}(\mathbf{G}) = (\lambda \text{Sp } \mathbf{G}) \mathbf{I} + 2 \mu \mathbf{G}$$

geht (2.2) prinzipiell in das tensor-lineare Stoffgesetz der folgenden Struktur über [1,3]

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = & [\Lambda(0) \text{Sp} \mathbf{G}(\mathbf{X}, t)] \mathbf{I} + 2M(0) \mathbf{G}(\mathbf{X}, t) + \\ & \left[\int_{s=0}^{\infty} \Lambda'(s) \text{Sp} \mathbf{G}(\mathbf{X}, t - s) ds \right] \mathbf{I} + \int_{s=0}^{\infty} 2M'(s) \mathbf{G}(\mathbf{X}, t - s) ds \end{aligned} \quad (2.5)$$

Zur Beschreibung des Materialverhaltens stehen also noch zwei skalarwertige Relaxationsfunktionen Λ und M bzw. Relaxationskerne Λ' und M' zur Ver-

fügung. Schränkt man schließlich im Sinne einer „geometrischen Linearisierung“ weiter auf Prozesse mit kleinen Verschiebungsableitungen ein, so ist in (2.5) grundsätzlich \mathbf{G} durch den Deformator

$$\mathbf{D} := \mathbf{G} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) \quad (2.6)$$

zu substituieren. [1, 3, 6]. Damit liegt dann ein streng-lineares mehrachsiges Materialgesetz für homogene, isotrope viskoelastische Festkörper mit schwindendem Gedächtnis vor.

2.3 Einachsige Materialgesetze

2.3.1 Rheologische Modelle

Die Vorstellung, daß ein Kontinuum in jedem materiellen Punkt X durch Feder- und Dämpfungseigenschaften charakterisiert ist, führt zu Rheologischen Modellen. Die diese Modellvorstellung wiedergebende allgemeinste lineare Zuordnung zwischen Spannung $\sigma(X,t)$ und Dehnung $\varepsilon(X,t)$ läßt sich durch die folgende Zustandsgleichung beschreiben

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial^i \sigma}{\partial t^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{\partial^j \varepsilon}{\partial t^j} \quad (2.7)$$

Hierin bedeuten a_i und b_i Stoffkoeffizienten und $\partial / \partial t$ die materiellen Zeitableitungen. Das zu (2.7) äquivalente spannungsexplizite Stoffgesetz gibt etwa GUMMERT in [7] auf der Basis der Operatorenmethode wie folgt an:

$$\sigma(t) = A\varepsilon(t) - \int_{\tau=-\infty}^t \sum_{i=1}^p A_i \alpha_i e^{-\alpha_i(t-\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau \quad (2.8)$$

mit p der größeren der beiden Zahlen m und n in (2.7),

$$A_i = A_i(a_i, b_i), \alpha_i = \alpha_i(a_i, b_i) \text{ und } A = \sum_{i=0}^p A_i.$$

Im Hinblick auf die in Kapitel 3 durchgeführte Materialidentifikation sollen hier (2.7) und (2.8) für das BURGER-Modell exemplifiziert werden (vgl. Abb. 2.1). Ein BURGER-Modell entsteht durch eine Reihenschaltung eines MAXWELL- und eines KELVIN-Elementes, wobei ersteres wiederum durch eine Reihenschaltung und letzteres durch eine Parallelschaltung jeweils eines Feder- und eines Dämpferelementes aufgebaut wird. Hierfür nimmt (2.7) folgende Form an:

$$a_2 \ddot{\sigma} + a_1 \dot{\sigma} + a_0 \sigma = b_2 \ddot{\varepsilon} + b_1 \dot{\varepsilon} \quad (2.9)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} a_0 &\equiv \alpha_M \alpha_K & a_1 &\equiv \alpha_M + \alpha_K + \alpha_{MK} & a_2 &\equiv 1 \\ b_0 &\equiv 0 & b_1 &\equiv E_M \alpha_K & b_2 &\equiv E_M \end{aligned} \quad (2.10)$$

und

$$\alpha_M := \frac{E_M}{\eta_M} \quad \alpha_K := \frac{E_K}{\eta_K} \quad \alpha_{MK} := \frac{E_M}{\eta_K} \quad (2.11)$$

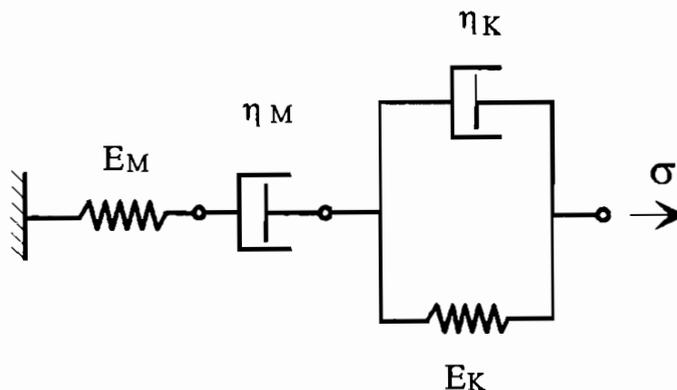


Abb. 2.1.: BURGER-Modell

Das BURGER-Modell wird also letztendlich durch vier Materialkoeffizienten, nämlich durch die beiden Elastizitätsmoduli E_M und E_K und durch die beiden Viskositäten η_M und η_K jeweils des MAXWELL- bzw. KELVIN-Elements (M) bzw. (K) determiniert. Das spannungsexplizite Stoffgesetz in der Form (2.8) erhält man etwa mittels LAPLACE-Transformation für „starke Dämpfung“ wie folgt:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_{\tau=0}^t \langle \varepsilon(\tau) \rangle \\ &= E_M \varepsilon(t) + \int_{\tau=0}^t [C_1 e^{s_1(t-\tau)} + C_2 e^{s_2(t-\tau)}] \varepsilon(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.12)$$

mit den Abkürzungen

$$S_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - 4 \frac{a_0}{a_1^2}} \right) \quad (2.13)$$

$$C_{1,2} = \pm \frac{(b_1 - a_1 E_M) S_{1,2} - E_M a_0}{S_1 - S_2} \quad (2.14)$$

Im Sinne der Darstellung (2.5) hat man hier also eine Relaxationsfunktion der Gestalt

$$M(t - \tau) := E_M + \frac{C_1}{S_1} [e^{S_1(t-\tau)} - 1] + \frac{C_2}{S_2} [e^{S_2(t-\tau)} - 1] \quad (2.15)$$

2.3.2 Verallgemeinerte Integralkerne

Wird die Forderung aufgegeben, daß die Kerne der Integralgleichung (2.8) oder im konkreten Fall des BURGER-Stoffes (2.12) durch eine endliche Anzahl von Exponentialfunktionen darstellbar sind, so läßt sich das Materialgesetz nach [7] als VOLTERRA-Integralgleichung in der Form

$$\sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) - \int_{\tau=-\infty}^t R(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right] \quad (2.16)$$

oder auch nach [2] in der Form

$$\sigma(t) = \int_{\tau=-\infty}^t R(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.17)$$

angeben.

In (2.16) und (2.17) bedeutet nun allerdings $R(t-\tau)$ jeweils einen allgemeinen Integralkern, der prinzipiell durch solche Zeitfunktionen darstellbar ist, die im Sinne einer Erinnerungsfunktion das Prinzip des schwindenden Gedächtnisses erfüllen. Für die Materialidentifikation in Kapitel 3 werden nachstehend mögliche Integralkerne für $\tau \leq t$ aufgelistet:

$$\text{ABEL-Kern: } R(t-\tau) = \frac{C}{1 + (t-\tau)^\alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (2.18)$$

Modifizierter ABEL-Kern:

$$R(t - \tau) = \frac{C}{[1 + (t - \tau)^\alpha]^\beta} \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.19)$$

BRONSKY-Kern:

$$R(t - \tau) = \frac{C}{(t - \tau)^\alpha} e^{-(t - \tau)^{1 - \alpha}} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.20)$$

LIOUVILLE-Kern:

$$R(t - \tau) = \frac{C\Gamma(1 + \alpha)}{1 + (t - \tau)^\beta} \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (2.21)$$

mit der GAMMA-Funktion Γ .

3 Materialidentifikation

Als denkbares Ziel sollte idealerweise die Möglichkeit bestehen, Schlauchinnendruckänderungen Δp_i während der Hämodialysebehandlung allein durch Kraftmessungen an der Schlauchaußenwand zu sensieren. Im Falle einer statischen Messung müßte hierbei das Schlauchsegment an der Meßstelle mittels eines Stempels um ein Maß Δd über die Behandlungsdauer $t - t_0$ zeitlich konstant zusammengedrückt werden (vgl. Abb. 3.1).

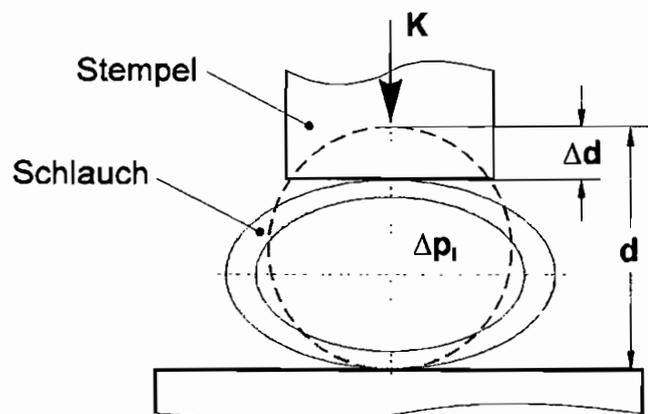


Abb. 3.1: Verformtes Schlauchsegment während der Kraftmessung
 Δd Verformung durch Stempelkraft K

Aufgrund der somit erzeugten (zeitlich konstanten) Dehnungsgeschichte

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon_0 = \frac{\Delta d}{d} = \text{const} \quad \text{für } t_0 \leq \tau \leq t \quad (3.1)$$

ist vom Schlauchsegment aus PVC-Material ein Relaxationsverhalten zu erwarten. Daher ist bei Anwendung dieses Meßverfahrens für eine (möglichst) genaue Innendrucküberwachung die Kenntnis des Materialgesetzes unabdingbar. Wenngleich zur Beantwortung dieser Frage aufgrund der Schlauchgeometrie eigentlich ein (mehrachsiges) Randwertproblem zu lösen ist, und hierfür möglicherweise eine Stoffgleichung in Form von (2.5) oder sogar (2.2) herangezogen werden müßte, soll hier im Rahmen einer Voruntersuchung zunächst eine lineare Theorie und ein einachsiges Materialgesetz zugrundegelegt werden. Auf der Basis quasi-statischer Messungen der Schlauchaußenkraft nach COLETTA [4] werden im folgenden die Relaxationsfunktion bzw. -kerne gemäß der Darstellungen (2.15) bzw. (2.18), (2.19) und (2.21) mit Hilfe einer Optimierungsroutine des Rechenprogramms MATHEMATICA durch die numerische Bestimmung der jeweils freien Materialparameter optimiert und anschließend hinsichtlich ihrer Abbildungsgüte miteinander verglichen. Dabei werden drei unterschiedliche Zeitreihen zugrunde gelegt: bei der ersten Optimierung I werden sämtliche Meßwerte über eine Meßdauer von 10 Stunden, bei der Optimierung II jeweils nur die Meßwerte der ersten 10 Minuten und bei der dritten Optimierung III die Meßwerte der ersten 10 Minuten und zusätzlich noch (im Sinne von „Stützstellen“) alle 10 Minuten der anschließenden Stunde je ein Meßwert in das Rechenprogramm eingesetzt. Ebenso wie bei der ersten Prozedur werden auch bei den beiden anderen Optimierungen jeweils die Güte der Vorhersage des Meßverlaufs über die gesamte Dauer von 10 Stunden analysiert. Es gelten jeweils die folgenden Versuchsbedingungen: Das Schlauchmaterial ist PVC-60, der Schlauch ist nicht mit Flüssigkeit gefüllt, es wird von nahezu konstanter Temperatur über den Meßzeitraum ausgegangen.

3.1 Optimierung I: Meßwerte über 10 Stunden

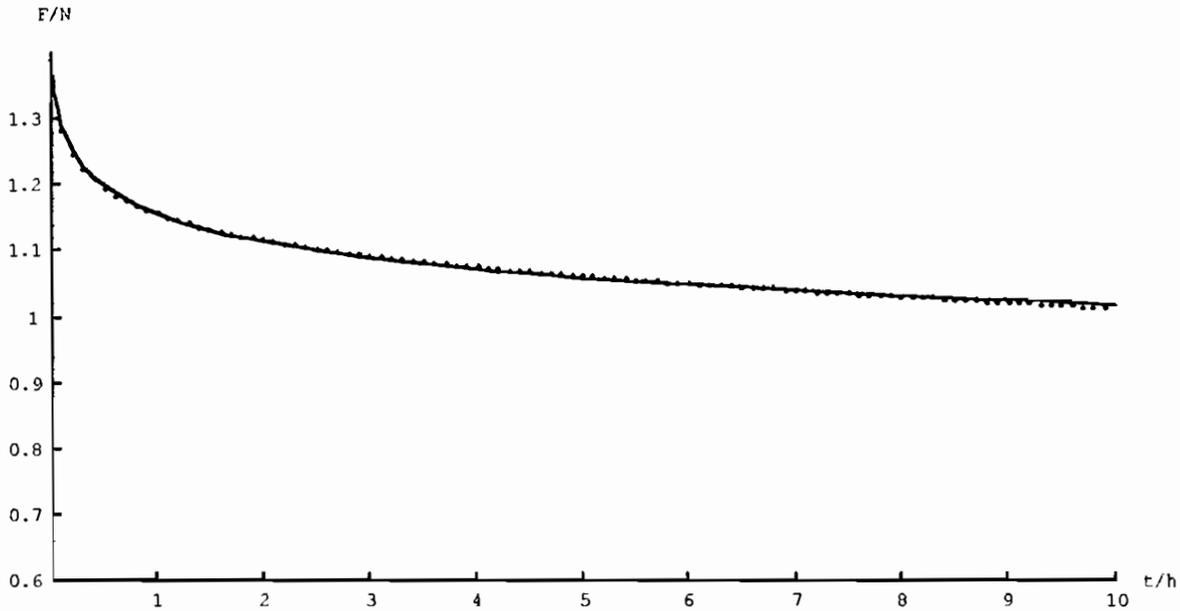


Abb.3.2: Abel-Kern gemäß (2.18)

$$AC=28.5N, \alpha=8.18 \cdot 10^{-2}$$

$$FQ: 6.17 \cdot 10^{-4}$$

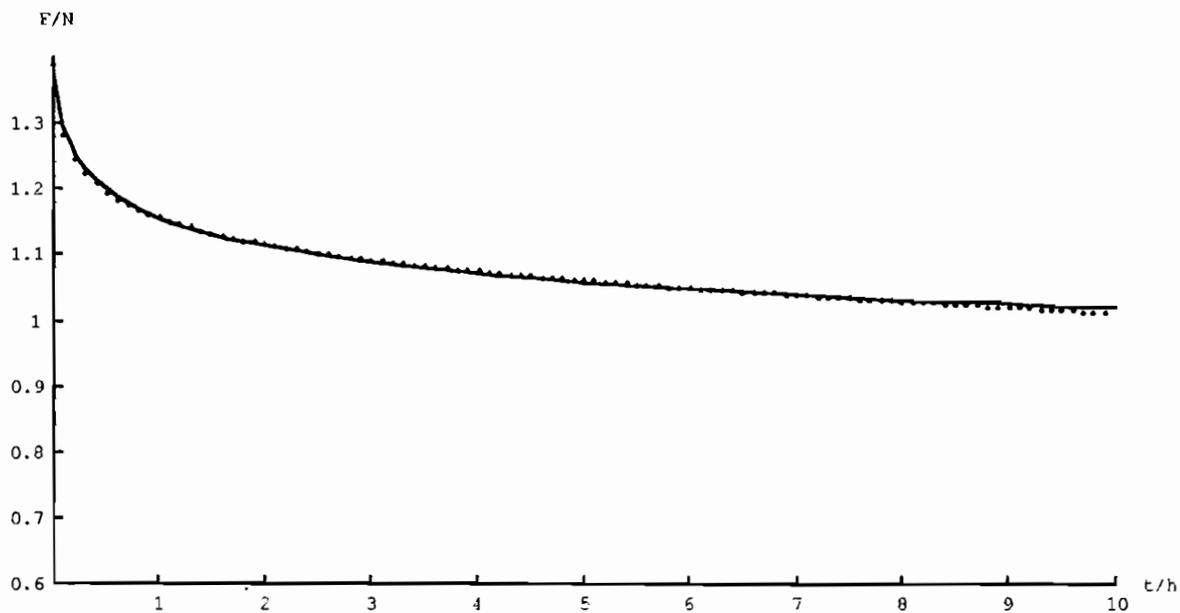


Abb.3.3: Liouville-Kern gemäß (2.21)

$$AC=1N, \alpha=-0.94, \beta=5.6 \cdot 10^{-2}$$

$$FQ: 9.41 \cdot 10^{-4}$$

3.2 Optimierung II: Meßwerte der ersten 10 Minuten

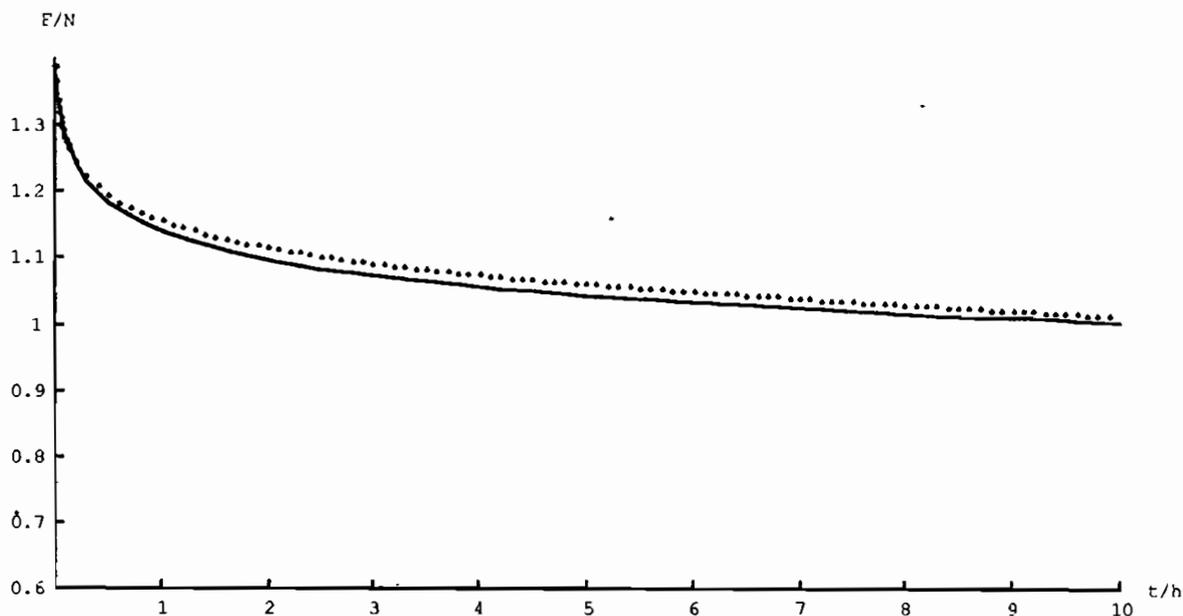


Abb.3.4: Liouville-Kern gemäß (2.21)

$$AC=1N, \alpha=-0.94, \beta=5.6 \cdot 10^{-2}$$

3.3 Optimierung III: 10 Minuten und Stützstellen

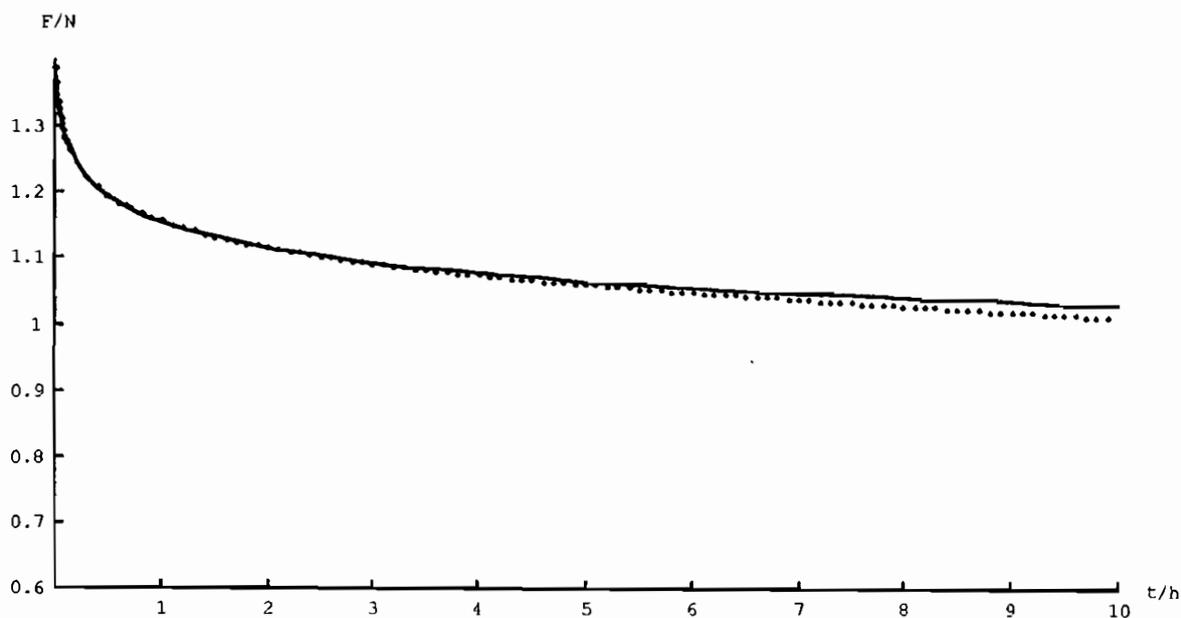


Abb.3.5: Liouville-Kern gemäß (2.21)

$$AC=1N, \alpha=-0.94, \beta=5.0 \cdot 10^{-2}$$

Für alle oben dargestellten Kurven gilt: Meßtemperatur 22°C , Dehnung $\varepsilon_0=0,12$, A bezeichnet die Schlauchauflagefläche und FQ die Fehlerquadratsumme. Meßwerte sind gepunktet, die optimierten Funktionsverläufe durchgehend dargestellt.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Auf der Basis kontinuumsmechanischer Materialgesetze der Rationalen Mechanik und eines Rheologischen Modells (BURGER) wird das Relaxationsverhalten von Schlauchsegmenten aus PVC-60 modelliert. Im Sinne einer sondierenden Voruntersuchung werden zunächst die jeweils freien Materialparameter der Relaxationsfunktion des BURGER-Modells sowie einiger spezieller Integralkerne (ABEL, modifizierter ABEL, LIOUVILLE) eines allgemeinen Materialgesetzes in Form einer VOLTERRA-Integralgleichung auf der Grundlage quasi-statischer experimenteller Befunde numerisch optimiert (L2-Norm).

Dabei werden a. sämtliche Meßwerte über 10 Stunden, b. nur die Meßwerte der ersten 10 Minuten und c. nur die Meßwerte der ersten 10 Minuten und zusätzlich weitere Stützstellen über eine Stunde und zwar alle 10 Minuten je ein Meßwert zugrundegelegt.

In allen drei Optimierungsvarianten verifiziert der LIOUVILLE-Kern die vorliegende Meßreihe am besten, wobei die beiden ABEL-Kerne ebenfalls zufriedenstellende Ergebnisse liefern. Insbesondere bezüglich der Kategorien b und c wird - trotz nur relativ weniger Meßwerte der ersten 10 Minuten - das Relaxationsverhalten über die gesamte Dauer von 10 Stunden bestens wiedergegeben. Im Sinne einer Materialidentifikation muß das auf diese Weise determinierte Materialgesetz weitere Experimentalbefunde wie etwa Kriech- und Retardationsversuche verifizieren. In einem weiteren Schritt müßte dann gegebenenfalls auf mehrachsige Stoffgesetze reflektiert oder sogar das konkret vorliegende Randwertproblem gelöst werden.

Zur Zeit laufen ergänzende Untersuchungen, in denen die hier untersuchten Stoffgesetzstrukturen an pulsatile Messungen angepasst werden.

Die Autoren danken Frau cand. ing. A. Halbach für die Optimierungsrechnungen und Ausführung der Zeichnungen.

Literatur

- [1] BECKER, BÜRGER, Kontinuumsmechanik. B.G. Teubner, Stuttgart 1975
- [2] BECKER, G.W., BRAUN, D., Kunststoff-Handbuch, Die Kunststoffe 1, Hanser 1990
- [3] COLEMAN, B.D., NOLL, W. Foundations of Linear Viscoelasticity, Reviews of Modern Physics, Vol. 33, No. 2 1961

- [4] COLETTA, T., Ermittlung des Schlauchinnendrucks durch Kraftmessung an der Schlauchaußenwand, Diplomarbeit FH Gießen-Friedberg (1991)
- [5] ERINGEN, A.C., Mechanics of Continua, J. Wiley & Sons, NEW York 1967
- [6] GRUNDMANN, R., Nichtlineare viskoelastische Materialgleichung für Plastomere und deren Determinierung bei kleinen Verzerrungen, Dissertation, TU Berlin, D83, 1976
- [7] GUMMERT, P., Materialgesetze des Kriechens und der Relaxation (Zur Problematik der zeitabhängigen, nichtlinearen Stoffgleichungen), Fortschrittsberichte der VDI Zeitschriften Reihe 5, Nr. 38 1978
- [8] HAUPT, P., Viskoelastizität und Plastizität, Springer Heidelberg 1977
- [9] KRAWIETZ, A., Materialtheorie, Springer Heidelberg 1986
- [10] SILBER, G., Darstellung höherstufig-tensorwertiger isotroper Funktionen, ZAMM, 70 (1990)
- [11] SILBER, G., Aggregate isotroper Tensoren zur Darstellung hyperelastischer Stoffe, ZAMM, 68 (1988)
- [12] TRUESDELL, NOLL, The Non-Linear Field Theories of Mechanics, (in: Handbuch der Physik II/3), Springer Heidelberg (1966)
- [13] WALISZEWSKI, M. W., Vergleichende Untersuchung von Gedächtnisfunktionen bei der Materialidentifikation im Rahmen der deterministischen Materialtheorie auf der Basis vorhandener Literatur und vorliegender Experimente, Diplomarbeit an der TU Berlin (1991)
- [14] HALBACH, A., Materialidentifikation von Kunststoffschläuchen auf der Basis von Materialgesetzen und Rheologischen Modellen, Diplomarbeit an der FH Frankfurt (voraussichtlicher Abschluss 1995)

Zur Berücksichtigung der Dämpfung bei der FE-Modellierung von U-Bahntunneln

Alfred Kraft

1. Problemstellung

Im Rahmen eines Forschungsvorhabens des Bundesministeriums für Forschung und Technologie (BMFT) sollten Rechenmodelle entwickelt werden, mit denen man die Entstehung und Ausbreitung von Schwingungen über Fahrzeug-Oberbau-Tunnelstruktur-Baugrund-Gebäude beschreiben kann [1]. Diese Modelle ermöglichen bei neuen U-Bahnstrecken Prognosen der Erschütterungen und des Körperschalls. Die Forschungsarbeit war begleitet von umfangreichen Messungen. Anhand der Meßergebnisse konnten die Rechenmodelle optimiert und angepaßt werden.

Die Modellierung erfolgte in Teilsystemen. Fahrzeug und Oberbau wurden als Schwingungssystem mit Starrkörpern, Federn und Dämpfern beschrieben (siehe Bild 1). Die wesentliche Erregung entsteht durch die Rauigkeit zwischen Rad und Schiene, also eine erzwungene Wegerregung. Durch diese Erregung werden dynamische Kräfte in den Untergrund, dem Tunnel, eingeleitet.

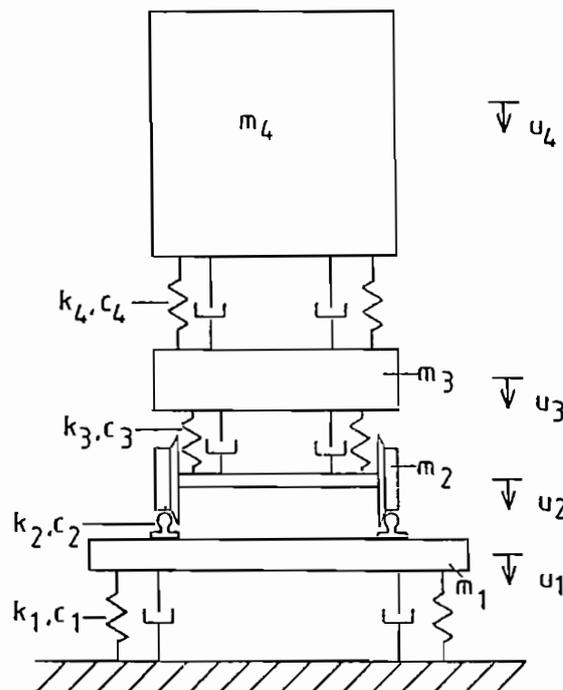


Bild 1: Modell Fahrzeug/Oberbau

Das Teilsystem Tunnel wurde als Finite-Element-Modell abgebildet. Um den U-Bahntunnel herum befindet sich der Baugrund. Er geht in die Modellierung ein durch diskrete Federn und Dämpfer an den FE-Knoten, die sich an der Außenseite befinden. Die Steifigkeiten lassen sich durch Kenngrößen des Baugrunds abschätzen, die Wahl einer sinnvollen Dämpfung ist jedoch schwieriger.

Aus den bereits erwähnten Messungen, unter anderem Modalanalysen der Tunnelstruktur, ergaben sich folgende Ergebnisse:

- Starrkörpereigenfrequenzen des Tunnels zwischen 8-10 Hz
- Dämpfungen der Starrkörpermoden $D=0,5$ und höher
- Abnehmende Dämpfung mit höheren Eigenfrequenzen

Die nachfolgenden Betrachtungen dienen dazu, geeignete Dämpfungswerte für das FE-Rechenmodell zu wählen.

2. Berücksichtigung der Dämpfung

Wie die Literatur (siehe Waller [2], [3]) zeigt, erhält man bei der FE-Modellierung das Bewegungsgleichungssystem:

$$\underline{M} \cdot \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \cdot \dot{\underline{u}} + \underline{K} \cdot \underline{u} = \underline{f} \quad (1)$$

Für beliebige Dämpfungsmatrizen ist das Eigenwertproblem zu Gleichung (1) im üblichen Sinne nicht definiert. Aus diesem Grunde wird ein Gleichungssystem erster Ordnung entwickelt. Hierzu definiert man den Vektor

$$\underline{v} = \dot{\underline{u}} \quad (2)$$

Für nicht singuläre Massenmatrizen \underline{M} läßt sich Gleichung (2) auch umformen in:

$$\begin{aligned} \underline{M} \cdot \underline{v} &= \underline{M} \cdot \dot{\underline{u}} \\ \underline{M} \cdot \underline{v} - \underline{M} \cdot \dot{\underline{u}} &= \underline{0} \end{aligned} \quad (3)$$

Die Gleichungen (1) und (3) werden unter Berücksichtigung von Gleichung (2) zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\underline{v}} \\ \dot{\underline{u}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{K} \\ -\underline{M} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v} \\ \underline{u} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{f} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \\ \underline{A} \cdot \dot{\underline{z}} + \underline{B} \cdot \underline{z} &= \underline{g} \end{aligned} \quad (4)$$

Für das Eigenwertproblem setzt man

$$\underline{z} = \hat{\underline{z}} \cdot e^{\lambda t} \quad (5)$$

an. Man erhält

$$(\lambda \underline{A} + \underline{B}) \cdot \hat{\underline{z}} = \underline{0} \quad (6)$$

oder

$$(\lambda \cdot \underline{I} + \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B}) \cdot \hat{\underline{z}} = \underline{0} \quad (7)$$

Das Eigenwertproblem Gleichung (7) ist mit komplexem Eigenwertlöser lösbar. Die Eigenwerte seien:

$$\lambda_i = -\delta_i + j\omega_i \quad (8)$$

Passive mechanische Systeme weisen eine positive Abklingkonstante $\delta_i > 0$ auf. Analog zum Einmassenschwinger läßt sich

$$\delta_i = 2 \cdot D_i \cdot \omega_i$$

definieren. Aus der Abklingkonstante δ_i folgt dann das Dämpfungsmaß

$$D_i = \frac{\delta_i}{2 \omega_i} \quad (9)$$

Im weiteren wird das einfache, unten dargestellte Modell betrachtet. Es besteht aus einem Biegebalken, der auf Federn und viskosen Dämpfern lagert.

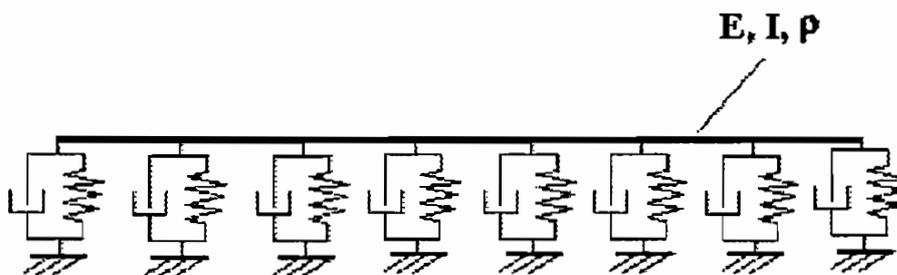


Bild 2: Beispiel Balken auf diskreten Federn und Dämpfern

Für den Balken erfolgte eine FE-Modellierung, welches auf ein Gleichungssystem nach Gleichung (1) führt. Hierfür wurde das komplexe Eigenwertproblem Gleichung (7) behandelt. Die Dämpfungskonstante wurde so gewählt, daß die vertikale Starrkörpereigen schwingung das Dämpfungsmaß $D = 0,2$ besitzt. Aus dem komplexen Eigenwertproblem ergeben sich die in Tabelle 1 aufgeführten Dämpfungsmaße der Starrkörpereigenfrequenzen S_1, S_2 und Biegeeigenformen B_1, \dots, B_5 .

Eigenform	Eigenfrequenz	Dämpfung
i	f_i [Hz]	D_i [-]
S1	9,3	0,191
S2	9,4	0,192
B1	19,9	0,088
B2	48,7	0,034
B3	92,6	0,017
B4	149,0	0,010
B5	216,0	0,006

Tabelle 1: Dämpfungsmaße aus dem komplexen Eigenwertproblem

Nach Tabelle 1 nehmen die Dämpfungsmaße mit zunehmender Eigenfrequenz ab. Es gilt bezogen auf den Biegemode B1:

$$\frac{D_{B_i}}{D_{B1}} \approx \frac{\omega_{B1}}{\omega_{B_i}} = \frac{f_{B1}}{f_{B_i}} \quad (10)$$

Die Berechnung des komplexen Eigenwertproblems ist relativ aufwendig. Das Problem ist einerseits komplex, andererseits führt die Verdopplung des Gleichungssystems zu einer Vervielfachung der Rechenzeit. Aus diesem Grunde wird eine vereinfachte Vorgehensweise betrachtet.

Es wird zunächst das Eigenwertproblem zum ursprünglichen Gleichungssystem (1), jedoch ohne Dämpfung behandelt:

$$(\underline{K} - \omega_i^2 \underline{M}) \hat{\underline{u}}_i = \underline{0} \quad (11)$$

Die Eigenvektoren $\hat{\underline{u}}_i$ zu den Eigenfrequenzen ω_i^2 werden in der Modalmatrix \underline{T} zusammengefaßt. Damit wird Gleichung (1) mit der Transformation

$$\underline{u} = \underline{T} \cdot \underline{w} \quad (12)$$

überführt in

$$(-\omega^2 \underline{T}^T \cdot \underline{M} \cdot \underline{T} + j\omega \underline{T}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{T} + \underline{T}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{T}) \cdot \underline{w} = \underline{T}^T \cdot \underline{f} \quad (13)$$

Die Normierung von $\underline{\Gamma}$ ist so möglich, daß die Transformation von \underline{M} die Einheitsmatrix \underline{I} ergibt. Die Transformation von \underline{K} ergibt dann eine Diagonalmatrix $\underline{\Omega}^2$, die die Eigenwerte ω_i^2 enthält. Also folgt aus Gleichung (13):

$$(\underline{\Omega}^2 - \omega^2 \underline{I} + j\omega \hat{\underline{C}}) \underline{w} = \underline{\Gamma}^T \cdot \underline{f} \quad (14)$$

Die transformierte Dämpfungsmatrix

$$\hat{\underline{C}} = \underline{\Gamma}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{\Gamma} \quad (15)$$

ist im allgemeinen nicht diagonal. In dem oben genannten Rechenbeispiel, aber auch bei den Tunnelmodellen dominieren die Diagonalelemente \hat{C}_{ii} . Mit ihnen wird eine Dämpfungsabschätzung in Analogie zum Einmassenschwinger getroffen:

$$\bar{D}_i = \frac{\omega_i}{2} \hat{C}_{ii} \quad (16)$$

$$\bar{D}_i = \pi * f_i \hat{C}_{ii} \quad (17)$$

Die Ergebnisse der Dämpfungsabschätzung für das o.g. Balkensystem ist in Tabelle 2 zusammengefaßt.

Eigenform	Dämpfung
i	$D_i[-]$
S1	0,196
S2	0,217
B1	0,109
B2	0,046
B3	0,024
B4	0,015
B5	0,011

Tabelle 2: Dämpfungsabschätzung nach Gleichung (17)

Für die Biegemoden B1 bis B5 gilt auch hier

$$\frac{\tilde{D}_{Bi}}{\tilde{D}_{B1}} \approx \frac{\omega_{B1}}{\omega_{Bi}} = \frac{f_{B1}}{f_{Bi}} \quad (18)$$

Der Vergleich zwischen den Tabellen 1 und 2 zeigt ferner, daß die Schätzungen nach Gleichung (17) höhere Dämpfungen besitzen. Um ähnliche Dämpfungen wie in Tabelle 1 zu erhalten, müßte die Grunddämpfung vermindert werden. Die Schlußfolgerung ist jedoch, daß die Angabe modaler Dämpfungsmaße nach Gleichung (17) zu brauchbaren Ergebnissen führt. Bei den Simulationsrechnungen für die Berechnung der Schwingungen der Tunnelstruktur wurde die beschriebene, einfach realisierbare Näherungsmethode angewendet. Das Bild 3 zeigt exemplarisch ein Antwortspektrum.

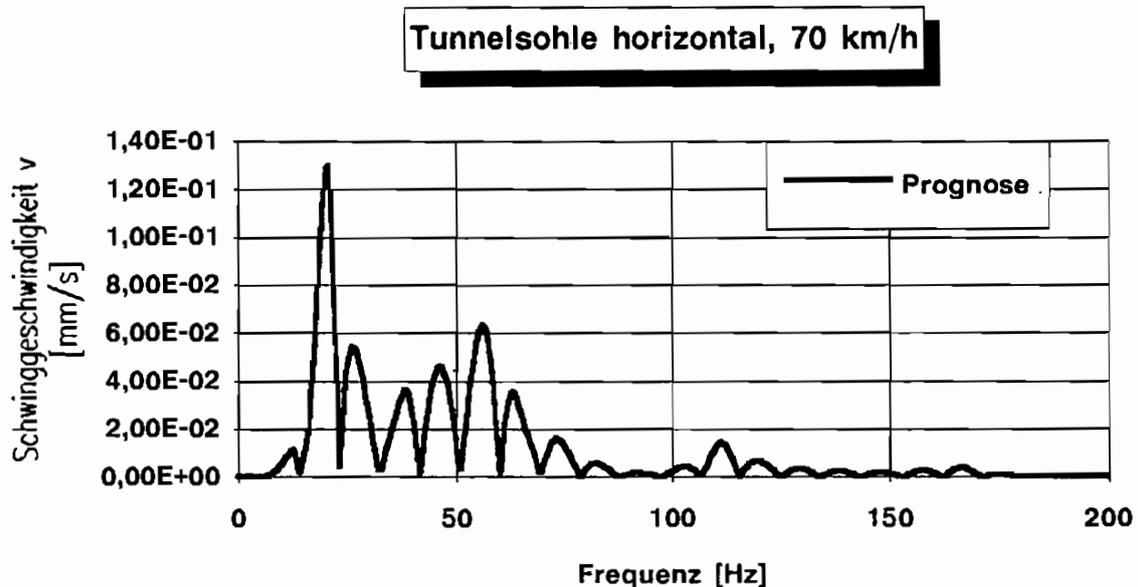


Bild 3: Antwortspektrum einer Simulationsrechnung
U-Bahntunnel München (Kreisquerschnitt)

Literatur:

- [1] Entwicklung eines Prognoseverfahrens für Körperschall und Erschütterungen bei unterirdischen Bahnen auf analytisch-meßtechnischer Basis, BMFT-Forschungsvorhaben TV 8526, TÜV Rheinland e.V., Mai 1993
- [2] H. Waller/W. Krings: Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik, BI-Wissenschaftsverlag Mannheim, Wien, Zürich, 1975
- [3] H. Waller/R. Schmidt: Schwingungslehre für Ingenieure, BI- Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1989

Physikalisch nichtlineare Stabberechnungen nach Eurocode 2

Wolfgang Krings

1. Einleitung

Mit der Einführung des europäischen Binnenmarktes gewinnen europaweit gültige technische Normen und Vorschriften, die sogenannten Eurocodes, zunehmend an Bedeutung. Im Stahlbetonbau ist das der Eurocode 2 (EC2) [1], der zukünftig die nationale Vorschrift DIN 1045 ersetzen wird. Hauptänderungen gegenüber DIN 1045 sind ein modernes Sicherheitskonzept mit Teilsicherheitsbeiwerten und Kombinationsbeiwerten und nun erlaubte nichtlineare Schnittgrößenermittlungsmethoden. Über einige dieser Schnittgrößenermittlungsmethoden, die nun auch mehr mit der Bemessung zusammenhängen, als es früher der Fall war, soll nun berichtet werden.

Nach EC2 2.5.3.4 sind dieses für Stabtragwerke im Grenzzustand der Tragfähigkeit :

1. Lineare Berechnung ohne Umlagerung (Elastizitätstheorie),
2. Lineare Berechnung mit Umlagerung,
3. Nichtlineare Berechnung (hier physikalisch nichtlinear gemeint) und
4. Plastizitätstheorie.

Zur Schnittgrößenermittlung nach dem obigen 1. Punkt sind für übliche Durchlaufträger Tafeln für die Handrechnung erstellt [3].

Für Berechnungen nach dem 2. Punkt können die erlaubten Umlagerungsfaktoren aus den Bemessungstabellen [4] entnommen werden.

In [5] ist ein Weg für eine nichtlineare Rechnung (Rotationsnachweis) für Handrechnungen vorgeschlagen.

In EC2, Anhang 2.0 bis 2.3, sind Einzelheiten zu nichtlinearen Berechnungen aufgeführt. Die dabei zu behandelnden nichtlinearen physikalischen Effekte sind :

- bis zum Erstriß im Beton: elastisches Verhalten;
- nach dem Erstriß: teilweise gerissener Querschnitt, nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung in der Betondruckzone (Parabel-Rechteck-Diagramm) und Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen .

Beim sogenannten Rotationsnachweis sind diese alle zu berücksichtigen. Treten in einem Tragwerk, z. B. bei den Stützungen eines Durchlaufträgers, bei zunehmender Belastung Momentenumlagerungen auf, so ist bei Stahlbetontragwerken nachzuweisen, daß diese Umlagerungen auch an diesen Stellen vom Querschnitt verkraftet werden können. Dieses geschieht durch die Bestimmung der Rotation an diesen Stellen, das sind die Knickwinkel in der sich dann einstellenden Biegelinie.

Im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit hat die Schnittgrößenermittlung in der Regel auf der Grundlage der Elastizitätstheorie zu erfolgen, EC2 2.5.3.2.1. Wenn aber physikalisch nichtlineare Effekte einen deutlich ungünstigen Einfluß haben, sind sie zu berücksichtigen. Das ist beispielsweise bei der rechnerischen Ermittlung von Tragwerksverformungen der Fall. Details hierzu sind im Anhang 4 vom EC2 geregelt.

Die bei diesem Verfahren wichtigen nichtlinearen Effekte sind:

- Kriechen und Schwinden,
- Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen,
- Risse infolge früherer Belastung und
- elastisches Stoffverhalten des Betons.

In [6] sind Rechenhilfen für notwendige Rechnungen im Zustand II (gerissener Querschnitt) für Nachweise im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit aufgeführt.

2. Auswahl eines Rechenverfahrens

Nicht alle, aber viele praktische Probleme lassen sich auf die Behandlung eines Einfeldträgers zurückführen. Daher gibt es Sinn diesen zu behandeln. Möchte man Handrechnungen verlassen und Rechnungen mit Rechenprogrammen ausführen, so könnte man die heute fast nur noch angewandte FE-Methode wählen. Das würde aber bedeuten, daß man mit "Kanonen auf Spatzen schießt". Das gute alte Übertragungsverfahren [7], welches bei einfachen Systemen für fast alle Fragestellungen anwendbar ist, kann auch in diesem Falle sinnvoll angewandt werden.

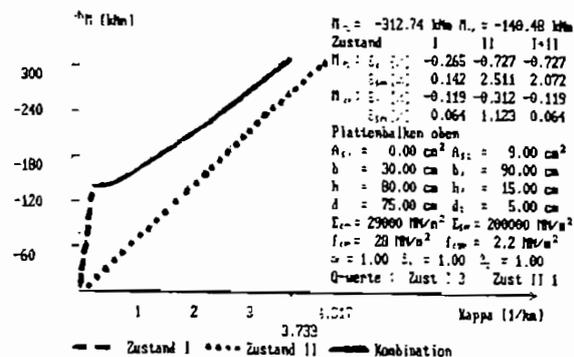
Das Übertragungsverfahren ist ideal für Anfangswertprobleme geeignet. Bei Randwertproblemen, um diese geht es hier, kann die Anpassung der Randwerte in alt bekannter Weise erfolgen. Ursprünglich ist diese Anpassung bei Rechnungen mit Analogrechnern gewählt worden. Diese Randwertanpassung setzt allerdings Linearität voraus, die hier nicht gegeben ist. Daher sind noch Iterationen erforderlich, indem man das Rechenverfahren mehrfach durchlaufen läßt.

Beim linear elastischen Stoffverhalten wird der hier wichtige Zusammenhang zwischen Moment **M** und Krümmung κ mit der Biegesteifigkeit **E·I** bestimmt. Hier wurde der nichtlineare Zusammenhang zwischen Moment und Krümmung genau bestimmt, dann daraus die äquivalente Biegesteifigkeit ermittelt und damit dann weiter gearbeitet.

$$(E \cdot I)_{\text{äquivalent}} = \frac{M}{\kappa}$$

3. Rechenprogramme

Im Rahmen von Diplomarbeiten sind für den genauen Rotationsnachweis und für die genaue rechnerische Tragwerksverformungs-Bestimmung unter Einschluß aller im EC2 geforderten physikalisch nichtlinearen Effekte Rechenprogramme entwickelt worden, die auf dem Übertragungsverfahren beruhen. Beliebig gestaffelte untere und obere Bewehrung für den Rechteck- und den Plattenbalkenquerschnitt können eingegeben werden. Nachfolgendend ist eine dort benutzte **Momenten-Krümmungs-Beziehung** für einen Plattenbalkenquerschnitt gezeigt.



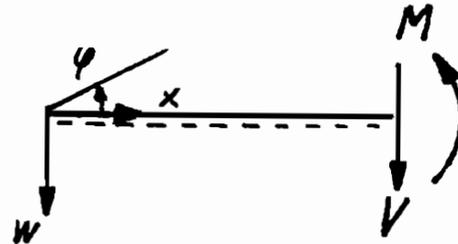
4. Rechnerische Ermittlung von Tragwerksverformungen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit mit dem Übertragungsverfahren

Übertragungsschritt: $\mathbf{z}_{(x+\Delta x)} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{z}_{(x)} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + \kappa_s \cdot \mathbf{s}$

Zustandsvektor: $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \varphi \\ w \\ M \\ V \end{pmatrix}$

Lastvektor: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x^3}{6 \cdot E \cdot I} \\ \frac{\Delta x^4}{24 \cdot E \cdot I} \\ \frac{\Delta x^2}{2} \\ -\Delta x \end{pmatrix}$

Schwindvektor: $\mathbf{s} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta x^2} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



Übertragungsmatrix: $\mathbf{U} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{\Delta x}{E \cdot I} & \frac{\Delta x^2}{2 \cdot E \cdot I} \\ -\Delta x & 1 & \frac{\Delta x^2}{2 \cdot E \cdot I} & \frac{\Delta x^3}{6 \cdot E \cdot I} \\ 0 & 0 & 1 & \Delta x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

5. Rotationennachweis mit dem Übertragungsverfahren

Beim Rotationennachweis können die Stützmomente eines Durchlaufträgers mehr oder weniger willkürlich gewählt werden. Es ist dann nachzuweisen, daß die Rotationen, also die Knickwinkel in der Biegelinie an den Stützungen, ein erlaubtes Maß nicht überschreiten. Es reicht daher aus jedes Feld einzeln zu betrachten. Die Rotation ergibt sich dann als Summe der Verdrehungen links und rechts von der Stützung. Da die Randmomente vorgegeben werden, sind die Schnittgrößen unabhängig von den Steifigkeiten. Die Schnittgrößen und die Verformungen sind voneinander entkoppelt, also ein statisch bestimmtes Problem, allerdings mit physikalischer Nichtlinearität.

	Schnittgrößen	Verformungsgrößen
Übertragungsschritt :	$\mathbf{z}_{(x+\Delta x)} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{z}_{(x)} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}$	$\mathbf{z}_{(x+\Delta x)} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{z}_{(x)} + \mathbf{K}_{(M)} \cdot \mathbf{k}$
Zustandsvektor :	$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} M \\ V \end{pmatrix}$	$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \varphi \\ w \end{pmatrix}$
Lastvektor :	$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta x^2}{2} \\ -\Delta x \end{pmatrix}$	$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{2} \\ -\frac{\Delta x^2}{2} \end{pmatrix}$ Krümmungsvektor
Übertragungsmatrix :	$\mathbf{U} = \begin{vmatrix} 1 & \Delta x \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\mathbf{U} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta x & 1 \end{vmatrix}$

6. Beispiel

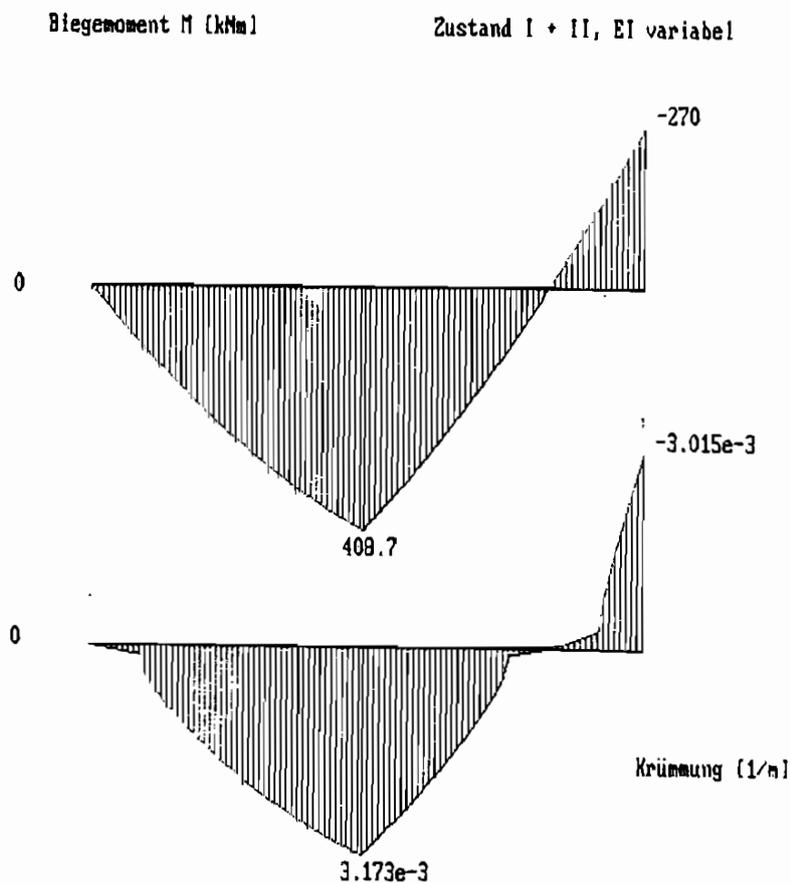
In [2] ist auf den Seiten 22 - 24 ein Demonstrationsbeispiel durchgerechnet. Bei diesem Beispiel ist die Biegesteifigkeit in Bereichen mit gleichem Momentenvorzeichen jeweils als konstant angenommen. Eine genaue Berechnung ergibt, daß diese Annahme für die Rotation nicht auf der sicheren Seite liegt!

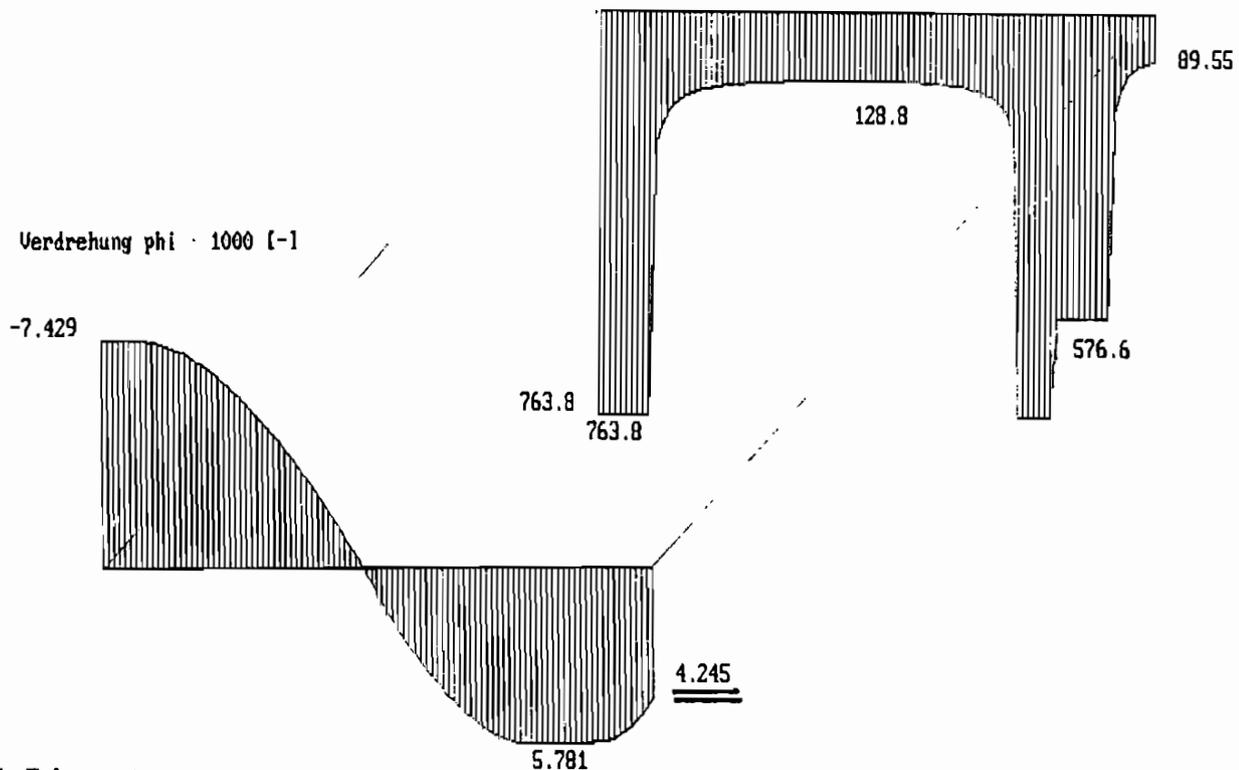
Nach [2] folgt für die Rotation :

$$\Theta_B = 2 \cdot 3,250 \cdot 10^{-3} = 6,50 \cdot 10^{-3} \text{ [rad] .}$$

Eine genaue Rechnung mit dem Programm führt zu : $\Theta_B = 2 \cdot 4,245 \cdot 10^{-3} = 8,49 \cdot 10^{-3} \text{ [rad] .}$

Untenstehend sind einige Ergebnisse aufgeführt.



äquiv. Biegesteifigkeit EI äqui. [Nm^2] Zustand I + II, EI variabel

7. Literatur

- [1] Eurocode 2 - Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken
Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau
Deutsche Fassung DIN ENV 1992-1-1 Juni 1992
- [2] Kordina K. u. a. : Bemessungshilfsmittel zu Eurocode 2 Teil 1 (DIN ENV 1992 Teil 1-1,
Ausgabe 6.92) - Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken,
2. ergänzte Auflage. Berlin, Köln: Beuth Verlag GmbH 1992
- [3] Krings W. : Schnittgrößen zur Biegebemessung von üblichen Durchlaufträgern nach EC2;
Bautechnik 71 (1994), Heft 11, Seiten 700-706
- [4] Krings W. : Bemessungstabellen für Rechteckquerschnitte nach EC2 mit Zug- und Druck-
bewehrung und mit Momentenumlagerungsfaktoren;
Bautechnik 70 (1993), Heft 11, Seiten 676-680
- [5] Heydel G., Krings W. und Herrmann H. : Stahlbeton im Hochbau nach EC2,
Einführung und Anwendungsbeispiele; Berlin : Ernst & Sohn 1995
- [6] Krings W. : Berechnungstabelle für Gebrauchstauglichkeitsnachweise beim Rechteckquer-
schnitt nach EC2; Bautechnik 71 (1994), Heft 3, Seiten 167-169
- [7] Waller H. und Krings W. : Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik;
Zürich : BI-Wissenschaftsverlag 1975

Die dynamischen Einflußzahlen zur Lokalisation von Veränderungen an dynamischen Systemen

Armin Lenzen

Zusammenfassung

Es wird eine neue Methodik [2] zur Lokalisation von Veränderungen an dynamischen Systemen vorgestellt. Die Methodik eignet sich für allgemeine reale dynamische Systeme, die mit der zeitvarianten Zustandsraumdarstellung der Systemtheorie in Analyseform oder Syntheseform formuliert werden können. Die dynamischen Einflußzahlen, als Spektralzerlegung des Wichtungsoperators der integralen Lösung der Zustandsraumdarstellung, sind sehr signifikante Bewertungsmaße, um Veränderungen an dynamischen Systemen und deren Lokalisation zu ermitteln.

1 Einleitung

Dynamische Systeme sind Vorgänge aus der Natur, technische Konstruktionen aber auch wirtschaftliche und soziale Zusammenhänge. Mathematische Modelle bilden die Eigenschaften der dynamischen Systeme nach bestimmten Gesetzmäßigkeiten z.B. dem Prinzip Ursache-Wirkung ab. Damit können dann mit einem mathematischen Abbild der Realität deren Besonderheiten studiert werden.

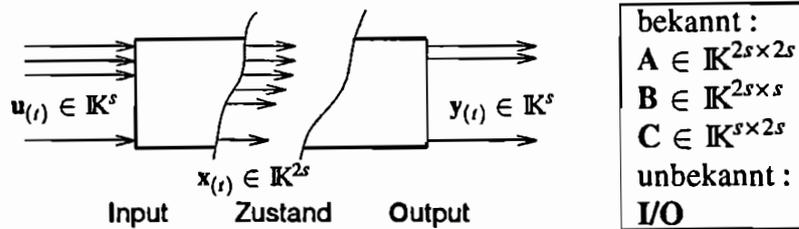
Änderungen von realen dynamischen Systemen durch ihre Veränderung in Aufbau und Struktur lassen sich prinzipiell an dem mathematischen Modell erfassen. Dabei stellt sich jedoch die Frage mit welchen Zahlenwerten diese bewertet werden sollen.

Hier werden sogenannte dynamischen Einflußzahlen zur Lokalisation von Systemveränderungen vorgestellt, die aus einem allgemeinen Differentialgleichungsmodell der Systemtheorie hergeleitet werden. Diese Zahlen sind für die Lokalisation einer Systemveränderung sehr signifikant, wie an einem realen Beispiel, ein gemessenes mechanisches Koppelschwingersystem, verdeutlicht wird.

2 Mathematische Beschreibung dynamischer Systeme

Die mathematische Beschreibung allgemeiner dynamischer Systeme kann mit der bekannten Zustandsraumdarstellung der Systemtheorie erfolgen. Hierbei sind grundsätzlich Synthese- von Analysemodellen zu unterscheiden.

Die *Vektordifferentialgleichung* erster Ordnung der Systemtheorie als *synthetische Zustandsraumdarstellung* soll hier mit einem Beispiel aus der Mechanik eingegrenzt werden.



Die lineare Schwingungsgleichung der technischen Mechanik als Finite Elemente Methode [3] wird aus Massen-, Dämpfer- und Steifigkeitselementen zu einer Differentialgleichung zusammengesetzt.

$$M\ddot{y}(t) + D\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t) \tag{11.1}$$

Die Gleichung mit der Massenmatrix $M \in \mathbb{K}^{s \times s}$, Dämpfungsmatrix $D \in \mathbb{K}^{s \times s}$ und Steifigkeitsmatrix $K \in \mathbb{K}^{s \times s}$ beschreibt die Beziehungen zwischen den als Eingang gewählten Kraftgrößen $u(t) \in \mathbb{K}^s$ und den Ausgängen $y(t) \in \mathbb{K}^s$, als Weggrößen mit entsprechenden Ableitungen, die als Geschwindigkeit und Beschleunigung zu deuten sind. Nach Umformung auf eine Vektordifferentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ M^{-1} \end{bmatrix} u(t) \tag{11.2}$$

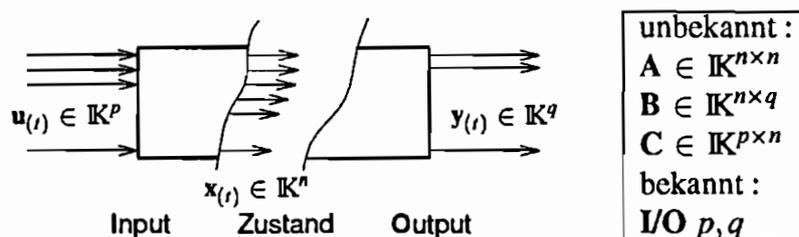
$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t),$$

gilt dies mit

$$y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} x(t), \quad y(t) = Cx(t) \tag{11.3}$$

als die Zustandsraumdarstellung der Systemtheorie. Als Zielsetzung gilt hier die Bestimmung der unbekanntenen Wegfunktionen durch Vorgabe der Kraftgröße.

Die Zustandsraumdarstellung zur Analyse, auch als *Black box Prinzip* bekannt, wird ebenfalls durch eine Vektordifferentialgleichung erster Ordnung der Systemtheorie gebildet.



Hierbei sind die Input- und Outputgrößen gemessene Funktionen, die auch als Klemmengrößen eines dynamischen Systems bezeichnet werden.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

Die Bestimmung der unbekanntenen Parameter $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times q}$ und $C \in \mathbb{K}^{p \times n}$ ist hier die Zielsetzung. Der Zustandsraum gilt als eine virtuelle Größe und ist physikalisch weder direkt meßbar noch interpretierbar. Deshalb kann man die Analyseform der Zustandsraumdarstellung als eine inverse Problemstellung zur Syntheseform bezeichnen.

Hybride Formulierungen bzw. Zielsetzungen sind denkbar, werden aber nicht weiter diskutiert.

3 Integralgleichung als Lösung der Zustandsraumdarstellung

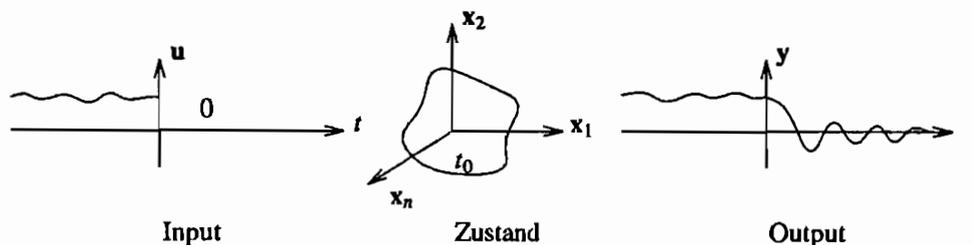
Die inhomogene Lösung der Vektordifferentialgleichung erster Ordnung der Zustandsraumdarstellung ist für lineare zeitinvariante Systeme mit der Fundamentalmatrix als Matrizenexponentialfunktion bekannt, der Anfangszustand sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit zu Null angenommen. Die Integralgleichung lautet, mit dem stationären Wichtungsmuster $\mathbf{T}_{(t,\sigma)} \in \mathbb{K}^{p \times q}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t_0-\sigma)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \\ &= \mathcal{P}(t) \int_{t_0}^t \mathcal{Q}(\sigma) \mathbf{u}(\sigma) d\sigma = \int_{t_0}^t \mathbf{T}_{(t,\sigma)} \mathbf{u}(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (11.5)$$

und führt auf das *Faltungsintegral*.

Die Zielsetzung bzw. Lösung der *synthetischen Zustandsraumdarstellung*, z.B. die Ermittlung der unbekanntenen Weggrößen unter Vorgabe der Eingangsgrößen, ist für die Annahme eines stückweise stetigen Eingangsvektors und Formulierung eines Übertragungsverfahrens für diesen oder mit der Methode der Modalanalyse erreicht, siehe [4].

Die Frage nach den unbekanntenen Parametern $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{n \times q}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{K}^{p \times n}$ der *Zustandsraumdarstellung zur Analyse* kann über eine besondere Form der Integralgleichung und ihrer Komponenten gelöst werden. Die *Hankeltransformation* ist eine Abbildung aus der Vergangenheit über den Zustand zum Zeitpunkt t_0 in die Zukunft nach dem Ursache-Wirkung-Prinzip.



Die Besonderheit ist, daß der Input zum Zeitpunkt t_0 abgeschaltet wird, damit ist die *Hankeltransformation* allgemeiner zu verstehen als die Impulsantwort, die hierzu eine Untermenge bildet.

Die möglichen Eingangskanäle werden einzeln im Sinn der besonderen Transformation nacheinander erregt und dabei die Ausgangsfunktionen an äquidistanten Zeitpunkten zeitsynchron gemessen. Die Gesamtheit der Messung wird zu einer theoretisch unendlichen Hankelmatrix aufgebaut, die die Systemantwort repräsentiert. Mit Methoden der *linearen Algebra* und der *Singulärwertzerlegung* [1] ist die Bestimmung der unbekanntenen Parametermatrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} aus zwei zeitverschobenen (nicht notwendigerweise) Hankelmatrizen, über die *Zeitschifinvarianz* der Exponentialfunktionen, direkt zugänglich, siehe [2].

4 Die dynamischen Einflußzahlen

Aus der Mechanik bzw. Physik ist die Greensche Funktion als Lösung der Biegedifferentialgleichung bekannt. Die *Greensche Lösung* stellt allgemein, als die Inverse einer Differentialgleichung bzw. des Differentialgleichungsoperators, die gesuchte Lösung in integraler Form dar.

In der klassischen Mechanik stellen die sogenannten Deltazahlen δ_{ij} , als diskrete Werte der Greenschen Lösung, den Einfluß einer Einzellast als Ursache j (Input), in Form der Biegelinie (Output)

als Wirkung am Ort i dar. Auffallend ist, daß hier das Prinzip von Ursache und Wirkung direkt studiert werden kann und im Bereich der Baustatik unter der Bezeichnung Einflußlinie bekannt ist. Der Wichtungsoperator $\mathbf{T}_{(t,\sigma)}$ aus der Systemtheorie ist, als ein integraler Lösungsoperator der Zustandsraumgleichung, vergleichbar mit der *Greenschen Lösung*. Nach einer *Jordanzerlegung* der Zustandsraumgleichung bzw. Ähnlichkeitstransformation in einfacher Form, kann pro Systemeigenfunktion i eine Matrix $\mathbf{F}_{(dyn,i)}$ definiert werden, die die Einflüsse zwischen Input und Output des Systems an einer Polstelle der Übertragungsfunktion darstellt.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(t)} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{f}_{\mathcal{P},1} e^{\lambda_1(t-t_0)} & \dots & \mathbf{f}_{\mathcal{P},n} e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{array} \right] \\ \mathcal{Q}_{(t)}^* &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{f}_{\mathcal{Q},1}^* e^{-\lambda_1^*(t-t_0)} & \dots & \mathbf{f}_{\mathcal{Q},n}^* e^{-\lambda_n^*(t-t_0)} \end{array} \right] \\ \mathcal{Q}_{(t)} &= \left[\begin{array}{c} e^{\lambda_1(t_0-t)} \mathbf{f}_{\mathcal{Q},1} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n(t_0-t)} \mathbf{f}_{\mathcal{Q},n} \end{array} \right] & \mathcal{P}_{(t)}^* &= \left[\begin{array}{c} e^{-\lambda_1^*(t_0-t)} \mathbf{f}_{\mathcal{P},1}^* \\ \vdots \\ e^{-\lambda_n^*(t_0-t)} \mathbf{f}_{\mathcal{P},n}^* \end{array} \right] \end{aligned} \quad (11.6)$$

Die Lösungsvektorfunktionen in $\mathcal{P}_{(t)}$ und $\mathcal{Q}_{(t)}$ liegen pro Systemeigenfunktion in entkoppelter dyadischer Form vor.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{(t)} &= \mathcal{P}_{(t)} \int_{t_0}^t \mathcal{Q}_{(\sigma)} \mathbf{u}_{(\sigma)} d\sigma \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \mathbf{f}_{\mathcal{P},i} e^{\lambda_i(t-t_0)} \langle e^{-\lambda_i^*(\sigma-t_0)} \mathbf{f}_{\mathcal{Q},i}^* \mathbf{u}_{(\sigma)} \rangle d\sigma \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_{\mathcal{P},i} \langle \mathbf{f}_{\mathcal{Q},i}^* \int_{t_0}^t e^{\lambda_i(t-\sigma)} \mathbf{u}_{(\sigma)} d\sigma \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{dyn,i} \int_{t_0}^t e^{\lambda_i(t-\sigma)} \mathbf{u}_{(\sigma)} d\sigma \end{aligned} \quad (11.7)$$

Die Matrix $\mathbf{F}_{dyn,i} \in \mathbb{K}^{p \times q}$, die sich dyadisch aus den Vektoren $\mathbf{f}_{\mathcal{P},i}$ und $\mathbf{f}_{\mathcal{Q},i}$ für jede Systemeigenfunktion e^{λ_i} aufbauen läßt, kennzeichnet die dynamischen Einflußzahlen des Systems. Die Matrix beinhaltet die konstanten Gewichte der Systemübertragung zwischen Input und Output an einer Systemeigenfunktionen [2].

Hat eine mögliche Systemveränderung stattgefunden und sind die dynamischen Einflußzahlen vor und nach einer Veränderung des dynamischen Systems, z.B. infolge eines Schadens des untersuchten Objekts oder eine andersartige Veränderung, vorhanden, dann ist durch eine einfache Differenzbildung der sich über die Eigenfunktionen entsprechenden dynamischen Einflußzahlen eine Lokalisation der Veränderung möglich. Die Einflußlinien in der Nähe der Systemänderung zeigen dann signifikant größere Zahlenwerte auf und bilden eine gute Bewertungsmöglichkeit [2], wie das nachfolgende Anwendungsbeispiel zeigt.

Die Methodik der dynamischen Einflußzahlen gelangt mit Hilfe der *Zustandsraumdarstellung zur Analyse*, mit der mathematischen Abbildung infolge tatsächlicher Messungen der Realität, zu ihrer eigentlichen Mächtigkeit.

5 Beispiel zur Lokalisation einer Systemveränderung

Fotografie 11.1 Versuchsstand

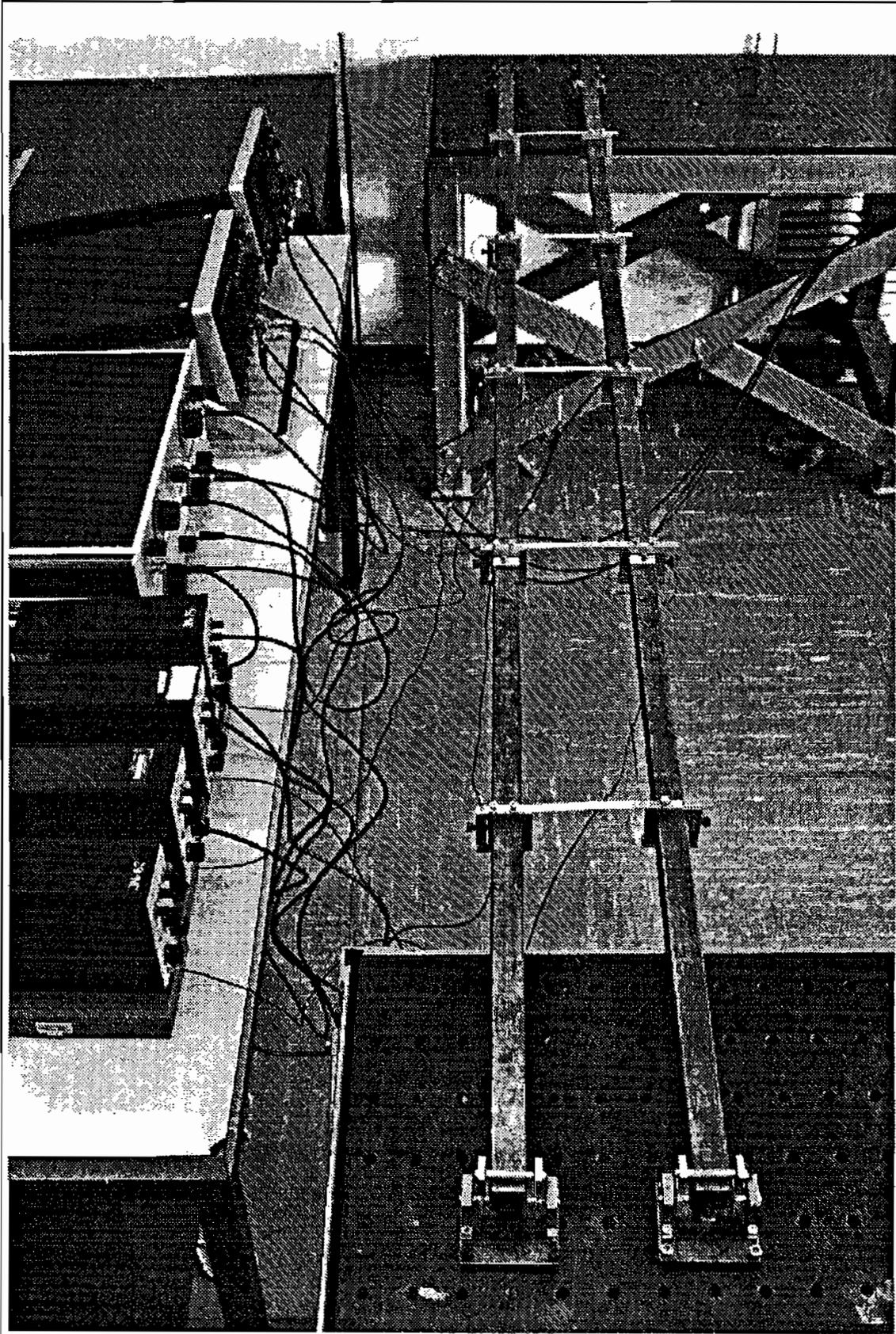
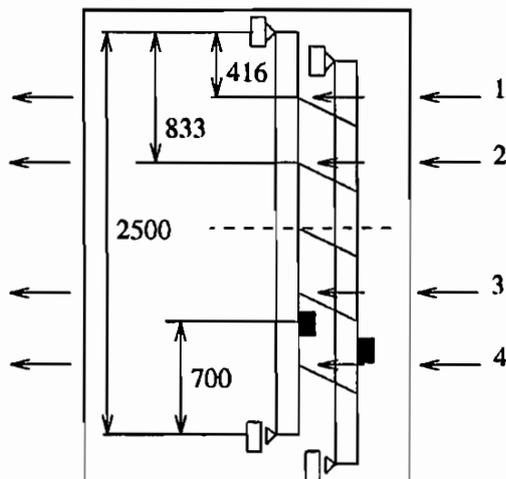
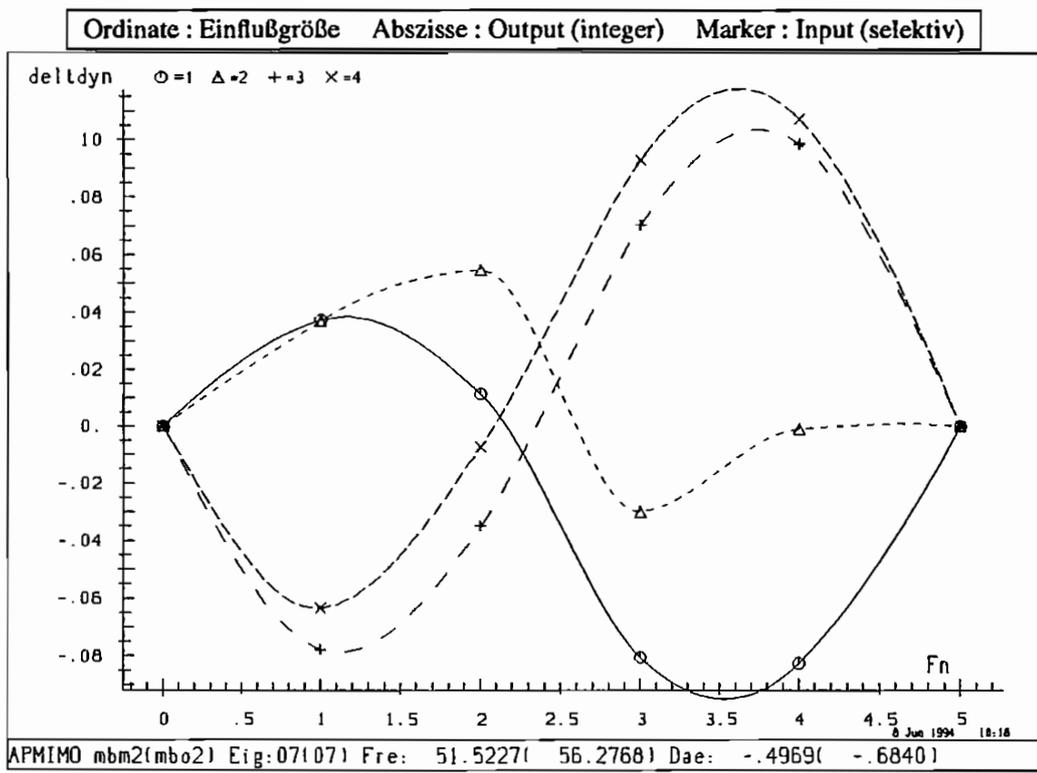


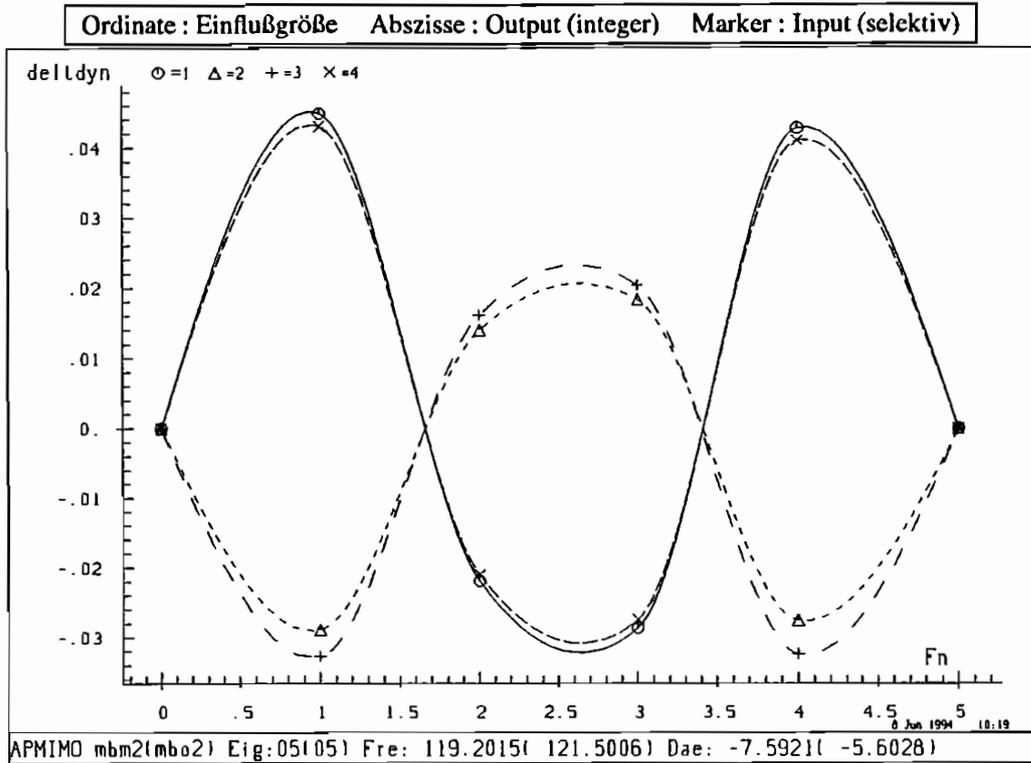
Bild 11.1 Prinzipskizze der Messung und Lage der Zusatzmasse



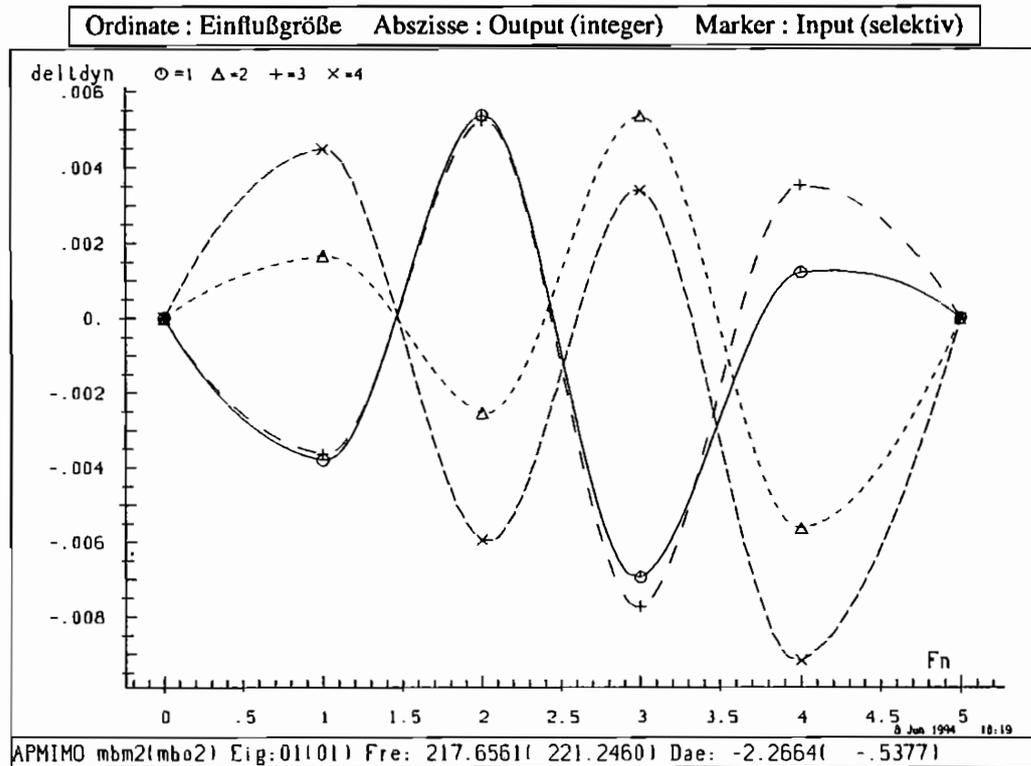
Berechnung 11.1 Einflußgrößen



Berechnung 11.2 Einflußgrößen



Berechnung 11.3 Einflußgrößen



Hier soll die Methodik der dynamischen Einflußzahlen zur Lokalisation einer Systemveränderung kurz mit der *Zustandsraumdarstellung zur Analyse* skizziert werden.

Ein Versuchsmodell (Fotografie 11.1) in der Form eines Koppelschwingersystems demonstriert die Tauglichkeit der Methodik bei realen gemessenen Systemen. Das Labormodell ist ca 2.5 Meter lang und besteht aus zwei quadratischen Stahlprofilen, die über weiche Querverbindungen miteinander verbunden sind. Das reale Modell wurde mit vier Beschleunigungssensoren verteilt über eine Trägerlänge gemessen, wie die Prinzipskizze der Messung (Bild 11.1) zeigt. Eine Zusatzmasse von 10 % der Gesamtmasse diente als Veränderung des dynamischen Systems.

Die Bilder zeigen Beispiele für die Differenz der signifikantesten Einflußzahlen an den entsprechenden Systemeigenfunktionen. Die Einflußlinien des Grundtons erlauben keine Rückschlüsse auf die Lokalisation einer Systemveränderung, diese Eigenart ist auf eine zu geringe Anzahl der Meßkanäle zurückzuführen. Die Obertöne eins (Bild 11.1) und drei (Bild 11.3) und deren Einflußlinien weisen auf eine Strukturveränderung zwischen Inputkanal drei und vier. Berücksichtigt man die ausgeglichenen Formen der Einflußlinien bei Oberton (Bild 11.2) zwei der Systemeigenfunktion, so läßt diese den Schluß zu, daß sich die Strukturveränderung in einem Formenknoten befinden muß. In der Gesamtheit lassen die Einflußlinien den eindeutigen Rückschluß auf die tatsächliche Lage der Systemveränderung zwischen Inputkanal drei und vier zu.

6 Literatur

- [1] G. Golub und C. Loan van. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore London, 1989.
- [2] A. Lenzen. *Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung – Erfassung von Strukturveränderungen*. Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 94, 1994.
- [3] H. Waller und W. Krings. *Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik*. Bibliographisches Institut, 1974.
- [4] H. Waller und R. Schmidt. *Schwingungslehre für Ingenieure*. Bibliographisches Institut, 1989.

Überlegungen zur modalen Reduktion

Bertold List

Im folgenden soll am Beispiel von finiten Stab-Elementen eine praktikable Herangehensweise für eine Freiheitsgradreduktion dargestellt werden. Dabei werden die Schwingungseigenschaften der elastischen Teilmodelle durch eine Verknüpfung der Ein- und Ausgangsgrößen (Verformungs- und Kraftgrößen) abgebildet, durch eine Kondensation die Anzahl der Gleichungen reduziert und mittels eines Frequenzkriteriums modal bewertet. Anschließend werden die Teilelemente zu Superlementen zusammengebaut.

1 Problem

Ausgangspunkt ist die bekannte Bewegungsdifferentialgleichung eines allgemeinen Schwingers vom Freiheitsgrad n :

$$M\ddot{\mathbf{x}}(t) + C\dot{\mathbf{x}}(t) + K\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1)$$

wobei die folgenden Überlegungen den dämpfungsfreien Fall ($C = 0$) betreffen. Nun wird das Gesamtsystem in Teilsysteme i zerlegt, die generalisierten Schnittkräfte \mathbf{F}_j (Kräfte bzw. Momente) werden im Kraftvektor angeordnet und im weiteren wie äußere Kräfte behandelt. Zur besseren Unterscheidung erhalten die generalisierten Verschiebungen (Translation / Rotation) an den Koppelstellen die Bezeichnung \mathbf{u}_j , dabei kann der Index j die Werte l und r für das linke bzw. rechte Schnittufer annehmen. Mit dem bekannten Exponentialansatz $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}} e^{\lambda t}$ wird die partielle Differentialgleichung für jedes Teilsystem i in ein algebraisches Gleichungssystem überführt:

$$M_i \ddot{\mathbf{x}}_i + K_i \mathbf{x}_i = \mathbf{f}_i \quad \mathbf{f}_i = \hat{\mathbf{f}}_i e^{\lambda t} \quad \mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{x}}_i e^{\lambda t}$$

$$(K_i - \lambda M_i) \hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{f}}_i \quad (2)$$

Unter Weglassung des Index i und des Symbols $\hat{}$ ergibt sich für die Schwingungsamplituden ausgeschrieben:

$$(K - \lambda M) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_l \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_r \end{pmatrix} \quad (3)$$

Dieses Gleichungssystem wird für die interessierenden generalisierten Verschiebungen \mathbf{u}_l und \mathbf{u}_r nach der Kramerschen Regel gelöst. Mit der Koeffizientendeterminante D und den Teildeterminanten Δ_{jk} , die aus dem Ersetzen der j -ten Determinantenspalte entstehen, kann man den Zusammenhang zwischen den Verformungs- und Kraftgrößen an den Schnittträgern wie folgt angeben:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_{ll}}{D} & \frac{\Delta_{lr}}{D} \\ \frac{\Delta_{rl}}{D} & \frac{\Delta_{rr}}{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_l \\ \mathbf{F}_r \end{pmatrix} \quad (4)$$

Beziehungsweise umgeordnet und mit $D_{jk} = \frac{\Delta_{jk}}{D}$ ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_r \\ \mathbf{F}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{D_{rr}}{D_{lr}} & \frac{D_{lr}D_{rl} - D_{ll}D_{rr}}{D_{lr}} \\ \frac{1}{D_{lr}} & -\frac{D_{ll}}{D_{lr}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{F}_l \end{pmatrix} \quad (5)$$

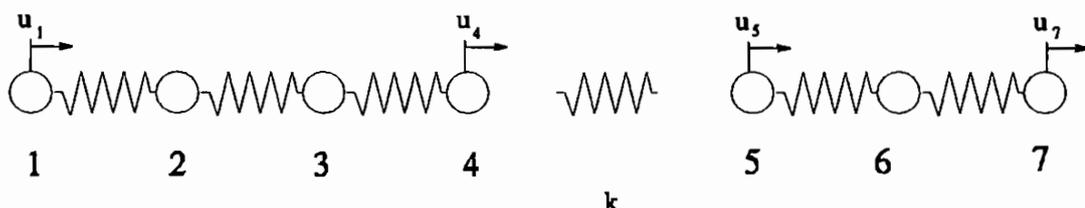
Dieser Zusammenhang stellt die Ein-/Ausgangsbeziehungen für das i -te Teilsystem nach der statischen Kondensation der inneren Freiheitsgrade dar und ist in der Systemtheorie unter dem Begriff Vierpol gebräuchlich. Dabei ist es unerheblich, ob es sich um ein eindimensionales Problem (Stab) handelt, oder ob an jedem Schnittufer jeweils zwei oder mehr Kraft- bzw. Verformungsgrößen auftreten (Biegebalken, ebene Probleme). In den Koeffizienten D und Δ_{jk} sind Polynome der Eigenwerte λ der Teilsysteme i bis zum Grad ν bzw. $\nu - 1$ enthalten. Nach Ermittlung der Polynomnullstellen λ_n bzw. λ_z kann die Produktschreibweise verwendet werden, und die Entwicklung entsprechend der Grenzfrequenz λ_g abgebrochen werden.

$$\begin{aligned} D &= p_\nu(\lambda)_n = (\lambda - \lambda_1)_n (\lambda - \lambda_2)_n \dots (\lambda - \lambda_\nu)_n \approx (\lambda - \lambda_1)_n \dots (\lambda - \lambda_g)_n \\ \Delta_{jk} &= p_{\nu-1}(\lambda)_z = (\lambda - \lambda_1)_z (\lambda - \lambda_2)_z \dots (\lambda - \lambda_{\nu-1})_z \approx (\lambda - \lambda_1)_z \dots (\lambda - \lambda_g)_z \end{aligned} \quad (6)$$

Die einzelnen Teilelemente können wieder zum Gesamtsystem, oder auch zu einem die dynamischen Berechnungen vereinfachendem Superelement, zusammengefügt werden. Dabei muß an den Schnittstellen das Kräftegleichgewicht erfüllt und die Kompatibilität der Verformungen gewährleistet sein. Eine Genauigkeitssteigerung ergibt sich, wenn man die weiteren Ortsableitungen der Schnittknotenverschiebungen ($\mathbf{u}_l^{(n)}$ und $\mathbf{u}_r^{(n)}$) berücksichtigt.

2 Beispiel

Als ein instruktives Beispiel sei die Vorgehensweise analog zu [1] an einem Lumped-Mass-Transversalschwingungssystem nach [2] ($n = 7$) skizziert.



Die Gleichungssysteme für die beiden Teilsysteme des diskretisierten Stabes mit den Längskräften

N_l und N_r sowie den Knotenverschiebungen u_l und u_r

$$\begin{pmatrix} k_{11} - \lambda m_1 & -k_{11} & 0 & \vdots \\ -k_{11} & k_{11} + k_{22} - \lambda m_2 & -k_{22} & \vdots \\ 0 & -k_{22} & k_{22} + k_{33} - \lambda m_3 & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \\ \cdots & \cdots & -k_{nn} & k_{nn} - \lambda m_n \end{pmatrix}_i \begin{pmatrix} u_l \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} N_l \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ N_r \end{pmatrix}_i \quad (7)$$

werden für $n = 4$ bzw $n = 3$ aufgestellt und gelöst. Als Zahlenwerte wurden $k_{pq} = 1000$ und $m_p = 1$ in beiden Teilsystemen gewählt. Somit erhält man

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^3 + 5 \cdot 10^3 \lambda^2 - 6 \cdot 10^6 \lambda + 10^9}{\lambda^4 - 6 \cdot 10^3 \lambda^3 + 10^7 \lambda^2 - 4 \cdot 10^9 \lambda} & \frac{10^9}{\lambda^4 - 6 \cdot 10^3 \lambda^3 + 10^7 \lambda^2 - 4 \cdot 10^9 \lambda} \\ \text{symm.} & \frac{\lambda^3 + 5 \cdot 10^3 \lambda^2 - 6 \cdot 10^6 \lambda + 10^9}{\lambda^4 - 6 \cdot 10^3 \lambda^3 + 10^7 \lambda^2 - 4 \cdot 10^9 \lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_5 \\ u_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2 - 3 \cdot 10^3 \lambda + 10^6}{-\lambda^3 + 4 \cdot 10^3 \lambda^2 - 3 \cdot 10^6 \lambda} & \frac{10^6}{-\lambda^3 + 4 \cdot 10^3 \lambda^2 - 3 \cdot 10^6 \lambda} \\ \text{symm.} & \frac{\lambda^2 - 3 \cdot 10^3 \lambda + 10^6}{-\lambda^3 + 4 \cdot 10^3 \lambda^2 - 3 \cdot 10^6 \lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_5 \\ N_7 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Das Gesamtsystem ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{14} & 0 & 0 \\ D_{14} & D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{55} & D_{57} \\ 0 & 0 & D_{57} & D_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_7 \end{pmatrix}$$

mit

$$D_{11} = \frac{(\lambda - 202.07)(\lambda - 821.57)(\lambda + 6023.6)}{\lambda(\lambda - 585.79)(\lambda - 2000)(\lambda - 3414.2)}$$

$$D_{14} = \frac{10^9}{\lambda(\lambda - 585.79)(\lambda - 2000)(\lambda - 3414.2)}$$

$$D_{55} = \frac{(\lambda - 1000)(\lambda - 2000)}{\lambda(\lambda - 1000)(\lambda - 3000)} \quad D_{57} = \frac{10^6}{\lambda(\lambda - 1000)(\lambda - 3000)} \quad (9)$$

Aus dem Kräftegleichgewicht an der Koppelfeder k folgen mit $N_5 = N_4 + k(u_5 - u_4)$ die frequenzabhängigen Kraft-/Verformungsbeziehungen

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{14} & 0 \\ D_{14} & D_{11} & 0 \\ \frac{-D_{14} D_{55} k}{1 - D_{55} k} & \frac{D_{55}(1 - D_{11} k)}{1 - D_{55} k} & \frac{D_{57}}{1 - D_{55} k} \\ \frac{-D_{14} D_{57} k}{1 - D_{55} k} & \frac{D_{57}(1 - D_{11} k)}{1 - D_{55} k} & \frac{D_{57}^2 k + D_{55} - D_{55}^2 k}{1 - D_{55} k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_4 \\ N_7 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Literatur

- [1] Waller, H. und Krings, W.: *Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik*; BI Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich, 1975
- [2] Natke, H. G.: *Angenäherte Fehlerermittlung für Modalsynthese-Ergebnisse innerhalb der Systemanalyse und Systemidentifikation*; ZAMM 61, 1981

Vereinfachte, mathematische Abbildung hydrodynamischer Wandler in Antriebssystemen

Achim Menne

Um eine hohe Zuverlässigkeit und Sicherheit von Antriebssystemen zu gewährleisten, ist eine genaue Kenntnis aller Bauteilbelastungen notwendig. Betriebszustände, die durch ein Blockieren der Antriebs-/Arbeitsmaschine, durch deterministische oder stochastische Erregungen bis hin zu Resonanzerscheinungen des Antriebssystems gekennzeichnet sein können, erfordern umfangreiche Analysen des Systemverhaltens. Auch vor dem Hintergrund der Optimierung von Anlagen hinsichtlich der Dimensionierung und Dauerfestigkeit ist eine Vorausberechnung bei statischen und dynamischen Beanspruchungen schon in der Entwurfsphase unumgänglich.

Durch den Einsatz von digitalen Rechenanlagen können heute selbst große Konstruktionen in Form von Modellen abgebildet werden, mit denen zum Teil genaue Abschätzungen der im realen Betrieb auftretenden Beanspruchungen vorgenommen werden können.

Ein Problem besteht häufig in der mathematischen Beschreibung des meist nichtlinearen Systemverhaltens. Modellierungen scheitern dabei oft an den ungenauen Kenntnissen der teilweise sehr komplexen, physikalischen Zusammenhänge. Aufgrund fehlender oder unzureichender Abbildungsmodelle einzelner oder mehrerer Baugruppen werden dann grobe Abschätzungen bzw. starke Vereinfachungen für das tatsächliche Systemverhalten dieser Baugruppen gemacht, die die Genauigkeit und Zuverlässigkeit von Simulationsrechnungen der gesamten Anlage in Frage stellen. Eine Überprüfung der Modellrechnung mit denen am realen System auftretenden Beanspruchungen ist in solchen Fällen unter Umständen unumgänglich. Meist bedarf es einer Anpassung der Modellparameter oder auch der Modellstruktur um sichere Vorausberechnungen durchführen zu können.

Bei der mathematischen Modellierung von Anlagen stellt sich immer die Frage nach dem Anspruch bzw. der erforderlichen Genauigkeit der durchzuführenden Rechnungen. Simulationen von Anfahr- und Bremsvorgängen über größere Betriebsbereiche stellen aufgrund des meist nichtlinearen Systemverhaltens einzelner Baugruppen hohe Anforderungen an das Modell. Systemanalysen für kleine Schwankungen um einen Betriebspunkt im Zeit- oder Frequenzbereich erfordern dagegen meist nur lineare Systembeschreibungen, bei denen unter Umständen auch größere Vereinfachungen und größere Abschätzungen über das tatsächliche Systemverhalten noch zu brauchbaren Ergebnissen führen kann. Auch die Dynamik im Antriebssystem ist für die Modellierung von großer Bedeutung. Quasistationäre Änderungen von Betriebszuständen können

in vielen Fällen rein stationär behandelt werden. Die Modellierung beschränkt sich dann nur noch auf die mathematische Beschreibung der stationären Kennlinien einzelner Baugruppen und deren Verknüpfung. Hochdynamische Vorgänge, wie sie zum Beispiel beim Blockieren einer Antriebseinheit auftreten, können in ihren Auswirkungen meist nur schwer vorausberechnet werden. In solchen Fällen muß eine sinnvolle Abschätzung der Bauteilbelastungen unter Berücksichtigung notwendiger Sicherheitsfaktoren durchgeführt werden.

Eine Baugruppe in Antriebssystemen, über deren Ein-/Ausgangsverhalten speziell bei instationären Betriebszuständen wenig Erkenntnisse vorliegen, sind die hydrodynamischen Wandler. Aufgrund der komplexen physikalischen Strömungszusammenhänge konnten bisher keine mathematischen Beschreibungen gefunden werden, die auf die verschiedenen Bauformen allgemein anwendbar sind. Meist wurden Modelle unter großen Vereinfachungen und Annahmen über die inneren Strömungsverhältnisse und Betriebsbedingungen aufgestellt, die ihre Anwendung einschränken (/1/ und /2/). Sie basieren auf der eindimensionalen Stromfadentheorie und einer globalen Abschätzung der im Kreislauf auftretenden Verluste. Modelle dieser Art sind physikalischer Natur. Das heißt, die Struktur und die Modellparameter können physikalischen Größen, wie zum Beispiel der Schaufelgeometrie oder den Radien am Schaufelein- und -austritt, zugeordnet werden.

In /3/ wurde, basierend auf umfangreiche experimentellen Untersuchungen, ein "black box"-Modell aufgestellt, mit dem zum Teil sehr genaue Vorausberechnungen auch bei hochdynamischen Vorgängen durchgeführt werden können. Rückschlüsse auf die Wandlergeometrie sind mit diesem Modell nicht möglich. Mit den Methoden der Teilsystemidentifikation wurde diese "black box"-Abbildung für zwei verschiedene Wandlerbauformen (Abb. 1 und Abb. 3, vergl. /4/, Tabelle 4, Bauform a und b) aufgestellt und verifiziert. Grundsätzlich handelt es sich hierbei um eine nichtlineare Systembeschreibung, die auf einer drehzahlabhängigen Abtastung der stationären Kennfelder (Abb. 2 und Abb. 4) und einer Miteinbeziehung von Massenträgheiten beruht (Gl. 1).

$$\begin{vmatrix} M_P(t) \\ M_T(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_{P0} = f(n_P(t), n_T(t)) \\ M_{T0} = f(n_P(t), n_T(t)) \end{vmatrix}_{\text{stationär}} + \begin{vmatrix} \frac{dn_P(t)}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{dn_T(t)}{dt} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \theta_P \\ \theta_T \end{vmatrix} \quad (1)$$

Die stationären Kennfelder wurden experimentell bestimmt und mit Hilfe von Polynomen approximiert. Durch Messung der Pumpen- und Turbinendrehzahl können somit die stationären Momente und Drehbeschleunigungen zu jedem Zeitpunkt bestimmt und die entsprechenden instationären Momente berechnet werden.

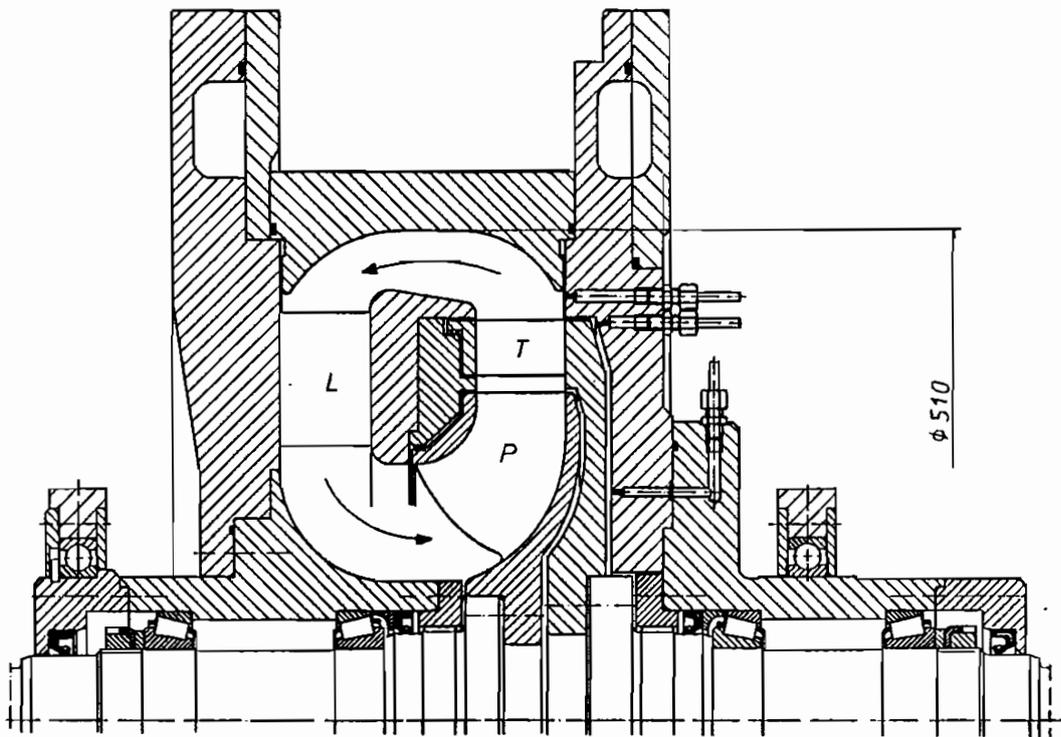


Abb. 1) Voith E7yS; P 13 Schaufeln; T 40 Schaufeln; L 32 Schaufeln

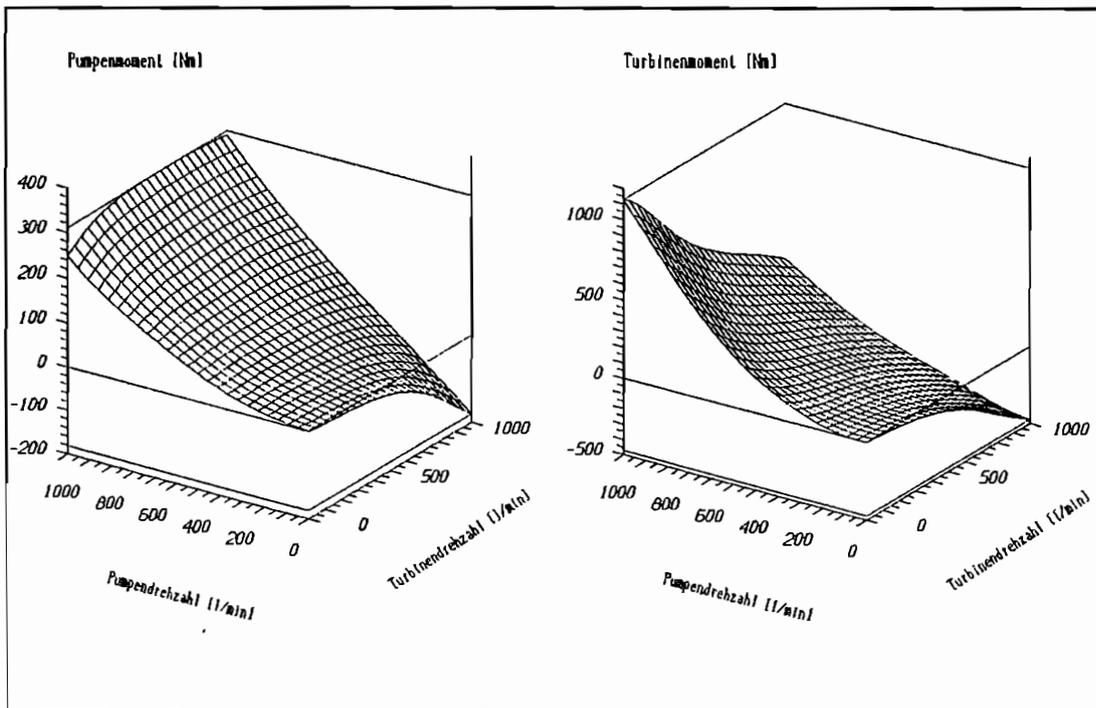


Abb. 2) Stationäres Kennfeld Wandler Voith E7yS

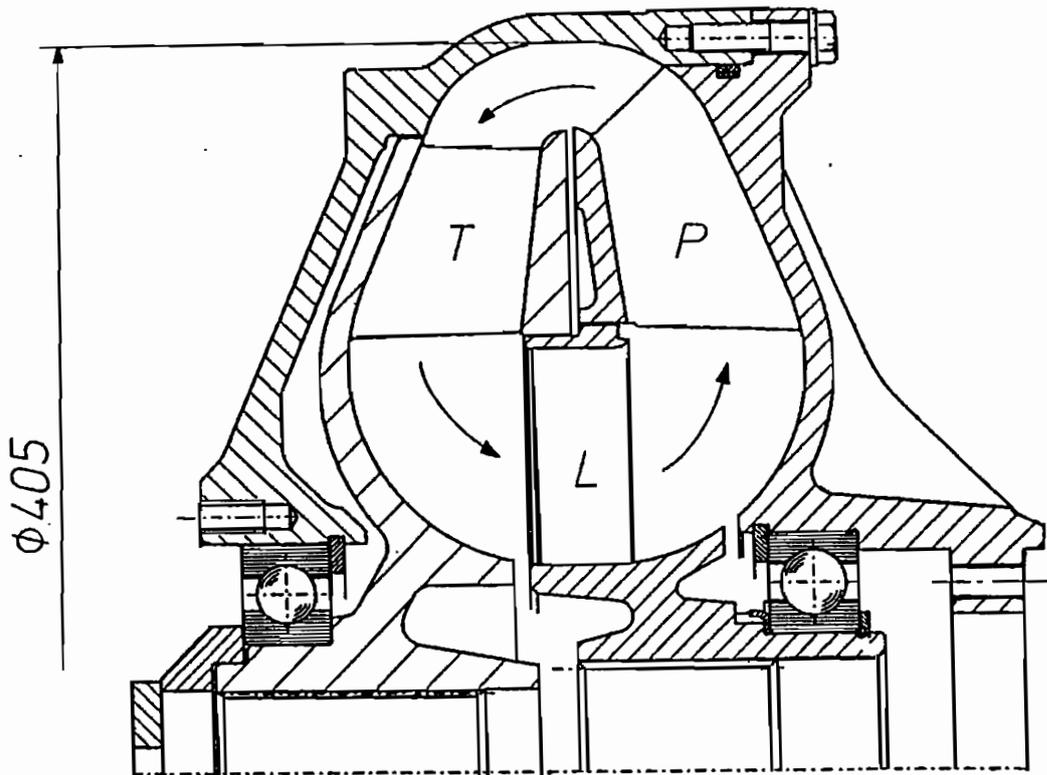


Abb. 3) Voith W405; P 16 Schaufeln; T 28 Schaufeln; L 24 Schaufeln

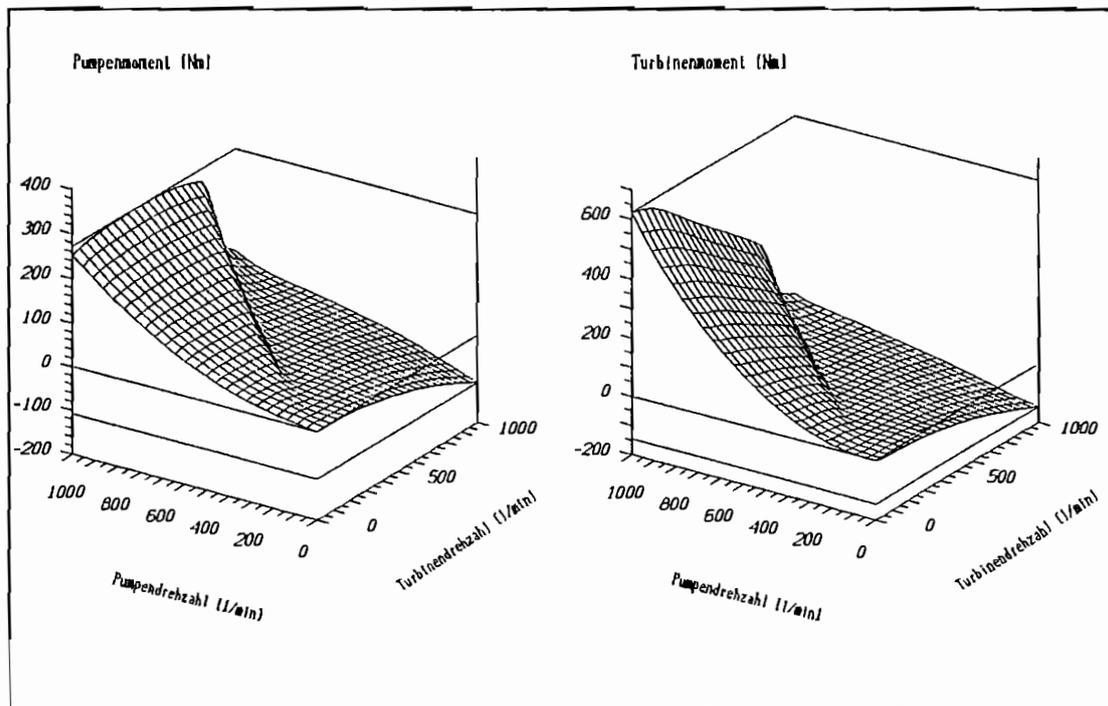


Abb. 4) Stationäres Kennfeld Wandler Voith W405

Für den Wandler Voith E7yS wurden mit der nichtlinearen Systembeschreibung in Gl. 1 über dem gesamten Betriebsbereich, indem auch die stationären Kennfelder bestimmt wurden, sehr genaue Simulationsrechnungen durchgeführt. Das Blockieren des Pumpen- und Turbinenrades (Drehbeschleunigung bis zu 5000 1/min pro Sekunde) sowie das gleichzeitige transiente Erregen beider Laufräder wurden mit geringen Abweichungen durch das mathematische Modell abgebildet. Beim Voith-Wandler W405 traten lediglich beim Durchfahren des "kritischen Drehzahlbereiches" je nach Höhe der Drehbeschleunigung größere Abweichungen auf. Der "kritische Drehzahlbereich" ist durch den starken Abfall des stationären Pumpen- und Turbinenmoment gekennzeichnet. Insgesamt gesehen konnten mit dem mathematischen Modell in Gl. 1 auch für diese Wandlerbauart genaue Simulationsrechnungen durchgeführt werden.

Die nichtlineare Systembeschreibung in Gl. 1 wurde für beide Wandler unter extremen Bedingungen experimentell verifiziert, die im normalen Betrieb selten auftreten und auch meist von untergeordneter Bedeutung sind. In der Praxis sind dagegen Frequenzanalysen des gesamten Antriebssystems in einem, oder bei Stellwandler, in mehreren Betriebspunkten von größerem Interesse. Auch das Amplitudenverhältnis bei pumpen- und/oder turbinenseitigen Störungen oder das Dämpfungsverhalten in einem oder mehreren Arbeitspunkten sind häufige Fragestellungen. Diese erfordern jedoch eine lineare Systembeschreibung, bei der eine Transformation in den Frequenzbereich möglich ist. Bei linearen Modellen ist zudem der Aufwand der experimentellen Bestimmung und numerische Behandlung stark vereinfacht (Gl. 2).

$$\begin{aligned}
 M_P(t) &= M_{P0} + \left. \frac{\delta M_P}{\delta n_P} \right|_{\substack{n_{P0} \\ n_{T0}}} * (n_P(t) - n_{P0}) + \left. \frac{\delta M_P}{\delta n_T} \right|_{\substack{n_{P0} \\ n_{T0}}} * (n_T(t) - n_{T0}) + \frac{dn_P(t)}{dt} * \theta_P \\
 M_T(t) &= M_{T0} + \left. \frac{\delta M_T}{\delta n_P} \right|_{\substack{n_{P0} \\ n_{T0}}} * (n_P(t) - n_{P0}) + \left. \frac{\delta M_T}{\delta n_T} \right|_{\substack{n_{P0} \\ n_{T0}}} * (n_T(t) - n_{T0}) + \frac{dn_T(t)}{dt} * \theta_T
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Dabei wurden die nichtlinearen Beschreibungen der stationären Kennfelder in Gl. 1 im Arbeitspunkt linearisiert. Der stationäre Anteil des linearen Modell besteht jetzt nur noch aus den Momenten im Arbeitspunkt und den Steigungen der Kennfelder in diesem Punkt in Richtung der Pumpen- und Turbinendrehzahl. Die Trägheitsterme bleiben unverändert. Eingangsgrößen sind jetzt nicht mehr die absoluten Drehzahlen, sondern die Abweichung bzw. Differenz vom Betriebspunkt. Die Größe des Betriebsbereiches, in dem das lineare Modell eingesetzt werden kann, ist abhängig vom Verlauf der Kennfelder in der Umgebung des Arbeitspunktes.

In Matrixschreibweise formuliert lautet die Gl. 2 (Gl. 3):

$$\begin{pmatrix} M_P(t) \\ M_T(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{P0} \\ M_{T0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\delta M_P}{\delta n_P} & \frac{\delta M_P}{\delta n_T} \\ \frac{\delta M_T}{\delta n_P} & \frac{\delta M_T}{\delta n_T} \end{pmatrix}_{\substack{n_{P0} \\ n_{T0}}} * \begin{pmatrix} (n_P(t) - n_{P0}) \\ (n_T(t) - n_{T0}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{dn_P(t)}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{dn_T(t)}{dt} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \theta_P \\ \theta_T \end{pmatrix} \quad (3)$$

Wird die Rechnung auf Abweichungen um diesen Punkt beschränkt, so folgt aus der Transformation der Gl. 3 in den Frequenzbereich die dynamische Steifigkeitsmatrix (Gl. 4).

$$\begin{pmatrix} \Delta M_P(s) \\ \Delta M_T(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s * \frac{\delta M_P}{\delta n_P} + s^2 * \theta_P & s * \frac{\delta M_P}{\delta n_T} \\ s * \frac{\delta M_T}{\delta n_P} & s * \frac{\delta M_T}{\delta n_T} + s^2 * \theta_T \end{pmatrix}_{\substack{n_{P0} \\ n_{T0}}} * \begin{pmatrix} \Delta \varphi_P(s) \\ \Delta \varphi_T(s) \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta M_P(s) \\ \Delta M_T(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}(s) & k_{12}(s) \\ k_{21}(s) & k_{22}(s) \end{pmatrix}_{\substack{n_{P0} \\ n_{T0}}} * \begin{pmatrix} \Delta \varphi_P(s) \\ \Delta \varphi_T(s) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } s = \sqrt{-1} * \omega$$

Diese Gleichung kann mit den dynamischen Steifigkeitsmatrizen der anderen im Antriebsstrang befindlichen Teilsysteme in bekannter Weise zu einer Gesamtmatrix zusammengefaßt werden. Aus der Gl. 4 folgen durch einfaches Umstellen weitere, in der Maschinendynamik gebräuchliche Formulierungen, wie die Übertragungsmatrix (Gl. 5) oder die Frequenzgangmatrix (Gl. 6).

$$\begin{pmatrix} \Delta \varphi_P(s) \\ \Delta M_T(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}(s) & u_{12}(s) \\ u_{21}(s) & u_{22}(s) \end{pmatrix}_{\substack{n_{P0} \\ n_{T0}}} * \begin{pmatrix} \Delta \varphi_T(s) \\ \Delta M_P(s) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \varphi_P(s) \\ \Delta \varphi_T(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) \end{pmatrix}_{\substack{n_{P0} \\ n_{T0}}} * \begin{pmatrix} \Delta M_P(s) \\ \Delta M_T(s) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Zu beachten ist jedoch, daß die Momente und die Drehwinkel, je nach Formulierung, als Modellein- bzw. -ausgangsgrößen immer nur die Schwankungen in einem Betriebspunkt beschreiben.

Abschließend soll noch die Frage nach dem Dämpfungsverhalten hydrodynamischer Wandler geklärt werden. Nach der linearen Systemtheorie und Gl. 4 wird leicht ersichtlich, daß sich die instationären Momente hauptsächlich aus einem Trägheitsanteil und aus viskosen Dämpfungsanteilen zusammensetzt. Letztere berechnen sich aus den Steigungen der stationären Kennfelder im betrachteten Betriebspunkt in Richtung der Pumpen- und Turbinendrehzahl und bestimmen somit das Dämpfungsverhalten.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß mit Gl. 3 bzw. Gl. 4 eine vereinfachte, mathematische Abbildung hydrodynamischer Wandler in Antriebssystemen möglich ist. Die erreichbaren Genauigkeiten waren bei den in /3/ untersuchten Wandlerbauformen in allen relevanten Betriebsbereichen sehr hoch.

Verwendete Formelzeichen und Symbole

M	Moment
n	Drehzahl
Θ	Drehträgheit
ω	Kreisfrequenz
φ	Drehwinkel
t	Zeit
Δ	Differenz / Abweichung vom stationären Punkt
k(s)	Element der Steifigkeitsmatrix
h(s)	Element der Frequenzgangmatrix
u(s)	Element der Übertragungsmatrix
d/dt	Zeitableitung
$\delta/\delta n$	partielle Drehzahlableitung

Indices

P	Pumpe
T	Turbine
P0	stationäres Pumpenmoment oder -drehzahl
T0	stationäres Turbinenmoment oder -drehzahl

Literaturverzeichnis**/1/ Ishihara, T / Emori, R. I. / Saito, H.**

Non-steady Characteristics of Hydrodynamik Transmission.
Report of the Institute of Industrial Science.
The University of Tokyo.
Vol. 18, No. 1 (1967)

/2/ Herberth, R.

Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Föttinger Getrieben.
Dissertation Technische Hochschule Hannover 1973.

/3/ Menne A.

Identifikation der dynamischen Eigenschaften von
hydrodynamischen Wandlern.
Mitteilung aus dem Institut für Mechanik der
Ruhr-Universität Bochum 1994.

/4/ VDI-Richtlinie 2153

Hydrodynamische Leistungsübertragung.
Begriffe - Bauformen - Wirkungsweise
April 1994

Elektrorheologische Fluide, ein Einblick

Johannes Moosheimer

1 Einleitung

Elektrorheologische Flüssigkeiten (ERF) sind Fluide, deren Fließverhalten sich im Einwirkungsbereich elektrischer Felder verändert. Willis Winslow entdeckte in den vierziger Jahren bei seinen Experimenten mit Dispersionen, bestehend aus Stärke in Mineralöl, diese Eigenschaft. Er konnte feststellen, daß sich seine Dispersionen ohne elektrisches Feld weitgehend wie rein viskose NEWTONsche Flüssigkeiten verhielten, im Einwirkungsbereich elektrischer Feldstärken bestimmter Mindestgröße aber „erstarrten“. Die Fluide nahmen festkörperartiges Verhalten an. Fließverhalten zeigte sich erst wieder nach Überschreitung einer bestimmten Mindestschubspannung.

Mittlerweile sind eine Vielzahl weiterer Dispersionen (Suspensionen und Emulsionen) entdeckt und untersucht worden, welche die obige charakteristische Eigenschaft Elektrorheologischer Fluide weitaus ausgeprägter bei kleineren elektrischen Potentialfeldern und Leistungen mit Schaltzeiten im Millisekundenbereich aufweisen.

Durch die Fluide besteht erstmals die Möglichkeit einen mechanischen „Transistor“ zu bauen. Ähnlich dem elektrischen Transistor können durch ihn mittels eines Steuersignales Ströme, Fluidströme geschaltet werden. Die Eigenschaft, steuerbare Viskosität, erlaubt somit den Zugang zu einer Vielzahl neuer, bisher nicht vorstellbarer, zukunftsweisender, technischer Anwendungen.

Um das Verständnis für diese Fluide zu vertiefen, werden im folgenden die physikalischen Ursachen, der prinzipielle Aufbau und das Werkstoffmodell der ERFs mit den wichtigsten Einflußparametern stichpunktartig erläutert. Zur Abrundung dieses Einblickes folgen einige technische Anwendungen.

2 Physikalische Ursachen der Viskositätsveränderungen

Die Polarisierung der dispergierten Partikel ist der entscheidende physikalische Effekt, welcher für die Viskositätsänderungen verantwortlich ist. An die Partikel gebundene, bewegliche Ladungsträger wandern entlang der Partikeloberflächen unter Einwirkung des elektrischen Feldes. Die Verschiebung der Ladungsträger über die Partikelgrenzen hinaus wird durch das Basisöl verhindert. Es entstehen induzierte Dipole, welche sich im Einflußbereich des elektrischen Feldes ausrichten und zu Überstrukturen anordnen. Die Dipole bilden mehr oder weniger weitmaschige, stabile Zusammenschlüsse unter Einschluß von Basisöl. Diese Teilchenansammlungen weisen die Eigenschaften von „Groß“-Partikeln auf.

Als brauchbares Anschauungsmodell kann ein fließendes Gewässer ohne Eisgang (ERF ohne elektrisches Feld) und mit Eisgang (ERF unter Einwirkung eines elektrischen Feldes) angesehen werden. Die Überstrukturen werden durch das Treibeis modelliert. Wie im Modell kommt es durch die Überstrukturen auch in der ERF zu Veränderungen der Fließeigenschaften. Diese machen sich global als eine Erhöhung der Viskosität und durch das Auftreten einer Fließgrenze bemerkbar. Im „Eismodell“ durch Bildung und Auflösung kurzer Eisstaus feststellbare Durchflußschwankungen können ebenso in ERFs im elektrischen Feld bei kontinuierlicher Strömung gemessen werden.

Bei näheren Untersuchungen sind in ERFs verschieden geformte Überstrukturen beobachtbar. Sie reichen von eindimensionalen kettenförmigen Gebilden über zweidimensionale plattenförmige bis zu dreidimensionalen blockförmigen Gebilden.

Die Überstrukturen sind das Ergebnis einer Gleichgewichtsreaktion. Die wichtigsten Einflußparameter für die Ausformung und Größe der Überstrukturen sind die elektrische Erregung (DC, AC, Frequenz, Feldstärke), das Schergefälle, bei oszillierenden Strömungen die mechanischen Frequenzen, die Temperatur, die Geometrie der Feststoffpartikel, ihre Polarisierungsrichtung und -geschwindigkeit. Es ergeben sich beispielsweise andere Überstrukturen, andere Viskositätseigenschaften, wenn die bevorzugte Polarisationsrichtung, und damit Anordnungsrichtung, mit der Längenausdehnung von kettenförmigen Feststoffpartikeln übereinstimmt bzw. nicht übereinstimmt.

Ehe im weiteren auf das Werkstoffmodell eingegangen wird, hier noch eine kurze Beschreibung der drei wichtigsten Aufbauprinzipien Elektrorheologischer Fluide.

3 Prinzipielle Zusammensetzung Elektrorheologischer Fluide

ERFs sind grundsätzlich, wie in der Einführung erläutert, Dispersionen, bestehend aus Partikeln in einer Grundflüssigkeit. Die zu mischenden Substanzen in den Dispersionen werden zum einen nach der Größe des Dielektrizitätskonstantenunterschiedes (wesentlicher Einflußparameter auf das Viskositätssteuerungspotential der ERFs) und zum anderen nach der Entmischungs- und Sedimentationsstabilität ausgewählt.

Bei den drei nachfolgend beschriebenen ERF-Arten werden als Basisfluide unabhängig vom Typ Mineral- und Silikonöle in verschiedensten Formen eingesetzt. Die Basisfluide zeichnen sich dadurch aus, daß sie hydrophob und elektrisch isolierend bei dadurch bedingt hohen Durchschlagsspannungen sind. Sie weisen eine niedrige Dielektrizitätszahl (2...3) auf.

Die in Dispersion befindlichen Partikel sind unterschiedlich:

a) *Mineralische Stoffe im Basisfluid unter Zusatz von Additiven (Nasse ERFs):*

Als mineralische, harte Feststoffe werden zum Beispiel Silikate, Titanate, Bauxite oder Zeolite verwendet. Sie sind schlechte elektrische Leiter, hydrophil und porös. Die Teilchengrößen schwanken zwischen 1 und 10 μm . Die durchschnittliche Teilchengröße beträgt 3 μm . Die Werte der Dielektrizitätszahlen bewegen sich zwischen 4 ... 10.

Die zugesetzten Additive (Hilfstoffe): Wasser und Tenside haften an den Partikeloberflächen und bilden um die Festkörper polarisierbare Doppelschichten für die Grenzflächenpolarisation. Den an sich nichtleitenden Festkörpern stehen somit bewegliche Ladungsträger zur Verfügung.

Außerdem beeinflussen die Additive die Sedimentationsstabilität positiv. Der Wasseranteil beträgt zwischen 5 und 15 Gew.-%. Hergestellt und vertrieben werden ERFs dieser Art unter anderem von der Fa. Metzeler Gimetall.

b) Halbleiterpolymere (Anhydride ERF-Suspensionen):

Bei diesen Suspensionen werden als Feststoff Halbleiterpolymere, wie zum Beispiel Poly-Anthracen-Chinon-Radikal (PANQR), eingesetzt. Die Partikelgrößen liegen unter $38 \mu\text{m}$. Die Leitfähigkeiten betragen zwischen $10\text{E-}3$ und $10\text{E-}5 \text{ S/m}$. Die Polarisation des Feststoffes erfolgt durch Wandern freier Elektronen an der Oberfläche. Diesen Suspensionen werden keine Additive und kein Wasser (anhydrid) zugesetzt. Die Fa. Lord Corporation ist ein Anbieter für diese anhydriden ERFs.

c) Salze mit angelagerten Säuren (vollständig homogene ERFs):

Die Partikel, welche bei diesen ERFs in der Grundflüssigkeit, bestehend aus herkömmlichen Mineralölen, gelöst werden, bestehen aus Salzen von mehrwertigen (2-3wertigen) Metallen (z.B. Al-Ionen, Zn-Ionen), an welche organische (1wertige) Mono- und (2wertige) Dikarbonsäuren mit einem Molekulargewicht zwischen 100 und 300 angelagert sind. Die hierbei entstehenden polarisierbaren Bestandteile haben somit ein Molekulargewicht von ca. 500. Sie sind im Vergleich zu den anderen ERFs um ein Vielfaches kleiner. Die entstehenden vollständig homogenen ERFs sind im Gegensatz zu den zuvor besprochenen Arten durchsichtige Fluide. Die gewünschte Grundviskosität wird durch entsprechende Verdünnung der aktiven Komponenten in der Grundflüssigkeit erreicht. Entwickelt werden diese ERFs von der Fa. RWE-DEA.

4 Werkstoffgesetz

Wie bei allen realen Materialien gilt auch für die ERFs, daß sich ihr Werkstoffverhalten niemals exakt, sondern abhängig vom Aufwand nur mehr oder weniger genau durch entsprechende einfache oder kompliziertere Werkstoffmodelle abbilden läßt.

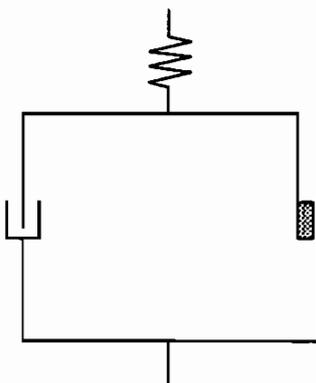


Abb. 1: Modell des BINGHAM-Körpers

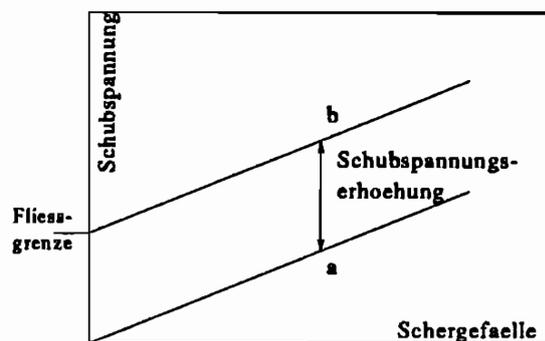


Abb. 2: Ideales Rheogramm

- a) ohne elektrisches Feld (NEWTON)
- b) mit elektrischem Feld (BINGHAM)

Zur Beschreibung des ERF-Verhaltens ohne Spannung genügt für die meisten technischen Anwendungen das Modell idealer, NEWTONscher Fluide (Gl. 1).

$$\tau_y = \eta \dot{\gamma} \quad (1)$$

Im Einwirkungsbereich elektrischer Feldstärken lassen sich Elektorrheologische Fluide technisch meist ausreichend genau durch BINGHAMsche Körper (Gl. 2) modellieren. (Ersatzschaltbild Abb. 1)

$$\begin{aligned} \tau_y &= G\gamma & \tau_y < \tau_{y,d} \\ \tau_y &= \tau_{y,d} + \eta_y \dot{\gamma} & \tau_y > \tau_{y,d} \end{aligned} \quad (2)$$

Wie im Rheogramm (Abb. 2) der idealen ERF mit und ohne elektrischem Potentialfeld erkennbar ist, verhält sich der BINGHAM-Körper bis zur Erreichung der Fließgrenze rein elastisch und erst nach Überschreitung macht sich seine Fluideigenschaft bemerkbar, und das Material fließt.

Zum Vergleich mit dem idealen Rheogramm sind nachfolgend verschiedene Rheogramme von im Handel befindlichen ERFs aufgeführt (Abb. 3-5).

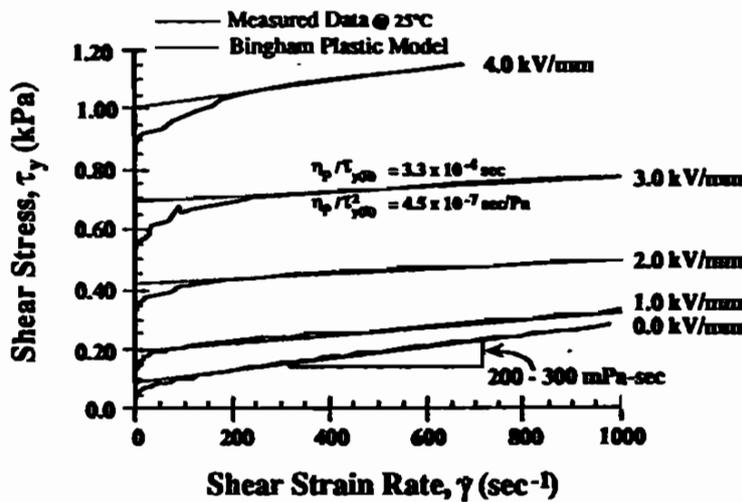


Abb. 3: ERF VersaFlo™ ER-100 (Fa. Lord Corporation)

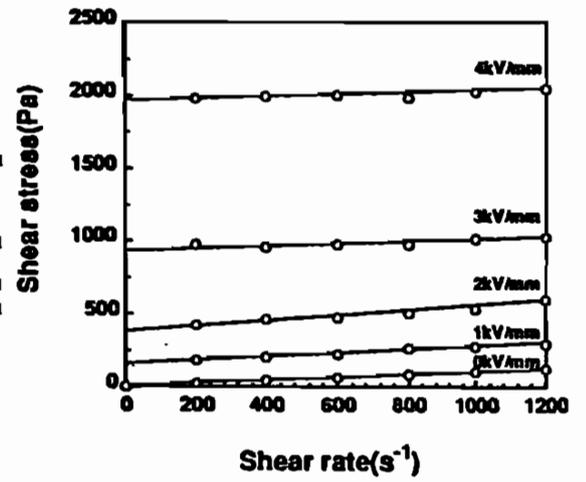


Abb. 4: ERF TX-ER1 (Fa. Nippon Shokubai)

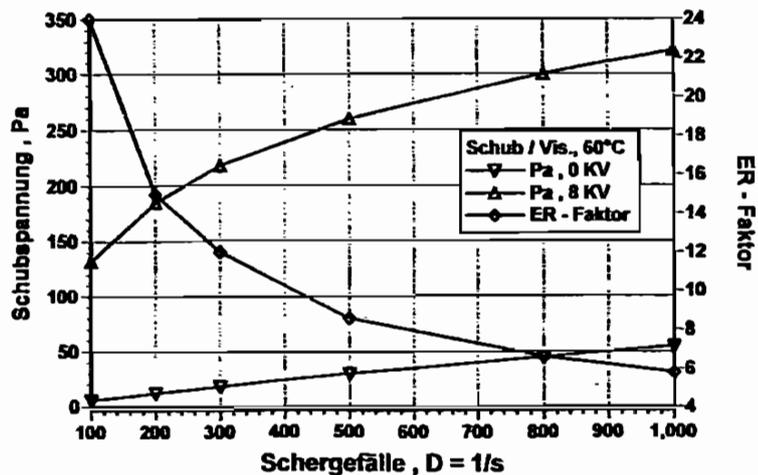


Abb. 5: ERF EPS-3301 (Fa. RWE-DEA)

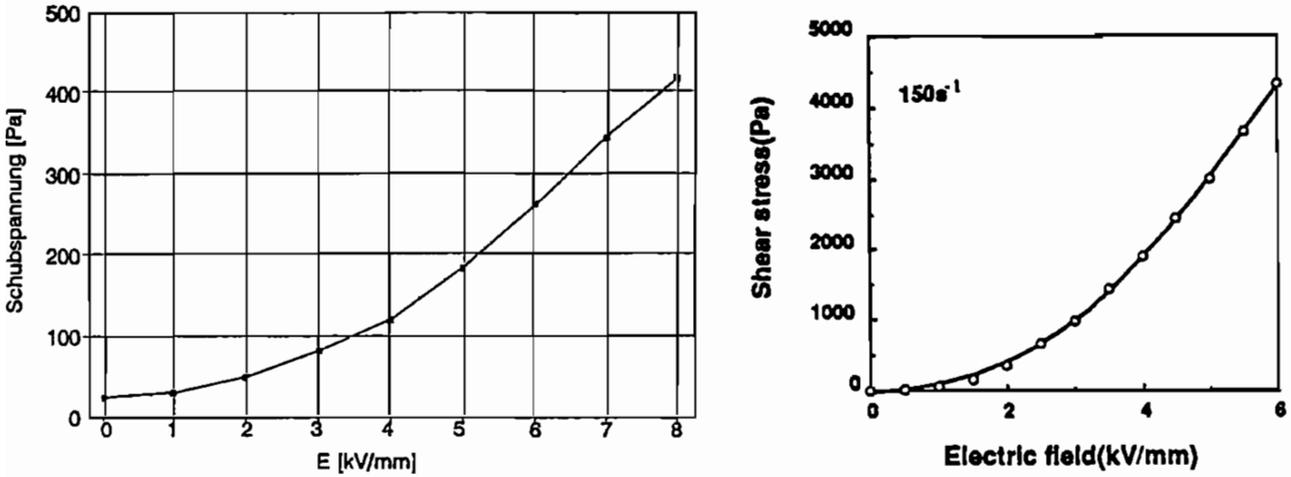


Abb. 6: Schubspannung über der elektrischen Feldstärke a) ERF EPS-3301 b) ERF TX-ER1

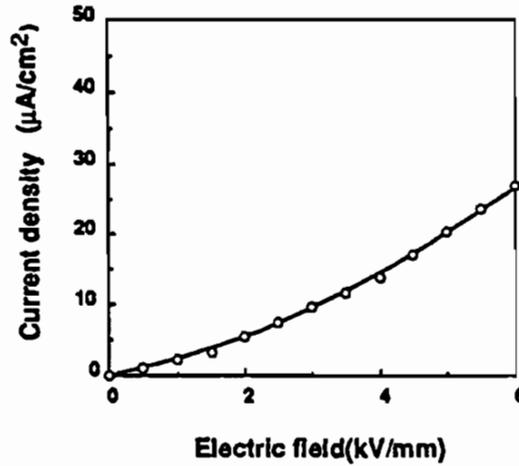


Abb. 7: Stromdichte über der elektrischen Feldstärke ERF TX-ER1

In Abb. 5 ist neben den Schubspannungs-Schergelände-Diagramm auch noch der ER-Faktor aufgetragen. Er gibt das Steuerungspotential der ERF an, das heißt das Verhältnis zwischen der durch die ERF übertragbaren Schubspannung mit elektrischem Feld zur Schubspannung ohne elektrischem Feld. Das größte Steuerungspotential besitzen ERFs also bei niedrigen Schergeländen.

Für die Abhängigkeit der Schubspannung von der elektrischen Feldstärke läßt sich ein quadratischer Zusammenhang angeben (Abb. 6):

$$\tau_y \sim U^2 \tag{3}$$

Die Leitfähigkeit der Elektrorheologischen Fluide ändert sich, wie die Schubspannung, quadratisch mit der elektrischen Spannung (Abb. 7):

$$I \sim U^2 \tag{4}$$

Die Leistungsaufnahme steigt demnach mit der dritten Potenz der elektrischen Spannung:

$$P \sim I \cdot U = U^3 \tag{5}$$

Weil sich die Dielektrizitätskonstanten der Dispersionsbestandteile und die Viskosität des Basisfluids mit der Temperatur ändern, ergibt sich für die Funktion: Schubspannung in Abhängigkeit

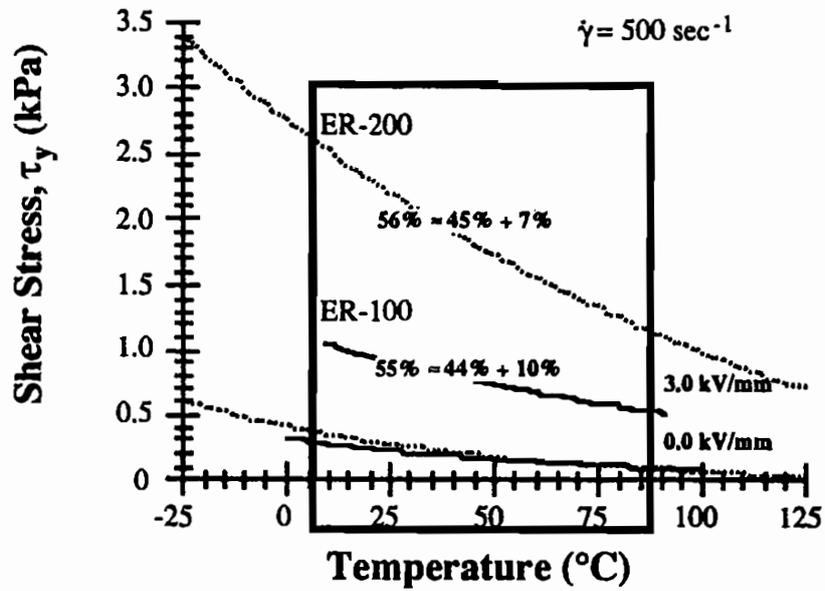


Abb. 8: Schubspannung der ERFs VersaFlo™ ER-100 (Volllinie) und ER-200 (Punktlinie) über der Temperatur

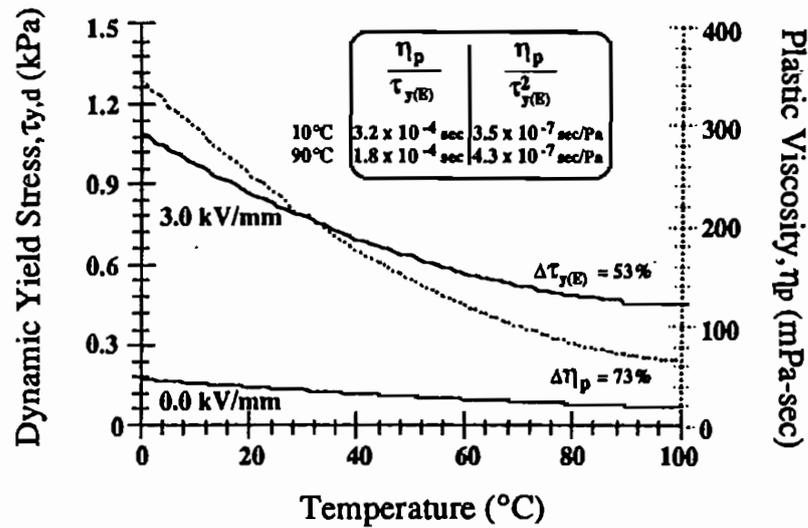


Abb. 9: Fließgrenze (Volllinie) und plastische Viskosität (Punktlinie) über der Temperatur für die ERF VersaFlo™ ER-100

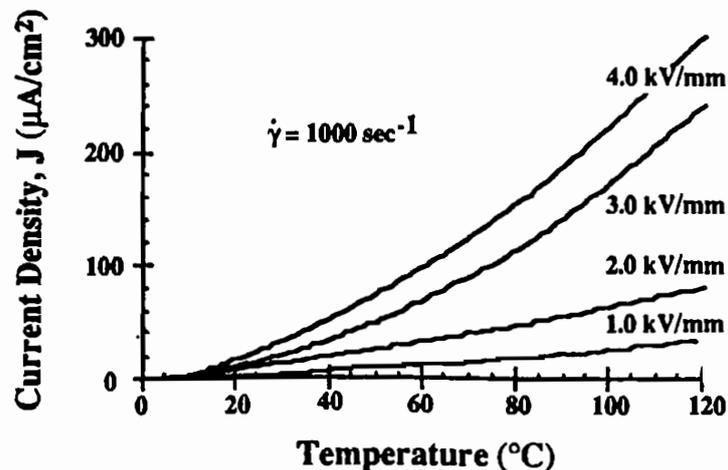


Abb. 10: Stromdichte als Funktion der Temperatur ERF VersaFlo™ ER-100

von der Temperatur ein Abfall in der Schubspannung (Abb. 8), der Fließgrenze und der plastischen Viskosität (Abb. 9). Für den ER-Faktor (Steuerbereichsgröße) gilt dies nicht. Er steigt, als Verhältniszahl zwischen der Schubspannung mit und ohne Spannung mit der Temperaturzunahme, sogar an (Abb. 9).

Der Strombedarf, ausgedrückt durch die Stromdichte als Funktion der Temperatur, steigt deutlich überproportional mit der Temperatur an (Abb. 10).

Für die Auswahl der für den jeweiligen Anwendungsfall geeignetsten ERF müssen also, neben der Berücksichtigung der benötigten Schubspannungen, dem vorherrschenden Schergefälle, zwei mit dem Temperaturanstieg einander gegensätzliche Erscheinungen, nämlich der unerwünschte Anstieg des Leistungsbedarfs und der erwünschte Anstieg des ER-Faktors, optimiert werden.

Auf die Erörterung weiterer Einflußparameter, wie der elektrischen Erregungsfrequenz, dem Verhalten bei oszillierenden Strömungen, wird, wegen des Fehlens allgemein gültiger Aussagen ebenso verzichtet, wie auf die Erörterung des Werkstoffparameters Elastizität, welcher bei den meisten Anwendungen vernachlässigt werden kann.

5 Anwendungsbeispiele

Nachdem bisher die Fluide beschrieben wurden, sollen nun abschließend einige Beispiele aufgeführt werden, welche die Vorzüge und Möglichkeiten, die sich durch ein Fluid mit steuerbarer Viskosität ergeben, hervorheben.

Durch Elektrorheologische Fluide ist es möglich, ohne großen technischen Aufwand hydraulische Leistungen zu steuern. In herkömmlichen Ventilen müssen zum Teil erhebliche Kräfte aufgewandt werden, um Ventilplatten zur Steuerung des Durchflusses zu bewegen. Dies bereitet insbesondere bei hydraulischen Pulsern, welche bei hohen mechanischen Frequenzen arbeiten und gleichzeitig noch exakt positionieren müssen, nicht geringe Schwierigkeiten. Auftretender Verschleiß ist hier ein zusätzliches Problem. Bei Fluidstromsteuerung durch ERFs treten diese Probleme nicht auf. Es müssen im Strömungskanal keine mechanisch bewegten Teile eingebracht werden, der Einbau entsprechend ausgeformter Strömungskanäle mit Elektroden genügt. Die ERFs stellen als Strömungsmedium direkt ohne Umwege das Bindeglied zwischen der elektrischen Ansteuerung und dem mechanischen Prozeß dar. Es lassen sich also einfache ER-Aktoren herstellen.

Der Einsatz von ERFs in Anwendungen bietet, über die Abwandlung und Vereinfachung von herkömmlichen Systemen (Pulser, Schiffchenantriebe in Spinnereimaschinen) hinaus, durch „ER -Miniaturventile“ aber auch die Möglichkeit neue innovative Systeme, wie steuerbare Motorlager (Abb. 11) oder steuerbare hydraulische Dämpfer (Abb. 12), zu entwickeln.

Durch entsprechende Regelungen lassen sich die Schwingungsisolationsleistungen von Motorlagern bzw. hydraulischen Stoßdämpfern leicht an die jeweiligen Anregungssituationen (Motordrehzahl bzw. Erregung durch das rollende Rad des Landfahrzeugs) anpassen. Identische Motorlager können, wegen der Anpassungsmöglichkeit über die ERFs, für verschiedene Fahrzeuge und Motoren eingesetzt werden. Steuerbare ER-Stoßdämpfer erlauben nicht nur die Konstruktion adaptiver, sondern auch semiaktiver Aufhängungen. Diese können im Vergleich zu den herkömmlichen adaptiven Dämpfern nicht nur grob an die entsprechenden Erregungssituationen angepaßt werden, sondern erlauben den schnellen Eingriff in Bruchteilen der Schwin-

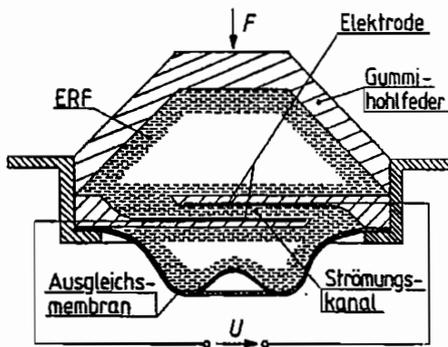


Abb. 11: ER-Motorlager

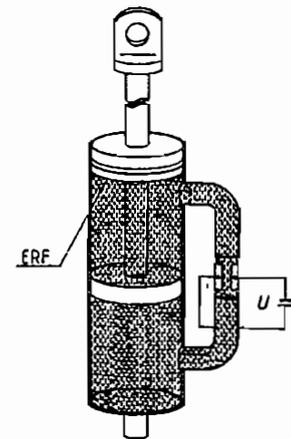


Abb. 12: ER-Stoßdämpfer

gungsperiodendauer. Das Verhältnis benötigter Energieaufwand zu erreichbarer Schwingungsisolationsverbesserung ist hierbei im Vergleich zu aktiven Aufhängungen wesentlich kleiner.

Auch können durch den Einsatz Elektorrheologischer Fluide als Mittlermedium schlupf- und damit verlustfreie hydraulische Kupplungen (Abb. 13) konzipiert werden.

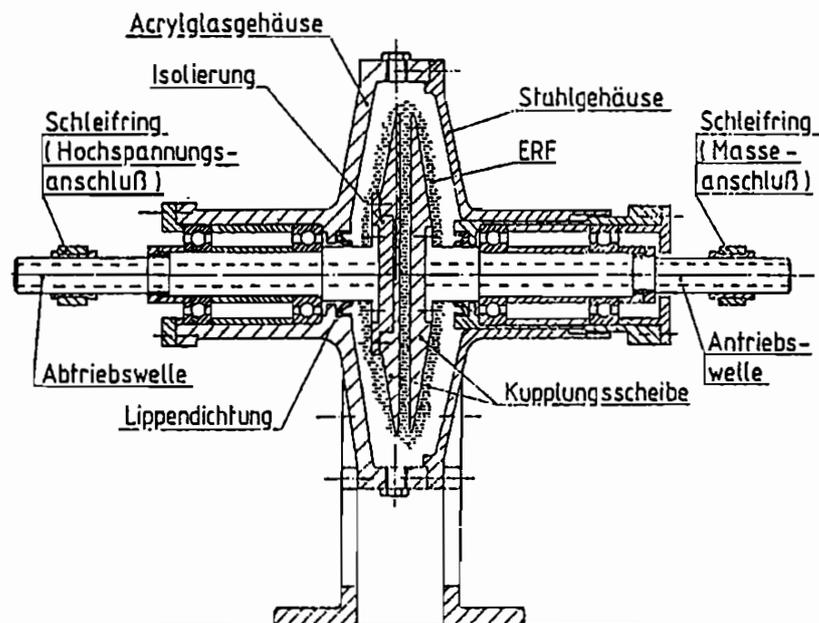


Abb. 13: ER-Kupplung

Bei herkömmlichen Kupplungen mit NEWTONschen Fluiden müssen zur Leistungsübertragung immer Drehzahlunterschiede zwischen dem treibenden und dem getriebenen Teil vorhanden sein. In ER-Kupplungen ist dies nicht nötig. Durch Anlegen der elektrischen Spannung ändert sich das Werkstoffverhalten. Bleiben die zu übertragenden Kräfte unterhalb der Fließspannung, so verhält sich die ERF nicht wie ein Fluid, sondern wie ein Festkörper. Die hydraulische Kupplung wird zu einer schlupffreien Reibungskupplung.

Wie aufgezeigt wurde, handelt es sich bei den Elektorrheologischen Fluiden um eine sehr interessante Werkstoffentwicklung, welche das Entwicklungspotential für viele neue innovative Produkte und Anwendungen besitzt, weshalb auch viele internationale und nationale

Forschungs- und Entwicklungsgruppen auf diesem Gebiet arbeiten.

In Deutschland zum Beispiel werden Flüssigkeiten unter anderem bei den Firmen: Metzeler Gimetall, RWE-DEA, Bayer entwickelt. An der Verbesserung der Werkstoffgesetze und auf dem Gebiet der Anwendungen und Produkte wird national beispielsweise bei der Fa. Freudenberg, sowie an verschiedenen Hochschuleinrichtungen, wie dem Lehrstuhl für Strömungslehre an der Universität der Bundeswehr in Hamburg, dem Dienstleistungszentrum D*ASS der Universität des Saarlandes in Saarbrücken, sowie in der Arbeitsgruppe für numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik an der Ruhr-Universität in Bochum gearbeitet. In dieser Arbeitsgruppe unter Leitung von Prof. Dr.-Ing. Waller läuft zur Zeit ein Projekt, welches sich mit der Entwicklung steuerbarer elektrorheologischer Stoßdämpfer befaßt.

Verwendete Formelzeichen

τ_y	: Schubspannung (shear stress)
$\tau_{y,d}$: Fließgrenze (dynamic yield stress)
η	: dynamische Viskosität (dynamic viscosity)
$D = \dot{\gamma}$: Schergefälle (shear rate)
η_y	: plastische Viskosität (plastic viscosity)
G	: Gleitmodul (modulus of elasticity in shear)
E	: elektrische Feldstärke (electric field)
J	: Stromdichte (current density)

Literatur

- [1] Reiner, M.: *Rheologie in elementarer Darstellung*. Hanser Verlag, München 1968
- [2] Carlson, J.D., Sprecher, A.F., Conrad, H.: *Electrorheological Fluids, Proceedings of the 2nd International Conference on ERF*. Technomic Publishing Co., Lancaster 1990.
- [3] Moosheimer, J.: *Untersuchung des dynamischen Verhaltens von elektrorheologischen steuerbaren Stoßdämpfern*. Diplomarbeit, Bochum 1992.
- [4] Tao, R., Roy, G.D.: *Electrorheological Fluids, Proceedings of the 4th International Conference on ERF*. World Scientific Publishing Co., Singapore 1994.
- [5] Nippon Shokubai: *New ERF TX-ER Series*. Datenblatt, Tokyo 1994.
- [6] RWE-DEA: *Die Elektrorheologische Flüssigkeit EPS 3301*. Datenblatt, Moers 1994.
- [7] Janocha, H., Jendritza, D.J.: *Wechselspiel, Einsatzpotentiale von elektrorheologischen Flüssigkeiten*. Konstruktionspraxis Nr. 2, Feb. 1994, 24 Jg.

New developments in enhanced strain finite elements for linear and non-linear applications

Reinhard Piltner

For large scale finite element simulations, elements with few unknowns are attractive. However, the standard four node compatible displacement element and the three node triangular element show poor performance for problems with bending and for plane strain problems in the nearly incompressible limit. Using a modified Hu-Washizu variational formulation with enhanced strains we are able to derive elements which show excellent performance for linear and non-linear applications.

1. Introduction and element formulation

The first improvement of the standard four node compatible displacement element was proposed by Wilson et al. [1]. They used four incompatible displacement modes with quadratic variation. However, the resulting element did not pass the constant strain patch test.

In 1976 Taylor, Beresford and Wilson [2] proposed a modification such that the patch test could be passed. The resulting element (denoted by QM6) performed well. Recently Simo and Rifai [3] introduced the method of "enhanced strains" and they found that the aforementioned Taylor/Beresford/Wilson element QM6 can be viewed as an enhanced strain element with four enhanced strain terms.

In 1984 Pian and Sumihara [4] proposed an assumed hybrid stress element with only five stress parameters. For linear problems their element showed even a better performance than the QM6-element. Especially in tests for evaluating the element behavior under mesh distortion in bending applications, the Pian-Sumihara element shows an excellent performance.

In order to get an element which can be used for non-linear applications and which performs similar or better for linear problems in comparison to the Pian-Sumihara element, Piltner and Taylor [5] used a modified Hu-Washizu variational formulation and constructed appropriate enhanced strain terms. In addition to the bilinear displacement interpolation, seven strain and stress terms, and two enhanced strain modes are used. For the case of linear elastic materials the stress-strain relations and the equilibrium equations will be

satisfied pointwise. The resulting element, which is denoted by QE2, shows an excellent performance which is demonstrated using several linear and non-linear examples.

The different underlying concepts of the quadrilateral finite elements mentioned above can be seen from the following brief characterization.

- (i) The standard four-node displacement element (Q4) uses compatible shape functions in natural element coordinates. The element has eight degrees of freedom.
- (ii) The Pian/Sumihara element (P-S) is a hybrid stress element. Stresses are assumed in natural coordinates. The stresses satisfy the equilibrium equations in a weak (integral) sense. Five stress terms are used. The stress terms do not include the bilinear term $\xi\eta$. The element has eight degrees of freedom. No condensation of extra degrees of freedom is needed. The element is well suited for linear applications.
- (iii) The Taylor/Beresford/Wilson element (QM6) is an enhanced strain element with four enhanced terms. The enhanced strains are assumed in natural coordinates. For a general quadrilateral element shape (non rectangular shape and not a parallelogram) the strain modes are not polynomials in natural coordinates, they are rational functions in general and do not satisfy the equilibrium equations. The 12x12 stiffness matrix is condensed to a 8x8 element matrix. The element is suited for linear and nonlinear applications.
- (iv) For the proposed element (QE2), the stresses and strains are constructed by using local cartesian coordinates. Seven terms are used for the stress and strain fields. For the linear elastic case the resulting stresses form a complete set of linear functions which satisfy the equilibrium equations pointwise. Written in natural coordinates stresses and strains are also polynomials in these coordinates. The strains/stresses include the bilinear term $\xi\eta$. A 10x10 element stiffness matrix is computed. Only two extra degrees of freedom have to be condensed to obtain the final 8x8 stiffness matrix. The element can be used for linear and non-linear applications.

Element QM6 and QE2 are based on different versions of the enhanced strain concept. In order to point out the common features and the differences of the two versions, it suffices here to look at the equations for the linear elastic case. In Box 1 and Box 2 the variational equations of the two enhanced strain versions are summarized. For a comparison of the two versions the main features of the methods are listed in Table 1.

Box 1: Summary of the basic equations for Version A

Version A: Piltner/Taylor [5]
$\Pi = \int_{\check{V}} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} - \tilde{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{f}} \right] dV - \int_{\check{S}} \tilde{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{T}} dS - \int_{\check{V}} \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\varepsilon}^i) dV$
$\int_{\check{V}} \delta(\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}})^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\check{V}} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{f}} dV + \int_{\check{S}} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{T}} dS$
$\int_{\check{V}} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T [\mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}] dV = 0$
$- \int_{\check{V}} \delta \boldsymbol{\sigma}^T [\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\varepsilon}^i] dV = 0$
$\int_{\check{V}} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^i)^T \boldsymbol{\sigma} dV = 0$

Box 2: Summary of the basic equations for Version B

Version B: Simo/Rifai [3]
$\Pi = \int_{\check{V}} \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} - \tilde{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{f}} \right] dV - \int_{\check{S}} \tilde{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{T}} dS - \int_{\check{V}} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^i dV$
<p>where $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varepsilon}^i$</p>
$\int_{\check{V}} \delta(\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}})^T [\mathbf{E}(\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varepsilon}^i)] dV = \int_{\check{V}} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{f}} dV + \int_{\check{S}} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \bar{\mathbf{T}} dS$
$\int_{\check{V}} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^i)^T [\mathbf{E}(\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varepsilon}^i) - \boldsymbol{\sigma}] dV = 0$
$\int_{\check{V}} \delta \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}^i dV = 0$

The common feature of both versions is that the enhanced strains are constructed such that they are orthogonal to a set of linearly independent stress functions. Since there are different types of stresses in the two formulations we want to distinguish them through the following notation:

assumed stresses: $\boldsymbol{\sigma}$

reference stresses: $\boldsymbol{\sigma}^*$

output stresses: $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$

output stresses projected from Gauss-points: $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_p$

Table 1: Comparison of two versions for enhanced strain methods

	Version A	Version B
assumed stresses	$\sigma = \mathbf{P}\beta$ equilibrium equations are satisfied a priori; stress parameters β can be computed from variational formulation	$\sigma = \sigma^*$ equilibrium equations are not satisfied a priori; stress parameters β^* cannot be computed from variational formulation
reference stresses	$\sigma^* = \mathbf{F}_0 \mathbf{P}^*(\xi, \eta) \beta^*$	$\sigma^* = \mathbf{F}_0 \mathbf{P}^*(\xi, \eta) \beta^*$
enhanced strain	$\varepsilon^i = \mathbf{B}^i \lambda$	$\varepsilon^i = \mathbf{B}^i \lambda$
number of enhanced strain terms	2	4
assumed strains	$\varepsilon = \mathbf{A}\beta$ polynomials in ξ, η	$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \varepsilon^i$ $= \mathbf{B}\mathbf{q} + \mathbf{B}^i \lambda$ rational functions in ξ, η
assumed displacements	$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{q}$	$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\mathbf{q}$
assumed displacements to get strains $\varepsilon = \mathbf{D}\mathbf{u}$	$\mathbf{u} = \mathbf{U}\beta$	not needed
output stresses	$\hat{\sigma} = \sigma$ $= \mathbf{E}\varepsilon$	$\hat{\sigma} = \mathbf{E}(\mathbf{B}\mathbf{q} + \mathbf{B}^i \lambda)$ $= \mathbf{E}\varepsilon$
output stresses projected from Gauss-points	$\hat{\sigma}_p = \hat{\sigma} = \sigma$ at nodes and at Gauss-points	$\hat{\sigma}_p \neq \hat{\sigma}$ at nodes $\hat{\sigma}_p = \hat{\sigma}$ at Gauss-points
	$\int_{\tilde{V}} \delta \sigma^{*T} \varepsilon^i dV = \int_{\tilde{V}} \delta \varepsilon^{iT} \sigma^* dV = 0$ satisfied a priori	$\int_{\tilde{V}} \delta \sigma^{*T} \varepsilon^i dV = \int_{\tilde{V}} \delta \varepsilon^{iT} \sigma^* dV = 0$ satisfied a priori
	$\int_{\tilde{V}} \delta \sigma^T \varepsilon^i dV \neq 0$	$\int_{\tilde{V}} \delta \hat{\sigma}^T \varepsilon^i dV \neq 0$
	$\int_{\tilde{V}} \delta \varepsilon^{iT} \sigma dV = 0$ gives constraint equations for β	$\int_{\tilde{V}} \delta \varepsilon^{iT} \hat{\sigma} dV = 0$ gives constraint equations for \mathbf{q} and λ

In version B, the parameters of the assumed stresses can not be computed from the variational formulation because the associated coefficient matrix is a null matrix due to the orthogonality requirement that enhanced strains do not work on the assumed stresses. In version B the assumed stresses are not the same as the output stresses, and we can

consider the assumed stresses σ in this case as reference stresses σ^* which are used to construct enhanced strain terms such that the reference stresses and the enhanced strains are orthogonal to each other. The output stresses $\hat{\sigma}$ in version B are obtained from the assumed strains ε by using the constitutive equations.

For version A we can obtain admissible enhanced strain functions by using the same reference stresses σ^* for the orthogonality condition as in version B. The number of enhanced strain terms used in the two versions is different. The reference stresses σ^* in version A are different from the assumed stresses σ . In version A we are able to compute the stress parameters of the assumed stresses from the variational formulation so that for the linear elastic case the output stresses will be equal to the assumed stresses. The common feature of both versions is that the enhanced strains are orthogonal to the reference stresses σ^* but they are not orthogonal to the output stresses.

In both methods the requirement $\int_V \delta \varepsilon^i \hat{\sigma} dV = 0$ leads to constraint equations (i.e. for β in version A, and for \mathbf{q} , λ in version B). The strains in version A are polynomials in ξ , η whereas the strain field ε for version B contains rational functions in ξ , η for a general quadrilateral element domain. A particular feature of the assumed stresses σ in version A is that they satisfy the equilibrium equations a priori.

For element QE2 the following functions are assumed:

compatible displacement field $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad (1)$$

strains:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} (\kappa - 1) & -1 & 0 & (\kappa - 2)(\bar{x} - \bar{x}_0) & -\kappa(\bar{y} - \bar{y}_0) & -(\bar{x} - \bar{x}_0) & \bar{y} - \bar{y}_0 \\ (\kappa - 1) & 1 & 0 & \kappa(\bar{x} - \bar{x}_0) & -(\kappa - 2)(\bar{y} - \bar{y}_0) & \bar{x} - \bar{x}_0 & -(\bar{y} - \bar{y}_0) \\ 0 & 0 & 2 & -2(\bar{y} - \bar{y}_0) & 2(\bar{x} - \bar{x}_0) & 2(\bar{y} - \bar{y}_0) & 2(\bar{x} - \bar{x}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \end{bmatrix} = \mathbf{A} \alpha \quad (2)$$

stresses:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \bar{x} - \bar{x}_0 & -3(\bar{y} - \bar{y}_0) & -(\bar{x} - \bar{x}_0) & \bar{y} - \bar{y}_0 \\ 2 & 1 & 0 & 3(\bar{x} - \bar{x}_0) & -(\bar{y} - \bar{y}_0) & \bar{x} - \bar{x}_0 & -(\bar{y} - \bar{y}_0) \\ 0 & 0 & 1 & -(\bar{y} - \bar{y}_0) & \bar{x} - \bar{x}_0 & \bar{y} - \bar{y}_0 & \bar{x} - \bar{x}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \end{bmatrix} = \mathbf{P} \beta \quad (3)$$

enhanced strains:

$$\varepsilon^i = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^i \\ \varepsilon_{yy}^i \\ \gamma_{xy}^i \end{bmatrix} = \frac{1}{J(\xi, \eta)} \begin{bmatrix} -b_2 \xi - b_1 \eta & 0 \\ 0 & a_2 \xi + a_1 \eta \\ a_2 \xi + a_1 \eta & -b_2 \xi - b_1 \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^i \lambda \quad (4)$$

where

$$\begin{aligned}
 2\mu &= E/(1 + \nu) \\
 \kappa &= \begin{cases} (3 - \nu)/(1 + \nu) & \text{for plane stress} \\ (3 - 4\nu) & \text{for plane strain} \end{cases} \\
 x &= a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta, \quad y = b_0 + b_1\xi + b_2\eta + b_3\xi\eta \\
 \bar{x} &= x - a_0, \quad \bar{y} = y - b_0 \\
 \bar{x}_0 &= \frac{a_2J_2 + a_1J_1}{3J_0}, \quad \bar{y}_0 = \frac{b_2J_2 + b_1J_1}{3J_0} \\
 J_0 &= a_1b_2 - a_2b_1, \quad J_1 = a_1b_3 - b_1a_3, \quad J_2 = a_3b_2 - a_2b_3
 \end{aligned} \tag{5}$$

The coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 and b_0, b_1, b_2, b_3 depend on the element coordinates x_i, y_i .

The fields ϵ and σ have been constructed with the aid of the complex variable representation of Kolosov-Muskhelishvili [6]. Therefore the strains and stresses satisfy the governing differential equations for the linear elastic case. Although the stress and strain fields in a Hu-Washizu principle do not need to satisfy any differential equations, our choice is motivated by the aim to achieve high accuracy for the stress results like in Trefftz-type approximations [8,9,16,17]. In Trefftz-type approximations trial functions are used which a priori satisfy differential equations. A systematic way of deriving complete polynomials of a given order is to use complex function representations which are available not only for two-dimensional problems but also for thick plates and three-dimensional elasticity problems [10-16]. Solution representations in terms of "arbitrary" complex valued functions can be used as a useful tool not only for finite element [8,9] but also for boundary element applications [16-18].

2. Finite element approximations for the case of non-linear materials

For a non-linear, hyperelastic material the stresses are obtained from a strain energy density function, $W(\epsilon^e)$. The Hu-Washizu variational formulation gives us the constitutive equation from the statement

$$\int_V \delta \epsilon^T \left[\frac{\partial W}{\partial \epsilon} - \sigma \right] dV = 0 \tag{6}$$

At the element level the successive approximations for achieving convergence to the state

at $t = t_{n+1}$ due to a change in the external load from t_n to t_{n+1} can be characterized as

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k+1)} &= \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k)} + \Delta \tilde{\mathbf{u}}^{(k+1)} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k+1)} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i(k+1)} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i(k)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^i{}^{(k+1)} \\
 \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k+1)} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} \\
 \left[\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right]_{n+1}^{(k+1)} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} + \Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(k+1)}.
 \end{aligned} \tag{7}$$

where $(n+1)$ is a time step indicator and k is an iteration counter. As a result of the linearization process of the non-linear constitutive model we get for every iteration k an incremental stress-strain relationship of the form

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}(\mathbf{x})) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(k+1)}(\mathbf{x}) \tag{8}$$

which can be used in equation (7₅). The algorithmic tangent moduli $\mathbf{E}_{\mathbf{T}}$ are computed at every Gauss-point for each finite element. The derivation of the algorithmic tangent moduli $\mathbf{E}_{\mathbf{T}}$ is discussed in the literature [19-21].

For the finite element approximation of the increments at time step $(n+1)$ and iteration $(k+1)$ we choose the following discrete fields:

$$\Delta \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}d\mathbf{q}, \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}d\boldsymbol{\alpha}, \quad \Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}d\boldsymbol{\beta}, \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^i = \mathbf{B}^i d\boldsymbol{\lambda} \tag{9}$$

where $d\mathbf{q}$ is the increment of nodal displacements of the finite element under consideration. Note the iteration counter $(k+1)$ and the load step indicator $(n+1)$ are omitted in the definition of the incremental fields (9). At the element level we get the following system of equations

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{H} & \mathbf{L} & \mathbf{L}^i \\ -\mathbf{H}^T & \mathbf{H}_{\mathbf{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}^{iT} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\beta} \\ d\boldsymbol{\alpha} \\ d\mathbf{q} \\ d\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\text{ext}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^{(k+1)} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_{\text{int}} \\ \mathbf{f}_{\text{int}}^i \end{bmatrix}^{(k)} \tag{10}$$

where

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_{\mathbf{T}} &= \int_{\mathbf{v}} \mathbf{A}^T \mathbf{E}_{\mathbf{T}} \mathbf{A} \, dV, \\
 \mathbf{H} &= \int_{\mathbf{v}} \mathbf{P}^T \mathbf{A} \, dV, \\
 \mathbf{L} &= \int_{\mathbf{v}} \mathbf{P}^T \mathbf{B} \, dV
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\mathbf{L}^i = \int_{\hat{V}} \mathbf{P}^T \mathbf{B}^i dV, \quad (12)$$

$$\mathbf{f}_{\text{ext}} = \int_{\hat{V}} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}} dV + \int_{\hat{S}} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{T}} dS$$

The element equations for the k-th iteration are now written in the form

$$\mathbf{k}_T^{(k)} d\mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} \quad (13)$$

where

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{f}_{\text{ext}}^{(k+1)} - \left[\mathbf{f}_{\text{int}} - \Gamma_T^T \mathbf{Q}_T^{-1} \mathbf{f}_{\text{int}}^i \right]^{(k)}. \quad (14)$$

The element stiffness matrix can be written in the form

$$\mathbf{k}_T = \mathbf{K}_T - \Gamma_T^T \mathbf{Q}_T^{-1} \Gamma_T \quad (15)$$

where

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{L}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}_T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L},$$

$$\Gamma_T = \mathbf{L}^i{}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}_T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L}, \quad (16)$$

$$\mathbf{Q}_T = \mathbf{L}^i{}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}_T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{L}^i$$

For the residual vectors we get

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = \int_{\hat{V}} \mathbf{B}^T \sigma_{n+1}^{(k)} dV,$$

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^i = \int_{\hat{V}} \mathbf{B}^i{}^T \sigma_{n+1}^{(k)} dV. \quad (17)$$

3. Numerical examples

Several linear and non-linear problems have been chosen in order to test the performance of the proposed four-node element with two enhanced strain modes. The results are compared with analytical solutions and with results obtained from three other elements. Here only two examples are considered briefly. More details on numerical examples for the new element QE2 can be found in reference [5]. All elements in the comparison are implemented in the non-linear finite element program FEAP [7].

3.1 Mesh distortion test for beam bending

This test examples is taken from reference [4]. In this test a beam under bending is analyzed with only two plane stress elements . The degree of distortion of the element is measured with the distortion parameter Δ ($\Delta = 0$: we have two rectangular elements; $\Delta = 5$: we have two triangular elements). From Table 2 we can see that the element QE2 shows the least sensitivity to mesh distortion even for very severe distortions.

Table 2: Displacement v_A of cantilever beam for different values of the mesh distortion parameter Δ

displacement v_A					
Δ	Q4	QM6	P-S	QE2	Exact
0	28.0	100.0	100.0	100.0	100
0.5	21.0	80.9	81.0	81.2	100
1	14.1	62.7	62.9	63.4	100
2	9.7	54.4	55.0	56.5	100
3	8.3	53.6	54.7	57.5	100
4	7.2	51.2	53.1	57.9	100
4.9	6.2	46.8	49.8	56.9	100

3.2 Elasto-plastic analysis of a tension strip

One quarter of a tension strip with a circular hole is analyzed using two finite element meshes (one with 133 elements, the other one with 270 elements). The material properties are specified as

$$E = 7000, \nu = 0.2, \sigma_y^0 = 24.3, H_{\text{iso}} = H_{\text{kin}} = 0$$

and the J_2 - flow assumption is used. The loading of the tension strip is applied by prescribing the displacements at the top of the meshes. The results for the two meshes and the different elements are close to each other so that the chosen discretization can be considered sufficient fine to achieve a converged solution. In Table 3 the energy convergence rate of the elements QM6 and QE2 are compared. It was observed in the example that the proposed element is able to provide convergence in the Newton algorithm with less or equal iterations the QM6 element requires to converge.

Table 3: Global Newton iteration energy convergence for elements QM6 and QE2 (mesh with 133 elements).

iteration	load step					
	2		3		5	
	$(\bar{u} = 0.04)$		$(\bar{u} = 0.05)$		$(\bar{u} = 0.07)$	
	QM6	QE2	QM6	QE2	QM6	QE2
1	4.703e+00	4.702e+00	4.734e+00	4.734e+00	4.928e+00	4.923e+00
2	4.208e-03	4.400e-03	6.547e-03	6.038e-03	5.075e-03	3.248e-03
3	9.757e-05	5.242e-05	1.225e-04	4.312e-05	6.439e-04	1.923e-05
4	6.304e-08	1.224e-08	6.384e-07	4.143e-09	1.307e-04	8.676e-11
5	1.858e-14	2.495e-16	5.072e-13	3.069e-17	2.309e-07	1.158e-19
6	5.595e-27		8.283e-24		4.600e-12	
7					2.613e-21	

4. Remarks on enhanced triangular elements

Currently enhanced triangular elements with different enhanced strain terms are tested in a series of examples. For coarse meshes significant differences have been observed for the use of different enhanced strain fields. The choice of appropriate enhanced strain fields for triangular elements will be discussed in a subsequent publication.

ACKNOWLEDGEMENTS

I would like to thank my teacher Professor H. Waller for leading me into the field of computational mechanics and for his encouragement to look at complex variable formulations in a non-traditional way under the aspect of numerical applications. Especially I like to thank Prof. Waller for many valuable discussions.

REFERENCES

- [1] E.L. Wilson, R.L. Taylor, W.P.Doherty and J. Ghaboussi, "Incompatible displacement models", in: Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics (Ed. S.J. Fenves, et al.) Academic Press, New York, 1973, p.43
- [2] R.L. Taylor, P.J. Beresford and E.L. Wilson, "A non-conforming element for stress analysis", Int. J. Numer. Meth. Eng., 10, 1211 - 1219, (1976).

- [3] J.C. Simo and M.S. Rifai, "A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 29, 1595 - 1638, (1990).
- [4] T.H.H. Pian and K. Sumihara, "Rational approach for assumed stress elements", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 20, 1685 - 1695, (1984).
- [5] R. Piltner and R.L. Taylor, "A quadrilateral mixed finite element with two enhanced strain modes", *Int. J. Num. Methods Eng.*, accepted for publication.
- [6] Muskhelishvili, N.I. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Groningen, Holland, 1953.
- [7] O.C. Zienkiewicz, and R.L. Taylor, "The Finite Element Method", McGraw-Hill, London, New York, Volume 1: 1989, Volume 2: 1991.
- [8] R. Piltner, "Special finite elements with holes and internal cracks", *Int. J. Num. Methods Eng.*, 21, 1471 - 1485 (1985)
- [9] R. Piltner, "A quadrilateral hybrid-Trefftz plate bending element for the inclusion of warping based on a three-dimensional plate formulation", *Int. J. Num. Methods Eng.*, 33, 387 - 408 (1992)
- [10] R. Piltner, "The derivation of a thick and thin plate formulation without ad hoc assumptions", *Journal of Elasticity*, 29, 133 - 173 (1992)
- [11] R. Piltner, "Three-dimensional stress and displacement representations for plate problems", *Mechanics Research Communications*, 18 (1), 41 - 49 (1991)
- [12] R. Piltner, "On the representation of three-dimensional elasticity solutions with the aid of complex valued functions", *Journal of Elasticity*, 22, 45 - 55 (1989)
- [13] R. Piltner, "The representation of three-dimensional elastic displacement fields with the aid of complex valued functions for several curvilinear coordinates", *Mechanics Research Communications*, 15 (2), 79 - 85 (1988)
- [14] R. Piltner, "The application of a complex 3-dimensional elasticity solution representation for the analysis of a thick rectangular plate", *Acta Mechanica*, 75, 77 - 91, (1988).
- [15] R. Piltner, "The use of complex valued functions for the solution of three-dimensional elasticity problems", *Journal of Elasticity*, 18, 191 - 225 (1987)
- [16] R. Piltner, "Trefftz-type boundary elements for the evaluation of symmetric coefficient matrices", *Computational Mechanics*, 15, 137 - 160, (1994).
- [17] R. Piltner and R.L. Taylor, "A boundary element algorithm using compatible boundary displacements and tractions", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 29, 1323 - 1341 (1990)
- [18] R. Piltner and R.L. Taylor, "The solution of plate bending problems with the aid of a boundary element algorithm based on singular complex functions", pp. 437 - 445 in: *Proceedings of the 12th International Conference on Boundary Element Methods in Engineering*, Hokkaido University, Sapporo, Japan, September 1990: *Advances in Boundary Elements*, Vol. 1: Application in Stress Analysis, Potential and Diffusion, (Editors: M. Tanaka/ C.A. Brebbia/ T. Honma), Springer, Heidelberg, 1990
- [19] J.C. Simo and R.L. Taylor, "Consistent tangent operators for rate-independent elasto-plasticity", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 48, 101 - 118, (1985).
- [20] J.C. Simo, J.G. Kennedy and R.L. Taylor, "Complementary mixed finite element formulations for elasto-plasticity", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 74, 177 - 206, (1989).
- [21] J.C. Simo and R.L. Taylor, "A return mapping algorithm for plane stress elasto-plasticity", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 22, 649 - 670, (1986).

Die Identifikation nichtlinearer Systeme

Renker G. u. Zhang M.

Der Aufsatz beschäftigt sich mit einigen Aspekten der Modellbildung im Rahmen der Systemidentifikation und diskutiert einen Ansatz zur Identifikation nichtlinearer Systeme. Die Anwendung der Methode wird anhand eines einfachen simulierten Systems veranschaulicht.

In den letzten Jahren werden in zunehmendem Maße sowohl in der Mechanik wie auch in anderen Wissenschaften rein lineare, deterministische Erklärungsmodelle für viele Problemstellungen als nicht mehr ausreichend empfunden. Der wirkungsvolle Apparat, der durch die Verbindung von Computertechnik und Algorithmen der linearen Algebra geschaffen wurde und der Wissenschaft, beginnend vor etwa 40 Jahren, völlig neue Möglichkeiten, vor allem der Simulation, eröffnete, ist mittlerweile im "Anwendungsalltag" etabliert und bietet nicht mehr das überragende Innovationspotential. Ein vermutlich besonders durch die Ökologiediskussion gestärktes Bewußtsein, daß zwischen vielen der in der Natur beobachteten Phänomenen, die gewöhnlich isoliert betrachtet wurden, nicht vernachlässigbare Kopplungen existieren, wodurch die einzeln wahrgenommenen Objekte einen gemeinsamen Wirkmechanismus bilden, der als komplexes System mit oftmals nichtlinearem dynamischem Verhalten beschrieben werden kann, hat auch den Bedarf an einer Erweiterung adäquater Beschreibungs- und Erklärungsmodelle sowie des entsprechenden methodischen Instrumentariums geweckt.

Einer übergroßen Komplexität, der sich ja auch die Systemidentifikation angesichts der häufig verwickelten Zusammenhänge in den zu analysierenden Systemen der realen Welt gegenüber sieht, wird bei der Entwicklung von Problemlösungsansätzen und Beschreibungsmodellen mit unterschiedlichen Strategien begegnet [s. dazu auch Dörner]. Eine häufig erfolgreich angewendete Lösungsstrategie der "Modularisierung" bedient sich der Variation und Neudefinition von Systemgrenzen. Ein Gebilde, das bereits als System wahrgenommen wurde, wird komplexitätsmindernd in mehrere, der Beschreibung und möglichst auch der Typisierung besser zugängliche Teilsysteme aufgeteilt, die zunächst eine neue Sicht auf das System gestatten und dann, ihren spezifischen Eigenschaften gemäß, optimal modelliert werden können.

Die "reduktionistische" Strategie hat stets die Operationalisierbarkeit eines Ansatzes im Blick und versucht, oftmals unter Hinnahme weitreichender Simplifizierungen, beobachtete Phänomene stark idealisiert in einfachen Modellen abzubilden, d.h. die Komplexität durch eine Reduktion in der Abbildung zu verringern oder zu vermeiden. Beispiele in der Mechanik, von denen sich viele nennen ließen, sind die "Strukturdämpfung" oder der "linear-idealplastische Werkstoff". Diese pragmatische Vorgehensweise steht oftmals am Anfang einer Analyse, um zunächst grundlegende Vorstellungen von einem System oder einem Prozeß zu entwickeln, sowie am Ende, wenn handhabbare Beschreibungsformen für die technische Anwendung entwickelt werden sollen und ausreichende Erkenntnisse vorliegen, um die Voraussetzungen und Gültigkeitsgrenzen eines einfachen Modells sicher beurteilen zu können.

Eine "formalistische" Strategie sieht dagegen die Anwendbarkeit einer Methode auf konkrete Problemstellungen der physischen Welt bestenfalls als Fernziel. Bestimmend ist die Distanzierung von der aufgrund vieler Spezialfälle komplex erscheinenden Realität durch eine möglichst umfassende Abstraktion. Damit wird zum weiteren Gegenstand der Betrachtung weniger das reale System als dessen Abbild in einem, im allerdings anderen Sinn, durchaus ebenfalls komplexen und anspruchsvollen Formalmodell. Der darin liegenden, aufgrund der methodischen Notwendigkeit zur Abstraktion immanenten Gefahr der Verselbständigung eines theoretischen Ansatzes wird seit je im Modellierungsprozeß, sofern möglich, durch empirische Rückkopplungen zu begegnen versucht.

Wissen über ein System -das Ziel der Systemidentifikation- bedeutet, seine Struktur zu kennen, die konkreten Ausprägungen der strukturbestimmenden Parameter und, falls das zukünftige Systemverhalten prognostiziert werden soll, die jeweiligen Zustände des Systems und der an den Schnittstellen zur Umwelt einwirkenden Einflußgrößen. Wissen über ein System entsteht demnach grundsätzlich durch die Kombination von Strukturwissen und spezifischer, aktueller Information. Auf Informationsgewinn zielt die Strategie einer möglichst umfassenden Datensammlung und -verarbeitung in Versuchen und Messungen unter Einbeziehung statistischer Methoden zur Beherrschung der Zufallseigenschaften der Beobachtungswerte und der Um-

welteinflüsse. Mit Anwendung heuristischer Methoden zur Interpretation der Information gelingt die Gewinnung von neuem Strukturwissen.

Einige grundsätzliche, für die Erfolgsaussichten der Systemidentifikation wichtige Fragen werden damit allerdings aufgeworfen, die bislang noch nicht befriedigend beantwortet werden können: In welchem Umfang kann mit den verfügbaren Mitteln überhaupt Wissen über ein System gewonnen werden, bleiben wichtige und für eine realistische Beschreibung unentbehrliche Informationen eventuell nicht erfassbar? Die Unbestimmtheit von Eigenschaften eines technischen Systems wird gemeinhin in Kauf genommen, solange die Funktionalität nicht beeinträchtigt ist. Für eine verbesserte Systemkenntnis, etwa zur Verbesserung von Prognosen, ist aber oft eine genauere Kenntnis der sonst vernachlässigten Eigenschaften erforderlich.

Weiter ist zu fragen, ob der Grad des Wissens über ein System quantifizierbar ist. Soweit die Unschärfe aus der Zufälligkeit der Beobachtungswerte herrührt, wird die Frage von der Probabilistik beantwortet. Der Frage nach der Bestimmtheit der Zustandsgrößen eines Systems wird durch die Theorie der Beobachtbarkeit beantwortet. Entsprechende Aussagen zum Wissen über Struktureigenschaften eines realen Systems können, bis auf wenige Ausnahmen [Ljung], allerdings nicht getroffen werden. Ob das Wissen ausreichend ist, muß nach wie vor durch sorgfältige Wertung quantitativer Indikatoren wie der Übereinstimmung von Beobachtungsgrößen und Berechnungsgrößen innerhalb eines begrenzten Zeitausschnitts und innerhalb eines definierten Wertebereichs der Zustandsgrößen in Verbindung mit Plausibilitätsprüfungen beurteilt werden.

Offensichtlich muß die Entwicklung einer Methode zur Systemidentifikation die skizzierten Ansätze erfolgreich zu verbinden suchen. Sie sollte aber vor allem auch, davon hängt ihr Nutzwert entscheidend ab, auf eine möglichst große Klasse realer Systeme anwendbar sein, falls sie nicht als eine reine Labormethode gedacht ist. Der Unterschied zwischen realen Systemen und Versuchsaufbauten im Labor liegt aus Sicht der Identifikation insbesondere darin, daß bei den wirklichen technischen Systemen

- die Systemanregung aufgrund der Systemgröße und begrenzter aufzubringender Erregungsenergie (Autobahnbrücke) oder bestimmter Betriebsbedingungen (Kraftwerksturbine) nicht frei wählbar ist und vorgefundene Anregungen akzeptiert werden müssen (weißes oder farbiges Rauschen, periodische Erregung, etc.)
- die Beobachtungsmöglichkeiten begrenzt sind, sowohl was die Meßorte betrifft als auch die Meßgrößen (Beschleunigungen, Dehnungen, etc.),
- die Meßgrößen Zufallsgrößen sind, also unter Umständen lange Beobachtungszeiträume erforderlich sind und statistische Signalanalysemethoden und Filterungen angewendet werden müssen,
- die Systemgrenzen nicht immer eindeutig bestimmt werden können (Anbauten, Untergrund, Flüssigkeitsfüllungen oder -umgebung, etc.)
- die Anzahl der zu berücksichtigenden Freiheitsgrade sehr groß sein kann.

Es sollte auch immer bedacht werden, daß es nicht das "objektiv richtige" Modell zur Beschreibung eines konkreten Systems gibt, sondern daß jedes Modell nach dem jeweils verfolgten Zweck ausgerichtet wird. Beispielsweise ist zu unterscheiden, ob ein Modell in größtmöglichem Umfang Aufschluß über den inneren Aufbau eines Systems liefern soll oder lediglich eine im jeweiligen Kontext ausreichend gute Beschreibung seines Verhaltens.

Etliche Identifikationsmethoden, wobei hier vorausgesetzt werden soll, daß sie auf Systeme mit nichtlinearen Eigenschaften angewendet werden, setzen neben der grundsätzlichen Strukturannahme praktisch kein weiteres Wissen über ein System voraus, so beispielsweise die auf Regressionsmodellen basierenden Methoden oder viele Frequenzbereichsverfahren. Ihr Vorteil liegt natürlich in der vielseitigen Anwendbarkeit, die durch spezifische Ausprägungen eines Systems, soweit sie generell im Gültigkeitsbereich des Modellansatzes liegen, nicht eingeschränkt wird. Die physikalischen Ursachen der zu untersuchenden Phänomene bleiben aber im dunkeln. Die Modelle können im Rahmen einer Untersuchung nichtlinearer Phänomene zweckmäßig in der -vielleicht wichtigsten- Vorstufe zu einer wirklichkeitsnäheren Modellbildung eingesetzt werden, um aus den mit einem kontrollierten Amplitudenniveau oder definierten Systemerregungen korrespondierenden "linearen" Parametern auf den generellen Typ einer Nichtlinearität zu schließen ("Über-/Unterlinearität", "Reibungsdämpfung", etc.), d.h. im Sinne

einer Mustererkennung Ähnlichkeiten in den Beobachtungen zu detektieren und in Beziehung zu den vorherrschenden Bedingungen zu setzen.

Von einem System ist aber in der Regel auch ohne Messungen immer etwas bekannt, bei mechanischen Systemen beispielsweise die Massenverhältnisse sowie bei kleinen Amplituden in Annäherung auch die Steifigkeiten. Wenn auf die Einbringung des vorhandenen Wissens in das Modell verzichtet wird, muß diese Informationen aus den Meßwerten mitgewonnen werden, über das hinaus, was tatsächlich unbekannt ist. Im mathematischen Modell der Identifikation schlägt sich das dann in einer erheblich größeren Zahl zu schätzender Parameter und einer entsprechend verminderten "Trennschärfe" in der Schätzung und damit unter anderem der Stabilität des Schätzalgorithmus aus [Ljung].

Von der großen Zahl von Freiheitsgraden einer mechanische Struktur, bei diskreter Betrachtung, kann in der Regel nur ein kleiner Teil beobachtet (gemessen) werden. Die zu untersuchenden physikalischen Mechanismen müssen -entsprechend der Ortsabhängigkeit von Feldgrößen bei kontinuierlicher Beschreibung- aber generell als von allen Freiheitsgraden abgänglich angenommen werden, weil eine globale Modellierung, in der auf diese Abhängigkeit verzichtet werden könnte, nur jeweils für einen speziellen Last- und Verformungszustand gilt (Beispiel sind Schwingungsversuche im Labor unter harmonischer Erregung). Man denke beispielsweise auch an einen Haarriß in einer Turbinenwelle, der sich möglicherweise bei der Schwingung in einigen Moden nicht spürbar auswirkt, weil dort die Biegeverformung an der Stelle des Risses sehr gering ist, in anderen Moden wiederum sehr deutlich die Eigenfrequenz verändert. Die Identifikation einer Turbine, einer Brücke, usw. erfordert also implizit neben der Schätzung der Parameter auch die der nicht gemessenen oder nicht beobachtbaren Freiheitsgrade, bzw. Zustandsgrößen. Dazu können Beobachter oder Schätzfilter (Kalman-Filter) verwendet werden [Brammer/Siffling].

Unter bestimmten Bedingungen genügt aber auch eine Beschreibung in Modalkoordinaten, weil mit Kenntnis der modalen Zustandsgrößen nahezu jede physikalische Größe mit guter Genauigkeit abgeleitet werden kann. Die Einschränkung ist zu treffen, weil nur eine Teilmenge der Modalgrößen zur Beschreibung verwendet werden kann. Gelegentlich wird die Zahl schon auf-

grund der zeitdiskreten Abtastung der Meßgrößen und der damit einhergehenden Beschränkung des nutzbaren Frequenzbandes bestimmt; d.h. die Moden mit Eigenfrequenzen oberhalb der Shannonfrequenz scheiden ohnehin aus. Wenn die Systemanregung genügend niederfrequent ist, bzw. die höherfrequenten Systemantwortanteile einer breitbandigen Anregung (Impulserregung) abgeklungen sind, ist die Beschreibung mittels einer relativ geringen Zahl von Modalgrößen oft absolut ausreichend. Die damit erzielte Reduktion der Freiheitsgrade gestattet dann möglicherweise erst überhaupt die zur Messung synchrone Simulation des Systems mittels eines numerischen Modells. Für nichtlineare Systeme ist die Wahl dieser Beschreibungsbasis auch zulässig, wenn sorgfältig darauf geachtet wird, daß die Frequenzeinschränkung und die gewählte reduzierte Modalbasis im gesamten verwendeten Zeitbereich gültig sind, damit keine unerwünschten Filtereffekte auftreten und die physikalischen Zustandsgrößen stets ohne Informationsverlust auf die Modalgrößen abgebildet werden.

Die wichtigsten Forderungen an eine Identifikationsmethode noch einmal zusammengefaßt:

- Einbringung von A-Priori-Wissen in größtmöglichem Umfang
- Simultane Schätzung von Parameter- und Zustandsgrößen
- Physikalisch korrekte Beschreibung der Wirkungsmechanismen
- Informationsgewinn aus realen, d.h. "verrauschten" Meßwerten
- Keine einschränkenden Bedingungen für die Systemerregung
- Beliebig lange Beobachtungszeiträume
- Keine Beschränkung auf bestimmte physikalische Meßgrößen

Bei der Entwicklung der nachfolgend kurz beschriebenen Methode des Rückführungsmodells (ausführliche Beschreibung s. [Renker 1989]) bestand die Zielsetzung in der Erfüllung dieser Anforderungen, auch wenn sie nicht alle in gleicher Güte befriedigen kann. Wichtiges Merkmal ist die Beschreibung durch zwei Teilmodelle M_1 und M_2 , von denen M_1 den bekannten Teil eines Systems repräsentiert und M_2 die in den Parametern unbekanntem Anteil. M_2 wird von den Ausgangsgrößen (Zustandsgrößen) des bekannten Teilmodells gesteuert, und liefert selbst wiederum mit seinen Ausgangsgrößen Steueranteile für M_1 . Damit kann beispielsweise der lineare Teil, der aus dem Verhalten bei kleinen Amplitude bekannt ist, beliebig fein (FEM-

Modell), ohne aus dem Schätzalgorithmus herrührende Restriktionen, modelliert werden. M_1 kann auch empirisch (experimentelle Modalanalyse) ermittelt sein. Die Zustandsgrößen können bei transienten Schwingungen durch das Mitschätzen der modalen Anfangswerte bestimmt werden (die Zahl der physikalischen Anfangswerte wäre für eine Schätzung viel zu groß) oder bei stochastischer, bzw. bekannter periodischer Erregung durch ein Schätzfilter. Für die physikalisch korrekte Modellierung existieren aufgrund der Herauslösung von M_2 keine Einschränkungen. Der rekursive Algorithmus gestattet die Wahl der Zeiträume nach der Qualität der Beobachtungswerte. Als Beobachtungswerte können im Prinzip alle mechanischen Größen benutzt werden. Auf die Herleitung der Formeln wird hier verzichtet, das Modell und die wichtigsten Schritte des Schätzalgorithmus sind in Abb. 1 in einem Blockschaltbild dargestellt.

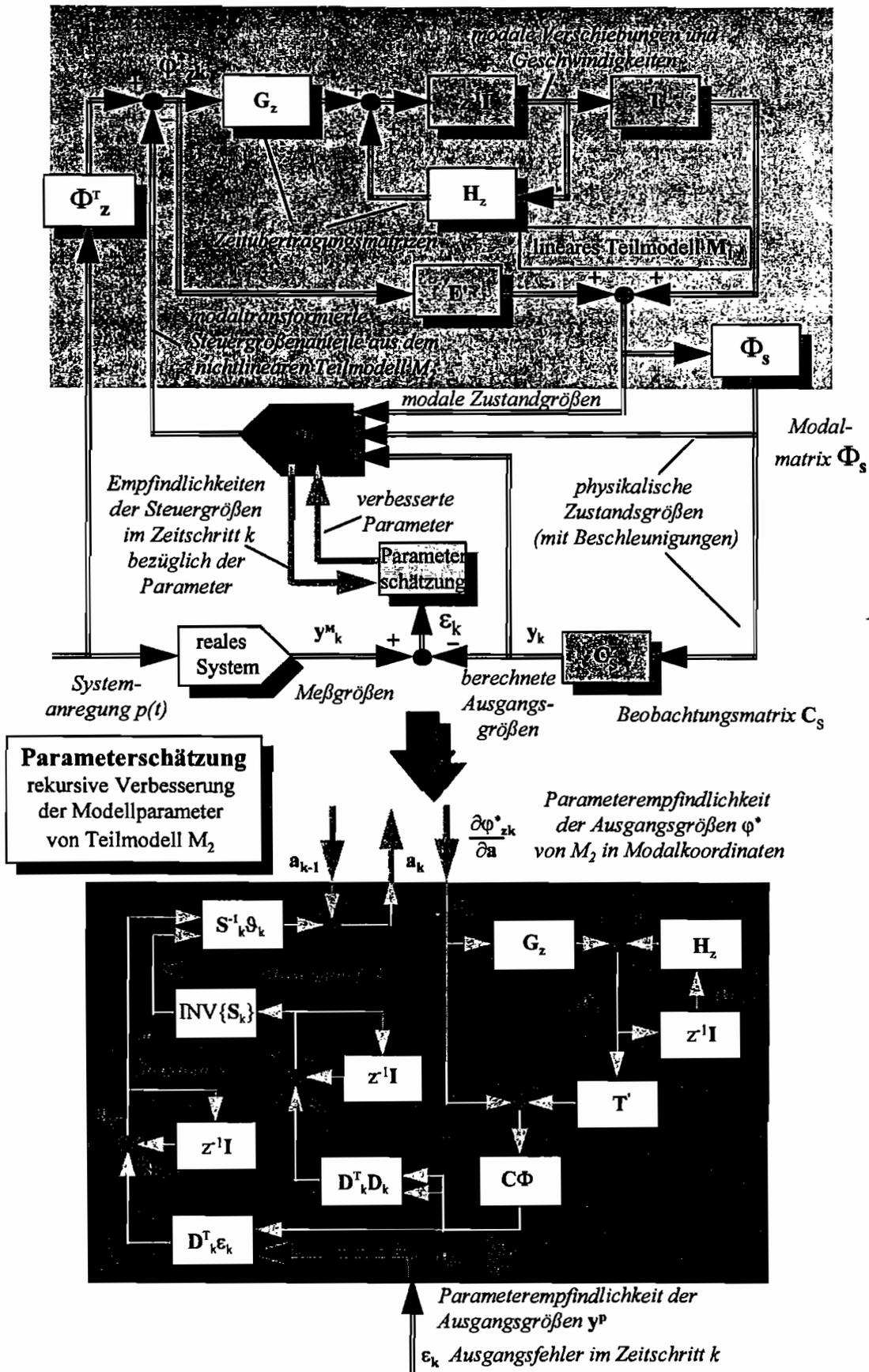


Abbildung 1: Blockschaltbild von Rückführungsmodell und rekursivem Schätzalgorithmus (ohne Zustandsschätzung)

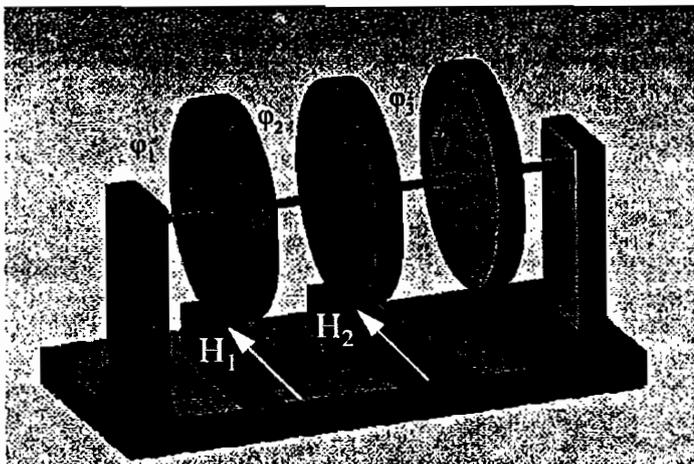
Anhand eines kleinen, leicht nachvollziehbaren Anwendungsbeispiels soll der Ablauf des Algorithmus erläutert werden. Das Beispiel wurde nicht wie üblich mit einem in einer 3. Generations-

	J	K	L	M	N	O	P	Q
4	Mode 2							
5					0,99985	-0,02399	5E-05	0,009998
6					0,009998	0,999504	-0,00163	-5E-05
7	0	1	-0,03197	0				
8	0,009996	0,999184	-0,03197	-3,7E-10				
9	0,019983	0,998069	-0,03197	1,31E-10				
10	0,029957	0,996654	-0,03197	2,89E-11				
11	0,039915	0,994942	-0,03197	1,32E-11				
12	0,049853	0,992933	-0,03197	2,03E-10				
13	0,059772	0,990623	-0,03197	-1,2E-10				
14	0,069666	0,988019	-0,03197	6,86E-11				
15	0,079532	0,98512	-0,03197	-3E-10				

Abbildung 2: Zeitverlaufsberechnung mit einem Tabellenkalkulationsprogramm

onssprache geschriebenen Programm gerechnet, sondern mit dem verbreiteten Tabellenkalkulationsprogramm MS Excel, unter weitestgehender Verwendung der Standardoperationen (Abb. 2). Die Tabellenkalkulation unterstützt neben Zellenformeln Bereichsoperationen (Matrizen) unter mehrfacher Ausrechnung von Zirkelbezügen, wodurch auch die Abbildung nichtlinearer Beziehungen möglich ist.

Ein Torsionsschwinger mit 3 Massen, der sowohl viskos ("modal") als auch durch 2 Reibungskräfte gedämpft ist (Abb. 3), schwingt nach einer Impulserregung aus. Angenommen wurde, daß die Messung mit und ohne Haftkräfte durchgeführt werden konnte und die Parameter des linearen Modells mit einem linearen Verfahren (Regressionsverfahren) exakt ermittelt wurden, so daß im zweiten Schritt nur die Reibungskräfte geschätzt werden müssen. Verwendet wurden dazu 200 mit Rauschen behaftete Meßwerte der Drehgeschwindigkeit am Freiheitsgrad 2.



Steifigkeitsmatrix:			
3	0	0	0
-1	2	0	-1
0	-1	3	0
Massenmatrix:			
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	1

Modale Dämpfung

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1 \%$$

$$\text{Haftkräfte } H_1 = H_2 = 0,075$$

(konsistentes Einheitensystem)

Abbildung 3: Reibungsgedämpfter Schwinger

Wie aus dem Blockschaltbild ersichtlich, muß in jedem Zeitschritt k iterativ, wegen der in M_2 modellierten Reibkräfte, eine Ausgangsgröße φ_{2k} berechnet werden. Daraus wird durch Subtraktion vom zeitgleichen Meßwert der Fehler ε_k berechnet, der die Parameterschätzung steuert und dazu mit dem ebenfalls für diesen Zeitschritt berechneten Fehlergradienten multipliziert wird. Der Gradient \mathfrak{S}_k und die Hessematrix S_k werden rekursiv aus der Empfindlichkeitsmatrix D_k der Ausgangsgrößen nach den Parametern \mathbf{a} von M_2 berechnet. Das Blockschaltbild zeigt auch, auf welche Weise die Empfindlichkeitsmatrix in jedem Zeitschritt berechnet wird: Zunächst wird, weil der nichtlineare Mechanismus in physikalischen Koordinaten beschrieben ist, die Empfindlichkeit der Ausgangsgröße von M_2 durch partielles Differenzieren nach dem Parameter \mathbf{a} berechnet, im Beispiel besitzt die resultierende Matrix, wegen nur einer Ausgangsgröße und zwei Parametern, die Elemente $-\text{sign}(\varphi_{1k}^*)$ und $-\text{sign}(\varphi_{2k}^*)$. Diese Empfindlichkeit wird modal transformiert und ist dann eine der Eingangsgrößen für den unteren Block in Abb. 1. Hier werden die Empfindlichkeiten und ihre zeitlichen Ableitungen analog zur Berechnung der modalen Verschiebungen und Geschwindigkeiten mit den Zeitübertragungsmatrizen H_2 und G_2 multipliziert. Die Multiplikation mit Beobachtungsmatrix C und Modalmatrix Φ transformiert sie auf die Beobachtungsgrößen.

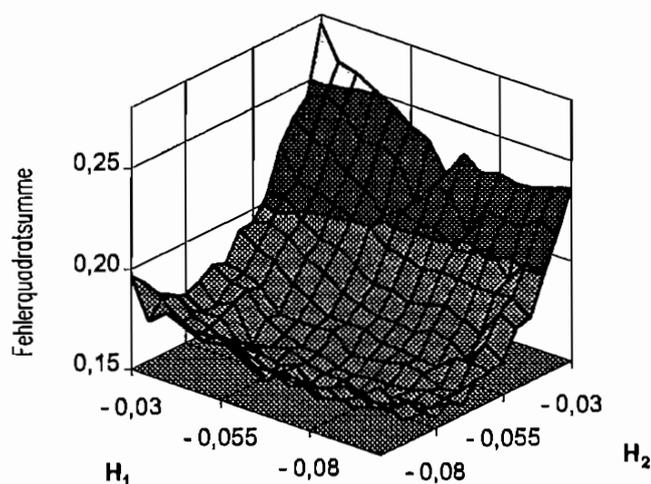


Abbildung 4: Abhängigkeit der Fehlerfunktion von den Parametern H_1 und H_2

Mit dieser Matrix D_k wird wie oben beschrieben weitergerechnet um das lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Parameterverbesserung Δa zu bestimmen. Man löst das Gleichungssystem aus Rechenzeitgründen sinnvollerweise nicht, wie Abb. 1 nahelegt, in jedem Zeitschritt, sondern dann, wenn keine wesentliche Veränderung der Hessematrix mehr erkennbar ist, an-

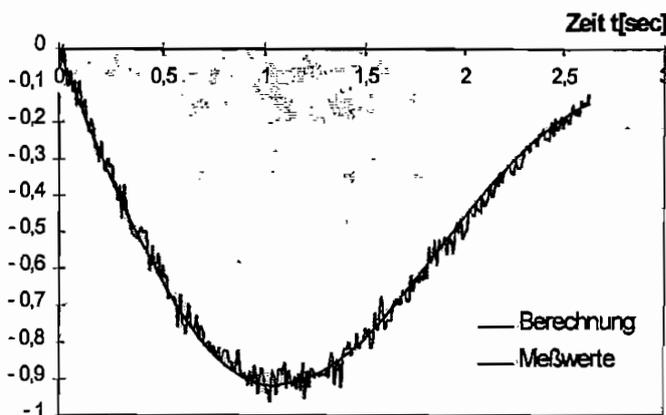


Abbildung 5: Meß- und Simulationswerte. Meßwerte mit normalverteiltem Rauschen behaftet: $\sigma=0,025$, $\mu=0$.

schließend mit dem verbesserten Parameter neu aufgesetzt.

Die Abbildung 4 zeigt in räumlicher Darstellung die Abhängigkeit des Ausgangsfehlers von den Reibungskräften H_1 und H_2 .

Die Rauigkeit der Fehlerfläche ist eine Folge des die "exakten" Meßwerte über-

lagernden Rauschsignals (s. Abb. 5). Die Abhängigkeit des Fehlers von der Kraft H_2 ist, wie angesichts der unterschiedlich großen Amplituden an den Punkten 1 und 2 zu erwarten ist, wesentlich stärker ausgeprägt als die Abhängigkeit von H_1 . In Abb. 6, die den Verlauf des Fehlers und der Parameter in aufeinanderfolgenden Schätzungen zeigt, drückt sich die unterschiedliche Empfindlichkeit in einer deutlich größeren Schwankung des Wertes von H_1 aus. Aus dem Fehlerverlauf ist zu erkennen, daß bereits nach 3 Iterationsschritten keine weitere Verbesserung mehr erzielbar ist und die Parameterschätzungen um die exakten Werte oszillieren. Die Schätzung konvergiert, worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll, mit einer Meßwertanzahl von 50 Werten bereits nicht mehr, weil der verbleibende Informationsgehalt nicht ausreicht, den Parametereinfluß vom Rauschsignal zu unterscheiden.

Um abschließend noch einmal die oben genannten Forderungen an eine Identifikationsmethode zu überprüfen: Das A-Priori-Wissen wurde in Form der zuvor linear identifizierten Massen- und Steifigkeitsmatrix sowie den viskosen Dämpfungswerten eingebracht, die Zustandsgrößen über die Anpassung der modalen Anfangswerte geschätzt, der Reibungsmechanismus physikalisch

korrekt modelliert und die Schätzung mit stark verrauschten Meßwerten durchgeführt. Auf die hier nicht aufgeführten Punkte konnte in diesem kleinen Beispiel nicht eingegangen werden, sie sind aber prinzipiell ebenso erfüllbar. Die aufgezeigten Grenzen und Voraussetzungen des Modells müssen aber wie bei allen Identifikationsmethoden in jedem Einzelfall kritisch geprüft werden.

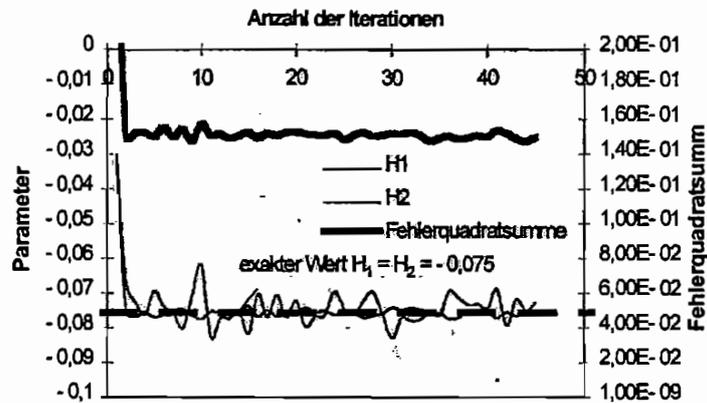


Abbildung 6: Verlauf des Ausgangsfehlers und Veränderung der Schätzwerte in Abhängigkeit von der Anzahl der Iterationen

Literatur

Karl Brammer und Gerhard Siffing: Kalman-Bucy-Filter, deterministische Beobachtung und stochastische Filterung. R.Oldenbourg München 1985.

Dietrich Dörner: Die Logik des Mißlingens, strategisches Denken in komplexen Situationen. Rowohlt Hamburg 1989.

James Gleick: Chaos - die Ordnung des Universum. Droemer München 1988

Lennart Ljung: System Identification. Prentice-Hall New Jersey 1987.

Günter Renker: Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme. Ruhr Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Nr. 68.1989

Heinz Waller und Reinhard Schmidt: Schwingungslehre für Ingenieure. BI Wissenschaftsverlag Mannheim Wien München 1989

Zhang Minquan: Zur Beschreibung und Identifikation von mechanischen Schwingungssystemen mit nichtlinearen Strukturdämpfungen. VDI-Fortschrittsberichte Reihe 11, Nr. 139, 1990.

Schwingungsüberwachung mit Zustandsbeobachtern

Reinhard Schmidt

Schwingungsmonitoringsysteme werden in vielen Bereichen eingesetzt, um den Zustand einer Maschine oder eines Bauwerkes zu überwachen. Das kann einerseits für die Qualität des Endproduktes von Bedeutung sein, z. B. bei Walzwerken, andererseits ist das Schwingungsverhalten ein empfindliches Kriterium, um den Verschleißzustand einer Maschine festzustellen oder um frühzeitig sich anbahnende Schäden zu erkennen. Heutzutage basieren Schwingungsüberwachungssysteme noch weitgehend auf einer reinen Meßwertverarbeitung, verbunden mit einer Beurteilung der Meßdaten anhand von Erfahrungswerten. Das theoretische Wissen über die Maschine oder das Bauwerk bleibt dabei unberücksichtigt, obwohl durch die umfangreichen Berechnungen der Konstruktion (FE-Analysen, theoretische Modalanalyse, etc.) viel Information über das zu erwartende dynamische Verhalten einer gesunden Maschine vorhanden ist. Nachfolgend wird ein Schwingungsüberwachungsverfahren beschrieben, bei dem auch das theoretische Wissen verwendet wird. Gerade in Anbetracht der Kostensituation - Rechenleistung fällt im Preis fällt, während Meßtechnik nicht billiger wird - kann es sinnvoll sein, aufwendige Meßtechnik durch eine intelligente Datenverarbeitung zu reduzieren.

1. Einleitung

Um die Funktionstüchtigkeit von Maschinen und Bauwerken zu gewährleisten, wird angestrebt, den Schwingungs- und Beanspruchungszustand an allen gefährdeten Stellen zu überwachen. Der vollständige Zustand eines Schwingungssystems läßt sich in der Regel nicht alleine aus Messungen bestimmen. Es ist meist nur ein kleiner Teil der Maschine zugänglich. Der Schwingungszustand des Rotors eines Kraftwerksturboatzes ist z.B. nur in der Nähe der Lager, aber nicht innerhalb der Gehäuse zu messen. Mit Hilfe von Zustandsbeobachtern ist es dagegen möglich, unter Verwendung von Messungen an den zugänglichen Stellen sowie eines mathematischen Modells sämtliche Verformungen und Beanspruchungen einer dynamisch belasteten Struktur zu bestimmen. Die nachfolgend beschriebenen Methoden lassen sich auf jede beliebige Struktur und Schwingungsart anwenden. Es muß dabei nur vorausgesetzt werden, daß die Struktur durch ein überwiegend lineares Modell zu beschreiben ist. Durch Verwendung der nachfolgend

beschriebenen 'modalen Beobachter' kann jedes FE-Modell, das z.B. bei der Konstruktion erstellt worden ist, verwendet werden.

Das Verfahren der Schätzung von unbekanntem, nicht meßbaren Zustandsgrößen mit Hilfe sogenannter 'Zustandsbeobachter' ist in den sechziger Jahren für regelungstechnische Aufgaben entwickelt worden. Aus der Regelungstechnik sind zahlreiche Verfahren bekannt, um 'Zustandsbeobachter' bei unterschiedlichsten Randbedingungen (große Störungen des Meßsignals, unbekannte Erregungskräfte, Parameterunsicherheiten des Rechenmodells, Adaption an Systemveränderungen, etc.) zu entwerfen. Beispiele der Anwendung von Zustandsbeobachtern reichen von der Steuerung chemischer Prozesse bis zur Regelung von Magnetlagern. Gemeinsam ist diesen Anwendungen, daß sich die Systeme durch Rechenmodelle mit wenigen Freiheitsgraden (üblicherweise 1-15) beschreiben lassen. Das Finite-Element-Modell einer größeren mechanischen Struktur enthält dagegen zwangsläufig eine große Anzahl von Freiheitsgraden (einige hundert). Eine Reduktion dieser großen Modelle auf wenige Freiheitsgrade ist mit Hilfe der Modalanalyse möglich.

2. Grundlagen der Anwendung von Zustandsbeobachtern

Mit 'Zustandsbeobachter' wird ein mathematischer Algorithmus bezeichnet, der unter Verwendung eines mathematischen Modells sowie von Meßdaten den kompletten Zustand eines dynamischen Systems schätzt. Nur ein oder einige wenige zugängliche Meßpunkte werden benötigt. Der Zustandsbeobachter liefert damit auch das dynamische Verhalten der unzugänglichen Stellen. Wie ein Beobachter arbeitet ist in Bild 1 dargestellt.

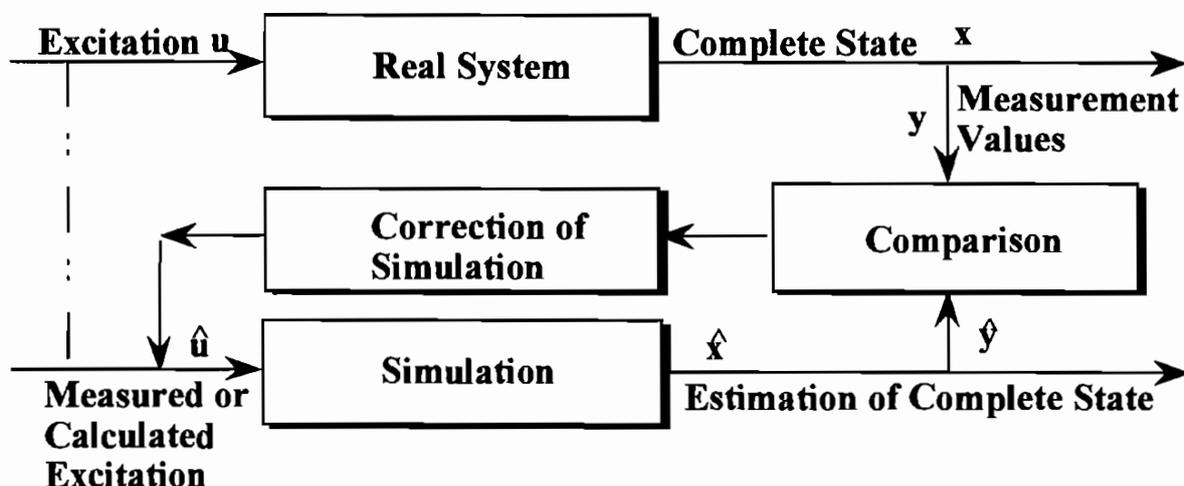


Bild 1 Zustandsbeobachter

Parallel zu dem realen System wird mit dem mathematischen Modell eine Simulationsrechnung durchgeführt. Die Simulation liefert den Meßwerten entsprechende

Daten. Der Beobachter vergleicht nun die Meßwerte mit den entsprechenden simulierten Werten und verwendet die Differenzen, um kontinuierlich die Simulationsrechnung zu korrigieren. Ein kontinuierlich anwachsender Fehler der Simulationsrechnung, z.B. verursacht durch Modellungenauigkeiten oder unbekannte Erregungskräfte, wird durch die ständige Anpassung der Beobachterschätzung an das reale System vermieden. Der Entwurf eines Beobachters besteht in der Wahl einer geeigneten Rückführungsmatrix H (s. Gl. 3), mit der die Eigenschaften eines Beobachters, z.B. Unempfindlichkeit gegen Meßrauschen, Modellungenauigkeiten oder unbekannte Erregungskräfte, vorgegeben werden können.

Ein Beobachter benötigt die Zustandsraumdarstellung des mathematischen Modells:

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{x}} + D\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} &= \mathbf{f}(t) \\ \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{0} \\ -M^{-1} \end{vmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \dot{\xi} &= \mathbf{A} \xi + \mathbf{B} u \end{aligned} \quad (1)$$

Die Meßmatrix C beschreibt die Beziehung zwischen den Meßwerten y und den Zustandsvariablen ξ .

$$y = C\xi$$

Die Beobachtergleichung lautet dann :

$$\dot{\xi} = A\hat{\xi} + Bu + H(y - C\hat{\xi}) \quad (3)$$

3. Modale Zustandsbeobachter

Im Gegensatz zu regelungstechnischen Modellen haben FE-Modelle mechanischer Strukturen eine ungleich größere Anzahl von Freiheitsgraden. Die Berücksichtigung aller Freiheitsgrade im Beobachter würde zu riesigen Rechenzeiten sowie zu numerischen Problemen führen. Echtzeitanwendungen wären damit unmöglich. 'Modale Beobachter' lösen dieses Problem. Wie in Bild 2 dargestellt, benutzt der 'Modale Beobachter' ein beliebiges FE-Modell und reduziert die Anzahl der Freiheitsgrade, indem das Modell modal transformiert wird. Der Beobachter benutzt dann nur die tatsächlich angeregten Eigenschwingungen. Die Modaltransformation wird für ein viskos gedämpftes System ausgeführt. Das ergibt komplexe Eigenwerte und -vektoren. Die komplexe Rechnung kann durch Verwendung der sogenannten modifizierten Modaltransformation vermieden werden.

Anstelle der konjugiert komplexen Paare von Eigenwerten und -formen werden jeweils Real- und Imaginärteil in einer Matrix nebeneinander geschrieben (s.Gl. 4)

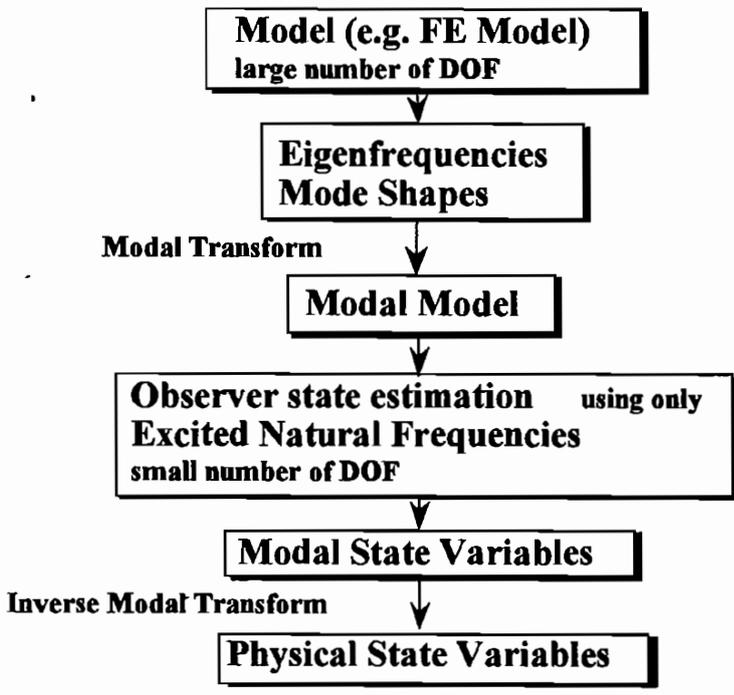


Bild 2 Modaler Beobachter

Mit den Eigenvektoren

$$\Phi = | \dots \Phi_{2i-1}, \Phi_{2i} \dots |$$

$$\Phi_{2i-1} = \alpha_i + j\beta_i \quad \Phi_{2i} = \alpha_i - j\beta_i$$

$$\Phi_{\text{mod}} = | \dots \alpha_i, \beta_i \dots |$$

$$(j = \sqrt{-1})$$

erhält man nach der Modaltransformation :

$$\mathbf{x} = \Phi_{\text{mod}} \mathbf{q}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \Lambda_{\text{mod}} \mathbf{q} + \mathbf{Z} \Phi_{\text{mod}}^T \begin{vmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{vmatrix} \mathbf{f}(t),$$

$$\mathbf{Z} = \text{diag} | \dots 2, -2, \dots |$$

$$\mathbf{0}_{ij} = 0 \tag{5}$$

Die Systemmatrix erhält damit die in Gl. 6 gezeigte Blockdiagonalform:

$$\lambda_{2i-} = \delta_i + j\omega_i, \quad \lambda_{2i} = \delta_i - j\omega_i$$

$$\Lambda_{\text{mod}} = \begin{vmatrix} \ddots & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \Lambda_i & \\ \mathbf{0} & & & \ddots \end{vmatrix}, \quad \Lambda_i = \begin{vmatrix} \delta_i & \omega_i \\ -\omega_i & \delta_i \end{vmatrix} \tag{6}$$

In Gleichung 5 wurde folgende Normierung der Eigenvektoren vorausgesetzt:

$$\phi^T \begin{vmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \phi = \mathbf{I} \quad \text{bzw. in modifizierter Modalform} \quad \mathbf{Z} \Phi_{\text{mod}}^T \begin{vmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{vmatrix} \Phi_{\text{mod}} = \mathbf{I} \tag{7}$$

Mit dieser Normierung erhält die Beobachtergleichung die Form:

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \Lambda_{\text{mod}} \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{Z} \Phi_{\text{mod}}^T \begin{vmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{vmatrix} \mathbf{f}(t) + \mathbf{H} (\mathbf{y} - \mathbf{C} \Phi_{\text{mod}} \hat{\mathbf{q}}) \quad \hat{\xi} = \Phi_{\text{mod}} \hat{\mathbf{q}} \tag{8}$$

4. Parameteridentifikation mit Zustandsbeobachtern

Bild 1 zeigt, daß der Beobachterfehler im wesentlichen von der Qualität des mathematischen Modells sowie der Kenntnis über die Erregungskräfte abhängt. Dadurch lassen sich umgekehrt Modellparameter wie Steifigkeiten, Eigenfrequenzen, Dämpfungen oder Erregungskräfte identifizieren, indem der meßbare Schätzfehler des Beobachters an den Meßstellen, d.h. die Differenz zwischen Meßwerten und den entsprechenden simulierten

Werten, bestimmt und minimiert wird. Für die Minimierung des Fehlers kann z.B. ein einfacher Least Square Algorithmus verwendet werden. Die Parameteridentifikation startet, nachdem der Beobachter eingeschwungen ist, d.h. nachdem Fehler, verursacht durch unbekannte Anfangswerte korrigiert sind. Die Parameteridentifikation mit Beobachtern hat gegenüber anderen Zeitbereichsverfahren folgende Vorteile:

- Es werden keine Anfangswerte für die Simulation benötigt.
- Durch geeigneten Beobachterentwurf kann eine gut konditionierte Optimierung erzwungen werden.

5. Anwendung: Überwachung von Torsionsschwingungen

An dem Rotor eines großen Kraftwerksturbosatzes sind die Torsionsschwingungen an zwei Querschnitten (s. Bild 3 und 4) mit Hilfe von Dehnmeßstreifen gemessen worden. Mit einem modalen Zustandsbeobachter wurden zunächst die Verdrehungen bestimmt und dann die Torsionsspannungen für die einzelnen Querschnitte berechnet. In den Bildern 3 und 4 sind für unterschiedliche Zeitpunkte die Verformungen bzw. die Torsionsspannungen über die Länge des Rotors aufgetragen.

Anschließend sind noch die Erregungskräfte der Torsionsschwingungen am Generator ermittelt und mit theoretisch aus dem Generatorstrom ermittelten Werten verglichen worden (s. Tabelle 1). Die Werte zeigen eine recht gute Übereinstimmung, wobei die Abweichungen wahrscheinlich durch die sehr ungenauen, theoretisch ermittelten Werte verursacht worden sind.

Tabelle 1 Berechnete und identifizierte Erregungsmomente am Generator

Drehzahl [Hz]	Berechnete Erregung [Nm]	Identifizierte Erregung [Nm]
13.73	2100	2050
17.20	2800	2350
20.25	3400	2950

6. Zusammenfassung

- Monitoring mit 'modalen Zustandsbeobachtern' erlaubt die Schwingungsüberwachung und die Bestimmung der Bauteilbeanspruchung an jedem Ort einer Struktur, also auch dort, wo Messungen nicht möglich sind, und spart dadurch (teure) Sensoren. Es lassen sich für alle gefährdeten Querschnitte mit den üblichen Berechnungsverfahren (z.B. Bauteilwöhlerkurven) die Versagenswahrscheinlichkeit und die Restlebensdauer abschätzen.

- Die in der Konstruktion für die Auslegung der Maschinen verwendeten FE-Modelle lassen sich direkt für den 'modalen Zustandsbeobachter' verwenden.
- Zusätzlich zur reinen Überwachung der Verformung und Beanspruchung einer Struktur können die Zustandsbeobachter eingesetzt werden, um Erregungskräfte und Systemparameter zu identifizieren und Schäden frühzeitig zu erkennen.

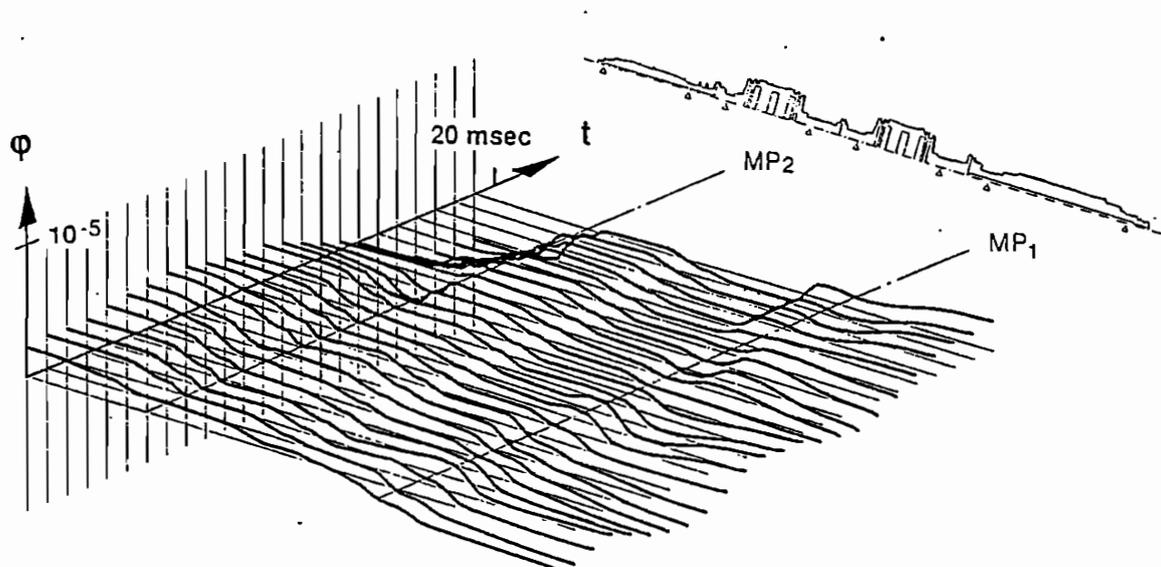


Bild 3 Verdrehung des Rotors

2 Measurement points \rightarrow stresses in 230 cross sections

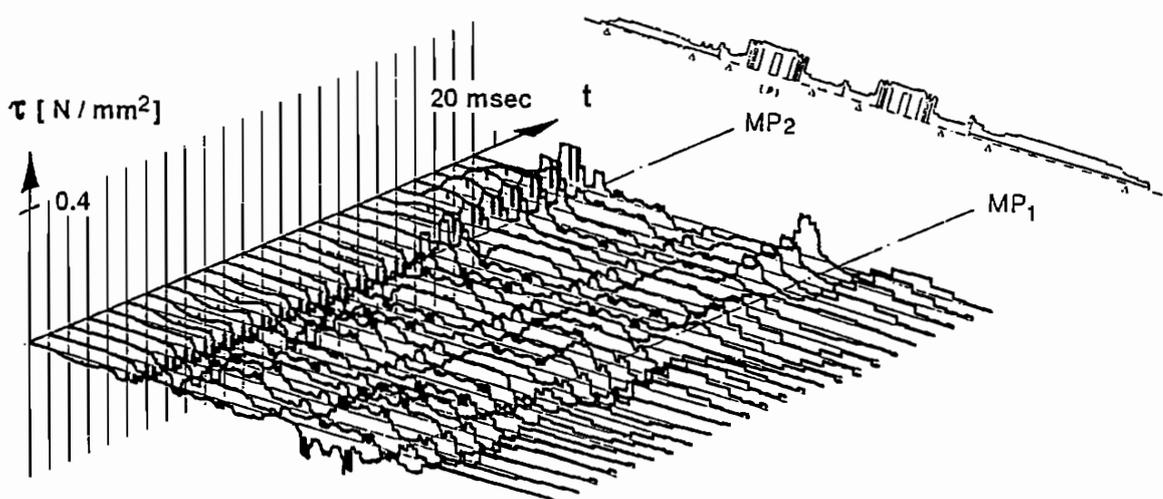


Bild 4 Torsionsspannungen des Rotors

Regelungen in der Strukturdynamik

Michael Straßberger

Strukturregelungen haben eine breite Anwendungspalette in fast allen ingenieurtechnischen Bereichen. Durch aktive Beeinflussung der Strukturschwingungen wird es möglich, auch Systeme mit geringer natürlicher Dämpfung gegenüber äußeren Einflüssen unempfindlich zu machen. Damit ergeben sich leichtere Strukturen und auch geringere Materialkosten. Im Gegenzug muß ein entsprechendes Regelsystem entwickelt werden, das die an das Gesamtsystem gestellten Anforderungen erfüllt.

Allgemeines

Technische Systeme sind in der Praxis des Ingenieurs stets "Systeme mit örtlich verteilten Parametern". Diese räumlich kontinuierlichen Systeme müssen durch vereinfachende Modelle abgebildet werden, damit sie einer analytischen Betrachtung zugänglich werden. Eine sehr weit verbreitete Methode zur Modellierung mechanischer Strukturen ist die *Finite-Element-Methode (FEM)*. In vielen Fällen führt die FEM einer Struktur mit n Freiheitsgraden auf folgende Bewegungsdifferentialgleichung:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{E}\mathbf{f}(t)$$

Dabei ist \mathbf{M} die Massenmatrix, \mathbf{C} die Dämpfungsmatrix, \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix und $\mathbf{x}(t)$ der n -dimensionale Vektor der Auslenkungen der einzelnen Massenpunkte. Die Matrix \mathbf{E} beschreibt die Angriffspunkte des Erregerkraftvektors $\mathbf{f}(t)$.

Das Ziel einer Regelung ist es, die Antwort eines Systems auf äußere Einwirkungen gezielt zu beeinflussen. Das Regelsystem einer Struktur besteht aus

- Meßgliedern, die die Systemantwort oder die äußere Erregung oder beide messen (*Sensoren*)
- Elementen, die diese Messungen mit Hilfe eines Algorithmus verarbeiten und die notwendigen Steuerkräfte berechnen (*Regler*)
- Stellgliedern, die die berechneten Werte in die Steuerkräfte umsetzen, die dann auf die Struktur aufgebracht werden (*Aktoren*).

Bezeichnet man die Steuerkräfte mit dem Steuervektor $\mathbf{u}(t)$, erweitert sich die Bewegungsdifferentialgleichung um ein weiteres Glied

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{f}(t) \quad (1)$$

wobei die Matrix \mathbf{D} die Position der Aktoren angibt. Zur Synthese der erforderlichen Regelung wird oft die bereits erwähnte *Zustandsraum-Darstellung* gewählt, in der

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{pmatrix}$$

als $2n$ -dimensionaler *Zustandsraumvektor* eingesetzt wird. Es ergibt sich die Systemgleichung im Zustandsraum

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t)$$

mit der $2n \times 2n$ -dimensionalen *Systemmatrix* \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{E} \end{bmatrix}$$

Dabei beschreiben die Matrizen \mathbf{B} und \mathbf{H} die Position der Stellglieder bzw. Angriffspunkte der äußeren Erregungen im Zustandsraum.

Der Steuervektor $\mathbf{u}(t)$ wird meist als lineare Funktion der gemessenen Auslenkung $\mathbf{x}(t)$ und der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}(t)$ angesetzt:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_1(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_1(t)\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}\mathbf{z}(t)$$

Im Unterschied zur klassischen Regelungstechnik, bei der eine oder nur wenige Systemgrößen geregelt werden, ist bei einer Strukturregelung die Anzahl der zu regelnden Größen oft sehr groß. Daher umfaßt der Zustandsvektor sehr viele Freiheitsgrade. Andererseits verlangen viele der praktisch eingesetzten Regelalgorithmen, daß der gesamte Zustandsvektor $\mathbf{z}(t)$ bekannt ist. Hier steht man vor dem Problem, daß $\mathbf{z}(t)$ nicht vollständig meßbar ist. Es wird also immer eine kleinere Anzahl Meßwerte $\mathbf{y}(t)$ bekannt sein, was sich durch die Meßgleichung¹ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t)$ beschreiben läßt. Es ist dann notwendig, die unbekannt Zustandsgrößen aus den Meßwerten $\mathbf{y}(t)$ zu rekonstruieren. Dazu wird eine Zustandsschätzung mit einem *Beobachter* durchgeführt; für die geschätzten Zustandsgrößen folgt:

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}[\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{z}}(t)] \quad (2)$$

Abb. 1 zeigt einen geschlossenen Regelkreis mit Zustandsbeobachter.

Reglerentwurfverfahren

Bei einer Strukturregelung stellt sich also im allgemeinen das Problem der *Mehrgrößenregelung*. Da oft eine große Anzahl an Freiheitsgraden zu regeln ist, können die Verfahren

¹Die Meßmatrix \mathbf{C} darf nicht mit der Dämpfungsmatrix verwechselt werden.

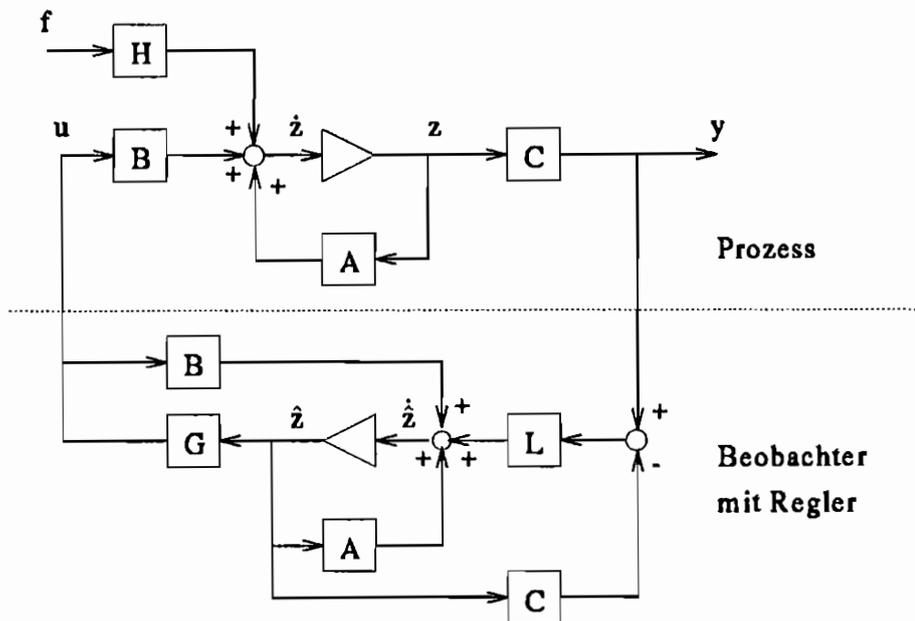


Abbildung 1: Geschlossener Regelkreis mit Zustandsbeobachter

der klassischen Regelungstechnik im Frequenzbereich nicht ohne weiteres eingesetzt werden. Daher haben *Reglerentwurfsverfahren im Zeitbereich* eine große Bedeutung, wobei die Verfahren auf der Basis der Optimierungstheorie besonders häufig angewandt werden.

Optimale Regler haben als *Zustandsregler* im Zeitbereich die Aufgabe, die geregelten Zustandsgrößen auf einen vorgeschriebenen Wert (meist Null) zu bringen. Unter ihnen wird die *linear-quadratische Optimierung* am häufigsten eingesetzt. Zu der Gruppe der optimalen Regler zählen auch die *linear-quadratische Gauß'sche Regelung*, die *Instantaneous Optimal Control* und die *Predictive Control*.

Eine weitere Klasse von Reglerentwurfsverfahren sind die *modalen Regelungen*, die direkten Einfluß auf die einzelnen Schwingungsmoden der Struktur ausüben. Während die *Regelung mit Polvorgabe* die Pole der geregelten Struktur in der Gauß'schen Zahlenebene und damit die Parameter der geregelten Moden festlegt, ist es das Ziel der *entkoppelten Modalregelung*, die gekoppelten Bewegungen der Struktur zu entkoppeln und somit aus dem Mehrgrößensystem mehrere Eingrößensysteme zu entwickeln. Zum eigentlichen Reglerentwurf für die Eingrößensysteme kann dann ein beliebiges Verfahren eingesetzt werden.

Die H_2 - und H_∞ -Regelungen nehmen eine Zwischenstellung zwischen den oben erwähnten Regelungen im Zeitbereich und den Mehrgrößenregelungen im Frequenzbereich ein, da hier zur Reglersynthese Elemente aus beiden Bereichen angewandt werden.

Im Gegensatz zu den oben beschriebenen *kontinuierlichen Reglern* arbeiten *Grenzwertregelungen* (Impulsregelungen) mit diskreten Impulsen, um das System zu regeln, wenn ein vorgeschriebener Grenzwert überschritten wurde.

Linear-quadratische Optimierung

Die linear-quadratische Optimierung ist ein sehr häufig benutztes Verfahren zur Reglersynthese, das auf der Zustandsraumdarstellung der Strukturgleichung basiert:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\mathbf{f}(t)$$

Zur Bestimmung des Steuervektors $\mathbf{u}(t)$ wird ein *Gütefunktional*

$$J = \int_0^{t_f} [\mathbf{z}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{z}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)] dt$$

unter Berücksichtigung der Systemgleichung minimiert. Die Matrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} werden als *Gewichtungsmatrizen* bezeichnet. Große Werte in \mathbf{Q} legen bei der Minimierung des Gütefunktionals J das Gewicht auf die Reduzierung der Systemantwort, während große Elemente in \mathbf{R} die Verringerung der erforderlichen Steuerkräfte zur Folge haben. Durch die entsprechende Wahl der Elemente von \mathbf{Q} und \mathbf{R} kann eine Abstimmung zwischen der Wirksamkeit und dem Energieverbrauch des Reglers getroffen werden.

Die Lösung des Optimierungsproblems führt im Fall eines einfachen *geschlossenen Regelkreises* auf die *Riccati-Gleichung*

$$\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t) + \mathbf{A}^T\mathbf{P}(t) + 2\mathbf{Q} = 0$$

Die Riccati-Gleichung läßt sich rekursiv lösen. Mit dem sich dabei ergebenden stationären Wert \mathbf{P} der *Riccati-Matrix* folgt das *linear-quadratische optimale Regelgesetz*:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{z}(t) = -\frac{1}{2}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{z}(t)$$

Bei Strukturproblemen hängt die Riccati-Matrix $\mathbf{P}(t)$ von den mechanischen Eigenschaften der Struktur (Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B}) sowie den Gewichtungsmatrizen \mathbf{Q} und \mathbf{R} ab.

Die linear-quadratische Optimierung stellt die Basis einer Vielzahl von Reglerentwurfverfahren dar.

Entkoppelte Modalregelung

Modale Regelungen sind Verfahren, bei denen eine Struktur durch Kontrolle ihrer Schwingungsformen (Moden) geregelt wird. Ziel der *entkoppelten Modalregelung* (*Independent Modal Space Control*) ist es, einzelne (oder alle) Moden des Schwingungssystems *unabhängig* voneinander zu regeln.

Anders als bei den optimalen Regelalgorithmen, wird bei der IMSC nicht im Zustandsraum, sondern mit der Differentialgleichung des Schwingungssystems gearbeitet. Für ein System mit n Freiheitsgraden gilt:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{f}(t)$$

Mit der *Modalanalyse* $\mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{q}(t)$ folgt ein System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Delta \dot{\mathbf{q}}(t) + \Omega \mathbf{q}(t) &= \Phi^T \mathbf{D} \mathbf{u}(t) + \Phi^T \mathbf{E} \mathbf{f}(t) \\ &= \mathbf{v}(t) + \mathbf{w}(t) \end{aligned}$$

dabei sind $\mathbf{v}(t)$ und $\mathbf{w}(t)$ der Steuer- und Erregungsvektor in Modalkoordinaten ausgedrückt. Man erhält also n Differentialgleichungen der Form

$$\ddot{q}_j + 2\zeta_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = v_j + w_j$$

Die obigen Differentialgleichungen haben zwar die Form unabhängiger Gleichungen, sind aber über die Steuervektoren v_j miteinander gekoppelt, da

$$v_j = v_j(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \dots, q_n, \dot{q}_n)$$

Die IMSC-Methode *entkoppelt* die Differentialgleichungen *künstlich*, indem gefordert wird, daß alle Moden unabhängig voneinander geregelt werden, d.h.

$$v_j = v_j(q_j, \dot{q}_j) = \xi_j \dot{q}_j + \kappa_j q_j$$

Die modale Steuergröße $v_j(t)$ kann nun über einen beliebigen Regelalgorithmus ausgewählt werden. Aufgrund der Entkopplung wird das Mehrgrößensystem in mehrere Eingrößensysteme zerlegt. Damit können hier auch die klassischen Verfahren der Reglersynthese, wie z.B. das Frequenzlinienverfahren, verwandt werden. Ebenfalls möglich ist eine Verknüpfung der IMSC-Methode mit der Polvorgabe und der linearen Optimierung.

Praktische Gesichtspunkte

Im zurückliegenden Abschnitt wurde die Entwicklung von Regelalgorithmen immer unter der Voraussetzung durchgeführt, daß ein ideales Strukturmodell vorliegt. Beim praktischen Einsatz der auf diese Weise gefundenen Regelgesetze auf eine reale Struktur tritt oft eine Vielzahl von Problemen auf, die in den folgenden Abschnitten behandelt werden.

Fehler infolge Modellreduktion

Der erste Schritt bei der Reglersynthese besteht meist darin, das zu regelnde reale System durch ein stark vereinfachendes FE-Modell abzubilden. Dies führt auf ein diskretisiertes Modell (*Full-Order-System (FOS)*) mit einer sehr großen Anzahl an Freiheitsgraden, das in den meisten Fällen für die Reglersynthese zu groß und unhandlich ist. Daher müssen überflüssige Freiheitsgrade vernachlässigt werden, was dann auf ein reduziertes Modell (*Reduced-Order-System (ROS)*) führt. Mit Hilfe dieses noch weiter vereinfachten Modelles wird nun das passende Regelgesetz gesucht und dieses dann auf das reale System angewandt. Bei der Anwendung dieser auf dem ROS basierenden Regelung ergeben sich oft große Probleme. Dies können sogenannte *Übersprech- oder Spillover-Effekte* und daraus folgende Instabilitäten sein, die dann zum Versagen der berechneten Regelung führen.

Zur Kompensation des Übersprechens finden sich in der Literatur verschiedene Ansätze. Sollen nur niederfrequente Moden geregelt werden, können die Meßsignale mit *Tiefpaßfiltern* verarbeitet werden, so daß die höheren Moden bei der Messung unberücksichtigt bleiben. Sind aber andere Frequenzbereiche zu kontrollieren, müssen aufwendigere Verfahren eingesetzt werden, wie z.B. *Residual Mode Filter*.

Totzeiten

Bei der Herleitung der Regelalgorithmen wurde meist von der idealen Vorstellung ausgegangen, daß die Vorgänge im Regelkreis simultan ablaufen. In Wirklichkeit erfolgen die einzelnen Operationen immer mit einer gewissen Verzögerung. Insbesondere bei digitalen Regelungen verstreicht eine bestimmte Zeit, die notwendig ist, um die korrekte Reglerantwort zu berechnen. Steht der erforderliche Wert dann zur Verfügung, dauert es einen weiteren Zeitraum, bis das Stellglied (z.B. ein piezo-elektrischer Aktor) diesen eingestellt hat. Somit verstreicht von der Zustandsmessung bis zum tatsächlichen Aufbringen des Steuervektors immer eine sogenannte *Totzeit*; die Vorgänge im Regelkreis laufen nicht mehr synchron ab. Dadurch kann es zu Instabilitäten des Systems kommen, da der aktuelle Systemzustand und der "verspätete" Steuervektor nicht mehr zueinander "passen".

Möglichkeiten zur Kompensation des Totzeiteffektes bieten eine *angepaßte Polvorgabe* oder die Berücksichtigung des *voraussichtlichen Systemverhaltens*.

Parameterunsicherheiten

Eines der größten Probleme beim Einsatz von Regelungen in der Strukturodynamik ist die Identifikation der Systemparameter. Die meisten Regelalgorithmen benötigen die Systemmatrix A , um ein Regelgesetz bestimmen zu können. Die in der Matrix A enthaltenen Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsparameter müssen dazu genau bekannt sein. Eine Systemidentifikation kann aber immer nur ungenaue Werte liefern, so daß immer eine gewisse Unsicherheit in den Parametern enthalten ist. Wird nun ein Regler mit diesen ungenauen Systemparametern synthetisiert, kann es bei der Implementation dieses Reglers in einem realen System zu Instabilitäten kommen, da System und Regler nicht genau aufeinander abgestimmt sind. Hier ist die Synthese *robuster Regler* gefragt, die trotz ungenauer Systemparameter das System stabil regeln können. Eine *adaptive Regelung* ist dann notwendig, wenn die Systemparameter starken zeitlichen Schwankungen unterworfen sind (z.B. ein Kraftfahrzeug mit wechselnder Zuladung) oder ein Teil der Parameter unsicher oder unbekannt ist. Dann muß über einen Adaptionalgorithmus das Regelgesetz angepaßt werden.

Anwendungen in der Praxis

Die praktische Anwendung von Strukturregelungen umfaßt nahezu alle ingenieurtechnischen Bereiche vom Bauingenieurwesen über den Maschinenbau bis hin zur Luft- und

Raumfahrttechnik. Während im Bauingenieurwesen und bei der Betrachtung flexibler Weltraumstrukturen die Modellbildung noch recht einfach zu bewerkstelligen ist, kann es bei komplexeren Systemen, wie im Maschinenbau, zu Problemen bei der Suche nach einem mathematischen Modell kommen. Oft ist hier die mechanische Struktur nur ein Teil des Gesamtsystems; es kommt dabei dann darauf an, mittels geeigneter Übergangsbedingungen die Verbindung der Teilsysteme zum Gesamtsystem herzustellen. Ein Beispiel hierfür ist die aktive Lärminderung, wo Strukturmechanik, Regelungstechnik und Akustik zusammentreffen. Aufgrund der Vielzahl von Möglichkeiten zur Regelung mechanischer Strukturen folgt hier nur eine recht knappe Übersicht, die keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit erhebt.

- Maschinenbau
 - Zuschaltbare Lagerung von Wellen
 - Magnetlagerungen
 - Tragregelsystem für Magnetschwebefahrzeuge
 - Robotertechnik
 - Semi-aktive Schwingungsisolierung z.B. mit elektrorheologischen Fluiden
 - Aktive Schwingungsdämpfung bei optischen Strukturen
 - Aktive Lärminderung
- Raumfahrttechnik
 - Flexible Weltraumstrukturen
 - Space-Shuttle-Antennen-Experiment
 - Hubble-Teleskop
- Bauingenieurwesen

Schutz von Bauwerken vor Wind- und Erdbebenerregung durch

 - Aktive Spannseile
 - Aktive Schwingungstilger
 - Impulsgeneratoren
 - Hybride Schwingungsisolierung

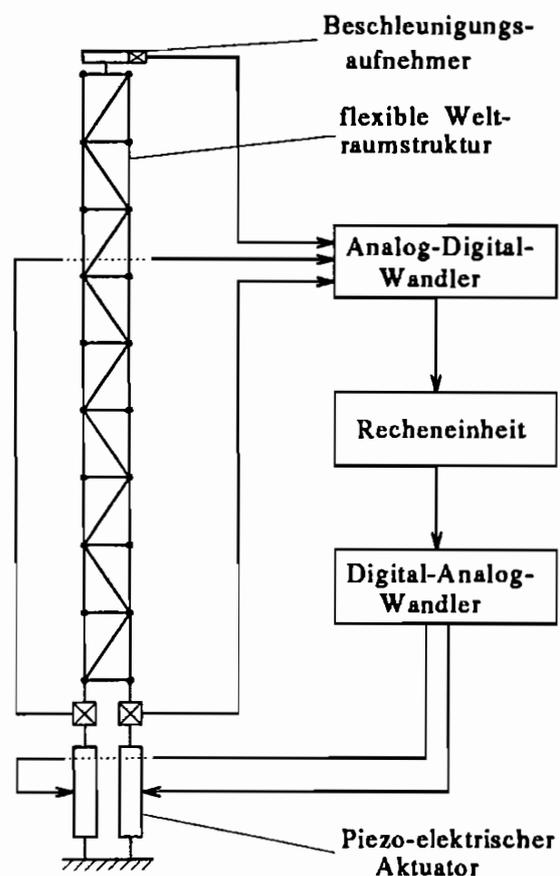


Abbildung 2: Versuchsanlage zur Regelung einer flexiblen Weltraumstruktur

Literaturverzeichnis

- C. R. FULLER, "Control of Sound Radiation with Active/Adaptive Structures". *Journal of Sound and Vibration*, 157(1):19-39, 1992
- L. MEIROVITCH, *Dynamics and Control of Structures*, John Wiley, USA, 1990
- T. T. SOONG, *Active Structural Control - Theory and Practice*, Longman Scientific & Technical, London and Wiley, NY, 1990

Autorenverzeichnis

- Christoph Beerens
In der Ewies 24, 79804 Dogern, 07751 / 7890
- Holger Behrens
Schinkelstr. 37, 40699 Erkrath, 0211 / 243763
- Dietmar Bouchard
Wickenstr. 64, 90768 Fürth, 0911 / 7530484
- Otto T. Bruhns
Postkutschenweg 45, 44803 Bochum, 0234 / 352456
- Andreas Eckstein
Girondelle 78, 44799 Bochum, 0234 / 387856
- Uwe Folchert
Kiefernweg 40, 44801 Bochum, 0234 / 73909
- Martin Fritz
Soldnerstr. 10, 44801 Bochum, 0234 / 701595
- Michael Geis
Im Baumhof 2a, 58300 Wetter, 02335 / 5008
- Peter Hilgers
Zum Boden 6, 35580 Wetzlar, 06442 / 22704
- Alfred Kraft
Steinerkamp 20, 51469 Bergisch-Gladbach, 02202 / 54827
- Wolfgang Krings
Meisenweg 11, 51515 Kürten-Bechen, 02207 / 5606
- Horst Lanzerath
Mittelstr. 18, 53902 Bad Münstereifel
- Armin Lenzen
Gardenbergstr.4, 42499 Hückeswagen, 02192 / 6339
- Bertholt List
Soldnerstr. 13, 44801 Bochum, 0234 / 706766
- Achim Menne
Am Wiesenbach 20, 74564 Crailsheim, 07951 / 44901
- Johannes Moosheimer
Schmechtingerstr. 35, 44809 Bochum, 0234 / 513384

- Günter Renker
Antweilerstr. 7, 47259 Duisburg, 0203 / 788965
- Reinhard Piltner
International House Room 476 2299 Piedmont Ave., Berkeley, CA 94720, USA ; 001 / 5106642787
- Reinhard Schmidt
Iburgerstr. 57, 49082 Osnabrück, 0541 / 53537
- Silber G.
Frankfurt
- Steinbach B.
Ginsterweg 20, 61169 Friedberg
- Jan Steinhausen
Rahmstr. 178, 45326 Essen, 0201 / 351107
- Michael Straßberger
In der Aue 10, 44879 Bochum, 0234 / 9409009
- Minguan Zhang
Erzbergerstr. 25, 57462 Olpe, 02761 / 40810

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoelasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermosdiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung

- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode

- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Sączuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15

- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rispitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in
verfestigendem Material
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 88 Jrg Krber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet
auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schiee:
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter
Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91 Christoph Beerens:
Zur Modellierung nichtlinearer Dmpfungsphnomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf:
Finite elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994
- Nr. 94 Armin Lenzen:
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von
Strukturveränderungen
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf:
Mechanics of Irregular Shell Structures
- Nr. 96 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Finite Elements for Irregular Nonlinear Shells
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u.a.:
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 97**