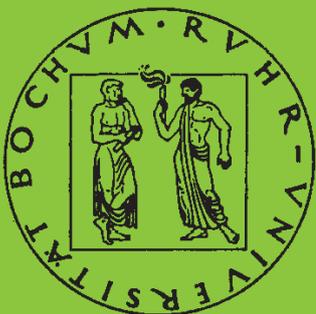


**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik**

**O. T. Bruhns**

**Große plastische Formänderungen  
Bad Honnef 1994**

Heft Nr. 93



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Institut für Mechanik  
Ruhr-Universität Bochum

**O.T. BRUHNS**

**Große plastische Formänderungen  
Bad Honnef 1994**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 93  
Dezember 1994

Herausgeber:  
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum  
Schriftenreihe  
Universitätsstr. 150  
44780 Bochum

© Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns  
Lehrstuhl für Technische Mechanik  
Ruhr-Universität Bochum  
44780 Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie oder DV-Verarbeitung) des Werkes oder auch von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## Vorwort

Der Untersuchung und Beschreibung des inelastischen Verhaltens von Werkstoffen und Strukturen kommt innerhalb der Mechanik eine ständig wachsende theoretische und praktische Bedeutung zu.

Zum Zwecke des gemeinsamen Austausches der bisher an den verschiedenen Einrichtungen gewonnenen Erkenntnisse sowie insbesondere zur Information und Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses fand deshalb in der Woche vom 19. – 23. September 1994 im Physikzentrum Bad Honnef ein Seminar "Große plastische Formänderungen" statt. Nach entsprechenden Veranstaltungen in den Jahren 1977, 1979, 1982, 1985, 1988 und 1991 war dies bereits das siebente Seminar zu diesem Thema.

Wie in den Vorjahren wurden inhaltlich die folgenden Schwerpunkte gesetzt:

- physikalische und kontinuumsmechanische Grundlagen inelastischen Materialverhaltens,
- die Berechnung großer plastischer Formänderungen mit Hilfe analytischer sowie numerischer Methoden,
- experimentelle Grundlagenuntersuchungen und
- technische Anwendungen.

Das vorliegende Heft enthält die Kurzfassungen der auf diesem Seminar gehaltenen Vorträge. Es soll damit jedem Teilnehmer die Gelegenheit geben, sich nochmals in aller Ruhe mit dem Vorgetragenen auseinanderzusetzen. Die vorgenommene Reihung der Beiträge gibt dabei den zeitlichen Ablauf des Seminars wieder.

Das Gelingen einer Tagung wird neben dem wissenschaftlichen Programm, zu dem die Teilnehmer selbst durch Vortrag und intensive Diskussion beitragen, ganz entscheidend auch durch die Organisation der Veranstaltung bestimmt. Es ist mir deshalb ein Anliegen, meinen Mitarbeitern, den Herren Dipl.-Ing. H.-J. Becker und Dipl.-Ing. T. Nerzak, recht herzlich für ihre Mühe im Zusammenhang mit der Vorbereitung und Durchführung des Seminars zu danken.

Bochum, Dezember 1994

Otto T. Bruhns

## Verzeichnis der Teilnehmer

Altenbach, Holm	Universität Magdeburg
Anding, Dirk	Ruhr-Universität Bochum
Anthony, Karl-Heinz	Universität-GH Paderborn
Azirhi, Abderrazzak	Universität-GH Paderborn
Balke, Herbert	TU Dresden
Becker, Hans-Jörg	Ruhr-Universität Bochum
Bederna, Christoph	Universität Hannover
Beer, Oskar	TU München
Bertram, Albrecht	BAM Berlin
Besdo, Dieter	Universität Hannover
Bluhm, Joachim	Universität-GH Essen
Bohnsack, Eckehard	TU Chemnitz-Zwickau
Bormann, Petra	TU Chemnitz-Zwickau
Brämer, Klaus	TU Dresden
Bruhns, Otto T.	Ruhr-Universität Bochum
Brünig, Michael	Universität Dortmund
Buhler, Jochen	Universität Stuttgart
Diebels, Stefan	TH Darmstadt
Drewes, Stephan	Universität Dortmund
Ehlers, Wolfgang	TH Darmstadt
Feucht, Markus	TH Darmstadt
Fischer, Franz Dieter	Montanuniversität Leoben
Floß, Andreas	TU Dresden
Grewolls, Gerald	TU Chemnitz-Zwickau
Günther, Helmut	FH Bielefeld
Häfele, Peter	MPI Düsseldorf
Harder, J.	TU Braunschweig
Hartmann, Stefan	Universität-GH Kassel
Haupt, Peter	Universität-GH Kassel
Jacob, H.-G.	Universität Hannover
John, Ralf	TU Dresden

Kamlah, Marc	Universität-GH Kassel
Keck, Joachim	Universität Stuttgart
Kollmann, F.G.	TH Darmstadt
Köppe, Heinz	Universität Magdeburg
Kraska, Martin	BAM Berlin
Kreißig, Reiner	TU Chemnitz-Zwickau
Kretzschmar, Sven	TU Chemnitz-Zwickau
Kunkel, Ralph	TH Darmstadt
Laackmann, Benedikt	Universität Hannover
Lassota, Andreas	TH Darmstadt
Lenz, W.	Universität Magdeburg
Leppin, Ch.	TH Darmstadt
Levitas, Valery I.	Universität Hannover
Liu, Jianqiang	TU München
Lühns, Georg	Universität-GH Kassel
Mahrenholtz, Oskar	TH Hamburg-Harburg
Meussen, Bernhard	TH Hamburg-Harburg
Miehe, Christian	Universität Hannover
Mittelbach, Marc	Ruhr-Universität Bochum
Naumenko, Konstantin	Universität Magdeburg
Nerzak, Thomas	Ruhr-Universität Bochum
Osterhage, K.	TU Braunschweig
Pawelski, Oskar	MPI Düsseldorf
Pollak, Burkhard	TH Darmstadt
Reisner, G.	Montanuniversität Leoben
Rost, Alexander	TH Darmstadt
Sansour, Carlo	Universität Stuttgart
Schieße, Peer	Ruhr-Universität Bochum
Scholle, Markus	Universität-GH Paderborn
Schröder, Jörg	Universität Hannover
Steck, E.	TU Braunschweig
Steinmann, P.	Universität Hannover

Svendsen, Bob  
Tsakmakis, Charalampos  
Ulbricht, Volker  
Viola, S.  
Westerhoff, Bernd

TH Darmstadt  
KFZ Karlsruhe  
TU Dresden  
Universität Hannover  
Ruhr-Universität Bochum

## Verzeichnis der Vortragsthemen

<b>E. Steck, J. Harder</b> Berechnung lokaler plastischer Deformationen in Mehrkristallen mit einem Finite-Elemente-Modell	9
<b>F.D. Fischer, G. Reisner</b> Transformation-Induced Plasticity	13
<b>H. Günther</b> Sind mikroplastische Deformationen ein Modell unserer physikalischen Raum-Zeit?	17
<b>R. Kunkel</b> Versuche zur Identifikation der Materialparameter des viskoplastischen orthotropen Modells von Choi und Krempl am einkristallinen Werkstoff SRR 99	22
<b>H.-G. Jacob</b> Berücksichtigung inelastischer Effekte in tensoriellen Elastomerstoffgesetzen bei großen Deformationen	26
<b>R. John, H. Bergander</b> Deformationsgesetze auf der Grundlage des plastischen Spin-Konzeptes in konvektiven Koordinaten	30
<b>V.I. Levitas</b> On the Theory of Large Elastoplastic Deformations	34
<b>C. Sansour, J. Keck</b> Zum elasto-viskoplastischen Cosserat-Kontinuum	38
<b>P. Haupt</b> Inkompatible Konfigurationen	42
<b>C. Miehe</b> Aspects of Anisotropic Multiplicative Elastoplasticity	46
<b>A. Bertram, M. Kraska</b> Zur Anwendung der materiellen Isomorphie in der finiten Plastizität	51
<b>M. Kamlah</b> Zur finiten Thermoplastizität mit nichtlinearer kinematischer Verfestigung	55

<b>B. Svendsen</b>	
A Model For an Elastoplastic Material as an Inhomogeneous Material Body	59
<b>C. Tsakmakis</b>	
Untersuchungen zum hypoelastisch-plastischen Materialmodell	63
<b>H. Altenbach, K. Naumenko</b>	
Zum Kriechen dünnwandiger Flächentragwerke unter Einbeziehung der Schädigung sowie großer Verschiebungen	67
<b>K.-H. Anthony</b>	
Ansätze zur Plastizitätstheorie	71
<b>O. Pawelski, P. Häfele</b>	
Plastomechanische und tribologische Probleme beim Folienwalzen	76
<b>E. Doege, Ch. Bederna</b>	
Bestimmung der Wirkflächenreibung in der Massivumformung durch Analyse der Werkzeugdeformation	81
<b>J. Liu</b>	
Thermischer Abbau mehrachsiger Eigenspannungszustände in viskoelastisch-plastischen Schrumpfverbänden	85
<b>P. Bormann, J. Naumann, M. Stockmann</b>	
Biegeversuche zur Ermittlung einachsiger Fließkurven für Zug und Druck	89
<b>O. Beer</b>	
Isostatische und axiale Verdichtung von granularen Materialien	93
<b>J. Bluhm</b>	
Plastisches Materialverhalten granularer Stoffe im Verfestigungsbereich	97
<b>St. Hartmann, G. Lührs</b>	
Ein Finite-Element-Konzept für nichtlineare kinematische Verfestigung bei kleinen elastischen und finiten plastischen Deformationen	101
<b>M. Brünig</b>	
Numerische Behandlung finiter inelastischer Deformationen nach der Methode des plastischen Prediktors	105
<b>P. Steinmann, E. Stein</b>	
An Implicit Integration Algorithm for Finite Deformation Single Crystal Plasticity	109

<b>Ch. Leppin, P. Wriggers</b> Numerische Simulation schnell laufender Risse in viskoplastischen Materialien	113
<b>J. Schröder, C. Miehe</b> Numerische Behandlung von Homogenisierungsprozessen zur Beschreibung von Mikro-Makro-Übergängen	117
<b>U. Gabbert, H. Köppe</b> Finite-Elemente-Lösung großer nichtlinearer Probleme der Geomechanik mittels dynamischer Relaxation	121
<b>A.C. Lassota</b> Ein neues gemischtes Element zur numerischen Berechnung viskoplastischer Rotationsschalen nach Bodner&Partom	126
<b>D. Besdo, S. Viola</b> Ein Schalenelement für die Blechumformung	130
<b>A. Floß</b> Simulation technologisch bedingter Verformungsabläufe der Blechumformung auf der Basis der Fließtheorie	135
<b>E. Doege, B. Laackmann</b> Ansatz zur Simulation von Massiv-Umformvorgängen ohne Remeshing	139
<b>E. Bohnsack</b> Approximation von experimentell gewonnenen Verschiebungsfeldern	143
<b>B. Westerhoff</b> Eine Untersuchung zum elastisch-viskoplastischen Verhalten von austenitischem Stahl	147
<b>S. Kretzschmar</b> Ermittlung von Materialparametern durch Auswertung inhomogener Verschiebungsfelder	151
<b>G. Grewolls</b> Die plastische Verfestigung bei Verwendung einer kubischen Fließbedingung	155
<b>B. Meussen, O. Mahrenholtz</b> Zur Volumenviskosität von Schnee	159

**J. Buhler**

Infrarot-Absorptionsspektren und Mikroeffekte in stark verformten Kunststoffolien 163

**S. Diebels, W. Ehlers**

Ein numerisches Modell zur Behandlung elastisch-plastischer Konsolidationsvorgänge 167

# Berechnung lokaler plastischer Deformationen in Mehrkristallen mit einem Finite-Elemente-Modell

E. Steck, J. Harder

Institut für Allgemeine Mechanik und Festigkeitslehre  
TU Braunschweig

**Zusammenfassung**—Im Ingenieurwesen werden metallische Werkstoffe i.a. als quas isotrop betrachtet. Besitzt das zu berechnende Bauteil jedoch die Größenordnung der einzelnen Körner des Metalls - als Beispiel sei die Mikrotechnik mit ihren teilweise extrem kleinen Bauteilen genannt - so ist diese Annahme nicht mehr zulässig. Experimentelle und theoretische Arbeiten haben gezeigt, daß es aufgrund von Verformungsinkompatibilitäten zu lokalen Fließvorgängen kommen kann, obwohl sich das Material global betrachtet scheinbar elastisch verhält. Technisch relevant ist dieser Effekt u.a. beim Phänomen der Ermüdung von Werkstoffen. Im folgenden wird ein 3D-FEM-Modell vorgestellt, das die Anisotropie der einzelnen Kristalle sowohl im elastischen als auch im inelastischen Bereich berücksichtigt. Die numerische Simulation eines Trikristalls im Zugversuch verdeutlicht die wesentlichen Aspekte des Modellverhaltens.

## 1 Restriktive Annahmen

Das FEM-Modell betrachtet Mehrkristalle als Verband von Einkristallen. Das Verhalten eines Kristallhaufwerks bestimmt sich folglich aus dem der einzelnen Kristalle zuzüglich der Kopplungsbedingungen. Der Gültigkeitsbereich beschränkt sich auf kubisch-flächenzentrierte Metalle, eine Erweiterung auf andere Gittertypen ist jedoch möglich. Inelastische Deformationen sollen ausschließlich durch Abgleitvorgänge in der Kristallstruktur hervorgerufen werden, Korngrenzgleiten und mechanische Zwillingbildung bleiben unberücksichtigt. Ferner werden nur kleine Deformationen untersucht, Rotationen des Kristallgitters finden somit nicht statt.

## 2 Vorstellung der Modellgleichungen

Zur Beschreibung der Geometrie verwendet man sinnvollerweise ein globales Koordinatensystem  $(x_1, x_2, x_3)$ , dessen Achsen die Probengeometrie beschreiben, und ein lokales Koordinatensystem  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ , dessen Achsen mit den Kanten der Elementarzellen des jeweiligen Kristalls übereinstimmen. Die Koordinatentransformation geschieht mit Hilfe der Matrix der Richtungskosinus  $\underline{a}$ :

$$\hat{\underline{x}} = \underline{a} \underline{x} .$$

Spannungen und Dehnungen werden wie in FEM-Formulierungen üblich als Vektoren geschrieben

$$\underline{\sigma}^T := (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}), \quad \underline{\epsilon}^T := (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, 2\epsilon_{xy}, 2\epsilon_{yz}, 2\epsilon_{zx})$$

und transformieren sich über die aus den Elementen der  $\underline{a}$ -Matrix zusammengesetzten Matrizen  $\underline{\Psi}$  und  $\underline{\Phi}$ :

$$\hat{\underline{\sigma}} = \underline{\Psi} \underline{\sigma} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\underline{\epsilon}} = \underline{\Phi} \underline{\epsilon} .$$

Die Gesamtdehnrate setzt sich wie bei den sogenannten *unified models* üblich additiv aus einem elastischen und einem viskoplastischen Anteil zusammen, hier formuliert in lokalen Koordinaten:

$$\dot{\hat{\underline{\epsilon}}} = \dot{\hat{\underline{\epsilon}}}^{el} + \dot{\hat{\underline{\epsilon}}}^{vp} .$$

Das elastische Verhalten ist durch die Matrix  $\hat{\underline{D}}$  bestimmt, die die Dehnungs- mit der Spannungsrate verknüpft

$$\dot{\hat{\underline{\epsilon}}}^{el} = \hat{\underline{D}}^{-1} \dot{\hat{\underline{\sigma}}}$$

und im vorliegenden Fall kubischer Kristallsymmetrie aus drei unabhängigen Werkstoffkonstanten aufgebaut ist.

Das viskoplastische Verhalten wird über den „Umweg“ von Abgleitvorgängen in der Kristallstruktur beschrieben. Das Ausmaß der Abgleitung bestimmen auf jedem Gleitsystem  $r$  die Schmid'sche Schubspannung  $\tau_r$ , die kinematische Rückspannung  $\Omega_r$  sowie die kritische Fließspannung  $\tau_{yr}$ . Hier wird mit einer expliziten Fließgrenze gearbeitet, d.h. ein Gleitsystem wird aktiv, wenn der Betrag der effektiven Schubspannung die kritische Fließgrenze erreicht. Die Gleitrate soll sich dann nach folgendem für Tieftemperaturformulierungen typischen Exponentialansatz ergeben:

$$\dot{\gamma}_r = \dot{\gamma}_0 \left\{ \exp \left[ b \left( \frac{|\tau_r - \Omega_r|}{\tau_{yr}} - 1 \right) \right] - 1 \right\} \text{sign}(\tau_r - \Omega_r) \quad \text{für} \quad |\tau_r - \Omega_r| \geq \tau_{yr} .$$

Einen ähnlichen Ansatz für die kinetische Gleichung findet man z.B. bei Havlicek u.a. [1], wobei dort jedoch ohne kinematische Rückspannung gearbeitet wird.

Die Schmid'sche Schubspannung ist die Projektion der äußeren Spannung auf das entsprechende Gleitsystem, d.h. in Tensorschreibweise ergäbe sich  $\tau_r = (\hat{\underline{x}} \hat{\underline{n}}_r)^T \hat{\underline{m}}_r$ <sup>1</sup>, wobei  $\hat{\underline{n}}_r$  und  $\hat{\underline{m}}_r$  Gleitebenennormale und Gleitrichtung bezeichnen. In der hier angestrebten vektoriellen Form lassen sich diese Operationen durch Multiplikationen mit der Matrix  $\underline{\alpha}$  bzw. den Vektoren  $\underline{\alpha}_r$  ersetzen

$$\underline{\tau} := (\tau_1, \dots, \tau_{12})^T = \underline{\alpha} \hat{\underline{\sigma}} \quad \text{bzw.} \quad \tau_r = (\underline{\alpha}_r)^T \hat{\underline{\sigma}}, \quad r = 1, \dots, 12 .$$

Die Einführung einer kinematischen Rückspannung hat die Aufgabe, Verfestigungseffekte zu modellieren, die in Bezug auf die aktiven Gleitsysteme anisotropen Charakter haben. Hierzu gehören z.B. der Aufstau von Versetzungen vor Korngrenzen oder anderen Hindernissen wie auch die Ausbildung von Versetzungssubstrukturen. Ihre Entwicklung folgt einem Ansatz, der in analoger Form auch in makroskopischen Werkstoffmodellen Verwendung findet:

$$\dot{\Omega}_r = c \dot{\gamma}_r - d \Omega_r |\dot{\gamma}_r| \quad \text{mit} \quad r = 1, \dots, 12 \quad \text{und} \quad c, d = \text{const.}$$

Der gewählte Erholungsterm ist dynamischer Natur, rein thermische Erholung wird z.Zt. nicht berücksichtigt, da das Modell vorwiegend auf die Beschreibung des Tieftemperaturverhaltens ausgerichtet ist.

Die Entwicklung der kritischen Fließspannung trägt der bei Einkristallexperimenten festgestellten sogenannten *latenten* Verfestigung Rechnung. Kommt es auf einem Gleitsystem zu einem Abgleitvorgang, so steigt die Fließgrenze nicht nur auf diesem, sondern auch auf allen anderen Systemen. Eine Vielzahl von Experimenten (vgl. z.B. [2], [3]) belegt, daß die latente Verfestigung größer ist als die Eigenverfestigung. Mathematisch wird diese Erscheinung mit Hilfe der Korrelationsmatrix  $\underline{H}$  beschrieben, die die Zunahme der kritischen Fließspannung von den einzelnen Gleitraten abhängig macht:

$$\dot{\tau}_{yr} = H_{rs} |\dot{\gamma}_s| \quad \text{mit} \quad r, s = 1, \dots, 12 \quad \text{und} \quad \text{Summation über } s .$$

Die  $12 \times 12$ -Matrix  $\underline{H}$  ist vollbesetzt und symmetrisch. Die Elemente auf der Hauptdiagonalen bestimmen die Eigenverfestigung. Die anderen berücksichtigen, in welchem Maße sich die bei der Deformation beteiligten Versetzungen der jeweiligen Gleitsysteme gegenseitig behindern. Hierbei wird unterschieden, ob die Systeme zueinander komplanar oder kollinear sind, ob ihre Burgersvektoren senkrecht aufeinander stehen oder ob bei den entsprechenden Versetzungsreaktionen gleitfähige oder seßhafte Knoten entstehen. Im Verlauf größerer Verformungen verändern sich die Werte  $H_{rs}$ , aufgrund der oben getroffenen Beschränkung auf kleine Deformationen scheint jedoch der Ansatz  $H_{rs} = \text{const.}$  gerechtfertigt.

Die Umrechnung von Gleit- auf Dehnraten schließlich erfolgt ebenso über die Matrix  $\underline{\alpha}$ :

$$\dot{\underline{\epsilon}}^{vp} = \underline{\alpha}^T \dot{\underline{\gamma}} \quad \text{mit} \quad \dot{\underline{\gamma}}^T := (\dot{\gamma}_1, \dots, \dot{\gamma}_{12}) .$$

<sup>1</sup>keine Summation über  $r$

Hiermit sind nun alle Gleichungen zusammengestellt, die zur Formulierung des elastisch-viskoplastischen Kristallverhaltens notwendig sind. Faßt man die inneren Größen der einzelnen Gleitsysteme in Vektoren zusammen,  $\underline{\Omega}^T := (\Omega_1, \dots, \Omega_{12})$  bzw.  $\underline{\tau}_y^T := (\tau_{y1}, \dots, \tau_{y12})$ , und formt geeignet um, so läßt sich das Modell als System von 30 Differentialgleichungen darstellen, das formell die folgende Gestalt hat:

$$\dot{\underline{x}} = \dot{\underline{x}}(\underline{\sigma}, \underline{\Omega}, \underline{\tau}_y), \quad \dot{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{\Omega}}(\underline{\sigma}, \underline{\Omega}, \underline{\tau}_y), \quad \dot{\underline{\tau}}_y = \dot{\underline{\tau}}_y(\underline{\sigma}, \underline{\Omega}, \underline{\tau}_y).$$

Für die Implementierung in einen FE-Code bieten sich das kommerzielle Programm ABAQUS sowie das am Institut für Allgemeine Mechanik und Festigkeitslehre entwickelte Programm S3D an, die über die kompatible Schnittstelle UMAT die Simulation beliebigen Materialverhaltens erlauben.

### 3 Dreidimensionale FE-Diskretisierung eines Trikristalls

Die Abbildungen 2 bis 4 zeigen die Ergebnisse numerischer Simulationen an einem Trikristall. Die Einspannung (linker Rand) ist so beschaffen, daß Querkontraktion möglich ist. Die Belastung (rechter Rand) wird verschiebungsgesteuert ( $\dot{u}_x = 0.02 \text{ mm/s}$ ) aufgebracht. Die Korngrenzen (verstärkt gezeichnet) werden durch feste Knotenkopplung modelliert und verlaufen senkrecht zur Bildebene. Die Probenabmaße betragen  $20 \text{ mm} \times 14 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ , die gezeigte Diskretisierung umfaßt 100 isoparametrische 20-Knoten-Quaderelemente. Die Materialparameter aller drei Körner sind identisch, der einzige Unterschied besteht in der Orientierung (s. Abb.1). Die Parameter sind <sup>2</sup> an Einkristall-Zugversuche aus Cu-10%Al angepaßt, die Orientierungen sind willkürlich gewählt.

### 4 Ergebnisse numerischer Simulationen

Abbildung 2 zeigt das globale Kraft-Verschiebungsdiagramm des aus sechs Lastschritten bestehenden Zugversuchs. Der erste Schritt ist rein elastisch, vom zweiten bis sechsten Schritt verformt sich die Probe in zunehmendem Maße plastisch.

Die Spannungsverteilung für  $\sigma_x$  wird aus Bild 3 ersichtlich. Man erkennt ein Spannungsmaximum am Tripelpunkt<sup>3</sup>, das sich in Korn 1 hineinstreckt. Losgelöst von dem hier vorgestellten Versuch wurde in diesem Zusammenhang folgende Beobachtung gemacht: Beim sukzessiven Vertauschen der im Anhang aufgeführten Orientierungen auf die drei Kornplätze stellten sich im Bereich des Tripelpunkts stets Extrema (d.h. Maxima und Minima) der Spannung  $\sigma_x$  ein, so daß man in einem größeren Gefüge an diesen Stellen i.a. besondere Belastungen zu erwarten hat. Ferner ist zu bemerken, daß der sich einstellende Spannungszustand mehrachsrig ist, wobei die anderen fünf Spannungskomponenten nicht zu vernachlässigende Größenordnungen erreichen.

Das lokale Fließen (ab Schritt 2) beginnt nun dort, wo der Spannungszustand am günstigsten mit der Lage der Gleitsysteme zusammenpaßt. Bild 4 zeigt anhand der spezifischen inelastischen Arbeit  $W^{op} = \int \underline{\sigma} d\underline{\epsilon}^{op}$ , daß dies offensichtlich in Korn 2 am Tripelpunkt sowie in der Nähe der Belastungsvorrichtung der Fall ist. Im weiteren Verlauf des Versuchs wachsen die beiden Zonen zusammen, und auch die anderen Körner beginnen, sich inelastisch zu verformen.

Betrachtet man die Zahl der aktiven Gleitsysteme (nicht abgebildet), so stellt man fest, daß diese nur bedingt eine Aussage über das Ausmaß der plastischen Deformation macht: In den Körnern 1 und 3 findet Zweifachgleitung statt, während in Korn 2, in dem weiterhin die größte spezifische inelastische Arbeit verrichtet wird, nur ein Gleitsystem aktiv ist. Im Bereich des Tripelpunkts kommt es aufgrund der besonders ausgeprägten Mehrachsrigkeit des Spannungszustandes in allen drei Körnern zu Drei- und Vierfachgleitung.

Bemerkenswert scheint außerdem, daß es aufgrund der lokal unterschiedlich stark ausgeprägten Fließvorgänge zu Spannungsumlagerungen kommt: Während die Körner 2 und 3 nach dem elastischen Schritt (vgl. Bild 3) in etwa gleich beansprucht waren, entspannt sich ab dem dritten Lastschritt (ohne Abbildung) Korn 2 relativ zu Korn 3 deutlich.

<sup>2</sup>mit Ausnahme der Werte für  $c$  und  $d$

<sup>3</sup>Schnittgerade der Korngrenzflächen

## 5 Ausblick

In der näheren Zukunft wird die experimentelle Verifikation des Modells durch Zugversuche an Trikristallen aus Cu-Al-Legierungen angestrebt. Mit den dabei erhaltenen Ergebnissen sollen über FEM-Parameteridentifikationen auch diejenigen Materialkonstanten bestimmt werden, die man aus Einkristallversuchen nur sehr schwer ermitteln kann (vor allem  $c$  und  $d$ ).

Auf Seiten der Modellentwicklung sollen zum einen ein Erholungsterm für die kritische Fließspannung eingeführt werden, zum anderen auch Gitterrotationen Berücksichtigung finden, um auch größere Deformationen berechnen zu können. In etwas weiterer Zukunft sind dann Phänomene wie Korngrenzgleiten oder Schädigung von Interesse.

## Literatur

- [1] Havlicek, F., Kratochvil, J., Tokuda, M. and Lev, V.: „Finite Element Model of plastically deformed Multicrystal“, International Journal of Plasticity, Vol. 6, pp. 281-291, 1990
- [2] Franciosi, P., Berveiler, M. and Zaoui, A.: „Latent Hardening in Copper and Aluminium Single Crystals“, Acta Metallurgica, Vol. 28, pp. 273-283, 1980
- [3] Jackson, P.J. and Basinski, Z.S.: „Latent Hardening and the Flow Stress in Copper Single Crystals“, Canadian Journal of Physics, Vol. 45, pp. 707-735, 1967

## Abbildungen

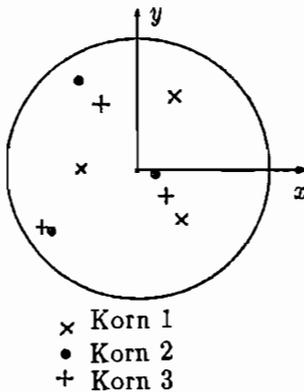


Abb.1: Orientierungen in stereographischer Projektion

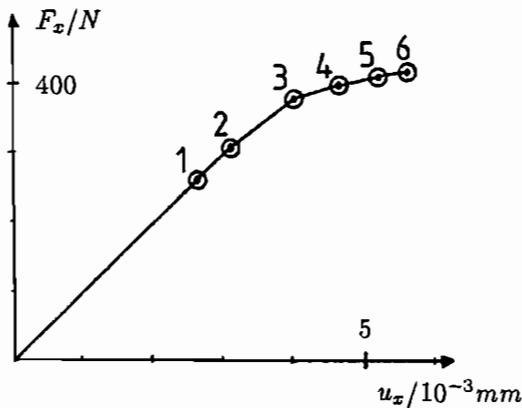


Abb.2: Globales Kraft-Verschiebungs-Diagramm

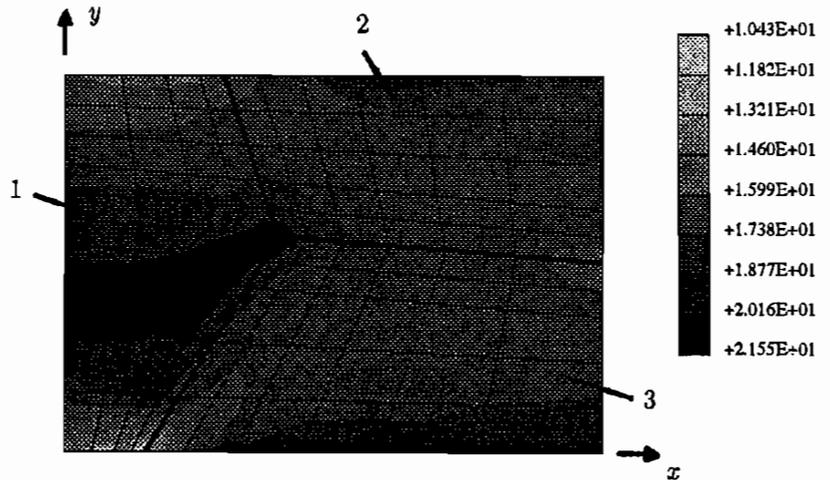


Abb.3:  $\sigma_x$ -Verteilung in  $MPa$ , 1.Schritt

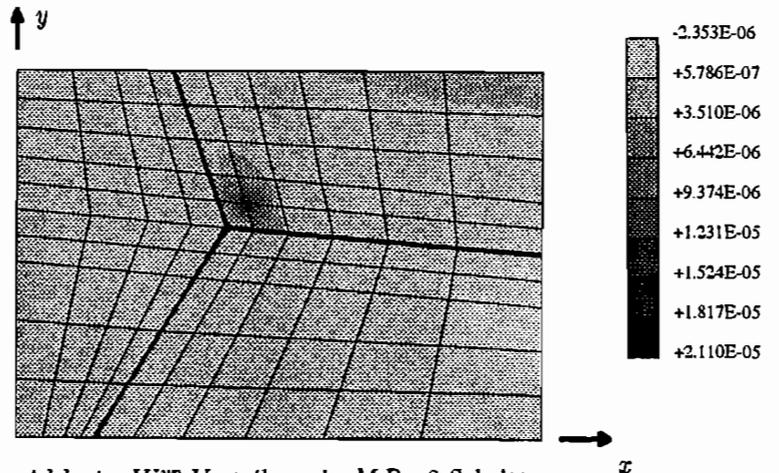


Abb.4:  $W^{vp}$ -Verteilung in  $MPa$ , 2.Schritt

Große Plastische Formänderungen  
Workshop, Bad Honnef, 19.-23. Sep. 1994

## TRANSFORMATION-INDUCED PLASTICITY

F.D. Fischer and G. Reisner  
Institute of Mechanics  
and

Christian Doppler Laboratory for Micromechanics of Materials  
University for Mining and Metallurgy  
Franz-Josef-Str.18, A-8700 Leoben, Austria

The macroscopic material behavior of steels associated with a phase change is a result of rearrangements on the microstructural scale governed by couplings of stress, strain and the mechanism of the phase transformation itself. If the phase transformation occurs in an externally-applied stress field significant non-elastic macroscopic deformations may result, a phenomenon called transformation-induced plasticity (TRIP) [1].

In the case of martensitic transformation (MT) TRIP is attributed to microscale deformation mechanisms such as the orientation of the martensitic phase (orientation effect) and plastic deformations on the microscale caused by transformation-induced microstresses due to the accommodation of the transformation shape change (accommodation effect).

Constitutive equations for TRIP required for simulations of heat treatment and welding processes or forming processes of metastable materials are usually based on experimental results addressing mainly the accommodation effect while the orientation effect is generally neglected [2].

In order to establish a basis for the development of microstructurally-based constitutive equations a quantitative micromechanics description of TRIP is presented by a polycrystalline finite-element analysis. A classical TRIP-experiment, the "non-isothermal creep test" [1] is the subject of a micromechanical simulation the results of which are in good agreement with the experiments.

In the modelling framework we link the crystallography (kinematic description) and the kinetics of MT with mechanics and thermodynamics of solids under martensitic transformation [3]. The development of the martensitic phase is described by a finite set of internal variables, the stress-free transformation tensors corresponding to crystallographic variants and the corresponding volume fractions. The evolution of martensitic microstructure is calculated in dependence of microstructural stresses and strains by the use of thermodynamic transformation conditions [4] and microkinetics relations on the size scale of grains.

The computational micromechanics study is carried out to quantify respective contributions of the orientation and accommodation effect to the macroscopic deformation of a transforming specimen since in the experiment a decoupling of these two mechanisms is not possible. The numerical results bring new insights for the development of constitutive equations for phase-transforming materials. It is shown that the orientation effect cannot be neglected in a formulation of a TRIP-strain increment. The effect of texture, transformation volume change and the constitutive behavior of austenite and martensite on the macroscopic deformation behavior is also quantified and discussed with respect to the formulation of constitutive equations.

The TRIP effect has not found any exploitation in quenching processes. It "occurred only" and lead initially to a certain bewilderment of the metallurgists since it does not allow a "simple picture" of the residual stress distribution after quenching as it has been often made by the man in the lab.

Now in the case of "TRIP steel" an aimed exploitation of the TRIP effect was first performed. Although the occurrence of the TRIP effect in high alloyed austenitic steels was known for several decades, it was in the late sixties that Zackay proposed to make use of the enhanced work hardening due to strain induced formation of martensite in metastable austenitic steels [5].

In most of the commercially used austenitic steels the austenite is stabilized by nickel and chromium. These types are only metastable at ambient temperature. The good corrosion resistance of these materials is the dominant reason for their industrial application. By adjusting the martensite start temperature  $M_s$  by altering the chemical composition, the uniform elongation of the material subjected to a deformation at room temperature was optimized. Thus one obtains a material with high strength and high uniform elongation.

The beneficial effect of TRIP on the flow behavior is mainly due to its influence on the work hardening. The transformation replaces the soft austenite by the much harder martensite. A dual phase material is evolving. Within this composite a higher dislocation density is necessary than in a single phase material at a given macroscopic strain, since the different flow behavior has to be accommodated. The sensitivity of martensite formation toward the actual stress and strain state hinders the localization of flow. In a region where necking is going to occur, more martensite will be formed due to the stress and strain concentration leading to an increased plastic tangent modulus in the region in question. Thus on a macroscopic level the material exhibits a high uniform elongation although a heterogeneity of deformation is to be observed.

TRIP phenomenon alters not only the formability but also the crack growth behavior and therefore, the toughness of the material. The high "triaxiality" of the stress state at the crack tip promotes the martensitic transformation.

The TRIP steels treated so far exhibit an extraordinary combination of high strength and high ductility. However, their industrial applications are limited due to the costs of the alloying elements that are necessary to stabilize the austenite at room temperature. Recently a class of low alloyed TRIP steels (TDP TRIP aided Dual Phase) has been designed by Japanese groups for the automotive industries. An ultimate tensile strength of 1200 MPa and a uniform elongation of about 35 % let this material seem very promising for future application. The remarkable strength allows to lighten the car body, the excellent formability facilitates the pressing process and the high deformation energy that can be absorbed is a security factor in case of an accident. The chemical composition varies between 0.1 to 0.4 wt. % C, 1.0 to 3.0 wt. % Mn and 1.0 to 3.0 wt. % Si, preferentially 0.2 wt. % C, 1.5 wt. % Si and Mn each. Due to a certain heat treatment an austenite content up to about 15 vol. % can be stabilized at room temperature. The material is intercritically annealed at a temperature at which the austenite volume fraction lies between 20 and 50 %. A partitioning of carbon into the austenite takes places. From the ferrite-austenite regime the material is quenched to the bainite regime (app. 400°C). The high silicon content hinders the precipitation of carbides. During the isothermal transformation in the bainite regime acicular ferrite partly replaces the austenite. Since the carbon solubility in ferrite is rather small the carbon is to be found in the not transformed austenite. X-ray diffraction measurements reveal that practically the whole carbon is to be found within the austenitic phase. The content of 1.1 to 1.7 wt. % C stabilizes the austenite also at room temperature.

After this heat treatment the microstructure consists of a ferrite matrix (60 vol. %) with a second phase comprising bainite and retained austenite (5 - 15 vol. %). The retained austenite is located at three different sites. Relatively large particles (2 to 6 microns) are to be found at ferrite grain boundaries. Stacking faults and subgrain boundaries give them an inner structure that might facilitate the martensite formation. Small retained austenite monocrystals (less than 1 micron) within the ferrite grains usually do not possess such inner structure. Very thin films of austenite between ferritic and bainitic or martensitic regions are stabilized by the high carbon content and the hydrostatic pressure they are subjected to. These three types of retained austenite grains show a different stability against strain induced martensitic transformation. The stability of retained austenite against martensitic transformation has an ample impact on the flow behavior of these steels. Since the change in shape and volume has to be accommodated by the surrounding matrix a larger volume fraction than the austenite content is subjected to work hardening. If the martensitic transformation occurs over a large strain interval the plastic tangent modulus remains on a high level that leads to a high uniform elongation. Assuming a lower stability of retained austenite the transformation takes place within a small strain interval, typically less than 10 %. Thus the initial plastic tangent modulus is of high altitude but rapidly decreasing. For a deliberate changing of the flow behavior the content of retained austenite and its stability have

to be controlled. For a better understanding of the distinct stabilizing effects on retained austenite experimental and theoretical tools have to be engaged.

The influence of the grain size can be separately studied in dilute Cu-Fe alloys. Semi-coherent and coherent fcc Fe-precipitates remain austenitic on quenching to room temperature. Martensitic transformation is induced by applied strain. The smaller the particles are, the larger is the necessary strain to trigger the transformation. The phase change of the austenite makes the material ferromagnetic. Since the Cu-matrix is paramagnetic like the fcc Fe-precipitates, the permeability of the material allows on-line measurement of the martensite volume fraction. A micromechanical model is engaged to investigate the effect of local stresses and strains on the strain induced martensitic transformation. An average transformation strain of the Fe-inclusion is prescribed for two limit cases. Assuming that several martensite variants with approximately the same volume fraction are formed, the average of the shear of the distinct variants vanishes and isotropic dilatation occurs. If only one variant evolves biased by the external load the transformation strain includes maximum shear components. The change in Gibbs free energy by the transformation is calculated with a finite element program. The experimental results provide material properties that are used as input data for a simulation. The model considers the elasto-plastic behavior of Cu and Fe constituents. A scaling factor enters the continuum mechanical concept to address the effect of the particle size of iron on its flow behavior.

## REFERENCES

- [1] E. Gautier, Zhang, X.M. and A. Simon, "Role of Internal Stress State on Transformation Induced Plasticity and Transformation Mechanisms during the Progress of Stress-Induced Phase Transformation", Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Conf. Residual Stresses ICRS2, eds. G. Beck, S. Denis and A. Simon (London: Elsevier, 1989), 777-783.
- [2] J.B. Leblond, J. Devaux and J.C. Devaux, "Mathematical Modelling of Transformation Plasticity in Steels I: Case of Ideal-Plastic Phases", *Int. J. Plasticity*, 1989, vol. 5, pp. 551-572.
- [3] F. Marketz and F.D. Fischer, "Micromechanical Modelling of Stress-assisted Martensitic Transformation", *Mod. Sim. Mater. Sci. Eng.*, vol. 2, 1994, pp. 1017-1046.
- [4] F.D Fischer, M. Berveiller, K. Tanaka, E. Oberaigner, "Continuum Mechanical Aspects of Phase Transformations in Solids", *Arch. Appl. Mech.*, vol. 64, 1994, pp. 54-85.
- [5] V.F. Zackay, E.R. Parker, D. Fahr, R. Busch, "The Enhancement of Ductility in High-Strength Steels", *Amer. Soc. Met. Trans.*, vol. 60, 1967, pp. 252-258.

## Sind mikroplastische Deformationen ein Modell unserer relativistischen Raum-Zeit?

H. Günther, Fachbereich Elektrotechnik, FH Bielefeld

1. Wir betrachten die mikroplastischen Deformationen eines kristallinen Festkörpers, wie sie nach A. Seeger [1] durch die sine-Gordon-Gleichung einer Versetzung beschrieben werden gemäß

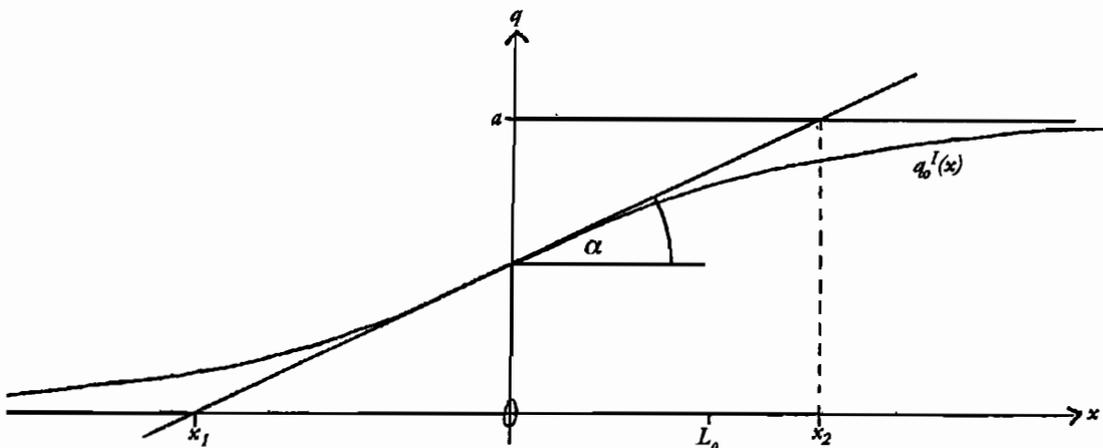
$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{1}{c_o^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = L_o^{-2} \sin q \quad \text{mit } c_o = \sqrt{\sigma/\rho_o}, \quad L_o = \sqrt{a\sigma/2\pi D} \quad (1)$$

Dabei ist angenommen, daß eine Versetzung, deren Gleichgewichtslage mit  $q(x, t) = 0$  durch die entlang der  $x$ -Achse ausgerichtete Position beschrieben wird, eine dazu orthogonale Verschiebung  $Q(x, t) = (a/2\pi) q(x, t)$  erfährt. Für  $q = n 2\pi$  ist die Versetzung dann jeweils um ein  $n$ -faches der Gitterkonstanten  $a$  weitergeglitten. Das Gitter treibt die Versetzung mit der Direktionskonstanten  $D$  in ihre Gleichgewichtsposition, wo die Versetzung eine Grundspannung  $\sigma$  aufweist, wie eine gespannte Saite. Das dynamische Verhalten der Versetzung im Kristallgitter muß dann wie bei einer schwingenden Saite ferner durch eine effektive Massendichte  $\rho_o$  charakterisiert werden. Man spricht daher auch vom Saitenmodell der Versetzung. Wir bemerken, daß die charakteristische Geschwindigkeit  $c_o$  von (1) zahlenmäßig sehr gut mit der transversalen Schallgeschwindigkeit  $c_T$  übereinstimmt, s. J.D. Eshelby [2]. Ein wesentliches Merkmal der sine-Gordon-Gleichung (1) ist ihre Nichtlinearität auf Grund des Terms  $\sin q$ . Für mikroplastische Verschiebungen  $q$  von der Größenordnung einer Gitterkonstanten  $a$  kann  $\sin q = \sin((2\pi/a)Q)$  bereits nicht mehr einfach durch  $q$  ersetzt werden. Solche mikroplastischen Deformationen, die wir im folgenden allein betrachten, sind im mathematischen Sinne also als "groß" anzusehen.

2. Die sog. statische kink-Lösung  $q_o^I(x)$  von (1),

$$q_o^I(x) = 4 \arctan \exp(x/L_o) \quad (2)$$

definiert uns einen natürlichen Maßstab  $L_o$  für Längenmessungen im Kristall. Alle Abstände im Kristall können wir damit in Vielfachen von  $L_o$  messen, s. Bild 1.

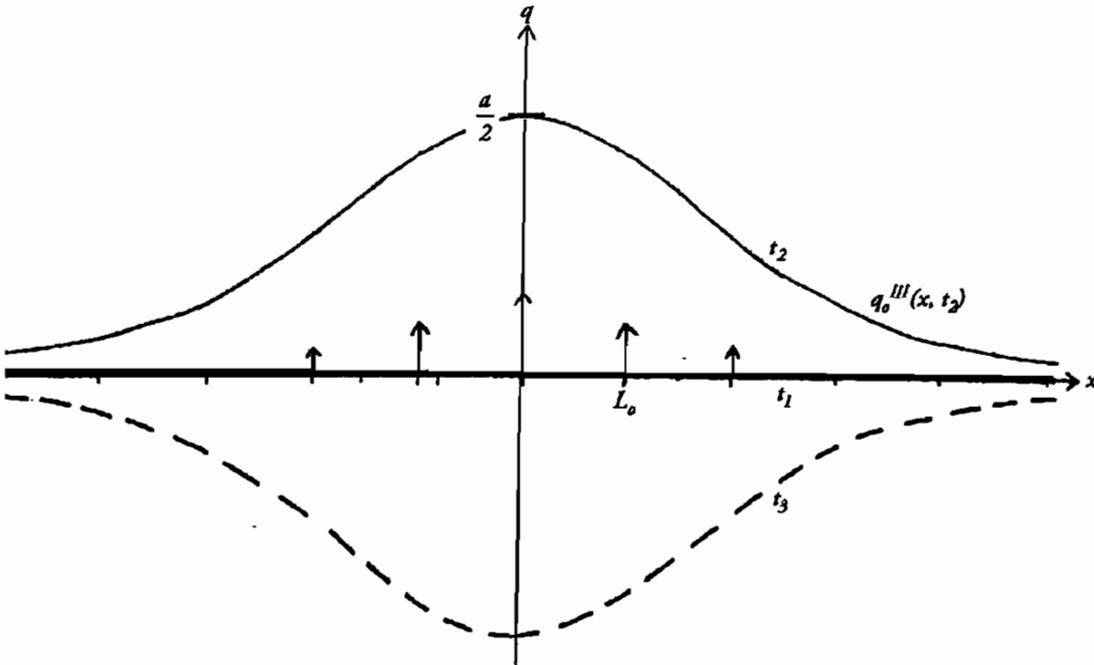


**Bild 1.** Zur Definition des natürlichen Längenmaßstabes  $L_o$  aus der Kinklösung (2). Die Wendetangente schneidet die Asymptoten  $y = 0$  und  $y = a$  von  $q_o^I(x)$  bei  $x_{1,2} = \pm \pi L_o / 2$ , also  $L_o = 2x_2 / \pi$ .

Ebenso definiert uns die sog. lokalisierte breather - Lösung  $q_o^{III}(x, t)$  von (1),

$$q_o^{III}(x, t) = 4 \arctan \frac{\sin(2\pi t/\Theta_o)}{\cosh(x/\sqrt{2} L_o)} \quad \text{mit} \quad \Theta_o = \sqrt{2} 2\pi L_o/c_o, \quad (3)$$

eine natürliche Schwingungsdauer  $\Theta_o$  für die Messung von Zeiten im Kristall, s. Bild 2. Eine auf der Basis dieser Schwingungsdauer  $\Theta_o$  betriebene Uhr mißt alle Zeiten in Vielfachen von  $\Theta_o$ , vgl. hierzu H. Günther [3]. Der Kristall liefert uns also über die durch (1) erlaubten Zustände seiner Versetzungen kristalleigene Maßeinheiten für die Orts- und Zeitmessung - ebenso wie wir andererseits für Präzisionsmessungen z. B. die Wellenlänge der gelben Natriumlinie bzw. die Schwingungsdauer eines Schwingquarzes heranziehen. Wir werden von inneren Beobachtern im Kristall sprechen, wenn Orts- und Zeitmessungen mit Hilfe von  $L_o$  und  $\Theta_o$  durchgeführt werden.



**Bild 2.** Zur Definition der natürlichen Schwingungsdauer  $\Theta_o$  aus der breather-Lösung (3). Eingezeichnet sind die Schwingungszustände der Funktion  $q_o^{III}(x, t)$  für  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = \sqrt{2} \pi L_o/2c_o$  und  $t_3 = 3\sqrt{2} \pi L_o/2c_o$  (die Pfeile deuten die Bewegungsrichtung an).

**3.** Wir betrachten nur Ereignisse auf der  $x$ -Achse. Der innere Beobachter ruhe relativ zum Schwerpunkt des Kristalls. Dieses Bezugssystem nennen wir  $\Sigma_o$ . Mit  $c_o \approx c_T$  ist in  $\Sigma_o$  eine ausgezeichnete Geschwindigkeit definiert, welche - wie jede andere, genau bekannte Geschwindigkeit - geeignet ist, die überall verteilten Uhren synchron in Gang zu setzen. Der innere Beobachter kann damit jedem Ereignis  $E$  eindeutig einen Ort  $x$  und eine Zeit  $t$  zuordnen. Er möge nun eine, mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  erfolgende Bewegung seiner Maßstäbe und Uhren verfolgen. Die gleichförmige Bewegung der Kinke  $q_o^I$  muß dabei ebenso eine Lösung der sine - Gordon - Gleichung (1) sein wie die gleichförmige Bewegung des schwingenden breather  $q_o^{III}$ . Diese Lösungen  $q^I(x, t)$  bzw.  $q^{III}(x, t)$  lauten

$$q^I(x, t) = 4 \arctan \exp \frac{x - vt}{L_o'} \quad \text{mit} \quad L_o' = \gamma L_o, \quad (4)$$

$$q^{III}(x, t) = 4 \arctan \frac{\sin[2\pi(t - vx/c_0^2)/\Theta]}{\cosh[(x - vt)/\sqrt{2}L_0]} \quad \text{mit} \quad \Theta'_0 = \frac{\Theta_0}{\gamma} . \quad (5)$$

Hierbei ist  $\gamma$  der berühmte Lorentzfaktor, hier aber mit der Geschwindigkeit  $c_0$ ,

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} . \quad (6)$$

Das bedeutet aber, der bewegte Längenmaßstab  $L'_0$  ist um den Faktor  $\gamma$  verkürzt, und die bewegte Schwingung  $\Theta'_0$  ist um den Faktor  $\gamma$  gedehnt. Messen wir also eine Zeit  $T = t \cdot \Theta$  mit der bewegten Uhr, so ergibt sich aus  $T = t' \cdot \Theta'$  auf der bewegten Uhr eine um den Faktor  $\gamma$  verminderte Zeitangabe  $t'$ . Diese Erfahrungen der inneren Beobachter mit ihren kristalleigenen Maßstäben und Uhren in dem durch das Gitter definierten, ausgezeichneten Bezugssystem  $\Sigma_0$  halten wir mit den folgenden beiden Gleichungen (7) und (8) als **Axiom I** fest, vgl. auch [4]:

In  $\Sigma_0$  messen wir eine Länge  $L'_0$  für die mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegte Länge  $L_0$  gemäß

$$L'_0 = \gamma L_0 . \quad \text{Lorentzkontraktion im Bezugssystem } \Sigma_0 \quad (7)$$

Rückt der Zeiger einer in  $\Sigma_0$  mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegten Uhr um die Zeigerstellung  $t'$  weiter, dann zeigen die in  $\Sigma_0$  ruhenden Uhren eine Differenz  $t$  ihrer Zeigerstellungen an gemäß

$$t' = \gamma t . \quad \text{Zeitdilatation im Bezugssystem } \Sigma_0 \quad (8)$$

Von einem Beobachter, der sich relativ zu den mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegten Maßstäben und Uhren in Ruhe befindet, sagen wir, er befinde sich in einem Bezugssystem  $\Sigma'$ , welches in bezug auf das ausgezeichnete System  $\Sigma_0$  die Geschwindigkeit  $v$  besitzt. Zur sprachlichen Unterscheidung nennen wir einen relativ zum System  $\Sigma'$  bzw. zum System  $\Sigma_0$  ruhenden Beobachter den "bewegten Beobachter" bzw. den "ruhenden Beobachter". Der bewegte Beobachter ist nun durchaus in der Lage, in  $\Sigma'$  Abstände zu messen. Dazu muß er lediglich seine Maßstäbe genügend oft aneinanderlegen. Wenn er seine, zur Zeitmessung überall verteilten Uhren aber synchronisieren will, steht ihm dafür nun keine ausgezeichnete Geschwindigkeit zur Verfügung. (Die sine - Gordon - Gleichung ist nur für das relativ zum Kristallschwerpunkt ruhende Bezugssystem  $\Sigma_0$  hergeleitet). Damit er dennoch seine Uhren eindeutig synchronisieren kann, fordern wir als unser **Axiom II** folgendes, elementare Relativitätsprinzip:

*Wenn der Beobachter im ausgezeichneten Bezugssystem  $\Sigma_0$  gemessen hat, daß das Bezugssystem  $\Sigma'$  in bezug auf  $\Sigma_0$  die Geschwindigkeit  $v$  besitzt, dann sollen die Uhren in  $\Sigma'$  so angestellt werden, daß das Bezugssystem  $\Sigma_0$  von  $\Sigma'$  aus beurteilt die Geschwindigkeit  $-v$  besitzt.*

**4.** Wir fragen nun: Welchen Wert mißt der bewegte Beobachter für ein Signal, wenn der ruhende Beobachter dafür die Geschwindigkeit  $c_0$  festgestellt hat?

In  $\Sigma'$  befinde sich ein dort ruhender "Stab", die Strecke  $\Delta X$ . An den Stabenden seien links bzw. rechts die Uhren  $U_v^o$  bzw.  $U_v^*$  befestigt. Vom ausgezeichneten System  $\Sigma_0$  aus betrachtet, bewegen sich der Stab und die beiden Uhren mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$ . Das linke Stabende habe die Koordinate  $x' = 0$ . Wenn es sich gerade am Koordinatenursprung von  $\Sigma_0$  befindet, werde der Zeiger von  $U_v^o$  auf die Anfangsstellung  $t' = 0$  gestellt. Dieses Zusammenfallen der beiden Koordinatenursprünge sei das Ereignis  $O$ ,

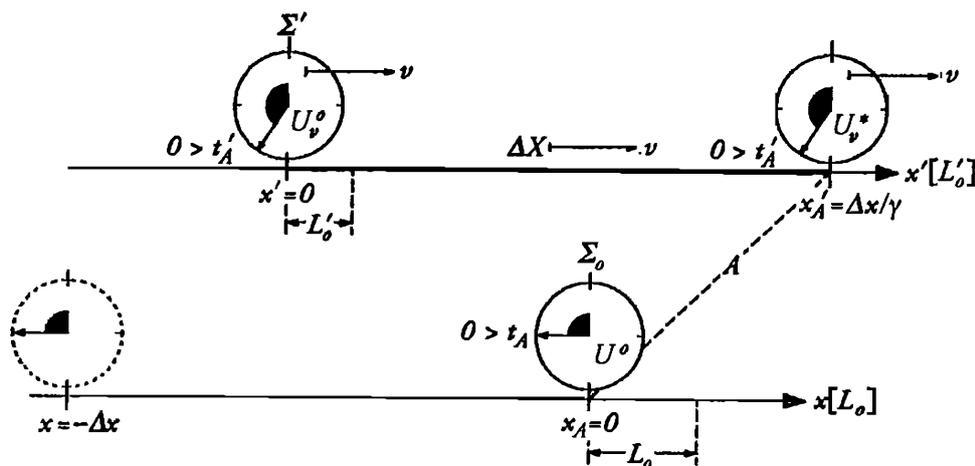
$$\Sigma_0 : (x = 0, t = 0) \quad ; \quad \Sigma' : (x' = 0, t' = 0) . \quad \text{Das Ereignis } O \quad (9)$$

Durch Anlegen seines Maßstabes  $L_0$  mißt der ruhende Beobachter mit  $\Delta X = \Delta x L_0$  für den bewegten Stab die Maßzahl  $\Delta x$ . Er beobachtet, daß der bewegte Beobachter durch Anlegen des, aus seiner Sicht gemäß (7) verkürzten Maßstabes  $L_0'$  mit  $\Delta X = \Delta x' L_0'$  die Maßzahl  $\Delta x'$  für die Länge dieses Stabes feststellt, und der Vergleich der Koordinaten der Endpunkte dieses in  $\Sigma'$  ruhenden Stabes ergibt

$$\Delta x = \gamma \Delta x' . \tag{10}$$

Bei  $x = 0$  befinde sich, im System  $\Sigma_0$  ruhend, eine Uhr  $U^0$ . Gemäß unserem Axiom II soll der bewegte Beobachter für alle "Gegenstände" im ausgezeichneten System  $\Sigma_0$  die Geschwindigkeit  $-v$  feststellen. Wir definieren ein Ereignis  $A$  dadurch, daß der rechte Endpunkt des Stabes gerade die Koordinate  $x = 0$  im System  $\Sigma_0$  hat, s. Bild 3. In den Maßeinheiten des ruhenden Beobachters gemessen, überstreicht die Uhr  $U^0$  den Stab mit der Geschwindigkeit  $-v = \Delta x / \Delta t_A$ . Die Uhr  $U^0$  hat zum Ereignis  $A$  also die Zeigerstellung  $t_A = -\Delta x / v$ . In den Maßeinheiten des bewegten Beobachters gemessen, gilt nach unserem Axiom II aber auch  $-v = \Delta t'_A / \Delta x'$ . Die Uhr  $U_v^*$  hat zum Ereignis  $A$  also die Zeigerstellung  $t'_A = -\Delta x' / v = -\Delta x / (\gamma v)$  und steht damit für den bewegten Beobachter zum Ereignis  $O$  ebenfalls auf der Zeigerstellung  $0$ . (Diese Aussage hat nur für den bewegten Beobachter einen wohl definierten Sinn). Insgesamt finden wir also für das Ereignis  $A$ :

$$\Sigma_0 : (x_A = 0, t_A = -\Delta x / v) ; \Sigma' : (x'_A = \Delta x / \gamma, t'_A = -\Delta x / (\gamma v)) . \tag{11}$$



**Bild 3.** Die Synchronisation der beiden Uhren  $U_v^0$  und  $U_v^*$  in  $\Sigma'$  zum Ereignis  $A$  mit Hilfe des elementaren Relativitätsprinzips. Die gestrichelte Gerade verbindet identische Raum-Zeit-Punkte.

Zum Ereignis  $O$  starten wir nun am linken Stabende ein  $c_0$ -Signal in Richtung auf das rechte Stabende. Der ruhende Beobachter hat registriert, daß der bewegte Beobachter seine Uhr  $U_v^*$  zum Ereignis  $A$  auf die Zeigerstellung  $t'_A = -\Delta x / (\gamma v)$  gebracht hat. Bis zum Signalstart läuft die ruhende Uhr  $U^0$  gemäß (11) um den Betrag  $\Delta x / v$  weiter. Nach unserem Axiom I geht die bewegte Uhr aber gemäß (8) um den Faktor  $\gamma$  nach. Folglich konstatiert der ruhende Beobachter: Beim Start des Signals steht die Uhr  $U_v^*$  auf der Stellung  $t'_B = t'_A + \gamma \cdot \Delta x / v$ .

Für die Laufzeit des Signals zwischen den beiden Stabenden findet der ruhende Beobachter mit seinen Uhren, weil das Stabende dem Signal mit der Geschwindigkeit  $v$  davoneilt, die Zeitspanne  $\Delta t_{\rightarrow} = \Delta x / (c_0 - v)$ . Während dieser Zeit geht also der Zeiger der bewegten Uhr, abermals wegen der Formel (8), nur um  $\Delta t'_{\rightarrow} = \gamma \cdot \Delta t_{\rightarrow} = \gamma \Delta x / (c_0 - v)$  weiter und steht folglich bei Ankunft

des Signals auf der Stellung  $\Delta t'_* = t'_B + \Delta t'_{\rightarrow} = t'_A + \gamma \Delta x/v + \gamma \Delta x/(c_0 - v)$ , und damit

$$\Delta t'_* = \frac{-\Delta x}{\gamma v} + \frac{\Delta x \gamma}{v} + \frac{\gamma \Delta x}{c_0 - v} = \Delta x \left( \frac{-1 + \gamma^2}{\gamma v} + \frac{\gamma}{c_0 - v} \right) = \Delta x \left( \frac{-v}{\gamma c_0^2} + \frac{\gamma}{c_0 - v} \right) = \Delta x \frac{-v(c_0 - v) + \gamma^2 c_0^2}{\gamma c_0^2 (c_0 - v)},$$

$$\Delta t'_* = \frac{\Delta x}{\gamma c_0}. \quad (12)$$

Für die Signalgeschwindigkeit mißt der bewegte Beobachter den Wert  $c'_0 = \Delta x'/\Delta t'_*$ . Aus (10) und (12) folgt dafür sofort

$$c'_0 = c_0. \quad (13)$$

Wir haben hier das Signal nach rechts laufen lassen. Dasselbe Ergebnis erhalten wir bei entgegengesetzter Signalrichtung.

5. Gemäß der Gleichung (13) messen alle inneren Beobachter, unabhängig von ihrem Bewegungszustand stets ein und dieselbe, isotrope Signalgeschwindigkeit  $c_0$ . Solange also diese inneren Beobachter einzig und allein die kristalleigenen Maßstäbe und Uhren für ihre Messungen benutzen, sind sie nicht mehr in der Lage, eine Bewegung relativ zum Kristallgitter festzustellen. Der Kristall hat für die inneren Beobachter überhaupt keinen Bewegungszustand. Alle Bezugssysteme, die sich relativ zum Kristall mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen, sind gleichberechtigt. Das ist das berühmte Einsteinsche spezielle Relativitätsprinzip aus dem Jahre 1905, s. A. Einstein [5], mit der universellen Konstanz der Signalgeschwindigkeit, hier allerdings mit der Signalgeschwindigkeit  $c_0$  der sine-Gordon-Gleichung. Dieses Prinzip, aus dem A. Einstein 1905 die spezielle Relativitätstheorie mit allen ihren Effekten deduzieren konnte, steht aber hier nicht am Anfang der Theorie, sondern kommt am Ende als Ergebnis einer ganz anderen Axiomatik heraus, nämlich aus den oben formulierten Axiomen I und II. Nach dem bisherigen Verständnis der Physik ist allerdings unser Axiom I, nämlich die um die Zeitdilatation (8) im ausgezeichneten Bezugssystem  $\Sigma_0$  erweiterte FitzGerald - Lorentz - Hypothese (7) einer Kontraktion von Maßstäben, die sich in bezug auf ein ausgezeichnetes Bezugssystem  $\Sigma_0$  bewegen, unvereinbar mit der speziellen Relativitätstheorie. Eine solche Unvereinbarkeit war ausdrücklich in der philosophischen Analyse der relativistischen Raum - Zeit durch H. Reichenbach, s. [6], formuliert worden. Die Reichenbachsche These von einer begrifflichen Unvereinbarkeit der Lorentzkontraktion mit der Einsteinkontraktion ist damit durch unsere Untersuchungen am kristallinen Festkörper explizit falsifiziert worden. Diese Auffassung von H. Reichenbach wird aber auch in einschlägigen Lehrbüchern zur Elektrodynamik und Relativitätstheorie vertreten und muß also korrigiert werden, s. z.B. das Lehrbuch von R. Becker und F. Sauter [7]. Wir bemerken, daß sich dagegen die Thesen von H. Reichenbach zur Definition der Gleichzeitigkeit eindrucksvoll am Festkörper verifizieren lassen. Eine eingehende Analyse der hier skizzierten Fragen haben wir in [8] gegeben.

### Literaturangaben

- [1] Seeger, A., Zur Dynamik von Versetzungen ..., Diplomarbeit, Universität Stuttgart 1948/49.
- [2] Eshelby, J. D., Proc. Roy. Soc. A256, 222 (1962).
- [3] Günther, H., phys. stat. sol(b) 149, 101 (1988).
- [4] Günther, H., phys. stat. sol(b), 185, 335 (1994).
- [5] Einstein, A., Ann. Phys. (Leipzig) 17, 891 (1905).
- [6] Reichenbach, H.F.H.G., Gesammelten Werke Bd.2 Vieweg-Verl. 1977, Philosophie der Raum-Zeit-Lehre, S.229.
- [7] Becker, R. und F. Sauter, Theorie der Elektrizität, 21. Aufl., B.G. Teubner Verl. 1973, Bd. 1, S. 220.
- [8] Günther, H., Gitter-Äther-Relativität, Akad.-Verl. Berlin, im Druck.



Technische Hochschule Darmstadt  
Fachgebiet Maschinenelemente und Maschinenakustik  
Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. F.G. Kollmann  
Fachbereich 16 (Maschinenbau)

## Versuche zur Identifikation der Materialparameter des viskoplastischen orthotropen Modells von Choi und Krempl am einkristallinen Werkstoff SRR99

R. Kunkel

### 1 Einleitung

Zur Verbesserung des thermischen Wirkungsgrades von Gasturbinen trägt eine Erhöhung der Turbineneintrittstemperaturen maßgeblich bei. Dabei legen die Festigkeitseigenschaften der eingesetzten Schaufelmaterialien eine obere Grenze für die Temperaturen fest. Durch den gezielten Einsatz spezieller Werkstoffe gelingt es, diese Grenze immer weiter nach oben zu verschieben. Einkristalline Nickel-Basis-Legierungen wie beispielsweise SRR99 gewinnen dabei zunehmend an Bedeutung. Diese Werkstoffe verhalten sich stark anisotrop, so daß für die Auslegung der Bauteile Berechnungsmodelle entwickelt bzw. angewendet werden müssen, die das thermomechanische Verhalten der Einkristallwerkstoffe gut abbilden können. Das vereinheitlichte Modell (unified model) von Choi und Krempl [2] ist in der Lage, zeitabhängige und zeitunabhängige Effekte mit einem System gekoppelter Differentialgleichungen bei kubischer Anisotropie zu beschreiben. Hierdurch können Experimente wie monotone Zug-, Kriech- und Relaxationsversuche simuliert werden. Zyklische Effekte werden durch dieses Modell nicht erfaßt.

### 2 Materialeigenschaften und Anwendungen von SRR99

Die einkristalline Nickel-Basis-Legierung SRR99 besteht aus einem Zweiphasensystem ( $\gamma'$ -Anteil: 60%) mit den Hauptelementen Ni (65%), W (9,5%), Cr (8,5%), Al (5,5%) sowie geringen Anteilen von Co, Ta und Ti. Die Gitterstruktur ist kubisch-flächenzentriert aufgebaut. Die mechanischen Eigenschaften wie E-Modul oder Fließgrenze sind stark abhängig von der Lage der Belastungsrichtung zur Kristallgitterausrichtung. Mischkristallverfestigung, Ausscheidungshärte, fehlende Korngrenzen und daraus resultierend eine große Gefügestabilität bewirken auch bei Anwendungen bis fast 1300K ausreichend gute Festigkeitseigenschaften. Somit bietet sich SRR99 als Schaufelmaterial für die ersten Stufen von Hochdruckturbinen an.

### 3 Das Werkstoffmodell nach Choi und Krempl

Aufbauend auf ein erstes isotropes Werkstoffmodell [5] haben Choi und Krempl [2] ein orthotropes Überspannungsmodell auf den Fall der kubischen Symmetrie bei kleinen Deformatio-

nen spezialisiert. Die Autoren beschränken sich in diesem rein phänomenologischen Ansatz ausschließlich auf isotherme Lastgeschichten. Unter Verwendung der Vektornotation für die Elemente des Spannungstensors  $\sigma^T = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}]$  und des Verzerrungstensors  $\epsilon^T = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, 2\epsilon_{23}, 2\epsilon_{13}, 2\epsilon_{12}]$  wird eine inkrementelle Formulierung vorgeschlagen, die von der additiven Zerlegung des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors in einen elastischen und einen inelastischen Anteil ausgeht

$$\dot{\epsilon}' = \mathbf{MC}^{-1}\mathbf{N}^{-1}\dot{\sigma}' + \mathbf{MK}^{-1}\mathbf{N}^{-1}(\sigma' - \mathbf{g}') \quad (1)$$

Die Nomenklatur unterscheidet gestrichene Größen (z.B.  $\dot{\epsilon}'$ ) und ungestrichene (z.B.  $\epsilon$ ). Die gestrichenen Größen sind im Laborkoordinatensystem  $x'_i$ , dessen  $x'_3$ -Achse mit der Belastungsachse der Prüfmaschine zusammenfällt, definiert. Die ungestrichenen Größen beziehen sich auf das Gitterkoordinatensystem  $x_i$ , dessen Achsen  $x_1, x_2, x_3$  alternativ auch als [100]-, [010]- bzw. [001]-Achse bezeichnet werden. Die relative Orientierung der beiden Koordinatensysteme zueinander wird mit Hilfe von Laue-Aufnahmen für jede Materialprobe durch den Hersteller ermittelt. Der Back-Stress  $\mathbf{g}'$  stellt eine von zwei inneren Modellvariablen dar. Choi und Krempl geben hierfür folgende Entwicklungsgleichung an:

$$\dot{\mathbf{g}}' = q_1[\Gamma]\dot{\sigma}' + \{1 - \theta q_1[\Gamma]\} \frac{\mathbf{x}'}{k[\Gamma]} - \frac{\mathbf{g}'}{\Pi_2} R[\Pi_1] \quad (2)$$

Als zweite Größe wird die kinematische Verfestigung

$$\dot{\mathbf{f}}' = p \left( \frac{\sigma' - \mathbf{g}'}{k[\Gamma]} \right) \quad (3)$$

eingeführt. Die maßgeblichen Größen in den Modellgleichungen sind die Viskositätsfunktion  $\kappa$ , die Invarianten  $\Gamma, \theta, \Pi_1, \Pi_2$ , die Formfunktion  $q_1$  und die Erholungsfunktion  $R$ . Die Anpassung des Werkstoffmodells an experimentelle Daten erfolgt mit diesen Funktionen. Hierzu sind für den allgemeinen dreiachsigen Spannungszustand insgesamt 29 Konstanten zu bestimmen [1], die aber im Rahmen dieses Artikels nicht detailliert besprochen werden können.

Dieses auf den ersten Blick sehr aufwendige Problem läßt sich dadurch reduzieren, daß die experimentellen Versuche in ausgesuchten Belastungsrichtungen durchgeführt werden, in denen nur noch bestimmte Konstanten des Modells aktiv sind. Es läßt sich zeigen [4], daß mit Hilfe von Zug-, Relaxations- und Kriechversuchen, die in Richtung einer Gitterachse (z.B. [001]) durchgeführt werden, 18 Konstanten schrittweise bestimmt werden können. Dabei können einige Parameter (z.B.: E-Modul) direkt aus den Spannungs-Dehnungs-Schaubildern abgelesen werden, andere sind mit Hilfe eines geeigneten Anpassungsverfahrens zu ermitteln. Die maximale Anzahl der gleichzeitig zu bestimmenden Konstanten beträgt bei schrittweiser Anpassung 5.

Die fehlenden 11 Parameter können an Zug-, Relaxations- und Kriechversuche angepaßt werden, bei denen die Belastung in Richtung der Flächen- oder der Raumdiagonalen des Kristallgitters aufgebracht werden. Auch hier kann durch schrittweise Anpassung die Anzahl der gleichzeitig zu bestimmenden Konstanten auf 5 reduziert werden.

## 4 Anpassung des Modells an Experimente

Die für die Identifikation der Modellparameter notwendigen Zug-, Relaxations- und Kriechversuche werden an SRR99-Proben in [001]-Richtung bei Temperaturen von 760 °C,

850 °C und 980 °C durchgeführt. Die Daten der Kriechversuche stellt die Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM) in Berlin zur Verfügung. Zur Parameterbestimmung wird ein gemischtes Verfahren eingesetzt, das die Vorteile von Evolutionsstrategie [3] und Gradientenverfahren [4] kombiniert.

Die bei der Anpassung des Werkstoffmodells an die Experimente in [001]-Richtung erzielten Ergebnisse werden in der Folge exemplarisch für die Temperatur  $\vartheta = 760$  °C in Bild 1

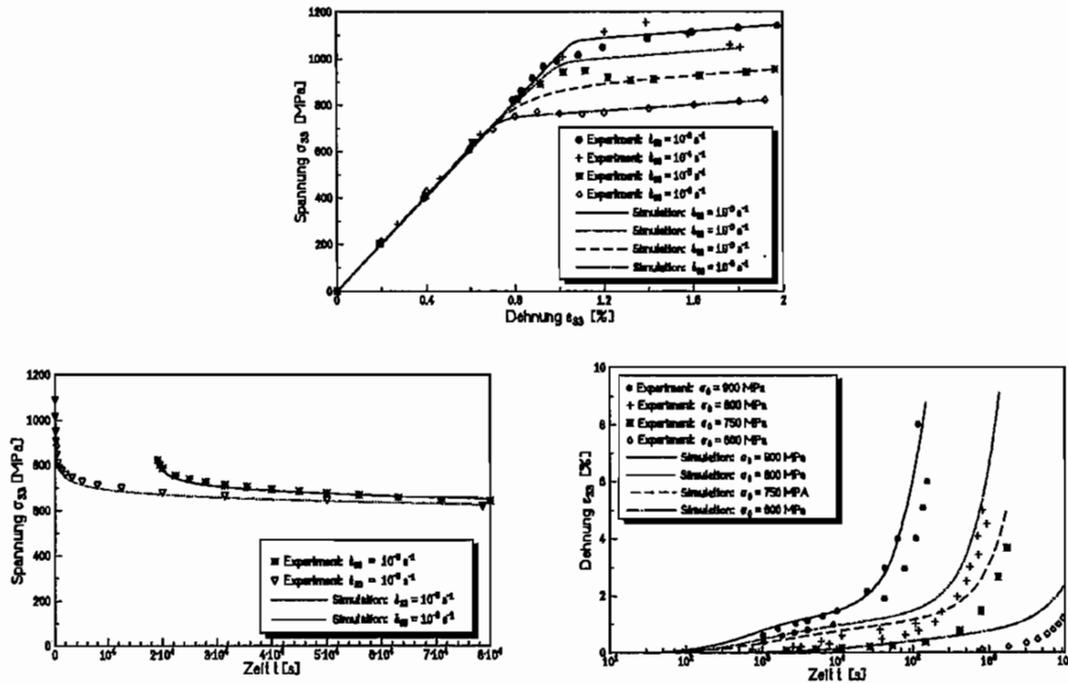


Bild 1: Vergleich von experimentellen Daten und Simulationen bei Zug-, Relaxations- und Kriechversuchen bei einer Temperatur von 760 Grad Celsius

präsentiert. Die Simulationen von Zug-, Kriech- und Relaxationsversuchen erfolgen mit einem einzigen Parametersatz pro Temperatur. Dabei sind die Simulationen immer als Linienzüge, die Experimente als Symbole dargestellt. Im oberen Bild sind vier Zugversuche mit unterschiedlichen Dehnraten zu sehen, bei denen die gute Übereinstimmung von Simulation und Experiment zu erkennen ist. Lediglich bei der Dehnrade  $\dot{\epsilon}_{33} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  existiert im transienten Bereich eine deutliche Differenz. Die mit dieser Dehnrade belastete Probe zeigt eine gegenüber den anderen Dehnraten sehr auffällige Anhäufung an Stapelfehlern. Ursachen und mikrostrukturelle Zusammenhänge sind zur Zeit noch nicht geklärt. Im ausgebildeten inelastischen Bereich ab  $\epsilon_{33} = 1,8\%$  sind die Ergebnisse von Simulation und Experiment jeweils nahezu deckungsgleich.

Besonders gut ist auch die Übereinstimmung der Relaxationsversuche im Diagramm unten links. Hier wurden zwei Proben mit den angegebenen Dehnraten jeweils bis zu einer maximalen Dehnung von  $\epsilon_{33} = 1,9\%$  gezogen, woraufhin diese konstant ausgeregelt wurde. Dargestellt ist die Spannung über der logarithmisch aufgetragenen Zeit.

Nicht ganz so gut sind die Ergebnisse bei den Kriechversuchen. Hier unterscheiden sich

Experiment und Simulation teilweise sehr deutlich. Dies liegt zum einen an einer recht einfachen Definition der Erholungsfunktion  $R$  im Modell, die noch verbessert werden kann, zum anderen streuen die Kriechexperimente wesentlich stärker als Zug- und Relaxationsversuche. Dies ist an zwei Kriechversuchen mit gleicher Versuchsführung bei  $\sigma_0 = 900\text{MPa}$  gut zu erkennen. Auch in diesem Diagramm ist die Zeit logarithmisch aufgetragen.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorgestellten Ergebnisse zeigen, daß das Modell von Choi und Krempl in der Lage ist, das Verhalten der einkristallinen Nickelbasis-Legierung SRR99 für verschiedenen Belastungsarten in Richtung der Gitterachsen mit einem Parametersatz pro Temperatur gut abzubilden. Zusätzlich vorliegende Untersuchungen bei Temperaturen von  $\vartheta = 850\text{ }^\circ\text{C}$  und  $\vartheta = 980\text{ }^\circ\text{C}$  bestätigen dies. Die ermittelten Parametersätze müssen zukünftig um die noch fehlenden Parameter ergänzt werden. Diese werden wirksam, sobald die Belastungsrichtung nicht mehr entlang der Gitterachsen vorliegt. Deshalb werden in der Fortsetzung der vorgestellten Arbeit Zug-, Relaxations- und Kriechversuche an Proben mit  $[001]$ -ferner Ausrichtung bei den Temperaturen  $\vartheta = 760\text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\vartheta = 850\text{ }^\circ\text{C}$  und  $\vartheta = 980\text{ }^\circ\text{C}$  durchgeführt.

## Literatur

- [1] Choi, S.H.: *Modeling of time-dependent mechanical deformation behaviors of metals and alloys using viscoplasticity theory based on overstress*. Dissertation, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York 1988.
- [2] Choi, S.H.; Krempl, E.: Viscoplasticity theory based on overstress applied to the modeling of cubic single crystals. *European Journal of Mechanics, A/Solids* **8**, 219 – 233 (1989).
- [3] Hartmann, G.; Müller, D.: Identification of Materials Parameters for Inelastic Constitutive Models Using Principles of Biologic Evolution. *Journal of Eng. Mat. and Technology* **111**, 299–305 (1989).
- [4] Kunkel, R.: *Experimentelle Untersuchungen an einer einkristallinen Nickelbasis-Legierung zur Identifikation der Materialfunktionen und Materialparameter eines viskoplastischen Modells*. Interner Zwischenbericht, Technische Hochschule Darmstadt 1993.
- [5] Liu, M. C. M.; Krempl, E.: A Uniaxial Viscoplastic Model Based on Total Strain and Overstress. *J. Mech. Phys. Solids* **27**, 377 – 391 (1979).

Dipl.-Ing. H.-G. Jacob, Institut für Mechanik, Universität Hannover

## Berücksichtigung inelastischer Effekte in tensoriellen Elastomerstoffgesetzen bei großen Verformungen

Bei der formalen Beschreibung der inelastischen Effekte werden die jeweils quasistationären Zustände analysiert, während die transienten Effekte formal keine Berücksichtigung finden. Neben der oben beschriebenen Modifikation eines elastischen Grundanteils, sind nun noch die phänomenologischen Effekte der – im Gummimaterial auftretenden – Dissipation in geeigneter Weise als ein viskoser Zusatzwiderstand  $\underline{\underline{\sigma}}^{(v)}$  zu formulieren, welcher dem elastischen Verhalten zu überlagern ist. Diese viskosen Zusatzspannungen sind dabei stark von der Verformungsgröße und der Verformungsrichtung abhängig. Sie sind um so größer, je größer eine derzeitige Verzerrung ist, und scheinbar je größer die zeitliche Änderung der Verzerrung ist, die in Richtung der Verzerrung fällt. In der Eulerschen Beschreibungsweise wird, wie schon erwähnt, der linke Cauchy–Green–Tensor als ein relevantes Deformationsmaß benutzt. Er ergibt sich als Quadrat des symmetrischen Tensors  $\underline{\underline{V}}$ , der die Dehnungen des belasteten Materialpunktes wiedergibt:

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{V}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}^T}_{\equiv \underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}^2 \quad (1)$$

Die zeitliche Änderung dieses Deformationsmaßes  $\underline{\underline{\dot{b}}}$ , zeigt den gewünschten Zusammenhang von Verzerrung und Verzerrungsänderung wieder:

$$\underline{\underline{\dot{b}}} = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{\dot{V}}} + \underline{\underline{\dot{V}}} \cdot \underline{\underline{V}} \quad (2)$$

Messungen ergaben jedoch, daß selbst große Änderungen der Verrungsgeschwindigkeiten keinen relevanten Einfluß auf das Materialverhalten des Gummis hatten. Die Glg. (2) zeigt nun aber einen sehr starken Einfluß der Verzerrungsgeschwindigkeit, der bezüglich des Modells nicht zu erwarten ist. Um diesen Einfluß wieder zu kompensieren, ist es möglich, auf Vergleichsmaße zurückzugreifen, die dafür sorgen, daß lediglich die Größenverhältnisse der Verzerrungsgeschwindigkeiten in den entsprechenden Richtungen weiteren Zugang zur formalen Beschreibung des Materialverhaltens erhalten. Mögliche Vergleichsgrößen sind dabei z. B. Vergleichsgrößen nach *Tresca*, ein von *Misesches* Vergleichsmaß oder auch eine *Norm* (euklidische Norm) des geeigneten Deformationsmaßes. Dabei soll am Beispiel des linken Cauchy–Green–Tensors  $\underline{\underline{b}}$  gelten:

Vergleichsmaß	Beschreibung
$b_{vT}^*$ , $b_{vT}$	Vergleichsmaß nach Tresca
$b_M^*$ , $b_M$	Vergleichsmaß nach von Mises
$\ \underline{b}\  = \sqrt{\underline{b} \cdot \underline{b}}$ , $\ \underline{b}^*\ $	euklidische Norm als Vergleichsmaß

Es wurde zunächst ein analytisches Stoffgesetz entwickelt, dessen viskose Zusatzspannungen auf dem Ansatz

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(H)} = \underline{\underline{f}} \left( \frac{\underline{b}^*}{b_{vT}^*} \right) \quad (3)$$

basieren. Dabei ist die Funktion  $\underline{\underline{\sigma}}^{(H)}$  eine Führungskurve, die, addiert zum elastischen Grundanteil, die eigentliche Hysteresekurve einhüllt. Unter Berücksichtigung der Phänomenologie des Gummimaterials läßt sich diese Führungskurve formal folgendermaßen entwickeln:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(H)} = p_3(b_{vT}^S) \cdot e^{p_4 \cdot \left( \frac{\underline{b}^*}{b_{vT}^*} \cdot \frac{b_{vT}^*}{b_{vT}^S} - \frac{E}{E} \right)} + p_5 \cdot \frac{\underline{b}^*}{b_{vT}^*} \quad (4)$$

Nachfolgend soll die Glg. (4) ein wenig näher betrachtet werden. In der Nähe der Vorreckung kommt es zu einem starken Anwachsen der viskosen Zusatzspannungen. Verfolgt man die Theorie, daß sich die Zahl der Wasserstoffbrücken innerhalb des vernetzten Polymers bei der Deformation bis zu einem bestimmten Sättigungsgrad erhöhen, so kann im gewissen Sinne von einem Wachstumsprozess gesprochen werden. Wächst die Anzahl der Wasserstoffbrücken mit dem Maß der Verformung, so erhöht sich auch der Elastizitätsmodul und damit die Zusatzspannung bezüglich der Deformation. Das „Wachstum“ der Zusatzspannung läßt sich demnach mit Hilfe einer e-Funktion beschreiben, bei der der Parameter  $p_4$  eine Wachstumsrate darstellt:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(H)} = \exp \left\{ p_4 \cdot \underline{\underline{f}} \left( \frac{\underline{b}^*}{b_{vT}^*} \right) \right\} \quad (5)$$

Um nun eine Information darüber zu erhalten, wie weit die Deformation fortgeschritten ist, d. h. wie weit sie noch von einer bisherigen maximalen Deformation (dem aktuellen Schleppzeiger  $b_{vT}^S$ ) entfernt ist, wird der aktuelle Schleppzeiger in Relation gesetzt zum aktuellen Vergleichsmaß  $b_{vT}$ . Damit erweitert sich die Glg. (5) zu:

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(H)} = \exp \left\{ p_4 \cdot \underline{\underline{f}} \left( \frac{\underline{b}^*}{b_{vT}^*} , \text{sign}(b) \frac{b_{vT}^*}{b_{vT}^S} \right) \right\} \quad (6)$$

Das  $sign^*(\dot{b})$  läßt dabei eine Identifikation des Astes der Hysteresekurve zu, der bei der entsprechenden Deformation durchlaufen wird. Die einfachste Funktion, die beim Erreichen des Schleppzeigers maximal wird und normiert dem Tensor  $\underline{E}$  entspricht, ist

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(H)} = \exp \left\{ p_4 \cdot \left( \frac{\dot{b}^*}{b_{vT}^*} \cdot \frac{b_{vT}}{b_{vT}^S} - \underline{E} \right) \right\} \quad (7)$$

Damit wären jedoch die maximalen Spannungswerte bei den jeweiligen Vorreckungen gleich groß, was die Messungen widerlegen. Das Modell fordert eine Zunahme der maximalen Spannungen beim Erreichen des Schleppzeigers in Abhängigkeit von der Vorreckung. Dies wird dadurch sichergestellt, daß Glg. (7) multiplikativ mit einer vom Schleppzeiger abhängigen Funktion  $p_3(b_{vT}^S)$  verknüpft wird. Der nun noch fehlende additive Term aus Glg. (4) mit dem konstanten Parameter  $p_5$  steuert die nicht zu vernachlässigende Hysteresebreite bei kleinen Verformungen. Aus den obigen Überlegungen heraus ergibt sich nun die Glg. (4) der Hüllkurve zur weiteren Ermittlung der viskosen Zusatzspannungen.

Der Vorzeichenwechsel der Geschwindigkeit in den Umkehrpunkten bedingt ein sprunghaftes Ändern des Spannungswertes der Hüllkurve. Das vorliegende Modell jedoch zeigt ein gedämpftes Übergangsverhalten von einer Grenzkurve auf die andere (Be- und Entlastungsverlauf). Diesen Übergang erhält man, indem man eine der beiden Differentialgleichungen ansetzt (beide sind möglich und wurden für diese Arbeit verwendet):

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{(v)} - \underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{(H)} = p_6 \cdot |\dot{I}| \cdot \left( \underline{\underline{\sigma}}^{(H)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(v)} \right) \quad (8)$$

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^{(v)} = p_6 \cdot |\dot{I}| \cdot \left( \underline{\underline{\sigma}}^{(H)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(v)} \right) \quad (9)$$

Führt man nun exemplarisch für Glg. (8) ein Substitut  $\underline{H}$  für die Differenz der beiden nach der Zeit abgeleiteten Tensoren  $\underline{\underline{\sigma}}^{(v)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(H)}$  ein, so reduziert sich Glg. (8) zu

$$\underline{\underline{\dot{H}}}^* = -p_6 \cdot |\dot{I}| \cdot \underline{H} \quad (10)$$

Dabei ist  $I$  eine geeignete Invariante von  $\underline{b}$  und  $|\dot{I}| = \frac{d}{dt}(I)$  die Zeitableitung dieser koordinateninvarianten Größe. Durch eine Drehung des Tensors  $\underline{H}$  in das kartesische Basissystem des mitrotierenden Beobachters reduziert sich die Zaremba-Jaumann-Zeitableitung von  $\underline{\underline{H}}^*$  auf eine Zeitableitung der Koordinaten des gedrehten Tensors  $\underline{H}$ . Die Drehung ermittelt man dabei aus der Integration des Dreh- bzw. Spintensors  $\underline{\underline{\Omega}}$  bzw.  $-\underline{\underline{W}}$ . In dem System des mitrotierenden Beobachters hat die Lösung der Differentialgleichung in Koordinatenschreibweise (Basissysteme zeitinvariant) folgende Form:

$$H_{ab}(t) = e^{-p_6 \cdot |\dot{I}| \cdot (t - t_0)} \cdot H_{ab}(t_0) \quad (11)$$

Aus Glg. (11) wird der Tensor  $\underline{\underline{H}}$  in dem System des mitrotierenden Beobachters ermittelt, retransformiert und resubstituiert, so daß die viskose Zusatzspannung nun endgültig ermittelt wird als

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(v)} = \underline{\underline{H}} + \underline{\underline{\sigma}}^{(H)} \quad (12)$$

Nun kann der Deviator von  $\underline{\underline{\sigma}}^{(v)}$  zur Ermittlung der Gesamtspannung errechnet werden. Dieses Materialgesetz (z. B.  $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{f}}(\underline{\underline{b}}, \underline{\underline{b}}^*, \dots)$ ) in der Eulerschen Beschreibungsweise sollte auch für große Deformationen eine gewisse Allgemeingültigkeit besitzen; d. h. es muß eine uneingeschränkte Möglichkeit der Abbildung auf die Lagrangesche Beschreibungsweise besitzen. Der formale Zusammenhang für z. B. die Umrechnung der Hüllkurve  $\underline{\underline{\sigma}}^{(H)}$  in die Lagrangesche Betrachtungsweise

$$\underline{\underline{\tilde{T}}}^{(H)} = \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^{(H)} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1T} \quad (13)$$

gilt immer, bringt für die Numerik jedoch erhebliche Probleme mit sich, wie z. B.:

- ◇ gekoppelte Differentialgleichungssysteme,
- ◇ Eulersche Größen bleiben in  $\underline{\underline{\tilde{T}}}$  erhalten,
- ◇ geschlossene analytische Ableitung von  $\exp(\underline{\underline{b}}^*)$  ist nicht möglich
- ◇ und die multiple Ungenauigkeit durch die Tensorfunktionen und numerischen Ableitungen.

Das Ziel muß daher die analytisch ableitbare Formulierung für  $\underline{\underline{\tilde{T}}}$  in Größen der Lagrangeschen Betrachtungsweise sein. Eine Möglichkeit der Umrechnung von den Cauchy-Spannungen auf die Lagrangeschen 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen kann durch eine Koordinatentransformation in ein von der Starrkörperdrehung unabhängiges Koordinatensystem erreicht werden. Damit läßt sich, unter Berücksichtigung der geeigneten Vergleichmaße, die Hüllkurve  $\underline{\underline{\sigma}}^{(H)}$  in eine adäquate Hüllkurve  $\underline{\underline{\tilde{T}}}^{(H)}$  der Lagrangeschen Beschreibungsweise übertragen:

$$\underline{\underline{\tilde{T}}}^{(H)} = \frac{1}{\sqrt{\underline{\underline{C}}}} \cdot \left\{ p_3 \cdot \exp \left[ p_4 \left( \frac{\underline{\underline{\Delta C}}}{C_M} \cdot \frac{C_M}{C_M^S} - \underline{\underline{E}} \right) \right] + p_5 \cdot \frac{\underline{\underline{\Delta C}}}{C_M} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{\underline{\underline{C}}}} \quad (14)$$

# Deformationsgesetze auf der Grundlage des plastischen Spin-Konzeptes in konvektiven Koordinaten

Ralf John, TU Dresden, Institut für Festkörpermechanik  
 Prof. Bergander, Planungs- u. Ingenieurbüro für Bauwesen Dr. Jäger

Es wird ein Deformationsgesetz für die Berechnung von großen elastisch-plastischen Deformationen bei anisotropen Materialverhalten unter Berücksichtigung des plastischen Spin formuliert. Die Herleitung der konstitutiven Beziehungen erfolgt in der konvektiven Beschreibungsweise. An dem Beispiel des einfachen Schubes für starr-plastisches Verhalten mit kinematischer Verfestigung wird eine Möglichkeit zur Definition der Substruktur vorgestellt.

## 1 Konvektive Beschreibungsweise

Die Koordinaten des materiellen Teilchens und die Zeit sind in der konvektiven Beschreibungsweise die unabhängigen Variablen. Die Form der Koordinatenlinien, das Basisvektorsystem und die Metrik sind zeitlich veränderlich. Es soll das Beispiel des einfachen Schubes (Bild 1) betrachtet werden. Die Basisvektoren der Momentankonfiguration besitzen die Form  $\vec{g}_1(t) = \vec{e}_I$  und  $\vec{g}_2(t) = \gamma(t)\vec{e}_I + \vec{e}_{II}$ .

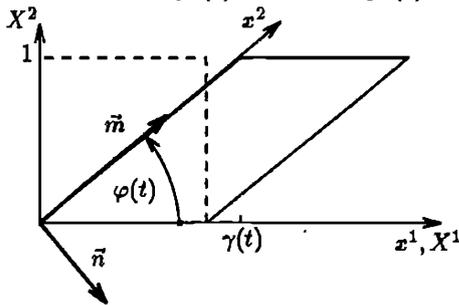


Bild 1: Einfacher ebener Schub

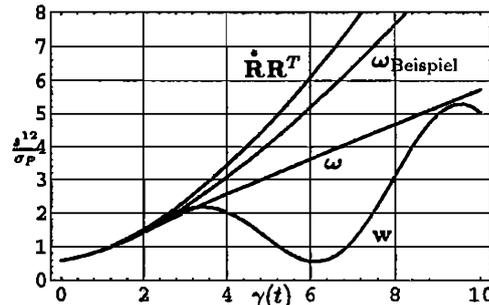


Bild 2: Verläufe von  $s^{12}$  in Abhängigkeit von  $\Omega$

Die Kinematik dieser Deformation wird durch die Tensoren

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{g}_\mu \vec{e}^{\mu K} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & \gamma^2 \end{bmatrix} \vec{g}^\mu \vec{g}^\nu \quad \mathbf{d} = \dot{\gamma} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \gamma \end{bmatrix} \vec{g}^\mu \vec{g}^\nu \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2} \dot{\gamma} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{g}^\mu \vec{g}^\nu \quad (1)$$

beschrieben. Dabei ist  $\mathbf{F}$  der Deformationsgradient,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  der EULERSche Verzerrungstensor sowie  $\mathbf{d}$  die EULERSche Deformationsgeschwindigkeit und  $\mathbf{w}$  der Spin, welche den symmetrischen bzw. antisymmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}$  darstellen. Die kinetischen Größen lassen sich für starr-plastisches Materialverhalten mit kinematischer Verfestigung aus dem Gleichungssatz

$$\begin{aligned} \text{Fließbedingung} & \quad \frac{1}{2} [g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} (s^{\mu\nu} - \alpha^{\mu\nu})(s^{\kappa\lambda} - \alpha^{\kappa\lambda})] - \frac{1}{3} \sigma_F^2 = 0 \\ \text{Fließgesetz} & \quad d_{\mu\nu} \propto g_{\mu\kappa} g_{\nu\lambda} (s^{\kappa\lambda} - \alpha^{\kappa\lambda}) \\ \text{Deviatorbedingung} & \quad g_{\mu\nu} s^{\nu\mu} = 0 \\ \text{Verfestigungsregel} & \quad \hat{\alpha} = C_0 \mathbf{d} \end{aligned} \quad (2)$$

bestimmen. In diesen Beziehungen sind  $s^{\mu\nu}$  und  $\alpha^{\mu\nu}$  die Koordinaten des Spannungsdeviators und des sogenannten Back-Stress-Tensors. Die  $g_{\mu\nu}$  sind die Metrikkoeffizienten und  $\sigma_F$  sowie  $C_0$  sind Konstanten. Die symbolisch dargestellte Geschwindigkeit  $\hat{\alpha}$  muß die Bedingung der Objektivität erfüllen.

## 2 Objektivität

Um die Objektivität von konstitutiven Gleichungen im Rahmen der konvektiven Beschreibungsweise zu untersuchen, wird neben der konvektiven eine kartesische Metrik eingeführt. Es soll zuerst der wahre Spannungstensor  $\sigma$  geprüft werden. Der Ortsvektor  $\vec{r} = x_k \vec{e}_k$  kennzeichnet die Lage des materiellen Teilchens in der Momentankonfiguration  $k$ . Die Konfiguration  $\bar{k}$  soll sich von  $k$  durch eine starre Drehung  $\mathbf{Q}(t)$  unterscheiden. In [3] wird der Übergang von  $k$  zu  $\bar{k}$  als äquivalente Bewegung bezeichnet. Es gilt  $\vec{r} = \bar{x}_k \vec{e}_k = \mathbf{Q}(t)\vec{r}$ . In den Konfigurationen  $k$  und  $\bar{k}$  ergeben sich

$$\sigma_{kl} = x_{k,\mu} \sigma^{\mu\nu} x_{l,\nu} \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_{kl} = \bar{x}_{k,\mu} \bar{\sigma}^{\mu\nu} \bar{x}_{l,\nu} \quad . \quad (3)$$

Aus der Definition der wahren Spannung über den Spannungsvektor  $\vec{s}$  und den Normalenvektor  $\vec{n}$  läßt sich die Beziehung

$$\bar{\sigma}_{kl} = Q_{km}(t) \sigma_{mn} Q_{ln}(t) \quad (4)$$

ableiten. Auf dieser Grundlage ergibt sich die zu erwartende Aussage

$$\sigma^{\mu\nu} = \bar{\sigma}^{\mu\nu} \quad . \quad (5)$$

Ein in konvektiven Koordinaten dargestellter Tensor ist objektiv, wenn sich seine Koordinaten beim Übergang zu einer äquivalenten Bewegung nicht verändern. Im weiteren soll die Frage nach einer objektiven Geschwindigkeit beantwortet werden. Die materielle Zeitableitung von objektiven EULERSchen Tensoren ist nicht objektiv. Eine Möglichkeit zur Bildung einer objektiven Geschwindigkeit besteht in dem Ansatz

$$\hat{\sigma} = \dot{\sigma} + \psi \sigma + \sigma \psi^T \quad . \quad (6)$$

Die Koordinaten dieser Geschwindigkeit bezüglich  $k$  und  $\bar{k}$  sind in der Form

$$\hat{\sigma}^{\mu\nu} = \dot{\sigma}^{\mu\nu} + (g^{\mu\kappa} \psi_{\kappa\lambda} + \theta^{\mu}_{,k} \dot{x}_{k,\lambda}) \sigma^{\lambda\nu} + (g^{\nu\kappa} \psi_{\kappa\lambda} + \theta^{\nu}_{,k} \dot{x}_{k,\lambda}) \sigma^{\lambda\mu} \quad (7)$$

$$\hat{\bar{\sigma}}^{\mu\nu} = \dot{\bar{\sigma}}^{\mu\nu} + (\bar{g}^{\mu\kappa} \bar{\psi}_{\kappa\lambda} + \theta^{\mu}_{,k} \dot{x}_{k,\lambda}) \bar{\sigma}^{\lambda\nu} + (\bar{g}^{\nu\kappa} \bar{\psi}_{\kappa\lambda} + \theta^{\nu}_{,k} \dot{x}_{k,\lambda}) \bar{\sigma}^{\lambda\mu} + \dot{Q}_{kl} x_{l,\lambda} (\theta^{\mu}_{,k} \bar{\sigma}^{\lambda\nu} + \theta^{\nu}_{,k} \bar{\sigma}^{\lambda\mu}) \quad (8)$$

gegeben. Um die Gleichheit dieser Koordinaten zu erreichen, muß sich  $\psi$  nach der Gleichung

$$\bar{\psi} = \mathbf{Q} \psi \mathbf{Q}^T - \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \quad \text{bzw.} \quad \bar{\psi}_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} - \bar{x}_{k,\mu} \dot{Q}_{kl} x_{l,\nu} \quad (9)$$

transformieren.

## 3 Konzept des plastischen Spin

Mit Bezug auf die Gleichung (6) gilt für den objektiven Tensor  $\alpha$

$$\hat{\alpha} = \dot{\alpha} - \Omega \alpha + \alpha \Omega \quad . \quad (10)$$

Der Spin  $\Omega$ , der die Bedingung (9) erfüllt, ersetzt dabei den Tensor  $\psi$ . Die Definition von  $\Omega$  ist über

$$\Omega = \eta(\gamma) \mathbf{w} \quad \text{oder} \quad \Omega = \omega = \mathbf{w} - \mathbf{w}^p \quad (11)$$

möglich. Die Verläufe von  $s^{12}$  für  $\eta(\gamma) = 1$  und  $\eta(\gamma) = \frac{4}{4+\gamma^2}$  werden im Bild 2 dargestellt. Der Spin der Substruktur  $\omega$  in der Gleichung (11)<sub>2</sub> kann direkt oder mittels einer

Annahme für den plastischen Spin  $\mathbf{w}^p$  bestimmt werden. Der einfachste Ansatz für  $\mathbf{w}^p$  läßt sich mit Hilfe der Theorie zur Darstellung isotroper Tensorfunktionen in der Form  $\mathbf{w}^p = \bar{\eta}(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{d} - \mathbf{d}\boldsymbol{\alpha})$  angeben. In [5] werden weitere Definitionen von  $\boldsymbol{\Omega}$  angeführt. Das Kriterium der Objektivität ist zur eindeutigen Bestimmung der Geschwindigkeit von  $\boldsymbol{\alpha}$  nicht ausreichend. Das Konzept des plastischen Spin eignet sich zur effektiven Beeinflussung der Beschreibung von anisotropen Materialverhalten. Die Grundlage dieses Konzeptes liegt in der Unterscheidung zwischen der Kinematik des Kontinuums und der Kinematik der Substruktur. Die Substruktur ist ein mathematisches oder/und werkstofftechnisches Hilfsmittel bzw. Modell ([4],[1]). Sie wird durch Strukturtenoren definiert.

## 4 Kinematische Beziehungen

Der Ausgangspunkt ist die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten. Die Substruktur soll sich während der elastischen Deformation über  $\mathbf{F}^e$  transformieren. Bei der plastischen Deformation erfährt sie eine Drehung  $\boldsymbol{\beta}$ . Die Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{d}$  und der Spin  $\mathbf{w}$  lassen sich über

$$\mathbf{L}^e = \hat{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1} \quad \mathbf{L}^p = \mathbf{F}^e \hat{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} \mathbf{F}^{e-1} \quad (12)$$

definieren. Mit dem Symbol  $(\hat{\quad})$  werden die auf die Substruktur bezogenen Geschwindigkeiten bezeichnet. In der konvektiven Beschreibung haben die kovarianten Koordinaten von  $\mathbf{d}$  den Aufbau

$$d_{\mu\nu} = d_{\mu\nu}^e + d_{\mu\nu}^p = (g_{\mu\kappa} L_{\nu}^{\kappa} - g_{\mu\kappa} P_{\nu}^{\kappa} + g_{\mu\kappa} \omega^{\kappa\lambda} \gamma_{\lambda\nu})_{\circ} + (g_{\mu\kappa} P_{\nu}^{\kappa} - g_{\mu\kappa} \omega^{\kappa\lambda} \gamma_{\lambda\nu})_{\circ} \quad (13)$$

Die Koordinaten von  $\mathbf{w}$  werden über den antisymmetrischen Anteil bestimmt. Für die  $P_{\nu}^{\kappa}$  gilt die Definition  $\mathbf{P} = \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1}$  und für den Spin der Substruktur  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\beta}^T$ . Die Größen  $\gamma_{\lambda\nu}$  sind die Metrikkoeffizienten der Zwischenkonfiguration. Der kinematische Typ der Transformation von der Zwischenkonfiguration zu der Momentankonfiguration führt für einen Tensor zweiter Stufe zu

$$\mathbf{A}_{\underline{z}} = [\det(\mathbf{F}^e)]^x \mathbf{F}^{eT} \mathbf{a} \mathbf{F}^e \quad A_{\underline{z}\mu\nu} = \left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}}\right)^x a_{\mu\nu} \quad (14)$$

Für den kinetischen Typ gilt

$$\mathbf{T}_{\underline{z}} = [\det(\mathbf{F}^e)] \mathbf{F}^{e-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{e-T} \quad T_{\underline{z}}^{\mu\nu} = \left(\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}}\right) \sigma^{\mu\nu} \quad (15)$$

Bei starr- plastischem Verhalten entsteht eine der Gleichung (10) gleichwertige Beziehung für den Tensor  $\mathbf{a}$ .

In einem Beispiel sollen zur Definition der Substruktur die Einheitsvektoren  $\vec{m}$  bzw.  $\vec{n}$  an den kovarianten Basisvektor  $\vec{g}_2(t)$  gebunden werden (Bild 1). Es gilt  $\frac{\dot{\varphi}}{\sin^2 \varphi} = -\dot{\gamma}$ . Über den orthogonalen Tensor  $\boldsymbol{\beta}$  läßt sich der Spin

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\beta}^T = \omega^{kl} \vec{e}_k \vec{e}_l = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{e}_k \vec{e}_l \quad (16)$$

berechnen. Für den Strukturtenor  $\vec{n}$  muß  $\dot{\vec{n}} = \dot{\vec{n}} - \boldsymbol{\omega} \vec{n} = \vec{0}$  gelten. Im Bild 2 ist der Verlauf der Koordinate  $s^{12}$  mit Bezug auf den Spin der Substruktur nach der Gleichung (16) dargestellt. In [2] wird in Zusammenhang mit diesem Beispiel von dem „Kartenstapel“-Modell für das Materialverhalten gesprochen. Es muß aber darauf verwiesen werden, daß in der Substruktur neben den Schubverzerrungen auch Normaldehnungen auftreten.

## 5 Kinetische Beziehungen

Über die auf die Zwischenkonfiguration bezogene elastische Ergänzungsenergie  $\bar{\psi}$  läßt sich der elastische Verzerrungstensor  $\mathbf{E}_I^e = \rho_z \frac{\partial \bar{\psi}(\mathbf{T}_I, \mathbf{A}_I)}{\partial \mathbf{T}_I}$  berechnen.  $\mathbf{A}_I$  steht für eine Anzahl von Strukturtenoren. Mit der Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{E}}_I^e$  und deren Transformation in die Momentankonfiguration ergibt sich die elastische Deformationsgeschwindigkeit zu

$$\mathbf{d}^e = \mathbf{d}^r + \mathbf{d}^c = \mathcal{L}^{-1} : \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \langle \lambda \rangle \mathbf{N}^c \quad (17)$$

Die Tensoren  $\mathbf{d}^r$  bzw.  $\mathbf{d}^c$  beschreiben den reversiblen bzw. elastisch-plastisch gekoppelten Term von  $\mathbf{d}^e$ . Der Skalar  $\langle \lambda \rangle$  ist der Belastungsfaktor und  $\mathcal{L}$  stellt einen Tensor vierter Stufe dar, welcher eine Funktion von dem elastischen Materialtensor und von  $\mathbf{F}^e$  ist.

Die Fließbedingung sei in der Momentankonfiguration durch  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a}) = 0$  gegeben. Sie muß eine isotrope Tensorfunktion sein. Die gleiche Aussage gilt für die plastische Deformationsgeschwindigkeit, den plastischen Spin und die Geschwindigkeit der Strukturtenoren

$$\mathbf{d}^p = \langle \lambda \rangle \mathbf{N}^p(\mathbf{T}_I, \mathbf{A}_I) \quad \mathbf{w}^p = \langle \lambda \rangle \boldsymbol{\Omega}^p(\mathbf{T}_I, \mathbf{A}_I) \quad \hat{\mathbf{a}} = \langle \lambda \rangle \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{T}_I, \mathbf{A}_I) \quad (18)$$

Über die Konsistenzbedingung  $\mathbf{N}^n : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{a}}} = 0$  wird der Belastungsfaktor  $\langle \lambda \rangle$  bestimmt. Für das elastisch-plastische Deformationsgesetz ergibt sich in symbolischer Schreibweise

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{L} - \bar{h}(\lambda) \frac{(\mathcal{L} : \mathbf{N}') \otimes (\mathbf{N} : \mathcal{L})}{H + \mathbf{N} : \mathcal{L} : \mathbf{N}^p + \mathbf{N}^n : \mathcal{L} : \mathbf{N}^c} : \mathbf{d} \quad (19)$$

und in konvektiven Koordinaten

$$\dot{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} \sigma^{\mu\nu})^\circ = \mathcal{L}^{\mu\nu\kappa\lambda} - \bar{h}(\lambda) \frac{\mathcal{L}^{\mu\nu\eta\xi} N_{\xi\eta}^i N_{\theta\rho} N_{\rho\theta\kappa\lambda}}{H + N_{\eta\xi}^i \mathcal{L}^{\xi\eta\delta\zeta} N_{\zeta\delta}^p + N_{\eta\xi}^n \mathcal{L}^{\xi\eta\delta\zeta} N_{\zeta\delta}^c} d_{\lambda\kappa} \quad (20)$$

Der Tensor  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  bezeichnet die TRUESDELLSche Spannungsgeschwindigkeit. Die konstitutiven Beziehungen haben prinzipiell den gleichen Aufbau, wie die Gleichungen für kleine Deformationen. Neu ist der Ansatz für den plastischen Spin.

## Literatur

- [1] Y.F. Dafalias, *Issues on the Constitutive Formulation at Large Elastoplastic Deformations, Part 1: Kinematics, Part 2: Kinetics*, Acta Mechanica, 1987, Vol.69, 119-138, 1988, Vol.73, 121-146
- [2] Y.F. Dafalias, *The Plastic Spin Concept and a Simple Illustration of its Role in Finite Plastic Transformations*, Mechanics of Materials, 1984, Vol.3, 223-233
- [3] H. Balke, *Zur Anisotropie deformierbarer Körper bei großen Verformungen*, ZAMM, 1986, Vol.66, 227-232
- [4] J. Mandel, *Plasticité classique et viscoplasticité*, Courses and Lectures, No. 97, International Center for Mechanical Sciences, Udine, Wien- New York, Springer, 1971
- [5] J.E. Paulun und R.B. Pecherski, *Study of Corotational Rates for Kinematik Hardening in Finite Deformation Plasticity*, Arch. Mech., 37 (1985), 661-677

*Anschriften:* PROF.DR.-ING.HABIL. BERGANDER, H., Planungs-u. Ingenieurbüro für Bauwesen Dr. Jäger, Wichernstraße 12, D-01445 Radebeul;  
 DIPL.-ING. JOHN, R., Technische Universität Dresden, Institut für Festkörpermechanik, Mommsenstraße 13, D-01062 Dresden

# On the theory of large elastoplastic deformations

Valery I. Levitas

*Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover*

## 1. Introduction

The development of a finite elastoplastic strain theory, particularly that involving high pressures, is a rather difficult problem due to the complexity and, more often, the impossibility to produce complex homogeneous stress-strain state in a specimen, to obtain correct experimental data and, after they have been generalized, to formulate a theory. Simultaneously, practice calls for solving concrete problems and this requires the application of simple consistent models with fully defined material functions. In such a plight, it is reasonable to construct the simplest finite strain analogs for the existing infinitesimal theories. To achieve this, one must solve some principal problems. This paper presents the review of main principles of the method proposed in [1-6] for formulating a theory of finite elastoplastic strains and some experimental regularities.

Let the transpose and inverse operations will be denoted by superscripts  $t$  and  $-1$ , respectively;  $(A)_s = 0,5(A + A^t)$  and  $I$  is the unit tensor.

## 2. The method of the correct account for finite rotations

The problem of the correct account for finite rotations (the choice of objective rate) arises when solving most of the principle questions of the *anisotropic* materials theory, i.e. when the evolutionary equations for internal variables tensors and for the parameters describing initial and deformation anisotropies are assigned, when the deformation rate and the stress-power are decomposed into elastic and plastic contributions (due to the ambiguity in the definition of the intermediate unloading configuration), when a loading criterion is formulated, and in many other cases. Therefore, a *unified* rational method permitting to solve the problem is needed.

The greatest amount of published works deal with the choice of an *objective* derivative of back stresses tensor  $\overset{\Delta}{L}$  for the Prager-Ziegler's equation  $\overset{\Delta}{L} = \overset{\Delta}{ad}$  generalized for finite strains and rotations, where  $d$  is the deformation rate. Along with the ambiguity of this generalization (due to the existence of an infinity of objective derivatives) the appearance of an unreal, *unpredicted* and *unwanted* material behaviour with some types of derivatives is the primary disadvantage. Thus, for example, when using Jaumann's derivative shear stress oscillations emerge at the simple shearing even though they were not wanted to be introduced into the model. The matter is that at the infinitesimal strains the most of models have vivid geometrical or physical interpretation and, as a rule, surprises do not appear - one receives that what is introduced into the model. Finite rotations are a basically new factor, and *vivid* presentations which permit elimination of *unexpected* reactions are lacking.

Following to the works [1-3, 5] we summarize the method of generalization of the known infinitesimal relations for finite strains and rotations which gives an unique (in some sense) extension which does not lead to unpredictable and unwanted responses. It consists of three points:

a). A strict definition of the concept of finite strains without rotations (FSWR) for a given type of materials is proposed.

b). Relations for FSWR are postulated (or deduced).

c). These relations are generalized *exactly* for finite rotations.

Let us give some comments. a). We can exclude rotations with respect to different configurations: current  $V$  or some reference ones  $V_r$ , and shall obtain different results and it is not clear what does FSWR mean. It is shown that the similar problem arises when we use the principle of materials frame-indifference [1-3, 5].

But all types of materials have a *natural preferred* reference configuration.

For *solids* with or without memory it is unstressed and undeformed configuration  $V_0$ , isotropic one for initially isotropic materials. For *liquids* with or without memory that is current configuration. We adopt definition that at FSWR rotation must be excluded with respect to *natural preferred* configuration. If we have several types of deformation, for instance, elastic, plastic, thermal, we have to exclude rotations for *each* of them. For example, if  $F$  is the deformation gradient from  $V_0$  to  $V$ , and  $F = R \cdot U$ , where  $R$  is the rotation,  $U$  the right-stretch tensor, then for FSWR  $F_{\eta} = R^t \cdot F = U$ . For elastoplastic materials  $F = F_e \cdot F_p$ , where  $F_e = R_e \cdot U_e$  and  $F_p = R_p \cdot U_p$  are the elastic and plastic deformation gradients. For elastic FSWR  $F_{e\eta} = R_e^t \cdot F_e = U_e$ , for plastic FSWR  $F_{p\eta} = R_p^t \cdot F_p = U_p$ , for elastoplastic ones -  $F_{\eta} = U_e \cdot U_p$ . For elastoplastic monocrystal

for FSWR  $F_\eta = U_e \cdot \bar{F}_p$ , where  $\bar{F}_p$  is the plastic deformation gradient at *fixed* crystal lattice. The velocity gradient  $l = \dot{F}_\tau \cdot F_\tau^{-1}$  for FSWR has the following expressions: for solids  $l_\eta = \dot{U} \cdot U^{-1}$  ( $V_\tau$  is  $V_0$ ), for liquids -  $l_\eta = \dot{U}_t \cdot U_t^{-1} = \dot{U}_t = d$  ( $V_\tau$  is  $V$ ), for elastoplastic polycrystalline and monocrystalline materials, respectively,

$$l_\eta = \dot{U}_e \cdot U_e^{-1} + U_e \cdot \dot{U}_p \cdot U_p^{-1} \cdot U_e^{-1} \quad \text{and} \quad l_\eta = \dot{U}_e \cdot U_e^{-1} + U_e \cdot \dot{\bar{F}}_p \cdot \bar{F}_p^{-1} \cdot U_e^{-1}. \quad (1)$$

b). The problem of generalization of infinitesimal relations for FSWR can be solved theoretically, experimentally, by a rheological model representation, by using physical or geometrical analogs, etc. The solution should incorporate the inclusive information about the physical nature, the unique solution being chosen at the rational (and not strictly mathematical) level. The important point is that due to the absence of rotations the solution can be written using a *material* derivative, and in the simplest case one could use infinitesimal evolutionary equations *without* change, e.g.,  $\dot{L}_\eta = ad_\eta$ . It is possible to obtain exact generalization as well, e.g. Eq. (1).

c). Extension of the above equations for finite rotations has been fulfilled exactly (using rotating frame of reference  $\eta$ ) and resulted in appearance of corotational rates  $\overset{\circ}{A} = R_\tau \cdot (\dot{R}_\tau^t \cdot A \cdot R_\tau) \cdot R_\tau^t = \dot{A} + A \cdot M_\tau + M_\tau^t \cdot A$  in the relations, which we shall call *R*-derivative, but with different rotations  $R_\tau$  and angular rate  $M_\tau = \dot{R}_\tau \cdot R_\tau^t$ . For solids  $R_\tau = R$ , for liquids  $M_\tau = W$  is the spin tensor, for elastic materials  $R_\tau = R_e$ , for rigid-plastic ones  $R_\tau = R_p$  and for elastoplastic media  $R_\tau = R_e \cdot R_p = \bar{R}$ . For back stress tensor there yields  $\overset{\circ}{L} = ad$  with  $R_\tau = R_p$  for rigid-plastic materials and  $R_\tau = \bar{R}$  for elastoplastic ones. For  $l$  we obtained

$$l = \overset{\circ}{V}_e \cdot V_e^{-1} + V_e \cdot \overset{\circ}{V}_p \cdot V_p^{-1} \cdot V_e^{-1} + M \quad \text{or} \quad l = \overset{\circ}{V}_e \cdot V_e^{-1} + V_e \cdot \dot{\bar{F}}_p \cdot \bar{F}_p^{-1} \cdot V_e^{-1} + M \quad (2)$$

with  $R_\tau = \bar{R}$  and  $M = \dot{\bar{R}} \cdot \bar{R}^t$ , where  $V_e = R_e \cdot U_e \cdot R_e^t$ ,  $V_p = \bar{R} \cdot U_p \cdot \bar{R}^t$ ,  $\bar{F}_p = \bar{R} \cdot \bar{F}_p \cdot \bar{R}^t$ .

Exact extension for finite rotations does not give unexpected and unwanted results and the main problem is shifted from due account for finite rotation to *physical* one - generalization for FSWR. As equation  $\dot{L}_\eta = ad_\eta$  has the same geometrical interpretation as at small strain we may be sure that equation  $\overset{\circ}{L} = ad$  does not give unexpected oscillations, which is really so. The approach proposed was successively applied to solution of all the main problems in the theory of anisotropic materials related to the correct account of finite rotations [1-5].

### 3. The kinematics of finite elastoplastic strains

Let us start considering the kinematics for a one-dimensional case. Suppose a bar of length  $l_0$  (in the configuration  $V_0$ ) is stretched to a length  $l$  (in the configuration  $V$ ), then the length of the bar after the elastic unloading will be  $l_p$  (in the stress-free configuration  $V_p$ ). A priori, it can be assumed that measures for an elastic  $\epsilon_e$  and a plastic  $\epsilon_p$  strains are given by the expressions  $\epsilon_e = f_1(l, l_p, l_0)$ ,  $\epsilon_p = f_2(l, l_p, l_0)$  or, considering the dimensionless character of  $\epsilon_e$  and  $\epsilon_p$ , by  $\epsilon_e = f_1(F_e, F_p)$  and  $\epsilon_p = f_2(F_e, F_p)$ , where  $F_e = l/l_p$ ,  $F_p = l_p/l_0$ . Any strain measure in the theory of elasticity is a function of only one argument  $F = l/l_0$ , and therefore, it is always possible to pass over from one measure to another and they will be equivalent in this sense. The problem of the "best" measure for elastic and plastic strains arises just as a consequence of the existence of *two* arguments in  $f_1$  and  $f_2$  as it is not always possible to pass over from one measure  $\epsilon_e$  (or  $\epsilon_p$ ) to another without using  $\epsilon_p$  (or  $\epsilon_e$ ). As a consequence, there exists a great number of various kinematic approaches. The following outcome is proposed - to formulate compulsory and desirable *requirements* for  $\epsilon_e$  and  $\epsilon_p$  and on their basis to find constraints for the functions  $f_1$  and  $f_2$ .

Assume that at  $\dot{l}_p = 0$  materials deform reversibly and dissipation power  $D = 0$  but at  $\dot{l}_p \neq 0$  they deform irreversibly and  $D > 0$ . Then assume as thermodynamic definition of  $\epsilon_e$  and  $\epsilon_p$  that  $D$  depends on  $\dot{\epsilon}_p$  and does not depend on  $\dot{\epsilon}_e$ . It follows from the definition and the thermodynamics law ( $D > 0$  for irreversible processes and  $D = 0$  for reversible ones) that  $\epsilon_p = f_2(F_p)$ , i.e. a thermodynamically admissible plastic strain measure may depend *only* on  $F_p$  [1, 2, 4, 5].

One of the major objectives in developing the elastoplastic medium kinematics is to find a possibility to apply known *elasticity* theory laws to elastic strain as they are weakly dependent on plastic strains. It is necessary, therefore, to develop a theory of elastoplastic medium based on the plastic strain *independent* elasticity law. We define the "natural" measure of elastic strain, i.e. the elasticity law does not depend on  $\epsilon_p$  when Cauchy stress  $T$  depends on the natural elastic strain measure only.

Let us designate  $u_e = l - l_p$  (elastic displacement). As even in the simplest case it is not clear which of the laws  $T = E \frac{u_e}{l_0}$ ,  $T = E \frac{u_e}{l_p}$ , or  $T = E \frac{u_e}{l}$  ( $E$  is the Young's modulus) is plastic strain independent, a strict

definition should be given.

Consider two homogeneous bars of the same length  $l_p^1 = l_p^2$  ( $T = 0$ ), but with different  $\varepsilon_1^p$  and  $\varepsilon_2^p$  ( $l_0^1 \neq l_0^2$ ). If in the process of their elastic deformation by an arbitrary stresses  $T^1 = T^2$  the bars acquire equal displacements  $u_e^1 = u_e^2$ , then the elasticity law does not depend on  $\varepsilon_p$ .

This definition corresponds to the elastic properties *measurement* technique used in practice – the specimens being prepared from blanks after various deformation history (rolling, forging, pressing, drawing).

From this definition it is easy to find [1, 2, 4, 5] that natural elastic strain may depend *only* on  $F_e$ . Therefore,  $\varepsilon_e = f_1(F_e)$ ,  $\varepsilon_p = f_2(F_p)$  and, like in the case of elastic media, it is impossible to obtain a higher concretization and this is unnecessary. The problem of finding the best measures is now solved *uniquely*.

In the section 2 we obtained  $F_\eta = U_e \cdot U_p$  for FSWR. Like in the 1D case, it has been shown [1, 2, 4, 5] that the natural elastic strain measure may depend only on  $U_e$  and the thermodynamically admissible plastic strain measure – only on  $U_p$ , i.e. the choice of the best measures is made uniquely. Using the first equation (2) decomposition  $d$  is reduced to two different forms:

$$d = V_e^{-1} \cdot \overset{\circ}{B}_e \cdot V_e^{-1} + (V_e \cdot \overset{\circ}{V}_p \cdot V_p^{-1} \cdot V_e^{-1})_s = d_e + d_D; \quad d = \overset{\nabla}{B} - 2(d \cdot B_e)_s + V_e \cdot D_p \cdot V_e, \quad (3)$$

where  $B_e = 1/2(V_e^2 - I)$ ,  $D_p = (\overset{\circ}{V}_p \cdot V_p^{-1})_s$ ,  $\overset{\nabla}{B}_e = \dot{B}_e + 2(B_e \cdot W)_s$  is the Jaumann derivative,

$(^\circ) = (\dot{\phantom{x}}) + 2[(\phantom{x}) \cdot M]_s$  is the R-derivative associated with  $M = \dot{R} \cdot \dot{R}^t$ ,  $d_e$  and  $d_D$  are the elastic and dissipative contributions of  $d$ . Eq.(3)<sub>1</sub> and eq.(3)<sub>2</sub> are convenient to derive constitutive rate-equations for anisotropic and isotropic materials, respectively.

#### 4. Flow theory

To derive equations of the flow theory we use the procedure described in section 2. We formulate all equations for FSWR using *material* derivative, then strictly generalize it for finite rotations regime. In evolution equations for parameters of initial and deformation anisotropy as well as in the loading criterion R-derivative appears which is associated with  $M = \dot{R} \cdot \dot{R}^t$ . Using thermodynamics laws the law of elasticity and the plastic flow rule as well as equation for entropy were derived [1, 2, 5]. For convenience of application of constitutive relations in computational algorithms using a method of initial stresses and tangential stiffness they are reduced to a quasi-linear relation between an objective derivative of Cauchy stress tensor and deformation and temperature  $\theta$  rates

$$\overset{\circ}{T} = A : d + B \dot{\theta}; \quad M = a : l + b \dot{\theta}; \quad \overset{\nabla}{T} = A_1 : d + B_1 \dot{\theta}. \quad (4)$$

For anisotropic materials R-derivative associated with the tensor  $M$  is used, a quasi-linear *kinematic* relation for  $M$  is obtained. For isotropic materials Jaumann derivative is used. This form requires a *minimal* modification of software intended to solve infinitesimal plastic problems in order to solve finite plasticity problems [7]. These equations are written in a current configuration and do not contain explicitly the information about undeformed and unloaded state and rotation tensors.

#### 5. On regularities in materials deformation under large plastic strains

It is generally accepted that at cold plastic strain the yield surface depends both on the instantaneous value  $U_p$  and on the whole history of its variation  $U_p^t(\tau) = U_p(t - \tau)$ , i.e.  $\varphi(T_\eta, U_p, U_p^t(\tau)) = 0$  and the materials will not be perfectly plastic. Moreover, the materials acquire a strain anisotropy.

It has been proved (at a rational level) for more than 60 initially isotropic materials of various classes (metals, rocks, oxides, powder compacts and powder mixtures) that the fixed surface  $\phi(T_\eta) = 0$ , which is called the limit surface of perfect plasticity does exist and it is isotropic and strain history-independent [2, 5]. The regularity consists in the following. At *monotonous* (without unloading) loading starting from a certain strain level (accumulated strain  $q \geq 1$  for metals,  $q \geq 0,4$  for rocks) the stress vector  $T_\eta$  and the adjacent region of the yield surface move along the surface  $\phi(T) = 0$  and, consequently, the materials deform as *perfectly plastic* and *isotropic* with the strain *history-independent* surface of perfect plasticity (despite the fact that the yield surface  $\varphi = 0$  changes, it depends on the strain history and describes the strain anisotropy).

After unloading and loading in the other direction, the deformation occurs at the initial stage in accordance

with the surface  $\varphi = 0$  and then the material is hardening one, anisotropic and strain history dependent. But at relatively small strain increment ( $\Delta q \cong 0, 1 - 0, 15$ ) the stress vector again touches the surface  $\phi(T) = 0$  and, anew, the material deforms as perfectly plastic, isotropic and deformation history independent.

This regularity has been established as the result of analysis of known and purposely-designed experiments involving the heterogeneous strain states, normal and high pressure. It substantially simplifies the theory and the construction of concrete models, the experimental definition of the materials properties and the solution of boundary value problems. Several theoretic-experimental methods to define constants in the equation of the surface  $\phi(T) = 0$  are proposed, and the equations for a number of metals and rocks have been derived [2, 5].

The improved method of *homogeneous* compression of a cylindrical specimen with grooves filled with a special lubricant allowed to obtain the compression diagram for strain  $q = \ln l_p/l_0$  up to 1,8 [5, 6]. With error less than 6% for six materials the diagrams are described by equations

$$\sigma_i = k + (\sigma_y - k) \left( \frac{q}{m} - 1 \right)^2 \quad \text{at } q < m; \quad \sigma_i = k \quad \text{at } q \geq m, \quad (5)$$

$\sigma_i$  is the stress intensity;  $\sigma_y$  is the yield strength; when  $q$  exceeds some value  $m$  materials deform as perfectly plastic with limit value  $\sigma_i = k$ . The regularity (5) means: 1) perfectly plastic behaviour of materials has been substantiated in *precise* experiment; 2) there are *three* fundamental constants, which fully determine a diagram of materials deformation. To take into account high pressure  $\sigma_0$  and temperature  $\theta$  the constants  $\sigma_y$ ,  $m$  and  $k$  in expression (5) should be considered as functions of  $\sigma_0$  and  $\theta$ . Some approximations of this functions and two theoretic-experimental methods for determination of the dependence  $k(\sigma_0)$  are suggested in [2, 5, 6].

Note, that some regularities of Bauehinger effect at finite strain are known [2, 5].

## 6. Conclusions

From theoretical and experimental studies we have proposed a set of five getting complicated models for which all required materials functions can be determined using available tests. The simplest model which is valid for sufficiently large strains is the model of an isotropic perfectly plastic material. To use this model it will suffice to define from experiments an equation of the limit surface of a perfect plasticity which has been done, as indicated above, for a number of metals and rocks. To complete the most complex model with anisotropic hardening the following experiments are required. In the case of pressure-insensitive materials (a lot of metals) compression and tension of a precompressed specimen must be diagrammed. For pressure-sensitive materials an equation of a limit surface of perfect plasticity has to be determined in addition. For a number of metals and rocks of interest all the required constants and functions are defined or taken from literature. *Numerical* results of application of the proposed models to some model and applied problems, related with diamond synthesis are considered in [7]. Extension of the developed theory for media with complex *rheological* properties are given in [4, 5].

**Acknowledgment.** The support of Alexander von Humboldt Foundation is gratefully acknowledged.

1. Levitas V.I. 1986. Theory of large elastoplastic deformations under high pressure. *Strength of Materials*, **8**: 1094-1103.
2. Levitas V.I. 1987. Large elastoplastic deformations of materials at high pressure. Kiev: Naukova Dumka. (In Russian).
3. Levitas V.I. 1992. On correct account of finite rotations in finite plasticity theory. *Acta Mechanica Sinica*, **8**, No. 3, pp. 253-260.
4. Levitas V.I. 1992. Thermomechanics of phase transformations and inelastic deformations in microinhomogeneous materials. Kiev: Naukova Dumka. (In Russian).
5. Levitas V.I. 1995. Large deformation of materials with complex rheological properties at normal and high pressure. N.Y.: Nova Science Publishers (in press).
6. Levitas V.I., Stashkevich I.Ye., Nemirovskiy A.B. 1994. The compression diagrams of metals at large uniform strains. *Strength of materials*, **9**.
7. Idesman A.V., Levitas V.I. 1995. Finite element procedure for solving contact thermoelastoplastic problems at large strain, normal and high pressure. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* (in press).

# Zum elasto-viskoplastischen Cosserat-Kontinuum

CARLO SANSOUR<sup>1</sup> und JOACHIM KECK<sup>2</sup>

- 1) *Fachgebiet Maschinenelemente und Maschinenakustik, Technische Hochschule Darmstadt, Magdalenenstr. 4, 64289 Darmstadt*
- 2) *Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart, 70550 Stuttgart*

## 1 Einführung

Das Cosserat-Kontinuum gehört zu der Klasse der verallgemeinerten Kontinua, bei denen neben dem Verschiebungsfeld weitere kinematische Felder als unabhängige Größen auftreten. Im Falle des Cosserat-Kontinuums ist es ein Rotationsfeld, das die innere Mikrostruktur des Materials beschreibt. Insbesondere im Rahmen der Schalentheorie spielt das Cosserat-Kontinuum eine grosse Rolle. Dagegen spielt das Cosserat-Kontinuum im Rahmen der drei-dimensionalen Theorie bisher eine eher untergeordnete Rolle. Dies scheint sich zu ändern, nachdem festgestellt wurde, daß das Cosserat-Kontinuum eine Möglichkeit bietet, dem im Rahmen der klassischen Elasto-Plastizitätstheorie möglichen Verlust der Elliptizität der Feldgleichungen wirksam zu begegnen. Damit kann das Cosserat-Kontinuum als eine Regularisierungsmethode eingesetzt werden. Die für eine Regularisierung der Materialantwort notwendige innere Länge bietet die Mikrostruktur, die dem Cosserat-Kontinuum in natürlicher Weise anhaftet.

Im Rahmen der geometrisch linearen Elasto-Plastizität liegen verschiedene Formulierungen für das elasto-plastische Cosserat-Kontinuum vor (siehe z.B. [3], [1]). Finite-Elemente-Berechnungen im Zusammenhang mit der Entwicklung von Scherbändern sind u.a. in [2] zu finden. Elasto-plastisch geometrisch exakte Formulierungen für das Cosserat-Kontinuum sind in [7] und [8] angegeben.

Ziel der Arbeit ist die Formulierung einer geometrisch exakten, elasto-viskoplastischen Theorie des Cosserat-Kontinuums. Die theoretische Formulierung weist sowohl Parallelen als auch Unterschiede zu [7] auf. Insbesondere wird von der Möglichkeit der Zerlegung des Rotationsfeldes in elastische und in inelastische Anteile kein Gebrauch gemacht. Stattdessen kommt dem Rotationsfeld die Bedeutung eines kinematischen Feldes zu, dem -wie den Verschiebungen- keinerlei Zerlegungen auferlegt werden können.

## 2 Die Kinematik

Es wird die Punktabbildung  $\varphi(t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{R}^3$  betrachtet, wobei die Menge  $\mathcal{B}$  einen Körper darstellen soll. Im Sinne einer Referenzkonfiguration wird  $\varphi(t = t_0)\mathcal{B}$  mit  $\mathcal{B}$  selbst identifiziert. Für  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  und  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$  erhält man  $\mathbf{x}(t) = \varphi(\mathbf{X}, t)$ . Mit  $\vartheta^i, i = 1, 2, 3$  als eine Koordinatenkarte, die wir als konvektiv annehmen, sowie mit  $\mathbf{G}_i, \mathbf{g}_i$  als Basissysteme in den Tangentialräumen der Konfigurationen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}_t$  erhalten wir für den Deformationsgradienten

ten  $\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i$ . Neben dem Verschiebungsfeld, ausgedrückt durch  $\varphi$ , betrachten wir ein von  $\varphi$  unabhängiges Feld  $\mathbf{R} \in SO(3)$ , wobei  $SO(3)$  die spezielle orthogonale Gruppe (mit positiver Determinante) bezeichnet. Als erstes Verzerrungsmaß für das Cosserat-Kontinuum wird der erste Cosserat Deformationstensor (Strecktensor) eingeführt

$$\mathbf{U} := \mathbf{R}^T \mathbf{F}. \quad (1)$$

Das zweite Verzerrungsmaß (der zweite Cosserat Deformationstensor), das der internen Struktur des Materials und damit den Rotationen direkt zugeordnet wird, wird folgendermaßen konstruiert. Aus der Orthogonalität von  $\mathbf{R}$  folgt die Antisymmetrie der Produkte  $\mathbf{R}^T \mathbf{R}_{,i}$ , wobei ein Komma partielle Ableitungen nach den Koordinaten  $\vartheta^i$  bezeichnet. Damit existieren axiale Vektoren  $\mathbf{k}_i$ , mit deren Hilfe das zweite Verzerrungsmaß  $\mathbf{K}$  formuliert wird

$$\mathbf{K} := -\mathbf{k}_i \otimes \mathbf{G}^i. \quad (2)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß -wie im klassischen Kontinuum- mehrere Möglichkeiten bestehen, Verzerrungsmaße zu wählen. Die oben angegebenen Verzerrungstensoren sind charakterisiert durch eine reiche mathematische Struktur.

Wir betrachten die Menge aller zulässigen  $\mathbf{F}$  als Elemente der Gruppe der invertierbaren quadratischen Matrizen  $GL^+(3)$ . Damit können zwei Raten für  $\mathbf{F}$  gebildet werden

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{l}\mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\mathbf{L}. \quad (3)$$

Während  $\mathbf{l}$  eine in der Momentankonfiguration definierte Rate ist, stellt  $\mathbf{L}$  das materielle Gegenstück dar. Analog lassen sich entsprechende Raten für den Rotationstensor formulieren:  $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{\Omega}\mathbf{R}$ , wobei  $\mathbf{\Omega}$  einen antisymmetrischen Tensor mit axialem Vektor  $\hat{\omega}$  darstellt. Der isometrische materielle Vektor ist dann  $\omega = \mathbf{R}^T \hat{\omega}$ . Für eine Erläuterung des geometrischen Hintergrundes der obigen Gleichungen wird auf [5, 6] verwiesen. Es wird  $\tau$  als Kirchhoffscher Spannungstensor und  $\gamma$  als ein in der Momentankonfiguration definierter Momententensor eingeführt. Letzterer soll auch dem Cauchy-Lemma bezüglich der Momentenbelastung genügen:  $\mathbf{m} = \rho_{ref}/r \mathbf{h} \otimes \gamma \nu$ , wenn  $\mathbf{m}$  der Vektor der äußeren an der Oberfläche wirkenden Momentenbelastung und  $\nu$  die Oberflächennormale an der Momentankonfiguration ist. Die mechanische Leistung ist dann als  $\mathcal{L} = \tau : \mathbf{l} + \gamma : (\hat{\omega}_{,i} \otimes \mathbf{g}^i)$  gegeben, wobei mit  $(:)$  das Skalarprodukt zweier Tensoren bezeichnet wird. In materiellen Größen ist die Leistung durch  $\mathcal{L} = \mathbf{\Xi} : \mathbf{L} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{U}^{-1} : (\omega_{,i} \otimes \mathbf{G}^i)$  gegeben. Es bestehen die Zusammenhänge

$$\tau = \mathbf{F}\mathbf{\Xi}\mathbf{F}^{-1} \quad (4)$$

und

$$\mathbf{\Gamma} := \mathbf{R}^T \gamma \mathbf{R}. \quad (5)$$

Neben  $\mathbf{\Xi}$  wird der zu  $\tau$  isometrische Tensor  $\mathbf{\Sigma}$  eingeführt

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{R}^T \tau \mathbf{R}. \quad (6)$$

Beide Spannungstensoren  $\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Xi}$  werden im folgenden eine zentrale Rolle spielen. Die Bedeutung von  $\mathbf{\Xi}$  im Rahmen multiplikativer Elastoplastizität wird in [4] ausführlich erläutert. Im Falle der Hyperelastizität gelten die Zusammenhänge

$$\mathbf{\Sigma} = \rho_{ref} \frac{\partial \psi(\mathbf{U}, \mathbf{K})}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U}^T, \quad \mathbf{\Xi} = \rho_{ref} \mathbf{U}^T \frac{\partial \psi(\mathbf{U}, \mathbf{K})}{\partial \mathbf{U}}, \quad \mathbf{\Gamma} = \rho_{ref} \frac{\partial \psi(\mathbf{U}, \mathbf{K})}{\partial \mathbf{K}} \mathbf{U}^T. \quad (7)$$

## 2.1 Multiplikativer- Additiver Split der Verzerrungsmaße

Der Zugang zur Elasto-Viskoplasizität erfolgt zunächst durch die Zerlegung der vorliegenden Verzerrungsmaße in elastische und inelastische Anteile. Da der Strecktensor  $\mathbf{U}$  kein symmetrischer Tensor ist, kann man ihn als Element von  $GL^+(3)$  auffassen, so daß eine multiplikative Zerlegung natürliche erscheint. Von zwei Möglichkeiten kann Gebrauch gemacht werden

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^p \mathbf{U}^e, \quad (8)$$

wobei hierfür die Wahl einer Linksrate für  $\mathbf{U}^p$  sinnvoll ist:  $\dot{\mathbf{U}}^p = \mathbf{L}^p \mathbf{U}^p$  oder

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^e \mathbf{U}^p, \quad (9)$$

wobei hierfür die Wahl einer Rechtsrate für  $\mathbf{U}^p$  sinnvoll ist:  $\dot{\mathbf{U}}^p = \mathbf{U}^p \mathbf{L}^p$ . Obwohl die Größen auf den rechten Seiten in (8) und (9) strenggenommen verschieden sind, werden die Bezeichnungen dennoch beibehalten, da die Bedeutung jeweils klar sein dürfte. Dem zweiten Cosserat Deformationstensor kann die geometrische Bedeutung von  $\mathbf{U}$  nicht zugewiesen werden, so daß eine additive Zerlegung von  $\mathbf{K}$  als sinnvoll erscheint. Es wird angenommen

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^e + \mathbf{K}^p. \quad (10)$$

Die Elasto-Viskoplastizität basiert auf der Wahl zweier Funktionen: Die freie Energie Funktion und das Fließkriterium. Bezüglich der ersten wird angenommen, daß eine freie Energie Funktion  $\psi(\mathbf{U}^e, \mathbf{K}^e, \mathbf{q})$  existiert, wobei  $\mathbf{q}$  Vektor der internen Variablen bedeutet, so daß die interne Dissipation  $\mathcal{D} = \mathcal{L} - \dot{\psi}$  je nach der gewählten Zerlegung entweder als  $\mathcal{D} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{L}^p + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{U}^{-T} : \dot{\mathbf{K}}^p + \mathbf{y} \cdot \dot{\mathbf{q}}$  oder als  $\mathcal{D} = \boldsymbol{\Xi} : \mathbf{L}^p + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{U}^{-T} : \dot{\mathbf{K}}^p + \mathbf{y} \cdot \dot{\mathbf{q}}$  gegeben ist. Analog zur Visko-Plastizitätstheorie klassischer Kontinua wird die Existenz eines elastischen Bereiches angenommen, der durch eine Funktion  $\phi < 0$  definiert ist. Die Funktion ist je nach Zerlegung entweder als  $\phi(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{y})$  oder als  $\phi(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{y})$  zu formulieren. Ein viskoplastisches Verhalten liegt vor für  $\phi > 0$ . Evolutionsgleichungen lassen sich in Analogie zum klassischen Kontinuum aus dem Prinzip vom Maximum der internen Dissipation herleiten (siehe [4]). Es sei noch bemerkt, daß die Definition von  $\mathbf{L}^p$  je nach gewählter Zerlegung verschieden ist. Beide Möglichkeiten der Formulierung lassen sich in den folgenden Boxen zusammenfassen, wobei  $\eta$  einen Viskositätsparameter darstellt.

$\mathbf{U} = \mathbf{U}^p \mathbf{U}^e, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^e + \mathbf{K}^p, \quad \dot{\mathbf{U}}^p = \mathbf{L}^p \mathbf{U}^p$	(11)
interne Dissipation :	$\mathcal{D} = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{L}^p + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{U}^{-T} : \dot{\mathbf{K}}^p + \mathbf{y} \cdot \dot{\mathbf{q}}$
	(12)
konstitutive Beziehungen:	
$\boldsymbol{\Sigma} = \rho_{ref} \mathbf{U}^{p-T} \frac{\partial \psi(\mathbf{U}^e, \mathbf{K}^e, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{U}^e} \mathbf{U}^T, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \rho_{ref} \frac{\partial \psi(\mathbf{U}^e, \mathbf{K}^e, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{K}^e} \mathbf{U}^T, \quad \mathbf{y} = -\rho_{ref} \frac{\partial \psi(\mathbf{U}^e, \mathbf{K}^e, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$	
	(13)
Evolutionsgleichungen	
$\mathbf{L}^p = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \phi^+(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}, \quad \dot{\mathbf{K}}^p = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \phi^+(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \mathbf{U}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \phi^+(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}$	
	(14)

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^e \mathbf{U}^p, \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}^e + \mathbf{K}^p, \quad \dot{\mathbf{U}}^p = \mathbf{U}^p \mathbf{L}^p \quad (15)$$

interne Dissipation: 
$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\Xi} : \mathbf{L}^p + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{U}^{-T} : \dot{\mathbf{K}}^p + \mathbf{y} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (16)$$

konstitutive Beziehungen

$$\boldsymbol{\Xi} = \rho_{ref} \frac{\partial \psi(\mathbf{U}^e, \mathbf{K}^e)}{\partial \mathbf{U}^e} \mathbf{U}^{eT}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \rho_{ref} \frac{\partial \psi(\mathbf{U}^e, \mathbf{K}^e)}{\partial \mathbf{K}^e} \mathbf{U}^T, \quad \mathbf{y} = -\rho_{ref} \frac{\partial \psi(\mathbf{U}^e, \mathbf{K}^e), \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (17)$$

Evolutionsgleichungen

$$\mathbf{L}^p = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \phi^+(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\Xi}}, \quad \dot{\mathbf{K}}^p = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \phi^+(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{y})}{\partial \boldsymbol{\Gamma}} \mathbf{U}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \phi^+(\boldsymbol{\Xi}, \boldsymbol{\Gamma}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \quad (18)$$

Es sei bemerkt, daß wegen der mathematischen Struktur der vorgestellten Theorie völlig neue Wege in der numerischen Implementation eingeschlagen werden müssen. Allein die Tatsache, daß  $\mathbf{U}$  nicht symmetrisch ist, macht das Übertragen von bewährten Verfahren der Elastoplastizität nicht möglich.

## Literatur

- [1] *D. Besdo*, Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums, *Acta Mech.* **20** (1974), 105-131.
- [2] *R. De Borst, H.B. Mühlhaus*, Finite Deformation Analysis of Inelastic Materials with Micro-Structure, in *Proc. IUTAM Symp. on Finite Inelastic Deformations*, D. Besdo, E. Sten, eds., Springer-Verlag 1992.
- [3] *H. Lippmann*, Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fließens, *Acta Mech.* **8** (1969), 255-284.
- [4] *C. Miehe*, Kanonische Modelle Multiplikativer Elasto-Plastizität. Thermodynamische Formulierung und Numerische Implementation, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, 1993.
- [5] *C. Sansour, H. Bednarczyk*, The Cosserat Surface as a Shell Model, Theory and Finite-Element Formulation, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, to appear.
- [6] *C. Sansour*, On the dual Variable of the Cauchy Stress Tensor and the Geometry of Deformations, submitted.
- [7] *P. Steinmann*, A Micropolar Theory of Finite Deformation and Finite Rotation Multiplicative Elastoplasticity, *Int. J. Solids Struct.* **31** (1994), 1063-1084.
- [8] *R. Sievert*, Eine Systematik für elastisch-plastische Stoffgleichungen, Technische Universität Berlin, 2. Institut für Mechanik, Dissertation 1992.

## Inkompatible Konfigurationen

Peter Haupt

Institut für Mechanik, Universität Gesamthochschule Kassel

Eine *Konfiguration* ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  in die Menge der Zahlentripel,

$$\begin{aligned} \chi : \mathcal{B} &\longrightarrow \chi[\mathcal{B}] \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{P} &\longmapsto (x^1, x^2, x^3) = \chi(\mathcal{P}) \Leftrightarrow \mathcal{P} = \chi^{-1}(x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \quad (1)$$

Die Hintereinanderschaltung von je zwei Konfigurationen führt auf reelle Funktionen, die per Annahme stetig differenzierbar sind. Zeichnet man eine Referenzkonfiguration zur "Namensgebung" der materiellen Punkte aus, so führt die mathematische Beschreibung der Bewegung auf eine zeitabhängige Koordinatentransformation: Die räumlichen Koordinaten sind Funktionen der materiellen Koordinaten und der Zeit. Zusätzlich zu den Begriffen Momentankonfiguration und Bezugskonfiguration werden in der Materialtheorie vielfach sogenannte *Zwischenkonfigurationen* verwendet. Immer dann, wenn eine Zerlegung der Deformation oder der Deformationsgeschwindigkeit angenommen wird, steht eine Zwischenkonfiguration im Hintergrund. Unter einer Zwischenkonfiguration stellt man sich üblicherweise ein Tensorfeld  $\Psi(\mathbf{X}, t)$  vor, das einem multiplikativen Anteil des Deformationsgradienten entspricht:  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = (\mathbf{F}\Psi^{-1})\Psi = \Phi\Psi$ . Das Feld  $\Psi(\mathbf{X}, t)$  hängt im allgemeinen von der Prozeßgeschichte ab, und man geht davon aus, daß ein Satz von Materialgleichungen zur Verfügung steht, aus denen  $\Psi$  berechenbar ist. Zwischenkonfigurationen sind aus physikalischen Gründen im allgemeinen *inkompatibel*.

Eine mathematische Darstellung materieller Bewegungen durch Koordinatentransformationen allein ist nicht ausreichend: Sie muß durch Informationen über die Geometrie der Deformation vervollständigt werden. In der klassischen Mechanik geht man davon aus, daß das Bild eines materiellen Körpers in der Momentankonfiguration ein Gebiet des dreidimensionalen Euklidischen Raumes ist. Dann ist die *Koordinatentransformation*, die eine Bewegung darstellt, einer *Punkttransformation* bzw. *Vektorfunktion* gleichwertig:

$$(X^1, X^2, X^3, t) \longmapsto x^k = \chi_R^k(X^1, X^2, X^3, t) \Leftrightarrow (\mathbf{X}, t) \longmapsto \mathbf{x} = \chi_R(\mathbf{X}, t) \quad (2)$$

Da Bezugs- und Momentankonfigurationen in Euklidische Räume abbilden, stehen ortsabhängige Basisvektoren zur Verfügung, die als Tangenten- und Gradientenvektoren aus Ortsvektoren abgeleitet sind. Der Deformationsgradient ist eine lineare Transformation zwischen den Tangentialräumen der Referenz- bzw. Momentankonfiguration:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : \mathbb{T}_{\mathbb{R}(\mathcal{P})} &\longrightarrow \mathbb{T}_{\chi_t(\mathcal{P})} \\ d\mathbf{X} &\longmapsto d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \Leftrightarrow dx^k g_k = \frac{\partial x^k}{\partial X^L} (g_k \otimes G^L) (dX^M G_M) \end{aligned} \quad (3)$$

Der Deformationsgradient enthält alle Informationen über die lokalen Eigenschaften der Bewegung. Dies wird besonders deutlich für den Sonderfall der *konvek-*

*tiven Koordinaten.* Im Fall konvektiver Koordinaten sind die Koordinatenlinien materielle Linien. Die Tangentenvektoren  $g_K$  bilden zusammen mit den Gradientenvektoren  $G^L$  ein Basissystem, in dem die Komponentendarstellung des Deformationsgradienten besonders einfach ist, nämlich eine Einheitsmatrix:

$$g_L = \frac{\partial x}{\partial X^L} = \frac{\partial x^k}{\partial X^L} g_k \iff \mathbf{F} = g_L \otimes G^L \quad (4)$$

Die Komponentendarstellung des Rechten Cauchy-Green-Tensors  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  wird durch die Metrikgrößen  $g_{KL}$  gebildet. Der Greensche Verzerrungstensor entspricht der Differenz der kovarianten Metrikkoeffizienten,  $E_{KL} = 1/2(g_{KL} - G_{KL})$ . Dementsprechend kann man die Darstellung einer Bewegung nicht nur als *Koordinatentransformation* oder *Punkttransformation* auffassen, sondern auch als eine zeitabhängige *Transformation der Metrik*. In dieser Auffassung tritt die physikalische Bedeutung der Koordinaten völlig zurück.

Für eine vollständige Beschreibung der Geometrie der Deformation sind nicht nur die Metrikgrößen, d. h. die Verzerrungen von Bedeutung, sondern auch deren Ableitungen: Während die Basisvektoren  $g_K$  den *Tangentialraum* kennzeichnen, der einem materiellen Punkt in der Momentankonfiguration angeheftet ist, wird durch ihre Ableitung nach den Koordinaten der *Zusammenhang* zwischen benachbarten Tangentialräumen dargestellt. Die *Zusammenhangskoeffizienten* (Christoffelsymbole erster Art) sind durch die Ableitungen des Deformationsgradienten nach den Koordinaten bestimmt. Auf der anderen Seite ist es auch möglich, die Zusammenhangsgrößen durch die Verzerrungsableitungen darzustellen, d. h. durch die Ableitungen der Metrikkoeffizienten:

$$\Gamma_{MKL} = g_M \cdot \frac{\partial g_K}{\partial X^L} = G_M \cdot \left[ \left( \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial X^L} \right) G_K \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{KM}}{\partial X^L} + \frac{\partial g_{ML}}{\partial X^K} - \frac{\partial g_{LK}}{\partial X^M} \right) \quad (5)$$

Damit entsteht ein System von Differentialgleichungen für die Komponenten des Deformationsgradienten in Abhängigkeit von den Ableitungen der Komponenten des Rechten Cauchy-Green-Tensors ( $(\dots)_{,K} = \partial/\partial X^K$ ):

$$F^M{}_I F_{MJ,K} = \Gamma_{JK} \iff \mathbf{F}^T \mathbf{F}_{,K} = \Gamma_K \quad (6)$$

Man kann leicht einsehen, daß eine Lösung dieses Gleichungssystems, wenn sie existiert, auf jeden Fall die Gleichung  $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{C}$  erfüllt sowie auch die Kompatibilitätsbedingungen für die Komponenten  $F^J{}_K(X^1, X^2, X^3, t)$  des Deformationsgradienten. Das bedeutet aber, daß in diesem Fall auch die Differentialgleichungen für die kartesischen Koordinaten  $y^J(X^1, X^2, X^3, t)$  integrierbar sind. Damit sind aus den Differentialgleichungen (6) sowohl die Komponenten des Deformationsgradienten berechenbar als auch die Komponenten des Ortsvektors, d. h. das vollständige Bild des Körpers im Euklidischen Raum der Momentankonfiguration. Dabei ist eine Frage noch offen, nämlich: Welche Anforderungen sind an das Verzerrungsfeld  $\mathbf{C}(X, t)$  zu stellen, so daß die 9 Funktionen  $F^J{}_K$  aus den Differentialgleichungen (6) bestimmt werden können? Diese Frage wird beispielsweise in der Arbeit von THOMAS [1] beantwortet: Hinreichend und auch notwendig für die Existenz einer Lösung sind die *Kompatibilitätsbedingungen*

$$\mathbf{F}_{,KL} = \mathbf{F}_{,LK} \quad (7)$$

Wertet man diese Bedingungen anhand der Differentialgleichungen (6) aus, so wird man auf das Verschwinden des Riemannschen Krümmungstensors geführt:

$$R_{IJKL} = \Gamma_{IJK, L} - \Gamma_{IJL, K} + g^{PQ}(\Gamma_{PIK}\Gamma_{QJL} - \Gamma_{PIL}\Gamma_{QJK}) = 0. \quad (8)$$

Das sind insgesamt 6 unabhängige Gleichungen. Die Integration des Verzerrungsfeldes liefert im Fall der Kompatibilität den ganzen Deformationsgradienten  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ , das heißt sowohl den Streckanteil  $\mathbf{U}$  als auch den Drehanteil  $\mathbf{R}$ . Die weitere Integration ergibt den Ortsvektor  $\mathbf{x} = \chi_{\mathbf{R}}(\mathbf{X}, t)$ .

Eine *inkompatible Konfiguration* ist dadurch gekennzeichnet, daß die Koordinatentransformation durch eine Metrik ergänzt wird, die die Kompatibilitätsbedingungen nicht erfüllt:

$$(X^1, X^2, X^3, t) \rightarrow \begin{cases} \hat{x}^k = \hat{\chi}_{\mathbf{R}}^k(X^1, X^2, X^3, t) \\ \hat{g}_{kl} = \hat{g}_{kl}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, t), \quad R_{ijkl} \neq 0 \end{cases} \quad (9)$$

Der materielle Körper wird daher jetzt in einen nichteuklidischen Raum abgebildet. Auch in diesem Fall kann man Koordinatendifferentiale ausrechnen. Diese sind nach wie vor kontravariante Vektorkomponenten, die man sich auf eine Basis  $\hat{g}_k$  bezogen denken kann:

$$d\hat{x}^k \hat{g}_k = \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial X^L} (\hat{g}_k \otimes G^L) (dX^M G_M) \quad (10)$$

Allerdings sind die Basisvektoren  $\hat{g}_k$  jetzt nicht mehr aus einem Ortsvektor ableitbar, weil es keinen Ortsvektor gibt, das ist der wesentliche Unterschied zur Situation vorher. In bezug auf die unbekanntenen Basisvektoren  $\hat{g}_k$  erhält man die Komponentendarstellung der linearen Transformation

$$\Psi = \hat{\Psi}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, t) = \frac{\partial \hat{x}^k}{\partial X^L} \hat{g}_k \otimes G^L, \quad (11)$$

wobei die Komponentenmatrix die Funktionalmatrix der Koordinatentransformation  $\hat{\chi}_{\mathbf{R}}$  ist.

Die folgende Darstellung der unbekanntenen Basisvektoren  $\hat{g}_k$  durch die Tangentenvektoren  $G_I$  der Bezugsconfiguration berücksichtigt insofern alle gegebenen Informationen, als sie der Metrik  $\hat{g}_{kl}$  entspricht. Aus dem Ansatz

$$\hat{g}_k = A_k^I G_I \iff \hat{g}^l = B_J^l G^J \quad (\hat{g}_k \cdot \hat{g}^l = \delta_k^l) \quad (12)$$

folgt, daß die Koeffizienten  $A_k^I(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, t)$  aus dem Gleichungssystem

$$A_k^I A_l^J G_{IJ} = \hat{g}_{kl}(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, t) \quad (13)$$

bestimmbar sind, da die Matrix der Metrikkoeffizienten  $\hat{g}_{kl}$  positiv definit ist. Die Matrizen  $B_J^l$  und  $A_k^I$  sind zueinander invers. Die Funktionen  $A_k^I(\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3, t)$  sind im allgemeinen nicht zu einem Koordinatensystem integrierbar. Die Komponenten der Transformation  $\Psi$ , die sich jetzt auf Basisvektoren eines Euklidischen Raumes beziehen, bilden keine Funktionalmatrix mehr (vgl. [2]).

Nach diesen Vorbereitungen entspricht eine *inkompatible Zwischenkonfiguration* einer Hintereinanderschaltung zweier Koordinatentransformationen,  $\chi_R = \hat{\zeta} \circ \hat{\chi}_R$ :

$$x^k = \hat{\zeta}^k \left( \hat{\chi}_R^{-1}(X^1, X^2, X^3, t), \hat{\chi}_R^2(X^1, X^2, X^3, t), \hat{\chi}_R^3(X^1, X^2, X^3, t), t \right) \quad (14)$$

Die Koordinatendifferentiale  $dx^k$  berechnet man wieder unter Anwendung der Kettenregel. Sie sind kontravariante Vektorkomponenten in bezug auf die Tangentenvektoren  $g_k$  der Momentankonfiguration:

$$dx^k = \frac{\partial x^k}{\partial \hat{x}^l} \frac{\partial \hat{x}^l}{\partial X^L} dX^L = \frac{\partial \hat{\zeta}^k}{\partial \hat{x}^l} \frac{\partial \hat{\chi}_R^l}{\partial X^L} dX^L \quad (15)$$

Die reziproken Basisvektoren  $\hat{g}_k, \hat{g}^k$  werden in der üblichen Weise eingeschaltet, und man erhält die Transformationen  $\Psi$  und  $\Phi$ , deren Hintereinanderschaltung der Deformationsgradient ist:  $dx = \Phi\Psi dX = F dX \iff$

$$dx^k g_k = \left( \frac{\partial \hat{\zeta}^k}{\partial \hat{x}^l} g_k \otimes \hat{g}^l \right) \left( \frac{\partial \hat{\chi}_R^m}{\partial X^L} \hat{g}_m \otimes G^L \right) (dX^M G_M) \quad (16)$$

Die Komponenten in bezug auf die Basisvektoren  $\hat{g}_k, \hat{g}^l$  der Zwischenkonfiguration sind Funktionalmatrizen; nach der Darstellung dieser Basisvektoren durch Linearkombination der  $G_I$  bzw.  $G^I$  ist dies nicht mehr der Fall:

$$\Psi : \mathbb{T}_{R(\varphi)} \rightarrow \mathbb{T}_{\hat{\chi}_t(\varphi)}, \quad \Psi = \frac{\partial \hat{\chi}_R^k}{\partial X^L} \hat{g}_k \otimes G^L = \frac{\partial \hat{\chi}_R^k}{\partial X^L} A_k^I G_I \otimes G^L \quad (17)$$

$$\Phi : \mathbb{T}_{\hat{\chi}_t(\varphi)} \rightarrow \mathbb{T}_{\chi_t(\varphi)}, \quad \Phi = \frac{\partial \hat{\zeta}^k}{\partial \hat{x}^l} g_k \otimes \hat{g}^l = \frac{\partial \hat{\zeta}^k}{\partial \hat{x}^l} B_J^l g_k \otimes G^J \quad (18)$$

Daß die Hintereinanderschaltung der beiden Transformationen den Deformationsgradienten ergibt,  $F = \Phi\Psi$ , ist - nach Konstruktion - selbstverständlich: Die Matrizen  $B_J^l$  und  $A_k^I$  sind invers, die Basen  $G_I, G^J$  reziprok, und die Kettenregel führt zurück auf die Funktionalmatrix der Bewegung.

Als *Schlussfolgerung* läßt sich folgendes feststellen: Die vollständige Beschreibung einer Konfiguration erfordert die Angabe von insgesamt 9 Funktionen, und zwar eine Koordinatentransformation (3 Funktionen) und ein Feld von Metrikgrößen (6 Funktionen). Einer Zwischenkonfiguration, die im allgemeinen inkompatibel ist, ist ebenfalls durch eine Koordinatentransformation gekennzeichnet, jedoch besitzt diese keinerlei physikalische Bedeutung. Im Zusammenhang mit der Modellierung elastoplastischer Materialeigenschaften ist daher lediglich die Metrik der Zwischenkonfiguration durch einen geeigneten Satz von Materialgleichungen (Fließregeln) zu bestimmen. Dies entspricht der Festlegung eines plastischen Cauchy-Green-Tensors oder Strecktensors. Eventuelle Materialgleichungen für den Drehanteil  $\mathbf{R}_p$  des Plastischen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_p = \mathbf{R}_p \mathbf{U}_p$  sind bedeutungslos.

### Literatur

- [1] T.Y. THOMAS, Ann. Math. 35 (1934), 730 -734
- [2] K.-H. ANTHONY, Arch. Rat. Mech Anal. 37 (1970), 161-180

## Aspects of Anisotropic Multiplicative Elastoplasticity

C. MIEHE

Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik  
Universität Hannover, 30167 Hannover, Appelstr. 9a, Germany

### 1. Introduction

This paper points out some aspects of the formulation and numerical implementation of *anisotropic* multiplicative elastoplasticity. In particular, some results of large-strain *rate-independent* multisurface thermoplasticity for single crystals are summarized which have been recently outlined by MIEHE [1994a]. The theoretical frame is the well-established continuum slip theory based on the multiplicative decomposition of the deformation gradient into elastic and plastic parts. A key feature of the formulation of the model suggested here is the introduction and computational exploitation of a particularly simple hyperelastic stress response function based on a further multiplicative decomposition of the elastic deformation gradient into spherical and unimodular parts, resulting in a very convenient representation of the Schmid resolved shear stresses on the crystallographic slip systems in terms of a simple inner product of Eulerian vectors. This observation is intrinsically exploited on the numerical side by formulating a new fully implicit stress update algorithm and the associated consistent elastoplastic moduli in terms of these Eulerian vectors. The proposed return mapping algorithm treats the possibly redundant constraints of large-strain multisurface plasticity for single crystals by means of an active set search. Furthermore, it satisfies in an algorithmically exact way the plastic incompressibility condition in situations of multislip. The performance of the proposed formulation is demonstrated for a typical numerical simulation of a thermoplastic deformation processes in a single crystal with isotropic Taylor-type hardening.

### 2. Mixed-Variant Multisurface Thermoplasticity

This section summarizes a framework of multiplicative thermoplasticity for multisurface elastic domains within the mixed-variant notation proposed by the author in several papers, see e.g. MIEHE [1992a, 1993b, 1994a,b,c]. The formulation is then specified to a concrete model problem of rate-independent single-crystal thermoplasticity.

#### 2.1. Basic Geometry in Mixed-Variant Tensor Notation.

Let  $\mathcal{B} \subset \mathbf{R}^3$  be the reference configuration of the body of interest and  $\varphi_t(\mathbf{X}) : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}^3$  the nonlinear deformation map at time  $t \in \mathbf{R}_+$ .  $\varphi_t$  maps points  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  of the reference configuration  $\mathcal{B}$  onto points  $\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{X}) \in \varphi_t(\mathcal{B})$  of the current configuration. The deformation gradient  $\mathbf{F}(\mathbf{X}) := \nabla_{\mathbf{X}} \varphi_t(\mathbf{X})$  with Jacobian  $J(\mathbf{X}) := \det[\mathbf{F}(\mathbf{X})] > 0$  maps tangent vectors of material curves onto tangent vectors of the deformed material curves. In the neighborhood of every  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  we consider the multiplicative decomposition

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad \text{with} \quad F^a_A = F^{e a} \bar{A} F^{p \bar{A}}_A \quad (2.1)$$

of the linear tangent map  $\mathbf{F}$  into an elastic part  $\mathbf{F}^e$  and a plastic part  $\mathbf{F}^p$ .  $\mathbf{F}^p$  defines *locally* a macro-stress-free plastic intermediate configuration and is assumed to be determined by a constitutive assumption for the evolution  $\dot{\mathbf{F}}^p := \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}^p$  with initial condition  $\mathbf{F}^p_i(t = t_0) = \mathbf{1}$  at the reference configuration. In the context of single crystal plasticity,  $\mathbf{F}^p$  describes the part of the local deformations *solely* due to the plastic slip on crystallographic planes. The part  $\mathbf{F}^e$  contains the lattice deformation and local rigid body rotations.

For the subsequent development we consider the multiplicative splits of the mappings defined in (2.1) into spherical and unimodular parts

$$\mathbf{F} := J^{\frac{1}{3}} \tilde{\mathbf{F}} \quad ; \quad \mathbf{F}^e := J^{e \frac{1}{3}} \tilde{\mathbf{F}}^e \quad ; \quad \mathbf{F}^p := J^{p \frac{1}{3}} \tilde{\mathbf{F}}^p \quad (2.2)$$

The Jacobians  $J := \det[\mathbf{F}]$ ,  $J^e := \det[\mathbf{F}^e]$  and  $J^p := \det[\mathbf{F}^p]$  are associated with the volumetric total, elastic and plastic part of the deformation. The unimodular parts  $\tilde{\mathbf{F}}$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}^e$  and  $\tilde{\mathbf{F}}^p$  with unit determinant contain isochoric contributions.

Let  $\mathbf{l} = \nabla_x \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  with the component representation  $l^a_b = \dot{F}^a_R F^{-1R}_b$  denote the spatial velocity gradient. The consistent transformation of this mixed-variant tensor field to the intermediate configuration is a composition with the partial tangent map  $\mathbf{F}^e$  defined in (2.1) and can be additively decomposed into pure elastic and pure plastic parts

$$\underbrace{\mathbf{F}^e \mathbf{l} \mathbf{F}^{e-1}}_{\mathbf{L}} = \underbrace{\mathbf{F}^{e-1} \dot{\mathbf{F}}^e}_{\mathbf{L}^e} + \underbrace{\dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1}}_{\mathbf{L}^p}, \quad (2.3)$$

see MIEHE [1992a]. The elastic and plastic parts of these mixed-variant tensor fields relative to the intermediate configuration can be further decomposed into spherical and deviatoric contributions based on the decompositions (2.2)

$$\mathbf{L}^e = \frac{j^e}{J^e} \frac{1}{3} \mathbf{1} + \tilde{\mathbf{F}}^{e-1} \dot{\tilde{\mathbf{F}}}^e \quad \text{and} \quad \mathbf{L}^p = \frac{j^p}{J^p} \frac{1}{3} \mathbf{1} + \tilde{\mathbf{F}}^p \dot{\tilde{\mathbf{F}}}^{p-1} \quad (2.4)$$

Let  $\boldsymbol{\tau} = \tau^{ab}$  denote the contravariant Eulerian Kirchhoff stress tensor. Then  $\mathbf{g}\boldsymbol{\tau} = \delta_{ar} \tau^{rb}$  is work-conjugate to  $\mathbf{l} = l^a_b$ . The composition of this mixed-variant Eulerian stress field with the partial tangent map  $\mathbf{F}^e$  in (2.1) gives the stress tensor  $\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_A^{\bar{B}}$  work-conjugate to  $\mathbf{L} = L^{\bar{A}}_{\bar{B}}$  defined in (2.3). Thus we write the stress power per unit of the reference configuration

$$\mathcal{P} := \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{L} \quad \text{with} \quad \boldsymbol{\Sigma} := \mathbf{F}^{eT} [\mathbf{g}\boldsymbol{\tau}] \mathbf{F}^{e-T} \quad (2.5)$$

in the geometric representation relative to the intermediate configuration.

**Table 1.** Model Problem. Multislip Single-Crystal Thermoplasticity.

<i>Isotropic Thermoelasticity:</i>	
1. <i>free energy</i>	$\psi = \frac{1}{2} \kappa \ln^2[J^e] - \kappa \delta \ln[J^e] (\vartheta - \vartheta_0) + c (\vartheta - \vartheta_0 - \vartheta \ln[\vartheta/\vartheta_0]) + \frac{1}{2} \mu (\tilde{\mathbf{F}}^e : \tilde{\mathbf{F}}^e - 3) + \hat{\psi}_{micro}(A, \vartheta)$
2. <i>macro-stress</i>	$\boldsymbol{\Sigma} = (\kappa \ln[J^e] - \kappa \delta (\vartheta - \vartheta_0)) \mathbf{1} + \mu \text{dev}[\tilde{\mathbf{F}}^{eT} \tilde{\mathbf{F}}^e]$
3. <i>micro-stress</i>	$\mathbf{B} = \partial_A \hat{\psi}_{micro}(A, \vartheta)$
4. <i>entropy</i>	$\eta = \ln[\vartheta/\vartheta_0] + \kappa \delta \ln[J^e] - \partial_\vartheta \hat{\psi}_{micro}(A, \vartheta)$
<i>Multislip Thermoplasticity:</i>	
5. <i>flow criterion</i>	$\phi^\alpha = \tau^\alpha - [\hat{\tau}_0(\vartheta) + \hat{B}(A, \vartheta)]$ with $\tau^\alpha := \boldsymbol{\Sigma} : (\mathbf{S}^\alpha \otimes \mathbf{M}^\alpha)$
6. <i>flow rule</i>	$\mathbf{L}^p = \sum_{\alpha=1}^m \lambda^\alpha \mathbf{S}^\alpha \otimes \mathbf{M}^\alpha$
7. <i>evolution</i>	$\dot{A} = \sum_{\alpha=1}^m \lambda^\alpha$
8. <i>loading</i>	$\lambda^\alpha \geq 0, \dot{\phi}^\alpha \leq 0, \lambda^\alpha \dot{\phi}^\alpha = 0$

## 2.2. Model Problem. Multislip Monocrystal Thermoplasticity.

As a typical model problem of large-strain multisurface thermoplasticity we now consider a formulation of monocrystal plasticity. The specification of the constitutive functions are given in Table 1. The isotropic macroscopic contributions to the free energy are determined by a volumetric deformation term, an isochoric deformation term of the Neo-Hookean type and a heat capacity term. The microscopic part of the free energy governs the temperature-dependent hardening behaviour. The flow criterion functions  $\phi^\alpha$  are formulated in terms of the Schmid resolved shear stresses

$$\tau^\alpha := \text{dev}[\boldsymbol{\Sigma}] : (\mathbf{S}^\alpha \otimes \mathbf{M}^\alpha) \quad (2.6)$$

on the slip system  $\alpha$ . The slip system is defined by the two orthonormal vectors  $(S^\alpha, M^\alpha)$  which define the slip direction and the slip-plane normal. Observe the particularly simple constitutive formulation of the Schmid stress based on the Neo-Hookean type model for the isotropic stress deviator

$$\tau^\alpha = \mu s^\alpha \cdot m^\alpha \quad \text{with} \quad s^\alpha := \tilde{F}^e S^\alpha \quad \text{and} \quad m^\alpha := \tilde{F}^e M^\alpha . \quad (2.7)$$

Thus the pairs of Eulerian vectors  $(s^\alpha, m^\alpha)$  of the slip systems are obtained by mapping the orthonormal vectors  $(S^\alpha, M^\alpha)$  of the slip system by the unimodular part  $\tilde{F}^e$  of the elastic deformation gradient. The Schmid stress  $\tau^\alpha$  of the slip system  $\alpha$  is then simply proportional to the inner product of the Eulerian vectors  $(s^\alpha, m^\alpha)$ . This simple representation will be intrinsically exploited in the numerical treatment where the return algorithm can be formulated in terms of simple vector updates.

The flow rule for  $L^p$  in Table 1 is deviatoric and determined by the slip rate  $\lambda^\alpha$  on each slip system. The evolution  $\dot{A}$  of the internal variable  $A$ , which describes on average the micro deformation fields, turns out to be the sum of the slip rates  $\lambda^\alpha$  on all slip systems. Thus the model under consideration is consistent with so-called isotropic Taylor hardening.

### 3. Integration Algorithm for the Local Evolution Equations

The local integration algorithm is summarized in Table 2. It bases on a backward Euler integrator which is framed by an active set search for the current slip systems. The algorithm preserves exactly the plastic volume which is achieved by means of an postprocessing update of the intermediate configuration. We emphasize in addition the extremely simple closed-form representation of the Eulerian consistent moduli in terms of the Eulerian vectors introduced above. For more details we refer to the full size paper MIEHE [1994a].

### 4. Numerical Example

The numerical example investigates the thermomechanical localization of a rectangular strip in tension based on Asaro's planar double slip model. The three figures Fig. 1 - 3 depict the geometry of the system, the temperature distribution in the localized zone and the rotation of the slip systems during the process resulting in an easy-glide mechanism for the shear band. More details can be found in the full-size paper MIEHE [1994a]. The solution of the globally coupled thermomechanical problem is performed via an operatorsplit algorithm as described in MIEHE [1993a]. The finite element formulation which allows the sharp shear bands depicted in Fig. 1 is based on a recently developed incompatible mode technique, see for example MIEHE [1992b] for a review.

### 5. References

The following references give only informations about the activity of the author within the field associated with the issues treated above. The interested reader will find the references to the international literature within these full scale papers.

- Miehe, C. [1992a], "On the Representation of Prandtl-Reuss Tensors within the Framework of Multiplicative Elasto-Plasticity", *International Journal of Plasticity*, **10** (1994) 609-621.
- Miehe, C. [1992b], "Aspects of the Formulation and Finite Element Impelementation of Large Strain Isotropic Elasticity", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **37** (1994) 1981-2004.
- Miehe, C.; Stein, E. [1992], "A Canonical Model of Multiplicative Elasto-Plasticity. Formulation and Aspects of the Numerical Implementation", *European Journal of Mechanics, A/Solids*, **11** (1992) 25-43.
- Miehe, C. [1993a], "Entropic Thermoelasticity at Finite Strains. Aspects of the Formulation and Numerical Implementation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, in press.
- Miehe, C. [1993b], "A Generalization of Melan-Prager-Type Kinematic Hardening to Large-Strain Elastoplasticity based on Hyperelastic Internal Micro-Stress-Response", *Acta Mechanica*, in press.

**Table 2.** Stress Update for Rate-Independent Monocrystal Thermoplasticity.

<p><u>(i) Elastic Predictor</u></p> <p><math>\{\mathbf{F}, \vartheta\}</math> and <math>\{\tilde{\mathbf{F}}_n^{p-1}, A_n\}</math> are given. Compute <math>J := \det[\mathbf{F}]</math> and get trial values <math>\tilde{\mathbf{F}}^{e*} := J^{-1/3} \mathbf{F} \tilde{\mathbf{F}}_n^{p-1}</math>, <math>\mathbf{s}^{\alpha*} := \tilde{\mathbf{F}}^{e*} \mathbf{S}^\alpha</math> and <math>\mathbf{m}^{\alpha*} := \tilde{\mathbf{F}}^{e*} \mathbf{M}^\alpha</math>. Evaluate for all <math>\alpha \in \mathcal{S}</math></p> $\phi^{\alpha*} = \mu \mathbf{s}^{\alpha*} \cdot \mathbf{m}^{\alpha*} - \hat{y}(A_n, \vartheta)$ <p>If <math>\phi^{\alpha*} \leq \text{tol}_\phi</math> for all <math>\alpha \in \mathcal{S}</math> set <math>\tilde{\mathbf{F}}^e = \tilde{\mathbf{F}}^{e*}</math>, <math>\tilde{\mathbf{F}}^{p-1} = \tilde{\mathbf{F}}_n^{p-1}</math>, <math>A = A_n</math>, <math>\mathcal{A} = \emptyset</math> and go to (iv). Else first define estimate <math>\mathcal{A} = \{ \alpha \in \mathcal{S} \mid \phi^{\alpha*} &gt; \text{tol}_\phi \}</math> for active working set.</p> <p><u>(ii) Return Mapping in terms of Eulerian Vectors</u></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Set initial values <math>\gamma^\alpha = 0</math> for all <math>\alpha \in \mathcal{S}</math></li> <li>2. Compute for active systems <math>\alpha, \beta \in \mathcal{A}</math> <math display="block">\begin{aligned} \mathbf{s}^\alpha &amp;= \mathbf{s}^{\alpha*} - \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \gamma^\beta \mathbf{s}^{\beta*} \mathbf{S}^{\beta\alpha} \\ \mathbf{m}^\alpha &amp;= \mathbf{m}^{\alpha*} - \sum_{\beta \in \mathcal{A}} \gamma^\beta \mathbf{s}^{\beta*} \mathbf{M}^{\beta\alpha} \\ A &amp;= A_n + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \gamma^\alpha \\ \phi^\alpha &amp;= \mu \mathbf{s}^\alpha \cdot \mathbf{m}^\alpha - \hat{y}(A, \vartheta) \\ G^{\alpha\beta} &amp;= \mu [ (\mathbf{s}^{\beta*} \mathbf{S}^{\beta\alpha}) \cdot \mathbf{m}^\alpha + \mathbf{s}^\alpha \cdot (\mathbf{s}^{\beta*} \mathbf{M}^{\beta\alpha}) ] + \partial_A \hat{y}(A, \vartheta) \end{aligned}</math> </li> <li>3. Update plastic parameters <math>\gamma^\alpha \leftarrow \gamma^\alpha + \sum_{\beta \in \mathcal{A}} G^{\alpha\beta-1} \phi^\beta</math> with backsubstitution filter.</li> <li>4. Perform active set update <math>\gamma^\alpha \leftarrow \max[0, \gamma^\alpha]</math>.</li> <li>5. Set up <math>\mathcal{A}^\phi := \{ \alpha \in \mathcal{S} \mid \phi^\alpha &gt; \text{tol}_\phi \}</math> and <math>\mathcal{A}^\gamma := \{ \alpha \in \mathcal{S} \mid \gamma^\alpha &gt; 0 \}</math>.</li> <li>6. Redefine active working set <math>\mathcal{A} = \mathcal{A}^\phi \cup \mathcal{A}^\gamma</math>. If <math>(\mathcal{A}^\phi \neq \emptyset)</math> go to 2.</li> </ol> <p><u>(iii) Update of Intermediate Configuration</u></p> <p>Compute isochoric elastic deformation gradient <math>\tilde{\mathbf{F}}^e = \tilde{\mathbf{F}}^{e*} - \sum_{\alpha=1}^m \gamma^\alpha \mathbf{s}^{\alpha*} \otimes \mathbf{M}^\alpha</math>, perform polar decomposition <math>\tilde{\mathbf{F}}^e = \tilde{\mathbf{b}}^{e1/2} \tilde{\mathbf{R}}^e</math>, compute scalar <math>f</math> from cubic equation <math>\det[\text{dev}[\tilde{\mathbf{b}}^e] + f\mathbf{1}] = 1</math> and perform update <math>\tilde{\mathbf{F}}^{p-1} = \tilde{\mathbf{F}}^{-1}(\text{dev}[\tilde{\mathbf{b}}^e] + f\mathbf{1})^{1/2} \tilde{\mathbf{R}}^e</math>.</p> <p><u>(iv) Eulerian Deviatoric Stresses and Moduli</u></p> <p>Compute Eulerian stresses and algorithmic moduli</p> $\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= p\mathbf{1} + \mu \text{dev}[\tilde{\mathbf{b}}^e] \quad \text{with} \quad p = \kappa \ln[J] - \kappa \delta(\vartheta - \vartheta_0) \\ \mathbf{c} &= (\kappa + p)\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - 2p\mathbb{I} + \frac{2}{3} \mu \text{tr}[\tilde{\mathbf{b}}^e] [\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}] - \frac{2}{3} [\text{dev}[\boldsymbol{\tau}] \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \text{dev}[\boldsymbol{\tau}]] - \\ &\quad \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \sum_{\beta \in \mathcal{A}} G^{\alpha\beta-1} \mu \text{dev}[\mathbf{s}^{\alpha*} \otimes \mathbf{m}^\alpha + \mathbf{m}^\alpha \otimes \mathbf{s}^{\alpha*}] \otimes \mu \text{dev}[\mathbf{s}^\beta \otimes \mathbf{m}^\beta + \mathbf{m}^\beta \otimes \mathbf{s}^\beta] \end{aligned}$
---

Miehe, C. [1994a], "Multisurface Thermoplasticity for Single Crystals at Large Strains in Terms of Eulerian Vector Updates", *International Journal of Solids and Structures*, in press.

Miehe, C. [1994b], "A Theory of Large-Strain Isotropic Thermoplasticity Based on Metric Transformation Tensors", to appear in *Archive of Applied Mechanics*.

Miehe, C. [1994c], "Exponential Map Algorithm for Stress Updates in Anisotropic Multiplicative Elastoplasticity for Single Crystals", to appear in *International Journal of Numerical Methods in Engineering*.

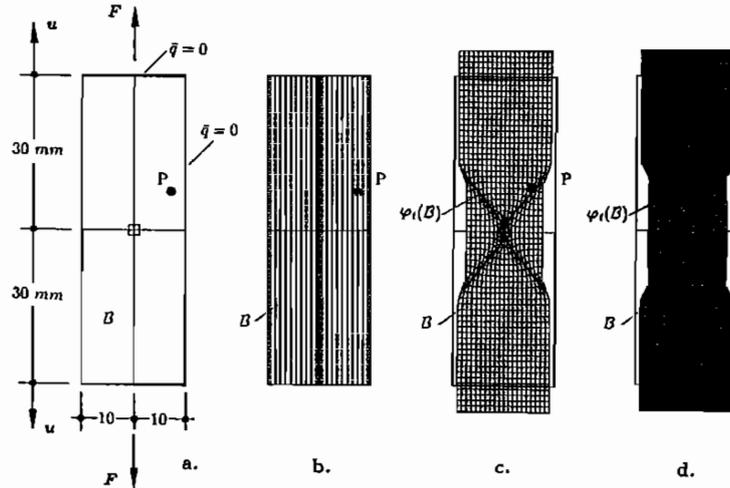


Fig. 1. Localization of a rectangular strip. a) Geometry, mechanical and thermal boundary conditions, b) homogeneous planar double slip arrangement in initial configuration, deformed mesh with c) 4 x 300 elements and d) 4 x 1200 elements at  $u = 5mm$  and  $\dot{u} = 10^4 mm/s$ .

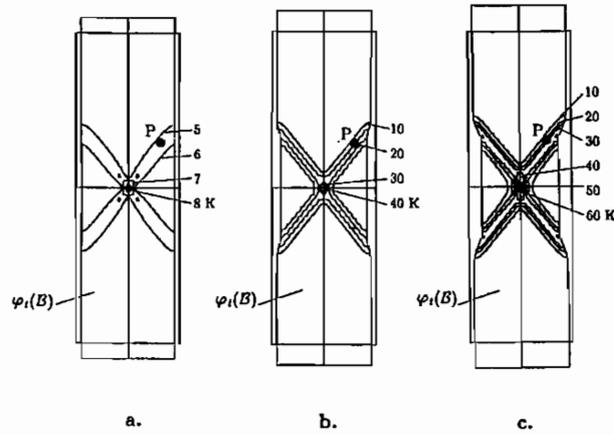


Fig. 2. Localization of a rectangular strip. Temperature distribution  $\varphi - \varphi_0$  for a)  $u = 3mm$ , b)  $u = 4mm$  and c)  $u = 5mm$  at  $\dot{u} = 10^4 mm/s$ .

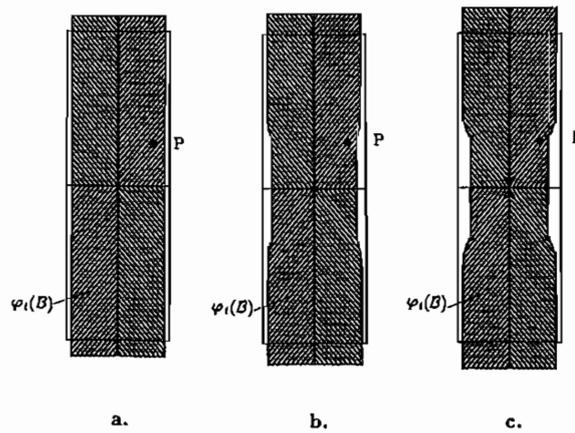


Fig. 3. Localization of a rectangular strip. Rotation of the slip system 1 for a)  $u = 3mm$ , b)  $u = 4mm$  and c)  $u = 5mm$  at  $\dot{u} = 10^4 mm/s$ .

## Zur Anwendung der materiellen Isomorphie in der finiten Plastizität

Albrecht Bertram, Martin Kraska

Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung und Technische Universität Berlin  
Anschrift: BAM 1.31, 12200 Berlin

Während die meisten Theorien der finiten Plastizität von dem Konzept einer entlasteten oder isoklinen Zwischenkonfiguration ausgehen und eine konstitutive Annahme über die Zerlegung der Gesamtdeformation in elastische und plastische Anteile treffen, soll in diesem Beitrag ein alternatives Vorgehen aufgezeigt werden. Dazu werden folgende Annahmen formuliert.

**Annahme 1.** Der Zustandsraum des Materials besteht aus elastischen Bereichen.

**Annahme 2.** Die elastischen Materialgesetze aller elastischen Bereiche sind untereinander materiell isomorph.

Bevor dies konkretisiert wird, soll die Wahl der Variablen motiviert werden. Wir betrachten den materiellen Körper als differenzierbare Mannigfaltigkeit, die in dem euklidischen Raum (zeitabhängig) plaziert ist. Durch eine solche *Plazierung* kann in jedem Punkt die euklidische Metrik auf den Tangentialraum zurückgezogen werden [s. NOLL 1972, KRAWIETZ 1986, BERTRAM 1989] und wird dann *intrinsische Konfiguration*  $G$  genannt. Die dazu duale Variable ist die *intrinsische Spannung*  $S$ , die man erhält, wenn man ebenfalls die eulerschen Spannungen auf den Tangentialraum zurückzieht. Diese intrinsischen Variablen haben folgende Vorteile:

- sie sind beobachterunabhängig und invariant unter Starrkörper-Modifikationen der Bewegung, also *materiell*;
- sie benötigen keine Bezugsplazierung.

Die erste Annahme bedeutet, daß es zu jedem Zeitpunkt ein elastisches Materialgesetz

$$S = h_1(G) ,$$

gibt, das für alle Konfigurationen  $G$  des jeweiligen Bereichs die zugehörigen Spannungen determiniert.

Nach der zweiten Annahme existiert dann für je zwei elastische Bereiche mit Gesetzen  $h_{1,2}$  ein Automorphismus des Tangentialraumes  $P$ , so daß für alle Konfigurationen gilt:

$$h_1(G) = P h_2(P^* G P) P^* .$$

Unser Vorgehen läßt sich nun folgendermaßen beschreiben. Wir wählen einen beliebigen, z. B. den anfänglichen elastischen Bereich mit elastischem Gesetz  $h_0$  als *Referenzbereich* aus. Es wird ein *Fließgesetz* von der Form

$$P^* = g(G, P, G^*, \alpha)$$

postuliert, worin  $\alpha$  der Vektor der inneren Variablen (ggf. Verfestigungsvariablen) ist. Befindet sich das materielle Element im Innern eines elastischen Bereiches, so ist  $P^* = 0$ . Befindet es sich hingegen auf dem Rand eines solchen (d. h. auf der Fließgrenze), so kann plastisches Fließen auftreten und  $P$  (wie auch  $G$ ) ändert sich. Zu jedem Zeitpunkt

ist das elastische Gesetz jedoch mittels der Isomorphie-Bedingung

$$h_f(\mathbf{G}) = \mathbf{P} h_0(\mathbf{P}^* \mathbf{G} \mathbf{P}) \mathbf{P}^*$$

auf das zeitlich invariante Gesetz  $h_0$  transformierbar.  $\mathbf{P}$  ist eine lineare und invertierbare, i. a. nicht symmetrische Abbildung und heißt *plastische Transformation*. Es kann nun gezeigt werden, daß  $\mathbf{P}$  nur bis auf vor- oder nachgeschaltete Symmetrie-Transformationen der jeweiligen elastischen Gesetze eindeutig sind [s. BERTRAM 1992].

Als Beispiel für diese Vorgehensweise sei die *Kristallplastizität* gewählt [s. BERTRAM 1994]. Das elastische Verhalten ist durch die Gitterdeformationen determiniert und soll durch ein anisotropes linear-elastisches Gesetz

$$h_0(\mathbf{G}) = \mathbf{C}[\mathbf{G} - \mathbf{G}_0]$$

[s. BERTRAM/OLSCHEWSKI 1993] beschrieben werden. Darin ist  $\mathbf{G}_0$  die ungestörte Konfiguration des elastischen Bereichs und  $\mathbf{C}$  der Elastizitätstensor, der von den Gitterrichtungen abhängt. Ein *Gleitsystem* wird materiell beschrieben durch einen Tangentenvektor  $\mathbf{d}$ , der die Gleitrichtung angibt, sowie einen Kovektor  $\mathbf{n}$ , der die Gleitebene charakterisiert. Die plastische Transformation ist solange konstant, wie die *Schmid-Spannung* im Gleitsystem

$$\tau := sp(\mathbf{S} \mathbf{G} \mathbf{d} \otimes \mathbf{n})$$

unterhalb einer kritischen liegt. Sind sie hingegen gleich (Schmid'sches Fließkriterium), so berechnet sich das Gleiten nach dem Taylor-Modell als einfache Scherung im Gleitsystem gemäß

$$\mathbf{P}^* = (-\mu^* \mathbf{d} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{P},$$

worin  $\mu$  die Scherzahl ist, die funktional von der Schmid-Spannung abhängen soll, d. h. über ein einachsiges viskoplastisches Gesetz. Sind mehrere Gleitsysteme gleichzeitig aktiv, so können die Inkremente der plastischen Transformationen superponiert werden.

Die plastische Transformation  $\mathbf{P}$  hat hier folgende physikalische Interpretation: sie transformiert diejenigen materiellen Tangentenvektoren vom Referenzbereich in den momentanen, die jeweils mit den Gittervektoren koinzidieren und somit die Anisotropieachsen der elastischen Gesetze sind.

Ausgehend von der oben beschriebenen Darstellungsweise für inelastische finite Stoffgesetze und ihrer Spezialisierung für kubisch flächenzentrierte Einkristalle wurde eine FE-Implementierung realisiert. Dabei wurde auf Gleitsystemebene ein viskoplastisches Stoffgesetz verwendet, das man sich als Parallelschaltung eines linearen viskosen Dämpfers und eines Trockenreibungselements vorstellen kann. Zusammen mit der Gitterelastizität zeigt das Material ein Verhalten vom BINGHAM-Typ. Zwei interessante Effekte, die auf der Anisotropie des Materials beruhen, sollen hier vorgestellt werden.

#### a) Gitterdrehung bei einfacher Scherung.

Aus unterschiedlichen Anfangsorientierungen heraus kann sich bei einfacher Scherung (viskoplastisch) unterschiedliches Rotationsverhalten des Gitters einstellen. Das Gitter kann seine Orientierung beibehalten (entspricht konstanter Schubspannung), sich kontinuierlich drehen (periodischer Spannungsverlauf) oder nach einer Anfangsdrehung stationär bleiben. Einige Beispiele zeigt Abb. 1.

b) *Anfangsorientierungsabhängigkeit im Zugversuch.*

Im Gegensatz zu isotropen Rechnungen kann man im vorliegenden Fall die Probensymmetrie nicht zur Reduktion der Dimension des Problems benutzen. Daher muß der Zugstab vollständig elementiert werden. Abb. 2 zeigt zwei Proben, die sich in ihrer Anfangsorientierung ( $15^\circ$  und  $30^\circ$ ) unterscheiden. Bei großen Dehnungen (hier um 50%) beobachtet man völlig unterschiedliches Verhalten. Das Gitter richtet sich in beiden Fällen längs der Probenachse aus, die Querschnittsneigungen sind jedoch entgegengesetzt. Die verzerrte Geometrie weist allenfalls noch eine  $180^\circ$ -Drehsymmetrie auf.

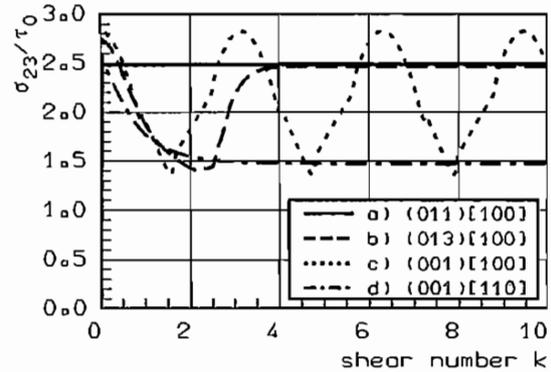


Abb. 1. Schubspannungsverlauf für verschiedene Anfangsorientierungen (Scherebene)[Scherichtung]

**LITERATUR**

**BERTRAM, A.:** Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim/ Wien/ Zürich (1989)

**BERTRAM, A.:** Description of Finite Inelastic Deformations. In: Proceedings of MECAMAT'92 "International Seminar on Multiaxial Plasticity", 1.-4. Sept. 1992 in Cachan, Frankreich. Hrg.: A. Benallal, R. Billardon, D. Marquis, 821-835 (1992)

**BERTRAM, A. & OLSCHESKI, J.:** Zur Formulierung anisotroper linearer anelastischer Stoffgleichungen mit Hilfe einer Projektionsmethode. ZAMM 73,4-5, T401-T403 (1993)

**BERTRAM, A.:** Description of Finite Inelastic Deformations within Crystal Plasticity. Proceedings of "1. Asia-Oceania International Symposium on Plasticity", Aug. 16-19, 1993, Peking University Press, Wang T., Xu B. (Edts.) Beijing, China, 105-110 (1994)

**KRAWIETZ, A.:** Materialtheorie. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/ New York/ Tokyo (1986)

**NOLL, W.:** A new mathematical theory of simple materials. Arch. Rat. Mech. Anal. 48, 1-50 (1972)

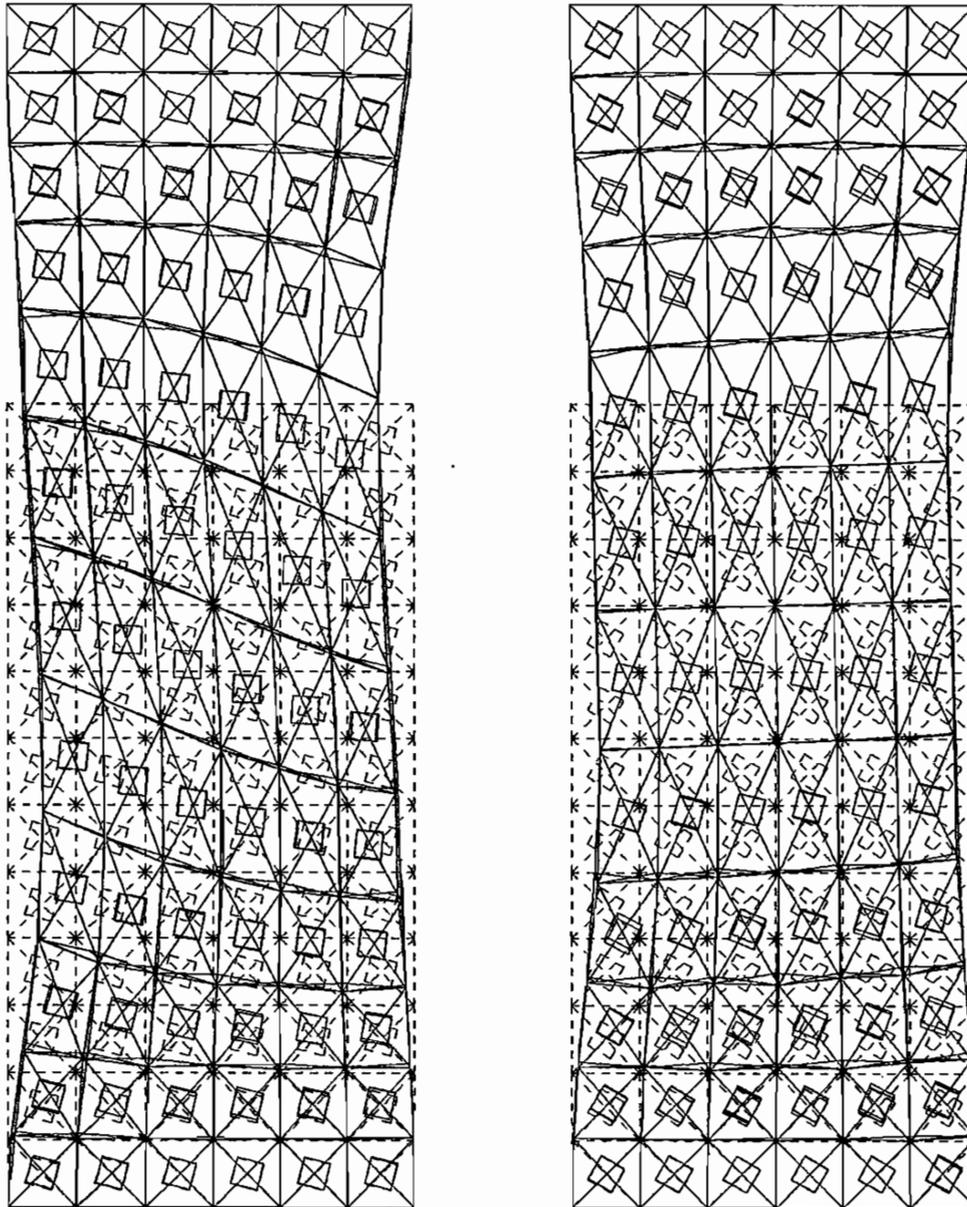


Abb. 2. Simulierte Zugversuche (Anfangszustand gestrichelt). Die Gitterorientierung ist durch die Kanten von eingblendeten Würfeln dargestellt.

# Zur finiten Thermoplastizität mit nichtlinearer kinematischer Verfestigung

M. KAMLAH, Kernforschungszentrum Karlsruhe, Institut für Materialforschung II,  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe, Germany

## 1 Einleitung

Die Ausformulierung einer phänomenologischen Theorie der finiten Thermo-Elastoplastizität ist wohl als noch offene Aufgabe anzusehen. Das schien mir auch die Einschätzung der Teilnehmer dieses Workshops zu sein. Wie Herr Anthony uns in seinem Beitrag veranschaulicht hat, kann man zum einen Zweifel schon an den Grundlagen der traditionellen Herangehensweisen haben, die alle von der Kompatibilität der Momentankonfiguration ausgehen. Andererseits gibt es aber auch im Rahmen der üblichen phänomenologischen Modellierung seit über 20 Jahren Diskussionen hinsichtlich der Kinematik, der Wahl der Variablen und Ableitungen, der thermodynamischen Formulierung und der Materialgleichungen. Im vorliegenden Beitrag werden zunächst zu den vorgenannten Diskussionsfeldern im einzelnen bewährte Konzepte zusammengetragen, um danach die Synthese dieser Konzepte im Hinblick auf die finite Thermo-Elastoplastizität zu untersuchen. Hinsichtlich einer ausführlicheren Darstellung und Verarbeitung der Literatur erlaube ich es mir, auf [4] hinzuweisen.

## 2 Thermoplastizität kleiner Deformationen

Ausgangspunkt der Überlegungen ist eine kurze Rekapitulation der Thermoplastizität kleiner Deformationen. In der geometrisch linearen Plastizität hat die folgende Modellstruktur fast "standardmäßigen" Charakter:

$$\text{additive Zerlegung der Verzerrung} \quad \tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_e + \tilde{\mathbf{E}}_p$$

$$\text{Hooke - Elastizität} \quad \mathbf{T} = 2\mu \left( \tilde{\mathbf{E}}_e + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{Sp} \tilde{\mathbf{E}}_e) \mathbf{I} \right)$$

$$\text{von-Mises-Fließfläche} \quad f = \sqrt{\frac{3}{2} (\mathbf{T} - \mathbf{X})^D \cdot (\mathbf{T} - \mathbf{X})^D} - k_0 = 0$$

$$\text{Normalenregel} \quad \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{s} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}}$$

$$\text{Kinematische Verfestigung} \quad \dot{\mathbf{X}} = c \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p - b \dot{s} \mathbf{X}$$

(Armstrong-Frederick-Ansatz)

Dies ist nämlich das wohl einfachste Modell, das den für die Metallplastizität so typischen, begrenzten Bauschinger-Effekt wiedergibt [1]. Es hat als Grundlage zur Modellierung der Plastizität kleiner Deformationen allgemeine Anerkennung gefunden (auf der Basis von nur zwei Verfestigungsparametern  $b$  und  $c$  und der Fließgrenze  $k_0$ ).

Bei der Modellierung der hochgradig dissipativen plastischen Deformationen sollte dem Dissipationspostulat Genüge getan werden. In diesem Sinne wird hier die *Clausius-Duhem-Ungleichung* als einschränkende Bedingung an Materialgleichungen verwendet. Sie muß auch für uniforme Temperaturfelder erfüllt sein, sodaß die *innere Dissipation*  $\varsigma := -\dot{\psi} - \dot{\theta}\eta + (1/\rho) \mathbf{T} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}} \geq 0$  nicht negativ werden darf. Diese Ungleichung läßt sich aber nicht auswerten, solange das Modell nicht um die thermomechanischen Größen *freie Energie*  $\psi$ , *absolute Temperatur*  $\theta$  und *Entropie*  $\eta$  erweitert wurde. Zu diesem Zwecke wird für die freie Energie die Materialfunktion  $\psi := \hat{\psi}(\tilde{\mathbf{E}}_e, \theta, \mathbf{Y})$  angenommen, wo die dehnungsartige innere Variable  $\mathbf{Y}$  die innere Variable  $\mathbf{X}$  der Spannungsraumformulierung vertritt (vgl. [1]). Setzt man die Funktion  $\hat{\psi}$  in die innere Dissipation  $\varsigma$  ein

und betrachtet *elastische Prozesse*, für die innere Variablen konstant sind, so erhält man in der Coleman-Noll'schen Schlußweise die thermoelastischen Potentialbeziehungen  $\mathbf{T} = \rho \partial \hat{\psi} / \partial \hat{\mathbf{E}}_e$  und  $\eta = -\partial \hat{\psi} / \partial \theta$ . Von diesen wird angenommen, daß sie auch bei elastisch-plastischer Belastung gelten. Über die Legendre-Transformation  $\rho g := -\rho \psi + \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{E}} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$  kann man die *freie Enthalpie*  $g$  als Funktion der Spannung und der spannungsartigen inneren Variablen  $\mathbf{X}$  einführen. Üblicherweise geht man davon aus, daß die Energiefunktion additiv in einen thermoelastischen und einen plastischen Anteil zerfällt:  $g = \hat{g}_e(\mathbf{T}, \theta) + \hat{g}_p(\mathbf{X})$ .  $\hat{g}_e$  kann man wie in der linearen und isotropen Thermoelastizität als quadratische Form wählen. In analoger Weise wird für  $\hat{g}_p$  eine isotrope, quadratische Form angesetzt:  $\rho \hat{g}_p := 1/(2\gamma_e) \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}$  ( $\gamma_e$ : positive Materialkonstante). Mit Hilfe der Thermoelastizitätsbeziehungen und der freien Enthalpie liefert die innere Dissipation die *Restungs-gleichung*  $\zeta = 1/\rho \mathbf{T} \cdot \dot{\hat{\mathbf{E}}}_p - (\partial g_p / \partial \mathbf{X}) \cdot \dot{\mathbf{X}} \geq 0$ . Wenn man hier die Evolutionsgleichungen für  $\hat{\mathbf{E}}_p$  und  $\mathbf{X}$  einsetzt, findet man, sofern man  $\gamma_e = c$  identifiziert, den Ausdruck  $\zeta = \dot{\epsilon} / \rho (k_0 + b \mathbf{X} \cdot \mathbf{X})$ , der niemals negativ wird. Das Plastizitätsmodell wurde also so zu einem thermomechanischen erweitert, daß die Clausius-Duhem-Ungleichung erfüllt ist (vgl. [1]).

### 3 Finite Elastoplastizität

Die Formulierung der finiten Elastoplastizität basiert meist auf der *multiplikativen Zerlegung*  $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_p$  des *Deformationsgradienten* in einen *elastischen* und einen *plastischen* Anteil. Tensorvariable und deren Ableitungen kann man gemäß des Konzeptes der dualen Variablen und Ableitungen [2] wählen: Das Prinzip der materiellen Objektivität legt es nahe, Materialgleichungen mit Hilfe des *Greenschen Verzerrungstensors*  $\mathbf{E} = (1/2)(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})$  und des *zweiten Piola-Kirchhoff-Tensors*  $\hat{\mathbf{T}} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{T-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{F}^{T-1}$  zu formulieren ( $\mathbf{T}$ : *Cauchyscher Spannungstensor*,  $\mathbf{S} := (\det \mathbf{F}) \mathbf{T}$ : *gewichteter Spannungstensor*). Die dualen Variablen der ersten Familie in der Zwischenkonfiguration entstehen nun durch Vorwärtstransformation von  $\mathbf{E}$  und  $\hat{\mathbf{T}}$  mit  $\mathbf{F}_p$ :

$$\hat{\mathbf{F}} := \mathbf{F}_p^{T-1} \mathbf{E} \mathbf{F}_p^{-1} \quad , \quad \hat{\mathbf{S}} := \mathbf{F}_p \hat{\mathbf{T}} \mathbf{F}_p^T \quad (1)$$

Mit genau derselben Transformationsvorschrift entstehen aus den materiellen Zeitableitungen  $\dot{\mathbf{E}}$  und  $\dot{\hat{\mathbf{T}}}$  die mit dem *plastischen Geschwindigkeitsgradienten*  $\hat{\mathbf{L}}_p := \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1}$  gebildeten Oldroyd-Ableitungen

$$\overset{\Delta}{\hat{\mathbf{F}}} = \dot{\hat{\mathbf{F}}} + \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\mathbf{F}} + \hat{\mathbf{F}} \hat{\mathbf{L}}_p \quad , \quad \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{S}}} = \dot{\hat{\mathbf{S}}} - \hat{\mathbf{L}}_p \hat{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{L}}_p^T \quad (2)$$

Diese Zuordnung von Tensoren und Ableitungen ist dadurch motiviert, daß für sie neben der Spannungsleistung auch die komplementäre und inkrementelle Spannungsleistung sowie die Endwertarbeit invariant sind [2]. Der Gesamtverzerrungstensor  $\hat{\mathbf{F}}$  der Zwischenkonfiguration hat die wichtige Eigenschaft, additiv in den rein elastischen Greenschen Tensor  $\hat{\mathbf{F}}_e := (1/2)(\hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e - \mathbf{I})$  und den rein plastischen Almansischen Tensor  $\hat{\mathbf{F}}_p := (1/2)(\mathbf{I} - \mathbf{F}_p^{T-1} \mathbf{F}_p^{-1})$  zu zerfallen, wobei die zugehörige plastische Verzerrungsgeschwindigkeit gerade mit dem symmetrischen Anteil des plastischen Geschwindigkeitsgradienten identisch ist:

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{F}}_e + \hat{\mathbf{F}}_p \quad , \quad \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{D}}}_p := \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{F}}}_p = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{L}}_p + \hat{\mathbf{L}}_p^T) \quad (3)$$

Die additive Zerlegung des Gesamtverzerrungstensors  $\hat{\mathbf{F}}$  in einen rein elastischen und einen rein plastischen Anteil steht so nur auf der Zwischenkonfiguration zur Verfügung. Dies legt es nun sehr nahe, auf der Zwischenkonfiguration für finite Verzerrungen ein Modell zu formulieren, das die gleiche Struktur wie das geometrisch lineare "Standardmodell" besitzt und im Grenzfall infinitesimaler Deformationen in dieses übergeht. Dieses Modell muß demnach neben einem Elastizitätsgesetz und einer Fließfläche  $\hat{f} = 0$  Evolutionsgleichungen für die plastische Verzerrung und den Translationstensor  $\hat{\mathbf{X}}$  enthalten. Dabei ist  $\hat{\mathbf{X}}$  der "Mittelpunkt" des durch die Fließfläche  $\hat{f} = 0$  im

Spannungsraum definierten elastischen Bereichs. An Stelle der materiellen Zeitableitung des Verzerrungstensors  $\hat{E}_p$  und des Translationstensors  $\hat{X}$  treten hier natürlich die entsprechenden Oldroyd-Ableitungen des plastischen Almansi-Tensors  $\hat{F}_p$  und des spannungsartigen Tensors  $\hat{X}$  der Zwischenkonfiguration. Die Evolutionsgleichung für den Translationstensor  $\hat{X}$  sollte wiederum vom Typ des Armstrong-Frederick-Ansatzes sein:

$$\overset{\nabla}{\hat{X}} = c \overset{\Delta}{\hat{F}}_p - b \dot{s} \hat{X} \quad \text{mit} \quad \dot{s} := \sqrt{\frac{2}{3} \overset{\Delta}{\hat{F}}_p \cdot \overset{\Delta}{\hat{F}}_p} \quad (4)$$

Der Produktionsterm ist zur plastischen Verzerrungsgeschwindigkeit und der Begrenzungsterm zu  $\hat{X}$  selbst proportional, wobei  $b$  und  $c$  Materialkonstanten sind. Diese Struktur des Verfestigungsansatz führt auf ein Funktional der Geschichte der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeit.

#### 4 Zur Thermomechanik

Bei finiten Deformationen liefert die Clausius-Duhem-Ungleichung in der Zwischenkonfiguration für uniforme Temperaturfelder, daß die *innere Dissipation*  $\varsigma := -\dot{\psi} - \eta \dot{\theta} + (1/\rho_R) \hat{S} \cdot (\hat{F})^\Delta \geq 0$  nicht negativ werden darf. Um diese Ungleichung zur Motivation eines Modells der finiten Thermoelastoplastizität auswerten zu können, wird noch eine Annahme für die Struktur der Materialfunktion der freien Energie benötigt, wobei hier in völliger Analogie zur Thermoplastizität kleiner Deformationen

$$\psi = \hat{\psi}(\hat{F}_e, \theta, \hat{Y}) \quad (5)$$

angenommen wird. Hier vertritt die tensorwertige innere Variable  $\hat{Y}$  vom Dehnungstyp in der freien Energie den spannungsartigen Translationstensor  $\hat{X}$  (vgl. [3]). Die freie Energiefunktion (5) hängt von  $\hat{F}$  und  $\hat{F}_p$  nur über die Differenz  $\hat{F}_e = \hat{F} - \hat{F}_p$  ab, was dadurch motiviert ist, daß die plastische Zwischenkonfiguration für den elastischen Deformationsanteil als Bezugskonfiguration angesehen werden kann. Die Forderung nach Invarianz gegen Rotationen der Zwischenkonfigurationen macht es erforderlich, daß die freie Energie (5) eine isotrope Funktion ihrer Argumente ist.

Für rein elastische Prozesse folgen in der Coleman-Noll'schen Schlußweise die Potentialeigenschaften  $\hat{S} = \rho_R (\partial \hat{\psi} / \partial \hat{F}_e)$  und  $\eta = -\partial \hat{\psi} / \partial \theta$  der freien Energie, von denen hier angenommen wird, daß sie auch bei elastisch-plastischer Belastung gelten sollen. Geht man in weiterer Analogie zur infinitesimalen Thermoplastizität von einer additiven Zerlegung  $\psi = \hat{\psi}_e(\hat{F}_e, \theta) + \hat{\psi}_p(\hat{Y})$  der freien Energie in einen thermoelastischen und einen plastischen Anteil aus, so kommutieren  $\hat{S}$  und  $\hat{F}_e$ . Für die innere Dissipation erhält man  $\varsigma = (1/\rho_R) \hat{P} \cdot (\hat{F}_p)^\Delta - (\partial \hat{\psi}_p / \partial \hat{Y}) \cdot \dot{\hat{Y}} \geq 0$ , wobei der Mandelsche Spannungstensor  $\hat{P} := (I + 2\hat{F}_e) \hat{S} = \hat{U}_e \hat{S} \hat{U}_e = \hat{P}^T$  verwendet wurde ( $\hat{U}_e$ : rechter Strecktensor von  $\hat{F}_e$ ).

Wieder in Anlehnung an die Modellierung kleiner Deformationen soll nun durch die Legendre-Transformation  $g := -\psi + (1/\rho_R) \hat{S} \cdot \hat{F}_e + (1/\rho_R) \hat{X} \cdot \hat{Y} = \hat{g}_e(\hat{S}, \theta) + \hat{g}_p(\hat{X})$  die *freie Enthalpie*  $g$  als Funktion der Spannung  $\hat{S}$  und der Translationsspannung  $\hat{X}$  eingeführt werden. Die Teilfunktion  $\hat{g}_p$  läßt sich schreiben als  $\hat{g}_p(\hat{X}) = 1/(2\rho_R) (1/c) \hat{X} \cdot \hat{X} + \hat{G}(\hat{X})$ , wo die isotrope Funktion  $\hat{G}$  die im Vergleich zur geometrisch linearen Formulierung zusätzlich auftretenden Terme enthält. Vermöge der Definition von  $\hat{g}$  gilt  $\hat{Y} = \rho_R (\partial \hat{g} / \partial \hat{X}) = (1/c) \hat{X} + \rho_R (\partial \hat{G} / \partial \hat{X})$  und  $\hat{X} = \rho_R (\partial \hat{\psi}_p / \partial \hat{Y})$  (vgl. [3]).

#### 5 Thermomechanische Konsistenz

Wenn man nun mit den zuletzt angegebenen Beziehungen  $\hat{Y}$  durch  $\hat{X}$  ersetzt, erhält man für die innere Dissipation

$$\rho_R \varsigma = \hat{P} \cdot \overset{\Delta}{\hat{F}}_p - \hat{X} \cdot \overset{\Delta}{\hat{F}}_p + \dot{s} \frac{b}{c} \hat{X} \cdot \hat{X} - \frac{2}{c} (\hat{X} \hat{X}) \cdot \hat{D}_p \geq 0 \quad , \quad (6)$$

sofern man  $\hat{G} = 0$  setzt. Hier liefern die beiden ersten Terme stets einen nicht-negativen Beitrag, sofern man eine konvexe Fließfunktion mit dem Mittelpunkt  $\hat{X}$  im Raum der  $\hat{P}$  wählt (z. B. von *Mises Fließfunktion*  $\hat{f}(\hat{P}, \hat{X}) := \sqrt{\frac{3}{2}(\hat{P} - \hat{X})^D \cdot (\hat{P} - \hat{X})^D} - k_0$ ), aus der sich die Fließregel durch Normalenbildung ergibt:

$$\hat{F}_p \stackrel{\Delta}{=} \lambda \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{P}} \quad (7)$$

Hier ist der Proportionalitätsfaktor  $\lambda > 0$  aus der *Konsistenzbedingung*  $\dot{\hat{f}} = 0$  zu bestimmen. Fließregeln dieser Art wurden bereits in der Literatur vorgeschlagen.

Es bleibt jetzt noch zu gewährleisten, daß auch die beiden letzten Terme in der Ungleichung (6) einen nicht-negativen Beitrag leisten. Mit Hilfe der Definition (4)<sub>2</sub> von  $\dot{s}$  findet man die Anforderung

$$\dot{s} \frac{b}{c} \hat{X} \cdot \hat{X} - \frac{2}{c} (\hat{X} \hat{X}) \cdot \hat{D}_p = \frac{\dot{s}}{c} \|\hat{X}\|^2 \left( b - \sqrt{6} \frac{\hat{X} \hat{X}}{\|\hat{X}\|^2} \cdot \frac{\hat{D}_p}{\|\hat{D}_p\|} \right) \geq 0 \quad (8)$$

Für  $c$  folgt die schon für kleine Deformationen bekannte Anforderung  $c \geq 0$ . Weiterhin kann diese Ungleichung wegen  $\|\hat{X} \hat{X}\| \leq \|\hat{X}\|^2$  im allgemeinen nur erfüllt werden, wenn die Materialkonstante  $b$  der Bedingung

$$b \geq \sqrt{6} \quad (9)$$

genügt.

Eine solche Bedingung für  $b$  ist aus dem Modell der infinitesimalen Thermoplastizität nicht bekannt. Insofern ist dieses Resultat unbefriedigend, als lineare kinematische Verfestigung ( $b = 0$ ) in der *Synthese der hier zusammengetragenen Konzepte* ausgeschlossen ist. Man kann sich im übrigen davon überzeugen, daß die Abschätzung gegen  $\sqrt{6}$  wegen der Oldroyd-Ableitung von  $\hat{X}$  erforderlich wird. (In [3] wurden Jaumann-artige Zeitableitungen für die Verfestigungsvariable verwendet. Der damit formulierte lineare Ansatz für die kinematische Verfestigung ist mit der Clausius-Duhem-Ungleichung verträglich.) Die Bedingung  $b \geq \sqrt{6}$  garantiert, daß die kinematische Verfestigung unter beliebiger Belastung stets die für den Armstrong-Frederick-Ansatz so typische Begrenzung des Bauschinger-Effektes zeigt, wie man sich mit einer Diskussion des Ansatzes (4) verdeutlichen kann.

Es liegt nun nahe, mit  $\hat{G}(\hat{X}) \neq 0$  den plastischen Anteil  $\hat{g}_p$  in solcher Weise um Terme höherer Ordnung zu erweitern, daß auch  $b = 0$  zulässig wird. Eine systematische Diskussion von  $\hat{g}_p$  als Potenzfunktion vierter Ordnung schien die Einschränkung  $b \geq \sqrt{6}$  jedoch eher zu bestätigen.

DANKSAGUNG: Ich danke der deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre Unterstützung.

## Literatur

- [1] Chaboche, J. L.: Time Independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity. Int. J. Plasticity 2(1986)149-188
- [2] Haupt, P.; Tsakmakis, Ch.: On the Application of Dual Variables in Continuum Mechanics. Continuum Mech. Thermodyn. 1(1989)165-196
- [3] Dogui, A.; Sidoroff, F.: Kinematic Hardening in Large Elastoplastic Strain. Engng. Fract. Mech. 21(1985)685-695
- [4] Kamlah, M.: Zur Modellierung des Verfestigungsverhaltens von Materialien mit statischer Hysterese im Rahmen der phänomenologischen Thermomechanik. Dissertation Kassel 1994

# A model for an elastoplastic material as an inhomogeneous material body

BOB SVENDSEN

*Institut für Mechanik, Technische Hochschule, 64289 Darmstadt*

## 1. Introduction

The purpose of this short paper is to outline a kinematic model for an elastoplastic material based on the notion of a locally homogeneous material body found in NOLL (1967) and WANG (1967). Such a material body is characterized by the fact that its global material behaviour, *i.e.*, that of the body as a whole, differs in general from its local material behaviour, *i.e.*, that in a *finite* neighborhood of each material point of the body. To apply this idea to the particular case of an elastoplastic body, we assume that such a body is locally-elastic, *i.e.*, that there exists a finite neighborhood of each material point in which the material behaves *elastically*, while the body as a whole behaves *elastoplastically*. Such would be the case, for example, when the body as a whole contains cracks and/or dislocations at the boundaries between elastic neighborhoods, leading to global elastoplastic behaviour of the body as a whole. The model for an elastoplastic material to be formulated in this work focuses for simplicity on a single material point, but can straightforwardly extended to every material point of the body.

## 2. Kinematics

Let  $\mathcal{B}$  represent the (abstract) material body manifold, modeled as usual on three-dimensional Euclidean point space  $E$  with translation space  $\mathcal{V}$ . As such,  $\mathcal{B}$  is represented kinematically in  $E$  via diffeomorphisms

$$\kappa : \mathcal{B} \longrightarrow B_\kappa \quad | \quad b \longmapsto q = \kappa(b) \quad (2.1)$$

of  $\mathcal{B}$  onto regular regions  $B_\kappa \subset E$  of  $E$ , *i.e.*, *placements*, of  $\mathcal{B}$  into  $E$ , such that  $B_\kappa$  represents the corresponding *configuration* of  $\mathcal{B}$  in  $E$ . Let  $\text{Pla}(\mathcal{B}, E) := \{\kappa : \mathcal{B} \rightarrow B_\kappa \subset E\}$  represent a set of placements of  $\mathcal{B}$  into  $E$ . On the basis of this set, a *motion* of  $\mathcal{B}$  in  $E$  can be represented as a time-dependent series of placements of  $\mathcal{B}$  into  $E$ , *i.e.*, a curve

$$\zeta : I \longrightarrow \text{Pla}(\mathcal{B}, E) \quad | \quad t \longmapsto \zeta_t := \zeta(t) \quad (2.2)$$

in  $\text{Pla}(\mathcal{B}, E)$ , where  $I \subset \mathbb{R}$  represents some time interval.

The constitutive theory for simple materials is based on the premise that the material behaviour of each material point  $b \in \mathcal{B}$  depends only on the deformation of the material in an infinitesimal (linear) neighborhood of that point. In the current context, such a neighborhood of any  $b \in \mathcal{B}$  is represented by the corresponding tangent space  $\mathcal{T}_b\mathcal{B}$  to  $\mathcal{B}$  (NOLL, 1972). Note that any placement  $\kappa \in \text{Pla}(\mathcal{B}, E)$  of  $\mathcal{B}$  induces an orientation-preserving<sup>1</sup> linear mapping

$$(d_b\kappa) : \mathcal{T}_b\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{V} \quad | \quad v \longmapsto v_\kappa = (d_b\kappa)v \quad (2.3)$$

---

<sup>1</sup>Required by the principle of impenetrability of matter.

### 3 Constitutive relation for the Cauchy stress

of  $\mathcal{T}_b\mathcal{B}$  into  $\mathcal{V}$ , *i.e.*, the differential of  $\kappa \in \text{Pla}(\mathcal{B}, E)$  in  $b \in \mathcal{B}$ , such that  $(d_b\kappa) \in \text{Lin}^+(\mathcal{T}_b\mathcal{B}, \mathcal{V})$ . Analogous to  $\kappa \in \text{Pla}(\mathcal{B}, E)$  for  $\mathcal{B}$ ,  $(d_b\kappa) \in \text{Lin}^+(\mathcal{T}_b\mathcal{B}, \mathcal{V})$  can be interpreted as a *placement* of  $\mathcal{T}_b\mathcal{B}$  into  $\mathcal{V}$ . The differential induces equivalence classes

$$[\kappa]_b := \{\gamma \in \text{Pla}(\mathcal{B}, E) \mid (d_b\gamma) = (d_b\kappa)\} \quad (2.4)$$

on  $\text{Pla}(\mathcal{B}, E)$ ; the elements of each such class induce the same placement of  $\mathcal{T}_b\mathcal{B}$  in  $\mathcal{V}$ , *i.e.*,

$$\mathbf{K} := (d_b\gamma) \quad \forall \gamma \in [\kappa]_b \quad (2.5)$$

by definition.

The gradient of  $\zeta_t \in \text{Pla}(\mathcal{B}, E)$  at  $b \in \mathcal{B}$  and each  $t \in I$  yields the *deformation gradient*

$$\mathbf{F} : I \longrightarrow \text{Lin}^+(\mathcal{T}_b\mathcal{B}, \mathcal{V}) \mid t \longmapsto (d_b\zeta_t) =: \mathbf{F}(t) \quad (2.6)$$

of  $\mathcal{B}$  at  $b \in \mathcal{B}$ . A comparison of the definition of  $\mathbf{F}$  in (2.6) with that of  $\zeta$  in (2.2) implies that  $\mathbf{F}$  can be interpreted as a *motion* of  $\mathcal{T}_b\mathcal{B}$  in  $\mathcal{V}$ . In the context of the interpretation of  $\mathcal{B}$  as an elastoplastic material body,  $\mathbf{F}$  logically represents the *elastoplastic* deformation of  $\mathcal{T}_b\mathcal{B}$ . Note that  $\mathbf{F}$  is independent of any placement  $\mathbf{K} \in \text{Lin}^+(\mathcal{T}_b\mathcal{B}, \mathcal{V})$ ; the classic form of the deformation gradient is given by

$$\mathbf{F}_{\mathbf{K}} : I \longrightarrow \text{Lin}^+(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \mid t \longmapsto \mathbf{F}(t)\mathbf{K}^{-1} =: \mathbf{F}_{\mathbf{K}}(t) \quad (2.7)$$

relative to some  $\mathbf{K} \in \text{Lin}^+(\mathcal{T}_b\mathcal{B}, \mathcal{V})$ .

As discussed briefly in the introduction, we assume that the material body  $\mathcal{B}$  under consideration behaves locally elastically, *i.e.*, there exists a *finite* neighborhood  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  of every material point  $b \in \mathcal{B}$  (*i.e.*,  $b \in \mathcal{U}$ ) which behaves elastically. Analogous to  $\mathcal{B}$ , any such  $\mathcal{U}$  can be represented as a manifold modeled on  $E$ , described kinematically via a set  $\text{Pla}(\mathcal{U}, E) := \{\lambda : \mathcal{U} \rightarrow U_\lambda \subset E\}$  of placements. As such, a motion of  $\mathcal{U}$  takes the form of a curve

$$\xi : I \longrightarrow \text{Pla}(\mathcal{U}, E) \mid (t, b) \longmapsto \xi_t := \xi(t) \quad (2.8)$$

in  $\text{Pla}(\mathcal{U}, E)$ , in analogy with (2.2). The gradient

$$\mathbf{E} : I \longrightarrow \text{Lin}^+(\mathcal{T}_b\mathcal{B}, \mathcal{V}) \mid t \longmapsto (d_b\xi_t) =: \mathbf{E}(t) \quad (2.9)$$

of  $\xi : I \rightarrow \text{Pla}(\mathcal{U}, E)$  at  $b \in \mathcal{B}$  is analogous to  $\mathbf{F}$  as defined in (2.6), and like  $\mathbf{F}$ , it can be interpreted as a motion of  $\mathcal{T}_b\mathcal{B}$ . Furthermore, in the current model context,  $\mathbf{E}$  represents the time-dependent *elastic* deformation of  $\mathcal{T}_b\mathcal{B}$ .

### 3. Constitutive relation for the Cauchy stress

Since both  $\mathbf{F}$  and  $\mathbf{E}$  are motions of  $\mathcal{T}_b\mathcal{B}$ , there exist the multiplicative relations

$$\mathbf{F} = \Lambda \mathbf{E} = \mathbf{E} \mathbf{P} \quad (3.1)$$

### 3 Constitutive relation for the Cauchy stress

between them, as based on the time-dependent linear mappings

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \mathbf{F}\mathbf{E}^{-1} &: I &\longrightarrow \text{Lin}^+(\mathcal{V}, \mathcal{V}), \\ \mathbf{P} &:= \mathbf{E}^{-1}\mathbf{F} &: I &\longrightarrow \text{Lin}^+(\mathcal{T}_b\mathcal{B}, \mathcal{T}_b\mathcal{B}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

reminiscent of the standard elastoplastic multiplicative decompositions  $\mathbf{F}_K = \mathbf{F}_K^E \mathbf{F}_K^P = \bar{\mathbf{F}}_K^P \bar{\mathbf{F}}_K^E$  of the classic deformation gradient  $\mathbf{F}_K$  (e.g., LEE & LIU, 1969) relative to  $\mathbf{K} \in \text{Lin}^+(\mathcal{T}_b\mathcal{B}, \mathcal{V})$ . In fact, the relation between  $\mathbf{F}_K$  and  $\mathbf{F}$  given in (2.7) implies the correspondences

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_K^E &= \mathbf{E}\mathbf{K}^{-1}, & \mathbf{F}_K^P &= \mathbf{K}\mathbf{P}\mathbf{K}^{-1}, \\ \bar{\mathbf{F}}_K^E &= \mathbf{E}\mathbf{K}^{-1}, & \bar{\mathbf{F}}_K^P &= \Lambda, \end{aligned} \quad (3.3)$$

between the elastic and plastic parts of the various multiplicative decompositions.

Relative to any two line elements  $u, v \in \mathcal{T}_b\mathcal{B}$  at  $b \in \mathcal{B}$ , the time-dependent elastoplastic  $\mathbf{F}$  and elastic  $\mathbf{E}$  deformations of  $\mathcal{T}_b\mathcal{B}$  induce corresponding deformed area elements  $d\mathbf{a} := (\mathbf{F}u) \times (\mathbf{F}v)$  and  $d\mathbf{a}_E := (\mathbf{E}u) \times (\mathbf{E}v)$ , with

$$d\mathbf{a}_E = \det(\Lambda^{-1}) \Lambda^T d\mathbf{a} \quad . \quad (3.4)$$

Next, let  $\mathbf{T}$  represent the Cauchy stress tensor associated with the motion of  $b \in \mathcal{B}$ . This stress induces elastoplastic

$$d\mathbf{c} := \mathbf{T} d\mathbf{a} \quad (3.5)$$

and elastic

$$d\mathbf{c}_E := \mathbf{T} d\mathbf{a}_E \quad (3.6)$$

contact force elements. Alternatively, this latter contact force element takes the form

$$d\mathbf{c}_E = \mathbf{T}_E d\mathbf{a} \quad (3.7)$$

relative to  $d\mathbf{a}$ , with

$$\mathbf{T}_E := \det(\Lambda^{-1}) \mathbf{T} \Lambda^T \quad (3.8)$$

via (3.4). Relative to  $d\mathbf{a}$ , then,  $\mathbf{T}$  is logically associated with the elastoplastic, and  $\mathbf{T}_E$  with the elastic, deformation of  $\mathcal{B}$ . From this point of view, it is logical to assume that  $\mathbf{T}_E$  depends constitutively only on  $\mathbf{E}$ , i.e.,

$$\mathbf{T}_E = \hat{\mathbf{T}}_E(\mathbf{E}) \quad , \quad (3.9)$$

implying in turn the constitutive relation

$$\mathbf{T} = \det(\Lambda) \hat{\mathbf{T}}_E(\mathbf{E}) \Lambda^{-T} =: \hat{\mathbf{T}}(\Lambda, \mathbf{E}) \quad (3.10)$$

for the Cauchy stress tensor of an elastoplastic body in the current model. Clearly, the constitutive relation (3.10) for  $\mathbf{T}$  obtained in the current model differ from the standard assumption that  $\mathbf{T}$  depends constitutively only on  $\mathbf{E}$ , reducing to it in fact only in the case  $\Lambda = \mathbf{I}$ . The result (3.10) represents a particular form of the type of constitutive relation for an elastoplastic material proposed by GREEN & NAGHDI (1965) in the sense that the Cauchy stress depends

### References

constitutively on both the elastic and plastic deformation of the material. A result formally identical to (3.10) was obtained by OWEN (1992) via the method of structured deformations developed by DEL PIERO & OWEN (1993) applied to the case of an elastoplastic body. The constitutive relation (3.10) for the Cauchy stress obtained in the context of the current inhomogeneous body model for an elastoplastic material forms the basis for a complete constitutive model of such a material, as will be shown in future work.

### References

1. DEL PIERO, G. & D. OWEN, Structured deformations of continua, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **124**, 99–155, 1993.
2. GREEN, A. E. & NAGHDI, P. M., A general theory of an elastic-plastic continuum, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **18**, 251–281, 1965.
3. LEE, E. H. & LIU, D. T., Finite strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis, *J. Appl. Phys.* **38**, 19–27, 1967.
4. NOLL, W., Material uniform inhomogeneous material bodies, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **27**, 1–32, 1967.
5. NOLL, W., A new mathematical theory of simple materials, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **48**, 1–50, 1972.
6. OWEN, D., Deformations and stresses with and without microslip, AMD V. 148, *Defects and Anelasticity in the Characterization of Crystalline Solids*, L. M. Brooks, ed., ASME.
7. WANG, C.C., On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **27**, 33–94, 1967.

# Untersuchungen zum hypoelastisch-plastischen Materialmodell

CH. TSAKMAKIS, Kernforschungszentrum Karlsruhe, Institut für Materialforschung II,  
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe, Germany

## 1 Einleitung

Der hypoelastisch-idealplastische Materialkörper besteht grundsätzlich aus 3 Materialgleichungen, nämlich eine Fließbedingung, eine Fließregel und ein Hypoelastizitätsgesetz. Der spezielle Fall eines hypoelastisch-idealplastischen Körpers, formuliert durch die Gleichungen

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_p \quad , \quad (1)$$

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{L}^T = 2\mu\mathbf{D}_e + \lambda(\text{Sp}\mathbf{D}_e)\mathbf{1} \quad , \quad (2)$$

$$\mathbf{D}_p = \begin{cases} \Lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} & \text{für Belastung} \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad (3)$$

$$f(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}\mathbf{T}^D \cdot \mathbf{T}^D - \frac{1}{3}k^2 \quad , \quad (4)$$

$$f(\mathbf{T}) = 0 \iff \text{Fließbedingung} \quad , \quad (5)$$

$$k = k_0 = \text{konst.} \quad , \quad (6)$$

wurde in [1] betrachtet. Hierbei bedeutet  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{Sp}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$  das innere Produkt zwischen zwei Tensoren zweiter Stufe  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}^T$  die Transposition von  $\mathbf{A}$ ;  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $k$  sind Materialkonstanten;  $\mathbf{1}$  ist der Einheitstensor zweiter Stufe,  $\mathbf{T}$  der Cauchy'sche Spannungstensor,  $\mathbf{T}^D$  der Deviator von  $\mathbf{T}$ ;  $\Lambda$  wird aus der Konsistenzbedingung  $\dot{f} = 0$  bestimmt, wobei  $(\dot{\quad})$  die materielle Zeitableitung von  $(\quad)$  symbolisiert. Schließlich stellt  $\mathbf{L}$  den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten dar.

Das Materialmodell (1)-(6) wurde in [1] für die einfache Scherung untersucht. Für diesen Deformationsvorgang besitzen der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  und die Geschwindigkeitstensoren  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{D}$  folgende Matrixdarstellungen ( $\gamma = \gamma(t)$  : Scherung):

$$\mathbf{F} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 & 0 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Für den Spannungstensor gilt der Ansatz

$$\mathbf{T} \triangleq \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^D \triangleq \begin{pmatrix} T_{11}^D & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22}^D & 0 \\ 0 & 0 & T_{33}^D \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Es wurde gezeigt, daß unabhängig von Materialparametern der  $(\gamma, T_{12})$ -Verlauf eine negative Tangentensteigung (lokale Instabilität im Dehnungs-Spannungs-Verlauf) beim Eintritt in den plastischen Bereich besitzt (s. dazu auch [2]).

Dieses überraschende Resultat wurde in [1] auf die Wahl der objektiven Ableitung  $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$  zurückgeführt. Um zu zeigen, daß diese Interpretation nicht richtig ist, wurde in [2] das Hypoelastizitätsgesetz (2) durch ein Elastizitätsgesetz ersetzt. Wiederum ergab sich für den Fall der einfachen Scherung eine lokale Instabilität im  $(\gamma, T_{12})$ -Verlauf beim Eintritt in den plastischen Bereich, unabhängig von Materialparametern (s. dazu auch [2]). Dieses Resultat deutet an, daß die Instabilität im Dehnungs-Spannungs-Verlauf nicht auf die Definition der gewählten objektiven Ableitung für  $\mathbf{T}$  zurückgeführt werden kann, denn im Falle des elastisch-idealplastischen Körpers wird keine objektive Spannungsgeschwindigkeit benutzt. Um diese Aussage zu bekräftigen wird in der vorliegenden Arbeit die einfache Scherung für den hypoelastisch-plastischen Materialkörper mit linearer isotroper Verfestigung diskutiert.

Es gibt Fälle, wo in der Tat Instabilitäten in den Dehnungs-Spannungs-Kennlinien auf die Definition der benutzten objektiven Spannungsgeschwindigkeit im Stoffgesetz zurückgeführt werden können. So wurde z.B. in [3] gezeigt, daß für die einfache Scherung der  $(\gamma, T_{12})$ -Verlauf des starrplastischen Körpers mit linearer kinematischer Verfestigung Instabilitäten enthält, wenn die Jaumann'sche Zeitableitung für den Translationstensor in der Evolutionsgleichung für die kinematische Verfestigung angesetzt wird. Allerdings haben diese Instabilitäten eine oszillierende Form und bleiben bei der Hinzunahme einer isotropen Verfestigung weiterhin bestehen.

Die in [1] und [2] ermittelten Instabilitäten weisen keinen oszillatorischen Charakter auf. Ferner wird im folgenden für den hypoelastisch-plastischen Körper mit linearer isotroper Verfestigung gezeigt, daß in Abhängigkeit von Verfestigungsparametern die unerwünschte Instabilität aufgehoben werden kann. Damit wird die Auffassung von [2], daß die Instabilitäten in den Dehnungs-Spannungs-Kennlinien nicht auf die objektive Spannungsgeschwindigkeit  $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$  zurückgeführt werden können, bestätigt und gleichzeitig auf den hypoelastisch-plastischen Körper mit (zumindest isotroper) Verfestigung verallgemeinert.

## 2 Der hypoelastisch-plastische Körper mit isotroper Verfestigung

Das zu betrachtende Materialmodell besteht aus den Gln.(1)-(6), kombiniert mit einer isotropen Verfestigungsregel der Form

$$\dot{k} = \beta \dot{s} \quad , \quad \dot{s} := \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{D}_p} \quad , \quad \beta = \text{konst.} \quad (9)$$

Genau derselben Vorgehensweise wie in [1], [2] folgend, findet man aus (1)-(5) und (7) für die einfache Scherung und für Belastungen im plastischen Bereich (für den rein hypoelastischen Bereich sind die Lösungen in [1], [2] gegeben), folgendes Gleichungssystem:

$$\Lambda = \frac{2\mu(\mathbf{T}^D \cdot \mathbf{D}) + \Psi \cdot \mathbf{T}^D}{\frac{4}{3}\mu k^2 \delta} = \frac{1}{2\mu} \Theta \dot{\gamma}, \quad \Psi = \mathbf{L}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{L}^T - \frac{2}{3}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D})\mathbf{1}, \quad (10)$$

$$\Theta := \frac{\bar{T}_{12}^D}{\delta \bar{r}^2} \left( \frac{1}{\alpha} + \bar{T}_{22} + \bar{T}_{11}^D \right) \quad (11)$$

$$\frac{d\bar{T}_{12}}{d\gamma} = \frac{1}{\alpha} - \Theta \bar{T}_{12} + \bar{T}_{22} \quad (12), \quad \frac{d\bar{T}_{11}}{d\gamma} = \frac{4}{3} \bar{T}_{12} - \Theta \bar{T}_{11}^D \quad (13),$$

$$\frac{d\bar{T}_{22}}{d\gamma} = \frac{1}{2} \Theta \bar{T}_{11}^D \quad (14), \quad \bar{T}_{22}^D = \bar{T}_{33}^D = -\frac{\bar{T}_{12}^D}{2} \quad (15), \quad \frac{d\bar{r}}{d\gamma} = (\delta - 1) \Theta \bar{r}, \quad (16)$$

wobei

$$r := \frac{k}{\sqrt{3}}, \quad r_0 := \frac{k(s=0)}{\sqrt{3}}, \quad \bar{A}_{ij} := \frac{A_{ij}}{r_0}, \quad \bar{r} := \frac{r}{r_0}, \quad \delta := \frac{\beta}{3\mu} + 1 > 1, \quad \alpha := \frac{r_0}{\mu}. \quad (17)$$

Für  $\alpha = 0,0577$  (dieser Wert ist aus [1] übernommen) und verschiedene  $\delta$ -Werte sind Lösungen des Gleichungssystems (10)-(17) in Bild 1 dargestellt. Insbesondere kann gezeigt werden, daß

$$\frac{d\bar{T}_{12}}{d\gamma} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta > 2 + \frac{3}{2\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha^2} \sqrt{9 + 12\alpha^2} = 1,0011 \quad . \quad (18)$$

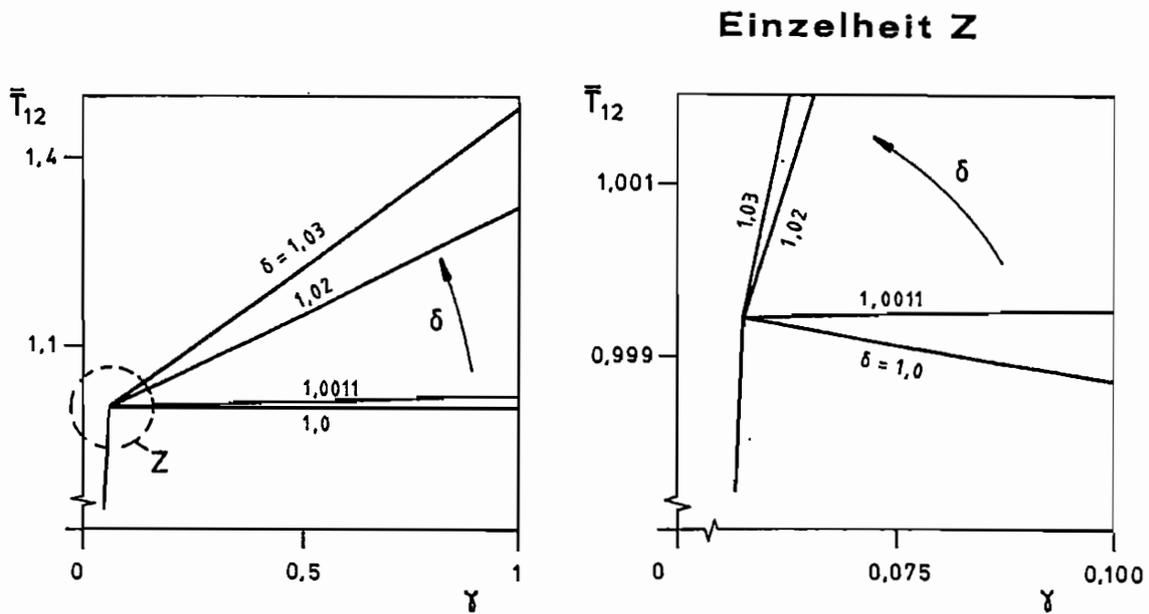


Bild 1

Damit ergibt sich die angekündigte Eigenschaft, daß die Stabilität der  $(\gamma, T_{12})$ -Kennlinien von den Materialparametern abhängt: Für  $\delta > 1,0011$  ergeben sich stabile  $(\gamma, T_{12})$ -Kennlinien im gesamten plastischen Bereich.

### 3 Abschließende Bemerkungen

Für den Fall des idealplastischen Körpers wurden die Instabilitäten in den Dehnungs-Spannungs-Kennlinien in [2] durch das gesamte System der Materialgleichungen begründet. Tatsächlich kann gezeigt werden, daß für die Fließfunktion (4) kombiniert mit einer Fließregel, welche aus Energie-Postulaten hergeleitet wird, es Elastizitätsgesetze gibt, so daß die gewünschten Stabilitätseigenschaften in den Dehnungs-Spannungs-Kennlinien erfüllt sind. Solche Beispiele werden in einer weiteren Arbeit veröffentlicht.

#### Literatur

- [1] Moss, W.C., Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 46(1984), pp. 329-338.
- [2] Tsakmakis, Ch. & Haupt, P., Acta Mechanica 80(1989), pp. 273-285.
- [3] Dafalias, Y. F., J. Appl. Mech. 50(1983), pp. 561-565.

# Zum Kriechen dünnwandiger Flächentragwerke unter Einbeziehung der Schädigung sowie großer Verschiebungen

Holm Altenbach, Konstantin Naumenko  
Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg

## 1 Einleitung

Das Kriechverhalten dünnwandiger Flächentragwerke wird von Schädigungsprozessen begleitet und ist vielfach durch das Auftreten großer Verschiebungen gekennzeichnet. Beide Effekte lassen sich für den Fall von Rechteckplatten, die aus Aluminiumlegierungen bzw. ähnlich zum Kriechen neigenden Werkstoffen bestehen, im Experiment beobachten [3].

Im Rahmen dieser Arbeit werden einige Aspekte der numerischen Analyse von zeitabhängigen Verformungen dünnwandiger Platten betrachtet. Die Untersuchung basiert auf phänomenologischen Konstitutivgleichungen zur Beschreibung des Kriechverhaltens und Evolutionsgleichungen für einen skalaren Schädigungsparameter zur Charakterisierung der Schädigungsvorgänge. Bei der Modellierung wird vorausgesetzt, daß infolge des Kriechens entstehende Verzerrungen hinreichend klein sind. Die Formänderung dünnwandiger Platten kann aber von relativ großen Durchbiegungen begleitet werden. Dabei wird die äußere statische Belastung so klein angenommen, daß die momentan entstehende Verformung linear-elastisch ist und durch Anwendung der geometrisch-linearen Theorie ermittelt werden kann. Infolge des irreversiblen Werkstoffkriechens können im Verlauf der Zeit Durchbiegungen entstehen, die vergleichbar mit der Plattendicke sein können. An einem Beispiel wird die Evolution des Verformungs- und Spannungszustandes betrachtet sowie Einsatzmöglichkeiten der geometrisch-linearen Theorie diskutiert.

## 2 Anfangs-Randwertproblem für Kriechvorgänge

Betrachtet wird eine dünne Platte im orthogonalen kartesischen Koordinatensystem  $x_1, x_2, z$ . Dabei wird angenommen, daß die Platte gleichmäßig spannungsfrei erwärmt ist und quer zur Mittelfläche durch eine stationär angreifende Belastung  $q$  beansprucht wird.

Unter Beachtung der Kirchhoffschen Hypothesen und unter der Voraussetzung, daß die Verschiebungen in der Plattenebene  $u_1, u_2$  kleiner als die Durchbiegungen  $w$  sind, können die kinematischen Beziehungen wie folgt angegeben werden

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + w_{,i}w_{,j}) + z\mu_{ij}(\mathbf{u}), \quad \mu_{ij}(\mathbf{u}) = -w_{,ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

Hierbei ist  $\mathbf{u}^T = [u_1, u_2, w]$  der Vektor der Verschiebungen der Punkte der Plattenmittelfläche,  $\mu_{ij}$  sind die Biege- und die Torsionsverformungen dieser Fläche und  $\varepsilon_{ij}$  stellen die Verzerrungen dieser Fläche dar.

Die Konstitutivgleichungen werden in der Form des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes formuliert

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) - \varepsilon_{kl}^c) \quad (2)$$

mit

$$C_{ijkl} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} [(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})(1-\nu) + 2\nu\delta_{ij}\delta_{kl}],$$

Dabei wird angenommen, daß das Plattenmaterial homogen und isotrop ist und die elastischen Materialeigenschaften mit der Zeit unverändert bleiben.

Unter der Voraussetzung der Inkompressibilität und der Isotropie des Kriechverhaltens lassen sich für die Änderung der Kriechverzerrungen  $\dot{\epsilon}_{ij}^{cr}$  und der skalaren Schädigungsvariable  $\dot{d}$  folgende Konstitutiv- und Evolutionsgleichungen formulieren [1], [2]

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{cr} = \frac{3}{2} F(\sigma^{eq}) K(d) \frac{s_{ij}}{\sigma^{eq}}, \quad \dot{d} = R(d) H[\chi(\sigma_{ij})] \quad (3)$$

mit  $\sigma^{eq} = \sqrt{3/2 s_{ij} s_{ij}}$ ,  $s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 J_1(\sigma_{ij}) \delta_{ij}$ ,  $\chi(\sigma_{ij}) = \alpha J_0(\sigma_{ij}) + (1-\alpha) J_2(\sigma_{ij})$ ,  $F(\sigma) = A\sigma^n$ ,  $K(d) = (1-d)^{-n}$ ,  $H(\sigma) = B\sigma^m$ ,  $R(d) = (1-d)^{-m}$ ,  $0 \leq d \leq d_*$ . Hierbei sind  $J_1$  und  $J_2$  die erste und die zweite Invariante des Spannungstensors,  $J_0(\sigma)$  kennzeichnet die maximale der drei Hauptspannungen und  $A, B, n, k, m, l, \alpha, d_*$  sind materialspezifische Kennwerte.

Nach Integration der Gln. (2) über die Plattendicke  $h$  erhält man Konstitutivgleichungen für die Membrankräfte  $N_{ij}$  und für die Biegemomente  $M_{ij}$  unter Berücksichtigung des Kriechens

$$N_{ij} = g_{ijkl}^I e_{kl}(\mathbf{u}) - N_{ij}^{cr}, \quad M_{ij} = g_{ijkl}^{II} \mu_{kl}(\mathbf{u}) - M_{ij}^{cr} \quad (4)$$

$$e_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + w_{,i} w_{,j}), \quad (5)$$

$$N_{ij}^{cr} = \int_{(h)} C_{ijkl} \epsilon_{kl}^{cr} dz, \quad M_{ij}^{cr} = \int_{(h)} C_{ijkl} \epsilon_{kl}^{cr} z dz,$$

$$g_{ijkl}^I = C_{ijkl} h, \quad g_{ijkl}^{II} = C_{ijkl} h^3 / 12, \quad i, j, k, l = 1, 2.$$

Die quasistatischen Gleichungen eines Elementes der verformten Plattenmittelfläche lassen sich in folgender Form angeben

$$N_{i,j,j} = 0, \quad Q_i = M_{ij,j}, \quad Q_{i,i} + w_{,ij} N_{ij} + q = 0, \quad (6)$$

mit  $Q_i$  als Querkräfte.

Die formulierten Gleichungen sind für die Vollständigkeit des Anfangs-Randwertproblems durch die Anfangsbedingungen bei  $t = 0$  mit  $t$  als Zeit und durch die Randbedingungen am Rand  $R$  der Platte zu ergänzen. Die elastische Startlösung folgt aus dem Gleichungssystem (1) - (6) bei  $\epsilon_{ij}^{cr} = 0$ ,  $d = 0$ .

Die Lösung des Anfangs-Randwertproblems wird durch eine Zeitdiskretisierung mit Hilfe des absolut stabilen impliziten Euler-Verfahrens und durch die Minimierung auf jedem Zeitschritt folgenden Variationsfunktionals

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_S [-(g_{ijkl}^I)^{-1} N_{ij}(\Phi) N_{kl}(\Phi) + g_{ijkl}^{II} \mu_{ij}(w) \mu_{kl}(w)] dS - \frac{1}{2} \int_S N_{ij}(\Phi) w_{,ij} w dS - \\ & - \int_S [(g_{ijkl}^I)^{-1} N_{ij}^{cr} N_{kl}(\Phi) + M_{ij}^{cr} \mu_{ij}(w)] dS - \int_S qw dS = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

mit

$$(g_{ijkl}^I)^{-1} = \frac{1}{2Eh} [(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})(1 + \nu) - 2\nu\delta_{ij}\delta_{kl}],$$

$$N_{11}(\Phi) = \Phi_{,22}, \quad N_{22}(\Phi) = \Phi_{,11}, \quad N_{12}(\Phi) = -\Phi_{,12}$$

realisiert, wobei  $\Phi$  die Airysche Spannungsfunktion ist. Der Rechenalgorithmus ist in [4] erläutert.

### 3 Numerisches Beispiel

Die Ergebnisse der theoretischen Modellierung werden für eine allseitig eingespannte, durch gleichmäßig verteilten Druck  $q$  belastete quadratische Platte diskutiert. Die Berechnungen wurden für den Fall  $q = 0,02\text{MPa}$ ,  $l = 8 \cdot 10^{-2}\text{m}$ ,  $h = 1 \cdot 10^{-3}\text{m}$  mit  $l$  als Plattenlänge durchgeführt. Als Plattenmaterial wurde eine Aluminiumlegierung [3] mit folgenden Kennwerten für das Konstitutivgesetz (3) verwendet.

$$A = 0.335 \cdot 10^{-7} \text{MPa}^{-n}/h, \quad B = 1.9 \cdot 10^{-7} \text{MPa}^{-m}/h,$$

$$n = m = 3, \quad \alpha = 0, \quad E = 0.65 \cdot 10^5 \text{MPa}, \quad \nu = 0,3$$

Auf der Abb. 1 ist der Zeitverlauf der maximalen Durchbiegung im Mittelpunkt der Platte dargestellt. Zum Vergleich ist die Lösung ohne Einbeziehung der geometrischen Nichtlinearität gezeigt. Im Zeitintervall  $[0,10h]$  ist dabei kein Unterschied im Rahmen der zeichnerischen Genauigkeit zwischen beiden Lösungen zu erkennen. Wenn die Durchbiegung  $0.4h$  erreicht, sind geometrisch-nichtlineare Terme zu berücksichtigen.

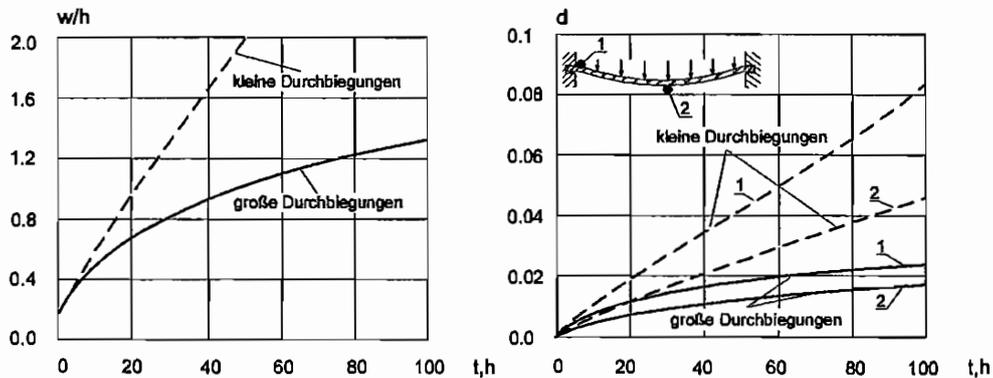


Abb.1: Zeitverlauf der maximalen Durchbiegung    Abb.2: Zeitverlauf der Kriechschädigung

Auf der Abb. 2 ist der Zeitverlauf der Kriechschädigung in zwei Punkten der Platte dargestellt. Zum Vergleich ist die Lösung für das geometrisch-lineare Problem aufgetragen. Die geometrisch-lineare Theorie zeigt eine überhöhte Kriechschädigung. Folglich kann sich bei ihrer Anwendung eine zu niedrige Bruchzeit ergeben.

Auf den Abb. 3 und Abb. 4 sind die Zeitverläufe der Biegemomente entlang einer Symmetrieachse der Platte dargestellt. Die Reaktion der Platte auf das Werkstoffkriechen kann als Relaxation der Biegemomente angesehen werden. Das ist besonders beim Übergang vom elastischen zum stationären Kriechzustand sichtbar. Die Abb. 3 entspricht

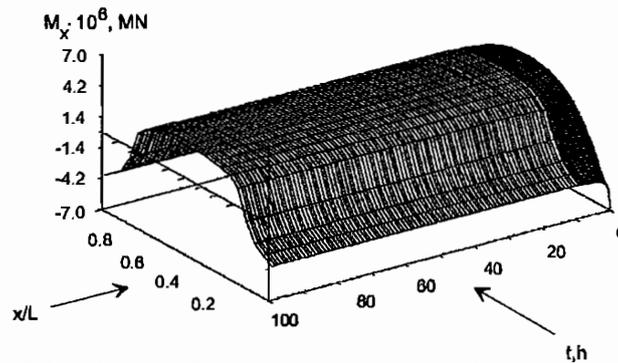


Abb. 3: Zeitverlauf der Biegemomente (geometrisch-lineares Problem)

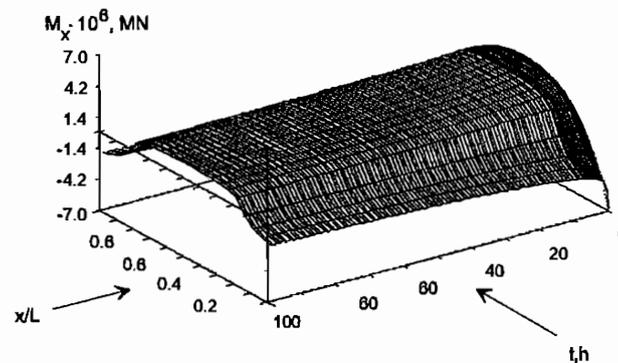


Abb. 4: Zeitverlauf der Biegemomente (Einbeziehung großer Durchbiegungen)

der Lösung unter Anwendung der geometrisch-linearen Theorie, die Abb. 4 – der Lösung unter Einbeziehung großer Durchbiegungen. Im ersten Fall ist eine schwache Änderung der Biegemomente im stationären Kriechbereich zu beobachten. Im zweiten Fall relaxieren diese in der Einspannung und im Mittelpunkt der Platte für das ganze Zeitintervall.

## Literatur

- [1] Rabotnov, Y.N.: *Creep problems in structural members*. Amsterdam: North-Holand, 1969
- [2] Lemaitre, J., Chaboche, J.-L.: *Mechanics of solid materials*. Cambridge u.a.: Cambridge University Press, 1990
- [3] Konkin, V.N., Morachkovskij, O.K.: *Long-term strength of light alloys with anisotropic properties*. Probl. Prochn., No 6, (1987), pp. 38–42 (in Russian)
- [4] Naumenko, K.: *Modellierung des Kriechverhaltens dünner Schalen und Platten*. Preprint MBI-94-5, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Mai 1994

## Ansätze zur Plastizitätstheorie

K.-H. Anthony  
Universität-GH Paderborn

Die Plastizität eines kristallinen Materials geht auf der mikroskopischen Skala auf die Dynamik von Versetzungen zurück. Dieser Tatsache sollte eine phänomenologisch-makroskopische Theorie der Plastizität Rechnung tragen. Das gilt sowohl für die Deformationstheorie als auch für die Thermodynamik als Teile einer Plastizitätstheorie.

### 1. Kritik der traditionellen Ansätze für eine Plastizitätstheorie

- Der plastische verformte Körper ist keine materielle Mannigfaltigkeit.

Traditionelle Ansätze gehen mehr oder weniger vom Konzept der „materiellen Mannigfaltigkeit“ aus. Darunter wird eine hinreichend oft stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit im eigentlichen mathematischen Sinne verstanden, deren Elemente als Massenelemente im Sinne von Atomen oder größeren, markierbaren Massenelementen realisiert sind. Die der Mannigfaltigkeit zugeordneten Koordinatensysteme sind materiell verankerte und bei der Deformation mitgeführte Koordinatensysteme, sogenannte „materielle Koordinatensysteme“. Damit legt das Modell der materiellen Mannigfaltigkeit von Anfang an eine *Deformationsstruktur* für den Körper fest, nämlich kompatible Deformationen.

Nun ist aber die plastische Deformation mit der Bewegung von Versetzungen verknüpft, die notwendig zu einem Deformationschaos Anlaß geben, also sicher nicht zu einer kompatiblen, plastischen Gesamtdeformation. Für mich steht außer Zweifel, daß man mit dem Konzept der materiellen Mannigfaltigkeit der Tatsache Rechnung tragen will, daß bei plastischer Deformation der Körper in makroskopischer Sicht scheinbar nicht zerrissen wird. (Von dem schließlich eintretenden Spröbruch wird hier abgesehen.) Tatsächlich hat die materielle Mannigfaltigkeit, d.h. die kompatible Deformation diese Eigenschaft. Jedoch wird mit diesem Konzept die Versetzungsdynamik schon von den Ansätzen her strukturell eliminiert.

Auch das mit der Versetzungsbewegung einhergehende Deformationschaos beläßt den Körper makroskopisch kompakt. Es werden aber alle inneren, materiellen Zusammenhänge zerrissen. Die relevanten Skalen für das Deformationschaos werden vom Versetzungsnetzwerk festgelegt:

- Von den Abständen der Gleitebenen der aktiven Gleitsysteme,
- von der Anzahl von Versetzungen in wandernden Versetzungskaskaden
- und von den freien Laufwegen der Versetzungen in den Gleitsystemen.

Diese Dimensionen reichen von atomaren bis zu makroskopischen Dimensionen. Daß das Deformationschaos bis in die makroskopischen Dimensionen hineinreicht, wird durch die mit bloßem Auge sichtbaren Gleitlinien und Lüdersbänder an der Oberfläche einer plastisch gezogenen, zylindrischen Probe eindrucksvoll deutlich.

Um diese Dinge wirklichkeitsnäher in den Griff zu bekommen, schlage ich vor, den plastisch deformierten Körper nicht mit Deformationen herkömmlicher Art - wie sie definitionsgemäß für den elastisch verformten Körper angemessen sind - in Verbindung zu bringen sondern stattdessen *in Massenströmen zu denken*. Die klassische Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen muß zum Zwecke einer dynamischen Theorie der Plastizität revidiert werden.

In der Theorie der Eigenspannungen geht man traditionell von drei Zuständen und drei zugehörigen Deformationen aus. - Wir betrachten zunächst Eigenspannungen, die von einem Versetzungsnetzwerk im Kristall herrühren. - Der zusammenhängende *Endzustand* wird (im Gedankenexperiment) in kleine Massenelemente zerschnitten, die nach Relaxation der wirkenden elastischen Spannungen in ein Konglomerat von spannungsfreien Massenelementen des nicht zusammenhängenden *natürlichen Zustands* übergehen. Dazu sind die Schnitte so zu führen, daß die Versetzungen in die Schnittflächen zu liegen kommen. Dem Übergang vom Endzustand in den natürlichen Zustand ist die lokal wirksame, inkompatible, *elastische Distorsion* zugeordnet. Sie bewirkt lokal eine *affine Deformation* der Massenelemente, d.h. eine Deformation des Kristallgitters in den Massenelementen und eine damit verknüpfte Gestaltsdeformation ihrer Oberfläche. Der nicht zusammenhängende natürliche Zustand ist Ausdruck von Eigenspannungen im Endzustand.

An den Massenelementen des natürlichen Zustands werden nun *plastische Deformationen* angebracht, indem man durch die Elemente in geeigneter Weise Versetzungen von Oberfläche zu Oberfläche durchlaufen läßt, sodaß sich die Elemente danach wieder zu einem kompakten Körper im

spannungsfreien, d.h. versetzungsfreien *Idealzustand* zusammenfügen. Diesem Übergang wird traditionell eine ebenfalls inkompatible, *plastische Distorsion* zugeordnet, die an den Massenelementen zu einer **reinen Gestaltsdeformation** der Oberflächen führt ohne Auswirkungen auf das Kristallgitter, d.h. die Massenelemente verbleiben in ihrem Zustand.

Schließlich werden die plastische und die elastische Distorsion zu einer *kompatiblen Gesamtdistorsion* zusammengesetzt, die einer kompatiblen und damit kompakten, plastischen Gesamtdeformation des Körpers von dessen Idealzustand in dessen versetzungsbeladenen Endzustand entspricht.

Offenbar kommt auf diese Weise einerseits das Konzept der materiellen Mannigfaltigkeit durch die Hintertür ins Spiel, was mit Blick auf die Versetzungsdynamik nicht akzeptabel ist. Andererseits werden zwei **ungleichartige Größen superponiert**, nämlich die *affine elastische Distorsion* und die **nicht affine plastische Distorsion**, was *mathematisch offensichtlich nicht in Ordnung ist*. Für Eigenspannungen, die auf den topologischen Defekt „Versetzung“ zurückzuführen sind, ist somit das traditionelle Konzept nur hinsichtlich der elastischen Distorsion zu retten.

(Anders sieht es dagegen für den Fall nichttopologischer Eigenspannungen aus, z.B. für den Fall der Temperaturspannungen. Der Übergang vom Endzustand in den natürlichen Zustand beseitigt die elastischen Temperaturspannungen. Die Gitterkonstante ändert sich aber im natürlichen Zustand nach Maßgabe der lokalen Temperatur immer noch von Element zu Element. Der Übergang vom natürlichen in den Idealzustand erfordert nun einen thermodynamischen Ausgleichsprozeß zwischen den Massenelementen (Wärmeströme), der kinematisch mit einer affinen Deformation der Massenelemente verknüpft ist. Diese „quasiplastische“ Distorsion ist aber ebenfalls eine affine Deformation, sodaß das Konzept der drei Zustände und der superponierbaren Distorsionen nun in allen Punkten gerechtfertigt ist.)

➤ Der herkömmlich benützte *Tensor der Versetzungsdichte* ist nur ein gemitteltes Maß zur Beschreibung des Versetzungsnetzwerks.

In diesem Maß heben sich Versetzungen entgegengesetzten Burgers-Vektors auf. In der Plastizität kommt es aber gerade auf Korrelationen im Versetzungsnetzwerk an, d.h. auf die Feinstruktur im Versetzungsnetzwerk. Auch in diesem Punkt ist eine Revision traditioneller Ansätze erforderlich.

➤ Die Versetzungsdynamik spielt sich weit weg vom lokalen thermischen Gleichgewicht ab.

So sind einerseits die Versetzungen topologische Kristallfehler, deren Eigenenergie pro atomare Längeneinheit der Versetzungslinie üblicherweise 1 bis 10 eV beträgt, während die thermische Energie bei Raumtemperatur etwa bei  $kT \approx 1/40$  eV liegt. Die Versetzungen liegen damit nach den Grundsätzen der statistischen Mechanik nicht im thermischen Gleichgewicht vor. Sie können spontan durch thermische Fluktuationen nicht entstehen. Andererseits ist die Plastizität mit Instabilitäten im Versetzungsnetzwerk verknüpft. (Frank-Read-Quellen. Verhakung von Versetzungen an vielerlei Hindernissen und wieder Lösen der Verhakung unter hinreichend großen Kräften.) Somit ist die Thermodynamik der irreversiblen Prozesse in herkömmlicher Form für die Versetzungsdynamik und damit für die Plastizität nicht geeignet. Es gibt für Versetzungen keine Thermostatik des ungehemmten Gleichgewichts, die in die Nachbarschaft des Gleichgewichts als Thermodynamik extrapoliert werden könnte, wie es z.B. für die Thermodynamik der irreversiblen Prozesse in Onsagerscher Prägung geschieht (Prinzip des lokalen Gleichgewichts). Die Thermodynamik der Versetzungen muß von Anfang an weitab vom Gleichgewicht formuliert werden.

## 2. Alternative Ansätze für eine Plastizitätstheorie

Herkömmlich wird der plastisch verformbare Körper als ein *Festkörper mit Fließeigenschaften* angesehen. Im nachfolgend vorgeschlagenen Modell wird diese Sicht genau auf den Kopf gestellt. Oben wurde bereits erwähnt, daß wir in der Plastizität statt in Deformationen in Massenströmen denken sollten. Dementsprechend wollen wir den plastisch verformten Körper als eine „*Flüssigkeit*“ mit *Festkörpereigenschaften* ansehen:

Die nachfolgend skizzierten Ansätze gründen auf der

➤ Cosserat-Flüssigkeit als einem makroskopischen Modell der Plastizität.

Die Dynamik dieses Systems wird im Rahmen des Lagrange-Formalismus der Felder modelliert.

Der Lagrange-Formalismus gründet auf dem Hamilton'schen Variationsprinzip, das wir für die Plastizität als lokales Wirkungsfunktional auf einer Lagrange-Dichtefunktion aufbauen wollen. Somit ist die Dynamik des Systems in die kompaktest mögliche Form gebracht: sie ist vollständig in der Lagrangedichte als einem einzigen skalaren Feld enthalten. Die Lagrangedichte ist somit analog zum elastischen Potential der Elastostatik oder zur Lagrangedichte der reinen Elastodynamik, aus denen bekanntlich auch alles weitere über elastische Zustände bzw. elastische Prozesse deduziert werden kann.

- Das Trägermedium der Cosserat-Flüssigkeit wird mit Hilfe eines komplexen Materiefeldes und eines komplexen Wirbelfeldes beschrieben.

Das Trägermedium bringt die gewünschten Fließeigenschaften ins Spiel. Die hydroelastische Flüssigkeit läßt sich mit den beiden genannten Feldern vollständig beschreiben.

(Komplexe Felder sind in der theoretischen Physik auch im Rahmen der klassischen Feldtheorie längst etabliert. Beispielsweise sei an die Schrödingersche Materiewellentheorie erinnert, aus der die Theorie der hydroelastischen Flüssigkeit als Eikonalnäherung folgt, oder an den komplexen Ordnungsparameter zur Beschreibung der Supraleitung, die einem „See von Elektronenpaaren“ zugeordnet wird.)

Der methodische Vorteil der komplexen Felder besteht im Hinblick auf die Plastizität darin, daß primär in Massenströmen gedacht wird! Massenerhaltung, Massenträgheit und – damit zusammenhängend – der kinetische Energieanteil werden in der Lagrangedichte mit Hilfe von Ableitungen des Materiefeldes modelliert.

- Das Trägermedium ist „Träger eines Feldes von Vektordreibeinen“, der „Cosseratdreibeine“.

Diese Dreibeine sind den Basisvektoren des Kristallgitters zugeordnet. Ihre Deformation wird mittels eines *elastischen Potentials* in die Gesamtdynamik, d.h. in die Lagrangedichte energiewirksam eingebracht. Sie wird der Elastizität des Kristallgitters zugeordnet.

- Die mit dem Feld der Cosseratdreibeine verknüpfte Anholonomität wird mit der (gemittelten) Gesamtversetzungsdichte identifiziert.

In der traditionellen Versetzungstheorie wird die Versetzungsdichte mit der Torsion des affinen Zusammenhangs (Konnexion) zur nichteuklidischen Gittergeometrie des topologisch gestörten Kristallgitters identifiziert. Torsion einer Konnexion und Anholonomität eines Basissystems sind Synonyme.

- Die Cosseratdreibeine werden von der Strömung des Trägermediums nach Maßgabe der Versetzungsbewegung substantiell mitgeführt. Diese Forderung wird über kinematische Bindungen mittels Lagrange-Multiplikatoren in das Hamiltonsche Prinzip des Systems eingebracht.

Je nach Versetzungsbewegung, die gegenüber der Massenströmung zu beurteilen ist, werden die Dreibeine mehr oder weniger von der Strömung mitgeführt. Zum Beispiel ist die elastische, kompatible Deformation eines versetzungsfreien Kristalls mit einer vollständigen Mitführung der Dreibeine verknüpft. Insofern bringt das vorgeschlagene Modell auch

- eine Vereinheitlichung der Beschreibung von elastischen und plastischen Prozessen.

Sitzen die Versetzungen im zu deformierenden Kristallgitter fest, d.h. ist der Versetzungsstrom in bezug auf den Massenstrom rein konvektiv, so handelt es sich ebenfalls um eine (zusätzliche) rein elastische Deformation bei vollständiger Mitführung der Dreibeine. - Bewegen sich jedoch die Versetzungen durch das Kristallgitter, d.h. kommt es vor dem Hintergrund des Massenstroms zu einem zusätzlichen „diffusiven“ Versetzungsstrom, so werden die Dreibeine nur unvollständig mitgeführt nach Maßgabe dieses Versetzungsstroms. - Fehlende Mitführung wird schließlich der frei strömenden Flüssigkeit zugeordnet. Die Dreibeine sind dann als innere Struktur zwar noch vorhanden, ihre Dynamik ist aber vollständig von der Strömung abgekoppelt. Wir haben es sozusagen mit einem idealen Flüssigkristall zu tun.

- Die Thermodynamik der irreversiblen Prozesse läßt sich in den Lagrange-Formalismus einbinden.

Die herkömmlichen Fundamentalvariablen der Thermodynamik wie Temperatur, Massendichten und Geschwindigkeiten erweisen sich für diese Zwecke als nicht ausreichend. Der *Satz der Grundgleichungen* wie Wärmeleitungsgleichung, Diffusionsgleichungen und Navier-Stokes-Gleichungen ist nämlich *nicht selbstadjungiert*, was mit der Existenz eines lokalen und momentanen Lagrange-funktions, das die genannten Grundgleichungen als Euler-Lagrange-Gleichungen liefern würde, nicht verträglich ist. Dieses Problem kann gelöst werden durch Einführung von fundamentaleren,

- komplexen Feldvariablen in der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse.

Mit diesem Trick wird der *Satz der herkömmlichen Feldgleichungen formal* verdoppelt und damit zu einem **selbstadjungierten Satz von Feldgleichungen** erweitert. Physikalisch geht es jedoch um die Einführung **fundamentalerer** Feldvariablen, aus denen einerseits die herkömmlichen Feldvariablen als sekundäre Variablen folgen, die aber andererseits Möglichkeiten zur Erweiterung der herkömmlichen Thermodynamik eröffnen.

(Bekanntlich enthält z.B. die Fouriersche Wärmeleitungsgleichung als parabolische Gleichung das physikalische Paradoxon einer unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von thermischen Störungen. Dieser Mangel kann im Lagrange-Formalismus mit komplexen Feldern ganz natürlich beseitigt werden, indem wir das üblicherweise (und meist unausgesprochen verwendete) *Prinzip des lokalen Gleichgewichts* verlassen und die Thermodynamik für Prozesse erweitern, die außerhalb des lokalen Gleichgewichts ablaufen. Auf diese Weise kommen z.B. thermische Trägheiten ins Spiel.)

Die komplexen Felder finden damit auch in die Thermodynamik Eingang. So wird das komplexe *Feld der thermischen Erregung* als fundamentales Feld zur Beschreibung der Wärmeleitung in die Thermodynamik eingeführt.

- Im Lagrange-Formalismus ist die Entropie und ihre Bilanz in natürlicher Weise enthalten.

Wesentlich ist dabei die Verwendung von komplexen Feldern für alle an der Entropieerzeugung beteiligten Freiheitsgrade. Formal geht es um die Invarianz der Lagrangefunktion bezüglich gemeinsamer Umkehrung aller komplexen Felder. *Dissipation* ist mit Entropieerzeugung verknüpft. Somit kommen wir auf die *methodische Forderung*, daß alle dissipativen Freiheitsgrade durch komplexe Felder zu erfassen sind. Das wird sogleich auf die dissipative Dynamik der Versetzungen angewendet:

- Das Versetzungsnetzwerk wird in *Klassen gleicher Versetzungen* aufgeteilt und jeder Klasse ein *komplexes Versetzungsfeld* zugeordnet.

Die Klassen sind etwas detaillierter charakterisiert als die üblichen *Gleitsysteme*. Mit den neu eingeführten Versetzungsfeldern wird das Versetzungsnetzwerk im Rahmen der Kontinuumstheorie viel differenzierter beschrieben als mit dem herkömmlichen Tensor der Versetzungsdichte. Letzterer folgt aber durch geeignete Überlagerung aus den ersteren. In die Versetzungsdynamik lassen sich mit Hilfe der Versetzungsfelder Korrelationen zwischen den Versetzungen eines Netzwerks einbauen.

- Die Versetzungsdynamik wird im Rahmen des Lagrange-Formalismus formuliert.

Die Lagrange-Funktion der Versetzungsdynamik wird in Analogie zum oben genannten Materiewellenformalismus einer strömenden Flüssigkeit konstruiert. (In beiden Fällen handelt es um „Teilchenströmungen“). Zur Modellierung der Korrelationen zwischen den Versetzungen spielen ebenfalls *Analogien zu bekannten Vielteilchenproblemen* der Physik eine Rolle. Für die Zwecke einer Kontinuumstheorie der Plastizität werden wir ganz im Rahmen der Feldtheorie bleiben. Was die Materiewellen und die Coulombsche Wechselwirkung in der Vielteilchen-Elektronentheorie sind, werden in der Plastizitätstheorie die Versetzungsfelder und die Peach-Köhler-Kraft sein. Andererseits haben wir aufgrund der komplexen Versetzungsfelder in Analogie zur Feldquantisierung der Materiefelder die Möglichkeit, zu einer Theorie von diskreten Versetzungsnetzwerken überzugehen.

„Feldquantisierung“ heißt primär nicht „Übergang von einer klassischen Feldtheorie zu einer Quantentheorie“! Vielmehr geht es primär bei der „kanonischen Quantisierung“ um eine Diskretisierung einer Kontinuumstheorie. Die physikalische Deutung im Sinne der Quantentheorie ist erst der zweite Schritt, der die kanonische Quantisierung auf das Planck'sche Wirkungsquantum normiert. Im Falle der Versetzungen ist *die kanonische Quantisierung der Versetzungsfelder auf den Burgersvektor zu normieren*.



## **PLASTOMECHANISCHE UND TRIBOLOGISCHE PROBLEME BEIM FOLIENWALZEN**

Oskar Pawelski, Peter Häfele  
Max-Planck-Institut für Eisenforschung, Düsseldorf  
VAW aluminium AG, Bonn

### **Einleitung**

Die mathematische Beschreibung von Kaltwalzvorgängen ist seit vielen Jahren Gegenstand wissenschaftlicher Arbeiten. Die herkömmlichen Walztheorien stoßen jedoch bei der Beschreibung des Walzens dünner Folie, wie beispielsweise von Aluminiumfolie mit einer minimalen Enddicke von 6  $\mu\text{m}$ , an ihre Grenzen. Die beim Folienwalzen ablaufenden Vorgänge sind offenbar anderer Natur als bei den klassischen Walztheorien angenommen wird. Ziel war es daher, die bekannten Walzmodelle zu erweitern um eine durchgängige plastomechanische Beschreibung des Kaltwalzens bis hin zu Folien mit sehr geringer Enddicke zu ermöglichen und dies experimentell zu verifizieren. Die im zweiten Teil gezeigten Untersuchungen gehen aus von der Tatsache, daß die tribologischen Vorgänge in der Umformzone, welche mit abnehmender Banddicke an Bedeutung gewinnen, maßgeblich von der in den Walzspalt eingezogenen Schmierstoffmenge beeinflusst werden. Die wesentlichen Einflußfaktoren auf den Walzöleinzug und deren experimentelle Bestätigung werden vorgestellt.

### **Plastomechanische Beschreibung**

Die klassischen Walztheorien, z. B. SIEBEL [1], VON KÁRMÁN [2], BLAND UND FORD [3], basieren auf folgenden Annahmen für den Walzspalt:

- ▷ Plastische Dickenreduktion im ganzen Walzspalt
- ▷ Schlupf zwischen Walze und Walzgut im ganzen Walzspalt
- ▷ Reibschubspannung wird überall nach dem Coulombschen Reibgesetz  $\tau = \mu p$  berechnet
- ▷ Walze behält ihre kreisförmige Kontur bei.

Bei der erweiterten Folienwalztheorie, welche auf die Arbeiten von FLECK UND JOHNSON [4] sowie FLECK, JOHNSON ET AL. [5] zurückgeht, wurden diese Annahmen aufgegeben. Wesentliches Merkmal dieser Theorie ist, daß die Existenz einer sogenannten neutralen Zone im Walzspalt zugelassen wird, welche durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet ist:

- ▷ Keine plastische Dickenabnahme des Walzguts
- ▷ Walzgut befindet sich im Zustand eines constrained plastic flow
- ▷ Kein Schlupf zwischen Walze und Walzgut
- ▷ Die Walzkontur weicht von der Kreisform ab.

Die Zonen plastischer Verformung beschränken sich auf einen Bereich vor und nach der neutralen Zone am Ein- und Austritt aus dem Walzspalt. Die mit abnehmender Banddicke zunehmende Abweichung von der Kreiskontur und der zugehörige charakteristische Druckverlauf sind in Bild 1 dargestellt.

Auf Basis der Folienwalztheorie entwickelte HARTUNG [6] ein Rechenprogramm. Das elastisch-plastische Werkstoffverhalten wird mit den Prandtl-Reuss-Beziehungen beschrieben, als Fließkriterium wird das nach von Mises verwendet.

Die Ergebnisse für einen Folienwalzprozeß mit dem Aluminiumwerkstoff Al 99,5 für eine Reduktion von  $34 \mu\text{m}$  auf  $15 \mu\text{m}$  sind in Bild 2 dargestellt. Im Bereich der beiden plastischen Zonen am Ein- und Austritt aus dem Walzspalt, siehe Bild 2a, liegt eine Relativgeschwindigkeit zwischen der Walze und der Folie vor. Die Randschubspannung berechnet sich in diesem Bereich nach dem Coulombschen Reibgesetz, siehe Bild 2b. In der neutralen Zone, welche im Bereich  $-1,5 \text{ mm} < x < 0,5 \text{ mm}$  vorliegt (Bild 2a), bewegen sich Walze und Folie mit der gleichen Geschwindigkeit. Die Randschubspannungen berechnen sich in diesem Bereich aus der kinematischen Randbedingung, daß das Walzgut an der Walze haftet.

Die ebenfalls berechneten Werte für die Anstellkraft, das Antriebsmoment, die Walzenumfangsgeschwindigkeit und die Voreilung wurden mit Betriebsdaten des Folienwalzwerks der Firma VAW aluminium AG in Grevenbroich verglichen, wobei sich eine gute Übereinstimmung ergab.

Eine direkte experimentelle Untersuchung des Folienwalzprozesses zur Bestätigung der erhaltenen Ergebnisse, insbesondere der Walzspaltkontur, scheitert an der Unzugänglichkeit des Walzspalts. Da das Walzen im Prinzip eine Aneinanderreihung von einzelnen Stauchvorgängen ist, bieten sich Stauchversuche als Alternative an. KRAMER [7] führte solche Stauchversuche mit walzenähnlichem Werkzeug an geometrisch ähnlichen Flachproben im Labormaßstab durch. Durch Ähnlichkeitstheoretische Betrachtungen konnten die Ergebnisse auf den realen Prozeß übertragen werden. Ziel der Untersuchung war die experimentelle Bestätigung des Einflusses des geometrischen Verhältnisses Walzenradius/Banddicke auf die elastische Deformation der belasteten Walze. Dazu wurde das Verhältnis aus dem Radius  $R$  des Stauchwerkzeugs zur Ausgangsdicke  $h_0$  der Flachproben variiert und der Dickenverlauf der gestauchten Probe entlang der gedrückten Länge induktiv gemessen, siehe Bild 3. Die plastische Deformation der Stauchprobe entspricht der elastischen Deformation des walzenähnlichen Werkzeugs während des Stauchvorgangs.

Im oberen Teilbild mit  $R/h_0=682$ , was einer Foliendicke von  $h_0=220 \mu\text{m}$  beim Walzen entspricht, ist noch keine Abweichung von der Kreiskontur zu erkennen. Mit abnehmender Banddicke weicht die Kontur der „Walze“ zunehmend von der Kreiskontur des unbelasteten Werkzeugs ab. Im unteren Teilbild, welches einer Foliendicke von  $h_0=27 \mu\text{m}$  entspricht, ergibt sich in der Mitte der gedrückten Länge keine plastische Deformation der Probe. Bestätigt wurden die Ergebnisse durch Härtemessungen entlang der gedrückten Länge.

Übertragen auf den Walzprozeß bedeutet dies, daß beim Walzen dünner Folien im Walzspalt ein Bereich ohne plastische Deformation des Bandes auftreten kann, welcher der oben erwähnten neutralen Zone entspricht, siehe Bild 1.

### **Tribologie**

Beim Folienwalzen wird die Oberflächenqualität der Folie und der Kraft- und Leistungsbedarf des Walzprozesses maßgeblich vom Reibungszustand in der Umformzone beeinflusst. Von entscheidendem Einfluß auf die tribologischen Verhältnisse ist die in den Walzspalt eingezogene Schmierstoffmenge. Für die Walzölauführung zur Umformzone müssen im wesentlichen drei Mechanismen unterschieden werden. Durch Physisorption oder Chemisorption von Schmierstoffbestandteilen bilden sich Grenzschichten auf Walze und Folie aus, die in den Walzspalt einlaufen. Die Oberflächenfeingestalt der beiden Reibpartner beeinflusst die Schmierstoffströmung. Die dritte Einflußgröße stellt der hydrodynamische Effekt dar, welcher mit dem bekannten Aquaplaning am Autoreifen vergleichbar ist.

Ausgehend von der Reynoldsen Differentialgleichung läßt sich die in die plastische Zone hydrodynamisch eingezogene Schmierfilmdicke mit folgender Gleichung abschätzen:

$$h_{s0} = \frac{3 \eta}{\alpha} \frac{v_W + v_F}{k_{f0} - \sigma_0} \quad (1)$$

Die Walzen- bzw. Foliengeschwindigkeit sind dabei mit  $v_W$  bzw.  $v_F$  bezeichnet,  $\eta$  bedeutet die dynamische Viskosität des Walzöls,  $\alpha$  ist der Schmierkeilöffnungswinkel, während  $k_{f0}$  die Anfangsfließspannung der Folie und  $\sigma_0$  den Bandrückzug bezeichnen.

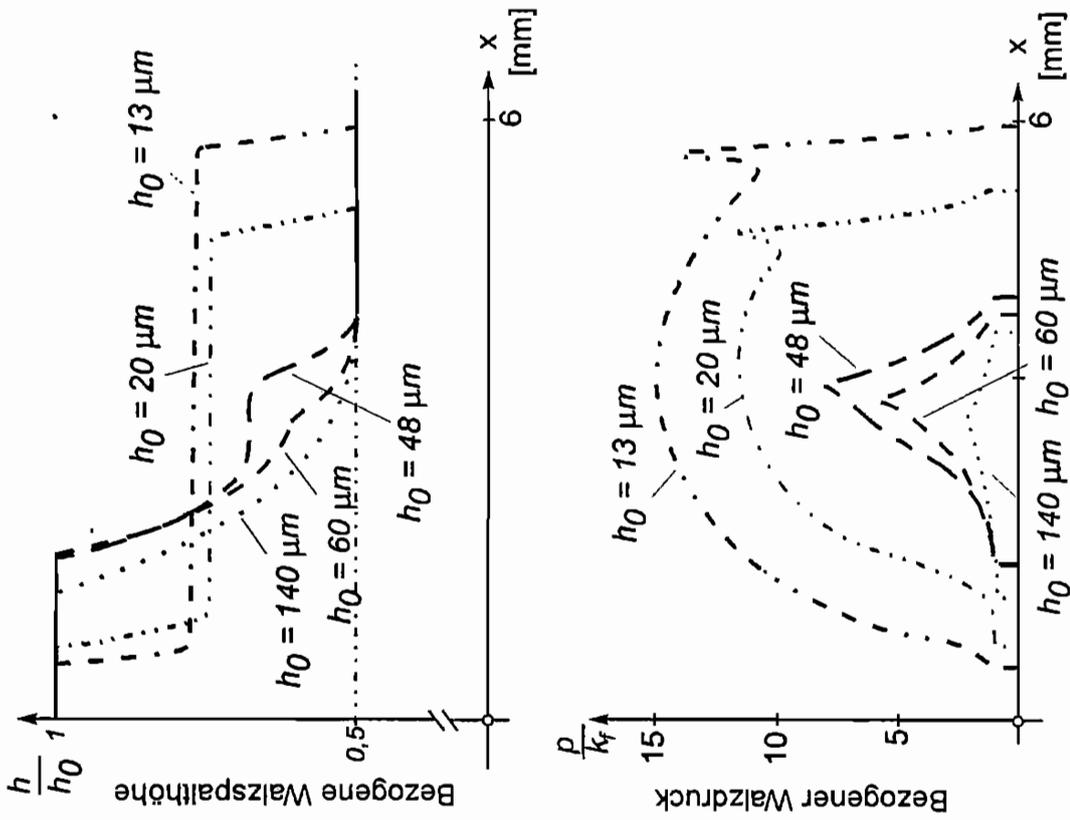
Die grundsätzliche Gültigkeit dieser einfachen Modellvorstellung für den hydrodynamischen Schmierstoffeinzug nach Gleichung (1) wurde von DRAESE [8] durch Walzversuche am Versuchswalzwerk des Max-Planck-Institutes nachgewiesen. Gewalzt wurden Aluminiumtafeln der Größe 300 x 100 mm mit einer Ausgangsdicke von 0,3 mm, auf welche jeweils die gleiche Menge Walzöl aufgebracht wurde. Durch eine hydraulische Kraftanstellung konnte die Walzkraft während des Versuchs konstant gehalten werden.

Bild 4 zeigt die Abhängigkeit der Höhenabnahme  $\Delta h$  von der Walzgeschwindigkeit. Während bei den trocken gewalzten Proben keine Geschwindigkeitsabhängigkeit von  $\Delta h$  festzustellen ist, nimmt diese Abhängigkeit mit zunehmender Viskosität  $\eta$  deutlich zu. Die bei gleicher Walzgeschwindigkeit aber unterschiedlichen Walzölen erhaltenen Oberflächen sind in Bild 5 dargestellt. Bei der trocken gewalzten Probe ist deutlich die durch den direkten metallischen Kontakt von der Walze auf die Probe übertragene Schleifstruktur erkennbar. Mit steigender Schmierstoffviskosität nimmt sowohl die Größe als auch die Anzahl von rundlichen Vertiefungen, den sogenannten hydrodynamischen Schmierstofftaschen, zu. Bedingt durch den hohen Druckanstieg des sich in diesen Taschen befindlichen Öls wird das darunterliegende Material unter einem Schmierstoffpolster frei, d. h. ohne direkten Werkzeugkontakt, umgeformt.

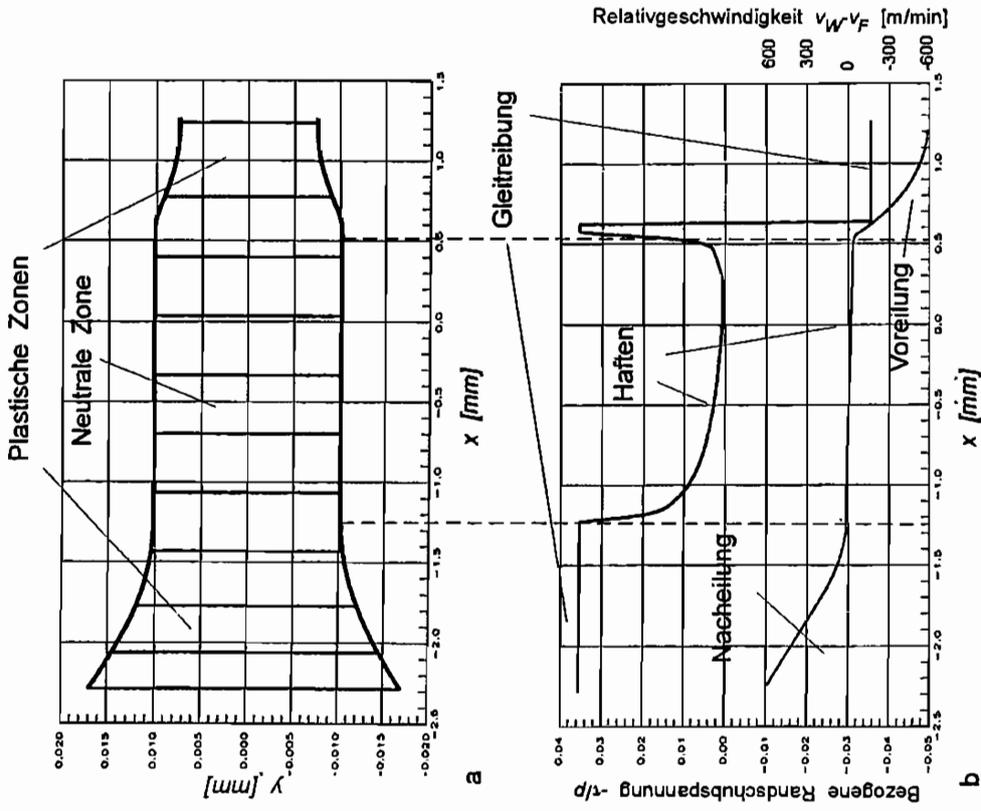
Sowohl anhand der mit der Walzgeschwindigkeit und der Viskosität zunehmenden Höhenabnahme als auch anhand der Oberflächenbilder wird ersichtlich, wie sich die Reibungsbedingungen im Walzspalt abhängig von der Stärke des hydrodynamischen Druckaufbaus in der Einlaufzone des Walzspalts verbessern, wodurch die prinzipielle Gültigkeit der Modellvorstellung nach Gleichung (1) bestätigt werden konnte.

## Literatur

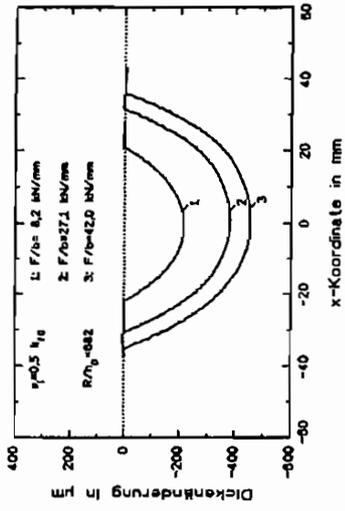
- [1] Siebel, E.: *Kräfte und Materialfluß bei der bildsamen Formänderung*. Stahl und Eisen, 45 (1925) 37, S. 1563-1566
- [2] von Kármán, Th.: *Beitrag zur Theorie des Walzvorganges*. Z. angew. Math. Mech., 5 (1925), S. 139-141
- [3] Bland, D.R. und Ford, H.: *The Calculation of Roll Force and Torque in Cold Strip Rolling with Tensions*. Proc. Inst. Mech. Eng., 159 (1948), S. 144-153
- [4] Fleck, N.A. und Johnson, K.L.: *Towards a New Theory of Cold Rolling Thin Foil*. Int. J. Mech. Sci., 29 (1987) 7, S. 507-524
- [5] Fleck, N.A., Johnson, K.L., Mear, M.E. und Zhang, L.C.: *Cold Rolling of Foil*. Proc. Inst. Mech. Eng., B206 (1992), S. 119-131
- [6] Hartung, H.G.: *Die Statik und Kinematik des Folienwalzens*. Dissertation. Aachen: RWTH, Fakultät für Bergbau, Hüttenwesen und Geowissenschaften, 1994
- [7] Kramer, A.: *Untersuchungen zum Kaltwalzen von dünnem Band und Folie nach dem Verfahren der Ähnlichkeitstheorie*. Dissertation. Aachen: RWTH, Fakultät für Bergbau, Hüttenwesen und Geowissenschaften, 1994
- [8] Draese, St.: *Hydrodynamischer Schmierstoffeinzug beim Kaltwalzen*. Dissertation. Aachen: RWTH, Fakultät für Bergbau, Hüttenwesen und Geowissenschaften, demnächst



**Bild 1** Walzspaltgeometrie und Druckverlauf für verschiedene Ausgangshöhen

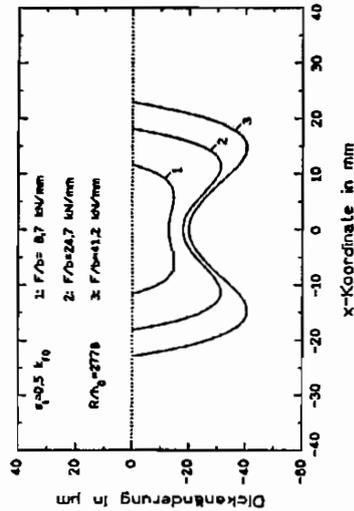


**Bild 2** Ergebnisse für Folienstich von  $34 \mu\text{m}$  auf  $15 \mu\text{m}$  (Material Al 99,5,  $k_f = 140 \text{ MPa}$ )  
 a) Walzspaltgeometrie  
 b) Randschubspannung und Relativgeschwindigkeit



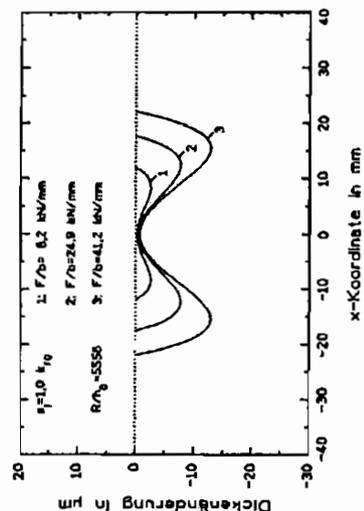
$$\frac{R}{h_0} = 682$$

$$(h_0 = 220 \mu\text{m})$$



$$\frac{R}{h_0} = 2778$$

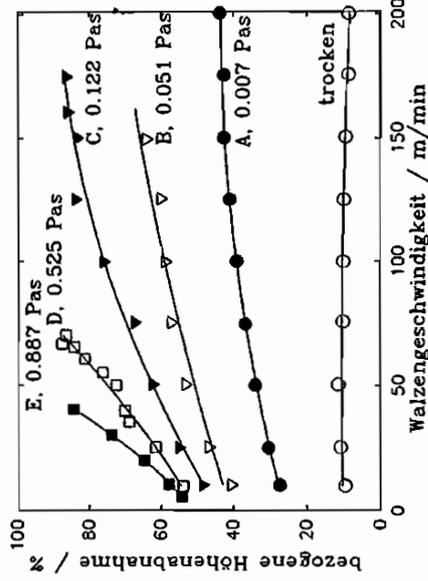
$$(h_0 = 54 \mu\text{m})$$



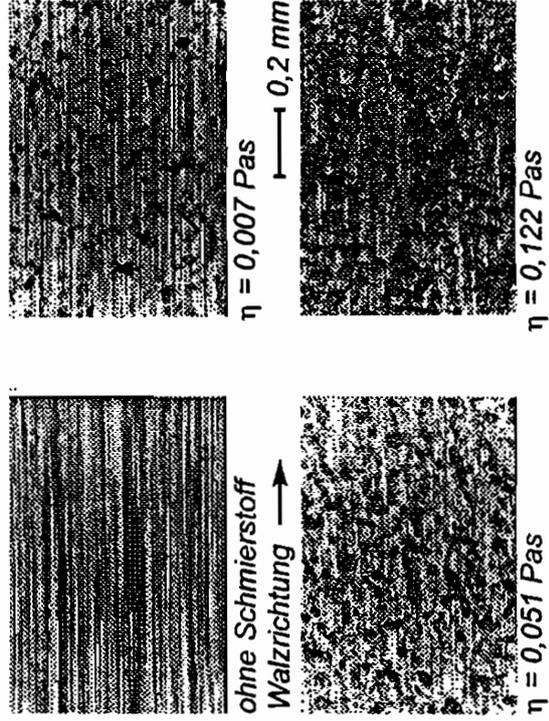
$$\frac{R}{h_0} = 5556$$

$$(h_0 = 27 \mu\text{m})$$

**Bild 3** Dickenänderung über der gedrückten Länge für verschiedene Verhältnisse aus Walzenradius  $R$  zu Ausgangsdicke  $h_0$



**Bild 4** Höhenabnahme über der Walzengeschwindigkeit für Walzöle mit unterschiedlichen Viskositäten ( $k_{\text{sp}} = 36 \text{ MPa}$ )



**Bild 5** Probenoberflächen bei konstanter Walzgeschwindigkeit und unterschiedlichen Viskositäten ( $v_w = 150 \text{ m/min}$ ,  $k_{\text{sp}} = 36 \text{ MPa}$ , Vergrößerung 100x)

# Bestimmung der Wirkflächenreibung in der Massivumformung durch Analyse der Werkzeugdeformation

E. Doege und Ch. Bederna <sup>a</sup>

<sup>a</sup>Institut für Umformtechnik und Umformmaschinen, Universität Hannover

Ein Hauptproblem der numerischen Simulation von Umformprozessen ist die zutreffende Beschreibung der Kontaktbedingungen, insbesondere der Reibung. Die hierfür notwendige Aufstellung und Implementierung problemangepaßter Reibgesetze ist ohne experimentelle Verifizierung wenig sinnvoll. Es wird für die Massivumformung ein neuer Modellversuch, basierend auf dem Zylinderstauchversuch, vorgestellt. Die gut meßbare elastische Deformation des Werkzeuges wird benutzt, um die momentanen lokalen Reibungsverhältnisse in der Wirkfuge zu bestimmen. In diesem Beitrag wird gezeigt, daß hiermit sowohl eine qualitative Beurteilung der Reibungsverhältnisse möglich ist als auch, durch numerische Analyse des gesamten Systems, unbekannte Faktoren eines Reibgesetzes quantifiziert werden können. <sup>1</sup>

## 1. Einleitung

Zur Entwicklung bzw. Verifizierung von Reibgesetzen ist man auf experimentell ermittelte Daten angewiesen, die den Zustand der Wirkfuge möglichst exakt und umfassend widerspiegeln. Während in der Vergangenheit Versuche mit globalen Meßgrößen, wie Umformkraft oder Probengeometrie, oftmals zur Beurteilung der Reibverhältnisse ausreichten, werden heute durch erheblich verfeinerte Berechnungs- bzw. Simulationsverfahren höhere Ansprüche an einen Reibversuch gestellt [2]. Dieser Versuch sollte die Eigenschaft haben, in dem für die Massivumformung relevanten Spannungs- und Temperaturbereich den Zustand der Wirkfuge lokal zu erfassen. Gerade die Forderung nach lokaler Auflösung ist notwendig, um die Unabhängigkeit der Ergebnisse vom verwendeten Versuch und somit die Übertragbarkeit auf andere Umformverfahren sicherzustellen.

Die durch diese Forderung festgelegten Randbedingungen führten zur Entwicklung eines indirekten Meßverfahrens zur Bestimmung der Wirkflächenreibung in der Massivumformung, welches auf der Auswertung der elastischen Deformationen der Werkzeuge beruht.

## 2. Reibungsmessung in der Massivumformung - Stand der Forschung

Der Spannungszustand in der Wirkfuge zwischen Werkzeug und Werkstück ist in der Massivumformung durch hohe Normalspannungen gekennzeichnet, die durch Überlagerung eines hydrostatischen Druckes weit über der Fließspannung des umzuförmenden Materials liegen können.

\*Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die Förderung des Vorhabens Do190/97.

Diese Spannungen, gepaart mit hohen Temperaturen, erschweren die direkte Messung der Kontaktspannungen mit einem Sensor. Um einen solchen Eingriff in die Wirkfuge zu umgehen, wurden parallel Verfahren zur indirekten Spannungsmessung entwickelt.

Zu den direkten Meßverfahren gehört die große Gruppe der Meßstiftverfahren in ihren Varianten als Normalspannungs-, Schräg- oder Universalmeßstift. Diese Meßmethode scheint ideal, da die Kontaktspannungen direkt am Ort ihrer Entstehung in hoher lokaler Auflösung aufgenommen werden können. Allerdings beeinflusst der direkte Eingriff in die Wirkfuge das tribologische System und damit natürlich auch die Meßgröße. Außerdem wird die Festigkeit des Werkzeuges negativ beeinflusst, so daß Meßstifte nur in unteren bis mittleren Spannungsbereichen einzusetzen sind. Trotz dieser Einschränkungen werden auch in jüngerer Zeit Neuentwicklungen mit Meßstiften vorgenommen und erfolgreich zur Spannungsmessung bei der Umformung von Leichtmetallen eingesetzt [6].

Als weitere direkte Meßmethoden sind piezokeramische Spannungssensoren [4] und druckempfindliche Filme [5] bekannt. Beide Verfahren können aufgrund ihrer großen Empfindlichkeit nur für Modellwerkstoffe eingesetzt werden.

Indirekte Meßverfahren verwenden eine abgeleitete Meßgröße wie Umformkraft oder Probengeometrie zur Bestimmung der Reibungsverhältnisse. Hierzu gehören der Schrägstauch- und Schubstauchversuch sowie Zieh-, Durchdrück- und Abstreckversuch. Auch der in der Massivumformung am häufigsten eingesetzte Ringstauchversuch [1] ist den indirekten Verfahren zuzuordnen. Hauptnachteil der bekannten indirekten Verfahren ist die mangelnde lokale Auflösung der Er-

gebnisse. Somit sind die Resultate stark verfahrensorientiert und nicht auf den allgemeinen Fall zu übertragen.

Dieser Nachteil soll mit der sog. visioplastischen Methode vermieden werden. Auf den Reibrand einer Probe wird hierbei ein Raster aufgebracht und dieses nach verschiedenen Umformwegen vermessen. Aus den gemessenen Verschiebungen werden Randbedingungen für eine numerische Simulation des Prozesses abgeleitet. Die gesuchten Spannungen werden aus den Ergebnissen der Simulation gewonnen [3].

### 3. Entwicklung eines elastischen Meßwerkzeuges

Der Normal- und Tangentialspannungszustand am Reibrand einer Probe sei als Funktion des Ortes und der Zeit unbekannt. Aufgrund der Gleichgewichtsbedingung in der Wirkfuge sind diesen Spannungen Reaktionsspannungen am Reibrand des Werkzeuges zugeordnet. Diesen Spannungen ist wiederum eindeutig eine linear-elastische Deformation des gesamten Werkzeuges zugeordnet. Wäre der Deformationszustand des Werkzeuges zu jedem Zeitpunkt vollständig bekannt, könnte hieraus die unbekannte Spannungsfunktion in der Wirkfuge eindeutig bestimmt werden. In der Realität kann die Werkzeugdeformation lediglich teilweise - in speziellen Richtungen - an einer endlichen Anzahl diskreter Punkte auf der Werkzeugoberfläche meßtechnisch erfaßt werden. Da somit eine explizite Berechnung der gesuchten Spannungen nicht möglich ist, müssen weitere Untersuchungen über den Informationsgehalt der Werkzeugdeformation und ihrer Meßbarkeit angestellt werden.

#### 3.1. Zusammenhang zwischen Reibung und Normalspannung

Da an das zu entwickelnde Meßwerkzeug der Anspruch der Geometrieunabhängigkeit gestellt wird, müssen die Ergebnisse vom gewählten Umformverfahren unabhängig sein. Somit kann als Umformversuch der einfache Zylinderstauchversuch eingesetzt werden. Die Betrachtung des Kräftegleichgewichtes an einer Zylinderstauchprobe (Röhrenmodell, Abb. 1) führt auf folgende Gleichung:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2}{r}\tau_{rz} = 0 \quad (1)$$

Das Einsetzen des Fließkriteriums nach TRESCA

$$\sigma_r - \sigma_z = k_f \quad (2)$$

für diesen speziellen Fall in Gleichung 1 führt zu dem Schluß, daß unter den Vereinfachungen

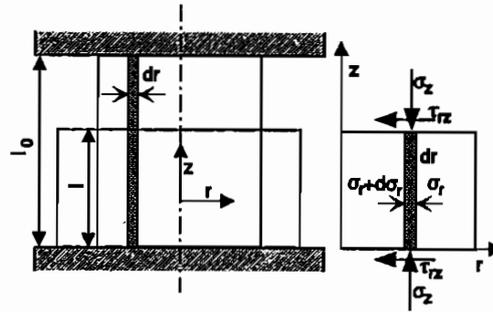


Abb. 1. Röhrenmodell einer Stauchprobe

der elementaren Theorie die erste Ableitung der Normalspannung nach dem Radius bei konstanter Probegeometrie und Fließspannung direkt proportional zur gesuchten Wirkflächenreibung ist.

Diese Betrachtungsweise vernachlässigt natürlich wesentliche Effekte, wie z. B. den wichtigen Einfluß der Ausbauchung auf die Kontaktspannungen. Allerdings ist auch die Ausbauchung der Probe eine Funktion der Reibung. Somit kann geschlossen werden, daß auch bei realen Proben die Normalspannungsfunktion eine Funktion der lokalen Reibung ist. Dieser Zusammenhang kann aufgrund seiner Komplexität zwar nicht explizit angegeben werden, ist aber durch eine FEM-Simulation relativ einfach nachzubilden.

Demnach ist der gesamte Spannungszustand unter einer Zylinderstauchprobe durch die Normalspannungsfunktion oder die Tangentialspannungsfunktion eindeutig charakterisiert. Die Messung beider Spannungen ist somit nicht zwingend notwendig.

#### 3.2. Zusammenhang zwischen Normalspannung und Werkzeugdeformation

Der Informationsgehalt der gemessenen Werkzeugdehnung sollte in bezug auf die Normalspannungsfunktion in der Wirkfuge maximal sein, um eine hohe lokale Auflösung zu gewährleisten. Eine weitere Randbedingung für die Konstruktion des Meßwerkzeuges ist die während der Umformung auftretende Maximallast. Ein hoher Informationsgehalt in bezug auf die Normalspannungsfunktion liegt dann vor, wenn eine lokale Änderung der Normalspannung zu einer signifikanten Änderung des Meßsignals führt. Hierbei ist besonders die lokale Auflösung wichtig. Umfangreiche numerische Optimierungen des Meßwerkzeuges führten zu einer prinzipiellen Struktur nach Abb. 2. Es handelt sich hierbei um das Ersatzmodell einer Stauchbahn, in die parallel zur Oberfläche eine Bohrung eingebracht wurde (Abb. 3). Das Material zwischen der Bohrung und der belasteten Werkzeugoberfläche wird im Ersatzmodell

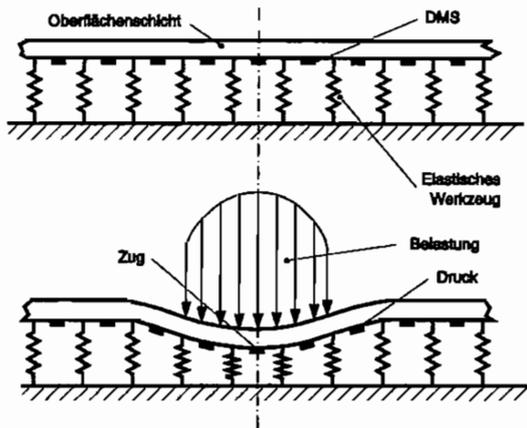


Abb. 2. Ersatzmodell des Messwerkzeuges

als elastischer Balken dargestellt. Das elastische Kontinuum des Werkzeuges, auf dem sich die Oberflächenschicht abstützt, ist im Ersatzmodell durch Feder-elemente dargestellt. Die Krümmung der Oberflächenschicht, und damit das Meßsignal, ist - unter der Annahme einer nicht vorhandenen Biegesteifigkeit des Balkens - proportional zur zweiten Ableitung der Belastungsfunktion nach dem Radius. Schließt man in dieses Modell die Annahmen der elementaren Theorie mit ein, ist das Signal eines Meßpunktes proportional zur Ableitung der Reibschubspannungsfunktion nach dem Radius an der Stelle des Meßpunktes. Die real vorhandene Biegesteifigkeit des Balkens und damit der Oberflächenschicht 'verwischt' natürlich diesen Zusammenhang, so daß eine hohe lokale Auflösung nur bei geringem Abstand der Meßpunkte von der Werkzeugoberfläche zu erwarten ist. Durch die Anforderungen an die Belastbarkeit des Werkzeuges (hier ca.  $900 \text{ N/mm}^2$ ) ist der Minimalabstand festgelegt. Umfangreiche numerische Untersuchungen, die experimentell verifiziert wurden, führten zu dem Ergebnis, daß mit diesem Meßaufbau eine hohe Werkzeugfestigkeit in Kombination mit einer hinreichend hohen lokalen Auflösung erreicht werden kann.

#### 4. Anwendungsbereiche

##### 4.1. Kalibrierung eines Reibgesetzes

Das oben beschriebene Meßwerkzeug ermöglicht es, in jedem Moment der Umformung 30 charakteristische Werkzeugdehnungen über den Radius aufzunehmen. Da kein eindeutiger Zusammenhang zwischen diesen Meßwerten und der Spannung in der Wirkfuge besteht, ist es nicht möglich, direkt die wirkenden Normal- bzw. Tan-

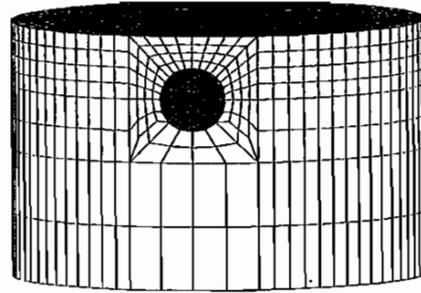


Abb. 3. FE-Modell des Messwerkzeuges (ABAQUS)

gentialspannungen zu berechnen. Allerdings kann man sich den Umstand zunutze machen, daß in einer Simulation des Versuches unter Verwendung eines korrekten Modells zu jedem Zeitpunkt der Umformung in Experiment und Simulation die gleiche Werkzeugdeformation herrschen muß. Die Anordnung der Meßstellen, wie oben beschrieben, stellt sicher, daß die aufgenommenen Meßsignale hinreichend stark mit der lokalen Wirkflächenreibung korrelieren.

Ein in der Simulation eingesetztes Reibgesetz enthält i. d. R. freie Parameter, die experimentell an die vorliegende Reibpaarung angepaßt werden müssen. Durch eine Variation der Parameter mit dem Ziel der Minimierung der Summe der Dehnungsdifferenzen (Fehlerquadrat) ist es möglich, das Reibgesetz zu kalibrieren (Abb. 4). Eine Beurteilung der Qualität des reibungsfreien FE-Modells ist durch die Analyse eines weitgehend reibungsfreien Versuches, wie dem Rastegaev-Stauchversuch, gegeben.

##### 4.2. Qualitative Beurteilung einer Reibpaarung

Nach der quantitativen Analyse des Reibverhaltens soll nun die qualitative Beurteilung einer Reibpaarung im Vordergrund stehen. Eine hochfeste Aluminium-Legierung (3.4365) wurde bei trockener Reibung kalt umgeformt. In Abb. 5 ist der Kraft-Weg-Verlauf dieses Versuches sowie die gemessene Dehnung einer Werkzeugmeßstelle dargestellt. Man erkennt deutlich periodische Erscheinungen im Meßsignal der Dehnung, die im Kraft-Weg-Verlauf nicht auftreten. Für die angegebene Reibpaarung wurde das Coulombsche Reibgesetz kalibriert, die berechnete Dehnung an der Meßstelle ist ebenfalls in Abb. 5 dargestellt. Hier sind keine Schwingungen zu erkennen.

Die Ursache der gemessenen Schwingungen im Meßsignal, die in weiteren Meßreihen sehr gut reproduziert werden konnten, ist aufgrund des glatten Kraft-Weg-Verlaufes nicht in der Umformma-

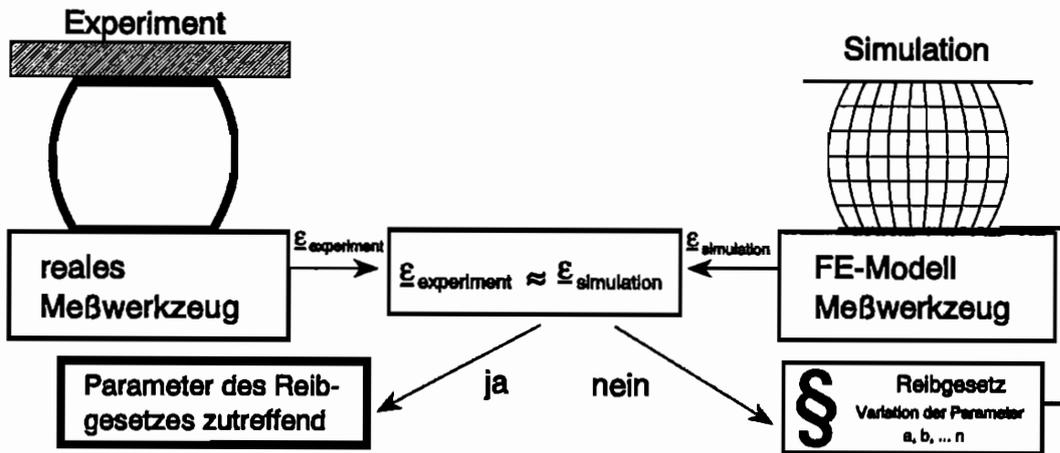


Abb. 4. Kalibrierung eines Reibgesetzes

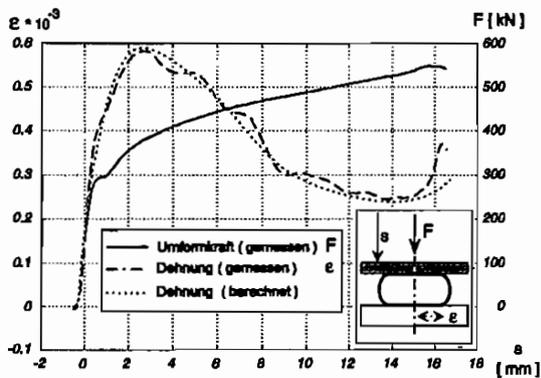


Abb. 5. Gemessene und berechnete Werkzeugdeformation

schine zu finden. Auch eine Eigenschwingung des Werkzeuges kommt nicht in Frage, da die kleinste Eigenfrequenz des Werkzeuges um mehr als Faktor 100 über der gemessenen Frequenz liegt.

Die gemessenen Schwingungen werden durch ein degressives Reibverhalten der eingesetzten Reibpaarung verursacht, d. h. die Reibung sinkt mit steigender Relativgeschwindigkeit. Dieses führt zu einem sog. Stick-Slip Effekt, der in der Umformtechnik bisher nur bei wesentlich geringeren Kontaktspannungen in der Blechumformung nachgewiesen wurde.

### 5. Zusammenfassung

Es wurde ein neues Meßwerkzeug vorgestellt welches es ermöglicht, das lokale Reibverhalten in der Massivumformung auch bei hohen Kontaktspannungen zu beurteilen. Durch die Simulation des Prozesses mit der Methode der Finiten Elemente können die unbekannt Parameter

eines Reibgesetzes bestimmt werden. Die Bedeutung dieses Meßverfahrens steht im Zusammenhang mit der Simulation von Präzisionsumformverfahren. Hier ist die möglichst exakte Modellierung des Wirkflächenverhaltens eine notwendige Bedingung zur Auslegung der Werkzeuge.

### REFERENCES

1. BURGDORF, M.: Über die Ermittlung des Reibwertes für Verfahren der Massivumformung durch den Ringstauchversuch. In: Ind. Anzeiger 89 (1967), S. 799-804.
2. DOEGE, E.; NAEGELE, H.; WERNER, N.: On the Finite-Element Simulation of the Entire Manufacturing Process at Precision Forging of Rotational Parts. COMPLAS III, Barcelona, 1992.
3. HERBERTZ, R.; KOPF, R.: Zur Verknüpfung der Finite-Elemente-Methode mit experimentell ermittelten Randbedingungen bei der Simulation von Umformprozessen. Stahl und Eisen 104, 8 (1984), S. 373-378.
4. KLAMECKI, B. E.; RAMALINGAM, S.; HANCHI, J.; LI, M.; ROBBINS, W. P.; FAYFIELD, T.; SCOTT, V.: Interface Load Sensing for Process Analysis and Control. Department of Mechanical Engineering and Productivity Center, University of Minnesota, 1990
5. MORI, K.; OSAKADA, K.; FUKUDA, M.: Measurement of Contact Pressure in Metal Forming by a Pressure Sensitive Film. J. Engr. Met. Tech. 106(1984), S. 127-131.
6. YONEYAMA, T.: Direct Measurement of Stress and Heat between Work and Tool in Metal Forming. In: Annals of the CIRP 39/1 (1990), S. 219-222.

# Thermischer Abbau mehrachsiger Eigenspannungszustände in viskoelastisch-plastischen Schrumpfverbänden

J. Liu, Lehrstuhl A für Mechanik, TU München

23. November 1994

Schrumpfverbindungen oder Querpreßverbindungen von Welle und Nabe werden sehr häufig in der Industrie angewendet. Um Kräfte und Momente übertragen zu können, muß der Verbindungsdruck, im folgenden Schrumpfdruck genannt, groß genug sein. Bei thermischer Belastung ändert sich der Anfangsspannungszustand im Schrumpfverband. Nach Rückkehr in den thermischen Ausgangszustand wird diese Änderung nicht verschwinden, wenn es vor der Belastung plastische Zonen gibt und/oder durch die thermische Belastung plastische Zonen erzeugt werden. Diese permanente Änderung des Spannungszustandes kann auch vorkommen, wenn die Temperatur der Schrumpfverbände während der thermischen Belastung so hoch ist, daß die Materialien ein visko-elastisches bzw. -plastisches Verhalten und/oder eine Phasenumwandlung zeigen. Diese Änderung der Eigenspannungszustände in Schrumpfverbänden bei thermischer Belastung wurde sowohl theoretisch als auch experimentell untersucht. Hier wird nur das Ergebnis der theoretischen Untersuchung zusammengefaßt dargestellt.

Bei der theoretischen Untersuchung wird ein linear viskoelastisch-plastisches Stoffmodell verwendet, das das bei den bisherigen Veröffentlichungen benutzte elasto-plastische Modell als Sonderfall beinhaltet. Dabei wird das allgemeine linear-viskoelastische Stoffverhalten in Operatorenschreibweise durch

$$\mathbf{P}''\sigma_k = \frac{1}{3}\mathbf{Q}''\epsilon_v \quad \mathbf{P}'\sigma'_{jk} = \mathbf{Q}'\epsilon'_{jk} \quad (1)$$

beschrieben, wobei in den Differentialoperatoren

$$\mathbf{P}^* = \sum_{i=0}^{m^*} p_i^* \frac{d^i}{dt^i} \quad \mathbf{Q}^* = \sum_{i=0}^{n^*} q_i^* \frac{d^i}{dt^i} \quad (2)$$

die Materialkonstanten  $p_i^*$ ,  $q_i^*$  an das experimentell beobachtete Kriech- bzw. Relaxationsverhalten anzupassen sind. Hier wird  $\mathbf{P}'' = 1$  und  $\mathbf{Q}'' = K$  angenommen.

Für einachsige Belastung:

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

gilt

$$\frac{2}{3}\mathbf{P}'\sigma_1 + \frac{1}{9}\mathbf{Q}'\left(\frac{\sigma_1}{K}\right) = \mathbf{Q}'\epsilon_1 \quad -\frac{1}{3}\mathbf{P}'\sigma_1 + \frac{1}{9}\mathbf{Q}'\left(\frac{\sigma_1}{K}\right) = \mathbf{Q}'\epsilon_2. \quad (3)$$

Für den Zugversuch bei konstanter Temperatur gilt

$$2\mathbf{P}'\sigma_1 + \frac{1}{3K}\mathbf{Q}'\sigma_1 = 3\mathbf{Q}'\epsilon_1. \quad (4)$$

Die Wahl der Operatoren ist von dem Kriech- bzw. Relaxationsverhalten des einzelnen Materials abhängig. Für AlMg3, aus dem das Innenteil unseres Schrumpfverbandes hergestellt ist, wird

$$\mathbf{P}' = 1 + p_1 \frac{d}{dt}, \quad \mathbf{Q}' = q_1 \frac{d}{dt} + q_2 \frac{d^2}{dt^2} \quad (5)$$

gewählt. Nach Umformung der Gl. 4 mit Gl. 5 bekommen wir dann

$$\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} = b_1\dot{\epsilon} + b_2\ddot{\epsilon} \quad (6)$$

mit

$$a_1 = p_1 + \frac{q_1}{6K} \quad a_2 = \frac{q_2}{6K} \quad b_1 = \frac{3q_1}{2} \quad b_2 = \frac{3q_2}{2}$$

Durch die Anpassung der Kriechfunktion dieses Modells

$$J(t) = \frac{t}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}e^{-\lambda t} + \frac{a_1 b_1 - b_2}{b_1^2}(1 - e^{-\lambda t}) \quad (7)$$

an die gemessene Kriechkurve werden die unbekanntenen Werkstoffparameter bestimmt. Jeder Parameter ist eine Funktion der Temperatur.

Bei axialsymmetrischen Schrumpfverbänden aus dünnen Scheiben wird ein ebener Spannungszustand angenommen. Es existieren nur die Spannungen  $\sigma_r$  und  $\sigma_\psi$ . Aus den Gleichungen

$$\frac{2}{3}\mathbf{P}'\sigma_\psi + \frac{1}{9}\mathbf{Q}'\left(\frac{\sigma_\psi}{K}\right) = \mathbf{Q}'\epsilon_\psi^\psi \quad (8)$$

$$-\frac{1}{3}\mathbf{P}'\sigma_r + \frac{1}{9}\mathbf{Q}'\left(\frac{\sigma_r}{K}\right) = \mathbf{Q}'\epsilon_\psi^r \quad (9)$$

folgt

$$\mathbf{Q}'\left(\frac{U}{r}\right) = \frac{1}{3}\mathbf{P}'(2\sigma_\psi - \sigma_r) + \frac{1}{9}\mathbf{Q}'\left(\frac{\sigma_r + \sigma_\psi}{K}\right). \quad (10)$$

$U$  ist die Verschiebung in  $r$ -Richtung. Nach Einsetzen der für das Innenteil eines linear viskoelastischen Schrumpfverbandes gültigen Ausdrücke für  $\sigma_r$  und  $\sigma_\psi$

$$\sigma_r = -\frac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)P; \quad \sigma_\psi = -\frac{b^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)P \quad (11)$$

in die Gleichung 10 ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Verschiebung  $U$  und dem Schrumpfdruck  $P$

$$\mathbf{Q}'\left(-\frac{U}{r}\right) = \frac{b^2}{b^2 - a^2}\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{a^2}{r^2}\right)\mathbf{P}'P + \frac{2}{9}\mathbf{Q}'\left(\frac{P}{K}\right)\right] \quad (12)$$

$a$ ,  $b$  und  $c$  sind die drei Radien eines Schrumpfverbandes. (s. Abb. 1)

Bei  $r = b$  gilt

$$\mathbf{Q}'\left(-\frac{U_b^{innen}}{b}\right) = \frac{b^2}{b^2 - a^2}\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{a^2}{b^2}\right)\mathbf{P}'P + \frac{2}{9}\mathbf{Q}'\left(\frac{P}{K}\right)\right] \quad (13)$$

$U_b^{innen}$  ist die Verschiebung des Innenteiles am Radius  $r = b$ . Für ein thermoviskoelastischem Außenteil gilt eine analoge Beziehung:

$$\mathbf{Q}'\left(\frac{U}{r}\right) = \frac{b^2}{c^2 - b^2}\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{c^2}{r^2}\right)\mathbf{P}'P + \frac{2}{9}\mathbf{Q}'\left(\frac{P}{K}\right)\right]. \quad (14)$$

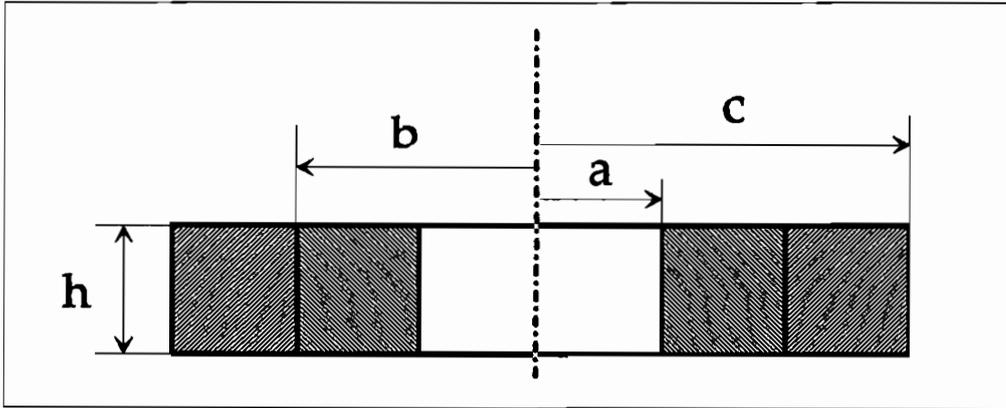


Abbildung 1: Schrumpfverband

In einem Außenteil aus thermoelastischem Material, wie Stahl bei Temperatur bis  $250^{\circ}C$ , sind

$$P' = 1 \quad Q' = 2G.$$

Die Verschiebung ist

$$U^{\text{außen}} = \frac{b^2}{E_a(c^2 - b^2)} \left[ (1 - \nu_a)r + \frac{1 + \nu_a}{r} c^2 \right] P, \quad (15)$$

wo  $E_a$  und  $\nu_a$  der Elastizitätsmodul bzw. die Querszahl des Außenmaterials sind. Speziell am Radius  $r = b$  gilt

$$U_b^{\text{außen}} = \frac{b^2}{E_a(c^2 - b^2)} \left[ (1 - \nu_a)b + \frac{1 + \nu_a}{b} c^2 \right] P = bK_a P \quad (16)$$

Multiplikation beider Seiten von (16) mit dem Operator  $Q'$  des Innenteilmaterials ergibt

$$Q' \left( \frac{U_b^{\text{außen}}}{b} \right) = Q'(K_a P). \quad (17)$$

Addiert man dies mit Gl. 13 und setzt das Übermaß

$$\delta(t) = U_b^{\text{außen}} + (-U_b^{\text{innen}}) = \delta_0 + (\alpha_i - \alpha_a)b(T(t) - T_0) \quad (18)$$

ein, erhält man die wichtige Beziehung zwischen dem Schrumpfdruck  $P$  und der thermischen Beanspruchung  $T = T(t)$  für einen dünnen Schrumpfverband aus thermoviskoelastischem Innenteil und thermoelastisch Außenteil

$$Q'(K_{sv}P) + K_{i1}P'P = \frac{1}{b}Q'\delta = Q' \left[ \frac{\delta_0}{b} + (\alpha_i - \alpha_a)(T(t) - T_0) \right], \quad (19)$$

wobei der Einfluß der thermischen Beanspruchung auf den Schrumpfverband durch das Übermaß  $\delta(t)$  erfaßt wird, gleichgültig ob plastisches, viskoelastisches oder elastisches Stoffverhalten gegeben ist.  $\delta_0$  ist das Anfangsübermaß bei Bezugstemperatur  $T_0$ ,  $\alpha_i$  bzw.  $\alpha_a$  sind die Wärmeausdehnungszahlen des Innen- bzw. Außenteiles. Die Integration dieser Differentialgleichung über den gesamten Belastungsweg  $T(t)$  vom Anfang bis zum aktuellen Zeitpunkt ergibt den Schrumpfdruck  $P(t)$ . Durch das Kriechen bzw. die Relaxation besteht die Tendenz, daß der Schrumpfdruck abnimmt; nur bei hinreichend rascher Erwärmung nimmt

er zu, so daß möglicherweise die Fließgrenze erreicht wird. Bei dem Sonderfall, daß die Plastifizierung zuerst im Innenteil am Innenrand  $r = a$  beginnt, wie bei unserem Versuch, und mit der Gültigkeit der TRESCAschen Fließbedingung gilt am Rande  $r = a$

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_z - \sigma_\psi = \frac{2b^2}{b^2 - a^2} P(t) = Y(T) \quad (20)$$

oder

$$F(t) = \frac{2b^2}{b^2 - a^2} P(t) - Y(T(t)) = 0. \quad (21)$$

Die Bedingung  $F(t) = 0$  und die Gleichung

$$\frac{dF}{dt} = \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \frac{dP}{dt} - \frac{dY}{dT} \frac{dT}{dt} > 0 \quad (22)$$

sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die Entstehung einer plastischen Zone im Innenteil. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, wird eine plastische Zone mit plastischem Radius  $\xi$  im Innenteil erzeugt. In diesem Fall entscheidet die Bedingung  $d\xi/dt$ , wie der Schrumpfdruck berechnet werden kann. Mit  $d\xi/dt = 0$  wird eine Aufheizgeschwindigkeit  $d\bar{T}/dt$  bestimmt. Wenn  $dT/dt > d\bar{T}/dt$  gilt,  $\xi$  bzw.  $P$  werden mit Gleichungen

$$\mathbf{Q}'(K_a P) + \frac{1}{3} \mathbf{P}' \left[ \left( 1 - \frac{a}{2\xi} + \frac{3a\xi}{2b^2} \right) Y \right] + \frac{1}{9} \mathbf{Q}' \left[ \left( 2 - \frac{a}{\xi} \right) \frac{Y}{K} \right] = \mathbf{Q}' \left( \frac{\delta}{b} \right) \quad (23)$$

$$P = \left[ 1 - \frac{a}{2\xi} \left( 1 + \frac{\xi^2}{b^2} \right) \right] Y \quad (24)$$

bestimmt. Die Gl. 24 gilt auch bei  $dT/dt = d\bar{T}/dt$ . Wenn  $dT/dt < d\bar{T}/dt$  gilt,

$$P = \left[ 1 - \frac{a}{2\xi} \left( 1 + \frac{\xi^2}{b^2} \right) \right] Y + P_2 \quad (25)$$

mit  $P_2$  aus

$$\mathbf{Q}'(K_{sv} P_2) + K_{i1} \mathbf{P}' P_2 + \mathbf{Q}' \left( K_a P + \left( 2 - \frac{a}{\xi} \right) \frac{Y}{9K} \right) + \frac{1}{3} \mathbf{P}' \left[ \left( 1 - \frac{a}{2\xi} + \frac{3a\xi}{2b^2} \right) Y \right] = \mathbf{Q}' \left( \frac{\delta}{b} \right) \quad (26)$$

Mit dieser Theorie läßt sich der Schrumpfdruck numerisch berechnen.

## Literatur

- [1] H. Lippmann: *The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit*, International Journal of Plasticity, Vol. 8, pp. 567-582, 1992
- [2] W. Flügge: *Viscoelasticity*, Springer-Verlag, 1975
- [3] P. Perzyna: *Fundamental Problems in Viscoplasticity*, Advances in Applied Mechanics, Vol. 9, pp. 243-377 (1966)

BORMANN, P., NAUMANN, J., STOCKMANN, M.

## Biegeversuche zur Ermittlung einachsiger Fließkurven für Zug und Druck

### 1. Einführung

Biegeversuche können in der Untersuchung gewalzter Bleche eine günstige Alternative zu reinen Zug - und Stauchversuchen darstellen. Es besteht dabei die Möglichkeit, aus einem einzigen Experiment separate Fließkurven für Zug und Druck zu erhalten. Insbesondere ist es von Vorteil, daß die in der Blechuntersuchung schwierig zu realisierenden Stauchversuche entfallen können.

Die erste Veröffentlichung zum Verfahren der Fließkurvendarstellung mit Hilfe des Biegeversuchs erfolgte bereits 1910 von H.HERBERT/1/. Spätere Arbeiten existieren von NADAI/2/, LAWS/3/ und MAYVILLE/FINNIE/4/.

### 2. Reine Biegung eines glatten Balkens mit Rechteckquerschnitt

Es werden folgende Voraussetzungen getroffen :

Für kleine Dehnungen bis 5% soll die elementare Balkentheorie gelten.

Die entstehende Trapezgestalt des Querschnitts wird nicht berücksichtigt.

Das Werkstoffverhalten soll skleronom sein.

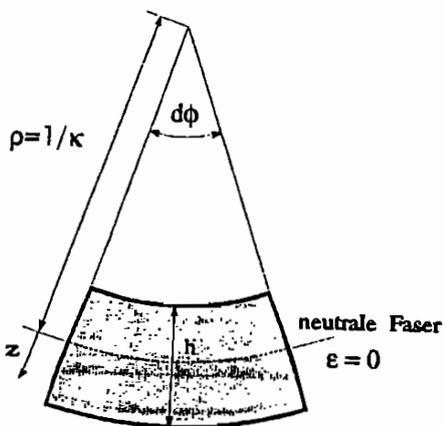


Bild 1. Balkenelement

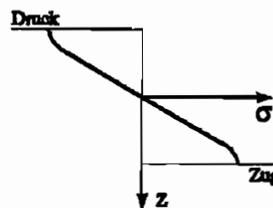
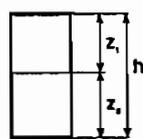


Bild 2. Querschnitt, Spannungsverlauf

$$\epsilon = \frac{z}{\rho} = z\kappa$$

$$\kappa = \frac{\epsilon_D + \epsilon_Z}{h} \quad (1)$$

Über dem Balkenquerschnitt bildet sich für eine bestimmte Laststufe, charakterisiert durch die Krümmung  $\kappa$ , primär ein Spannungsverlauf aus, der gleichzeitig eine modellhafte Abbildung der Fließkurve in Abhängigkeit der Koordinate  $z$  ist.

Die Äquivalenzbedingungen für Moment und Längskraft

$$\int_{-z_1}^{z_2} \sigma dz = 0 \quad \int_{-z_1}^{z_2} \sigma z dz = M \quad (2)$$

werden mit Hilfe der Krümmung  $\kappa$  ausgedrückt

$$\int_{-\varepsilon_D}^{\varepsilon_Z} \sigma(\varepsilon, \kappa) d\varepsilon = 0 \quad \int_{-\varepsilon_D}^{\varepsilon_Z} \sigma(\varepsilon, \kappa) \varepsilon d\varepsilon = \frac{M\kappa^2}{b} \quad (3)$$

Der bei der Differentiation von Gleichung (3) nach  $\kappa$  entstehende Term

$$\int_{-\varepsilon_D}^{\varepsilon_Z} \frac{\partial \sigma(\varepsilon) d\varepsilon}{\partial \kappa}$$

verschwindet, da es sich hier gerade, wie oben beschrieben, um den Funktionsverlauf der Spannung in Abhängigkeit von  $z$  für eine bestimmte Laststufe handelt.

Die erhaltenen Gleichungen

$$0 = \sigma_Z(\kappa) \frac{d\varepsilon_Z(\kappa)}{d\kappa} - \sigma_D(\kappa) \frac{d\varepsilon_D(\kappa)}{d\kappa} \quad (4)$$

$$\frac{2M(\kappa)}{b} \kappa + \frac{\kappa^2 dM(\kappa)}{b d\kappa} = \sigma_Z(\kappa) \varepsilon_Z(\kappa) \frac{d\varepsilon_Z(\kappa)}{d\kappa} + \sigma_D(\kappa) \varepsilon_D(\kappa) \frac{d\varepsilon_D(\kappa)}{d\kappa} \quad (5)$$

führen zur Auswerteformel (6) mit den Meßwerten  $M \dots$  Moment,  $\varepsilon_D, \varepsilon_Z \dots$  Randdehnungen.

$$\sigma_{Z,D}(\kappa) = \frac{1}{bh} \left[ 2M(\kappa) \frac{d\kappa}{d\varepsilon_{Z,D}(\kappa)} + \kappa \frac{dM(\kappa)}{d\varepsilon_{Z,D}(\kappa)} \right] \quad (6)$$

### 3. Messen mit DMS, Referenzmessungen mit Moiré

Zur Realisierung des Lastfalls "Reine Biegung" wurde eine Belastungsvorrichtung konstruiert, in der die zu untersuchende Probe beidseitig auf Rollen verschiebbar gelagert ist. Damit soll ein Längskrafteintrag in die Probe vermieden werden. Für eine homogene Einleitung des Moments sind die Schneiden der Krafteinleitungsbrücke ebenfalls in Längsrichtung verschiebbar auf Rollen gelagert.

Für die experimentellen Arbeiten wurden 130mm lange Proben mit Achsen parallel zur Walzrichtung des Blechs gefertigt. Die Querschnittsabmessungen betragen 12mm x 4mm. Als Probenmaterial wurde X6CrNiTi 18.10 verwendet.

In den Randfasern auf Zug- und Druckseite wurde die Dehnung mit DMS erfaßt.

Für die beabsichtigte Beanspruchung der Proben bis zu einer Dehnung von 5% ist die Zuverlässigkeit der angewandten Meßmethode überprüft worden. Zum Linearitätsverhalten von DMS aufgrund seiner Werkstoffeigenschaften bei höheren Dehnungen wurden Referenzmessungen mit Hilfe des Isothetenverfahrens durchgeführt./5/ (Bild 3)

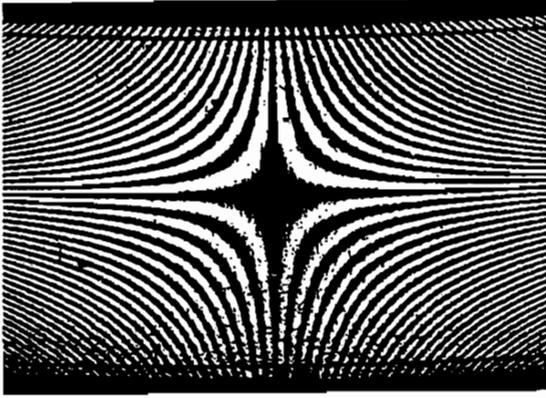


Bild 3. Isotheten für die Längsdehnung  
(Gitterteilung  $p = 20\mu m$ )

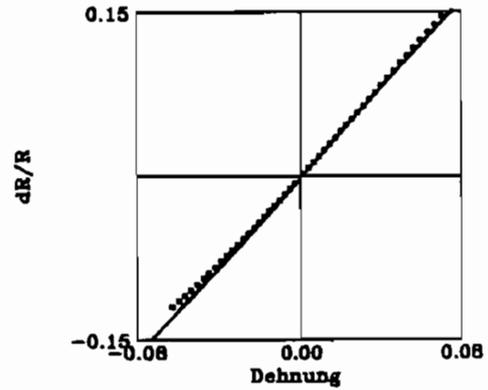


Bild 4. Widerstandsänderung des DMS  
in Abhängigkeit der Dehnung

Die Abweichung der Widerstandsänderung  $\Delta R/R$  des DMS von den mit Hilfe des Moiréverfahrens ermittelten Dehnungen beträgt bei  $\epsilon = 5\%$  etwa 3% (Bild 4) und ist in der weiteren Auswertung zu berücksichtigen. Die Biegelinie blieb bis zur maximalen Belastung kreisförmig, was als Bestätigung der Annahme einer homogenen Lasteinleitung gesehen wird.

#### 4. Ergebnisse

Die Meßwertkurven zu den Biegeversuchen sind in Bild 5 dargestellt. Dabei zeigt sich, daß beim warmgewalzten Blech X6CrNiTi 18.10 in Walzrichtung keine stark ausgeprägten Unterschiede zwischen Zug - und Druckverhalten auftreten.

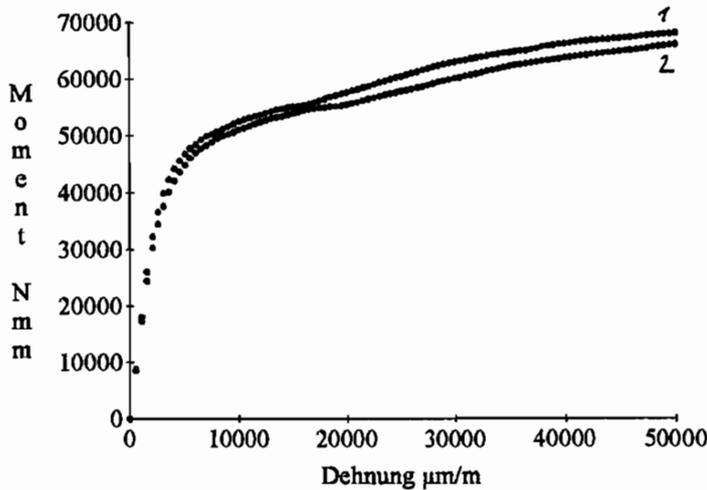


Bild 5. Meßwertkurven für X6CrNiTi 18.10      Druck (1), Zug (2)

Nach einer Glättung der Meßwertkurven und anschließender Differentiation können die Fließkurven dargestellt werden (Bild 6). Die auftretende Rauigkeit ist dabei der Anwendung von Differentiationsverfahren auf Meßwertkurven geschuldet.

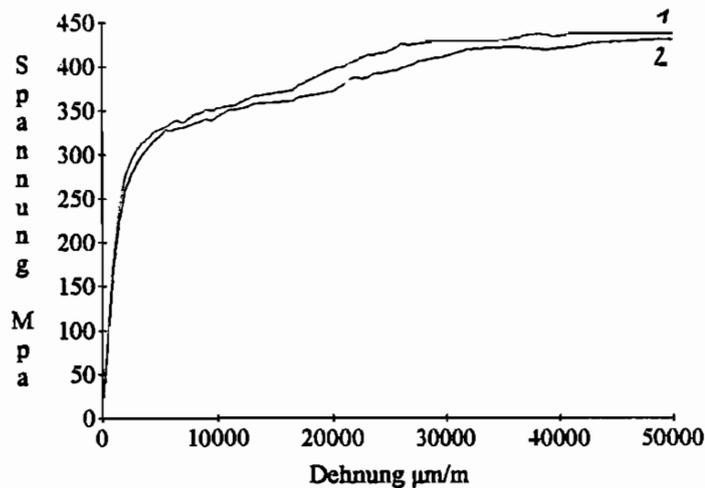


Bild 6. Fließkurven für X6CrNiTi 18.10 Druck (1), Zug (2)

Eine Qualitätsverbesserung und die Vergleichbarkeit mit anderen Fließkurven wird in nächster Zeit von der Versuchsdurchführung mit konstanter Dehnungsgeschwindigkeit erwartet.

#### 5. Literatur

- 1 HERBERT, H.: Über den Zusammenhang der Biegeelastizität des Gußeisens mit seiner Zug- und Druckelastizität. Mitt. und Forschungsarbeit VDI 89 (1910), 39 - 81.
- 2 NADAI, A.: Plasticity. New York, London : McGraw-Hill (1931).
- 3 LAWS, V.: Derivation of the tensile stress-strain curve from bending data. J. Materials Sci. 16 (1981), 1299 - 1304.
- 4 MAYVILLE, R.A.; FINNIE, I.: Uniaxial stress-strain curves from a bending test. Exp. Mech. 22 (1982)6, 197 - 201.
- 5 STOCKMANN, M.; NAUMANN, J.; BORMANN, P.; PELZ, F.: Zur Widerstandsänderung von elektrischen Dehnungsmeßstreifen im elastischen und plastischen Bereich. In Vorbereitung

## Isostatische und axiale Verdichtung von granularen Materialien

O. Beer, Lehrstuhl A für Mechanik, Technische Universität München

Das Verdichten von Metallpulvern ist ein wesentlicher Schritt bei der Herstellung pulvermetallurgischer Formteile. Die technisch wichtigsten Verdichtungsverfahren sind das axiale und das isostatische Pressen. Beim axialen Pressen wird das Metallpulver in einer starren Form zwischen einem Ober- und einem Unterstempel verdichtet, während beim isostatischen Pressen die Verdichtung des in einer flexiblen Hülle geformten Pulvers durch allseitige Druckeinwirkung erfolgt. Die Herstellung von Pulverpresslingen hoher Dichte und Homogenität erfordert eine genaue Kenntnis des Verdichtungsverhaltens von Metallpulvern. In der vorliegenden Arbeit werden Verfahren zur Untersuchung des Preßverhaltens von Metallpulvern beschrieben und mit diesen Verfahren erzielte Ergebnisse vorgestellt.

Zur Untersuchung der isostatischen Verdichtung granularer Materialien wird das zu untersuchende Pulver meist in einer dünnwandigen zylindrischen Hülle aus weichem Material (Kupfer, Gummi) durch allseitigen, von einer Flüssigkeit aufgebrachten Druck komprimiert ("wet-bag" Verfahren, [1]). Die Steifigkeit der Hülle führt jedoch zu einem Preßling, der annähernd die Gestalt eines Hyperboloides hat: größeren Durchmesser an den Stirnseiten und kleineren Durchmesser in der Mitte, d.h. die Gestalt des Preßlings ändert sich während der Verdichtung. Um diese Erscheinung zu vermeiden, wird hier eine von einer dünnen Gummimembran zur Kugelgestalt geformten Probe gewählt. Wegen der großen Nachgiebigkeit der Gummihülle und der Kugelsymmetrie behält der Preßkörper während der Verdichtung seine Gestalt. Bild 1 zeigt die Herstellung der Pulverprobe.

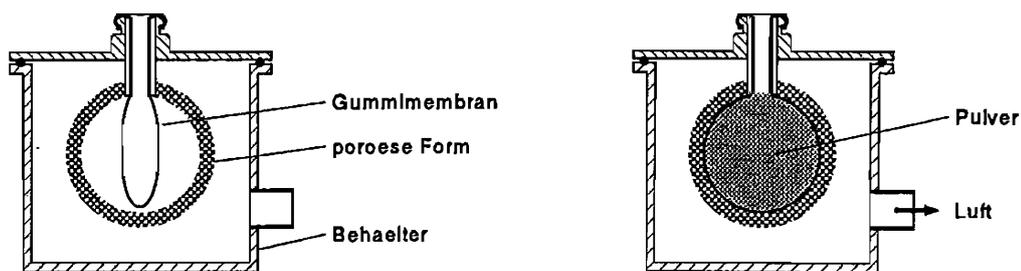


Bild 1: Herstellung der Pulverprobe

Ein dünnwandiger Gummibeutel (Dicke 0.05mm) mit einer kleinen schlauchförmigen Öffnung wird in eine zweiteilige poröse Hohlkugelform ( $\varnothing$  40mm) gehängt. Die poröse Form wird in einem geschlossenen Behälter befestigt. Durch Absaugen der Luft aus dem Behälter entsteht - wegen der offenen Porosität der Form - ein Unterdruck im Raum zwischen Gummi-

membran und Form. Dadurch strömt Umgebungsluft durch die Öffnung in den Gummibeutel und preßt diesen gegen die kugelige Forminnenwand. In diesem Zustand kann der Beutel mit Pulver gefüllt werden. Die Gummimembran wird nun - nachdem die Umgebungsluft in den Behälter zurückgeströmt ist - aus der Form entnommen und die Beutelöffnung mit Klebstoff verschlossen. Zur Durchführung des Verdichtungsversuches wird die Pulverprobe in einem Druckbehälter mit kontinuierlich steigendem Öldruck (bis 250 MPa) beaufschlagt. Gemessen werden die Volumenabnahme als Mittelwert über die Probe und der Öldruck. Bild 2 zeigt die relative Dichte D (Verhältnis der Dichte des Preßkörpers zur Dichte des Pulvermaterials) in Abhängigkeit des isostatischen Druckes p für verschiedene Metallpulver. Bild 3 zeigt einen Vergleich zwischen gemessenem und nach Stoffgesetzen aus der Literatur [2] berechnetem Verdichtungsverhalten von Eisen- und Kupferpulvern.

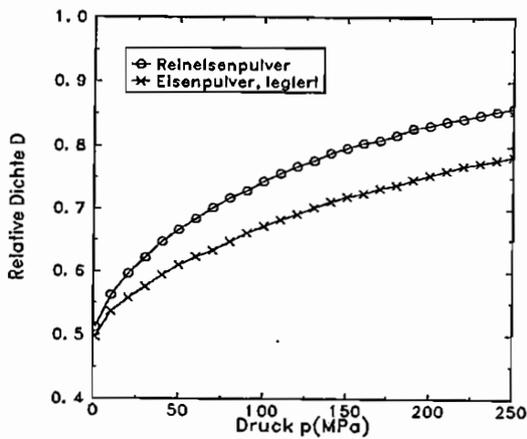


Bild 2a: Isostatische Verdichtung von Eisenpulvern (Reineisenpulver und legiertes Eisenpulver)

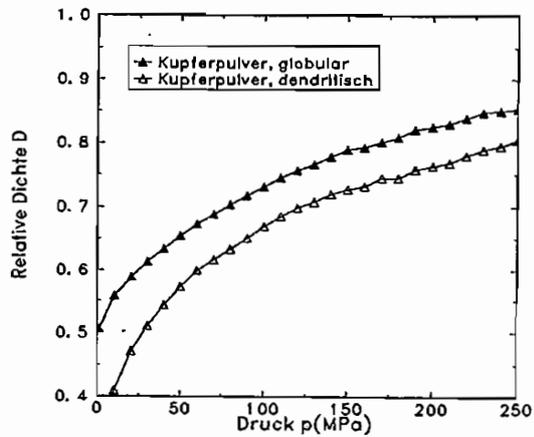


Bild 2b: Isostatische Verdichtung von Kupferpulvern (Gibbulare und dendritische Korngestalt)

$$\text{GURSON: } D = 1 - \frac{\sqrt{4,5(p/Y_0)^2 - 3} - 1}{2,25(p/Y_0)^2 - 2}$$

$$\text{DORAIVELU: } D = \sqrt{1 - \frac{1}{2 + 3(p/Y_0)^2}}$$

$Y_0$ : Fließgrenze des Kornmaterials (hier: 100 MPa)

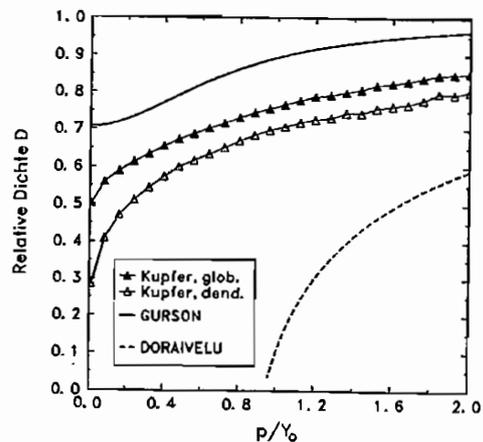


Bild 3: Gemessene und berechnete Verdichtbarkeit von Kupferpulvern

Die axialen Verdichtungsversuche erfolgen in einem zylindrischen Stahlgesenk (Innen- $\phi$  40 mm) bei ruhendem Unterstempel (einseitiges Pressen). Gemessen wird der Weg des Oberstempels in Abhängigkeit der auf ihn wirkenden Kraft. Zur Verringerung der während des Verdichtungsvorganges an der Gesenkwand wirkenden Reibkräfte wird dem Pulver meist etwa 1Gew.% eines Gleitmittels (z.B. Zinkstearat) zugemischt oder die Gesenkwand geschmiert. Im Gegensatz zum isostatischen Verdichten wird beim axialen Verdichten der äußere Druck nur auf den Oberstempel aufgebracht, man erreicht daher - bei gleichen Drücken - nur eine geringere relative Dichte als im Falle des isostatischen Pressens. Bild 4 zeigt das Prinzip des axialen Verdichtens sowie die mit beiden Verdichtungsverfahren erreichbare relative Dichte am Beispiel von Eisenpulver.

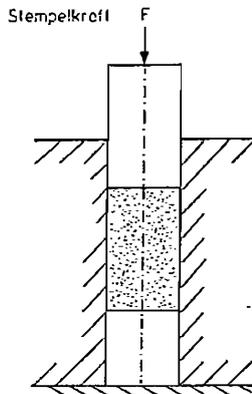


Bild 4a: Prinzip des axialen Verdichtens

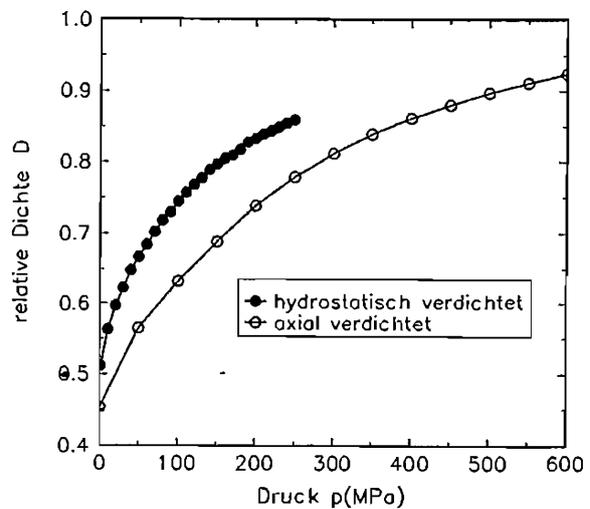
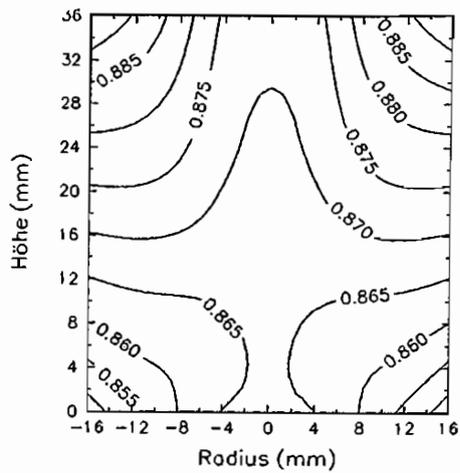
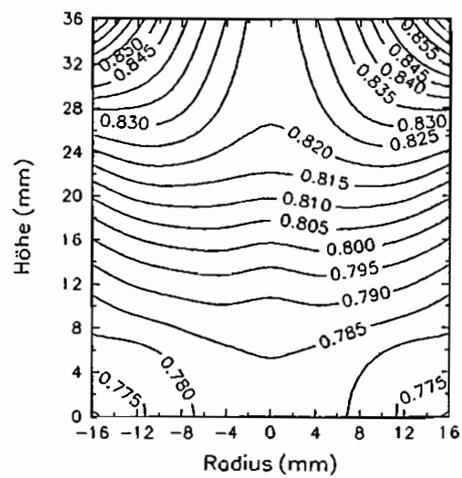


Bild 4b: Axiale und isostatische Verdichtbarkeit von Reineisenpulver

Mit den bisher vorgestellten Methoden konnte die relative Dichte als Mittelwert über die gesamte Pulverprobe bestimmt werden. Gerade im Falle des axialen Pressens interessieren aber auch die durch Reibung verursachten Dichteunterschiede im Preßkörper. Dichtemessungen mit Gammastrahlen [3] ermöglichen Aussagen über die Dichteunterschiede im Preßkörper. Das Meßprinzip beruht auf der Absorption von Gamma-Strahlen in Materie. Bei bekannter Probendicke kann durch Bestimmung der Strahlabschwächung die Dichte am durchstrahlten Materialbereich bestimmt werden. Während bei den isostatisch gepreßten Pulverkörpern der Dichteunterschied innerhalb der Proben kleiner als ein Prozent ist, weisen die axial verdichteten Pulverkörper deutliche Dichteunterschiede auf. Bild 5 zeigt an Eisenpulverpreßlingen gemessene Dichteunterschiede. Im Falle der zylindrischen Proben wurde die Dichte an 90 Stellen einer 4mm dicken Scheibe aus der Probenmitte gemessen.



**Bild 5a:** Dichteverteilung in einem Eisenpulverpreßling  
Gesenkwand geschmiert  
Oberstempeldruck 440 MPa



**Bild 5b:** Dichteverteilung in einem Eisenpulverpreßling  
keine Schmierung  
Oberstempeldruck 440 MPa

#### Literaturhinweise

- [1] Koizumi M., Nishihara M., Isostatic Pressing, Technology and Applications Elsevier Applied Science, London, New York (1992)
- [2] Doraivelu S.M., Thomas J.F., A New Function For Compressible P/M Materials International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 26, pp.527-535, 1984
- [3] Gamma-Densomat, Krebsöge-Firmenschrift

## PLASTISCHES MATERIALVERHALTEN GRANULARER STOFFE IM VERFESTIGUNGSBEREICH

Joachim Bluhm

(Universität-GH Essen, Fachgebiet Mechanik, FB 10, D - 45117 Essen)

### EINFÜHRUNG

Granulare und spröde Materialien (leere poröse Festkörper) weisen häufig ein ausgeprägtes plastisches Materialverhalten auf und der elastische Anteil der Deformation kann näherungsweise vernachlässigt werden. Die Fließfunktion und die Fließregel sind somit von großer Bedeutung bei der Entwicklung von konstitutiven Modellen für poröse Materialien wie z.B. Sand, Beton und Fels.

Konstitutive Modelle zur Beschreibung des plastischen Materialverhaltens von granularen und spröden Materialien wurden in jüngster Zeit auf der Basis von sogenannten single-surface Fließkriterien entwickelt, siehe z.B. Desai [1], Lade [2]. Der Grund für die Verwendung von diesen Fließfunktionen ist der, daß im Gegensatz zu metallischen Werkstoffen bei porösen Materialien das Einsetzen plastischer Verformungen vom hydrostatischen Spannungszustand abhängt und diese Materialien auch unter hydrostatischem Druck plastisches Verformungsverhalten aufweisen.

In dieser Arbeit wird eine Modifikation der de Boer'schen fünfparametrischen Fließbedingung (single-surface Bedingung), siehe de Boer und Dresenkamp [3], die auf de Boer's Versagensbedingung basiert (de Boer [4]), diskutiert. Weiterhin wird eine Fließregel für ein kinematisch verfestigendes Modell vorgestellt, die eine unabhängige Formulierung der plastischen Volumenänderungen und der deviatorischen Anteile der plastischen Verzerrungsinkremente im Verfestigungsbereich gestattet.

### FÜNFPARAMETRIGE FLIESSBEDINGUNG

Die fünfparametrische Fließbedingung für spröde und granulare Materialien

$$F = F(\hat{I}, \hat{II}_D, \hat{III}_D) = \hat{\Phi}^{1/2}(1 + \gamma\hat{\vartheta})^{1/m} + \delta\hat{I}^2 + \beta\hat{I} - \kappa = 0 \quad , \quad (1)$$

$$\hat{\Phi} = \hat{II}_D + \frac{1}{2}\alpha^2\hat{I}^2 \quad , \quad \hat{\vartheta} = \frac{\hat{III}_D}{\hat{\Phi}^{m/2}}\sqrt{\hat{II}_D^{m-3}} \quad , \quad m = 4.5$$

ist zu verstehen als eine Modifikation der Fließfunktion von de Boer und Dresenkamp [3], die auf der vierparametrischen Versagensbedingung für granulare Stoffe von de Boer (de Boer [4]) basiert. Die Größen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  und  $\kappa$  sind Materialparameter, die den Versuchsergebnissen anzupassen sind, siehe Bucker und Bluhm [5], und

$$\hat{I} = \hat{\tau} \cdot \mathbf{I} \quad , \quad \hat{II}_D = \frac{1}{2} \hat{\tau}^D \cdot \hat{\tau}^D \quad , \quad \hat{III}_D = \frac{1}{3} \hat{\tau}^D \cdot \hat{\tau}^D \hat{\tau}^D \quad (2)$$

kennzeichnen die erste Invariante des Kirchhoff'schen Spannungstensors  $\hat{\tau}$  des Festkörperskeletts bezüglich der plastischen Zwischenkonfiguration und die zweite und dritte Invariante des deviatorischen Anteils  $\hat{\tau}^D = \hat{\tau} - 1/3(\hat{\tau} \cdot \mathbf{I})\mathbf{I}$  des Spannungstensors. Die Zwischenkonfiguration resultiert aus der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  in einen elastischen und einen plastischen Anteil ( $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$ ) und ist zu verstehen als eine spannungsfreie, aber im allgemeinen inkompatible Konfiguration in der die plastischen Anteile der Deformation gespeichert sind, siehe Haupt [6].

$\mathbf{E}_p = 1/2 (\mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p - \mathbf{I})$  in die Zwischenkonfiguration. Für ein rein kinematisch verfestigendes Modell wird die Fließregel in einem speziellen Spannungsraum formuliert, der durch die Differenz des Spannungstensors  $\hat{\tau}$  und des Translationstensors  $\hat{Y}$  definiert wird. Die Fließregel

$$\hat{D}_p = \lambda \left\{ \hat{\tau}^D - \hat{Y}^D + \mu \left[ (\hat{\tau} - \hat{Y}) \cdot \mathbf{I} \right] \mathbf{I} + \bar{\mu} \left[ (\hat{\tau}^D - \hat{Y}^D) (\hat{\tau}^D - \hat{Y}^D) \right]^D \right\} \quad (9)$$

erlaubt eine unabhängige Formulierung der plastischen Volumenänderungen

$$\dot{\epsilon}_p = (\det \mathbf{F}_p) \hat{D}_p \cdot \mathbf{I} = 3\lambda\mu (\det \mathbf{F}_p) (\hat{\tau} - \hat{Y}) \cdot \mathbf{I} \quad (10)$$

und der deviatorischen Anteile der plastischen Verzerrungsincremente

$$\hat{D}_p^D = \lambda \left\{ \hat{\tau}^D - \hat{Y}^D + \bar{\mu} \left[ (\hat{\tau}^D - \hat{Y}^D) (\hat{\tau}^D - \hat{Y}^D) \right]^D \right\} \quad (11)$$

Die Größe  $\lambda$  ist ein skalarer Faktor und

$$\mu = \mu \left( \hat{\mathbf{I}}_k, \hat{\mathbf{I}}_{kD}, \hat{\mathbf{I}}_{kD} \right) \quad , \quad \bar{\mu} = \bar{\mu} \left( \hat{\mathbf{I}}_k, \hat{\mathbf{I}}_{kD}, \hat{\mathbf{I}}_{kD} \right) \quad (12)$$

sind Funktionen, die die plastische Volumenänderung und die Richtungen der plastischen Verzerrungsincremente abweichend von der durch  $\hat{\tau}^D - \hat{Y}^D$  vorgegebenen Richtung in der Deviatorebene steuern. Der mit  $\bar{\mu}$  gekoppelte Term in (9) bzw. (11) beeinflusst allerdings nicht die Richtung der plastischen Verzerrungsincremente in der Deviatorebene in Richtung von Kompression ( $\hat{\Theta} = -30^\circ$ ) und Extension ( $\hat{\Theta} = 30^\circ$ ), d.h. die deviatorischen Anteile der plastischen Deformationszuwächse für Kompression und Extension sind normal zur entsprechenden Sektionskurve. Dieses wird auch durch Versuchsbeobachtungen bestätigt, siehe [8]. Zu erwähnen ist, daß für  $\bar{\mu} = 0$  die Beziehung (9) in die Fließregel von de Boer übergeht, siehe de Boer und Lade [9].

Bezüglich der Formulierung des Translationstensors bzw. der Inkremente von  $\hat{Y}$  sei auf die Arbeit von de Boer und Lade [9] verwiesen.

#### SCHLUSSBEMERKUNG

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Modifikation der fünfparametrischen Fließbedingung von de Boer und Dresenkamp [3] vorgeschlagen und eine Fließregel für ein kinematisch verfestigendes Modell vorgestellt, die zur Beschreibung des plastischen Materialverhaltens granularer und spröder Stoffe herangezogen werden kann.

#### LITERATUR

1. Desai, C. S.: Computers and Geotechnics, 7 (1989), 319-335.
2. Lade, P. V.: ASCE: J. Geotech. Engrg., 116 (1990), 393-414.
3. de Boer, R. und Dresenkamp, H.-T.: ASCE: J. Engrg. Mech., 115 (1989), 1591-1608.
4. de Boer, R.: Int. J. Plasticity, 4 (1988), 371-391.
5. Bucker, G. und Bluhm, J.: ZAMM, 74 (1994), T226-T228.
6. Haupt, P.: Int. J. Plasticity, 1 (1985), 303-316.
7. Dresenkamp, H.-T.: Dissertation, (1987), Universität-GH Essen, Essen.
9. Yamada, Y. und Ishihara, K.: Soil and Foundations, 19 (1979), 79-94.
9. de Boer, R. und Lade, P. V.: Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, 55 (1992), Universität-GH Essen, Essen.

# Ein Finite-Element-Konzept für nichtlineare kinematische Verfestigung bei kleinen elastischen und finiten plastischen Deformationen

Stefan Hartmann, Georg Lührs

Institut für Mechanik, FB Maschinenbau, Universität Gesamthochschule Kassel, Mönchebergstraße 7, 34109 Kassel

Wir wollen in diesem Aufsatz die Spannungsberechnung bei finiten inelastischen Deformationen im Rahmen der Methode der Finiten Elemente darstellen. Die dabei verwendeten Materialgleichungen werden mit Größen der plastischen Zwischenkonfiguration formuliert. Zunächst wird die Vorgehensweise des bekannten Prädiktor-Korrektor-Verfahrens und die Berechnung des konsistenten Tangentenoperators für eine allgemeine Struktur der Materialgleichungen der Elasto- und der Viskoplastizität vorgestellt. Für die Wahl spezieller Materialgleichungen bei Verwendung einer kinematischen Verfestigung vom Armstrong&Frederick-Typ sowie für die Näherung kleiner elastischer Verzerrungen wird abschließend ein Spannungsalgorithmus der Viskoplastizität angegeben, der optimiert auf die Lösung von nur einer skalaren Gleichung führt und den Spannungsalgorithmus der Elastoplastizität als Sonderfall enthält.

## 1 Allgemeine Betrachtungen

### 1.1 Materialgleichungen

Basierend auf der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten,  $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_p$ , gehen wir von der Annahme aus, daß inelastische Verzerrungen sich prinzipiell als Funktional der Gesamtverzerrungen  $\mathbf{E} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) / 2$  bestimmen lassen,  $\mathbf{E}_p = (\mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p - \mathbf{I}) / 2 = \mathfrak{R}[\mathbf{E}(\mathbf{X}, \tau)]$ . Damit ist der inelastische Strecktensor  $\mathbf{U}_p$  der polaren Zerlegung  $\mathbf{F}_p = \mathbf{R}_p \mathbf{U}_p$  bekannt. Die elastischen Deformationen  $\hat{\mathbf{F}}_e$  definieren über die Elastizitätsbeziehung den Spannungszustand. Für die inelastische Rotation  $\mathbf{R}_p$  wird keine konstitutive Annahme gemacht. Elastische Verzerrungen ergeben sich formal aus  $\mathbf{E}_e = \mathbf{E} - \mathbf{E}_p$ . Die Anwendung einer speziellen affinen Transformation auf die Greenschen Verzerrungen und deren materielle Zeitableitungen führen auf Verzerrungstensoren der Zwischenkonfiguration ( $\hat{\mathbf{L}}_p = \dot{\hat{\mathbf{F}}}_p \mathbf{F}_p^{-1}$ ):

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{F}_p^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}_p^{-1} = \mathbf{F}_p^{-T} (\mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p) \mathbf{F}_p^{-1} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e - \mathbf{I}) + \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}_p^{-T} \mathbf{F}_p^{-1}) = \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_p \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_p^{-T} \dot{\mathbf{E}}_e \mathbf{F}_p^{-1} &= \hat{\mathbf{\Gamma}}_e = \dot{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_e + \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{L}}_p \\ \mathbf{F}_p^{-T} \dot{\mathbf{E}}_p \mathbf{F}_p^{-1} &= \hat{\mathbf{\Gamma}}_p = \dot{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_p + \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_p + \hat{\mathbf{\Gamma}}_p \hat{\mathbf{L}}_p \end{aligned} \right\} \quad \hat{\mathbf{\Gamma}} = \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_p \quad (2)$$

Das zum Greenschen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  duale Spannungsmaß ist der 2-te Piola-Kirchhoff-Tensor,  $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{F}^{-T} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}$ .  $\mathbf{S}$  ist der gewichtete Cauchy-Tensor und  $\mathbf{T}$  der Cauchy-Tensor. Mit Hilfe des Konzeptes der dualen Variablen<sup>3</sup> definieren wir einen Spannungstensor der Zwischenkonfiguration bzw. dessen Relativableitung:

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{F}_p \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}_p^T = \hat{\mathbf{F}}_e^{-1} \mathbf{S} \hat{\mathbf{F}}_e^{-T} \quad \text{und} \quad \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{S}}} = \mathbf{F}_p \dot{\tilde{\mathbf{T}}} \mathbf{F}_p^T = \dot{\hat{\mathbf{S}}} - \hat{\mathbf{L}}_p \hat{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{L}}_p^T = \hat{\mathbf{F}}_e^{-1} \overset{\nabla}{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{F}}_e^{-T} \quad (3)$$

Wir formulieren nunmehr die Materialgleichungen mit Größen der plastischen Zwischenkonfiguration:

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e) \quad \hat{\mathbf{\Gamma}}_p = \kappa \hat{\mathbf{R}}_p(\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{X}}, k) \quad \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{X}}} = \kappa \hat{\mathbf{R}}_X(\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{X}}, k) \quad \dot{k} = \kappa \hat{\mathbf{R}}_k(\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{X}}, k) \quad (4)$$

Die Elastizitätsbeziehung (4)<sub>1</sub> sei eine isotrope Tensorfunktion. Gl.(4)<sub>2</sub> stellt die Fließregel dar;  $\hat{\mathbf{X}}$  bzw.  $k$  seien Verfestigungsvariable, die die kinematische bzw. isotrope Verfestigung beschreiben. Zusätzlich definieren wir eine Fließfunktion  $\hat{f}(\hat{\mathbf{S}}, \hat{\mathbf{X}}, k)$ , die in der Elastoplastizität bei der Bela-

stungsbedingung und bei plastischer Belastung in Form einer algebraischen Nebenbedingung, der Fließbedingung, auftritt. Der Faktor  $\kappa$  (plastischer Multiplikator) wird dabei aus der Konsistenzbedingung berechnet,  $d\hat{f}/dt = 0$ . In dem verwendeten viskoplastischen Materialmodell dient  $\hat{f}$  zur Fallunterscheidung für Elastizität ( $\hat{f} \leq 0$ ) oder Inelastizität ( $\hat{f} > 0$ ). Für den Faktor  $\kappa$  wird bei Inelastizität eine Materialgleichung angenommen,  $\kappa = \langle \hat{f} \rangle^r / \eta$ .  $r$  und  $\eta$  stellen dabei Materialparameter dar. Für die spätere Spannungsberechnung ist es zweckmäßig, die gewählten Materialgleichungen mit Größen der Referenz- oder Momentankonfiguration auszudrücken. Wir entscheiden uns zunächst für referentielle Größen ( $\mathbf{q} = \{\mathbf{E}_p, \tilde{\mathbf{X}}, \mathbf{k}\}$ ):

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p) \quad \dot{\mathbf{E}}_p = \kappa \tilde{\mathbf{R}}_p(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{q}) \quad \dot{\tilde{\mathbf{X}}} = \kappa \tilde{\mathbf{R}}_X(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{q}) \quad \dot{\mathbf{k}} = \kappa \tilde{\mathbf{R}}_k(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{q}) \quad (5)$$

### 1.2 Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Innerhalb der Newton-Iteration zur Auswertung der schwachen Formulierung für das Gleichgewicht müssen an jedem Quadraturpunkt die Spannungen berechnet werden ( $i$  kennzeichnet den Iterationsindex). Dabei sind die Prozeßvariablen der Referenz- und der letzten Gleichgewichtskonfiguration  ${}^n\mathbf{q}$  bekannt ( ${}^n\mathbf{q} = \{{}^n\mathbf{E}_p, {}^n\tilde{\mathbf{X}}, {}^n\mathbf{k}\}$ ). Gesucht sind zu dem gegebenen Deformationszustand  $\mathbf{u}^i$  bzw.  $\mathbf{F}^i$  die Spannungen  $\tilde{\mathbf{T}}^i$  sowie die Inneren Variablen  $\mathbf{q}^i = \{\mathbf{E}_p^i, \tilde{\mathbf{X}}^i, \mathbf{k}^i\}$ . Bei festgehaltenen inelastischen Deformationen ( $\dot{\mathbf{F}}_p = \mathbf{0}$ ) bildet man zunächst den *elastischen Prädiktor* durch Auswerten der Elastizitätsbeziehung,  ${}^T\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{E}^i, {}^n\mathbf{E}_p)$ . Mit Hilfe der Fließfunktion wird festgestellt, ob sich dieser Spannungszustand innerhalb oder außerhalb der Fließfläche befindet. Liegt er innerhalb, so war der Schritt rein elastisch und die Spannungen sowie die inneren Variablen sind bekannt,  $f({}^T\tilde{\mathbf{T}}, {}^n\mathbf{q}) \leq 0 \Rightarrow \{\tilde{\mathbf{T}}^i = {}^T\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{q}^i = {}^n\mathbf{q}\}$ . Befindet sich der Spannungszustand außerhalb der Fließfläche, so muß das Algebro-Differentialgleichungssystem (5) unter Ausnutzung der Materialgleichung für den Faktor  $\kappa$  gelöst werden:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{E}, \mathbf{E}_p) \quad \dot{\mathbf{q}} = \kappa \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{q}) \quad \kappa = f^r / \eta \quad (6)$$

Gemäß dem Prädiktor-Korrektor-Verfahren<sup>4</sup> liefern die Elastizitätsbeziehung und die Materialgleichung für den Faktor  $\kappa^i$  sieben Bestimmungsgleichungen. Die Evolutionsgleichungen für die Inneren Variablen werden dabei zeitlich mit einem impliziten Euler-Schritt integriert, was zu den übrigen notwendigen Gleichungen führt ( $\mathbf{q}^i = {}^n\mathbf{q} + \Delta t \dot{\mathbf{q}} = {}^n\mathbf{q} + \Delta t \kappa^i \tilde{\mathbf{R}}$ ). Wir erhalten mit den Abkürzungen  $\zeta^i = \Delta t \kappa^i$  und  $\tilde{\mathbf{R}} = \{\tilde{\mathbf{R}}_p, \tilde{\mathbf{R}}_X, \tilde{\mathbf{R}}_k\}$  das folgende nichtlineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \Phi_T(\tilde{\mathbf{T}}^i, \mathbf{q}^i) &= \tilde{\mathbf{T}}^i - \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{E}^i, \mathbf{E}_p^i) = 0 \\ \Phi_q(\tilde{\mathbf{T}}^i, \mathbf{q}^i, \zeta^i) &= \mathbf{q}^i - {}^n\mathbf{q} - \zeta^i \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{T}}^i, \mathbf{q}^i) = 0 \\ \Phi_f(\tilde{\mathbf{T}}^i, \mathbf{q}^i, \zeta^i) &= f(\tilde{\mathbf{T}}^i, \mathbf{q}^i)^r - \zeta^i \frac{\eta}{\Delta t} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Man erkennt in Gl.(7)<sub>3</sub>, daß für verschwindenden Viskositätsparameter,  $\eta = 0$ , die Fließbedingung der Elastoplastizität vorliegt, so daß der *return-mapping-algorithm* der Elastoplastizität exakt enthalten ist. Das nichtlineare Gleichungssystem (7) kann mittels Newton-Verfahren gelöst werden und führt auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems innerhalb jedes Iterationsschrittes.

### 1.3 Konsistenter Tangentenoperator

Die zweite Größe, die in der Funktionalmatrix der globalen Newton-Iteration zur Auswertung

der schwachen Form des Gleichgewichts auftritt, ist der *Konsistente Tangentenoperator*. Er stellt die Ableitung der Bestimmungsgleichung für die Spannungen nach den vorgegebenen Verzerrungen dar,  $d\tilde{\mathbf{T}}/d\mathbf{E}$ . Da die Spannungen jedoch implizit von den Verzerrungen durch Gl.(7) bestimmt sind, wenden wir die Kettenregel an:<sup>5</sup>

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_{\mathbf{T}}(\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{E}), \mathbf{q}(\mathbf{E}), \zeta(\mathbf{E}), \mathbf{E}) = 0 \\ \Phi_{\mathbf{q}}(\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{E}), \mathbf{q}(\mathbf{E}), \zeta(\mathbf{E}), \mathbf{E}) = 0 \\ \Phi_{\zeta}(\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{E}), \mathbf{q}(\mathbf{E}), \zeta(\mathbf{E}), \mathbf{E}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi_{\mathbf{T}}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \quad \frac{\partial \Phi_{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{q}} \quad \frac{\partial \Phi_{\mathbf{T}}}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \Phi_{\mathbf{q}}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \quad \frac{\partial \Phi_{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} \quad \frac{\partial \Phi_{\mathbf{q}}}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \Phi_{\zeta}}{\partial \tilde{\mathbf{T}}} \quad \frac{\partial \Phi_{\zeta}}{\partial \mathbf{q}} \quad \frac{\partial \Phi_{\zeta}}{\partial \zeta} \end{array} \right\} \begin{bmatrix} d\tilde{\mathbf{T}}/d\mathbf{E} \\ d\mathbf{q}/d\mathbf{E} \\ d\zeta/d\mathbf{E} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{\mathbf{T}}}{\partial \mathbf{E}} \\ \frac{\partial \Phi_{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{E}} \\ \frac{\partial \Phi_{\zeta}}{\partial \mathbf{E}} \end{bmatrix}$$

Der Index *i* wurde dabei aus Übersichtlichkeitsgründen fortgelassen. Zur Berechnung des konsistenten Tangentenoperators muß demnach an jedem Quadraturpunkt eines finiten Elements ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Die Koeffizienten der Funktionalmatrix und der rechten Seite können auf drei verschiedene Arten berechnet werden: Bei der ersten Möglichkeit wird dieses Gleichungssystem durchgehend analytisch berechnet. Bei der zweiten Vorgehensweise werden die Koeffizienten analytisch ermittelt, das Gleichungssystem jedoch numerisch gelöst und bei der dritten Möglichkeit werden auch die Koeffizienten durch numerische Differentiation berechnet.

## 2 Optimierter Spannungsalgorithmus

Für die Annahme kleiner elastischer Verzerrungen ( $\|\hat{\Gamma}_e\| = \|(\hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e - \mathbf{I})/2\| \ll 1$ ,  $\mathbf{U}_e \approx \mathbf{I}$ ,  $\hat{\mathbf{F}}_e \approx \mathbf{R}_e$ ) und nach Vortransformation der Größen der Zwischenkonfiguration auf Größen der Momentankonfiguration behält der nachfolgend gewählte Satz von Materialgleichungen seine Struktur bei, lediglich die Variablen der Zwischenkonfiguration werden durch räumliche Größen ersetzt ( $\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{A}_e + \mathbf{A}_p$ ):

	Materialgleichungen der Zwischenkonfiguration	Materialgleichungen der Momentankonfiguration
Elastizitätsbeziehung	$\hat{\mathbf{S}} = \lambda (\hat{\Gamma}_e \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} + 2\mu \hat{\Gamma}_e$	$\mathbf{S} = \lambda (\mathbf{A}_e \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{A}_e$
Fließfunktion	$f = \frac{1}{2} \ (\hat{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{X}})^D\ ^2 - \frac{1}{3} \hat{k}^2(s)$	$f = \frac{1}{2} \ (\mathbf{S} - \mathbf{X})^D\ ^2 - \frac{1}{3} k^2(s)$
Fließregel	$\hat{\Gamma}_p = \kappa \hat{\mathbf{N}} = \kappa \frac{(\hat{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{X}})^D}{\ (\hat{\mathbf{S}} - \hat{\mathbf{X}})^D\ }$	$\mathbf{A}_p = \kappa \mathbf{N} = \kappa \frac{(\mathbf{S} - \mathbf{X})^D}{\ (\mathbf{S} - \mathbf{X})^D\ }$
Kinematische Verfestigung	$\hat{\mathbf{X}} = \kappa (c \hat{\mathbf{N}} - b \sqrt{2/3} \hat{\mathbf{X}})$	$\mathbf{X} = \kappa (c \mathbf{N} - b \sqrt{2/3} \mathbf{X})$
Isotrope Verfestigung	$k = \hat{k}(s)$	$k = \hat{k}(s)$
Plastische Bogenlänge	$\dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\Gamma}_p \cdot \hat{\Gamma}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \kappa$	$\dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{A}_p \cdot \mathbf{A}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \kappa$

Innerhalb des vorgeschlagenen Prädiktor-Korrektor-Verfahrens können in Abhängigkeit der Struktur der Materialgleichungen optimierte Spannungsalgorithmen hergeleitet werden.<sup>1,2</sup> Beim *elastischen Prädiktor* werten wir zunächst die Elastizitätsbeziehung bei festgehaltenen inelastischen Deformationen aus ( $\dot{\mathbf{F}}_p = \mathbf{0}$ ,  ${}^T \mathbf{A}_e = \mathbf{A}^i - \mathbf{F}_u^{-T} \mathbf{A}_p \mathbf{F}_u^{-1}$ ):  ${}^T \mathbf{S} = \lambda ({}^T \mathbf{A}_e \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} + 2\mu {}^T \mathbf{A}_e$ . Dabei sind die räumlichen Größen der letzten Gleichgewichtskonfiguration auf die aktuelle Momentankonfiguration mit Hilfe von  $\mathbf{F}_u = \mathbf{F}^i \mathbf{F}_u^{-1}$  vorzutransformieren. Liegt dieser Spannungszustand inner-

halb der Fließfläche ( $f(\mathbf{S}, \mathbf{F}_u^n \mathbf{X} \mathbf{F}_u^T, \mathbf{n}_s) \leq 0$ ), so ist der Schritt beendet:  $\mathbf{S}^i = \mathbf{T} \mathbf{S}$ ,  $\mathbf{A}_p^i = \mathbf{F}_u^{-Tn} \mathbf{A}_p \mathbf{F}_u^{-1}$ ,  $s^i = \mathbf{n}_s$ ,  $\mathbf{X}^i = \mathbf{F}_u^n \mathbf{X} \mathbf{F}_u^T$ . Liegt der Spannungszustand außerhalb der Fließfläche ( $f(\mathbf{S}, \mathbf{F}_u^n \mathbf{X} \mathbf{F}_u^T, \mathbf{n}_s) > 0$ ), so halten wir die Gesamtdeformationen fest ( $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{0}$ ), wobei Oldroyd-Ableitungen mit den materiellen Zeitableitungen zusammenfallen. Wir führen auch hier einen impliziten Euler-Schritt für die Evolutionsgleichungen durch und erhalten das nichtlineare Gleichungssystem ( $\zeta^i = \kappa^i \Delta t$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^i &= \lambda (\mathbf{A}_e^i \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{A}_e^i \text{ mit } \mathbf{A}_e^i = \mathbf{A}^i - \mathbf{A}_p^i \\ \mathbf{A}_p^i &= \mathbf{F}_u^{-Tn} \mathbf{A}_p \mathbf{F}_u^{-1} + \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p \Delta t \Rightarrow \mathbf{A}_p^i = \mathbf{F}_u^{-Tn} \mathbf{A}_p \mathbf{F}_u^{-1} + \zeta^i \mathbf{N}^i \\ \mathbf{X}^i &= \mathbf{F}_u^n \mathbf{X} \mathbf{F}_u^T + \overset{\nabla}{\mathbf{X}} \Delta t \Rightarrow \mathbf{X}^i = \mathbf{F}_u^n \mathbf{X} \mathbf{F}_u^T + \zeta^i (c \mathbf{N}^i - b \sqrt{2/3} \mathbf{X}^i) \\ s^i &= \mathbf{n}_s + \overset{\dot{s}}{s} \Delta t \Rightarrow s^i = \mathbf{n}_s + \zeta^i \sqrt{2/3} \end{aligned} \quad (8)$$

$\zeta^i = (f^r/\eta) \Delta t \Rightarrow \Phi(\mathbf{S}^i, \mathbf{X}^i, s^i, \zeta^i) = \|(\mathbf{S}^i - \mathbf{X}^i)^D\| - \sqrt{2((\eta/\Delta t) \zeta^i)^{1/r} + (2/3) k^2(\zeta^i)} = 0$   
Dieses nichtlineare Gleichungssystem kann aufgrund seiner Struktur auf die Lösung von nur einer skalaren Gleichung reduziert werden. Hierzu werden die inelastischen Verzerrungen in die Elastizitätsbeziehung (8)<sub>1</sub> eingesetzt,  $\mathbf{S}^i = \mathbf{T} \mathbf{S} - 2\mu \zeta^i \mathbf{N}^i$ . Wir bilden anschließend den Deviator von  $(\mathbf{S}^i - \mathbf{X}^i)$ , wobei Gl.(8)<sub>3</sub> nach  $\mathbf{X}^i$  aufgelöst wird, und spalten in einen Anteil in Normalenrichtung und einen Tensor  $\Xi^{iD} = \mathbf{T} \mathbf{S}^D - \alpha (\mathbf{F}_u^n \mathbf{X} \mathbf{F}_u^T)^D$  auf:

$$(\mathbf{S}^i - \mathbf{X}^i)^D = \mathbf{T} \mathbf{S}^D - 2\mu \zeta^i \mathbf{N}^i - \alpha ((\mathbf{F}_u^n \mathbf{X} \mathbf{F}_u^T)^D + \zeta^i c \mathbf{N}^i) = \Xi^{iD}(\zeta^i) - \gamma(\zeta^i) \mathbf{N}^i = \|(\mathbf{S}^i - \mathbf{X}^i)^D\| \mathbf{N}^i$$

Dabei haben wir die Abkürzungen  $\alpha(\zeta^i) = 1/(1 + \zeta^i b \sqrt{2/3})$  und  $\gamma(\zeta^i) = \zeta^i (2\mu + \alpha c)$  eingeführt. Durch Einsetzen von Gl.(8)<sub>5</sub> und Auflösen nach dem Tensor  $\Xi^{iD}$  folgt

$$\Xi^{iD} = (\gamma + \sqrt{2((\eta/\Delta t) \zeta^i)^{1/r} + (2/3) k^2(\zeta^i)}) \mathbf{N}^i, \quad (9)$$

wobei sich nunmehr die Normale ebenfalls durch  $\mathbf{N}^i = \Xi^{iD} / \|\Xi^{iD}\|$  berechnen läßt. Der Betrag von Gl.(9) liefert eine Bestimmungsgleichung für den Faktor  $\zeta^i$ ,

$$\Phi_\zeta(\zeta^i) = \|\Xi^{iD}(\zeta^i)\| - \gamma(\zeta^i) - \sqrt{2((\eta/\Delta t) \zeta^i)^{1/r} + (2/3) k^2(\zeta^i)} = 0$$

womit die Fließflächennormale und damit sämtliche Größen des Gleichungssystems (8) berechenbar sind.

Die Berechnung des *konsistenten Tangentenoperators* kann auf die in Abschnitt 1.3 beschriebene Vorgehensweise ermittelt werden.

### 3 Literatur

- [1] HARTMANN, S.; *Lösung von Randwertaufgaben der Elastoplastizität. Ein Finite-Elemente-Konzept für nicht-lineare kinematische Verfestigung bei kleinen und finiten Verzerrungen*, Dissertation (Bericht 1/1993) des Instituts für Mechanik der Universität Gesamthochschule Kassel, 1993
- [2] HARTMANN, S. / HAUPT, P.; Implizite Spannungsintegration bei finiten plastischen Deformationen unter Berücksichtigung nichtlinearer kinematischer Verfestigung, ZAMM, Vol.74, 1994, T230-T232
- [3] HAUPT, P. / TSÄKMAKIS, C.; On the Application of Dual Variables in Continuum Mechanics, *Journal of Continuum Mechanics and Thermodynamics*, Vol. 1, 1989, pp. 165-196
- [4] SIMO, J.C. / HUGHES, T.J.R.; General Return Mapping Algorithms for Rate-Independent Plasticity, aus: *Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications*, Eds. DESAI, C.S. / KRÉMPPL, E. / KIOUSIS, P.D. / KUNDU, T., 1987, pp. 221-231
- [5] TAMME, A.; A Unified Approach to Modelling and Numerical Solution of Coupled Field Problems in Nonlinear Solid Mechanics, BESDO, D. / STEIN, E.; *Finite Inelastic Deformations - Theory and Applications*, IUTAM Symposium Hannover/Germany 1991, Springer Verlag 1992, pp. 93-106

## Numerische Behandlung finiter inelastischer Deformationen nach der Methode des plastischen Prediktors

Michael Brünig

Lehrstuhl für Baumechanik-Statik, Universität Dortmund, 44221 Dortmund

### 1. Einleitung und Grundlagen

Bei vielen technologischen Problemen erfordert deren numerische Simulation eine realitätsnahe Modellierung des inelastischen Deformationsverhaltens mit mikromechanischen konstitutiven Gesetzen, deren Integration hier nach der Methode des plastischen Prediktors erfolgen soll. Dazu wird in ein in der Ausgangskonfiguration formuliertes Variationsprinzip

$$\delta\Pi = \int \text{Grad } \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}\mathbf{S} \, d\mathbf{v} - \int \delta\mathbf{u} \cdot \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \, d\mathbf{v} - \int \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_0 \, d\mathbf{a} + \text{Nebenbedingungen} = 0 \quad (1)$$

die multiplikative Aufspaltung des Deformationsgradienten nach Lee [1]

$$\mathbf{F} = \overset{\star}{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{F}} \quad (2)$$

in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil implementiert, woraus die additive Zerlegung des Green'schen Verzerrungstensors und dessen bezüglich einer spannungsfreien Zwischenkonfiguration formulierten Oldroyd-Abteilung

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{el}} + \mathbf{E}^{\text{pl}} \quad , \quad \overset{\nabla}{\mathbf{E}} = \overset{\nabla}{\mathbf{E}}^{\text{el}} + \overset{\nabla}{\mathbf{E}}^{\text{pl}} \quad (3)$$

in einen elastischen und einen plastischen Term folgen. Irreversible Deformationen stellen dabei eine Akkumulation von mikromechanischen Schervorgängen dar, so daß nach Hill und Havner [2] eine Scherrate  $\dot{\gamma}^\alpha$  mit

$$\dot{\tilde{\mathbf{F}}} = \sum_{\alpha} (\mathbf{m}^{\alpha} \otimes \mathbf{n}^{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha}) \tilde{\mathbf{F}} \quad (4)$$

eingeführt wird, wobei das orthonormale Koordinatensystem  $\mathbf{m}^{\alpha}$  und  $\mathbf{n}^{\alpha}$  die Scherrichtung und die Scherflächennormale beschreiben. Mit (3) und (4) kann die Beziehung zwischen makro- und mikromechanischen plastischen Verzerrungsraten

$$\overset{\nabla}{\mathbf{E}}^{\text{pl}} = \sum_{\alpha} (\mathbf{N}^{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha}) \quad ; \quad \mathbf{N}^{\alpha} = \text{symm}\{\overset{\star}{\mathbf{C}}(\mathbf{m}^{\alpha} \otimes \mathbf{n}^{\alpha})\} \quad ; \quad \overset{\star}{\mathbf{C}} = \overset{\star}{\mathbf{F}}^{\text{T}} \overset{\star}{\mathbf{F}} \quad (5)$$

angegeben werden [2,3]. Die ebenfalls im Variationsprinzip (1) enthaltenen 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen  $\mathbf{S}$  werden aus einer elastischen Potentialfunktion  $\Phi$  gewonnen, wobei die plastischen internen Variablen als konstant angenommen werden, und mit Hilfe einer weiteren Differentiation wird dann der elastische Stofftensor  $\mathbf{C}$  errechnet

$$\overset{\star}{\mathbf{S}} = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{E}^{\text{el}}} \Big|_{\tilde{\mathbf{F}}=\text{const.}} \quad ; \quad \mathbf{C} = \rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{E}^{\text{el}} \otimes \partial \mathbf{E}^{\text{el}}} \Big|_{\tilde{\mathbf{F}}=\text{const.}} \quad (6)$$

Für die in jedem Schersystem wirkende Schmid-Spannung

$$\tau^{\alpha} = \overset{\star}{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{N}^{\alpha} \quad (7)$$

kann ebenfalls ein elastisches Stoffgesetz

$$\dot{\tau}^{\alpha} = (\mathbf{N}^{\alpha} \mathbf{C} - \mathbf{A}^{\alpha}) \cdot \overset{\nabla}{\mathbf{E}}^{\text{el}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}^{\alpha} = -2 \text{symm}\{(\mathbf{m}^{\alpha} \otimes \mathbf{n}^{\alpha}) \overset{\star}{\mathbf{S}}\} \quad (8)$$

angegeben werden [2]. Der Beginn des ratenunabhängigen plastischen Fließens ist in jedem Schersystem durch das Erfüllen der Fließbedingung

$$\tau^{\alpha} = \tau_{\tilde{\mathbf{F}}}^{\alpha} \quad (9)$$

gekennzeichnet, wobei während des plastischen Scherens Verfestigungen

$$\dot{\tau}_F^\alpha = \sum_{\beta} (h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^\beta) \quad (10)$$

aufzutreten können [4], deren Parameter  $h^{\alpha\beta}$  experimentell zu bestimmen sind.

Bei ratenabhängigem plastischem Materialverhalten werden die Scherspannungen

$$\tau^\alpha = g^\alpha \left( \frac{\dot{\gamma}^\alpha}{\dot{\alpha}} \right)^m \quad (11)$$

aus einer Referenzscherspannung

$$\dot{g}^\alpha = \sum_{\beta} (h^{\alpha\beta} |\dot{\gamma}^\beta|) \quad (12)$$

und einer festgelegten Referenzscherrate  $\dot{\alpha}^\alpha$  errechnet. Mit (3b), (5) und (8) kann schließlich die zu integrierende Grundgleichung

$$\sum_{\alpha} [(K^{-1})^{\beta\alpha} \dot{\tau}^\alpha] = \dot{\epsilon}^\beta - \dot{\gamma}^\beta ; \quad K^{\alpha\beta} = N^\alpha C \cdot N^\beta - A^\alpha \cdot N^\beta \quad (13)$$

mit der skalarwertigen Vergleichsdehnungsrate

$$\dot{\epsilon}^\beta = \sum_{\alpha} [(K^{-1})^{\beta\alpha} (N^\alpha C - A^\alpha)] \cdot \nabla \mathbf{E} \quad (14)$$

angegeben werden.

## 2. Integration der konstitutiven Gleichungen

Im folgenden soll die Integration der Spannungs- und Verzerrungsraten am Beispiel eines ratenunabhängigen Materials durchgeführt werden, wobei eine verallgemeinerte Mittelpunktsintegration im Inkrement  $t \leq \hat{t} \leq t + \Delta t$  verwendet wird. Aus (14) ergeben sich dann die Scherspannungen zu

$$\tau^\alpha(t + \Delta t) - \tau^\alpha(t) = \sum_{\beta} (K^{\alpha\beta} \dot{\epsilon}^\beta \Delta t) - \sum_{\beta} (K^{\alpha\beta} \Delta \gamma^\beta) , \quad (15)$$

wobei die skalarwertige Vergleichsdehnungsrate  $\dot{\epsilon}^\beta$  im Inkrement konstant angenommen wird. Da bei großen inelastischen Deformationen die elastischen Verzerrungen vergleichbar klein sind, werden diese im Rahmen der Methode des plastischen Prediktors nach Nemat-Nasser et al. [5,6] zunächst zu Null gesetzt und anschließend mit Hilfe eines elastischen Korrektorschritts berechnet. So folgt aus (13) für die plastische Prediktorverzerrungsrate und deren Inkrement

$$\dot{\gamma}_P^\alpha = \dot{\epsilon}^\alpha ; \quad \Delta \gamma_P^\alpha = \dot{\epsilon}^\alpha \Delta t , \quad (16)$$

woraus mit dem Verfestigungsgesetz (10) die Prediktorscherspannung

$$\tau_P^\alpha(t + \Delta t) = \tau_P^\alpha(t) + \sum_{\beta} (h^{\alpha\beta} \dot{\epsilon}^\beta \Delta t) \quad (17)$$

ermittelt werden kann, die gegenüber dem endgültigen Wert den Fehler

$$\Delta_{er} \tau^\alpha = \tau_P^\alpha(t + \Delta t) - \tau^\alpha(t + \Delta t) \quad (18)$$

aufweist. Dieser folgt aus der Vernachlässigung des elastischen Verzerrungsanteils, so daß mit (13) die Scherdehnungsrate (16a) den Fehler

$$\dot{\gamma}_{er}^\alpha = \dot{\epsilon}^\alpha - \dot{\gamma}^\alpha = \sum_{\beta} [(K^{-1})^{\alpha\beta} \dot{\tau}^\beta] ; \quad \Delta_{er} \gamma^\alpha = \dot{\gamma}_{er}^\alpha \Delta t \quad (19)$$

beinhaltet und mit (10)

$$\Delta_{er} \tau^\alpha \cong \sum_{\beta} (h^{\alpha\beta} \Delta_{er} \gamma^\beta) \quad (20)$$

am Ende des Inkrementstritts angenommen wird. Mit (15), (18), (19) und (20) können nun der Fehler der Scherdehnung

$$\Delta_{er} \gamma^\alpha = \sum_{\beta} [(h^{\alpha\beta} + K^{\alpha\beta})^{-1} (\tau_P^\beta(t + \Delta t) - \tau^\beta(t))] \quad (21)$$

und die endgültigen Werte im Schersystem  $\alpha$

$$\gamma^\alpha(t + \Delta t) = \gamma^\alpha(t) + \Delta \gamma_P^\alpha - \Delta_{er} \gamma^\alpha \quad (22)$$

$$\tau^\alpha(t + \Delta t) = \tau^\alpha(t) + \sum_{\beta} (h^{\alpha\beta} \Delta \gamma^\beta) \quad (23)$$

errechnet werden. Die makromechanischen plastischen Inkrementverzerrungen ergeben sich mit (5) zu

$$\Delta E^{pl} = \sum_{\alpha} [N^\alpha (\Delta \gamma_P^\alpha - \Delta_{er} \gamma^\alpha)] , \quad (24)$$

so daß nun am Inkrementende der elastisch-plastische Tangententensor bezogen auf die Zwischenkonfiguration

$$C^{ep} = \left. \frac{d\bar{S}}{d\bar{E}} \right|_{t+\Delta t}^* \quad (25)$$

für die nichtlineare Strukturberechnung ermittelt werden kann.

### 3. Finite-Element-Berechnungen

Die konstante Linearisierung des Variationsprinzips (1) und Einarbeitung von Ansatzfunktionen führen auf die bekannte Finite-Element-Grundgleichung

$$K_T \Delta V = \Delta \bar{P} , \quad (26)$$

die für jeden Iterationsschritt numerisch zu lösen ist. Dabei werden hier ein Crossed-triangle-Element sowie ein gemischtes Element, das durch Einarbeiten einer Nebenbedingung die plastische Inkompressibilität gewährleistet [7], verwendet.

Die Effizienz des vorgestellten Verfahrens wird anhand der numerischen Simulation eines Zugversuches von einem einkristallinen Al-Cu-Werkstoff demonstriert und auch mit Versuchsergebnissen aus [8] verglichen. Dazu werden wie auch in [9] die Materialparameter aus Versuchskurven ermittelt und für die Berechnung der ebene Verzerrungszustand sowie ein Doppelschermodell vorausgesetzt.

Bild 1 zeigt die Last-Verschiebungskurven des Zugversuchs bei Verwendung des gemischten Elements, wobei einmal die unabhängige Koiter-Verfestigung und auch die Taylor-Verfestigung, die in [9] ausführlich erörtert werden, gegenübergestellt sind. Dabei ist deutlich das schwächere Verfestigungsverhalten nach Koiter zu erkennen, wohingegen die gleichgewichtete Berücksichtigung der Eigen- und latenten Verfestigung nach Taylor zu einer stärkeren makromechanischen Anfangsverfestigung und einem früheren Erreichen des Lastmaximums führt. Darüber hinaus sind in Bild 2 die Rechnungen mit Taylor-Verfestigung bei Verwendung unterschiedlicher finiter Elemente dargestellt. Dabei zeigt das Crossed-triangle-Element ein steiferes Verhalten als das gemischte Element und auch das Lastmaximum tritt erst viel später auf. Diese Studien verdeutlichen, daß eine realitätsnahe numerische Simulation stets anhand von Versuchsergebnissen zu kontrollieren und so deren Güte zu beurteilen ist, insbesondere dann, wenn durch spätere numerische Studien aufwendige Versuchreihen ersetzt werden sollen. Eine Gegenüberstellung von Rechnung und Versuch [8] ist in Bild 3 gezeigt, wobei diese gute Übereinstimmung unter der Annahme der Koiter-Verfestigung und Verwendung des Crossed-triangle-Elements erzielt wurde. Alle numerischen Simulationen konnten mit bis zu 10 Inkrementstritten durchgeführt werden, wobei nur jeweils wenige Iterationen zur Erfüllung des Gleichgewichts erforderlich waren.

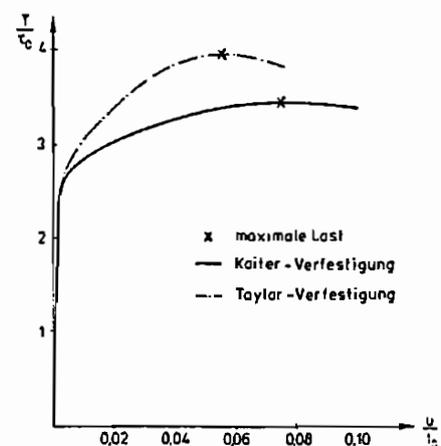


Bild 1: Zugversuch-Studie zum Verfestigungsmodell

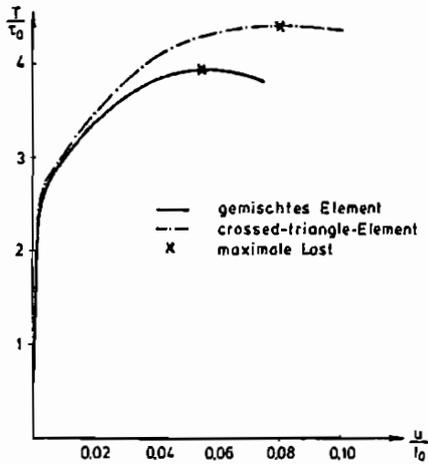


Bild 2: Zugversuch-Studie zum finiten Element

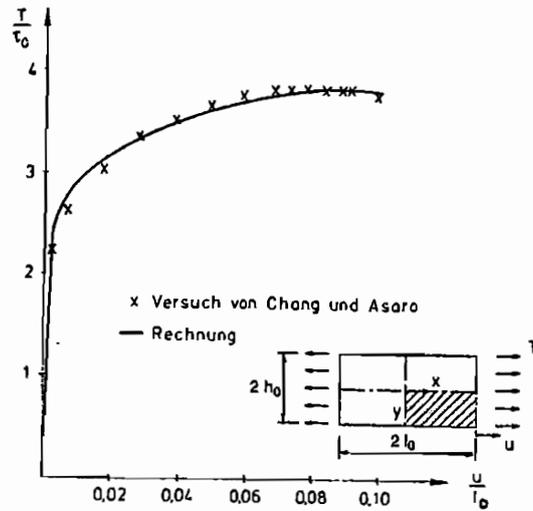


Bild 3: Zugversuch-Experiment und numerische Simulation

#### 4. Literatur

- [1] Lee, E.H., Elastic-plastic deformations at finite strains, *J. Appl. Mech.* 36, 1-6 (1969).
- [2] Hill, R., Havner, K.S., Perspectives in the mechanics of elastoplastic crystals, *J. Mech. Phys. Solids* 30, 5-22, (1982).
- [3] Hill, R., Rice, J., Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at arbitrary strain, *J. Mech. Phys. Solids* 20, 401-413, (1972).
- [4] Asaro, R. J., Micromechanics of crystals and polycrystals, *Adv. Appl. Mech.* 23, 1-115, (1983).
- [5] Nemat-Nasser, S., Li, Y.-F., A new explicit algorithm for finite-deformation elastoplasticity and elastoviscoplasticity: performance evaluation, *Comp. Struct.* 44, 937-963, (1992).
- [6] Rashid, M. M., Nemat-Nasser, S., Modeling very large plastic flows at very large strain rates for large-scale computation, *Comp. Struct.* 37, 119-132, (1990).
- [7] Simo, J.C., Taylor, R.L., Pister, K. S., Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 51, 177-208, (1985).
- [8] Chang, Y. W., Asaro, R. J., An experimental study of shear localization in aluminium-copper single crystals, *Acta Metall.* 29, 241-257, (1981).
- [9] Peirce, D., Asaro, R. J., Needleman, A., An analysis of nonuniform and localized deformation in ductile single crystals, *Acta Metall.* 30, 1087-1119, (1982).

## AN IMPLICIT INTEGRATION ALGORITHM FOR FINITE DEFORMATION SINGLE CRYSTAL PLASTICITY

Paul Steinmann & Erwin Stein

*Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Germany*

### INTRODUCTION

A family of implicit constitutive algorithms for ductile single (fcc) crystal viscoplasticity is outlined following the developments in [3]. Thereby, single crystals are modelled following the traditional lines of the finite deformation constitutive framework for crystal slip plasticity, see e.g. [1] among others. Thereby, we consider a classical power law type rate dependent viscoplastic relation based on the SCHMID law together with an associated TAYLOR type hardening law. Issues of accuracy and conservation of plastic incompressibility are examined. An examples demonstrating the performance of the proposed strategy at the local constitutive level is given.

### THE INTEGRATION ALGORITHM

In this section we focus on the incremental algorithmic counterpart of the inelastic constitutive model. The set of equations to be integrated over a finite time step consists of the flow rule

$$L_p = \sum_{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha} M^{\alpha} \otimes N^{\alpha} = \sum_{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha} Z^{\alpha} \quad \text{with} \quad L_p = \dot{F}_p \cdot F_p^{-1} \quad (1)$$

together with the viscoplastic evolution law for the shear rate on slip system  $\alpha$

$$\dot{\gamma}^{\alpha} = \dot{\gamma}_0 \operatorname{sgn}(\tau^{\alpha}) \left| \frac{\tau^{\alpha}}{g} \right|^{\kappa} \quad \text{with} \quad \tau^{\alpha} = [C_e \cdot \Sigma_p] : Z^{\alpha}. \quad (2)$$

The hardening law is stated in closed form which corresponds to isotropic TAYLOR hardening

$$g(\gamma) = \tau_0 + [\tau_{\infty} - \tau_0] \tanh \left( \frac{h_0 \gamma}{\tau_{\infty} - \tau_0} \right) \quad \text{with} \quad \dot{\gamma} = \sum_{\alpha} |\dot{\gamma}^{\alpha}| \quad (3)$$

Within an incremental time stepping procedure the solution for the plastic deformation gradient is advanced in time via

$${}^{n+1}F_p = \exp(\Lambda) \cdot {}^nF_p = \bar{F}_p \cdot {}^nF_p \quad \text{with} \quad \Lambda = \sum_{\alpha} \Delta \gamma^{\alpha} Z^{\alpha}. \quad (4)$$

Here, we introduced the algorithmic flow direction  $\Lambda$  and the incremental algorithmic plastic deformation gradient  $\bar{F}_p$ . The tensor exponential of the algorithmic flow direction defines a map from the set of deviatoric tensors onto the group of isochoric tensors  $\exp(\bullet) : \operatorname{sl}(3) \rightarrow \operatorname{SL}(3)$  and has the important property of conserving the plastic volume  $J_p = \det F_p = 1$ . The tensor exponential has recently been extensively applied within isotropic multiplicative elastoplasticity based on the spectral representation of symmetric tensors, e.g. [2] among many others. However, crystal plasticity is anisotropic and the algorithmic flow direction is nonsymmetric. This leads to severe difficulties for the evaluation of the tensor exponent and especially its derivative with respect to its argument. In order to bypass these difficulties in the following, the tensor exponent is approximated by the one parameter family of integrators which result from applying the generalized midpoint rule to the generating equation  $L_p = \Lambda$

$$\exp(\Lambda) \approx [I - \theta \Lambda]^{-1} \cdot [I + [1 - \theta] \Lambda] \doteq \bar{F}_p. \quad (5)$$

This set of integrators contains a number of wellknown methods. Firstly, by setting  $\theta = 1$  the flow rule is integrated with the fully implicit first order accurate EULER backward method to give

$${}^{n+1}F_p = [I - A]^{-1} \cdot {}^nF_p. \quad (6)$$

Secondly,  $\theta = \frac{1}{2}$  renders the first PADÉ approximation to the tensor exponent which corresponds to the second order accurate midpoint rule

$${}^{n+1}F_p = [I - \frac{1}{2}A]^{-1} \cdot [I + \frac{1}{2}A] \cdot {}^nF_p. \quad (7)$$

Finally, by setting  $\theta = 0$  the conditionally stable EULER forward method, frequently used in the literature, please refer to the references in [3], is retrieved

$${}^{n+1}F_p = [I + A] \cdot {}^nF_p. \quad (8)$$

Since plastic flow is assumed to conserve the plastic volume, i.e.  $L_p : I = 0$ , the integration algorithm has to preserve plastic incompressibility, which is exactly satisfied for  $\det \bar{F}_p = \bar{J}_p = 1$ . After some straightforward manipulations taking into account  $L_1 = A : I = 0$  we arrive at

$$\bar{J}_p = \frac{1 - [1 - \theta]^2 L_2 + [1 - \theta]^3 L_3}{1 - \theta^2 L_2 - \theta^3 L_3} \doteq 1 \quad \text{with} \quad L_2 = \frac{1}{2} A : A, \quad L_3 = \det A. \quad (9)$$

For planar double slip  $A$  defines a rank two tensor with  $\det A = 0$ . Therefore, setting  $\theta = \frac{1}{2}$  renders the only member of the above family of integration algorithms which exactly conserves the plastic volume. In a general case of multiple slip with  $\det A \neq 0$  a plastic volume preserving algorithm is designed by solving

$$[2\theta - 1]L_2 + [1 - 3\theta + 3\theta^2]L_3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \frac{L_2}{L_3} \pm \sqrt{\left[\frac{1}{3} \frac{L_2}{L_3}\right]^2 - \frac{1}{12}} \quad (10)$$

The solution of this equation renders an optimal adaption of the integration algorithm to the constraint  $\bar{J}_p = 1$ . With these preliminaries at hand the elastic right CAUCHY-GREEN deformation tensor  $C_e$  follows straightforward

$${}^{n+1}C_e = {}^{n+1}F_p^{-t} \cdot {}^{n+1}C \cdot {}^{n+1}F_p^{-1} \quad (11)$$

Under the assumption of an elastically stiff response of metals the 2. PIOLA-KIRCHHOFF stress in  $B_p$  is given by the hyperelastic isotropic ST. VENANT relation

$${}^{n+1}\Sigma_p = {}^{n+1}\delta_I I + \mu {}^{n+1}C_e \quad \text{with} \quad {}^{n+1}\delta_I = \frac{1}{2} \lambda [{}^{n+1}C_e : I - 3] - \mu. \quad (12)$$

Additionally, the remaining evolution equations for the shear rates on the slip systems  $\alpha$  are integrated fully implicitly to obtain

$${}^{n+1}\gamma^\alpha = {}^n\gamma^\alpha + \Delta\gamma^\alpha \quad \text{with} \quad \Delta\gamma^\alpha = \Delta\gamma_0 \text{sgn}({}^{n+1}\tau^\alpha) \left| \frac{{}^{n+1}\tau^\alpha}{{}^{n+1}g} \right|^\kappa. \quad (13)$$

Here the sum of the accumulated slip strains on all slip systems, i.e. the hardening variable, is computed as

$${}^{n+1}\gamma = {}^n\gamma + \Delta\gamma \quad \text{with} \quad \Delta\gamma = \sum_\alpha |\Delta\gamma^\alpha|. \quad (14)$$

Finally the system of equations  $R^\alpha = 0$  has to be solved iteratively for the unknown  $\Delta\gamma^\alpha$  with

$$R^\alpha = -\Delta\gamma^\alpha + \Delta\gamma_0 \text{sgn}({}^{n+1}\tau^\alpha) \left| \frac{{}^{n+1}\tau^\alpha}{{}^{n+1}g} \right|^\kappa. \quad (15)$$

## EXAMPLE : SIMPLE SHEAR

To assess the performance and the accuracy of the proposed integration algorithm the case of simple shear of a crystal with planar double slip kinematic is examined in detail. To this end, the deformation history is applied in a number of time steps  $n$  with  $n = 10, n = 100$  and  $n = 1000$  to achieve a maximum amount of shear  $\epsilon_{max}$  where the deformation gradient has the following representation in terms of the fixed background coordinate system with base vectors  $e_i$

$$F = I + \epsilon e_1 \otimes e_2 \quad \text{with} \quad 0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{max}. \quad (16)$$

The material parameters model an Al-Cu alloy with LAMÉ constants  $\lambda = 35104.88 N/mm^2$  and  $\mu = 23427.25 N/mm^2$ , initial shear yield stress  $\tau_0 = 60.84 N/mm^2$ , saturation strength  $\tau_\infty = 109.51 N/mm^2$ , initial hardening rate  $h_0 = 541.48$ , rate sensitivity parameter  $\kappa = 200$  and reference shear strain rate  $\dot{\gamma}_0 = 10^{-3}$ . The deformation history is applied with a shear velocity  $\dot{\epsilon} = 1$  until a maximum amount of shear  $\epsilon_{max} = 5$  is obtained. For the kinematics of the crystal we assume the planar double slip model where the initial slip planes are symmetrically oriented about the  $e_2$  direction with  $e_1 \cdot M^\alpha = \pm \frac{1}{2}$ , i.e. the angle enclosed by the  $e_2$  axis and the slip directions  $M^\alpha$  is  $\pm 30^\circ$ .

To focus on the accuracy of the integration algorithms the components  $\tau_{11}, \tau_{22}$  and  $\tau_{12}$  of the KIRCHHOFF stress computed for  $n = 10, 100, 1000$  timesteps with integration algorithms  $\theta = 0, \frac{1}{2}, 1$  are presented in Fig. 1 to Fig. 3. It becomes obvious that for this application both, the explicit EULER forward and the implicit EULER backward method, render extremely erranous results for large time steps. The sign and the amount of  $\tau_{11}$  and  $\tau_{22}$  are computed completely wrong. Even the  $n = 1000$  timestep solution does not reproduce the excellent results of the midpoint rule which in contrast produces nearly accurate results even with  $n = 10$  timesteps. Sign and amount of  $\tau_{11}$  and  $\tau_{22}$  are computed more or less exactly with  $n = 10$  timesteps, only the details of the initial phase can not be resolved. The explanation for this apparently weird behaviour is the conservation property for the plastic volume of the algorithms. It was stated above that the only member of the family of integration algorithms which exactly preserves plastic incompressibility is the midpoint rule, i.e. in contrast to the explicit and the implicit EULER methods the midpoint rule renders exactly  $J_p^{-1} = 1$  throughout all calculations.

## SUMMARY AND CONCLUSION

An implicit strategy for the numerical simulation of deformation processes of ductile single crystals has been proposed. The integration of the constitutive equations is performed by a simple and reliable algorithm. One of the main features of the constitutive algorithm is its versatility to adapt to the constraint of plastic incompressibility. For planar double slip this condition is exactly satisfied if the tensor exponent of the algorithmic flow direction is approximated by the second order midpoint rule. The dramatic influence on the accuracy of the stress predictions within a given deformation history has been demonstrated for the example of simple shear.

## REFERENCES

- [1] ASARO R.J., [1983], "Crystal Plasticity", *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol. 50, pp. 921-934.
- [2] MIEHE C. & E. STEIN, [1992], "A Canonical Model of Multiplicative Elasto-Plasticity. Formulation and Aspects of the Numerical Implementation", *Eur. J. Mech. A/Solids*, Vol. 11, pp. 25-43.
- [3] STEINMANN P. & E. STEIN, [1994], "On the Numerical Treatment and Analysis of Finite Deformation Ductile Single Crystal Plasticity", submitted to *Comp. Meth. Appl. Mech. Engr.*

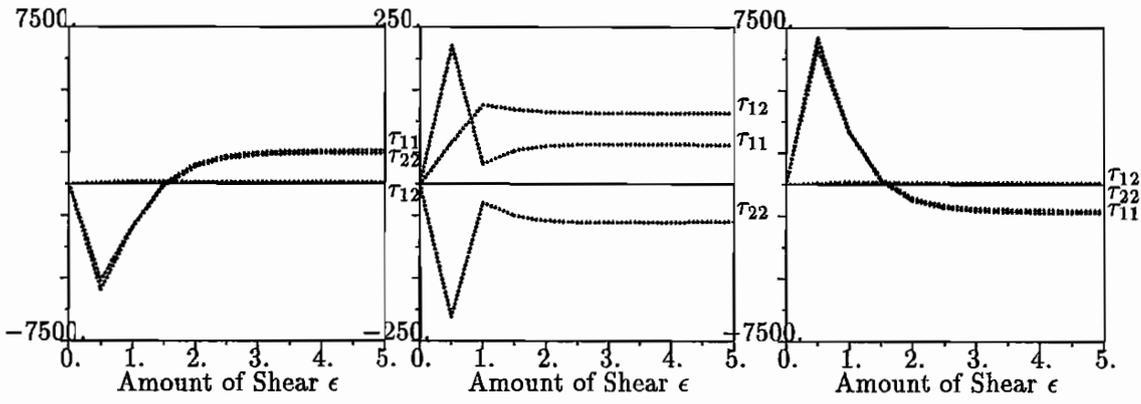


Figure 1: Simple Shear : Kirchhoff Stress for  $\theta = 0, \frac{1}{2}, 1$  and  $n = 10$  Timesteps

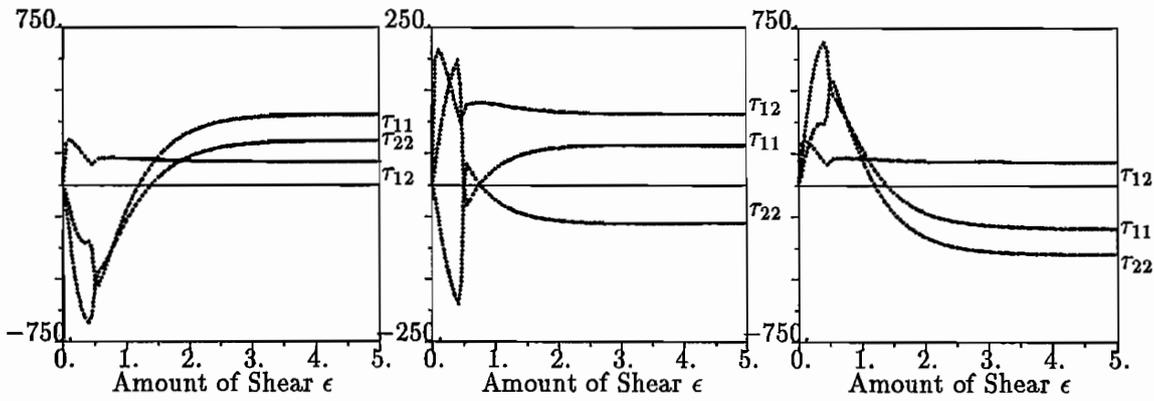


Figure 2: Simple Shear : Kirchhoff Stress for  $\theta = 0, \frac{1}{2}, 1$  and  $n = 100$  Timesteps

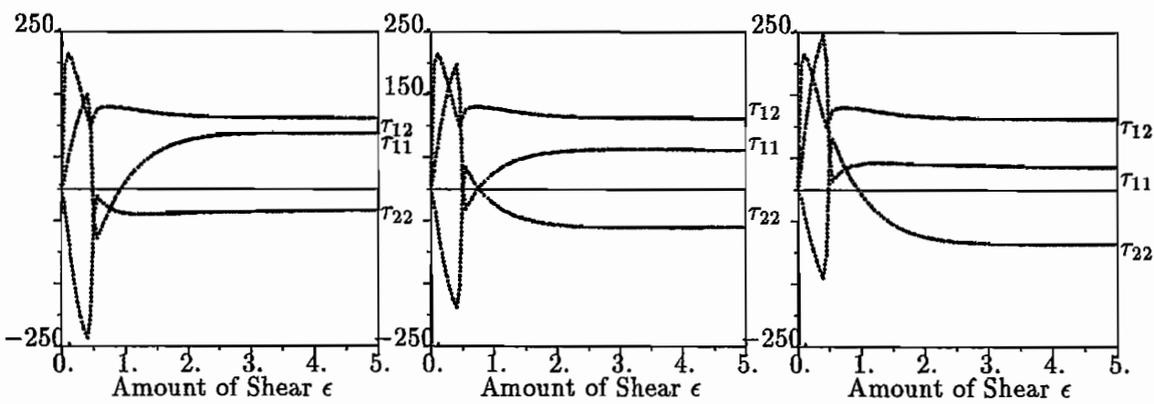


Figure 3: Simple Shear : Kirchhoff Stress for  $\theta = 0, \frac{1}{2}, 1$  and  $n = 1000$  Timesteps

## Numerische Simulation schnell laufender Risse in viskoplastischen Materialien

C. Leppin, P. Wriggers  
Institut für Mechanik, Technische Hochschule Darmstadt

### Problemstellung

Nicht zuletzt wegen der z.T. katastrophalen Folgen spielt das Versagen von Bauteilen durch Ausbreitung von Rissen in vielen Bereichen der Technik eine große Rolle. In der Bruchmechanik hat man verschiedene Parameter und Kriterien entwickelt, um diese Versagensvorgänge mechanisch zu beschreiben. Besonderes Interesse liegt hierbei auf den Fragen nach der Rißinitiierung und nach dem Wachstumsverhalten eines Risses.

Dynamisch belastete schnell laufende Risse wurden bisher fast ausschließlich linear elastisch behandelt. Versuche legen jedoch nahe, daß viskoplastische Effekte eine Rolle spielen. Durch die Verzerrungssingularität an der Rißspitze kommt es darüber hinaus im Nahfeld der Rißspitze zu großen Deformationen [Achenbach], die bei schnellem Rißfortschritt lokal sehr große Deformationsgeschwindigkeiten zur Folge haben.

Es wird hier ein Finite Element Modell vorgestellt, daß den schnellen Rißfortschritt in dynamisch belasteten Körpern numerisch simuliert und dabei viskoplastisches Stoffverhalten berücksichtigt. Es wird das zeitabhängige Verhalten eines Risses von der Rißinitiierung bis zur Entwicklung instabiler Rißfortschritts modelliert. Die Betrachtung beschränkt sich auf Körper einfacher Geometrie, wie man sie bei gängigen Probenkörpern der Versuchstechnik vorfindet, so daß die Richtung der Rißentwicklung als bekannt angenommen werden kann.

### Modell

In die Formulierung des gestellten Anfangsrandwertproblems sind Trägheitsterme mit eingeschlossen. Als Stoffgesetz dient ein einfaches bilineares viskoplastisches Materialgesetz mit isotroper Verfestigung vom Perzyna Typ. Die gewählte Fließregel hat die Form

$$\dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\langle f(\sigma) \rangle}{\eta} \frac{dev(\sigma)}{|dev(\sigma)|}$$

mit der Fließfunktion

$$f(\sigma) = |dev(\sigma)| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_{yo} + H\alpha).$$

Das eigentlich dreidimensionale Problem wird im Modell, wie es in der Bruchmechanik oft üblich ist, unter der Annahme eines ebenen Verzerrungszustands auf ein zweidimensionales Problem vereinfacht. Weiterhin wird angenommen, daß der Einfluß der geometrischen Nichtlinearitäten in der Bruchprozeßzone auf den Gesamtprozeß vernachlässigbar ist.

Als einfaches Bruchkriterium wird der auf die aktuelle Rißspitze bezogene Wert  $\delta_s$  gewählt, da Integralkriterien gegenüber einfachen Verschiebungskriterien bei inelastischem Materialverhalten keine zwingenden Vorteile haben [Atluri].

### Finite Element Formulierung

Für das Kontinuum wurde eine 2D-Enhanced-Strain-Formulierung [Simo] gewählt, die sich allgemein durch ein exzellentes Verformungsverhalten auszeichnet, so daß selbst bei groben Netzen und bei stark verzerrten Elementen hohe Genauigkeiten erreicht werden. Die Formulierung ist unabhängig vom Materialgesetz, so daß sich diesbezüglich keine Einschränkungen ergeben.

Zur Modellierung laufender Risse gibt es in der Finite Element Methode verschiedene Möglichkeiten. Beispiele hierfür sind auf die Rißspitze transformierte FE-Netze oder adaptiven Verfahren, bei denen dem Rißfortschritt entsprechend nach jedem Zeitschritt neue Freiheitsgrade eingeführt werden (z.B. [Östlund] bzw. [Könke]).

Im hier vorgestellten Modell wurde ein Quasikontaktalgorithmus gewählt. Die beim Rißfortschritt neu entstehenden Freiheitsgrade werden hierbei (vgl. [Brickstad]) durch das Relaxieren von Knoten wiedergegeben. Das für diesen Zweck entwickelte 2x2 Knoten-auf-Knoten-Rißelement wird in Richtung des Risses in die Diskretisierung eingefügt, so daß die Rißrichtung, wie bereits vorausgesetzt wurde, durch die Rißelemente vorgegeben ist.

Das Rißelement hat zwei Zustände: zunächst ist es geschlossen und verbindet zwei benachbarte Teilgebiete des Körpers starr miteinander. Kommt es zum Reißen, so verhindert das Rißelement als Kontaktelement das Überschneiden der neu entstandenen Rißufer. Zur Erfüllung der jeweiligen Nebenbedingungen bezüglich der Knotenrelativverschiebungen, wird ein Penalty-Verfahren verwendet. In jedem Gleichgewichtszustand wird das Bruchkriterium  $\delta_g < \delta_{krit}$  herangezogen, um den Zustand des aktuellen Rißelements an der Rißspitze zu überprüfen.

### Numerisches Beispiel

Es wurde das Verhalten einer CCT-Probe aus Aluminium unter zügiger und stoßartiger Verschiebungsbelastung untersucht (siehe Abb.1). Dabei wurde ein Finite Element Netz mit gradueller Verfeinerung zum Riß gewählt, das aus  $21 \times 14$  Elementen besteht.

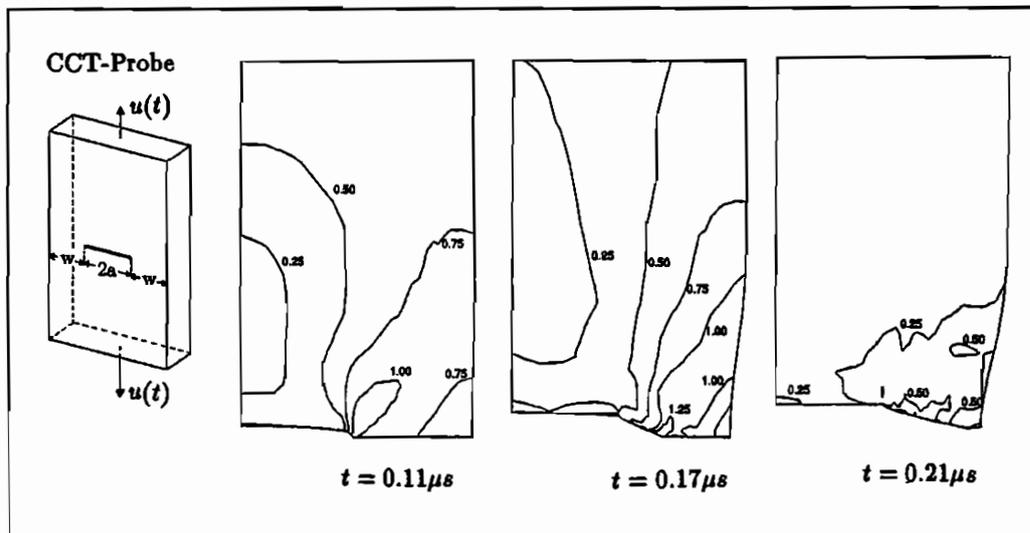
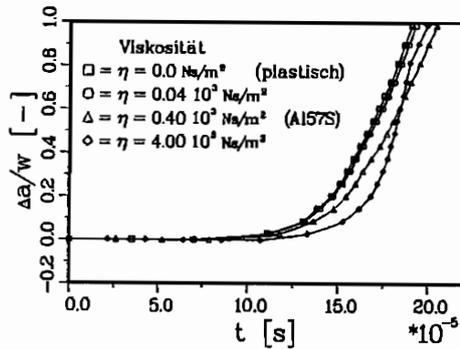
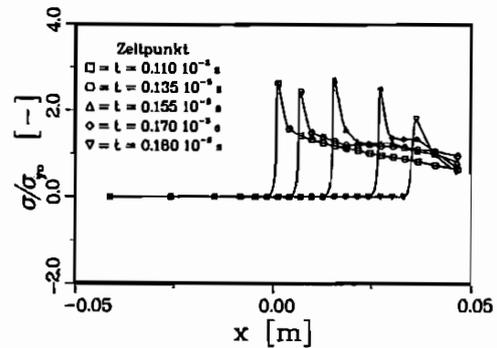


Abb.1: Verteilung der relativen v. Mises'schen Vergleichsspannung  $\sigma_v/\sigma_{y0}$  über ein Viertel der CCT-Probe vom Zeitpunkt der Rißinitiierung bis zum vollständigen Bruch ( $\dot{u}(t) = \dot{u}_0 = 3.5m/s$ ; Verschiebungen 20-fach überhöht)



**Abb.2:** Bewegung der Rißspitze bei verschiedenen Viskositätsparametern ( $\dot{u}(t) = \dot{u}_0 = 3.5 \text{ m/s}$ )



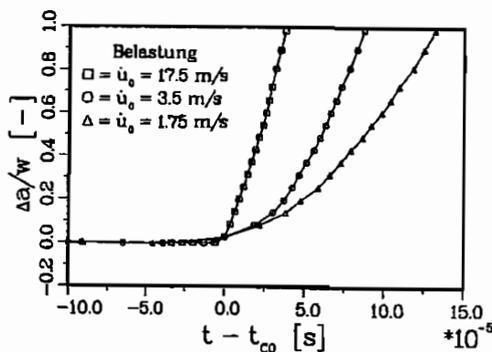
**Abb.3:** Verlauf der Spannung auf der Rißachse ( $\dot{u}(t) = \dot{u}_0 = 3.5 \text{ m/s}$ ;  $\eta = 0.4 \cdot 10^3 \text{ Ns/m}^2$ )

Wenn die Belastung durch die an der Rißspitze eintreffende Welle groß genug ist, kommt es zur Initiierung des Rißfortschritts. Die Rißspitze beschleunigt dann je nach Material und Belastungsgeschwindigkeit auf Geschwindigkeiten in der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit (vgl. Abb.2 u. 4). Mit steigender Belastungsgeschwindigkeit verhält sich das Material zunehmend elastisch.

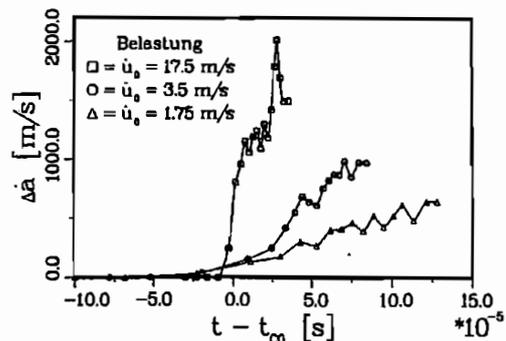
Bei sehr hohen Belastungsgeschwindigkeiten können in der Probe plastische Wellen auftreten. Hier kann nach einer Rißinitiierung oft ein Rißarrest beobachtet werden. Wie in Abb.5 zu sehen ist, treten bei solchen hochdynamischen Vorgängen häufig auch Druckspannungen in der Rißachse auf, so daß es zum Kontakt der Rißflanken kommt.

#### Ausblick

Rißinitiierung, Beschleunigung der Rißspitze und auch Rißarrest konnten mit dem vorgestellten Modell simuliert werden und stimmen im Vergleich mit analytischen Untersuchungen qualitativ gut überein. Eine vergleichende Aussage im Bezug auf experimentelle Ergebnisse ist aber schwierig, da diese nur in sehr eingeschränktem Maße vorliegen.



**Abb.4:** Bewegung der Rißspitze bei verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten ( $\eta = 0.4 \cdot 10^3 \text{ Ns/m}^2$ )



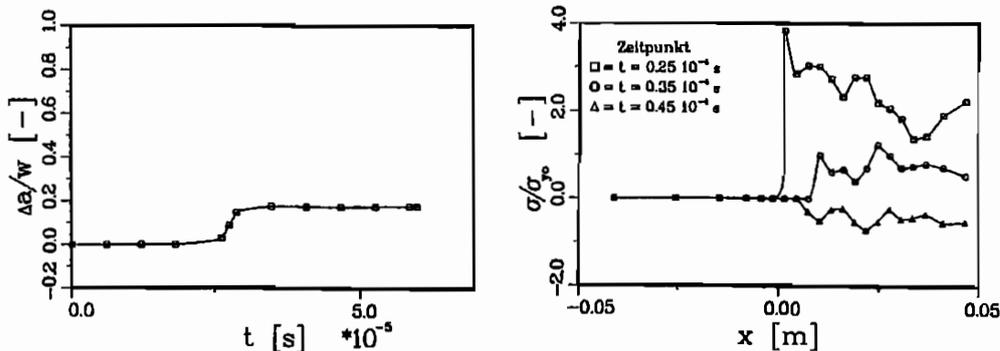


Abb.5: Rißarrest bei stoßartiger Belastung. Bewegung der Rißspitze (links); Verlauf der Spannung auf der Rißachse zu verschiedenen Zeitpunkten (rechts)

Die Schwäche des Modells liegt vor allem im Bruchkriterium. Bisher existieren keine Bruchkriterien, mit denen das dynamische Bruchverhalten vikoelastischer Materialien in befriedigender Weise wiedergegeben werden kann.

Bei den Ergebnissen handelt es sich bewusst um Näherungslösungen bei denen der singuläre Charakter der Rispitzenfelder nicht berücksichtigt wird. Die Zulässigkeit der Vernachlässigung des Einflusses nichtlinearer Geometrie sollte noch überprüft werden. Darüberhinaus sollten komplexere vikoelastische Materialgesetze betrachtet werden, mit denen das hochdynamische Geschehen in der Bruchprozesszone besser wiedergegeben werden kann.

#### Literatur

- 1 S.N. Atluri, T. Nishioka, M. Nakagaki, Incremental Path-Independent Integrals in Inelastic and Dynamic Fracture Mechanics, *Eng. Fract. Mech.* 20, 209-244 (1984)
- 2 J.D. Achenbach, N. Nishimura, J.C. Sung, Crack-Tip Fields in a Viscoplastic Material, *Int. J. Solids Structures* 23, 1035-1052, (1987)
- 3 B. Brickstad, A Viscoplastic Analysis of Rapid Crack Propagation Experiments in Steel, *J. Mech. Phys. Solids* 31, 307-327, (1983)
- 4 C. Knke, Kopplung eines mikromechanischen Porenwachstumsmodells mit einem Makrorimodell zur Beschreibung der Schädigung in duktilen Materialien, Mitteilung Nr.94-4, Ruhr-Uni. Bochum Inst. f. Konstruktiven Ingenieurbau, (1994)
- 5 S. stlund, On numerical modeling and fracture criteria of dynamic elastic-viscoplastic crack growth, *Int. J. of Fract.* 44, 283-299, (1990)
- 6 J.C. Simo, M.S. Rifai A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 29, 1595-1638, (1990)

# Numerische Behandlung von Homogenisierungsprozessen zur Beschreibung von Mikro – Makro – Übergängen

Jörg Schröder, Christian Miede

Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik  
Universität Hannover  
30167 Hannover, Appelstraße 9A, Germany

## Abstract

In der vorliegenden Arbeit wird ein Konzept zur Ermittlung makroskopischer Moduli basierend auf einer direkten Auswertung vorgegebener Mikrostrukturen vorgestellt. Hierbei wird sowohl das makroskopische als auch das mikroskopische Randwertproblem im Rahmen der Variationsrechnung mittels der Finite-Elemente-Methode berechnet. Der physikalische, makroskopische Körper sei im Mittel (statistisch) homogen.

## 1. Einleitung

Bei der Berechnung heterogener Materialien wird mittels spezieller Homogenisierungsprozesse der heterogene Körper durch ein homogenisiertes Kontinuum ersetzt. Dieser Zugang ist dann möglich, wenn die Skale der Belastungs- und Randbedingungsschwankungen signifikant größer ist als die charakteristische Größe der Inhomogenitäten.

Bei der Beschreibung heterogener Kontinua unterscheiden wir zwischen der makroskopischen Skale, charakterisiert durch  $\bar{\mathbf{X}}$ , in welcher die Größe der Heterogenitäten klein ist, und der mikroskopischen Skale, charakterisiert durch  $\mathbf{X}$ , welche die Skale der Heterogenitäten darstellt. Im Rahmen einer makroskopischen Beschreibung gehen wir von einem *statistisch homogenen Material* aus, womit die Definition eines *repräsentativen Volumen-Elements* (RVE) möglich ist. Grundlegende Arbeiten auf diesem Gebiet gehen auf SUQUET [1985], SANCHEZ-PALENCIA [1980], BENSOUSSAN, LIONS & PANICOLAOU [1978], HILL [1963], WILLIS [1981] u.a. zurück.

## 2. Verknüpfung von Mikro- und Makrostruktur

In dem betrachteten makroskopischen Körper  $\mathcal{B}$  betrachten wir in jedem Punkt  $\bar{\mathbf{X}}$  zwei Familien von Variablen, die makroskopischen und mikroskopischen Variablen.  $\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}})$ ,  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{X}})$ ,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{X}})$  charakterisieren das makroskopische Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungsfeld wobei die makroskopischen Verzerrungen  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{X}}) := \text{sym}[\nabla_{\bar{\mathbf{X}}}\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{X}})]$  als der symmetrische Anteil des makroskopischen Verschiebungsfeldgradienten definiert sind.  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X})$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X})$  stellen das mikroskopische Verschiebungsfeld, Verzerrungsfeld und Spannungsfeld dar, mit den mikroskopischen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}) := \text{sym}[\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}(\mathbf{X})]$ . Die Verknüpfung der mikroskopischen und makroskopischen Feldgrößen erfolgt durch die Mittelungsprozedur

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{X}}) := \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{X}; \bar{\mathbf{X}}) d\mathcal{V} \quad (1)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\mathbf{X}}) := \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}; \bar{\mathbf{X}}) d\mathcal{V} \quad (2)$$

über das Gebiet  $\mathcal{V}$  des RVE, womit die makroskopischen Variablen als Funktion der mikroskopischen Variablen gegeben sind.

### 3. Randbedingungen der Mikrostruktur

Im Rahmen der Finite-Elemente-Berechnungen ist das Verschiebungsfeld aus dem letzten Iterationsschritt bekannt. Dieses geht lokal als Verschiebungsrandbedingung in die Mikrostrukturebene ein. Bild 1 stellt den statistisch homogenen makroskopischen Körper  $B$  dar, welcher in jedem Punkt  $\bar{\mathbf{X}}$  die zugehörige aktuell deformierte Mikrostruktur aufspannt, die gestrichelten Linien stellen die Referenz-Mikrostruktur dar.

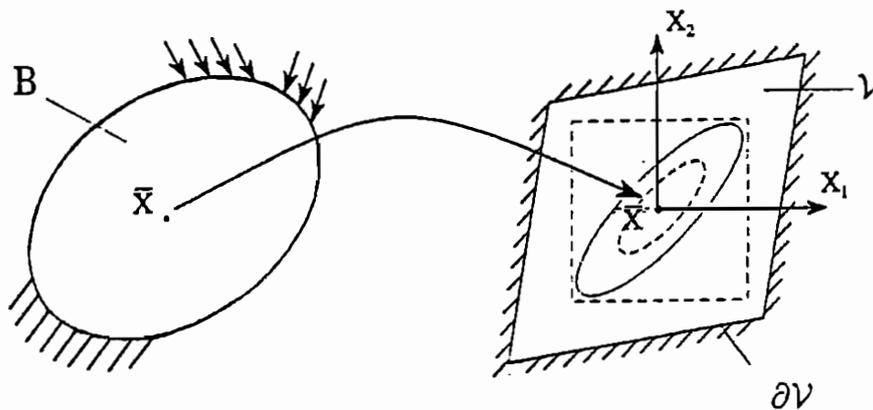


Bild 1: Verknüpfung von Makro- und Mikrostruktur

Ausgehend von der Mittelungsprozedur der makroskopischen Verzerrungen und den infinitesimalen mikroskopischen Verzerrungen  $\epsilon(\mathbf{X}) := \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i(\mathbf{X})}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{X})}{\partial X_i} \right]$  erhält man nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes die makroskopischen Verzerrungen als Randintegral über die zugeordnete Mikrostruktur in dem betreffenden Punkt  $\bar{\mathbf{X}}$  der Makro-Skala zu

$$\bar{\epsilon}(\bar{\mathbf{X}}) := \frac{1}{V} \int_{\partial \mathcal{V}} \frac{1}{2} [ u_i(\mathbf{X}) n_j + u_j(\mathbf{X}) n_i ] d\partial \mathcal{V} \quad . \quad (3)$$

Der Verschiebungsansatz

$$u_i(\mathbf{X}) = \bar{\epsilon}_{ij}(\bar{\mathbf{X}}) X_j \quad \text{auf } \partial \mathcal{V} \quad (4)$$

auf dem Rand der Mikrostruktur erfüllt die Gleichung (3), da  $\bar{\epsilon}(\bar{\mathbf{X}})$  auf der Mikroebene keine Funktion der Parameter  $\mathbf{X}$  ist.

### 4. Makroskopische konstitutive Strukturen

Die makroskopische Randwertaufgabe wird mittels der Finite-Elemente Methode ausgehend vom Prinzip der (makroskopischen) virtuellen Arbeiten

$$\bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{u}}) := \int_B \delta \bar{\epsilon} : \bar{\sigma} dV - \bar{\mathbf{G}}_{ext} = 0 \quad (5)$$

berechnet. Im Rahmen der iterativen Lösungsprozedur mit dem Newton-Raphson-Verfahren wird die konsistente Linearisierung des makroskopischen Randwertproblems benötigt

$$\bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{u}}) - \int_B \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\mathbf{C}} : \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \mathbf{0} \quad , \quad (6)$$

was auf folgende makroskopische konstitutive Strukturen führt

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}; \text{Mikrostate}) \quad ; \quad \bar{\mathbf{C}} = \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}; \text{Mikrostate}) \quad . \quad (7)$$

Eine analytische Berechnung des Tangentenoperators  $\bar{\mathbf{C}}$  ist bis auf wenige triviale Fälle nicht mehr möglich, so daß der Gradient numerisch bestimmt werden muß. Desweiteren müssen heterogene Materialien, bestehend aus mehreren hyperelastischen Phasen die Symmetrien  $\bar{\mathbf{C}}_{ijkl} = \bar{\mathbf{C}}_{jikl} = \bar{\mathbf{C}}_{ijlk}$  und  $\bar{\mathbf{C}}_{klij} = \bar{\mathbf{C}}_{ijkl}$  (siehe z.B. BENVENISTE, DVORAK, CHEN (1990)) aufweisen, was bei Verfahren basierend auf Variationsprinzipien immer der Fall ist, im Gegensatz zu vielen halbanalytischen Homogenisierungsmodellen. Ausgehend von dem Algorithmus zur makroskopischen Spannungsberechnung

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\bar{\mathbf{X}})] := \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}; \bar{\mathbf{X}}) dV \quad (8)$$

und der Rate der makroskopischen Spannungen

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} := \bar{\mathbf{C}} : \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{C}} := \partial \bar{\boldsymbol{\sigma}} / \partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (9)$$

wird eine numerische Berechnung des Gradienten vorgenommen. Dies führt auf die Gleichungen

$$\bar{\mathbf{C}}_{ij(kl)} \approx \frac{1}{\epsilon} [ \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\epsilon}_{(kl)}) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) ] \quad , \quad (10)$$

wobei  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\epsilon}_{(kl)})$  gestörte makroskopische Spannungen charakterisieren, welche sich aus der Mittellingsprozedur des mikroskopischen Spannungsfeldes basierend auf den Randbedingungen

$$u_k(\mathbf{X}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\epsilon}_{ij(kl)}(\bar{\mathbf{X}}) X_j \quad \text{auf} \quad \partial V \quad (11)$$

mit dem Ansatz

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\epsilon}_{ij(kl)}(\bar{\mathbf{X}}) := \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}(\bar{\mathbf{X}}) + \epsilon \beta_{kl} \quad (12)$$

für das gestörte makroskopische Verzerrungsfeld ergeben.

### 5. Modellbeispiel: Elastisches 2-Phasen Verbundmaterial

An diesem einfachen Modellbeispiel soll das Konzept und die Vorgehensweise der vorgestellten numerischen Homogenisierungsprozedur an einem elastischen 2-Phasen Verbundmaterial erläutert werden. Das makroskopische Randwertproblem (Bild 2) ist ein eingespannter Zugstab mit der konstanten Belastung  $\sigma_0$ . Die zugehörige Mikrostruktur besteht aus einem Matrixmaterial ( $\kappa_M = 100 \text{ kN/cm}^2, \mu_M = 150 \text{ kN/cm}^2$ ) und einer unter  $45^\circ$  verlaufenden Faser ( $\kappa_F = 1000 \text{ kN/cm}^2, \mu_F = 1500 \text{ kN/cm}^2$ ). Die Materialkennwerte der einzelnen Phasen wurden so gewählt, daß sich die Querkontraktionszahl zu Null ergibt, um einen einfachen Deformationszustand zu erhalten. Bild 3 sind die Diskretisierung der Mikro- und Makrostruktur und die deformierte Makrostruktur zu entnehmen.

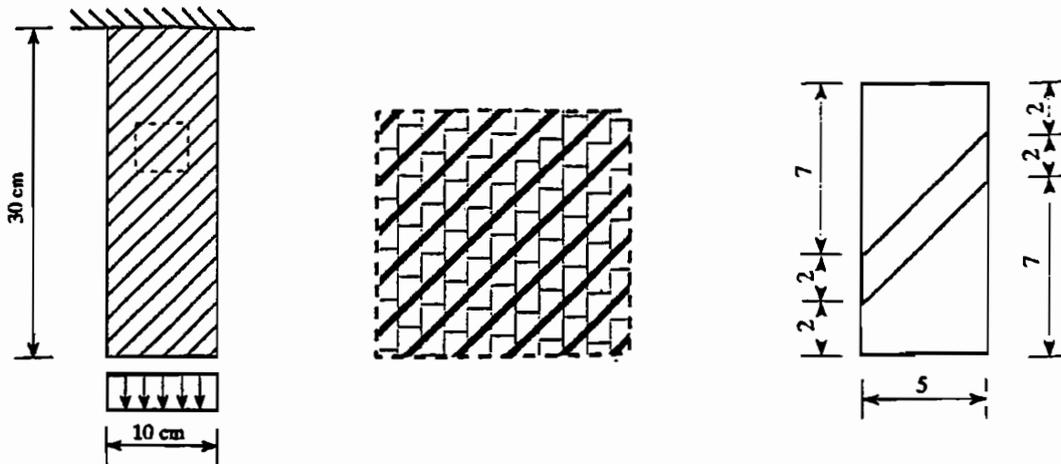


Bild 2: Makroskopisches Randwertproblem, Mikrostruktur und RVE

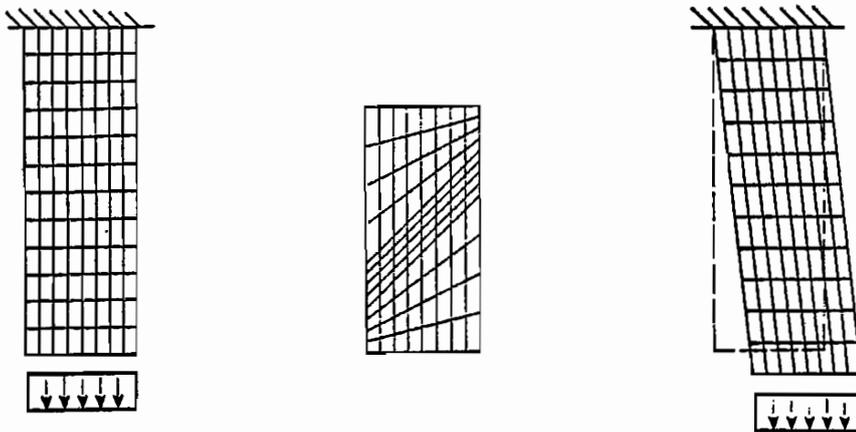


Bild 3: Diskretisierte Makro-, Mikrostruktur und deformierte Makrostruktur

## 6. Literatur

1. SUQUET, P.M.[1985], "Elements of Homogenization for inelastic solid mechanics" in: E. Sanchez-Palenzia; A. Zaoui (eds.), *Lecture Notes in Physics 272: Homogenization Techniques for Composite Media*, Springer Verlag, 193-278
2. HILL, R.[1963], "Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles", *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, 357-372
3. BENSOUSSAN, A.; LIONS, J.L.; PAPANICOLAOU, G. (eds.) [1978], *Asymptotic Analysis For Periodic Structures*, North-Holland Publishing Company Amsterdam, NY, Oxford
4. WILLIS, J. R. [1981], "Variational and Related Methods for the Overall Properties of Composites", in: Chia-Shun Yih (eds), *Advances in Applied Mechanics*, **21**, Academic Press

U. Gabbert, H. Köppe

## FINITE-ELEMENT-LÖSUNG GROSSER NICHTLINEARER PROBLEME DER GEOMECHANIK MITTELS DYNAMISCHER RELAXATION

### 1. Einleitung

Die numerische Simulation des Verhaltens von realen geotechnischen Systemen gewinnt hinsichtlich der Einhaltung von Sicherheitsvorschriften, einer gesicherten Lebensdauervorhersage, des Umweltschutzes usw. immer mehr an Bedeutung. Die Berücksichtigung vielfältiger nichtlinearer Materialeigenschaften, großen Verformungen, zeitlich veränderlichen Geometrien, Randbedingungen und Kräften beeinflussen wesentlich den numerischen Aufwand von solchen Analysen. Bei der geometrischen Komplexität von geotechnischen Strukturen stellen Systeme mit mehr als 1.000.000 Freiheitsgrade keine Seltenheit dar. Somit wird es fast unmöglich mit kompletten Systemmatrizen bei der Lösung zeitabhängiger nichtlinearer Problemstellungen zu arbeiten. Aus dieser Sicht bieten explizite Lösungsverfahren, trotz ihrer bedingten Stabilität, eine sinnvolle Alternative zu herkömmlichen FE- Strategien. Ein wesentlicher Vorteil expliziter Lösungsverfahren besteht darin, daß unter bestimmten Voraussetzungen eine direkte Proportionalität der Speicheranforderungen zur Freiheitsgradanzahl erreicht wird. Die Dynamische Relaxation ist ein solches Verfahren, welches sowohl für statische als auch für dynamische Probleme einen einheitlichen Lösungsalgorithmus bietet.

### 2. Grundgedanke der Dynamischen Relaxation (DR)

Zur numerischen Integration des Bewegungsdifferentialgleichungssystems (1) können

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} &= \mathbf{f}_{ext} \\ \dot{\mathbf{q}}(t = t_0) &= \dot{\mathbf{q}}_0 \\ \mathbf{q}(t = t_0) &= \mathbf{q}_0 \end{aligned} \quad (1)$$

explizite oder implizite Verfahren eingesetzt werden. Wesentliche Unterschiede bestehen im Berechnungsaufwand und in den Stabilitätseigenschaften. Implizite Algorithmen sind bei geeigneter Wahl der Integrationssteuergrößen in der Regel unbedingst stabil. Dadurch wird die Schrittweitengröße nur durch die Genauigkeitsansprüche des Nutzers an die Lösung und dem Aufwand für die im Zeitschritt notwendigen Iterationen bestimmt. Stabilitätskriterien, die von der größten im Modell auftretenden Eigenkreisfrequenz  $\omega_{max}$  bestimmt werden, führen zu starken Restriktion bei der Wahl der Integrationsschrittweite. Dieser Nachteil kann aber teilweise dadurch kompensiert werden, daß unter bestimmten Voraussetzungen auf den speicher- und rechenintensiven Aufbau der Systemmatrizen verzichtet werden kann. Zur konsequenten Nutzung expliziter Verfahren bei der Lösung statischer und quasistatischer Probleme müssen künstliche Beschleunigungs- und Dämpfungsterme definiert werden, so daß ein Differentialgleichungssystem in der Form von Gleichung (1) entsteht. Die Lösung der Bewegungsgleichungen im statischen Anwendungsfall ist ein iterativer Prozeß, in welchem die fiktiv eingeführten Massen- und Dämpfungsmatrizen  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{C}$  ihre physikalische Bedeutung verlieren und nur zur Steuerung der Iteration dienen.

Die in der Literatur als Dynamische Relaxation (DR) bezeichnete Technik verwendet zur numerischen Integration der Beziehungen (1) den Ansatz für das Zentrale-Differenzen-Verfahren (ZDM) (2).

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{q}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} - \mathbf{q}^{t-\frac{1}{2}\Delta t}) \\ \ddot{\mathbf{q}} &= \frac{1}{\Delta t} (\dot{\mathbf{q}}^{t+\frac{1}{2}\Delta t} - \dot{\mathbf{q}}^{t-\frac{1}{2}\Delta t}) \end{aligned} \quad (2)$$

Aus dem Stabilitätskriterium für die ZDM erhält man die kritische Schrittweite aus der Ungleichung

$$\Delta t_{krit} \leq \frac{2}{\omega_{max}} \quad (3)$$

$\omega_{max}$  - höchste Eigenkreisfrequenz

Das Einsetzen des Ansatzes (2) in die Gleichung (1), die Verwendung einer Diagonalisierungsvorschrift für die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und dem Zusammenhang  $\mathbf{C} = c \mathbf{M}$  führt dann auf  $n$  entkoppelte diskrete Gleichungen (4) für die Knotenfreiheitsgrade zur Bestimmung des unbekanntenen Zustandsvektors für das System.

$$\begin{aligned} \dot{q}_i^{t+\frac{1}{2}\Delta t} &= \frac{2-c\Delta t}{2+c\Delta t} \dot{q}_i^{t-\frac{1}{2}\Delta t} + \frac{2\Delta t}{m_{ii}(2+c\Delta t)} (f_{ext_i}^t - f_{int_i}^t) \\ q_i^{t+\Delta t} &= q_i^t + \dot{q}_i^{t+\frac{1}{2}\Delta t} \end{aligned} \quad (4)$$

Die fiktive Masse  $m_{ii}$  wird bei der DR aus dem Stabilitätskriterium für die Zentrale-Differenzen-Methode abgeschätzt (5).

$$m_{ii} \geq \frac{1}{4} \Delta t^2 \sum_{j=1}^n \|K_{ij}\| \quad (5)$$

Der in (4) enthaltene Dämpfungsparameter  $c$  wird bei der dynamischen Relaxation unter Annahme eines aperiodischen Schwingungsverhaltens mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten abgeschätzt (6).

$$c_i = 2 \sqrt{\frac{\mathbf{q}_i^T \mathbf{K} \mathbf{q}_i}{\mathbf{q}_i^T \mathbf{M} \mathbf{q}_i}} \quad (6)$$

### 3. Die Elementintegration

Aus Effektivitätsgründen werden die Elementbeziehungen der in Abb.1 dargestellten isoparametrischen 3D - Elemente mit trilinearen Ansatzfunktionen mittels einer 1 Punkt Regel ( $\xi_1=0, \xi_2=0, \xi_3=0$ ) numerisch integriert.

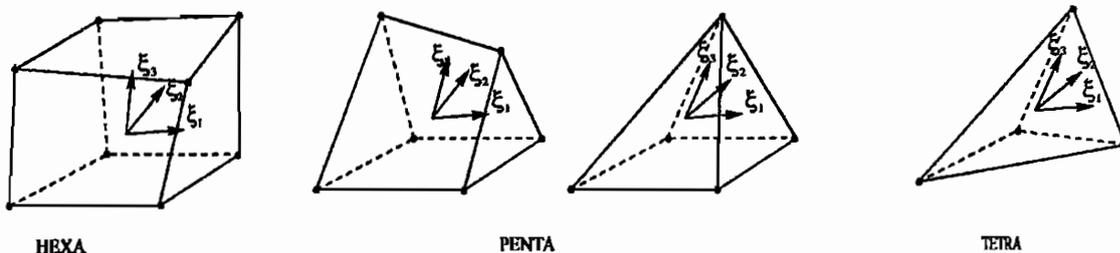


Abb. 1 3-D Elemente

Zur Unterdrückung von numerischen Instabilitäten, den sogenannten „Hourglass“-Effekten, die aus der Elementunterintegration resultieren, werden entsprechend eines Vorschlages von Flanagan/Belytschko /4/ sogenannte Anti-Hourglass-Kräfte definiert (7).

$$f_{\alpha}^{HG} = \int_V k D_{\gamma_{\alpha}}^T H D_{\gamma_{\alpha}} q dV \quad \alpha = 1, \dots, 4$$

- H** - Hookesche Matrix (7)  
**q** - Verschiebungsvektor  
**k** - Konstante

Diese Kräfte wirken den in Abbildung 2 für die in x-Richtung dargestellten Nullenergiemodes entgegen und gewährleisten eine numerisch stabile Lösung .

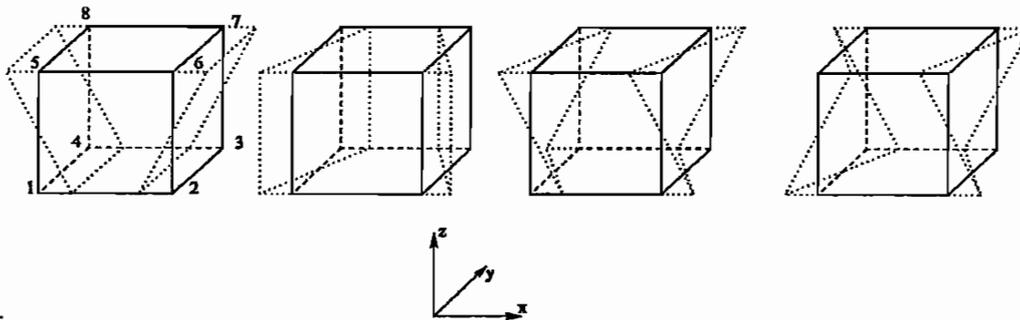


Abb. 2 Nullenergiemodes in x-Richtung

#### 4. Softwarekonzept

Die Entscheidung, für den strukturmechanischen Teil des FEM-Programmes die Dynamische Relaxation als prinzipielles Lösungsverfahren zu nutzen, führt auf eine einheitliche Programmstruktur für statische als auch für dynamische Probleme. Unterschiede bestehen nur in der Ermittlung der Massenmatrix **M** und der Dämpfungsmatrix **C** im Differentialgleichungssystem (1).

Bei der Erstellung eines Softwarekonzeptes und dessen Umsetzung in ein FEM-Programm wurde einer Anwendung im geotechnischen Bereich Rechnung getragen. Eine geomechanische Analyse erfordert in der Regel die Lösung thermo-mechanischer Prozesse sowohl mit linearem als auch nichtlinearem Materialverhalten (z.B Kriechen, Viskoplastizität ) unter Berücksichtigung großer Verformungen. Der geometrischen Komplexität solcher Systeme entsprechend wurden für den Finite Element Katalog neben den 3D-Vollkörperelementen, Schalenelemente, Stabelemente, Balkenelemente und einige Sonderelemente , wie Übergangselemente und Fluidelemente konzipiert.

#### 5. Berechnungsbeispiel

Im Berechnungsbeispiel wird die Bildung eines Hohlraumes in einer bis zum Zeitpunkt  $t=t_0 = 0$  ungestörten Struktur simuliert. Bis zu diesem Zeitpunkt  $t=t_0$  liegt im Inneren des Bauteils ein hydrostatischer Spannungszustand vor , der mit den äußeren Belastungen im Gleichgewicht steht ( Abb. 3). Es wird ein ebener Deformationszustand angenommen. Ab dem Zeitpunkt  $t>t_0$  wird die Belastung  $p_1$  am Innenrand über eine Zeitfunktion verändert. Das Materialverhalten des Bauteils wird über ein Kriechgesetz der Form

$$\dot{\epsilon}_{cr} = \bar{A} e^{-m} \sigma_{eff}^{(n-1)} \sigma_D$$

- $\bar{A}, m, n$  - Konstanten  
 $\sigma_{eff}$  - Effektivspannung

$\sigma_D$  - Spannungsdeviator

beschrieben. In den Abbildungen 4 und 5 sind die Spannungsverläufe im Schnitt A-A zum Zeitpunkt  $t = t_0 = 0$  (elastische Lösung) und zum Zeitpunkt  $t = 100$  Tage dargestellt.

Eingabegrößen:

- $b_1 = 12$  m
- $b_2 = 24$  m
- $h_1 = 18$  m
- $h_2 = 12$  m
- $d = 1$  m
- $E = 25000$  MPa
- $\nu = 0.27$
- $p_a = 15$  Mpa
- $p_{i0} = 15$  Mpa

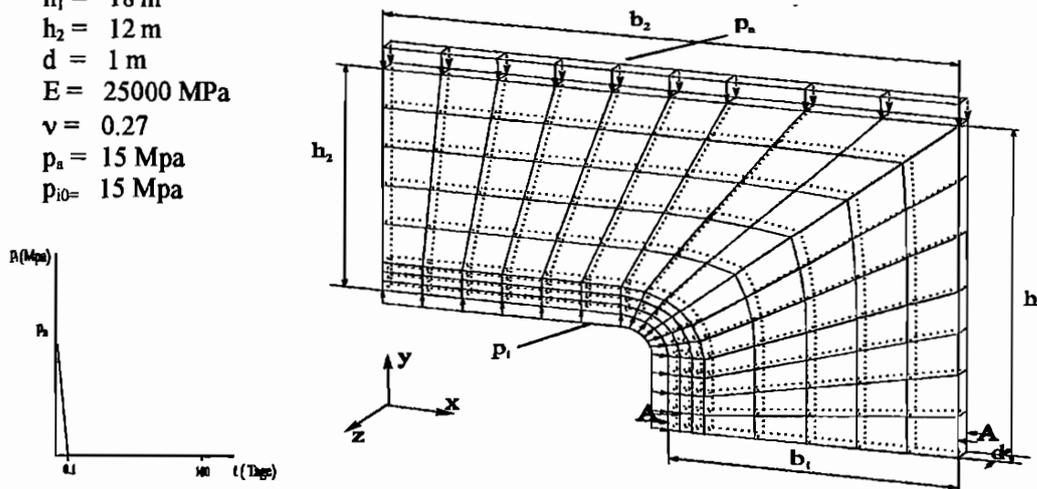


Abb.3 Berechnungsmodell

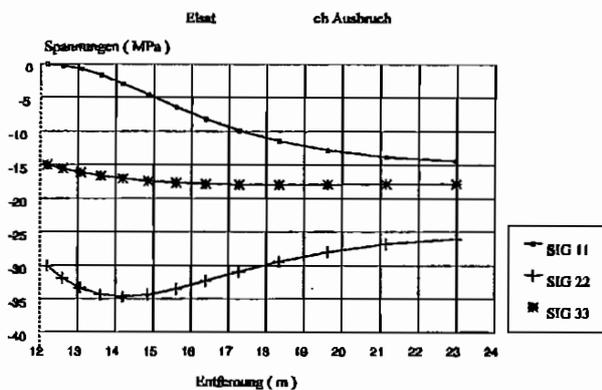


Abb.4 Spannungsverlauf im Schnitt A-A nach  $t = 0$  Tagen

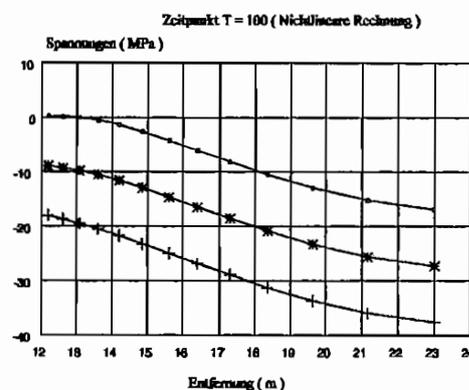


Abb.5 Spannungsverlauf im Schnitt A-A nach  $t = 100$  Tagen

Literatur

- /1/ WODD, W.L.: Note on dynamic relaxation, Int. J. Meth. Engng., 3, 145-147 (1971)
- /2/ ZIENKIEWICZ, O.C., CORMEAU, I.C.: Viscoplasticity, plasticity and creep in elastic solids - a unified numerical solution approach, Int. J. Meth. Engng., 8, 821-845 (1974)
- /3/ PAPADRAKIS, M.: A method for automated evaluation of the dynamic relaxation parameters, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 25, 35-48 (1981)
- /4/ FLANAGAN, D.P., BELYTSCHKO, T.: A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control, Int. J. Meth. Engng., 17, 679-706 (1981)

- /5/ UNDERWOOD, P.G., PARK, K.C.: STINT/CD - a stand-alone explicit time integration package for structural dynamic analysis, *Int. J. Meth. Engng.*, 18, 609-622 (1982)
- /6/ BELYTSCKO, T., SHAU-JEN ONG, J., WING KAM LIU, J., KENNEDY, J.M.: Hourglass control in linear and nonlinear problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 43, 251-276 (1984)



Technische Hochschule Darmstadt  
Fachgebiet Maschinenelemente und Maschinenakustik  
Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. F.G. Kollmann  
Fachbereich 16 (Maschinenbau)

## Ein neues gemischtes Element zur numerischen Berechnung viskoplastischer Rotationsschalen nach Bodner&Partom

A. C. Lassota

### 1 Einleitung

Das hier vorgestellte neue Element basiert auf der Arbeit von Kollmann und Mukherjee [4], in der ein neues Variationsprinzip für gemischte Elemente vorgestellt wird, sowie auf der Veröffentlichung von Kollmann und Mukherjee [3], in der die allgemeine Theorie für eine inelastische Schale in gemischter Formulierung dargestellt ist. Mit dieser Theorie wird von Kollmann, Cordts und Hackenberg [2] für den Fall rotationssymmetrischer Elemente unter der Annahme des ebenen Verzerrungszustandes unter gleichzeitiger Annahme eines ebenen Spannungszustandes eine ganze Familie von Schalenelementen auf Genauigkeit und Konvergenz hin untersucht. Eine sinnvolle Ergänzung dieser Untersuchung ist es, diese Familie von Elementen dahingehend zu erweitern, daß die Zwangsbedingungen des ebenen Verzerrungs- und ebenen Spannungszustandes nicht mehr eingeführt werden und auf eine Eliminierung der entsprechenden Freiheitsgrade verzichtet wird. Dies führt zwar zu einer leichten Erhöhung der Anzahl der Freiheitsgrade, läßt es dafür allerdings zu, auf im Fall der inelastischen Auslegung inkonsistente Zwangsbedingungen zu verzichten. Bei einer inelastischen Berechnung würden diese einfordern, daß die Gesamtverzerrung in Dickenrichtung gleich Null und damit die elastische Verzerrung gleich der inelastischen Verzerrung in dieser Richtung wird, was hinsichtlich bekannten Materialverhaltens nicht möglich ist.

### 2 Formulierung der inelastischen Schale

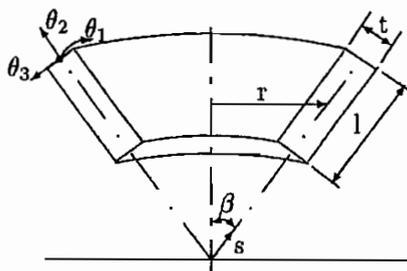


Bild 1: Geometrie, gekrümmte und polare Koordinaten der konischen Schale

Die Geometrien, die mit den vorausgehend vorgestellten Elementen beschrieben werden können, und die verwendeten Koordinatensysteme lassen sich der Abbildung 1 entnehmen.

Die konstitutiven Annahmen sind dabei

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^E + \dot{\epsilon}^N \quad (1)$$

$$\sigma = 2G\epsilon^E + \lambda \operatorname{tr}(\epsilon^E)I \quad (2)$$

$$\epsilon^N = \epsilon^N(\sigma, q) \quad (3)$$

$$\dot{q} = \dot{q}(\sigma, q) \quad (4)$$

$$\operatorname{tr}(\epsilon^N) = 0 \quad (5)$$

Mit der kinematischen Annahme

$$u^* = u + \xi w \quad (6)$$

lassen sich die Verschiebungen im Schalenraum aus den Verschiebungswerten auf der Membranfläche und dem Direktor mit Hilfe der über die Dicke der Schale laufenden Koordinate  $\xi$  extrapolieren. Die Verzerrungen im Schalenraum stellen sich mit der Determinanten des Shifters  $\mu$  dar.

$$\mu \epsilon_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \xi \kappa_{\alpha\beta} \quad (7)$$

$$\mu \epsilon_{\alpha 3} = \psi_\alpha + \xi \rho_\alpha \quad (8)$$

$$\epsilon_{33} = e_{33} \quad (9)$$

Mit der Definition von generalisierten Verschiebungen und Verzerrungen

$$v^T := [u^T \quad w^T] \quad (10)$$

$$\gamma^T := [e^T \quad \psi^T \quad \kappa^T \quad \rho^T] \quad (11)$$

lassen sich die Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen mit

$$\gamma = L_{\gamma v} v \quad (12)$$

darstellen. Die inelastischen Pseudokräfte  $f_N$  und die äußeren Lasten  $f_L$  in Vektorform angeordnet erlauben es, das Variationsprinzip in verkürzter Form auszuschreiben.

$$\delta \left\{ \int_S \left[ \frac{1}{2} \gamma^T D_{\gamma\gamma} \gamma - \gamma^T D_{\gamma\gamma} L_{\gamma v} v + (f_L)^T v + (f_N)^T L_{\gamma v}^N v \right] dS \right\} = 0 \quad (13)$$

### 3 FEM-Formulierung des gemischten Schalenelementes

Die Diskretisierung erfolgt in bekannter Weise nach

$$v = N\hat{v} \quad (14)$$

$$\gamma = \bar{N}\hat{\gamma} \quad (15)$$

Mit den Formfunktionen  $N$  für die Verschiebungsgrößen und  $\bar{N}$  für die Verzerrungsgrößen läßt sich die Finite Elemente Formulierung für das gemischte Element mit

$$K_{\gamma\gamma}\hat{\gamma} + K_{\gamma v}\hat{v} = 0, \quad (16)$$

$$K_{\gamma v}^T \hat{\gamma} = F_L + F_N \quad (17)$$

angeben. Die Steifigkeitsmatrizen sind dabei definiert mit

$$K_{\gamma\gamma} := \int_S \bar{N}^T D_{\gamma\gamma} \bar{N} dS \quad (18)$$

$$K_{\gamma\nu} := - \int_S \bar{N}^T D_{\gamma\gamma} (L_{\gamma\nu} \mathbf{N}) dS. \quad (19)$$

## 4 Werkstoffmodell nach Bodner & Partom

Zur viskoplastischen Berechnung wird das Werkstoffmodell nach Bodner & Partom [1] verwendet, das mit einer Fließregel und einer Fließfunktion

$$\dot{\epsilon}^N = \lambda \operatorname{dev} \sigma \quad (20)$$

$$\lambda^2 = \frac{D_2^N}{J_2} \quad (21)$$

formuliert ist, wobei die 2. Invariante des plast. Verzerrungsgeschwindigkeitstensors mit

$$D_2^N := \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}^N : \dot{\epsilon}^N) \quad (22)$$

definiert wird. Über modellspezifische Entwicklungsgleichungen und deren Modellparameter wird diese Größe in Abhängigkeit des Spannungszustandes ermittelt. Die Integration des Werkstoffmodells erfolgt mittels eines impliziten Algorithmus.

## 5 Numerische Ergebnisse

Analytische Ergebnisse für dünnwandige Rohre basieren auf der Annahme eines ebenen Verzerrungszustandes. Führt man die Annahme des ebenen Spannungszustandes in das neue Element ein, folgen die in Kollmann, Cordts und Hackenberg [2] präsentierte Formulierung und identische Ergebnisse, die mit den analytisch ermittelten Verschiebungen nahezu deckungsgleich sind. Für das hier vorgestellte Element gilt dies nicht, da die Annahme des ebenen Verzerrungszustandes nicht eingeführt wird, was sich maßgeblich im Bereich einer Einspannung oder Randbedingung bemerkbar macht. Als Beispiel sind in Abbildung 2 analytische und FEM-Lösung für den Fall Zylinder unter Innendruck, beidseitig gelagert, in einer elastischen Berechnung vergleichend dargestellt.

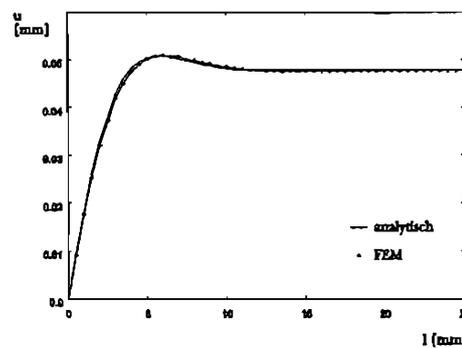


Bild 2: Vergleich Radialverschiebung, Zylinderschale unter Innendruck

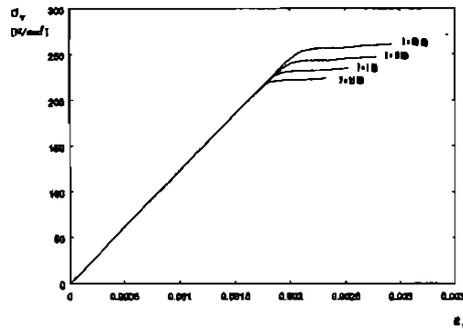


Bild 3: Viskoplastische Berechnung, Auswertung an einem Gausspunkt

Als Beispiel für eine viskoplastische Berechnung zeigt Abbildung 3 die Auswertung der Vergleichsspannung über der Vergleichsdehnung an einem Gausspunkt einer Zylinderschale, die beidseitig eingespannt mit einer Ringkraft belastet wird. Deutlich ist die Lastgeschwindigkeitsabhängigkeit und die Verfestigung zu erkennen.

## 6 Zusammenfassung

Die Mitnahme aller Freiheitsgrade der rotationssymmetrischen Schale zeigt, daß zwar eine Abweichung der Ergebnisse von einer Berechnung mit der Annahme eines ebenen Verzerrungszustandes vorliegt. Die Annahme eines ebenen Spannungszustandes ist jedoch eine sehr gute, da die bei dem neuen Element ermittelten Spannungen in Dickenrichtung der Schale von sehr kleiner Größenordnung sind. Für die plastische Berechnung bedeutet der Verzicht auf die genannten Zwangsbedingungen allerdings, daß sich im Bereich der Randbedingungen durch die Änderung der Lösung der Ort des Plastifizierens ändert. Damit wird mit dem neuen Element eine mögliche Fehlerquelle bei der viskoplastischen Auslegung eliminiert.

## Literatur

- [1] Bodner, S.R.; Partom, Y.: Constitutive equations for elasto-viscoplastic materials. *J.Appl.Mech.* **46**, 385-389 (1975).
- [2] Kollmann, F. G.; Cordts, D.; Hackenberg, H.-P.: *Implementation and numerical tests of a family of mixed finite elements for the computation of axisymmetric viscoplastic shells.* Unpublished report MuM-Report 90/1, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt, Federal Republic of Germany 1990.
- [3] Kollmann, F. G.; Mukherjee, S.: A general, geometrically linear theory of inelastic thin shells. *Acta Mechan.* **57**, 41-67 (1985).
- [4] Mukherjee, S; Kollmann, F. G.: A new rate principle for suitable for analysis of inelastic deformation of plates and shells. *J.Appl.Mech.* **52**, 533-535 (1985).

## Ein Schalelement für die Blechumformung

Prof. Dr.-Ing. D. Besdo, Dipl.-Ing. St. Viola  
Institut für Mechanik, Universität Hannover

Die numerische Simulation von Blechumformprozessen ist trotz schnellerer Hardware bei praxisrelevanten Teile immer noch mit großen Rechenzeiten verbunden. Die Industrie hat die Vorteile der FE-Simulation erkannt und setzt sie verstärkt ein. Um auch die Berechnung komplexer Teile in angemessener Zeit zu ermöglichen, soll versucht werden, sowohl die Anzahl benötigter Elemente also auch die Zahl der Zeitschritte zu verringern.

### Formulierung des Schalelementes

Für die 3D-Modellierung von Blechen wurde ein aus kubischen Splines aufgebautes Schalelement entwickelt, das auf einer Idee von Besdo [1] basiert. Es ist ein Dreieckselement mit vier Knoten. Zur geometrischen Beschreibung der Mittelfläche werden neben den Ortsvektoren der Knoten an jedem Eckknoten zwei Tangenten verwendet, die die Tangentialfläche beschreiben. Zusätzlich besitzt jeder Knoten eine Dickenfreiheit, die linear über das Element interpoliert wird. An jedem Ort des Schalenvolumens ist eine lokale Basis definiert, deren ersten beiden Richtungen sich aus der Ableitung des geometrischen Ansatzes nach den natürlichen Koordinaten der Mittelebene ergeben. Die dritte Richtung ist die Normalenrichtung. Sie bleibt auch während einer Verformung des Elementes senkrecht, da aufgrund der geringen Dicke der zu simulierenden Bleche eine Kirchhoff-Love-Theorie zur Anwendung kommen soll.

Die Basen können sowohl in der aktuellen, als auch in der Referenzlage aufgestellt werden. Mit einer Vernachlässigung der Ableitung der Dicke ergibt sich die Metrik zu ( $\underline{n}$  - Normalenvektor) :

$$g_{ij} \approx \left[ \begin{array}{cc|c} \mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \mathbf{r}_{,\beta} & 0 & \\ \hline 0 & 0 & h^2/4 \end{array} \right] + \zeta h \left[ \begin{array}{cc|c} \underline{n} \cdot \mathbf{r}_{,\alpha\beta} & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Hieraus können Dehnungsmaße und Spannungen bestimmt werden z.B.

$$\underline{C} = g_{ij} \tilde{\mathbf{g}}^i \circ \tilde{\mathbf{g}}^j.$$

Die für das FE-Modell benötigte Elementsteifigkeit und die Rechte Seite resultieren aus der Variation des Potentials

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \int_V T^{ij} \delta g_{ij} dV - \delta f_v R_v - \delta \Delta h F_N \stackrel{!}{=} 0.$$

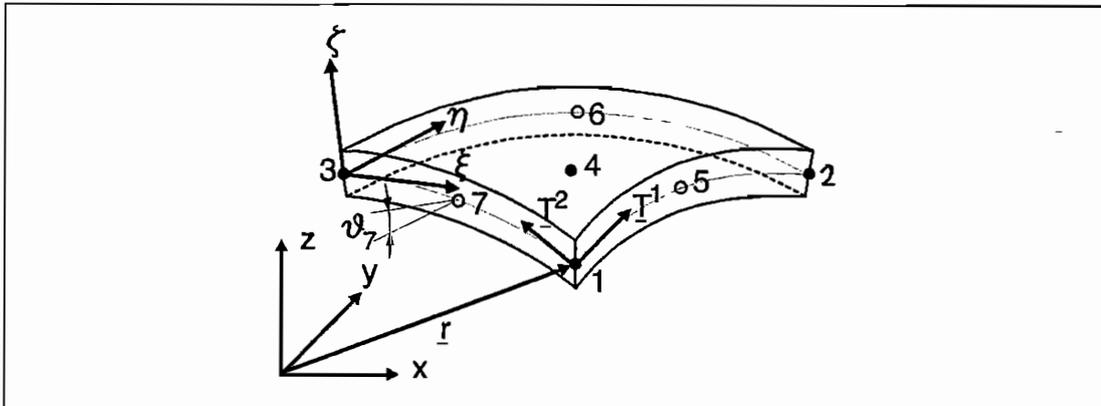


Abbildung 1: Geometrie

Zu beachten ist, daß neben den Knotenkräften und Reaktionen der Tangenten eine Kraft  $F_N$  eingeführt werden muß. Sie steht senkrecht auf der Ober- und Unterseite der Schale und ermöglicht eine Belastung in Dickenrichtung wie z.B. bei beidseitigem Kontakt unter dem Niederhalter bei Tiefziehprozessen.

Die Anwendung einer Kirchhoff-Love-Theorie erfordert eine  $C^1$ -Stetigkeit der Struktur, insbesondere an den Elementübergängen. Da durch die Tangenten an den Knoten die Tangentialebene festgelegt ist, liegt hier auch Knickfreiheit vor. Es läßt sich aber zeigen, daß der Winkel zwischen den Tangentenebenen zweier aneinandergrenzender Elemente einen quadratischen Verlauf hat, und somit eine dritte Stützstelle notwendig ist, um über die gesamte Elementkante  $C^1$ -Stetigkeit zu erhalten. An der Kantenmitte wird deshalb eine zusätzliche Bedingung in der Form eines Penalty-Ansatzes eingeführt, der den Winkel zwischen den Normalen beider Elemente minimiert.

#### Simulation des Kontaktes

Für eine Simulation von Blechumformprozessen ist der Kontakt zwischen Werkzeug und Werkstück von besonderer Bedeutung. Insbesondere beim Tiefziehen tritt großflächig Berührung zwischen beiden auf.

Da es sich um relativ dünne Bleche handelt, können die Werkzeuge als starr angenommen werden, wenn auch eine kraftgesteuerte Bewegung wie z.B. des Niederhalters durch das Blech beeinflusst wird. Es reicht demnach aus, die Oberfläche des Werkzeugs geometrisch zu modellieren. Die dazu verwendeten Teilflächen sind begrenzte kubische

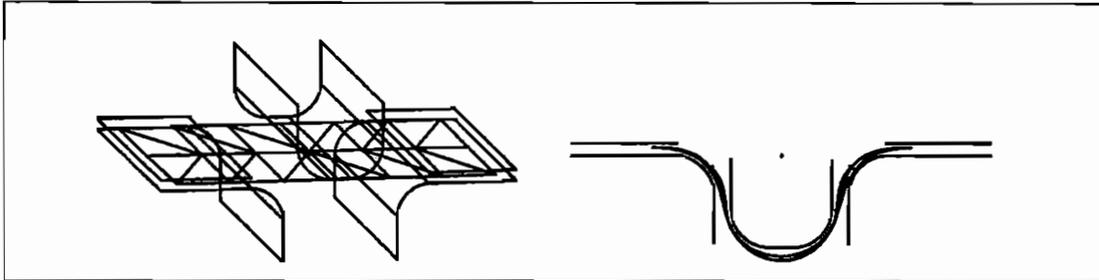


Abbildung 2: Biegung eines Hutprofils

Vierecksegmente. Sie sind ähnlich den Schalenelementen durch einen Ortsvektor und zwei Tangenten an den Eckpunkten definiert. Dies ermöglicht eine  $C^1$ -stetige Modellierung der Oberfläche und eine Vermeidung von Störungen der Gleichgewichtsiteration infolge von Knicken. Desweiteren ist eine große Abbildungsgenauigkeit auch bei wenigen Segmenten möglich.

Da während der Simulation ständig das Eindringen von Knoten in die Werkzeuge überprüft werden muß, ist eine geringe Zahl an Segmenten für eine Beschleunigung der Rechnung wichtig. Ist Eindringen eines Knotens erkannt worden, so wird er senkrecht an die Werkzeugoberfläche projiziert. An der Berührstelle erhält der Knoten eine neue Basis, deren 3-Richtung die Normalenrichtung und deren 1/2-Richtungen die Tangentenebene am Werkzeug bilden. Die neue 3-Richtung des Knotens wird durch eine Verschiebungsrandbedingung [2] festgelegt, sodaß er sich anschließend nur noch in der Tangentenebene bewegen kann. Zusätzlich werden die Tangenten des Knotens in diese Ebene gedreht, wodurch sich das Blech gut an das Werkzeug anlegt. In 3-Richtung erhält der Knoten eine Kraft, die zusammen mit dem letzten Verschiebunginkrement zur Berechnung der Reibkraft in Tangentenebene verwendet wird. Sollte diese Kraft keine Druckkraft sein, kann der Kontakt wieder gelöst werden.

#### Materialbeschreibung

Es findet ein Stoffgesetz von Besdo [3] Anwendung, das Lange in [4] untersucht hat. Es basiert auf einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen plastische Anteil

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^e \cdot \underline{\underline{\hat{F}}}$$

In der Dehnungsraumformulierung wird so eine Zwischenkonfiguration definiert, die sich

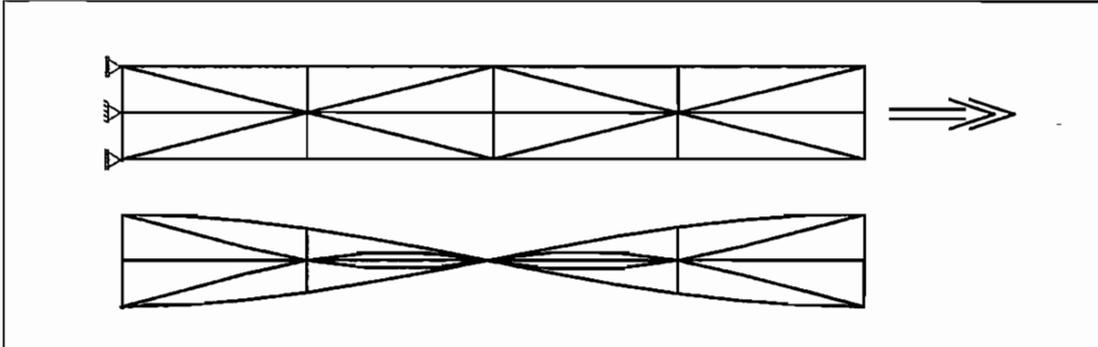


Abbildung 3: Torsion eines Blechstreifens mit angepaßten Parameter für ST1303

durch lokale Spannungsfreiheit auszeichnet. Sie entsteht aus einer elastischen Rückverformung der aktuellen Konfiguration eines Materialpunktes und ist deshalb geometrisch unverträglich. Zu den Anteilen des Deformationsgradienten  $\underline{F}$ ,  $\underline{F}^e$  und  $\hat{\underline{F}}$  werden entsprechende Deformationsmaße wie Rechter-Cauchy-Green und Greenscher-Tensor berechnet

$$\underline{C}^e = \underline{F}^{eT} \cdot \underline{F}^e ; \quad \underline{\gamma}^e = \frac{1}{2} (\underline{C}^e - \underline{E})$$

mit  $\underline{E}$  als Einheitstensor.

Das Stoffgesetz besteht aus einem elastischen Teilstoffgesetz, einem Fließkriterium und einer Fließregel, mit der die plastischen Deformationen bestimmt werden. In Analogie zu Fließkriterien üblicher Spannungsformulierungen wird die Konsistenzbedingung

$$g = (\underline{\gamma}^{eD} - \underline{v}^D) \cdot (\underline{\gamma}^{eD} - \underline{v}^D) - y^2 \leq 0$$

aufgestellt. Der Index  $D$  bezeichnet die Deviatorbildung und  $\underline{v}$  den "back strain", der dem "back stress" für kinematische Verfestigung bei Spannungsraumformulierungen entspricht. Die Fließdehnung  $y$  kann aus dem elastischen Teilstoffgesetz durch

$$y = \frac{1 - \nu}{E} \sqrt{\frac{2}{3}} Y(\hat{\underline{\varphi}})$$

bestimmt werden, wobei  $Y(\hat{\underline{\varphi}})$  die von einem plastischen Verzerrungsmaß abhängige Fließspannung darstellt. Zur Beschreibung der Veränderung der internen Variablen

findet ein inkrementelles Entwicklungsgesetz Anwendung

$$\dot{y} = b_1 \hat{\lambda} - b_2 \hat{\lambda} y$$

und  $\dot{\underline{v}} = c_1 \hat{\lambda} - c_2 \hat{\lambda} \underline{v}$ .

Die ersten Terme führen bei konstanter Formänderungsgeschwindigkeit  $\hat{\lambda}$  zu einem konstanten Anwachsen von  $y$  und  $\underline{v}$ , während der Abbauterm mit zunehmender Verfestigung immer größer wird. Die Antwort auf eine Verformung mit konstanter Formänderungsgeschwindigkeit ist eine Exponentialfunktion, deren Steigung und Asymptotenwert durch die Parameter  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$  und  $c_2$  an das Materialverhalten angepaßt werden kann.

### Zusammenfassung

Das vorgestellte Element zeigt in ersten Anwendungen ein gutes und stabiles Konvergenzverhalten. Auch große Zeitschritte können gewählt werden, wobei die Anzahl an Iterationen weiterhin niedrig ist. Der implementierte Kontaktprozessor ist in der Lage, die großen Eindringtiefen infolge der großen Zeitschritte zu verarbeiten, und benötigt nur einen zu vernachlässigen Teil der Rechenzeit. Es wurde ein Stoffgesetz implementiert, das ein elastisch-plastisches Materialverhalten mit isotroper und kinematischer Verfestigung abbilden kann und sich schon in anderen Elementen bewährt hat. Weitere Untersuchungen an größeren Strukturen müssen nun die Anwendbarkeit für praxisrelevante Teile beweisen.

### Literatur

- [1] Besdo, D.: Ein Schalenelement-Konzept für Tiefziehprozesse, in: Numerische Methoden der Plastomechanik, Neustadt a. Rbg., Juli 1989 (unveröffentlicht)
- [2] Hughes, T.J.R.; Taylor, R.L.; et al.: A finite element method of a class of contact-impact problems, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 8 (1976), S.249-S.276
- [3] Besdo, D.: Zur Formulierung von Stoffgesetzen der Plastomechanik im Dehnungsraum nach Ilyushins Postulat, Ing.-Archiv, 51 (1981), S.1-8
- [4] Lange, H.-W.: Zur Simulation des Tiefziehens mit Dehnungsraum-Stoffgesetzen für isotrope und kinematisch verfestigende Materialien, Diss., Uni Hannover, 1991, Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 2, Nr.223

## Simulation technologisch bedingter Verformungsabläufe der Blechumformung auf der Basis der Fließtheorie

Andreas Floß

Technische Universität Dresden, Institut für Festkörpermechanik

Die vorgestellte Theorie ist aus den allgemeinen Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik in konvektiver Beschreibung abgeleitet. In dieser Beschreibungsweise sind die unabhängigen Variablen die zeitlich konstanten Parameter der materiellen Teilchen und die Zeit. Die Form der Koordinatenlinien, das Basisvektorsystem und die Metrik sind orts- und zeitabhängig.

Die Schalentheorie basiert auf einem durch die Normalenhypothese charakterisierten Verformungsmodell. Die Position eines materiellen Teilchens zum Zeitpunkt  $t$  beschreibt der Ortsvektor

$$\vec{x} = \vec{x}(\Theta^\alpha, t) + \Theta^3 h(\Theta^\alpha, t) \vec{n}(\Theta^\alpha, t) = \vec{x}(\Theta^\lambda, t), \quad \alpha = 1, 2; \quad \lambda = 1, 2, 3, \quad (1)$$

wobei  $\vec{x}$  den Ortsvektor der durch  $\Theta^3 = 0$  definierten Schalenbezugsfläche,  $h$  die Schalendicke und  $\vec{n}$  den Einheitsnormalenvektor der Schalenbezugsfläche bezeichnet.

Gekennzeichnet werden die Teilchen des Schalenkontinuums durch die krummlinigen Gaußschen Flächenparameter  $\Theta^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) und den geradlinigen Parameter  $\Theta^3$  in Richtung der Bezugsflächennormalen  $\vec{n}$ .

Die zu  $\vec{n}$  senkrechten Basisvektoren der Schalenbezugsfläche werden gebildet durch

$$\vec{a}_\alpha = \vec{x}_{,\alpha}. \quad (2)$$

Die Verschiebungsgeschwindigkeit eines Schalenpunktes ergibt sich durch materielle Zeitableitung des Ortsvektors (1) zu

$$\vec{v} = \vec{v} + \Theta^3 h (\vec{\omega} + \frac{\dot{h}}{h} \vec{n}). \quad (3)$$

Aufgrund der Normalenhypothese besteht zwischen  $\vec{v}$  und  $\vec{\omega}$  die kinematische Zwangsbedingung

$$\frac{D}{Dt} (\vec{a}_\alpha \vec{n}) = 0 = \dot{\vec{a}}_\alpha \vec{n} + \vec{a}_\alpha \dot{\vec{n}} = \vec{v}_{,\alpha} \vec{n} + \vec{a}_\alpha \vec{\omega} = \nu_{3||\alpha} + \omega_\alpha. \quad (4)$$

Aus dem Variationsprinzip des dreidimensionalen Kontinuums in den Geschwindigkeiten folgt durch Integration über  $\Theta^3$  und Eliminierung der für eine zweidimensionale Kontinuumsmechanik nicht zulässigen statischen Variablen das Variationsprinzip für das Schalenkontinuum [1]

$$\delta \Pi_t + \delta \Pi_n - \delta \Pi_a = 0 \quad (5)$$

mit

$$\delta \Pi_i = \int_M \left\{ \dot{n}^{\alpha\beta} \delta d_{0\beta\alpha} + \dot{m}^{\alpha\beta} \delta d_{1\beta\alpha} + q^\alpha (\omega^\beta \delta \nu_{\beta\|\alpha} + \nu_{\beta\|\alpha} \delta \omega^\beta) + \right. \\ \left. + n^{\alpha\gamma} \nu_{3\|\gamma} \delta \nu_{3\|\alpha} + m^{\gamma\delta} b_{\delta\gamma} h \omega^\alpha \delta \omega_\alpha + m^{\alpha\gamma} b_\alpha^\beta h \nu_{3\|\gamma} \delta \omega_\beta \right\} dA ,$$

$$\delta \Pi_a = \int_M \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{D}{Dt} (\sqrt{a} \bar{P}) \delta \bar{\nu} + \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{D}{Dt} (\sqrt{a} h \bar{S}) \delta \bar{\omega} \right\} dA + \\ + \int_C \left\{ \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{D}{Dt} (\sqrt{c} \bar{N}) \delta \bar{\nu} + \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{D}{Dt} (\sqrt{c} h \bar{M}) \delta \bar{\omega} \right\} ds ,$$

$$\delta \Pi_n = \int_M \dot{q}^\alpha (\delta \nu_{3\|\alpha} + \delta \omega_\alpha) dA ,$$

$$d_{0\gamma\delta} = \bar{a}_\gamma \bar{\nu}_{,\delta} = \nu_{\gamma\|\delta} - \nu_3 b_{\gamma\delta} \quad \text{und} \quad d_{1\gamma\delta} = h \bar{a}_\gamma \bar{\omega}_{,\delta} .$$

Hierin bezeichnen  $n^{\alpha\beta}$  und  $m^{\alpha\beta}$  die Schnittgrößen der Schale,  $\dot{n}^{\alpha\beta}$  und  $\dot{m}^{\alpha\beta}$  objektive Zeitableitungen der Schnittgrößen,  $d_{0\beta\alpha}$  und  $d_{1\beta\alpha}$  die Deformationsgeschwindigkeiten der Schalenbezugsfläche,  $b_{\alpha\beta}$  die Koordinaten des Krümmungstensors,  $\bar{P}$  und  $\bar{S}$  die Belastungsvektoren pro Flächeneinheit der Schalenbezugsfläche und  $\bar{N}$  und  $\bar{M}$  die Belastungsvektoren pro Längeneinheit des Randes  $C$ . Durch  $\delta \Pi_n$  wird die kinematische Zwangsbedingung (4) berücksichtigt, wobei die Variable  $\dot{q}^\alpha$  die Bedeutung eines Lagrangeschen Multiplikators besitzt.

Die konstitutiven Gleichungen werden in Form einer tensorlinearen Beziehung zwischen Truesdellscher Spannungsgeschwindigkeit und Deformationsgeschwindigkeit mit zugeordneten Evolutionsgleichungen aufgestellt [2]. Aus dieser Beziehung ergeben sich nach Ausführung der Integration über  $\Theta^3$  für das Schalenkontinuum die Gleichungen

$$\dot{n}^{\alpha\beta} = A_{(0)}^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{0\delta\gamma} + A_{(1)}^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{1\delta\gamma} + D_{(0)}^{\alpha\beta} , \quad \dot{m}^{\alpha\beta} = A_{(1)}^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{0\delta\gamma} + A_{(2)}^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{1\delta\gamma} + D_{(1)}^{\alpha\beta} . \quad (6)$$

Die Materialtensoren  $A_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\delta}$  und  $D_{(i)}^{\alpha\beta}$  sind hierin Funktionen der Schalenzustandsgrößen.

Der Kontakt der Schale mit einem starren Kontaktkörper kann charakterisiert werden durch die Bedingung des Nichteindringens

$$\epsilon = \vec{n}(\vec{x} - \vec{\bar{x}}) \geq 0 , \quad (7)$$

wobei  $\vec{n}$  den nach außen gerichteten Einheitsnormalenvektor der durch den Ortsvektor  $\vec{x}$  beschriebenen Kontaktkörperoberfläche darstellt. Diese Bedingung führt zu einer zusätzlichen kinematischen Zwangsbedingung, die die Verschiebung bezüglich der Normalen der Kontaktfläche einschränkt.

Bei der Verwendung des Penalty-Verfahrens für die Behandlung des Kontaktproblems wird die Erfüllung der kinematischen Zwangsbedingung approximativ erzwungen. Die daraus resultierende Kontaktbelastung

$$\vec{P} = k[-\varepsilon]_+(\vec{n}\vec{n})\vec{n} = \hat{P}\vec{n} \quad \text{mit} \quad [.]_+ = \max(0, \cdot) \quad (8)$$

ist abhängig von der Eindringtiefe der Schalenpunkte in den Kontaktkörper und von dem Penalty-Faktor  $k$ .

Durch Überschieben der objektiven Zeitableitung des Kontaktbelastungsvektors (8) mit der virtuellen Verschiebungsgeschwindigkeit  $\delta \vec{v}$  ergibt sich der Ausdruck

$$\delta \Pi_k = - \int_M \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{D}{Dt} (\sqrt{a} \vec{P}) \delta \vec{v} dA = - \int_M \left[ \left( \frac{\dot{\sqrt{a}}}{\sqrt{a}} \vec{n} + \vec{\omega} \right) \hat{P} + \dot{\hat{P}} \vec{n} \right] \delta \vec{v} dA \quad (9)$$

mit

$$\dot{\hat{P}} = k \{ -[-\text{sign}(\varepsilon)]_+ [(\vec{v} - \vec{v})\vec{n}] (\vec{n}\vec{n}) + [-\varepsilon]_+ (\vec{n}\vec{\omega}) \},$$

der dem Variationsprinzip (5) hinzuzufügen ist. Der Vektor  $\vec{v}$  stellt dabei die Verschiebungsgeschwindigkeit des Kontaktkörpers dar.

Auf der Grundlage der vorgestellten Theorie wird in [3] das eindimensionale Feldproblem der Rotationsschale abgeleitet. Dieses führt unter Anwendung des Hamiltonschen Prinzips auf ein lineares Randwertproblem für die Geschwindigkeitsgrößen  $\underline{y} = \underline{y}(\Theta^1, t)$  der Form

$$\underline{y}_{,1} = \underline{B}(\underline{z}) \underline{y} + \underline{b}(\underline{z}), \quad (10)$$

das für einen gegebenen Schalenzustand  $\underline{z} = \underline{z}(\Theta^1, t)$  zum Zeitpunkt  $t$  zu lösen ist. Das lineare Randwertproblem ist eingebettet in das nichtlineare Anfangswertproblem

$$\dot{\underline{z}} = \dot{\underline{z}}(\underline{z}); \quad \underline{z}(t_0) = \underline{z}_0, \quad (11)$$

aus dem die Schalenzustandsgrößen  $\underline{z}$  als Funktionen der Zeit  $t$  zu bestimmen sind.

Am Beispiel des Ziehens einer Radschale wurden die Anwendungsmöglichkeiten der Theorie hinsichtlich der Simulation mehrstufiger Umformvorgänge untersucht [3].

Die Umformung (siehe Bild) erfolgt in zwei Schritten - einem Tiefziehen (Zwischenform) und einem Stülpiehen (Endform). Für den Tiefziehstahl wurde elastisch-plastisches Verhalten mit isotroper Verfestigung angenommen. Die Diagramme im Bild zeigen die berechneten Umfangs- und Meridiandehnungen der Schalenmittelfläche sowie die Wanddickenverteilungen für die Zwischen- und die Endform. Die Ergebnisse stimmen gut mit experimentell ermittelten Werten überein.

#### Literatur

- [1] ULBRICHT, V.: Physikalisch und geometrisch nichtlineare Schalentheorie in konvektiver Metrik. Habilitation, TU Dresden 1986.
- [2] BERGANDER, H.: Deformationsgesetze der Standardform in konvektiver Metrik. Techn. Mech. Bd.8 (1987) S.31-40.
- [3] FLOSS, A.: Geometrisch und physikalisch nichtlineare Rotationsschalen in materieller Beschreibung unter Berücksichtigung des Kontaktproblems. Dissertation, TU Dresden 1994.

Adresse: Dr.-Ing. Andreas Floß, TU Dresden, Institut für Festkörpermechanik, 01062 Dresden, Deutschland.

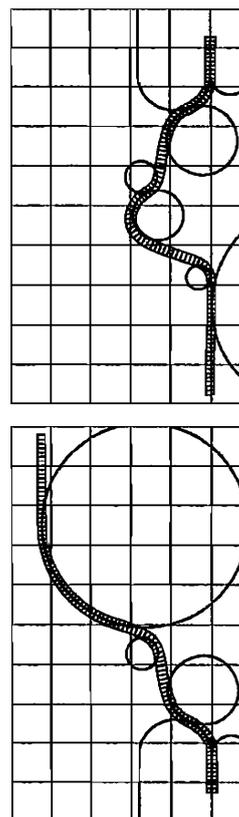
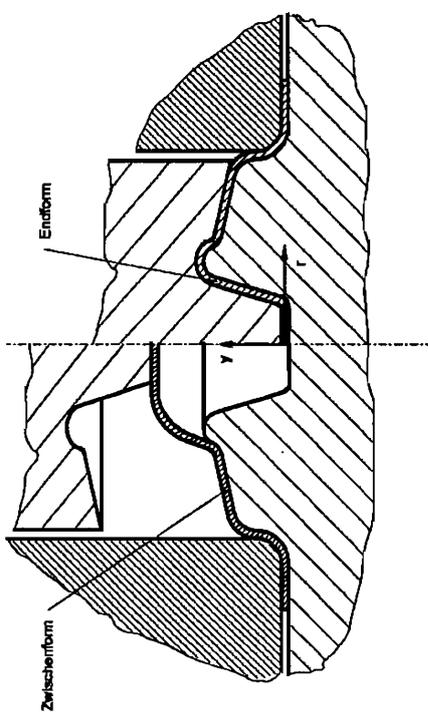
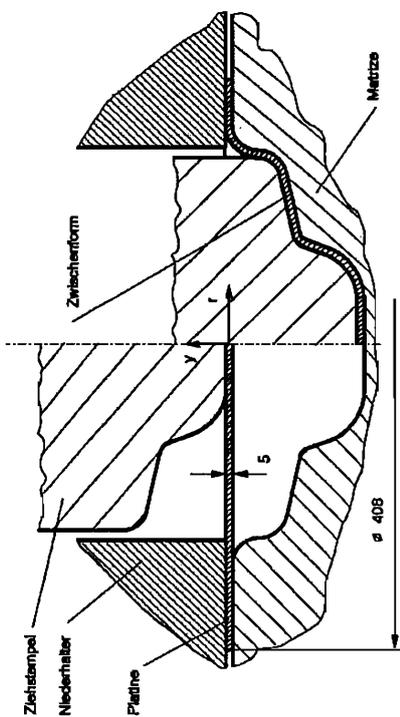
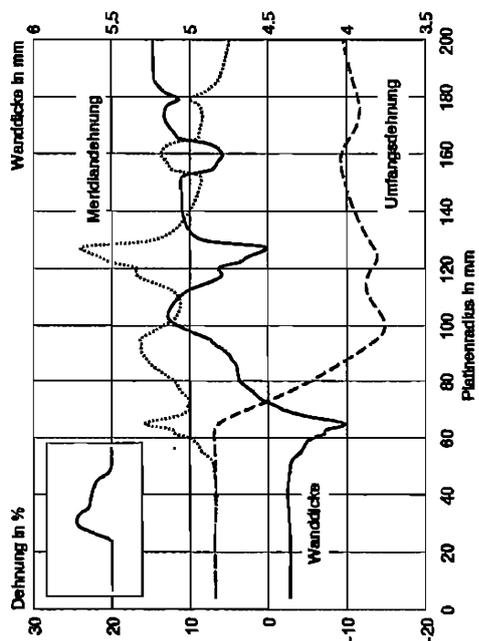
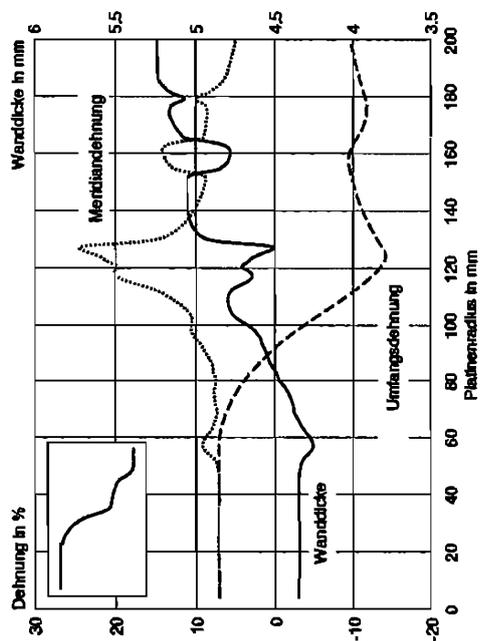


Bild Ziehen einer Radschale - Verfahrensprinzip, Schalenmodell und Ergebnisse

# „Ansatz zur Simulation von Umformvorgängen ohne Remeshing“

Doege, E.\*; Laackman, B.†

## Zusammenfassung

Die Simulation von Massivumformprozessen mit der Finite-Element-Methode erlaubt heute mit modernen Programmen eine realistische Voraussage des Materialflusses und trägt so zur Vermeidung von Schmiedefehlern bei. Jedoch werden die plastischen Deformationen der Elemente so hoch, daß aufwendige Netzneuaufteilungen (Remeshing) erforderlich sind.

In jüngerer Zeit wurden und werden deshalb verstärkt Forschungen im Bereich der Entwicklung von Remeshing-Algorithmen durchgeführt. Jedoch gibt es nur vereinzelt Ansätze, das Remeshing generell zu umgehen. Eine Möglichkeit besteht darin, das umzuformende Material als Fluid zu betrachten, das durch ein starres, raumfestes Netz 'fließt'. Die Elemente bleiben auf diese Weise unverformt, ein Remeshing kann entfallen.

## 1 Betrachtungsweisen

Zunächst seien einige in diesem Zusammenhang wichtige Betrachtungsweisen erläutert, s. Abb. 1.

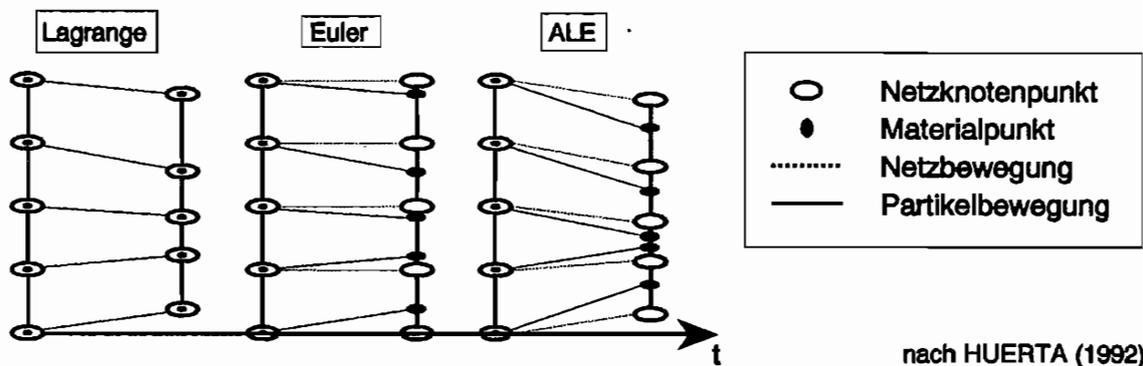


Abbildung 1: Betrachtungsweisen

- Bei der *Lagrangeschen Betrachtungsweise* (auch Referenz-Beschreibung genannt) erfahren Netz- und Materialpunkte dieselben Verzerrungen. Man unterscheidet noch zwischen der *Total-Lagrange* und der *Updated-Lagrange Betrachtung*.

\*Prof. Dr.-Ing. E. Doege, Leiter des Instituts für Umformtechnik und Umformmaschinen, Universität Hannover, Welfengarten 1A, 30167 Hannover

†Dipl.-Ing. B. Laackman, wiss. Mitarbeiter am gleichen Institut. email: laackman@rs3.ifum.uni-hannover.de

- Bei der *Eulerschen Betrachtungsweise* bleibt das Netz raumfest, und die Materialpunkte bewegen sich durch es hindurch, das Material 'fließt' wie eine Strömung.
- Bei der *beliebigen Euler-Lagrange Betrachtung (ALE)* wird dem FEM-Netz je nach Bedarf eine material-unabhängige bzw. abhängige Verschiebung gegeben. Die Netzverzerrungen werden auf diese Weise klein gehalten. Entsprechende Untersuchungen wurden von HUETINK [1] und SCHREURS [2] durchgeführt.

Das hier vorgestellte Modell zur Simulation von Massiv-Umformprozessen ohne Remeshing besteht zum einen aus einem FEM-Programm, dessen Elemente in Lagrangescher Betrachtung formuliert sind, und zum anderen aus einem Teil, der anschließend den Materialfluß durch ein raumfestes Netz berechnet (entsprechend der *Eulerschen Betrachtungsweise*).

## 2 FEM-Simulation von Massiv-Umformprozessen

Das hier verwendete FEM-Programm basiert auf dem Variationsprinzip nach MARKOV [3], und nutzt das starr-plastische Stoffgesetz nach HUBER-LEVY-V. MISES, s. Gl. 1. Es besitzt ebene und rotations-symmetrische Elemente. Das Variationsprinzip, wie es hier verwendet wird, wurde durch DUNG [5] mit Hilfe Lagrangescher Multiplikatoren um die Nebenbedingung der Inkompressibilität erweitert, s. Gl. 2.

$$\sigma_{ij} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{ij} = \frac{2Y}{3\dot{\epsilon}_v}\dot{\epsilon}_{ij} \quad (1)$$

$$\Pi_L = \int_V Y \dot{\epsilon}_v dV + \int_V \sigma^m \dot{\epsilon}_{ii} dV - \int_{S^\sigma} \tau v_t dS - \int_{S^\sigma} p_i^O v_i dS \Rightarrow Extr. \quad (2)$$

## 3 Materialtransport durch raumfeste Gitter

### 3.1 Problembeschreibung

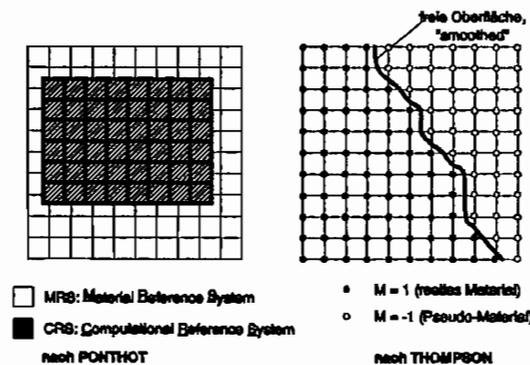


Abbildung 2: Materialtransport

Zwei Beispiele seien vorangestellt, um das Problem zu veranschaulichen, s. Abb. 2. PONTHOT [6] beschreibt eine Euler-Lagrangesche Formulierung, bei der Knotenpunktverschiebungen ausgerechnet werden, diese aber unabhängig von der Materialverschiebung sind. Dazu definiert er die zwei Systeme

*MRS* und *CRS*.

THOMPSON [7] stellt die Methode der *Pseudokonzentrationen* vor. Der Bereich, in dem die Umformung stattfinden soll, wird mit einem Netz versehen. Die mit Material überdeckten Knoten erhalten eine Pseudo-Konzentration von  $M = 1$ , während die 'leeren' Knoten  $M = -1$  erhalten. Die Lage der freien Oberfläche wird durch den Wert  $M = 0$  gekennzeichnet. Die scharfe Verteilung von  $M$  macht eine Glättung ('Smoothing') notwendig.

### 3.2 Definitionen

Zunächst seien einige für den hier entwickelten Algorithmus verwendete Begriffe erklärt.

- Die *elementbezogene Konzentration*  $M$  gibt an, ob ein Element vollständig ( $M = 1$ ) bzw. teilweise gefüllt ( $0 < M < 1$ ), oder leer ist ( $M = 0$ ).
- Die *knotenbezogene Konzentration*  $M_k$  gibt an, ob ein Knoten von Material überdeckt ( $M_k = 1$ ) bzw. nicht überdeckt ist ( $M_k = 0$ ).
- *Randelemente* enthalten die freie Oberfläche des umzuformenden Materials. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß für sie
  - $0 < M < 1$  bzw.
  - $M = 1$  und mindestens ein Nachbarelement mit  $M = 0$

gilt.

- Das *Transportgitter* wird zur Berechnung des Massentransports genutzt. Es ist das raumfeste Gitter, welches sich über den gesamten Bereich der Umformung erstreckt und sich nicht verformt.
- Das *Materialgitter* wird vom FEM-Programm zur Verfügung gestellt. Es erstreckt sich über das umgeformte Material. Es enthält das Geschwindigkeitsfeld, das über das Variationsprinzip bestimmt worden ist.

### 3.3 Algorithmus

Den hier vorgeschlagenen Algorithmus zur Berechnung des Massentransportes durch raumfeste Gitter zeigt Abb. 3. Die wesentlichen Punkte sind:

1. *Steigung*: Es wird vereinfachend angenommen, daß die freie Oberfläche in den Randelementen aus geraden Segmenten besteht. Dazu wird eine Funktion  $Y = Y(x_i)$  bzw.  $X = X(y_j)$  in Abhängigkeit der Pseudo-Konzentration  $M$  der Nachbarelemente angesetzt, s. Gl. 3. Die Steigung ergibt sich entsprechend aus der Ableitung.

$$Y(x_i) = M_{i(j-1)}\delta y_{j-1} + M_{ij}\delta y_i + M_{i(j+1)}\delta y_{j+1} \quad (3)$$

2. *Oberflächenbestimmung*: Zur Unterscheidung, ob Material aus einem vollständig oder nur teilweise gefüllten Element transportiert wird, werden mit Hilfe der Verteilung von  $M$  und  $M_k$  die Randelemente bestimmt.
3. *Flußunterscheidung*: Es wird unterschieden, ob Material aus einem vollständig bzw. einem teilweise gefüllten Element in die Nachbarelemente fließt.
4. *Knoten*: Nach Abschluß der Transportberechnung berechnet diese Funktion die neue Verteilung von  $M_k$ .

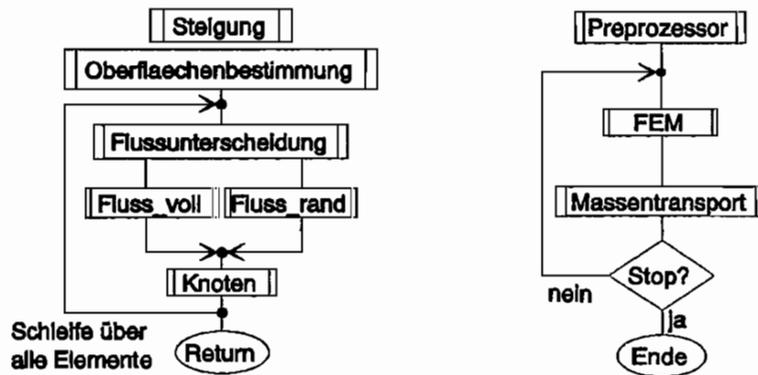


Abbildung 3: links: Massentransport; rechts: Kopplung FEM-Massentransport

### 3.4 Kopplung der FEM und des Massentransports

Abb. 3 zeigt die Kopplung zwischen dem FEM-Programm und den Routinen zur Berechnung des Massentransportes. Das FEM-Programm berechnet ein Geschwindigkeitsfeld und übergibt dem Massentransport das Materialgitter.

Der Massentransport bestimmt die neue Massenverteilung im Transportgitter. Es bereitet ein neues Gitter mit angepaßten Randbedingungen (um z. B. ein herunterfahrendes Gesenk zu berücksichtigen) für das FEM-Programm vor. Dabei wird eine leichte Verzerrung der Randelemente in Kauf genommen. Sobald diese leer sind, 'springen' sie wieder in ihre alte Form zurück.

## 4 Resumee

Der hier vorgestellte Algorithmus stellt eine Alternative zu den bisher entwickelten Remeshing-Algorithmus dar. Erste Berechnungen zeigen, daß der Massentransport durch starre Netze realistisch berechnet werden kann. Die Kopplung dieser Routinen mit einem FEM-Programm, welches ein starr-plastisches Stoffgesetz nutzt, erweist sich als ein effizientes Werkzeug zur Berechnung von Massiv-Umformvorgängen.

## Literatur

- [1] Huetink, H.: On the simulation of thermo-mechanical forming processes. Dr.-Ing. Diss., TH Twente (NL), 1986.
- [2] Schreurs, P.: Numerical simulation of forming processes. Dr.-Ing. Diss., TH Eindhoven (NL), 1983.
- [3] Markov, A. A.: Variationsprinzipien in der Plastizitätstheorie. Übersetzung aus: Prikladnaja matematika i mechanika 11 (1947) 3, 339-350.
- [4] Betten, J.: Elastizitäts- und Plastizitätslehre. Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1985.
- [5] Dung, N. L.: Ein Beitrag zur Berechnung instationärer starr-plastischer Formänderungen mit einer Finite-Elemente-Methode. Fortschritt-Ber. Nr. 46, Reihe 2. Düsseldorf: VDI-Verlag 1981.
- [6] Ponthot, J.-P.: The use of the Eulerian-Lagrangian FEM with adaptive mesh: Applications to metal forming simulation. Proc. 3<sup>rd</sup> internat. conf. on comp. plasticity (COMPLAS 3). Barcelona, Spain, 6<sup>th</sup> - 10<sup>th</sup> April, 1992.
- [7] Thompson, E., Sinelser, R. E.: Transient analysis of forging operations by the Pseudo-Concentration method. Int. J. num. meth. eng. 25 (1988), 177-189.

# Approximation von experimentell gewonnenen Verschiebungsfeldern

E. BOHNSACK\*

## 1 Einleitung

Bei der Identifikation der Materialparameter von Deformationsgesetzen für das elasto-plastische Verhalten von Metallen werden numerisch und experimentell ermittelte Größen miteinander verglichen. Dabei sollen auch große Deformationen untersucht werden, bei denen zwischen der aktuellen Konfiguration in jedem Lastschritt und der Ausgangskonfiguration unterschieden werden muß. Da das elasto-plastische Materialverhalten von der Verformungsgeschichte eines materiellen Teilchens abhängt, muß der Vergleich mit dem Experiment bei jedem Lastschritt am gleichen Ensemble materieller Teilchen stattfinden. Dazu müssen die materiellen Teilchen während des Experiments verfolgt und wiedergefunden werden können.

Zur Bestimmung der Materialparameter sollen ebene Biegeproben untersucht werden, deren Verformungen in der  $xy$ -Ebene mit dem In-plane-Moiré-Verfahren ausgemessen werden. Dabei erhält man die Verschiebungen  $u$  und  $v$  in der aktuellen Konfiguration (raumfeste Koordinaten) an diskreten Orten, bei der hier verwendeten Methode der Skelettierung sogar nur an den Isotheten. Deshalb ist es notwendig, für die Verschiebungen bei jedem Lastschritt eine feldmäßig approximierbare Darstellung in Abhängigkeit der materiellen Koordinaten zu schaffen, um so materielle Teilchen zu identifizieren.

## 2 Approximation der Verschiebungen

Da die Verschiebungen  $u$  und  $v$  an verschiedenen Meßpunkten vorliegen, muß zunächst eine Approximation auf der aktuellen Konfiguration erfolgen, die dann in einfacher Weise auf die materiellen Koordinaten transformiert wird. Die Approximation basiert auf einer Zerlegung des Meßgebietes der verformten Probe in isoparametrische finite Elemente. Bild 1 zeigt als Beispiel ein Gebiet mit vier Elementen und den entlang dreier Isotheten vorhandenen Meßpunkten.

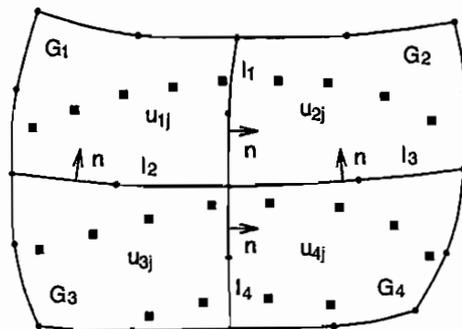


Bild 1. FE-Netz mit vier Achtknoten-Viereck-Elementen  $G_i$  und den Meßpunkten zu den Meßwerten  $u_{ij}$  entlang dreier Isotheten

Die approximierten Verschiebungen  $\tilde{u}$  und  $\tilde{v}$  ergeben sich jeweils im Element aus den lokalen Ansatzfunktionen  $N(\xi, \eta)$  zusammen mit den Verschiebungen an den Elementknoten. Die Bestimmung der Knotenverschiebungen  $\tilde{u}_K$  und  $\tilde{v}_K$  erfolgt getrennt für  $\tilde{u}$  und  $\tilde{v}$  durch die Minimierung eines Funktionals  $F$ , wobei aber wegen der späteren Transformation für  $\tilde{u}$  und  $\tilde{v}$  dasselbe

\*Anschritt: BOHNSACK, E., Technische Universität Chemnitz-Zwickau, Institut für Mechanik i. G., D-09107 Chemnitz.

FE-Netz verwendet werden muß. Im folgenden wird das Funktional nur für die Verschiebung  $\bar{u}$  dargestellt und erläutert,  $\bar{v}$  wird völlig analog behandelt.

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_E} \left[ \frac{1}{m_{ui}} \sum_{j=1}^{m_{ui}} \alpha_{ij} (\bar{u}(x_{uij}, y_{uij}) - u_{ij})^2 \right] + \frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{i=1}^{n_E} \left[ G_i \int_{G_i} (\bar{u}_{,xx}^2 + 2\bar{u}_{,xy}^2 + \bar{u}_{,yy}^2) dG_i \right] \\ + \frac{\varepsilon_2}{2} \sum_{j=1}^{n_l} \left[ l_j \int_{l_j} (\bar{u}_{I,n} - \bar{u}_{II,n})^2 dl_j \right]$$

Das Funktional geht auf FENG und ROWLANDS [1] zurück, wurde aber mit dem Ziel verbesserter Approximationseigenschaften modifiziert und erweitert. Der erste Term besteht aus der Gaußschen Fehlerquadratnorm zwischen der Approximation  $\bar{u}$  und den Meßwerten  $u_{ij}$  im Element  $G_i$ . Eine individuelle Wichtung mit dem Faktor  $\alpha_{ij}$  ist möglich, wurde aber bei den bisherigen Anwendungen nicht benötigt. Im Element wird durch die Anzahl  $m_{ui}$  der Meßwerte dividiert, um den Einfluß einer stark unterschiedlichen Verteilung der Meßwerte bezüglich der Elemente, wie sie durch die Lage der Isotheten und durch unterschiedlich große Elemente auftreten kann, zu eliminieren. Die so gewichteten Beiträge aller  $n_E$  Elemente werden aufsummiert.

Mit dem mittleren Term von  $F$  wird über die zweiten Ableitungen die Krümmung von  $\bar{u}$  im Element minimiert, was eine Glättung von  $\bar{u}$  im Element bewirkt. Es wird mit der Elementfläche  $G_i$  lokal und mit dem dimensionslosen Glättungsparameter  $\varepsilon_1$  global gewichtet. Damit besitzt dieser Term die gleiche physikalische Dimension wie die Fehlerquadratnorm, und zusätzlich wird bei lokal verfeinertem FE-Netz gezielt eine stärkere Krümmung in kleinen Elementen ermöglicht. Das Fehlen der physikalischen Dimension bei  $\varepsilon_1$  wie auch bei  $\varepsilon_2$  ist eine notwendige Voraussetzung dafür, an Testbeispielen für diese Parameter optimale Werte bestimmen zu können, die auch für andere Anwendungen gute Ergebnisse liefern.

Wegen der zweiten Ableitungen in  $F$  sind mindestens quadratische Ansätze erforderlich. Deshalb werden wie in [1] im weiteren Achtknoten-Viereck-Elemente mit Ansatzfunktionen der Serendipity-Klasse verwendet, die an den Elementkanten nur  $C^0$ -stetig sind. Dies kann global zu einer sehr rauhen Approximation führen, da eine Glättung bisher nur in den Elementen stattfindet und diese die Knicke an den Elementkanten noch verstärkt. Um nun zu große Knicke für  $\bar{u}$  zu vermeiden, wird im dritten Term das Quadrat der Differenz der Ableitungen  $\bar{u}_{I,n}$  und  $\bar{u}_{II,n}$  normal zur Elementkante jeweils zweier benachbarter Elemente I und II minimiert. Dieser Anteil wird aus Gründen der Dimension wieder lokal mit der Elementkantenlänge  $l_j$  und global mit dem dimensionslosen Parameter  $\varepsilon_2$  gewichtet.  $n_l$  ist die Anzahl der betrachteten Elementkanten. Eine andere Möglichkeit zur Vermeidung starker Knicke an den Elementkanten ist die Verwendung von  $C^1$ -stetigen Elementen. Hier ist jedoch zu befürchten, daß die höheren Ansatzfunktionen dieser Elemente zu Überschwingungen bei der Approximation starker Krümmungen führen, wie dies von der eindimensionalen Approximation mit Polynomen höherer Ordnung bekannt ist. Die Wichtungen mit  $m_{ui}$ ,  $G_i$  und der sehr wesentliche gesamte dritte Teil wurden zu dem aus [1] bekannten Teil hinzugefügt.

$F$  ist ein quadratisches Funktional in  $\bar{u}$  bzw.  $\bar{v}$  und damit mindestens positiv semi-definit, in der Regel auch positiv definit. Das Einsetzen der Ansatzfunktionen und Differenzieren nach den Knotenfreiwerten führt bei  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$  auf ein lineares Gleichungssystem mit regulärer und positiv definiter Matrix. Es entstehen keine Probleme, falls in einem oder mehreren, auch benachbarten Elementen keine Meßwerte liegen. Die Knotenverschiebungen sind durch die Kopplung mit den anderen Elementen infolge des zweiten und dritten Terms im Funktional hinreichend determiniert. Generell ist die hier für den zweidimensionalen Fall dargestellte Approximation auch auf mehr Dimensionen erweiterbar und kann auf beliebige Meßwerte angewendet werden.

### 3 Transformation auf die Ausgangskonfiguration

Die Transformation von den raumfesten Koordinaten  $(x, y)$  auf die materiellen Koordinaten  $(X, Y)$  erfolgt durch die Verschiebungsbeziehungen  $X = x - \tilde{u}$  und  $Y = y - \tilde{v}$ . Da  $x, y, \tilde{u}$  und  $\tilde{v}$  im Element mit denselben Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}(\xi, \eta)$  dargestellt werden, lassen sich die gemeinsamen Ansatzfunktionen ausklammern und materielle Knotenkoordinaten definieren:

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{x}_{KE}^T \mathbf{N}(\xi, \eta) - \tilde{\mathbf{u}}_{KE}^T \mathbf{N}(\xi, \eta) = (\mathbf{x}_{KE}^T - \tilde{\mathbf{u}}_{KE}^T) \mathbf{N}(\xi, \eta) = \mathbf{X}_{KE}^T \mathbf{N}(\xi, \eta) \\ Y &= \mathbf{y}_{KE}^T \mathbf{N}(\xi, \eta) - \tilde{\mathbf{v}}_{KE}^T \mathbf{N}(\xi, \eta) = (\mathbf{y}_{KE}^T - \tilde{\mathbf{v}}_{KE}^T) \mathbf{N}(\xi, \eta) = \mathbf{Y}_{KE}^T \mathbf{N}(\xi, \eta) \end{aligned}$$

Es existieren also Abbildungen  $X(\xi, \eta) = X(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  und  $Y(\xi, \eta) = Y(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ , die als Verkettung der eineindeutigen Abbildungen  $X = X(x, y)$  und  $Y = Y(x, y)$  mit  $x = x(\xi, \eta)$  und  $y = y(\xi, \eta)$  selbst wieder eineindeutig und damit invertierbar sind. Die Verschiebungen  $\tilde{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}(X, Y)$  und  $\tilde{v}(\xi, \eta) = \tilde{v}(X, Y)$  können daher auch in Abhängigkeit der materiellen Koordinaten angegeben werden. Es findet also eine Transformation des FE-Netzes mit der Approximation auf die Ausgangskonfiguration statt, so daß keine neue Approximation auf der Ausgangskonfiguration notwendig ist. Dies ist mit Blick auf die so vermiedenen Approximationsfehler vorteilhaft.

### 4 Ergebnisse

Zunächst wurden die Approximationseigenschaften des Funktionals an einer rotationssymmetrischen Gaußschen Glockenkurve mit dem Ziel getestet, die Approximationsfehler durch eine geeignete Wahl der Parameter  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  zu minimieren. Hierbei zeigt sich, daß mit den Viereckelementen und den quadratischen Ansätzen eine doppelt gekrümmte Fläche gut modelliert werden kann. Diese Glockenkurve besitzt außerdem neben nahezu konstanten Bereichen auch starke Gradienten und scharfe Krümmungen, wobei auch der oft problematische Übergang von einer scharfen Krümmung in einen nahezu konstanten Bereich von der Approximation gut wiedergegeben wird. Es ist möglich, unerwünschte Schwingungen im konstanten Bereich zu vermeiden, ohne daß die Krümmung zu sehr geglättet werden muß. Dieser Vorteil wird auf die im Vergleich zu bi-kubischen Splines relativ niedrigen Elementansätze (quadratisch in  $\xi$  und  $\eta$ , kubisch in der Diagonalen) sowie auf eine gezielte Netzverfeinerung zurückgeführt. Diese lokale Netzverfeinerung im Bereich scharfer Krümmungen verbessert die Approximation ohne die Hinzunahme weiterer Meßwerte wesentlich. Weiterhin konnte die Wirksamkeit der Glättung zwischen den Elementen nachgewiesen werden, ohne die keine rotationssymmetrische, glatte, differenzierbare Approximation möglich ist. Für die Glättungsparameter ergaben sich mit  $\varepsilon_1 = 0.02$  und  $\varepsilon_2 = 0.5$  günstige Werte.

Des weiteren wurden die gemessenen Verschiebungsfelder einer Biegeprobe aus Polyurethan approximiert, bei der auch die Transformation auf die Ausgangskonfiguration wegen der großen Verformungen (ca. 15 %) gut getestet werden konnte. Im Bild 2 ist jeweils die linke Symmetriehälfte der Probe bis in den Bereich der unteren Auflager zu sehen. Dort wurde das Meßgebiet willkürlich durch eine Gerade nach links begrenzt. Dargestellt sind Höhenlinien — also Linien gleicher Verschiebung — der approximierten Verschiebung  $\tilde{u}$ , links auf der aktuell verformten Probe und rechts auf der unverformten Probe, der Ausgangskonfiguration. In der aktuellen Konfiguration korrespondieren die Höhenlinien der Approximation mit den Skelettlinien der Isotheten, auf denen die Meßpunkte liegen. Die Lage der Meßpunkte ist in der aktuellen Konfiguration markiert, und man erkennt, daß die Meßpunkte sehr gut auf den Höhenlinien liegen. Dies ist ein Zeichen für die geringen Approximationsfehler und damit für die Güte der Approximation. Im rechten Bild erkennt man die unverformte Probe, die tatsächlich oben und unten gerade Kanten besitzt mit Ausnahme der linken unteren Ecke im Bereich des Auflagers, wo das Ausmessen der Isotheten nur ungenau möglich war, so daß hier bereits größere Fehler bei den

Meßwerten vorhanden sind, die nicht der Approximation angelastet werden können. Dies Beispiel zeigt, daß die Transformation auf die Ausgangskonfiguration möglich ist und tatsächlich die unverformte Geometrie der Probe aus den approximierten Verschiebungen rekonstruiert werden kann.

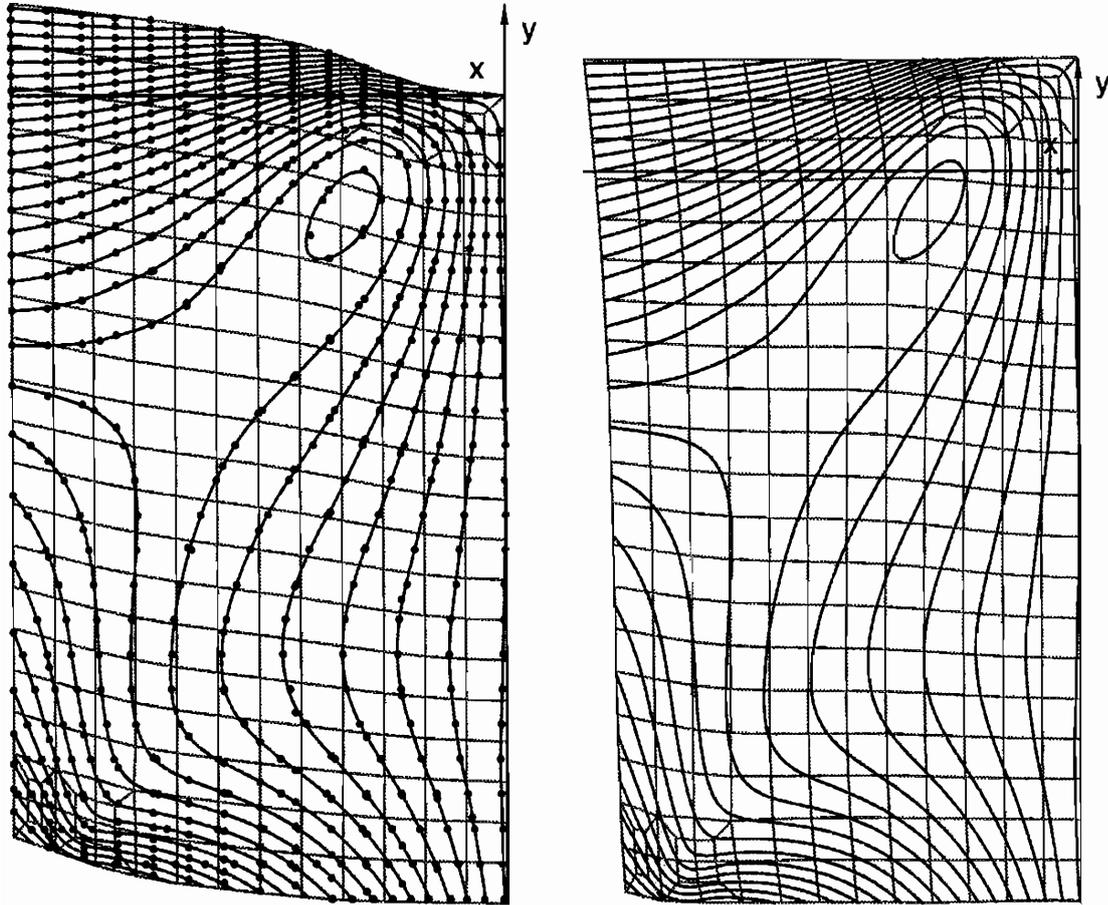


Bild 2. Verschiebung  $\bar{u}$  einer Biegeprobe aus PU, links aktuelle Konfiguration mit Meßpunkten, rechts die Ausgangskonfiguration.

Bei der Approximation der Biegeprobe sind die an der Gaußschen Glockenkurve optimierten Werte für  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  verwendet worden, die zu einem guten Ergebnis geführt haben. Auch bei anderen Verschiebungsfeldern mit zum Teil starken Krümmungen konnten dieselben Werte erfolgreich benutzt werden. Dies deutet darauf hin, daß günstige Werte für die Glättungsparameter relativ problemunabhängig sind.

## Literatur

- [1] FENG, Z.; ROWLANDS, R.E.: Continuous Full-Field Representation and Differentiation of Three-Dimensional Experimental Vector Data. Computers & Structures. **26** (1987), 979-990.

## Eine Untersuchung zum elastisch-viskoplastischen Verhalten von austenitischem Stahl

Bernd Westerhoff  
Ruhr-Universität Bochum  
Lehrstuhl für Technische Mechanik  
44780 Bochum • wes@tm.bi.ruhr-uni-bochum.de

### Einleitung

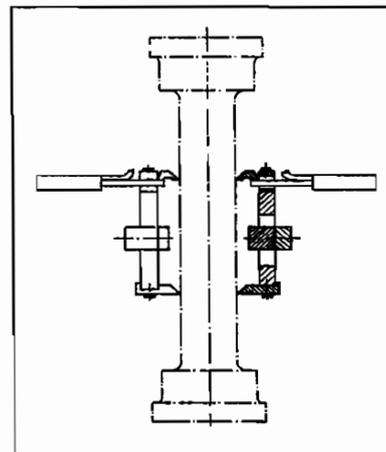
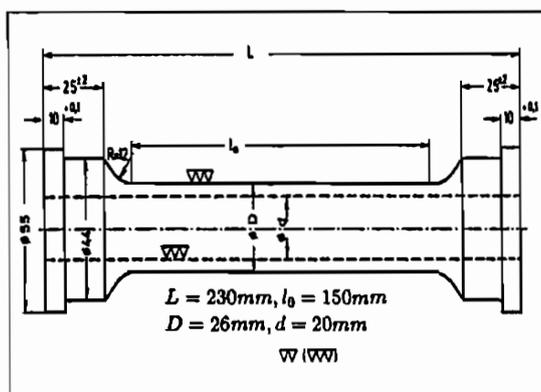
Das Ziel der Untersuchung ist die Weiterentwicklung und Anwendung eines hypoelastisch-viskoplastischen Stoffgesetzes. Hierzu wurden an einem ausgewählten Stahl einige Experimente durchgeführt, die im folgenden näher beschrieben werden. In einem weiteren Schritt soll dieses Stoffgesetz an die Versuche angepaßt werden und die Anwendbarkeit mit Hilfe von Finite-Element Rechnungen gezeigt werden.

### Art der Versuche

Das Versuchsprogramm umfaßt einaxiale, monotone und nicht-monotone Versuche. Die Experimente konnten zum einen weggeregelt im Bereich von  $\dot{\epsilon} = 10^{-5} - 10^{-1} \frac{1}{s}$  und zum anderen kraftgeregelt von  $\sigma \approx 1 - 100 \frac{MPa}{s}$  gefahren werden. Daneben wurden Versuche mit Haltezeiten, also Kriech- und Relaxationsversuche, durchgeführt. In einem dritten Abschnitt wurden Versuche mit Haltezeiten im Wechsel mit monotonen und nicht-monotonen Belastungen kombiniert. Alle Experimente wurden bei Raumtemperatur isotherm gefahren.

### Werkstoff

Der verwendete Werkstoff X 6 CrNi 18 11 (Werkstoffnummer 1.4948) ist ein hochwarmfester Stahl, der in der Kraftwerkstechnik und chemischen Industrie eingesetzt wird. Die zylindrischen Proben haben eine Wanddicke von 3 mm. Die Erweiterung im Kopf- und Fußbereich der Probe dient zur Aufnahme in die Prüfmaschine. Der Stahl wurde vor den Versuchen bei 900°C zwei Stunden im Vakuum normalisiert, um herstellungsbedingte Verfestigungen und Texturen abzubauen.



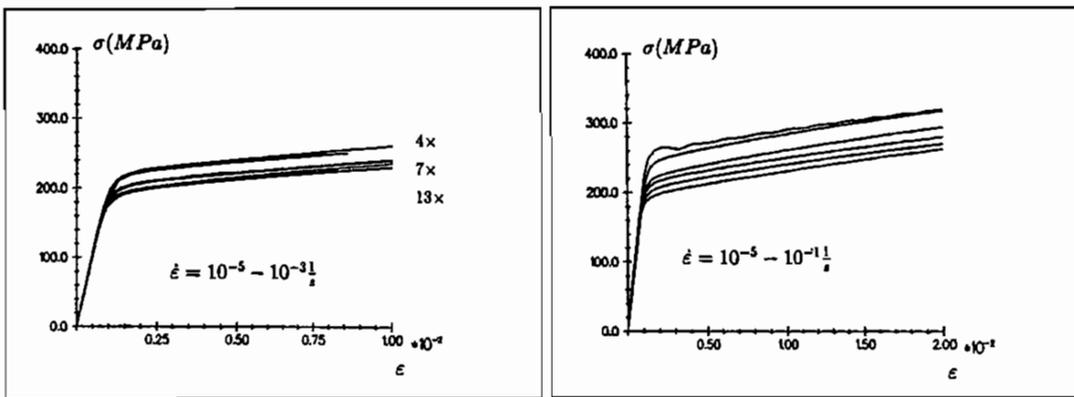
### Versuchseinrichtungen

Für die Durchführung der Versuche wurde eine hydraulische Prüfmaschine mit digitaler Regelelektronik verwendet [5]. Die Versuchsdaten wurden auf einer relationalen Datenbank in einem

gängigen Format abgelegt, um eine Austauschbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten. Die externe Wegemessung geschah mit Anklemmdehnungsaufnehmern der Genauigkeitsklasse 0.1. Die Aufnehmer können direkt im homogenen Bereich der Probe appliziert werden, um somit den Einfluß der Einspannung auf die Verformung auszuschließen. Die Meßlänge wird durch den Abstand der Schneiden bestimmt. Die untere Schneide liegt fest an, und die obere gibt die Verformung über ein elastisches Element an Dehnungsmeßstreifen (DMS) weiter. Durch die Verwendung zweier gegenüberliegender Aufnehmer ist eine Kompensation einer möglichen Biegung der Probe zu erreichen, und das Eigengewicht wird durch Gegengewichte aufgefangen. Der Nachteil der Aufnehmer besteht darin, daß bei Veränderung der Rauigkeit der Oberfläche, wie sie bei plastischen Deformationen zu beobachten ist, instabiles Regelverhalten auftritt. Die Regelung der Versuche wurde deswegen mit induktiven Wegaufnehmern (Genauigkeitsklasse 0.2), die zwischen den Einspannköpfen eingebaut wurden, realisiert.

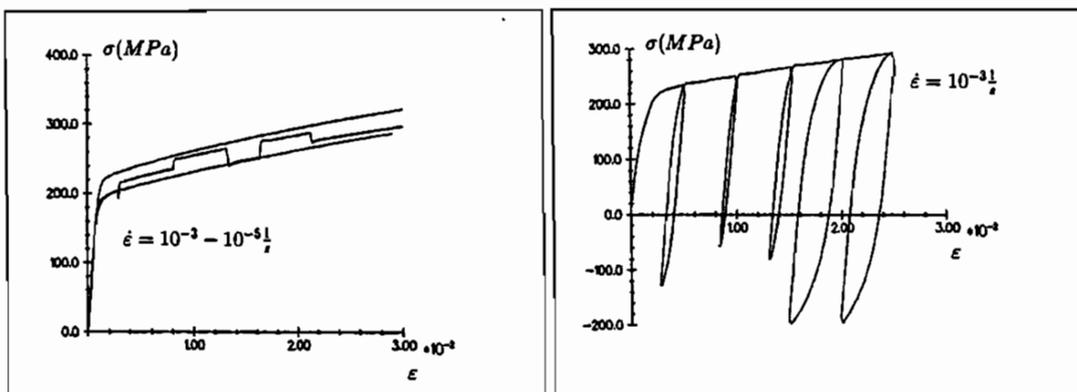
### Versuchsreproduzierbarkeit

Ein wichtiger Anhaltspunkt zur Überprüfung von Versuchsergebnissen ist die Reproduzierbarkeit von Versuchsgruppen. Die linke Grafik zeigt für 3 verschiedene Dehnungsgeschwindigkeiten jeweils 13, 7 bzw. 4 Versuche.



### Versuchsergebnisse

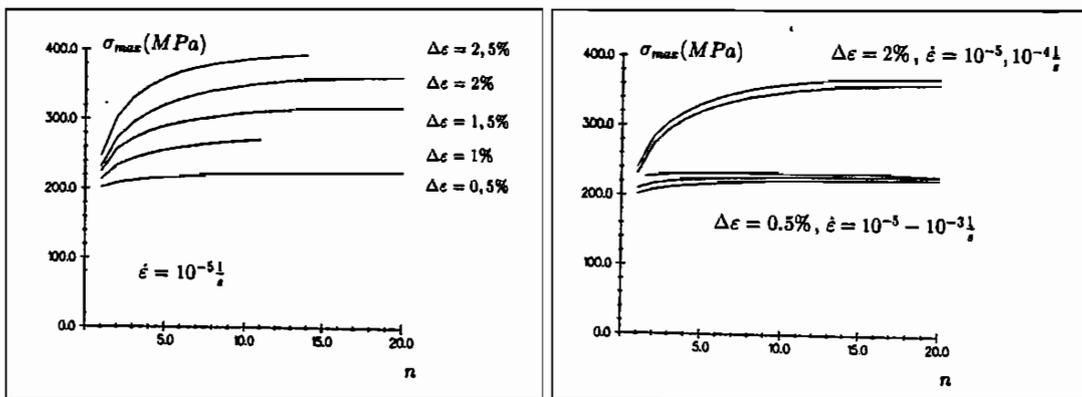
Die erste Abbildung stellt monotone Zugversuche bis 2 % Dehnung dar. Hierbei fällt zunächst die Geschwindigkeitsabhängigkeit des Materials auf. Das instabile Verhalten der schnellsten Kurve ( $\dot{\epsilon} = 10^{-1} \frac{1}{s}$ ) ist auf die Trägheit des Meßsystems zurückzuführen. Eine entsprechende Veränderung der Probenform kann die Schwierigkeiten beseitigen.



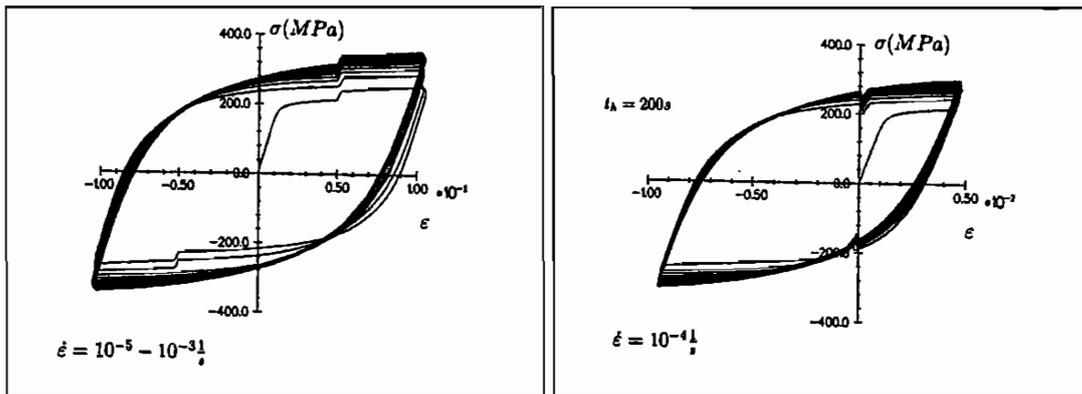
Die nächste Grafik zeigt einen monotonen Zugversuch, bei dem die Geschwindigkeit verändert wurde. Neben diesem Versuch sind auch die Kurven mit der jeweiligen Grenzgeschwindigkeit

$\dot{\epsilon} = 10^{-3}$  bzw.  $10^{-5} \frac{1}{s}$  eingezeichnet. Hierbei ist zu erkennen, daß die geringste Geschwindigkeit erreicht, die höchste Geschwindigkeit aber nach den Geschwindigkeitswechseln unterschritten wird. Daneben ist ein Versuch mit Zwischenentlastungen abgebildet.

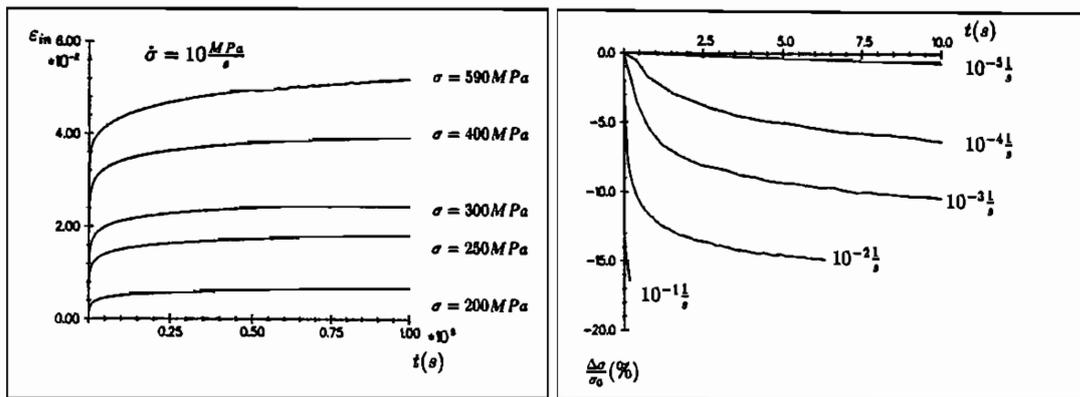
Die folgenden Abbildungen geben Versuche mit zyklischen Belastungen wieder. Bei einer Dehnungsgeschwindigkeit von  $\dot{\epsilon} = 10^{-5} \frac{1}{s}$  zeigt die obere Grafik für verschiedene Dehnungsschwingbreiten die maximale Spannung am Umkehrpunkt der Belastung aufgetragen über der Zyklenzahl. Es ist zu erkennen, daß sich nach ungefähr 20 Zyklen ein Maximum einstellt. Bei fortgesetzter Belastung fällt die Spannung nach 150 Zyklen um ca. 10 % ab (nicht dargestellt). Die rechte Abbildung zeigt für zwei verschiedene Dehnungsschwingbreiten einen Vergleich der Kurven für unterschiedliche Geschwindigkeiten. Der qualitative Verlauf der Verfestigung wird durch die Variation Geschwindigkeit unwesentlich beeinflusst.



Neben zyklischen Belastungen mit konstanten Dehnungsgeschwindigkeiten wurden Experimente mit wechselnden Geschwindigkeiten und Versuche mit Haltezeiten während der Belastungen durchgeführt. Nicht dargestellt sind Versuche mit wechselnden Dehnungsschwingbreiten oder andere zyklische Versuche mit komplexer Vorgeschichte.



Die folgenden Bilder zeigen Versuche mit Haltezeiten. Links sind Kriechversuche dargestellt, wobei der Scharparameter die Haltespannung ist. Bei anderen Versuchen wurde die Geschwindigkeit verändert oder die Vorgeschichte war weggeregelt. Die Haltezeiten erstreckten sich bei einzelnen Versuchen bis zu sechs Tagen. Der tertiäre Kriechbereich wurde nicht erreicht. Die rechte Abbildung zeigt Relaxationsversuche, bei denen in der Vorgeschichte die Geschwindigkeit variiert wurde. Die Grafik zeigt auf der Ordinate die Abnahme der Spannung nach dem Anhalten des Versuches bezogen auf das Spannungsmaximum. Die Spannung fällt bei Relaxationsversuchen innerhalb von ca. 10 s auf ein nahezu konstantes Niveau ab.



*Ausblick*

Die dargestellten Experimente sollen die Basis für die Weiterentwicklung eines hypoelastisch-viskoplastischem Stoffgesetzes sein. Die hinreichend bekannten viskoplastischen Stoffgesetze [3], [6], [2] liefern unbefriedigende Ergebnisse, wenn sowohl geschwindigkeitsabhängige Effekte, wie die Abhängigkeit der Spannung von der Dehnungsgeschwindigkeit oder Prozesse mit Haltezeiten, als auch Effekte wie Verfestigung oder Erreichen eines Sättigungszustandes bei zyklischen Belastungen simuliert werden sollen. Die Grundidee des Stoffgesetzes von Rott [7] besteht darin, die inelastische Verzerrungsgeschwindigkeit in einen geschwindigkeitsunabhängigen und einen abhängigen Teil aufzuspalten.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p + \dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_e + \lambda \bar{n} + \ll \phi(\Lambda) \gg \bar{n}$$

Der geschwindigkeitsunabhängige Anteil kann dann mit klassischen Plastizitätsgesetzen ([1], [4]) beschrieben werden. Der ratenabhängige Teil kann im herkömmlichen Sinne mit den erwähnten Überspannungsmodellen gestaltet werden.

Eine Vorfassung des Stoffgesetzes wurde in ein Finite-Element-Programm (FEAP) implementiert. Die mehraxialen Berechnungen können mit entsprechenden Versuchen (Torsion, Innendruck) überprüft werden. Die Erweiterung auf nicht-isotherme Prozesse und auf Schädigung soll in einem nächsten Schritt vollzogen werden.

*Literatur*

- [1] O.T. Bruhns and I. Müller. Some remarks on the application of a two-surface model in plasticity. *Acta Mechanica*, 53:S.81-100, 1984.
- [2] O.T. Bruhns and B. Westerhoff. DFG-Forschungsvorhaben: Inelastisches Materialverhalten. Juli 1993.
- [3] J.L. Chaboche. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 5:S.247-302, 1989.
- [4] U. Kikillus. Ein elatisch-plastisches Stoffgesetz für zyklische nichtproportionale Belastungen. *Zamm*, 71(4):S.268-273, 1991.
- [5] U. Kikillus. *Ein Beitrag zum zyklischen Verhalten von CK15*. PhD thesis, Instiut für Mechanik, Mai 1993.
- [6] D. Nouailhas. Unified modelling of cyclic visoplasticity: Application to austenitic stainless steel. *International Journal of Plasticity*, 5:S.501-520, 1989.
- [7] U. Rott and O.T. Bruhns. A viscoplastic model with a smooth transition to describe rate-independent plasticity. *International Journal of Plasticity*, 10(4):S.347-362, 1994.

## **Ermittlung von Materialparametern durch Auswertung inhomogener Verschiebungsfelder**

S. Kretzschmar ; TU Chemnitz-Zwickau ; Institut f. Mechanik i.G.

### **1. Abstract**

Die Bestimmung von Materialparametern elastisch-plastischer Deformationsgesetze stellt ein zentrales Problem der gegenwärtigen Materialforschung dar.

Zur Untersuchung des realen Materialverhaltens werden Experimente durchgeführt. Parallel dazu erfolgt die numerische Simulation für die gleiche Geometrie und Belastung. Der Parametersatz eines gewählten Stoffgesetzes wird durch Anpassung der numerischen Lösung an das Experiment bestimmt.

### **2. Untersuchung homogener Spannungszustände an Kreuzproben**

Bisher wurden an der TU Chemnitz-Zwickau Kreuzproben für die experimentelle Untersuchung des elastisch-plastischen Materialverhaltens von Blechen genutzt [1]. Ausgangspunkt der Untersuchungen zu ebenen Hauptspannungszuständen ist die lastschrittweise experimentelle Ermittlung der Verzerrungen und der Deformationsgeschwindigkeiten .

Diese Deformationsgeschwindigkeiten gehen als Belastungsgröße bei der Integration des Deformationsgesetzes ein. Für ein vorgegebenes Materialverhalten und einen gewählten Satz Materialparameter werden die Spannungen ermittelt. Diese "numerischen" Spannungen können unter Voraussetzung eines homogenen Spannungszustands direkt mit den experimentellen Spannungswerten, die sich durch Bezug der äußeren Last auf die Querschnittsfläche bestimmen lassen, verglichen werden.

Gerade aber die Voraussetzung eines homogenen Spannungszustands stellt bei dessen experimenteller Realisierung ein Problem dar. Die Homogenität des Spannungszustands läßt sich nur durch einen großen experimentellen Aufwand sicherstellen. Es erweist sich als notwendig, in die Stege Schlitze zur Homogenisierung der Lasteinleitung und zum Abbau der Querspannungen einzubringen und das Meßgebiet zu verjüngen [2].

Weitere Nachteile der Kreuzproben sind die Beschränkung auf ebene Hauptspannungszustände im Zugbereich und die Anpassung der Materialparameter an nur einen Belastungsweg.

### **3. Grundlagen der numerischen Untersuchungen**

Für die das Experiment begleitenden numerischen Untersuchungen an Kreuzproben wurde ein Programm zur punktwisen Integration des Deformationsgesetzes entwickelt.

Dieses Programm basiert auf einer Formulierung des Deformationsgesetzes in Geschwindigkeitsform (1). Zur Erfassung der Belastungsgeschichte werden interne Variable  $h$  als Tensoren verschiedener Stufe definiert, für die Evolutionsgleichungen in Geschwindigkeitsform formuliert werden (2) .

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}(\sigma, \mathbf{h}) \dot{\epsilon} \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{A}(\sigma, \mathbf{h}) \dot{\epsilon} \quad (2)$$

Grundlage der Beschreibung des Materialverhaltens stellt die quadratische Fließbedingung nach Baltov und Sawczuk (3) dar, bei der die einzelnen Anteile von isotroper, kinematischer und Distorsionsverfestigung separat vorliegen [3].

$$f = N_{ijkl} (\sigma_{ij} - \alpha_{ij})(\sigma_{kl} - \alpha_{kl}) - k^2 (\epsilon_v^{pl}) = 0 \quad (3)$$

Das Programm mit variablem Materialteil gestattet die Implementierung verschiedener Ansätze für die internen Parameter  $\mathbf{h}$ . Die isotrope Verfestigung wird mit einem Potenzansatz (4) beschrieben, die kinematische Verfestigung mit Ansätzen nach Backhaus und Valanis sowie die Distorsionsverfestigung mit Ansätzen nach Backhaus und Danilov [4].

$$\sigma_F(\epsilon_v^{pl}) = \sigma_{F0} \left\{ \left( 1 + \frac{c_0}{c_2} (\epsilon_v^{pl})^{c_2} - c_1^{c_2} \right) \right\} \quad (4)$$

Neben der Nutzung verschiedener Verfestigungsansätze ist es möglich, das Stoffgesetz sowohl mittels expliziter als auch impliziter Algorithmen, wie Euler-backward und einer Form des Return-Algorithmus, zu integrieren [5].

#### 4. Untersuchung inhomogener Spannungszustände an Biegeproben

Eine Alternative zu den Kreuzproben stellt die Untersuchung von Biegeproben mit einem bewußt erzeugten inhomogenen Spannungszustand dar. Gegenwärtig werden Versuche an mit einem Kreiskerb geschwächten 4-Punkt-Biegeproben (Abb.1) durchgeführt. Ein Vergleich auf Basis der Spannungen ist wegen der Inhomogenität nicht mehr möglich. Es stellt sich nunmehr die Frage, ob für eine Bestimmung von Materialparametern auch integrale Vergleichsgrößen, wie z.B. das aus dem Experiment bekannte Biegemoment, nutzbar sind.

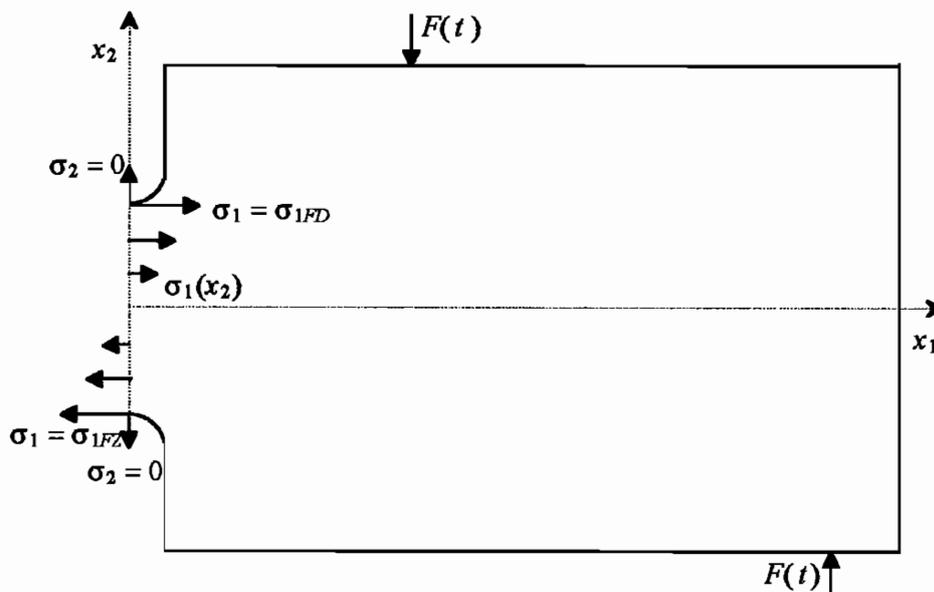


Abb.1 Darstellung einer Symmetriehälfte der 4-Punkt-Biegeprobe

Für die numerischen Berechnungen zu inhomogenen Spannungszuständen wurde das vorhandene Materialprogramm für mehrere Punkte erweitert. Aufgrund der im Verhältnis zu den anderen Abmaßen der Probe kleinen Probendicke läßt sich das Problem als ebener Spannungszustand beschreiben. Auf der Symmetrieachse ( $x_1=0$ ) liegt ein ebener Hauptspannungszustand vor. Die Integration des Deformationsgesetzes erfolgt mit dem Runge-Kutta-Verfahren.

Über das Kräftepaar wird in mehreren Lastschritten ein Biegemoment eingeleitet. Durch die Messung der Kraft mittels einer Kraftmeßdose und die Hebelverhältnisse ist folglich das Moment je Lastschritt aus dem Experiment bekannt. Aufgrund der auf Rollen gelagerten Lasteinleitung kann die Längskraft für alle Lastschritte als identisch Null vorausgesetzt werden.

Aus den je Lastschritt experimentell bestimmten Deformationsgeschwindigkeiten wird für das gewählte Stoffgesetz und einen Satz Materialparameter ein Spannungsverlauf auf der Symmetrieachse berechnet. Auf Basis der Äquivalenzbedingungen wird dieser berechnete Spannungsverlauf mittels numerischer Integration zu einer numerischen Längskraft und einem numerischen Biegemoment zusammengefaßt. Diese so bestimmten integralen Größen werden nunmehr mit den aus dem Experiment bekannten Größen verglichen.

Da der Kerbgrund lastfrei ist, liegt dort ein einachsiger Spannungszustand vor. Die innere Normalspannung im Kerbgrund muß folglich auf der Zugseite gleich der einachsigen Zugfließspannung, die innere Normalspannung im Kerbgrund der Druckseite gleich der einachsigen Druckfließspannung sein. Die experimentell ermittelten Spannungs - Dehnungs-Kurven gestatten einen Vergleich auf Basis der Spannungen in den Kerbgründen. Damit sind je Lastschritt aus dem Experiment insgesamt zwei integrale und zwei lokale Größen bekannt. Die Aufgabe der Bestimmung der Materialparameter wird folglich durch einen Vergleich experimenteller und numerischer Größen über mehreren Zeitschritten ausgeführt. Dafür eignet sich eine Zielfunktion auf Basis der Minimierung einer Quadratmittelsumme.

$$Q = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n [v_{Mij} - v_{Nij}(p_k)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = Min \quad (5)$$

$v_{Mij}$  j-ter Meßwert zum i-ten Zeitpunkt

$v_{Nij}$  j-ter numerischer Wert zum i-ten Zeitpunkt

## 5. Numerisches Beispiel

Im Rahmen einer Voruntersuchung zur Eignung dieser Herangehensweise bei der Parameterermittlung wurde das aufwendige reale Experiment durch ein numerisches Experiment mit dem FE-Programm MARC ersetzt. Die Simulation erfolgte mit 8-Knoten-Elementen und in 10 Zeitschritten, die den Lastschritten im Experiment entsprechen. Das Materialverhalten wurde mit linearer isotroper Verfestigung beschrieben. Die mit der FEM ermittelten Deformationsgeschwindigkeiten gehen als Belastungsgröße bei der Integration des Deformationsgesetzes ein, und es werden mit dem Materialprogramm die Spannungen je Zeitschritt berechnet.

Neben der Tatsache, daß die Materialparameter bei der FEM vorgegeben werden und folglich bekannt sind, hat das numerische Experiment einen weiteren Vorteil gegenüber dem realen Experiment. Da die Spannungen durch die FE-Rechnung ohnehin bereitgestellt werden, können diese mit den durch das Materialprogramm ermittelten Spannungen direkt verglichen werden.

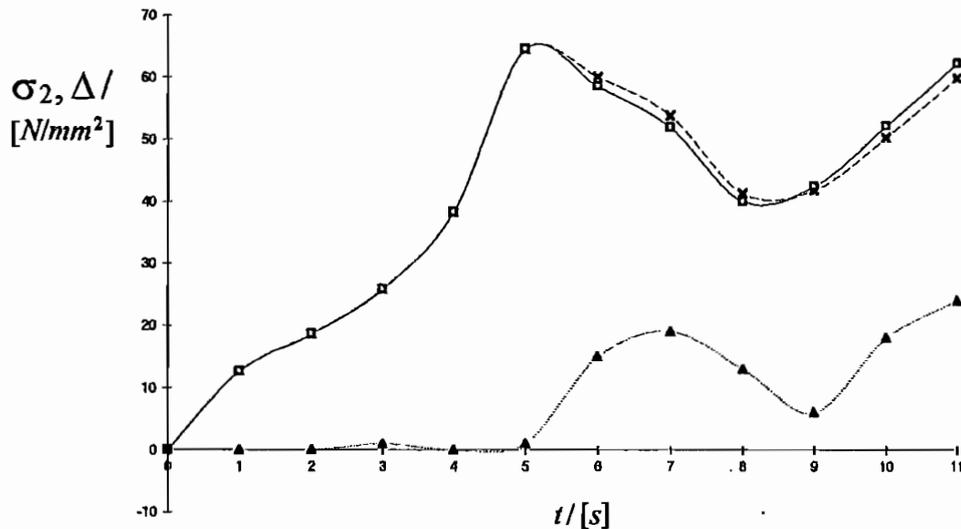


Abb.2 Vergleich der Spannungen MARC ( □ ) / Materialprogramm ( × )  
am Beispiel  $\sigma_2(t)$  für  $x_2 = 20 \text{ mm}$  ; 10\* Abweichung ( Δ )

Die akzeptable Übereinstimmung der Spannungen als lokale Größen selbst bei einem Vorzeichenwechsel der Deformationsgeschwindigkeit ( Abb.2 ) läßt eine gute Näherung der integralen FE-Belastungsgrößen bei den vorgegebenen Parametern erwarten. Das für die Minimumssuche genutzte Gradientenverfahren liefert eine Lösung in der Nähe der vorgegebenen Materialparameter. Tatsächlich nimmt die Zielfunktion bei einem Materialparametersatz  $\sigma_{F0}=201 \text{ N/mm}^2$ ;  $c_0=293$  statt des vorgegebenen Parametersatzes  $\sigma_{F0}=200 \text{ N/mm}^2$ ;  $c_0=300$  ein Minimum an. Dieser relative Fehler von 1-2 % für die Parameterermittlung ist vertretbar.

Im Hinblick auf den gewählten sehr einfachen Verfestigungsansatz mit nur 2 freien Materialparametern erscheint es jedoch insbesondere bei der Nutzung komplizierterer Verfestigungsansätze als sinnvoll, die Zielfunktion auf Basis lokaler Größen zu formulieren. Eine Möglichkeit dazu stellt der direkte Vergleich numerischer und experimenteller Verschiebungsfelder dar.

### Literatur

- [1] Kreißig, R. ; Schindler, J.: Some experimental results on yield condition in plane stress state. Acta Mechanica 65 (1986) , 169-179.
- [2] Demmerle, S. ; Boehler, J.P.: Optimal design of biaxial cruciform specimens. Journal Mech. Phys. Solids 41 (1993) , 143-181.
- [3] Baltov, A. ; Sawczuk, A.: A rule of anisotropic hardening. Acta Mechanica 1 (1965) , 81-92.
- [4] Bergander, H. : Inelastische Deformationsgesetze in Standardformulierung. Wissenschaftliche Schriftenreihe der TU Karl-Marx-Stadt 5/1990.
- [5] Gerlach, J.: Verschiedene Integrationsverfahren für elastisch-plastische Materialgesetze. Weiterbildungszentrum Festkörpermechanik, Konstruktion und rationeller Werkstoffesatz der TU Dresden , Heft 1/91

# Die plastische Verfestigung bei Verwendung einer kubischen Fließbedingung

G.GREWOLLS\*

## 1 Einleitung

Zur phänomenologischen Beschreibung der Grenzbeanspruchung, bei der ein Material vom elastischen zum elastisch-plastischen Zustand übergeht, dient die Fließbedingung. In gegenwärtig verfügbaren Berechnungsprogrammen (z.B. ANSYS, MARC, ABAQUS, PSU) werden die v.MISESSche oder modifizierte Fließbedingungen zweiten Grades verwendet. Die dazugehörige Fließfläche im sechsdimensionalen Spannungsraum ist ein Hyperellipsoid, so daß als Fließortkurven Ellipsen entstehen.

Bei experimentellen Untersuchungen (z.B. [1],[2]) wurden jedoch erhebliche Abweichungen der Fließortkurven von der elliptischen Gestalt festgestellt, die sowohl im Ausgangszustand als auch infolge der Verfestigung auftreten können.

Die Beschreibung solcher Erscheinungen erfordert den Übergang auf Fließbedingungen höheren Grades. Wegener und Schlegel zeigen in [3], daß man die experimentell ermittelten Kurven gut approximieren kann, wenn kubische Terme in die Fließbedingung aufgenommen werden.

Für die Entwicklungsgleichungen der Zustandstensen, welche die Veränderungen der Fließfläche abhängig vom Verformungsweg beschreiben, gibt es bisher aber nur wenige Vorschläge.

Deshalb besteht das Ziel der eigenen, numerischen Untersuchungen darin, Erfahrungen zur Formulierung von Entwicklungsgleichungen zu gewinnen, welche die Wiedergabe der in den Experimenten beobachteten Erscheinungen erlauben.

## 2 Theoretische Formulierung

Ausgehend von dem von LEHMANN in [4] vorgeschlagenen allgemeinen polynomialen Ansatz wird eine Fließbedingung 3.Grades formuliert:

$$f \equiv h_0 + h_{ij}\sigma_{ij} + h_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + h_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} = 0. \quad (1)$$

Die Koordinaten der Zustandstensen  $h$  sind die inneren Variablen des Materials.

Es werden weiterhin folgende Vereinbarungen getroffen:

- Beschränkung auf kleine Verzerrungen
- additive Zerlegung der Deformationsgeschwindigkeit:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon}^{pl} \quad (2)$$

---

\* *Anschrift:* GREWOLLS, G., Technische Universität Chemnitz-Zwickau, Institut für Mechanik i.G., D-09107 Chemnitz

- Verwendung der Normalenregel:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} f_{ij} . \quad (3)$$

Als Ausgangspunkt für die Formulierung der Entwicklungsgleichungen wird der Ansatz von DANILOV [5] für einen Zustandstensor vierter Stufe verwendet:

$$h_{ijkl} = I_{ijkl}(\varepsilon_v^{pl}) + \int_0^{\varepsilon_v^{pl}} A_D(\bar{\varepsilon}_v^{pl}) \frac{d\varepsilon_{ij}^{pl}}{d\bar{\varepsilon}_v^{pl}} \frac{d\varepsilon_{kl}^{pl}}{d\bar{\varepsilon}_v^{pl}} d\bar{\varepsilon}_v^{pl} . \quad (4)$$

Durch formale Übertragung dieses Ansatzes für alle in (1) auftretenden Zustandstensoren sowie für die Variable  $h_0$  erhält man folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} h_0 &= h_0^{(0)} + \int_0^{\varepsilon_v^{pl}} A(\bar{\varepsilon}_v^{pl}) d\bar{\varepsilon}_v^{pl} \\ h_{ij} &= h_{ij}^{(0)} + \int_0^{\varepsilon_v^{pl}} B(\bar{\varepsilon}_v^{pl}) \frac{d\varepsilon_{ij}^{pl}}{d\bar{\varepsilon}_v^{pl}} d\bar{\varepsilon}_v^{pl} \\ h_{ijkl} &= h_{ijkl}^{(0)} + \int_0^{\varepsilon_v^{pl}} C(\bar{\varepsilon}_v^{pl}) \frac{d\varepsilon_{ij}^{pl}}{d\bar{\varepsilon}_v^{pl}} \frac{d\varepsilon_{kl}^{pl}}{d\bar{\varepsilon}_v^{pl}} d\bar{\varepsilon}_v^{pl} \\ h_{ijklmn} &= h_{ijklmn}^{(0)} + \int_0^{\varepsilon_v^{pl}} D(\bar{\varepsilon}_v^{pl}) \frac{d\varepsilon_{ij}^{pl}}{d\bar{\varepsilon}_v^{pl}} \frac{d\varepsilon_{kl}^{pl}}{d\bar{\varepsilon}_v^{pl}} \frac{d\varepsilon_{mn}^{pl}}{d\bar{\varepsilon}_v^{pl}} d\bar{\varepsilon}_v^{pl} \end{aligned} \quad (5)$$

mit

$$\varepsilon_v^{pl} = \int \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}} dt \quad (\text{plastischer Anteil der Vergleichsverzerrung}) . \quad (6)$$

Die mit (0) gekennzeichneten Terme beschreiben den Ausgangszustand. Sie sind im Falle eines isotropen Ausgangszustands gleich den Koordinaten der isotropen Tensoren der entsprechenden Stufe.

Aus dem linearen Elastizitätsgesetz

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^{el} \quad (7)$$

und der Konsistenzbedingung<sup>1</sup>

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \sum_k \frac{\partial f}{\partial h_{...}^{(k)}} \dot{h}_{...}^{(k)} = f_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\lambda} v = 0 ; \quad k = 0, 2, 4, 6 \quad (8)$$

erhält man unter Verwendung von (2) und (3) das elastisch-plastische Deformationsgesetz

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left( E_{ijop} - \frac{E_{ijmn} E_{uwop} f_{mn} f_{uw}}{E_{qrst} f_{qr} f_{st} + v} \right) \dot{\varepsilon}_{op} \quad (9)$$

und, nach Ableitung von (5) nach t, die Geschwindigkeitsform der Entwicklungsgleichungen

<sup>1</sup>Zur Verkürzung der Schreibweise wird ein Zustandstensor k-ter Stufe mit  $h_{...}^{(k)}$  bezeichnet.

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_0 &= A(\varepsilon_v^{pl}) \sqrt{\frac{2}{3} f_{ab} f_{ab}} \frac{E_{uwp} f_{uw}}{E_{qrst} f_{qr} f_{st} + v} \dot{\varepsilon}_{op} \\
 \dot{h}_{ij} &= B(\varepsilon_v^{pl}) \frac{E_{uwp} f_{uw}}{E_{qrst} f_{qr} f_{st} + v} f_{ij} \dot{\varepsilon}_{op} \\
 \dot{h}_{ijkl} &= \frac{C(\varepsilon_v^{pl})}{\sqrt{\frac{2}{3} f_{ab} f_{ab}}} \frac{E_{uwp} f_{uw}}{E_{qrst} f_{qr} f_{st} + v} f_{ij} f_{kl} \dot{\varepsilon}_{op} \\
 \dot{h}_{ijklmn} &= \frac{D(\varepsilon_v^{pl})}{\frac{2}{3} f_{ab} f_{ab}} \frac{E_{uwp} f_{uw}}{E_{qrst} f_{qr} f_{st} + v} f_{ij} f_{kl} f_{mn} \dot{\varepsilon}_{op}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Das Deformationsgesetz und die Entwicklungsgleichungen stellen unabhängig vom Grad der Fließbedingung lineare Zusammenhänge zwischen den Deformationsgeschwindigkeiten und den Spannungsgeschwindigkeiten bzw. den zeitlichen Änderungen der Koordinaten der Materialtensoren dar.

Die skalare Größe  $v$  wird als Verfestigungsfunktion bezeichnet. Mit

$$\dot{h}_{\dots}^{(k)} = \dot{\lambda} q_{\dots}^{(k)} ; \quad k = 0, 2, 4, 6$$

erhält man aus (8)

$$v = - \left[ \frac{\partial f}{\partial h_0} q_0 + \frac{\partial f}{\partial h_{ij}} q_{ij} + \frac{\partial f}{\partial h_{ijkl}} q_{ijkl} + \frac{\partial f}{\partial h_{ijklmn}} q_{ijklmn} \right], \tag{11}$$

und nach Einsetzen von (3), (6) und (10)

$$v = - \left[ A(\varepsilon_v^{pl}) \sqrt{\frac{2}{3} f_{ab} f_{ab}} + B(\varepsilon_v^{pl}) f_{ij} \sigma_{ij} + \frac{C(\varepsilon_v^{pl})}{\sqrt{\frac{2}{3} f_{ab} f_{ab}}} (f_{ij} \sigma_{ij})^2 + \frac{D(\varepsilon_v^{pl})}{\frac{2}{3} f_{ab} f_{ab}} (f_{ij} \sigma_{ij})^3 \right].$$

### 3 Numerische Simulation

Da bisher keine Daten komplizierterer Versuche zur Verfügung stehen, wird vorausgesetzt, daß aus dem einachsigen Zugversuch eine Spannungs-Dehnungs-Kurve vorliegt, die mit einem Potenzansatz angenähert wird. Diese Daten gestatten jedoch keine eindeutige Aufteilung der Verfestigung auf die 4 Anteile, die durch die Größen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  in (10) bestimmt werden. Die Aufteilung erfolgt daher zunächst willkürlich, wobei  $B$ ,  $C$  und  $D$  zur Vereinfachung als konstant vereinbart werden. Für einen angenommenen Parametersatz  $B$ ,  $C$ ,  $D$  wird in einer Simulation des einachsigen Zugs die Funktion  $A(\varepsilon_v^{pl})$  punktweise so ermittelt, daß die vorgegebene Spannungs-Dehnungs-Kurve erfüllt wird. Die so festgelegten Werte der Materialparameter werden dann zur Simulation beliebiger ebener Belastungswege verwendet.

### 4 Beispiele und Bewertung der Ergebnisse

Die dargestellten Beispiele zeigen, daß die experimentell beobachteten Effekte der Vergrößerung der Krümmung der Fließortkurve in der Belastungsrichtung und der „Abplattung“ entgegen der Belastungsrichtung richtig wiedergegeben werden.

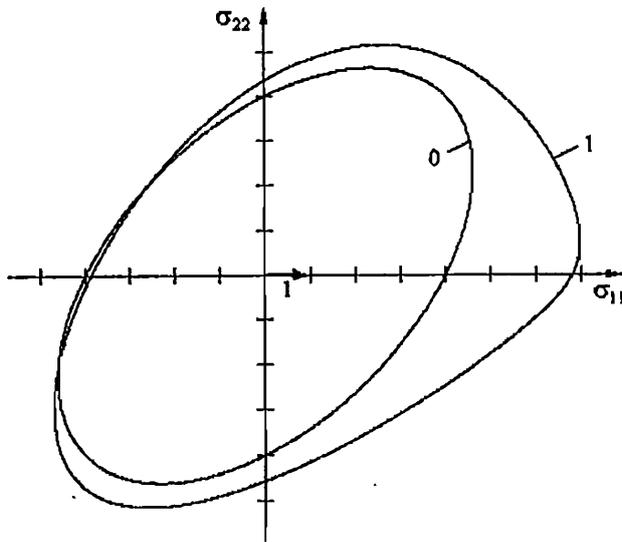


Bild 1.  
Numerische Simulation des einachsigen Zugversuchs (rein quadratische Fließbedingung im isotropen Ausgangszustand)  
Materialdaten:  $\sigma_{F0} = 400 N/mm^2$ ;  
 $B = C = 0$ ;  $D = -20,0(N/mm^2)^{-1}$

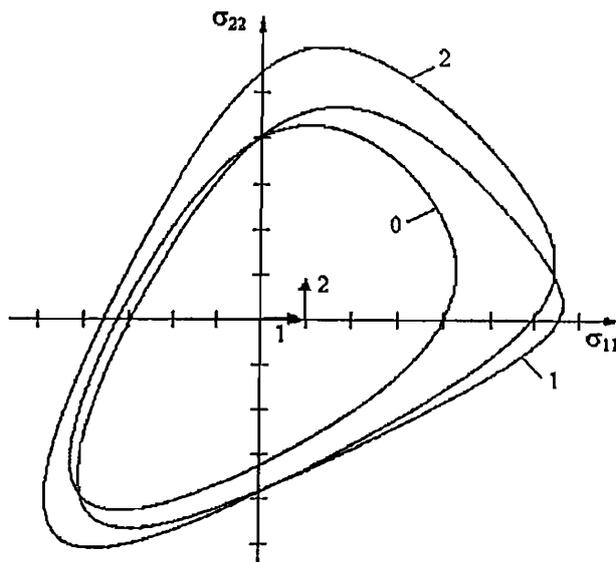


Bild 2.  
Numerische Simulation des Hakenwegs  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$  (kubische Fließbedingung im isotropen Ausgangszustand)  
Materialdaten:  $\sigma_{F0} = 400 N/mm^2$ ;  
 $B = -20,0 N/mm^2$ ;  $C = 10,0$ ;  
 $D = -10,0(N/mm^2)^{-1}$

## 5 Literatur

- 1 PHILLIPS, A., TANG, J.L.: The effect of loading path on the yield surface at elevated temperatures. *Int. J. Solids Struct.* **8** (1972), 463-474.
- 2 TAKETA, T.; NASU, Y.: Evaluation of yield function including effects of third stress invariant and initial anisotropy. *J. Strain Anal.* **26** (1991), 47-53.
- 3 WEGENER, K.; SCHLEGEL, M.: Zur Darstellung von Fließpotentialen. *ZAMM* **74** (1994)4, T329-T330.
- 4 LEHMANN, T.: Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für große elasto-plastische Formänderungen. *Ing.-Archiv* **41** (1972), 279-310
- 5 DANILOV, V.L.: K formulirovke zakona deformationnogo upročnenija. *Mechanika tverdogo tela* **6** (1971), 146-150

# Zur Volumenviskosität von Schnee

B. Meussen & O. Mahrenholtz  
TU Hamburg-Harburg

## 1 Einleitung

Zur wissenschaftlichen und wirtschaftlichen Erschließung der Permafrostregionen der Erde ist es notwendig, das mechanische Verhalten von Schnee zu kennen. Bauwerke müssen hier auf geschlossenen Schneedecken errichtet werden. Daher wird das Materialverhalten des Schnees am Arbeitsbereich Meerestechnik II der Technischen Universität Hamburg-Harburg untersucht.

Zur Bestimmung des Materialverhaltens werden in den Eislabors des Arbeitsbereichs einachsige Kriechversuche unter Druck- und Zugbelastung und mehrachsige Kriechversuche unter Druck- und Torsionsbelastung durchgeführt. Das Probenmaterial stammt aus dem Filchner-Ronne-Schelfeis (FRIS) in der Antarktis und wird vom Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung in Bremerhaven zur Verfügung gestellt. Die Glaziologen des Alfred-Wegener-Instituts erhoffen sich aus den Untersuchungen Informationen über das Fließverhalten großer Eismassen. Bei dem Probenmaterial handelt es sich um Firn: 1500 Jahre alter, abgelagerter meteorischer Schnee (Colbeck, *et al.*, 1990: Klassifikation 3lr: large rounded particles).

## 2 Volumenviskosität von Schnee

Die Volumenviskosität ist das zeitabhängige volumetrische Verhalten eines Materials. Schnee verhält sich volumenviskos: Die Verzerrungen, die ein Schneekörper unter einer konstanten Belastung erfährt, sind zeitabhängig und gehen mit einer Änderung des Volumens einher. Dabei sind die Verzerrungen erheblich größer als die Verzerrungen polykristallinen Eises unter derselben Belastung (Bild 1 und Bild 2).

Die Ursache für dieses Verhalten des Schnees, das deutlich von dem Verhalten des polykristallinen Eises abweicht, liegt in der Struktur des Schnees: es ist ein polykristallines, poröses Material. Die Volumenviskosität ist also eine Struktureigenschaft des Schnees. Im allgemeinsten Fall läßt sich die Struktur des Schnees durch die in der oben genannten Klassifikation angegebenen Strukturparameter beschreiben. Diese Parameter sind: Dichte, Temperatur, Kornform, Korngröße und der Wasser- beziehungsweise Wasserdampfgehalt des Schnees.

Die Dichte des Firns in Schneedecken ist stückweise linear abhängig von der Tiefe. Ebinuma und Maeno haben 1987 die Änderung der Steigungen dieses Zusammenhangs untersucht. Diese Änderungen treten immer in bestimmten Dichtebereichen auf. Bei einer Dichte von  $0,55 \frac{Mg}{m^3}$  erreichen die Partikel des Firns eine stabile mechanische Packung. Ab einer Dichte von  $0,70 \frac{Mg}{m^3}$  erreicht der Firn durch Kornwachstum eine optimale mechanische Packung. Von nun an spielt das Kriechverhalten des Eises eine zunehmende Rolle bis bei einer Dichte von  $0,84 \frac{Mg}{m^3}$  der Übergang zum polykristallinen Eis erreicht wird.

Dünnschnitte durch die Proben ermöglichen einen Einblick in die Struktur des Firns. Der Firn aus 28 m Tiefe ist sehr porös (23 %). Die mittlere Korngröße beträgt 1,34 mm. Die Poren sind untereinander räumlich vernetzt. Mit zunehmender Entnahmetiefe sinkt nun die Porosität von 15 % in 41 m Tiefe auf 10 % in 51 m Tiefe, die Korngröße nimmt über 1,55 mm in 41 m Tiefe auf 2,12 mm in 51 m Tiefe zu. Der Vernetzungsgrad der Poren und deren Größe nimmt mit

zunehmender Tiefe ab. Die Poren sind bei der Probe aus 51 m Tiefe teilweise schon von einem Kristall umschlossen. Der Entstehungsprozeß des Firms ähnelt einem Sinterungsprozeß unter hoher homogener Temperatur.

Das dichteabhängige volumenviskose Verhalten stellt eine irreversible Verdrängung der eingeschlossenen Poren und Hohlräume aus dem Gefüge durch eine Reorganisation der Kristalle beziehungsweise Körner dar.

### 3 Beschreibung des Materialverhaltens von Schnee unter Berücksichtigung der Volumenviskosität

Die gesamte Verzerrung des Schneekörpers wird in einen rein elastischen und in einen viskosen Anteil aufgeteilt (Mahrenholtz, Wu & Enss, 1993) :

$$\epsilon = \epsilon^{(e)} + \epsilon^{(v)}. \quad (1)$$

Die elastischen Verzerrungen werden mit dem Hooke'schen Gesetz berechnet:

$$\epsilon^{(e)} = \frac{\sigma}{E}. \quad (2)$$

Die viskosen Verzerrungsgeschwindigkeiten lassen sich aus dem linearen Newtonschen Ansatz berechnen:

$$\dot{\epsilon}^{(v)} = \frac{\sigma}{E^{(v)}}. \quad (3)$$

Für die Gesamtverzerrung erhält man dann:

$$\epsilon(\sigma, t) = \frac{\sigma}{E} + \int_0^t \frac{\sigma(\tau)}{E^{(v)}(\tau)} d\tau. \quad (4)$$

#### 3.1 Verhalten unter Druckspannung

Das Verhalten des antarktischen Firms unter Druckspannung wurde durch Experimente unter statischer Last bestimmt.

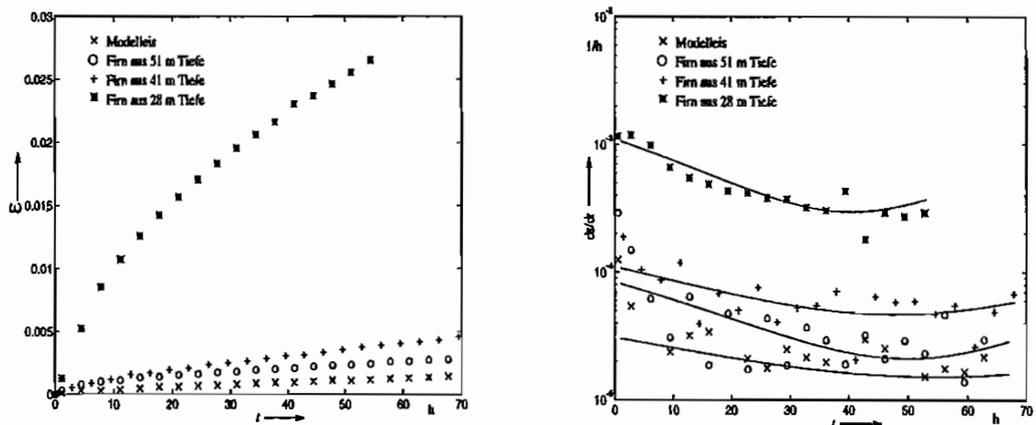


Bild 2: Zeitabhängige Stauchung und Verzerrungsgeschwindigkeit von Firn unter Druck (0,5 MPa; 253 K)

Bild 1 zeigt die gemessene zeitabhängige Stauchung des Firns bei einer Druckspannung von 0,5 MPa und einer Temperatur von 253 K.

Aus den Kriechkurven läßt sich der elastische Modul  $E$  bestimmen. Zur Bestimmung des Viskositätsparameters  $E_{(v)}$  ist in Bild 1 die zeitabhängige Verzerrungsgeschwindigkeit aufgetragen. Da das Versagen der Probe aus 28 m Tiefe auf das Auftreten von Materialschädigung hinweist, wird die Verzerrungsgeschwindigkeit durch eine Parabel beschrieben:

$$\dot{\epsilon}^{(v)}(\rho, \sigma, t) = A(\rho, \sigma)t^2 + B(\rho, \sigma)t + C(\rho, \sigma). \quad (5)$$

Die Verzerrungen des Firns sind deutlich höher als die des polykristallinen Modelleises. Der Grad der Überhöhung ist abhängig von der Entnahmetiefe der Proben und damit von der Dichte. Die Probe aus 28 m Tiefe versagte unter der aufgebrachtten Belastung nach 56 Stunden.

### 3.2 Verhalten unter Zugspannung

Bild 2 zeigt die gemessenen Verzerrungen des Firns und von Modelleis bei einer Zugbelastung von 0,3 MPa und einer Temperatur von 253 K.

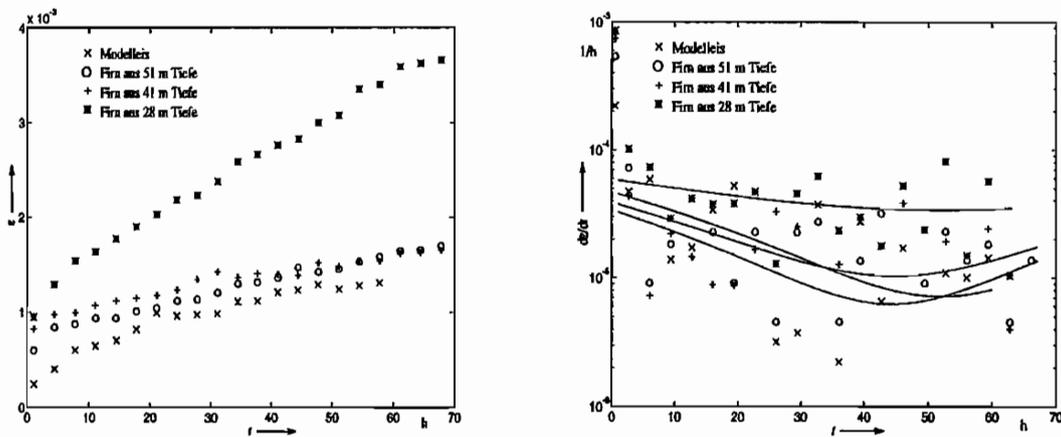


Bild 2: Zeitabhängige Streckung und Verzerrungsgeschwindigkeit von Firn unter Zug (0,3 MPa; 253 K)

Das qualitative Verhalten des Materials unter Zug und Druck ist gleich: die Überhöhung der Verzerrungen ist dichteabhängig. Die Größe der Überhöhung ist allerdings geringer als unter Druckbelastung. Das Material verhält sich also unter Zugbelastung anders als unter Druckbelastung. Darüberhinaus ist die Festigkeit unter Zug geringer: einer Belastung von 0,5 MPa unter Zug hielt das Material nicht stand und versagte spontan mit einem interkristallinen Riß.

Wie unter Druckbelastung wird die Verzerrungsgeschwindigkeit (Bild 2) durch eine Parabel beschrieben. Die starke Streuung der Meßwerte ist auf die numerische Differentiation der Kriechkurve zurückzuführen.

## 4 Zusammenfassung

Die Volumenviskosität beschreibt das zeitabhängige volumetrische Verhalten eines Materials. Schnee ist ein Material, der deutlich volumenviskoses Verhalten zeigt. Dieses Verhalten ist in erster Linie dichteabhängig, da die Struktur des Schnees mit der Dichte variiert.

Berücksichtigt man das volumenviskose Verhalten des Schnees bei der Formulierung eines Stoffgesetzes, so zeigt sich schon bei der Verwendungen eines Ansatzes, der nur die Ausgangsdichte des Materials berücksichtigt, eine qualitativ und quantitativ gute Übereinstimmung von Messung und Rechnung (Bild 3).

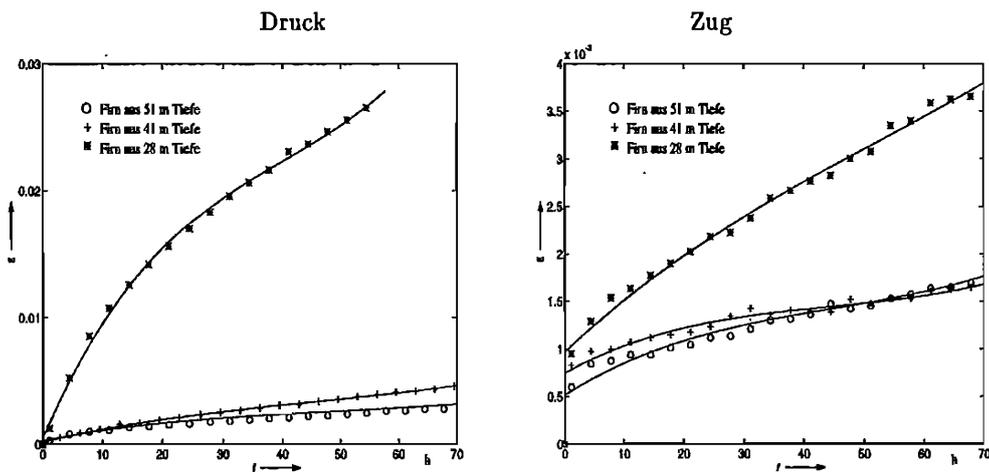


Bild 3: Gemessene und berechnete zeitabhängige Stauchung (0,5 MPa, 253 K) und Streckung von Firn (0,3 MPa; 253 K)

Die Versuche haben gezeigt, daß das Materialverhalten des Schnees nichtlinear abhängig von der Größe der aufgetragenen Spannung ist und sich unter Zug- und Druckbelastung unterschiedliches Verhalten einstellt. Daher ist es zur Verbesserung des Ansatzes notwendig, weitere Untersuchungen des Kriechverhaltens und dessen Zusammenhangs mit der Struktur des Materials vorzunehmen.

## Literatur

- Colbeck, S., Akitaya, E., Armstrong, R., Gubler, H., Lafeuille, J., Lied, K., McClung, D., & Morris, E. 1990: *The International Classification for Seasonal Snow on the Ground*. Tech. rept. The International Commission on Snow and Ice of the International Association of Scientific Hydrology.
- Ebinuma, T., & Maeno, N. 1987: Particle rearrangement and dislocation creep in a snow-densification process. *Journal de Physique, Colloque C1*, März, 263-269.
- Mahrenholtz, O., Wu, Z., & Enss, D. 1993: Time-dependent subsidence of snow-ground under distributed loading. In: *Beiträge zur Mechanik: Festschrift zum 65. Geburtstag von Prof. Dr. Rudolf Trostel*. 2. Institut für Mechanik der Technischen Universität Berlin.

BUHLER, J.

### Infrarot-Absorptionsspektren und Mikroeffekte in stark verformten Kunststoffolien

Im infraroten Absorptionsspektrum eines Stoffes spiegelt sich die Wechselwirkung elektromagnetischer Lichtwellen aus dem infraroten Spektralbereich mit den Schwingungsmöglichkeiten der Atome im Molekül gegeneinander. Die Infrarotabsorption von Molekülen eines Stoffes beruht auf der Anregung von Molekülschwingungen. An den sogenannten Absorptionsbanden ist deren Absorption maximal, sie repräsentieren die Resonanzfrequenz einer bestimmten angeregten Schwingungsform. Solange diese Schwingungsformen isotrop verteilt sind, ist die Intensität einer Bande unabhängig von der Schwingungsrichtung des elektrischen Lichtvektors der linear polarisierten Lichtwelle. Anders verhält es sich bei einer natürlich oder künstlich erzwungenen anisotropen Verteilung der Schwingungsformen. In diesem Fall hängt die Stärke der Bande vom Winkel zwischen der mittleren Schwingungsrichtung einer Schwingungsform und der Schwingungsrichtung des anregenden Lichtvektors ab: Die zum einen mit dem Lichtvektor parallel zum anderen senkrecht zur Streckrichtung aufgenommenen Absorptionsspektren einer verstreckten Polypropylenfolie der Abbildung 1 zeigen hohen Dichroismus z.B. für die Banden der Streckschwingungen zwischen Kohlen- und Wasserstoffatom [ $\nu(CH)$ ], für die sogenannten Wagging-Schwingungen im  $CH_3$ -Molekül [ $\gamma_w(CH_3)$ ] oder für die Gerüststreckschwingungen [ $\nu(C-C)$ ]. Das Verhalten einer Absorptionsbande linear polarisierter Lichtwellen gegenüber oder ihr Dichroismus wird also unmittelbar durch die Verteilung der Schwingungsformen in der Substanz bestimmt.

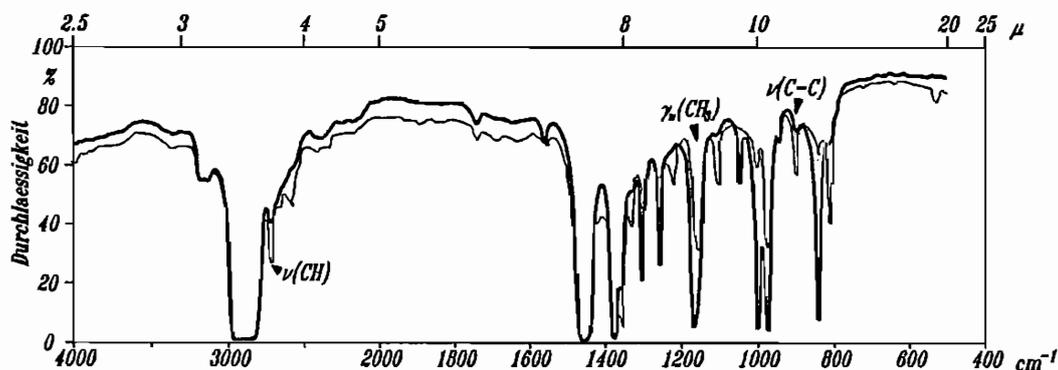


Abb. 1.: Isotaktisches Polypropylen (300% verstreckt)  
 ——— elektrischer Vektor parallel zur Streckrichtung  
 - - - - - elektrischer Vektor senkrecht zur Streckrichtung  
 (KROHMER [1986])

Eine künstliche anisotrope Verteilung kann durch einen äußeren mechanischen Beanspruchungszustand erzwungen werden. Den Schwingungsrichtungen wird eine bevorzugte Orientierung aufgeprägt. Dieser Orientierungseffekt ist in den Absorptionsspektren der Abbildung 2 (isotaktisches Polypropylen) deutlich zu erkennen. Mit zunehmender Dehnung der Probe nimmt an einigen Banden die Differenz der Absorptionsmaxima zwischen den entsprechenden Aufnahmen mit senkrecht bzw. parallel zur Streckrichtung orientiertem elektrischen Lichtvektor zu. Es stellt sich eine bevorzugte Orientierung der mittleren Schwingungsrichtungen ein. Diese Richtung könnte durch weitere Messungen mit verschiedenen Neigungen der Polarisationssebene zwischen parallel und senkrecht zur Streckrichtung orientiert bestimmt werden.

Neben diesem molekularen Orientierungseffekt ist an einigen Banden eine Verschiebung der Resonanzfrequenz beobachtbar (Abb. 3). Dieser molekulare Verstimmungseffekt hat seine Ursache in durch die mechanische Beanspruchung erzeugten zusätzlichen Bettungskräften auf die Molekülgruppe der entsprechenden Absorptionsbande.

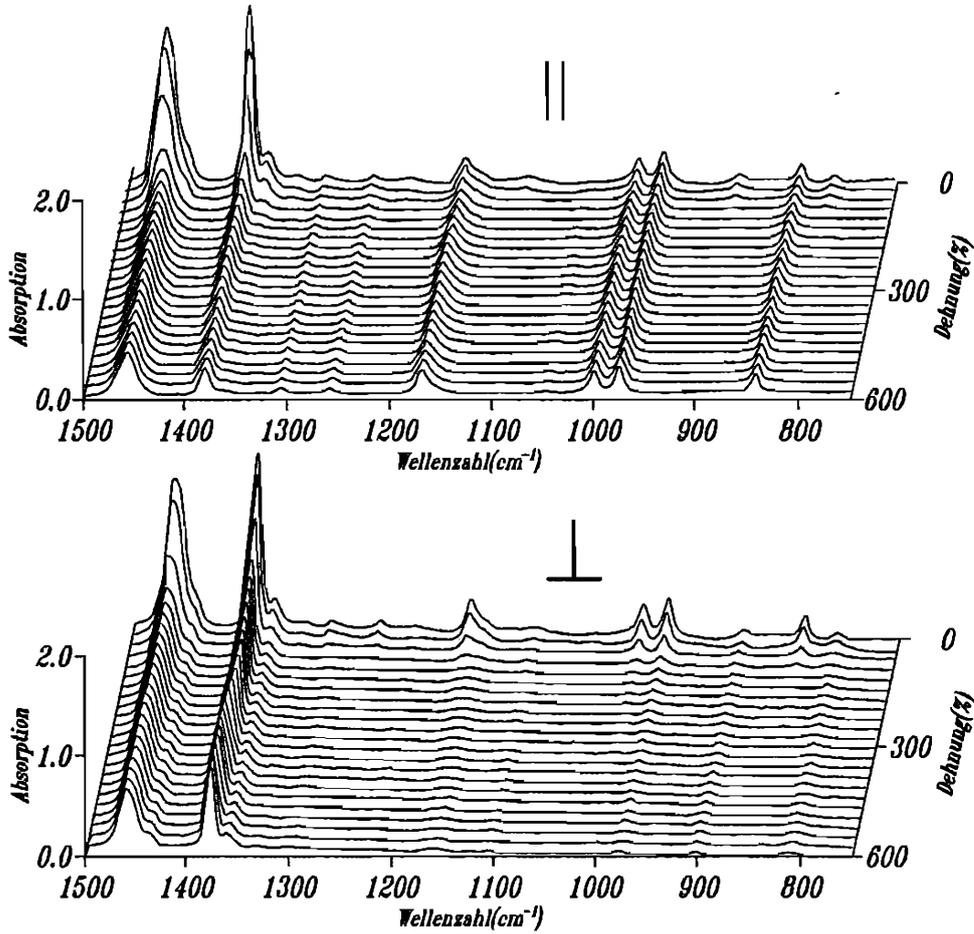


Abb. 2.: Orientierungseffekt (SIESLER [1980])

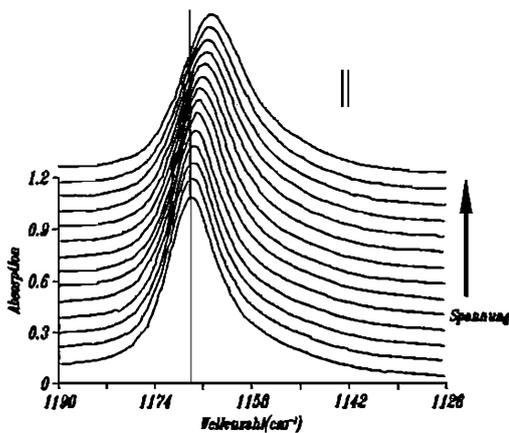


Abb. 3.: Verstimmungseffekt (BRETZLAFF AND WOOL [1983])

Mit der Infrarot-Absorptionsspektroskopie hat man also ein experimentelles Hilfsmittel an der Hand, das zur Aufklärung der Frage nach den Wirkungen der Mechanik auf die Struktur eines Stoffes beiträgt.

Den grundlegenden Rahmen für die Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkungen stellen die Maxwell'schen Feldgleichungen dar. Unter der Voraussetzung, daß die betrachteten Polymerfolien mit guter Näherung als elektrisch nichtleitend und nicht magnetisierbar angenommen werden können, liefern diese einen Zusammenhang zwischen der anregenden Lichtwelle und der Polarisation einer Substanz.

Für die Materialgleichung der Polarisation einer Substanz dient folgende Modellvorstellung: Die Moleküle in der Substanz werden durch Einwirkung eines äußeren elektrischen Feldes zu Schwingungen angeregt, die Schwerpunkte ihrer positiven und negativen Ladungen gegeneinander verschoben. Diese periodische Veränderung der Ladungsverteilung ersetzt man durch das Schema eines schwingenden Dipols. Über den Lagrange-Formalismus erhält man für diesen Dipol die gesuchten Schwingungsgleichungen für die Polarisation, wobei wie bei allen Resonanzproblemen der Mechanik und Elektrodynamik ein Dämpfungsglied hinzugefügt wird. Beim Übergang vom einzelnen Dipol auf eine kontinuierliche Dipolverteilung berücksichtigt man deren Orientierungsverteilung in der Substanz. Natürlich hängt diese Verteilung von der Verzerrungsgeschichte ab. Auf die Verteilungsfunktion hat die Mechanik Zugriff. Mit dieser Überlegung kann der molekulare Orientierungseffekt theoretisch beschrieben werden. Zur Behandlung des molekularen Verstimmungseffektes sind weitere Überlegung notwendig. In dieser Arbeit soll darüber nicht berichtet werden.

Als Lösung erhält man komplexe Eigenwerte, die den Zusammenhang zwischen Brechungsindex  $n$  und Absorptionskoeffizient  $z$  enthalten:

$$\alpha_{2(3)}^2 = \left[ n_{2(3)} \left( 1 + i \frac{z_{2(3)}}{k} \right) \right]^2 = 1 + \frac{J \Gamma_{2(3)}^*}{-\omega^2 + \omega_r^2 + i \delta \omega_r \omega + S_{2(3)}} \quad (1)$$

$J$  ist eine mit dem Aufbau des Dipols zusammenhängende charakteristische Konstante,  $\omega_r$  dessen Resonanz-Kreisfrequenz, sowie  $\delta$  dessen Dämpfungskonstante;  $\omega$  bezeichnet die Kreisfrequenz der einfallenden Lichtwelle,  $k$  die Wellenzahl. Die Koeffizienten  $\Gamma_{2(3)}^*$  enthalten den Orientierungseffekt. Sie sind wie oben skizziert durch die Verteilungsfunktion der Dipolrichtungen bestimmt. Durch  $S_{2(3)}$  soll formal die Verschiebung der Resonanzfrequenz angedeutet sein. Durch die Absorption  $z$  ist über

$$D = \exp(-z h) \quad (2)$$

die Durchlässigkeit einer Probe der Dicke  $h$  und damit die Form der Banden bestimmt.

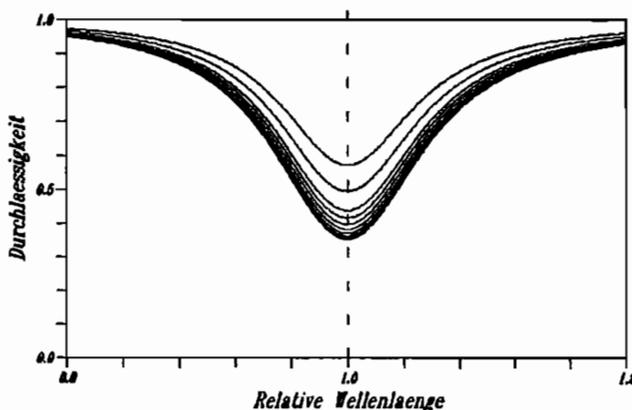


Abb. 4.: gerechnete Absorptionsbande (verschiedene Orientierung der Polarisations Ebenen)

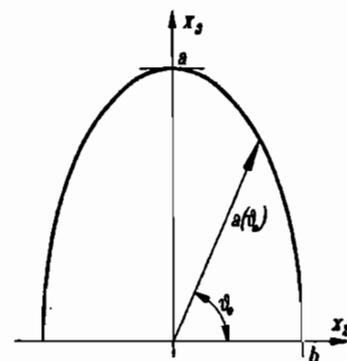


Abb. 5.: Verteilungsfunktion

Bezeichnet man mit  $a(\vartheta_0)$  die Verteilungsfunktion der Dipolrichtungen, wobei

$$\int_0^\pi a(\vartheta_0) d\vartheta_0 = N \quad \text{Anzahl je Volumeneinheit} \quad (3)$$

ist, dann erhält man die grafische Darstellung der Abbildung 4 einer gerechneten Absorptionsbande für verschiedene Neigungswinkel der Polarisationssebene der einfallenden Lichtwelle unter der Annahme, daß die Verteilung der Dipolrichtungen durch eine elliptische Funktion (Abb. 5) gegeben ist. Die beiden Halbmesser  $a$  und  $b$  sind jetzt jetzt diejenigen Größen des Materialmodells, auf die die Mechanik hinsichtlich des Orientierungseffektes Zugriff hat. Beide sind Funktionen der Verzerrungsgeschichte. Sie müssten durch Messungen für solche Dipoltypen bestimmt werden, die mechanisch erzwungenen Dichroismus zeigen.

Durch Messungen mit der Infrarot-Absorptionsspektroskopie wird man neue Informationen über Materialschädigung, Reißbildung und anderen Vorgängen (Kriechen, Relaxation) infolge einer mechanischen Beanspruchung erwarten können.

#### Literatur

- 1 BEDNARCZYK, H.: On the Connexion of Induced Birefringence with Absorption Spectra of Transparent Materials. *Österreichische Ingenieur- und Architekten Zeitschrift*, 134(1989), 387-392.
- 2 BEDNARCZYK, H.: Zur Dispersion der Spannungsdoppelbrechung photoplastischer Modellwerkstoffe. in: *Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1985*, Herausgeber: Bruhns, O.T., Mitt. Nr.3 Inst. f. Mech. Ruhr-Univ. Bochum.
- 3 BEDNARCZYK, H.: Die IR-Absorptionsspektren von Kunststoffen bei großen Verformungen. in: *Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991*, Herausgeber: Bruhns, O.T., Mitt. Nr.78 Inst. f. Mech. Ruhr-Univ. Bochum.
- 4 BORN, M. AND WOLF, E.: Principles of Optics. 6.ed. Pergamon Press, (1986).
- 5 BRÜGEL, W.: Einführung in die Ultrarotspektroskopie. 4. Aufl., Dr. D. Steinkopff-Verlag, (1969).
- 6 KROHMER, P.: IR-Spektroskopie mit polarisiertem Licht. in: *Analysentechnische Berichte*, Herausgeber: Bodenseewerk Perkin-Elmer, Überlingen, Heft 4(1968) 1-32.
- 7 SIESLER, H.W.: Rheo-Optical Fourier-Transform Infrared Spectroscopy: Vibrational Spectra and Mechanical Properties of Polymers. in: *Advances in Polymer Science 65*, Springer-Verlag, Berlin, (1984).
- 8 BRETZLAFF, R.S. AND WOOL, R.P.: Frequency Shifting and Asymmetry in Infrared Bands of Stressed Polymers. *Macromolecules*, 16(1983) 1907-1917.

*Anschrift:* BUHLER, J., Univ. Stuttgart, Inst. f. Mech.(Bauwesen), Ls. I, Pfaffenwaldring 7, 70550 Stuttgart

# Ein numerisches Modell zur Behandlung elastisch-plastischer Konsolidationsvorgänge

Stefan Diebels & Wolfgang Ehlers

Institut für Mechanik (III), Technische Hochschule Darmstadt, 64289 Darmstadt

Ausgehend von den Grundgleichungen der Theorie poröser Medien (Mischungstheorie – erweitert um das Konzept der Volumenanteile) wird ein Zweiphasenmodell zur Beschreibung von Konsolidationsvorgängen hergeleitet. Für beide Phasen wird inkompressibles Materialverhalten angesetzt. Für das Festkörperskelett wird ein elastisch-ideal-plastisches Materialmodell angenommen. Die Implementierung erfolgt für kleine Deformationen.

## 1 Einleitung

Die klassische Konsolidationstheorie geht in ihren Ansätzen auf Terzaghi [1] zurück und wurde von Biot [2] in einen weiteren theoretischen Zusammenhang gestellt. Eine jüngere Alternative zur Behandlung von Konsolidationsproblemen stellt die Theorie poröser Medien dar, vgl. Bowen [3], Ehlers [4] und de Boer *et al.* [5]. Als Grundlage für die folgenden Betrachtungen soll die Theorie poröser Medien verwendet werden, wobei wir uns auf ein gesättigtes Zweiphasenmodell beschränken und beide Konstituierenden als inkompressibel voraussetzen. Die benötigten Grundlagen werden im nächsten Abschnitt zusammengestellt.

## 2 Grundlagen

Die Theorie poröser Medien ist eine makroskopische Theorie, die durch Mittelung über geeignet repräsentative Volumenelemente entsteht. Dabei befinden sich zu jedem Zeitpunkt alle Konstituierenden am gleichen Ort (überlagerte Kontinua); sie folgen jedoch ihrer eigenen Bewegung

$$\mathbf{x} = \chi_i(\mathbf{X}_i, t), \quad (1)$$

die die aktuelle Position  $\mathbf{x}$  mit der Referenzlage  $\mathbf{X}_i$  eines Partikels  $X^i$  und der Zeit  $t$  verknüpft. Der Index  $i = S$  kennzeichnet die Konstituierende Festkörper,  $i = F$  steht für das Porenfluid.

Die Partialdichten

$$\rho^i = n^i \rho^{iR} \quad (2)$$

berechnen sich aus dem Volumenanteil  $n^i$  und der tatsächlichen Dichte  $\rho^{iR}$  der jeweiligen Konstituierenden. Die Eigenschaft der Inkompressibilität (Materialinkompressibilität) impliziert die Existenz konstanter effektiver Dichten, d. h.

$$\rho^{iR} = \text{const.} \quad (3)$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt, daß sich die Partialdichten  $\rho^i$  durch die Volumenanteile  $n^i$  ändern können, auch wenn die einzelnen Konstituierenden inkompressibel sind. Das Festkörperskelett kann somit volumetrische Deformationen auf der Makroebene erfahren. Durch die Sättigungsbedingung sind die Volumenanteile miteinander verknüpft:

$$n^S + n^F = 1. \quad (4)$$

Für die Partialdichten gilt die Bilanzgleichung

$$(\rho^i)'_i + \rho^i \text{div } \mathbf{x}'_i = 0. \quad (5)$$

Hierin bedeutet  $(\cdot \cdot)'_i$  die materielle Zeitableitung, die der  $i$ -ten Konstituierenden folgt;  $\text{div}$  ist der Divergenzoperator bezüglich der momentanen Konfiguration. Ein möglicher Massenaustausch zwischen dem Skelett und dem Porenfluid wird nicht angenommen. Außer der Massenbilanz muß die Impulsbilanz erfüllt sein:

$$\operatorname{div} \mathbf{T}^i + \rho^i \mathbf{b} + \hat{\mathbf{p}}^i = \mathbf{0}. \quad (6)$$

Die Beschleunigungsterme werden hier a priori vernachlässigt,  $\mathbf{T}^i$  ist der partielle Cauchy-Spannungstensor,  $\rho^i \mathbf{b}$  die Volumenkraft und  $\hat{\mathbf{p}}^i$  die Wechselwirkungskraft zwischen den Konstituierenden bzw. der Impulsaustausch. Damit kein Impuls produziert wird, gilt die Zwangsbedingung

$$\hat{\mathbf{p}}^S + \hat{\mathbf{p}}^F = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Die Spannungstensoren und die Wechselwirkungskraft müssen konstitutiv bestimmt werden.

Es hat sich als günstig erwiesen, das Festkörperverhalten durch die Festkörperverschiebungen  $\mathbf{u}_S = \mathbf{x} - \mathbf{X}_S$  zu beschreiben, während die Bewegung des Fluids besser durch die Sickergeschwindigkeit  $\mathbf{w}_F = \mathbf{x}'_F - \mathbf{x}'_S$  beschrieben wird. Die Massenbilanzen (5) lassen sich mit der Inkompressibilitätsbeziehung (3) und der Sättigungsbedingung (4) umformen:

$$\operatorname{div} (n^F \mathbf{w}_F + (\mathbf{u}_S)'_S) = 0. \quad (8)$$

### 3 Konstitutivgesetze

Aufgrund der Inkompressibilität der Konstituierenden teilen sich die Interaktionskraft und die Spannungstensoren jeweils in zwei Anteile

$$\hat{\mathbf{p}}^F = p \operatorname{grad} n^F + \hat{\mathbf{p}}_E^F, \quad \mathbf{T}^F = -n^F p \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^F, \quad \mathbf{T}^S = -n^S p \mathbf{I} + \mathbf{T}_E^S, \quad (9)$$

wobei der erste Summand durch den konstitutiv unbestimmten Porenwasserdruck festgelegt ist, während die sogenannten Extraanteile durch Konstitutivannahmen bestimmt werden. Für die Extrainteraktion gilt

$$\hat{\mathbf{p}}_E^F = -\frac{(n^F)^2 \gamma^{FR}}{k^F} \mathbf{w}_F \quad (10)$$

mit der realen Wichte des Wassers  $\gamma^{FR}$  und der Darcy-Permeabilität  $k^F$ . Dieser Parameter ist eine makroskopische Größe, die die Viskosität des Porenfluids und die Struktur des Porenraums erfaßt. Die Extraspannungen für das Fluid können vernachlässigt werden:

$$\mathbf{T}_E^F \simeq \mathbf{0}. \quad (11)$$

Die Extraspannungen des Festkörpers folgen einem elastisch-plastischen Materialgesetz. Die infinitesimalen Verzerrungen setzen sich additiv aus elastischen und plastischen Anteilen zusammen:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S = \boldsymbol{\varepsilon}_{S_e} + \boldsymbol{\varepsilon}_{S_p}. \quad (12)$$

Der elastische Bereich wird durch die Fließfläche im Spannungsraum vom plastischen Bereich getrennt. Im elastischen Bereich folgt der Spannungszustand der linearen Beziehung

$$\mathbf{T}_E^S = 2\mu^S \boldsymbol{\varepsilon}_{S_e} + \lambda^S (\boldsymbol{\varepsilon}_{S_e} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} \quad (13)$$

mit den Lamé-Konstanten  $\mu^S$  und  $\lambda^S$  und dem elastischen Anteil des linearisierten Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}_{S_e}$ . Erreicht der Spannungstensor die Fließfläche

$$F = \Phi^{1/2} + \beta I + \epsilon I^2 - \kappa = 0, \quad (14)$$

$$\Phi = II_D (1 + \gamma \theta)^m + \frac{1}{2} \alpha I^2 + \delta^2 I^4, \quad (15)$$

$$\theta = III_D / II_D^{3/2}, \quad (16)$$

so setzt plastisches Fließen ein. In (14) - (16) sind  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$ ,  $\kappa$  und  $m$  Materialparameter,  $I$  ist die 1. Invariante des Spannungstensors und  $II_D$ ,  $III_D$  sind die 2. und 3. Invariante des Spannungstensors. Spannungszustände außerhalb der Fließfläche sind unzulässig. Die notwendige Fließregel ist nicht-assoziert. In der Deviatorebene wird koaxiales Fließen angenommen, so daß

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{S_p}^D = \lambda \mathbf{T}_E^{SD}, \quad (17)$$

während in der hydrostatischen Ebene zwischen dem überkritischen und dem unterkritischen Bereich unterschieden werden muß. Bei geringen hydrostatischen Drücken  $I < I_m$  kommt es zu dilatantem Verhalten (überkritisch), die Fließregel für diesen Bereich lautet

$$\dot{\epsilon}_{Sp}^K = \lambda k \mathbf{I} \quad (18)$$

mit  $k = \sqrt{\frac{3}{2}} I I_D \tan \nu$ ; über den Dilatanzwinkel  $\nu$  muß konstitutiv verfügt werden. Die Kompression im unterkritischen Bereich wird durch die Fließregel

$$\dot{\epsilon}_{Sp}^K = \lambda \frac{I - I_m}{3} \mathbf{I} \quad (19)$$

beschrieben. Bild 1 zeigt die Fließfläche in der hydrostatischen Ebene und in der Deviatorebene mit den zugehörigen Fließrichtungen.

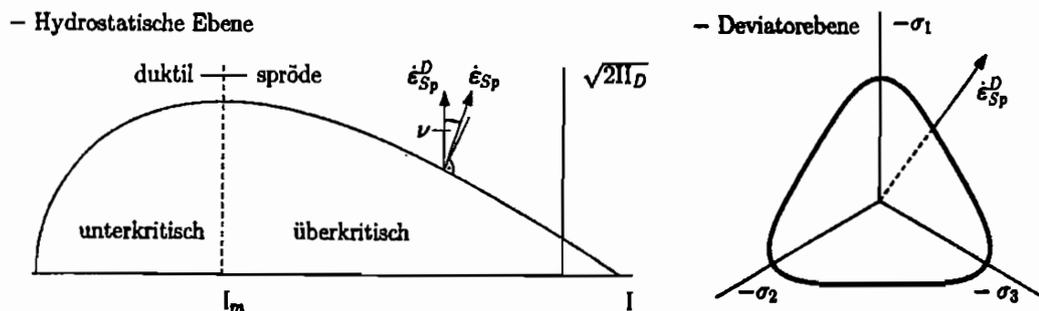


Bild 1: Fließfläche in der hydrostatischen Ebene und in der Deviatorebene.

Die vorgeschlagene Fließregel liegt in der Nähe der wenigen Versuchsdaten, die zur Absicherung zur Verfügung stehen. Der Faktor  $\lambda$  muß aus der Konsistenz- und der Belastungsbedingung ermittelt werden.

## 4 Beispiele

Die Modellgleichungen mit den vorgeschlagenen Konstitutivbeziehungen werden mit der Methode der finiten Elemente gelöst. Dazu ist es erforderlich, die Festkörperverschiebungen mit quadratischen und die Sickergeschwindigkeiten und den Porenwasserdruck mit linearen Ansätzen zu approximieren. Es werden Dreieckselemente mit 6 Knoten benutzt.

Bild 2 zeigt die plastischen Dehnungen in horizontaler und vertikaler Richtung nach Abschluß der Konsolidation bei Belastung der rechten Hälfte der Oberfläche. Das Porenwasser kann nur durch die linke Hälfte der Oberfläche abfließen. Die vertikalen Ränder und der Boden sind starr und undurchlässig. Es wurde ein ebener Verzerrungszustand zugrunde gelegt. Am Übergang zwischen der belasteten und der drainierten Oberfläche zeigt sich eine Konzentration von Verzerrungen (Dehnung in der horizontalen Richtung, Stauchung in der vertikalen Richtung), die auf die mögliche Bildung eines Scherbandes hinweisen. Hierzu müssen jedoch noch weitere Untersuchungen angestellt werden.

Bild 3 zeigt den Verlauf der maximalen Schubspannung und der zugehörigen Volumendehnung über der axialen Dehnung für die Simulation eines in der Bodenmechanik üblichen Kompressionsversuchs. Hierbei wurde Rotationssymmetrie vorausgesetzt. Man sieht deutlich das Abknicken der elastischen Geraden. Bei hinreichend großen Deformationen tritt Dilatanz auf. Hier ist ebenfalls mit Instabilitäten und Scherbandbildung zu rechnen.

Das vorgeschlagene Modell zeigt somit das Verhalten, das man von porösen Stoffen – wie etwa Böden – aus Versuchen kennt. Es steht auf einer fundierten theoretischen Grundlage und ist eine moderne Alternative zur Terzaghischen Konsolidationstheorie.

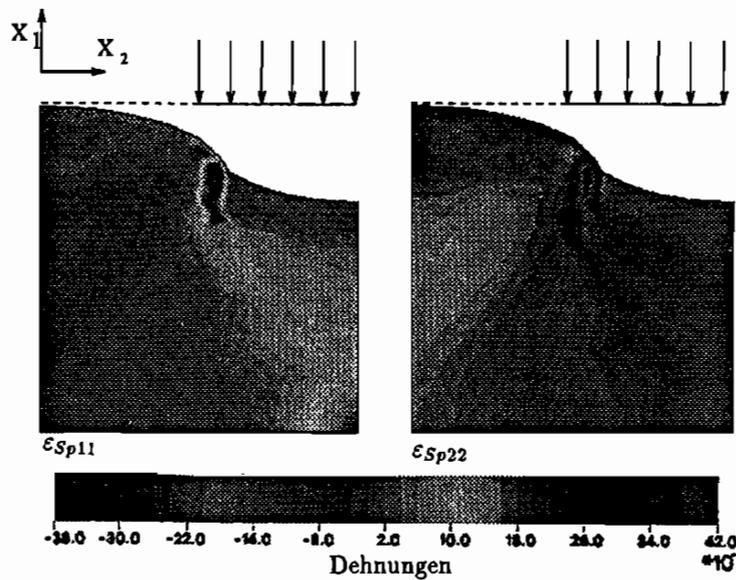


Bild 2: Plastische Dehnungen eines 10 m × 10 m Beckens nach Abschluß der Konsolidation (Deformation um den Faktor 100 überhöht dargestellt).

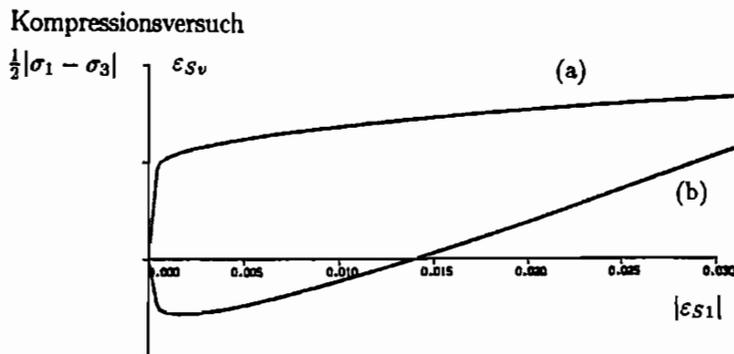


Bild 3: Hauptschubspannung (a) und Volumendehnung (b) über Zylinderlängsdehnung  $\epsilon_{s1}$ .

## Literatur

- [1] K. von Terzaghi: Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen, *Sitzungsber. Akad. Wiss. (Wien), Math.-Naturwiss. Kl., IIa*, **132**, 125 - 138 (1923).
- [2] M. A. Biot: General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.* **12**, 155 - 164 (1941).
- [3] R. M. Bowen: Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures, *Int. J. Engng. Sci.* **18**, 1129 - 1148 (1980).
- [4] W. Ehlers: *Poröse Medien - ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie*, Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen **47**, Universität-GH Essen, Essen 1989.
- [5] R. de Boer, W. Ehlers, S. Kowalski u. J. Plischka: *Porous media - a survey of different approaches*, Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen **54**, Universität-GH Essen, Essen 1991.

### **Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik**

- Nr. 1      Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2      Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3      Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4      Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5      Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6      Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7      H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8      Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9      Berend Fischer:  
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10      Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11      Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12      Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13      Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14      Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15      Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16      Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung

- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien  
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis:  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode

- Nr. 68      Günter Renker:  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69      Berthold Schieck:  
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70      Frank Szepan:  
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71      Christian Scholz:  
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72      J. Badur/H. Stumpf:  
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73      Werner Fornefeld:  
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74      J. Saczuk/H. Stumpf:  
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75      Andreas Feldmüller:  
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76      Ulfert Rott:  
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77      Thomas Heinrich Pingel:  
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78      O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79      J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80      J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81      R. H. Frania/H. Waller:  
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82      B. Bischoff-Beiermann:  
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83      J. Pohé:  
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84      U. Kikillus:  
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15

- Nr. 85      T. Guo:  
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in  
verfestigendem Material
- Nr. 86      Achim Menne:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87      Uwe Folchert:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 88      Jörg Körber:  
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet  
auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89      Peer Schieße:  
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter  
Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung
- Nr. 90      Egbert Schopphoff:  
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 91      Christoph Beerens:  
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92      K. C. Le/H. Stumpf:  
Finite elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93      O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 93**