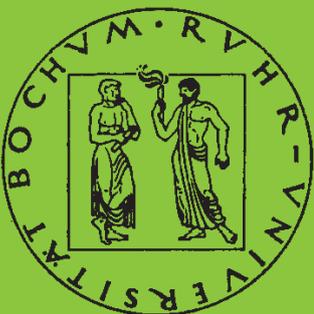


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Egbert Schopphoff

**Dreidimensionale mechanische Analyse
der menschlichen Wirbelsäule**

Heft Nr. 90



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

EGBERT SCHOPPHOFF

**Dreidimensionale mechanische Analyse
der menschlichen Wirbelsäule**

Herren Grundmann,
für seine viele hilfreiche
Tips und gute Anregungen
für eine überzeugende
Präsentation

Des. 94

GA KMF

Herausgeber:
Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum
Schriftenreihe
Universitätsstr. 150
44780 Bochum

© 1994 Dr.-Ing. Egbert Schopphoff
Wiesenstr. 1, 40878 Ratingen

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie oder DV-Verarbeitung) des Werks oder auch Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1990 bis 1993 am Lehrstuhl für Allgemeine Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, deren Durchführung er jederzeit unterstützte und förderte.

Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Baumgart sei für die Übernahme des zweiten Berichts und viele interessante Anregungen gedankt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Reyer gilt der Dank als "fachfremder" Prüfer.

Weiterer Dank gebührt Herrn Prof. Dr. med. J. Krämer, Herrn Dr.-Ing. L.-P. Nolte und Herrn Dr.-Ing. T. H. Pingel für die Förderung und das stetige Interesse an der Arbeit sowie für viele fruchtbare Diskussionen.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf

Prof. Dr.-Ing. F. Baumgart

Tag der Einreichung: 18.4.1994

Tag der mündlichen Prüfung: 1.7.1994

ZUSAMMENFASSUNG

Das Bewegungs- und Tragverhalten der menschlichen Wirbelsäule stellt eine große Herausforderung dar. Die Analyse der Wirbelsäule und im speziellen der lumbalen Wirbelsäule stützt sich dabei auf die Untersuchung eines oder mehrerer Bewegungssegmente aus Wirbelkörper - Bandscheibe - Wirbelkörper. Zur Untersuchung dieser äußerst komplexen Struktur stellen sich bei alltäglichen Belastungen und natürlichen Bewegungen bereits Nichtlinearitäten ein. Neben großen Verdrehungen und Verschiebungen sind insbesondere in den Bändern große Dehnungen zu beobachten. Zur Beschreibung dieses Verhaltens wird im Rahmen dieser Arbeit ein Modell auf Basis von finiten Elementen entwickelt und angewendet.

Die Umgeformte Lagrange-Jaumannschen Formulierung wurde gewählt, um die physikalische Situation geeignet beschreiben zu können. Unter Verwendung von Volumenelementen ist es möglich, die Strukturen der betrachteten Wirbelkörper geometrisch gut zu beschreiben. Unterschieden werden dazu der innere spongiöse Knochen, der äußere kortikale Knochen, die posterioren Knochenstrukturen und die äußere feste Hülle der Bandscheibe. Den kollagenen Fasern des Annulus fibrosus wird besonderes Augenmerk gewidmet. Sie sind entsprechend ihrem morphologischen Verlauf kreuzweise angeordnet. Der vom Annulus fibrosus und den Endplatten eingeschlossene Nucleus Pulposus findet als inkompressible nichtviskose Flüssigkeit in der mechanischen Formulierung Berücksichtigung.

Zur Darstellung der ligamentären Strukturen an der menschlichen Wirbelsäule dienen Stabelemente mit nichtlinearen Materialgesetzen. Verstärkte Beachtung wurde der besonderen Situation der Wirbelgelenksflächen und dem daraus entstehenden Kontaktproblem geschenkt. Insbesondere zwischen den Facettenflächen der frei beweglichen Wirbelkörper entsteht dadurch ein realistisches kinematisches Verhalten.

Auf Grund der Abbildung eines kompletten Wirbelsäulenabschnittes in dem mathematischen Modell wird anhand von Beispielen die Leistungsfähigkeit der FEM-Analyse dargestellt. Dabei ist es möglich, die berechneten Verschiebungen, Dehnungen und Spannungen grafisch darzustellen. Damit kann die numerische Analyse von invitro Situationen Aufschlüsse über die invivo Bedingungen geben.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	1
2. Anatomie der menschlichen Wirbelsäule	6
2.1 Orientierung am menschlichen Körper	6
2.2 Zentrales Organ Wirbelsäule	7
2.3 Bestandteile des Bewegungssegmentes	10
2.3.1 Wirbel	10
2.3.2 Wirbelgelenke	14
2.3.3 Zwischenwirbelscheibe - Bandscheibe	14
2.3.4 Ligamente	15
3. Mechanische Formulierung	17
3.1 Darstellung der mechanischen Grundlagen	18
3.1.1 Beschreibung im Koordinatensystem	18
3.1.2 Deformationsgradient	20
3.1.3 Polare Zerlegung des Deformationsgradienten	21
3.1.4 Dehnungstensoren in Referenz- und Momentankonfiguration	22
3.1.5 Spannungs- und Dehnungsraten	23
3.1.6 Bewegung im Raum	26
3.1.7 Massenerhaltung	30
3.1.8 Impulserhaltung	31
3.1.9 Einführung des Spannungstensor	32
3.1.10 Spannungsgeschwindigkeitstensor	35
3.1.11 Kirchhoffscher Spannungstensor	38
3.1.12 Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten	40
3.1.13 Konstitutive Beziehungen	43
3.1.14 Berechnung der Spannungsrate	39
3.2 Isoparametrisches Volumenelement	47
3.3 Stabelement	50
3.3.1 Elementformulierung	50
3.4 Eingeschlossenes Volumen	53
3.4.1 Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten und Stoffgesetz	53
3.4.2 Zusätzliche Nebenbedingung durch Kavitäten	54
3.5 Beweglicher Kontakt im Raum	56
3.6 Numerische Lösung	59

4. Das Wirbelsäulensegment als mechanische Einheit	61
4.1 Starrkörpermodell	61
4.2 Ebenes Modell	62
4.3 Rotationssymmetrisches Modell	63
4.4 Volumenmodell	64
4.5 Darstellung des Wirbelkörpers	66
4.5.1 Sagittalschnitt und Transversalschnitt	66
4.5.2 Knochendichteverteilung	68
4.6 Abbildung der Bandscheibe	69
4.6.1 Annulus Fibrosus	69
4.6.2 Nucleus Pulposus	70
4.7 Bandapparat	72
4.8 Facettengelenke	73
4.9 Rückenmuskulatur	73
5. Modellbildung - Numerische Simulation	74
5.1 Allgemeines	74
5.2 Symmetrisches Modell	76
5.3 Asymmetrisches Modell	77
5.4 Multisegmentales Modell	79
5.5 Systemdimensionen	81
5.6 Optimierung der Lösungsstrategie	83
5.7 Pre- und Postprozessing	85
6. Anwendungen und Ergebnisse	89
6.1 Allgemeines	90
6.2 Monosegmentales Bewegungssegment	92
6.2.1 Kompression	93
6.2.2 Flexionsmoment	95
6.2.3 Extensionsmoment	100
6.2.4 Laterale Biegung	105
6.2.5 Torsionsmoment	110
6.2.6 Schubbelastung	115
6.3 Fraktursimulation	122
6.4 Mehrsegmentale Wirbelsäule	129
6.4.1 Flexionsbelastung	132
6.4.2 Extensionsbelastung	136
6.4.3 Klinische Fragestellungen	140

6.4.4 Experimentelle Validierung	141
6.4.5 Simulation von Spondylolistesen	143
7. Zusammenfassung und Ausblick	144
Literaturverzeichnis	145

1. Einleitung

Schon bei alltäglichen Bewegungen und Belastungen klagt jeder dritte Deutsche über Rückenschmerzen. Diese Situation ist Grund genug, nicht nur mit medizinischen Mitteln, sondern auch auf ingenieurmäßigem Wege nach den Ursachen zu forschen.

Die Wirbelsäule hat in der Vergangenheit die Aufmerksamkeit von Wissenschaftlern schon früh auf sich gezogen. Hippokrates (460-377 v. Chr.) erwähnt bereits ein "Hüftweh", welches am Steiß auftritt und in die Schenkel ausstrahlt [HIPPOKRATES (1897)]. Erst 1909 gelingt dem Berliner Chirurgen Fedor Krause die erfolgreiche Operation eines Bandscheibenvorfalles. In den Jahren 1922 bis 1929 operieren die Hirnchirurgen der Mayoklinik in Rochester (Minnesota) A. W. Adson, B. Stookey und W. E. Dandy Bandscheibenvorfälle mit gutem Erfolg. SCHMORL (1932) macht 1928 bei systematischen Wirbelsäulenuntersuchungen große Fortschritte bei der Beschreibung der Lumboischialgie. Erstmals konnte Dandy feststellen, daß vorgefallenes Bandscheibengewebe durch Druck auf die Nervenwurzeln eine Blasen- und Darmlähmung verursachen kann. MIXTER und BARR (1934) schafften den notwendigen Beweis der Effektivität der operativen Versorgung von Bandscheibenvorfällen. Eingehende pathologisch-anatomische Untersuchungen von SCHMORL und JUNGHANNS (1968) haben gezeigt, daß ab dem 30. Lebensjahr jeder Mensch degenerative Veränderungen an seinen Bandscheiben aufweist. Der volkswirtschaftliche Schaden ist nach Erhebungen der Krankenkassen in den alten Bundesländern beträchtlich. Es muß jedes Jahr für ambulante Therapie und Krankengelder eine Milliarde Mark ausgegeben werden, eine weitere Milliarde für die Krankenhauspflege, und 11,4 Milliarden Mark kostet darüber hinaus der Arbeitsausfall. In der Bundesrepublik führt das dazu, daß 20% der Arbeitsniederlegungen und die Hälfte der vorzeitig gestellten Rentenanträge bandscheibenbedingt sind. Die direkten Kosten belaufen sich in den USA auf rund 12 Milliarden Dollar im Jahr. Nimmt man die indirekt entstehenden Folgekosten hinzu, erreicht die Gesamtsumme einen Betrag von 20 Milliarden Dollar [WHITE und PANJABI (1990)].

Die klassischen naturwissenschaftlichen Methoden bieten im Bereich der Mechanik heute geeignete Vorgehensweisen, solche komplexen Zusammenhänge natürlicher Systeme durchaus realistisch abzubilden. Im Bereich der nichtlinearen Schalentheorie führte NOLTE (1983) eine Theorie großer Rotationen bei kleinen Dehnungen ein. Durch die Einführung großer elastischer Dehnungen bei großen Rotationen durch SCHIECK (1989) erweiterten sich die Berechnungsmöglichkeiten merklich. Die Erweiterung der Theorie für große Dehnungen und Rotationen bei elastischem und plastischen Materialverhalten führte zur genauen Überprüfung der kontinuumsmechanischen

Grundlagen. Dabei wurde besonders auf mögliche Annahmen und Einschränkungen geachtet. Untersuchungen von STUMPF (1993), sowie SCHIECK und STUMPF (1993), haben durch ihre lagrangeartige Beschreibung der finiten Plastizitätstheorie unter Verwendung von logarithmischen Dehnungstensorsen gezeigt, daß viele klassische Ansätze Mängel aufweisen. Dies führte zur Einführung des 'Substructure Spin', siehe SCHIECK und STUMPF (1994). Für den Fall elastischen Materialverhaltens wird dort gezeigt, daß die korotational Rate mit dem 'Substructure Spin' in die Green-Naghdi-Rate [Green-Naghdi (1965)] übergeht. Erst durch die Tatsache, daß in den letzten Jahren im Bereich der nichtlinearen Mechanik der heutige hohe Standard erreicht wurde, war die vorliegende Arbeit möglich. Mit den modernen mechanischen Kenntnissen und als konsequente Weiterentwicklung bestehender Lösungsansätze von NOLTE und PINGEL (1991) ist dieser Fortgang unter Einbeziehung eigener Materialuntersuchungen [NOLTE et al. (1991), STEFFEN et al. (1991)] möglich geworden.

Bei Erkrankungen der Wirbelsäule haben die Bandscheiben als wichtigster Teil des Bewegungssegments eine Schlüsselrolle. Die Fehlfunktion der Bandscheibe kann zu Verlagerungen, Verformungen und Verschiebungen von Bandscheibengewebe führen, dem Bandscheibenvorfall. Untersuchungen von KNEPEL (1977) und den Erfahrungen der Mitglieder des Arbeitskreises Degenerative Wirbelsäulenerkrankungen der DGOT, 1978-1984, zufolge sucht jeder zehnte Patient in einer Allgemeinpraxis den Arzt wegen bandscheibenbedingter Erkrankungen auf. Sie dominieren mit 37.8% bei den orthopädischen Leiden. Wie KRÄMER (1986) feststellte, entfallen davon zwei Drittel auf Patienten mit Lendenwirbelsäulenerkrankungen (Lumbalsyndrome). Ein Bandscheibenvorfall wird klinisch in allen denkbaren Richtungen beobachtet [BÄKER (1980)]. Zur Klärung vieler dieser klinisch auftretenden Symptome ist es hilfreich, mit ingenieurmäßigen Hilfsmitteln nach den Ursachen zu suchen. Unter Benutzung verschiedener Ansätze wurde die äußerst komplexe Struktur Wirbelsäule bisher numerisch analysiert.

Dabei lassen sich drei Gruppen von Rechenmodellen unterscheiden. Zum einen sind in der Vergangenheit Starrkörper-Feder-Modelle zur Untersuchung rein kinematischer Fragen an der Wirbelsäule eingesetzt worden [NOLTE und PINGEL (1991)]. Zum anderen sind rotationssymmetrische Scheibenelemente verwendet worden, um genauere Aussagen auch über das Tragverhalten der Bandscheibe zu erfahren. Die dritte Gruppe bilden mehr oder weniger genau abbildende Umsetzungen in Volumenelemente, wie sie von SHIRAZI-ADL (1984) und PINGEL (1991) vorgenommen wurden. Die letzte Gruppe der Modelle beschränkte sich auf die Umsetzung eines symmetrischen Modells einer Bandscheibe mit benachbarten Wirbelkörpern und war bisher nicht in der Lage, die berechneten Ergebnisse dreidimensional wiederzugeben.

Darüber hinaus war es bei den Analysen von PINGEL (1991) an einem räumlichen Modell nicht möglich, Veränderungen an der Modellstruktur vorzunehmen. Eine Bandbreitenoptimierung zur Verringerung der numerischen Probleme und zur Minimierung des Rechenbedarfs fehlt bisherigen Modellbildungen ganz.

Ziel dieser Arbeit ist die numerische Analyse des Bewegungs- und Tragverhaltens der menschlichen Wirbelsäule. Die Untersuchungen stützen sich dabei auf die Berechnung eines oder mehrerer Bewegungssegmente, bestehend aus Wirbelkörper-Bandscheibe-Wirbelkörper. Eine solche Funktionseinheit aus Bandscheibe mit benachbarten Wirbelkörpern, Bandapparat und kleinen Wirbelgelenken bezeichnet man als Junghannssches Bewegungssegment.

Diese extrem komplex zusammenwirkende Struktur im Zentrum des menschlichen Körpers unterteilt sich in diverse Einzelkomponenten. Eine ausführliche anatomische Betrachtung im Hinblick auf die nachfolgende mathematische Untersuchung erfolgt im zweiten Kapitel.

Im dritten Kapitel wird zunächst ausführlich auf die Problematik der verschiedenen möglichen Dehnungsraten eingegangen. Dabei werden einige häufig verwendete Dehnungsgeschwindigkeiten entwickelt und untersucht. Für die späteren Berechnungen sind moderate Dehnungen und Rotationen zu erwarten. In den diskretisierten Bändern treten moderat-große Dehnungen auf. Unter diesen Voraussetzungen ist es vertretbar, auf die Jaumannsche Rate zurückzugreifen. Als mathematisch-mechanische Formulierungen für die Beschreibung dieser physikalischen Situation bieten sich die Totale Lagrangesche Formulierung, die Umgeformte Lagrangesche Formulierung und die Umgeformte Lagrange-Jaumannsche Formulierung an [BATHE (1986), BETTEN (1986), FUNG (1965), FUNG (1967), OGDEN (1984), PINGEL (1991), PRAGER (1961)]. Zur Beschreibung des Verhaltens der Wirbelsäule wird hier, aufbauend auf die Umgeformte (oder aktualisierte) Lagrangesche Beschreibung, eine Finite-Elemente-Formulierung erarbeitet.

Unter Verwendung von Volumenelementen ist es möglich, die Strukturen der betrachteten Wirbelkörper geometrisch gut zu beschreiben. Unterschieden werden dazu der innere spongöse Knochen, der äußere kortikale Knochen, die posterioren Knochenstrukturen und die äußere feste Hülle der Bandscheibe. Eine Darstellung des Annulus fibrosus als flächenhafte Struktur [MAKOWSKI und NOLTE (1987), NOLTE (1983), NOLTE und MAKOWSKI (1986), PIETRASZKIEWICZ (1977), STUMPF (1982), STUMPF (1986), STUMPF und MAKOWSKI (1986)] ist auf Grund des inneren Aufbaus nicht in Betracht gekommen. Statt dessen erfolgt die Beschreibung des Annulus fibrosus sowohl durch

räumliche Stabelemente als auch durch dreidimensionale Kontinuumselemente. Den kollagenen Fasern des Annulus fibrosus wird besonderes Augenmerk gewidmet. Sie sind entsprechend ihrem morphologischen Verlauf kreuzweise angeordnet. Für die kollagenen Fasern des Annulus fibrosus wird dabei deren nichtlineares Materialgesetz berücksichtigt. Der strukturellen Anisotropie der Bandscheibe wird auf diese Weise gut Rechnung getragen. Den Nucleus pulposus kann man als eine nichtviskose, inkompressible Flüssigkeit betrachten, der als solcher sein Volumen beibehält. Dieses konstante Volumen wird von den ihn umgebenden Kontinuumselementen eingeschlossen. Bei der Abbildung der Knorpelgrundsubstanz des Annulus fibrosus und der knöchernen Endflächen der Wirbelkörper finden ebenfalls Volumenelemente Verwendung. Bei diesen Elementen ist als Randbedingung die Inkompressibilität des umschlossenen Volumens in deren Formulierung berücksichtigt, so daß eine Diskretisierung der Flüssigkeit nicht erforderlich ist. Die Darstellung der verschiedenen Ligamente, die das Tragverhalten des Bewegungssegmentes maßgeblich beeinflussen, wird durch eindimensionale Kontinuumselemente realisiert. Besondere Bedeutung kommt der Erfassung ihrer nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen zu. Besondere Beachtung wurde der speziellen Situation der Wirbelgelenksflächen und dem daraus entstehenden Kontaktproblem geschenkt. Insbesondere zwischen den Facettenflächen der frei beweglichen Wirbelkörper entsteht dadurch ein realistisches kinematisches Verhalten.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit den Möglichkeiten, die menschliche Wirbelsäule in seiner lasttragenden Wirkung zu untersuchen. Dabei werden verschiedene Ansätze zur mechanischen Abbildung gegenübergestellt. Neben der Betrachtung als Starrkörper-Feder-Modell [NOLTE und PINGEL (1991)] wird die elastische Abbildung als Scheibe in der Ebene diskutiert. Ausführlich wird die Untersuchung der Wirbelsäule mit dreidimensionalen Abbildungen, insbesondere unter dem Gesichtspunkt sagittalsymmetrischer [PINGEL (1991), SHIRAZI-ADL (1984)] gegenüber unsymmetrischen Modellen, verifiziert.

Im fünften Kapitel werden auf der Basis der hergeleiteten finiten Elemente zwei komplexe mathematische Modelle entwickelt. Ausgehend von einem Computer-Tomogramm (CT) des experimentell getesteten Präparats und Magnet-Resonanz-Aufnahmen (MRI) wurde die Geometrie aufbereitet. Geeignete Preprozessing-Routinen zur halbautomatischen Aufbereitung und Interpolation der Schnitte schafften das Bindeglied zwischen Präparat und FEM-Netz. Zum einen wird ein asymmetrisches monosegmentales Modell vorgestellt, das es erlaubt, alle mechanisch vorkommenden Grundlasten aufzubringen. Dabei erlaubt das Modell, die berechneten Verformungen den experimentell gemessenen Verformungswerten bei gleichen Lasten

gegenüberzustellen. Zusätzlich ist es möglich, klinisch auftretende Verletzungssituationen nachzuvollziehen. Zum anderen läßt das mehrsegmentale Modell, bestehend aus zwei Junghannsschen Bewegungssegmenten, erheblich weitergehende Untersuchungen zu. Es ist möglich, umfangreiche Verletzungen zu simulieren oder den Einfluß von Fixationen eingehend zu studieren.

Im sechsten Kapitel wird anhand von Beispielen die Leistungsfähigkeit der FEM-Analyse dargestellt. Korrespondierend zu durchgeführten experimentellen Untersuchungen an einsegmentalen und mehrsegmentalen Präparaten wird eine Validierung vollzogen. Auf Grund der geschaffenen Pre- und Postprozessing-Einbettung ist es möglich, die berechneten Verschiebungen, Dehnungen und Spannungen grafisch darzustellen. Die numerische Analyse von invitro Situationen kann einen Beitrag leisten, Aufschlüsse über die invivo Situation zu erhalten.

Zum Abschluß dieser Arbeit wird in dem siebten Kapitel ein Ausblick auf zukünftige biomechanische Untersuchungen gegeben.

2. Anatomie der menschlichen Wirbelsäule

Nachfolgend soll ein kurzer Überblick über die anatomischen Zusammenhänge der menschlichen Wirbelsäule, und im speziellen der Lendenwirbelsäule, gegeben werden. Darüber hinausgehende Details können aus den medizinischen Lehrbüchern zur Anatomie [BERTOLINI und LAUTERT (1987), BRAUS (1929), FRICK et al. (1992), Rauber et al. (1987), SOBOTTA (1988a), SOBOTTA (1988b), SCHIEBLER (1977), ZILCH und WEBER (1988)] entnommen werden.

2.1 Orientierung am menschlichen Körper

Die im folgenden verwendeten Begriffe zur Beschreibung der Anatomie werden an der nachstehenden Zeichnung deutlich. Zur präzisen Beschreibung der Richtungen verwendet man im Zusammenhang mit dem menschlichen Körper keine Begriffe wie "vorne" und "hinten", sondern ventral und dorsal, genauso wie kranial statt "oben" und kaudal statt "unten". Damit bleibt die Bezeichnung immer auf den Körper bezogen.

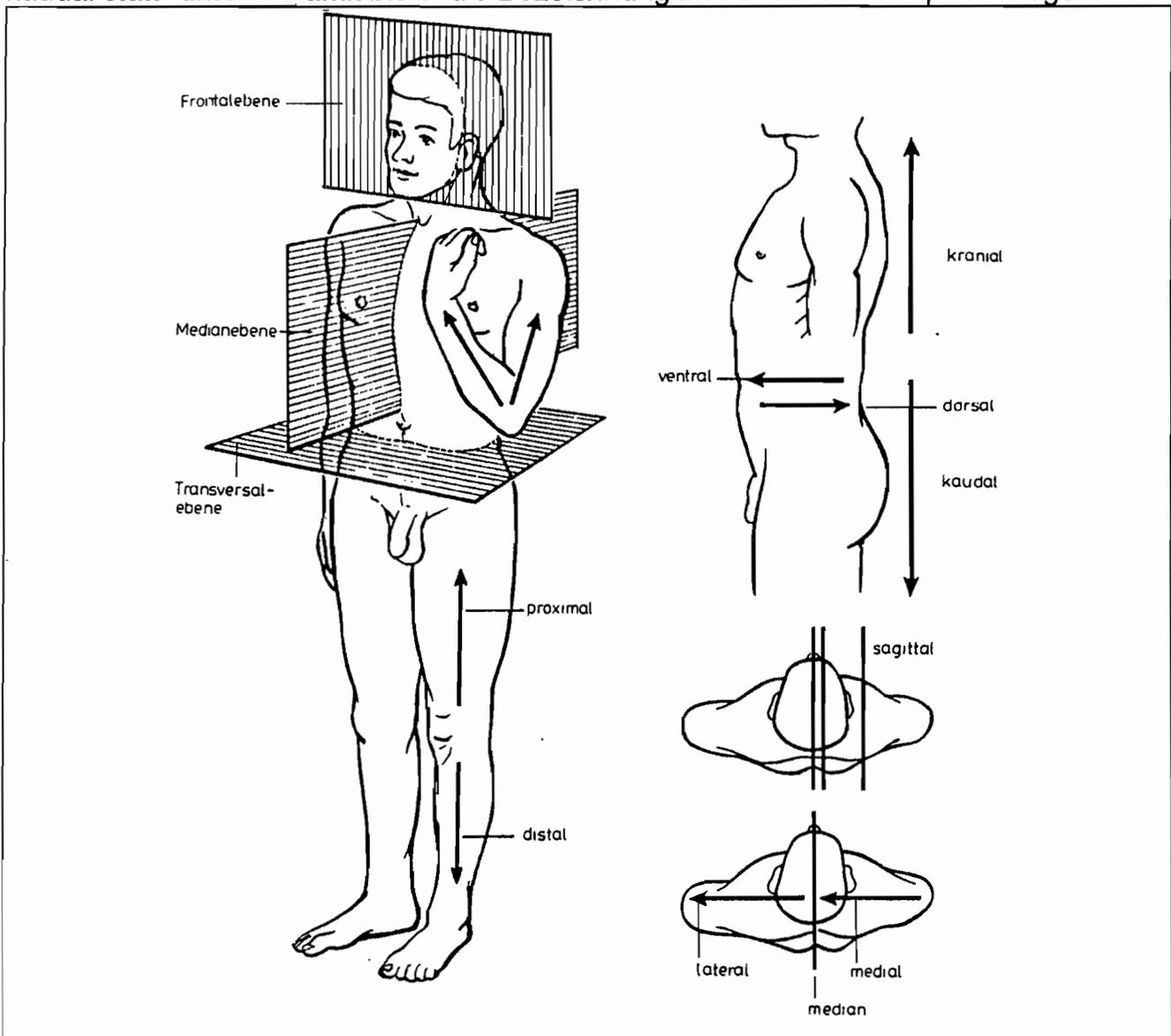


Abb.1: Bezeichnungen am Körper [aus BERTOLINI und LEUTERT (1987)]

2.2 Zentrales Organ Wirbelsäule

Die zentrale Funktions-Einheit Wirbelsäule (Columna vertebralis) nimmt bei allen Wirbeltieren (Vertebraten) eine besondere Stellung ein. Sie ist an den meisten Körperbewegungen beteiligt. Die Wirbelsäule hat deswegen viele Funktionen zu erfüllen: sie trägt den Körper, hält ihn im Gleichgewicht, fängt Stöße ab und erfüllt eine wesentliche Aufgabe beim Schutz des Rückenmarks und den vom Rückenmark abgehenden Nerven. Dazu muß die Wirbelsäule hochflexibel sein und sich zugleich wie ein Panzer um das Rückenmark legen.

Beim Menschen besteht die Wirbelsäule aus 33-34 Wirbeln (Vertebrae). Man unterteilt in die Halswirbelsäule mit 7 Wirbeln (Vertebrae cervicales), die Brustwirbelsäule mit 12 Wirbeln (Vertebrae thoracicae), die Lendenwirbelsäule mit 5 Wirbeln (Vertebrae lumbales), das Kreuzbein mit 5 verschmolzenen Wirbeln (Vertebrae sacrales) und das Steißbein aus 4-5 verschmolzenen Wirbeln (Vertebrae caudales).

Zu jedem Wirbel läßt sich eine Zwischenwirbelscheibe oder Bandscheibe (Disci intervertebralis) zuordnen, deren Bezeichnung jeweils nach den benachbarten Wirbeln erfolgt. Diese Funktions- oder Baueinheit bezeichnet man nach Junghanns als Bewegungssegment. Wesentlicher Bestandteil des Junghannsschen Bewegungssegmentes ist der Zwischenwirbelabschnitt mit Gallertkern (Nucleus pulposus), Faserring (Annulus fibrosus) und Knorpelendplatten. Zusätzlich rechnet man die Hälften der benachbarten Wirbel, vorderes und hinteres Längsband, gelbes Band, Wirbelgelenke und alle Weichteile, die sich in gleicher Höhe im Wirbelkanal, im Foramen intervertebrale sowie den Dorn- und Querfortsätzen befinden, hinzu. Insgesamt verfügt die menschliche Wirbelsäule über 24 Bewegungssegmente, wobei die obersten Segmente zwischen Axis und Atlas sowie Atlas und Schädel keine Bandscheibe besitzen. Die 23 Bandscheiben teilt man in 5 Hals-, 11 Brust-, 4 Lendenbandscheiben sowie je eine Bandscheibe am zervikothorakalen, thorakolumbalen und lumbosakralen Übergang ein.

Die Größe der Wirbelkörper und die Höhe der Bandscheiben nimmt auf Grund ihrer Beanspruchung von cervical nach sacral stetig zu. Die Wirbelkörper der Lendenwirbelsäule sind damit die kräftigsten, da sie auch am meisten belastet sind.

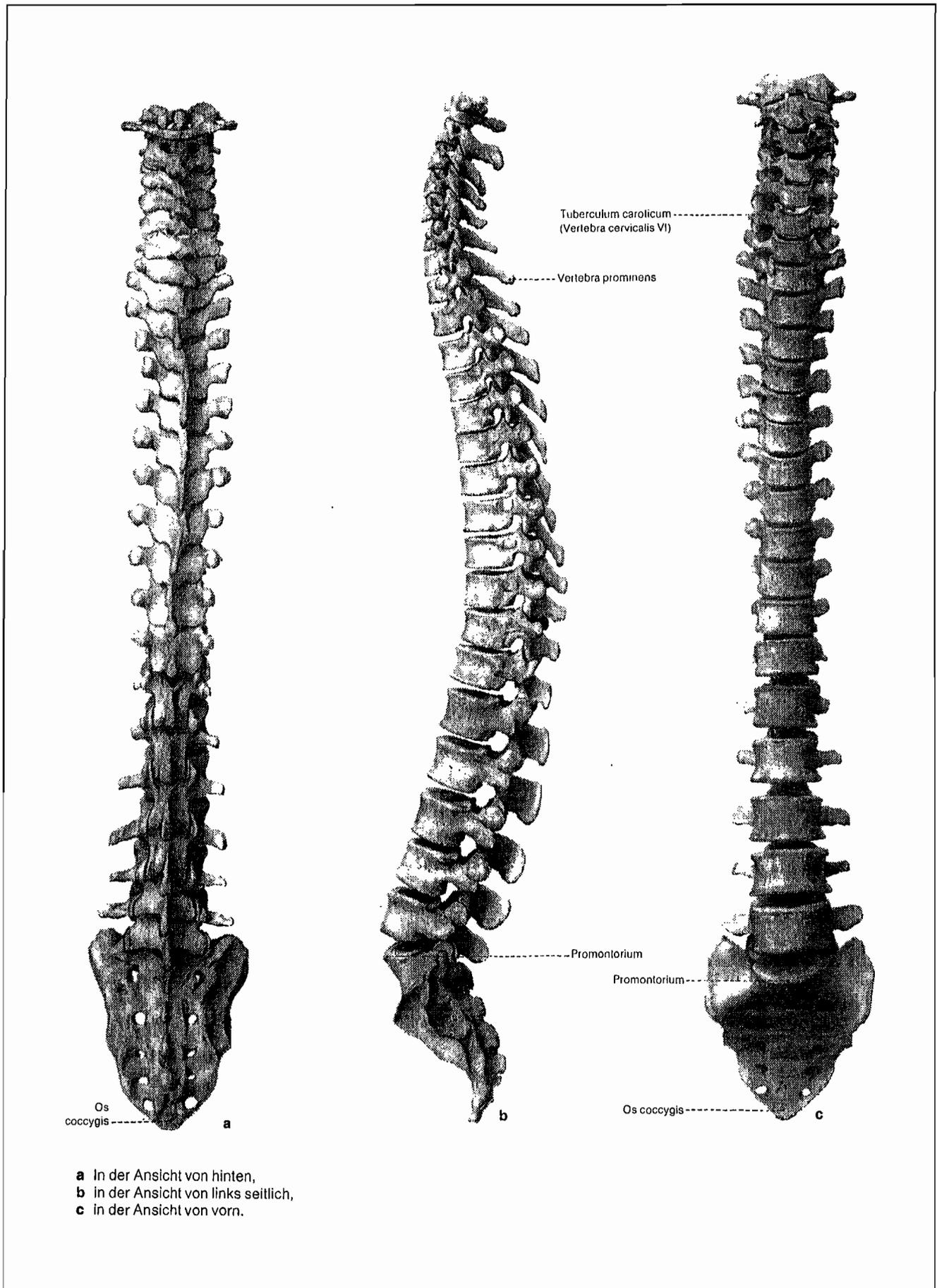


Abb.2: Menschliche Wirbelsäule [aus RAUBER et al. (1987)]

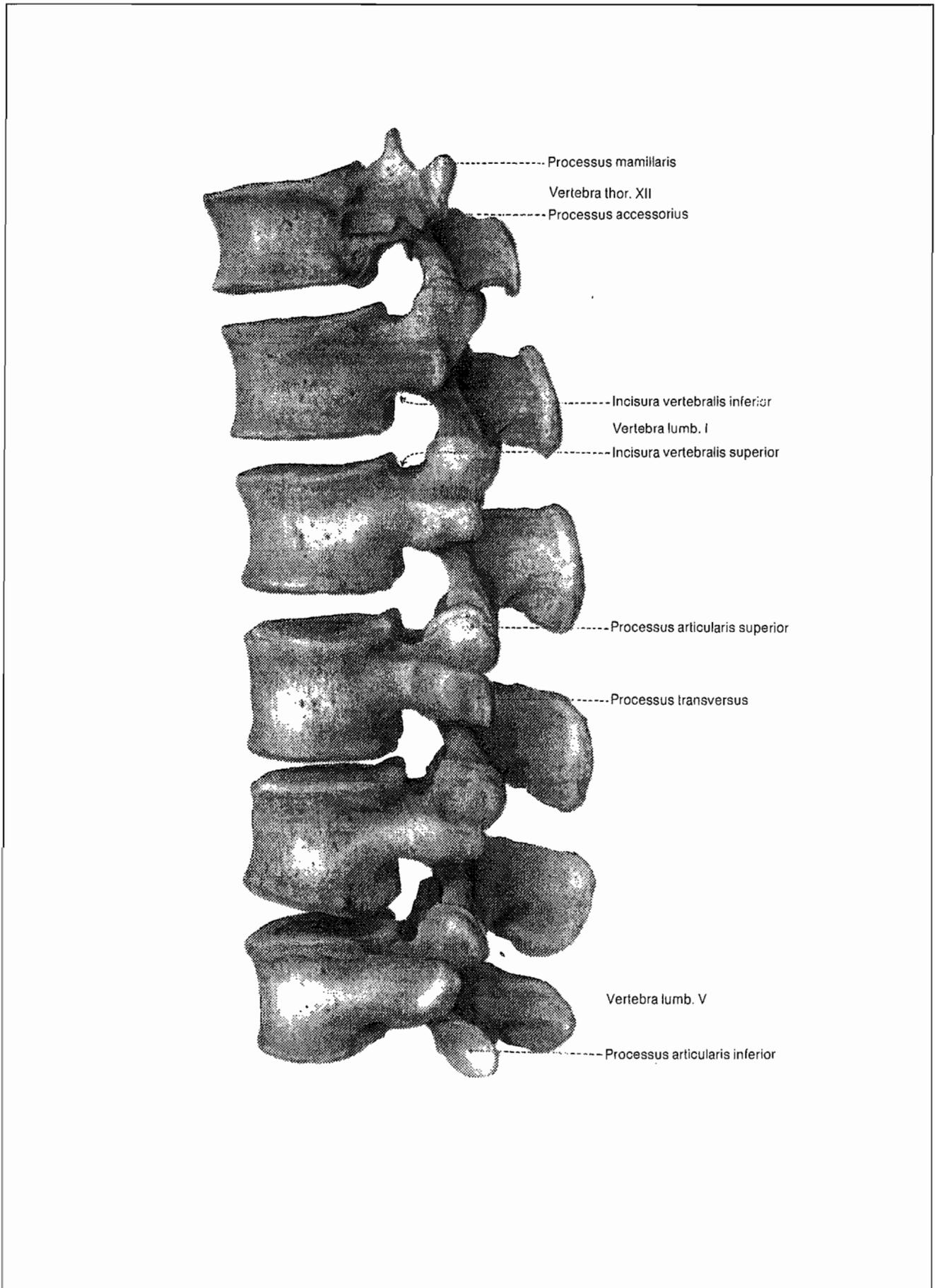


Abb.3: Bewegungssegmente der Lendenwirbelsäule [aus RAUBER et al. (1987)]

2.3 Bestandteile des Bewegungssegmentes

2.3.1 Wirbel

Die einzelnen Wirbel bestehen jeweils aus einem ventral gelegenen Wirbelkörper (Corpus vertebrae) und einem dorsal anschließenden Wirbelbogen (Arcus vertebrae). Die von cranial nach kaudal an Volumen und Masse zunehmenden Wirbelkörper haben im Bereich der Lendenwirbelsäule im Transversalschnitt eine bohnenförmige Gestalt. Im Sagittalschnitt erscheint sowohl die Vorder- als auch die Hinterfläche leicht nach innen gebogen. Die Ränder der knöchernen Wirbelkörperendleisten ragen hier ein wenig über den Körper hinaus.

Form und Gestalt der Wirbelkörper können in gewissen Grenzen schwanken. Es gibt angeborene Formvarianten der Wirbelkörper, die zum Teil im Laufe der Zeit zu Funktionsstörungen führen können. RATHKE (1963) teilt dazu in 6 Hauptformen ein, die die große Variabilität zu Klassen zusammenfassen.

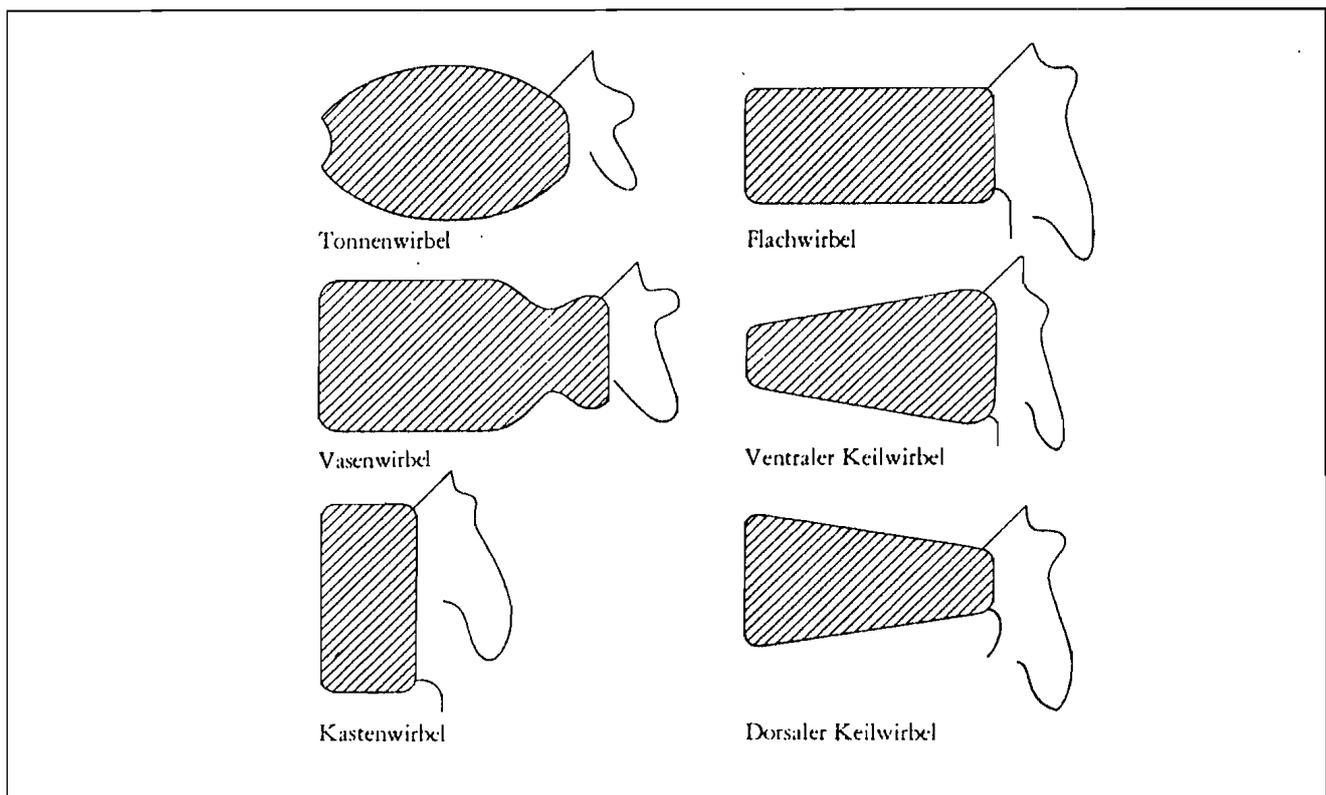


Abb.4: Formvarianten von Wirbelkörpern [aus NEUGEBAUER (1977)]

Kranial schließt an den Wirbelkörper der Wirbelbogen nach dorsal mit den Fortsätzen an. Den Übergang von Wirbelkörper in den Bogen unterscheidet man zusätzlich als Bogenwurzel (Pediculus arcus vertebrae, Radix arcus).

Das Wirbelloch (Foramen vertebrale) wird aus der Rückseite des Wirbelkörpers und dem Wirbelbogen gebildet. Im Schutz des Wirbellochs verläuft das Rückenmark (Medulla spinalis) von seinem Ursprung im Schädel bis auf Höhe des ersten oder zweiten Lendenwirbels.

Der Ursprung des Wirbelbogens (Radix arcus) ist cranial abgeflacht (Incisura vertebralis cranialis) und caudal mit einem tiefen Ausschnitt (Incisura vertebralis caudalis) versehen. Diese Aussparungen bilden aus zwei übereinander liegenden Wirbeln das Zwischenwirbelloch (Foramen intervertebralis). Durch diese Öffnung treten der Rückenmarksnerv und das Ganglion spinale aus.

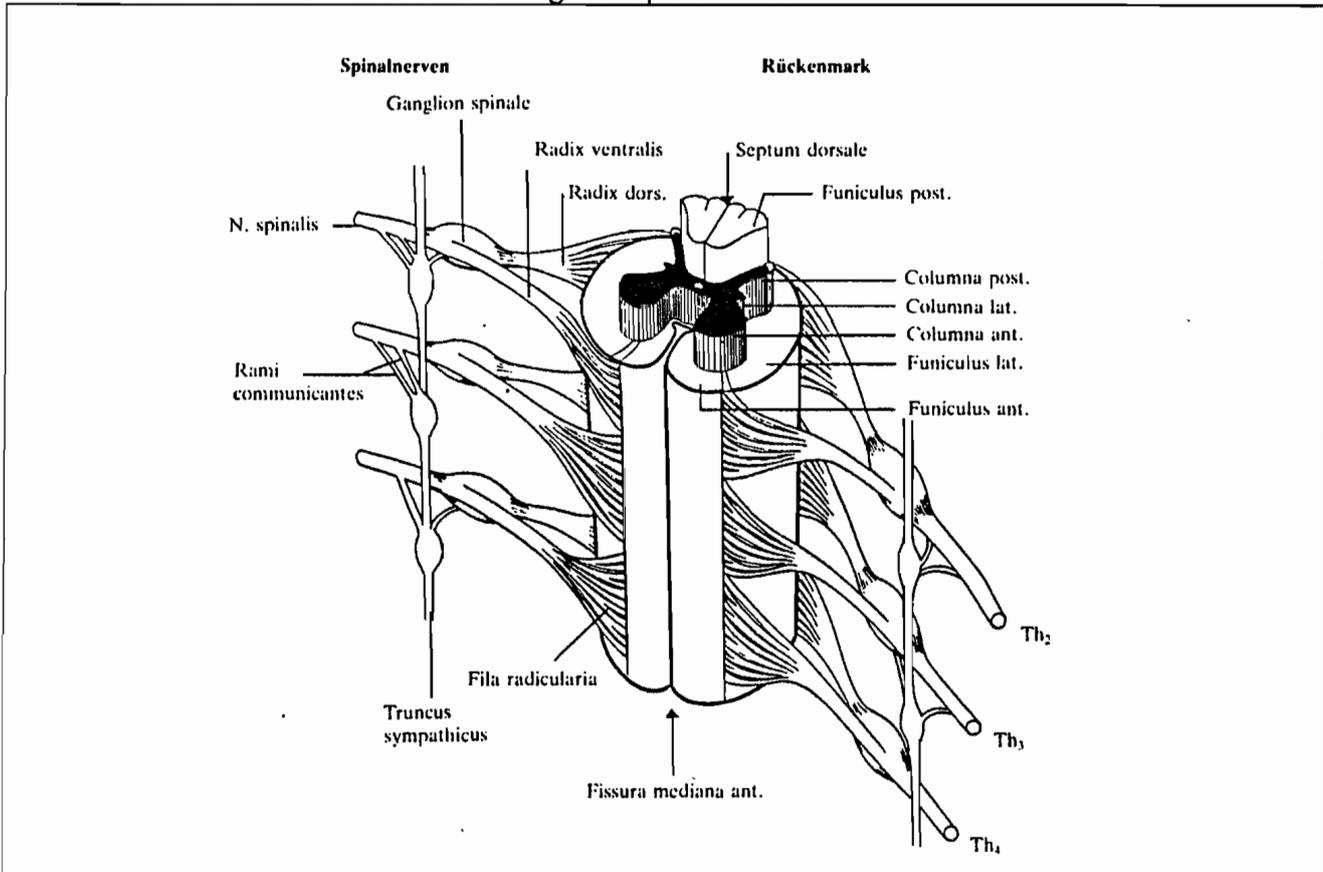


Abb.5: Spinalnerven [aus ROHEN (1984)]

An den Bögen der Lendenwirbel entspringen seitlich die Rippenfortsätze (Prozessus costarii). Diese sind ihrer Herkunft nach Rippenanteile, die in den Wirbel einbezogen sind. Wird die knöcherne Verbindung nicht ausgebildet, dann besteht eine Lendenrippe, wie sie zum Teil am ersten Lendenwirbel vorkommt.

Seitlich vom Wirbelbogen gehen die Querfortsätze (Prozessus transversi) aus. Sie sind an den Hals- und Brustwirbeln besonders ausgeprägt. Durch sie wird die Verbindung mit den Rippen vervollständigt. Im Lumbalbereich sind die Querfortsätze kaum ausgebildet und stellen kleine, unwesentliche Knochenvorsprünge (Processus accessorii) dorsal an der Ursprungsstelle der Rippenfortsätze dar.

Die einzelnen Wirbel stehen neben der Bandscheibe zusätzlich mit ihrem kranialen und kaudalen Nachbarn über je zwei obere (Processus articularis cranialis) und untere überknorpelte Gelenkfortsätze (Processus articularis caudalis) in Verbindung. Sie entspringen am Wirbelbogen dorsal von der Incisura vertebralis cranialis und Incisura vertebralis caudalis und stellen für das Zwischenwirbelloch eine zusätzliche Begrenzung dar. Die Lage und Stellung der oberen Gelenkflächen (Facies articularis cranialis) und der unteren Flächen (Facies articularis caudalis) sind für die Bewegungen der benachbarten Wirbel von besonderem Einfluß. Die relativen Bewegungen zweier aneinander grenzender Wirbel werden durch die Wirbelgelenke in bestimmte Richtungen beschränkt und nehmen dabei genau begrenzte Ausmaße an. Im Bereich der Lendenwirbelsäule stehen die Gelenkflächen fast sagittal senkrecht, so daß eine Verdrehung benachbarter Wirbel stark eingeschränkt ist. Am lumbosakralen Übergang sind die Gelenkflächen nahezu frontal ausgerichtet [SCHAIK et al. (1985)]. Zwischenstellungen werden am Segment L4-L5 eingenommen. FARFAN (1979) sowie FARFAN und GRACOVETSKY (1984) haben in ihren Untersuchungen die unterschiedlichen Stellungen der Wirbelgelenksspalten dargestellt.

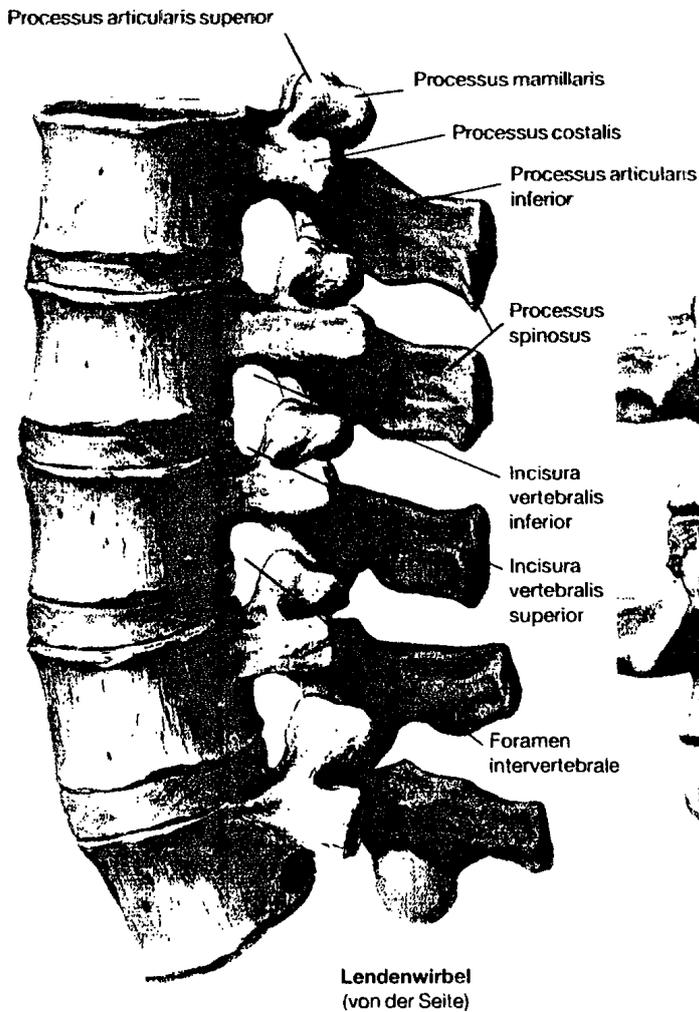
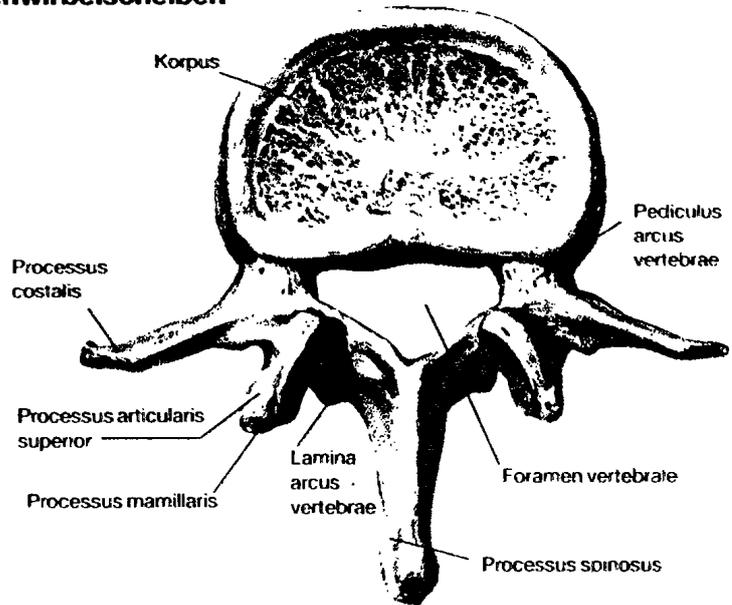
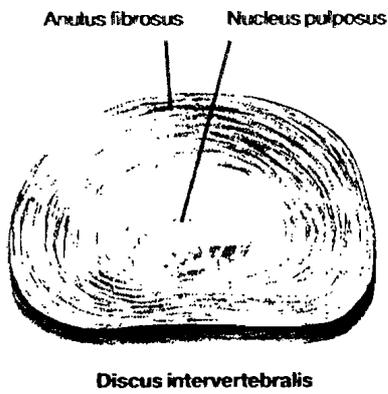
Am dorsalen Ende des Wirbelbogens entspringt der Dornfortsatz (Processus spinosus). Die Spitzen des Dornfortsatzes sind unter der Haut zu sehen und auch zu fühlen. Die lumbalen Dornfortsätze sind ausgesprochen kräftig und verlaufen im Unterschied zur thorakalen Wirbelsäule nahezu waagrecht.

Wie die meisten übrigen Knochen des menschlichen Organismus bestehen auch die Wirbelkörper aus zwei unterschiedlichen Anteilen, einer kompakten festen Außenschicht (Substantia compacta) und aus einer weicheren Innenzone (Substantia spongiosa) [ROHEN (1985)]. Die Spongiosa besteht aus anastomosierenden (verbundenen) Knochenbälkchen, zwischen die die blutbildenden Gewebe eingelagert sind.

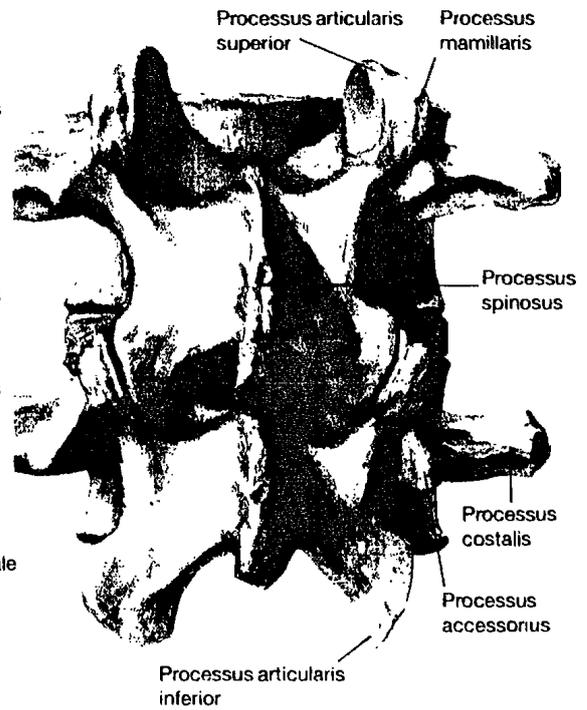
Die Spongiosabälkchen (Trabekel) des Wirbelkörpers sind so angeordnet, daß sie im wesentlichen den Spannungstrajektorien entsprechen. Auf Grund dieses Prinzips spricht man von einem trajektoriellen Bau des Knochens. Die Natur hat es dadurch erreicht, mit minimalem Materialaufwand ein Maximum an Festigkeit zu erreichen. Es ist zu beobachten, daß diese Bauform besonders ausgeprägt in Knochenbereichen auftritt, in denen die Balastungsrichtung annähernd konstant ist.

Darüber hinaus zeichnet sich der menschliche Knochen durch eine bemerkenswerte Eigenschaft aus, sich rasch durch Knochenanbau (Hypertrophie) oder Knochenabbau (Atrophie) an veränderte Beanspruchungen zu adaptieren [KUMMER (1972), WOLF (1892)].

Lendenwirbel und Zwischenwirbelscheiben



2. Lendenwirbel (von oben)



F. Netter
M.D. CHICAGO

Abb.6: Anatomie der Wirbel [aus NETTER (1989a)]

2.3.2 Wirbelgelenke

Die Funktion der Bewegungssegmente wird maßgeblich durch die Wirbelgelenke bestimmt. Veränderungen der Bandscheibe bewirken unmittelbar Stellungsänderungen der Wirbelgelenke, bei denen es sich um echte Gelenke mit hyalinknorpeligen Oberflächen (Cartilago articularis), Synovialis, Synovia und Gelenkkapsel handelt. Die Wirbelgelenke stellen insofern echte Gelenke dar, als sie durch Bindegewebe (Capsula articularis) geschlossen sind. Die genau zueinander passenden Gelenkflächen (Diarthrosen) sind zusätzlich mit Zwischenscheiben versehen (Disci articulares), die alle verbleibenden Unebenheiten aneinander angleichen. Die Stellung der Gelenkflächen der einzelnen Wirbelbogengelenke bestimmt die Beweglichkeit der jeweiligen Wirbelabschnitte. So ermöglicht die Gelenkfläche zwischen Atlas und Hinterhaupt das Vorwärts- und Rückwärtsneigen des Kopfes. Das Atlas-Axisgelenk mit seinen fast horizontal stehenden breiten Gelenkflächen ermöglicht die Seitendrehung des Kopfes. Die Gelenkflächen der Brustwirbelsäule sind, ähnlich wie die der Halswirbelsäule, schräg von hinten unten nach vorn oben gestellt, nur steiler, so daß hier eine größere Seitneigung (laterale Biegung) möglich ist. Die Gelenkflächen der Lendenwirbelsäule unterscheiden sich grundsätzlich dadurch von den anderen, daß sie fast genau sagittal stehen, also von vorn nach hinten. Die wesentliche Bewegungseinschränkung erfährt damit die Wirbelsäule durch ihre Wirbelgelenke, da die Bandscheibensynchondrose keine Richtungsbeschränkung bedeutet.

2.3.3 Zwischenwirbelscheibe - Bandscheibe

Eine besondere Bedeutung kommt den Zwischenwirbelscheiben oder Bandscheiben (Disci intervertebrales) als Verbindungselement im ventralen Bereich der Wirbel zu. Die Bandscheibe besteht aus einer mit Fasern durchzogenen knorpeligen Grundsubstanz. Den Kern der Bandscheibe stellt ein flüssigkeitsreicher Gallertkern (Nucleus pulposus) dar. Seine biochemischen Eigenschaften sind gekennzeichnet durch sein Wasserbindungsvermögen. Seine Spannung ist bestimmt durch den kolloidosmotischen Druck. Dieser Druck wiederum ist abhängig von der Art, Zahl und Größe der Makromoleküle des Mukopolysaccharidproteinkomplexes oder der Proteoglycane. Mit zunehmendem Alter sinkt der Wassergehalt der Bandscheibe, ihr Stickstoffgehalt aber steigt an. Das kann zu Austrocknungen des Nucleus pulposus führen. Die Belastbarkeit des Faserrings (Annulus fibrosus) wird dadurch herabgesetzt. Von innen nach außen nimmt der Anteil an Grundsubstanz stetig ab. Der Anteil von Kollagengehalt von 44-51% ergibt sich durch die dichte Anordnung von kreuzweise verlaufenden kollagenen Fasern in den außen liegenden Schichten der Bandscheibe. Diese fibrillären Proteinkollagene besitzen eine hochgeordnete makromolekulare

Struktur. Im Horizontalschnitt erkennt man ein mehr oder weniger stark ausgebildetes Zwiebelschalenmuster.

Auf Grund der ventral höheren Bandscheiben als dorsal ergibt sich im Bereich der Lendenwirbelsäule eine Lordosierung. Zusätzlich nimmt die Bandscheibenhöhe von kranial nach kaudal zu. Die lumbosakrale Bandscheibe bildet eine Ausnahme, indem sie dünner als die unterste lumbale Bandscheibe ist.

2.3.4 Ligamente

Die lumbalen Bewegungssegmente der menschlichen Wirbelsäule sind durch eine Vielzahl von unterschiedlichen Bändern verbunden. Jedes dieser Bänder erfüllt auf Grund seines Verlaufs eine spezielle Aufgabe. Das vordere Längsband (Ligamentum longitudinale anterius) und das hintere Längsband (Ligamentum longitudinale posterius) verlaufen von Anfang bis Ende der Wirbelsäule. Als breiter Streifen überzieht das vordere Längsband den vorderen Teil des Wirbelkörpers und den ventralen Annulus fibrosus. Dabei geht es mit den Wirbelkörpern einen festen Verbund ein. Von den Bandscheiben läßt es sich leicht trennen [HERCHENBACH (1988), KRÄMER (1989), TKATZUK (1968)].

Nach Untersuchungen von PANJABI et al. (1991) geht auch das vordere Längsband, genauso wie das hintere, eine feste Verbindung mit den Zwischenwirbelscheiben ein. Das hintere Längsband verläuft im vorderen Teil des Wirbelkanals. Es ist kranial breiter als kaudal und verschmälert sich in Höhe der lumbalen Wirbelsäule zu einem schmalen Streifen. Nach Studien von STAHL und HUTH (1989) wird allerdings entgegen vieler Anatomiebücher die dorsale Bandscheibenbegrenzung nicht komplett abgedeckt. Die lateralen Anteile des hinteren Längsbandes verlaufen in Bandscheibenhöhe schräg nach kaudal zum Periost der Wirbelbogenwurzel.

Das gelbe Band oder Zwischenbogenband (Ligamentum flavum bzw. Ligamentum interarcualium) kleidet den dorsalen Teil des Wirbelkanals aus. Im Unterschied zu den übrigen Bändern besteht es vorwiegend aus elastischen Fasern, die ihm seine gelbliche Farbe geben. Das Ligamentum flavum zieht von einem Wirbelbogen zum jeweils darüberliegenden.

Zwischen den Querfortsätzen (Processus accesorii) benachbarter Lendenwirbel verlaufen die Ligamenta intertransversaria.

Die Dornfortsätze verfügen zusätzlich über zwei verbindende Bänder. Zum einen das am weitesten dorsal verlaufende Ligamentum supraspinale und zum anderen das Ligamentum interspinale. Die Fasern des Ligamentum interspinale ziehen von dem anterior-superioren Ansatzpunkt des Dornfortsatzes des unteren Wirbels zu dem posterior-inferioren Ansatzpunkt des darüberliegenden Wirbels. Dieser schräg nach oben-hinten gerichtete Verlauf kann allerdings nicht in allen Fällen angenommen werden [PANJABI et al. (1991)].

Der genaue Verlauf läßt sich auch aus den anatomischen Zeichnungen entnehmen.

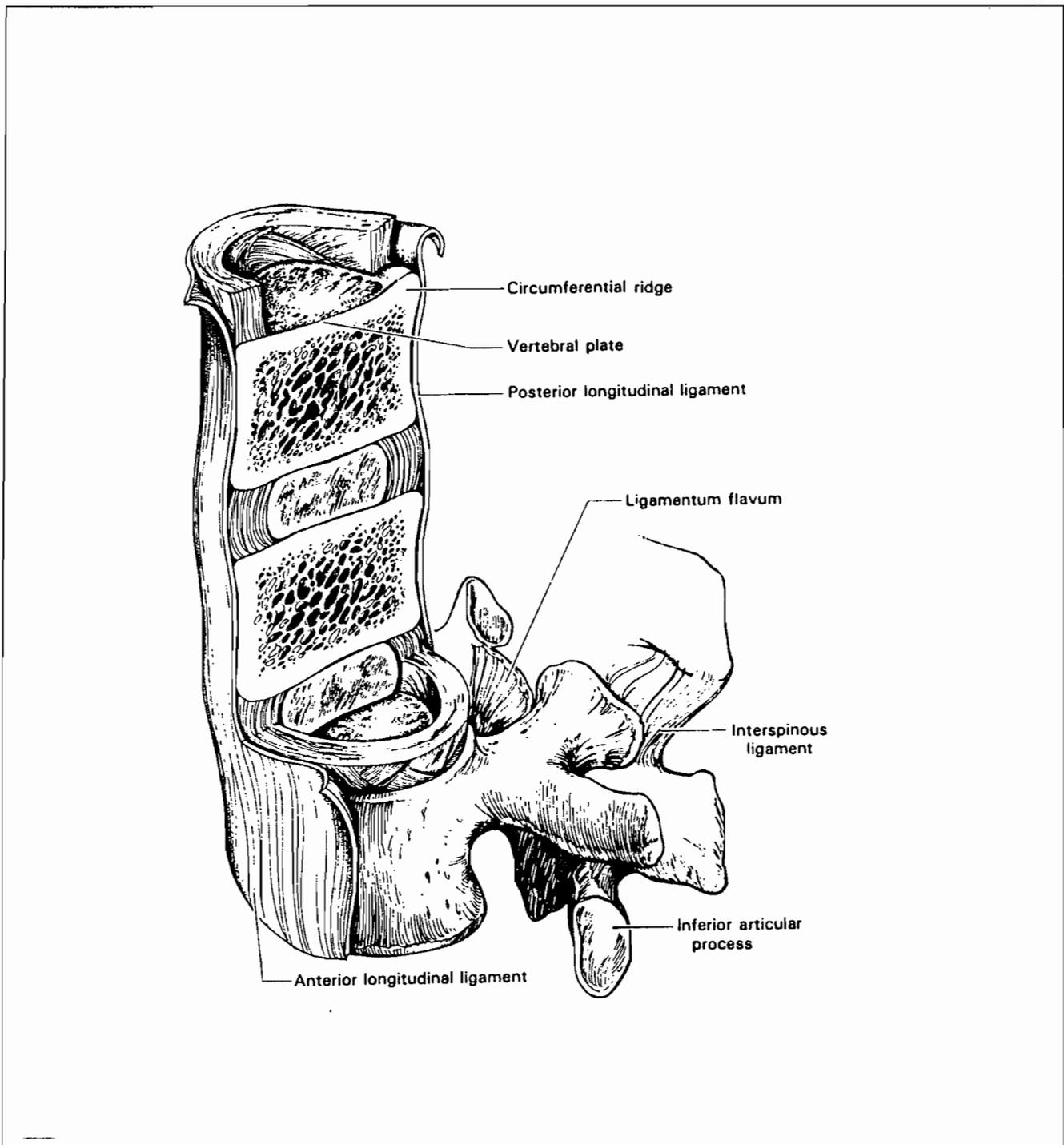


Abb.7: Darstellung der Ligamente [aus COTLER und COTLER (1990)]

3. Mechanische Formulierung

Da die menschliche Wirbelsäule, bestehend aus Junghannsschen Bewegungssegmenten, sich aus den verschiedensten Einzelkomponenten unterschiedlichster Art und Geometrie zusammensetzt, stellt sie eine äußerst komplexe Struktur dar. Der anatomische Aufbau wurde im Kapitel zwei ausführlich dargestellt. Für die Abbildung einer solchen Funktionseinheit in ein mathematisch-mechanisches Modell werden im folgenden Kapitel die notwendigen mechanischen Zusammenhänge erläutert.

Die klassischen naturwissenschaftlichen Methoden im Bereich der Mechanik haben Vorgehensweisen entwickelt, die geeignet sind, komplexe Zusammenhänge realer Systeme durchaus realistisch abzubilden. Dabei ist es notwendig, ein Modell des Problems zu schaffen, anhand dessen dann eine Lösung vorgenommen werden kann. Vom Ansatz her unterscheidet man in der Mechanik zwischen einer kontinuierlichen (starken) und einer diskreten (schwachen) Modellbildung. Um die Reaktion eines kontinuierlichen Systems zu erhalten, muß die das Modell beschreibende Differentialgleichung gelöst werden. Dies gelingt nur bei wenigen Fragestellungen in der Kontinuumsmechanik durch geeignete Lösungsansätze. Oft bleibt jedoch nur die Möglichkeit, auf der Basis eines Variationsprinzips ein diskretes Modell zu erstellen, das es dann erlaubt, das Problem hinreichend genau näherungsweise zu lösen.

Zunächst einmal werden im folgenden Kapitel die notwendigen kontinuumsmechanischen Grundlagen erarbeitet. Dabei wird auf die ausführlicheren Darstellungen in den Arbeiten von DUSZEK (1980), OGDEN (1984), WRIGGERS (1986), STUMPF (1994) hingewiesen. Aufbauend auf die Grundlagen der analytischen Mechanik und ausgehend von den neuesten Erkenntnissen über die Verwendbarkeit der verschiedenen Dehnungs- und Spannungsgraten, wie sie SCHIECK und STUMPF (1994) untersucht haben, werden für die Methode der finiten Elemente die nötigen Grundlagen skizziert. Für die Wiedergabe von Wirbelkörper und Bandscheibe wird ein Volumenelement mit isoparametrischem Ansatz eingeführt. Dabei weisen die abzubildenden Strukturen aus Knorpelgrundsubstanz und die der knöchernen Anteile unter den anatomischen Belastungen kleine Dehnungen und moderate Rotationen auf. Für die langgestreckten Bänder findet ein nichtlineares Stabelement Anwendung, das unter Berücksichtigung der gemessenen Materialverhalten eine realistische Beschreibung ermöglicht. Die Realisierung der strukturellen Anisotropie des Annulus Fibrosus wird durch Kombination von Volumen- und Stabelementen erreicht.

3.1 Darstellung der mechanischen Grundlagen

An dieser Stelle soll zunächst ein kurzer Überblick über die grundlegenden Zusammenhänge der nichtlinearen Kontinuumsmechanik mit Blick auf eine spätere Anwendung für die Ratenformulierung gegeben werden.

3.1.1 Beschreibung im Koordinatensystem

Zur Beschreibung kontinuumsmechanischer Zusammenhänge ist es notwendig, ein geeignetes körperverbundenes Koordinatensystem einzuführen. Dabei werden die Koordinaten mit Θ^i , $i=1,2,3$ bezeichnet. Für einen Punkt des Kontinuums B läßt sich damit der Ortsvektor \mathbf{X} in der unverformten Lage (Ausgangslage) als Funktion seiner Koordinaten Θ^i angeben

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\Theta^i), \text{ mit } i=1,2,3. \quad (3.1)$$

Dabei verwendet man zwei Formen von natürlichen Basisvektoren. Zum einen kovariante und zum anderen kontravariante Basen. Diese lassen sich anhand der Schreibweise voneinander unterscheiden.

Kovariante Basisvektoren kennzeichnet man durch einen tiefgestellten Index. Die Definition ergibt sich aus der Ableitung nach den Koordinaten. Dabei wird folgende

Schreibweise für die Ableitung vereinbart $(\dots)_{,i} := \frac{\partial(\dots)}{\partial\Theta^i}$ und auch im folgenden verwendet, so daß man

$$\mathbf{G}_i := \mathbf{X}_{,\Theta^i} \equiv \mathbf{X}_{,i} \quad (\text{kovariante Basisvektoren}) \quad (3.2)$$

erhält. Im Unterschied dazu wird der Index der kontravarianten Basisvektoren hochgestellt angebracht. Sie stehen orthogonal auf den kovarianten Basisvektoren, also sind sie durch

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j \quad (\text{kontravariante Basisvektoren}) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{1} = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_i$$

festgelegt. Zur Beschreibung in der verformten Lage ist es darüber hinaus notwendig, ebenfalls zwei Basen zu definieren, die kovariant beziehungsweise kontravariant sind.

Auf Grund ihrer Definition in der Momentankonfiguration werden sie genauso wie alle auf die verformte Lage bezogenen Größen mit kleinen Buchstaben gekennzeichnet. Man definiert also

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{x}_{,i} \quad (\text{kovariante Basisvektoren}) \quad (3.4)$$

so daß sich der Ortsvektor eines Punktes in der verformten Lage dann als

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}(\Theta^i) \quad (\text{Ortsvektor in der verformten Lage}) \quad (3.5)$$

ergibt. Für die hier eingeführten Basisvektoren in der unverformten und der verformten Lage muß also nachfolgende Bedingung erfüllt sein,

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i \quad (3.6)$$

$$\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta_j^i \quad (3.7)$$

wobei δ_j^i das Kronecker-Symbol ist, mit $\delta_j^i = 0$ für $i \neq j$ und $\delta_j^i = 1$ für $i=j$ ist.

Diese Bedingung bedeutet, daß die kovarianten und kontravarianten Basisvektoren, wie nachfolgend dargestellt, zueinander orthogonal sind.

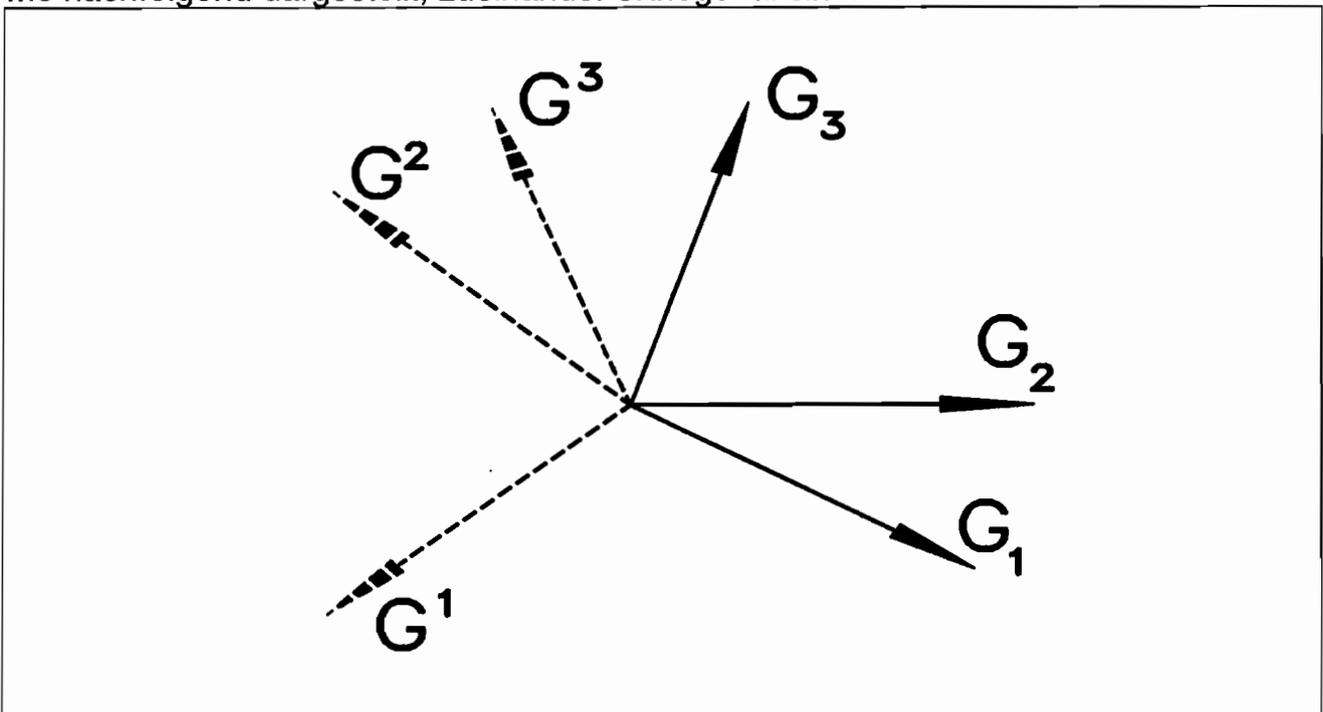


Abb. 8: Ko- und Kontravariante Basisvektoren

Eine ausführliche Darstellung der Notation findet sich bei WANG und TRUESDELL (1973).

3.1.2 Deformationsgradient

Der Deformationsgradient ist die lineare Abbildung des Tangentialraums an die Referenzkonfiguration in den Tangentialraum an die Momentankonfiguration. Damit stellt der Deformationsgradient einen Zweibeintensor dar, der mit einem Bein in der unverformten Lage und mit dem anderen in der verformten Lage steht.

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Theta^i} \frac{\partial \Theta^i}{\partial \mathbf{X}} \quad (3.9)$$

Mit (3.2) und (3.4) erhält man

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (3.10)$$

wobei $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i$ das Tensorprodukt von \mathbf{g}_i und \mathbf{G}^i bezeichnet [Klingbeil (1966)] und somit

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \mathbf{G}_i \quad (3.11)$$

ergibt. Die materielle Zeitableitung des Deformationsgradienten läßt sich damit bestimmen und ergibt sich zu

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (3.12)$$

Hieraus ergibt sich der Geschwindigkeitsgradient \mathbf{l} zu

$$\mathbf{l} := \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad } \dot{\mathbf{x}}, \quad (3.13)$$

so daß man mit (3.12) zu folgendem Zusammenhang kommt

$$\mathbf{l} := \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (3.14)$$

Der Geschwindigkeitsgradient läßt sich additiv in $\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w}$ aufteilen. Bei dieser Zerlegung ist \mathbf{d} die Dehnungsgeschwindigkeit oder Deformationsrate und \mathbf{w} der Spin. Damit erhält man

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) = \mathbf{d}^T \quad (\text{Dehnungsgeschwindigkeit}) \quad (3.15)$$

und

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) = -\mathbf{w}^T \quad (\text{Drehgeschwindigkeit oder Spin}) \quad (3.16).$$

3.1.3 Polare Zerlegung des Deformationsgradienten

Der Deformationsgradient \mathbf{F} läßt sich multiplikativ unter der Voraussetzung $\det(\mathbf{F}) > 0$ in zwei Anteile zerlegen. Zum einen in einen orthogonalen Rotationstensor \mathbf{R} und zum anderen in einen symmetrischen Verzerrungstensor \mathbf{U} bzw. \mathbf{V} (Stretch). Eine ausführliche Darstellung findet sich bei TRUESDELL UND NOLL (1965).

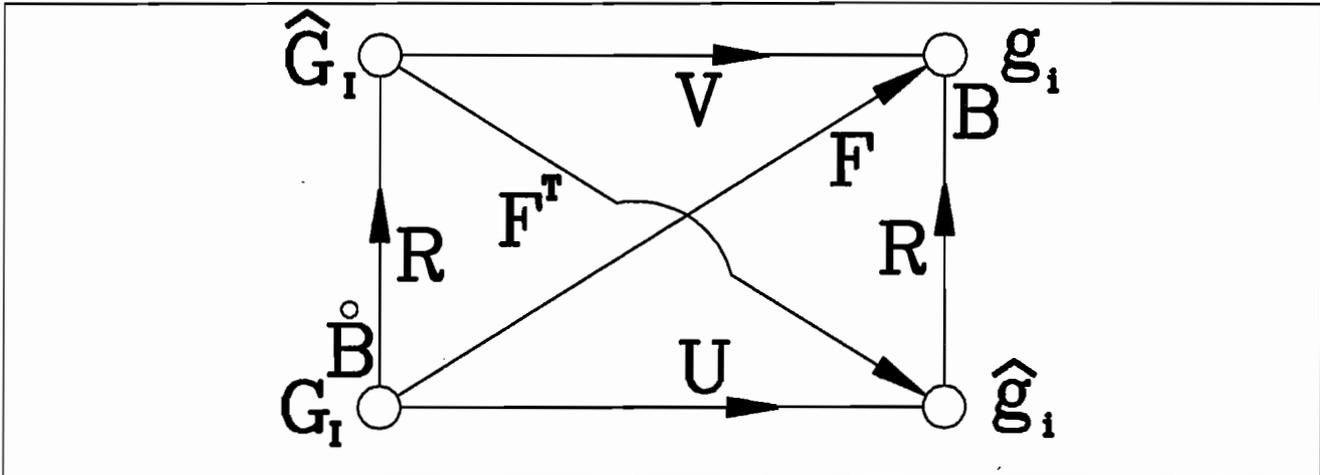


Abb. 9: Darstellung der polaren Zerlegung

Die obige zeichnerische Darstellung gibt die polare Zerlegung übersichtlich wieder, so daß man zu den folgenden Zusammenhängen kommt.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T$$

Der Rotationstensor \mathbf{R} ist ein orthogonaler Tensor, für ihn gilt: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, ($\det \mathbf{R} = 1$).

Unter \mathbf{U} versteht man den Right Cauchy-Green-Tensor, ein symmetrischer Tensor, so daß für diesen die folgende Aussage $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ zutrifft. Der Tensor \mathbf{U} hat die Objektivität der Lagrangeschen Darstellung.

Der Tensor \mathbf{V} wird als Left Cauchy-Green Tensor bezeichnet. Dieser Tensor hat im Unterschied zu \mathbf{U} die Objektivität der Eulerschen Darstellung.

Nachfolgende weitere Zusammenhänge sollen an dieser Stelle eingeführt werden:

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} \quad \text{oder:} \quad \mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \mathbf{F}^T} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} \quad \text{oder:} \quad \mathbf{R} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{F} \quad (3.19)$$

3.1.4 Dehnungstensoren in Referenz- und Momentankonfiguration

In der unverformten Lage, also der Referenzkonfiguration ist der Greensche Dehnungstensor \mathbf{E} definiert, der sich aus der Taylorreihenentwicklung des oben eingeführten (3.15) Dehnungstensors \mathbf{U} ergibt. Mit (3.18) läßt sich schreiben

$$\mathbf{U} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} \quad (3.20)$$

also

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{1} + (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})} \quad (3.21)$$

in eine Taylor-Reihe entwickelt erhält man

$$\mathbf{U} = \mathbf{1} + \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) + \dots \quad (3.22)$$

so daß sich unter Verwendung der ersten beiden Glieder \mathbf{E} zu

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (3.23)$$

ergibt. Mit (3.20) läßt sich auch schreiben

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}). \quad (3.24)$$

In der verformten Lage, also der Momentankonfiguration, ist der Almansische Dehnungstensor definiert. Ausgehend von:

$$\mathbf{V} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{V}^{-2}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1} - \sqrt{\mathbf{1} + (\mathbf{V}^{-2} - \mathbf{1})}$$

kann man an dieser Stelle eine Taylerreihenentwicklung vornehmen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1} - \left[\mathbf{1} + \frac{1}{2}(\mathbf{V}^{-2} - \mathbf{1}) + \dots \right]$$

und erhält damit

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{V}^{-2}) = \mathbf{e} \quad \text{oder} \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}). \quad (3.25)$$

Der Almansitensor hängt über den Deformationsgradienten mit dem Greenschen Dehnungstensor zusammen.

$$\mathbf{e} := \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \quad (3.26)$$

3.1.5 Spannungs- und Dehnungsraten

Die Lie-Ableitung setzt sich aus drei aufeinanderfolgenden Operationen zusammen:

1. Pull-Back-Operation,
2. Zeitableitung bei festem X und
3. Push-Forward-Operation.

Das Pull-back stellt das Zurückdrehen des Tangentialraums an die Momentan-konfiguration in die Referenzkonfiguration dar.

$$(\#) = \mathbf{F}^{-1} (*) \mathbf{F}^{-T} \quad \text{oder: } \#^{AB} = (\mathbf{F}^{-1})^A_a (*)^{ab} (\mathbf{F}^{-T})^B_b \quad (3.27)$$

Die Push-forward-Operation stellt die Umkehroperation zum Pull-back von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration dar.

$$\bar{\#} = \mathbf{F} (\bar{*}) \mathbf{F}^T \quad (3.28)$$

Infolge der Ableitung in der unverformten Konfiguration erhält man mit der Lie-Ableitung eine zeit-invariante (objektive) Rate.

Die Lie-Ableitung eines kovarianten Tensors, wie dem Almansischen Dehnungstensor, sieht damit wie folgt aus:

$$L_v (\) = \mathbf{F}^T (\mathbf{F}^T (\text{Tensor}) \mathbf{F}) \bullet \mathbf{F}^{-1} \quad (3.29)$$

Die Lie-Ableitung eines kontravarianten Tensors, wie dem Cauchyschen Spannungstensors, hat dagegen folgende Form:

$$L_v (\) = \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-1} (\text{Tensor}) \mathbf{F}^T) \bullet \mathbf{F}^T \quad (3.30)$$

Bildet man nun die Lie-Ableitung des Almansischen Tensors, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$L_v \mathbf{e} := (\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}) \quad (3.31)$$

mit der materiellen Zeitableitung von \mathbf{E} :

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) \quad (3.32)$$

ergibt sich

$$\mathbf{L}_v \mathbf{e} := \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T + \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}) \quad (3.33)$$

Führt man an dieser Stelle die Verformungsgeschwindigkeit \mathbf{I} (3.14) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_v \mathbf{e} &:= \frac{1}{2} (\mathbf{I}^T + \mathbf{I}) \\ \mathbf{L}_v \mathbf{e} &:= \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Der Tensor \mathbf{d} wird als Deformationsrate bezeichnet. Man kann somit schreiben:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-1} \dot{\mathbf{F}}) \quad (3.35)$$

Außerdem soll hier der Tensor \mathbf{w} als Spin eingeführt werden.

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-1} \dot{\mathbf{F}}) \quad (3.36)$$

Geht man wie folgt vor, lassen sich die verschiedenen Dehnungsraten gut gegenüberstellen und am Ende vergleichen:

$$\mathbf{L}_v \mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \overline{(\mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F})} \mathbf{F}^{-1} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{L}_v \mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} (\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{e} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{e}} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{e} \dot{\mathbf{F}}) \mathbf{F}^{-1} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{L}_v \mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (3.39)$$

setzt man hier (3.14) ein, so erhält man schließlich:

$$\mathbf{L}_v \mathbf{e} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \mathbf{I} + \mathbf{I}^T \mathbf{e} \quad (3.40)$$

Berechnet man aus dem Almansi-Tensor, wie unten, die corotational Rate

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_R \mathbf{e} &= \mathbf{R}^T \overline{(\mathbf{R}^T \mathbf{e} \mathbf{R})} \mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{L}_R \mathbf{e} &= \mathbf{R} [\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{e} \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{e}} \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \mathbf{e} \dot{\mathbf{R}}] \mathbf{R}^{-1} \\ \mathbf{L}_R \mathbf{e} &= \mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{e} + \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1} \end{aligned} \quad (3.41)$$

und führt den Spine Ω : $\Omega = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1}$

$$\Omega^T = (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^{-1})^T$$

$$\Omega^T = \mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T \quad (3.42)$$

ein, so erhält man

$$L_{\mathbb{R}} \mathbf{e} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^T \mathbf{e}$$

$$L_{\mathbb{R}} \mathbf{e} = \overset{\nabla}{\mathbf{e}}. \quad (3.43)$$

Diese Rate bezeichnet man als die Green-Naghdi-Rate [GREEN und NAGHDI (1965)].

Betrachtet man in diesem Fall die einzelnen Anteile, aus denen sich der Gesamtspin zusammensetzt, und setzt oben ein, dann erhält man für $w^e \rightarrow 0$

$$L_{\mathbb{R}} \mathbf{e} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \mathbf{w} + \mathbf{w}^T \mathbf{e} \quad (3.44)$$

die Zerember-Jaumann-Rate.

Zur Bestimmung der mechanischen Energie eines Kontinuums ist es notwendig, die jeweiligen den Dehnungen Power-konjugierten Spannungsraten zu berechnen. Auf die entsprechenden Zuordnungen gehen WANG und TRUESDELL (1973) sowie McVEAN (1968) ausführlich ein. An dieser Stelle soll nur ein kurzer Abriß der gebräuchlichsten Spannungsraten vermittelt werden.

Geht man von dem kontravarianten Cauchy-Spannungs-Tensor σ aus und wendet die Lie-Ableitung darauf an, so ergibt sich

$$L_{\nu} \sigma = \mathbf{F} \overline{(\mathbf{F}^{-1} \sigma \mathbf{F}^{-T})} \mathbf{F}^T \quad (3.45)$$

$$L_{\nu} \sigma = \mathbf{F} [(\mathbf{F}^{-1})^{\bullet} \sigma \mathbf{F}^{-T} + \mathbf{F}^{-1} \dot{\sigma} \mathbf{F}^{-T} + \mathbf{F}^{-1} \sigma (\mathbf{F}^{-T})^{\bullet}] \mathbf{F}^T \quad (3.46)$$

$$L_{\nu} \sigma = \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-1})^{\bullet} \sigma + \dot{\sigma} + \sigma (\mathbf{F}^{-T})^{\bullet} \mathbf{F}^T \quad (3.47)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} &= \mathbf{1} \\ (\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1})^{\bullet} &= (\mathbf{1})^{\bullet} = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-1})^{\bullet} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-1})^{\bullet} &= -\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \end{aligned} \quad (3.48)$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T &= \mathbf{1} \\ (\mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T)^{\bullet} &= (\mathbf{1})^{\bullet} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{F}^{-T})^{\bullet} \mathbf{F}^T + \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{F}^{-T})^{\bullet} \mathbf{F}^T &= -\mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T \\ (\mathbf{F}^{-T})^{\bullet} \mathbf{F}^T &= -(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1})^T \end{aligned} \quad (3.49)$$

erhält man unter Beachtung von (3.48) und (3.49)

$$L_{\nu} \sigma = \dot{\sigma} - \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \sigma - \sigma (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1})^T. \quad (3.50)$$

Führt man auch hier den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{I} (3.14) ein, der auf der Momentankonfiguration definiert ist, so erhält man mit

$$\mathbf{L}_v \boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{I} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{I}^T \quad (3.51)$$

die Oldroyd-Spannungs-Rate.

Geht man nicht von $\boldsymbol{\sigma}$ (Cauchy-Spannung) sondern von $\boldsymbol{\tau}$ (Kirchhoff-Spannungstensor) aus und wendet die Lie-Ableitung an, so erhält man mit $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma}$ und $\mathbf{J} = \det \mathbf{F}$

$$\mathbf{L}_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{L}_v (\mathbf{J} \boldsymbol{\sigma}) \quad (3.52)$$

$$\mathbf{L}_v \boldsymbol{\tau} = (\mathbf{L}_v \mathbf{J}) \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{J} \mathbf{L}_v \boldsymbol{\sigma} \quad (3.53)$$

unter Berücksichtigung von

$$\mathbf{L}_v \mathbf{J} = \dot{\mathbf{J}} \quad (3.54)$$

und der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\mathbf{J}} - \mathbf{J} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.55)$$

läßt sich

$$\mathbf{L}_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{J} \mathbf{L}_v \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{J} \operatorname{div} \mathbf{v} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{L}_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{J} (\mathbf{L}_v \boldsymbol{\sigma} + \operatorname{div} \mathbf{v} \boldsymbol{\sigma}) \quad (3.57)$$

schreiben. Man erhält die von Truesdell eingeführte Spannungs-Rate.

3.1.6 Bewegung im Raum

Zur Beschreibung der Bewegung eines Kontinuums lassen sich verschiedene Methoden unterscheiden. Zur Beschreibung der Kinematik in einem raumbezogenen Koordinatensystem verwendet man die Eulersche Formulierung. Im Gegensatz dazu beschreibt die hier verwendete Lagrangesche Formulierung die Bewegung aller Partikel eines Kontinuums körperbezogen. Man spricht darum auch von materiellen oder substantiellen Koordinaten. Bei der Abbildung eines Körpers \mathbf{B} in den dreidimensionalen Euklidischen Raum spricht man von einer Konfiguration. Betrachtet man eine Folge von Konfigurationen $\Phi(\mathbf{B})$ über die Zeit t , so erhält man eine Bewegung.

Zur Beschreibung der Bewegung des Körpers B soll im folgenden die unverformte Ausgangskonfiguration zum Zeitpunkt t_0 Verwendung finden. Diese sogenannte Referenz-Konfiguration ${}^0\Phi(B) = {}^0\Phi(X, t_0)$ ist zeitlich nicht veränderlich (siehe Abbildung).

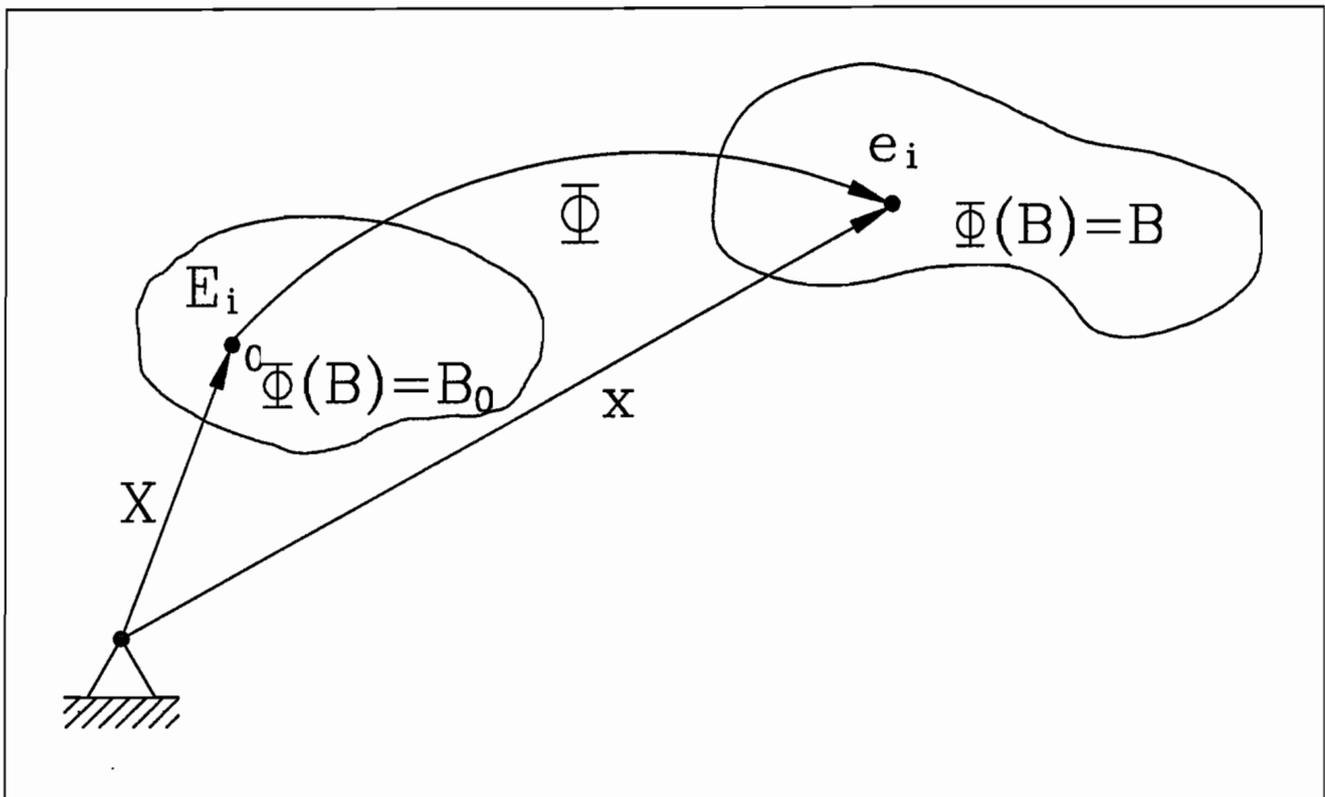


Abb. 10: Darstellung der Kinematik

Größen, die mit der Referenz-Konfiguration verbunden sind, werden nachfolgend durch Großbuchstaben oder den Index "0" gekennzeichnet. Im Gegensatz dazu werden Größen, die mit einer Momentan-Konfiguration verbunden sind, durch kleine Buchstaben oder den Index "t" kenntlich gemacht. Die Kinematik stellt sich damit wie folgt dar

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (3.58)$$

Dies führt zu einer neuen Definition von Φ , die implizit in der Wahl einer Referenz-Konfiguration begründet ist. Φ entspricht dabei einer Abbildung der Referenz-Konfiguration auf eine Momentan-Konfiguration zum Zeitpunkt t . Für einen bestimmten Zeitpunkt t wird Φ als Deformation bezeichnet.

Im folgenden soll eine solche Deformation Φ genauer betrachtet werden. Die verschiedenen Konfigurationen, die sich im Laufe der Bewegung zwischen der Referenz-Konfiguration und der Momentan-Konfiguration zu einem bestimmten

Zeitpunkt t einstellen, sind in diesem Zusammenhang nicht von Interesse. Daher läßt sich schreiben

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}). \quad (3.59)$$

Um die lokalen Deformationen, d. h. in einer Umgebung des Partikels \mathbf{X} , untersuchen zu können, wird verlangt, daß die Ableitungen dx_i/dX_j stetig sind. Dies ist durch die Annahmen bezüglich der Regularität von Φ gewährleistet. Unter Verwendung von (3.59) ergibt sich dann in der absoluten (symbolischen) Notation

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}, \quad (3.60)$$

wobei \mathbf{F} ein Tensor zweiter Stufe ist, der definiert ist als

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \Phi(\mathbf{X}), \quad (3.61)$$

und $\mathbf{F} d\mathbf{X}$ das Produkt des Tensors \mathbf{F} und des Vektors $d\mathbf{X}$ bezeichnet.

Die Vektoren $d\mathbf{X}$ bzw. $d\mathbf{x}$ können als materielle Fasern bezeichnet werden. Die Gleichung (3.60) beschreibt die Transformation der materiellen Faser $d\mathbf{X}$ an der Stelle \mathbf{X} in der Referenz-Konfiguration in die materielle Faser $d\mathbf{x}$ an der Stelle \mathbf{x} in der Momentan-Konfiguration. Unter der Voraussetzung $d\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ folgt aus der Gleichung $\mathbf{F} d\mathbf{X} = \mathbf{0}$, daß eine materielle Faser $d\mathbf{X}$ existiert, deren Länge durch die Deformation auf Null reduziert wird. Dieser Fall kann ausgeschlossen werden, da er physikalisch unrealistisch ist. Aus $\mathbf{F} d\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ für alle $d\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ folgt, daß der Tensor \mathbf{F} nicht singulär ist. Dies führt zu $\det \mathbf{F} \neq 0$.

Da \mathbf{F} nicht singulär ist, existiert die Inverse \mathbf{F}^{-1} .

Im folgenden wird auf die übliche Definition der Funktionaldeterminante oder Jacobische Determinante zurückgegriffen. Es soll gelten

$$J = \det \mathbf{F}. \quad (3.62)$$

Die Jacobische Determinante setzt zwei entsprechende Volumenelemente der Konfiguration $t=0$ und $t>0$ gemäß

$$J = \det \mathbf{F} > 0 \quad (3.63)$$

in Beziehung. Für den Zeitpunkt $t=0$ ergibt sich der Wert $J=1$. Als stetige Funktion kann sie also nur positive Werte annehmen. Darüber hinaus muß $J=0$ ausgeschlossen werden, da ein Volumenelement nicht verschwinden kann.

Betrachtet man drei nichtkomplanare materielle Fasern $\mathbf{dX}^{(1)}$, $\mathbf{dX}^{(2)}$ und $\mathbf{dX}^{(3)}$ an der Stelle \mathbf{X} in der Referenz-Konfiguration, dann gilt entsprechend (3.8)

$$\mathbf{dx}^{(i)} = \mathbf{F} \mathbf{dX}^{(i)} \quad \text{mit } i = 1, 2, 3. \quad (3.64)$$

Man setze voraus, daß die Bedingung $\mathbf{dX}^{(1)} \bullet (\mathbf{dX}^{(2)} \times \mathbf{dX}^{(3)}) > 0$ von den drei Vektoren erfüllt werden, wobei $\mathbf{dX}^{(2)} \times \mathbf{dX}^{(3)}$ das Vektorprodukt der Vektoren $\mathbf{dX}^{(2)}$ und $\mathbf{dX}^{(3)}$ bezeichnet. Das Volumen des infinitesimalen Parallelepipeds, das von den drei Vektoren gebildet wird, kann dann berechnet werden als

$$dV = \det (\mathbf{dX}^{(1)}, \mathbf{dX}^{(2)}, \mathbf{dX}^{(3)}), \quad (3.65)$$

wobei durch $\mathbf{dX}^{(i)}$ Spaltenvektoren bezeichnet werden. Das korrespondierende Volumen in der Momentan-Konfiguration bestimmt sich analog zu (3.64) als

$$dv = \det (\mathbf{dx}^{(1)}, \mathbf{dx}^{(2)}, \mathbf{dx}^{(3)}). \quad (3.66)$$

Unter Verwendung von (3.64) und (3.65) ergibt sich

$$dv = (\det \mathbf{F}) dV = J dV. \quad (3.67)$$

Dies bestätigt die oben (3.63) postulierte Vermutung. Die lokale Beziehung in (3.67) kann global in der Form

$$\int_B dv = \int_{B_0} J dV \quad (3.68)$$

dargestellt werden, wobei B die Momentan-Konfiguration und B_0 die Referenz-Konfiguration bezeichnet.

Man betrachte nun ein infinitesimales Element dS der materiellen Oberfläche in der Umgebung des Punktes \mathbf{X} in der Referenz-Konfiguration. Für das Vektorelement $d\mathbf{S}$ gilt die Beziehung $d\mathbf{S} = \mathbf{N} dS$, wobei \mathbf{N} ein, bezüglich des von der Oberfläche eingeschlossenen Raums, nach außen gerichteter Einheitsvektor normal zu der Oberfläche dS ist. Mit \mathbf{dX} wird eine beliebige materielle Faser bezeichnet, die den

Rand von dS schneidet. Das Volumen des Zylinders, der von dem Oberflächenelement dS und dem Vektor $d\mathbf{X}$ gebildet wird, berechnet sich als $dV = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{S}$. Es wird vorausgesetzt, daß $d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} > 0$ gilt. Das korrespondierende Volumen in der Momentan-Konfiguration bestimmt sich als $dv = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{s}$ mit $d\mathbf{s} = \mathbf{n} ds$, wobei \mathbf{n} ein nach außen gerichteter Einheitsvektor normal zu der Oberfläche ds ist. Zu beachten ist, daß der Normalenvektor \mathbf{N} nicht der Transformation in (3.59) gehorcht. Unter Berücksichtigung von (3.66) folgt dann

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{s} = J d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.69)$$

Unter Verwendung von (3.58) ergibt sich

$$\mathbf{F}^T d\mathbf{s} = J d\mathbf{S}, \quad (3.70)$$

wobei die willkürlich gewählte Größe $d\mathbf{X}$ entfernt wurde, und \mathbf{F}^T die Transponierte des Tensors \mathbf{F} bezeichnet. Ausgehend von (3.70) ergibt sich die Beziehung

$$d\mathbf{s} = J (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot d\mathbf{S} \quad (3.71)$$

$$\mathbf{n} ds = J (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{N} dS \quad (3.72)$$

die als Nansonsche Formel bekannt ist. Sie stellt einen Zusammenhang zwischen Oberflächenelementen in der Referenz- und der Momentan-Konfiguration her, der natürlich auch für alle "inneren Oberflächenelemente" Gültigkeit besitzt.

3.1.7 Massenerhaltung

Zur Erhaltung der Masse muß gelten, daß die Masse $m(B)$ eines Körpers B während eines Deformationsprozesses sich nicht ändert. Die Masse ist also unabhängig von der Momentan-Konfiguration B , die der Körper B einnimmt. Zur Bestimmung der Masse $m(B)$ läßt sich schreiben

$$m(B) = \int_B \rho(\mathbf{x}, t) dv, \quad (3.73)$$

dabei ist ρ die Massendichte in dem materiellen Punkt \mathbf{x} in der Momentan-Konfiguration B zum Zeitpunkt t . Auf Grund der Massenerhaltung ergibt sich dann die folgende Bilanz

$$\int_B \rho(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_{B_0} {}^0\rho(\mathbf{X}) \, dV, \quad (3.74)$$

dabei bezeichnet ${}^0\rho$ die Massendichte in dem materiellen Punkt \mathbf{X} in der Referenz-Konfiguration B_0 . Unter Verwendung von (3.66) und der Voraussetzung der bereichsweisen Stetigkeit von ρ führt (3.74) zu der lokalen Aussage

$$\rho = \frac{1}{J} {}^0\rho \quad \text{bzw.} \quad \rho \, dv = {}^0\rho \, dV. \quad (3.75)$$

Die Massenerhaltung läßt sich unter Berücksichtigung von (3.73) alternativ auch in folgender Form schreiben

$$\frac{d}{dt} m(B) = \frac{d}{dt} \int_B \rho(\mathbf{x}, t) \, dv = 0. \quad (3.76)$$

Aus der Verallgemeinerung von (3.76) folgt

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_B \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) \, dv, \quad (3.77)$$

wobei \mathbf{f} ein beliebiges Skalar-, Vektor- oder Tensorfeld ist, das über B definiert ist.

3.1.8 Impulserhaltung

Die Bewegungsgröße des Körpers B zur Zeit t (Impuls) ist definiert als

$$\int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, dv. \quad (3.78)$$

Dieser Definition liegt die Bewegung zugrunde, die durch (3.55) beschrieben wird, und für die gilt $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\phi}(\mathbf{X}, t)$. Der hochgestellte Punkt bezeichnet hier und im folgenden die materielle Ableitung einer Größe nach der Zeit. Unter Verwendung von (3.55) und (3.74) kann die Bewegungsgröße in der Lagrangeschen Form ausgedrückt werden als

$$\int_B {}^0\rho(\mathbf{X}, t) \mathbf{v}(\Phi(\mathbf{X}, t), t) \, dV. \quad (3.79)$$

Bei den äußeren Kräften, die auf einen Körper B einwirken, lassen sich volumenhaft und flächenhaft angreifende Kräfte unterscheiden. Diese sollen im folgenden als Körper- bzw. als Oberflächenkräfte bezeichnet werden. Die Körperkräfte sind bestimmt durch

$$\int_B \rho(\mathbf{x},t) \mathbf{b}(\mathbf{x},t) dv \quad (3.80)$$

und die Oberflächenkräfte durch

$$\int_{\partial B} \mathbf{t}(\mathbf{x},t,\partial B) da, \quad (3.81)$$

wobei mit \mathbf{b} das Vektorfeld der spezifischen Massenkraft bezeichnet ist, welches über die Momentan-Konfiguration B definiert ist. \mathbf{t} ist das Vektorfeld der Spannungen, das für alle bereichsweise glatten Grenzflächen ∂B der Momentan-Konfiguration B definiert ist.

Die resultierende äußere Kraft auf den Körper B in der Momentan-Konfiguration B ist

$$\int_B \rho(\mathbf{x},t) \mathbf{b}(\mathbf{x},t) dv + \int_{\partial B} \mathbf{t}(\mathbf{x},t,\partial B) da. \quad (3.82)$$

Auf Grund der Erhaltung der Bewegungsgröße muß die Änderung der Bewegungsgröße gleich der Summe der auf einen Körper einwirkenden Kräfte sein. Unter Verwendung von (3.77), (3.78) und (3.82) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \int_B \rho(\mathbf{x},t) \mathbf{b}(\mathbf{x},t) dv + \int_{\partial B} \mathbf{t}(\mathbf{x},t,\partial B) da &= \frac{d}{dt} \int_B \rho(\mathbf{x},t) \mathbf{v}(\mathbf{x},t) dv \\ &= \int_B \rho(\mathbf{x},t) \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x},t) dv. \end{aligned} \quad (3.83)$$

3.1.9 Einführung des Spannungstensor

Der Cauchy-Spannungsvektor \mathbf{t} in einem materiellen Punkt \mathbf{x} der Oberfläche ist nur von dem Einheitsvektor \mathbf{n} abhängig, wobei dieser normal zu der Oberfläche im Punkt \mathbf{x} steht und nach außen gerichtet ist. Um dies zu verdeutlichen, wird im folgenden anstatt

$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \partial B)$ nun $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ verwendet. Es existiert ein von \mathbf{n} unabhängiges Tensorfeld zweiter Stufe σ , so daß

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \sigma(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \quad (3.84)$$

für alle materiellen Punkte \mathbf{x} in der Momentan-Konfiguration B zum Zeitpunkt t und für beliebige Einheitsvektoren \mathbf{n} gilt. Der Tensor $\sigma(\mathbf{x}, t)$ wird als Cauchyscher Spannungstensor bezeichnet.

Unter Berücksichtigung von Cauchys Theorem (3.84) in dem Ausdruck für die Erhaltung der Bewegungsgröße (3.83) erhalten wir

$$\int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \, dv + \int_{\partial B} \sigma(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \, da = \int_B \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \, dv, \quad (3.85)$$

und die Anwendung des GAUSSschen Divergenztheorems [BOWEN und WANG (1976)] führt zu

$$\int_B [\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \sigma^T(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)] \, dv = 0. \quad (3.86)$$

Unter der Voraussetzung, daß ρ , \mathbf{b} , σ und $\dot{\mathbf{v}}$ bereichsweise stetig sind, führt (3.86) zu der lokalen Impulsbilanz

$$\operatorname{div} \sigma^T + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad (3.87)$$

die als erste Cauchysche Bewegungsgleichung bekannt ist und in der Komponentendarstellung folgende Form hat:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i. \quad (3.88)$$

Entsprechend der zweiten Cauchyschen Bewegungsgleichung ist der Cauchysche Spannungstensor σ symmetrisch [OGDEN (1984)]. In absoluter Notation ausgedrückt bedeutet das

$$\sigma^T = \sigma \quad (3.89)$$

und in der Komponentendarstellung

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} . \quad (3.90)$$

Unter Berücksichtigung der oben eingeführten Nansonschen Formel (3.70) kann die resultierende Oberflächenkraft (3.35) dargestellt werden als

$$\int_{\partial B} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\partial B_0} J \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{N} \, dA, \quad (3.91)$$

wobei \mathbf{N} ein nach außen gerichteter Einheitsvektor normal zu der Oberfläche ∂B_0 der Referenz-Konfiguration B_0 ist.

Mit nachfolgender Notation

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (3.92)$$

kann man (3.91) dann in der folgenden Form schreiben:

$$\int_{\partial B} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\partial B_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \, dA \quad (3.93)$$

Der Tensor \mathbf{P} wird als erster Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor bezeichnet. Bei dem sogenannten Nominellen Spannungstensor \mathbf{S} handelt es sich um den transponierten ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor. Unter Berücksichtigung der Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors folgt aus (3.92) die Beziehung

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}^T = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.94)$$

Der Cauchysche Spannungstensor stellt den Zusammenhang zwischen einem Oberflächenelement in der Momentan-Konfiguration und dem darauf wirkenden Kraftvektor her. Im Gegensatz dazu setzt der Nominelle Spannungstensor den Kraftvektor in der Momentan-Konfiguration mit dem Oberflächenelement in der Referenz-Konfiguration in Beziehung. Der Zusammenhang zwischen den Komponenten der beiden Spannungstensoren wird aus der folgenden Gleichung ersichtlich, die sich nach Umformung aus (3.94) ergibt:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} F_{ik} S_{kj} = \frac{1}{J} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} S_{kj}. \quad (3.95)$$

Unter Berücksichtigung der orthonormalen Basen $\{\mathbf{E}_j\}$ und $\{\mathbf{e}_j\}$ ist $S_{kj} dA$ die Komponente in Richtung \mathbf{e}_j einer Kraft, die auf ein infinitesimales Oberflächenelement wirkt, dessen Normale in der Referenz-Konfiguration in Richtung \mathbf{E}_k verlief und das dort die Fläche dA hatte.

3.1.10 Spannungsgeschwindigkeitstensor

Eine wichtige Eigenschaft eines Tensors ist die Invarianz seiner Komponenten gegenüber einer Starrkörperdrehung des Materials. Ein Lagrangescher Tensor, der diese Bedingung erfüllt, wird als objektiv bezeichnet [OGDEN (1984)]. Es kann anschaulich gezeigt werden, daß die materiellen Zeitableitungen bzw. die materiellen Änderungsgeschwindigkeiten der Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors [MC MEEKING und RICE (1975)]

$$\frac{d}{dt} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \dot{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} v_k \quad (3.96)$$

nicht dreihinvariant sind. Dazu betrachten wir einen Stab, der durch eine konstante Zugkraft beansprucht wird. In der Ausgangslage fällt die Schwerelinie des Stabes mit der x -Achse eines feststehenden kartesischen Koordinatensystems zusammen. Die Cauchyschen Spannungen sind $\sigma_{xx} = p$ und $\sigma_{yy} = 0$. Nach einer Starrkörperdrehung des Stabes von 90° um die z -Achse erhalten wir die Spannungen $\sigma_{xx} = 0$ und $\sigma_{yy} = p$. Die Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors haben sich also durch die Starrkörperdrehung des Materials geändert und es gilt $\dot{\sigma}_{xx} \neq 0$ bzw. $\dot{\sigma}_{yy} \neq 0$. Damit ist gezeigt, daß die Tensoren σ und $\dot{\sigma}$ keine objektiven Lagrangeschen Tensoren sind.

Im folgenden wollen wir uns mit der Entwicklung eines objektiven Tensors beschäftigen, dessen Komponenten Ableitungen der Cauchyschen Spannungen nach der Zeit sind.

Wir betrachten zwei orthonormale Basen $\{\mathbf{e}_j\}$ und $\{\mathbf{e}'_j\}$. Da $\{\mathbf{e}_j\}$ eine Basis ist, kann jeder der Vektoren $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ als Linearkombination der Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ausgedrückt werden. Also

$$\mathbf{e}'_i = Q_{ij} \mathbf{e}_j. \quad (3.97)$$

Durch Multiplikation von (3.97) mit \mathbf{e}_j erhält man

$$Q_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad (3.98)$$

woraus folgt, daß der Skalar Q_{ij} dem Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren \mathbf{e}'_i und \mathbf{e}_j entspricht.

Es läßt sich zeigen, daß die Transformation der Komponenten eines Tensors zweiter Stufe T bei einem Wechsel der Basen entsprechend (3.97) nach folgender Regel erfolgt [DUSZEK (1980), OGDEN (1984)]:

$$T'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} T_{kl}. \quad (3.99)$$

Wir betrachten nun ein Partikel X eines Körpers B . Dabei ist \mathbf{x} der Ortsvektor des materiellen Punktes, den das Partikel X in der Konfiguration B einnimmt. Dieser Punkt wird als Ursprung der beiden Basen $\{\mathbf{e}_j\}$ und $\{\mathbf{e}'_i\}$ gewählt. Die Basis $\{\mathbf{e}_j\}$ bezeichnet ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem und die Basis $\{\mathbf{e}'_i\}$ ein körperfestes kartesisches Koordinatensystem, das an der Rotation des Körpers B um den Punkt \mathbf{x} mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit Ω teilnimmt. Zum Zeitpunkt t stimmen die beiden Koordinatensysteme überein. Die Koordinaten x_i und x'_i sind durch die folgende Transformation verbunden

$$x'_i = x_i - \Omega_{ij} x_j dt = (\delta_{ij} - \Omega_{ij} dt) x_j. \quad (3.100)$$

Der Tensor Ω wird auch als Spintensor bezeichnet. Seine kartesischen Komponenten sind gegeben durch

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.101)$$

wobei $\Omega_{ij} dt$ die Veränderung des Winkels zwischen den Vektoren \mathbf{e}'_i und \mathbf{e}_j im Laufe einer infinitesimalen Zeit dt angibt. Unter der Voraussetzung, daß die resultierende Winkeländerung unendlich klein ist, entspricht der Term $(\delta_{ij} - \Omega_{ij} dt)$ dem Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren \mathbf{e}'_i und \mathbf{e}_j und damit dem Skalar Q_{ij} in (3.97).

Die Cauchyschen Spannungen in dem raumfesten Koordinatensystem werden zum Zeitpunkt t mit $\sigma_{ij}(t)$ und zu einem späteren Zeitpunkt $t+dt$ mit $\sigma_{ij}(t+dt)$ bezeichnet. Die materielle Zeitableitung ist definiert als

$$\dot{\sigma}_{ij} \equiv \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} [\sigma_{ij}(t+dt) - \sigma_{ij}(t)]. \quad (3.102)$$

Die sogenannte Spannungsgeschwindigkeit definiert sich nach JAUMANN (1911) als

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} \equiv \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} [\sigma'_{ij}(t+dt) - \sigma'_{ij}(t)], \quad (3.103)$$

wobei mit $\sigma'_{ij}(t+dt)$ und $\sigma'_{ij}(t)$ die Cauchyschen Spannungen in dem körperfesten Koordinatensystem bezeichnet werden.

Gemäß der oben angegebenen Definition entsprechen die Jaumannschen Spannungsgeschwindigkeiten den Ableitungen der Cauchyschen Spannungen nach der Zeit aus der Sicht eines Beobachters, der an der Starrkörperdrehung des Körpers teilnimmt. Im Gegensatz dazu beziehen sich die materiellen Zeitableitungen der Cauchyschen Spannungen auf die Sicht eines Beobachters, der in dem materiellen Punkt x fixiert ist. Demzufolge ist der Tensor der Spannungsgeschwindigkeiten $\overset{\nabla}{\sigma}_{ij}$ ein objektiver Lagrangescher Tensor.

Die Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors im Punkt x zum Zeitpunkt $t+dt$ berechnen sich in dem raumfesten Koordinatensystem als

$$\sigma_{ij}(t+dt) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij}(t) dt \quad (3.104)$$

und in dem körperfesten Koordinatensystem als

$$\sigma'_{ij}(t+dt) = \sigma_{ij}(t) + \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} dt, \quad (3.105)$$

wobei Glieder höherer Ordnung in dt vernachlässigt wurden.

Die Transformation der Komponenten σ_{ij} bei einem Wechsel von der Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ zu der Basis $\{\mathbf{e}'_i\}$ erfolgt nach der Regel (3.99). Wir schreiben

$$\sigma'_{ij}(t+dt) = (\delta_{ik} - \Omega_{ik} dt) (\delta_{jl} - \Omega_{jl} dt) \sigma_{kl}(t + dt). \quad (3.106)$$

Unter Berücksichtigung von (3.104) in (3.106) erhalten wir nach Umformungen die Beziehung

$$\sigma'_{ij}(t+dt) = \sigma_{ij}(t) + [\dot{\sigma}_{ij}(t) - \Omega_{ik} \sigma_{kj}(t) - \Omega_{jl} \sigma_{lj}(t)] dt + \dots \quad (3.107)$$

Die Anwendung der Definition (3.103) bzw. der Vergleich von (3.105) und (3.107) führt zu der gesuchten Definition des Jaumannschen Spannungsgeschwindigkeitstensors [BATHE (1986), DUSZEK (1980), PRAGER (1961), SZABO und BALLA (1989)]

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \Omega_{ik} \sigma_{kj} - \Omega_{jk} \sigma_{ki}, \quad (3.108)$$

der oben in absoluter Notation (3.44) abgeleitet wurde.

3.1.11 Kirchhoffscher Spannungstensor

Der Kirchhoffsche Spannungstensor τ ist definiert als

$$\tau = J \sigma \quad (3.109)$$

und in der Komponentendarstellung gilt

$$\tau_{ij} = J \sigma_{ij}. \quad (3.110)$$

Für die Jaumannsche Ableitung des Kirchhoffschen Spannungstensors gilt dann gemäß (3.103)

$$\overset{\nabla}{\tau}_{ij} = J \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} + \dot{J} \sigma_{ij}. \quad (3.111)$$

Der Zusammenhang zwischen den Komponenten des Cauchyschen und des Nominellen Spannungstensors ist durch (3.95) gegeben. Für die materiellen Zeitableitungen der Komponenten erhalten wir in Indexnotation die Beziehung

$$\dot{\sigma}_{ij} = - \frac{\dot{J}}{J^2} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} S_{kj} + \frac{1}{J} \frac{\partial v_l}{\partial X_k} S_{kj} + \frac{\partial x_l}{\partial X_k} \dot{S}_{kj}. \quad (3.112)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Umgeformte Lagrangesche Formulierung verwendet. Um die daraus resultierenden Zusammenhänge unmißverständlich beschreiben zu können, wird die bislang verwendete Notation erweitert. Ein hochgestellter links stehender Index gibt den Zeitpunkt an, zu dem die Größe betrachtet wird. Die Konfiguration beziehungsweise die Basis, auf die die betrachtete Größe bezogen ist, bezeichnet ein tiefgestellter links stehender Index. Dieser Index braucht nicht

verwendet zu werden, wenn er dem oberen linken Index entspricht. An den Stellen, an denen diese Notation nicht notwendig ist, wird auf sie verzichtet.

Bei der Umgeformten Lagrangeschen Formulierung wird die Momentan-Konfiguration als Referenz-Konfiguration für das nächste Inkrement verwendet. Der Zeitpunkt t soll den Beginn eines neuen Inkrementes bezeichnen. Für alle Partikel X des Körpers B gilt dann die Beziehung

$${}^tX_j = {}^t x_j, \quad (3.113)$$

und für das Verhältnis J zwischen dem Volumen dv in der Momentan-Konfiguration und dem Volumen dV in der Referenz-Konfiguration gilt

$${}_tJ = 1 \quad \text{bzw.} \quad {}^tJ = 1. \quad (3.114)$$

Weiterhin sind die verschiedenen Spannungsmaße am Anfang eines jeden Inkrementes identisch. Wir schreiben

$${}_t\sigma_{ij} = {}_t\tau_{ij} = {}_tS_{ij} \quad \text{bzw.} \quad {}^t\sigma_{ij} = {}^t\tau_{ij} = {}^tS_{ij}. \quad (3.115)$$

Die Indizierung der Komponenten des nominellen Spannungstensors stellt dabei einen Sonderfall dar, da diese Spannungen sowohl mit der Momentan- als auch mit der Referenzkonfiguration verbunden sind. Die Eindeutigkeit der Indizierung ist bei der Umgeformten Lagrangeschen Formulierung dennoch gegeben, da beide Konfigurationen zu Beginn eines Inkrementes übereinstimmen.

Unter Berücksichtigung der obengenannten Zusammenhänge bei der Umgeformten Lagrangeschen Formulierung und den Beziehungen (3.108) und (3.111) folgt aus (3.112)

$${}^t\dot{S}_{ij} = {}^t\tau_{ij}^\nabla - \frac{\partial {}^t v_i}{\partial {}^t x_k} {}^t\sigma_{kj} + {}^t\Omega_{ik} {}^t\sigma_{kj} + {}^t\Omega_{jk} {}^t\sigma_{ki}. \quad (3.116)$$

Die kartesischen Komponenten des Tensors der Deformationsgeschwindigkeit D sind gegeben durch

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.117)$$

Die gesuchte Beziehung zwischen den materiellen Zeitableitungen der Komponenten des Nominellen Spannungstensors und den Jaumannschen Ableitungen der Komponenten des Kirchhoffschen Spannungstensors [MC MEEKING und RICE (1975)] ergibt sich unter Berücksichtigung von (3.117) aus (3.116) als

$${}^t\dot{S}_{ij} = {}^t\tau_{ij}^\nabla - {}^t\sigma_{jk} {}^tD_{kj} + {}^tD_{ik} {}^t\sigma_{kj} + {}^t\sigma_{ik} \cdot \frac{\partial {}^t v_j}{\partial {}^t x_k}. \quad (3.118)$$

Im folgenden soll für $\frac{\partial {}^t v_j}{\partial {}^t x_k}$ auch die Notation ${}^t v_{j,k}$ Verwendung finden.

3.1.12 Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten

Der Ausdruck für die Erhaltung der Bewegungsgröße (3.85) kann unter Berücksichtigung von (3.75), (3.93) und (3.94) in eine Form gebracht werden, in der sich sämtliche Integrale auf die Referenz-Konfiguration beziehen. Damit ergibt sich

$$\int_{B_0} {}^0\rho(\mathbf{X}) {}^0\mathbf{b}(\mathbf{X},t) dv + \int_{\partial B_0} \mathbf{S}^T(\mathbf{X},t) \mathbf{N} da = \int_{B_0} {}^0\rho(\mathbf{X}) \ddot{\phi}(\mathbf{X},t) dv, \quad (3.119)$$

wobei ${}^0\mathbf{b}(\mathbf{X},t) = \mathbf{b}(\Phi(\mathbf{X},t),t)$ berücksichtigt wurde. Die Anwendung des Divergenztheorems [BOWEN und WANG (1976)] auf das zweite Integral in (3.119) führt zu der Beziehung

$$\int_{B_0} [{}^0\rho(\mathbf{X}) {}^0\mathbf{b}(\mathbf{X},t) + \text{div } \mathbf{S}(\mathbf{X},t) \mathbf{N} - {}^0\rho(\mathbf{X}) \ddot{\phi}(\mathbf{X},t)] dv = 0, \quad (3.120)$$

aus der sich die folgende lokale Aussage ergibt:

$$\text{div } \mathbf{S} + {}^0\rho {}^0\mathbf{b} = {}^0\rho \ddot{\phi}. \quad (3.121)$$

Wenn der Körper B sich in Ruhe befindet, gilt die Gleichung $\dot{\phi}(\mathbf{X},t) = 0$ für alle Partikel X des Körpers B zu jedem Zeitpunkt t. Aus (3.121) folgt dann die Beziehung

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + {}^0\rho \, {}^0\mathbf{b} = 0, \quad (3.122)$$

und läßt sich in der Komponentendarstellung in der Form

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial X_i} + {}^0\rho \, {}^0b_j = 0 \quad (3.123)$$

schreiben und deren Differentiation zu der folgenden Gleichung führt:

$$\frac{\partial \dot{S}_{ij}}{\partial X_i} + {}^0\rho \, {}^0\dot{b}_j = 0. \quad (3.124)$$

Weiterhin soll das Vektorfeld \mathbf{T} der Nominellen Oberflächenspannungen hiermit eingeführt werden, für das gilt

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{S}^T(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N}. \quad (3.125)$$

In der Komponentendarstellung ergibt sich

$$T_j = S_{ij} N_i. \quad (3.126)$$

Aus (3.93) folgt unter Berücksichtigung von (3.84) und (3.125) die lokale Beziehung

$$\mathbf{t} \, da = \mathbf{T} \, dA. \quad (3.127)$$

Dies bedeutet, daß $T_j \, dA$ die Komponente in Richtung \mathbf{e}_j einer Kraft ist, die auf ein infinitesimales Oberflächenelement wirkt, dessen vektorielle Fläche in der Referenz-Konfiguration $N_i \, dA$ war.

Für die materielle Ableitung der Komponente T_j des Vektors der Nominellen Oberflächenspannungen nach der Zeit gilt dann

$$\dot{T}_j = \dot{S}_{ij} N_i. \quad (3.128)$$

Innerhalb einer Zeit dt nimmt S_{ij} um den Wert $\dot{S}_{ij} \, dt$ zu. Der Zuwachs von T_j in der gleichen Zeit beträgt analog $\dot{T}_j \, dt$.

Wenn für eine vorgegebene materielle Zeitableitung bzw. für ein Inkrement der äußeren Belastung die materiellen Zeitableitungen der resultierenden Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen berechnet werden sollen, so kann die Systemantwort theoretisch dadurch ermittelt werden, daß man die Differentialgleichungen, die das Gleichgewicht beherrschen, löst und die Lösung dann den Randbedingungen unterwirft. Eine Lösung dieses Systems von Gleichungen ist praktisch jedoch nur für wenige Randwertprobleme möglich. Eine andere Möglichkeit, die eine Ausdehnung auf ein breites Spektrum von Aufgaben erlaubt, bietet das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Nach diesem Prinzip befindet sich ein Körper im Gleichgewicht, wenn unter beliebigen, virtuellen Geschwindigkeiten δv , die während einer Zeit dt einwirken, die gesamte innere virtuelle Arbeit gleich der gesamten äußeren virtuellen Arbeit ist.

Für die Herleitung des Prinzips der virtuellen Arbeit werden die aus der Impulsbilanz folgende das Gleichgewicht beschreibende Differentialgleichung (3.124), die Spannungsrandbedingung (3.128) und die Verschiebungsrandbedingung benötigt. Damit ergibt sich folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{\partial \dot{S}_{ij}}{\partial X_i} + \rho \dot{b}_j = 0 \quad (3.129 \text{ a})$$

$$\dot{S}_{ij} N_j = \dot{T}_j \quad \text{auf } \partial B_o^T \quad (3.129 \text{ b})$$

$$\dot{\phi}_i = \dot{\xi}_i \quad \text{auf } \partial B_o^\xi \quad (3.129 \text{ c})$$

wobei auf einem Teil ∂B_o^ξ von ∂B_o die Zeitableitungen der Deformationen $\dot{\xi}$ und auf dem verbleibenden Teil $\partial B_o^T = \partial B_o \setminus \partial B_o^\xi$ die Zeitableitungen der Nominellen Oberflächenspannungen \dot{T} gegeben sind.

HILL (1957) [HILL (1958), HILL (1959)] hat die das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten beschreibende Integralgleichung

$$\int_{B_o} \dot{S}_{ij} \delta \left(\frac{\partial v_j}{\partial X_i} \right) dV = \int_{\partial B_o} \dot{T}_j \delta v_j dA + \int_{B_o} \rho \dot{b}_j \delta v_j dV \quad (3.130)$$

angegeben. Eine Herleitung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen, das dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten grundsätzlich entspricht, wird in [WRIGGERS (1986)] vorgestellt.

Die Beziehung (3.118) zwischen den materiellen Zeitableitungen der Komponenten des Nominellen Spannungstensors und den Jaumannschen Ableitungen der Komponenten des Kirchhoffschen Spannungstensors wurde für die Umgeformte Lagrangesche Formulierung hergeleitet. Wir setzen (3.118) in (3.130) ein und erhalten unter Verwendung von (3.127) und (3.75) die Bewegungsgleichung

$$\int_B \left({}^t\tau_{ij} - {}^t\sigma_{ik} {}^tD_{ik} - {}^tD_{ik} {}^t\sigma_{kj} + {}^t\sigma_{ik} \frac{\partial {}^tv_j}{\partial {}^tx_k} \right) \delta \left(\frac{\partial {}^tv_j}{\partial {}^tx_i} \right) {}^tdV, \quad (3.131)$$

$$= \int_{\partial B} {}^t\dot{t}_j \delta {}^tv_j da + \int_B {}^t\rho {}^t\dot{b}_j \delta {}^tv_j {}^tdv$$

bei der sich alle Integrale entsprechend der Umgeformten Lagrangeschen Formulierung auf die Momentan-Konfiguration beziehen [HILL (1959), MC MEEKING und RICE(1975)].

Unter Beachtung der Symmetrie des Tensors $\overset{\nabla}{\tau}$ ergibt sich nach Umformung von (3.131) die Bewegungsgleichung

$$\int_B {}^t\tau_{ij} \delta {}^tD_{ij} {}^tdv + \int_B \left({}^t\sigma_{ik} {}^tv_{k,j} \delta {}^tv_{k,i} - 2 {}^t\delta_{ij} {}^tD_{kj} \delta {}^tD_{ki} \right) {}^tdv \quad (3.132)$$

$$= \int_{\partial B} {}^t\dot{t}_j \delta {}^tv_j da + \int_B {}^t\rho {}^t\dot{b}_j \delta {}^tv_j {}^tdv$$

in der Form, die zur Formulierung der Finite-Elemente-Matrizen verwendet wird.

3.1.13 Konstitutive Beziehungen

Ein Material, das als elastisch bezeichnet werden kann, muß die Mindestanforderung erfüllen, daß die Spannungsgeschwindigkeit bei bekanntem Spannungszustand eine homogene lineare Funktion der Verformungsgeschwindigkeit ist. Der Ansatz von JAUMANN (1911) führt zu einem Materialgesetz der Form

$$\overset{\nabla}{\tau}_{ij} = E_{ijkl} {}^tD_{kl}, \quad (3.133)$$

wobei die Komponenten E_{ijkl}^{τ} des Tensors \mathbf{E}^{τ} im allgemeinen vom Spannungstensor abhängig sind. Nach TRUESDELL (1955) werden diese Materialien als hypoelastisch bezeichnet [BERNSTEIN (1963), NOLL (1955)]. Es kann gezeigt werden, daß das Materialgesetz (3.133) für infinitesimale Dehnungen das Hookesche Gesetz als Sonderfall beinhaltet [PRAGER (1961)]. Da Spannungsänderungen unabhängig von der dafür benötigten Zeit sind, werden hypoelastische Stoffe als zähigkeitslos bezeichnet [PRAGER (1961)].

Die Beziehung zwischen den materiellen Zeitableitungen der Komponenten des Nominellen Spannungstensors und den Komponenten des Geschwindigkeitsgradienten ist von HILL (1959) mit

$$\dot{S}_{ij} = \frac{\partial U}{\partial (\partial v_j / \partial X_i)} \quad (3.134)$$

angegeben worden, wobei das Potential U eine homogene quadratische Funktion des Geschwindigkeitsgradienten ist. Wir schreiben

$$U = \frac{1}{2} E_{ijkl}^s \frac{\partial v_j}{\partial X_i} \frac{\partial v_l}{\partial X_k} . \quad (3.135)$$

HILL (1958) hat gezeigt, daß aus der Existenz des Potentials U für ein Material die Existenz eines homogenen quadratischen Potentials W mit

$$W = \frac{1}{2} E_{ijkl}^{\tau} D_{ij} D_{kl} \quad (3.136)$$

folgt. Die Beziehung zwischen den Jaumannschen Ableitungen der Komponenten des Kirchhoffschen Spannungstensors und den Komponenten des Tensors der Deformationsgeschwindigkeit ergibt sich als

$$\overset{\nabla}{\tau}_{ij} = \frac{\partial W}{\partial D_{ij}} = \frac{\partial^2 W}{\partial D_{ij} \partial D_{kl}} D_{kl} = E_{ijkl}^{\tau} D_{kl}, \quad (3.137)$$

wobei für die Komponenten des Tensors E die folgende Symmetrie gilt:

$$\mathbf{E}_{ijkl}^{\tau} = \mathbf{E}_{klij}^{\tau} . \quad (3.138)$$

Die Berücksichtigung der konstitutiven Beziehung (3.137) in (3.132) führt zu der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \int_B \mathbf{E}_{ijkl}^{\tau} {}^tD_{kl} \delta {}^tD_{ij} {}^t dv + \int_B {}^t\sigma_{ij} {}^t v_{k,j} \delta {}^t v_{k,i} {}^t dv - \int_B 2 {}^t\delta_{ij} {}^tD_{kj} \delta {}^tD_{ki} {}^t dv \\ = \int_{\partial B} {}^t\dot{t}_j \delta {}^t v_j {}^t da + \int_B {}^t\rho {}^t\dot{b}_j \delta {}^t v_j {}^t dv \end{aligned} \quad (3.139)$$

beziehungsweise zu der äquivalenten Variationsaussage

$$\delta \left[\int_B {}^tW {}^t dv + \frac{1}{2} \int_B ({}^t\sigma_{ij} {}^t v_{k,j} {}^t v_{k,i} - 2 {}^t\delta_{ij} {}^tD_{kj} {}^tD_{ki}) {}^t dv \right] - \int_{\partial B} {}^t\dot{t}_j \delta {}^t v_j {}^t da - \int_B {}^t\rho {}^t\dot{b}_j \delta {}^t v_j {}^t dv = 0 . \quad (3.140)$$

Diese Variationsaussage führt zu symmetrischen Steifigkeitsmatrizen im Rahmen eines approximativen Lösungsverfahrens mit Hilfe der Methode der finiten Elemente [Mc MEEKING und RICE (1975)].

Die Komponenten \mathbf{E}_{ijkl}^{τ} des Materialtensors folgen aus der Beziehung

$$\tau_{ij}^{\nu} = \frac{E}{1+\nu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl}) D_{kl} , \quad (3.141)$$

die Mc MEEKING und RICE (1975) als Verallgemeinerung der Materialgleichung von Prandtl-Reuss für elastisches Materialverhalten angeben. Die Größen E und ν bezeichnen dabei den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl.

3.1.14 Berechnung der Spannungsrate

Aus der Beziehung (3.110) zwischen Kirchhoffschen und Cauchyschen Spannungen folgt der Ausdruck

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{1}{J} \dot{t}_{ij} - \frac{\dot{J}}{J} {}^t\sigma_{ij} , \quad (3.142)$$

und durch den Austausch von σ durch τ in (3.108) erhalten wir gemäß [Pinsky et al.(1983)]

$$\dot{\tau}_{ij} = \overset{\nabla}{\tau}_{ij} + \Omega_{ik} \tau_{kj} + \Omega_{jk} \tau_{ki} . \quad (3.143)$$

Die Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors zum Zeitpunkt $t+dt$ lassen sich inkrementell unter Verwendung von (3.104) berechnen. Die Berücksichtigung von (3.142) und (3.143) in (3.104) führt zu

$$\sigma_{ij}(t+dt) = \sigma_{ij}(t) + \frac{1}{J} \left(\overset{\nabla}{\tau}_{ij}(t) + \Omega_{ik} \tau_{kj}(t) + \Omega_{jk} \tau_{ki}(t) - \dot{J} \sigma_{ij}(t) \right) dt. \quad (3.144)$$

Bei den weiteren Betrachtungen sind die Beziehungen zu beachten, die in Abschnitt 3.1.9 für die Umgeformte Lagrangesche Formulierung gegeben wurden. Für (3.144) schreiben wir dann

$${}^{t+dt}\sigma_{ij} = {}^t\sigma_{ij} + \frac{1}{J} \left({}^t\overset{\nabla}{\tau}_{ij} + {}^t\Omega_{ik} {}^t\sigma_{kj} + {}^t\Omega_{jk} {}^t\sigma_{ki} - {}^t\dot{J} {}^t\sigma_{ij} \right) dt. \quad (3.145)$$

Die materielle Zeitableitung der Determinante des Deformationsgradienten können wir unter Berücksichtigung von

$${}^{t+dt}x_i = {}^tx_i + {}^tv_i dt \quad \text{und} \quad {}^tX_i = {}^tx_i \quad (3.146)$$

durch den folgenden Ausdruck darstellen

$${}^t\dot{J} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} (\det {}^{t+dt}{}^t\mathbf{F} - \det {}^t\mathbf{F}) = {}^tv_{k,k}. \quad (3.147)$$

Die Beziehungen (3.145), (3.147) und (3.137) führen dann zu dem gesuchten Ausdruck für die Cauchyschen Spannungen zum Zeitpunkt $t+dt$:

$${}^{t+dt}\sigma_{ij} = {}^t\sigma_{ij} + \left(E_{ijkl} {}^tD_{kl} + {}^t\Omega_{ik} {}^t\sigma_{kj} + {}^t\Omega_{jk} {}^t\sigma_{ki} - {}^t\dot{J} {}^t\sigma_{ij} \right) dt. \quad (3.148)$$

Auf Grund des augenblicklichen Charakters dieser Gleichung ergeben sich die Cauchyschen Spannungen zum Zeitpunkt $t+dt$ nur dann exakt, wenn ein infinitesimales Zeitintervall dt beziehungsweise infinitesimale Zuwächse der Deformationen im Zeitintervall dt betrachtet werden.

3.2 Isoparametrisches Volumenelement

Das Konzept der isoparametrischen Elemente unterscheidet sich insofern von anderen Formulierungen, als die Verschiebungen eines beliebigen Punktes des Elementes unter Verwendung von Interpolationsfunktionen abhängig von den Verschiebungen der Elementknotenpunkte dargestellt werden. Diese Interpolationsfunktionen stellen gleichzeitig den Zusammenhang zwischen einem Elementpunkt und den Koordinaten der Elementknoten her [Bathe (1986)]. Diese Interpolationsfunktionen nennt man auch Formfunktionen.

Die Formfunktionen definieren sich auf Elementebene in einem natürlichen Koordinatensystem, dessen Laufvariablen r , s und t von -1 bis 1 laufen. Damit ergeben sich für den Zusammenhang zwischen dem lokalen und dem globalen Koordinatensystem spezielle Transformationsfunktionen. Am Beispiel des Volumenelementes, wenn es 8-Knoten aufweist, sind diese Funktionen nachfolgend aufgezeigt. Bei der Formulierung und der programmtechnischen Realisierung im Rahmen dieser Arbeit ist es möglich, über die notwendigen acht Eckknoten des Volumenelementes hinaus auf den Kanten zusätzliche Knoten zu realisieren. Mit den dadurch maximal 21 Knoten eines Elementes erreicht man durch die Mittenknoten quadratische Ansätze

$$x = h_1 x_1 + h_2 x_2 + \dots + h_8 x_8.$$

$$y = h_1 y_1 + h_2 y_2 + \dots + h_8 y_8. \quad (3.149)$$

$$z = h_1 z_1 + h_2 z_2 + \dots + h_8 z_8.$$

Dabei sind die Koordinaten der Elementknoten mit x_i , y_i , z_i gegeben.

Die verwendeten Interpolationsfunktionen h_i berechnen sich dann für ein 8-Knoten-Element nach folgendem Schema:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1/8 (1+r)(1+s)(1+t) \\ h_2 &= 1/8 (1-r)(1+s)(1+t) \\ h_3 &= 1/8 (1+r)(1-s)(1+t) \\ h_4 &= 1/8 (1-r)(1-s)(1+t) \\ h_5 &= 1/8 (1+r)(1+s)(1-t) \\ h_6 &= 1/8 (1-r)(1+s)(1-t) \\ h_7 &= 1/8 (1+r)(1-s)(1-t) \\ h_8 &= 1/8 (1-r)(1-s)(1-t) \end{aligned} \quad (3.150)$$

Ausführlich wird auf die Konstruktion dieser Funktionen in der entsprechenden Literatur zur Finite-Element-Methode [BATHE (1986), PINGEL (1991)] eingegangen.

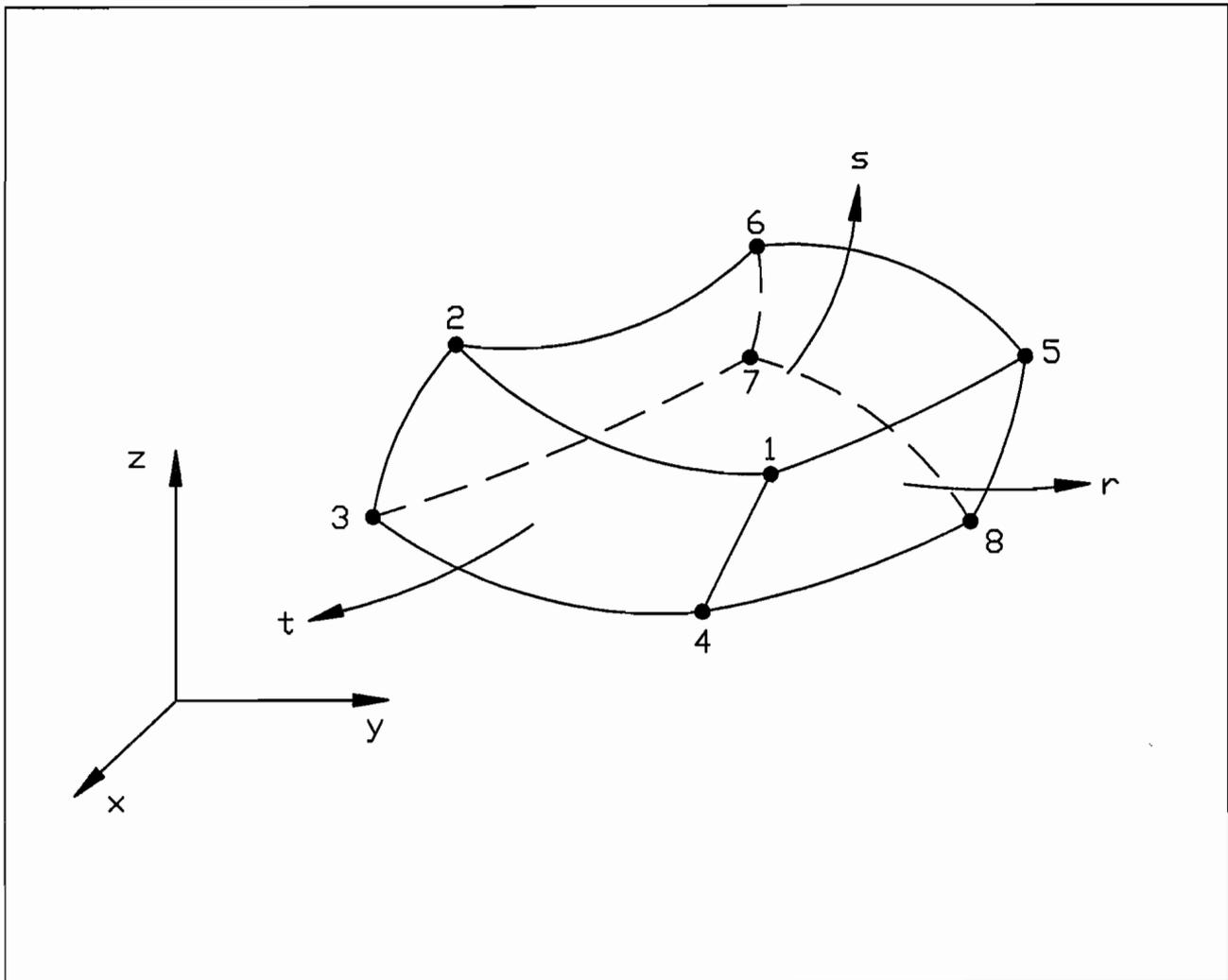


Abb. 11: Verwendetes Volumenelement als 8-Knoten-Typ

Zur Bestimmung der Ableitungen der globalen Elementverschiebungen $v_i = \dot{u}_i$ erhält man dann nach (3.149) und (3.150)

$$v_x = h_1 v_x^1 + h_2 v_x^2 + \dots + h_8 v_x^8.$$

$$v_y = h_1 v_y^1 + h_2 v_y^2 + \dots + h_8 v_y^8. \quad (3.151)$$

$$v_z = h_1 v_z^1 + h_2 v_z^2 + \dots + h_8 v_z^8.$$

Zur Bestimmung der Steifigkeitsmatrizen der Elemente auf der Grundlage der Bewegungsgleichung (3.149) muß die Transformationsmatrix zwischen den Zeitableitungen der globalen Element-Verschiebungen an den Knoten und dem Deformationstensor aufgestellt werden. Zur Bestimmung der Ableitungen der

Interpolationsfunktionen nach den globalen Koordinaten dient der Jacobische Operator [BATHE (1986), SCHWARZ (1984)), ZIENKIEWICZ (1984)].

Für die numerische Bestimmung der in der Bewegungsgleichung auftretenden Integrale wird die Gauß-Quadratur verwendet. Dazu werden die zu integrierenden Funktionen an vorgegebenen Stützstellen [BATHE (1986)] ausgewertet und mit Wichtungsfaktoren multipliziert. Für dreidimensionale Elemente mit acht Knoten ist eine Integration mit $2 \times 2 \times 2$ Stützstellen mit ausreichender Genauigkeit zu erwarten. Angaben über die Genauigkeit hat HELEN (1972) für ausgesuchte Tragwerke gemacht.

3.3 Stabelement

Ausgehend von den Überlegungen des 8- bis 21-Knoten-Volumenelementes soll an dieser Stelle die Beschreibung des verwendeten isoparametrischen Stabelementes erfolgen.

Das verwendete Stabelement zeichnet sich insbesondere durch die Möglichkeit aus, ein nichtlinear elastisches Materialverhalten abbilden zu können. Dabei müssen Wertepaare vorliegen, die das Materialverhalten vorgeben. Dieses Vorgehen ist besonders bei biomechanischen Untersuchungen gut realisierbar. Durch einen geeigneten Zugversuch, bei dem sich aufgebrachte Kraft und zugehörige Längenänderung messen lassen, erhält man eine verwertbare Tabelle.

Die verwendete Hypoelastische Material-Hypothese ist in diesem Fall geeignet, das materielle Verhalten zu beschreiben [HUGHES und WINGET (1980), NAGHTEGAAL und DE JONG (1981), REED und ATLURI (1985), RUBINSTEIN und ATLURI (1983)].

3.3.1 Elementformulierung

Entsprechend dem isoparametrischen Konzept werden die globalen Koordinaten sowie die globalen Element-Verschiebungen in jedem Punkt des Stabelementes durch die entsprechenden globalen Größen in den Elementknoten ausgedrückt. Dazu dienen die Beziehungen:

$$x = h_1 x_1 + h_2 x_2.$$

$$y = h_1 y_1 + h_2 y_2. \quad (3.152)$$

$$z = h_1 z_1 + h_2 z_2.$$

und

$$v_x = h_1 v_x^1 + h_2 v_x^2.$$

$$v_y = h_1 v_y^1 + h_2 v_y^2. \quad (3.153)$$

$$v_z = h_1 v_z^1 + h_2 v_z^2.$$

Die in (3.152) und (3.153) auftretenden Formfunktionen h_i sind die gleichen wie die für das oben beschriebene Volumenelement (3.150). Sie haben bei einem Ansatz mit nur zwei Knoten folgende Form:

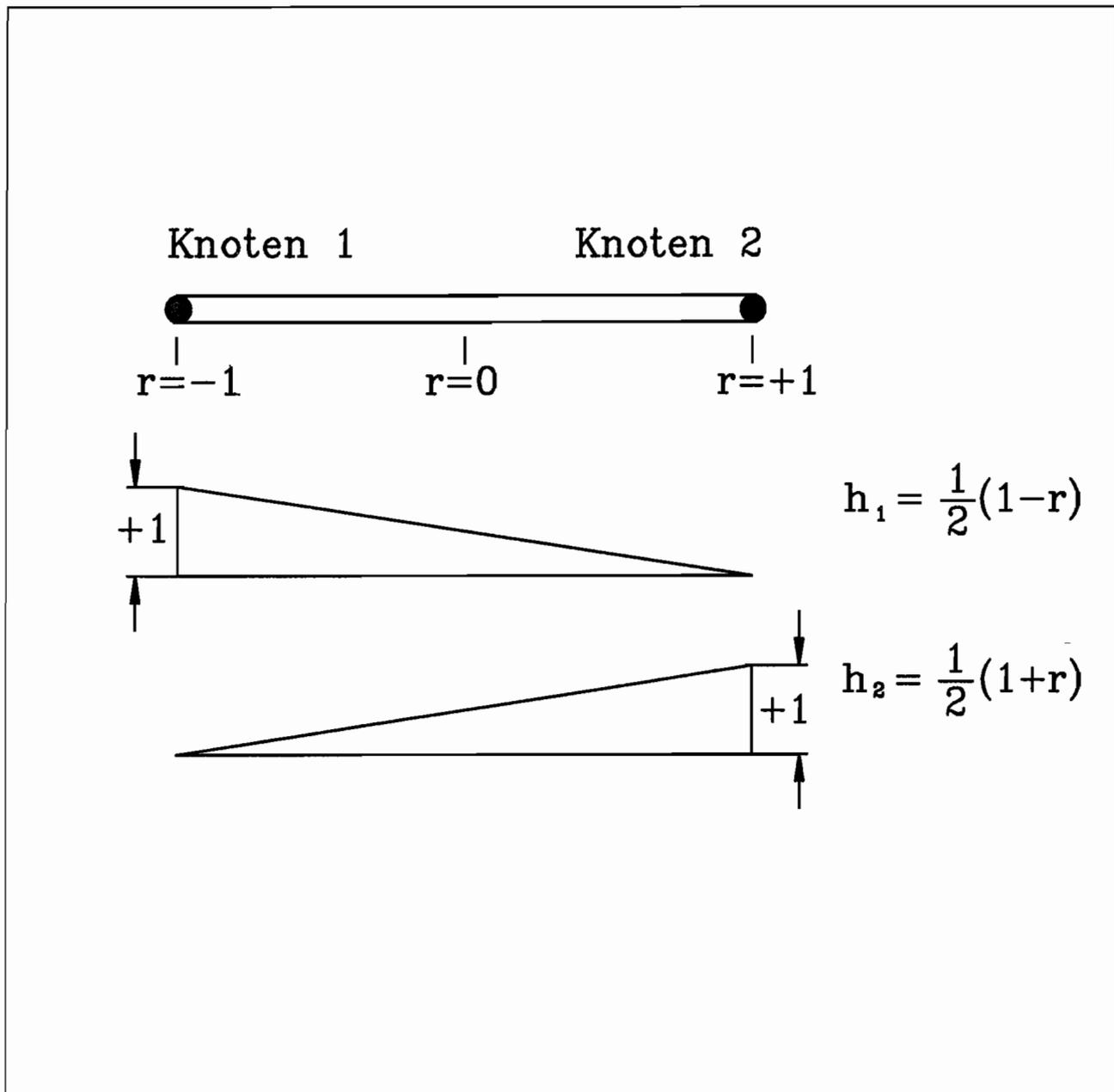


Abb. 12: Eindimensionale Formfunktion für ein Stabelement

Für die Umgeformte Lagrangesche Formulierung gibt BATHE (1986) die linearisierte Bewegungsgleichung wie folgt an:

$$\int_B {}^t\mathbf{C}_{ijrs} {}^t\mathbf{e}_{rs} \delta {}^t\mathbf{e}_{ij} dv + \int_B {}^t\sigma_{ij} \delta {}^t\eta_{ij} dv = \mathbf{u}^T [{}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^t\mathbf{R}] \mathbf{u}. \tag{3.154}$$

Zur Auswertung dieser Bewegungsgleichung für ein bestimmtes Stabelement müssen die beiden Integrale in matrizieller Form berechnet werden, im wesentlichen also die lineare Steifigkeitsmatrix des Elementes und die nichtlinearen Anteile der

Steifigkeitsmatrix des Stabelementes. Damit ergeben sich folgende Matrizen, die zu erstellen sind [PINGEL (1991)].

$$\hat{u}^T = [{}^t u_1^1 \mid {}^t u_2^1 \mid {}^t u_3^1 \mid {}^t u_1^2 \mid {}^t u_2^2 \mid {}^t u_3^2] \quad (3.155)$$

$$K_L = \frac{{}^t \tilde{C}_{1111} {}^t A}{{}^t L^3} \begin{bmatrix} c_1 c_1 & c_2 c_1 & c_3 c_1 & -c_1 c_1 & -c_2 c_1 & -c_3 c_1 \\ c_1 c_2 & c_2 c_2 & c_3 c_2 & -c_1 c_2 & -c_2 c_2 & -c_3 c_2 \\ c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3 c_3 & -c_1 c_3 & -c_2 c_3 & -c_3 c_3 \\ -c_1 c_1 & -c_2 c_1 & -c_3 c_1 & c_1 c_1 & c_2 c_1 & c_3 c_1 \\ -c_1 c_2 & -c_2 c_2 & -c_3 c_2 & c_1 c_2 & c_2 c_2 & c_3 c_2 \\ -c_1 c_3 & -c_2 c_3 & -c_3 c_3 & c_1 c_3 & c_2 c_3 & c_3 c_3 \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

$$K_{NL} = \frac{{}^t \tilde{\sigma}_{11} {}^t A}{{}^t L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

$$\delta \hat{u}^T K_L \hat{u} + \delta \hat{u}^T K_{NL} \hat{u} = \mathbf{u}^T [{}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{R}] \mathbf{u}. \quad (3.158)$$

Die berechneten Elementsteifigkeitsmatrizen werden für jedes Stabelement der Gesamtsteifigkeitsmatrix hinzugefügt.

3.4 Eingeschlossenes Volumen

Das nachfolgende Kapitel zeigt die Besonderheiten auf, die für die Formulierung zur Abbildung idealer Fluide in der mathematischen Formulierung berücksichtigt werden müssen [OLSON und BATHE (1985)]. Dabei soll vorausgesetzt werden, daß in der Ausgangskonfiguration das den Hohlraum ausfüllende Fluid spannungsfrei ist und gleichzeitig den durch die oben beschriebenen Volumenelemente eingeschlossenen Raum vollständig ausfüllt.

3.4.1 Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten und Stoffgesetz

Ideale Fluide zeichnen sich insbesondere dadurch aus, daß sie keine Zähigkeiten aufweisen und dadurch auch keine Tangentialspannungen auftreten. Man spricht darum von nicht-viskosen Flüssigkeiten. Für die Cauchyschen Spannungen bedeutet diese Bedingung, daß alle Komponenten mit ungleichen Indizes gleich Null sein müssen $\sigma_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

Unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Tangentialkomponenten in jeder beliebigen Schnittfläche gleich Null sind, läßt sich nachweisen [GUMMERT und RECKLING (1987)], daß die auftretenden Normalspannungen alle den gleichen Wert annehmen.

$$\sigma_{ij} = p \delta_{ij} \quad (3.159)$$

Der neueingeführte Skalar p stellt den Druck in dem Fluid dar.

Die Berücksichtigung von flüssigkeitsgefüllten Hohlräumen macht eine Modifikation der Bewegungsgleichung notwendig. Zusätzlich zu den Integralen auf der linken Seite treten folgende Terme zu der bisherigen Bewegungsgleichung (3.139) hinzu.

$$\int_{B_F} {}^t \dot{S}_{ij} \delta^t v_{,ji} {}^t dv = \int_{B_F} {}^t \dot{p} \delta_{ij} \delta^t v_{,ij} {}^t dv + \int_{B_F} ({}^t p {}^t v_{k,k} \delta_{ij} - {}^t p {}^t v_{,ij}) \delta^t v_{,ji} {}^t dv. \quad (3.160)$$

Dabei muß die Integration zum Zeitpunkt t über die Momentankonfiguration B_t aller mit einer Flüssigkeit gefüllten Hohlräume erfolgen.

Durch Umwandlung des Volumenintegrals in ein Oberflächenintegral [BRONSTEIN und SEMENDJAJEW (1981)] hat die Integration über die Oberfläche des das Volumen begrenzenden Festkörpers zu erfolgen. Diese Oberfläche wird durch Seitenflächen der Volumenelemente gebildet und läßt sich somit numerisch integrieren.

Nach Einfügen der neuen Terme in die Variationsaussage (3.90) erhält man eine modifizierte Gleichung, die über die ursprüngliche für reine Festkörper geltende Vorschrift hinausgeht und die veränderlichen Volumina berücksichtigt.

$$\delta \left[\sum_{m=1}^n \left[\int_{\partial B_F^m} {}^t \mathbf{n}_i {}^t v_i {}^t da + {}^t p^m \frac{1}{2} \int_{\partial B_F^m} {}^t n_i ({}^t v_{k,k} {}^t v_i - {}^t v_{i,j} {}^t v_j) {}^t da \right] + \int_B {}^t W {}^t dv + \frac{1}{2} \int_B ({}^t \sigma_{ij} {}^t v_{k,j} {}^t v_{k,i} - 2 {}^t \delta_{ij} {}^t D_{kj} {}^t D_{ki}) {}^t dv - \int_{\partial B} {}^t \dot{t}_j \delta {}^t v_j {}^t da - \int_B {}^t \rho {}^t \dot{b}_j \delta {}^t v_j {}^t dv \right] = 0 \quad (3.161)$$

Im Rahmen des Lösungsverfahrens mit der Methode der finiten Elemente führt diese Variationsaussage zu symmetrischen Steifigkeitsmatrizen [PINGEL (1991)].

3.4.2 Zusätzliche Nebenbedingung durch Kavitäten

Als weitere Unbekannte, zusätzlich zu den Geschwindigkeiten in den Elementknoten der finiten Elemente, ergeben sich für jeden in seinem Volumen konstant zu haltenden Raum (Kavität) die materiellen Zeitableitungen des Drucks. Die materielle Ableitung des m -ten Volumens nach der Zeit zum Zeitpunkt t ergibt sich zu

$${}^t \dot{V}_F^m = \int_{B_F^m} {}^t v_{k,k} {}^t dv = \int_{\partial B_F^m} {}^t n_k {}^t v_k {}^t da \quad (3.162)$$

Die matrizielle Auswertung dieser Gleichung führt schließlich auf ein zusätzliches Gleichungssystem für die Berechnung der Drücke ${}^t p^m$ in den Kavitäten. Das Gleichungssystem hat folgende Form

$$\mathbf{K}_{TF} \mathbf{v} + \sum_{m=1}^n ({}^t p^m \mathbf{N}_F^m) = \dot{\mathbf{R}} \quad (3.163)$$

Setzt man dabei eine gewisse Anzahl von Kavitäten voraus, ergibt sich als zusätzliche Bedingung, die während jeden Zeitschritts bei dem Lösungsprozeß berücksichtigt

werden muß, ein entsprechend dimensioniertes System von Gleichungen. Diese zusätzliche Randbedingung sieht für ein System, in dem sich vier voneinander unabhängige flüssigkeitsgefüllte Räume befinden, wie nachfolgend dargestellt aus.

$$\begin{bmatrix} (v_2^1)^T N_F^1 & (v_2^2)^T N_F^1 & (v_2^3)^T N_F^1 & (v_2^4)^T N_F^1 \\ (v_2^1)^T N_F^2 & (v_2^2)^T N_F^2 & (v_2^3)^T N_F^2 & (v_2^4)^T N_F^2 \\ (v_2^1)^T N_F^3 & (v_2^2)^T N_F^3 & (v_2^3)^T N_F^3 & (v_2^4)^T N_F^3 \\ (v_2^1)^T N_F^4 & (v_2^2)^T N_F^4 & (v_2^3)^T N_F^4 & (v_2^4)^T N_F^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^t \dot{p}^1 \\ {}^t \dot{p}^2 \\ {}^t \dot{p}^3 \\ {}^t \dot{p}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^T N_F^1 - {}^t \dot{v}_F^1 \\ v_1^T N_F^2 - {}^t \dot{v}_F^2 \\ v_1^T N_F^3 - {}^t \dot{v}_F^3 \\ v_1^T N_F^4 - {}^t \dot{v}_F^4 \end{bmatrix}. \quad (3.164)$$

Der oben beschriebene besondere Zustand muß bei der Lösung des Gleichungssystems entsprechend berücksichtigt werden.

3.5 Beweglicher Kontakt im Raum

Die in dieser Arbeit behandelte Fragestellung des Tragverhaltens von menschlichen Wirbelsäulenabschnitten läßt sich nicht ohne eine geeignete Formulierung des in den Wirbelgelenken auftretenden Kontakts bearbeiten.

Zur mechanischen Formulierung von Kontaktproblemen gibt es eine Vielzahl von Lösungsmöglichkeiten. Ein wesentliches Unterscheidungskriterium für die Art der Formulierung stellt das Vorhandensein von Reibung dar. Im vorliegenden Fall der Abbildung des Kontaktfalls in einem menschlichen Gelenk kann davon ausgegangen werden, daß die Reibung zu vernachlässigend klein ist. Damit braucht die verwendete Formulierung also auch den Einfluß einer tangential wirkenden Reibungskraft nicht zu berücksichtigen. Zur Einordnung des Vorgehens der Kontaktformulierung kann man zwischen der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren und der Penalty Methode unterscheiden [WRIGGERS (1986)]. Das hier angewendete Verfahren entspricht der Penalty Methode.

Bei dem Vorgehen nach der Penalty Methode müssen verschiedene Fälle unterschieden werden. Unter Beachtung der unten dargestellten Geometrie, aus einem beliebigen Knoten eines Volumenelementes und einer aus Dreiecksflächen zusammengesetzten und mit Knotenverschiebungen anderer Elemente verknüpften Oberfläche ("Surface"), ergeben sich zunächst vier Fälle.

Zum einen befindet sich der Elementknoten oberhalb der Surface und hat damit keine Berührung. Dann tritt das Kontaktelement, das zwischen dem Elementknoten und der Surface definiert ist, nicht in Aktion.

Zum anderen tritt der Knoten mit dem Kontaktelement gerade in den durch d_{GAP} vorgegebenen Bereich ein. Der senkrecht auf der Surface gemessene Abstand zu dem Knoten unterschreitet also die festgelegte Distanz zur Kontaktfläche. Dieser Fall führt zur Einführung einer vorgespannten Feder (GAP-Element), die durch ihre Federkraft den verlangten Abstand wieder herstellt. Dazu wird eine Ungleichgewichtskraft in das System eingebracht und in dem Vektor der Ableitungen der äußeren Knotenpunktlasten berücksichtigt. Gleichzeitig mit der Kraft in der Kontaktfeder muß auf der Surface-Seite aus Gleichgewichtsgründen eine äquivalente Einzelkraft auf die Dreiecksfläche aufgebracht werden. Diese Einzelkraft wirkt dann auf die Elementknoten der beteiligten Volumenelemente.

Weiterhin kann sich der Knoten mit dem Kontaktelement bereits im Kontaktfall befinden, so daß der berechnete Abstand d kleiner als d_{GAP} ist. Dann wird die Steifigkeitsmatrix des GAP-Elementes berechnet und in der Gesamtsteifigkeitsmatrix berücksichtigt.

Schließlich kann der Fall auftreten, daß sich der Kontakt wieder löst, also der senkrechte Abstand d wieder größer als d_{GAP} wird, oder der Knoten auf eine neue Dreiecksfläche der Surface trifft. Um den Einfluß der Kontaktfeder zu beseitigen, wird eine der Federkraft umgekehrt gleichgroße Ungleichgewichtskraft berücksichtigt.

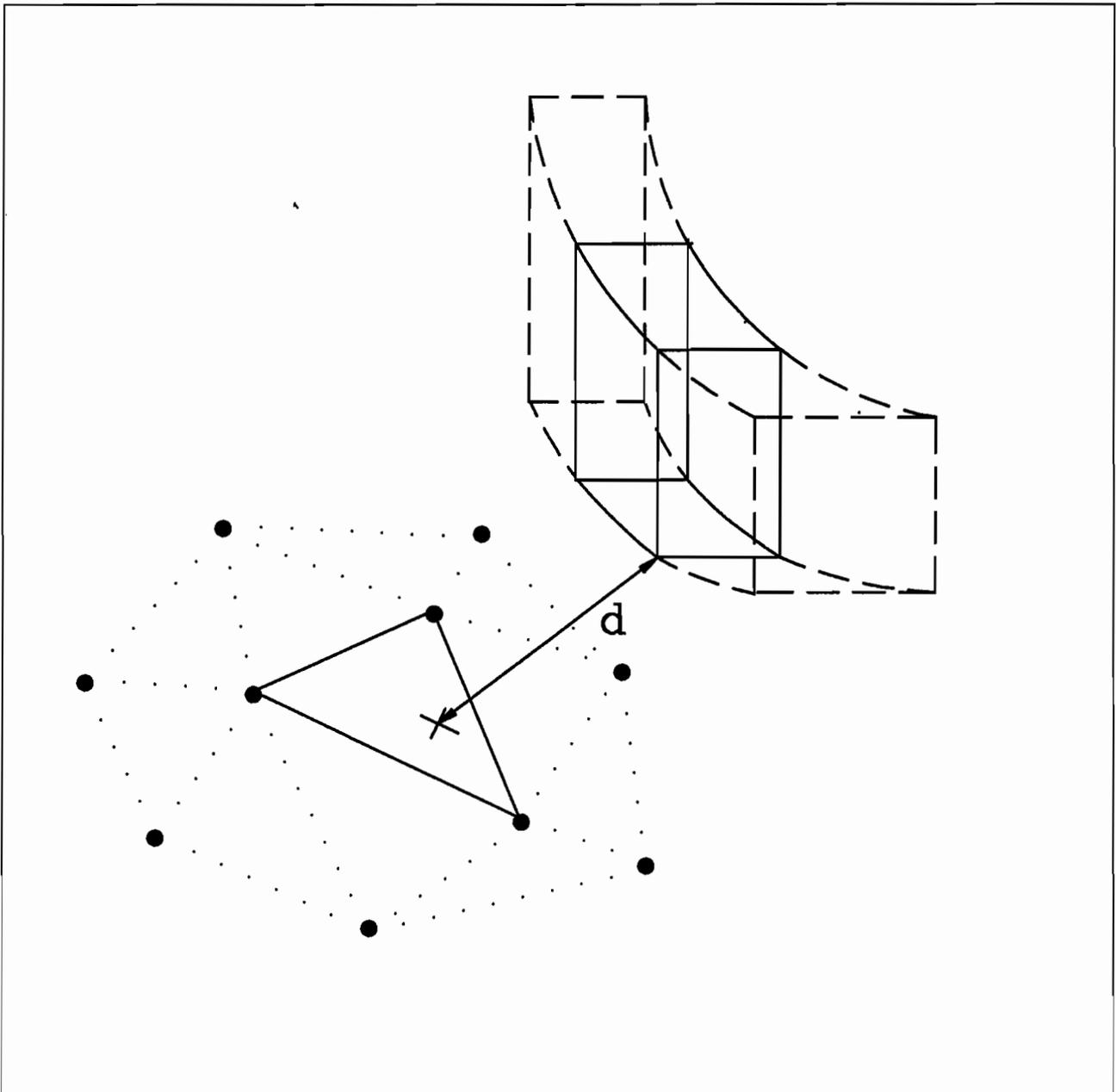


Abb. 13: Darstellung des räumlichen Kontaktfalls

Besonderes Augenmerk gilt dem Fall, daß eine Kontaktfeder durch Annäherung an die Kontaktfläche eingesetzt und im nächsten Schritt wieder entnommen werden muß. Trotz einer allgemein guten Konvergenz des Lösungsverfahrens durch den im folgenden beschriebenen numerischen Lösungsalgorithmus, können in einzelnen Fällen große Sprünge in der Tangentialsteifigkeitsmatrix auftreten, die die Lösung beeinträchtigen. Insbesondere beim Verlassen der Kontaktfläche, kann das im schlimmsten Fall auch zu Divergenzen führen. Dies ließe sich verhindern, indem der

Algorithmus dahingehend modifiziert wird, daß die geometrische Nichtlinearität der zuerst erhaltenen Kontaktknoten ausiteriert wird. Dann kann nach der "active set" Strategie die neue Kontaktzone bestimmt werden [Wriggers (1986)]. In allen im sechsten Kapitel vorgestellten Berechnungen hat sich jedoch gezeigt, daß der normale Algorithmus ohne Probleme anwendbar ist.

3.6 Numerische Lösung

Zum Abschluß des dritten Kapitels soll in diesem Abschnitt auf das numerische Vorgehen zur Lösung der beschriebenen mechanischen Zusammenhänge eingegangen werden. Dazu dient hier die Methode der finiten Elemente. Zur übersichtlichen Darstellung und systematischen Bearbeitung liegen alle Zusammenhänge in matrizieller Form vor. Dadurch ist es möglich, auf gewisse standardisierte Algorithmen zurückzugreifen.

Zur Lösung nichtlinearer Strukturprobleme, wie sie im Rahmen dieser Arbeit betrachtet werden, ist eine Aufbereitung der zugehörigen diskretisierten Grundgleichungen im Sinne einer inkrementellen Formulierung vorgenommen worden. Die Diskretisierung eines Problems nach der Methode der finiten Elemente führt zu einem algebraischen Gleichungssystem für die unbekannt Knotenparameter [BETTEN [1986], KLEIN (1990), SCHWARZ (1984)]. Im Unterschied zu linearen Problemstellungen entzieht sich das nichtlineare Gleichungssystem einer direkten Lösung, was die Anwendung numerischer Näherungsverfahren erforderlich macht. Dabei haben insbesondere inkrementelle und iterative Verfahren weite Verbreitung gefunden.

Das sich ergebende algebraische Differentialgleichungssystem hat dabei folgende Form:

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (3.165)$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems stehen verschiedene Möglichkeiten zur Auswahl [CHROSCIELEWSKI und NOLTE (1985)], von denen hier ein rein inkrementelles Verfahren ohne Gleichgewichtsiteration Verwendung findet.

Die Funktion \mathbf{G} in (3.165) soll dazu in der Umgebung von v_i, λ_i , hinreichend oft differenzierbar sein. Man beachte, daß die betrachtete Gleichung nichtlinear in den Knotenverschiebungen \mathbf{v} ist. Zur Bestimmung des nächsten Gleichgewichtszustandes wird (3.165) an dem bekannten Punkt in eine Taylorreihe entwickelt. Wird nun nach dem ersten linearen Term abgebrochen und eine konsistente Linearisierung vorgenommen, läßt sich eine quadratische Konvergenz in der Nähe der Gleichgewichtslösung nachweisen [STEIN (1989), WRIGGER (1986)].

Das gesamte Vorgehen zur Bestimmung der Gesamtlösung basiert auf einer Sequenz von Lösungen linearisierter Gleichungssysteme. Der dazu verwendete Lösungsalgorithmus hat dabei die nachfolgende Form. Es ist darauf zu achten, daß

hier die besonderen Bedingungen, die durch den vorgesehenen Kontaktfall auftreten können, berücksichtigt werden müssen.

Setzen der Anfangswerte

Schleife über Lastinkremente

- 1.) Berechnung der aktuellen Momentankonfiguration
(Bestimmung der Knotenkoordinaten unter Berücksichtigung des letzten Inkrements)
- 2.) Überprüfen der Kontaktbedingungen in der gegenwärtigen Konfiguration
(Einbau oder Entfernung von Kontakt-Feder-Elementen)
- 3.) Einbau der Modifikationen infolge des Kontaktfalls
- 4.) Berechnung des nächsten Verschiebungsinkrementes
- 5.) Bestimmung der aktuellen Gesamtverschiebung
- 6.) Schleifenende - Weiter mit 1.) oder ENDE

Abb.14: Lösungsalgorithmus

Der im Rahmen dieser Arbeit verwendete Algorithmus erlaubt auf Grund seiner umfangreichen Steuerungsmöglichkeiten und seiner Restart-Fähigkeit die effiziente Bearbeitung geometrisch nichtlinearer Fragestellungen.

Die Eingabe der Strukturgeometrie, der Materialkonstanten und der Lasten, sowie die Ausgabe der Verschiebungen und Schnittgrößen, erfolgt in physikalischen Größen und deren Komponenten.

4. Das Wirbelsäulensegment als mechanische Einheit

Die Umsetzung der Wirbelsäulenstruktur in ein mathematisches Modell ist eine große Herausforderung bezüglich der Abbildungsgenauigkeit. Darüber hinaus ist für jedes Modell die Frage zu klären, inwieweit eine Übertragung der berechneten Systemantwort, also der errechneten Ergebnisse, zurück in die Realität zulässig ist, und vor allem, welche Schlüsse daraus gezogen werden können.

Gleichzeitig bedeutet die Möglichkeit der Untersuchung menschlicher Strukturen auf numerischem Wege ein leistungsfähiges Hilfsmittel, um grundlegende Zusammenhänge vor eventuellen chirurgischen oder orthopädischen Eingriffen zu ermitteln. Auf Grund der menschlichen Anatomie, insbesondere im Lendenwirbelbereich, ergeben sich dabei einige besonders interessante Fragestellungen, die ein numerisches Modell beantworten kann.

4.1 Starrkörpermodell

Eine mögliche Form eines Rechenmodells ist die Darstellung der Wirbelsäule als zweidimensionales mechanisches Modell. Dabei bilden NOLTE und PINGEL (1991) eine muskelisolierte Wirbelsäule ab, bestehend aus Starrkörpern, die durch Federelemente untereinander verbunden sind. Eine solche sagittal-ebene Abbildung läßt sich aus einer lateralen Röntgenabbildung der Wirbelsäule entnehmen. Ein solches Modell, das mit "einfachen" Annahmen ein Bewegungssegment aus Bandscheibe mit benachbarten Wirbelkörpern abbildet, kann auf Grund der wenigen mechanischen Elemente nur globale Zusammenhänge der Kinematik der Wirbelsäule wiedergeben. Dieses Modell aus zwei Starrkörpern, die über 15 Federn miteinander verbunden sind, von denen vier Federn die Bandscheibe, vier Federn das Wirbelgelenk und sieben Federn die ligamentären Strukturen repräsentieren, kann jedoch einige Fragestellungen zufriedenstellend beantworten. Vor allem globale Einflüsse, wie Fusionen oder operative Veränderungen, lassen sich so bearbeiten [NOLTE und PINGEL (1991), NITSCHKE et al.(1988)].

Für umfangreiche Studien über das Verhalten von ein- und mehrsegmentalen Wirbelsäulenabschnitten unter Vorlasten ist eine ebene Betrachtungsweise erfolgreich angewendet worden. Dabei konnte mit dem Programmsystem LUSP (Lumbar Spine) der Einfluß verschiedener Kategorien von Vorlasten studiert werden.

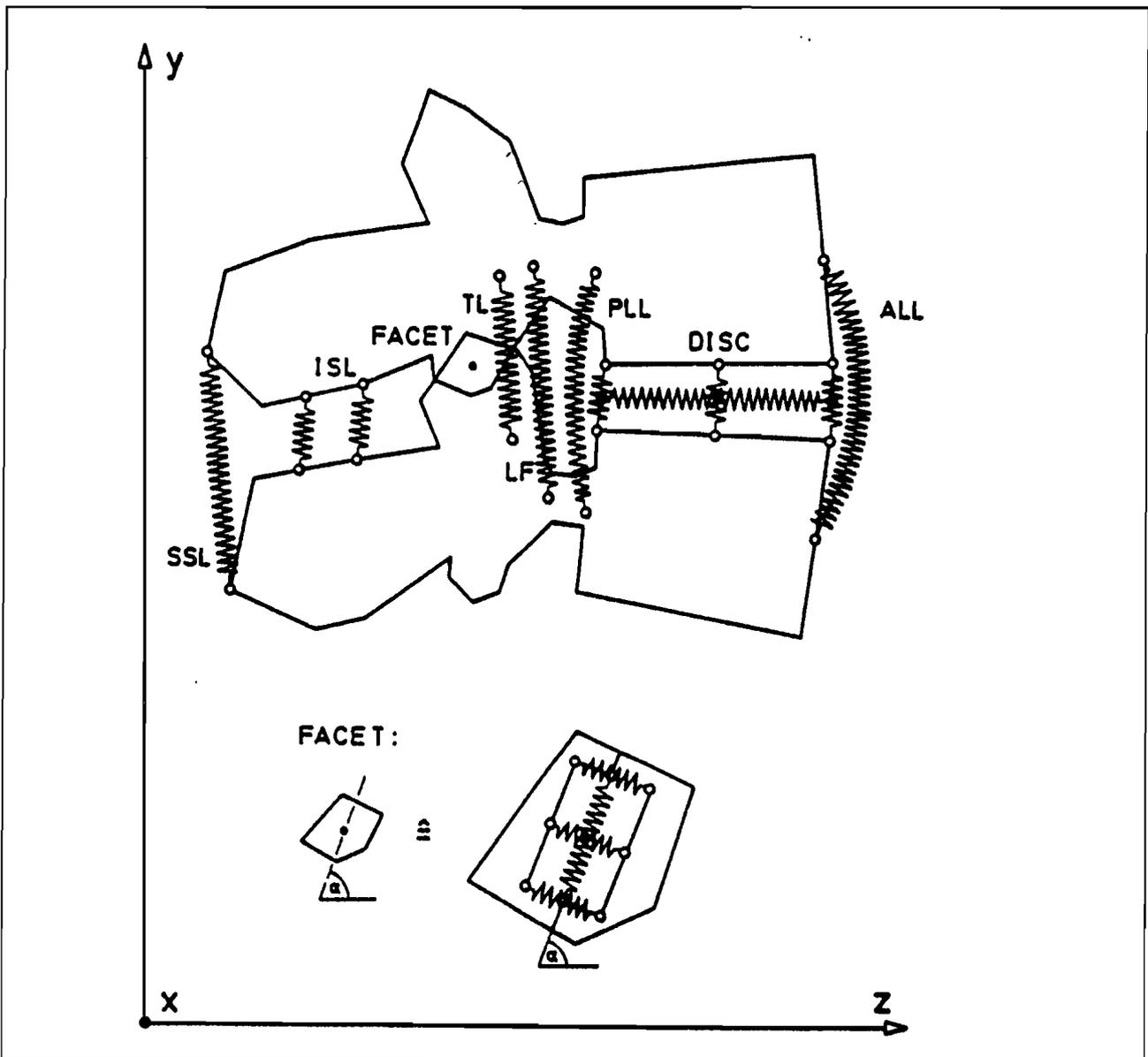


Abb.15: Ebenes Wirbelsäulenmodell [aus NITSCHKE et al. (1988)]

4.2 Ebenes Modell

Im Unterschied zu einem zweidimensionalen Modell mit Starrkörpern bietet eine Erweiterung im Hinblick auf deformierbare Continua in der Ebene zusätzliche Einflußfaktoren. Dabei wird im besonderen der Wirbelkörper, und eventuell auch die Bandscheibe, durch Scheibenelemente wiedergegeben. Für die langgestreckten Strukturen der Ligamente bieten sich hier nichtlineare Stabelemente zur Abbildung an. Eine solche Form der Abbildung gibt gegenüber einer Simulation mit starren Verbindungselementen, die die Wirbelkörper repräsentieren, die tatsächlichen Verhältnisse besser wieder. Elastische oder gegebenenfalls plastische Verhalten der Wirbel und/oder der Bandscheiben können in ein Scheibenelement eingearbeitet werden.

4.3 Rotationssymmetrisches Modell

Eine weitere Variante der Berechnung von Wirbelsäulenabschnitten basiert auf der Verwendung von Kontinuumselementen, die von ihrem Ansatz her die Spannungen und Dehnungen in der Art annehmen, daß rotationssymmetrische Voraussetzungen herrschen. In Frage kämen Scheibenelemente, die die obigen Bedingungen erfüllen. Unter Verwendung solcher Elemente bei der Finite-Elemente-Analyse gewinnt die Frage der Übertragbarkeit der Resultate in das natürliche Modell große Bedeutung. Auf Grund der rotationssymmetrischen Geometrie und der ebenfalls nur rotationssymmetrischen Belastungsmöglichkeiten sind erhebliche Einschränkungen zu beachten. Gute Übertragbarkeit ist eigentlich nur für die Abbildung der Bandscheibe an der Wirbelsäule zu erwarten.

4.4 Volumenmodell

Die Verwendung eines Volumenelementes, wie es im Abschnitt drei hergeleitet worden ist, soll an dieser Stelle zur Abbildung der menschlichen Wirbelsäule untersucht werden. Dabei gilt es, die Vor- und Nachteile einer solchen Abbildung zu hinterfragen und abzuwägen.

Die Abbildung räumlicher Strukturen - wie die der Wirbelsäule - erfordert die genaue Übernahme der Geometrie und der Lage der einzelnen Bestandteile als wesentliche Faktoren für die Aussagekraft der Simulation. Bei der menschlichen Wirbelsäule, und im speziellen bei einem oder mehreren Junghannsschen Bewegungssegmenten, ist von einem unregelmäßig begrenzten und stark zergliederten Volumen auszugehen. Ein Bewegungssegment besteht dabei zusätzlich aus einer Vielzahl verschiedener "Bauteile". Diese im ersten Kapitel beschriebenen "Bauteile" unterscheiden sich in ihrem mechanischen Verhalten zum Teil sehr stark voneinander. Zusätzlich läßt eine menschliche Struktur nur eingeschränkt eine genaue Abgrenzung zu. Dieser besondere Umstand macht es notwendig, möglichst viele geometrische und materielle Einflüsse berücksichtigen zu können. Insbesondere ist der Aufbau der Wirbelkörper durch eine nach außen hin ansteigende Festigkeit gekennzeichnet. Das Verhalten der Bandscheibe ist ebenfalls von innen nach außen stark unterschiedlich. Somit ist es wünschenswert, möglichst kleinräumig Geometrie und Materialverhalten angeben zu können.

Unter Verwendung von dreidimensionalen Elementen eröffnet sich die Möglichkeit, zusätzlich eindimensionale Stab-, Balken-, Scheiben- oder auch Plattenelemente zu verwenden. Wegen der Übergangsformulierung ist jedoch der Verwendung von Stäben der Vorzug zu geben. Stab- oder auch Fachwerkelemente schließen an den Knoten der Volumenelemente gelenkig an.

Bei der Verwendung von Volumenelementen ist zu berücksichtigen, daß auf Grund der vielen Freiheitsgrade je Element und der notwendigen Elementanzahl die Bewältigung des daraus resultierenden numerischen Problems an Bedeutung gewinnt. Durch jedes zusätzliche Volumenelement kommen zwischen acht und zwölf weitere Freiheitsgrade und mögliche Materialeigenschaften hinzu. Bisherige Ansätze haben sich darum auf symmetrische Modelle beschränkt [PINGEL (1991)].

Somit ist für eine detailgetreue und wirklichkeitsnahe Abbildung eines Bewegungssegmentes der Wirbelsäule oder ganzer Wirbelsäulenabschnitte eine dreidimensionale Darstellung am besten geeignet. Die oben beschriebenen Nachteile

anderer Ansätze treten nicht auf. Im Vergleich zu "einfachen Modellen" sind alle Komponenten mit ihren elastischen Materialeigenschaften abbildbar. Im Unterschied zu ebenen Beschreibungen können auch Einflüsse aus der Veränderlichkeit in Dickenrichtung Berücksichtigung finden.

Bei speziellen Fragestellungen im Bereich der Gelenkflächen wäre es denkbar, den dort zur Auskleidung befindlichen Gelenkflächenknorpel [BAUMGART (1988)] gesondert zu berücksichtigen. Dazu wäre es notwendig, die spezifischen Eigenschaften des Knorpels auf der Oberfläche der knöchernen Gelenkstrukturen gesondert zu diskretisieren.

4.5 Darstellung des Wirbelkörpers

Ausgehend von den anatomischen Gegebenheiten der menschlichen Wirbelsäule sollen in diesem Abschnitt die Grundlagen und Voraussetzungen für die Abbildung der einzelnen Bestandteile des Junghannsschen Bewegungssegments beleuchtet werden.

4.5.1 Sagittalschnitt und Transversalschnitt

Betrachtet man die Lendenwirbelsäule in einem Medianschnitt, so fällt die besondere Form der kaudalen Wirbelkörper auf. In dieser Ansicht sollte das abzubildende Präparat und das numerische Modell gut übereinstimmen. Zusätzlich ist eine gute Übereinstimmung der verschiedenen Transversalebene anzustreben, um die spätere Aussagekraft der numerischen Ergebnisse zu festigen.

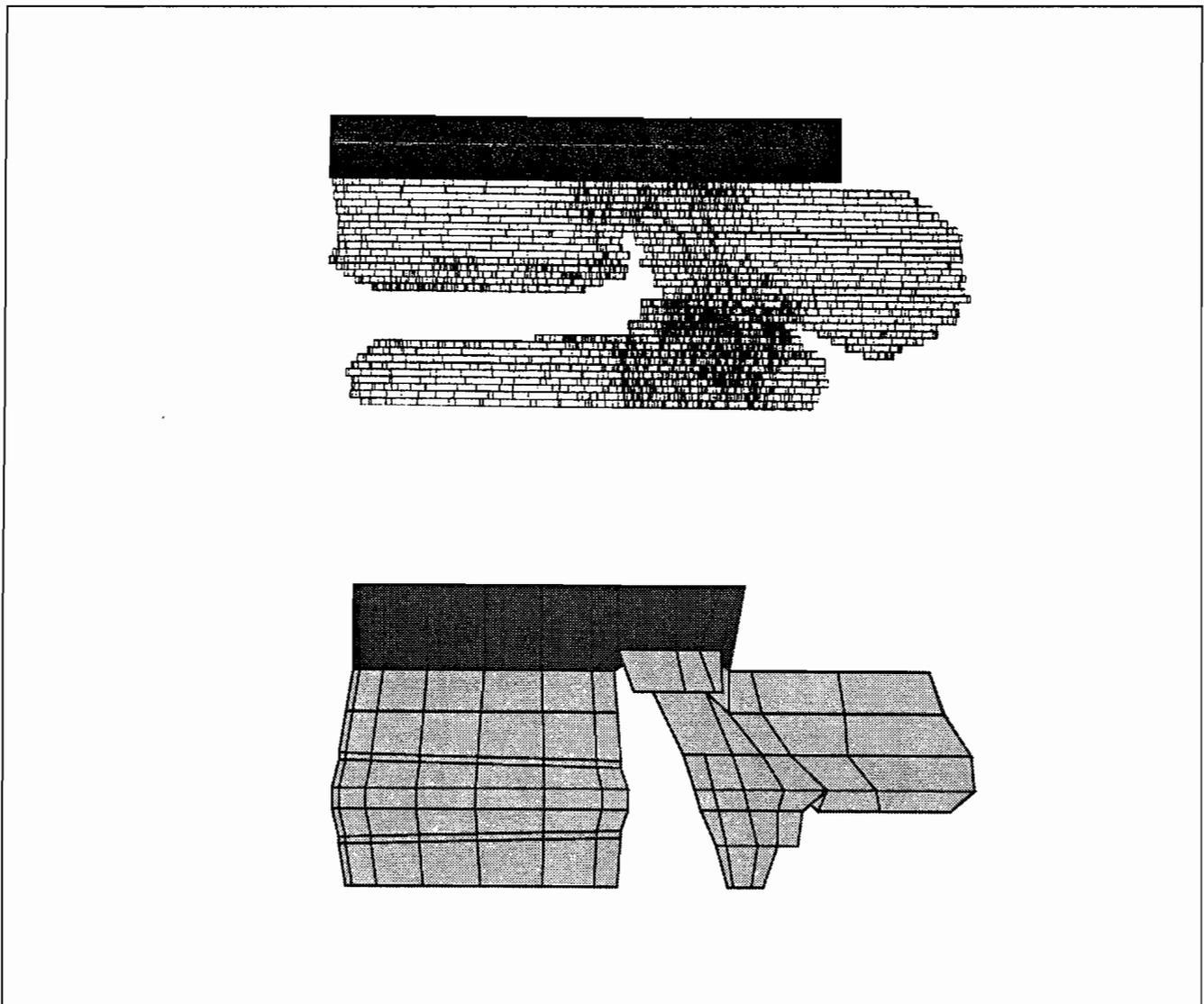


Abb. 16: Gegenüberstellung eines Medianschnitts durch Präparat und Modell

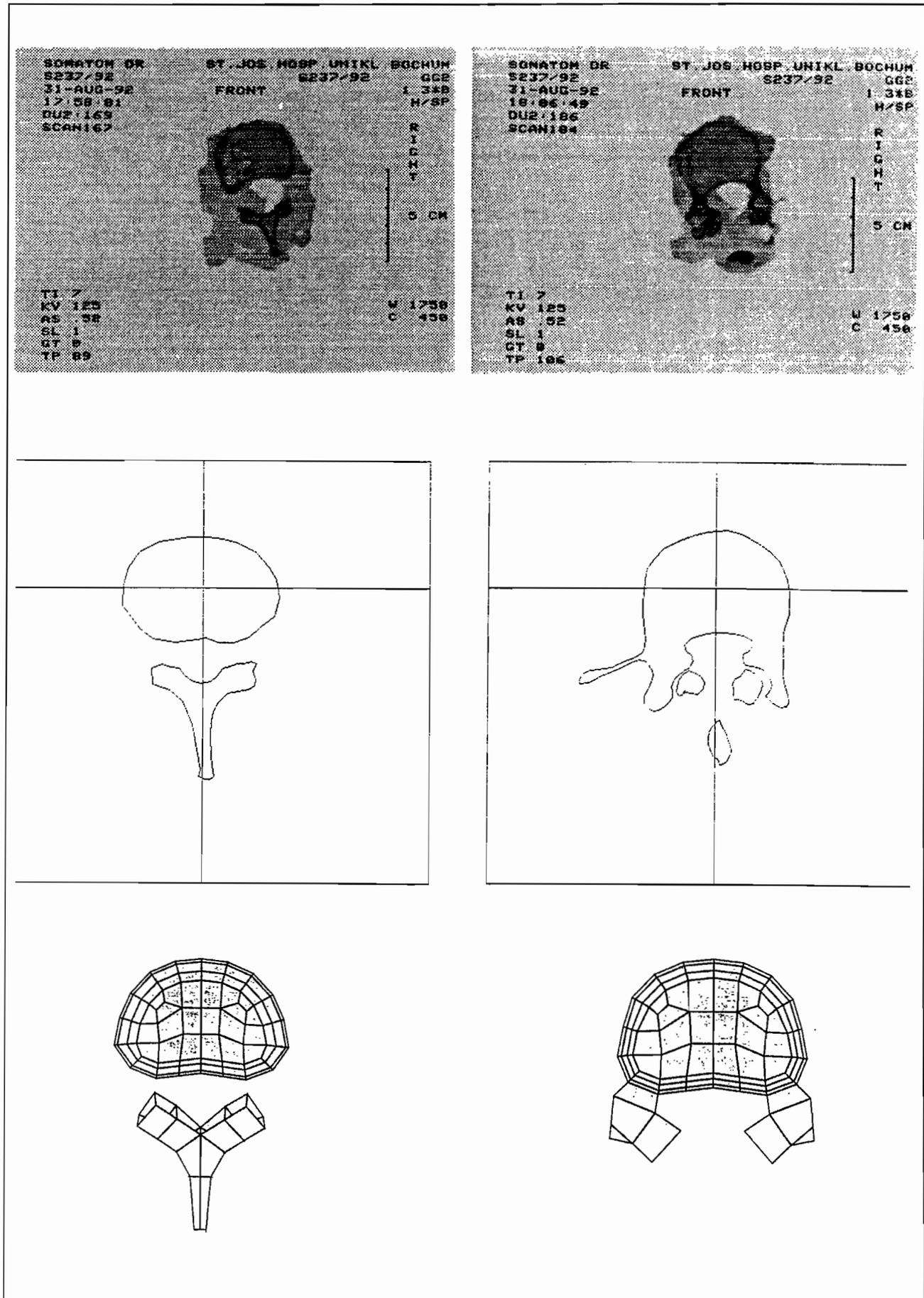


Abb. 17: Gegenüberstellung von Transversalschnitten durch Präparat und Modell

4.5.2 Knochendichteverteilung

Zur Versorgung des numerischen Modells mit Materialdaten besteht durch die Bestimmung der Knochendichte ein guter Anhaltspunkt für die Verteilung über eine vorgegebene Schnittebene. Entsprechende Analysen der Knochendichteverteilung wurden bei verschiedenen Versuchsreihen bereits vorgenommen. Der direkte Zusammenhang zwischen Knochendichte und mechanisch nutzbaren Materialdaten ist jedoch bis heute nicht eindeutig, und stellt damit nur eine qualitative Kontrolle dar. Genauere quantitative Angaben lassen sich jedoch aus der Literatur übernehmen [SHIRAZI-ADL (1984)].

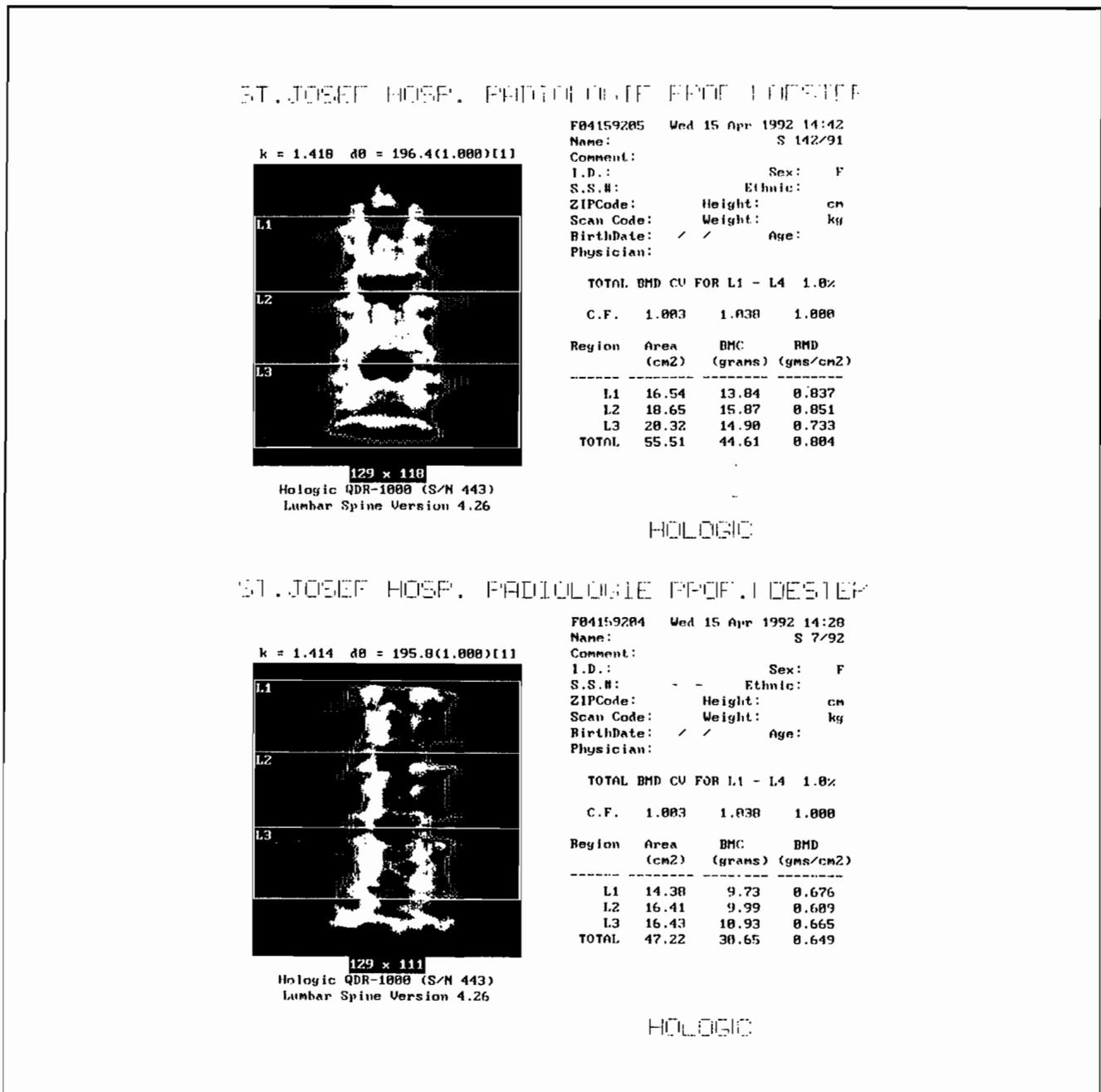


Abb. 18: Knochendichteverteilung im Lumbalen Wirbelkörper

4.6 Abbildung der Bandscheibe

Bei der Darstellung der Bandscheibe lassen sich zwei wesentlich voneinander verschiedene Bereiche unterscheiden. Der äußere Mantel gleicht einem Autoreifen, bestehend aus einer Grundsubstanz, die mit kreuzweise eingelegten Zugbändern armiert ist. Diese Hülle umschließt einen weichen leicht verschieblichen Kern.

4.6.1 Annulus Fibrosus

Die äußere Hülle der Bandscheibe wird in dem hier verwendeten Modell wie folgt idealisiert. Die eigentliche Substanz des Annulus Fibrosus wird durch Volumenelemente wiedergegeben. Die in der Grundsubstanz des Annulus nachweisbaren kollagenen Fasern werden im einzelnen zwischen den Volumenelementen eingebaut. In der menschlichen Bandscheibe nimmt der Anteil der Fasern von außen nach innen ab [EYRE (1979), HUMZAH und SOAMES (1988)]. Dieser Tatsache wird Rechnung getragen, indem die Stabelemente nach innen hin einen geringeren Querschnitt erhalten. Gleichzeitig bekommen sie auch einen geringeren Elastizitätsmodul [PINGEL (1991), SHIRAZI-ADL (1984)], so daß die Tragwirkung nach innen hin deutlich abnimmt.

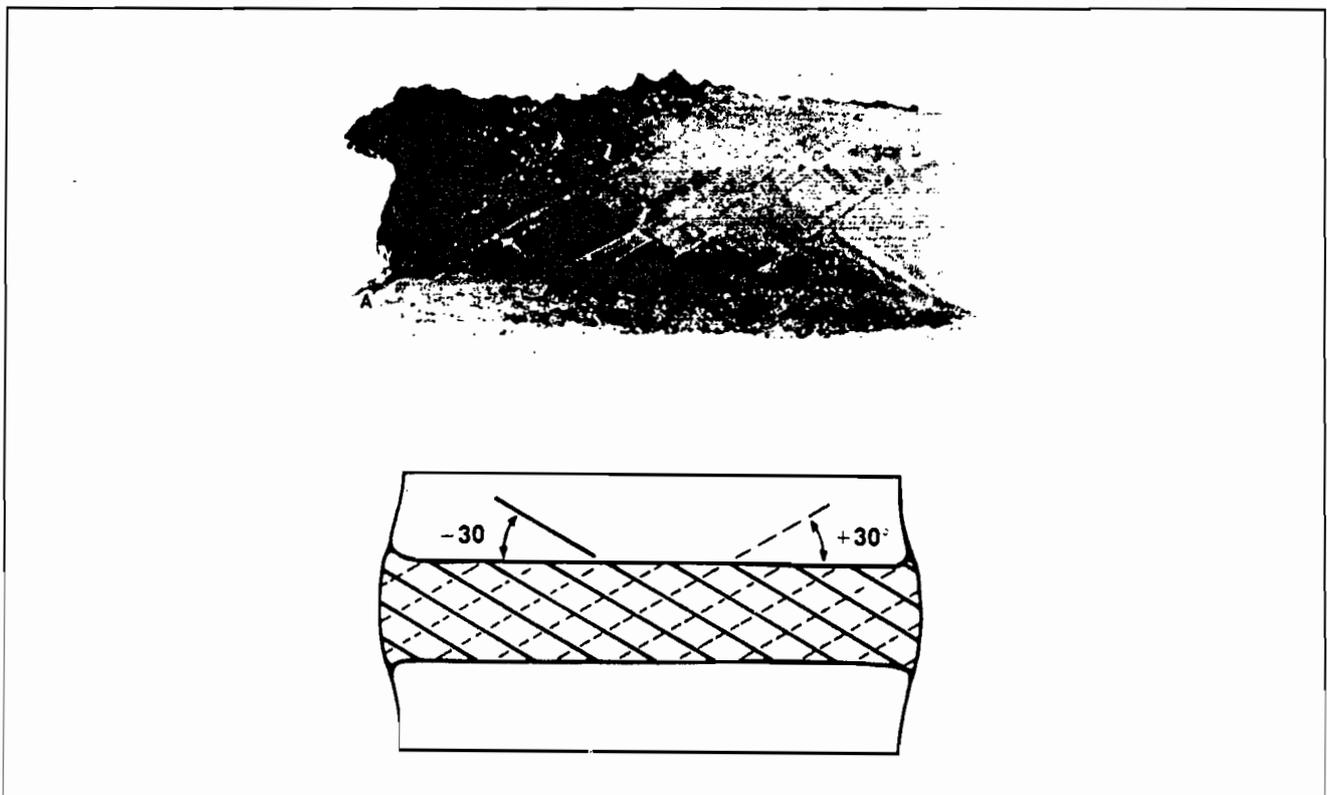


Abb. 19: Verlauf der kollagenen Fasern

4.6.2 Nucleus Pulposus

Der durch den Nucleus Pulposus eingeschlossene Gallertkern kann auf Grund seiner Beschaffenheit und Konsistenz als nichtviskoses Liquid idealisiert werden [HICKEY und HUKINS (1980)]. Mit der im dritten Kapitel dargestellten Formulierung ist es damit notwendig, diesen Bereich komplett von Volumenelementen zu umgeben. Mit dieser Kenntnis ist der numerische Algorithmus des Finiten-Elemente-Programms dann in der Lage, das Eindringen in diese Kavität, die als inkompressibel angenommen wird, zu beeinflussen.

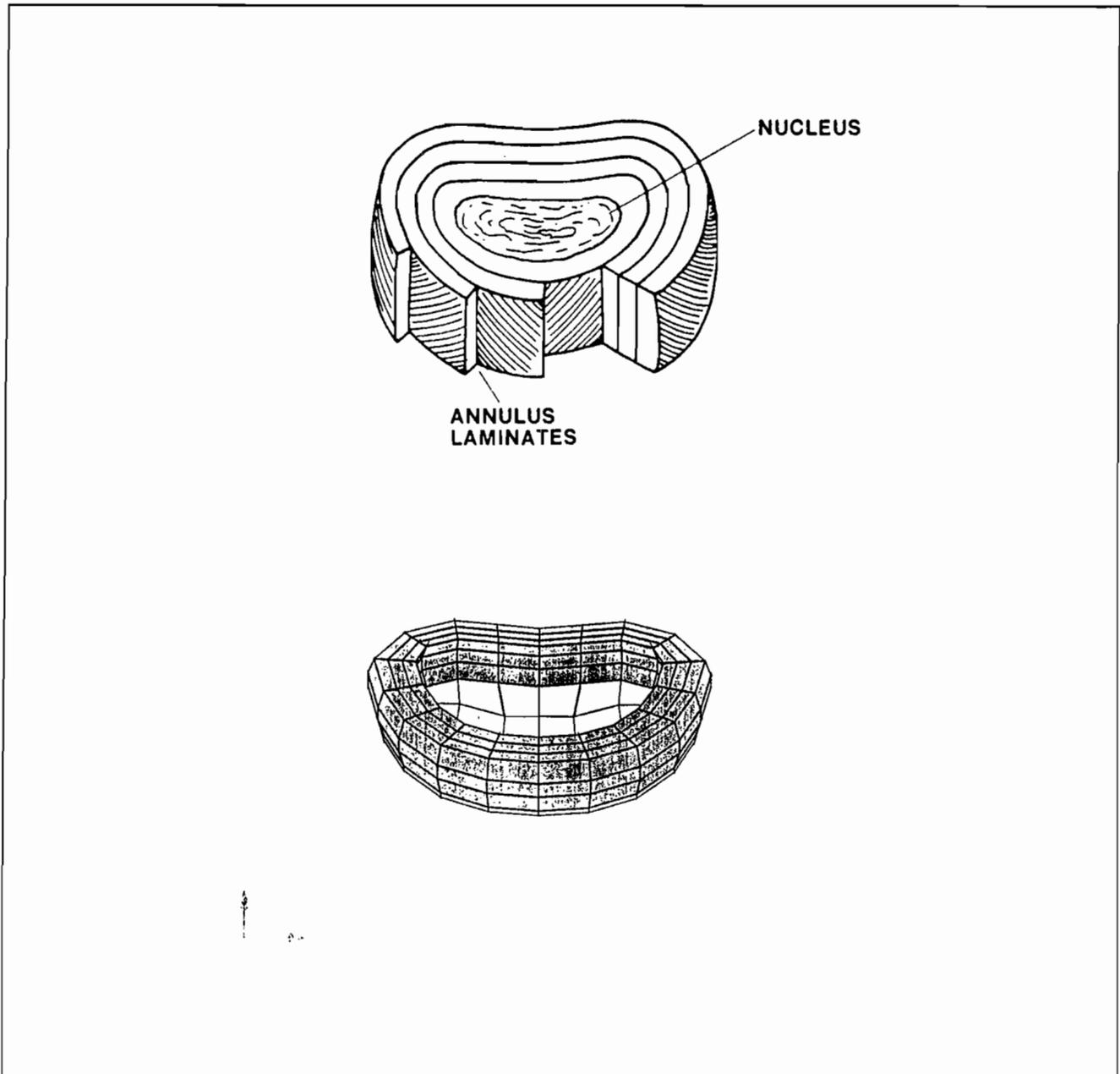


Abb. 20: Prinzip der Bandscheibe [WHITE UND PANJABI (1990)] und Diskretisierung

Mit dem verwendeten Lösungsalgorithmus ist es zusätzlich möglich, Volumenveränderungen des Nucleus Pulposus gezielt vorzugeben und damit entsprechende

Fragestellungen an der Wirbelsäule zu bearbeiten. Das können Entnahmen von Bandscheibenmaterial sein bei Operationen zur Druckentlastung. Es könnte aber auch ein Volumenverlust auf Grund natürlichen Alterns oder Degeneration auf diese Weise simuliert werden.

4.7 Bandapparat

Im mechanischen Zusammenspiel der Komponenten der Wirbelsäule spielen die Bänder eine wesentliche Rolle. Insbesondere die muskulisolierte Wirbelsäule ist nur durch ihren Bandapparat stabil. Der genaue Verlauf der an der Wirbelsäule vorkommenden Bänder ist im ersten Kapitel ausführlich beschrieben worden. Entsprechend der anatomischen Lage der Ligamente sind an den im folgenden verwendeten Rechenmodellen Stabelemente mit den mechanischen Kerndaten der sie repräsentierenden Ligamente eingesetzt.

Ausführliche Untersuchungen der Ligamente der Lendenwirbelsäule sind zur Erlangung der Kraft-Verschiebungskurven notwendig [NOLTE und PANJABI (1989)]. Die dabei zu beobachtenden nichtelastischen Effekte sind bei den hier vorgestellten Berechnungen nicht berücksichtigt worden. Das nichtlineare Verhalten der Ligamente wurde jedoch für alle beteiligten Bänder berücksichtigt. Dabei ist zu beachten, daß die Bestimmung des spannungsfreien Zustandes äußerst schwierig ist [FUNG (1967)].

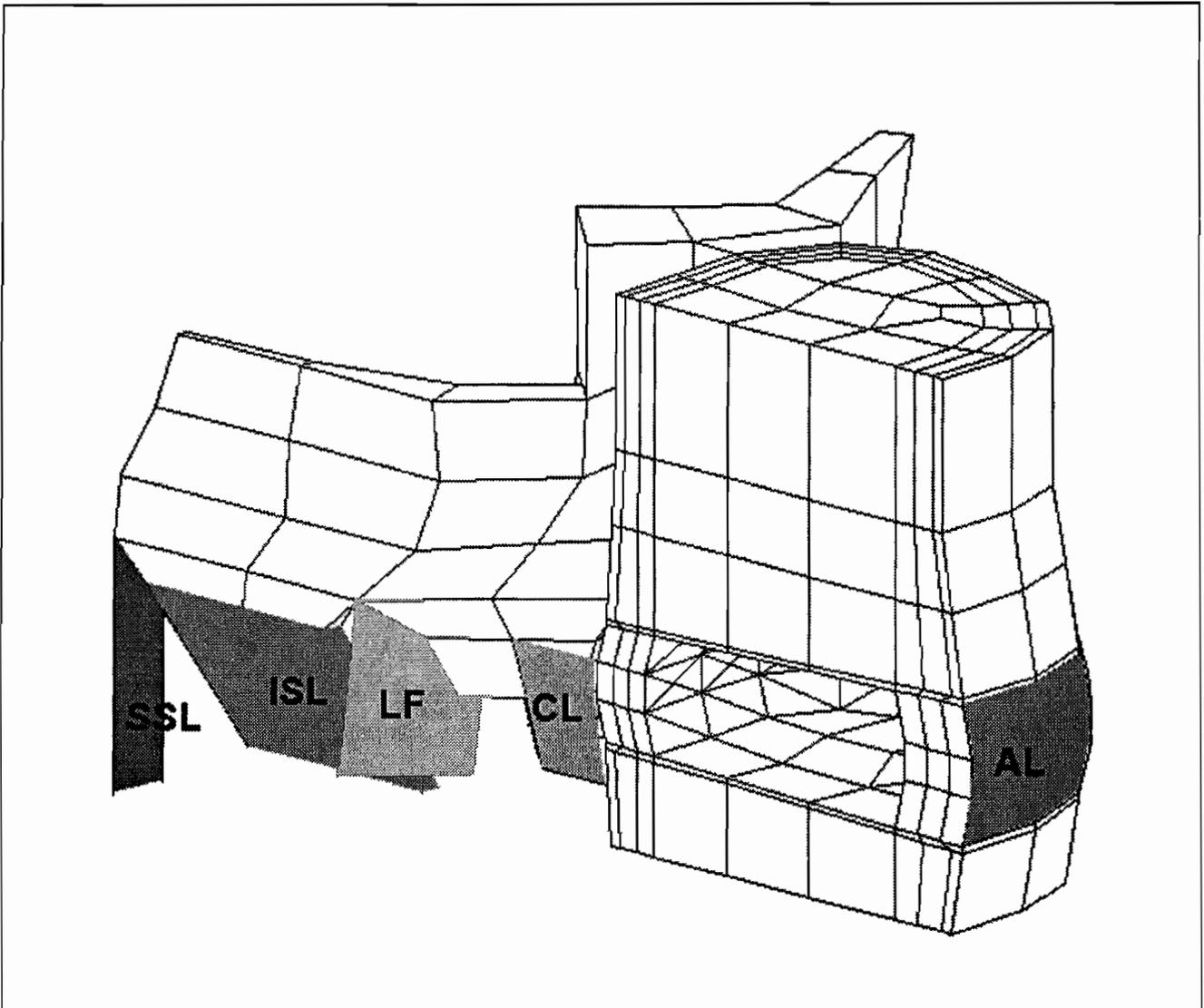


Abb. 21: Bandapparat des mathematischen Modells

4.8 Facettengelenke

Neben der Bandscheibe und den Ligamenten eines Bewegungssegmentes wird das Bewegungsverhalten und der Kraftfluß von einem Wirbelkörper zum nächsten, ganz besonders durch die beiden Wirbelgelenke bestimmt. Diese zwei Gelenke jedes Bewegungssegmentes bedürfen bei der Berücksichtigung im numerischen Modell großer Aufmerksamkeit. Die besondere Schwierigkeit bei der Abbildung des mechanischen Verhaltens dieser Gelenke liegt in deren speziellen Verhalten. Als Gelenke übertragen sie nur Druckkräfte und haben bei Zugbelastung keinen Kontakt. Die im dritten Kapitel beschriebene Kontaktformulierung erlaubt, diese Eigenschaft des reibungsfreien Kontakts abzubilden. Großer Wert wurde bei der Diskretisierung der aus einzelnen Dreiecksflächen bestehenden Kontaktfläche auf das Zusammenpassen mit der ihr gegenüberliegenden Gruppe von Kontaktfedern gelegt.

4.9 Rückenmuskulatur

Für alltägliche Bewegungsabläufe, und sogar für die aufrechte Haltung, ist die Rückenmuskulatur die wesentliche Stützkomponente. Mangels der Möglichkeit, geeignete invitro oder invivo Untersuchungen bisher vorzunehmen, ist gegenwärtig keine Validierung solcher Simulationsansätze gesichert möglich. Ihre Wirkung konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht werden.

5. Modellbildung - Numerische Simulation

Aufbauend auf den Ausführungen des vierten Kapitels, soll in diesem Kapitel das Vorgehen zur Modellierung der verschiedenen erstellten Wirbelsäulenmodelle besprochen werden.

5.1 Allgemeines

Ausgangspunkt für die Erstellung eines Rechenmodells auf Basis der Methode der finiten Elemente können geeignete bildgebende Verfahren sein, wie zum Beispiel Computer-Tomogramm (CT) oder Magnet-Resonanz-Verfahren (MR). Durch solche dreidimensionale Erfassung der Wirbelsäulengeometrie ist unter Beachtung der Abbildungsmaßstäbe und bei ausreichend dünnen Scan-Ebenen eine optimale Grundlage für eine Diskretisierung gegeben. Die Erstellung der nachfolgend beschriebenen Wirbelsäulenmodelle wurde, ausgehend von Computer-Tomogrammen, von lumbalen Wirbelsäulen, unter Verwendung eines interaktiven Preprozessors, vorgenommen.

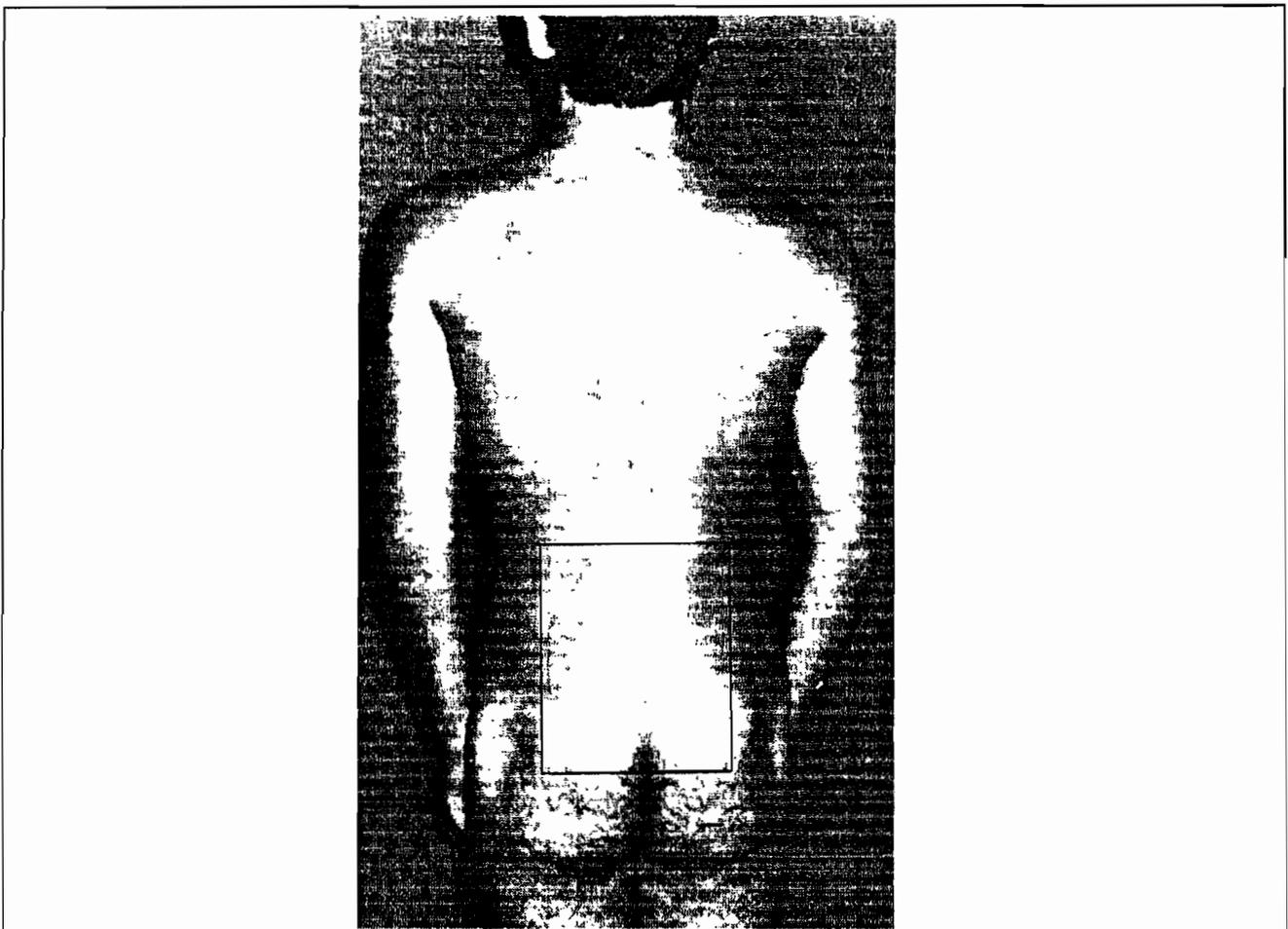


Abb. 22: Menschlicher Rücken

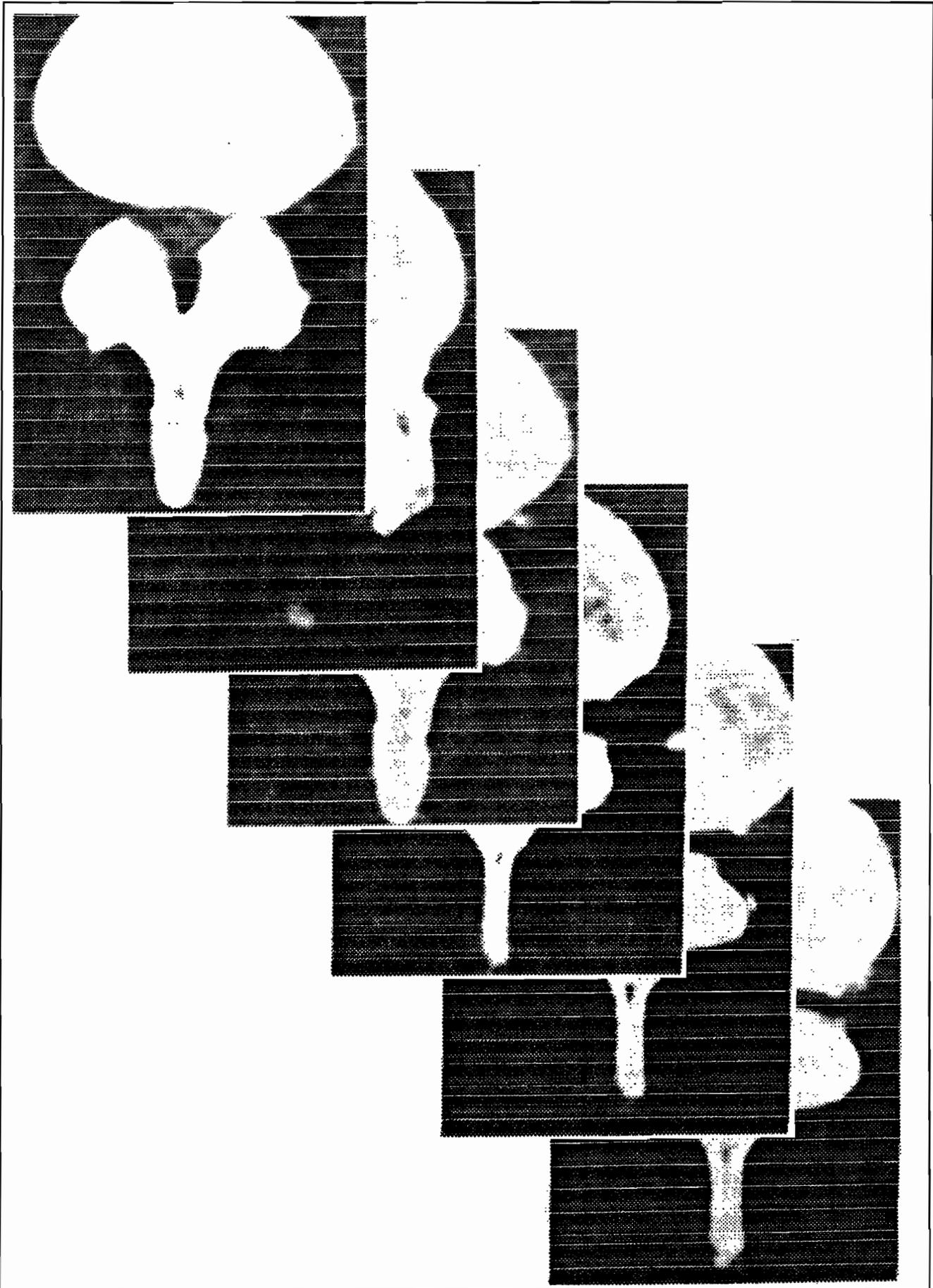


Abb. 23: CT-Aufnahmen einer Lendenwirbelsäule

5.2 Symmetrisches Modell

Für einen Teil der numerisch durchführbaren Untersuchungen an Bewegungssegmenten reicht die Diskretisierung des symmetrischen Teils der Wirbelsäule aus. Dabei schränkt man sich auf gewisse mögliche Lasten ein. Zum einen ist das die Kompressionslast, und zum anderen ist das ein Moment in der Medianebene (Flexions-/Extensionsmoment). Im Rahmen dieser Arbeit wurden darüber hinaus auch Scherbelastungen (Schubkraft) aufgebracht. Bereits bei diesem kompaktesten der drei hier untersuchten Modelle ist der Rechenaufwand je nach aufgebrachtener Last sehr umfangreich. In der Abbildung läßt sich an diesem Modell die Verteilung der Materialien übersichtlich veranschaulichen.

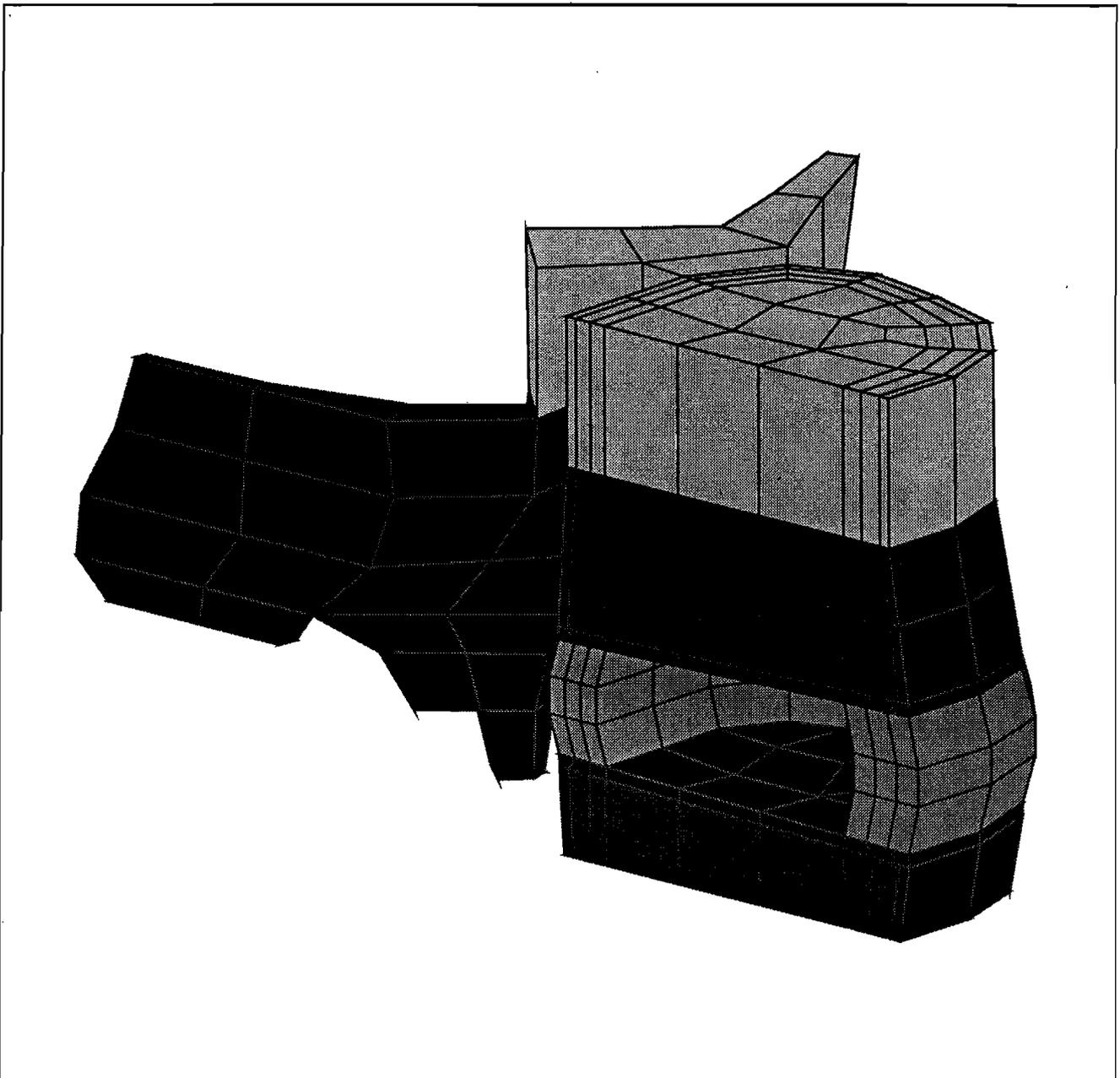


Abb. 24: Materialdarstellung am symmetrischen Modell

5.3 Asymmetrisches Modell

In Erweiterung des symmetrischen Modells der Wirbelsäule soll hier die Erweiterung des symmetrischen zum asymmetrischen Rechenmodell beschrieben werden. Unter weitgehender Verwendung der Basisgeometrie des symmetrischen Modells, erlaubt ein asymmetrisches Modell wesentlich weitergehende Analysen dadurch, daß keine Einschränkungen für die Lastaufbringung gemacht werden müssen.

Unter Vernachlässigung der Symmetrieeigenschaften, die in gewissen Grenzen bei der menschlichen Wirbelsäule angebracht sind, ist es bei einem solchen Ansatz möglich, über die Kompressionslast und das Beugemoment hinaus die seitliche Beugung und auch die Torsionsbewegung - Rotation um die Längsachse - zu untersuchen. Zur genauen Beschreibung haben WHITE und PANJABI (1990) das klinische Koordinatensystem eingeführt, das es erlaubt, einheitlich experimentelle und numerische Ergebnisse gegenüberzustellen. Die nachfolgenden Ergebnisse sollen sich auf diese Konvention beziehen.

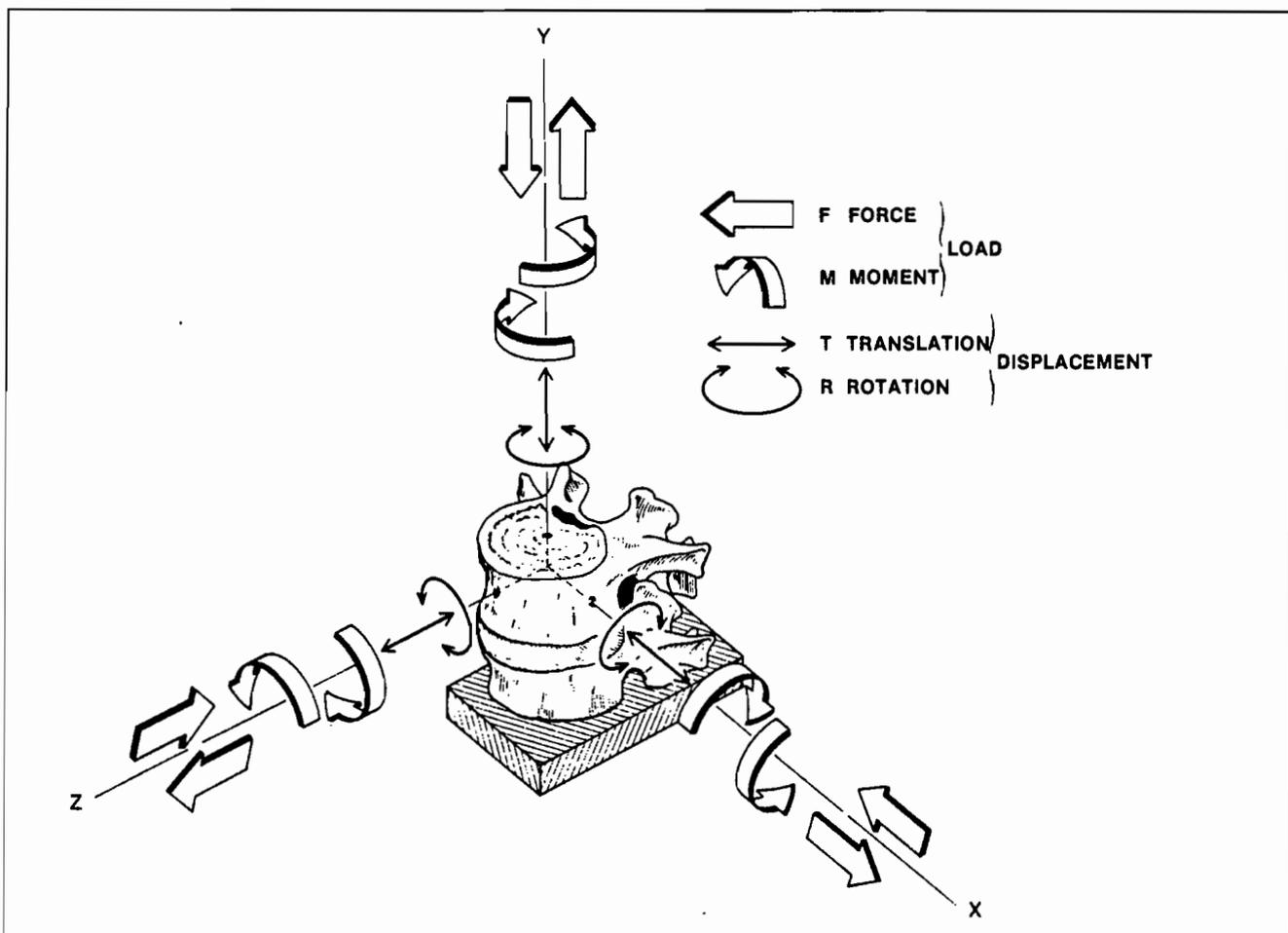


Abb. 25: Klinisches Koordinatensystem nach WHITE und PANJABI (1990)

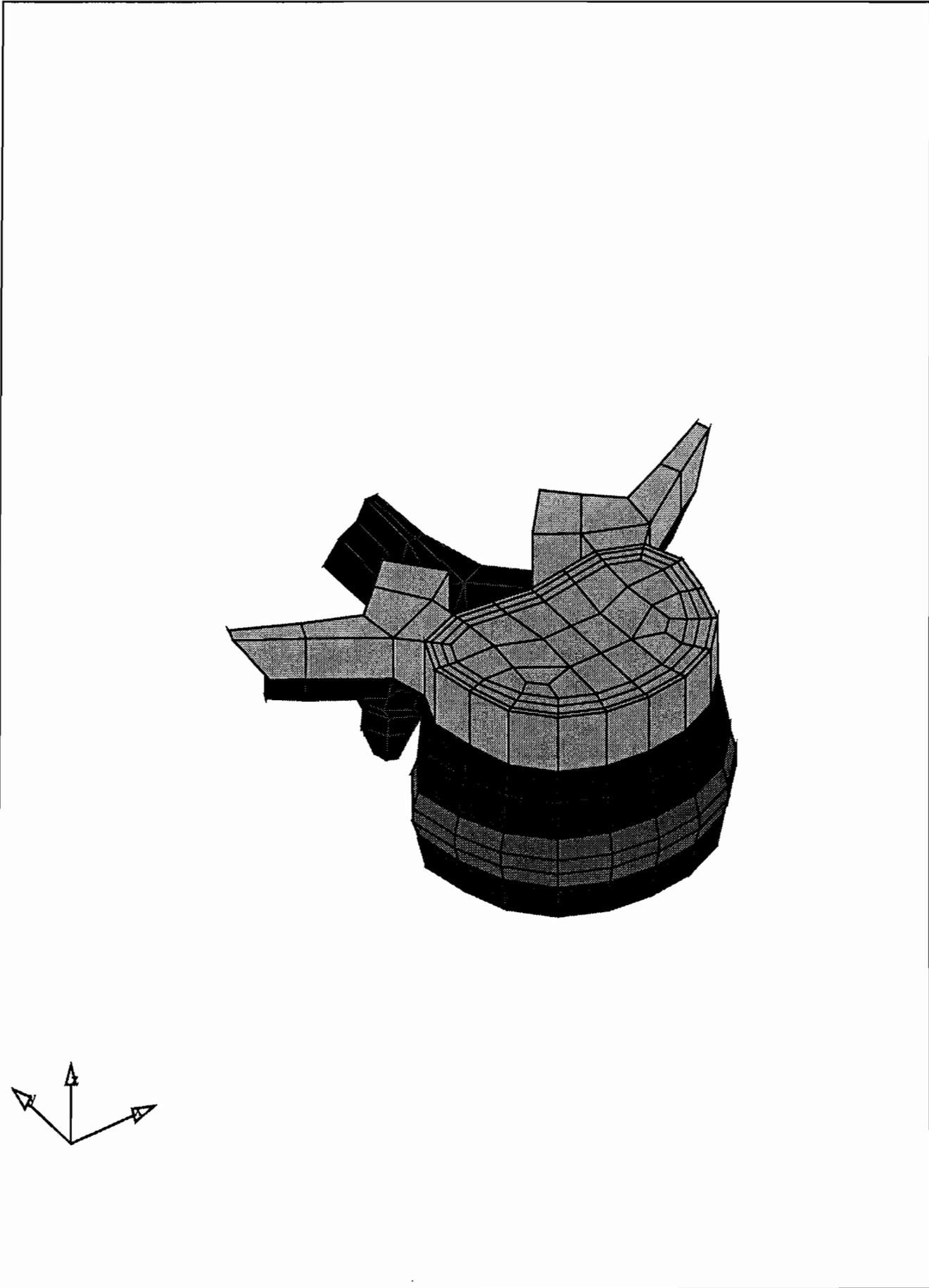


Abb. 26: Wiedergabe des Asymmetrischen Rechenmodells

5.4 Multisegmentales Modell

Bei dem hier vorgestellten multisegmentalen Modell handelt es sich um eine konsequente Weiterentwicklung des oben beschriebenen monosegmentalen Modells. Dabei wurden CT-Vermessungen von mehreren lumbalen Wirbelsäulenabschnitten zur Erweiterung der notwendigen Geometriedaten verwendet.

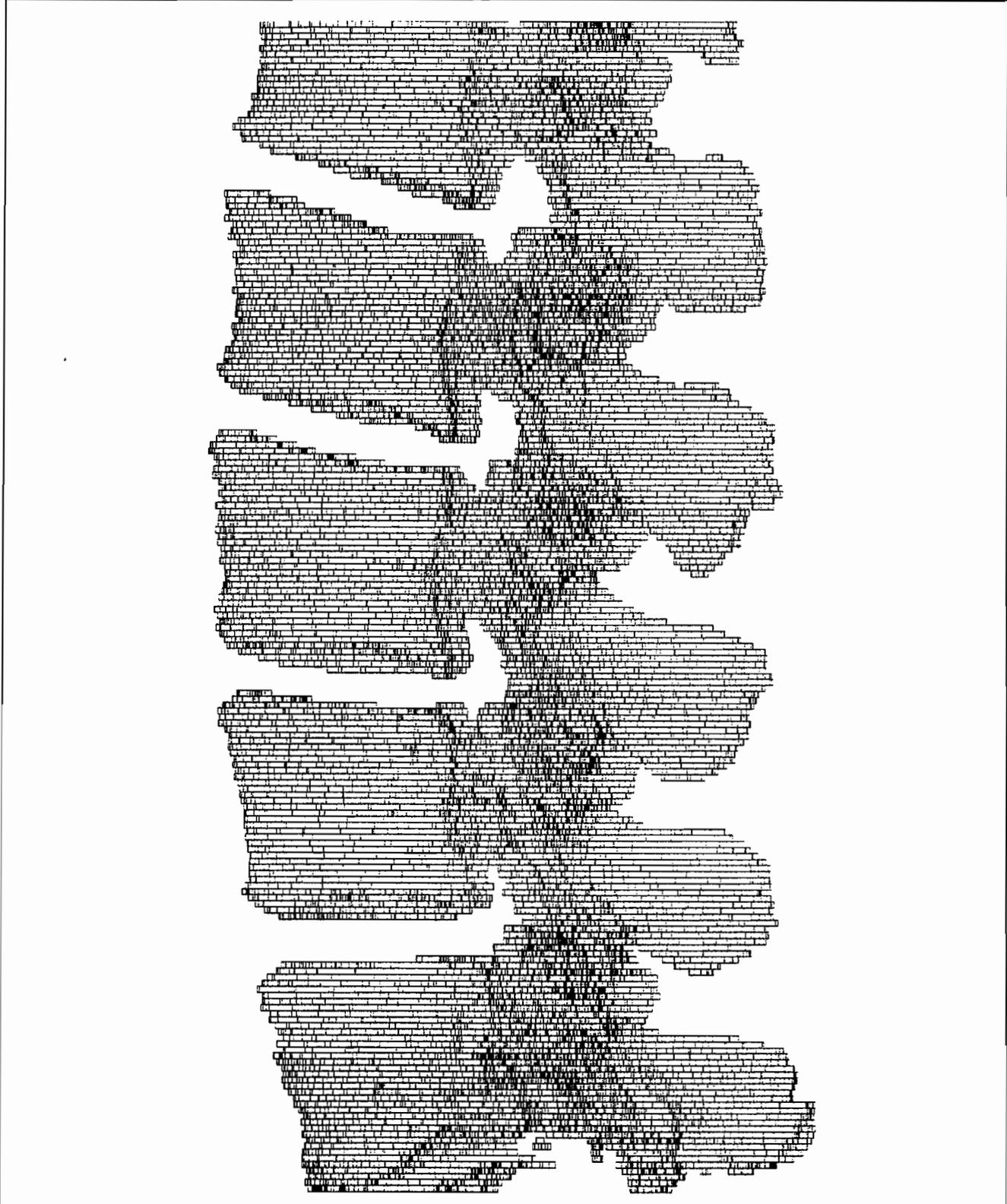


Abb. 27: Digitalisierte Computer-Tomographische Geometriedaten

Mittels umfangreicher geometrischer Manipulationen wurde aus den CT-Schnitten von drei verschiedenen Lendenwirbelsäulen eine einhüllende Oberfläche konstruiert. Dieses durch Raumpunkte beschriebene Volumen wurde dann mit Volumenelementen diskretisiert. Die gewonnenen Elementknotenkoordinaten und die Topologieinformationen dienen als Eingabedaten für die Finite-Elemente-Analyse. Zusammen mit den bereits bei den monosegmentalen Modellen erarbeiteten Materialzuordnungen und den Informationen der Angriffspunkte der intersegmentellen Ligamente entstand das unten wiedergegebene bisegmentale Modell.

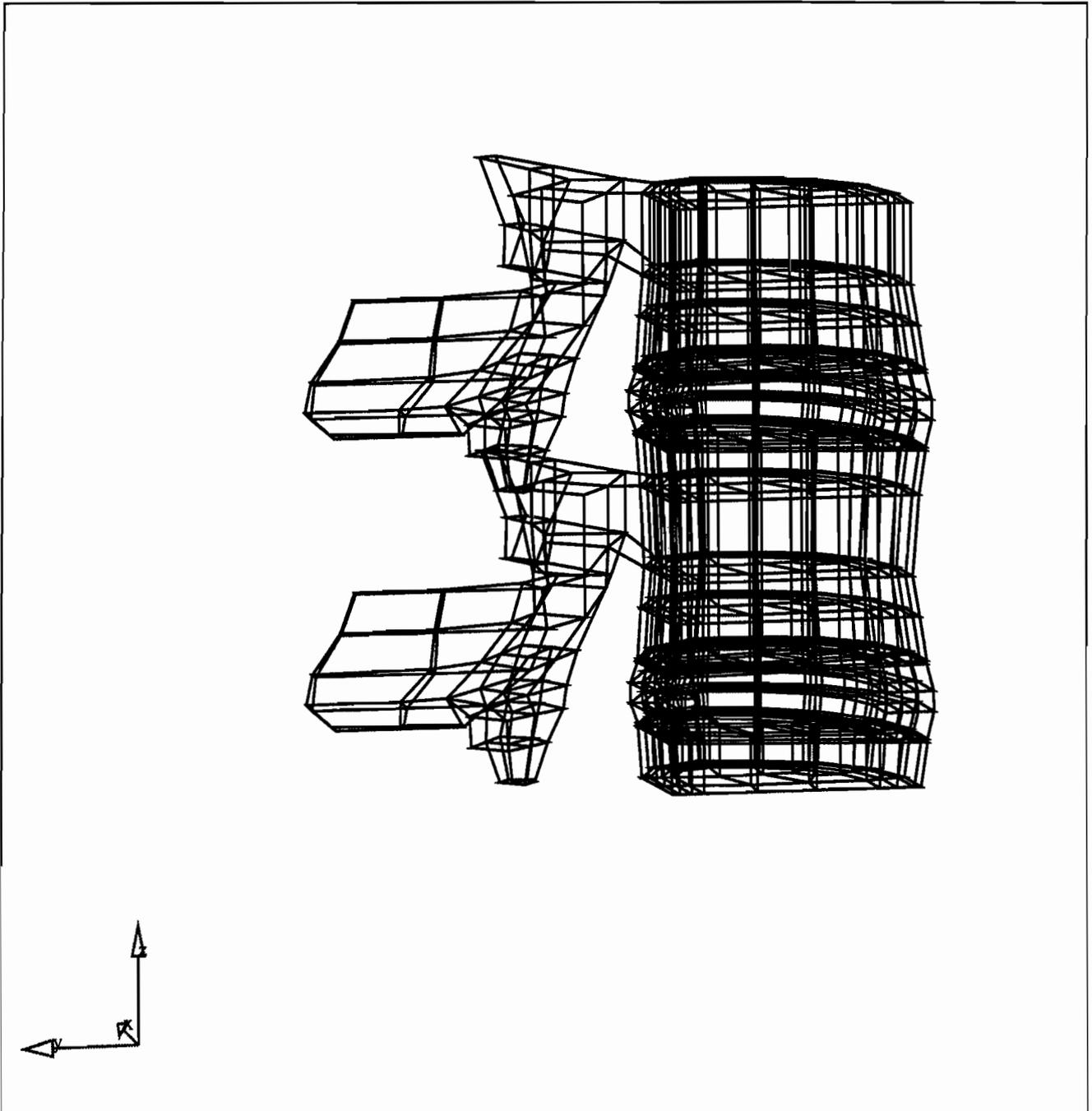


Abb. 28: Mehrsegmentales Modell

5.5 Systemdimensionen

In diesem Abschnitt soll kurz auf die Dimensionen der zu bewältigenden Daten und die dafür notwendigen Voraussetzungen an Software und Rechnerausstattung eingegangen werden.

	Symmetr. monoseg. Modell	Asymmetr. monoseg. Modell	Multiseg. Wirbelsäulen Modell
Anzahl der Knoten	601	1086	1146
Anzahl der Freiheitsgrade	1803	3258	3438
Anzahl der Volumenelemente	340	680	680
Anzahl der Stabelemente	309	491	502
Anzahl der Kontaktfedern	43	86	86
Anzahl der Randbedingungen	245	115	276
Abgebildete Oberflächen für Kontaktformulierung	1	2	2
Kontaktflächen	64	128	128
Abgebildete Kavitäten	1	1	2
Anzahl der auftretenden Span- nungen in Integrationspunkten	2798	5578	5612
Anzahl der auftretenden Haupt- spannungen in Elementmitte	1020	2040	2040
Anzahl der Ligamente	6	7	12

Tab. 1: Systemdimensionen

Die Bearbeitung der oben beschriebenen mathematischen Modelle wurde zu Beginn der Studien PC-basiert durchgeführt. Dabei stellten sich allerdings bei dem symmetrischen monosegmentalen Modell nach kurzer Zeit, trotz Verwendung eines

Multitasking-Betriebssysteme (OS/2) mit virtueller Speicherverwaltung auf 4MB PCs, erhebliche Beschränkungen ein. Mit der Entwicklung des asymmetrischen und des mehrsegmentalen Modells wurde auf leistungsfähige RISC/6000 Maschinen gewechselt. Unter dem dort laufenden Betriebssystem AIX 3.2.5 können die umfangreicheren Studien mit einem vertretbaren Aufwand bewältigt werden. Neue zukünftige Rechnergenerationen dürften es erlauben, den numerischen Umfang nochmals anwachsen zu lassen.

5.6 Optimierung der Lösungsstrategie

Zur verbesserten Lösung der Gleichungssysteme, die sich aus dem Finite-Elemente-Verfahren ergeben, gibt es insbesondere im Hinblick auf die notwendige Rechenzeit und den notwendigen Speicherbedarf verschiedene Ansatzpunkte. Die notwendige Rechenzeit hängt im wesentlichen von dem zugrunde liegenden Programm-Code und dem verwendeten Compiler zur Übersetzung des Quell-Codes in Objekt-Code ab. An beiden Stellen lassen sich mit hohem Aufwand mäßige Gewinne erzielen. Oft ist die Hardwareentwicklung schneller vorangeschritten als das Programm optimiert werden kann. Da die Lösung der mechanischen Problemstellung mit der Finite-Elemente-Methode zu den oben beschriebenen Gleichungssystemen führt, die im Verlauf der Berechnung mehrere hundertmal gelöst werden müssen, ist eine Optimierung an dieser Stelle äußerst effizient. Insbesondere die System-Steifigkeitsmatrix, die allgemein nur spärlich besetzt ist, bietet sich dafür an.

Die Anordnung der Koeffizienten dieser zentralen Matrix hängt von der Numerierung der Knoten und deren Lage an den einzelnen Elementen ab. Ziel muß es darum sein, die Nichtnullelemente als möglichst schmales Band entlang der Hauptdiagonale anzuordnen. Unter Verwendung eines Bandlösers brauchen dann alle Koeffizienten außerhalb dieses Bandes nicht abgespeichert zu werden. Mit der Bandbreitenoptimierung vor einem Rechenlauf lassen sich somit zwei Ziele gleichzeitig erreichen, zum einen wird weniger Speicherbedarf für das Band der Systemsteifigkeitsmatrix benötigt, und zum anderen lassen sich die Systemgleichungen auf Grund der fehlenden Nullelemente schneller und oft numerisch stabiler lösen.

Der Finite-Elemente-Analyse liegt ein Netz aus i Elementen und k Knoten zugrunde. Die Kopplung der Elementknoten mit den Systemknoten wird in der Topologiematrix oder Inzidenzmatrix angegeben. Mit Hilfe der Graphentheorie läßt sich dieses topologische Problem elegant mathematisch beschreiben.

Zur optimalen Numerierung der Knoten im Hinblick auf den Lösungsprozeß bieten sich Algorithmen an, die effizienter sind, als alle $i!$ möglichen Knotennumerierungen bzw. $k!$ Elementnumerierungen zu untersuchen [ALWAY und MARTIN (1965)]. Zu einer solchen Untersuchung der bestmöglichen Numerierung der Knoten eignen sich vor allem die Algorithmen von COLLINS (1973), CUTHILL (1972) und GIBBS-POOLE-STOCKMEYER [GIBBS et al (1976)].

Einen besonders effizienten Algorithmus, basierend auf graphentheoretischen Überlegungen, entwickelte BREMER (1986). Unter Berücksichtigung der Stufenstruktur und geeigneter Auswahl der aussichtsreichsten Startknoten lassen sich erhebliche Erfolge bei der Verringerung der Bandbreite erreichen.

Zur Bewältigung der unten beschriebenen Modelle und deren Optimierung wurde insbesondere der Algorithmus von Bremer eingesetzt. Die Verringerung der

Bandbreite, also des Bereichs der Systemsteifigkeitsmatrix, der mit Nichtnullelementen besetzt ist, läßt sich an nachfolgender Tabelle ablesen.

Modell	Struktur vorher	Struktur nachher (Algorithmus)	NEUE Band- breite in %
Monosegmental	60	60 (Bremer)	100
		60 (Aller Stufen)	100
		60 (Akhras)	100
		60 (Bremer/All)	100
		56 (Aller/Akhras)	93
		60 (Collins)	100
Asymmetrisch	580	92 (Bremer)	16
		100 (Collins)	17
Asymmetrisch mit Fixateur	119	92 (Bremer)	77
		74 (Aller Stufen)	62
		76 (Akhras)	64
		74 (Bremer/Ad)	62
		74 (Aller/Akhras)	62
		83 (Collins)	52
Mehrsegmental	798	116 (Bremer)	15
		119 (Collins)	15

Tab. 2: Optimierungsmöglichkeiten an den einzelnen FEM-Modellen

Insbesondere durch die effiziente Nutzung der Numerik durch geeignete Vor- und Nachbereitung, und dabei besonders die Verringerung der Gleichungssystem-Dimensionen, ist die Vielzahl und der Umfang der hier vorgestellten Rechenläufe nur möglich.

5.7 Pre- und Postprozessing

Die Aufbereitung und Vorbereitung (Preprozessing) von numerischen Analysen wird mit zunehmender Komplexität fast unüberschaubar. Zur schnellen und effizienten Erstellung von komplexen Analysedaten, wie im Rahmen dieser Arbeit dargestellt, bedarf es leistungsfähiger Hilfsmittel.

Zur Unterstützung der Erstellung und Manipulation der zu Beginn dieses Kapitels vorgestellten Modelle wurde aus einem universellen Hilfsprogramm (Hypermesh) ein Hilfsmittel weiterentwickelt, welches die Vorbereitung von Rechenläufen ermöglicht. Dieses Programm, im folgenden "Preprozessor" genannt, ist somit in der Lage, weitestgehend den Datenbestand für das eigentliche Rechenprogramm "MUSP" zu verwalten. Über eine eigens dafür geschaffene Schnittstelle am Ausgang des Preprozessors gelangt die Datenbasis zum Rechenprogramm. Diese Daten enthalten eine Vielzahl von Informationen und Verknüpfungen über die zu berechnende Fragestellung. Die Informationen über die Koordinaten und die Topologie des Rechenmodells sind Bestandteil der Datenbasis. Weiter sind die Randbedingungen und aufzubringenden Verschiebungen oder Lasten in dem Datenbestand enthalten. Letztlich sind die Materialdaten und eine Reihe von allgemeinen Parametern zu verwalten und zu übergeben.

Die Darstellung der Rechenergebnisse aus numerischen Analysen, insbesondere von Finite-Elemente-Untersuchungen, sind auf Grund ihrer Vielzahl nur unter Verwendung geeigneter graphischer Ausgabeprogramme (Visualisierer) übersichtlich möglich. Eine Beschränkung auf reine Last- Verschiebungskurven stellt dabei kein geeignetes Mittel dar. Insbesondere gehen bei der Darstellung der globalen Verschiebungen nur einzelner ausgesuchter Knoten, oder auch daraus berechneter globaler Verschiebungen und Verdrehungen, eine große Anzahl von Informationen verloren. Im Rahmen der Ergebnisaufbereitung im Kapitel 6 lassen sich durch die Verwendung eines entsprechenden "Postprozessors", der in der Lage ist, im dreidimensionalen Raum lagegetreu und maßstäblich alle Knotenverschiebungen, Spannungen oder Dehnungen darzustellen, wesentlich mehr Ergebnisse übersichtlich visualisieren.

Für die Verwendung des bereits als Preprozessor eingesetzten Hilfsprogramms (Hypermesh) muß am Ende des Berechnungsvorgangs eine Datenbasis mit den darzustellenden Ergebnissen aus der Berechnung verfügbar sein. Dabei wurden die Ausgabedaten nach folgender Strategie festgehalten: "Möglichst wenige Daten abspeichern mit der Prämisse, aus diesen Daten alle notwendigen Sekundärdaten schnell berechnen zu können."

Alle darzustellenden abhängigen Ergebnisse, wie Hauptspannungen oder globale Verschiebungen und Rotationen, werden in einem Konvertierungsprogramm vorgenommen, das ganz nach Bedarf gezielte Aufbereitungen vornehmen kann. Dieses menugesteuerte Programm erstellt eine direkt lesbare Datenbasis für die anschließende Visualisierung.

Der eingesetzte Postprozessor erlaubt dabei umfangreiche Möglichkeiten der Darstellung und Analyse der Ergebnisse. Neben der Darstellung des Finiten-Element-Netzes als Gitterzeichnung mit den berechneten Knotenverschiebungen lassen sich die Verschiebungen auch auf die mit verdeckten Linien dargestellte Geometrie projizieren. Weiter ist es möglich, kombinierte Darstellungen zu erstellen, wobei die verformte Konfiguration mit verdeckten Kanten zu sehen ist. Dieses verformte Modell wird mit den Spannungen im Element oder in den globalen Knoten überzogen. Weitere mögliche Ergebnisdarstellungen finden sich im 6. Kapitel wieder.

Eine besonders anschauliche Darstellung, die im Rahmen dieser Arbeit nicht gezeigt werden kann, ist der Ablauf verschiedener Verformungszustände in kurzer zeitlicher Abfolge, durch die der Beobachter einen sehr guten Eindruck von den auftretenden Verformungen gewinnt.

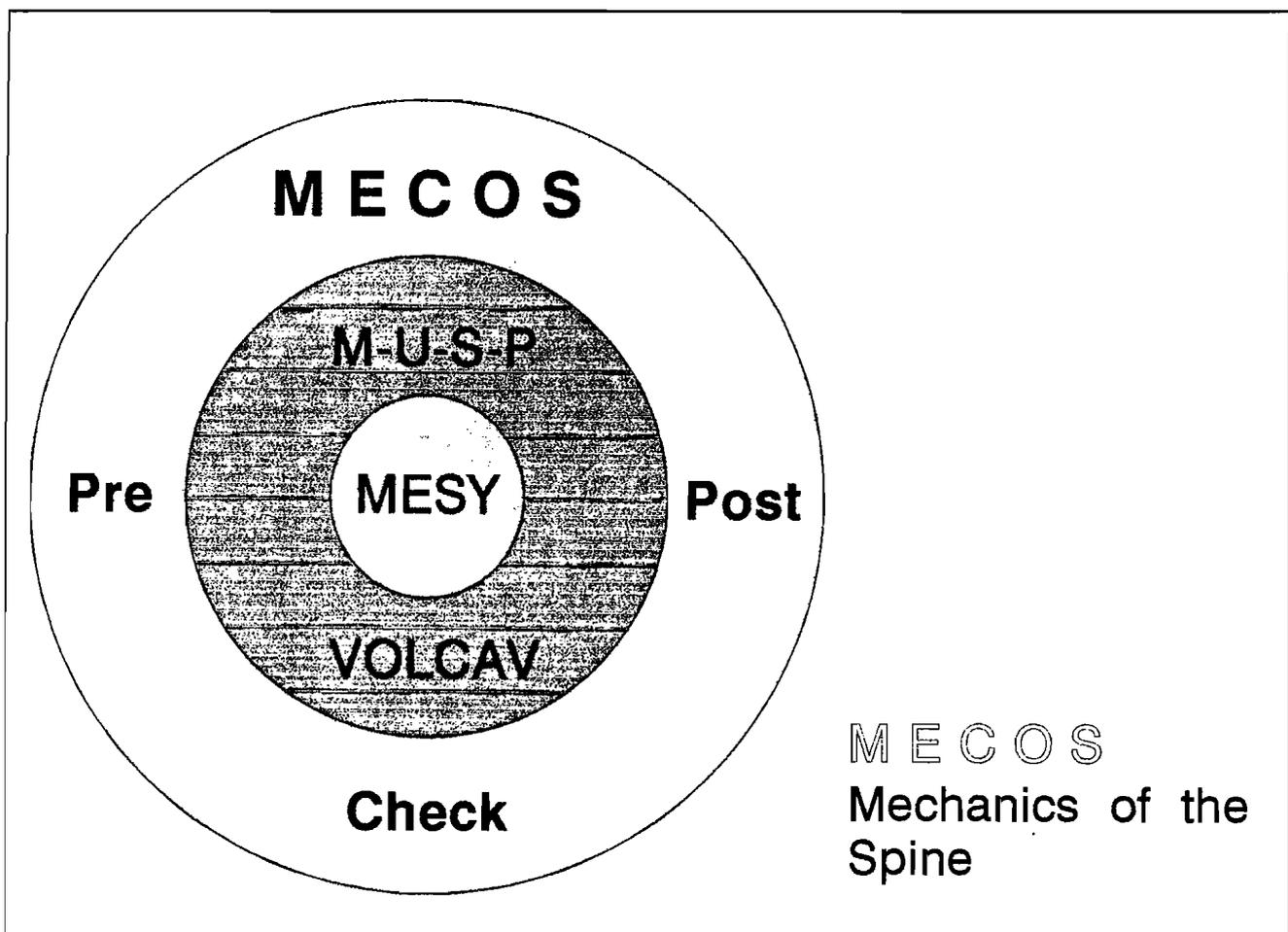
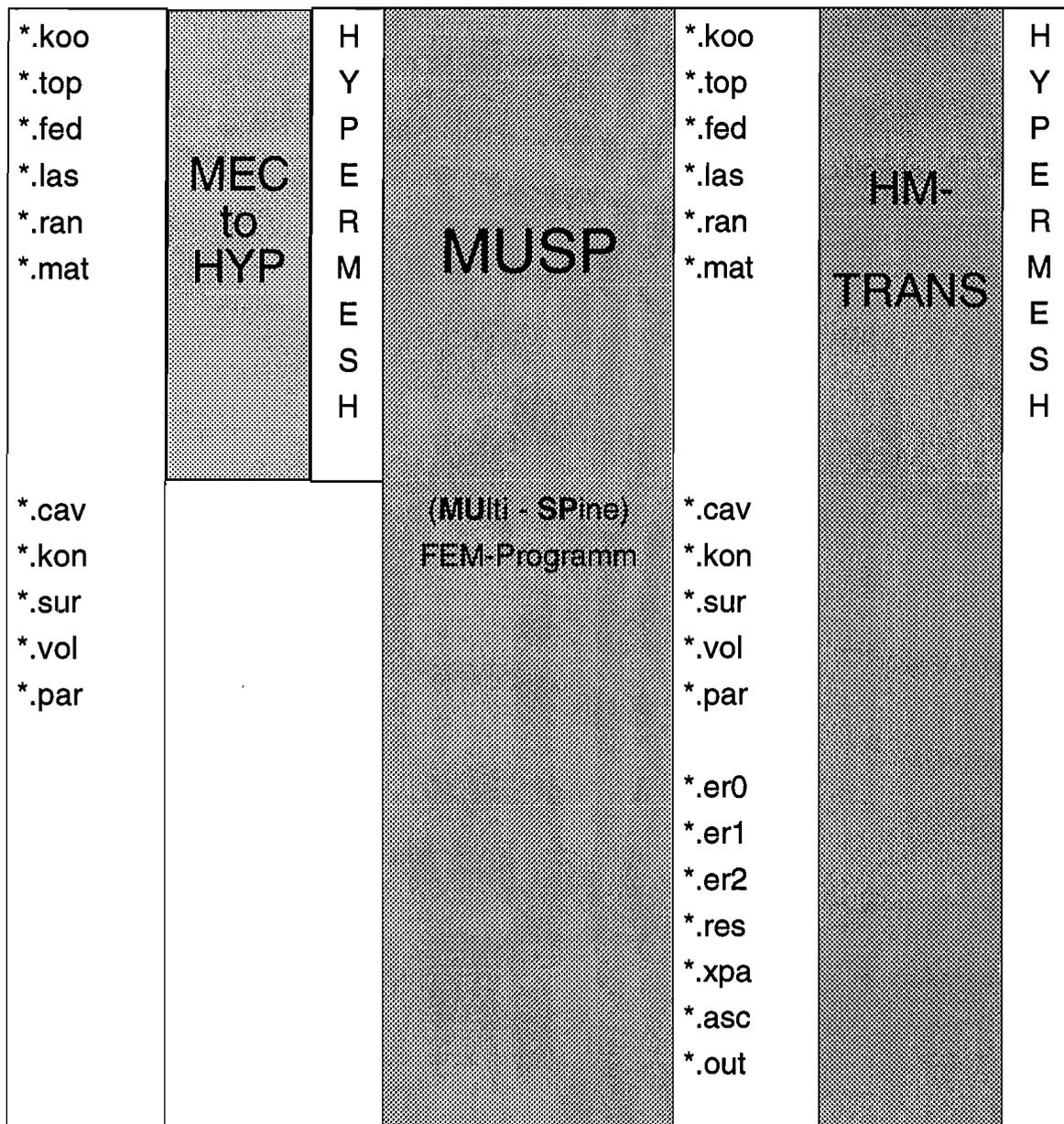


Abb. 29: MECOS (Mechanics of the Spine)

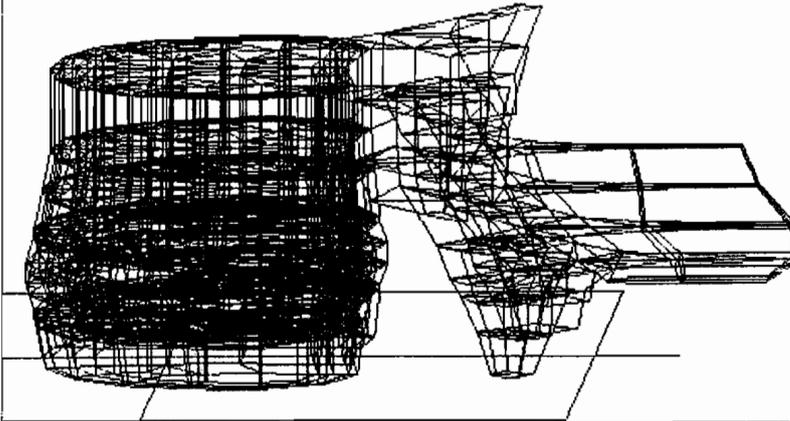
Durch den modularen Aufbau der verwendeten Basisbibliothek MESY (MEchanik der SYstems) [SCHRADER (1983)] bleibt der gesamte Lösungsprozess sehr übersichtlich und gut strukturiert. Für die Steuerung der Routinen wurde zum Teil auf Erweiterungen aus MINIMOD [CHROSIELEWSKI und NOLTE (1985)] und VOLCAV [PINGEL (1991)] zurückgegriffen. Als gesamtes Programmsystem ist - durch eine Reihe weiterer Routinen - das Programmpaket MECOS entstanden.

Aus der nachfolgenden Tabelle geht die grobe Struktur des Datenflusses zwischen den einzelnen Systemkomponenten hervor.



Tab. 3: Struktur und Daten in MECOS

- Koordinaten
- Topologie



```
*****
* MENU-Feld *
*****
Fak(150)100
Ty (0.1)
Tx (0.5).2
File:voll2
? voll2

KNOTEN-KOO.
Von:
3D ELEMENTE
Von:1 bis:1000

CAVITY ELEMENTE
Von:

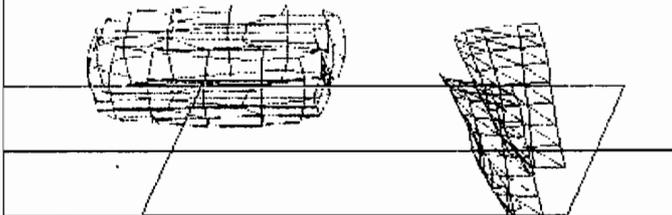
STÄBE/FEDERN
Von:

SURFACE
Von:

cls (j/n/e):j
```

Lade voll2 1 / 1000 ***** 905 920 921 904 941 1014 1013 940 680 **

- Kontaktflächen
- Cavities



```
*****
* MENU-Feld *
*****
Fak(100)100
Ty (0.1)
Tx (0.2).2
File:voll2
? voll2

KNOTEN-KOO.
Von:
3D ELEMENTE
Von:1 bis:1000

CAVITY ELEMENTE
Von:1 bis:1000

STÄBE/FEDERN
Von:

SURFACE
Von:1

cls (j/n/e):j
```

Lade voll2***** 1 430**
Lade voll2 1 / 1000 ***** 905 920 921 904 941 1014 1013 940 128 **

Abb. 30: Graphischer Preprozessor

6. Anwendungen und Ergebnisse

Im folgenden sechsten Kapitel werden die bis hierher vorgestellten Ableitungen und Vorgehensweisen an ausgesuchten Anwendungen der Biomechanik überprüft. Anhand der nachfolgenden Beispiele läßt sich die theoretische Herleitung der mechanischen Zusammenhänge und deren numerische Umsetzung anschaulich einsetzen. Dabei kommt der Darstellung der umfangreichen Rechenergebnisse ein besonderer Stellenwert zu. Durch den Einsatz des grafischen Postprozessors lassen sich die komplexen Zusammenhänge übersichtlich visualisieren.

Die hier vorgestellten Ergebnisse wurden an drei verschiedenen Modellen berechnet. Es stand ein symmetrisches monosegmentales Modell zur Verfügung, das im wesentlichen für die Schubuntersuchungen verwendet wurde. Das Asymmetrische monosegmentale Modell wurde für die nichtsymmetrischen Lastgruppen herangezogen. Für die Berechnungen an mehrsegmentalen Wirbelsäulenabschnitten wurde das bisegmentale Modell benutzt. Alle drei Rechenmodelle setzen das gleiche Finite-Elemente-Programm voraus, das sich den unterschiedlichen Anforderungen der Simulationen entsprechend anpaßt.

6.1 Allgemeines

In der nachfolgenden Tabelle wird eine kurze Einordnung der Rechenergebnisse in den gesamten Kontext der biomechanischen Analyse vorgenommen. Dabei soll an dieser Stelle insbesondere auf die Interaktion zu begleitenden experimentellen Untersuchungen hingewiesen werden. Dabei zeichnen sich die numerischen Analysen besonders durch die Tatsache aus, daß eine unproblematische Wiederholbarkeit möglich ist.

	<i>experimentell</i>	<i>numerisch</i>
<i>Invivo</i>	Patientengut Klinische Fragestellungen Anatomische Gegebenheiten	
<i>Modellbildung</i>	Präparat "invitro" experimentelles Modell	Numerisches Rechenmodell
<i>Versuchsphase</i>	Umfangreiche Untersuchungen an Präparaten - monosegmental - multisegmental	Exemplarische Studien an repräsentativen Modellen - monosegmental (symm.) - monosegmental (asymm.) - multisegmental
<i>Auswertung</i>	makroskopische Messdaten über Punktverschiebungen und/oder Starrkörperbewegungen	makroskopische und auch detaillierte Rechenergebnisse über Punktverschiebungen und/oder Starrkörperbewegungen sowie über auftretende innere Spannungen, Dehnungen und Drücke
<i>Ergebnisse</i>	neue Erkenntnisse / Verhaltensempfehlungen	

Tab. 4: Struktur Experimentelle und Numerische Studien

In der folgenden Tabelle sind die Numerischen Studien der vorliegenden Arbeit, die in diesem Abschnitt wiedergegeben werden, übersichtlich zusammengefaßt.

Bezeichnung	Verformungen	Ligamentkräfte	Spannungen	Hauptspannungen	Kapitel	Abbildung
<i>(symmetrisch.)</i>						
kval	x	x	x	o	6.2.1	1,2,3,4
fval	x	x	x	o	6.2.2	5 - 14
eval	x	x	x	o	6.2.3	15 - 24
schub+	x	x	x	o	6.2.6	45 - 57
schub-	x	x	x	o	6.2.6	45 - 57
schub+o	x	x	x	o	6.2.6	46 - 58
schub-o	x	x	x	o	6.2.6	46 - 58
fix	o	o	o	o	6.4.5	
frak	x	x	x	o	6.3	59 - 68
<i>(asymmetrisch)</i>						
fval1	o	o	o	o	(siehe 6.2.2)	
eval1	o	o	o	o	(siehe 6.2.3)	
lval	x	x	x	o	6.2.4	25 - 34
tval	x	x	x	o	6.2.5	35 - 44
<i>(multisegmental)</i>						
					6.4	69 - 70
mfval	x	x	x	o	6.4.1	71 - 78
meval	x	x	x	o	6.4.2	79 - 86
Erläuterung:						
x = analysiert und dargestellt						
o = analysiert						

Tab. 5: Übersicht der durchgeführten Berechnungen

6.2 Monosegmentales Bewegungssegment

Für die Beurteilung der Biomechanik der Wirbelsäule ist die Untersuchung eines Bewegungssegmentes aus Wirbelkörper-Bandscheibe-Wirbelkörper Grundvoraussetzung für weitergehende Untersuchungen. Dies ist Ursache für die eingehende Erforschung eines solchen isolierten Junghannsschen Bewegungssegmentes.

Die nachfolgenden Abschnitte stellen die Ergebnisse, die sich aus den monosegmentalen Berechnungen ergeben in X-Y-Plots und dreidimensionalen Ansichten dar. Zur Wiedergabe einzelner Abhängigkeiten zwischen einer unabhängigen Größe und einer berechneten Systemantwort werden zu Beginn der einzelnen Abschnitte jeweils X-Y-Plots verwendet. Zur Kenntlichmachung des komplexen Verhaltens unter den einzelnen Lastfällen sind die Knotenverschiebungen in den räumlichen Darstellungen mit Faktor zwei überhöht wiedergegeben. Darüber hinaus sind einige wenige Spannungsverläufe der vorgenommenen Analysen wiedergegeben. Die untersuchten Belastungen des monosegmentalen Bewegungssegmentes stellen alle denkbaren Einzellasten auf einen Körper im Raum dar. Es wurde lediglich auf eine Scherbelastung in Körperquerrichtung verzichtet, da diese keine biomechanische Relevanz hat.

Der Abschnitt 6.2.1 gibt die Ergebnisse der Belastung eines Segmentes durch Kompression wieder. Dabei fällt der deutlich nichtlineare Zusammenhang zwischen Kompressionslast und aufgebrachtener Verschiebung auf. Im Unterschied dazu verhält sich der Druck in der Bandscheibe fast linear zu der Belastung des oberen Wirbelkörpers. In den Verformungsplots des Bewegungssegmentes, und dabei besonders bei der detaillierten Betrachtung der Bandscheibe (Abb. E4), erkennt man die deutliche Vorwölbung des Annulus Fibrosus und die damit verbundenen Dehnungen. Die analysierten Momentenbelastungen um die drei Koordinatenachsen werden in den Abschnitten 6.2.2 bis 6.2.5 wiedergegeben. Sowohl bei Flexions- als auch bei Extensionsbelastung fallen deutliche Nichtlinearitäten zwischen Kraftgröße und auftretenden Verdrehungen sowie berechneten Ligamentkräften auf. Die Verformungsdarstellung zeigt deutlich das Herausquellen der Bandscheibe jeweils an der gestauchten Seite der Zwischenwirbelscheibe. Eine Aussage über die Beanspruchungen der einzelnen Regionen des 'Modell'-Wirbelkörpers gibt jeweils die berechnete Vergleichsspannung nach v. Mises. Besonders interessant ist die Betrachtung des verformten Segmentes unter einem Torsionsmoment, welches zu deutlichen Einschnürungen im Bereich der Bandscheibe führt. Dieses Phänomen scheint durch die Anspannung der kollagenen Fasern hervorgerufen zu werden. Das Verhalten eines Segmentes unter Scherbelastung mit und ohne posteriore Elemente ist besonders für klinische Belange und zur Analyse des Kraftflusses von Bedeutung. Es fällt auf, daß das Verhalten der reinen Bandscheibe annähernd symmetrisch ist.

6.2.1 Kompression

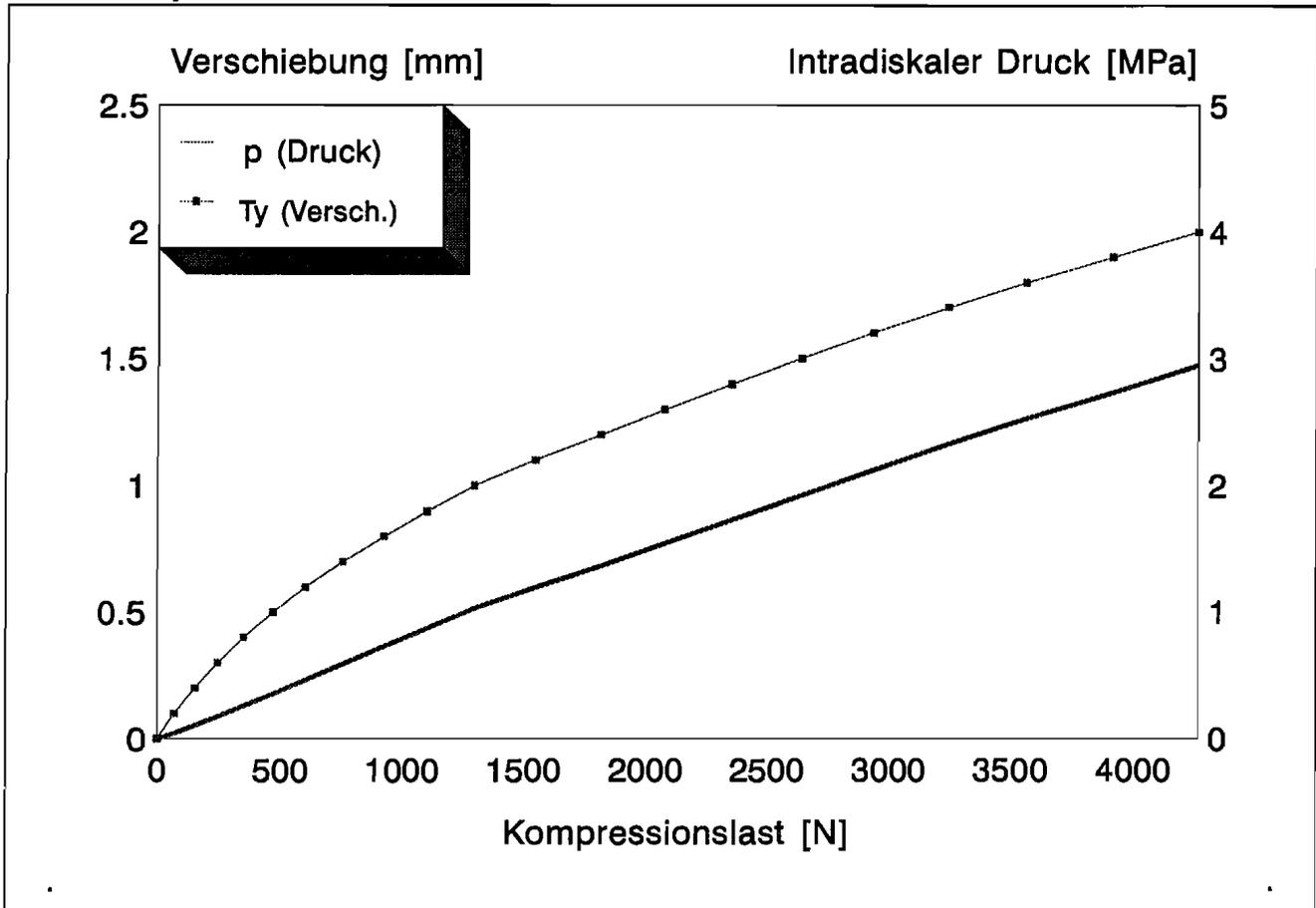


Abb. E1: Verschiebungen bei Kompressionsbelastung

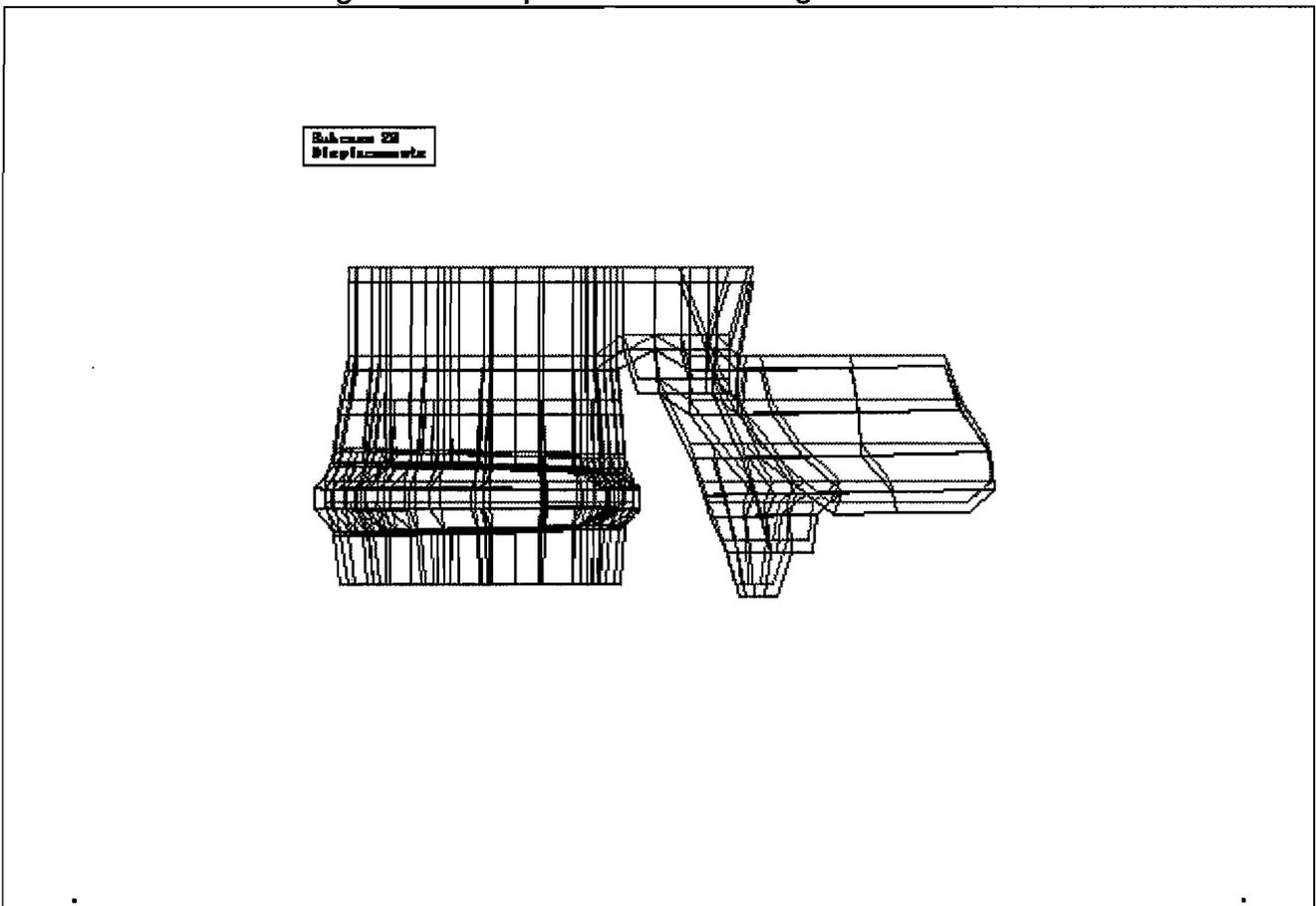


Abb. E2: Kompressionsbelastung (FEM-Netz)

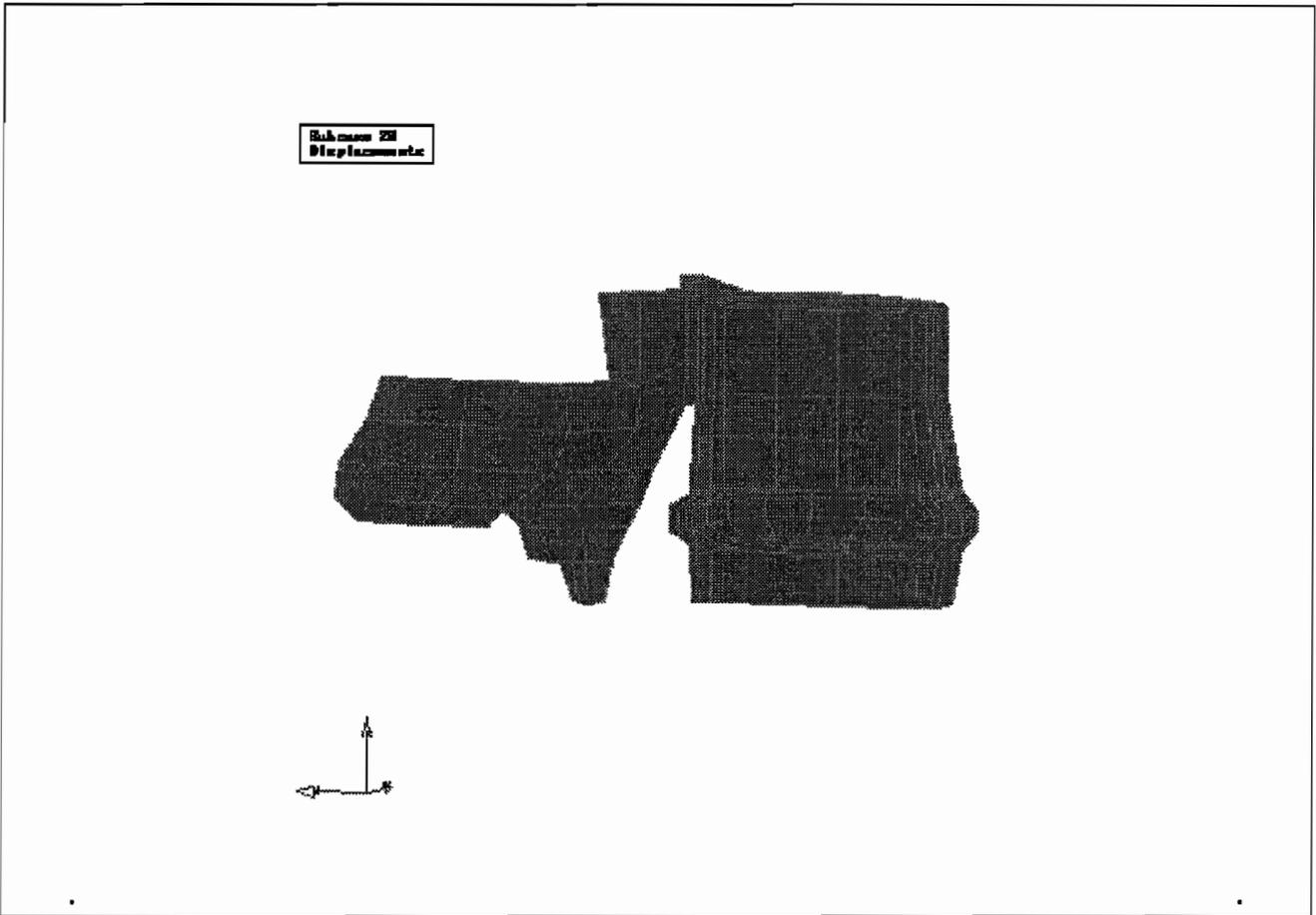


Abb. E3: Kompression (Ansicht mit Bandscheibe)

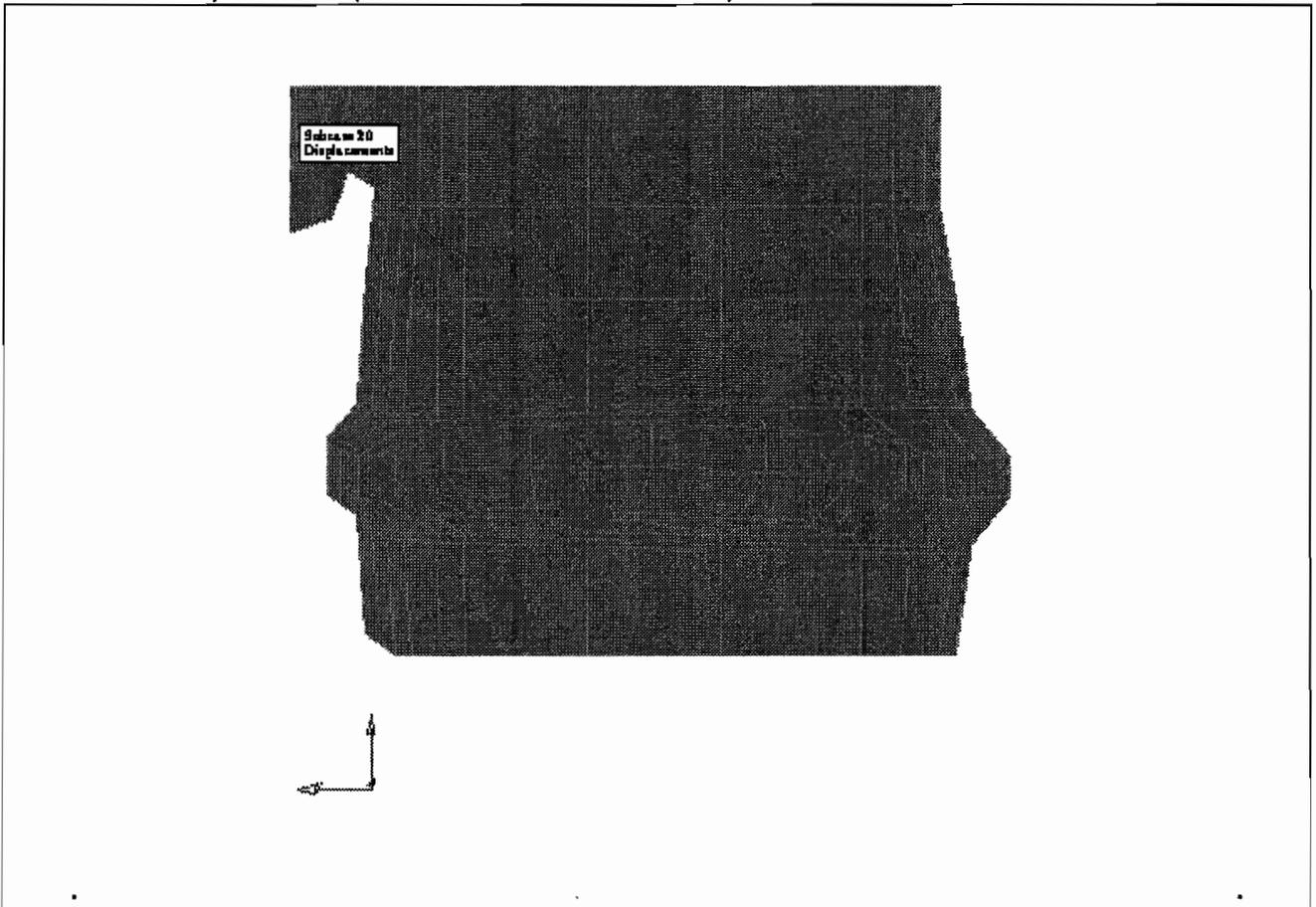


Abb. E4: Kompression (Detail mit Bandscheibe)

6.2.2 Flexionsmoment

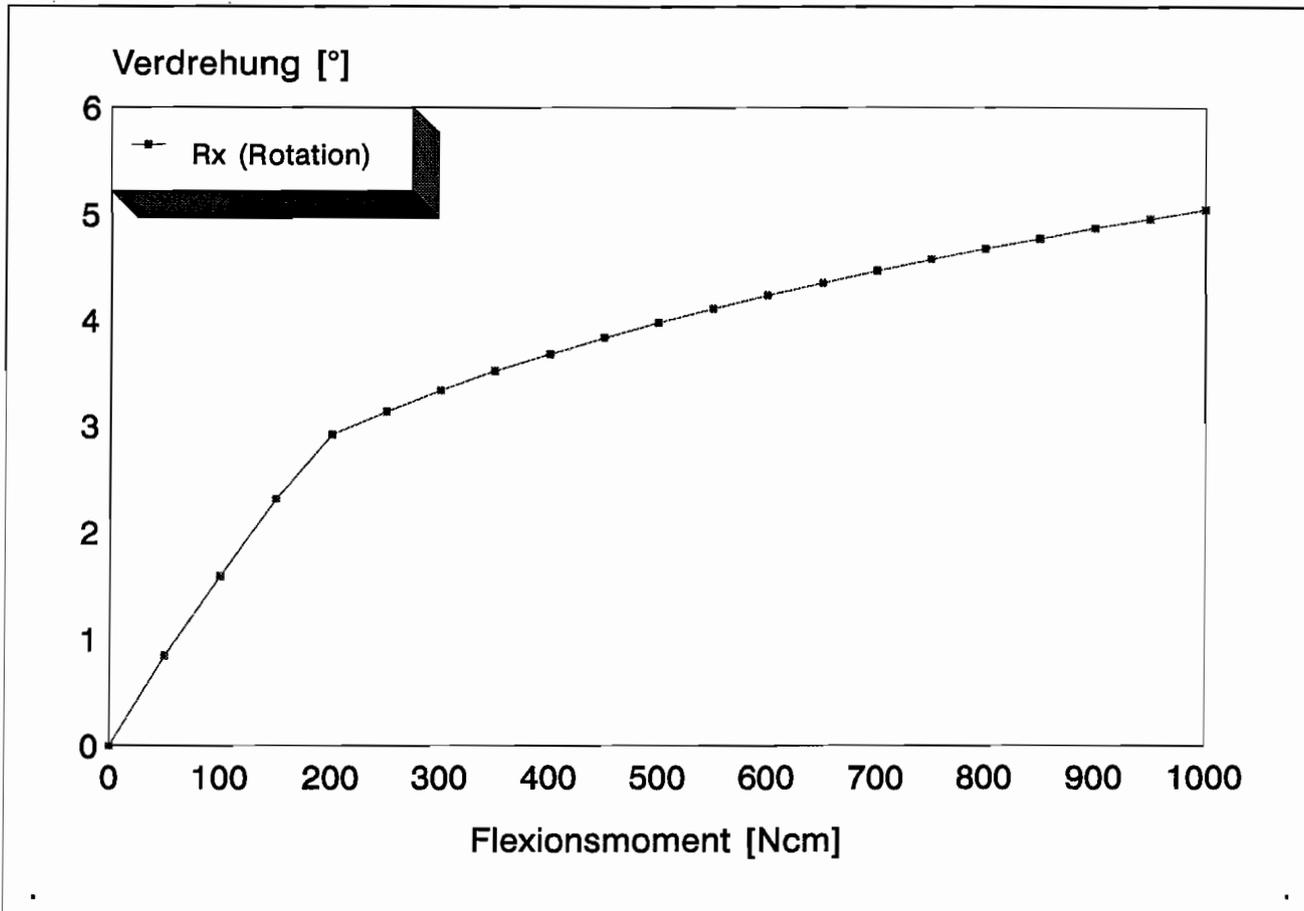


Abb. E5: Verdrehung des belasteten Wirbels unter Flexionsmoment

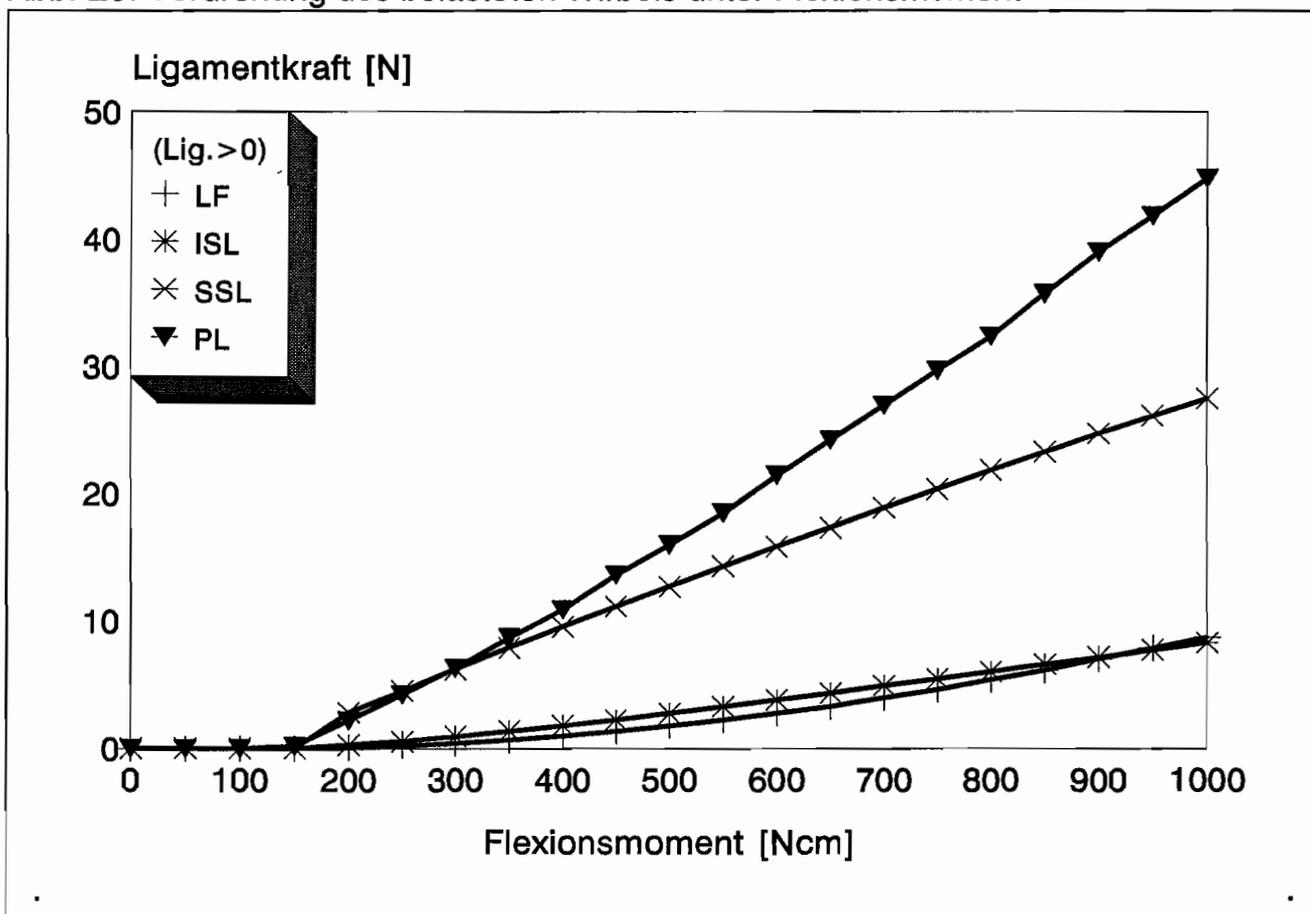


Abb. E6: Ligamentkräfte unter Flexionsbelastung

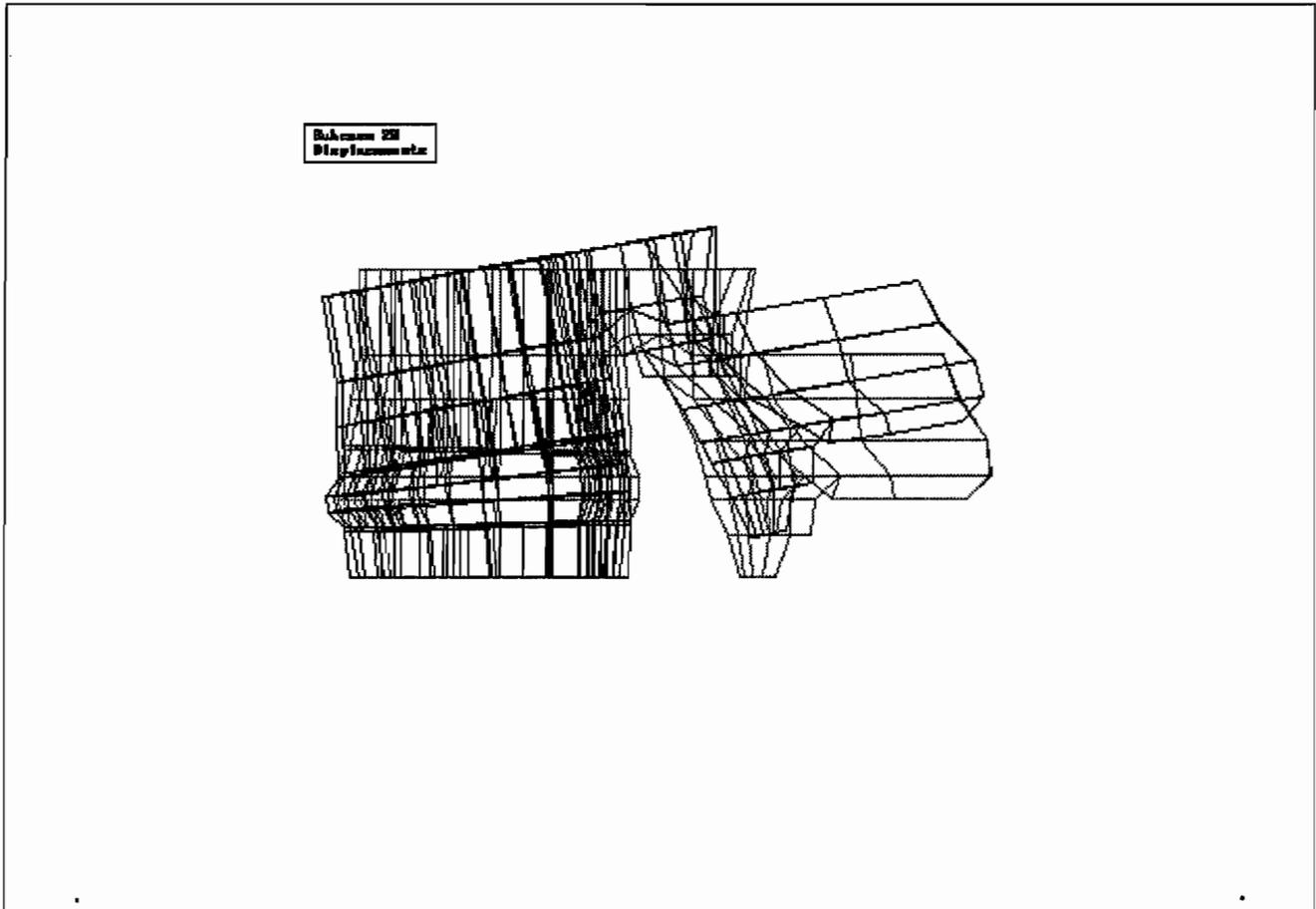


Abb. E7: Verformtes FEM-Netz bei einem Flexionsmoment von 1000Ncm

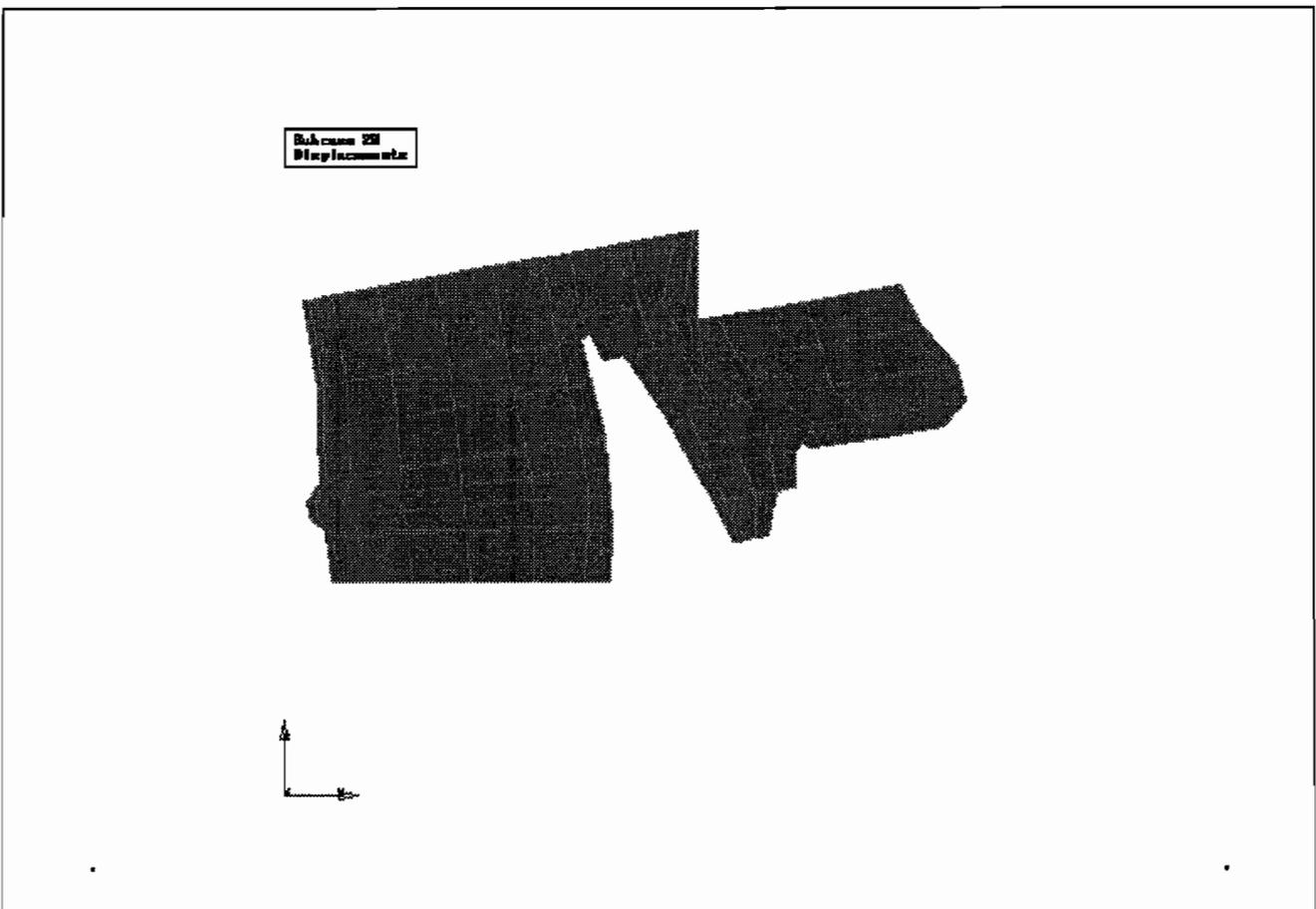


Abb. E8: Verformtes FEM-Modell bei einem Flexionsmoment von 1000Ncm

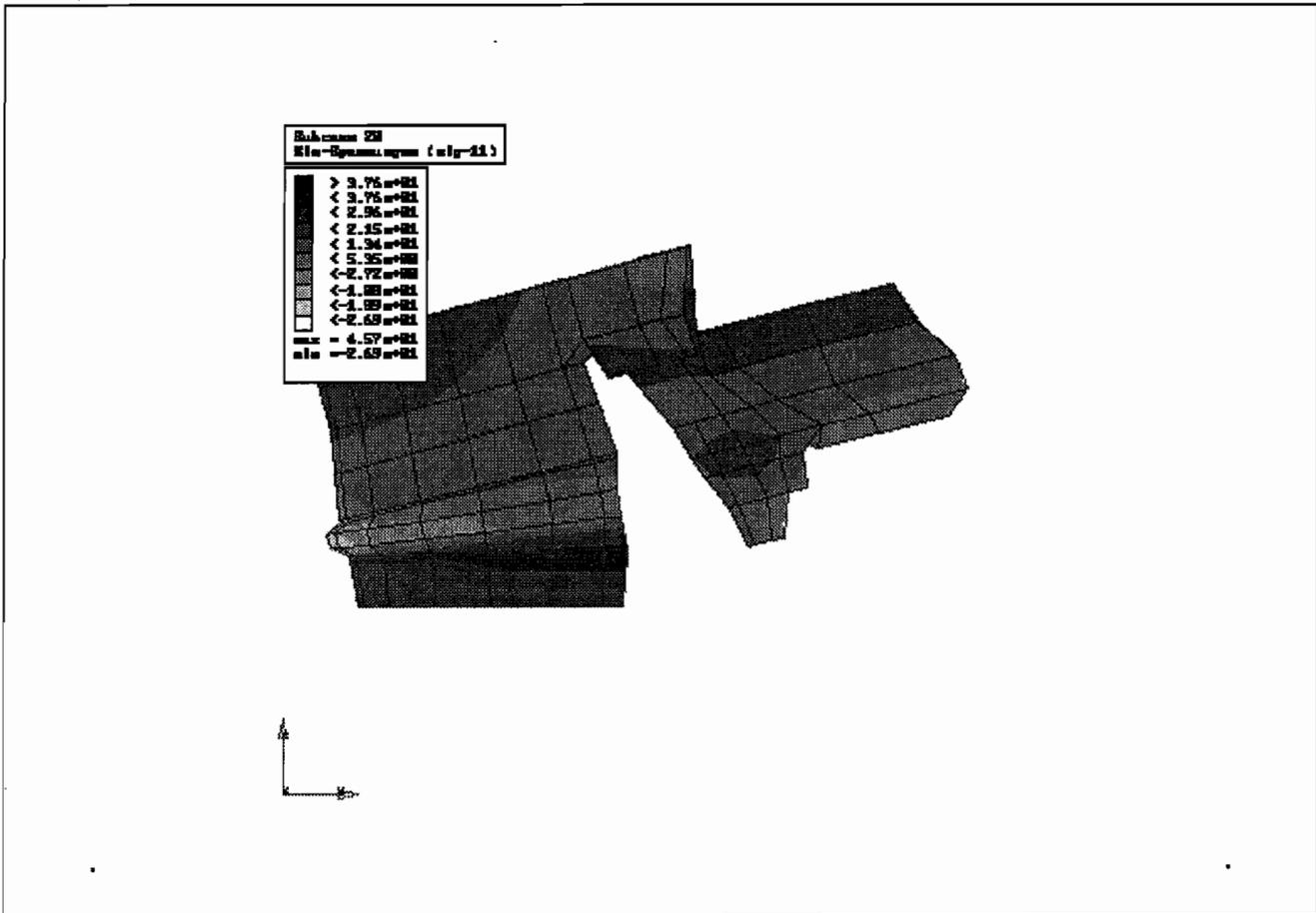


Abb. E9: Normalspannungsverteilung (x-Richtung) bei Flexion 1000Ncm

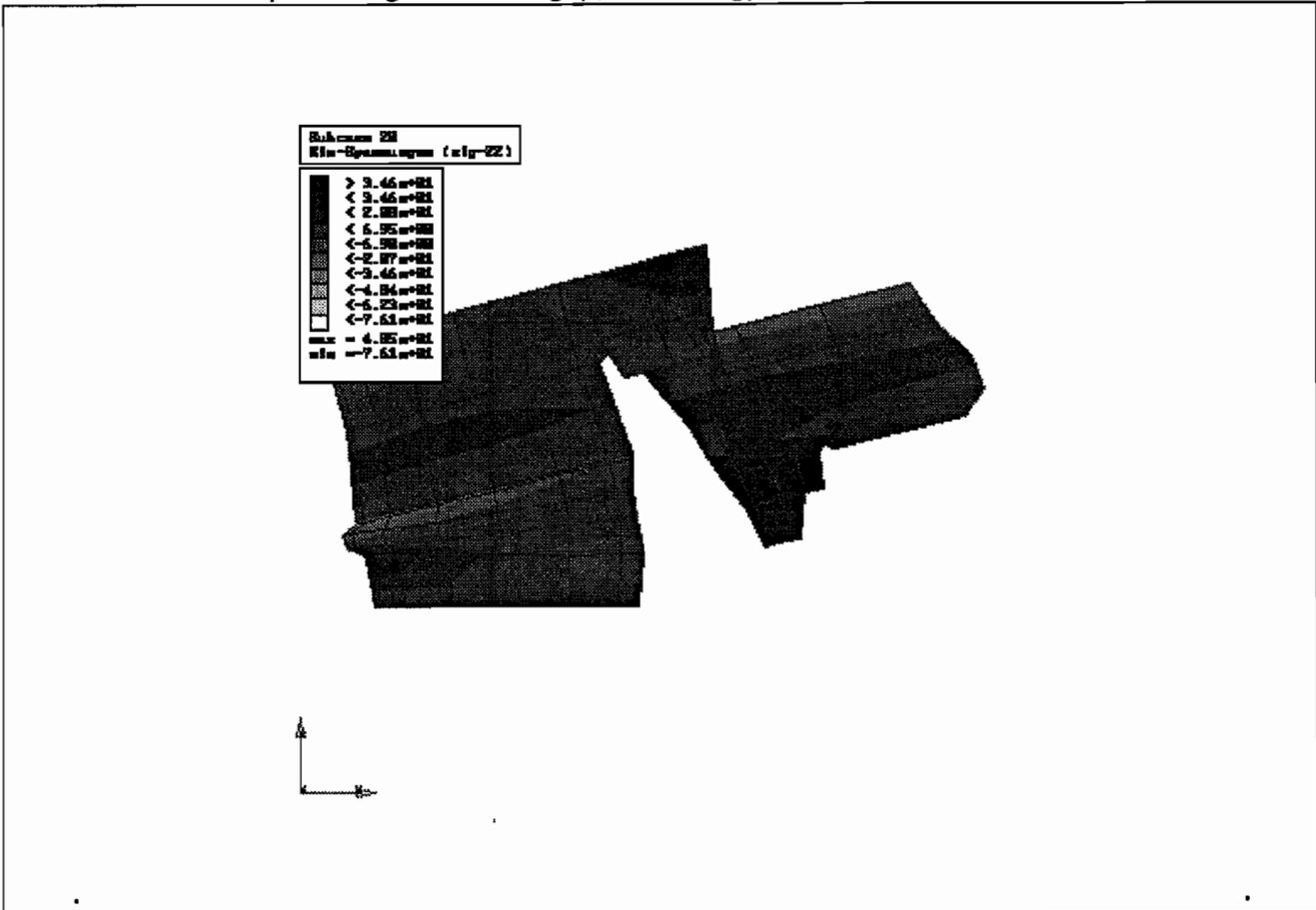


Abb. E10: Normalspannungsverteilung (y-Richtung) bei Flexion 1000Ncm

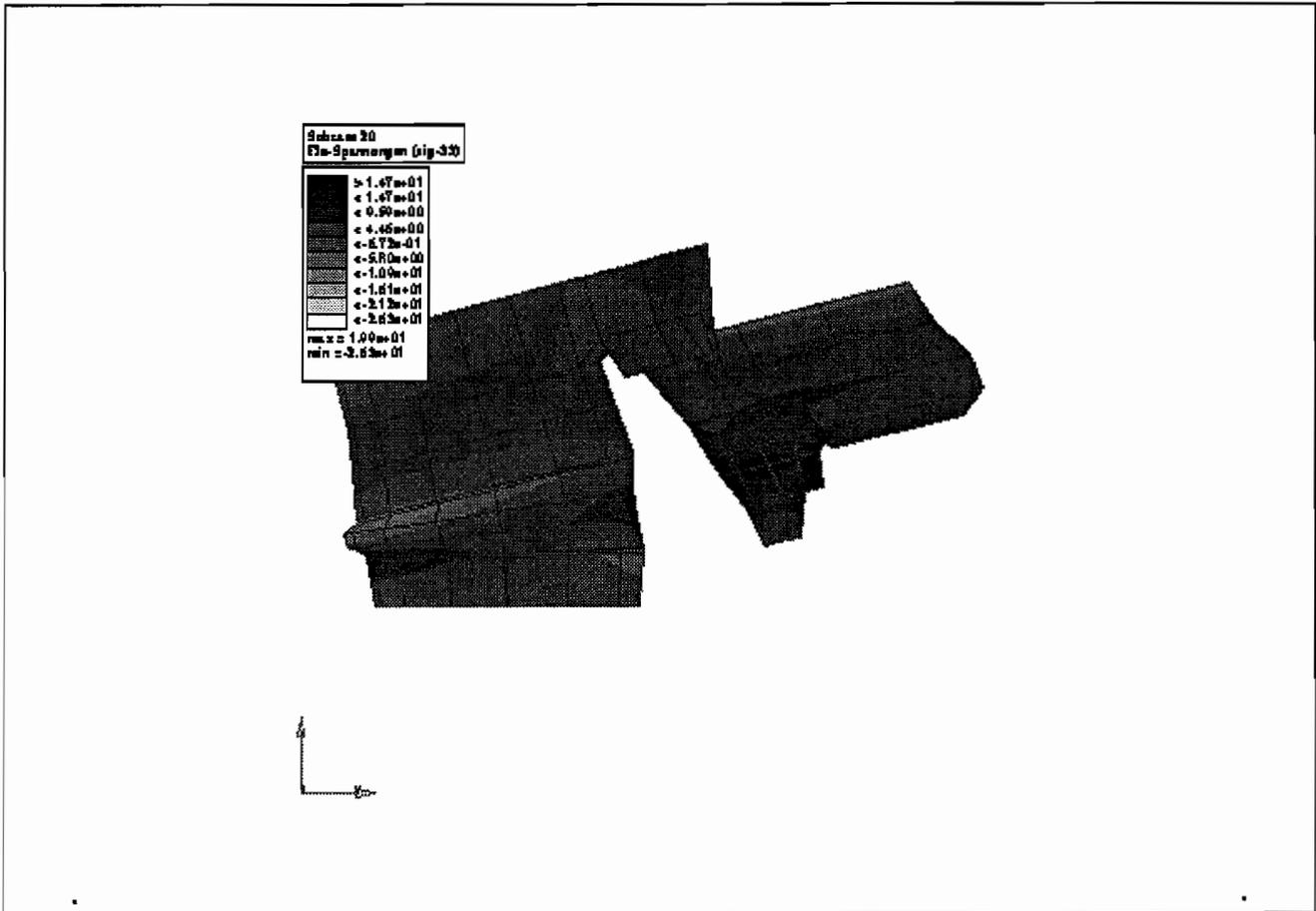


Abb. E11: Normalspannungsverteilung (z-Richtung) bei Flexion 1000Ncm

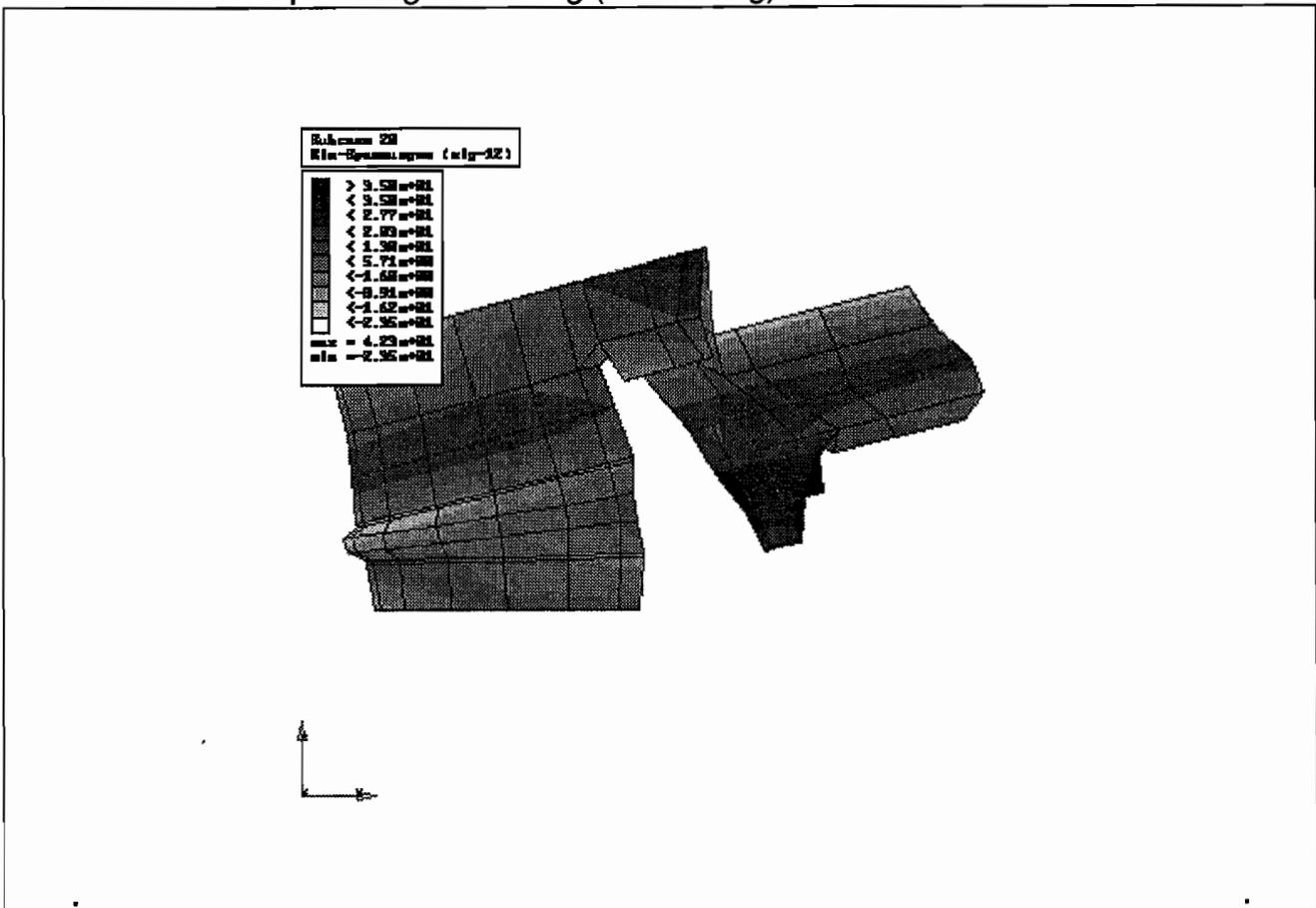


Abb. E12: Schubspannungsverteilung bei Flexion 1000Ncm

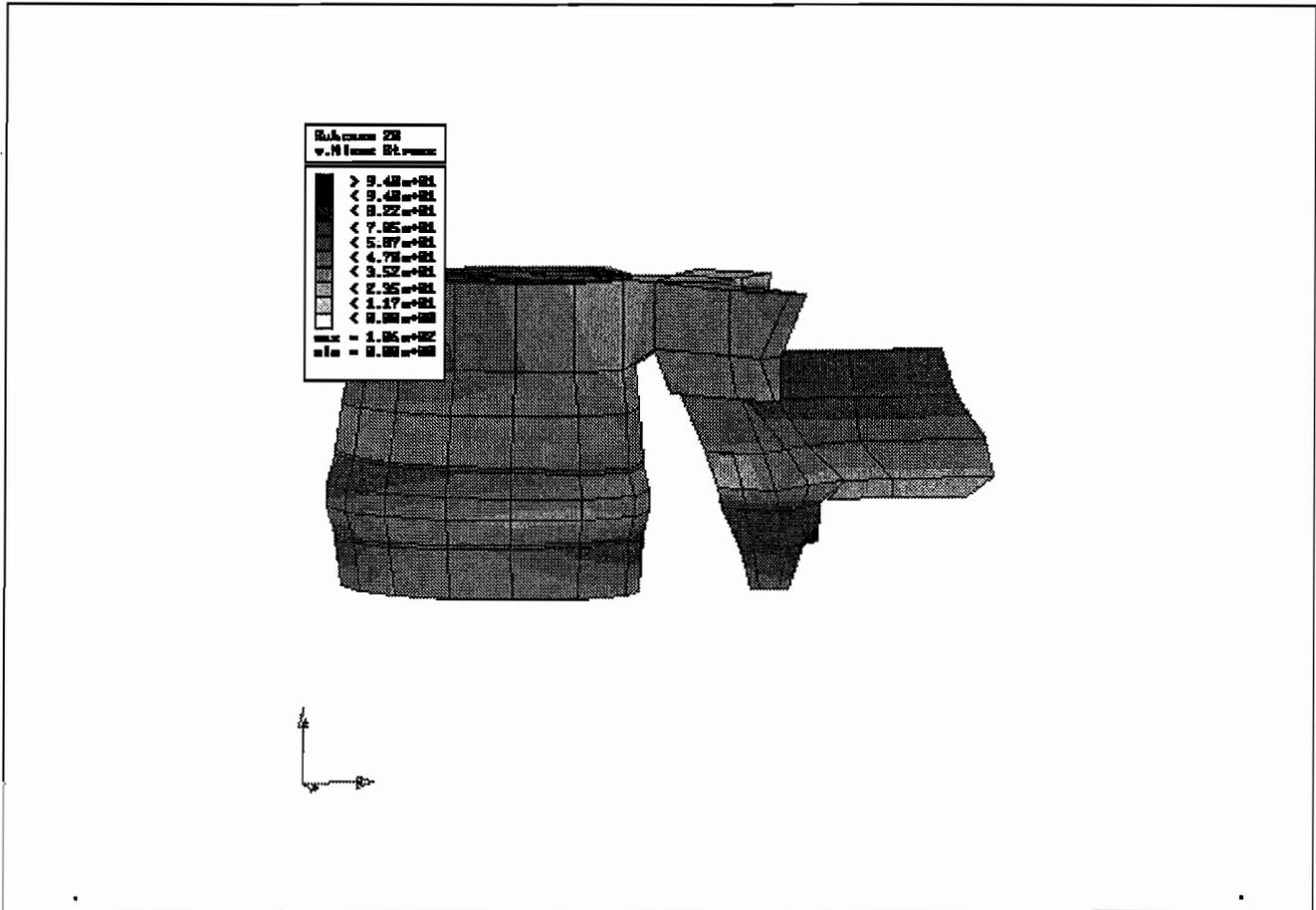


Abb. E13: Vergleichsspannung nach v. Mises bei Flexion 1000Ncm

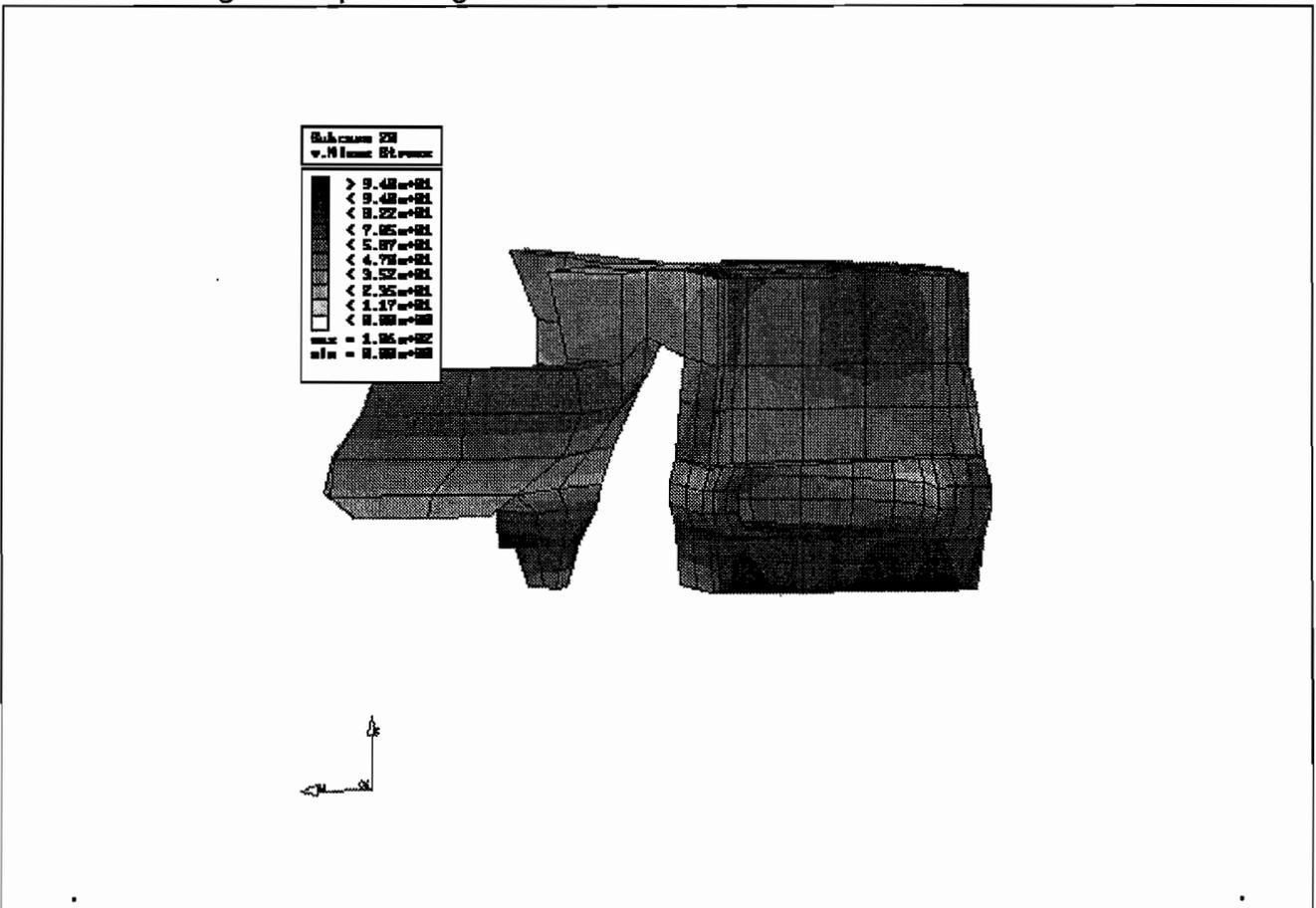


Abb. E14: Vergleichsspannung nach v. Mises bei Flexion 1000Ncm

6.2.3 Extensionsmoment

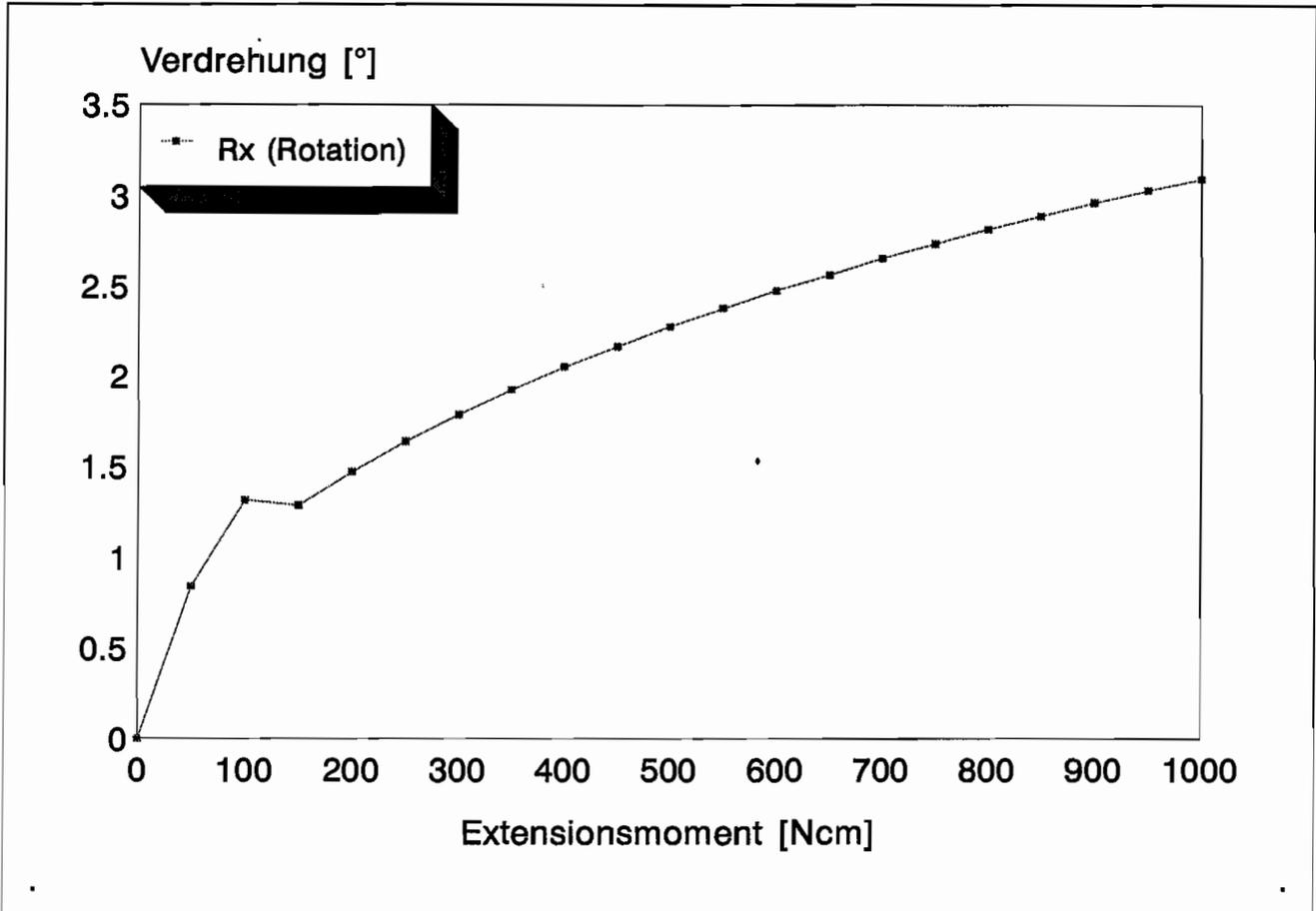


Abb. E15: Verdrehung des belasteten Wirbels unter Extensionsmoment

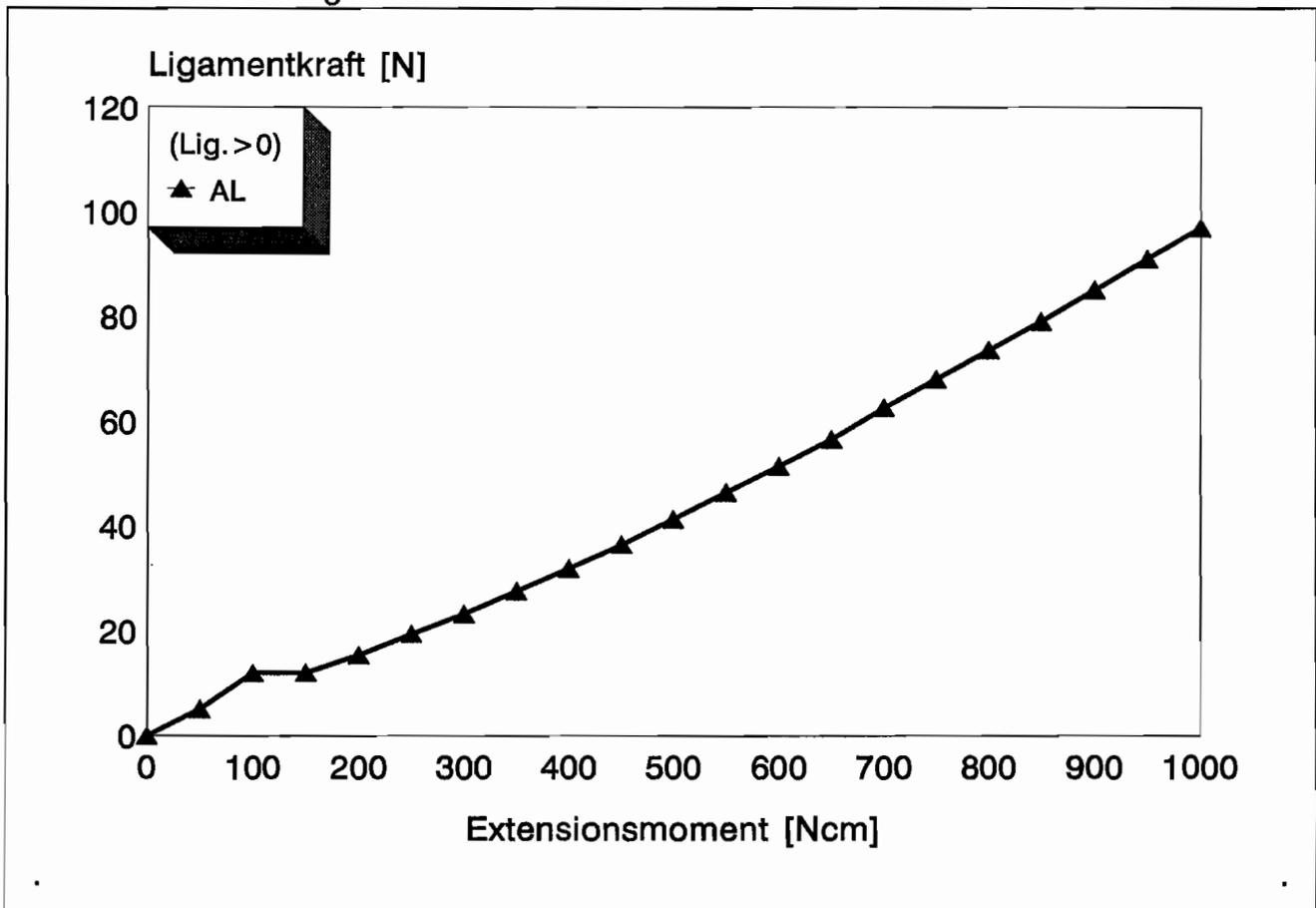


Abb. E16: Ligamentkräfte bei Extensionsbelastung

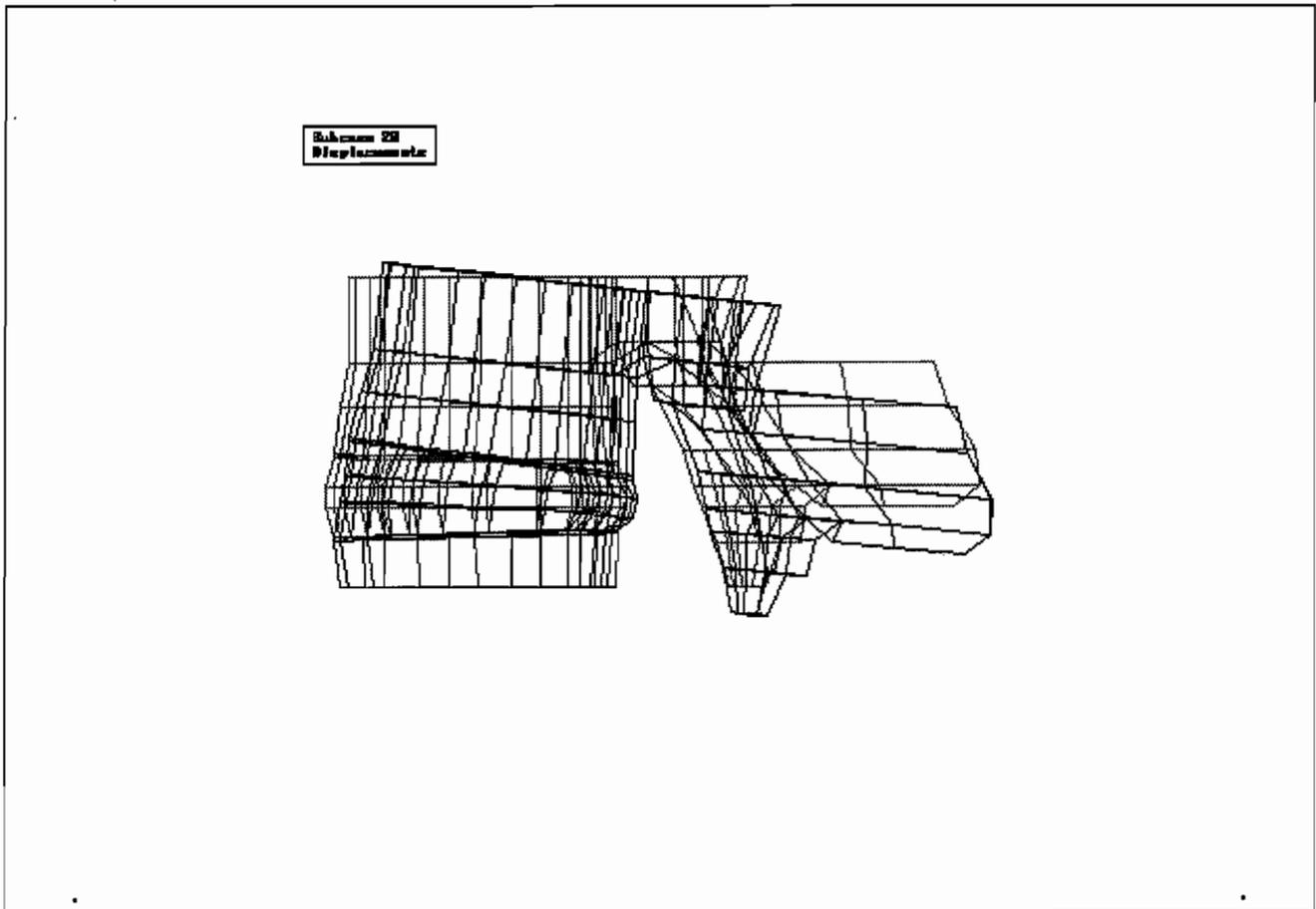


Abb. E17: Verformtes FEM-Netz bei einem Extensionsmoment von 1000Ncm

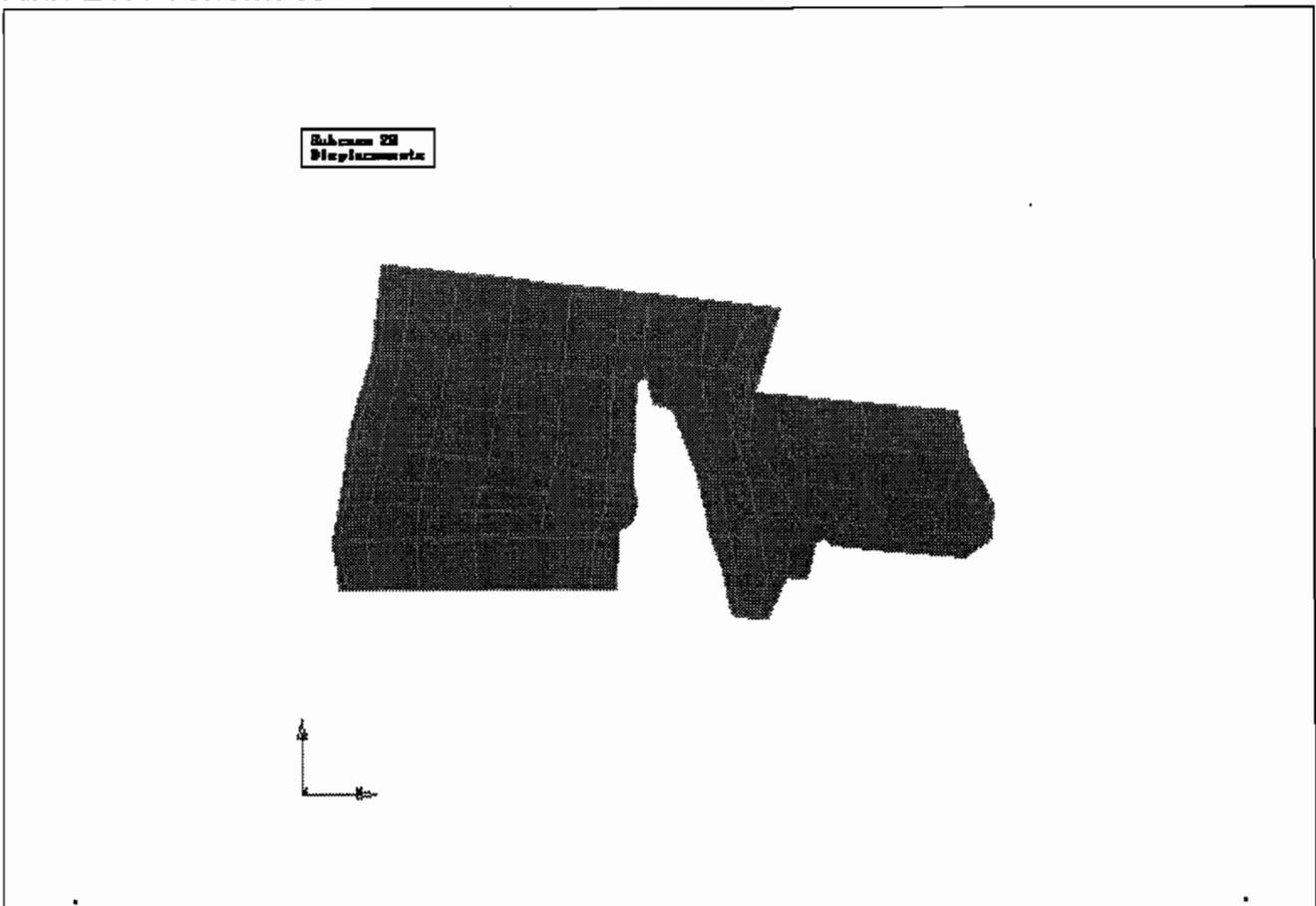


Abb. E18: Verformtes FEM-Modell bei einem Extensionsmoment von 1000Ncm

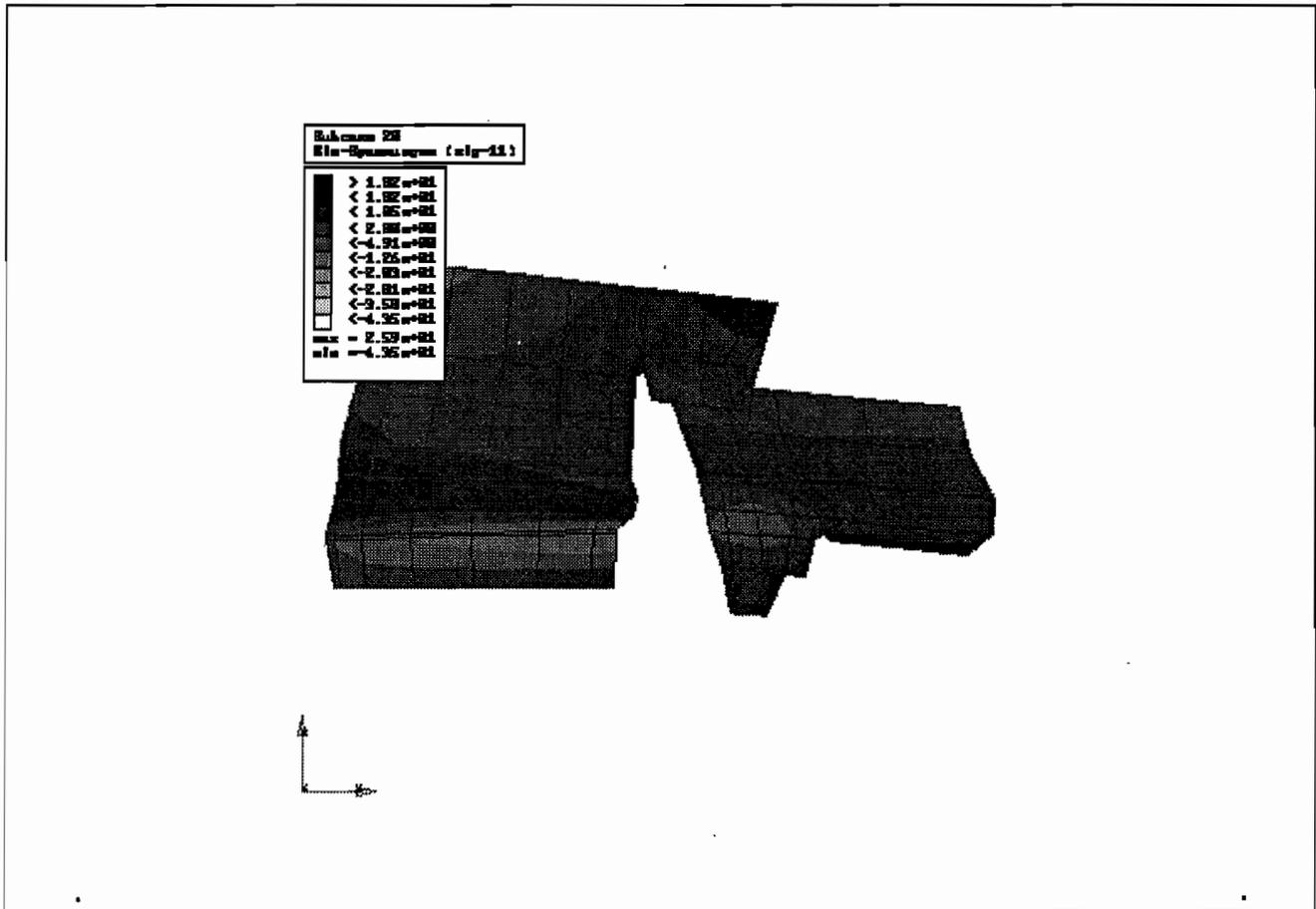


Abb. E19: Normalspannungsverteilung (x-Richtung) bei Extension 1000Ncm

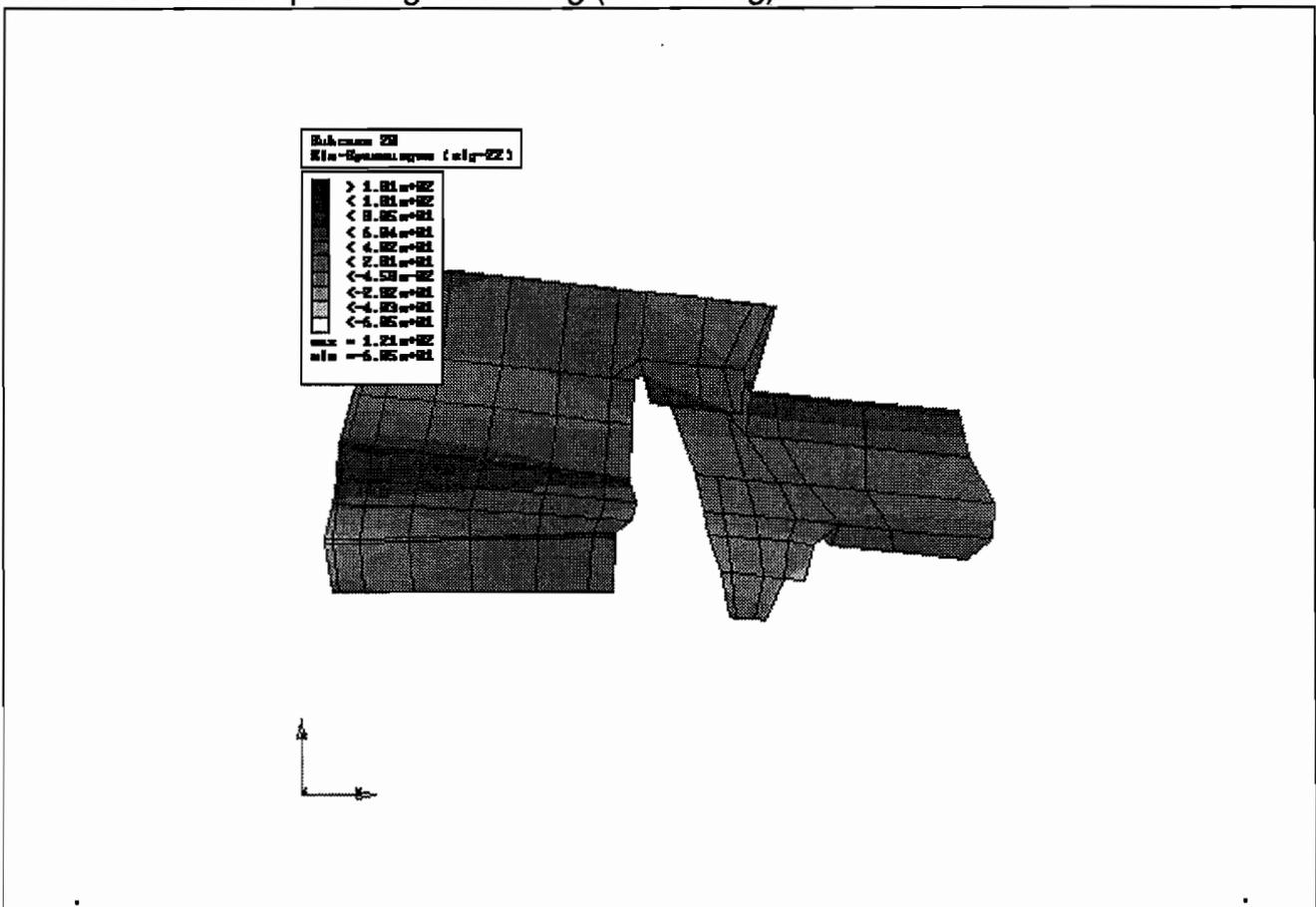
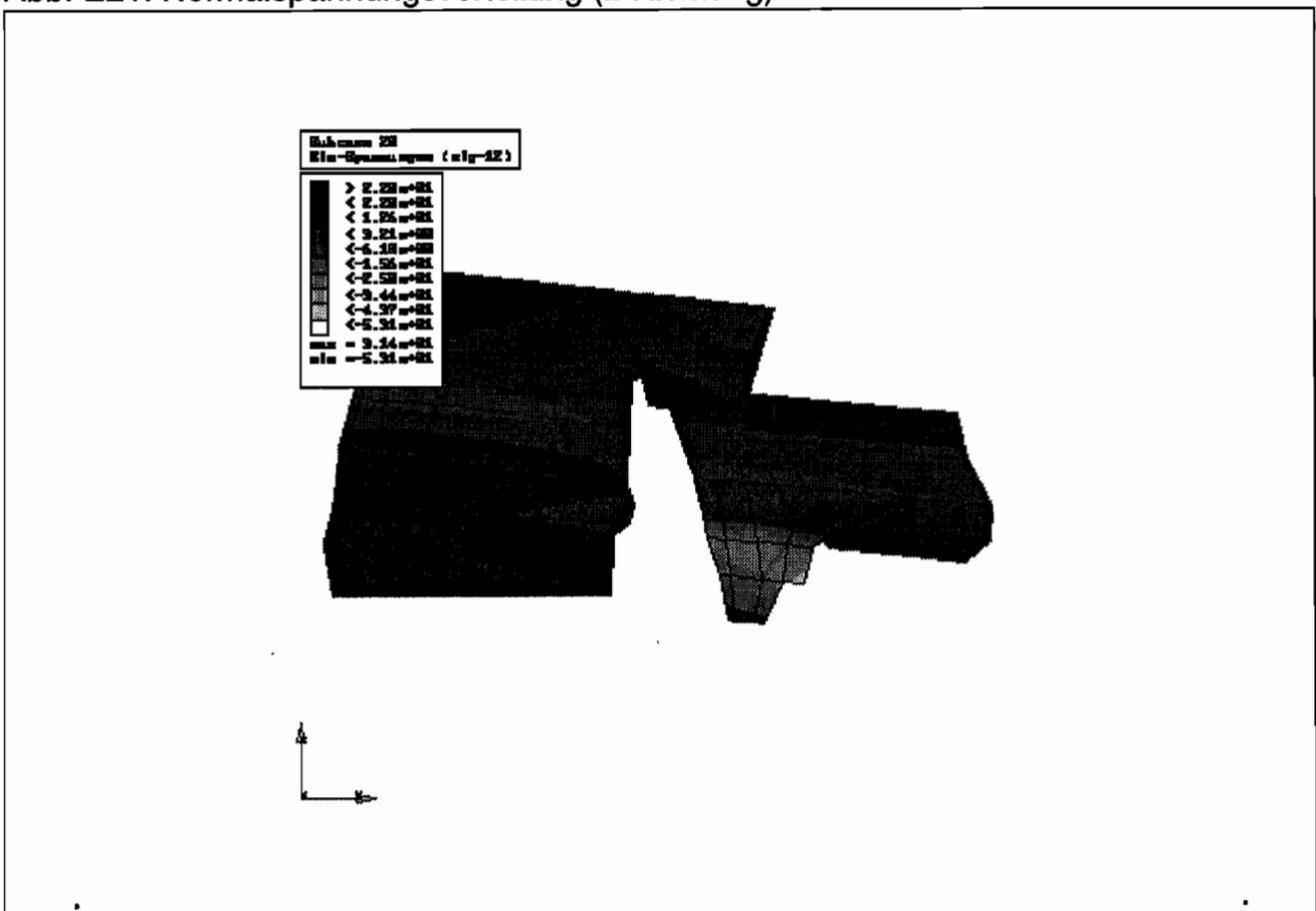
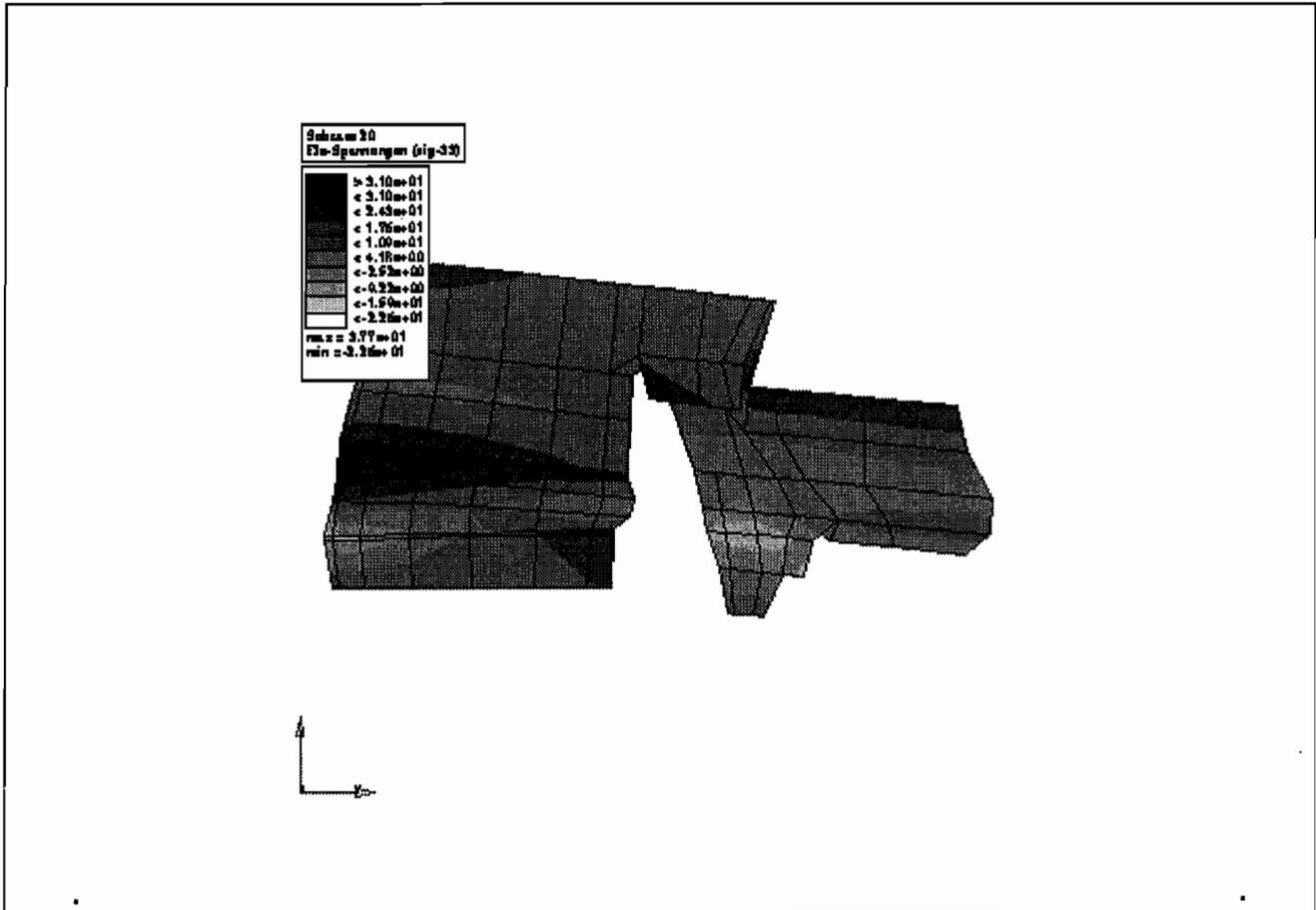


Abb. E20: Normalspannungsverteilung (y-Richtung) bei Extension 1000Ncm



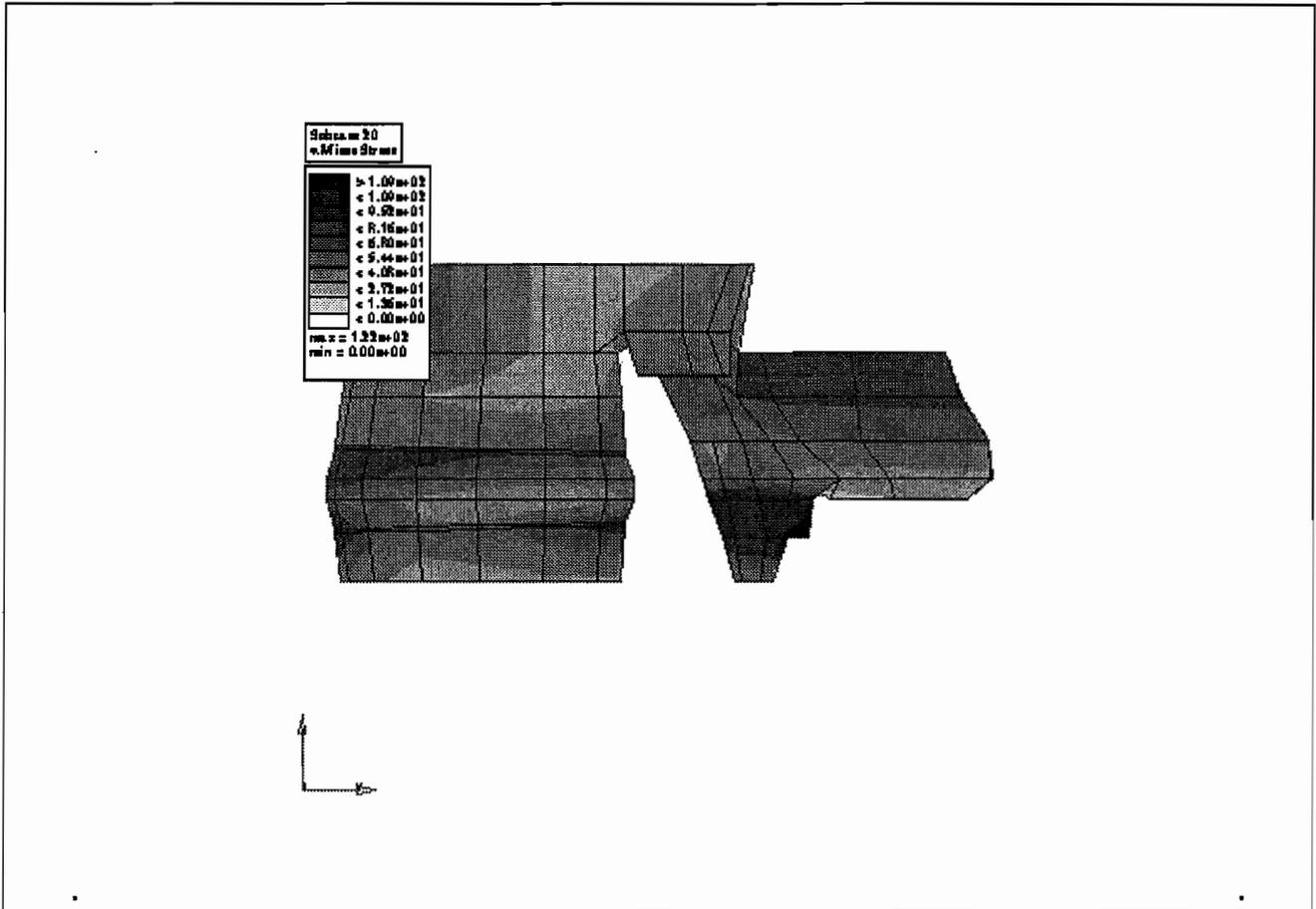


Abb. E23: Vergleichsspannung nach v. Mises bei Extension 1000Ncm

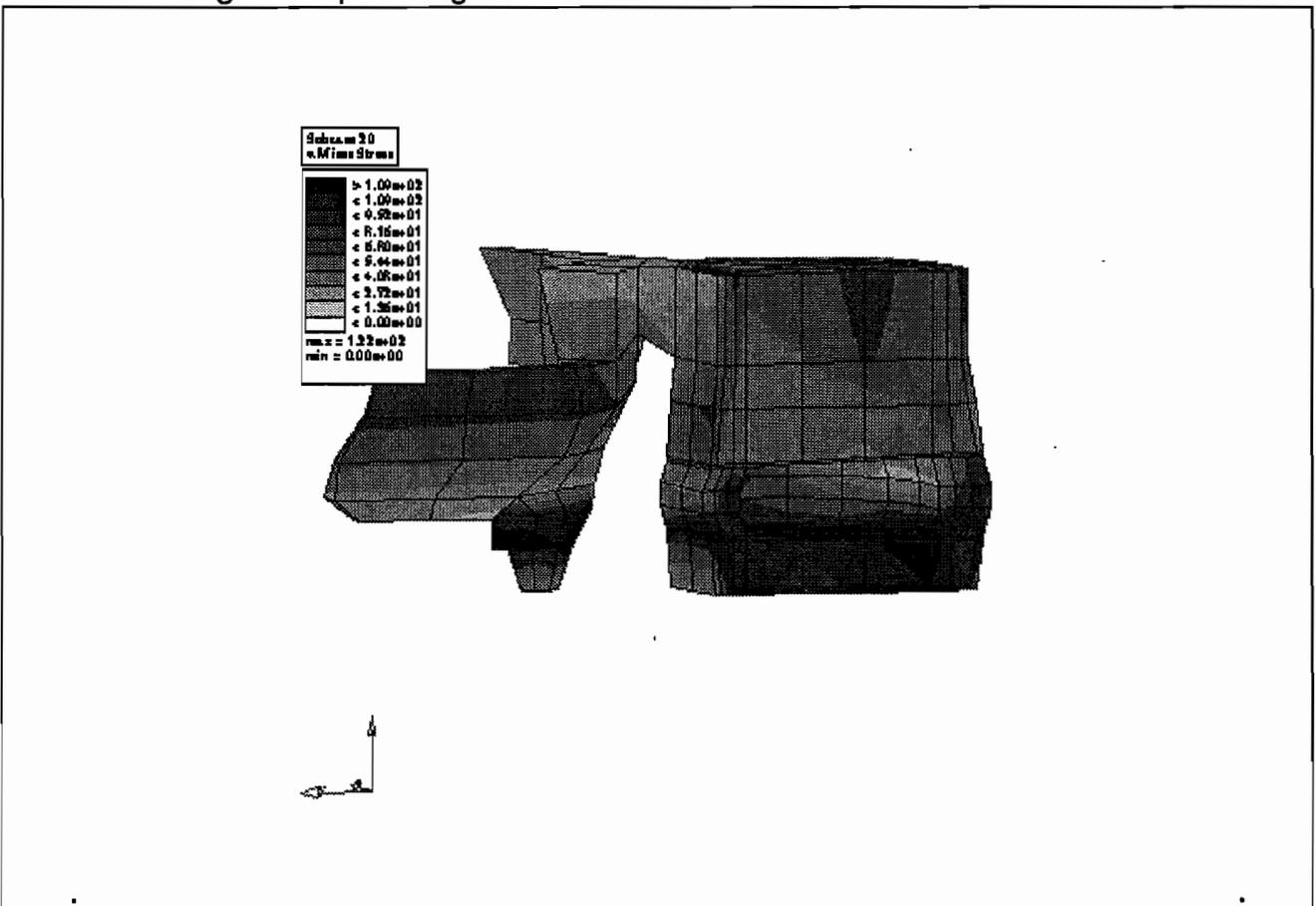


Abb. E24: Vergleichsspannung nach v. Mises bei Extension 1000Ncm

6.2.4 Laterale Biegung

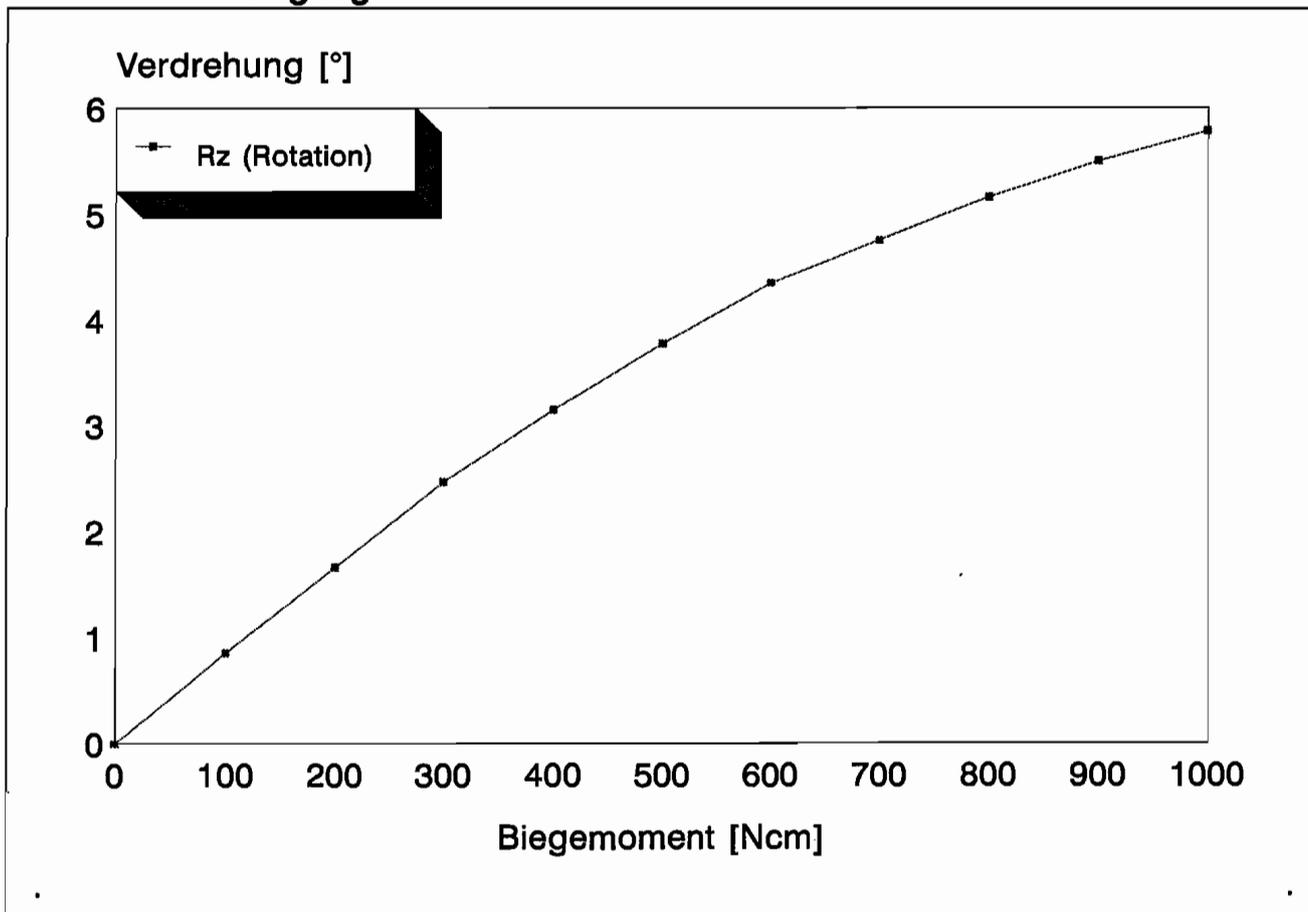


Abb. E25: Verdrehung des belasteten Wirbels unter lateralem Biegemoment

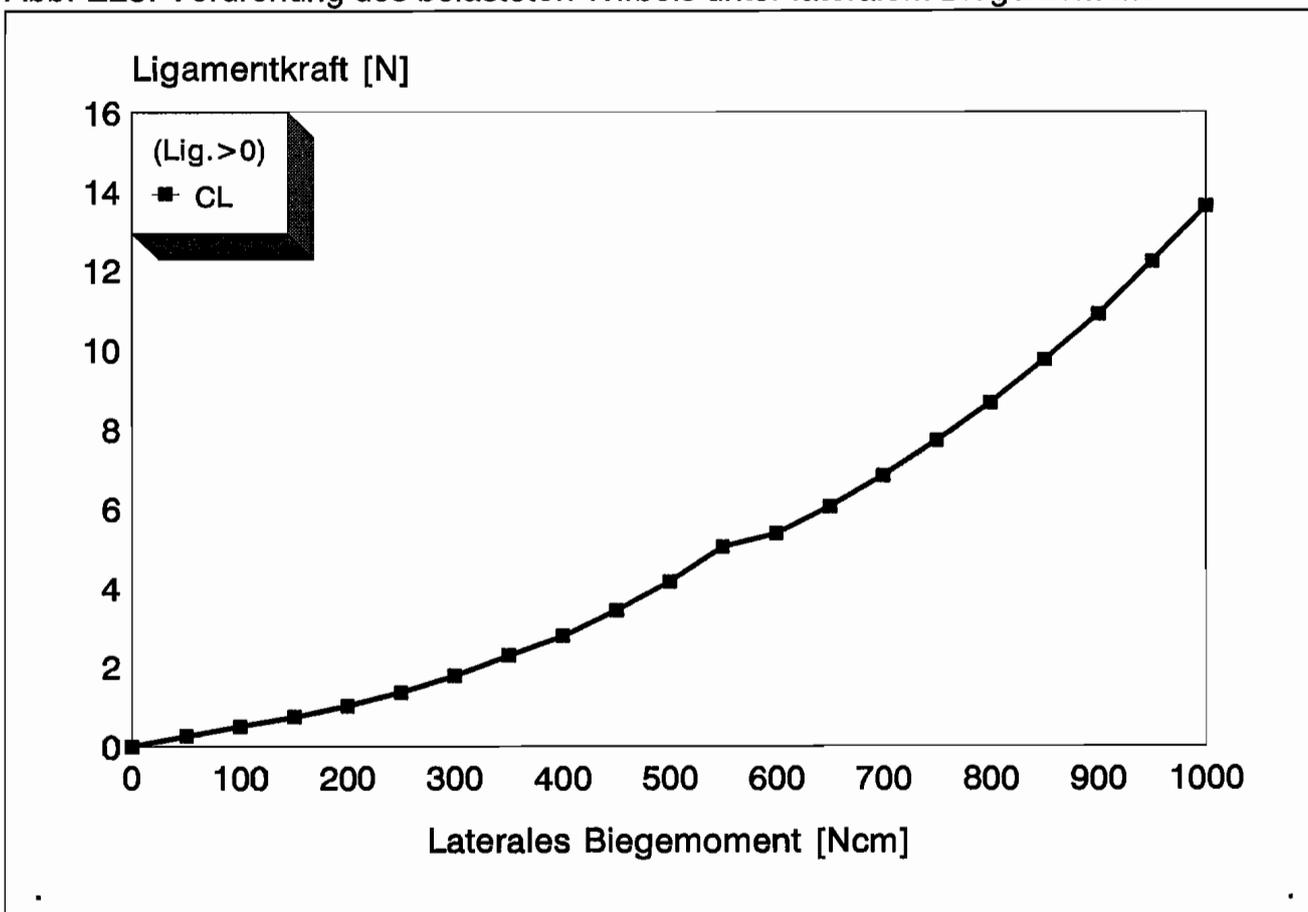


Abb. E26: Ligamentkräfte unter lateralem Biegemoment

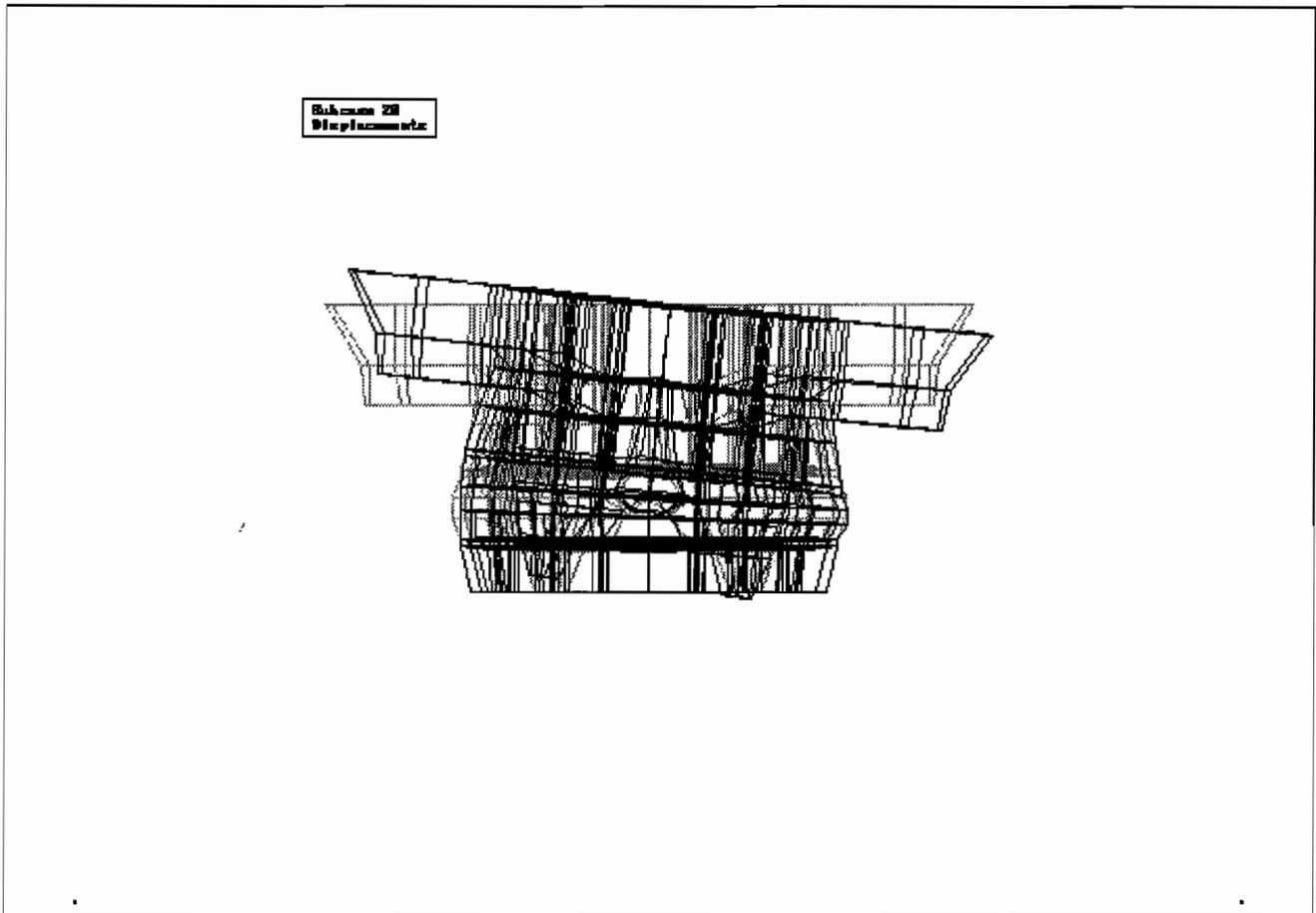


Abb. E27: Verformtes FEM-Netz bei einem lateralen Moment von 1000Ncm

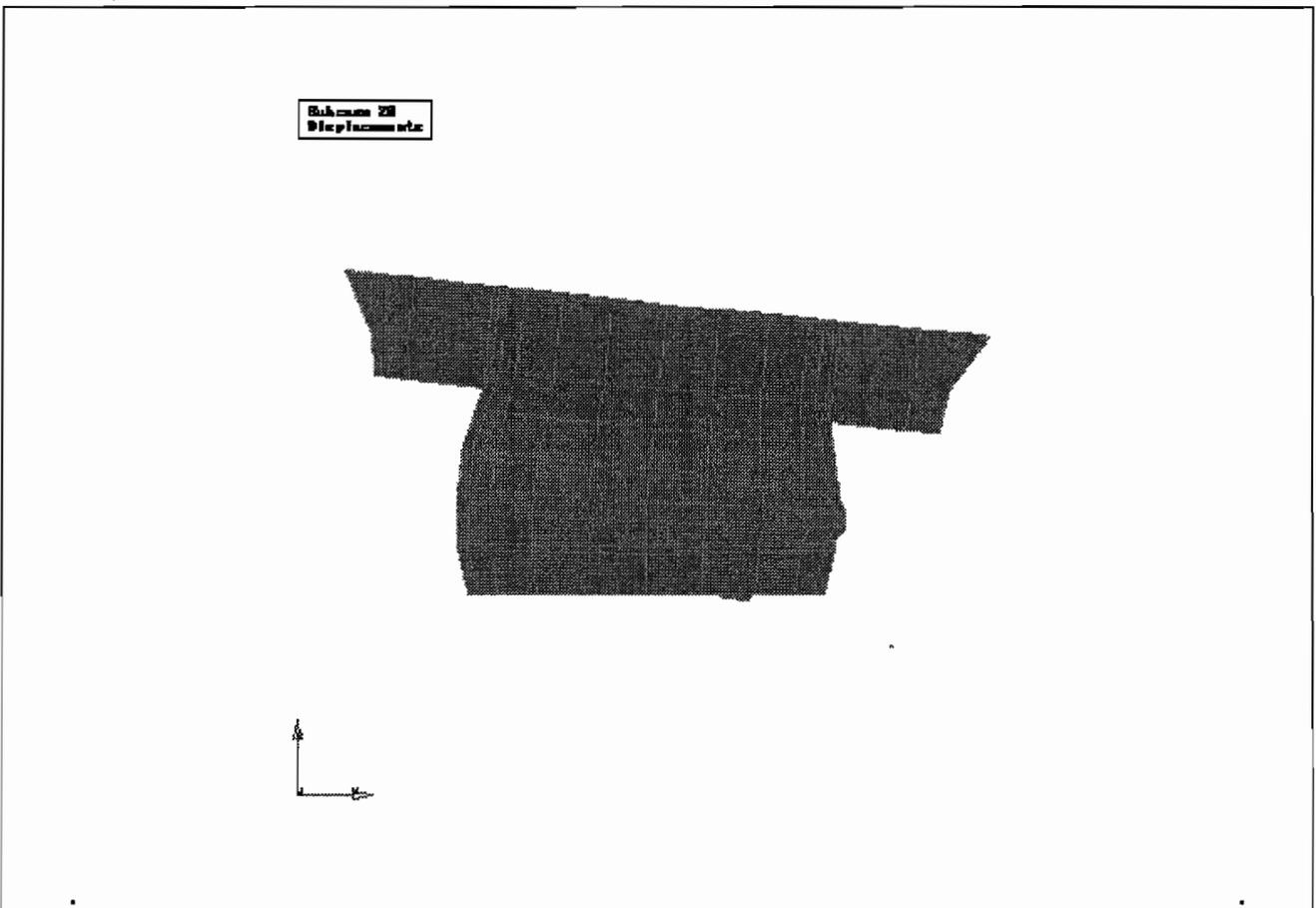


Abb. E28: Verformtes FEM-Modell bei einem lateralen Moment von 1000Ncm

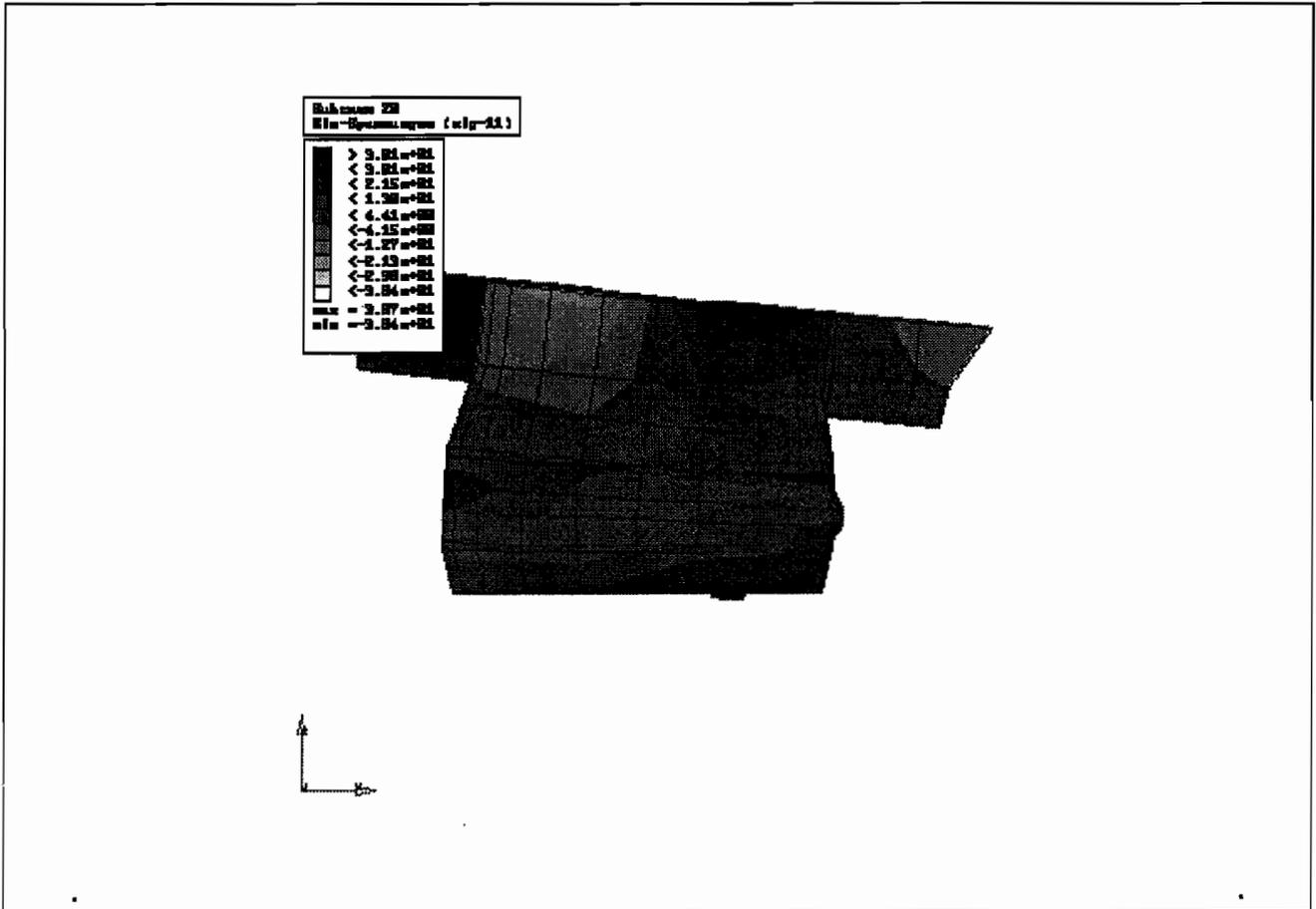


Abb. E29: Normalspannung (x-Richtung) bei lateralem Moment von 1000Ncm

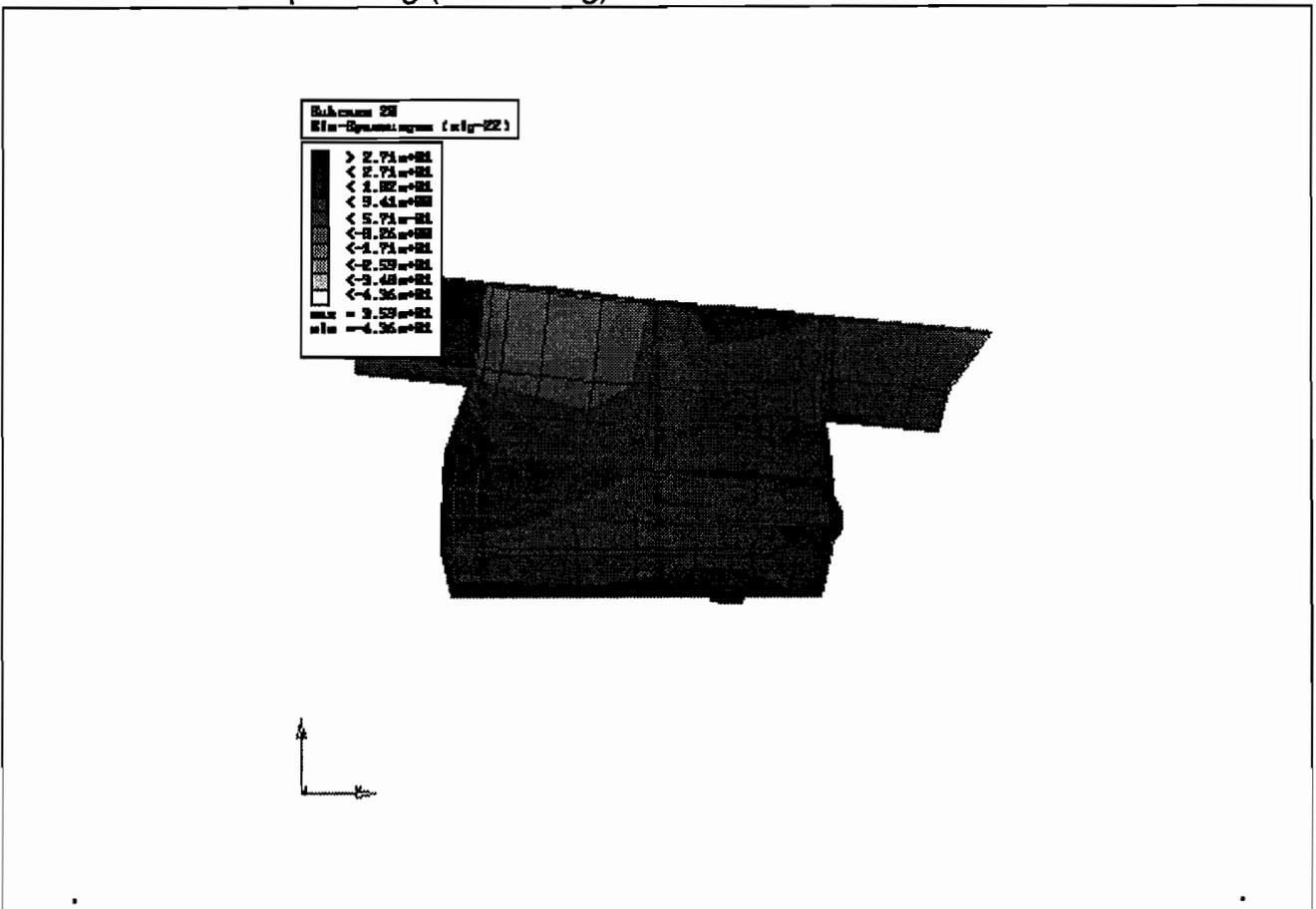


Abb. E30: Normalspannung (y-Richtung) bei einem lateralem Moment von 1000Ncm

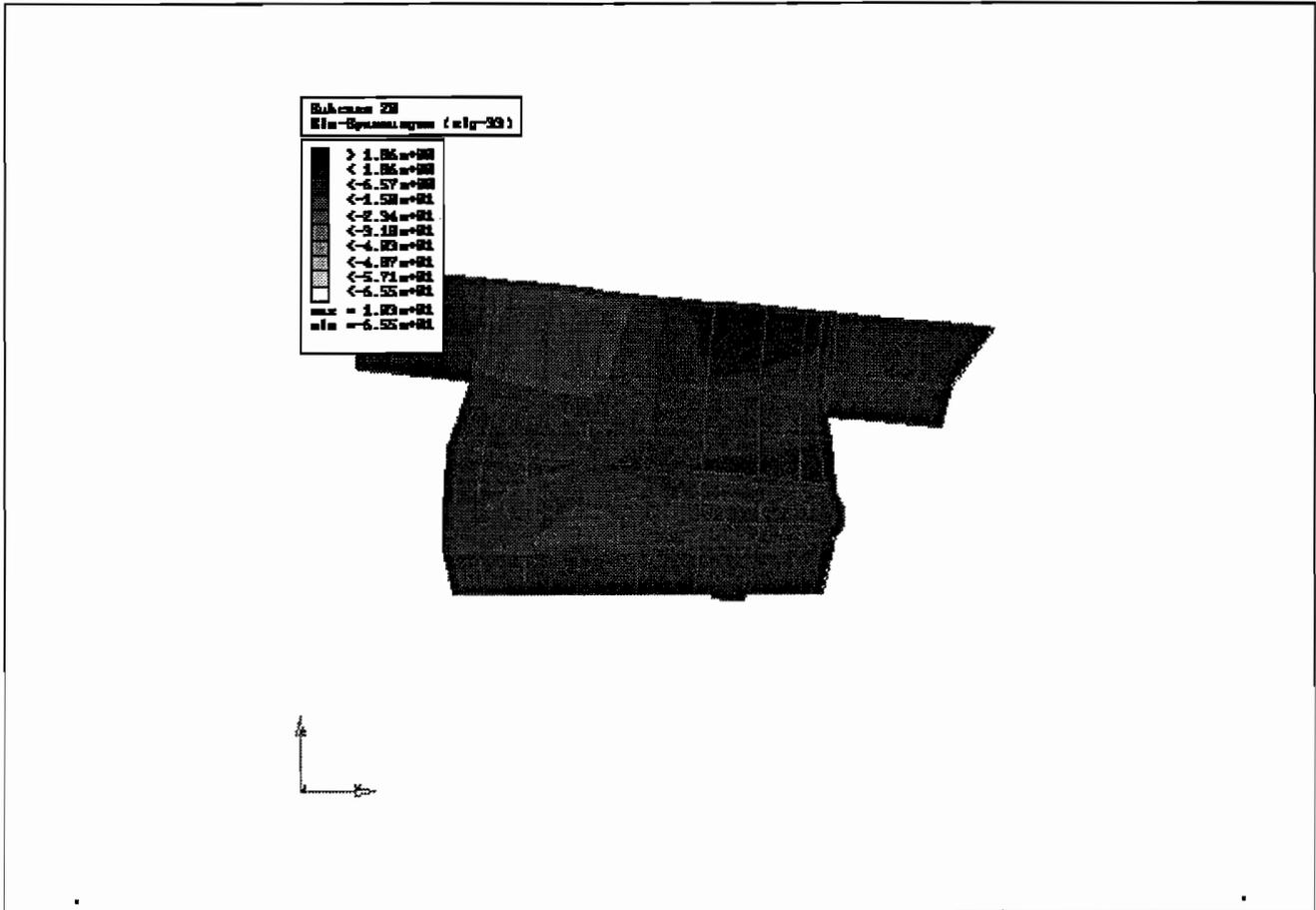


Abb. E31: Normalspannung (z-Richtung) bei einem lateralen Moment von 1000Ncm

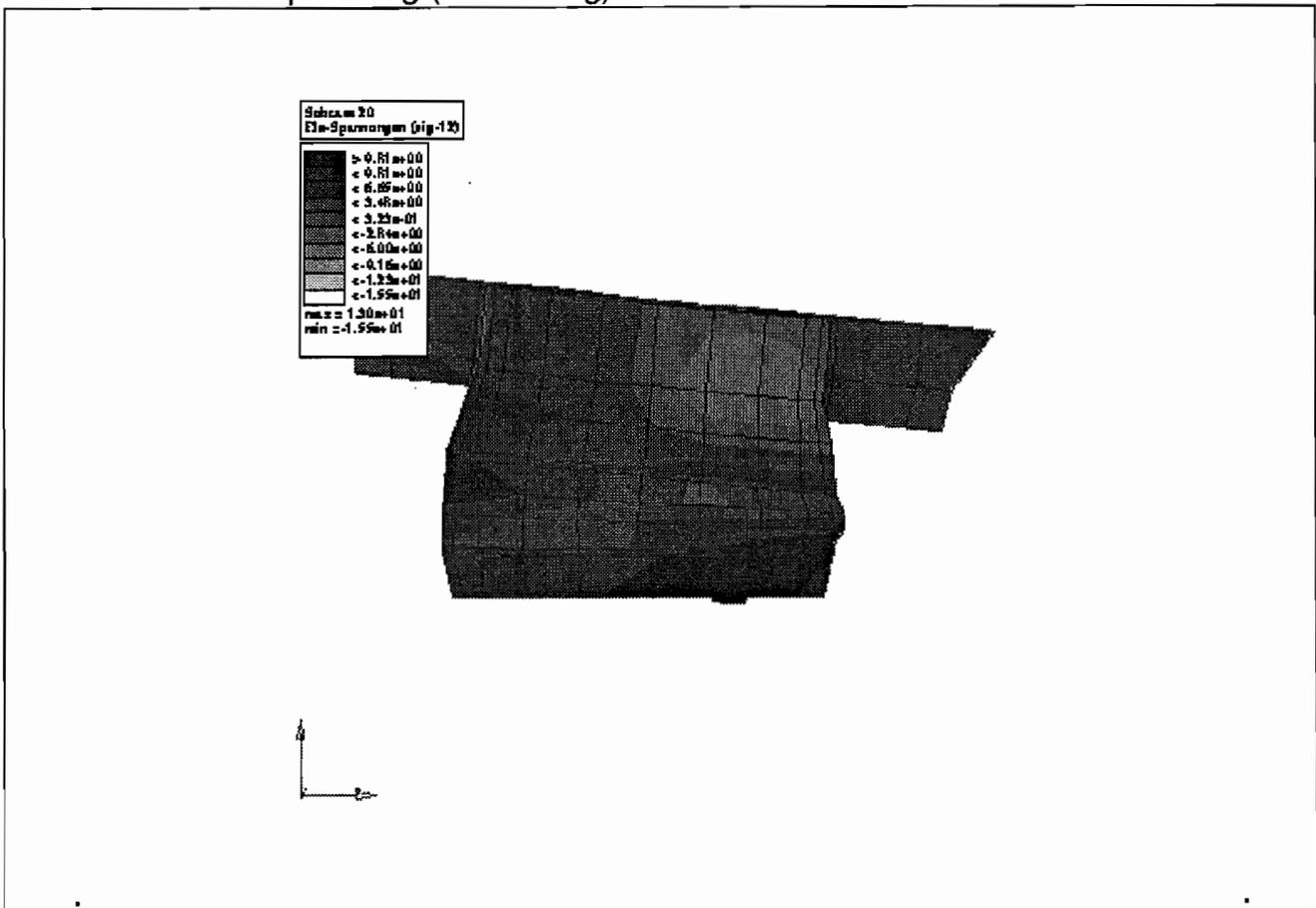


Abb. E32: Schubspannung bei bei einem lateralen Moment von 1000Ncm

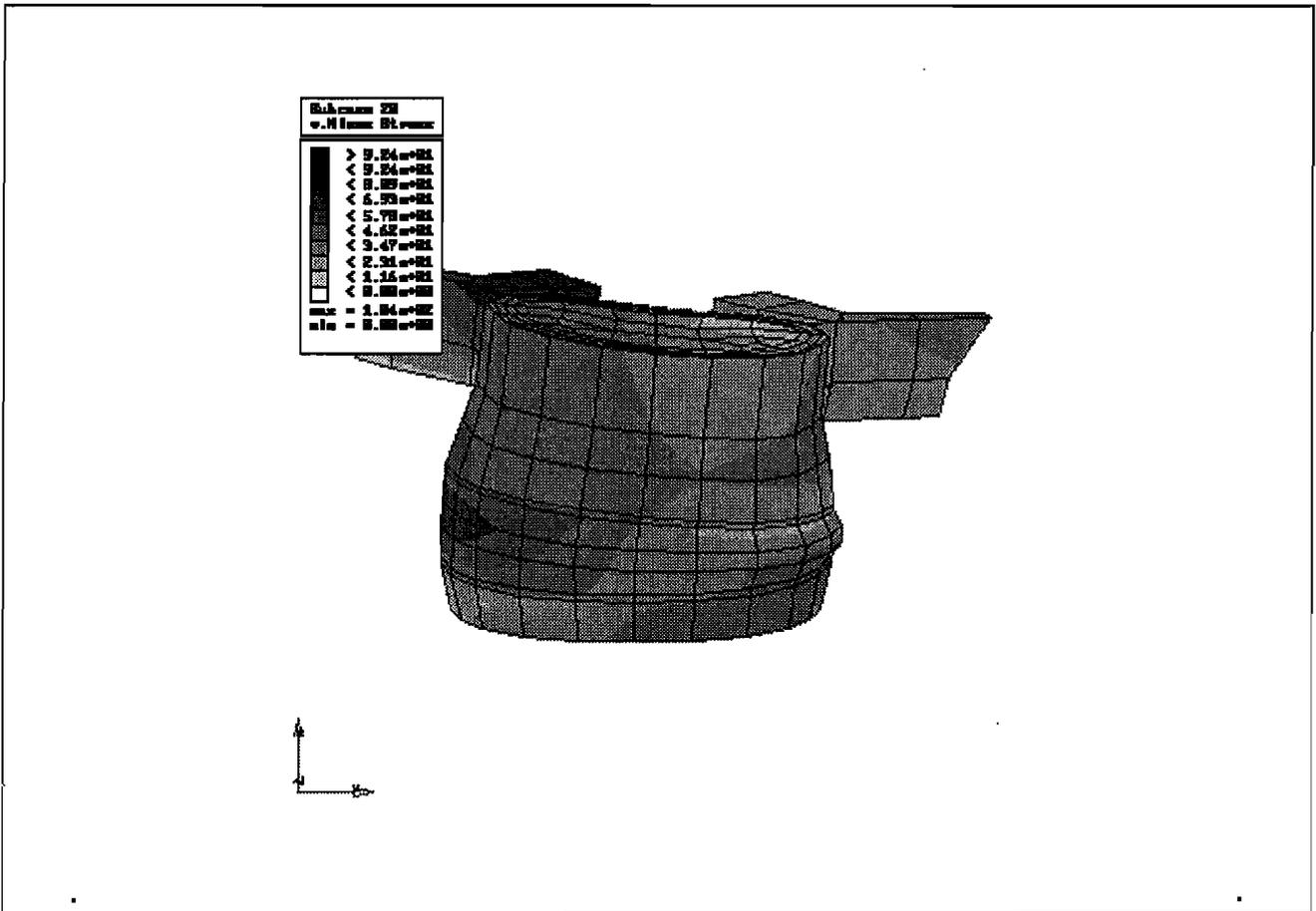


Abb. E33: Vergleichsspannung nach v. Mises bei lateralem Moment von 1000Ncm

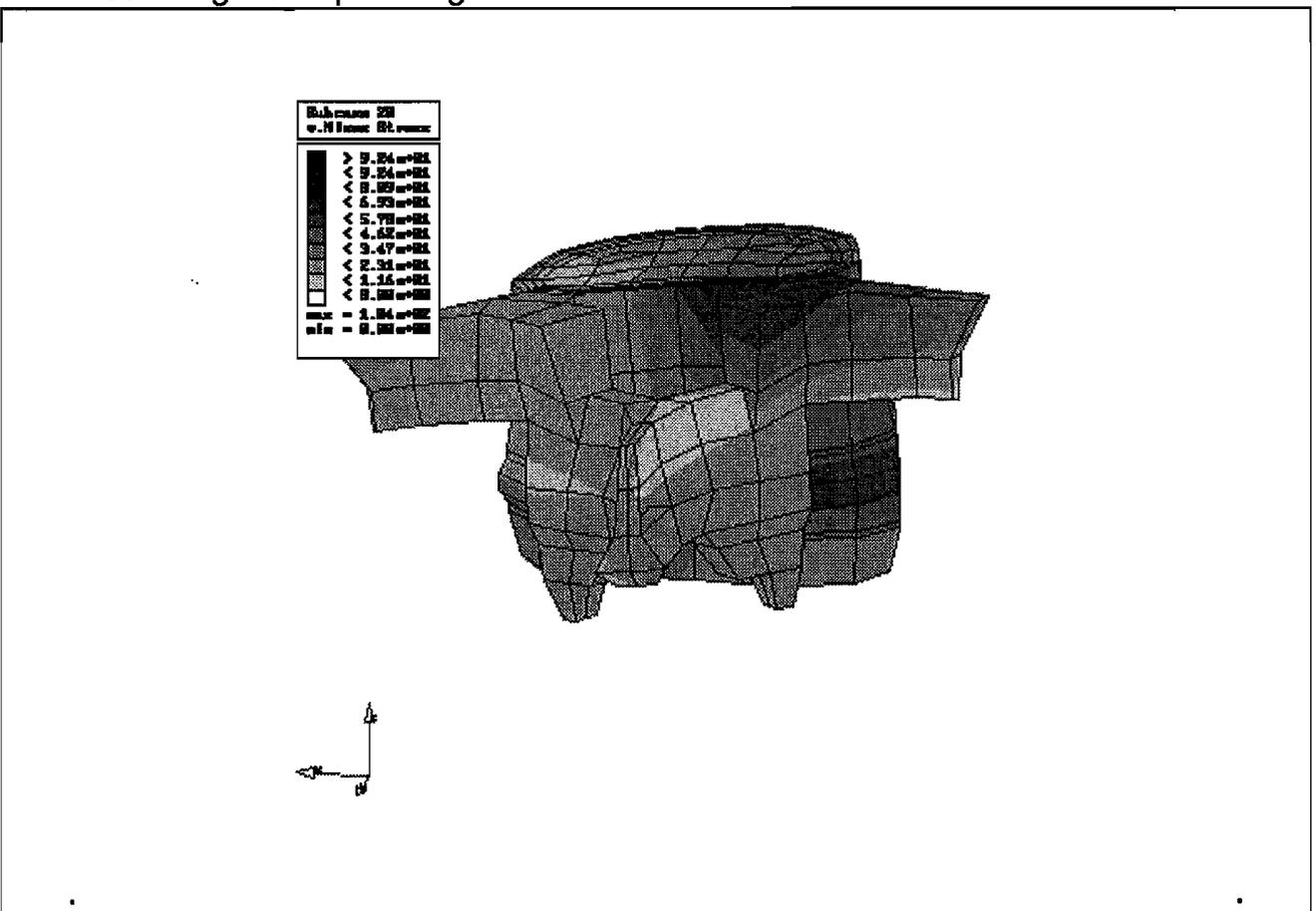


Abb. E34: Vergleichsspannung nach v. Mises bei lateralem Moment von 1000Ncm

6.2.5 Torsionsmoment

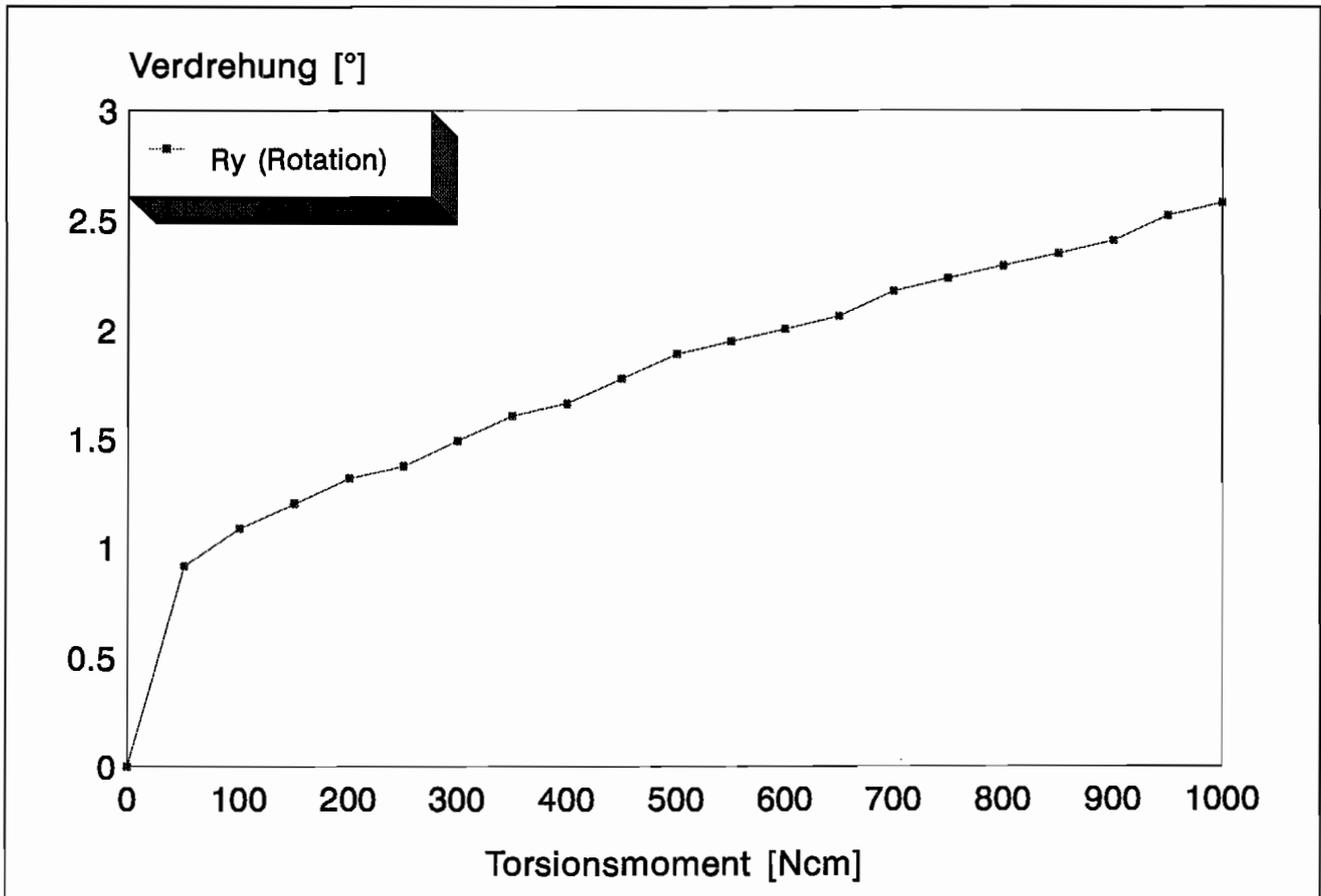


Abb. E35: Verdrehung des belasteten Wirbels unter Torsionsmoment

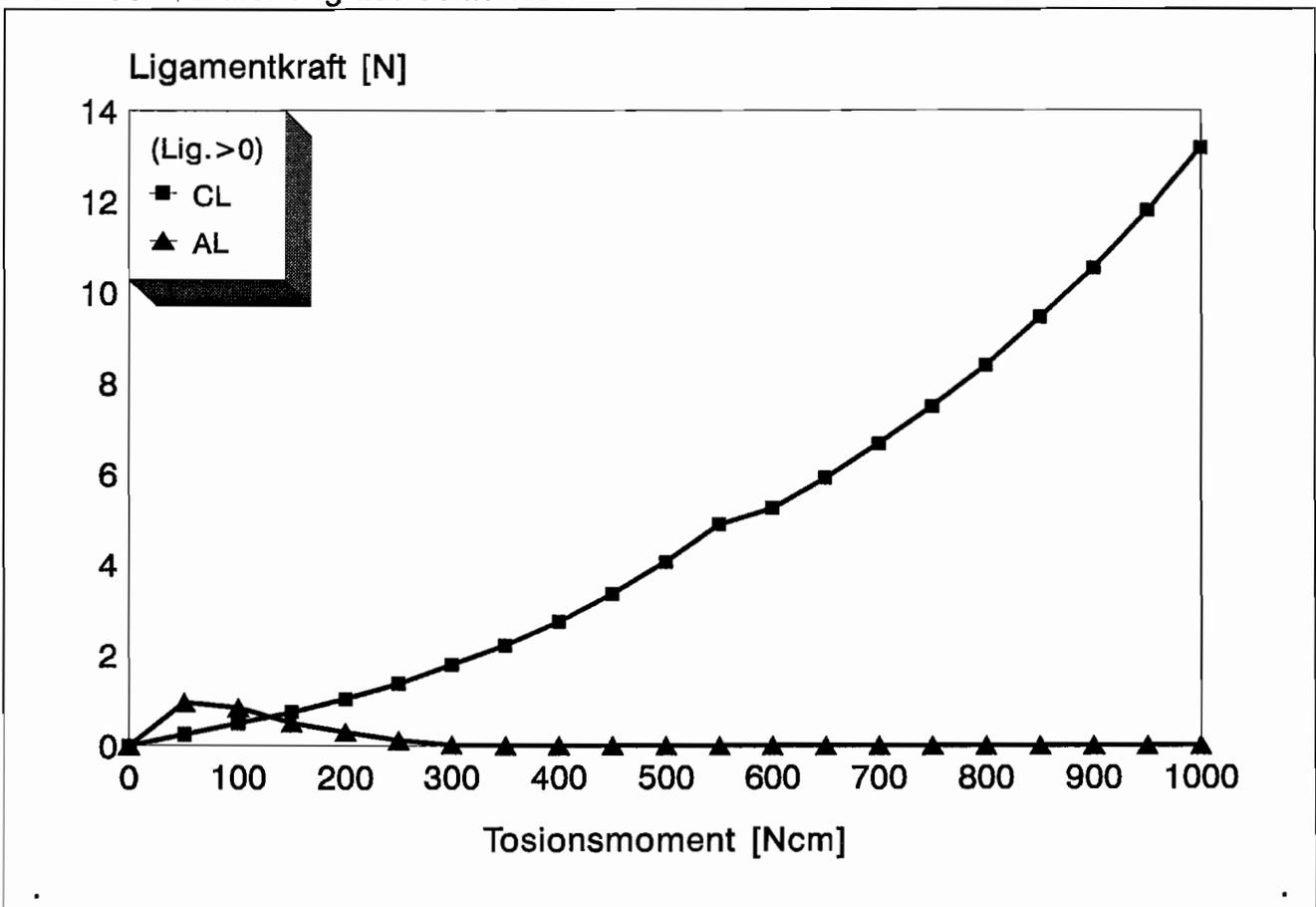


Abb. E36: Ligamentkräfte unter Torsionsbelastung

Abbildung E37
Displacements

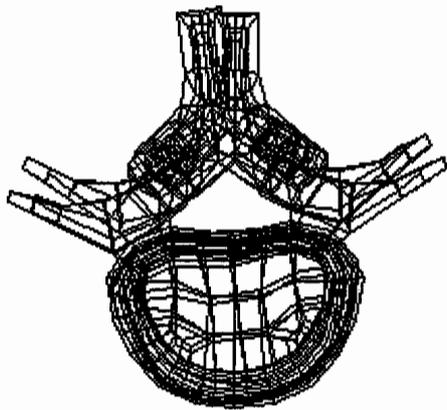


Abb. E37: Verformtes FEM-Netz bei einem Torsionsmoment von 1000Ncm

Abbildung E38
Displacements

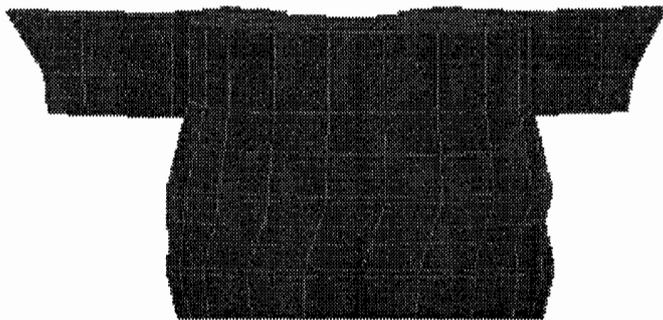
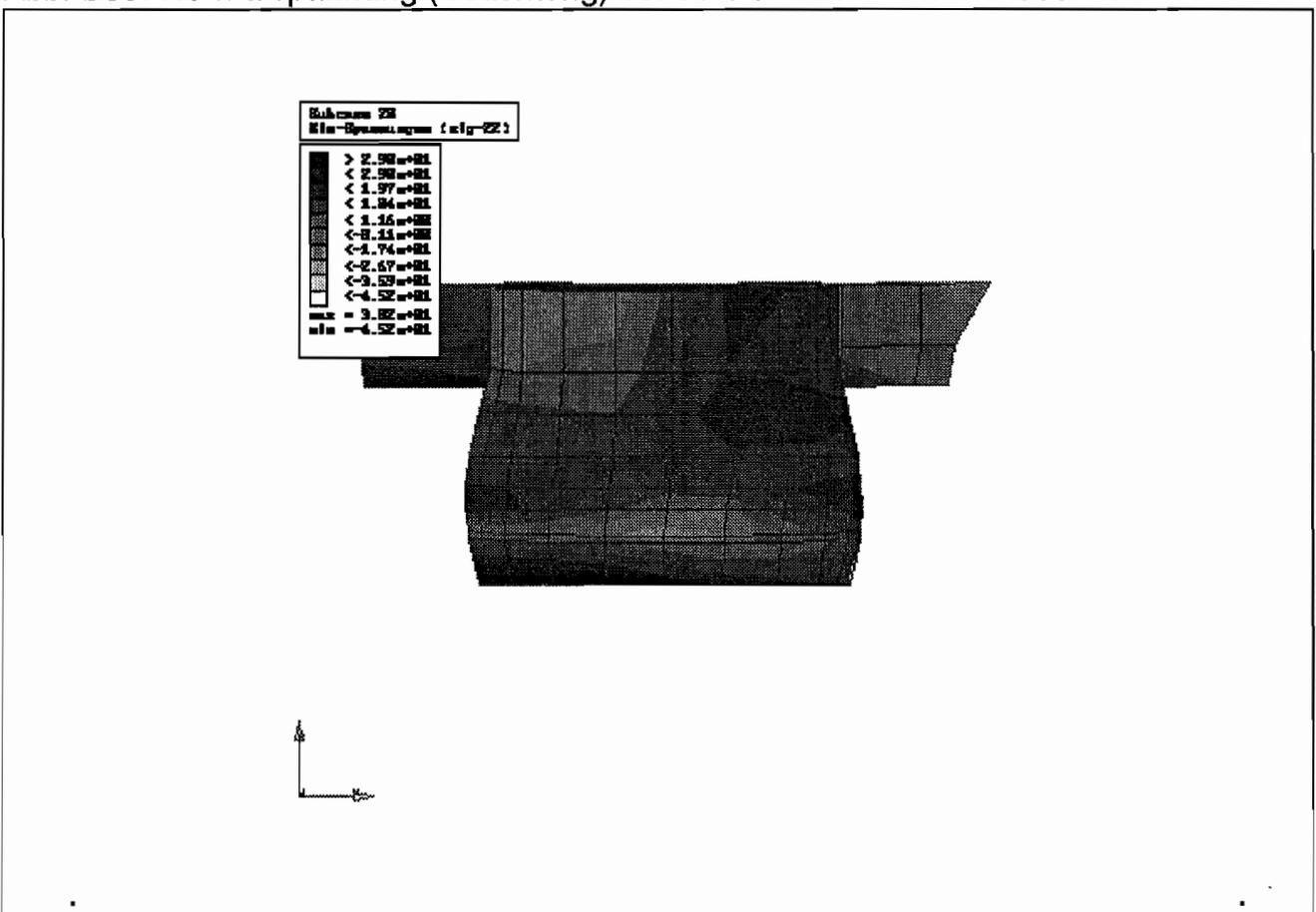
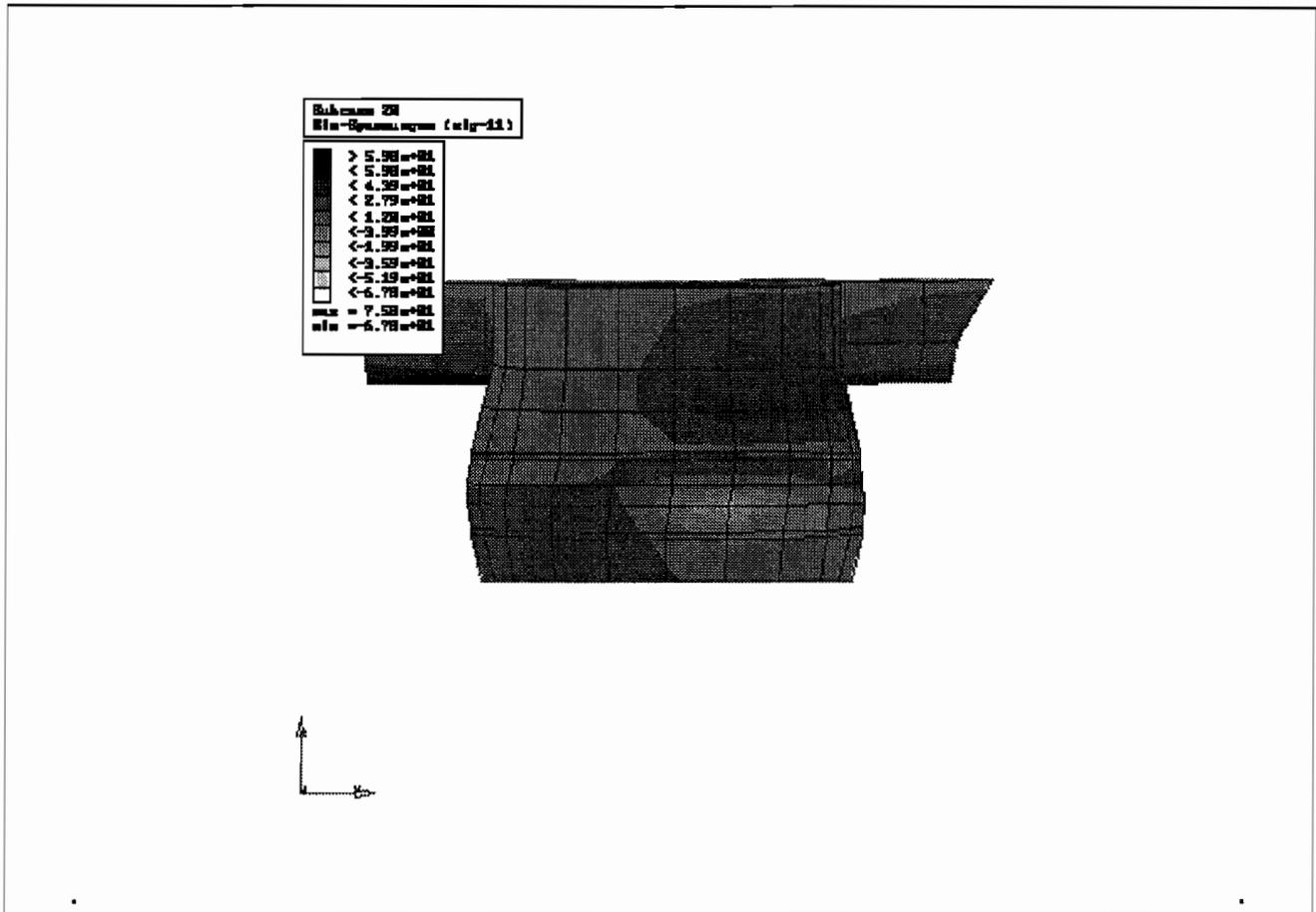


Abb. E38: Verformtes FEM-Modell bei einem Torsionsmoment von 1000Ncm



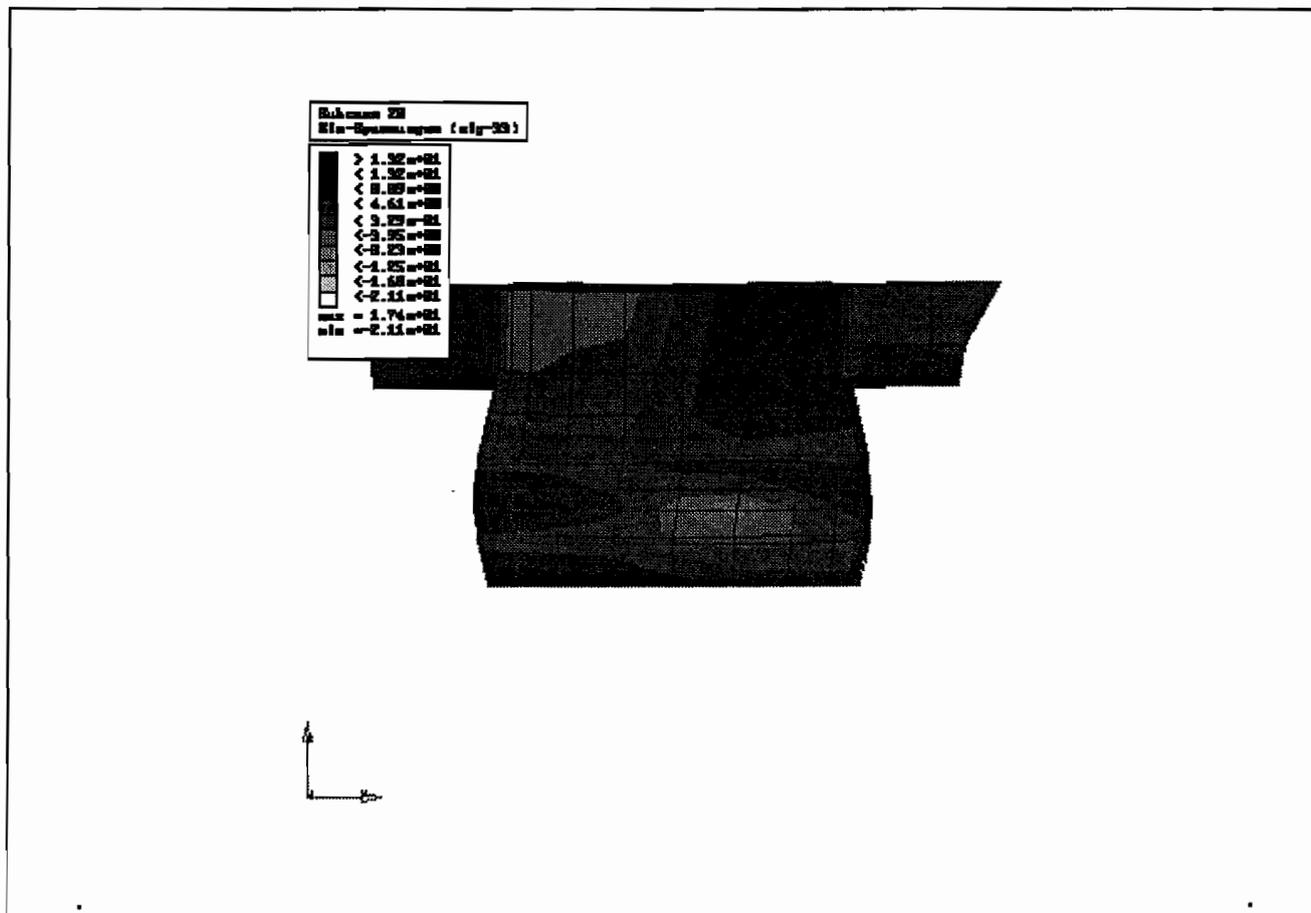


Abb. E41: Normalspannung (z-Richtung) bei Torsionsmoment von 1000Ncm

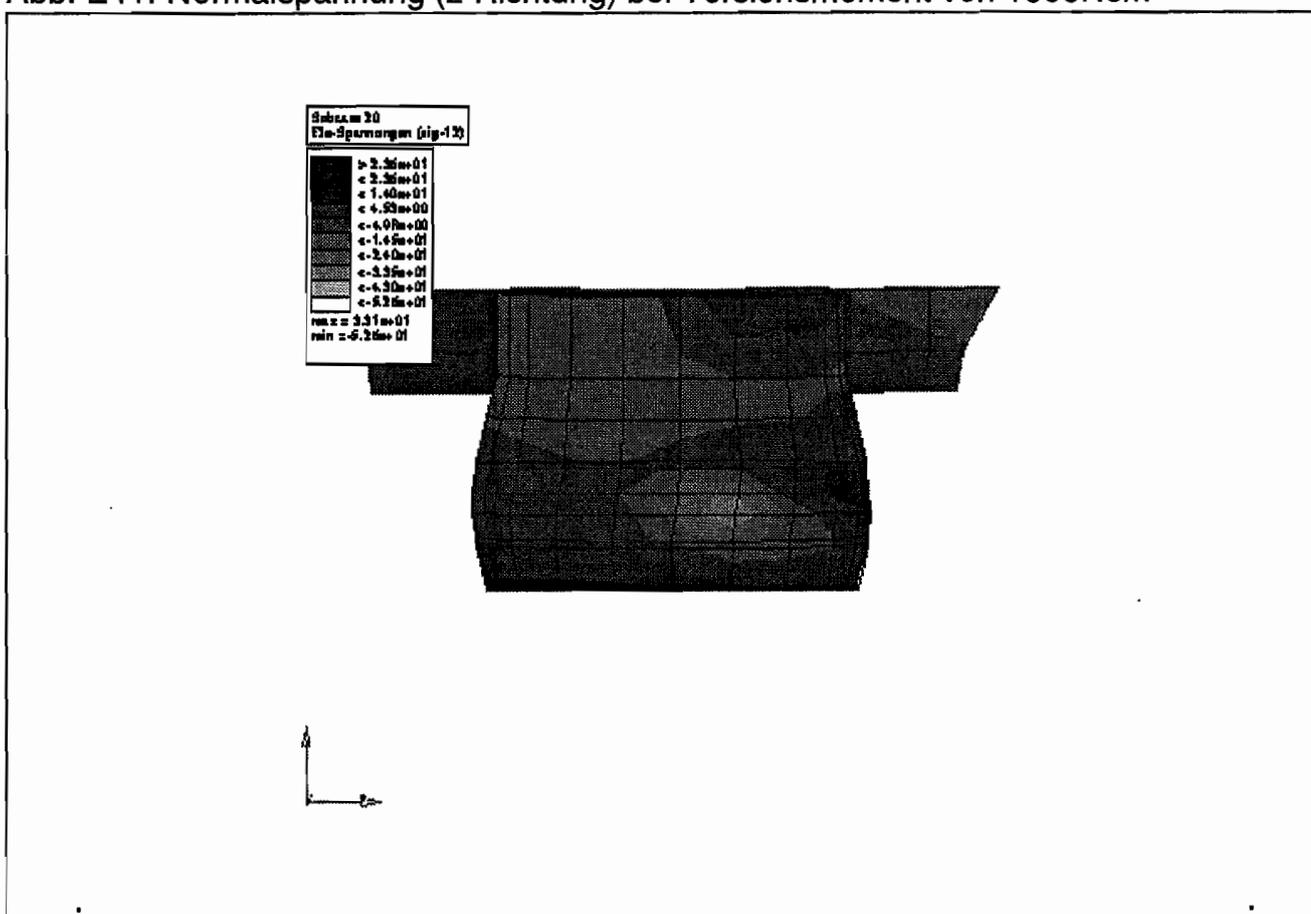


Abb. E42: Schubspannung bei einem Torsionsmoment von 1000Ncm

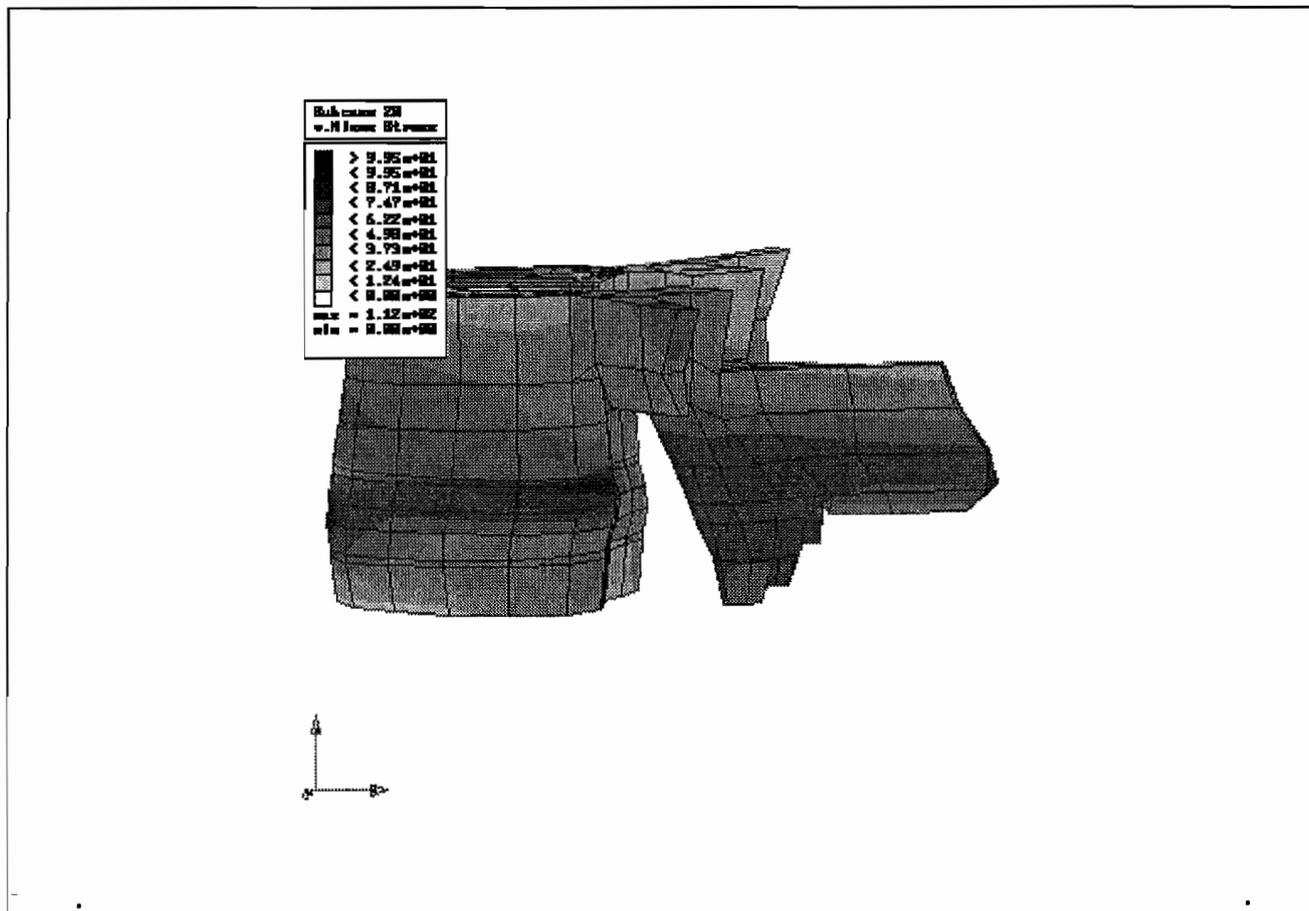


Abb. E43: Vergleichsspannung nach v. Mises bei Torsionsmoment von 1000Ncm

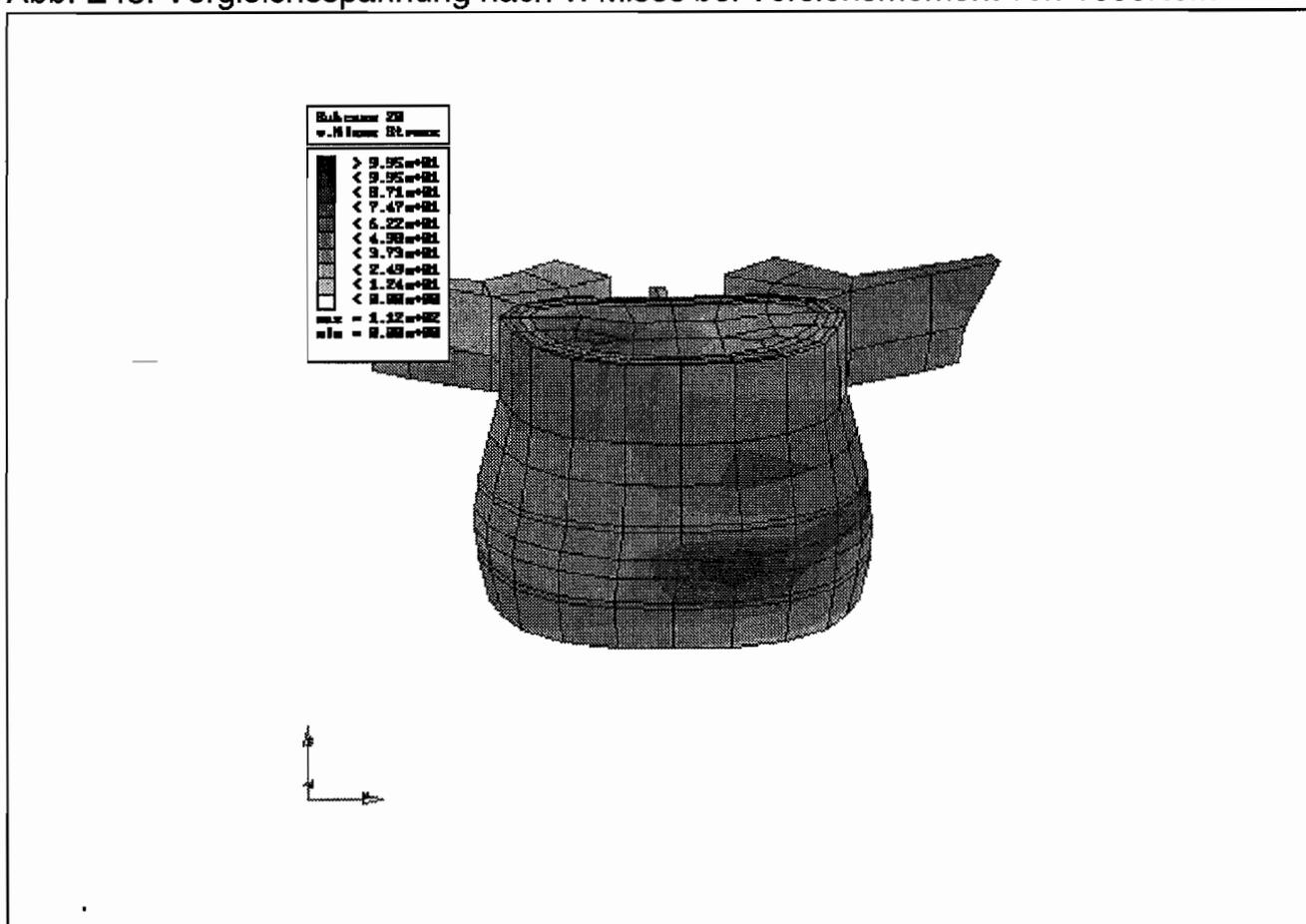


Abb. E44: Vergleichsspannung nach v. Mises bei Torsionsmoment von 1000Ncm

6.2.6 Schubbelastung

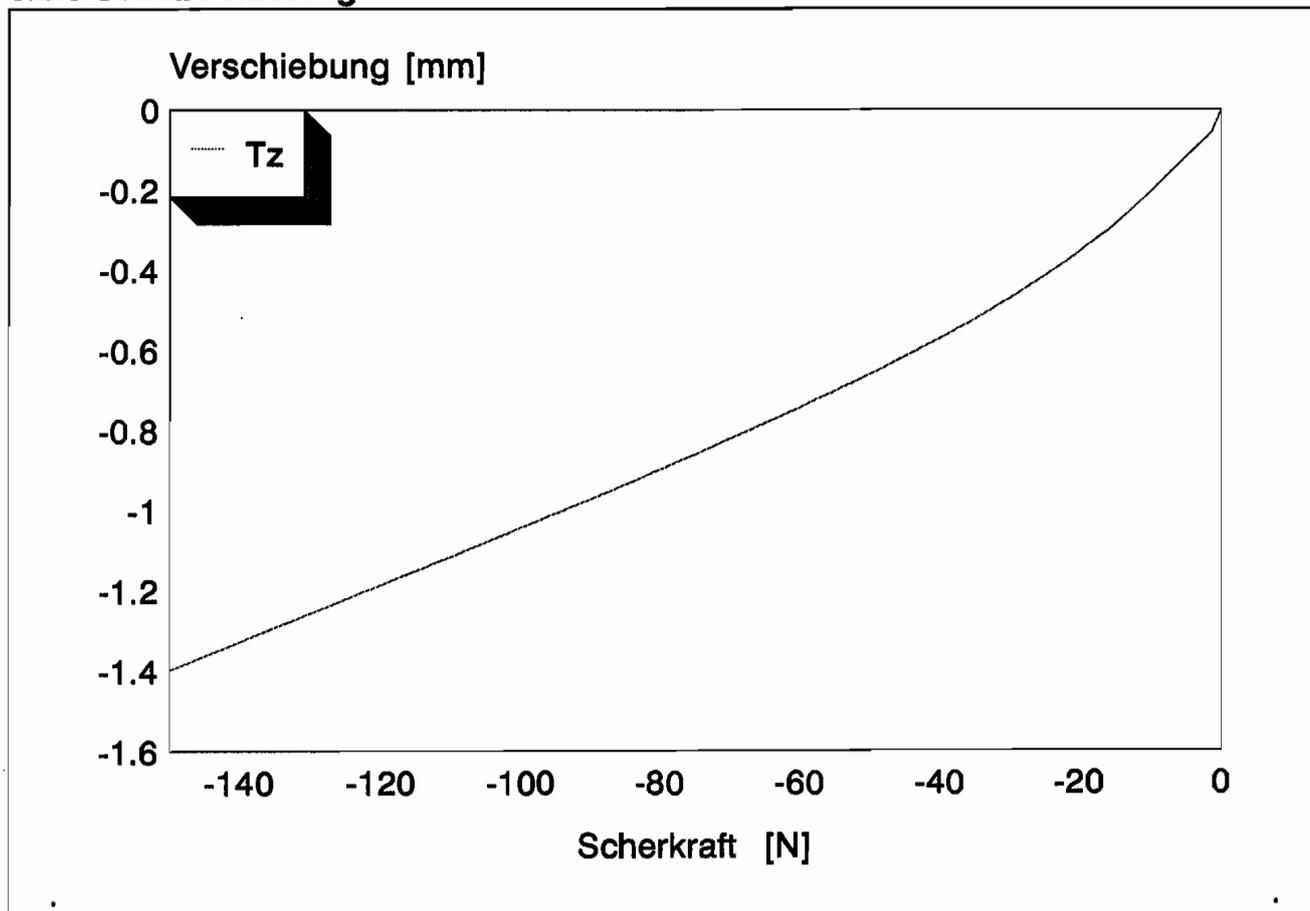


Abb. E45: Schubbelastung nach dorsal mit allen Ligamenten intakt

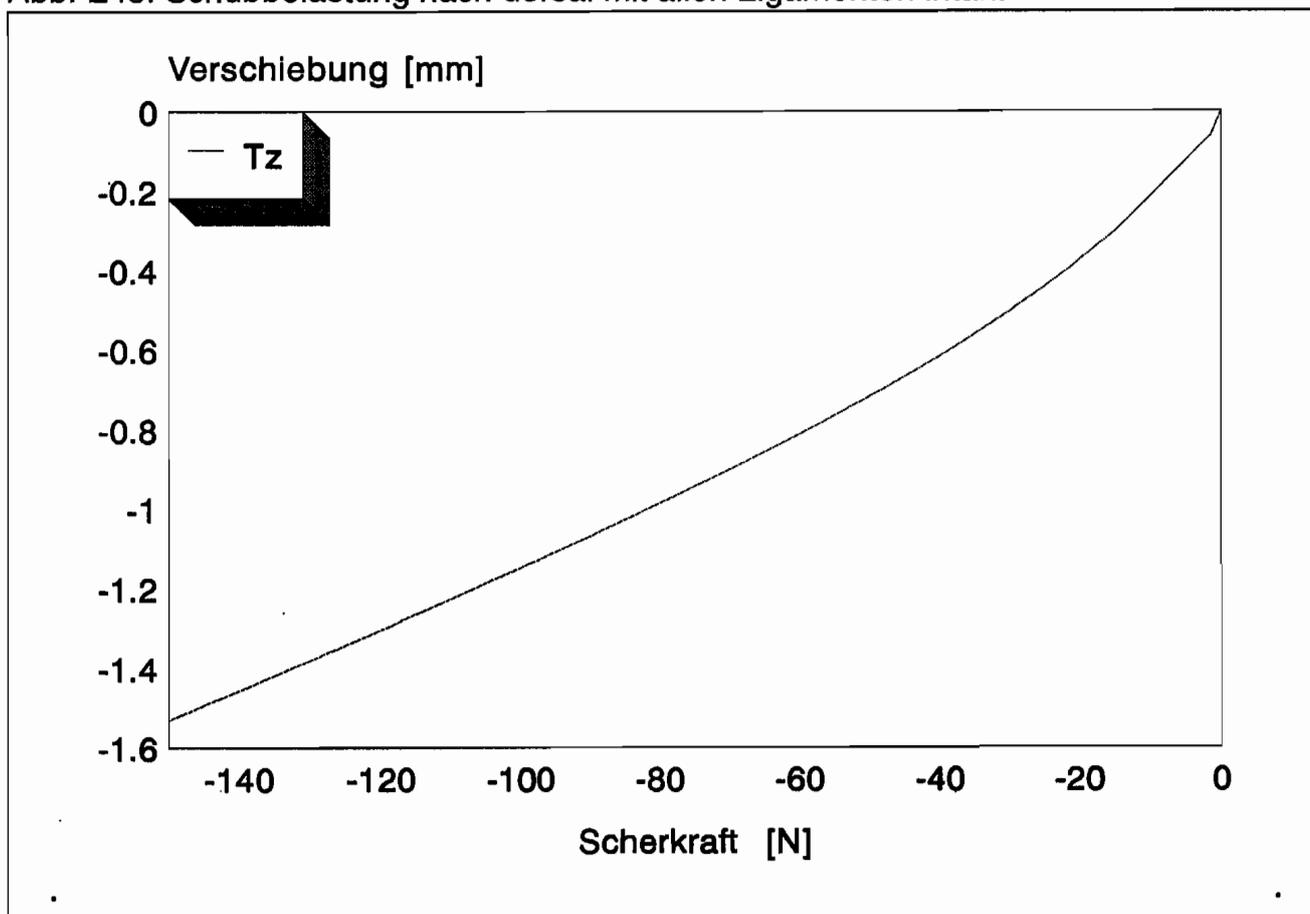


Abb. E46: Verschiebung des belasteten Wirbelkörpers ohne posteriore Ligamente

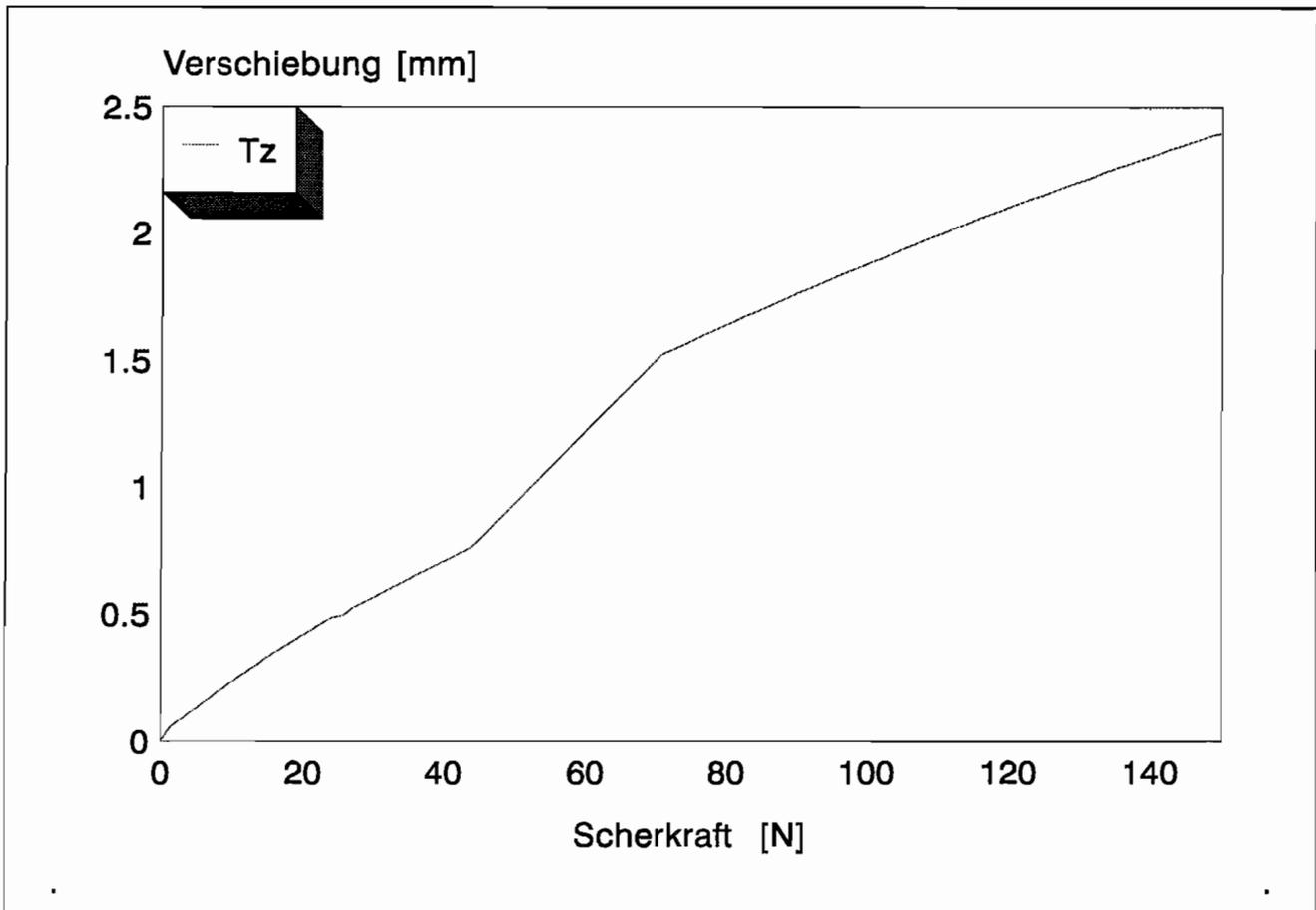


Abb. E47: Schubbelastung nach ventral mit allen Bändern intakt

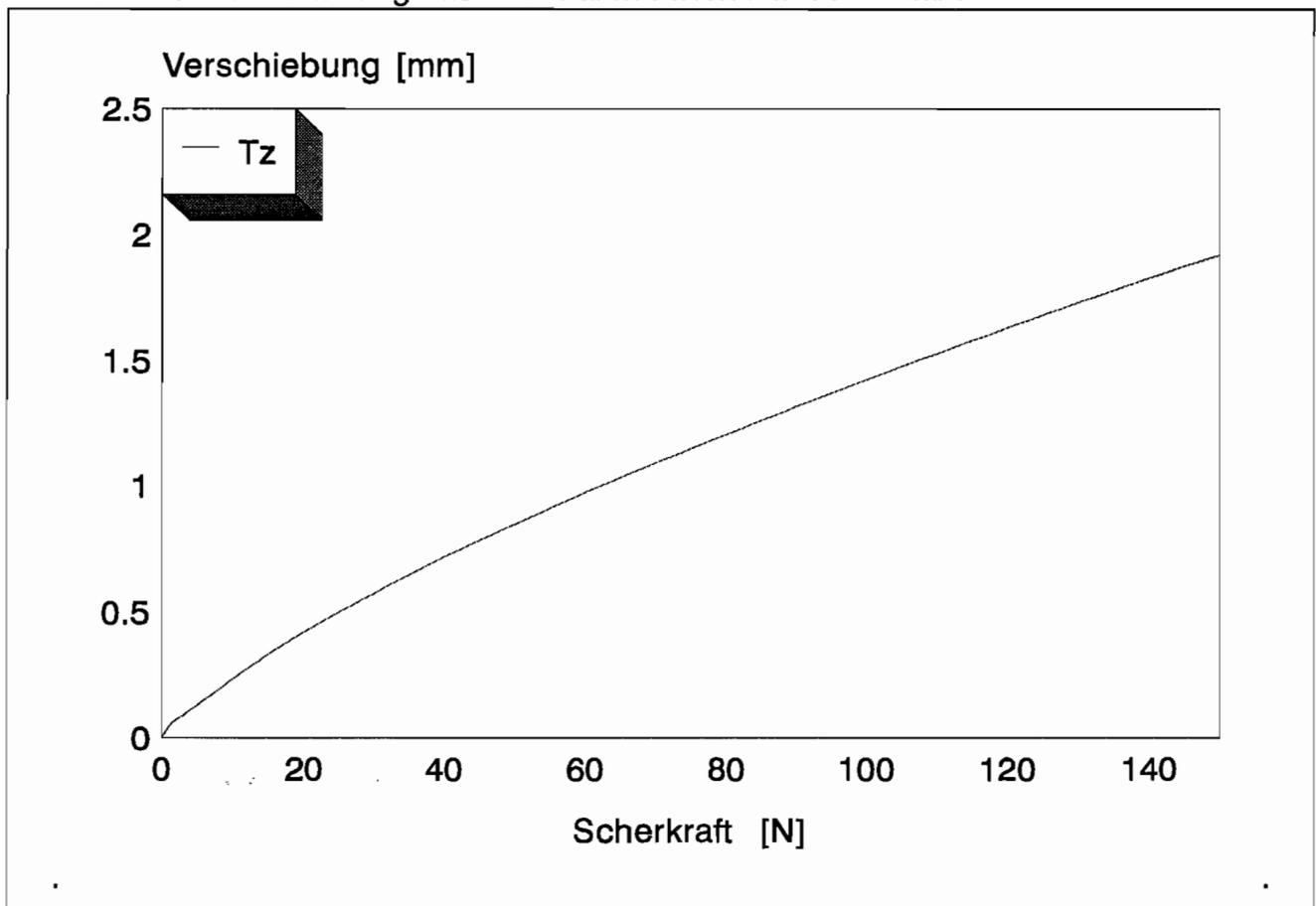


Abb. E48: Verschiebung des belasteten Wirbelkörpers ohne posteriore Ligamente

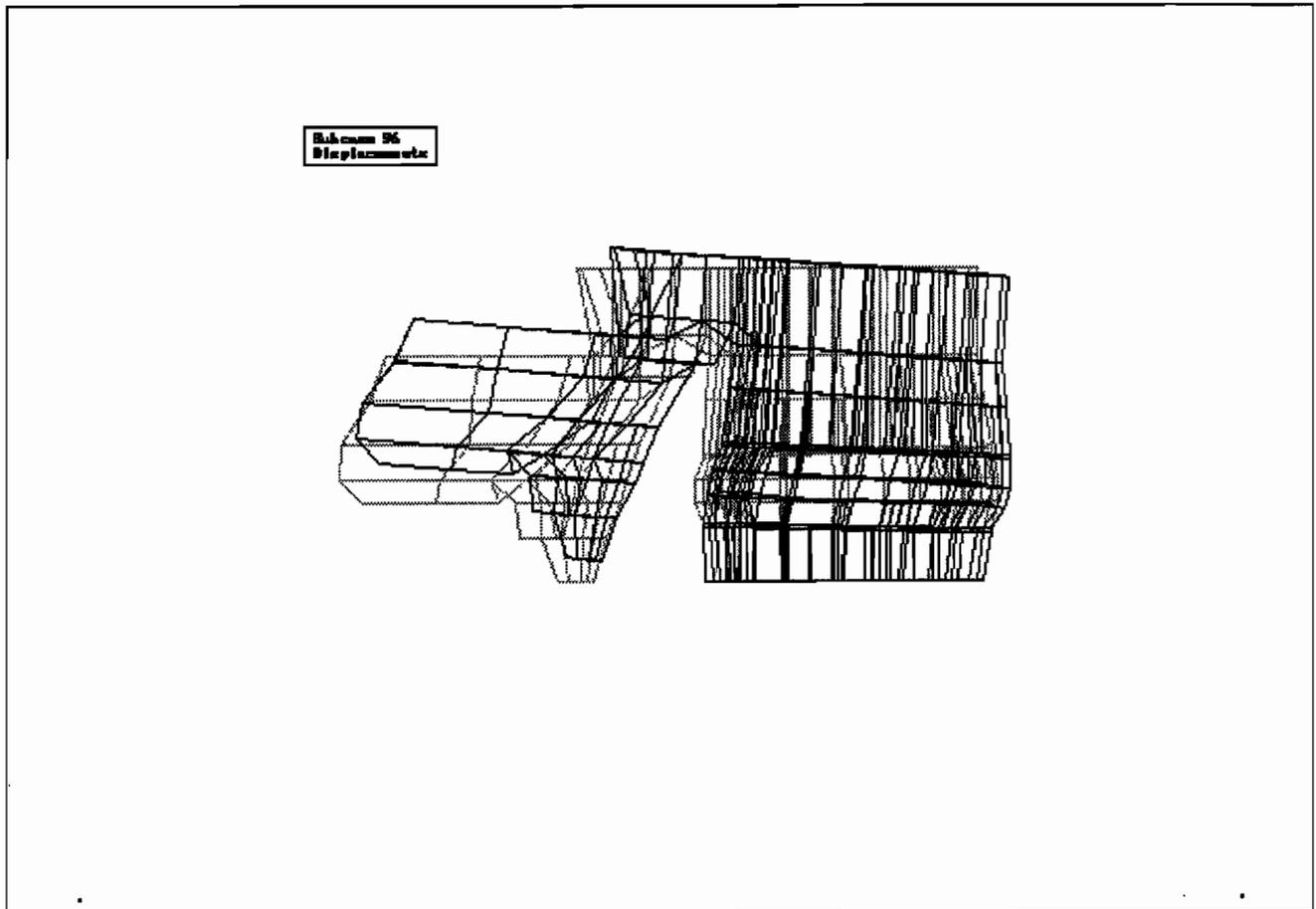


Abb. E49: Verschiebungen bei Schub nach ventral (vorne)

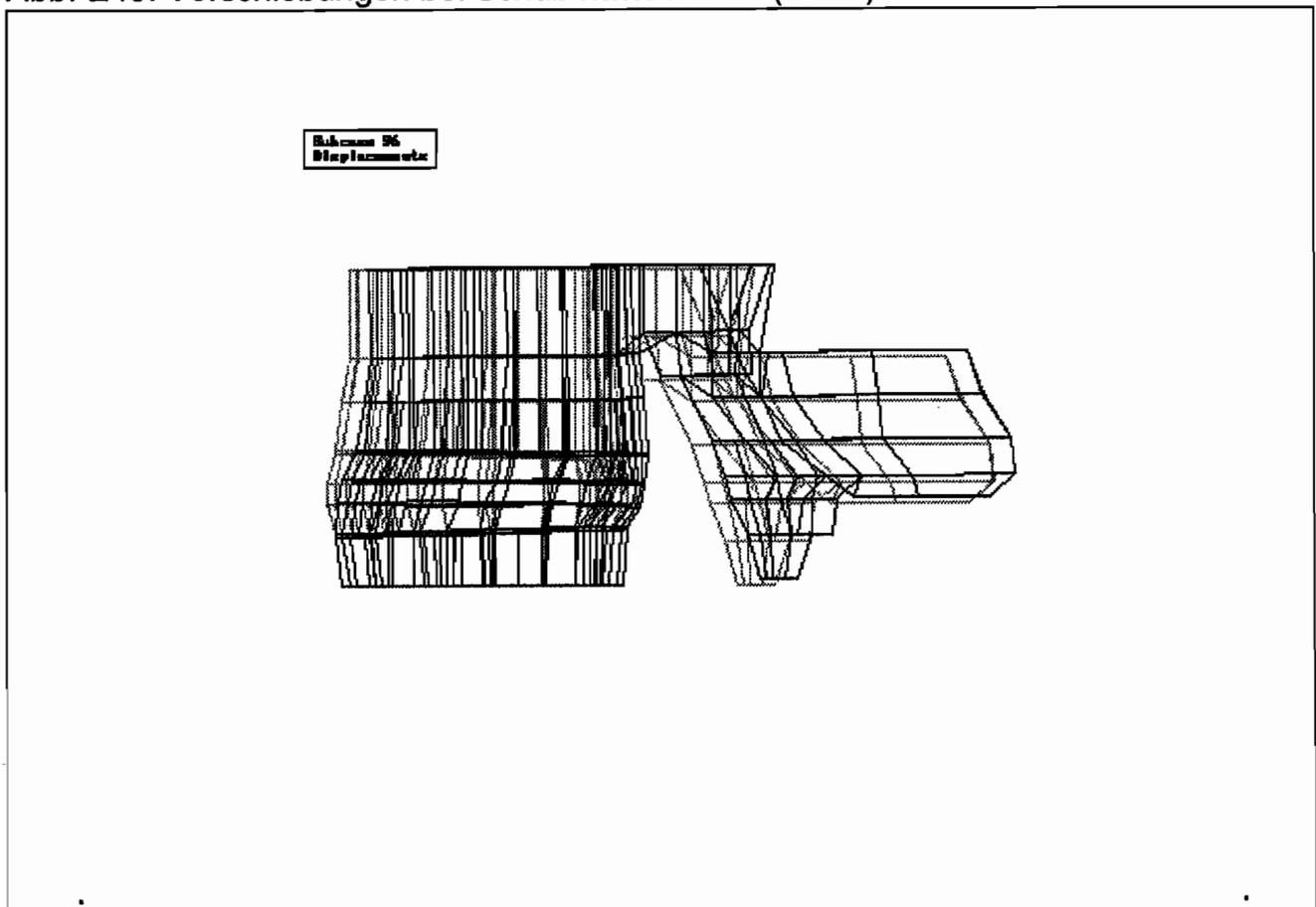


Abb. E50: Verschiebungen bei Schub nach dorsal (hinten)

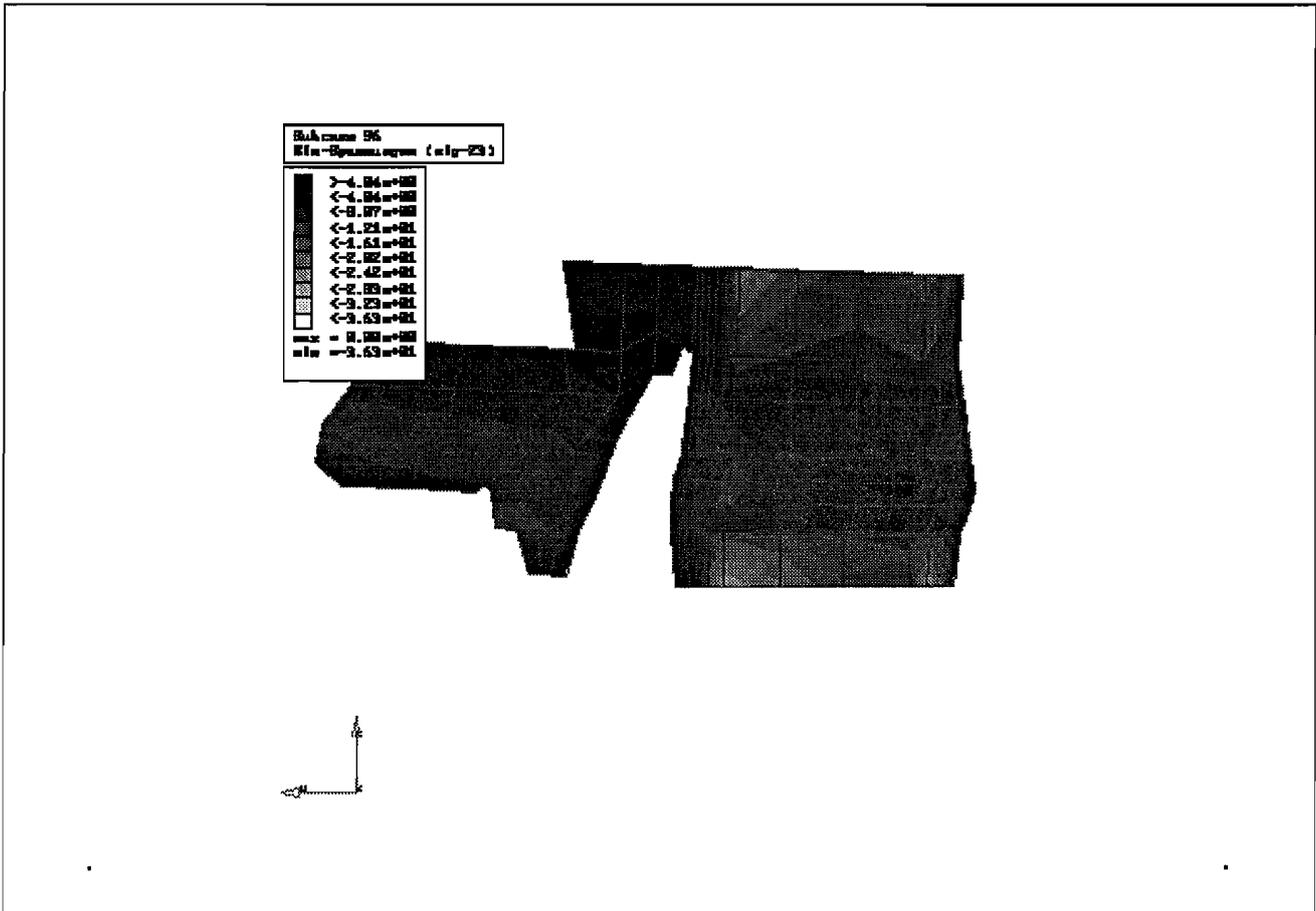


Abb. E51: Schubspannung bei Scherbelastung nach ventral (Segment intakt)

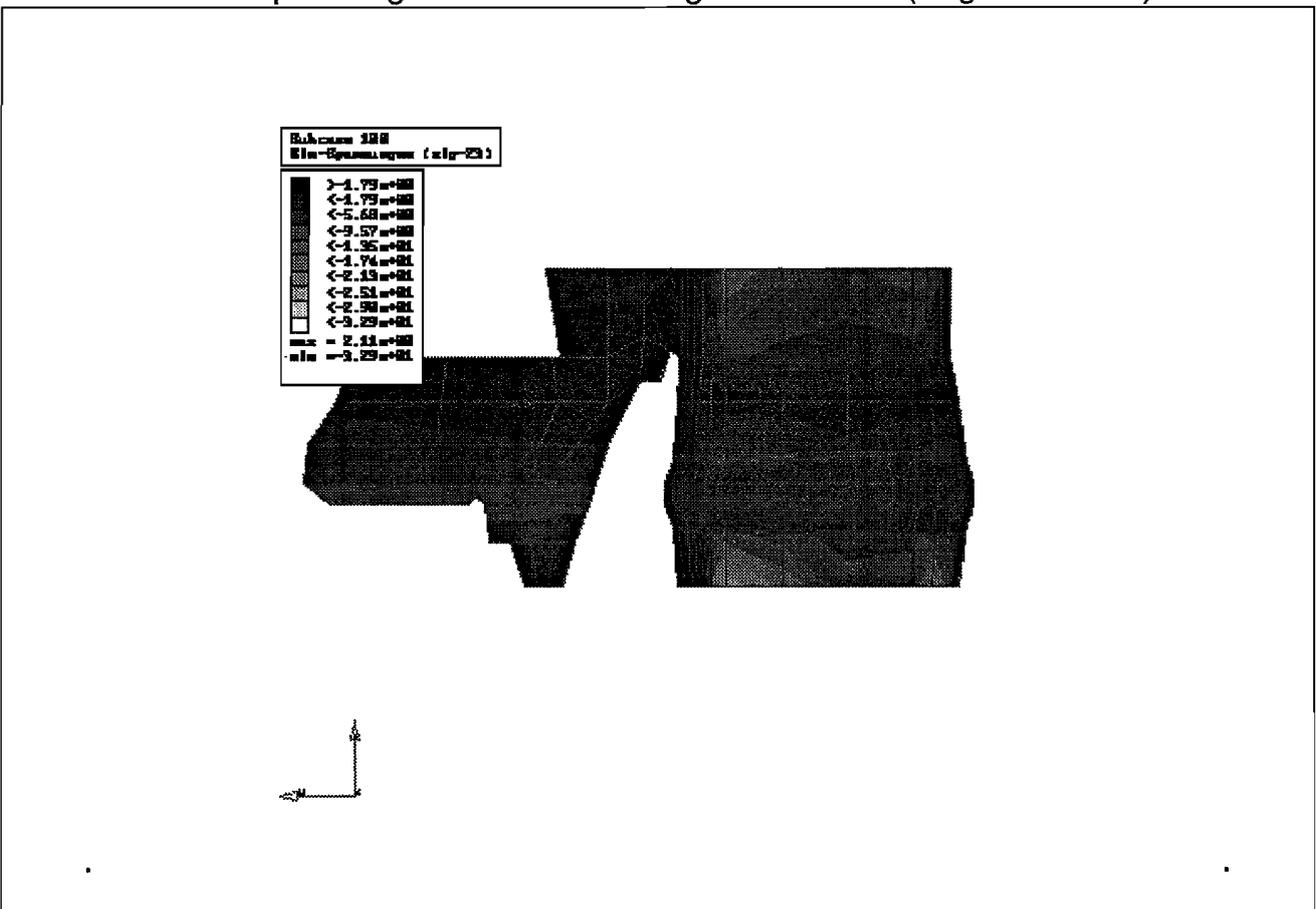


Abb. E52: Schubspannung bei Scherbelastung nach ventral (ohne posteriore Bänder)

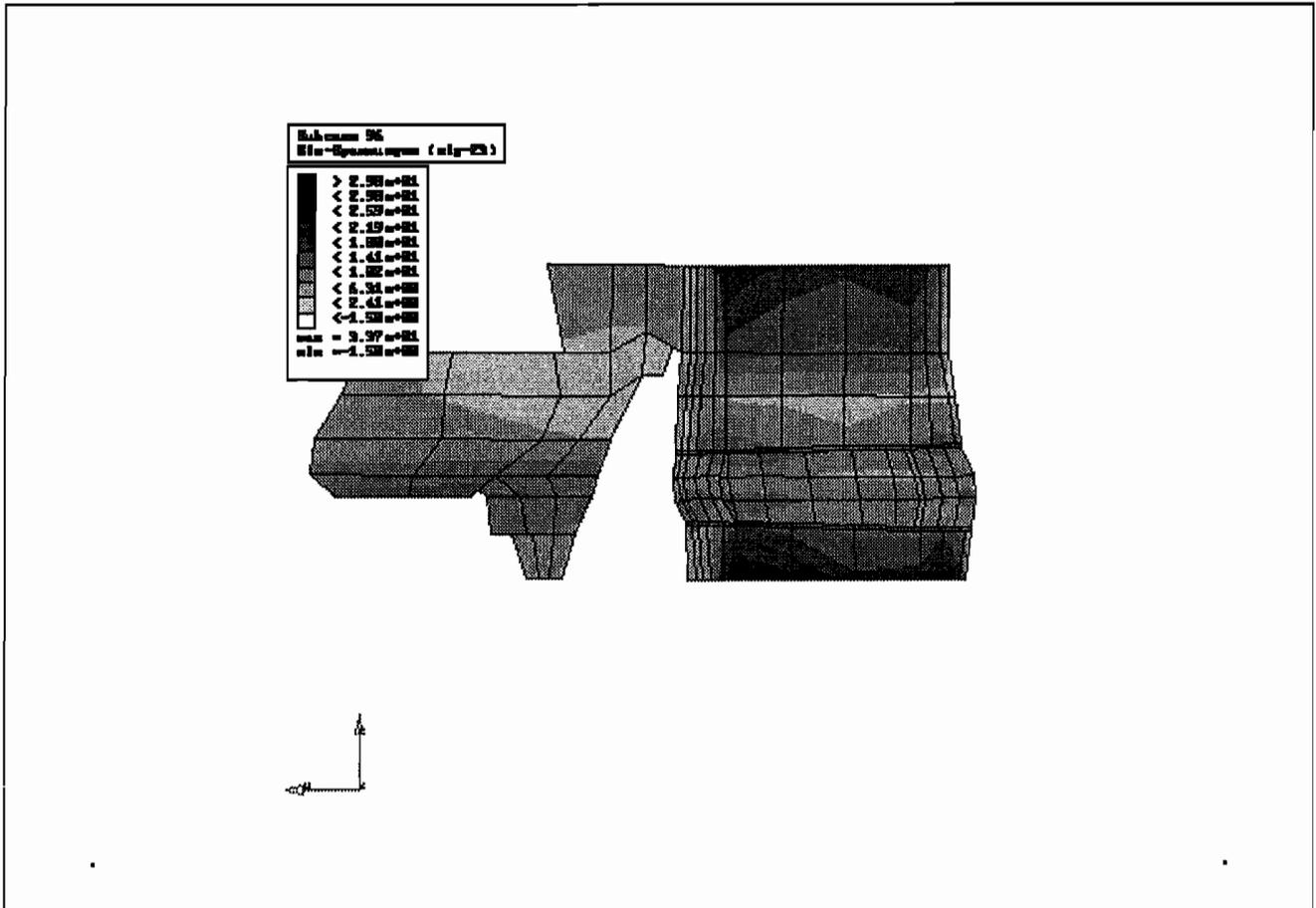


Abb. E53: Schubspannung bei Scherbelastung nach dorsal (Segment intakt)

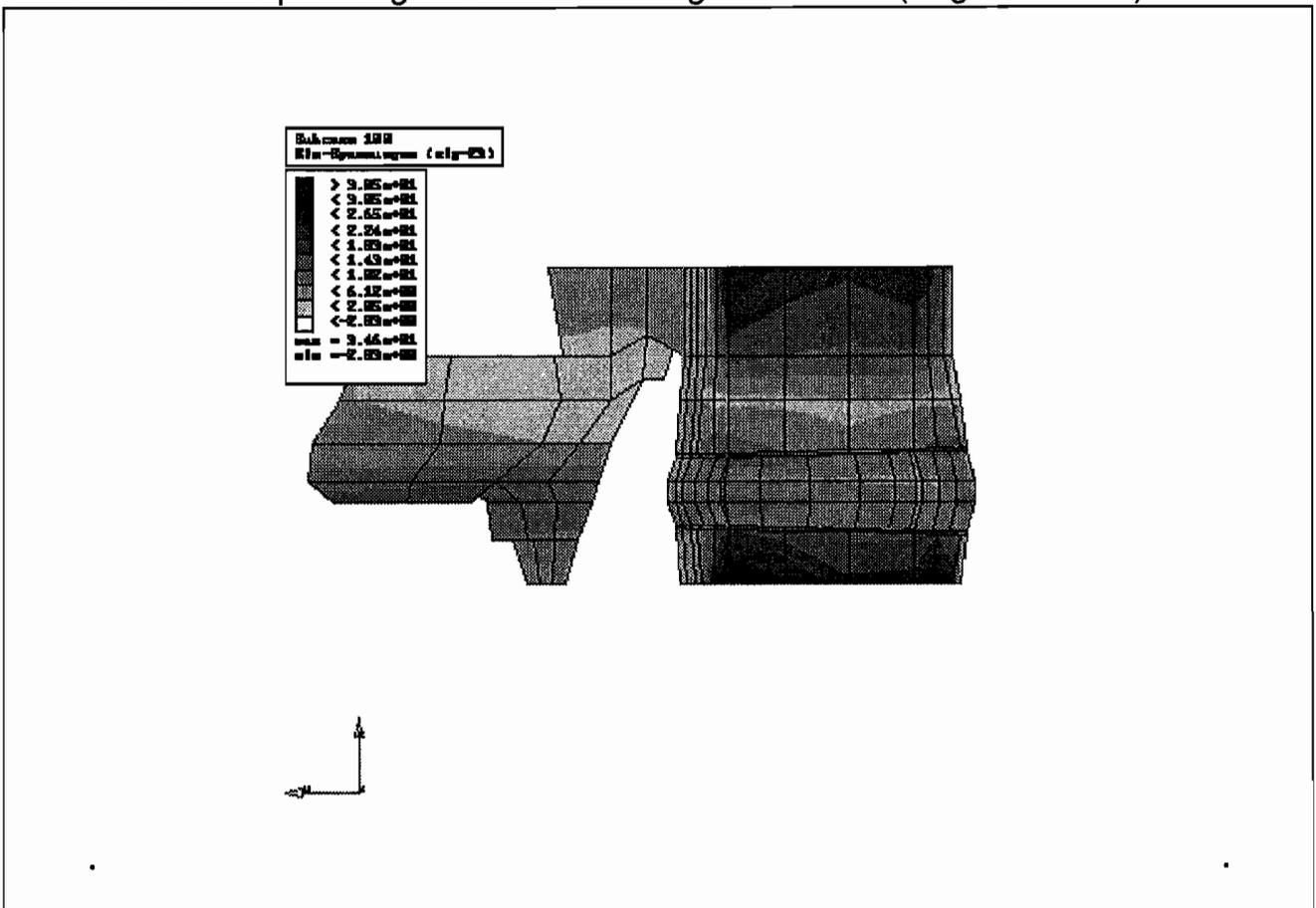


Abb. E54: Schubspannung bei Scherbelastung nach dorsal (ohne posteriore Bänder)

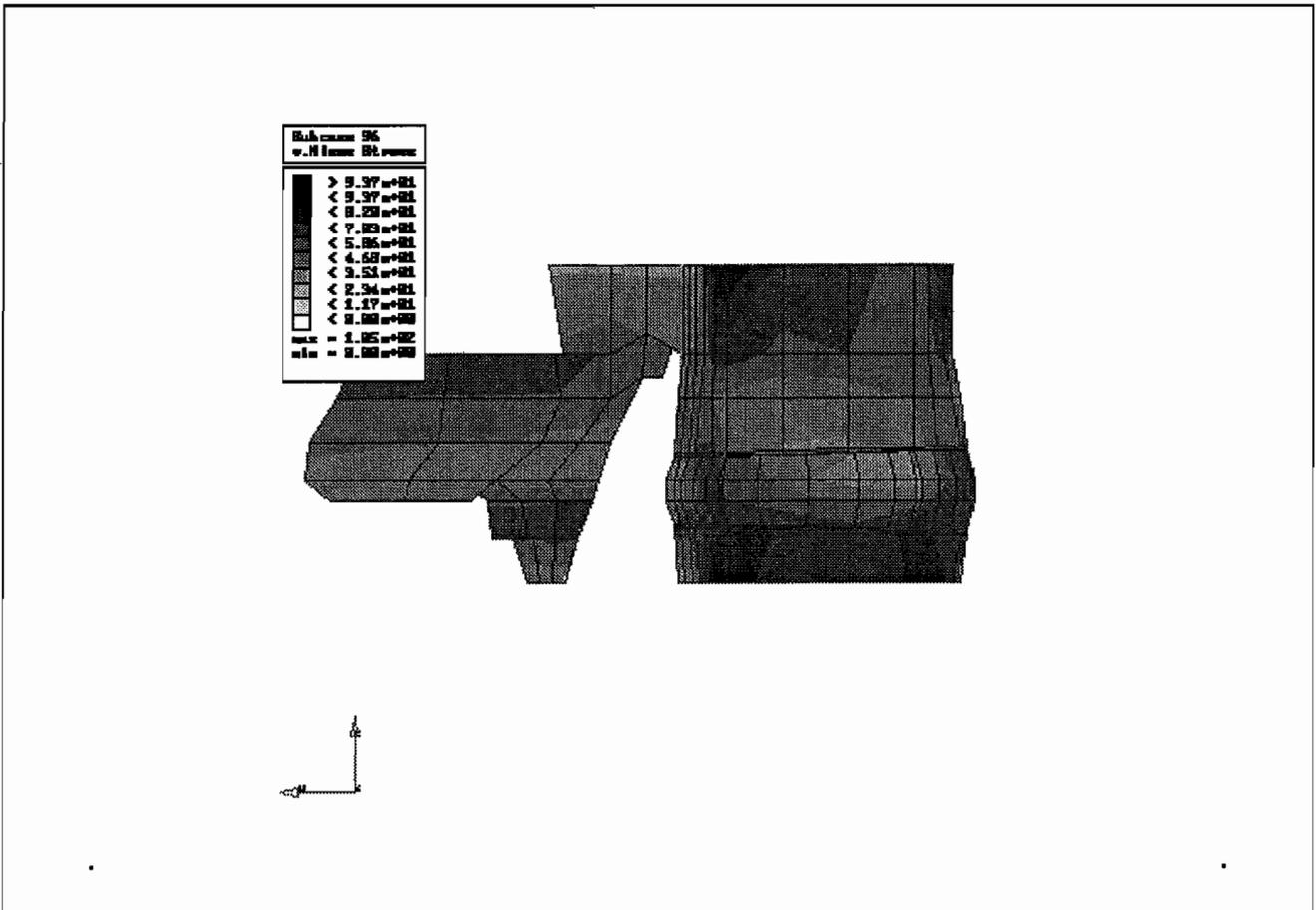


Abb. E55: Vergleichspannung nach v. Mises bei Scherbelastung nach ventral

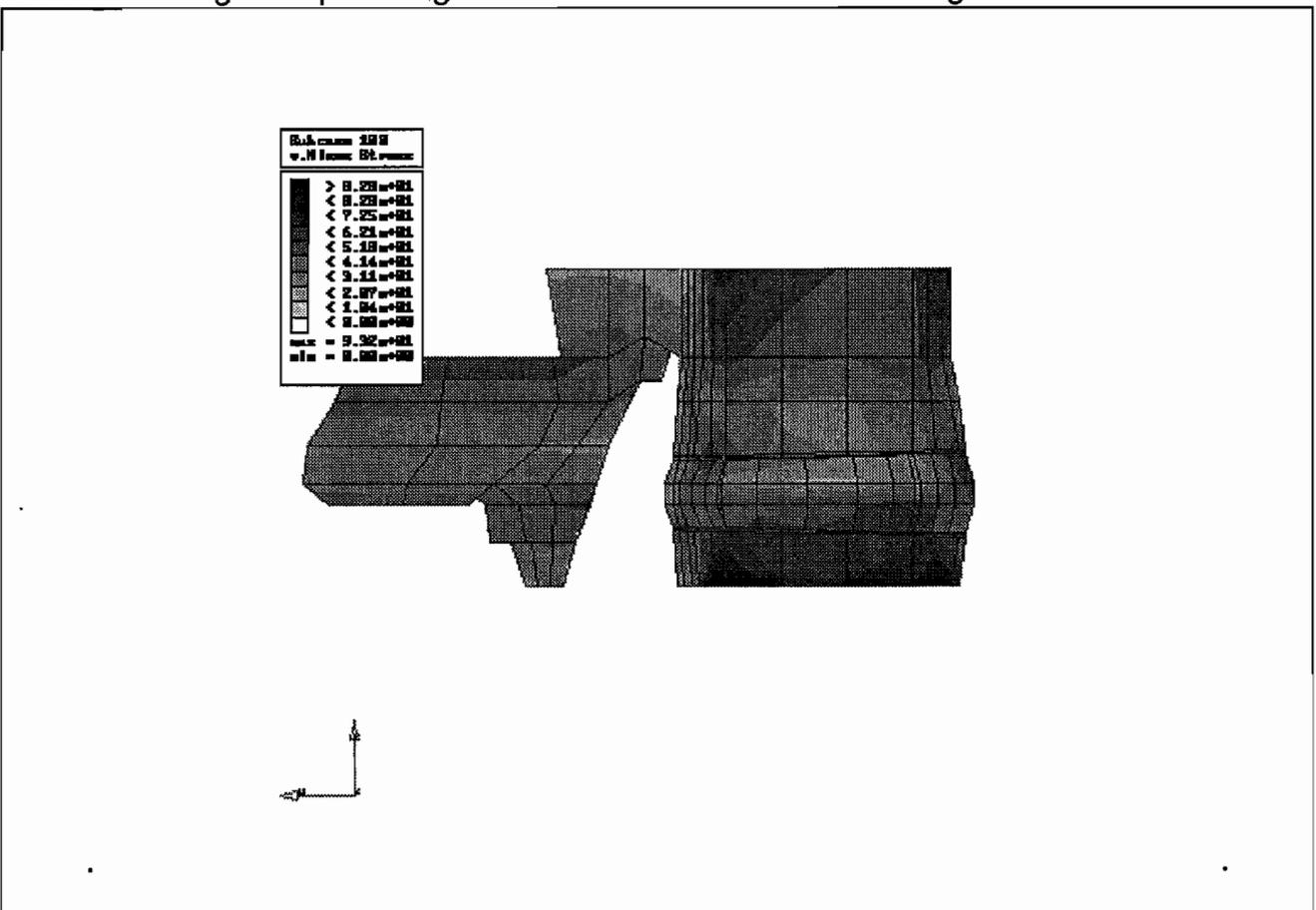


Abb. E56: Vergleichspannung bei Scherbelastung nach ventral (ohne post. Bänder)

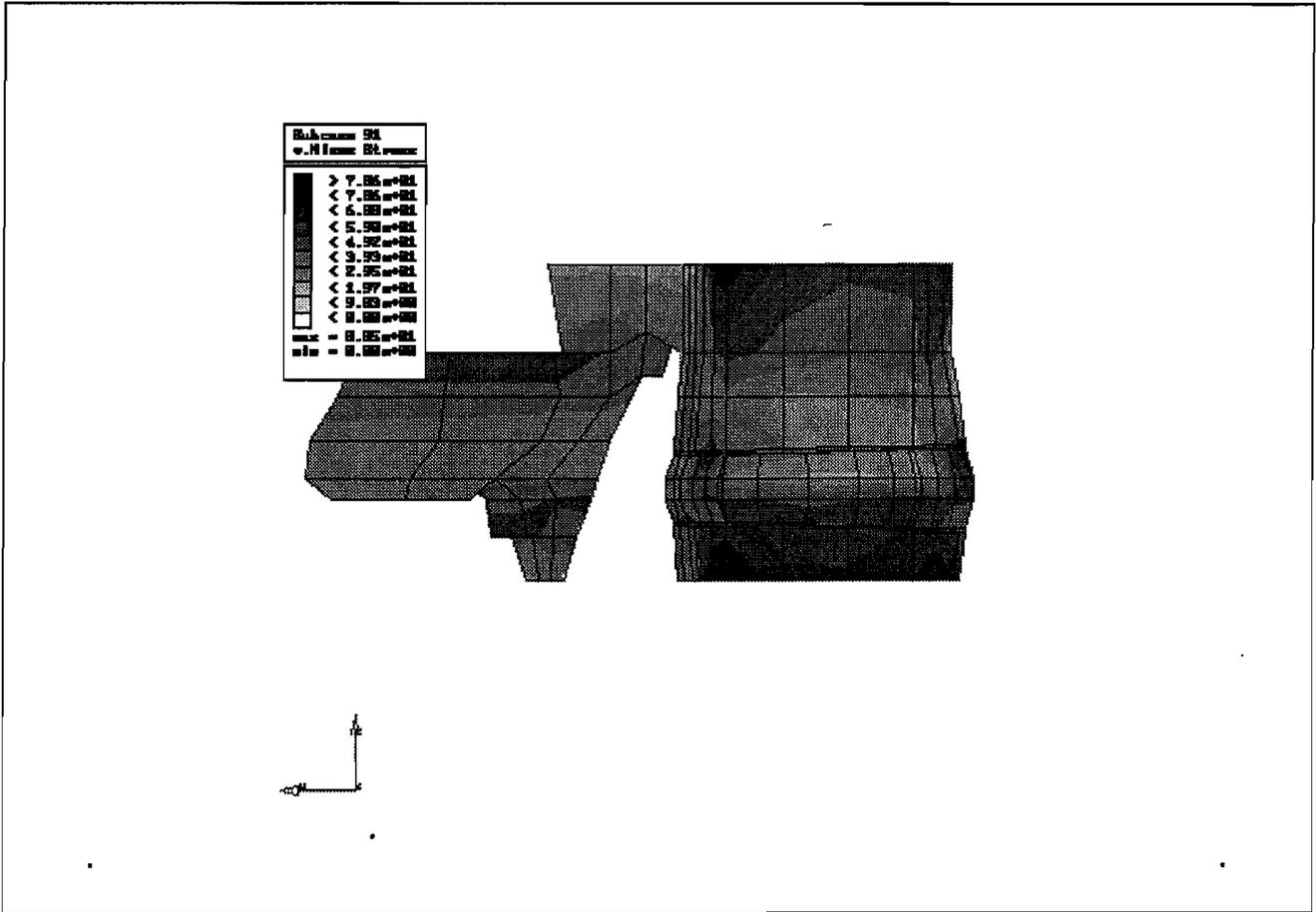


Abb. E57: Vergleichspannung nach v. Mises bei Scherbelastung nach dorsal

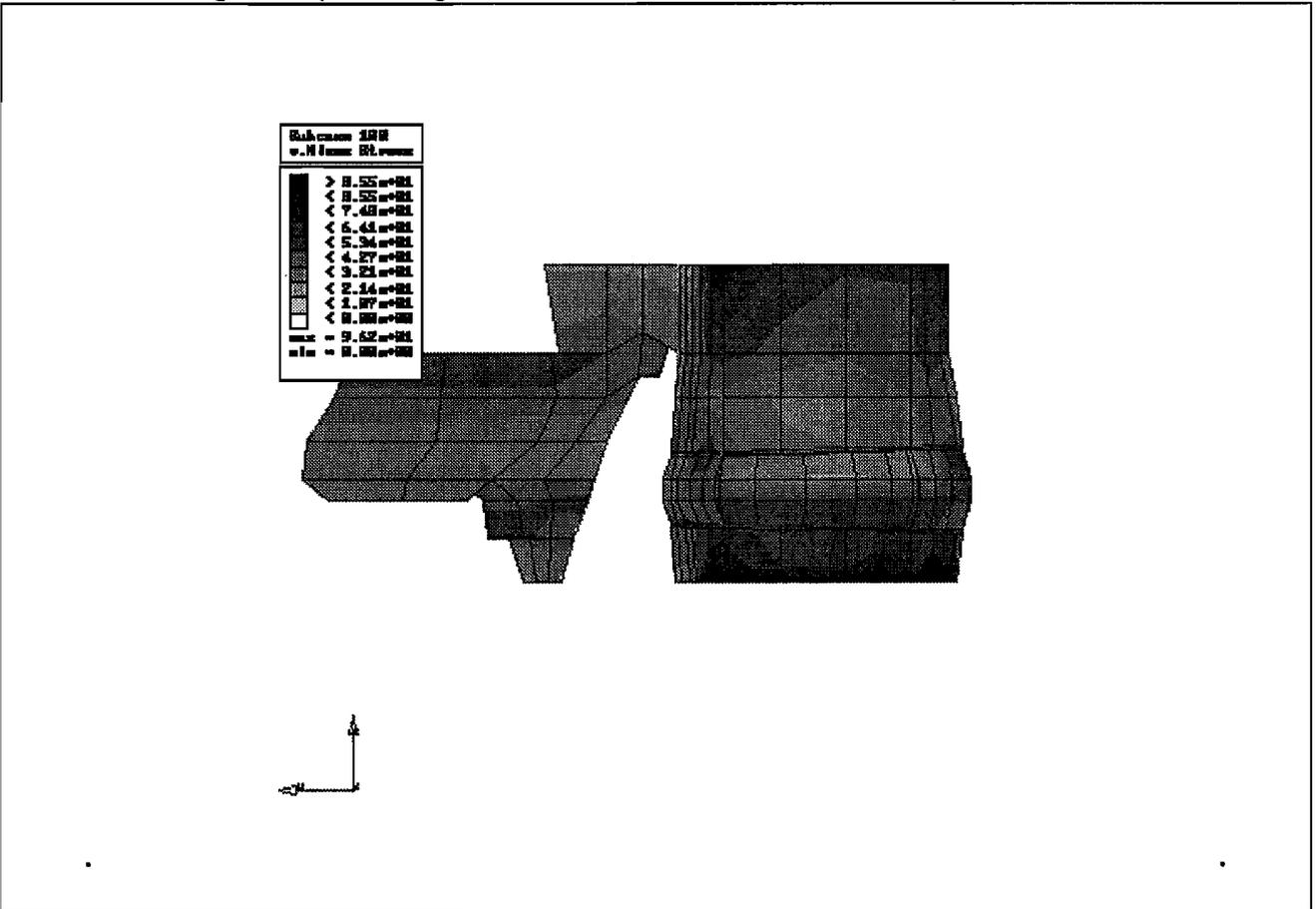


Abb. E58: Vergleichspannung bei Scherbelastung nach dorsal (ohne post. Bänder)

6.3 Fraktursimulation

Das folgende Kapitel wird sich mit den Möglichkeiten der Simulation und Analyse von Frakturen an der Wirbelsäule beschäftigen. Die Analyse der frakturierten Wirbelsäule im Vergleich zur intakten stellt eine interessante orthopädische und insbesondere unfallchirurgische Fragestellung dar. Dabei ist für die Einschätzung der Fraktur auf das Bewegungsverhalten und den veränderten Kraftfluß eine Simulation des klinisch zu beobachtenden Deckplatteneinbruchs vorzunehmen.

Experimentelle Analysen und klinische Beobachtungen gaben den Anstoß die Simulation des Einbruchs als eine geometrische Veränderung am unteren Wirbelkörper zu realisieren. Diese Veränderung wird zunächst als Verformung des Modells aufgebracht. Sie führt zu einer Verdrehung des oberen Wirbels von $4,37^\circ$. Die Abbildungen E61 und E62 zeigen die unverformte Situation und das Modell nach Anbringung der simulierten Kompressionsfraktur. Aus dieser neuen Lage heraus werden die Belastungen an dem Modell vorgenommen. Zum einen wird eine Flexionsbewegung durch eine Momentenbelastung erzeugt und zum anderen wird durch ein entgegengesetztes Moment eine Extensionsbewegung erreicht. Die aufgebrachten Momente sind entsprechend der Analysen aus Abschnitt 6.2.2 und 6.2.3 gewählt. Dadurch unterscheiden sich die berechneten Belastungen eines intakten Bewegungssegmentes und des hier untersuchten Segmentes mit simulierter Fraktur durch die oben beschriebene Vorverformung und die daraus resultierenden Vorspannungen und Vordehnungen in den Bestandteilen.

Durch die veränderte Ausgangslage des Bewegungssegmentes ergibt sich ein verändertes Bewegungsverhalten sowohl für Flexions- als auch Extensionsbewegung. In Abbildung E59 ist die berechnete Verdrehung des belasteten Wirbels über die aufgebrachten Momente wiedergegeben. Der Vergleich in Abbildung E60 zu den berechneten Verdrehungen des Bewegungssegmentes ohne Fraktur zeigt die Verschiebung der Ausgangslage durch die eingeprägte Verformung und die darauf folgenden Momentenbelastungen. Dabei ist der Bewegungsumfang durch die simulierte Fraktur von $8,13^\circ$ auf nur noch $3,84^\circ$ zurückgegangen. Diese Situation ist in den Abbildungen E63 und E64 wiedergegeben. Durch den geringen Ausschlag bei gleicher Momentenbelastung wird nicht einmal die Nulllage erreicht. Die in den vorgespannten Bändern und der vorbelasteten Bandscheibe herrschenden Kräfte wirken dem entgegen. Der zu beobachtende Bewegungsverlust oder auch Flexibilität des Bewegungssegment nimmt also auf die Hälfte ab. Leider erlaubt es die hier gezeigte Simulation nicht das experimentell zu beobachtende Verhalten im vollen Umfang nachzubilden. Experimentelle Untersuchungen solcher simulierter

Wirbelkörpereintrübe habe nur unwesentliche Einbußen an Flexibilität feststellen können. Die Ursache für diese Diskrepanz liegt in der zeitlichen Trennung der Messungen am intakten Präparat und am frakturierten Präparat. Nach der Anbringung der simulierten Fraktur geht die Vorspannung in den beteiligten Bänder in der Zwischenzeit bis zur erneuten Flexibilitätsuntersuchung verloren. Um dieser Situation Rechnung zu tragen, könnte es interessant sein, diese Hypothese genauer zu untersuchen und erneute Vergleiche zwischen experimenteller Untersuchung und Berechnung anzustellen.

6.3 Fraktursimulationen

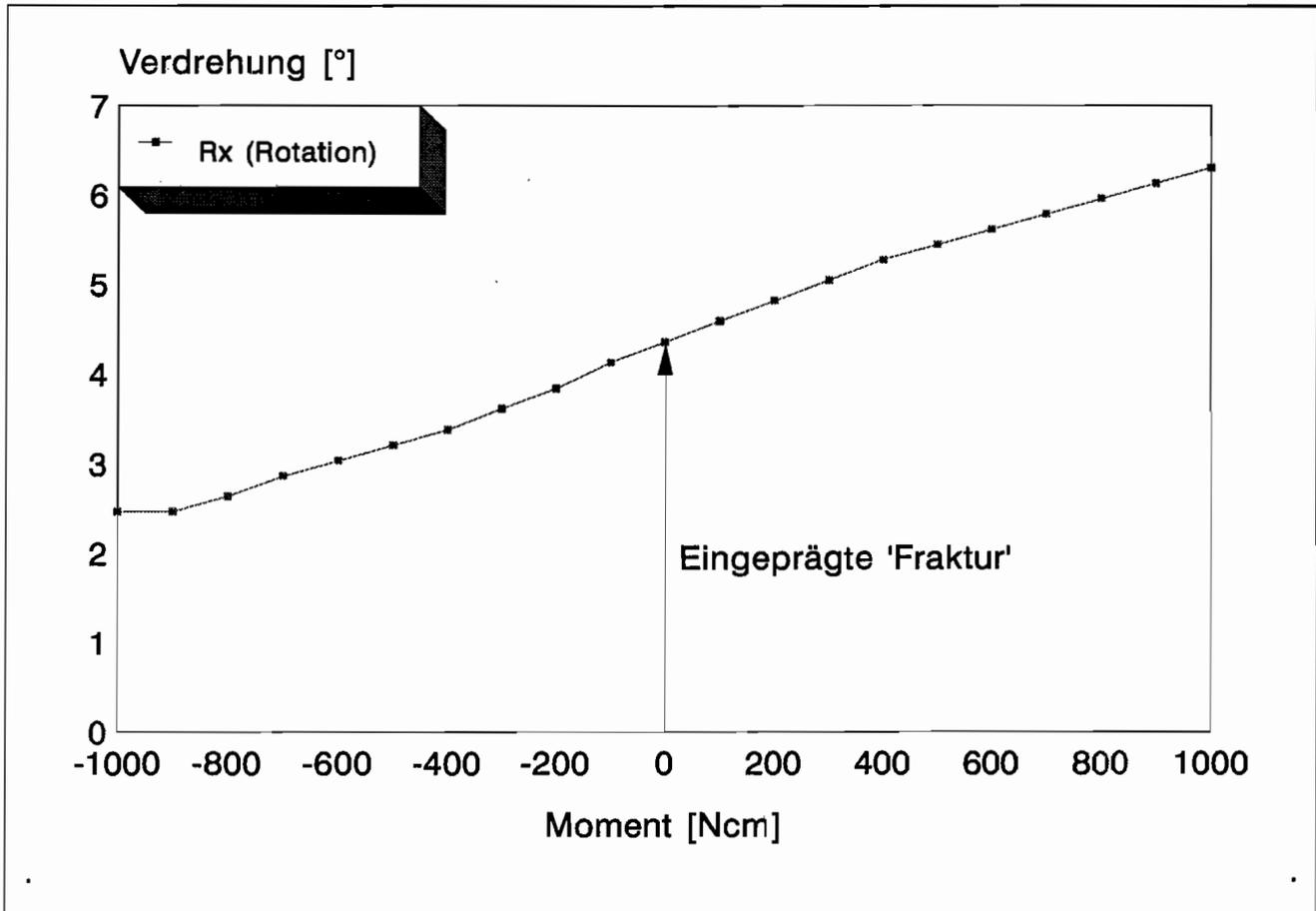


Abb. E59: Verdrehungen unter Flexions- Extensionsmoment nach Fraktur

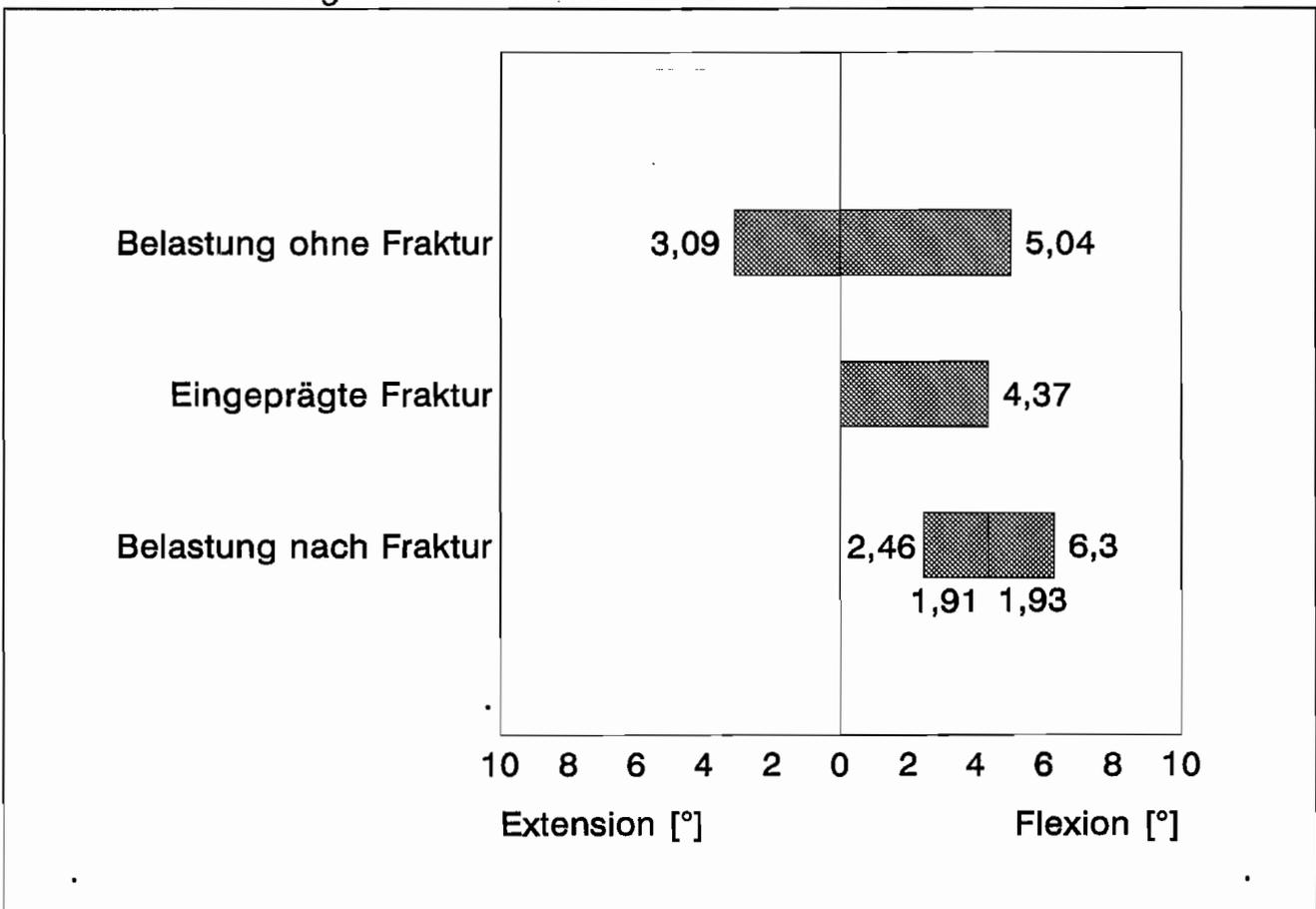


Abb. E60: Vergleich intaktes Segment gegenüber Segment mit Fraktur

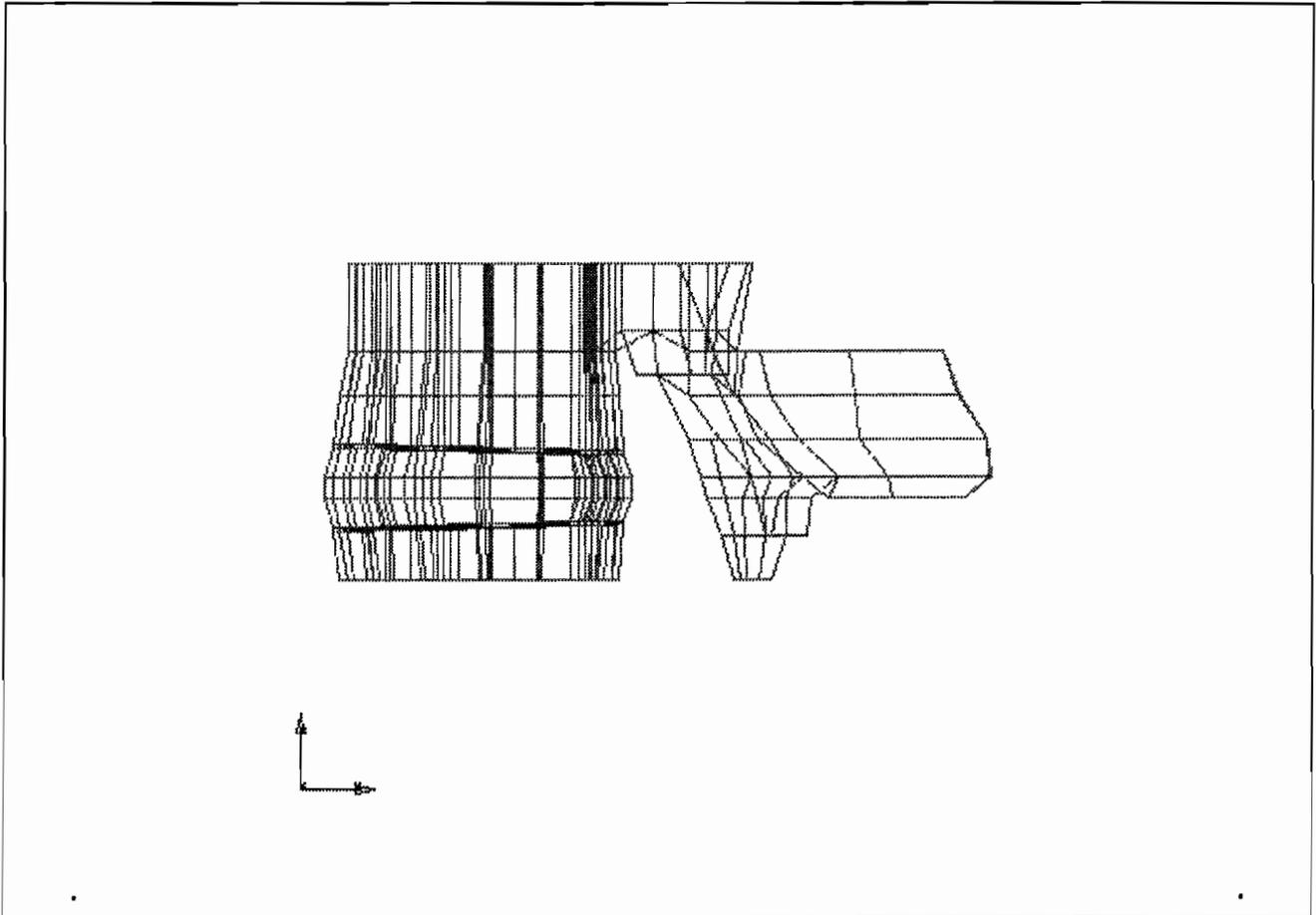


Abb. E61: FEM-Modell vor Aufbringen der Fraktur

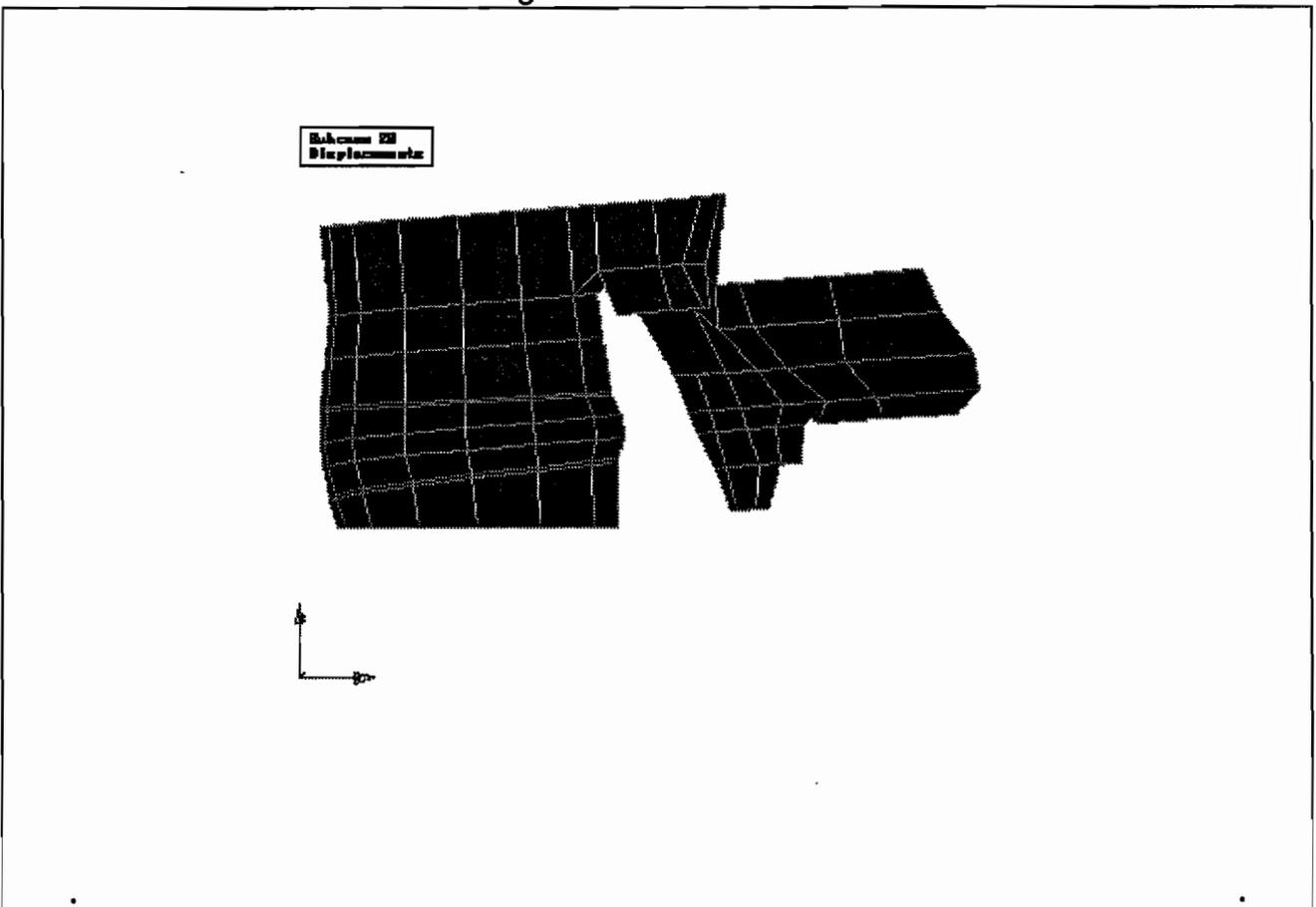


Abb. E62: FEM-Modell mit simulierter Wirbelkörperfraktur (Deckplatteneinbruch)

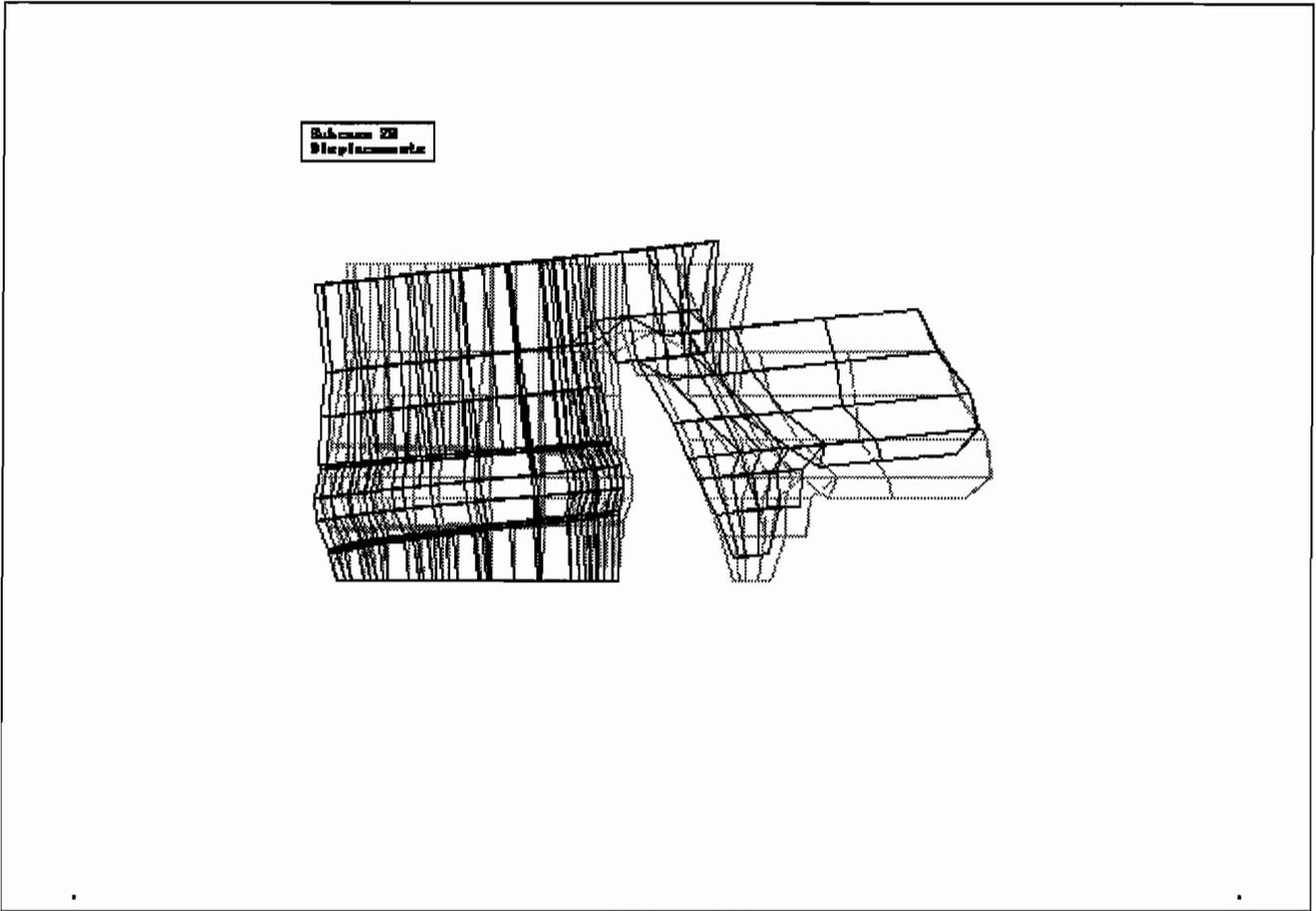


Abb. E63: Frakturmodell unter Flexionsbelastung

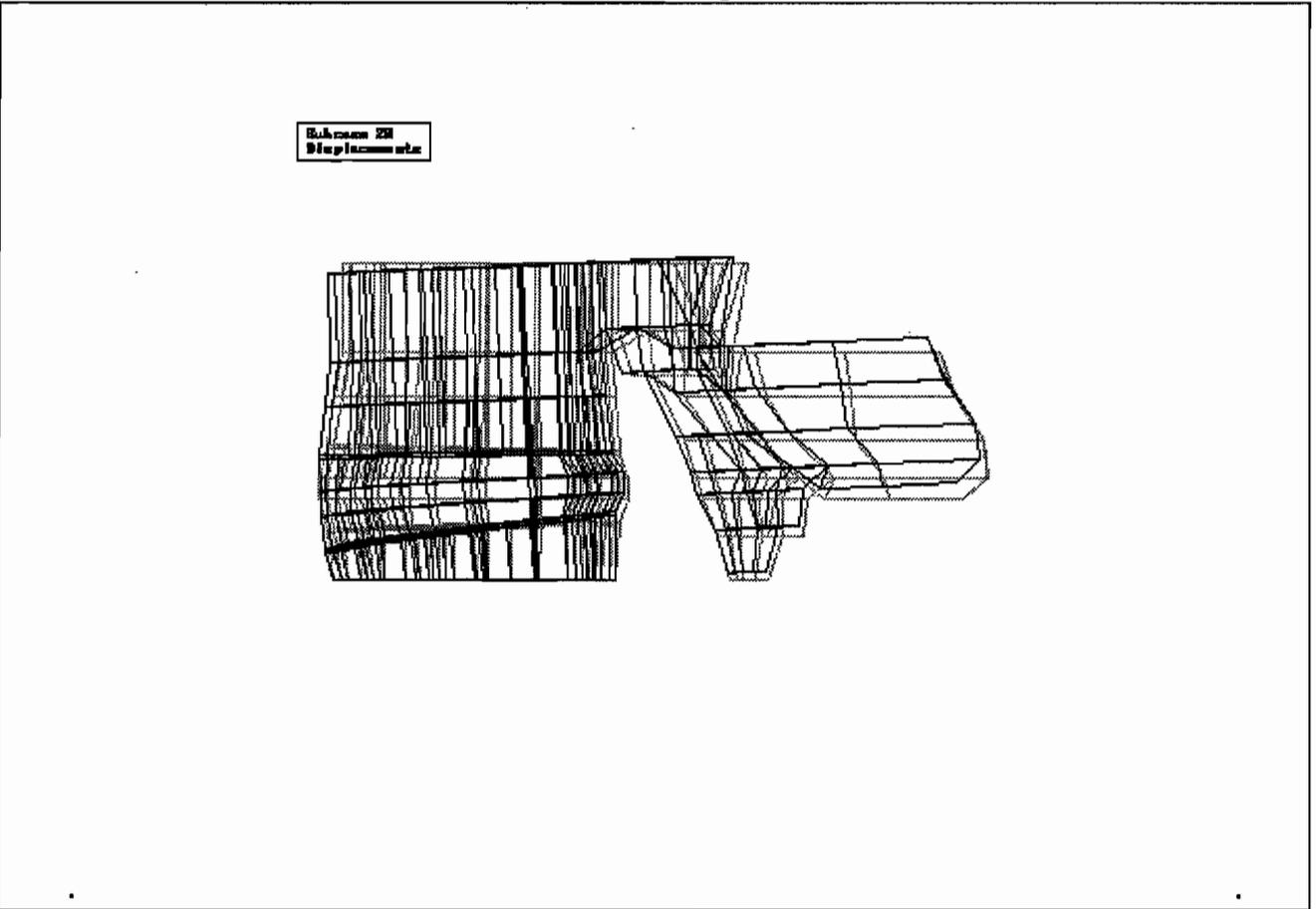


Abb. E64: Frakturmodell unter Extensionsbelastung

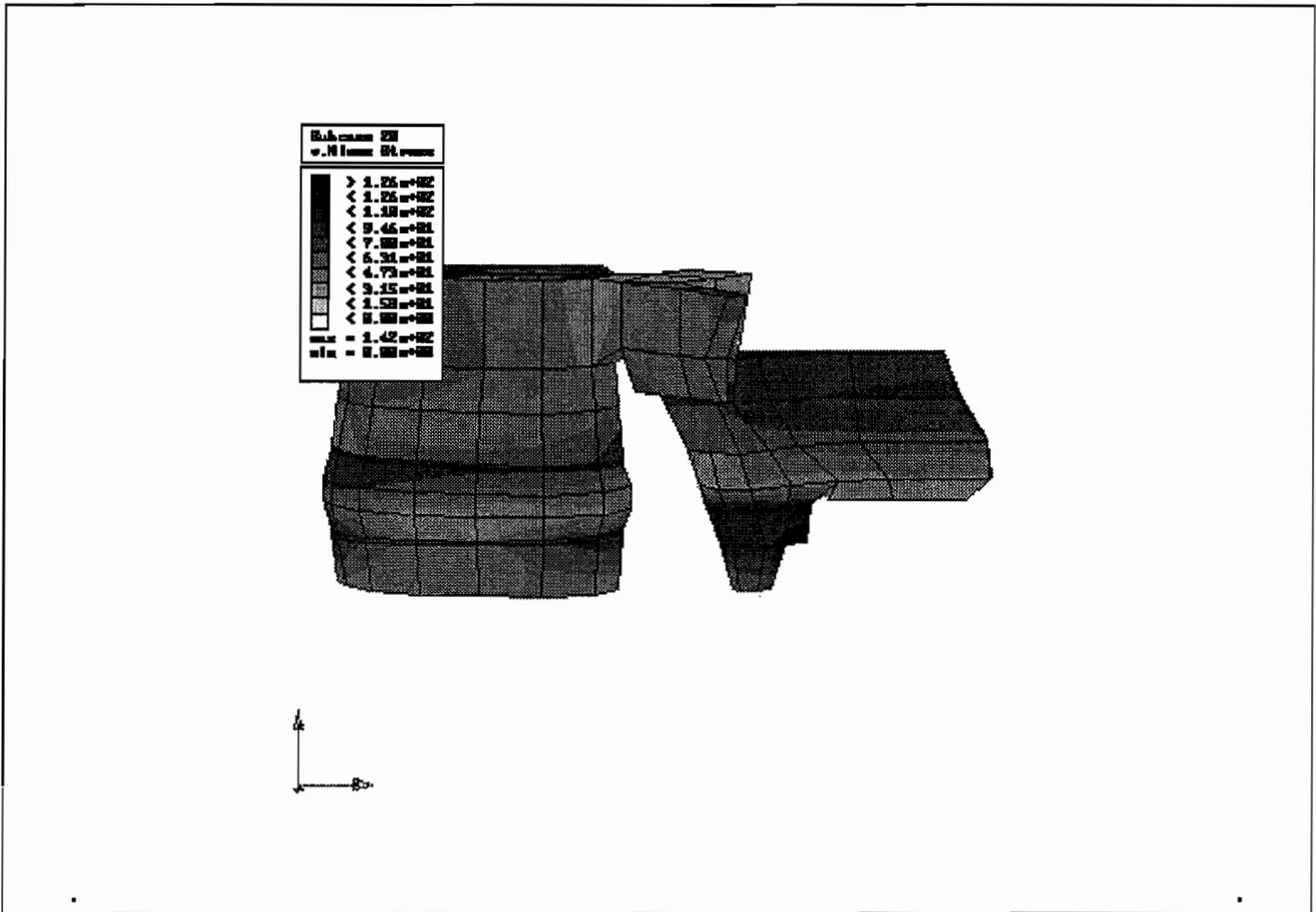


Abb. E65: Vergleichspannungen bei Flexionsbelastung (Fraktursimulation)

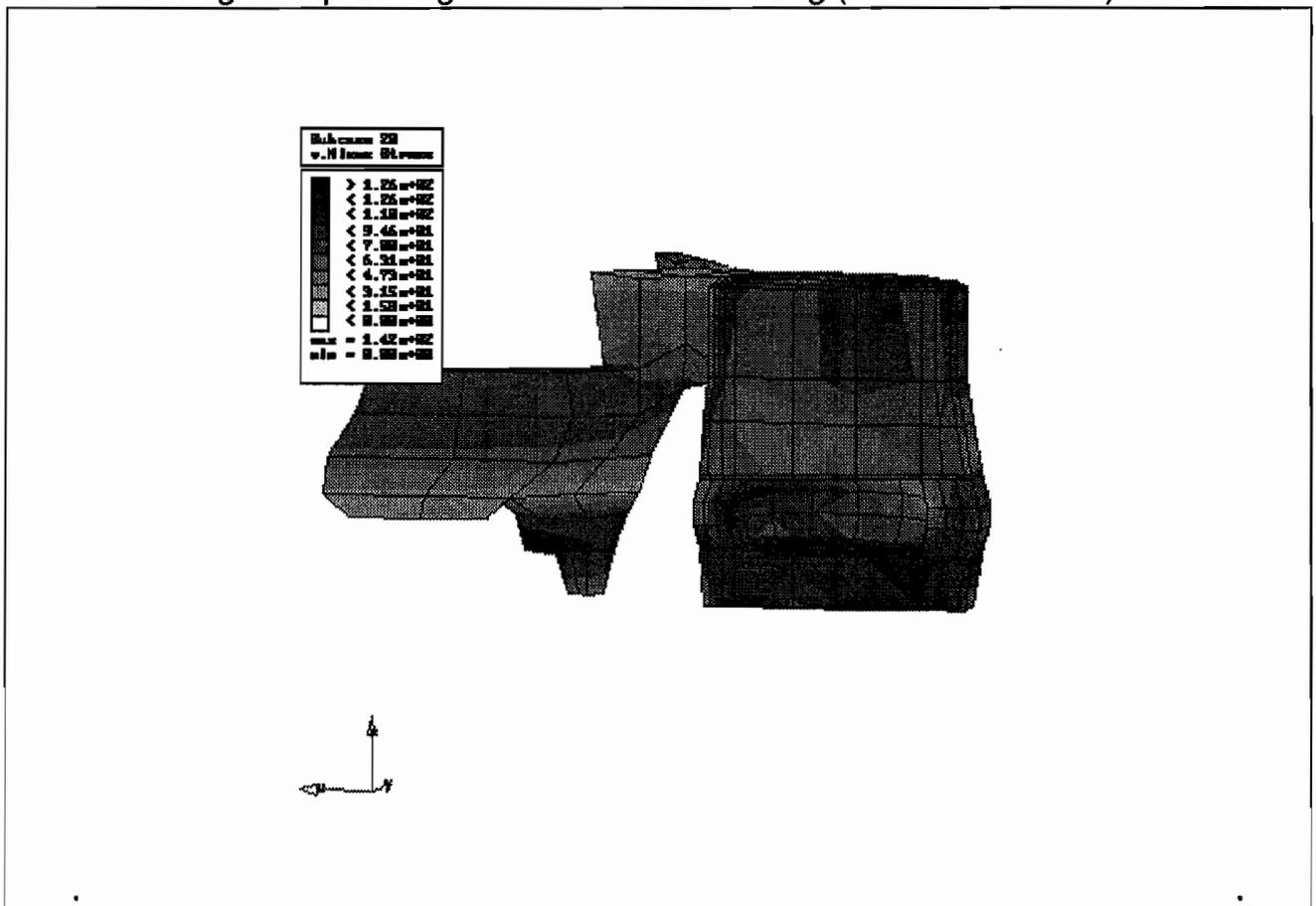


Abb. E66: Vergleichspannungen bei Flexionsbelastung (Fraktursimulation)

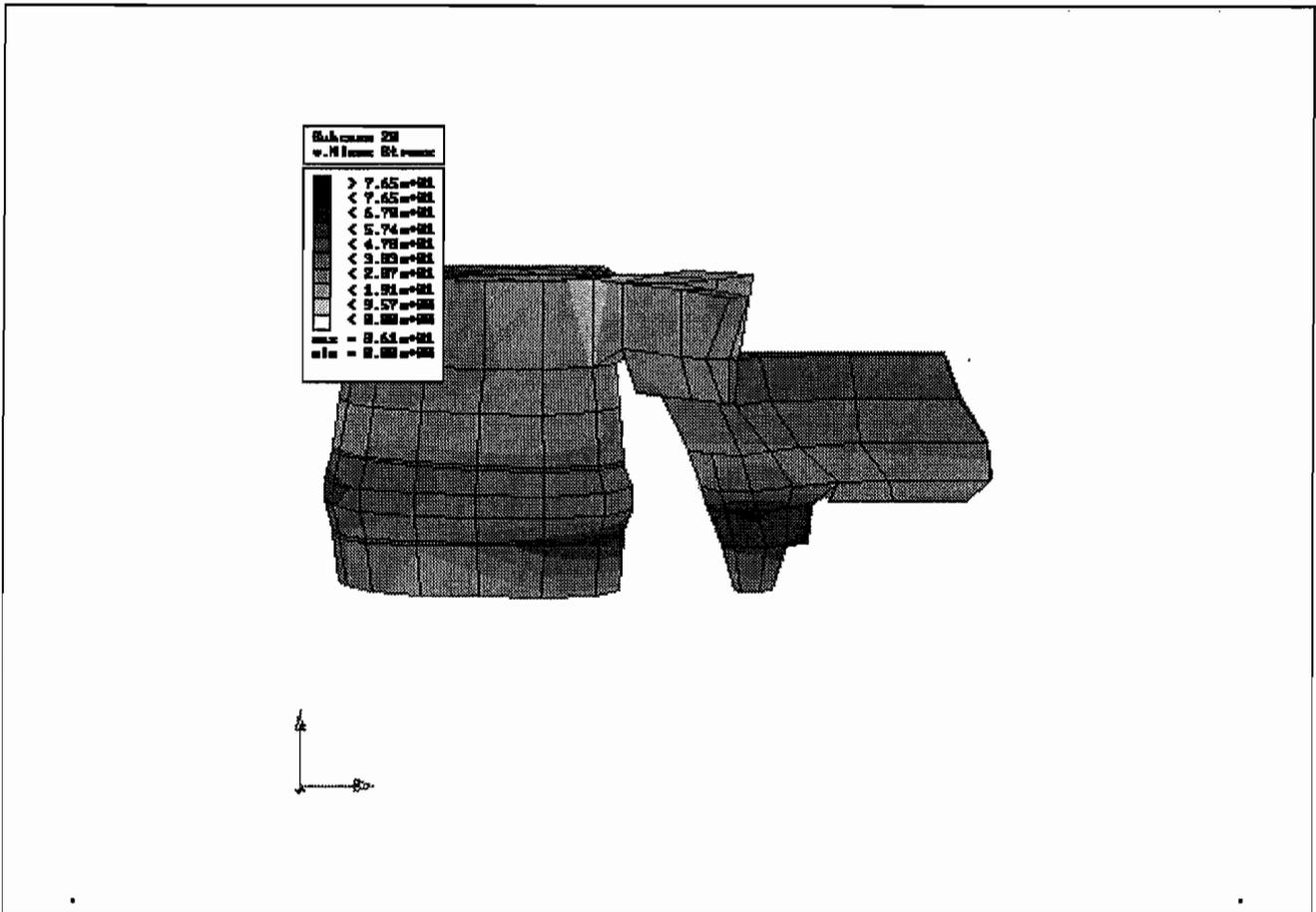


Abb. E67: Vergleichspannungen bei Extensionsbelastung (Fraktursimulation)

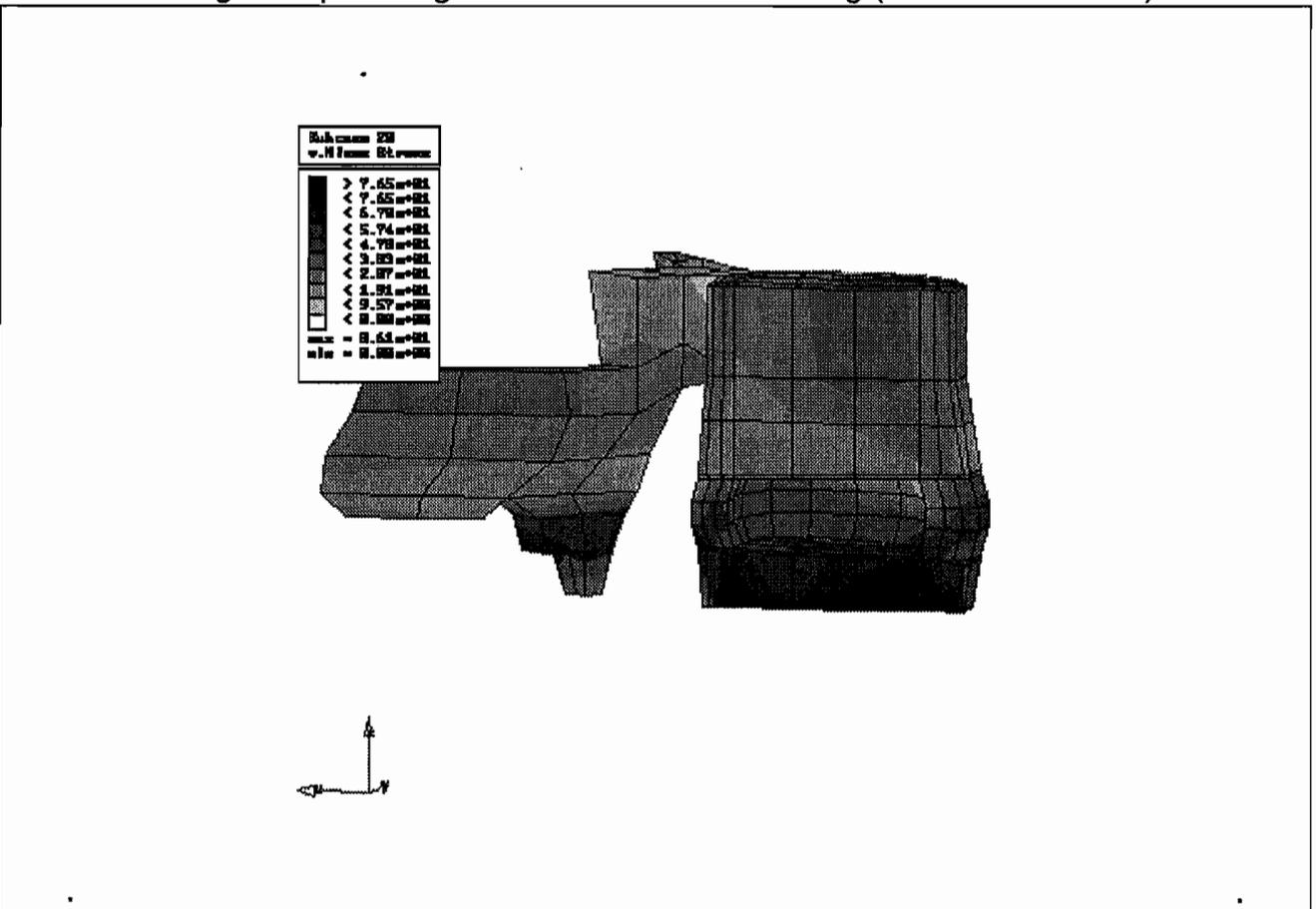


Abb. E68: Vergleichspannungen bei Extensionsbelastung (Fraktursimulation)

6.4 Mehrsegmentale Wirbelsäule

Über die im Abschnitt 6.2 angestellten Analysen eines monosegmentalen Bewegungssegmentes hinaus, werden in dem folgenden Abschnitt zwei Bewegungssegmente einer Wirbelsäule untersucht. Ein solcher Wirbelsäulenabschnitt aus drei Wirbelkörpern mit dazwischen liegenden Bandscheiben stellt die konsequente Erweiterung monosegmentaler Analysen dar. Durch die Untersuchung bisegmentaler Wirbelsäulenabschnitte lassen sich eine Reihe weitergehender Fragestellungen in der Biomechanik angehen.

Unter Verwendung dieses Modells, werden die Belastungen eines Flexionsmomentes und eines Extensionsmomentes an dem obersten Wirbel (L3) untersucht. Die Abbildungen E71 und E72 zeigen die berechneten Verdrehungen und Verschiebungen der zwei frei beweglichen Wirbel. In den Diagrammen E73 und E74 sind die dabei auftretenden Kräfte in den beteiligten Ligamenten zwischen den Wirbeln aufgetragen. Die berechneten Ligamentkräfte zwischen L3 und L4 sind dabei wesentlich größer als im unteren Segment zwischen L4 und L5. Die korrespondierenden Verschiebungen und das verformte Modell werden in den Abbildungen E75 und E76 aufgezeigt. Dabei verschiebt sich der belastete Wirbel L3 um beträchtliche Anteile aus seiner Ausgangslage. Aus den Darstellungen der Vergleichsspannung in Abbildung E77 und E78 läßt sich eine starke Belastung der knöchernen Endplatten ablesen. Die entgegengesetzte Belastung des bisegmentalen Modells durch ein Extensionsmoment wird in Abbildung E79 und E80 wiedergegeben. Auf Grund der Richtung der Belastung sind nur Kräfte in den vorderen Längsbändern zu verzeichnen. Abbildung E81 und E82 zeigen den nichtlinearen Verlauf der berechneten Ligamentkräfte. Bei der Extensionsbelastung ist im Vergleich zur Flexionsbelastung die starke Beanspruchung der knöchernen Endplatten durch hohe Vergleichsspannungen nicht zu beobachten.

Die numerische Analyse bisegmentaler Wirbelsäulenabschnitte verspricht im Hinblick auf klinische Fragen wesentlich mehr Aufschluß über Zusammenhänge der Beweglichkeit und des Tragverhaltens zu geben, als das aus rein monosegmental basierten Untersuchungen möglich sein kann.

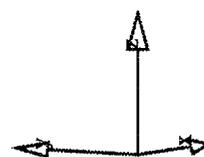
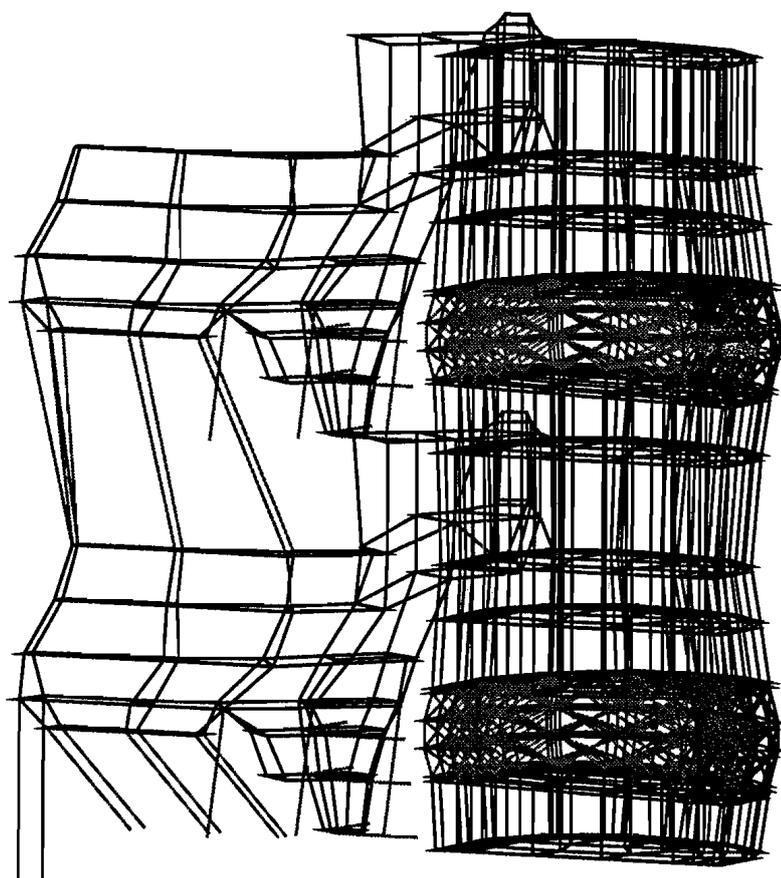


Abb. E69: FEM-Netz des mehrsegmentalen Modells

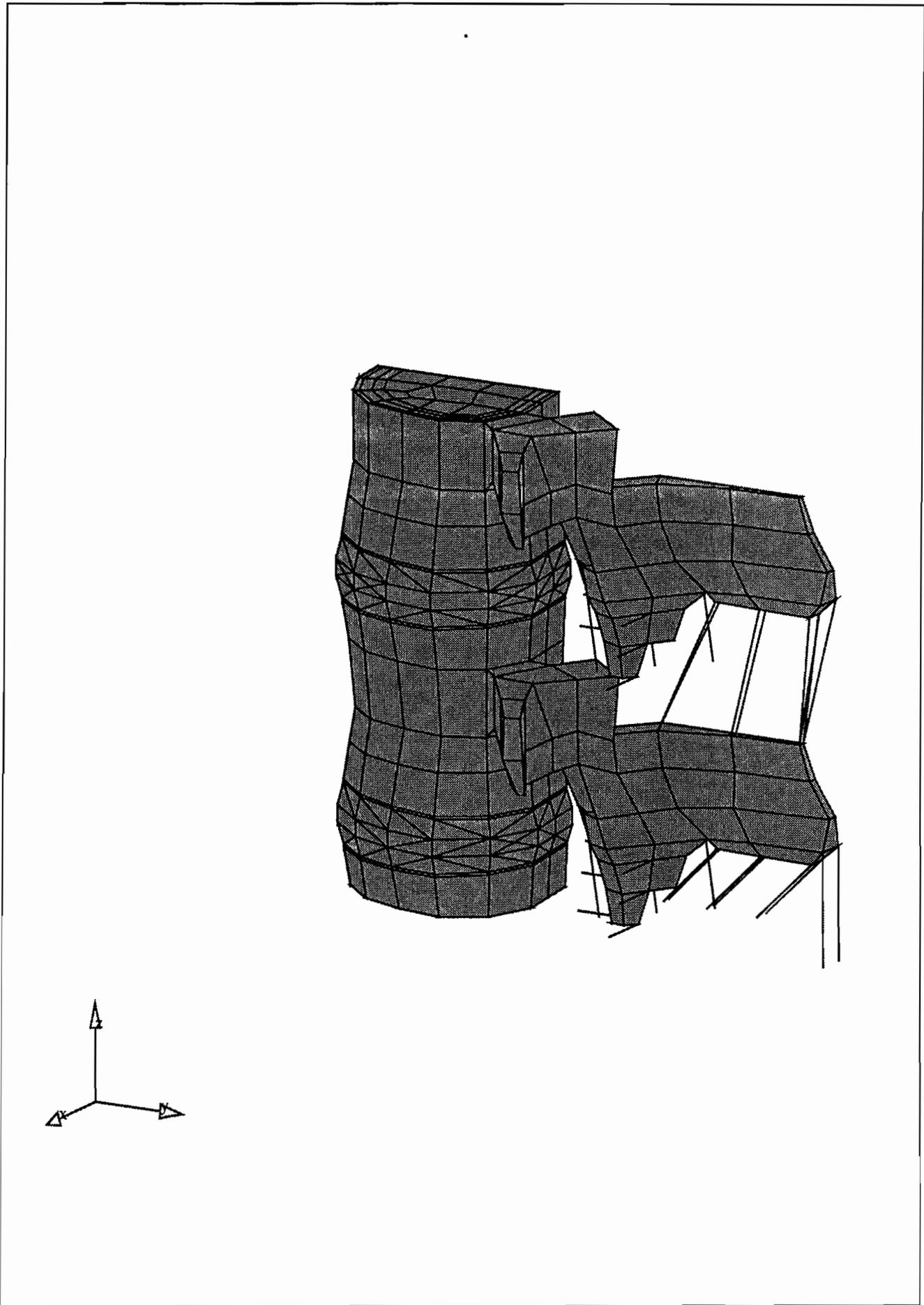


Abb. E70: FEM-Netz des mehrsegmentales Modells

6.4.1 Flexionsbelastung

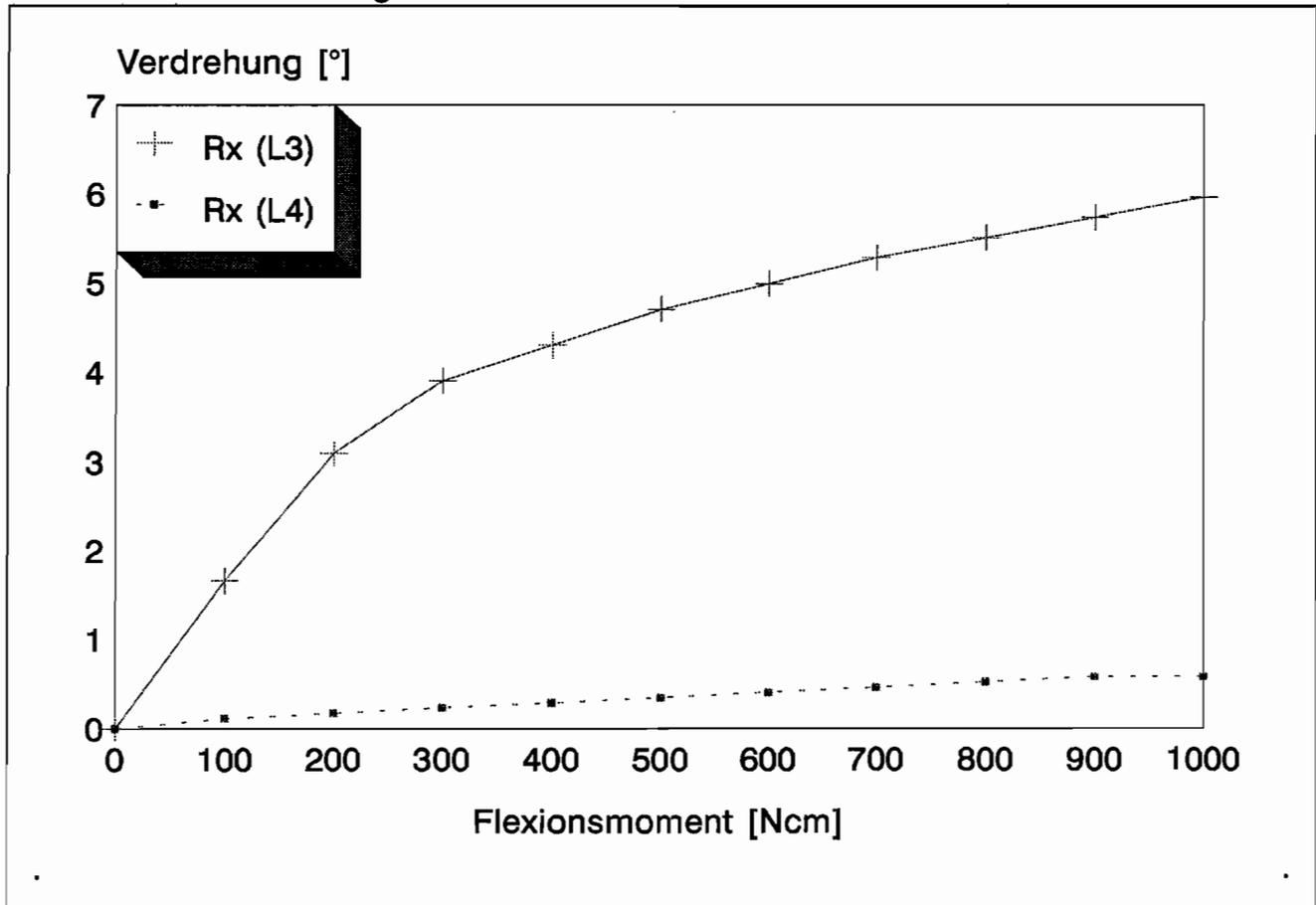


Abb. E71: Verdrehungen unter Flexionsbelastung

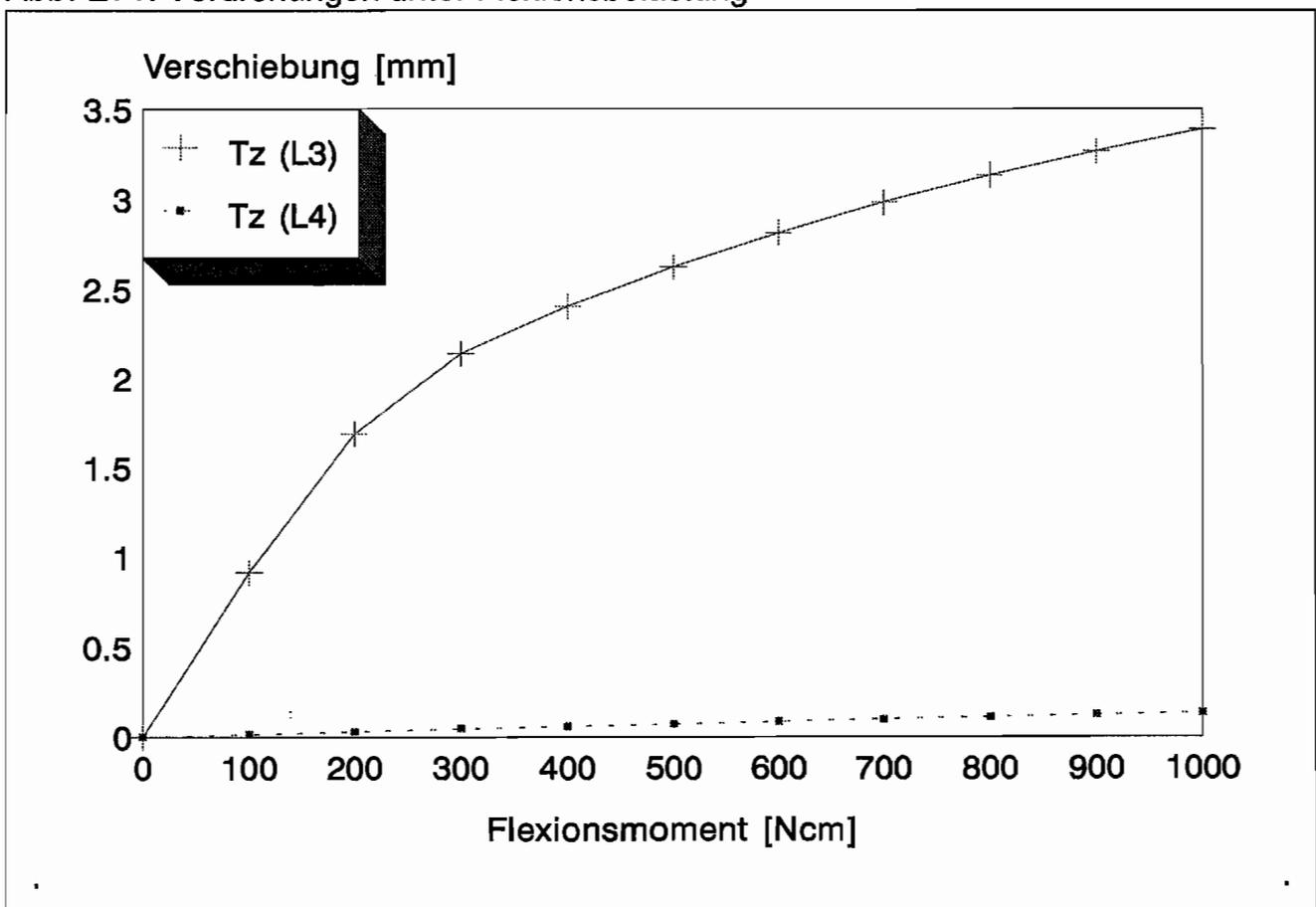


Abb. E72: Verschiebungen unter Flexionsbelastung

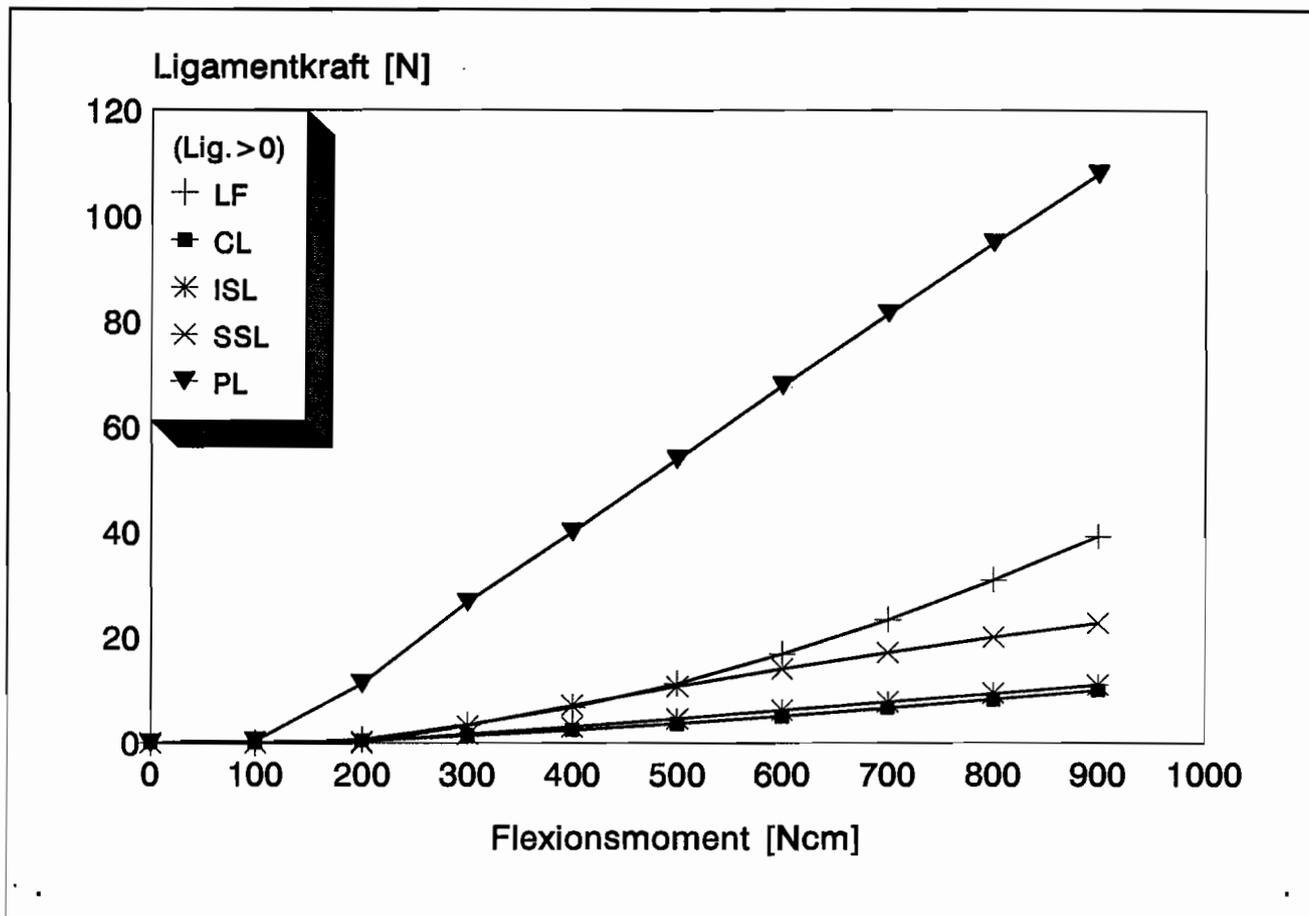


Abb. E73: Ligamentkräfte zwischen L3 und L4 bei Flexionsbelastung

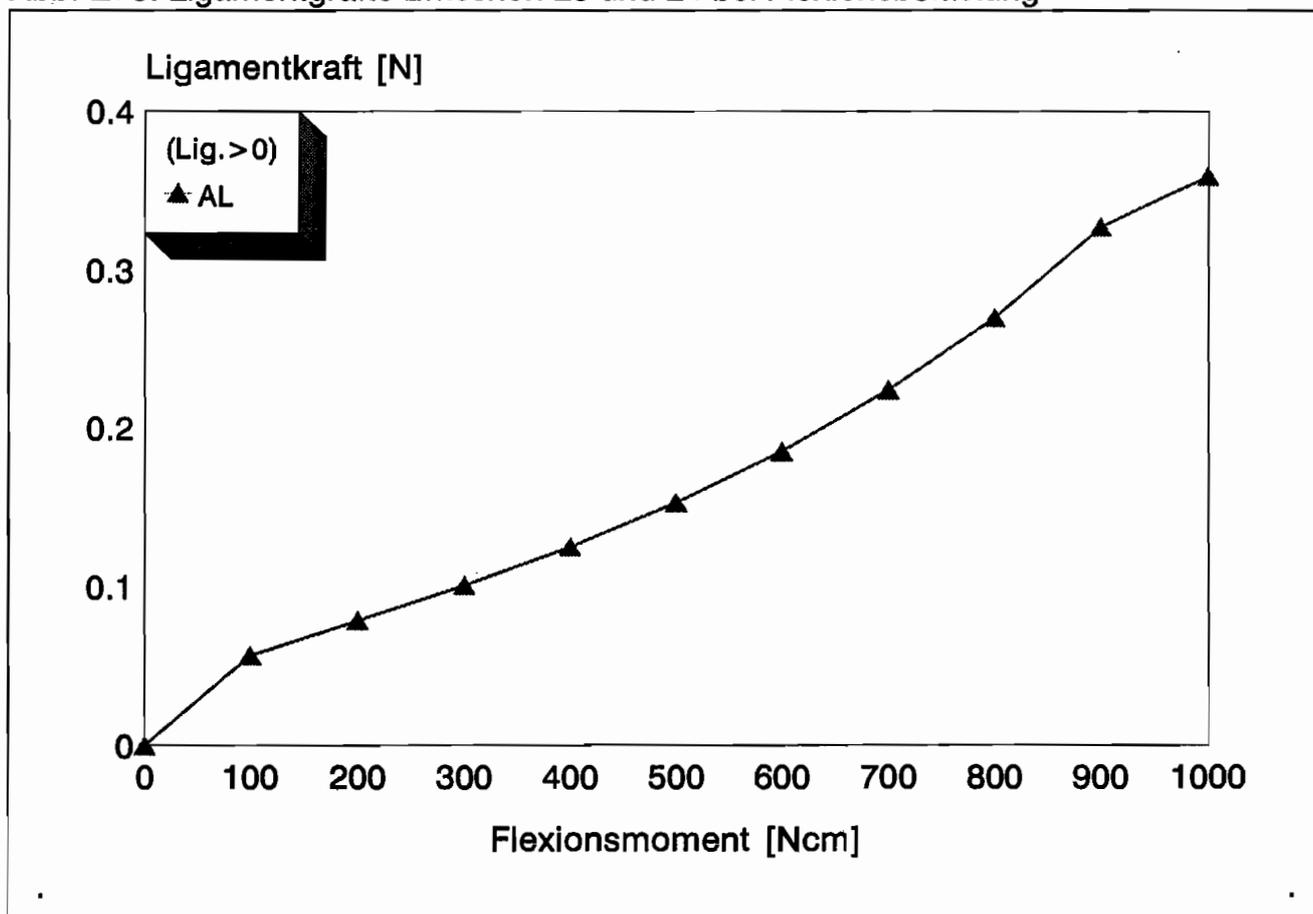


Abb. E74: Ligamentkräfte zwischen L4 und L5 bei Flexionsbelastung

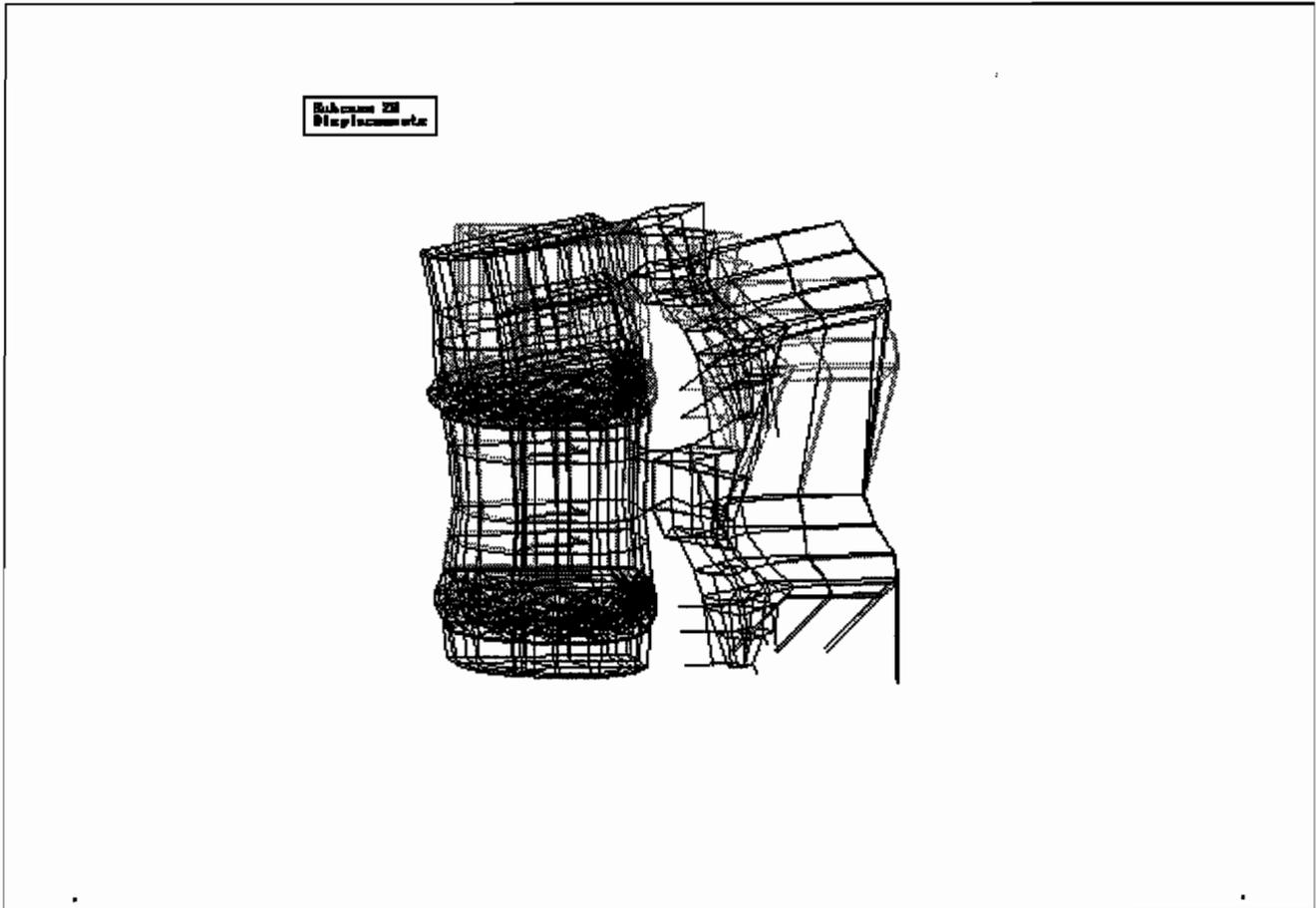


Abb. E75: Verschiebungen unter Flexionsmoment von 1000Ncm

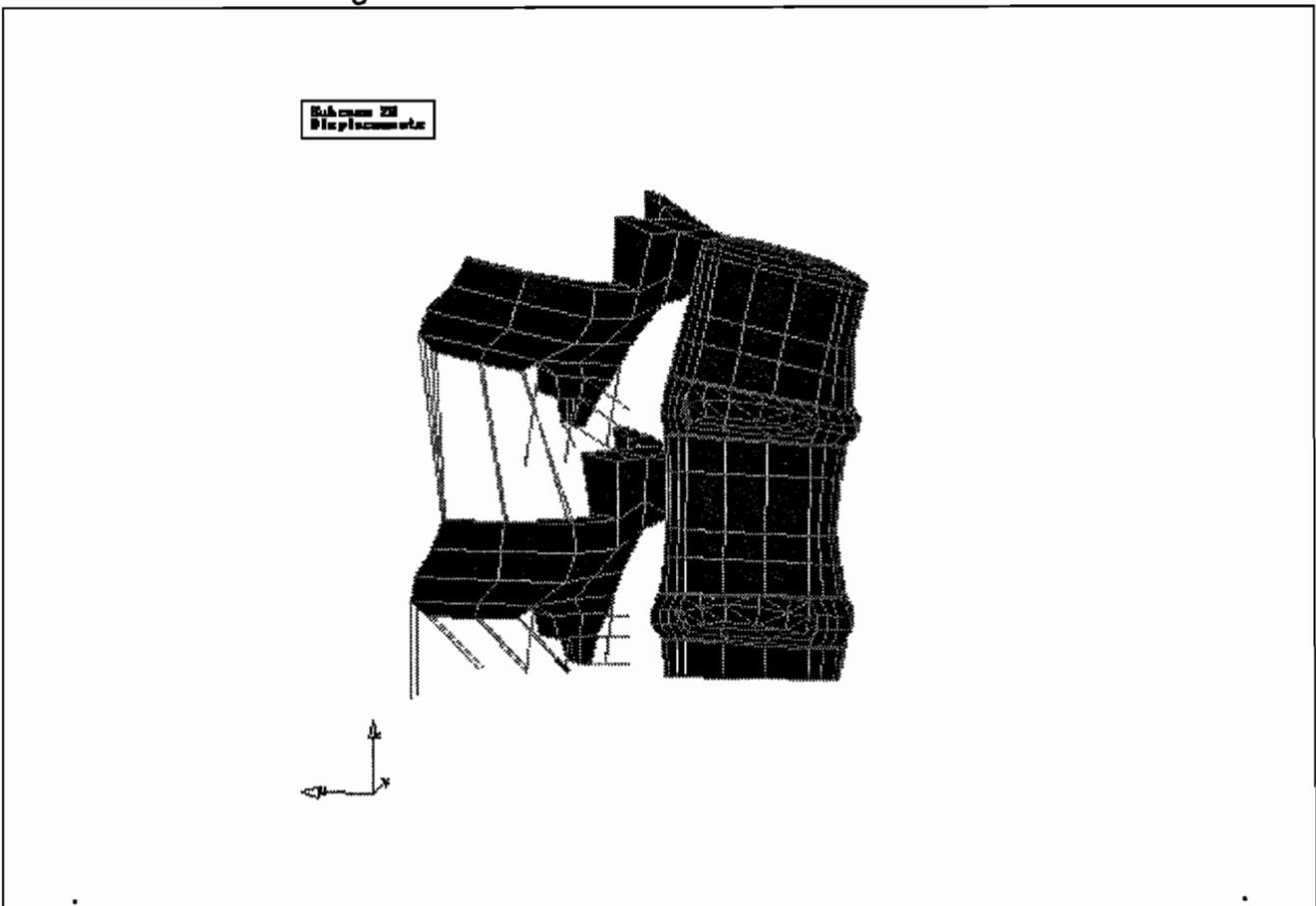


Abb. E76: Verschiebungen unter Flexionsmoment von 1000 Ncm

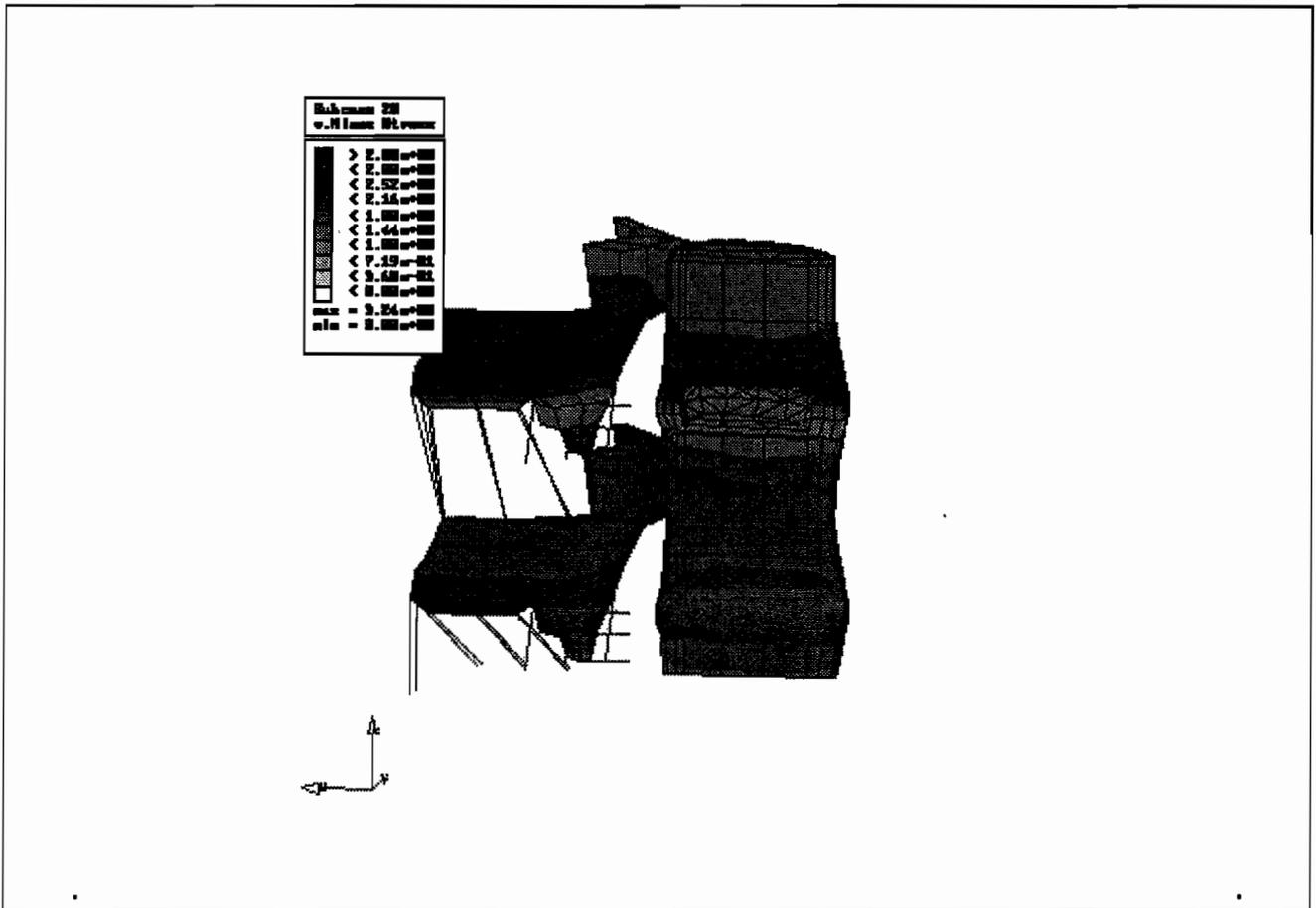


Abb. E77: Vergleichsspannung bei Flexion

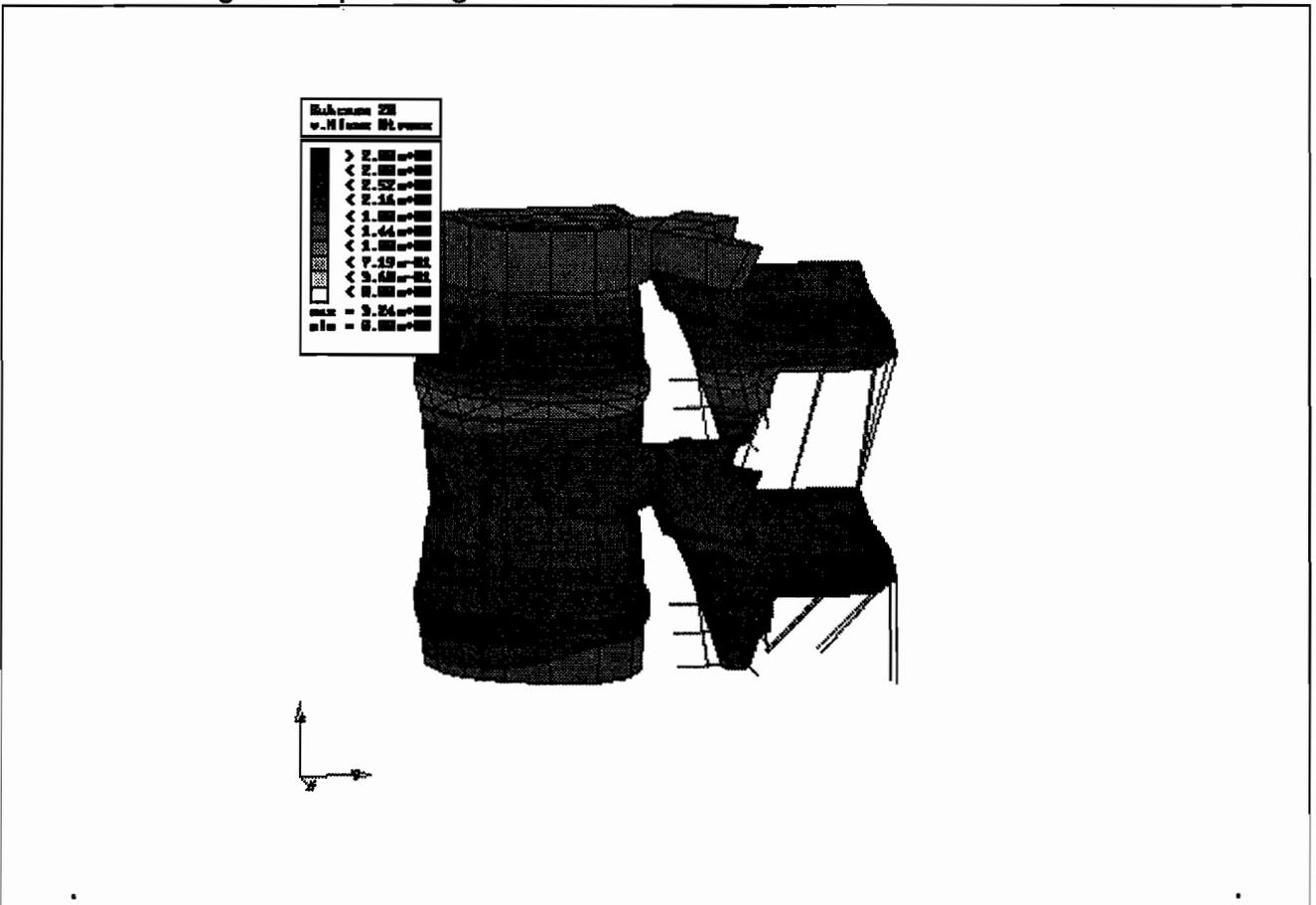


Abb. E78: Vergleichsspannung bei Flexion

6.4.2 Extensionsbelastung

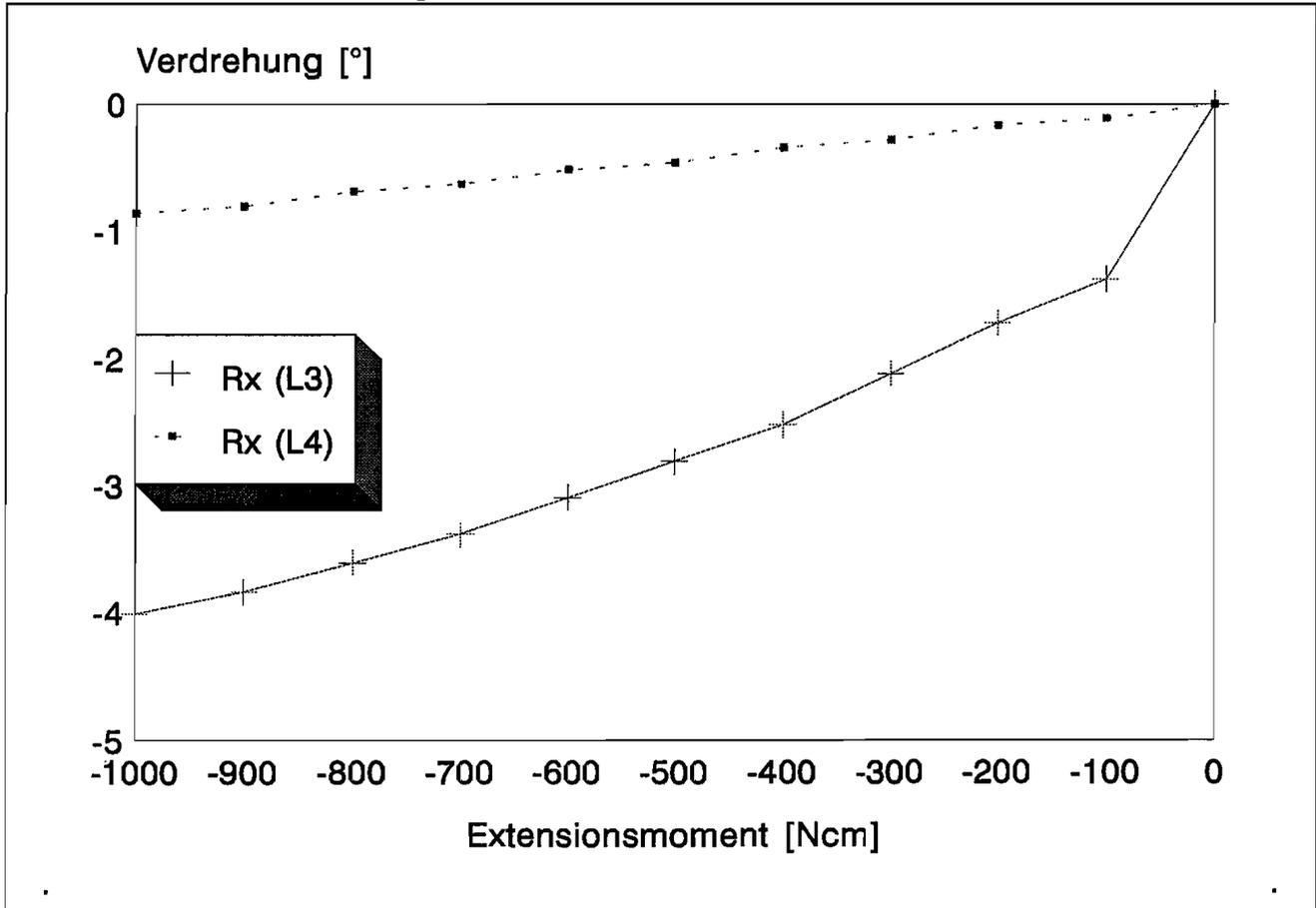


Abb. E79: Verdrehungen unter Extensionsbelastung

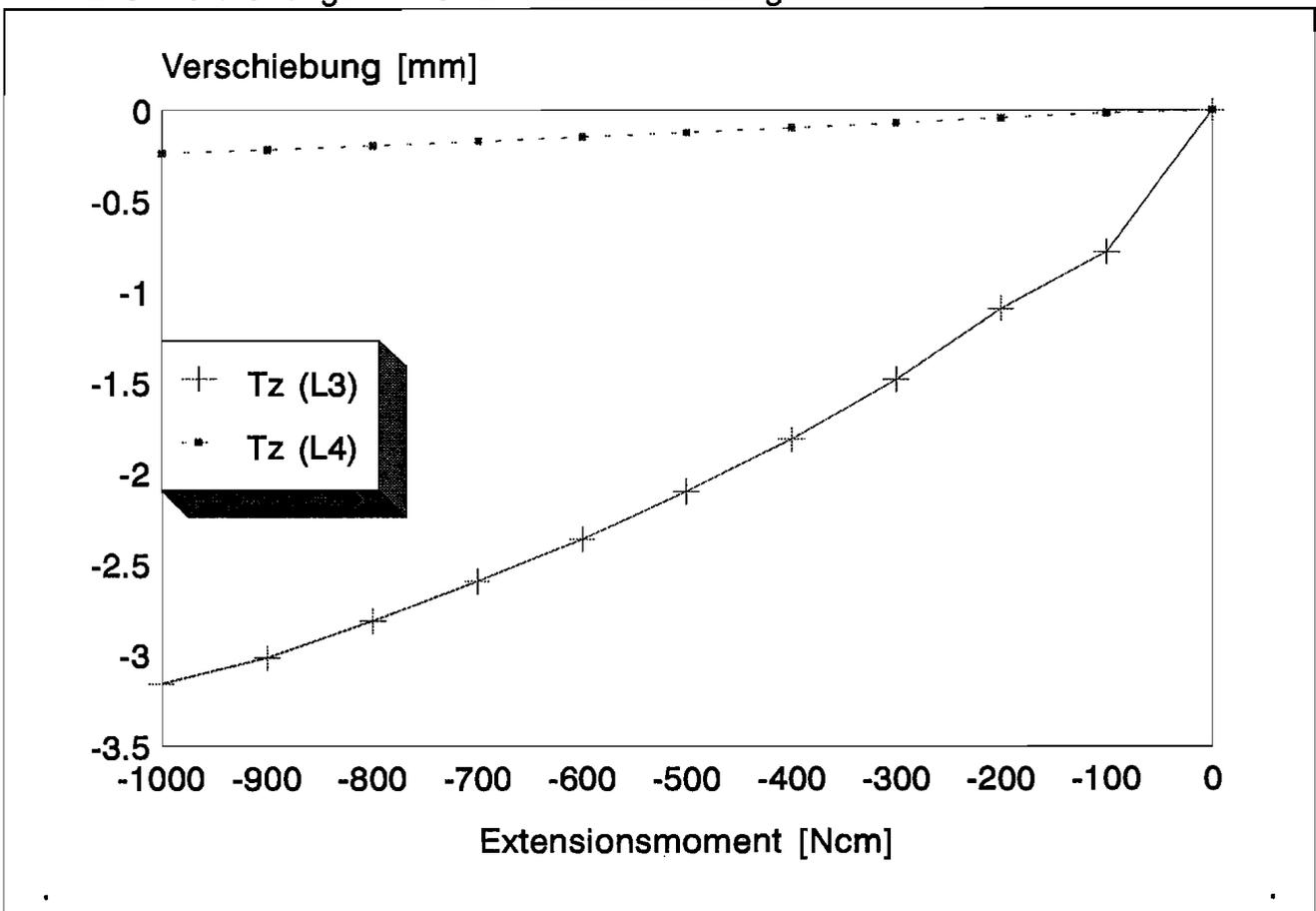


Abb. E80: Verschiebungen unter Extensionsbelastung

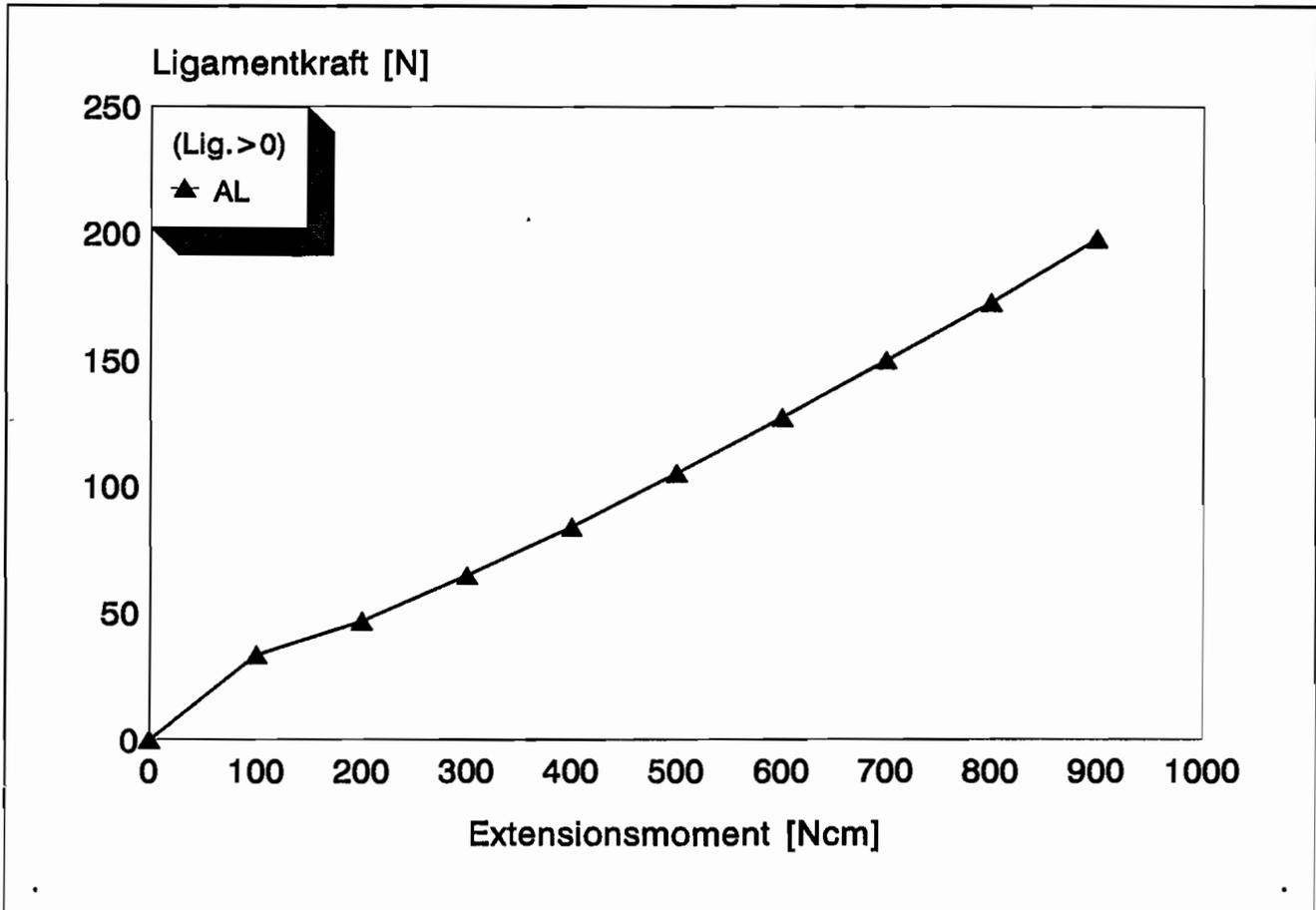


Abb. E81: Ligamentkräfte zwischen L3 und L4 bei Extensionsbelastung

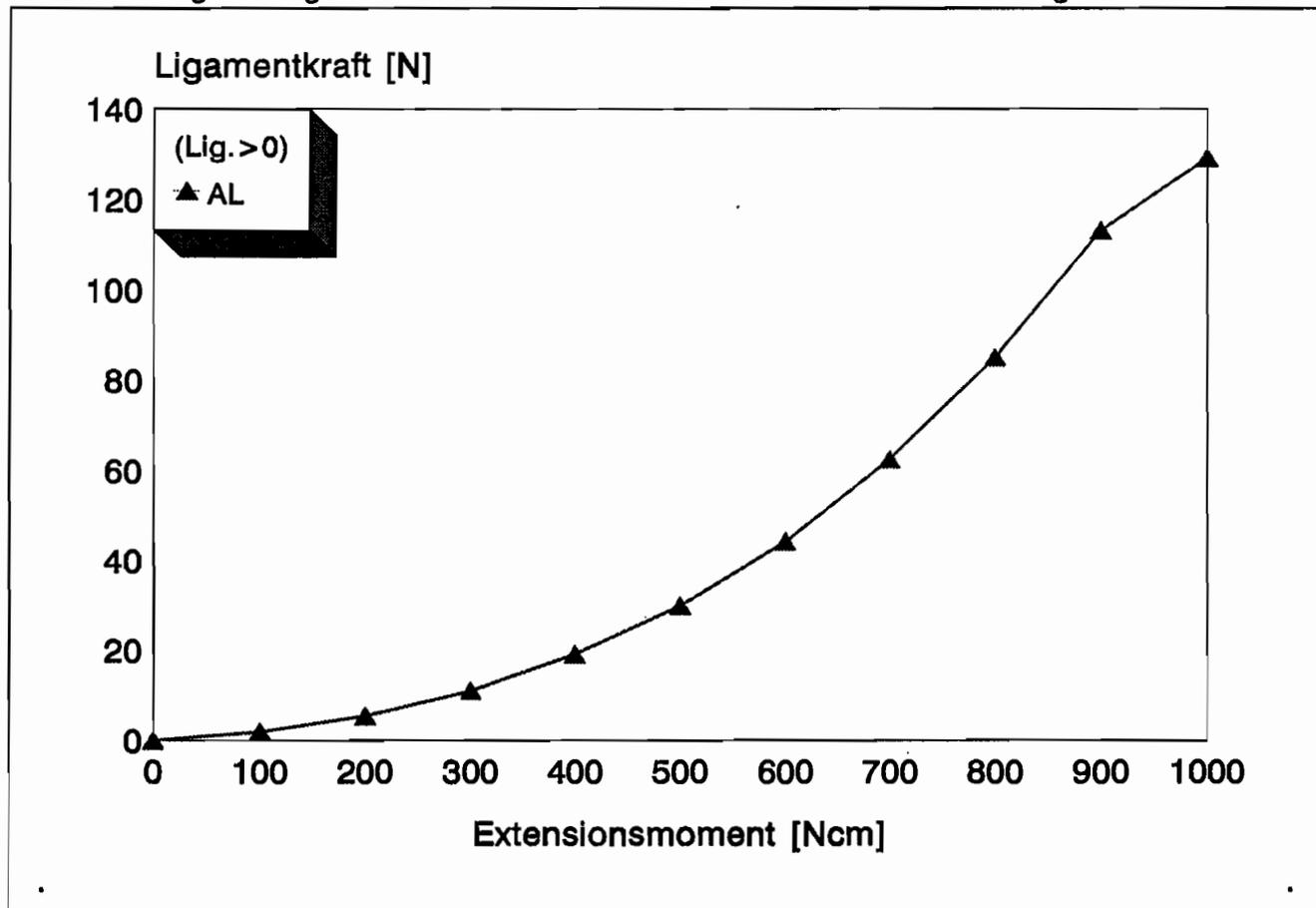


Abb. E82: Ligamentkräfte zwischen L4 und L5 bei Extensionsbelastung

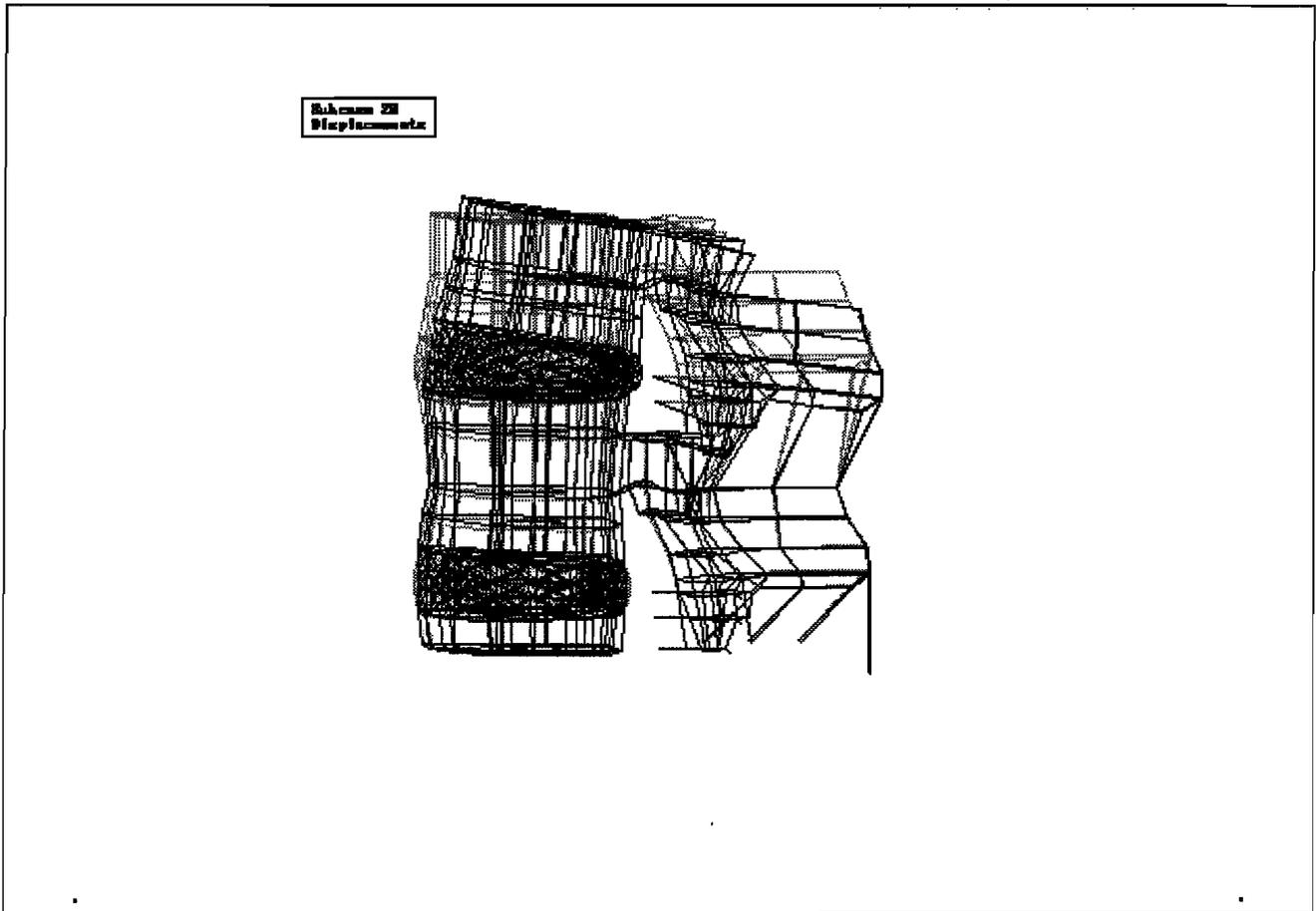


Abb. E83: Verschiebungen bei Extensionsbelastung

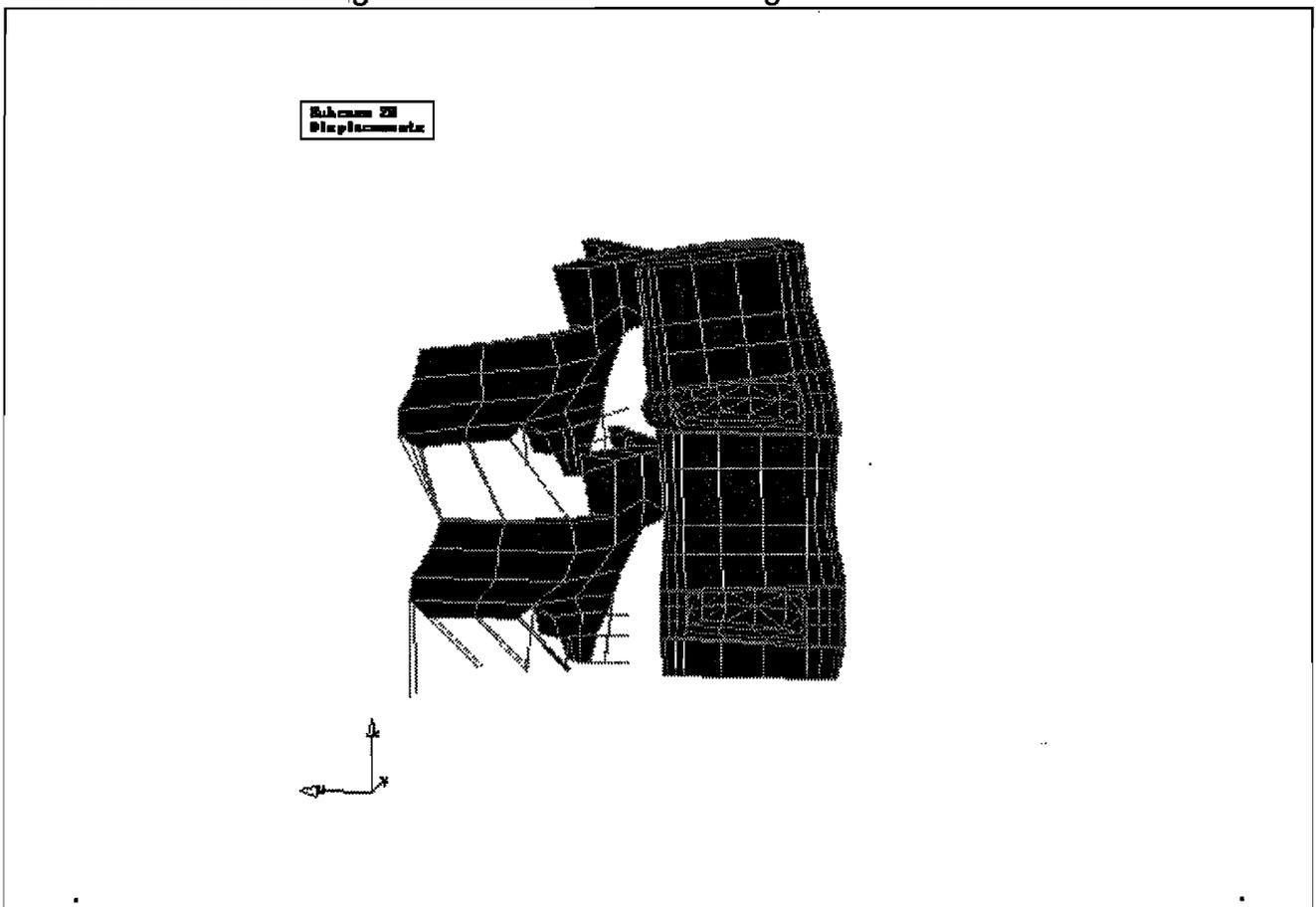


Abb. E84: Verschiebungen bei Extensionsbelastung

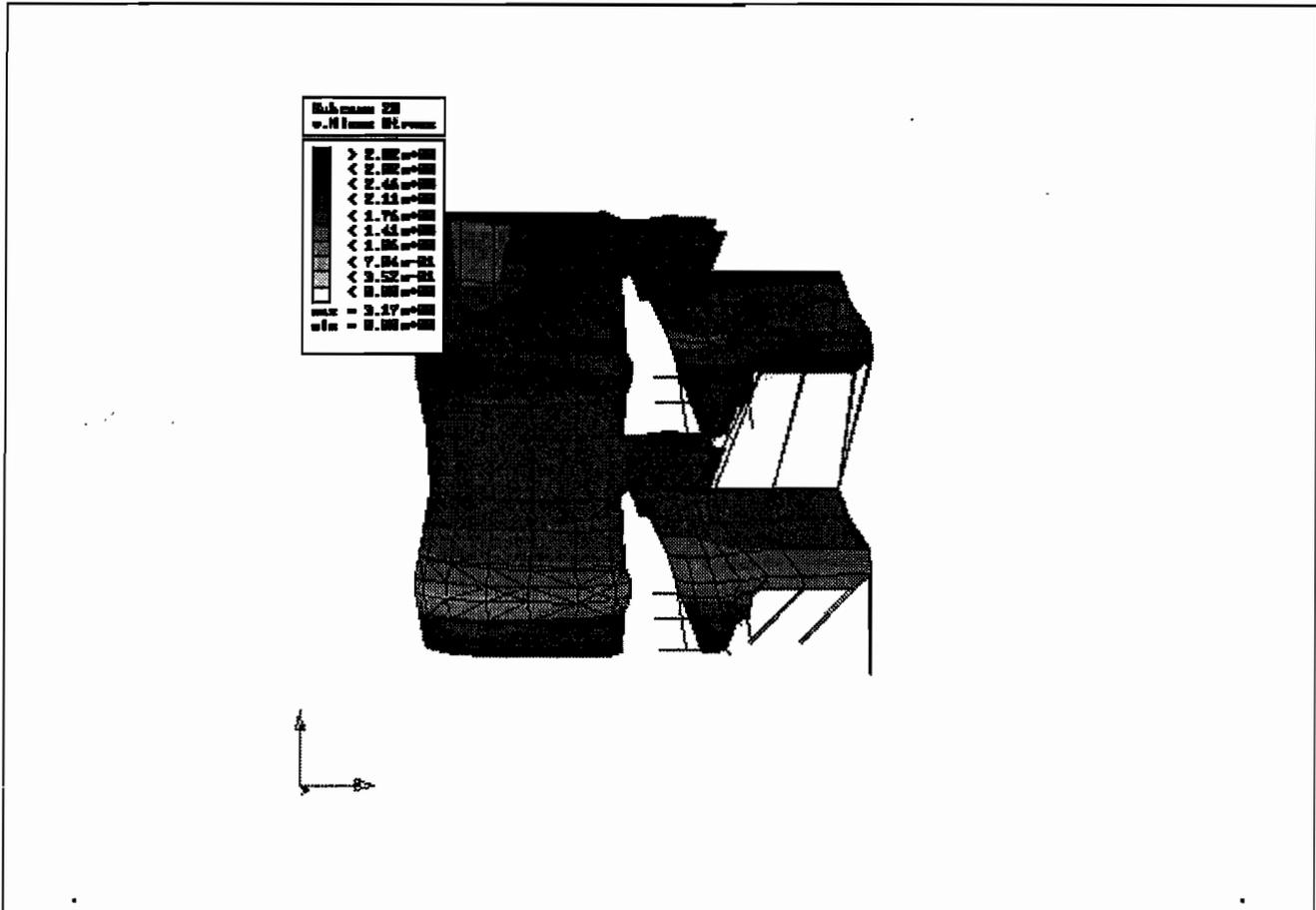


Abb. E85: Vergleichsspannung bei Extension

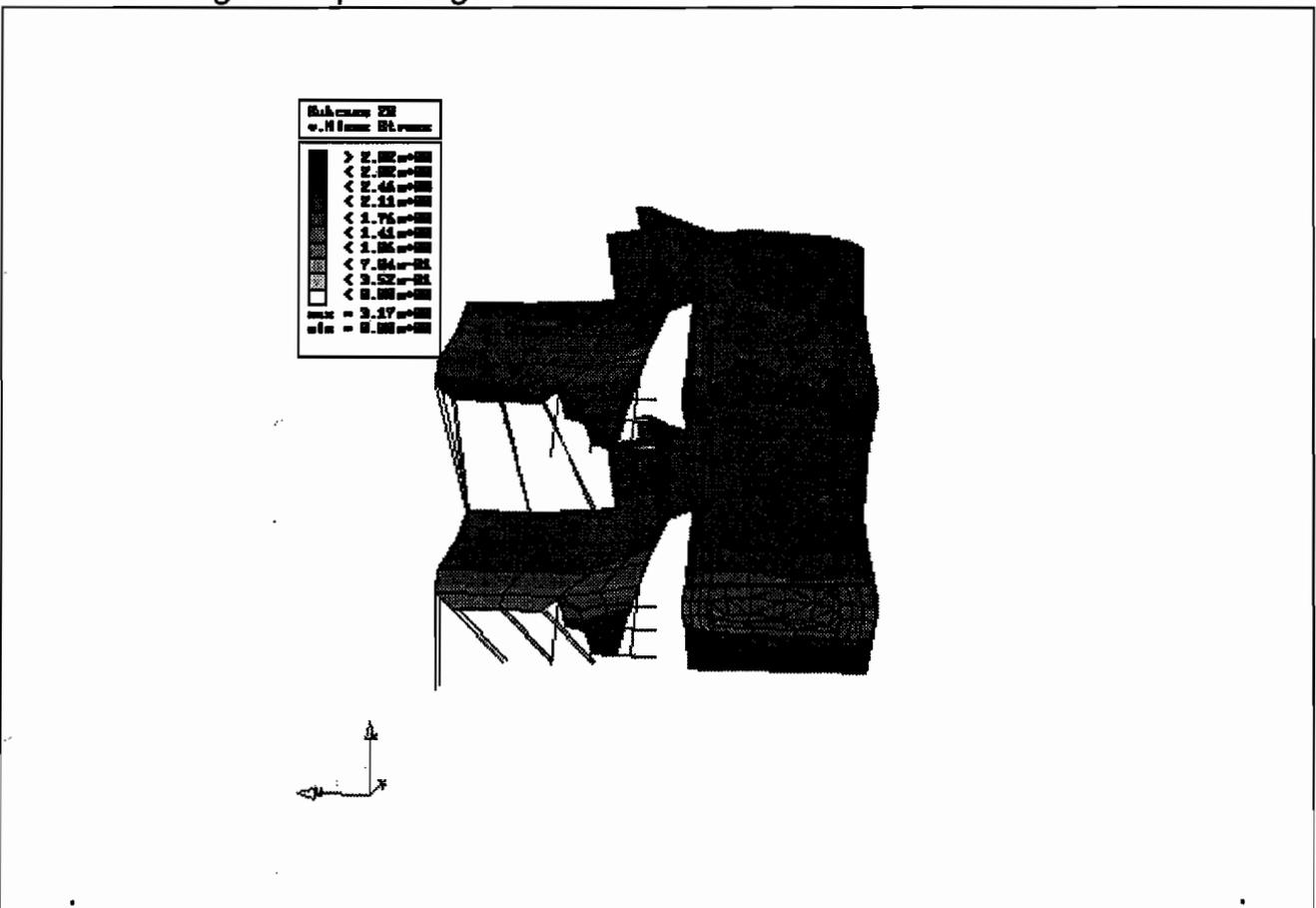


Abb. E86: Vergleichsspannung bei Extension

6.4.3 Klinische Fragestellungen

Unter klinischen Gesichtspunkten lassen sich einige besonders interessante und für den Alltag bedeutende Fragestellungen herausheben. Auf Grund der Vielzahl der durchgeführten unterschiedlichen Eingriffe an der Wirbelsäule kann hier jedoch nur ein Teil dieser Themen angesprochen werden. Ein noch geringerer Teil ist im Rahmen der hier vorgestellten Analysen untersucht worden.

Die Untersuchungen der mono- und mehrsegmentalen Wirbelsäule in den Abschnitten 6.2 und 6.4 stellen eine grundlegende Untersuchung der Biomechanik des intakten Wirbelsäulensegmentes unter den möglichen Belastungsrichtungen dar. Die in Abschnitt 6.3 besprochene Analyse von Wirbelkörperfrakturen beschäftigt sich im Vergleich dazu mit einem Verletzungsmodell.

Weitere interessante Untersuchungen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht dargestellt sind, beschäftigen sich mit dem gesamten Komplex der Behandlung der Zwischenwirbelscheibe und der Ursachen für deren Versagen. Der Komplex der Discotomien und Nukleotomien ist für Studien am Junghannsschen Bewegungssegment höchst interessant. Auf Grund der Asymmetrie des gezeigten Modells lassen sich die Einflüsse der oft unsymmetrisch vorgenommenen Operationen auf die daraus folgenden Konsequenzen genauer beleuchten. Für die Beurteilung künstlicher Bandscheiben und ähnlicher Implantate ist unter Einbeziehung numerischer Analysen denkbar, begleitend zu klinischen und experimentellen Studien, die Veränderungen der Biomechanik an mono- und mehrsegmentalen Wirbelsäulen zu berechnen.

Ein zusätzlicher weiterer Anwendungsbereich für numerische Analysen der Wirbelsäule stellt die Berechnung von Wirbelsäulenmodellen mit Fixateuren dar. Dabei ist neben der veränderten Kinematik des Bewegungssegmentes vor allem der Kraftfluß sowie die stabilisierende Funktion eines Implantates von Interesse. Der dabei auftretende Unterschied in den Steifigkeiten und die genaue Lage des Implantates beeinflussen das Verhalten nachhaltig. Im Abschnitt 6.4.5 werden zu den mit der Simulation eines Fixateurs auftretenden Schwierigkeiten einige weitere Anstöße gegeben.

Für die numerische Bearbeitung klinischer Fragestellungen ist es besonders wichtig, daß ein enger Abgleich zwischen klinischen Beobachtungen, experimentellen Untersuchungen und den Simulationsrechnungen erfolgt. Durch eine gute Überprüfung der numerischen Studien auf experimentellem Wege, kann die rechnerische Analyse wertvolle Hinweise zu klinischen Fragestellungen geben.

6.4.4 Experimentelle Validierung

Die hier vorgestellte mechanische Analyse besteht im wesentlichen aus einer numerischen Untersuchung der invitro Situation bei entsprechenden experimentellen Aufbauten zur Untersuchung der Flexibilität und Stabilität von mono- oder multisegmentalen Wirbelsäulenabschnitten. Zur Überprüfung der Berechnungen mit einem Junghanns'schen Bewegungssegment war es bereits in der Vergangenheit möglich, auf dem unten dargestellten Versuchsaufbau die numerischen Ergebnisse durch experimentelle Vergleichsuntersuchungen zu überprüfen. Dabei wurde die Übereinstimmung von Experiment und Rechnung für alle Belastungsformen nachgewiesen.

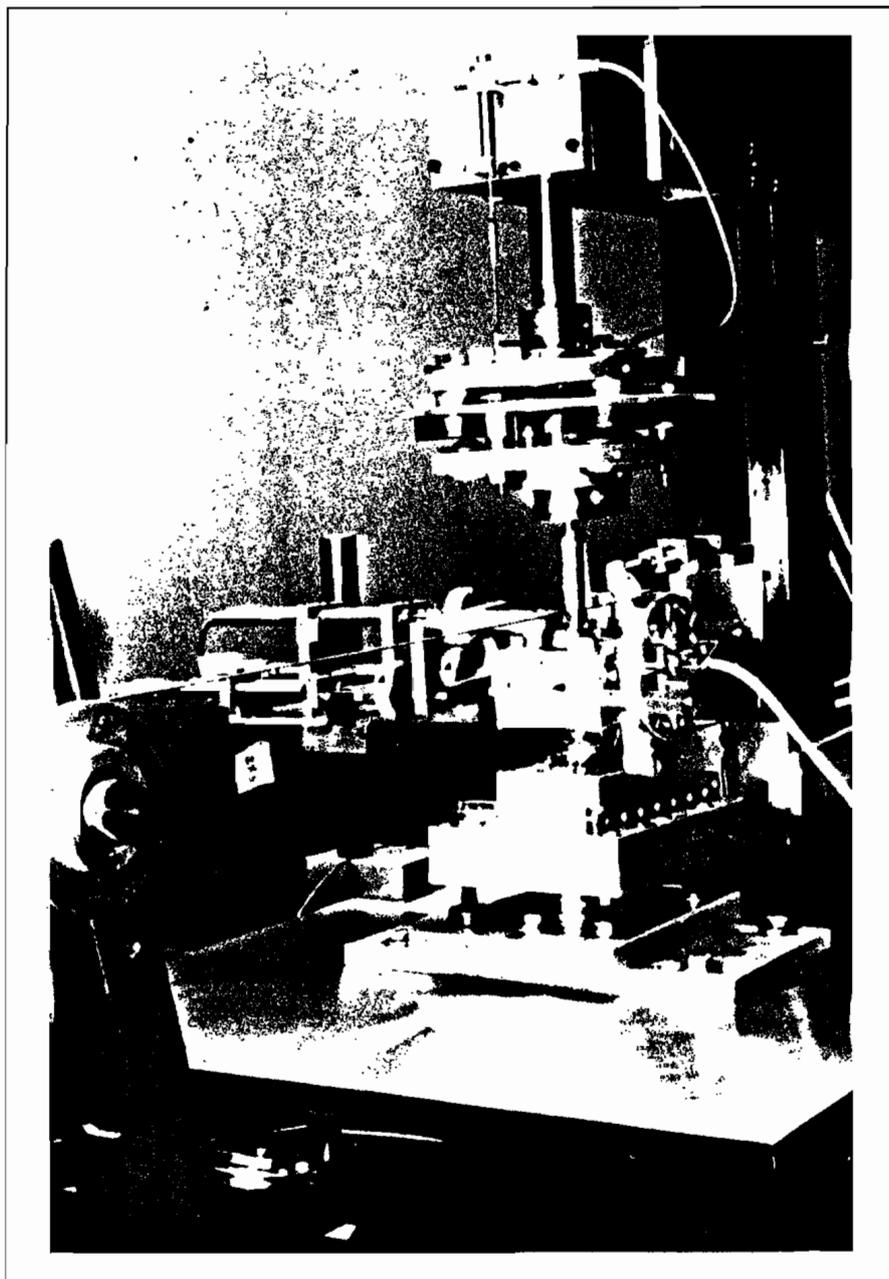


Abb. 31: Versuchsaufbau zur Untersuchung monosegmentaler Wirbelsäulenabschnitte

Zur Absicherung der Berechnungen mit dem bisegmentalen Modell müssen noch weitere invitro Untersuchungen durchgeführt werden. Dazu bedarf es eines geeigneten messtechnischen Aufbaus, der möglichst computergesteuert und damit automatisiert die Belastungstests durchführen und aufzeichnen kann [Mickley und Nolte (1989), Schopphoff et al. (1983)]. Wichtig ist dabei, die Verschiebungen und Verdrehungen von möglichst vielen Punkten der Wirbelsäule zu messen und mit denen des numerischen Modells zu vergleichen.



Abb. 32: Vermessenes und diskretisiertes Präparat zur Validierung

6.4.5 Simulation von Spondylolistesen

Für die realistische Modellierung eines Wirbelsäulenabschnitts, der mit einem Fixateur versehen ist, wie er heute in vielen verschiedenen Varianten verkauft und operiert wird, ist es notwendig, einige wichtige Dinge zu berücksichtigen. Die Pedikelschrauben der üblichen Fixateure aus Stahl oder Titan werden beim Einbau des Fixateurs in den erheblich weicheren Knochen gedreht. Diese Situation verursacht in dem Interface zwischen Fixateur und Wirbelkörper erhebliche Dehnungen. Eine genaue Modellierung dieses Übergangsbereichs, unter Berücksichtigung der zeitlichen Umlagerungsprozesse und des möglicherweise auftretenden Klaffens zwischen Schraube und umgebenden Knochen unter Last, gestalten die Analysen sehr umfangreich.

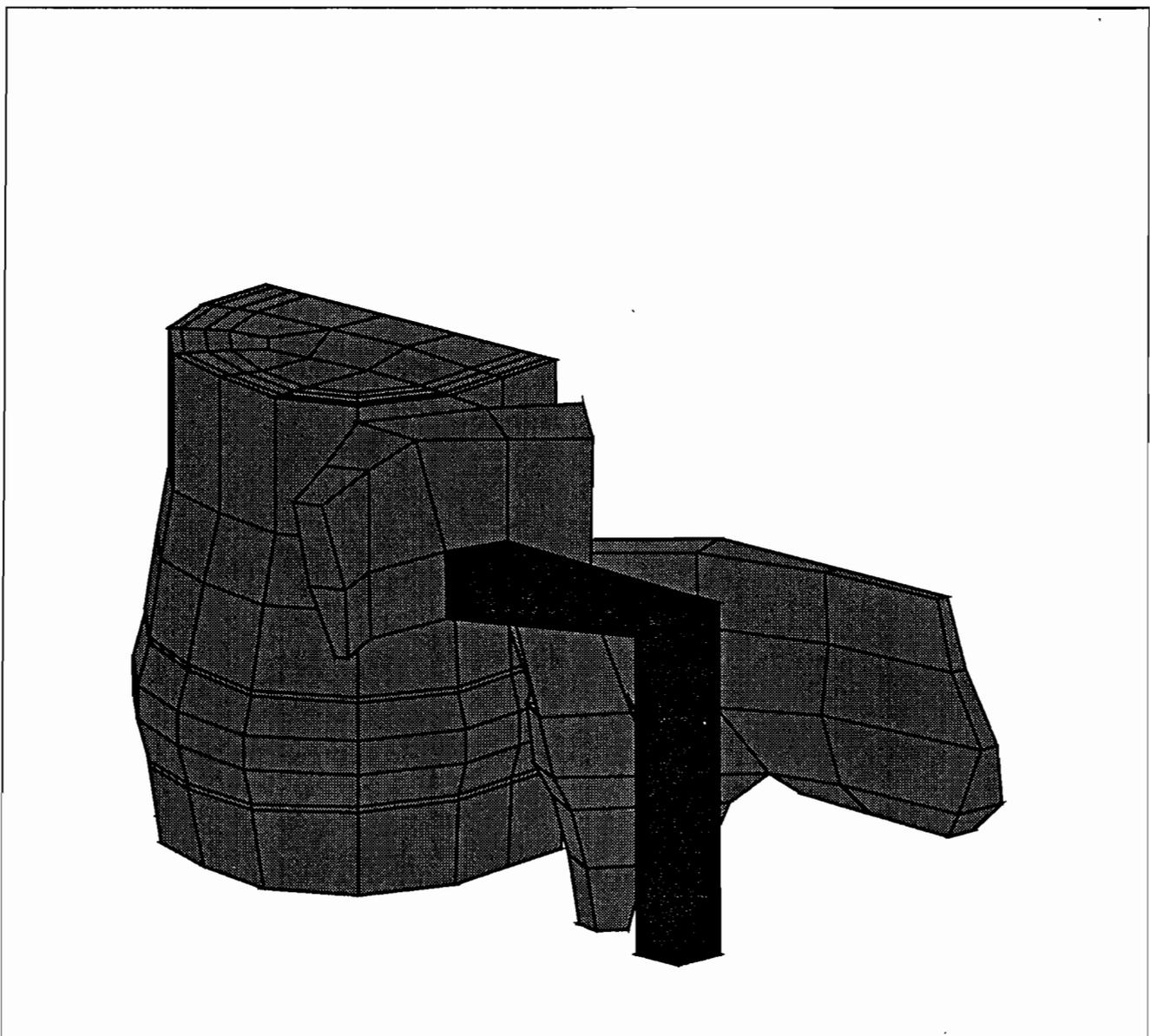


Abb. 33: Mögliche Simulation eines Fixateur intern

7. Zusammenfassung und Ausblick

Die dargestellten Anwendungen und Ergebnisse geben einen guten Einblick in das biomechanische Verhalten der menschlichen Wirbelsäule. Die vorgestellten Analysen aller denkbaren Belastungen des monosegmentalen Bewegungssegmentes schaffen eine solide Basis für weitergehende Untersuchungen der gesamten Wirbelsäule. Die dabei gefundenen biomechanischen Aussagen konnten im Rahmen dieser Arbeit zum ersten Mal dreidimensional wiedergegeben werden. Durch diese anschauliche Präsentation ist für den Ingenieur und auch den interessierten Mediziner eine gute Darstellung verwendet worden. Wegen der großen interindividuellen Unterschiede die bei experimentellen Studien zu großen Streuungen führen, können die numerischen Analysen besonders gut individuell unabhängige Tendenzen aufzeigen. Eine individuelle Analyse ist zum heutigen Zeitpunkt noch nicht mit vertretbarem Aufwand durchzuführen, da zwischen den bildgebenden Verfahren und der numerischen Untersuchung bisher kein geeignetes schnelles Interface existiert. Zukünftige Entwicklungen werden dieses Bindeglied realisieren können.

Für weitere Untersuchungen an der Wirbelsäule stehen noch eine Reihe wichtiger Fragestellungen an. Zur Bestimmung des Kraftflusses und des biomechanischen Verhaltens von fixierten Bewegungssegmenten bedarf es der Verbesserung des Schraube-Knochen-Interfaces bei der Modellierung. Dazu ist von besonderem Interesse das Kontaktproblems im Schraubenbett zu realisieren. Die weitergehende Bearbeitung anderer klinischer Fragestellungen auf numerischem Wege könnte Anstöße geben für die bessere Behandlung von Wirbelsäulenschäden.

Für die Bearbeitung von traumatischen Verletzungen ist es notwendig eine dynamische Analyse vorzunehmen. Insbesondere die biomechanische Untersuchung der Halswirbelsäule mit dynamischen Hilfsmitteln, zur Berechnung von Ligamentkräften und Wirbelkörperbelastungen, würde viele offene Frage beantworten.

Mit der rasenden Entwicklung der Computertechnik wird es ausgehend von der vorliegenden Basis in zukünftigen Untersuchungen leicht möglich sein, die Anzahl der betrachteten Bewegungssegmente und die Anzahl der durchgeführten Analysen zu erhöhen. Gleichzeitig wird durch die Schaffung eines geeigneten Bindegliedes zu bildgebenden Verfahren die individuelle Analyse möglich werden.

Literaturverzeichnis**LITERATUR ZUR NUMERIK UND NICHTLINEAREN KONTINUUMSMECHANIK :**

- ALWAY, G.G., MARTIN, R.M. (1965): An Algorithm for Reducing the Bandwidth of a Matrix of Symmetrical Configuration, *The Computer Journal*, Vol. 8, 264-272.
- ARGYRIS, J.; MLEJNEK, H.-P. (1987): *Die Methode der Finiten Elemente*, Bd. II, Vieweg, Braunschweig.
- BATHE, K.-J. (1986): *Finite-Elemente-Methoden: Matrizen und lineare Algebra, die Methode der finiten Elemente, Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo.
- BERNSTEIN, B. (1963): Hypo-Elasticity and Elasticity, *Arch. Rational Mech. Analysis* 6, 89-104.
- BETTEN, J. (1986): *Elastizitäts- und Plastizitätslehre*, 2. überarb. u. erw. Aufl., Vieweg, Braunschweig.
- BOWEN, R. M. und WANG, C.-C. (1976) : *Introduction to Vectors and Tensors*, Plenum.
- BREMER, C. (1986): *Algorithmen zum effizienten Einsatz der Finite-Element-Methode*, Diss., Bericht Nr.86-48, Inst. f. Statik TU Braunschweig.
- BRONSTEIN, I. N. und SEMENDJAJEW, K. A. (1981): *Taschenbuch der Mathematik*, 20. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Thun - Frankfurt/Main.
- CHROSCIELEWSKI, J.; NOLTE, L.-P. (1985): *Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY*, Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 48, Ruhr-Universität Bochum.
- COLLINS, R. J. (1973): Bandwidth Reduction by Automatic Renumbering, *Int.J. Num. Meth. Engng.*, Vol.6, 345-356.
- CUTTIL, E. (1972): Several Strategies for Reducing the Bandwidth of Matrices. In: *Symposium on Sparce Matrices and their Applications 1971* (Eds.: Rose, D.J., Willoughby, R.A.), Plenum Press, New York, 157-166.
- DUSZEK, M. K. (1980): *Problems of Geometrically Non-linear Theory of Plasticity*, Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 21, Ruhr-Universität Bochum.
- FUNG, Y. C. (1965): *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- FUNG, Y. C. (1967): Elasticity of soft tissues in simple elongation, *Am. J. Physiol.* 213, 1532-1544.
- GIBBS, N.E.; POOLE, W.G.jr.; STOCKMEYER, P.K. (1976): An Algorithm for Reducing the Bandwidth and Profile of a Sparce Matrix. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.13, No. 2, 236-250.

- GUMMERT, P.; RECKLING, K.-A. (1987): Mechanik, 2. Aufl., Vieweg & Sohn, Braunschweig - Wiesbaden.
- HELLEN, T. K. (1972): Effective quadrature rules for quadratic solid isoparametric finite elements, *Int. J. num. Meth. Engng.* 4, 597-599.
- HILL, R. (1957): On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain, *J. Mech. Phys. Solids* 5, 229-241.
- HILL, R. (1958): A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids* 6, 236-249.
- HILL, R. (1959): Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time, *J. Mech. Phys. Solids* 7, 209-225.
- HUGHES, T. J. R., WINGET, J. (1980): Finite Rotations effect in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 15, 1862-1867.
- JAUMANN, G. (1911): Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze, *Sitz.ber. Akad. Wiss. Wien* 120, 385.
- KLEIN, B.: FEM (1990): Grundlagen und Anwendungen der Finite-Elemente-Methode, Vieweg, Braunschweig.
- KLINGBEIL, E. (1966): Tensorrechnung für Ingenieure, Bibliographisches Institut, Mannheim - Wien - Zürich.
- MACVEAN, D. B. (1968): Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren, *ZAMP* 19, 157-185.
- MAKOWSKI, J.; NOLTE, L.-P. (1987): Simple equations in terms of displacements for finite axisymmetric deflections of shells of revolution, *Int. J. Non-Linear Mech.* 22, 1-13.
- MALVERN, L. E. (1969): Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- MC MEEKING, R. M.; RICE, J. R. (1975): Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation, *Int. J. Solids Structures* 11, 601-616.
- MC VEAN, D. (1968): Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Dehnungstensoren, *ZAMP*, 19, 157-185
- NAGHTEGAAL, J. C., DE JONG, J. E. (1981): Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 17, 15-41.
- NAGHTEGAAL, J. C. (1982): On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 33, 469-484.
- NOLL, W. (1955): On the Continuity of the Solid and Fluid States, *Diss., J. Rational Mech. Analysis* 4, 3-81.
- NOLTE, L.-P. (1983): Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer

- Rotationen, Diss., Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 39, Ruhr-Universität Bochum.
- NOLTE, L.-P. und MAKOWSKI, J. (1986): Pressure loaded shells undergoing different levels of nonlinearity, Mech. Res. Comm. 21, 145-171.
- ODEN, J. T. (1972): Finite Elements of Nonlinear Continua, Mc Graw-Hill Book Company, New York.
- OLSON, L. G. und BATHE, K.-J. (1985): Analysis of fluid-structure interactions. A direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potential, Computers & Structures 21, 21-32.
- OGDEN, R. W. (1984): Non-linear elastic deformations, Ellis Horwood Limited, Chichester.
- PIETRASZKIEWICZ, W. (1977): Introduction to the Non-Linear Theory of Shells, Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 10, Ruhr-Universität Bochum.
- PINGEL, T. H. (1991): Beitrag zur Herleitung und mathematischen Realisierung eines Modells der menschlichen Wirbelsäule, Diss., Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 77, Ruhr-Universität Bochum.
- PINSKY, P. M.; ORTIZ, M.; PISTER, K. S. (1983): Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng. 40, 137-158.
- PRAGER, W. (1961): Einführung in die Kontinuumsmechanik, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart.
- REED, K. W. und ATURI, S. N. (1985): Constitutive modelling and computational implementation for finite strain plasticity, Int. J. Plasticity 1, 63-87.
- RUBINSTEIN, R. und ATLURI, S. N. (1983): Objectivity of incremental constitutive relations over finite time steps in computational finite deformation analysis, Vo,prut. Meths, Appl. Mech. Engng. 36, 277-290.
- SCHIECK, B. (1989): Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien, Diss., Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 69, Ruhr-Universität Bochum.
- SCHIECK, B. und STUMPF, H. (1993): Deformation analysis for finite elastic-plastic strains in a Lagrangean type description, Int. J. Solids Structures 30/19, 2639-2660.
- SCHIECK, B. und STUMPF, H. (1994): The appropriate corotational rate, exact formula for the plastic spin and constitutive model for finite elastoplasticity, (to appear).
- SCHRADER, K.-H. (1983): MESY3 Benutzerhandbuch Version CDC CYBER 175 FORTRAN 77, Ruhr-Universität Bochum.

- SCHWARZ, H. R. (1984): Methode der finiten Elemente, 2. Aufl., Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Teubner Studienbücher Mathematik, Teubner, Stuttgart.
- STEIN, E. (1989): Nichtlineare Berechnungen im Konstruktiven Ingenieurbau, Springer, Berlin.
- STUMPF, H. (1982): Unified operator description, nonlinear buckling and post-buckling analysis of thin elastic shells, Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 34, Ruhr-Universität Bochum.
- STUMPF, H. (1986): General concept of the analysis of thin elastic shells, Z. angew. Math. Mech. 66, 337-350.
- STUMPF, H. und MAKOWSKI, J. (1986): On large strain deformation of shells, Acta Mechanica 45, 153-168.
- STUMPF, H. (1993): Theoretical and computational aspects in the shakedown analysis of finite elasto-plasticity, Int. J. Plasticity 9, 583-602.
- SZABO, L. und BALLA, M. (1989): Comparison of some stress rates, Int. J. solids Structures 25, 279-297.
- TRUESDELL, C. A. (1955): Hypo-Elasticity, J. Rational Mech. Analysis 4, 83-133.
- TRUESDELL, C. A. und NOLL, W. (1965): The non-linear field theories in mechanics, [in:] Handbuch der Physik, Vol III/3, S. Flügge [Ed.], Springer, Berlin.
- WANG, C. C. und TRUESDELL, C. (1973): Introduction to rational elasticity, Noordhoff, Leyden.
- WRIGGERS, P. (1986): Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Element-Methode, Habilitationsschrift, Hannover.
- ZIENKIEWICZ, O. C. (1984): Methode der finiten Elemente, Carl Hanser Verlag, München.

LITERATUR ZUR MENSCHLICHEN ANATOMIE:

- BERTOLINI, R. und LEUTERT, G. (1987): Systematische Anatomie des Menschen, Fischer Verlag, Stuttgart.
- BRAUS, H. (1929): Anatomie des Menschen - Erster Band - Bewegungsapparat, 2. Aufl., Julius Springer, Berlin.
- FRICK, H., LEONARDT, H., STARCK, D. (1992): Allgemeine Anatomie, Spezielle Anatomie, Bd.1 Extremitäten, Thieme, Stuttgart.
- HIPPOKRATES (1897): Sämtliche Werke, Bd.II., Lüneburg, München
- HUMZAH, M. D.; SOAMES, R. W. (1988): Human Intervertebral Disc: Structure and Function, The Anatomical Record 220, 337-356.

- JUNGHANNS, H. (1951): Die funktionelle Pathologie der Zwischenwirbelscheiben als Grundlage für klinische Betrachtungen, Langenbecks Arch. clin. Chir. 267, 393.
- NETTER, F. H. (1989a): The Ciba collection of medical illustration, Nervous System, Part I, Thieme, Stuttgart, New York.
- NETTER, F. H. (1989b): The Ciba collection of medical illustration, Nervous System, Part II, Thieme, Stuttgart, New York.
- RAUBER, A., KOPSCH, LEONARDT, H. (1987): Anatomie des Menschen, Thieme, Stuttgart.
- ROHEN, J. W. (1984): Funktionelle Anatomie des Menschen, 4. neubearbeitete und verbesserte Auflage, Schattauer, Stuttgart.
- ROHEN, J. W. (1985): Funktionelle Anatomie des Nervensystems, 4. völlig neubearbeitete Auflage, Schattauer, Stuttgart.
- SCHAIK, J. P. J. VAN; VERBIEST, H.; SCHAIK, F. D. J. VAN (1985): The orientation of laminae and facet joints in the lower lumbar spine, Spine 10, 59-63.
- SCHIEBLER, T. H. (1977): Lehrbuch der gesamten Anatomie des Menschen, Springer, Heidelberg.
- SCHMORL, G.; JUNGHANNS, H. (1968): Die gesunde und die kranke Wirbelsäule in Röntgenbild und Klinik, 5. Aufl., Georg Thieme Verlag, Stuttgart.
- SCHMORL, G. (1932): Zur pathologischen Anatomie der Lendenbandscheibe, Klin. Wschr. 2, 1369.
- SOBOTTA, J. (1988a): Atlas der Anatomie des Menschen, Bd. 1, Kopf, Hals, obere Extremitäten, Haut, Urban u. Schwarzenberg, München Wien Baltimore.
- SOBOTTA, J. (1988b): Atlas der Anatomie des Menschen, Bd. 2, Brust, Bauch, Becken, untere Extremitäten, Urban u. Schwarzenberg, München Wien Baltimore.
- ZILCH H. und WEBER U. (1988): Lehrbuch Orthopädie: mit Repetitorium, de Gruyter, Berlin New York.

LITERATUR ZUR BIOMECHANIK:

- ALLGEMEIN -

- BÄKER, B. (1980): Die verückte Bandscheibe - Wirbelsäulenbeschwerden und ihre Behandlung, Franz Ehrenwirth Verlag, München.
- BAUMGART, F. (1988): Biomechanik und Implantattechnik, Z. angew. Math. Mech. 68, T12-T21.
- COTTLER, J. M. und COTTLER, H. B. (1990): Spinal Fusion - Science and Technique, Springer, New-York
- FARFAN, H. F. (1979): Biomechanik der Lendenwirbelsäule, Die Wirbelsäule in Forschung und Praxis, Band 80, Hippokrates, Stuttgart.

- FARFAN, H. F. und GRACOVETSKY, S. (1984): The nature of instability, Spine 9, 714-719
- HERCHENBACH, T. (1988): Das Bewegungsverhalten des lumbalen Bewegungssegmentes von intakten und enukleierten Wirbelsäulenpräparaten, Diss., Bonn.
- HICKEY, D. S. und HUKINS, D. W. L. (1980): Relation between the Structure of the Annulus Fibrosus and the Function and Failure of the Intervertebral Disc, Spine 5, 106-116.
- KNEPEL, H. (1977): Bedeutung und Häufigkeit bandscheibenbedingter Erkrankungen, Diss., Düsseldorf.
- KOELLER, W.; FUNKE, F.; HARTMANN, F. (1981): Das Verformungsverhalten von lumbalen menschlichen Zwischenwirbelscheiben unter langeinwirkender axialer dynamischer Druckkraft, Z. Orthop. 119, 206-216.
- KRÄMER, J. (1986): Bandscheibenbedingte Erkrankungen - Ursachen, Diagnose, Behandlung, Vorbeugung, Begutachtung, 2. Aufl., Georg Thieme Verlag, Stuttgart - New York.
- KRÄMER, J. (1989): Perkutane Diskotomie, Chemonukleolyse oder offene Operation an der lumbalen Bandscheibe?, Med. Orth. Tech. 109, 89-93.
- KUMMER, B.K.F. (1972): Biomechanics of Bone: mechanical properties, functional structure, functional adaptation, in: Biomechanics: Its Foundations and Objects, FUNG, Y.C., PERRONE, N., ANLIKER, M., 264 ff
- MICKLEY, K. und NOLTE, L.-P. (1989): Experimentelle Bestimmung biomechanischer Modellparameter ein- und mehrsegmenteller Lendenwirbelabschnitte, VDI Berichte 731, 443-452.
- MICKLEY, K.; NOLTE, L.-P.; STUMPF, H.; LANGE, H.; BEERENS, C.; KRÄMER, J. (1990): An experimental test-rig for the biomechanical analysis of human spine segments, RAM 6, 43-49.
- MILLER, J. A. A.; HADERSPECK, K. A.; SCHULTZ, A. B. (1982): Posterior element loads in lumbar motion segments, Spine 7, 192-203.
- MIXTER, W. J.; BARR und J. S. (1934): Rupture of the intervertebral disc with involvement of the spinal canal, New Engl. J. Med. 211, 210.
- NACHEMSON, A. und MORRIS, J. M. (1964): In vivo measurements of intradiscal pressure, J. Bone Jt. Surg. 46A, 1077.
- NEUGEBAUER, J. (1977): Die Bandscheibe, Rombach Verlagshaus, Freiburg.
- NITZSCHKE, E. und NOLTE, L.-P. (1988): Ein Computer-Simulationsmodell zur Abbildung der Biomechanik verschiedener Wirbelfusionen der Lendenwirbelsäule, In: Die Wirbelsäule in Forschung und Praxis, Band 107, Hippokrates Verlag, Stuttgart.

- NITZSCHKE, E.; PLATZEK, P.; NOLTE, L.-P. (1989): Stabilitätsanalyse verschiedener Fusionsformen an der Lendenwirbelsäule mit Hilfe eines Computersimulationsmodells, Z. Orthop. 127, 597-601
- NOLTE, L.-P. und PANJABI, M. M. (1989): Contribution to the stability analysis of intact and injured lumbosacral spinal segments, Proc. XII Int. Congr. of Biomech., ISB UCLA.
- NOLTE, L.-P. und PINGEL T.H. (1991): Ein ebenes nichtlineares Modell der menschlichen Wirbelsäule, Biomedizinische Technik 36, 298-304.
- NOLTE, L.-P.; STEFFEN, R.; SCHOPPHOFF, E. (1991): Spinal Mobility and Instability Following Thoraco-Lumbalar Compression Fractures, Proc. 5th Biomechanics Seminar, Gothenburg, Sweden, C. Högfors and G. Andreasson (eds.), 64-73
- PANJABI, M. M.; KRAG, M. H.; GOEL, V. K. (1981): A technique for measurement and description of three dimensional six degree-of-freedom motion of a body joint with an application to the human spine, J. Biomechanics 14, 447-460.
- PANJABI, M. M.; WHITE, A. A. (1980): Basic biomechanics of the spine, Neurosurgery 7, 76-93.
- PANJABI, M. M.; GREENSTEIN, G.; DURANCEAU, J.; NOLTE, L.-P.: Three dimensional quantitative morphology of lumbar spinal ligaments, Spinal Disorders, Vol.4 No.1, 1991, 54-62
- RATHKE (1963), Ärztliche Sammelblätter, Abb.17
- SCHOPPHOFF, E.; BROLL, E.; GRIFKA, J.; NOLTE, L.-P. (1993): Versuchsaufbau zur simultanen dynamometrischen und elektromyographischen Erfassung der Muskelaktivität am Knie, Medizinisch-Orthopädische Technik, 113-1, 6-11
- STAHL, C. (1977): Experimentelle Untersuchungen zur Biomechanik der Halswirbelsäule, Diss., Düsseldorf.
- STAHL, CH. und HUTH, F. (1980): Morphologischer Nachweis synovialer Spalträume in der Uncovertebralregion zervikaler Bandscheiben. Z. Orthop. 118, 721.
- STEFFEN, R.; NOLTE, L.-P.; SCHOPPHOFF, E.; KRÄMER, J. (1991): Biomechanische Analyse Lumbaler Wirbelkompressionsfrakturen, 54. Jahrestagung der Dt. Gesellschaft der Unfallchirurgen, Berlin, 19.12.1990, Hefte für Unfallheilkunde, Springer Verlag Berlin Heidelberg, Heft 220, 589-590
- WHITE, A. A. und PANJABI, M. M. (1990): Clinical biomechanics of the spine, J. B. Lippincott Company, Philadelphia.
- WOLF, J. (1892): Das Gesetz der Transformation der Knochen, Verlag August Hirschwand, Berlin.
- WOOD, P. N. und BODLEY, E. M. (1985): Epidemiology of back pain, In: JAYSON, M.: The Lumbar Spine and Backpain, Pitman, London.

YANG, K. H. und KING, A. I. (1984): Mechanism of Facet Load Transmission as a Hypothesis for Low-Back Pain, Spine 9, 557-565.

- MATERIALEIGENSCHAFTEN -

BRINCKMANN, P. und HORST, M. (1985): The influence of vertebral body fracture, intradiscal injection and partial discectomy on the radial bulge and height of human lumbar discs, Spine 10, 138-145.

BRINCKMANN, P. und GROOTENBOER, H. (1992): The change of disc height, radial disc bulge and intradiscal pressure due to discectomy, An invitro investigation on human lumbar discs, Spine (im Druck).

EYRE, D. R. (1979): Biochemistry of the Intervertebral Disc, Int. Rev. Connect. Tissue Res. 8, 227-291.

LIN, H. S.; LIU, Y. K.; RAY, G.; NIKRAVESH, P. (1978): Systems identification for material properties of the intervertebral joint, J. Biomechanics 11, 1-14.

NOLTE, L.-P.; PANJABI, M. M.; OXLAND, T. R. (1990): Biomechanical properties of lumbar spinal ligaments, Proc. 8th European Conf. on Biomaterials, Heidelberg 1989 in: Advances in Biomaterials, 9, Clinical Implant Material, ed G.Heimke, U.Soltesz, A.J.C. Lee, Elsevier, Amsterdam.

TKACZUK, H. (1968): Tensile properties of human lumbar longitudinal ligaments, Acta orthop. Scand., Suppl. 115.

WU, H.-C. und YAO, R.-F. (1976): Mechanical behaviour of the human annulus fibrosus, J. Biomechanics 9, 1-7.

NUMERISCHE UNTERSUCHUNGEN -

BELYTSCHKO, T. B.; ANDRIACCHI, T. P.; SCHULTZ, A. B.; GALANTE, J. O. (1973): Analog studies of forces in the human spine: computational techniques, J. Biomechanics 6, 361-371.

BELYTSCHKO, T. B.; KULAK, R. F.; SCHULTZ, A. B.; GALANTE, J. O. (1974): Finite element stress analysis of an intervertebral disc, J. Biomechanics 7, 277-285.

GOEL, V. K.; KIM, Y. E.; LIM, T. H.; WEINSTEIN, J. N. (1988): An analytic investigation of the mechanics of spinal instrumentation, Spine 13, 1003

GOEL, V. K.; WEINSTEIN, J. N.; LIU, Y. K.; KIM, Y. E.; OKUMA, T. (1990): Biomechanics of spine stabilization, In: WEINSTEIN, J. N.; WIESEL, S. W.: The lumbar spine, ISSLS, W. B. Saunders Co., Philadelphia.

HAKIM, N. S. und KING, A. I. (1979): A three dimensional finite element dynamic analysis of a vertebra with experimental verification, J. Biomechanics 12, 277-292.

- KULAK, R. F.; BELYTSCHKO, T. B.; SCHULTZ, A. B.; GALANTE, J. O. (1976): Nonlinear behavior of the human intervertebral disc under axial load, *J. Biomechanics* 9, 377-386.
- ROBERTS, S. B. und CHEN, P. H. (1970): Elastostatic analysis of the human spine thoracic skeleton, *J. Biomechanics* 3, 527-545.
- SCHULTZ, A. B.; BELYTSCHKO, T. B.; ANDRIACCHI, T. P.; GALANTE, J. O. (1973): Analog studies of forces in the human spine: mechanical properties and motion segment behavior, *J. Biomechanics* 6, 373-383.
- SHIRAZI-ADL, A. (1984): 3-D Nonlinear Finite Element Stress Analysis of a Lumbar Intervertebral Joint, Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering and Applied Mechanics, McGill University, Montreal, Quebec, Canada.
- SHIRAZI-ADL, A.; SHRIVASTAVA, S. C.; AHMED, A. M. (1984): Stress Analysis of the Lumbar Disc-Body Unit in Compression - A Three-Dimensional Nonlinear Finite Element Study, *Spine* 9, 120-134.
- SPIPKER, R. L. (1982): A Simplified Hybrid-stress Finite Element Model of the Intervertebral Disc, In: GALLAG, R. H.; SIMON, B. R.; JOHNSON, P. C.; GROSS, J. F.: *Finite Elements in Biomechanics*, John Wiley & Sons, Chichester.
- YOGANANDAN, N.; RAY, G.; MYKLEBUST, J. B.; SANCES, A. (1990): Finite Element Analysis of the Spine, In: WEINSTEIN, J. N.; WIESEL, S. W.: *The lumbar spine*, ISSLS, W. B. Saunders Co., Philadelphia.

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 **Helmut Stumpf:**
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 **Bernd Kaempf:**
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 **Alfred Kraft:**
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 **Petrisor Mazilu:**
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 **Klaus-Detlef Mickley:**
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 **Lutz-Peter Nolte:**
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 **Ulrich Blix:**
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 **Peter Becker:**
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 **Dietmar Bouchard:**
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 **Uwe Zdebel:**
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 **Jan Kubik:**
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 **Horst J. Klepp:**
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 **J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:**
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 **Franz Karl Labisch:**
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 **J. Chrosielewski/L.-P. Nolte:**
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines Inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturelle Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz Isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82 B. Bischoff-Belermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis

- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 88 Jörg Körber:
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schieße:
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung
- Nr. 90 Egbert Schopphoff:
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 90**