

**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Peer Schieße

Ein Beitrag zur Berechnung des  
Deformationsverhaltens anisotrop  
geschädigter Kontinua unter  
Berücksichtigung der  
thermoplastischen Kopplung

Heft Nr. 89



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik**  
**Ruhr-Universität Bochum**

Peer Schieße

Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens  
~~anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung~~  
der thermoplastischen Kopplung

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 89  
April 1994

## Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Stipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Graduiertenkollegs "Computational Structural Dynamics" am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, deren Betreuung und für die Übernahme des Referates. Herrn Prof. Dr. G. Schmid, Ph.D., danke ich für die sein Interesse und für die Übernahme des Korreferates.

Meinen herzlichen Dank auch an alle, die zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben. Mit anregenden Diskussionen unterstützten mich jederzeit die Herren Dr.-Ing. H. Altenbach, Dipl.-Ing. A. Wichtmann, Dr.-Ing. B. Bischoff-Beiermann, Dr.Ing. J. Körber und Dipl.-Ing. B. Westerhoff. Zur Lösung technischer Probleme standen mir jederzeit die Herren P. Grundmann und U. Böhme hilfreich zur Seite. Mein Dank gilt allen Mitarbeitern des Instituts für Technische Mechanik für die freundliche Aufnahme am Lehrstuhl.

Für die finanzielle Unterstützung, die das Entstehen dieser Arbeit ermöglichte, möchte ich mich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft bedanken.

April 1994

Peer Schieße

---

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Otto-T. Bruhns

Prof. Dr. G. Schmid, Ph.D.

Tag der Einreichung: 26.01.1994

Tag der mündlichen Prüfung: 28.04.1994

©1994

Dr.-Ing. Peer Schieße  
Wiemelhauser Str.267 b  
44799 Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden verschiedene existierende Ansätze zur Herleitung der Materialgesetze geschädigter Materialien vorgestellt und ihre Eigenschaften diskutiert. Die Vor- und Nachteile werden anhand konkreter Beispiele erläutert.

Es wird ein Materialgesetz zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Materialien entwickelt, die anisotrop verteilte Mikroporen enthalten. Zur Definition der Porenkonfiguration durch ein Schädigungsmaß wird eine tensorielle Fourierreihe verwendet. Das Materialgesetz kann elastische Entfestigungen, Änderungen elastischer Materialsymmetrien, anisotrope schädigungsinduzierte Deformationen und erhöhte plastische Deformationsraten unabhängig voneinander beschreiben. Die schädigungsinduzierten Deformationen sind unabhängig von den Anisotropierichtungen des Schädigungsmaßes.

Die Materialfunktionen wurden für Ck15-Stahl mit Hilfe von Zugversuchen an kreiszylindrischen Vollproben ermittelt. Die Wahl der Materialkoeffizienten erfolgt phänomenologisch.

Der Vergleich von experimentellen Ergebnissen und Simulationsrechnungen zeigt, daß alle isotropen Effekte der Schädigung qualitativ und quantitativ wiedergegeben werden. Die anisotropen Effekte können qualitativ beschrieben werden.

## Summary

In this thesis different existing approaches to derive material equations of damaged materials are presented and their properties will be discussed. The advantages and disadvantages of the approaches will be shown on some special examples.

Material equations are presented that describe the behaviour of materials with microcavities. The material law can describe elastic softening, changes of elastic symmetries of the material, anisotropic deformations by damage and increasing plastic deformation-rates. All phenomena are independent of each other.

The material functions of Ck15-steel are determined by adopting tension tests with circular cylindrical specimens. The material coefficients were determined by phenomenological approaches.

Numerical simulations of isotropic phenomena are in qualitative and quantitative accordance with experimental data. The anisotropic phenomena are described in a qualitative form.



# Inhaltsverzeichnis

	Seite
<b>Symbole und Bezeichnungen</b> . . . . .	<i>iii</i>
<b>1. Einleitung</b> . . . . .	1
<b>2. Einführung in die Schädigungsmechanik</b> . . . . .	4
2.1 Ingenieurtechnische Modelle der Schadensbeschreibung . . . . .	4
2.2 Was ist Schädigung? . . . . .	7
2.3 Materialtheoretischer Rahmen . . . . .	11
2.3.1 Einführung . . . . .	11
2.3.2 Materialunabhängige Grundgleichungen . . . . .	15
2.3.2.1 Der Deformationszustand – Grundlagen der Kinematik	15
2.3.2.2 Der Spannungszustand . . . . .	21
2.3.2.3 Die Bilanzgleichungen . . . . .	23
<b>3. Die Herleitung der materialabhängigen Gleichungen</b> . . . . .	30
3.1 Vorbetrachtungen . . . . .	30
3.2 Modellierungskonzepte der Schädigungsmechanik . . . . .	32
3.3 Schädigungsmaße und Schädigungseffektmaße . . . . .	34
<b>4. Das Schädigungsmaß</b> . . . . .	39
<b>5. Phänomenologische Schädigungsmodelle</b> . . . . .	46
5.1 Das Effektivspannungskonzept . . . . .	47
5.2 Bemerkungen zum Effektivspannungskonzept . . . . .	52
5.3 Das Effektivverzerrungskonzept . . . . .	55
5.4 Energetische Schädigungskonzepte . . . . .	59

5.5	Bemerkungen zu den energetischen Schädigungskonzepten . . .	63
<b>6.</b>	<b>Mikromechanisch begründete Schädigungsmodelle, Analogie-Modelle</b> . . . . .	<b>71</b>
6.1	Mikromechanisch begründetes Materialverhalten . . . . .	71
6.1.1	Materialgesetze aus der Mikrostruktur, Homogenisierung	73
6.1.2	Formulierung eines Materialgesetzes . . . . .	75
6.2	Bemerkungen zu mikromechanisch begründeten Schädigungsmodellen . . . . .	77
6.3	Analogie-Modelle . . . . .	83
<b>7.</b>	<b>Modellierungskonzepte – Zusammenfassung</b> . . . . .	<b>88</b>
<b>8.</b>	<b>Ein anisotropes Schädigungsmodell elastisch-plastischer Materialien</b> . . . . .	<b>91</b>
8.1	Definition der Schädigungsvariablen für Porenschädigung . . .	92
8.2	Thermischer Prozeß . . . . .	94
8.3	Elastische Deformationen . . . . .	95
8.4	Plastische Deformationen . . . . .	98
8.5	Schädigungsinduzierte Deformationen . . . . .	101
8.6	Die Evolution der Schädigungsvariablen . . . . .	105
8.7	Thermodynamische Konsistenz und Materialfunktionen . . .	112
8.8	Das Materialgesetz für weggesteuerte Prozesse . . . . .	113
<b>9.</b>	<b>Versagen und Bruch</b> . . . . .	<b>115</b>
9.1	Definition des Versagens . . . . .	115
9.2	Versagenszustände . . . . .	117
<b>10.</b>	<b>Berechnungen</b> . . . . .	<b>125</b>
10.1	Berechnung axialsymmetrischer Probleme - homogener Zug .	125
10.2	Experimente . . . . .	131
10.3	Unbekannte Materialfunktionen . . . . .	135
10.4	Ergebnisse . . . . .	141
<b>11.</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b> . . . . .	<b>162</b>
	<b>Anhang</b> . . . . .	<b>165</b>
	<b>Literatur</b> . . . . .	<b>179</b>

# Symbole und Bezeichnungen

## Skalare

$a$	isotrope Verfestigung
$\mathcal{B}$	Körper mit dem Volumen $V$ in der Momentankonfiguration
$\partial\mathcal{B}$	Oberfläche von $\mathcal{B}$
$dV; dV^0$	differentielles Volumenelement in der Momentan- bzw. Referenzkonfiguration
$D_i$ $(p)$	( $i=I,II,III$ ); Hauptwerte von $\underline{\underline{D}}$ $(p)$
$f$	spezifische freie Helmholtz - Energie
$J$	JACOBI'sche Funktionaldeterminante
$\mathfrak{K}_3$	Kugel mit dem Radius "1" (Einheitskugel), jedem Punkt der Oberfläche von $\mathfrak{K}_3$ wird ein Vektor vom Mittelpunkt der Kugel bis zum betrachteten Punkt auf der Oberfläche zugeordnet, die Oberfläche der Kugel beschreibt so den Raum aller möglichen Richtungen
$r$	Massendichte skalarer Wärmequellen
$s$	spezifische Entropie
$s'$	Zufuhrdichte der Entropie
$s''$	Produktionsdichte der Entropie
$S_i$	( $i=I,II,III$ ); Hauptwerte von $\underline{\underline{S}}$
$T$	absolute Temperatur
$u$	Massendichte der spezifischen inneren Energie
$w$	spezifische Formänderungsleistung
$\alpha$	thermischer Ausdehnungskoeffizient
$\beta$	Dissipationsfunktion

---

$\Delta V$	repräsentatives Volumenelement
$\lambda$	plastischer Multiplikator
$\lambda_f$	Wärmeleitkoeffizient
$\xi$	Volumendichte der Mikrohohlräume
$\bar{\xi}$	Orientierungsverteilungsdichtefunktion
$\rho$	Massendichte
$\rho^0$	Massendichte in der Referenzkonfiguration
$\Psi$	spezifische freie Enthalpie

### Vektoren

$\underline{\mathbf{a}}$	Ortsvektor eines Teilchens in der Referenzkonfiguration (materielle, substantielle oder Lagrange'sche Koordinaten)
$\underline{\mathbf{b}}$	Vektor der Beschleunigung
$d\underline{\mathbf{A}}$	$ d\underline{\mathbf{A}}  \underline{\mathbf{n}} = dA \underline{\mathbf{n}}$ ; differentielles, gerichtetes Flächenelement in der Momentankonfiguration
$d\underline{\mathbf{A}}^0$	$ d\underline{\mathbf{A}}^0  \underline{\mathbf{n}}^0 = dA^0 \underline{\mathbf{n}}^0$ ; differentielles, gerichtetes Flächenelement in der Referenzkonfiguration
$d\underline{\mathbf{F}}^V$	differentielle Volumenkraft
$d\underline{\mathbf{F}}_{\underline{\mathbf{n}}}^F$	differentielle Oberflächenkraft auf $d\underline{\mathbf{A}}$
$\underline{\mathbf{f}}$	Vektor der Massenkraftdichte
$\underline{\mathbf{g}}_i$	i-ter kovarianter Basisvektor der Koordinatenbasis $\underline{\mathbf{g}}$
$\underline{\mathbf{g}}^i$	i-ter kovarianter Basisvektor der Koordinatenbasis $\underline{\mathbf{g}}$ in der Ausgangskonfiguration
$\underline{\mathbf{I}}$	Impulsvektor
$\underline{\mathbf{k}}$	Vektor der Volumenkraftdichte
$\underline{\mathbf{L}}$	Drehimpulsvektor
$\underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{n}}^0$	Einheitsnormalenvektor in der Momentan- bzw. Referenzkonfiguration
$\underline{\mathbf{n}}_i$	(i=I,II,III); zu $D_i$ gehöriger Eigenvektor
$\underline{\bar{\mathbf{n}}}_i$	(i=I,II,III); zu $S_i$ gehöriger Eigenvektor
$\underline{\mathbf{q}}$	Wärmestromvektor je Flächeneinheit
$\underline{\mathbf{t}}$	$d\underline{\mathbf{A}} = dA \underline{\mathbf{n}}$ zugeordnete Oberflächenkraftdichte (Spannungsvektor) in der Momentankonfiguration
$\underline{\mathbf{t}}^0$	Oberflächenkraftdichte (Spannungsvektor) in der Referenzkonfiguration
$\underline{\mathbf{u}}$	Verschiebungsvektor

$\underline{\mathbf{v}}$	Geschwindigkeitsvektor
$\underline{\mathbf{X}}$	Ortsvektor des Teilchens $\underline{\mathbf{a}}$ zum Zeitpunkt $t$ (räumliche, lokale oder Euler - Koordinaten)
$\underline{\mathbf{X}}^1, \underline{\mathbf{X}}^2, \underline{\mathbf{X}}^3$	kartesische Koordinaten
$\underline{\mathbf{x}}^1, \underline{\mathbf{x}}^2, \underline{\mathbf{x}}^3$	Zylinderkoordinaten
$\underline{\alpha}$	Vektor der inneren Zustandsvariablen
$\underline{\beta}$	Vektor von Zustandsvariablen die nicht $\underline{\kappa}$ oder $\underline{\xi}$ zugeordnet werden
$\underline{\gamma}$	Entropiefluß
$\underline{\kappa}$	Vektor der Verfestigungsvariablen
$\underline{\xi}$	Vektor der Schädigungsvariablen

### Tensoren 2. Stufe

$\underline{\underline{\mathbf{d}}}$	Green - Lagrange'scher Verzerrungstensor
$\underline{\underline{\mathbf{D}}}$	symmetrischer Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten (Verzerrungs-, Deformationsgeschwindigkeitstensor)
$\underline{\underline{\mathbf{D}}}$	Geschwindigkeit der reversiblen Verzerrungen
$\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ <sup>(r)</sup>	Geschwindigkeit der inelastischen Verzerrungen
$\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ <sup>(i)</sup>	Geschwindigkeit der plastischen Verzerrungen
$\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ <sup>(p)</sup>	Geschwindigkeit der schädigungsinduzierten Verzerrungen
$\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ <sup>(s)</sup>	
$\underline{\underline{\mathbf{1}}}$	Einheitstensor zweiter Stufe
$\underline{\underline{\mathbf{e}}}$	Almansi - Euler'scher Verzerrungstensor
$\underline{\underline{\mathbf{F}}}$	Deformationsgradient
$\underline{\underline{\mathbf{g}}}$	Rechts - Cauchy - Green - Tensor
$\underline{\underline{\mathbf{h}}}$	Links - Cauchy - Green - Tensor
$\underline{\underline{\mathbf{L}}}$	Geschwindigkeitsgradient
$\underline{\underline{\mathbf{0}}}$	Nulltensor zweiter Stufe
$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_1$	Lagrange'scher (1.Piola -Kirchhoff-) Spannungstensor
$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_2$	2.Piola - Kirchhoff - Spannungstensor
$\underline{\underline{\mathbf{R}}}$	Starr-Körper-Rotationstransformation
$\underline{\underline{\mathbf{S}}}$	gewichteter Cauchy'scher Spannungstensor
$\underline{\underline{\mathbf{U}}}$	Streckung (Rechts - Streck - Tensor)
$\underline{\underline{\mathbf{V}}}$	Streckung (Links - Streck - Tensor)
$\underline{\underline{\mathbf{W}}}$	antimetrischer Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten

	(Spin-, Drehgeschwindigkeits-, Wirbeltensor)
$\underline{\underline{\sigma}}$	Cauchy'scher Spannungstensor (wahrer oder Euler'scher Spannungstensor)
$\underline{\underline{\epsilon}}_{(H)}$	Hencky-Verzerrungstensor (auch $\underline{\underline{\epsilon}}$ )

#### Tensoren 4. Stufe

$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}$	Nachgiebigkeitstensor
${}^0\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}$	Nachgiebigkeitstensor des ungeschädigten Materials

#### Operatoren und Abkürzungen

$\varepsilon_{ijk}$	Permutationssymbol
$\text{Div}(\dots)$	materielle Divergenz
$\text{div}(\dots)$	räumliche Divergenz
$\text{Grad}(\dots)$	materieller Gradient
$\text{grad}(\dots)$	räumlicher Gradient
LEBM	Linear Elastische Bruchmechanik
$\text{Rot}(\dots)$	materieller Rotor
$\text{rot}(\dots)$	räumlicher Rotor
$\underline{\underline{\mathbf{X}}}^A$	antimetrischer Anteil einer Größe $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$
$\underline{\underline{\mathbf{X}}}^D$	deviatorischer Anteil einer Größe $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$
$\underline{\underline{\mathbf{X}}}^S$	symmetrischer Anteil einer Größe $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$
$X_H$	$= \frac{1}{3}\text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{X}}})$ ; z.B. hydrostatische Spannung bei Spannungstensoren
$X_{eq}$	$= \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{\mathbf{X}}}^D \cdot \underline{\underline{\mathbf{X}}}^D}$ ; von Mises äquivalente Größe von $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$
$(\dots) = \frac{D(\dots)}{dt}$	materielle Zeitableitung
$(\dots)_{\nabla}$	objektive Zeitableitung
$\langle \dots \rangle_{MC}$	McCauley - Klammern
$\frac{\partial (\dots)}{\partial (\dots)}$	partielle Ableitung
$ \dots $	Betrag

---

# 1. Einleitung

Der Deformationsprozeß wird von energiedissipativen Prozessen begleitet, die eine fortschreitende Degradation eines Bauteils verursachen. Diese Phänome werden auf innere Strukturänderungen zurückgeführt und beschäftigt Physiker, Werkstoffwissenschaftler und Mechaniker seit vielen Jahren. Internationale Trendstudien (z.B. KITAGAWA [96]; SAYIR [191]; RICE [208]) belegen, daß in den letzten Jahren verstärkte Bemühungen zur Modellierung des Materialverhaltens unter Berücksichtigung innerer Strukturänderungen zu beobachten sind.

Seit ca. 30 Jahren hat sich die Schädigungsmechanik (auch Kontinuums-Schädigungstheorie, Continuum Damage Mechanics bzw. CDM (JANSON & HULT [85])) zur Erfassung von inneren Strukturänderungen, die als Schädigung bezeichnet werden, entwickelt. Dieses Konzept geht auf die Arbeiten von L.M.KACHANOV [89] und Yu.N.RABOTNOV [182] Ende der 50er Jahre zurück, wurde aber wegen der zu dieser Zeit nicht lösbaren Probleme der experimentellen Erfassung von Mikrodefekten sowie deren rechentechnischer Verarbeitung zunächst nur wenig genutzt.

Als Folge erweiterter numerischer und experimenteller Möglichkeiten durch die Entwicklung der Rechentechnik und der Werkstoffdiagnostik (H.ALTENBACH, J.ALTENBACH & SCHIEBE [3]) wurden die theoretischen Grundlagen erweitert und in die Überlegungen von Physik, Werkstoffwissenschaft, Materialtheorie und Kontinuumsmechanik einbezogen (Kapitel 2). Modelle wurden für eine Reihe von Mechanismen entwickelt, numerische Simulationsmöglichkeiten geschaffen (z.B. SIMO und JU [88], [196], [197]; MURAKAMI und RONG [155], [156]; SUN, SIEGELE, VOSS & SCHMITT [201]; KÖNKE [100]) und Konzepte zur experimentellen Identifikation und Verifikation dieser Modelle aufgestellt. Die Fragen der Schädigungsmechanik wurden umfassend in der Literatur, auf Konferenzen und anderen wissenschaftlichen Veranstaltungen erörtert und eine internationale Spezialisierung bildete sich heraus (siehe z.B. SAYIR [191], H.ALTENBACH, ELZE, N.ALTENBACH & BRANDT [5] oder [3]). Heute existieren Schädigungsmodelle für anisotrope (CORDEBOIS & SIDOROFF [50]) und inhomogene Materialien (NAJAR [158]), für Materialien mit unterschiedlichem Zug-Druck-Verhalten

und für dreidimensionale Spannungszustände (DAVISON & STEVENS [55]). Sie umfassen das Spektrum metallischer Materialien, Polymere bis zu Beton (MAZARS & PIJAUDIER-CABOT [141]) oder Fels (KONDAUROV, NIKITIN & RYZHAK [98]).

Dennoch sind einige Fragen offen und es ist nicht zu übersehen, daß die theoretischen Betrachtungen der Kontinuums-Schädigungs-Theorie zur Zeit an mangelnder Einheitlichkeit in den Näherungen und Strenge in den Entwicklungen leiden (KRAJČINOVIC [103], NAJAR [158], RABIER [181]). Ausgehend von diesen Problemen konnten Fragen einer Variationsformulierung und der Beschreibung von Entlastungsprozessen bisher nur unbefriedigend untersucht werden. Ein erster Schritt zur Behebung dieser Schwierigkeiten bildet die Erarbeitung eines systematischen Überblicks über die verwendeten Modellierungskonzepte mit einer Diskussion der zugehörigen Möglichkeiten und Grenzen.

Im Kapitel 2 wird daher eine Definition des Begriffs der *Schädigung* angegeben und der thermomechanische Rahmen zur Beschreibung von Deformationsprozessen unter Berücksichtigung von inneren Strukturänderungen festgelegt.

Eine allgemeine Beschreibung der Konzepte, die auf die materialabhängigen Gleichungen des betrachteten geschädigten Materials führen, ist im Kapitel 3 zu finden.

In diesem Kapitel erfolgt – z.B. gegenüber VAKULENKO & L.M.KACHANOV [214] – weiterhin eine strenge Differenzierung zwischen inneren Zustandsvariablen und Größen zur Beschreibung der makroskopischen Effekte unter spezifischer Belastung. Diese Differenzierung folgt direkt aus der Definition der Schädigung und erleichtert dadurch die experimentelle Verifikation postulierter Funktionsverläufe.

Das Kapitel 4 ist der Betrachtung von Schädigungsmaßen, die aus der Literatur bekannt sind, gewidmet. Hierbei wird deren Eignung zur Beschreibung einer Mikrodefektkonfiguration untersucht und ein Schädigungsmaß zur Beschreibung von Mikroporen definiert.

In den anschließenden Kapiteln 5, 6 und 7 werden die im Kapitel 3 betrachteten Modellierungskonzepte anhand von konkreten Beispielen ausführlich dargestellt und ihre Eigenschaften untersucht.

Mit Hilfe der Schlußfolgerungen aus den vorangegangenen Untersuchungen wird im Kapitel 8 ein Materialgesetz entwickelt, das zur Beschreibung der elastischen Entfestigung, der Änderung elastischer Symmetrien, von anisotropen schädigungsinduzierten Deformationen und der erhöhten plastischen Deformationsraten für metallische Materialien mit anisotrop verteilten Mikroporen und elastisch-plastischen Grundverhalten geeignet ist.

---

Der Definition eines Kriteriums für Materialversagen ist das Kapitel 9 gewidmet. Es wird nicht versucht, eine Korrelation zwischen dem Zeitpunkt des Versagens und dem Wert einer einzelnen äußeren oder inneren Zustandsgröße zu finden. Vielmehr wird mit der Definition einer kritischen elastischen Schädigungs-Verzerrungs-Energiefreisetzungsrates eine physikalische Begründung für das Materialversagen angegeben.

Zur Verifikation des in Kapitel 8 vorgestellten Materialgesetzes wird in Kapitel 10 der homogene Zugversuch an einer axialsymmetrischen Probe untersucht. Die materialabhängigen Koeffizienten des Materialgesetzes werden bestimmt und Rechnungen mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Die Beschreibungsmöglichkeiten des Materialgesetzes – zu denen keine experimentelle Basis zur quantitativen Anpassung vorlag – werden vorgestellt.

---

---

## 2. Einführung in die Schädigungsmechanik

### 2.1 Ingenieurtechnische Modelle der Schadensbeschreibung

Die Modelle zur Berücksichtigung und Beschreibung innerer Strukturänderungen neben der Kontinuums-Schädigungs-Theorie können in drei Hauptgruppen unterteilt werden (DANZER [53]):

- (i) physikalische Modelle,
- (ii) bruchmechanische Modelle,
- (iii) empirische Modelle.

*Physikalische Modelle* führen im Rahmen einer *Diskontinuumstheorie* (ein Teil der Molekular- oder Korpuskulartheorie) die Materie auf ihre diskreten Teilchen (Tabelle 1) zurück und sind bestrebt, alle Eigenschaften der Materialien mit Hilfe dieser Teilchen und ihren Wechselwirkungen zu erklären (BUDO [33]). Physikalische Modelle der Schadensentwicklung (d.h. Modelle, die die Entstehung von Schäden durch die Bewegung von Atomen, Leerstellen und Versetzungen erklären) wurden in letzter Zeit vor allem für das Wachstum von Kriechporen mit Erfolg entwickelt. Deren Verwendung ist in der Ingenieurpraxis vorteilhaft, wenn diskrete Verteilungen innerer Strukturelemente und -defekte das makroskopische Verhalten signifikant definieren. Dies ist z.B. der Fall, wenn sogenannte Grenzzustände betrachtet werden (FISCHER [63]; M.KACHANOV [93]). Die Modellierung eines geschädigten Körpers als diskrete Struktur aus einzelnen Körnern mit Zwischenräumen ist nicht nur mit sehr großem Aufwand verbunden, sie stößt auch an Grenzen der experimentellen Verifizierbarkeit. In Ingenieur Anwendungen werden diskrete Theorien phänomenologische Theorien daher vorerst nicht ersetzen können. Nur in Sonderfällen wurden bisher befriedigende Ergebnisse erhalten (DANZER [53]; FELDMÜLLER [62]; FISCHER [63]; KRAJCI NOVIC [101]).

*Bruchmechanische Modelle* bilden keine allgemeine Theorie der Brucherscheinungen, sie liefern eine ingenieurmäßige Methode der Bewertung von Makrorissen und ihres

Wachstums bis zu einer kritischen Größe (BLUMENAUER & PUSCH [27]; HAHN [74]; [76]; MICHEL & TOTZAUER [144]; ROSSMANITH [186]). Für die Modellierung der umgebenden Matrix wird die *klassische* Kontinuumsmechanik verwendet, die die realen Prozesse der Rißausbreitung in mikroskopischen Bereichen weitgehend unbeachtet läßt. Die Bruchmechanik ist auf Brucherscheinungen mit vernachlässigbaren energie-dissipativen Prozessen beschränkt. Die realen Prozesse der Rißausbreitung lassen sich durch globale Parameter (Spannungsintensitätsfaktor, Energiefreisetzungsrate, Weg-integrale u.a.) beschreiben. Trotz sehr erfolgreicher Anwendung der Bruchmechanik in der Vergangenheit (vor allem bei linear-elastischem Materialverhalten), sind durch die Vernachlässigung der Mikromechanismen viele Probleme ungelöst (plastisches Verhalten des Matrixmaterials, Einfluß verteilter Mikrodefekte, etc.)

Schadensparameter und der Begriff *Schädigung* wurden in empirischen Methoden der Lebensdauerprognose erstmalig verwendet, ohne ihn aber näher zu definieren. HULT [82] betrachtet diese Größen als *a posteriori* Definition von Schädigung, da sie die Entwicklung von Änderungen der Materialeigenschaften, die schließlich zum Versagen von Bauteilen führen, beschreiben sollen. Schadensparameter werden aufgrund von Korrelationen mit experimentellen Ergebnissen definiert und beschreiben keine definierten mikrostrukturellen Prozesse. Sie sind komplizierte Funktionen der Beanspruchungen (Verzerrung, Spannung, Temperatur, Geschwindigkeiten, etc.) und der Bauteilgeometrie. Zur Prognose der Lebensdauer wird postuliert, daß zwischen dem Schadensparameter und der Zeit bis zum Versagen ein eindeutiger Zusammenhang besteht (DANZER [53]).

Die erste mit Hilfe *empirischer Modelle* durchgeführte systematische Untersuchung der Ermüdung von Metallen erfolgte vor etwa 130 Jahren durch A. WÖHLER. Diese und die darauf aufbauenden Ideen von BASQUIN bildeten eine methodische Basis der Lebensdauerprognose, die beispielgebend für viele andere später formulierte Theorien war (z.B. MANSON [137]). Bei den Betriebsbeanspruchungen von Bauteilen ist die, in den Wöhlerversuchen untersuchte mit der Zeit periodische Belastung eher die Ausnahme. Um die Ergebnisse aus Einstufenversuchen auf kompliziertere Beanspruchungen übertragen zu können, wurden Schadensakkumulationsregeln entwickelt.

Ausgangspunkt bilden Lebensdaueruntersuchungen an Kugellagern von PALMGREN [170]. Die Lebensdauer bei einem Belastungsniveau  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) ist allgemein die Umdrehungszahl bis zum Versagen. Bei einem Belastungsniveau  $P_i$  ist  $N_i$  die zum Versagen erforderliche Umdrehungszahl und  $n_i$  die aktuelle Umdrehungszahl. Aufgrund von Versuchen, bei denen das Belastungsniveau  $P_i$  nach  $n_i$  Umdrehungen

gewechselt wurde, schlägt PALMGREN

$$\sum_{(i)} \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (2.1)$$

als Versagenskriterium vor. Das Verhältnis

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (2.2)$$

ist dann die Ermüdungsschädigung von  $n_i$  Belastungszyklen auf dem Belastungsniveau  $P_i$  und (2.1) läßt sich wie folgt verallgemeinern:

$$\sum_{(i)} D_i = 1 \quad (2.3)$$

Die Arbeit von PALMGREN enthält keine quantitative experimentelle Verifizierung des Versagenskriteriums an realen Bauteilen. Dies wird auch als Ursache für das zum damaligen Zeitpunkt geringe Interesse an dieser Arbeit angenommen. Erst mit den Arbeiten von MINER [145] wurde das Konzept wieder aufgegriffen und nachträglich als PALMGREN-MINER-Gesetz oder Gesetz der linearen Schadensakkumulation bekannt. Eine analoge Definition eines Schadensparameters wurde von ROBINSON [185] für Kriechen vorgeschlagen. Ist  $T_i$  die Lebensdauer bei konstantem Belastungsniveau  $P_i$  bis zum Kriechbruch, wird das Verhältnis

$$D_i = \frac{t_i}{T_i} \quad (2.4)$$

als Schädigung nach dem Zeitraum  $t_i$  auf dem Belastungsniveau  $P_i$  bezeichnet. Als Versagenskriterium für den Kriechbruch bei schrittweise variiertes Belastung wird wieder (2.3) verwendet.

Die Gleichungen (2.2) und (2.4) zeigen, daß das Versagenskriterium (2.3) im Falle konstanter Last exakt erfüllt wird und in Fällen geringer Lastschwankungen eine gute Prognose für das Versagen erwartet werden kann. Ermüdungs- und Kriechbruchversuche mit stark veränderlicher Last zeigten, daß das lineare Schädigungsgesetz (2.3) mit der Zeit immer stärker vom tatsächlichen Prozeß abweicht. In kombinierten Kriech-Ermüdungs-Versuchen wurden ebenfalls mehr oder weniger starke Abweichungen von der linearen Hypothese festgestellt. Die Abweichung in Abhängigkeit von der Belastungsreihenfolge kann konservativ oder nichtkonservativ sein. Ein weiterer Nachteil der empirischen Methoden der Lebensdauerprognose ist die geringe Übertragbarkeit auf beliebige Lastfälle und Bauteilgeometrien, und die Werte von  $N_i$  bzw.  $T_i$  werden

als bekannt vorausgesetzt. Trotz der begrenzten Anwendbarkeit ist das lineare Schadensgesetz, hauptsächlich wegen seiner mathematischen und konzeptionellen Einfachheit, sehr verbreitet.

Die Kontinuums-Schädigungs-Theorie ist bei Sicherung der Lösbarkeit ingenieurtechnischer Aufgaben bestrebt, Deformationsverhalten, Festigkeit und Lebensdauer durch detailliertes Wissen über die Materialstrukturänderung aus Physik, Werkstofftechnik und Mechanik ohne vorhergehende Bauteilversuche zu prognostizieren.

## 2.2 Was ist Schädigung?

Der Begriff *Schädigung* wird einerseits für mikroskopische Strukturänderungen wie Phasenumwandlungen, Entwicklung von *Liniendefektstrukturen* bzw. Versetzungen (z.B. WOO & LI [220], LECKIE [110]), Entwicklung von Mikrohohlräumen und für die aus den inneren Strukturänderungen resultierenden makroskopischen Effekte (z.B. BECKER & GROSS [15]; VAKULENKO & L.M.KACHANOV [214]) verwendet (siehe auch Abschnitt 3.3). Eine eindeutige Definition existiert nicht.

Größenmaßstab	atomares Niveau	Mikrogefüge	Mesoniveau	Makroniveau
<b>Strukturelemente</b>	Atome, Moleküle	Kristallite, Körner, Füllstoffe, amorphe Bereiche	repräsentatives Volumen	finiter Körper
<b>Strukturdefekte</b>	Leerstellen, Zwischengitteratome, Versetzungen, Stapelfehler, Antiphasengrenzen ...	Mikrorisse, Poren, Verunreinigungen, Gleitungen, Ausscheidungen, Korngrenzen, Gleitbänder	lokales Versagen, Gasblasen, Blockseigerungen	Makrorisse, Löcher
<b>Wissenschaftsdisziplin</b>	Festkörperphysik	Werkstoffwissenschaft	Kontinuums- / Strukturmechanik	
<b>Betrachtungsweisen</b>	Diskontinuumstheorie .....> Kontinuumstheorie .....>			
<b>Anwendungsbereiche einzelner Modelle</b>	< ..... >     < ..... > atomare Modelle     mikromechanische Modelle < ..... > metallphysikalische Modelle < ..... > Kontinuums-Schädigungs-Theorie (Schädigungsfelder) < ..... > Bruchmechanik (Makrorißverhalten)			

**Tabelle 1:** Materialdefekte und Anwendungsbereiche von Materialmodellen

Nach KRAJČINOVIC [102] bzw. JU [88] lassen sich zumindest drei Ebenen beobachten (Tabelle 1 - FISCHER [63]):

- (i) atomare Fehlstellen und Kristallgitterdefekte, die atomare (bzw. physikalische, DANZER [53]) Materialmodelle erfordern;
- (ii) einzelne Mikrodefekte wie Mikrorisse bzw. Mikrodefektfelder, die mikromechanische bzw. phänomenologische Schädigungsmodelle erfordern;
- (iii) bruchmechanische Modelle, die das Ausbreitungsverhalten von Makrorissen (das umliegende Material kann als Kontinuum betrachtet werden) beschreiben.

Zur Bildung gemeinsamer Standpunkte über

- (i) Aufbau und Verhalten *ungeschädigter* (als Ausgangspunkt zur Beschreibung innerer Strukturänderungen) und *geschädigter* Materialien,
- (ii) zur Definition der Schädigungsvariablen (NAJAR [158]) und
- (iii) zur Schädigungsevolution

ist eine Definition des Schädigungsbegriffs eine Grundvoraussetzung. Ausgehend vom Beginn der Schädigungstheorie durch KACHANOV und RABOTNOV werden Strukturänderungen als Schädigung betrachtet, die sich auf geometrische Defekte wie Mikrorisse und -poren zurückführen lassen. Klassische Materialmodelle, die in der Vergangenheit für das makroskopische Verhalten entwickelt wurden (z.B. elastische, elastisch-plastische, Kriechmodelle), beschreiben dann das Materialverhalten in einem bestimmten Grundzustand mit nahezu konstanter Schädigung. In einem ungeschädigten Material ist die Volumendichte der Mikrohohlräume vernachlässigbar klein.

Da vielfach die Anwendbarkeit der Kontinuumsmechanik auf Materialien mit diskreten Mikrodefekten bezweifelt wird, sind einige Bemerkungen hierzu erforderlich.

Wie jede Theorie und jedes Modell ist sie eine Näherung für reale Prozesse. Bei der Formulierung von Theorien in den Ingenieurwissenschaften sind daher folgende Forderungen zu beachten [97]:

- (i) Übereinstimmung mit experimentell beobachteten Erscheinungen; d.h., die Anwendung auf Modelle, die den Versuchskörpern unter den gegebenen Versuchsbedingungen entsprechen, muß – von statistischen Schwankungen abgesehen – wieder zu den im Experiment beobachteten Effekten führen (phänomenologische Übereinstimmung von Experiment und Theorie);
- (ii) Widerspruchsfreiheit zu physikalisch begründeten Theorien (letztere müssen über die Theorie der Versetzungsbewegungen hinausgehen, denn Bildung und Wachstum von Mikrohohlräumen sind getrennt von Versetzungsbewegungen zu betrachten (KRAJČINOVIC [102])). Wünschenswert wäre es, die Kontinuumstheorie direkt aus physikalischen Theorien zu entwickeln und zu begründen);

- (iii) Bildung einer theoretischen Basis zur Beurteilung des Festigkeitsverhaltens von Bauteilen unter Betriebsbedingungen und Lieferung eines Kriteriums zur Versagensvorhersage;
- (iv) Optimierung der Modelle ausgehend vom theoretischen Maximum (Einbeziehung aller in der Theorie erfaßbaren Effekte) unter Berücksichtigung der Verifizierbarkeit und des Verhältnisses von Aufwand und Aussagekraft.

Die Kontinuumstheorie (auch phänomenologische Theorie) konstruiert ausgehend von makroskopisch beobachtbaren Phänomenen (experimentelle Identifikation) idealisierte, mathematische Modelle für das mechanisch-thermodynamische Materialverhalten (BECKER & BÜRGER [12]). Sie gründet sich auf die im Fall der gewöhnlichen makroskopischen Beobachtungen berechtigt erscheinende Annahme, daß der von einem finiten Körper eingenommene Raum von der Materie stetig erfüllt wird, daß zur Beschreibung des Verhaltens des belasteten Körpers die Mittelwerte an einem repräsentativen Volumenelement  $\Delta V$  hinreichend sind und daß diese wichtigen Größen, die die Bewegung der Punkte des Körpers bestimmen, stetige Funktionen des Ortes sind (BUDO [33]; ELSNER [60]; LEIPHOLZ [121]). Über die Struktur der Materie werden keine besonderen Hypothesen gemacht und zur Charakterisierung der Materialien werden gewisse Kennwerte und Kennwertfunktionen, die aus phänomenologischen Messungen zu entnehmen sind, benutzt. Der Vorteil dieser Theorie besteht in der Möglichkeit, sich auf die als wesentlich erkannten Phänomene beschränken zu können [62]. Die Erfahrung zeigt, daß diese Theorie sich auch bei der Beschreibung des Deformationsverhaltens geschädigter Körper bewährt hat und zulässig ist (M.KACHANOV [93]). Die Beschränkung auf klassische Kontinua ist in Hinblick auf metallische Materialien zulässig (LEHMANN [119]; BECKER & BÜRGER [12]; PRAGER [179]). Mit der Betrachtung verallgemeinerter Kontinua ist auch die Behandlung von Materialien möglich, die die Einführung verallgemeinerter Kontinua<sup>1</sup> erfordern (z.B.

<sup>1</sup> Eine umfassendere Klasse als die klassischen Kontinua bilden z.B. die polaren Medien, die das Cosserat-Kontinuum als Sonderfall enthalten. Die Kinematik der materiellen Punkte polarer Medien, für klassische Kontinua wird diese im Abschnitt 2.3.2.1 beschrieben, beinhaltet nicht nur Translationen sondern auch Rotationen. Die zu den Rotationen konjugierten Kraftgrößen bilden Momentenspannungen (Moment je Flächeneinheit), die bei klassischen Kontinua bei der Grenzwertbildung  $\Delta A \rightarrow 0$  verschwinden. Aus der Berücksichtigung der Momentenspannung in der Drehimpulsbilanz folgt, daß die Symmetrie des Cauchy'schen Spannungstensors (2.56) nicht mehr länger aufrecht erhalten werden kann.

Fels-Materialien oder Materialien mit lokal geordneter Struktur, Kristalle oder Makromoleküle (BECKER & BÜRGER [12])).

Natürlich können nicht beliebig große Defekte zu einem Kontinuum homogenisiert werden, was die Kontinuums-Schädigungs-Theorie auf solche Mikrodefekte begrenzt, die die Betrachtung des resultierenden makroskopischen Materialverhaltens noch im Rahmen einer Kontinuumstheorie mit hinreichender Genauigkeit zuläßt (FELDMÜLLER [62]; DIEHL [58]). Entscheidend ist, daß sich ein repräsentatives Volumenelement  $\Delta V$  bilden läßt, das in Erweiterung von [58] und [62] die folgenden Forderungen erfüllt:

- (i)  $\Delta V$  ist so groß, daß es statisch und kinematisch homogen wird, d.h.  $\sqrt[3]{\Delta V}$  ist groß gegen die Abmessungen und den Abstand der Mikrodefekte ( $(\Delta V)_1 \leq \Delta V$ ).
- (ii)  $\sqrt[3]{\Delta V}$  ist klein gegenüber den charakteristischen Längen der Belastung und des Körpers, so daß das Verhalten der in  $\Delta V$  enthaltenen Materie durch Mittelwerte hinreichend beschrieben ist (Definition von  $\Delta V \leq (\Delta V)_2$ ). Es ergibt sich:

$$(\Delta V)_1 \leq (\Delta V) \leq (\Delta V)_2 . \quad (2.5)$$

Solange (2.5) erfüllt wird, können Mikrodefektfelder im Rahmen der Kontinuums-theorie betrachtet werden (ONAT & LECKIE [167] und KRAJČINOVIC [102] betrachten Mikrodefekte in der Größenordnung von Körnern, BAZANT [7], NAJAR [158] und DIEHL [58] nehmen an, daß sich die um die Mikrodefekte liegende Materie schon als Kontinuum modellieren läßt). Die einzelnen Modelle unterscheiden sich nur in der Definition von  $\Delta V$  in (2.5) und den Schädigungsvariablen.

Verschmelzen Mikro- zu Makroschäden so ist zur weiteren Beschreibung der Übergang von kontinuumsmechanischen z.B. zu bruchmechanischen Methoden erforderlich; aus dem geschädigten Körperelement entsteht ein *Körper mit veränderter Geometrie* (z.B. KÖNKE [100]).

## 2.3 Materialtheoretischer Rahmen

### 2.3.1 Einführung

Die für die betrachteten Materialien (Beschränkung auf Metalle, klassische Kontinua) gültigen Gleichungen der Kontinuumsmechanik werden in diesem Kapitel in allgemeiner Form hergeleitet. Dies bietet Ansatzpunkte zur Erweiterung der betrachteten Modelle zur Lösung allgemeinerer Aufgabenstellungen.

Die Bewegung der Kontinuumspunkte wird neben mechanischen auch von thermischen, elektrischen, magnetischen u.a. Phänomenen begleitet. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur mechanische und thermische Effekte berücksichtigt. Weitere Effekte können, ohne den Anwendungsbereich der Theorie zu stark einzuschränken, häufig vernachlässigt werden (BECKER & BÜRGER [12]). Die Kontinuums-Schädigungstheorie wird daher heute allgemein im Rahmen thermomechanischer Analysen betrachtet (z.B. LEHMANN [118], [116]; ALLEN, HARRIS & GROVES [1], [2]).

Thermomechanische Prozesse sind Prozesse, in denen das Temperaturfeld, die Materialstruktur und das Spannungs- und Verzerrungsfeld eines Körpers gegenseitig in komplizierter Weise voneinander abhängig sind. Ein allgemeiner Rahmen für die Beschreibung thermomechanischer Prozesse wird z.B. durch LEHMANN [119] angegeben. Auch wenn grundlegende Zusammenhänge thermomechanischer Prozesse, insbesondere der Thermoelastizität, schon in einigen älteren Arbeiten beschrieben sind (eine umfassende Bibliographie ist bei NOWACKI [163] zu finden), ist die Thermomechanik ein relativ junges Wissenschaftsgebiet, da umfassende Untersuchungen erst in den letzten dreißig Jahren durchgeführt wurden. Der Grad der Berücksichtigung der einzelnen Wechselwirkungen zwischen den mechanischen und thermischen Feldgrößen und der Materialstruktur ist bei der Lösung verschiedener Aufgabenstellungen auf Grund differierender Zielvorstellungen unterschiedlich. Annahmen und Einschränkungen dienen u.a. auch zur Erleichterung der Lösung entstehender, vielfach gekoppelter nichtlinearer partieller Differentialgleichungssysteme. In Abhängigkeit vom Kompliziertheitsgrad des behandelten Problems variiert der Entwicklungsstand der entsprechenden Lösungsverfahren (ALLEN, HARRIS & GROVES [1]).

Zur Beschreibung thermomechanischer Prozesse eines Körpers wird dieser als ein allgemeines physikalisches System betrachtet, dessen Antwortverhalten auf äußere Belastungen wie folgt unterteilt werden kann (SCHATT [192]):

- a) reversibles Verhalten wird dadurch charakterisiert, daß ein System nach Beendigung der Krafteinwirkung ohne äußere Einwirkung wieder in seinen ursprünglichen Zustand (Form, innere Struktur, etc.) zurückkehrt;
- b) bei irreversiblen (allgemein auch inelastischen) Verhalten stellt sich der ursprüngliche Zustand nicht allein durch Entlastung wieder ein (z.B. Bruch als Trennung des Materials in zwei oder mehr Teile).

Schädigung ist dann bei Ausschluß einer *Heilung* eine irreversible Reaktion des Materials.

Die mathematischen Modelle dieser Prozesse bilden Systeme von Grundgleichungen, die durch Konzepte der Kontinuumsmechanik unter Einbeziehung der Thermodynamik begründet werden. Die Verwendung mikrostruktureller Vorgehensweisen ist im Rahmen der Kontinuums-Schädigungs-Theorie oftmals notwendig. Die resultierenden mathematischen Modelle bestehen allgemein aus Differentialgleichungssystemen mit zusätzlichen, aus Ungleichungen bestehenden, Einschränkungen (BRUNK [32]). Es wird angenommen, daß sich materialunabhängige und -abhängige Gleichungen aufstellen lassen (MÜLLER [148], [149]).

#### (i) Materialunabhängige Gleichungen

Materialunabhängige Gleichungen eines *universellen Kontinuums* gibt es nicht bzw. wären auch zu unhandlich (BECKER & BÜRGER [12]). Die Gleichungen besitzen innerhalb einer Materialklasse universellen Charakter (PALMOV [171]) und stecken den physikalischen Rahmen der Prozesse ab, d.h., sie definieren die Zulässigkeit der im Kontinuum thermodynamisch realisierbaren Prozesse. Jedes Material dieser Klasse unterliegt ihnen gleichermaßen (ALTENBACH & BLUMENAUER [4]).

Materialunabhängige Gleichungen lassen sich in kinematische bzw. geometrische Gleichungen (Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen) und Bilanzen (Masse-, Impuls-, Drehimpuls-, Energiebilanz, Entropiebilanz) aufteilen. Die allgemeinsten Einschränkungen der Theorie werden durch die Hauptsätze der Thermodynamik (siehe LEHMANN [118], ELSNER [60], COLEMAN & GURTIN [48], CHABOCHE [35], MUSCHIK [157] u.a.) gebildet.

Bilanzgleichungen sind global für einen Körper zu formulieren. Da man sich den Körper selbst auch beliebig aus dem Kontinuum herausgeschnitten denken kann, müssen die Bilanzen für beliebige Integrationsbereiche gelten. Lassen sich die Bilanzen in der Form

$$\int_{\mathcal{B}} f_1 \, dV = 0 \quad \text{oder} \quad \int_{\partial\mathcal{B}} f_2 \, d\mathbf{A} = \mathbf{0}$$

als homogene Bilanzen formulieren, ist es hinreichend, daß die Integranden  $f_1$  und  $f_2$  verschwinden, wenn man die Stetigkeit der Integranden voraussetzt. In diesem Fall ergibt sich eine gleichwertige differentielle bzw. lokale Form der Bilanz. Dieses Lemma wird für die weiteren Betrachtungen vorausgesetzt (BECKER & BÜRGER [12]).

Es wird postuliert, daß nicht nur der ganze Körper, sondern auch die einzelnen Körperelemente  $\Delta V$  als geschlossene Systeme behandelt werden können, auch dann, wenn der Körper als Ganzes nicht im thermodynamischen Gleichgewicht ist (LEHMANN [118]). Hieraus läßt sich unter anderem in bezug auf Massen-, Impuls- und Drehimpulsbilanz ableiten, daß die zeitliche Änderung der Masse eines Teilchens verschwinden muß (ein Teilchen kann bei seiner Bewegung sein Volumen aber nicht seine Masse ändern). Werden nur lokale thermodynamische Gleichgewichtszustände beschrieben, begrenzt dies die Theorie auf Prozesse, die nicht allzu weit entfernt vom Gleichgewicht verlaufen (LEHMANN [119]). Die Gradienten der Zustandsvariablen in Zeit und Raum sind dann klein, und eine Linearisierung ist möglich.

Die materialunabhängigen Gleichungen bilden ein stark unterbestimmtes Gleichungssystem.

#### (ii) Materialabhängige Gleichungen

Zur Bestimmung der fehlenden Gleichungen ist man auf die Erfahrungen angewiesen, daß mechanische und thermische Variablen von der Geschichte der konstitutiven Parameter im ganzen Körper funktional abhängen (MÜLLER [148]). Die Abhängigkeit folgt aber nicht unmittelbar aus den Hauptsätzen der Thermodynamik. Diese können hiervon getrennt aufgestellt werden. Auf die Einbindung der materialabhängigen Gleichungen in thermodynamische Betrachtungen wird daher meist verzichtet.

Der funktionale Zusammenhang zwischen grundlegenden mechanischen und thermischen Variablen und den konstitutiven Parametern wird durch die materialabhängigen Gleichungen bzw. Materialgleichungen wiedergegeben. Die Form dieser Funktionale ist für ein Material charakteristisch. Bei der konkreten Formulierung werden stets Näherungen verwendet, die entweder thermodynamische Prozesse vernachlässigen oder idealisieren (BETTEN [21]). Mit Hilfe der Materialtheorie lassen sich aber Bedingungen formulieren, die die Aufstellung der Materialgleichungen erleichtert (MÜLLER [148]).

Die dissipativen Effekte, die die Bewegung der Punkte des Kontinuums zusätzlich zur Wärmeleitung begleiten, lassen sich durch folgende Theorien beschreiben (MÜNCH [150]):

- a) klassische irreversible Thermodynamik, die die Prozesse im wesentlichen durch

Nichtgleichgewichtszustände und dynamische Relaxationsgesetze (kontrolliert durch Dissipationspotentiale) charakterisiert oder

- b) dissipative thermodynamische Prozesse, die als eine Abfolge von erzwungenen Gleichgewichtszuständen beschrieben und nicht durch Dissipationspotentiale kontrolliert werden.

Innerhalb der phänomenologischen Theorien des dynamischen Verhaltens der Kontinua existieren mehrere Beschreibungsmöglichkeiten. Welche der zahlreichen Ansätze für eine thermodynamische Theorie irreversibler Prozesse (z.B. MUSCHIK [157]) zu einer hinreichend physikalisch exakten und noch einfach handhabbaren phänomenologischen Theorie führt, kann wohl nur durch die Erfahrung beantwortet werden (LEHMANN [119]). Die älteste und einfachste Beschreibung erfolgt durch Einführung einer *viskosen Spannung*, die von der Verzerrungsgeschwindigkeit abhängig ist (z.B. Navier-Stokes-Theorie der linearen viskosen Flüssigkeiten - Newton'sches Gesetz). Eine andere Theorie beschreibt die Spannungen in Abhängigkeit der vollständigen Verzerrungsgeschichte.

Hier wird eine dritte Näherung verwendet, die die Abhängigkeit der freien Helmholtz-Energie und ihrer Änderungsgeschwindigkeit von internen Zustandsvariablen postuliert. Die Zustandsvariablen werden durch Differentialgleichungen beschrieben, in denen die Verzerrung und die Zeit erscheinen (COLEMAN & GURTIN [48]; ONAT [167]). Die Thermodynamik mit inneren Zustandsvariablen  $\alpha_k$  ( $k = 1, \dots, M$ ) hat sich besonders bei der Modellierung von elastisch-plastischem Materialverhalten bewährt (KRAJČINOVIC [102]) und entspricht einer formalen mathematischen Parametrisierung der Geschichte der konstitutiven Parameter, wobei  $M \rightarrow \infty$  gelten müsste (PAAS [169]). Der Zustand eines Körpers ist durch die Angabe der Zahlenwerte eines endlichen Satzes von Zustandsgrößen eindeutig festlegbar (*großer Zustandsraum*) und sei bekannt, wenn für jedes materielle Teilchen  $\mathbf{a}$  für das gesamte betrachtete Zeitintervall  $\rho$ ,  $\mathbf{X}$  und  $T$  bekannt sind (die Dichte kann auch mit Hilfe der Massenbilanz durch den Ortsvektor ausgedrückt werden) (PAAS [169]).

Die inneren Variablen  $\alpha_k$  lassen sich physikalisch interpretieren: z.B. charakterisieren die isotrope und kinematische Verfestigung aus der klassischen Plastizitätstheorie vor allem die Versetzungsstruktur eines Materials. Aus dieser Zuordnung gelingt eine Aufspaltung der inneren Variablen  $\alpha_k$  in Variable  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) zur Charakterisierung der Mikrodefekte, in Variable  $\kappa_j$  ( $j = m + 1, \dots, n$ ) zur Charakterisierung der Versetzungsstruktur und  $\beta_k$  ( $k = n + 1, \dots, M$ ) zur Charakterisierung verbleibender Strukturen. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden alle inneren Zustandsvara-

blen durch einen Zustandsvektor  $\underline{\alpha}$  beschrieben:

$$\underline{\alpha} = [\underline{\xi} \quad \underline{\kappa} \quad \underline{\beta}]^T. \quad (2.6)$$

Die Komponenten  $\xi_i$ ,  $\kappa_i$  und  $\beta_i$  von  $\underline{\xi}$ ,  $\underline{\kappa}$  und  $\underline{\beta}$  können wieder Tensoren beliebiger Stufe sein. Die Aufspaltung (2.6) wurde gewählt, um einzelne Prozesse voneinander getrennt zu beschreiben und sich auf die Prozesse (bzw. auf die  $\alpha_k$ ) zu beschränken, die als wesentlich erkannt wurden. Die klassischen Materialgesetze<sup>2</sup> beschreiben dann Prozesse mit  $\bar{\xi}_i = \bar{\beta}_k = 0$ , wobei  $\bar{\beta}_k = 0$  im folgenden erhalten bleibt.

## 2.3.2 Materialunabhängige Grundgleichungen

### 2.3.2.1 Der Deformationszustand – Grundlagen der Kinematik

Die Abbildung eines Körpers  $\mathcal{B}$  in einen dreidimensionalen Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  wird Konfiguration genannt, die durch Zuordnung von Zahlentripeln als Koordinaten zu jedem Raumpunkt beschrieben wird. Die Koordinatenbasen in der Ausgangskonfiguration und in der aktuellen Konfiguration werden durch  $\underline{\mathfrak{g}}$  und  $\underline{\mathfrak{g}}$  definiert. Bei Deformationsvorgängen dient eine spezielle Konfiguration  $\mathcal{B}^0$  als Referenz- bzw. Bezugskonfiguration und man erhält die Momentankonfiguration als eine Abbildung der Referenzkonfiguration. Zur Vereinfachung wird  $\mathcal{B}^0$  (unter Weglassung der Abbildung in den dreidimensionalen Euklidischen Raum) durch die Referenzkonfiguration festgelegt. Eine Konfiguration von  $\mathcal{B}$  ist somit eine stetige (hinreichend glatte) und bijektive Abbildung  $\Phi$  der materiellen Teilchen  $\underline{\mathfrak{a}}$  auf die Ortsvektoren  $\underline{\mathbf{X}}$  (WRIGGERS [221]);  $\Phi : \underline{\mathfrak{a}} \rightarrow \underline{\mathbf{X}}$ . Die Bewegung eines Kontinuums bildet dann eine stetige und bijektive zeitliche Folge von Konfigurationen.

Die Kinematik der materiellen Punkte sei auf reine Translationen beschränkt und durch Verschiebungen  $\underline{\mathbf{u}}$  vollständig beschrieben (klassisches Kontinuum; bei polaren Medien müssen zusätzlich noch Rotationen des Volumenelementes  $dV$  betrachtet werden). Die Verschiebungen aller Teilchen in  $\mathcal{B}$  beschreiben den Verschiebungszustand,

<sup>2</sup> Die konventionellen Gesetze wurden oftmals aufgestellt, ohne die Existenz von Schädigung zu berücksichtigen und müssen daher aktualisiert werden (z.B. müssen Verfestigungsfunktionen ermittelt werden, die unabhängig von Strukturänderungen durch Mikroporen sind (FELDMÜLLER [62])).

und die Bewegung läßt sich wie folgt wiedergeben:

$$\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{X}}(\underline{\mathbf{a}}, t) = \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{a}}, t) \quad . \quad (2.7)$$

Gilt für die JACOBISCHE Funktionaldeterminante

$$J = \det \frac{\partial \underline{\mathbf{X}}}{\partial \underline{\mathbf{a}}} > 0 \quad , \quad (2.8)$$

d.h. das Volumen nicht verschwinden kann, wird die eindeutige Inversion von (2.7) zu

$$\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \underline{\mathbf{X}} - \underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}, t) \quad . \quad (2.9)$$

Es wird der Nabla-Operator eingeführt, ein Differentialoperator mit Vektorcharakter, der die partielle Differentiation nach den Lagrangeschen (materiellen) bzw. Eulerschen (räumlichen) Koordinaten,  $\underline{\mathbf{a}}$  bzw.  $\underline{\mathbf{X}}$ , charakterisiert und entsprechend mit einem Index versehen ist. Es gelten folgende Definitionen:

$$\underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{a}}}(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial \underline{\mathbf{a}}} = \frac{\partial(\dots)}{\partial a^i} \underline{\mathbf{g}}^i \quad (2.10)$$

$$\underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{X}}}(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial \underline{\mathbf{X}}} = \frac{\partial(\dots)}{\partial X^i} \underline{\mathbf{g}}^i \quad . \quad (2.11)$$

Weiterhin gelten folgende Operatoren:

$$\begin{aligned} \text{grad}(\dots) &= \underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{X}}} \otimes (\dots) = \underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{X}}}(\dots) \quad , & \text{Grad}(\dots) &= \underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{a}}}(\dots) \quad , \\ \text{div}(\dots) &= \underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{X}}} \cdot (\dots) \quad , & \text{Div}(\dots) &= \underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{a}}} \cdot (\dots) \quad , \\ \text{rot}(\dots) &= \underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{X}}} \times (\dots) \quad , & \text{Rot}(\dots) &= \underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{a}}} \times (\dots) \quad . \end{aligned} \quad (2.12)$$

Den Deformationsgradienten  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  erhält man wie folgt aus dem Verschiebungsgradienten in materiellen oder räumlichen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{F}}} &= \text{Grad} \underline{\mathbf{X}} = \text{Grad} \underline{\mathbf{a}} + \text{Grad} \underline{\mathbf{u}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \text{Grad} \underline{\mathbf{u}} \\ &= F^i_j \underline{\mathbf{g}}_i \underline{\mathbf{g}}^j = \frac{\partial X^i}{\partial a^j} \underline{\mathbf{g}}_i \underline{\mathbf{g}}^j \quad , \\ \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} &= \text{grad} \underline{\mathbf{a}} = \text{grad} \underline{\mathbf{X}} - \text{grad} \underline{\mathbf{u}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} - \text{grad} \underline{\mathbf{u}} \\ &= (F^{-1})^i_j \underline{\mathbf{g}}_i \underline{\mathbf{g}}^j = \frac{\partial a^i}{\partial X^j} \underline{\mathbf{g}}_i \underline{\mathbf{g}}^j \quad . \end{aligned} \quad (2.13)$$

$\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  transformiert das Linienelement  $d\underline{\mathbf{a}}$  (mit  $|d\underline{\mathbf{a}}| = dS$ ), das zwei infinitesimal benachbarte materielle Punkte in der Referenzkonfiguration verbindet, in das Linienelement

$d\mathbf{X}$  (mit  $|d\mathbf{X}| = ds$ ), das die selben materiellen Punkte in der aktuellen Konfiguration verbindet:

$$d\mathbf{X} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot d\mathbf{a} \quad . \quad (2.14)$$

$\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  enthält eine Translation, eine Rotation und eine Streckung (Richtungs- und Betragsänderung) bzw. mit Hilfe des polaren Zerlegungstheorems eine resultierende Rotation  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$  und die Streckung  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$  bzw.  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  (BECKER & BÜRGER [12], GÜNTHER [72]);

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{V}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{R}}} = \underline{\underline{\mathbf{R}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{U}}} \quad . \quad (2.15)$$

$\underline{\underline{\mathbf{U}}}$  und  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  sind Verzerrungsmaße (-tensoren). Die Verwendung von  $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$  und  $\underline{\underline{\mathbf{V}}}$  ist nicht immer vorteilhaft. Es werden daher z.B. auch die folgenden Verzerrungs- bzw. Deformationstensoren verwendet (BECKER & BÜRGER [12]; WEGENER [219]; PRAGER [179]; WRIGGERS [221]):

$$\text{Links-Cauchy-Green-Tensor:} \quad \underline{\underline{\mathbf{h}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{V}}}^2 \quad (2.16)$$

$$\text{Rechts-Cauchy-Green-Tensor:} \quad \underline{\underline{\mathbf{g}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{U}}}^2 \quad (2.17)$$

$$\text{Green-Langrange-Verzerrungstensor:} \quad \underline{\underline{\mathbf{d}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{g}}} - \underline{\underline{\mathbf{1}}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} - \underline{\underline{\mathbf{1}}}) \quad (2.18)$$

$$\text{Almansi-Euler-Verzerrungstensor:} \quad \underline{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{1}}} - \underline{\underline{\mathbf{h}}}^{-1}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{1}}} - \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-T} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1}) \quad (2.19)$$

( $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$  ist orthonormal, d.h.  $\underline{\underline{\mathbf{R}}}^T = \underline{\underline{\mathbf{R}}}^{-1}$ ). Die Tensoren  $\underline{\underline{\mathbf{h}}}$  und  $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$  sind objektive Größen und  $\underline{\underline{\mathbf{g}}}$  und  $\underline{\underline{\mathbf{d}}}$  sind noch dazu invariant gegenüber einem Wechsel des Bezugssystems (WRIGGERS [221], MÜLLER [148]). Der Green-Langrange-Verzerrungstensor  $\underline{\underline{\mathbf{d}}}$  (bzw. der Rechts-Cauchy-Green-Tensor  $\underline{\underline{\mathbf{g}}}$ ) ist die zum 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_2$  (Gleichung (2.44)) konjugierte Größe. Zum Almansi-Euler-Verzerrungstensor  $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$  und Links-Cauchy-Green-Tensor  $\underline{\underline{\mathbf{h}}}$  läßt sich nicht problemlos ein konjugierter Spannungstensor angeben. An dieser Stelle wird der nach MacVEAN [136] zum gewichteten Cauchyschen Spannungstensor  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$  nach Gleichung (2.64) (auch Kirchhoff-Spannung BRUHNS [30]) konjugierte Hencky-Verzerrungstensor

$$\underline{\underline{\mathbf{\epsilon}}}_{(H)} \equiv \underline{\underline{\mathbf{\epsilon}}} = \ln \underline{\underline{\mathbf{V}}} = \frac{1}{2} \ln \underline{\underline{\mathbf{V}}}^2 \quad (2.20)$$

für die weiteren Betrachtungen verwendet. Weiterhin ist es notwendig, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines materiellen Punktes zu kennen, die durch materielle Zeitableitungen des Vektors  $\mathbf{X}$  ( $\mathbf{a}, t$ ) erhalten werden;

$$\underline{\underline{\mathbf{v}}} = \dot{\underline{\underline{\mathbf{X}}}} = \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{X}}}}{\partial t} \quad (2.21)$$

und für die Beschleunigung  $\underline{\mathbf{b}}$  bei  $\underline{\mathbf{v}}$  in materieller bzw. räumlicher Darstellung

$$\underline{\mathbf{b}}(\underline{\mathbf{a}}, t) = \dot{\underline{\mathbf{v}}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\mathbf{b}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = \dot{\underline{\mathbf{v}}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial t} + [\text{grad } \underline{\mathbf{v}}] \cdot \underline{\mathbf{v}} . \quad (2.22)$$

Da die materiellen Zeitableitungen räumlicher Größen den auf die Abbildung des Körpers  $\mathcal{B}$  bezogenen Richtungsableitungen dieser Größen entsprechen, können diese Ableitungen auch durch Liesche Ableitungen gewonnen werden (WRIGGERS [221]). Für die materiellen Zeitableitungen des Deformationsgradienten in materieller Darstellung erhält man (MacVEAN [136]; TRUESDELL [209]):

$$\dot{\underline{\underline{\mathbf{F}}}} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \underline{\mathbf{X}}}{\partial \underline{\mathbf{a}}} \right] = \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial \underline{\mathbf{a}}} = \frac{\partial \underline{\mathbf{v}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathbf{X}}}{\partial \underline{\mathbf{a}}} = [\text{grad } \underline{\mathbf{v}}] \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} \quad (2.23)$$

bzw. nach WRIGGERS [221]

$$(\dot{\underline{\underline{\mathbf{F}}}}^{-1}) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \underline{\mathbf{a}}}{\partial \underline{\mathbf{X}}} \right] = -\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{F}}}}{\partial t} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} = -\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} \cdot [\text{grad } \underline{\mathbf{v}}] . \quad (2.24)$$

Den Geschwindigkeitsgradienten Grad  $\underline{\mathbf{v}}$  in materiellen Koordinaten und grad  $\underline{\mathbf{v}}$  in räumlicher Betrachtungsweise erhält man über die Betrachtung der Längen- und Richtungsänderung eines materiellen Linienelementes  $d\underline{\mathbf{X}}$  zur Zeit  $t$  (BECKER & BÜRGER [12]):

$$\begin{aligned} [d\underline{\dot{\mathbf{X}}}] &= \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{a}} + d\underline{\mathbf{a}}, t) - \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{a}}, t) = (\text{Grad } \underline{\mathbf{v}}) \cdot d\underline{\mathbf{a}} \\ &= \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{X}} + d\underline{\mathbf{X}}, t) - \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{X}}, t) = (\text{grad } \underline{\mathbf{v}}) \cdot d\underline{\mathbf{X}} . \end{aligned} \quad (2.25)$$

Der räumliche Geschwindigkeitsgradient wird in den symmetrischen (Verzerrungs- bzw. Deformationsgeschwindigkeitstensor – eine objektive Größe, die bei reinen Starrkörperbewegungen verschwindet) und den antisymmetrischen Anteil (Wirbel-, Drehgeschwindigkeitstensor bzw. Spintensor PRAGER [179]) aufgeteilt und mit Hilfe von (2.23) wie folgt beschrieben:

$$\begin{aligned} \text{grad}(\underline{\mathbf{v}}) &= \dot{\underline{\underline{\mathbf{F}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{L}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}^S + \underline{\underline{\mathbf{L}}}^A \\ \underline{\underline{\mathbf{D}}} &= \underline{\underline{\mathbf{L}}}^S, \quad \underline{\underline{\mathbf{W}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}}^A . \end{aligned} \quad (2.26)$$

Die weiteren Ableitungen werden in Lagrangeschen Koordinaten dargestellt, es entfallen somit die konvektiven Anteile. Aus (2.17) erhält man eine Beziehung zwischen der Geschwindigkeit des Greenschen Verzerrungstensors und dem Deformationsgeschwindigkeitstensor:

$$\dot{\underline{\underline{\mathbf{g}}}} = 2\dot{\underline{\underline{\mathbf{d}}}} = 2 \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} \right] . \quad (2.27)$$

Für die Geschwindigkeit des Green-Lagrange- bzw. Almansi-Euler-Verzerrungstensors erhält man z.B.:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\mathbf{d}}} = \frac{1}{2} \left[ \text{Grad } \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\text{Grad } \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t})^T + (\text{Grad } \underline{\mathbf{u}}) \cdot (\text{Grad } \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t})^T + \right. \\ \left. + (\text{Grad } \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t}) \cdot (\text{Grad } \underline{\mathbf{u}})^T \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2} \left[ \text{grad } \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\text{grad } \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t})^T - (\text{grad } \underline{\mathbf{u}}) \cdot (\text{grad } \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t})^T - \right. \\ \left. - (\text{grad } \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t}) \cdot (\text{grad } \underline{\mathbf{u}})^T \right] . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Abschließend werden noch Transformationsbeziehungen für Linien-, Flächen- und Volumenelemente von der Referenz- in die Momentankonfiguration angegeben (WRIGGERS [221]):

$$\text{Linielement:} \quad d\mathbf{X} = \underline{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{a} \quad (2.30)$$

$$\text{Flächenelement:} \quad d\mathbf{A} = dA \underline{\mathbf{n}} = J(\underline{\mathbf{F}}^{-1})^T \cdot d\mathbf{A}^0 = \det(\underline{\mathbf{F}})(\underline{\mathbf{F}}^{-1})^T \cdot d\mathbf{A}^0 \quad (2.31)$$

$$\text{Volumenelement:} \quad dV = JdV_0 = \det(\underline{\mathbf{F}})dV_0 \quad (2.32)$$

Obwohl sich diese Arbeit der Definition von  $\underline{\mathbf{D}}$  im Rahmen einer Schädigungstheorie widmet, folgen noch einige Bemerkungen zur Aufspaltung des Deformationsgradienten  $\underline{\mathbf{F}}$ . GRABACKI [71] schlägt einen Produktansatz der Form  $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{F}}_s \cdot \underline{\mathbf{F}}_u$  vor ( $\underline{\mathbf{F}}_u$  - Deformationsgradient eines fiktiven ungeschädigten Körpers;  $\underline{\mathbf{F}}_s$  - schädigungsinduzierter Anteil). Zur Beschreibung großer Deformationen wird in der Kontinuumsmechanik überwiegend aber ein Produktansatz zur Aufspaltung des Deformationsgradienten  $\underline{\mathbf{F}}$  verwendet, der auf LEE & LIU [113] bzw. LEE [112] zurückgeht und sich nach WEGENER durch

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{F}}_e \cdot \underline{\mathbf{F}}_i \quad (2.33)$$

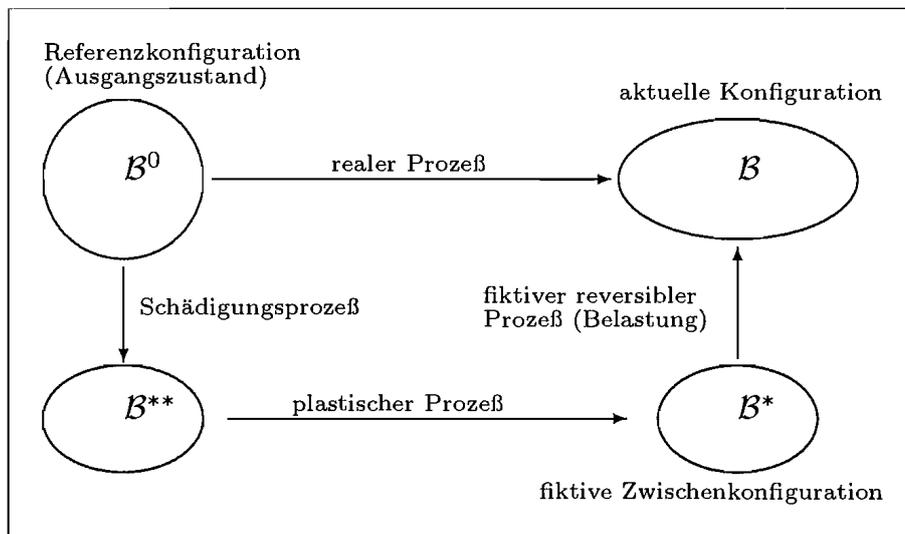
( $\underline{\mathbf{F}}_e$ ,  $\underline{\mathbf{F}}_i$  - elastischer, inelastischer Anteil) angeben läßt. DAVISON, STEVENS & KIPP [56] und hierauf aufbauend RABIER [181] schlagen zur Beschreibung der Kinematik unter Berücksichtigung duktiler Schädigungsmechanismen die folgende Aufspaltung des inelastischen Anteils  $\underline{\mathbf{F}}_i$  vor:

$$\underline{\mathbf{F}}_i = \underline{\mathbf{F}}_s \cdot \underline{\mathbf{F}}_p \quad (2.34)$$

( $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_p$  - plastischer Anteil). Die Reihenfolge der Anteile  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_s$  und  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_p$  in (2.34) erscheint nicht vorteilhaft. Hierfür können mehrere Argumente angeführt werden. Die Aufspaltung von  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  wird dadurch motiviert, daß verschiedene Klassen von mikroskopischen Verformungsprozessen vorliegen (WEGENER [219]).  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_p$  soll weiter mit der Veränderung der Versetzungsstruktur verknüpft werden.  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_s$  wird auf Mikroporenevolution zurückgeführt, die bei plastischen (viskose Verformungen sind inbegriffen) Verformungen auftreten.

Wird in der Reihenfolge der Aufspaltung von  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  ein Ursache-Wirkungs-Prinzip (siehe WEGENER [219]) verfolgt, müßten  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_s$  und  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_p$  ihre Plätze in (2.34) tauschen, da irreversible Verformungen in der Materialmatrix Voraussetzung für die Bildung einer irreversiblen Porosität sind. Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn die Reihenfolge der Aufspaltung von  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  von der Reversibilität der einzelnen Anteile abhängig ist. Subsummiert  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_p$  neben den spontan plastischen auch die viskosen Verformungen, wie durch WEGENER [219] vorgeschlagen, ist  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_p$  zumindest teilweise reversibel. Hingegen wird im allgemeinen das Verschwinden von Porenvolumen (*Heilung*) ausgeschlossen. Werden schädigungsinduzierte Deformationen betrachtet, wird die in Abbildung 1 dargestellte multiplikative Aufspaltung von  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}$  vorgeschlagen:

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{F}}}_e \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_p \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_s . \quad (2.35)$$



**Abbildung 1:** Konfigurationen des Körpers  $\mathcal{B}$

Jeder Anteil dieser Zerlegung ist wieder bis auf eine Starrkörperrotation eindeutig. Mit (2.26) und (2.35) folgt für den Geschwindigkeitsgradienten:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{L}}} &= \dot{\underline{\underline{\mathbf{F}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} + \underline{\underline{\mathbf{F}}}_e \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbf{F}}}}_p \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_p^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_e^{-1} + \underline{\underline{\mathbf{F}}}_e \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_p \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbf{F}}}}_s \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_s^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_p^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_e^{-1} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{W}}} . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Aus (2.36) wird der Vorteil der Aufspaltung (2.35) deutlich – eine Abhängigkeit des zweiten Summanden in (2.36) von schädigungsinduzierten Deformationen konnte vermieden werden. Wird im Anschluß an einen Schädigungsprozeß ein Prozeß mit konstanter Schädigung gefahren, entfällt der letzte Summand und das weitere Vorgehen kann wie in klassischen Theorien erfolgen. Eine Aufspaltung der Form (2.34) führt jedoch bei konstanter Schädigung zu folgendem Ausdruck:

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \underline{\underline{\dot{\mathbf{F}}}}_e \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_e^{-1} + \underline{\underline{\mathbf{F}}}_e \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_s \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{F}}}}_p \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_p^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_s^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}}_e^{-1} , \quad (2.37)$$

d.h.,  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$  ist auch weiterhin explizit von  $\underline{\underline{\mathbf{F}}}_s$  abhängig, obwohl nur elastisch-plastische Prozesse stattfinden.

### 2.3.2.2 Der Spannungszustand

#### (i) Kräfte am Kontinuum

Die an einem Volumenelement  $dV$  Deformationen verursachenden Kräfte (verallgemeinerte Kräfte sind Momente und *eigentliche Kräfte*) stellen mit der Beschränkung auf nichtpolare Medien *eigentliche Kräfte* dar. Sie werden allgemein nach ihrer geometrischen Verteilung in Volumenkräfte und Oberflächenkräfte unterteilt (BUDO [33]);

$$d\underline{\underline{\mathbf{F}}}^V = \underline{\underline{\mathbf{k}}} dV \quad (2.38)$$

$$d\underline{\underline{\mathbf{F}}}_{\underline{\underline{\mathbf{n}}}}^F = d\underline{\underline{\mathbf{F}}}_{-\underline{\underline{\mathbf{n}}}}^F = \underline{\underline{\mathbf{t}}} dA . \quad (2.39)$$

$\underline{\underline{\mathbf{t}}}$  ist allgemein eine Funktion von Ort, Zeit und der durch  $\underline{\underline{\mathbf{n}}}$  beschriebenen Lage der Schnittfläche. Werden nur Volumenkräfte, die zu  $\rho$  proportional sind berücksichtigt, kann  $\underline{\underline{\mathbf{k}}}$  wie folgt ersetzt werden:

$$d\underline{\underline{\mathbf{F}}}^V = \underline{\underline{\mathbf{f}}} \rho dV = \underline{\underline{\mathbf{f}}} dm . \quad (2.40)$$

#### (ii) Spannungszustand und Spannungstensoren

$\underline{\underline{\mathbf{t}}}$  ist eine lineare Abbildung auf  $\underline{\underline{\mathbf{n}}}$  (PRAGER [179]);

$$\underline{\underline{\mathbf{t}}}(\underline{\underline{\mathbf{X}}}, t) = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(\underline{\underline{\mathbf{X}}}, t) \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} . \quad (2.41)$$

Die lineare Transformation  $\underline{\underline{\sigma}}$  (Cauchyscher Spannungstensor) ist die Momentanspannung und beschreibt den Spannungszustand vollständig (STEIN & WRIGGERS [199]) ( $\underline{\mathbf{n}}$  siehe (2.31)). Wird  $\underline{\mathbf{t}}$  in der Momentankonfiguration auf die undeformierte Ausgangsfläche in der Referenzkonfiguration bezogen,

$$\underline{\mathbf{t}} \, dA = \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\underline{\mathbf{A}} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_1 \cdot d\underline{\mathbf{A}}_o \quad , \quad (2.42)$$

erhält man den allgemein unsymmetrischen 1.Piola - Kirchhoff - Spannungstensor  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_1$  mit Beziehung (2.31) oder den symmetrischen 2.Piola - Kirchhoff'schen Spannungstensor  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}_2$  wie folgt (STEIN & WRIGGERS [199]):

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_1 = J \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1})^T \quad (2.43)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}}_2 = \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}_1 = J \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1})^T \quad . \quad (2.44)$$

$\underline{\mathbf{t}}$  nach (2.41) in der Referenzkonfiguration erhält man aus (2.42) mit der Substitution

$$\underline{\mathbf{t}}^0 = \underline{\underline{\mathbf{P}}}_1 \cdot \underline{\mathbf{n}}^0 = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\mathbf{n}}^0 = [\nabla_{\underline{\mathbf{a}}}\mathbf{u} + \underline{\underline{\mathbf{1}}}] \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}_2 \cdot \underline{\mathbf{n}}^0 \quad . \quad (2.45)$$

Zur Beschreibung der Änderung des Zustandes in einem materiellen Punkt werden die Zeitableitungen der den Zustand beschreibenden Größen benötigt. Die materielle Ableitung liefert einen Beitrag aus der Rotation der Umgebung. Um diesen Einfluß auszuschließen, ist eine geeignete objektive Zeitableitung erforderlich. Hier wird die Jaumannsche Zeitableitung (MacVEAN [136])

$$\underline{\underline{\overset{\nabla}{\sigma}}} = \underline{\underline{\dot{\sigma}}} - \underline{\underline{\mathbf{W}}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{W}}} \quad , \quad (2.46)$$

verwendet, da sie den Vorteil folgender Eigenschaft besitzt ( $\Xi$  bzw.  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  - beliebiges Potential bzw. Tensor 2. Stufe):

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} \cdot \underline{\underline{\overset{\nabla}{\mathbf{A}}}} = \frac{\partial \Xi}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{A}}}} \quad . \quad (2.47)$$

Eine Erörterung weiterer Vor- und Nachteile dieser und anderer objektiver Zeitableitungen erfolgt z.B. durch WEGENER (siehe [219]).

### 2.3.2.3 Die Bilanzgleichungen

#### (i) Massenbilanz

Die Massenbilanz wird, vorausgesetzt ein Dichtefeld  $\rho(\underline{\mathbf{X}}, t)$  existiert und jeder Körper ist ein geschlossenes thermodynamisches System (keine Diffusion), über den Prozeßverlauf zu einem zeitunabhängigen Erhaltungssatz der Masse (Kontinuitätsgleichung). Sie lautet in globaler oder differentieller Form in Lagrangescher  $\rho(\underline{\mathbf{a}}, t)$  oder Eulerscher Darstellung  $\rho(\underline{\mathbf{X}}, t)$  unter Verwendung von  $\text{grad}(\rho) \cdot \underline{\mathbf{v}} + \rho \text{div}(\underline{\mathbf{v}}) = \text{div}(\rho \underline{\mathbf{v}})$  wie folgt (BECKER & BÜRGER [12]):

$$\dot{m} = \int_{\mathcal{B}} [\dot{\rho} + \rho \text{div}(\underline{\mathbf{v}})] dV = 0 \quad , \quad (2.48)$$

$$\frac{D\rho}{dt} + \rho \text{div}(\underline{\mathbf{v}}) = 0 \quad , \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{\mathbf{v}}) = 0 \quad . \quad (2.50)$$

#### (ii) Impulsbilanz

Unter Verwendung von (2.38) und (2.39) lautet die Impulsbilanz wie folgt (BUDO [33], PRAGER [179]):

$$\dot{\underline{\mathbf{I}}} = \frac{D}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \underline{\mathbf{v}} dV = \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{\mathbf{t}} dA + \int_{\mathcal{B}} \underline{\mathbf{k}} dV \quad . \quad (2.51)$$

$\dot{\underline{\mathbf{I}}}$  ist die resultierende Kraft, die sich aus der Summe der Oberflächen- und Volumenkräfte zusammensetzt. Wird ein Inertialsystem als Bezugssystem gewählt, entfallen in  $\underline{\mathbf{k}}$  die Trägheits- oder Scheinkräfte. Mit der Beschränkung auf Volumenkräfte infolge der Schwerebeschleunigung (u.a. keine elektrischen und magnetischen) wird (2.40) für die Volumenkräfte verwendet. Die Impulsbilanz lautet mit dem Reynoldsschen Transporttheorem (2.41) und dem Gaußschen Integralsatz wie folgt:

$$\int_{\mathcal{B}} \rho [\dot{\underline{\mathbf{v}}} - \underline{\mathbf{f}}] dV = \int_{\partial \mathcal{B}} \underline{\mathbf{t}} dA = \int_{\mathcal{B}} (\text{div} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) dV \quad . \quad (2.52)$$

Die differentielle Impulsbilanz lautet mit  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}(\underline{\mathbf{X}}, t)$ :

$$\rho \dot{\underline{\mathbf{v}}} = \rho \underline{\underline{\mathbf{f}}} + \text{div} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \quad (2.53)$$

bzw. in der Referenzkonfiguration (materieller Schreibweise) (BECKER & BÜRGER [12]):

$$\rho^0 \dot{\underline{\mathbf{v}}} = \rho^0 \underline{\mathbf{f}} + \text{Div} \underline{\underline{\mathbf{P}}}_1 \quad \text{bzw.} \quad \rho^0 \dot{\underline{\mathbf{v}}} = \rho^0 \underline{\mathbf{f}} + \text{Div}(\underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}_2) . \quad (2.54)$$

Die materielle Zeitableitung ergibt die inkrementelle Bewegungsgleichung:

$$\rho^0 \ddot{\underline{\mathbf{v}}} = \rho^0 \dot{\underline{\mathbf{f}}} + \text{Div} \left[ \dot{\underline{\underline{\mathbf{F}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}_2 \right] + \text{Div} \left[ \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\mathbf{P}}}}_2 \right] . \quad (2.55)$$

(iii) Drehimpulsbilanz

Mit der Beschränkung auf nichtpolare Materialien und der Vernachlässigung von Volumen- und Oberflächenmomenten reduziert sich das resultierende Moment auf das der Oberflächen- und Volumenkräfte aus (2.51). Die Drallbilanz führt unter Beachtung der Impulsbilanz (2.52) auf die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors [12]:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^T \quad \text{oder} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} . \quad (2.56)$$

(iv) Betrachtungen zur Thermodynamik (Energie- und Entropiebilanz)

Mit der Beschränkung auf thermomechanische Prozesse reduziert sich der Energieerhaltungssatz auf den ersten Hauptsatz der Thermodynamik (MÜNCH [150]). Die lokale bzw. differentielle Form des ersten Hauptsatzes lautet für ruhende Kontinua im thermodynamischen Gleichgewicht und unter Beachtung vorangegangener Ausführungen und Gleichungen (MÜLLER [149], COLEMAN & GURTIN [48]):

$$\dot{u} \left( \begin{array}{c} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \text{grad}(T), s, \underline{\underline{\boldsymbol{\alpha}}} \\ (r) \end{array} \right) = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}} + r - \frac{1}{\rho} \text{div}(\underline{\underline{\mathbf{q}}}) . \quad (2.57)$$

Für die innere Energie  $u$  wurde angenommen, daß sie eine eindeutige Funktion eines Satzes externer und interner thermodynamischer Zustandsvariablen sei. Mit der Aufspaltung des Geschwindigkeitsgradienten  $\underline{\underline{\mathbf{L}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{W}}}$  nach (2.26) und der Berücksichtigung von (2.56) reduziert sich das doppelt skalare Produkt in (2.57) auf die spezifische Formänderungsleistung  $\dot{w}$

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \frac{1}{\rho} \text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}) \quad (2.58)$$

bzw. mit dem gewichteten Cauchyschen Spannungstensor  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \frac{1}{\rho^0} \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{\mathbf{S}}} = \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = J \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} . \quad (2.59)$$

Die multiplikative Zerlegung (2.33) ist nicht eindeutig und noch von einer beliebigen Drehung  $\underline{\underline{Q}}$  abhängig. Diese Mehrdeutigkeit ist Ursache für die Schwierigkeiten, die bei der Bestimmung der reversiblen und irreversiblen Deformationsanteile  $\underline{\underline{D}}_{(r)}$  und  $\underline{\underline{D}}_{(i)}$ , die selbst wieder objektive Größen sind, entstehen. Diese Schwierigkeiten lassen sich mit Hilfe der Definition einer objektiven Zeitableitung  $\overset{\circ}{(\cdot)}$  mit

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\overset{\circ}{F}}} &= \underline{\underline{\dot{F}}} - \underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{F}} \\ \underline{\underline{\overset{\circ}{V}}} &= \underline{\underline{\dot{V}}} - \underline{\underline{w}} \cdot \underline{\underline{V}} + \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{w}} \\ \underline{\underline{w}} &= \underline{\underline{\dot{Q}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T\end{aligned}\quad (2.60)$$

und der Verwendung einer speziellen Zwischenkonfiguration vermeiden. In Anlehnung an das Konzept von LEE & LIU [113] bzw. LEE [112], in dem die reversible Deformation eine reine Streckung  $\underline{\underline{V}}_r$  ist, und an DAFALIAS [52] (siehe auch DIEHL [58]) werden die folgenden objektiven Größen definiert:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{D}}_{(i)} &= \left( \underline{\underline{V}}_r \cdot \underline{\underline{\overset{\circ}{F}}}_i \cdot \underline{\underline{F}}_i^{-1} \cdot \underline{\underline{V}}_r^{-1} \right)^S, & \underline{\underline{W}}_{(i)} &= \left( \underline{\underline{V}}_r \cdot \underline{\underline{\overset{\circ}{F}}}_i \cdot \underline{\underline{F}}_i^{-1} \cdot \underline{\underline{V}}_r^{-1} \right)^A \\ \underline{\underline{D}}_{(r)} &= \left( \underline{\underline{\overset{\circ}{V}}}_r \cdot \underline{\underline{V}}_r^{-1} \right)^S, & \underline{\underline{W}}_{(r)} &= \left( \underline{\underline{\overset{\circ}{V}}}_r \cdot \underline{\underline{V}}_r^{-1} \right)^A\end{aligned}\quad (2.61)$$

(ein Bezug zum Konzept der isoklinen Zwischenkonfiguration läßt sich durch eine spezielle Wahl von  $\underline{\underline{w}}$  herstellen). Unter Berücksichtigung von (2.26) folgt

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}, \quad \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_{(r)} + \underline{\underline{D}}_{(i)}, \quad \underline{\underline{W}} = \underline{\underline{w}} + \underline{\underline{W}}_{(r)} + \underline{\underline{W}}_{(i)}, \quad (2.62)$$

wobei für  $\underline{\underline{W}}_{(i)}$ , den inelastischen Spin, noch eine materialabhängige Gleichung zu formulieren ist. Wir vernachlässigen nun kleine reversible Rotationsgeschwindigkeiten;  $\underline{\underline{W}}_{(r)} \approx \underline{\underline{0}}$ . Für isotropes Material ist  $\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{w}}$  und  $\underline{\underline{W}}_{(i)} = \underline{\underline{0}}$ , was (2.60) wieder auf die Jaumann (Zaremba) - Ableitung (2.46) zurückführt, die die Eigenschaft (2.47) besitzt;

$$\overset{\circ}{(\cdot)} \approx \overset{\nabla}{(\cdot)}. \quad (2.63)$$

Die Anwendung von (2.63) auf Schädigungsprozesse mit orientierten Mikrodefekten ist mit einem Widerspruch verbunden. Wir nehmen aber an, daß der hieraus resultierende Fehler vernachlässigbar sei.

Wird angenommen, daß das Material im spannungsfreien Ausgangszustand isotrop sei, ist nach MacVEAN (Gleichung (8.26) in [136]) der zu  $\underline{\underline{S}}$  energetisch konjugierte

Verzerrungstensor der Hencky-Verzerrungstensor  $\underline{\underline{\epsilon}}$ .  $\dot{w}$  läßt sich nun in Termen eines Spannungs- und Verzerrungsmaßes ausdrücken und (2.59) wie folgt darstellen:

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho^0} \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} . \quad (2.64)$$

Mit Hilfe einer fiktiven Referenzkonfiguration gelang eine Aufspaltung der Formänderungsleistung und folglich auch von  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$  in einen reversiblen und irreversiblen Anteil (siehe Abbildung 1);

$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \equiv \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(r)} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(i)} \quad (2.65)$$

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho^0} \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(r)} + \frac{1}{\rho^0} \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(i)} = \dot{w}_{(r)} + \dot{w}_{(i)} . \quad (2.66)$$

Die spezifische innere Energie  $u$  wird in die zur Beschreibung von plastischen Prozessen im Spannungsraum geeignete spezifische freie Enthalpie  $\Psi$  überführt:

$$\Psi = \Psi(\underline{\underline{\mathbf{S}}}, T, \text{grad}(T), \underline{\underline{\alpha}}) = u - \frac{1}{\rho^0} \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_{(r)} - T s . \quad (2.67)$$

Die zeitliche Änderung von  $\Psi$  ergibt sich somit zu

$$\dot{\Psi} = \dot{u} - \frac{1}{\rho^0} \underline{\underline{\dot{\mathbf{S}}}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_{(r)} - \frac{1}{\rho^0} \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(r)} - \dot{T} s - T \dot{s} . \quad (2.68)$$

(2.57), (2.58), (2.66) und (2.68) liefern die folgende Beziehung:

$$\frac{1}{\rho^0} \underline{\underline{\dot{\mathbf{S}}}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}_{(r)} + \dot{T} s + T \dot{s} + \dot{\Psi} = \dot{w}_{(i)} + r - \frac{1}{\rho} \text{div}(\underline{\underline{\mathbf{q}}}) . \quad (2.69)$$

Mit dem vollständigen Differential

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbf{S}}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{S}}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial \text{grad}(T)} \cdot (\text{grad}(T))^\nabla + \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\alpha}}} \quad (2.70)$$

für die zeitliche Änderung von  $\Psi$  aus (2.67) ergibt sich (2.69) zu

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\rho^0} \underline{\underline{\epsilon}}_{(r)} + \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbf{S}}}} \right) \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{S}}}} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial T} + s \right) \dot{T} + T \dot{s} + \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\alpha}}} + \\ & + \frac{\partial \Psi}{\partial \text{grad}(T)} \cdot (\text{grad}(T))^\nabla = \dot{w}_{(i)} - \frac{1}{\rho} \text{div}(\underline{\underline{\mathbf{q}}}) + r . \end{aligned} \quad (2.71)$$

Die übliche Auswertung dieser Gleichung liefert die thermische, die kalorische, die GIBBS'sche Gleichung und eine Gleichung, welche die grad  $T$  - Abhängigkeit in (2.67) ausschließt:

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{(r)} = -\rho^0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbf{S}}}} , \quad (2.72)$$

$$s = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} , \quad (2.73)$$

$$T\dot{s} = \dot{w}_{(i)} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{q}}) + r - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{\alpha}} , \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \operatorname{grad}(T)} = 0 . \quad (2.75)$$

Die Gleichung (2.74) und die Zeitableitung von (2.73) liefern zusammen die Wärmeleitgleichung:

$$-T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} \dot{T} = \dot{w}_{(i)} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{q}}) + r - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{\alpha}} + T \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial \underline{\underline{\mathbf{S}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial \underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{\alpha}} \right\} . \quad (2.76)$$

~~Die Zusammenfassung der Erfahrungsgrundlagen über die Ablaufrichtung von Prozessen (ELSNER [60]) mündet in den zweiten Hauptsatz und wird als Prinzip der Irreversibilität bzw. Entropieprinzip bezeichnet. Die lokale Bilanzgleichung aus dem Entropieprinzip lautet (MÜLLER [148]):~~

$$\dot{s} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\underline{\gamma}) - \frac{1}{\rho} s' = \frac{1}{\rho} s'' . \quad (2.77)$$

~~$s'$  verschwindet, da *zufuhrfreie Körper* betrachtet werden. Die mathematische Formulierung des zweiten Hauptsatzes führt auf eine Ungleichung über das Entropieverhalten eines Systems, in der für alle thermodynamischen Prozesse gilt (MÜLLER [148]; FELDMÜLLER [62]; LEHMANN [118]):~~

$$\dot{s} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\underline{\gamma}) \geq 0 \quad (2.78)$$

~~( $\frac{-1}{\rho} \operatorname{div}(\underline{\gamma})$  bildet den reversiblen Anteil der Entropieänderung). Mit der GIBBSschen Gleichung (2.74) lautet (2.78) wie folgt:~~

$$\dot{w}_{(i)} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{q}}) + \frac{T}{\rho} \operatorname{div}(\underline{\gamma}) + r - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{\alpha}} \geq 0 . \quad (2.79)$$

Diese (GIBBS-DUHEM) Ungleichungen gelten unter den Voraussetzungen, daß

- (i) im Nichtgleichgewicht lokal und zu jedem Zeitpunkt die gleichen Zustandsgleichungen gelten wie im Gleichgewicht und
- (ii) sie auch bei Integration über endliche Zeiträume gelten, wenn der Anfangs- und Endzustand keine Gleichgewichtszustände sind (BECKER & BÜRGER [12]).

Zur Auswertung dieser Gleichungen existieren viele Theorien, die sich in der Definition der Größen  $\dot{w}_{(i)}$  und  $\frac{T}{\rho} \text{div}(\underline{\gamma})$  unterscheiden. Z.B. ist bei BECKER & BÜRGER [12], MÜLLER [149], PASSMAN & TRUCANO [173], TRUESDELL [209], WRIGGERS [221] der folgende Ansatz in der Momentankonfiguration zu finden:

$$-T \dot{s}_{(r)} = \frac{T}{\rho} \text{div}(\underline{\gamma}) = \frac{T}{\rho} \text{div}\left(\frac{\underline{\mathbf{q}}}{T}\right) - r = \frac{1}{\rho} \text{div}(\underline{\mathbf{q}}) - \frac{1}{T\rho} \underline{\mathbf{q}} \cdot \text{grad}(T) - r \quad (2.80)$$

Eine andere Definition ist in den Arbeiten von LEHMANN (z.B. [118]) zu entnehmen. Hier wird angenommen, daß sich die irreversible spezifische Formänderungsleistung  $\dot{w}$  in einen plastischen Anteil  $\dot{w}_{(p)}$  und einen Schädigungsanteil  $\dot{w}_{(s)}$  oder in einen Anteil  $\dot{w}_{(d)}$ , der sofort dissipiert und einen Anteil  $\dot{w}_{(h)}$ , der mit inneren Strukturänderungen verknüpft und teilweise reversibel ist, additiv aufspalten läßt:

$$\dot{w}_{(i)} = \dot{w}_{(p)} + \dot{w}_{(s)} = \dot{w}_{(d)} + \dot{w}_{(h)} \quad (2.81)$$

Mit der additiven Aufspaltung der Formänderungsleistung nach (2.81) gelingt zusätzlich zu Gleichung (2.65) eine Aufspaltung der irreversiblen Verzerrungsgeschwindigkeit (analog DAVISON, STEVENS & KIPP [56]; RABIER [181]; FELDMÜLLER [62]) in einen plastischen Anteil  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(p)}$  und einen schädigungsinduzierten Anteil  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(s)}$ :

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(i)} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(p)} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(s)} \quad (2.82)$$

Mit (2.82) werden die in Abbildung 1 dargestellten Zwischenkonfigurationen begründet. Werden nur plastische und Schädigungsprozesse in  $\underline{\alpha}$  betrachtet (siehe (2.6)), wird der reversible Anteil der Entropieänderung wie folgt postuliert:

$$T \dot{s}_{(r)} = -\frac{T}{\rho} \text{div}\left(\frac{\underline{\mathbf{q}}}{T}\right) + r + \dot{w}_{(h)} - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\xi} - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\kappa}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} \underline{\kappa} - T\dot{\eta} \quad (2.83)$$

Für den dissipativen Anteil folgt daher

$$T \dot{s}_{(d)} = \dot{w}_{(d)} - \frac{1}{\rho T} \underline{\mathbf{q}} \cdot \text{grad}(T) + T\dot{\eta} \geq 0 \quad (2.84)$$

$\dot{\eta}$  in (2.83) und (2.84) ist die bei inneren Prozessen auftretende Entropieproduktion (FELDMÜLLER [62]). Die Ausdrücke für  $\dot{w}_{(h)}$ ,  $\dot{w}_{(d)}$ ,  $\dot{\eta}$ ,  $\underline{\kappa}$  und  $\underline{\xi}$  müssen in den konstitutiven Gleichungen definiert werden. Werden Schädigungsprozesse als vollständig dissipativ betrachtet, können für  $\dot{w}_{(d)}$  und  $\dot{w}_{(h)}$  die folgenden konstitutiven Annahmen getroffen werden (FELDMÜLLER [62]; LEHMANN [117], [120]):

$$\dot{w}_{(h)} = (1 - \beta) \dot{w}_{(p)} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\xi}} \cdot \underline{\dot{\xi}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\kappa}} \cdot \underline{\dot{\kappa}} + T \dot{\eta} - r, \quad (2.85)$$

$$\dot{w}_{(d)} = \beta \dot{w}_{(p)} + \dot{w}_{(s)}, \quad (2.86)$$

wobei  $\beta(T)$  die Dissipationsfunktion ist, die den dissipierten Anteil der plastischen Formänderungsleistung angibt (FELDMÜLLER [62]).

### 3. Die Herleitung der materialabhängigen Gleichungen

#### 3.1 Vorbetrachtungen

Es werden homogene Körper betrachtet. Die Materialfunktionale beziehen sich dann auf eine der homogenen Konfigurationen, und die Materialgleichungen besitzen für alle Teilchen die gleiche Form (MÜLLER [148]). Zusätzlich beschränken wir uns auf *einfache Körper* (lokale bzw. quasilokale Materialgleichungen), so daß die lokalen mechanischen und thermischen Variablen (Spannungstensor, irreversible Verzerrungsgeschwindigkeiten, Wärmestromvektor, spezifische Enthalpie) nur von der Geschichte des Teilchens selbst und dessen unmittelbarer (infinitesimalen) Umgebung abhängig sind. Dies kennzeichnet das Prinzip der lokalen Wirkung (MÜLLER [148]). Die konstitutiven Parameter bilden dann die Lage der Elemente  $\underline{\mathbf{X}}$ , die Zeit  $t$ , die absolute Temperatur  $T$ , und für den Umgebungseinfluß stehen der Temperaturgradient  $\text{grad}(T)$  und der Deformationsgradient  $\underline{\mathbf{F}}$ . Gradienten höherer Ordnung seien vernachlässigbar.

Unter diesen Voraussetzungen werden die Materialgleichungen nach dem Prinzip der Äquipräsenz so angesetzt, daß sie durch den vollständigen Zustand des thermodynamischen Systems  $\{\underline{\mathbf{F}}, T, \text{grad}(T), \underline{\boldsymbol{\kappa}}, \underline{\boldsymbol{\xi}}\}$  beschrieben werden (LEHMANN [119]). Eine explizite Ortsabhängigkeit der Funktionale von  $\underline{\mathbf{a}}$  würde man für inhomogene Materialien erhalten (COLEMAN & GURTIN [48]). Mit dem Prinzip der materiellen Objektivität (die Materialgleichungen sind systemunabhängig) folgt, daß die räumliche Lage  $\underline{\mathbf{X}}$  kein konstitutiver Parameter sein kann (PAAS [169]). Materialgleichungen werden in Konstitutiv- und Evolutionsgleichungen unterteilt (H.ALTENBACH, J.ALTEBACH & SCHIEBE [3]). Konstitutivgleichungen beschreiben den zeitlichen Zusammenhang zwischen den grundlegenden mechanischen und thermischen Variablen  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \Psi, s, \underline{\mathbf{D}}, \underline{\mathbf{q}}$  und den konstitutiven Parametern. Die Evolutionsgleichungen beschreiben die Änderung der inneren Zustandsvariablen  $(\overset{\nabla}{\boldsymbol{\kappa}}, \overset{\nabla}{\boldsymbol{\xi}})$ . Beide sind mit Nebenbedingungen verbunden.

Zur Bestimmung der Verzerrungs-, Spannungs- und Temperaturfelder genügen Konstitutivgleichungen für  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,  $\underline{\underline{D}}_{(r)}$ ,  $\underline{\underline{D}}_{(i)}$  und  $\underline{\underline{q}}$  (die aktuellen Werte für  $\Psi$  und  $s$  sind hierfür nicht notwendig).

Wir beschränken uns auf eine Materialklasse, in denen der Zustand eines Materialpunktes  $\underline{\underline{a}}$  durch die aktuellen Werte von  $\underline{\underline{F}}$ , dessen materielle Zeitableitung  $\underline{\underline{\dot{F}}}$ ,  $T$ ,  $\text{grad}(T)$  und  $\underline{\underline{\alpha}}$  vollständig beschrieben ist (Die Materialgleichungen sind unabhängig von Geschwindigkeit und Beschleunigung der materiellen Punkte, da diese als Ableitungen der räumlichen Lage keine objektiven Größen sind (PAAS [169]).) Die Materialfunktionale können durch die folgenden Funktionen ersetzt werden:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{a}}, t) &= \underline{\underline{\sigma}} \left[ \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\dot{F}}}, T, \text{grad}(T), \underline{\underline{\kappa}}, \underline{\underline{\xi}} \right] \\
 \underline{\underline{D}}_{(r)}(\underline{\underline{a}}, t) &= \underline{\underline{D}}_{(r)} \left[ \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\dot{F}}}, T, \text{grad}(T), \underline{\underline{\kappa}}, \underline{\underline{\xi}} \right] \\
 \underline{\underline{D}}_{(i)}(\underline{\underline{a}}, t) &= \underline{\underline{D}}_{(i)} \left[ \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\dot{F}}}, T, \text{grad}(T), \underline{\underline{\kappa}}, \underline{\underline{\xi}} \right] \\
 \underline{\underline{q}}(\underline{\underline{a}}, t) &= \underline{\underline{q}} \left[ \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\dot{F}}}, T, \text{grad}(T), \underline{\underline{\kappa}}, \underline{\underline{\xi}} \right] \\
 \underline{\underline{\kappa}}(\underline{\underline{a}}, t) &= \underline{\underline{\kappa}} \left[ \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\dot{F}}}, T, \text{grad}(T), \underline{\underline{\kappa}}, \underline{\underline{\xi}} \right] \\
 \underline{\underline{\xi}}(\underline{\underline{a}}, t) &= \underline{\underline{\xi}} \left[ \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\dot{F}}}, T, \text{grad}(T), \underline{\underline{\kappa}}, \underline{\underline{\xi}} \right] .
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Evolutionsgleichungen sind gewöhnlich Differentialgleichungen erster Ordnung. In Abhängigkeit von den betrachteten Belastungen (proportional, nichtproportional, etc.) und dem Materialgrundverhalten sind Ansätze wie

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\xi}}_i &= f_k \quad \text{bei Kriechen (z.B. [92], [154]), Elasto-Plastizität} \\
 &\quad \text{(z.B. [39], [181]), oder } \textit{spall damage} \text{ (z.B. [56]),}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$D\underline{\underline{\xi}}_i = f_k DN \quad \text{bei Ermüdung (} N \text{ – Lastspielzahl; z.B. [35], [127])} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
 D\underline{\underline{\xi}}_i = f_k D\underline{\underline{\epsilon}} \quad \text{bei sprödem Verhalten (z.B. [105]) oder Elasto-} \\
 \text{Plastizität (z.B. [62]) und}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$D\underline{\underline{\xi}}_i = f_k D\underline{\underline{\sigma}} \quad \text{bei Elasto-Plastizität (z.B. [187], [210], [211])} . \tag{3.5}$$

für die Schädigungsevolution typisch (CHABOCHE [35]; LEHMANN [119]; PATINO [174]) – teilweise werden auch kombinierte Ansätze (z.B. CHABOCHE [39], CURRAN,

SEAMAN, HOLMES & GIOVANOLA [51]) verwendet. Die beiden letzten Ansätze sind vor allem bei nichtproportionaler oder zyklischer Belastung vorteilhaft (RABIER [181]). Eine Bewertung einzelner Ansätze der Schädigungsevolution kann durch die oft unklare Definition der Schädigung und die meist empirische Sicht nicht erfolgen. Entsprechend variiert auch der Variablensatz der Funktionen  $f_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) (gleiche Standpunkte bestehen nur in der impliziten Temperaturabhängigkeit). Es ist unklar, ob der Schädigungsprozeß spannungs-  $f_k(\underline{\sigma}, \underline{\xi})$  oder verzerrungsgesteuert  $f_k(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\xi})$  ist und ob er geschwindigkeitsabhängig sein sollte. TVERGAARD [210], [211] und XU & NEEDLEMAN [225] verwenden einen Ansatz

$$\dot{\xi}_i = f_1(\underline{\sigma}, \underline{\xi}) \underline{\dot{\sigma}} + f_2(\underline{\mathbf{E}}, \underline{\xi}) \underline{\mathbf{D}} ,$$

bestehend aus einem spannungs- und einem verzerrungsgesteuerten Anteil, die jeweils geschwindigkeitsabhängig sind. Werden neben den Schädigungsvariablen weitere innere Variable (Verfestigungsvariable  $\underline{\kappa}$ ) betrachtet, bestehen zu ihrem Einfluß ebenfalls unterschiedliche Standpunkte. Einerseits wird dieser vernachlässigt (z.B. in (3.2), oder (3.5)) andererseits tritt er zumindest implizit auf (siehe (3.4)).

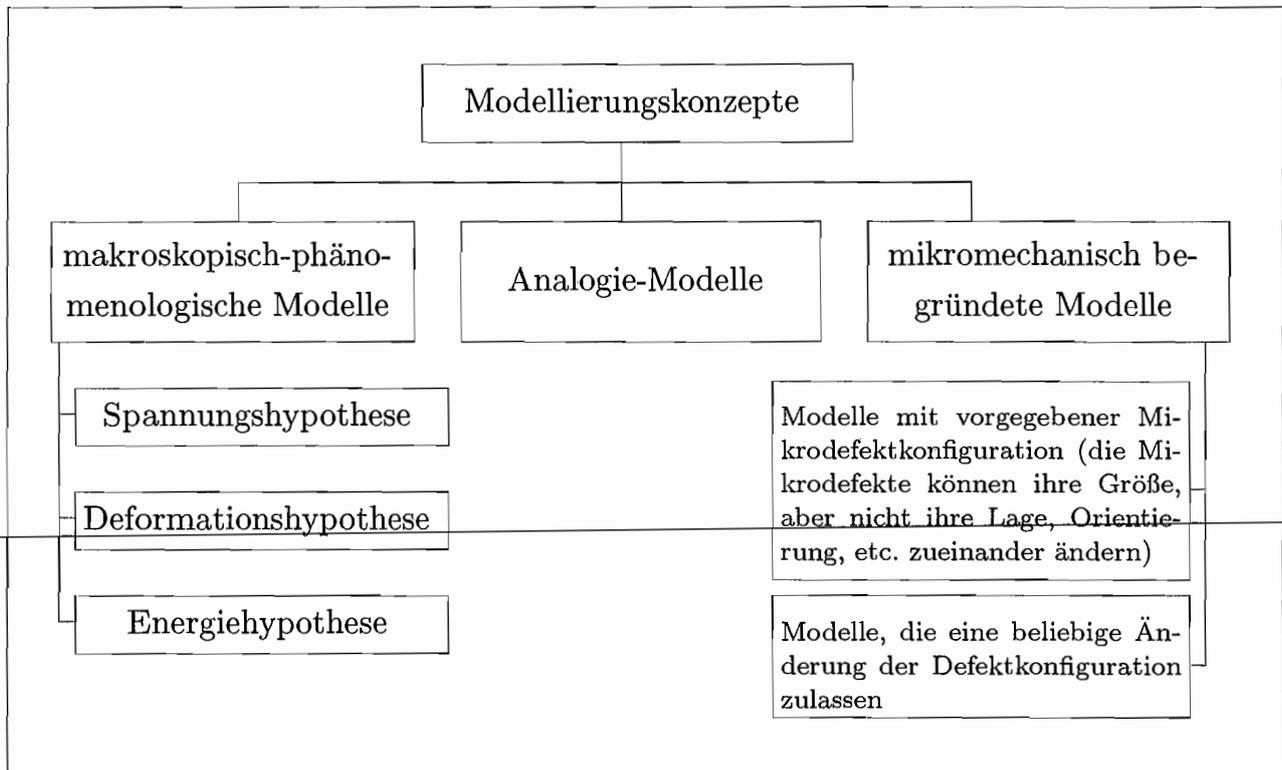
Der Beschreibung der Schädigungsevolution muß weit mehr Aufmerksamkeit als bisher gewidmet werden. Ein signifikanter Fortschritt kann aber nur dann erzielt werden, wenn es gelingt, sich von einer formalen phänomenologischen Beschreibung durch *ad hoc* eingeführte Schädigungseffektmaße zu lösen, Schädigung nicht länger als Konglomerat einer Anzahl dissipativer Prozesse betrachtet und den Evolutionsgleichungen einzelne Mikroprozesse zuordnet. Dies erfordert eine stärkere Einbeziehung der Werkstoffkunde. Aber gerade hier wurde bisher wenig getan.

## 3.2 Modellierungskonzepte der Schädigungsmechanik

Die Herleitung materialabhängiger Gleichungen beinhaltet sowohl die Definition geeigneter Schädigungs- und Schädigungseffektvariablen als auch die Aufstellung konstitutiver und Evolutionsgleichungen. Zur Herleitung der materialabhängigen Gleichungen phänomenologischer Theorien sind mehrere Ausgangspunkte zulässig, wenn sie nicht gegen die Forderungen im Abschnitt 2.2 verstoßen. Hierbei werden in der betrachteten Literatur verschiedene Verfahren verwendet, die mit speziellen Postulaten verknüpft sind. Jedes dieser Verfahren beschränkt natürlich die so entwickelte Theorie in der Anzahl der beschreibbaren Erscheinungen und in ihrem Gültigkeitsbereich.

In den folgenden Kapiteln sollen die einzelnen Verfahren bzw. Konzepte beschrieben und ihre Vor- und Nachteile diskutiert werden.

Im allgemeinen wird zwischen zwei prinzipiellen Vorgehensweisen unterschieden (CHABOCHE [40], ROUSSELIER [187]): die mikromechanisch begründeten und die phänomenologischen Modelle. An dieser Stelle soll noch ein drittes Konzept, das als Analogie-Konzept bezeichnet wird, neben den zwei vorhergehenden angeführt werden.



**Abbildung 2:** Modellierungskonzepte der Schädigungsmechanik

Die verschiedenen Bezeichnungen stehen nicht im Widerspruch, da jedes dieser Konzepte wieder auf eine phänomenologische Theorie führt. Die von Natur aus diskreten Mikrodefekte eines repräsentativen Volumenelementes  $\Delta V$  werden durch homogene Felder und kontinuierliche Feldgrößen beschrieben. Die Konzepte unterscheiden sich, ob bei der Herleitung der makroskopischen Materialgesetze eine mehr phänomenologische oder mikromechanische Betrachtungsweise verfolgt wurde. Im ersten Fall ist der Ausgangspunkt das Makroverhalten, und im zweiten Fall wird eine Struktur-Eigenschafts-Beziehung aufgestellt.

### 3.3 Schädigungsmaße und Schädigungseffektmaße

Ein geschädigter Körper enthält diskret verteilte geometrische Defekte. Deren Anzahl, Größe, Orientierung, etc. ist über den Belastungsprozeß Änderungen unterworfen. Zur Beschreibung der Mikrodefekte und der aus ihnen resultierenden Änderungen des Makroverhaltens müssen entsprechend zugeordnete Variable bereitgestellt werden (ILANKAMBAN & KRAJCIKOVIC [84] bzw. KRAJCIKOVIC [102]).

Auf der einen Seite stehen die inneren Zustandsvariablen (Schädigungsmaße) zur Beschreibung der Mikrodefektkonfiguration bzw. des Schädigungszustandes (Anzahl, Größe, Anordnung, Orientierung etc. der in geschädigten Körpern enthaltenen verteilten diskreten Mikrodefekte) und dessen Änderung. Diese orientieren sich an folgenden Forderungen:

- (i) sie werden an einem Elementarvolumen  $\Delta V^*$  einer spannungsfreien Konfiguration  $\mathcal{B}^*$  (RABIER [181]) definiert,
- (ii) sie sind integrale und gemittelte Größen eines Mikrofeldes und auch an  $\Delta V^*$  makroskopische Variable und beschreiben keine Elementardefekte und
- (iii) ein bestimmter Satz der inneren Variablen definiert einen makroskopischen Zustand eindeutig (ILANKAMBAN & KRAJCIKOVIC [84]).

Zur Beschreibung der als wesentlich erkannten Phänomene beschränken wir uns auf einige wenige aber wesentliche Schädigungsmaße zur Charakterisierung der Mikrodefektkonfiguration. (Für das in Kapitel 8 entwickelte Modell wird sich auf folgende Phänomene beschränkt: Änderung von Steifigkeit, Festigkeit und Materialsymmetrien und irreversible Verzerrungen.) Die erforderlichen Mikrofelder sollten hierbei den folgenden Forderungen genügen (DIEHL [58]):

- (i) sie enthalten Informationen über die Defektgröße, -dichte und zur Berücksichtigung der nach einem Schädigungsprozeß auftretenden Änderung der Materialsymmetrien die Defektorientierung (ONAT & LECKIE [167]),
- (ii) die Beschreibung der Orientierung ist invariant unter  $\underline{n} \rightarrow -\underline{n}$  und unabhängig vom gewählten Koordinatensystem (SEIBERT [195]),
- (iii) zur Beschreibung von Versagens- und Bruchprozessen wäre es notwendig, die Projektion der Mikrodefektflächen von Mikrodefekten, die eine in  $\Delta V^*$  enthaltene Ebene  $\Delta \underline{A}^*$  schneiden, auf diese Ebene  $\Delta \underline{A}^*$  abschätzen zu können (siehe DIEHL [58]).

Alle Größen in  $\Delta V$  ändern sich durch den elastischen Deformationsanteil.  $\Delta V$  muß daher vor der Schädigungsmessung von der Momentankonfiguration  $\mathcal{B}$  in eine

spannungsfreie Konfiguration  $\mathcal{B}^*$  transformiert werden. Auf dem Maßstab eines Körpers stellt die Transformation  $\Delta V \rightarrow \Delta V^*$  einen fiktiven reversiblen Prozeß dar (vgl. Abbildung 1). Die so entstehende Konfiguration  $\mathcal{B}^*$  ist spannungsfrei, genügt aber im allgemeinen nicht den Kompatibilitätsbedingungen.

Auf dem Maßstab von  $\Delta V$  kann  $\Delta V \rightarrow \Delta V^*$  durch Separierung von  $\Delta V$  vom restlichen Körper und der Befreiung von äußeren Lasten erfolgen. Im Gegensatz zum gesamten Körper bei plastischen Effekten wird postuliert, daß Materialpunkte keine Eigenspannungen enthalten (nur Eigenspannungen I. Art MACHERAUCH [135]), was die Annahme, daß in Abwesenheit äußerer Kräfte innere Spannungen verschwinden, begründet.  $\Delta V^*$  ist dann die spannungsfreie Konfiguration von  $\Delta V$ , wobei angenommen wird, daß  $\Delta V \rightarrow \Delta V^*$  mit invariantem  $\underline{\mathbf{X}}$  verbunden ist (der Index  $(\dots)^*$  bezieht sich im folgenden auf  $\mathcal{B}^*$  entsprechend Abbildung 1).

Für thermomechanische Untersuchungen müssen andererseits Variablen zur Identifikation lokaler Spannungs- (bzw. Verzerrungs-) und Temperaturerhöhung bereitgestellt werden. Diese *Schädigungseffektmaße* beschreiben die Makrophänomene des Schädigungszustandes in Abhängigkeit aller Schädigungsmaße, Belastung und Material-Grundverhalten in den Konstitutivgleichungen im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$  (ILANKAMBAN und KRAJCIKOVIC [84], [102]). Die Belastung bestimmt z.B.

- (i) den Anteil der passiven Mikroddefekte - z.B. auf Druck beanspruchte Risse (Rißschließen) und
- (ii) die Änderungsgeschwindigkeit des Schädigungszustandes, die das Verhalten des geschädigten Materials ebenfalls bestimmt (DIEHL [57]).

Definitionen von Funktionen zwischen Schädigungsmaßen und -effektmaßen sind bis heute wegen ihres komplexen Charakters im wesentlichen auf die Bestimmung der elastischen Steifigkeit linear elastischer Materialien mit teilweiser Berücksichtigung des Rißschließens bei Druckbeanspruchung und der isotropen schädigungsinduzierten Deformation beschränkt. Ein erster Vorschlag ist der Arbeit von DAVISON, STEVENS & KIPP [56] zu entnehmen. Zur Beschreibung der Kinematik wurde der Deformationsgradient  $\underline{\mathbf{F}}$  in einen elastischen Anteil  $\underline{\mathbf{F}}_e$ , einen schädigungsinduzierten Anteil  $\underline{\mathbf{F}}_s$  und in einen viskoplastischen Anteil  $\underline{\mathbf{F}}_p$  entsprechend (2.33) und (2.34) multiplikativ aufgespalten.  $\underline{\mathbf{F}}_s$  kann im isotropen Fall durch

$$\underline{\mathbf{F}}_s = \sqrt[3]{\frac{1}{1-\omega}} \underline{\mathbf{1}} \quad (3.6)$$

in Abhängigkeit vom Schädigungsmaß  $\omega$  (Porenvolumenanteil) formuliert werden. Zur Beschreibung der resultierenden elastischen Eigenschaften wurde das durch Po-

ren geschädigte Material als Komposit aus Matrixmaterial und Poren, wobei letztere eine verschwindende Steifigkeit besitzen, betrachtet. Die resultierenden Laméschen Parameter ergeben sich wie folgt ( $K_0$ ,  $G_0$  und  $\nu_0$  – elastische Parameter des ungeschädigten Materials):

$$K = K_0 \left( 1 - \frac{3(1 - \nu_0)}{2(1 - 2\nu_0)} \omega \right) \quad \text{und} \quad G = G_0 \left( 1 - \frac{15(1 - \nu_0)}{7 - 5\nu_0} \omega \right) \quad (3.7)$$

$$\nu_0 = \frac{3K_0 - 2G_0}{2(3K_0 + G_0)} .$$

Schädigungseffektmaße in diesem Beispiel sind der Tensor  $\underline{\underline{F}}_s$ , der die schädigungsinduzierten Deformationen beschreibt, und die Funktionen  $K$  und  $G$  in (3.7). Die Beziehungen in (3.7) wurden von RABIER [181] aufgegriffen, mit

$$K = K_0 \left( 1 - \frac{3(1 - \nu)}{2(1 - 2\nu)} \omega \right) \quad \text{und} \quad G = G_0 \left( 1 - \frac{15(1 - \nu)}{7 - 5\nu} \omega \right)$$

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} .$$

modifiziert und durch einige theoretische Betrachtungen ergänzt.

FONSEKA & KRAJČINOVIC entwickelten in [105] und [106] eine Beziehung für spröde Materialien mit anisotroper Schädigung durch Mikrorisse (siehe auch ILANKAMBAN & KRAJČINOVIC [84]; KRAJČINOVIC [103]). Ausgehend vom inkrementellen Spannungs-Verzerrungs-Gesetz

$$d\sigma_{ij} = E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} + \bar{E}_{ijm} d\omega_m \approx E_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (3.8)$$

wird der Steifigkeitstensor  $E_{ijkl}$  in Abhängigkeit von vektoriellen Schädigungsmaßen  $\underline{\omega}^\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, m$ ) beschrieben:

$$E_{ijkl} = \frac{G(E - 2G)}{3G - E} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m \frac{1}{\sqrt{\omega_i^\alpha \omega_i^\beta}} \quad (3.9)$$

$$\left[ C_1(\delta_{ij} \omega_k^\alpha \omega_l^\beta + \delta_{kl} \omega_i^\alpha \omega_j^\beta) + C_2(\delta_{jk} \omega_i^\alpha \omega_l^\beta + \delta_{il} \omega_j^\alpha \omega_k^\beta) \right]$$

( $C_1$  und  $C_2$  - temperaturabhängige Materialkoeffizienten). Die Vektoren  $\underline{\omega}^\alpha$  beschreiben Rißsysteme mit nahezu gleicher Orientierung. Bemerkungen zur Verwendung vektorieller Zustandsvariablen sind im Kapitel 4 zu finden. Neben dieser Problematik bleibt auch die genaue physikalische Bedeutung dieser Größen offen (RABIER [181]). Mit der Bezugnahme auf eine *geeignete* Mittelungsprozedur durch KRAJČINOVIC [103] wird dieses Problem umgangen.

Die Berücksichtigung des Reißschließens wird durch folgende Nebenbedingung realisiert: ein Rißsystem  $\alpha$ , beschrieben durch den Vektor  $\underline{\omega}^\alpha$ , ist dann aktiv, wenn

$$\omega_i^\alpha = \begin{cases} \omega_i^\alpha & \text{wenn } \omega_k^\alpha \varepsilon_{kl} \omega_l^\alpha > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.10)$$

gilt. Die Beziehung zwischen den Schädigungsmaßen  $\underline{\omega}^\alpha$  und den Schädigungseffektmaßen werden durch den dritten Summanden in (3.9) und der Nebenbedingung (3.10) wiedergegeben. Eine weitere Schwäche dieses Modells bilden Spannungssprünge, die bei stetigem Verzerrungsverhalten auftreten können (CHABOCHE [41]).

Für Beziehungen der Art (3.9) können weitere Beispiele in der Literatur gefunden werden. Z.B. beschreiben BETTEN [20] die Verzerrungsrate bei Kriechen oder SADOWSKI [189] den Steifigkeitstensor geschädigter Materialien als isotrope Tensorfunktion in Abhängigkeit von einem Schädigungstensor  $\underline{\omega}$ . Auch hier bleibt, wie an späterer Stelle gezeigt wird, die physikalische Bedeutung der Schädigungsgröße im Unklaren. Die Untersuchungen von ONAT [165] an Materialien mit Mikrorissen werden als Fortschritt betrachtet. Mit dem Nachteil der fehlenden Differenzierung zwischen aktiven und passiven Defekten, wird als Beziehung zwischen der Mikrostruktur und der elastischen Nachgiebigkeit die Gleichung (4) in Anhang 4 erhalten.

Neben den oben angeführten Arbeiten wurden weitere Modelle entwickelt, die zwischen einer Zug- und Druckschädigung differenzieren. In diesen Modellen werden keine Schädigungsmaße definiert und nur die Belastungsabhängigkeit der Schädigungseffektmaße betrachtet. Dennoch sollen einige dieser Theorien angeführt werden, da sie zumindest Anhaltspunkte für die Abhängigkeit der Beziehungen zwischen den Schädigungsmaßen und -effektmaßen von der Belastung analog der Nebenbedingung (3.10) liefern. LADEVEZE & LEMAITRE [109], MAZARS [140] oder MURAKAMI [152] spalten den Spannungstensor im Hauptachsensystem wie folgt in einen positiven und negativen Anteil auf:

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_+ + \underline{\sigma}_- \quad \text{mit} \quad \underline{\sigma}_+ = \begin{bmatrix} \langle \sigma_I \rangle_{MC} & 0 & 0 \\ 0 & \langle \sigma_{II} \rangle_{MC} & 0 \\ 0 & 0 & \langle \sigma_{III} \rangle_{MC} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\underline{\sigma}_- = - \begin{bmatrix} \langle -\sigma_I \rangle_{MC} & 0 & 0 \\ 0 & \langle -\sigma_{II} \rangle_{MC} & 0 \\ 0 & 0 & \langle -\sigma_{III} \rangle_{MC} \end{bmatrix} .$$

Weiterhin gilt:  $\text{Sp}(\underline{\sigma})_+ = \langle \text{Sp}(\underline{\sigma}) \rangle_{MC}$  ;  $\text{Sp}(\underline{\sigma})_- = -\langle -\text{Sp}(\underline{\sigma}) \rangle_{MC}$  . (3.12)  
 Für isotrope Schädigungseffekte läßt sich mit (3.11), (3.12) und einem Schädi-

gungseffektmaß für Zug ( $D_t$ ) und Druck ( $D_c = hD_t$ ) das elastische Verhalten durch

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{E(1-D_t)} \left[ (1+\nu)\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_+ - \nu \text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_+)\underline{\underline{\mathbf{1}}} \right] + \frac{1}{E(1-D_c)} \left[ (1+\nu)\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_- - \nu \text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_-)\underline{\underline{\mathbf{1}}} \right] \quad (3.13)$$

darstellen. Diese Idee fortführend, wurden anisotrope Modelle mit unterschiedlichen Schädigungseffektmaßen für Zug und Druck entwickelt. CHABOCHE [41] beschreibt ein Modell von RAMTANI, der analog (3.11) den Verzerrungstensor aufspaltet und die folgende Beziehung für das linear elastische Gesetz erhält:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = 2G\sqrt{\underline{\underline{\mathbf{1}}} - \underline{\underline{\mathbf{d}}}_t} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_+ \cdot \sqrt{\underline{\underline{\mathbf{1}}} - \underline{\underline{\mathbf{d}}}_t} + 2G\sqrt{\underline{\underline{\mathbf{1}}} - \underline{\underline{\mathbf{d}}}_c} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_- \cdot \sqrt{\underline{\underline{\mathbf{1}}} - \underline{\underline{\mathbf{d}}}_c} + \frac{G(E-2G)}{3G-E}(1-\delta)\text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}})\underline{\underline{\mathbf{1}}} \quad (3.14)$$

In (3.14) beschreiben  $\underline{\underline{\mathbf{d}}}_t$  bzw.  $\underline{\underline{\mathbf{d}}}_c$  die Schädigungseffekte durch Risse mit der Normalenrichtung parallel zur größten Zugspannung bzw. durch Risse mit der Normalenrichtung senkrecht zur Druckspannungsrichtung und  $\delta$  die Volumen-Schädigungs-Effekte. JU [88] entwickelt ein Modell für elastisch-plastische Materialien mit anisotroper Schädigung zur Bestimmung eines aktiven Sekantenmoduls  $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}}_{act}^{(4)}$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \underline{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}}_{act}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = (\underline{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}}_0^{(4)} - {}^d\underline{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}}_{act}^{(4)}) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (3.15)$$

$${}^d\underline{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}}_{act}^{(4)} = \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{(4)+} \cdot (\underline{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}}_0^{(4)} - \underline{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}}^{(4)}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{P}}}^{(4)+} \quad .$$

$\underline{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}}_0^{(4)}$  ist das Sekantenmodul des ungeschädigten Materials,  ${}^d\underline{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}}^{(4)}$  ist ein Sekantenmodul zur Beschreibung der Schädigungseffekte und  $\underline{\underline{\mathbf{P}}}^{(4)+}$  ist ein positiver Projektionstensor 4. Stufe mit

$$P_{ijkl}^+ = Q_{ia}^+ Q_{jb}^+ Q_{ka} Q_{lb} \quad (3.16)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{Q}}} = \sum_{i=1}^3 \underline{\underline{\mathbf{p}}}_i \underline{\underline{\mathbf{p}}}_i \quad ; \quad \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^+ = \sum_{i=1}^3 H(\varepsilon_i) \underline{\underline{\mathbf{p}}}_i \underline{\underline{\mathbf{p}}}_i \quad ,$$

wobei  $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \underline{\underline{\mathbf{p}}}_i \underline{\underline{\mathbf{p}}}_i$  der Verzerrungstensor und  $H(\cdot)$  die Heaviside-Funktion ist. Vergleichende Studien zu den letzten drei Modellen führte CHABOCHE [41] durch. Das Modell von LADEVEZE & LEMAITRE [109] besitzt eine nicht konvexe Belastungsfläche der Schädigung. Das Modell von RAMTANI führt auf einen unsymmetrischen Steifigkeitstensor. Das Modell von JU [88] kann nur isotrope Schädigung beschreiben, wenn alle Hauptverzerrungen positiv sind, und besitzt Sprünge im Spannungs-Verzerrungsverhalten. Aus diesen Bemerkungen wird deutlich, daß es bisher (auch im isotropen Fall) noch nicht gelungen ist, eine widerspruchsfreie Beziehung zwischen der Mikrostruktur, den Belastungen und den makroskopischen Schädigungseffektmaßen aufzustellen.

## 4. Das Schädigungsmaß

Die Notwendigkeit, sowohl Schädigungsmaße als auch Schädigungseffektmaße zu definieren, ist mit dem jeweils verwendeten Schädigungskonzept (Kapitel 5 und 6) verbunden. Auf der einen Seite stehen die Größen, die *ad hoc* eingeführt werden und nur der formalen Beschreibung der Phänomene dienen, und dem gegenüber stehen die Größen, die direkt der Mikrostruktur zugeordnet werden können und daher direkt meßbar sind. Im ersten Fall, d.h. bei Schädigungseffektmaßen, ist natürlich eine anschließende mikromechanische Begründung nicht ausgeschlossen. Im Anhang 1 werden einige Schädigungsvariablen angeführt. Wir wollen die betrachteten Phänomene direkt aus der Mikrostruktur erklären und Schädigungsmaße definieren. Dies bietet den Vorteil der physikalischen Interpretierbarkeit und liefert auch einen Ansatz für Erweiterungen der entwickelten Modelle.

Schädigungsmaße sollten die wesentlichen Aspekte der inneren Struktur wiedergeben (ONAT & LECKIE [167]). L.M.KACHANOV [89] (und RABOTNOV [182] in modifizierter Form) schlägt in seinem ursprünglich eindimensionalen Modell vor, den Schädigungszustand hauptsächlich durch die relative Abnahme der tragenden Querschnittsfläche infolge der räumlichen Ausdehnung der Mikrodefekte (Dichte der Mikrodefekte in jedem Querschnitt) zu charakterisieren. Hierbei wird ein Stab betrachtet, der mit gleichmäßigen Zug und/oder Druck in Richtung seiner Achse belastet wird, was die Beschreibung der Deformation des Stabes durch ein eindimensionales Modell erlaubt. Jedem Punkt  $\underline{\mathbf{X}}$  kann dann irgendeinem Querschnitt des Stabes zugeordnet werden. Die relative Fläche der Mikrodefekte im zu  $\underline{\mathbf{X}}$  zugeordneten Querschnitt  $\Xi(\underline{\mathbf{X}})$  ( $0 \leq \Xi(\underline{\mathbf{X}}) \leq 1$ ) folgt aus

$$\Xi(\underline{\mathbf{X}}) = \frac{A_v^*}{A^*} = \frac{A^* - A_m^*}{A^*} = 1 - \frac{A_m^*}{A^*}, \quad (4.1)$$

wobei  $A^*(\underline{\mathbf{X}})$  die gesamte Querschnittsfläche ( $A^* = A_m^* + A_v^*$ ),  $A_m^*(\underline{\mathbf{X}})$  die in  $A^*$  noch tragende Fläche und  $A_v^*(\underline{\mathbf{X}})$  der Flächeninhalt aller in  $A^*$  geschädigten Bereiche darstellt. Das in (4.1) definierte Maß wird häufig verwendet, und es werden immer neue physikalische und geometrische Definitionen hierfür angegeben (z.B. WOO & LI [220]). Es ist aber nicht frei von Kritik:

- a)  $\Xi$  ist keine Volumendichte und folglich keine Variable der Kontinuumstheorie (DIEHL [58]),
- b)  $\Xi$  ist von der Lage und der Größe der Schnittfläche  $\Delta \underline{\mathbf{A}}^*$ , in der  $\Delta A_m^*$  bestimmt wird, abhängig.

Repräsentative Volumenelemente  $\Delta V^*$  können neben Mikrorissen auch Mikroporen enthalten. Schädigung durch Mikrohöhlräume ist im Gegensatz zur Schädigung durch Mikrorisse zusätzlich mit irreversiblen Volumenänderungen als Folge des Massenerhaltungsprinzips verbunden. Das nächstliegende Schädigungsmaß, welches die irreversiblen Volumenänderungen beschreibt, ist eine skalare Größe  $\xi(\underline{\mathbf{X}})$  für das relative Volumen der Mikroporen in  $\Delta V^*$ . Es läßt sich mit Hilfe des Massenerhaltungssatzes durch die Massendichten in der fiktiven Zwischenkonfiguration  $\Delta V^*$  und der des Matrixmaterials ausdrücken. Da sich die Masse  $\Delta m$  des Elementes  $\Delta V$  während des Deformationsprozesses nicht ändert, folgt aus dem Massenerhaltungssatz:

$$\Delta V_m^* \rho_m^* = \Delta V^* \rho^* = \Delta V_m \rho_m = \Delta V \rho , \quad (4.2)$$

wobei der Index  $(\dots)_m$  das Matrixmaterial kennzeichnet. Da sich das Gesamtvolumen  $\Delta V^*$  bzw.  $\Delta V$  aus dem Volumen der Matrix  $\Delta V_m^*$  bzw.  $\Delta V_m$  und dem Volumen der Mikrodefekte  $\Delta V_v^*$  bzw.  $\Delta V_v$  zusammensetzt, d.h.

$$\Delta V^* = \Delta V_m^* + \Delta V_v^* , \quad (4.3)$$

läßt sich (4.2) auch wie folgt ausdrücken:

$$\xi(\underline{\mathbf{X}}) = \frac{\Delta V_v^*}{\Delta V^*} = \frac{\Delta V^* - \Delta V_m^*}{\Delta V^*} = 1 - \frac{\Delta V_m^*}{\Delta V^*} = 1 - \frac{\rho^*(\underline{\mathbf{X}})}{\rho_m^*(\underline{\mathbf{X}})} . \quad (4.4)$$

Ist die Referenzkonfiguration  $\mathcal{B}^0$  frei von Mikrohöhlräumen und inkompressibel, gilt

$$\Delta V_m^*(\underline{\mathbf{X}}) = \Delta V^0(\underline{\mathbf{a}}) \quad \text{und} \quad \rho_m^*(\underline{\mathbf{X}}) = \rho^0(\underline{\mathbf{a}}) . \quad (4.5)$$

Die obige Variable  $\xi(\underline{\mathbf{X}})$  wird durch DAVISON, STEVENS & KIPP [56] erstmalig eingeführt. GURSON [73] definierte auf der Basis des Porenvolumenanteils eine Fließbedingung für elastisch-plastische Materialien, die von vielen Autoren aufgegriffen und modifiziert wurde (z.B. ROUSSELIER [187], [188]; NEEDLEMAN & TVERGAARD [213], [212], [224], [225]; PERZYNA & DRABIK [176] oder FOTIU [65], [66]).

Orientierungsunabhängige Schädigungsmaße und isotrope Schädigungsphänomene beschränken sich hauptsächlich auf isotrope Materialien unter isotropen Spannungszuständen [181] oder auf große Rotationen des Spannungsfeldes [105] – Situationen

geringer praktischer Bedeutung. Im Verlauf des Schädigungsprozesses werden Änderungen der Materialsymmetrien beobachtet, die vorrangig auf die nicht-stochastische Verteilung und Orientierungsverteilung der einzelnen Mikrodefekte zurückgeführt werden (z.B. DAVISON, STEVENS & KIPP [56]; KRAJCIKOVIC & FONSEKA [105], [106]; ONAT [165]; RABIER [181]).<sup>3</sup> DIEHL [58] führt ein Schädigungsmaß ein, das diese beiden Aspekte berücksichtigt. Mit der Beschränkung auf schwache Verteilungen der Mikroporen bzw. -hohlräume in  $\Delta V^*$  können die Glieder, die die Lage der Mikrodefekte beschreiben, vernachlässigt werden. Diese Annahme wird durch die mikrostrukturellen Untersuchungen von HAYHURST, LECKIE und TRAMPCZYNSKI [77], [78], [207] bestätigt. Sie weisen nach, daß sich die Mikrodefekte in  $\Delta V^*$  nahezu gleichmäßig verteilen. Wie auch immer, das makroskopische Verhalten des zu beschreibenden Materials wird von der Orientierungsverteilung der Mikrohöhlräume abhängig sein. Infolge der fehlenden Volumenmittelung wurde versucht, die Idee von L.M.KACHANOV auf dreidimensionale Fälle zu verallgemeinern. Diese Verallgemeinerungen gehen von falschen Voraussetzungen aus und müssen daher verworfen werden. Die folgenden Bemerkungen sollen dies belegen: *"... the volume fraction of cavities in a specimen is equal to the area fraction of cavities, very flat cavities, i.e., cracks, with average volume fraction zero, should not influence the strain rate according to Rabotnov ..."* (JANSSON & STIGH [86]) bzw. *"... The ratio of the void area to the total virgin area of a cross section is an almost universally accepted measure of damage ... the number of microcracks while large is still finite and the number of cross sections  $S$  parallel to the microcrack system infinite, the probability of a cross section  $S$  containing a microcrack is zero ..."* (KRAJCIKOVIC [103]). Das relative Volumen der Mikroporen in  $\Delta V^*$   $\xi$  ist ein skalare Größe, d.h., der Volumenmittelwert des tragenden Matrixmaterials ist von der betrachteten Richtungsnormalen unabhängig. Werden die Effekte der Schädigung durch Mikroporen nur auf die Reduktion der im Volumenmittel tragenden Fläche reduziert, kann das resultierende Modell nur auf ein isotropes Schädigungsmodell hinauslaufen. Diese Bemerkungen zeigen, daß auch im isotropen Fall zur Beschreibung von Mikrorissen ein anderes Vorgehen erforderlich ist.<sup>4</sup>

Die Erfahrung zeigt, daß es vorteilhaft ist, zur Darstellung der inneren Struk-

<sup>3</sup> Ein großer Defekt verursacht hierbei die gleichen Effekte wie viele kleine Defekte gleicher Orientierung und entsprechender Lage.

<sup>4</sup> Charakteristische Längen und nichtlokale Theorien (z.B. die Arbeiten von BAZANT und PIAUDIER-CABOT [7], [11], [177]) sollen hier nicht betrachtet werden.

tur und seiner Orientierung tensorielle Zustandsvariablen zu verwenden (ONAT & LECKIE [167]). Tensoren können vom Koordinatensystem unabhängig definiert werden und unterliegen einfachen Transformationsgesetzen bei Drehung des Bezugssystems (SEIBERT [195]). Entsprechend der Stufe einer tensoriellen Größe wurden Tensoren 0. Stufe (Skalar), 1. Stufe (Vektor), 2. Stufe, 4. Stufe und höherer, aber gerader Stufe als Schädigungsvariable eingeführt (siehe auch Anhang 1). Zur Bedeutung der Tensorkomponenten existieren ebenfalls verschiedene Standpunkte. Der interessierte Leser kann weitere Bezüge und zusätzliche Kommentare u.a. bei KRAJČINOVIC & FONSEKA [105], KRAJČINOVIC [102], RABIER [181] und DIEHL [58] finden.

Vektorielle Variablen resultieren vor allem aus dem Versuch, Mikrorisse und ihre Orientierung zu beschreiben. Ein umfassendes thermo-mechanisches Modell, das auf einer vektoriellen Darstellung der Schädigung basiert, entwickelten DAVISON & STEVENS in [55]. Hierauf aufbauend, entwickelten KRAJČINOVIC [102], KRAJČINOVIC & FONSEKA [105], [106] Modelle mit vektoriellen Schädigungsvariablen. Trotz allem sind vektorielle Größen als Zustandsvariablen ungeeignet. Bei der Mittelung der Richtungen können zwei entgegengesetzte Einheitsvektoren in gleicher Weise verwendet werden. Die betrachteten Theorien liefern keine Begründung für stetige Vektorfelder. Die Beschreibung der Schädigungsevolution in Richtungen, die nicht mit der der Vektorfelder übereinstimmen, kann im allgemeinen nicht erfolgen (RABIER [181]). Vektorielle Größen sind keine Zustandsgrößen im Sinne der Thermodynamik (LEHMANN [115]), d.h. keine objektiven Größen.

Die erste Charakterisierung orientierter Defekte durch einen Tensor 2. Stufe erfolgte durch VAKULENKO & L.M.KACHANOV [214]. Der entscheidende Nachteil dieser Definition ist die fehlende Unterscheidung zwischen einem Zustand und dessen Änderung. Als Fortschritt wird die Einführung des durch MURAKAMI & OHNO [154] definierten Tensors 2. Stufe  $\underline{\underline{\Omega}}$  betrachtet, in dem die Fläche der Projektion aller in  $\Delta V^*$  enthaltenen  $N$  Defekte mit der jeweiligen Größe  $dA^{*(k)}$  auf eine Ebene berücksichtigt wird. Für näherungsweise ebene Hohlräume wird das Schädigungsmaß wie folgt definiert:

$$\underline{\underline{\Omega}}(\mathbf{X}) = \frac{3}{\Delta A_g^*} \sum_{k=1}^N \int_{\Delta V^*} \left[ \underline{\mathbf{n}}^{*(k)} \otimes \underline{\mathbf{n}}^{*(k)} \right] dA_g^{*(k)} \quad (4.6)$$

Ein Beitrag  $w^{(k)}$  senkrecht zur Normalen  $\underline{\mathbf{n}}^{*(k)}$  wird in folgender Weise berücksichtigt:

$$\underline{\underline{\Omega}}(\mathbf{X}) = \frac{3}{\Delta A_g^*} \sum_{k=1}^N \int_{\Delta V^*} \left[ \underline{\mathbf{n}}^{*(k)} \otimes \underline{\mathbf{n}}^{*(k)} + w^{(k)} \left( \underline{\mathbf{1}} - \underline{\mathbf{n}}^{*(k)} \otimes \underline{\mathbf{n}}^{*(k)} \right) \right] dA_g^{*(k)} \quad (4.7)$$

- $dA_g^{*(k)}$ – Fläche, die der  $k$ -te Hohlraum auf einer Korngrenze einnimmt,  
 $\underline{\mathbf{n}}^{*(k)}$ – Normalenvektor der Ebene  $d\mathbf{A}_g^{*(k)}$ ,  
 $\Delta A_g^*$ – gesamte Fläche der Korngrenzen in  $\Delta V^*$  .

Als Bezugsfläche wird die in  $\Delta V^*$  enthaltene Korngrenzenfläche  $\Delta A_g^*$  verwendet. Dies folgt aus der Beschränkung auf interkristalline Defekte und der Normierung der Hauptwerte  $\Omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) entsprechend ( $0 \leq \Omega_i \leq 1$ ).  $\underline{\Omega}$  ist durch fehlende Volumenmittelung über  $\Delta V^*$  immer noch ein Mikrofeld und durch die Verwendung von  $\Delta A_g^*$  als Bezugsfläche noch von der Korngröße in  $\Delta V^*$  abhängig.<sup>5</sup> Unklar ist auch, warum die Orientierung der Schädigungsvariablen gerade durch einen Tensor zweiter Stufe definiert sein soll.

Als ein wesentlicher Fortschritt wird daher ein Schädigungsmaß betrachtet, das durch ONAT in [164] eingeführt wurde (Mikrorisse siehe ONAT [165] bzw. für Mikroporen [167]), und bei dem die Orientierung innerer Materialstrukturen durch eine tensorielle Fourierreihenentwicklung  $v(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}})$  auf der Einheitskugel  $\mathfrak{K}_3 \subset \mathbb{R}^3$  erfaßt wird (eine Richtung  $\underline{\mathbf{n}}$  wird durch einen Punkt auf  $\mathfrak{K}_3$  angegeben;  $\underline{\mathbf{n}} \in \mathfrak{K}_3$ ).

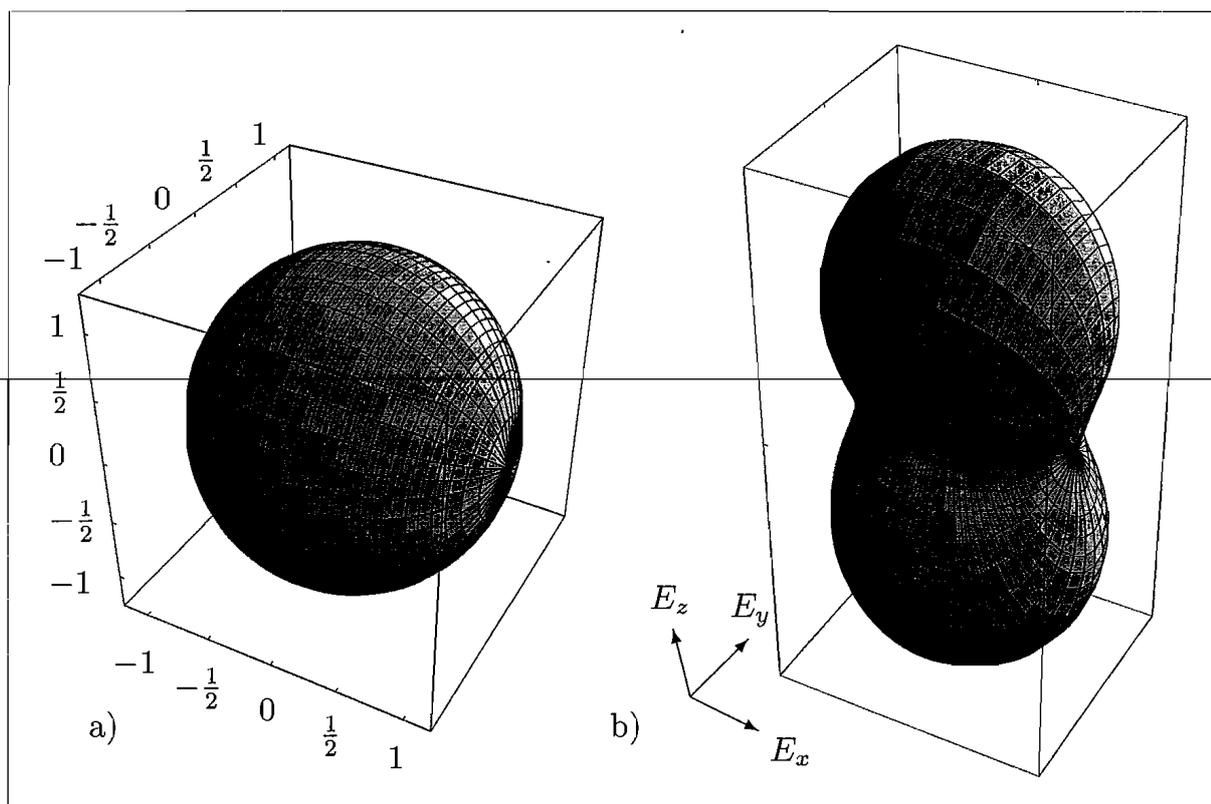
$$\begin{aligned} v(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}}) = & v_0(\underline{\mathbf{X}}) + f_i(\underline{\mathbf{n}})v_i(\underline{\mathbf{X}}) + f_{ij}(\underline{\mathbf{n}})v_{ij}(\underline{\mathbf{X}}) \\ & + f_{ijk}(\underline{\mathbf{n}})v_{ijk}(\underline{\mathbf{X}}) + f_{ijkl}(\underline{\mathbf{n}})v_{ijkl}(\underline{\mathbf{X}}) + \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

In Abbildung 3 a) wurde die Einheitskugel (jeder Vektor vom Koordinatenursprung zu einem Punkt auf der Kugel besitzt den Betrag 1) und die Elastizitätsmoduli eines orthotropen Materials in Abhängigkeit von der betrachteten Richtung  $\underline{\mathbf{n}}$  in Form einer Funktion auf  $\mathfrak{K}_3$  dargestellt.

Die Fourierkoeffizienten sind irreduzibel und somit voneinander unabhängig und können als innere Zustandsvariable zur Beschreibung der Schädigung verwendet werden. Zur Darstellung von Funktionen auf der Einheitskugel  $\mathfrak{K}_3$  mit Hilfe von tensoriellen Fourierreihen und zu den Bestimmungsgleichungen der Basisfunktionen 1,  $f_i$ ,  $f_{ij}$ , ... und Fourierkoeffizienten  $v_0$ ,  $v_i$ ,  $v_{ij}$ , ... wird auf Anhang 3 verwiesen. Im Gegensatz zu dieser Fourierreihenentwicklung zur Approximation der Richtungsabhängigkeit verwenden ILANKAMBAN & KRAJCIKOVIC in [84] eine Treppenfunktion. Die Darstellung anisotroper Eigenschaften von Materialien aus einzelnen gerichteten Strukturelementen in tensorielle Fourierreihen wurde bereits in mikromecha-

<sup>5</sup> Zur Behebung der ersten Schwierigkeit könnte, wie z.B. in [58], auf eine Bezugsfläche und somit auf die Normierung ( $0 \leq \|\underline{\Omega}\| \leq 1$ ) verzichtet werden. Zur Mittelwertbildung siehe u.a. Anhang 2.

nisch orientierten Arbeiten zur Stoffgesetzentwicklung, die nicht der Kontinuums-Schädigungs-Theorie gewidmet waren, angewendet (z.B. Faserorientierung in Faserverbundmaterialien; Kontaktebenen von granularen Medien (MISRA & CHANG [146]); Korngrenzen, Gleitebenen einzelner Körner, Versetzungsebenen in polykristallinen Materialien) und sind auch in Bereichen der Physik üblich. Es ist verwunderlich, daß diese Darstellungsform nicht weit häufiger in der Literatur zur Schädigungsmechanik zu finden ist, obwohl sie viele Vorteile besitzt.<sup>6</sup> So wird in einem jüngst erschienenen Artikel von LUBARDA & KRAJČINOVIC [132] auf die Verwendung von Orientierungsdichtefunktionen auf der Einheitskugel  $\mathcal{K}_3$  zur Darstellung anisotroper Eigenschaften von Reißverteilungen zurückgegriffen.



**Abbildung 3:** (a) Einheitskugel  $\mathcal{K}_3$  und (b) Elastizitätsmodul eines orthotropen Materials (mit  $E_x = 152700$   $[N/mm^2]$ ,  $E_y = 184700$   $[N/mm^2]$  und  $E_z = 312700$   $[N/mm^2]$ ) in Abhängigkeit von der Zugrichtung  $\underline{n}$  auf  $\mathcal{K}_3$

Die inneren Zustandsvariablen, d.h. die Koeffizienten der Fourierreihe(n), sind

<sup>6</sup> McDOWELL, HO & MOOSBRUGGER [143] verwenden die so definierten Variablen zur Definition einer Effektivspannung, wodurch die wesentlichen Vorteile nicht wirksam werden.

zulässige Schädigungsmaße und physikalisch interpretierbar, was dem Wunsch der direkten Meßbarkeit in mikromechanisch orientierten Arbeiten entspricht. Die Tensorgeneratoren der Schädigungsvariablen werden nicht länger *ad hoc* eingeführt<sup>7</sup>, sondern können direkt aus der Mikrostruktur erklärt werden.

Da jede durch  $\underline{\mathbf{n}}$  beschriebene Orientierung durch  $-\underline{\mathbf{n}}$  in gleicher Weise beschrieben werden kann, muß

$$v(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}}) = v(\underline{\mathbf{X}}, -\underline{\mathbf{n}}) \quad (4.9)$$

gelten (ONAT [165]). Für  $v$  in Gleichung (4.8) folgt daher, daß die ungeraden Glieder (Tensoren ungerader Stufe) verschwinden:

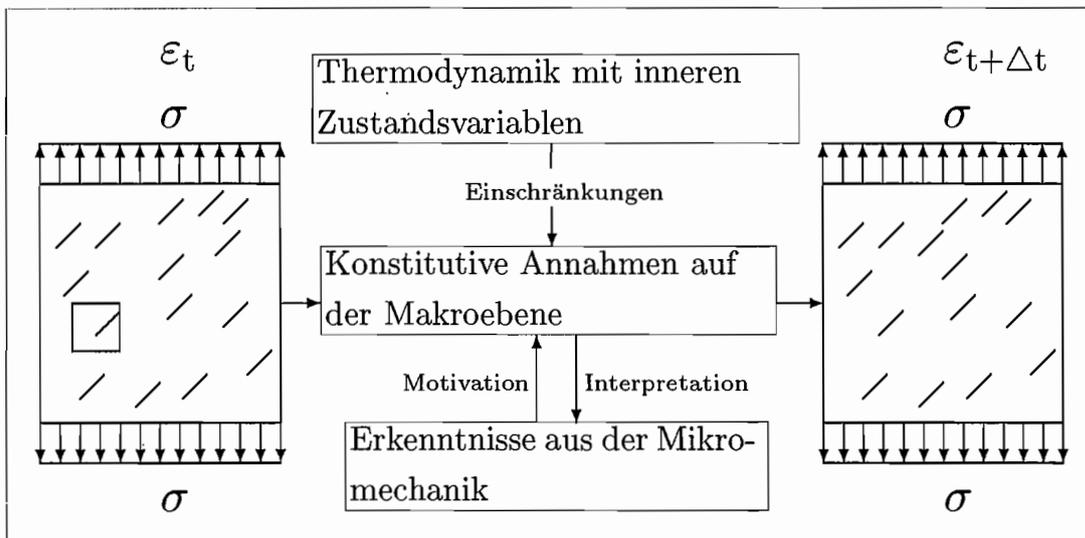
$$v(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}}) = v_0(\underline{\mathbf{X}}) + f_{ij}(\underline{\mathbf{n}})v_{ij}(\underline{\mathbf{X}}) + f_{ijkl}(\underline{\mathbf{n}})v_{ijkl}(\underline{\mathbf{X}}) + \dots \quad (4.10)$$

---

<sup>7</sup> z.B. ein Tensor 8. Stufe durch CHABOCHE [35], 4. Stufe durch CHABOCHE [35], [36] oder 2. Stufe durch CORDEBOIS & SIDOROFF [49], MURAKAMI & OHNO [154]

## 5. Phänomenologische Schädigungsmodelle

In phänomenologischen Konzepten werden im Hinblick auf das phänomenologische Verhalten alle Größen und konstitutiven Gleichungen auf der Makroebene definiert. Sämtliche Hypothesen zum konstitutiven Verhalten werden auf der Makroebene empirisch formuliert, und es wird auf ein genaueres quantitatives Studium der Entwicklung der Mikrodefekte am Volumenelement verzichtet (KACHANOV [89]; LEMAITRE [123]; BECKER [14]). Das makroskopisch-phänomenologische Spannungs-Verzerrungsverhalten des geschädigten Materials resultiert aus Annahmen über das Verhältnis der makroskopischen Belastungsgrößen (z.B. Spannung, Verzerrung oder spezifische Enthalpie) zwischen dem geschädigten und ungeschädigten Material. Die Transformation zwischen diesen Größen wird durch eine oder mehrere *ad hoc* eingeführte Schädigungsvariable (die im Sinne des Abschnitts 3.3 Schädigungseffektmaße sind) definiert, und deren tensorielle Stufe wird allein aus mathematischen Überlegungen heraus festgelegt. Erst im Anschluß erfolgt (wenn überhaupt möglich) eine mikromechanische Interpretation der eingeführten Größen und Gleichungen. Eine schematische Darstellung dieser Vorgehensweise ist in Abbildung 4 dargestellt.



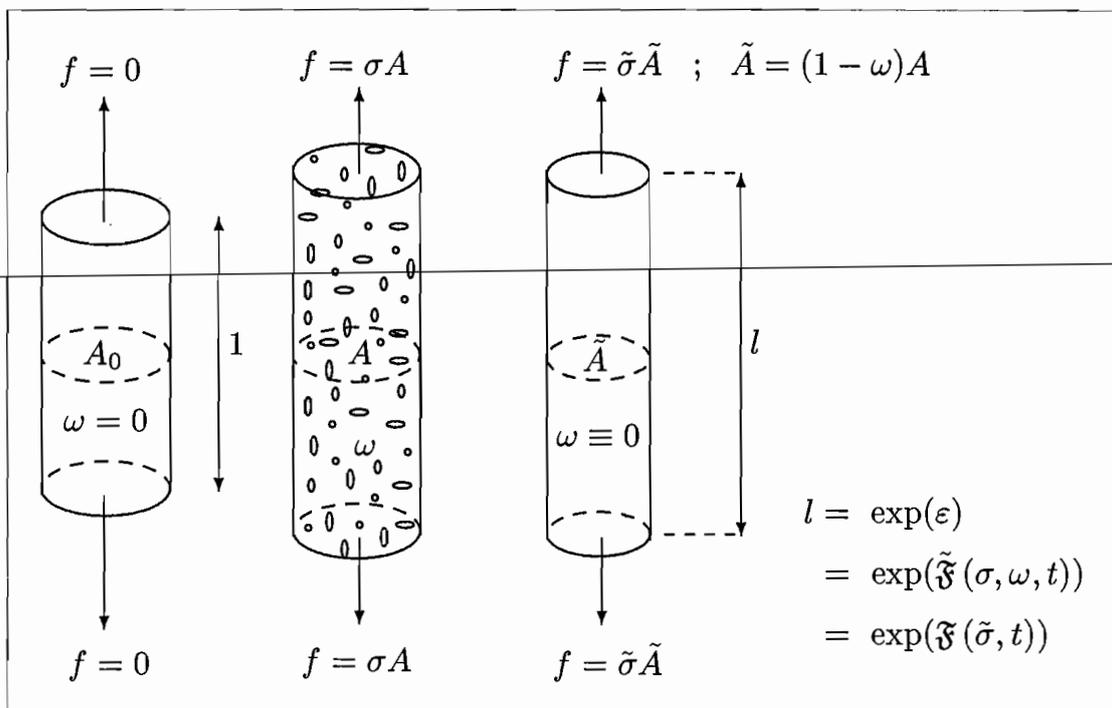
**Abbildung 4:** Phänomenologische Schädigungskonzepte

Die Festlegung der Evolution der Schädigungsvariablen erfolgt mehr oder weniger

durch formale Funktionen, die über makroskopische Kennwerte den konkreten Prozeßabläufen angepaßt werden (z.B. CHABOCHE [41]; TVERGAARD & NEEDLEMAN [213]; HULT [82]; LEMAITRE [123]). Eine Beschreibung der ablaufenden Mikromechanismen erfolgt nicht.

## 5.1 Das Effektivspannungskonzept

Das Effektivspannungskonzept kann auf die Betrachtungen von KACHANOV [89], [92] und RABOTNOV [182] zurückgeführt werden. Sie nehmen an, daß der wesentliche Effekt der Materialschädigung im Absinken der tragenden Nettofläche durch die Mikrorisse und -poren besteht. Im folgenden wird ein Zugstab der Abbildung 5 betrachtet.



**Abbildung 5:** Ein geschädigter Stab unter einachsigen Zug; a) anfänglich ungeschädigter Zustand; b) aktuell geschädigter Zustand; c) fiktiver ungeschädigter Zustand

Die Querschnittsfläche im ungeschädigten Anfangszustand und die im aktuellen geschädigten Zustand unter der Spannung  $\underline{\sigma}$  wird mit  $A_0$  und  $A$  bezeichnet. Es kann nun ein fiktiver ungeschädigter Stab (fiktiver ungeschädigter Zustand) eingeführt werden, der unter der selben Kraft  $f$  mechanisch äquivalent zum aktuellen Schädigungszustand 5b ist. Mechanische Äquivalenz heißt, daß die gleiche Verzerrungsant-

wort erzielt wird. Der fiktive ungeschädigte Zustand zeichnet sich durch eine geringere Probenfläche  $\tilde{A}$  als der aktuelle Zustand (5b) aus. Diese Reduktion verstärkt die Effekte der Spannung  $\underline{\underline{\sigma}}$ , die durch die äußere Last  $f$  entstehen. Gemäß KACHANOV und RABOTNOV kann der Schädigungszustand der Abbildung 5b durch eine Schädigungsvariable  $\omega$

$$(0 \leq \omega \leq 1); \quad \begin{cases} \omega = 0 & \text{ungeschädigter Zustand} \\ \omega = 1 & \text{gebrochener Endzustand} \end{cases} \quad (5.1)$$

beschrieben werden, die die Flächen des aktuellen Zustandes  $A$  und des fiktiven ungeschädigten Zustandes  $\tilde{A}$  aufeinander bezieht:

$$\omega = 1 - \frac{\tilde{A}}{A} . \quad (5.2)$$

Die verstärkte Spannung kann im Hinblick auf Gleichung (5.2) wie folgt angegeben werden:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{A}} = \frac{\sigma}{1 - \omega} . \quad (5.3)$$

$\tilde{\sigma}$  wird gewöhnlich als Effektiv-Spannung (LEMAITRE und CHABOCHE [122] bzw. [126]) oder Netto-Spannung (BETTEN [20], [22]; MURAKAMI und OHNO [152], [154]) und  $\tilde{A}$  als effektive Flächen-Reduktion (Nettofläche) bezeichnet. Um die mechanische Äquivalenz zu erzielen, ist  $\tilde{A}$  kleiner als die um den Anteil der Mikrodefekte reduzierte Gesamtfläche  $A$  (LEMAITRE [123]);  $\tilde{A} < A - A_d$  ( $A_d$  - Fläche der Mikrodefekte in  $A$ ). Dies berücksichtigt z.B. Spannungskonzentrationen an den Defekträndern, oft wird jedoch angenommen (z.B. MURAKAMI [152]), daß  $\tilde{A}$  und die um den Anteil der Mikrodefekte reduzierte Gesamtfläche näherungsweise übereinstimmen.

Das Effektivspannungskonzept basiert in seiner jetzigen Form auf der Annahme, daß sich das geschädigte Material unter der Spannung  $\underline{\underline{\sigma}}$  wie ein ungeschädigtes Material unter einer effektiven Spannung  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  verhält. Zur Definition der Spannung  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  wurden bisher zwei Hypothesen verwendet. Am meisten verbreitet ist die Hypothese der Verzerrungsäquivalenz, die durch LEMAITRE und CHABOCHE [122] bzw. [126] eingeführt wurde und sich wie folgt wiedergeben läßt: "Jedes Deformationsverhalten des geschädigten Materials, ob ein- oder mehrachsrig, kann durch die konstitutiven Gesetze des ungeschädigten Materials beschrieben werden, wenn man in ihnen die gewöhnliche Cauchy'sche Spannung  $\underline{\underline{\sigma}}$  durch eine Effektiv-Spannung  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  ersetzt." Im Rahmen des Effektivspannungskonzeptes läßt sich die Hypothese der Verzerrungsäquivalenz durch

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \tilde{\mathfrak{F}}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\Omega}}, t, \dots) \approx \mathfrak{F}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}, t, \dots) , \quad (5.4)$$

ausdrücken, wobei  $\tilde{\mathfrak{F}}$  bzw.  $\mathfrak{F}$  das Funktional (Materialgesetz) des geschädigten bzw. der klassisch ungeschädigten Materialien darstellt (LEMAITRE [122] bzw. LEMAITRE & CHABOCHE [126], [127]). Hierauf aufbauend entwickelten MURAKAMI [152] und BETTEN [20], [22] systematische Verallgemeinerungen der KACHANOV-RABOTNOV-Notation auf dreidimensionale anisotrope Schädigung und eine Interpretation des *ad hoc* eingeführten Schädigungstensors  $\underline{\underline{\Omega}}$ . Analog zu Gleichung (5.2) werden in diesen Arbeiten fiktive ungeschädigte Konfigurationen eingeführt, deren gerichtete Flächenelemente  $d\tilde{\underline{\underline{A}}}$  sich aus den gerichteten Flächenelementen  $d\underline{\underline{A}}$  der aktuellen geschädigten Konfiguration wie folgt ergeben:

$$d\tilde{\underline{\underline{A}}} = (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}}) \cdot d\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\Psi}} \cdot d\underline{\underline{A}} . \quad (5.5)$$

$\underline{\underline{\Omega}}$  bzw.  $\underline{\underline{\Psi}}$  sind in der Notation von MURAKAMI der Schädigungs- bzw. Kontinuitätstensor hinsichtlich der aktuellen geschädigten Konfiguration. Unter Berücksichtigung von (2.31) kann der Term  $(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}})$  als fiktiver Deformationsgradient  $\underline{\underline{G}}$  mit

$$\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}} = \det(\underline{\underline{F}}_f) (\underline{\underline{F}}_f^{-1})^T \quad (5.6)$$

gedeutet werden, der die aktuelle geschädigte Konfiguration in die fiktive ungeschädigte Konfiguration transformiert. Wird die fiktive ungeschädigte Konfiguration mit dem gleichen Kraftvektor wie die aktuelle geschädigte Konfiguration belastet, ergibt sich für die fiktive ungeschädigte Konfiguration der folgende Nettospannungstensor (BETTEN [22]; MURAKAMI & SANOMURA [152]):

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}})^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} . \quad (5.7)$$

Analog kann (5.7) auch durch die Transformation

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Phi}}^{(4)}(\underline{\underline{\Omega}}) \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \quad (5.8)$$

ausgedrückt werden, wobei der Tensor 4. Stufe  $\underline{\underline{\Phi}}^{(4)}$  nur bezüglich zweier Indizes symmetrisch ist und unter Beachtung von (5.5) wie folgt lautet:

$$\Phi_{ijkl} = \Phi_{jikl} = \frac{1}{2} (\Psi_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \Psi_{jk}) . \quad (5.9)$$

Wie aus den Bemerkungen im vorangegangenen Abschnitt deutlich wurde, kann  $\underline{\underline{\Omega}}$  noch nicht als Variable zur Beschreibung des Schädigungszustandes verwendet

werden, da dieser im entlasteten Zustand bestimmt werden muß. Den Argumenten von MURAKAMI [152] folgend, ergibt sich die Beziehung

$$\underline{\tilde{\Omega}} = (\underline{\mathbf{F}}_e)^T \cdot \underline{\Omega} \cdot (\underline{\mathbf{F}}_e)^{-T} \quad (5.10)$$

zwischen  $\underline{\Omega}$  und dem Schädigungstensor  $\underline{\tilde{\Omega}}$  hinsichtlich der elastisch entlasteten geschädigten Konfiguration ( $\underline{\mathbf{F}}_e$  - elastischer Anteil des Deformationsgradienten  $\underline{\mathbf{F}}$ ). Das konstitutive Gesetz lautet nun

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \tilde{\mathfrak{F}}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\Omega}}, t, \dots) = \widehat{\mathfrak{F}}(\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}, t, \dots) \quad , \quad (5.11)$$

wobei  $\widehat{\mathfrak{F}}$  das in der fiktiven ungeschädigten Konfiguration formulierte Material-Funktional darstellt. MURAKAMI und BETTEN zeigen, daß sowohl  $\underline{\underline{\Omega}}$  als auch  $\underline{\underline{\tilde{\Omega}}}$  symmetrische Tensoren sind, und folglich ist unter Berücksichtigung von (5.6)  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  allgemein unsymmetrisch. Dies ist ein bedeutender Nachteil der vorangegangenen Betrachtungen. Zu dessen Beseitigung wird  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  in (5.4) bzw. (5.11) durch eine symmetrische effektive Spannung (Pseudo-Effektivspannung BETTEN [22]), die aus  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  durch eine Symmetrisierungsprozedur hervorgeht, ersetzt. Die hiermit verbundenen Konsequenzen wurden nicht erörtert. Eine eindeutige Definition einer Symmetrisierungsprozedur erfolgte auch nicht. Z.B. schlagen MURAKAMI [152], BETTEN [20] und CHOW [43] vor, statt  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  nur noch dessen symmetrischen Anteil

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}^S = \frac{1}{2} [(\underline{\underline{\mathbf{1}}} - \underline{\underline{\Omega}})^{-1} \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} + \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{1}}} - \underline{\underline{\Omega}})^{-1}] = \left( \underline{\underline{\Phi}}^{(4)}(\underline{\underline{\Omega}}) \right)^{-1} \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \quad (5.12)$$

zu verwenden, wobei  $\underline{\underline{\Phi}}^{(4)}$  ein symmetrischer Tensor 4. Stufe ist, der im Gegensatz zu  $\underline{\underline{\Phi}}^{(4)}$  in (5.9) hinsichtlich folgender Indizes symmetrisch ist:

$$\tilde{\Phi}_{ijkl} = \tilde{\Phi}_{jikl} = \tilde{\Phi}_{ijlk} = \tilde{\Phi}_{jilk} = \frac{1}{2} [\Psi_{ik}\Psi_{jl} + \Psi_{il}\Psi_{jk}] \quad . \quad (5.13)$$

Im folgenden wird nur noch die symmetrische effektive Spannung betrachtet und für diese die Bezeichnung  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  beibehalten.

Für linear-elastisches Verhalten folgt für das konstitutive Gesetz des geschädigten Materials mit Hilfe des Effektivspannungskonzeptes und der Hypothese der Verzerungsäquivalenz die folgende Beziehung:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = {}^0\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = {}^0\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \left( \underline{\underline{\Phi}}^{(4)} \right)^{-1} \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \quad . \quad (5.14)$$

Der Ausdruck  ${}^0\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \left( \tilde{\underline{\underline{\Phi}}}^{(4)} \right)^{-1}$  kann als Nachgiebigkeitstensor  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}$  des geschädigten Materials interpretiert werden. Da  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}$  nicht die notwendigen Symmetrien eines Nachgiebigkeitstensors (z.B. HAHN [75]) besitzt, muß abermals eine Symmetrisierung erfolgen. Diese läßt sich analog (5.14) mit Hilfe eines symmetrischen Tensors 8.Stufe darstellen (siehe CHABOCHE Anhang 1):

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} = \left( \tilde{\underline{\underline{\Phi}}}^{(8)} \right)^{-1} \cdot \cdot {}^0\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \quad . \quad (5.15)$$

CORDEBOIS und SIDOROFF [50] schlagen einen anderen Weg als die Hypothese der Verzerrungsäquivalenz zur Bestimmung der effektiven Spannung vor. Dieser wurde von CHOW & LU [44] aufgegriffen. Die effektive Spannung ruft demnach in einem fiktiven ungeschädigten Material nicht die gleiche Verzerrungsantwort, sondern das gleiche energetische Potential (z.B. komplementäre elastische Verzerrungsenergie, plastisches Potential) wie im geschädigten Material hervor, woraus die Verzerrungsantwort durch partielle Ableitung nach den Spannungen bestimmt wird. Am Beispiel elastischer Deformationen wird diese Vorgehensweise im folgenden erläutert. Mit der Hypothese der Äquivalenz der komplementären elastischen Verzerrungsenergie  $\Pi_k^e$  nehmen CORDEBOIS und SIDOROFF an, daß die komplementäre elastische Verzerrungsenergie eines geschädigten Materials unter der Spannung  $\underline{\underline{\sigma}}$  gleich der eines ungeschädigten Materials unter der effektiven Spannung  $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$  ist (KATTAN & VOYIADJIS [94], [217]) ist:

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{(r)} = \frac{\partial \tilde{\Pi}_k^e}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad , \quad (5.16)$$

$$\tilde{\Pi}_k^e(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\Omega}}) = \Pi_k^e(\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}, \underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}) \quad , \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{2} \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} \cdot \cdot {}^0\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \cdot \tilde{\underline{\underline{\sigma}}} \quad , \quad (5.18)$$

wenn  $\Pi_k^e$  bzw.  $\tilde{\Pi}_k^e$  die komplementäre elastische Verzerrungsenergie des ungeschädigten bzw. des geschädigten Materials und  $\underline{\underline{\Omega}}$  eine *ad hoc* eingeführte Schädigungsvariable ist. Wird analog (5.12b) eine Transformation  $\left( \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{(4)} \right)^{-1}$  zur Bildung der effektiven Spannung  $\tilde{\underline{\underline{\sigma}}}$  eingeführt,

$$\tilde{\underline{\underline{\sigma}}} = \left( \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{(4)} \right)^{-1} \cdot \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad ,$$

ergibt sich nun der Nachgiebigkeitstensor des geschädigten Materials  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}$  aus (5.18) wie folgt:

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} = \left( \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{(4)} \right)^{-T} \cdot \cdot {}^0\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{(4)} \right)^{-1} \quad (5.19)$$

und definiert eine mögliche Form von (5.15). Die Komponenten des Transformations-tensors  $\underline{\underline{M}}^{(4)}$  können aus

$$M_{ijkl}^{-1} = \frac{\delta_{ijkl}}{\sqrt{(1 - \Omega_i)(1 - \Omega_j)}} \quad , \quad (5.20)$$

( $\Omega_i$  - Hauptwerte von  $\underline{\underline{\Omega}}$ ) ermittelt werden (KATTAN & VOYIADJIS [94]), und die effektive Spannung ergibt sich zu (CORDEBOIS & SIDOROFF [50]):

$$\underline{\underline{\tilde{\sigma}}} = (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}})^{-\frac{1}{2}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\Omega}})^{-\frac{1}{2}} \quad . \quad (5.21)$$

Mit Hilfe von (5.19) und (5.21) ist es gelungen, sowohl einen symmetrischen Effektivspannungstensor als auch einen symmetrischen Nachgiebigkeitstensor des geschädigten Materials zu definieren.

## 5.2 Bemerkungen zum Effektivspannungskonzept

Mit der Definition einer effektiven Spannung können viele Effekte der Schädigung in sehr einfacher Weise unabhängig vom Materialgrundverhalten beschrieben werden, und bei der Beschreibung des makroskopischen Verhaltens geschädigter Materialien wurden beträchtliche Erfolge erzielt.

Mit dem auf Gleichung (5.4) basierenden Effektivspannungskonzept und den symmetrischen Effektivspannungen nach (5.12) und (5.21) sind Effekte wie die elastische Entfestigung, die Herabsetzung der Fließspannung, erhöhte plastische Verzerrungs- und Kriechraten (tertiäres Kriechen) und Änderungen der Materialsymmetrien beschreibbar. Diese Effekte werden durch die verstärkte Wirkung bzw. Transformation der Spannungen hervorgerufen (MURAKAMI [152]). Dies zeigt aber auch bereits eine Grenze dieser Vorgehensweise. Z.B. können Änderungen der Materialeigenschaften, die nicht direkt an eine Spannung gekoppelt sind (z.B. Wärmeleitfähigkeit), oder Phänomene, die nicht bereits in den klassischen Materialgesetzen enthalten sind, nicht beschrieben werden. Z.B. setzt die klassische Theorie der Plastizität plastische Inkompressibilität voraus. Diese Annahme ist jedoch nicht mit den beobachteten Dilatationen, die während duktiler Bruchmechanismen durch die Existenz von Mikrohohlräumen entstehen, konsistent. Eine Erfassung dieser Volumendehnungen mit Hilfe einer effektiven Spannung und den klassischen Materialgesetzen ist daher nicht möglich. Ein anderer Nachteil dieses Konzepts entsteht durch die implizite Annahme, daß in allen Verzerrungsanteilen der Verstärkungsfaktor der Spannung

stets der selbe ist. D.h., ist z.B. die elastische Verzerrungsantwort eines geschädigten Materials unter der Spannung  $\underline{\underline{\sigma}}$  wie die eines ungeschädigten Materials unter der Spannung  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$ , gilt dies auch für alle weiteren Anteile der Verzerrungsantwort (z.B. plastische oder Kriechverzerrung) und *vice versa*. Die Untersuchungen von LEMAITRE & DUFFAILLY [128] zeigen aber, daß sich z.B. die plastische oder duktile Verzerrungsrate des geschädigten Materials im allgemeinen nicht aus dem elastischen Verhalten abschätzen läßt (LEMAITRE & DUFFAILLY verfolgten in [128] ein anderes Ziel, aber aus ihren Untersuchungen wurde diese Schlußfolgerung gezogen.)

Die ungeklärte physikalische Bedeutung von  $\underline{\underline{\Omega}}$  erscheint meiner Meinung nach der größte Schwachpunkt dieses Schädigungskonzeptes zu sein. Obwohl Schädigungsmaße nicht nur angemessene mathematische und mechanische Eigenschaften, sondern auch eine klare physikalische Bedeutung besitzen sollten, ist es bisher noch nicht gelungen, einen physikalisch plausiblen Zusammenhang zwischen Größe, Form, Anzahl, Lage, etc. der Mikrodefekte und den Schädigungstensoren  $\underline{\underline{\Omega}}$  bzw.  $\underline{\underline{\tilde{\Omega}}}$  unabhängig von der verwendeten Hypothese zu definieren. Interpretationsversuche konnten überhaupt nur zur Hypothese der Verzerrungsäquivalenz gefunden werden. Welche mikromechanische Interpretation auch immer für die Schädigungsvariablen  $\underline{\underline{\Omega}}$ ,  $\underline{\underline{\Psi}}$ ,  $\underline{\underline{\tilde{\Phi}}}^{(4)}$  bzw.  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{(4)}$  oder  $\underline{\underline{\tilde{\Phi}}}^{(8)}$  im Effektivspannungskonzept angegeben wird, wird hier der Standpunkt vertreten, daß diese Größen formale Parameter bzw. Schädigungseffektmaße sind. Ein Indiz für die ungeklärte physikalische Bedeutung der Schädigungsvariablen bilden auch die verschiedenen in der Literatur zu findenden Hypothesen zur Definition der Effektivspannung und die daraus resultierenden Symmetrisierungsprozeduren (5.12) bzw. (5.21) von  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$ . Weiterhin kann keine physikalische Begründung gefunden werden, daß z.B. die Funktion  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}({}^0\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}, \underline{\underline{\xi}})$  durch einen stets gleichen mathematischen Zusammenhang (siehe z.B. die Gleichungen (5.19) und (5.20)), unabhängig von der physikalischen Bedeutung der  $\xi_j$ , beschrieben werden kann und daß dieser Zusammenhang durch die Ordnung, mit der die Spannung in der jeweilig betrachteten konstitutiven Beziehung auftritt, bestimmt wird. Dies gilt natürlich nicht nur für die elastischen bzw. reversiblen Materialeigenschaften des geschädigten Materials.

Sehr häufig wird  $\underline{\underline{\Omega}}$ , ausgehend von den Arbeiten von L.M.KACHANOV [89], [92] und RABOTNOV [182], auch als Reduktion der im Volumenmittel tragenden Fläche interpretiert:

$$\underline{\underline{\Omega}} = \sum_{i=1}^3 \Omega_i \underline{\underline{\mathbf{n}}}_i \underline{\underline{\mathbf{n}}}_i \quad , \quad (5.22)$$

wobei die  $\Omega_i$  und  $\underline{\underline{\mathbf{n}}}_i$  die Hauptwerte mit den zugehörigen Eigenvektoren sind. Im

Kapitel 4 wurde aber gezeigt, daß bei Mikrorissen diese Größe stets Null und bei Mikroporen unabhängig von der betrachteten Flächennormalen ist. Ein weiterer Kritikpunkt ist, daß im Rahmen der Theorie kleiner elastisch-plastischer Formänderungen die gemeinsame Verwendung der oben definierten Schädigungsvariablen  $\underline{\underline{\Omega}}$  und die Notation der effektiven Spannung auf ein fragwürdiges Modell führt, in dem Entfestigung des Materials ohne Modifikation des Poissonschen Verhältnisses erscheint (RABIER [181]). Unabhängig von der Kritik in Kapitel 4 ändert auch die Interpretation von MURAKAMI & OHNO [154] mit Hilfe von (4.6) bzw. (4.7) an diesem Sachverhalt nichts.

Mit der Symmetrie von  $\underline{\underline{\Psi}}$  bzw.  $\underline{\underline{\Omega}}$  können keine komplizierteren Schädigungszustände als orthotrope Zustände beschrieben werden. CHABOCHE [35] schlägt daher vor, den Tensor 4. Stufe  $\tilde{\underline{\underline{\Phi}}}^{(4)}$  mit den in (5.13) beschriebenen Symmetrien als Schädigungsvariable zu verwenden (siehe Anhang 1). Ein Versuch der mikromechanischen Interpretation dieses Tensors erfolgt bereits nicht mehr. Auf jeden Fall entfällt die Vorstellung von einem fiktiven Deformationsgradienten in (5.5) bzw. (5.6). Gleiches gilt auch für den Tensor 8. Stufe  $\tilde{\underline{\underline{\Phi}}}^{(8)}$  in (5.15).

Das Effektivspannungskonzept stellt folglich eine formale Transformation der Spannungen zur Beschreibung des Deformationsverhaltens dar. Die elastischen, plastischen und viskosen Deformationsanteile enthalten die schädigungsinduzierten Deformationsanteile, die nicht separiert werden können. Die drei Größen  $\underline{\underline{\Omega}}$ ,  $\underline{\underline{\Psi}}$  oder  $\tilde{\underline{\underline{\Phi}}}^{(4)}$  sind Schädigungseffektmaße (siehe Abschnitt 3.3) und nicht direkt (im Sinne von LEMAITRE & DUFFAILLY [128], d.h. durch Messungen der Mikrostruktur) meßbar. Wenn nicht explizit vorgegeben, müssen sie infolge der Hypothese der Verzerungsäquivalenz aus einer Anpassung an das makroskopische Deformationsverhalten mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens bestimmt werden. Dies erfordert zumindest die Kenntnis des qualitativen Verlaufes des Schädigungsfeldes im Körper, um eine eindeutige Lösung, die mit mikrostrukturellen Beobachtungen übereinstimmt, zu gewährleisten. Das Ergebnis für  $\underline{\underline{\Omega}}$ ,  $\underline{\underline{\Psi}}$  oder  $\tilde{\underline{\underline{\Phi}}}^{(4)}$  ist weiterhin von der Definition der Effektivspannung und der Symmetrisierungsprozedur abhängig. Jede Mikrodefektkonfiguration, die die gleichen Phänomene im Deformationsverhalten hervorruft, besitzt das gleiche Schädigungseffektmaß. Daher sind diese Größen für Aussagen ungeeignet, die über das Deformationsverhalten hinausgehen (z.B. Wärmeleitfähigkeit, elektrische Leitfähigkeit, Ausbreitungsgeschwindigkeit von Ultraschall (LEMAITRE & DUFFAILLY [128]) oder bruchbezogene Parameter).

Die Ansätze der Evolutionsgleichungen der Schädigungseffektmaße sind beliebig,

wenn nur das Deformationsverhalten mit hinreichender Genauigkeit wiedergegeben werden kann, was KRAJČINOVIC & FANELLA [104] als Hauptmakel phänomenologischer Theorien betrachten.

Als Fortschritt werden die Arbeiten von MURAKAMI & OHNO [154] und BETTEN [20], [24] betrachtet, die das Darstellungstheorem für isotrope Tensorfunktionen von WANG [218] zur Definition der konstitutiven Gleichung und der Evolutionsgleichung für Kriechen und Kriechschädigung verwenden. Leider wird dieses Vorgehen nicht konsequent verfolgt und weiterhin ein effektiver Spannungstensor verwendet. MURAKAMI & OHNO [154] reduzieren die Tensorpolynome auf die Ansätze

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{D}}}_C &= \bar{G}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}}, a, T) \approx \bar{\beta}_1 \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^D + \bar{\beta}_2 \left[ (\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^D)^2 - \frac{1}{3} \text{Sp}^2(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^D) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right] \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\Omega}}} &= \bar{H}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}}, a, T) \approx B[\tilde{\sigma}_I]^k \underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}}_I \underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}}_I .\end{aligned}\quad (5.23)$$

Dabei sind:  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_C$  - Kriech-Verzerrungsrate;  $a$  - Verfestigung der Materialmatrix;  $T$  - Temperatur;  $B$ ,  $k$  - Materialkoeffizienten;  $\tilde{\sigma}_I$ ,  $\underline{\underline{\boldsymbol{\nu}}}_I$  - maximale Hauptspannung mit zugeordneter Hauptrichtung von  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$ ;  $\bar{\beta}_1$  und  $\bar{\beta}_2$  - skalare Funktionen in Abhängigkeit von  $a$ ,  $T$  und

$$\begin{aligned}\text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}}), \text{Sp}^2(\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}}), \text{Sp}^3(\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}}), \text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}), \text{Sp}^2(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}), \text{Sp}^3(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}), \\ \text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}), \text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}}^2 \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}), \text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^2), \text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}}^2 \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^2) .\end{aligned}$$

Die Einführung der symmetrisierten effektiven Spannung  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$  ist in diesem Zusammenhang verwunderlich, z.B. kann (5.23) auch wie folgt dargestellt werden

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{D}}}_C &= G(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\Omega}}}, a, T) \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\Omega}}} &= H(\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\Omega}}}, a, T) .\end{aligned}\quad (5.24)$$

Werden in (5.24) nur die Tensorgeneratoren berücksichtigt, die linear in  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}$  sind und gelingt es,  $\underline{\underline{\boldsymbol{\Omega}}}$  als Schädigungsmaß zu definieren, führt dies auf eine allgemeine Darstellung der Kriechrate ohne Einschränkungen hinsichtlich der physikalischen Bedeutung von  $\underline{\underline{\boldsymbol{\Omega}}}$ .

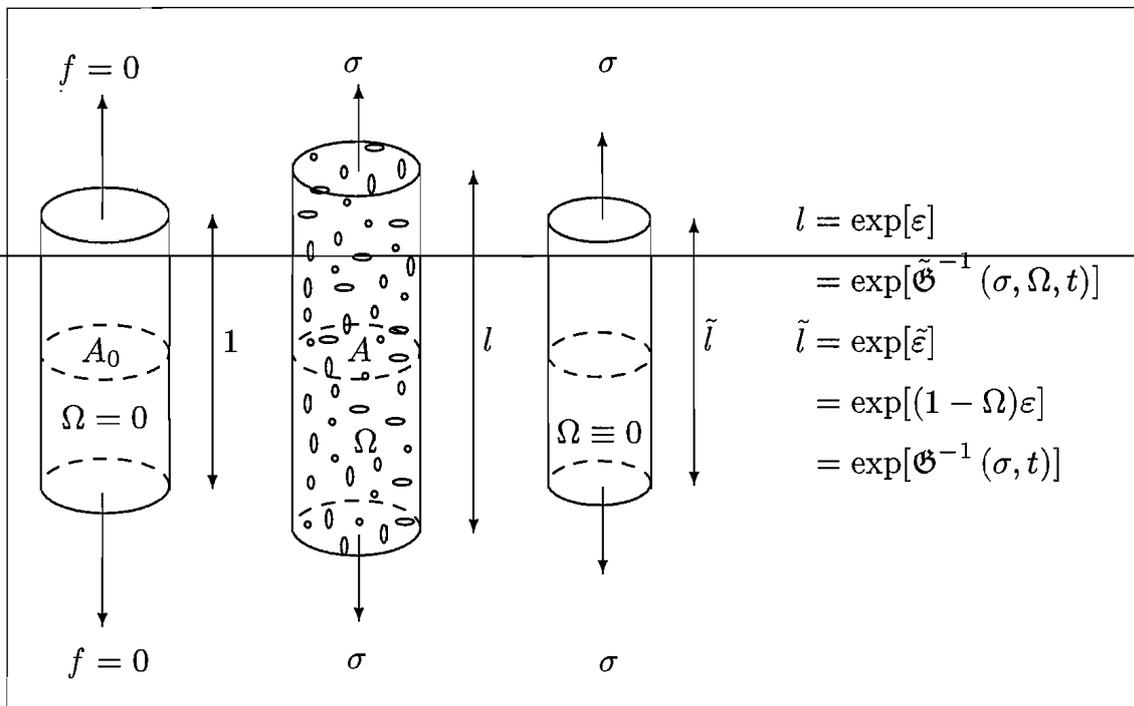
### 5.3 Das Effektivverzerrungskonzept

Das weniger verbreitete Effektivverzerrungskonzept stellt eine Alternative zum Effektivspannungskonzept dar und basiert auf der Hypothese der Spannungsäquivalenz.

Diese wurde durch CORDEBOIS & SIDOROFF [49] vorgestellt und lautet nach SIMO & JU [196]: "Jedes Deformationsverhalten des geschädigten Materials kann durch die konstitutiven Gesetze des ungeschädigten Materials beschrieben werden, wenn in ihnen die gewöhnliche Verzerrung  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  durch eine effektive Verzerrung  $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}$  ersetzt wird." Das Materialgesetz lautet analog der Gleichung (5.11) in seiner allgemeinen Form:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \tilde{\mathfrak{G}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\Omega}}, t, \dots) \approx \mathfrak{G}(\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}, t, \dots) \quad , \quad (5.25)$$

wobei  $\tilde{\mathfrak{G}}$  bzw.  $\mathfrak{G}$  das Materialfunktional des geschädigten bzw. des ungeschädigten Materials beschreiben. Für die Schädigungsvariable wurde wieder die Bezeichnung  $\underline{\underline{\Omega}}$  gewählt. Die Bedeutung hat sich aber gegenüber dem Effektivspannungskonzept gewandelt (eine mikromechanische Interpretation dieser Größe konnte bisher nicht gefunden werden).



**Abbildung 6:** Ein geschädigter Stab unter einachsigen Zug: a) anfänglich ungeschädigter Zustand; b) aktuell geschädigter Zustand; c) fiktiver ungeschädigter Zustand

Das Effektivverzerrungskonzept lässt sich am Beispiel eines einachsigen belasteten Zugstabes entsprechend Abbildung 6 verdeutlichen. Hier sind  $\tilde{\mathfrak{G}}$  das konstitutive Gesetz des geschädigten Materials und  $\mathfrak{G}$  das des fiktiv ungeschädigten Materials. Das geschädigte Material, das um  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  deformiert wird, ruft die gleichen Spannungen hervor wie ein fiktiv ungeschädigtes, das um  $\underline{\underline{\tilde{\varepsilon}}}$  deformiert wird, bzw. die Spannung  $\underline{\underline{\sigma}}$

verursacht im geschädigten Material die Verzerrung  $\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}$  und in einem ungeschädigten  $\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}$ . Die effektive Verzerrung ergibt sich analog Gleichung (5.12) aus einer linearen Transformation der Form

$$\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}} = \underline{\underline{\tilde{\Phi}}}^{(4)}(\underline{\underline{\Omega}}) \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{\tilde{\Phi}}}^{(4)} \Big|_{\underline{\underline{\Omega}}=\underline{\underline{0}}} = \underline{\underline{1}}^{(4)}, \quad (5.26)$$

wobei die Bezeichnungen aus (5.12), nicht aber die Bedeutungen übernommen wurden.  $\underline{\underline{\tilde{\Phi}}}^{(4)}$  ist wieder ein vollständig symmetrischer Tensor 4. Stufe.

Wie mit dem Effektivspannungskonzept lassen sich mit Hilfe des Effektivverzerrungskonzeptes elastische Entfestigungen, Änderungen der Materialsymmetrien und erhöhte irreversible Verzerrungsraten beschreiben. Deformationen der Fließfläche können mit dem Effektivverzerrungskonzept nicht beschrieben werden. Die Transformation (5.26) ist nur dann mit sinnvollen Ergebnissen verknüpft, wenn ihre Verwendung auf wenige Schädigungsprozesse, Belastungspfade und Materialgrundverhalten beschränkt wird. In den darüber hinausgehenden Fällen kann festgestellt werden, daß eine Transformation  $\underline{\underline{\tilde{\Phi}}}^{(4)}$ , die nur von der Mikrostruktur abhängig ist, entweder nicht existiert oder noch belastungsabhängig sein muß.

Bei Belastung können die erhöhten Distorsionen und Dilatationen geschädigter Materialien beschrieben werden. Eine Aufteilung der Differenz zwischen  $\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}$  und  $\underline{\underline{\epsilon}}$  in seine elastischen, plastischen, viskosen und irreversiblen schädigungsinduzierten Anteile gelingt ohne weitere Informationen über  $\underline{\underline{\tilde{\Phi}}}^{(4)}$  hinaus jedoch nicht. Dies kann am Beispiel der Dilatationen nachgewiesen werden, wobei unabhängig davon, ob das Material durch Mikroporen oder -risse geschädigt ist,

$$\text{Sp}(\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}) \leq \text{Sp}(\underline{\underline{\epsilon}}) \quad (5.27)$$

gelten muß. Ist das Material durch Mikrorisse geschädigt, müssen die gegenüber dem ungeschädigten Material zusätzlichen Dilatationen, die durch das doppelt skalare Produkt der reversiblen und irreversiblen Anteile von  $\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}$  mit  $(\underline{\underline{\tilde{\Phi}}}^{(4)})^{-1}$  entstehen, dem elastischen bzw. reversiblen Verhalten zugeordnet werden. Treten jedoch Mikroporen auf, ist ein Bruchteil der zusätzlichen Dilatationen irreversibel. Aus der alleinigen Kenntnis von  $\underline{\underline{\tilde{\Phi}}}^{(4)}$  kann aber nicht entschieden werden, ob Risse oder Poren die Schädigung darstellen.

Bei Entlastungsprozessen und dem Auftreten irreversibler Deformationen versagt die Hypothese von der Existenz einer linearen Transformation  $\underline{\underline{\tilde{\Phi}}}^{(4)}$ , die allein von der Mikrostruktur abhängig ist. Man stelle sich ein geschädigtes Material im belasteten Zustand vor, dessen Schädigungszustand durch  $\underline{\underline{\tilde{\Phi}}}^{(4)}$  festgelegt ist. Wird *Heilung*

und Schädigungsfortschritt bei Entlastung ausgeschlossen und werden unter Berücksichtigung von (5.10) kleine elastische Deformationen angenommen, ändert sich  $\underline{\tilde{\Phi}}^{(4)}$  während der Entlastung nicht. Aus (5.26) folgt, daß im belasteten Zustand die Ungleichung

$$|\text{Sp}(\underline{\tilde{\epsilon}})| = \left| \text{Sp}(\underline{\tilde{\Phi}}^{(4)} \cdot \underline{\epsilon}) \right| < |\text{Sp}(\underline{\epsilon})| \quad \text{und} \quad \text{Sp}(\underline{\tilde{\epsilon}}) \neq 0, \quad (5.28)$$

$$\text{wenn } \text{Sp}(\underline{\sigma}) \neq 0 \text{ und } \text{Sp}(\underline{\epsilon}) \neq 0$$

gelten muß. Wird z.B. wie durch KRAJČINOVIC & FONSEKA [105], [106] und MAZARS [140] für Mikrorisse und BODNER & CHAN [28] für viskose Schädigung angenommen, daß zur Weiterentwicklung der Mikrodefekte die Existenz von Zug in einer beliebigen Richtung genügt, gilt zusätzlich für Schädigung durch Mikroporen:

$$|\text{Sp}(\underline{\tilde{\epsilon}})| = \left| \text{Sp}(\underline{\tilde{\Phi}}^{(4)} \cdot \underline{\epsilon}) \right| = 0, \quad \text{wenn } \text{Sp}(\underline{\sigma}) = 0 \text{ und } \text{Sp}(\underline{\epsilon}) \text{ beliebig.} \quad (5.29)$$

Im entlasteten Zustand muß hingegen für jedes beliebige  $\underline{\epsilon}$

$$\left. \text{Sp}(\underline{\tilde{\epsilon}}) \right|_{\underline{\sigma}=\underline{0}} = \left. \text{Sp}(\underline{\tilde{\Phi}}^{(4)} \cdot \underline{\epsilon}) \right|_{\underline{\sigma}=\underline{0}} = 0 \quad (5.30)$$

gefordert werden, da in den klassischen Materialgesetzen die Inkompressibilitätshypothese postuliert wird und die irreversiblen Dilatationen verschwinden müssen. Vom mathematischen Standpunkt aus existiert kein  $\underline{\tilde{\Phi}}^{(4)}$ , welches sowohl (5.28) als auch (5.30) und eventuell (5.29) erfüllt. Durch Aufgabe der Inkompressibilitätshypothese für das Matrixmaterial und durch Kopplung der Schädigungsevolution mit der Evolution plastischer oder viskoser Dilatationen, was eine physikalische Begründung erfordern würde, könnte dieses Problem überwunden werden.

Die letzten Ausführungen bzw. die Gleichungen (5.28), (5.29) und (5.30) implizieren, daß  $\underline{\tilde{\Phi}}^{(4)}$  bzw.  $\underline{\Omega}$  allgemein belastungsabhängige Größen sind. Dieses läßt sich aber einfacher am Beispiel infinitesimaler elastisch-plastischer Deformationen verdeutlichen. Die Verzerrungen des geschädigten Materials  $\underline{\epsilon}$  und des fiktiv ungeschädigten Materials  $\underline{\tilde{\epsilon}}$  können dann wie folgt wiedergeben werden:

$$\underline{\epsilon} = \underline{\underline{C}}^{(4)} ({}^0\underline{\underline{C}}^{(4)}, \underline{\Omega}) \cdot \underline{\sigma} + \underline{\epsilon}_{(s)} + \underline{\epsilon}_{(p)}, \quad (5.31)$$

$$\underline{\tilde{\epsilon}} = {}^0\underline{\underline{C}}^{(4)} \cdot \underline{\sigma} + \underline{\tilde{\epsilon}}_{(p)}. \quad (5.32)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (5.26) folgt

$$\underline{\tilde{\Phi}}^{(4)} \cdot \left( \underline{\mathbf{C}}^{(4)} \cdot \underline{\sigma} \right) - {}^0 \underline{\mathbf{C}}^{(4)} \cdot \underline{\sigma} = \underline{\tilde{\epsilon}}_{(p)} - \underline{\tilde{\Phi}}^{(4)} \cdot \left( \underline{\epsilon}_{(s)} + \underline{\epsilon}_{(p)} \right) . \quad (5.33)$$

Werden nun reversible Prozesse betrachtet, ändert sich die linke Seite der Gleichung (5.33) mit der anliegenden Spannung, während die rechte Seite konstant verbleibt. Gleichung (5.33) kann folglich nur dann erfüllt werden, wenn  $\underline{\tilde{\Phi}}^{(4)}$  belastungsabhängig ist (die Möglichkeit, daß die linke Seite stets  $\underline{\mathbf{0}}$  ist, kann ausgeschlossen werden, da dann auf der rechten Seite zumindest ein Kugeltensor verbleiben würde).  $\underline{\tilde{\Phi}}^{(4)}$  stellt wieder eine formale Transformation (hier des Verzerrungstensors) dar, die bei irreversiblen Prozessen im allgemeinen nicht geeignet ist. Als formale Transformation gelten wieder die Ausführungen im Abschnitt 5.2.

Für linear-elastisches Verhalten und vernachlässigbare irreversible Verzerrungen gehen das Effektivverzerrungskonzept und das Effektivspannungskonzept mit der Hypothese der Verzerrungsäquivalenz ineinander über, und  $\underline{\tilde{\Phi}}^{(4)}$  ist in beiden Konzepten identisch. Folglich besitzen beide Konzepte hier die gleichen Eigenschaften.

## 5.4 Energetische Schädigungskonzepte

Energetische Schädigungskonzepte basieren auf dem Konzept der *generalized standard materials* und verwenden die Potentialtheorie zur Herleitung der interessierenden materialabhängigen Gleichungen. Folglich ist deren Anwendung auf Prozesse begrenzt, die die Verwendung der klassischen irreversiblen Thermodynamik erlauben (Abschnitt 2.3). Mit den energetischen Schädigungskonzepten ist ein sehr formales Vorgehen verbunden, welches aber stets die Erfüllung der beiden Hauptsätze der Thermodynamik gewährleistet. In einem ersten Schritt wird die Form der spezifischen freien Enthalpie  $\Psi$  nach Gleichung (2.67) oder die äquivalente Größe, die im Verzerrungsraum definierte spezifische freie (Helmholtz-) Energie  $f$

$$f = u - T s = f(\underline{\epsilon}_{(r)}, T, \text{grad}(T), \underline{\kappa}, \underline{\xi}) , \quad (5.34)$$

postuliert. Die Standard-Auswertung des Ansatzes für  $\Psi$  bzw.  $f$  liefert die thermische und kalorische Zustandsgleichung (2.72) und (2.73) bzw. die äquivalenten Beziehungen für  $f$ :

$$\underline{\mathbf{s}} = \rho^0 \frac{\partial f}{\partial \underline{\epsilon}_{(r)}} \quad \text{und} \quad s = - \frac{\partial f}{\partial T} . \quad (5.35)$$

Die jeweils verbleibende dissipative Ungleichung (für die freie Energie wird  $\Psi$  durch  $f$  ersetzt) folgt aus (2.66), (2.84), (2.81), (2.85) und  $r = \dot{\eta} = 0$ :

$$T \dot{s}_{(d)} = \dot{w}_{(i)} - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\kappa}} \cdot \underline{\dot{\kappa}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\xi}} \cdot \underline{\dot{\xi}} - \frac{1}{T\rho} \underline{\mathbf{q}} \cdot \text{grad}(T) \geq 0, \quad (5.36)$$

$$T \dot{s}_{(d)} = \frac{1}{\rho^0} \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{D}}}_{(i)} - \sum_{i=1}^n \bar{K}_i \underline{\dot{\kappa}}_i - \sum_{j=1}^m Y_j \underline{\dot{\xi}}_j - \frac{1}{T\rho} \underline{\mathbf{q}} \cdot \text{grad}(T) \geq 0, \quad (5.37)$$

$$\text{mit } \bar{K}_i = \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa_i} \quad \text{und} \quad Y_j = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_j}. \quad (5.38)$$

Die Größen  $\underline{\mathbf{D}}_{(i)}$ ,  $\underline{\dot{\kappa}}_i$ ,  $\underline{\dot{\xi}}_j$  und  $\underline{\mathbf{q}}$  stellen verallgemeinerte Flüsse und  $\underline{\mathbf{S}}/\rho^0$ ,  $\bar{K}_i$ ,  $Y_j$  und  $\text{grad}(T)/(T\rho)_{(i)}$  verallgemeinerte Kräfte dar. Wird die Existenz eines Dissipationspotentials  $\varphi$  bzw.  $\varphi^*$  mit

$$\varphi = \varphi(\underline{\mathbf{S}}, \frac{\text{grad}(T)}{T\rho}, \bar{K}_i, Y_j; \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_{(r)}, T, \kappa_i, \xi_j) \quad \text{bzw.} \quad (5.39)$$

$$\varphi^* = \varphi^*(\underline{\mathbf{D}}_{(i)}, \underline{\mathbf{q}}, \underline{\dot{\kappa}}_i, \underline{\dot{\xi}}_j; \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_{(r)}, T, \kappa_i, \xi_j)$$

postuliert (siehe CHABOCHE und LEMAITRE [37], [40], [41], [123], [127]), liefert eine verallgemeinerte Normalenregel den irreversiblen Anteil der Verzerrungsgeschwindigkeit und die Evolutionsgleichungen der inneren Zustandsvariablen;  $\underline{\mathbf{D}}_{(i)}$  und  $\underline{\dot{\kappa}}_i, \underline{\dot{\xi}}_j$ . Das Dissipationspotential ist eine skalar konvexe Funktion der verallgemeinerten Kräfte oder ihrer konjugierten Flüsse, und die inneren Zustandsvariablen dienen als Parameter (ONAT [166], [167]). Für rheonomes bzw. skleronomes Materialverhalten ist diese Normalenregel durch die folgenden Beziehungen (Fließregeln und Evolutionsgesetze [58]) festgelegt (GERMAIN, NGUYEN & SUQUET [68]; ROUSSELIER [187]; LEMAITRE [124] oder JANSSON & STIGH [86]; LEMAITRE & CHABOCHE [127]):

$$\underline{\mathbf{D}}_{(i)} = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\mathbf{S}}}; \quad \underline{\dot{\kappa}}_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{K}_i}; \quad \underline{\dot{\xi}}_j = -\frac{\partial \varphi}{\partial Y_j}; \quad \underline{\mathbf{q}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \text{grad}(T)} \quad \text{bzw.} \quad (5.40)$$

$$\underline{\mathbf{D}}_{(i)} = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\mathbf{S}}}; \quad \underline{\dot{\kappa}}_i = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{K}_i}; \quad \underline{\dot{\xi}}_j = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial Y_j}; \quad \underline{\mathbf{q}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \text{grad}(T)}. \quad (5.41)$$

Wir beschränken uns auf skleronomes Verhalten, eine Erweiterung ist aber problemlos möglich. Die Aufgabe bei der Entwicklung von Materialgesetzen ist es, die inneren Zustandsvariablen  $\kappa_i$  und  $\xi_j$  zu definieren und die Funktionen  $\Psi$  und  $\varphi$  so anzusetzen, daß Gleichung (5.37) erfüllt wird.

Im allgemeinen wird aus physikalischen Betrachtungen heraus postuliert, daß dissipative Prozesse erst ab einem definierten Belastungsniveau und bei einer definierten Belastungsrichtung auftreten und daß unterhalb dieses Niveaus alle Prozesse, mit Ausnahme der thermischen Prozesse, vollständig reversibel sind. Zur Vervollständigung des Materialgesetzes müssen daher noch Fließbedingungen (im verallgemeinerten Sinne) und Belastungsbedingungen für jede Gleichung in (5.40) bzw. (5.41) bereitgestellt werden. Damit ist es möglich die dissipativen Prozesse entkoppelt zu betrachten, die unterschiedliche Fließ- und Belastungsbedingungen besitzen, unabhängig voneinander auftreten können und folglich voneinander getrennt die dissipative Ungleichung (5.37) erfüllen müssen.

Eine Näherungsannahme erlaubt die Entkopplung der thermischen Dissipation von den restlichen Prozessen. Aus (5.37) werden folgende Ungleichungen:

$$-\frac{1}{T\rho}\underline{\mathbf{q}} \cdot \text{grad}(T) \geq 0 \quad , \quad (5.42)$$

$$\frac{1}{\rho^0}\underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(i)} - \sum_{i=1}^n \bar{K}_i \bar{\kappa}_i - \sum_{j=1}^m Y_j \bar{\xi}_j \geq 0 \quad . \quad (5.43)$$

Als Folge dieser Aufspaltung läßt sich für jede Teil-Ungleichung ein zugeordnetes Dissipationspotential  $\varphi_T$  und  $\bar{\varphi} \equiv F$  mit

$$\varphi = \varphi_T\left(\frac{\text{grad}(T)}{T\rho}; \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{(r)}, T, \kappa_i, \xi_j\right) + F(\underline{\underline{\mathbf{S}}}, \bar{K}_i, Y_j; \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{(r)}, T, \kappa_i, \xi_j) \quad (5.44)$$

formulieren, aus dem die verallgemeinerten Flüsse wieder analog den Gleichungen (5.40) bzw. (5.41) bestimmt werden. Ein Postulat zur Auswertung der Ungleichung (5.42) führt auf das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz  $\underline{\mathbf{q}} = -\lambda_f(T) \text{grad}(T)$  (bzw. auf einen entsprechenden Ansatz für  $\varphi_T$ ). Eine anderes Postulat liefert die Maxwell-Cataneo-Gleichung ( $\tau_q$  - thermische Relaxationszeit)

$$\tau_q \dot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\mathbf{q}} = -\lambda_f(T) \text{grad}(T) \quad . \quad (5.45)$$

$\tau_q$  ist ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der sich ein stationärer Zustand einstellt. Die Ungleichung (5.43) impliziert, daß Schädigung und plastische Deformationen zusammenfallen und zu dem zugeordnetem Dissipationspotential  $F$  nur noch

eine Fließ- und Belastungsbedingung benötigt wird. Im Rahmen assoziierter Materialgesetze stimmt die Fließbedingung mit  $F$  in (5.44) überein und kann mit dem folgenden Ansatz beschrieben werden:

$$F = \hat{F}(\underline{\mathbf{S}}, \bar{K}_i, Y_j) - k^2(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, T, \kappa_i, \xi_j) \leq 0 . \quad (5.46)$$

Die Konsistenzbedingung lautet  $\dot{F} = 0$ , d.h. für  $\lambda$  in den drei ersten Gleichungen in (5.41):

$$\lambda \geq 0 , \text{ wenn } F = \dot{F} = 0 \quad \text{sonst } \lambda = 0 . \quad (5.47)$$

Im Rahmen dieser Annahmen ist eine Aufspaltung der irreversiblen Verzerrungsrate in seine plastischen und schädigungsinduzierten Anteile im allgemeinen nicht möglich. Die einzige Ausnahme besteht bei annähernd isotropen schädigungsinduzierten Deformationen: hier kann die Spur von  $\underline{\mathbf{D}}$  allein den schädigungsinduzierten Deformationen und der verbleibende Deviator den plastischen Deformationen zugeordnet werden. Die oben genannten Autoren gehen von dieser Annahmen aus (oder vernachlässigen die schädigungsinduzierten Deformationen vollständig), geben aber keine Prozedur an, wie diese Annahme verifiziert werden könnte. Im Kapitel 8 wird gezeigt, daß aus der Orientierung der Mikrodefektkonfiguration nicht auf die Isotropie bzw. Anisotropie der schädigungsinduzierten Deformationen geschlossen werden kann.

Weiterhin können nur Schädigungsprozesse beschrieben werden, die mit plastischen Deformationen gekoppelt sind. Mit der Verwendung einer einzigen Fließbedingung für plastische Deformationen und Schädigung wird im allgemeinen eine zu starke Kopplung dieser Mechanismen begründet. Eine Beobachtung, die von ONAT [167] für Kriechschädigung bereits kritisch angemerkt wurde. Schädigungen, die z.B. bei sprödem Materialgrundverhalten auftreten, erfordern die Entkopplung plastischer von Schädigungsprozessen – eine Erweiterung des ursprünglichen Konzeptes der *generalized standard materials*.

Werden zusätzlich zur Entkopplung (5.42) und (5.43) auch die plastischen Prozesse und Schädigungsprozesse als entkoppelt betrachtet, spaltet sich (5.43) wie folgt auf:

$$\frac{1}{\rho^0} \underline{\mathbf{S}} \cdot \cdot \underline{\mathbf{D}}_{(p)} - \sum_{i=1}^n \bar{K}_i \bar{\kappa}_i \geq 0 , \quad (5.48)$$

$$\frac{1}{\rho^0} \underline{\mathbf{S}} \cdot \cdot \underline{\mathbf{D}}_{(s)} - \sum_{j=1}^m Y_j \xi_j \geq 0 . \quad (5.49)$$

Die additive Aufspaltung des Dissipationspotentials  $F$  in (5.44) in  $F_p$  und  $F_s$  sei im folgenden zulässig, und für  $\varphi$  in (5.39) folgt:

$$\varphi = \varphi_T + F_p(\underline{\mathbf{S}}, \bar{K}_i; \underset{(r)}{\underline{\underline{\epsilon}}}, T, \kappa_i, \xi_j) + F_s(\underline{\mathbf{S}}, Y_j; \underset{(r)}{\underline{\underline{\epsilon}}}, T, \kappa_i, \xi_j) . \quad (5.50)$$

Werden assoziierte Materialgesetze verwendet, lauten die plastische Fließbedingung  $F_p$  und die *Fließbedingung* der Schädigung  $F_s$

$$F_p = \bar{K}(\underline{\mathbf{S}}, \bar{K}_i) - \underset{(r)}{\hat{k}^2}(\underset{(r)}{\underline{\underline{\epsilon}}}, T, \kappa_i, \xi_j) \leq 0 , \quad (5.51)$$

$$F_s = Y(\underline{\mathbf{S}}, Y_j) - \underset{(r)}{y^2}(\underset{(r)}{\underline{\underline{\epsilon}}}, T, \kappa_i, \xi_j) \leq 0 \quad (5.52)$$

und die Konsistenzbedingungen

$$\dot{F}_p = 0 , \quad \dot{F}_s = 0. \quad (5.53)$$

Im Rahmen der Entkopplung thermischer, plastischer und der Dissipation durch Schädigungsprozesse ist es möglich, allgemein zwischen plastischen und schädigungsinduzierten Deformationen zu differenzieren. Die erste Gleichung in (5.41) kann durch

$$\underset{(p)}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}} = \lambda \frac{\partial F_p}{\partial \underline{\underline{\mathbf{S}}}} \quad \text{und} \quad \underset{(s)}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}} = \lambda \frac{\partial F_s}{\partial \underline{\underline{\mathbf{S}}}} \quad (5.54)$$

ersetzt werden. Die Vorgehensweise bei weitergehenden Aufspaltungen der dissipativen Ungleichung (5.37) über (5.48) und (5.49) hinaus, z.B. in Mikroporen- und Mikrorißschädigung, wird an dieser Stelle nicht weiter erläutert. Im folgenden sollen einige Beispiele energetischer Schädigungskonzepte angeführt werden.

## 5.5 Bemerkungen zu den energetischen Schädigungskonzepten

Die Eigenschaften energetischer Schädigungskonzepte sollen anhand einiger typischer Beispiele elastisch-plastischer Schädigungsprozesse erläutert werden. Nur wenige Autoren verwenden die in diesem Kapitel beschriebene Verfahrensweise zur Bestimmung aller Flüsse in (5.40) bzw. (5.41). Z.B. werden nur die Anteile in der freien Enthalpie  $\Psi$  definiert, die zur Definition der reversiblen Verzerrungen nach (2.72) benötigt werden, und das Dissipationspotential wird nur soweit festgelegt, wie dies zur Definition der irreversiblen Verzerrungsraten erforderlich ist. Die Evolutionsgleichungen



( $E$  - Elastizitätsmodul;  $E_t$  - Tangentenmodul des Matrixmaterials bei  $\sigma_M$ ). Die irreversible Verzerrungsrate wird mit Hilfe der ersten Gleichung in (5.41) bestimmt. Die Evolutionsgleichung von  $\omega$  wird dagegen direkt durch

$$\dot{\omega} = (1 - \omega) \underline{\underline{\mathbf{G}}} \cdot \underset{(i)}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}} + A \dot{\sigma}_M + B \dot{\sigma}_H + C \dot{\sigma}_M \quad (5.60)$$

festgelegt, wobei  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  der Metriktensor in der Momentankonfiguration ist. Der erste Summand in (5.60) wird als Wachstumsterm und die folgenden zwei Summanden als Bildungsterm der Poren interpretiert. Für Porenbildung, kontrolliert durch irreversible Verzerrungen bzw. Spannungen, ergeben sich die Parameter  $A$  und  $B$  wie folgt (TVERGAARD [210], [211]):

$$A = \frac{E - E_t}{EE_t} \frac{\omega_N}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_M^p - \varepsilon_N}{s}\right]^2\right), \quad B = 0 \quad (5.61)$$

$$\text{bzw.} \quad A = B = \frac{\omega_N}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sigma_M + \sigma_H - \sigma_N)^2}{2s^2}\right). \quad (5.62)$$

In (5.61) und (5.62) ist  $\omega_N$  der gebildete Porenvolumenanteil,  $\varepsilon_N$  bzw.  $\sigma_N$  die mittlere Verzerrung bzw. Spannung bei Porenbildung, und  $s$  die Standardabweichung von  $\varepsilon_N$  bzw.  $\sigma_N$ .  ~~$\varepsilon_M^p$  ist die effektive irreversible Verzerrung im Matrixmaterial und~~ beschreibt in Verbindung mit  $\sigma_M$  die äquivalente irreversible Arbeit:

$$\dot{\varepsilon}_M^p = \left(\frac{E - E_t}{EE_t}\right) \dot{\sigma}_M, \quad \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underset{(i)}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}} = (1 - \omega) \sigma_M \dot{\varepsilon}_M^p. \quad (5.63)$$

Der Parameter  $C$  wird aktiv, wenn ein kritischer Wert  $\omega_c$  erreicht wird und beschreibt den Effekt Porenverschmelzung, d.h. ( $\Delta\varepsilon$  - Materialparameter;  $\omega_u$  - Porenvolumenanteil bei Bruch)

$$C = \begin{cases} 0 & , \text{ wenn } \omega \leq \omega_c \\ \left(\frac{E - E_t}{EE_t}\right) \frac{\omega_u - \omega_c}{\Delta\varepsilon} & , \text{ sonst } \end{cases}. \quad (5.64)$$

Die irreversible Verzerrungsrate folgt aus (5.41), der Fließbedingung  $\hat{F} = 0$ , der Konsistenzbedingung  $\dot{\hat{F}} = 0$  und den Gleichungen (5.59) bis (5.64) mit

$$\underset{(i)}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}} = \frac{1}{H} \left[ \frac{3}{2\sigma_M} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^D + \alpha \underline{\underline{\mathbf{G}}} \right] \left[ \frac{3}{2\sigma_M} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^D + \beta \underline{\underline{\mathbf{G}}} \right] \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, \quad (5.65)$$

$$H = \frac{-\sigma_M}{2} \left[ 3\alpha(1 - \omega) \frac{\partial \hat{F}}{\partial \omega} + \left( A \frac{\partial \hat{F}}{\partial \omega} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \sigma_M} \right) \frac{EE_t}{(1 - \omega)(E - E_t)} \cdot \left( \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_M^2} + \alpha \frac{3\sigma_H}{\sigma_M} \right) \right] \quad (5.66)$$

$$\alpha = \frac{\omega}{2} q_1 q_2 \sinh\left(\frac{3q_2 \sigma_H}{2\sigma_M}\right) \quad \text{und} \quad \beta = \alpha + \frac{B\sigma_M}{6} \frac{\partial F}{\partial \omega} . \quad (5.67)$$

Dieses Modell ist nicht frei von Kritik. Bildung und Wachstum von Mikroporen wird durch Einbeziehung *plastischer* Dilatanz in die klassischen elastisch-plastischen konstitutiven Gleichungen berücksichtigt. Die fehlende Trennung zwischen den plastischen und schädigungsinduzierten Deformationen führt aber offensichtlich auf Widersprüche bei Druckbelastungen. Die Fließbedingung (5.58) unterscheidet nicht zwischen Zug und Druck, d.h., ob  $\sigma_H$  positiv oder negativ ist. Um bei hydrostatischem Druck wieder eine positive spezifische Dissipationsleistung zu erhalten, muß die irreversible Volumendilatation in (5.65) ebenfalls mit negativem Vorzeichen behaftet sein. Wird das Matrixmaterial noch als inkompressibel betrachtet, verschwindet folglich Porenvolumen. Der Wachstumsterm in (5.60) wird unter hydrostatischem Druck daher negativ. Spannungskontrollierte Porenbildung kann sogar zu einem negativen Porenbildungsterm in (5.60) führen ( $B > 0$  und  $\dot{\sigma}_H < 0$ ), d.h. nicht nur existierende Mikroporen werden kleiner, sondern können vollständig verschwinden. Prozesse der *Heilung* konnten in dieser Form nicht beobachtet werden. Natürlich, wie durch BASTE & AUDOIN [9] beschrieben, können sich Mikroporen und -risse unter Druckbeanspruchung schließen, unter reinem hydrostatischem Druck ist dies aber kaum vorstellbar. Nach einer Porenschließung würden Mikrorisse zurückbleiben, das Material bliebe also geschädigt, in der Modellvorstellung von TVERGAARD und NEEDLEMAN läge aber ein ungeschädigtes Material vor. Hier wird der Standpunkt vertreten, daß Mikrodefektschließen bereits im Rahmen elastischer Deformationen erfolgt und nach einer Entlastung wieder das ursprüngliche Porenvolumen (vor der Druckbeanspruchung) vorliegt. In jedem Fall verhindert der elastische Deformationsanteil das vollständige Verschwinden der Mikroporen.

Die Evolutionsgleichung von  $\omega$  (5.60) wird unabhängig vom Dissipationspotential  $F$  in (5.58), das die inelastische Verzerrungsrate über (5.41) definiert, formuliert. Dies hat zur Folge, daß die makroskopischen Dilatationen  $\text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{D}}})$  nicht mehr länger wie z.B. bei RABIER [181] oder FELDMÜLLER [62] nur auf die Rate des Porenvolumens  $\dot{\omega}$  zurückgeführt werden kann. Dies ist aber ein offensichtlicher Widerspruch zur Inkompressibilitätsannahme für das Matrixmaterial.

Eine weitere kritische Anmerkung zur Evolutionsgleichung (5.60) ist notwendig. Bei gleichem  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  ist der Wachstumsterm am größten, wenn noch keine Poren vorhanden sind – ein Widerspruch, Poren müssen sich erst bilden, um wachsen zu können. Der

Porenbildungsterm ist nicht explizit vom existierenden Schädigungsgrad  $\omega$  abhängig und nimmt im Prozeßverlauf bei konstantem  $\sigma_H$  z.B. nach (5.60) und (5.62) nur durch plastische Verfestigung ab. Dies ist überraschend, da unter anderem auch die von diesen Autoren durchgeführten Experimente (z.B. BECKER, NEEDLEMAN, RICHMOND & TVERGAARD [13]) zeigen, daß bei gleicher plastischer Verfestigung und äußerer Belastung um so weniger Defekte neu entstehen, je mehr Defekte bereits vorliegen, da die Dissipation bevorzugt durch Wachstum als durch Bildung neuer Defekte erfolgt (siehe auch Abschnitt 8.6).

Modifikationen des Modells (Gleichungen (5.55) bis (5.67)) durch TVERGAARD, NEEDLEMAN und XU in [213] und [224] ersetzen  $q_3$  und  $\omega$  in (5.58) durch

$$q_3 = q_1^2, \quad (5.68)$$

$$\omega^*(\omega) = \begin{cases} \omega & , \text{ wenn } \omega \leq \omega_c \\ \omega_c + \left(\frac{1}{q_1} - \omega_c\right) \frac{\omega - \omega_c}{\omega_F - \omega_c} & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (5.69)$$

( $\bar{\sigma}$  - Radius der Fließfläche des Matrixmaterials;  $\omega_F$  - Wert von  $\omega$  beim Bruch;  $q_1$ ,  $A$  - Materialparameter). Weiterhin verwenden TVERGAARD & NEEDLEMAN [213] und XU & NEEDLEMAN [224] von (5.60) geringfügig abweichende Evolutionsgleichungen. Diese Modifikation der Schädigungsvariablen führt zum Verlust deren physikalischen Interpretierbarkeit. Die in den wahren Spannungen formulierte Fließfläche reduziert sich bis zum Brucheintritt auf einen Punkt. Das Material reduziert seine Tragfähigkeit stetig bis zur Spannung Null beim Versagen. Dies widerspricht experimentellen Beobachtungen, wie im Abschnitt 9.1 gezeigt. Zusätzlich zu den Modifikationen in (5.68) und (5.69) ersetzt TVERGAARD in [212] in (5.58)  $\sigma_M$  durch

$$\sigma_F = (1 - b)\sigma_y + b\sigma_M \quad (5.70)$$

mit  $b \in [0, 1]$ . Hier stellen  $\sigma_F$  den Radius der Fließfläche des Matrixmaterials,  $\sigma_y$  die Anfangs-Fließspannung,  $\sigma_M$  die Fließspannung der Matrix und  $b$ ,  $B$  Materialparameter dar. Die konstitutiven Gleichungen reduzieren sich für  $b = 1$  auf das Modell von GURSON [73] mit isotroper Verfestigung und für  $b = 0$  auf rein kinematische Verfestigung. Die hieraus resultierenden Änderungen der verbleibenden Gleichungen können in [212] nachgelesen werden.

Beispiele zur Entkopplung plastischer Prozesse von Schädigungsprozessen liefern LEMAITRE [123], [124], CHABOCHE [37] [38], [39], und LEMAITRE & CHABOCHE [127]

(siehe auch SIMO & JU [196], [197], [198]). Zur Beschreibung elastisch-plastischer Schädigungsprozesse wird der folgende Ansatz der freien Energie in (5.34) verwendet:

$$f(\underset{(r)}{\underline{\underline{\epsilon}}}, T, \kappa_1, \omega) = (1 - \omega) f_e^0(\underset{(r)}{\underline{\underline{\epsilon}}}, T) + f_p^0(T, \kappa_1) , \quad (5.71)$$

wobei  $\omega$  eine nicht näher definierte Schädigungsvariable,  $f$  die freie Energie des geschädigten Materials,  $f_e^0$  bzw.  $f_p^0$  die elastischen (siehe (5.55)) bzw. plastischen Anteile der freien Energie  $f^0$  des ungeschädigten Materials und  $\kappa_1$  die akkumulierte plastische Verzerrung

$$\dot{\kappa}_1 = \sqrt{\frac{2}{3} \underset{(p)}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}} \cdot \underset{(p)}{\underline{\underline{\mathbf{D}}}}} \quad (5.72)$$

ist. Dieser und der Ansatz (5.55) und (5.56) vernachlässigen die Kopplung der Schädigung mit plastischen Prozessen. Ansatz (5.71) ist weiterhin nur für skalare Schädigungsvariablen geeignet und läßt sich nicht problemlos auf tensorielle Variablen verallgemeinern. Die zugeordnete thermodynamische Kraft  $Y$  folgt aus (5.71) mit

$$-Y = -\frac{\partial f}{\partial \omega} \equiv f_e^0 . \quad (5.73)$$

Die Aufspaltung der dissipativen Ungleichung (5.36) bzw. (5.37) erfolgt entsprechend (5.48) und (5.49) und unter Vernachlässigung schädigungsinduzierter Deformationen. Das von LEMAITRE [123] postulierte Dissipationspotential  $F_s$  wird hinsichtlich der Schädigung in der verallgemeinerten Kraft  $Y$  und hinsichtlich der isotropen Verfestigung im verallgemeinerten Fluß  $\dot{\kappa}_1$  (siehe (5.39)) formuliert. Das Dissipationspotential  $F_p$  wird jeweils in den verallgemeinerten Kräften formuliert. Hierbei wurde bei LEMAITRE [124] und CHABOCHE [37] der Ansatz

$$F_p(\underline{\underline{\sigma}}, \bar{K}_1; \omega) = \frac{\sigma_{eq} - \bar{K}_1}{1 - \omega} - \sigma_y , \quad (5.74)$$

$$F_s(\dot{\kappa}_1, Y; T) = \frac{S_0}{s_0 + 1} \left( \frac{-Y}{S_0} \right)^{s_0 + 1} \dot{\kappa}_1 \quad (5.75)$$

(in [127], [38], [39] ist (5.74) und (5.75) nur unwesentlich modifiziert) postuliert ( $S_0$ ,  $s_0$  - Materialparameter;  $\sigma_y$  - Anfangs-Fließspannung). Die assoziierten Flüsse ergeben sich zu:

$$\dot{\kappa}_1 = -\lambda \frac{\partial F_p}{\partial \bar{K}_1} = \frac{\lambda}{1 - \omega} \quad \text{und} \quad \dot{\omega} = -\frac{\partial F_s}{\partial Y} = \left( \frac{-Y}{S_0} \right)^{s_0} \dot{\kappa}_1 . \quad (5.76)$$



definierenden thermodynamischen Größen (ONAT [167]). Die Existenz des Dissipationspotentials  $\varphi$  ist keine Konsequenz der Thermodynamik und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik (hier in Form von (5.36)). Das Konzept der *generalized standard materials* betrachtet nur die thermodynamisch konsistenten Modelle, die zusätzlich ein Dissipationspotential akzeptieren. Man kann nur hoffen, daß die verbleibenden Modelle, die durch Ansätze thermodynamischer Potentiale definiert sind, das gesuchte Materialgesetz noch mit hinreichender Genauigkeit beschreiben.

Das letzte Beispiel zeigt deutlich auf, daß die physikalische Bedeutung der Schädigungsvariablen verloren geht. Die Existenz eines Schädigungsmaßes, welches sowohl eine effektive Spannung nach (5.80) als auch die freie Energie des geschädigten Materials ohne irgendeinen Proportionalitätsfaktor definiert, ist wohl auszuschließen. Als Schädigungseffektmaße dienen die eingeführten Variablen als freie Parameter zur Anpassung an das makroskopische Materialverhalten.

Bisher wurden aus gutem Grund ausschließlich skalare Schädigungsvariable verwendet. Die starke Richtungsabhängigkeit der Schädigungsevolution erschwert dieses Vorgehen, da der vollständige Spannungszustand in  $F$  aus (5.46) berücksichtigt werden muß (ONAT [167]; BODNER & CHAN [28]). D.h. auch die irreversiblen Verzerrungsraten sind nicht länger nur von der ersten Spannungsinvarianten  $\text{Sp}(\underline{\mathbf{S}})$  und der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators  $\sigma_{eq}$  abhängig. Soll verhindert werden, daß bei einer orientierten Schädigung in einer beliebigen Richtung bei Druck eine Schädigungsevolution erfolgt, genügt weder eine einzige Fließbedingung  $F$  nach (5.46) noch deren Aufspaltung (5.51) und (5.52). Jede Richtung  $\underline{\mathbf{n}}_i \in \mathfrak{R}_3$  ( $i = 1, \dots, k$ ) (siehe Anhang 3) muß separat eine gesonderte Fließbedingung erfüllen.

## 6. Mikromechanisch begründete Schädigungsmodelle, Analogie-Modelle

### 6.1 Mikromechanisch begründetes Materialverhalten

Im Rahmen mikromechanisch begründeter Schädigungsmodelle<sup>8</sup> werden die materialabhängigen Gleichungen des geschädigten Materials mehr oder weniger direkt aus der Mikrostruktur formuliert. Ausgangspunkt ist das konkrete Studium der die Schädigung verursachenden, in der Regel idealisierten mikroskopischen Elementardefekte, deren Eigenschaften, mikromechanisches Verhalten und eventuelle Weiterentwicklung (Bildung, Wachstum und Verschmelzung) im repräsentativen Volumenelement  $\Delta V$  (z.B. JANSSON & STIGH [86], NEMAT-NASSER & OBATA [162], BECKER [14], LEMAITRE & DUFFAILLY [128]).

Der Übergang von den aktuellen Makrofeldern zu den aktuellen Mikrofeldern, die durch den Index  $m$  gekennzeichnet werden, erfolgt durch eine Lokalisierungsprozedur. Mit dem Begriff *aktuell* wird der Zeitpunkt  $t$  verbunden. Der umgekehrte Weg von der Betrachtung der Mikrofelder in  $\Delta V$  zu den durch die Konstitutiv- und Evolutionsgleichungen beschriebenen Makrofeldern (quasi-makroskopische Konstitutivgesetze - BECKER & GROSS [15]) erfolgt durch eine geeignete Mittelungsprozedur bzw. Homogenisierung der Mikrofelder MAUGIN [139] (Abbildung 7). Die einfachste Form der Volumenmittelung lautet

$$\langle \Xi_m \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{(\Delta V)} \Xi_m d(\Delta V) \quad , \quad (6.1)$$

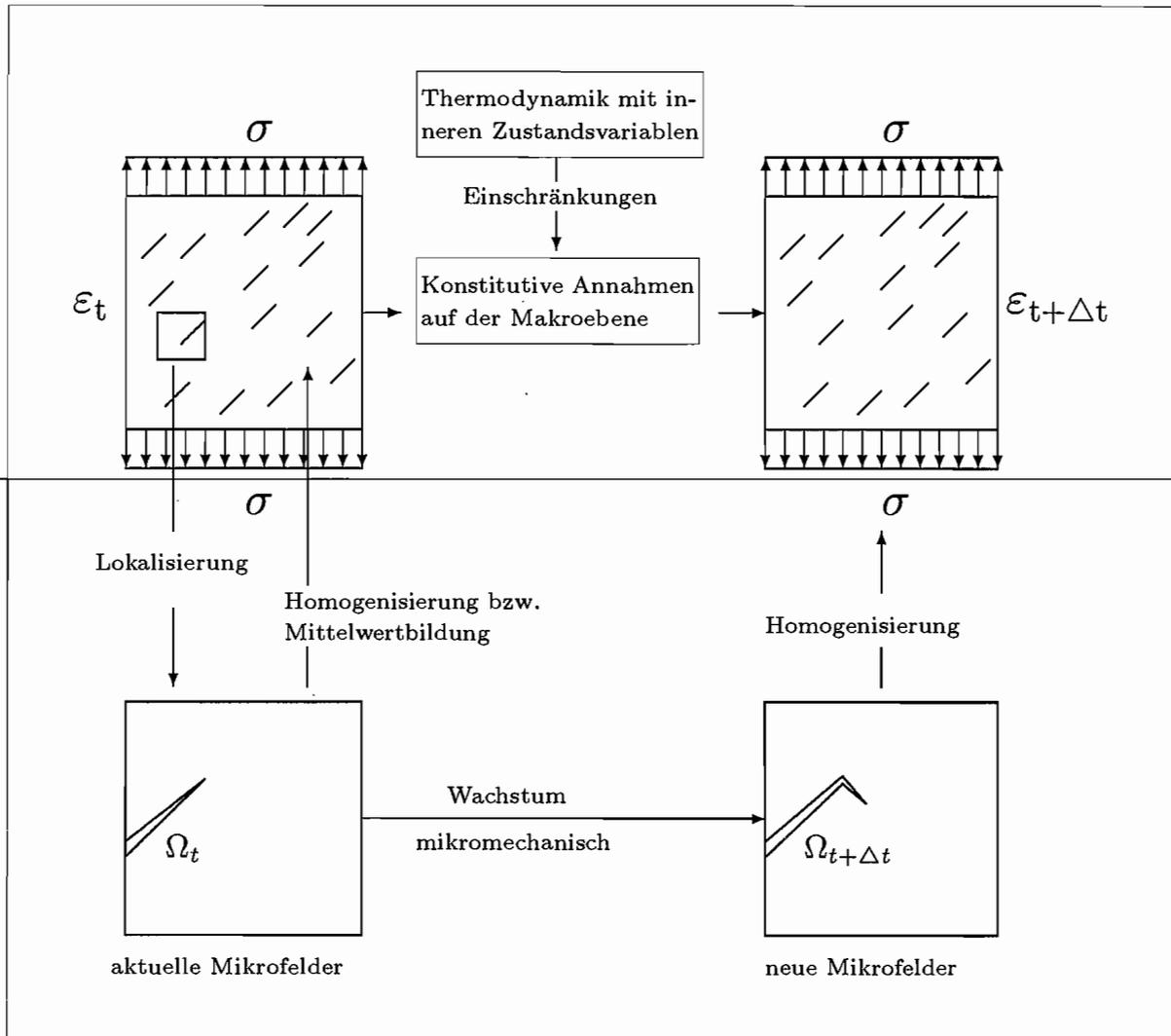
wenn  $\Xi_m$  ein beliebiges Mikrofeld darstellt. In Anhang 2 wird die von BRUHNS & DIEHL [31] verwendete gewichtete Mittelwertbildung beschrieben (Gleichung (5))

<sup>8</sup> Häufig werden diese Modelle auch als mikromechanische Schädigungsmodelle bezeichnet, obwohl die resultierenden Gesetze wieder phänomenologischen Charakter besitzen.

Anhang 2). Diese besitzt die Eigenschaft, daß die Randbedingungen von  $\Delta V$  einen geringeren Einfluß haben als bei ungewichteter Mittelung. Werden beliebig viele Teilvolumina  $V^\alpha$  eingeführt ( $\alpha$  beliebig), lautet (6.1)

$$\langle \Xi_m \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{(V_M)} \Xi_m dV + \frac{1}{\Delta V} \sum_{(\alpha)} \int_{(V^\alpha)} \Xi_m dV \quad (6.2)$$

mit  $V_M = \Delta V - \sum_{(\alpha)} V^\alpha$ .



**Abbildung 7:** Formulierung der materialabhängigen Gleichungen

### 6.1.1 Materialgesetze aus der Mikrostruktur, Homogenisierung

Eine mikromechanische Modellierung makroskopischen Verhaltens muß wieder auf Gesetze führen, die nicht gegen Gesetze der Physik, gegen anerkannte Grundprinzipien makroskopischer Theorien verstößt und muß qualitativ wieder auf das makroskopisch beobachtete Verhalten führen. Im Rahmen einer Plastizitätstheorie geschädigter Materialien sollte z.B. die Fließfläche wieder konvex sein und die Normalenregel gelten. (Die Gültigkeit der Normalenregel folgt aus den Untersuchungen von BERG [19] und wird auch in vielen Arbeiten, z.B. ROUSSELIER [188], bestätigt; wenn das Matrixmaterial der Normalenregel folgt, gilt dies auch für ein poröses Medium.)

Die makroskopischen Gesetze hängen nicht nur von der inneren Struktur (z.B. vom Gefüge bei Metallen oder der Matrix-Faser-Anordnung bei Faserverbundmaterialien), sondern auch von der Wahl der Geometrie von  $\Delta V$ , den Randbedingungen auf dessen Oberfläche  $\partial(\Delta V)$  und der speziellen Lokalisierungs- und Homogenisierungsprozedur ab. Z.B. würde eine quadratische Anordnung von Fasern bzw. eine einfache kubische Anordnung von Teilchen nicht automatisch auf transversal-isotropes bzw. isotropes makroskopisches Verhalten führen. Um Transversal-Isotropie zu erhalten, ist eine hexagonale Symmetrie von  $\Delta V$  erforderlich (RAMMERSTORFER [183]; ZAVALIANGOS & ANAND [226]; SUQUET [202]). Im Rahmen einer Schädigungstheorie gelten die selben Bedingungen, wenn Fasern und Teilchen z.B. durch Mikrorisse und -poren ersetzt werden. Die Geometrie von  $\Delta V$  repräsentiert in einer speziellen Weise bereits einen inneren Zustand MAUGIN [139]. Weiterhin existieren keine definierten Randbedingungen. Die vorgegebene makroskopische Last ist kein Wert an definierten Punkten in  $\Delta V$  bzw. auf  $\partial(\Delta V)$ , sondern der Mittelwert eines Feldes. In diesem Sinne ist das betrachtete Problem schlecht gestellt MAUGIN [139] (das Makroverhalten muß bereits in gewissem Grade bekannt sein, um es aus einem mikromechanischem Modell herleiten zu können).

Weitere Einschränkungen der mikromechanischen Modellierung ergeben sich aus der Forderung, daß die makroskopischen Spannungs- und Verzerrungstensoren (d.h. beispielsweise  $\underline{\underline{\sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}_m \rangle$  bzw.  $\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \langle \underline{\underline{\mathbf{S}}}_m \rangle$  und  $\underline{\underline{\epsilon}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}}_m \rangle$ ) aus den entsprechenden homogenisierten Mikrofeldern wieder arbeitskonjugierte Größen darstellen müssen (NEMAT-NASSER [161]);

$$\rho \dot{w} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}_m \rangle \cdot \langle \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m \rangle = \langle \rho_m \dot{w}_m \rangle \quad . \quad (6.3)$$

Diese Bedingung wird auch als Prinzip der Makrohomogenität von Hill und Mandel bezeichnet MAUGIN [139]. Analog gelte (6.3) u.a. auch für die dissipierte Energie, die



Abhängigkeit der effektiven Nachgiebigkeit von einer charakteristischen Länge  $l$  auf den Faktor  $l^{-3}$  reduzieren. Die betreffende Größe ist - wie jede Kontinuumsvariable - ein Volumenmittelwert.

### 6.1.2 Formulierung eines Materialgesetzes

#### a) homogene Randspannungsverteilungen

Wird die Oberfläche  $\partial(\Delta V)$  von  $\Delta V$  durch einen homogenen Spannungsvektor  $\underline{\mathbf{t}}_m$  belastet, d.h.

$$\underline{\mathbf{t}}_m = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_0 \cdot \underline{\mathbf{n}} \quad (6.6)$$

mit  $\underline{\mathbf{n}}$  als äußerer Flächennormale von  $\partial(\Delta V)$  und  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_0$  als konstantem räumlichen Spannungstensor, dann ergibt der Mittelwert nach (6.1) des inhomogenen Mikrofeldes  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_m$  gerade wieder den homogenen Spannungstensor  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_0$ ;

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \langle \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_m \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{(\Delta V)} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_m \, d(\Delta V) = \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_0 \quad (6.7)$$

Das aus dem homogenen Spannungstensor  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_0$  resultierende Geschwindigkeitsfeld  $\underline{\mathbf{v}}_m$  ist sowohl im Inneren von  $\Delta V$  als auch auf  $\partial(\Delta V)$  inhomogen, d.h.  $\underline{\mathbf{v}}_m \neq \underline{\underline{\mathbf{L}}}_0 \cdot \underline{\mathbf{X}}_m$ , wobei  $\underline{\mathbf{X}}_m$  der Ortsvektor auf der Mikroebene ( $\underline{\mathbf{X}}_m \in \Delta V$ ) und  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_0$  ein konstanter räumlicher Geschwindigkeitsgradient mit

$$\underline{\underline{\mathbf{L}}}_0 = \langle \underline{\underline{\mathbf{L}}}_m \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{(\Delta V)} \underline{\underline{\mathbf{L}}}_m \, d(\Delta V) \quad (6.8)$$

ist.  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_0$  entspricht gerade den über  $\partial(\Delta V)$  gemittelten Werten von  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_m$ , und bei ungeschädigten Materialien kann angenommen werden, daß  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_m$  an den Rändern von  $\Delta V$  nur wenig von  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_0$  abweicht (BISCHOFF-BEIERMANN [26]).

#### b) homogene Randgeschwindigkeitsverteilungen

Wird die Oberfläche  $\partial(\Delta V)$  von  $\Delta V$  hingegen durch ein homogenes Geschwindigkeitsfeld  $\underline{\mathbf{v}}_m$  belastet, d.h.  $\underline{\mathbf{v}}_m = \underline{\underline{\mathbf{D}}}_0 \cdot \underline{\mathbf{X}}_m$ , dann folgt analog Gleichung (6.7)

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \langle \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{(\Delta V)} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m \, d(\Delta V) = \underline{\underline{\mathbf{D}}}_0 \quad (6.9)$$

für den Mittelwert des Geschwindigkeitsgradienten. Wird die aus  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_0$  resultierende inhomogene Spannungsverteilung  $\underline{\mathbf{t}}_m$  über die Oberfläche von  $\Delta V$  gemittelt (erstes Moment), kann der Mittelwert durch  $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}_0 \cdot \underline{\mathbf{n}}$  und Gleichung (6.7) beschrieben werden.

Bei Vorgabe homogener Spannungs- oder Geschwindigkeitsverteilungen auf  $\partial(\Delta V)$  folgt mit Gleichung (6.1) und aus den obigen Definitionen die Homogenisierungsvorschrift

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \langle \underline{\underline{\sigma}}_m \rangle \\ \underline{\underline{\mathbf{L}}} &= \langle \underline{\underline{\mathbf{L}}}_m \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{D}}} &= \langle \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m \rangle \\ \underline{\underline{\mathbf{W}}} &= \langle \underline{\underline{\mathbf{W}}}_m \rangle \end{aligned} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Randbedingungen nach a) und b) führen allgemein auf verschiedene makroskopische Materialgesetze, es sei denn, es werden selbstkonsistente Verfahren zur Bestimmung der Mikrofelder verwendet MAUGIN [139].

Das weitere Vorgehen zur Formulierung makroskopischer Materialgesetze läßt sich in 5 Schritte unterteilen:

- (i) Modellierung des Matrixmaterials,
- (ii) Modellierung der Mikrodefektkonfiguration,
- (iii) Definition eines Schädigungsmaßes auf der Mikro- und Makroebene,
- (iv) Definition der Schädigungsevolution auf der Mikro- und Makroebene und
- (v) Ermittlung der Mikrofelder.

Jeder der einzelnen Schritte ist mit allen weiteren gekoppelt. So schränken die Berechnungsmöglichkeiten der Mikrofelder die Modellierung des repräsentativen Volumenelementes auf einen nicht allzu komplizierten Aufbau ein. In jeder der betrachteten Arbeiten waren die einzelnen Schritte (i) - (v) mit unterschiedlichen Näherungen, Annahmen, Einschränkungen und Vorgehensweisen (Lösungsmethoden) verbunden. Eine globale Einschätzung der verwendeten Methoden oder ein Vergleich untereinander ist kaum möglich. Jedes einzelne Modell müßte hinsichtlich seiner Vor- und Nachteile gesondert betrachtet werden. Im folgenden Abschnitt kann daher nur ein Überblick über die in der betrachteten Literatur verwendeten Methoden angegeben werden.

Zur Erleichterung der Lösung wird oftmals ein Weg eingeschlagen, bei dem ein repräsentatives Volumenelement  $\Delta V$  durch ein fiktives bzw. äquivalentes Volumenelement ersetzt wird. Die resultierenden Modelle werden an dieser Stelle als *Analogiemodelle* bezeichnet und in einem folgenden Abschnitt anhand von Beispielen untersucht.

## 6.2 Bemerkungen zu mikromechanisch begründeten Schädigungsmodellen

Entsprechend Abschnitt 2.2 können Mikrodefekte die Größenordnung weiterer Strukturelemente (bei Metallen entsprechend einzelne Körner oder Einschlüsse, etc.) besitzen. In diesem Fall müßte  $\Delta V$  als Körper modelliert werden, der aus diskreten Bausteinen zusammengesetzt ist. Es muß nicht betont werden, daß der erforderliche Berechnungsaufwand und experimentelle Aufwand zur Bestimmung der notwendigen Materialkennwerte auf der Mikroebene die heutigen Möglichkeiten überschreitet. Existierende Untersuchungen beschränken sich auf wenige Körner und Defekte (z.B. STOWELL [200]; KRZEMINSKI [108]).

In mikromechanisch orientierten Arbeiten wird das Material, das die Defekte umgibt, näherungsweise wieder durch ein Kontinuum beschrieben und nicht als diskrete Struktur. Das Verhalten der Materialmatrix wird durch makroskopische Materialgesetze definiert. Die Entstehung und Ausbreitung der Mikrodefekte in  $\Delta V$  unterliegt somit Gesetzen, die im Rahmen der Analyse geometrischer Unstetigkeiten eines Kontinuums untersucht werden können (NAJAR [158]). Im Regelfall wird die Materialmatrix wie bei NEMAT-NASSER & OBATA [162] oder JANSSON & STIGH [86] als ungeschädigt betrachtet. TVERGAARD [210] betrachtet auch diese als geschädigt und beschreibt sie durch Materialgesetze, die erst bestimmt werden sollen. Dieses Vorgehen kann daher nur qualitative Aussagen liefern (BENSON [17]). Ob für die Materialmatrix Gesetze der makroskopischen Kontinuumstheorie verwendet werden können, ist zwar eine grundsätzliche Frage, die aber für ingenieurtechnische Probleme von geringerer Bedeutung ist.

Mikrodefekte liegen in einem repräsentativen Volumenelement  $\Delta V$  in sehr großer Anzahl vor, sind hierin stochastisch verteilt und unterscheiden sich hinsichtlich Größe und Orientierung, wobei eine Vorzugsorientierung auftreten kann. In der Literatur werden aber meist Mikrodefekte verwendet, die gleiche Größe und Orientierung besitzen und periodisch in  $\Delta V$  angeordnet sind (z.B. JANSSON & STIGH [86]; BAŽANT [7]; HULT [81]). Mehrere Arbeiten haben sich der Untersuchung der Effekte gewidmet, die bei Änderung der Mikrodefektanordnung bei gleichzeitig konstantem makroskopischen Schädigungsmaß auftreten. M.KACHANOV [93] betrachtete ebene Probleme mit unterschiedlichen Verteilungen und Orientierungen einer festen Anzahl von Rissen der selben Länge in einer linear elastischen Matrix. Es zeigte sich, daß die mittleren Verschiebungsdiskontinuitäten durch die Risse und somit auch die effektiven Elastizitäts-

moduli relativ unempfindlich gegenüber den Wechselwirkungen der Risse sind. Hingegen war ein instabiles Verhalten der Bruchparameter (hier Spannungsintensitätsfaktoren) zu beobachten. Die Ursache dieses Verhaltens liegt in der Definition der bruchbezogenen Größen durch die lokalen Mikrofelder, hingegen sind die effektiven elastischen Eigenschaften durch Volumenmittelwerte definiert. Eine Untersuchung von Porenverteilungseffekten in einer duktilen Matrix erfolgte u.a. durch NEEDLEMAN & KUSHNER [159], BENSON [17], QIU & WENG [180] oder XU & NEEDLEMAN [224]. Die Ergebnisse lassen sich in folgender Weise zusammenfassen. Elastische Eigenschaften besitzen eine geringe Empfindlichkeit gegenüber Änderungen der Porenanordnung. Das plastische Verhalten wird hingegen signifikant beeinflusst. Dieser Effekt ist vor allem durch die Empfindlichkeit der Fließspannung determiniert. Auch die Festigkeit des Materials wird durch die jeweilige Porenverteilung bestimmt, was auch die Bruchdehnung in starkem Maße streuen läßt. Der Porenverteilungseffekt wächst mit sinkendem Porenvolumenanteil (NEEDLEMAN & KUSHNER [159]) oder sinkender Porenanzahl (BENSON [17]). Die Variationen der Versagensspannung durch Änderung der Porenverteilung sind vergleichbar mit den Variationen durch Verdopplung des Anfangsporenvolumenanteils. Periodische Anordnungen der Mikrodefekte in  $\Delta V$  sind daher vor allem zur Bestimmung elastischer Eigenschaften geeignet (z.B. JANSSON & STIGH [86]). Hinsichtlich plastischer Deformationen oder des Versagensverhaltens liefern periodische Anordnungen zu hohe Werte für die Fließspannung oder die Bruchdehnung (NEEDLEMAN & KUSHNER [159]). Zur Berücksichtigung statistischer Schwankungen von Orientierung und Anordnung der Mikrodefekte schlagen ONAT [165] und M.KACHANOV [93] einen Weg vor, der die mehrmalige Berechnung der Mittelwerte der Mikrofelder mit jeweils geänderter Defektverteilung in  $\Delta V$  beinhaltet.

Neben der Modellierung durch periodische Defektanordnungen beschränken sich andere Autoren auf geringe Defektdichten, um Wechselwirkungen zwischen den Defekten auf ein Minimum zu reduzieren. In diesen Fällen kann das Problem der Bestimmung des makroskopischen Verhaltens auf die Bestimmung des Einflusses eines einzelnen Mikrodefekts in einem Teilvolumen  $V^\alpha$  von  $\Delta V$  reduziert und somit vereinfacht werden. Mit Hilfe der Homogenisierungsvorschrift (6.2) können dann die gesuchten makroskopischen Beziehungen erhalten werden. Ein Überblick zu Lösungsvorschlägen bei Mikrorissen und flachen Poren geben NEMAT-NASSER, YU & HORI [160] an. Weitere Beispiele für dieses Vorgehen sind die Arbeiten von NEMAT-NASSER & OBATA [162] für schwache Verteilungen von Risse in spröden Materialien, von ONAT [165] für schwache Verteilungen kreisförmiger flacher Poren in elastischer

Matrix oder von QIU & WENG [180] für Poren in elastisch-plastischer Matrix. Die Bestimmung der Mikrofelder mit oder ohne Berücksichtigung der Defekt-Wechselwirkungen ist für allgemeine dreidimensionale Zustände ein sehr komplexes Problem, das meist nur durch numerische Näherungsverfahren zu lösen ist. Andererseits existieren einige Verfahren, die eine Ermittlung der Mikrofelder auch auf analytischem Wege zulassen. Einige dieser Verfahren, z.B. die Einführung komplexer Spannungsfunktionen nach Muskhelishvili (siehe TIROSH & MILLER [206]; HAHN [74]), lassen sich nur für relativ einfache ebene Probleme erfolgreich anwenden. Wie auch immer, eine erste Vereinfachung des Problems läßt sich mit Hilfe einer Integraltransformation erzielen. Die vorhandenen partiellen Differentialgleichungen der Urbildfunktion  $x(t)$  werden mit Hilfe der Integraltransformation in gewöhnliche Differentialgleichungen überführt, was die Lösung für die Transformierten (Bildfunktion  $\hat{x}(s)$ ) vereinfacht. Die Urbildfunktion ist dann durch die Bildfunktion eindeutig bestimmt. Eine Integraltransformation einer Funktion  $x(t)$  ist allgemein durch

$$\hat{x}(s) = \int_a^b x(t) K(s, t) dt \quad (6.11)$$

definiert. Häufig werden keine endlichen Integraltransformationen verwendet ( $a = -0$  und  $b = \infty$ ). Die Integraltransformationen unterscheiden sich in der Wahl der Funktion  $K$ . Die wichtigsten Integraltransformationen sind:  
Laplace-Transformation ( $\mathcal{LT}$ )

$$\mathcal{LT}(x) = \int_{-0}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (6.12)$$

Fourier-Transformation ( $\mathcal{FT}$ )

$$\mathcal{FT}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0}^{\infty} x(t) e^{-ist} dt \quad (6.13)$$

( $i$  - komplexe Zahl). Die Rücktransformationen lauten:

$$\mathcal{LT}^{-1}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \hat{x}(s) e^{st} ds \quad (6.14)$$

$$\mathcal{FT}^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(s) e^{ist} ds . \quad (6.15)$$

Die durch Integraltransformationen hergeleiteten Integralgleichungen lassen sich nicht immer in geschlossener Form lösen, hier ist man wieder auf numerische Lösungen

angewiesen. Für einige ebene oder rotationssymmetrische Probleme linearer Elastizität sind Lösungen vor allem aus der Bruchmechanik bekannt.

Neben den exakten analytischen Lösungsmethoden wurden auch Methoden entwickelt, die auf Näherungsannahmen basieren, so daß das Problem wieder auf analytischem Wege gelöst werden kann. Da sie nur mit den Mittelwerten der Mikrofelder in den einzelnen Komponenten (hier Matrix und Defekte) in  $\Delta V$  arbeiten, werden diese auch als *mean field theories* bezeichnet (RAMMERSTORFER [183]) und eignen sich als Näherung für die betrachteten Probleme. Diese Methoden wurden zur Beschreibung effektiver Eigenschaften von Polykristallen, Materialien mit Inhomogenitäten und Kompositen entwickelt. Die Mikrodefekte können nun als Bereiche  $V^\alpha$  mit verschwindender Steifigkeit betrachtet werden. Nicht alle Methoden eignen sich zur Beschreibung von Materialien mit Mikrodefekten. Die Vielzahl von Lösungsvorschlägen läßt sich auf wenige grundlegende Ansätze zurückführen. Diese grundlegenden Ansätze lassen sich jeweils zu den drei im Abschnitt 6.1.2 dargestellten Möglichkeiten zur Formulierung eines Materialgesetzes zuordnen.

- (i) Wird ein konstantes Spannungsfeld in  $\Delta V$  (Sachs, Reuss) vorgegeben, läßt sich die Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\underline{\underline{D}}_m$  mit Hilfe der Materialgesetze der Matrix und der Defekte ermitteln und somit auch  $\underline{\underline{D}} = \langle \underline{\underline{D}}_m \rangle$ . In Materialien mit Mikrodefekten können große Abweichungen vom homogenen Spannungszustand auftreten. Da die Defekte eine verschwindende Steifigkeit besitzen, strebt  $\underline{\underline{D}}_m$  und folglich auch  $\underline{\underline{D}}$  gegen Unendlich. Diese Annahme muß in dieser Situation verworfen werden.
- (ii) Wird ein konstantes Dehnungs- bzw. Verzerrungsgeschwindigkeitsfeld in  $\Delta V$  (Taylor, Voigt) vorgegeben, lassen sich die lokalen Spannungen  $\underline{\underline{\sigma}}_m$  und hieraus die makroskopischen Spannungen  $\underline{\underline{\sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}_m \rangle$  ermitteln. Die Gleichgewichtsbedingungen sind hier an den Porenrändern nicht erfüllt.  $\underline{\underline{\sigma}}$  ist eine obere Schranke für den realen Spannungszustand. Wird z.B. an dieser Stelle mit  $V^\alpha$  das Volumen einer Mikropore bezeichnet, muß in  $V^\alpha$  die Mikrospannung  $\underline{\underline{\sigma}}_m$  verschwinden. Für die makroskopische Spannung ergibt sich mit (6.2)

$$\langle \underline{\underline{\sigma}}_m \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{(V_M)} \underline{\underline{\sigma}}_m \, dV = \frac{1}{V_M + \sum_{(\alpha)} V^\alpha} \int_{(V_M)} \underline{\underline{\sigma}}_m \, dV \quad (6.16)$$

Aus (6.16) folgt, daß Anisotropien durch die Form der Mikroporen nicht berücksichtigt werden. Diese Annahme eignet sich daher nicht zur Beschreibung schädigungsinduzierter Änderungen der Anisotropierichtungen.

- (iii) Zur Bestimmung effektiver Eigenschaften von Polykristallen und Materialien

mit Inhomogenitäten wurde eine Klasse von Methoden entwickelt, die unabhängig von den gewählten Randbedingungen ( $\underline{\underline{\sigma}}_0$  oder  $\underline{\underline{D}}_0$ ) gleiche makroskopische Materialgesetze liefern und als selbstkonsistente Methoden bezeichnet werden. Die grundlegenden Ideen dieser Methodik lassen sich auf eine Arbeit von ESHELBY [61] (siehe BISCHOFF-BEIERMANN [26]) zurückführen und beruhen auf der Lösung des Einschlußproblems für linear-elastisches Materialverhalten. Selbstkonsistente Methoden lassen sich auch erfolgreich zur Bestimmung effektiver Eigenschaften geschädigter Materialien verwenden (z.B. HUANG, HU & CHANDRA [80] – Mikrorisse in elastischer Matrix; JANSSON & STIGH [86] – Mikroporen in elastischer Matrix; QIU & WENG [180] – Mikroporen in elastisch-plastischer Matrix). Der hierfür zugrunde liegende Ansatzpunkt soll kurz dargestellt werden. Das Einschlußproblem beinhaltet die Ermittlung der Spannungen und Verzerrungsgeschwindigkeiten einer Inhomogenität  $V^\alpha$  in einer kontinuierlichen Matrix mit Rändern im Unendlichen, die homogen belastet werden. Die Matrix wird durch die gesuchten makroskopischen Materialgesetze beschrieben. Wird der Einschluß durch Matrixmaterial ersetzt und erfährt der Bereich  $V^\alpha$  eine spannungsfreie Transformationsdehnung  ${}^T\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha$  wurde das Einschlußproblem durch ein Transformationsproblem ersetzt. Der transformierte Bereich wird auf seine ursprüngliche Größe durch eine homogene Spannung

$${}^T\underline{\underline{\sigma}}_\alpha = -(\underline{\underline{C}}^{(4)})^{-1} \cdot {}^T\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha \quad (6.17)$$

deformiert und in die Matrix eingesetzt. Wird nun dem gesamten Körper eine homogene Spannung  $\underline{\underline{\sigma}}^\infty$  überlagert, lassen sich die homogenen Spannungen  $\underline{\underline{\sigma}}_\alpha$  und Verzerrungen  $\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha$  im Transformationsbereich nach KRÖNER [107] und JANSSON & STIGH [86] wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_\alpha &= \underline{\underline{\sigma}}^\infty + \underline{\underline{E}}_\alpha^{(4)} \left[ \frac{1}{8\pi^2} \int_{S_3} z_\alpha(\underline{\underline{\sigma}}_\alpha(\underline{\underline{\sigma}}^\infty)) dA - z_\alpha(\underline{\underline{\sigma}}_\alpha(\underline{\underline{\sigma}}^\infty)) \right] \\ &= \underline{\underline{\sigma}}^\infty + \underline{\underline{E}}_\alpha^{(4)} [\underline{\underline{\epsilon}}^\infty - \underline{\underline{\epsilon}}_\alpha] \\ \underline{\underline{\epsilon}}_\alpha &= \underline{\underline{\epsilon}}^\infty + {}^T\underline{\underline{\epsilon}}_\alpha \end{aligned} \quad (6.18)$$

( $z_\alpha$  bzw.  $\underline{\underline{E}}_\alpha^{(4)}$  - Materialgesetz bzw. Eshelby-Tensor 4. Stufe des Einschusses  $\alpha$ ).  $\underline{\underline{E}}_\alpha^{(4)}$  ist eine Funktion der Eigenschaften der Matrix und der Geometrie des Transformationsbereiches. Neben der Homogenisierung über  $\Delta V$  nach (6.2) erfolgt diese auch über den Raum aller Orientierungen von  $V^\alpha$  und liefert die Gleichungen zur Bestimmung der effektiven Eigenschaften des makroskopischen Kontinuums.

Die Lösung nach Eshelby ist für verschwindende Volumenanteile  $\sum_{(\alpha)} \frac{V^\alpha}{\Delta V}$  der Einschlüsse gültig. Befriedigende Ergebnisse werden nach RAMMERSTORFER [183]

noch mit  $\sum_{(\alpha)} \frac{V^\alpha}{\Delta V} \leq 0.1$  erhalten. Erweiterungen der selbstkonsistenten Methoden zur Berücksichtigung von Wechselwirkungen zwischen den Einschlüssen basieren auf der Arbeit von MORI & TANAKA [147]. Für die mittlere Spannung in der Materialmatrix mit vielen von Form und Volumen identischen Einschlüssen  $V^\alpha$  läßt sich der folgende Ausdruck angeben:

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_M = \underline{\underline{\sigma}}^\infty - \left[ \sum_{(\alpha)} \frac{V^\alpha}{\Delta V} \right] (\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)})^{-1} \left[ \underline{\underline{\mathbf{E}}}_\alpha^{(4)} \dots^T \underline{\underline{\epsilon}}_\alpha - {}^T \underline{\underline{\epsilon}}_\alpha \right] . \quad (6.19)$$

Sind nun die Inhomogenitäten keine Einschlüsse oder Monokristalle, sondern Mikroporen, unterscheidet sich das weitere Vorgehen kaum. Die Transformationsdehnung  ${}^T \underline{\underline{\epsilon}}_\alpha$  muß hier so bestimmt werden, daß im Transformationsbereich  $V^\alpha$  die Spannungen verschwinden. Für das weitere Vorgehen wird auf die angeführte Literatur verwiesen.

Zur Umgehung der oben beschriebenen Schwierigkeiten bei der Definition von  $\Delta V$  und bei der anschließenden Lösung wird in den Arbeiten von BRUHNS & DIEHL [31] und DIEHL [58] ein von den bisherigen Methoden abweichender Weg eingeschlagen. Ein Mikrofeld der Schädigung und alle weiteren Mikrofelder werden *ad hoc* eingeführt. Die Mikrofelder werden hierbei bei Annahme geringer Ausdehnung der  $V^\alpha$  ( $V^\alpha \ll \Delta V$ ) in quasihomogene Anteile und lokale Störungen aufgespalten (siehe auch Anhang 2):

$$\underline{\underline{\Xi}}_m = \underline{\underline{\Xi}}_{qhom}(\underline{\underline{\mathbf{X}}}') + \sum_{\alpha} \frac{V^\alpha}{\Delta V} \Delta \hat{\underline{\underline{\Xi}}}_\alpha \delta(\underline{\underline{\mathbf{X}}}' - \underline{\underline{\mathbf{X}}}'_\alpha) . \quad (6.20)$$

Das Mikrofeld (6.20) wird in eine Taylorreihe entwickelt, so daß nach der Homogenisierung alle makroskopischen Felder  $H$  wieder als Reihenentwicklungen vorliegen, z.B. für ein Skalarfeld

$$H = H_1 + H^0 + \operatorname{div} \underline{\underline{\mathbf{H}}}^1 + \dots . \quad (6.21)$$

Das erste Glied  $H_1$  kann als quasihomogener Anteil des Feldes  $H$  betrachtet werden. Alle weiteren Reihenglieder werden als Momente j-ter Ordnung interpretiert, mit deren Hilfe sich lokale Spannungs- und Temperaturerhöhungen, etc. beschreiben lassen. Das Schädigungsfeld besitzt keinen quasihomogenen Anteil. Die Momente, für die noch Evolutionsgesetze eingeführt werden müssen, sind zulässige Variable, da sie Mittelwerte über  $\Delta V$  sind.

Mikromechanisch orientierte Schädigungskonzepte können zumindest qualitativ alle beobachtbaren Phänomene beschreiben. Die vielen Näherungsannahmen erfordern aber auch weiterhin eine quantitative Anpassung an phänomenologische Experimente auf der Makroebene. Weiterhin sind immer noch phänomenologische Ansätze für die Schädigungsevolution notwendig. Gesetze zur Bildung neuer Defekte liegen nicht vor, und auch die Wachstumsgesetze vorhandener Defekte sind beschränkt. Wesentliche Fortschritte bei der Beschreibung der Schädigungsevolution auf der Mikroebene lassen sich nur dann erzielen, wenn die Materialmatrix nicht länger als Kontinuum betrachtet wird. Eine Konsequenz wäre eine unstetige Schädigungsevolution auf der Mikroebene.

### 6.3 Analogie-Modelle

In den vorangegangenen Ausführungen zu mikromechanisch begründeten Schädigungsmodellen wurde implizit davon ausgegangen, daß der Aufbau des verwendeten repräsentativen Volumenelementes  $\Delta V$ , von statistischen Schwankungen abgesehen, die Charakteristik der mikromechanischen Beobachtungen auch im Detail wiedergibt.

---

Diese detailgetreue Wiedergabe ist jedoch mit einem erheblichen Berechnungsaufwand verbunden. In Hinblick auf das makroskopische-phänomenologische Verhalten werden in Analogie-Modellen die stochastisch verteilten Mikrodefekte und die resultierenden makroskopischen Phänomene innerhalb von  $\Delta V$  durch fiktive bzw. äquivalente Defekte (meist einzelne Risse oder Poren) simuliert (BECKER & GROSS [15]). Größe und Orientierung der fiktiven Defekte werden so gewählt, daß eine größtmögliche Übereinstimmung mit den makroskopischen Eigenschaften der realen Mikrodefekte erzielt wird und alle im Experiment beobachteten Phänomene zumindest qualitativ beschrieben werden können.

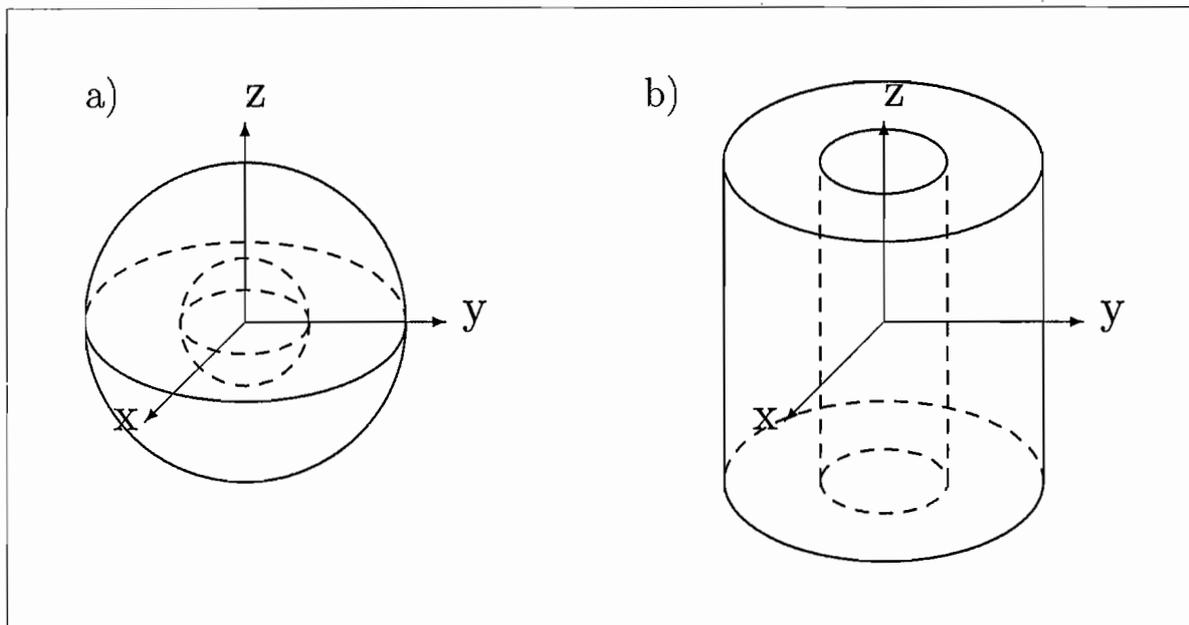
Mit Hilfe dieser Modelle lassen sich keine Aussagen über Mikroprozesse gewinnen, z.B. werden Wechselwirkungen zwischen einzelnen Defekten in der Regel nicht betrachtet. Im Rahmen einer Schädigungstheorie und bei der Betrachtung von Versagensprozessen sind gerade die Abweichungen von den Mittelwerten der Mikrofelder von besonderer Bedeutung. Ein weiterer allgemeiner Nachteil der Analogie-Modelle besteht in der fehlenden Möglichkeit, die postulierten Schädigungsverläufe zu verifizieren, da die fiktiven Defekte nicht direkt meßbar sind. Insofern sind die Größen zur Charakterisierung der fiktiven Defekte auch als Schädigungseffektmaße auf der Makroebene zu bezeichnen.

Beispiele für Analogie-Modelle, in denen die fiktiven Defekte durch einzelne Poren modelliert werden, sind die Arbeiten von GURSON [73] bzw. COCKS & ASHBY [47] mit plastischem bzw. Kriechgrundverhalten der Materialmatrix.

GURSON [73] untersucht plastisches Fließen von Materialien unter Berücksichtigung von Bildung und Wachstum von Mikroporen. Hierbei werden die in Abbildung 8 dargestellten fiktiven Elementarzellen zur Modellierung der plastischen Fließbedingung  $F$  und der Normalen-Fließregel nach (5.54) verwendet. Die Materialmatrix ist als isotropes starr-plastisches Kontinuum modelliert und gehorcht der von Mises-Fließbedingung. In  $\Delta V$  wird ein in gewissen Grenzen beliebiges Geschwindigkeitsfeld  $\underline{\mathbf{v}}_m$  vorgegeben und eine obere Schranke für  $\langle \underline{\underline{\sigma}}_m \rangle$  ermittelt, wobei  $\underline{\underline{\sigma}}_m$  das  $\underline{\mathbf{v}}_m$  verursachende Spannungsfeld ist. Das Vorgehen entspricht nicht den Ausführungen in Abschnitt 6.1.2 und führt auf keine eindeutige Lösung.

Nach Gleichung (2.64) und (6.3) folgt für die makroskopische Spannung  $\underline{\underline{\sigma}}$ :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}}_m \rangle = \frac{\partial \rho \dot{w}}{\partial \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(p)}} = \frac{1}{\Delta V} \int_{(\Delta V)} \underline{\underline{\sigma}}_m(\underline{\underline{\mathbf{D}}}_m) \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\mathbf{D}}}_m}{\partial \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(p)}} d(\Delta V). \quad (6.22)$$



**Abbildung 8:** Fiktives Volumenelement  $\Delta V$  mit a) langer kreiszylindrischer und b) kugelförmiger Pore

Die Porengeometrien sollen den experimentell beobachteten Formen der Mikroporen entsprechen, definierte Isotropien hervorrufen (totale Isotropie – Abbildung 8a

und Transversalisotropie Abbildung 8b) und durch ihre Symmetrieeigenschaften die Analyse vereinfachen GURSON [73]. Völlig unklar bleibt jedoch, wie die Größe der fiktiven Poren zu definieren ist. Hierbei soll einerseits der Porenvolumenanteil  $\omega$  der fiktiven Elementarzellen mit realen Materialien übereinstimmen, und andererseits sollen auch Wechselwirkungen zwischen benachbarten Poren *in irgendeiner Weise* berücksichtigt werden. Die Definition des Fließbeginns ist in dieser Arbeit ebenfalls unbefriedigend. Zwei Varianten werden angeboten: das Matrixmaterial muß nur teilweise oder vollständig plastifizieren, d.h. nach GURSON kann

$$\langle \underline{\underline{D}}_{(p)m} \rangle \neq \underline{\underline{0}} \quad \text{aber} \quad \underline{\underline{D}}_{(p)} = \underline{\underline{0}}$$

gelten. Dies widerspricht der Forderung einer Kontinuumstheorie, daß die makroskopischen Größen Mittelwerte eines Mikrofeldes sind.

Mit Hilfe der angeführten Annahmen leitet GURSON [73] mehrere konvexe Fließbedingungen  $F$  her, die plastisches Fließen bei kleineren Makro-Spannungen  $\underline{\underline{\sigma}}$  als bei ungeschädigten Materialien voraussagen und sich wie folgt zusammenfassen lassen:

$$F = C_{eqv}(\omega, \underline{\underline{D}}_{(p)}) \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + F'(\omega, \frac{\sigma_H}{\sigma_0}) = 0 \quad (6.23)$$

( $\sigma_0$  - Fließspannung des Matrixmaterials;  $C_{eqv}$  und  $F'$  - Funktionen der äußeren Belastung und des Porenvolumenanteils). Wird der Fließbeginn mit vollständiger Plastifizierung des Matrixmaterials verbunden, ergeben sich z.B. für Abbildung 8a die Funktionen

$$F' = 2\omega \cosh \left( \frac{3}{2\sigma_0} \sigma_H \right) - 1 - \omega^2 \quad \text{und} \quad C_{eqv} = 1$$

und für Abbildung 8b

$$F' = 2\omega \cosh \left( \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_0} 3\sigma_H \right) - 1 - \omega^2 ,$$

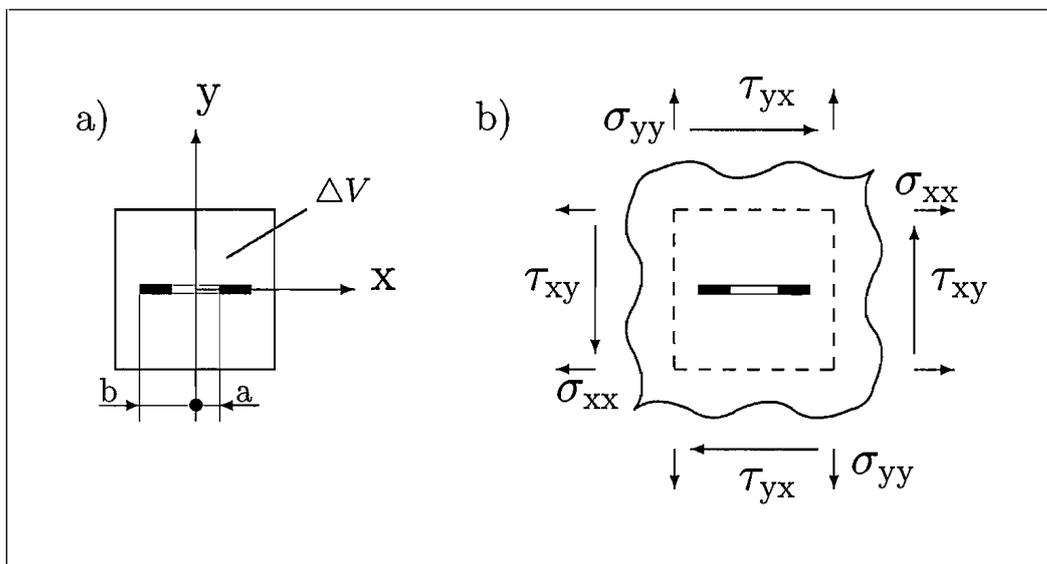
$$C_{eqv} = \begin{cases} (1 + 3\omega + 24\omega^6)^2 & \text{für } D_{(p)i3} = 0 \text{ bzw. ebener Verzerrungszustand} \\ 1 & \text{für } D_{(p)11} = D_{(p)22} \text{ bzw. Axialsymmetrie.} \end{cases}$$

Keine der betrachteten Fließbedingungen kann mikrophysikalisch begründet werden, vielmehr müssen hierzu phänomenologische Messungen herangezogen werden. Darüber hinaus bleiben weitere Fragen offen. Da hier nur ein skalares Schädigungsmaß

für beide Porengeometrien verwendet wird, das sowohl den isotropen als auch anisotropen Zustand beschreiben soll (Abbildung 8a bzw. 8b), versagt das Gurson-Modell bei Änderungen von Materialsymmetrien. Der Porenvolumenanteil  $\omega$  definiert den inneren Schädigungszustand nicht eindeutig - ein Verstoß gegen die Forderungen im Abschnitt 3.3. Zur Überwindung dieses Problems führen GOLOGANU, LEBLOND & DEVAUX [69] einen Formparameter  $S$  mit einer zugeordneten Evolutionsgleichung in die Fließbedingung (6.23) ein. Für zylindrische Hohlräume gilt  $S \rightarrow \infty$  und für kugelförmige Hohlräume  $S \rightarrow 0$ .

Das Gurson-Modell liefert qualitative Abschätzungen des phänomenologischen Verhaltens, und  $F$  in (6.23) kann als grobe Näherung betrachtet werden, die im Falle periodischer Porenanordnungen ohne Vorzugsorientierung gute Ergebnisse liefert (BENSON [17]). NEEDLEMAN und TVERGAARD modifizieren daher die Funktion  $F'$  zur besseren Anpassung an experimentelle Verläufe und führen drei zusätzliche Materialkoeffizienten  $q_1$ ,  $q_2$  und  $q_3$  entsprechend Gleichung (5.58) ein (siehe Abschnitt 5.4).

Ein Beispiel zur Modellierung anisotroper elastisch-mikroplastischer Schädigungsentwicklung unter Berücksichtigung von irreversiblen schädigungsinduzierten Verzerrungen durch Mikrorisse liefern die Arbeiten von BECKER & GROSS [15], [16] und BECKER [14]. Entsprechend Abbildung 9a enthält die fiktive Elementarzelle  $\Delta V$  nur einen zentralen Dugdale-Riß. Die Materialmatrix ist vollständig isotrop und linear-elastisch-plastisch. Es werden homogene Spannungsrandbedingungen verwendet.



**Abbildung 9:** Fiktives Volumenelement  $\Delta V$  mit Riβ

Aus der partiellen Ableitung der komplementären spezifischen inneren Verzerrungs-

energie  $\tilde{\Pi}_k$  der Elementarzelle  $\Delta V$  nach den Makrospannungen läßt sich analog Gleichung (5.16) der makroskopische Verzerrungstensor  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  bestimmen. Dieser kann in eine elastische Verzerrung des ungeschädigten Materials, eine durch Schädigung verursachte erhöhte elastische Verzerrung  $\varepsilon_{(s)ij}^e$  und in eine schädigungsinduzierte irreversible Verzerrung  $\varepsilon_{(s)ij}^i$  additiv aufgespalten werden.

Im zweidimensionalen Fall ergeben sich die folgenden Verzerrungskomponenten entsprechend Abbildung 9a [16]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} + \varepsilon_{(s)x}^e + \varepsilon_{(s)x}^i; \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} + \varepsilon_{(s)y}^e + \varepsilon_{(s)y}^i; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E}\tau_{xy} + \varepsilon_{(s)xy}^e + \varepsilon_{(s)xy}^i \end{aligned} \quad \begin{aligned} \varepsilon_{(s)ij} &= \varepsilon_{(s)ij}^e + \varepsilon_{(s)ij}^i \\ &= \frac{1}{2e^2} \int_{-b}^b (n_i b_j + n_j b_i) dx \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(s)x}^e &= 0; & \varepsilon_{(s)x}^i &= 0; \\ \varepsilon_{(s)y}^e &= \frac{\sigma_{yy}}{E} \frac{2\pi a^2}{e^2}; & \varepsilon_{(s)x}^i &= \frac{4\sigma_o}{E} \frac{a\sqrt{b^2 - a^2}}{e^2} - \frac{\sigma_y}{E} \frac{2\pi a^2}{e^2}; \\ \varepsilon_{(s)xy}^e &= \frac{\tau_{xy}}{E} \frac{\pi a^2}{e^2}; & \varepsilon_{(s)xy}^i &= \frac{2\tau_o}{E} \frac{a\sqrt{b^2 - a^2}}{e^2} - \frac{\tau_{xy}}{E} \frac{\pi a^2}{e^2} \end{aligned} \quad (6.25)$$

( $\underline{n}$  - Normalenvektor des Risses in Abbildung 9a;  $\sigma_0$  und  $\tau_0$  - Spannungen im Fließstreifen des Dugdale-Risses;  $e^2 = \Delta V$ ).

Zwar sind alle hier definierten Größen Mittelwerte über  $\Delta V$ , unbekannt bleiben aber die tatsächlichen Mikrofelder und das Verhalten bei geänderten Symmetrieverhältnissen. Durch die eingeschränkten Möglichkeiten zur Beschreibung der Evolution des fiktiven Risses können weiterhin keine Änderungen makroskopischer Materialsymmetrien beschrieben werden. Gesetze zur Beschreibung von Rißverzweigungen, die teilweise aus der dargestellten Ebene herausgehen, in einem u.U. anisotropen Material sind bislang nicht verfügbar (NEMAT-NASSER & OBATA [162]). Dies begrenzt die Anwendung einzelner fiktiver Zellmodelle auf wenige Belastungssituationen. Die Definition eines Versagenskriteriums kann ebenfalls nicht mikrophysikalisch begründet werden, da sich das Instabilitätsverhalten des fiktiven Risses von dem vieler wechselwirkender Risse unter mehrdimensionaler Belastung unterscheidet.

## 7. Modellierungskonzepte – Zusammenfassung

Das Effektivspannungskonzept läßt sich durch die folgenden Gleichungen allgemein wiedergeben:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \tilde{\mathfrak{F}} \{ \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}, T, \text{grad}T, \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}} \} = \tilde{\mathfrak{F}} \{ \underline{\underline{\boldsymbol{\tilde{\sigma}}}}, T, \text{grad}T, \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \} \quad (7.1)$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tilde{\sigma}}}} = \left[ \underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}^{(4)}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) \right]^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} . \quad (7.2)$$

Dem Effektivverzerrungskonzept, als Alternative zum Effektivspannungskonzept, basiert auf der gleichen Grundidee und kann analog beschrieben werden;

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \tilde{\mathfrak{O}} \{ \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}, T, \text{grad}T, \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}} \} = \tilde{\mathfrak{O}} \{ \underline{\underline{\boldsymbol{\tilde{\varepsilon}}}}, T, \text{grad}T, \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}} \} \quad (7.3)$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tilde{\varepsilon}}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\tilde{\Psi}^{(4)}}}}(\underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} . \quad (7.4)$$

Mit Hilfe der Tensoren  $\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}^{(4)}}}$  und  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tilde{\Psi}^{(4)}}}}$  wird in diesen phänomenologischen Konzepten versucht, sämtliche makroskopischen Effekte zu beschreiben. Die Aufgabe besteht nun, die Transformationstensoren  $\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}^{(4)}}}$  und  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tilde{\Psi}^{(4)}}}}$  zu definieren. In den betrachteten Arbeiten wurde davon ausgegangen, daß  $\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}^{(4)}}}$  und  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tilde{\Psi}^{(4)}}}}$  nur von der Mikrodefekt-konfiguration abhängig ist. Eine mikrophysikalische Definition dieser Größen erfolgte bisher aber nicht. Es konnte gezeigt werden, daß für  $\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}^{(4)}}}$  und  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tilde{\Psi}^{(4)}}}}$  auch eine Belastungsabhängigkeit bestehen muß und sie Schädigungseffektmaße sind. Eine eindeutige Definition von  $\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}^{(4)}}}$  und  $\underline{\underline{\boldsymbol{\tilde{\Psi}^{(4)}}}}$  aus der Mikrostruktur ist daher nicht möglich. Mit Hilfe der Transformationen (7.2) und (7.4) können nicht alle im Experiment beobachtbaren Phänomene geschädigter Materialien beschrieben werden.

Die energetischen Schädigungskonzepte reduzieren sich auf die Definition zweier Potentiale – z.B. die spezifische freie Enthalpie  $\Psi$  und ein Dissipationspotential  $\varphi$ :

$$\Psi = \mathcal{F} \{ \underline{\underline{\boldsymbol{S}}}, T, \text{grad}T, \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}} \} \quad (7.5)$$

$$\varphi = \mathcal{G} \left\{ \underline{\underline{\mathbf{S}}}, \text{grad}T, \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}}, \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}}}; \frac{\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}}{(r)}, T, \underline{\underline{\boldsymbol{\kappa}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\xi}}} \right\} . \quad (7.6)$$

Die Existenz dieser Potentiale ist keine Konsequenz der Thermodynamik. Physikalisch zulässige Materialgesetze, die aber nicht einem Potential gehorchen (z.B. nicht-assoziierte Fließgesetze) – eine ganze Klasse von Materialien – werden nicht betrachtet. Eine mikrophysikalische Definition der eingeführten Schädigungsparameter kann durch die fehlende Verifizierbarkeit von  $\Psi$  und  $\varphi$  nicht erfolgen.

Mikromechanisch orientierte Schädigungskonzepte besitzen den Vorteil des größeren Bezuges zur Mikrostruktur und können zumindest qualitativ alle beobachtbaren Phänomene beschreiben. Quantitative Abweichungen entstehen durch Näherungen bei der Modellbildung, der Ermittlung der Mikrofelder, dem Übergang zu den makroskopischen Feldern und werden durch die experimentellen Möglichkeiten zur Verifikation in ihrer Anwendung begrenzt. Die vom Standpunkt der Theorie grundsätzliche Überlegenheit mikromechanisch orientierter Schädigungsmodelle wird von einem stark ansteigenden experimentellen und Berechnungsaufwand begleitet. Postulierte Funktionsverläufe, Material- und Schädigungsparameter der mikromechanischen und

---

der phänomenologischen Modelle müssen heute meist noch aus phänomenologischen Messungen bestimmt werden, d.h. es erfolgt eine Anpassung beider Modellvorstellungen an die gleichen Verläufe (Schädigungs- und Materialparameter werden häufig aus den selben Messungen über Optimierungstrategien bestimmt). Die mikromechanischen und phänomenologischen Modelle enthalten die gleichen Informationen, es sind nur die verschiedenen Materialparameter entsprechend zu interpretieren.

Analogie-Modelle verwenden nur die Vorgehensweise mikromechanisch orientierter Konzepte. Die verwendete Mikrostruktur (fiktive Risse oder Poren) wird durch eine begrenzte Anzahl von Phänomenen definiert. Die makroskopischen Schädigungsvariablen sind ebenfalls Schädigungseffektmaße und eignen sich nicht zur Beschreibung von Phänomenen, die nicht zur Definition der Variablen verwendet wurden.

Gemeinsam ist allen Schädigungskonzepten, daß makroskopische Schädigungsvariablen eingeführt werden müssen. Die eingeführten Schädigungsvariablen (Beispiele siehe Anhang 1) unterscheiden sich hinsichtlich ihrer physikalischen Deutung und Eigenschaften. Diese Größen können klassifiziert und den Modellierungskonzepten zugeordnet werden:

- a) in phänomenologischen Konzepten wird die physikalische Natur der Defekte

ignoriert, *ad hoc* eingeführte Schädigungseffektmaße werden mikrophysikalisch interpretiert, z.B. CHABOCHE [37], [38], [39], LEMAITRE & DUFAILY [128];

- b) in Analogie-Konzepten beschreiben Schädigungsmaße die Geometrie fiktiver Defekte am Elementarvolumen, z.B. BAZANT [7], BECKER [14], BECKER & GROSS [15], [16], GURSON [73] und
- c) in mikromechanischen Konzepten beschreiben die Schädigungsmaße die Geometrie der Defektkonfiguration direkt und stellen daher Schädigungsmaße im oben definierten Sinne dar (z.B. NEMAT-NASSER & OBATA [162]; ONAT [165]; DIEHL [57]).

Die fehlende Differenzierung zwischen Schädigungsmaßen und -effektmaßen in phänomenologischen Konzepten und Analogie-Modellen erschwert

- die Aufstellung von Evolutionsgleichungen, die an Messungen der Mikrostruktur verifizierbar sind,
- die Erweiterung postulierter Schädigungsmodelle,
- die Bestimmung des Einflusses der Mikrostruktur auf einzelne Grundverhalten der Materialien,
- die Unterscheidung des Schädigungswachstums von der Schädigung selbst und
- die Definition physikalisch begründeter Versagenskriterien.

---

Eine eventuelle Wahl zwischen phänomenologischen oder mikromechanisch orientierten Schädigungskonzepten sollte vom Materialverhalten, den Belastungsbedingungen, den experimentellen und numerischen Möglichkeiten abhängig sein. Hierbei ist zu beachten, daß in Ingenieuranwendungen mikromechanische Modelle angemessen formulierte phänomenologische Theorien vorerst nicht ersetzen können (KRAJČINOVIC [101]).

## 8. Ein anisotropes Schädigungsmodell elastisch-plastischer Materialien

In diesem Kapitel soll ein Schädigungsmodell entwickelt werden, das zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von polykristallinem Metall mit Poren an Korngrenzen geeignet ist. Die Untersuchung erfolgt für eine schwache Verteilung der Poren. Reiß- oder Porenschließung soll nicht betrachtet werden (siehe Abschnitt 8.4).

Vielfach wird der irreversible Schädigungsanteil der Deformationsrate vernachlässigt (z.B. CHABOCHE [41]), oder es werden zumeist isotrope Schädigung und isotrope Dilatationen der Volumenelemente angenommen; z.B. CHABOCHE [38], DAVISON, STEVENS & KIPP [56], FELDMÜLLER [62], GURSON [73] und RABIER [181]. Diese Annahme ist vor allem zu Beginn von Schädigungsprozessen gerechtfertigt, wie auch die Ergebnisse in der zitierten Literatur zeigen. Mit fortschreitender Prozeßdauer und anisotroper Schädigung weist  $\underline{\underline{D}}_{(s)}$  mehr oder weniger ausgeprägte Vorzugsrichtungen

auf. Das Modell soll daher nicht nur Änderungen der Materialsymmetrien, sondern auch anisotrope schädigungsinduzierte Deformationen beschreiben.

RABIER [181] schlägt vor, den schädigungsinduzierten Deformationsgradienten  $\underline{\underline{F}}_s$  auf die Schädigungsvariable, die die Anisotropie der Porenverteilung hinsichtlich der Steifigkeits- und Festigkeitsänderungen abschätzt, zu beziehen. Folglich bestimmen einzig Porenform und -orientierung die Komponenten der Verzerrungen, – ein Standpunkt, der hier nicht vertreten wird. Die Mikromechanismen (d.h. die Geschichte der Schädigungsevolution) müssen bekannt sein, um die Orientierung der Defektkonfiguration auf die schädigungsinduzierten Verzerrungen eindeutig beziehen zu können.<sup>9</sup> Es soll daher ein Weg eingeschlagen werden, der diese zwei Aspekte verbindet.

Ausgangspunkt ist hier entsprechend Gleichung (2.65) und (2.82) die additive Auf-

<sup>9</sup> Z.B. würde ein gleichmäßiges Ablösen eines Matrixmaterials von einem ellipsoiden Einschuß isotrope schädigungsinduzierte Deformationen hervorrufen, aber eine orientierte Pore hinterlassen.

spaltung der Verzerrungsgeschwindigkeit:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(r)} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(p)} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(s)} . \quad (8.1)$$

Für die einzelnen Anteile von  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  werden dann konstitutive Gesetze formuliert. Die durch die schädigungsinduzierten Verzerrungen beschriebenen Dilatationen sollten hierbei wieder auf das gesamte relative Volumen der Mikroporen  $\xi$  führen.

## 8.1 Definition der Schädigungsvariablen für Porenschädigung

Im folgenden soll ein Schädigungsmaß definiert werden, das zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von polykristallinem Metall mit Poren an Korngrenzen und/oder ellipsoiden Hohlräumen geeignet ist. Diese sind bei plastischen Deformationen bei *tiefen* Temperaturen, d.h.  $T \leq 0.3T_s$  ( $T_s$  - Schmelztemperatur), typisch (GANDHI & ASHBY [67]). Die Untersuchung erfolgt für eine schwache Verteilung der Poren, wo der Abstand zwischen benachbarten Poren sehr viel größer als ihre charakteristische Länge ist. In diesem Fall können Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Poren, die z.B. durch die Defektdichte abgeschätzt werden können, vernachlässigt werden. Die Mikrospannungsfelder unterscheiden sich nur in der Nachbarschaft der Poren signifikant vom homogenen Makrospannungsfeld. Mikrospannungskonzentrationen, die durch die Bestimmung mittlerer Krümmungsradien an den *Hohlraumspitzen* bestimmt werden könnten, werden ebenfalls vernachlässigt (DANZER [53], MURAKAMI & OHNO [154]). Weiterhin zeigt M.KACHANOV in [93], daß bei dieser Verteilung die effektiven elastischen Module und das Deformationsverhalten unempfindlich gegenüber den Einzelheiten der Porenanordnung sind.

### Poren an Korngrenzen

Eine Definition der Schädigungsvariablen der Form (4.10) für Poren an Korngrenzen wird durch ONAT & LECKIE in [167] angegeben. Im Grenzfall eines infinitesimalen Oberflächenelementes  $d\mathcal{R}$ ,  $d\mathcal{R} \subset \mathcal{R}_3$ , definiert dies  $v(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}})$  als eine Dichte des Porenvolumens an den Korngrenzen je Flächeneinheit der Einheitskugel  $\mathcal{R}_3$ . Eine hierauf aufbauende Weiterentwicklung, die sichert, daß alle Koeffizienten der Reihenentwicklung Volumendichten sind, wird durch RABIER in [181] wiedergegeben. Es genügt hierzu,  $v$  durch  $\bar{\xi}$  wie folgt zu ersetzen:

$$\bar{\xi}(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}}) = \frac{v}{\Delta V^*} = \xi'(\underline{\mathbf{X}}) + f_{ij}(\underline{\mathbf{n}})\xi_{ij}(\underline{\mathbf{X}}) + f_{ijkl}(\underline{\mathbf{n}})\xi_{ijkl}(\underline{\mathbf{X}}) + \dots . \quad (8.2)$$

### Ellipsoide Hohlräume

In Erweiterung der Arbeit von ONAT & LECKIE und analog der Gleichung (4.7) sollen nun Hohlräume betrachtet werden, die mehrere ausgeprägte Richtungen besitzen (z.B. Poren in Tripelpunkten oder große Hohlräume, bei denen das umgebende Material wieder als Kontinuum betrachtet werden kann). Einen Vorschlag zur Beschreibung ellipsoider Hohlräume liefern JANSSON & STIGH [86]. Sie zeigen, daß diese in drei senkrecht aufeinander stehende Anteile zerlegt werden können.

Aufbauend auf diese Vorarbeit werden die Hohlräume durch Ellipsoide mit drei aufeinander senkrecht stehenden Halbachsen  $\underline{\mathbf{a}}_1 = a_1 \underline{\mathbf{n}}_1$ ,  $\underline{\mathbf{a}}_2 = a_2 \underline{\mathbf{n}}_2$ ,  $\underline{\mathbf{a}}_3 = a_3 \underline{\mathbf{n}}_3$  und dem Volumen  $V_p$  approximiert. Jedes der Ellipsoide kann nun wie drei unterschiedlich große Poren, die sich auf senkrecht zueinander stehenden Korngrenzen befinden, behandelt werden. Die Größe bzw. das jeweilige Volumen der drei Poren, welches der Richtung  $\underline{\mathbf{n}}_i$  zugeordnet wird, wird dann durch die Fläche  $A_i$  eines Schnittes durch den Mittelpunkt des Ellipsoids mit der Normalen  $\underline{\mathbf{n}}_i$  festgelegt, d.h.

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{n}}_1 &\rightarrow V_1 = A_1 \bar{A} V_p = a_2 a_3 \bar{A} V_p \\ \underline{\mathbf{n}}_2 &\rightarrow V_2 = A_2 \bar{A} V_p = a_1 a_3 \bar{A} V_p \\ \underline{\mathbf{n}}_3 &\rightarrow V_3 = A_3 \bar{A} V_p = a_1 a_2 \bar{A} V_p \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\text{mit } \bar{A} = \frac{1}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{1}{a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3}$$

Natürlich kann statt des Porenvolumens im ersten Fall die geschädigte Korngrenzenfläche und im zweiten Fall die Flächen  $A_i$  verwendet werden. Dies würde keine zusätzlichen Informationen beinhalten und nur die Einführung einer zusätzlichen Schädigungsvariablen, die das Porenvolumen beschreibt, erfordern.

Der isotrope Anteil  $\xi'(\underline{\mathbf{X}})$  der Porenorientierungsdichte  $\bar{\xi}$  in (8.2) kann mit Hilfe von (4.4) auch durch den Porenvolumenanteil  $\xi$  ausgedrückt werden:

$$\xi' = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta V_v^*}{\Delta V^*} = \frac{1}{2\pi} \xi \quad (8.4)$$

Mit Hilfe der Definition (8.2) kann  $2\pi\xi'(\underline{\mathbf{X}})$  als Abschätzung für die Forderung (iii) an die Mikrofelder der Schädigung verwendet werden.

Natürlich ist es für praktische Zwecke erforderlich, die Anzahl der Reihenglieder zu beschränken. Für den einfachsten anisotropen Fall wird angenommen, daß Tensoren höher als 2. Stufe mangels praktischer Bedeutung vernachlässigt werden können. Folglich reduziert sich der Vektor der inneren Zustandsvariablen der Schädigung  $\underline{\xi}$

auf eine skalare Größe  $\xi'$  bzw.  $\xi$  und eine tensorielle Variable  $\underline{\underline{\xi}}$ :

$$[\underline{\underline{\xi}}] = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\xi}} \\ \xi \end{bmatrix} . \quad (8.5)$$

Durch Berücksichtigung weiterer Reihenglieder läßt sich eine systematische Verbesserung der Genauigkeit erreichen. Eine Abschätzung des Fehlers, der mit dem Abbruch der Fourierreihe (8.2) nach dem zweiten Glied verbunden ist, ist nicht ohne weitere Einschränkungen möglich. Für eine konvergente Reihe wie die Fourierreihe gilt nach BRONSTEIN [29] die notwendige Bedingung, daß die Folge der Reihenglieder gegen Null strebt, d.h für das n-fache skalare Produkt zweier Tensoren n-ter Stufe (Basisfunktion und Fourierkoeffizient) gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \underline{\underline{\xi}}^{(n)} \cdot \dots \cdot \underline{\underline{f}}^{(n)} \right) = 0 . \quad (8.6)$$

Dennoch muß im Endlichen das Verhältnis der Beträge zweier aufeinanderfolgender Reihenglieder

$$\frac{\left| \underline{\underline{\xi}}^{(n+1)} \cdot \dots \cdot \underline{\underline{f}}^{(n+1)} \right|}{\left| \underline{\underline{\xi}}^{(n)} \cdot \dots \cdot \underline{\underline{f}}^{(n)} \right|}$$

nicht notwendig kleiner eins sein. Letzteres ist von der tatsächlich vorhandenen Verteilungsfunktion abhängig. Bisher muß jede Kombination von Fourierkoeffizienten in  $\bar{\xi}$  als zulässig betrachtet werden, solange  $1 \geq \bar{\xi}(\underline{\underline{n}}) \geq 0$ , d.h.

$$-\xi' \leq \sum_{k=1}^n \left[ \underline{\underline{\xi}}^{(2k)} \cdot \dots \cdot \underline{\underline{f}}^{(2k)} \right] \leq 1 - \xi' \quad \forall \underline{\underline{n}} \in \mathfrak{R}_3 , \quad (8.7)$$

gilt. Vom makroskopischen und physikalischen Standpunkt aus erscheint es aber gerechtfertigt anzunehmen, daß große Richtungsgradienten, welche Glieder höherer Ordnung erfordern, vernachlässigbar sind.

## 8.2 Thermischer Prozeß

Untersuchungen, die den thermischen Eigenschaften geschädigter Materialien gewidmet sind, konnten in der Literatur nicht gefunden werden. Dies legt die Vermutung nahe, daß sich in den betrachteten Prozessen die thermischen Eigenschaften nicht signifikant ändern. Es wird daher angenommen, daß die klassischen Gesetze und Annahmen zur Beschreibung der Temperaturänderung gelten.

Die Wärmeleitgleichung (2.76) läßt sich mit der spezifischen Wärmekapazität

$$c_p = -T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} , \quad (8.8)$$

den Gleichungen (2.81), (2.85) und der Beschränkung auf plastische Dissipation und Dissipation durch Schädigungsprozesse ( $\underline{\beta} = \text{const.}$ ) wie folgt darstellen:

$$c_p \dot{T} = \underset{(d)}{\dot{w}} - \frac{1}{\rho} \text{div}(\underline{\mathbf{q}}) + T \dot{\eta} + T \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial \underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{S}}} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial \underline{\alpha}} \cdot \underline{\dot{\alpha}} \right\} . \quad (8.9)$$

Werden die Koppelterme in der geschweiften Klammer und die Entropieproduktion durch innere Prozesse  $\dot{\eta}$  vernachlässigt – was als Standardannahme bezeichnet werden kann – vereinfacht sich (8.9) zu

$$c_p \dot{T} = \underset{(d)}{\dot{w}} - \frac{1}{\rho} \text{div}(\underline{\mathbf{q}}) . \quad (8.10)$$

Mit Gleichung (2.86) (2.66) und (2.82) folgt für die Temperaturänderung (FELDMÜLLER [62])

$$\dot{T} = \frac{1}{c_p} \left[ \frac{1}{\rho_0} \underline{\mathbf{S}} \cdot \cdot \left( \beta \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \right) - \frac{1}{\rho} \text{div}(\underline{\mathbf{q}}) \right] . \quad (8.11)$$

Für die betrachteten moderaten Prozeßgeschwindigkeiten läßt sich  $\underline{\mathbf{q}}$  in erster Näherung durch das Fourier'sche Gesetz der Wärmeleitung

$$\underline{\mathbf{q}} = -\lambda_f(T) \text{grad}(T) \quad (8.12)$$

beschreiben.

### 8.3 Elastische Deformationen

Wir beschränken uns auf Materialien, bei denen die thermische Zustandsgleichung vom Verfestigungszustand unabhängig ist. Mit der freien Enthalpie nach (2.67) und der thermischen Zustandsgleichung (2.72) sind die reversiblen Verzerrungen dann eine Funktion des folgenden Variablensatzes:

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{(r)} = \underline{\underline{\epsilon}}_{(r)}(\underline{\underline{\mathbf{S}}}, T, \underline{\underline{\xi}}) . \quad (8.13)$$

Aus Gleichung (8.13) kann das folgende inkrementelle Gesetz für die reversiblen Verzerrungen hergeleitet werden:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(r)} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(r)} \left( \underline{\underline{\mathbf{S}}}, \underline{\underline{\mathbf{S}}}, T, \dot{T}, \underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\xi}} \right) . \quad (8.14)$$

Wir beschränken uns weiterhin auf Materialien, deren reversible Verzerrungen dem tensorlinearen Gesetz

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{(r)} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}(T, \underline{\underline{\xi}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} + \alpha(T - T^0) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \quad (8.15)$$

folgen, das aus folgendem Ansatz für den elastischen Anteil der freien Enthalpie  $\Psi_e$  hervorgeht:

$$\Psi_e = -\frac{1}{2\rho^0} \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} - \frac{1}{\rho^0} \alpha(T - T^0) \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} - g(T, \underline{\underline{\xi}}) . \quad (8.16)$$

Der gewichtete Cauchy'sche Spannungstensor  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$  nach (2.64) läßt sich unter Verwendung von (4.4), (4.5) und bei Annahme kleiner elastischer Verzerrungen (gegenüber den Gesamtverzerrungen), d.h.

$$\Delta V^* \approx \Delta V \quad \text{und} \quad \rho^* \approx \rho , \quad (8.17)$$

auch wie folgt ausdrücken (LEHMANN [116]):

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\rho^0 \rho^*}{\rho^* \rho} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\rho^*}{\rho(1 - \xi)} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \approx \frac{1}{1 - \xi} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} . \quad (8.18)$$

Wird (8.18) in (8.15) eingesetzt, folgt für das vollständige inkrementelle Verzerrungs-Spannungs-Gesetz:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(r)} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}} \underline{\underline{\mathbf{S}}} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} + \alpha \dot{T} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \\ &= \underline{\underline{\hat{\mathbf{C}}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}} \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \underline{\underline{\hat{\mathbf{C}}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \alpha \dot{T} \underline{\underline{\mathbf{1}}} . \end{aligned} \quad (8.19)$$

Gleichung (8.19) kann als eine Verallgemeinerung verschiedener in der Literatur zu findender Ansätze betrachtet werden. Hier soll sich auf Materialien beschränkt werden, bei denen sich Gleichung (8.19) durch

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(r)} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}}} \underline{\underline{\mathbf{S}}} + \alpha \dot{T} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \quad (8.20)$$

mit einem akzeptablen Fehler angeben läßt. Werden Mikrospannungskonzentrationen vernachlässigt, erlauben die Betrachtungen in [62], unter Berücksichtigung der physikalischen Bedeutung von  $\xi$  (siehe Gleichung (8.4)), die Abhängigkeit von  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}$  vom Schädigungszustand in folgender Weise einzuschränken:

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \left( {}^0\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}, \xi_i \right) \quad \forall \xi_i \neq \xi \quad (8.21)$$

bzw. unter Verwendung von (8.5)

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \left( {}^0\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}, \underline{\underline{\xi}} \right) . \quad (8.22)$$

Zur Herleitung der elastischen Nachgiebigkeit  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}$  werden formale Darstellungen von Tensorfunktionen angewendet<sup>10</sup>. Ein anderer Weg nach RABIER [181] oder VOYIADJIS [216] besteht in der Modellierung des geschädigten Materials als Komposit, bestehend aus Mikroporen und Matrixmaterial. Die Modellierung des Materials, das die Mikroporen umgibt, als kontinuierliche Matrix ist bei genauerer Betrachtung eine sehr grobe Vereinfachung.

Es wird angenommen, daß die betrachteten Materialien im ungeschädigten Ausgangszustand isotrop sind. Die Komponenten des elastischen Nachgiebigkeitstensors  ${}^0\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}$  lassen sich dann wie folgt wiedergeben (ONAT [165]):

$${}^0C_{ijkl} = -\frac{\nu}{E}\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1+\nu}{2E}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) . \quad (8.23)$$

$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}$  ist eine isotrope Tensorfunktion von  ${}^0\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}$  und  $\underline{\underline{\xi}}$ . Mit der Beschränkung auf lineare Terme läßt sich  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}$  wie folgt darstellen (BETTEN [23]):

$$C_{ijkl} = {}^0C_{ijkl} + a_1\delta_{ij}\xi_{kl} + a_2\xi_{ij}\delta_{kl} + a_3(\delta_{ik}\xi_{jl} + \delta_{il}\xi_{jk} + \delta_{jk}\xi_{il} + \delta_{jl}\xi_{ik}) , \quad (8.24)$$

wobei  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  neu eingeführte Materialkoeffizienten sind. Gleiche Ausdrücke für die elastische Nachgiebigkeit eines geschädigten Materials erhalten z.B. LITEWKA [131], SADOWSKI [189] und ONAT [165]. Die Ergebnisse von ONAT und einige Erläuterungen zur Beziehung (8.24) werden in Anhang 4 dargelegt. Die reversible Verzerungsrate nach Gleichung (8.20) läßt sich nun mit (8.24) durch

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(r)} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\mathbf{S}}}\underline{\underline{\mathbf{S}}} - \frac{\nu}{E}\text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{S}}})\underline{\underline{\mathbf{1}}} + a_1\text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{S}}}\cdot\underline{\underline{\xi}})\underline{\underline{\mathbf{1}}} + a_2\text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{S}}})\underline{\underline{\xi}} + 2a_3(\underline{\underline{\mathbf{S}}}\cdot\underline{\underline{\xi}} + \underline{\underline{\xi}}\cdot\underline{\underline{\mathbf{S}}}) + \alpha\dot{T}\underline{\underline{\mathbf{1}}} \quad (8.25)$$

<sup>10</sup> Für Materialien mit Mikrorissen siehe z.B. KRAJČINOVIC & FONSEKA [105], WU & CHUDNOVSKY [222], NEMAT-NASSER & YU [160].

darstellen. Dieses Gesetz für die elastische Verzerrungsrate geht bei Schädigungs-Isotropie wieder auf die folgende von LEHMANN [116] und FELDMÜLLER [62] hergeleitete Beziehung zurück:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(r)} = \frac{1}{2G} \left[ \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{S}}}) \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right] + \alpha \dot{T} \underline{\underline{\mathbf{1}}} . \quad (8.26)$$

Elastische Nachgiebigkeiten durch Mikrodefekte geschädigter Materialien, die z.B. durch LEMAITRE [123] oder LEMAITRE & DUFAILY [128] beschrieben werden, betreffen die Größe  $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{C}}}}^{(4)}$ . Letztere läßt sich unter Berücksichtigung von (8.15) und (8.19) durch

$$\underline{\underline{\tilde{\mathbf{C}}}}^{(4)} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} (1 - \xi)^{-1} \quad (8.27)$$

darstellen.

## 8.4 Plastische Deformationen

Mit dem Ansatz (8.1) können die Deformationsmechanismen separiert werden. In diesem Abschnitt werden die plastischen Deformationen des die Hohlräume umgebenden Materials beschrieben. Es besteht daher die Möglichkeit, auf bekannte klassische Plastizitätsgesetze zurückzugreifen und diese für plastische Deformationen geschädigter Materialien zu modifizieren.

An dieser Stelle soll ein assoziiertes Fließgesetz, das sich in vielen Bereichen bewährt hat, verwendet werden. Als Fließbedingung kann der allgemeine Ansatz

$$F \left( \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D, \text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{S}}}), T, a, \underline{\underline{\alpha}}, \xi, \underline{\underline{\xi}} \right) = 0 \quad (8.28)$$

verwendet werden. Es sollen nur Prozesse betrachtet werden, bei denen elastische Entlastung möglich ist, aber hauptsächlich anwachsende Belastungen und keine bemerkenswerten gegensinnigen plastischen Verzerrungen auftreten. Wir beschränken uns auf proportionale Belastungen. Dies ermöglicht den Verzicht auf den kinematischen Verfestigungsanteil  $\underline{\underline{\alpha}}$ , der zur Modellierung des Bauschinger-Effekts erforderlich ist (z.B. bei zyklischen Prozessen mit Belastungsumkehr). Die Verfestigung des Materials kann dann somit durch eine einzige skalare Variable  $a$  beschrieben werden (ROUSSELIER [188]). Für die Fließbedingung (8.28) wird nun ein Ansatz gewählt, der auf von Mises zurückgeht (LUBLINER [133]);

$$F = f \left( \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D, \text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{S}}}), \xi, \underline{\underline{\xi}} \right) - g \left( T, a, \xi, \underline{\underline{\xi}} \right) . \quad (8.29)$$

Fließbedingungen geschädigter Materialien wurden bereits entwickelt. Hierbei sind das GURSON-Modell [73] und die darauf aufbauenden Modelle von TVERGAARD [212], [213], ROUSSELIER [188] oder die Modelle von CHABOCHE [38], LEHMANN [116], XU & NEEDLEMAN [224] und QIU & WENG [180] zu erwähnen. In diesen Arbeiten wurde die irreversible Deformationsgeschwindigkeit nicht in einen plastischen und einen schädigungsinduzierten Anteil aufgespalten. Dies erfordert, daß die irreversiblen Dilatationen infolge der Hohlräume im Rahmen allgemeiner irreversibler Deformationen beschrieben werden müssen. Letztendlich führt das auf eine Abhängigkeit der Fließbedingung von der ersten Spannungsinvariante  $\text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{S}}})$ . Diese Abhängigkeit kann mit der Aufspaltung (8.1) vernachlässigt werden, da weiterhin angenommen wird, daß das Matrixmaterial plastisch inkompressibel ist.

Mit den folgenden Annahmen

- A1) der Verfestigungszustand des Matrixmaterials ist unabhängig davon, wieviele Hohlräume es umgibt ( $\xi$  und  $\underline{\underline{\xi}}$  treten in der Fließbedingung nicht explizit auf),
- A2) die Spannung im Matrixmaterial sei durch den gewichteten Cauchy'schen Spannungstensor  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$  hinreichend beschrieben,
- A3) das makroskopische Materialverhalten ist vor und nach einer Schädigung isotrop bezüglich plastischer Deformationen (siehe Anhang 5)

kann die Fließbedingung von FELDMÜLLER [62]

$$F = \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D - k^2(T, a) \quad (8.30)$$

übernommen werden. Nach ROUSSELIER [188] wird die Gültigkeit der Normalenregel für das geschädigte Material angenommen. Die Normalenregel liefert mit der Fließbedingung (8.30) die plastische Deformationsgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(p)} &= \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle \lambda \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\mathbf{S}}}} \\ &= \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle 2\lambda \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$\text{mit} \quad \langle \langle F \rangle \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } F = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.32)$$

Plastisches Fließen tritt auf, wenn neben der Fließbedingung auch die Konsistenzbedingung

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\mathbf{S}}}} \cdot \underline{\underline{\dot{\mathbf{S}}}} + \frac{\partial F}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} = 0 \quad (8.33)$$

erfüllt ist. In den vorangegangenen Beziehungen traten die Schädigungsvariablen nicht explizit auf. Im Gegensatz zum Zustand selbst wird angenommen, daß die

Schädigung durch die Bildung "innerer" Oberflächen die Änderungsgeschwindigkeit des Verfestigungszustandes explizit beeinflusst. Wie DIEHL [58] erwähnt, sind hierbei zwei gegenläufige Mechanismen (Ver- und Entfestigung) zu beobachten. Auf der einen Seite sind Poren Hindernisse der Versetzungsbewegung (GOODS & BROWN [70]), und es werden Versetzungen dem plastischen Deformationsprozeß des Matrixmaterials *entzogen*, um zur Hohlrumbildung oder -wachstum beizutragen. Andererseits werden beim Umgehungsmechanismus neue Gleitebenen aktiviert (Feingleiten), und die *inneren* Oberflächen können selbst (wie Korngrenzen) als Versetzungsquelle wirken (SCHATT [192]). Für die Evolution der isotropen Verfestigung wird daher ein Ansatz gewählt, der neben einem von der plastischen Arbeit abhängigen linearen Glied aus zwei weiteren Summanden besteht:

$$\dot{a} = \frac{a_4}{2\rho^0} \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\mathbf{S}}}} \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(p)} - a_5 \dot{\xi} \exp(a_6 \dot{\xi}) + a_7 \dot{\xi} \exp(a_8 \dot{\xi}) . \quad (8.34)$$

Der zweite Summand beschreibt eine Entfestigung, der dritte die Verfestigung.  $a_4$  bis  $a_8$  sind materialabhängige Koeffizienten. Aus der Konsistenzbedingung (8.33), der Fließbedingung (8.30) und der Evolutionsgleichung (8.34) wird der noch unbekannt Faktor  $\lambda$  erhalten:

$$\lambda = \frac{\rho^0}{2k^2 a_4} \left[ \frac{2 \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{\frac{\partial k^2}{\partial a}} + \left\{ a_5 \dot{\xi} \exp(a_6 \dot{\xi}) - a_7 \dot{\xi} \exp(a_8 \dot{\xi}) \right\} \right] . \quad (8.35)$$

Kontinuierliches plastisches Fließen wird mit dieser Bestimmungsgleichung für  $\lambda$ , durch die Fließbedingung (8.30) und der folgenden Belastungsbedingung gewährleistet:

$$LC_1 = \lambda \quad \text{und} \quad \langle LC_1 \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } LC_1 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (8.36)$$

Ein globaler Verlauf für die Verfestigungsfunktion  $k^2(T, a)$  wird z.B. durch FELDMÜLLER in [62] dargestellt. Der dort gewählte Ansatz ist mit ansteigender Temperatur nicht monoton fallend, was durch die betrachteten Prozesse nicht erklärt werden kann. Der Ansatz

$$k^2(T, a) = [b_1 \tanh(b_2 a) + b_3 a] \exp[-(b_4 + b_5 a)T] + b_6 \quad (8.37)$$

reduziert nicht nur die Anzahl der Materialkoeffizienten von 16 auf 6 ( $b_i; i = 1, \dots, 6$ ), sondern sichert mit der Exponentialfunktion (in Anlehnung an die Arrheniusgleichung), daß  $k^2$  mit  $T$  monoton fällt (Alterungsprozesse sollen nicht betrachtet werden).

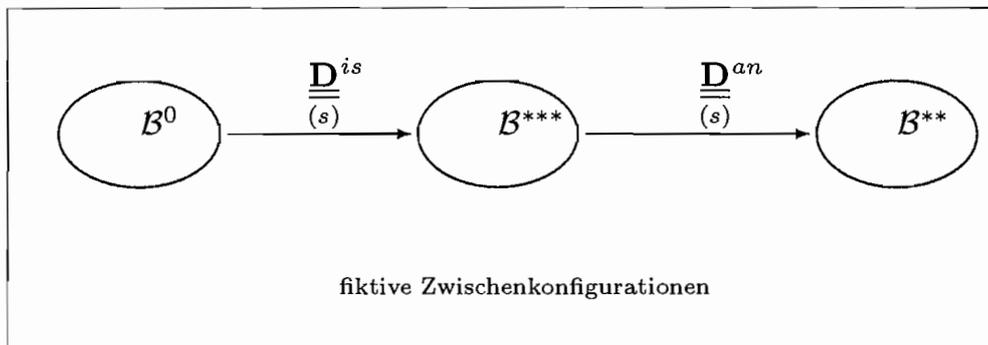
## 8.5 Schädigungsinduzierte Deformationen

Für die schädigungsinduzierte Verzerrungsrate wird angenommen, daß deren Orientierung durch die äußere Belastung bestimmt wird. Dieser Prozeß kann als spannungsgesteuert oder als dehnungsgesteuert betrachtet werden. Nach der bei DIEHL [58] zu findenden Aussagen sind plastische Verzerrungen ein besserer Indikator als die Kontinuumsspannungen für lokale Spannungen, die als Ursache von Bildung und Wachstum von Mikroporen betrachtet werden. Daher wird angenommen, daß der Schädigungsprozeß durch die plastischen Verzerrungen gesteuert wird und sich die schädigungsinduzierte Verzerrungsrate durch folgende Tensorfunktion angeben läßt:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}}_{(s)} &= H_0 \underline{\underline{1}} + H_1 \underline{\underline{D}}_{(p)} + H_2 \underline{\underline{D}}_{(p)}^2 \\ &= h_0 \underline{\underline{1}} + h_1 \underline{\underline{n}}_1 \underline{\underline{n}}_1 + h_2 \underline{\underline{n}}_2 \underline{\underline{n}}_2 + h_3 \underline{\underline{n}}_3 \underline{\underline{n}}_3 \\ &\quad + h_4 (\underline{\underline{n}}_1 \underline{\underline{n}}_1)^2 + h_5 (\underline{\underline{n}}_2 \underline{\underline{n}}_2)^2 + h_6 (\underline{\underline{n}}_3 \underline{\underline{n}}_3)^2, \end{aligned} \quad (8.38)$$

wobei die  $\underline{\underline{n}}_i$  die Eigenvektoren der plastischen Verzerrungsrate darstellen. Die Darstellung (8.38) erlaubt eine additive Aufspaltung der schädigungsinduzierten Verzerrungsrate in einen isotropen ( $h_0$ ) und anisotropen Anteil ( $h_1$  bis  $h_6$ );

$$\underline{\underline{D}}_{(s)} = \underline{\underline{D}}_{(s)}^{is} + \underline{\underline{D}}_{(s)}^{an}. \quad (8.39)$$



**Abbildung 10:** Einordnung der Zwischenkonfiguration  $B^{***}$

Gleichung (8.39) bildet die Motivation zur Einführung einer zusätzlichen Zwischenkonfiguration  $B^{***}$  in der in Abbildung 10 dargestellten Weise (siehe auch Abbildung 1). Diese wird zur Bestimmung der skalaren Koeffizienten  $h_0$  bis  $h_6$ , die von der Belastung (hier die plastische Verzerrungsrate), den inneren Zustandsvariablen und sonstigen Materialparametern abhängig sind, verwendet. Im folgenden soll der Ansatz (8.38) in der Weise vereinfacht werden, daß nur die linearen Glieder berücksichtigt werden;  $h_4 = h_5 = h_6 = 0$ .

Die beiden Anteile aus (8.39) werden getrennten Mikromechanismen zugeschrieben. Der isotrope Anteil  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(s)}^{is}$  wird als Bildungsterm interpretiert, d.h. er beschreibt hauptsächlich die Verzerrungen, die durch die Bildung neuer Mikroporen hervorgerufen werden. Der anisotrope Anteil  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(s)}^{an}$  ist dann eine Folge des Wachstums bereits existierender Mikroporen. Mit der Interpretation als Bildungs- und Wachstumsterme sind beide schädigungsinduzierten Verzerrungsanteile mit Volumendehnungen verbunden. Die gesamten Volumenänderungen lassen sich aus dem Hencky-Verzerrungstensor  $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  berechnen, wobei zu berücksichtigen ist, daß plastische Deformationen keinen Beitrag liefern;

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) &= \text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{(r)}) + \text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{(s)}^{is}) + \text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{(s)}^{an}) \\ &= \ln \left( \frac{dV}{dV^*} \frac{dV^{***}}{dV^0} \frac{dV^{**}}{dV^{***}} \right) \\ &= \ln \left( \frac{dV}{dV^*} \right) + \ln \left( \frac{dV^{***}}{dV^0} \right) + \ln \left( \frac{dV^{**}}{dV^{***}} \right) . \end{aligned} \quad (8.40)$$

Bei Berücksichtigung der Inkompressibilitätshypothese für die plastischen Deformationen, d.h.

$$dV^{**} = dV^* \quad \text{und} \quad \rho^{**} = \rho^* \quad (8.41)$$

und des Massen-Erhaltungssatzes kann (8.40) auch wie folgt geschrieben werden:

$$\text{Sp}(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = \ln \left( \frac{\rho^*}{\rho} \right) + \ln \left( \frac{\rho^0}{\rho^{***}} \right) + \ln \left( \frac{\rho^{***}}{\rho^*} \right) . \quad (8.42)$$

Für die schädigungsinduzierten Volumenverzerrungsraten ergeben sich die folgenden Terme:

$$\text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(s)}^{is}) = -\frac{\dot{\rho}^{***}}{\rho^{***}} \quad (8.43)$$

$$\text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(s)}^{an}) = \frac{\dot{\rho}^{***} \rho^* - \rho^{***} \dot{\rho}^*}{\rho^{***} \rho^*} . \quad (8.44)$$

Die Masse-Dichten  $\rho^*$  (nach (4.4)) und  $\rho^{***}$  ergeben sich wie folgt

$$\left. \begin{aligned} \rho^* &= (1 - \xi) \rho^0 \\ \rho^{***} &= \zeta \rho^0 \end{aligned} \right\} \rho^{***} = \frac{\zeta}{1 - \xi} \rho^* , \quad (8.45)$$

wobei  $\zeta$  den Anteil beschreibt, der durch isotropes bzw. anisotropes Wachstum der Mikroporen gekennzeichnet ist.  $\zeta$  aus  $[0, 1]$  stellt eine Prozeßvariable dar, die vom

gesamten Zustand des Materials abhängig ist und deren Verlauf durch die Reihenfolge der Schädigungsprozesse in Abbildung 10 bestimmt wird. Aus (8.43), (8.44), (8.45) und der Zeitableitung von (8.45) folgt:

$$\text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(s)}^{is}) = \frac{-\dot{\zeta}}{\zeta} \quad (8.46)$$

$$\text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(s)}^{an}) = \frac{(1-\xi)\dot{\zeta} + \zeta\dot{\xi}}{(1-\xi)\zeta} . \quad (8.47)$$

Unabhängig von der Reihenfolge der Schädigungsprozesse gilt auf der einen Seite für porenfreies Material

$$\zeta \Big|_{\xi=0} = 1 \quad \text{und} \quad 0 \geq \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \geq -1 , \quad (8.48)$$

da die isotrope und anisotrope Dilatation mit  $\xi$  anwachsen und  $\rho^*$  immer kleiner oder gleich  $\rho^{***}$  sein muß. Mit der Reihenfolge der Schädigungsprozesse aus Abbildung 10 und der Gleichung (8.45) lassen sich aus weiteren physikalischen Restriktionen die im folgenden aufgeführten Beschränkungen für den Verlauf von  $\zeta$  finden. In porenfreien Materialien müssen Poren gebildet werden, um ein Wachstum zu ermöglichen, d.h.,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial(1-\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = -1 . \quad (8.49)$$

Für die Intervallgrenzen von (8.48) gelten unter Berücksichtigung von (8.48) und (8.49) die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0 & \quad \curvearrowright \quad \rho^{***} = \rho^0 & \quad \curvearrowright \quad \text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{e}}}_{(s)}^i) = 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = -1 & \quad \curvearrowright \quad \rho^{***} = \rho^* & \quad \curvearrowright \quad \text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{e}}}_{(s)}^a) = 0 . \end{aligned} \quad (8.50)$$

Mit wachsender Porenanzahl verliert die Porenbildung gegenüber dem Porenwachstum bei der Vergrößerung des gesamten Porenvolumenanteils an Bedeutung – die partielle Ableitung  $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$  wächst mit  $\xi$ . Für  $\zeta$  wird der folgende Polynom-Ansatz postuliert:

$$\zeta = 1 - \xi + \sum_{i=1}^n \zeta_i \xi^{i+1} . \quad (8.51)$$

Der Definitionsbereich zulässiger  $\zeta_i$ -Werte ist durch die Ungleichungen in (8.48) und durch  $\zeta \wedge \xi \in [0, 1]$  festgelegt. Für  $\zeta_i = 0$  mit  $(i = 1, 2, \dots, n)$  reduzieren sich die Beziehungen dieses Abschnitts auf die rein isotropen Verzerrungen des Modells nach FELDMÜLLER [62]. Aus (8.46), (8.47), (8.51) und der Zeitableitung von (8.51) folgt:

$$\text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{is}_{(s)}) = \frac{1 - \sum_{i=1}^n (i+1)\zeta_i \xi^i}{1 - \xi + \sum_{i=1}^n \zeta_i \xi^{i+1}} \dot{\xi} = \bar{h}_0 \dot{\xi} \quad (8.52)$$

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{D}}}^{an}_{(s)}) &= \frac{2\zeta_1 \xi + \sum_{i=2}^n [(i+1)\zeta_i - (i-1)\zeta_{i-1}] \xi^i - n\zeta_n \xi^{n+1}}{1 - 2\xi + (1 + \zeta_1)\xi^2 + \sum_{i=2}^n (\zeta_i - \zeta_{i-1}) \xi^{i+1} - \zeta_n \xi^{n+2}} \dot{\xi} \\ &= \bar{h} \dot{\xi} . \end{aligned} \quad (8.53)$$

In einer ersten Näherung wird in (8.51)  $n = 5$  gesetzt. Mit diesen Ausdrücken folgt für die isotrope, schädigungsinduzierte Verzerrungsrate (8.46):

$$h_0 = \frac{1}{3} \bar{h}_0 \dot{\xi} . \quad (8.54)$$

Für die anisotrope, schädigungsinduzierte Verzerrungsrate bzw. die Koeffizienten  $h_1$  bis  $h_6$  wird unter Berücksichtigung von (8.77) und (8.78) der folgende Ansatz postuliert:

$$h_i = \begin{cases} \bar{h} \dot{\xi} \left[ \frac{\langle D_i \rangle_{(p)} MC}{\sum_{j=1}^3 \langle D_j \rangle_{(p)} MC} \right] & \text{für } i = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{für } i = 4, 5, 6 , \end{cases} \quad (8.55)$$

wobei  $D_i$  der zu  $\underline{\mathbf{n}}_i$  zugehörige Eigenwert der plastischen Verzerrungsrate ist. Die Nebenbedingung  $\langle \lambda_i \rangle_{MC}$  schließt eine *Heilung*, d.h. negative Eigenwerte der anisotropen, schädigungsinduzierten Verzerrungsrate, nachfolgend aus. Schubverzerrungen aus Porenwachstum können somit nur aus der Dilatation erklärt werden. Weitere, von der Dilatation unabhängige Schubverzerrungen können nicht auftreten.

## 8.6 Die Evolution der Schädigungsvariablen

Die Änderung der Schädigungsvariablen kann als Summe dreier Raten dargestellt werden (RABIER [181], XU & NEEDLEMAN [224]):

$$\text{Bildung} + \text{individuelles Wachstum} + \text{Verschmelzung} . \quad (8.56)$$

Die Bedeutung der Anteile in (8.56) sind material-, temperatur- und von der betrachteten Belastungsgeschwindigkeit abhängig. Nach Erschöpfung des *Bildungspotentials*, das u.a. von der mittleren Anzahl von Fremdphasenteilchen bestimmt wird, ist die Bildungsphase nahezu vernachlässigbar (CHAN [42]). (Im Gegensatz hierzu wird durch JANSSON & STIGH [87] ebenfalls bei Kriechen angenommen, daß eine lineare Abhängigkeit zwischen der Porenanzahl und der Verzerrung besteht.) Werden nur sehr wenige Defekte gebildet, nimmt die Wachstumsphase den größten Teil des Schädigungsprozesses ein. Mit wachsender Anzahl der bei quasi-statischen oder moderaten Belastungsgeschwindigkeiten gebildeten Hohlräume verliert die Wachstumsphase (vor einer lawinenartigen Verschmelzung) immer mehr an Bedeutung (CHAN [42]). Unter dynamisch-schlagartiger Belastung von Materialien mit elastisch-plastischem Grundverhalten entsteht eine sehr große Anzahl von Defekten, die aber nicht anwachsen, da die Dauer der Lasteinwirkung zu kurz ist, um das Hohlraumwachstum zu gestatten (DAVISON & STEVENS [54]). Die Defekte (Poren bei Kupfer, Aluminium, Tantal oder Risse bei Eisen, Beryllium – DAVISON & STEVENS [55]) sind dabei gleichmäßig verteilt (MURAKAMI [151]). Ausgehend von diesen Beobachtungen sollten die Ansätze von XU & NEEDLEMAN [224], TVERGAARD [212], [213] und CURRAN, SEAMAN, HOLMES & GIOVANOLA [51] neu überdacht werden. Der Bildungsterm ist hier bei gleicher äußeren Belastung unabhängig vom Schädigungsfortschritt, und der Wachstumsterm ist am größten, wenn noch gar keine Poren vorhanden sind.

Die Verschmelzung zweier Poren stellt physikalisch ein durch Wechselwirkungen bedingtes beschleunigtes Wachstum beider Poren dar (Ligamentverzerrungen aufeinander stoßender Poren oder Scherlokalisierung bei Poren mit größerem Abstand (CURRAN, SEAMAN, HOLMES & GIOVANOLA [51]); die Bewegung der Poren durch Deformationsprozesse wird vernachlässigt (ROUSSELIER [188])). Zu Beginn des Schädigungsprozesses verschmelzen Poren nur selten. Dies ändert sich jedoch mit wachsender Anzahl und Größe der Poren. Die damit verbundenen Wechselwirkungen erhöhen die Änderungsgeschwindigkeit des Schädigungsprozesses wesentlich (SCHMITT [193]). Bei einer vereinfachten Sicht setzt diese Beschleunigung erst ab einem Schwellwert ein

(z.B. TVERGAARD [213], XU & NEEDLEMAN [224]). Die Verschmelzung zweier Poren wird oft auf *Bruch* oder *Versagen* bezogen. Dies ist etwas fragwürdig, da lediglich eine größere Pore entsteht, deren Größenordnung die der Ausgangsporen ist. Natürlich kann die erhöhte Änderungsgeschwindigkeit des Schädigungsprozesses als Indikator für den Beginn des Versagensprozesses (z.B. Gewaltbruch des Restquerschnitts) betrachtet werden. Der Umkehrschluß ist jedoch nicht zulässig. Wir beschränken uns auf schwache Porenverteilungen und nehmen an, daß *Versagen* eines Volumenelementes  $\Delta V$  bereits eintritt, bevor Porenverschmelzung den Schädigungsprozeß signifikant beeinflusst. Porenverschmelzung wird daher nicht näher betrachtet.

Eine zusätzliche Aufspaltung von (8.56) nach den stattfindenden Mikromechanismen ist vorstellbar (z.B. CURRAN, SEAMAN, HOLMES & GIOVANOLA [51]). Die zu Porenbildung und -wachstum führenden Mikroprozesse sind sehr zahlreich, hier sollen nur einige Beispiele genannt werden. Hohlräume entstehen durch Dekohäsion der Grenzfläche von Einschlüssen, Fremdphasen- oder Ausscheidungsteilchen von der Matrix (BLUMENAUER & PUSCH [27], MURAKAMI [151], SCHATT [192]), durch Teilchenbruch, durch Aktivierung und Anhäufung von Versetzungen (BLUMENAUER & PUSCH [27]) oder durch Korngrenzenhohlraumbildung an Tripelpunkten (bei hinreichenden Spannungskonzentrationen (GOODS & BROWN [70])), durch Überlagerung von Gleitbändern mit Korngrenzen (DANZER [53], KEMPF [95], MURAKAMI [151]), durch plastische Verformung bei geringen und Zusammenwirken von Plastizität und Kondensation sowie Diffusion von Leerstellen bei mittleren Temperaturen.<sup>11</sup> Porenwachstum kann durch Diffusion oder Kondensation von Versetzungen oder Gitterlücken entlang Korngrenzen (nach GOODS & BROWN [70] nur bei hohen Temperaturen), durch inelastische Verformung (z.B. Korngrenzengleiten, lokale Einschnürung) oder durch Kopplung dieser Mechanismen erfolgen (MURAKAMI [151]). Der Abbruch von Molekularbindungen scheidet als Mechanismus in dieser Phase aus, da hierzu Spannungen erforderlich sind, die um ein vielfaches die reale Bruchfestigkeit überschreiten (NAJAR [158]). Um die Schwierigkeiten, die mit einer quantitativen Analyse dieser Prozesse verbunden sind, zu umgehen, wird auf eine Aufspaltung von (8.56) nach einzelnen Mechanismen verzichtet und ein mehr phänomenologischer Weg eingeschlagen.

<sup>11</sup> Jede Versetzung, die zu Porenbildung und -wachstum beiträgt, vermindert die Anzahl der beweglichen Versetzungen im Rest des Materials. Es muß daher, entgegengesetzt zu ONAT [167], davon ausgegangen werden, daß plastische Verfestigung und Schädigungsfortschritt gleichzeitig stattfinden. Diese Annahme mündete bereits in den Ansatz (8.34) der plastischen Verfestigung.

Einige der erwähnten Probleme seien hier angegeben. Hinsichtlich einiger Mikromechanismen herrschen in der Fachliteratur unterschiedliche Meinungen, ob sie Hohlrumbildung oder nur -wachstum verursachen können. Das simultane Auftreten aller Prozesse und die gegenseitigen Wechselwirkungen erschweren die Beschreibung einzelner Prozesse. Welche Prozesse signifikant sind oder überhaupt auftreten, ist neben der Temperatur (mit der Betrachtung von plastischen Deformationen werden Temperaturen oberhalb der Spröbruch-Verformungsbruch-Temperatur impliziert) auch von der konkreten Mikrostruktur abhängig. Letzteres würde die Einführung zusätzlicher Größen zu deren Beschreibung erfordern. Die Unterscheidung zwischen Bildung und Wachstum ist zwar allgemein üblich, es existiert aber noch keine Definition, wann die Bildung eines Hohlraumes abgeschlossen ist und die Wachstumsphase beginnt. Mit der Interpretation von  $\underline{\underline{D}}_{(s)}$  als Summe eines Bildungs- und Wachstumsterms lassen sich nun die Terme in (8.56) darstellen. Hierzu kann Gleichung (8.45) wie folgt umgeschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \rho^* &= (1 - \xi)\rho^0 \\ \rho^{***} &= (1 - \xi_{nucleation})\rho^0 \end{aligned} \right\} \rho^{***} = \frac{1 - \xi_{nucleation}}{1 - \xi} \rho^* . \quad (8.57)$$

Wird (8.45) in (8.57) eingesetzt und die entstehenden Gleichungen nach der Zeit abgeleitet, erhält man die folgenden Beziehungen unter Berücksichtigung von (8.56) und (8.51):

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{nucleation} &= -\dot{\zeta} &= (1 - \sum_{i=1}^n (i+1)\zeta_i \xi^i) \dot{\xi} \\ \dot{\xi}_{growth} &= \dot{\xi} + \dot{\zeta} &= \sum_{i=1}^n (i+1)\zeta_i \xi^i \dot{\xi} . \end{aligned} \quad (8.58)$$

Es wird deutlich, daß der Ansatz (8.51) nicht nur vom betrachteten Material, sondern auch von der Belastungsgeschwindigkeit abhängig sein kann. Mit dem hier verwendeten Ansatz (8.51) wird diese Abhängigkeit allein über die Koeffizienten  $\zeta_i$  gesteuert (mit wachsender Belastungsgeschwindigkeit geht  $\zeta$  in  $(1 - \xi)$  über).

Im folgenden ist noch zu klären, ob Porenbildung und -wachstum eher ein verzerrungs- oder spannungsgesteuerter Prozeß ist. Der *Betrag* wird, nach der werkstoffwissenschaftlich orientierten Literatur zu urteilen, eindeutig durch die Deformationen bestimmt; z.B. "... While the overall stress in such materials is usually a function of the volume fraction of particles, the forest hardening and the local stress at a particle depend upon the state of strain ... However since cavity nucleation is a process involving both stress and strain energy release there must be some threshold value of the far field strain below which there is either insufficient stress to break the interface (or fracture the particle itself) or insufficient elastic strain energy available

for creation of internal interfaces. ...” [70] und "... it was not the magnitude of the applied stress which determines cavity initiation but rather the local state of deformation ...” [129]. Auch bei BRUHNS & DIEHL [31] und DIEHL [58] und in der dort zitierten Literatur wird diese Aussagen bestätigt – inelastischen Verzerrungen sind ein besserer Indikator für lokale Spannungen. Da diese Tatsache seit langem bekannt ist, kann die häufige Verwendung der Makrospannung in den Schädigungsgesetzen nur durch den Versuch erklärt werden, das mathematische Problem bei spannungsgesteuerten Versuchen zu vereinfachen. Die Verteilung bzw. Orientierung der Poren wird jedoch durch den Spannungszustand definiert. Dies ergeben z.B. auch die experimentellen Beobachtungen von GOODS & BROWN [70] bei plastischen Deformationen und TRAMPCZYNSKI, HAYHURST & LECKIE [207] bei Kriechporen. Mit Hilfe eines Ansatzes nach (3.2) und einer zusätzlichen Nebenbedingung  $\langle\langle\langle LC_2 \rangle\rangle\rangle$  wird die folgende Evolutionsgleichung von  $\xi$  postuliert ( $f_1, \bar{f}_1$  skalare Funktionen):

$$\dot{\xi} = \langle\langle\langle LC_2 \rangle\rangle\rangle f_1(\xi, T) \bar{f}_1(\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(p)}) . \quad (8.59)$$

Die Verwendung der plastischen Deformationsrate in (8.59) beruht auf der Annahme, daß die lokalen Spannungskonzentrationen bei Beginn des plastischen Fließens ausreichen, um Porenbildung und -wachstum auch bei kleinen Gesamtdeformationen zu initiieren (GOODS & BROWN [70]). Folglich gilt für  $\bar{f}_1$

$$\bar{f}_1 \Big|_{\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(p)} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}} = 0 , \quad (8.60)$$

was gleichzeitig sichert, daß bei Entlastung kein Schädigungsfortschritt auftritt (als Fließ- und Belastungsbedingung gilt dann (8.30) bzw. (8.36)). Zur Sicherung von  $\dot{\xi} \geq 0$  (keine Heilung) muß

$$f_1 \geq 0 \quad \text{und} \quad \bar{f}_1 \geq 0 \quad (8.61)$$

gelten. Während die Einschränkung (8.61) nicht angezweifelt wird, bestehen zum Verhalten der Funktion  $f_1$  bei  $\xi = 0$  verschiedene Standpunkte. Auf der einen Seite steht die Ansicht, daß in einem ungeschädigten Material keine Entwicklung von Schädigung stattfindet (z.B. NAJAR [158], BODNER & CHAN [28], CHAN [42]), da die hierzu erforderlichen Spannungen viel zu groß sein würden. Mit der hier (und auch in vielen anderen Fällen) verwendeten Definition der Schädigung ist man aber weit davon

entfernt, ein ungeschädigtes Material als *perfekt* zu bezeichnen (siehe Kapitel 2). Es kann davon ausgegangen werden, daß die vorhandenen Spannungskonzentrationen und die gegenüber einem ungestörten Kristallgitter geringeren Bindungskräfte von Korn- und Phasengrenzen ausreichen, um bei den betrachteten Verzerrungen Porenbildung auszulösen (siehe GOODS & BROWN [70]), d.h.

$$f_1 \Big|_{\xi=0} = f_{10} > 0 . \quad (8.62)$$

Welcher Ausdruck für  $f_1$  und  $\bar{f}_1$  mit experimentellen Daten am besten korreliert wurde bisher nicht untersucht. Es wird daher für  $f_1$  der von JANSSON & STIGH [87] vorgeschlagene Ansatz

$$f_1 = c_1(T) + c_2(T)\xi - c_3(T)\xi^2 \quad (8.63)$$

( $c_1, c_2, c_3$  - material- und temperaturabhängige Koeffizienten; siehe Anhang 6) und für  $\bar{f}_1$  der von FELDMÜLLER [62] verwendet, der sich unter Verwendung von (8.30) und (8.31) wie folgt darstellen läßt:

$$\bar{f}_1 = \sqrt{\frac{\underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{D}}}{(p)}} = \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle 2\lambda k . \quad (8.64)$$

$\langle \langle LC_2 \rangle \rangle$  sichert, daß bei einer Druckbeanspruchung kein Schädigungsfortschritt auftritt. Die daraus resultierende Forderung von FELDMÜLLER [62], daß hydrostatischer Zug vorherrschen muß ( $\text{Sp}(\underline{\mathbf{S}}) > 0$ ), erscheint hier zu restriktiv. Nach der hier vertretenen mikrophysikalischen Vorstellung zufolge genügt die Existenz von Zug in einer beliebigen Ebene – eine Annahme, die z.B. auch von KRAJČINOVIC & FONSEKA [105], [106] und MAZARS [140] für Schädigung durch Mikrorisse (siehe auch CHABOCHE [41]) oder von BODNER & CHAN [28] für viskose Schädigung geteilt wird.  $\langle \langle LC_2 \rangle \rangle$  läßt sich dann wie folgt formulieren:

$$LC_2 = \sum_{i=1}^3 \langle S_i \rangle_{MC} \quad (8.65)$$

$$\langle \langle LC_2 \rangle \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } LC_2 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} , \quad (8.66)$$

wobei  $S_i$  die Hauptwerte von  $\underline{\mathbf{S}}$  darstellen.

Bei den in der Literatur gefundenen Evolutionsgleichungen für tensorielle Schädigungsvariablen 2. Stufe fällt vor allem die stets gleiche Struktur auf (siehe z.B.

MURAKAMI & OHNO [154], BODNER & CHAN [28], CHABOCHE [37] bzw. LEMAITRE & CHABOCHE [127]). Diese kann durch den folgende Ansatz wiedergegeben werden:

$$\underline{\underline{\xi}}^{\nabla} = \langle \langle \langle \langle LC_3 \rangle \rangle \rangle \rangle f_2(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi}, \underline{\underline{\xi}}, T) \bar{f}_2(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\xi}, \underline{\underline{\xi}}) , \quad (8.67)$$

wobei  $f_2$  eine skalare und  $\bar{f}_2$  eine tensorielle Funktion ist, die die Vorzugsrichtungen der Schädigungsentwicklung angibt. Da kein Ansatz der oben zitierten Autoren frei von Kritik ist, werden sie als ungeeignet betrachtet.

Bei Betrachtung des anisotropen Anteils des Ansatzes von MURAKAMI & OHNO [154] fällt auf, daß Schädigungsfortschritt nicht in alle Zugspannungsrichtungen, sondern nur in Richtung der maximalen Zug-Hauptspannung stattfindet.<sup>12</sup> Unklar ist hier auch die Verfahrensweise bei mehreren gleich großen Zughauptspannungen. BODNER & CHAN [28] verwenden ihren Schädigungstensor 2. Stufe  $\underline{\underline{\omega}}$ , ohne ihm eine physikalische Bedeutung zuzuweisen. Schwierig wird daher die Bewertung der Erscheinung, daß in  $\underline{\underline{\omega}}$  negative Hauptwerte zulässig sind. Heilung in irgendeine Richtung wird im allgemeinen aber ausgeschlossen. Die Vorzugsrichtungen der Schädigungsevolution bei CHABOCHE [37] bzw. LEMAITRE & CHABOCHE [127] werden nicht durch die äußere Belastung bestimmt. Auch dieses Verhalten kann durch experimentelle Beobachtungen nicht bestätigt werden.

Unabhängig vom Vorangegangenen läßt sich eine Evolutionsgleichung für  $\underline{\underline{\xi}}$  aufgrund der klaren physikalischen Bedeutung nicht ohne mehrere Einschränkungen formulieren. Als erstes wird Heilung in irgendeiner Richtung ausgeschlossen,  $\dot{\underline{\underline{\xi}}}(\underline{\mathbf{n}}) \geq 0$ , d.h.

$$\dot{\underline{\underline{\xi}}}(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}}) = \dot{\underline{\underline{\xi}}}(\underline{\mathbf{X}}) + \underline{\underline{\xi}}^{\nabla}(\underline{\mathbf{X}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\mathbf{n}}) \geq 0 \quad \forall \underline{\mathbf{n}} \in S_3 , \quad (8.68)$$

bzw. jede Kombination von Fourierkoeffizienten in  $\underline{\underline{\xi}}$  ist zulässig, solange die folgende Ungleichung gilt:

$$-\dot{\underline{\underline{\xi}}} \leq \sum_{k=1}^n \left[ \underline{\underline{\xi}}^{\nabla(2k)} \dots \dots \underline{\underline{\mathbf{f}}}^{(2k)} \right] \quad \forall \underline{\mathbf{n}} \in S_3 . \quad (8.69)$$

Mit (8.68) kann die Evolution von  $\underline{\xi}$  und  $\underline{\underline{\xi}}$  nicht entkoppelt betrachtet werden.  $\dot{\underline{\underline{\xi}}}$  ist nach Gleichung (8.2) wieder eine Fourierreihe, die durch den Abbruch nach dem

<sup>12</sup> Ob bezüglich einer Richtung Schädigungsfortschritt stattfindet, ist nicht von der Zugspannung in diese Richtung abhängig, sondern ob in einer senkrechten Richtung eine noch größere Zugspannung existiert. Ein Verhalten, das z.B. durch HAYHURST & FELCE [78] nicht bestätigt werden konnte.

zweiten Glied die Gleichung (8.68) im allgemeinen nicht für alle Richtungen erfüllt. Wir verlangen nun, daß die Evolutionsgleichung von  $\underline{\underline{\xi}}$  in einer Weise formuliert wird, daß (8.68) für alle Richtungen stets erfüllt ist, d.h.

$$\text{MIN} \left( \underline{\underline{\xi}}(\underline{\mathbf{X}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\mathbf{n}}) \right) = -\dot{\xi}'(\underline{\mathbf{X}}) . \quad (8.70)$$

Weiterhin soll  $\underline{\underline{\xi}}$  es erlauben, daß das Gleichheitszeichen in (8.68) bzw. das Minimum in (8.70) für die Richtungen gilt, die senkrecht auf allen Zughauptspannungsrichtungen stehen. Die Maxima der Änderungsgeschwindigkeiten zeigen somit immer in Richtung der Zughauptspannungen unabhängig von der Schädigungsverteilung. Folglich wird die Änderungsgeschwindigkeit der Schädigung bezüglich einer beliebigen Richtung  $\underline{\mathbf{n}}$  als Abweichung von einem Mittelwert beschrieben. Diese Abweichung wird nur durch die äußere Belastung und durch eine richtungsunabhängige skalare Norm (z.B. BODNER & CHAN [28]:  $\sqrt{\underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{\underline{\omega}}}$ ) der Schädigungsvariablen ( $\xi$ ,  $\underline{\underline{\xi}}$ ) bestimmt. Die Schädigung, die bereits in der betrachteten Richtung  $\underline{\mathbf{n}}$  existiert, ist hierbei ohne Einfluß. Diesen zusätzlichen Freiheitsgrad kann die Funktion  $\dot{\xi}$  in Form der Gleichung (8.68) aufgrund der Symmetrie-, Monotonieeigenschaften, den Forderungen (8.70) und

$$\int_{S_3} \underline{\underline{\xi}}(\underline{\mathbf{X}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{f}}}(\underline{\mathbf{n}}) \, dA = 0 \quad (8.71)$$

nicht beschreiben. Diese Eigenschaft kann wieder in den Evolutionsgesetzen von MURAKAMI & OHNO [154] und BODNER & CHAN [28] gefunden werden. Ein Ansatz, der alle Forderungen erfüllt, lautet wie folgt:

$$\underline{\underline{\xi}} = \dot{\xi}' \, 3 \sum_{j=1}^3 \left\{ c_4(\underline{\mathbf{n}}_j) \frac{\langle S_j \rangle_{MC}}{\sum_{i=1}^3 \langle S_i \rangle_{MC}} \left( \underline{\mathbf{n}}_j \underline{\mathbf{n}}_j - \frac{1}{3} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right) \right\} , \quad (8.72)$$

wobei  $\underline{\mathbf{n}}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) der zu  $S_i$  zugehörige Eigenvektor ist. Die Evolutionsgleichung (8.72) benötigt durch die Kopplung mit  $\dot{\xi}$  bzw.  $\dot{\xi}'$  keine neue Fließ- und Belastungsbedingung. Mit Gleichung (8.4) ergibt sich  $\dot{\xi}'$  zu

$$\dot{\xi}' = \frac{1}{2\pi} \dot{\xi} . \quad (8.73)$$

$c_4(\underline{\mathbf{n}}_j)$  ist ein materialabhängiger Koeffizient (nach den vorhergehenden Betrachtungen wäre auch eine Geschwindigkeitsabhängigkeit zu vermuten), der den *Anisotropiegrad* der Schädigungsevolution beschreibt. Ist  $c_4$  unabhängig von  $\underline{\mathbf{n}}$ , lautet (8.72):

$$\underline{\underline{\xi}} = c_4 \dot{\xi}' \, 3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\langle S_j \rangle_{MC}}{\sum_{i=1}^3 \langle S_i \rangle_{MC}} \left( \underline{\mathbf{n}}_j \underline{\mathbf{n}}_j - \frac{1}{3} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right) \right\} , \quad (8.74)$$

Die vorhergegangenen Einschränkungen bewirken, daß  $c_4$  im Intervall  $[0, 1]$  liegt ( $c_4 = 0$ : isotrope Schädigungsevolution;  $c_4 = 1$ : die Schädigungsevolution in Richtungen senkrecht zu Zughauptspannungen verschwindet). Natürlich sind auch Werte bis  $-1/2$  theoretisch vorstellbar. Dies bedeutet bei  $c_4 = -1/2$ , daß die Schädigungsevolution in Richtungen der Zughauptspannungen verschwindet.

## 8.7 Thermodynamische Konsistenz und Materialfunktionen

Es ist nun zu überprüfen, ob die Forderung nach stets positiver Entropieproduktion erfüllt ist. Die dissipative Ungleichung (2.84) lautet mit (2.86),  $\dot{\eta} = 0$  und (8.12)

$$\frac{\beta}{\rho^0} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(p)} + \frac{1}{\rho^0} \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(s)} + \frac{1}{\rho T} \lambda_f \text{grad}^2(T) \geq 0 . \quad (8.75)$$

Während der erste und dritte Summand stets positiv sind, folgt aus der Belastungsbedingung  $\langle\langle\langle LC_2 \rangle\rangle\rangle$ , daß unter Berücksichtigung von (8.38), (8.54) und (8.55) im zweiten Summanden auch ein negativer Term,

$$\frac{h_0}{\rho^0} \text{Sp}(\underline{\underline{\mathbf{S}}}) , \quad (8.76)$$

auftreten kann. Soll der zweite Hauptsatz der Thermodynamik für alle betrachteten Fälle erfüllt werden, begrenzt dies die Theorie auf Situationen, in denen die plastische Deformationsrate größer als die schädigungsinduzierte ist. Eine Bedingung, die bei schwachen Porenverteilungen begründet erscheint und auch eine Voraussetzung ist, wenn  $\Delta V^*$  in der Konfiguration  $\mathcal{B}^*$  keine Eigenspannungen enthalten soll.

Im folgenden müssen noch die Materialfunktionen  $E(T)$ ,  $\nu(T)$ ,  $\lambda_f(T)$ ,  $\alpha(T)$ ,  $\rho(T)$ ,  $c_1(T)$  bis  $c_3(T)$ ,  $c_p(T)$  und  $\beta(T)$  definiert werden. Die ersten 8 können voneinander unabhängig festgelegt werden (Polynomansätze siehe Anhang 6 oder FELDMÜLLER [62]).  $c_p(T)$  und  $\beta(T)$  unterliegen einer thermodynamischen Restriktion (Integrabilitätsbedingungen nach LEHMANN [116]). Diese läßt sich, ohne Aussagen über die spezifische freie Enthalpie  $\Psi$  zu machen, mit den postulierten Evolutionsgesetzen der inneren Variablen formulieren und wird aus den gemischten partiellen Ableitungen von  $\Psi$  ermittelt. Mit der Bilanz der inneren Zustandsänderungen und mit der spezifischen Formänderungsleistung (2.85) folgt

$$0 = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\xi}}} \cdot \cdot \underline{\underline{\dot{\xi}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial a} \dot{a} - \frac{1 - \beta}{\rho^0} \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(p)} . \quad (8.77)$$

Die zweimalige partielle Ableitung von (8.77) nach  $T$  liefert

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial T^2 \partial a} = \frac{1}{\dot{a}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left( \frac{1-\beta}{\rho^0} \right) \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} - \frac{\partial^3 \Psi}{\partial T^2 \partial \xi} \dot{\xi} - \frac{\partial^3 \Psi}{\partial T^2 \partial \underline{\underline{\xi}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\nabla}}} \underline{\underline{\xi}} \right] . \quad (8.78)$$

Mit (8.78) und den partiellen Ableitungen von (8.8) nach  $a$ ,  $\xi$  und  $\underline{\underline{\xi}}$  läßt sich ein Zusammenhang zwischen  $c_p$  und  $\beta$  finden:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( -\frac{c_p}{T} \right) = \frac{1}{\dot{a}} \left[ \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left( \frac{1-\beta}{\rho^0} \right) \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( -\frac{c_p}{T} \right) \dot{\xi} - \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\xi}}} \left( -\frac{c_p}{T} \right) \cdot \underline{\underline{\underline{\nabla}}} \underline{\underline{\xi}} \right] . \quad (8.79)$$

Mit der Annahme, daß  $c_p$  (siehe Anhang 6) nur temperaturabhängig ist, reduziert sich (8.79) zu

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left( \frac{1-\beta}{\rho^0} \right) . \quad (8.80)$$

Diese Integrabilitätsbedingung für  $\beta(T)$  muß erfüllt werden.  $\beta$  ist für Metalle häufig näherungsweise eine Konstante, wobei z.B. Werte von 0,9 (POHÉ [178]), 0,84 (FELDMÜLLER [62]) oder 0,6 (PAPE [172]) angegeben werden.

## 8.8 Das Materialgesetz für weggesteuerte Prozesse

Für weggesteuerte Prozesse ist es notwendig, die vorangegangenen Gleichungen nach den Spannungsrate aufzulösen. Die Addition der Gleichungen (8.20), (8.31) und (8.38) unter Berücksichtigung von (8.54) und (8.55) ergibt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{D}}} &= \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underset{(r)}{+} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underset{(p)}{+} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underset{(s)}{+} \\ &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\underline{\nabla}}} \underline{\underline{\mathbf{S}}} + \alpha \dot{T} \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle 2\lambda \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D + h_0 \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \sum_{i=1}^3 h_i \underline{\underline{\mathbf{n}}}_i \underline{\underline{\mathbf{n}}}_i . \end{aligned} \quad (8.81)$$

Die Umstellung nach der objektiven Spannungsrate liefert nun:

$$\underline{\underline{\underline{\nabla}}} \underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)-1} \cdot \left[ \underline{\underline{\mathbf{D}}} - \alpha \dot{T} \underline{\underline{\mathbf{1}}} - \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle 2\lambda \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D - h_0 \underline{\underline{\mathbf{1}}} - \sum_{i=1}^3 h_i \underline{\underline{\mathbf{n}}}_i \underline{\underline{\mathbf{n}}}_i \right] . \quad (8.82)$$

Die Schwierigkeit bei dieser Darstellung liegt in der Bildung der inversen von  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}$ . Die objektive Zeitableitung des gewichteten Cauchy'schen Spannungstensors ist ebenfalls in der Gleichung (8.35) für  $\lambda$  enthalten. Zur Substitution dieser Größe

wird (8.82) mit  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^D$  doppelt skalar von links multipliziert. Durch Umformen und Einsetzen in (8.35), unter Berücksichtigung von (8.30), der Symmetrieeigenschaften aller Tensoren und daß hier die Eigenvektoren des Spannungsdeviators  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^D$  und der plastischen Verzerrungsrate  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  übereinstimmen (siehe (8.38) und (8.31)), wird der folgende Ausdruck erhalten:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{\Lambda^N}{\Lambda^Z} \\ \Lambda^N &= \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} - \sum_{i=1}^3 h_i S_i - \frac{1-2\nu}{2E} \left[ \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T} - \frac{\partial k^2}{\partial a} (a_5 \dot{\xi} \exp(a_6 \dot{\xi}) - a_7 \dot{\xi} \exp(a_8 \dot{\xi})) \right] \\ \Lambda^Z &= \frac{\partial k^2}{\partial a} \frac{a_4}{\rho_0} \left[ \frac{1+\nu}{E} k^2 + 2a_3 (\underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \cdot \underline{\underline{\xi}} + \underline{\underline{\xi}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D) \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \right] + 2k^2 \quad .\end{aligned}\tag{8.83}$$

Mit Hilfe dieses Ausdrucks kann nun auch die Gleichung (8.64) und folglich auch die Evolutionsgleichung des Porenvolumenanteils  $\xi$  unabhängig von der Spannungsrate dargestellt werden.

## 9. Versagen und Bruch

### 9.1 Definition des Versagens

Der Begriff des *Versagens*<sup>13</sup> wird in der Literatur häufig ohne eine nähere Beschreibung verwendet. Die fehlende Analyse der stattfindenden Mikroprozesse bei der Aufstellung von Versagenskriterien und der weiteren Beschreibung des Material- und Strukturverhaltens nach Erreichen kritischer Zustände führt dann auf Voraussagen, die dem physikalischen Problem nicht adäquat sind. Zur Vermeidung von Korrekturfaktoren, die keine Materialeigenschaften sind und nur die Diskrepanz zwischen dem mathematischen Modell und dem physikalischen Problem aufzeigen, wird ein systematischerer Weg verfolgt.

Materialversagen kann im allgemeinsten Sinne als Verletzung von Voraussetzungen, Hypothesen und Postulaten definiert werden, die bei Aufstellung der Materialgesetze getroffen wurden. Aus makroskopischer Sicht lassen sich hieraus drei *Versagensformen* unterscheiden, die aus unterschiedlichen Prozessen resultieren und folglich angepasste Versagenskriterien und -beschreibungen benötigen:

- (i) Überschreiten des Gültigkeitsbereiches der Kontinuumstheorie,
- (ii) Überschreiten des Gültigkeitsbereiches der Materialgesetze oder
- (iii) Überschreiten der Materialbelastbarkeit (Entstehung und Ausbreitung von Makrodefekten).

Die Fälle (i) und (iii) werfen für die Kontinuums-Schädigungs-Theorie neue Fragestellungen auf. Der Punkt (ii) wird daher hier nicht näher betrachtet.

Im Fall (i) wachsen und verschmelzen Mikrodefekte in  $\Delta V^*$  bzw.  $\Delta V$  auf eine Größe an, die die Festlegung einer neuen unteren Schranke in der Ungleichung (2.5) erfordert. Wird diese Schranke nun größer als die obere Schranke, kann (2.5) nicht

---

<sup>13</sup> Versagen wird hier auf das Material und nicht auf eine Struktur (z.B. durch Instabilität (MACHERAUCH & KLOOS [135])) bezogen.

länger erfüllt werden. Wird eine charakteristische Länge  $l_{char}$  der Mikrodefekte größer als  $\sqrt[3]{\Delta V^*}$  (d.h.  $\approx 0.1\text{mm}$  bei Metallen (LEMAITRE [125])), werden benachbarte Volumenelemente getrennt, und das grundlegende Postulat der Kontinuumstheorie über die Existenz des Deformationsgradienten wird verletzt. Diese Prozesse definieren den Zeitpunkt  $t^* = t^*(\underline{\mathbf{X}})$ , ab dem die Kontinuumstheorie in der Umgebung von  $\underline{\mathbf{X}}$  versagt.  $l_{char}$  eines einzelnen Mikrodefekts kann jedoch nur aus den Mittelwerten der Schädigungsvariablen abgeschätzt werden (z.B. DIEHL und FORNEFELD [58], [59]). Wenn auch ein Versagenskriterium zur Bestimmung des Zeitpunktes  $t^*$  wünschenswert ist, kann dieses nicht unabhängig vom betrachteten Problem aufgestellt werden. Einerseits ist ein kritischer Wert von  $l_{char}$  von der jeweiligen Struktur abhängig, da diese die obere Schranke  $(\Delta V)_2$  bestimmt. Andererseits ist ein zu

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta V^*}} l_{char} \Big|_{t=t^*} ; \quad \forall \underline{\mathbf{X}} \quad (9.1)$$

proportionales Versagenskriterium, d.h. das Schädigungsmaß selbst, noch von der subjektiven Entscheidung, ob die theoretischen Ergebnisse infolge der Kontinuumstheorie oder der speziellen Materialgesetze von den experimentell bestimmten Werten abweichen und was als hinreichend genau zu bezeichnen ist, abhängig. Hat man sich aber für einen Zeitpunkt  $t^*$  entschieden, kann der entstandene Defekt nicht durch einen Makrodefekt approximiert werden. Ein Makrodefekt ist mindestens eine Größenordnung größer als  $\Delta V^*$ , d.h.  $l_{char} > 1.0\text{mm}$  (SÄHN & GÖLDNER [190], SCHATT [192]). Das Ausbreitungsverhalten sogenannter *kleiner* Defekte unterscheidet sich sowohl von dem der Mikro- als auch der Makrodefekte, und dessen Beschreibung stößt unserer Ansicht nach an die Grenzen kontinuumsmechanischer Konzepte.

Versagen nach (iii) ist durch lokales Überschreiten der Materialbelastbarkeit gekennzeichnet und mit dem Bruch eines Volumenelementes verbunden. Die Kontinuums-Schädigungs-Theorie wird im Rahmen lokaler Bruchnäherungen (*local approach of fracture*) zur Voraussage der Rißentstehung, -initiierung und -ausbreitung in Strukturen verwendet. Ein Makroriß wird dann als eine Menge von Volumenelementen betrachtet, in denen nach Erfüllung eines Versagens- bzw. Bruchkriteriums die Steifigkeit verschwindet. Ein Überblick und eine Klassifikation der Methoden der lokalen Bruchnäherungen wird von LEMAITRE in [125] angegeben. Es zeigt sich aber, daß die verwendeten Modelle und numerischen Simulationen, die auf der Basis eines Bruchkriteriums entwickelt wurden, zwar die Last-Verschiebung-Kurven qualitativ wiedergeben können, aber gegen unrealistische Rißinitiierungswerte konvergieren. Speziell bedeutet dies, daß Rißinitiierung zu früh einsetzt (z.B. SCHMITT [193]). ROUSSELIER

[187] z.B. verzichtet in seinem theoretischen Modell auf ein Bruchkriterium, und der Riß ist dann eine Prozezone, in der die Schädigung bis zum Verschwinden der Steifigkeit kontinuierlich wächst. Dieses Vorgehen widerspricht experimentellen Beobachtungen, wobei Probenbruch nach einer gewissen Duktilität bzw. Bruchdehnung, bei der noch eine Reststeifigkeit vorhanden ist, eintritt – BILLARDON & MORET-BAILLY [25]: "... *the damage rate at point A (Rißinitiierung - Bemerkung des Autors) becomes almost infinite when damage reaches the value of 0.40 corresponding to a residual elastic stiffness equal to 60% of the original one.*"; siehe auch MACHERAUCH [134], SCHATT [192]. Tatsächlich verwendet ROUSSELIER in seiner numerischen Simulation doch ein Kriterium für Rißfortschritt. Dieser tritt demnach ein, wenn Instabilität im Drucker'schen Sinne auftritt. Folglich ist die Analyse auf Materialien mit makroskopischer Entfestigung beschränkt, und das Bruchkriterium ist offensichtlich zu konservativ.

Zur Überwindung der Konvergenzprobleme werden charakteristische Längen oder Volumina bei der numerischen Lösung der Differentialgleichungen eingeführt (z.B. ARGYRIS, VAZ & WILLAM [6], BAZANT & PIJAUDIER-CABOT [11] ROUSSELIER [187] oder SCHMITT [193]) und als charakteristisches Merkmal eines Materials interpretiert. ~~Wenn es auch durch die Interpretation der charakteristischen Länge als mittlerer Abstand porenbildender Teilchen den Anschein hat, besitzt dieses Konzept keinen präzisen physikalischen Hintergrund, z.B. verstößt es gegen das Prinzip der lokalen Wirkung.~~ Im folgenden Abschnitt soll untersucht werden, wie die Konvergenzprobleme auch ohne die Einführung charakteristischer Längen überwunden werden können.

## 9.2 Versagenszustände

In allen betrachteten Arbeiten tauchen keine charakteristischen Längen oder Volumina in den konstitutiven Beziehungen auf; sie begrenzen nur in Finite-Element-Analysen die Elementgröße nach unten. Folglich wird das mathematische Modell nicht exakt gelöst, um eine Übereinstimmung mit den experimentellen Daten zu erzielen. Hohe Spannungs- und Verzerrungsgradienten werden abgeschwächt, und die postulierten kritischen Zustände werden zeitlich später erreicht. Dieses Vorgehen trägt nicht zum besseren Verständnis von Bruchprozessen bei und lenkt vom eigentlichen Problem, das mathematische Modell, ab.

Die Ursachen der Konvergenzprobleme sind vielseitig. Die Kontinuumsmechanik liefert Spannungen, Verzerrungen, Schädigungen und Temperaturen als Mittelwerte ho-

mogenisierter Mikrofelder. Die Erfassung der realen Mikrofelder ist nicht möglich. M.KACHANOV in [93] zeigt z.B. (WU & CHUDNOVSKY [222] führen diese Problematik an), daß gerade die Einzelheiten der Mikrofelder für die Bruchprozesse von entscheidender Bedeutung sein können. So kann Schädigungsfortschritt gleichzeitig sowohl Steifigkeitsverminderung als auch Festigkeitssteigerung hervorrufen. Weiterhin können in den vorhandenen Modellen Prozesse, die zu einer Festigkeitssteigerung führen, oft nicht erfaßt werden; z.B. (SCHATT [192])

- Mischkristallverfestigung,
- Verformungsverfestigung,
- Korngrenzenverfestigung,
- Teilchenverfestigung,
- Eigenspannungen,
- Temperaturabhängigkeit der Bruchzähigkeitswerte... .

Die entscheidenden Ursachen liegen aber nach Ansicht des Autors in einer dem Problem nicht angepaßten numerischen Prozedur, der Wahl des Bruchkriteriums (siehe auch LEMAITRE [125]) und in der experimentellen Bestimmung der Bruchkennwerte. Die Verringerung der Steifigkeit geschädigter Bereiche einer Struktur bewirkt eine Umverteilung der Spannungen, der eine Entlastung dieser Bereiche folgt. Oft wird die Steifigkeitsverminderung und die Spannungsumverteilung, wenn sie nicht ganz vernachlässigt wird, nicht vollständig berücksichtigt (LEMAITRE [125]). Dies liefert in den kritischen Bereichen einer Struktur zu große Spannungswerte über die gesamte Prozeßdauer, und der Bruch setzt zu früh ein. Die Berücksichtigung der Steifigkeitsverminderung und die ständige Kopplung der Spannungs-, Verzerrungs- und Schädigungsberechnung ist dann ein erster Schritt zur Behebung der oben genannten Konvergenzprobleme.

In der durchgesehenen Literatur wurden die folgenden Bruchkriterien in Verbindung mit charakteristischen Längen oder Volumina verwendet:

- (i) ein kritischer Wert einer äquivalenten Spannung, z.B.

$$\text{BEREMIN [18]: } \sigma_{eq}(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_c, \quad (9.2)$$

$$\text{LEMAITRE [125]: } \sigma^*(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_{eq} \sqrt{\frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \frac{\sigma_H^2}{\sigma_{eq}^2}} = \sigma_c \quad (9.3)$$

- (ii) ein kritischer äquivalenter Wert einer effektiven Spannung, z.B. ( $D$  – isotropes Schädigungsmaß)

$$\sigma_{eq}(\underline{\underline{\sigma}}_{eff.}) = \sigma_c, \quad \text{HULT [82], [83]: } \underline{\underline{\sigma}}_{eff.} = \frac{1}{1 - D} \underline{\underline{\sigma}}; \quad (9.4)$$

- (iii) ein kritischer Wert einer äquivalenten Verzerrung, z.B. ( $\lambda$  - Proportionalitätsfaktor,  $C_m$  - Monkman-Grant Parameter)

$$\text{CHABOCHE [38], [39]: } p = \int_0^t \frac{1}{1-D} \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_p \cdot \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_p} d\tau = p_R, \quad (9.5)$$

$$\text{TIROSH \& MILLER [206]: } \varepsilon = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}} d\tau = \varepsilon_f = \lambda_{CDT} C_m; \quad (9.6)$$

- (iv) ein kritischer Wert der Schädigung [38], [39], [43], [123],

$$\text{MURAKAMI \& RONG [156]: } D_{\max} = D_c, \quad (9.7)$$

( $D_{\max}$  - maximaler Hauptwert eines Schädigungstensors 2. Stufe  $\underline{\underline{D}}$ ),

$$\text{TAI [204]: } V_D = \int_{\bar{\varepsilon}_0}^{\bar{\varepsilon}} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \frac{\sigma_H^2}{\sigma_{eq}^2} \right] d(\bar{\varepsilon}_p)_{eq} = V_{D_c} \quad (9.8)$$

(isotropes Material, proportionale Belastung;)

- (v) ein kritisches Defektwachstum, z.B. McCLINTOCK [142] oder ( $R$  bzw.  $R_0$  - mittlere Radien der Hohlräume bei  $\tau = t$  bzw.  $\tau = 0$ )

$$\text{ROUSSELIER [188]: } \ln \frac{R}{R_0} = \int_0^t 0.283 \exp\left(\frac{3\sigma_H}{2\sigma_{eq}}\right) d\varepsilon_{eq}^p = \left(\ln \frac{R}{R_0}\right)_C; \quad (9.9)$$

- (vi) ein kritischer Wert der durch den Schädigungsprozeß dissipierten Energiedichte, z.B. ( $\Omega$  - charakteristisches Volumen)

$$\text{BILLARDON [25]: } \int_{(\Omega)} \int_0^t \left(-\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{D}\right) d\tau d\Omega = W_c. \quad (9.10)$$

CLIFT, HARTLEY, STURGESS & ROWE [46] untersuchten systematisch verschiedene Bruchkriterien für elastisch-plastische Materialien. Die Ergebnisse zeigen, daß das Bruchkriterium, welches auf der verallgemeinerten plastischen Arbeit je Volumeneinheit

$$W^p = \int_0^{\bar{\varepsilon}} \sigma_{eq} d\bar{\varepsilon} = W_c^p \quad (9.11)$$

beruht, zur Abschätzung des experimentellen Bruchinitiierungsortes für den gesamten betrachteten Prozeßbereich geeignet ist. Die Existenz dieser großen Anzahl physikalisch sehr verschiedener Bruchkriterien weist auf ein empirisches Vorgehen bei der Definition dieser Größen hin. Nach Ansicht des Autors kann keines der oben angeführten Kriterien das Einsetzen des Bruches ausreichend erklären.

McCLINTOCK [142] schlug zuerst ein Versagenskriterium vor, nach dem der Bruch auftritt, wenn benachbarte Poren sich berühren. Dieses Kriterium ist nicht mit den mikrographischen und mikrofraktographischen Beobachtungen in vielen Metallen konform. Diese zeigten, daß der Bruch durch unterschiedliche Mechanismen hervorgerufen wird, die bewirken, daß die Ligamente zwischen den Hohlräumen weit vor dem Kontaktieren der Hohlräume brechen ROUSSELIER [188]. Es kann daher davon ausgegangen werden, daß Materialversagen bereits bei kleinen Schädigungswerten ein-

tritt. Z.B. ergeben die quantitativen optischen mikroskopischen Untersuchungen von SCHMITT [193] einen maximalen Wert von 0.15, und TVERGAARD und NEEDLEMAN [213] geben einen Wert von  $\xi = 0.25$  an. CHABOCHE [37] grenzt die höchsten auftretenden Werte im Intervall [0.20; 0.80] ein. Derartig hohe Werte treten in Kupfer auf; bei Stählen sind aber Werte von 0.17 bis 0.24 zu erwarten [62]. Hiervon unabhängig ist nach Meinung des Autors eine kritische Schädigung aus den folgenden zwei Gründen für ein Bruchkriterium irrelevant:

- (a) eine kritische Schädigung ist vollständig unabhängig von den aktuell wirkenden äußeren Kräften und Momenten und
- (b) sie macht keine Aussagen über den Material- und Belastungszustand des Matrixmaterials; es ist aber letztendlich das Matrixmaterial, welches nach der obigen Aussage von ROUSSELIER bricht.

Zu diesem Ergebnis gelangen auch BILLARDON & MORET-BAILLY [25]: "... *the corresponding critical value of damage, used to predict the rupture of the elementary volume has very little influence on the predicted time to initiation itself.*"

Die Größen in (9.5), (9.6) und (9.11) beschreiben die Belastungsgeschichte des Materials in Form der Verfestigung. Auch die Größen in (9.8), (9.9) und (9.10) beschreiben eine Belastungsgeschichte und sichern eine gewisse Prozeßdauer, in der sich die Schädigung um einen definierten Betrag vergrößern kann (Der Endbetrag der Schädigung ist hier ohne Bedeutung!). Diese Größen legen jedoch nur die inneren Zustandsvariablen (Materialzustand) bzw. deren Änderungen in der aktuellen Konfiguration fest. Diese bestimmen u.a. die aktuellen Eigenschaften und die Tragfähigkeit des Materials, zeigen aber nicht an, ob letztere überschritten wird. Die im Augenblick des Bruches wirkenden äußeren Kräfte werden wieder nicht betrachtet.

Eine kritische äquivalente Spannung (Gleichung (9.2) oder (9.3)) der Cauchy'schen Spannung  $\underline{\sigma}$  berücksichtigt die äußere Last, macht jedoch keine Aussagen über die tatsächlich im Matrixmaterial wirkenden Lasten. Die durch die Schädigung hervorgerufene Verringerung der Tragfähigkeit kann ebenfalls nicht beschrieben werden (z.B. OTHMAN & HAYHURST [168], [168]). Tritt der Bruch erst nach einer makroskopischen Entfestigung auf, ist dieses Bruchkriterium völlig ungeeignet. Abhilfe scheint eine kritische äquivalente Spannung einer effektiven Spannung (Gleichung (9.4)) zu schaffen. Dennoch erklärt diese nicht, warum der Bruch eintritt. Spannungen, die zum Abbruch von Molekularbindungen oder der Bindungskräfte zwischen einzelnen Körnern genügen, traten bereits im Verlauf der Belastungsgeschichte auf und führten zur stabilen Bildung und Wachstum der Mikrodefekte. Mit der Bruchinitiierung

wird dieser Prozeß instabil, was sich allein mit Hilfe einer Spannung nach Ansicht des Autors nicht erklären läßt.

Trotz der Unterschiede zwischen den Kriterien und der oben angeführten Kritik muß davon ausgegangen werden, daß diese unter gewissen Umständen als Indikatoren für den bevorstehenden Bruch geeignet sind. Werden die Erfahrungen mit energetisch definierten Bruchkriterien in den Konzepten der Bruchmechanik und die experimentellen Beobachtungen von ALLEN, HARRIS & GROVES in [1] und [2] berücksichtigt, erscheinen Bruchkriterien am geeignetesten, die auf Energien basieren. Dies beides berücksichtigend, soll im folgenden ein lokales Bruchkriterium für elastisch-plastische Materialien entwickelt werden, das den Materialzustand einschließlich des Spannungszustandes berücksichtigt und eine begründete Bilanz der beim Bruch umgesetzten Energiebeiträge liefert.

Als Ausgangspunkt für die Bilanz der beim Bruch umgesetzten Energiebeiträge wurde die klassische Bruchmechanik ideal spröder Körper (Griffith-Theorie) bzw. die LEBM (Irwin-Theorie) gewählt. Der Grundgedanke dieser Theorien (siehe HAHN [74]) kann in abgewandelter Form nun wie folgt formuliert werden: Bei Schädigungsfortschritt wird (potentielle) elastische Energie freigesetzt, und wegen der Schaffung neuer Oberflächen wird die (potentielle) Oberflächenenergie erhöht. Bei instabilem Schädigungsfortschritt (Bruch) muß die gesamte potentielle Energie abnehmen, d.h. es muß ein Überschuß der freigesetzten elastischen Energie über die benötigte Oberflächenenergie vorhanden sein. Ist  $W^e$  die Dichte der elastischen Verzerrungsenergie

$$W^e = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}) \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}, \quad (9.12)$$

kann die Dichte der elastischen Schädigungs-Verzerrungs-Energiefreisetzungsrates mit Hilfe von (8.4) und (8.18) wie folgt angegeben werden:

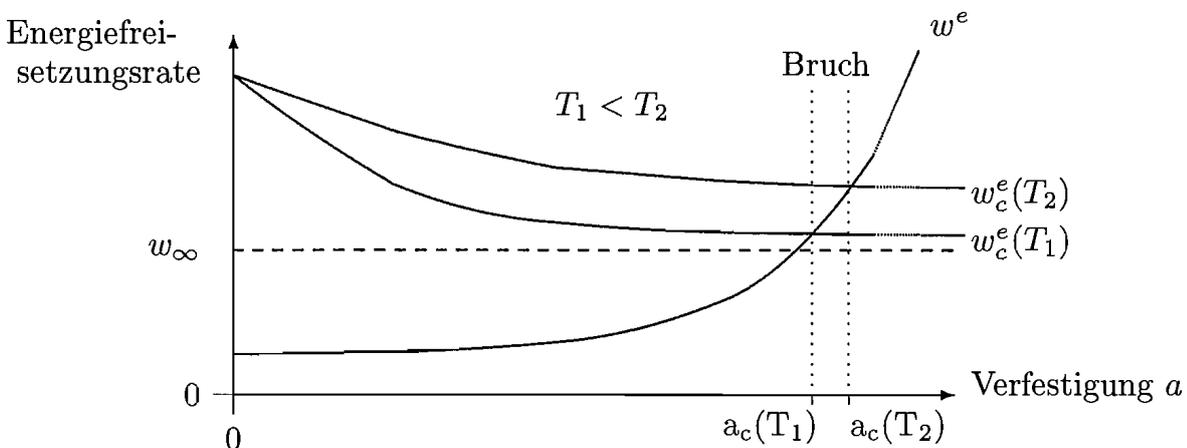
$$w^e = \frac{1}{2} \frac{d W^e}{d \xi} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial W^e}{\partial \xi'} = \pi \frac{\partial W^e}{\partial \xi} = \pi (\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}) \cdot \cdot \frac{\underline{\underline{\mathbf{S}}}}{1 - \xi}. \quad (9.13)$$

Mit der Betrachtung elastisch-plastischer Materialien und thermischer Prozesse muß die Energiebilanz für spröde Materialien erweitert werden. Es werden folgende Energiebeiträge umgesetzt:

- (i) elastische Energie,
- (ii) Oberflächenenergie der Poren (Dissipation durch Schädigung),
- (iii) plastische und thermische Dissipation und
- (iv) Arbeit der äußeren Kräfte.

Die freigesetzte elastische Energie wird folglich nicht nur durch Schädigungsfortschritt, sondern auch durch plastische Deformation und thermische Prozesse (innere Dämpfung) dissipiert. FELDMÜLLER [62] nimmt an, daß die gesamte freigesetzte elastische Energie dem thermischen Prozeß zugeführt wird. Diese Annahme soll nicht übernommen werden, da dann keine Energie zur Bildung der Bruchoberflächen zur Verfügung stünde. Im Gegenteil, im folgenden wird die thermische Dissipation der freigesetzten elastischen Energie vernachlässigt. Dies kann mit der großen Trägheit dieser Prozesse begründet werden.

Natürlich ist die Energiefreisetzungsrates  $w^e$  in (9.13) eines Materials durch die aktuellen Werte der Schädigung  $\xi$ ,  $\underline{\xi}$ , der elastischen Nachgiebigkeit  $\underline{C}^{(4)}$  und der Verfestigung  $a$  nach oben begrenzt. Die Verfestigung bestimmt nach Gleichung (8.37) den Wert der Fließspannung, ein Wert, der hier nicht überschritten werden kann. Mit wachsender Verfestigung des Matrixmaterials (hier durch (8.34) beschrieben) wächst auch dessen Fließspannung, und es kann immer mehr elastische Verzerrungsenergie gespeichert werden. Ist diese Energiemenge so groß, daß die Energiefreisetzungsrates  $w^e$  größer oder gleich einem kritische Wert  $w_c^e$  ist, tritt der instabile Bruch ein. Da ein Teil der freigesetzten elastischen Energie durch plastische Prozesse (z.B. Mikroplastizität) dissipiert wird, ist  $w_c^e$  größer als bei ideal spröden Materialien.



**Abbildung 11:** Entwicklung der elastischen Schädigungs-Verzerrungs-Energiefreisetzungsrates bis zum Bruch

Es wird deutlich, daß der Bruchzeitpunkt durch die Verfestigungsvariablen weitestgehend bestimmt wird, wenn die Fließfläche nicht verlassen wird (Gleichung (8.33) gilt stets) und isotherme Prozeßführung angenommen wird (siehe Abbildung 11). Gleichung (9.11) ist ein Maß für die Arbeits-Verfestigung. Für Dehnungsverfestigung folgen somit die Kriterien (9.5) und (9.6). Analog lassen sich auch die Kriterien

(9.8) und (9.9) als Größen interpretieren, die sichern, daß der plastische Prozeß vor dem lokalen Bruch eine hinreichende Zeitdauer anhielt. Es liegt dann nahe, die Verfestigung selbst als Bruchkriterium zu verwenden. Gleichung (9.13) zeigt aber, daß die Verfestigung zwar den zum Bruch führenden Prozeß steuert, ihn letztendlich aber nicht verursacht. Hierfür ist eine hinreichend große äußere Belastung notwendig, was dann wieder auf die Kriterien (9.2) bis (9.4) führt. Dies ist konform mit den Aussagen von LEE, PENG & WANG [114], BILLARDON & MORET-BAILLY [25] und LEMAITRE [123], die ebenfalls davon ausgehen, daß zwischen Größen, die den Bruchprozeß steuern, und Größen, die den zum Bruch führenden Schädigungsprozeß steuern, unterschieden werden muß.

Neben den beschriebenen Prozessen kann davon ausgegangen werden, daß mit wachsender Verfestigung das Material versprödet, die plastische Deformationsgeschwindigkeit sinkt, da immer weniger freie Versetzungen vorhanden sind. Dies bewirkt nach Ansicht des Autors, daß der durch plastische Deformation dissipierte Anteil abnimmt. D.h.  $w_c^e$  sinkt mit wachsender Verfestigung. Untersuchungen zur Abhängigkeit eines Bruchkriteriums von der Verfestigung und eventuell von der Temperatur konnten in der durchgesehenen Literatur nicht gefunden werden. Daher wird für die Entwicklung der kritischen Energiefreisetzungsrates  $w_c^e$  der Ansatz

$$w_c^e = w_\infty + w_1 \exp\left(\frac{-w_2 a}{T}\right) \quad (9.14)$$

im betrachteten Temperaturbereich oberhalb der Sprödbrech-Verformungsbruch-Temperatur postuliert, wobei  $w_1$ ,  $w_2$  und  $w_\infty$  materialabhängige Koeffizienten sind.  $w_\infty$  entspricht der Energiefreisetzungsrates, die zur Bildung neuer Oberflächen notwendig ist, während der zweite Term in (9.14) den Anteil beschreibt, der plastisch dissipiert. Abhängigkeiten, die von der Belastungsgeschwindigkeit hervorgerufen werden, sollen vernachlässigt werden. Diese würden vor allem bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten (Versprödung des Materials) durch die äußere Belastung oder durch Rißausbreitung, wenn durch den Bruch einzelner Volumenelemente große und sehr schnelle Spannungsumlagerungen stattfinden, entstehen. Gleichung (9.14) bietet in dieser Form auch einen Ansatz zur Beschreibung der durch FELDMÜLLER [62] beschriebenen eingeschränkten Verformbarkeit durch Reckalterung. Das lokale Bruchkriterium lautet mit (9.13) und (9.14) wie folgt:

$$\pi(\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}) \cdot \frac{\underline{\underline{\mathbf{S}}}}{1 - \xi} = w_\infty + w_1 \exp\left(\frac{-w_2 a}{T}\right) \quad (9.15)$$

(9.15) kann nicht nur für elastisch-plastische Materialien verwendet werden, sondern ist auch für spröde Materialien geeignet. In diesem Fall wird der zweite Term der rechten Seite vernachlässigbar klein, und der Wert  $w_\infty$  wird von der elastischen Energiefreisetzungsrates  $w^e$  bereits vor Erreichen der Fließspannung, die unterhalb der Sprödbrech-Verformungsbruch-Temperatur stark anwächst, eingenommen (siehe Abbildung 11).

Das Bruchkriterium der Form (9.15) wurde durch die Arbeit von TEOH, CHERRY & KAUSCH [205], in der eine kritische Verzerrungsenergiedichte das Bruchkriterium bildet, motiviert. Auch LEMAITRE [125], BILLARDON & MORET-BAILLY [25], CHABOCHE [38], [39] und ROUSSELIER [188] betrachteten bereits ein analoges Kriterium. Letztendlich blieb es jedoch bei diesen theoretischen Betrachtungen, und in den Analysen der oben zitierten Autoren wurden die eingangs angeführten Bruchkriterien verwendet. Gleichung (9.15) läßt sich mit Hilfe der dort betrachteten isotropen Schädigung  $D$  wie folgt ausdrücken:

$$-y = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} = \frac{1}{2} \frac{d W_e}{d D} = y_c \quad (9.16)$$

$$\frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1-D)^2} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \frac{\sigma_H^2}{\sigma_{eq}^2} \right] = y_c .$$

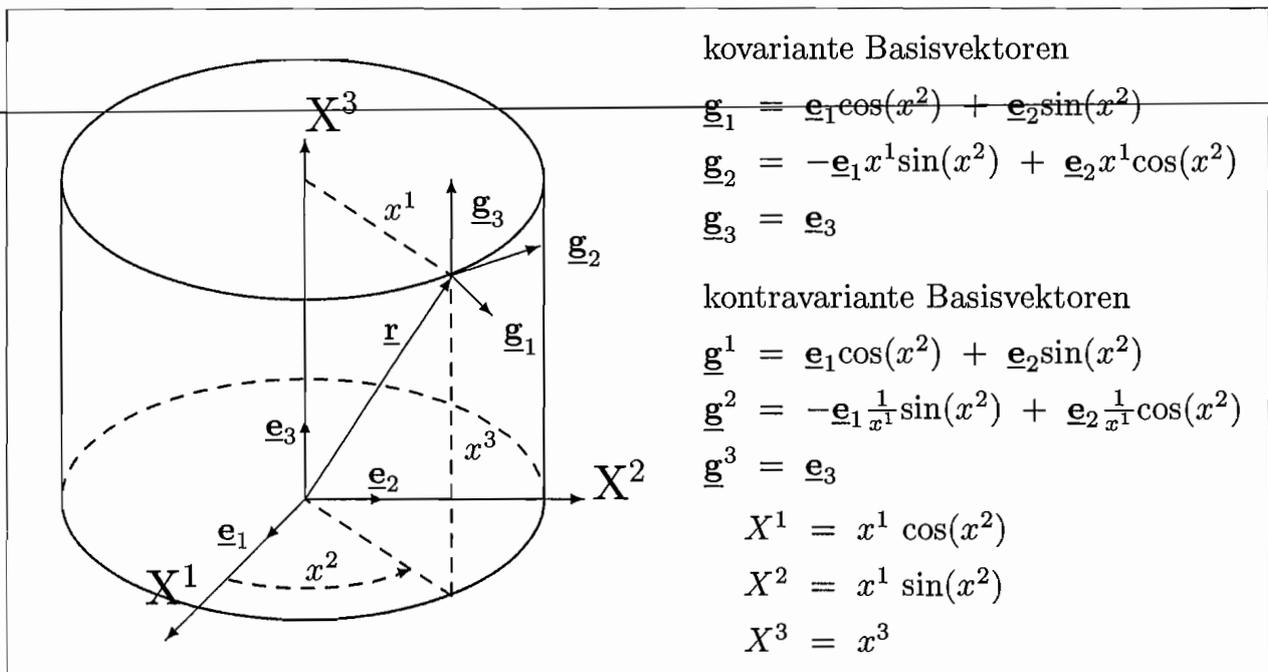
Auf die Problematik der experimentellen Identifikation und Verifikation von lokalen Bruchkriterien wurde bereits durch BILLARDON & MORET-BAILLY [25] und viele andere Autoren hingewiesen. Dieses kann nicht direkt durch einfache Extrapolation der Ergebnisse klassischer *einachsiger* Versuche erfolgen [25]. Während der Ribiniierungszeitpunkt durch die in der Bruchmechanik übliche Meßmethoden sehr exakt bestimmt werden kann, liefern diese Versuche, auch der *einachsige* Zugversuch an einem ungekerbten Stab, keine lokalen Zustandswerte am Bruchinitiiierungsort. Vielmehr müssen diese durch eine Mittelung über makroskopische Bereiche oder durch eine Abschätzung ermittelt werden. Ein Beispiel liefern die Untersuchungen von FELDMÜLLER [62], wo eine kritische Schädigung als Bruchkriterium verwendet wurde. Die Schädigung im direkten Einflußbereich des Bruches mußte aus Messungen in der Nachbarschaft der Bruchzone bestimmt werden. Neben diesem meßtechnischen Problem sind weiterhin keine Experimente verfügbar, die zur getrennten Bestimmung der in den Bruchkriterien auftretenden Materialfunktionen geeignet sind.

Auch an dieser Stelle kann die Lösung dieser Probleme nur zukünftigen Forschungen überlassen werden. In der Zwischenzeit müssen die Materialfunktionen (hier die Koeffizienten  $w_1$ ,  $w_2$  und  $w_\infty$ ) aus numerischen Simulationen der Experimente mit einer anschließenden Anpassung an die Meßergebnisse ermittelt werden.

## 10. Berechnungen

### 10.1 Berechnung axialsymmetrischer Probleme - homogener Zug

Die charakteristischen Eigenschaften des in den Kapitel 8 und 9 vorgestellten Materialgesetzes (Anhang 6) gegenüber einem isotropen Modell werden anhand einiger Beispielrechnungen dargestellt. Da sich dieses Materialgesetz auf das von FELDMÜLLER [62] im isotropen Fall reduzieren läßt, liegt es nahe, vor allem die Differenzen beider Modelle herauszustellen.



**Abbildung 12:** Zylinderkoordinaten ( $\underline{\mathbf{x}}^1, \underline{\mathbf{x}}^2, \underline{\mathbf{x}}^3$ )

Für die Beschreibung rotationsymmetrischer Probleme ist es vorteilhaft, ein Zylinderkoordinatensystem zu verwenden. Die Beziehungen zwischen einem raumfesten, kartesischen Koordinatensystem ( $\underline{\mathbf{X}}^1, \underline{\mathbf{X}}^2, \underline{\mathbf{X}}^3$ ) mit  $\underline{\mathbf{X}}^i = X^i \underline{\mathbf{e}}_i$  und einem krummlinigen, raumfesten Koordinatensystem ( $\underline{\mathbf{x}}^1, \underline{\mathbf{x}}^2, \underline{\mathbf{x}}^3$ ) =  $(r, \varphi, z)$  mit  $\underline{\mathbf{x}}^i = x^i \underline{\mathbf{g}}_i$  in Abbildung 12 wurden bereits mehrfach in der Literatur beschrieben (z.B. ZDEBEL

[227], SZEPAN [203], FELDMÜLLER [62]). Daher werden diese im weiteren als bekannt vorausgesetzt.

Im folgenden sollen weggesteuerte Prozesse betrachtet werden. Die hierfür erforderlichen materialabhängigen Gleichungen werden dem Abschnitt 8.8 entnommen. Der Deformationsprozeß dünnwandiger Kreiszyylinder unter der Axialspannung  $S^3_3$  und der Schubspannung  $S^2_3, S^3_2$  wird z.B. durch SZEPAN [203] beschrieben. Die Beziehungen zwischen  $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{D}}, \underline{\mathbf{W}}$  und den Größen zur Beschreibung der Probenverformung (Probenlänge  $l$ , Außenradius  $R$ , Wandstärke  $t$ , Gesamtverdrehwinkel  $\Psi_T$ ) und deren Raten lauten demnach:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{r^0 - R^0}{t^0} \dot{t} + \dot{R} = \frac{r - R}{t} \dot{t} + \dot{R} \\ \underline{\mathbf{v}} &= \dot{r} \underline{\mathbf{g}}_1 + \dot{\varphi} \underline{\mathbf{g}}_2 + \dot{z} \underline{\mathbf{g}}_3; \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{\Psi} z}{l} + \frac{\Psi \dot{z}}{l} - \frac{\Psi z \dot{l}}{l^2} \approx \dot{\Psi}_T \frac{x^3}{l} \\ \dot{z} &= z \frac{\dot{l}}{l} \end{aligned} \quad (10.1)$$

und

$$D^i_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} + r^2 \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} \right) & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\dot{r}}{r} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{z}}{\partial r} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} + r^2 \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} \right) & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad (10.2)$$

$$W^i_j = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} - r^2 \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} - 2r \dot{\varphi} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{z}}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\dot{\varphi}}{r} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{z}}{\partial r} - \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} - r^2 \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (10.3)$$

Bei der Verwendung zylindrischer Vollproben und ohne Torsion um die  $x^3$ -Achse (d.h.  $\dot{\Psi}_T = 0$ ) können die verbleibenden Beziehungen zwischen  $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{D}}, \underline{\mathbf{W}}, \underline{\mathbf{S}}^D, l, R, \dot{l}$  und  $\dot{R}$  soweit vereinfacht werden, daß sich der Deformationsprozeß vollständig durch  $l, R$ , der Temperatur  $T$ , der Axialspannung  $S^3_3 = S$ , der Verfestigungsvariablen  $a$  und den Schädigungsmaßen  $\xi, \xi^2_2, \xi^3_3$  beschreiben läßt;

$$\underline{\mathbf{v}} = \dot{r} \underline{\mathbf{g}}_1 + \dot{z} \underline{\mathbf{g}}_3; \quad (10.4)$$

$$D^i_j = \text{diag} \left( 0; \frac{\dot{R}}{R}; \frac{\dot{l}}{l} \right); \quad W^i_j = \text{diag}(0; 0; 0); \quad (10.5)$$

$$S_j^i = \text{diag}(0; 0; S); \quad \overset{\nabla}{S}^{Di}_j = \frac{1}{3} \text{diag}(-\dot{S}; -\dot{S}; 2\dot{S}) \quad . \quad (10.6)$$

Als Belastung wird die axiale Geschwindigkeit der Proben an deren Ende  $v^3(x^3 = l)$  so vorgegeben, daß hieraus eine konstante Verzerrungsrate  $D^3_3 = 10^{-3}$  resultiert.

Um einen homogenen Zustand der Probe zu gewährleisten, werden Störungen, die von den Probenrändern ausgehen, vernachlässigt. Weiterhin muß über die gesamte Probe dieselbe Temperatur vorherrschen. Effekte, die in der Probe einen Temperaturgradienten hervorrufen, werden daher vernachlässigt. Ein Prozeß (8.11) kann als isotherm angenommen werden, d.h.  $\dot{T} = 0$ , wenn die Deformationsgeschwindigkeit sehr langsam ist und die dissipierte Energie schnell genug abgeführt werden kann. Hingegen kann bei sehr schnellen Deformationsgeschwindigkeiten kaum Wärmeleitung stattfinden ( $\underline{q} \approx \underline{0}$ ), und der Prozeß ist näherungsweise adiabat.

Nach mehr oder weniger aufwendigen Umformungen der Gleichungen für weggesteuerte Prozesse erhält man das Differentialgleichungssystem der Gleichungen (10.7) bis (10.28) bei Vernachlässigung thermoelastischer Effekte. Die Gleichungen (10.23) und (10.24) zur Bestimmung von  $\lambda$  und  $\dot{T}$  sind transzendent und lassen sich nicht auf algebraische Gleichungen zurückführen.  $\lambda$  und  $\dot{T}$  werden aus den aktuellen Werten (d.h. zum Zeitpunkt  $t$ ) aller Variablen durch die Iteration, die in Abbildung 13 dargestellt ist, erhalten.

a) elastisches Differentialgleichungssystem

$$\dot{l} = v^3(x^3 = l) \quad ; l(t=0) = l^0 \quad (10.7)$$

$$\dot{R} = -R \left[ \frac{\frac{\nu}{E} - a_1 \xi^3_3 - a_2 \xi^2_2}{\frac{1}{E} + \xi^3_3(a_1 + a_2 + 4a_3)} \right] \frac{\dot{l}}{l} \quad ; R(t=0) = R^0 \quad (10.8)$$

$$\dot{T} = 0 \quad ; T(t=0) = T^0 \quad (10.9)$$

$$\dot{S}^3_3 = \frac{\dot{l}}{l} \left[ \frac{1}{E} + \xi^3_3(a_1 + a_2 + 4a_3) \right]^{-1} \quad ; S^3_3(t=0) = 0 \quad (10.10)$$

$$\dot{\xi} = 0 \quad ; \xi(t=0) = \quad (10.11)$$

$$\underline{\dot{\xi}} = \underline{\underline{0}} \quad ; \underline{\underline{\xi}}(t=0) = \quad (10.12)$$

$$\dot{a} = 0 \quad ; a(t=0) = 0 \quad (10.13)$$

b) elastoplastisches Differentialgleichungssystem

$$q_1 = \frac{\partial k^2}{\partial T} = -\bar{k}^2(b_4 + b_5 a) \quad (10.14)$$

$$\begin{aligned} q_2 &= k^2 \frac{\partial k^2}{\partial a} \\ &= k^2 \{ [b_1 b_2 (1 - \tanh^2(b_2 a)) + b_3] \exp(-(b_4 + b_5 a)) - \bar{k}^2 b_5 T \} \end{aligned} \quad (10.15)$$

$$q_3 = c_1(T) + c_2(T)\xi - c_3(T)\xi^2 \quad (10.16)$$

$$q_4 = \frac{2\zeta_1 \xi + \sum_{i=2}^5 [(i+1)\zeta_i - (i-1)\zeta_{i-1}] \xi^i - 5\zeta_5 \xi^6}{1 - 2\xi + (1 + \zeta_1)\xi^2 + \sum_{i=2}^5 (\zeta_i - \zeta_{i-1})\xi^{i+1} - \zeta_5 \xi^7} \quad (10.17)$$

$$q_5 = \frac{1 - \sum_{i=1}^5 (i+1)\zeta_i \xi^i}{3 \left[ 1 - \xi + \sum_{i=1}^5 \zeta_i \xi^{i+1} \right]} \quad (10.18)$$

$$q_6 = \left[ \frac{1}{E} + \xi^3 (a_1 + a_2 + 4a_3) \right]^{-1} \quad (10.19)$$

$$k^2 = [b_1 \tanh(b_2 a) + b_3 a] \exp(-(b_4 + b_5 a)T) + b_6 = \bar{k}^2 + b_6 \quad (10.20)$$

$$\dot{l} = v^3 (x^3 = l) \quad (10.21)$$

$$\begin{aligned} \dot{R} &= R \left\{ q_6 \left[ \frac{\dot{l}}{l} - \alpha \dot{T} - \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle 2\lambda \left( \frac{2S_3^3}{3} + q_3 k (q_5 + q_4) \right) \right] \right. \\ &\quad \left. \left( a_1 \xi^3 + a_2 \xi^2 - \frac{\nu}{E} \right) + \alpha \dot{T} - \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle 2\lambda \left( \frac{S_3^3}{3} - q_5 q_3 k \right) \right\} \end{aligned} \quad (10.22)$$

$$\dot{T} = \begin{cases} 0 & \text{isotherm} \\ \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle \frac{\lambda}{c_p \rho^0} \left[ \frac{4}{3} \beta (S_3^3)^2 + S_3^3 q_3 2k (q_4 + q_5) \right] & \text{adiabat} \end{cases} \quad (10.23)$$

$$2q_2 \lambda = \frac{4}{3} S_3^3 q_6 \left[ \frac{\dot{l}}{l} - \alpha \dot{T} - \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle 2\lambda \left( \frac{2S_3^3}{3} + q_3 k (q_5 + q_4) \right) \right] - q_1 \dot{T} + 2q_2 q_3 \frac{\lambda}{k} [a_5 \exp(a_6 q_3 2\lambda k) - a_7 \exp(a_8 q_3 2\lambda k)] \quad (10.24)$$

$$\dot{S}_3^3 = q_6 \left[ \frac{\dot{l}}{l} - \alpha \dot{T} - \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle 2\lambda \left( \frac{2S_3^3}{3} + q_3 k (q_5 + q_4) \right) \right] \quad (10.25)$$

$$\dot{\xi} = \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle q_3 2\lambda k \quad (10.26)$$

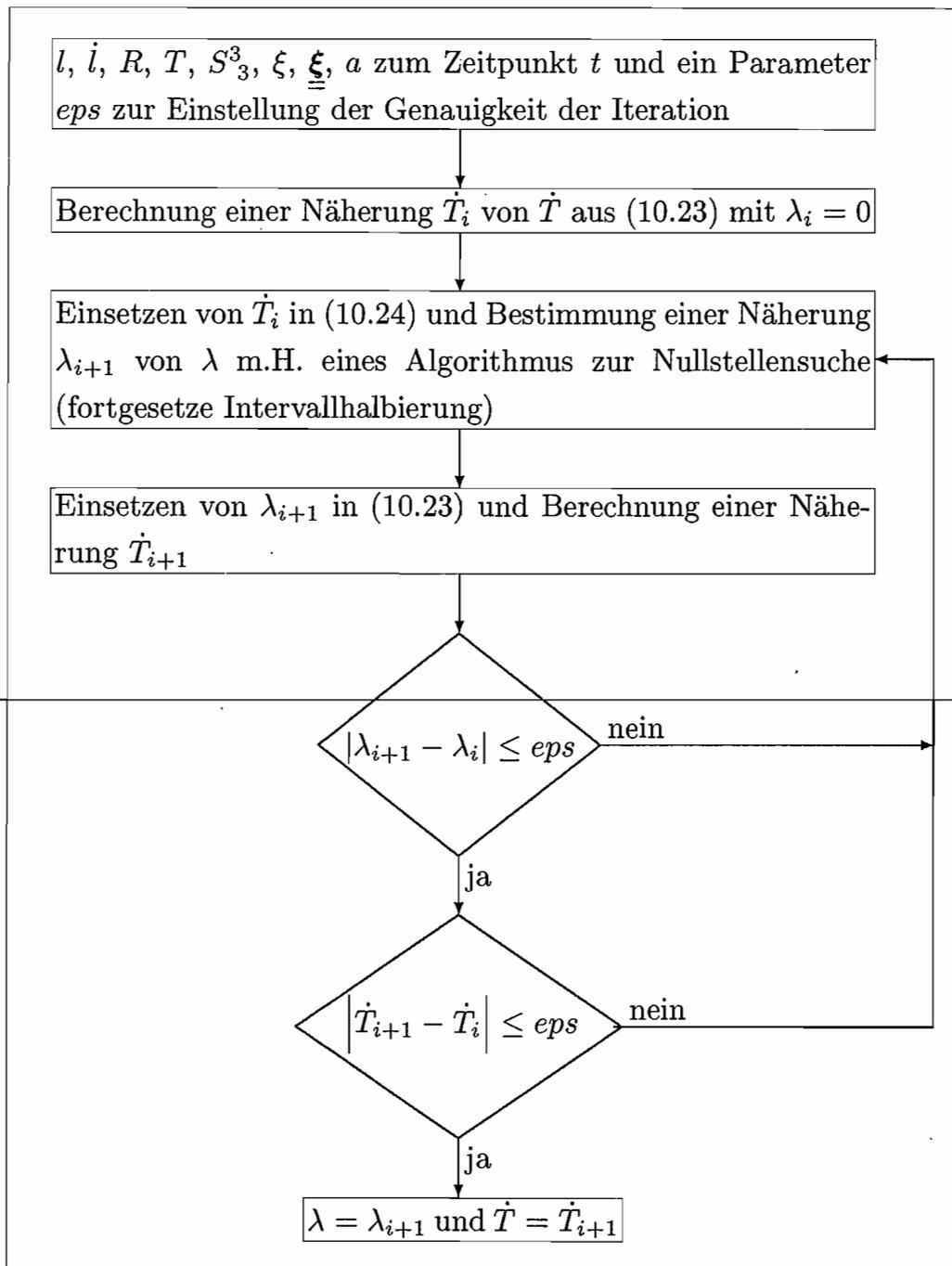
$$\underline{\underline{\xi}} \equiv \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle q_3 \lambda k \frac{c_4}{\pi} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{g}}}_i \underline{\underline{\mathbf{g}}}_j \quad (10.27)$$

$$\dot{a} = \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle 2\lambda \left[ \frac{2}{3} (S_3^3)^2 - q_3 k (a_5 \exp(a_6 q_3 2\lambda k) - a_7 \exp(a_8 q_3 2\lambda k)) \right] \quad (10.28)$$

Die Dichte der elastischen Schädigungs-Verzerrungs-Energiefreisetzungsrates  $w_e$  aus Gleichung (9.13) läßt sich mit

$$w_e = \frac{\pi}{1 - \xi} (S_3^3)^2 \left[ \frac{1}{E} + (a_1 + a_2 + 4a_3) \xi_{33} \right] \quad (10.29)$$

angeben.



**Abbildung 13:** Programmstruktur zur Bestimmung von  $\lambda$  und  $\dot{T}$

## 10.2 Experimente

Zur Bestimmung der materialabhängigen Koeffizienten des hier vorgestellten Materialgesetzes wurden keine eigenen Experimente durchgeführt. Hierzu wurden die experimentellen Untersuchungen von FELDMÜLLER [62] an Ck15 Stahl, der bei Belastungsbeginn nahezu porenfrei war, herangezogen. Einzelheiten über Probengeometrie, Versuchsanordnung und -auswertung sind daher dieser Arbeit zu entnehmen. Mit der Betrachtung desselben Materials können die Materialfunktionen zur Beschreibung der Eigenschaften der Materialmatrix, die von der Schädigung unabhängig sind, bis auf die Verfestigungsfunktion  $k^2$ , für die ein neuer Ansatz gewählt wurde, übernommen werden. Im Temperaturbereich von  $25^\circ\text{C} \leq T \leq 400^\circ\text{C}$  werden für Ck15 Stahl angegeben:

$$E(T) = \left( 216700 - 73.34 \frac{1}{^\circ\text{C}} T \right) \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] \quad (10.30)$$

$$G(T) = \left( 84000 - 30.69 \frac{1}{^\circ\text{C}} T \right) \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] \quad (10.31)$$

$$\lambda_f(T) = \left( 54.11 - 7.05 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ\text{C}} T - 4.975 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}^2} T^2 \right) \left[ \frac{\text{N}}{\text{s K}} \right] \quad (10.32)$$

$$\alpha(T) = \left( 11.3 \cdot 10^{-6} + 9.0 \cdot 10^{-9} \frac{1}{^\circ\text{C}} T - 5.556 \cdot 10^{-12} \frac{1}{^\circ\text{C}^2} T^2 \right) \left[ \frac{1}{\text{K}} \right] \quad (10.33)$$

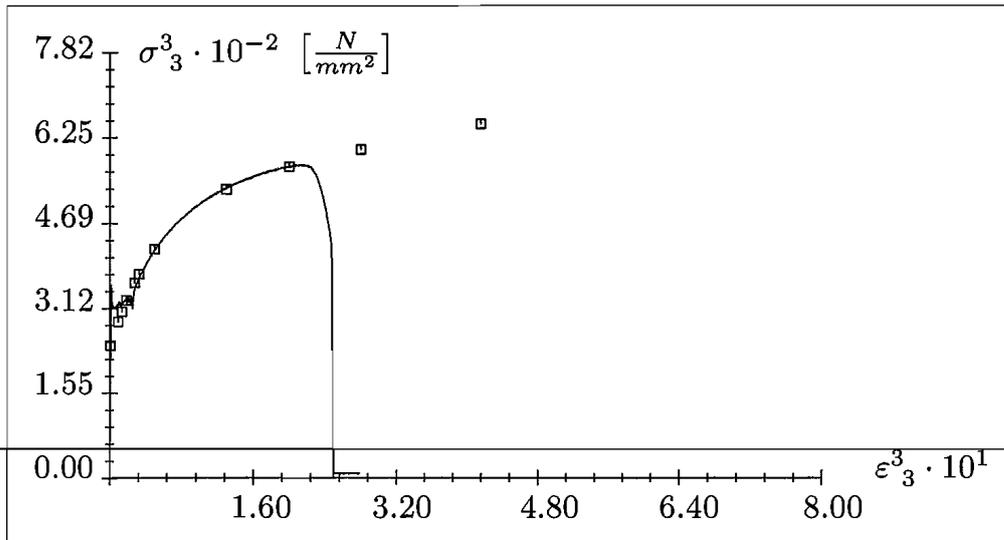
$$\rho(T) = \left( 7.85 \cdot 10^{-6} - 3.33 \cdot 10^{-10} \frac{1}{^\circ\text{C}} T \right) \left[ \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3} \right] \quad (10.34)$$

$$c_p(T) = \left( 0.459 \cdot 10^6 + 3.025 \cdot 10^2 \frac{1}{^\circ\text{C}} T + 0.1875 \frac{1}{^\circ\text{C}^2} T^2 \right) \left[ \frac{\text{N mm}}{\text{kg K}} \right] \quad (10.35)$$

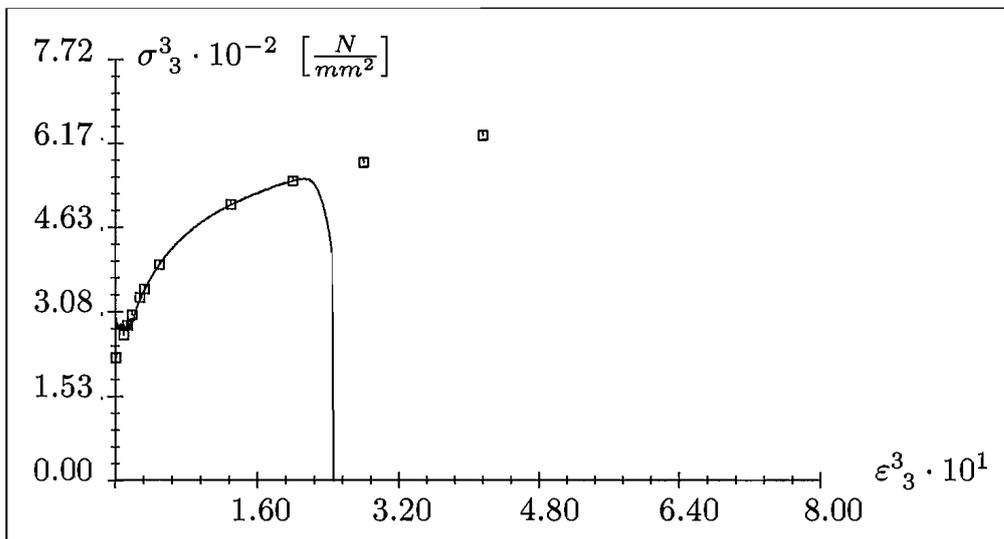
In den folgenden Abbildungen werden die experimentellen Daten aufgeführt, die zur Anpassung der verbleibenden Materialfunktionen im vorgestellten Materialgesetz dienen. Die Abbildungen 14, 15, 16 und 17 zeigen Spannungs-Dehnungskurven ( $\sigma_3^3$  über  $\varepsilon_3^3$ ) nahezu isothermer Zugversuche, die durch die Deformationsgeschwindigkeiten  $\dot{\varepsilon}_3^3 \approx 10^{-3} \text{s}^{-1}$  bei den Anfangstemperaturen von  $25^\circ\text{C}$ ,  $53^\circ\text{C}$  und  $80^\circ\text{C}$  und  $\dot{\varepsilon}_3^3 \approx 10^{-4} \text{s}^{-1}$  bei der Anfangstemperatur von  $364^\circ\text{C}$  erzielt wurden.

Die durchgezogenen Linien entsprechen den tatsächlich im Experiment ermittelten Verläufen. Die Zentralsymbole kennzeichnen die  $\sigma_3^3$ - $\varepsilon_3^3$ -Punkte, die zur Ermittlung der verbleibenden Materialfunktionen herangezogen werden. Ab einem Wert um  $\varepsilon_3^3 \approx 0.20$  ist ein Abfall der Spannung zu beobachten, der durch den Beginn der Einschnürung der Zugprobe gekennzeichnet ist. Nach der Einschnürung kann die Abweichung der Felder in der Probe von homogenen Zuständen nicht länger

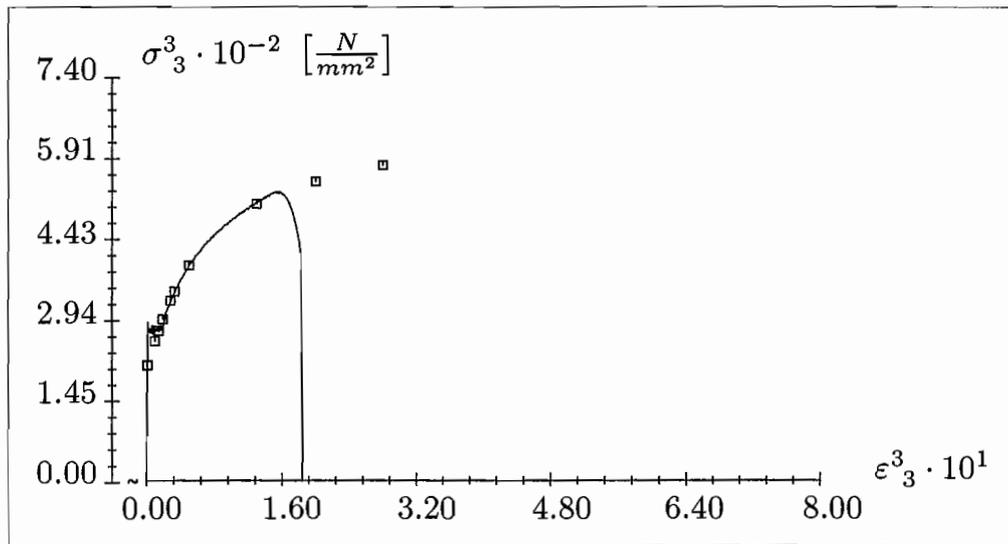
vernachlässigt werden. Daher wurden die Meßpunkte mit negativem Anstieg in den Spannung-Dehnung-Diagrammen von den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen. Um dennoch Daten für  $\varepsilon_3^3$ -Werte oberhalb des Einschnürbeginns zu erhalten, wurden die verbleibenden Verläufe mit Hilfe des Ansatzes (10.39) approximiert. Die für die einzelnen Temperaturen erhaltenen Kurven dienen im Anschluß zur Extrapolation (bei  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ ,  $53^\circ\text{C}$ ,  $364^\circ\text{C}$  auf  $\varepsilon_3^3 = 0.28$  und  $\varepsilon_3^3 = 0.41589$  und bei  $T_0 = 80^\circ\text{C}$  auf  $\varepsilon_3^3 = 0.20$  und  $\varepsilon_3^3 = 0.28$ ) der homogenen Phasen über den Einschnürbeginn hinaus.



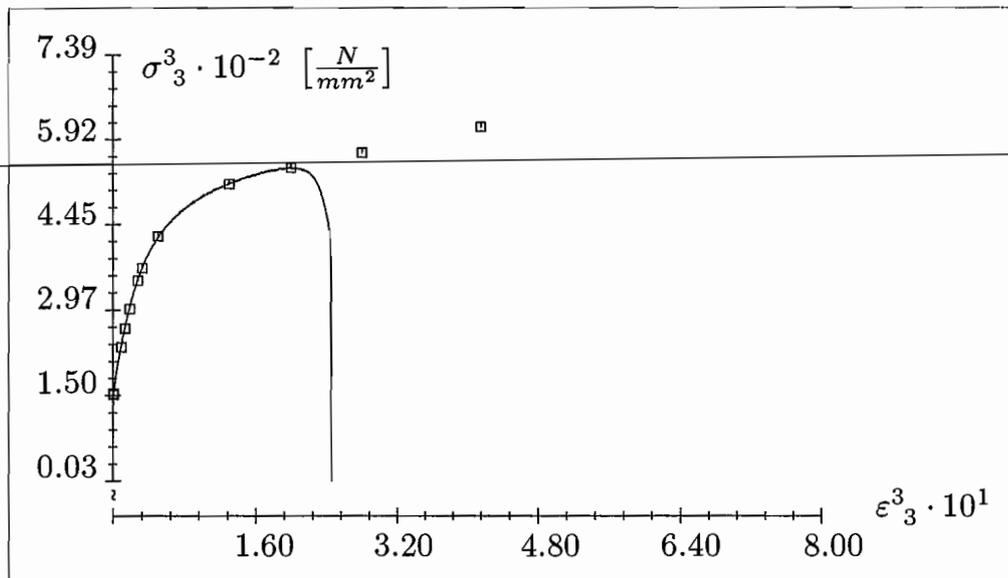
**Abbildung 14:** Zugversuch mit  $\dot{\varepsilon}_3^3 \approx 10^{-3}\text{s}^{-1}$  und  $T_0 = 25^\circ\text{C}$



**Abbildung 15:** Zugversuch mit  $\dot{\varepsilon}_3^3 \approx 10^{-3}\text{s}^{-1}$  und  $T_0 = 53^\circ\text{C}$



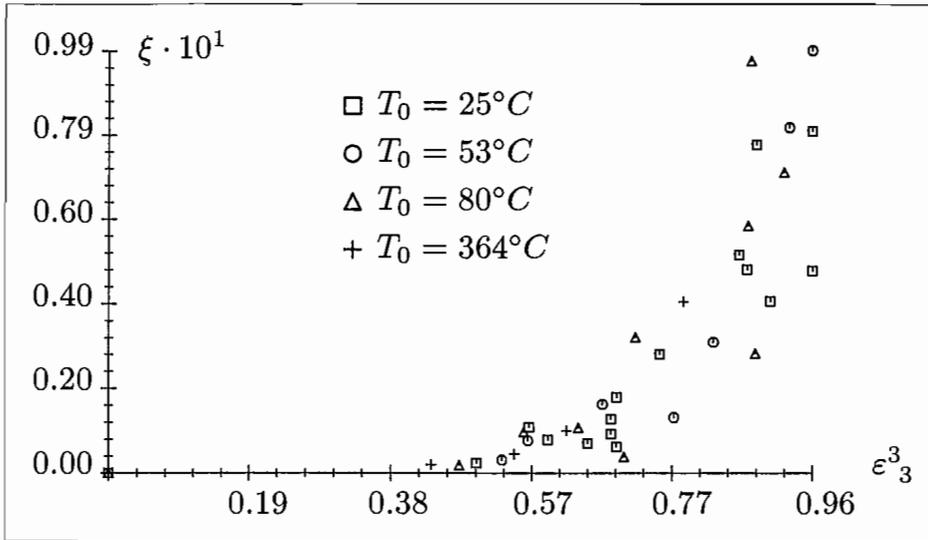
**Abbildung 16:** Zugversuch mit  $\dot{\epsilon}_3^3 \approx 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  und  $T_0 = 80^\circ \text{ C}$



**Abbildung 17:** Zugversuch mit  $\dot{\epsilon}_3^3 \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  und  $T_0 = 364^\circ \text{ C}$

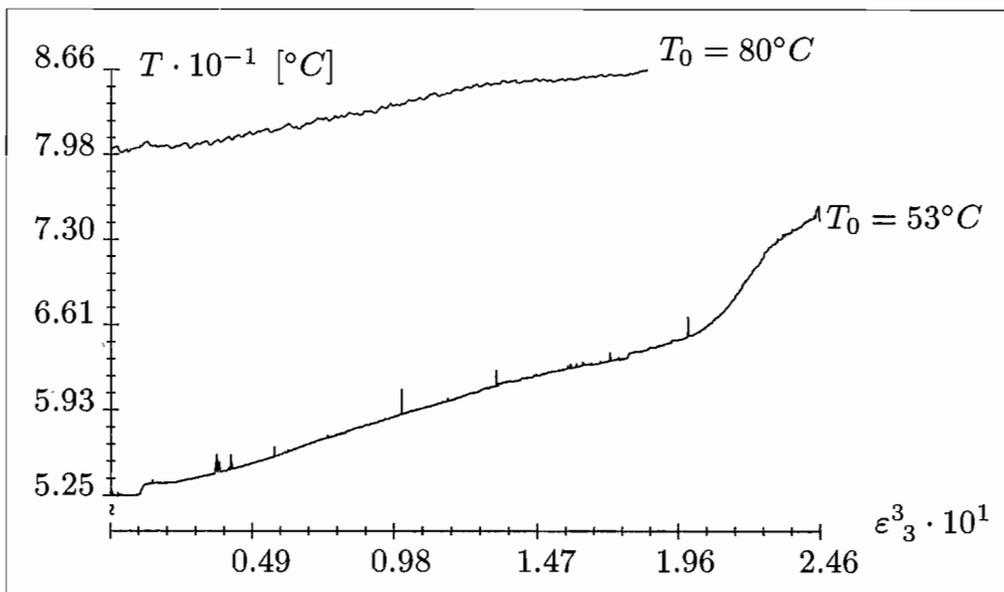
Die Abbildung 18 zeigt einzelne Werte des Porenvolumenanteils  $\xi$  während der fortschreitenden Deformation  $\epsilon_3^3$  bei isothermer Prozeßführung und der Temperatur als Scharparameter. Die experimentelle Bestimmung der einzelnen Werte des Porenvolumens wurde auf die Bestimmung der in Schlibbildern auftretenden Porenflächenanteile zurückgeführt. Die Porenflächenanteile konnten aus den Fotografien der Schlibbilder mit Hilfe eines digitalen Bildauswertungs-Systems bestimmt werden. Als Referenzfläche dient die aktuelle Probenquerschnittsfläche, so daß die ausgewertete Referenzfläche auch als repräsentativ im Sinne einer Kontinuumstheorie bezeichnet werden kann. Ein Anstieg der Schädigung  $\xi$  mit wachsender Prozeßgeschwindigkeit

konnte in den Versuchen von FELDMÜLLER [62] nicht nachgewiesen werden. Dieser Einfluß wird daher vernachlässigt.



**Abbildung 18:** Schädigung  $\xi$  von Zugversuchen mit verschiedenen Anfangstemperaturen  $T_0$

Die Abbildung 19 zeigt den Temperatur-Dehnungs-Verlauf ( $T$  über  $\epsilon_3^3$ ) zweier Zugversuche mit den Anfangstemperaturen von  $T_0 = 53^\circ\text{C}$  und  $T_0 = 80^\circ\text{C}$ . Bei einer Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{\epsilon}_3^3 \approx 10^{-2}\text{s}^{-1}$  kann die Prozeßführung als nahezu adiabatisch betrachtet werden. Die Temperaturverläufe wurden mit Hilfe von Thermoelementen und (wenn möglich) mit einer Infrarotkamera gemessen und dienen speziell zur Bestimmung der Dissipationsfunktion  $\beta$ .



**Abbildung 19:** Temperaturverläufe adiabater Zugversuche mit verschiedenen Anfangstemperaturen  $T_0$  mit  $\dot{\epsilon}_3^3 \approx 10^{-2}\text{s}^{-1}$

### 10.3 Unbekannte Materialfunktionen

Innerhalb der betrachteten Analyse wird angenommen, daß senkrecht zu einer Zughauptspannung keine Schädigungsevolution erfolgt. Diese Annahme ist z.B. mit den mikrofraktographischen Untersuchungen von HAYHURST [77] und HAYHURST & FELCE [78] konform, Porenwachstum in getrennten Ebenen ist nahezu voneinander unabhängig. Hieraus kann

$$c_4 = 1 \quad (10.36)$$

gesetzt werden. Für  $a_4$  wird die folgende Annahme getroffen:

$$a_4 = \rho^0 = \rho_0 = 7.85 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{kg}{mm^3} \right] . \quad (10.37)$$

Aufgrund der Wahl der Materialfunktionen in dem hier vorgestellten Materialgesetz können die verbleibenden Materialkoeffizienten und -funktionen nicht sukzessiv ermittelt werden. Die Kopplung des Differentialgleichungssystems ist selbst bei relativ einfachen Belastungsverhältnissen so stark, daß zur Ermittlung einzelner Größen stets die Integration des gesamten Materialgesetzes erforderlich ist. Zur Bestimmung der verbleibenden Materialkoeffizienten werden Optimierungsstrategien, die die Koeffizienten an experimentelle Daten anpassen, verwendet. Grundsätzlich stellt sich an dieser Stelle die Frage, ob zur eindeutigen Bestimmung von Materialparametern hinreichend viele voneinander unabhängige Experimente vorliegen. In der Arbeit von FELDMÜLLER [62] werden Versuche beschrieben, in deren Ergebnis  $\sigma_3^3 - \varepsilon_3^3$  -,  $T - \varepsilon_3^3$  - und  $\xi - \varepsilon_3^3$  - Verläufe bei verschiedenen Anfangstemperaturen (Temperatur  $T_0$  als Scharparameter) ermittelt wurden. Diese Daten genügen prinzipiell nicht zur eindeutigen Bestimmung der Materialparameter. Um zwischen elastischer Entfestigung und plastischer Verfestigung zu unterscheiden, sind Experimente mit Zwischenentlastungen zur Ermittlung der aktuellen Nachgiebigkeit  $\underline{\underline{C}}^{(4)}$ , woraus die  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  bestimmt werden können, erforderlich, auch wenn die damit verbundenen meßtechnischen Probleme sehr groß sind (siehe [62]). Weiterhin sind, wie bei allen anisotropen Materialgesetzen, zumindest noch Angaben über das elastische und irreversible Deformationsverhalten in einer zweiten Richtung (z.B. in radialer Richtung  $\underline{x}^1$ ) notwendig. In dem vorgestellten Materialgesetz folgt aus den irreversiblen Deformationen in verschiedenen Richtungen  $\zeta_i$  mit ( $i = 1, \dots, 5$ ). Zusätzlich wären auch

mikrofraktografische Untersuchungen wünschenswert, die experimentelle Daten über die Orientierungsdichtefunktion  $\bar{\xi}(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}})$  liefern (Überprüfung der Annahme (10.36)). Um dennoch sinnvolle Materialkoeffizienten aus den oben angeführten Experimenten zu erhalten, werden den Optimierungsstrategien zur Anpassung an die experimentell ermittelten Funktionsverläufe Startwerte übergeben, die bereits in der Umgebung der gesuchten Lösungen liegen. Die Startwerte werden entweder mit Hilfe vereinfachender Annahmen sukzessiv bestimmt oder aus Experimenten abgeschätzt, die in der Literatur angeführt werden.

Die  $\zeta_i$  mit  $(i = 1, \dots, 5)$  sind Materialkoeffizienten, die den Anisotropiegrad der schädigungsinduzierten Verzerrungsrate  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(s)}$  beschreiben. Experimentelle Daten zum Deformationsverhalten in radialer Richtung  $\underline{\mathbf{x}}^1$  von Ck15 Stahl waren weder bei FELDMÜLLER noch in anderen durchgesehenen Literaturstellen angeführt. Eine Anpassung der Parameter  $\zeta_i$  ist folglich nicht durchführbar. Mit dem Ziel, Beispielrechnungen mit dem vorgestellten Materialgesetz durchzuführen, werden die  $\zeta_i$  *ad hoc* festgelegt und anschließend die Wirkungen dieser Parameter demonstriert. FELDMÜLLER [62] zeigt, daß die Annahmen isotroper schädigungsinduzierter Verzerrungen innerhalb der dort betrachteten Prozesse noch berechtigt ist. Die Anpassung der Materialkoeffizienten erfolgt daher mit  $\zeta_i = 0$  mit  $(i = 1, \dots, 5)$ .

Das vorgestellte Materialgesetz beinhaltet keine kinematische Verfestigung, folglich kann  $k^2$  in (8.37) näherungsweise durch

$$k^2 = \frac{2}{3} (S_3^3)^2 \approx \frac{2}{3} \sigma^2 \quad (10.38)$$

angegeben werden. Wird für die experimentell bestimmten Wertepaare  $(\sigma, \varepsilon)$  der funktionelle Zusammenhang

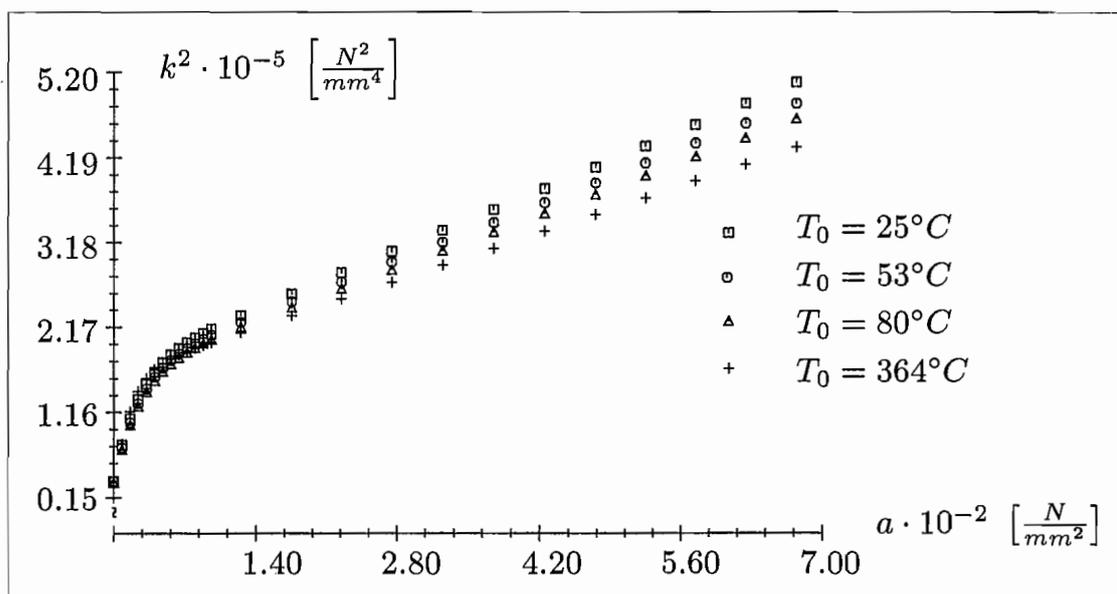
$$\sigma \approx \bar{a} [1 - \exp(\bar{b}\varepsilon)] + \bar{c}\varepsilon + \bar{d} \quad (10.39)$$

angegeben, vernachlässigt man den zweiten und dritten Summanden im Evolutionsgesetz (8.34), d.h.

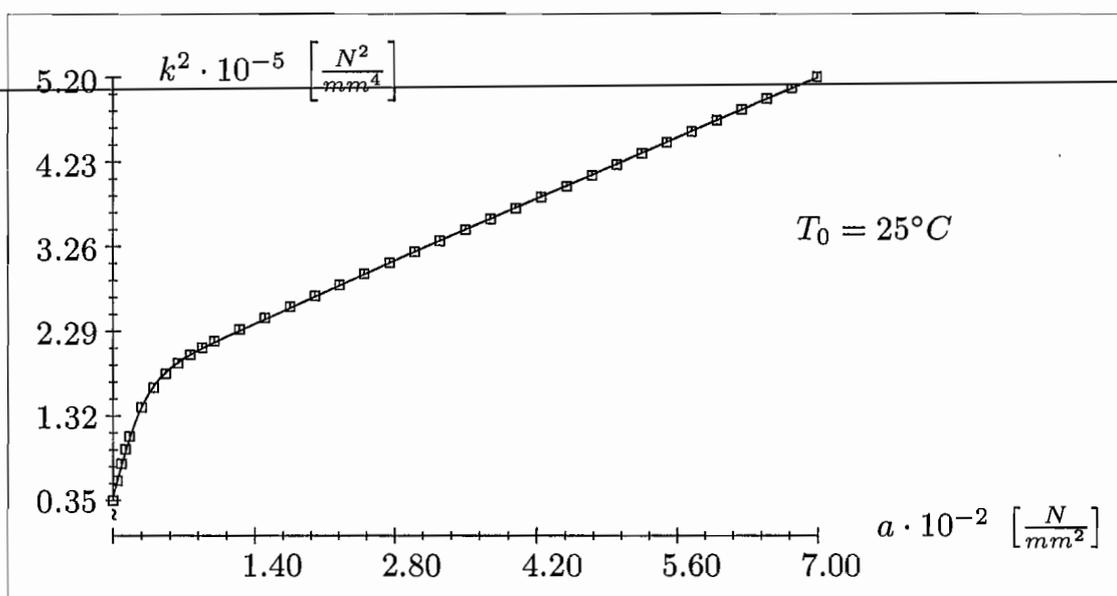
$$a \approx \int_{\varepsilon_p=0}^{\varepsilon_p} \sigma \, d\varepsilon_p, \quad (10.40)$$

und setzt  $\varepsilon_p \approx \varepsilon$  wird eine Näherung der Funktion  $k^2(a)$  erhalten. Diese Verfahrensweise erfolgte für Experimente bei nahezu isothermer Prozeßführung, die in den Abbildungen 14, 15, 16 und 17 dargestellt sind.

Die erhaltenen Verläufe der Funktion  $k^2(a, T)$  sind in Abbildung 20 dargestellt. An diese Verläufe erfolgt die Anpassung der Materialkoeffizienten  $b_1$  bis  $b_6$  der Funktion  $k^2$  mit der von FORNEFELD [64] beschriebenen Evolutionsstrategie.



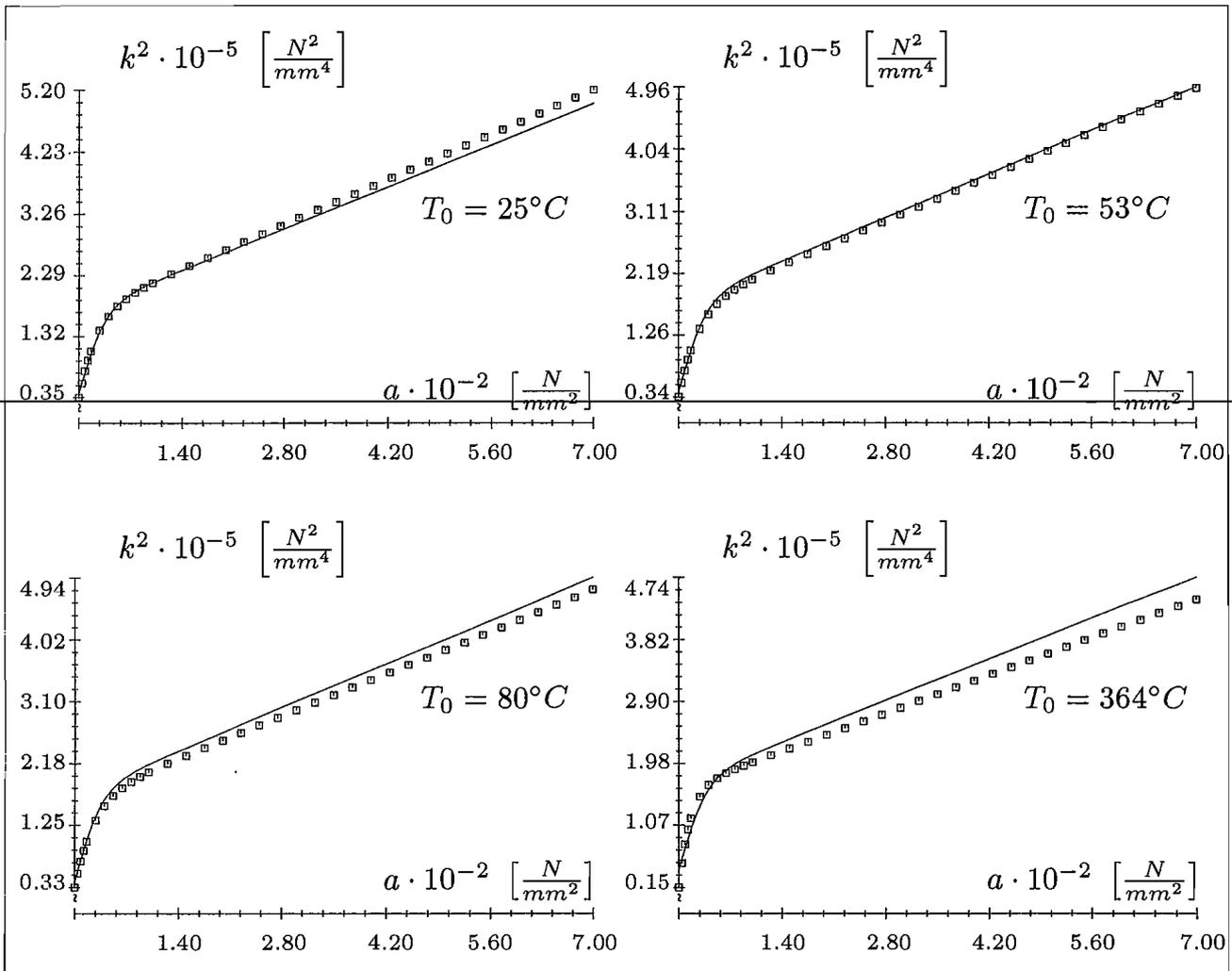
**Abbildung 20:** Experimentelle Verfestigungsfunktionen



**Abbildung 21:** Approximation der Verfestigungsfunktion  $k^2(a, T)$  für  $T_0 = 25^\circ\text{C}$

In Abbildung 21 ist das Ergebnis der Optimierung der Funktion  $k^2(a)$  aus (8.37) für einen einzelnen Versuch mit der Anfangstemperatur  $T_0 = 25^\circ\text{C}$  dargestellt. Die Zentralsymbole in Abbildung 20 kennzeichnen die Auswertung des entsprechenden Versuches mit Hilfe von (10.39), und die durchgezogene Linie beschreibt die Funktion  $k^2(a, T)$  nach der Optimierung der  $b_i$  an letzteren Verlauf. Dieses Beispiel zeigt, daß die Abhängigkeit der Funktion  $k^2(a, T)$  von  $a$  für eine einzelne definierte Temperatur durch den Ansatz (8.37) sehr gut wiedergegeben wird.

Die Approximation der Temperaturabhängigkeit der Funktion  $k^2(a, T)$  über den Temperaturbereich von  $25^\circ\text{C}$  bis  $364^\circ\text{C}$  durch (8.37) ist jedoch nicht von gleicher Qualität wie in Abbildung 21. Konnten die experimentellen Verläufe bei den Temperaturen von  $25^\circ\text{C}$ ,  $53^\circ\text{C}$  und  $80^\circ\text{C}$  mit ähnlich guter Qualität wie in Abbildung 21 beschrieben werden, lag die Approximation für  $364^\circ\text{C}$  zu weit unterhalb des experimentellen Verlaufes, um akzeptabel zu sein. Waren hingegen die Approximationen für  $25^\circ\text{C}$  und  $364^\circ\text{C}$  sehr gut, lagen die für  $53^\circ\text{C}$  und  $80^\circ\text{C}$  etwas oberhalb der experimentell bestimmten Verläufe.



**Abbildung 22:** Approximation der Verfestigungsfunktion

Der Ansatz (8.37) für die Funktion  $k^2$  ist nur für die Temperaturbereiche geeignet, in denen die Änderung von  $k^2$  mit  $T$  negativ ist. Da der einfache Ansatz (8.37) viele komplexe temperaturabhängige Prozesse (z.B. die durch WYCLIFF, KOCKS & EMBURY [223], van den BEUKEL [215], CERNOCKY & KREMPL [34] und MARQUIS [138] beschriebenen Erscheinungen der statischen und dynamischen Reckalterung; die Ver-

festigung durch Ausscheidung von Teilchen und durch andere Gefügeumwandlungen nach SCHATT [192]) nicht berücksichtigt, die im Temperaturbereich von  $25^\circ\text{C}$  bis  $364^\circ\text{C}$  auftreten, ist die zu Abbildung 21 geringere Qualität über den betrachteten Temperaturbereich nicht weiter verwunderlich. Für das in den Beispielrechnungen verfolgte Ziel wird die mit dem Ansatz (8.37) erzielte Genauigkeit noch als hinreichend betrachtet. Als Ergebnis der Optimierung mit allen vier Kurven in Abbildung 20 wurden die folgenden Werte  $b_i$  erhalten (Abbildung 22):

$$\begin{aligned} b_1 &= 1.31617 \cdot 10^5 \frac{\text{N}^2}{\text{mm}^4}; & b_2 &= 2.71062 \cdot 10^{-2}; \\ b_3 &= 4.68824 \cdot 10^2 \frac{\text{N}^2}{\text{mm}^4}; & b_4 &= 9.38225 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}; \\ b_5 &= 1.0 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}; & b_6 &= 4.04072 \cdot 10^4 \frac{\text{N}^2}{\text{mm}^4} . \end{aligned} \quad (10.41)$$

Zur Bestimmung von Startwerten für die Anpassung soll angenommen werden, daß die Entwicklung des Volumenanteils  $\xi$  und die Dissipationsfunktion  $\beta$ , die den Anteil der sofort dissipierten plastischen Arbeit festlegt, sowohl bei isotroper als auch anisotroper Schädigung gleich sei. Diese Annahme erlaubt nun auch die Verwendung der Schädigungsfunktion von FELDMÜLLER [62] als Evolutionsgleichung  $\dot{\xi}$ . Damit folgt für Gleichung (8.63) und  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \beta &= 0.84; \\ c_{10} &= 5.0 \cdot 10^{-4}; & c_{20} &= 6.41117; & c_{30} &= 0.0; \\ c_{11} &= 0.0; & c_{21} &= -2.12246 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}; & c_{31} &= 0.0; \\ c_{12} &= 0.0; & c_{22} &= 3.50033 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}; & c_{32} &= 0.0; \\ c_{13} &= 0.0; & c_{23} &= -7.934 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-3}; & c_{33} &= 0.0 . \end{aligned} \quad (10.42)$$

Startwerte für die Koeffizienten  $a_1$  bis  $a_3$  werden aus der folgenden Abschätzung des Maximalwertes von  $C_{3333}$  erhalten. Für  $i = j = k = l = 3$  ergibt sich aus dem Nachgiebigkeitstensor  $\underline{\underline{C}}^{(4)}$  in (8.24)

$$C_{3333} = {}^0C_{3333} + (a_1 + a_2 + 4a_3)\xi_{33} . \quad (10.43)$$

LEMAITRE & DUFALLY bestimmen in [128] eine Nachgiebigkeit  $\bar{C}_{3333}$  bei isotroper Schädigung mit Hilfe der Gleichung

$$\bar{C}_{3333} \approx \frac{{}^0C_{3333}}{1 - \xi_{max}} = \frac{1}{(1 - \xi_{max}) {}^0E} . \quad (10.44)$$

Die Untersuchungen von FELDMÜLLER [62] liefern den Maximalwert des Porenvolumenanteils mit  $\xi_{max} \approx 0.15$ . Eine obere Schranke für  $(a_1 + a_2 + 4a_3)$  läßt sich konstruieren, wenn angenommen wird, daß der Term  $C_{3333}$  in (10.43) Änderungen der

Nachgiebigkeit der gleichen Größenordnung wie die isotrope Schädigung  $\xi$  in (10.44) beschreibt. Mit (10.43) und (8.23) folgt:

$$\text{MAX}(|a_1 + a_2 + 4a_3|) = \left( \frac{1}{0.85} - 1 \right) \frac{1}{{}^0E \xi_{33}} . \quad (10.45)$$

Bei  $\bar{\xi}(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}}_1) = \bar{\xi}(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}}_2) = 0$  ergibt sich der maximale Wert, den  $\xi_{33}$  bei  $\xi_{max}$  annehmen kann, d.h.

$$\xi_{33} = 2\xi'_{max} = \frac{\xi_{max}}{\pi} . \quad (10.46)$$

Mit  ${}^0E \approx E_0$  und der Annahme, daß  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  von gleicher Größenordnung sind, folgt:

$$|a_1| = |a_2| = |a_3| \approx 2.8426 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{mm^2}{N} \right] . \quad (10.47)$$

Die Betragsstriche in (10.47) deuten an, daß die elastische Entfestigung durchaus kleiner sein kann als der Wert, der sich aus der Reduktion der im Mittel tragenden Fläche z.B. nach KACHANOV [89] ergibt.

Ohne die Möglichkeit, sich auf bekannte Untersuchungen berufen zu können, läßt sich die Größenordnung von  $a_5$  bis  $a_8$  nur sehr grob abschätzen. Mit den Näherungen

$\underline{\underline{\mathbf{D}}} \approx \underline{\underline{\mathbf{D}}}$  während plastischer Deformationen und  $\dot{R}/R \approx -\nu \dot{l}/l$  aus (10.22) im  $(p)$  elastischen Differentialgleichungssystem folgt der erste Summand der rechten Seite von (8.34):

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \approx \left( \frac{2}{3} D_{33} - \frac{1}{3} D_{22} \right) S_3^3 \approx \frac{2 + \nu \dot{l}}{3} \frac{\dot{l}}{l} S_3^3 . \quad (10.48)$$

Wird  $f_1$  in (8.63) näherungsweise durch  $c_{10}$  ersetzt und  $\bar{f}_1$  in (8.64) durch

$$\bar{f}_1 = \sqrt{\frac{\underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}}{(p)} \cdot \frac{\underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}}}{(p)}} \approx \frac{\dot{l}}{l} \sqrt{\nu^2 + 1}$$

folgt für die Rate des Porenvolumens näherungsweise  $\dot{\xi} \approx \frac{\dot{l}}{l} c_{10} \sqrt{\nu^2 + 1}$ . Die Startwerte

$$a_6 = a_8 = 0 \quad \text{und} \quad a_5 = a_7 = 1.1709 \cdot 10^4 \left[ \frac{N}{mm^2} \right] . \quad (10.49)$$

werden erhalten, wenn die über die plastische Arbeit hinausgehenden Glieder in (8.34) jeweils Abweichungen bis zu 1% verursachen, wobei die Abhängigkeit von  $\dot{\xi}$  in erster Näherung linear angenommen wird, die Maximalspannung ca.  $800 \frac{N}{mm^2}$  beträgt und  $\nu \approx \frac{E_0 - 2G_0}{2G_0}$  gilt.

## 10.4 Ergebnisse

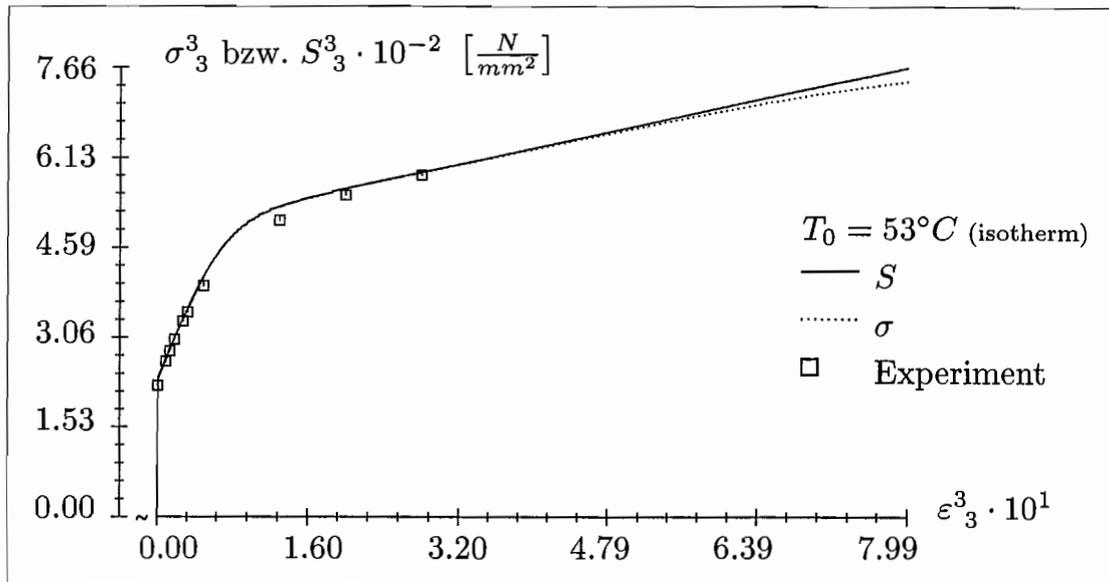
Zur Anpassung der Materialkoeffizienten und -funktionen wurden parallel ein Gradientenverfahren (siehe z.B. SCHOLZ [194]) und die von FORNEFELD [64] beschriebene Evolutionsstrategie verwendet.

Bezeichnung bzw. Gleichungsnummer	Variable	Wert	Einheit
elastische Entfestigung (8.24)	$a_1$	$2.1219340 \cdot 10^{-6}$	$mm^2/N$
	$a_2$	$-5.9774245 \cdot 10^{-7}$	$mm^2/N$
	$a_3$	$2.6923032 \cdot 10^{-6}$	$mm^2/N$
isotrope Verfestigung (8.34)	$a_5$	$1.1350692 \cdot 10^4$	$N/mm^2$
	$a_6$	$-0.9379945$	$s^{-1}$
	$a_7$	$1.1661688 \cdot 10^4$	$N/mm^2$
	$a_8$	$2.2475666$	$s^{-1}$
Verfestigungsfunktion (8.37)	$b_1$	$1.2911039 \cdot 10^5$	$N^2/mm^4$
	$b_2$	$3.7101178 \cdot 10^{-2}$	
	$b_3$	$4.6138432 \cdot 10^2$	$N^2/mm^4$
	$b_4$	$2.1182086 \cdot 10^{-4}$	$^{\circ}C^{-1}$
	$b_5$	$6.9267985 \cdot 10^{-8}$	$^{\circ}C^{-1}$
	$b_6$	$3.7713897 \cdot 10^4$	$N^2/mm^4$
Schädigungsevolution (8.63)	$c_{10}$	$1.3051527 \cdot 10^{-3}$	
	$c_{11}$	$8.7803500 \cdot 10^{-8}$	$^{\circ}C^{-1}$
	$c_{12}$	$8.6690728 \cdot 10^{-10}$	$^{\circ}C^{-2}$
	$c_{13}$	0.0	$^{\circ}C^{-3}$
	$c_{20}$	4.9455335	
	$c_{21}$	$1.5866583 \cdot 10^{-3}$	$^{\circ}C^{-1}$
	$c_{22}$	$-3.5462300 \cdot 10^{-5}$	$^{\circ}C^{-2}$
	$c_{23}$	$8.25851000 \cdot 10^{-8}$	$^{\circ}C^{-3}$
	$c_{30}$	$6.1282379 \cdot 10^{-3}$	
	$c_{31}$	$3.7125512 \cdot 10^{-4}$	$^{\circ}C^{-1}$
	$c_{32}$	$2.8055653 \cdot 10^{-5}$	$^{\circ}C^{-2}$
	$c_{33}$	$-8.6597400 \cdot 10^{-8}$	$^{\circ}C^{-3}$
	Dissipationsfunktion (2.86)	$\beta$	0.67621

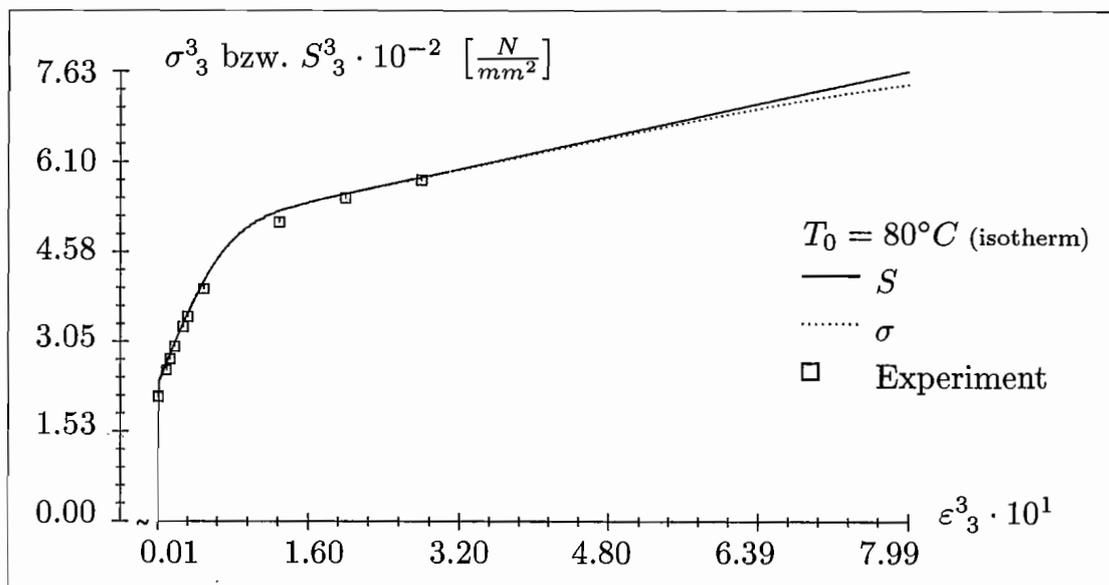
**Tabelle 2:** Ergebnisse der Anpassung des Stoffgesetzes

Das Optimierungsziel bestand in der Minimierung der Summe der relativen Fehlerquadrate

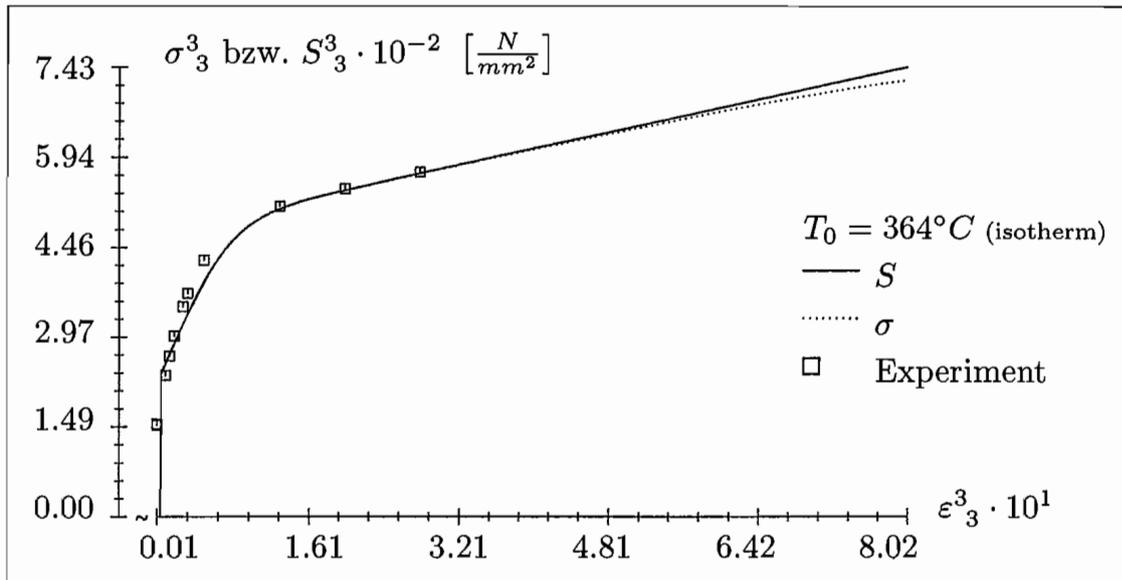
$$\Delta = w_{\sigma} \sum_{(i)} \left( \frac{\sigma^{rech} - \sigma^{exp}}{\sigma_{max}^{exp}} \right)^2 + w_{\xi} \sum_{(j)} \left( \frac{\xi^{rech} - \xi^{exp}}{\xi_{max}^{exp}} \right)^2 + w_T \sum_{(k)} \left( \frac{T^{rech} - T^{exp}}{T_{max}^{exp}} \right)^2$$



**Abbildung 24:** Axiale Spannung  $\sigma_3$  bzw.  $S_3$  über Dehnung  $\epsilon_3$  im Zugversuch mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-3} \text{ s}^{-1}$



**Abbildung 25:** Axiale Spannung  $\sigma_3$  bzw.  $S_3$  über Dehnung  $\epsilon_3$  im Zugversuch mit  $\dot{\epsilon} \approx 10^{-3} \text{ s}^{-1}$



**Abbildung 26:** Axiale Spannung  $\sigma^3$  bzw.  $S^3$  über Dehnung  $\varepsilon^3$  im Zugversuch mit  $\dot{\varepsilon} \approx 10^{-4} s^{-1}$

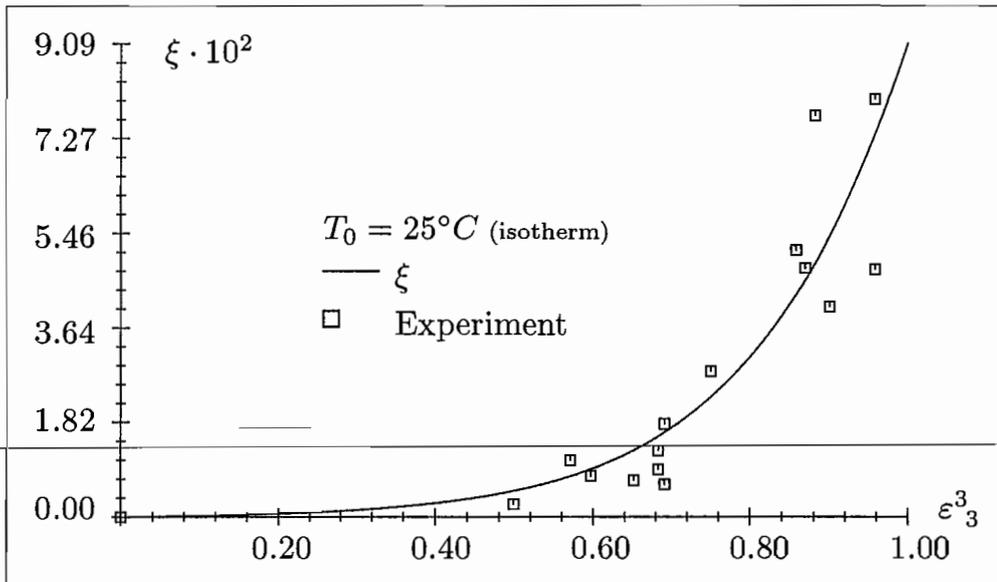
Der Vergleich von Rechnung und Experiment zeigt, daß der einfache Ansatz (8.37) für die Verfestigung der Materialmatrix ausreicht, um qualitativ und quantitativ gute Übereinstimmungen zwischen Rechnung und Experiment zu erzielen. Gegenüber der weniger guten Übereinstimmung in Abbildung 22 wurde ein Qualitätsgewinn erzielt. Hierbei muß berücksichtigt werden, daß die in Abbildung 20 dargestellten Verfestigungsfunktionen nur eine grobe Näherung für die plastische Verfestigung der Materialmatrix sind. Diese Näherungen wurden aufgestellt, ohne zwischen plastischer Verfestigung und schädigungsinduzierter Entfestigung zu unterscheiden. Bei der Abschätzung der  $b_i$  in (8.37) wurde versucht, die Überlagerung beider Effekte nur mit Gleichung (8.37) zu beschreiben.

#### b) Schädigungs-Verläufe

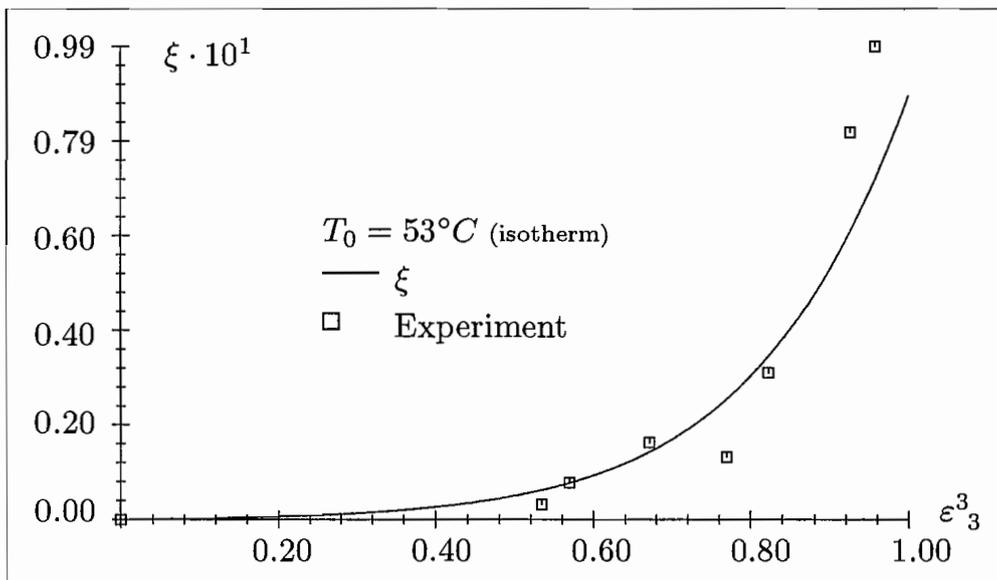
In den folgenden vier Abbildungen 27, 28, 29 und 30 wird der Verlauf des Porenvolumens  $\xi$  über der axialen Dehnung  $\varepsilon^3$  aus den Rechnungen mit den experimentellen Daten aus Abbildung 18 verglichen.

Die Rechnungen liefern eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen. Der qualitative Verlauf der Kurven entspricht aus der Literatur bekannten Verläufen. Wie die Verfestigungsfunktion  $k^2$  wird die Temperaturabhängigkeit der Porenwachstumsrate von ähnlich vielen, teilweise entgegengesetzt gerichteten Prozessen festgelegt. Mit dem Ansatz (8.64) ist auch eine direkte Kopplung zwischen plastischer Deformationsrate und der Porenwachstumsrate

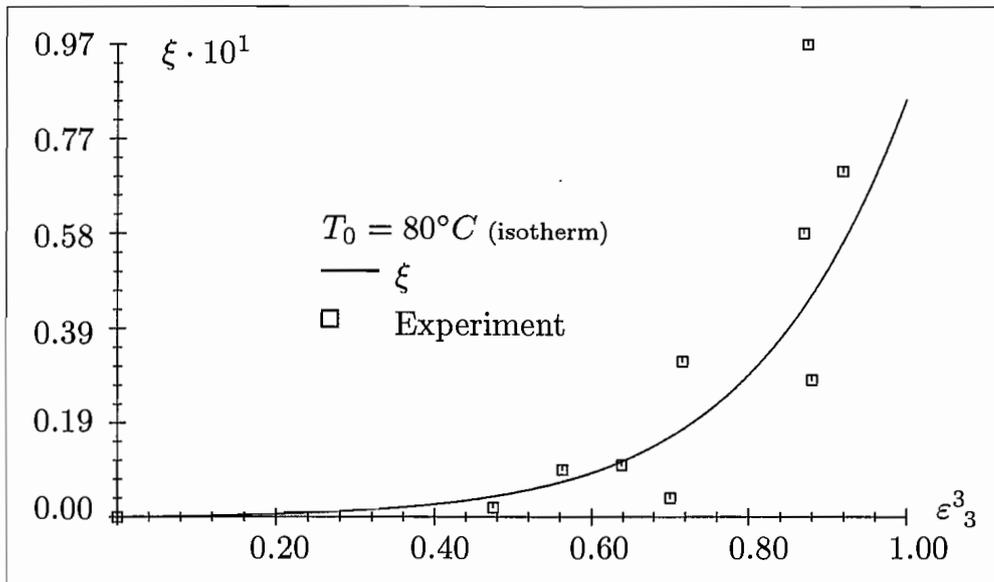
vorgegeben. Ein monotonen Anwachsen der Porenwachstumsrate mit zunehmender Temperatur  $T_0$  wird von den Experimenten nicht wiedergegeben (siehe Bemerkungen zur Verfestigungsfunktion im Abschnitt 10.3) und auch in den Verläufen der Abbildungen 27, 28, 29 und 30 nicht beschrieben. Die gezeigten Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von FELDMÜLLER [62]. Die wenigen experimentellen Daten, die bei einer definierten Temperatur noch dazu sehr stark streuen (siehe Abbildung 18), lassen Aussagen zur Temperaturabhängigkeit der Schädigungsevolution nicht zu.



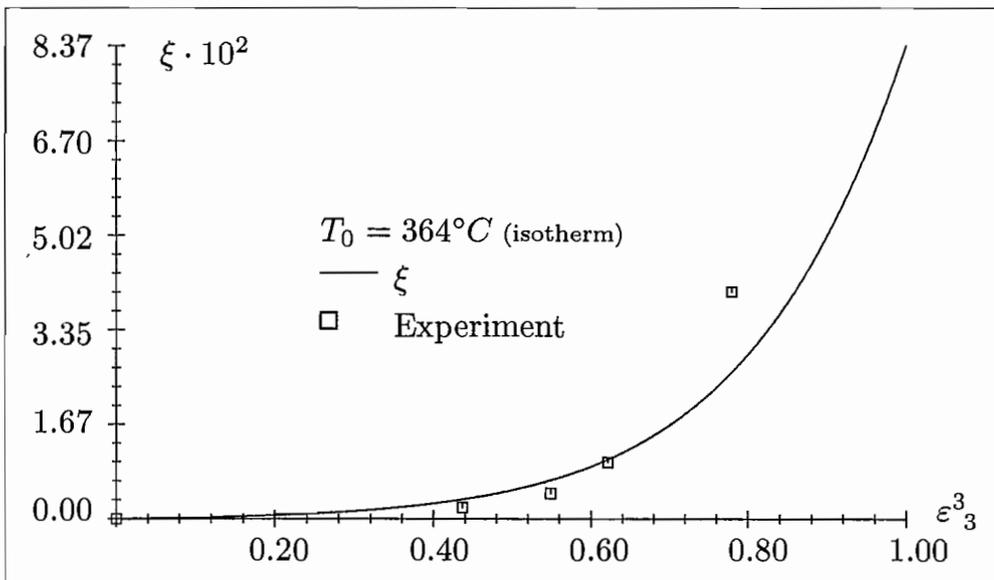
**Abbildung 27:** Porenvolumendichte  $\xi$  über Dehnung  $\varepsilon_3^3$  im Zugversuch



**Abbildung 28:** Porenvolumendichte  $\xi$  über Dehnung  $\varepsilon_3^3$  im Zugversuch



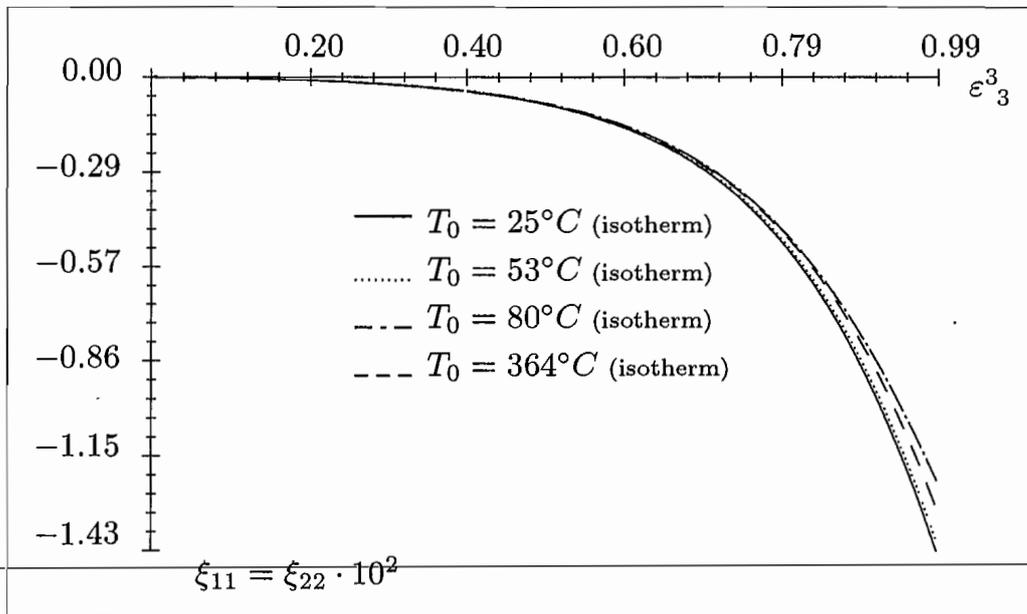
**Abbildung 29:** Porenvolumendichte  $\xi$  über Dehnung  $\varepsilon^3_3$  im Zugversuch



**Abbildung 30:** Porenvolumendichte  $\xi$  über Dehnung  $\varepsilon^3_3$  im Zugversuch

Der größer werdende Anstieg der Kurven in den Abbildungen 27, 28, 29 und 30 bei fortschreitendem Deformationsprozeß können als Bestätigung betrachtet werden, daß

- (i) die Wachstumsrate der Schädigung bzw. des Porenvolumens vom bereits existierenden Porenvolumen abhängig ist und mit diesem anwächst und
- (ii) für die Aussage von BILLARDON & MORET-BAILLY [25], daß der Betrag der Schädigung auf die Zeit bis zum Versagen nur einen geringen Einfluß besitzt.



**Abbildung 31:** Komponenten  $\xi_{11}$  und  $\xi_{22}$  des Schädigungstensors  $\underline{\underline{\xi}}$  über Dehnung  $\varepsilon_3^3$  im Zugversuch

In Abbildung 31 ist der zu den Abbildungen 27, 28, 29 und 30 zugehörige Verlauf der Komponenten  $\xi_{11} = \xi_{22}$  des Schädigungstensors  $\underline{\underline{\xi}}$  der tensoriellen Fourierreihe in (8.2) über der axialen Dehnung  $\varepsilon_3^3$  dargestellt. Gilt für ein Element  $\xi_{ii}$  ( $i = 1, 2, 3$ ; keine Summation) der Hauptdiagonalen von  $\underline{\underline{\xi}}$  die Beziehung  $\xi_{ii} > 0$  bzw.  $\xi_{ii} < 0$ , ist der Volumenanteil der Poren mit der Orientierung  $\underline{n}_i$  größer bzw. kleiner als der Mittelwert über alle Richtungen  $\xi'$ . Da angenommen wurde, daß das Material bei Belastungsbeginn porenfrei war und für die Evolution von  $\underline{\underline{\xi}}$  die Gleichung (10.27) gilt, ist die Angabe von  $\xi$  und des Verlaufes von  $\xi_{11}$  hinreichend, um den Schädigungszustand vollständig für die isothermen Versuche bei  $T_0 = 25^\circ C$ ,  $T_0 = 53^\circ C$ ,  $T_0 = 80^\circ C$  und  $T_0 = 364^\circ C$  zu beschreiben.

Mit den Materialkoeffizienten in Tabelle 2 liegt die Vermutung nahe, daß mit steigender Temperatur der Wert von  $\xi_{11}$  immer langsamer sinkt, d.h. der Verlauf bei einer Temperatur  $T_0 > T_1$  liegt über dem Verlauf mit der zugeordneten Temperatur  $T_1$ . Dies bedeutet nicht, daß das Verhältnis von Schädigungswerten  $\bar{\xi}(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}})$  hinsichtlich

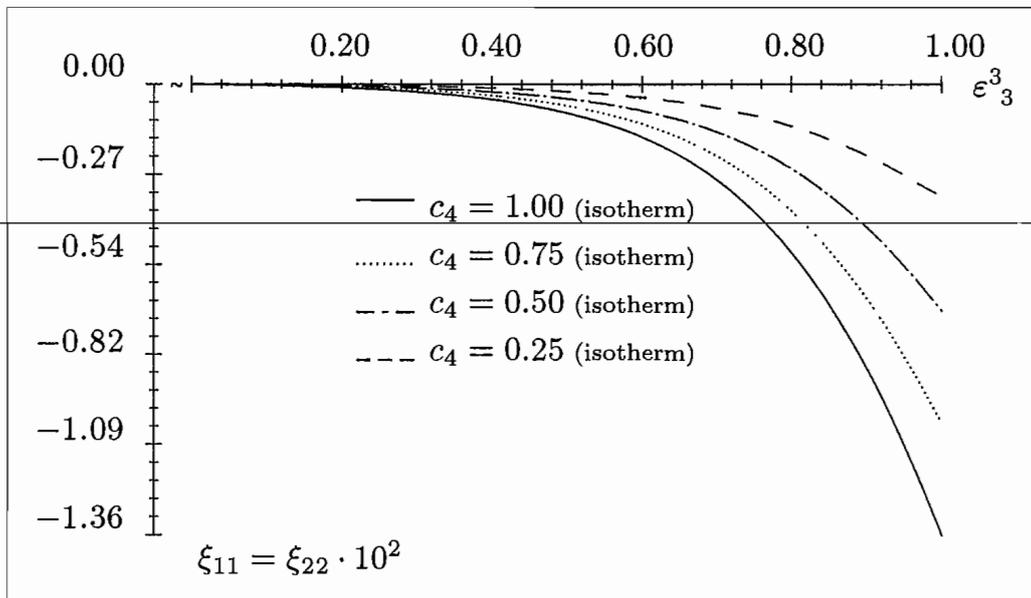
zweier Orientierungen  $\underline{n}$  nicht konstant bleibt. Ist keine Anfangsschädigung vorhanden und wird, wie in dieser Arbeit, ein konstantes  $c_4$  angenommen, ist das Verhältnis nur von den betrachteten Richtungen abhängig. Z.B. ist das Verhältnis ( $\underline{x}^3$  und  $\underline{n}_a$  entsprechend Abbildung 12)

$$\frac{\bar{\xi}(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}}_a)}{\bar{\xi}(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{x}}^3)} \quad (10.50)$$

für  $c_4 = 1$  und  $\underline{n}_a \perp \underline{x}^3$  stets 0 und wächst mit dem Skalarprodukt von  $\underline{n}_a \cdot \underline{x}^3$  (für

$$\underline{n}_a = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right]^T \quad (10.51)$$

wird das Verhältnis  $\frac{1}{3}$ ) auf den Maximalwert 1 bei  $\underline{n}_a = \underline{x}^3$ . Mit kleiner werdendem  $c_4$  nähern sich alle Verhältniszahlen unabhängig von  $\underline{n}_a$  dem Wert 1 (bzw.  $\xi_{11}$  dem Wert 0) an (Abbildung 32), was den Übergang auf eine isotrope Orientierungsdichtefunktion  $\bar{\xi}(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}})$  nach sich zieht.



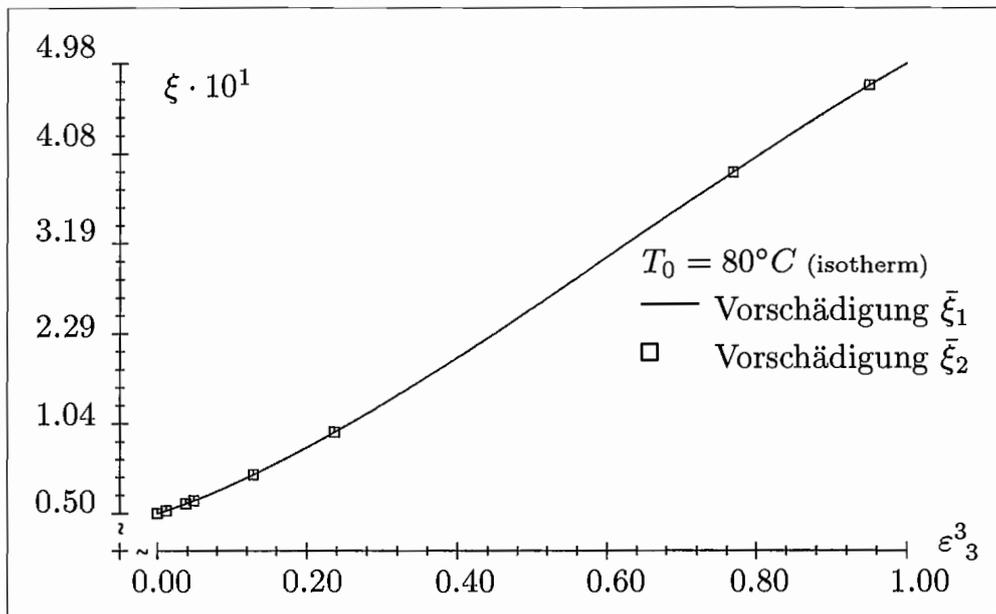
**Abbildung 32:** Komponenten  $\xi_{11}$  und  $\xi_{22}$  des Schädigungstensors  $\underline{\xi}$  über Dehnung  $\epsilon_3^3$  im Zugversuch mit  $T_0 = 80^\circ C$

Ist jedoch eine Anfangs- bzw. Vorschädigung vorhanden (z.B. durch eine Vorbela- stung in eine Richtung, die vom betrachteten axialen Zug abweicht) oder werden wechselnde Belastungsrichtungen betrachtet, ändert sich das Verhältnis in (10.50) kontinuierlich auch bei konstanter Belastungsrichtung mit der fortschreitenden De- formation – die Orientierungsdichtefunktion  $\bar{\xi}$  ändert sich entsprechend der aktuellen Belastung. Werden z.B. die Vorschädigungen  $\bar{\xi}_1$  und  $\bar{\xi}_2$  betrachtet, ergeben sich die in den Abbildungen 33 und 34 dargestellten Verläufe der Orientierungsdichtefunktion  $\bar{\xi}$ .  $\bar{\xi}_1$  und  $\bar{\xi}_2$  sind wie folgt definiert:

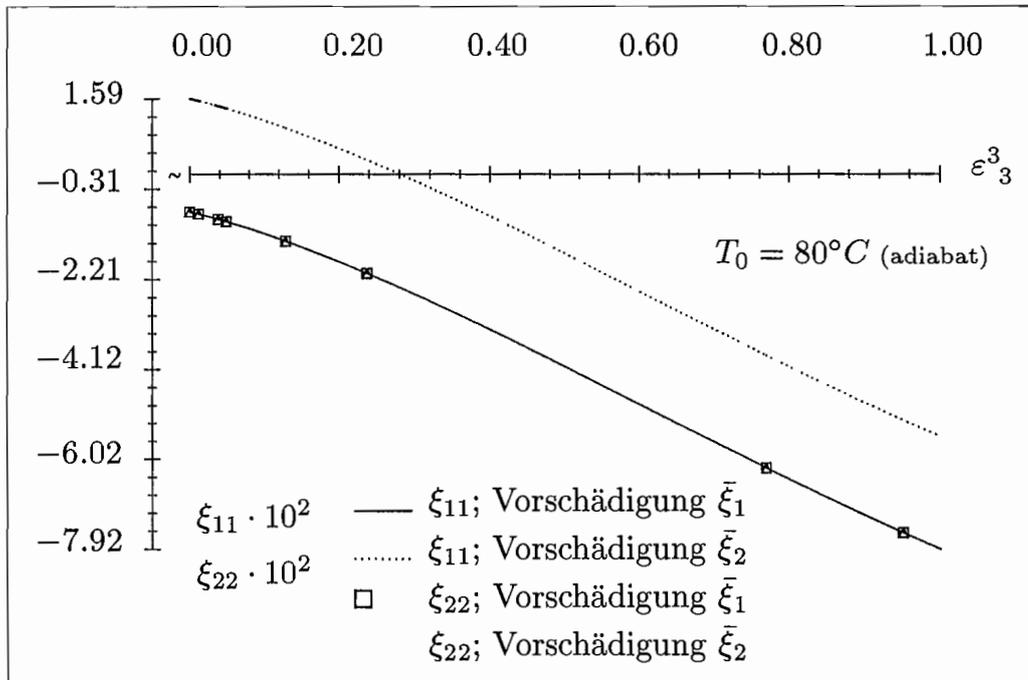
(i)  $\bar{\xi}_1$  mit  $\xi = 0.050001$ ,  $\xi_{11} = \xi_{22} = -0.0079579$ ,  $\xi_{12} = \xi_{13} = \xi_{23} = 0.0$

(ii)  $\bar{\xi}_2$  mit  $\xi = 0.050001$ ,  $\xi_{22} = \xi_{33} = -0.0079579$ ,  $\xi_{12} = \xi_{13} = \xi_{23} = 0.0$ .

Eine Temperaturabhängigkeit von (10.50) wird nur dann erhalten, wenn  $c_4$  temperaturabhängig ist. Dieser Fall soll hier nicht betrachtet werden.

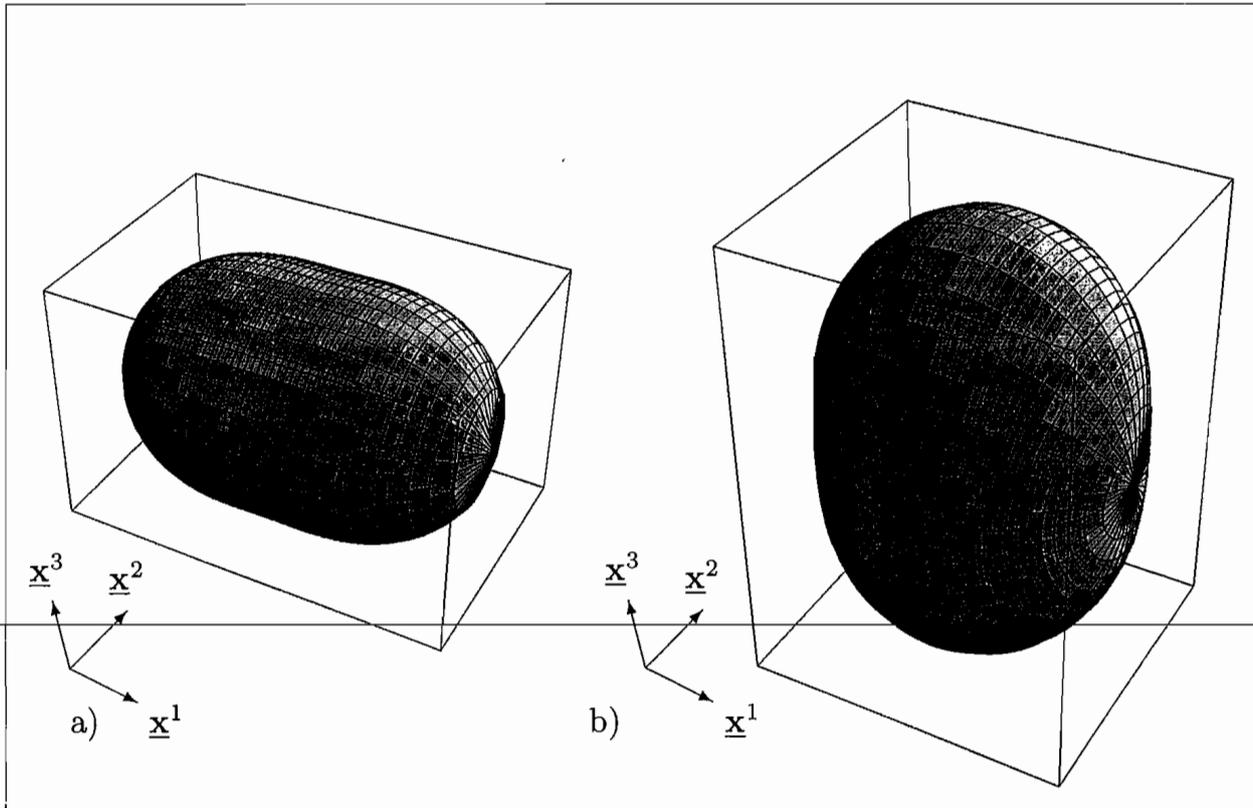


**Abbildung 33:** Porenvolumendichte  $\xi$  über Dehnung  $\varepsilon^3_3$  im Zugversuch mit Vorschädigung



**Abbildung 34:** Komponenten  $\xi_{11}$  und  $\xi_{22}$  des Schädigungstensors  $\underline{\underline{\xi}}$  über Dehnung  $\varepsilon^3_3$  im Zugversuch mit Vorschädigung

Anschaulich lassen sich die Ergebnisse aus den Abbildungen 33 und 34 besser als 3-D Bild wiedergeben. In Abbildung 35 ist die Orientierungsdichtefunktion  $\bar{\xi}(\mathbf{X}, \mathbf{n})$  der Rechnung mit  $T_0 = 80^\circ\text{C}$  und  $\bar{\xi}_2$  vor und nach der Belastung qualitativ dargestellt. Die Änderung der resultierenden Anisotropierichtungen ist hieraus deutlich zu erkennen.



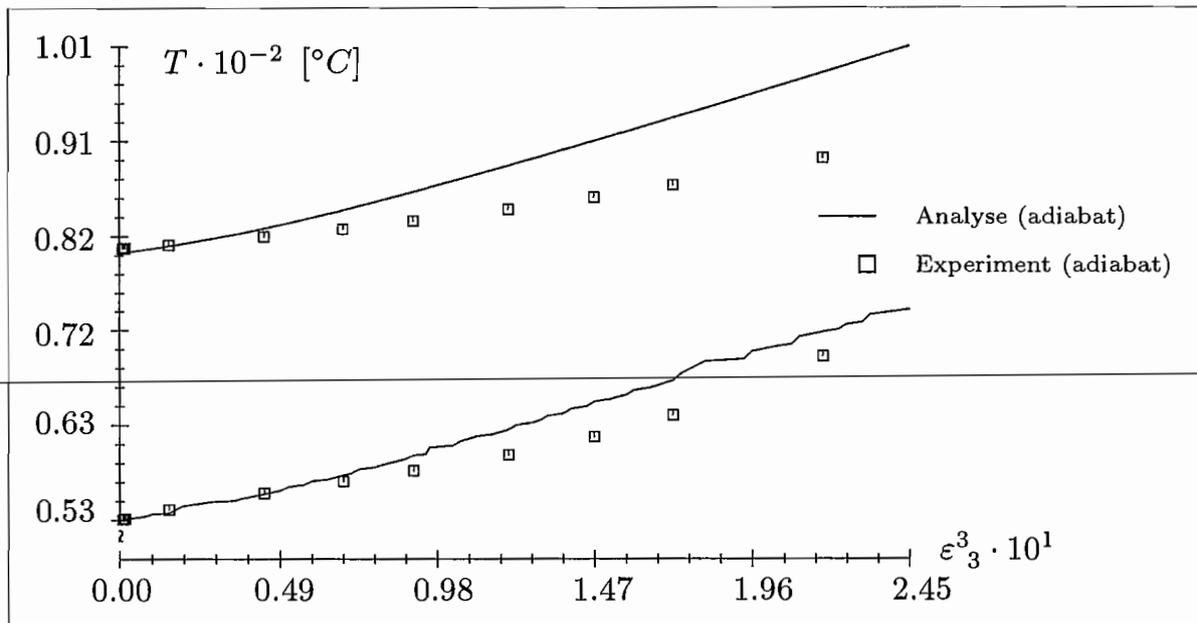
**Abbildung 35:** Orientierungsdichtefunktion  $\bar{\xi}(\mathbf{X}, \mathbf{n})$  vor der Belastung (a) und nach der Belastung (b) mit  $\bar{\xi}_2$  und  $T_0 = 80^\circ\text{C}$

### c) Temperatur-Verläufe

In Abbildung 36 sind die experimentellen Temperatur-Verläufe und die Temperatur-Verläufe aus den Rechnungen über der Dehnung  $\varepsilon^3_3$  bei adiabater Erwärmung und den Anfangstemperaturen  $T_0 = 53^\circ\text{C}$  und  $T_0 = 80^\circ\text{C}$  aufgetragen. Die Anpassung der Dissipationsfunktion  $\beta$  an die Experimente in Abbildung 19 liefert den Wert  $\beta = 0.67621$ . Im Vergleich zur unteren rechnerisch ermittelten Kurve ergibt die Anpassung des Temperaturverlaufes mit der größeren Anfangstemperatur eine schlechtere Übereinstimmung mit dem Experiment. Dieses Phänomen wird in folgender Weise begründet. Der experimentelle Verlauf der Kurve mit  $T_0 = 80^\circ\text{C}$  ist viel flacher als die Kurve mit  $T_0 = 53^\circ\text{C}$ . D.h., im ersten Fall beträgt der Temperaturzuwachs am Ende des Belastungsprozesses nur  $\approx 11^\circ\text{C}$  und im zweiten Fall  $\approx 21^\circ\text{C}$ . Diese

qualitativen Unterschiede lassen sich als Meßungenauigkeiten erklären. Eine andere Erklärung führt zu der Annahme, daß  $\beta$  als temperaturabhängige Größe betrachtet werden muß.

FELDMÜLLER erhielt mit einem allgemein isotropen Materialgesetz und einer Anpassung an Temperaturverläufe, bei denen  $T_0$  um ca.  $25^\circ\text{C}$  lag, für das gleiche Material den Wert  $\beta = 0.84$ . Diese verschiedenen  $\beta$ -Werte lassen sich mit der obigen Annahme und der Annahme, daß der gespeicherte Anteil der plastischen Arbeit bei anisotroper Schädigung größer ist, begründen. Für fundiertere Aussagen sind aber noch weitere Untersuchungen notwendig.

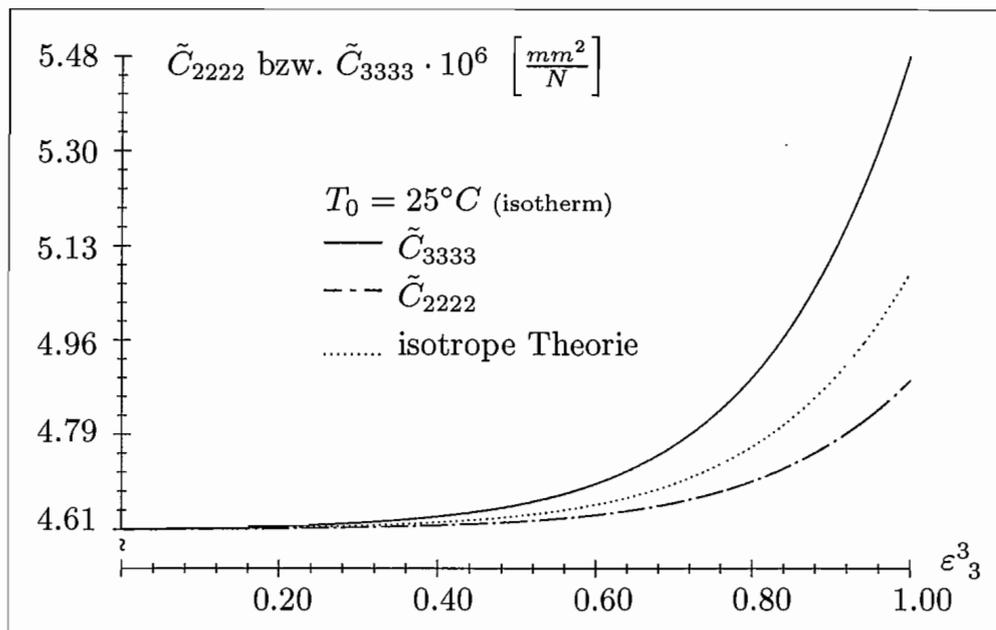


**Abbildung 36:** Temperatur  $T$  über Dehnung  $\epsilon_3^3$  im Zugversuch mit  $\dot{\epsilon}_3^3 \approx 10^{-2} \text{s}^{-1}$

#### d) Verläufe von Komponenten der elastischen Nachgiebigkeit

Häufig beschränkt sich die Beschreibung der Änderung elastischer Eigenschaften auf eine mit der Schädigung fortschreitenden isotropen Entfestigung (z.B. LEMAITRE [124]), auf eine anisotrope Entfestigung, wobei aber die Anisotropierichtungen vorgegeben sind (z.B. GURSON [73]; GOLOGANU, LEBLOND & DEVAUX [69]), oder sie wird vollständig vernachlässigt (z.B. MURAKAMI & OHNO [154]). Das vorgestellte Materialgesetz kann, im Gegensatz zu den Theorien mit skalaren Schädigungsmaßen, die Änderung der Anisotropierichtungen der elastischen Eigenschaften in Abhängigkeit von der aktuellen Orientierung der Mikrodefekte beschreiben. Am Beispiel des Verlaufes der Komponenten  $\tilde{C}_{1111} = \tilde{C}_{2222}$ ,  $\tilde{C}_{3333}$ ,  $\tilde{C}_{2233}$  und  $\tilde{C}_{3322}$  des elastischen Nachgiebigkeitstensors  $\underline{\underline{C}}^{(4)}$  in (8.27) in den Abbildungen 37 und 38 soll diese Eigen-

schaft verdeutlicht werden.<sup>14</sup> Der Verlauf der Komponenten  $\tilde{C}_{1111} = \tilde{C}_{2222}$ ,  $\tilde{C}_{3333}$ ,  $\tilde{C}_{2233}$  und  $\tilde{C}_{3322}$  wurde unter Berücksichtigung der Schädigungs-Verläufe in den Abbildungen 27 und 31 ermittelt.



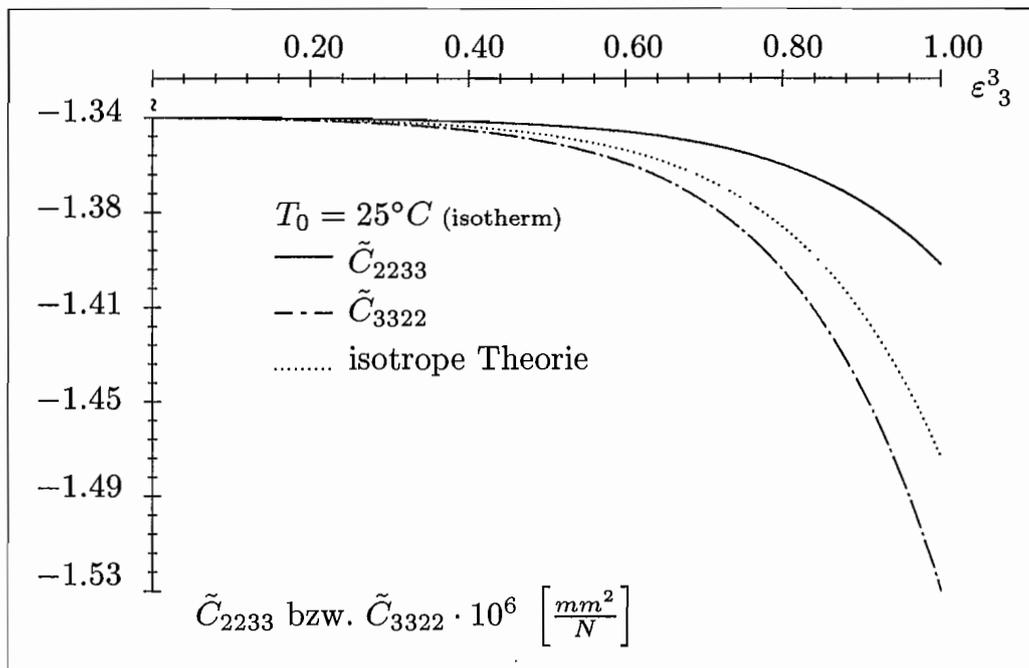
**Abbildung 37:**  $\tilde{C}_{3333}$ - und  $\tilde{C}_{2222}$ -Komponente des Nachgiebigkeitstensors  $\underline{\underline{C}}^{(4)}$  über Dehnung  $\varepsilon_3^3$  im Zugversuch mit den Schädigungs-Verläufen aus Abbildung 27 und 31

Aus den Abbildungen 27 und 31 folgt, daß die Orientierung der Mikroporen in axialer Richtung, d.h. in  $\underline{x}^3$ -Richtung, am schnellsten anwächst, was sich auch auf die Orientierung der elastischen Entfestigung auswirken muß. In Abbildung 37 beschreibt die isotrope Theorie bei isotropem Ausgangsmaterial die Entfestigung des Materials unabhängig von der betrachteten Richtung. Die Kurven für  $\tilde{C}_{2222}$  und  $\tilde{C}_{3333}$  sind deckungsgleich und erreichen 110.06% der Anfangsnachgiebigkeit. Mit Berücksichtigung der Orientierung der Schädigung nach (8.24) wird die Entfestigung in  $\underline{x}^3$ -Richtung, beschrieben durch  $\tilde{C}_{3333}$ , größer (119.50%) und die Entfestigung in  $\underline{x}^2$ -Richtung, beschrieben durch  $\tilde{C}_{2222}$ , kleiner (105.66%) gegenüber der isotropen Theorie.

Ein analoger und mit der Anschauung übereinstimmender Verlauf wie in Abbildung 37 gibt die Abbildung 38 wieder. Bei einer einachsigen Zugspannung in  $\underline{x}^3$ -Richtung ergibt sich gegenüber der isotropen Theorie (Absinken von  $\tilde{C}_{2233}$  und  $\tilde{C}_{3322}$  auf 110.16% vom Anfangswert) eine geringere Querkontraktion in  $\underline{x}^2$ -Richtung, was

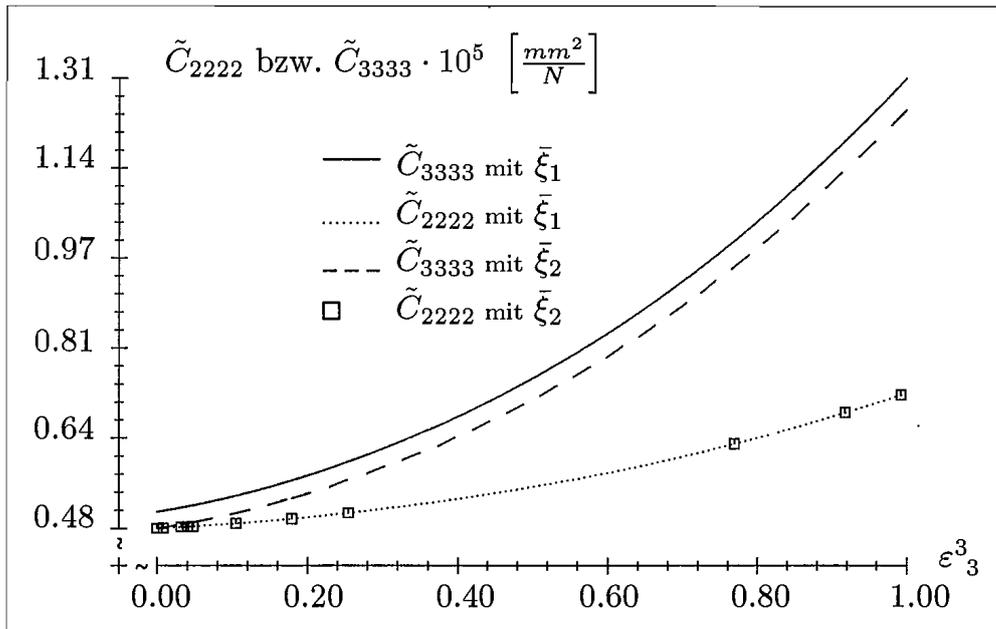
<sup>14</sup> Die ersten zwei Indizes von  $\tilde{C}_{ijkl}$  geben die Verzerrungskomponente und die zweiten zwei Indizes die verursachende Spannungskomponente an.

durch die flachere  $\tilde{C}_{2233}$ -Kurve (104.25%) ausgedrückt wird. Hingegen ist durch den hohen Schädigungsanteil in der  $\underline{x}^3$ -Richtung bei einer einachsigen Zugspannung in  $\underline{x}^2$ -Richtung die Querkontraktion in  $\underline{x}^3$ -Richtung stärker (die  $\tilde{C}_{3322}$ -Kurve liegt unterhalb der Kurve der isotropen Theorie; Absinken auf 113.94%).

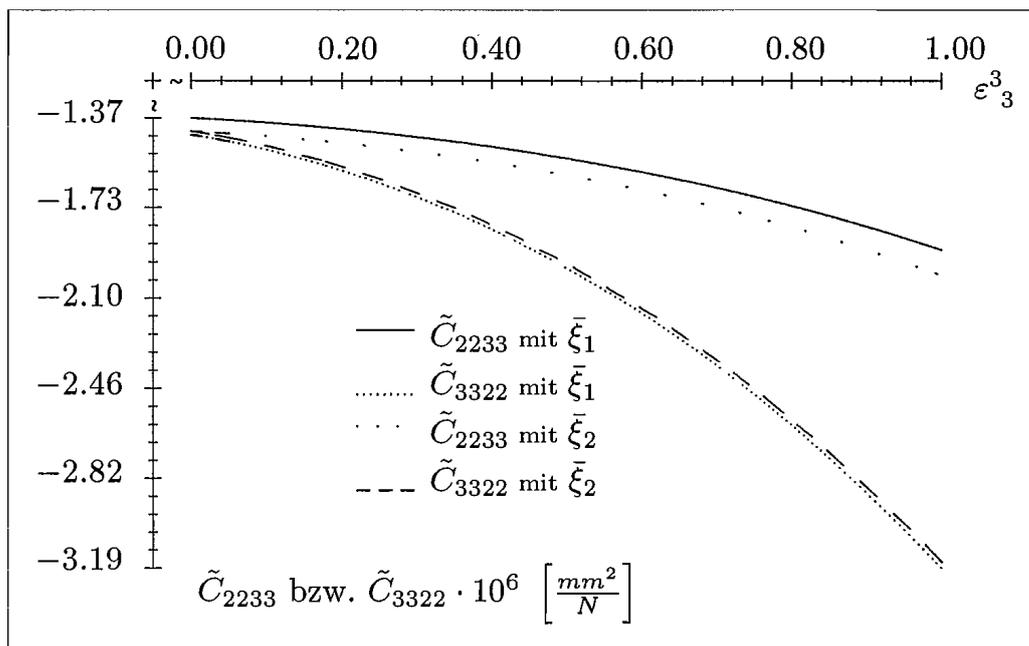


**Abbildung 38:**  $\tilde{C}_{2233}$ - und  $\tilde{C}_{3322}$ -Komponente des Nachgiebigkeitstensors  $\underline{\underline{C}}^{(4)}$  über Dehnung  $\epsilon_3^3$  im Zugversuch mit den Schädigungs-Verläufen aus Abbildung 27 und 31

Mit den Schädigungsverläufen in den Abbildungen 33 und 34, d.h. mit Vorschädigung, ergeben sich die in Abbildung 39 und 40 dargestellten Verläufe der Nachgiebigkeitskomponenten  $\tilde{C}_{2222}$ ,  $\tilde{C}_{3333}$ ,  $\tilde{C}_{2233}$  und  $\tilde{C}_{3322}$ .



**Abbildung 39:**  $\tilde{C}_{3333}$ - und  $\tilde{C}_{2222}$ - Komponente des Nachgiebigkeitstensors  $\underline{\underline{C}}^{(4)}$  über Dehnung  $\epsilon_3^3$  im isothermen Zugversuch mit den Schädigungs-Verläufen aus Abbildung 33 und 34 ( $T_0 = 80^\circ C$ )



**Abbildung 40:**  $\tilde{C}_{2233}$ - und  $\tilde{C}_{3322}$  - Komponente des Nachgiebigkeitstensors  $\underline{\underline{C}}^{(4)}$  über Dehnung  $\epsilon_3^3$  im isothermen Zugversuch mit den Schädigungs-Verläufen aus Abbildung 33 und 34 ( $T_0 = 80^\circ C$ )

### e) Verläufe schädigungsinduzierter Dehnungen

Im Rahmen dieser Arbeit werden Porenvolumenanteile bis maximal 15% betrachtet. Die zusätzlichen Verzerrungen, die durch die Mikroporen verursacht werden, sind daher gegenüber den Gesamtverzerrungen noch relativ klein. Da weiterhin die Berücksichtigung elastischer und plastischer Deformationen keine zusätzlichen Informationen liefert, werden zur Verdeutlichung der Darstellung die schädigungsinduzierten Verzerrungen gesondert betrachtet.

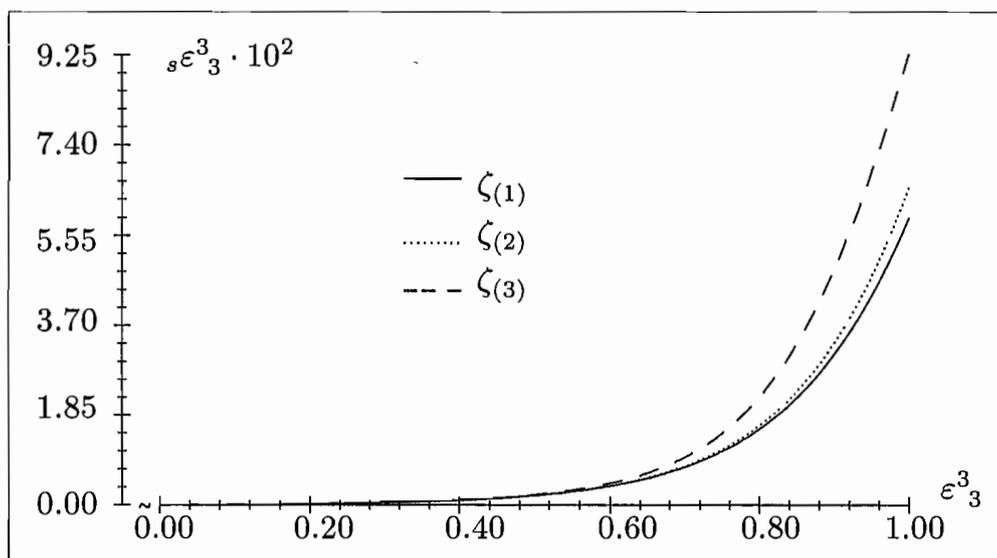
Mit der Wahl der Funktion  $\zeta$ , d.h. die Koeffizienten  $\zeta_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ), werden die qualitativen und quantitativen Verläufe der einzelnen Komponenten der schädigungsinduzierten Deformationen definiert. D.h. bezüglich einer Zugspannung  $\sigma$  in  $\underline{x}^3$ -Richtung werden die Längs- bzw. Queranteile (Anteile in  $\underline{x}^3$ - bzw.  $\underline{x}^2$ -Richtung) der durch  $\sigma$  verursachten schädigungsinduzierten Dilatationen bestimmt. Verschwinden alle  $\zeta_i$ , sind die schädigungsinduzierten Deformationen isotrop. Werden die  $\zeta_i$  so gewählt, daß die Funktion  $\zeta$  mit wachsendem  $\xi$  immer schneller in eine horizontale Gerade übergeht, wird der Anteil der Längsdehnung immer größer und der Anteil der Querdehnung immer geringer. Am Beispiel dreier Funktionen  $\zeta_{(i)}$  mit

$\zeta_{(1)}$  : mit  $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \zeta_5 = 0$

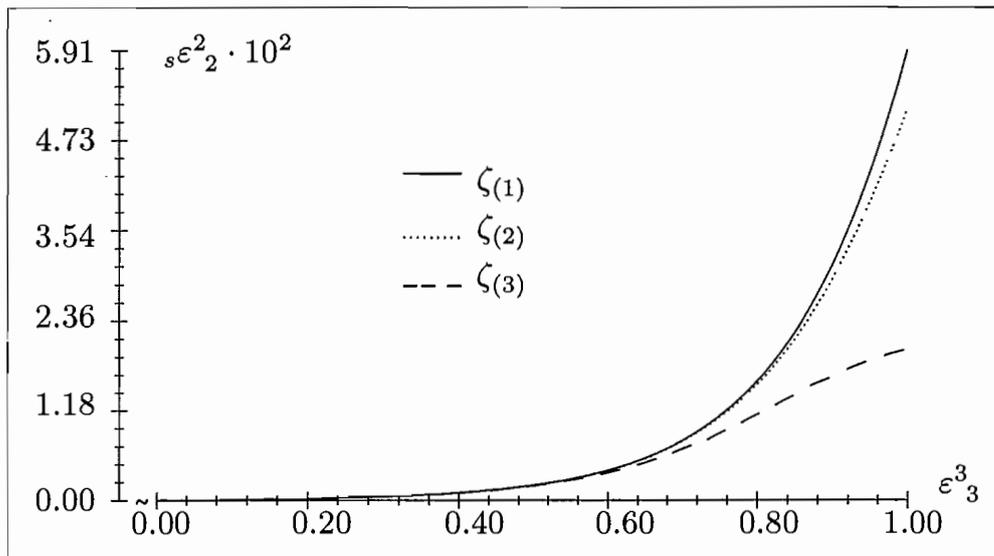
$\zeta_{(2)}$  : mit  $\zeta_1 = 0.5, \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \zeta_5 = 0$

$\zeta_{(3)}$  : mit  $\zeta_1 = 6.27097, \zeta_2 = -19.2569, \zeta_3 = 29.9512, \zeta_4 = -22.8757$  und  
 $\zeta_5 = 6.81071$

wird in den Abbildungen 41 und 42 die Wirkung der Wahl von  $\zeta$  dargestellt.



**Abbildung 41:** Schädigungsinduzierte axiale Dehnung  $s\epsilon_3^3$  über Dehnung  $\epsilon_3^3$  im adiabaten Zugversuch bei  $T_0 = 364^\circ\text{C}$



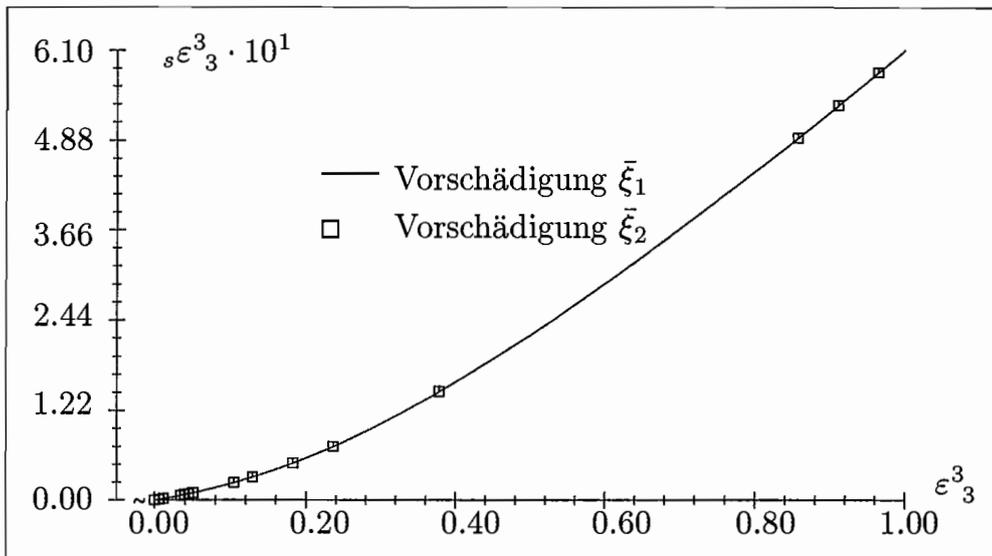
**Abbildung 42:** Schädigungsinduzierte radiale Dehnung  ${}_s\varepsilon_2^2$  über Dehnung  $\varepsilon_3^3$  im adiabaten Zugversuch bei  $T_0 = 364^\circ\text{C}$

In den Abbildungen 41 und 42 wurde die Wirkung unterschiedlicher Materialfunktionen  $\zeta$  auf die schädigungsinduzierten Deformationen bei konstanter Porenvolumendichte  $\xi$  der Vorschädigung gezeigt. Wird nun bei konstantem  $\zeta$  und gleicher Porenvolumendichte  $\xi$  der Vorschädigung nur die Orientierung der Vorschädigung variiert, zeigt sich entsprechend den Abbildungen 43 und 44, daß die Orientierung auf den Verlauf der schädigungsinduzierten Deformationen keinen Einfluß besitzt. Diese Eigenschaft ist charakteristisch für das vorgestellte Materialgesetz – nur die Funktion  $\zeta$  bestimmt die Verläufe von  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{(s)}$ .

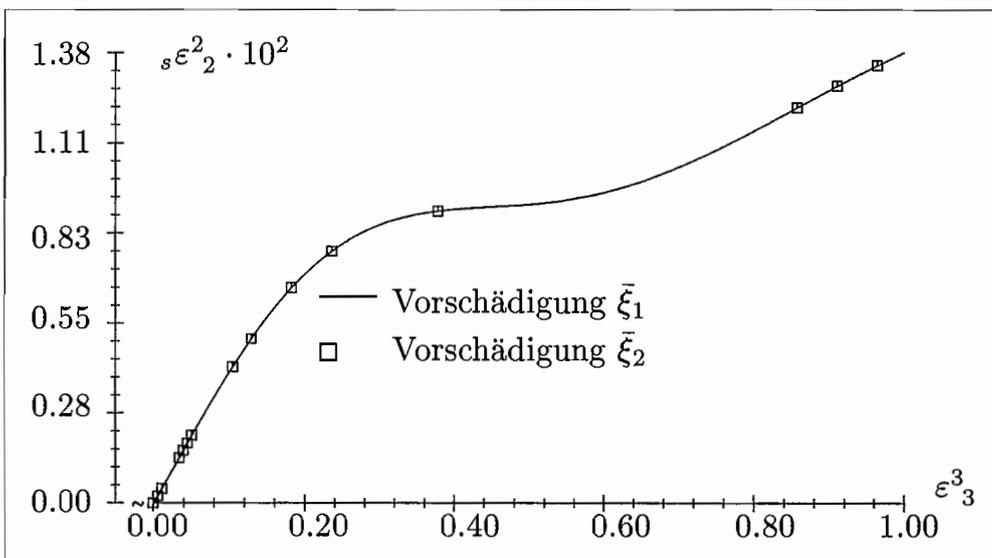
Wird statt der Orientierung die Porenvolumendichte  $\xi$  der Vorschädigung bei gleicher Funktion  $\zeta$  variiert, ergeben sich mit  $\zeta_{(3)}$  die Abbildungen 45 und 46. Es werden die schädigungsinduzierten Deformationen verglichen, wobei entweder die Vorschädigung  $\bar{\xi}_1$  oder

(iii)  $\bar{\xi}_3$  mit  $\xi = 0.0050001$ ,  $\xi_{11} = \xi_{22} = -0.00079579$ ,  $\xi_{12} = \xi_{13} = \xi_{23} = 0.0$

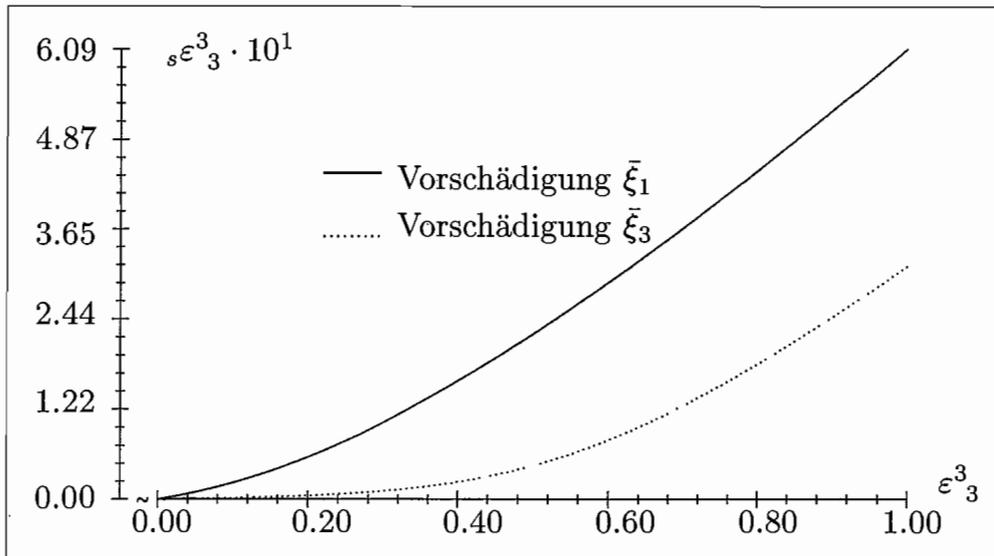
angenommen wurde. Der Verlauf der schädigungsinduzierten Deformationen ist bei gleicher Funktion  $\zeta$  vom Betrag von  $\xi$  der Vorschädigung abhängig. Die Abbildung 46 könnte den Eindruck erwecken, daß das Porenvolumen bei einer geringeren Anfangsschädigung ( $\xi_3$  von  $\bar{\xi}_3$  ist kleiner als  $\xi_1$  von  $\bar{\xi}_1$ ) schneller wächst. Abbildung 47 zeigt aber, daß die Porenvolumendichte im Versuch mit  $\bar{\xi}_1$  stets größer als im Versuch mit  $\bar{\xi}_3$  ist.



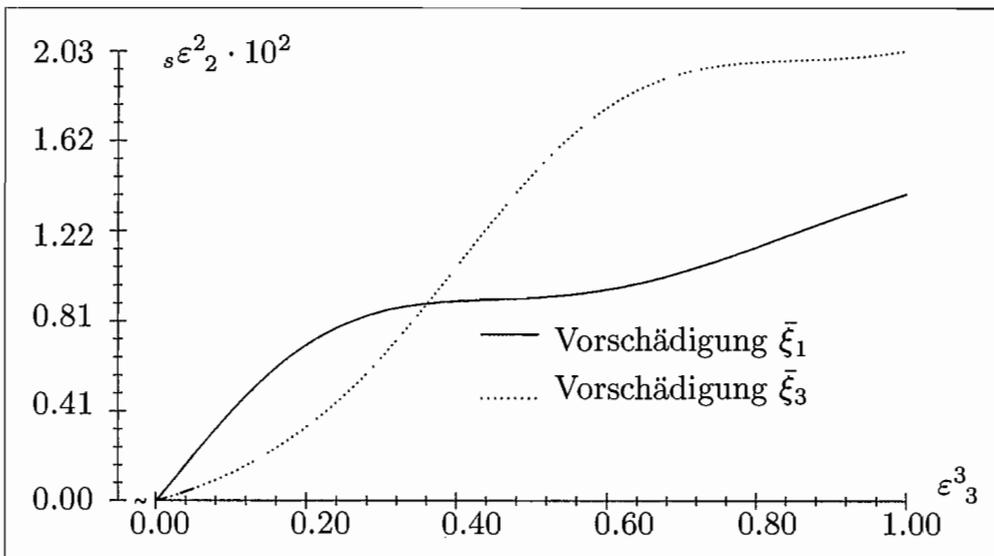
**Abbildung 43:** Schädigungsinduzierte axiale Dehnung  ${}_s\varepsilon_3^3$  über Dehnung  $\varepsilon_3^3$  im isothermen Zugversuch bei  $T_0 = 80^\circ\text{C}$ , mit Vorschädigung und  $\zeta_{(3)}$



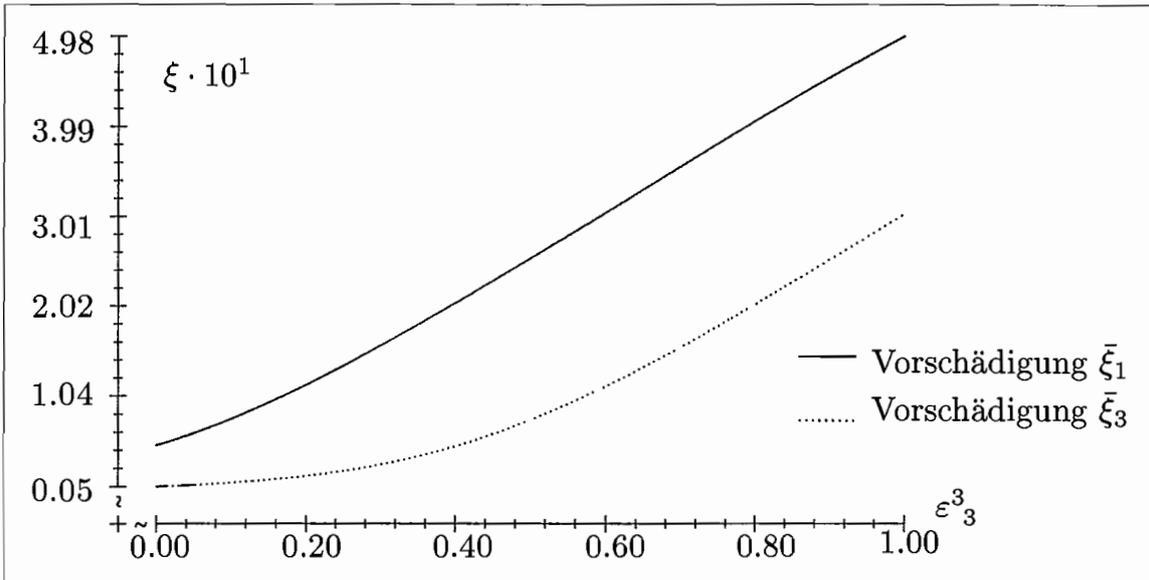
**Abbildung 44:** Schädigungsinduzierte radiale Dehnung  ${}_s\varepsilon_2^2$  über Dehnung  $\varepsilon_3^3$  im isothermen Zugversuch bei  $T_0 = 80^\circ\text{C}$ , mit Vorschädigung und  $\zeta_{(3)}$



**Abbildung 45:** Schädigungsinduzierte axiale Dehnung  ${}_s\varepsilon_3^3$  über Dehnung  $\varepsilon_3^3$  im isothermen Zugversuch bei  $T_0 = 80^\circ\text{C}$  mit Vorschädigung und  $\zeta_{(3)}$



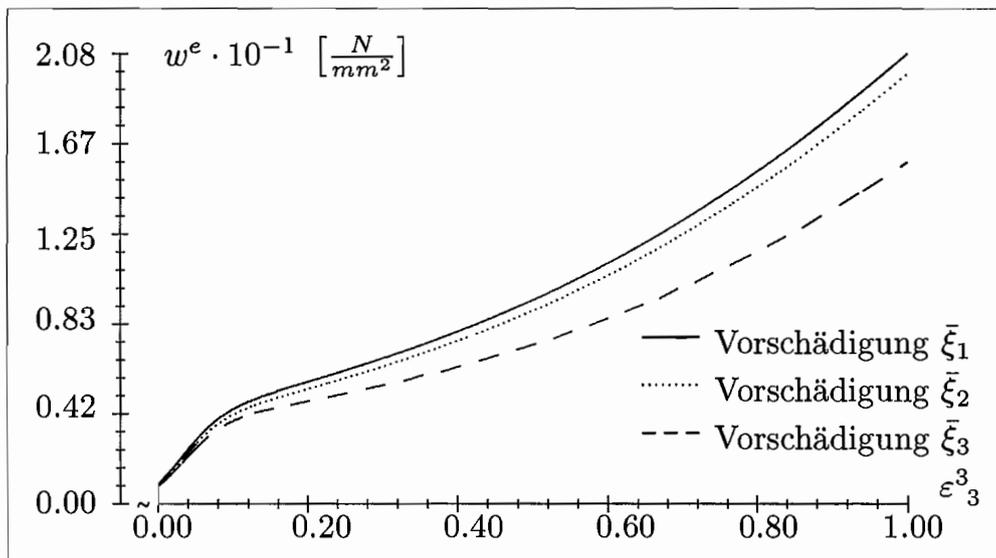
**Abbildung 46:** Schädigungsinduzierte radiale Dehnung  ${}_s\varepsilon_2^2$  über Dehnung  $\varepsilon_3^3$  im isothermen Zugversuch bei  $T_0 = 80^\circ\text{C}$  mit Vorschädigung und  $\zeta_{(3)}$



**Abbildung 47:** Porenvolumendichte  $\xi$  über Dehnung  $\varepsilon^3_3$  im isothermen Zugversuch bei  $T_0 = 80^\circ\text{C}$  mit Vorschädigung und  $\zeta_{(3)}$

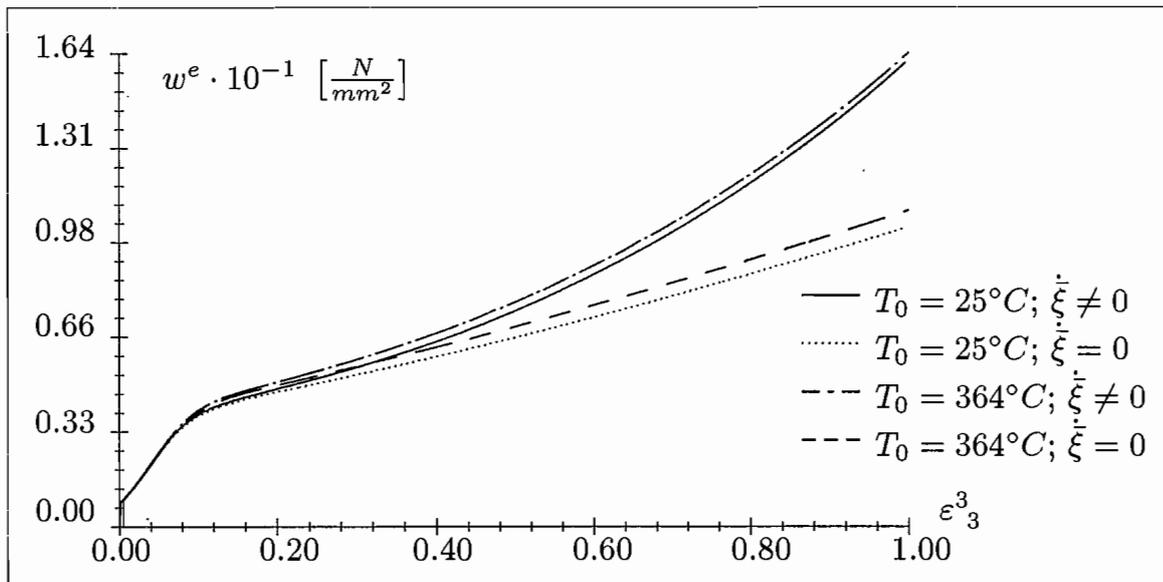
d) **Verläufe elastischer Schädigungs-Verzerrungs-Energiefreisetzungsraten**

Die Evolution der eingeführten versagensrelevanten Größe  $w_e$  in Gleichung (10.29) kann in Abbildung 48 verfolgt werden. Bei Verwendung eines einzigen Materials und einer Temperatur  $T_0$  entspricht ein größerer  $w^e$ -Wert einem kürzeren Zeitraum bis zum instabilen Versagen des Materials.



**Abbildung 48:**  $w^e$  über Dehnung  $\varepsilon^3_3$  im isothermen Zugversuch bei  $T_0 = 80^\circ\text{C}$ , mit Vorschädigung und  $\zeta_{(3)}$

Die verschiedenen Vorschädigungen besitzen unterschiedliche Orientierungen, und weiterhin gilt:  $\xi_1 = \xi_2 > \xi_3$ . Der Wert von  $w^e$  wird nicht nur durch den Betrag der Porenvolumendichte  $\xi$  (Kurven  $\bar{\xi}_1$  und  $\bar{\xi}_2$  in Abbildung 49), sondern auch durch die Orientierung des Schädigungsmaßes  $\bar{\xi}(\mathbf{X}, \mathbf{n})$  bestimmt. Die Vorschädigungen  $\bar{\xi}_1$  und  $\bar{\xi}_2$  in Abbildung 49 besitzen den selben isotropen Wert  $\xi$ ; aber die jeweilige Orientierungsdichtefunktion  $\bar{\xi}_1$  bzw.  $\bar{\xi}_2$  weist unterschiedliche Orientierungen auf. Die Vorschädigung  $\bar{\xi}_1$  besitzt in  $\mathbf{x}^3$ -Richtung, d.h. in Zugrichtung, einen größeren Wert als  $\bar{\xi}_2$ . Die Orientierung der Mikrodefektkonfiguration wird im vorgeschlagenen Versagenskriterium berücksichtigt, und man erhält für  $\bar{\xi}_1$  einen höheren Wert  $w^e$ . Wie aus der Gleichung (10.29) für  $w^e$  zu entnehmen ist, ist die Temperaturabhängigkeit von  $w^e$  sehr komplex. Der Elastizitätsmodul  $E$ , der Gleitmodul  $G$  und die Evolution von  $\xi$ ,  $\xi_{33}$  und  $S^3_3$  (über die Verfestigungsfunktion  $k^2(T, a)$ ) sind von der Temperatur abhängig. Welcher Einfluß überwiegt, ist materialabhängig. Für Ck15 Stahl mit den Materialkoeffizienten nach Tabelle 2 ergeben sich die in 48 dargestellte Verläufe. Diese wurden bei unterschiedlichen Anfangstemperaturen mit und ohne Berücksichtigung des Schädigungsfortschritts erhalten .



**Abbildung 49:**  $w^e$  über Dehnung  $\varepsilon^3_3$  im isothermen Zugversuch mit Vorschädigung  $\bar{\xi}_3$  und  $\zeta_{(3)}$

Obwohl sich für die größere Temperatur  $T_0 = 364^\circ\text{C}$  stets ein größerer Wert  $w^e$  ergibt, folgt hieraus nicht, daß das Versagen vor Versuchen bei niedrigeren Temperaturen (hier  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ ) eintreten muß. Die Temperaturabhängigkeit des kritischen Wertes der Schädigungs-Verzerrungs-Energiefreisetzungsrates  $w^e_c$  in Gleichung (9.14) bewirkt,

---

daß auch für die kritischen Werte die Ungleichung

$$w_c^e(T_0 = 364^\circ C) > w_c^e(T_0 = 25^\circ C)$$

gilt. Ob Versagen bei höheren Temperaturen bei größeren oder kleineren  $\varepsilon_3^3$  eintritt als bei niedrigen Temperaturen, kann über (9.14) gesteuert werden. Wird bei höheren Temperaturen eine größere Duktilität vorausgesetzt, muß der Ausdruck

$$w_1 \exp\left(\frac{-w_2 a}{T}\right)$$

in Gleichung (9.14) entsprechend sehr schnell mit der Temperatur anwachsen, d.h.  $w_1 > 0$  und  $w_2 > 0$ .

---

## 11. Zusammenfassung und Ausblick

Nach einem kurzen historischen Rückblick in die Methoden zur empirischen Abschätzung der Lebensdauer eines Bauteils werden die Konzepte beschrieben, die zur Aufstellung materialabhängiger Gleichungen geschädigter Materialien in der Vergangenheit verwendet wurden, und hinsichtlich ihrer Eignung untersucht. Schädigung wird als Volumendichte geometrischer Mikrodefekte definiert. Die Charakterisierung der einzelnen Konzepte erfolgte anhand ausgewählter Beispiele. Anschließend wurde ein Materialgesetz zur Beschreibung des thermomechanischen Verhaltens von Metallen unter Berücksichtigung innerer Strukturänderungen durch orientierte Mikrohohlräume vorgestellt. Das Materialgesetz wird durch den Vorschlag eines lokalen Bruchkriteriums, das den inneren Materialzustand einschließlich des Spannungszustandes und die Bilanz der beim Bruch umgesetzten Energien berücksichtigt, abgerundet. Die Ausführungen wurden mit der Demonstration der Eigenschaften des Materialgesetzes bei der Simulation homogener, radialer und zweidimensionaler Prozesse abgeschlossen.

Eine unklare Definition des Schädigungsbegriffs und einengende Richtlinien für die phänomenologische Modellbildung in der Kontinuums-Schädigungs-Theorie verhinderten bislang die Verifizier- und Interpretierbarkeit vieler Materialgesetze. Mit der Beschreibung der einzelnen Modellierungskonzepte ist es möglich, einen einfachen Einstieg in die Kontinuums-Schädigungs-Theorie zu finden. Die Darlegung der Vor- und Nachteile der einzelnen Konzepte deckt ungeklärte Probleme auf und bietet dem Wissenschaftler Ansatzpunkte für weitere Forschungen.

Das in Kapitel 8 vorgestellte Materialgesetz und das lokale Bruchkriterium lassen sich wie folgt charakterisieren:

- Thermodynamik mit inneren Zustandsvariablen,
- elastisch-plastisches Grundverhalten der Materialmatrix (isotrope Verfestigung),
- eindeutige mikrophysikalische Definition der inneren Schädigungsvariablen,
- Entfestigung durch Temperaturzuwachs und Schädigungswachstum,

- additive Aufspaltung der inelastischen Verzerrungsrate in einen plastischen und einen schädigungsinduzierten Anteil,
- Änderung der Materialsymmetrien in Abhängigkeit von den aktuellen Belastungsrichtungen,
- von der Orientierung der Mikrostruktur unabhängige Hauptrichtungen der schädigungsinduzierten Deformationen,
- Abhängigkeit des lokalen Bruchkriteriums von der Belastungsrichtung.

Das Materialgesetz besitzt phänomenologischen Charakter. Es wurde aber versucht, jede Erweiterung der klassischen Theorien der Elasto-Plastizität vorher mikrophysikalisch zu begründen. Diese Vorgehensweise gestattet die Hinzunahme weiterer innerer Strukturänderungen, ohne die vorhandenen Größen und Materialfunktionen neu zu interpretieren.

Die im Kapitel 10 beschriebenen Experimente sind zur eindeutigen Ermittlung der Materialfunktionen nicht ausreichend. Dennoch lassen sich mit den vorhandenen experimentellen Daten alle betrachteten Phänomene geschädigter Materialien qualitativ richtig beschreiben. Eine quantitative Anpassung ist somit problemlos möglich. Hierfür müssen die im folgenden beschriebenen Experimente bei unterschiedlichen Temperaturen vorliegen:

- Verläufe der Spannungs- und Verzerrungskomponenten bei mehraxialen Belastungspfaden,
- Verläufe der elastischen Eigenschaften; nach LEMAITRE und DUFFAILLY [123], [128] werden die besten Ergebnisse mit Entlastungspfaden erzielt,
- Verläufe des Porenvolumendichte, die durch Messungen der Massendichte (oder des Flächenanteils der Mikroporen in einem repräsentativen Flächenelement) erhalten werden können,
- Verläufe der Orientierungsdichtefunktion, die auf quantitativen mikrofraktographischen Untersuchungen basieren,
- Bestimmung des Bruchzeitpunktes bei homogenen und der Rißinitiierung bei inhomogenen Versuchen.

Mit welcher Meßgenauigkeit diese Experimente verbunden sein müssen, kann an dieser Stelle nicht abgeschätzt werden. Hiervon unabhängig müssen Wege gesucht werden, die Materialfunktionen mit geringstem Aufwand aus den vorhandenen Experimenten zu ermitteln. Methoden zur Abschätzung der zu optimierenden Parameter sind in Kapitel 10 beschrieben. Für eine Optimierung der Parameter sind Strukturberechnungen gerade hinsichtlich der Ermittlung der Materialkoeffizienten im Bruchkri-

terium zukünftig notwendig. Dieses Vorgehen sollte aufgrund des erheblichen numerischen Aufwandes auf die Bestimmung einer geringen Anzahl unbekannter Größen beschränkt bleiben.

In Kapitel 8 wurde die Orientierungsverteilungsdichtefunktion  $\bar{\xi}$  und das zugeordnete Evolutionsgesetz  $\dot{\bar{\xi}}$  nach dem zweiten Reihenglied abgebrochen. Durch die Hinzunahme weiterer Reihenglieder kann die Genauigkeit systematisch erhöht werden. Aussagen zur Größenordnung höherer Fourierkoeffizienten sind zu diesem Zeitpunkt noch nicht möglich. Jeder Fourierkoeffizient ist prinzipiell gleichwertig und kann Beiträge von gleicher Größenordnung liefern. Das Verhältnis zweier Koeffizienten kann nur dann abgeschätzt werden, wenn sich auf einzelne qualitative Verläufe der Funktionen  $\bar{\xi}$  und  $\dot{\bar{\xi}}$  beschränkt wird. Welche Verläufe auszuschließen sind, muß sich noch in mikrostrukturellen Untersuchungen erweisen.

Bei der Formulierung der Evolutionsgleichung für die Orientierungsverteilungsdichtefunktion  $\bar{\xi}$  sollte die folgende Forderung erfüllt werden: Kann eine Funktion der Orientierungsverteilungsdichte  $\bar{\xi}$  zum Zeitpunkt  $t$  durch  $k$  Reihenglieder vollständig beschrieben werden, müssen die Evolutionsgleichungen der  $k$  Reihenglieder so formuliert werden, daß auch zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  die Funktion  $\bar{\xi}$  durch  $k$  Reihenglieder vollständig beschrieben werden kann.

Um die Genauigkeit zu steigern und den Gültigkeitsbereich des vorgestellten Materialgesetzes zu erweitern, kann in einem nächsten Schritt eine innere Variable zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung und ein erweiterter Ansatz der Verfestigungsfunktion  $k^2$ , der die Phänomene der Reckalterung berücksichtigt, eingeführt werden.

# Anhang

## Anhang 1: Schädigungsvariable und -effektmaße

tensorielle Stufe der Variablen	Beispiele	Autoren, Jahr, Quelle	Bemerkungen Anwendungen
Skalar, Tensor 0.Stufe	Kontinuität $\Psi$ $\Psi = \frac{A}{A_0}$ ; $\dot{\Psi} > 0$ $A_0$ Referenz- bzw. $A$ aktuelles Flächenelement	L.M.Kachanov 1958 [89]	isotrope Schädigung; Kriechen
	Schädigung $D$ $D = 1 - \Psi$ ; $\dot{D} > 0$	Yu.N.Rabotnov 1959 [182]	isotrope Schädigung; Kriechen
	Kriechschädigung	Hayhurst & Leckie 1973 [79], 1974 [111]	isotrope Schädigung; mehrachsiges Kriechen
	belastungsabhängige Schädigung (Rißschlies- sungskoeffizient $h$ ) $D(\sigma < 0) = hD(\sigma \geq 0)$	Ladeveze & Lemaitre 1984 [109]	unterschiedliches, isotro- pes Zug-Druck-Verhalten
Vektor, Tensor 1.Stufe	Schädigungsvektor	Davison & Stevens 1973 [55]	ebene Mikrorisse; <i>spalling</i>
	Kontinuitätsvektor $\Psi_\nu$	Kachanov 1974 [90]	nichtproportionale Bela- stung; orthotropes Krie- chen; Bruch orthogonal zur Zugrichtung
	Schädigungsvektor	Krajcinovic & Fonseka 1981 [105]; Krajcinovic 1983 [102]	ebene Mikrorisse; elastisch-sprödes Verhalten
Tensor 2.Stufe	Rißdichtetensor	Vakulenko & L.M.Ka- chanov 1971 [214]	Rißfeld, elastisch - spröde
	Schädigungstensor	Kachanov 1980 [91]	

tensorielle Stufe der Variablen	Beispiele	Autoren, Jahr Quelle,	Bemerkungen Anwendungen
Tensor 2.Stufe	symmetrischer Schädigungstensor	Murakami & Ohno 1981 [154]; Murakami 1988 [152]	orthotrope Schädigung; Kriechen [153], [154]; elastisch-sprödes Verhalten [152]; <i>local approach</i> [153]
	symmetrischer Schädigungstensor	Cordebois & Sidoroff 1982 [49]	orthotrope Schädigung; elastisch-plastisches Verhalten
	symmetrischer Schädigungstensor	Litewka 1985 [130]	orthotrope Schädigung; elastisches Verhalten
	symmetrischer Schädigungstensor	Pavlov 1988 [175]	äquivalente Langzeitschädigung
	Schädigungstensor	Kondaurov 1988 [99]	Ermüdung und Kriechen
	Schädigungstensor	Bruhns & Diehl 1989 [31] Diehl 1989 [58]	Hochgeschwindigkeitsdeformationen, Scherbänder
Tensor 4.Stufe	Schädigungstensor	Chaboche 1981 [35]; Chaboche 1982 [36]	orthotrope Schädigung; elastisch-plastisches Verhalten
	Schädigungstensor	Chow & Wang 1987 [45]	orthotrope Schädigung; elastisch-plastisches Verhalten
	Schädigungstensor	Simo & Ju 1987 [196]	elastisch-plastisches Verhalten;
Tensor 8.Stufe	Schädigungstensor	Chaboche 1981 [35]	Kriechen, Ermüdung

## Anhang 2: Zur Mittelwertbildung

Ein Mikrofeld eines Schädigungsmaßes ergibt sich, ohne bereits die konkrete Form festzulegen, durch die folgende allgemeine Beziehung (BRUHNS & DIEHL [31]):

$$\underline{\Xi}_m(\underline{n}) := \sum_{k=1}^N \int_{\Delta V} \bar{g} \left( dA^{(k)}(\underline{n}) \right) d(\Delta V) , \quad (1)$$

wobei  $dA^{(k)}$  durch einen anderen, die Mikrodefektgröße beschreibenden Wert, ersetzt werden kann ( $N$  - Anzahl der Defekte in  $\Delta V$ ). Die Funktion  $\bar{g}$  sollte in der Form gewählt werden, daß

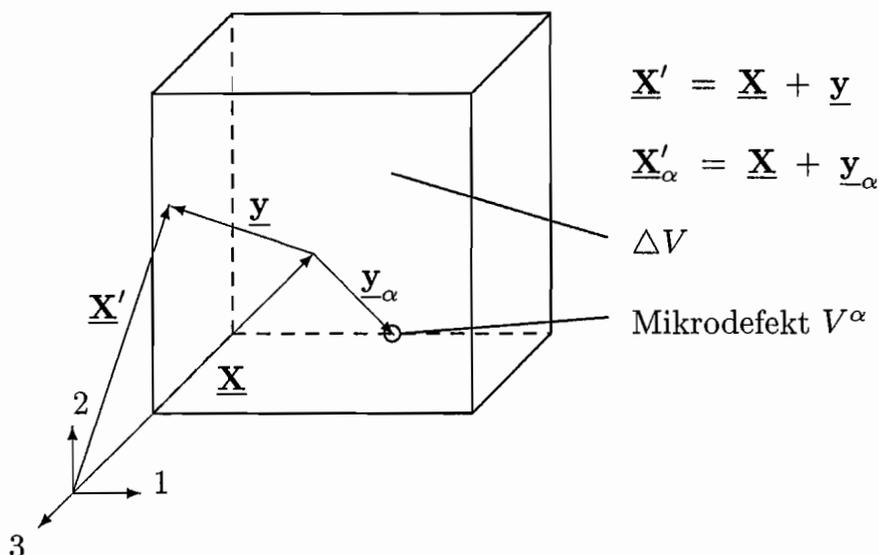
$$\bar{g}(\underline{n}) = \bar{g}(-\underline{n}) \quad (2)$$

gilt. Gleichung (1) lautet in allgemeiner Form:

$$\underline{\Xi}(\underline{X}, \underline{n}) := \langle \underline{\Xi}_m(\underline{n}) \rangle(\underline{X}, \underline{n}) . \quad (3)$$

Die verbleibenden Mikrofelder, die auch zur Beschreibung ungeschädigter Materialien benötigt werden (Spannung, Verzerrung, Temperatur etc.), werden durch BRUHNS & DIEHL [31] und DIEHL [58] *a priori* eingeführt. Die Ausdehnung  $V^\alpha$  von Störungen der quasihomogenen Mikrofelder sei gering ( $V^\alpha \ll \Delta V$ ). Die Mikrofelder werden unter dieser Annahme in quasihomogene Anteile und lokale Störungen aufgespalten;

$$\underline{\Xi}_m = \underline{\Xi}_{qhom}(\underline{X}') + \sum_{\alpha} \frac{V^\alpha}{\Delta V} \Delta \hat{\underline{\Xi}}_{\alpha} \delta(\underline{X}' - \underline{X}'_{\alpha}) . \quad (4)$$



**Abbildung 50:** Lokale Koordinaten

Zur Homogenisierung der Mikrofelder wird eine gewichtete Mittelwertbildung durch BRUHNS & DIEHL in [31] vorgeschlagen

$$\Xi(\underline{\mathbf{X}}) := \langle \Xi_m(\underline{\mathbf{X}}') \rangle (\underline{\mathbf{X}}) := \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V(\underline{\mathbf{X}})} \Xi_m(\underline{\mathbf{X}}') f(\underline{\mathbf{X}}', \Delta V) dV' \quad , \quad (5)$$

wobei  $\Xi_m$  das in  $\Delta V$  erklärte Mikrofeld und  $\underline{\mathbf{X}}'$  die Summe der Mittelpunktskoordinate  $\underline{\mathbf{X}}$  und einer lokalen Koordinate  $\underline{\mathbf{y}}$  in  $\Delta V$  ist. Der einfachste Fall ist mit  $f = 1$  und der Vernachlässigung von  $\underline{\mathbf{y}}$  verbunden – die Anordnung bzw. Lage der Mikrodefekte in  $\Delta V$  ist von untergeordneter Bedeutung. Die Anwendung von Gleichung (5) auf alle Mikrofelder, die Entwicklung der Mittelwerte in eine Taylorreihe und die Darstellung der Reihenglieder wieder als Mittelwerte über  $\Delta V$  erlaubt die Darstellung der Mittelwerte, sprich der Makrovariablen, in folgender Weise:

$$\begin{aligned} \Xi(\underline{\mathbf{X}}) = \langle \Xi_m(\underline{\mathbf{X}}') \rangle (\underline{\mathbf{X}}) &= \langle \Xi_{qhom} \rangle + \left\langle \sum_{\alpha} V^{\alpha} \Delta \hat{\Xi}_{\alpha} \delta(\underline{\mathbf{y}}) \right\rangle \\ &+ \operatorname{div} \left\langle \sum_{\alpha} V^{\alpha} \Delta \hat{\Xi}_{\alpha} \underline{\mathbf{y}}_{\alpha} \delta(\underline{\mathbf{y}}) \right\rangle \quad (6) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Die Reihenglieder höherer Ordnung können als makroskopische Kontinuumsvariablen zur Beschreibung lokaler Spannungs- und Temperaturerhöhung verwendet werden.

### Anhang 3: Zur Orientierungsdichtefunktion in einer tensoriellen Fourierreihe

Betrachten wir ein polykristallines repräsentatives Volumenelement  $\Delta V^*$  mit dem Mittelpunkt  $\underline{\mathbf{X}}$  in einer spannungsfreien Konfiguration. Die Kennzeichnung einer Richtung erfolgt durch einen Punkt auf der Einheitskugel  $\mathfrak{K}_3$ , deren Mittelpunkt mit  $\underline{\mathbf{X}}$  zusammenfällt. Die Verteilung der Orientierung einzelner Strukturelemente in  $\Delta V^*$  läßt sich bei einer Unterteilung der Einheitskugeloberfläche in  $k$  gleich große Teilflächen durch ein Histogramm auf  $\mathfrak{K}_3$  beschreiben. Der Wert  $\mathcal{D}_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) der entstehenden Treppenfunktion ist somit nicht nur orts-, sondern auch richtungsabhängig (SEIBERT [195]);  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}})$ . Bei hinreichend feiner Unterteilung von  $\mathfrak{K}_3$  ( $k \rightarrow \infty$ ) und hinreichend großer Anzahl von Strukturelementen läßt sich der Graph der Treppenfunktion durch eine stetige Funktion  $v(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}})$  approximieren. Die Orientierungsverteilung der Strukturelemente kann dann, wie jede richtungsabhängige Funktion, durch eine tensorielle Fourierreihe dargestellt werden.

$$v(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}}) = v(\underline{\mathbf{X}}) + f_i(\underline{\mathbf{n}})v_i(\underline{\mathbf{X}}) + f_{ij}(\underline{\mathbf{n}})v_{ij}(\underline{\mathbf{X}}) + f_{ijk}(\underline{\mathbf{n}})v_{ijk}(\underline{\mathbf{X}}) + f_{ijkl}(\underline{\mathbf{n}})v_{ijkl}(\underline{\mathbf{X}}) + \dots \quad (1)$$

Die Basisfunktionen  $f_{ijk\dots}$  und Fourierkoeffizienten sind vollständig symmetrische und spurlose Tensoren, die unabhängig vom Koordinatensystem definiert werden können. Die Basisfunktionen gehen aus den Tensorprodukten der Einheitsvektoren  $\underline{\mathbf{n}}$  mit sich selbst hervor;

$$\begin{aligned} f_{ij}(\underline{\mathbf{n}}) &= n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \\ f_{ijkl}(\underline{\mathbf{n}}) &= n_i n_j n_k n_l - \frac{1}{7} (\delta_{ij} n_k n_l + \delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l \\ &\quad + \delta_{jl} n_i n_k + \delta_{kl} n_i n_j) + \frac{1}{5 \cdot 7} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &\dots \end{aligned} \quad (2)$$

für die hier relevanten Tensoren gerader Stufe bzw. allgemein (SEIBERT [195]) gilt:

$$f_{i_1 i_2 \dots i_n}(\underline{\mathbf{n}}) = \sum_{z=0}^{n/2} [(-1)^z a_z P_0(i \dots i_n) \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} \dots \delta_{i_{2z-1} i_{2z}} n_{i_{2z+1}} \dots n_{i_n}] \quad (3)$$

$$\text{mit } a_z = \frac{2^z z! \binom{n}{z}}{(2z)! \binom{2n}{2z}} .$$

Die Fourierkoeffizienten werden aus den Skalarprodukten der Orientierungsdichtefunktion mit den Basisfunktionen erhalten;

$$\begin{aligned}
 v_0 &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_3} v(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}}) \cdot 1 \, dA \\
 v_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \frac{3 \cdot 5}{2} \int_{S_3} v(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}}) \cdot f_{ij}(\underline{\mathbf{n}}) \, dA \\
 v_{ijkl} &= \frac{1}{4\pi} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} \int_{S_3} v(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}}) \cdot f_{ijkl}(\underline{\mathbf{n}}) \, dA \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{5}$$

für die hier relevanten Tensoren gerader Stufe bzw. allgemein gilt:

$$v_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{1}{4\pi} \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \dots \cdot n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots \cdot (2n+1)} \int_{S_3} v(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}}) \cdot f_{i_1 i_2 \dots i_n} \, dA \quad . \tag{6}$$

Sie können als Momente der Orientierungsdichtefunktion  $v(\underline{\mathbf{X}}, \underline{\mathbf{n}})$  bezüglich des Zentrums  $\underline{\mathbf{X}}$  von  $\Delta V^*$  betrachtet werden (ONAT [165]). Eine ausführliche Beschreibung und weitere Literaturangaben zur Darstellung richtungsabhängiger Funktionen mit Hilfe tensorieller Fourierreihen erfolgt z.B. durch SEIBERT in [195].

## Anhang 4: Zur Abschätzung der elastischen Nachgiebigkeit

ONAT [165] untersucht die Beziehungen zwischen der Porenorientierung und den effektiven makroskopischen elastischen Eigenschaften geschädigter Materialien mit Hilfe mikromechanisch begründeter Schädigungsmodelle. Das geschädigte Material wird näherungsweise mit Hilfe eines kugelförmigen Elementarvolumens  $\mathfrak{K}$ , das eine homogene, isotrope elastische Matrix und eine schwache Verteilung zylindrischer Poren mit kreisförmiger Grundfläche und vernachlässigbarer Höhe enthält, mit Spannungsrandbedingungen auf  $\partial\mathfrak{K}$  modelliert. Ist  $\underline{\underline{\sigma}}$  der makroskopische Spannungstensor, ergibt sich der Spannungsvektor  $\underline{t}_m$  im Punkt  $P$  auf  $\partial\mathfrak{K}_3$  aus

$$\underline{t}_m = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \quad , \quad (1)$$

wobei  $\underline{n}$  der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor von  $\partial\mathfrak{K}$  ist. Es wird angenommen, daß sich das geschädigte Material linear elastisch, d.h.  $\underline{\underline{\epsilon}}_{(r)} = \underline{\underline{C}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$ , verhält. ONAT [165] verwendet nun das Theorem vom Minimum des komplementären elastischen Potentials (siehe z.B. KATTAN & VOYIADJIS [94], BECKER & GROSS [15], [16])

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{(r)} = \frac{\partial \tilde{\Pi}_k^e}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad (2)$$

zur Abschätzung der effektiven elastischen Nachgiebigkeit. Zur Herleitung von  $\underline{\underline{\epsilon}}_{(r)}$  wird postuliert, daß die komplementäre elastische Verzerrungsenergie  $\tilde{\Pi}_k^e$  mit der Verzerrungsenergie des Mikrofeldes übereinstimmt, d.h. die homogenisierte makroskopische Verzerrung kann aus (5.16) bestimmt werden. Eine vollständige Angabe der einzelnen Schritte und der dabei verwendeten Näherungen soll hier nicht erfolgen; der interessierte Leser wird auf die zitierte Literatur verwiesen. Für das komplementäre elastische Potential gibt ONAT [165] den folgenden Ausdruck an:

$$\tilde{\Pi}_k^e \leq \left[ \left( 1 - N \left( \frac{b}{R} \right)^3 \right) {}^0 C_{ijkl} + \frac{N}{4\pi} \left( \frac{b}{3} \right)^3 \int_{(S)} c_{ijkl}(\underline{n}) \bar{\xi}(\underline{n}) dA \right] \cdot \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \sigma_{kl}) \quad , \quad (3)$$

mit

$$c_{ijkl}(\underline{n}) = p \delta_{ij} \delta_{kl} + q (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \alpha (\delta_{ij} f_{kl}(\underline{n}) + \delta_{kl} f_{ij}(\underline{n})) + \beta [\delta_{ik} f_{jl}(\underline{n}) + \delta_{il} f_{jk}(\underline{n}) + \delta_{jk} f_{il}(\underline{n}) + \delta_{jl} f_{ik}(\underline{n})] + \gamma f_{ijkl}(\underline{n}) \quad (4)$$

als effektiven Nachgiebigkeitstensor einer Kugel mit einer zentral gelagerten Pore, die die Orientierung  $\underline{n}$  besitzt. Der Ausdruck in den eckigen Klammern der Ungleichung

(3) kann als eine Näherung für die effektive elastische Nachgiebigkeit betrachtet werden.  $N$  ist die Porenanzahl innerhalb des repräsentativen Kugel-Volumenelementes mit dem Radius  $R$ ,  $b$  (mit  $b \gg a$  und  $b < R$ ) der Radius einer Kugel um jede Pore, innerhalb der die Störung des homogenen Mikrospannungsfeldes durch die Pore abgeklungen ist,  $a$  der konstante Porenradius,  ${}^0C_{ijkl}$  die elastische Nachgiebigkeit der Matrix (8.19),  $p, q, \alpha, \beta$ , und  $\gamma$  skalare Materialparameter und  $\bar{\xi}(\underline{\mathbf{n}})$ ,  $f_{ij}$  und  $f_{ijkl}$  sind aus der Definition der Porenorientierungsdichte (4.10) bekannt. Unter Verwendung von (8.2) und dem Abbruch der Fourierreihe nach dem dritten Summanden wird

$$\begin{aligned} \hat{C}_{ijkl} \approx & {}^0C_{ijkl} + N \left( \frac{b}{R} \right)^3 \left\{ \left( p + \frac{\nu}{E} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \right. \\ & + \left( q - \frac{1+\nu}{2E} \right) (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ & + \frac{2}{3 \cdot 5} [\alpha (\delta_{ij} \xi_{kl} + \delta_{kl} \xi_{ij}) + \beta (\delta_{ik} \xi_{jl} + \delta_{il} \xi_{jk} + \delta_{jk} \xi_{il} + \delta_{jl} \xi_{ik})] \\ & \left. + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \gamma \xi_{ijkl} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

als Abschätzung für die effektive Nachgiebigkeit hergeleitet. Mit der hier verwendeten Bezeichnung  $\hat{\underline{\underline{C}}}^{(4)}$  für die effektive elastische Nachgiebigkeit wird bereits berücksichtigt, daß ONAT [165] nicht die Gleichung (8.16) als Näherung für die reversiblen Verzerrungsraten verwendet. Als Folge von Gleichung (2) bzw. (3) entspricht  $\hat{\underline{\underline{C}}}^{(4)}$  in (5) der elastischen Nachgiebigkeit  $\hat{\underline{\underline{C}}}^{(4)}$  aus Gleichung (8.19). Alternativ zu (8.16) beschränken sich dann ONAT & LECKIE in [167] auf

$$\underline{\underline{D}}_{(r)} = \hat{\underline{\underline{C}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \alpha T \underline{\underline{1}} \quad (6)$$

Mit  $\underline{\underline{C}}^{(4)}$  in (8.20) wird angenommen, daß  $\xi_{ijkl}$  vernachlässigt werden kann. Weiterhin werden in (8.16) isotrope Anteile (anstelle der beiden ersten Summanden in der geschweiften Klammer von (5)) durch die Verwendung des gewichteten Cauchy'schen Spannungstensors  $\underline{\underline{S}}$  berücksichtigt.

Weiterhin betrachten wir im Gegensatz zu ONAT die skalaren Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3$  in (8.20) bzw.  $p, q, \alpha, \beta, \gamma$  in (5) als neue materialabhängige Parameter, die nicht durch die Lösung *einfacher* Spannungs-Randwertprobleme ermittelt werden können, wie in [165] vorgeschlagen. Auf der einen Seite vermeidet diese Betrachtungsweise die Definition charakteristischer Längen (z.B.  $b$  und  $R$ ) und die Anzahl  $N$  der Poren in einem charakteristischen Volumen  $\Delta V^*$ . Andererseits erscheint es wahrscheinlich,

---

daß mikrostrukturelle Parameter wie mittlere Korngröße oder mittlere Einschlußdichte den Einfluß der Hohlräume auf die Nachgiebigkeit  $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)}$  unabhängig von den makroskopischen elastischen Konstanten des ungeschädigten Materials  $E$  und  $\nu$  mitbestimmen. Dies wird umso klarer, wenn sich auf Hohlräume an Korngrenzen berufen wird, bei denen das umgebende Material im allgemeinen noch nicht als kontinuierliche Matrix modelliert werden kann.

---

## Anhang 5: Zur Anisotropie plastischer Deformationen

Die anisotrope Verteilung der Poren an den Korngrenzen verursacht mehr oder weniger auch eine Anisotropie in den irreversiblen Deformationen, die nicht durch das Wachstum der Poren selbst (siehe Abschnitt 8.5) erklärt werden kann. Die bevorzugte Anordnung an Korngrenzen erhöht z.B. die Gleitmöglichkeiten an diesen Grenzen. Obwohl Korngrenzengleiten ein Mechanismus ist, der mehr dem viskosen Kriechen zugeordnet wird, sollte im Rahmen einer möglichst allgemeinen Darstellung eine Möglichkeit geschaffen werden, plastische Anisotropie, hervorgerufen durch anisotrope Schädigung, zu berücksichtigen. Hierbei wird auf die Arbeit von BALTOV & SAWCZUK [8] zurückgegriffen, in der für von MISES-Fließflächen ein Anisotropietensor vorgeschlagen wurde (LUBLINER [133]).

Die Fließbedingung (8.25) lautet unter Annahme isotroper Verfestigung und Einführung eines Anisotropietensors 4. Stufe  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)}$

$$F = \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D - k^2(T, a) \quad . \quad (1)$$

Die Normalenregel liefert mit der Fließbedingung (1) die plastische Deformationsgeschwindigkeit:

$$\underline{\underline{\mathbf{D}}}_{(p)} = \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle \lambda \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\mathbf{S}}}} = \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle 2\lambda \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \quad (2)$$

mit

$$\langle \langle F \rangle \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } F = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad . \quad (3)$$

Die Konsistenzbedingung (8.29) lautet bei Berücksichtigung von (1)

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\mathbf{S}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{\nabla} + \frac{\partial F}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)}} \dots \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)\nabla} = 0 \quad . \quad (4)$$

Für die Evolution der isotropen Verfestigung wird wieder der Ansatz (8.30) gewählt. Aus der Konsistenzbedingung (4), der Fließbedingung (1) und der Evolutionsgleichung (8.30) folgt für den Faktor  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\rho^0}{2a_4 \left( \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \right) \cdot \left( \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \right)} \bar{\lambda} \quad (5)$$

mit

$$\bar{\lambda} = \frac{2 \left( \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}^{\nabla} - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T} + \left( \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \right) \dots \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)\nabla}}{\frac{\partial k^2}{\partial a}} + a_5 \dot{\xi} \exp(a_6 \dot{\xi}) - a_7 \dot{\xi} \exp(a_8 \dot{\xi}) \quad (6)$$

bzw. bei Vernachlässigung von  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)}$

$$\bar{\lambda} = \frac{2 \left( \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}^D \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{\frac{\partial k^2}{\partial a}} + a_5 \dot{\xi} \exp(a_6 \dot{\xi}) - a_7 \dot{\xi} \exp(a_8 \dot{\xi}) . \quad (7)$$

Als Belastungsbedingung kann wieder (8.32) verwendet werden, wobei  $\lambda$  durch Gleichung (5) und (7) definiert ist. Zur Bestimmung von  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)}$  lassen sich Einschränkungen formulieren. Aufgrund der Symmetrie von  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$  besitzt  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)}$  die gleichen Symmetrien wie der Elastizitäts- bzw. Nachgiebigkeitstensor. Die Inkompressibilitätsbedingung liefert:

$$\underline{\underline{\mathbf{1}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{(4)} \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} . \quad (8)$$

BALTOV und SAWCZUK [8] schlagen unter Beachtung der angeführten Beschränkungen den folgenden isotropen Tensor 4. Stufe vor:

$$A_{ijkl} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) + \bar{A} \xi_{ij} \xi_{kl} . \quad (9)$$

Unter Berücksichtigung der Schädigung als Ursache für die Anisotropie wurde hier der Verzerrungstensor durch den Schädigungstensor  $\underline{\underline{\xi}}$  ersetzt.  $\bar{A}$  ist eine skalare Funktion der Hauptinvarianten  $\xi_{II}$  und  $\xi_{III}$  von  $\underline{\underline{\xi}}$  und kann durch

$$\bar{A} = A_0 + A_1 \xi_{II} + A_2 \xi_{III} \quad (10)$$

( $A_0, A_1, A_2$  materialabhängige Koeffizienten) angenommen werden.

## Anhang 6: Zusammenfassung der Materialgleichungen

$$\underline{\underline{\underline{D}}} = \underline{\underline{\underline{D}}}_{(r)} + \underline{\underline{\underline{D}}}_{(p)} + \underline{\underline{\underline{D}}}_{(s)} \quad (1)$$

### Elastische Deformationen

$$\underline{\underline{\underline{D}}}_{(r)} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\underline{S}}} - \frac{\nu}{E} \text{Sp}(\underline{\underline{\underline{S}}}) \underline{\underline{\underline{1}}} + a_1 \text{Sp}(\underline{\underline{\underline{S}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\xi}}}) \underline{\underline{\underline{1}}} + a_2 \text{Sp}(\underline{\underline{\underline{S}}}) \underline{\underline{\underline{\xi}}} + 2a_3 (\underline{\underline{\underline{S}}} \cdot \underline{\underline{\underline{\xi}}} + \underline{\underline{\underline{\xi}}} \cdot \underline{\underline{\underline{S}}}) + \alpha \dot{T} \underline{\underline{\underline{1}}} \quad (2)$$

### Plastische Deformationen

$$\underline{\underline{\underline{D}}}_{(p)} = \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle 2\lambda \underline{\underline{\underline{S}}}^D \quad (3)$$

$$F = \underline{\underline{\underline{S}}}^D \cdot \underline{\underline{\underline{S}}}^D - k^2 \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} k^2 &= [b_1 \tanh(b_2 a) + b_3 a] \exp[-(b_4 + b_5 a)T] + b_6 \\ &= \bar{k}^2(a, T) + b_6 \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\langle \langle F \rangle \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } F = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5)$$

$$LC_1 = \lambda \quad \text{und} \quad \langle LC_1 \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } LC_1 > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6)$$

$$\lambda = \frac{\rho^0}{2k^2 a_4} \left\{ \frac{2 \underline{\underline{\underline{S}}}^D \cdot \underline{\underline{\underline{S}}}^D - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{\frac{\partial k^2}{\partial a}} + a_5 \dot{\xi} \exp(a_6 \dot{\xi}) - a_7 \dot{\xi} \exp(a_8 \dot{\xi}) \right\} \quad (7a)$$

$$\frac{\partial k^2}{\partial T} = \frac{\partial \bar{k}^2}{\partial T} = -\bar{k}^2 (b_4 + b_5 a) \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k^2}{\partial a} &= \frac{\partial \bar{k}^2}{\partial a} \\ &= [b_1 b_2 (1 - \tanh^2(b_2 a)) + b_3] \exp[-(b_4 + b_5 a)] - \bar{k}^2 b_5 T \end{aligned} \quad (7c)$$

### Schädigungsinduzierte Deformationen

$$\underline{\underline{\underline{D}}}_{(s)} = h_0 \underline{\underline{\underline{1}}} + h_1 \underline{\underline{\underline{n}}}_1 \underline{\underline{\underline{n}}}_1 + h_2 \underline{\underline{\underline{n}}}_2 \underline{\underline{\underline{n}}}_2 + h_3 \underline{\underline{\underline{n}}}_3 \underline{\underline{\underline{n}}}_3 \quad (8)$$

$$h_i = \begin{cases} \frac{1 - \sum_{i=1}^5 (i+1) \zeta_i \xi^i}{3 \left[ 1 - \xi + \sum_{i=1}^5 \zeta_i \xi^{i+1} \right]} \dot{\xi} & \text{für } i = 0 \\ \bar{h} \dot{\xi} \left[ \frac{\left\langle \frac{D_i}{(p)} \right\rangle_{MC}}{\sum_{j=1}^3 \left\langle \frac{D_j}{(p)} \right\rangle_{MC}} \right] & \text{für } i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (9a)$$

$$\bar{h} = \frac{2\zeta_1\xi + \sum_{i=2}^5 [(i+1)\zeta_i - (i-1)\zeta_{i-1}]\xi^i - 5\zeta_5\xi^6}{1 - 2\xi + (1 + \zeta_1)\xi^2 + \sum_{i=2}^5 (\zeta_i - \zeta_{i-1})\xi^{i+1} - \zeta_5\xi^7} \quad (9b)$$

### Thermischer Prozeß

$$\dot{T} = \frac{1}{c_p} \left[ \frac{1}{\rho_0} \underline{\mathbf{S}} \cdot \cdot \left( \beta \frac{\underline{\mathbf{D}}}{(p)} + \frac{\underline{\mathbf{D}}}{(s)} \right) - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\underline{\mathbf{q}}) \right] \quad (10)$$

$$\underline{\mathbf{q}} = -\lambda_f(T) \operatorname{grad}(T) \quad (11)$$

### Evolutionsgesetze

$$\dot{a} = \frac{a_4}{\rho_0} \underline{\mathbf{S}}^D \cdot \cdot \frac{\underline{\mathbf{D}}}{(p)} - a_5 \dot{\xi} \exp(a_6 \dot{\xi}) + a_7 \dot{\xi} \exp(a_8 \dot{\xi}) \quad (12)$$

$$\dot{\xi} = 2\pi \dot{\xi}' = \langle LC_1 \rangle \langle \langle F \rangle \rangle \langle \langle \langle LC_2 \rangle \rangle \rangle [c_1(T) + c_2(T)\xi - c_3(T)\xi^2] 2\lambda k \quad (13)$$

$$LC_2 = \sum_{i=1}^3 \langle S_i \rangle_{MC}; \quad \langle \langle \langle LC_2 \rangle \rangle \rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } LC_2 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (14)$$

$$\underline{\underline{\xi}} = c_4 \dot{\xi}' 3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\langle S_j \rangle_{MC}}{\sum_{i=1}^3 \langle S_i \rangle_{MC}} \left( \underline{\underline{\mathbf{n}}}_j \underline{\underline{\mathbf{n}}}_j - \frac{1}{3} \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right) \right\} \quad (15)$$

### Bruchkriterium

$$\pi(\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(4)} \cdot \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}}) \cdot \cdot \frac{\underline{\underline{\mathbf{S}}}}{1 - \xi} = w_\infty + w_1 \exp\left(\frac{-w_2 a}{T}\right) \quad (16)$$

### Materialfunktionen

$$E(T) = E_0 - E_1 T \quad (17a)$$

$$G(T) = G_0 - G_1 T \quad (17b)$$

$$\nu(T) = \frac{(E_0 - 2G_0) + (2G_1 - E_1)T}{2(G_0 - G_1 T)} \quad (17c)$$

$$\lambda_f(T) = \lambda_0 + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 \quad (18)$$

$$\alpha(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 \quad (19)$$

$$\rho(T) = \rho_0 + \rho_1 T \quad (20)$$

$$c_p(T) = c_{p0} + c_{p1} T + c_{p2} T^2 \quad (21)$$

$$c_1(T) = c_{10} + c_{11} T + c_{12} T^2 + c_{13} T^3 \quad (22)$$

$$c_2(T) = c_{20} + c_{21}T + c_{22}T^2 + c_{23}T^3 \quad (23)$$

$$c_3(T) = c_{30} + c_{31}T + c_{32}T^2 + c_{33}T^3 \quad (24)$$

### Materialkoeffizienten

$a_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ );  $b_j$  ( $j = 1, \dots, 6$ );  $c_4$ ;  $\zeta_j$  ( $i = 1, \dots, 5$ );  $\beta$ ;  $E_0, E_1$ ;  $G_0, G_1$ ;  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ ;  
 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ;  $\rho_0, \rho_1$ ;  $c_{pj}$  ( $j = 0, \dots, 2$ );  $c_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 0, 1, 2, 3$ );  $w_\infty, w_1, w_2$

---

---

## Literatur

- [1] D.H. ALLEN, C.E. HARRIS UND S.E. GROVES. A thermomechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage – I. theoretical development. *International Journal of Solides and Structures* **23**(9), 1301 – 1318 (1987).
- [2] D.H. ALLEN, C.E. HARRIS UND S.E. GROVES. A thermomechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage – II. application to matrix cracking in laminated composites. *International Journal of Solides and Structures* **23**(9), 1319 – 1338 (1987).
- [3] H. ALTENBACH, J. ALTENBACH UND P. SCHIESSE. Konzepte der Schädigungsmechanik und ihre Anwendung bei der werkstoffmechanischen Bauteilanalyse. *Technische Mechanik* **11**(2), 81 – 93 (1990).
- [4] H. ALTENBACH UND H. BLUMENAUER. Grundlagen und Anwendungen der Schädigungsmechanik. *Neue Hütte* **34**(6), 214 – 219 (1989).
- [5] H. ALTENBACH, K. ELZE, N. ALTENBACH UND R. BRANDT. Literaturzusammenstellung Schädigungsmechanik. Bericht, TU Magdeburg "Otto von Guericke" (1989).
- [6] J.H. ARGYRIS, L.E. VAZ UND K.J. WILLAM. Numerical techniques for the finite element analysis of elastic and inelastic material nonlinearities.
- [7] Z.P. BAŽANT. Why continuum damage is nonlocal: justification by quasiperiodic microcrack array. *Mechanics Research Communications* **14**(5/6), 407 – 419 (1987).
- [8] A. BALTOV UND A. SAWCZUK. A rule of anisotropic hardening. *Acta Mechanica* **47**, 81 – 92 (1964).
- [9] S. BASTE UND B. AUDOIN. On internal variables in anisotropic damage. *European Journal of Mechanics. A/Solids* **10**(6), 587 – 606 (1991).

- 
- [10] R. BATISSE, M. BETHMONT, G. DEVESA UND G. ROUSSELIER. Ductile fracture of a 508 cl 3 steel in relation with inclusion content: the benefit of the local approach of fracture and continuum damage mechanics. *Nuclear Engineering and Design* **105**, 113 – 120 (1987).
- [11] Z.P. BAZANT UND G. PIJAUDIER-CABOT. Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics* **55**, 287 – 293 (1988).
- [12] E. BECKER UND W. BÜRGER. „Kontinuumsmechanik“. B.G.Teubner, Stuttgart (1975).
- [13] R. BECKER, A. NEEDLEMAN, O. RICHMOND UND V. TVERGAARD. Void growth and failure in notched bars. *Journal of the Mechanics and Physics of Solid* **36**(3), 317 – 351 (1988).
- [14] W. BECKER. „Dugdale-Riß-Lösungen und deren Verwendung zur mikromechanischen Modellierung von anisotropen Damage“. VDI-Fortschritt-Bericht, Reihe 18 (Mechanik/Bruchmechanik). VDI-Verlag, Düsseldorf (1988).
- 
- [15] W. BECKER UND D. GROSS. A one-dimensional micromechanical model of elastic-microplastic damage evolution. *Acta Mechanica* **70**, 221 – 233 (1987).
- [16] W. BECKER UND D. GROSS. A two-dimensional micromechanical model of anisotropic elastic-microplastic damage evolution. *Ingenieur-Archiv* **58**, 295 – 304 (1988).
- [17] D.J. BENSON. An analysis of void distribution effects on the dynamic growth and coalescence of voids in ductile metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **41**(8), 1285 – 1308 (1993).
- [18] F.M. BEREMIN. Study of fracture criteria for ductile rupture of A508 steel. In D. FRANCOIS (Herausgeber), „Advances in Fracture Research“, Seiten 809 – 816, Oxford (1981). ECF5, Cannes, Pergamon Press.
- [19] C.A. BERG. In M.F. KANNINEN (Herausgeber), „Inelastic Behaviour of Solids“, Seiten 171 –, New York (1970). McGraw Hill.
- [20] J. BETTEN. Net-stress analysis in creep mechanics. *Ingenieur - Archiv* **52**, 405 – 419 (1982).

- 
- [21] J. BETTEN. Materialgleichungen zur Beschreibung des sekundären und tertiären Kriechverhaltens anisotroper Stoffe. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **64**, 211 – 220 (1984).
- [22] J. BETTEN. „Elastizitäts- und Plastizitätslehre“. Werkstoffkunde. Friedr. Vieweg + Sohn, Braunschweig/Wiesbaden (1986).
- [23] J. BETTEN. „Tensorrechnung für Ingenieure“. B.G.Teubner, Stuttgart (1987).
- [24] J. BETTEN. Application of tensor functions in continuum damage mechanics. *International Journal of Damage Mechanics* **1**(1), 47 – 59 (1992).
- [25] R. BILLARDON UND L. MORET-BAILLY. Fully coupled strain and damage finite element analysis of ductile fracture. *Nuclear Engineering and Design* **105**, 43 – 49 (1987).
- [26] B. BISCHOFF-BEIERMANN. „Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 82 (1992).
- 
- [27] H. BLUMENAUER UND G. PUSCH. „Technische Bruchmechanik“. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig (1982).
- [28] S.R. BODNER UND K.S. CHAN. Modeling of continuum damage for application in elastic-viscoplastic constitutive equations. *Engineering Fracture Mechanics* **25**(5/6), 705 – 712 (1986).
- [29] I.N. BRONSTEIN UND K.A. SEMENDJAJEW. „Taschenbuch der Mathematik“. Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/Main (1987).
- [30] O.T. BRUHNS. Interner Vortrag am Lehrstuhl für Technische Mechanik. Ruhr-Universität Bochum. unveröffentlicht (1993).
- [31] O.T. BRUHNS UND H. DIEHL. An internal variable theory of inelastic behaviour at high rates of strain. *Archives of Mechanics* **41**(4), 427 – 460 (1989).
- [32] G. BRUNK. „Bemerkungen zum Vergleich klassischer und relativistischer Bilanzen“, Seiten 28 – 40. *Mechanik - Beiträge zur Theorie und Anwendungen*. TU Berlin (1988).

- 
- [33] A. BUDO. „Theoretische Mechanik“. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft, Berlin (1967).
- [34] E.P. CERNOCKY UND E. KREML. A non-linear uniaxial integral constitutive equation incorporating rate effects, creep and relaxation. *Journal of Non-Linear Mechanics* **14**, 183–202 (1979).
- [35] J.L. CHABOCHE. Continuous damage mechanics – a tool to describe phenomena before crack initiation. *Nuclear Engineering and Design* **64**, 233 – 247 (1981).
- [36] J.L. CHABOCHE. The concept of effective stress applied to elasticity and viscoplasticity in the presence of anisotropic damage. In J.-P. BOEHLER (Herausgeber), „Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids“, Seiten 737 – 760, Den Haag (1982). Martinus Nijhoff Publishers.
- [37] J.L. CHABOCHE. Continuum damage mechanics: present state and future trends. *Nuclear Engineering and Design* **105**, 19 – 33 (1987).
- [38] J.L. CHABOCHE. Continuum damage mechanics: Part I – general concepts. *Journal of Applied Mechanics* **55**, 59 – 64 (1988).
- 
- [39] J.L. CHABOCHE. Continuum damage mechanics: Part II – damage growth, crack initiation, and crack growth. *Journal of Applied Mechanics* **55**, 65 – 72 (1988).
- [40] J.L. CHABOCHE. Phenomenological aspects of continuum damage mechanics. In „Proceedings of the XVII. IUTAM - Congress, Grenoble (France)“ (1988).
- [41] J.L. CHABOCHE. Damage induced anisotropy: on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition. *International Journal of Damage Mechanics* **1**(2), 148 – 171 (1992).
- [42] K.S. CHAN. The constitutive representation of high-temperature creep damage. *International Journal of Plasticity* **4**, 355 – 370 (1988).
- [43] C. CHOW UND J. WANG. Mixed mode ductile fracture characterization with a continuum damage mechanics model. In „Role Of Plasticity And Damage In Fracture Of Solids“, Seiten 93 – 99, Tokyo (1988). Proceedings of the Far East Fracture Group Workshop, Tokyo Institute of Technology, International House.

- 
- [44] C.L. CHOW UND T.J. LU. An analytical and experimental study of mixed-mode ductile fracture under nonproportional loading. *International Journal of Damage Mechanics* **1**(2), 191 – 236 (1992).
- [45] C.L. CHOW UND J. WANG. An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics. *Journal of Fracture* **33**, 3 – 16 (1987).
- [46] S.E. CLIFT, P. HARTLEY, C.E.N. STURGESS UND G.W. ROWE. Fracture prediction in plastic deformation processes. *International Journal of Mechanical Sciences* **32**(1), 1 – 17 (1990).
- [47] A.C.F. COCKS UND M.F. ASHBY. Intergranular fracture during power-law creep under multiaxial stresses. *Metal Science* (8-9), 395 – 402 (1980).
- [48] D. COLEMAN UND M.E. GURTIN. Thermodynamics with internal state variables. *The Journal of Chemical Physics* **47**(2), 597 – 613 (1967).
- [49] J.P. CORDEBOIS UND F. SIDOROFF. Damage induced elastic anisotropy. In J.P. BOEHLER (Herausgeber), „Mechanical Behaviour of Anisotropic Solides“, Seiten 761 – 774, Den Haag (1982). Proceedings of the EUROMECH-Kolloquium 115, 1979, Martinus Nijhoff Publishers.
- 
- [50] J.P. CORDEBOIS UND F. SIDOROFF. Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité. *Journal de Mécanique théorique et appliquée* **Numéro spécial**, 45 – 60 (1982).
- [51] D.R. CURRAN, L. SEAMAN, B.S. HOLMES UND S.H. GIOVANOLA. Combined effects of strain rate, temperature and loading constraints on microscopic fracture. In P. BENSUSSAN (Herausgeber), „High Temperature Fracture Mechanisms and Mechanics“, Seiten 39 – 50, London (1990). EGF6, Mechanical Engineering Publications.
- [52] Y.F. DAFALIAS. A missing link in the macroscopic constitutive formulation of large plastic deformations. In A. SAWCZUK UND G. BIANCHI (Herausgeber), „Plasticity Today Modelling, Methods and Applications“, Seiten 135 – 151, London, New York (1985). International Centre for Mechanical Sciences, Udine, Italy, 27-30 June, 1983, Elsevier Applied Science Publishers.
- [53] R. DANZER. „Lebensdauerprognose hochfester metallischer Werkstoffe im Bereich hoher Temperaturen“. Materialkundliche Technische Reihe 8. Gebrüder Borntraeger, Berlin (1988).

- [54] L. DAVISON UND A.L. STEVENS. Continuum measures of spall damage. *Journal of Applied Physics* **4**(3), 988 – 994 (1972).
- [55] L. DAVISON UND A.L. STEVENS. Thermomechanical constitution of spalling elastic bodies. *Journal of Applied Physics* **44**(2), 668 – 674 (1973).
- [56] L. DAVISON, A.L. STEVENS UND M.E. KIPP. Theory of spall damage accumulation in ductile metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **25**, 11 – 28 (1977).
- [57] H. DIEHL. Kontinuumsmodelle zur Beschreibung spröder Mikro- und Makrorisse. Kontinuums - Damage - Theorie, Vorträge eines Seminars im Sommersemester 1988 am Lehrstuhl für Mechanik I, Ruhr-Universität Bochum (1988).
- [58] H. DIEHL. „Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 66 (1989).
- [59] H. DIEHL UND W. FORNEFELD. Werkstoffverhalten bei hochdynamischer Beanspruchung - Teil 4. Interner Bericht des Instituts für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum (1989).
- [60] N. ELSNER. „Grundlagen der technischen Thermodynamik“. Akademie - Verlag, Berlin (1974).
- [61] J.D. ESHELBY. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London / Series A* **241**( ), 376 – 396 (1957).
- [62] A. FELDMÜLLER. „Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 75 (1991).
- [63] F.D. FISCHER. Schädigungsmechanik – Ein modernes Konzept zur Beurteilung des Bruchverhaltens. *Berg- und Hüttenmännische Monatshefte* **132**(11), 524 – 534 (1987).
- [64] W. FORNEFELD. „Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 73 (1990).

- 
- [65] P.A. FOTIU. „Die dynamische Wirkung dissipativer Prozesse in Materialien mit Mikrodefekten mit Anwendungen auf Schwingungsprobleme inelastischer Plattentragwerke“. Dissertation, Technische Universität Wien (1990).
- [66] P.A. FOTIU. Elastodynamics of thin plates with internal dissipative processes - part I. theoretical foundations. *Acta Mechanica* **95**(1-4), 29 – 50 (1992).
- [67] C. GANDHI UND M.F. ASHBY. Fracture-mechanism maps for materials which cleave: F.c.c., b.c.c. and h.c.p. metals and ceramics. *Acta Metallurgica* **27**, 1565 – 1602 (1979).
- [68] P. GERMAIN, Q.S. NGUYEN UND P. SUQUET. Continuum thermodynamics. *Journal of Applied Mechanics* **50**, 1010 – 1020 (1983).
- [69] M. GOLOGANU, J.-B. LEBLOND UND J. DEVAUX. Approximation models for ductile metals containing non-spherical voids – case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **41**(11), 1723 – 1754 (1993).
- [70] S.H. GOODS UND L.M. BROWN. The nucleation of cavities by plastic deformation. *Acta Metallurgica* **27**, 1 – 15 (1979).
- 
- [71] J. GRABACKI. On some description of damage process. *European Journal Of Mechanics, A/Solids* **10**(3), 309 – 325 (1991).
- [72] H. GÜNTHER. Finite Deformationen –Zur Berechnung großer elastischer und inelastischer Deformationen kompressibler Materialien mit einer inkrementellen Methode. Wissenschaftliche Beiträge (Sonderheft), IH Zwickau (1983).
- [73] A.L. GURSON. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology* **99**, 2 – 15 (1977).
- [74] H.G. HAHN. „Bruchmechanik“. B.G. Teubner, Stuttgart (1976).
- [75] H.G. HAHN. „Elastizitätstheorie“. B.G. Teubner, Stuttgart (1985).
- [76] H.G. HAHN. Wege und Ziele der Konzepte in der Bruchmechanik. *Technische Mechanik* **8**(1), 10 – 21 (1987).
- [77] D.R. HAYHURST. Creep rupture under multi-axial states of stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **20**, 381 – 390 (1972).

- 
- [78] D.R. HAYHURST UND I.D. FELCE. Creep rupture under tri-axial tension. *Engineering Fracture Mechanics* **25**(5/6), 645 – 664 (1986).
- [79] D.R. HAYHURST UND F.A. LECKIE. The effect of creep constitutive and damage relationships upon the rupture time of a solid circular torsion bar. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **21**, 431 – 446 (1973).
- [80] Y. HUANG, K.X. HU UND A. CHANDRA. The effective elastic moduli of microcracked composite materials. *International Journal of Solids and Structures* **30**(14), 1907 – 1918 (1993).
- [81] J. HULT. Effect of voids on creep rate and strength. In „Continuum Damage Theory and Effective Moduli and Continuum Modeling of Discrete Structures“, Seiten 13 – 24, Detroit (1985). Reprint from: Fall Convention.
- [82] J. HULT. Introduction and general overview. In D. KRAJČINOVIC UND J. LEMAITRE (Herausgeber), „Continuum Damage Mechanics – Theory and Applications“, Seiten 1 – 36. CISM-Courses and Lectures No 295, Springer Verlag (1987).
- [83] J. HULT. Stiffness and strength of damaged materials. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **68**(4), T31 – T39 (1988).
- 
- [84] R. ILANKAMBAN UND D. KRAJČINOVIC. A constitutive theory for progressively deteriorating brittle solids. *International Journal of Solids and Structures* **23**(11), 1521 – 1534 (1987).
- [85] J. JANSSON UND J. HULT. Fracture mechanics and damage mechanics – a combined approach. *Journal de mécanique théorique et appliquée* **1**(1), 69 – 84 (1977).
- [86] S. JANSSON UND U. STIGH. Influence of cavity shape on damage parameter. *Journal of Applied Mechanics* **52**, 609 – 614 (1985).
- [87] S. JANSSON UND U. STIGH. Instability of dilutely voided material in uniaxial tension. *Engineering Fracture Mechanics* **25**(5/6), 615 – 623 (1986).
- [88] J.W. JU. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures* **25**(7), 803 – 833 (1989).
- [89] L.M. KACHANOV. O vremeni rasruschenija w usslowijach polsutschesti (in russisch). *Isw. AN SSSR. Otd. Techn. Nauk, Moskwa* .(8), 26 – 31 (1958).

- 
- [90] L.M. KACHANOV. Osnovy mechaniki rasruschenija (in russisch). *Isw. AN SSSR. Otd. Techn. Nauk, Moskwa* (1974).
- [91] L.M. KACHANOV. Journal of engineering mechanics division. *Proceedings ASCE* **106**, 1039 – 1051 (1980).
- [92] L.M. KACHANOV. „Introduction to continuum damage mechanics“. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht / Boston / Lancaster (1986).
- [93] M. KACHANOV. On the relationship between fracturing of a microcracking solid and its effective elastic constants. In S.P. SHAH (Herausgeber), „Toughening Mechanisms in Quasi-Brittle Materials“, Seiten 373 – 378. Kluwer Academic Publishers (1991).
- [94] P.I. KATTAN UND G.Z. VOYIADJIS. A coupled theory of damage mechanics and finite strain elasto-plasticity – I. damage and elastic deformations. *International Journal of Engineering Sciences* **28**(5), 421 – 435 (1990).
- [95] B. KEMPF. „Schädigungsmechanismen in der Legierung 800H bei hohen Temperaturen im Bereich der Kriech - Ermüdung“. Dissertation, Max - Planck - Institut für Metallforschung; Institut für Werkstoffwissenschaften. — Stuttgart: Diss. 88A0253, (1987).
- [96] H. KITAGAWA. Micro- and macroaspects in computational mechanics. *JSME International Journal*. — Tokyo **30**(267), 1361 – 1368 (1987).
- [97] S. KOCZYK. „Die Kontinuumstheorie der Plastizität und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme“. Dissertation B, TH Magdeburg (1979).
- [98] V. KONDAUROV, L.V. NIKITIN UND E.I. RYZHAK. Damage and instability in geomaterials. *Ingenieur-Archiv* **59**(3), 245 – 252 (1989).
- [99] W.I. KONDAUROV. Kontinualnjnoe rasruschenije nelinejno-uprugich tel (in russisch). *Isw. AN SSSR: Mech.tw.tela* **52**(2), 302 – 310 (1988).
- [100] C. KÖNKE. „Kopplung eines mikromechanischen Porenwachstumsmodells mit einem Makrorißmodell zu Beschreibung der Schädigung in duktilen Materialien“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, im Druck (1993).
- [101] D. KRAJGINOVIC. Constitutive theories for solids with defective microstructure. In N. STUBBS UND D. KRAJGINOVIC (Herausgeber), „Damage Mechanics and Continuum Modeling“, Seiten 39 – 56. ASCE ( ).

- 
- [102] D. KRAJČINOVIC. Constitutive equations for damaging materials. *Transaction of ASME: Journal of Applied Mechanics* **50**(2), 355 – 360 (1983).
- [103] D. KRAJČINOVIC. Continuous damage mechanics revisited: Basic concepts and definitions. *Journal of Applied Mechanics* **52**, 829 – 834 (1985).
- [104] D. KRAJČINOVIC UND D. FANELLA. A micromechanical damage model for concrete. *Engineering Fracture Mechanics* **25**(5/6), 585 – 596 (1986).
- [105] D. KRAJČINOVIC UND G.U. FONSEKA. The continuous damage theory of brittle materials, part I: General theory. *Journal of Applied Mechanics* **48**, 809 – 815 (1981).
- [106] D. KRAJČINOVIC UND G.U. FONSEKA. The continuous damage theory of brittle materials, part II: Uniaxial and plane response modes. *Journal of Applied Mechanics* **48**, 816 – 824 (1981).
- [107] E. KRÖNER. Zur plastischen Verformung des Vielkristalls. *Acta Metallurgica* **9**, 155 – 161 (1961).
- [108] J. KRZEMINSKI. The vacancy mechanism hypothesis of microfracture of metals. *Archives of Mechanics* **42**(6), 679 – 692 (1990).
- 
- [109] P. LADEVEZE UND J. LEMAITRE. Damage effective stress in quasi-unilateral condition. In „Proceedings XVI. IUTAM (Lingby, Denmark)“ (1984).
- [110] F.A. LECKIE. The micro- and macromechanics of creep rupture. *Engineering Fracture Mechanics* **25**(5/6), 505 – 521 (1986).
- [111] F.A. LECKIE UND D.R. HAYHURST. Creep rupture of structures. Band Series A 340, Seiten 323 – 347, London (1974). Proceedings of the Royal Society.
- [112] E.H. LEE. Elastic-plastic deformation at finite strains. *Journal of Applied Mechanics* **36**(1), 1 – 6 (1969).
- [113] E.H. LEE UND D.T. LIU. Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave-analysis. *Journal of Applied Physics* **38**(1), 19 – 27 (1967).
- [114] H. LEE, K. PENG UND J. WANG. An anisotropic damage criterion for deformation instability and its application to forming limit analysis of metal plates. *Engineering Fracture Mechanics* **21**(5), 1031 – 1054 (1985).
- [115] T. LEHMANN. General frame for the definition of constitutive laws for large non-isothermic elastic-plastic and elastic-visco-plastic deformations. In

- T. LEHMANN (Herausgeber), „The Constitutive Law in Thermoplasticity“, Seiten 379 – 463. CISM-Courses and Lectures, No 281, Springer Verlag (1984).
- [116] T. LEHMANN. Some thermodynamical considerations on inelastic deformations including damage processes. *Acta Mechanica* **79**, 1– 24 (1989).
- [117] T. LEHMANN. Some considerations concerning deformation-induced anisotropy. In J.P. BOEHLER (Herausgeber), „Yielding, Damage, and Failure of Anisotropic Solids“, Seiten 83 – 96, London (1990). EGF5, Mechanical Engineering Publications.
- [118] T. LEHMANN. Thermodynamical foundations of large inelastic deformations of solids bodies including damage. *International Journal of Plasticity* **7**(3), 79 – 98 (1991).
- [119] TH. LEHMANN. Einige Aspekte der Thermoplastizität. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **63**(4), T3 – T13 (1983).
- [120] TH. LEHMANN. On a generalized constitutive law for finite deformations in thermo-plasticity and thermo-viscoplasticity. In C.S. DESAI, E. KREMPL, P.D. KIOUSIS UND T. KUNDU (Herausgeber), „Constitutive Laws for Engineering Materials“, Seiten 174 – 184. Proceedings of the International Conference on Constitutive Laws for Engineering Materials (Tucson, Arizona, U.S.A.) (1987).
- [121] H. LEIPHOLZ. „Einführung in die Elastizitätstheorie“. G.Braun, Karlsruhe (1968).
- [122] J. LEMAITRE. Evaluation of dissipation and damage in metals. In „Proc. I.C.M. Kyoto, Japan“, Band I (1971).
- [123] J. LEMAITRE. A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology* **107**(1), 83 – 89 (1985).
- [124] J. LEMAITRE. Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics And Engineering* **51**, 31 – 49 (1985).
- [125] J. LEMAITRE. Local approach of fracture. *Engineering Fracture Mechanics* **25**(5/6), 523 – 537 (1986).
- [126] J. LEMAITRE UND J.L. CHABOCHE. Aspects phenomenologiques de la rupture par endommagement. *Journal de mécanique théorique et appliquée* **2**(3), 317 – 365 (1978).

- 
- [127] J. LEMAITRE UND J.L. CHABOCHE. „Mechanics of solid materials“. Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [128] J. LEMAITRE UND J. DUFALLY. Damage measurements. *Engineering Fracture Mechanics* **28**(5/6), 643 – 661 (1987).
- [129] T.C. LINDLEY, T. OATES UND RICHARDS C.E. A critical appraisal of carbide cracking mechanisms in ferride/carbide aggregates. *Acta Metallurgica* **18**, 1127 – 1136 (1970).
- [130] A. LITEWKA. Effective material constants for orthotropically damaged elastic solids. *Arch.Mech.Stos.* **37**, 631 – 642 (1985).
- [131] A. LITEWKA. On stiffness and strength reduction of solids due to crack development. *Engineering Fracture Mechanics* **25**(5/6), 637 – 643 (1986).
- [132] V.A. LUBARDA UND D. KRAJGINOVIC. Damage tensors and the crack density distribution. *International Journal of Solids and Structures* **30**(20), 2859 – 2877 (1993).
- [133] J LUBLINER. „Plasticity Theory“. Engineering. MAXWELL MACMILLAN INTERNATIONAL EDITIONS, New York (1990).
- 
- [134] E MACHERAUCH. „Praktikum in Werkstoffkunde“. Werkstoffkunde. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden (1990).
- [135] E. MACHERAUCH UND K.H. KLOOS. Bewertung von Eigenspannungen bei quasistatischer und schwingender Werkstoffbeanspruchung. *Materialwissenschaften und Werkstofftechnik* **20**, 1 –13 (1989).
- [136] D.B. MACVEAN. Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* **19**, 157 – 185 (1968).
- [137] S.S. MANSON. Re-examination of cumulative fatigue damage analysis – an engineering perspective. *Engineering Fracture Mechanics* **25**(5/6), 539 – 571 (1986).
- [138] D. MARQUIS UND H.S. COSTA MATTOS. Modelling of plasticity and aging as coupled phenomena. *International Journal of Plasticity* **7**, 865–877 (1991).
- [139] G.A. MAUGIN. „The Thermomechanics of Plasticity and Fracture“. Cambridge University Press, Cambridge (1992).

- 
- [140] J. MAZARS. A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics* **25**(5/6), 729 – 737 (1986).
- [141] J. MAZARS UND G. PIJAUDIER-CABOT. Continuum damage theory – application to concrete. *Transaction of ASME: Journal of Engineering Mechanics* **115**(2), 345 – 365 (1989).
- [142] F.A. MCCLINTOCK. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. *Journal of Applied Mechanics* **35**, 363 – 371 (1968).
- [143] D.L. MCDOWELL, K. HO UND J.C. MOOSBRUGGER. Continuum damage representation of creep-dominated non-proportional cyclic loading. In P. BEN-SUSSAN (Herausgeber), „High Temperature Fracture Mechanisms and Mechanics“, Seiten 51 – 74, London (1990). EGF6, Mechanical Engineering Publications.
- [144] B. MICHEL UND W. TOTZAUER. Das J-Integral und seine Verallgemeinerungen - aktuelle Trends in der Bruchmechanik. *Technische Mechanik* **5**(3), 5 – 14 (1984).
- [145] M.A. MINER. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics* **12**, A159 – A164 (1945).
- 
- [146] A. MISRA UND D. CHANG. Effective elastic moduli of heterogeneous granular solids. *International Journal of Solids and Structures* **30**(18), 2547 – 2566 (1993).
- [147] T. MORI UND K. TANAKA. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica* **21**, 571 – 574 (1973).
- [148] I. MÜLLER. „Thermodynamik - Die Grundlagen der Materialtheorie“. Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf (1973).
- [149] I. MÜLLER. Thermodynamik – die Lehre von Wärme und Temperatur. *Naturwissenschaften* **74**, 213 – 224 (1987).
- [150] C.-J. MÜNCH. „Die Analyse thermomechanischer Vorgänge mit der Finite-Element-Methode“. Dissertation, Technische Universität Magdeburg (1989).
- [151] S. MURAKAMI. Anisotropic aspects of material damage and application of continuum damage mechanics. In D. KRAJČINOVIC UND J. LEMAITRE (Herausgeber), „Continuum Damage Mechanics“, Seiten 92 – 133. CISM Courses and Lectures Nr. 295 (Udine), Springer Verlag (1987).

- 
- [152] S. MURAKAMI. Mechanical modeling of material damage. *Journal of Applied Mechanics* **55**(6), 280 – 286 (1988).
- [153] S. MURAKAMI, M. KAWAI UND H. RONG. Finite element analysis of creep crack growth by a local approach. *International Journal of Mechanical Sciences* **30**(7), 491 – 502 (1988).
- [154] S. MURAKAMI UND N. OHNO. A continuum theory of creep and creep damage. In PONTNER UND HAYHURST (Herausgeber), „Creep in Structures“, Seiten 422 – 443, Berlin (1981). Springer Verlag.
- [155] S. MURAKAMI UND H. RONG. Finite element analysis of creep crack growth by a local approach. *International Journal of Mechanics Science* **30**(7), 491 – 502 (1986).
- [156] S. MURAKAMI UND H. RONG. Role of damage mechanics in local approach to fracture. In „Role Of Plasticity And Damage In Fracture Of Solids“, Seiten 145 – 160, Tokyo (1988). Proceedings of the Far East Fracture Group Workshop, Tokyo Institute of Technology, International House.
- [157] W. MUSCHIK. Thermodynamische Theorien, Überblick und Vergleich. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **61**(5), T213 – T219 (1981).
- [158] J. NAJAR. „Kontinuierliche Schädigung elastisch spröder Körper“. VDI - Fortschritt - Bericht, Reihe 18 (Mechanik/Bruchmechanik) Nr.49. VDI-Verlag, Düsseldorf (1988).
- [159] A. NEEDLEMAN UND KUSHNER A.S. An analysis of void distribution effect on plastic flow in porous solids. *European Journal of Mechanics. A/Solids* **9**(3), 193 – 206 (1990).
- [160] G.J. NEMAT-NASSER, N. YU UND M. HORI. Solids with periodically distributed cracks. *International Journal of Solids and Structures* **30**(15), 2071 – 2095 (1993).
- [161] S. NEMAT-NASSER. Overall stress and strains in solids with microstructure. In J. GITTUS UND J. ZARKA (Herausgeber), „Modelling Small Deformations of Polycrystals“, Seiten 41 – 64, London (1986). Elsevier.
- [162] S. NEMAT-NASSER UND M. OBATA. A microcrack model of dilatancy in brittle materials. *Journal of Applied Mechanics* **55**, 24 – 35 (1988).

- 
- [163] W. NOWACKI. „Thermoelasticity“. Pergamon Press, Oxford, New York (1986).
- [164] E.T. ONAT. Representation of inelastic behaviour. In B. WILSHIRE UND D.R.J. OWEN (Herausgeber), „Creep and Fracture of Engineering Materials and Structures“, Swansea UK (1981). Pineridge Press.
- [165] E.T. ONAT. Effective properties of elastic materials that contain penny shaped voids. *International Journal of Engineering Sciences* **22**(8-10), 1013 – 1021 (1984).
- [166] E.T. ONAT. Representation of mechanical behavior in the presence of internal damage. *Engineering Fracture Mechanics* **25**(5/6), 605 – 614 (1986).
- [167] E.T. ONAT UND F.A. LECKIE. Representation of mechanical behavior in the presence of changing internal structure. *Journal of Applied Mechanics* **55**, 1 – 10 (1988).
- [168] A.M. OTHMAN UND D.R. HAYHURST. Determination of low strain multi-axial creep rupture criteria using notched-bar data. *European Journal of Mechanics. A/Solids* **12**(5), 609 – 629 (1993).
- 
- [169] M.H.J.W. PAAS. „Continuum damage mechanics with an application to fatigue“. Dissertation, Technische Universität Eindhoven (1990).
- [170] A. PALMGREN. Die Lebensdauer von Kugellagern. *VDI-Zeitschrift* **68**, 339 – 341 (1924).
- [171] W.A. PALMOV. Rheologische Modelle für Materialien bei endlichen Deformationen. *Technische Mechanik* **5**(4), 20 – 31 (1984).
- [172] A. PAPE. „Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik **57** (1988).
- [173] S.L. PASSMAN UND T.G. TRUCANO. A theory of localization of damage in creep. *Engineering Fracture Mechanics* **25**(5/6), 597 – 603 (1986).
- [174] J.G.S. PATINO. Stability and energy minimization in elasticity with damage. *International Journal of Solids and Structures* **25**(11), 1255 – 1266 (1989).
- [175] P.A. PAVLOV. „Osnovy inschenernych raschetov elementov maschin na ustalostj i dliteljnuju protschnostj (in russisch)“. Maschinostroenije, Leningrad (1988).

- [176] P. PERZYNA UND A. DRABIK. Influence of thermal effects on micro-damage mechanism in dynamic processes. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **71**(4), T374 – T378 (1991).
- [177] G. PIJAUDIER-CABOT UND L. BODE. Localization of damage in a nonlocal continuum. *Mechanics Research Communications* **19**(2), 145 – 153 (1992).
- [178] J. POHÉ. „Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 83 (1993).
- [179] W. PRAGER. „Einführung in die Kontinuumsmechanik“. Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart (1961).
- [180] Y.P. QIU UND G.J. WENG. Pressure-shear waves and spall-fracture described by a viscoplastic-damage constitutive model. *International Journal of Plasticity* **9**(2), 271 – 290 (1993).
- [181] P.J. RABIER. Some remarks on damage theory. *International Journal of Engineering Science* **27**(1), 29 – 54 (1989).
- [182] JU.N. RABOTNOV. O mechanisme dliteljnogo pasruschenija (in russisch). *Woprossy protschnosti materialow i konstruktzii. Moskwa: Isd. AN SSSR* Seiten 5 – 7 (1959).
- [183] F.G. RAMMERSTORFER. Micro- and Macro-Mechanics of Composites. Interner Vortrag am Graduiertenkolleg CSD, Ruhr-Universität Bochum, Oktober 20-21. unveröffentlicht (1993).
- [184] J.R. RICE UND D.M. TRACEY. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **17**, 201 – 217 (1969).
- [185] E.L. ROBINSON. Effect of temperature variation on the long-time rupture strength of steels. *Transaction of ASME* **74**, 777 – 780 (1952).
- [186] H.P. ROSSMANITH. „Grundlagen der Bruchmechanik“. Springer - Verlag, Wien, New York (1982).
- [187] G. ROUSSELIER. Finite deformation constitutive relations including fracture damage. In S. NEMAT-NASSER (Herausgeber), „Three Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture“, Seiten 331 – 355. North-Holland Publishing Company (1981).

- 
- [188] G. ROUSSELIER. Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. *Nuclear Engineering and Design* **105**, 97 –111 (1987).
- [189] T. SADOWSKI. Deformation damage theory of materials and its application to the analysis of the deformation process of square plates. *Archive of Applied Mechanics* **61**, 449 – 461 (1991).
- [190] S. SÄHN UND H. GÖLDNER. „Bruch- und Beurteilungskriterien in der Festigkeitslehre“. VEB Fachbuchverlag, Leipzig (1989).
- [191] M. SAYIR. Mechanik im Jahr 2000. *Technische Rundschau. Bern* .(2), 26 – 31 (1989).
- [192] W. SCHATT. „Einführung in die Werkstoffwissenschaft“. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig (1981).
- [193] W. SCHMITT. Local approach and micromechanical modelling of fracture. Bericht, Fraunhofer-Institut für Werkstoffmechanik (1990).
- [194] C. SCHOLZ. „Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationschalen“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 71 (1989).
- 
- [195] D. SEIBERT. Histogramme, Orientierungsdichtefunktionen und ihre Darstellung durch eine tensorielle Form der Fourierreihe. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)* **71**(2), 91 – 97 (1991).
- [196] J.C. SIMO UND J.W. JU. Strain- and stress-based continuum damage models – I.formulation. *International Journal of Solids and Structures* **23**(7), 821 – 840 (1987).
- [197] J.C. SIMO UND J.W. JU. Strain- and stress-based continuum damage models – II.computational aspects. *International Journal of Solids and Structures* **23**(7), 841 – 869 (1987).
- [198] J.C. SIMO UND J.W. JU. On continuum damage-elastoplasticity at finite strains. *Computational Mechanics* .(5), 375 – 400 (1989).
- [199] E. STEIN UND P. WRIGGERS. Computational Mechanics bei Festkörpern und Ingenieurstrukturen unter Verwendung von Finite-Element-Methoden. Mitteilungen heft 1, Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (1989).

- 
- [200] M.J. STOWELL. Cavity growth in superplastic alloys. *Metal Science* (8-9), 267 – 272 (1980).
- [201] D.-Z. SUN, D. SIEGELE, B. VOSS UND W. SCHMITT. Application of local damage models to the numerical analysis of ductile rupture. *Fatigue Fracture of Engineering Materials and Structures* **12**(3), 201 – 212 (1989).
- [202] P. SUQUET. On bounds for the overall potential of power law materials containing voids with an arbitrary shape. *Mechanics Research Communications* **19**(1), 51 – 58 (1992).
- [203] F. SZEPAN. „Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 70 (1989).
- [204] W.H. TAI. A damage mechanics model for anisotropic material and its application to sheet metal forming. *International Journal of Solids and Structures* **24**(10), 1045 – 1057 (1988).
- 
- [205] S.H. TEOH, B.W. CHERRY UND H.H. KAUSCH. Creep rupture modelling of polymers. *International Journal of Damage Mechanics* **1**(2), 245 – 256 (1992).
- [206] J. TIROSH UND A. MILLER. Damage evolution and rupture in creeping of porous materials. *International Journal of Solids and Structures* **24**(6), 567 – 580 (1988).
- [207] W.A. TRAMPCZYNSKI, D.R. HAYHURST UND F.A. LECKIE. Creep rupture of copper and aluminium under non-proportional loading. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **29**(2), 353 – 374 (1981).
- [208] SOLID MECHANICS RESEARCH TRENDS UND OPPORTUNITIES (REPORT). In J.R. Rice, editor. *Applied Mechanics Reviews* **38**(10), 1247 – 1308 (1985).
- [209] C. TRUESDELL. „Rational Thermodynamics“. Lecture 2. Springer Verlag, New York/Berlin/Heidelberg/Tokyo (1984).
- [210] V. TVERGAARD. Ductile fracture by cavity nucleation between larger voids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **30**(6), 265 – 286 (1982).
- [211] V. TVERGAARD. Influence of void nucleation on ductile shear fracture at a free surface. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **30**(6), 399 – 425 (1982).

- 
- [212] V. TVERGAARD. 3d-analysis of localization failure in a ductile material containing two size-scales of spherical particles. *Engineering Fracture Mechanics* **31**(3), 421 – 436 (1988).
- [213] V. TVERGAARD UND A. NEEDLEMAN. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. *Acta Metallurgica* **32**(1), 157 – 169 (1984).
- [214] A.A. VAKULENKO UND L.M. KACHANOV. Kontinualjnaja teorija sredy s treschtschinami (in russisch). *Isw. AN SSSR: Mech.tw.tela* **35**(4), 159 – 166 (1971).
- [215] A. VAN DEN BEUKEL. The influence of static and dynamic strain aging on the temperature dependence of the flow stress in solid solutions. *Scripta Metallurgica* **17**, 659–663 (1983).
- [216] G.Z. VOYIADJIS. Degradation of elastic modulus in elastoplastic coupling with finite strains. *International Journal of Plasticity* **4**, 335 – 353 (1988).
- [217] G.Z. VOYIADJIS UND P.I. KATTAN. Damage of fiber-reinforced composite materials with micromechanical characterization. *International Journal of Solids and Structures* **30**(20), 2757 – 2778 (1993).
- 
- [218] C.C. WANG. A new representation theorem for isotropic functions: An answer to Professor G.F.SMITH's criticism of my paper on representations for isotropic functions, Parts 1,2. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **36**, 166 – 223 (1970).
- [219] K. WEGENER. Zur Berechnung großer plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Überspannungstyp. Braunschweiger Schriften zur Mechanik 2, Mechanik - Zentrum der Technischen Universität Braunschweig (1991).
- [220] C.W. WOO UND D.L. LI. A universal physically consistent definition of material damage. *International Journal of Solids and Structures* **30**(15), 2097 – 2108 (1993).
- [221] P. WRIGGERS. „Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Element-Methode“. Habilitation, Universität Hannover (1986).
- [222] S. WU UND A. CHUDNOVSKY. The effective elastic properties of a linear elastic solid with microcracks. *Engineering Fracture Mechanics* **37**(3), 653 – 659 (1990).

- [223] P. WYCLIFF, U.F. KOCKS UND J.D. EMBURY. On dynamic and static strain ageing in substitutional and interstitial alloys. *Scripta Metallurgica* **14**, 1349–1354 (1980).
- [224] X.-P. XU UND A. NEEDLEMAN. Simulations of ductile failure with two size scales of voids. *European Journal of Mechanics. A/Solids* **10**(5), 459 – 484 (1991).
- [225] X.-P. XU UND A. NEEDLEMAN. The influence of nucleation criterion on shear localization in rate-sensitive porous plastic solids. *International Journal of Plasticity* **8**(3), 315 – 330 (1992).
- [226] A. ZAVALIANGOS UND L. ANAND. Thermo-elasto-viscoplasticity of isotropic porous metals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* **41**(6), 1087 – 1118 (1993).
- [227] U. ZDEBEL. „Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz“. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 43 (1984).
-

## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1      Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2      Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3      Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4      Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5      Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6      Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7      H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- 
- Nr. 8      Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9      Berend Fischer:  
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10      Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11      Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12      Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13      Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14      Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15      Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16      Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten Ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- 
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzipie der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzipie der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- 
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepassten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight Into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien  
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- 
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67** Michael Geis:  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68** Günter Renker:  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69** Berthold Schieck:  
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70** Frank Szepan:  
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71** Christian Scholz:  
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72** J. Badur/H. Stumpf:  
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73** Werner Fornefeld:  
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74** J. Saczuk/H. Stumpf:  
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- 
- Nr. 75** Andreas Feldmüller:  
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76** Ulfert Rott:  
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77** Thomas Heinrich Pingel:  
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78** O. T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79** J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80** J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:  
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation  
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81** R. H. Frania/H. Waller:  
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82** B. Bischoff-Beiermann:  
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83** J. Pohé:  
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis

- Nr. 84** U. Kikillus:  
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85** T. Guo:  
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material
- Nr. 86** Achim Menne:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87** Uwe Folchert:  
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 88** Jörg Körber:  
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89** Peer Schieße:  
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung
-



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 89**