



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Achim Menne

Identifikation der dynamischen
Eigenschaften von
hydrodynamischen Wandlern

Heft Nr. 86



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik
Ruhr-Universität Bochum

Achim Menne

Identifikation der dynamischen Eigenschaften
von
hydrodynamischen Wandlern

Mitteilung aus dem Institut für Mechanik Nr. 86
Januar 1994

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

© 1994 Dr.-Ing. Achim Menne
Röntgenstraße 67
45143 Essen

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung der Arbeit oder von Teilen daraus bedarf der Zustimmung des Autors.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1989 bis 1993 während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitsgruppe "Numerische Methoden in der Mechanik und Simulationstechnik" am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum. Sie berichtet über die Ergebnisse des Teilprojektes A5 "Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern und Kupplungen" im Sonderforschungsbereich 278 "Hydrodynamische Leistungsübertragung". Dieser Sonderforschungsbereich wird seit 1990 von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziell gefördert.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller, dem Leiter der Arbeitsgruppe und Referenten dieser Arbeit, danke ich für die wissenschaftliche Unterstützung und das entgegengebrachte Vertrauen, das sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns danke ich für das Interesse an der Arbeit und für die Übernahme des Korreferats.

Besonders möchte ich mich bei der Firma Voith für die großzügige Bereitstellung eines der beiden untersuchten Versuchswandler und die fachliche Zusammenarbeit bedanken.

Während meiner Arbeit im Sonderforschungsbereich habe ich die intensive und fruchtbare Teamarbeit mit meinem Kollegen Uwe Folchert besonders geschätzt. Planung, Konstruktion und Aufbau der gesamten Versuchsanlage sowie die Entwicklung der linearen Identifikationsmethode erfolgte in enger Zusammenarbeit mit ihm.

Allen Mitarbeitern der Arbeitsgruppe danke ich für ihre freundliche und kollegiale Unterstützung.

Dem Lehrstuhl für Energietechnik sei besonders für die Bereitstellung eines Arbeitsplatzes zum Betreiben der Versuchsanlage sowie der ausgezeichneten Unterstützung beim gesamten Aufbau gedankt.

Dissertation eingereicht am : 30.09.1993

Tag der mündlichen Prüfung : 17.12.1993

Erster Referent : Prof. Dr.-Ing. H. Waller

Zweiter Referent : Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns

Zusammenfassung

Als Bestandteil eines gesamten Antriebssystems verbinden hydrodynamische Wandler eine Antriebs- mit einer Arbeitsmaschine. Sie bestimmen aufgrund ihres Übertragungsverhaltens wesentlich die stationären und dynamischen Eigenschaften der Gesamtkonstruktion.

In der vorliegenden Arbeit wird mit den Methoden der Teilsystemidentifikation dieses Übertragungsverhalten, unabhängig von anderen Antriebsstrangkomponenten, bestimmt. Als erste Ansätze kommen hierbei lineare Modelle zum Einsatz, die durch eine bereichsweise Linearisierung um mehrere Arbeitspunkte identifiziert werden. Um die Gültigkeit der verwendeten Modelle zu überprüfen, werden die experimentellen Untersuchungen von zwei verschiedenen Wandlern beschrieben, die sich in ihrer Bauform, Baugröße und ihrem stationären Verhalten unterscheiden. Aus den Erkenntnissen der linearen Modellierung wird für beide Wandler jeweils ein nichtlineares Modell abgeleitet, mit dem bei gegebenen Drehzahlverläufen die Momente über große Betriebsbereiche mit sehr großer Genauigkeit im Zeitbereich vorausberechnet werden können.

Summary

Hydrodynamic torque converters are components of whole drive systems. They connect the drive side with the driving engine and determine substantially the stationary and dynamic behavior of the whole system.

Subject to this paper is the description of a subsystem identification to determine the dynamic behavior of hydrodynamic torque converters, independent of other components of the drive system. At first linear models are used, which are determined by piecewise linearization at several operating points. To consider the validity of the models, the experimental examinations of two hydrodynamic torque converters are described, which distinguish in their construction, size and stationary behavior. Because of the results of the linear modeling a nonlinear model will be deduced for each torque converter. With this model it is possible to calculate the torques by known rotational speed over a wide range in the time domain with high accuracy.



Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung und allgemeine Zielsetzung der Arbeit	1
2.	Hydrodynamische Getriebe	4
2.1.	Allgemeine Grundlagen	4
2.2.	Grundlagen hydrodynamischer Wandler	6
2.3.	Stand der Forschung	15
3.	Systemidentifikation	19
3.1.	Allgemeines	19
3.1.1.	Klassifizierung der Identifikationsmethoden	21
3.1.2.	Beschreibung und Darstellung von linearen und nichtlinearen, kausalen, zeitinvarianten Systemen	25
3.2.	Identifikation von linearen Systemen	31
3.2.1	Experimentelle Frequenzgangmessung	34
3.2.2.	Parametrisierung des Frequenzganges	39
3.2.3.	Transformation in den Zeitbereich	41
3.2.4.	Darstellung im Zustandsraum	42
3.3.	Identifikation von nichtlinearen Systemen	47
3.4.	Teilsystemidentifikation	50
Experimenteller Teil		
4.	Allgemeines zur Identifikation hydrodynamischer Wandler	57
4.1.	Beschreibung des Versuchsstandes	59
4.2.	Beschreibung der Versuchswandler	70
4.2.1.	Einphasiger Wandler	72
4.2.2.	"Zweiphasiger" Wandler	74
4.3	Allgemeines zur Meßwerterfassung, -verarbeitung und Versuchsdurchführung	76
5.	Stationäres Wandlerverhalten	82
5.1.	Abbildung des stationären Verhaltens mit dem Differentialgleichungssystem von Herbertz	90

6.	Instationäres Wandlerverhalten	92
6.1.	Modellierung des instationären Verhaltens des einphasigen Wandlers	93
6.1.1.	Modellierung durch Linearisierung um einen Betriebspunkt	93
6.1.2.	Abbildung des instationären Verhaltens für größere Betriebsbereiche	111
6.1.3.	Nichtlineare Modellierung	121
6.2.	Modellierung des instationären Verhaltens des "zweiphasigen" Wandlers	127
7.	Praktische Anwendung	137
8.	Zusammenfassung	141
9.	Literatur	144
	Anhang	150

Verwendete Formelzeichen und Symbole

Lateinische Buchstaben

A	Fläche
<u>A</u> - <u>E</u>	Matrizen im Zustandsraum
D	Durchmesser
<u>D</u>	dynamische Dämpfungsmatrix
E	Elastizitäts-Modul
F	Kraft
H	Frequenzgang
<u>H</u>	Frequenzgangmatrix, inverse dynamische Dämpfungsmatrix
<u>I</u>	Einheitsmatrix
<u>K</u>	Steifigkeitsmatrix
L	Länge
M	Moment
$M_{(P,T,R)0}$	stationäres Pumpen-, Turbinen- oder Leitradmoment
<u>N</u>	Normalkraft, Filterordnung
P	Leistung
<u>U</u>	Übertragungsmatrix
<u>V</u>	Beobachtbarkeitsmatrix
\dot{V}	Volumenstrom
<u>W</u>	Steuerbarkeitsmatrix
<u>Z</u>	Matrix im Zustandsraum, Zustandsvektor
<u>b</u>	Untermatrix im Zustandsraum
<u>c</u>	Absolutgeschwindigkeit
d	Koeffizient der dynamischen Dämpfungsmatrix
dv	Dämpfungswert
e	Modellfehler
f	Frequenz
h	Koeffizient der Frequenzgangmatrix, Gewichtsfunktion
j	$\sqrt{-1}$
k	Koeffizient der Steifigkeitsmatrix
m	Massenstrom
n	Drehzahl in Umdrehungen pro Minute

$n_{(P,T)0}$	stationäre Pumpen- bzw. Turbinendrehzahl [min^{-1}]
r	Radius
s	komplexe Variable, Schlupf
t	Zeit
$t_{\text{gr.}}$	Gruppenlaufzeit
u	Koeffizient der Übertragungsmatrix, Verschiebung
\underline{u}	Umfangsgeschwindigkeit
\underline{w}	Relativgeschwindigkeit
\bar{w}	mittlere Relativgeschwindigkeit
x	Systemeingangsgröße
y	Systemausgangsgröße
z	komplexe Variable
\underline{z}	Untermatrix im Zustandsraum

Griechische Buchstaben

δ	Dirac-Impuls
φ	Phasenwinkel
η	Wirkungsgrad
λ	Leistungszahl, Reibungskoeffizient
μ	Wandlung, Mittelwert
ν	Drehzahlverhältnis
ρ	Dichte
τ	Zeitverschiebung
ω	Kreisfrequenz
ζ	Stoßverlustkoeffizient
$\Delta\alpha$	Fehlabströmwinkel
Φ	Phasenwinkel
Θ	Trägheitsmasse

Indices und Kennzeichen

a	Abtastung
eck.	Eckfrequenz

h	hydraulisch
ges.	gesamt
i, j	Laufindex
k, l	Index von Matrizenkoeffizienten
lin.	linear
m	Laufindex, meridional
max.	maximal
n	Laufindex
nf	Anzahl der Frequenzpunkte
nt	Anzahl der Zeitdiskretisierungen
p	Anzahl der Systemeingänge
P	Pumpe
q	Anzahl der Systemausgänge
R	Reaktionsglied (Leitrad), Reibung
r	Laufindex
st.	Stoß
sta.	stationär
T	Turbine
u	in Umfangsrichtung, Laufindex
w	Laufindex in Verbindung mit diskreten Frequenzen
x	Systemeingang
y	Systemausgang
–	Matrix, Vektor allgemein

Weitere Formelzeichen werden jeweils am Ort ihrer Verwendung beschrieben.

1. Einleitung und allgemeine Zielsetzung der Arbeit

Um eine hohe Zuverlässigkeit und Sicherheit von Antriebssystemen zu gewährleisten, ist eine genaue Kenntnis aller Bauteilbelastungen notwendig. Betriebszustände, die durch ein Blockieren der Antriebs-/Arbeitsmaschine, durch deterministische oder stochastische Erregungen bis hin zu Resonanzerscheinungen des Antriebssystems gekennzeichnet sind, erfordern umfangreiche Analysen des Systemverhaltens. Auch vor dem Hintergrund der Optimierung von Anlagen hinsichtlich der Dimensionierung und Dauerfestigkeit ist eine Vorausberechnung bei statischen und dynamischen Beanspruchungen schon in der Entwurfsphase unumgänglich.

Durch den Einsatz von digitalen Rechenanlagen können heute selbst große Konstruktionen in Form von Modellen abgebildet werden, mit denen eine zum Teil genaue Abschätzung der im realen Betrieb auftretenden Beanspruchungen vorgenommen werden kann. Ein großes Problem besteht in der mathematischen Beschreibung bzw. Modellierung des meist nichtlinearen Systemverhaltens. Aufgrund fehlender oder unzureichender Abbildungsmodelle einzelner Baugruppen werden oft grobe Abschätzungen oder starke Vereinfachungen für das tatsächliche Systemverhalten gemacht, die die Genauigkeit und Zuverlässigkeit von Simulationsrechnungen in Frage stellen. Modellierungen scheitern dabei oft an den unzureichenden Kenntnissen der teilweise sehr komplexen, physikalischen Zusammenhänge oder an deren mathematischer Beschreibung. Hier bietet die Systemidentifikation einen Ausweg, bei der allgemeine oder aus a-priori Kenntnissen erstellte spezielle Modellansätze an das reale Ein-/Ausgangsverhalten der einzelnen Baugruppen oder des gesamten Systems angepaßt werden können.

Eine Baugruppe in Antriebssystemen, über deren Ein-/Ausgangsverhalten speziell bei instationären Betriebszuständen wenig Erkenntnisse vorliegen, sind die hydrodynamischen Getriebe¹. Aufgrund der komplexen physikalischen Strömungszusammenhänge konnten bisher keine

1: Zu den hydrodynamischen Getrieben zählen die hydrodynamischen Wandler und Kupplungen.

mathematischen Beschreibungen gefunden werden, die auf die verschiedenen Getriebebauformen allgemein anwendbar sind. Meist wurden Modelle unter großen Vereinfachungen und Annahmen über die inneren Strömungsverhältnisse und die Betriebsbedingungen¹ aufgestellt, die ihre Anwendung stark einschränken.

Ziel dieser Arbeit ist es, mit den Methoden der Systemidentifikation das dynamische Ein-/Ausgangsverhalten hydrodynamischer Wandler zu bestimmen. Hiermit ist nicht die Erstellung allgemeingültiger Modelle für alle Wandlerbauformen und Ausführungen gemeint, sondern die Beschreibung der Identifikationsmethode, mit der allgemein das dynamische Verhalten solcher Komponenten bestimmt werden kann. Systematische Untersuchungen spezieller Belastungsfälle, wie sekundärseitige Blockiervorgänge oder transiente Erregungen, können dann mit Hilfe der identifizierten Modelle unter Berücksichtigung anderer Antriebsstrangkomponenten für den jeweiligen identifizierten Wandler durchgeführt werden.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich grundsätzlich in 6 Themengebiete:

- Nach der Einführung in die Grundlagen hydrodynamischer Wandler, in der die verschiedenen Bauformen und einige grundlegende strömungstechnische Zusammenhänge beschrieben werden, sind die bisherigen theoretisch und experimentell durchgeführten Untersuchungen im Literaturüberblick aufgeführt.
- In Kap. 3 wird eine allgemeine Klassifizierung der verschiedenen Identifikationsmethoden vorgenommen. Nach einer kurzen Beschreibung von linearen und nichtlinearen Systemen wird eine spezielle Identifikationsmethode in allgemeiner Form abgeleitet, die bei der hier durchgeführten Modellierung von hydrodynamischen Wandlern angewendet wird. Die in diesem Zusammenhang wichtigen Fragestellungen

¹: Z.B. wird bei der Modellierung hydrodynamischer Kupplungen häufig ein Füllgrad von 100% vorausgesetzt. Weit über 90% der in der Praxis eingesetzten Kupplungen werden jedoch einer mit Teilfüllung betrieben.

zur Identifikation von Teilsystemen aus einem Gesamtsystem werden anschließend erläutert.

- Die zwei untersuchten Versuchswandler und der für die experimentellen Messungen aufgebaute Versuchsstand werden in Kap. 4 beschrieben.

- Anschließend wird das durch Messungen bestimmte stationäre Verhalten beider Wandler dargestellt und mit Hilfe von nichtlinearen Modellansätzen identifiziert.

- Im Kap. 6 wird ausgehend von dem in Kap. 3 beschriebenen Verfahren gezeigt, wie das instationäre Wandlerverhalten durch eine bereichsweise Linearisierung um einen Betriebspunkt identifiziert werden kann. Mit Hilfe der stationären Modelle und aus den Erkenntnissen der linearen Modellierung wird im weiteren die Vorgehensweise zur nichtlinearen Systembeschreibung hydrodynamischer Wandler vorgestellt.

- Im Abschluß dieser Arbeit werden die Anwendungsmöglichkeiten der identifizierten Modelle im Hinblick auf Untersuchungen gesamter Antriebsstränge beschrieben.

2. Hydrodynamische Getriebe

Maschinen, bei denen über die kinetische Energie eines Fluids ein Hauptanteil der Energieübertragung erfolgt, werden hydrodynamische Getriebe genannt. Überwiegen jedoch Druckanteile bei der Energieübertragung, so spricht man von hydrostatischen Getrieben. Verdrängermaschinen sind ein typischer Vertreter dieser Getriebeart.

2.1. Allgemeine Grundlagen

Zu den hydrodynamischen Getrieben zählen Wandler, Kupplungen und als Sonderbauform der Kupplung die Bremse. Die Hauptbaugruppen dieser Getriebe sind das Pumpen- und Turbinenrad und speziell für den Wandler das Leitrad, sowie ein alles umschließendes Gehäuse. Die einzelnen Laufräder sind mechanisch nicht miteinander gekoppelt. Der Energieaustausch erfolgt hauptsächlich durch Impulsaustausch des durch die Schaufeln der Laufräder strömenden Fluides. Die von einem Antriebsmotor eingeleitete mechanische Energie wird vom Pumpenrad in hydraulische Energie umgewandelt, die dann vom Fluid auf das Turbinenrad übertragen wird. Die Turbine wandelt einen Teil dieser Energie wieder in mechanische Arbeit um, die über mechanische Kupplungen und Wellen der Arbeitsmaschine zugeführt wird. Abb. 2.1 zeigt einen Wandler- und Abb. 2.2 einen Kupplungsmeridianschnitt.

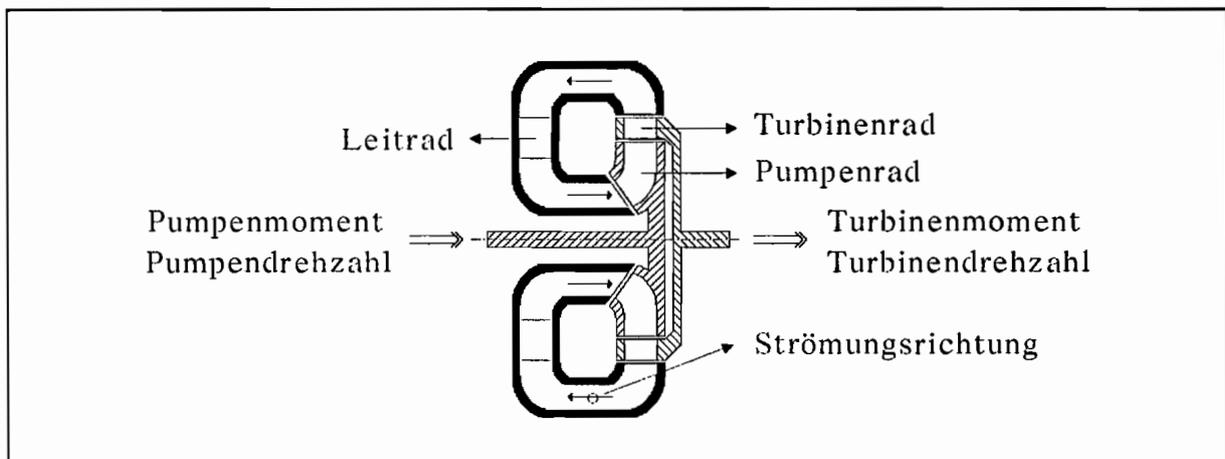


Abb. 2.1) Meridianschnitt eines hydrodynamischen Wandlers

Bei der Kupplung sind die Momente am Pumpen- und Turbinenrad im stationären Betrieb immer gleich. Es erfolgt lediglich eine Drehzahlwandlung, also eine Über- oder Untersetzung der Pumpen- zur Turbinendrehzahl. Während die Drehzahlwandlung bei den mechanischen Getrieben immer in festgelegten Verhältnissen erfolgt, ist sie bei den hydrodynamischen Getrieben eine stetige Funktion des Pumpen- und Turbinenmomentes. Sie besitzen somit kein konstantes Übersetzungsverhältnis. Da zwischen den Rädern ein Kraftschluß besteht, ist die Drehzahlwandlung von der Belastung abhängig. Beim Wandler erfolgt neben der Drehzahl- noch eine Momentenwandlung. Das vom Antriebsmotor eingeleitete Pumpenmoment wird im Anfahrbereich (Turbine steht still) und im unterem Fahrbereich verstärkt. Die Momentenwandlung sinkt dann mit zunehmender Turbinendrehzahl kontinuierlich ab (vergl. Abb. 2.3). Um dieses zu erreichen, durchströmt das Fluid noch ein in der Regel feststehendes Leitrad. Hierdurch wird die Strömung umgelenkt und ein Reaktionsmoment auf das leitradsfestsetzende Bauteil, meistens das Gehäuse, übertragen. Im stationären Fall errechnet sich das Reaktionsmoment aus der Differenz zwischen dem Pumpen- und Turbinenmoment.

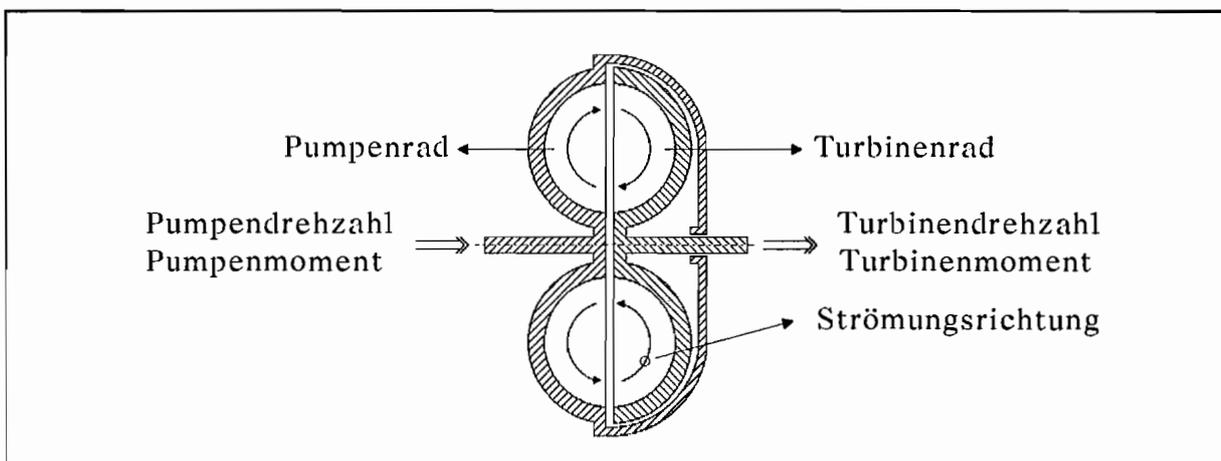


Abb. 2.2) Meridianschnitt einer hydrodynamischen Kupplung

Die Richtung des Leistungsflusses und die Drehrichtungen der Lauf­räder sind beim Wandler nicht umkehrbar, ohne daß sich sein Verhalten wesentlich ändert. Bei Kupplungen und Bremsen dagegen ist diese Eigenschaft bauartabhängig.

Für quasistatische Änderungen der Drehzahlen können die Momente annähernd aus den stationären Kennlinien bestimmt werden. Bei hoch­dynamischen Änderungen ist das nicht mehr möglich.

Ein großer Vorteil hydrodynamischer Getriebe ist die verschleißfreie Energieübertragung, da keine mechanische Verbindung zwischen der An- und Abtriebsseite besteht.

2.2. Grundlagen hydrodynamischer Wandler

Die VDI-Richtlinie 2153 /1/ gibt einen Überblick über Bauformen und Wirkungsweisen hydrodynamischer Getriebe. Die Beschreibung des sta­tionären Verhaltens von hydrodynamischen Wandlern erfolgt durch Kennlinien. Dabei wird zwischen dimensionsbehafteten und dimensions­losen Kennlinien (Abb. 2.3) unterschieden. Bei der dimensionsbehafteten Darstellung werden die Momente über der Turbinendrehzahl bei konstanter Pumpendrehzahl aufgetragen. Die dimensionslosen Kenngrößen werden aus den dimensionsbehafteten Größen mit Hilfe der Ähnlichkeits­beziehungen für Strömungsmaschinen berechnet. Im Einzelnen sind dieses:

Leistungszahl:	$\lambda = M_P / (\rho D^5 \omega_P^2)$
Wandlung:	$\mu = M_T / M_P$
Drehzahlverhältnis:	$\nu = \omega_T / \omega_P$
Wirkungsgrad:	$\eta = \nu \mu = (M_T \omega_T) / (M_P \omega_P)$

Bei gleichem Betriebsmedium und Temperaturbereich wird das statio­näre Betriebsverhalten durch diese Größen vollständig charakterisiert.

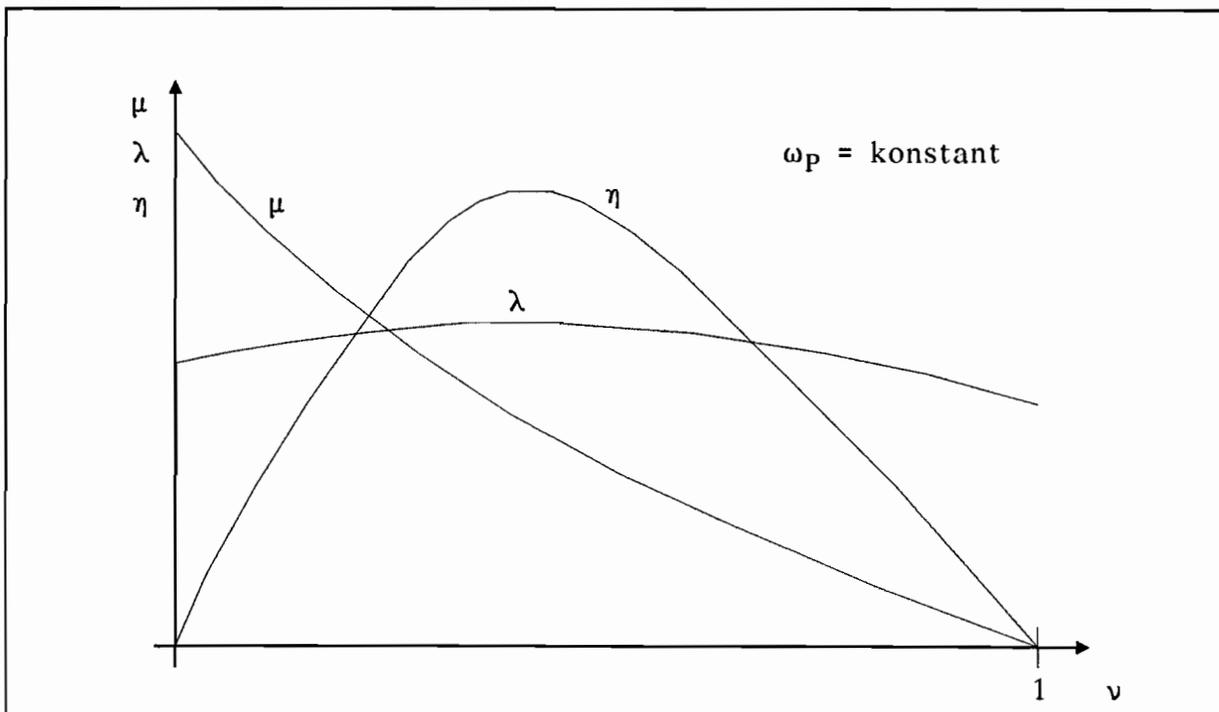


Abb. 2.3) Dimensionslose Wandlerkennlinie

Hydrodynamische Wandler werden nach verschiedenen Gesichtspunkten klassifiziert. Neben der Einteilung in verschiedene Bauformen werden Wandler auch nach dem Verlauf der Leistungszahl $\lambda(\nu)$ und der Lage des maximalen Wirkungsgrades $\eta_{\max}(\nu)$ unterschieden.

1) Einteilung nach dem Verlauf der Leistungszahl λ .

Grundsätzlich werden die verschiedene Verläufe der Leistungszahl in vier Gruppen unterteilt (Abb. 2.5):

- 1.1) Wandler mit nahezu konstanter λ -Kennlinie (Bauform Abb. 2.4 a).
- 1.2) Wandler mit fallender λ -Kennlinie (Bauform Abb. 2.4 b).
- 1.3) Wandler mit steigender λ -Kennlinie (Bauform Abb. 2.4 c).
- 1.4) Wandler, bei denen die λ -Kennlinie bei bestimmten Drehzahlverhältnissen stark abfällt (Bauform Abb. 2.4 d).

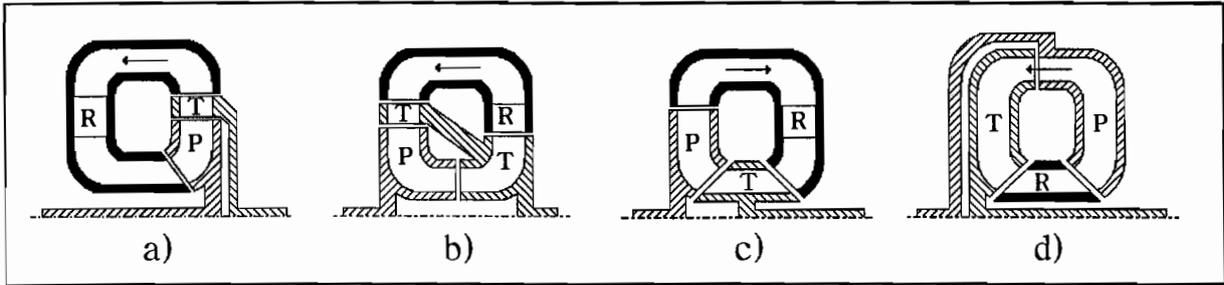


Abb. 2.4) Beispiele verschiedener Bauformen hydrodynamischer Wandler mit unterschiedlichen Leistungszahlverläufen (P = Pumpenrad; T = Turbinenrad; R = Leitrad (Reaktionsglied))

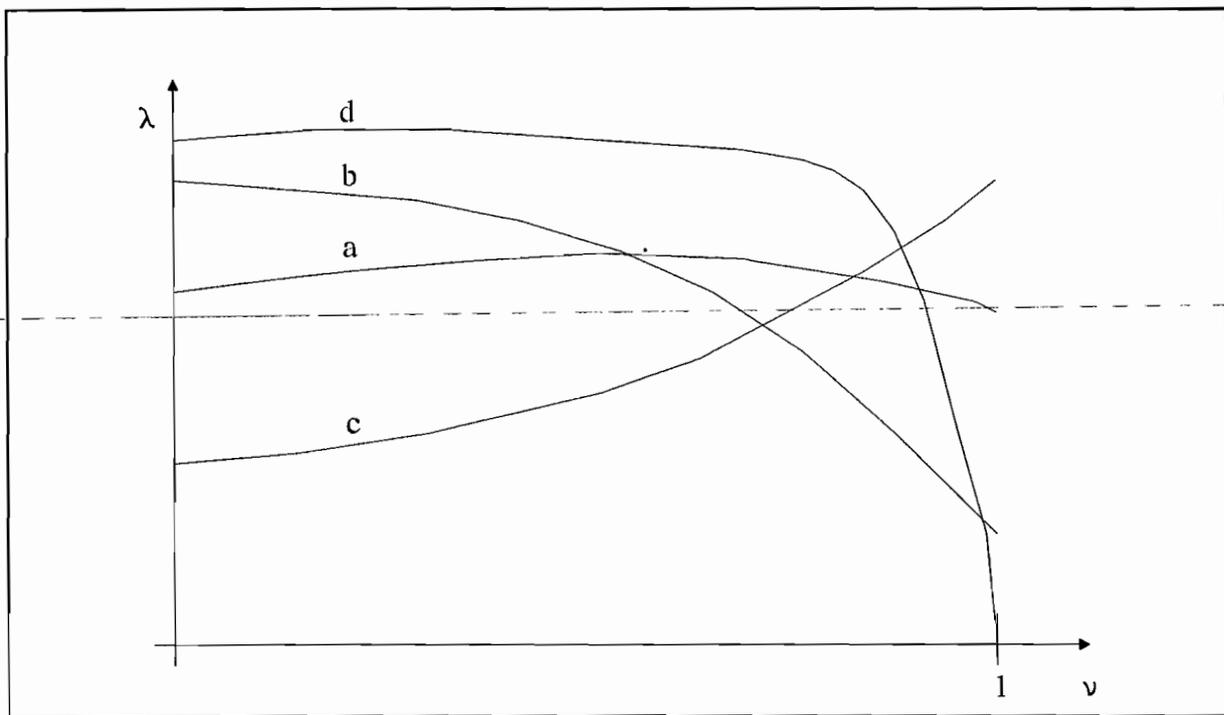


Abb. 2.5) Leistungszahlverläufe verschiedener Wandlerbauformen

2) Einteilung nach möglichen Betriebsphasen

Während bei einphasigen Wandlern (Bauform Abb. 2.4 a bis d) alle Schaufelräder innerhalb des gesamten Betriebsbereiches ihren Funktionszustand beibehalten, ändert beim mehrphasigen Wandler mindestens eines der Räder seine Funktion in Abhängigkeit vom Betriebspunkt. Wenn sich in der Bauform Abb. 2.4 d das Leitrad über einen Freilauf am Gehäuse abstützt und somit Momente nur in einer Richtung über-

tragen kann, spricht man vom zweiphasigen Wandler. Jede Änderung des Funktionszustandes eines Laufrades wird als neue Betriebsphase bezeichnet.

3) Beeinflußbare Wandler

Können im Betrieb von außen die Schaufelstellungen verändert werden, handelt es sich um einen Stellwandler. Beim Schaltwandler dagegen besteht die Möglichkeit, von außen einzelne Laufräder an- bzw. abzukuppeln oder festzusetzen.

4) Einteilung nach der Zahl der Schaufelräder

Bei den mehrstufigen und mehrteiligen Wandlern besteht ein Hauptglied (Pumpen-, Turbinen oder Leitrad) aus mehreren Schaufelkränzen. Nur wenn diese im Strömungskreislauf unmittelbar nacheinander durchströmt werden, spricht man von mehrteiligen, ansonsten von mehrstufigen Wandlern (Bauform Abb. 2.4 b gehört zu den mehrstufigen Wandlern, da die Turbine aus zwei Schaufelkränzen besteht).

5) Einteilung nach dem Drehsinn vom Turbinen- und Pumpenrad

Die Bauform Abb. 2.4 c ist ein Beispiel für einen Gegenlaufwandler, bei dem das Pumpen- und Turbinenrad jeweils einen entgegengesetzten Drehsinn haben. Bei diesen Wandlertypen durchströmt das Fluid nach dem Pumpenrad nicht sofort die Turbine, sondern zunächst das Leitrad. Gleichlaufwandler zeichnen sich durch gleichen Drehsinn des Pumpen- und Turbinenrades aus (Bauform Abb. 2.4 a, b und d). Hier durchströmt das Fluid nach der Pumpe, abgesehen von möglicherweise vorhandenen Umlenkungen durch den Strömungskanal, sofort das Turbinenrad.

Durch den Impulsmomentensatz (Eulersche Turbinengleichung) kann in erster Näherung der Zusammenhang zwischen der Strömung und dem stationären hydraulischen Drehmoment beschrieben werden /38/. Ver-

einfachend wird dabei angenommen, daß sich die Strömung längs des Strömungskanals durch einen repräsentativen Stromfaden beschreiben läßt (Stromfadentheorie).

$$M_h = \dot{m} (r_i c_{ui} - r_{i+1} c_{ui+1})$$

Dabei ist \dot{m} der durch das Schaufelrad fließende Massenstrom. Die Radien r_i am Schaufeleintritt und r_{i+1} am Schaufelaustritt ergeben sich aus der Definition des Stromfadens längs des Strömungskanals (Abb. 2.6). c_{ui} und c_{ui+1} sind die Umfangsgeschwindigkeiten der Absolutströmungen c_i und c_{i+1} am Schaufelein- und -austritt. Abb. 2.7 zeigt die Geschwindigkeitsdreiecke an einem Schaufelprofil im Auslegungspunkt. Allgemein gilt, daß sich die Absolutgeschwindigkeit c_i aus der Relativ- und der Umfangsgeschwindigkeit (w_i und u_i) berechnen läßt.

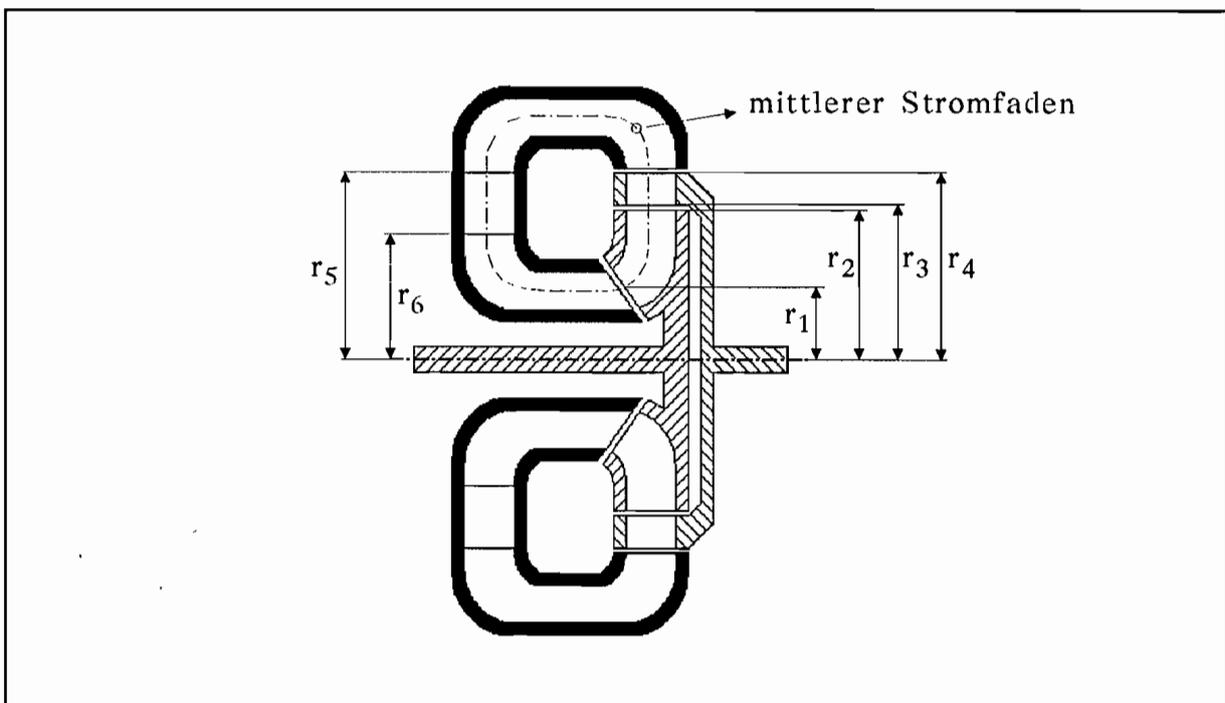


Abb. 2.6) Radien an den Schaufelein- und -austritten

r_1, r_3 und r_5 = Radien an den Schaufeleintritten

r_2, r_4 und r_6 = Radien an den Schaufelaustritten

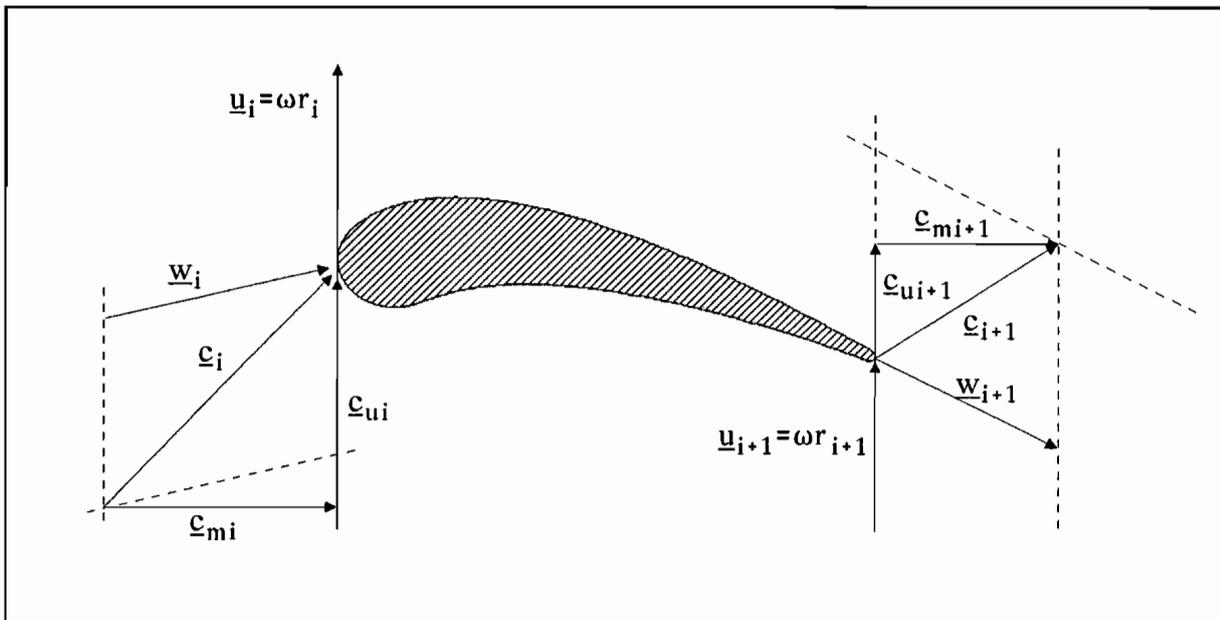


Abb. 2.7) Geschwindigkeitsdreiecke an einem Schaufelprofil
im Auslegungspunkt. (es gilt: $c_i = u_i + w_i$)

Kennzeichnend für den Auslegungspunkt eines Schaufelrades sind die schaufelkongruent verlaufenden Relativströmungen w_i und w_{i+1} . Dadurch sind die Ein- und Austrittswinkel der Relativströmung gleich der Schaufelwinkel am Ein- und Austrittsradius.

Mit Hilfe des Drallsatzes

$$r_{i+1} c_{ui+1} = r_{i+2} c_{ui+2}$$

und der Kontinuitätsgleichung

$$c_{mi+1} A_{i+1} = c_{mi+2} A_{i+2}$$

kann die Absolutströmung c_{i+2} am Eintritt des nachfolgenden Laufrades bestimmt werden (Dichte $\rho = \text{konst.}$; A_{i+1} und A_{i+2} sind die Flächen senkrecht zu den Meridiangeschwindigkeiten c_{mi+1} und c_{mi+2}).

Für alle im Strömungskreislauf vorhandenen Hauptglieder können somit in gleicher Weise die Geschwindigkeitsdreiecke im Auslegungspunkt

bestimmt werden. Mit dem Massenstrom und der Eulerschen Turbinengleichung folgen dann (ohne Berücksichtigung der einzelnen Verluste) die stationären hydraulischen Momente jedes einzelnen Schaufelrades.

$$\begin{aligned} M_{Ph} &= \dot{m} (r_2 c_{u2} - r_1 c_{u1}) \\ M_{Th} &= \dot{m} (r_3 c_{u3} - r_4 c_{u4}) \\ M_{Rh} &= \dot{m} (r_5 c_{u5} - r_6 c_{u6}) \end{aligned}$$

Erfolgt die Anströmung \underline{w}_i am Laufradeintritt nicht mehr schaufelkongruent, so entstehen dort Stoßverluste, da die Strömung beim Eintritt in den Schaufelkanal mehr oder weniger scharf umgelenkt wird. Dieses soll an einem Beispiel erläutert werden (Abb. 2.8).

Bei einer Änderung des Betriebspunktes ändert sich auch der Volumenstrom. In Abb. 2.8 ist der Volumenstrom und somit die Meridiangeschwindigkeit der Absolutströmung größer als im Auslegungspunkt. Da die Umfangsgeschwindigkeit und die Richtung der Absolutgeschwindigkeit konstant bleiben, muß sich der Strömungswinkel und der Betrag der Relativgeschwindigkeit ändern. Das hat zur Folge, daß die Anströmung nicht mehr schaufelkongruent erfolgt und beim Eintritt in den Schaufelkanal umgelenkt werden muß. Ein Maß für diese Umlenkung ist die Stoßgeschwindigkeit \underline{w}_{st} . Nach der Stromfadentheorie wird die Stoßverlustleistung mit dem Ansatz

$$P_{st} = \dot{m} \zeta_{st} \underline{w}_{st}^2 / 2$$

berechnet. ζ_{st} wird als Stoßverlustkoeffizient bezeichnet. Durch diesen Koeffizienten wird berücksichtigt, daß die Umlenkung der Strömung nicht sprunghaft sondern kontinuierlich erfolgt. ζ_{st} wird im allgemeinen über den gesamten Betriebsbereich als konstant angenommen.

Aus Abb. 2.8 ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \underline{w}_i &= \underline{w}_{i0} - \underline{w}_{st} \\ c_{i0} &= \underline{u}_{i0} + \underline{w}_i \\ c_{i0} &= \underline{u}_{i0} + \underline{w}_{i0} - \underline{w}_{st} \end{aligned}$$

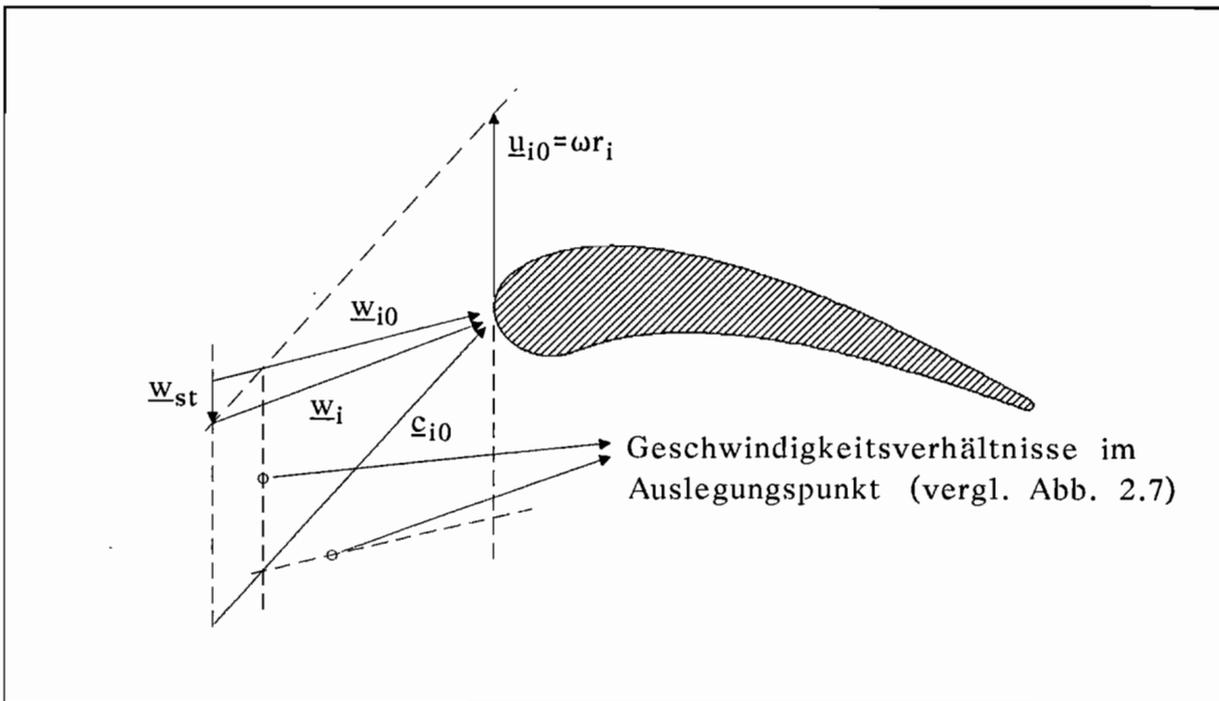


Abb. 2.8) Geschwindigkeitsdreiecke am Schaufeleintritt außerhalb des Auslegungspunktes

(\underline{u}_{i0} : Umfangsgeschwindigkeit wie im Auslegungspunkt;
 \underline{c}_{i0} : Gleiche Richtung wie die Absolutgeschwindigkeit im Auslegungspunkt, betragsmäßig jedoch größer;
 \underline{w}_{i0} : Gleiche Richtung wie die Relativgeschwindigkeit im Auslegungspunkt (d.h. schaufelkongruent), betragsmäßig jedoch größer; \underline{w}_i : Relativgeschwindigkeit außerhalb des Auslegungspunktes; \underline{w}_{st} : Stoßgeschwindigkeit)

Eine nicht schaufelkongruente Abströmung \underline{w}_{i+1} am Laufradaustritt wird Minderleistung genannt. Sie entsteht nicht nur, wenn der Betriebspunkt vom Auslegungspunkt abweicht, sondern auch bei einer geringen Schaufelzahl des Laufrades. In diesem Fall entstehen zwischen den Schaufeln größere Zwischenräume, in denen die Strömung der Schaufelkontur nicht mehr folgt. Durch Ablösegebiete auf der konvexen Schaufelseite kommt es zudem im Bereich des Schaufelaustrittes zu Kanalversperrungen, die den Strömungsverlauf und somit den Abströmwinkel beeinflussen. Ein Ansatz zur quantitativen Erfassung der Minderleistung wurde von Pfeleiderer /2/ aufgestellt.

Weitere Verluste treten an den Schaufel- und Kanalwänden infolge von Reibung auf. Im allgemeinen werden die Reibungsverluste in Anlehnung an das Rohrreibungsgesetz nach der Gleichung

$$P_R = \dot{m} \lambda_R \bar{w}^2 / 2$$

berechnet. Die Geschwindigkeit wird dabei als Mittelwert aller Relativgeschwindigkeiten an den Schaufelaustritten und Umlenkungen berechnet. λ_R ist der Reibungskoeffizient, der im gesamten Strömungskreislauf und über den gesamten Betriebsbereich in den meisten Fällen als konstant angenommen wird.

Zur Zeit gibt es noch keine geeigneten Modellansätze, mit denen alle im Kreislauf auftretenden Verluste über einen größeren Betriebsbereich qualitativ und quantitativ beschrieben werden können, so daß bei der rechnerischen Auslegung der Wandlerkreislaufströmung auf empirisch ermittelte Verlustkoeffizienten zurückgegriffen werden muß. Dieses gilt auch für die differenzierte Aufteilung der Verluste auf die einzelnen Laufräder sowie die strömungsführenden Kanäle.

Um die aufgrund von Verlusten entstehende Wärmeenergie abzuführen, wird das Betriebsmedium kontinuierlich ausgetauscht und gleichzeitig die Wärmeausdehnung ausgeglichen. Dabei wird das Betriebsmedium unter Druck (Wandlervorfülldruck) gehalten, um Kavitation¹ zu vermeiden.

¹ Kavitation (lat.): Hohlräumbildung. Durch örtliche Unterschreitung des Dampfdruckes des Betriebsmediums entstehen Gasblasen, die beim Druckanstieg explosionsartig wieder zusammenfallen. Hierdurch können große Schäden an den strömungsführenden Bauteilen entstehen.

2.3. Stand der Forschung

Die Berücksichtigung instationärer Betriebszustände in der Antriebs- und Regelungstechnik hat in den letzten Jahren immer mehr an Bedeutung gewonnen. Da hydrodynamische Wandler als Elemente eines Antriebsstranges das dynamische Verhalten wesentlich beeinflussen, ist die Kenntnis ihres Ein-/Ausgangsverhaltens von großem Interesse.

Theoretische und auch experimentelle Untersuchungen, die sich speziell mit instationärem Wandlerverhalten beschäftigen, liegen schon mehr als 20 Jahre zurück /3 - 9/. Arbeiten mit neuen Modellansätzen und Methoden sind nicht bekannt. Während Peeken /10/ und Rath /36/ das Modell von Herbertz /9/ für Simulationsrechnungen von Antriebssträngen verwenden, stellte Rohne /11/ gemessene instationäre Momente den stationären Kennlinien gegenüber.

1967 ist in der Arbeit von Ishihara et al. /4/ das instationäre Verhalten hydrodynamischer Wandler und Kupplungen in Modellen abgebildet worden, die auf theoretischen Überlegungen basieren. Grundlagen der Modellierung waren der instationäre Impulssatz und die Beschreibung der kinetischen Energie des gesamten Betriebsmediums. Vereinfachend wurde angenommen, daß sich der Strömungsverlauf längs eines einzelnen Stromfadens beschreiben läßt. Für die Bestimmung der im gesamten Strömungskreislauf auftretenden Verlustleistungen ist eine Gleichung angegeben worden, deren Herleitung in /12 - 16/ zu finden ist. Ishihara /4/ verglich die aus Messungen gewonnenen Drehzahlverläufe bei schlagartiger Entlastung der Pumpen- und Turbinenseite sowie einer Erregung mit einer Kardangelenkwelle (zwei Störungen pro Umdrehung) mit den simulierten Drehzahlverläufen. Während sowohl die Kardangelenkwellerregung als auch die Abbildung des stationären Verhaltens mit nur mäßigem Erfolg simuliert werden konnte, stimmten die Meß- und Modellergebnisse bei der schlagartigen Entlastung recht gut überein.

Ishihara /4/ untersuchte speziell den Einfluß der Trägheitswirkung des Betriebsmediums auf das instationäre Verhalten. Er kam dabei zu der

Erkenntnis, daß die Auswirkungen bis zu einer Störfrequenz von 0.3 Hz vernachlässigt werden können. Weiterhin wurden mechanische Ersatzsysteme aufgestellt, die das Ein-/Ausgangsverhalten mit und ohne Trägheitswirkung des Betriebsmediums beschreiben sollen. Die Abbildung erfolgte durch Parallel- und Reihenschaltung von Massen, viskosen Dämpfern, linearen Federn und Hebelübersetzungen.

Die Arbeit von Herbertz /9/ kann als derzeitiger Stand der Forschung angesehen werden. Ausgehend vom instationären Impuls- und Energiesatz wurde von ihm ein nichtlineares Differentialgleichungssystem aufgestellt (Gl. 2.1 a-d), mit dem das Pumpen-, Turbinen- und Reaktionsmoment in Abhängigkeit der Pumpen- und Turbinendrehzahl berechnet werden kann. Die Koeffizienten der Gleichungen ergeben sich aus den geometrischen Daten aller strömungsführenden Bauteile, wie z.B. den Radien an den Schaufelein- und austritten, den Profilformen und Trägheitsmassen. Speziell für den Fichtel & Sachs Wandler W240 konnte Herbertz /9/ die Gültigkeit der Differentialgleichungen nachweisen.

$$M_P = a_{11}\dot{\omega}_P + a_{13}\ddot{V} + a_{14}\dot{V}\omega_P + a_{16}\dot{V}^2 \quad (2.1 a)$$

$$M_T = a_{22}\dot{\omega}_T + a_{23}\ddot{V} + a_{24}\dot{V}\omega_P + a_{25}\dot{V}\omega_T + a_{26}\dot{V}^2 \quad (2.1 b)$$

$$M_R = a_{33}\ddot{V} + a_{35}\dot{V}\omega_T + a_{36}\dot{V}^2 \quad (2.1 c)$$

$$0 = a_{41}\dot{\omega}_P + a_{42}\dot{\omega}_T + a_{43}\ddot{V} + a_{44}\dot{V}\omega_P + a_{45}\dot{V}\omega_T + a_{46}\dot{V}^2 + a_{47}\omega_P^2 + a_{48}\omega_T^2 \quad (2.1 d)$$

Die Gl. 2.1 a-c folgen aus dem instationären Impulssatz. Im stationären Fall können diese Gleichungen auf die Eulersche Turbinengleichung zurückgeführt werden. Die Anwendung der instationären Energiegleichung auf die Wandlerströmung führt zu Gl. 2.1 d. Auf eine Auflistung der Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten wird in dieser Arbeit verzichtet werden. Sie ist in den Arbeiten /9, 10, 17, 36/ zu finden.

Die Herleitung des Differentialgleichungssystems erfolgte unter Annahmen, die die Anwendung der Theorie nur auf bestimmte Wandler zulassen. So ist die Annahme, Schaufelverengungen zu vernachlässigen, nur für Wandler mit dünnwandigen Blechschaufeln zulässig. Im Fall dickwandiger Schaufelprofile ist jedoch mit einer größeren Beeinflussung

der Strömung infolge der Querschnittsänderungen zu rechnen, die nicht mehr unberücksichtigt bleiben kann.

Die von Herbertz /9/ gemachten Vereinfachungen und Annahmen können wie folgt zusammengefaßt werden:

- Der Verlauf der Gesamtströmung kann durch einen mittleren Stromfaden beschrieben werden.
- Der Verlauf dieses Stromfadens ist unabhängig vom Betriebspunkt.
- Die Querschnittsflächen senkrecht zum Meridianschnitt werden als konstant angenommen.
- Der Einfluß von Schaufelverengungen wird vernachlässigt.
- Sowohl mechanische Verluste wie Lager-, Dichtungs- und Radseitenreibung als auch Spalt-, Diffusor- und Ventilationsverluste bleiben unberücksichtigt.
- Das Betriebsmedium wird als inkompressibel angenommen.

Weitere Vereinfachungen wurden bei den quantitativen Beschreibungen der Strömungsverluste gemacht. So werden die Stoß- und Reibungsverlustkoeffizienten als konstant angenommen. Adrian /18/ wies jedoch durch experimentelle Strömungsuntersuchungen an einem Wandler anderer Bauform nach, daß der Stoßverlustkoeffizient bei jedem Schaufelgitter einen anderen Wert hat und zudem abhängig von Betriebspunkt ist. Eine Aufschlüsselung des Reibungskoeffizienten für die einzelnen Schaufelgitter und Umlenkungen führte ebenfalls zu unterschiedlichen Zahlenwerten /18/, so daß die Annahme eines für alle Baugruppen konstanten Wertes nicht in jedem Fall gilt. Die Annahme eines vom Betriebspunkt unabhängigen Reibungskoeffizienten konnte von Adrian /18/ als gute Näherung bestätigt werden.

Für die Minderleistung am Leitrad errechnete Herbertz /9/ nach dem Ansatz von Pfeleiderer /2/ eine Fehlströmung von konstant 4° . Dieser Ansatz gilt jedoch nur im Bereich eines stoßfreien Eintritts in das Laufrad. Die von Adrian /18/ für zwei Betriebspunkte aus Messungen

ermittelten Fehlströmungen am Leitrad betragen $\Delta\alpha(v=0) = -4^\circ$ und $\Delta\alpha(v=1.1) = +4^\circ$. Je nach Betriebspunkt führt die Fehlströmung somit nicht immer zu einer Minderleistung sondern auch zu einer Mehrleistung.

Peeken /10/ und Rath /36/ machten den Vorschlag, die aus dem Differentialgleichungssystem von Herbertz /9/ berechneten Momente an die aus Messungen gewonnenen Momente anzupassen, indem der Rohrreibungskoeffizient und die Minderleistung variiert werden.

Die von Laschet /19/ beschriebene Modellierung des instationären Wandlerverhaltens beruht auf einer drehzahlabhängigen Abtastung der stationären Kennlinie mit nachträglicher Tiefpaßfilterung (PT1 oder PT2) der so bestimmten Momente. Über die einzustellende Verstärkung und Eckfrequenz des Filters wurden jedoch keine Angaben gemacht.

Wie die umfangreichen experimentellen Untersuchungen von Adrian /18/ gezeigt haben, besitzt die Strömung im Kreislauf hydrodynamischer Wandler in hohem Maße räumlichen Charakter. Versuche, die Wandlerströmung mit potentialtheoretischen Methoden /16, 20 - 22/ oder dem Stromflächenverfahren /23, 24/ zu beschreiben, führten bislang zu unbefriedigenden Ergebnissen /18/. Zur Abbildung des instationären Verhaltens spezieller Wandler ist man somit zur Zeit noch auf experimentell bestimmte Systembeschreibungen angewiesen, zu deren Bestimmung diese Arbeit beitragen soll.

3. Systemidentifikation

3.1. Allgemeines

Die Systemidentifikation ist eines der vier Teilgebiete der Systemdynamik, die sich allgemein mit dem Verhalten dynamischer Systeme unter dem Einfluß zeitlich veränderlicher Einwirkungen befaßt. Die weiteren Aufgabenstellungen der Systemdynamik sind die Systemanalyse, die inverse Systemanalyse und die Systemsynthese (Abb. 3.1) /37/. Die Beschreibung der vier Teilgebiete kann anhand Abb. 3.2 verdeutlicht werden.

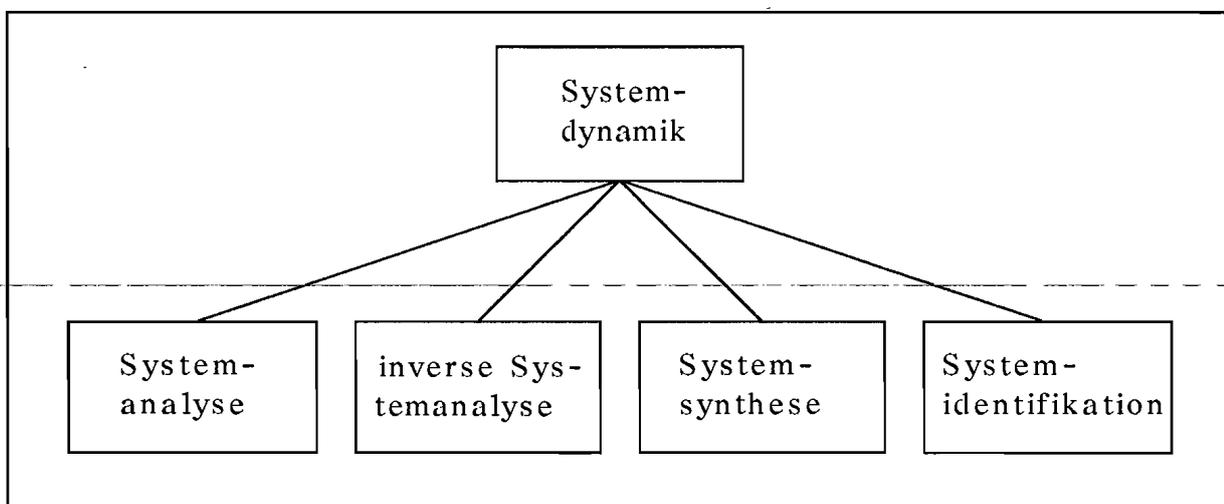


Abb. 3.1) Teilgebiete der Systemdynamik

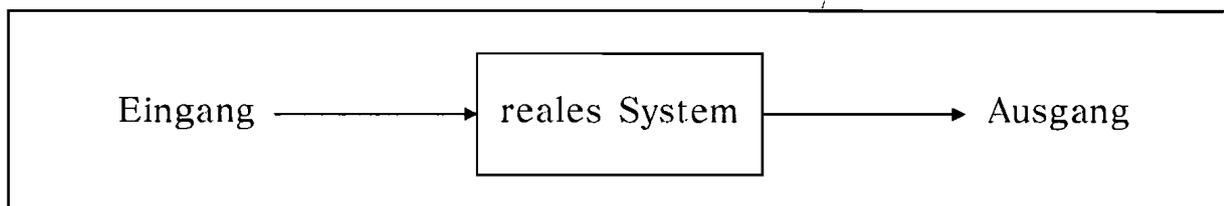


Abb. 3.2) Ein-/ Ausgangssystem

Die Aufgabe der Systemanalyse besteht darin, bei bekanntem Systemverhalten und gegebenem Eingangsgrößenverlauf den Ausgang des Systemes zu beschreiben. Ein Beispiel ist in der zuvor beschriebenen

Arbeit von Herbertz /9/ zu finden. Ausgehend von den Konstruktionsunterlagen und einigen Annahmen bezüglich des Systemverhaltens wurde ein Differentialgleichungssystem aufgestellt, das das dynamische Verhalten eines hydrodynamischen Wandlers beschreiben kann. Bei bekannten Systemeingangsgrößen berechnete Herbertz /9/ den Systemausgang durch Simulationsrechnungen auf dem Analog- und Digitalrechner.

Eine umgekehrte Fragestellung ergibt sich bei der **inversen Systemanalyse**. Hier wird der Systemeingang bei bekanntem Systemverhalten und gegebenem Systemausgang gesucht. Dieses Problem tritt in der Meßtechnik häufig auf, wenn aus dem verrauschten Ausgang von Meßwertaufnehmern oder -verstärkern der wahre Verlauf der Meßgröße bestimmt werden muß.

Die **Systemsynthese** beschäftigt sich damit, unter Vorgabe von Ein- und -ausgangsgrößenverläufen Systeme zu entwerfen, die hinsichtlich ihrer dynamischen Übertragungseigenschaften bestimmte Anforderungen erfüllen sollen.

Im Gegensatz zur Systemsynthese beschäftigt sich die **Systemidentifikation** nicht mit der Vorgabe des Systemverhaltens, sondern mit dessen Beschreibung. Dieses erfolgt mit Hilfe von Modellen, die durch Messungen der Systemein- und -ausgänge an das reale System angepaßt werden. Grundsätzlich kann die Vorgehensweise anhand Abb. 3.3 erläutert werden.

Nach der Festlegung der Modellstruktur und der Modellanfangsparameter werden sowohl das reale System als auch das Modell mit dem gleichen Eingang erregt. Aus der Differenz der beiden Ausgangsgrößen folgt der Ausgangsfehler. Nach der Bewertung mit einem Gütekriterium (z.B. quadratischer Fehler), folgt die Parameterschätzung und -anpassung. Ein gebräuchliches Verfahren hierfür ist die Minimierung des quadratischen Fehlers.

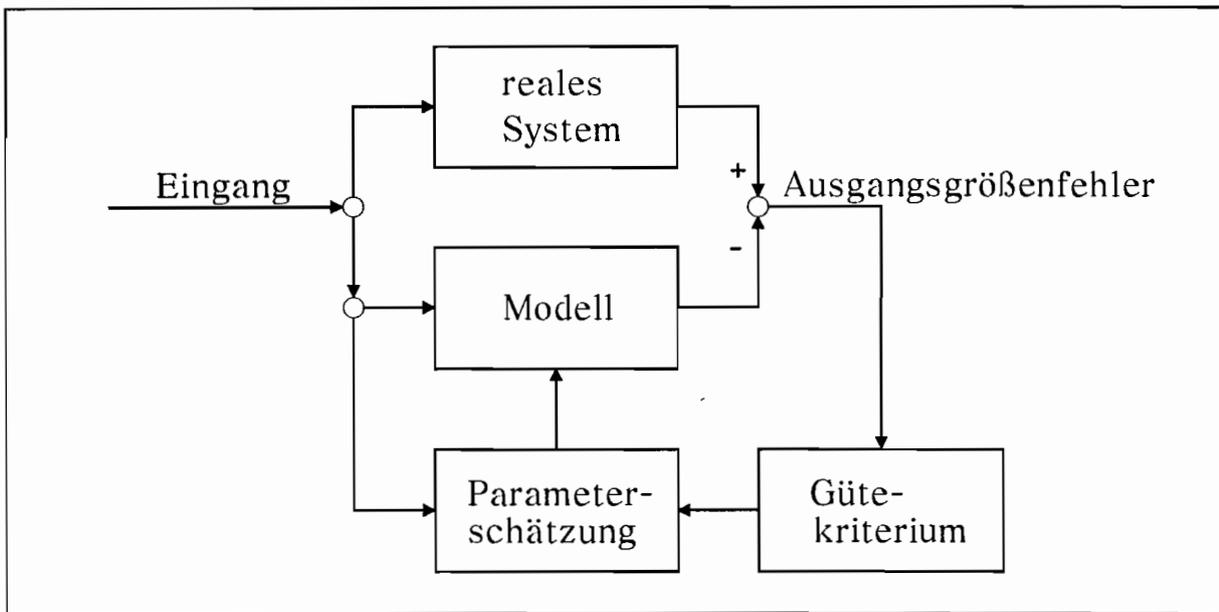


Abb. 3.3 Vorgehensweise der Systemidentifikation

Je nach System und Modellstruktur ist eine iterative Anpassung der Modellparameter notwendig. In diesem Fall führt die Schätzung der Parameter hinsichtlich des Gütekriteriums nicht sofort auf ein optimales Modell, sondern nähert sich mit jedem Iterationsschritt diesem Optimum an.

3.1.1. Klassifizierung der Identifikationsmethoden

Die Systemidentifikation kann hinsichtlich der verwendeten Methoden nach den folgenden Kriterien unterschieden werden /28/.

- Klassen von mathematischen Modellen
- Klassen der verwendeten Eingangssignale
- Abweichung zwischen Prozeß und Modell
- Ablauf der Messung und Auswertung
- Verwendete Algorithmen zur Datenverarbeitung

Abgesehen von der zeitdiskreten und zeitkontinuierlichen Modellform unterscheidet man zwei Klassen von mathematischen Modellen: das parametrische und das nichtparametrische Modell. Beim parametrischen Modell, oder auch Modell mit Struktur, wird das Ein-/Ausgangsverhalten in der Form von algebraischen Gleichungen abgebildet. Bei relativ einfachen Systemen und bei der richtigen Wahl des Modellansatzes können die Parameter der Gleichung physikalischen Größen, wie beispielsweise Federsteifigkeiten oder Trägheitsmassen, zugeordnet werden. Meist sind die ermittelten Parameter aber physikalisch nicht interpretierbar. Um einige grundlegende Informationen über Resonanzstellen und Dämpfungseigenschaften des Systems zu erhalten, wird das Verhalten häufig zuerst in nichtparametrischer Form dargestellt. Hierbei handelt es sich um Modelle, die einer direkten numerischen Auswertung nicht zugänglich sind. Vielmehr vermitteln sie, in graphischer Form, beispielsweise als Frequenzgang, einen Gesamteindruck über das Systemverhalten. Die Erkenntnisse der nichtparametrischen Modellierung können dann in die Erstellung geeigneter Modellstrukturen für das parametrische Modell mit einfließen.

Die Modellstruktur richtet sich stark nach der Art der **verwendeten Eingangssignale**. Diese können natürlicher Art sein, also vom System selber herrühren, oder künstlich dem System beaufschlagt werden. Künstliche Signale sind meist deterministisch, während systemeigene Erregungen sowohl deterministisch als auch stochastisch sein können. In Abb. 3.4 ist eine Übersicht über die Signalklassifizierung dargestellt /25/.

Grundsätzlich können drei verschiedene Fehler **zwischen dem Prozeß und dessen Modell** definiert werden (Abb. 3.5 a-c). Welcher Fehler zur Bewertung der Modellgüte verwendet wird, hängt zum einen von der Aufgabenstellung und zum anderen davon ab, wie einfach sich die gesuchten Größen bestimmen lassen.

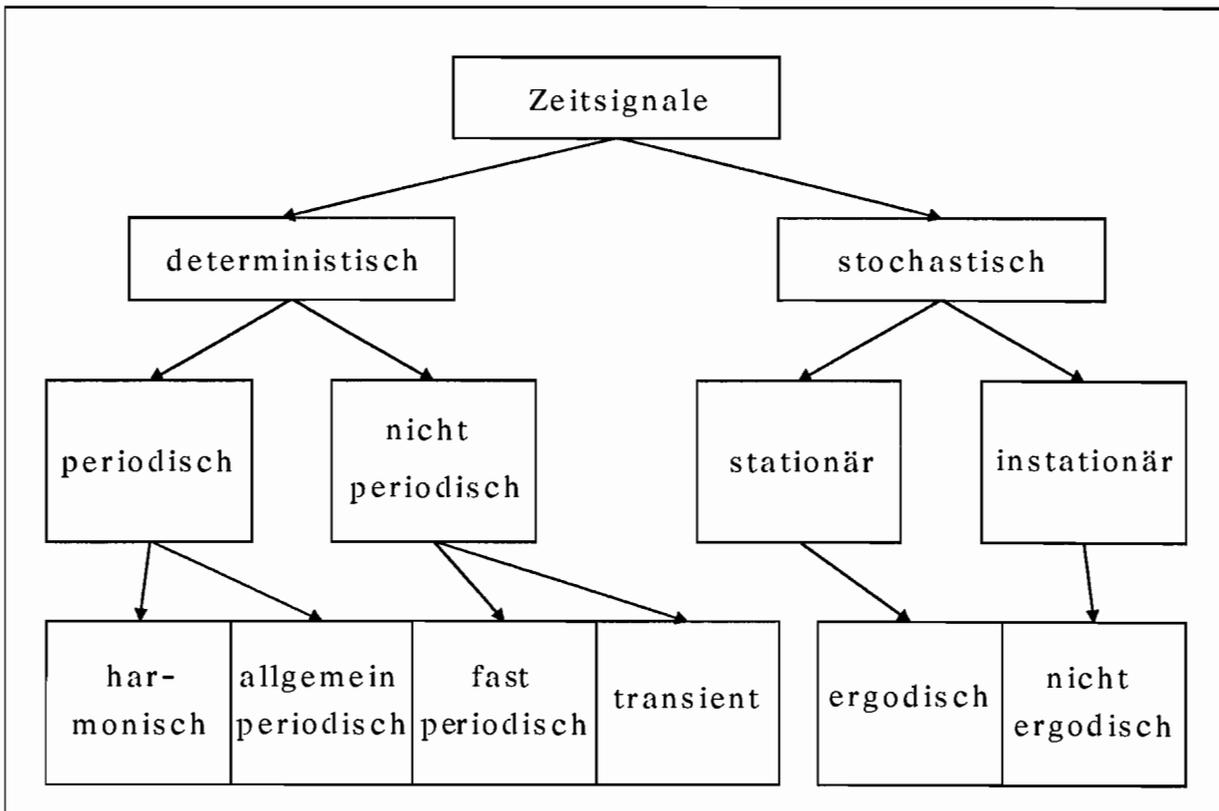


Abb. 3.4) Signalklassifizierung

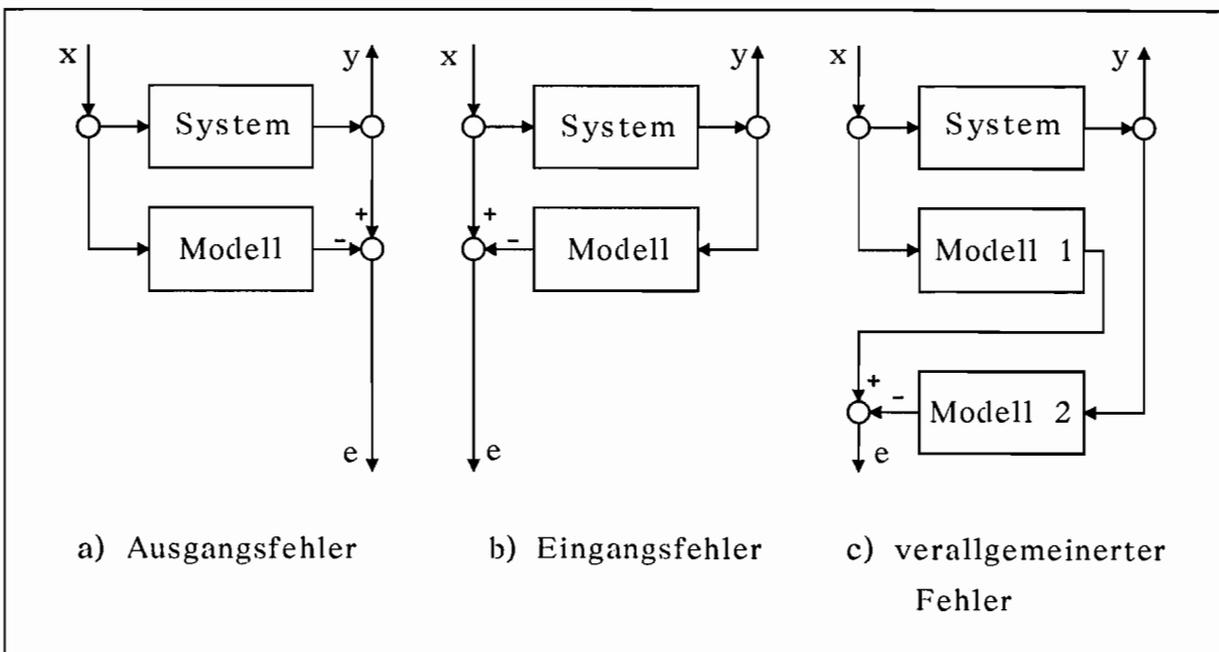


Abb. 3.5) Verschiedene Definitionen des Fehlers zwischen dem System und dessen Modell

Beim **Ablauf der Messung und Auswertung** unterscheidet man die direkte und indirekte Kopplung zwischen dem realen System und dem Modell. Ist das System direkt mit dem Modell gekoppelt, so handelt es sich um eine on-line-Identifikation. Werden dagegen die Ein- und Ausgänge des Systems zwischengespeichert und dann erst zur Modellanpassung ausgewertet, spricht man von einer off-line-Identifikation.

In Abhängigkeit von der direkten oder indirekten Kopplung zwischen dem System und dem Modell kann der **verwendete Algorithmus zur Datenverarbeitung** in eine blockweise, nichtrekursive und rekursive Echtzeitdatenverarbeitung unterteilt werden. Die blockweise und nichtrekursive Verarbeitung wird bei der off-line-Identifikation verwendet. Die zwischengespeicherten Systemein- und -ausgangsgrößen werden in einem Block zur einmaligen Modellanpassung verwendet. Die on-line-Identifikation setzt dagegen eine Echtzeitdatenverarbeitung voraus, bei der das Modell nach jedem neu gemessenen Datensatz rekursiv angepaßt wird. Bei dem Datensatz handelt es sich entweder um einzelne oder mehrere Meßwerte.

Da je nach Modellstruktur und Parameterschätzverfahren eine iterative Anpassung der Modellparameter notwendig ist und diese Vorgehensweise unter Umständen sehr zeitintensiv sein kann, ist sie meist nur bei der off-line-Identifikation, und nur bedingt bei der on-line-Identifikation, durchführbar.

Auf die Vielzahl der verschiedenen Parameterschätzverfahren soll nicht eingegangen werden. Zu diesem Themengebiet sei auf einige der vielen Veröffentlichungen hingewiesen /25 - 28/.

3.1.2. Beschreibung und Darstellung von linearen und nichtlinearen, kausalen, zeitinvarianten Systemen

Lineare, kausale und zeitinvariante Systeme mit q Ausgängen und p Eingängen können allgemein in der Form eines linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten (bzw. Matrizen) dargestellt werden (Gl. 3.1).

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \frac{d^{(i)} \underline{y}(t)}{dt^{(i)}} = \sum_{j=0}^n \beta_j \frac{d^{(j)} \underline{x}(t)}{dt^{(j)}} \quad (3.1)$$

Dabei repräsentieren die Vektoren \underline{y} die q Ausgänge und \underline{x} die p Eingänge des Systems. Während die Gl. 3.1 das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems in kontinuierlicher Form beschreibt, ist die Differenzengleichung (Gl. 3.2) eine zeitdiskrete Darstellung.

$$\sum_{i=0}^m a_i \underline{y}(r-i) = \sum_{j=0}^n b_j \underline{x}(r-j) \quad (3.2)$$

Der Vektor $\underline{y}(r-i)$ ist der $(r-i)$ -te diskrete Abtastwert der kontinuierlichen Systemausgangsgröße. Entsprechendes gilt für den Vektor $\underline{x}(r-j)$.

Der Übergang von der zeitkontinuierlichen zur zeitdiskreten Darstellung kann unter anderem mit Hilfe der bilinearen Z-Transformation erfolgen, was im folgenden gezeigt werden soll. Wird das Differentialgleichungssystem in Gl. 3.1 in den Frequenzbereich¹ transformiert, so folgt mit der komplexen Variablen $s = j\omega$ die Gl. 3.3.

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \underline{y}(s) s^i = \sum_{j=0}^n \beta_j \underline{x}(s) s^j \quad (3.3)$$

1: Alle Transformationen in den Bildbereich erfolgen mit Hilfe der einseitigen Fouriertransformation unter Vernachlässigung der Anfangswerte.

Während die Fouriertransformierte eines kontinuierlichen Signals für Frequenzen $-\infty < f < +\infty$ definiert ist, kann mit der Substitution

$$f = 1/(2\pi)\tan[\pi(f'/f_a)]$$

das Spektrum in diskreter Form auf ein Intervall $-0.5f_a < f' < +0.5f_a$ abgebildet werden. f_a ist hierbei die Abtastfrequenz des diskontinuierlichen Signals.

Mit

$$s = j 2\pi f$$

und

$$j \tan(x) = (1 - e^{-j2x}) / (1 + e^{-j2x})$$

folgt:

$$s = (1 - z^{-1}) / (1 + z^{-1}) .$$

Dabei stellt die komplexe Variable $z^{-1} = e^{-j2\pi(f'/f_a)}$ ein Verzögerungsglied erster Ordnung dar. Wird die Variable s in Gl. 3.3 substituiert, so erhält man die Z-Transformierte der Differenzgleichung 3.2.

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \frac{(1-z^{-1})^i}{(1+z^{-1})^i} y(z) = \sum_{j=0}^n \beta_j \frac{(1-z^{-1})^j}{(1+z^{-1})^j} x(z)$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der inversen Z-Transformation in den Zeitbereich auf die Gl. 3.2 zurücktransformiert werden.

Die Anwendung der bilinearen Z-Transformation soll hier an einem Beispiel erläutert werden. Aus der Differentialgleichung

$$\alpha_0 y(t) + \alpha_1 \dot{y}(t) = \beta_0 x(t) + \beta_1 \dot{x}(t)$$

folgt nach der Transformation in den Frequenzbereich die Gleichung

$$\alpha_0 y(s) + \alpha_1 s y(s) = \beta_0 x(s) + \beta_1 s x(s) .$$

Wird nun die Variable s substituiert und die Gleichung auf eine Summenform gebracht, folgt mit den Transformationspaaren

$$\begin{array}{ll} x(z) \bullet \text{---} \circ & x(r) \\ z^{-1}x(z) \bullet \text{---} \circ & x(r-1) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} y(z) \bullet \text{---} \circ & y(r) \\ z^{-1}y(z) \bullet \text{---} \circ & y(r-1) \end{array}$$

die rekursive Differenzengleichung (oder auch Zeitreihe)

$$y(r) = c_1x(r) + c_2x(r-1) + c_3y(r-1)$$

mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} c_1 &= (\alpha_0 + \alpha_1)^{-1}(\beta_0 + \beta_1) \\ c_2 &= (\alpha_0 + \alpha_1)^{-1}(\beta_0 - \beta_1) \\ c_3 &= (\alpha_0 + \alpha_1)^{-1}(\alpha_1 - \alpha_0) . \end{aligned}$$

Aus der nichtrekursiven, analytischen Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) = y_0 e^{-\alpha_0/\alpha_1 t} + \beta_0/\alpha_0 \quad (\text{für } x(t) = 1)$$

ist durch die Transformation eine rekursive Zeitreihe geworden.

Die Anwendung der numerischen Rechteck- oder Trapezintegration führt neben der bilinearen Z-Transformation auch auf eine Differenzengleichung, für die folgende Substitutionen der komplexen Variablen s angegeben werden können.

$$\text{Rechteckintegration: } s = f_a(z-1) \quad \text{oder} \quad s = f_a(z-1)/z$$

$$\text{Trapezintegration: } s = f_a(z-1)/(z+1)$$

Auch diese soll an einem Beispiel erläutert werden. Nach der Rechteck- oder auch Eulerintegration gilt:

$$x_{i+1} = x_i + \dot{x}_i/f_a .$$

Die Lösung der Differentialgleichung

$$y(t) = \dot{x}(t) \quad (y_i = \dot{x}_i)$$

lautet dann:

$$y_i = f_a(x_{i+1}-x_i) .$$

Das gleiche Ergebnis erhält man auch aus der Differentialgleichung mit der Substitution $s = f_a(z-1)$.

$$\begin{aligned} y(t) &= \dot{x}(t) \\ y(s) &= sx(s) \\ y(z) &= f_a(z-1)x(z) \\ y_i &= f_a(x_{i+1}-x_i) \end{aligned}$$

Alle weiteren Darstellungsformen linearer Systeme, wie beispielsweise die Zustandsraumdarstellung, können aus der Differential- oder Differenzgleichung abgeleitet werden. Auf die grundlegenden Eigenschaften linearer Systeme, wie das Superpositions- und Proportionalitätsprinzip sowie die Stabilität, soll nicht weiter eingegangen werden.

Der erste bekannte nichtlineare Modellansatz zur Beschreibung zeitinvarianter und kausaler Eingrößensysteme mit stetigen Nichtlinearitäten ist die Volterra-Funktionalreihe (Gl. 3.4).

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} h_1(\tau) x(t-\tau) d\tau + \\ &\quad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ &\quad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) x(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \\ &\quad \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots + \dots + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Diese Reihe ist eine Summe aus unendlich vielen Integralausdrücken, die als Sonderfall das Duhamelsche Faltungsintegral für lineare, zeitinvariante und kausale Systeme beinhaltet.

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) dt$$

Die Funktionen $h_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ werden als Kerne bezeichnet, wobei $h_1(t)$ die aus der linearen Theorie bekannte Gewichtsfunktion ist.

Die Anwendung der Volterra-Funktionalreihe sowie einige Eigenschaften nichtlinearer Systeme sollen hier kurz an einem Beispiel erläutert werden. Gegeben sei das System in Gl. 3.5.

$$y(t) = a_1 x(t) + a_2 x(t)^2 + a_3 x(t)^3 \quad (3.5)$$

Für das harmonische Eingangssignal

$$x(t) = 2 x_0 \cos(\omega_0 t) = x_0 [e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t}] \quad (3.6)$$

lautet die analytische Lösung für das Ausgangssignal $y(t)$:

$$y(t) = \cos(\omega_0 t) [2a_1 x_0 + 6a_3 x_0^3] + \cos(2\omega_0 t) [2a_2 x_0^2] + \cos(3\omega_0 t) [2a_3 x_0^3] + 2a_2 x_0^2. \quad (3.7)$$

Anders als bei linearen Systemen antwortet das nichtlineare System auf eine monofrequente Erregung nicht nur mit der gleichen Frequenz, sondern auch mit deren Vielfachen und bei mehrfrequenter Erregung auch mit Kombinationsfrequenzen der Erregerfrequenzen. Grundsätzlich gilt für nichtlineare Systeme nicht das Superpositions- und Proportionalitätsprinzip.

Speziell für das System in Gl. 3.5 sind die Kerne der Volterraschen Funktionalreihe bekannt.

$$\begin{aligned} h_1(t_1) &= a_1 \delta(t_1) \\ h_2(t_1, t_2) &= a_2 \delta(t_1) \delta(t_2) \\ h_3(t_1, t_2, t_3) &= a_3 \delta(t_1) \delta(t_2) \delta(t_3) \\ h_4 &= h_5 = \dots = h_{\infty} = 0 \end{aligned}$$

Somit kann der Ausgang $y(t)$ des Systems aus der Gleichung

$$\begin{aligned}
 y(t) = & a_1 x_0 \int_0^{\infty} \delta(\tau_1) \left[e^{+j\omega(t-\tau_1)} + e^{-j\omega(t+\tau_1)} \right] d\tau_1 + \\
 & a_2 x_0^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \left[\begin{array}{l} e^{+j\omega(t-\tau_1)} + e^{-j\omega(t+\tau_1)} \\ e^{+j\omega(t-\tau_2)} + e^{-j\omega(t+\tau_2)} \end{array} \right] d\tau_1 d\tau_2 + \\
 & a_3 x_0^3 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \delta(\tau_3) \left[\begin{array}{l} e^{+j\omega(t-\tau_1)} + e^{-j\omega(t+\tau_1)} \\ e^{+j\omega(t-\tau_2)} + e^{-j\omega(t+\tau_2)} \\ e^{+j\omega(t-\tau_3)} + e^{-j\omega(t+\tau_3)} \end{array} \right] d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3
 \end{aligned}$$

berechnet werden. Mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \left[e^{+j\omega(t-\tau)} + e^{-j\omega(t+\tau)} \right] &= 2\cos(\omega t) e^{-j\omega\tau} \\
 \int_0^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} &= 1
 \end{aligned}$$

und den Transformationen

$$\begin{aligned}
 a_1 \delta(\tau_1) = h_1(\tau_1) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad H_1(\omega_1) &= a_1 \\
 a_2 \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) = h_2(\tau_1, \tau_2) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad H_2(\omega_1, \omega_2) &= a_2 \\
 a_3 \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \delta(\tau_3) = h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \quad \text{O} \text{---} \bullet \quad H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= a_3
 \end{aligned}$$

folgt die gesuchte Ausgangsgröße $y(t)$ (vergl. Gl. 3.7).

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \cos(\omega_0 t) \left[2H_1(\omega_1) x_0 + 6H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) x_0^3 \right] + \\
 & \cos(2\omega_0 t) \left[2H_2(\omega_1, \omega_2) x_0^2 \right] + \\
 & \cos(3\omega_0 t) \left[2H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) x_0^3 \right] + 2H_2(\omega_1, \omega_2) x_0^2
 \end{aligned}$$

Neben einigen anderen allgemeinen nichtlinearen Modellansätzen /30/ sind vor allem spezielle Prozeßbeschreibungen entwickelt worden, mit denen eine begrenzte Klasse nichtlinearer Systeme beschrieben werden können. Hierzu zählen auch die Ein- und Mehrgrößenmodelle von Wiener und Hammerstein. Während das Wiener-Modell aus einer linearen, dynamischen Übertragungsfunktion und einem dahintergeschalteten sta-

tischen Element besteht, ist es beim Hammerstein-Modell umgekehrt. Dem durch Polynome endlichen Grades repräsentierten statischen Element ist eine dynamische Übertragungsfunktion nachgeschaltet.

Neben der kontinuierlichen Darstellungsform nichtlinearer Systeme gibt es, ähnlich wie bei der linearen Beschreibung, auch zeitdiskrete Abbildungen, auf die hier jedoch nicht näher eingegangen werden soll.

3.2. Identifikation von linearen Systemen

Im nachfolgend beschriebenen Verfahren wird eine Identifikationsmethode vorgestellt, die speziell für die Modellierung von hydrodynamischen Wandlern und Kupplungen entwickelt und angewendet wurde. Grundsätzlich kann die Methode auch auf andere mechanische oder elektrische Systeme übertragen werden. Obwohl bei der Herleitung von der linearen Systemtheorie ausgegangen wird, ist die Anwendung des Verfahrens nicht nur auf lineare Systeme beschränkt sondern kann auch auf nichtlineare Systeme ausgedehnt werden. Dieses wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit (Kap. 6.) exemplarisch für hydrodynamische Wandler gezeigt.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß alle Herleitungen und Darstellungen, sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich, diskret erfolgen. Die Vorgehensweise der Identifikation kann in vier Schritte unterteilt werden, die im folgenden kurz beschrieben werden.

1. Experimentelle Frequenzgangmessung

Durch mehrere aufeinanderfolgende, monofrequente Erregungen und Messungen der jeweiligen Systemantworten im eingeschwungenen Zustand kann der Frequenzgang eines linearen Systems in nichtparametrischer und diskreter Form bestimmt werden. Da ein System nur mit endlich vielen Frequenzen erregen werden kann, ist der so bestimmte Frequenzgang bandbegrenzt. Die Anwendung der experimentellen Frequenzgangmessung auf nichtlineare Systeme wird harmonische Linearisierung genannt /37/.

2. Parametrisierung des Frequenzganges

Mit Hilfe geeigneter Parameterschätzverfahren kann ein gebrochen rationales und komplexes Polynom gefunden werden, das den Frequenzgang in dem bandbegrenzten Bereich, in dem er bestimmt wurde, approximiert. Dabei darf daß der Abstand zwischen zwei Frequenzpunkten nicht zu groß sein, damit das Systemverhalten auch für Zwischenwerte durch die Approximation hinreichend genau beschrieben werden kann. Außerhalb des bestimmten Frequenzbandes kann jedoch mit dem Polynom keine Aussage über das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems gemacht werden. Die Parametrisierung des Frequenzganges führt auf ein parametrisches Modell.

3. Transformation in den Zeitbereich

Nach der linearen Theorie kann mit Hilfe der inversen Fouriertransformation aus dem geschätzten, komplexen Polynom ein Modell in der Form einer linearen Differentialgleichung bestimmt werden.

4. Darstellung im Zustandsraum

Bei höheren Polynomansatzgraden ist die numerische Lösung dieser Differentialgleichung mit großen Schwierigkeiten verbunden, da höhere Ableitungen des Systemein- und/oder -ausganges berechnet werden müssen. Um dieses Problem zu umgehen, wird die Differentialgleichung in den Zustandsraum transformiert, in dem die numerische Integration schneller und einfacher durchgeführt werden kann. Der Differentialgleichung n-ter Ordnung wird dabei in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung überführt.

Abb. 3.6 verdeutlicht den Ablauf der Identifikation am Beispiel eines Einfreiheitsgradsystems. In den folgenden Kapiteln werden die einzelnen oben aufgeführten Schritte der Identifikationsmethode "Experimentelle Frequenzgangmessung", "Parametrisierung des Frequenzganges", "Transformation in den Zeitbereich" und "Darstellung im Zustandsraum" ausführlich beschrieben.

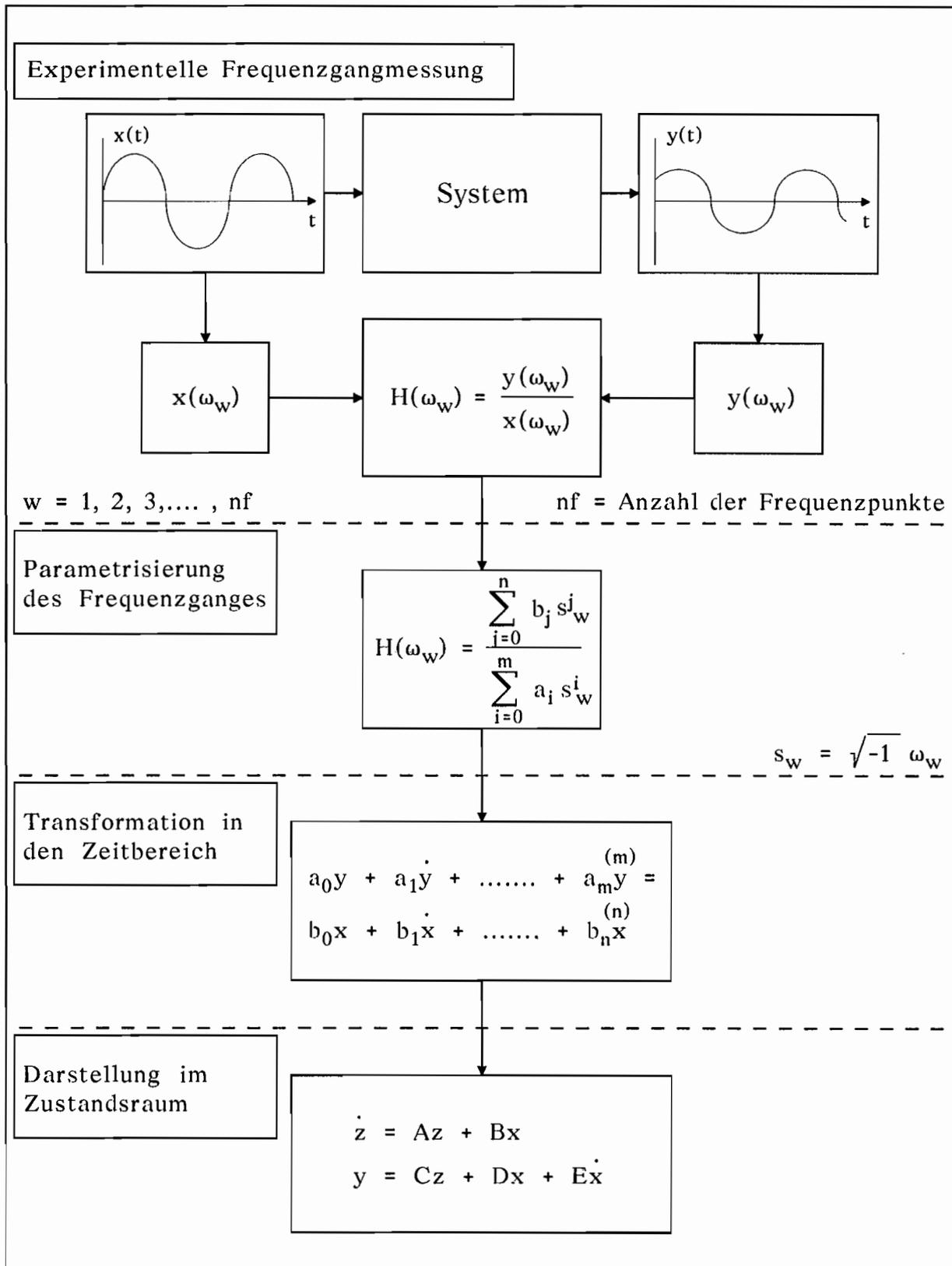


Abb. 3.6) Ablaufschema der linearen Identifikation für Einfreiheitsgradsysteme

3.2.1. Experimentelle Frequenzgangmessung

Für ein System mit q Freiheitsgraden hat die Frequenzgangmatrix $q \cdot q$ komplexe Koeffizienten¹, die durch Ein-/Ausgangsmessungen bestimmt werden sollen. Wird ein lineares System monofrequent mit ω_w erregt, so antwortet es mit der gleichen Frequenz, meist jedoch phasenverschoben und nicht mit der gleichen Eingangsamplitude. Die Amplituden- und Phasenänderungen werden im Frequenzgang abgebildet.

$$\underline{y}(\omega_w) = \underline{h}(\omega_w) \underline{x}(\omega_w) \quad \text{mit } q = 1$$

$$\underline{y}(\omega_w) = \underline{H}(\omega_w) \underline{x}(\omega_w) \quad \text{mit } q \neq 1$$

$$w = 1, 2, 3, \dots, nf \quad (nf = \text{Anzahl der Frequenzpunkte})$$

Für $q = 1$ kann die Unbekannte $h(\omega_w)$ für diskrete Frequenzen durch eine Messung der Systemein- und -ausgangsgröße pro Frequenzpunkt ω_w bestimmt werden.

Für $q > 1$ stehen bei einer Messung den q^2 unbekanntem Koeffizienten $h_{kl}(\omega_w)$ aber nur q Gleichungen gegenüber. Dementsprechend muß das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems für einen Frequenzpunkt q -mal bestimmt werden. Die Erregungen müssen hierbei linear unabhängig voneinander sein, damit die Matrix $\underline{x}(\omega_w)$ zur Bestimmung der Frequenzgangmatrix invertiert werden kann. In den Matrizen $\underline{x}(\omega_w)$ und $\underline{y}(\omega_w)$ sind die Systemein- und -ausgänge spaltenweise zusammengefaßt. Für die verschiedenen Erregungen $x_{kl}(\omega_w)$ bietet sich an, jeden Freiheitsgrad des Systems nacheinander und einzeln anzuregen. Die Systemeingangsmatrix $\underline{x}(\omega_k)$ wird dann zur Diagonalmatrix der Einzel-erregungen $x_{kk}(\omega_k)$.

1: Die Koeffizienten einer Frequenzgangmatrix sind im allgemeinen komplexe Funktionen der Frequenz. Gleiches gilt auch für die dynamische Steifigkeits- und Übertragungsmatrix.

$$\begin{vmatrix} y_{11}(\omega_w) & y_{12}(\omega_w) & \dots & y_{1q}(\omega_w) \\ y_{21}(\omega_w) & y_{22}(\omega_w) & \dots & y_{2q}(\omega_w) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{q1}(\omega_w) & y_{q2}(\omega_w) & \dots & y_{qq}(\omega_w) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} h_{11}(\omega_w) & h_{12}(\omega_w) & \dots & h_{1q}(\omega_w) \\ h_{21}(\omega_w) & h_{22}(\omega_w) & \dots & h_{2q}(\omega_w) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{q1}(\omega_w) & h_{q2}(\omega_w) & \dots & h_{qq}(\omega_w) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{11}(\omega_w) & x_{12}(\omega_w) & \dots & x_{1q}(\omega_w) \\ x_{21}(\omega_w) & x_{22}(\omega_w) & \dots & x_{2q}(\omega_w) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{q1}(\omega_w) & x_{q2}(\omega_w) & \dots & x_{qq}(\omega_w) \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{l} x_{k1}(\omega_w) \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Nr. der Messung} \\ \text{Freiheitsgrad} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\underline{H}(\omega_w) = \underline{y}(\omega_w) \underline{x}(\omega_w)^{-1}$$

Werden nicht alle relevanten Freiheitsgrade angeregt (nicht steuerbar) oder gemessen (nicht beobachtbar), so kann nur eine reduzierte Frequenzgangmatrix bestimmt werden. Nachfolgend wird ein Beispiel angegeben, bei dem nur die Freiheitsgrade 1 und q erregt aber alle Systemausgangsgrößen $y_{k1}(\omega_k)$ gemessen werden können.

$$\begin{vmatrix} y_{11}(\omega_w) & y_{12}(\omega_w) & \dots & y_{1q}(\omega_w) \\ y_{21}(\omega_w) & y_{22}(\omega_w) & \dots & y_{2q}(\omega_w) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{q1}(\omega_w) & y_{q2}(\omega_w) & \dots & y_{qq}(\omega_w) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} h_{11}(\omega_w) & h_{12}(\omega_w) & \dots & h_{1q}(\omega_w) \\ h_{21}(\omega_w) & h_{22}(\omega_w) & \dots & h_{2q}(\omega_w) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{q1}(\omega_w) & h_{q2}(\omega_w) & \dots & h_{qq}(\omega_w) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{11}(\omega_w) & x_{12}(\omega_w) & \dots & x_{1q}(\omega_w) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{q1}(\omega_w) & x_{q2}(\omega_w) & \dots & x_{qq}(\omega_w) \end{vmatrix}$$

Durch das Streichen der entsprechenden Zeilen und Spalten entsteht ein reduziertes Gleichungssystem.

$$\begin{vmatrix} y_{11}(\omega_w) & y_{1q}(\omega_w) \\ y_{q1}(\omega_w) & y_{qq}(\omega_w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_{11}(\omega_w) & h_{1q}(\omega_w) \\ h_{q1}(\omega_w) & h_{qq}(\omega_w) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{11}(\omega_w) & x_{1q}(\omega_w) \\ x_{q1}(\omega_w) & x_{qq}(\omega_w) \end{vmatrix}$$

$$\underline{y}^*(\omega_w) = \underline{H}^*(\omega_w) \underline{x}^*(\omega_w)$$

Bei der punktweisen, numerischen Ermittlung der Frequenzgangmatrix können die Koeffizienten $x_{kl}(\omega_w)$ und $y_{kl}(\omega_w)$ entweder durch eine diskrete Fourier-Transformation (DFT) der Systemein- und -ausgangsgrößen ermittelt oder direkt aus den Zeitsignalen geschätzt werden.

Die Fehler, die bei der Auswertung mit der DFT auftreten können, machen eine Rechnung im Frequenzbereich schwierig, da Sprungstellen an den Intervallgrenzen, Spiegelungsfehler und die konjugiert komplexen Anteile die Spektren unter Umständen stark verfälschen.

Bei der Schätzung der Koeffizienten $x_{kl}(\omega_w)$ und $y_{kl}(\omega_w)$ können diese Fehler nicht auftreten. Hier werden, ausgehend von einem harmonischen Ansatz für $x_{kl}(t_r)$ und $y_{kl}(t_r)$, die Real- und Imaginärteile von $x_{kl}(\omega_w)$ und $y_{kl}(\omega_w)$ mit Hilfe der Fehler-Quadrat-Methode direkt aus den Zeitsignalen bestimmt. Wird für das diskrete Zeitsignal der Ansatz

$$x_{kl,w}(t_r) = x_{0,kl} + \Delta x_{kl,w} \sin(\omega_w t_r + \varphi_{kl,w}) \quad (3.8)$$

$$x_{0,kl} = \text{Offset von } x_{kl,w}(t_r)$$

$$r = 1, 2, 3, \dots, nt \quad (nt = \text{Anzahl der Zeitdiskretisierungen})$$

gewählt, so kann durch die Umformung

$$x_{kl,w}(t_r) = x_{0,kl} + \Delta x_{kl,w} [\sin(\omega_w t_r) \cos(\varphi_{kl,w}) + \cos(\omega_w t_r) \sin(\varphi_{kl,w})]$$

$$x_{kl,w}(t_r) = x_{0,kl} + \sin(\omega_w t_r) A_{kl,w} + \cos(\omega_w t_r) B_{kl,w}$$

das lineare Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin(\omega_w t_1) & \cos(\omega_w t_1) \\ 1 & \sin(\omega_w t_2) & \cos(\omega_w t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sin(\omega_w t_n) & \cos(\omega_w t_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{0,kl} \\ A_{kl,w} \\ B_{kl,w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{kl,w}(t_1) \\ x_{kl,w}(t_2) \\ \vdots \\ x_{kl,w}(t_n) \end{vmatrix}$$

$$\underline{U}_w \underline{P}_{kl,w} = \underline{x}_{kl,w}$$

$$A_{kl,w} = \Delta x_{kl,w} \cos(\varphi_{kl,w}) \quad B_{kl,w} = \Delta x_{kl,w} \sin(\varphi_{kl,w})$$

aufgestellt werden. Der Vektor $\underline{P}_{kl,w}$ mit den gesuchten Größen der Gl. 3.8 errechnet sich dann aus der Gl. 3.9.

$$\underline{U}_w \underline{P}_{kl,w} = \underline{x}_{kl,w}$$

$$\underline{U}_w^T \underline{U}_w \underline{P}_{kl,w} = \underline{U}_w^T \underline{x}_{kl,w}$$

$$\underline{P}_{kl,w} = \left[\underline{U}_w^T \underline{U}_w \right]^{-1} \underline{U}_w^T \underline{x}_{kl,w} \quad (3.9)$$

$\underline{P}_{kl,w}$ wird demnach so bestimmt, daß der quadratische Fehler zwischen dem Ansatz in Gl. 3.8 und dem diskreten Zeitsignal minimiert wird, was an dieser Stelle verdeutlicht werden soll.

Der Fehler zwischen dem diskreten Zeitsignal und dem Ansatz $x_{kl,w}(t_r)$ in Gl. 3.8 beträgt

$$v_{kl,w}(t_r) = x_{kl,w}(t_r) - [x_{0,kl} + \Delta x_{kl,w} \sin(\omega_w t_r + \varphi_{kl,w})].$$

Faßt man $v_{kl,w}(t_r)$ zu einem Vektor $\underline{V}_{kl,w}$ zusammen, dann folgt mit $J = \underline{V}_{kl,w}^T \underline{V}_{kl,w}$ der quadratische Fehler. Vorausgesetzt, $\underline{V}_{kl,w}$ hängt linear von den gesuchten Parametern ab, so kann mit der Matrix

$$\underline{D}\underline{V}_{kl,w} = - \left[\frac{\partial \underline{V}_{kl,w}}{\partial p_{1,kl,w}}, \frac{\partial \underline{V}_{kl,w}}{\partial p_{2,kl,w}}, \dots, \frac{\partial \underline{V}_{kl,w}}{\partial p_{np,kl,w}} \right]$$

(np = Anzahl der unbekannt Parameter, hier np = 3)

die Gleichung

$$\underline{V}_{kl,w} = \underline{V}_{0,kl,w} - \underline{DV}_{kl,m} \underline{P}_{kl,w}$$

aufgestellt werden. Aus der Bedingung, daß der quadratische Fehler J minimiert werden soll, folgt sofort, daß die partiellen Ableitungen von J nach den einzelnen Parametern gleich Null sein müssen.

$$0 = \partial J / \partial p_{i,kl,w}$$

Nach weiterer Rechnung ergibt sich die Bestimmungsgleichung für den Parametervektor $\underline{P}_{kl,w}$.

$$0 = \partial \underline{V}_{kl,w}^T / \partial p_{i,kl,w} \underline{V}_{kl,w} + \underline{V}_{kl,w}^T \partial \underline{V}_{kl,w} / \partial p_{i,kl,w}$$

$$0 = 2 \partial \underline{V}_{kl,w}^T / \partial p_{i,kl,w} \underline{V}_{kl,w}$$

$$0 = \underline{DV}_{kl,w}^T \underline{V}_{kl,w}$$

$$0 = \underline{DV}_{kl,w}^T [\underline{V}_{0,kl,w} - \underline{DV}_{kl,m} \underline{P}_{kl,w}]$$

$$\underline{P}_{kl,w} = [\underline{DV}_{kl,w}^T \underline{DV}_{kl,w}]^{-1} \underline{DV}_{kl,w}^T \underline{V}_{0,kl,w}$$

Mit $\underline{U}_w = \underline{DV}_{kl,w}$ und $\underline{x}_{kl,w} = \underline{V}_{0,kl,w}$ kann sofort auf die Gl. 3.9 geschlossen werden.

Aus der Beziehung

$$\tan(\varphi_{kl,w}) = \frac{\text{Imaginärteil}[x_{kl}(\omega_w)]}{\text{Realteil}[x_{kl}(\omega_w)]}$$

kann der Real- und Imaginärteil von $x_{kl}(\omega_k)$ abgeleitet werden:

$$A_{kl,w} = \text{Realteil}[x_{kl}(\omega_w)] \quad B_{kl,w} = \text{Imaginärteil}[x_{kl}(\omega_w)]$$

$$x_{kl}(\omega_w) = A_{kl,w} + \sqrt{-1} B_{kl,w} .$$

Entsprechend gilt für $y_{kl}(\omega_w)$ mit dem harmonischen Ansatz in Gl. 3.10:

$$y_{kl,w}(t_r) = y_{0,kl} + \Delta y_{kl,w} \sin(\omega_w t_r + \Phi_{kl,w}) \quad (3.10)$$

$$y_{kl}(\omega_w) = C_{kl,w} + \sqrt{-1} D_{kl,w} .$$

$$D_{kl,w} = \Delta y_{kl,w} \cos(\Phi_{kl,w}) \quad D_{kl,w} = \Delta y_{kl,w} \sin(\Phi_{kl,w})$$

Voraussetzung für die Bestimmung der Real- und Imaginärteile von $x_{kl}(\omega_w)$ und $y_{kl}(\omega_w)$ ist die Kenntnis der Erregerfrequenz ω_w .

Die konstanten Anteile $x_{0,kl}$ und $y_{0,kl}$ werden bei der Bestimmung des Frequenzganges nicht berücksichtigt, da hier nur das dynamische Verhalten beschrieben werden soll. Bei einer späteren Simulationsrechnung muß dieses jedoch berücksichtigt werden, indem das aus Modellrechnungen bestimmte instationäre mit dem stationären Verhalten des Systems überlagert wird.

3.2.2. Parametrisierung des Frequenzganges

Liegt der Frequenzgang nichtparametrisch in diskreter Form als Matrix mit q^2 komplexen Koeffizienten $h_{kl,w}$ vor, so können hierfür mit der Fehlerquadratmethode q^2 komplexe, gebrochen rationale Polynome gefunden werden, die den Frequenzgang in parametrischer Form abbilden. Mit dem Ansatz für $h_{kl,w}$ [= $h_{kl}(\omega_w)$]

$$h_{kl,w} = \frac{\sum_{j=0}^n b_{j,kl} s_w^j}{\sum_{i=0}^m a_{i,kl} s_w^i} \quad s_w = \sqrt{-1} \omega_w \quad (3.11)$$

folgt:

$$\sum_{j=0}^n b_{j,kl} s_w^j = h_{kl,w} \sum_{i=0}^m a_{i,kl} s_w^i$$

$$\sum_{j=0}^n b_{j,kl} s_w^j = h_{kl,w} \left(a_{0,kl} + \sum_{i=1}^m a_{i,kl} s_w^i \right)$$

$$\sum_{j=0}^n b_{j,kl} s_w^j - h_{kl,w} \sum_{i=1}^m a_{i,kl} s_w^i = a_{0,kl} h_{kl,w} \quad (3.12)$$

$w = 1, 2, 3, \dots, n_f$ Anzahl der Frequenzpunkte
 $k, l = 1, 2, 3, \dots, q$

Für $a_{0,kl} = 1$ stellt die Gl. 3.12 ein lineares Gleichungssystem mit $m+n+1$ Unbekannten ($a_{i,kl}$ und $b_{j,kl}$) und n_f Gleichungen dar.

$$\begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_1^2 & \dots & s_1^n & -h_{kl,1} & -h_{kl,1}s_1 & \dots & -h_{kl,1}s_1^m \\ 1 & s_2 & s_2^2 & \dots & s_2^n & -h_{kl,2} & -h_{kl,2}s_2 & \dots & -h_{kl,2}s_2^m \\ 1 & s_3 & s_3^2 & \dots & s_3^n & -h_{kl,3} & -h_{kl,3}s_3 & \dots & -h_{kl,3}s_3^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & s_{n_f} & s_{n_f}^2 & \dots & s_{n_f}^n & -h_{kl,n_f} & -h_{kl,n_f}s_{n_f} & \dots & -h_{kl,n_f}s_{n_f}^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{0,kl} \\ b_{1,kl} \\ b_{2,kl} \\ \vdots \\ b_{n,kl} \\ a_{1,kl} \\ a_{2,kl} \\ \vdots \\ a_{m,kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{kl,1} \\ h_{kl,2} \\ h_{kl,3} \\ \vdots \\ h_{kl,n_f} \end{pmatrix}$$

$$\underline{U}_{kl} \cdot \underline{P}_{kl} = \underline{h}_{kl}$$

Mit $a_{0,kl} = 0$ ist die Gl. 3.12 für $a_{1,kl} = 1$ entsprechend aufzustellen. Der Vektor \underline{P}_{kl} mit den reellen Koeffizienten $a_{i,kl}$ und $b_{j,kl}$ berechnen sich nach Gl. 3.13.

$$\underline{U}_{kl} \underline{P}_{kl} = \underline{h}_{kl}$$

$$\text{Re}(\underline{U}_{kl}) \underline{P}_{kl} = \text{Re}(\underline{h}_{kl})$$

$$\text{Im}(\underline{U}_{kl}) \underline{P}_{kl} = \text{Im}(\underline{h}_{kl})$$

$$\{\text{Re}(\underline{U}_{kl}) + \text{Im}(\underline{U}_{kl})\} \underline{P}_{kl} = \{\text{Re}(\underline{h}_{kl}) + \text{Im}(\underline{h}_{kl})\}$$

$$\underline{P}_{kl} = \left\{ \begin{matrix} \{\text{Re}(\underline{U}_{kl}) + \text{Im}(\underline{U}_{kl})\}^T \\ \{\text{Re}(\underline{U}_{kl}) + \text{Im}(\underline{U}_{kl})\}^T \end{matrix} \begin{matrix} \{\text{Re}(\underline{U}_{kl}) + \text{Im}(\underline{U}_{kl})\} \\ \{\text{Re}(\underline{h}_{kl}) + \text{Im}(\underline{h}_{kl})\} \end{matrix} \right\}^{-1} \quad (3.13)$$

Wie schon im Kap. 3.2.1. exemplarisch gezeigt wurde, wird auch hier der gesuchte Parametervektor \underline{p}_{kl} so bestimmt, daß der quadratische Fehler zwischen $h_{kl,w}$ und den q^2 Polynomen minimiert wird.

Aus der bekannten Beziehung $\underline{y}(\omega_w) = \underline{H}(\omega_w)\underline{x}(\omega_w)$ können die einzelnen Ausgangsgrößen im Frequenzbereich $y_k(\omega)$ sofort berechnet werden.

$$y_k(\omega_w) = h_{k1,w}x_1(\omega_w) + h_{k2,w}x_2(\omega_w) + \dots + h_{kq,w}x_q(\omega_w)$$

3.2.3. Transformation in den Zeitbereich

Werden bei der Parametrisierung von $h_{kl,w}$ die gleichen Nennerpolynome $a_{i,kl}$ geschätzt ($a_{i,k1} = a_{i,k2} = \dots = a_{i,kq}$) (vergl. Gl. 3.11), so kann die Rücktransformation in den Zeitbereich vereinfacht werden. Es gilt dann die Transformation:

$$\sum_{i=0}^m a_{i,kk} s_w^i y_k(\omega_w) = \sum_{j=0}^n b_{j,k1} s_w^j x_1(\omega_w) + \dots + \sum_{j=0}^n b_{j,kq} s_w^j x_q(\omega_w)$$

$$\sum_{i=0}^m a_{i,kk} \overset{(i)}{y}_k(t_r) = \sum_{j=0}^n b_{j,k1} \overset{(j)}{x}_1(t_r) + \dots + \sum_{j=0}^n b_{j,kq} \overset{(j)}{x}_q(t_r)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, q \quad \overset{(i)}{y} = d^{(i)}y/dt^{(i)} \quad \overset{(j)}{x} = d^{(j)}x/dt^{(j)}$$

Die Koeffizienten $a_{i,kk}$ bzw. $b_{j,kl}$ können entsprechend ihrer Indizes in den Matrizen $\underline{\alpha}_i^*$ bzw. $\underline{\beta}_j^*$ zusammengefaßt werden. Die Matrix $\underline{\alpha}_i^*$ wird dabei zu einer Diagonalmatrix der Koeffizienten $a_{i,kk}$.

$$\sum_{i=0}^m \underline{\alpha}_i^* \overset{(i)}{y}(t_r) = \sum_{j=0}^n \underline{\beta}_j^* \overset{(j)}{x}(t_r) \quad (3.14)$$

Die Gl. 3.14 beschreibt für die Ausgangsfolgen $y_k(t_r)$ jeweils ein entkoppeltes Differentialgleichungssystem.

3.2.4. Darstellung im Zustandsraum

Das lineare Differentialgleichungssystem in Gl. 3.15, das den allgemeinen Fall eines Systems mit q Ausgängen und p Eingängen beschreibt, kann in eine äquivalente Darstellung im Zustandsraum (Gl. 3.16) überführt werden. Die Matrix $\underline{\alpha}_i^*$ ist dabei in der Regel keine Diagonalmatrix.

$$\sum_{i=0}^m \underline{\alpha}_i^* \frac{d^{(i)} \underline{y}(t_r)}{dt^{(i)}} = \sum_{j=0}^n \underline{\beta}_j^* \frac{d^{(j)} \underline{x}(t_r)}{dt^{(j)}} \quad (3.15)$$

$n \leq m+1$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{Z}}(t_r) &= \underline{A} \underline{Z}(t_r) + \underline{B} \underline{x}(t_r) \\ \underline{y}(t_r) &= \underline{C} \underline{Z}(t_r) + \underline{D} \underline{x}(t_r) + \underline{E} \dot{\underline{x}}(t_r) \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

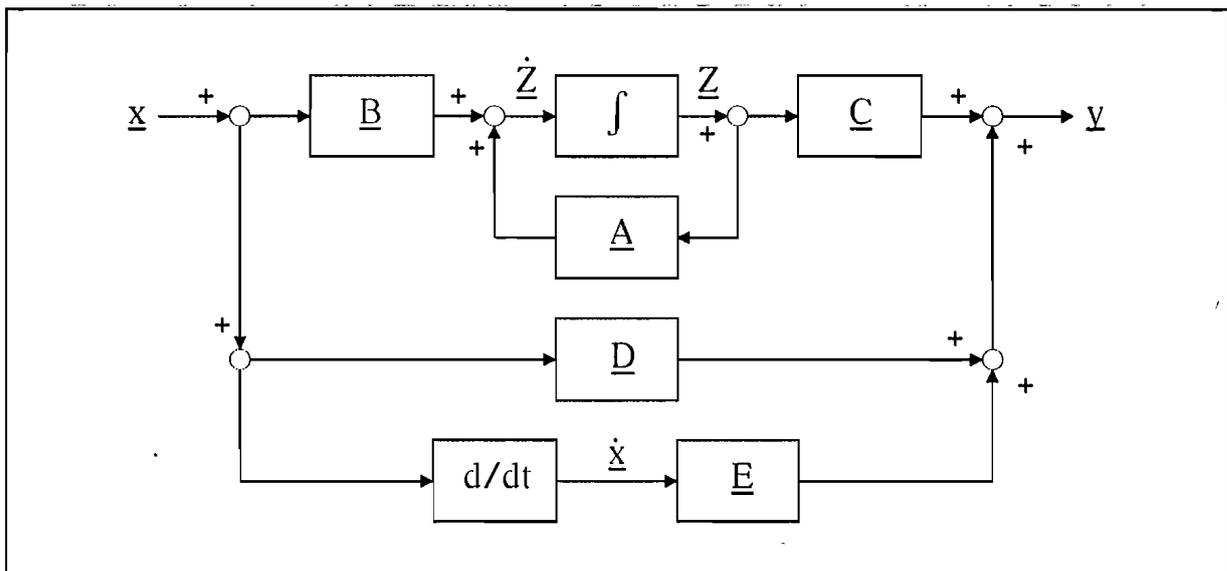


Abb. 3.7) Zustandsraumdarstellung ($n = m+1$)

Bei der Herleitung der Zustandsraumgleichung ergeben sich für die Vektoren und Matrizen verschiedene Dimensionen.

\underline{y}	Spaltenvektor der Länge q
\underline{x}	Spaltenvektor der Länge p
$\underline{\alpha}_i^*$	Matrix mit q Spalten und q Zeilen
$\underline{\beta}_j^*$	Matrix mit p Spalten und q Zeilen
\underline{A}	Matrix mit $q \cdot m$ Spalten und $q \cdot m$ Zeilen
\underline{B}	Matrix mit p Spalten und $q \cdot m$ Zeilen
\underline{C}	Matrix mit $q \cdot m$ Spalten und q Zeilen
\underline{D}	Matrix mit p Spalten und q Zeilen
\underline{E}	Matrix mit p Spalten und q Zeilen
\underline{Z}	Matrix mit p Spalten und $q \cdot m$ Zeilen
$\underline{0}$	Nullmatrix mit q Spalten und q Zeilen
\underline{I}	Einheitsmatrix mit q Spalten und q Zeilen
\underline{z}_i	Untermatrix von \underline{Z} mit p Spalten und q Zeilen
\underline{b}_i	Untermatrix von \underline{B} mit p Spalten und q Zeilen

Wird die Gl. 3.15 von links mit $\underline{\alpha}_m^*{}^{-1}$ multipliziert, so folgt mit $\underline{\alpha}_m = \underline{I}$

$$\sum_{i=0}^m \underline{\alpha}_i \frac{d^{(i)} \underline{y}(t_r)}{dt^{(i)}} = \sum_{j=0}^n \underline{\beta}_j \frac{d^{(j)} \underline{x}(t_r)}{dt^{(j)}} \quad (3.17)$$

Es soll zuerst der einfache Fall

$$\sum_{i=0}^m \underline{\alpha}_i \frac{d^{(i)} \underline{y}(t_r)}{dt^{(i)}} = \underline{\beta}_0 \underline{x}(t_r)$$

untersucht werden. Setzt man

$$\begin{aligned} \underline{z}_1(t_r) &= \underline{y}(t_r) \\ \underline{z}_2(t_r) &= d\underline{y}(t_r)/dt \\ \underline{z}_3(t_r) &= d^2 \underline{y}(t_r)/dt^2 \\ &\vdots \\ \underline{z}_m(t_r) &= d^{(m-1)} \underline{y}(t_r)/dt^{(m-1)}, \end{aligned}$$

dann gilt mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}
 dz_\mu(t_r)/dt &= z_{\mu+1}(t_r) \\
 dz_m(t_r)/dt &= -\alpha_0 z_1(t_r) - \alpha_1 z_2(t_r) - \dots - \alpha_{m-1} z_m(t_r) + \beta_0 x(t_r) \\
 \underline{Z}(t_r)^T &= | z_1(t_r) \quad z_2(t_r) \quad \dots \quad z_m(t_r) | \\
 & \qquad \qquad \qquad \mu = 1, 2, \dots, m-1
 \end{aligned}$$

und

$$\underline{C} = | \underline{I} \quad \underline{0} \quad \underline{0} \quad \dots \quad \underline{0} |$$

die Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{\underline{Z}}(t_r) = \begin{vmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} & \dots & \underline{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{I} \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{m-1} \end{vmatrix} \underline{Z}(t_r) + \begin{vmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \vdots \\ \underline{0} \\ \beta_0 \end{vmatrix} x(t_r)$$

$$\underline{y}(t_r) = \underline{C} \underline{Z}(t_r)$$

Für die Gl. 3.17 mit $n = m+1$ bestimmen sich die Matrizen \underline{B} , \underline{D} und \underline{E} der Gl. 3.16 folgendermaßen. Die Matrizen \underline{A} und \underline{C} bleiben dabei unverändert. Es gilt nach Gl. 3.16:

$$\begin{aligned}
 \underline{y}(t_r) &= z_1(t_r) + \underline{D} x(t_r) + \underline{E} \dot{x}(t_r) \\
 \dot{\underline{y}}(t_r) &= z_2(t_r) + \underline{b}_1 x(t_r) + \underline{D} \dot{x}(t_r) + \underline{E} \ddot{x}(t_r) \\
 \ddot{\underline{y}}(t_r) &= z_3(t_r) + \underline{b}_2 x(t_r) + \underline{b}_1 \dot{x}(t_r) + \underline{D} \ddot{x}(t_r) + \underline{E} \dddot{x}(t_r) \\
 &\vdots \\
 \underline{y}^{(m)}(t_r) &= -\alpha_0 z_1(t_r) - \alpha_1 z_2(t_r) - \dots - \alpha_{m-1} z_m(t_r) + \\
 &\quad \underline{b}_m x(t_r) + \underline{b}_{m-1} \dot{x}(t_r) + \dots + \underline{b}_1 x^{(m-1)}(t_r) + \\
 &\quad \underline{D} x^{(m)}(t_r) + \underline{E} x^{(m+1)}(t_r) .
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach von links mit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ multipliziert und aufsummiert, so kann durch Koeffizientenvergleich mit der Gl. 3.17 ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Matrizen \underline{B} , \underline{D} und \underline{E} angegeben werden.

$$\begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{cccccc}
 \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \dots\dots\dots\underline{0} \\
 \underline{\alpha}_{m-1} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \dots\dots\dots\underline{0} \\
 \underline{\alpha}_{m-2} & \underline{\alpha}_{m-1} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \dots\dots\dots\underline{0} \\
 \underline{\alpha}_{m-3} & \underline{\alpha}_{m-2} & \underline{\alpha}_{m-1} & \underline{I} & \underline{0} & \dots\dots\dots\underline{0} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \underline{\alpha}_0 & \underline{\alpha}_1 & \underline{\alpha}_2 & \underline{\alpha}_3 & \underline{\alpha}_4 & \dots\dots\dots\underline{0} \\
 \underline{0} & \underline{\alpha}_0 & \underline{\alpha}_1 & \underline{\alpha}_2 & \underline{\alpha}_3 & \dots\dots\dots\underline{I}
 \end{array} &
 \begin{array}{c}
 \underline{E} \\
 \underline{D} \\
 \underline{b}_1 \\
 \underline{b}_2 \\
 \vdots \\
 \underline{b}_{m-1} \\
 \underline{b}_m
 \end{array} &
 \begin{array}{c}
 \underline{B}_n \\
 \underline{B}_{n-1} \\
 \underline{B}_{n-2} \\
 \underline{B}_{n-3} \\
 \vdots \\
 \underline{B}_1 \\
 \underline{B}_0
 \end{array}
 \end{array} =$$

Für $n = m$ wird die \underline{E} Matrix zu Null, und für $n = m-1$ werden die \underline{E} und \underline{D} Matrizen zu Null. Das oben beschriebene Gleichungssystem reduziert sich dann entsprechend.

Die Anfangsbedingungen für $\underline{Z}(t_0)$ errechnen sich aus der Gl. 3.18 durch einfaches Umstellen nach $\underline{z}_i(t_0)$.

$$\begin{aligned}
 \underline{z}_1(t_0) &= [\underline{y}(t_0) - \underline{D} \underline{x}(t_0) - \underline{E} \dot{\underline{x}}(t_0)] \\
 \underline{z}_2(t_0) &= [\dot{\underline{y}}(t_0) - \underline{b}_1 \underline{x}(t_0) - \underline{D} \dot{\underline{x}}(t_0) - \underline{E} \ddot{\underline{x}}(t_0)] \\
 \underline{z}_3(t_0) &= [\ddot{\underline{y}}(t_0) - \underline{b}_2 \underline{x}(t_0) - \underline{b}_1 \dot{\underline{x}}(t_0) - \underline{D} \ddot{\underline{x}}(t_0) - \underline{E} \dddot{\underline{x}}(t_0)] \\
 &\vdots \\
 \underline{z}_m(t_0) &= [\overset{(m-1)}{\underline{y}}(t_0) - \underline{b}_{m-1} \underline{x}(t_0) - \dots\dots\dots - \\
 &\qquad \qquad \qquad \underline{b}_1 \overset{(m-2)}{\underline{x}}(t_0) - \underline{D} \overset{(m-1)}{\underline{x}}(t_0) - \underline{E} \overset{(m)}{\underline{x}}(t_0)]
 \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Zustandsraumdarstellung lautet mit der Übertragungsmatrix $\underline{\Phi}(t_r) = e^{\underline{A}t_r}$

$$\underline{y}(t_r) = \underline{C} \underline{\Phi}(t_r-t_0)\underline{Z}(t_0) + \underline{C} \int_{t_0}^{t_r} \underline{\Phi}(t_r-\tau)\underline{B} \underline{x}(\tau)d\tau + \underline{D} \underline{x}(t_r) + \underline{E} \dot{\underline{x}}(t_r) .$$

Die Transformation in den Frequenzbereich erfolgt durch die Gl. 3.19. \underline{I} ist in diesem Fall eine Einheitsmatrix mit $q \cdot m$ Zeilen und $q \cdot m$ Spalten.

$$\begin{aligned}
 s_w \underline{Z}(\omega_w) &= \underline{A} \underline{Z}(\omega_w) + \underline{B} \underline{x}(\omega_w) \\
 \underline{Z}(\omega_w) &= (s_w \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \underline{x}(\omega_w) \\
 \underline{y}(\omega_w) &= \underline{C} (s_w \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \underline{x}(\omega_w) + \underline{D} \underline{x}(\omega_w) + \underline{E} s_w \underline{x}(\omega_w) \\
 \underline{y}(\omega_w) &= [\underline{C} (s_w \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D} + \underline{E} s_w] \underline{x}(\omega_w) \\
 \underline{y}(\omega_w) / \underline{x}(\omega_w) &= \underline{H}(\omega_w) = [\underline{C} (s_w \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D} + \underline{E} s_w] \qquad (3.19)
 \end{aligned}$$

Im folgenden sollen zwei Matrizen angegeben werden, mit denen ein rechnerischer Nachweis der Steuer- und Beobachtbarkeit erfolgen kann. Dieser Nachweis kann jedoch nur für Systeme geführt werden, die durch die Gl. 3.16 in allen Freiheitsgraden darstellbar sind. Reale Systeme, die nur durch eine reduzierte Frequenzgangmatrix abgebildet werden können, sind nicht vollständig steuerbar und/oder beobachtbar.

Mit den konstanten Matrizen \underline{A} und \underline{B} ist das durch die Gl. 3.16 beschriebene System genau dann vollständig steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix \underline{W} den Rang m hat, und nur dann vollständig beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix \underline{V} den Rang m hat.

$$\underline{W} = [\underline{B} , \underline{A} \underline{B} , \underline{A}^2 \underline{B} , \dots , \underline{A}^{m-1} \underline{B}]$$

$$\underline{V} = [\underline{C} , \underline{C} \underline{A} , \underline{C} \underline{A}^2 , \dots , \underline{C} \underline{A}^{m-1}]^T$$

Neben der Steuer- und Beobachtbarkeit ist die Stabilität eine weitere allgemeine Systemeigenschaft. Hierbei unterscheidet man zwischen der Stabilität des erregten ($\underline{x} \neq 0$) und des nicht erregten ($\underline{x} = 0$) Systems. Ausgehend von der Gl. 3.16, gleichgültig ob sie das System in allen Freiheitsgraden abbilden kann oder nicht, folgt für $\underline{x} = 0$ das charakteristische Polynom

$$D(p) = \det [p \underline{I} - \underline{A}] = 0 .$$

p = Eigenwerte

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die asymptotische Stabilität ist die Forderung, daß alle Nullstellen des Polynoms $D(p)$ einen negativen Realteil haben (Hurwitzsche Polynome). Als notwendige aber für $m > 2$ in Gl. 3.17 nicht hinreichende Bedingung kann die Forderung aufgestellt werden, daß alle Koeffizienten des Polynoms $D(p)$ positiv sein müssen. Dieses bedeutend gleichzeitig, daß alle Koeffizienten der Matrizen $\underline{\alpha}_i$ in Gl. 3.17 bzw. $\underline{\alpha}_i^*$ in Gl. 3.14 positiv sein müssen.

Bei der Parametrisierung der Frequenzgangmatrix ist also darauf zu achten, daß die Koeffizienten aller Nennerpolynome größer Null sind, um die notwendige Bedingung für die Stabilität der Zustandsraumdarstellung zu erfüllen.

Weitere Stabilitätskriterien (E. J. Routh und M. A. Lyapunov) und Einzelheiten zur Stabilität von erregten Systemen sind in /26/ zu finden. Hierauf soll im weiteren nicht eingegangen werden.

3.3. Identifikation von nichtlinearen Systemen

In diesem Abschnitt wird die Identifikation von nichtlinearen Systemen nicht in aller Allgemeinheit oder anhand spezieller nichtlinearer Modellansätze beschrieben¹. Es soll vielmehr die im Kap. 3.2. vorgestellten Identifikationsmethode auf ein nichtlineares System angewendet und erläutert werden. Dieses ist im Zusammenhang mit der Identifikation von hydrodynamischen Wandlern wichtig, da diese im allgemeinen nichtlineares Verhalten aufweisen. Weiterhin sollen Parallelen zur Volterra-schen Funktionalreihe aufgezeigt werden.

Es wird ein nichtlineares System untersucht, an dem auch schon in Kap. 3.1.2. die Anwendung der Volterra-schen-Funktionalreihe sowie einige Eigenschaften nichtlinearer Systeme erläutert wurden (vergl. Gl. 3.5).

$$y(t) = a_1x(t) + a_2x(t)^2 + a_3x(t)^3$$

Für dieses System soll nun durch Linearisierung um einen Betriebspunkt ein lineares Modell identifiziert werden. Es wird davon ausgegangen, daß das System als "black box" vorliegt und nur die Zeitverläufe am Ein- und Ausgang gemessen werden können.

1: Hierfür sei auf einige der vielen Veröffentlichungen hingewiesen /29, 30, 32 - 35/.

Zur Bestimmung des Frequenzganges wird das harmonische Eingangssignal

$$x(t) = \mu + 2x_0 \cos(\omega_0 t)$$

verwendet. Durch den Parameter μ wird der Betriebspunkt vorgegeben, in dem das Modell bestimmt werden soll. Da $\underline{H}(\omega)$ für das untersuchte System frequenzunabhängig ist, reicht eine Erregerfrequenz zur vollständigen Beschreibung aus. Die analytische Lösung des Systemausgangs lautet:

$$y(t) = a_1 \mu + a_2 \mu^2 + a_3 \mu^3 + 2x_0^2 a_2 + 6 \mu x_0^2 a_3 + \\ \cos(\omega_0 t) \left[2x_0 a_1 + 4\mu x_0 a_2 + 6\mu^2 x_0 a_3 + 6x_0^3 a_3 \right] \\ \cos(2\omega_0 t) \left[2x_0^2 a_2 + 6\mu x_0^2 a_3 \right] \\ \cos(3\omega_0 t) \left[2x_0^3 a_3 \right]$$

Liegen die Zeitverläufe $x(t)$ und $y(t)$ als Meßwerte vor, so können die Mittelwerte und die Amplituden der Grundwelle für beide Verläufe mit Hilfe der Ansätze

$$x(t)^* = \mu_x^* + x_0^* \cos(\omega_0 t) \quad \text{und} \quad y(t)^* = \mu_y^* + y_0^* \cos(\omega_0 t)$$

geschätzt werden.

$$\begin{aligned} \mu_x^* &= \mu \\ \mu_y^* &= a_1 \mu + a_2 \mu^2 + a_3 \mu^3 + 2x_0^2 a_2 + 6 \mu x_0^2 a_3 \\ x_0^* &= 2x_0 \\ y_0^* &= 2x_0 a_1 + 4\mu x_0 a_2 + 6\mu^2 x_0 a_3 + 6x_0^3 a_3 \end{aligned}$$

Der Frequenzgang $H_1(\omega)$ ergibt sich als Verhältnis der Ausgangs- zur Eingangsamplitude.

$$H_1(\omega) = y_0^* / x_0^* = a_1 + 2\mu a_2 + 3\mu^2 a_3 + 3x_0^2 a_3$$

Nur für den Betriebspunkt $\mu=0$ und für kleine Erregeramplituden x_0 ist der identifizierte Frequenzgang $H_1(\omega)$ für das untersuchte System eine gute Näherung für den ersten Volterra-Kern, der schon im Kap. 3.1.2.

mit a_1 angegeben wurde. Der konstante Anteil μ im Eingangssignal verursacht jedoch zusätzliche Schwingungen mit der Grundfrequenz ω_0 und der Amplitude $(4\mu a_2 + 6\mu^2 a_3)$, die auch bei der Schätzung der Grundwelle im Ausgangssignal berücksichtigt werden. Aus diesem Grund ist im allgemeinen nicht davon auszugehen, daß der experimentell bestimmten Frequenzgang und der erste Volterra-Kern gleich sind.

Im weiteren wird das stationäre Systemverhalten untersucht. Darunter ist die Ein-/Ausgangsbeziehung des Systems bei konstanten Eingangsgrößen zu verstehen.

$$\begin{aligned}x_{\text{sta.}}(t) &= \mu \\y_{\text{sta.}}(t) &= a_1\mu + a_2\mu^2 + a_3\mu^3\end{aligned}$$

Wie zu erwarten war, deckt sich die stationäre Ausgangsgröße $y_{\text{sta.}}(t)$ nicht mit dem aus instationären Messungen geschätzten Mittelwert μ_y^* . Dieses ist damit zu begründen, daß für nichtlineare Systeme das Superpositionsprinzip nicht gilt.

$$y(\mu + 2x_0 \cos(\omega t)) \neq y(\mu) + y(2x_0 \cos(\omega t))$$

Für kleine Erregeramplituden kann jedoch der Unterschied zwischen der stationären Ausgangsgröße und dem geschätzten Mittelwert vernachlässigt werden. Das um den Betriebspunkt μ linearisierte Modell lautet dann mit allgemein periodischen Eingangsfunktionen:

$$\begin{aligned}x(t) &= \mu + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(\omega_i t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(\omega_j t) \\y(t)_{\text{lin.}} &= y_{\text{sta.}}(t) + H_1(\omega) \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(\omega_i t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(\omega_j t) \right].\end{aligned}$$

Oberwellen und Kombinationsfrequenzen werden von diesem Modell nicht abgebildet. Weiterhin gilt es auch nur für den einen Betriebspunkt μ und für kleine Erregeramplituden. Somit kann das Modell nur in

erster Näherung das instationäre Systemverhalten abbilden. Die Genauigkeit, mit der dieses erfolgt, hängt von den Eingangssignalen und der Art der Nichtlinearität des Systems selbst ab. Allgemeingültige Aussagen können nicht getroffen werden. Der Erfolg der Modellierung muß im Einzelfall durch den Vergleich von Meßwerten und Simulationsrechnungen überprüft werden.

3.4. Teilsystemidentifikation

Eine Identifikation großer mechanischer Konstruktionen kann aufgrund der komplizierten Geometrie und der Fülle der zu berücksichtigten Randinflüsse in vielen Fällen nicht mehr am gesamten System durchgeführt werden. Häufig ist auch das dynamische Verhalten der gesamten Konstruktion auch gar nicht von Interesse, sondern nur das von Subsystemen. Die Teilsystemidentifikation bietet die Möglichkeit, größere Konstruktionen in Subsysteme aufzuteilen, diese zu identifizieren und zu einem Gesamtmodell zusammenzusetzen.

Eine Anwendung der zugrundeliegenden Theorie findet man in der Systemanalyse speziell bei der Finite-Elemente-Methode. Basierend auf einfachen physikalischen Gesetzmäßigkeiten wird hierbei das gesamte Systemverhalten durch das Zusammenwirken einer endlichen Zahl von finiten Elementen beschrieben. Jedes einzelne dieser Elemente besitzt ein Eigenverhalten¹, das unabhängig von Einwirkungen anderer Teilsysteme oder den geometrischen Randbedingungen der Gesamtkonstruktion ist. Dieses Eigenverhalten wird meist in der Form von dynamischen Übertragungs- oder Steifigkeitsmatrizen angegeben. Häufig wird auch die inverse dynamische Steifigkeitsmatrix, der Frequenzgang, verwendet. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen werden die Teilsystemmatrizen dann zu einer Gesamtmatrix zusammengefaßt, mit der das dynamische Verhalten des gesamten Systems beschrieben werden kann.

1: Unter dem Eigenverhalten eines Teilsystems sind die Systemeigenschaften zu verstehen, die sich auf physikalischen Gesetzmäßigkeiten (z.B. Werkstoffgesetzen) und Geometriedaten (z.B. Längen und Flächen) begründen.

Ein einfaches Beispiel zur Finiten-Element Rechnung ist der in der Abb. 3.8 a dargestellte Zugstab. Aufgrund der unterschiedlichen Flächen-, Dichte- und Längenverteilung wird der Zugstab in drei Teilsysteme unterteilt (Abb. 3.8 b), für die jeweils eine Übertragungsmatrix angegeben werden kann (Gl. 3.20) /27/.

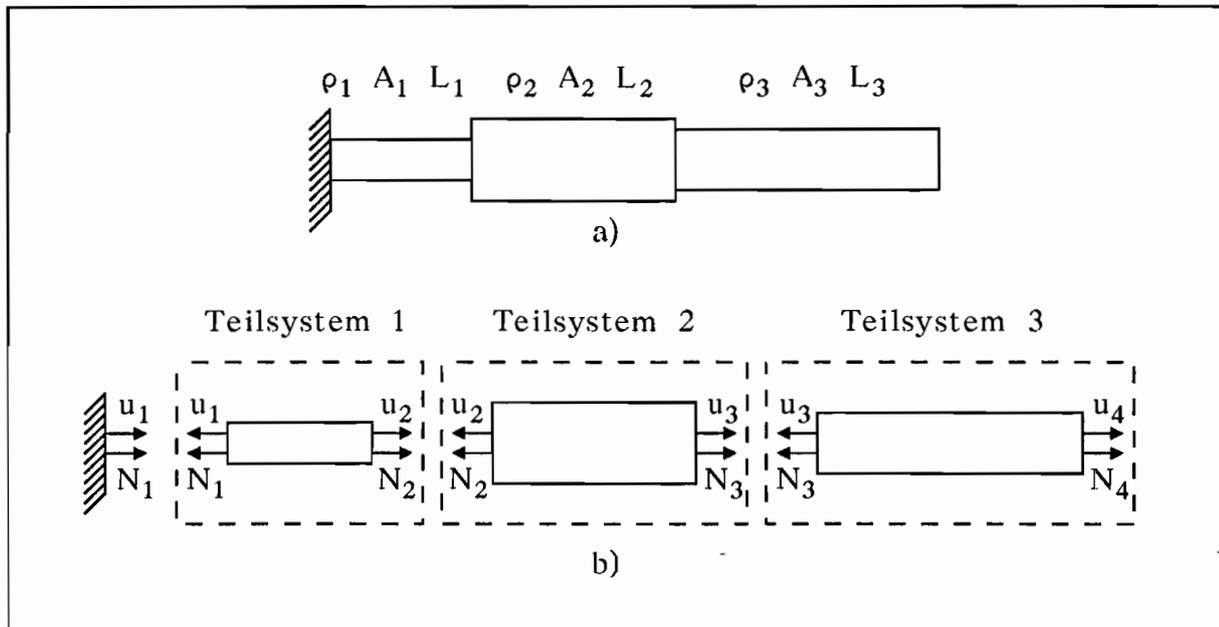


Abb. 3.8) a) Zugstab (E-Modul = konstant)
 b) Einteilung des Zugstabes in Teilsysteme
 (u_i = Verschiebung; N_i = Normalkraft)

$$\underline{U}_i = \begin{vmatrix} \cos(\beta_i) & L_i \sin(\beta_i) / (EA_i \beta_i) \\ -\rho_i A_i L_i \omega^2 \sin(\beta_i) / \beta_i & \cos(\beta_i) \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

$$\beta_i = L_i \omega (\rho_i / E)^{0.5}$$

Diese Matrix \underline{U}_i stellt für jedes Subsystem die Beziehung zwischen den Kraft- und Verschiebungsgrößen an der linken und der rechten Teilsystemgrenze her.

$$\underline{z}_2 = \underline{U}_1 \underline{z}_1 \quad \underline{z}_3 = \underline{U}_2 \underline{z}_2 \quad \underline{z}_4 = \underline{U}_3 \underline{z}_3 \quad \underline{z}_i^T = | u_i \quad N_i |$$

Die Gesamtübertragungsmatrix ergibt sich somit aus dem Produkt aller Teilsystemmatrizen.

$$Z_4 = \underline{U}_{\text{ges.}} Z_1 \qquad \underline{U}_{\text{ges.}} = \underline{U}_3 \underline{U}_2 \underline{U}_1$$

In gleicher Weise wie das Übertragungsverhalten des gesamten Systems aus dem der einzelnen Teilsysteme bestimmt wurde, kann das Ein-/Ausgangsverhalten einzelner Teilsysteme aus dem des Gesamtsystems identifizieren werden. Hierfür sind im allgemeinen alle Zustandsgrößen notwendig, die die Systemgrenzen überschreiten. Speziell für den hier untersuchten Zugstab sind das die Zustandsvektoren des zu identifizierenden Teilsystems. In den vielen Fällen stehen den n^2 unbekanntem Koeffizienten der teilsystembeschreibenden Matrix aber nur n Gleichungen gegenüber.

$$\begin{vmatrix} u_{i+1} \\ N_{i+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{i,11} & U_{i,12} \\ U_{i,21} & U_{i,22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i \\ N_i \end{vmatrix}$$

Demnach müssen n linear unabhängige Messungen durchgeführt werden, um das Gleichungssystem lösen zu können.

$$\begin{vmatrix} u_{i+1,1} & u_{i+1,2} \\ N_{i+1,1} & N_{i+1,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{i,11} & U_{i,12} \\ U_{i,21} & U_{i,22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{i,1} & u_{i,2} \\ N_{i,1} & N_{i,2} \end{vmatrix}$$

$$Z_{i+1} = \underline{U}_i Z_i$$

Dieses Problem ergibt sich meist auch bei der Identifikation des gesamten Systems (vergl. Kap. 3.2.). Es kann jedoch vorkommen, daß die unterschiedlichen Erregungen des Systems immer zu linear abhängigen Zustandsvektoren an der Teilsystemgrenze führen. In diesem Fall müssen ein oder mehrere Teilsysteme, nicht aber das zu untersuchende, bei jeder Messung hinsichtlich des Eigenverhaltens geändert werden. Dieses kann beispielsweise durch Änderungen von Steifigkeiten erfolgen.

Der Sachverhalt soll an dem in Abb. 3.8 b abgebildeten Zugstab verdeutlicht werden. Für das zu identifizierende Subsystem 2 muß das Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} u_{3,1} & u_{3,2} \\ N_{3,1} & N_{3,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{2,11} & U_{2,12} \\ U_{2,21} & U_{2,22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{2,1} & u_{2,2} \\ N_{2,1} & N_{2,2} \end{vmatrix}$$

gelöst werden. Der Zustandsvektor \underline{z}_2 errechnet sich, unter Berücksichtigung der geometrischen Randbedingung ($u_1 = 0$), aus den Gleichungen

$$u_2 = U_{1,12}N_1 \quad \text{und} \quad N_2 = U_{1,22}N_1 .$$

Bei unterschiedlichen Erregungen des Gesamtsystems, gleichgültig an welcher Stelle, ändert sich in den beiden oben genannten Gleichungen nur die Normalkraft N_1 , so daß die Matrix \underline{Z}_2 der Zustandsvektoren $\underline{z}_{2,i}$ singular wird.

$$\det \begin{vmatrix} U_{1,12}N_{1,1} & U_{1,12}N_{2,1}^* \\ U_{1,22}N_{1,1} & U_{1,22}N_{2,1}^* \end{vmatrix} = 0$$

$$(U_{1,12}U_{1,22} - U_{1,12}U_{1,22})N_{1,1}N_{2,1}^* = 0$$

Wird jedoch bei der zweiten Messung die Steifigkeit des ersten Teilsystems geändert, und somit auch die Koeffizienten $U_{1,12}$ und $U_{1,22}$, könnte die Matrix \underline{Z}_2 invertiert und das Subsystem identifiziert werden. Die Änderung des ersten Teilsystems darf sich jedoch nicht linear in beiden Koeffizienten ($U_{1,12}^*$, $U_{1,22}^*$) äußern, wenn die Erregung bei beiden Messungen die gleiche ist.

$$\det \begin{vmatrix} U_{1,12}N_{1,1} & U_{1,12}^*N_{2,1}^* \\ U_{1,22}N_{1,1} & U_{1,22}^*N_{2,1}^* \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(U_{1,12}U_{1,22}^* - U_{1,12}^*U_{1,22})N_{1,1}N_{2,1}^* \neq 0$$

$$U_{1,12}/U_{1,22} \neq U_{1,12}^*/U_{1,22}^*$$

Bei der Identifikation des ersten Teilsystems können aufgrund der Verschiebungsbehinderung $u_1 = 0$ die Koeffizienten $U_{1,11}$ und $U_{1,21}$ nicht bestimmt werden. Besteht das Teilsystem bei einer Änderung der Systemgrenzen jedoch aus einem Zugstab mit einseitiger, fester Einspannung, so kann dieses durch eine einzige Messung identifiziert werden, da den zwei unbekanntem Koeffizienten genau zwei Gleichungen gegenüberstehen.

$$u_2 = U_{1,12}/U_{\text{ges.},22}F(t) \quad \text{und} \quad N_2 = U_{1,22}/U_{\text{ges.},22}F(t)$$

Das dritte Teilsystem kann ohne Änderungen anderer Subsysteme identifiziert werden, indem nacheinander am freien Ende und am Übergang vom ersten zum zweiten Teilsystem der Zugstab mit einer harmonischen Kraft erregt wird.

Die Identifikation von Subsystemen unterscheidet sich rein formal nicht von der des gesamten Systems. Wie am Beispiel des Zugstabes jedoch verdeutlicht wurde, muß für jedes zu untersuchende System überprüft werden, unter welchen Bedingungen dieses identifiziert werden kann.

Die im Kap. 3.2.1. vorgeschlagene Vorgehensweise zur experimentellen Frequenzgangmessung kann grundsätzlich auch auf die Übertragungs- und Steifigkeitsmatrix eines Systems angewendet werden, ebenso auch die Parametrisierung in Form von komplexen, gebrochen rationalen Polynomen (vergl. Gl. 3.11). An dieser Stelle sei jedoch auf die Konvergenzeigenschaften der Matrizen $\underline{H}(\omega)$, $\underline{K}(\omega)$ und $\underline{U}(\omega)$ für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ hingewiesen, die man beim Polynomansatz der einzelnen Koeffizienten beachten muß. Bei der Identifikation von Subsystemen treten in der Regel Starrkörperverschiebungen auf, die beispielsweise dazu führen, daß der Frequenzgang für $\omega \rightarrow 0$ gegen unendlich strebt.

In der Tab. 3.1 sind die Grenzwerte für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ von Systemen mit und ohne mögliche Starrkörperverschiebung angegeben. Sie sollen nur Anhaltswerte für den Koeffizienten $a_{0,k1}$ und die Parameter n und m in Gl. 3.11 liefern. Die angegebenen Grenzwerte können nicht für jedes System verallgemeinert werden. Ein * deutet darauf hin, daß für

einige Systeme oder Koeffizienten Grenzwerte existieren, über die keine Aussagen gemacht werden können.

In der Tabelle bedeutet:

- V/V Koeffizienten, die das Verhältnis von Verschiebungen beschreiben
 K/K Koeffizienten, die das Verhältnis von Kraftgrößen beschreiben
 V/K Koeffizienten, die das Verhältnis von Verschiebungen zu Kraftgrößen beschreiben
 K/V Koeffizienten, die das Verhältnis von Kraftgrößen zu Verschiebungen beschreiben

Tab. 3.1) Grenzwerttabelle für $\underline{H}(\omega)$, $\underline{K}(\omega)$ und $\underline{U}(\omega)$

Systeme ohne Starrkörperverschiebung	Frequenzgang $\underline{H}(\omega)$	Steifigkeitsmatrix $\underline{K}(\omega)$	Übertragungsmatrix $\underline{U}(\omega)$			
			V/V	K/K	K/V	V/K
$\lim \omega \rightarrow \infty$	0	∞	*	*	∞	0
$\lim \omega \rightarrow 0$	*	*	*	*	*	*
$a_{0,kl}$	1	1	1	1	1	1
Systeme mit Starrkörperverschiebung						
$\lim \omega \rightarrow \infty$	0	∞	*	*	∞	0
$\lim \omega \rightarrow 0$	∞	0	*	*	0	∞
$a_{0,kl}$	0	1	1	1	1	0
für beide Systeme gilt	$n < m$	$n > m$	$n = m$	$n = m$	$n > m$	$n < m$

Abschließend sollen noch einige Bemerkungen zur Identifikation von nichtlinearen Subsystemen gemacht werden. Bei linearen Teilsystemen besteht die Schwierigkeit darin, an den Systemgrenzen linear unabhängige Zustandsvektoren zu realisieren. Oft ist es nicht möglich einzelne

Teilsysteme zu verändern oder das gesamte System gezielt zu erregen. Besteht dagegen das Gesamtsystem aus mindestens einem nichtlinearen Subsystem, so würde schon eine Amplitudenänderung der Erregung bei den einzelnen Messungen ausreichen, um linear unabhängige Zustandsvektoren zu realisieren. Weist jedoch das zu identifizierende Teilsystem nichtlineares Verhalten auf, so werden bei einer Amplitudenvariation die Identifikationsergebnisse verfälscht, da das Superpositions- und Proportionalitätsprinzip für dieses System nicht gilt. Frequenzgänge, Steifigkeits- und Übertragungsmatrizen nichtlinearer Systeme sind immer amplitudenabhängig und gelten nur im betrachteten Betriebspunkt.

Wie diese kurze Einführung in die Subsystemidentifikation gezeigt hat, sind einige Kenntnisse über das Gesamtsystem notwendig, um gezielt und systematisch einzelne Teilsysteme identifizieren zu können.

4. Allgemeines zur Identifikation hydrodynamischer Wandler

In Abb. 4.1 ist ein einfacher Anwendungsfall für den Einsatz von hydrodynamischen Wandlern dargestellt. Die von der Antriebsmaschine in den Wellenstrang eingeleitete, mechanische Energie wird über den Wandler nach einer Momenten- und Drehzahlwandlung der Arbeitsmaschine zugeführt. Sind Einrichtungen zur Messung der Teilsystemein- und -ausgangsgrößen vorhanden, so kann prinzipiell das dynamische Verhalten hydrodynamischer Wandler aus diesem Gesamtsystem identifiziert werden.

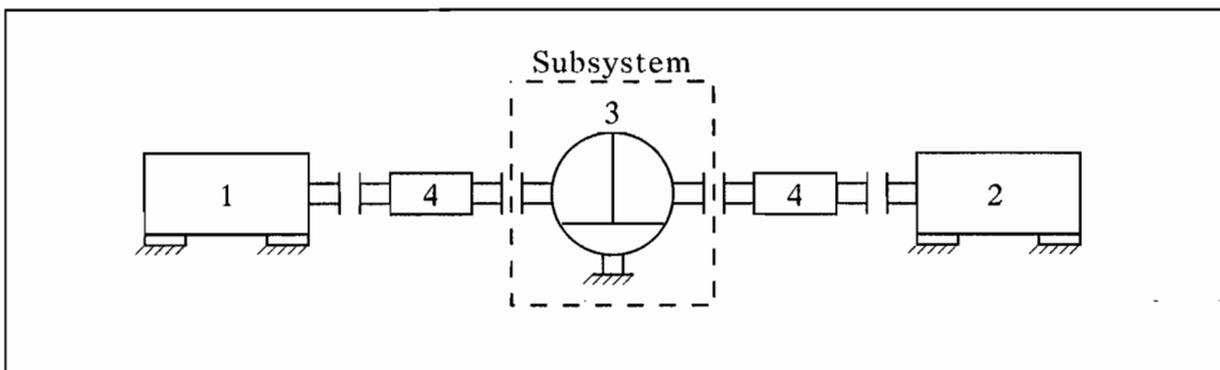


Abb. 4.1) Grundlegender Versuchsaufbau

(1: Antriebsmaschine; 2: Arbeitsmaschine; 3: hydrodynamischer Wandler; 4: Meßeinrichtung für Momente und Drehzahlen)

Abgeleitet aus der Finite-Element-Methode wird für den Wandler ein Modell angegeben, das eine Beziehung zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen an den Grenzen des Systems herstellt. Mehrfreiheitsgradsysteme werden dabei in der Form von Matrizen abgebildet, die entweder aus einem Differentialgleichungssystem hergeleitet oder darauf zurückgeführt werden können. Für hydrodynamische Wandler sind in Gl. 4.1 bis 4.3 drei verschiedenen Modellformen angegeben, die sich in den unterschiedlichen Definitionen der Zustandsvektoren unterscheiden. Die Meßorte der Zustandsvektoren werden durch die Systemgrenze bestimmt. Die Subsystemein- und -ausgangsgrößen sind die pumpen- und turbinenseitigen Momente und Drehzahlen. Welche Meßgrößen als Eingangs- und welche als Ausgangsgrößen bezeichnet werden, ist dabei rein will-

kürlich, da die einzelnen Formulierungen ineinander überführt werden können.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} M_P(\omega) \\ M_T(\omega) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} d_{11}(\omega) & d_{12}(\omega) \\ d_{21}(\omega) & d_{22}(\omega) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_P(\omega) \\ n_T(\omega) \end{vmatrix} \\ \underline{M}(\omega) &= \underline{D}(\omega) \underline{n}(\omega) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} n_P(\omega) \\ n_T(\omega) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} h_{11}(\omega) & h_{12}(\omega) \\ h_{21}(\omega) & h_{22}(\omega) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_P(\omega) \\ M_T(\omega) \end{vmatrix} \\ \underline{n}(\omega) &= \underline{H}(\omega) \underline{M}(\omega) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} n_T(\omega) \\ M_P(\omega) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} u_{11}(\omega) & u_{12}(\omega) \\ u_{21}(\omega) & u_{22}(\omega) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_P(\omega) \\ M_T(\omega) \end{vmatrix} \\ \underline{Z}_2(\omega) &= \underline{U}(\omega) \underline{Z}_1(\omega) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Matrix $\underline{D}(\omega)$ in Gl. 4.1 wird im folgenden dynamische Dämpfungsmatrix genannt, da sie die Beziehung zwischen den Momenten und den Winkelgeschwindigkeiten beschreibt. Ihre Inverse ist die Matrix $\underline{H}(\omega)$ in Gl. 4.2. Wird $\underline{H}(\omega)$ durch $j\omega$ geteilt, dann stellt die so gebildete Matrix die Beziehung zwischen den Winkeln und den Momenten her. Im allgemeinen wird diese Matrix als Frequenzgang bezeichnet. Dementsprechend wird das Produkt $\underline{D}(\omega) \cdot j\omega$ dynamische Steifigkeitsmatrix genannt. Die Matrix $\underline{U}(\omega)$ in Gl. 4.3 ist die dynamische Übertragungsmatrix. Die Koeffizienten aller drei Matrizen sind komplexe Funktionen.

Aus dem grundsätzlichen Versuchsaufbau in Abb. 4.1 und den verwendeten Modelle in Gl. 4.1 bis Gl. 4.2 ergibt sich, daß diese für das Teilsystem Wandler für jeweils eine Erregerfrequenz ω durch eine pumpe- und eine turbinenseitige Erregung identifiziert werden können. Andere Teilsysteme des Antriebsstranges brauchen hinsichtlich ihrer dynamischen Eigenschaften nicht geändert zu werden.

4.1. Beschreibung des Versuchsstandes

Im Rahmen des Sonderforschungsbereiches (SFB) 278 ("Hydrodynamische Leistungsübertragung") wurde in den Jahren 1990 und 1991 ein von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) finanzierter Versuchsstand aufgebaut, der in Abb. 4.2 dargestellt ist.

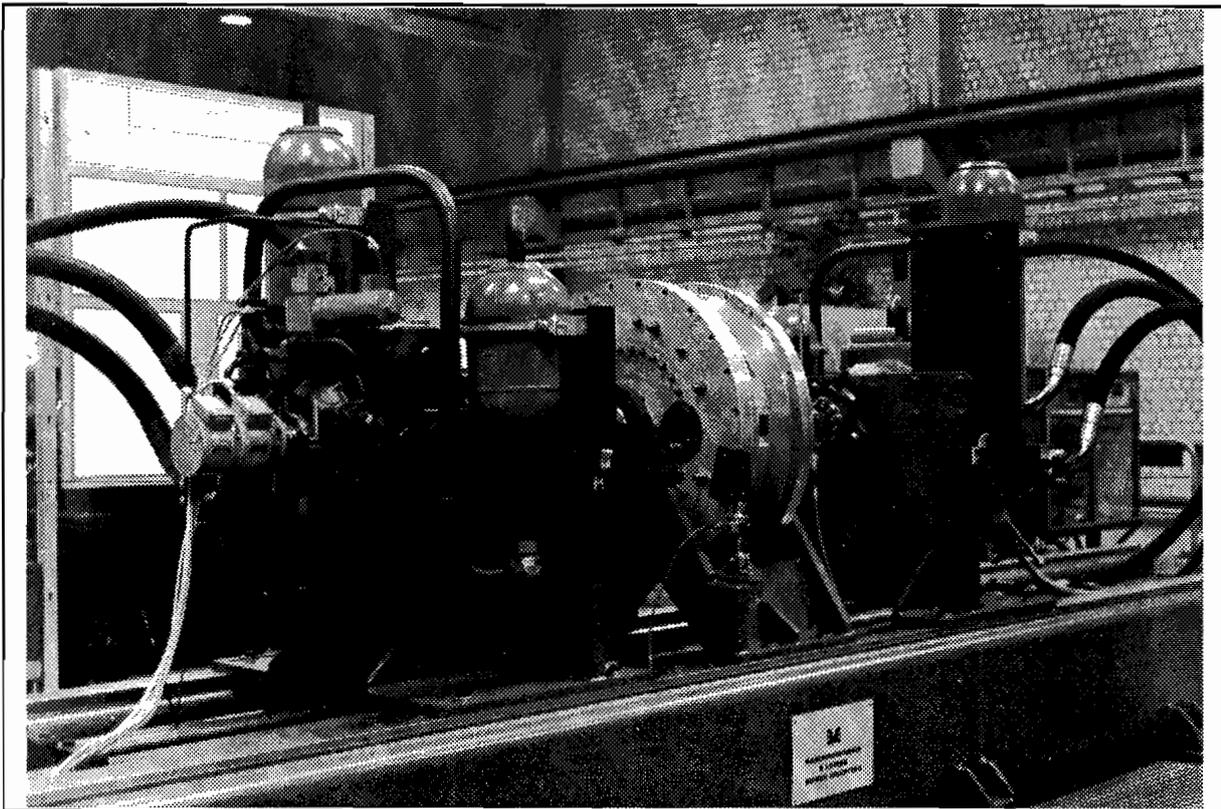


Abb. 4.2) Wandler- und Kupplungsversuchsstand mit einphasigem Versuchswandler

Das Teilprojekt A5 dieses SFB's beschäftigt sich mit der Modellierung und Identifikation des instationären Verhaltens von hydrodynamischen Wandlern und Kupplungen. Der Versuchsstand wurde speziell für diese Aufgabenstellung geplant und ausgeführt. Dieses erfolgte in Zusammenarbeit mit Herrn Dipl. Ing. U. Folchert, der auch die Untersuchungen an der hydrodynamischen Kupplung durchführte /31/.

Aus der allgemeinen Zielsetzung der Subsystemidentifikation von Wandlern und Kupplungen heraus, ergaben sich spezielle Anforderungen an den Versuchsstand, die folgendermaßen zusammengefaßt werden können:

- 1) Hohe Dynamik der Antriebs- und Bremseinheit.
- 2) Schnelle und genaue Drehzahl- bzw. Momentenregelung der Antriebs- und Bremseinheit im Vierquadrantenbetrieb.
- 3) Rechnergestützte Meßwerterfassung, -verarbeitung und Versuchsstandsteuerung.
- 4) Flexibler und modularer Aufbau aller mechanischen Komponenten.
- 5) Genaue meßtechnische Erfassung von zum Teil schnellen Drehzahl- und Momentenänderungen

Aufgrund der geforderten Eigenschaften an die Antriebs- und Bremseinheit wurden hydrostatische Getriebe eingesetzt. Die Wahl fiel dabei auf zwei gleiche, sekundärgeregelte Axialkolbeneinheiten. Sie zeichnen sich, im Gegensatz zu elektrischen Antrieben, durch ein geringes Bauvolumen und geringe Massenträgheitsmomente aus. Grundsätzlich kann bei den Axialkolbeneinheiten nicht eindeutig zwischen Antriebs- und Bremseinheit unterschieden werden, da beide Maschinen im Vierquadrantenbetrieb eingesetzt werden können.

Bei der Sekundärregelung bleibt der Betriebsdruck annähernd konstant und wird durch den Ladezustand der im System befindlichen Hydraulikspeicher bestimmt. Wechselnde Belastungen verursachen daher hauptsächlich Änderungen des Volumenstromes. Dieses hat den Vorteil, daß die von der Bremsmaschine abgegebene hydraulische Energie wieder in das Konstant-Drucknetz zurückgeführt werden kann, so daß nur die in der Anlage auftretenden Verluste durch eine Versorgungseinheit gedeckt werden müssen. In Abb. 4.3 ist das hydraulische Antriebssystem skizziert.

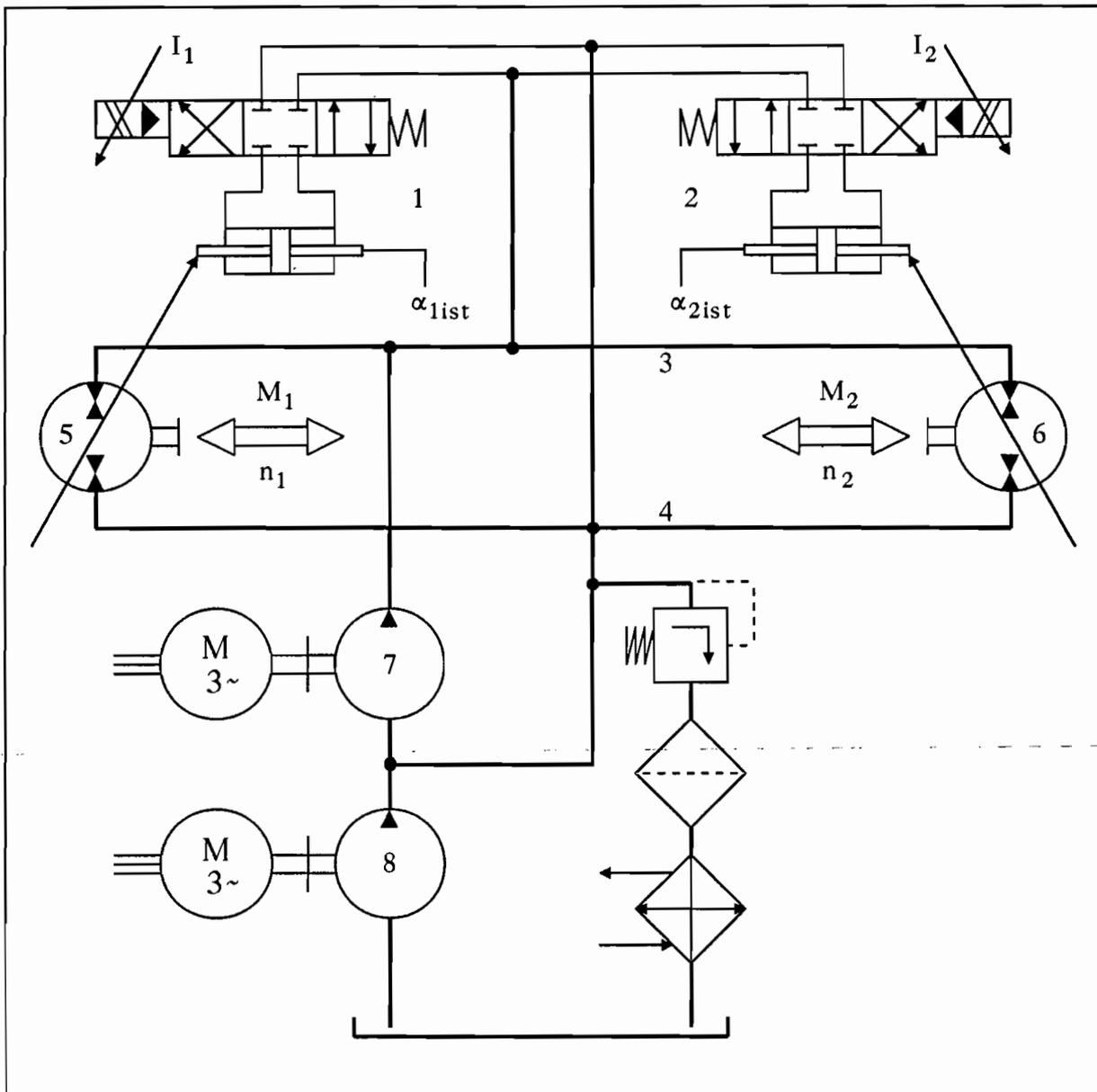


Abb. 4.3) Prinzipielle Darstellung des hydraulischen Antriebssystems

- 1, 2) elektro-hydraulische Schwenkwinkelverstellung;
- 3) Hochdruckleitung;
- 4) Niederdruckleitung;
- 5, 6) Antriebsmaschine 1,2;
- 7) Hauptversorgungspumpe;
- 8) Speisepumpe;
- I_1, I_2) Steuerstrom Maschine 1,2;
- $\alpha_{1ist}, \alpha_{2ist}$) Schwenkwinkelwert Maschine 1,2;

Die Änderung des Hubvolumens und somit des Volumenstroms einer hydrostatischen Einheit erfolgt über die elektro-hydraulische Verstellung des Schwenkwinkels. Der zur Verstellung einer Maschine notwendige Steuerstrom I wird von einem analogen Schwenkwinkelregler (α -Regler) vorgegeben. Diesem ist alternativ entweder ein analoger Drehzahl- oder Momentenregler (n -Regler oder M -Regler) vorgeschaltet (Abb. 4.4). Grundsätzlich ergeben sich daraus für die Regelung der Anlage vier Kombinationen oder auch Regelmoden (Tab. 4.1).

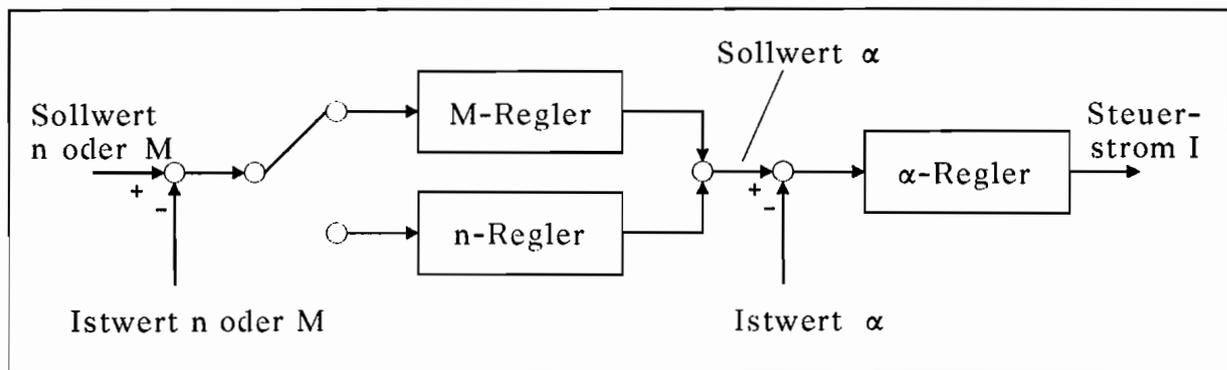


Abb. 4.4) Antriebsregelung

Tab. 4.1) Regelmoden

Regelmodus	pumpenseitig (Maschine 1)	turbinenseitig (Maschine 2)
1	Drehzahl	Drehzahl
2	Drehzahl	Moment
3	Moment	Drehzahl
4	Moment	Moment

Zudem besteht die Möglichkeit unter Umgehung des Momenten- und Drehzahlreglers den Schwenkwinkelsollwert α vorzugeben. Der Regelmodus 4 und die Kombinationen Momenten-/Schwenkwinkelregelung, Schwenkwinkel-/Momentenregelung und Schwenkwinkel-/Schwenkwinkelregelung sind jedoch ausgeschlossen, da hierbei unzulässig hohe Drehzahlen auftreten können. Die Regelparameter für den Momenten- und Drehzahlregler können für beide Maschinen unabhängig voneinan-

der an die jeweiligen Versuchsbedingungen angepaßt und manuell eingestellt werden. Die Meßwerte für die Momente und Drehzahlen an der Subsystemgrenze werden gleichzeitig zur Modellanpassung und als Istwerte für die analoge Regelung verwendet. Das hat den Vorteil, daß mit der Sollwertvorgabe die Zustandsgrößen an der Teilsystemgrenze direkt beeinflußt werden können.

Die Sollwertvorgabe, Meßwernerfassung sowie die Meßwertverarbeitung erfolgt durch ein VME-Bus Rechensystem, dessen prinzipieller Aufbau in Abb. 4.5 dargestellt ist.

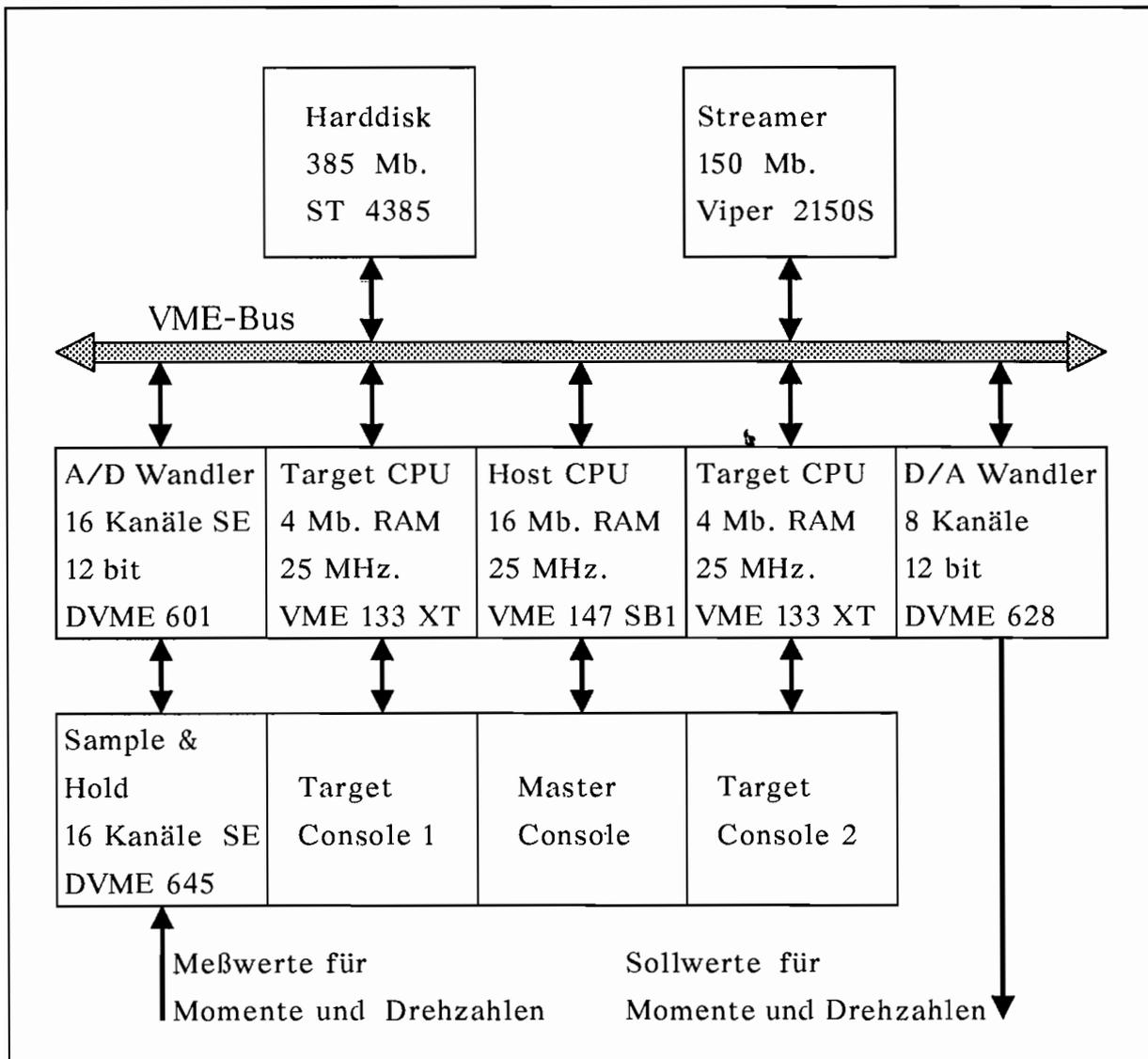


Abb. 4.5) Rechnerkonfiguration

Das System ist aufgrund des modularen Aufbaus sehr flexibel und vielseitig einsetzbar. Den Kern bildet die Host-CPU (Motorola MC 68030) mit dem Betriebssystem UNIX V/68. Die eigentliche Meßwerterfassung und Sollwertvorgabe läuft unter dem Echtzeitbetriebssystem VME-exec auf den beiden Target-CPU's (Motorola MC 68020) ab. Während die eine Target Meßwerte aus dem Analog/Digital-Wandler liebt und für deren Abspeicherung verantwortlich ist, werden auf der anderen Target die Sollwerte für die Versuchsanlage berechnet und über den Digital/Analog-Wandler der jeweiligen analogen Antriebsregelung für beide Maschinen zugeführt. Für die Synchronisation der Target-CPU's und dem A/D- bzw. D/A-Wandler ist ein systeminterner Timer mit einstellbarem Zeittakt verantwortlich. Dadurch ist ein closed-loop-Betrieb möglich, bei dem die Sollwertberechnung in Abhängigkeit von den Meßwerten erfolgt. Dieses ist im Zusammenhang mit der Realisierung spezieller Versuchsreihen und einer geplanten digitalen Regelung der Versuchsanlage notwendig. Die Meßwerte werden blockweise und off-line auf der Host-CPU ausgewertet und zur Modellanpassung weiterverarbeitet. Grundsätzlich ist jedoch auch eine blockweise on-line Auswertung möglich, bei der das Modell rekursiv an die neuen Meßwerte angepaßt wird.

Die Überwachung der Betriebssicherheit wird von einer speicherprogrammierbaren Steuerung (SPS) übernommen. Kritische Betriebszustände werden von ihr erfaßt und führen in den meisten Fällen zur Notabschaltung der Anlage. Hierzu zählen beispielsweise eine Überschreitung der maximalen Drehzahlen, eine unzulässig hohe Temperatur der Hydraulikflüssigkeit oder zu große Regelabweichungen. Weiterhin wird auch die Bedienung der Anlage überwacht.

Der sechs Meter lange Grundrahmen des Versuchstandes besteht aus einer torsionssteifen Schweißkonstruktion, auf der über die ganze Länge zwei bearbeitete und mit Gewindebohrungen versehene Führungsbahnen aufgesetzt sind. Diese ermöglichen eine beliebige Positionierung aller Aufbauten. Hierzu zählen die beiden Antriebseinheiten, die Wandler oder Kupplungseinheit, sowie Einheiten zur Aufnahme von Zwischenwellen und Zusatzdrehträgheiten. Somit können im gesamten Antriebs-

strang weitere Subsysteme ohne größeren Aufwand eingebaut werden, um das dynamische Verhalten hydrodynamischer Wandler und Kupplungen unter nahezu beliebigen Randbedingungen untersuchen zu können. Jede Einheit ist so konstruiert, das sie radial leicht ausgebaut und ausgetauscht werden kann. Die Verbindungen zwischen den Einheiten erfolgen über torsionssteife, rein mechanische Kupplungen. Diese ermöglichen es, Fluchtungsfehler und einen axialen Versatz zwischen den einzelnen Komponenten auszugleichen.

Bedingt durch den mechanischen Aufbau der Antriebseinheiten werden von diesen drehzahlfrequente Schwingungen in den starren Antriebsstrang eingeleitet, die in der Nähe der Resonanzfrequenzen zu großen Momentenschwankungen führen. Bei der Konstruktion wurde jedoch auf dämpfende Bauelemente im Antriebsstrang verzichtet, weil sich diese in hochdynamischen Versuchständen nachteilig auswirken können. Zudem ist die Auslegung eines Antriebsstranges hinsichtlich der Vermeidung von Resonanzschwingungen meist nur in einem begrenzten Betriebsbereich möglich. Die setzt voraus, daß die Dynamik der einzelnen Teilsysteme bekannt ist und mathematisch beschrieben werden kann. Bei der Auslegung des Versuchstandes war dieses jedoch nicht möglich, da über die Dynamik der zu untersuchenden, hydrodynamischen Wandler und der Kupplung wenig Kenntnisse vorlagen. Da die Momentenschwankungen mit Frequenzen > 130 Hz weit über dem Dynamikbereich liegen, der für die Untersuchung von hydrodynamischen Wandlern und Kupplungen von Interesse ist, wurden sie durch eine analoge und digitale Filterung der Meßsignale unterdrückt.

Die maximal zur Verfügung stehende mechanische Antriebsleistung P_{mP} ist von den Wirkungsgraden der einzelnen hydrostatischen und -dynamischen Baugruppen sowie von der installierten elektrischen Versorgungsleistung P_E abhängig. Die Zusammenhänge ergeben sich in erster Näherung aus Abb. 4.6.

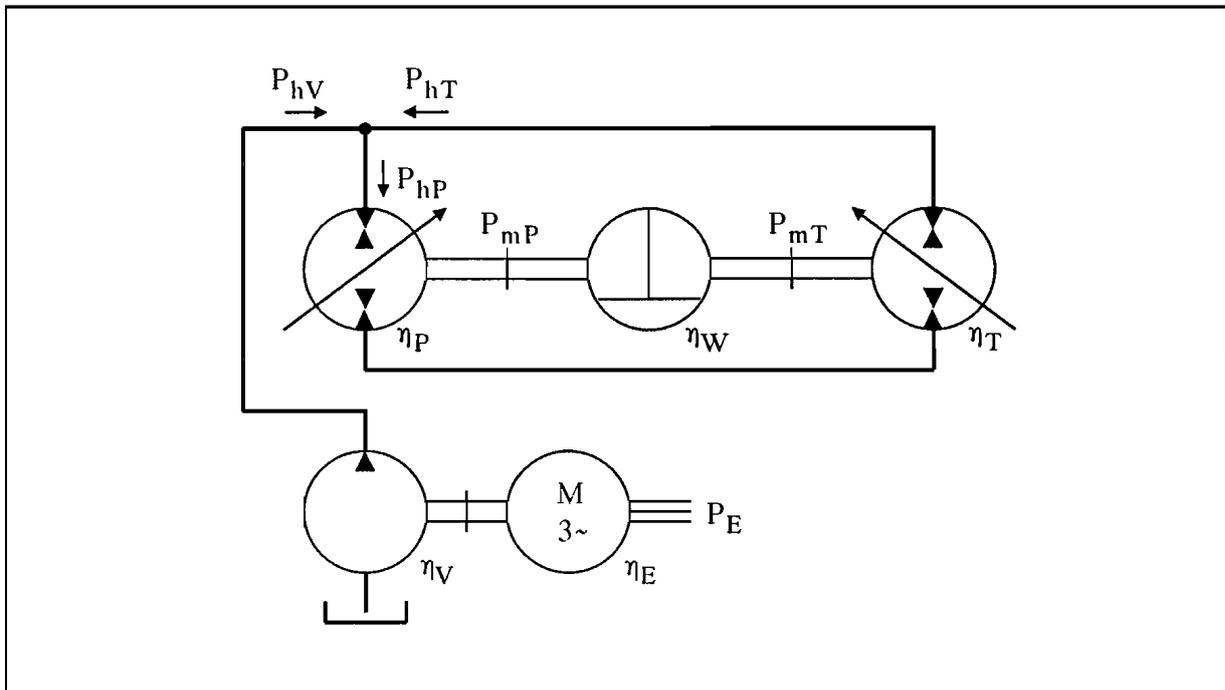


Abb. 4.6) Wirkungsgrade in der gesamten hydraulischen Anlage

(η_E = Wirkungsgrad Elektromotor; η_V = Wirkungsgrad Versorgungspumpe; η_P = Wirkungsgrad Antriebsmotor; η_T = Wirkungsgrad Bremsmaschine; η_W = Wirkungsgrad Wandler; P_{hP} = hydraulische Versorgungsleistung für den Antriebsmotor; P_{hT} = zurückgewonnene hydraulische Leistung von der Bremsmaschine; P_{hV} = hydraulische Leistung der Versorgungseinheit; P_{mP} = pumpenseitige mechanische Leistung; P_{mT} = turbinenseitige mechanische Leistung; P_E = elektrische Versorgungsleistung)

$$P_{mP} = P_E \eta_P \eta_V \eta_E / (1 - \eta_P \eta_W \eta_T) \quad (4.4)$$

Mit Gl. 4.4 und den stationären Kennlinien der hydrodynamischen Baugruppen kann abgeschätzt werden, ob die installierte elektrische Versorgungsleistung ausreicht, bestimmte Betriebspunkte der eingesetzten hydrodynamischen Baugruppe anzufahren. Dieses ist erforderlich, um zu überprüfen, ob ausreichend hydraulische Energie von der Bremsmaschine zurückgewonnen wird. In Betriebspunkten mit einem schlechten Wandler- oder Kupplungswirkungsgrad ist dieses jedoch nicht immer gewährleistet. Da die mechanische Aufnahmeleistung hydrodynamischer

Getriebe im allgemeinen mit der Antriebsdrehzahl steigt, kann auch die im Dauerbetrieb maximal gefahrene Pumpendrehzahl mit Hilfe der Leistungszahl λ abgeschätzt werden. Die Wirkungsgrade der hydrostatischen Baugruppen und des elektrischen Antriebes können in erster Näherung als konstant angenommen werden ($\eta_E = \eta_V = 0.9$; $\eta_P = \eta_T = 0.85$). Lediglich die Betriebspunktabhängigkeit des Wirkungsgrades der hydrodynamischen Getriebe η_W ist zu berücksichtigen.

Die Ölversorgung der Wandler ist in der hydraulischen Anlage für die Antriebs- und Bremsmaschinen integriert. Das Betriebsmedium ist daselbe wie das der hydrostatischen Antriebe. Es wird aus einem 630 Liter großem Vorratstank bezogen. Die Ölkreisläufe für die Wandler und die Antriebseinheiten sind an einen Wärmetauscher mit 35 kW Kühlleistung angeschlossen. Über ein Druckbegrenzungs- und Stromregelventil können der Druck (max. 15 bar) und der Volumenstrom (max. 10 l/min) für das Betriebsmedium der Wandler eingestellt werden. Mit jeweils zwei an den Wandlern angebrachten Widerstandsthermometern wird die Betriebstemperatur während der Versuchsdurchführung überwacht.

Da über die Teilsystemgrenze des Wandlers durch das Betriebsmedium hydraulische Leistung zu- und auch wieder abgeführt wird, und zudem Wärmeenergie über diese Grenze das System verläßt, müßte der Energieaustausch mit der Umgebung in die Modellierung mit einfließen. Verglichen mit der mechanischen Leistung sind diese Einflüsse jedoch so gering, daß sie vernachlässigt werden können.

Zur genauen Drehzahlerfassung werden Inkrementalgeber mit einer hohen Auflösung (1250 Impulse pro Umdrehung) eingesetzt. Die Messungen der An- und der Abtriebsdrehzahl erfolgen jedoch nicht, wie bisher vorausgesetzt, an der Teilsystemgrenze, sondern an den jeweiligen freien Enden der hydrostatischen Antriebe. Da die relativen Drehzahlschwankungen des Antriebs- und Abtriebsstranges von den Drehzahlmeßstellen bis zur Subsystemgrenze aufgrund des starren Aufbaus sehr gering und zudem hochfrequent sind, können sie vernachlässigt werden.

Die Momentenmessung erfolgt durch handelsübliche Drehmomentenmeßwellen, die im An- bzw. Abtriebsstrang genau an der Subsystemgrenze eingebaut sind. In diesen Meßwellen ist jeweils ein Inkrementalgeber integriert, der jedoch aufgrund der geringen Auflösung mit den gebräuchlichen Meßverstärkern und Auswerteverfahren zur genauen Erfassung von zum Teil schnellen Drehzahländerungen nicht eingesetzt werden kann. Für die Zukunft ist daher geplant, spezielle Auswerteverfahren für diese Geber zu entwickeln, mit denen die Ansprüche an eine schnelle und genaue Drehzahlerfassung erfüllt werden können. Der Einsatz dieser Drehzahlmeßstellen hat dann den Vorteil, daß sie an jeder beliebigen Stelle im Gesamtsystem eingesetzt werden können, also auch genau an der Teilsystemgrenze.

Im folgenden sind einige Leistungsdaten der Versuchsanlage zusammengefaßt.

Allgemeines

<u>Aufbauart:</u>	Verspannungsprüfstand mit abtriebsseitiger Energierückführung
<u>Betriebsart:</u>	Vierquadrantenbetrieb beider Antriebseinheiten
<u>Antriebssystem:</u>	Hydraulisch
<u>Betriebsmedium:</u>	Hydrauliköl ISO VG 46

Antriebseinheiten

<u>Bauart:</u>	Sekundärgeregelte Axialkolbeneinheiten nach dem Schrägscheibenprinzip
<u>Lieferant:</u>	Mannesmann Rexroth
<u>Bezeichnung:</u>	A4VSG250DS
<u>max. Leistung:</u>	200 kW
<u>max. Drehzahl:</u>	1860 min ⁻¹
<u>max. Moment:</u>	1060 Nm (bei einem $\Delta p=280$ bar)
<u>max. Schluckvolumen:</u>	250 cm ³
<u>Trägheitsmoment:</u>	0.0959 kgm ²
<u>Hydraulikspeicher:</u>	für jede Maschine 20 dm ³ im Hochdruck- und 10 dm ³ im Niederdruckbereich

Versorgungseinheit

<u>Lieferant:</u>	Mannesmann Rexroth
<u>Installierte elektrische Leistung:</u>	55 kW (+ 7.5 kW für Speisepumpe und Ölversorgung des Wandlers)
<u>Druckdifferenz:</u>	$\Delta p = 280$ bar (manuell einstellbar)
<u>Ölvorratstank:</u>	630 cm ³
<u>Kühlleistung:</u>	35 kW

Steuerung und Regelung

<u>Lieferant:</u>	Mannesmann Rexroth
<u>Momentenregler:</u>	analoger PID-Regler (manuell einstellbar)
<u>Drehzahlregler:</u>	analoger PID-Regler (manuell einstellbar)
<u>Schwenkwinkelregler:</u>	analoger PD-Regler
<u>Steuerung:</u>	SPS
<u>Regelmodus:</u>	1, 2 und 3 siehe Tab. 4.1 und reine Schwenkwinkelregelung

Rechnersystem

<u>Hardware:</u>	siehe Abb. 4.5
<u>Betriebssystem:</u>	UNIX und VME-exec

Meßwerterfassung

<u>Drehzahlerfassung:</u>	Inkrementalgeber 1250 Impulse pro Umdrehung Lieferant: Mannesmann Rexroth
---------------------------	--

<u>Folgeelektronik für Drehzahlerfassung:</u>	f/U Wandler VTS 0102S1x/FUW1 Taktfrequenz: 50 MHz. Lieferant: Mannesmann Rexroth
---	--

<u>Momentenerfassung:</u>	Drehmomentenmeßwellen T30FN Meßprinzip: DMS max. Moment: ± 2000 Nm max. Drehzahl: ± 3000 min ⁻¹ Genauigkeitsklasse: 0.1 eingebauter Inkrementalgeber mit 60 Imp./U Lieferant: HBM
---------------------------	--

Folgeelektronik für

Momentenerfassung:

Meßverstärker MD60

Genauigkeitsklasse: 0.1

Lieferant: HBM

4.2. Beschreibung der Versuchswandler

Für die experimentellen Untersuchungen wurden zwei einstufige und mit Öl als Arbeitsfluid gefüllte Gleichlaufwandler verwendet. Beide Wandler unterscheiden sich in ihrer Bauform und in den unterschiedlichen Verläufen der Leistungszahl λ . Da sie keine äußeren Stell- oder Schalteinrichtungen zur Beeinflussung ihrer Charakteristik enthalten und die Funktion der Schaufelräder sich nicht selbständig ändern kann, zählen beide zur Gruppe der einphasigen Wandler.

Die Funktionsänderung eines Schaufelrades ist beim Trilok-Wandler möglich, wo sich nach dem Erreichen des Momentengleichgewichtes am Pumpen- und Turbinenrad das vorher am Gehäuse abgestützte Leitrad löst und ohne Momentenübertragung rotiert. Der Wandler wird dadurch in eine Kupplung überführt. Jede Änderung des Funktionszustandes eines Laufrades bezeichnet man als neue Betriebsphase.

Einer der experimentell untersuchten Wandler ist so konstruiert, daß er entweder durch den Einbau eines Freilaufes in einen Trilok-Wandler umgebaut oder durch das dauerhafte Lösen des drehbar gelagerten Leitrades in eine Kupplung überführt werden kann. Obwohl alle Messungen an diesem Wandler in nur einer Betriebsphase erfolgten, soll er im Rahmen dieser Arbeit zur besseren Unterscheidung als "zweiphasiger" Wandler bezeichnet werden, da er durch relativ einfache Eingriffe im mechanischen Aufbau in einen echten zweiphasigen Wandler umgebaut werden kann.

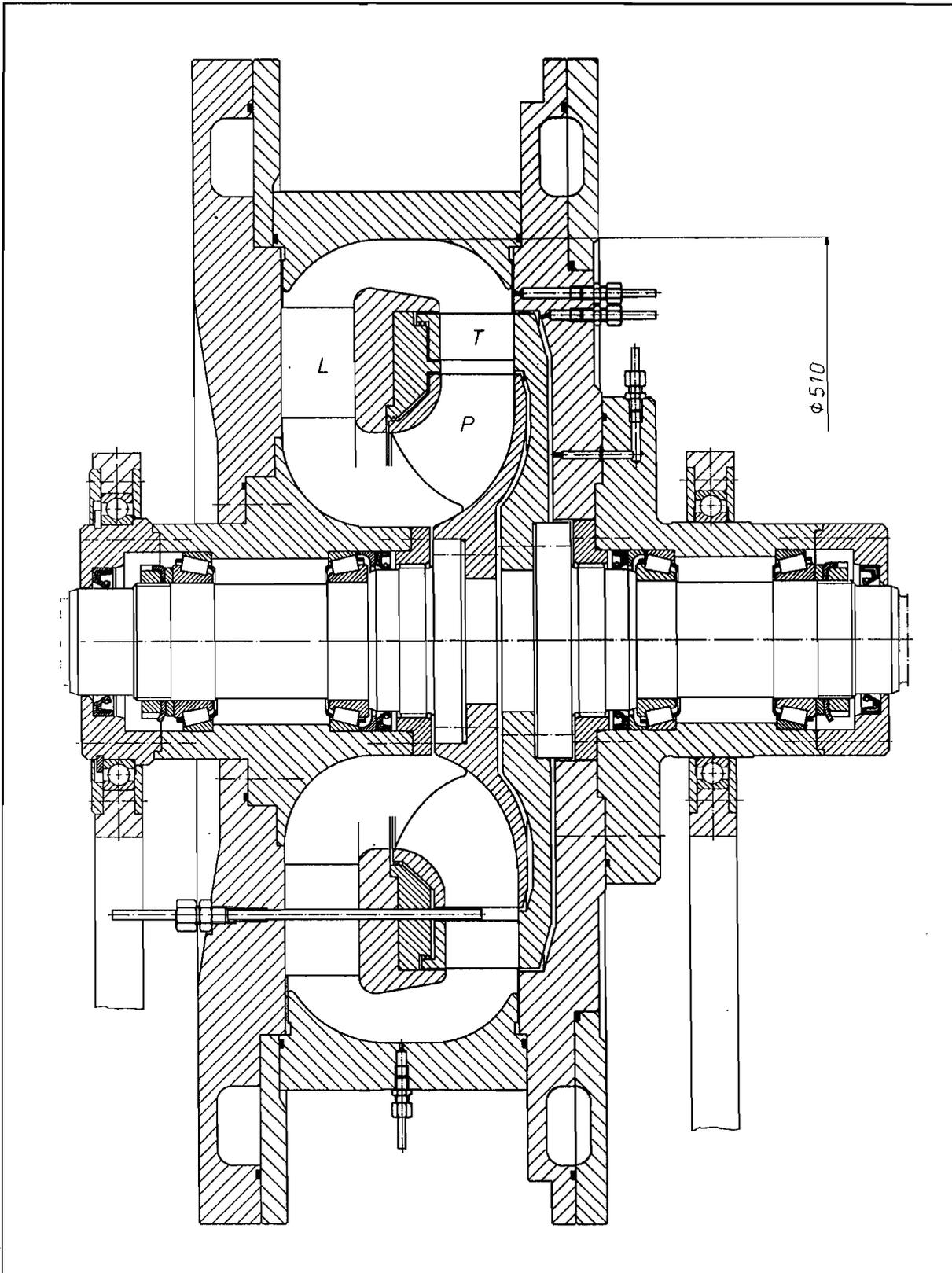


Abb. 4.7) Meridianschnitt des einphasigen Wandlers
(P = Pumpenrad; T = Turbinenrad; L = Leitrad)

4.2.1. Einphasiger Wandler

Beim einphasigen Wandler sind das Pumpen- und Turbinenrad unmittelbar hintereinander angeordnet. Diese beiden Laufräder werden zentrifugal und das Leitrad zentripetal durchströmt. Weiterhin besteht der Strömungskreislauf aus einer 180° Umlenkung zwischen Turbinen- und Leitrad und einer 90° Umlenkung zwischen Leit- und Pumpenrad. Abb. 4.7 zeigt einen Meridianschnitt des Wandlers.

Dieser Wandler ist von seiner Stömungsgeometrie baugleich mit dem von Adrian /18/ im Rahmen seiner Dissertation untersuchten Wasser- und Luftwandler. Die Konstruktion basiert auf den Zeichnungsunterlagen des Wasserwandlers, wie sie seinerzeit am Lehrstuhl für Fluidenergietechnik unter der Leitung von Prof. Fister entstanden sind. Es waren jedoch umfangreiche konstruktive Änderungen notwendig, damit der Wandler für dynamische Untersuchungen auf dem Versuchstand eingesetzt werden konnte.

Aufgrund der gestiegenen Belastung der Schaufelprofile durch die instationären Messungen wurde das Pumpenrad mit einer Deckscheibe versehen. Die von Adrian /18/ gewählte koaxiale Lagerung der Pumpen- und Turbinenwelle ist geändert worden, indem die Antriebswelle auf die gegenüberliegende Seite der Abtriebswelle verlegt wurde.

Das Gehäuse wurde drehbar gelagert und stützt sich über eine Kraftmeßdose am Fundament ab (Abb. 4.8). Somit ist es möglich geworden, aus dem Produkt Hebelarm mal gemessene Kraft das Reaktionsmoment auch für instationäre Betriebszustände zu berechnen. Da die verwendete Kraftmeßdose nur sehr kleine Verschiebungen zuläßt, kann die Verdrehung des gesamten Wandlergehäuses vernachlässigt und als feststehend betrachtet werden.

Die Werkstoffe des gesamten Wandlers wurden so gewählt, daß er auch mit Wasser betrieben werden kann.

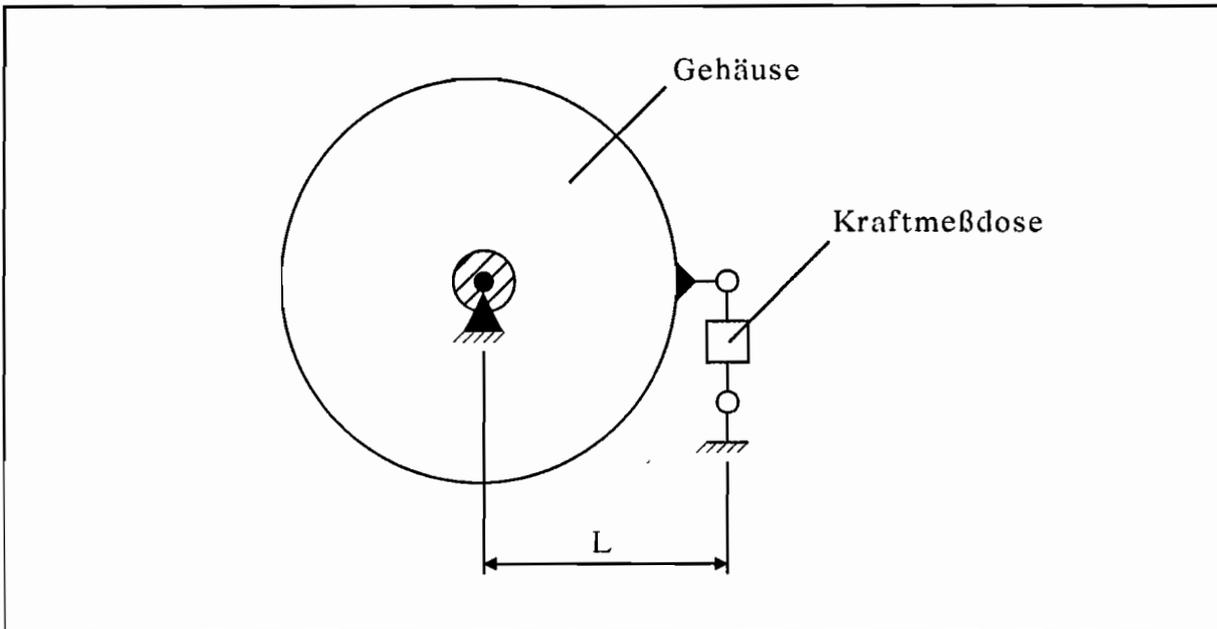


Abb 4.8) Gehäuselagerung des einphasigen Wandlers ($M_R=L \cdot F$)

Soweit es konstruktiv möglich war, wurden die von Adrian /18/ verwendeten Bohrungen zur Druckmessung, die Einrichtungen zur Aufnahme von Mehrlochsonden sowie die optischen Fenster für spätere Untersuchungen von instationären Druck- und Geschwindigkeitsverteilungen beibehalten. In der Abb. 4.7 sind fünf dieser Meßstellen dargestellt.

Im folgenden sind die wichtigsten Daten des einphasigen Wandlers und der Kraftmeßstelle zusammengefaßt.

Kraftmeßstelle

Meßsystem:

Kraftmeßdose U2A
 Lieferant: HBM
 Meßprinzip: DMS
 Meßbereich: 5000 N
 Genauigkeitsklasse: 0.1

Folgeelektronik für

Kraftmessung:

Meßverstärker K52
 Lieferant: HBM
 Genauigkeitsklasse: 0.1

Einphasiger Wandler

<u>Herstellerbezeichnung:</u>	VOITH E7yS
<u>Schaufelzahlen:</u>	Pumpenrad: 13 Turbinenrad: 40 Leitrad: 32
<u>max. Strömungsdurchmesser:</u>	510 mm
<u>Gewicht:</u>	ca. 300 kg

4.2.2. "Zweiphasiger" Wandler

Beim zweiten experimentell untersuchten Wandler wird das Leitrad axial, das Pumpenrad zentrifugal und die Turbine zentripetal durchströmt. Zwischen Pumpen- und Turbinenrad erfolgt eine 180° und zwischen Turbinen- und Leitrad bzw. Leit- und Pumpenrad jeweils eine 90° Umlenkung der Strömung. Es handelt sich um den in der Abb. 4.9 im Meridianschnitt dargestellten VOITH Einbauwandler vom Typ W405 TB 416 mit umlaufendem Gehäuse. Wandler dieser Bauart werden vorwiegend in Zusammenarbeit mit Verbrennungsmotoren zum Einbau in Lastschaltgetrieben für Baumaschinen und Transportfahrzeuge eingesetzt.

Aufgrund des umlaufenden Gehäuses gestaltet sich die Ölversorgung bei diesem Wandler schwieriger als beim einphasigen Wandler. Hierzu war die Konstruktion einer speziellen Lagerung erforderlich, über die das Betriebsmedium zu- und abgeführt werden kann. Innerhalb dieses Lageraufbaus kann auch die Rotation des Leitrades ermöglicht oder verhindert werden.

Im Gegensatz zum Versuchsstandaufbau für den einphasigen Wandler ist hier zusätzlich eine Trägheitsmasse auf der Turbinenseite in das Gesamtsystem eingebaut worden. Die Massendrehträgheit des Turbinenrades war zu gering, um eine stabile Regelung der Bremsmaschine zu gewährleisten. In Abb. 4.10 ist der Einbau des "zweiphasigen" Wandlers im Versuchsstand dargestellt. Hier ist auch gut die zusätzliche Trägheitsmasse zu erkennen.

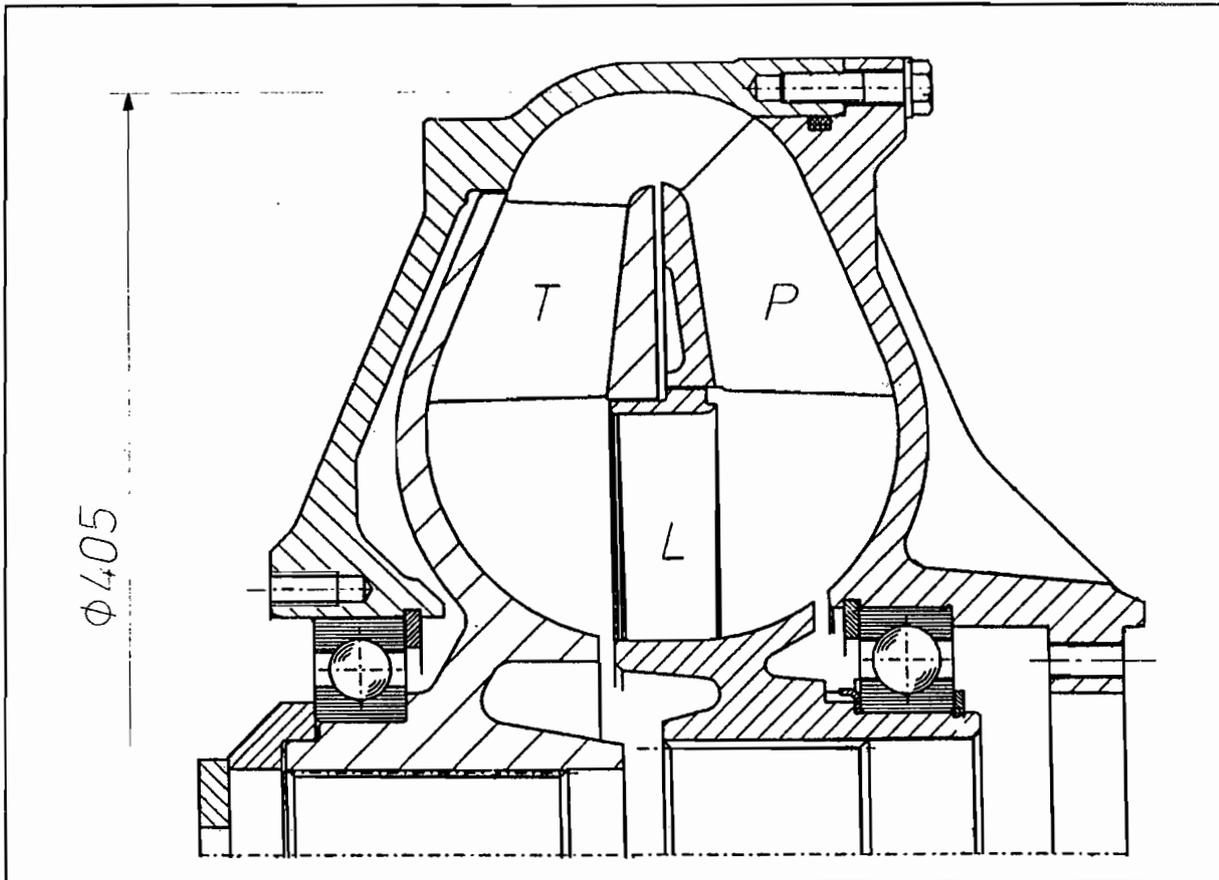


Abb. 4.9) Obere Hälfte des "zweiphasigen" Wandlers im Meridianschnitt

Eine Möglichkeit zur Messung des Reaktionsmomentes ist bei diesem Wandler nicht vorgesehen. Auch die Verwendung von Wasser als Betriebsmedium ist hier nicht möglich. Nachfolgend sind die technischen Daten des "zweiphasigen" Wandlers aufgeführt.

"Zweiphasiger" Wandler

Herstellerbezeichnung: VOITH W405 TB 416

Schaufelzahlen: Pumpenrad: 16
Turbinenrad: 28

Leitrad: 24

max. Eingangsleistung: 280 kW

max. Pumpendrehzahl: 2500 min⁻¹

max. Strömungsdurchmesser: 405 mm

Gewicht: ca. 28 kg

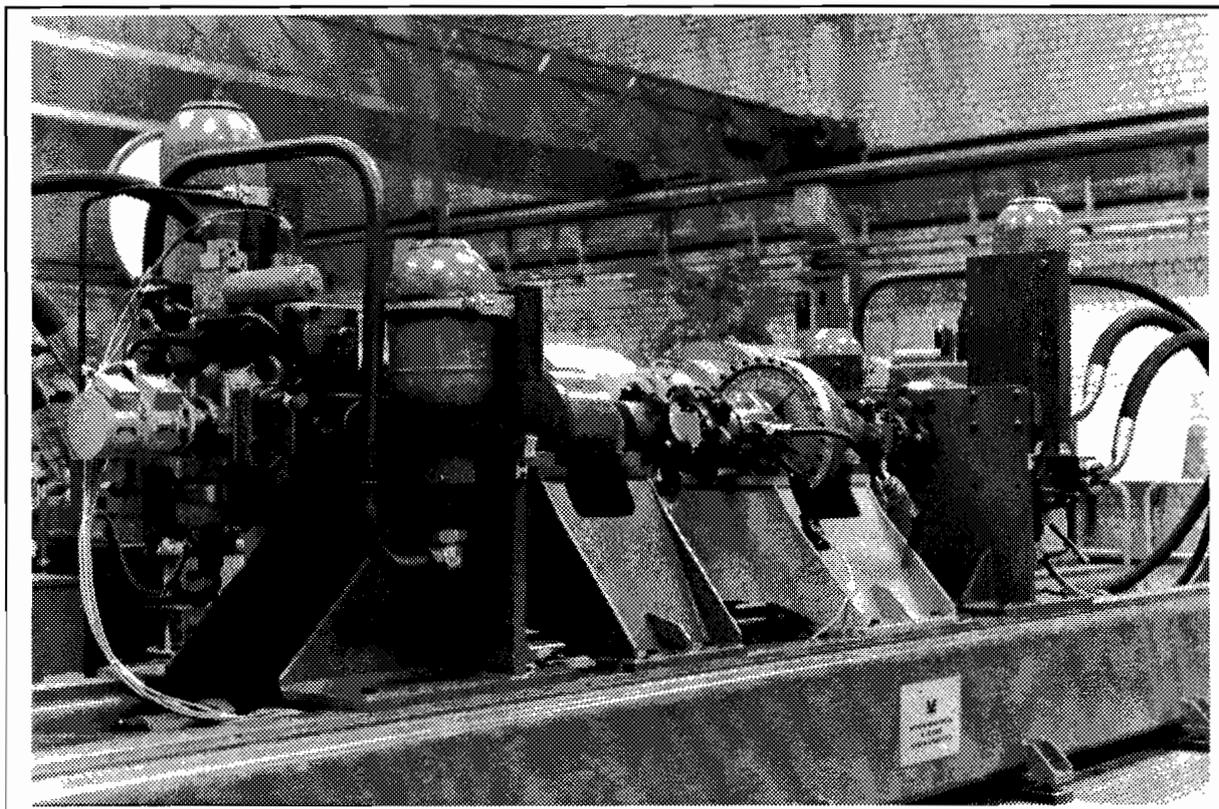


Abb. 4.10) Wandler- und Kupplungsversuchstand mit "zweiphasigem" Wandler

4.3. Allgemeines zur Meßwerterfassung, -verarbeitung und Versuchsdurchführung

Um bei allen Untersuchungen an den beiden hydrodynamischen Wandlern die Reproduzierbarkeit der Messungen zu gewährleisten, ist es notwendig, alle äußeren Randbedingungen möglichst konstant zu halten. Hierzu zählen, abgesehen von den geometrischen Wandlergrößen, der Wandlerfülldruck p_w , das verwendete Betriebsmedium, dessen Temperatur T_B und der Volumenstrom V_0 , mit dem es ausgetauscht wird. Die eingestellten Werte für beide Wandler sind im einzelnen:

Wandlerfülldruck p_w	: 3 bar
Volumenstrom V_0	: 10 L/min
Betriebsmedium	: Hydrauliköl ISO VG 46
Betriebstemperatur T_B	: 45°C - 50°C
kinematische Viskosität ν	: 46 mm ² /s bei 40°C

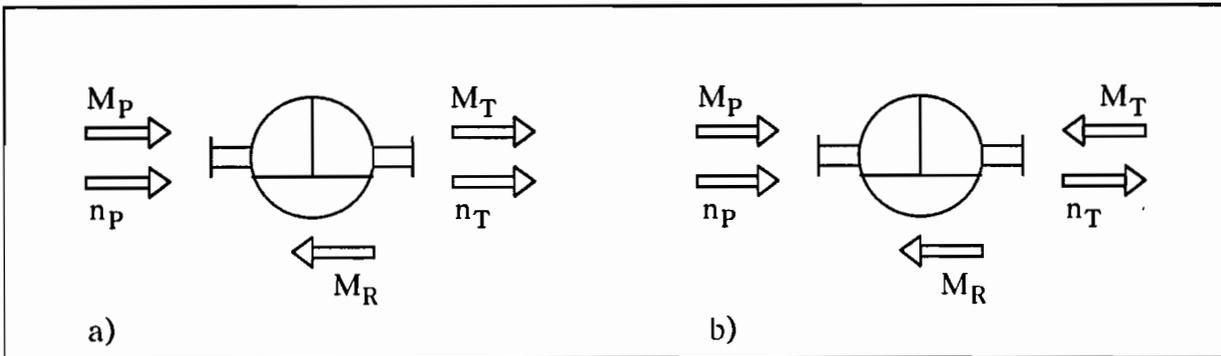


Abb. 4.11) Allgemeine und spezielle Vorzeichenregelung

In Abb. 4.11 sind die allgemeine und die spezielle Vorzeichenregelung abgebildet, wie sie bei allen Auswertungen angewendet wurde. Für die stationären Untersuchungen sind die Vorzeichen des Turbinen- und Pumpenmomentes in entgegengesetzter Richtung als positiv definiert worden, um zu den gebräuchlichen Darstellungsformen der Kennlinien und Kennfelder zu gelangen (Abb. 4.11 b). Bei instationären Untersuchungen und auch bei Simulationsrechnungen wurde demgegenüber die Vorzeichenregelung in Abb. 4.11 a verwendet.

Bei der Diskretisierung des analogen Signals ist das Abtasttheorem von Shannon einzuhalten, wonach die höchste im Signal auftretende Frequenz mindestens zwei mal pro Periode abgetastet werden muß. Hierzu müssen die Meßwerte vor der Analog/Digital-Wandlung analog gefiltert werden. Ein großer Nachteil vieler analoger Filter ist die frequenzabhängige Gruppenlaufzeit $t_{gr} = d\varphi/d\omega$. Die im Meßsignal vertretenen Frequenzanteile erfahren durch die Filterung eine unterschiedliche zeitliche Verschiebung, die in der Nähe der Filtereckfrequenz ω_{eck} am größten ist.

Abb. 4.12 zeigt den qualitative Verlauf der normierten Gruppenlaufzeit $T_{gr} = t_{gr}\omega_{eck}/(2\pi)$ eines Tschebyscheff-Tiefpaßfilters.

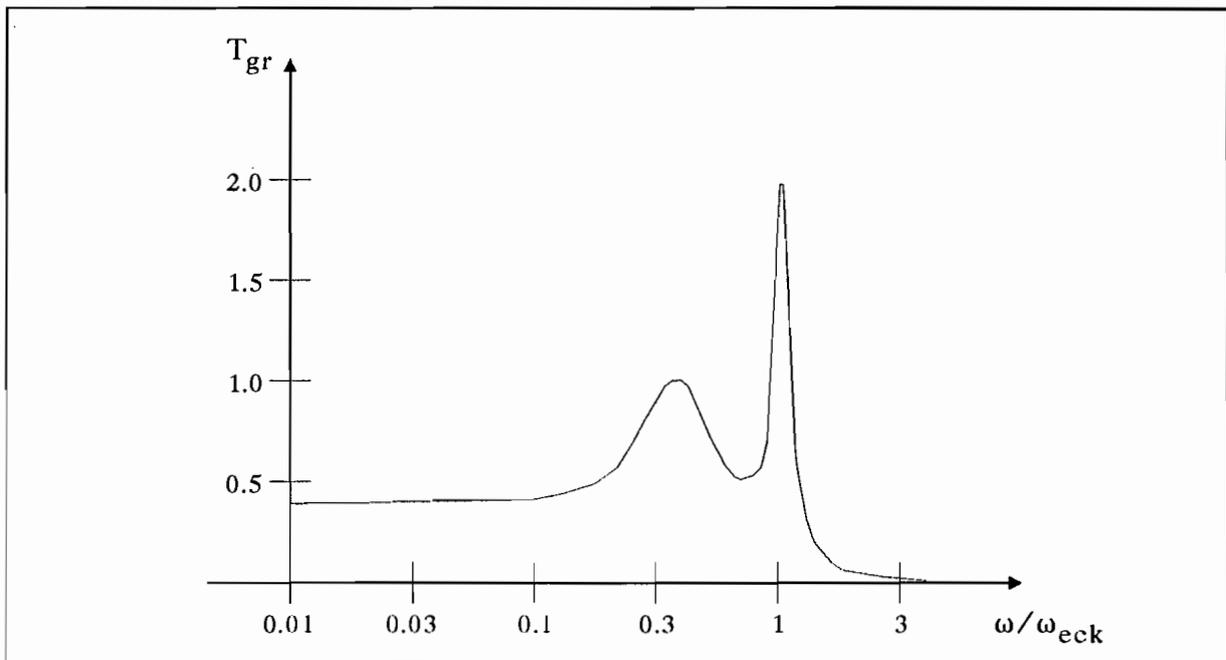


Abb. 4.12) Qualitativer Verlauf der normierten Gruppenlaufzeit eines Tschebyscheff-Tiefpaß

Für Frequenzverhältnisse $\omega/\omega_{eck} < 0.1$ ist die Gruppenlaufzeit annähernd konstant. Die einzelnen Frequenzanteile werden dann um den gleichen Betrag verzögert. Dieser Sachverhalt kann direkt aus den unten aufgeführten Gleichungen abgeleitet werden.

$$\sin(\omega_0 t)$$

Filtereingangssignal

$$t_{gr}(\omega) = d\varphi(\omega)/d\omega$$

Frequenzabhängige Gruppenlaufzeit

$$\varphi(\omega) = \int t_{gr}(\omega) d\omega$$

Frequenzabhängige Phasenverschiebung

$$t^* = \varphi(\omega_0)/\omega_0$$

Frequenzabhängige Zeitverschiebung

$$\sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) = \sin(\omega_0(t + t^*))$$

Filterausgangssignal ($0.1\omega_{eck} < \omega_0 < \omega_{eck}$)

$$t_{gr}(\omega) = d\varphi(\omega)/d\omega = k$$

Konstante Gruppenlaufzeit

$$\varphi(\omega) = \int t_{gr}(\omega) d\omega = k\omega$$

Frequenzproportionale Phasenverschiebung

$$t^* = \varphi(\omega_0)/\omega_0 = k$$

Frequenzunabhängige Zeitverschiebung

$$\sin(\omega_0(t+k))$$

Filterausgangssignal ($\omega_0 < 0.1\omega_{eck}$)

Die Filtereckfrequenz ist so einzustellen, daß die im Nutzsinal vertretenen Frequenzen kleiner als $0.1\omega_{eck}$ sind und das Abtasttheorem eingehalten wird.

Das bei allen Messungen eingesetzte analoge Filter MPV990 der Firma Burr-Brown besitzt im Sperrbereich eine Flankensteilheit von -100dB/Oktave. Der qualitative Verlauf der Gruppenlaufzeit ist vergleichbar mit dem eines Tschebyscheff-Tiefpaßfilters mit 0.5 dB Welligkeit.

Bei allen durchgeführten Messungen wurde mit einer Abtastfrequenz von 2000 Hz gearbeitet. Hieraus ergibt sich nach Shannon eine maximal darstellbare Frequenz von 1000 Hz. Für die numerische Auswertung wurden nur Frequenzen bis maximal 15 Hz berücksichtigt. Um für das relevante Frequenzband annähernd eine konstante Gruppenlaufzeit zu gewährleisten, wurde die Eckfrequenz des analogen Filters auf 512 Hz eingestellt. Die nach der analogen Filterung noch in den diskreten Signalen vertretenen Frequenzanteile > 15 Hz wurden mit einem digitalen Tiefpaßfilter unterdrückt. Eine Gruppe dieser Filter gewährleistet aufgrund ihrer frequenzunabhängigen Gruppenlaufzeit eine unverzerrte Abbildung der Filtereingangssignale. Hierzu zählen die nichtrekursiven Finite-Impulse-Response-Filter (FIR-Filter).

$$y(N+i) = \sum_{k=i}^{N+i} \alpha_{k-i} x(N+i-k)$$

$i = 1, 2, \dots, nt$ (nt = Anzahl der Zeitdiskretisierungen)

N = Filterordnung

α_{k-i} = Filterkoeffizienten

Die Gruppenlaufzeit der FIR-Filter ist eine Funktion der Filterordnung und der inversen Abtastfrequenz, die in der Regel konstante Größen sind.

$$t_{gr} = 0.5 N T_a$$

$$1/T_a = f_a = \text{Abtastfrequenz}$$

Im folgenden wird eines der vielen Entwurfsverfahren vorgestellt, mit dem die Filterkoeffizienten α_k ($k=0, 1, \dots, N$) bestimmt werden können /39/. Im Rahmen dieser Arbeit wurde dieses Verfahren eingesetzt.

Mit der normierten Filtereckfrequenz $F_g = f_{eck}/f_a$ erhält man aus Gl. 4.5 die Rohwerte α_k^* für die Filterkoeffizienten α_k .

$$\alpha_k^* = \frac{\sin(2k-N) \pi F_g}{(2k-N) \pi F_g} [0.54 - 0.46 \cos(2\pi k/N)] \quad (4.5)$$

Die eigentliche Berechnung von α_k erfordert ein iteratives Vorgehen, bei dem abwechselnd die Gleichspannungsverstärkung (0 dB) und die Sperrdämpfung bei F_g eingestellt werden müssen.

Die Gleichspannungsverstärkung wird auf 0 dB normiert, indem man jeden Koeffizienten α_k^* durch die Summe aller Koeffizienten teilt.

Mit der Gleichung

$$A = \sum_{k=0}^N \alpha_k^* \cos[\pi(N-2k)F_g] \quad \text{für gerade Symmetrie } \alpha_{N-k}^* = \alpha_k^*$$

kann die Sperrdämpfung an der Eckfrequenz berechnet werden. Normalerweise wird sie auf -3 dB festgelegt. Stimmt der errechnete Wert nicht mit dem festgelegten überein, so muß F_g in Gl. 4.5 korrigiert werden. Nach anschließender Normierung der Gleichspannungsverstärkung muß die Sperrdämpfung nochmals überprüft werden. Dieses Vorgehen wird so lange wiederholt, bis alle gewünschten Werte mit den errechneten übereinstimmen.

In Abb. 4.13) ist der Amplitudengang eines FIR-Tiefpaßfilters beispielhaft für $N = 100$, $f_{eck} = 15$ Hz und $f_a = 2000$ Hz abgebildet. Wie zu erkennen ist, beträgt die Gleichspannungsverstärkung 0 dB und die Sperrdämpfung bei der Filtereckfrequenz -3dB. Die Gruppenlaufzeit t_{gr} ist für dieses Filter gleich 0.025 sec.

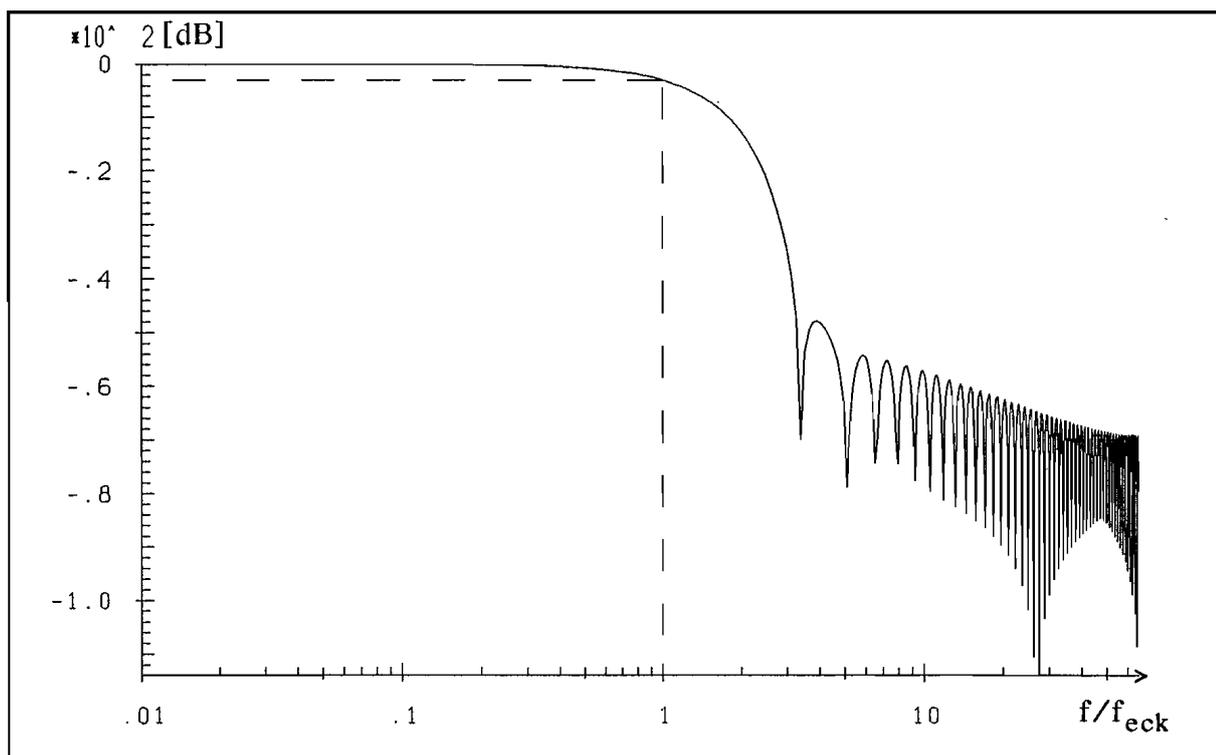


Abb. 4.13) Amplitudengang eines FIR-Tiefpaßfilters
 ($N = 100$; $f_{eck} = 15$ Hz; $f_a = 2000$ Hz)

5. Stationäres Wandlerverhalten

Für die Modellierung des Ein/Ausgangsverhaltens hydrodynamischer Wandler ist neben der Beschreibung des rein instationären auch die des stationäre Verhaltens notwendig. Wie im Kap. 2.2 schon gezeigt wurde, erfolgt dieses durch stationäre Kennlinien, die immer nur für eine konstante Pumpendrehzahl gelten. Durch eine Variation dieser Drehzahl gelangt man zu stationären Kennfeldern, aus denen die Momente in Abhängigkeit von der Pumpen- und Turbinendrehzahl bestimmt werden können. Die verschiedenen Betriebspunkte werden eindeutig durch diese Kennfelder und den beiden Drehzahlen bestimmt.

Bei den Messungen der stationären Kennfelder wurde bei einer konstanten Pumpendrehzahl die Turbinendrehzahl in 128 Stufen von 0 min^{-1} bis 1000 min^{-1} verstellt. Für jede Stufe wurde ein Block mit den gemessenen Momenten und Drehzahlen ($f_a=2000 \text{ Hz}$; 1024 Meßwerte; Meßzeit: 0.512 sec) digital abgespeichert. Aus den Mittelwerten der Momente und Drehzahlen eines jeden Blockes wurde dann jeweils ein Punkt der stationären Kennfelder bestimmt. Die Pumpendrehzahl wurde im Bereich von 0 min^{-1} bis 1100 min^{-1} in 12 Stufen verstellt. Somit ergaben sich jeweils $12 \cdot 128 = 1536$ Blöcke für die dimensionslose und dimensionsbehaftete Darstellung des stationären Verhaltens der beiden Versuchswandler.

Für eine konstante Pumpendrehzahl erfolgte die Verstellung der Turbinendrehzahl rechnergesteuert durch ein eigens hierfür geschriebenes Programm. Nach der Eingabe der Anfangs- und Enddrehzahl und der Anzahl der Stufen wurden die Sollwerte für die stationären Drehzahlen der analogen Regelung vom Rechner automatisch vorgegeben. Nach einer kurzen Verweilzeit in jedem einzelnen eingestellten Betriebspunkt erfolgte die Analog-/Digitalwandlung und Speicherung der Meßwerte.

Bei allen Messungen wurde die Temperatur des Betriebsmediums annähernd konstant gehalten. In großen Schlupfbereichen mußten die Messungen jedoch oft unterbrochen werden, da die entstehende Verlustleistung nicht mehr über das Öl abgeführt werden konnte und somit zu

einer unzulässig hohen Erwärmung führte. Nach einer Abkühlphase wurden die Messungen dann in dem Punkt fortgesetzt, in dem sie unterbrochen worden waren.

Hinsichtlich der Art und Weise, wie stationäre Kennlinien oder -felder experimentell zu bestimmen sind, gibt die VDI Richtlinie 2153 /1/ keinen Aufschluß. Meist werden die Kennlinien aus quasistationären Bremsversuchen ermittelt, bei denen die Turbinendrehzahl vom Synchronpunkt aus langsam aber kontinuierlich bis zum Anfahrpunkt verzögert wird. Dabei wird davon ausgegangen, daß sich die Betriebstemperatur nur unwesentlich ändert. Dieses ist nur gewährleistet, wenn die Verzögerungszeiten klein gehalten werden. In diesem Fall können jedoch instationäre Einflüsse die Messung beeinflussen. Auch der Vergleich der Kennlinien aus einem Brems- und Beschleunigungsversuch (Beschleunigung der Turbinendrehzahl vom Anfahr- bis zum Synchronpunkt) gibt keine gesicherte Erkenntnis über das tatsächliche stationäre Verhalten. In der VDI Richtlinie sind für die Angaben der Leistungszahl λ , der Anfahrwandlung μ_A und des Wirkungsgrades η im Optimalbereich Toleranzen angegeben, die neben den Ungenauigkeiten bei der Versuchsdurchführung auch die folgenden Einflußgrößen berücksichtigen:

- Bauart und Baugröße
- Bauausführung (Fertigungstechnologie)
- Meßtechnik (Güteklasse und Meßbereich)

Die angegebenen Toleranzen sind:

Leistungszahl λ	$< \pm 5\%$
Anfahrwandlung μ_A	$\pm 5\%$
Wirkungsgrad im Optimalbereich η	$- 3\%$

In Abb. 5.1 bis 5.6 sind die drei Momente (M_{P0} , M_{T0} , M_{R0}) und die dimensionslosen Größen (μ , λ , η) über die Pumpen- und Turbinendrehzahl oder deren Quotienten v für beide Wandler aufgetragen.

Bei den dargestellten Kennfeldern für M_{P0} und M_{T0} handelt es sich nicht um Meßwerte, sondern um Modelle in der Form von Polynomen (Gl. 5.1 bis Gl. 5.4). Die Reaktionsmomente und die dimensionslosen Größen wurden mit Hilfe dieser Polynome berechnet.

einphasiger Wandler

$$M_{P0} = \sum_{i=1}^{ip} a_{Pi} n_P^i + \sum_{j=1}^{jt} b_{Pj} n_T^j + \sum_{i=1}^{ipt} \sum_{j=1}^{jpt} c_{Pij} n_P^i n_T^j / 10^5 \quad (5.1)$$

$$M_{T0} = \sum_{i=1}^{ip} a_{Ti} n_P^i + \sum_{j=1}^{jt} b_{Tj} n_T^j + \sum_{i=1}^{ipt} \sum_{j=1}^{jpt} c_{Tij} n_P^i n_T^j / 10^5 \quad (5.2)$$

$$0 \text{ min}^{-1} \leq n_P \leq 1100 \text{ min}^{-1} \quad 0 \text{ min}^{-1} \leq n_T \leq 1000 \text{ min}^{-1}$$

„zweiphasiger“ Wandler

$$\begin{aligned} M_{P0} = & \sum_{i=1}^{ip} a_{Pi} n_P^i + \sum_{j=1}^{jt} b_{Pj} n_T^j + \sum_{i=1}^{ipt} \sum_{j=1}^{jpt} c_{Pij} n_P^i n_T^j + \\ & \sum_{i=1}^{is} d_{Pi} n_P^i [\arctan[0.05(n_T - 0.77n_P)] + \pi/2] + \\ & \sum_{j=1}^{js} e_{Pj} n_T^j [\arctan[0.05(n_T - 0.77n_P)] + \pi/2] \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
M_{T0} = & \sum_{i=1}^{ip} a_{Ti} n_P^i + \sum_{j=1}^{jt} b_{Tj} n_T^j + \sum_{i=1}^{ipt} \sum_{j=1}^{jpt} c_{Tij} n_P^i n_T^j + \\
& \sum_{i=1}^{is} d_{Ti} n_P^i [\arctan[0.05(n_T - 0.77n_P)] + \pi/2] + \\
& \sum_{j=1}^{js} e_{Tj} n_T^j [\arctan[0.05(n_T - 0.77n_P)] + \pi/2] \quad (5.4)
\end{aligned}$$

$$0 \text{ min}^{-1} \leq n_P \leq 1100 \text{ min}^{-1} \quad 0 \text{ min}^{-1} \leq n_T \leq 1000 \text{ min}^{-1}$$

Mit den in diskreter Form vorliegenden Meßwerten für die Pumpen- und Turbinendrehzahl sowie dem Pumpen- und Turbinenmoment sind die Koeffizienten der Gl. 5.1 bis Gl. 5.4 mit Hilfe der Fehler-Quadrat-Methode geschätzt worden. Zur Berechnung der Momente [Nm] müssen die Drehzahlen in der Dimension [min^{-1}] eingesetzt werden. Im Anhang sind die Koeffizienten für beide Wandler abgebildet.

Die Modellansätze in den Gl. 5.1 und Gl. 5.2 reichen in den meisten Fällen aus, um stationäre Kennlinien oder -felder zu parametrisieren. Speziell für den "zweiphasigen" Wandler wurden die Modellansätze um Polynome mit der Arcus-Tangens Funktion erweitert, um den bereichsweise starken Abfall der Momentenkennlinien bzw. -felder (Abb. 4.4) approximieren zu können. Das Argument der Arcus-Tangens Funktion wird im Kap. 6.2 beschrieben. Die Fehler der Momentenberechnung für beide Wandler betragen max. 2% der jeweiligen Maximalwerte.

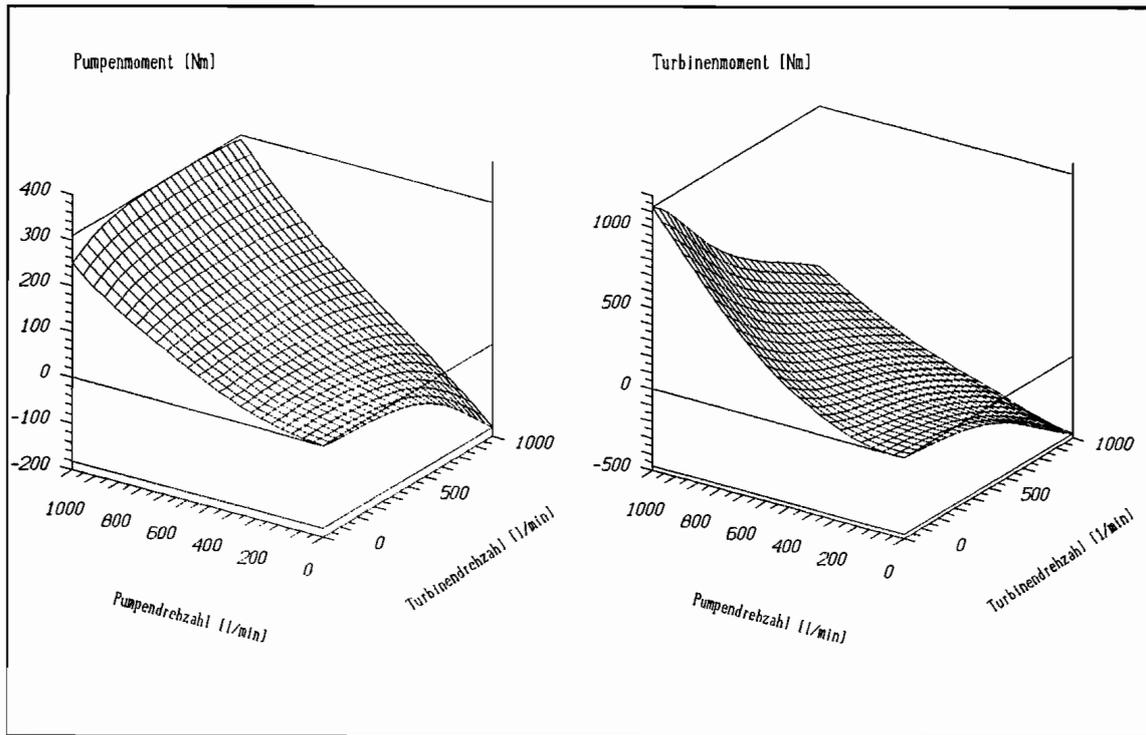


Abb. 5.1) stationäres Pumpen- und Turbinenmoment
(einphasiger Wandler)

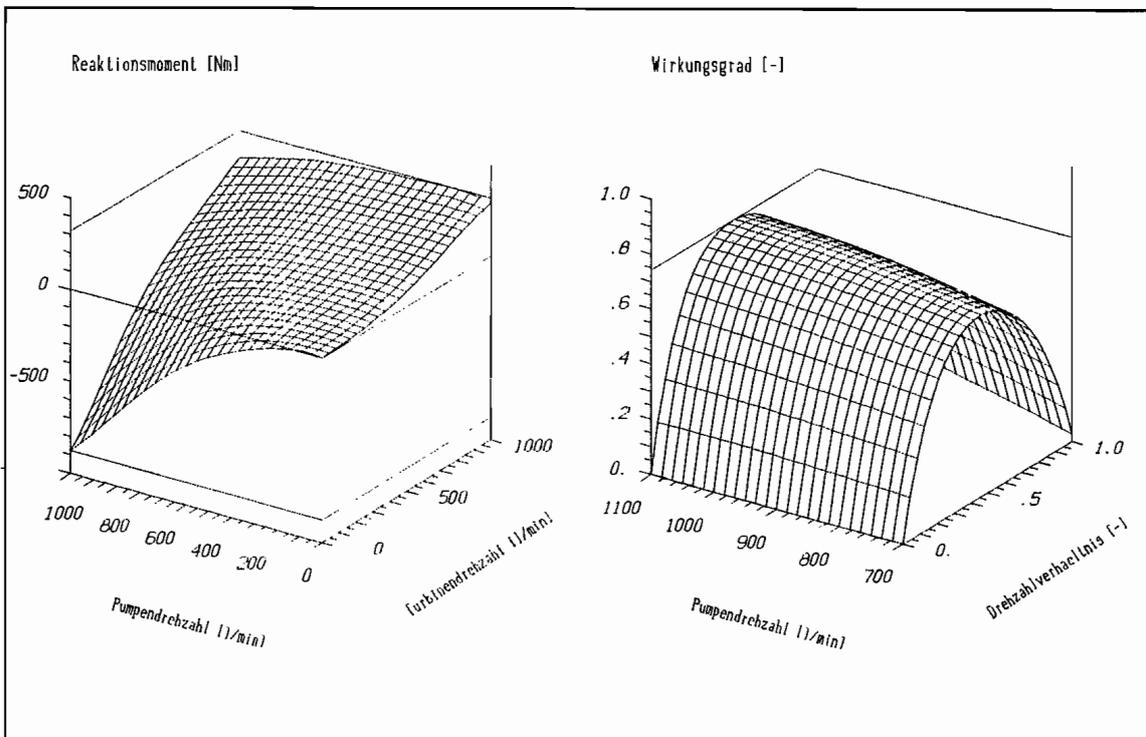


Abb. 5.2) stationäres Reaktionsmoment und Wirkungsgrad
(einphasiger Wandler)

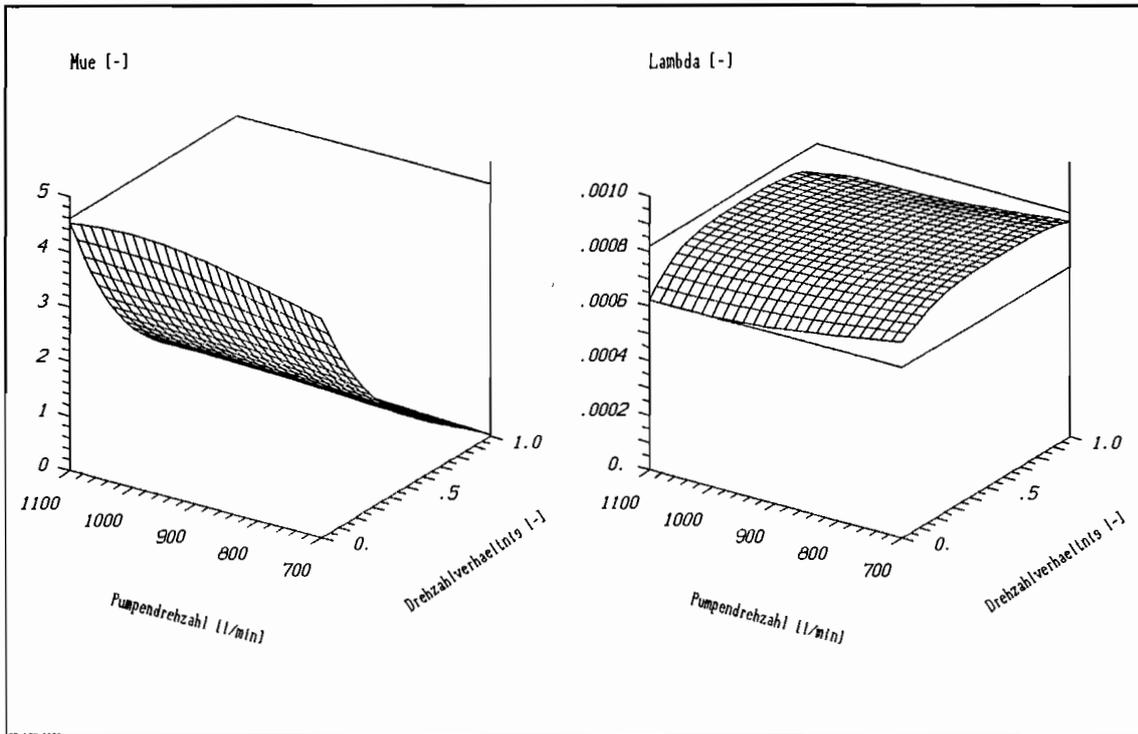


Abb. 5.3) Wandlung und Leistungszahl
(einphasiger Wandler)

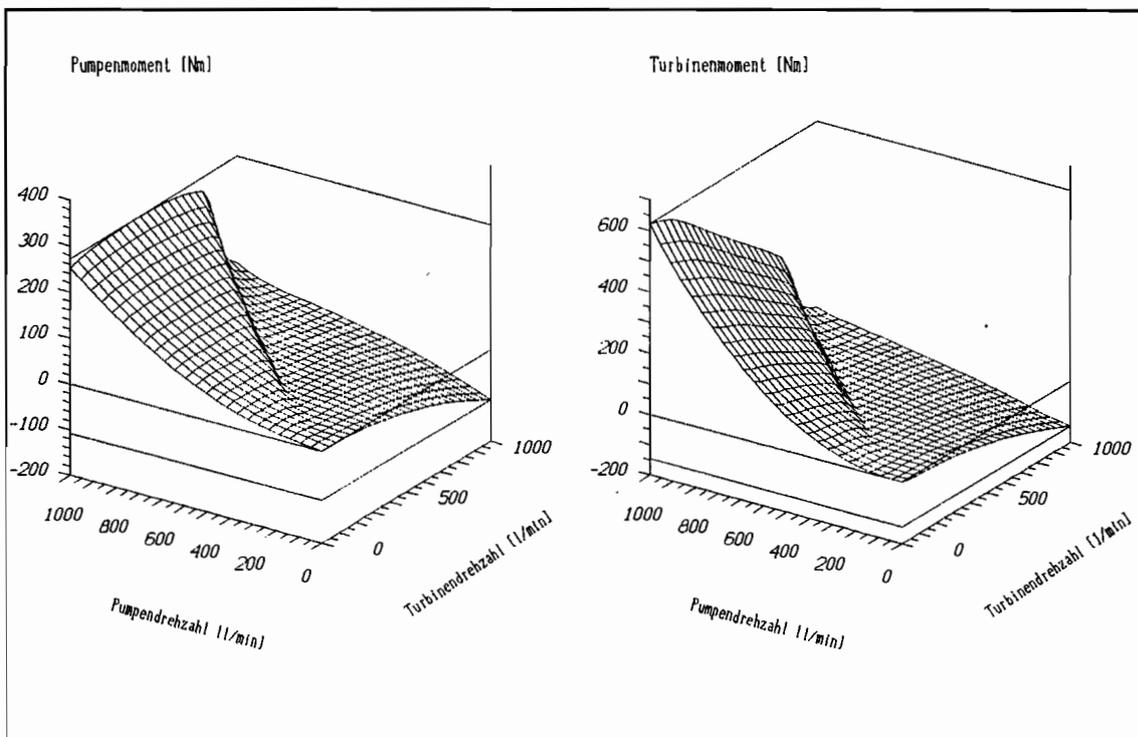


Abb. 5.4) stationäres Pumpen- und Turbinenmoment
(„zweiphasiger“ Wandler)

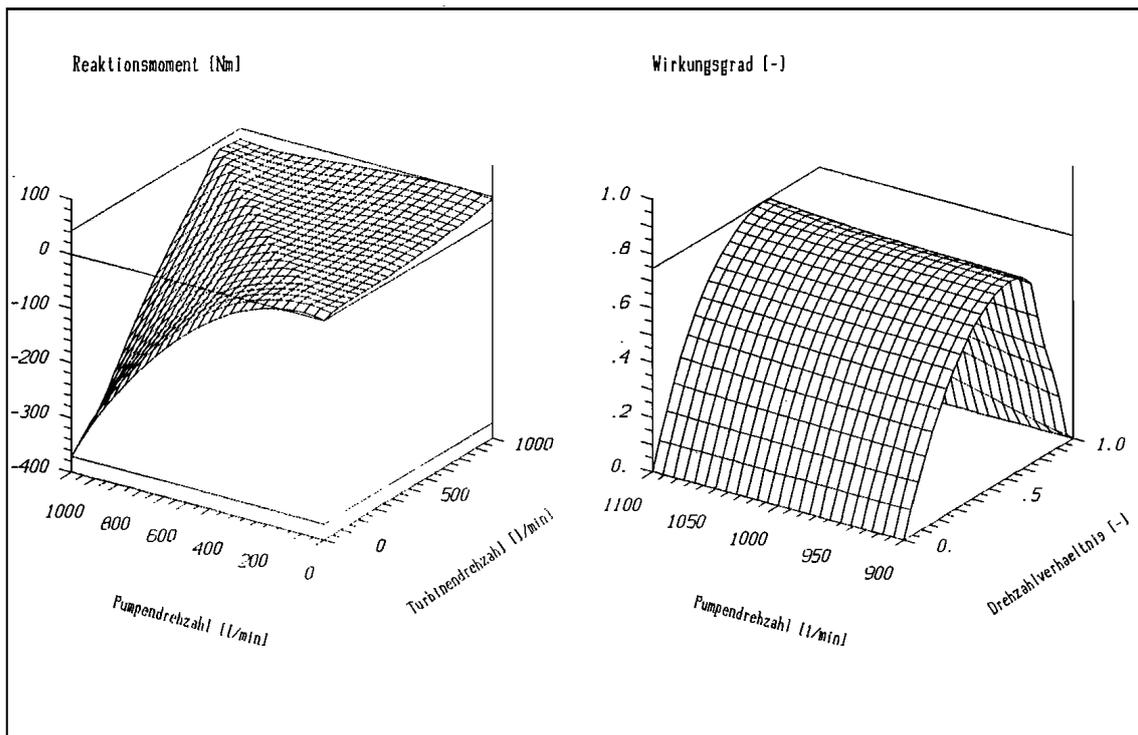


Abb. 5.5) stationäres Reaktionsmoment und Wirkungsgrad
("zweiphasiger" Wandler)

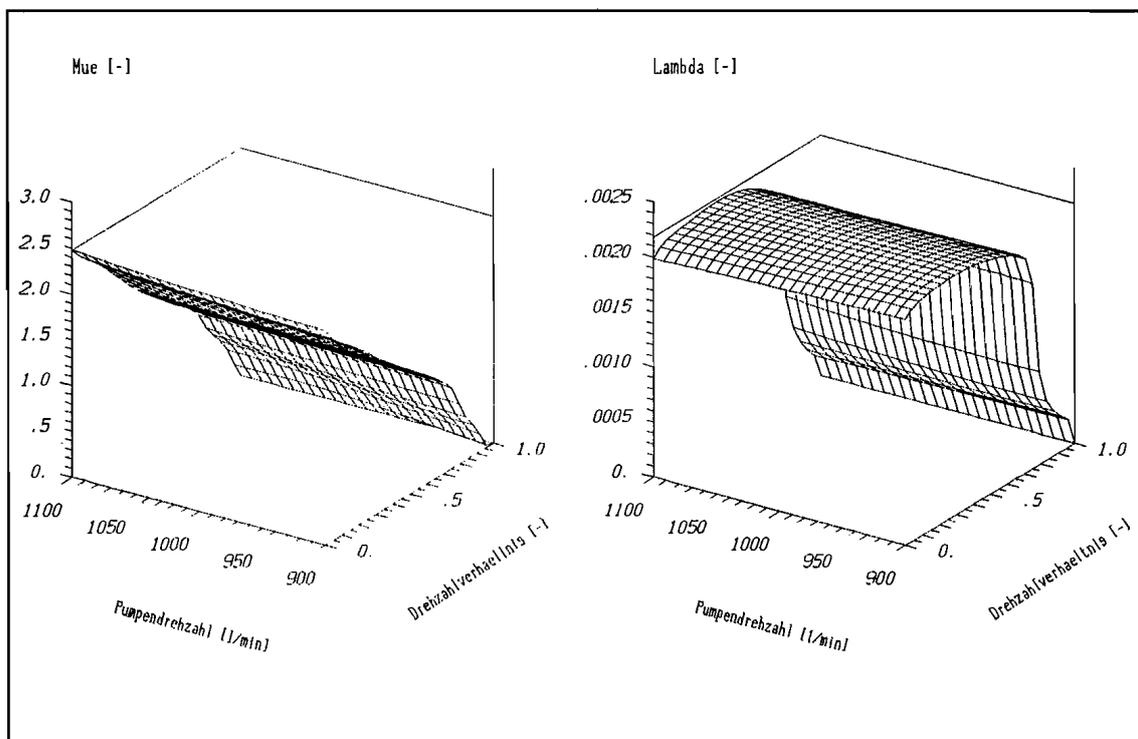


Abb. 5.6) Wandlung und Leistungszahl
("zweiphasiger" Wandler)

Bei größeren und konstanten Pumpendrehzahlen ist das stationäre Verhalten beider Wandler bis zu einer bestimmten Turbinendrehzahl grundsätzlich gleich. Die Pumpenmomente sind relativ konstant, während die Turbinenmomente kontinuierlich abfallen.

Dieses Verhalten ändert sich beim einphasigen Wandler über den gesamten Turbinendrehzahlbereich nicht. Die Leistungszahl λ ist hier über alle Drehzahlbereiche annähernd konstant. Da das Pumpenmoment nahezu unabhängig von der Turbinendrehzahl ist, sind Wandler dieser Bauart für Antriebsmotoren geeignet, die mit konstanter Drehzahl arbeiten sollen.

Beim "zweiphasigen" Wandler fallen Pumpen- und Turbinenmoment kurz vor der Synchrondrehzahl in einem schmalen Drehzahlbereich stark ab. Dieser Abfall ist auf eine Verringerung des umlaufenden Volumenstromes zurückzuführen. Da die Turbine in diesem Wandler zentripetal durchströmt wird, übt die Fliehkraft des Betriebsmediums mit zunehmender Turbinendrehzahl einen immer stärkeren Einfluß auf den umlaufenden Massen- bzw. Volumenstrom aus. Bei Wandlern mit symmetrischer Radanordnung ist der Volumenstrom bei einem Drehzahlverhältnis $v=1$ gleich Null, so daß in diesem Betriebszustand keine Momente übertragen werden können. Gleiches Verhalten weisen auch hydrodynamische Kupplungen auf. Durch den Abfall des Turbinenmomentes ist die maximale Abtriebsdrehzahl begrenzt, was in manchen Anwendungsfällen sehr erwünscht sein kann.

Bei gleichen Drehzahlverhältnissen v bilden sich im Strömungskreislauf auch bei anderen Antriebsdrehzahlen ähnliche Strömungszustände aus. Aus diesem Grund bleiben die dimensionslosen Kenngrößen (λ , μ , η) über die Pumpendrehzahl bei beiden Wandlern annähernd konstant. Gleiches gilt auch bei einer geometrisch ähnlichen Änderung der Abmessungen.

5.1 Abbildung des stationären Verhaltens mit dem Differentialgleichungssystem von Herbertz

Um die von Herbertz /9/ zur Beschreibung des stationären und instationären Verhaltens von hydrodynamischen Wandlern gemachten Annahmen und Berechnungen auf eine andere Wandlerbauform anzuwenden und deren Gültigkeit zu überprüfen, wurden für den einphasigen Wandler die stationären Momente für eine Pumpendrehzahl mit Hilfe der von Herbertz /9/ aufgestellten Differentialgleichungen Gl. 2.1 a-d berechnet. Da nur stationäre Vorgänge berechnet werden sollen, können alle Zeitableitungen der Pumpen- und Turbinendrehzahl sowie des Volumenstroms zu Null gesetzt werden. Die Koeffizienten a_{ij} dieser Größen brauchen nicht berechnet zu werden. Aus den Gl. 2.1 a-d folgen dann die Gl. 5.5 a-d.

$$M_P = a_{14}\dot{V}\omega_P + a_{16}\dot{V}^2 \quad (5.5 \text{ a})$$

$$M_T = a_{24}\dot{V}\omega_P + a_{25}\dot{V}\omega_T + a_{26}\dot{V}^2 \quad (5.5 \text{ b})$$

$$M_R = a_{35}\dot{V}\omega_T + a_{36}\dot{V}^2 \quad (5.5 \text{ c})$$

$$0 = a_{44}\dot{V}\omega_P + a_{45}\dot{V}\omega_T + a_{46}\dot{V}^2 + a_{47}\omega_P^2 + a_{48}\omega_T^2 \quad (5.5 \text{ d})$$

Beim Vergleich der gemessenen mit den berechneten Kennlinien ergaben sich große Abweichungen, die nicht auf Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der Koeffizienten des Differentialgleichungssystems zurückgeführt werden können. Für die Abweichungen können mehrere Ursachen angegeben werden, die sich alle aus den von Herbertz /9/ gemachten Vereinfachungen und Annahmen ableiten lassen.

Da die Schaufeln beim hier untersuchten Wandler nicht aus dünnwandigem Blech bestehen, wie es z.B. bei dem von Herbertz /9/ untersuchten Wandler W240 der Firma Fichtel & Sachs der Fall war, kann der Einfluß von Schaufelverengungen nicht vernachlässigt werden. Ebenso ist die Annahme, daß die Querschnittsflächen senkrecht zum Meridianschnitt konstant sind, nicht zutreffend.

Wie schon im Kap. 2.3 erwähnt wurde, stellte Adrian /18/ in seinen umfangreichen, experimentellen Strömungsuntersuchungen fest, daß die

Strömung im Kreislauf hydrodynamischer Wandler in hohem Maße räumlichen Charakter besitzt. Aus diesem Grund ist nicht gewährleistet, daß sich die Strömungsverhältnisse längs eines mittleren Stromfadens mit ausreichender Genauigkeit beschreiben lassen.

Weiterhin konnte Adrian /18/ experimentell nachweisen, daß der Stoßverlustkoeffizient ζ_{st} und der Fehlströmungswinkel $\Delta\alpha$ am Austritt der Schaufelprofile (Ursache für die Minderleistung, vergl. Kap. 2.2) vom Betriebspunkt abhängig sind. Nur der Reibungskoeffizient λ_R kann in guter Näherung über den gesamten Betriebsbereich als konstant angenommen werden. Die von Herbertz /9/ gemachte Annahme betriebspunktunabhängiger Zahlenwerte für ζ_{st} und $\Delta\alpha$ gilt für den hier untersuchten einphasigen Wandler nicht.

Für den "zweiphasigen" Wandler wurden die stationären Momente nicht mit Hilfe der Differentialgleichungen Gl. 5.5 a-d berechnet, da auch hier die Annahmen dünnwandiger Schaufeln und konstanter Querschnittsflächen senkrecht zum Meridianschnitt nicht gelten.

6. Instationäres Wandlerverhalten

Das instationäre Wandlerverhalten ist bei den folgenden Betrachtungen durch zeitvariante Drehzahl- und Momentenverläufe gekennzeichnet. Der Begriff "instationär" bezieht sich sowohl auf die eingprägten Momente und die sich daraus ergebenden Drehzahlen als auch auf innere Strömungsvorgänge. Diese können jedoch auch bei konstanten Drehzahl- und Momentenverläufen instationär sein, so daß je nach Betrachtungsweise (innere bzw. äußere Zustandsgrößen) unterschiedliche Begriffsdefinitionen vorliegen können.

Hydrodynamische Wandler zählen zur Klasse der nichtlinearen, kausalen und, wie experimentelle Untersuchungen auch gezeigt haben, zeitinvarianten Systeme. Eine Möglichkeit dieses Verhalten zu beschreiben besteht darin, nichtlineare physikalische Modellansätze zu verwenden. Das Differentialgleichungssystem von Herbertz /9/ ist ein solches Modell. Die Koeffizienten leiten sich aus physikalischen Größen wie der Geometrie des Strömungskanals ab. Modelle dieser Art eignen sich zur Simulation (Systemanalyse), Vorausberechnung und Optimierung (Systemsynthese) des dynamischen und stationären Verhaltens von hydrodynamischen Wandlern. Da zur Zeit noch keine geeignete Theorie zur vollständigen Beschreibung der Wandlerströmung und der Verluste existiert, können Modelle mit physikalisch interpretierbaren Parametern unter bestimmten Annahmen und Vereinfachungen nur für eine begrenzte Klasse von Wandler aufgestellt werden.

Eine weitere Möglichkeit das instationäre Verhalten hydrodynamischer Wandler abzubilden, besteht in der Verwendung allgemeiner oder spezieller nichtlinearer Ansätze ohne physikalische Interpretierbarkeit der Koeffizienten. Da diese Koeffizienten nicht aus der Wandlergeometrie abgeleitet werden können, müssen sie am realen System identifiziert werden. Dieses führt jedoch häufig zu nichtlinearen Parameterschätzverfahren, deren numerische Lösung oft mit großen Schwierigkeiten verbunden ist. Der Erfolg der Modellierung hängt zudem stark von der richtigen Wahl des Modellansatzes ab, von denen es jedoch beliebig viele Möglichkeiten gibt. Außerdem ist eine Verallgemeinerung und

Klassifizierung wie in der linearen Theorie hier nicht möglich. Ein allgemeiner nichtlinearer Ansatz ist die Volterrasche Funktionalreihe. Spezielle nichtlineare Modellansätze wurden bei der Approximation der gemessenen stationären Kennfelder beider Wandler angewendet (Gl. 5.1 bis Gl. 5.4).

Die Verwendung von linearen Modellansätzen besitzt den Nachteil, daß diese nur für kleine Schwankungen um einen bestimmten Betriebspunkt gelten. Weiterhin stellen diese Ansätze meist nur eine erste Näherung für das reale, nichtlineare Verhalten dar. Ihre analytische und numerische Behandlung ist dagegen relativ einfach, da die lineare Systemtheorie leistungsfähige Methoden zur Verfügung stellt und viele Verallgemeinerungen zuläßt. Die Anwendung ist jedoch auf zeitinvariante, kausale und meist nur schwach nichtlineare Systeme beschränkt.

6.1. Modellierung des instationären Verhaltens des einphasigen Wandlers

Im folgenden Kapitel wird die Modellierung durch eine bereichsweise Linearisierung um einen Betriebspunkt ausführlich beschrieben. Weiterhin wird gezeigt, wie durch das Hintereinanderschalten einzelner, linearer Modelle für verschiedene Betriebspunkte ein größerer Arbeitsbereich des Wandlers abgebildet werden kann. Anschließend werden die einzelnen, um verschiedene Betriebspunkte linearisierten Modelle, um die stationären Kennfelder (Gl. 5.1 und Gl. 5.2) erweitert und daraus ein einziges, nichtlineares Modell erstellt. Mit diesem kann das Ein-/Ausgangsverhalten des einphasigen Wandlers über einen großen Betriebsbereich abgebildet werden.

6.1.1. Modellierung durch Linearisierung um einen Betriebspunkt

Wie im Kap. 4. schon beschrieben wurde, ist der Wandler Teilsystem des gesamten Wellenstrangs mit Antriebs- und Bremsmaschine. Die teilsystembeschreibenden Modelle werden aus den vier Schnittgrößen

(pumpen- und turbinenseitige Momente und Drehzahlen) an den Subsystemgrenzen in der Form der Vierpolmatrizen $\underline{D}(\omega)$, $\underline{H}(\omega)$ und $\underline{U}(\omega)$ (Gl. 6.1 bis Gl. 6.3; vergl. Kap. 4.) aus dem gesamten Wellenstrang identifiziert. Jede der drei Vierpolmatrizen beschreibt das dynamische Ein-/Ausgangsverhalten des Wandlers im gleichen Arbeitspunkt.

$$\begin{vmatrix} M_P(\omega) \\ M_T(\omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11}(\omega) & d_{12}(\omega) \\ d_{21}(\omega) & d_{22}(\omega) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_P(\omega) \\ n_T(\omega) \end{vmatrix} \quad (6.1)$$

$$\begin{vmatrix} n_P(\omega) \\ n_T(\omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_{11}(\omega) & h_{12}(\omega) \\ h_{21}(\omega) & h_{22}(\omega) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_P(\omega) \\ M_T(\omega) \end{vmatrix} \quad (6.2)$$

$$\begin{vmatrix} n_T(\omega) \\ M_P(\omega) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{11}(\omega) & u_{12}(\omega) \\ u_{21}(\omega) & u_{22}(\omega) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_P(\omega) \\ M_T(\omega) \end{vmatrix} \quad (6.3)$$

Die vier in den Frequenzbereich transformierten Schnittgrößen $n_P(\omega)$, $n_T(\omega)$, $M_P(\omega)$ und $M_T(\omega)$ in den Gl. 6.1 bis Gl. 6.3 beinhalten nur die Schwankungen um einen Betriebspunkt. Die stationären Momente und Drehzahlen (n_{P0} , n_{T0} , M_{P0} und M_{T0}) bleiben vorerst unberücksichtigt. In allgemeiner Form wurde die Vorgehensweise zur Bestimmung der Vierpolmatrizen und der Überführung der Modelle in den Zustandsraum in Kap. 3.2. beschrieben. Sie wird an dieser Stelle speziell für einen Betriebspunkt noch einmal verdeutlicht.

Ein Betriebspunkt wird eindeutig durch die Pumpen- und Turbinendrehzahl bestimmt. Bei einer konstanten Pumpendrehzahl kann er auch durch das Übersetzungsverhältnis ν bzw. den Schlupf s ($s[\%] = (1-\nu) \cdot 100$) beschrieben werden. Abb. 6.1 zeigt die stationären Momente des einphasigen Wandlers, die für die konstante Pumpendrehzahl $n_P = 900 \text{ min}^{-1}$ über ν aufgetragen sind. Im folgenden wird die Modellbestimmung der drei Vierpolmatrizen exemplarisch für den Betriebspunkt $\nu = 0.5$ ($n_P = 900 \text{ min}^{-1}$; $n_T = 450 \text{ min}^{-1}$) aufgezeigt. In diesem Bereich erreicht der Wandler seinen maximalen Wirkungsgrad. Die aus den Modellen durch Simulationsrechnungen gewonnenen Kurvenverläufe werden dann mit den Meßergebnissen verglichen, um den Erfolg der Modellierung überprüfen zu können.

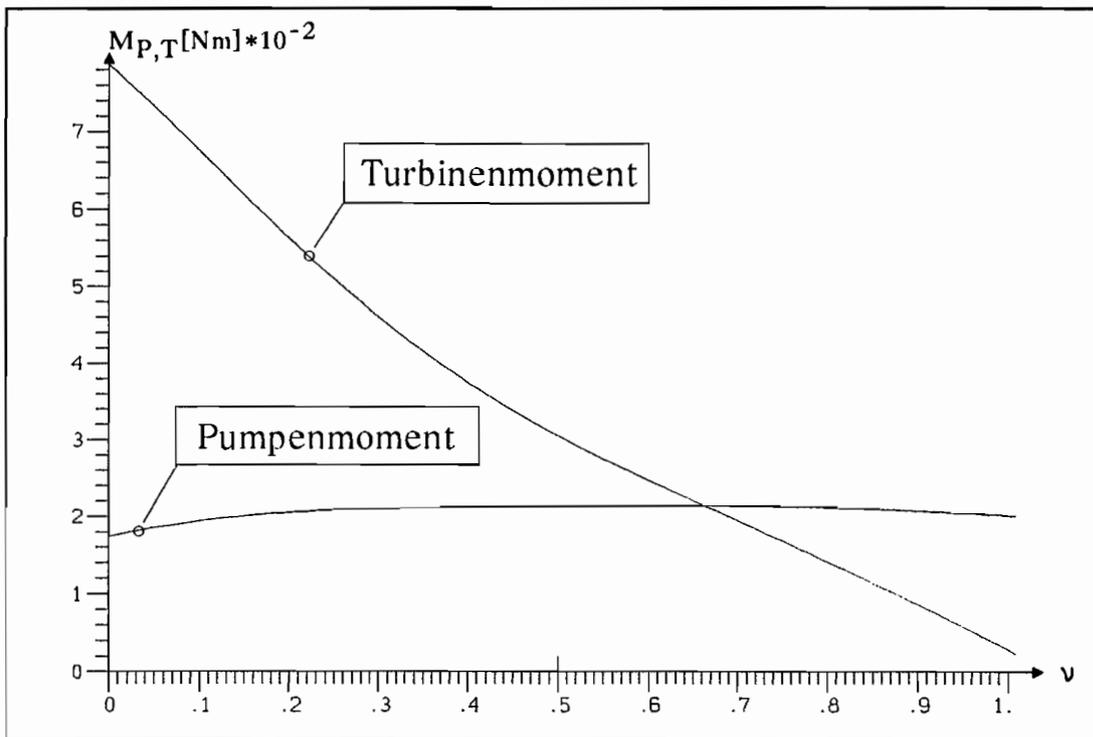


Abb. 6.1) Stationäre Momentenkennlinien
(einphasiger Wandler; $n_p=900 \text{ min}^{-1}$)

Die Modellbildung erfolgte in acht Schritten:

- 1) Einstellen des Betriebspunktes .
- 2) Monofrequente Erregung einer Schnittgröße mit ω_w ($w = 1, 2, \dots, nf$) um diesen Betriebspunkt.
- 3) Monofrequente Erregung einer anderen Schnittgröße mit ω_w ($w = 1, 2, \dots, nf$). Diese Erregung muß jedoch linear unabhängig von der ersten sein.
- 4) Schätzung der Amplituden, Phasen und Mittelwerte aller Schnittgrößen für die $2nf$ Erregungen.
- 5) Berechnung der Matrix $\underline{D}(\omega)$, $\underline{H}(\omega)$ und $\underline{U}(\omega)$.
- 6) Parametrisierung der Matrix $\underline{D}(\omega)$, $\underline{H}(\omega)$ und $\underline{U}(\omega)$.
- 7) Transformation in den Zeitbereich.
- 8) Überführung in den Zustandsraum.

Für den Betriebspunkt $\nu = 0.5$ in Abb. 6.1 ergaben sich die folgenden stationären Momente und Drehzahlen:

$$\begin{aligned} n_{P0} &= 900 \text{ min}^{-1} & n_{T0} &= 450 \text{ min}^{-1} \\ M_{P0} &= 210.3 \text{ Nm} & M_{T0} &= 300.9 \text{ Nm} \end{aligned}$$

Grundsätzlich wurden alle Messungen auf der Pumpen- sowie Turbinenseite drehzahl geregelt gefahren. Das hatte den Vorteil, daß jeder beliebige stationäre Punkt sofort eingestellt werden konnte. Bei einer Drehzahl-/Momentenregelung müßte für eine gewünschte stationäre Drehzahl auf der momentengeregelten Seite diese mit Hilfe der stationären Kennlinien in ein entsprechendes stationäres Moment umgerechnet werden.

Zur Bestimmung der vier Koeffizienten der Matrix $\underline{D}(\omega)$, $\underline{H}(\omega)$ bzw. $\underline{U}(\omega)$, mußte der Wandler nacheinander mit zwei linear unabhängigen Erregungen beaufschlagt werden. Dieses wurde dadurch erreicht, daß zuerst die Pumpen- und dann die Turbinendrehzahl monofrequent erregt wurde. Die jeweilig andere Drehzahl wurde konstant gehalten. Da die Sollwerte beider Drehzahlen am Versuchsstand jedoch nicht exakt eingehalten werden konnten und zudem die Mittelwerte der gemessenen Momentenverläufe nicht mit den stationären Momenten übereinstimmten (dieses wird später genauer erläutert), mußten die Amplituden, Phasen und Mittelwerte aller vier Zustandsgrößen aus den Meßwerten geschätzt werden. Denen waren zusätzliche Störsignale überlagert, die zum einen auf Antriebsstrangschwingungen und zum anderen auf die Einflüsse des nichtlinearen Wandlerverhaltens zurückgeführt werden konnten.

Drehzahlsollwerte für die Regelung

Messung 1

$$\begin{aligned} n_{P,w1}^*(t) &= n_{P0}^* + \Delta n_P^* \sin(\omega_w t + \varphi_{P,w1}^*) \\ n_{T,w1}^*(t) &= n_{T0}^* \end{aligned}$$

Messung 2

$$\begin{aligned} n_{P,w2}^*(t) &= n_{P0}^* \\ n_{T,w2}^*(t) &= n_{T0}^* + \Delta n_T^* \sin(\omega_w t + \varphi_{T,w2}^*) \end{aligned}$$

MeßwerteMessung 1

$$n_{P,w1}(t) = n_{P0} + \Delta n_{P,w1} \sin(\omega_w t + \varphi_{P,w1}) + \text{Störsignale}$$

$$n_{T,w1}(t) = n_{T0} + \Delta n_{T,w1} \sin(\omega_w t + \varphi_{T,w1}) + \text{Störsignale}$$

$$M_{P,w1}(t) = M_{P0} + \Delta M_{P,w1} \sin(\omega_w t + \Phi_{P,w1}) + \text{Störsignale}$$

$$M_{T,w1}(t) = M_{T0} + \Delta M_{T,w1} \sin(\omega_w t + \Phi_{T,w1}) + \text{Störsignale}$$

Messung 2

$$n_{P,w2}(t) = n_{P0} + \Delta n_{P,w2} \sin(\omega_w t + \varphi_{P,w2}) + \text{Störsignale}$$

$$n_{T,w2}(t) = n_{T0} + \Delta n_{T,w2} \sin(\omega_w t + \varphi_{T,w2}) + \text{Störsignale}$$

$$M_{P,w2}(t) = M_{P0} + \Delta M_{P,w2} \sin(\omega_w t + \Phi_{P,w2}) + \text{Störsignale}$$

$$M_{T,w2}(t) = M_{T0} + \Delta M_{T,w2} \sin(\omega_w t + \Phi_{T,w2}) + \text{Störsignale}$$

Schätzansätze für die MeßwerteMessung 1

$$n_{P,w1}(t) = n_{P0} + \Delta n_{P,w1} \sin(\omega_w t + \varphi_{P,w1})$$

$$n_{T,w1}(t) = n_{T0} + \Delta n_{T,w1} \sin(\omega_w t + \varphi_{T,w1})$$

$$M_{P,w1}(t) = M_{P0} + \Delta M_{P,w1} \sin(\omega_w t + \Phi_{P,w1})$$

$$M_{T,w1}(t) = M_{T0} + \Delta M_{T,w1} \sin(\omega_w t + \Phi_{T,w1})$$

Messung 2

$$n_{P,w2}(t) = n_{P0} + \Delta n_{P,w2} \sin(\omega_w t + \varphi_{P,w2})$$

$$n_{T,w2}(t) = n_{T0} + \Delta n_{T,w2} \sin(\omega_w t + \varphi_{T,w2})$$

$$M_{P,w2}(t) = M_{P0} + \Delta M_{P,w2} \sin(\omega_w t + \Phi_{P,w2})$$

$$M_{T,w2}(t) = M_{T0} + \Delta M_{T,w2} \sin(\omega_w t + \Phi_{T,w2})$$

Mit den geschätzten Werten für die Amplituden und Phasen konnten die Zeitverläufe für beide Messungen in den Frequenzbereich transformiert werden. Die Mittelwerte wurden bei der Transformation nicht berücksichtigt.

Messung 1

$$n_{P,1}(\omega_w) = \Delta n_{P,w1} \cos(\varphi_{P,w1}) + j \Delta n_{P,w1} \sin(\varphi_{P,w1})$$

$$n_{T,1}(\omega_w) = \Delta n_{T,w1} \cos(\varphi_{T,w1}) + j \Delta n_{T,w1} \sin(\varphi_{T,w1})$$

$$M_{P,1}(\omega_w) = \Delta M_{P,w1} \cos(\Phi_{P,w1}) + j \Delta M_{P,w1} \sin(\Phi_{P,w1})$$

$$M_{T,1}(\omega_w) = \Delta M_{T,w1} \cos(\Phi_{T,w1}) + j \Delta M_{T,w1} \sin(\Phi_{T,w1})$$

Messung 2

$$\begin{aligned} n_{P,2}(\omega_w) &= \Delta n_{P,w2} \cos(\varphi_{P,w2}) + j \Delta n_{P,w2} \sin(\varphi_{P,w2}) \\ n_{T,2}(\omega_w) &= \Delta n_{T,w2} \cos(\varphi_{T,w2}) + j \Delta n_{T,w2} \sin(\varphi_{T,w2}) \\ M_{P,2}(\omega_w) &= \Delta M_{P,w2} \cos(\Phi_{P,w2}) + j \Delta M_{P,w2} \sin(\Phi_{P,w2}) \\ M_{T,2}(\omega_w) &= \Delta M_{T,w2} \cos(\Phi_{T,w2}) + j \Delta M_{T,w2} \sin(\Phi_{T,w2}) \end{aligned}$$

Aus Gl. 6.1 ergab sich dann für diskrete Frequenzen ω_w ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Matrix $\underline{D}(\omega_w)$ (Gl. 6.4).

$$\begin{vmatrix} M_{P,1}(\omega_w) & M_{P,2}(\omega_w) \\ M_{T,1}(\omega_w) & M_{T,2}(\omega_w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11}(\omega_w) & d_{12}(\omega_w) \\ d_{21}(\omega_w) & d_{22}(\omega_w) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_{P,1}(\omega_w) & n_{P,2}(\omega_w) \\ n_{T,1}(\omega_w) & n_{T,2}(\omega_w) \end{vmatrix} \quad (6.4)$$

Dementsprechend konnte auch jeweils ein Gleichungssystem für die Matrizen $\underline{H}(\omega_w)$ und $\underline{U}(\omega_w)$ aufgestellt werden (Gl. 6.5 und Gl. 6.6).

$$\begin{vmatrix} n_{P,1}(\omega_w) & n_{P,2}(\omega_w) \\ n_{T,1}(\omega_w) & n_{T,2}(\omega_w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_{11}(\omega_w) & h_{12}(\omega_w) \\ h_{21}(\omega_w) & h_{22}(\omega_w) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{P,1}(\omega_w) & M_{P,2}(\omega_w) \\ M_{T,1}(\omega_w) & M_{T,2}(\omega_w) \end{vmatrix} \quad (6.5)$$

$$\begin{vmatrix} n_{T,1}(\omega_w) & n_{T,2}(\omega_w) \\ M_{P,1}(\omega_w) & M_{P,2}(\omega_w) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{11}(\omega_w) & u_{12}(\omega_w) \\ u_{21}(\omega_w) & u_{22}(\omega_w) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_{P,1}(\omega_w) & n_{P,2}(\omega_w) \\ M_{T,1}(\omega_w) & M_{T,2}(\omega_w) \end{vmatrix} \quad (6.6)$$

Die Frequenz ω_w wurde bei allen Messungen im Bereich von $\omega_1 = 2\pi \text{ [s}^{-1}\text{]}$ bis $\omega_{nf} = 10 \cdot 2\pi \text{ [s}^{-1}\text{]}$ diskret mit einem Frequenzabstand von $\Delta\omega = 0.2 \cdot 2\pi \text{ [s}^{-1}\text{]}$ verstellt. Die Vorgabe für die Drehzahlamplituden betrug 80 min^{-1} . Bei nichtlinearen Systemen ist eine konstante Erregeramplitude wichtig, da die Matrizen $\underline{D}(\omega)$, $\underline{H}(\omega)$ und $\underline{U}(\omega)$ amplitudenabhängig sind. Diese Abhängigkeit wurde im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht untersucht. Nachdem die Matrizen $\underline{D}(\omega_w)$, $\underline{H}(\omega_w)$ und $\underline{U}(\omega_w)$ in bandbegrenzter und diskreter Form bestimmt waren, konnten die einzelnen Koeffizienten mit dem Ansatz in Gl. 6.7 parametrisiert werden.

$$d_{kl,w}, h_{kl,w}, u_{kl,w} = \frac{\sum_{j=0}^n b_{j,kl} s_w^j}{\sum_{i=0}^m a_{i,kl} s_w^i} \quad s_w = \sqrt{-1} \omega_w \quad (6.7)$$

$k, l = 1, 2$					
$w = 1, 2, 3, \dots, n_f$	Anzahl der Frequenzpunkte				
$n = 4$	$m = 3$	für $d_{kl,w}$	$n = 3$	$m = 4$	für $h_{kl,w}$
$n = 2$	$m = 3$	für $u_{12,w}$	$n = 4$	$m = 3$	für $u_{21,w}$
$n = 3$	$m = 3$	für $u_{11,w}$ und $u_{22,w}$			

Der Faktor $a_{0,kl}$ wurde für jeden Koeffizienten entsprechend der Tab. 3.1 gewählt. Die besten Ergebnisse bei der Parameterschätzung wurden unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften von komplexen Funktionen im Frequenzbereich erzielt. Nach der linearen Theorie kausaler Systeme ist der Realteil spiegel- und der Imaginärteil punktsymmetrisch zur Ordinate. Die errechneten Frequenzpunkte der einzelnen Koeffizienten $d_{kl,w}$, $h_{kl,w}$ und $u_{kl,w}$ wurden für die Schätzung in den negativen Frequenzbereich entweder punkt- oder spiegelsymmetrisch fortgesetzt und entsprechend ihrer Anzahl auch verdoppelt.

Bei der hier durchgeführten Parametrisierung wurden für alle Koeffizienten $d_{kl,w}$ ($k, l = 1, 2$) die gleichen Nennerpolynome geschätzt. Hierdurch konnte die Transformation in den Zeitbereich und die Überführung in den Zustandsraum vereinfacht werden. Ebenso wurden die Matrizen $\underline{H}(\omega_w)$ und $\underline{U}(\omega_w)$ parametrisiert.

In Tab. 6.1 sind die Parameter für die Polynomansätze (Gl. 6.7) der Matrizen $\underline{D}(\omega_w)$, $\underline{H}(\omega_w)$ und $\underline{U}(\omega_w)$ abgebildet. Als notwendige Bedingung für die Stabilität der Modelle wurde bereits in Kap. 3.2 die Forderung aufgestellt, daß die Koeffizienten aller Nennerpolynome größer Null sein müssen. Die Ordnungen der Zähler- und Nennerpolynome wurden deshalb so gewählt, daß die Stabilitätsbedingung erfüllt und die gemessenen Koeffizienten der einzelnen Matrizen gut approximiert werden konnten.

In Abb. 6.2 bis Abb. 6.7 sind die gemessenen und geschätzten komplexen Koeffizienten der Matrizen $\underline{D}(\omega_w)$, $\underline{H}(\omega_w)$ und $\underline{U}(\omega_w)$ über die Frequenz abgebildet. Es ist zu beachten, daß die Polynome nur in dem gemessenen Bereich von 1 Hz bis 10 Hz das dynamische Verhalten des einphasigen Wandlers abbilden, obwohl sie über einen größeren Frequenzbereich dargestellt sind.

Tab. 6.1) Parameter für die Polynomansätze der Matrizen

 $\underline{D}(\omega_w)$, $\underline{H}(\omega_w)$ und $\underline{U}(\omega_w)$.(k,l = 1, 2; einphasiger Wandler; $n_p = 900 \text{ min}^{-1}$; $n_T = 450 \text{ min}^{-1}$)

	$\underline{H}(\omega)$	$\underline{D}(\omega)$	$\underline{U}(\omega)$
$a_{0,k1}$	+1.0000000	+1.0000000	+1.0000000
$a_{1,k1}$	+1.5049363*10 ⁻¹	+1.9819369*10 ⁻²	+8.0926425*10 ⁻²
$a_{2,k1}$	+7.5613413*10 ⁻³	+3.9940449*10 ⁻⁴	+1.3511742*10 ⁻³
$a_{3,k1}$	+1.1966901*10 ⁻⁴	+1.5749333*10 ⁻⁶	+1.9989451*10 ⁻⁵
$a_{4,k1}$	+1.5417031*10 ⁻⁶	_____	_____
$b_{0,11}$	+2.0934391	+4.5603568*10 ⁻¹	+1.5371962
$b_{1,11}$	+1.7206460*10 ⁻¹	+4.5069994*10 ⁻²	+2.2768286*10 ⁻²
$b_{2,11}$	+2.9629859*10 ⁻³	+8.5826596*10 ⁻⁴	+3.5350610*10 ⁻⁴
$b_{3,11}$	+4.2763067*10 ⁻⁵	+1.4838030*10 ⁻⁵	-1.1631055*10 ⁻⁶
$b_{4,11}$	_____	+5.5144967*10 ⁻⁸	_____
$b_{0,12}$	-3.6933528*10 ⁻²	+1.5859590*10 ⁻²	+1.4694162
$b_{1,12}$	+3.5276077*10 ⁻³	-1.0016655*10 ⁻³	+2.5555096*10 ⁻²
$b_{2,12}$	-4.7692524*10 ⁻⁵	+2.0979837*10 ⁻⁵	+4.5140813*10 ⁻⁴
$b_{3,12}$	+1.0014857*10 ⁻⁶	-2.3592752*10 ⁻⁷	_____
$b_{4,12}$	_____	+2.2426412*10 ⁻⁹	_____
$b_{0,21}$	+3.2194237	-1.0480932	+4.7133818*10 ⁻¹
$b_{1,21}$	+5.0898274*10 ⁻²	-1.7955091*10 ⁻²	+7.1381669*10 ⁻²
$b_{2,21}$	+7.4349142*10 ⁻⁴	-3.3593405*10 ⁻⁴	+3.5229605*10 ⁻³
$b_{3,21}$	-2.4895109*10 ⁻⁶	-4.0486199*10 ⁻⁷	+5.4807246*10 ⁻⁵
$b_{4,21}$	_____	+4.0909310*10 ⁻⁹	+7.1743738*10 ⁻⁷
$b_{0,22}$	+1.4050100	+6.8323255*10 ⁻¹	+1.6418574*10 ⁻²
$b_{1,22}$	+1.3757403*10 ⁻¹	+5.6509165*10 ⁻²	-1.6434548*10 ⁻³
$b_{2,22}$	+2.3476308*10 ⁻³	+1.0977854*10 ⁻³	+2.1715440*10 ⁻⁵
$b_{3,22}$	+3.4673754*10 ⁻⁵	+1.8323841*10 ⁻⁵	-4.7302712*10 ⁻⁷
$b_{4,22}$	_____	+7.1094925*10 ⁻⁸	_____

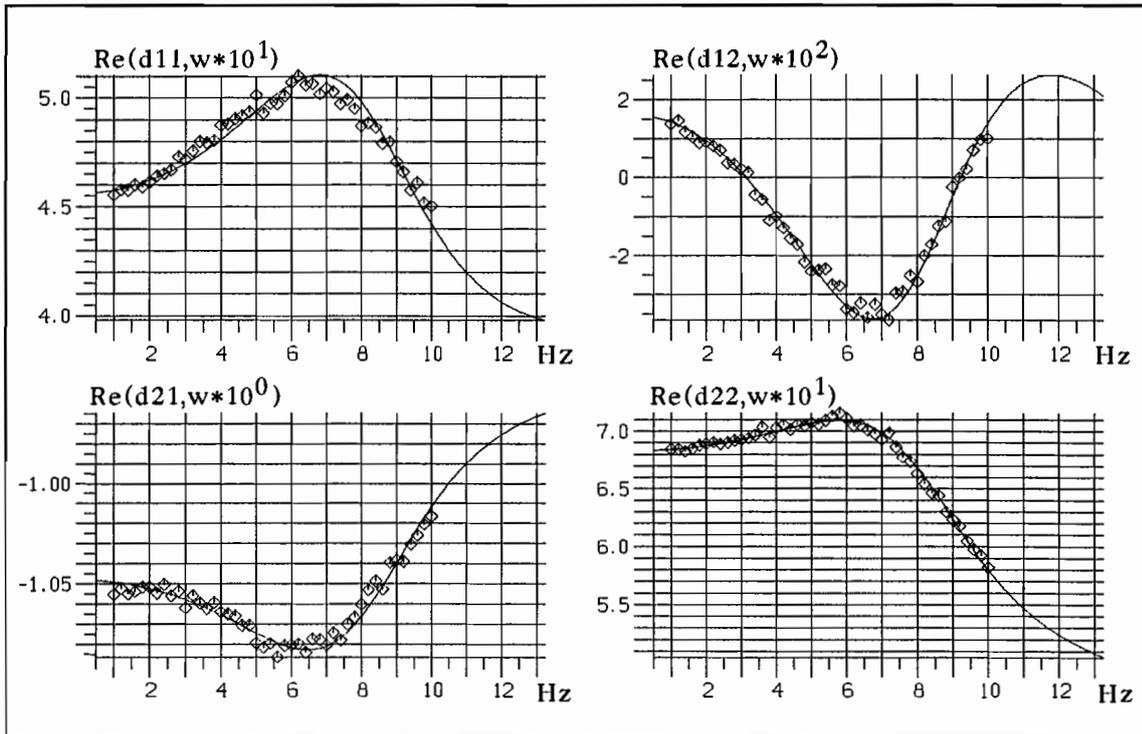


Abb. 6.2) Realteil der dynamischen Dämpfungsmatrix (einphasiger Wandler; $\nu = 0.5$; Meßwerte punktiert; Modell durchgezogen)

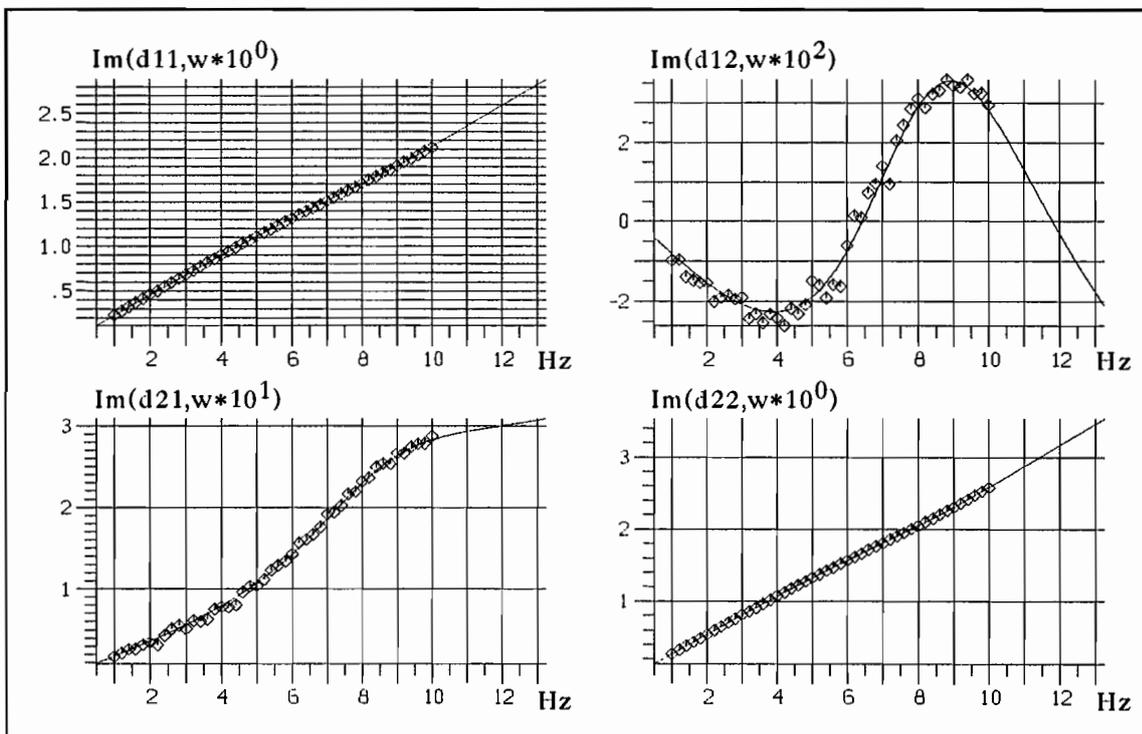


Abb. 6.3) Imaginärteil der dynamischen Dämpfungsmatrix (einphasiger Wandler; $\nu = 0.5$; Meßwerte punktiert; Modell durchgezogen)

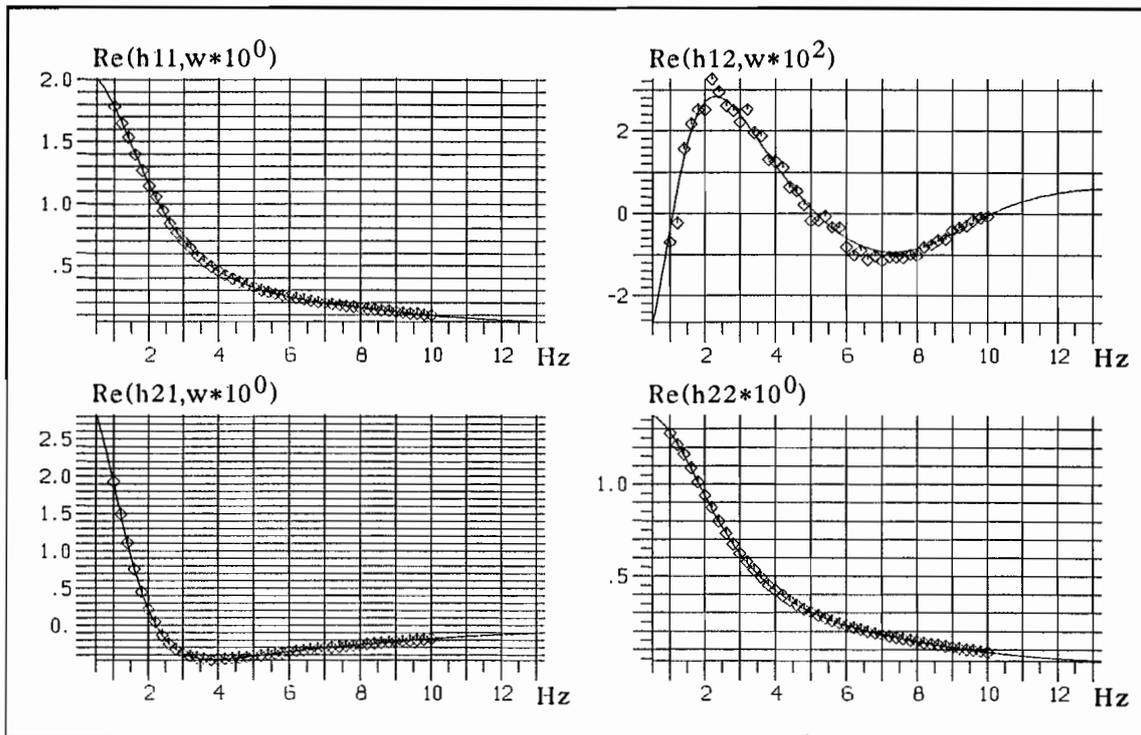


Abb. 6.4) Realteil der inversen dynamischen Dämpfungsmatrix (einphasiger Wandler; $\nu = 0.5$; Meßwerte punktiert; Modell durchgezogen)

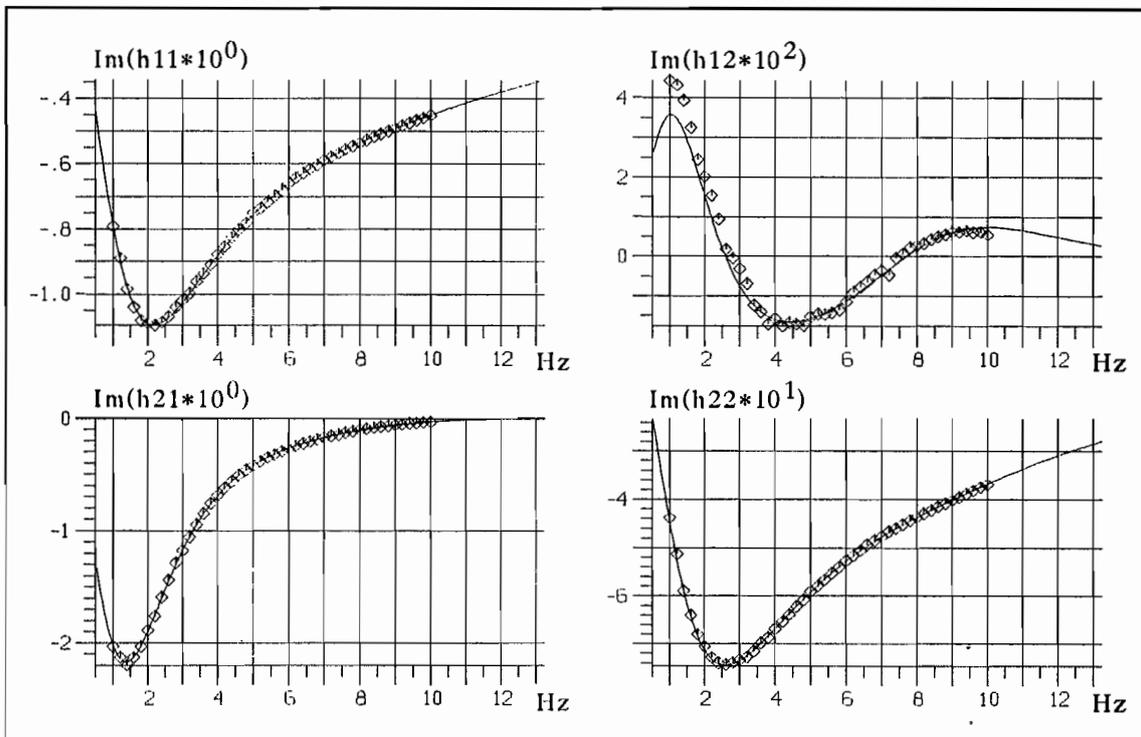


Abb. 6.5) Imaginärteil der inversen dynamischen Dämpfungsmatrix (einphasiger Wandler; $\nu = 0.5$; Meßwerte punktiert; Modell durchgezogen)

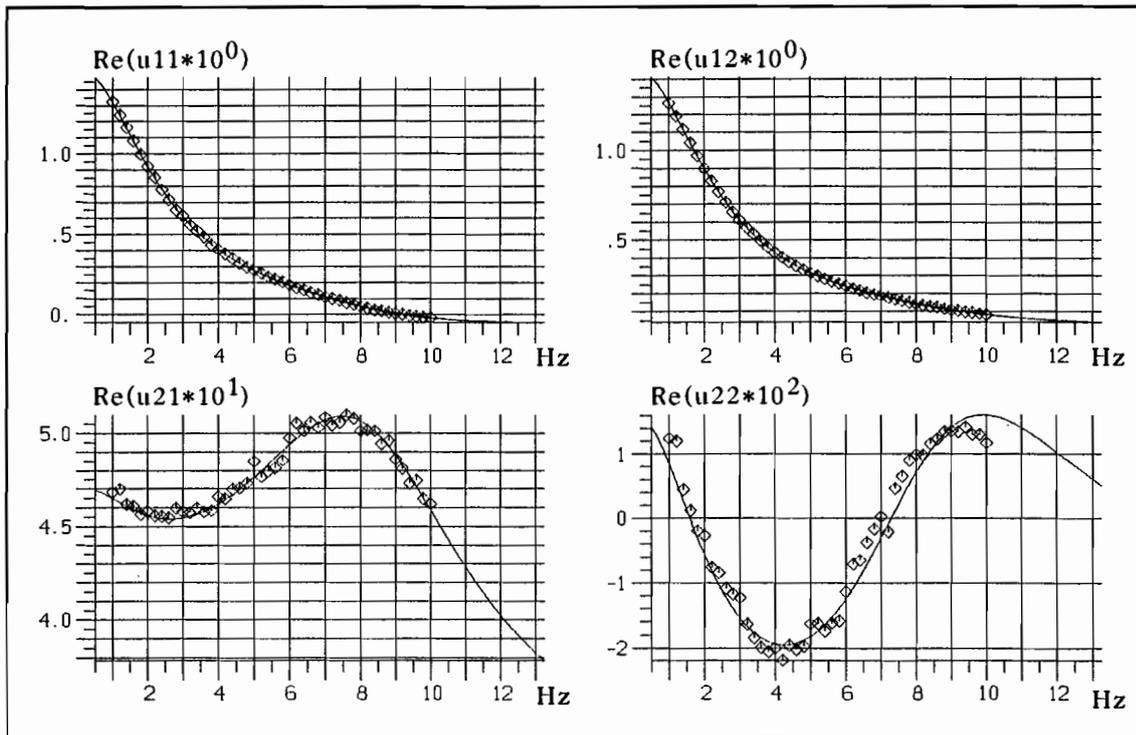


Abb. 6.6) Realteil der Übertragungsmatrix (einphasiger Wandler;
 $v = 0.5$; Meßwerte punktiert; Modell durchgezogen)

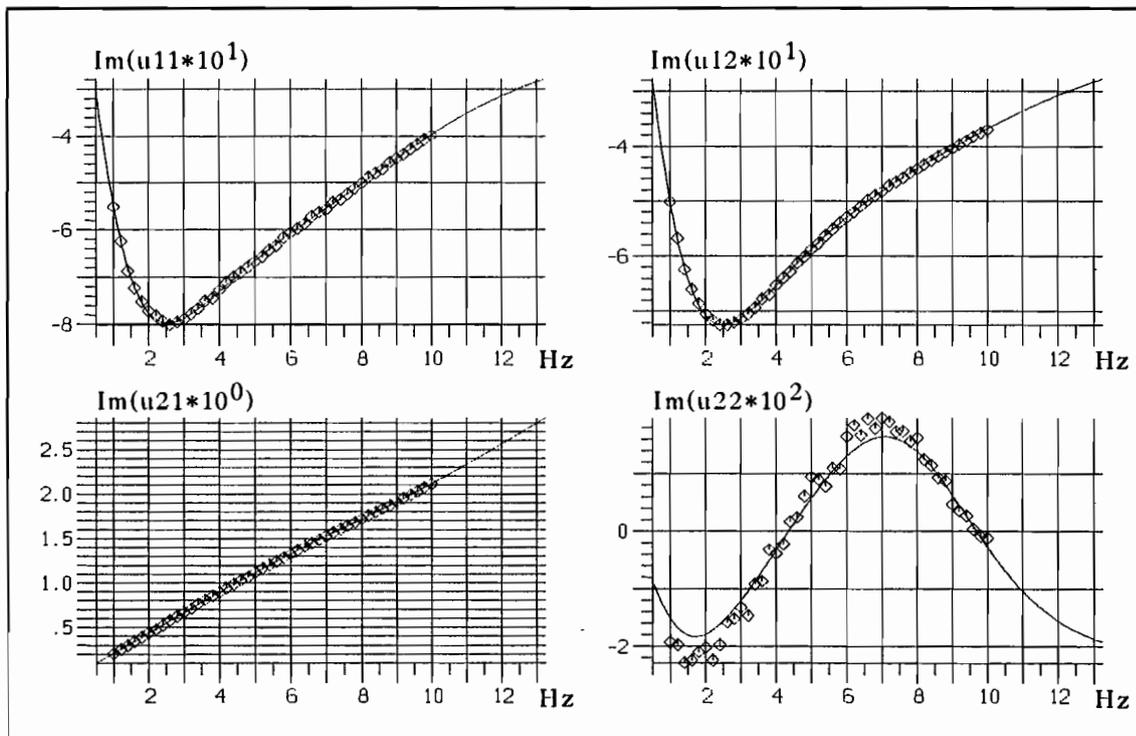


Abb. 6.7) Imaginärteil der Übertragungsmatrix (einphasiger Wandler;
 $v = 0.5$; Meßwerte punktiert; Modell durchgezogen)

Aus der Transformation der Gl. 6.4 in den Zeitbereich folgen mit dem Ansatz in Gl. 6.7 die entkoppelten Differentialgleichungen Gl. 6.8 und Gl. 6.9 der Matrix $\underline{D}(\omega_w)$.

$$\sum_{i=0}^3 a_i M_P^{*(i)}(t) = \sum_{j=0}^4 b_{j,11} n_P^{*(j)}(t) + \sum_{j=0}^4 b_{j,12} n_T^{*(j)}(t) \quad (6.8)$$

$$\sum_{i=0}^3 a_i M_T^{*(i)}(t) = \sum_{j=0}^4 b_{j,12} n_P^{*(j)}(t) + \sum_{j=0}^4 b_{j,22} n_T^{*(j)}(t) \quad (6.9)$$

$$(i) = d^i/dt^i ; \quad (j) = d^j/dt^j$$

Das * deutet darauf hin, daß es sich hierbei um Drehzahl- und Momentenwerte handelt, die vom stationären Punkt abweichen.

$$\begin{aligned} M_P^*(t) &= M_P(t) - 210.3 \text{ Nm} \\ M_T^*(t) &= M_T(t) + 300.9 \text{ Nm} \\ n_P^*(t) &= n_P(t) - 900. \text{ 1/min} \\ n_T^*(t) &= n_T(t) - 450. \text{ 1/min} \end{aligned}$$

Entsprechend ergeben sich aus den Transformationen der Gl. 6.5 und Gl. 6.6 die Differentialgleichungen für die Matrizen $\underline{H}(\omega_w)$ (Gl. 6.10 und Gl. 6.11) und $\underline{U}(\omega_w)$ (Gl. 6.12 und Gl. 6.13).

$$\sum_{i=0}^4 a_i n_P^{*(i)}(t) = \sum_{j=0}^3 b_{j,11} M_P^{*(j)}(t) + \sum_{j=0}^3 b_{j,12} M_T^{*(j)}(t) \quad (6.10)$$

$$\sum_{i=0}^4 a_i n_T^{*(i)}(t) = \sum_{j=0}^3 b_{j,12} M_P^{*(j)}(t) + \sum_{j=0}^3 b_{j,22} M_T^{*(j)}(t) \quad (6.11)$$

und

$$\sum_{i=0}^3 a_i n_T^{*(i)}(t) = \sum_{j=0}^3 b_{j,11} n_P^{*(j)}(t) + \sum_{j=0}^2 b_{j,12} M_T^{*(j)}(t) \quad (6.12)$$

$$\sum_{i=0}^3 a_i M_P^{*(i)}(t) = \sum_{j=0}^4 b_{j,12} n_P^{*(j)}(t) + \sum_{j=0}^3 b_{j,22} M_T^{*(j)}(t) \quad (6.13)$$

Für den stationären Fall (alle Zeitableitungen sind gleich Null) können aus den Gl. 6.8 und Gl. 6.9 in guter Näherung die Gradienten des stationären Kennfeldes in einem Betriebspunkt berechnet werden (Gl. 6.14).

$$\begin{aligned}
 a_0 M_P^*(t) &= b_{0,11} n_P^*(t) + b_{0,12} n_T^*(t) \\
 a_0 M_T^*(t) &= b_{0,21} n_P^*(t) + b_{0,22} n_T^*(t)
 \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{cc} dM_P^*(t)/dn_P^*(t) & dM_P^*(t)/dn_T^*(t) \\ dM_T^*(t)/dn_P^*(t) & dM_T^*(t)/dn_T^*(t) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} b_{0,11}/a_0 & b_{0,12}/a_0 \\ b_{0,21}/a_0 & b_{0,22}/a_0 \end{array} \right| \quad (6.14)$$

$$= \left| \begin{array}{cc} +4.5604 \cdot 10^{-1} & +0.1586 \cdot 10^{-1} \\ -1.0481 & +6.8323 \cdot 10^{-1} \end{array} \right|$$

Die aus den Polynomen der stationären Kennfelder (Gl. 5.1 und Gl. 5.2) berechneten Ableitungen im Betriebspunkt $\nu = 0.5$ stimmen gut mit den oben angegebenen Werten überein.

$$\left| \begin{array}{cc} dM_{P0}(t)/dn_P(t) & dM_{P0}(t)/dn_T(t) \\ dM_{T0}(t)/dn_P(t) & dM_{T0}(t)/dn_T(t) \end{array} \right|_{\nu=0.5} = \left| \begin{array}{cc} +4.3288 \cdot 10^{-1} & +0.0888 \cdot 10^{-1} \\ -1.0784 & +6.9221 \cdot 10^{-1} \end{array} \right|$$

Grundsätzlich können instationäre Betriebszustände um den Arbeitspunkt $\nu = 0.5$ mit den Differentialgleichungen Gl. 6.8 bis Gl. 6.13 im Zeitbereich simuliert werden. Da dabei jedoch numerisch höhere Momenten- und Drehzahlableitungen bestimmt werden müssen, steigt zum einen die erforderliche Rechenzeit, und zum anderen werden die numerischen Ungenauigkeiten mit steigenden numerisch bestimmten Ableitungen größer. Um dieses zu umgehen, werden die Differentialgleichungen in den Zustandsraum (Gl. 6.15) transformiert (vergl. Kap. 3.2).

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{Z}}(t) &= \underline{A} \underline{Z}(t) + \underline{B} \underline{x}^*(t) \\ \underline{y}^*(t) &= \underline{C} \underline{Z}(t) + \underline{D} \underline{x}^*(t) + \underline{E} \dot{\underline{x}}^*(t) \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Für die in Tab. 6.1 aufgeführten Parameter ergeben sich je nach Modellformulierung ($\underline{D}(\omega)$, $\underline{H}(\omega)$ oder $\underline{U}(\omega)$) unterschiedliche Zustandsraumdarstellungen (Gl. 6.16 bis Gl. 6.21).

Aus den Gl. 6.8 und Gl. 6.9 folgen für das Modell in der Form der dynamischen Dämpfungsmatrix $\underline{D}(\omega)$ die Zustandsraumdarstellung Gl. 6.16 und Gl. 6.17.

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} +0 & +1 & +0 \\ +0 & +0 & +1 \\ -6.34947508*10^{+5} & -1.2584259*10^{+4} & -2.53600883*10^{+2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{vmatrix} = \underline{A} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3.30613619*10^{+1} & +1.24971121*10^{+2} \\ +7.95181174*10^{+3} & -2.68033945*10^{+4} \\ -1.65495700*10^{+6} & +5.55917228*10^{+6} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_P^* \\ n_T^* \end{vmatrix}$$

$$M_P^* = z_1 + 5.41748691*10^{-1} n_P^* - 5.10918967*10^{-1} n_T^* + 3.50141592*10^{-2} \dot{n}_P^* + 1.42395947*10^{-3} \dot{n}_T^* \quad (6.16)$$

$$\begin{vmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{vmatrix} = \underline{A} \begin{vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1.37404637*10^{+1} & +8.16053620*10^{+1} \\ +1.95943860*10^{+3} & -1.58273542*10^{+4} \\ -4.08000350*10^{+5} & +3.30213371*10^{+6} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} n_P^* \\ n_T^* \end{vmatrix}$$

$$M_T^* = z_1 - 9.15801107*10^{-1} n_P^* + 1.86741554*10^{-1} n_T^* + 2.59752643*10^{-3} \dot{n}_P^* + 4.51415454*10^{-2} \dot{n}_T^* \quad (6.17)$$

Aus den Gl. 6.10 und Gl. 6.11 folgen für das Modell in der Form der inversen dynamischen Dämpfungsmatrix $\underline{H}(\omega)$ die Zustandsraumdarstellung Gl. 6.18 und Gl. 6.19.

$$\underline{A} = \begin{vmatrix} +0 & +1 & +0 & +0 \\ +0 & +0 & +1 & +0 \\ +0 & +0 & +0 & +1 \\ -6.48633320*10^{+5} & -9.76151828*10^{+4} & -4.90453791*10^{+3} & -77.6213079 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2.77375501*10^{+1} & +6.49597007*10^{-1} \\ -2.31133538*10^{+2} & -8.13575295*10^{+1} \\ -6.49214486*10^{+3} & +5.41722862*10^{+3} \\ +2.87800295*10^{+5} & -1.08838130*10^{+5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_P^* \\ M_T^* \end{pmatrix}$$

$$n_P^* = z_1 \quad (6.18)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.61477973 & +2.24905521*10^{+1} \\ +6.07594624*10^{+2} & -2.22994503*10^{+2} \\ -6.22822478*10^{+3} & -3.76153801*10^{+3} \\ -2.50675389*10^{+5} & +1.01577408*10^{+5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_P^* \\ M_T^* \end{pmatrix}$$

$$n_T^* = z_1 \quad (6.19)$$

Aus den Gl. 6.12 und Gl. 6.13 folgen für das Modell in der Form der Übertragungsmatrix $\underline{U}(\omega)$ die Zustandsraumdarstellung Gl. 6.20 und Gl. 6.21.

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} +0 & +1 & +0 \\ +0 & +0 & +1 \\ -5.00263854*10^{+4} & -4.04845655*10^{+3} & -6.75943608*10^{+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2.16176756*10^{+1} & +2.25823172*10^{+1} \\ -8.66545520*10^{+1} & -2.48008204*10^{+2} \\ -1.84965698*10^{+3} & -1.14999221*10^{+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_P^* \\ M_T^* \end{pmatrix}$$

$$n_T^* = z_1 - 5.81859655*10^{-2} n_P^* \quad (6.20)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \underline{A} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +9.59282882 & +2.68588692 \\ -1.51414561*10^{+2} & -1.67964896*10^{+2} \\ -2.08200064*10^{+4} & +2.48496145*10^{+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_P^* \\ M_T^* \end{pmatrix}$$

$$M_P^* = z_1 + 3.15792785 \cdot 10^{-1} n_P^* - 2.36638369 \cdot 10^{-2} M_T^* + 3.58907991 \cdot 10^{-2} \dot{n}_P^* \quad (6.21)$$

Die vollständigen Drehzahl- und Momentenverläufe ergeben sich, wenn zum instationären Verhalten (Gl. 6.16 bis Gl. 6.21) die stationären Werte addiert werden. Die Momente wurden unter Vorgabe der Pumpen- und Turbinendrehzahl direkt aus den geschätzten stationären Kennfeldern (Gl. 5.1 und Gl. 5.2) bestimmt.

$$\begin{aligned} \text{Für Glg. 16 und Glg. 21 gilt : } & M_P(t) = M_P^*(t) + 210.3 \text{ Nm} \\ \text{Für Glg. 17 gilt : } & M_T(t) = M_T^*(t) - 300.9 \text{ Nm} \\ \text{Für Glg. 18 gilt : } & n_P(t) = n_P^*(t) + 900. \text{ min}^{-1} \\ \text{Für Glg. 19 und Glg. 20 gilt : } & n_T(t) = n_T^*(t) + 450. \text{ min}^{-1} \end{aligned}$$

In Abb. 6.8 bis Abb. 6.10 sind einige Simulationsergebnisse mit den entsprechenden Meßwerten für die drei verschiedenen Modelle aufgetragen. Die Turbinendrehzahl wurde harmonisch mit 10 Hz bei einer Amplitude von 70 min^{-1} erregt, während die Pumpendrehzahl konstant gehalten wurde. In allen drei Abbildungen handelt es sich um dieselben Meßergebnisse. Von den gemessenen Drehzahl- und Momentenverläufen (gestrichelte Linie) sind zwei die jeweiligen Modelleingänge, während die anderen beiden mit den Modellausgängen (durchgezogene Linie) verglichen werden.

Die Anfangsbedingungen der numerischen Integration der Zustandsgleichungen wurden bei allen drei Modellen zu Null gesetzt. Aus diesem Grund sind am Anfang der Zeitschriebe auch Einschwingvorgänge zu erkennen, die jedoch nach kurzer Zeit abgeklungen sind. Als Integrationsverfahren wurde die Einschrittformel nach Runge-Kutta (4. Ordnung) verwendet.

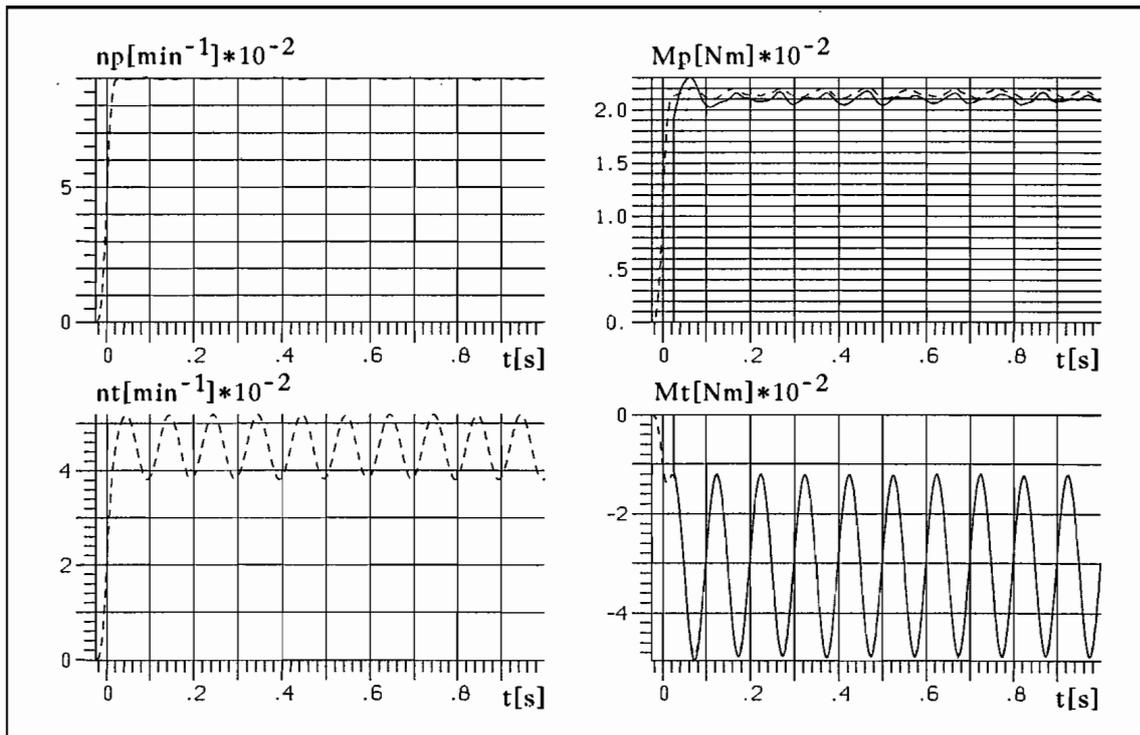


Abb. 6.8) Vergleich Simulations-/Meßergebnisse (einphasiger Wandler; Modell in der Form der dynamischen Dämpfungsmatrix; Meßwerte gestrichelt; Simulation durchgezogen)

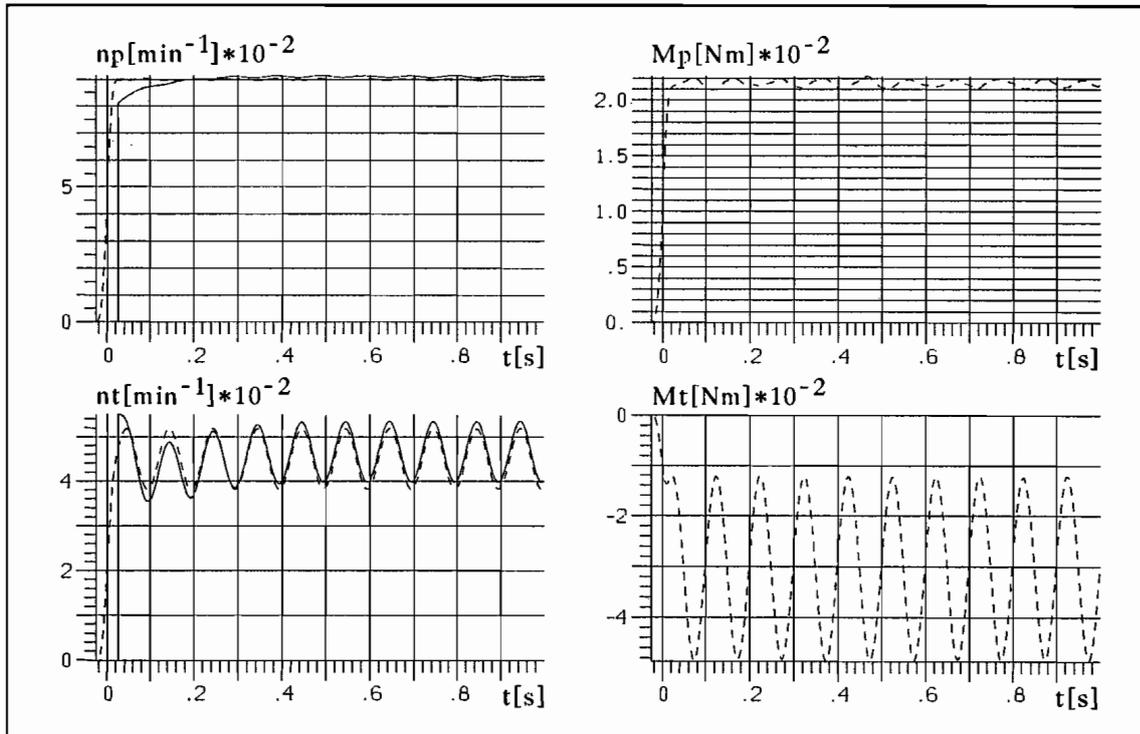


Abb. 6.9) Vergleich Simulations-/Meßergebnisse (einphasiger Wandler; Modell in der Form der inversen dynamischen Dämpfungsmatrix; Meßwerte gestrichelt; Simulation durchgezogen)

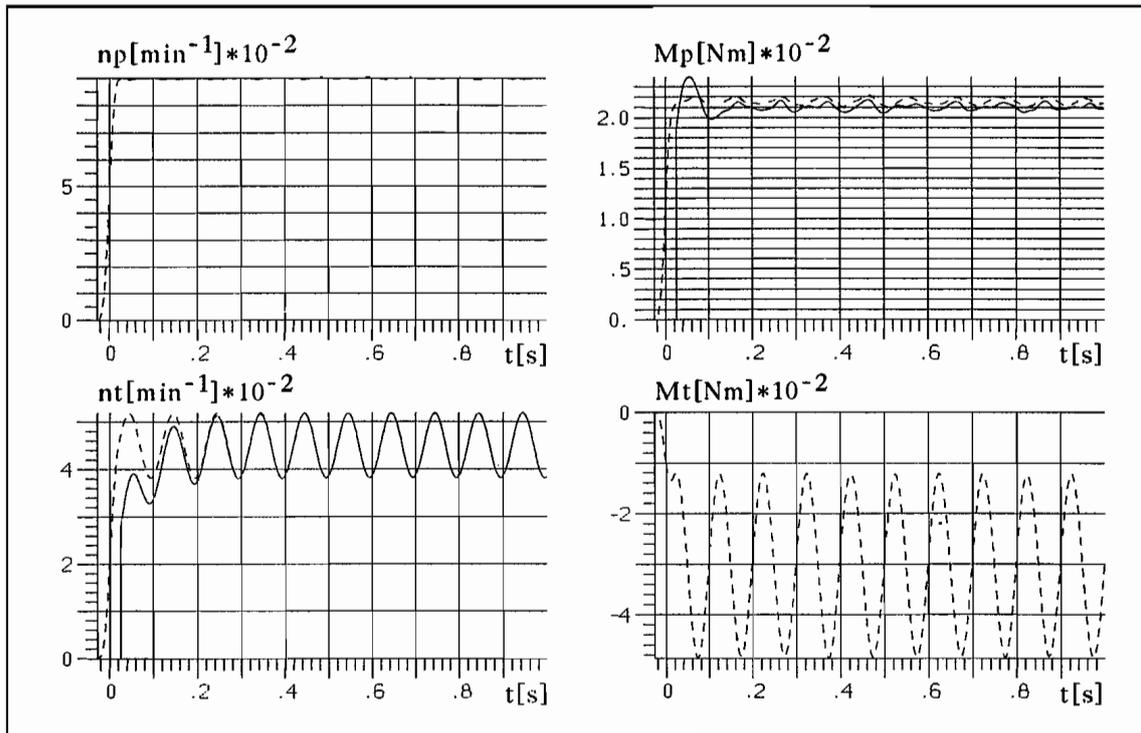


Abb. 6.10) Vergleich Simulations-/Meßergebnisse (einphasiger Wandler; Modell in der Form der Übertragungsmatrix; Meßwerte gestrichelt; Simulation durchgezogen)

Die in Abb. 6.8 bis Abb. 6.10 teilweise erkennbaren geringen, aber konstanten Abweichungen der simulierten von den gemessenen Kurvenverläufen sind darauf zurückzuführen, daß für nichtlineare Systeme allgemein das Superpositionsprinzip nicht gilt. Für den stationären Fall können den konstanten Pumpen- und Turbinendrehzahlen eindeutig auch konstante Pumpen- und Turbinenmomente zugeordnet werden.

$$n_{P0}; n_{T0} \xrightarrow{\text{stationär}} M_{P0}; M_{T0}$$

Schwanken die Drehzahlen um den stationären Punkt, so kann nicht davon ausgegangen werden, daß auch die Momente um den der stationären Kennlinie entsprechenden Punkt schwanken.

$$n_{P0} + \Delta n_P(t); n_{T0} + \Delta n_T(t) \xrightarrow{\text{instationär}} M_{P0}^* + \Delta M_P(t); M_{T0}^* + \Delta M_T(t)$$

$$M_{P0} \neq M_{P0}^* \quad M_{T0} \neq M_{T0}^*$$

Allgemein kann gesagt werden, daß sich eine Ausgangsgröße $y(t)$ als Funktion einer schwankenden Eingangsgröße $x(t) = x_0 + \Delta x(t)$ nicht aus der Summe der Teilausgangsgrößen $y_1(t) = f(x_0)$ und $y_2(t) = f(\Delta x(t))$ berechnen läßt.

Die Unterschiede zwischen den stationären Momenten und den im instationären Betrieb geschätzten Mittelwerten der Momente sind beim hydrodynamischen Wandler abhängig vom Betriebspunkt, den Amplituden und der Erregerfrequenz. Die Abhängigkeiten wurden im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter untersucht, da der Fehler meist zu vernachlässigen war. Wenn anstelle der stationären Momente die geschätzten Mittelwerte für das Modell verwendet werden, kann der Fehler sogar fast vollständig vermieden werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die identifizierten Modelle das dynamische Verhalten des einphasigen Wandlers für kleine Schwankungen um den Betriebspunkt $v = 0.5$ sehr gut beschreiben. Der Gültigkeitsbereich der Modelle ist jedoch eingeschränkt. Für pumpen- und turbinenseitige Drehzahlschwankungen $> 80 \text{ min}^{-1}$ können die Abweichungen der linearen Modelle vom nichtlinearen Systemverhalten des Wandlers zum Teil sehr groß werden.

6.1.2. Abbildung des instationären Verhaltens für größere Betriebsbereiche

Um das instationäre Verhalten des einphasigen Wandlers in einem größeren Drehzahlbereich simulieren zu können, wurden bei gleichbleibender Pumpendrehzahl für verschiedene Turbinendrehzahlen weitere Modelle in der Form der dynamischen Dämpfungsmatrix bestimmt. Die stationären Betriebspunkte, in denen die Modelle bestimmt wurden, sind so gewählt worden, daß durch eine betriebspunktabhängige Umschaltung in die entsprechenden Teilmodelle ein großer Turbinendrehzahlbereich abgebildet werden konnte.

Insgesamt wurden 9 lineare Teilmodelle in den Betriebspunkten $v = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ bzw. $s = 90\%, 80\%, \dots, 10\%$ bestimmt. Die stationäre Pumpendrehzahl betrug $n_p = 900 \text{ min}^{-1}$. Die Vorgehensweise zur Berechnung der einzelnen Modelle ist identisch mit der in Kap. 6.1.1. gezeigten.

Abb. 6.11 bis 6.14 zeigen die Koeffizienten der Matrix $\underline{D}(\omega)$ für den einphasigen Wandler als Funktion der Frequenz und des Betriebspunktes (Schlupf $s[\%]$). Dabei sind die direkt aus den Meßwerten bestimmten, komplexen Größen aufgetragen worden und nicht der Polynomansatz (Gl. 6.7), mit dem die 9 verschiedenen dynamischen Dämpfungsmatrizen parametrisiert wurden. Im Gegensatz zu Abb. 6.2 bis 6.7 sind die Funktionswerte nicht in diskreter, sondern in kontinuierlicher Form dargestellt.

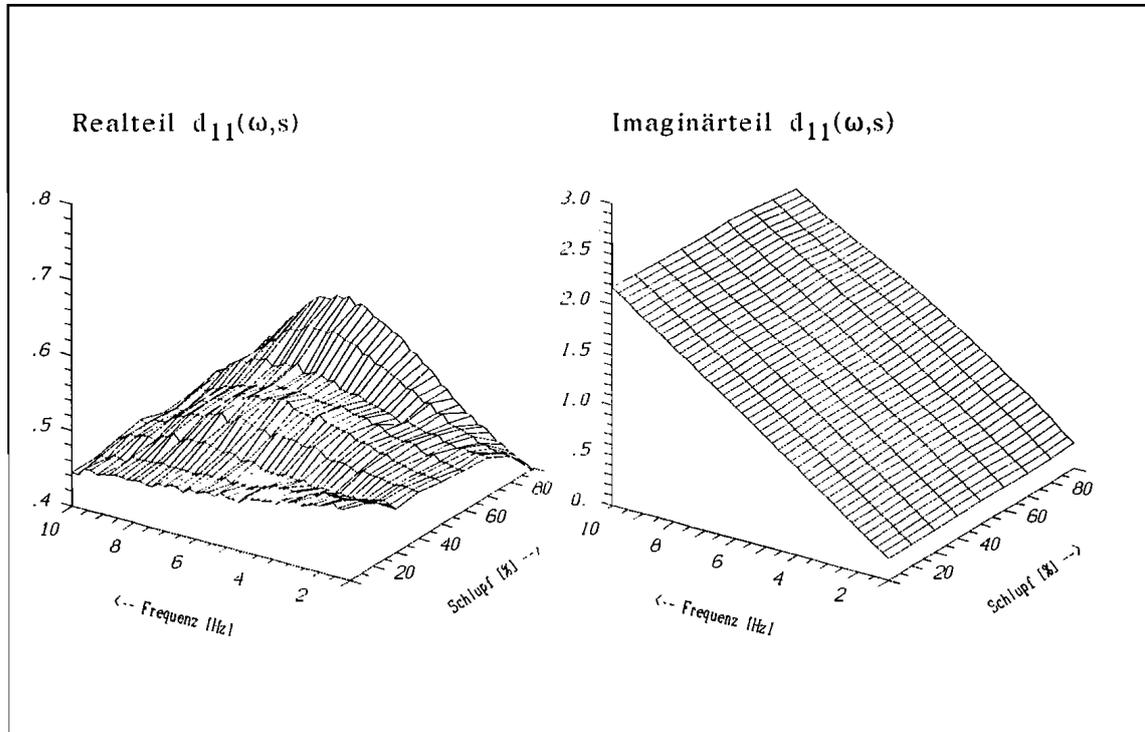


Abb. 6.11) dynamische Dämpfungsmatrix
(einphasiger Wandler; Koeffizient $d_{11}(\omega, s)$; $s = \text{Schlupf}$)

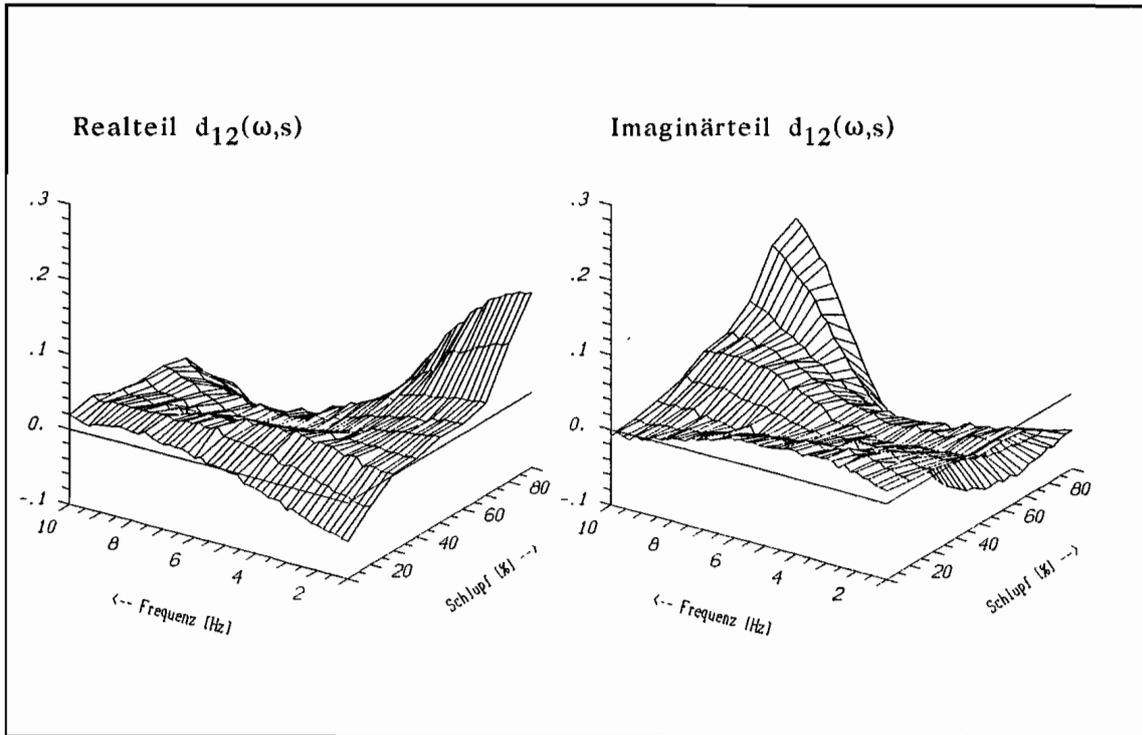


Abb. 6.12) dynamische Dämpfungsmatrix
(einphasiger Wandler; Koeffizient $d_{12}(\omega, s)$; s = Schlupf)

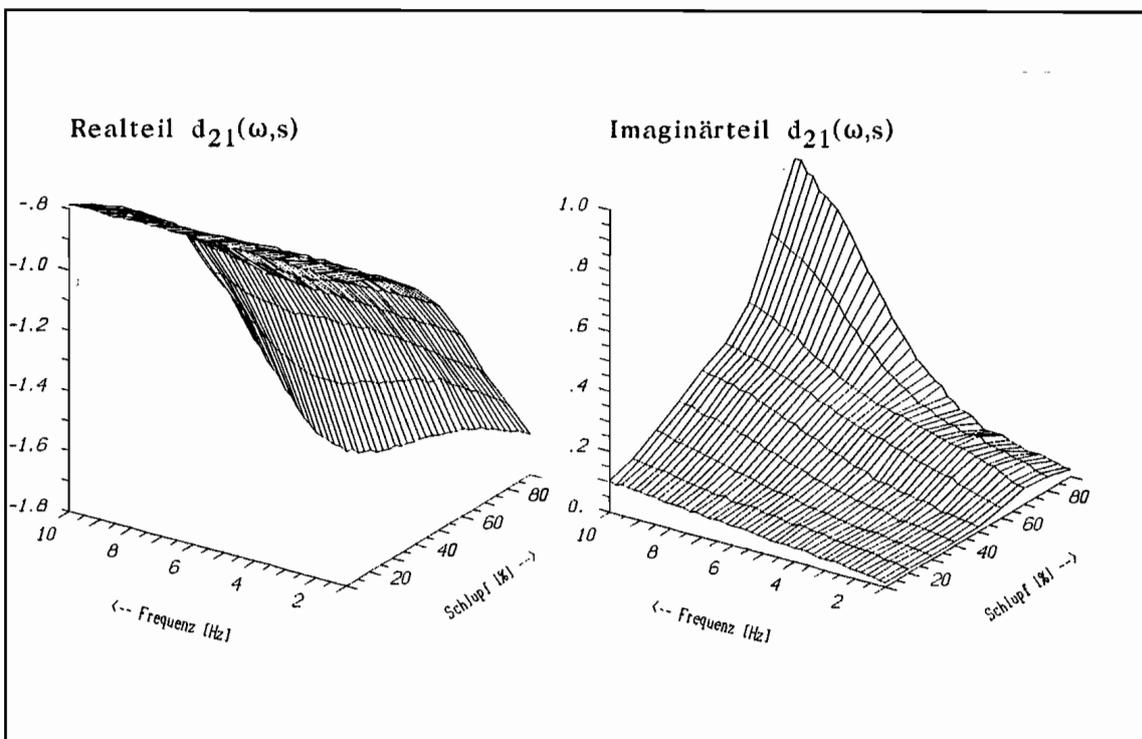


Abb. 6.13) dynamische Dämpfungsmatrix
(einphasiger Wandler; Koeffizient $d_{21}(\omega, s)$; s = Schlupf)

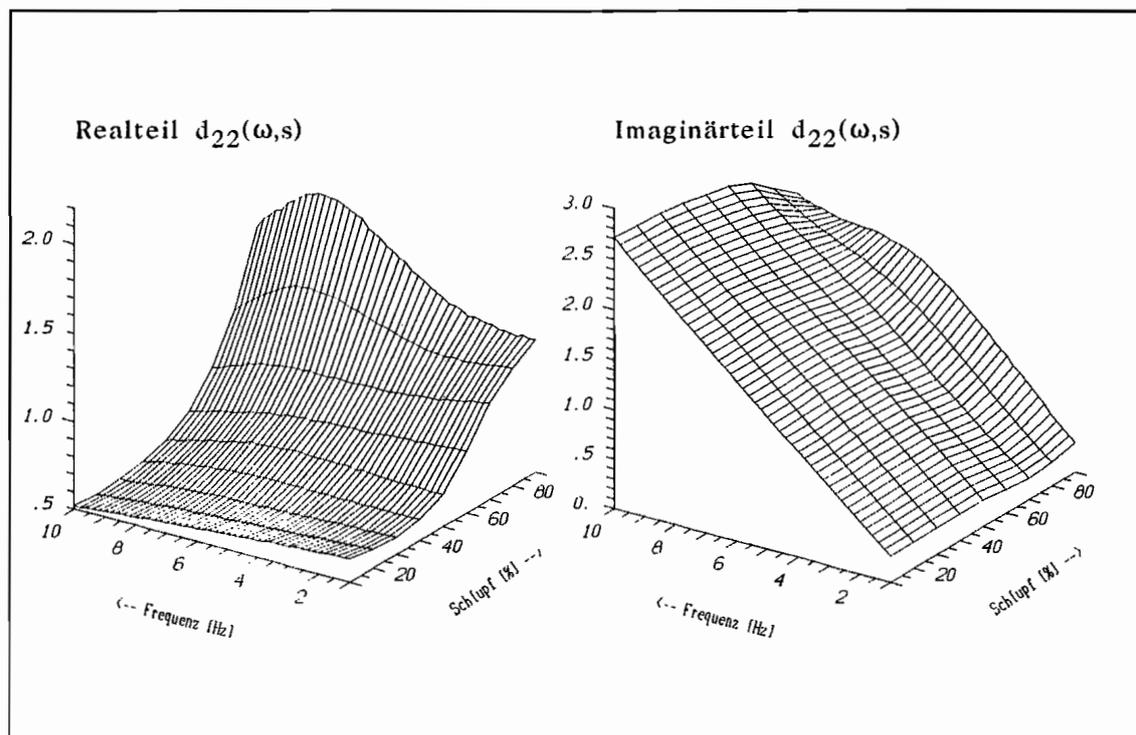


Abb. 6.14) dynamische Dämpfungsmatrix

(einphasiger Wandler; Koeffizient $d_{22}(\omega, s)$; s = Schlupf)

Jeder Schnittpunkt der Gitterlinien in den Abbildungen wurde experimentell bestimmt. Zur Berechnung der $9 \cdot 46 = 414$ Funktionswerte jedes Koeffizienten waren $2 \cdot 9 \cdot 46 = 828$ Messungen erforderlich (9 Betriebspunkte; 46 verschiedene Erregerfrequenzen für jeden Betriebspunkt; 2 linear unabhängige Erregungen für jede Frequenz). Wie diese Zahlen verdeutlichen, ist der versuchstechnische Aufwand zur Bestimmung der dynamischen Dämpfungsmatrix nicht unerheblich.

Bei Modellen in der Form der inversen dynamischen Dämpfungsmatrix oder der Übertragungsmatrix war ein Umschalten in die einzelnen Teilmodelle in Abhängigkeit vom Betriebspunkt nicht möglich, da aus den Eingangsgrößen dieser Modelle (M_p und M_T für die inverse dynamische Dämpfungsmatrix; n_p und M_T für die Übertragungsmatrix) der stationäre Arbeitspunkt nicht bestimmt werden konnte. Die hier durchgeführten Simulationsrechnungen waren somit nur mit Modellen in der Form der dynamischen Dämpfungsmatrix möglich.

Bei der Parametrisierung der Koeffizienten konnten für jedes Modell die gleichen Ansatzgrade für das Zähler- und Nennerpolynom verwendet werden ($n=4$; $m=3$), woraus sich auch gleiche Dimensionen der Matrizen im Zustandsraum ergaben.

Nachdem für jeden Betriebspunkt die dynamischen Dämpfungsmatrizen experimentell bestimmt, parametrisiert (Gl. 6.7) und in den Zustandsraum transformiert worden waren (Gl. 6.15), stellte sich die Frage nach den optimalen Umschaltpunkten zwischen den einzelnen Modellen.

Dieses soll anhand Abb. 6.15 erläutert werden, die den prinzipielle Verlauf einer stationären Momentenkennlinie als Funktion des Drehzahlverhältnisses v zeigt. Die in den Betriebspunkten v_i und v_{i+1} bestimmten Modelle P_i und P_{i+1} approximieren den nichtlinearen Verlauf der Kennlinie durch Geraden. Aus diesem Grund spricht man auch von einer Linearisierung um einen Betriebspunkt. Wird nun der Bereich von v_i bis v_{i+1} durchfahren, so muß von dem Modell P_i auf das Modell P_{i+1} umgeschaltet werden. Wie aus Abb. 6.15 leicht zu ersehen ist, ist beim Umschalten der Fehler zwischen den Geraden und der Kennlinie im Schnittpunkt der Tangenten minimal. Ein früheres oder späteres Umschalten würde zu größeren Abweichungen führen.

Der optimale Umschaltpunkt liegt also genau im Schnittpunkt der Tangenten. Da die jeweiligen stationären Kennlinien für das Pumpen- und das Turbinenmoment grundsätzlich einen anderen Verlauf haben, ergeben sich auch für jedes Moment unterschiedliche Umschaltpunkte. Gl. 6.22 und Gl. 6.23 beschreiben jeweils eine Tangente an der stationären Kennlinie des Pumpenmomentes in den Betriebspunkten v_i und v_{i+1} .

$$G_1 = \left[\frac{dM_{P0}}{dn_T} \right]_{v_i} [n_T^* - n_{T0,i}] + M_{P0,i} \quad (6.22)$$

$$G_2 = \left[\frac{dM_{P0}}{dn_T} \right]_{v_{i+1}} [n_T^* - n_{T0,i+1}] + M_{P0,i+1} \quad (6.23)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, 8$$

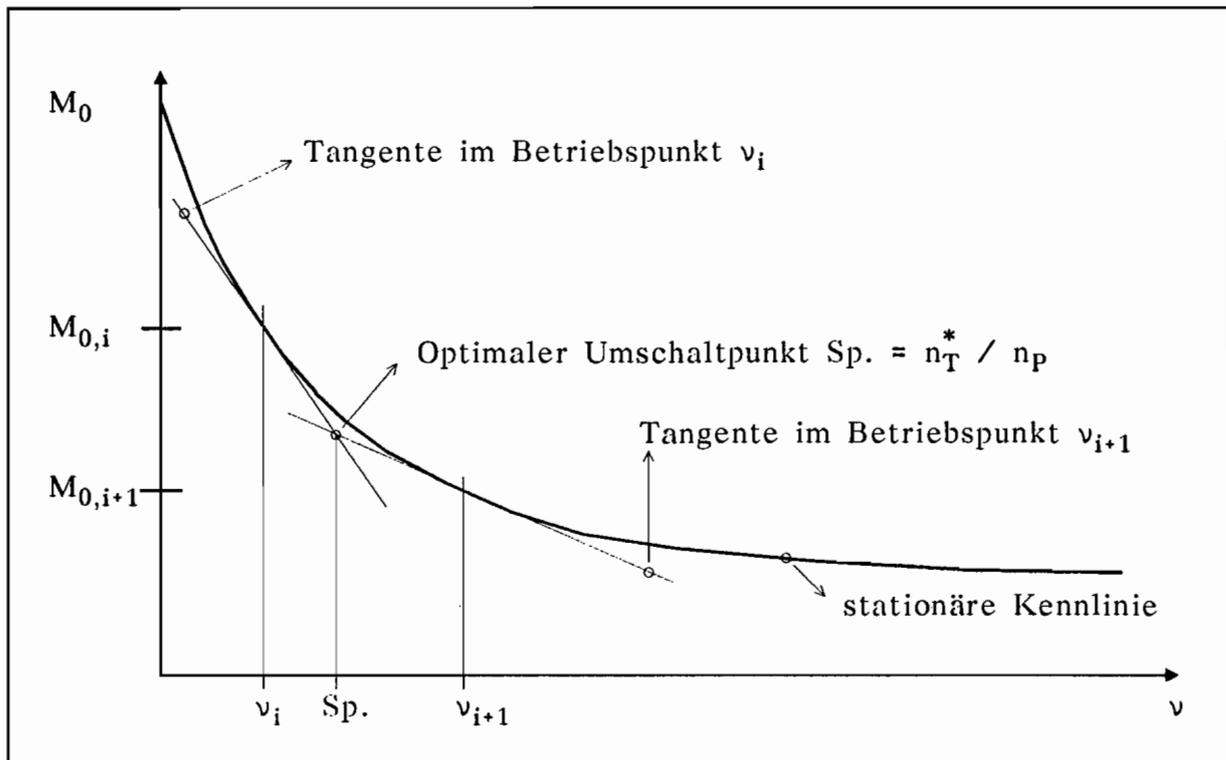


Abb. 6.15) Bestimmung des optimalen Umschaltpunktes

Aus der Bedingung $G_1 = G_2$ folgt für das Pumpenmoment der optimale Umschaltpunkt n_T^* für den Übergang vom Modell P_i in das Modell P_{i+1} oder umgekehrt (Abb. 6.15). Dementsprechend kann aus den Gl. 6.24 und Gl. 6.25 der optimale Umschaltpunkt für das Turbinenmoment berechnet werden.

$$G_3 = \left[\frac{dM_{T0}}{dn_T} \right]_{\nu_i} [n_T - n_{T0,i}] + M_{T0,i} \quad (6.24)$$

$$G_4 = \left[\frac{dM_{T0}}{dn_T} \right]_{\nu_{i+1}} [n_T - n_{T0,i+1}] + M_{T0,i+1} \quad (6.25)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, 8$$

Die Steigungen der Kennlinien in den Betriebspunkten können aus den Polynomen der stationären Kennfelder (Gl. 5.1 und Gl. 5.2) oder aus den Modellen in der Form der Differentialgleichungen Gl. 6.8 und Gl. 6.9 bestimmt werden (vergl. Kap. 6.1.1).

In Tab. 6.2 sind die optimalen Umschaltunkte für beide Momente abgebildet. Darin bezeichnen die Modellnummern P_1 bis P_9 die Modelle in den Betriebspunkten $v = 0.1$ bis $v = 0.9$.

Tab. 6.2) Optimale Umschaltunkte für den einphasigen Wandler
($n_p = 900 \text{ min}^{-1}$)

vom Modell P_i zum Modell P_{i+1}	optimaler Umschalt- punkt $n_T [\text{min}^{-1}]$ für Pumpenmoment	optimaler Umschalt- punkt $n_T [\text{min}^{-1}]$ für Turbinenmoment	Mittlerer Umschaltpunkt $n_T^* [\text{min}^{-1}]$
P1 - P2	132.57	150.70	135.
P2 - P3	219.64	227.79	225.
P3 - P4	305.76	314.73	315.
P4 - P5	393.93	402.52	405.
P5 - P6	505.17	489.48	495.
P6 - P7	590.49	568.99	585.
P7 - P8	676.54	687.77	675.
P8 - P9	762.79	764.74	765.

Da die Abweichungen zwischen den optimalen und den mittleren Schaltpunkten gering sind, wurden bei den Simulationsrechnungen der Einfachheit halber die Gültigkeitsbereiche der Modelle immer in die Mitte zwischen zwei Betriebspunkte gelegt.

Bei der Umschaltung von einem Modell in ein anderes können die Anfangsbedingungen für das neue Modell mit Hilfe der zuvor berechneten Momente und der aktuellen Drehzahlen bestimmt werden. Für die Berechnung der Anfangswerte des Pumpenmomentes gilt

$$z_1(t_0) = [M_P^* - D_P[n_P^* \ n_T^*]^T - E_P[\dot{n}_P^* \ \dot{n}_T^*]^T]_{t=t_0} - [M_{P0,v_i} - M_{P0,v_{i-1}}]$$

$$z_2(t_0) = [\dot{M}_P^* - [b_{11} \ b_{12}]_P[n_P^* \ n_T^*]^T - D_P[\dot{n}_P^* \ \dot{n}_T^*]^T - E_P[\ddot{n}_P^* \ \ddot{n}_T^*]^T]_{t=t_0}$$

$$z_3(t_0) = [\ddot{M}_P^* - [b_{21} \ b_{22}]_P[n_P^* \ n_T^*]^T - [b_{11} \ b_{12}]_P[\dot{n}_P^* \ \dot{n}_T^*]^T - D_P[\ddot{n}_P^* \ \ddot{n}_T^*]^T - E_P[\dddot{n}_P^* \ \dddot{n}_T^*]^T]_{t=t_0}$$

und entsprechend für die Anfangswerte des Turbinenmomentes

$$z_1(t_0) = \left[\dot{M}_T^* - \underline{D}_T [n_P^* \ n_T^*]^T - \underline{E}_T [\dot{n}_P^* \ \dot{n}_T^*]^T \right]_{t=t_0} - \left[M_{T0,v_i} - M_{T0,v_{i-1}} \right]$$

$$z_2(t_0) = \left[\dot{M}_T^* - [b_{11} \ b_{12}]_T [n_P^* \ n_T^*]^T - \underline{D}_T [\dot{n}_P^* \ \dot{n}_T^*]^T - \underline{E}_T [\ddot{n}_P^* \ \ddot{n}_T^*]^T \right]_{t=t_0}$$

$$z_3(t_0) = \left[\ddot{M}_T^* - [b_{21} \ b_{22}]_T [n_P^* \ n_T^*]^T - [b_{11} \ b_{12}]_T [\dot{n}_P^* \ \dot{n}_T^*]^T - \underline{D}_T [\ddot{n}_P^* \ \ddot{n}_T^*]^T - \underline{E}_T [\dddot{n}_P^* \ \dddot{n}_T^*]^T \right]_{t=t_0} .$$

t_0 bezeichnet den Zeitpunkt, zu dem die Umschaltung erfolgen soll. Nachteilig bei der Berechnung der Anfangsbedingungen ist jedoch, daß hierbei höhere Drehzahl- und Momentenableitungen numerisch bestimmt werden müssen. Ungenauigkeiten bei der Berechnung der Anfangsbedingungen und der Modelle führen unter Umständen zu Einschwingvorgängen bei der Umschaltung. Dieses wird im Kap. 6.2 veranschaulicht.

Um die Berechnung der Anfangsbedingungen zu umgehen, wurden für jeden Zeitpunkt der Simulation die Ausgänge aller Modelle parallel berechnet. Somit ergaben sich für die gleichen Eingangsgrößen $n_P(t)$ und $n_T(t)$ für jedes Modell über die gesamte Integrationszeit verschiedene instationäre Momentenverläufe. In Abhängigkeit von den aktuellen Drehzahlen wurden dann die entsprechenden instationären Momente zu einer Gesamtlösung zusammengesetzt. Diese Vorgehensweise soll an einen Beispiel erläutert werden. Für die Drehzahlverläufe

$$n_P(t) = 900 \text{ [min}^{-1}\text{]} \quad n_T(t) = 450 + 100 \sin(\omega t) \text{ [min}^{-1}\text{]}$$

ergeben sich aus der Tab. 6.2 folgende Modellumschaltungen:

$$P5 - P6 \quad , \quad P6 - P5 \quad , \quad P5 - P4 \quad , \quad P4 - P5$$

Die Eingangsgrößen der einzelnen Modelle sind:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Modell P4 bis P6: } n_P^*(t) = n_P(t) - 900 & \\
 \text{Modell P4} & : n_T^*(t) = n_T(t) - 0.4 \cdot 900 \\
 \text{Modell P5} & : n_T^*(t) = n_T(t) - 0.5 \cdot 900 \\
 \text{Modell P6} & : n_T^*(t) = n_T(t) - 0.6 \cdot 900
 \end{array}$$

Entsprechend der oben angegebenen Modellumschaltungen müssen die aus den Modellen P4 bis P6 errechneten instationären Momente $M_{P,P4}^*$ bis $M_{P,P6}^*$ und $M_{T,P4}^*$ bis $M_{T,P6}^*$ zu einer Gesamtlösung zusammengesetzt werden.

$$M_P^*(t) = \begin{cases} M_{P,P4}^*(t) \text{ für } 315 \text{ [min}^{-1}\text{]} < n_T(t) \leq 405 \text{ [min}^{-1}\text{]} \\ M_{P,P5}^*(t) \text{ für } 405 \text{ [min}^{-1}\text{]} < n_T(t) \leq 495 \text{ [min}^{-1}\text{]} \\ M_{P,P6}^*(t) \text{ für } 495 \text{ [min}^{-1}\text{]} < n_T(t) \leq 585 \text{ [min}^{-1}\text{]} \end{cases}$$

$$M_T^*(t) = \begin{cases} M_{T,P4}^*(t) \text{ für } 315 \text{ [min}^{-1}\text{]} < n_T(t) \leq 405 \text{ [min}^{-1}\text{]} \\ M_{T,P5}^*(t) \text{ für } 405 \text{ [min}^{-1}\text{]} < n_T(t) \leq 495 \text{ [min}^{-1}\text{]} \\ M_{T,P6}^*(t) \text{ für } 495 \text{ [min}^{-1}\text{]} < n_T(t) \leq 585 \text{ [min}^{-1}\text{]} \end{cases}$$

Aufgrund der kurzen Einschwingzeiten wurden die Anfangswerte der einzelnen Modelle zu Beginn der Simulation zu Null gesetzt.

Abb. 6.16 zeigt für den einphasigen Wandler ein Simulations- und Meßergebnis, bei dem die Turbinendrehzahl über einen größeren Bereich verstellt wurde. Dabei wurden alle Modellbereiche zweimal vollständig durchfahren. Die Unstetigkeits- und Sprungstellen in den simulierten Momentenverläufen liegen genau an den Umschaltpunkten von einem Modell in ein anderes. Besonders deutlich ist dieses im simulierten Verlauf des Pumpenmomentes zu erkennen. Auch bei der Verwendung der optimalen Umschaltpunkte konnten die Sprungstellen nicht vermieden werden. Bei anderen Simulationen traten diese Ungenauigkeiten nicht so stark in Erscheinung.

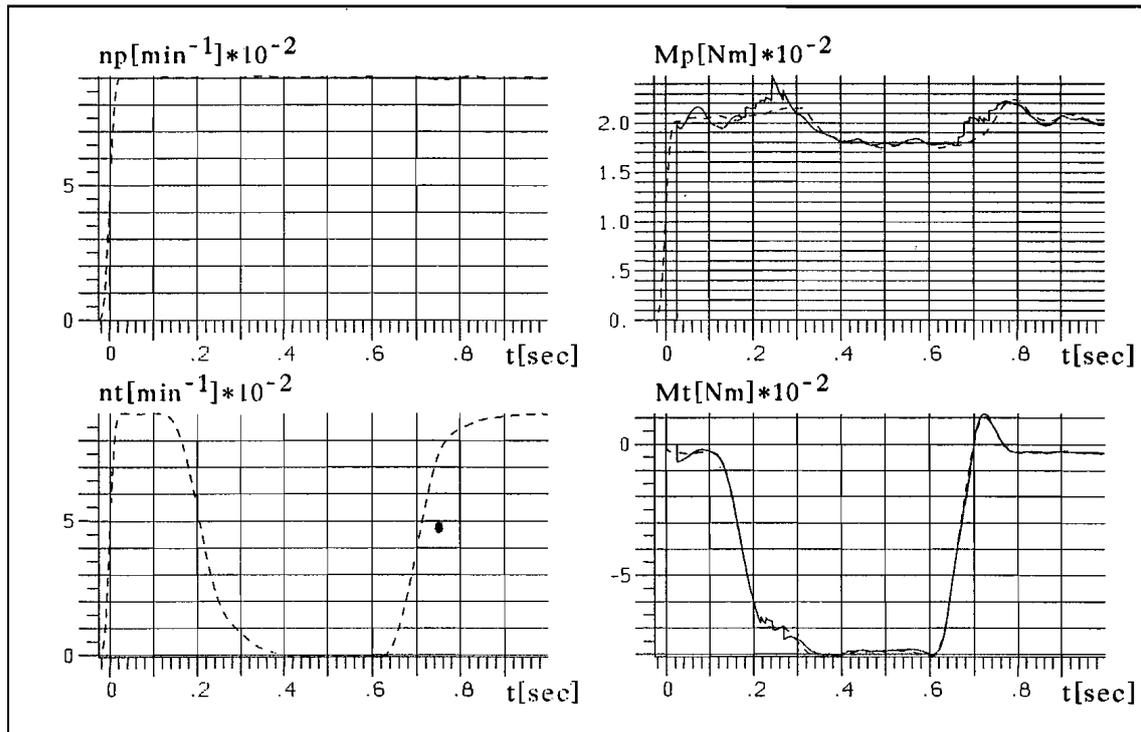


Abb. 6.16) Vergleich Simulations-/Meßergebnisse (einphasiger Wandler; Rampenzeiten ca. 0.3 sec; Meßwerte gestrichelt; Simulation durchgezogen)

Die guten Übereinstimmungen der Meßwerte mit den Simulationsergebnissen in Abb. 6.16 zeigen, daß die linearen Modelle das dynamische Verhalten des einphasigen Wandlers gut beschreiben. Die große turbinenseitige Verzögerung (von 900 min^{-1} auf 0 min^{-1} in ca. 0.3 sec) und Beschleunigung (von 0 min^{-1} auf 900 min^{-1} in ca. 0.3 sec) kann mit ausreichender Genauigkeit abgebildet werden. Wie weitere Simulationen gezeigt haben, führen Variationen der Pumpendrehzahl mit Amplituden $> 80 \text{ min}^{-1}$ zu schlechteren Ergebnissen, da die Abweichungen vom nicht-linearen Verhalten mit steigender Amplitude immer größer werden. Um auch größere Pumpendrehzahlbereiche abdecken zu können, müßte ein Kennfeld von linearen Modellen in Abhängigkeit von beiden Drehzahlen erstellt werden. Auch wenn die Versuchsdurchführung automatisiert werden kann, so ist dieses jedoch mit einem erheblichen versuchstechnischen Aufwand verbunden.

6.1.3. Nichtlineare Modellierung

Um das Wandlerverhalten über größere Betriebsbereiche genauer abzubilden, wurden die für verschiedene Betriebspunkte gültigen, linearen Modelle in nichtlineare Systembeschreibungen überführt. Grundsätzlich setzt sich jedes lineare Modell aus einem stationären und instationären Anteil zusammen (Abb. 6.17). Der stationäre Anteil approximiert dabei das nichtlineare Wandlerverhalten durch die ersten beiden Glieder einer Taylorreihe im jeweiligen Arbeitspunkt. Wird dieser Anteil durch das identifizierte, nichtlineare Polynom des entsprechenden stationären Kennfeldes ersetzt, so ergeben sich für den jeweilig betrachteten Betriebspunkt nichtlineare Systembeschreibungen (Gl. 6.26 c und Gl. 6.27 c).

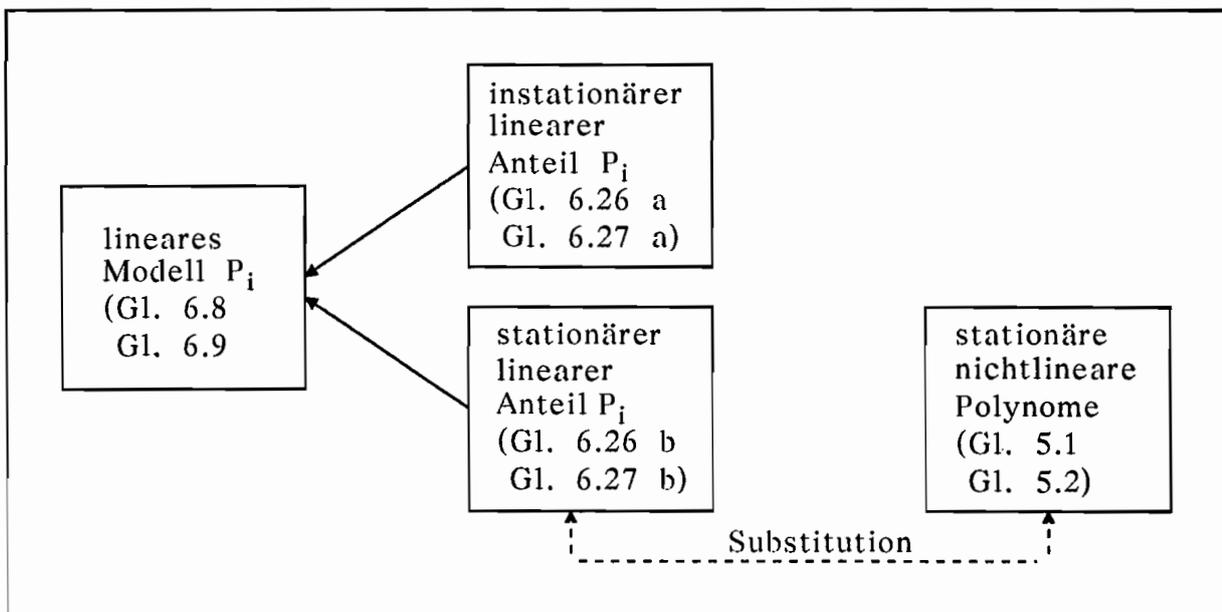


Abb. 6.17) Überführung der linearen Modelle in nichtlineare Systembeschreibungen

$$\sum_{i=1}^3 a_{i,M_P}^{(i)*}(t) = \sum_{j=1}^4 b_{j,11}^{(j)} n_P(t) + \sum_{j=1}^4 b_{j,12}^{(j)} n_T(t) \quad (6.26 \text{ a})$$

$$\sum_{i=1}^3 a_{i,M_T}^{(i)*}(t) = \sum_{j=1}^4 b_{j,12}^{(j)} n_P(t) + \sum_{j=1}^4 b_{j,22}^{(j)} n_T(t) \quad (6.27 \text{ a})$$

$$M_{P,st}(t) = b_{0,11}n_P^*(t) + b_{0,12}n_T^*(t) + M_{P0,v_i} \quad (6.26 \text{ b})$$

$$M_{T,st}(t) = b_{0,21}n_T^*(t) + b_{0,22}n_T^*(t) - M_{T0,v_i} \quad (6.27 \text{ b})$$

$$M_P(t) = M_P^*(t) + \sum_{i=1}^7 a_{Pi} n_P^i + \sum_{j=1}^7 b_{Pi} n_T^j + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 c_{Pij} n_P^i n_T^j / 10^5 \quad (6.26 \text{ c})$$

$$M_T(t) = M_T^*(t) - \sum_{i=1}^7 a_{Ti} n_P^i + \sum_{j=1}^7 b_{Ti} n_T^j + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 c_{Tij} n_P^i n_T^j / 10^5 \quad (6.27 \text{ c})$$

Die Eingangsgrößen der nichtlinearen Modelle (Gl. 6.26 c und Gl. 6.27 c) sind die absoluten Drehzahlen und nicht, wie bei der linearen Abbildung, die Abweichungen vom Betriebspunkt.

Bei der Überprüfung der Gültigkeitsbereiche der einzelnen nichtlinearen Modelle zeigte sich ein überraschendes Ergebnis: Alle Modelle haben bei gleichen Eingangsgrößen ein annähernd gleiches Ein-/Ausgangsverhalten. Die Gültigkeitsbereiche sind identisch mit denen der stationären Kennfelder. Durch Simulationsrechnungen konnte nachgewiesen werden, daß jedes einzelne dieser Modelle das instationäre Wandlerverhalten für große Drehzahlbereiche ($0 \text{ min}^{-1} \leq n_P \leq 1100 \text{ min}^{-1}$ und $0 \text{ min}^{-1} \leq n_T \leq 1000 \text{ min}^{-1}$) mit hinreichender Genauigkeit abbildet, und nicht mehr auf kleine Schwankungen um einen Betriebspunkt beschränkt ist. Demzufolge beschreiben die in den verschiedenen Betriebspunkten bestimmten Modelle (Gl. 6.26 a und Gl. 6.27 a) den gleichen Zusammenhang zwischen den Momenten und den Drehzahlen.

Hierfür kann folgende Begründung angegeben werden. Wie Abb. 6.11 bis 6.14 zeigen, ist die dynamische Dämpfungsmatrix von den Betriebspunkten (Schlupf) abhängig. Der Abzug des rein stationären Anteile von den Spektren äußert sich nur in den Realteilen, indem über die Frequenz von jeder Kennlinie der neun Betriebspunkte ein für jedes Modell konstanter Wert abgezogen wird.

$$\operatorname{Re}^*[d_{ij}(\omega)]_{S=k\%} = \operatorname{Re}[d_{ij}(\omega)]_{S=k\%} - \operatorname{Re}[d_{ij}(\omega=0)]_{S=k\%}$$

$$i, j = 1, 2 \quad k = 10, 20, 30, \dots, 90$$

Die Imaginärteile bleiben unverändert. Daß dennoch bei gleichen Eingängen für jedes Modell (Gl. 6.26 a und Gl. 6.27 a) annähernd gleiche Ausgangsgrößen folgen, läßt auf eine vom Betriebspunkt unabhängige Dämpfungsmatrix schließen. Dieser Widerspruch kann nur dadurch erklärt werden, daß die Imaginärteile der Koeffizienten d_{11} und d_{22} gegenüber den Realteilen und den anderen Imaginärteilen einen dominanten Einfluß auf das Ein-/Ausgangsverhalten haben, da sie über den Schlupf relativ konstant sind. Aufgrund ihrer linearen Frequenzabhängigkeit, liegt die Vermutung nahe, daß sich in diesen Imaginärteilen hauptsächlich die Trägheitsmomente von Pumpen- und Turbinenrad sowie des Öls, das sich zwischen den Beschaukelungen der Räder befindet, abbilden.

$$\begin{vmatrix} M_P \\ M_T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Theta_P^* & 0 \\ 0 & \Theta_T^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{n}_P \\ \dot{n}_T \end{vmatrix} \quad \underline{D}(\omega) = \begin{vmatrix} j\omega\Theta_P^* & 0 \\ 0 & j\omega\Theta_T^* \end{vmatrix}$$

Simulationsrechnungen mit Modellen, die nur aus den Polynomen der stationären Kennfelder und den Trägheitsmomenten des Pumpen- und Turbinenrades (incl. Öl) bestehen (Gl. 6.28 und Gl. 6.29), bestätigten diese Vermutung.

$$M_P(t) = \sum_{i=1}^7 a_{Pi} n_P^i + \sum_{j=1}^7 b_{Pj} n_T^j + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 c_{Pij} n_P^i n_T^j / 10^5 + (\Theta_P + \Theta_{P,\text{Öl}}) \dot{n}_P \frac{\pi}{30} \quad (6.28)$$

$$M_T(t) = - \sum_{i=1}^7 a_{Ti} n_P^i - \sum_{j=1}^7 b_{Tj} n_T^j - \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 c_{Tij} n_P^i n_T^j / 10^5 + (\Theta_T + \Theta_{T,\text{Öl}}) \dot{n}_T \frac{\pi}{30} \quad (6.29)$$

Durch zahlreiche Simulationsrechnungen konnte belegt werden, daß sich mit Gl. 6.28 und 6.29 das instationäre Verhalten des einphasigen Wandlers sehr gut beschreiben läßt (Abb. 6.18 und 6.19). Die Untersuchungen

wurden in dem Drehzahlbereich durchgeführt, in dem auch das stationäre Kennfeld bestimmt worden waren. Anders als bei den linearen Modellen war die Simulation nicht mehr auf kleine Schwankungen der Pumpendrehzahl beschränkt. In Abb. 6.18 ist der Vergleich einer Rechnung zu den Meßergebnissen dargestellt, bei der beide Drehzahlen in einem Bereich von 50 min^{-1} bis 850 min^{-1} mit einer Frequenz von 1 Hz harmonisch erregt wurden.

Die Trägheitsmassen des Pumpen- und Turbinenrades zusammen mit dem Öl, das sich zwischen den Schaufeln befindet, können aus den Steigungen der Imaginärteile der Koeffizienten d_{11} und d_{22} berechnet werden.

$$\begin{aligned}\Theta_P + \Theta_{P,\text{Öl}} &= -j \operatorname{Im}[d_{11}(\omega_0)] \cdot 30 / (\omega_0 \pi) = 0.3250 \text{ kg m}^2 \\ \Theta_T + \Theta_{T,\text{Öl}} &= -j \operatorname{Im}[d_{22}(\omega_0)] \cdot 30 / (\omega_0 \pi) = 0.3997 \text{ kg m}^2\end{aligned}$$

Aus Versuchen, bei denen der Wandler ohne Öl betrieben wurde, konnten die Trägheitsmassen der Laufräder (Pumpen- und Turbinenrad) in gleicher Weise bestimmt werden.

$$\Theta_P = 0.2887 \text{ kg m}^2 \quad \Theta_T = 0.3647 \text{ kg m}^2$$

Es ist zu beachten, daß sich die hier identifizierten Trägheitsmassen aus allen Bauteilträgheiten bis hin zu den Systemgrenzen zusammensetzen. Hierzu gehören neben der Pumpen- und Turbinenwelle, die Kupplungsstaben und die Momentenmesswellen.

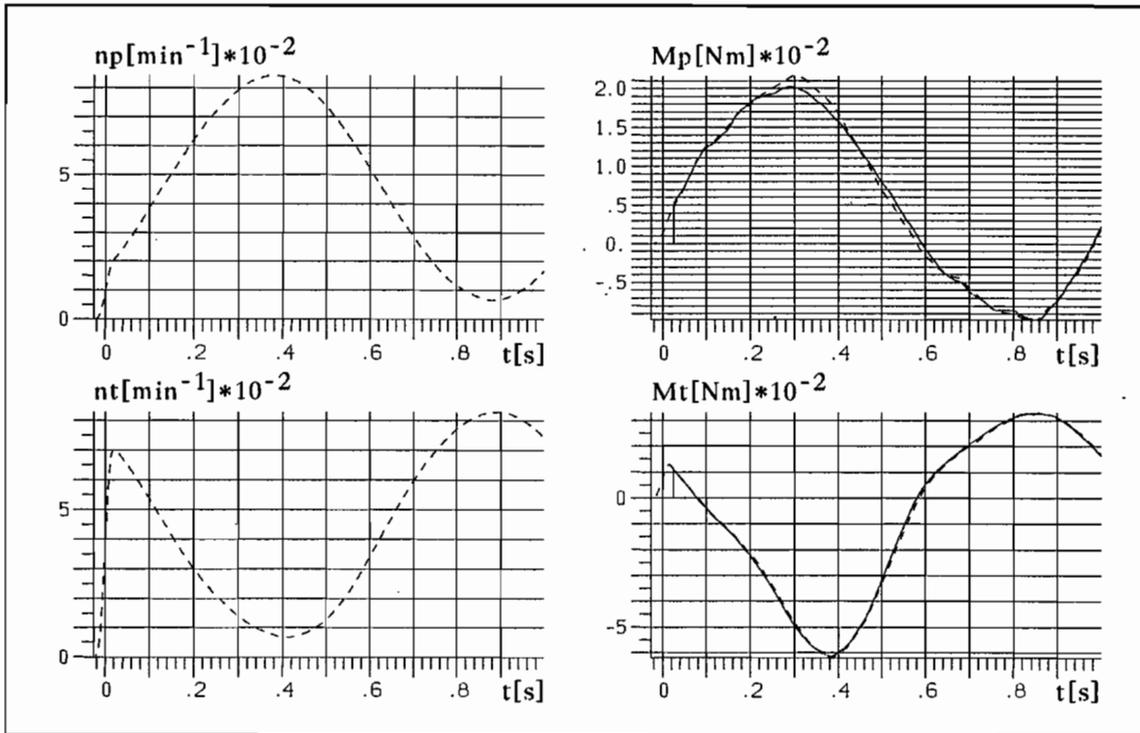


Abb. 6.18) Vergleich Simulations-/Meßergebnisse (einphasiger Wandler; nichtlineares Modell aus stationären Kennfeldern und Trägheitsmassen; Meßwerte gestrichelt; Simulation durchgezogen)

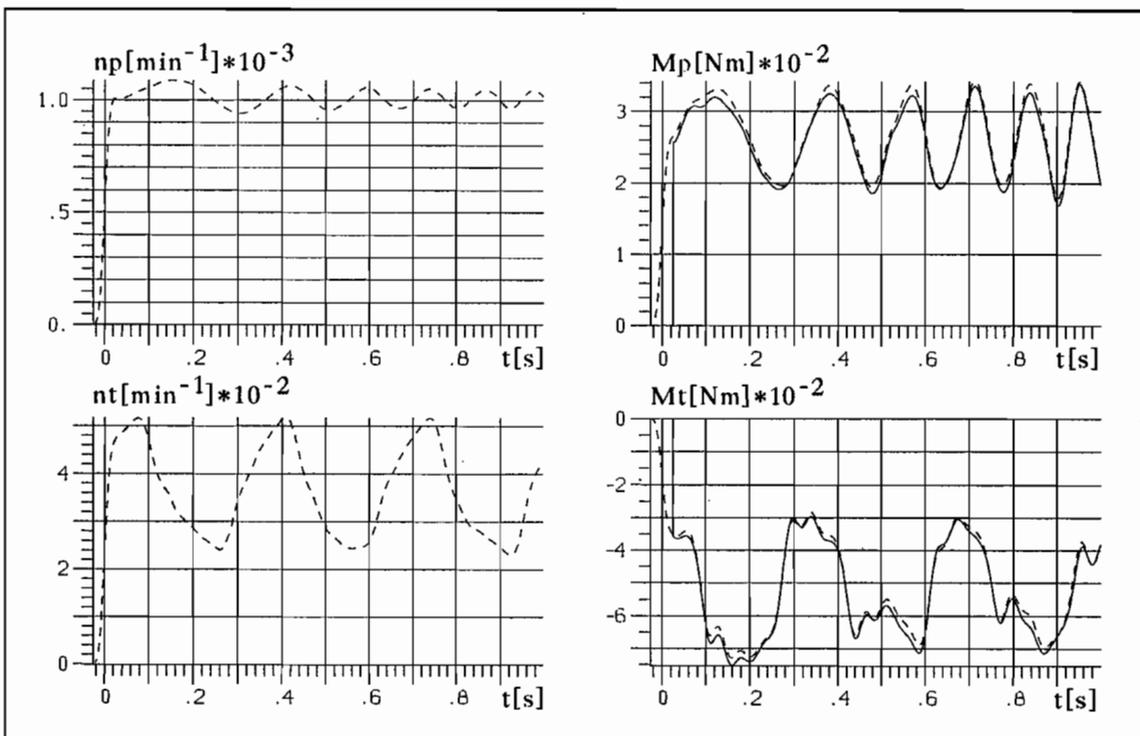


Abb. 6.19) Vergleich Simulations-/Meßergebnisse (einphasiger Wandler; nichtlineares Modell aus stationären Kennfeldern und Trägheitsmassen; Meßwerte gestrichelt; Simulation durchgezogen)

Entgegen ursprünglicher Annahmen erwies es sich als nicht notwendig, das gemessene Reaktionsmoment mit in die Modellierung zur Beschreibung des instationären Verhaltens des einphasigen Wandlers einzubeziehen. Da die Kenntnis über den genauen Verlauf dieses Momentes im allgemeinen nicht von großem Interesse ist, soll hier nur eine Abschätzung der Größenordnung vorgenommen werden. Im stationären Betrieb errechnet sich das Reaktionsmoment nach Abb. 4.11 b aus der Differenz zwischen Pumpen- und Turbinenmoment.

$$M_{R,\text{stationär}} = M_{P,\text{stationär}} - M_{T,\text{stationär}}$$

Bei zeitlichen Änderungen der beiden Drehzahlen bzw. Momente müssen die Trägheiten der Laufräder berücksichtigt werden. Das Reaktionsmoment errechnet sich dann nach Abb. 4.11 a überschlägig aus der Gleichung

$$M_R(t) \cong M_P(t) - (\Theta_P + \Theta_{P,\text{Öl}}) \dot{n}_P(t) \frac{\pi}{30} + M_T(t) - (\Theta_T + \Theta_{T,\text{Öl}}) \dot{n}_T(t) \frac{\pi}{30} .$$

Aufgrund von Trägheiten des Öls in Umfangsrichtung entsteht zwischen den gemessenen und berechneten Reaktionsmomenten eine zum Teil erhebliche Phasenverschiebung. Die Maximalwerte weichen dagegen in einem weitaus geringeren Maße voneinander ab.

Inwieweit die gewonnenen Erkenntnisse zur Modellierung des einphasigen Wandlers auf eine andere Bauform übertragbar sind, sollen die Untersuchungen am "zweiphasigen" Wandler zeigen.

6.2. Modellierung des instationären Verhaltens des "zweiphasigen Wandlers"

Wie die stationären Kennfelder (Kap. 5.) zeigen, besitzt der "zweiphasige" gegenüber dem einphasigen Wandler ein anderes Betriebsverhalten. Dieses ist durch einen starken Abfall der Momente kurz vor der Synchrondrehzahl gekennzeichnet.

Es wurde ganz bewußt ein Wandler mit diesem Verhalten ausgewählt, um zu überprüfen, inwieweit sich das dynamische Verhalten von Wandlern mit starken Nichtlinearitäten in ihren Kennlinien durch die stationären Kennfelder und die Trägheitsmassen der Laufräder beschreiben läßt.

Doch zuerst soll der Bereich betrachtet werden, in dem beide Wandler vergleichbares Betriebsverhalten aufweisen, also die Momente nicht stark abfallen. Untersuchungen haben ergeben, daß der Abfall im Bereich um die Diagonale $n_T = 0.77n_P$ am größten ist (vergl. Abb. 5.4). Hieraus leitet sich auch das Argument $(n_T - 0.77n_P)$ der Arcus-Tangensfunktion in den Gleichungen zur Beschreibung der stationären Kennfelder ab (Gl. 5.3 und Gl. 5.4). Es werden also zuerst nur solche Betriebsbereiche untersucht, die oberhalb ($n_T < 0.77n_P$) oder unterhalb ($n_T > 0.77n_P$) der Diagonalen liegen.

Die Gleichungen zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens des "zweiphasigen" Wandlers lauten:

$$\begin{aligned}
 M_P(t) = & \sum_{i=1}^{ip} a_{Pi} n_P^i + \sum_{j=1}^{jt} b_{Pj} n_T^j + \sum_{i=1}^{ipt} \sum_{j=1}^{jpt} c_{Pij} n_P^i n_T^j + \\
 & \sum_{i=1}^{is} d_{Pi} n_P^i [\arctan[0.05(n_T - 0.77n_P)] + \pi/2] + \\
 & \sum_{j=1}^{js} e_{Pj} n_T^j [\arctan[0.05(n_T - 0.77n_P)] + \pi/2] + \\
 & (\Theta_P + \Theta_{P,\ddot{O}l}) \dot{n}_P \frac{\pi}{30}
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

und

$$\begin{aligned}
 M_T(t) = & - \sum_{i=1}^{ip} a_{Ti} n_P^i - \sum_{j=1}^{jt} b_{Tj} n_T^j - \sum_{i=1}^{ipt} \sum_{j=1}^{jpt} c_{Tij} n_P^i n_T^j - \\
 & \sum_{i=1}^{is} d_{Ti} n_P^i \left[\arctan[0.05(n_T - 0.77n_P)] + \pi/2 \right] - \\
 & \sum_{j=1}^{js} e_{Tj} n_T^j \left[\arctan[0.05(n_T - 0.77n_P)] + \pi/2 \right] + \\
 & (\Theta_T + \Theta_{T,\text{öl}}) \dot{n}_T \frac{\pi}{30} \tag{6.31}
 \end{aligned}$$

Sie setzen sich, wie beim einphasigen Wandler, aus den Polynomen der geschätzten Kennfelder (Gl. 5.3 und Gl. 5.4) und den Trägheitsmassen zusammen. Diese wurden auch hier experimentell bestimmt und beinhalten alle Bauteilträgheiten bis hin zu den Systemgrenzen auf der Pumpen- und Turbinenseite.

$$\begin{aligned}
 \Theta_P + \Theta_{P,\text{öl}} &= 0.58 \text{ kg m}^2 \\
 \Theta_T + \Theta_{T,\text{öl}} &= 0.22 \text{ kg m}^2
 \end{aligned}$$

In Abb. 6.20 und Abb. 6.21 sind zwei Simulationsergebnisse (Gl. 6.30 und Gl. 6.31) mit den entsprechenden Messwerten dargestellt. In beiden Fällen liegen die untersuchten Betriebsbereiche entweder ober- oder unterhalb der Diagonalen $n_T = 0.77n_P$. Wie aus den zwei Abbildungen zu ersehen ist, stimmen auch hier die Simulationsrechnungen sehr gut mit den Meßergebnissen überein.

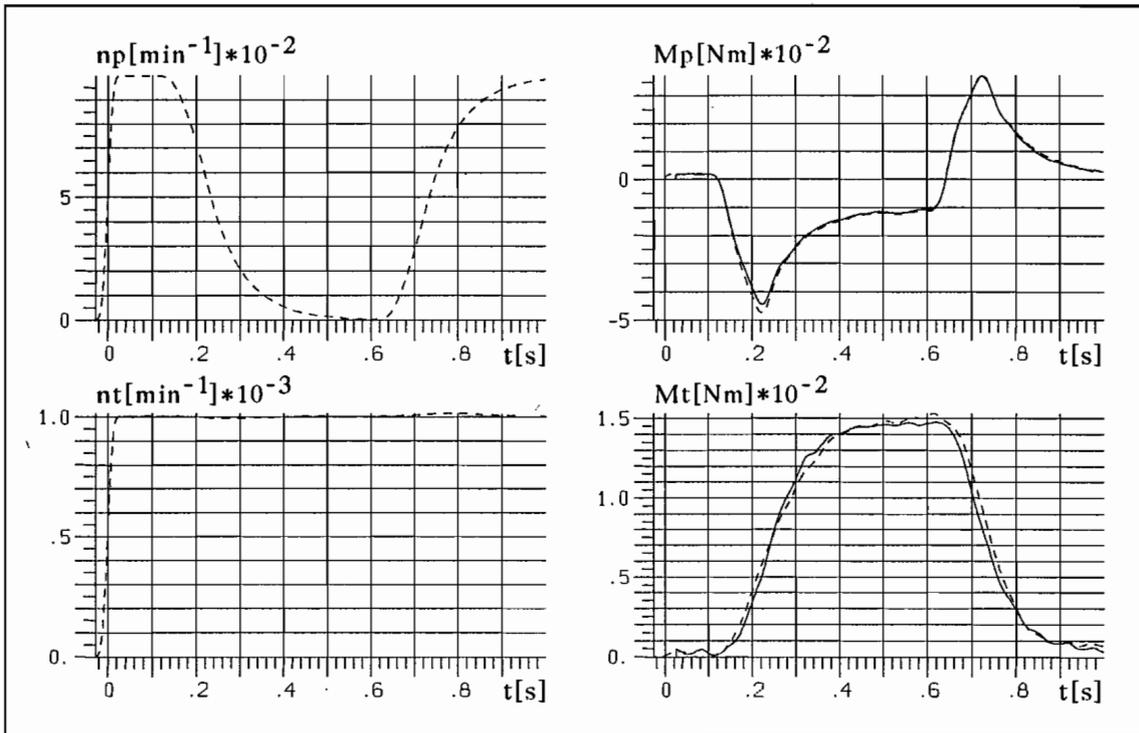


Abb. 6.20) Vergleich Simulation-/Meßergebnisse ("zweiphasiger" Wandler; nichtlineares Modell aus stationären Kennfeldern und Trägheitsmassen; Meßwerte gestrichelt; Simulation durchgezogen)

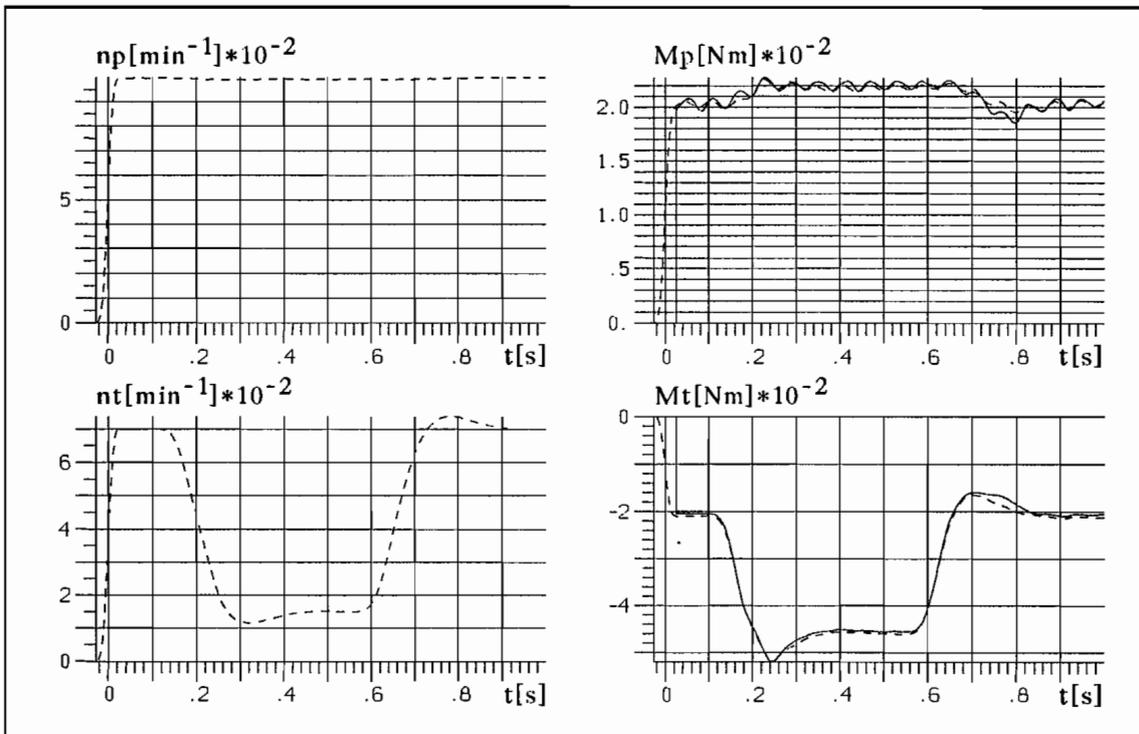


Abb. 6.21) Vergleich Simulation-/Meßergebnisse ("zweiphasiger" Wandler; nichtlineares Modell aus stationären Kennfeldern und Trägheitsmassen; Meßwerte gestrichelt; Simulation durchgezogen)

Simulationsrechnungen, bei denen beide Betriebsbereiche ($n_T > 0.77n_P$ und $n_T < 0.77n_P$) unmittelbar nacheinander durchfahren werden, führen dagegen zu schlechteren Ergebnissen. In Abb. 6.22 sind Simulations- und Meßergebnisse gegenübergestellt, bei denen die Turbinendrehzahl in 0.28 sec. von 1000 min^{-1} auf 150 min^{-1} verzögert und in 0.25 sec. wieder auf 1000 min^{-1} beschleunigt wurde. Das Pumpenrad schwankte dabei um $+40 \text{ min}^{-1}$ und -70 min^{-1} um die Grunddrehzahl von 1000 min^{-1} . Zwischen den simulierten und gemessenen Momentenverläufen sind zum Teil große Abweichungen zu erkennen, die kurz vor dem kritischen Turbinendrehzahlbereich beginnen. Dieser Bereich ist durch den starken Momentenabfall gekennzeichnet und erstreckt sich zwischen

$$n_T = 0.77 \cdot 930 \text{ min}^{-1} \approx 710 \text{ min}^{-1}$$

und

$$n_T = 0.77 \cdot 1040 \text{ min}^{-1} \approx 800 \text{ min}^{-1} .$$

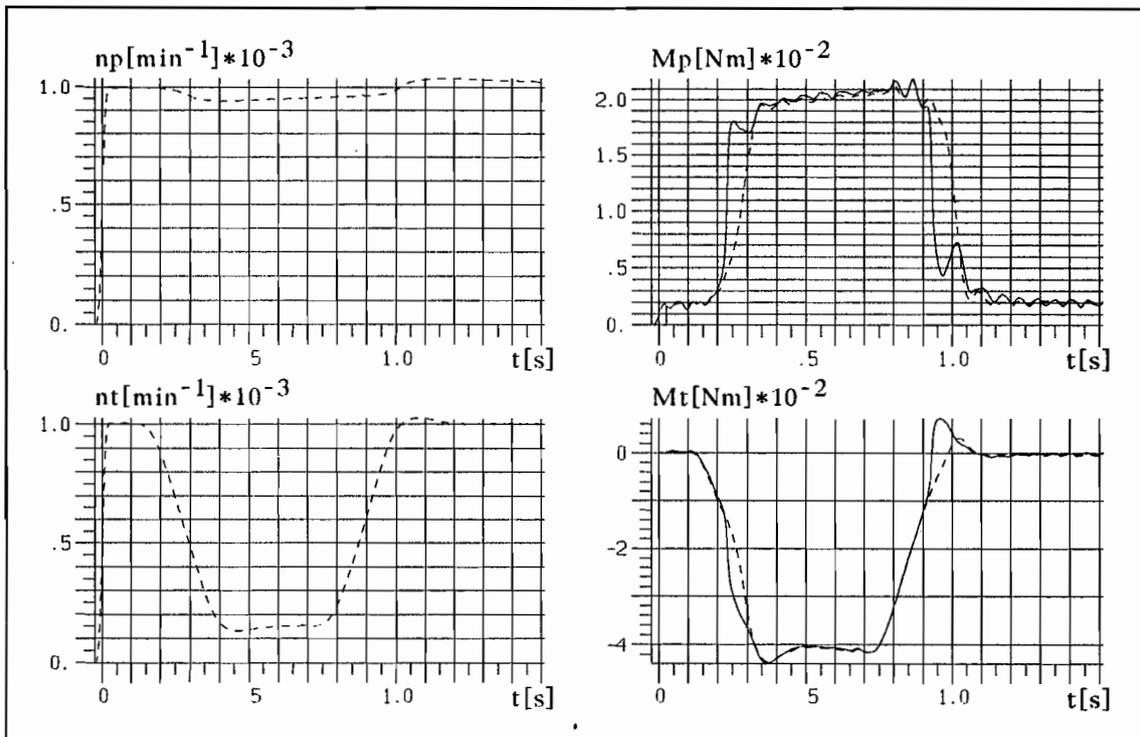


Abb. 6.22) Vergleich Simulation-/Meßergebnisse ("zweiphasiger" Wandler; nichtlineares Modell aus stationären Kennfeldern und Trägheitsmassen; Meßwerte gestrichelt; Simulation durchgezogen)

In Abb. 6.23 und Abb. 6.24 sind das simulierte und gemessene Pumpen- bzw. Turbinenmoment abzüglich der Trägheitsmomente über der Turbindrehzahl aufgetragen. Die gestrichelten Kurvenverläufe entsprechen einer drehzahlabhängigen Abtastung der stationären Kennfelder. Es ist deutlich zu sehen, daß die Abweichungen zwischen den gemessenen und simulierten Momenten immer kurz vor dem kritischen Drehzahlbereich stark zunehmen und sich bis weit über diesen Bereich fortsetzen. Zahlreiche Untersuchungen haben gezeigt, daß immer dann mit größeren Abweichungen bei der Simulation zu rechnen ist, wenn der Drehzahlbereich $n_T = 0.77n_p$ durchfahren wird. Die Größenordnung, in der der Fehler liegt, ist abhängig von den Beschleunigungen der Laufräder. Bei sehr langsamen Drehzahländerungen folgen die gemessenen Momente (abzüglich Drehträgheiten) dem Verlauf der stationären Kennfelder. Mit zunehmenden Beschleunigungen werden dann aber die Abweichungen immer größer. Grundsätzlich gilt, daß die Fehler bis kurz vor dem kritischen Drehzahlbereich sehr gering sind und erst beim Durchfahren dieses Bereiches anwachsen.

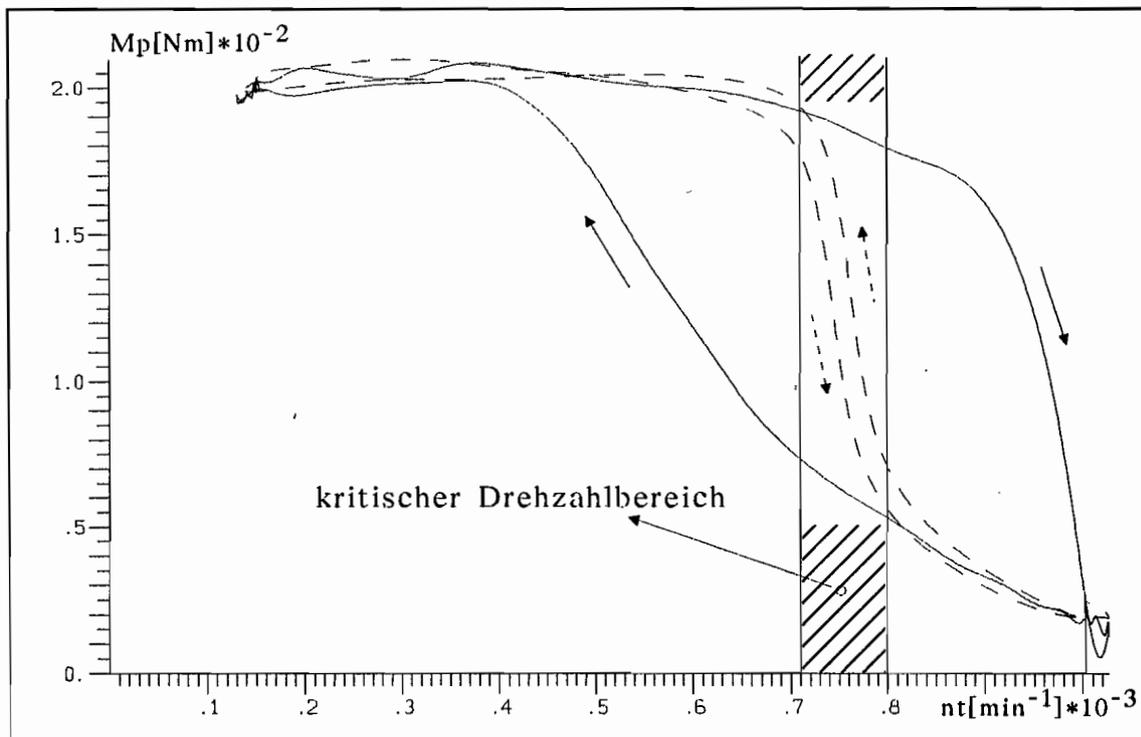


Abb. 6.23) Vergleich Simulation-/Meßergebnisse ("zweiphasiger" Wandler; Meßergebnisse und Simulation (vergl. Abb. 6.22) ohne Trägheitsmomente; Meßwerte durchgezogen; Simulation gestrichelt)

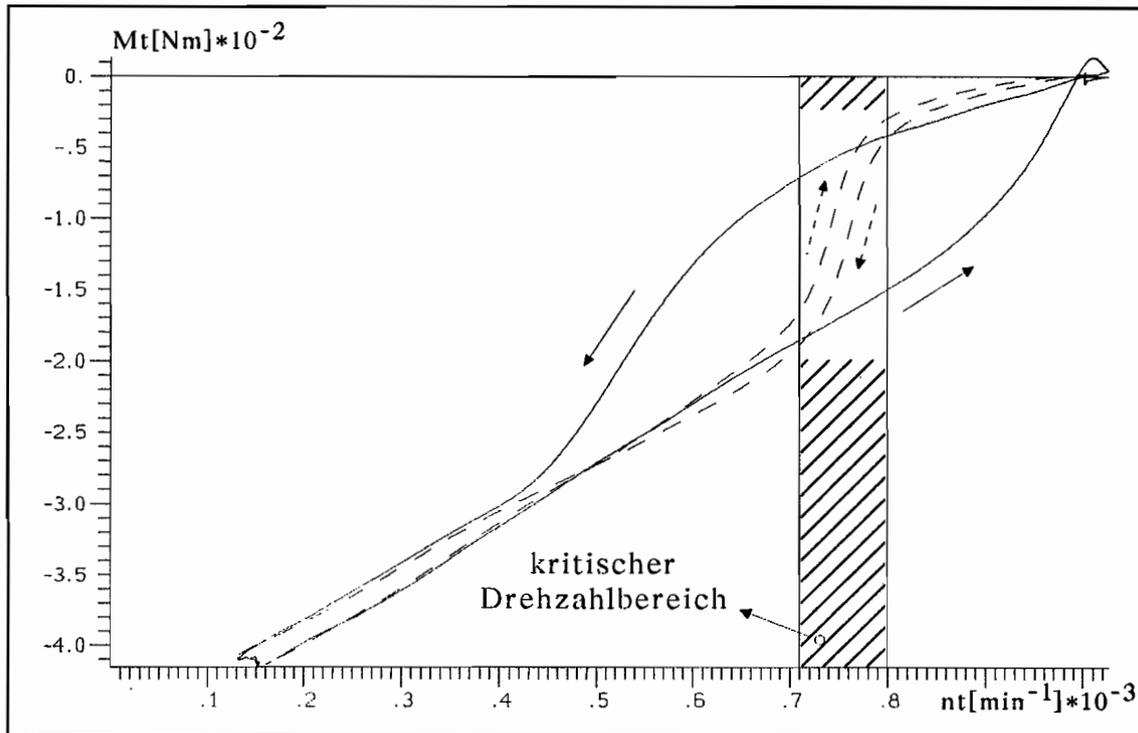


Abb. 6.24) Vergleich Simulation-/Meßergebnisse ("zweiphasiger" Wandler; Meßergebnisse und Simulation (vergl. Abb. 6.22) ohne Trägheitsmomente; Meßwerte durchgezogen; Simulation gestrichelt)

Für die Unterschiede zwischen den gemessenen und simulierten Momentenverläufen kann eine einfache Begründung angegeben werden. Der umlaufende Volumenstrom nimmt mit steigender Turbinendrehzahl immer mehr ab, bis er nahe der Synchrondrehzahl fast vollständig zum Erliegen kommt (vergl. Kap. 5.). Dieses ist bei der zentripetal durchströmten Turbine auf den steigenden Einfluß der Fliehkräfte zurückzuführen. Nach der Eulerschen Turbinengleichung

$$M_h = \dot{m} (r_i c_{ui} - r_{i+1} c_{ui+1})$$

sinkt mit abnehmendem Massen- bzw. Volumenstrom auch das übertragene, hydraulische Moment. Bei quasistatischen Änderungen des Betriebspunktes spielen die Trägheiten des Betriebsmediums kaum eine Rolle. Anders ist dieses jedoch, wenn die Laufräder stark beschleunigt oder verzögert werden. Beim Übergang von einem Betriebspunkt auf einen anderen stellen sich dann die stationären Strömungsverhältnisse

verzögert ein, da die Trägheiten des Öls überwunden werden müssen. Bei den hier verwendeten Modellen (Gl. 6.30 und Gl. 6.31) sind die Trägheitsmomente des Öls in Umfangsrichtung berücksichtigt worden. Im kritischen Drehzahlbereich hat jedoch auch die Trägheitswirkung in Meridianrichtung einen entscheidenden Einfluß auf die instationären Momente. Bei einem schnellen Übergang auf den Betriebspunkt $v = 1$ ist der durch die Schaufeln strömende Massenstrom nicht gleich Null, sondern aufgrund seiner eigenen Trägheit von Null verschieden. Erst mit der Zeit wird die kinetische Rotationsenergie durch Reibungs- und Strömungsverluste abgebaut, bis die Strömungsverhältnisse den stationären Zustand erreicht haben. Entsprechendes gilt auch für die in Meridianrichtung beschleunigte Strömung. Die dem stationären Zustand entsprechende kinetische Rotationsenergie kann beim schnellen Abbremsen des Turbinenrades nicht sofort auf die Strömung übertragen werden, so daß sich hier ein geringerer Volumenstrom ergibt.

Qualitativ können die Verhältnisse beim schnellen Durchfahren des kritischen Drehzahlbereiches ($n_T = 0.77n_p$) gegenüber einer quasistationären Zustandsänderung wie folgt zusammengefaßt werden (vergl. auch Abb. 6.23 und Abb. 6.24):

Beschleunigung der Turbinendrehzahl:

- verzögerte Strömung in Meridianrichtung
- größerer Massenstrom
- betragsmäßig größere hydraulische Momente

Verzögerung der Turbinendrehzahl:

- beschleunigte Strömung in Meridianrichtung
- geringerer Massenstrom
- betragsmäßig kleinere hydraulische Momente

Untersuchungen, bei denen die Pumpendrehzahl durch den kritischen Drehzahlbereich stark beschleunigt und verzögert wurde, haben gezeigt, daß hierbei die Abweichungen zwischen den gemessenen und

simulierten Momentenverläufen wesentlich geringer sind als bei einer Änderung der Turbinendrehzahl (Abb. 6.25). Obwohl auch hier die Strömung in Meridianrichtung beschleunigt oder verzögert wird, ist sie jedoch geringer als bei einer Variation der Abtriebsdrehzahl. Dieses wird auch im Verlauf der stationären Kennlinien deutlich, wenn bei einer konstanten Turbinendrehzahl die Momente über die Drehzahl des Pumpenrades aufgetragen werden. Der Abfall der Momentenlinien ist im kritischen Bereich nicht so stark wie bei einer Änderung der Turbinendrehzahl.

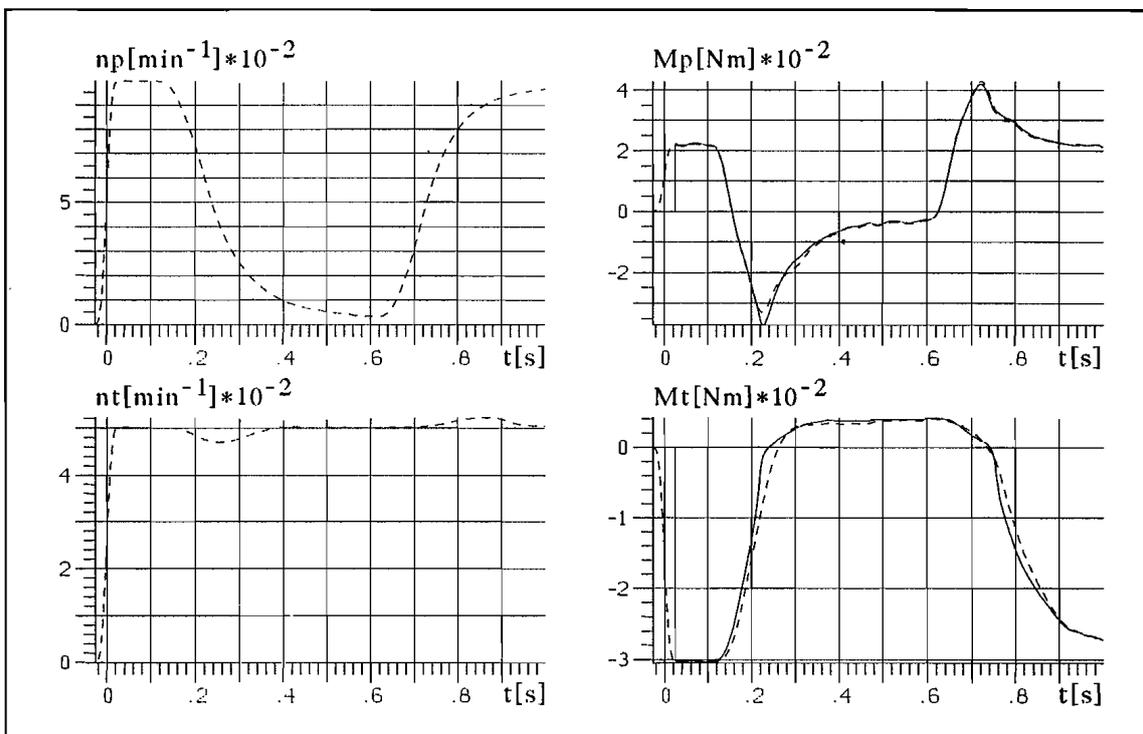


Abb. 6.25) Vergleich Simulation-/Meßergebnisse ("zweiphasiger" Wandler; nichtlineares Modell aus stationären Kennfeldern und Trägheitsmassen; Meßwerte gestrichelt; Simulation durchgezogen)

Zusammenfassend kann gesagt werden: Das dynamische Verhalten des hier untersuchten "zweiphasigen" Wandlers kann über große Betriebsbereiche mit Hilfe der stationären Kennfelder und der Drehträgheiten der Laufräder (incl. des zwischen den Beschaufelungen befindlichen Öls) sehr gut beschrieben werden. Wird bei einer Beschleunigung oder Verzögerung des Turbinenrades der kritische Drehzahlbereich

$n_T = 0.77n_P$ durchfahren, so muß jedoch mit größeren Abweichungen zwischen den tatsächlichen und simulierten Momentenverläufen gerechnet werden.

Da die Simulationsergebnisse mit dem nichtlinearen Modell beim Durchfahren des kritischen Turbinendrehzahlbereiches nicht sehr befriedigend waren, wurde versucht, die Änderungen dieser Betriebszustände mit Hilfe von linearen Modellen zu beschreiben. In gleicher Weise wie für den einphasigen Wandler, wurden auch hier für verschiedene Betriebspunkte ($n_P = 1000 \text{ min}^{-1}$, $v = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$) lineare Modelle in der Form von dynamischen Dämpfungsmatrizen bestimmt. Die drehzahlabhängigen Umschaltungen von einem Modell in ein anderes erfolgten hier unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen. In Abb. 6.26 ist eine Simulationsrechnung mit den linearen Modellen für die gleichen Meßwerte wie in Abb. 6.22 dargestellt.

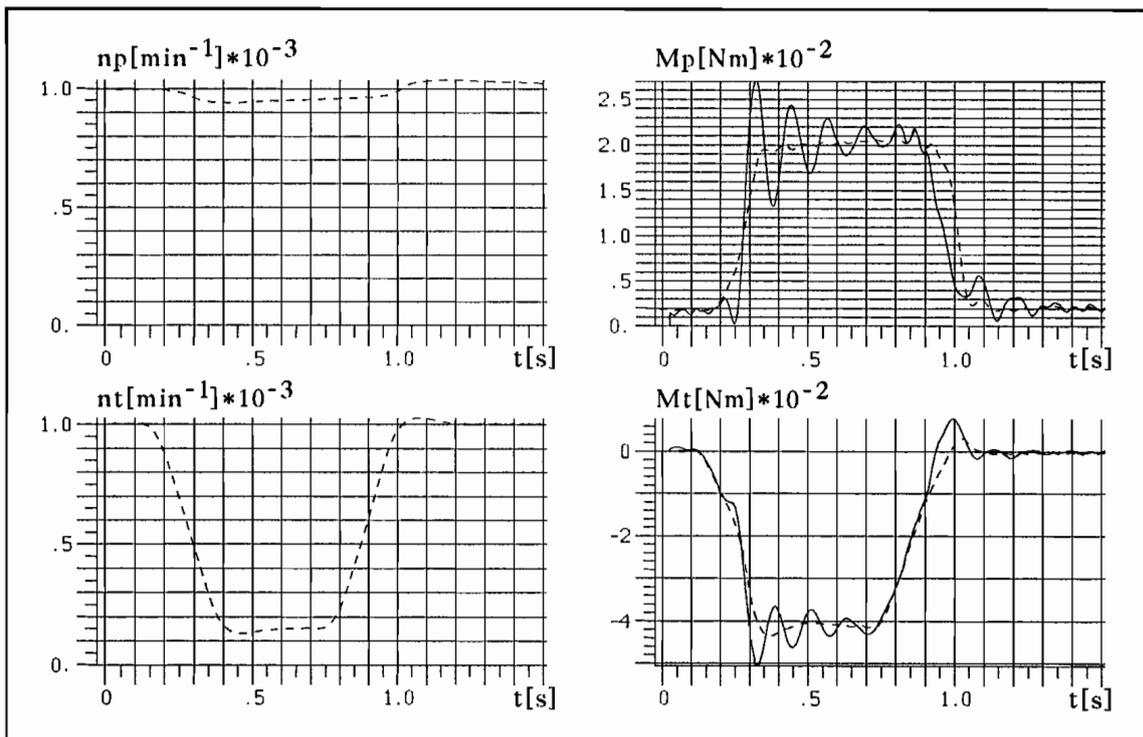


Abb. 6.26) Vergleich Simulation-/Meßergebnisse ("zweiphasiger" Wandler; lineare Modelle unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen; Meßwerte gestrichelt; Simulation durchgezogen)

Es traten zum Teil erhebliche Abweichungen gegenüber den tatsächlichen Momentenverläufen auf, die vor allem durch ein starkes Überschwingen einzelner Teilmodelle verursacht wurden. Die Unstetigkeits- und Sprungstellen, wie sie teilweise bei den Simulationsrechnungen mit den linearen Modellen beim einphasigen Wandler auftraten, wurden hier durch die Berücksichtigung der Anfangsbedingungen bei den Modellschaltungen vermieden. Dieses hatte jedoch zur Folge, daß den Simulationsergebnissen die Sprungantworten der einzelnen Modelle überlagert waren. Diese Ungenauigkeiten traten vor allem im kritischen Turbinendrehzahlbereich stark in Erscheinung. Betriebsbereiche, die ober- oder unterhalb dieses Bereiches lagen, konnten dagegen auch für den "zwei-phasigen" Wandler mit den linearen Modellen gut abgebildet werden. Zahlreiche Simulationsrechnungen haben gezeigt, daß durch die Verwendung von linearen Modellen gegenüber der nichtlinearen Beschreibung keinerlei Verbesserungen zu erzielen waren. Daher wurden die Modellschwingungen nicht weiter untersucht und auf eine nähere Beschreibung und Darstellung der einzelnen Teilmodelle verzichtet.

7. Praktische Anwendung

Simulationsrechnungen gesamter Antriebsstränge im Frequenzbereich sind mit den nichtlinearen Modellen (Gl. 6.28 bis 6.31), die für den ein- und "zweiphasigen" Wandler identifizierten wurden, nicht möglich, da eine Transformation in den Bildbereich nur für lineare Systembeschreibungen möglich ist. Für kleine Schwankungen um einen Betriebspunkt v_0 können jedoch aus den nichtlinearen Modellen, durch eine bereichsweise Linearisierung der stationären Kennfelder, geeignete Beschreibungen für eine Transformation abgeleitet werden (Gl. 7.1).

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} M_P(t) \\ M_T(t) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} M_{P0} & 0 \\ 0 & M_{T0} \end{vmatrix}_{\substack{v=v_0 \\ n_P=n_{P0}}} + \begin{vmatrix} dM_{P0}/dn_P & dM_{P0}/dn_T \\ dM_{T0}/dn_P & dM_{T0}/dn_T \end{vmatrix}_{\substack{v=v_0 \\ n_P=n_{P0}}} \begin{vmatrix} (n_P(t)-n_{P0}) \\ (n_T(t)-v_0 n_{P0}) \end{vmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} (\Theta_P + \Theta_{P,\ddot{O}l}) & 0 \\ 0 & (\Theta_T + \Theta_{T,\ddot{O}l}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{n}_P(t) \\ \dot{n}_T(t) \end{vmatrix} \cdot \frac{\pi}{30} \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

Die Steigungen der stationären Kennfelder im Arbeitspunkt (v_0, n_{P0}) können entweder mit Hilfe der geschätzten Polynome (Gl. 5.1 und 5.2 bzw. Gl. 5.3 und 5.4) berechnet oder experimentell bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 dM_{P0}/dn_P &\cong (M_{P0, n_T=n_{T0}, n_P=n_{P0}+\Delta n_P} - M_{P0, n_T=n_{T0}, n_P=n_{P0}-\Delta n_P}) / 2\Delta n_P \\
 dM_{T0}/dn_P &\cong (M_{T0, n_T=n_{T0}, n_P=n_{P0}+\Delta n_P} - M_{T0, n_T=n_{T0}, n_P=n_{P0}-\Delta n_P}) / 2\Delta n_P \\
 dM_{P0}/dn_T &\cong (M_{P0, n_P=n_{P0}, n_T=n_{T0}+\Delta n_T} - M_{P0, n_P=n_{P0}, n_T=n_{T0}-\Delta n_T}) / 2\Delta n_T \\
 dM_{T0}/dn_T &\cong (M_{T0, n_P=n_{P0}, n_T=n_{T0}+\Delta n_T} - M_{T0, n_P=n_{P0}, n_T=n_{T0}-\Delta n_T}) / 2\Delta n_T
 \end{aligned}$$

Die Größe des Betriebsbereiches, in dem das lineare Modell eingesetzt werden kann, ist abhängig vom Verlauf der Kennfelder in der Umgebung des Arbeitspunktes (v_0, n_{P0}) . Wird die Rechnung auf Abweichungen um diesen Punkt beschränkt, so folgt aus der Transformation der Gl. 7.1 in den Frequenzbereich die dynamische Steifigkeitsmatrix (Gl. 7.2).

$$\begin{vmatrix} M_P^*(s) \\ M_T^*(s) \end{vmatrix} = \underline{K} \begin{vmatrix} \varphi_P^*(s) \\ \varphi_T^*(s) \end{vmatrix} \quad (7.2)$$

$$\underline{K} = \begin{vmatrix} sdM_{P0}/dn_P \cdot 30/\pi + s^2(\Theta_P + \Theta_{P,\ddot{0}1}) & sdM_{P0}/dn_T \cdot 30/\pi \\ sdM_{T0}/dn_P \cdot 30/\pi & sdM_{T0}/dn_T \cdot 30/\pi + s^2(\Theta_T + \Theta_{T,\ddot{0}1}) \end{vmatrix} \Bigg|_{\substack{v=v_0 \\ n_P=n_{P0}}}$$

Die Momente ($M_P^*(s)$, $M_T^*(s)$) und Drehwinkel ($\varphi_P^*(s)$, $\varphi_T^*(s)$) beschreiben nur die Schwankungen um den Arbeitspunkt (v_0 , n_{P0}). Diese Gleichung kann mit den dynamischen Steifigkeitsmatrizen der anderen im Antriebsstrang befindlichen Teilsysteme in bekannter Weise zu einer Gesamtmatrix zusammengefaßt werden. Aus der Gl. 7.2 folgen weitere, in der Maschinendynamik gebräuchliche Formulierungen.

$$\begin{vmatrix} \varphi_P^*(s) \\ \varphi_T^*(s) \end{vmatrix} = \underline{H}(s) \Big|_{\substack{v=v_0 \\ n_P=n_{P0}}} \begin{vmatrix} M_P^*(s) \\ M_T^*(s) \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \varphi_T^*(s) \\ M_T^*(s) \end{vmatrix} = \underline{U}(s) \Big|_{\substack{v=v_0 \\ n_P=n_{P0}}} \begin{vmatrix} \varphi_P^*(s) \\ M_P^*(s) \end{vmatrix}$$

Für kleine Schwankungen um einen Betriebspunkt ist in Abb. 7.1 a ein mechanisches Ersatzschaltbild hydrodynamischer Wandler angegeben, das direkt aus der Gl. 7.2 abgeleitet wurde. Demnach erfolgt die Kopplung zwischen dem Pumpen- und Turbinenrad durch zwei viskose Dämpfer. Diese sind durch eine mechanische Getriebestufe miteinander verbunden, die lediglich eine Drehrichtungsumkehr bewirkt. Besonders zu beachten ist hierbei, daß die Drehzahl der Getriebestufe gleich der Differenzdrehzahl vom Pumpen- zum Turbinenrad ist. Die Dämpfungswerte dv_{11} bis dv_{22} entsprechen den Steigungen der stationären Kennfelder im betrachteten Arbeitspunkt.

$$\begin{aligned} dv_{11} &= dM_{P0}/dn_P \cdot 30/\pi & dv_{12} &= dM_{P0}/dn_T \cdot 30/\pi \\ dv_{21} &= dM_{T0}/dn_P \cdot 30/\pi & dv_{22} &= dM_{T0}/dn_T \cdot 30/\pi \end{aligned}$$

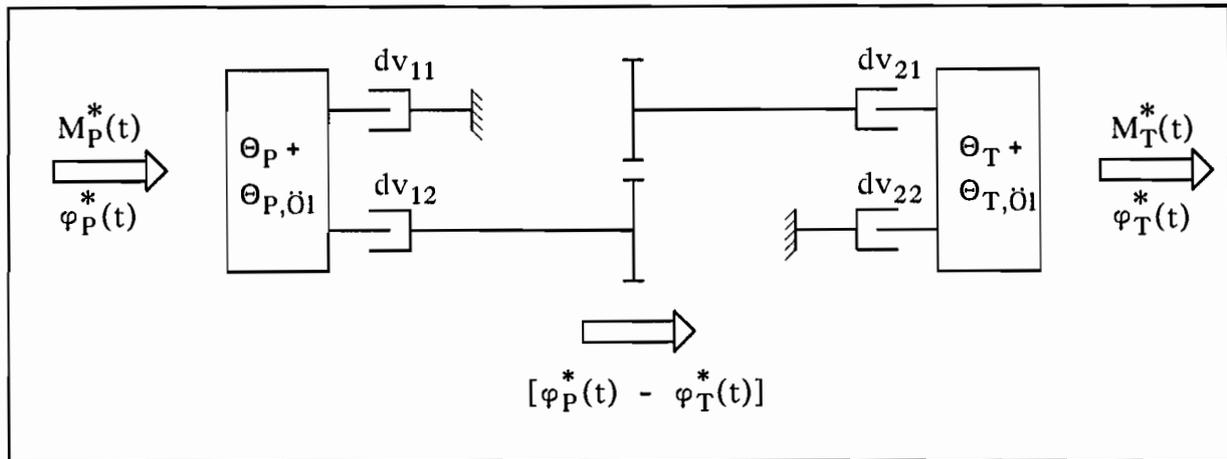
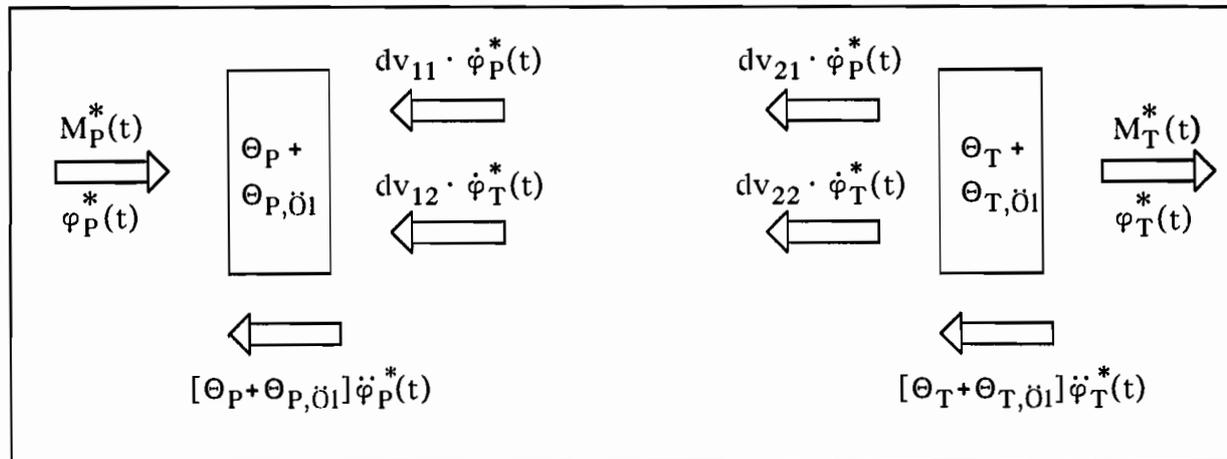


Abb. 7.1 a) Mechanisches Ersatzschaltbild eines hydrodynamischen Wandlers

Abb. 7.1 b) Freischnittsskizze des mechanisches Ersatzschaltbildes
in Abb. 7.1 a

Die Verknüpfungen in den vier Koeffizienten der dynamischen Steifigkeitsmatrix mit der komplexen Variablen s bzw. s^2 können nach der linearen Theorie als viskose Dämpfungsanteile und Massenträgheiten interpretiert werden. Konstante Anteile, die allgemein als Steifigkeiten interpretiert werden könnten, sind nicht zu finden. Demzufolge können hydrodynamische Wandler als Systeme angesehen werden, die einen dämpfenden Einfluß auf das gesamte Antriebssystem ausüben. Ob sie selbst zusätzliche Schwingungsanteile verursachen, wurde im Rahmen dieser Arbeit experimentell nicht untersucht. Aufgrund des nichtlinearen Ein-/Ausgangsverhaltens kann jedoch zumindest theoretisch darauf ge-

geschlossen werden, daß Kombinationen der Erregerfrequenzen und deren Vielfache als zusätzliche Schwingungsanteile in den Antriebsstrang eingeleitet werden. Inwieweit sich diese auswirken, und ob sie ausreichen, das Antriebssystem in einer seiner Eigenformen anzuregen, bleibt ungeklärt. Untersuchungen dieser Art können auch nicht verallgemeinert werden, da hierbei das dynamische Verhalten aller Teilsysteme zu berücksichtigen ist.

Alle im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen beschränkten sich auf einen Frequenzbereich < 15 Hz. In diesem Bereich konnte das dynamische Verhalten der beiden untersuchten Wandler in großen Drehzahlbereichen sehr gut abgebildet werden. Ob mit den identifizierten Modellen die Dynamik auch in höheren Frequenzbereichen beschrieben werden kann, wurde experimentell nicht überprüft. Detaillierte Untersuchungen, bis zu welcher Erregerfrequenz noch mit einer Übertragung durch einen hydrodynamischen Wandler zu rechnen ist, sind nicht bekannt. In der Praxis wird häufig eine Obergrenze von ca. 20 Hz angenommen, ab der mit keiner nennenswerten Beeinflussung der Teilsystemausgänge durch die Eingänge zu rechnen ist.

8. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde mit den Methoden der Systemidentifikation das dynamische Ein-/Ausgangsverhalten hydrodynamischer Wandler bestimmt. Die Identifikation beinhaltete neben der Wahl geeigneter Modellansätze auch deren Anpassung und Optimierung an das reale Systemverhalten. Hierzu wurde ein rechnergesteuerter, hochdynamischer Versuchsstand geplant und aufgebaut, der allgemein für experimentelle Untersuchungen von Antriebsstrangkomponenten geeignet ist. Um die Gültigkeit der verwendeten Modelle zu überprüfen, wurden experimentelle Untersuchungen an zwei verschiedenen Wandlern durchgeführt, die sich in ihrer Bauform, Baugröße und ihrem stationären Verhalten unterschieden. Die ersten Untersuchungen beschränkten sich auf stationäre Betriebszustände. Für beide Wandler wurden bei verschiedenen Pumpen- und Turbinendrehzahlen die entsprechenden stationären Momente experimentell ermittelt und mit Hilfe geeigneter Polynomansätzen approximiert. Deren Darstellung erfolgte in Form dimensionsloser und dimensionsbehafteter Kennfeldern. Die Beschreibung instationärer Betriebszustände basierte auf einer bereichsweisen Linearisierung um einen Arbeitspunkt. Um einen größeren Arbeitsbereich abbilden zu können, wurden einzelne, lineare Modelle für verschiedene Betriebspunkte hintereinandergeschaltet. Aus den Erkenntnissen der linearen Modellierung wurde für beide Wandler jeweils ein nichtlineares Modell abgeleitet, das aus den Polynomen der stationären Kennfelder und den Drehträgheiten der Laufräder (incl. des zwischen den Beschaukelungen befindlichen Öls) bestand.

Für den einphasigen Wandler wurde die lineare Modellierung für einen Betriebspunkt ausführlich beschrieben. Hierfür sind drei verschiedene Modelle in der Form von Vierpolmatrizen identifiziert worden: Die dynamische Dämpfungsmatrix, ihre Inverse und eine mögliche Formulierung der Übertragungsmatrix. Durch die gute Übereinstimmung von Simulations- und Meßergebnissen konnte die Gültigkeit aller drei Modellformen im betrachteten Betriebspunkt nachgewiesen werden.

Um den Bereich der linearen Modellierung für den einphasigen Wandler zu erweitern, wurden bei einer konstanten Pumpendrehzahl für insgesamt 9 verschiedene Betriebspunkte weitere Modelle in der Form der dynamischen Dämpfungsmatrix bestimmt. Durch das Hintereinanderschalten der einzelnen, linearen Modelle konnte ein großer Turbinendrehzahlbereich mit guter Übereinstimmung abgebildet werden. Die Drehzahlschwankungen des Pumpenrades betragen maximal $\pm 80 \text{ min}^{-1}$. Jedes einzelne dieser Modelle approximiert das nichtlineare, stationäre Wandlerverhalten in dem entsprechenden Betriebspunkt durch die ersten zwei Glieder einer Taylorreihe. Da jedoch das stationäre Verhalten des Wandlers über alle Bereiche durch die identifizierten Polynome der Kennfelder mit größerer Genauigkeit als durch die ersten beiden Glieder der Taylorreihe beschrieben werden konnte, wurden diese durch die Polynome substituiert. Bei Simulationsrechnungen mit diesen neu gewonnenen Modellen zeigte sich ein überraschendes Ergebnis: Unabhängig vom Betriebspunkt, in dem die einzelnen Modelle identifiziert wurden, ergaben gleiche Eingangsgrößen für jedes Modell auch gleiche Ausgangsgrößenverläufe. Die Gültigkeitsbereiche waren immer identisch mit denen der stationären Kennfelder. Aus dieser Erkenntnis heraus wurde die Hypothese aufgestellt, daß nichtlineare dynamische Effekte einen sehr geringen Einfluß auf das instationäre Wandlerverhalten haben und sich hauptsächlich die Trägheiten der Laufräder auswirken. Um diese Vermutung zu verifizieren, wurde ein einziges, nichtlineares Modell formuliert, das nur aus den identifizierten Polynomen der stationären Kennfelder und den Trägheitsmomenten der Laufräder (incl. Öl) bestand. Durch zahlreiche experimentelle Versuche und Simulationsrechnungen konnte die Hypothese bestätigt werden. Das stationäre und instationäre Verhalten des einphasigen Wandlers wurde durch dieses Modell über den gesamten experimentell untersuchten Betriebsbereich mit sehr großer Genauigkeit abgebildet.

Dieses Ergebnis konnte auch für den "zweiphasigen" Wandler bestätigt werden. Für große Drehzahlbereiche wurde auch hier das dynamische und stationäre Verhalten mit sehr großer Übereinstimmung durch ein einziges, nichtlineares Modell abgebildet. Wie beim einphasigen Wandler bestand dieses aus den identifizierten, stationären Kennfeldern und den

Trägheitsmassen der Laufräder. Lediglich bei einer Beschleunigung oder Verzögerung des Turbinenrades, bei der der kritische Drehzahlbereich $n_T = 0.77n_P$ durchfahren wurde, traten Abweichungen zwischen den tatsächlichen und den simulierten Momentenverläufen auf. Es liegt die Vermutung nahe, daß diese Ungenauigkeiten auf eine stark beschleunigte bzw. verzögerte Strömung des Betriebsmediums in Meridianrichtung zurückgeführt werden können, bei der sich die stationären Strömungsverhältnisse aufgrund der Massenträgheit des Öls verzögert einstellen. Variationen der Pumpendrehzahl durch den kritischen Drehzahlbereich hindurch konnten dagegen mit großer Genauigkeit abgebildet werden, da hier die Änderungen des Massenstroms in Meridianrichtung geringer sind als bei einer Änderung der Turbinendrehzahl. Da bis zum Erreichen des Optimalpunktes¹ der kritische Drehzahlbereich nicht durchfahren wird, sind auch für den "zweiphasigen" Wandler sehr genaue Vorausberechnungen für die meisten in der Praxis auftretende Belastungsfälle möglich.

Zusammenfassend kann gesagt werden: Das dynamische Verhalten der hier untersuchten Wandler kann über große Betriebsbereiche durch eine drehzahlabhängige Abtastung der stationären Kennfelder und durch die Trägheitsmomente der Laufräder (incl. Öl) mit sehr großer Genauigkeit abgebildet werden.

Für kleine Schwankungen um einen Betriebspunkt wurde aus der nicht-linearen Modellierung durch eine bereichsweise Linearisierung der stationären Kennfelder eine geeignete Beschreibung für Antriebsstrangsimulationen im Bildbereich abgeleitet. Die in der Praxis häufig gestellte Frage nach den Dämpfungswerten hydrodynamischer Wandler konnte anhand eines mechanischen Ersatzschaltbildes geklärt werden. Danach ergeben sich die vom Betriebspunkt abhängigen Dämpfungswerte aus den Steigungen der stationären Kennfelder im betrachteten Arbeitspunkt.

1: Im Optimalpunkt erreicht der Wandler seinen maximalen Wirkungsgrad. Dieser liegt für den hier untersuchten "zweiphasigen" Wandler bei $n_T \approx 0.6n_P$.

9. Literaturverzeichnis

- /1/ VDI-Richtlinie 2153
Hydrodynamische Leistungsübertragung.
Begriffe - Bauformen - Wirkungsweise.
Mai 1992.
- /2/ Pfeleiderer, C.
Die Kreiselpumpen.
Springer-Verlag 1961, 5. Auflage.
- /3/ Brentsch, N.P.
Modellierung der Ausgangscharakteristik eines hydrodynamischen
Drehmomentenwandlers auf der Analogrechenanlage.
Avtomobil 'naja promyslennost'.
Heft 8 (1967), Seite 9-11.
- /4/ Ishihara, T. / Emori, R. I. / Saito, H
Non-steady Characteristics of Hydrodynamic Transmission.
Report of the Institute of Industrial Science.
The University of Tokyo.
Vol. 18, No 1 (1967).
- /5/ Klokkenga, D.A.
Torsional Vibration Analysis of a Hydrodynamic Split Torque
Transmission.
Transactions of the ASME.
Seite 605-610 (1967).
- /6/ Pylow, B.A.
Die Untersuchung der Schutzeigenschaften hydrodynamischer
Übertragungen vor Torsionsschwingungen.
Avtomobil 'naja promyslennost'.
Heft 10 (1961), Seite 21-23.

- /7/ Pylow, B.A.
Über den Einfluß hydrodynamischer Getriebe auf
Torsionsschwingungen.
Avtomobil ´naja promyslennost´.
Heft 2 (1962), Seite 13-15.
- /8/ Tschuan, Z.
Instationäre Betriebszustände hydrodynamischer Wandler.
Avtomobil ´naja promyslennost´.
Heft 8 (1958), Seite 9-17.
- /9/ Herbertz, R.
Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Föttinger
Getrieben.
Dissertation Technische Universität Hannover 1973.
- /10/ Peeken, H.
Experimentelle Untersuchungen der Güte der durch Simulations-
rechnungen gewonnenen Kennwerte und Kennlinien für den sta-
tionären bzw. instationären Betrieb von hydrodynamischen
Kupplungen und Wandlern in Drehschwingungssystemen.
Bericht an die DFG zum Forschungsvorhaben Nr. Pe 119/90-2
- /11/ Rohne, E.
Verhalten von Föttinger-Wandlern bei Laständerungen und
Schwingungsvorgängen.
Sonderdruck aus "antriebstechnik".
Heft 12/83, Seite 37-41.
- /12/ Eksergian, R.
The Fluid Torque Converter and Coupling.
Journ. Franklin Inst. Vol. 235, No. 5 (1943), p. 441.
- /13/ Spannhake, E.W.
Hydrodynamics of the Hydraulic Torque Converter.
SAE Trans., Vol. 3, No. 4 (1949), p. 592.

- /14/ Ishihara, T.
Characteristics of Hydraulic Torque Converter.
Journ. Japan Soc. Mech. Engrs., Vol. 54, No. 395 (1951), p. 504.
- /15/ Ishihara, T.
Studies of Hydraulic Torque Converter. (1st, 2nd & 3rd Reports)
Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., Vol. 21, No. 101 (1955), p. 61.
- /16/ Ishihara, T.
A Study of Hydraulic Torque Converter.
Rep. Inst. Industrial Sci., Univ. of Tokyo, Vol. 5, No. 7 (1955).
- /17/ Elspaß, A. / Soupsanas, N. / Rath, M.
Drehschwingungssimulation von Antriebssystemen.
Konstruktion Heft 43 (1991), Seite 77-87.
- /18/ Adrian, F. W.
Strömungsuntersuchungen und -analyse in Kreisläufen
hydrodynamischer Wandler.
Dissertation Ruhr-Universität Bochum 1985.
- /19/ Laschet, A.
Simulation von Antriebssystemen.
Dissertation Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule
Aachen 1988.
- /20/ Alleksapolskij, D. / Galinkina, L.
Anwendung der Methode nach Stanitz für die Berechnung der
Umströmung von Profilturbinen hydraulischer Maschinen.
Gidravlicheskie Masiny, 9 (1975), Seite 90-95.
- /21/ Szüle, D.
General Relations for the Calculations of the Characteristics of
a Hydrodynamic-Torque-Converter.
4th Conference on Fluid Machinery, Budapest 1972.

- /22/ Szüle, D.
Potential-theoretical Methode for Determining the Characteristics
of a Hydrodynamic-Torque-Converter.
4th Conference on Fluid Machinery, Budapest 1972.
- /23/ Fister, W. / Adrian, F. W. / Tasche, J.
Strömungsuntersuchungen an hydrodynamischen Wandlern im
Hinblick auf eine gezielte Kennlinienanpassung.
Arbeits- und Ergebnisbericht 1980/1981 des SFB 117/B8
"Leistungsverzweigung in der Antriebstechnik".
Ruhr-Universität Bochum 1982.
- /24/ Fister, W. / Adrian, F. W. / Tasche, J.
Strömungsuntersuchungen an hydrodynamischen Wandlern in
Leistungsverzweigungen.
Arbeits- und Ergebnisbericht 1982/1983 des SFB 117/B8
"Leistungsverzweigung in der Antriebstechnik".
Ruhr-Universität Bochum 1983.
- /25/ Natke, H. G.
Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und
Modalanalyse.
Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden 1983.
- /26/ Unbehauen, H.
Systemtheorie.
R. Oldenburg Verlag München Wien 1990.
- /27/ Waller, H. / Schmidt, R.
Technische Schwingungslehre für Ingenieure.
BI-Verlag, Mannheim 1988.
- /28/ Isermann, R.
Identifikation dynamischer Systeme.
Springer-Verlag 1988, Band 1.

- /29/ Schwarz, H.
Nichtlineare Regelungssysteme.
R. Oldenburg-Verlag München Wien 1991.
- /30/ Kortmann, M.
Die Identifikation nichtlinearer Ein- und Mehrgrößensysteme auf
der Basis nichtlinearer Modellansätze.
Dissertation Ruhr-Universität Bochum 1988.
- /31/ Folchert, U.
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von
hydrodynamischen Kupplungen.
eingereichte Dissertation Ruhr-Universität Bochum 1993.
- /32/ Wiener, N.
Nonlinear problems in random theory.
Wiley, 1958.
- /33/ Bose, A. G.
A theory of nonlinear systems.
MIT technical report 309, 1956.
- /34/ Barret, J. F.
The use of functionals in the analysis of nonlinear physikal
systems.
J. Elect. & Control. 15, Seite 567-615, 1963.
- /35/ Lee, Y. D. / Schetzen, M.
Measurement of the Wiener kernels of a nonlinear system by
cross-correlation.
Int. J. Control. 2, Seite 237-254.

- /36/ Rath, M.
Abbildung hydrodynamischer Kopplungen in Antriebssystemen.
Reihe Konstruktionstechnik Verlag Shaker.
Dissertation Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule
Aachen 1992.
- /37/ Profos, P.
Einführung in die Systemdynamik.
Teuber Verlag 1982.
- /38/ VOITH
Hydrodynamik in der Antriebstechnik.
Vereinigte Fachverlage Krausskopf-Ingenieur Digest
Mainz 1987.
- /39/ Tietze, U. / Schenk, Ch.
Halbleiter-Schaltungstechnik.
Springer Verlag 1989.

Koeffizienten der stationären Kennfelder für den
einphasigen Wandler (Gl. 5.1 und Gl. 5.2)

(ip = 7 it = 7 ipt = 5 jpt = 5)

$a_{P1} = +0.036294469600$ $a_{P2} = +0.000124048178$ $a_{P3} = -1.839477180000 \cdot 10^{-07}$ $a_{P4} = +1.900989190000 \cdot 10^{-09}$ $a_{P5} = -3.881118580000 \cdot 10^{-12}$ $a_{P6} = +3.023403240000 \cdot 10^{-15}$ $a_{P7} = -8.129137000000 \cdot 10^{-19}$	$a_{T1} = -0.134946539000$ $a_{T2} = +0.001778182050$ $a_{T3} = -1.848974830000 \cdot 10^{-06}$ $a_{T4} = +9.604351920000 \cdot 10^{-10}$ $a_{T5} = +1.866215640000 \cdot 10^{-12}$ $a_{T6} = -2.402813460000 \cdot 10^{-15}$ $a_{T7} = +7.339729900000 \cdot 10^{-19}$
$b_{P1} = -0.078006328100$ $b_{P2} = +0.000513619618$ $b_{P3} = -2.512788950000 \cdot 10^{-06}$ $b_{P4} = +6.584811710000 \cdot 10^{-09}$ $b_{P5} = -9.804421740000 \cdot 10^{-12}$ $b_{P6} = +6.930531890000 \cdot 10^{-15}$ $b_{P7} = -1.814985740000 \cdot 10^{-18}$	$b_{T1} = -0.055947305900$ $b_{T2} = -0.000272773572$ $b_{T3} = -3.018156910000 \cdot 10^{-07}$ $b_{T4} = +2.833276880000 \cdot 10^{-09}$ $b_{T5} = -8.271836010000 \cdot 10^{-12}$ $b_{T6} = +8.285402170000 \cdot 10^{-15}$ $b_{T7} = -2.689588010000 \cdot 10^{-18}$
$c_{P11} = +5.034537680000 \cdot 10^{+01}$ $c_{P12} = -0.036109996000$ $c_{P13} = -0.000432989995$ $c_{P14} = +1.081486490000 \cdot 10^{-06}$ $c_{P15} = -6.182883210000 \cdot 10^{-10}$	$c_{T11} = +1.603726190000 \cdot 10^{+02}$ $c_{T12} = -0.398090268000$ $c_{T13} = -0.000649709027$ $c_{T14} = +2.512021720000 \cdot 10^{-06}$ $c_{T15} = -1.601488940000 \cdot 10^{-09}$
$c_{P21} = -0.051784071200$ $c_{P22} = -0.000281532045$ $c_{P23} = +2.224338580000 \cdot 10^{-06}$ $c_{P24} = -4.267847800000 \cdot 10^{-09}$ $c_{P25} = +2.347682930000 \cdot 10^{-12}$	$c_{T21} = -2.288304220000$ $c_{T22} = +0.009519293840$ $c_{T23} = -1.281605950000 \cdot 10^{-05}$ $c_{T24} = +3.596419570000 \cdot 10^{-09}$ $c_{T25} = +1.975093660000 \cdot 10^{-12}$
$c_{P31} = -0.000264852413$ $c_{P32} = +1.972678280000 \cdot 10^{-06}$ $c_{P33} = -6.476541440000 \cdot 10^{-09}$ $c_{P34} = +9.351840460000 \cdot 10^{-12}$	$c_{T31} = +0.005348409260$ $c_{T32} = -2.643278550000 \cdot 10^{-05}$ $c_{T33} = +4.476819840000 \cdot 10^{-08}$ $c_{T34} = -2.780542650000 \cdot 10^{-11}$

$$\begin{array}{ll}
c_{P35} = -4.627457750000 \cdot 10^{-15} & c_{T35} = +3.978980050000 \cdot 10^{-15} \\
c_{P41} = +6.465048330000 \cdot 10^{-07} & c_{T41} = -5.181614200000 \cdot 10^{-06} \\
c_{P42} = -3.551699940000 \cdot 10^{-09} & c_{T42} = +2.644737990000 \cdot 10^{-08} \\
c_{P43} = +9.051233530000 \cdot 10^{-12} & c_{T43} = -4.771172120000 \cdot 10^{-11} \\
c_{P44} = -1.088223680000 \cdot 10^{-14} & c_{T44} = +3.375650580000 \cdot 10^{-14} \\
c_{P45} = +4.826482270000 \cdot 10^{-18} & c_{T45} = -7.203161550000 \cdot 10^{-18} \\
\\
c_{P51} = -3.412738820000 \cdot 10^{-10} & c_{T51} = +1.862273810000 \cdot 10^{-09} \\
c_{P52} = +1.798177650000 \cdot 10^{-12} & c_{T52} = -9.349209680000 \cdot 10^{-12} \\
c_{P53} = -4.261392190000 \cdot 10^{-15} & c_{T53} = +1.710976130000 \cdot 10^{-14} \\
c_{P54} = +4.721310090000 \cdot 10^{-18} & c_{T54} = -1.263660220000 \cdot 10^{-17} \\
c_{P55} = -1.956757400000 \cdot 10^{-21} & c_{T55} = +2.996047160000 \cdot 10^{-21}
\end{array}$$

Koeffizienten der stationären Kennfelder für den
"zweiphasigen" Wandler (Gl. 5.3 und Gl. 5.4)

$$(ip = 7 \quad it = 7 \quad ipt = 5 \quad jpt = 5 \quad is = 7 \quad js = 7)$$

$$\begin{array}{ll}
a_{P1} = +6.643190124212 \cdot 10^{-02} & a_{T1} = -6.303978121524 \cdot 10^{-03} \\
a_{P2} = -9.939491107038 \cdot 10^{-05} & a_{T2} = +2.440245113223 \cdot 10^{-04} \\
a_{P3} = +8.040784395122 \cdot 10^{-07} & a_{T3} = +1.338530429691 \cdot 10^{-06} \\
a_{P4} = -1.134478263878 \cdot 10^{-09} & a_{T4} = -3.328143090785 \cdot 10^{-09} \\
a_{P5} = +7.749583364318 \cdot 10^{-13} & a_{T5} = +4.677565027413 \cdot 10^{-12} \\
a_{P6} = -1.651388046172 \cdot 10^{-16} & a_{T6} = -3.417897090777 \cdot 10^{-15} \\
a_{P7} = -3.379771829770 \cdot 10^{-20} & a_{T7} = +1.000239880962 \cdot 10^{-18} \\
\\
b_{P1} = +2.368914483340 \cdot 10^{-01} & b_{T1} = -2.946893220489 \cdot 10^{-01} \\
b_{P2} = -2.224324994461 \cdot 10^{-03} & b_{T2} = +3.060657448854 \cdot 10^{-03} \\
b_{P3} = +9.256224761913 \cdot 10^{-06} & b_{T3} = -2.177858314316 \cdot 10^{-05} \\
b_{P4} = -2.425099093648 \cdot 10^{-08} & b_{T4} = +6.692298227021 \cdot 10^{-08} \\
b_{P5} = +3.835924819099 \cdot 10^{-11} & b_{T5} = -1.064267358545 \cdot 10^{-10} \\
b_{P6} = -3.275663661919 \cdot 10^{-14} & b_{T6} = +8.507733097269 \cdot 10^{-14} \\
b_{P7} = +1.160880394685 \cdot 10^{-17} & b_{T7} = -2.698089093623 \cdot 10^{-17} \\
\\
c_{P11} = -9.091863963378 \cdot 10^{-04} & c_{T11} = +2.431948586367 \cdot 10^{-03}
\end{array}$$

$c_{P12} = +4.522368801284 \cdot 10^{-06}$	$c_{T12} = -1.400143844535 \cdot 10^{-05}$
$c_{P13} = -9.330314494741 \cdot 10^{-09}$	$c_{T13} = +3.004208465949 \cdot 10^{-08}$
$c_{P14} = +9.120937915527 \cdot 10^{-12}$	$c_{T14} = -2.680615515397 \cdot 10^{-11}$
$c_{P15} = -3.354940938510 \cdot 10^{-15}$	$c_{T15} = +8.471749148178 \cdot 10^{-15}$
$c_{P21} = +1.676955385648 \cdot 10^{-06}$	$c_{T21} = -1.514201223720 \cdot 10^{-05}$
$c_{P22} = -1.080727267748 \cdot 10^{-09}$	$c_{T22} = +1.092814229836 \cdot 10^{-07}$
$c_{P23} = -3.408117262739 \cdot 10^{-14}$	$c_{T23} = -2.508328689307 \cdot 10^{-10}$
$c_{P24} = -3.215924812441 \cdot 10^{-15}$	$c_{T24} = +2.334442078324 \cdot 10^{-13}$
$c_{P25} = +3.229386943012 \cdot 10^{-18}$	$c_{T25} = -7.612427941238 \cdot 10^{-17}$
$c_{P31} = +8.639961635867 \cdot 10^{-10}$	$c_{T31} = +3.236516599287 \cdot 10^{-08}$
$c_{P32} = -2.996692864902 \cdot 10^{-11}$	$c_{T32} = -2.693271226579 \cdot 10^{-10}$
$c_{P33} = +7.822775226803 \cdot 10^{-14}$	$c_{T33} = +6.554511145847 \cdot 10^{-13}$
$c_{P34} = -6.816957928217 \cdot 10^{-17}$	$c_{T34} = -6.309734136845 \cdot 10^{-16}$
$c_{P35} = +1.782335875527 \cdot 10^{-20}$	$c_{T35} = +2.104280866093 \cdot 10^{-19}$
$c_{P41} = -3.753323182880 \cdot 10^{-12}$	$c_{T41} = -3.042006902386 \cdot 10^{-11}$
$c_{P42} = +5.150808780028 \cdot 10^{-14}$	$c_{T42} = +2.721620097273 \cdot 10^{-13}$
$c_{P43} = -1.366189602264 \cdot 10^{-16}$	$c_{T43} = -6.903887447705 \cdot 10^{-16}$
$c_{P44} = +1.289512968265 \cdot 10^{-19}$	$c_{T44} = +6.824768507207 \cdot 10^{-19}$
$c_{P45} = -3.913538727511 \cdot 10^{-23}$	$c_{T45} = -2.317871455731 \cdot 10^{-22}$
$c_{P51} = +2.072827591199 \cdot 10^{-15}$	$c_{T51} = +1.067960416842 \cdot 10^{-14}$
$c_{P52} = -2.418239024326 \cdot 10^{-17}$	$c_{T52} = -9.852927837114 \cdot 10^{-17}$
$c_{P53} = +6.596507488637 \cdot 10^{-20}$	$c_{T53} = +2.565637000155 \cdot 10^{-19}$
$c_{P54} = -6.523385903513 \cdot 10^{-23}$	$c_{T54} = -2.586350093127 \cdot 10^{-22}$
$c_{P55} = +2.105050895934 \cdot 10^{-26}$	$c_{T55} = +8.912679410238 \cdot 10^{-26}$
$d_{P1} = +1.059085696859 \cdot 10^{-02}$	$d_{T1} = -1.280426352834 \cdot 10^{-02}$
$d_{P2} = -1.247769197883 \cdot 10^{-05}$	$d_{T2} = -9.204664986499 \cdot 10^{-05}$
$d_{P3} = -5.190523200938 \cdot 10^{-07}$	$d_{T3} = -2.388663275590 \cdot 10^{-07}$
$d_{P4} = +1.241325748596 \cdot 10^{-09}$	$d_{T4} = +7.234372574505 \cdot 10^{-10}$
$d_{P5} = -1.202860357446 \cdot 10^{-12}$	$d_{T5} = -8.599576644846 \cdot 10^{-13}$
$d_{P6} = +4.755741357285 \cdot 10^{-16}$	$d_{T6} = +4.387958581695 \cdot 10^{-16}$
$d_{P7} = -3.238511273837 \cdot 10^{-20}$	$d_{T7} = -6.165383269917 \cdot 10^{-20}$

e_{P1}	$= -7.708743453978 \cdot 10^{-02}$	e_{T1}	$= +5.247087885088 \cdot 10^{-02}$
e_{P2}	$= +8.131623382229 \cdot 10^{-04}$	e_{T2}	$= -6.571603606873 \cdot 10^{-04}$
e_{P3}	$= -3.914734980220 \cdot 10^{-06}$	e_{T3}	$= +5.473709154144 \cdot 10^{-06}$
e_{P4}	$= +1.047113600320 \cdot 10^{-08}$	e_{T4}	$= -1.818491167604 \cdot 10^{-08}$
e_{P5}	$= -1.604481390054 \cdot 10^{-11}$	e_{T5}	$= +3.024530822271 \cdot 10^{-11}$
e_{P6}	$= +1.302486943128 \cdot 10^{-14}$	e_{T6}	$= -2.491326890612 \cdot 10^{-14}$
e_{P7}	$= -4.380563168085 \cdot 10^{-18}$	e_{T7}	$= +8.071449987987 \cdot 10^{-18}$

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktwise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermosdiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltsoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé:
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis

- Nr. 84 U. Kikillus:
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85 T. Guo:
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in
verfestigendem Material
- Nr. 86 Achim Menne:
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 86**