

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

B. Bischoff-Beiermann

Zur selbstkonsistenten
Berechnung von Eigenspannungen
in polykristallinem Eis unter
Berücksichtigung der
Monokristallanisotropie

Heft Nr. 82



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik
Ruhr-Universität Bochum**

Burkhard Bischoff-Beiermann

**Zur selbstkonsistenten Berechnung
von Eigenspannungen in polykristallinem Eis
unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 82

Juli 1992

Herrn Grundmann mit herzlichem Dank für die
viele praktischen Tipps und die tatkräftige
Unterstützung überreicht.

B. Ball-3.

Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und die Übernahme des Referates. Herrn Prof. Dr.-Ing. D. Besdo danke ich für die Übernahme des Korreferates.

All denen, die durch ihre tatkräftige Unterstützung zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, insbesondere Frau Petra Fobbe für das Korrekturlesen des Manuskriptes, Frau cand.-Ing. B. Rosen und Herrn cand.-Ing. H.J. Becker für ihre Mithilfe bei der Erstellung der Druckvorlagen und der Durchführung der Kontrollrechnungen sowie den Mitarbeitern des Lehrstuhls für Technische Mechanik, sei herzlich gedankt.

Juli 1992 Burkhard Bischoff-Beiermann

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns

Prof. Dr.-Ing. D. Besdo

Tag der Einreichung : 13.01.1992

Tag der mündlichen Prüfung: 14.05.1992

©1992 Dr.-Ing. Burkhard Bischoff-Beiermann

Düppelstraße 46, 4630 Bochum 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

Im ersten Teil dieser Arbeit wird aus der Analyse der Versetzungsbewegung ein neues mehr-axiales Stoffgesetz zur Beschreibung der inelastischen Verformungen eines Eismonokristalls hergeleitet, das trotz seiner einfachen Struktur das ausgeprägt anisotrope Materialverhalten sehr gut beschreibt. Die Versetzungsdichte hat die Bedeutung einer skalarwertigen internen Zustandsvariablen.

Ein Vergleich des mikromechanisch begründeten Ansatzes mit der allgemeinen Form eines Stoffgesetzes für transversal isotrope Materialien, wie sie im 8. Kapitel angegeben wird, zeigt dessen Vollständigkeit im Rahmen einer Theorie erster Ordnung.

Auf der Basis des monokristallinen Stoffgesetzes wird eine selbstkonsistente Stoffgesetzformulierung für polykristallines Eis entwickelt. Der innere Aufbau des Polykristalls wird durch eine skalarwertige und eine tensorwertige interne Zustandsfunktion charakterisiert. Diese Zustandsfunktionen sind im Raum der möglichen Kristallachsenorientierungen definiert. Sie beschreiben die Orientierungsverteilung der Kristallachsen und die im Laufe des Deformationsprozesses entstehende Eigenspannungsverteilung.

Im Kapitel 7 wird eine neue Lösung des von Eshelby definierten Einschlußproblems für linear elastisch-viskoses Materialverhalten angegeben. Sie bildet die Grundlage für den in der selbstkonsistenten Stoffgesetzformulierung verwendeten Lokalisationsprozeß.

Summary

In the first part of this paper a new multi-axial constitutive law for the inelastic deformation of ice monocrystals is introduced by analysing the motion of dislocations. Although it shows a simple structure, it is able to describe the marked anisotropic behaviour very well. The dislocation density has the meaning of a scalar valued internal state variable.

This micromechanical based formulation is a complete first order approximation of the general form of a constitutive law for transversely isotropic materials which is given in chapter 8.

A self-consistent constitutive law for polycrystalline ice is developed based on the given monocrystalline one. The internal structure of the polycrystal is described by a scalar and a tensor valued internal state function, which are defined in the space of the possible orientations of the crystalaxes. This state functions characterize the orientation density of the crystalaxes and the development of residual stresses during the deformation process.

The process of localisation of the self-consistent formulation is based on a new solution of the inclusion problem which is given in chapter 7. It is an extension of the original work of Eshelby to linear elastic-viscous materials.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Bezeichnungen	<i>iv</i>
1. Einleitung	1
2. Monokristallines Eis	4
2.1 Kristallstruktur	4
2.2 Elastische Eigenschaften	6
2.3 Inelastische Materialeigenschaften	7
2.3.1 Basale Gleitung	8
2.3.2 Übersicht über einige einaxiale Materialgleichungen	13
2.3.3 Nichtbasale Gleitung	15
3. Dreidimensionales Stoffgesetz des Monokristalls	18
3.1 Vorbemerkungen	18
3.2 Bestimmung der basalen Verzerrungsgeschwindigkeiten	19
3.3 Bestimmung der prismatischen Verzerrungsgeschwindigkeiten	22
3.4 Bestimmung der axialen Verzerrungsgeschwindigkeiten	23
3.5 Der plastische Spin des Monokristalls	25
3.6 Das eindimensionale Stoffgesetz der basalen Gleitung	27
3.7 Elastizitätstensor	31
3.8 Das monokristalline Stoffgesetz, Zusammenfassung des Gleichungssystems	32
3.9 Numerische Aufbereitung des Stoffgesetzes für den einaxialen Zug-Druckversuch	35
3.9.1 Rotation der Kristallachse	37
3.9.2 Das Differentialgleichungssystem	37
3.10 Parameterstudien	38
3.11 Vergleich Rechnung und Experiment	46

4. Polykristallines Eis	50
4.1 Übersicht über experimentelle Untersuchungen in der Literatur	50
4.2 Abschätzung der Eigenspannungen in polykristallinem Eis	55
4.3 Mikromechanik der Polykristallverformung	57
4.4 Inelastische Deformationen durch Versetzungsbewegung	58
4.5 Mikrobrüche	59
4.6 Wandern von Korngrenzen, Rekristallisation	59
4.7 Übersicht über einige Stoffgesetze für polykristallines Eis	60
4.7.1 Eindimensionale Stoffgesetze	61
4.7.2 Dreidimensionale Stoffgesetze	63
5. Stoffgesetzformulierungen unter Berücksichtigung der Mikrostruktur	66
5.1 Beziehungen zwischen der Mikro- und der Makroebene, Homogenisierung	66
5.1.1 Homogenisierungsvorschrift	69
5.1.2 Möglichkeiten zur Formulierung eines makroskopischen Stoffgesetzes durch Homogenisieren	69
5.2 Möglichkeiten zur Abschätzung der Zustandsvariablen auf der Mikroebene	70
6. Ein selbstkonsistentes Stoffgesetz für polykristallines Eis	75
6.1 Homogenisieren im Raum der Kristallachsenorientierungen	76
6.2 Homogenisieren bei inkrementeller Stoffgesetzformulierung mit internen Variablen	77
6.3 Selbstkonsistente Formulierung	78
6.3.1 Nachweis der Selbstkonsistenz	79
6.3.2 Auswerten der Homogenisierungsvorschriften	81
6.4 Möglichkeiten zur Definition des Tensors \underline{M}	83
6.5 Evolutionsgleichung der Texturfunktion	86
6.5.1 Rekristallisation	87
6.5.2 Korndrehung, plastischer Spin	89
6.6 Numerische Aufbereitung	91
6.7 Erste Ergebnisse	94

7. Das Einschlußproblem	106
7.1 Darstellung des Stoffgesetzes und der Gleichgewichtsbedingungen im Bildbereich der Laplace- und Fourier-Transformation	106
7.1.1 Einige Eigenschaften der Integral-Transformationen	106
7.1.2 Das Stoffgesetz	109
7.1.3 Die Gleichgewichtsbedingungen	111
7.1.4 Das Geschwindigkeitsfeld in einem unendlich ausgedehnten Körper aufgrund einer Einzelkraft	112
7.2 Das Transformationsproblem	112
7.2.1 Lösung für ein linear elastisch-viskoses Material	112
7.2.2 Erweiterung der Lösung auf ein linearisiertes Stoffgesetz	115
7.3 Definition des Einschlußproblems und Lösung im Bildbereich der LT	116
7.4 Lösung des Einschlußproblems für elastisch isotrope Werkstoffe	124
7.4.1 Bestimmung der Tensoren \underline{A} , \underline{E} und $[\underline{S}]$	124
7.4.2 Berechnung der Tensoren $[\underline{M}]$ und \underline{B}	125
7.4.3 Zusammenfassung des Gleichungssystems	128
7.5 Nebenrechnungen	130
7.5.1 Zur Berechnung von Integralen der Form $\int \vec{r} \dots \vec{r} d\omega$	130
7.5.2 Einige Eigenschaften spezieller Tensoren zweiter und vierter Stufe	132
8. Tensorielle Darstellung eines Stoffgesetzes bei transversaler Isotropie	134
8.1 Zerlegung des Spannungstensors	135
8.2 Physikalische Interpretation der Spannungskomponenten	137
8.3 Formulierung eines Invariantensystems	138
8.4 Herleitung eines vollständigen Satzes von Tensorgeneratoren	139
8.5 Aufstellen eines Invariantensystems L	140
8.6 Lineare Spannungsabhängigkeit	142
8.7 Darstellung einer antisymmetrischen isotropen Tensorfunktion	147
8.8 Diskussion der Ergebnisse	149
9. Zusammenfassung und Ausblick	150
Literaturverzeichnis	153

Bezeichnungen

Skalare Größen:

A	: Fläche, Materialkonstante mit wechselnder Bedeutung
B	: Materialkonstante mit wechselnder Bedeutung
C	: Materialkonstante mit wechselnder Bedeutung
E	: E-Modul
E_e	: spezifische elastische Energie (Makroebene)
G	: Schubmodul
$I^{(2n)}$: vollständig symmetrischer Tensor ($2n$)-ter Stufe
$J_{\nu,\lambda,\mu}$: Invariantensystem von drei Tensoren 2-ter Stufe
$J_{\nu,\lambda}$: Invariantensystem von zwei Tensoren 2-ter Stufe
K	: effektive Steifigkeit von Probe und Prüfmaschine, Materialkonstante mit wechselnder Bedeutung
$L^{[...]}$: Invariantensystem von drei Tensoren 2-ter Stufe, linear in einem Argumenttensor (Gl. (8.18))
$L_{(.)}$: Invariantensystem von drei Tensoren 2-ter Stufe, linear in einem Argumenttensor (Gl. (8.19))
$L_{c_{min}}$: kleinste charakteristische Länge der Makroebene
M^{**}	: Invariante von \underline{M} : $M^{**} = \text{Sp}(\underline{M})$ (Gl. (7.80))
N	: Anzahl der Unterteilungen der internen Zustandsfunktionen
Q	: Aktivierungsenergie
S_λ	: Invarianten des Spannungstensors (Gl. (8.3))
$S_{(.)}$: Invariantensystem von $\underline{\sigma}$ und \underline{N} (Gl. (8.12))
T	: Temperatur
T_c	: Temperatur in $^{\circ}C$
V	: Volumen
∂V	: Oberfläche (Rand) des Volumens V
b	: Betrag des Burgersvektor
c	: Materialkonstante mit wechselnder Bedeutung

$c_{(\cdot)}$: charakteristische Komponenten des Tensors der Elastizitätskonstanten bei transversaler Isotropie ((\cdot): h, a, ah, p, b)
c_{ij}	: Elastizitätskonstanten in Voigt'scher Notation $i, j = 1, \dots, 6$
d	: Versetzungsquellenabstand, Korndurchmesser
$d_{c_{max}}$: größte charakteristische Länge der Mikrostruktur
e	: spezifische elastische Energie (Mikroebene)
f	: $f(\vec{r}) = 1$ für $\vec{r} \in B$, sonst 0
$g(\vec{n})$: Texturfunktion
g_α	: diskretisierte Texturfunktion
h	: Höhe des Kontrollvolumens (eindimensionale Stoffgesetz der basalen Gleitung)
$h()$: Sprungfunktion
k_v	: Konstante im Ansatz für die Geschwindigkeit der Versetzungen
l	: Probenlänge, Länge einer Versetzungsquelle
l_c	: charakteristische Länge des RVE
m	: Exponent
n	: Exponent im Norton'schen Fließgesetz, Versetzungsanzahl
p	: hydrostatischer Druck
s	: Bildvariable der Laplace-Transformation
t	: Zeit
v	: Geschwindigkeit
v_T	: temperaturabhängige Konstante
Ω_λ	: Simultaninvarianten von $\underline{\sigma}$ und \underline{N}
Σ_2	: zweite Invariante des Spannungsdeviators: $\Sigma_2 = \frac{1}{2} \text{Sp}(\underline{\tau}^2)$
Σ_3	: dritte Invariante des Spannungsdeviators: $\Sigma_3 = \frac{1}{3} \text{Sp}(\underline{\tau}^3)$
α	: Winkel (Gl. (8.11)), Faktor
δ	: Abstand von zwei Versetzungsringe
$\delta()$: Dirac-Funktion
γ	: Gleitung, Scherung
λ	: Versetzungsdichte, Laufindex
μ	: Verteilungsdichte der Versetzungsquellen, Laufindex
ν	: Querkontraktionszahl, Laufindex
ω	: Integrationsvariable im zweidimensionalen Raum der Kristallachsenorientierungen O_e
ψ	: Winkel, definiert zusammen mit ϑ den Vektor \vec{n}

ρ	: Dichte (Mikroebene)
ϱ	: Dichte (Makroebene)
σ	: Spannung
σ_1	: Hauptspannung des prismatischen Spannungstensors $\underline{\tau}_p$
τ	: Schubspannung
τ_y	: Peakspannung im Zug- oder Druckversuch
θ	: Winkel zwischen der Belastungsrichtung und einer prismatischen Ebene
ϑ	: Winkel zwischen der Probenachse und dem Normalenvektor der basalen Ebene
ε	: Dehnung
$\varphi_{(\cdot)}$: skalarwertige Koeffizienten der Tensorgeneratoren $\underline{M}_{(\cdot)}$
$\varphi_{(\nu,\lambda)}$: skalarwertige Koeffizienten der Tensorgeneratoren $\underline{M}^{[\nu,\lambda]}$
ξ	: Satz von internen Zustandsvariablen (Makroebene, Polykristall)
ζ	: Satz von internen Zustandsvariablen (Mikroebene, Monokristall)

Vektoren:

$d\vec{S}$: gerichtetes Flächenelement
$d\vec{f}$: infinitesimaler Kraftvektor
$d\vec{h}$: infinitesimaler Kraftvektor
\vec{F}	: Kraftvektor
\vec{R}	: Ortsvektor (Makroebene)
$\vec{e}_1 - \vec{e}_3$: Einheitsvektoren eines karthesischen Koordinatensystems
\vec{k}	: Bildvariable der Fourier-Transformation in drei Dimensionen
\vec{n}	: Einheitsnormalenvektor der basalen Ebene, Richtung der transversalen Isotropie
\vec{n}_i	: Einheitsnormalenvektor der Gleitebene i
\vec{r}	: Ortsvektor (Mikroebene)
\vec{t}	: Spannungvektor (des basalen Spannungstensors (Gl. (8.10)))
\vec{v}_i	: Gleitrichtung
$\vec{\omega}$: Drehgeschwindigkeitsvektor

Tensoren zweiter Stufe:

$\underline{\mathbf{1}}$: Einheitstensor
$\underline{\mathbf{D}}$: Verzerrungsgeschwindigkeiten (Makroebene)
$\underline{\mathbf{D}}_K$: tensorwertiges Schädigungsmaß
$\underline{\mathbf{F}}$: Deformationsgradient
$\underline{\mathbf{L}}$: Geschwindigkeitsgradient (Makroebene)
$\underline{\mathbf{M}}^*$: durch $\underline{\mathbf{M}}$ definierter Tensor (Gl. (7.80))
$\underline{\mathbf{M}}^{[\nu,\lambda]}$: Tensorgenerator
$\underline{\mathbf{M}}_{(.)}$: Tensorgenerator $((.) : h, a, p, b, pb, bp)$ (Gl. (8.21))
$\underline{\mathbf{M}}_{(.)}$: durch $\underline{\mathbf{M}}$ definierte Tensoren $((.) : 1, \dots, 4)$ (Gl. (7.80))
$\underline{\mathbf{N}}$: definiert die Richtung der transversalen Isotropie: $\underline{\mathbf{N}} = \bar{n}\bar{n}$
$\underline{\mathbf{W}}$: Tensor der Rotationsgeschwindigkeiten (Makroebene)
$\underline{\mathbf{W}}^p$: plastischer Spin (Makroebene)
$\underline{\mathbf{b}}_\alpha$: Basistensoren für einen Tensor vierter Stufe
$\underline{\mathbf{d}}$: Verzerrungsgeschwindigkeiten (Mikroebene)
$\underline{\dot{\mathbf{e}}}$: (Gl. (7.58))
$\underline{\mathbf{l}}$: Geschwindigkeitsgradient (Mikroebene)
$\underline{\mathbf{w}}$: Tensor der Rotationsgeschwindigkeiten (Mikroebene)
$\underline{\mathbf{w}}^p$: plastischer Spin (Mikroebene)
$\underline{\mathbf{\Omega}}$: Spintensor (Makroebene)
$\underline{\mathbf{\Omega}}_\alpha$: antisymmetrische Tensorgeneratoren (Gl. (8.33))
$\underline{\mathbf{\Phi}}$: Rotationstensor
$\underline{\mathbf{\Sigma}}$: Spannungstensor (Makroebene)
$\underline{\mathbf{\mu}}$: Schmidtensor
$\underline{\mathbf{\omega}}$: Spintensor (Mikroebene)
$\underline{\mathbf{\sigma}}$: Spannungstensor (Mikroebene)
$\underline{\mathbf{\tau}}$: Spannungsdeviator
$\underline{\mathbf{\varepsilon}}$: Dehnungstensor
$\underline{\varepsilon}_0$: Dehnungsinkompatibilität
$\underline{\varepsilon}_T$: spannungsfreie Transformationsdehnung

Tensoren vierter Stufe:

$\underline{\underline{1}}$: Einheitstensor
$\underline{\underline{1'}}$: deviatorischer Einheitstensor: $\underline{\underline{1'}} = \underline{\underline{1}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{11}}$
$\underline{\underline{A}}$: (Gl. (7.61))
$\underline{\underline{B}}$: (Gl. (7.57))
$\underline{\underline{C}}$: Tensor der Elastizitätskonstanten
$\underline{\underline{\dot{C}}}$: (Gl. (7.16))
$\underline{\underline{E}}$: (Gl. (7.55))
$\underline{\underline{I^a}}$: Einheitstensor des eindimensionalen Unterraumes der axialen Formänderungen (Gl. (8.4))
$\underline{\underline{I^h}}$: Einheitstensor des eindimensionalen Unterraumes der Volumendehnungen (Kugeltensoren) (Gl. (8.4))
$\underline{\underline{I^p}}$: Einheitstensor des zweidimensionalen Unterraumes der pismatischen Gleitung (Gl. (8.4))
$\underline{\underline{I^b}}$: Einheitstensor des zweidimensionalen Unterraumes der basalen Gleitung (Gl. (8.4))
$\underline{\underline{I^{ah}}, \underline{\underline{I^{ha}}}}$: Bilden zusammen mit $\underline{\underline{I^a}} - \underline{\underline{I^p}}$ die vollständige Basis eines transversal-isotropen Tensors 4-ter Stufe (Gl. (8.4))
$\underline{\underline{K_{(.)}}}$: Hilfstensoren, definiert durch $\underline{\underline{M}}$
$\underline{\underline{M}}$: Tensor der inelastischen Nachgiebigkeitsraten
$\underline{\underline{[M]}}$: (Gl. (7.51))
$\underline{\underline{P}}$: Projektionstensor des CH-Modells: $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I^p}} + \underline{\underline{I^b}}$
$\underline{\underline{S}}$: Tensor der Elastizitätskoeffizienten (Makroebene, Polykristall)
$\underline{\underline{[S]}}$: (Gl. (7.50))
$\underline{\underline{\dot{T}}}$: Lösung des Transformationsproblems im Bildbereich der LT (Gl. (7.34))
$\underline{\underline{s}}$: Tensor der Elastizitätskoeffizienten (Mikroebene, Monokristall)

Tensoren, verallgemeinerte Vektoren:

$I^{(2n)}$: vollständig symmetrischer Tensor (2n)-ter Stufe
ξ	: Satz von internen Zustandsvariablen (Makroebene, Polykristall)
ζ	: Satz von internen Zustandsvariablen (Mikroebene, Monokristall)

Tensorschreibweise:

\vec{x}	: Vektor
\underline{x}	: Tensor zweiter Stufe
\underline{x}^T	: Transponierte von \underline{x}
\underline{x}'	: deviatorischer Anteil von \underline{x} : $\underline{x}' = \underline{x} - \frac{1}{3}\text{Sp}(\underline{x})\underline{1}$
$\text{Sp}(\underline{x})$: Spur des Tensors zweiter Stufe: $\text{Sp}(\underline{x}) = \underline{x} : \underline{1} = x^i_i$
$\underline{\underline{x}}$: Tensor vierter Stufe
$\text{Sp}(\underline{\underline{x}})$: Spur des Tensors vierter Stufe: $\text{Sp}(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{x}} :: \underline{1} = x^{ij}_{ij}$
skalare (verjüngende) Produkt	: $[\underline{x} \cdot \underline{y}]_{ij} = x_{ik}y^k_j$
doppeltskalare Produkt	: $[\underline{\underline{x}} : \underline{\underline{y}}]_{ij} = x_{ijlm}y^{lm}$
dyadische Produkt	: $[\vec{x}\vec{y}\vec{z}]_{ijkl} = x_iy_jk_zl$
	: $[\underline{\underline{x}}\underline{\underline{y}}]_{ijkl} = x_{ik}y_{jl}$

Indizes:

<i>ES</i>	: Eigenspannung
<i>E</i>	: Einschluß
<i>T</i>	: Transformation
<i>Z</i>	: zusätzliche Spannungen (aus unterschiedlichen elastischen Eigenschaften)
<i>a·s</i>	: symmetrisiert im hinteren Indexpaar
<i>a</i>	: axial
<i>b</i>	: basal
<i>c</i>	: charakteristisch
<i>d</i>	: verzögert (delayed)
<i>eff</i>	: effektiv
<i>e</i>	: elastisch, Produktionsterm (erzeugen)
<i>ges</i>	: gesamt
<i>i</i>	: inelastisch
<i>k</i>	: Korn, konstant
<i>l</i>	: linear
<i>max</i>	: maximal
<i>min</i>	: minimal
<i>m</i>	: maximal

p	: prismatisch
ref	: Referenz
rel	: relativ
$s-s$: symmetrisiert in den vorderen und hinteren Indexpaaren
sek	: sekundär
sym	: symmetrischer Anteil
tB	: transformierter Bereich
ter	: tertiär
v	: viskos, Reduktionsterm (verlassen)
α	: Laufindex
β	: Laufindex
∞	: unendlich
0	: Anfangswert, Bezugsgröße
$+0$: direkt nach Lastaufbringung
Δt	: zum Zeitpunkt Δt
$\Delta t+0$: direkt nach einer Lastaufbringung zum Zeitpunkt Δt

Symbole:

$\vec{\nabla}$: Nabla-Operator (wirkt auf das gesamte Produkt, das mit dem Operator gebildet wird)
Δ	: Differenz
$\langle \dots \rangle$: Mittelung von ... über ein definiertes Volumen
\dots	: Zeitableitung von ...
$\mathcal{FT}\{\dots\}$: Fourier-Transformation von ...
\hat{x}	: Fourier-Transformation von x
$\mathcal{LT}\{\dots\}$: Laplace-Transformation von ...
\tilde{x}	: Laplace-Transformation von x
$\tilde{\tilde{x}}$: Fourier-Laplace-Transformation von x
$(,,),\{,,\}$: Miller-Bravais Indizes zur Darstellung von Ebenen
$[,,],\langle,,\rangle$: Miller-Bravais Indizes zur Darstellung von Richtungen

Konstanten:

R	: allgemeine Gaskonstante
π	: 3.14...
j	: imaginäre Zahl: $j = \sqrt{-1}$

Räume:

O_e	: zweidimensionale Raum der Kristallachsenorientierungen (Oberfläche der Einheitskugel)
R^3	: euklidischer Raum
K^3	: Bildbereich zu R^3 (Fourier-Transformation)
B	: einfachzusammenhängender Bereich des R^3 (Korn, Einschluß)
∂B	: Oberfläche von B
V	: Volumen des RVE
∂V	: Oberfläche des RVE

Abkürzungen:

FT	: Fourier-Transformation
LT	: Laplace-Transformation
FLT	: Fourier-Laplace-Transformation
RVE	: repräsentative Volumenelement

1. Einleitung

Eis zählt zu den Stoffen, mit denen ein jeder vielfältige Assoziationen verbindet. Zumeist stehen dabei die nichttechnischen Aspekte im Vordergrund. Beispiele für die unterschiedlichen Erscheinungsformen sind der zugefrorene See im Winter und das eisgekühlte Getränk im Sommer.

Doch auch in Bezug auf ingenieurwissenschaftliche Anwendungen ist Eis ein interessanter Werkstoff. Die Auslegung von Eisbrechern oder Kanalschleusen ist ein Beispiel, bei dem die Kenntnis der Materialeigenschaften nicht nur des Bauteils, sondern auch des Eises von Bedeutung ist. In der Off-Shore-Technik bilden die Belastungen durch Treibeis eine wichtige Grundlage zur Dimensionierung von Erdölpipelines und Bohrinseln.

Die Frage nach der Tragfähigkeit der Eisdecke eines zugefrorenen Sees deutet bereits darauf hin, daß Eis als Werkstoff technischer Konstruktionen dienen kann. Es seien hier die Überlegungen, Eis als Baumaterial von Polarstationen zu verwenden, genannt.

Grundlagenorientierte Untersuchungen an (polykristallinem) Eis sind Voraussetzung für die genannten anwendungsbezogenen Fragestellungen und geben weiterhin Aufschluß über das Materialverhalten auch anderer polykristalliner Werkstoffe. In der Literatur wird den Wechselwirkungen zwischen dem mikroskopischen Aufbau und den makroskopischen Belastungen eines Werkstoffes viel Aufmerksamkeit gewidmet. Als Beispiele seien die Vorhersage von Walztexturen und deren Auswirkung auf die Materialeigenschaften oder die Berechnung von Faserverbundwerkstoffen genannt.

Die ausgeprägte Anisotropie der Eismonokristalle hat einen wesentlichen Anteil am globalen Verhalten des Polykristalls. Die Transparenz von Eis gestattet es mit relativ einfachen Mitteln, einen zerstörungsfreien Einblick in die innere Struktur des Polykristalls zu nehmen.

Eis zählt zur Gruppe der Hochtemperaturwerkstoffe, da es sich unter normalen Umgebungsbedingungen sehr nahe an seinem Schmelzpunkt befindet. So kann Hochtemperaturverhalten bei gemäßigter Temperatur untersucht werden. Eis zeigt wie die meisten Materialien bei hohen homologen Temperaturen eine deutliche Viskosität. Einerseits ist es sehr "weich", da es kaum in der Lage ist, sein eigenes Gewicht zu tragen. Schon durch sehr kleine Lasten kann insbesondere der Monokristall sehr große bleibende Verformungen erfahren. Andererseits

handelt es sich aber auch um einen sehr "harten" Werkstoff, da eine Zugprobe selbst beim Erreichen der Schmelztemperatur bei hinreichend großer Belastungsgeschwindigkeit durch Spröbruch versagt.

Die hier vorgelegte Arbeit leistet einen Beitrag zur Beschreibung polykristalliner Werkstoffe, insbesondere polykristallinen Kunsteises, indem die Änderungen auf der Mikroebene in Beziehung gesetzt werden zu den makroskopisch beobachtbaren Größen. In Übereinstimmung mit der einschlägigen Literatur (s. Kapitel 4.3) werden die Versetzungsbewegungen als der wesentliche Verformungsmechanismus des Polykristalls für den Temperaturbereich $-5^{\circ}\text{C} < T_c < -20^{\circ}\text{C}$ angesehen. Der Schwerpunkt liegt deshalb auf der Beschreibung der Eigenspannungsverteilung, die sich aus der Anisotropie der den Polykristall bildenden Einkristalle entwickelt. Die Untersuchung des Einflusses weiterer Verformungsmechanismen, wie z.B. des Korngrenzgleitens, bleibt zukünftigen Arbeiten vorbehalten.

Diese Arbeit gliedert sich in drei Teile:

Nach einer Beschreibung der Materialeigenschaften von monokristallinem Eis und einer Übersicht über bestehende Stoffgesetze im Kapitel 2 wird im Kapitel 3 ein neues mehr-axiales Stoffgesetz für den Monokristall entwickelt. Die Verzerrungsgeschwindigkeiten werden entsprechend den zugrundeliegenden Verformungsmechanismen aufgespalten. Durch die gewählte Formulierung können die einzelnen Mechanismen jeweils durch eine skalarwertige Materialgleichung beschrieben werden. Für den Hauptverformungsmechanismus der basalen Gleitung wird ein einaxiales Stoffgesetz aus der Analyse der zugrundeliegenden Versetzungsbewegungen abgeleitet. Hieraus ergibt sich eine Formulierung, die die Versetzungsdichte als interne Variable verwendet. Die Materialparameter werden mit Hilfe von in der Literatur veröffentlichten Experimenten bestimmt. Typische einaxiale Zug- oder Druckversuche werden mit diesem Stoffgesetz berechnet und mit den entsprechenden Experimenten verglichen.

Der zweite Teil beginnt im Kapitel 4 mit der Beschreibung des Polykristalls. Das Materialverhalten wird hinsichtlich der mikromechanischen Ursachen analysiert. Einige bestehende Stoffgesetze für den Polykristall werden dargestellt. Im Kapitel 5 werden Möglichkeiten zur Berücksichtigung der Mikrostruktur bei der Formulierung eines makroskopischen Stoffgesetzes für polykristalline Werkstoffe aufgezeigt und hinsichtlich ihrer Eignung im Zusammenhang mit polykristallinem Eis untersucht.

Ein selbstkonsistentes Stoffgesetz für polykristallines Eis wird im Kapitel 6 hergeleitet. Durch die Definition einer internen Zustandsfunktion wird die Eigenspannungsverteilung innerhalb des Polykristalls charakterisiert. Anhand von einigen Beispielrechnungen wird der Einfluß der Modellparameter auf die Eigenspannungsentwicklung dargestellt.

Den dritten Teil der Arbeit bilden die Kapitel 7 und 8. Sie behandeln zwei Themen, die jeweils in sich abgeschlossen sind und losgelöst von den beiden ersten Teilen betrachtet werden können. Auf deren Ergebnisse wird in den ersten Teilen aber teilweise vorgegriffen .

Im Kapitel 7 wird eine neue Lösung des von Eshelby (1957) definierten Transformations- und Einschlußproblems für linear elastisch-viskose Materialien hergeleitet. Durch Einführen der Eigenspannungen im Einschluß als interne Variable gelangt man zu einer inkrementell formulierten Lösung des Einschlußproblems.

Mit Hilfe der Darstellungstheorie isotroper Tensorfunktionen wird im Kapitel 8 die allgemeine Form eines Stoffgesetzes für transversal isotrope Werkstoffe ermittelt. Durch die Definition eines Invariantensystems, das an die Isotropieeigenschaften angepaßt ist, gelangt man zu einem neuen System von Tensorgeneratoren. Die in diesem Kapitel gewonnenen Ergebnisse sind nicht nur hinsichtlich der Beschreibung des Eiseinkristalles von Bedeutung, sondern sie erleichtern auch das Ermitteln der konstitutiven Beziehungen anderer transversal isotroper Werkstoffe, da die dort definierten Invarianten eine klare physikalische Bedeutung haben und sich somit leicht mit den Verformungsmechanismen in Beziehung setzen lassen.

2. Monokristallines Eis

2.1 Kristallstruktur

Monokristallines Eis liegt bei den im Rahmen dieser Arbeit interessierenden Temperaturen ($-20^{\circ}\text{C} \dots -50^{\circ}\text{C} < T < 0^{\circ}\text{C} \dots -2^{\circ}\text{C}$) und normalem Umgebungsdruck als sogenanntes Eis Ih vor. Der erste Buchstabe in dieser Abkürzung steht für die englische Bezeichnung "Ice", der zweite weist auf die hexagonale Kristallstruktur hin.

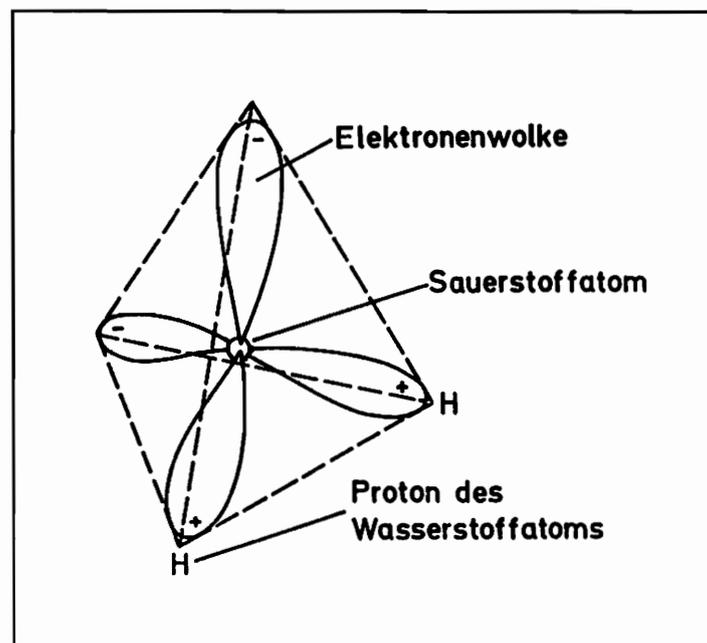


Abb. 1: Aufbau des Wassermoleküls, Glen (1974)

Ein Wassermolekül kann man sich näherungsweise als ein gleichseitiges Tetraeder vorstellen, in dessen Mitte sich das Sauerstoffatom befindet. Zwei der vier Ecken des Tetraeders werden durch die Kerne der Wasserstoffatome gebildet. Die die Kerne umgebende Elektronenwolke dehnt sich in Richtung der beiden verbleibenden Ecken des Tetraeders aus. Daraus ergibt sich die in Abb.1 angegebene Ladungsverteilung des Wassermoleküls. Die einzelnen Wassermoleküle ordnen sich so zu einem Kristall, daß sich Ecken mit unterschiedlicher Ladung

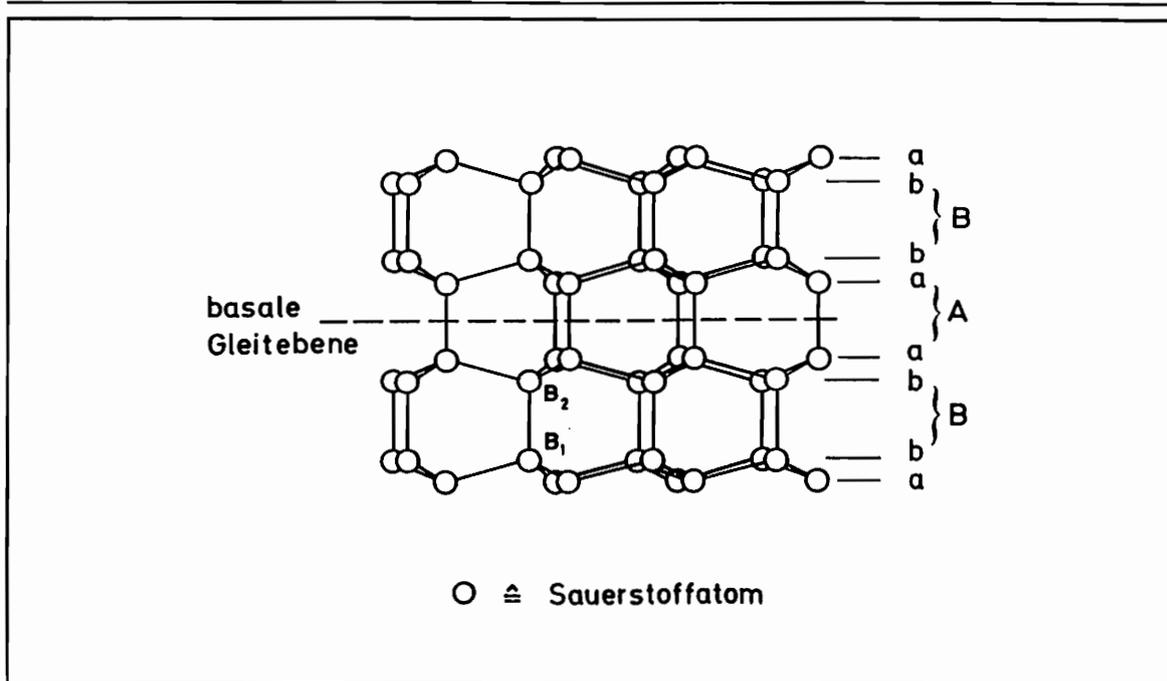


Abb. 2: Anordnung der Wassermoleküle im Kristallgitter von Eis Ih

aneinander anlagern. Jedes Wassermolekül ist somit mit vier anderen Molekülen verbunden. Zwischen zwei Sauerstoffatomen liegt jeweils ein Wasserstoffatom. Das daraus entstehende hexagonale Kristallgitter ist in Abb.2 dargestellt. Die Moleküle liegen in Ebenen vom Typ a oder b, die in der Reihenfolge abbaabbaa... gestapelt sind. Die hexagonale Achse (c-Achse) des Kristalls steht senkrecht auf diesen basalen Ebenen.

Zwei benachbarte Ebenen a und b bilden zusammen ein Netz aus sechseckigen Molekülringen. Die Sauerstoffatome liegen abwechselnd etwas oberhalb bzw. etwas unterhalb der Netzmittlebene und sind entsprechend abwechselnd nach oben bzw. nach unten mit der nächsten Netzebene verbunden. Die molekülfreien Ebenen zwischen zwei Netzebenen bilden die basalen Gleitebenen, die im Zusammenhang mit den inelastischen Deformationen von besonderer Bedeutung sind.

Projiziert man die Kristallstruktur auf die basale Ebene, so erhält man Abb.3. Man erkennt, daß der Kristall in c-Achsenrichtung von großen sechseckigen Löchern durchdrungen wird. Durch das Zusammenfassen der benachbarten Ebenen vom Typ a bzw. b zu einer Schicht A bzw. B kann der Kristall auch durch die Stapelfolge ABABAB... der Schichten dargestellt werden. Die Schichten bestehen aus senkrecht übereinander liegenden und miteinander verbundenen Molekülpaaren, z.B. dem Paar B_1, B_2 in Abb.2. Wie man anhand der gestrichelten Linien in Abb.3 erkennt, liegen die Molekülpaare innerhalb der Schicht in einer hexagonal dichtesten Kugelpackung. Diese Eigenschaft, zusammen mit der oben angegebenen

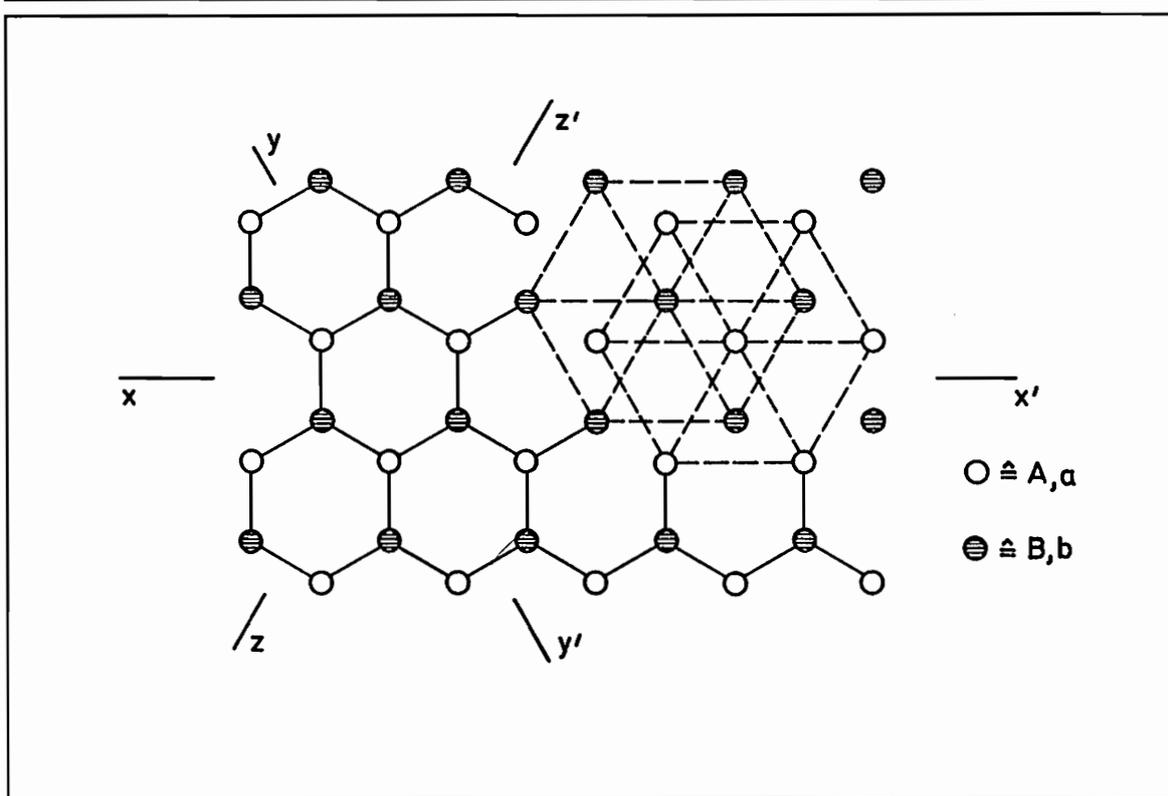


Abb. 3: Projektion der Struktur von Eis Ih auf die basale Ebene, mit den prismatischen Ebenen $x-x'$, $y-y'$ und $z-z'$

Stapelfolge, ist typisch für hexagonale Kristallstrukturen. Weitergehende Ausführungen zur Kristallstruktur von Eis finden sich bei Glen (1974).

2.2 Elastische Eigenschaften

Aus der Symmetrie des Kristalls ergibt sich sofort die transversale Isotropie der elastischen Eigenschaften. Sie sind von beliebigen Rotationen des Kristalls um seine c -Achse unabhängig. Die 21 Komponenten des Elastizitätstensors lassen sich aus 5 linear unabhängigen Größen berechnen. Diese wurden von Dantl (1968) als Funktion der Temperatur T_c in $^{\circ}C$ bestimmt.

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= 12.904(1 - 1.489 \cdot 10^{-3} T_c - 1.85 \cdot 10^{-6} T_c^2) 10^3 \text{MPa} \quad \pm 0.3\% \\
 c_{12} &= 6.487 (1 - 2.072 \cdot 10^{-3} T_c - 3.62 \cdot 10^{-6} T_c^2) 10^3 \text{MPa} \quad \pm 2.0\% \\
 c_{13} &= 5.622 (1 - 1.874 \cdot 10^{-3} T_c) 10^3 \text{MPa} \quad \pm 7.0\% \\
 c_{33} &= 14.075(1 - 1.629 \cdot 10^{-3} T_c - 2.93 \cdot 10^{-6} T_c^2) 10^3 \text{MPa} \quad \pm 0.4\% \\
 c_{44} &= 2.819 (1 - 1.601 \cdot 10^{-3} T_c - 3.62 \cdot 10^{-6} T_c^2) 10^3 \text{MPa} \quad \pm 0.7\%
 \end{aligned}$$

Abb.4 zeigt die Abhängigkeit des effektiven E-Moduls von der Orientierung des Kristalls. Er

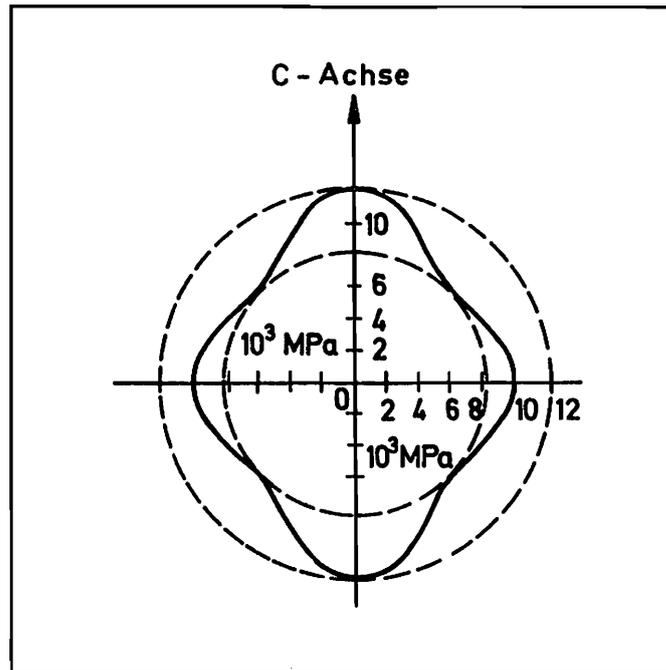


Abb. 4: Abhängigkeit des effektiven E-Moduls von der Belastungsrichtung
Fletcher (1970)

schwankt zwischen ca. $12 \cdot 10^3 \text{ MPa}$ in Richtung der c-Achse und ca. $10 \cdot 10^3 \text{ MPa}$ senkrecht dazu. Das Minimum von ca. $8 \cdot 10^3 \text{ MPa}$ wird unter einem Winkel von ca. 45° zur c-Achse gemessen. Der Minimalwert weicht ungefähr 30% vom Maximalwert ab.

2.3 Inelastische Materialeigenschaften

Die inelastischen Materialeigenschaften monokristallinen Eises sind durch eine ausgeprägte Anisotropie gekennzeichnet. Michel (1978) vergleicht den Monokristall mit einem Stapel Spielkarten. Die einzelnen Karten entsprechen den basalen Ebenen des Kristalls. Schon kleinste resultierende Schubspannungen in den basalen Ebenen können diese gegeneinander verschieben und so bleibende Verformungen erzeugen. Diesen Verformungsmechanismus nennt man basale Gleitung. Belastungen, die die basalen Ebenen schubspannungsfrei lassen, können den Kristall in der Regel nur elastisch verformen. Erst bei für Eis sehr großen Spannungen konnten im Experiment nichtbasale Deformationen beobachtet werden.

2.3.1 Basale Gleitung

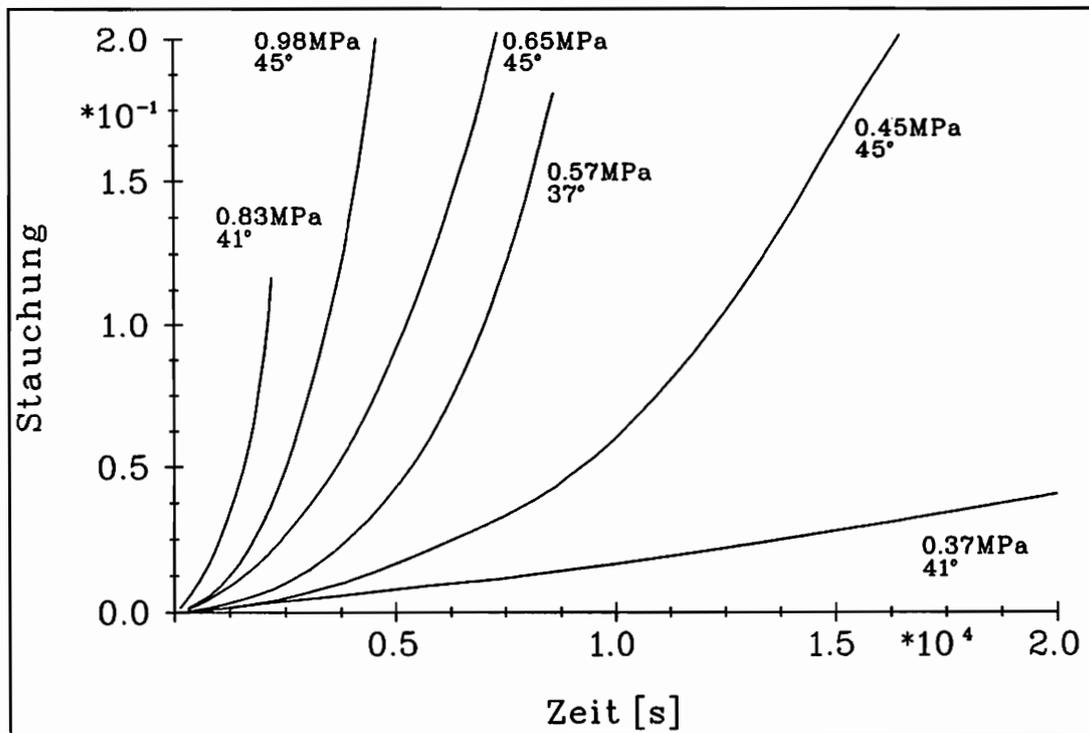


Abb. 5: Druckversuch mit konstanter Last, $T = -10^{\circ}\text{C}$. Griggs u. Coles (1954). Die Winkel geben die Orientierung der basalen Ebene relativ zur Probenachse an.

Anhand der in Abb.5 dargestellten Druckversuche mit konstanter Last ist deutlich ein Unterschied im Materialverhalten von monokristallinem Eis im Vergleich zu anderen Werkstoffen, wie z.B. den Metallen, zu erkennen. Die Kriechkurven der letzteren verfestigen in der Anfangsphase des Experiments, d.h. die Dehnungsrate nimmt mit der Zeit ab. An dieses sogenannte primäre Kriechen schließt sich dann in der Regel – nach der mehr oder weniger ausgeprägten Übergangsphase des sekundären Kriechens mit konstanter Dehnungsrate – das tertiäre Kriechen an, welches durch eine zunehmende Entfestigung des Werkstoffs gekennzeichnet ist. Im Gegensatz dazu weist monokristallines Eis in der Regel vom Beginn des Experiments an eine zunehmende Verformungsgeschwindigkeit auf, d.h. das Material entfestigt. Die Verzerrungsgeschwindigkeit nimmt mit wachsender Belastung zu.

Steinemann (1958) führte einige Scherversuche mit konstanter Last mit aus Schmelzwasser gezüchteten Einkristallen durch (Abb.6). Er unterteilt seine Experimente zwar auch in die drei Phasen des primären, sekundären und tertiären Kriechens, doch tritt das primäre Kriechen nicht bei allen Versuchen auf und ist so wenig ausgeprägt, daß er es als Anfangsstörung

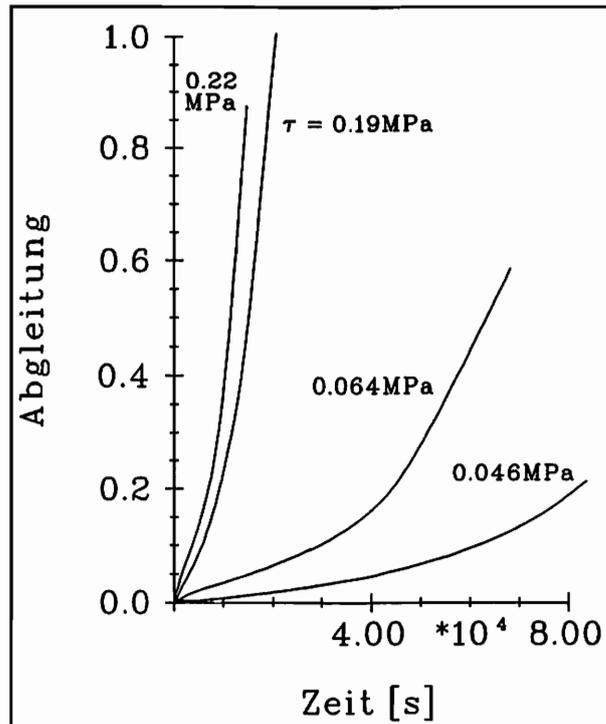


Abb. 6: Scherversuche mit konstanter Schubspannung τ , $T = -2,3^{\circ}\text{C}$
Steinemann (1958)

interpretiert. Während Steinemann seine Kurven durch zwei Geraden für den sekundären und tertiären Kriechbereich und einer dazwischenliegenden Übergangszone charakterisiert, wobei die Dehnungsraten mit der Belastung im folgenden Zusammenhang stehen:

$$\dot{\gamma}_{sek} \propto \tau^{3.1 \dots 3.9}$$

$$\dot{\gamma}_{ter} \propto \tau^{1.5} ,$$

beschreiben Griggs u. Coles (1954) ihre Ergebnisse durch quadratische Parabeln der Form:

$$\epsilon = [0.62(\sigma - 0.02T_c^2)]^2 t^2 .$$

Hierin ist ϵ die negative Dehnung in Prozent, σ die Druckspannung, T_c die Temperatur in $^{\circ}\text{C}$ und t die Zeit in Stunden. In dieser empirischen Gleichung spiegelt sich auch der experimentelle Befund wider, daß sich eine Temperaturerhöhung qualitativ genauso auf das Materialverhalten auswirkt wie eine Erhöhung der Belastung.

In Abb.7 sind Druckversuche mit konstanter Dehnungsrate von Jones u. Brunet und von Ramseier wiedergegeben. Nach einem anfänglich quasilinearen Verlauf erreichen die

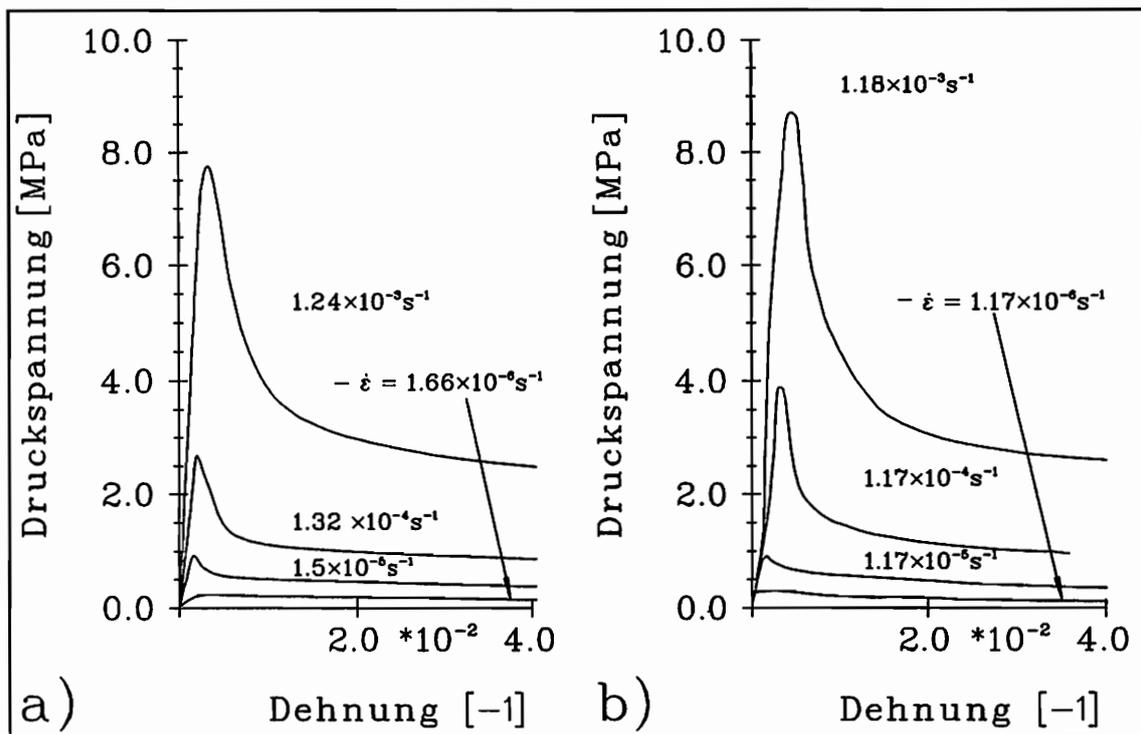


Abb. 7: Druckversuche mit konstanter Dehnungsrate $\dot{\epsilon}$

a) Ramseier (1972), $T = -10^\circ\text{C}$;

b) Jones u. Brunet (1978), $T = -5^\circ\text{C}$

(Die Versuchsdaten wurden mit dem Faktor 2 (Spannungen) bzw. 0.5 (Dehnungen, Dehnungsrate) auf Druckversuche umgerechnet.)

Spannungen einen Maximalwert, um dann, im Anschluß an einen sehr stark ausgeprägten Spannungsabfall, gegen eine horizontale Tangente zu streben. Mit einer Verringerung der Dehnungsrate nimmt auch die Höhe des Spannungsabfalls ab. Bei langsamen Versuchen kann dieser auch ganz fehlen. Jones u. Brunet (1978) ermittelten aus ihren Versuchen den folgenden Zusammenhang zwischen der Maximalspannung τ_y und der Dehnungsrate $\dot{\epsilon}$:

$$\dot{\epsilon} \propto \tau_y^n \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) \quad \text{mit } n = 2 \quad \text{und} \quad Q = 70 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}} .$$

Die Temperaturabhängigkeit in Form der Arrheniusgleichung spricht dafür, daß die inelastischen Verformungen thermisch aktiviert sind. Der Exponent der Maximalspannungen liegt in einer Größenordnung, die mit den Ergebnissen von Steinemann harmoniert.

Bei beiden Versuchsführungen erfolgten die inelastischen Verformungen ausschließlich durch das Abgleiten der basalen Ebenen. Die Gleitebenen verteilen sich jedoch nicht gleichmäßig über den Kristall, sondern konzentrieren sich in einigen Ebenen, die dann als Gleitlinien auf der Oberfläche der Probe sichtbar sind.

Das Abgleiten von Kristallebenen geschieht nicht schlagartig um einen Gitterabstand, sondern sukzessive durch das Wandern von Versetzungen. Die von Higashi et al. (1968) und Fukuda u. Higashi (1969) mit Hilfe der Röntgen-Topographie beobachteten Versetzungen lagen hauptsächlich in der basalen Ebene, d.h. Burgersvektor und Versetzungslinie standen beide senkrecht zur c-Achse des Kristalls. Unter Belastung wanderten die Versetzungen innerhalb der basalen Ebene. Ein Quergleiten wurde nicht beobachtet. Dies erklärt, warum im Experiment fast ausschließlich das Abgleiten von basalen Ebenen beobachtet wird. Die Versetzungsanzahl nahm während der Versuche zu. Versetzungsquellen befanden sich in der Mehrzahl an Spannungskonzentrationen, wobei häufig schon vorhandene polygonalisierte Stufenversetzungen oder Einschlüsse als Quelle fungierten. Da die neu entstehenden Versetzungen jeweils an eine basale Ebene gebunden sind, behindern sie sich nur unwesentlich in ihrer Bewegung. Eine Zunahme der Versetzungsdichte bedeutet somit für Eis eine Entfestigung des Kristalls. Mit der Gleichung von Orowan (1934)

$$\dot{\gamma}_i = b\lambda v \quad (2.1)$$

ergibt sich aus den mikroskopischen Größen, nämlich dem Betrag des Burgersvektors b , der Versetzungsdichte λ und der Geschwindigkeit der Versetzungen v , die entsprechende makroskopische Größe, die zeitliche Änderung der inelastischen Abgleitung $\dot{\gamma}_i$.

Die Ergebnisse der mikromechanischen Untersuchungen können somit das Aussehen der Kriechkurven direkt erklären. Aus den Ergebnissen von Steinemann, daß für große Zeiten die Kriechkurven gegen eine Gerade streben, ergibt sich im Rückschluß, daß die Versetzungsdichte gegen einen Grenzwert strebt. Es wird sich weiter unten zeigen, daß dieser spannungsabhängig ist.

Aber auch für das Verhalten im Druckversuch mit konstanter Dehnungsrate ergibt sich aus der Versetzungsvervielfachung eine schlüssige Erklärung. Ist zu Beginn des Versuchs die Versetzungsdichte noch sehr gering und damit auch die inelastische Dehnungsrate sehr klein, dann verformt sich der Kristall zunächst quasi rein elastisch, d.h. im Spannungs-Dehnungsdiagramm verläuft die Kurve entlang der elastischen Geraden. Mit der Zeit werden aufgrund der dann anliegenden Spannung neue Versetzungen erzeugt. Im Spannungsmaximum hat die inelastische Dehnungsrate dann gerade die von außen vorgegebene Gesamtdehnungsrate erreicht. Von nun an sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Die augenblickliche Versetzungsdichte hat den Wert der stationären Versetzungsdichte, die der anliegenden Spannung entspricht. Dann verläuft die Kurve von nun an als horizontale Gerade. Ein solcher Verlauf wird bei sehr kleinen Dehnungsraten beobachtet.

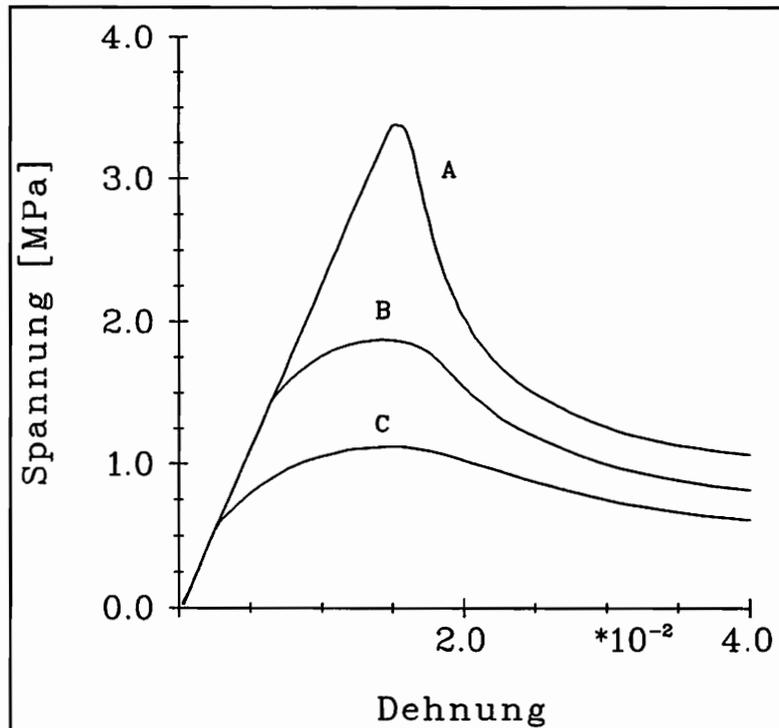


Abb. 8: Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit im Druckversuch, $T = -10^{\circ}\text{C}$, $\dot{\epsilon} = 4,2 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$
A,B,C siehe Text (Muguruma (1968))

- Die Versetzungsdichte hat den stationären Wert noch nicht erreicht. Die inelastische Dehnungsrate nimmt daher weiter zu und wird somit größer als die Gesamtdehnungsrate. Der elastische Anteil muß dann negativ werden, d.h. die Spannung sinkt, bis die dazugehörige stationäre Versetzungsdichte der momentanen Versetzungsdichte entspricht.

Muguruma (1968) untersuchte den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit von monokristallinen Eisproben auf das Verhalten im Druckversuch mit konstanter Dehnungsrate. Einige typische Verläufe sind in Abb.8 wiedergegeben. Die Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- In der aufgerauhten Oberfläche einer Probe existieren viele Versetzungsquellen. Im Experiment bilden sich daher viele dichtliegende Gleitbänder aus und die Maximalspannung ist relativ niedrig (Kurven vom Typ B).
- Proben mit glatter Oberfläche haben im Gegensatz dazu wenig Versetzungsquellen.

Daher liegen die Gleitbänder weiter auseinander und die Maximalspannung ist entsprechend hoch (Kurven vom Typ A).

Einige Proben zeigten einen Versuchsverlauf vom Typ C. Bei solchen Kristallen ließ sich die Maximalspannung nicht durch die Oberflächenbeschaffenheit beeinflussen. Nach Muguruma haben solche Kristalle im Inneren eine hohe Anfangsversetzungsdichte. Da jedoch nicht nur die Maximalspannung, sondern auch die Spannung am Ende des Experimentes unterhalb der anderen Kurven liegt, sollten diese Kristalle nicht nur eine hohe Anfangsversetzungsdichte, sondern auch eine hohe Versetzungsquellendichte aufweisen.

2.3.2 Übersicht über einige einaxiale Materialgleichungen

Basierend auf der Gleichung von Orowan (2.1) wurden einige eindimensionale Stoffgesetze für die inelastischen Deformationen monokristallinen Eises aufgestellt.

Readey u. Kingery (1964) ermittelten mit ihren Experimenten die Parameter m und n der Gleichung

$$\dot{\gamma}_i = K \gamma_i^m \tau^n$$

zu $m = 1$ und $n = 2.5$ für kleine Dehnungen, abnehmend auf 1.5 für große Dehnungen. Die Dehnungsabhängigkeit der obigen Gleichung sehen sie durch die Versetzungsdichte λ bedingt, $\lambda \propto \gamma_i$. Für die Geschwindigkeit der Versetzungen erhalten sie entsprechend $v \propto \tau^n$.

Jones u. Glen (1969) berechneten mit einem ähnlichen Modell ($m = 1$) Druckversuche mit konstanter Dehnungsrate. Die Anpassung an ein Experiment ergab $n = 3$.

Röntgentopographische Untersuchungen von Mai (1976) ergaben jedoch einen linearen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit einer isolierten Versetzung und der resultierenden Schubspannung, Abb.9. Dieses Ergebnis bestätigen auch andere Messungen, die von Whitworth (1978) zusammengestellt wurden.

Michel (1978) leitete für die Versetzungsdichte λ und die Geschwindigkeit der Versetzungen v folgende Gleichung her:

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_0(1 + \alpha \gamma_i^m) \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^2 & \text{für } \gamma_i \leq \gamma_t \\ \lambda_0(1 + \alpha \gamma_i^m) \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^2 & \text{für } \gamma_i > \gamma_t \end{cases}$$

$$v = v_0 \frac{\tau}{\tau_0} \exp\left(-\frac{Q}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right) .$$

Die Abhängigkeit der Versetzungsdichte vom Quadrat der Spannung ist mikromechanisch begründet. Sie gilt jedoch strenggenommen nur für den stationären Zustand. Es wurde daher

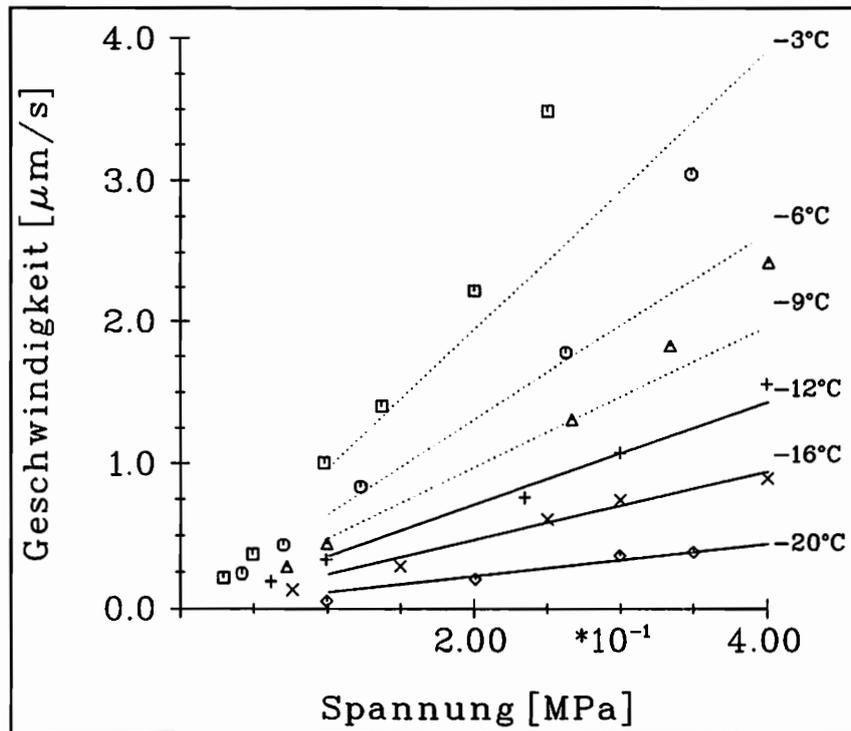


Abb. 9: Geschwindigkeit von isolierten Versetzungen in Abhängigkeit von der Spannung, Mai (1976)

rein empirisch der von γ_i abhängige Vorfaktor eingeführt. Überschreitet γ_i eine bestimmte Grenze γ_t , dann ändert sich λ nicht mehr und es ist der stationäre Zustand erreicht.

Den bisher aufgeführten Materialgleichungen ist gemeinsam, daß sie alle die inelastische Dehnung zur Kennzeichnung des inneren Zustandes, d.h. der Versetzungsdichte des Einkristalls, nutzen. Eine solche Vorgehensweise ist jedoch nur bei der Beschreibung monotoner Prozesse sinnvoll. Bei Versuchen mit Belastungsumkehr können die inelastischen Verzerrungen auch wieder abnehmen und zu Null werden, womit dann der ursprüngliche Zustand wieder erreicht wäre. Dies widerspricht jedoch der experimentellen Erfahrung.

Zum Schluß dieses Kapitels sei noch auf eine Arbeit von Fukuda u. Hitoshi (1981) hingewiesen. Sie modifizieren Orowans Gleichung, indem sie zwar einen linearen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit der Versetzung und der effektiven Schubspannung $\bar{\tau}$ annehmen, $v = C\bar{\tau}$, aber die Versetzungen in Gruppen einteilen, die durch ihre Widerstandsspannung τ_m gekennzeichnet werden. τ_m ist dabei die Schubspannung, die notwendig ist, um zwei Reihen paralleler Schraubenversetzungen mit unterschiedlichem Vorzeichen aneinander vorbei zu bewegen. Sie erhalten dadurch folgende Gleichung:

$$\dot{\gamma}_i = bC \int_0^{\tau_a} \varrho(\tau_m, \lambda_f) \bar{\tau}(\tau_m, \tau_a, \lambda_f) d\tau_m \quad .$$

ρ ist die anteilige Versetzungsdichte, λ_f ein Konfigurationsparameter und τ_a die aufgebrachte Spannung. $\bar{\tau}$ wird durch folgende Relation eingegrenzt:

$$\tau_a > \bar{\tau} > \sqrt{\tau_a^2 - \tau_m^2} \quad \text{für } 0 < \lambda_f < \infty \quad .$$

Geht man davon aus, daß alle Versetzungen unbeeinflusst voneinander sind, also für alle $\tau_m = 0$ gilt, dann erhält man $\rho(\tau_m) = \delta(\tau_m)\lambda$, mit der Dirac-Funktion δ und der Gesamtversetzungsdichte λ . Das Ausführen der Integration liefert dann wieder die ursprüngliche Form der Gleichung von Orowan.

Fukuda u. Hitoshi haben die anteiligen Versetzungsdichten aus Relaxationsversuchen bestimmt. Diese weisen alle einen sehr stark ausgeprägten Peak bei kleinen Spannungen auf und sind somit der Dirac-Funktion nicht unähnlich. Dies deutet auf eine nur kleine Abweichung von der linearen Form der ursprünglichen Orowan-Gleichung hin.

Hinzu kommt, daß bei der Ermittlung der anteiligen Versetzungsdichten angenommen werden mußte, daß sich im Verlauf eines Relaxationsversuchs die Versetzungsdichte nicht ändert. Setzt man jedoch die Gültigkeit des oben angeführten Ansatzes von Michel voraus, daß die stationäre Versetzungsdichte vom Quadrat der Spannung abhängig ist, dann wird mit abnehmender Spannung schnell die stationäre Versetzungsdichte unter die aktuelle fallen, welche sich dann von oben dem stationären Wert nähern wird. Zieht man die Möglichkeit einer Abnahme der Versetzungsdichte mit in Betracht, dann kann der im Relaxationsversuch beobachtete nichtlineare Verlauf von $\dot{\gamma}_i(\tau_a)$ auch allein dadurch erklärt werden.

Die experimentellen Ergebnisse, daß sich Versetzungsstrukturen auch durch längeres Lagern bei hohen Temperaturen kaum verändern, stehen zum Zuvorgesagten nicht im Widerspruch. Im einen Fall verlassen überzählige Versetzungen durch einen spannungsinduzierten Gleitprozeß den Kristall an seinen Rändern und erzeugen äußerlich sichtbare inelastische Deformationen, im anderen Fall heben sich Versetzungen mit unterschiedlichem Vorzeichen gegenseitig auf, ohne daß dies makroskopisch direkt beobachtbar wäre.

2.3.3 Nichtbasale Gleitung

Higashi (1966) führte Zugversuche mit natürlich gewachsenen Eiseinkristallen durch. Die c-Achse bildete einen rechten Winkel mit der Probenachse, d.h. der Belastungsrichtung. Basale Gleitung war somit ausgeschlossen. Abb.10 zeigt zwei typische Spannungs-Dehnungs-Kurven. Der an den Kurven angegebene Parameter θ kennzeichnet den Winkel zwischen der prismatischen Ebene und der Belastungsrichtung. Higashi teilt die Experimente in 3 Phasen ein. In Phase I steigt die Spannung nahezu linear mit der Dehnung. Nach einem kurzen

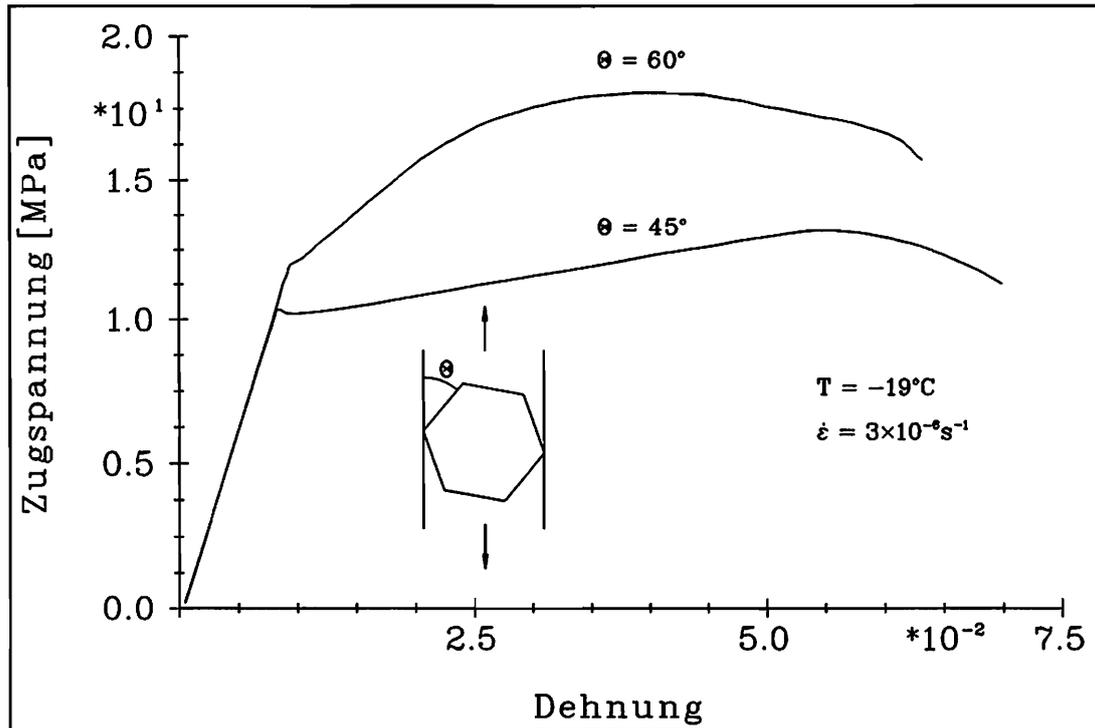


Abb. 10: Spannungs-Dehnungsdiagramm der nichtbasalen Gleitung (Higashi (1966))

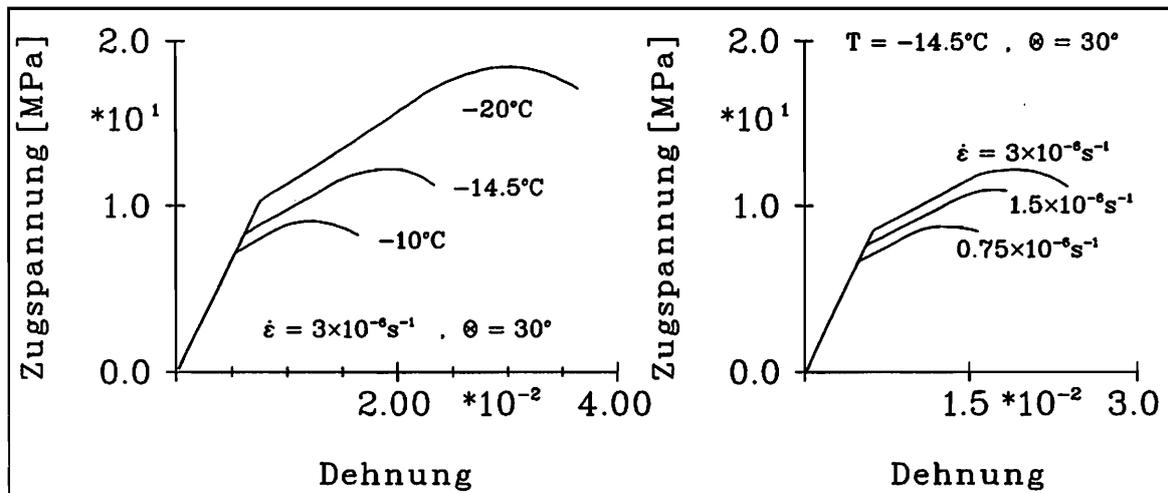


Abb. 11: Spannungs-Dehnungsdiagramme bei verschiedenen Temperaturen T und Dehnungsraten $\dot{\epsilon}$ (Higashi (1966))

Fließen verfestigt die Probe in Phase II. In der Phase III beginnt die Spannung langsam zu fallen – bis zum Bruch der Probe.

Diese Kurvenverläufe unterscheiden sich sehr deutlich von denen der entsprechenden basalen Versuche (Abb.7). Zum einen ist die Fließspannung τ am Ende von Phase I um einen Faktor

20 und mehr größer als die basale Peakspannung und zum anderen zeigen die nichtbasalen Experimente keinen ausgeprägten Spannungsabfall, sondern eine bemerkenswerte Verfestigung. Der Zusammenhang zwischen Fließspannung, Temperatur und Dehnungsrate wird durch

$$\dot{\epsilon} \propto \tau^m \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)$$

mit $m = 7$ beschrieben. Für die Aktivierungsenergie wird ein Wert von $Q = 50 \frac{\text{KJ}}{\text{mol}}$ angegeben. Die dazugehörigen Versuche zeigt Abb.11.

Die Abhängigkeit der Verfestigung von der Orientierung θ der prismatischen Ebenen wird von Higashi als Beleg dafür gesehen, daß die prismatischen Ebenen die Hauptgleitebenen der nichtbasalen Gleitung sind.

Ein Relaxationsversuch von Wakahama (1966) zeigt, daß es auch noch andere Verformungsmechanismen geben muß. Eine Probe wurde in c-Achsenrichtung belastet. Sowohl basale als auch prismatische Gleitung waren damit ausgeschlossen. Trotzdem konnten sich die Spannungen abbauen.

Higashi beobachtete weiter, daß während der nichtbasalen Gleitung im Eis viele kleine Poren sichtbar werden. Diese ordnen sich in Schichten an, die parallel zu einer der prismatischen Ebenen und manchmal auch senkrecht zur Belastungsrichtung liegen. In der Phase III wachsen die Poren innerhalb der Ebenen zu Rissen zusammen und initiieren so schließlich den Bruch der Probe.

Das Erscheinungsbild der Phasen II und III kann durch die Überlagerung zweier unterschiedlicher Phänomene erklärt werden.

Zum einen sind hier die verfestigenden Einflüsse, wie z.B. die gegenseitige Behinderung von Versetzungen, zu nennen. Diese könnten eine lineare Verfestigung bewirken. Zum anderen wird durch die überlagerte Materialschädigung mit wachsendem Porenanteil die Verfestigung immer mehr abgebaut, bis schließlich in Phase III der Schädigungseinfluß überwiegt und die Spannung zu fallen beginnt.

Es wäre interessant, die Spannungen in Abb.11 mit Hilfe des Porenvolumens bzw. der effektiven Querschnittsfläche auf effektive Spannungen im Sinne einer Damagetheorie umzurechnen und zu sehen, wie sich dadurch das Verfestigungsverhalten ändert.

Die Ursache für das Entstehen der Poren sieht Higashi im Klettern von Versetzungen, welches im Zugversuch Leerstellen erzeugt. Diese lagern sich dann zusammen und bilden so die Poren. Im Druckversuch sollten sich daher keine Poren bilden.

3. Dreidimensionales Stoffgesetz des Monokristalls

3.1 Vorbemerkungen

Bei der Herleitung des monokristallinen Stoffgesetzes wird von einer additiven Aufspaltung des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten in einen elastischen und einen inelastischen Anteil ausgegangen:

$$\underline{d} = \underline{d}_e + \underline{d}_i \quad . \quad (3.1)$$

Unter der Annahme vernachlässigbar kleiner elastischer Verformungen ist dies mit der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten \underline{F} in einen elastischen und einen inelastischen Anteil gleichbedeutend.

$$\underline{F} = \underline{F}_e \cdot \underline{F}_i$$

Die Verzerrungsgeschwindigkeiten \underline{d} lassen sich entweder als symmetrischer Anteil des Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes definieren

$$\underline{d} = \{\nabla \vec{v}\}_{sym} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{v} + \vec{v} \nabla) \quad (3.2)$$

oder aus der zeitlichen Änderung des Deformationsgradienten \underline{F} berechnen

$$\underline{d} = \{\dot{\underline{F}} \cdot \underline{F}^{-1}\}_{sym} \quad .$$

Ist das betrachtete Körperelement frei von Starrkörperrotationen und fällt die Referenzkonfiguration des Henckyschen Dehnungstensors $\underline{\varepsilon}_{(H)}$ mit der Momentankonfiguration zusammen, d.h. $\underline{\varepsilon}_{(H)} = \underline{0}$, dann gilt $\underline{d} = \dot{\underline{\varepsilon}}_{(H)}$. Bei sehr kleinen Dehnungen, $\|\underline{\varepsilon}\| \ll 1$, kann näherungsweise $\underline{d} = \dot{\underline{\varepsilon}}$ gesetzt werden. Die inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten werden entsprechend den zugrundeliegenden mikromechanischen Ursachen in 3 Anteile aufgespalten:

$$\underline{d}_i = \underline{d}_b + \underline{d}_p + \underline{d}_a \quad . \quad (3.3)$$

Für sie gelte die Bedingung der Volumenkonstanz $\text{Sp}(\underline{d}_i) = 0$. \underline{d}_b wird durch das Ableiten der basalen Ebenen hervorgerufen. Die Annahme nichtbasaler Gleitung in Richtung $\langle 1, 1, \bar{2}, 0 \rangle$

auf prismatischen Ebenen $\{1, \bar{1}, 0, 0\}$ führt auf die Komponente \underline{d}_p . Der Anteil \underline{d}_a beschreibt schließlich axiale (in Richtung der c-Achse) Verformungen des Kristalls, die durch basale oder prismatische Gleitung nicht erklärt werden können. Im Gegensatz zu \underline{d}_b und \underline{d}_p wird \underline{d}_a nicht aus den mikromechanischen Ursachen abgeleitet, sondern aus der Forderung, daß \underline{d}_i beliebige Formänderungen beschreiben können soll. Die mit der nichtbasalen Gleitung einhergehende Porenbildung (s. Abschnitt 2.3.3) führt in der Regel zu Volumenänderungen. Deren Berücksichtigung auf die inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten soll späteren Arbeiten vorbehalten bleiben.

3.2 Bestimmung der basalen Verzerrungsgeschwindigkeiten

Der Zusammenhang zwischen der Verzerrungsgeschwindigkeit \underline{d}_b und der Gleitgeschwindigkeit $\dot{\gamma}_i$ eines Gleitsystems mit der Gleitebene \vec{n}_i und der Gleitrichtung \vec{v}_i ist durch den Schmidtensor $\underline{\mu}_i = \frac{1}{2}(\vec{n}_i\vec{v}_i + \vec{v}_i\vec{n}_i)$ gegeben :

$$\underline{d}_b = \sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}_i \underline{\mu}_i \quad .$$

Für $\dot{\gamma}_i$ wird die Orowangleichung mit einem linearen Ansatz für $v(\tau_i)$ angenommen, $v(\tau_i) = k_v \tau_i$. Die effektive Schubspannung τ_i des Gleitsystems i ergibt sich aus dem doppeltskalaren Produkt des Schmidtensors mit dem Spannungstensor, $\tau_i = \underline{\mu}_i : \underline{\sigma}$. k_v ist eine temperaturabhängige Konstante.

$$\dot{\gamma}_i = bk_v \lambda_i \tau_i \quad \Rightarrow \quad \underline{d}_b = bk_v \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i \underline{\mu}_i \underline{\mu}_i \right) : \underline{\sigma} \quad (3.4)$$

Die 3 Gleitsysteme der basalen Gleitung haben alle den gleichen Normalenvektor \vec{n} . Die 3 Gleitrichtungen schließen jeweils einen Winkel von 120° miteinander ein. Sie lassen sich durch zwei orthogonale Einheitsvektoren, die in der basalen Ebene liegen, wie folgt ausdrücken:

$$\vec{v}_1 = \vec{e}_1 \quad , \quad \vec{v}_2 = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{e}_2 \quad , \quad \vec{v}_3 = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{e}_2$$

Nimmt man gleiche Versetzungsdichten auf allen drei Gleitsystemen an, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, dann

ist die Summe in Gleichung (3.4) nur noch vom Schmidtensor abhängig. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 \underline{\mu}_i \underline{\mu}_i &= \frac{1}{4} (\vec{e}_1 \vec{n} + \vec{n} \vec{e}_1) (\vec{e}_1 \vec{n} + \vec{n} \vec{e}_1) \\
&+ \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} (\vec{e}_1 \vec{n} + \vec{n} \vec{e}_1) + \frac{1}{2} \sqrt{3} (\vec{e}_2 \vec{n} + \vec{n} \vec{e}_2) \right) \\
&\quad \left(-\frac{1}{2} (\vec{e}_1 \vec{n} + \vec{n} \vec{e}_1) + \frac{1}{2} \sqrt{3} (\vec{e}_2 \vec{n} + \vec{n} \vec{e}_2) \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} (\vec{e}_1 \vec{n} + \vec{n} \vec{e}_1) - \frac{1}{2} \sqrt{3} (\vec{e}_2 \vec{n} + \vec{n} \vec{e}_2) \right) \\
&\quad \left(-\frac{1}{2} (\vec{e}_1 \vec{n} + \vec{n} \vec{e}_1) - \frac{1}{2} \sqrt{3} (\vec{e}_2 \vec{n} + \vec{n} \vec{e}_2) \right) \\
&= \frac{3}{8} (\vec{e}_1 \vec{n} \vec{e}_1 \vec{n} + \vec{n} \vec{e}_1 \vec{n} \vec{e}_1 + \vec{e}_1 \vec{n} \vec{n} \vec{e}_1 + \vec{n} \vec{e}_1 \vec{e}_1 \vec{n}) \\
&+ \frac{3}{8} (\vec{e}_2 \vec{n} \vec{e}_2 \vec{n} + \vec{n} \vec{e}_2 \vec{n} \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \vec{n} \vec{n} \vec{e}_2 + \vec{n} \vec{e}_2 \vec{e}_2 \vec{n}) \quad .
\end{aligned}$$

Mit $\vec{e}_3 = \vec{n}$ folgt weiter

$$\sum_{i=1}^3 \underline{\mu}_i \underline{\mu}_i = \frac{3}{8} \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \vec{n} \vec{e}_i \vec{n} + \vec{n} \vec{e}_i \vec{n} \vec{e}_i + \vec{e}_i \vec{n} \vec{n} \vec{e}_i + \vec{n} \vec{e}_i \vec{e}_i \vec{n}) - \frac{3}{2} \vec{n} \vec{n} \vec{n} \vec{n} \quad .$$

Für den vierten Summanden kann man auch schreiben:

$$\sum_{i=1}^3 \vec{n} \vec{e}_i \vec{e}_i \vec{n} = \vec{n} \left(\sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \vec{e}_i \right) \vec{n} = \vec{n} \underline{1} \vec{n} \quad ,$$

denn die Summe der dyadischen Produkte der orthogonalen Vektoren \vec{e}_i ergibt gerade den Einheitstensor 2-ter Stufe. Die anderen Summanden ergeben sich aus dem vierten durch Vertauschen der beiden vorderen und/oder der beiden hinteren Vektoren. Damit gilt:

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \vec{n} \vec{e}_i \vec{n} + \vec{n} \vec{e}_i \vec{n} \vec{e}_i + \vec{e}_i \vec{n} \vec{n} \vec{e}_i + \vec{n} \vec{e}_i \vec{e}_i \vec{n}) = [\vec{n} \underline{1} \vec{n}]_{s,s} \quad ,$$

d.h. die Summe ergibt sich aus der Symmetrisierung des Tensors $\vec{n} \underline{1} \vec{n}$ bezüglich des vorderen bzw. hinteren Indexpaares. Man erhält:

$$\sum_{i=1}^3 \underline{\mu}_i \underline{\mu}_i = \frac{3}{4} \underline{I}^b$$

mit

$$\underline{I}^b = 2 [\vec{n} \underline{1} \vec{n}]_{s,s} - 2 \vec{n} \vec{n} \vec{n} \vec{n} \quad . \quad (3.5)$$

Der so definierte Tensor \underline{I}^b hat die Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{I}}^b : \underline{\underline{I}}^b &= \underline{\underline{I}}^b \\
\underline{\underline{1}} : \underline{\underline{I}}^b &= \underline{\underline{I}}^b : \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}} \\
\text{Sp}(\underline{\underline{I}}^b) &= 2 \quad .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Für die basalen Verzerrungsgeschwindigkeiten erhält man damit

$$\underline{\underline{d}}_b = \frac{3}{4} b k_v \lambda \underbrace{\underline{\underline{I}}^b : \underline{\underline{\sigma}}}_{=\underline{\underline{\tau}}_b} \quad . \tag{3.7}$$

Von den 3 Gleitsystemen der basalen Gleitung sind 2 linear unabhängig. Die basale Gleitung spannt daher einen 2-dimensionalen Unterraum des 6-dimensionalen Dehnungs- bzw. Spannungsraumes auf. $\underline{\underline{\tau}}_b$ muß dann ebenfalls in diesem Unterraum liegen. $\underline{\underline{I}}^b$ bildet also den beliebigen Spannungszustand $\underline{\underline{\sigma}}$ in diesen Unterraum ab. Da $\underline{\underline{I}}^b$ nur noch von der Orientierung der basalen Ebene und nicht mehr von ausgezeichneten Gleitrichtungen abhängt, folgt zusammen mit Gleichung (3.6), daß $\underline{\underline{I}}^b \underline{\underline{\sigma}}$ in den Unterraum der basalen Gleitung projiziert. In einem Koordinatensystem, dessen 3-Achse mit \vec{n} zusammenfällt, sind nur die Spannungskomponenten $(\underline{\underline{\tau}}_b)_{13}$ und $(\underline{\underline{\tau}}_b)_{23}$ ungleich Null. Falls die 2-Richtung mit der Richtung der maximalen basalen Schubspannung zusammenfällt, gilt ferner $(\underline{\underline{\tau}}_b)_{13} = 0$. Mit $(\underline{\underline{\tau}}_b)_{23} = \tau_b$ folgt $\underline{\underline{\tau}}_b : \underline{\underline{\tau}}_b = 2\tau_b^2$ und weiter:

$$\tau_b = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{I}}^b : \underline{\underline{\sigma}}} \quad . \tag{3.8}$$

$\underline{\underline{I}}^b$ ist der Einheitstensor des 2-dimensionalen Unterraumes. Seine Spur ist demzufolge gleich zwei. Physikalisch bedeuten diese Ergebnisse, daß die Verformung in Richtung der maximalen basalen Schubspannung erfolgt. Dies stimmt gut mit den experimentellen Beobachtungen überein und kann somit als Bestätigung der Annahme gleicher Versetzungsdichten in allen Gleitsystemen angesehen werden.

Setzt man die Parallelität von maximaler basaler Schubspannung und Verformung von Anfang an voraus, dann ergibt sich eine andere Möglichkeit, Gleichung (3.7) herzuleiten. Es wird zunächst der Betrag τ_b und die Richtung $\vec{\nu}$ der maximalen basalen Schubspannung berechnet. Mit dem aus \vec{n} und $\vec{\nu}$ gebildeten Schmidtensor und $\underline{\underline{d}}_b = \dot{\gamma}_b \underline{\underline{\mu}}_b$ erhält man

$$\underline{\underline{d}}_b = \frac{\dot{\gamma}_b}{2\tau_b} \underline{\underline{I}}^b : \underline{\underline{\sigma}} \quad . \tag{3.9}$$

Die basale Gleitgeschwindigkeit $\dot{\gamma}_b$ kann dabei in beliebiger Weise von dem augenblicklichen Zustand und der Belastung des Materials abhängen. Die Gleichung von Orowan mit linearer Spannungsabhängigkeit, $\dot{\gamma}_b = b\lambda_b k_v \tau_b$, ist eine Möglichkeit, diesen Zusammenhang zu formulieren. Für $\lambda_b = \frac{3}{2}\lambda$ stimmen die Gleichungen (3.9) und (3.7) überein. In λ_b sind sozusagen die Versetzungsdichten der drei Gleitsysteme zu einer effektiven Versetzungsdichte zusammengefaßt.

3.3 Bestimmung der prismatischen Verzerrungsgeschwindigkeiten

Es gibt drei prismatische Gleitsysteme mit basalem Burgersvektor

$$\begin{aligned}\bar{n}_1 &= \bar{e}_1, & \bar{v}_1 &= \bar{e}_2 \\ \bar{n}_2 &= -\frac{1}{2}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}\bar{e}_2, & \bar{v}_2 &= -\frac{1}{2}\sqrt{3}\bar{e}_1 - \frac{1}{2}\bar{e}_2 \\ \bar{n}_3 &= -\frac{1}{2}\bar{e}_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\bar{e}_2, & \bar{v}_3 &= +\frac{1}{2}\sqrt{3}\bar{e}_1 - \frac{1}{2}\bar{e}_2.\end{aligned}$$

Die Herleitung erfolgt analog zur basalen Gleitung:

$$\dot{\gamma}_i = b\lambda_i k_{vp} \tau_i, \quad \underline{d}_p = \sum_{i=1}^3 \dot{\gamma}_i \underline{\mu}_i \quad \text{und} \quad \tau_i = \underline{\mu}_i : \underline{\sigma}.$$

Die Annahme von gleichen Versetzungsdichten auf den drei prismatischen Gleitsystemen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ und die lineare Spannungsabhängigkeit erlauben es auch hier, die Summation über die drei Gleitsysteme direkt auszuführen. Man erhält:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 \underline{\mu}_i \underline{\mu}_i &= \frac{1}{4} (\bar{e}_1 \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \bar{e}_1) (\bar{e}_1 \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \bar{e}_1) \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \bar{e}_1 \bar{e}_1 - \frac{1}{2} \sqrt{3} \bar{e}_2 \bar{e}_2 - \frac{1}{2} (\bar{e}_1 \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \bar{e}_1) \right) \\ &\quad \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \bar{e}_1 \bar{e}_1 - \frac{1}{2} \sqrt{3} \bar{e}_2 \bar{e}_2 - \frac{1}{2} (\bar{e}_1 \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \bar{e}_1) \right) \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \bar{e}_1 \bar{e}_1 - \frac{1}{2} \sqrt{3} \bar{e}_2 \bar{e}_2 + \frac{1}{2} (\bar{e}_1 \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \bar{e}_1) \right) \\ &\quad \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \bar{e}_1 \bar{e}_1 - \frac{1}{2} \sqrt{3} \bar{e}_2 \bar{e}_2 + \frac{1}{2} (\bar{e}_1 \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \bar{e}_1) \right) \\ &= \frac{3}{8} \{ \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_1 \bar{e}_2 + \bar{e}_2 \bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_1 + \underline{\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_2 \bar{e}_1} + \underline{\bar{e}_2 \bar{e}_1 \bar{e}_1 \bar{e}_2} \\ &\quad + \bar{e}_1 \bar{e}_1 \bar{e}_1 \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \bar{e}_2 \bar{e}_2 \bar{e}_2 + \underline{\bar{e}_1 \bar{e}_1 \bar{e}_1 \bar{e}_1} + \underline{\bar{e}_2 \bar{e}_2 \bar{e}_2 \bar{e}_2} \\ &\quad - (\bar{e}_1 \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \bar{e}_2) (\bar{e}_1 \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \bar{e}_2) \}.\end{aligned}$$

Mit $\bar{e}_1 \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \bar{e}_2 = \underline{1} - \bar{n} \bar{n}$ lassen sich die unterstrichenen Teile der Gleichung wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned}(\underline{\quad}) &= (\underline{1} - \bar{n} \bar{n}) (\underline{1} - \bar{n} \bar{n}) \\ (\underline{\quad})^{ij}_{kl} &= (\underline{1} - \bar{n} \bar{n})^i_l (\underline{1} - \bar{n} \bar{n})^j_k.\end{aligned}$$

Die oberhalb der jeweiligen Tensoren stehenden Indizes geben dabei die Position der Basisvektoren innerhalb des dyadischen Produktes an. Daraus folgt:

$$\sum_{i=1}^3 \underline{\mu}_i \underline{\mu}_i = \frac{3}{4} \underline{I}^p$$

$$\underline{\underline{I}}^p = \left\{ \left[\left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}} \right) \left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}} \right) \right]_{s.s} - \frac{1}{2} (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}}) (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}}) \right\} . \quad (3.10)$$

Der so definierte Tensor 4-ter Stufe $\underline{\underline{I}}^p$ hat die gleichen Eigenschaften wie der Tensor $\underline{\underline{I}}^b$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{I}}^p : \underline{\underline{I}}^p &= \underline{\underline{I}}^p \\ \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{I}}^p &= \underline{\underline{I}}^p : \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}} \\ \text{Sp}(\underline{\underline{I}}^p) &= 2 . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Für den Tensor der prismatischen Verzerrungsgeschwindigkeiten erhält man:

$$\underline{\underline{d}}_p = \frac{3}{4} b k_{vp} \lambda \underbrace{\underline{\underline{I}}^p : \underline{\underline{\sigma}}}_{=\underline{\underline{\tau}}_p} . \quad (3.12)$$

Mit $\frac{3}{2}\lambda = \lambda_p$, $\tau_p = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{I}}^p : \underline{\underline{\sigma}}}$ und $\dot{\gamma}_p = b\lambda_p k_{vp} \tau_p$ nimmt $\underline{\underline{d}}_p$ die zu Gleichung (3.9) analoge Form an:

$$\underline{\underline{d}}_p = \frac{\dot{\gamma}_p}{2\tau_p} \underline{\underline{I}}^p : \underline{\underline{\sigma}} . \quad (3.13)$$

τ_p und $\dot{\gamma}_p$ sind die äquivalenten Größen des einfachen Scherversuchs.

$\underline{\underline{d}}_p$ beschreibt einen ebenen Verzerrungszustand in der basalen Ebene. Da für die inelastischen Verformungen Volumenkonstanz angenommen wird, liegt $\underline{\underline{d}}_p$ in einem 2-dimensionalen Unterraum des 5-dimensionalen Deviatorraumes. $\underline{\underline{\tau}}_p$ ist die Projektion des beliebigen Spannungszustandes $\underline{\underline{\sigma}}$ in den Unterraum. $\underline{\underline{\tau}}_p$ entspricht demzufolge einem ebenen deviatorischen Spannungszustand in der basalen Ebene. $\underline{\underline{d}}_p$ und $\underline{\underline{\tau}}_p$ sind coaxial. Da $\underline{\underline{I}}^p$ unabhängig von den Orientierungen der prismatischen Ebenen ist und nur noch von der Orientierung $\underline{\underline{n}}$ der Kristallachse abhängt, sind die so beschriebenen Materialeigenschaften transversal isotrop. Obwohl die Experimente eine Abweichung von der transversalen Isotropie zeigen, soll diese trotzdem weiter vorausgesetzt werden. Zum einen ergibt sich das Stoffgesetz dann in einer einfacheren Form (die Orientierung der prismatischen Ebenen muß nicht festgelegt werden), zum anderen sind die nichtbasalen Formänderungen von untergeordneter Bedeutung für die Beschreibung des gesamten Verformungszustandes.

3.4 Bestimmung der axialen Verzerrungsgeschwindigkeiten

$\underline{\underline{I}}^p$ und $\underline{\underline{I}}^b$ spannen jeweils einen 2-dimensionalen Unterraum des Deviatorraumes auf. Da sie desweiteren die Gleichung

$$\underline{\underline{I}}^p : \underline{\underline{I}}^b = \underline{\underline{I}}^b : \underline{\underline{I}}^p = \underline{\underline{0}}$$

erfüllen, sind die beiden Unterräume linear unabhängig und spannen zusammen einen 4-dimensionalen Unterraum auf. Die fehlende 5. Dimension entspricht einer Längenänderung des Materials in Richtung der Achse der transversalen Isotropie, die durch basale und prismatische Verformungen alleine nicht beschrieben werden kann.

Gesucht wird also ein Tensor $\underline{\underline{I}}^a$, mit dem sich in der bekannten Weise der axiale Spannungstensor $\underline{\underline{\tau}}_a$ bestimmen läßt:

$$\underline{\underline{\tau}}_a = \underline{\underline{I}}^a : \underline{\underline{\sigma}} \quad .$$

Der Tensor $\underline{\underline{\tau}}_a$ soll nicht den durch $\underline{\underline{I}}^b$ und $\underline{\underline{I}}^p$ definierten Unterräumen angehören. Dann muß die Summe aus axialer, prismatischer und basaler Spannung gerade den Spannungsdeviator $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{1}}$ ergeben.

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}_a + \underline{\underline{\tau}}_p + \underline{\underline{\tau}}_b$$

Daraus folgt

$$\left(\underline{\underline{1}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}}\underline{\underline{1}} \right) : \underline{\underline{\sigma}} = (\underline{\underline{I}}^a + \underline{\underline{I}}^p + \underline{\underline{I}}^b) : \underline{\underline{\sigma}} \quad .$$

Da diese Gleichung für jedes beliebige $\underline{\underline{\sigma}}$ erfüllt sein muß, erhält man

$$\underline{\underline{I}}^a = \underline{\underline{1}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}}\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{I}}^p - \underline{\underline{I}}^b = \frac{3}{2} \left(\underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \right) \left(\underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \right) \quad . \quad (3.14)$$

$\underline{\underline{I}}^a$ hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \underline{\underline{I}}^a : \underline{\underline{I}}^a &= \underline{\underline{I}}^a \\ \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{I}}^a &= \underline{\underline{I}}^a : \underline{\underline{1}} = 0 \\ \text{Sp}(\underline{\underline{I}}^a) &= 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

und ist somit der Einheitstensor 4-ter Stufe des eindimensionalen Unterraumes des Deviatorraumes, in dem die Längenänderung in Richtung der Symmetrieachse beschrieben wird. Aus der transversalen Isotropie folgt auch hier die Koaxialität von $\underline{\underline{d}}_a$ und $\underline{\underline{\tau}}_a$. Für den einaxialen Zug haben $\underline{\underline{d}}_a$ und $\underline{\underline{\tau}}_a$ die Form (3-Achse = Symmetrie-Achse):

$$\underline{\underline{d}}_a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_a & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_a & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_a \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\tau}}_a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sigma_a \end{pmatrix} \quad .$$

Mit den äquivalenten Größen des einaxialen Zugversuches erhält man die Grundgleichungen der axialen Verformungen zu

$$\underline{\underline{d}}_a = \frac{3\dot{\epsilon}_a}{2\sigma_a} \underline{\underline{I}}^a : \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.16)$$

$$\sigma_a = \frac{3}{2} \left(\underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \right) : \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.17)$$

$$\underline{\underline{I}}^a = \frac{3}{2} \left(\underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \right) \left(\underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \right) \quad . \quad (3.18)$$

Diese Gleichung läßt sich auch vereinfachen zu

$$\underline{\underline{d}}_a = \frac{3}{2}\dot{\epsilon}_a \left(\underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \right) \quad . \quad (3.19)$$

Die erste Form wird jedoch bevorzugt, da sie formal denen der basalen und prismatischen Gleitung entspricht.

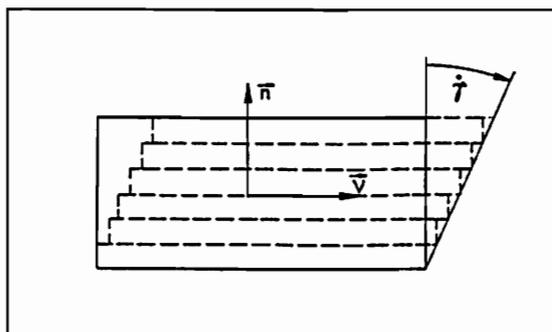


Abb. 12: Plastische Verformung mit einem Gleitsystem

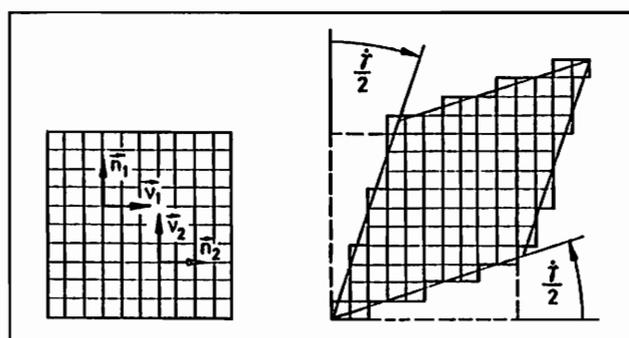


Abb. 13: Mögliche plastische Verformung mit zwei gleichwertigen Gleitsystemen

3.5 Der plastische Spin des Monokristalls

Unter der Voraussetzung kleiner elastischer Verformungen läßt sich der Tensor der Rotationsgeschwindigkeiten \underline{w} additiv in den Spintensor $\underline{\omega}$ und den plastischen Spin \underline{w}^p zerlegen.

$$\underline{w} = \underline{\omega} + \underline{w}^p \quad (3.20)$$

Aravas u. Aifantis (1991) geben für sie folgende geometrische Interpretation: $\underline{\omega}$ ist die Geschwindigkeit, mit der die Gleitsysteme rotieren.

$$\dot{\vec{n}}_i = \underline{\omega} \cdot \vec{n}_i \quad , \quad \dot{\vec{v}}_i = \underline{\omega} \cdot \vec{v}_i \quad (3.21)$$

\underline{w}^p ist die mittlere Rotationsgeschwindigkeit aller materiellen Linienelemente in der Umgebung des Beobachterpunktes, relativ zu einem Beobachter, der sich mit den Gleitsystemen bewegt.

Für die zeitliche Änderung $\dot{\vec{e}}$ eines Einheitsvektors in Richtung eines materiellen Linienelementes gilt allgemein

$$\dot{\vec{e}} = (\underline{w} + \underline{d} \cdot \vec{e}\vec{e} - \vec{e}\vec{e} \cdot \underline{d}) \cdot \vec{e} \quad . \quad (3.22)$$

In Abbildung 12 ist das Abgleiten einer Kristallebene dargestellt. Das Gleitsystem ändert dabei seine Orientierung nicht, d.h. $\underline{\omega} = 0$. Der plastische Spin \underline{w}^p entspricht dann gerade dem Tensor der Rotationsgeschwindigkeiten \underline{w} . Für \underline{w}^p erhält man

$$\underline{w}^p = \dot{\gamma} \frac{1}{2} (\underline{\nu} \underline{\bar{n}} - \underline{\bar{n}} \underline{\nu}) \quad . \quad (3.23)$$

Sind mehrere Gleitsysteme aktiv, dann gilt

$$\underline{w}^p = \sum_i \underline{w}_i^p = \sum_i \dot{\gamma}_i \frac{1}{2} (\underline{\nu}_i \underline{\bar{n}}_i - \underline{\bar{n}}_i \underline{\nu}_i) \quad . \quad (3.24)$$

In Abbildung 13 ist ein Sonderfall mit zwei Gleitsystemen dargestellt, mit $\underline{\nu}_1 = \underline{\bar{n}}_2$, $\underline{\nu}_2 = \underline{\bar{n}}_1$. Da die Schubspannungen in beiden Gleitsystemen gleich sind, werden es auch die Gleitgeschwindigkeiten sein. Damit folgt aus Gleichung (3.24)

$$\underline{w}^p = \frac{1}{2} \frac{\dot{\gamma}}{2} (\underline{\nu}_1 \underline{\bar{n}}_1 - \underline{\bar{n}}_1 \underline{\nu}_1 + \underline{\nu}_2 \underline{\bar{n}}_2 - \underline{\bar{n}}_2 \underline{\nu}_2) = \underline{0} \quad .$$

Mit den drei Gleitsystemen der prismatischen Gleitung ergibt sich der plastische Spin der prismatischen Formänderungen in gleicher Weise zu Null (Annahme gleicher Versetzungsdichten). Aus der transversalen Isotropie ergibt sich auch das Verschwinden des plastischen Spins der axialen Formänderungen und der Volumendehnungen.

Somit wird der plastische Spin nur durch basale Gleitung hervorgerufen. Ohne den Umweg über die drei basalen Gleitsysteme zu nehmen, kann der plastische Spin auch direkt durch Forderung einer Gleitrichtung $\underline{\nu}$ in Richtung der basalen Schubspannung ermittelt werden.

$$\underline{\nu} = \frac{\underline{\tau}_b \cdot \underline{\bar{n}}}{\sqrt{\underline{\bar{n}} \cdot \underline{\tau}_b^2 \cdot \underline{\bar{n}}}} \quad .$$

Daraus folgt

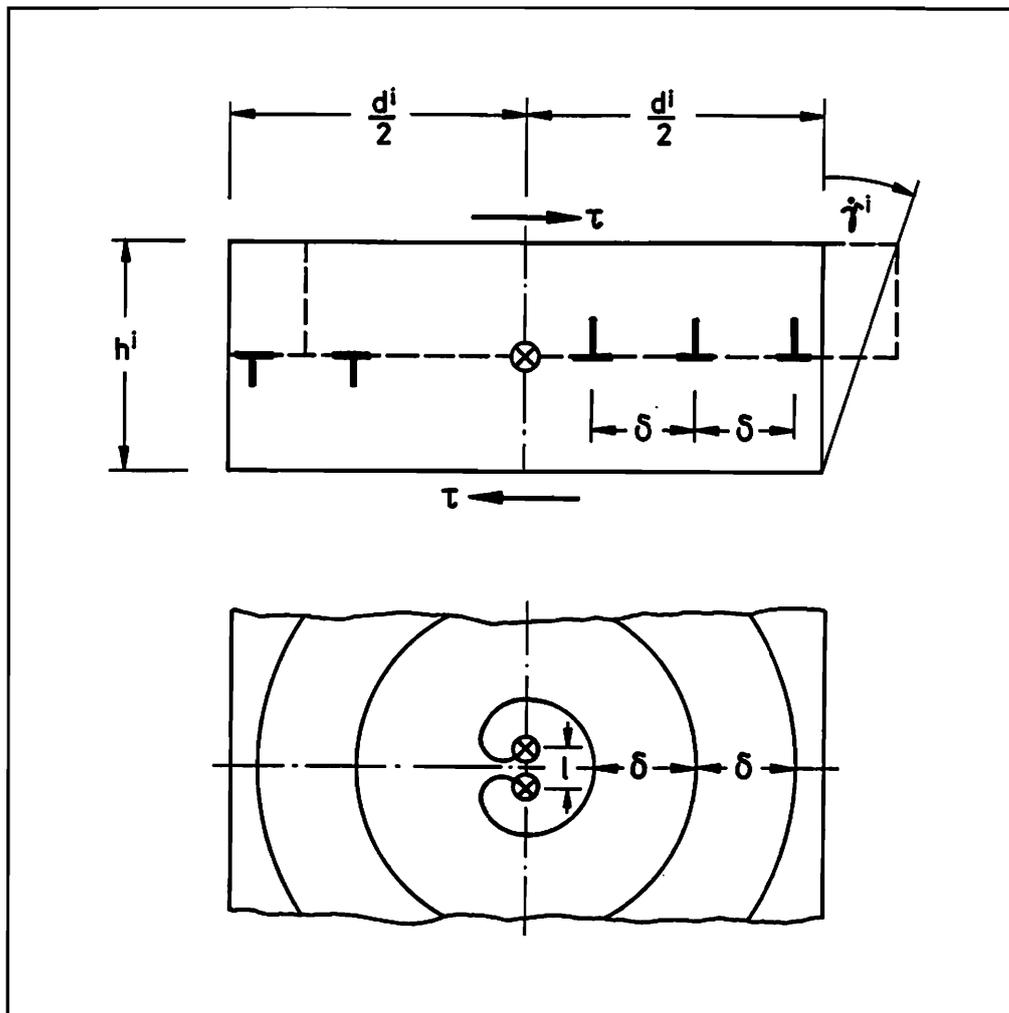
$$\underline{w}^p = \frac{\dot{\gamma}_b}{2\sqrt{\underline{\bar{n}} \cdot \underline{\tau}_b^2 \cdot \underline{\bar{n}}}} (\underline{\tau}_b \cdot \underline{\bar{n}} \underline{\bar{n}} - \underline{\bar{n}} \underline{\bar{n}} \cdot \underline{\tau}_b)$$

und mit Gleichung (3.9) folgt

$$\begin{aligned} \underline{w}^p &= \frac{\dot{\gamma}_b}{2\tau_b} (\underline{\tau}_b \cdot \underline{\bar{n}} \underline{\bar{n}} - \underline{\bar{n}} \underline{\bar{n}} \cdot \underline{\tau}_b) \\ &= \underline{d}_b \cdot \underline{\bar{n}} \underline{\bar{n}} - \underline{\bar{n}} \underline{\bar{n}} \cdot \underline{d}_b \quad . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Diese Gleichung wurde so auch von Aravas u. Aifantis (1991) angegeben. Unter der Voraussetzung, daß keine Effekte 2. Ordnung berücksichtigt werden, ist dieser Ansatz vollständig. Die allgemeine Form der Gleichung (3.25) wird in Abschnitt 8.7 aus der Sicht der Darstellungstheorie isotroper Tensorfunktionen hergeleitet.

3.6 Das eindimensionale Stoffgesetz der basalen Gleitung

**Abb. 14:** Frank-Read-Quelle

oben: Schnitt durch das Kontrollvolumen,

unten: Projektion des Kontrollvolumens auf die basale Ebene

Gesucht ist die Abhängigkeit der Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ von der Schubspannung τ und der Versetzungsdichte λ . Da sich die Versetzungsdichte zeitlich ändert, muß insbesondere auch die Evolutionsgleichung von λ bestimmt werden. Hierzu werden zunächst die Vorgänge an einer einzelnen Frank-Read-Quelle mit der Aktivierungsspannung τ^i untersucht, um dann durch Summation über alle vorhandenen Quellen zu der gesuchten Aussage zu kommen.

In Abbildung 14 ist eine Frank-Read-Quelle dargestellt, die sich in der Mitte eines Kontrollvolumens der Höhe h^i , der Breite d^i und beliebiger Tiefe befindet. Man kann sich den Kristall aus einer Vielzahl solcher Kontrollvolumina zusammengesetzt denken, wobei sich in der Mit-

te jeweils genau eine Quelle befindet. d^i ist somit der Abstand der Quellen in Laufrichtung der Versetzungen und h^i der Abstand senkrecht dazu. In der Aufsicht (Blick auf die basale Ebene) ist die Folge von Versetzungsringsen zu sehen, die sich um die Quelle herum bilden. Der Abstand der Versetzungsringsen δ ist proportional zur Länge l der Versetzungsquelle, die wiederum umgekehrt proportional zur Aktivierungsspannung τ^i der Quelle ist, Wakahama (1966).

$$\left. \begin{array}{l} \delta = \pi l \\ \tau^i = \frac{Gb}{l} \end{array} \right\} \Rightarrow \delta = \frac{\pi Gb}{\tau^i} \quad (3.26)$$

G ist der Schubmodul und b der Betrag des Burgersvektors. Die Versetzungsanzahl auf beiden Seiten der Quelle entwickelt sich immer in der gleichen Form. Es wird daher in der Folge nur noch eine Hälfte mit der Kontrollfläche $\frac{d^i}{2} h^i$ betrachtet. Die maximale Versetzungsanzahl in der Kontrollfläche ergibt sich zu

$$n_m = \frac{d^i/2}{\delta} .$$

Gelangt eine Versetzung zum Rand des Kontrollvolumens, so hebt sie sich dort gerade mit einer Versetzung aus dem benachbarten Kontrollvolumen auf. Im Extremfall kann d^i die doppelte Größe des Kristalldurchmessers annehmen. Dann liegt die Versetzungsquelle auf dem einen Kristallrand und die Versetzungen verlassen den Kristall auf dem gegenüberliegenden Rand.

Ist $v(\tau)$ die Geschwindigkeit der Versetzungen in Abhängigkeit von der Schubspannung τ , dann erhält man die Produktionsrate \dot{n}_e einer Versetzungsquelle zu

$$\dot{n}_e = \begin{cases} \frac{v(\tau)}{\delta} = \frac{\tau^i v(\tau)}{\pi Gb} & \tau > \tau^i \\ 0 & \tau < \tau^i \end{cases} . \quad (3.27)$$

Da eine Quelle nicht immer aktiv sein muß, die schon erzeugten Versetzungen sich aber auch bei geringerer Spannung bewegen, wird der wirkliche Abstand zwischen zwei Versetzungen vom minimalen Wert δ abweichen. Einen mittleren Abstand $\bar{\delta}$ kann man mit Hilfe der Anzahl der Versetzungen in der Kontrollfläche n^i definieren.

$$\bar{\delta} = \frac{d^i/2}{n^i}$$

Die Reduktionsrate \dot{n}_v (die Anzahl der Versetzungen, die pro Zeiteinheit die Kontrollfläche verlassen) errechnet sich damit näherungsweise zu

$$\dot{n}_v = \frac{v(\tau)}{\bar{\delta}} = \frac{2n^i v(\tau)}{d^i} . \quad (3.28)$$

Hat die Versetzungsanzahl n^i den Maximalwert n_m erreicht, dann ist $\delta = \bar{\delta}$ und es werden gerade soviel neue Versetzungen erzeugt, wie Versetzungen die Kontrollfläche verlassen. Ist

der stationäre Zustand noch nicht erreicht, dann ergibt sich die zeitliche Veränderung der Versetzungsanzahl \dot{n}^i zu

$$\dot{n}^i = \dot{n}_e - \dot{n}_v \quad . \quad (3.29)$$

Bezieht man die Versetzungsanzahl n^i und ihre Rate \dot{n}^i auf die Größe der Kontrollfläche, so erhält man die Versetzungsdichte λ^i und ihre Rate $\dot{\lambda}^i$

$$\lambda^i = \frac{n^i}{\frac{d^i}{2} h^i} \quad , \quad \dot{\lambda}^i = \frac{\dot{n}^i}{\frac{d^i}{2} h^i} \quad .$$

Daraus folgt

$$\dot{\lambda}^i = \begin{cases} \left(\frac{\tau^i}{\pi G b h^i} - \lambda^i \right) \frac{2v(\tau)}{d^i} & \text{für } \tau > \tau^i \\ - \lambda^i \frac{2v(\tau)}{d^i} & \text{für } \tau < \tau^i \end{cases} \quad . \quad (3.30)$$

Das Produkt $b\dot{n}_v$ ergibt die Geschwindigkeit, mit der der Kristall abgleitet. Bezogen auf die Höhe h^i erhält man gerade die Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}^i$.

$$\dot{\gamma}^i = b \frac{2n^i v(\tau)}{d^i} \frac{1}{h^i} = b \lambda^i v(\tau) \quad (3.31)$$

Die Gleichungen (3.30) und (3.31) gelten für eine Frank-Read-Quelle, die durch ihre Aktivierungsspannung τ^i und die Abmessungen der Kontrollfläche d^i und h^i gekennzeichnet ist.

Die Gesamtversetzungsdichte λ , ihre Rate $\dot{\lambda}$ und die Gesamtschergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ sind definiert durch

$$\lambda = \sum_i \lambda^i \quad , \quad \dot{\lambda} = \sum_i \dot{\lambda}^i \quad , \quad \dot{\gamma} = \sum_i \dot{\gamma}^i \quad . \quad (3.32)$$

Daraus folgt sofort die Gleichung von Orowan

$$\dot{\gamma} = b \lambda v(\tau) \quad .$$

Setzt man für die unterschiedlichen Quellen gleiche Abstände d^i voraus, $d^i = \text{konst.} = d$, dann können in der Entwicklungsgleichung von λ (Gleichung (3.32) mit (3.30)) die λ^i zur Gesamtversetzungsdichte λ zusammengefaßt werden.

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \left(\frac{1}{\pi G b} \sum_{i, \tau^i < \tau} \frac{\tau^i}{h^i} - \sum_i \lambda_i \right) \frac{2}{d} v(\tau) \\ &= \left(\frac{1}{\pi G b} \sum_{i, \tau^i < \tau} \frac{\tau^i}{h^i} - \lambda \right) \frac{2}{d} v(\tau) \end{aligned}$$

Die verbleibende Summation erstreckt sich nur über die Frank-Read-Quellen, deren Aktivierungsspannungen τ^i kleiner als die von außen aufgebrachte Schubspannung τ ist. $\mu^i = \frac{1}{h^i}$ ist die Quellendichte der Versetzungen mit der Aktivierungsspannung τ^i bezogen auf eine Strecke senkrecht zur basalen Ebene. Durch den Übergang von einer diskreten Verteilung μ^i auf eine Verteilungsdichte $\mu(\tau)$ erhält man das eindimensionale Stoffgesetz in seiner endgültigen Form.

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= b\lambda v(\tau) \\ \dot{\lambda} &= \left(\frac{1}{\pi G b} \int_0^\tau \mu(\tau^*) \tau^* d\tau^* - \lambda \right) \frac{2}{d} v(\tau) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Es wird von folgenden Größen bestimmt:

- λ_0 : Anfangswert der Versetzungsdichte. Die weitere Entwicklung ist durch das Evolutionsgesetz festgelegt.
- $v(\tau)$: Versetzungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Schubspannung. Diese Funktion wurde von Maï (1976) an isolierten Versetzungen bestimmt. Er ermittelte eine lineare Spannungsabhängigkeit. Fukuda u. Hitoshi (1981) weisen jedoch darauf hin, daß v von einer effektiven Schubspannung $\bar{\tau}$ abhängig ist. Durch Wechselwirkungen zwischen Versetzungen auf benachbarten Gleitebenen kann $\bar{\tau}$ mit zunehmender Versetzungsdichte nach unten von der aufgebrachten Schubspannung τ abweichen. Anstelle von $v(\tau)$ könnte in Gleichung (3.33) $v(\bar{\tau}(\tau, \lambda))$ gesetzt werden. Im Rahmen dieser Arbeit sollen jedoch die Ergebnisse von Maï Verwendung finden.
- $\mu(\tau)$: Quellendichteverteilungsdichte. Sie beschreibt die Verteilung der als Quellen fungierenden Kristallbaufehler. Diese werden stark durch das Herstellungsverfahren des Monokristalls beeinflusst. Desweiteren wurde im Abschnitt 2.3 darauf hingewiesen, daß sich viele Versetzungsquellen auf der Oberfläche des Kristalls befinden und deren Häufigkeit somit von der Oberflächenbeschaffenheit abhängt. Es kann also nicht erwartet werden, daß es für monokristallines Eis genau eine Materialfunktion $\mu(\tau)$ gibt. Sie wird vielmehr zusätzlich von den genannten Einflüssen abhängen. Im stationären Zustand $\dot{\lambda} = 0$ ist die stationäre Versetzungsdichte λ_{st} nur eine Funktion der Spannung. $\lambda_{st} = \frac{1}{\pi G b} \int_0^\tau \mu(\bar{\tau}) \bar{\tau} d\bar{\tau}$. Damit wird auch die Spannungsabhängigkeit der stationären Gleitgeschwindigkeit $\dot{\gamma}_{st}$ im wesentlichen durch $\mu(\tau)$ bestimmt. Setzt man $v(\tau)$ als bekannt voraus, dann kann aus dem experimentell ermittelten Zusammenhang $\dot{\gamma}_{st}(\tau)$ zunächst $\lambda_{st}(\tau)$ und anschließend $\mu(\tau)$ berechnet werden.
- d : Abstand der Versetzungsquellen. Er beeinflusst die Geschwindigkeit, mit der der stationäre Zustand erreicht wird. Ist d groß, dann benötigt eine Quelle eine längere Zeit, um das Kontrollvolumen mit Versetzungen zu füllen.

Zum Abschluß sei noch darauf hingewiesen, daß die vier Größen λ_0, v, μ und d einen redundanten Faktor enthalten, der durch makroskopische Experimente (Zug-, Druck-, Kriech-, ...versuche) nicht ermittelt werden kann. Setzt man

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_0 &= \alpha \lambda_0 & , & \quad \bar{\lambda} = \alpha \lambda & , & \quad \dot{\bar{\lambda}} = \alpha \dot{\lambda} \\ \bar{v} &= \frac{1}{\alpha} v \\ \bar{d} &= \frac{1}{\alpha} d \\ \bar{\mu} &= \alpha \mu\end{aligned}$$

in Gleichung (3.33) ein, dann bleibt der makroskopisch beobachtbare Zusammenhang $\dot{\gamma}(\tau)$ unverändert. Durch die Festlegung von v auf der Basis der Ergebnisse von Maï ist diese Unbestimmtheit jedoch behoben.

3.7 Elastizitätstensor

Im Abschnitt 2.2 wurden die fünf unabhängigen Konstanten des Elastizitätstensors $\underline{\underline{C}}$ in der Voigt'schen Schreibweise angegeben, wie sie von Dantl (1968) experimentell bestimmt wurden. Im Abschnitt 8.6 wird eine an die transversale Isotropie des Kristalls angepaßte Schreibweise für Tensoren 4-ter Stufe hergeleitet.

$$\underline{\underline{C}} = c_h \underline{\underline{I}}^h + c_a \underline{\underline{I}}^a + c_{ah} (\underline{\underline{I}}^{ah} + \underline{\underline{I}}^{ha}) + c_p \underline{\underline{I}}^p + c_b \underline{\underline{I}}^b$$

Die Koeffizienten haben folgende physikalische Bedeutung:

c_h : beschreibt den Zusammenhang zwischen der Volumendehnung und dem hydrostatischen Druck.

c_a : entspricht der axialen Spannung durch eine axiale Dehnung

c_{ah} bzw. c_{ha} : beschreiben die Kopplung zwischen dem hydrostatischen Druck und der axialen Dehnung bzw. der axialen Spannung und der Volumendehnung

c_p bzw. c_b : sind die Proportionalitätsfaktoren zwischen dem ebenen, deviatorischen Spannungszustand und dem ebenen Verzerrungszustand in der basalen Ebene bzw. in einer zur basalen Ebene senkrechten Ebene.

Mit den Gleichungen (8.29) erhält man für die fünf Koeffizienten folgende Ergebnisse (in Abhängigkeit von der Temperatur T_c in $^{\circ}\text{C}$):

$$\begin{aligned}
c_h &= 25.115(1 - 1.7305 \cdot 10^{-3} T_c - 1.8044 \cdot 10^{-6} T_c^2) 10^3 \text{ MPa} \quad \pm 2.6\% \\
c_a &= 8.351 (1 - 1.4517 \cdot 10^{-3} T_c - 5.1824 \cdot 10^{-6} T_c^2) 10^3 \text{ MPa} \quad \pm 7.4\% \\
c_{ah} &= 0.144 (1 - 2.6428 \cdot 10^{-3} T_c + 19.986 \cdot 10^{-6} T_c^2) 10^3 \text{ MPa} \quad \pm 202\% \\
c_p &= 6.417 (1 - 0.8996 \cdot 10^{-3} T_c - 0.0607 \cdot 10^{-6} T_c^2) 10^3 \text{ MPa} \quad \pm 2.6\% \\
c_b &= 5.638 (1 - 1.601 \cdot 10^{-3} T_c - 3.62 \cdot 10^{-6} T_c^2) 10^3 \text{ MPa} \quad \pm 0.7\%
\end{aligned}$$

Der Koeffizient c_{ah} , der die Kopplung zwischen den axialen und den kugeltensorförmigen Größen beschreibt, ist im Vergleich zu den anderen Koeffizienten wesentlich kleiner. Desweiteren ist er mit einem relativen Fehler größer als 200% behaftet. Mit den vorhandenen Daten läßt sich also keine sichere Aussage über eine mögliche Kopplung machen. Sie soll daher vernachlässigt werden, d.h. $c_{ah} = 0$.

Geht man davon aus, daß die Größen c_h, \dots, c_b exakt stimmen und setzt trotzdem $c_{ah} = 0$ (hieraus resultiert ein relativer Fehler von 100%), dann ergeben sich nach der Rückrechnung für die Elastizitätskonstanten in der Voigt'schen Schreibweise folgende relative Fehler:

	Fehler nach Rückrechnung	experimenteller Fehler nach Dantl (1968)
c_{11} :	0.53 %	0.3 %
c_{12} :	1.05 %	2.0 %
c_{13} :	0.60 %	7.0 %
c_{33} :	0.97 %	0.4 %
c_{44} :	0.00 %	0.7 %

Sie liegen in etwa in der gleichen Größenordnung wie die Fehler, die von Dantl für seine experimentell bestimmten Werte angegeben werden, oder sie sind kleiner. Die Annahme $c_{ah} = 0$ ist also mit den Ergebnissen von Dantl verträglich. Eine direkte Bestimmung der Größen c_a, \dots, c_b aus den Versuchsdaten könnte die Frage nach dem Koppelterm c_{ah} ggf. besser beantworten. Die Versuchsdaten, d.h. die gemessenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten von Schallwellen, wurden von Dantl (1968) jedoch nicht mitveröffentlicht.

3.8 Das monokristalline Stoffgesetz, Zusammenfassung des Gleichungssystems

In den Abschnitten 3.2 bis 3.5 wurden die Gleichungen für die basalen, prismatischen und axialen Formänderungen sowie für den plastischen Spin \underline{W}^p aus den zugrundeliegenden Versetzungsbewegungen abgeleitet. Die einzelnen Verformungsanteile sind dadurch eindeutig den mikromechanischen Ursachen zugeordnet. Im Kapitel 8 wird ein anderer Zugang

gewählt. Mit Hilfe der Darstellungstheorie isotroper tensorwertiger Tensorfunktionen wird die allgemeine Form des Stoffgesetzes unter der Voraussetzung transversaler Isotropie ermittelt. Vernachlässigt man dabei in der Darstellung gemäß Gleichungen (8.21), (8.22) und (8.12) die Terme, die Effekte 2. Ordnung beschreiben ($\varphi_{pb} = \varphi_{bp} = 0$), setzt ferner für die inelastischen Deformationen Volumenkonstanz voraus ($\varphi_h = 0$) und macht die verbleibenden Koeffizienten φ_a, φ_p bzw. φ_b jeweils nur von den entsprechenden Invarianten S_a, S_p bzw. S_b abhängig, dann stimmen die Ergebnisse beider Herleitungsverfahren formal überein. Die Darstellungstheorie zeigt somit Möglichkeiten, wie das im folgenden zusammengefaßte Stoffgesetz für monokristallines Eis im Bedarfsfall erweitert werden kann, bzw. welche Einflüsse in ihm noch nicht berücksichtigt worden sind.

Inelastische Verzerrungsgeschwindigkeiten \underline{d}_i

$$\underline{d}_i = \underline{d}_a + \underline{d}_p + \underline{d}_b \quad (3.34)$$

Plastischer Spin \underline{w}^p

$$\underline{w}^p = \underline{d}_b \cdot \vec{n}\vec{n} - \vec{n}\vec{n} \cdot \underline{d}_b \quad (3.35)$$

\vec{n} : Einheitsvektor in Richtung der Achse der transversalen Isotropie (Kristallachse)

Basale Verzerrungsgeschwindigkeiten \underline{d}_b

$$\underline{d}_b = \frac{\dot{\gamma}_b}{2\tau_b} \underline{\tau}_b \quad (3.36)$$

$$\underline{\tau}_b = \underline{\underline{I}}^b : \underline{\sigma} \quad (3.37)$$

$$\underline{\underline{I}}^b = 2[\vec{n}\underline{1}\vec{n}]_{s,s} - 2\vec{n}\vec{n}\vec{n}\vec{n} \quad (3.38)$$

In einem Koordinatensystem, dessen 3-Achse mit \vec{n} und dessen 2-Achse mit der Richtung des Schubspannungsvektors $\vec{t} = \underline{\tau}_b \cdot \vec{n}$ zusammenfällt, hat $\underline{\tau}_b$ bzw. \underline{d}_b die Darstellung

$$\underline{\tau}_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_b \\ 0 & \tau_b & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{d}_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_b \\ 0 & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_b & 0 \end{pmatrix},$$

mit

$$\tau_b = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\tau}_b : \underline{\tau}_b} = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\sigma} : \underline{\underline{I}}^b : \underline{\sigma}} \quad (3.39)$$

Eindimensionales Stoffgesetz der basalen Gleitung γ_b (siehe auch Abschnitt 3.6)

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_b &= b\lambda_b v(\tau_b) \\ \dot{\lambda}_b &= \left(\frac{1}{\pi G b} \int_0^{\tau_b} \mu(\bar{\tau}) \bar{\tau} \, d\bar{\tau} - \lambda_b \right) \frac{2}{d} v(\tau_b) \\ v(\tau_b) &= k_{vb} \cdot \tau_b\end{aligned}\quad (3.40)$$

Prismatische Verzerrungsgeschwindigkeiten \underline{d}_p

$$\underline{d}_p = \frac{\dot{\gamma}_p}{2\tau_p} \underline{\tau}_p \quad (3.41)$$

$$\underline{\tau}_p = \underline{\underline{I}}^p : \underline{\sigma} \quad (3.42)$$

$$\underline{\underline{I}}^p = \left\{ \left[\left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}} \right) \left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}} \right) \right]_{s,s} - \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}} \right) \left(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}} \right) \right\} \quad (3.43)$$

In einem Koordinatensystem, dessen 3-Achse mit $\underline{\underline{n}}$ und dessen 2-Achse mit einer der Hauptschubspannungsrichtungen zusammenfällt (die Richtung der maximalen Hauptnormalspannung geht durch den 1. Quadranten der 1-2 Ebene), hat $\underline{\tau}_p$ bzw. \underline{d}_p die Darstellung

$$\underline{\tau}_p = \begin{pmatrix} 0 & \tau_p & 0 \\ \tau_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{d}_p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_p & 0 \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$\tau_p = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\tau}_p : \underline{\tau}_p} = \sqrt{\frac{1}{2} \underline{\sigma} : \underline{\underline{I}}^p : \underline{\sigma}} \quad (3.44)$$

$\dot{\gamma}_p = \dot{\gamma}_p(\tau_p, \dots)$ wurde aufgrund mangelnder experimenteller Untersuchungen nicht entwickelt.

Axiale Verzerrungsgeschwindigkeit \underline{d}_a

$$\underline{d}_a = \frac{3\dot{\epsilon}_a}{2\sigma_a} \underline{\tau}_a \quad (3.45)$$

$$\underline{\tau}_a = \underline{\underline{I}}^a : \underline{\sigma} \quad (3.46)$$

$$\underline{\underline{I}}^a = \frac{3}{2} \left(\underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \right) \left(\underline{\underline{n}}\underline{\underline{n}} - \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \right) \quad (3.47)$$

In einem Koordinatensystem, dessen 3-Achse mit \vec{n} zusammenfällt, hat $\underline{\tau}_a$ bzw. \underline{d}_a die Darstellung

$$\underline{d}_a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_a & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_a & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_a \end{pmatrix}, \quad \underline{\tau}_a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sigma_a & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sigma_a \end{pmatrix}$$

mit

$$\sigma_a = \frac{3}{2} \left(\vec{n} \vec{n} - \frac{1}{3} \underline{1} \right) : \underline{\sigma} \quad (3.48)$$

$\dot{\epsilon}_a = \dot{\epsilon}_a(\sigma_a, \dots)$ wurde aufgrund mangelnder experimenteller Untersuchungen nicht entwickelt.

3.9 Numerische Aufbereitung des Stoffgesetzes für den einaxialen Zug-Druckversuch

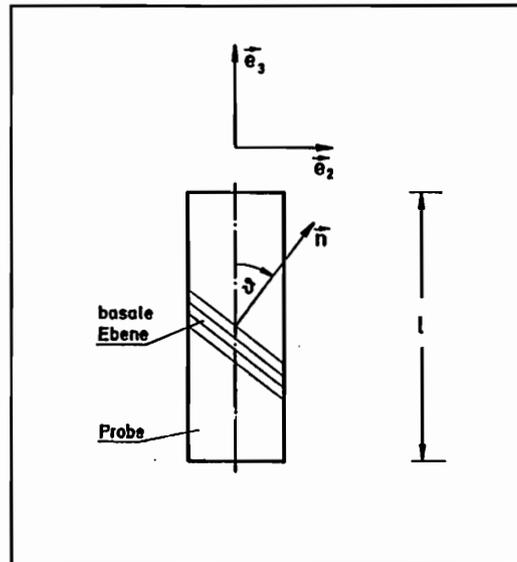


Abb. 15: Koordinatensystem mit dem Einheitsnormalenvektor der basalen Ebene \vec{n}

Der einaxiale Zug-Druckversuch wird in einem Koordinatensystem dargestellt, dessen 3-Achse mit der Probenachse zusammenfällt. Die 2-Achse liegt in der Ebene, die von \vec{e}_3 und der Kristallachse \vec{n} aufgespannt wird. In diesem Koordinatensystem haben der Spannungstensor $\underline{\sigma}$ und \vec{n} die Darstellung

$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{1 - n_3^2} \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma n_3 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Mit Gleichung (3.7) folgt für den basalen Spannungstensor $\underline{\tau}_b$

$$\begin{aligned}\underline{\tau}_b &= \underline{\bar{n}}\underline{\sigma} \cdot \underline{\bar{n}} + \underline{\bar{n}} \cdot \underline{\sigma}\underline{\bar{n}} - 2\underline{\bar{n}}\underline{\bar{n}}\underline{\bar{n}} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{\bar{n}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sigma \sin \vartheta \cos \vartheta & 2\sigma \cos^2 \vartheta & 0 \end{pmatrix} - 2\sigma \cos^2 \vartheta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \vartheta & \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \vartheta & \cos^2 \vartheta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sigma \sin 2\vartheta}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 2\vartheta & -\cos 2\vartheta \\ 0 & -\cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und

$$\tau_b = \sigma \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \quad .$$

Für die basale Verzerrungsgeschwindigkeit erhält man gemäß (3.9)

$$\underline{d}_b = \frac{\dot{\gamma}_b(\tau_b)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin 2\vartheta & -\cos 2\vartheta \\ 0 & -\cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta \end{pmatrix} \quad . \quad (3.50)$$

Die Längenänderung der Probe $\dot{\epsilon} = \frac{\dot{l}}{l}$ berechnet sich damit zu

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{K} + \frac{\dot{\gamma}_b(\tau_b)}{2} \sin 2\vartheta \quad .$$

$\frac{\dot{\sigma}}{K}$ ist dabei die elastische Verformung der Probe. Zugversuche mit konstanter Dehnungsrate $\dot{\epsilon}$ sind versuchstechnisch nur schwer zu realisieren. Gerade bei älteren Prüfmaschinen kann oft nur die Drehzahl des Antriebsmotors vorgegeben werden. In einem aus der Motordrehzahl berechneten $\dot{\epsilon}$ sind dann die elastischen Verformungen der Prüfmaschine enthalten und K ist demzufolge die effektive Steifigkeit von Probe und Prüfmaschine. Fukuda u. Shoji (1981) geben für ihre Prüfmaschine einen Wert von $K = 110\text{MPa}$ an. Sie weisen desweiteren darauf hin, daß die effektive Steifigkeit der Prüfeinrichtungen anderer Experimentatoren in der gleichen Größenordnung liegen. Ein Vergleich mit dem E-Modul des Monokristalls, der je nach Belastungsrichtung zwischen $8 \dots 12 \cdot 10^3\text{MPa}$ liegt, zeigt, daß die elastischen Eigenschaften quasi nur von der Prüfmaschine bestimmt werden. Auf die Berechnung der Abhängigkeit von K von der Orientierung des Kristalls wird daher verzichtet.

3.9.1 Rotation der Kristallachse

Die Rotation der Kristallachse berechnet sich nach Gleichung (3.21) zu

$$\dot{\vec{n}} = \underline{\omega} \cdot \vec{n} \quad . \quad (3.51)$$

Für den einaxialen Zug- oder Druckversuch kann der Spintensor $\underline{\omega}$ aus Gleichung (3.22) ermittelt werden. Jedes materielle Linienelement \vec{e} , das parallel zur Probenachse liegt, ändert im Verlauf des Versuchs seine Orientierung nicht, d.h. $\dot{\vec{e}} = 0$. Mit $\vec{e} = \vec{e}_3$ und $\underline{\omega} = \underline{\omega}^p + \underline{\omega}$ folgt unter der Annahme kleiner elastischer Verformungen ($\underline{d} \simeq \underline{d}_b$)

$$(\underline{\omega}^p + \underline{\omega} + \underline{d}_b \cdot \vec{e}_3 \vec{e}_3 - \vec{e}_3 \vec{e}_3 \cdot \underline{d}_b) \cdot \vec{e}_3 = \vec{0} \quad ,$$

mit $\underline{\omega}^p$ nach Gleichung (3.25) erhält man daraus nach skalarer Multiplikation mit \vec{n}

$$\vec{n} \cdot \underline{\omega} \cdot \vec{e}_3 = \vec{n} \cdot \vec{e}_3 (\vec{e}_3 \cdot \underline{d}_b \cdot \vec{e}_3 - \vec{n} \cdot \underline{d}_b \cdot \vec{n}) \quad .$$

Setzt man hierin \underline{d}_b bzw. \vec{n} gemäß Gleichung (3.50) bzw. (3.49) ein und beachtet $\vec{n} \cdot \underline{\omega} \cdot \vec{e}_3 = -\vec{e}_3 \cdot \underline{\omega} \cdot \vec{n}$, so folgt

$$\vec{e}_3 \cdot \underline{\omega} \cdot \vec{n} = -\dot{\gamma}_b(\tau_b) \sin \vartheta \cos^2 \vartheta \quad .$$

Wie sich aus Gleichung (3.51) ergibt, ist $\vec{e}_3 \cdot \underline{\omega} \cdot \vec{n}$ aber gerade die zeitliche Änderung der Komponente n_3 des Einheitsnormalenvektors \vec{n} der basalen Ebene.

$$\dot{n}_3 = -\dot{\gamma}_b(\tau_b) \sin \vartheta \cos^2 \vartheta \quad . \quad (3.52)$$

3.9.2 Das Differentialgleichungssystem

Mit den Beziehungen $\cos \vartheta = n_3$, $\sin \vartheta = \sqrt{1 - n_3^2}$ und $\frac{1}{2} \sin 2\vartheta = n_3 \sqrt{1 - n_3^2}$, dem eindimensionalen Stoffgesetz nach Gleichung (3.33) und einem linearen Ansatz für die Versetzungsgeschwindigkeit, $v(\tau_b) = k_{vb} \tau_b$, kann man das Differentialgleichungssystem des einaxialen Zug- bzw. Druckversuchs wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{\dot{\sigma}}{K} + b k_{vb} \lambda_b \tau_b n_3 \sqrt{1 - n_3^2} \\ \text{bzw. } \dot{\sigma} &= K \dot{\epsilon} - K b k_{vb} \lambda_b \tau_b n_3 \sqrt{1 - n_3^2} \\ \dot{\lambda}_b &= \left(\frac{1}{\pi G b} \int_0^{\tau_b} \mu(\bar{\tau}) \bar{\tau} \, d\bar{\tau} - \lambda_b \right) \frac{2 k_{vb} \tau_b}{d} \\ \dot{n}_3 &= -b k_{vb} \lambda_b \tau_b n_3^2 \sqrt{1 - n_3^2} \\ \tau_b &= n_3 \sqrt{1 - n_3^2} \sigma \quad . \end{aligned} \quad (3.53)$$

Das entsprechende Gleichungssystem für den einfachen Scherversuch bei basaler Gleitung lautet:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \frac{\dot{\tau}}{K_s} + bk_{vb}\lambda_b\tau \\ \dot{\lambda}_b &= \left(\frac{1}{\pi Gb} \int_0^\tau \mu(\bar{\tau})\bar{\tau} d\bar{\tau} - \lambda_b \right) \frac{2k_{vb}}{d}\tau \\ \dot{n}_3 &= 0 \quad .\end{aligned}\tag{3.54}$$

Hierin ist $\dot{\gamma}$ die Gleitgeschwindigkeit und τ die entsprechende Schubspannung.

Ein Vergleich der beiden Gleichungssysteme zeigt, daß der einaxiale Zug- bzw. Druckversuch dem einfachen Scherversuch nicht äquivalent ist. Solange die Verdrehung der Kristallachsen jedoch gering ist, kann näherungsweise von einer Äquivalenz ausgegangen werden, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned}\tau &= n_3\sqrt{1-n_3^2}\sigma \quad , \quad \dot{\tau} = n_3\sqrt{1-n_3^2}\dot{\sigma} \\ \gamma &= \frac{\varepsilon}{n_3\sqrt{1-n_3^2}} \quad , \quad \dot{\gamma} = \frac{\dot{\varepsilon}}{n_3\sqrt{1-n_3^2}} \\ K_s &= Kn_3^2(1-n_3^2) \quad .\end{aligned}\tag{3.55}$$

Die größten inelastischen Verformungen erhält man, wenn die basale Ebene einen Winkel von $\vartheta = 45^\circ$ mit der Belastungsrichtung bildet. Daraus folgt $n_3\sqrt{1-n_3^2} = \frac{1}{2}$. Für diesen Sonderfall lauten die Äquivalenzbedingungen

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma \quad \text{und} \quad \gamma = 2\varepsilon \quad .$$

Jones u. Brunet (1978) haben ihre Ergebnisse aus Druckversuchen mit konstanter Dehnungsrate als resultierende Schubspannung τ über der resultierenden Gleitung γ dargestellt. In Abbildung 7 sind diese Kurven mit dem Faktor 2 bzw. 0.5 wieder in äquivalente Spannungs-Dehnungskurven zurückgerechnet worden, um eine bessere Vergleichbarkeit mit anderen Experimentatoren zu erreichen.

3.10 Parameterstudien

Am Beispiel des Zug- bzw. Druckversuchs mit konstanter Dehnungsrate soll der Einfluß der Modellparameter auf das Werkstoffverhalten dargestellt werden. In die Abbildungen ist immer eine Referenzkurve mit aufgenommen, die mit folgendem Parametersatz ermittelt wurde:

- variierbare Werkstoffparameter

$$\lambda_{0,ref} = 10^4 \frac{1}{\text{mm}^2}$$

$$d_{ref} = 10\text{mm}$$

$$\mu(\tau) = \mu_l \tau, \quad \mu_{l,ref} = 10^5 \frac{1}{\text{mmMPa}^2}$$

- bekannte bzw. redundante Werkstoffparameter

$$k_{vb} = 8.06 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{sMPa}} \quad (T = -5^\circ\text{C})$$

$$b = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{mm}$$

$$G = 2800\text{MPa}$$

- Versuchsparameter

$$\dot{\epsilon}_{ref} = 10^{-4} \text{s}^{-1}$$

$$n_{30} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (\vartheta = 45^\circ)$$

$$K_{ref} = 2000\text{MPa}$$

Abbildung 16 zeigt den Einfluß der Anfangsversetzungsdichte λ_0 . Für kleine Werte zeigt die Kurve einen ausgeprägten Peak. Mit größer werdenden λ_0 sinkt die Maximalspannung und gleichzeitig verschiebt sich das Maximum zu größeren Dehnungen. Auffallend ist das Verhalten bei großen Dehnungen. Dort verlaufen die Kurven mit zunehmendem λ_0 zunächst zu höheren Spannungen, um dann mit weiter ansteigenden λ_0 -Werten wieder auf niedrigerem Niveau zu liegen. Die Aufspreizung bei höheren Dehnungen ist jedoch sehr gering, verglichen mit der beim Spannungsmaximum. Bei der untersten Kurve liegt die Anfangsversetzungsdichte in der Größenordnung des stationären Wertes. Der Spannungsverlauf strebt dann von unten gegen eine horizontale Tangente. Die anderen Kurven nähern sich dieser Geraden von oben. In Abbildung 17 sind die entsprechenden Versetzungsdichten über der Dehnung aufgetragen.

Die Experimente von Muguruma (1968) (Abbildung 8) verdeutlichen den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit auf den Spannungs-Dehnungsverlauf. Die Aufspreizung der Kurven im Bereich des Spannungsmaximums kann durch unterschiedliche Anfangsversetzungsdichten hervorgerufen werden. Im Bereich höherer Dehnungen müssen andere Ursachen zur Erklärung gesucht werden.

Eine Möglichkeit hierzu bietet die Quellendichte $\mu(\tau) = \mu_l \tau$. In Abbildung 18 wurde der Parameter μ_l variiert. Eine Verkleinerung von μ_l führt zu einer ungefähr proportionalen Vergrößerung der Spannungen und Dehnungen. Das Verhältnis von Maximalspannung τ_m zum stationären Wert τ_∞ liegt für alle vier Kurven in der Größenordnung von $\tau_m/\tau_\infty \simeq 3$. Anders

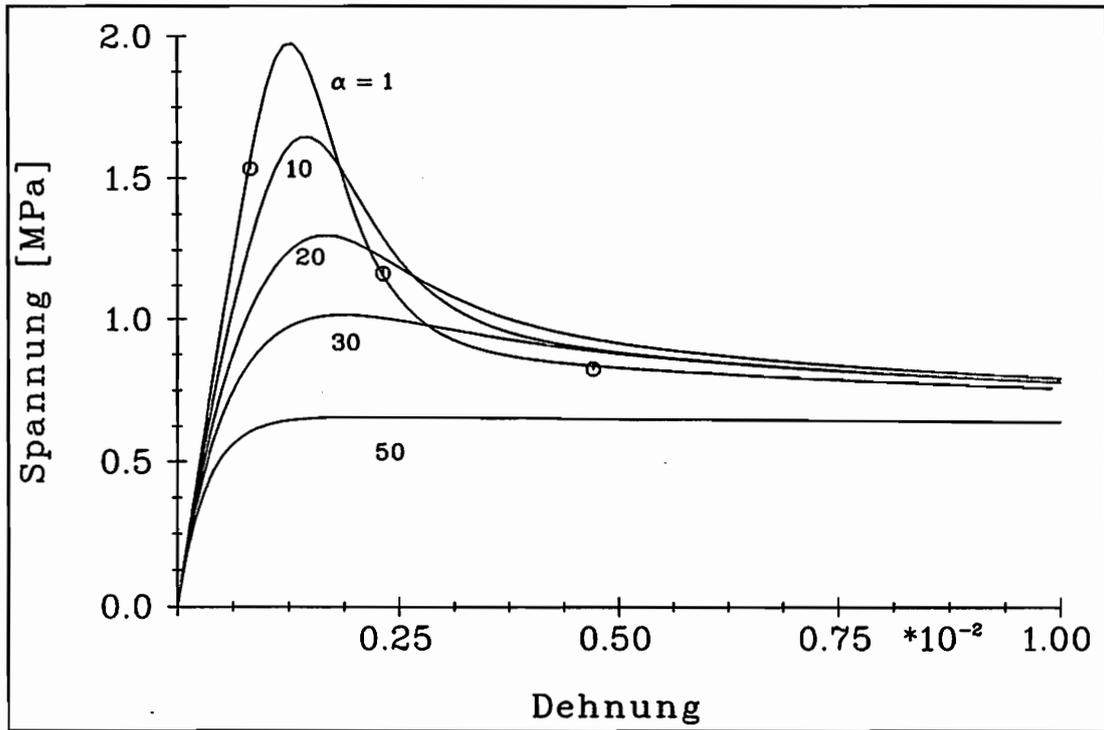


Abb. 16: Einfluß der Anfangsversetzungsdichte $\lambda_{0i} = \alpha_i \lambda_{0ref}$ auf die Spannungs-Dehnungskurven

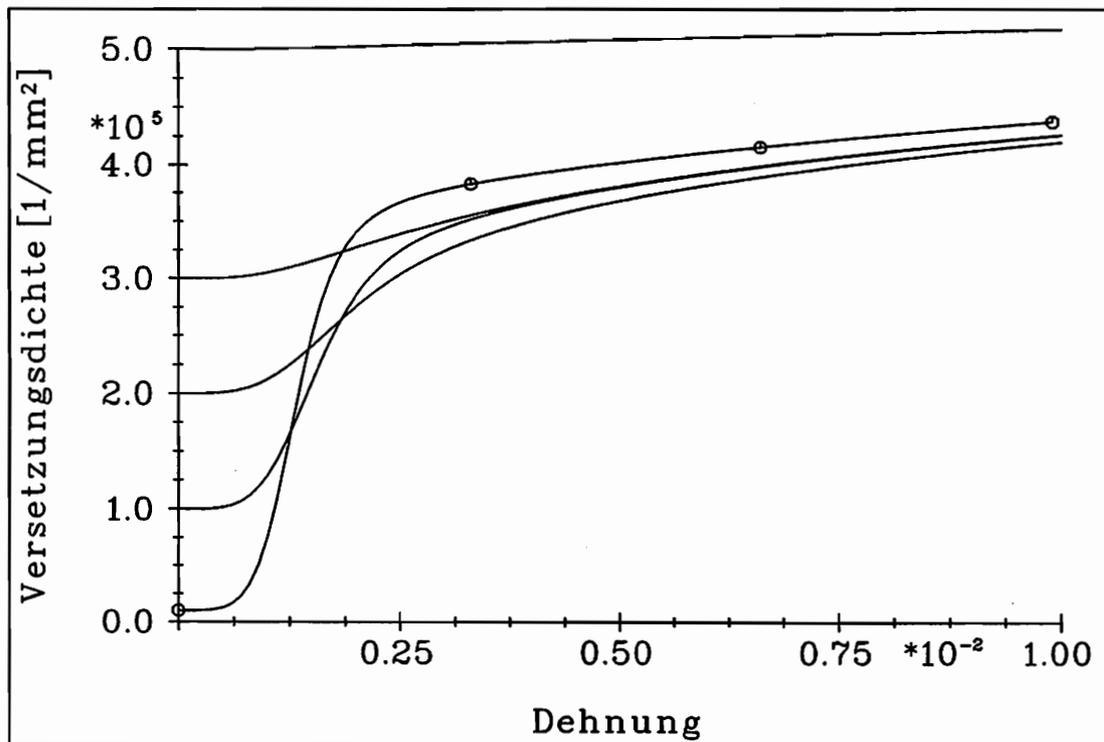


Abb. 17: Versetzungsdichtenverlauf zur Abbildung 16

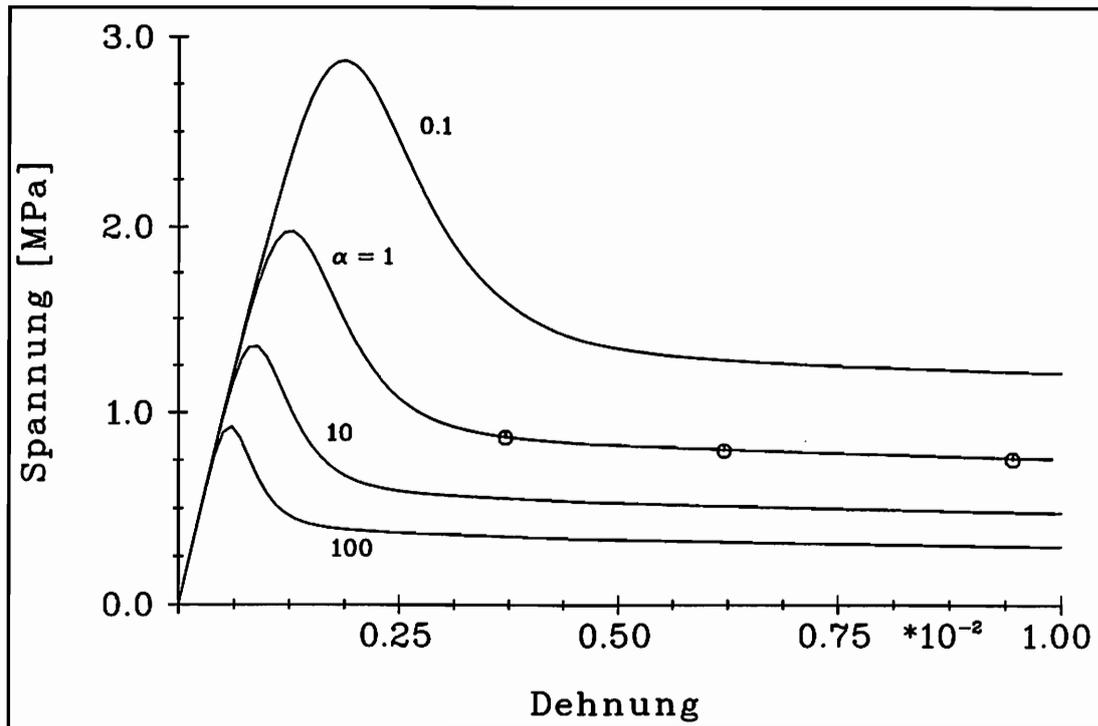


Abb. 18: Einfluß der Versetzungsquellendichte $\mu_i = \alpha_i \mu_{ref}$ auf die Spannungs-Dehnungskurven

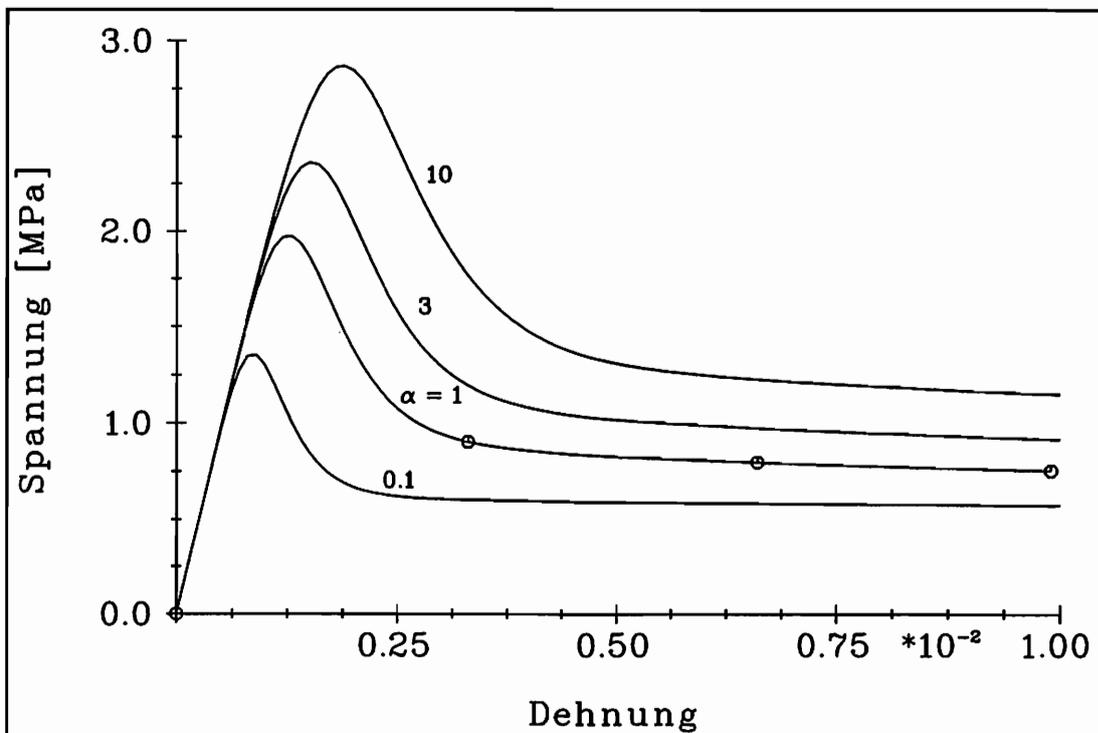


Abb. 19: Einfluß des Versetzungsquellenabstands $d_i = \alpha_i d_{ref}$ auf die Spannungs-Dehnungskurven

als bei einer Vergrößerung der Anfangsversetzungsdichte λ_0 verschiebt eine Vergrößerung der Quellendichte μ_l das Spannungsmaximum zu kleineren Dehnungen. Die Versuchsergebnisse (Abbildung 8) zeigen jedoch kaum eine Abhängigkeit der Lage des Spannungsmaximums von der Oberflächenbeschaffenheit. Nur die Höhe des Spannungsmaximums nimmt mit zunehmender Rauheit ab. Damit das monokristalline Stoffgesetz das Verhalten einer aufgerauhten Probe durch eine veränderte Versetzungsstruktur nachbilden kann, muß sowohl die Anfangsversetzungsdichte λ_0 als auch die Versetzungsquellendichte μ erhöht werden.

Den Einfluß des Quellenabstands d zeigt Abbildung 19. Bis zu ca. 0.5% Dehnung hat d genau den umgekehrten Einfluß wie μ_l . Die Kurve $d = 10d_{ref}$ aus Abbildung 19 verläuft für kleine Dehnungen deckungsgleich mit der Kurve $\mu_l = 0.1\mu_{ref}$ aus Abbildung 18. Dies resultiert aus der in der Anfangsphase noch geringen Bedeutung des Reduktionsterms in der Evolutionsgleichung für die Versetzungsdichte λ (Gleichung (3.53)). Für große Dehnungen streben die Kurven dann jedoch gegen einen gemeinsamen Grenzwert. In Abbildung 20 sind die Kurven $d = 0.1d_{ref}$ bzw. $d = 10d_{ref}$ aus Abbildung 19 und $\mu_l = 10\mu_{ref}$ bzw. $\mu_l = 0.1\mu_{ref}$ aus Abbildung 18 dargestellt. Das unterschiedliche Verhalten bei großen Dehnungen ist deutlich zu erkennen. Der Quellenabstand d beeinflußt nicht den stationären Zustand, sondern nur die Geschwindigkeit, mit der er erreicht wird.

In Abbildung 21 sind drei Zugversuche mit unterschiedlichen Dehnungsraten dargestellt. Bei den gepunkteten Kurven wurde zusätzlich von einer konstanten Versetzungsquellendichte ausgegangen, $\mu = \mu_k = \text{konst.}$ μ_k wurde so gewählt, daß die beiden Kurven mit der Referenzdehnungsrate $\dot{\epsilon}_{ref}$ gegen einen gemeinsamen stationären Zustand streben. Der Unterschied zwischen diesen beiden Verläufen ist relativ gering. Bei den Verläufen mit veränderter Dehnungsrate zeigt sich dann die Bedeutung der unterschiedlichen Ansätze für die Versetzungsquellenverteilungsdichten. Je höher die Potenzen der Spannungen sind, die der Ansatz enthält, desto enger liegen die entsprechenden Kurvenscharen im stationären Zustand zusammen. Da $\mu(\tau)$ die Verteilung der Kristallbaufehler charakterisiert und diese sehr stark vom Herstellungsverfahren des Monokristalls abhängen, können entsprechend unterschiedliche Funktionsverläufe $\mu(\tau)$ verwendet werden. Eine Beschränkung auf Potenzansätze ist nicht erforderlich. Es wird sich jedoch zeigen, daß mit einem konstanten bzw. linearen Ansatz schon eine gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment zu erzielen ist.

Die bisher vorgestellten Rechnungen beschränkten sich auf Dehnungen bis zu 10%. In diesem Dehnungsbereich sind die Drehungen der Kristallachse noch so klein, daß sie kaum Einfluß auf das Materialverhalten haben. Es wurde deshalb bisher immer $\dot{n}_3 = 0$ gesetzt, also eigentlich ein einfacher Scherversuch ohne Rotation der Kristallachse betrachtet. Abbildung 22 zeigt

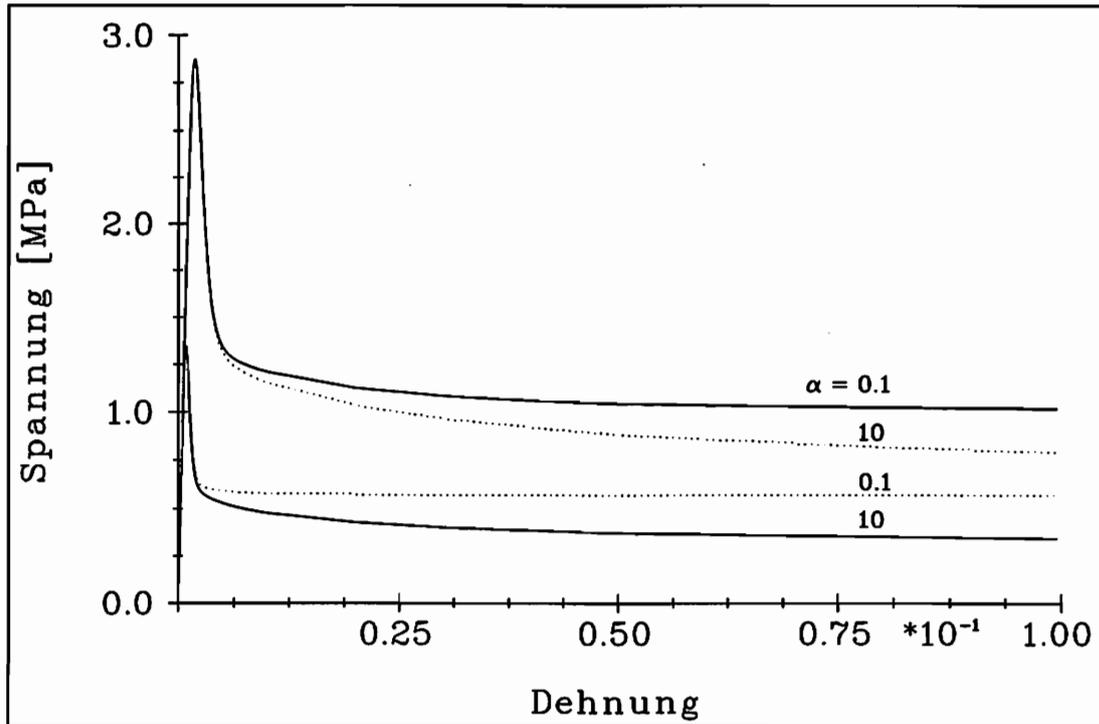


Abb. 20: Gemeinsame Darstellung der Kurven $\alpha = .1$ und $\alpha = 10$ aus den Abbildungen 19 (gepunktete Linie) und 18 (durchgezogene Linie)

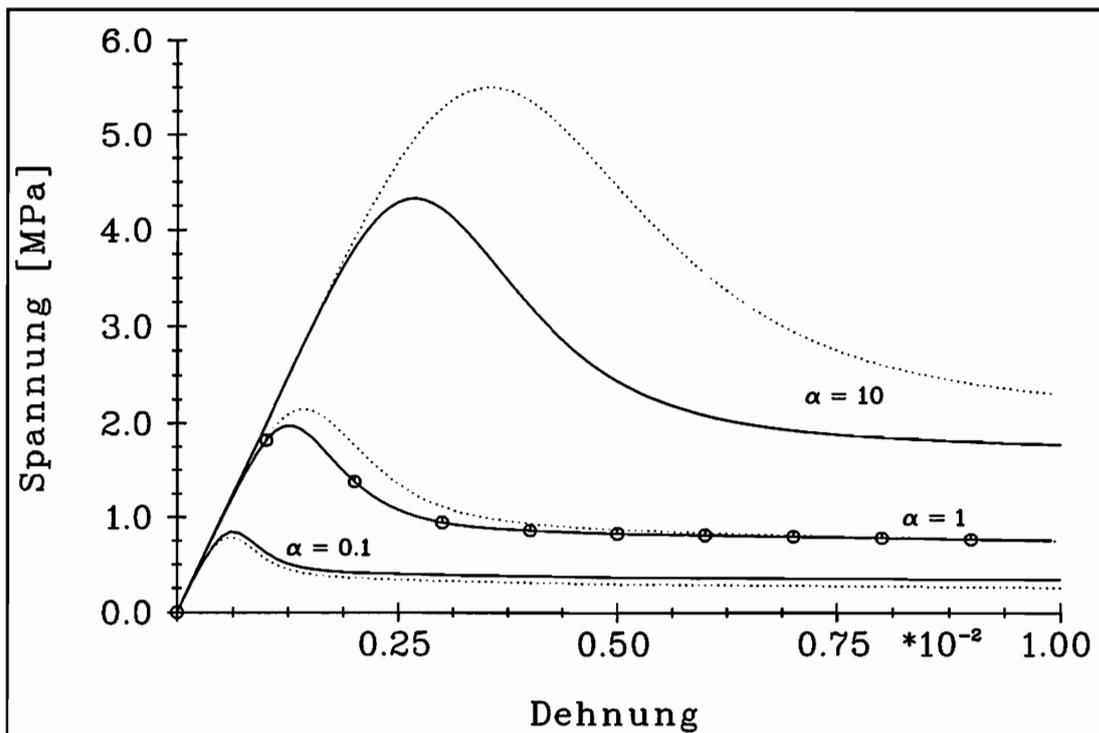


Abb. 21: Einfluß der Dehnungsrate $\dot{\epsilon}_i = \alpha_i \dot{\epsilon}_{ref}$ bei

$$\mu(\tau) = \begin{cases} \mu_k = \text{konst.} & \text{(gepunktete Linie)} \\ \mu_{l\tau} & \text{(durchgezogene Linie)} \end{cases}$$

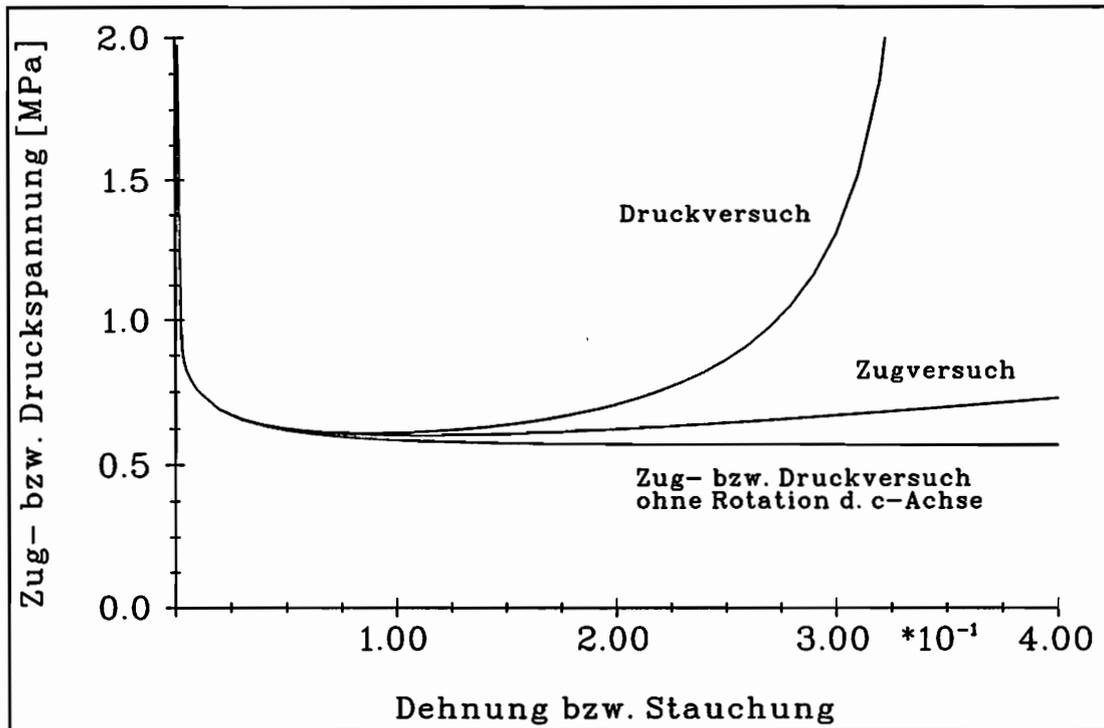


Abb. 22: Einfluß der Rotation der basalen Ebenen auf den Zug- bzw. Druckversuch

nun, welche Änderungen sich ergeben, wenn die Rotation der basalen Ebenen mit berücksichtigt wird.

Die unterste Kurve entspricht der bisherigen Referenzrechnung, d.h. einem Zugversuch mit $\dot{n}_3 = 0$. Bei der darüberliegenden Kurve wurde die Verdrehung der Gleitebenen mit in die Rechnung einbezogen. Durch den sich verkleinernden Winkel ϑ (Abbildung 15) ist eine höhere axiale Zugspannung zur Erzeugung der benötigten basalen Schubspannung erforderlich.

Noch deutlicher wird der Unterschied im Druckversuch. Die Druckspannungen steigen viel schneller mit der Stauchung an als die Zugspannungen mit der Dehnung. Aus geometrischen Gründen strebt bei einem Anfangswinkel ϑ_0 mit $\cos \vartheta_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ die Spannungs-Dehnungskurve gegen eine elastische Gerade, die die Dehnungsachse bei $\varepsilon = \ln \frac{1}{2}\sqrt{2} \simeq -0.35$ schneidet. Erreichen die inelastischen Verformungen diesen Grenzwert, dann stehen die basalen Ebenen senkrecht zur Probenachse und weitere inelastische Dehnungen sind nicht mehr möglich. Dieser starke Spannungsanstieg wurde auch von einigen Experimentatoren beobachtet (Jones u. Brunet (1978)) und mit der experimentell nachgewiesenen Rotation der Kristallachsen in Zusammenhang gebracht.

Die experimentellen Untersuchungen von Muguruma (1968) und die hier durchgeführten Parameterstudien sprechen dafür, daß das Aufrauhen der Probenoberfläche zu neuen

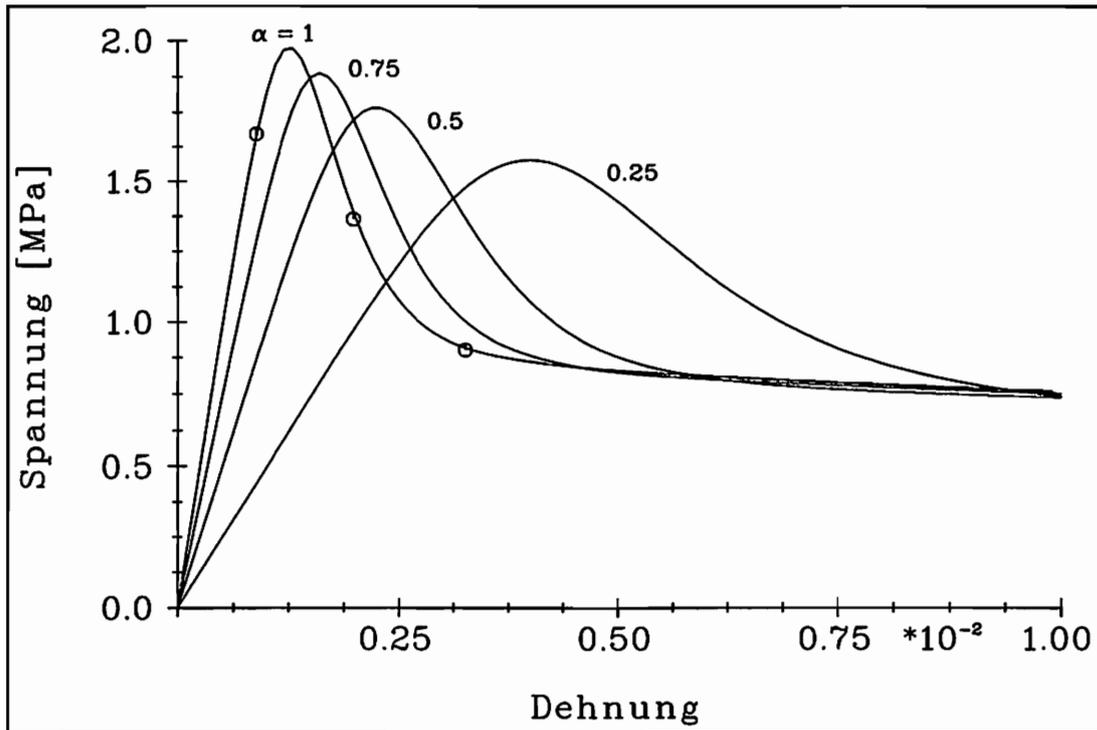


Abb. 23: Einfluß der effektiven Steifigkeit $K_i = \alpha_i K_{ref}$

Versetzungsquellen führt. Da diese gezwungenermaßen in der Nähe der Oberfläche liegen, wird deren Abstand d durch die Probengeometrie erheblich beeinflusst. Somit können schon unterschiedliche Probenabmessungen allein den Verlauf der Spannungs-Dehnungskurven verändern. Die effektive Steifigkeit K ist ebenfalls ein Parameter, der häufig mehr durch die Prüfbedingungen als durch die elastischen Materialeigenschaften festgelegt ist. Seinen Einfluß zeigt Abbildung 23. Eine Verringerung von K führt zu einer Stauchung der Kurven in Spannungsrichtung und einer Streckung in Dehnungsrichtung. Der stationäre Zustand bleibt jedoch unberührt.

Die zuletzt aufgeführten Punkte zeigen, daß ein quantitativer Vergleich der experimentellen Ergebnisse unterschiedlicher Experimentatoren nur dann sinnvoll ist, wenn die genauen Prüfbedingungen bekannt sind.

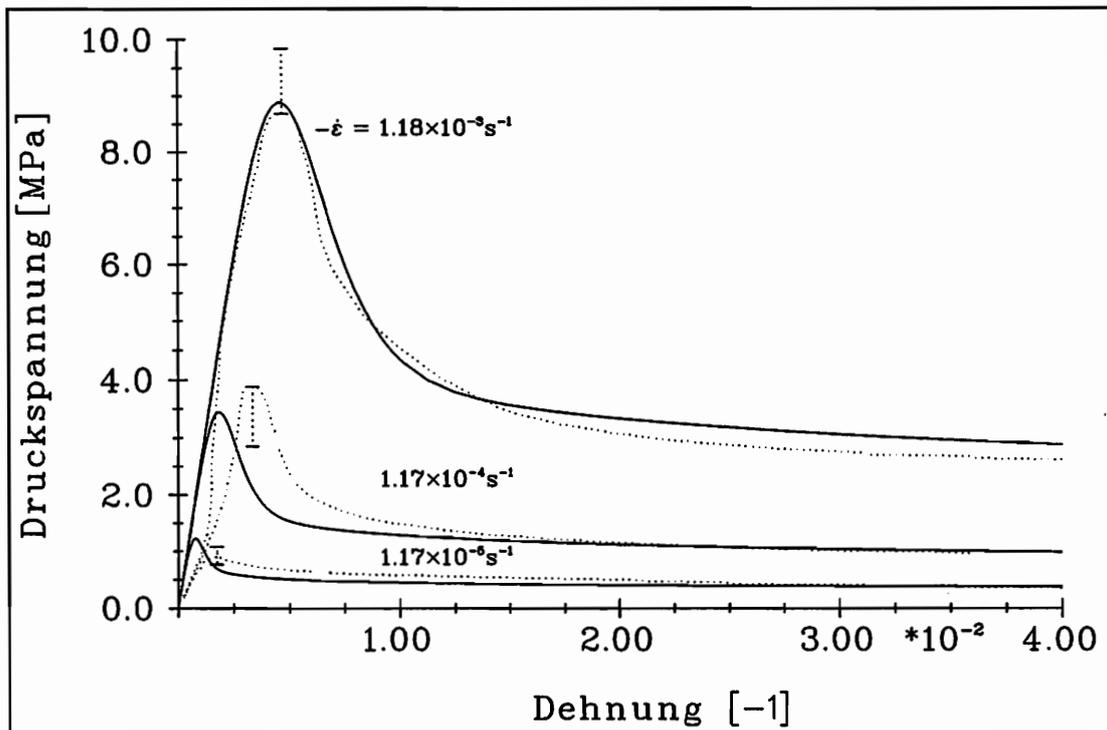


Abb. 24: Druckversuche mit konstanter Dehnungsrate $\dot{\epsilon}$. Vergleich von Rechnungen (durchgezogene Linien) mit Experimenten von Jones u. Brunet (1978) (gepunktete Linien). Die senkrechten Striche im Spannungsmaximum geben die Streubreite der experimentellen Werte wieder ($T = -5^\circ\text{C}$).

3.11 Vergleich Rechnung und Experiment

In Abbildung 24 sind den Druckversuchen mit konstanter Dehnungsrate von Jones u. Brunet (1978) (gepunktete Linien) eigene Rechnungen (durchgezogene Linien) gegenübergestellt. Die drei Kurven wurden mit folgendem Parametersatz ermittelt:

$$\lambda_0 = 10^4 \frac{1}{\text{mm}^2}$$

$$d = 15\text{mm}$$

$$\mu(\tau) = \mu_k = 10^4 \frac{1}{\text{mmMPa}}$$

$$k_{vb} = 7.25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{sMPa}} \quad (T = -5^\circ\text{C})$$

$$b = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{mm}$$

$$G = 2800\text{MPa}$$

$$n_{30} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad (\vartheta = 45^\circ)$$

$$K = 2500\text{MPa}.$$

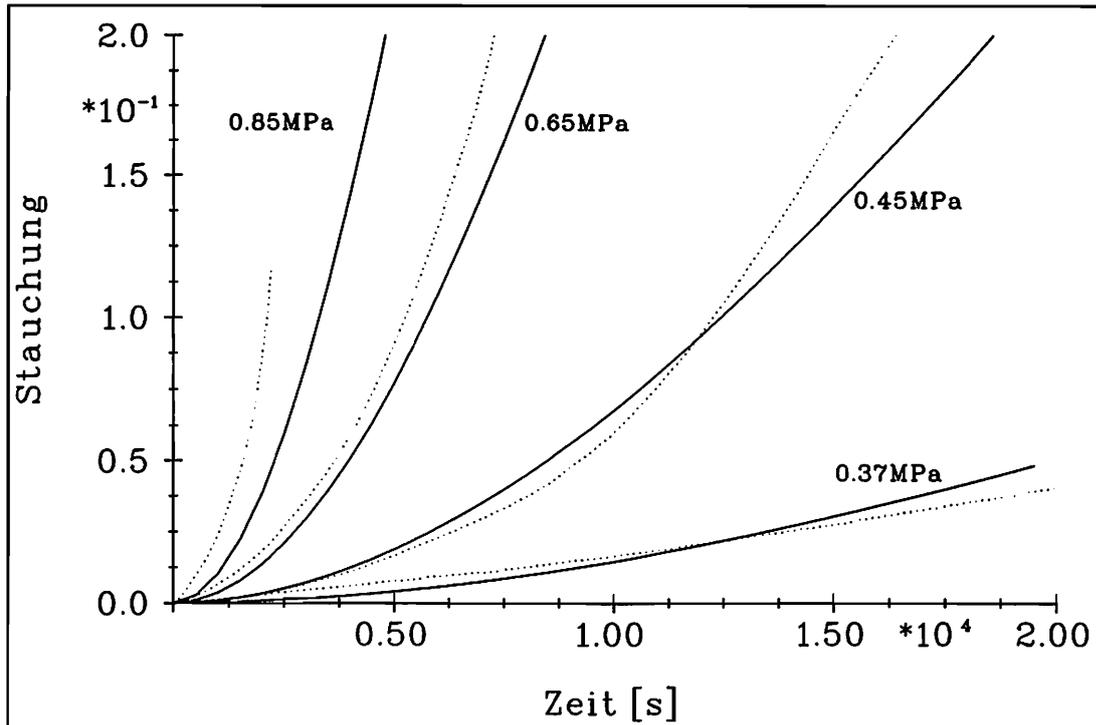


Abb. 25: Vergleich von Rechnungen (durchgezogene Linien) mit Kriechversuchen von Griggs u. Coles (gepunktete Linien) unter Verwendung des Parametersatzes, der Abb. 24 zugrunde liegt ($T = -10^\circ\text{C}$, Druckspannungen wie angegeben).

Die Berechnung des schnellen Versuchs mit einer Dehnungsrate $\dot{\epsilon} = 1.18 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1}$ weist eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Experiment auf. Beim mittleren Versuch wird das Spannungsmaximum zu früh erreicht. Ob dies auf eine Schwäche des Werkstoffmodells oder eine experimentelle Anfangsstörung hindeutet, kann hier nicht geklärt werden. Der Arbeit von Jones u. Brunet konnten die Schwankungen in den Maximalspannungen entnommen werden. Sie sind durch die senkrechten Striche mit in die Abbildung 24 aufgenommen worden. In Anbetracht dieser Schwankungen kann auch die Anpassung des mittleren und des langsamen Versuchs als gut bezeichnet werden.

Mit dem gleichen Parametersatz wurden die Kriechkurven von Griggs u. Coles (1954) nachgerechnet (Abb. 25). Die Konstante k_{vb} , die den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit der Versetzungen und der Schubspannung beschreibt, wurde mit Hilfe der Arrheniusgleichung und einer Aktivierungsenergie von $65 \frac{\text{KJ}}{\text{molK}}$ an die Versuchstemperatur von -10°C angepaßt. Sie hat somit den Wert $k_{vb} = 4.17 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{s MPa}}$.

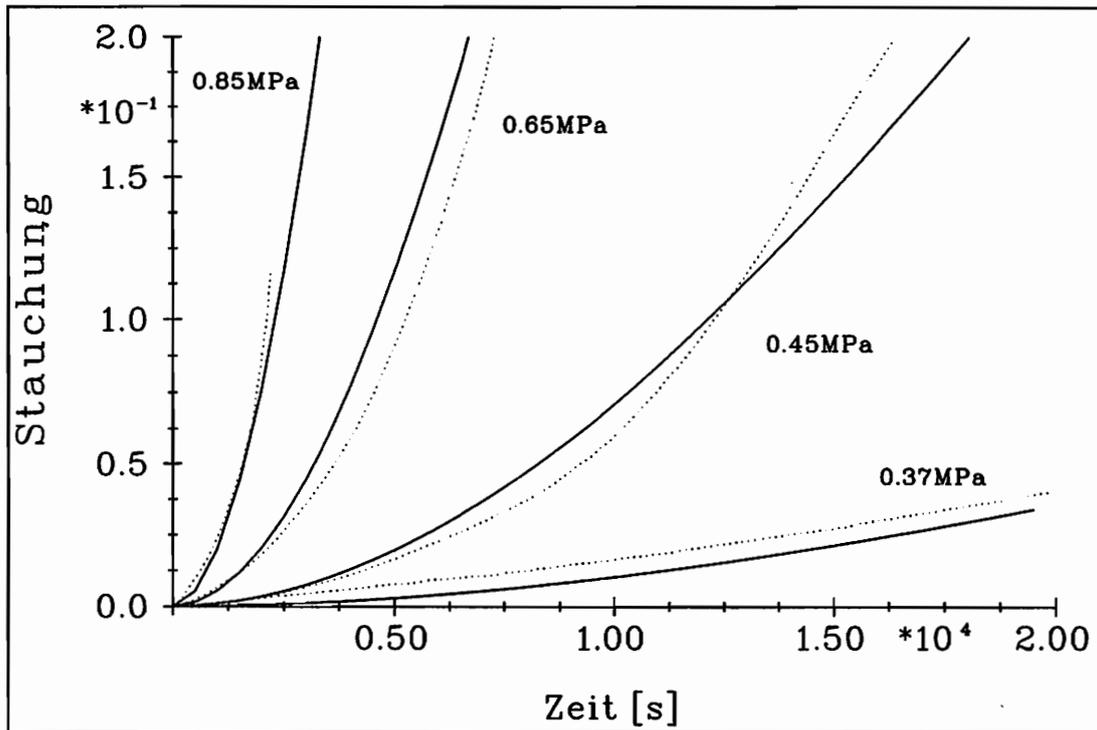


Abb. 26: Wie Abb. 25, jedoch unter Verwendung eines eigenen Parametersatzes.

Den in Abbildung 26 wiedergegebenen Rechnungen liegt der folgende Parametersatz zugrunde:

$$\lambda_0 = 0.1 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{mm}^2}$$

$$d = 30\text{mm}$$

$$\mu(\tau) = \mu_l \tau, \quad \mu_l = 1.4 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{mmMPa}^2}$$

$$k_{vb} = 4.17 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{sMPa}} \quad (T = -10^\circ\text{C}).$$

Damit konnte eine Verbesserung der Anpassung erreicht werden. Eine genauere Anpassung scheint erst dann sinnvoll, wenn eine größere Anzahl von Experimenten verlässliche Aussagen über die natürlichen Schwankungen und die Reproduzierbarkeit der Versuchsergebnisse erlauben.

Zum Abschluß wird in Abbildung 27 noch ein Zugversuch mit mehrfacher Zwischenentlastung und stufenweiser Steigerung der Dehnungsrate (Readey u. Kingery (1963), gepunktete Linie) mit der entsprechenden Rechnung (durchgezogene Linie) verglichen. Es wurde der folgende Parametersatz verwendet:

$$\lambda_0 = 10^5 \frac{1}{\text{mm}^2}, \quad d = 70\text{mm}$$

$$\mu(\tau) = \mu_k = 1.5 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{mmMPa}}$$

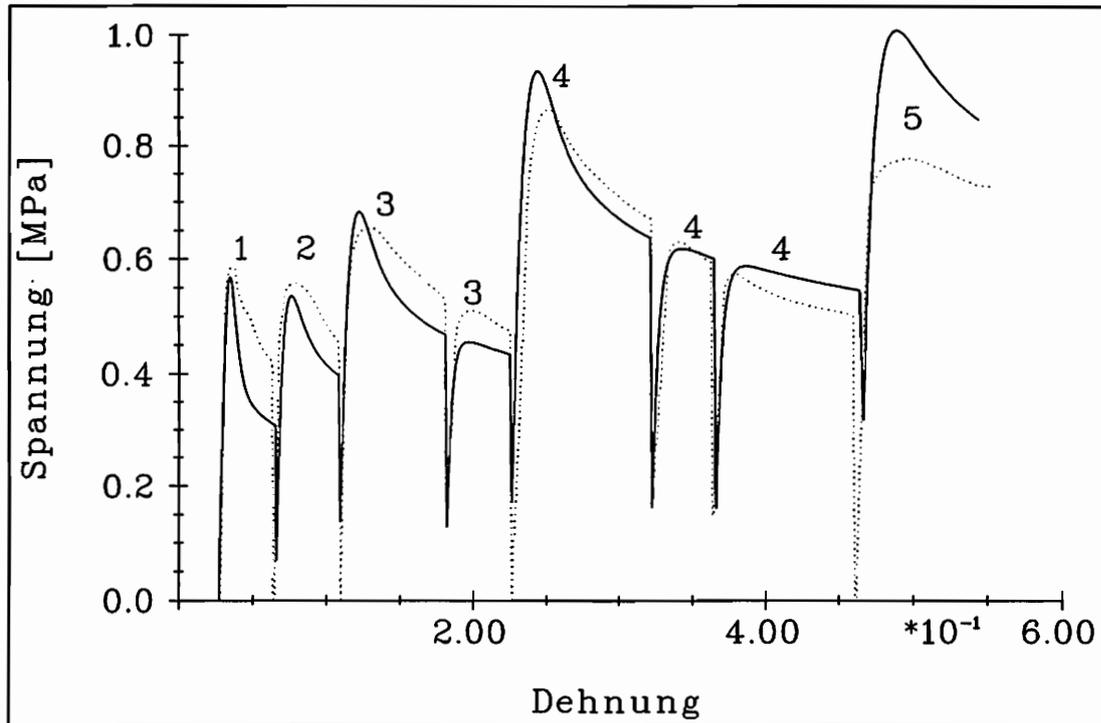


Abb. 27: Vergleich zwischen einem Zugversuch mit Zwischenentlastung und Belastungssteigerung (Readey u. Kingery (1963))(gepunktete Linie) mit der entsprechenden Rechnung (durchgezogene Linie), $T = -5^{\circ}\text{C}$.

$$\dot{\epsilon}_1 = 5 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}, \quad \dot{\epsilon}_2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{s}^{-1}, \quad \dot{\epsilon}_3 = 2 \cdot 10^{-4} \text{s}^{-1}, \\ \dot{\epsilon}_4 = 5 \cdot 10^{-4} \text{s}^{-1}, \quad \dot{\epsilon}_5 = 1 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1}$$

$$k_{vb} = 7.25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{sMPa}} \quad (T = -5^{\circ}\text{C})$$

$$b = 1.5 \cdot 10^{-7} \text{mm}, \quad G = 2800 \text{MPa}$$

$$n_{30} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (\vartheta = 45^{\circ}), \quad K = 150 \text{MPa}.$$

Das Verhalten nach Zwischenentlastung wird sehr gut wiedergegeben. Die Spannungsmaxima nach Belastungssteigerung erscheinen zwar etwas zu hoch, qualitativ stimmt der Verlauf jedoch gut überein. Aus den oben angegebenen Gründen wurde auch hier auf eine genauere Anpassung verzichtet. Insbesondere wäre für eine sinnvolle Ermittlung der Materialparameter eine genaue Kenntnis der von der Prüfmaschine wirklich aufgebrachten Dehnungsrate notwendig. Gerade im Bereich der Spannungsmaxima der schnellen Versuche kann mit einem Abfall der Dehnungsrate von ihrem Nennwert gerechnet werden, wenn die Prüfmaschine über keine Regelung der Dehnungsrate (Drehzahl des Antriebsmotors) verfügt.

4. Polykristallines Eis

Polykristallines Eis besitzt aufgrund unterschiedlicher Entstehungsarten eine Vielzahl von Kornformen und Orientierungsverteilungen der Kristallachsen. Vorhandene Einschlüsse wie Salze, Luft oder Wasser beeinflussen im großen Maße das makroskopisch beobachtbare Materialverhalten. Michel (1978) führte eine Klassifizierung der unterschiedlichen Eissorten ein.

Im Rahmen dieser Arbeit soll im wesentlichen feinkörniges polykristallines Eis mit einem Korndurchmesser von 1 bis 2mm betrachtet werden. Es ist im ursprünglichen Zustand isotrop, d.h. es besitzt eine gleichmäßige Orientierungsverteilung der Kristallachsen. Ein solches Eis ist in der Natur z.B. in solchen Bereichen eines Gletschers zu finden, die noch keine großen Verformungen erfahren haben. Proben aus Kunsteis können mit Hilfe eines von Cole (1979) vorgeschlagenen Verfahrens hergestellt werden. Es hat den Vorteil, daß die Mikrostruktur des Eises, wie die Korngröße und der Grad der Verunreinigung (Salze, Staub, Luft...), genau kontrolliert werden kann.

In der nun folgenden Literaturübersicht werden viele Faktoren, die die mechanischen Eigenschaften polykristallinen Eises zum Teil erheblich beeinflussen, nur am Rande erwähnt. So wird z.B. auf eine ausführliche Darstellung des Einflusses der Temperatur, der Korngröße oder der Verunreinigungen verzichtet. Den Schwerpunkt bilden vielmehr die Auswirkungen der Monokristallanisotropie auf das makroskopische Verhalten des Polykristalls, da sie für ein Verständnis der mikromechanischen Vorgänge von besonderer Bedeutung sind. Die weiteren Einflüsse können dann auf der Basis dieser Ergebnisse untersucht werden.

4.1 Übersicht über experimentelle Untersuchungen in der Literatur

Abbildung 28 zeigt eine Reihe von Druckversuchen mit konstanter Dehnungsrate von Mellor u. Cole (1982). Ebenso wie der Monokristall zeigt auch der Polykristall zunächst einen starken Spannungsanstieg, um dann, nach dem Überschreiten des Spannungsmaximums, ebenso stark abzufallen. Einige Kurven zeigen während des Spannungsanstiegs einen kleinen Spannungsabfall. Dieser wird mit dem Auftreten der ersten Mikrobrüche in Zusammenhang

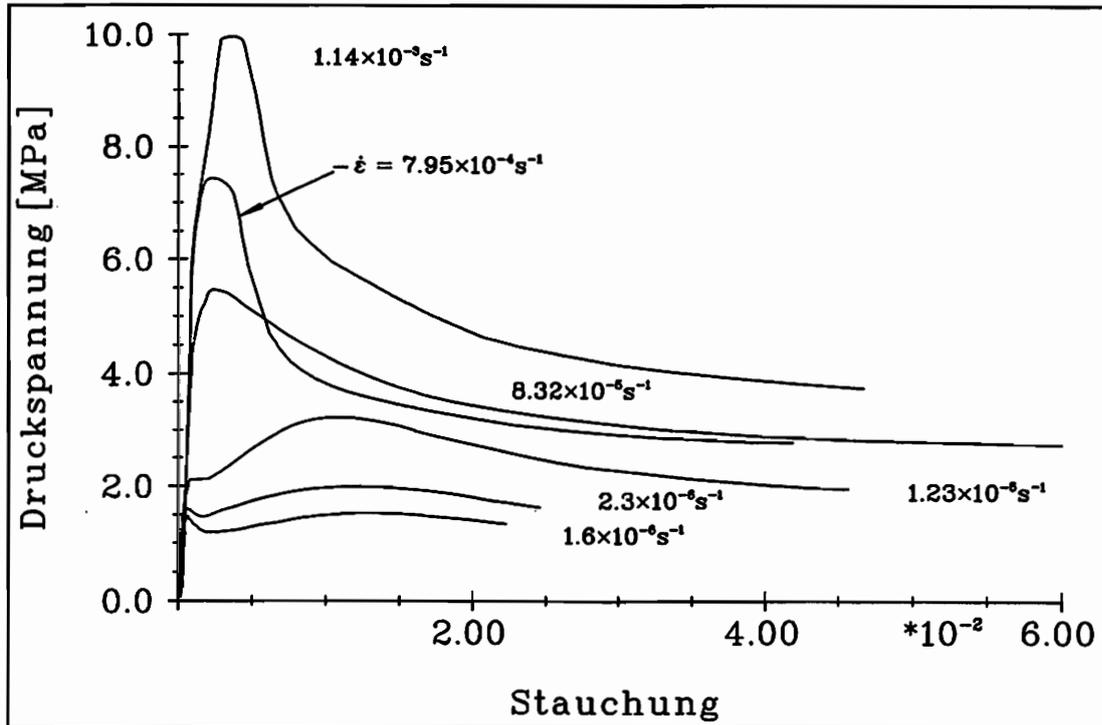


Abb. 28: Druckversuch mit konstanter Dehnungsrate $\dot{\epsilon}$, $T = -10^\circ\text{C}$ (Mellor u. Cole (1982))

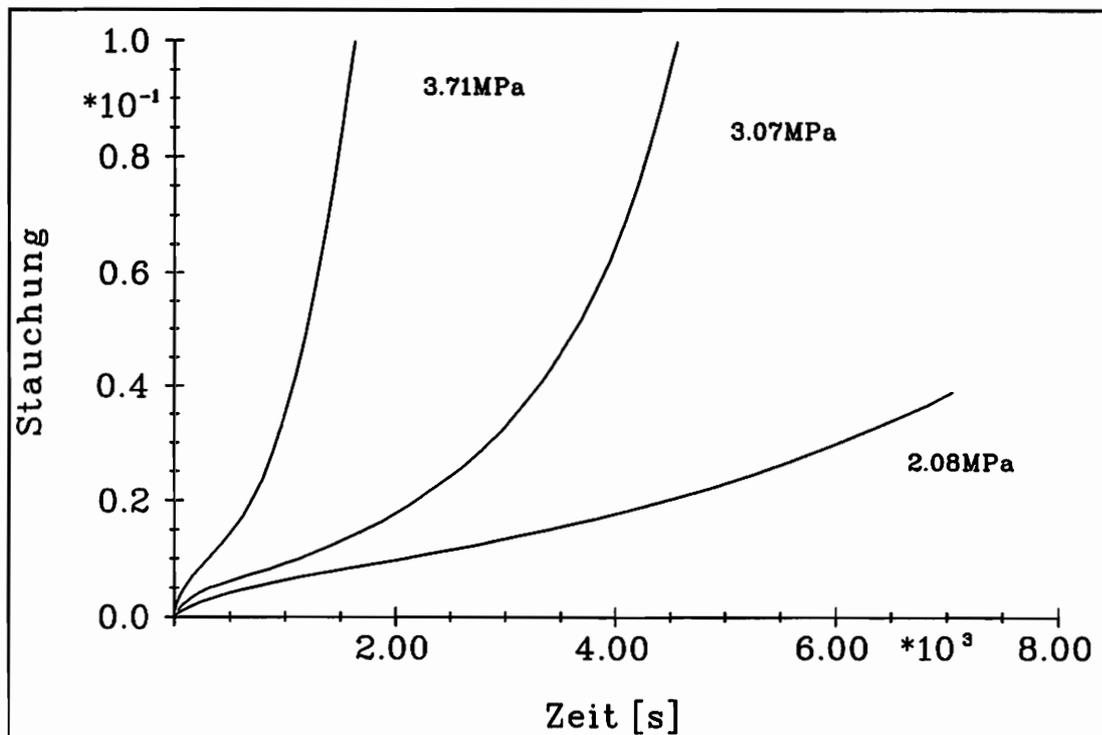


Abb. 29: Druckversuch mit konstanter Last σ , $T = -10^\circ\text{C}$ (Mellor u. Cole (1982))

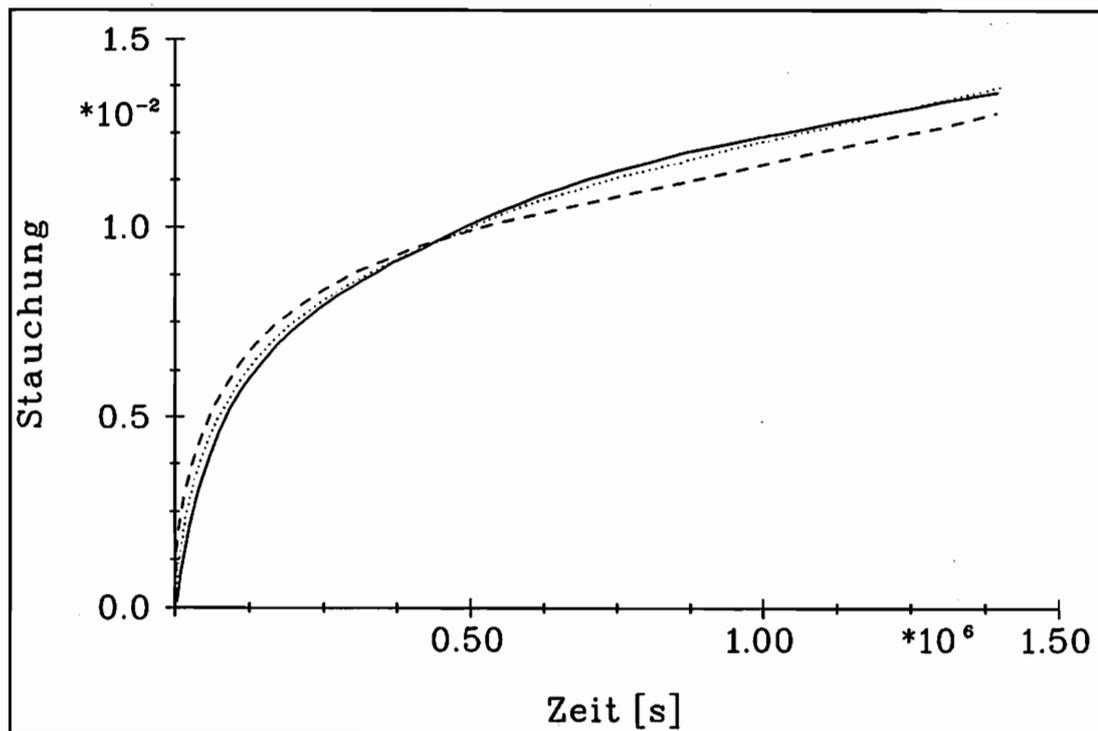


Abb. 30: 3 Druckversuche mit konstanter Last, $\sigma = -0.042\text{MPa}$, $T = -2.06^\circ\text{C}$ (Mellor u. Testa (1969))

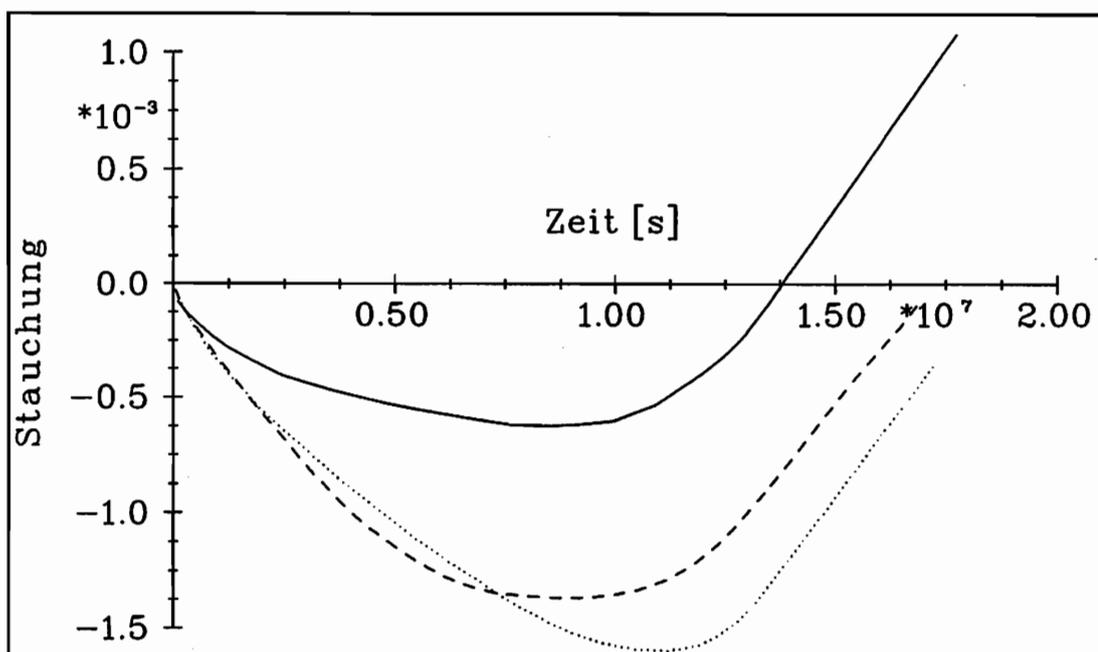


Abb. 31: Fortsetzung der Versuche aus Abb. 30 nach Lastreduzierung, $\sigma = -0.0091\text{MPa}$, $T = -2.06^\circ\text{C}$ (Mellor u. Testa (1969))

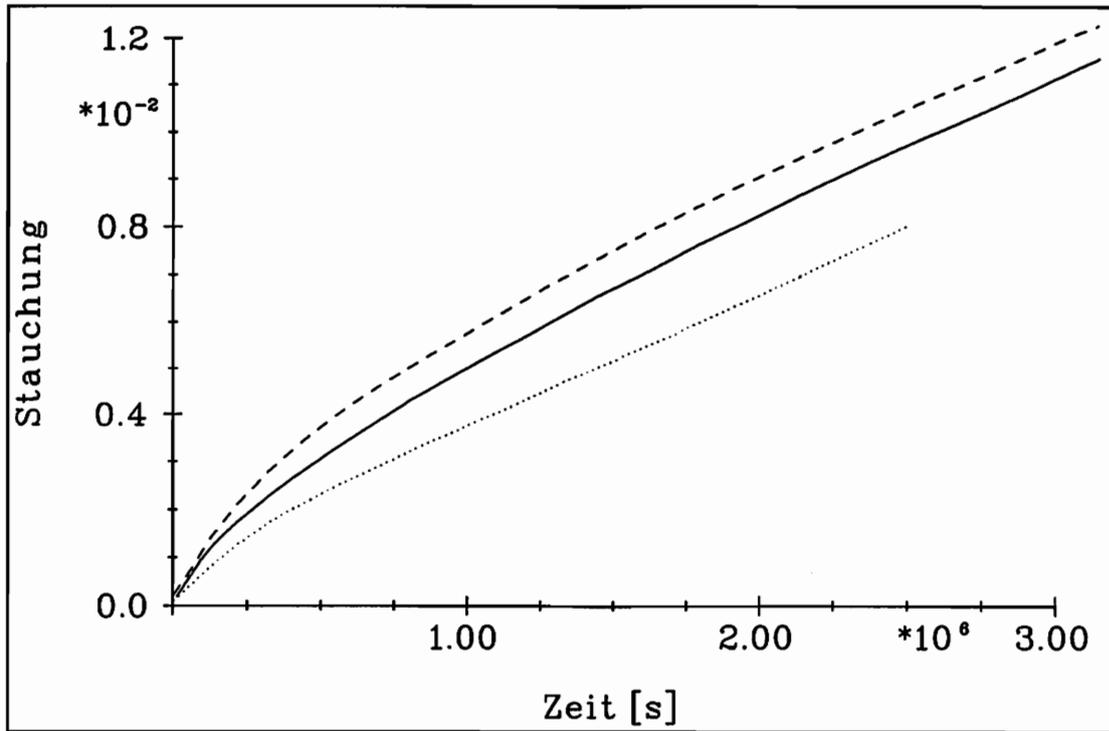


Abb. 32: Fortsetzung der Versuche aus Abb. 31 nach Lasterhöhung, $\sigma = -0.042\text{MPa}$, $T = -2.06^\circ\text{C}$ (Mellor u. Testa (1969))

gebracht. Für größere Dehnungen scheinen die Kurven gegen einen stationären Zustand zu streben.

Abbildung 29 zeigt einige Kriechkurven unter konstanter Last. Sie lassen sich, wie bei den metallischen Werkstoffen üblich, in drei Bereiche einteilen. Im Bereich des primären Kriechens nimmt die Dehnungsrate fortlaufend ab, d.h. der Polykristall verfestigt. Nach dem Übergangsbereich des sekundären Kriechens mit einer mehr oder weniger konstanten Dehnungsrate nimmt im Bereich des tertiären Kriechens die Dehnungsrate wieder zu, d.h. der Werkstoff entfestigt. Bei den Kriechkurven von Mellor u. Cole reduziert sich der sekundäre Kriechbereich auf den Punkt mit der minimalen Dehnungsrate $\dot{\epsilon}_{min}$. Dieser liegt für alle Belastungen bei etwa 1% Dehnung. Nach Sinha (1978) ist ein stationäres Kriechen aber auch nur für Spannungen deutlich kleiner als 1MPa zu erwarten. In Abbildung 30 sind drei Kriechkurven von Mellor u. Testa (1969) wiedergegeben. Sie alle wurden unter einer Druckspannung von 0.042MPa durchgeführt. Der Übergang vom primären ins sekundäre Kriechen ist hier deutlich zu erkennen.

In Abbildung 31 ist die Fortsetzung des Experiments nach einer Reduzierung der Last auf 0.0091MPa dargestellt, in Abbildung 32 wurde die Spannung wieder auf 0.042MPa hochgesetzt. Obwohl im zweiten Teil des Experiments noch eine Druckspannung vorhanden

war, nahm die Länge der Probe während der ersten 100 Tage des Experiments zu. Diese mit der Zeit zurückgehenden Dehnungen (Stauchungen) bezeichnet man als verzögert elastisch. Die spontan elastischen Dehnungen sind hier so klein, daß sie nicht darstellbar sind. Die Dehnungsraten am Ende des dritten Teils des Versuchs sind um den Faktor 1.3 bis 1.5 größer als die Dehnungsraten am Ende des ersten Teils.

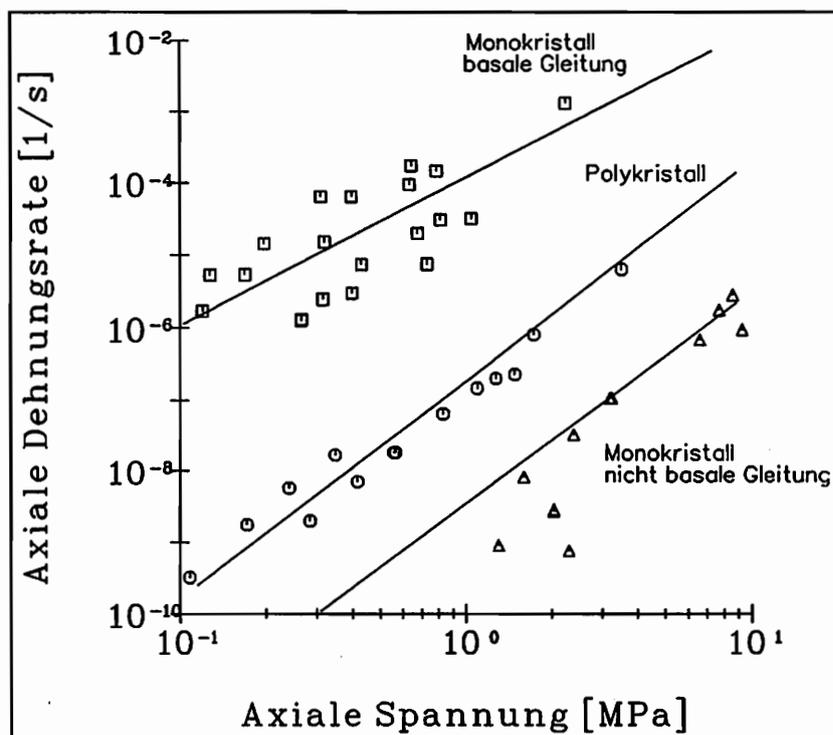


Abb. 33: Zusammenhang zwischen der stationären axialen Dehnungsrate und der axialen Spannung für mono- und polykristallines Eis, $T = -10^{\circ}\text{C}$ (siehe auch Ashby u. Duval (1985))

Die polykristallinen Kriechkurven unterscheiden sich qualitativ sehr deutlich von den im Kapitel 2 vorgestellten Kriechkurven des Monokristalls. Letztere zeichneten sich durch eine ständige Zunahme der Dehnungsraten aus. Auch wurden verzögert elastische Dehnungen bei Monokristallen nicht beobachtet. Einen quantitativen Vergleich ermöglicht Abbildung 33. Sie ist einer Arbeit von Ashby u. Duval (1985) entnommen und zeigt die stationäre axiale Dehnungsrate in Abhängigkeit von der axialen Spannung für basale und nichtbasale Gleitung des Monokristalls und für isotropes polykristallines Eis. Der Polykristall ist um 2 bis 4 Größenordnungen "härter" als der "gut" orientierte Monokristall (optimale Betätigung der basalen Gleitung), aber immer noch um eine Größenordnung "weicher" als ein "schlecht" orientierter Monokristall (Ausschluß der basalen Gleitung). Die hierin auch

zum Ausdruck kommende ausgeprägte Anisotropie des Einkristalls wird in einem erheblichen Maße die Besonderheiten im Werkstoffverhalten des Polykristalls beeinflussen. Bevor jedoch genauer auf die mikromechanischen Ursachen eingegangen wird, soll im nächsten Abschnitt zunächst eine Abschätzung der Eigenspannungen vorgenommen werden, die sich im Laufe des Deformationsprozesses ausbilden.

4.2 Abschätzung der Eigenspannungen in polykristallinem Eis

In einem Polykristall liegen Monokristalle mit unterschiedlicher Orientierung nebeneinander. In Abbildung 34 ist ein sehr stark vereinfachtes Modell eines Polykristalls, bestehend aus zwei Monokristallen, dargestellt. Die basale Ebene des Kristalls 1 fällt mit der Zeichenebene zusammen, die basale Ebene des Kristalls 2 steht senkrecht dazu. Unter der gegebenen Schubspannung τ kann sich der Kristall 1 zunächst nur rein elastisch verformen, da keine resultierenden Schubspannungen in der basalen Ebene vorhanden sind. Im Gegensatz dazu kann der Kristall 2 zusätzlich große inelastische Verformungen erfahren. Da sich die beiden Kristalle nur gemeinsam verformen können, werden sich die Spannungen im "gut" orientierten Kristall 2 mit der Zeit abbauen und entsprechend im "schlecht" orientierten Kristall 1 erhöhen. Diese Spannungsumlagerung ist gleichbedeutend mit der Entstehung eines Eigenspannungszustandes, der der makroskopischen Spannung τ überlagert ist. Es herrschen die zusätzlichen Spannungen $\Delta\tau_1$ im Kristall 1 und $\Delta\tau_2$ im Kristall 2. Sind die beiden Kristalle gleich groß, dann gilt $\Delta\tau_1 = -\Delta\tau_2$. Durch die Konzentration der Spannung am Kristall 1 können dort ggf. auch nichtbasale Gleitsysteme aktiviert werden.

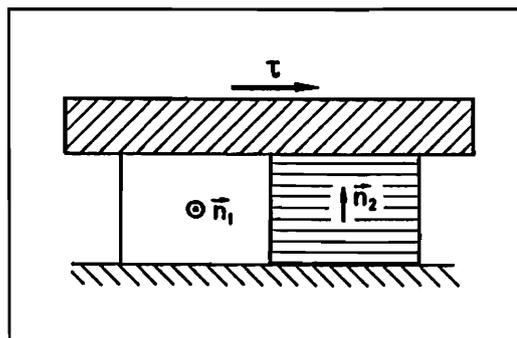


Abb. 34: Modell eines Polykristalls unter Belastung

Bei einer Entlastung gehen die Verformungen spontan um den Anteil ϵ_e zurück, um den sie sich beim Beginn der Belastung spontan elastisch verformt haben. Nach der Entlastung verbleibt im Polykristall aber noch der Eigenspannungszustand. Die Spannung $\Delta\tau_2$ hat

nun inelastische Verformungen zur Folge, die der ursprünglichen Verformung entgegengesetzt sind. Diese dauern solange an, bis sich die Eigenspannungen abgebaut haben. Diesen Dehnungsanteil ε_d bezeichnet man als verzögert elastisch (delayed elastic). Es gilt

$$\frac{\varepsilon_d}{\Delta\tau_1} = \frac{\varepsilon_e}{\tau} \Rightarrow \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_e} = \frac{\Delta\tau_1}{\tau} .$$

An dem Verhältnis der verzögert elastischen Dehnung zu der spontan elastischen kann somit das Verhältnis der Eigenspannung in den "schlecht" orientierten Körnern zu der äußeren Spannung abgelesen werden. Für den in Abbildung 30 und 31 wiedergegebenen Kriechversuch erhält man mit $\varepsilon_e = 0.042 MPa/9000 MPa \simeq 4.6 \cdot 10^{-6}$ und $\varepsilon_d \simeq 1.5 \cdot 10^{-4}$

$$\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_e} \simeq 33 ,$$

d.h. die Eigenspannung in den Bereichen, die für die verzögert elastische Rückfederung verantwortlich sind, beträgt das 33-fache der äußeren Belastung.

Ashby u. Duval (1985) geben eine modifizierte Form der Stoffgleichung von Sinha an. Sie lautet in normierter, dimensionsloser Form

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \bar{\varepsilon}_e + \bar{\varepsilon}_d + \bar{\varepsilon}_v \\ &= 1 + A \left\{ 1 - \exp \left(-(C\bar{t})^{\frac{1}{n}} \right) \right\} + \bar{t} . \end{aligned}$$

Die normierte Dehnung $\bar{\varepsilon}$ ist eine explizite Funktion der dimensionslosen Zeit \bar{t} . Die drei Modellparameter A , C und n sind unabhängig von der Temperatur und der Belastung. Durch eine Anpassung an Kriechversuche von Jacka (1984) ergaben sich die Modellparameter zu $A = 70$, $C = 1.6 \cdot 10^{-2}$ und $n = 3$. Die spontan elastische dimensionslose Dehnung $\bar{\varepsilon}_e$ hat den Wert 1. Die verzögert elastische Dehnung $\bar{\varepsilon}_d$ erreicht für $\bar{t} \rightarrow \infty$ den Maximalwert A . A gibt somit das maximale Verhältnis $\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_e}$ an. Die Eigenspannungen in den "schlecht" orientierten Körnern eines Polykristalls können hiernach sogar den 70-fachen Wert der äußeren Belastung annehmen. Es ist jedoch experimentell nicht geprüft worden, ob der Dehnungsanteil $\bar{\varepsilon}_d$ nach Entlastung wirklich vollständig zurückging. Die Größenordnung des Parameters A ist jedoch durch die Versuche von Mellor u. Testa (1969) gesichert. Es kann also davon ausgegangen werden, daß sich innerhalb des polykristallinen Eises eine sehr inhomogene Spannungsverteilung ausbilden wird. Diese wird einen entscheidenden Einfluß auf die den Deformationsprozeß steuernden mikromechanischen Vorgänge haben.

4.3 Mikromechanik der Polykristallverformung

Einen ersten Überblick über die Verformungsmechanismen polykristallinen Eises gibt das Verformungsdiagramm von Shoji u. Higashi (1978) (Abb.35). In Abhängigkeit von der normalisierten Schubspannung und der homologen Temperatur sind die dominierenden mikromechanischen Ursachen für die makroskopisch beobachtbaren Polykristallverformungen angegeben. Das Diagramm ist semi-empirisch, da bei seiner Konstruktion experimentelle Beobachtungen verwendet wurden, um die genaue Lage der Grenzkurven, die die einzelnen Bereiche voneinander trennen, festzulegen.

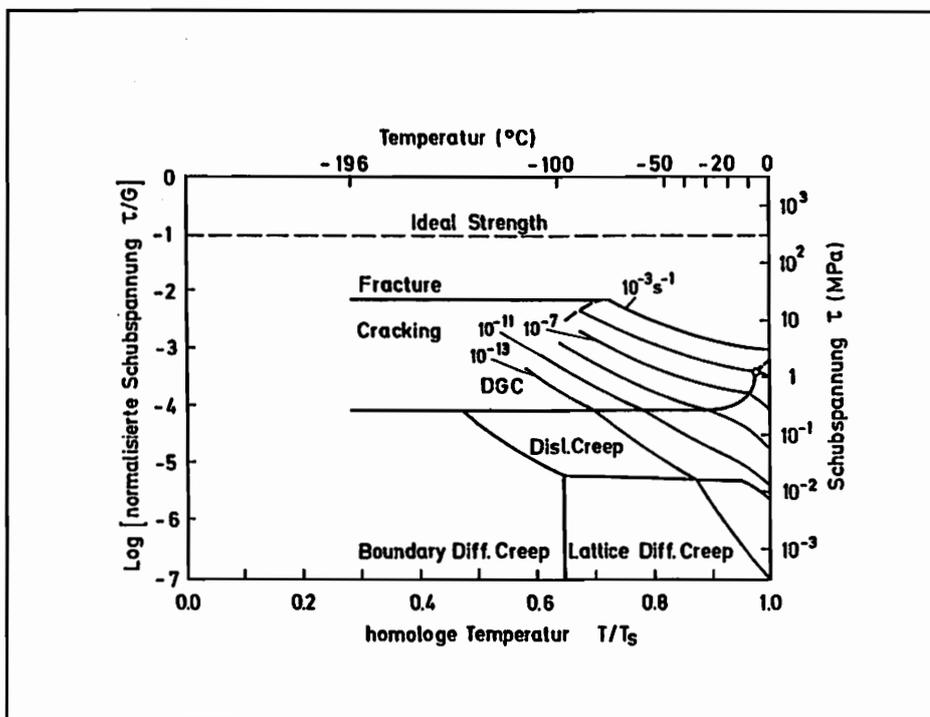


Abb. 35: Verformungsdiagramm nach Shoji u. Higashi (1978) für polykristallines Eis (Korndurchmesser $d = 2\text{mm}$)

Dem Diagramm ist zu entnehmen, daß in dem hier interessierenden Temperatur- und Spannungsbereich zwei Verformungsmechanismen vorliegen. Bei Temperaturen zwischen -5°C und -20°C und Spannungen von 10^{-2}MPa bis 1MPa werden die inelastischen Verformungen durch Versetzungsbewegungen hervorgerufen. Bei höheren Spannungen treten zusätzlich Spaltrisse auf, die zu einer stärkeren Zunahme der Dehnungsrate führen. Higashi u. Shoji bezeichnen diesen Bereich mit DGC (dislocation glide with cracks). Bei einer weiteren Steigerung der Belastung, d.h. bei Dehnungsraten über 10^{-3}s^{-1} , versagt der Werkstoff durch Sprödbruch. Für metallische Werkstoffe ist bei so hohen homologen Temperaturen das

Korngrenzgleiten ein wesentlicher Verformungsmechanismus. Bei polykristallinem Kunsteis mit einem Korndurchmesser $d \geq 1\text{mm}$ hat das Korngrenzgleiten jedoch nur einen kleinen Anteil an den Gesamtverformungen (Weertman (1973)).

4.4 Inelastische Deformationen durch Versetzungsbewegung

Das Wandern von Versetzungen ist der Hauptverformungsmechanismus polykristallinen Eises. Ashby u. Duval (1985) diskutieren die Voraussetzungen, unter denen Versetzungsbewegungen allein die großen inelastischen Verformungen des Polykristalls erklären können. Im Zusammenhang mit der Theorie von Taylor (1938) (Annahme von konstanten Dehnungsraten) ergibt sich die Notwendigkeit von fünf unabhängigen Gleit- oder Klettersystemen. Theoretische Untersuchungen von Hutchinson (1977) zeigen, daß im Rahmen des selbstkonsistenten Ansatzes von Kröner (1961) und Hill (1965) auch schon vier Gleitsysteme ausreichen, um große inelastische Verformungen zu ermöglichen. Nach Hutchinson (1977) decken sich seine Ergebnisse mit experimentellen Untersuchungen, die von Kocks u. Westlake (1967) zusammengefaßt wurden, wonach einige Polykristalle aus hexagonalen Einkristallen eine ausgeprägte Duktilität besitzen, obwohl den Monokristallen der 5. Verformungsfreiheitsgrad fehlt. Dieser wird durch die inelastischen Verformungen der benachbarten Körner ausgeglichen.

Neben der Frage, welche "harten" Gleitsysteme noch aktiviert werden (zusätzlich zu den "weichen" basalen Systemen), ist die Frage von Bedeutung, ob die "harten" oder die "weichen" Systeme die Deformationsgeschwindigkeit des Polykristalls kontrollieren. Michel (1978) geht davon aus, daß der am schlechtesten orientierte Einkristall mit seiner geringen basalen Gleitgeschwindigkeit das Verhalten des Polykristalls bestimmt. Im Gegensatz dazu kontrollieren nach Weertmann (1973) die "harten" Gleitsysteme der "schlecht" orientierten Einkristalle die Dehnungsrate. Nach Ashby u. Duval (1985) wird die Gleitgeschwindigkeit von den "harten" und "weichen" Systemen in gleicher Weise beeinflusst (Taylor-Modell). Es bildet sich also im Polykristall ein Eigenspannungszustand aus, so daß in allen Körnern die gleiche Dehnungsrate herrscht. Es ist jedoch bekannt, daß bei sehr stark ausgeprägter Anisotropie das Taylor-Modell die Eigenspannungen in den "harten" Systemen zu hoch abschätzt. Besitzt der Einkristall nur vier Verformungsfreiheitsgrade, dann strebt die dem fehlenden 5. Freiheitsgrad zugeordnete Spannungskomponente gegen Unendlich. Die Frage nach den mikromechanischen Prozessen, die die makroskopischen Deformationen in ihrer Geschwindigkeit kontrollieren, kann letztendlich nur eine genauere, der Monokristallanisotropie besser angepaßte Analyse der Eigenspannungen beantworten.

4.5 Mikrobrüche

Das im vorletzten Abschnitt angesprochene Problem der Eigenspannungsentwicklung läßt erwarten, daß innerhalb des Polykristalls Mikrobrüche entstehen, sobald sich in einem Kristall so große Eigenspannungen (mit positiver Normalspannungskomponente) entwickelt haben, daß sie die Zugfestigkeit überschreiten. Diese Erwartungen decken sich mit den experimentellen Beobachtungen von Hawkes u. Mellor (1972), Barnes et al. (1971) und Gold (1963). Sie lassen sich wie folgt zusammenfassen:

In Druckversuchen mit konstanter Dehnungsrate werden die ersten Mikrobrüche bei Dehnungen von 0.1 bis 0.3% beobachtet. Ihr Auftreten ist unabhängig von der Dehnungsrate. Die Risse sind flach, in der Größenordnung des Korndurchmessers und parallel zur Belastungsrichtung. Gold beobachtete $\frac{2}{3}$ transkristalline und $\frac{1}{3}$ interkristalline Brüche. Sie bilden sich schlagartig, aber breiten sich dann nicht weiter aus. Überschreitet die Rißdichte einen kritischen Wert, dann führt das Zusammenwachsen der Mikrobrüche zum Versagen der Probe.

Als rißauslösende Größen werden neben den Eigenspannungen aus der Monokristallanisotropie noch Spannungskonzentrationen und Versetzungsaufstau an Korngrenzen genannt.

Bei kleinen Spannungen bzw. Dehnungsraten wird keine Rißbildung beobachtet. Ein solches Verhalten ist auch in Bezug auf die zu erwartende Eigenspannungsentwicklung verständlich. Der stationäre Wert der Eigenspannungen wird sich in etwa proportional zur äußeren Belastung entwickeln und entsprechend werden bei einer Verringerung der Belastung die Eigenspannungen die Bruchfestigkeit nicht mehr überschreiten.

Im Zugversuch führt das Auftreten der ersten Risse sofort zum Versagen der Probe. Durch die Risse können hier keine Spannungskonzentrationen abgebaut werden, da sie vornehmlich senkrecht zur Belastungsrichtung liegen und somit zu einer weiteren Spannungssteigerung führen.

4.6 Wandern von Korngrenzen, Rekristallisation

Das Wandern von Korngrenzen und die Rekristallisation stellen nicht in erster Linie einen Verformungsmechanismus dar, sondern eine Änderung der inneren Struktur, die sich in der Folge auf die anderen Verformungsmechanismen auswirkt. Eine sehr ausführliche Behandlung dieses Themas enthält die Arbeit von Steinemann (1958). Er untersuchte den Einfluß, den unterschiedliche Belastungen (Art, Größe, Geschwindigkeit und Temperatur) auf den Verlauf des Rekristallisationsprozesses ausüben. Die Rekristallisation wurde dabei bezüglich ihres zeitlichen Verlaufs (Einsatz und Geschwindigkeit) und ihrer mikrostrukturellen Abläufe

(Wachsen von Körnern auf Kosten anderer, Entstehen neuer Körner) und Auswirkungen (Kornform, Korngröße, Texturen) charakterisiert. Rigsby (1960) untersuchte die Kristallorientierungen in Gletschereis und stellte einen Zusammenhang zur Richtung der maximalen Schubspannung her. Eine weitere Arbeit stammt von Shoumsky (1958). Einige Ergebnisse dieser Autoren seien hier kurz zusammengefaßt:

Bei einer lange andauernden Belastung eines Polykristalls ändert sich das Gefüge von einer anfänglich zufälligen Verteilung der Kristallachsen hin zu einer ausgeprägten Textur. So lagen z.B. bei einer Gletschereisprobe 39% der Kristallachsen in 1% des Orientierungsraumes (Rigsby (1960)). Trotz einiger Unterschiede in den beobachteten Texturen (bezüglich Anzahl und Lage der bevorzugten Kristallorientierungen) läßt sich folgendes festhalten: es bildet sich ein Gefüge, in dem die basalen Ebenen so ausgerichtet sind, daß sich die einzelnen Kristalle unter der gegebenen Belastung möglichst leicht verformen können. Rekristallisation führt somit zu einer Entfestigung des Polykristalls. Dies gilt natürlich nur für die gegebene Belastung. Bei einer Änderung der Belastungsrichtung stellt man ggf. eine Verfestigung des Polykristalls fest, da die einzelnen Kristalle für die geänderte Belastung unter Umständen ungünstig orientiert sind. Rekristallisation führt also im allgemeinen zu einem anisotropen Materialverhalten.

Experimentelle Untersuchungen weisen auf eine Proportionalität zwischen der Rekristallisationsgeschwindigkeit auf der einen Seite und der Temperatur und der Höhe der Belastung auf der anderen Seite hin.

Als treibende Kraft der Rekristallisation wird ein Potentialgefälle angesehen, das aus den Eigenspannungen und Spannungskonzentrationen resultiert. Der Polykristall ist bestrebt, die in den Spannungsfeldern gespeicherte elastische Energie zu minimieren. Dies geschieht durch das Entstehen neuer und somit spannungsfreier Körner oder durch das Wachsen von "gut" orientierten auf Kosten von "schlecht" orientierten Körnern. Beide Vorgänge werden durch einen thermisch aktivierten Diffusionsprozeß gesteuert.

Als weitere Verformungsmechanismen seien noch das Korngrenzgleiten (Michel (1978)) und die Bildung von Kleinwinkelkorngrenzen (Gold (1960)) genannt. Sie sind für das Deformationsverhalten jedoch von untergeordneter Bedeutung.

4.7 Übersicht über einige Stoffgesetze für polykristallines Eis

Grundlage vieler weiterer Arbeiten ist das Fließgesetz von Glen (1958). Es gibt den allgemeinen Zusammenhang zwischen der sekundären Kriechrate $\dot{\epsilon}$ und dem Spannungsdeviator $\underline{\tau}$ für

isotropes Materialverhalten an, wie es sich aus der Darstellungstheorie isotroper Tensorfunktionen unter den Annahmen von Volumenkonstanz und Unabhängigkeit vom hydrostatischen Druck ergibt.

$$\dot{\underline{\epsilon}} = -\frac{2}{3}\Sigma_2 C(\Sigma_2, \Sigma_3)\underline{\mathbb{1}} + B(\Sigma_2, \Sigma_3)\underline{\mathbb{T}} + C(\Sigma_2, \Sigma_3)\underline{\mathbb{T}}^2$$

mit $\Sigma_2 = \frac{1}{2}\text{Sp}(\underline{\mathbb{T}}^2)$ und $\Sigma_3 = \frac{1}{3}\text{Sp}(\underline{\mathbb{T}}^3)$.

Durch die Annahme $C = 0$ und $B = \Sigma_2^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{A^n}$ erhält Glen das dreidimensionale Gegenstück zum einaxialen Potenzgesetz für die sekundären Kriechraten $\dot{\epsilon} = \left(\frac{\sigma}{A}\right)^n$ mit den beiden Materialkonstanten A und n .

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{A^n} \Sigma_2^{\frac{n-1}{2}} \underline{\mathbb{T}}$$

Diese Gleichung, in der ein- oder dreidimensionalen Formulierung, findet sich in vergleichbarer Form in vielen der folgenden Stoffgesetze wieder. Sie wurde daher den anderen Arbeiten vorangestellt.

4.7.1 Eindimensionale Stoffgesetze

Die Gleichung von Sinha (1978) ist eigentlich kein Stoffgesetz, sondern eine phänomenologische Beziehung, die für einen Druckversuch mit konstanter Last die Dehnung als Funktion der Zeit angibt. Die Dehnungen werden in die drei Komponenten spontan elastisch, verzögert elastisch und viskose bzw. bleibende Dehnung aufgespalten:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_e + \epsilon_d + \epsilon_v \\ \epsilon_e &= \frac{\sigma}{E} \\ \epsilon_d &= \frac{\sigma}{E} c \left\{ 1 - \exp\left(-[\alpha_T t]^b\right) \right\} \\ \epsilon_v &= \dot{\epsilon}_{v_I} |\sigma|^{n-1} t \end{aligned}$$

Wird die viskose Dehnung ϵ_v nach der Zeit t abgeleitet, dann erhält man das Glen'sche Fließgesetz. Leitet man die verzögert elastischen Dehnungen ϵ_d nach t ab und eliminiert dann die Zeit mit Hilfe von ϵ_d , dann erhält man für die verzögert elastische Dehnungsrate $\dot{\epsilon}_d$ einen Ausdruck der Form

$$\dot{\epsilon}_d = \left\{ \frac{\sigma}{E} c - \epsilon_d \right\} f\left(\frac{\sigma}{E} c - \epsilon_d\right)$$

Die Evolutionsgleichung für ϵ_d kann durch

$$\dot{\epsilon}_d = A \{K\sigma - \epsilon_d\}$$

angenähert werden (Ohno et al. (1985)). A und K sind hierin Konstanten. Zusammen mit

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{v_I} |\sigma|^{n-1} \sigma \quad \text{und} \quad \dot{\epsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}}{E}$$

gelangt man zu einem Differentialgleichungssystem, durch dessen Integration man die Antwort des Materials auf eine beliebige Belastungsgeschichte $\sigma(t)$ erhält. ε_d hat die Bedeutung einer internen Variablen, die den augenblicklichen Eigenspannungszustand repräsentiert. Aber auch die anderen mikroskopischen Veränderungen (Versetzungsdichte, Gefüge, Mikrorisse) müssen durch ε_d erfaßt werden.

Das Stoffgesetz von Michel (1978) ist ein eindimensionales Taylor-Modell. Da Michel inelastische Deformationen nur durch basale Gleitung zuläßt, kann – bei einer regellosen Verteilung der Kristallachsen – die Gesamtdehnung etwa nur den doppelten Wert der elastischen Dehnung annehmen (Ashby u. Duval (1985)). Diese Schwierigkeit des Taylor-Modells wird umgangen, indem gefordert wird, daß die "schlecht" orientierten Körner sich zuvor in eine günstigere Position drehen. Durch diesen Anfangsdrehwinkel kann das Verhalten des Polykristalls verändert werden. Seine physikalische Bedeutung bleibt jedoch unklar. Das verwendete monokristalline Stoffgesetz der basalen Gleitung basiert auf der Gleichung von Orowan mit veränderlicher Versetzungsdichte (siehe auch Abschnitt 2.3.2).

Le Gac u. Duval (1980) modifizierten das Glensche Fließgesetz durch Einführung zweier Verfestigungsvariablen S_1 und S_2 und beschreiben damit die gesamte inelastische Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}_i$ wie folgt:

$$\dot{\varepsilon}_i = B (|\sigma - S_1| - S_2)^n \quad .$$

Die Evolutionsgleichung von S_1 bzw. S_2 besteht jeweils aus einem Verfestigungs- und einem Erholungsterm:

$$\dot{S}_1 = h\dot{\varepsilon}_i - \alpha S_1^n \quad , \quad \dot{S}_2 = h'\dot{\varepsilon}_i - \alpha' S_2^n \quad .$$

S_1 repräsentiert den Eigenspannungszustand des Materials (kinematische Verfestigung) und S_2 Veränderungen der Versetzungsstruktur (isotrope Verfestigung).

Das Stoffgesetz von Ashby u. Duval (1985) basiert auf dem in Abbildung 36 wiedergegebenen rheologischen Modell, bestehend aus zwei Federn und zwei nichtlinearen Dämpfern, von denen der eine für die basalen und der andere für die nicht basalen Gleitsysteme steht. Sie sind gekennzeichnet durch die Spannung σ_{0A} bzw. σ_{0B} , die notwendig sind, um die basale bzw. nicht basale Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}_0$ zu erzeugen. Es handelt sich hierbei um ein eindimensionales Taylor-Modell eines Polykristalls, der aus zwei Einkristallen besteht, wobei jeder Kristall die gleiche Verformung erfährt. Neben den Werkstoffeigenschaften ($\dot{\varepsilon}_0$, σ_{0A} , σ_{0B} , n und E-Modul E) werden die beiden Kristalle noch durch ihre bezogene Länge (l_A und l_B) und Querschnittsfläche (f_A und f_B) charakterisiert. Die inelastische Dehnungsrate ergibt sich zu

$$\dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_0 \left\{ f_A \left(\frac{\sigma - S \frac{f_B}{l_B}}{l_A \sigma_{0A}} \right)^n + f_B \left(\frac{\sigma + S \frac{f_A}{l_A}}{l_B \sigma_{0B}} \right)^n \right\} \quad .$$

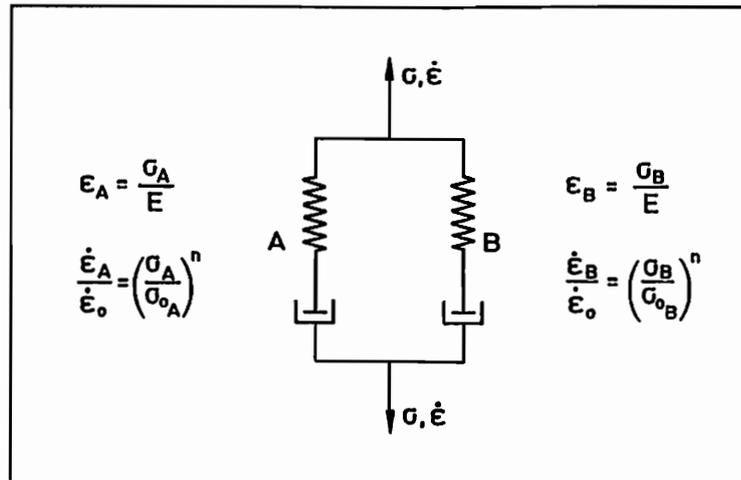


Abb. 36: Rheologisches Modell des Stoffgesetzes von Ashby u. Duval (1985)

Die Evolutionsgleichung der internen Variablen S lautet

$$\dot{S} = E\dot{\epsilon}_0 \left\{ l_A \left(\frac{\sigma - S \frac{l_B}{l_A}}{l_A \sigma_{0A}} \right)^n - l_B \left(\frac{\sigma + S \frac{l_A}{l_B}}{l_B \sigma_{0B}} \right)^n \right\} = E \frac{l_A}{f_A} \left\{ \dot{\epsilon}_i - \dot{\epsilon}_0 l_B \left(\frac{\sigma + S \frac{l_A}{l_B}}{l_B \sigma_{0B}} \right)^n \right\} .$$

S gibt Auskunft über die Größe der Eigenspannungen in der Ebene senkrecht zur Belastungsrichtung. Die für die Entwicklung von Spaltrissen so wichtige Normalspannungskomponente in Ebenen, die die Probenachse enthalten, bleibt jedoch unbestimmt. Hieran würde sich auch dann nichts ändern, wenn die eindimensionale Formulierung in bekannter Weise in eine dreidimensionale überführt würde, da es weiterhin ein eindimensionales Taylor-Modell bliebe. Eine sinnvolle Erweiterung des Werkstoffgesetzes von Ashby u. Duval ist durch die Formulierung von Evolutionsgleichungen für die basalen und nicht basalen Versetzungsdichten möglich. σ_{0A} bzw. σ_{0B} wären dann nicht mehr konstant, sondern von den Versetzungsdichten abhängig. Damit könnten die einzelnen mikromechanischen Vorgänge getrennt moduliert werden.

4.7.2 Dreidimensionale Stoffgesetze

Karr u. Choi (1989) entwickelten ein dreiaxiales Stoffgesetz für polykristallines Eis. Einem Vorschlag Bettens folgend wurde die einaxiale Stoffgleichung von Sinha (Abschnitt 4.7.1) auf

drei Dimensionen erweitert:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\varepsilon}} &= \dot{\underline{\varepsilon}}_e + \dot{\underline{\varepsilon}}_d + \dot{\underline{\varepsilon}}_v \\ \dot{\underline{\varepsilon}}_e &= \underline{\underline{S}} : \dot{\underline{\sigma}} \\ \dot{\underline{\varepsilon}}_d &= A \left(\frac{3}{2} K \underline{\underline{T}} - \underline{\varepsilon}_d \right) \\ \dot{\underline{\varepsilon}}_v &= \frac{3}{2} K \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}} \right)^{\frac{n-1}{2}} \underline{\underline{T}} \quad .\end{aligned}$$

Zur Berücksichtigung von Mikrobrüchen wurde mit einem tensorwertigen Schädigungsmaß \underline{D}_k von Krajcinovic (1985) ein effektiver Spannungsdeviator $\underline{\underline{T}}_{eff}$ definiert und dieser anstelle von $\underline{\underline{T}}$ in den obigen Gleichungen verwendet. Der Schädigungstensor \underline{D}_k läßt sich aus der Rißflächenverteilung berechnen. Seine Entwicklungsgleichung erhielten Karr u. Choi, indem sie die Veränderung einer jeden Rißfläche von den in der Rißfläche wirkenden Spannungen und Dehnungen ($\underline{\varepsilon}$ und $\underline{\varepsilon}_d$) und deren Raten abhängig machten. Die verzögert elastischen Dehnungen $\underline{\varepsilon}_d$ repräsentieren zwar auf der Makroebene die Eigenspannungen, sie geben jedoch über die lokalen Spannungsverteilungen, die für ein Rißwachstum verantwortlich sind, keine Auskunft. Das tertiäre Kriechen konnte mit diesen Ansätzen trotzdem gut beschrieben werden. Auch die im Experiment beobachteten Unterschiede zwischen Druck- und Zugspannungen zeigten sich qualitativ richtig in den Beispielrechnungen. Rekristallisationsvorgänge wurden nicht berücksichtigt.

Das von Glockner u. Szyszkowski (1990) vorgeschlagene Stoffgesetz spaltet die Dehnungsrate auch in drei Anteile auf:

$$\dot{\underline{\varepsilon}} = \dot{\underline{\varepsilon}}_e + \dot{\underline{\varepsilon}}_r + \dot{\underline{\varepsilon}}_p \quad .$$

Die elastischen $\dot{\underline{\varepsilon}}_e$ und die permanenten Dehnungsraten $\dot{\underline{\varepsilon}}_p$ des Basismodells stimmen vollkommen mit den entsprechenden Anteilen von Karr u. Choi überein. Karr u. Choi bezeichnen $\dot{\underline{\varepsilon}}_p$ jedoch als viskose Dehnungsrate $\dot{\underline{\varepsilon}}_v$. Der experimentelle Hintergrund der dritten Komponente ist bei den unterschiedlichen Autoren ebenfalls gleich. Die einen bezeichnen sie als reversible Dehnungsrate $\dot{\underline{\varepsilon}}_r$, die anderen als verzögert elastische Dehnungsrate $\dot{\underline{\varepsilon}}_d$. Im Gegensatz zu Karr u. Choi schreiben Glockner u. Szyszkowski für die reversiblen Dehnungen zunächst ein Volterra-Integral

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\varepsilon}}_r &= \frac{3}{2\nu_1} \frac{d}{dt} \int_0^t S(\bar{t})^{n-1} \underline{\underline{T}}(\bar{t}) j(t-\bar{t}) d\bar{t} \\ S^2 &= \frac{3}{2} \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{T}}\end{aligned}$$

mit der Gedächtnisfunktion $j(t)$. Diese wird dann jedoch durch die spezielle Gedächtnisfunktion eines verallgemeinerten Kelvin-Körpers ersetzt, so daß sich dann auch eine gewöhnliche

Evolutionsgleichung für $\dot{\underline{\varepsilon}}_r$ ergibt:

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_r = \frac{1}{\nu_1} \underline{f}(\underline{\tau}, \underline{\varepsilon}_r) \quad .$$

Die Funktion \underline{f} ist implizit durch eine nichtlineare Gleichung gegeben, in der noch zwei Werkstoffparameter vorhanden sind. Glockner u. Szyszkowski geben als Vorteil ihres Ansatzes an, daß einer der beiden Werkstoffparameter direkt aus den Kriechkurven abgelesen werden kann. Zur Berücksichtigung der Materialschädigung wird eine skalarwertige Schädigungsvariable ω eingeführt, die in bekannter Weise die Reduktion der effektiven Querschnittsfläche beschreibt. ω beeinflusst über die Spannung nur $\dot{\underline{\varepsilon}}_p$. Die Evolutionsgleichung von ω ist so formuliert, daß unter Druckbelastung $\dot{\omega} = 0$ gilt. Materialschädigung unter Druckbelastung wird durch einen zusätzlichen skalaren Faktor beschrieben, der von der 2. Invariante der plastischen Dehnung $\underline{\varepsilon}_p$ abhängig ist.

Pohé u. Bruhns (1992), Pohé (1992) stellen ein phänomenologisches, thermodynamisch konsistentes Stoffgesetz vor, das auf einer ursprünglich für metallische Hochtemperaturwerkstoffe entwickelten Formulierung basiert (Bruhns (1987)). Die Verzerrungsgeschwindigkeiten werden in einen elastischen und einen inelastischen Anteil aufgespalten. Durch eine skalare (modifizierte inelastische Arbeit) und zwei tensorielle interne Zustandsvariablen (kinematische Verfestigung) wird die anfängliche Verfestigung (Entstehung von Eigenspannungsfeldern) und die später einsetzende Entfestigung (Rekristallisation und Materialschädigung) des Materials beschrieben. Obwohl das Stoffgesetz explizit keine Schädigungsvariable definiert wird das Verhalten des Polykristalls auch bei großen Deformationen gut wiedergegeben. Die Materialparameter wurden aus Druckversuchen mit konstanter Dehnungsrate ermittelt. Diese konnten anhand von Kriech-, Relaxations- und Druckversuchen mit Zwischenentlastung und Erholung erfolgreich verifiziert werden. Neben der Spannung ist auch die Temperatur eine externe Zustandsvariable. Dadurch können auch nichtisotherme Prozesse berechnet werden.

Lile (1978) berechnete den Verstärkungsfaktor für polykristallines Eis mit Textur und verglich ihn mit experimentell bestimmten Werten. Er erzielte für einaxiale Druck- bzw. Scherversuche eine gute Übereinstimmung. Der Verstärkungsfaktor ist definiert als das Verhältnis der Dehnungsraten von anisotropem (mit Textur) zu isotropem (ohne Textur) Eis. Der Berechnung liegt die Annahme eines konstanten Spannungsfeldes innerhalb des Polykristalls zugrunde. Die auftretenden Abweichungen von diesen Annahmen werden durch einen Wechselwirkungsfaktor berücksichtigt. Die Dehnungsrate des Polykristalls $\dot{\underline{\varepsilon}}$ ist als der räumliche Mittelwert der basalen Dehnungsraten $\dot{\underline{\varepsilon}}_b$ der einzelnen Körner definiert.

$$\dot{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{V} \int_V \dot{\underline{\varepsilon}}_b dV = \langle \dot{\underline{\varepsilon}}_b \rangle$$

Die Integration erstreckt sich über das Volumen V eines repräsentativen Volumenelementes.

5. Stoffgesetzformulierungen unter Berücksichtigung der Mikrostruktur

5.1 Beziehungen zwischen der Mikro- und der Makroebene, Homogenisierung

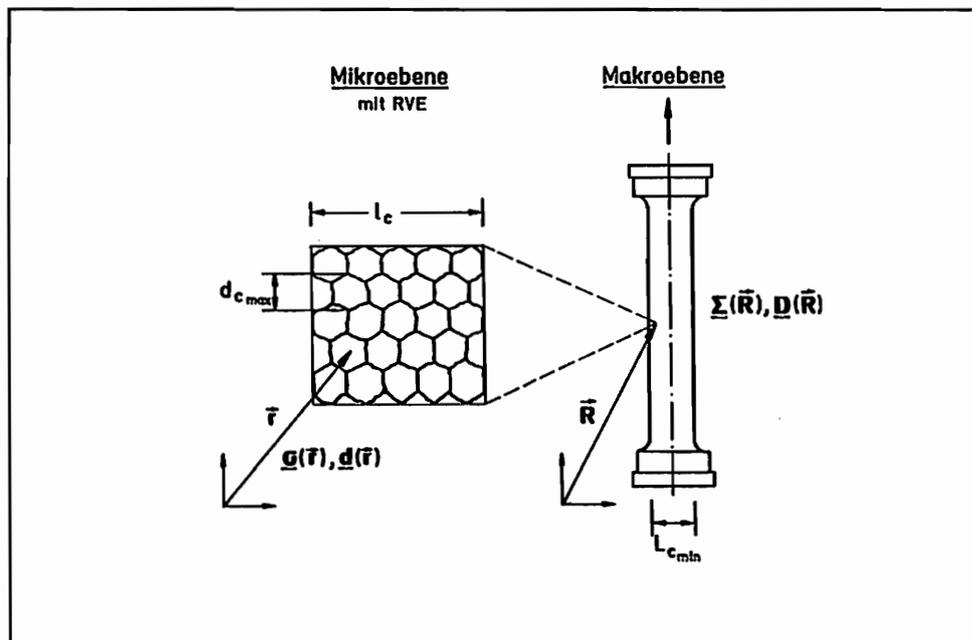


Abb. 37: Mikroebene mit "Repräsentativem Volumenelement" (RVE), Makroebene mit Zugprobe als Beispiel eines realen Bauteils

Die Frage nach der Verformung eines Bauteils unter einer gegebenen Belastung definiert die Makroebene eines Problems. In Abb. 37 ist eine Zugprobe dargestellt, auf deren äußeren Rand z.B. die Spannungen vorgegeben sind. Die Suche nach dem entsprechenden Geschwindigkeitsfeld führt auf ein Randwertproblem. Die üblichen Lösungsverfahren setzen im allgemeinen die Existenz eines Kontinuums voraus, dessen Materialeigenschaften durch ein makroskopisches Stoffgesetz der Form $\underline{D} = \underline{D}(\underline{\Sigma}, \dot{\underline{\Sigma}}, \dots)$ beschrieben werden können. Die Verzerrungsgeschwindigkeit \underline{D} ist eine Funktion der Spannung $\underline{\Sigma}$, ihrer zeitlichen Änderung $\dot{\underline{\Sigma}}$ (ggf. eine geeignet gewählte objektive Zeitableitung) und eines Satzes interner Zustandsvariablen, die noch genauer zu spezifizieren sind. Die auf der Makroebene definierten

Variablen werden durch Großbuchstaben gekennzeichnet. Sie können mit dem Ortsvektor der Makroebene \vec{R} variieren.

Hinter der Bezeichnung "makroskopisches Stoffgesetz" verbirgt sich die Annahme lokaler Homogenität (Nemat-Nasser (1986)). Dies bedeutet, daß in einer bezüglich der Bauteilabmessungen sehr kleinen Umgebung eines jeden Punktes ein homogener Werkstoff vorliegt. Im Gegensatz dazu ergeben sich aus einer globalen Homogenität gleiche Materialeigenschaften in allen Punkten eines Bauteils. Eine solche Forderung ist jedoch weder sinnvoll noch notwendig, da sich aufgrund unterschiedlicher Belastungsgeschichten die Werkstoffeigenschaften in einzelnen Bereichen eines Bauteils unterschiedlich entwickeln können. Bezogen auf die in Abb. 37 dargestellte Zugprobe könnte das z.B. bedeuten, daß der Werkstoff aufgrund von inelastischen Deformationen im Bereich der Meßlänge verfestigt, während er im Bereich der Spannköpfe seine ursprünglichen Eigenschaften behält. Die Probe wäre somit global inhomogen.

Jeder reale Werkstoff ist auch lokal inhomogen. So setzt sich polykristallines Eis aus Körnern (Monokristallen) mit unterschiedlichen Orientierungen der Kristallachse zusammen, wodurch sich die Materialeigenschaften an den Korngrenzen un stetig ändern. Die Betrachtungen, die den realen Aufbau des Werkstoffes mitberücksichtigen, definieren die Mikroebene. Im Rahmen dieses Kapitels wird die Mikrostruktur durch die Zusammenlagerung unterschiedlicher (bezüglich Kornform, Größe und Kristallachsenorientierung) Monokristalle gebildet. Die einzelnen Einkristalle werden wiederum als Kontinuum betrachtet. Bei der Herleitung des monokristallinen Stoffgesetzes (Abschnitt 3.6) war der Einkristall auf der Makroebene angeordnet. Die Beschreibung der Versetzungsbewegung erfolgte auf der Mikroebene. Dieses Beispiel zeigt, daß die Definition der Mikro- und Makroebene problemabhängig erfolgen kann.

In Abb. 37 ist ein repräsentatives Volumenelement (RVE) dargestellt. Es besteht aus einer Vielzahl von Einkristallen von unterschiedlicher Größe, Form und Kristallachsenorientierung. Die Verteilung der Eigenschaften sei charakteristisch für den zu betrachtenden Polykristall. Es ist erforderlich, daß der maximale Korndurchmesser $d_{c_{max}}$ viel kleiner als die charakteristische Länge l_c des RVE ist. Auf der anderen Seite soll das RVE jedoch so klein sein, daß es makroskopisch quasi als Punkt betrachtet werden kann. Das bedeutet, daß l_c selber wiederum viel kleiner als die kleinste charakteristische Länge $L_{c_{min}}$ des Bauteils sein muß.

$$d_{c_{max}} \ll l_c \ll L_{c_{min}}$$

Wird das RVE auf seiner Oberfläche ∂V (äußere Flächennormale \vec{n}) homogen durch die Spannungsverteilung \vec{t} belastet, d.h. $\vec{t} = \underline{\sigma}_0 \cdot \vec{n}$ (mit einem räumlich konstanten Spannungstensor

$\underline{\sigma}_0$), dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle \underline{\sigma} \rangle &\equiv \frac{1}{V} \int_V \underline{\sigma} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_V (\vec{r} \underline{\sigma}) \cdot \vec{\nabla} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\vec{r} \underline{\sigma}) \cdot \vec{n} dA = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\vec{r} \underline{\sigma}_0) \cdot \vec{n} dA = \underline{\sigma}_0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Wird das im allgemeinen inhomogene Spannungsfeld $\underline{\sigma}(\vec{r})$ über das Volumen V des RVE gemittelt, so ergibt sich gerade der homogene Spannungstensor $\underline{\sigma}_0$. Der Ortsvektor der Mikroebene wird mit \vec{r} bezeichnet.

Das aus der homogenen Spannungsverteilung resultierende Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$ wird weder innerhalb des RVE noch auf seinem Rand ∂V einem homogenen Zustand entsprechen: $\vec{v}(\vec{r}) \neq \underline{l}_0 \cdot \vec{r}$, mit dem konstanten Geschwindigkeitsgradienten \underline{l}_0 . Auf der Oberfläche wird $\vec{v}(\vec{r})$ im Mittel jedoch nur wenig von einem Geschwindigkeitsfeld mit konstantem Gradienten \underline{l}_0 abweichen, wenn

$$\underline{l}_0 = \langle \underline{l} \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \underline{l} dV \equiv \frac{1}{V} \int_V \vec{v}(\vec{r}) \vec{\nabla} dV$$

gesetzt wird, denn es gilt:

$$\int_{\partial V} [\vec{v}(\vec{r}) - \underline{l}_0 \cdot \vec{r}] \vec{n} dA = \int_V [\vec{v}(\vec{r}) - \underline{l}_0 \cdot \vec{r}] \vec{\nabla} dV = \int_V [\underline{l} - \underline{l}_0] dV = \underline{0} \quad .$$

Gemittelt über die Oberfläche des RVE verschwindet die Differenz zwischen dem wirklichen und dem homogenen Geschwindigkeitsfeld.

Wird auf der Oberfläche eine homogene Geschwindigkeitsverteilung vorgegeben, $\vec{v}(\vec{r}) = \underline{l}_0 \cdot \vec{r}$, mit $\vec{r} \in \partial V$ und $\underline{l}_0 \neq \underline{l}_0(\vec{r})$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle \underline{l} \rangle &\equiv \frac{1}{V} \int_V \underline{l} dV \equiv \frac{1}{V} \int_V \vec{v}(\vec{r}) \vec{\nabla} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial V} \vec{v}(\vec{r}) \vec{n} dA = \frac{1}{V} \underline{l}_0 \cdot \int_{\partial V} \vec{r} \vec{n} dA = \underline{l}_0 \cdot \frac{1}{V} \int_V \vec{r} \vec{\nabla} dV = \underline{l}_0 \quad . \end{aligned}$$

Das daraus ermittelte Spannungsfeld $\underline{\sigma}(\vec{r})$ wird eine inhomogene Spannungsverteilung $\vec{t}(\vec{r})$ auf dem Rand ergeben. Gemittelt über die Oberfläche des RVE wird jedoch das erste Moment der Differenz zwischen $\vec{t}(\vec{r})$ und der homogenen Verteilung $\underline{\sigma}_0 \cdot \vec{n}(\vec{r})$ verschwinden, wenn

$$\underline{\sigma}_0 = \langle \underline{\sigma} \rangle$$

gesetzt wird, denn es gilt:

$$\int_{\partial V} \vec{r} [\vec{t} - \underline{\sigma}_0 \cdot \vec{n}] dA = \int_V [\vec{r} [\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_0]] \cdot \vec{\nabla} dV = \int_V \underline{1} \cdot [\underline{\sigma} - \underline{\sigma}_0] dV = \underline{0} \quad .$$

Damit läßt sich durch die folgenden Homogenisierungsvorschriften eine sinnvolle Beziehung zwischen der Mikro- und der Makroebene definieren.

5.1.1 Homogenisierungsvorschrift

Die makroskopischen Zustandsvariablen lassen sich als räumlicher Mittelwert der entsprechenden mikroskopischen Zustandsvariablen definieren.

$$\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle \quad (5.2)$$

$$\underline{D} = \langle \underline{d} \rangle \text{ und } \underline{W} = \langle \underline{w} \rangle \Leftrightarrow \underline{L} = \langle \underline{l} \rangle \quad (5.3)$$

Ist auf dem Rand des RVE entweder eine homogen Spannungs- oder eine homogene Geschwindigkeitsverteilung vorgegeben, dann folgt aus diesen Definitionen (Nemat-Nasser (1986))

$$\underline{\Sigma} : \underline{D} = \langle \underline{\sigma} : \underline{d} \rangle \quad , \quad (5.4)$$

d.h. die makroskopische Arbeitsrate ergibt sich als der räumliche Mittelwert der entsprechenden mikroskopischen Größen.

In der gleichen Weise kann auf der Makroebene auch die spezifische elastische Energie E_e (bezogen auf das Volumen) bzw. die Dichte ρ durch die entsprechenden Größen der Mikroebene (e bzw. ρ) definiert werden.

$$E_e = \langle e \rangle \quad , \quad \rho = \langle \rho \rangle \quad (5.5)$$

5.1.2 Möglichkeiten zur Formulierung eines makroskopischen Stoffgesetzes durch Homogenisieren

Zu einem makroskopischen Stoffgesetz kann man durch die Homogenisierungsvorschrift auf zwei unterschiedlichen Wegen gelangen:

a)

- Vorgeben einer homogenen Spannungsverteilung $\vec{t} = \underline{\Sigma} \cdot \vec{n}$ auf ∂V
- Ermitteln des lokalen Spannungs- bzw. Verzerrungsgeschwindigkeitsfeldes $\underline{\sigma}(\vec{r})$ bzw. $\underline{d}(\vec{r})$. Diese Felder sind abhängig von der Belastung $\underline{\Sigma}$ und den internen Variablen, die den Aufbau des RVE festlegen.
- Homogenisieren: $\underline{D} = \langle \underline{d}(\vec{r}) \rangle \Rightarrow \underline{D} = \underline{D}(\underline{\Sigma}, \dots)$

b)

- Vorgeben einer homogenen Geschwindigkeitsverteilung $\vec{v} = \underline{D} \cdot \vec{r}$ auf ∂V
- Ermitteln des lokalen Spannungs- bzw. Verzerrungsgeschwindigkeitsfeldes $\underline{\sigma}(\vec{r})$ bzw. $\underline{d}(\vec{r})$. Diese Felder sind abhängig von der Belastung \underline{D} und den internen Variablen, die den Aufbau des RVE festlegen.
- Homogenisieren: $\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma}(\vec{r}) \rangle \Rightarrow \underline{\Sigma} = \underline{\Sigma}(\underline{D}, \dots) \Rightarrow \underline{D} = \underline{D}(\underline{\Sigma}, \dots)$

Die nach a) oder b) ermittelten Stoffgesetze stimmen in der Regel nicht überein. Eine Ausnahme bilden die selbstkonsistenten Formulierungen.

5.2 Möglichkeiten zur Abschätzung der Zustandsvariablen auf der Mikroebene

Die Mikrostruktur realer Werkstoffe ist in der Regel so kompliziert, daß die wirkliche Berechnung der Zustandsvariablen innerhalb des RVE ($\underline{\sigma}$, \underline{d} , ...) nicht möglich ist. Dieses gilt um so mehr, wenn die tatsächliche Anordnung der einzelnen Kristalle innerhalb eines Polykristalls unbekannt ist. Es muß deshalb nach Wegen gesucht werden, um die Zustandsvariablen näherungsweise bestimmen zu können. Es werden in der Folge einige Möglichkeiten aufgezeigt und bezüglich der notwendigen Annahmen klassifiziert. Ihre Eignung, das Materialverhalten polykristallinen Eises zu beschreiben, wird diskutiert.

- Annahme eines konstanten Spannungsfeldes (Sachs (1924), Reuss (1929))

Die Gleichgewichtsbedingungen sind a priori erfüllt. Durch die unterschiedlichen Materialeigenschaften in den einzelnen Körnern sind die Kompatibilitätsbedingungen an den Korngrenzen jedoch verletzt. Die Verzerrungsgeschwindigkeiten \underline{d} lassen sich mittels des monokristallinen Stoffgesetzes direkt berechnen und damit auch $\underline{D} = \langle \underline{d} \rangle$. Werden mit Hilfe dieser Annahme die Spannungen berechnet, die notwendig sind, um eine vorgegebene Verformung zu erzeugen, so stellen diese eine untere Schranke für die wirklichen Spannungen dar. Im Kapitel 4 zeigte sich, daß in polykristallinem Eis ein sehr inhomogener Spannungszustand entstehen kann. Die Annahme eines konstanten Spannungsfeldes ist somit nicht geeignet.

- Annahme eines konstanten Dehnungs- bzw. Verzerrungsgeschwindigkeitsfeldes (Taylor (1938), Voigt (1889))

In diesem Fall sind die Gleichgewichtsbedingungen an den Korngrenzen verletzt. Durch Invertierung des monokristallinen Stoffgesetzes lassen sich die lokalen Spannungen $\underline{\sigma}$ berechnen, die notwendig sind, um das vorgegebene Geschwindigkeitsfeld zu erzeugen. Die daraus ermittelten makroskopischen Spannungen $\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle$ stellen

eine obere Schranke für den tatsächlichen Spannungszustand dar. Monokristallines Eis ist in Richtung der Kristallachse quasi nicht verformbar. Wird durch das makroskopische Geschwindigkeitsfeld eine Verformung in diese Richtung vorgegeben, dann streben die dazu benötigten Spannungen gegen Unendlich. Ein Taylor-Modell ist also zur Beschreibung des Polykristallverhaltens nicht geeignet, wenn die Monokristalle weniger als fünf linear unabhängige Verformungsfreiheitsgrade besitzen (siehe auch Ashby u. Duval (1985), Hutchinson (1977)).

- CH-Modell (constrained hybrid) (Parks u. Ahzi (1990))

Das CH-Modell von Parks u. Ahzi wurde speziell für solche Polykristalle entwickelt, deren Einkristalle nur vier oder weniger Verformungsfreiheitsgrade besitzen. Bei solchen Einkristallen versagt das klassische Taylor-Modell, da sie in eine Richtung (gekennzeichnet durch den Einheitsvektor \vec{n}) unverformbar sind. Es wird zunächst ein Projektionstensor definiert, der den makroskopischen Tensor \underline{D} in den vierdimensionalen Unterraum der möglichen Einkristallverformungen abbildet: $\underline{d} = \underline{P} : \langle \underline{P} \rangle^{-1} : \underline{D}$. Hierdurch ist die Bedingung $\underline{D} = \langle \underline{d} \rangle$ erfüllt. Mit der Notation des Kapitels 8 hat \underline{P} die Darstellung $\underline{P} = \underline{I}^p + \underline{I}^b$ und ist also nur eine Funktion der Richtung \vec{n} . Mit dem monokristallinen Stoffgesetz folgt aus \underline{d} die lokale Spannung $\underline{\sigma}_l$. Diese ist jedoch in Richtung von \vec{n} unbestimmt, da das Stoffgesetz hierüber keine Aussage macht. Um die fehlende Spannungskomponente zu bestimmen, projizieren Parks u. Ahzi den makroskopischen Spannungstensor $\underline{\Sigma}$ in den entsprechenden ein-dimensionalen Unterraum, addieren diesen Anteil zu $\underline{\sigma}_l$ und definieren damit den vollständigen lokalen Spannungstensor $\underline{\sigma}$, $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_l + \underline{I}^a : \underline{\Sigma}$. Aus $\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle$ folgt damit $\langle \underline{\sigma}_l \rangle = \langle \underline{P} \rangle : \underline{\Sigma}$. Das CH-Modell ist somit in vier Dimensionen eine Art Taylor-Ansatz und in der fünften Dimension ein Sachs-Modell. Da nur inelastische Verformungen berücksichtigt werden, ist das CH-Modell zur Beschreibung des transienten Verhaltens, d.h. der verzögert elastischen Dehnungen, von polykristallinem Eis wenig geeignet.

- selbstkonsistente Formulierungen (Kröner (1958), Hill (1965))

Die Umgebung eines Kornes innerhalb des RVE ist inhomogen. Gemittelt über alle Körner mit den gleichen Eigenschaften (z.B. Kristallachsenorientierung) wird sich die Umgebung jedoch annähernd homogen verhalten. Da auch nur die gemittelten Zustandsgrößen des Kornes interessieren, ist es naheliegend, diese durch das folgende Ersatzproblem zu bestimmen.

Das monokristalline Korn wird in eine homogene Matrix eingebettet. Das Matrixma-

terial hat gerade die gesuchten Eigenschaften des Polykristalls. Wird ein RVE, das nur aus dem Matrixmaterial besteht, nur auf seinem Rand homogen belastet (durch $\underline{\Sigma}$ oder \underline{D}), dann sind die entsprechenden Felder der Mikroebene ebenfalls homogen und gerade gleich der äußeren makroskopischen Belastung,

$$\underline{d} = \underline{D} \quad \text{und} \quad \underline{\sigma} = \underline{\Sigma} \quad .$$

Ist in die Matrix ein monokristallines Korn eingebettet, dann werden die Felder der Zustandsgrößen sowohl in der Matrix als auch im Korn vom homogenen Zustand abweichen. Werden nun nacheinander die unterschiedlichen Körner in die homogene Matrix eingebettet und die gemittelten Zustandsgrößen des Korns (\underline{d} bzw. $\underline{\sigma}$) in Abhängigkeit von der Belastung ($\underline{\Sigma}$ oder \underline{D}) und dem Stoffgesetz des Polykristalls ($\underline{D} = \underline{D}(\underline{\Sigma}, \dots)$) berechnet, dann erhält man aus den beiden Homogenisierungsvorschriften $\underline{D} = \langle \underline{d} \rangle$ und $\underline{\Sigma} = \langle \underline{\sigma} \rangle$ zwei implizite Gleichungen zur Bestimmung des gesuchten makroskopischen Stoffgesetzes, die im allgemeinen zu zwei unterschiedlichen Ergebnissen führen. Werden jedoch ellipsoide Körner (alle Körner haben die gleiche Halbachsenlänge und Orientierung) und eine unendlich ausgedehnte Matrix vorausgesetzt, dann stimmen beide Lösungen überein. Hill nennt diesen Ansatz selbstkonsistent, da die so berechneten lokalen Zustandsgrößen nach der Homogenisierung gerade die entsprechenden makroskopischen Variablen ergeben. Nach Kröner kann das kugelförmige Korn als Mittelwert aller Kornformen angesehen werden und es ist von daher schon besonders geeignet, hier verwendet zu werden.

Die Suche nach den Spannungen und Verzerrungsgeschwindigkeiten innerhalb eines Korns, eingebettet in eine unendlich ausgedehnte Matrix, die auf ihrem äußeren Rand homogen belastet wird, definiert das Einschlußproblem. Hierzu wurden einige Lösungen vorgeschlagen, die alle auf der ursprünglichen Arbeit von Eshelby (1957) basieren, die sich jedoch bezüglich der zugrundeliegenden Materialeigenschaften unterscheiden. Sie sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Das Materialverhalten von polykristallinem Eis kann als elastisch-viskos bezeichnet werden. Die elastischen Eigenschaften können durch ein lineares Werkstoffgesetz beschrieben werden, die inelastischen Eigenschaften sind jedoch nichtlinear. Um den Auf- und Abbau von Eigenspannungen beschreiben zu können, müssen instationäre Zustände betrachtet und daher die elastischen Eigenschaften in die Berechnung mit einbezogen werden. Die Lösungen des Einschlußproblems von Hutchinson (1976) und Molinari et al. (1987) sind deshalb nicht geeignet. Laws u. McLaughlin (1978) geben die allgemeine Lösung für linearviskoelastische

Autor	Korn- bzw. Matrixmaterial	Bemerkungen
Eshelby (1957)	linearelastisch, isotrop	
Kröner (1958)	linearelastisch anisotrop isotrop	kugelförmiges Korn
Kröner (1961) Budiansky u. Wu (1962)	linearelastisch, isotrop plastisch (plastisch)	Die plastischen Verformungen innerhalb der Matrix werden als konstant angenommen
Faivre (1971) Kinoshita u. Mura (1971)	linearelastisch	
Hill (1965) Hutchinson (1970)	elastoplastisch	
Hutchinson (1976)	viskoplastisch	Es werden nur stationäre Zustände ($\dot{\underline{\sigma}} = 0$) betrachtet. Die elastischen Materialeigenschaften sind dann ohne Bedeutung.
Molinari et al. (1987)	viskoplastisch	große Formänderungen stationäre Zustände ($\dot{\underline{\sigma}} = 0$)
Laws u. McLaughlin (1978)	linearviskoelastisch	Lösung in Form eines Faltungsintegrals bezüglich der Zeit
Harren (1991)	linearelastisch viskoplastisch (viskoplastisch)	große Formänderungen Die plastischen Verformungen innerhalb der Matrix werden als konstant angenommen.

Tabelle 1: Übersicht über Lösungen des Einschlußproblems

Materialien an. Die Spannungen innerhalb des Kornes können durch ein Faltungsintegral berechnet werden. Hierzu muß die vollständige Geschichte der äußeren Belastung $\underline{\Sigma}(t^*)$ mit $(-\infty < t^* < t)$ bekannt sein. Bei der Berechnung komplexer Belastungsgeschichten bedeutet dies einen erheblichen Rechenaufwand. Nichtlineares Materialverhalten kann durch diese Lösung nicht erfaßt werden. Auch eine bereichsweise Linearisierung ist nicht möglich, da die Berechnung des Faltungsintegrals eine zwischenzeitliche Änderung der linearisierten Materialeigenschaften nicht zuläßt.

Das Berechnungsverfahren von Harren (1991) wurde zur Beschreibung großer Formänderungen bei linear elastischem und nichtlinear viskoplastischem Materialverhalten entwickelt. Die viskoplastischen Verformungen innerhalb der Matrix werden als konstant angenommen, obwohl das Spannungsfeld der Matrix inhomogen ist. Die Schwankungen im Spannungsfeld beeinflussen nur die elastischen Formänderungen der Matrix. Die Lösung von Kröner (1961) basiert auf einer vergleichbaren Annahme. Unter den weiteren Voraussetzungen von kugelförmigen Körnern und einem elastisch isotropen Werkstoff (E-Modul E und Querkontraktionszahl ν) erhält Kröner daraus die folgende Beziehung zwischen der makroskopischen

Spannungsrate $\dot{\underline{\Sigma}}$ und der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeit \underline{D}_i und den entsprechenden Größen innerhalb der Körner ($\dot{\underline{\sigma}}$ bzw. \underline{d}_i):

$$\dot{\underline{\sigma}} - \dot{\underline{\Sigma}} = -\frac{E(7-5\nu)}{15(1+\nu)(1-\nu)} (\underline{d}_i - \underline{D}_i) \quad .$$

Betrachtet man nun einen stationären Zustand mit $\dot{\underline{\Sigma}} = \dot{\underline{\sigma}} = \underline{0}$, dann folgt daraus die Gleichheit der mikroskopischen und makroskopischen inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten: $\underline{d}_i = \underline{D}_i$. Unter stationären Bedingungen verhält sich die Lösung von Kröner also wie das Taylor-Modell. Sie ist daher im Zusammenhang mit polykristallinem Eis nicht anwendbar (siehe Taylor-Modell).

Da das Berechnungsverfahren von Harren (1991), wie bereits oben erwähnt, auf einer vergleichbaren Annahme basiert, erwartet der Autor dieser Arbeit, daß es sich im stationären Zustand ($\dot{\underline{\Sigma}} = \dot{\underline{\sigma}} = \underline{0}$) auch wie ein Taylor-Modell verhält.

Im Kapitel 7 wird eine neue Lösung des Einschlußproblems hergeleitet. Sie berücksichtigt eine lineare Abhängigkeit der inelastischen und elastischen Verformungen der Matrix von den Spannungen. Das inelastische Werkstoffgesetz des Korns ist nichtlinear. Die Veränderungen des inneren Zustandes des Korns werden nicht durch die Belastungsgeschichte mittels eines Faltungsintegrals erfaßt, sondern durch eine Evolutionsgleichung für den Eigenspannungszustand des Korns. Dadurch ist eine Anpassung des linearisierten Stoffgesetzes der Matrix an das sich nichtlinear ändernde Stoffgesetz des Polykristalls jederzeit möglich.

Mit Hilfe dieser Lösung wird im folgenden Kapitel ein Stoffgesetz für den Polykristall formuliert.

6. Ein selbstkonsistentes Stoffgesetz für polykristallines Eis

Stoffgesetzformulierungen für Polykristalle oder Verbundwerkstoffe, die den Einfluß der Mikrostruktur auf das makroskopische Verhalten des Materials berücksichtigen, basieren häufig auf der im Kapitel 5 erläuterten Homogenisierungsvorschrift. Die Definition des RVE, über dessen Volumen die Mittelwertbildung erfolgt, muß an die zu berücksichtigenden mikroskopischen Vorgänge angepaßt sein.

Das makroskopische Verhalten polykristallinen Eises (siehe auch Kapitel 4) wird in einem hohen Maße durch die in seinem Inneren entstehenden Eigenspannungen beeinflusst. Diese inhomogene Spannungsverteilung hat ihre Ursache in der ausgeprägten Anisotropie der inelastischen Materialeigenschaften des Monokristalls. Die c -Achsenorientierung der einzelnen Einkristalle stellt einen entscheidenden Parameter zur Kennzeichnung der Monokristallanisotropie dar. In dem hier vorgestellten Stoffgesetz soll in einem ersten Schritt der Einfluß der Eigenspannungsentwicklung auf das Materialverhalten erfaßt werden. Weitere Verformungsmechanismen, wie z.B. das Korngrenzgleiten, das mit weiter steigender Temperatur ($T_c > -5^\circ\text{C}$) an Bedeutung gewinnen wird, sollen hier zunächst vernachlässigt werden.

Der Aufbau des RVE wird deshalb zunächst durch die Orientierungsverteilung der Kristallachsen festgelegt. Im Abschnitt 6.1 ergibt sich daraus eine neue Schreibweise der Homogenisierungsvorschrift, die im darauffolgenden Abschnitt noch an eine inkrementelle Stoffgesetzformulierung angepaßt wird.

Für eine zeitlich konstante Orientierungsverteilung wird im Abschnitt 6.3 ein selbstkonsistentes Stoffgesetz hergeleitet. Zur Bestimmung der lokalen Zustandsgrößen wird die im Kapitel 7 angegebene Lösung des Einschlußproblems verwendet. Hierzu muß auf der Makroebene der Tensor der inelastischen Nachgiebigkeitsraten \underline{M} definiert werden. Einige Möglichkeiten und die damit verbundenen Vor- und Nachteile werden im Abschnitt 6.4 diskutiert. Große inelastische Deformationen oder lange Belastungszeiten führen zu einer Veränderung der Orientierungsverteilung der Kristallachsen. Im Abschnitt 6.5 wird aufgezeigt, wie sich die Kornrotation (plastischer Spin) und das Wachsen von "gut"-orientierten Körnern auf die Texturfunktion $g(\vec{n})$ auswirken. Da die Veränderung der Texturfunktion im Vergleich zur Eigenspannungsentwicklung sehr langsam abläuft, können diese Prozesse unabhängig voneinander betrachtet

werden.

Die beiden letzten Abschnitte beschäftigen sich mit der numerischen Aufbereitung des Stoffgesetzes für den einaxialen Zug- oder Druckversuch sowie mit einigen ersten Ergebnissen.

6.1 Homogenisieren im Raum der Kristallachsenorientierungen

Über den Aufbau eines RVE können im allgemeinen nur statistische Aussagen getroffen werden. Durch Verteilungsdichten wird der Anteil, den ein Korn einer bestimmten Größe, Form und Kristallachsenorientierung am Gesamtvolumen des RVE hat, festgelegt. Im Rahmen dieser Arbeit liegt das Hauptaugenmerk auf dem Einfluß der Kristallachsenorientierung. In der Homogenisierungsvorschrift wird deshalb die Integration über das Volumen V des RVE aufgespalten. Die Integration erfolgt zunächst über das Volumen dV_n aller Körner mit der Kristallachsenorientierung \vec{n} und dann über alle möglichen Kristallorientierungen $\vec{n} \in \omega_n$.

$$\langle \underline{\sigma} \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V \underline{\sigma} dV = \frac{1}{V} \int_{\omega_n} \int_{dV_n} \underline{\sigma} dV \quad (6.1)$$

Mit

$$\underline{\sigma}_n = \frac{1}{dV_n} \int_{dV_n} \underline{\sigma} dV \quad ,$$

der mittleren Spannung der Körner mit der Orientierung \vec{n} , und

$$g(\vec{n}) = \frac{1}{V} \frac{dV_n}{d\omega} \quad ,$$

der Verteilungsdichte der Kristallachsenorientierungen, läßt sich die Homogenisierung auch als das gewichtete Mittel über alle möglichen Kristallorientierungen schreiben:

$$\langle \underline{\sigma} \rangle = \int_{\omega_n} g(\vec{n}) \underline{\sigma}_n d\omega_n \quad .$$

Um mit dieser Homogenisierungsvorschrift arbeiten zu können, muß also nicht die wirkliche Spannungsverteilung innerhalb eines jeden Kornes bestimmt werden, sondern nur die mittlere Spannung innerhalb der Körner einer vorgegebenen Orientierung. Zur Schreibvereinfachung wird der Index n in der Folge weggelassen. Die gleichen Überlegungen gelten natürlich auch für die Verzerrungsgeschwindigkeiten und für die anderen zu homogenisierenden Größen :

$$\begin{aligned} \langle \dots \rangle &= \int_{\omega} g(\vec{n}) \dots d\omega \\ \text{mit } \int_{\omega} g(\vec{n}) d\omega &= 1 \\ \text{und } g(\vec{n}) &= \frac{1}{V} \frac{dV}{d\omega} \quad . \end{aligned} \quad (6.2)$$

6.2 Homogenisieren bei inkrementeller Stoffgesetzformulierung mit internen Variablen

Die Homogenisierungsvorschriften

$$\underline{\Sigma}(t) = \langle \underline{\sigma}(t) \rangle \quad \text{und} \quad \underline{D}(t) = \langle \underline{d}(t) \rangle$$

müssen zu jedem Zeitpunkt t erfüllt sein.

Die lokalen Spannungen $\underline{\sigma}(t)$ sind eine Funktion der äußeren Spannung $\underline{\Sigma}(t)$ und gegebenenfalls eines Satzes von internen Zustandsvariablen ξ , die z.B. den Eigenspannungszustand des betrachteten Kornes repräsentieren. Die lokalen Spannungen hängen nur über die Zustandsvariablen von der Zeit ab: $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\Sigma}(t), \xi(t))$.

Der zeitliche Verlauf der internen Zustandsvariablen ist nicht von außen vorgebar, sondern er ergibt sich durch die Integration der entsprechenden Evolutionsgleichung $\dot{\xi} = \dot{\xi}(\underline{\Sigma}, \xi)$.

Unter der Voraussetzung, daß sich die Texturfunktion $g(\vec{n})$ in der Definition der Homogenisierungsvorschrift gemäß Gleichung 6.2 nicht ändert, gilt

$$\dot{\underline{\Sigma}}(t) = \langle \dot{\underline{\sigma}}(t) \rangle = \left\langle \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\Sigma}} : \dot{\underline{\Sigma}} + \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \xi} \cdot \dot{\xi} \right\rangle$$

und mit $\left\langle \dot{\underline{\Sigma}} \right\rangle = \dot{\underline{\Sigma}}$

$$\left(\underline{\underline{1}} - \left\langle \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\Sigma}} \right\rangle \right) : \dot{\underline{\Sigma}} = \left\langle \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \xi} \cdot \dot{\xi} \right\rangle .$$

Sowohl der Ausdruck in den Klammern als auch die rechte Seite dieser Gleichung sind nur Funktionen der Zustandsvariablen. Da die Gleichung aber für ein beliebiges $\dot{\underline{\Sigma}}$ gelten muß, folgt daraus

$$\left\langle \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\Sigma}} \right\rangle = \underline{\underline{1}} \quad \text{und} \quad \left\langle \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \xi} \cdot \dot{\xi} \right\rangle = \underline{\underline{0}} . \quad (6.3)$$

Durch die Verwendung von internen Variablen ist die Homogenisierungsvorschrift in zwei unabhängige Teile zerfallen. Zusätzlich zu den Bedingungen (6.3) muß aber auch noch zu einem frei wählbaren Zeitpunkt t_0 die Anfangsbedingung $\underline{\Sigma}(t_0) = \langle \underline{\sigma}(t_0) \rangle$ erfüllt sein. Dies bedeutet jedoch keinerlei Schwierigkeiten, solange davon ausgegangen werden kann, daß das Material irgendwann einmal frei von äußeren und inneren Spannungen war. Mit $\underline{\sigma} = \underline{\underline{0}}$ und $\underline{\Sigma} = \underline{\underline{0}}$ sind die Anfangsbedingungen in einfacher Weise erfüllt.

Die Verzerrungsgeschwindigkeiten \underline{d} sind sowohl eine Funktion der Zustandsvariablen $\underline{\Sigma}$ und ξ als auch von der Prozeßvariablen $\dot{\underline{\Sigma}}$. Die lineare Abhängigkeit von der Spannungsrate ermöglicht auch hier eine zu Gleichung (6.3) analoge Aufspaltung der Homogenisierungsvorschrift in zwei Teile.

6.3 Selbstkonsistente Formulierung

Wie bereits im Abschnitt 5.2 erwähnt, gelangt man zu einer selbstkonsistenten Stoffgesetzformulierung, indem die lokalen Spannungen oder Verzerrungsgeschwindigkeiten innerhalb eines jeden Korns durch das folgende Ersatzproblem bestimmt werden. Die Umgebung des gerade betrachteten Korns wird homogenisiert, d.h. der reale Polykristall wird durch eine fiktive homogene Matrix, die die gesuchten makroskopischen Eigenschaften des Polykristalls hat, ersetzt. Die Matrix wird im allgemeinen als unendlich ausgedehnt angenommen. Die Belastung wird auf dem im unendlichen liegenden Rand der Matrix in Form einer Spannungs- bzw. Geschwindigkeitsverteilung, die mit einem homogenen Spannungs- bzw. Verzerrungsgeschwindigkeitszustand verträglich ist, vorgegeben.

Das reale Korn wird in der Regel durch ein kugelförmiges Korn idealisiert. Haben die realen Kornformen eine Vorzugsorientierung, dann können sie auch durch ein Ellipsoid dargestellt werden. Es muß jedoch für alle Körner die gleiche idealisierte Kornform (gleiche Halbachsenlängen und Halbachsenorientierungen) gewählt werden. Die Bestimmung der Zustandsgrößen im Korn führt dann auf das im Kapitel 7 gelöste Einschlußproblem.

Das makroskopische Stoffgesetz des Polykristalls wird in der Form

$$\underline{D} = \underline{D}_i(\underline{\Sigma}) + \underline{S} : \underline{\dot{\Sigma}} \quad (6.4)$$

gesucht. Die nichtlineare Funktion $\underline{D}_i(\underline{\Sigma})$ und der Tensor der Elastizitätskoeffizienten \underline{S} sind zu bestimmen. Die Lösung des Einschlußproblems setzt jedoch ein linearisiertes Stoffgesetz der Matrix in der Form

$$\underline{D}(\underline{\Sigma}_0 + \Delta\underline{\sigma}, \underline{\dot{\Sigma}}_0 + \Delta\underline{\dot{\sigma}}, \xi) = \underline{D}_i(\underline{\Sigma}_0, \xi) + \underline{S} : \underline{\dot{\Sigma}}_0 + \underline{M} : \Delta\underline{\sigma} + \underline{S} : \Delta\underline{\dot{\sigma}} \quad (6.5)$$

voraus. $\underline{D}_0 = \underline{D}_i(\underline{\Sigma}_0, \xi) + \underline{S} : \underline{\dot{\Sigma}}_0$ ist das gesuchte Stoffgesetz des Polykristalls. Wird die Matrix auf ihrem äußeren Rand durch $\underline{\Sigma}_0$ bzw. \underline{D}_0 homogen belastet, dann zeigt sie in großer Entfernung vom Einschluß das nichtlineare Verhalten des Polykristalls. In der Nähe des Korns werden die Spannungen um $\Delta\underline{\sigma}$ und die Verzerrungsgeschwindigkeiten um $\Delta\underline{\dot{d}} = \underline{D}(\underline{\Sigma}_0 + \Delta\underline{\sigma}, \underline{\dot{\Sigma}}_0 + \Delta\underline{\dot{\sigma}}, \xi) - \underline{D}_0$ vom homogenen Zustand abweichen. Diese Abweichungen werden durch das linearisierte Werkstoffgesetz miteinander verknüpft. Einige Möglichkeiten, den Tensor der inelastischen Nachgiebigkeitsraten \underline{M} in Abhängigkeit vom Linearisierungspunkt $(\underline{\Sigma}_0, \underline{D}_i(\underline{\Sigma}_0))$ zu definieren, werden im nächsten Abschnitt aufgezeigt.

Das Stoffgesetz des Monokristalls wurde im Kapitel 3 bestimmt. Es läßt sich in der Form

$$\underline{d} = \underline{d}_i(\underline{\sigma}, \underline{\vec{n}}, \zeta) + \underline{s} : \underline{\dot{\sigma}} \quad (6.6)$$

$$\dot{\zeta} = \dot{\zeta}(\underline{\sigma}, \underline{\vec{n}}, \zeta)$$

schreiben. Die inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten sind abhängig von der Spannung $\underline{\sigma}$, der Orientierung der Kristallachse $\underline{\tilde{n}}$ und einem Satz von internen Zustandsvariablen ζ (z.B. Versetzungsdichten), deren zeitliche Änderungen $\dot{\zeta}$ durch die entsprechenden Evolutionsgleichungen gegeben sind. Der Tensor der Elastizitätskoeffizienten ist ebenfalls eine Funktion von $\underline{\tilde{n}}$.

6.3.1 Nachweis der Selbstkonsistenz

Wird ein Monokristall mit dem Materialverhalten gemäß Gleichung (6.6) in eine Matrix mit dem Materialverhalten gemäß Gleichung (6.5) eingebettet, dann ergeben sich aus einer homogenen Belastung $\underline{\Sigma}_0$ bzw. \underline{D}_0 die Spannungen $\underline{\sigma}$ im Monokristall zu (siehe auch Gleichung (7.68))

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_{ES} + \underline{\sigma}_Z + \underline{\Sigma}_0 \quad (6.7)$$

mit $\underline{\sigma}_Z = \underline{E} : (\underline{S} - \underline{s}) : \underline{\Sigma}_0$.

Die Eigenspannung $\underline{\sigma}_{ES}$ hat die Bedeutung einer internen Variablen des Matrix-Einschluß-Systems. Für sie gilt die Evolutionsgleichung (7.69)

$$\dot{\underline{\sigma}}_{ES} = \underline{E} : (\underline{D} : (\underline{\Sigma}_0) - \underline{d} : (\underline{\sigma}) - \underline{B} : (\underline{\sigma}_Z + \underline{\sigma}_{ES})) \quad (6.8)$$

Die Tensoren \underline{E} und \underline{B} sind wie folgt definiert (Gleichung (7.55) und (7.57)):

$$\underline{E} \equiv (\underline{S}^{-1} - [\underline{S}]_{ss}^{-1}) : (\underline{S}^{-1} - \underline{s}^{-1} - [\underline{S}]_{ss}^{-1})^{-1} : \underline{s}^{-1} \quad (6.9)$$

$$\underline{B} \equiv (\underline{S}^{-1} - [\underline{S}]_{ss}^{-1})^{-1} : ([\underline{S}]_{ss}^{-1} : [\underline{M}]_{ss} : [\underline{S}]_{ss}^{-1} - \underline{S}^{-1} : \underline{M} : \underline{S}^{-1}) : (\underline{S}^{-1} - [\underline{S}]_{ss}^{-1})^{-1} \quad (6.10)$$

Die Tensoren $[\underline{S}]$ bzw. $[\underline{M}]$ ergeben sich aus \underline{S} bzw. \underline{M} durch eine lineare Abbildung. Dieser Abbildungstensor achter Stufe ist von den elastischen Eigenschaften des Matrixmaterials und der Kornform abhängig (Gleichung (7.50 bzw. (7.51)).

Die lokalen Spannungen $\underline{\sigma}$ sind eine Funktion der äußeren Last $\underline{\Sigma}_0$ und der internen Variablen $\underline{\sigma}_{ES}$:

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\underline{\Sigma}_0, \underline{\sigma}_{ES}) \quad (6.11)$$

Mit

$$\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\Sigma}_0} = \underline{1} + \underline{E} : (\underline{S} - \underline{s}) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{\sigma}_{ES}} = \underline{1}$$

folgt aus der Homogenisierungsvorschrift (6.3)

$$\langle \underline{\underline{E}} : (\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{s}}) \rangle = \underline{\underline{0}} \quad (6.12)$$

und

$$\langle \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_{ES} \rangle = \underline{\underline{0}} \quad . \quad (6.13)$$

Aus der ersten Gleichung lassen sich in der bekannten Weise die Elastizitätskoeffizienten des Polykristalls $\underline{\underline{S}}$ aus denen des Monokristalls $\underline{\underline{s}}$ berechnen. Die Gleichung kann jedoch nicht explizit nach $\underline{\underline{S}}$ aufgelöst werden, da $\underline{\underline{E}}$ sowohl von $\underline{\underline{S}}$ als auch von $\underline{\underline{s}}$ abhängig ist. Die zweite Gleichung ist die Bestimmungsgleichung für die inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten.

Die zweite Möglichkeit der Homogenisierung lautet

$$\underline{\underline{D}}_0 = \langle \underline{\underline{d}} \rangle \quad .$$

Mit $\underline{\underline{D}}_0 = \underline{\underline{D}}_i(\underline{\underline{\Sigma}}_0) + \underline{\underline{S}} : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}}_0$ und $\underline{\underline{d}} = \underline{\underline{d}}_i(\underline{\underline{\sigma}}, \zeta) + \underline{\underline{s}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}$ folgt daraus

$$\underline{\underline{D}}_i + \underline{\underline{S}} : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}}_0 = \langle \underline{\underline{d}}_i(\underline{\underline{\sigma}}, \zeta) + \underline{\underline{s}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_{ES} + \underline{\underline{s}} : (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{E}} : (\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{s}})) : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}}_0 \rangle$$

und sortiert nach Summanden, die abhängig sind von $\dot{\underline{\underline{\Sigma}}}_0$, ferner

$$\langle \underline{\underline{D}}_i - \underline{\underline{d}}_i(\underline{\underline{\sigma}}, \zeta) - \underline{\underline{s}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_{ES} \rangle = \langle (\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{1}}) : (\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{s}}) \rangle : \dot{\underline{\underline{\Sigma}}}_0 \quad .$$

Da diese Gleichung für jedes beliebige $\dot{\underline{\underline{\Sigma}}}_0$ erfüllt sein muß, folgt daraus (siehe auch Abschnitt 6.2):

$$\langle (\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{1}}) : (\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{s}}) \rangle = \underline{\underline{0}} \quad (6.14)$$

und

$$\langle \underline{\underline{D}}_i - \underline{\underline{d}}_i(\underline{\underline{\sigma}}, \zeta) - \underline{\underline{s}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_{ES} \rangle = \underline{\underline{0}} \quad . \quad (6.15)$$

Mit $\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{1}} = (\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1})^{-1} : \underline{\underline{E}}$ und $\langle (\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1}) \rangle = (\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1})$ folgt aus Gleichung (6.14)

$$\langle \underline{\underline{E}} : (\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{s}}) \rangle = \underline{\underline{0}} \quad . \quad (6.16)$$

Diese Bestimmungsgleichung für die elastischen Eigenschaften ist identisch mit der Gleichung (6.12).

Gleichung (6.15) läßt sich unter Berücksichtigung, daß $\underline{\underline{B}}$ und $(\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1})$ unabhängig von \tilde{n} sind, wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \langle \underline{\underline{D}}_i - \underline{\underline{d}}_i(\underline{\underline{\sigma}}, \zeta) - \underline{\underline{s}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_{ES} \rangle &= \underline{\underline{0}} \\ \Rightarrow \langle \underline{\underline{D}}_i - \underline{\underline{d}}_i(\underline{\underline{\sigma}}, \zeta) - \underline{\underline{B}} : (\underline{\underline{\sigma}}_Z + \underline{\underline{\sigma}}_{ES}) - \underline{\underline{s}} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_{ES} \rangle &= - \langle \underline{\underline{B}} : (\underline{\underline{\sigma}}_Z + \underline{\underline{\sigma}}_{ES}) \rangle \\ \Rightarrow \langle (\underline{\underline{E}}^{-1} - \underline{\underline{s}}) : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_{ES} \rangle &= - \underline{\underline{B}} : \langle \underline{\underline{\sigma}}_Z + \underline{\underline{\sigma}}_{ES} \rangle \\ \Rightarrow (\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1})^{-1} : \langle \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_{ES} \rangle &= \underline{\underline{B}} : \langle \underline{\underline{\sigma}}_Z + \underline{\underline{\sigma}}_{ES} \rangle \quad . \end{aligned}$$

Aus der Bestimmungsgleichung für die elastischen Eigenschaften folgt $\langle \underline{\underline{\sigma}}_Z \rangle = \underline{\underline{0}}$ und damit

$$\langle \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_{ES} \rangle = (\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1}) : \underline{\underline{B}} : \langle \underline{\underline{\sigma}}_{ES} \rangle \quad .$$

Erfüllt $\langle \underline{\underline{\sigma}}_{ES} \rangle$ die Anfangsbedingung $\langle \underline{\underline{\sigma}}_{ES} \rangle = \underline{\underline{0}}$, dann folgt daraus (siehe auch Abschnitt 6.2)

$$\langle \dot{\underline{\underline{\sigma}}}_{ES} \rangle = \underline{\underline{0}} \quad . \quad (6.17)$$

Damit ist die Äquivalenz der beiden Homogenisierungsvorschriften (5.2) und (5.3) bewiesen. Das daraus abgeleitete makroskopische Stoffgesetz ist somit selbstkonsistent.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß mit dem aus $\langle \underline{\underline{d}} \rangle = \underline{\underline{D}}$ bestimmten Stoffgesetz auch die Homogenisierungsvorschrift für die Rotationsgeschwindigkeiten $\langle \underline{\underline{w}} \rangle = \underline{\underline{W}}$ identisch erfüllt wird.

6.3.2 Auswerten der Homogenisierungsvorschriften

Die Berechnung des Tensors der Elastizitätskoeffizienten $\underline{\underline{S}}$ aus der Vorschrift (6.12) ist prinzipiell möglich, sie bereitet jedoch einen erheblichen numerischen Aufwand. Die Bestimmung der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten aus Gleichung (6.13) und (6.8)

$$\langle \underline{\underline{E}} : (\underline{\underline{D}}_i(\underline{\underline{\Sigma}}_0) - \underline{\underline{d}}_i(\underline{\underline{\sigma}}) - \underline{\underline{B}} : (\underline{\underline{\sigma}}_Z + \underline{\underline{\sigma}}_{ES})) \rangle = \underline{\underline{0}} \quad (6.18)$$

ist noch wesentlich aufwendiger. Der Tensor $\underline{\underline{B}}$ ist in einer komplizierten Art und Weise von $\underline{\underline{S}}$ und $\underline{\underline{M}}$ abhängig. $\underline{\underline{M}}$ wird jedoch selber erst durch $\underline{\underline{D}}_i$ definiert, also durch die Größe, die aus der obigen Gleichung zu bestimmen ist.

Zur Vereinfachung des Gleichungssystems wird deshalb von elastisch isotropen Monokristallen ausgegangen. Im Abschnitt 2.2 wurde zwar gezeigt, daß der maximale und der minimale effektive E-Modul von monokristallinem Eis um ca. 30% voneinander abweichen, doch die Anisotropie der inelastischen Materialeigenschaften ist wesentlich stärker ausgeprägt und für das Polykristallverhalten bedeutender, so daß die getroffene Annahme als erste Näherung vertretbar erscheint.

Da \underline{s} jetzt unabhängig von \vec{n} ist, folgt aus dem ersten Teil der Homogenisierungsvorschrift sofort

$$\underline{\underline{S}} = \underline{s} \quad . \quad (6.19)$$

Mit \underline{s} ist auch $\underline{\underline{E}}$ unabhängig von \vec{n} , womit sich der zweite Teil der Homogenisierungsvorschrift wie folgt vereinfacht:

$$\underline{D}_i(\underline{\Sigma}_0) - \langle \underline{d}_i(\underline{\sigma}) \rangle - \underline{\underline{B}} : \langle \underline{\sigma}_Z + \underline{\sigma}_{ES} \rangle = \underline{0} \quad . \quad (6.20)$$

Wie bereits oben begründet gilt: $\langle \underline{\sigma}_{ES} \rangle = \underline{0}$ und $\langle \underline{\sigma}_Z \rangle = \underline{0}$. Daraus folgt

$$\underline{D}_i(\underline{\Sigma}_0) = \langle \underline{d}_i(\underline{\sigma}, \vec{n}, \zeta) \rangle \quad . \quad (6.21)$$

Die Spannungen innerhalb eines Kornes mit der Orientierung \vec{n} berechnen sich zu

$$\underline{\sigma}(\underline{\sigma}_{ES}, \underline{\Sigma}_0) = \underline{\sigma}_{ES} + \underline{\Sigma}_0 \quad . \quad (6.22)$$

Aus $\underline{\sigma}$ und ζ können über das monokristalline Stoffgesetz \underline{d}_i und damit schließlich die inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten \underline{D}_i des Polykristalls berechnet werden.

Desweiteren kann man jetzt aus \underline{D}_i und $\underline{\Sigma}_0$ den Tensor $\underline{\underline{M}}$ ermitteln und somit die zeitliche Änderung der internen Variablen $\underline{\sigma}_{ES}$ und ζ berechnen:

$$\dot{\zeta} = \dot{\zeta}(\underline{\sigma}, \zeta) \quad (6.23)$$

$$\dot{\underline{\sigma}}_{ES} = \underline{\underline{E}} : (\underline{D}_i(\underline{\Sigma}_0) - \underline{d}_i(\underline{\sigma}) - \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{M}}) : \underline{\sigma}_{ES}) \quad . \quad (6.24)$$

Für elastisch isotrope Körner sind die Tensoren $\underline{\underline{E}}$ und $\underline{\underline{B}}$ durch die Gleichungen (7.86) und (7.87) gegeben.

Die Eigenspannungen $\underline{\underline{\sigma}}_{ES}$ werden in Körnern mit unterschiedlicher Orientierung \vec{n} unterschiedliche Werte annehmen. Diese Aussage gilt auch für die internen Variablen ζ des Einkristallstoffgesetzes. ζ und $\underline{\underline{\sigma}}_{ES}$ sind deshalb interne Zustandsfunktionen im Raum der möglichen Kristallorientierungen O_e . Eine weitere interne Zustandsfunktion ist die Texturfunktion $g(\vec{n})$, für die bisher die einfache Evolutionsgleichung $\dot{g}(\vec{n}) = 0$ angenommen wurde. Die Gleichungen (6.21) - (6.24), (7.86) und (7.87) definieren ein selbstkonsistentes Stoffgesetz für polykristallines Eis. Der innere Zustand des Polykristalls wird durch zwei Arten von internen Zustandsfunktionen beschrieben. Die Texturfunktion $g(\vec{n})$ und die Eigenspannungsfunktion $\underline{\underline{\sigma}}_{ES}(\vec{n})$ beschreiben die Mikrostruktur des Polykristalls. Die internen Zustandsfunktionen $\zeta(\vec{n})$ repräsentieren die Mikrostruktur (z.B. Versetzungsdichten) des Monokristalls mit der Orientierung \vec{n} .

6.4 Möglichkeiten zur Definition des Tensors $\underline{\underline{M}}$

Durch den Tensor der inelastischen Nachgiebigkeitsraten $\underline{\underline{M}}$ werden die Abweichungen der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten $\Delta \underline{\underline{d}}_i$ innerhalb der Matrix vom homogenen Zustand $\underline{\underline{D}}_{i_0} = \underline{\underline{D}}_i(\underline{\underline{\Sigma}}_0)$ beschrieben:

$$\Delta \underline{\underline{d}}_i = \underline{\underline{M}} : \Delta \underline{\underline{\sigma}} \quad . \quad (6.25)$$

Die Abweichungen der Spannungen $\Delta \underline{\underline{\sigma}}$ innerhalb der Matrix vom homogenen Zustand $\underline{\underline{\Sigma}}_0$ werden durch die im Korn entstehenden Eigenspannungen hervorgerufen. Der Tensor $\underline{\underline{M}}$ sollte in Abhängigkeit vom inelastischen Werkstoffgesetz des Polykristalls $\underline{\underline{D}}_i = \underline{\underline{D}}_i(\underline{\underline{\Sigma}}, \xi)$

(ξ steht für die internen Zustandsfunktionen des Polykristalls) und der Linearisierungsspannung $\underline{\underline{\Sigma}}_0$ definiert werden. Im folgenden werden einige Möglichkeiten aufgezeigt und die Vor- und Nachteile diskutiert.

a)

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{0}} \quad (6.26)$$

Dies ist die einfachste denkbare Definition für $\underline{\underline{M}}$. Sie ist gleichbedeutend mit der Annahme homogener inelastischer Deformationen in der Matrix. Diese Voraussetzung liegt den selbstkonsistenten Formulierungen von Kröner (1961), Budianski u.

Wu (1962) und Harren (1991) zugrunde. Auf die daraus resultierenden Schwierigkeiten im Zusammenhang mit polykristallinem Eis wurde im Abschnitt 5.2 hingewiesen. Aus $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{0}}$ folgt sofort $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}}$. Da $\underline{\underline{D}}_i$ und $\underline{\underline{d}}_i$ Deviatoren sind, reduziert sich Gleichung (6.24) auf

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}_{ES} = \frac{E(7-5\nu)}{15(1+\nu)(1-\nu)} (\underline{\underline{D}}_i - \underline{\underline{d}}_i) \quad (6.27)$$

Die unterschiedlichen inelastischen Verformungen der Matrix und des Korns führen zu einer Dehnungsinkompatibilität, aus der sich durch Multiplikation mit $\frac{E(7-5\nu)}{15(1+\nu)(1-\nu)}$ die Eigenspannungen ergeben (siehe auch Abschnitt 5.2).

b)

$$\underline{\underline{M}} = \frac{\partial \underline{\underline{D}}_i(\underline{\underline{\Sigma}}, \xi)}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \quad (6.28)$$

$\underline{\underline{M}}$ wird hier als partielle Ableitung des inelastischen Stoffgesetzes nach den Spannungen definiert. Die Ableitung wird also bei festgehaltenen internen Variablen ausgeführt. Dies ist eine naheliegende Definition, wenn die Spannungen in der Matrix nur wenig vom homogenen Zustand abweichen. Das inelastische Stoffgesetz wird durch die Tangente im Linearisierungspunkt angenähert. Weichen die Spannungen innerhalb der Matrix jedoch stark von $\underline{\underline{\Sigma}}_o$ ab, dann können sich große Unterschiede zwischen der nichtlinearen und der linearisierten Form des Stoffgesetzes ergeben (Abb. 38). Fallen die Spannungen innerhalb der Matrix bis auf Null ab, dann werden über das linearisierte Stoffgesetz gegebenenfalls große negative Verzerungsgeschwindigkeiten berechnet. Eine "Verringerung" der "Tangentensteigung" könnte dieses Problem beheben. Ein Ansatz der Form

$$\underline{\underline{M}} = \alpha_k \cdot \frac{\partial \underline{\underline{D}}_i(\underline{\underline{\Sigma}}, \xi)}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \quad (6.29)$$

mit einem skalarwertigen Korrekturfaktor α_k , bietet sich daher an. Durch eine Veränderung von α_k kann zwischen den Ansätzen a) und b) stufenlos gewechselt werden. Die dargelegten Gründe können den Ansatz (6.29) natürlich nur motivieren, aber nicht mathematisch oder physikalisch begründen.

c) "Geradengleichung" durch den Nullpunkt und den Linearisierungspunkt

Ein Tensor $\underline{\underline{M}}$, der die genannte Geradengleichung beschreibt, muß die Bedingung

$$\underline{\underline{D}}_i(\underline{\underline{\Sigma}}) = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (6.30)$$

erfüllen. Eine mögliche Definition lautet:

$$\underline{\underline{M}} = \frac{\underline{\underline{D}}_i \underline{\underline{D}}_i}{\underline{\underline{D}}_i : \underline{\underline{\Sigma}}} \quad (6.31)$$

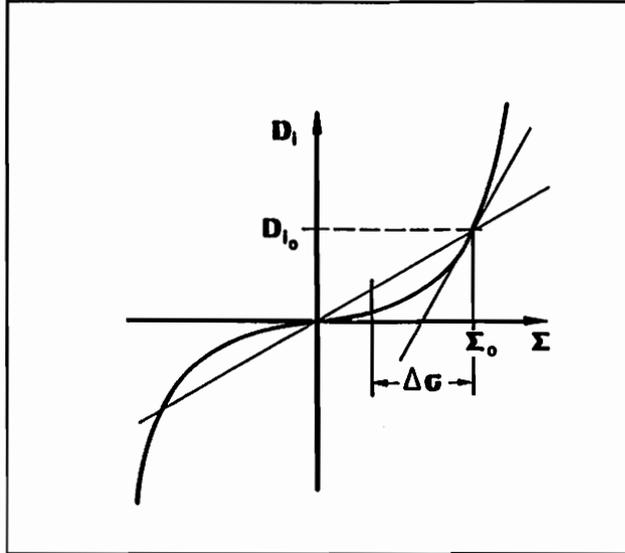


Abb. 38: Linearisierungsmöglichkeiten des inelastischen Stoffgesetzes

Der Tensor $\underline{\underline{M}}$ ist aber nicht eindeutig bestimmt. Es gibt noch vier linear unabhängige deviatorische Tensoren zweiter Stufe $\underline{\underline{T}}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), die die Bedingung $\underline{\underline{T}}_\alpha \cdot \underline{\underline{\Sigma}} = 0$ erfüllen. Jeder der zehn Tensoren $\underline{\underline{T}}_\alpha \underline{\underline{T}}_\beta + \underline{\underline{T}}_\beta \underline{\underline{T}}_\alpha$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, 4$) kann zu $\underline{\underline{M}}$ gemäß Gleichung (6.31) addiert werden, ohne daß Gleichung (6.30) verletzt wird. Von den 15 Koeffizienten von $\underline{\underline{M}}$ (sechs Koeffizienten sind schon dadurch bestimmt, daß $\underline{\underline{M}}$ deviatorisch in den vorderen und hinteren Indizes ist) werden durch Gleichung (6.31) also nur fünf festgelegt. Die verbleibenden zehn Koeffizienten können z.B. durch einen isotropen Ansatz der Form

$$\frac{\underline{\underline{D}}_i : \underline{\underline{D}}_i}{\underline{\underline{D}}_i : \underline{\underline{\Sigma}}} \left(\underline{\underline{1}}' - \frac{\underline{\underline{\Sigma}}' \underline{\underline{\Sigma}}'}{\underline{\underline{\Sigma}}' : \underline{\underline{\Sigma}}'} \right)$$

erfaßt werden. Die Wahl des skalaren Vorfaktors ist willkürlich. Er muß nur die richtige Dimension aufweisen. Zusammen mit Gleichung (6.31) folgt

$$\underline{\underline{M}} = \frac{1}{\underline{\underline{D}}_i : \underline{\underline{\Sigma}}'} \left(\underline{\underline{D}}_i \underline{\underline{D}}_i - \frac{\underline{\underline{D}}_i : \underline{\underline{D}}_i}{\underline{\underline{\Sigma}}' : \underline{\underline{\Sigma}}'} \underline{\underline{\Sigma}}' \underline{\underline{\Sigma}}' \right) + \frac{\underline{\underline{D}}_i : \underline{\underline{D}}_i}{\underline{\underline{D}}_i : \underline{\underline{\Sigma}}'} \underline{\underline{1}}' \quad (6.32)$$

Sind $\underline{\underline{D}}_i$ und $\underline{\underline{\Sigma}}'$ koaxial, dann heben sich die ersten beiden Teile auf und man gelangt zu einem isotropen Ansatz für $\underline{\underline{M}}$.

d) Der Vorteil eines isotropen Ansatzes liegt in der Einfachheit.

$$\underline{\underline{M}} = f(\underline{\underline{D}}_i, \underline{\underline{\Sigma}}') \underline{\underline{1}}' \quad (6.33)$$

Ist die Abweichung von der Koaxialität von \underline{D}_i und $\underline{\Sigma}'$ nur gering, dann liegt näherungsweise die unter c) beschriebene "Geradengleichung" vor. Für die skalarwertige Funktion f können

$$f_1 = \sqrt{\frac{\underline{D}_i : \underline{D}_i}{\underline{\Sigma}' : \underline{\Sigma}'}} \quad , \quad f_2 = \frac{\underline{D}_i : \underline{\Sigma}'}{\underline{\Sigma}' : \underline{\Sigma}'} \quad \text{oder} \quad f_3 = \frac{\underline{D}_i : \underline{D}_i}{\underline{D}_i : \underline{\Sigma}'} \quad (6.34)$$

sinnvolle Ansätze sein.

e)

$$\underline{\underline{M}} = \frac{\Delta \underline{D}_i}{\Delta \underline{\Sigma}'} \quad (6.35)$$

Der unter b) definierte Tensor wurde durch Ableiten der festgehaltenen internen Variablen ermittelt. Die internen Variablen werden sich aber in den einzelnen Bereichen der Matrix unterschiedlich entwickeln, da die jeweiligen Spannungen voneinander abweichen. Sind $\Delta \underline{D}_i$ die Veränderungen der aktuellen Verzerrungsgeschwindigkeiten aufgrund einer um $\Delta \underline{\Sigma}$ geänderten Belastungsgeschichte, dann läßt sich daraus, wie oben symbolisch angedeutet, der Tensor $\underline{\underline{M}}$ definieren. Da $\underline{\underline{M}}$ durch eine solche Definition an die Belastungsgeschichte geknüpft und nicht mehr aus den aktuellen Zustandsvariablen berechenbar ist, hätte er die Bedeutung einer zusätzlichen internen Variablen, die die Veränderungen der Materialeigenschaften in der Umgebung eines Einschlusses beschreibt. Eine solche Definition scheint jedoch sehr aufwendig und wird deshalb hier nicht weiter verfolgt.

6.5 Evolutionsgleichung der Texturfunktion

Die Orientierungsverteilung der Kristallachsen wird durch zwei unterschiedliche mikromechanische Vorgänge verändert. Durch Rekristallisation entstehen entweder neue Körner oder es wachsen "gut" orientierte Einkristalle auf Kosten "schlecht" orientierter Bereiche (siehe auch Abschnitt 4.6). Im Experiment wurde beobachtet, daß sich die Kristallachsen so umorientieren, daß der Polykristall unter der gegebenen Belastung größere inelastische Deformationen aufweist. Auf die zweite Ursache wurde schon im Zusammenhang mit dem monokristallinen Stoffgesetz hingewiesen (Abschnitt 3.5). Sie ergibt sich aus dem plastischen Spin des Einkristalls.

Zur Beschreibung dieser Phänomene werden in den folgenden Abschnitten die Evolutionsgleichungen der Texturfunktion hergeleitet.

6.5.1 Rekristallisation

Für metallische Werkstoffe wird von Haasen (1984) eine auf Gleiter (1969) zurückgehende Gleichung für die Geschwindigkeit v der Korngrenze angegeben. Von den beiden aneinandergrenzenden Kristallen 1 und 2 ist der Kristall 2 spannungsfrei und im Kristall 1 ist in den Spannungsfeldern die Energie e_1 gespeichert. Bei metallischen Werkstoffen entstehen diese inneren Spannungsfelder z.B. durch Versetzungsaufstau an Korngrenzen. Die Korngrenze wandert vom Kristall 2 zum Kristall 1, d.h. der Kristall auf dem niedrigeren Energieniveau wächst auf Kosten des Kristalls auf dem höheren Niveau. Die Geschwindigkeit der Korngrenze ist proportional zur gespeicherten Energie e_1 :

$$v \propto e_1 \quad . \quad (6.36)$$

Die von Haasen (1984) angegebene Herleitung läßt sich erweitern, wenn sich die benachbarten Kristalle auf unterschiedlichen Energieniveaus e_1 bzw. e_2 befinden. Man erhält:

$$v_{21} = v_T (e_1 - e_2) \quad . \quad (6.37)$$

Die Korngrenze wandert mit der Geschwindigkeit v_{21} vom Kristall 2 zum Kristall 1. Als treibende Kraft des Rekristallisationsvorganges kann also die Energiedifferenz der aneinandergrenzenden Kristalle angesehen werden. In Gleichung (6.37) ist v_T eine temperaturabhängige Konstante. Sie wird als bekannt vorausgesetzt.

Im Abschnitt 6.3 wurden die Gleichungen zur Bestimmung der Spannungen innerhalb der einzelnen Kristalle eines Polykristalls angegeben. Aus den Spannungen läßt sich sofort die auf das Volumen bezogene gespeicherte elastische Energie $e(\vec{n})$ berechnen:

$$e(\vec{n}) = \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}(\vec{n}) : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\sigma}}(\vec{n}) \quad . \quad (6.38)$$

Grenzen zwei Einkristalle α bzw. β mit der Orientierung \vec{n}_α bzw. \vec{n}_β aneinander, dann wandert die Korngrenze mit der Geschwindigkeit $v_{\alpha\beta}$ vom Kristall α zum Kristall β :

$$v_{\alpha\beta} = v_T (e_\beta - e_\alpha) \quad . \quad (6.39)$$

Das Volumen V_α des Kristalls α wird dadurch größer, während das Volumen V_β im gleichen Maße abnimmt. Dadurch wird eine Veränderung der Texturfunktion $g(\vec{n})$ bewirkt. Die diesen Prozeß steuernde Evolutionsgleichung erhält man durch die folgenden Überlegungen.

Es sind gegeben:

V : Volumen des RVE

d : Durchmesser eines kugelförmigen Kornes

$g(\vec{n})$: Texturfunktion: $g(\vec{n}) = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV(\vec{n})}{d\omega}$. $dV(\vec{n})$ ist das Volumen der Körner, deren Orientierungsvektor \vec{n} auf den mit $d\omega$ bezeichneten Bereich auf der Oberfläche einer Einheitskugel weist. Im folgenden wird die Kurzformulierung: " $dV(\vec{n})$ ist das Volumen der Körner \vec{n} " benutzt.

Daraus lassen sich die folgenden Größen berechnen:

V_k : Volumen des Kornes: $V_k = \frac{\pi}{6} d^3$

A_k : Oberfläche des Kornes: $A_k = \pi d^2$

m_{ges} : Anzahl von Körnern innerhalb des RVE: $m_{ges} = \frac{V}{V_k}$

dm_α : Anzahl von Körnern mit der Orientierung \vec{n}_α : $dm_\alpha = m_{ges} g(\vec{n}_\alpha) d\omega_\alpha$

dA_α : Größe des Teils der Oberfläche eines Kornes, den es mit einem Korn der Orientierung \vec{n}_α gemeinsam hat: $dA_\alpha = A_k g(\vec{n}_\alpha) d\omega_\alpha$

$d^2 A_{\alpha\beta}$: Gesamtoberfläche (Größe der Korngrenze), die ein Korn \vec{n}_α mit einem Korn \vec{n}_β gemeinsam hat:

$$\begin{aligned} d^2 A_{\alpha\beta} &= dm_\alpha dA_\beta \\ &= V \frac{A_k}{V_k} g(\vec{n}_\alpha) g(\vec{n}_\beta) d\omega_\alpha d\omega_\beta \quad . \end{aligned} \quad (6.40)$$

Die Korngrenzfläche $d^2 A_{\alpha\beta}$ bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_{\alpha\beta}$. Dadurch wird das Volumen $dV(\vec{n}_\alpha)$ des Kornes \vec{n}_α größer. Für die zeitliche Änderung des Volumens des Kornes \vec{n}_α aufgrund des Kontaktes mit dem Korn \vec{n}_β gilt:

$$d^2 \dot{V}(\vec{n}_\alpha) = d^2 A_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} = v_{\alpha\beta} V \frac{A_k}{V_k} g(\vec{n}_\alpha) g(\vec{n}_\beta) d\omega_\alpha d\omega_\beta \quad . \quad (6.41)$$

Durch Integration über alle Kornorientierungen \vec{n}_β erhält man für die Gesamtveränderung des Volumens der Körner \vec{n}_α

$$d\dot{V}(\vec{n}_\alpha) = \int_{O_e} \left(v_{\alpha\beta} V \frac{A_k}{V_k} g(\vec{n}_\alpha) g(\vec{n}_\beta) d\omega_\alpha \right) d\omega_\beta \quad . \quad (6.42)$$

Da $g(\vec{n}_\alpha)$, V und $d\omega_\alpha$ bezüglich der Integration eine Konstante sind, erhält man mit Gleichung (6.39)

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{d\dot{V}(\vec{n}_\alpha)}{d\omega_\alpha} = \frac{A_k}{V_k} v_T g(\vec{n}_\alpha) \int_{O_e} (e(\vec{n}_\beta) - e(\vec{n}_\alpha)) g(\vec{n}_\beta) d\omega_\beta \quad . \quad (6.43)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gerade die zeitliche Änderung der Texturfunktion $\dot{g}(\vec{n}_\alpha)$. Das Integral auf der rechten Seite entspricht gerade der Homogenisierungsvorschrift $\langle \dots \rangle = \int \dots g(\vec{n}_\beta) d\omega_\beta$. Da $e(\vec{n}_\alpha)$ bezüglich der Integration ebenfalls konstant ist, folgt daraus:

$$\dot{g}(\vec{n}) = \frac{6}{d} v_T g(\vec{n}) (e - e(\vec{n})) \quad . \quad (6.44)$$

Dies ist die Evolutionsgleichung der Texturfunktion zur Beschreibung von Rekristallisationsvorgängen. Der Anteil einer Kristallorientierung nimmt dann zu, wenn die spezifische elastische Energie des entsprechenden Einkristalls $e(\vec{n})$ geringer ist als die spezifische Energie des Polykristalls $\langle e \rangle$ (siehe auch Abschnitt 5.1.1). Nach Gleichung (6.44) ist die Rekristallisationsgeschwindigkeit umgekehrt proportional zum Korndurchmesser. Dies kann so auch erwartet werden, da die Korngrenzfläche mit kleiner werdendem d zunimmt und die Rekristallisation durch die in der Korngrenze ablaufende Diffusion kontrolliert wird.

6.5.2 Korndrehung, plastischer Spin

In Analogie zum Monokristall werden die Rotationsgeschwindigkeiten des Polykristalls in den plastischen Spin \underline{W}^p und den Spintensor $\underline{\Omega}$ einer zu definierenden isoklinen Zwischenkonfiguration ("director vector", Hauptrichtungen) aufgespalten:

$$\underline{W} = \underline{W}^p + \underline{\Omega} \quad . \quad (6.45)$$

Beim Monokristall sind die Hauptrichtungen durch das Gleitsystem definiert (Aravas u. Aifantis (1991), Mandel (1971)).

Die Rotationsgeschwindigkeit \underline{w} der einzelnen Körner ist durch Gleichung (7.91) gegeben. Der plastische Spin \underline{w}^p der Einkristalle folgt aus dem monokristallinen Stoffgesetz: $\underline{w}^p = \underline{w}^p(\underline{\sigma})$.
Aus

$$\underline{w} = \underline{w}^p + \underline{\omega} \quad (6.46)$$

läßt sich somit der Spintensor $\underline{\omega}$ der Einkristalle berechnen.

Da die Bedingung $\langle \underline{w} \rangle = \underline{W}$ identisch erfüllt wird, sind die beiden Möglichkeiten zur Definition der Hauptrichtungen des Polykristalls

$$\langle \underline{w}^p \rangle = \underline{W}^p \quad \text{und} \quad \langle \underline{\omega} \rangle = \underline{\Omega} \quad (6.47)$$

äquivalent.

Die Rotationsgeschwindigkeiten der Einkristalle relativ zu den Hauptrichtungen des Polykristalls sind durch

$$\underline{\boldsymbol{w}}_{rel} = \underline{\boldsymbol{w}} - \underline{\boldsymbol{\Omega}} \quad (6.48)$$

gegeben. $\underline{\boldsymbol{w}}_{rel}$ läßt sich aufspalten in den relativen Spin $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{rel}$ und den plastischen Spin $\underline{\boldsymbol{w}}^p$:

$$\underline{\boldsymbol{w}}_{rel} = \underline{\boldsymbol{\omega}}_{rel} + \underline{\boldsymbol{w}}^p \quad (6.49)$$

Mit den Gleichungen (7.91), (6.45) und (6.48) erhält man

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\omega}}_{rel} &= \underline{\boldsymbol{w}} - \underline{\boldsymbol{\Omega}} - \underline{\boldsymbol{w}}^p \\ &= \frac{2(5 - 7\nu)}{7(7 - 5\nu)} (\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{ES} \cdot \underline{\boldsymbol{M}}^* - \underline{\boldsymbol{M}}^* \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}}_{ES}) + \underline{\boldsymbol{W}}^p - \underline{\boldsymbol{w}}^p \end{aligned} \quad (6.50)$$

Die zeitliche Änderung der Kristallachsenorientierungen $\dot{\vec{n}}$ (relativ zu den Hauptrichtungen des Polykristalls) ergibt sich damit zu (Aravas u. Aifantis (1991))

$$\dot{\vec{n}} = \underline{\boldsymbol{\omega}}_{rel} \cdot \vec{n} \quad (6.51)$$

Da $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{rel}$ ein antisymmetrischer Tensor ist, steht $\dot{\vec{n}}$ senkrecht auf \vec{n} . Der Vektor $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{rel} \cdot \vec{n}$ liegt also in einer Tangentialebene der Oberfläche der Einheitskugel. Er beschreibt die Geschwindigkeit, mit der ein Punkt auf der Oberfläche der Einheitskugel (d.h. eine bestimmte Kristallachsenorientierung \vec{n}) seine Lage ändert.

In Analogie zur Kontinuitätsgleichung einer strömenden Flüssigkeit mit der Dichte ρ und der Geschwindigkeit \boldsymbol{v} , bei der sich die Dichteänderung gemäß der Gleichung

$$\dot{\rho} = -\vec{\nabla} \cdot [\vec{v}(\vec{r})\rho(\vec{r})]$$

ergibt, ist die Evolutionsgleichung der Texturfunktion durch

$$\dot{g}(\vec{n}) = -\vec{\nabla}_{\vec{n}} \cdot [\dot{\vec{n}}(\vec{n})g(\vec{n})] \quad (6.52)$$

gegeben. $\vec{\nabla}_{\vec{n}}$ ist der Nabla-Operator des zweidimensionalen Raumes der möglichen Kristallachsenorientierungen. Er läßt sich aus dem Nabla-Operator des dreidimensionalen Raumes in Kugelkoordinaten berechnen, indem man $r = 1$ setzt und desweiteren berücksichtigt, daß $\dot{\vec{n}}$ keine Komponenten in r -Richtung enthält.

6.6 Numerische Aufbereitung

Das selbstkonsistente Stoffgesetz (Gleichungen (6.21) - (6.24)) stellt ein System von Integro-Differentialgleichungen und partiellen Differentialgleichungen dar. Die Evolutionsgleichungen der internen Zustandsfunktionen ξ haben entweder die Form

$$\dot{\xi}(\vec{n}_0, t) = \int_{O_e} F(\xi) d\omega \quad (6.53)$$

oder

$$\dot{\xi}(\vec{n}_0, t) = F(\vec{\nabla}_{\vec{n}_0}, \xi) \quad (6.54)$$

Die zeitliche Veränderung der Funktion ξ an der Stelle \vec{n}_0 ist vom Wert der Funktion an allen anderen Stellen \vec{n} oder vom Gradienten an der Stelle \vec{n}_0 abhängig.

Man gelangt von den Integro-Differentialgleichungen zu einem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen, indem die stetigen Zustandsfunktionen durch eine diskrete Verteilung ersetzt werden. Hierzu wird das RVE nicht mehr durch eine unendliche Anzahl, sondern aus N Körnern aufgebaut. Jedes einzelne Korn wird durch den Orientierungsvektor \vec{n}_α ($1 \leq \alpha \leq N$) seiner Kristallachse gekennzeichnet. Die einzelnen Zustandsfunktionen werden nur noch an den Stellen \vec{n}_α definiert, also durch N diskrete Werte festgelegt. Aus der Integration über alle Kristallachsenorientierungen werden einfache Summen. Die Homogenisierungsvorschrift

$$\langle x \rangle = \int_{O_e} x(\vec{n}) g(\vec{n}) d\omega \quad (6.55)$$

lautet dann

$$\langle x \rangle = \sum_{\alpha=1}^N g_\alpha x(\vec{n}_\alpha) \quad (6.56)$$

mit $\sum_{\alpha=1}^N g_\alpha = 1$.

Die Gewichte g_α geben an, welchen Volumenanteil die Orientierung \vec{n}_α am Gesamtvolumen des RVE hat.

Aus der einen Evolutionsgleichung für die Eigenspannungsfunktion $\underline{\sigma}_{ES}(\vec{n})$

$$\dot{\underline{\sigma}}_{ES} = \underline{E} : (\underline{D}_i - \underline{d}_i - \underline{B} : \underline{\sigma}_{ES})$$

werden jetzt N Gleichungen

$$\dot{\underline{\sigma}}_{ES_\alpha} = \underline{E} : (\underline{D}_i - \underline{d}_i(\underline{\sigma}_\alpha) - \underline{B} : \underline{\sigma}_{ES_\alpha}) \quad 1 \leq \alpha \leq N \quad (6.57)$$

σ_{ES_α} ist die Eigenspannung im Korn mit der Orientierung \vec{n}_α . Diese N Gleichungen sind miteinander gekoppelt, da \underline{D}_i über

$$\underline{D}_i = \sum_{\alpha=1}^N g_\alpha \underline{d}_i(\underline{\sigma}_\alpha) \quad (6.58)$$

von der Eigenspannung in allen N Körnern abhängt.

Aus der Evolutionsgleichung der Texturfunktion zur Beschreibung der Rekristallisation (Gleichung (6.44)) ergeben sich weiter N gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen.

Bei der Evolutionsgleichung zur Berücksichtigung der Korndrehung

$$\dot{g}(\vec{n}, t) = -\vec{\nabla}_{\vec{n}} \cdot [\dot{\vec{n}}(\vec{n})g(\vec{n})]$$

handelt es sich um eine partielle DGL in \vec{n} und t . $\dot{\vec{n}}$ ist gegeben durch

$$\dot{\vec{n}} = \underline{\omega}_{rel} \cdot \vec{n} \quad .$$

Die partielle DGL wurde aufgestellt, um den Einfluß der Korndrehung auf die Texturfunktion zu erfassen. Bei einer diskreten Verteilung kann die Rotation eines jeden Kornes auch direkt durch

$$\dot{\vec{n}}_\alpha = \underline{\omega}_{rel_\alpha} \cdot \vec{n}_\alpha \quad (6.59)$$

beschrieben werden. Damit sind sowohl der Wert der Texturfunktion g_α an der Stelle \vec{n}_α als auch die Diskretisierungsstelle \vec{n}_α zeitveränderlich.

Wird nur der einaxiale Zug- oder Druckversuch betrachtet, dann ergeben sich aus der Rotationssymmetrie des Problems einige Vereinfachungen. Die auf der Makroebene definierten Tensoren \underline{M} und \underline{B} sind dann transversal isotrop mit der Probenachse als Symmetrieachse. Dadurch werden sie schon durch fünf voneinander unabhängige Komponenten vollständig festgelegt. Da \underline{M} zusätzlich deviatorisch in den vorderen und hinteren Indizes ist, reduziert sich für ihn diese Anzahl sogar auf drei.

Erfolgt die Berechnung der Eigenspannungen eines Kornes \vec{n} in einem Koordinatensystem, dessen Basisvektoren $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ wie in Abb. 39 angegeben an \vec{n} gekoppelt sind, dann gilt: $(\underline{\sigma}_{ES})_{12} = (\underline{\sigma}_{ES})_{13} = 0$. Die Eigenspannungen können also in diesem Sonderfall durch nur vier Komponenten je Korn beschrieben werden. Desweiteren sind die verbleibenden Komponenten von $\underline{\sigma}_{ES}$ (bezüglich des (1,2,3)-Systems) unabhängig von ψ . Da diese Eigenschaft auch für die anderen Zustandsvariablen gilt, ist es ausreichend, \vec{n} in der Folge nur noch durch den Winkel ϑ festzulegen. Es muß dabei nur der Bereich $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ betrachtet werden, da die Orientierungen \vec{n} und $-\vec{n}$ nicht zu unterscheiden sind.

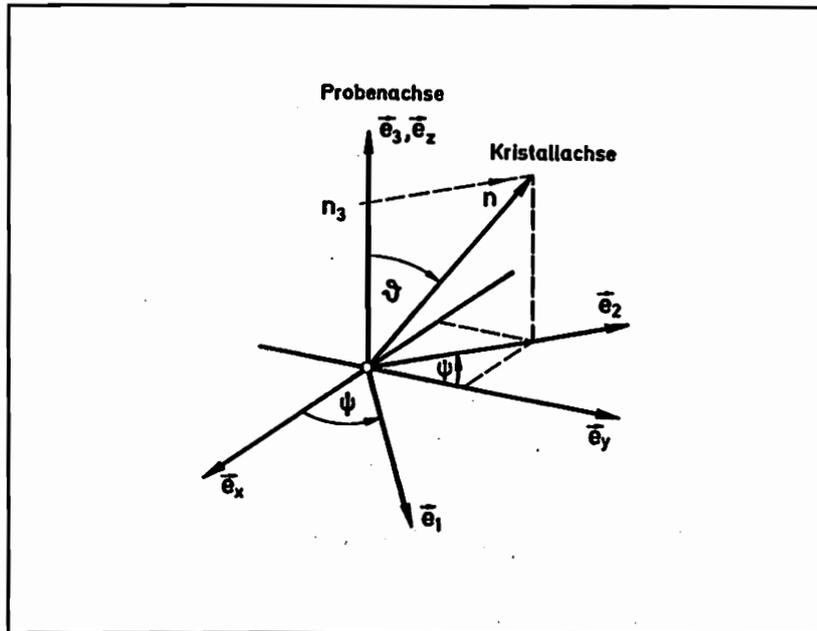


Abb. 39: (1,2,3): Koordinatensystem zur Beschreibung des einaxialen Zug- oder Druckversuchs, (x, y, z) : raumfestes Koordinatensystem, \vec{n} : Orientierungsvektor des betrachteten Einkristalls.

In der Homogenisierungsvorschrift

$$\langle \dots \rangle = \int_{O_e} \dots g(\vec{n}) d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \dots g(\vartheta) \sin \vartheta d\psi d\vartheta$$

kann die Integration über ψ ausgeführt werden:

$$\langle \dots \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots 2\pi g(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \quad . \quad (6.60)$$

Wird desweiteren $\cos \vartheta = n_3$ gesetzt, dann erhält man mit $g^*(n_3) = 2\pi g(\vartheta)$

$$\begin{aligned} \langle \dots \rangle &= \int_0^1 \dots g^*(n_3) dn_3 \\ \text{mit } \int_0^1 g^*(n_3) dn_3 &= 1 \quad . \end{aligned} \quad (6.61)$$

Ist der Polykristall anfänglich isotrop, dann gilt: $2\pi g(\vartheta) = 1$. Geht man zu einer diskretisierten Beschreibung gemäß Gleichung (6.56) über, dann erhält man bei einer äquidistanten Unterteilung des Winkelbereichs $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ in N Teile

$$\vartheta_\alpha = (\alpha - 1) \frac{\pi}{2N} \quad (6.62)$$

für die entsprechenden Gewichte g_α

$$g_\alpha = \int_{(\alpha-1)\frac{\pi}{2N}}^{\alpha\frac{\pi}{2N}} \sin \vartheta d\vartheta \quad 1 \leq \alpha \leq N \quad . \quad (6.63)$$

Für die Berechnung ist es jedoch einfacher, anstelle von ϑ die entsprechende Komponente n_3 des Orientierungsvektors \vec{n} zu verwenden. Bei einer äquidistanten Unterteilung von n_3 ($0 \leq n_3 \leq 1$)

$$n_{3_\alpha} = \frac{2\alpha - 1}{2N} \quad (6.64)$$

erhält man für g_α

$$g_\alpha = \frac{1}{N} \quad . \quad (6.65)$$

6.7 Erste Ergebnisse

Die im folgenden vorgestellten Berechnungen der Eigenspannungsentwicklung in polykristallinem Eis basieren auf der selbstkonsistenten Stoffgesetzformulierung gemäß der Gleichungen (6.21) - (6.24) (7.86) und (7.87). Da zunächst nur die Anfangsphase der Eigenspannungsentwicklung betrachtet wird (kleine Verformungen und kurze Belastungszeiten), können die Veränderungen der Texturfunktion noch unberücksichtigt bleiben.

Die Monokristallorientierungen werden in 10 gleich große Bereiche gemäß Gleichung (6.65) unterteilt. Die einzelnen Bereiche werden durch die folgenden Winkel ϑ_α repräsentiert:

α	n_{3_α}	ϑ_α	$\vartheta_{\alpha_u} - \vartheta_{\alpha_o}$
1	$\frac{(19)20}{20}$	(18.2)0°	0° - 25.8°
2	$\frac{17}{20}$	31.8°	25.8° - 36.9°
3	$\frac{15}{20}$	41.4°	36.9° - 45.6°
4	$\frac{13}{20}$	49.5°	45.6° - 53.1°
5	$\frac{11}{20}$	56.6°	53.1° - 60.0°
6	$\frac{9}{20}$	63.3°	60.0° - 66.4°
7	$\frac{7}{20}$	69.5°	66.4° - 72.5°
8	$\frac{5}{20}$	75.5°	72.5° - 78.5°
9	$\frac{3}{20}$	81.4°	78.5° - 84.3°
10	$\frac{1}{20}$	87.1°	84.3° - 90.0°

Für ϑ_1 sind zwei unterschiedliche Werte sinnvoll. $\vartheta_1 = 18.2^\circ$ unterteilt den Winkelbereich $0^\circ - 25.8^\circ$ in zwei gleich große Orientierungsbereiche. Es liegen genau so viele Kristallachsen im Bereich $0^\circ - 18.2^\circ$ wie im Bereich $18.2^\circ - 25.8^\circ$.

$\vartheta_1 = 0^\circ$ kann als Mittelwert aller Orientierungen $0^\circ \leq \vartheta \leq 25.8^\circ$ und $0 \leq \Psi \leq 360^\circ$ interpretiert werden. Da $\vartheta_1 = 0^\circ$ eine charakteristische Richtung für die Beschreibung der Eigenspannungsentwicklung ist, wird sie in der Folge verwendet.

Neben der Orientierung $\vartheta_1 = 0^\circ$ werden in den Abbildungen noch Ergebnisse von $\vartheta_4 = 49.5^\circ$ und $\vartheta_{10} = 87.1^\circ$ dargestellt. ϑ_1 repräsentiert die Kristalle, die aufgrund ihrer Orientierung nicht verformbar sind. Kristalle, deren Achsen den Winkel ϑ_4 bzw. ϑ_{10} mit der Belastungsrichtung bilden, können große basale Formänderungen erfahren bzw. sich fast ausschließlich durch prismatische Gleitung verformen.

Die Spannungen, die sich innerhalb der einzelnen Körner entwickeln, werden durch die folgenden Größen dargestellt (siehe auch 8):

σ_a : Zugspannung in Richtung der Kristallachse

τ_b : basale Schubspannung

τ_p : resultierende Schubspannung in prismatischen Ebenen

Es wird angenommen, daß der Monokristall keine axialen Längenänderungen erfahren kann. σ_a hat daher keinen Einfluß auf das inelastische Stoffgesetz des Monokristalls. Aus τ_b bzw. τ_p ergeben sich die basalen bzw. prismatischen Gleitungen.

Das verwendete monokristalline Stoffgesetz der basalen Gleitung wurde im Abschnitt 3.6 vorgestellt. Da für die Entwicklung der konstitutiven Beziehungen der prismatischen Gleitung nicht genügend Experimente zur Verfügung standen, werden hier die Gleichungen der basalen Gleitung übernommen. Die Materialparameter werden jedoch so modifiziert, daß der Anisotropie des Einkristalls Rechnung getragen wird.

Die Werkstoffparameter der basalen und der prismatischen Gleitung werden wie folgt gewählt (siehe auch Abschnitt 6.6):

basale Gleitung	prismatische Gleitung
$k_{v_b} = 4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{sMPa}}$	$k_{v_p} = 4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{sMPa}}$
$d_b = 1\text{mm}$	$d_p = 1\text{mm}$
$\mu_{k_b} = 2 \cdot 10^4 \frac{1}{\text{mmMPa}}$	$\mu_{k_p} = 2 \frac{1}{\text{mmMPa}}$
$\lambda_{0_b} = 10^3 \frac{1}{\text{mm}^2}$	$\lambda_{0_b} = 10^3 \frac{1}{\text{mm}^2}$

Die sich aus diesen Größen ergebenden stationären Kriechraten ($t \rightarrow \infty$) sind in Abbildung 40 als Funktion der Spannungen angegeben (siehe auch Abbildung 33). Die Anisotropie des

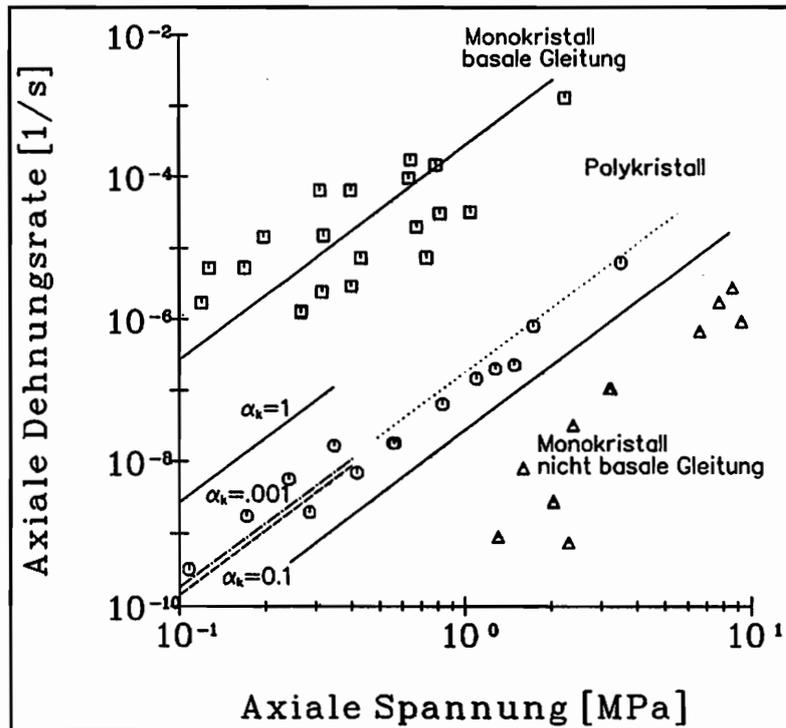


Abb. 40: Stationäre axiale Kriechdehnungsrate in Abhängigkeit von der axialen Spannung für die monokristallinen Stoffgesetze der basalen und prismatischen (nichtbasalen) Gleitung. Die Zentralsymbole kennzeichnen experimentelle Ergebnisse. Die mittlere gepunktete Gerade ist die Ausgleichsgerade durch die experimentell ermittelten Daten des Polykristalls. Die berechneten Dehnungsraten des Polykristalls werden durch die kurzen Geraden dargestellt.

Monokristalls wird gut wiedergegeben. Durch die um den Faktor 10^4 kleinere Versetzungsquellendichte der prismatischen Gleitsysteme sind auch die stationären Dehnungsraten um diesen Faktor kleiner. Bei Berechnung der stationären basalen bzw. prismatischen Dehnungsraten wurde von Einkristallen ausgegangen, deren Kristallachse einen Winkel von $\vartheta = 45^\circ$ bzw. $\vartheta = 90^\circ$ mit der Belastungsrichtung bildet.

Der Tensor der inelastischen Nachgiebigkeitsraten $\underline{\underline{M}}$ wurde gemäß Gleichung (6.29) definiert:

$$\underline{\underline{M}} = \alpha_k \frac{\partial \underline{\underline{D}}_i}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} .$$

Mit $\underline{D}_i = \langle \underline{d}_i(\underline{\sigma}) \rangle$ und $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_{ES} + \underline{\Sigma}$ folgt

$$\underline{M} = \alpha_k \left\langle \frac{\partial \underline{d}_i(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} \right\rangle . .$$

Gemäß Abschnitt 3.8 hat das inelastische Stoffgesetz die Form

$$\underline{d}_i(\underline{\sigma}) = \frac{\dot{\gamma}_b}{2\tau_b} \underline{I}^b : \underline{\sigma} + \frac{\dot{\gamma}_p}{2\tau_p} \underline{I}^p : \underline{\sigma} .$$

Die Terme $\frac{\dot{\gamma}_b}{2\tau_b}$ und $\frac{\dot{\gamma}_p}{2\tau_p}$ sind unabhängig von der Spannung. Sie sind nur Funktionen der basalen bzw. prismatischen Versetzungsdichten λ_b bzw. λ_p . Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{d}_i(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} &= \frac{\dot{\gamma}_b}{2\tau_b} \underline{I}^b + \frac{\dot{\gamma}_p}{2\tau_p} \underline{I}^p \\ &= \frac{b}{2} (\lambda_b k_{v_b} \underline{I}^b + \lambda_p k_{v_p} \underline{I}^p) . \end{aligned}$$

Für \underline{M} erhält man mit $k_{v_b} = k_{v_p} = k_v$

$$\underline{M} = \alpha_k \frac{b}{2} k_v (\langle \lambda_b \underline{I}^b \rangle + \langle \lambda_p \underline{I}^p \rangle) . \quad (6.66)$$

Die folgenden Abbildungen basieren auf Berechnungen von Kriechversuchen mit einer Zugspannung von 0.1MPa. Der Verlauf der Kurven ist bei anderen Spannungen qualitativ gleich, so daß auf deren Darstellung hier verzichtet wird.

Die drei charakteristischen Kornorientierungen sind durch Zentralsymbole gekennzeichnet.

- \triangle : $\vartheta_{10} = 87.1^\circ$; inelastische Verformungen hauptsächlich durch Gleiten auf prismatischen Ebenen
- \circ : $\vartheta_4 = 49.5^\circ$; inelastische Verformungen hauptsächlich durch Gleiten auf basalen Ebenen
- \square : $\vartheta_1 = 0^\circ$; nur elastische Verformungen

Es werden vier Berechnungen mit unterschiedlichen α_k -Werten (Korrekturfaktor in der Definition der inelastischen Nachgiebigkeitsraten) vorgestellt. Sie werden durch die folgenden Linientypen wiedergegeben:

- durchgezogen : $\alpha_k = 1$
- Langstrich-Kurzstrich : $\alpha_k = 0.1$
- strichpunktirt : $\alpha_k = 0.001$ (μ_{k_b} und μ_{k_p} um den Faktor 100 vergrößert)
- gestrichelt : $\alpha_k = 0$

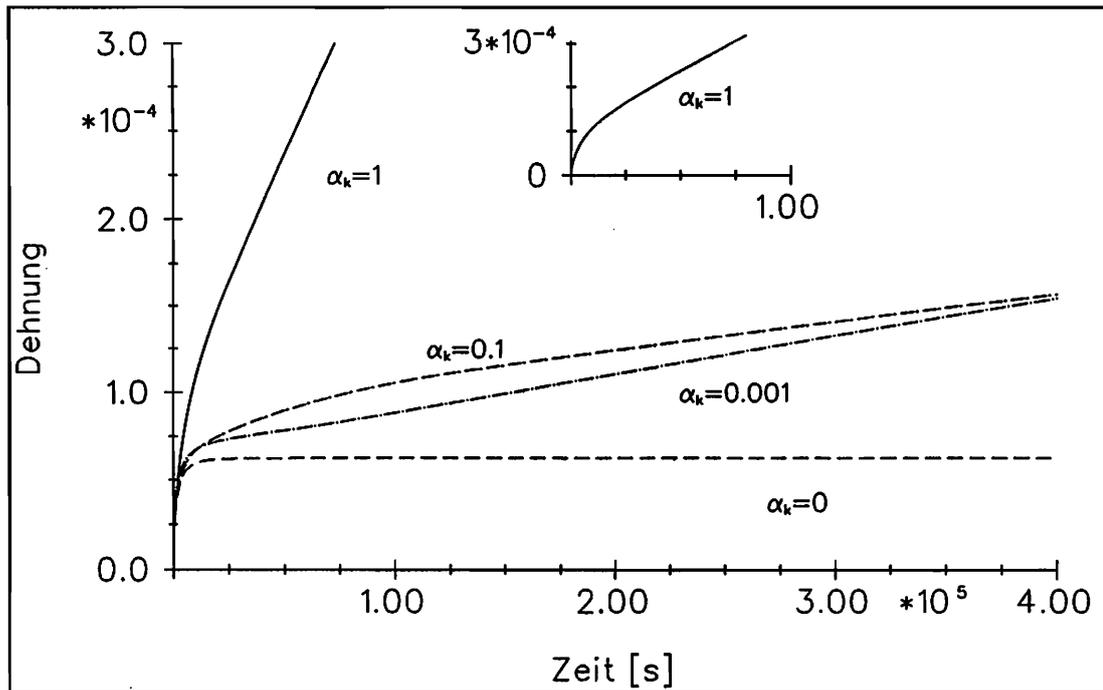


Abb. 41: Berechnete Kriechversuche eines Polykristalls ($\Sigma = 0.1 \text{ MPa}$) für unterschiedliche Korrekturfaktoren α_k . Die Einblendung zeigt die Kurve $\alpha_k = 1$ in Dehnungsrichtung gestaucht.

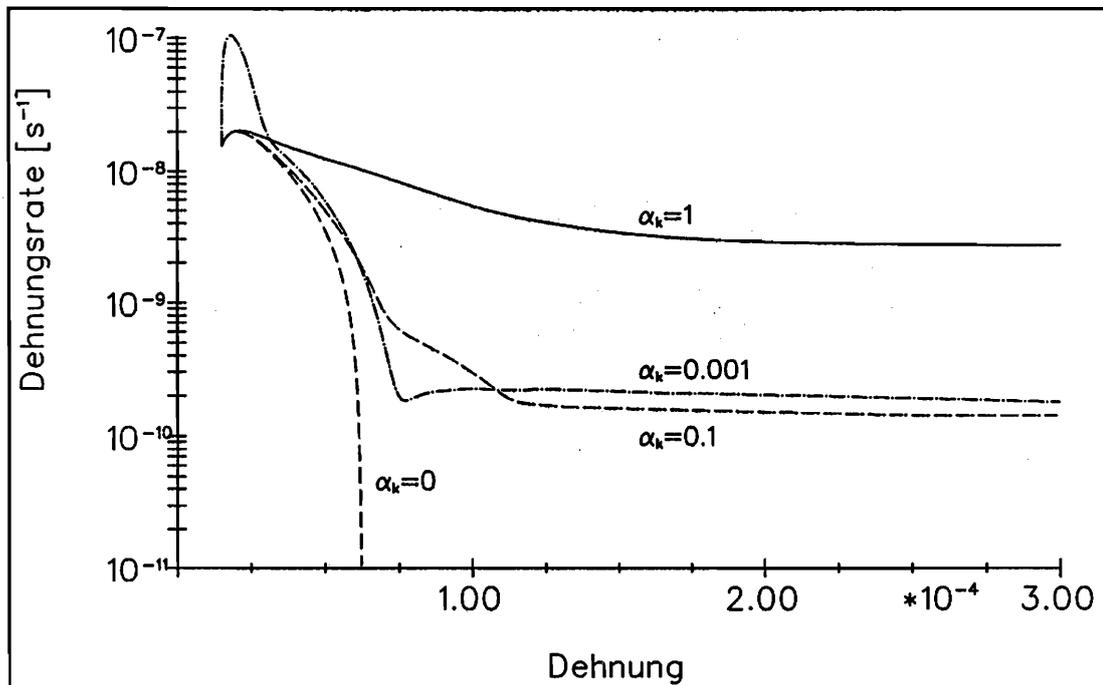


Abb. 42: Dehnungsrate der in Abbildung 41 dargestellten Kriechversuche logarithmisch über der Dehnung aufgetragen.

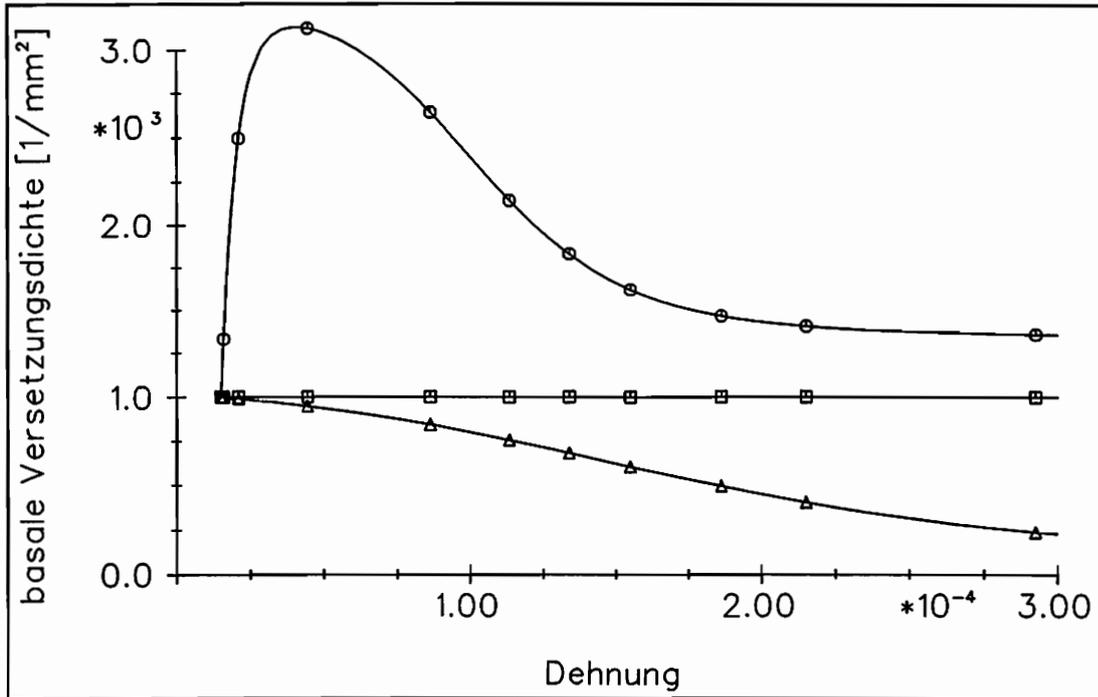


Abb. 43: Basale Versetzungsdichte für den Fall $\alpha_k = 1$

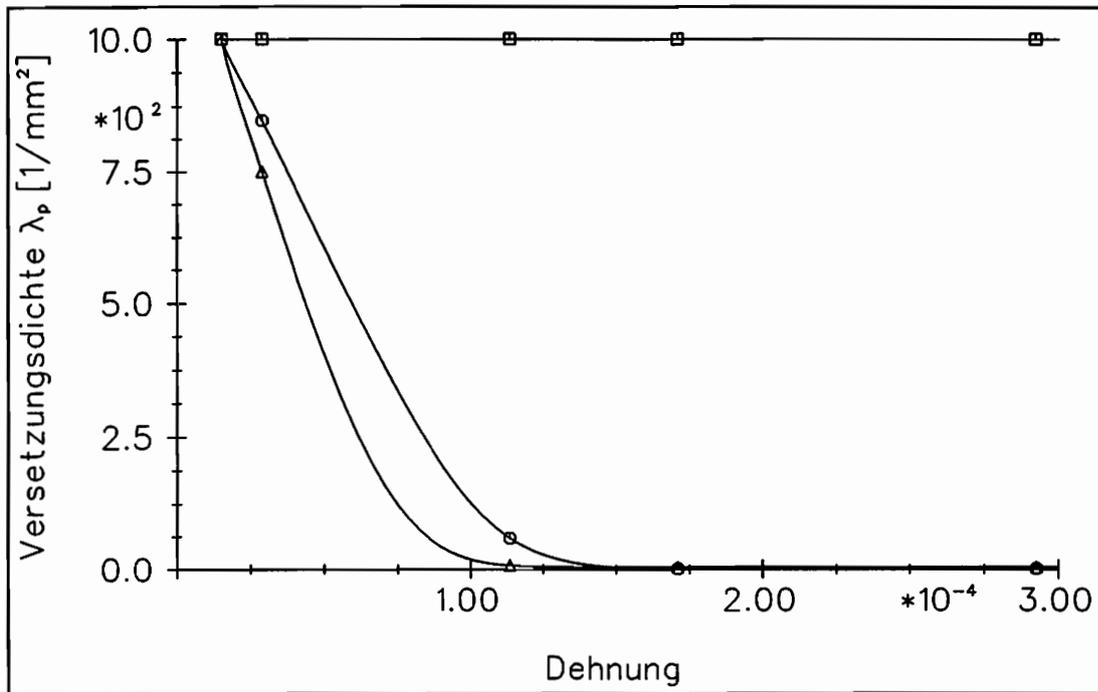


Abb. 44: Versetzungsdichte der prismatischen Gleitebenen für den Fall $\alpha_k = 1$

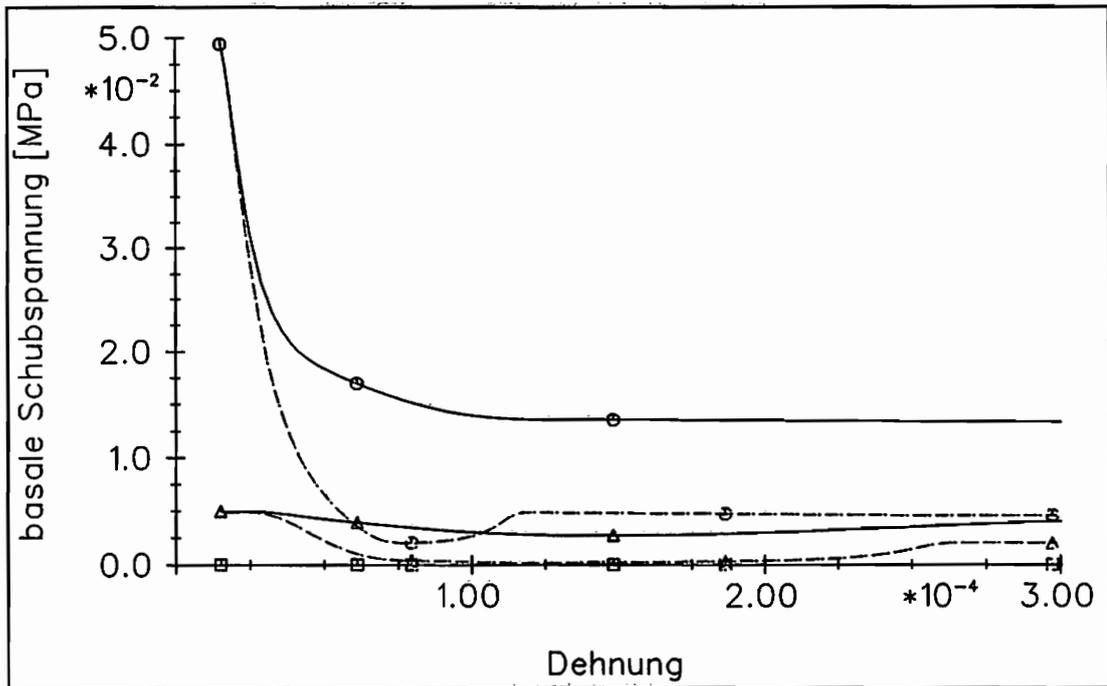


Abb. 45: Verlauf der basalen Schubspannung τ_b ($\alpha_k = 1$ und $\alpha_k = 0.1$)

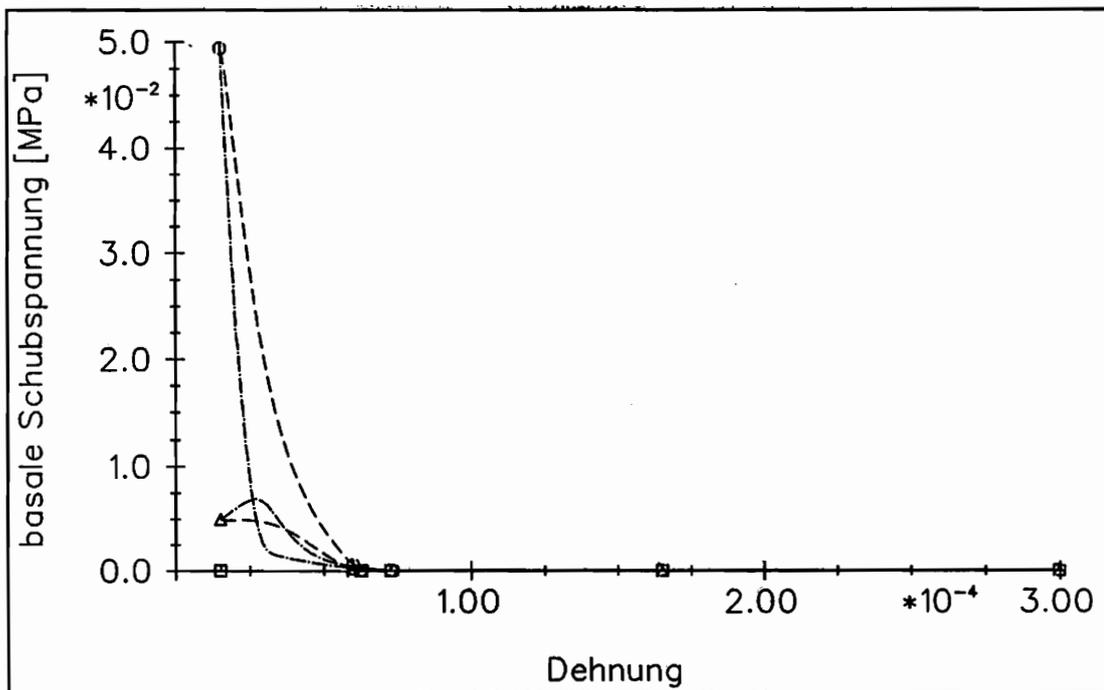


Abb. 46: Verlauf der basalen Schubspannung τ_b ($\alpha_k = 0.001$ und $\alpha_k = 0$)

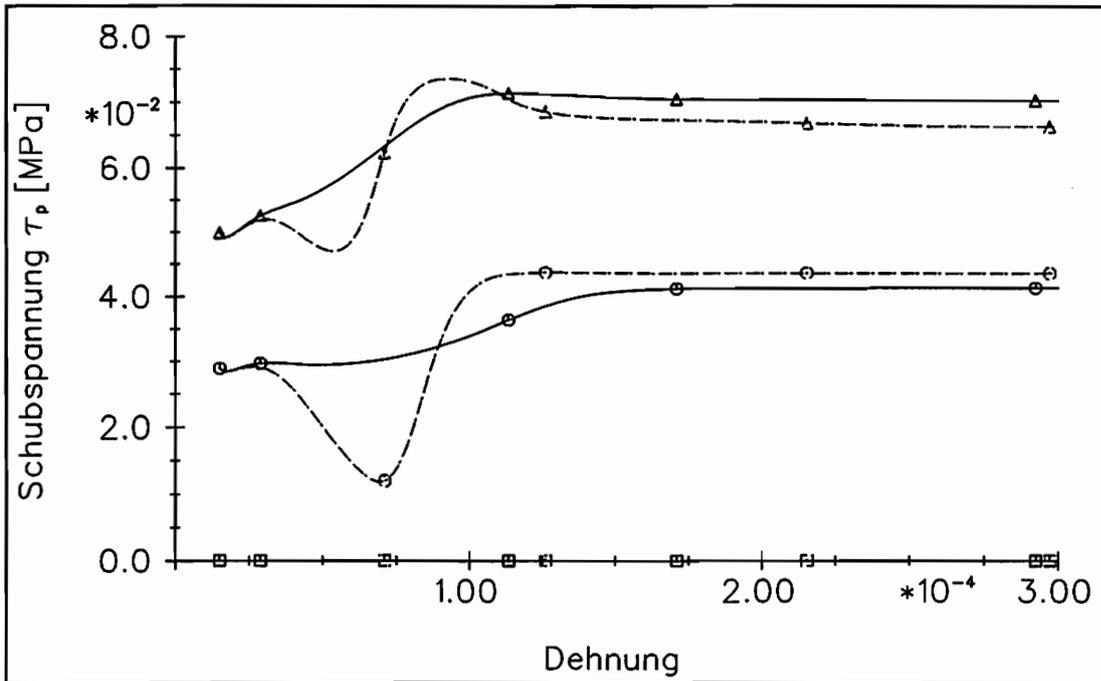


Abb. 47: Verlauf der prismatischen Schubspannung τ_p ($\alpha_k = 1$ und $\alpha_k = 0.1$)

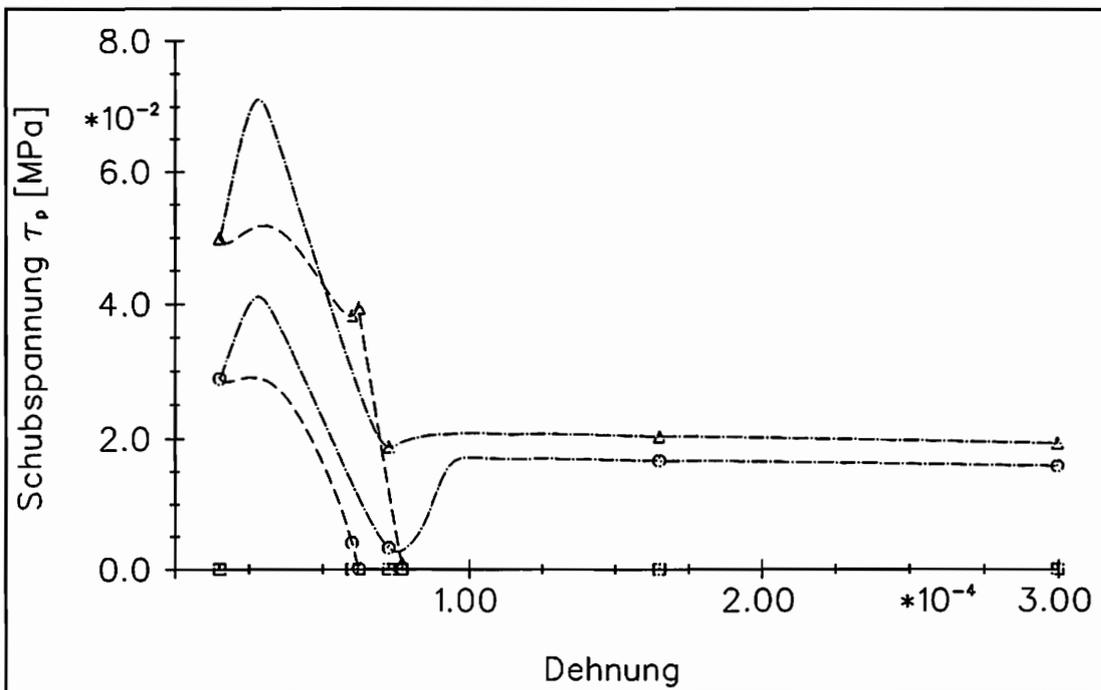


Abb. 48: Verlauf der prismatischen Schubspannung τ_p ($\alpha_k = 0.001$ und $\alpha_k = 0$)

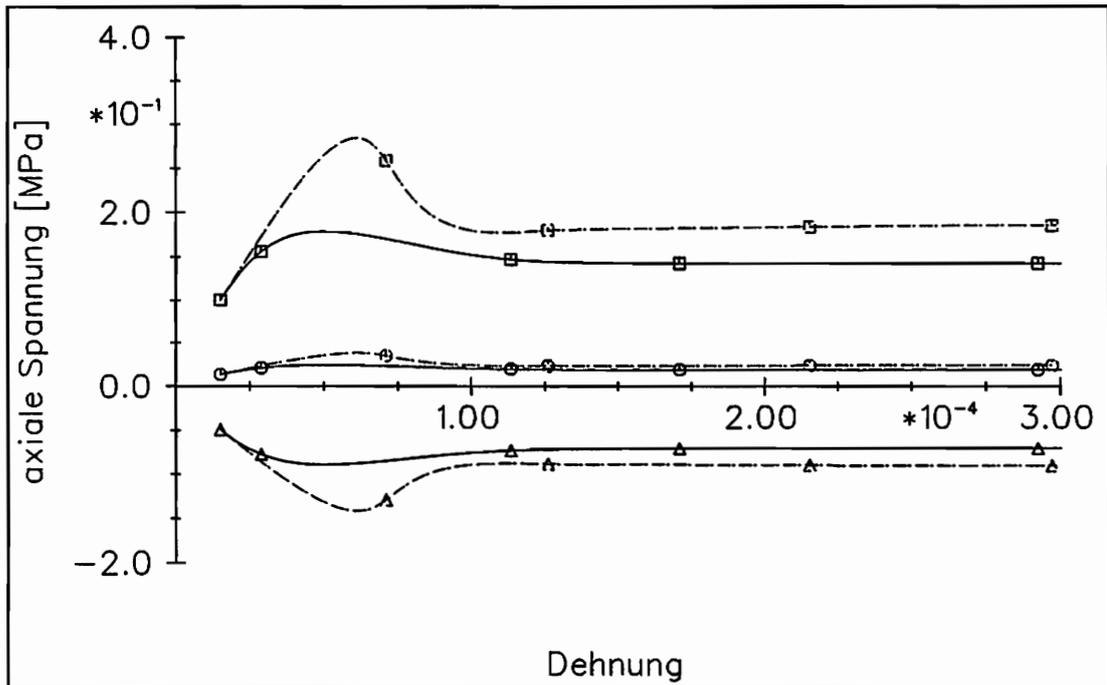


Abb. 49: Verlauf der axialen Spannung σ_a ($\alpha_k = 1$ und $\alpha_k = 0.1$)

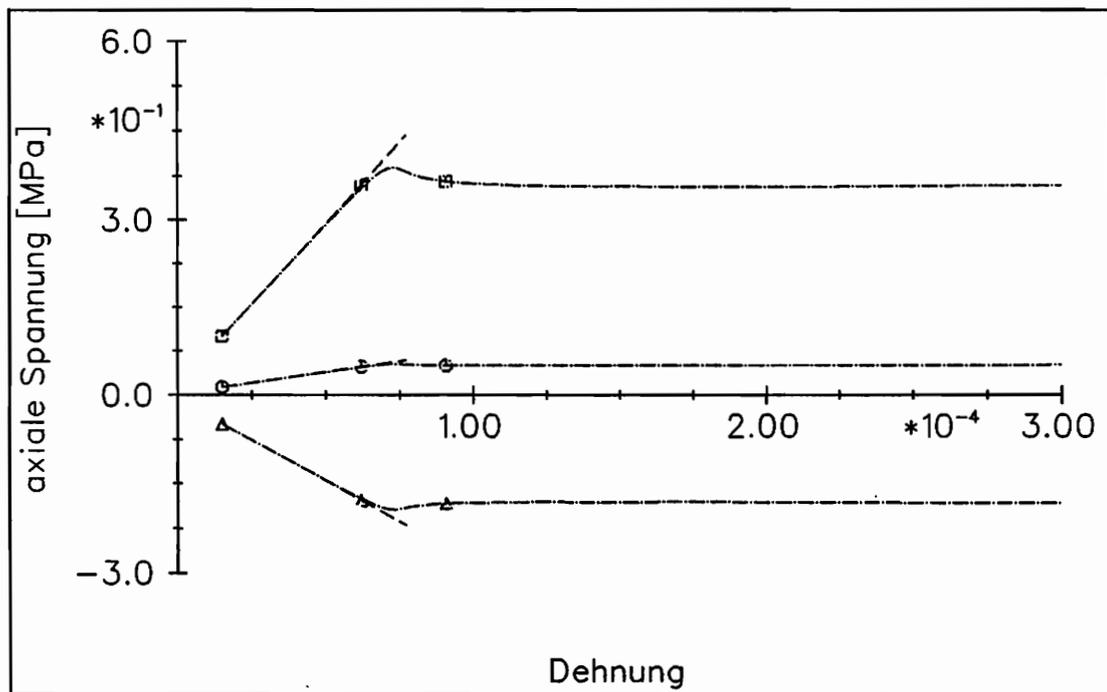


Abb. 50: Verlauf der axialen Spannung σ_a ($\alpha_k = 0.001$ und $\alpha_k = 0$)

Es wird zunächst der Fall $\alpha_k = 1$ betrachtet. Abbildung 41 zeigt den berechneten Kriechversuch des Polykristalls. Der typische Verlauf des primären Kriechens wird qualitativ sehr gut wiedergegeben. Die anfänglich hohen Dehnungsraten nehmen bis zum Erreichen des stationären Zustandes (sekundäres Kriechen) ab, d.h. der Polykristall verfestigt. Einen genaueren Einblick in das Verfestigungsverhalten gestattet Abbildung 42. Direkt nach Versuchsbeginn nimmt die Dehnungsrate des Polykristalls zunächst zu. Der Polykristall verhält sich damit wie der Monokristall. In Abbildung 43 ist zu erkennen, daß sich die Zunahme der Dehnungsrate aus einer Vergrößerung der basalen Versetzungsdichte der "gut" orientierten (ϑ_4) Einkristalle ergibt. Die anderen Kristalle können den daraus resultierenden Verformungen nicht folgen, wodurch sich die Spannungen auf diese Kristalle umlagern. Die basale Schubspannung τ_b in den "gut" orientierten Körnern wird schnell kleiner (Abbildung 45). Gleichzeitig erhöhen sich die prismatischen Schubspannungen τ_p (Abbildung 47) und die axialen Spannungen σ_a (Abbildung 49). τ_p und σ_a nehmen auch in den "gut" orientierten Körnern zu, d.h. es finden auch Spannungsumlagerungen innerhalb eines Kornes statt.

Aus den gesunkenen basalen Schubspannungen folgt das Fallen der basalen Versetzungsdichte. Es werden weniger neue Versetzungen erzeugt als vorhandene Versetzungen den Kristall verlassen. Damit nimmt die Dehnungsrate des Polykristalls ab. Mit den gestiegenen prismatischen Schubspannungen τ_p vergrößert sich der Anteil der nichtbasalen Gleitung an den Gesamtverformungen. Welcher der beiden Verformungsmechanismen im stationären Zustand den größeren Beitrag zu den makroskopischen Deformationen leistet, müssen weitere Untersuchungen zeigen.

In Körnern, deren Kristallachse einen Winkel von 90° mit der Belastungsrichtung bildet, entstehen in der Basalebene Normalspannungen, die die Größenordnung der äußeren Last annehmen. Im Falle eines Druckversuches wären es Zugspannungen. Positive Normalspannungen unterstützen das Entstehen und Wachsen von Rissen. Dies erklärt, warum sich im Druckversuch hauptsächlich Risse in Ebenen bilden, die die Belastungsrichtung enthalten (Spaltrisse).

In Abbildung 40 sind die stationären¹ axialen Dehnungsraten in Abhängigkeit von der axialen Zugspannung dargestellt. In dem bisher betrachteten Fall ($\alpha_k = 1$) sind die Dehnungsraten um eine Größenordnung zu hoch. Der Polykristall verhält sich mit der hier gewählten

¹ Es wurde davon ausgegangen, daß der stationäre Zustand dann erreicht ist, wenn sich sämtliche Zustandsvariablen in fünf signifikanten Stellen über einen definierten Zeitraum Δt nicht mehr ändern. Da dieses Abbruchkriterium unter anderem von der Wahl von Δt abhängt, ist das Erreichen des stationären Zustandes nicht gesichert. Das Ermitteln der stationären Dehnungsrate im Experiment ist jedoch noch wesentlich problematischer, so daß das gewählte Verfahren als ausreichend angesehen wurde.

Definition des Tensors \underline{M} weicher als im Experiment, obwohl angenommen wurde, daß die Einkristalle in Richtung ihrer c-Achse unverformbar sind. Die sich in dieser Richtung im Kristall aufbauenden Normalspannungen σ_a erreichen jedoch auch nicht den Wert, den man anhand der im Abschnitt 4.2 vorgenommenen Abschätzung erwarten kann. Scheinbar wird der Polykristall (die Matrix) in der Umgebung eines Kornes durch den Tensor \underline{M} zu weich modelliert. Die Eigenspannungen innerhalb des Kornes erzeugen in der Matrix zusätzliche Spannungen $\Delta\sigma$. Aus $\Delta\sigma$ ergeben sich zusätzliche inelastische Verformungen. Die Matrix gibt den Eigenspannungen nach, wodurch sich diese abbauen.

Die einfachste Möglichkeit, die Matrix härter zu modellieren, ist der skalare Korrekturfaktor α_k .

Mit $\alpha_k = 0.1$ liegen die stationären Dehnungsraten in der richtigen Größenordnung (Abb.40). Da die Matrix (der Polykristall) den Bestrebungen der Einkristalle, ihre Eigenspannungen abzubauen, schlechter nachgeben kann, werden die Eigenspannungen größer. Die basalen Schubspannungen haben sich dadurch im Fall $\alpha_k = 0.1$ deutlich reduziert. Der Unterschied in den prismatischen Schubspannungen ist im Vergleich dazu eher gering. Zudem ist τ_p in einigen Körnern größer und in anderen kleiner geworden. Die axialen Spannungen werden einheitlich größer. In der Anfangsphase ist σ_a wesentlich größer. Der Unterschied baut sich jedoch bis zum Erreichen des stationären Zustandes teilweise wieder ab. Die im Experiment beobachteten verzögert elastischen Dehnungen können mit derart geringen Eigenspannungen (sie haben in etwa die Größenordnung der äußeren Last) noch nicht erklärt werden.

In den Abbildungen 46, 48 und 50 sind Berechnungen dargestellt, bei denen $\alpha_k = 0.001$ gesetzt wurde. Gleichzeitig wurden die basalen und prismatischen Versetzungsquellendichten um den Faktor 100 erhöht, um die stationäre Dehnungsrate des Polykristalls in der richtigen Größenordnung zu halten. Die Matrix ist somit härter, die einzelnen Einkristalle sind weicher gewählt als im letzten Beispiel.

Die axialen Spannungen erreichen jetzt den dreifachen Wert der äußeren Last. Eine weitere Steigerung der axialen Spannungen ist durch eine Verringerung von α_k kaum noch möglich. Dies ergibt sich aus einer Betrachtung des Grenzfalles $\alpha_k = 0$. Für diesen Sonderfall reduziert sich das hier vorgeschlagene Stoffgesetz auf eine Formulierung, die (für plastisches Materialverhalten) auf Kröner (1961) und Budiansky u. Wu (1962) zurückgeht. Die Kriechkurve (Abbildung 41) strebt bei einer Dehnung von ca. $0.75 \cdot 10^{-5}$ gegen eine horizontale Gerade. Weitere inelastische Deformationen sind nicht möglich. In Abbildung 42 ist deutlich zu erkennen, wie die Dehnungsraten beim Erreichen der Grenzdehnung gegen Null streben. Die axialen Spannungen nehmen linear mit der Dehnung zu. Die basalen und prismatischen Schubspannungen streben gegen Null. Auf dieses Problem des Modelles von Kröner, keine

großen inelastischen Verformungen erklären zu können, wenn die Einkristalle nur vier oder weniger Verformungsfreiheitsgrade aufweisen, wurde schon im Abschnitt 5.2 hingewiesen.

Die mit der bisher verwendeten Definition des Tensors \underline{M} berechneten Eigenspannungen liegen noch nicht in der erwarteten Größenordnung. Eine gleichmäßige Verkleinerung des Tensors \underline{M} konnte zwar eine Vergrößerung der Eigenspannungen bewirken, es erhöhten sich jedoch sowohl die Eigenspannungen in den basalen Ebenen als auch die axialen Spannungen. Weitere Untersuchungen müssen zeigen, inwieweit die anderen Definitionen des Abschnitts 6.4 eine quantitative Verbesserung erbringen können. Die Größenordnung der Eigenspannungen wurde bisher jedoch nur abgeschätzt.

Eine verbesserte quantitative und qualitative Vergleichsbasis für das vorgestellte Stoffgesetz könnte man durch eine numerische Simulation eines Polykristalls mit Hilfe der Finite-Element-Methode erzeugen. Wird z.B. eine Zug- oder Druckprobe in finite Elemente aufgeteilt, wobei den einzelnen Elementen das im Kapitel 3 hergeleitete monokristalline Stoffgesetz zugrundeliegt, und werden unterschiedliche Kristallachsenorientierungen innerhalb der einzelnen Elemente vorgegeben, dann erhält man ein Modell einer polykristallinen Zugprobe. Auf diese Weise könnte Einblick in das Innere des Polykristalls genommen werden. Durch das Auswerten von zufällig aufgebauten Polykristallmodellen könnte z.B. geklärt werden, wie stark die Spannungen innerhalb eines Kornes mit einer vorgegebenen Orientierung von den über alle Körner mit dieser Orientierung gemittelten Spannungen abweichen.

Durch einen Vergleich der berechneten Zug- oder Druckversuche (FEM) mit den entsprechenden Experimenten könnte desweiteren überprüft werden, ob das zugrundeliegende monokristalline Stoffgesetz mit den aus Monokristallversuchen ermittelten Materialparametern verwendet werden kann. Es ist wäre z.B. möglich, daß die Korngrenzen im Polykristall zusätzliche Versetzungsquellen darstellen und somit der Monokristall wesentlich weicher wäre.

7. Das Einschlußproblem

7.1 Darstellung des Stoffgesetzes und der Gleichgewichtsbedingungen im Bildbereich der Laplace- und Fourier-Transformation

7.1.1 Einige Eigenschaften der Integral-Transformationen

Die Laplace-Transformation (LT) einer Funktion $x(t)$ wird durch das folgende Integral definiert:

$$\tilde{x}(s) \equiv \mathcal{LT}\{x\} \equiv \int_{-0}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad .$$

Für die im Rahmen dieser Arbeit interessierenden Funktionen $x(t)$ kann die Existenz der Laplace-Transformierten vorausgesetzt werden. Die Funktion $x(t)$ und ihre Ableitungen $x^{(n)} \equiv \frac{d^n x}{dt^n}$ besitzen nur zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Unstetigkeitsstelle. Für $t < 0$ und $n = 0, 1, \dots$ gilt: $x^{(n)}(t) = 0$. Die Integration in der Definition der LT beginnt bei -0 . Dadurch werden die Unstetigkeiten der Funktion $x(t)$ und ihrer Ableitungen miteingefasst. $x(t)$ enthält also distributive Anteile; insbesondere auch die Dirac-Funktion $\delta(t)$, die als Distributionsableitung der Sprungfunktion $h(t)$ aufgefaßt werden kann. Auf die formale Erweiterung der LT für Distributionen wird hier jedoch verzichtet. Nach Doetsch (1955) gelten die meisten Rechenregeln der LT auch dann, wenn die Dirac-Funktion als Pseudofunktion aufgefaßt wird. Die folgenden Rechenregeln der LT werden im Rahmen dieser Arbeit verwendet:

Linearität

$$\mathcal{LT}\{\alpha x(t) + \beta y(t)\} = \alpha \mathcal{LT}\{x(t)\} + \beta \mathcal{LT}\{y(t)\} \quad (7.1)$$

Differentiationssatz der LT

$$\mathcal{LT}\left\{\frac{d}{dt}x(t)\right\} = s\mathcal{LT}\{x(t)\} - x(-0)$$

vereinfacht sich mit $x(-0) = 0$ zu:

$$\mathcal{LT}\left\{\frac{d^n}{dt^n}x(t)\right\} = s^n \mathcal{LT}\{x(t)\} \quad . \quad (7.2)$$

Der Grenzwertsatz der LT

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \{s \mathcal{L}T\{x(t)\}\} = x(+0)$$

gilt nur für Funktionen. Enthält $x(t)$ Ableitungen der Sprungfunktion, dann existiert der Grenzwert nicht. Enthält $x(t)$ Ableitungen der Sprungfunktion bis zur m -ten Ordnung und werden die entsprechenden Sprunghöhen mit $x_0^{(i)}$ ($-m \leq i$) bezeichnet ($x_0^{(0)}$ ist der Sprung der Funktion $x(t)$ an der Stelle $t = 0$, $x_0^{(2)}$ der zweiten Ableitung, $x_0^{(-1)}$ der des ersten Integrals), dann enthält die n -te Ableitung von $x(t)$ die folgenden distributiven Anteile x_δ :

$$x^{(n)}(t) = x^*(t) + x_\delta(t)$$

$$x_\delta(t) = \sum_{i=1}^{n+m} h^{(i)} x_0^{(n-i)} .$$

Durch Auflösen dieser Gleichungen nach x^* und Bilden der LT erhält man mit $\mathcal{L}T\{h^{(n)}(t)\} = s^n$:

$$\mathcal{L}T\{x^*\} = \mathcal{L}T\{x^{(n)}\} - \sum_{i=1}^{n+m} s^i x_0^{(n-i)} .$$

Die Funktion $x^*(t)$ ist eine gewöhnliche Funktion. Ihr Sprung an der Stelle $t = 0$ ist gerade der Sprung der n -ten Ableitung von $x(t)$. Der Grenzwertsatz der LT ist somit auf $x^*(t)$ anwendbar. Man erhält:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right|_{t=+0} &= x^*(+0) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \{s \mathcal{L}T\{x^*(t)\}\} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}T\{x^{(n)}\} - \sum_{i=1}^{n+m} s^i x_0^{(n-i)}}{s^{-1}} . \end{aligned}$$

Dieser Grenzwert ist von der Form $\frac{0}{0}$. Nach q -fachem Anwenden der Regel von l'Hospital ($q \geq n + m$) läßt sich der Grenzwert dann bestimmen:

$$\left. \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right|_{t=+0} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(-1)^q}{(q)!} s^{q+1} \frac{d^q}{ds^q} (s^n \check{x}) \right\} . \quad (7.3)$$

$x(t)$ darf höchstens Ableitungen m -ter Ordnung der Sprungfunktion enthalten. Für n sind auch negative Werte zulässig. $x^{(n)}$ hat dann die Bedeutung des $-n$ -ten Integrals von $x(t)$. Es muß jedoch die Bedingung $q \geq n + m \geq 0$ erfüllt sein.

Beispiel: Hat die zur Beschleunigung a gehörende Verschiebung u bzw. Geschwindigkeit v den Sprung Δu bzw. Δv , dann enthält a Ableitungen der Sprungfunktion bis zur zweiten Ordnung ($m = 2$). Es gilt dann:

$$\begin{aligned} a(+0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} s^3 \frac{d^2}{ds^2} \ddot{a} \right) \quad (n = 0) \\ \Delta v = v(+0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(-s^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \ddot{a} \right) \right) \quad (n = -1) \\ \Delta u = u(+0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{\ddot{a}}{s} \right) \quad (n = -2) . \end{aligned}$$

Die Fourier-Transformation (FT) einer Funktion $x(\vec{r})$ (x ist ein Tensor beliebiger Stufe und \vec{r} der Ortsvektor des dreidimensionalen Raumes) ist durch das folgende Integral definiert:

$$\mathcal{FT}\{x(\vec{r})\} \equiv \hat{x}(\vec{k}) \equiv \int_{R^3} x \exp(-j\vec{r} \cdot \vec{k}) d^3\vec{r} .$$

Die inverse Fourier-Transformation ist definiert durch:

$$\mathcal{FT}^{-1}\{\hat{x}(\vec{k})\} \equiv x(\vec{r}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{K^3} x \exp(j\vec{r} \cdot \vec{k}) d^3\vec{k} .$$

Die Integration erstreckt sich über den dreidimensionalen Definitionsraum von \vec{r} bzw. \vec{k} . \vec{k} ist der zu \vec{r} korrespondierende Ortsvektor des Bildraumes. Weitere Einzelheiten zur Definition der FT in mehreren Dimensionen finden sich bei Champeney (1973).

Die folgenden Eigenschaften der FT werden im Rahmen dieser Arbeit benötigt:

Linearität

$$\mathcal{FT}\{\alpha x(\vec{r}) + \beta y(\vec{r})\} = \alpha \mathcal{FT}\{x(\vec{r})\} + \beta \mathcal{FT}\{y(\vec{r})\} \quad (7.4)$$

Differentiationssatz

$$\mathcal{FT}\{\vec{\nabla} \otimes x\} = j\vec{k} \otimes \hat{x} \quad (7.5)$$

\otimes ist ein beliebiges Produkt und j die imaginäre Zahl.

$\delta(\vec{r})$ ist die Dirac-Funktion des dreidimensionalen Raumes. Sie ist definiert durch

$$\int_{R^3} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3\vec{r} = f(\vec{r}') .$$

Damit hat sie die folgenden Eigenschaften:

$$\mathcal{FT}\{\delta(\vec{r})\} = 1 \quad (7.6)$$

$$\mathcal{FT}\{\delta(\vec{r} - \vec{r}')\} = \exp(-j\vec{r}' \cdot \vec{k}) \quad (7.7)$$

Ist $x(\vec{r}, t)$ eine Funktion des Ortes und der Zeit, und sind diese Variablen unabhängig voneinander, dann überträgt sich diese Eigenschaft auch auf die Fourier- und die Laplace-Transformation. Die Fourier-Laplace-Transformierte $\tilde{x}(\vec{k}, s)$ der Funktion $x(\vec{r}, t)$ wird dann definiert durch:

$$\tilde{x}(\vec{k}, s) \equiv \mathcal{LT}\{\mathcal{FT}\{x(\vec{r}, t)\}\} \equiv \mathcal{FT}\{\mathcal{LT}\{x(\vec{r}, t)\}\} \quad (7.8)$$

7.1.2 Das Stoffgesetz

Der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten \underline{d} wird additiv aufgespalten in einen elastischen und einen inelastischen Anteil:

$$\underline{d} = \underline{d}_e + \underline{d}_i \quad (7.9)$$

Die elastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten folgen einem hypoelastischen Stoffgesetz der Form

$$\underline{d}_e = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \quad (7.10)$$

$\underline{\underline{S}}$ ist der Tensor der Elastizitätskoeffizienten und $\underline{\underline{\dot{\sigma}}}$ symbolisiert eine objektive Zeitableitung des Spannungstensors. $\underline{\underline{S}}$ weist dabei die bekannten Symmetrieeigenschaften auf:

$$S_{ijkl} = S_{klij} = S_{jikl} = S_{ijlk} = \dots \quad (7.11)$$

Die inelastischen Deformationen sind gegeben durch

$$\underline{d}_i = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (7.12)$$

Der Tensor vierter Stufe $\underline{\underline{M}}$ hat dieselben Symmetrien wie $\underline{\underline{S}}$. Da für die inelastischen Deformationen Volumenkonstanz angenommen wird, d.h.

$$\underline{d}_i : \underline{\underline{1}} = 0 \quad ,$$

gilt ferner

$$\underline{\underline{M}} : \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{0}} \quad . \quad (7.13)$$

Es werden im folgenden kleine Verzerrungen und ein näherungsweise rotationsfreies Geschwindigkeitsfeld vorausgesetzt. Damit kann in Gleichung (7.10) die objektive Zeitableitung durch die lokale Zeitableitung ersetzt werden und die Materialtensoren $\underline{\underline{M}}$ und $\underline{\underline{S}}$ können als räumlich und zeitlich konstant angesehen werden. Für $\underline{\underline{d}}$ erhält man damit

$$\underline{\underline{d}}(\vec{r}, t) = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\sigma}}(\vec{r}, t) + \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}(\vec{r}, t) \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\sigma}}(\vec{r}, t) \quad . \quad (7.14)$$

Unter den genannten Voraussetzungen ist auch der Unterschied zwischen dem Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeiten und der Zeitableitung des Dehnungstensors zu vernachlässigen, d.h. $\underline{\underline{d}} \approx \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$. Desweiteren muß zwischen dem aktuellen Ortsvektor eines Materiepunktes und dem entsprechenden Vektor der Ausgangskonfiguration nicht unterschieden werden. \vec{r} und t sind daher unabhängige Variablen.

Das Stoffgesetz kann mit Hilfe der Gleichungen (7.1) und (7.2) in den Bildbereich der LT transformiert werden.

$$\check{\underline{\underline{d}}}(\vec{r}, s) = (\underline{\underline{M}} + s\underline{\underline{S}}) : \check{\underline{\underline{\sigma}}}(\vec{r}, s)$$

Mit

$$\check{\underline{\underline{d}}} = s\check{\underline{\underline{\epsilon}}} \quad (7.15)$$

und

$$\check{\underline{\underline{C}}}^{-1} \equiv \frac{1}{s} \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}} \quad (7.16)$$

folgt

$$\check{\underline{\underline{\epsilon}}}(\vec{r}, s) = \check{\underline{\underline{C}}}^{-1}(s) : \check{\underline{\underline{\sigma}}}(\vec{r}, s) \quad (7.17)$$

bzw.

$$\check{\underline{\underline{d}}}(\vec{r}, s) = s\check{\underline{\underline{C}}}^{-1}(s) : \check{\underline{\underline{\sigma}}}(\vec{r}, s) \quad . \quad (7.18)$$

Der Tensor $\check{\underline{\underline{C}}}$ hat die Symmetrieeigenschaften von $\underline{\underline{M}}$ und $\underline{\underline{S}}$. Mit Hilfe der LT erhält man unter der Voraussetzung kleiner Verzerrungen eine Formulierung des linear elastisch-viskosen Stoffgesetzes, die formal einem linear-elastischen Stoffgesetz entspricht.

Da $s\underline{\check{C}}^{-1}(s)$ bezüglich der Fourier-Transformation eine Konstante ist, ergibt sich Gleichung (7.18) im Bildbereich der FLT zu

$$\underline{\check{d}}(\vec{k}, s) = s\underline{\check{C}}^{-1}(s) : \underline{\check{\sigma}}(\vec{k}, s) \quad . \quad (7.19)$$

Aus der Definitionsgleichung

$$\underline{d} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \vec{v} + \vec{v} \vec{\nabla})$$

folgt mit Gleichung (7.5) für \underline{d} im Bildbereich der FLT die Darstellung

$$\underline{\check{d}} = \frac{1}{2} j (\vec{k} \vec{v} + \vec{v} \vec{k}) \quad . \quad (7.20)$$

Die Zeitunabhängigkeit des Ortsvektors \vec{r} überträgt sich auch auf den Nabla-Operator $\vec{\nabla}$. Dieser ist somit bezüglich der LT eine Konstante. Gleichung (7.20) in Gleichung (7.18) eingesetzt und nach den Spannungen aufgelöst ergibt:

$$\underline{\check{\sigma}} = j \frac{1}{s} \underline{\check{C}} : (\vec{k} \vec{v}) \quad . \quad (7.21)$$

Es wurde hierbei die Symmetriebeziehung $\underline{\check{C}} : (\vec{k} \vec{v}) = \underline{\check{C}} : (\vec{v} \vec{k})$ verwandt.

7.1.3 Die Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen für eine Einzelkraft \vec{F} , die in einem unendlich ausgedehnten Körper an der Stelle \vec{r}' angreift, lautet

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\sigma}(\vec{r}, t) + \delta(\vec{r} - \vec{r}') \vec{F}(t) = \vec{0} \quad .$$

Bildet man die LT dieser Gleichung, so erhält man unter der Annahme, daß sich der Kraftangriffspunkt \vec{r}' nicht verschiebt

$$\vec{\nabla} \cdot \underline{\check{\sigma}} + \delta(\vec{r} - \vec{r}') \vec{\check{F}} = \vec{0} \quad . \quad (7.22)$$

Die hierbei verwandte Annahme, daß der Nabla-Operator im Rahmen der LT eine Konstante ist, ist gleichbedeutend mit dem Schreiben der Gleichgewichtsbedingungen in der Ausgangskonfiguration. Wird diese Gleichung jetzt noch in den Bildbereich der FT transformiert, dann folgt aus den Gleichungen (7.4), (7.5) und (7.7) die Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen im Bildbereich der FLT:

$$j \vec{k} \cdot \underline{\check{\sigma}} + \exp(-j \vec{r}' \cdot \vec{k}) \vec{\check{F}} = \vec{0} \quad . \quad (7.23)$$

7.1.4 Das Geschwindigkeitsfeld in einem unendlich ausgedehnten Körper aufgrund einer Einzelkraft

Wird in die Gleichgewichtsbedingungen gemäß Gleichung (7.23) das Stoffgesetz in der in Gleichung (7.21) gegebenen Formulierung eingesetzt, so ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen dem Geschwindigkeitsfeld $\check{\vec{v}}$ und der Einzelkraft $\check{\vec{F}}$:

$$j\vec{k} \cdot \left(j \frac{1}{s} \check{\underline{\underline{C}}} : (\vec{k}\check{\vec{v}}) \right) + \exp(-j\vec{r}' \cdot \vec{k}) \check{\vec{F}} = \vec{0}$$

und schließlich

$$\check{\vec{v}} = s \exp(-j\vec{r}' \cdot \vec{k}) \left(\vec{k} \cdot \check{\underline{\underline{C}}} \cdot \vec{k} \right)^{-1} \cdot \check{\vec{F}} \quad . \quad (7.24)$$

7.2 Das Transformationsproblem

7.2.1 Lösung für ein linear elastisch-viskoses Material

Gegeben ist ein unendlich ausgedehnter homogener Körper, der für $t < 0$ spannungsfrei ist. Einem Gedankenexperiment von Eshelby (1957) folgend wird zum Zeitpunkt $t = 0$ ein einfach zusammenhängender Bereich B (im folgenden auch als Korn bezeichnet) aus dem Körper herausgeschnitten. Die Fläche ∂B trennt das Korn von der Matrix.

Das Korn erfährt die homogene und spannungsfreie Dehnung $\underline{\underline{\epsilon}}_T$ (Transformationsdehnung) mit $\underline{\underline{\epsilon}}_T(t) = \underline{\underline{0}}$ für $t < 0$. $\underline{\underline{\epsilon}}_T(t)$ ist an der Stelle $t = 0$ unstetig, sonst stetig.

Liegt ein Materialverhalten gemäß Gleichung (7.17) zugrunde, dann können im Bildbereich der LT die Spannungen $\underline{\underline{\sigma}}_T$ berechnet werden, die notwendig sind, um die durch $\underline{\underline{\epsilon}}_T$ hervorgerufenen Dehnungen rückgängig zu machen.

$$\check{\underline{\underline{\sigma}}}_T = -\check{\underline{\underline{C}}} : \check{\underline{\underline{\epsilon}}}_T \quad (7.25)$$

Diese Spannungen können gerade durch das Aufbringen der Kraft

$$d\check{\vec{f}} = \underline{\underline{\sigma}}_T \cdot d\check{\vec{S}} \quad (7.26)$$

auf die Oberfläche des Kornes erzeugt werden. $d\check{\vec{S}}(\vec{r}')$ ist hierin das nach außen gerichtete Flächenelement der Oberfläche des Kornes an der Stelle \vec{r}' .

Unter der Annahme kleiner Verschiebungen ist $d\vec{S}(\vec{r}')$ unabhängig von der Zeit (die Kraft wird in der Ausgangskonfiguration aufgebracht) und es folgt:

$$d\vec{f} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\vec{S} \quad (7.27)$$

und mit Gleichung (7.25)

$$d\vec{f} = -(\underline{\underline{\check{C}}} : \underline{\underline{\check{\epsilon}}}_T) \cdot d\vec{S} \quad (7.28)$$

Das Korn kann nun wieder in die Matrix eingesetzt werden, ohne daß diese davon beeinflusst wird. Im Korn besteht das homogene Spannungsfeld $\underline{\underline{\sigma}}_T$. Auf ∂B greift noch die äußere Kraftverteilung $d\vec{f}$ an.

Durch das Aufbringen der Kraftverteilung $d\vec{h} = -d\vec{f}$ wird der Körper frei von äußeren Kräften. Die sich dann einstellenden Spannungs- und Geschwindigkeitsfelder sind gleichzeitig die Lösung des Transformationsproblems. Im Korn sind die Spannungen jedoch noch um $\underline{\underline{\sigma}}_T$ zu vergrößern.

In jedem Punkt der Oberfläche ∂B des Kornes wird jetzt die aus Gleichung (7.28) folgende Kraft

$$d\vec{h} = (\underline{\underline{\check{C}}} : \underline{\underline{\check{\epsilon}}}_T) \cdot d\vec{S}(\vec{r}') \quad (7.29)$$

aufgebracht und die einzelnen Geschwindigkeitsfelder $d\vec{v}$, die sich gemäß Gleichung (7.24) aus $d\vec{h}$ ergeben, werden überlagert. Das gesuchte Geschwindigkeitsfeld erhält man somit durch Integration über die Oberfläche des Kornes.

$$\vec{v} = \int_{\partial B} s \exp(-j\vec{r}' \cdot \vec{k}) (\vec{k} \cdot \underline{\underline{\check{C}}} \cdot \vec{k})^{-1} \cdot (\underline{\underline{\check{C}}} : \underline{\underline{\check{\epsilon}}}_T) \cdot d\vec{S}(\vec{r}')$$

Nach Anwendung des Satzes von Gauss erhält man

$$\vec{v} = \int_B s \exp(-j\vec{r}' \cdot \vec{k}) (\vec{k} \cdot \underline{\underline{\check{C}}} \cdot \vec{k})^{-1} \cdot (\underline{\underline{\check{C}}} : \underline{\underline{\check{\epsilon}}}_T) \cdot \vec{\nabla}' d^3\vec{r}' \quad .$$

Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}'$ steht für die Ableitung nach dem Ortsvektor \vec{r}' . Mit der Beziehung $\vec{\nabla}'[\vec{k} \cdot \vec{r}'] = \vec{k}$ folgt weiter

$$\vec{v}(\vec{k}, s) = \hat{f}(\vec{k}) s (\vec{k} \cdot \underline{\underline{\check{C}}} \cdot \vec{k})^{-1} \cdot (\underline{\underline{\check{C}}} : \underline{\underline{\check{\epsilon}}}_T) \cdot \vec{k}(-j)$$

mit

$$\hat{f}(\vec{k}) = \int_B \exp(-j\vec{r}' \cdot \vec{k}) d^3\vec{r}' \quad (7.30)$$

Im Originalbereich definiert die Funktion $f(\vec{r})$ den Bereich B durch

$$f(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \vec{r} \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.31)$$

Bildet man den Geschwindigkeitsgradienten $\underline{L}^T = \vec{\nabla} \vec{v}$ oder im Bildbereich ausgedrückt $\check{\underline{L}}^T = j\vec{k}\vec{v}$, so erhält man mit

$$\check{\underline{L}}^T = s\hat{f}(\vec{k}) \left(\vec{k} (\vec{k} \cdot \underline{\check{C}} \cdot \vec{k})^{-1} \vec{k} \right) : \underline{\check{C}} : \check{\underline{\epsilon}}_T \quad (7.32)$$

die Lösung des Transformationsproblems im Bildbereich der FLT.

Faivre (1971) hat die inverse FT für eine Gleichung mit der obigen Struktur angegeben. Wird für den durch $f(\vec{r})$ beschriebenen Bereich B eine Kugelform angenommen, dann ist der Geschwindigkeitsgradient $\check{\underline{L}}_{tB}$ innerhalb des transformierten Bereichs konstant.

$$\begin{aligned} \check{\underline{L}}_{tB}^T &= \mathcal{FT}^{-1} \{ \check{\underline{L}}^T \}_{\vec{r} \in B} \\ &= s \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\int_{K^3} \hat{f}(\vec{k}) \left(\vec{k} (\vec{k} \cdot \underline{\check{C}} \cdot \vec{k})^{-1} \vec{k} \right) \exp(j\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3\vec{k} \right]_{\vec{r} \in B} : \underline{\check{C}} : \check{\underline{\epsilon}}_T \end{aligned} \quad (7.33)$$

Faivre (1971) hat gezeigt, daß sich das Integral über den Definitionsraum der Bildvariablen \vec{k} unter den genannten Voraussetzungen in ein Integral über die Oberfläche einer Einheitskugel O_e überführen läßt. Der Mittelpunkt der Einheitskugel fällt mit dem Ursprung des Koordinatensystems der Bildvariablen \vec{k} zusammen. Der im folgenden definierte Tensor vierter Stufe $\check{\underline{T}}$ ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \check{\underline{T}} &\equiv \left[\int_{K^3} \hat{f}(\vec{k}) \left(\vec{k} (\vec{k} \cdot \underline{\check{C}} \cdot \vec{k})^{-1} \vec{k} \right) \exp(j\vec{k} \cdot \vec{r}) d^3\vec{k} \right]_{\vec{r} \in B} \\ &= \int_{O_e} \vec{k} (\vec{k} \cdot \underline{\check{C}} \cdot \vec{k})^{-1} \vec{k} d\omega_k \end{aligned} \quad (7.34)$$

und mit Gleichung (7.33) folgt

$$\check{\underline{L}}_{tB}^T = s\check{\underline{T}} : \underline{\check{C}} : \check{\underline{\epsilon}}_T \quad (7.35)$$

$\check{\underline{T}}$ ist symmetrisch bezüglich einer Vertauschung des vorderen und hinteren Indexpaares. Mit $\check{\underline{T}}_{\alpha s}$ bzw. $\check{\underline{T}}_{ss}$ werden die in den hinteren bzw. den hinteren und den vorderen Indizes

symmetrisierten Tensoren bezeichnet. Die Verzerrungs- bzw. Rotationsgeschwindigkeiten $\check{\underline{d}}_{tB}$ bzw. $\check{\underline{w}}_{tB}$ lassen sich damit wie folgt schreiben:

$$\check{\underline{d}}_{tB} = s\check{\underline{T}}_{ss} : \check{\underline{C}} : \check{\underline{\epsilon}}_T \quad (7.36)$$

$$\check{\underline{w}}_{tB} = \frac{1}{2} \left(\check{\underline{L}}_{tB} - \check{\underline{L}}_{tB}^T \right) = -s\check{\underline{T}}_{\alpha s} : \check{\underline{C}} : \check{\underline{\epsilon}}_T \quad .$$

Durch die Formulierung des Problems im Bildbereich der LT werden durch $\check{\underline{d}}_{tB}$ auch die Dehnungen $\check{\underline{\epsilon}}_{tB}$ des Kornes beschrieben. Die Referenzkonfiguration dieses Dehnungsmaßes ist der Zustand des Kornes vor Aufbringung der Kraftverteilung $d\vec{h}$ gemäß Gleichung (7.29). Zu diesem Zeitpunkt ist die Matrix noch spannungsfrei. Man kann also sagen: $\check{\underline{d}}_{tB}$ ist bezogen auf den spannungsfreien Zustand der Matrix. Im Einschluß sind aber schon die Spannungen $\check{\underline{\sigma}}_T$ und (bezogen auf den spannungsfreien Zustand des Kornes) die Dehnungen $-\check{\underline{\epsilon}}_T$ vorhanden. Für die Verzerrungsgeschwindigkeiten $\check{\underline{d}}_{tB_0}$ (bezogen auf den spannungsfreien Zustand des Kornes) ergibt sich mit $\mathcal{LT}\{\check{\underline{\epsilon}}_T\} = s\check{\underline{\epsilon}}_T$

$$\check{\underline{d}}_{tB_0} = \check{\underline{d}}_{tB} - s\check{\underline{\epsilon}}_T \quad . \quad (7.37)$$

Über das Stoffgesetz gemäß Gleichung (7.18) erhält man daraus die Spannungen $\check{\underline{\sigma}}_{tB}$ im transformierten Bereich zu

$$\check{\underline{\sigma}}_{tB} = \frac{1}{s}\check{\underline{C}} : \check{\underline{d}}_{tB_0} = \left(\check{\underline{C}} : \check{\underline{T}}_{ss} - \underline{\underline{1}} \right) : \check{\underline{C}} : \check{\underline{\epsilon}}_T \quad . \quad (7.38)$$

Die Gleichungen (7.36) und (7.38) repräsentieren die Lösung des Transformationsproblems im Bildbereich der LT.

7.2.2 Erweiterung der Lösung auf ein linearisiertes Stoffgesetz

Liegt ein nichtlinear elastisch-viskoses Materialverhalten vor und wird die Matrix zusätzlich im Unendlichen homogen durch die Spannung $\check{\underline{\Sigma}}_0$ belastet und gleichzeitig durch die Randbedingungen eine konstante Rotationsgeschwindigkeit $\check{\underline{W}}_0$ vorgegeben, dann wird die Spannung im Korn und in der Matrix um $\Delta\check{\underline{\sigma}}$ und die Verzerrungsgeschwindigkeiten um $\Delta\check{\underline{d}}$ vom homogenen Zustand $\check{\underline{\Sigma}}_0$ bzw. $\check{\underline{D}}_0$ abweichen. $\check{\underline{D}}_0$ sind dabei die Verzerrungsgeschwindigkeiten, die sich bei einer ungestörten (d.h. nicht durch Transformationsdehnungen belasteten) Matrix einstellen würden.

$\Delta\check{\underline{\sigma}}$ und $\Delta\check{\underline{d}}$ können näherungsweise durch ein linearisiertes Stoffgesetz miteinander verknüpft werden. Dieses hat dann die zu Gleichung (7.18) analoge Form

$$\Delta\check{\underline{d}} = s\check{\underline{\underline{C}}}^{-1} : \Delta\check{\underline{\sigma}} \quad \text{mit} \quad \check{\underline{\underline{C}}}^{-1} = \frac{1}{s}\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}} \quad .$$

Hierin ist $\underline{\underline{M}}$ ein in geeigneter Weise zu definierender Tensor der inelastischen Nachgiebigkeitsraten.

Der im letzten Abschnitt angegebene Lösungsweg ist auch hier näherungsweise anwendbar. Man erhält

$$\check{\underline{d}}_{tB} = s\underline{\underline{T}}_{ss} : \check{\underline{\underline{C}}} : \check{\underline{\underline{\epsilon}}}_T + \check{\underline{D}}_0 \quad (7.39)$$

$$\check{\underline{w}}_{tB} = -s\underline{\underline{T}}_{\alpha s} : \check{\underline{\underline{C}}} : \check{\underline{\underline{\epsilon}}}_T + \check{\underline{W}}_0 \quad (7.40)$$

$$\check{\underline{\sigma}}_{tB} = \left(\check{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{T}}_{ss} - \underline{\underline{1}} \right) : \check{\underline{\underline{C}}} : \check{\underline{\underline{\epsilon}}}_T + \check{\underline{\Sigma}}_0 \quad . \quad (7.41)$$

Den Lösungen gemäß der Gleichungen (7.36) und (7.38) mußte jeweils noch der homogene Anteil hinzugefügt werden.

7.3 Definition des Einschlußproblems und Lösung im Bildbereich der LT

In eine unendlich ausgedehnte Matrix mit dem Materialverhalten $\underline{D} = \underline{D}(\underline{\Sigma}, \dot{\underline{\Sigma}}) = \underline{D}_i(\underline{\Sigma}) + \underline{S} : \dot{\underline{\Sigma}}$ ist ein Korn mit dem Materialverhalten $\underline{d} = \underline{d}(\underline{\sigma}, \dot{\underline{\sigma}}) = \underline{d}_i(\underline{\sigma}) + \underline{s} : \dot{\underline{\sigma}}$ eingeschlossen. Die spannungsfreie Form des Kornes kann durch die homogene Dehnung $\underline{\epsilon}_0$ auf die Form der Aussparung in der spannungsfreien Matrix gebracht werden. $\underline{\epsilon}_0$ kann man deshalb auch als Dehnungsinkompatibilität des spannungsfreien Vergleichszustandes bezeichnen. Sie stellt eine innere Last des Systems dar, da ihre Überwindung zu einem Eigenspannungszustand führt. Über die Größe von $\underline{\epsilon}_0$ wird später eine Aussage getroffen werden. Zunächst wird $\underline{\epsilon}_0$ als eine bekannte und zeitlich konstante Größe vorausgesetzt.

Gesucht sind die Spannungen $\underline{\sigma}_E$ und die Verzerrungs- bzw. Rotationsgeschwindigkeiten \underline{d}_E bzw. \underline{w}_E innerhalb des Einschlusses. Die Matrix soll dabei zusätzlich im Unendlichen homogen durch die äußere Last $\underline{\Sigma}_0$ und $\dot{\underline{\Sigma}}_0$ belastet werden. Desweiteren kann dem System eine durch \underline{W}_0 beschriebene Starrkörperrotation überlagert sein.

Entfernt man den Einschluf aus der Matrix, füllt die Aussparung mit Matrixmaterial und läßt diesen Bereich die spannungsfreie Transformationsdehnung $\underline{\epsilon}_T$ erfahren, so gelangt man zum Transformationsproblem. Der Spannungs- und Geschwindigkeitszustand im Transformationsbereich ist mit den Gleichungen (7.39) - (7.41) für ein linearisiertes Stoffgesetz der Matrix gegeben:

$$\begin{aligned}\check{\underline{d}}_{tB} &= s\check{\underline{T}}_{ss} : \check{\underline{C}} : \check{\underline{\epsilon}}_T + \check{\underline{D}}_0 \\ \check{\underline{w}}_{tB} &= -s\check{\underline{T}}_{as} : \check{\underline{C}} : \check{\underline{\epsilon}}_T + \check{\underline{W}}_0 \\ \check{\underline{\sigma}}_{tB} &= \left(\check{\underline{C}} : \check{\underline{T}}_{ss} - \underline{\underline{1}} \right) : \check{\underline{C}} : \check{\underline{\epsilon}}_T + \check{\underline{\Sigma}}_0 \quad .\end{aligned}$$

Die Dehnungen beziehen sich dabei auf den spannungsfreien Zustand der Matrix.

Bringt man nun $\check{\underline{\sigma}}_{tB}$ als Last auf der Oberfläche des aus der Matrix entfernten Einschlusses auf, dann erhält man für die Spannungen im Einschluf $\check{\underline{\sigma}}_E$:

$$\check{\underline{\sigma}}_E = \check{\underline{\sigma}}_{tB} \quad . \quad (7.42)$$

Zusammen mit dem Stoffgesetz des Monokristalls (Einschluf) ergeben sich daraus die Verzerrungsgeschwindigkeiten $\check{\underline{d}}_E(\check{\underline{\sigma}}_E)$. Die durch $\check{\underline{d}}_E(\check{\underline{\sigma}}_E)$ auch gegebenen Dehnungen des Monokristalls beziehen sich auf den spannungsfreien Zustand des Einschlusses. Die Bezugskonfiguration von $\check{\underline{d}}_{tB}$ ist der spannungsfreie Zustand der Matrix. Die spannungsfreien Zustände von Einschluf und Matrix unterscheiden sich durch die Dehnung $\underline{\epsilon}_0$. Bestimmt man nun die Transformationsdehnung $\check{\underline{\epsilon}}_T$ so, daß

$$\check{\underline{d}}_E = \check{\underline{d}}_{tB} + s\mathcal{L}T\{\underline{\epsilon}_0 h(t)\} \quad (7.43)$$

gilt, dann haben der Einschluf und der transformierte Bereich die gleiche Form und es herrscht in beiden Teilen der gleiche Spannungszustand. Der Transformationsbereich kann daher gegen den Einschluf ausgetauscht werden, ohne daß sich am Zustand der Matrix etwas ändert.

Aus Gleichung (7.39) und (7.43) erhält man

$$\frac{1}{s}\check{\underline{T}}_{ss}^{-1} (\check{\underline{d}}_E - \check{\underline{D}}_0 - s\mathcal{L}T\{\underline{\epsilon}_0 h(t)\}) = \check{\underline{C}} : \check{\underline{\epsilon}}_T \quad . \quad (7.44)$$

Dies zusammen mit Gleichung (7.42) in Gleichung (7.41) eingesetzt ergibt

$$\check{\underline{\sigma}}_E - \check{\underline{\Sigma}}_0 = \frac{1}{s} \left(\check{\underline{C}} - \check{\underline{T}}_{ss}^{-1} \right) : \left(\check{\underline{d}}_E - \check{\underline{D}}_0 - s \mathcal{L}T\{\underline{\varepsilon}_0 h(t)\} \right)$$

bzw.

$$\check{\underline{d}}_E - \check{\underline{D}}_0 = s \left(\check{\underline{C}} - \check{\underline{T}}_{ss}^{-1} \right)^{-1} : \left(\check{\underline{\sigma}}_E - \check{\underline{\Sigma}}_0 \right) + s \mathcal{L}T\{\underline{\varepsilon}_0 h(t)\} \quad . \quad (7.45)$$

Diese Gleichung stellt die Lösung des Einschlußproblems im Bildbereich der LT dar. Sie läßt sich jedoch im allgemeinen nicht explizit nach den Spannungen $\check{\underline{\sigma}}_E$ auflösen, da $\check{\underline{d}}_E$ über das monokristalline Stoffgesetz von $\check{\underline{\sigma}}_E$ abhängig ist.

Mit Hilfe der Grenzwertsätze der LT lassen sich jedoch aus Gleichung (7.45) die Spannungen $\underline{\sigma}^{+0}$ und deren Rate $\underline{\dot{\sigma}}^{+0}$ direkt nach Lastaufbringung berechnen.

Es werden zunächst einige benötigte Grenzwerte ermittelt.

Aus Gleichung (7.3) folgt

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (s \check{\underline{\sigma}}_E) = \underline{\sigma}_E^{+0} \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} (s \check{\underline{\Sigma}}_0) = \underline{\Sigma}_0^{+0}$$

und damit

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} (\check{\underline{d}}_E - \check{\underline{D}}_0) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\check{\underline{d}}_i(\check{\underline{\sigma}}_E) + s \underline{s} : \check{\underline{\sigma}}_E - \check{\underline{D}}_i(\check{\underline{\Sigma}}_0) - s \underline{S} : \check{\underline{\Sigma}}_0 \right) \\ &= \underline{s} : \underline{\sigma}_E^{+0} - \underline{S} : \underline{\Sigma}_0^{+0} \quad . \end{aligned} \quad (7.46)$$

Die Grenzwerte von $\check{\underline{d}}_i(\check{\underline{\sigma}}_E)$ und $\check{\underline{D}}_i(\check{\underline{\Sigma}}_0)$ verschwinden, da $\check{\underline{d}}_i$ und $\check{\underline{D}}_i$ keine Ableitungen der Sprungfunktion von erster oder höherer Ordnung enthalten.

Aus Gleichung (7.3) folgt mit ($n = 0$, $m = 0$ und $q = 1$)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(-s^2 \frac{d}{ds} \check{\underline{d}}_i \right) = \underline{d}_i^{+0} \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left(-s^2 \frac{d}{ds} \check{\underline{D}}_i \right) = \underline{D}_i^{+0}$$

und mit ($n = 1$, $m = 0$ und $q = 1$)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(-s^2 \frac{d}{ds} s \check{\underline{\sigma}}_E \right) = \underline{\dot{\sigma}}_E^{+0} \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \left(-s^2 \frac{d}{ds} s \check{\underline{\Sigma}}_0 \right) = \underline{\dot{\Sigma}}_0^{+0} \quad .$$

\underline{d}_i^{+0} bzw. \underline{D}_i^{+0} sind die inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten, die sich im Einschluß bzw. in der Matrix durch die Spannungen $\underline{\sigma}_E^{+0}$ bzw. $\underline{\Sigma}_0^{+0}$ direkt nach Lastaufbringung einstellen. Daraus folgt

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(-s^2 \frac{d}{ds} (\check{\underline{d}}_E - \check{\underline{D}}_0) \right) = \underline{d}_i^{+0} + \underline{s} : \underline{\dot{\sigma}}_E^{+0} - \underline{D}_i^{+0} - \underline{S} : \underline{\dot{\Sigma}}_0^{+0} \quad . \quad (7.47)$$

Es gilt ferner:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (s \mathcal{L}T \{ \varepsilon_0 h(t) \}) = \varepsilon_0 \quad (7.48)$$

und

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(-s^2 \frac{d}{ds} (s \mathcal{L}T \{ \varepsilon_0 h(t) \}) \right) = \mathbf{0} \quad (7.49)$$

Abschließend werden noch die beiden folgenden Tensoren definiert:

$$[\underline{\underline{S}}] \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} \underline{\underline{T}} \quad (7.50)$$

$$[\underline{\underline{M}}] \equiv \lim_{s \rightarrow \infty} \left(-s^2 \frac{d}{ds} \underline{\underline{T}} \right) \quad (7.51)$$

Mit der Definitionsgleichung (7.34) von $\underline{\underline{T}}$ und den Gleichungen (7.103) und (7.105) folgt

$$[\underline{\underline{S}}] = \int_{O_e} \vec{k} \left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{k} \right)^{-1} \vec{k} d\omega \quad (7.52)$$

$$[\underline{\underline{M}}] = \int_{O_e} \vec{k} \left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{k} \right)^{-1} \cdot \left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} : \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{k} \right) \cdot \left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{k} \right)^{-1} \vec{k} d\omega \quad (7.53)$$

Für $[\underline{\underline{S}}]$ kann man auch schreiben

$$[\underline{\underline{S}}] = \int_{O_e} \vec{k} \left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{k} \right)^{-1} \cdot \left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{k} \right) \cdot \left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{k} \right)^{-1} \vec{k} d\omega \quad (7.54)$$

Da $\underline{\underline{M}}$ unabhängig von der Integrationsvariablen ist, wird durch Gleichung (7.53) eine lineare Abbildung im Raum der Tensoren vierter Stufe definiert. Der Tensor $\underline{\underline{M}}$ wird auf den Tensor $[\underline{\underline{M}}]$ abgebildet. Die Abbildung erfolgt durch einen Tensor achter Stufe, der von den elastischen Materialeigenschaften abhängig ist. Anhand von Gleichung (7.54) ist leicht zu erkennen, daß diese Abbildung den Tensor $\underline{\underline{S}}$ auf $[\underline{\underline{S}}]$ abbildet.

Bildet man den Grenzwert $\lim_{s \rightarrow \infty} (\dots)$ von Gleichung (7.45), so erhält man:

$$\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{\sigma}}_E^{+0} - \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\Sigma}}_0^{+0} = \left(\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1} \right)^{-1} : \left(\underline{\underline{\sigma}}_E^{+0} - \underline{\underline{\Sigma}}_0^{+0} \right) + \varepsilon_0 \quad .$$

Mit der Bezeichnung

$$\underline{\underline{E}} \equiv (\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1}) : (\underline{\underline{S}}^{-1} - \underline{\underline{s}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1})^{-1} : \underline{\underline{s}}^{-1} \quad (7.55)$$

erhält man daraus für die Spannungen im Einschluß direkt nach Lastaufbringung $\underline{\underline{\sigma}}_E^{+0}$ den folgenden Ausdruck:

$$\underline{\underline{\sigma}}_E^{+0} = \underline{\underline{E}} : ((\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{s}}) : \underline{\underline{\Sigma}}_0^{+0} + \underline{\underline{\varepsilon}}_0) + \underline{\underline{\Sigma}}_0^{+0} \quad (7.56)$$

Durch die Multiplikation mit dem Tensor $\underline{\underline{E}}$ erhält man aus der Dehnungsinkompatibilität zwischen Matrix und Einschluß die Spannungen im Korn. Für elastisch isotropes Materialverhalten und $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{s}}$ wurden die beiden charakteristischen Koeffizienten zuerst von Eshelby (1957) bestimmt. $\underline{\underline{E}}$ wird deshalb auch als Eshelby-Tensor bezeichnet.

Bildet man nun den Grenzwert $\lim_{s \rightarrow \infty} (-s^2 \frac{d}{ds} \dots)$ von Gleichung (7.45), so erhält man:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{d}}_i^{+0} + \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}}_E^{+0} - \underline{\underline{D}}_i^{+0} - \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\dot{\Sigma}}}_0^{+0} = \\ - (\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1})^{-1} : (- (\underline{\underline{S}}^{-1} : \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1} : [\underline{\underline{M}}]_{ss} : [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1}) \\ : (\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1})^{-1} : (\underline{\underline{\sigma}}_E^{+0} - \underline{\underline{\Sigma}}_0^{+0}) \\ + (\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1})^{-1} : (\underline{\underline{\dot{\sigma}}}_E^{+0} - \underline{\underline{\dot{\Sigma}}}_0^{+0}) \quad . \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\underline{\underline{B}} \equiv (\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1})^{-1} : ([\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1} : [\underline{\underline{M}}]_{ss} : [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1} - \underline{\underline{S}}^{-1} : \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{S}}^{-1}) : (\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1})^{-1} \quad (7.57)$$

und

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} \equiv \underline{\underline{D}}_i^{+0} - \underline{\underline{d}}_i^{+0} - \underline{\underline{B}} : (\underline{\underline{\sigma}}_E^{+0} - \underline{\underline{\Sigma}}_0^{+0}) \quad (7.58)$$

ergeben sich die Spannungsraten direkt nach Lastaufbringung zu

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}_E^{+0} = \underline{\underline{E}} : ((\underline{\underline{S}} - \underline{\underline{s}}) : \underline{\underline{\dot{\Sigma}}}_0^{+0} + \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}) + \underline{\underline{\dot{\Sigma}}}_0^{+0} \quad (7.59)$$

Die Dehnungen $\underline{\underline{\varepsilon}}^{+0}$ und die Verzerrungsgeschwindigkeiten $\underline{\underline{d}}^{+0}$ direkt nach Lastaufbringung lassen sich aus dem Stoffgesetz des Monokristalls berechnen.

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon}^{+0} &= \underline{s} : \underline{\sigma}^{+0} \\ \underline{d}^{+0} &= \underline{d}_i(\underline{\sigma}^{+0}) + \underline{s} : \underline{\dot{\sigma}}^{+0}\end{aligned}\quad (7.60)$$

Für die Rotationsgeschwindigkeiten $\underline{\dot{w}}_E$ folgt aus Gleichung (7.40) mit Gleichung (7.44)

$$\underline{\dot{w}}_E = -\underline{\check{T}}_{as} : \underline{\check{T}}_{ss}^{-1} (\underline{\check{d}}_E - \underline{\check{D}}_0 - s\mathcal{L}\mathcal{T}\{\underline{\varepsilon}_0 h(t)\}) + \underline{\check{W}}_0 \quad .$$

Der Rotationstensor $\underline{\Phi}_E^{+0} = \lim_{s \rightarrow \infty} \underline{\dot{w}}_E$ beschreibt die spontane Drehung des Korns, die durch die elastischen Verformungen der Matrix hervorgerufen wird:

$$\underline{\Phi}_E^{+0} = -[\underline{S}]_{as} : [\underline{S}]_{ss}^{-1} : (\underline{s} : \underline{\sigma}_E^{+0} - \underline{S} : \underline{\Sigma}_0^{+0} - \underline{\varepsilon}_0) \quad .$$

Mit der Bezeichnung

$$\underline{A} \equiv [\underline{S}]_{ss}^{-1} : (\underline{S}^{-1} - [\underline{S}]_{ss}^{-1})^{-1} \quad (7.61)$$

und mit Gleichung (7.56) folgt

$$\underline{\Phi}_E^{+0} = -[\underline{S}]_{as} : \underline{A} : (\underline{\sigma}_E^{+0} - \underline{\Sigma}_0^{+0}) \quad . \quad (7.62)$$

Die Rotationsgeschwindigkeiten \underline{w}_E^{+0} direkt nach Lastaufbringung ergeben sich aus

$$\underline{w}_E^{+0} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(-s^2 \frac{d}{ds} \underline{\dot{w}}_E \right)$$

zu

$$\begin{aligned}\underline{w}_E^{+0} &= (-[\underline{M}]_{as} : \underline{A} + [\underline{S}]_{as} : [\underline{S}]_{ss}^{-1} : ([\underline{M}]_{ss} : \underline{A} + \underline{B})) : (\underline{\sigma}_E^{+0} - \underline{\Sigma}_0^{+0}) \\ &\quad - [\underline{S}]_{as} : \underline{A} : (\underline{\dot{\sigma}}_E^{+0} - \underline{\dot{\Sigma}}_0^{+0}) + \underline{W}_0^{+0} \quad .\end{aligned}\quad (7.63)$$

Durch die Gleichungen (7.56) und (7.59) - (7.63) ist der Zustand des Korns zum Zeitpunkt $t = +0$ vollständig beschrieben.

Mit Hilfe dieser Gleichungen können auch die Spannungen im Korn zum Zeitpunkt $t = \Delta t$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_E^{\Delta t} &= \underline{\sigma}_E^{+0} + \underline{\dot{\sigma}}_E^{+0} \Delta t \\ &= \underline{E} : \left((\underline{S} - \underline{s}) : (\underline{\Sigma}_0^{+0} + \underline{\dot{\Sigma}}_0^{+0} \Delta t) + \underline{\varepsilon}_0 + \underline{\dot{\varepsilon}} \Delta t \right) + \underline{\Sigma}_0^{+0} + \underline{\dot{\Sigma}}_0^{+0} \Delta t \quad .\end{aligned}\quad (7.64)$$

Wird nun ein zweites Matrix-Einschluß-System mit den gleichen Eigenschaften zum Zeitpunkt Δt durch die äußere Last $\underline{\Sigma}_0^{+0} + \dot{\underline{\Sigma}}_0^{+0} \Delta t$ und durch die innere Last $\underline{\varepsilon}_0 + \dot{\underline{\varepsilon}}_0 \Delta t$ beansprucht, dann stellen sich in diesem Einschluß direkt nach Lastaufbringung ($t = \Delta t + 0$) die Spannungen $\underline{\sigma}_E^{\Delta t+0}$ ein:

$$\underline{\sigma}_E^{\Delta t+0} = \underline{E} : \left((\underline{S} - \underline{s}) : \left(\underline{\Sigma}_0^{+0} + \dot{\underline{\Sigma}}_0^{+0} \Delta t \right) + \underline{\varepsilon}_0 + \dot{\underline{\varepsilon}}_0 \Delta t \right) + \underline{\Sigma}_0^{+0} + \dot{\underline{\Sigma}}_0^{+0} \Delta t \quad . \quad (7.65)$$

Die Spannungen $\underline{\sigma}_E^{\Delta t}$ und $\underline{\sigma}_E^{\Delta t+0}$ sind genau dann gleich, wenn

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_0 = \dot{\underline{\varepsilon}} \quad (7.66)$$

gilt. Zum Zeitpunkt $\Delta t + 0$ befinden sich also die beiden Matrix-Einschluß-Systeme in einem vergleichbaren Zustand, wenn sich die innere Last $\underline{\varepsilon}_0$ um $\dot{\underline{\varepsilon}} \Delta t$ geändert hat. Gleichung (7.66) stellt somit eine Evolutionsgleichung für die innere Last des Systems dar. Die anfänglich aufgeworfene Frage nach der Größe von $\underline{\varepsilon}_0$ ist damit auch beantwortet. Sie kann mit Kenntnis der Belastungsgeschichte durch Integration der Evolutionsgleichung berechnet werden. Man kann dabei von einer Anfangsbedingung $\underline{\varepsilon}_{0_0} = \underline{0}$ ausgehen.

$\underline{\varepsilon}_0$ kann als interne Variable des Matrix-Einschluß-Systems interpretiert werden, deren zeitliche Änderung durch die hier hergeleitete Evolutionsgleichung gegeben ist.

Es sei jedoch noch einmal darauf hingewiesen, daß sich die beiden oben betrachteten Systeme nur in einem vergleichbaren Zustand befinden, da zwar die Spannungen innerhalb der Einschlüsse gleich sind, die Form und die Orientierung der Kristallachsen der Einschlüsse aber nicht. Die Formgleichheit gilt nämlich nur vor Lastaufbringung, da das System 1 während der Zeitspanne Δt die zusätzlichen inelastischen Verformungen $\underline{d}_i(\underline{\sigma}_E^{+0}) \Delta t$ und eine aus $\underline{w}_E^{+0} \Delta t$ berechenbare Drehung der Kristallachsen erfährt. Der obigen Evolutionsgleichung liegt somit die Annahme zugrunde, daß sich die ursprüngliche Form des Einschlusses durch die inelastischen Deformationen nicht ändert. Desweiteren wird vorausgesetzt, daß die Drehung der Kristallachsen, die während der Zeitspanne Δt auftritt, die Materialeigenschaften quasi nicht ändert. Die letzte Annahme ist sinnvoll, solange der Auf- bzw. Abbau der Eigenspannungen sehr viel schneller erfolgt als die Drehung der Kristallachsen.

Führt man abschließend noch anstelle der Dehnungsinkompatibilität $\underline{\varepsilon}_0$ die dadurch induzierten Eigenspannungen $\underline{\sigma}_{ES}$ als interne Variable ein,

$$\underline{\sigma}_{ES} \equiv \underline{E} : \underline{\varepsilon}_0 \quad , \quad (7.67)$$

dann erhält man zur Berechnung der Spannungen $\underline{\sigma}_E$ und der Verzerrungs- bzw. Rotationsgeschwindigkeiten \underline{d}_E bzw. \underline{w}_E innerhalb des Einschlusses folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}_E &= \underline{\sigma}_{ES} + \underline{\sigma}_Z + \underline{\Sigma}_0 \\ &\text{mit } \underline{\sigma}_Z = \underline{E} : (\underline{S} - \underline{s}) : \underline{\Sigma}_0 \\ \underline{d}_E &= \underline{d}_i(\underline{\sigma}_E) + \underline{s} : \dot{\underline{\sigma}}_E\end{aligned}\tag{7.68}$$

$$\begin{aligned}\underline{w}_E &= (- [\underline{M}]_{as} : \underline{A} + [\underline{S}]_{as} : [\underline{S}]_{ss}^{-1} : ([\underline{M}]_{ss} : \underline{A} + \underline{B})) : (\underline{\sigma}_{ES} + \underline{\sigma}_Z) \\ &\quad - [\underline{S}]_{as} : \underline{A} : (\dot{\underline{\sigma}}_{ES} + \dot{\underline{\sigma}}_Z) + \underline{W}_0\end{aligned}$$

Die Evolutionsgleichung der Eigenspannungen $\underline{\sigma}_{ES}$ lautet:

$$\dot{\underline{\sigma}}_{ES} = \underline{E} : (\underline{D}_i(\underline{\Sigma}_0) - \underline{d}_i(\underline{\sigma}_E) - \underline{B} : (\underline{\sigma}_Z + \underline{\sigma}_{ES}))\tag{7.69}$$

Die Tensoren vierter Stufe sind durch die folgenden Gleichungen definiert: \underline{A} (7.61), \underline{B} (7.57), \underline{E} (7.55), $[\underline{M}]$ (7.51), $[\underline{S}]$ (7.50).

Die zusätzlichen Spannungen lassen sich wie folgt interpretieren: $(\underline{S} - \underline{s}) : \underline{\Sigma}_0$ ist die Dehnungsinkompatibilität, die (aufgrund der unterschiedlichen elastischen Eigenschaften von Matrix und Einschuß) durch die Belastung $\underline{\Sigma}_0$ hervorgerufen wird. Durch die Multiplikation mit dem Tensor \underline{E} erhält man die durch die Dehnungsinkompatibilität induzierten zusätzlichen Spannungen. $\underline{\sigma}_Z$ ist eine Funktion der äußeren Belastung $\underline{\Sigma}_0$.

Die Evolutionsgleichung für die Eigenspannungen wird durch drei Terme bestimmt. Der Unterschied in den inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten $\underline{D}_i - \underline{d}_i$ führt zu einer bleibenden Inkompatibilität, aus der sich entsprechend bleibende (d.h. sich nicht spontan ändernde) Eigenspannungen ergeben. Mit $\underline{D}_i(\underline{\Sigma}_0)$ werden nur die homogenen inelastischen Formänderungen der Matrix erfaßt. Durch $\underline{\sigma}_{ES}$ und $\underline{\sigma}_Z$ werden aber in der Matrix zusätzliche inelastische Deformationen hervorgerufen. Diese führen ebenfalls zu einer Veränderung der Dehnungsinkompatibilität. Dieser Einfluß wird durch den letzten Summanden $\underline{B} : (\underline{\sigma}_Z + \underline{\sigma}_{ES})$ berücksichtigt.

7.4 Lösung des Einschlußproblems für elastisch isotrope Werkstoffe

7.4.1 Bestimmung der Tensoren $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{E}}$ und $\underline{\underline{S}}$

Bei elastischer Isotropie gilt für $\underline{\underline{S}}^{-1}$ die Darstellung

$$\underline{\underline{S}}^{-1} = \frac{E}{(1+\nu)} \underline{\underline{1}} + \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \underline{\underline{1}}\underline{\underline{1}} = \frac{E}{(1+\nu)} \underline{\underline{1}}' + \frac{E}{(1-2\nu)} \underline{\underline{I}}^h \quad (7.70)$$

Daraus folgt

$$\vec{k} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{k} = \frac{E}{2(1+\nu)} \underline{\underline{1}} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \vec{k}\vec{k}$$

und mit Gleichung (7.97) erhält man

$$\left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{k} \right)^{-1} = \frac{2(1+\nu)}{E} \underline{\underline{1}} - \frac{(1+\nu)}{E(1-2\nu)} \vec{k}\vec{k} \quad (7.71)$$

und damit

$$\underline{\underline{S}} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{O_e} \vec{k}\underline{\underline{1}}\vec{k} d\omega - \frac{(1+\nu)}{E(1-2\nu)} \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{O_e} \vec{k}\vec{k}\vec{k}\vec{k} d\omega \quad .$$

Die Integrale über die Oberfläche einer Einheitskugel werden im Abschnitt 7.5 berechnet.

Mit den Gleichungen (7.93) und (7.94) folgt

$$\underline{\underline{S}} = \frac{2(1+\nu)}{3E} \underline{\underline{1}} \underline{\underline{1}} - \frac{(1+\nu)}{5E(1-2\nu)} \left(\frac{1}{3} \underline{\underline{1}}\underline{\underline{1}} + \frac{2}{3} \underline{\underline{1}} \right) \quad (7.72)$$

Nach der Symmetrisierung bezüglich des letzten Indexpaares erhält man einen Tensor, der auch bezüglich des vorderen Indexpaares symmetrisch ist. Daraus folgt:

$$\underline{\underline{S}}]_{ss} = \underline{\underline{0}} \quad (7.73)$$

und

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}]_{ss} &= \frac{2(1+\nu)(4-5\nu)}{15E(1-2\nu)} \underline{\underline{1}} - \frac{(1+\nu)}{15E(1-2\nu)} \underline{\underline{1}}\underline{\underline{1}} \\ &= \frac{2(1+\nu)(4-5\nu)}{15E(1-2\nu)} \underline{\underline{1}}' + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{3E(1-2\nu)} \underline{\underline{I}}^h \quad . \end{aligned} \quad (7.74)$$

Mit Gleichung (7.98) erhält man ferner

$$[\underline{\underline{S}}]_{ss} : \underline{\underline{S}}^{-1} = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} \underline{\underline{1}}' + \frac{(1+\nu)}{3(1-\nu)} \underline{\underline{I}}^h \quad (7.75)$$

und

$$(\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1}) = -\frac{E(7-5\nu)}{2(1+\nu)(4-5\nu)} \underline{\underline{1}}' - \frac{2E}{(1+\nu)} \underline{\underline{I}}^h \quad (7.76)$$

Aus Gleichung (7.61) folgt mit (7.74) und (7.76)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= -\frac{15(1-\nu)}{(7-5\nu)} \underline{\underline{1}}' - \frac{3(1-\nu)}{2(1-2\nu)} \underline{\underline{I}}^h \\ &= -\frac{15(1-\nu)}{(7-5\nu)} \underline{\underline{1}} + \frac{3(1-\nu)(1-5\nu)}{2(1-2\nu)(7-5\nu)} \underline{\underline{1}}\underline{\underline{1}} \end{aligned} \quad (7.77)$$

Mit der Annahme $\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{S}}$ (gleiche elastische Eigenschaften in Matrix und Einschuß) ergibt sich $\underline{\underline{E}}$ gemäß Gleichung (7.55) zu

$$\begin{aligned} \underline{\underline{E}} &= (\underline{\underline{S}}^{-1} - [\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1}) : (-[\underline{\underline{S}}]_{ss}^{-1})^{-1} : \underline{\underline{S}}^{-1} \\ &= \frac{(7-5\nu)E}{15(1-\nu)(1+\nu)} \underline{\underline{1}}' + \frac{2E}{3(1-\nu)} \underline{\underline{I}}^h \end{aligned} \quad (7.78)$$

Es wurde an anderer Stelle schon darauf hingewiesen, daß die beiden Komponenten dieses Tensors zuerst von Eshelby (1957) angegeben wurden. Der Faktor $\frac{(7-5\nu)E}{15(1-\nu)(1+\nu)}$ bestimmt das Verhältnis des Spannungsdeviators innerhalb des Einschlusses zum Deviator der Transformationsdehnungen. Durch $\frac{2E}{3(1-\nu)}$ ist der Zusammenhang zwischen dem hydrostatischen Druck und der Volumendehnung gegeben. In der ursprünglichen Lösung von Eshelby erscheint noch ein Faktor -1 . Dieser ergibt sich aus den unterschiedlichen Definitionen der Transformationsdehnung $\underline{\underline{\epsilon}}_T$ und der Dehnungsinkompatibilität $\underline{\underline{\epsilon}}_0$. Es gilt: $\underline{\underline{\epsilon}}_T = -\underline{\underline{\epsilon}}_0$.

7.4.2 Berechnung der Tensoren $\underline{\underline{M}}$ und $\underline{\underline{B}}$.

Da $\underline{\underline{M}}$ deviatorisch in den vorderen und hinteren Indexpaaren ist, gilt

$$\underline{\underline{M}} : \underline{\underline{I}}^h = \underline{\underline{I}}^h : \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{0}}$$

und damit

$$\underline{\underline{S}}^{-1} : \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{S}}^{-1} = \left(\frac{E}{(1+\nu)} \right)^2 \underline{\underline{M}} \quad .$$

Mit den Gleichungen (7.53) und (7.71) erhält man daraus

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{M}}] &= \frac{1}{4\pi} \int_{O_e} \left(\vec{k} \left(2 \cdot \underline{\underline{1}} - \frac{1}{(1-\nu)} \vec{k}\vec{k} \right) \vec{k} \right) : \underline{\underline{M}} : \left(\vec{k} \left(2 \cdot \underline{\underline{1}} - \frac{1}{(1-\nu)} \vec{k}\vec{k} \right) \vec{k} \right) d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{O_e} 4 \left(\vec{k}\vec{k} \right) \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \left(\vec{k}\vec{k} \right) d\omega \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{O_e} \frac{-2}{(1-\nu)} \left(\left(\vec{k}\vec{k} \right) \cdot \underline{\underline{M}} : \left(\vec{k}\vec{k}\vec{k}\vec{k} \right) + \left(\vec{k}\vec{k}\vec{k}\vec{k} \right) : \underline{\underline{M}} \cdot \left(\vec{k}\vec{k} \right) \right) d\omega \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{O_e} \frac{1}{(1-\nu)^2} \left(\vec{k}\vec{k}\vec{k}\vec{k} \right) : \underline{\underline{M}} : \left(\vec{k}\vec{k}\vec{k}\vec{k} \right) d\omega \\ &= \underline{\underline{K}}_4 + \underline{\underline{K}}_6 + \underline{\underline{K}}_8 \quad . \end{aligned} \quad (7.79)$$

$\underline{\underline{M}}$ ist bezüglich der Integration eine Konstante. Die Integrale können gemäß Abschnitt 7.5 berechnet werden. Mit den Gleichungen (7.94) bis (7.96) erhält man

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{K}}_4]_{ijkl} &= \frac{4}{5} \left[(\underline{\underline{11}})_{sym} \right]_{imnl} M_j^{mn}{}_k \\ [\underline{\underline{K}}_6]_{ijkl} &= -\frac{2}{7(1-\nu)} \left(\left[(\underline{\underline{111}})_{sym} \right]_{imnokl} M_j^{mno} + \left[(\underline{\underline{111}})_{sym} \right]_{ijmno} M^{mno}{}_k \right) \\ [\underline{\underline{K}}_8]_{ijkl} &= \frac{1}{9(1-\nu)^2} \left[(\underline{\underline{1111}})_{sym} \right]_{ijmnopkl} M^{mnop} \quad . \end{aligned}$$

Es werden die folgenden Tensoren definiert:

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{M}}_1]_{ijkl} &= \frac{1}{2} (M_{ikjl} + M_{iljk}) \\ [\underline{\underline{M}}^*]_{ij} &= M_i{}^o{}_j = M^o{}_{ioj} = \dots \\ \underline{\underline{M}}_{2s} &= \left[\begin{matrix} 2^3 & 1^4 \\ \underline{\underline{M}}^* & \underline{\underline{1}} \end{matrix} \right]_{ss} \\ \underline{\underline{M}}_{2a} &= \left[\begin{matrix} 2^3 & 1^4 \\ \underline{\underline{M}}^* & \underline{\underline{1}} \end{matrix} \right]_{as} \\ \underline{\underline{M}}_3 &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{M}}^* \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{1}} \underline{\underline{M}}^*) \\ \underline{\underline{M}}^{**} &= \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{M}}^* \\ \underline{\underline{M}}_4 &= \underline{\underline{M}}^{**} (\underline{\underline{11}})_{sym} = \underline{\underline{M}}^{**} \left(\frac{2}{3} \underline{\underline{1}} + \frac{1}{3} \underline{\underline{11}} \right) \quad . \end{aligned} \quad (7.80)$$

Die aufgeführten Tensoren besitzen alle (bis auf $\underline{\underline{M}}_{2a}$) die Symmetrieeigenschaften von $\underline{\underline{M}}$. $\underline{\underline{M}}_{2a}$ ist antisymmetrisch in den vorderen und symmetrisch in den hinteren Indizes. Die Tensoren $\underline{\underline{M}}$ und $\underline{\underline{M}}_{2a}$ sind zusätzlich noch deviatorisch in den vorderen bzw. hinteren Indizes. Nach einer Symmetrisierung der Tensoren $\underline{\underline{K}}_{...}$ bezüglich des letzten Indexpaares ergeben sich damit die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{K}}_{4..} &= \frac{4}{15} (\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}}_1 + \underline{\underline{M}}_{2s} + \underline{\underline{M}}_{2a}) \\ \underline{\underline{K}}_{6..} &= -\frac{8}{105(1-\nu)} (\underline{\underline{M}} + 2\underline{\underline{M}}_1 + 2\underline{\underline{M}}_{2s} + \underline{\underline{M}}_{2a} + \underline{\underline{M}}_3) \\ \underline{\underline{K}}_{8..} &= \frac{2}{9 \cdot 105(1-\nu)^2} (4\underline{\underline{M}} + 8\underline{\underline{M}}_1 + 16\underline{\underline{M}}_{2s} + 8\underline{\underline{M}}_3 + 3\underline{\underline{M}}_4) \quad .\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{M}}]_{ss} &= \frac{4}{945(1-\nu)^2} \left\{ (63\nu^2 - 108\nu + 47)\underline{\underline{M}} \right. \\ &\quad + (63\nu^2 - 90\nu + 31)\underline{\underline{M}}_1 \\ &\quad + (63\nu^2 - 90\nu + 35)\underline{\underline{M}}_{2s} \\ &\quad + (18\nu - 14)\underline{\underline{M}}_3 \\ &\quad \left. + (1.5)\underline{\underline{M}}_4 \right\}\end{aligned}\tag{7.81}$$

und

$$\underline{\underline{M}}]_{as} = \frac{4(5-7\nu)}{105(1-\nu)} \underline{\underline{M}}_{2a} \quad .\tag{7.82}$$

Die Definitionsgleichung (7.57) von $\underline{\underline{B}}$ lässt sich mit Gleichung (7.61) auch wie folgt schreiben:

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} : (\underline{\underline{M}}]_{ss} - \underline{\underline{S}}]_{ss} : \underline{\underline{S}}^{-1} : \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{S}}^{-1} : \underline{\underline{S}}]_{ss}) : \underline{\underline{A}} \quad .$$

Mit Gleichung (7.75) folgt ferner

$$\underline{\underline{S}}]_{ss} : \underline{\underline{S}}^{-1} : \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{S}}^{-1} : \underline{\underline{S}}]_{ss} = \left(\frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} \right)^2 \underline{\underline{M}} \quad .$$

Mit den Beziehungen

$$\begin{aligned}\underline{\underline{I}}^h : \underline{\underline{M}} &= \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{I}}^h : \underline{\underline{M}}_1 &= \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \underline{\underline{M}}^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}^h : \underline{M}_{2s} &= \frac{1}{3} \underline{1} \underline{M}^* \\ \underline{I}^h : \underline{M}_3 &= \frac{1}{2} \underline{1} \underline{M}^* + \frac{1}{6} \underline{M}^{**} \underline{1} \underline{1} \\ \underline{I}^h : \underline{M}_4 &= \frac{5}{9} \underline{M}^{**} \underline{1} \underline{1}\end{aligned}$$

erhält man für \underline{B} dann den in Gleichung (7.87) angegebenen Ausdruck.

Der Tensor $-\underline{[M]}_{as} : \underline{A}$ berechnet sich mit Gleichung (7.82) und (7.77) zu

$$-\underline{[M]}_{as} : \underline{A} = \frac{4(5-7\nu)}{7(7-5\nu)} \underline{M}_{2a} \quad (7.83)$$

7.4.3 Zusammenfassung des Gleichungssystems

Unter der Voraussetzung eines kugelförmigen Kornes und gleicher elastisch isotroper Materialeigenschaften läßt sich die Lösung des Einschlußproblems wie folgt zusammenfassen:

Gegeben:

$\underline{\Sigma}(t)$: äußere Belastung

\underline{W} : Starrkörperrotation der Matrix, beschrieben durch den Tensor der Rotationsgeschwindigkeiten

E, ν : E-Modul und Querkontraktionszahl von Matrix und Korn

\underline{D}_i : inelastische Verzerrungsgeschwindigkeiten der Matrix unter der äußeren Belastung $\underline{\Sigma}$ (inelastisches Stoffgesetz der ungestörten Matrix)

\underline{M} : Tensor der inelastischen Nachgiebigkeitsraten; ergibt zusammen mit $\underline{D}_i(\underline{\Sigma})$ das linearisierte inelastische Stoffgesetz der Matrix für Belastungen $\underline{\sigma}^*$, die von $\underline{\Sigma}$ abweichen: $\underline{D}_i(\underline{\sigma}^*) = \underline{D}_i(\underline{\Sigma}) + \underline{M} : (\underline{\sigma}^* - \underline{\Sigma})$

\underline{d}_i : inelastische Verzerrungsgeschwindigkeiten des Kornes als Funktion der Spannung im Korn $\underline{\sigma}_E$ (inelastisches Stoffgesetz des Kornes).

Die Spannungen im Einschluß (Korn) $\underline{\sigma}_E$ sind konstant. Sie ergeben sich als Summe der äußeren Spannung $\underline{\Sigma}$ und der Eigenspannung $\underline{\sigma}_{ES}$:

$$\underline{\sigma}_E = \underline{\sigma}_{ES} + \underline{\Sigma} \quad . \quad (7.84)$$

Für die Eigenspannungen gilt die folgende Evolutionsgleichung:

$$\dot{\underline{\sigma}}_{ES} = \underline{\underline{E}} : (\underline{\underline{D}}_i(\underline{\Sigma}) - \underline{\underline{d}}_i(\underline{\sigma}_E) - \underline{\underline{B}} : \underline{\sigma}_{ES}) \quad . \quad (7.85)$$

Sind die Eigenspannungen zu einem Zeitpunkt t^* bekannt (z.B. $\underline{\sigma}_{ES} = \underline{\mathbf{0}}$ für $t = 0$), dann kann ihr Wert zu jedem späteren Zeitpunkt durch Integration von Gleichung (7.85) berechnet werden.

Die Tensoren $\underline{\underline{E}}$ und $\underline{\underline{B}}$ lassen sich aus den gegebenen Werkstoffkenngrößen in der angegebenen Weise berechnen:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{(7 - 5\nu) E}{15(1 - \nu)(1 + \nu)} \underline{\underline{1}}' + \frac{2E}{3(1 - \nu)} \underline{\underline{I}}^h \quad (7.86)$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}} = \frac{1}{210(7 - 5\nu)^2} \{ & (-8400\nu^2 + 12000\nu - 4040) \underline{\underline{M}} \\ & + (12600\nu^2 - 18000\nu + 6200) \underline{\underline{M}}_1 \\ & + (12600\nu^2 - 18000\nu + 7000) \underline{\underline{M}}_{2s} \\ & + (-12600\nu^2 + 15120\nu - 4600) \underline{\underline{M}}_3 \\ & + (\qquad \qquad \qquad 200) \underline{\underline{M}}^{**\underline{\underline{1}}} \\ & + (1575\nu^2 - 1530\nu + 343) \underline{\underline{M}}^{**\underline{\underline{1}}\underline{\underline{1}}} \} \end{aligned} \quad (7.87)$$

mit

$$\begin{aligned} [\underline{\underline{M}}_1]_{ijkl} &= \frac{1}{2} (M_{ikjl} + M_{iljk}) \\ [\underline{\underline{M}}^*]_{ij} &= M_i^o{}_{oj} = M^o{}_{ioj} = \dots \\ \underline{\underline{M}}_{2s} &= \left[\underline{\underline{M}}^* \underline{\underline{1}} \right]_{ss} \\ \underline{\underline{M}}_3 &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{M}}^*\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{1}}\underline{\underline{M}}^*) \\ \underline{\underline{M}}^{**} &= \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{M}}^* \quad . \end{aligned} \quad (7.88)$$

Die Rotationsgeschwindigkeiten des Kornes ergeben sich zu

$$\underline{\underline{w}}_E = \frac{4(5 - 7\nu)}{7(7 - 5\nu)} \underline{\underline{M}}_{2a} : \underline{\sigma}_{ES} + \underline{\underline{W}} \quad (7.89)$$

oder mit

$$\underline{\underline{M}}_{2a} = \frac{1}{4} \left(\underline{\underline{1}} \underline{\underline{M}}^* + \underline{\underline{1}} \underline{\underline{M}}^* - \underline{\underline{M}}^* \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{M}}^* \underline{\underline{1}} \right) \quad (7.90)$$

$$\underline{\underline{w}}_E = \frac{2(5-7\nu)}{7(7-5\nu)} (\underline{\underline{\sigma}}_{ES} \cdot \underline{\underline{M}}^* - \underline{\underline{M}}^* \cdot \underline{\underline{\sigma}}_{ES}) + \underline{\underline{W}} \quad (7.91)$$

7.5 Nebenrechnungen

7.5.1 Zur Berechnung von Integralen der Form $\int \vec{r} \dots \vec{r} d\omega$

Gesucht ist die Lösung des folgenden Integrals:

$$I^{(2n)} = \frac{1}{4\pi} \int_{O_e} \underbrace{\vec{k} \vec{k} \dots \vec{k}}_{2n} d\omega \quad .$$

$I^{(2n)}$ stellt einen Tensor $(2n)$ -ter Stufe dar. Es werden die folgenden Bezeichnungen verwendet:

\vec{r} : Ortsvektor eines Punktes

r : Betrag von \vec{r}

\vec{k} : Einheitsvektor in Richtung von \vec{r}

O_e : Oberfläche der Einheitskugel

V_e : Volumen der Einheitskugel

$\underline{\underline{1}}^{ij}$: Einheitstensor zweiter Stufe, dessen Basisvektoren an der i -ten und j -ten Stelle innerhalb eines dyadischen Produktes stehen.

Für Punkte auf der Oberfläche der Einheitskugel gilt: $\vec{k} = \vec{r}$. Damit ergibt sich für $I^{(2n)}$ die Darstellung

$$I^{(2n)} = \frac{1}{4\pi} \int_{O_e} \underbrace{\vec{r} \vec{r} \dots \vec{r}}_{2n} d\omega \quad ,$$

die sich mit Hilfe des Satzes von Gauss umformen läßt in

$$I^{(2n)} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_e} \underbrace{\vec{r} \vec{r} \dots \vec{r}}_{2n-1} \vec{\nabla} dV \quad .$$

Unter Berücksichtigung von $\vec{\nabla} \vec{r} = \underline{\underline{1}}$ ergibt sich

$$I^{(2n)} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{2n-1} \int_{V_e} \underbrace{\vec{r} \vec{r} \dots \vec{r}}_{2(n-1)} \overset{i-2n}{\underline{1}} dV \quad .$$

$\overset{i-2n}{\underline{1}}$ kann vor das Integral gezogen werden. Der Integrand läßt sich nach Betrag und Richtung des Ortsvektors aufspalten und die Integration über das Volumen in eine Integration über den Betrag von \vec{r} und eine über die Oberfläche der Einheitskugel. Daraus folgt

$$\begin{aligned} I^{(2n)} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{2n-1} \overset{i-2n}{\underline{1}} \int_{O_e} \int_0^1 \underbrace{\vec{k} \vec{k} \dots \vec{k}}_{2(n-1)} r^{2(n-1)} r^2 dr d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{2n-1} \overset{i-2n}{\underline{1}} \int_0^1 r^{2n} dr \int_{O_e} \underbrace{\vec{k} \vec{k} \dots \vec{k}}_{2(n-1)} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{2n-1} \overset{i-2n}{\underline{1}} \frac{1}{2n+1} \int_{O_e} \underbrace{\vec{k} \vec{k} \dots \vec{k}}_{2(n-1)} d\omega \quad . \end{aligned}$$

Hiermit ist das Integral $I^{(2n)}$ auf das Integral $I^{(2(n-1))}$ zurückgeführt. Nach n -facher Wiederholung des Verfahrens gelangt man zu folgender Darstellung:

$$I^{(2n)} = \frac{1}{2n+1} \underbrace{(\underline{1}\underline{1} \dots \underline{1})}_{n \text{ sym}} \quad . \quad (7.92)$$

$I^{(2n)}$ ist ein vollständig symmetrischer Tensor $2n$ -ter Stufe, der aus dem dyadischen Produkt von n Einheitstensoren zweiter Stufe gebildet wird. Bei der Symmetrisierung sind $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ unterschiedliche Anordnungen der Einheitstensoren möglich.

Für $1 \leq n \leq 4$ werden die Ergebnisse im folgenden angegeben:

$n = 1$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{O_e} \vec{k} \vec{k} d\omega = \frac{1}{3} \overset{1-2}{\underline{1}} = \frac{1}{3} \underline{1} \quad (7.93)$$

$n = 2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{O_e} \vec{k} \vec{k} \vec{k} \vec{k} d\omega &= \frac{1}{5} \frac{1}{3} \left(\overset{1-4 \ 2-3}{\underline{1} \underline{1}} + \overset{2-4 \ 1-3}{\underline{1} \underline{1}} + \overset{3-4 \ 1-2}{\underline{1} \underline{1}} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3} \underline{1}\underline{1} + \frac{2}{3} \underline{1} \right) \\ &= \frac{1}{5} (\underline{1}\underline{1})_{sym} \quad (7.94) \end{aligned}$$

Gesucht ist die Ableitung eines Tensors vierter Stufe $\underline{\underline{\check{C}}}(s)$ nach der skalaren Größe s , wenn $\underline{\underline{\check{C}}}^{-1}(s)$ bekannt ist.

Die Ableitung der Identität

$$\underline{\underline{\check{C}}}^{-1} : \underline{\underline{\check{C}}} = \underline{\underline{1}}$$

nach der Variablen s ergibt

$$\frac{d}{ds} (\underline{\underline{\check{C}}}^{-1}) : \underline{\underline{\check{C}}} + \underline{\underline{\check{C}}}^{-1} : \frac{d}{ds} \underline{\underline{\check{C}}} = \underline{\underline{0}} \quad .$$

Damit gilt

$$\frac{d}{ds} \underline{\underline{\check{C}}} = -\underline{\underline{\check{C}}} : \frac{d}{ds} (\underline{\underline{\check{C}}}^{-1}) : \underline{\underline{\check{C}}} \quad (7.99)$$

und

$$\frac{d}{ds} \underline{\underline{\check{C}}}^{-1} = -\underline{\underline{\check{C}}}^{-1} : \frac{d}{ds} (\underline{\underline{\check{C}}}) : \underline{\underline{\check{C}}}^{-1} \quad (7.100)$$

Ist $\underline{\underline{\check{C}}}^{-1}$ in folgender Form gegeben

$$\underline{\underline{\check{C}}}^{-1} = \frac{1}{s} \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}} \quad ,$$

dann resultiert aus Gleichung (7.99)

$$\frac{d}{ds} \underline{\underline{\check{C}}} = -\left(\frac{1}{s} \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}}\right)^{-1} : \left(-\frac{1}{s^2} \underline{\underline{M}}\right) : \left(\frac{1}{s} \underline{\underline{M}} + \underline{\underline{S}}\right)^{-1} \quad (7.101)$$

Analog erhält man

$$\frac{d}{ds} \left(\left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{\check{C}}} \cdot \vec{k} \right)^{-1} \right) = - \left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{\check{C}}} \cdot \vec{k} \right)^{-1} \cdot \left(\vec{k} \cdot \frac{d}{ds} \underline{\underline{\check{C}}} \cdot \vec{k} \right) \cdot \left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{\check{C}}} \cdot \vec{k} \right)^{-1} \quad (7.102)$$

Die angegebenen Tensoren haben die folgenden asymptotischen Eigenschaften:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \underline{\underline{\check{C}}} = \underline{\underline{S}}^{-1} \quad (7.103)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(s^2 \frac{d}{ds} \underline{\underline{\check{C}}} \right) = \underline{\underline{S}}^{-1} : \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{S}}^{-1} \quad (7.104)$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \left(s^2 \frac{d}{ds} \left(\left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{\check{C}}} \cdot \vec{k} \right)^{-1} \right) \right) \\ = - \left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{k} \right)^{-1} \cdot \left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} : \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{k} \right) \cdot \left(\vec{k} \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{k} \right)^{-1} \quad . \end{aligned} \quad (7.105)$$

8. Tensorielle Darstellung eines Stoffgesetzes bei transversaler Isotropie

In diesem Kapitel wird die Struktur der Gleichungen, die die Beziehung zwischen den Formänderungen und der Spannung beschreiben, aus der Annahme transversaler Isotropie hergeleitet. Grundlage bildet die Darstellungstheorie isotroper Tensorfunktionen. Auch anisotropes Materialverhalten kann durch isotrope Tensorfunktionen beschrieben werden, wenn die Materialtensoren, die die Anisotropie kennzeichnen, als zusätzliche Argumenttensoren dienen. In $\underline{\varepsilon} = \underline{f}(\underline{s}, \underline{\sigma}) = \underline{g}(\underline{\sigma}) = \underline{s} : \underline{\sigma}$ ist \underline{f} eine isotrope Tensorfunktion, \underline{g} hingegen nicht. Da die Überlegungen unabhängig vom zugrundeliegenden Materialverhalten sind, werden die Formänderungen hier mit \underline{Y} bezeichnet. Hinter diesem Tensor 2-ter Stufe können sich die inelastischen oder elastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten oder die elastischen Dehnungen verbergen.

Transversale Isotropie läßt sich nach Betten (1987) durch einen Tensor 2-ter Stufe \underline{N} beschreiben, der aus dem dyadischen Produkt $\underline{N} = \vec{n}\vec{n}$ gebildet wird. Der Vektor \vec{n} legt die Achse der transversalen Isotropie fest. \underline{Y} läßt sich damit als isotrope tensorwertige Tensorfunktion mit zwei symmetrischen Argumenttensoren 2-ter Stufe schreiben:

$$\underline{Y} = \underline{f}(\underline{\sigma}, \underline{N}) \quad . \quad (8.1)$$

Trotz der Anisotropie des Materialverhaltens ist \underline{f} isotrop, da der Anisotropietensor \underline{N} mit als Argument aufgenommen wurde. Nach Betten (1987) kann eine solche Funktion als Summe von 6 Tensorgeneratoren geschrieben werden.

$$\underline{Y} = \sum_{\nu, \lambda=0}^{1,2} \varphi_{(\nu, \lambda)} \underline{M}^{[\nu, \lambda]} \quad (8.2)$$

$$\underline{M}^{[\nu, \lambda]} = \frac{1}{2} (\underline{N}^\nu \cdot \underline{\sigma}^\lambda + \underline{\sigma}^\lambda \cdot \underline{N}^\nu)$$

Die Tensorgeneratoren $\underline{M}^{[\nu, \lambda]}$ werden aus den Potenzen \underline{N}^ν und $\underline{\sigma}^\lambda$ der beiden Argumenttensoren gebildet. Von \underline{N} tritt dabei nur die erste Potenz auf, da $\underline{N}^i = \underline{N}$ für $i = 1, 2, \dots$. Die Koeffizienten $\varphi_{(\nu, \lambda)}$ sind beliebige Funktionen der Integritätsbasis von $\underline{\sigma}$ und \underline{N} , die

durch das folgende Invariantensystem $J_{\nu\lambda}$ gegeben ist.

$$J_{\nu\lambda} = \underline{N}^\nu : \underline{\sigma}^\lambda \quad \begin{cases} \nu, \lambda = 1, 2 \\ \nu = 0, \lambda = 1, 2, 3 \\ \lambda = 0, \nu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Aufgrund der Struktur von \underline{N} sind von diesen 10 Invarianten nur 5 wesentlich, nämlich:

$$S_\lambda = \text{Sp}(\underline{\sigma}^\lambda) \quad \lambda = 1, 2, 3 \quad , \quad \Omega_1 = \underline{N} : \underline{\sigma} \quad , \quad \Omega_3 = \underline{N} : \underline{\sigma}^2 \quad . \quad (8.3)$$

Gleichung (8.2) ist die allgemeine Form des Zusammenhangs zwischen \underline{Y} und $\underline{\sigma}$ bei transversaler Isotropie. Das Materialverhalten kann danach durch 6 skalarwertige Funktionen der 5 Invarianten beschrieben werden. Deren Bestimmung aus Experimenten bereitet jedoch im allgemeinen viel Mühe, da eine direkte Beziehung zwischen den mikromechanischen Ursachen und den beschreibenden Gleichungen nicht besteht.

Mit den Erkenntnissen des Kapitels 3 soll nun im folgenden ein neues System von 6 Tensorgeneratoren hergeleitet werden, so daß die dort auftretenden Funktionen eine klarere physikalische Bedeutung aufweisen. Hierzu wird zunächst der Spannungstensor in vier Anteile aufgespalten, mit denen dann ein neues System von Invarianten und Tensorgeneratoren definiert wird.

8.1 Zerlegung des Spannungstensors

Durch die Vorgabe der Richtung der transversalen Isotropie \vec{n} läßt sich der Einheitstensor 4-ter Stufe $\underline{\underline{1}}$ eindeutig in vier Anteile zerlegen.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{1}} &= \underline{\underline{I}}^h + \underline{\underline{I}}^a + \underline{\underline{I}}^p + \underline{\underline{I}}^b \\ \underline{\underline{I}}^h &= \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{I}}^a &= \frac{3}{2} \left(\vec{n} \vec{n} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \right) \left(\vec{n} \vec{n} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \right) \\ \underline{\underline{I}}^p &= \left[\left(\underline{\underline{1}} - \vec{n} \vec{n} \right) \left(\underline{\underline{1}} - \vec{n} \vec{n} \right) \right]_{s \cdot s} - \frac{1}{2} (\underline{\underline{1}} - \vec{n} \vec{n}) (\underline{\underline{1}} - \vec{n} \vec{n}) \\ \underline{\underline{I}}^b &= 2 [\vec{n} \underline{\underline{1}} \vec{n}]_{s \cdot s} - 2 \vec{n} \vec{n} \vec{n} \vec{n} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Das doppeltskalare Produkt eines jeden dieser Tensoren mit sich selbst ergibt wieder diesen Tensor:

$$\underline{\underline{I}}^h : \underline{\underline{I}}^h = \underline{\underline{I}}^h \quad , \quad \underline{\underline{I}}^a : \underline{\underline{I}}^a = \underline{\underline{I}}^a \quad , \quad \dots \quad . \quad (8.5)$$

Das doppeltskalare Produkt zwischen zwei unterschiedlichen Tensoren ergibt den Nulltensor.

$$\underline{\underline{I}}^h : \underline{\underline{I}}^a = \underline{\underline{I}}^h : \underline{\underline{I}}^b = \dots = \underline{\underline{I}}^b : \underline{\underline{I}}^p = \underline{\underline{0}} \quad (8.6)$$

Multipliziert man Gleichung (8.4) mit dem Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$, so erhält man:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}_h + \underline{\underline{\tau}}_a + \underline{\underline{\tau}}_p + \underline{\underline{\tau}}_b$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_h = \underline{\underline{I}}^h : \underline{\underline{\sigma}} \quad (8.7)$$

$$\underline{\underline{\tau}}_a = \underline{\underline{I}}^a : \underline{\underline{\sigma}}$$

$$\underline{\underline{\tau}}_p = \underline{\underline{I}}^p : \underline{\underline{\sigma}}$$

$$\underline{\underline{\tau}}_b = \underline{\underline{I}}^b : \underline{\underline{\sigma}} .$$

Die Spannungen $\underline{\underline{\sigma}}_h$ und $\underline{\underline{\tau}}_a$ sind jeweils in einem eindimensionalen Unterraum, die Spannungen $\underline{\underline{\tau}}_b$ und $\underline{\underline{\tau}}_p$ jeweils in einem 2-dimensionalen Unterraum des Spannungsraumes definiert. Die vier Unterräume enthalten nur den Nulltensor als gemeinsames Element. Aus Gleichung (8.6) folgt, daß die 4 Spannungstensoren paarweise zueinander orthogonal sind.

$$\underline{\underline{\sigma}}_h : \underline{\underline{\tau}}_a = \underline{\underline{\sigma}}_h : \underline{\underline{\tau}}_p = \dots = 0 \quad (8.8)$$

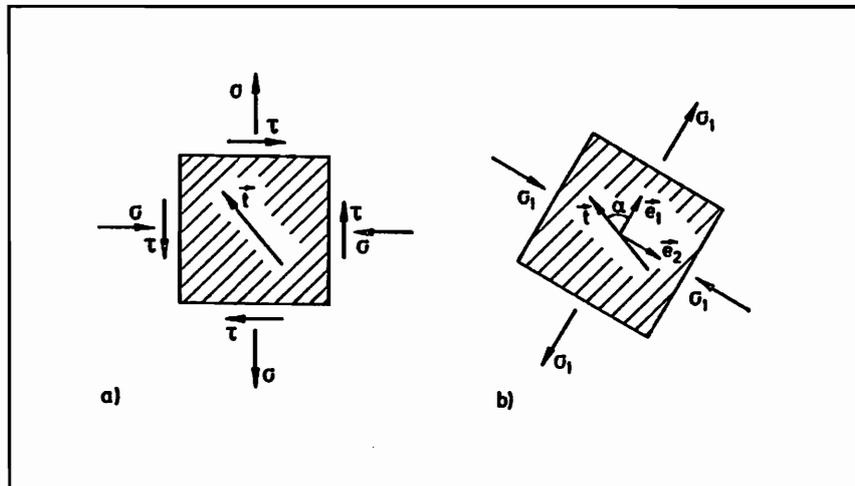


Abb. 51: Darstellung des ebenen Spannungszustands $\underline{\underline{\tau}}_p$ und des basalen Schubspannungsvektors \vec{t}

a) beliebige Orientierung des Körperelementes

b) Orientierung des Körperelementes in Hauptachsenrichtung

8.2 Physikalische Interpretation der Spannungskomponenten

$\underline{\sigma}_h$ beschreibt den hydrostatischen Spannungszustand und $\underline{\tau}_a$ die axiale, deviatorische Belastung des Körpers. Sie lassen sich mit dem hydrostatischen Druck p und der axialen Zugspannung σ schreiben als

$$\underline{\sigma}_h = -p\underline{\mathbf{1}} \quad \text{und} \quad \underline{\tau}_a = \sigma(\underline{\vec{n}}\underline{\vec{n}} - \frac{1}{3}\underline{\mathbf{1}}) \quad .$$

$\underline{\tau}_p$ entspricht einem ebenen, deviatorischen Spannungszustand. Die Spannungsvektoren liegen in der basalen Ebene, ihre Bezugsflächen stehen senkrecht zur basalen Ebene. Ist $\underline{\vec{e}}_1$ ein Einheitsnormalenvektor in Richtung der maximalen Hauptnormalspannung σ_1 , dann gilt für $\underline{\tau}_p$ auch folgende Darstellung:

$$\underline{\tau}_p = \sigma_1 (\underline{\vec{e}}_1 \underline{\vec{e}}_1 - \underline{\vec{e}}_2 \underline{\vec{e}}_2) \quad . \quad (8.9)$$

$\underline{\tau}_p$ ist also durch Größe und Richtung der maximalen Hauptspannung bestimmt.

Der Spannungstensor $\underline{\tau}_b$ wird durch die Größe und Richtung des basalen Schubspannungsvektors $\underline{\vec{t}}$ festgelegt, siehe Abbildung 51.

$$\underline{\tau}_b = \underline{\vec{t}}\underline{\vec{n}} + \underline{\vec{n}}\underline{\vec{t}} \quad (8.10)$$

Es gilt $\underline{\vec{n}} \cdot \underline{\vec{t}} = 0$ und somit $\underline{\vec{t}} = \underline{\tau}_b \cdot \underline{\vec{n}}$. Ein Vergleich von Gleichung (8.9) mit (8.10) zeigt, daß das Vorzeichen von $\underline{\vec{e}}_1$ keinen, das von $\underline{\vec{t}}$ aber sehr wohl einen Einfluß auf den entsprechenden Tensor hat. Im Gegensatz zu den Hauptspannungsrichtungen des ebenen Spannungszustandes $\underline{\tau}_p$ besitzt die Richtung des Schubspannungsvektors $\underline{\vec{t}}$ auch eine Orientierung.

Mit Hilfe der Gleichungen (8.9) und (8.10) lassen sich folgende Beziehungen herleiten, die im weiteren Verwendung finden werden.

$$\begin{aligned} \underline{\tau}_p \cdot \underline{\vec{n}} &= \underline{\vec{0}} \quad , \quad \underline{\vec{n}} \cdot \underline{\tau}_b \cdot \underline{\vec{n}} = 0 \quad , \quad \underline{\tau}_p^2 : \underline{\tau}_b = 0 \\ \underline{\mathbf{1}} : \underline{\tau}_p^3 &= 0 \quad , \quad \underline{\vec{n}} \cdot \underline{\tau}_b^3 \cdot \underline{\vec{n}} = 0 \quad , \quad \underline{\mathbf{1}} : \underline{\tau}_b^3 = 0 \\ \underline{\vec{n}} \cdot \underline{\tau}_b^2 \cdot \underline{\vec{n}} &= \frac{1}{2} \underline{\tau}_b : \underline{\tau}_b = \underline{\vec{t}} \cdot \underline{\vec{t}} \end{aligned} \quad (8.11)$$

$$\underline{\tau}_b^2 : \underline{\tau}_p = \sigma_1 \left((\underline{\vec{t}} \cdot \underline{\vec{e}}_1)^2 - (\underline{\vec{t}} \cdot \underline{\vec{e}}_2)^2 \right) = \sigma_1 |\underline{\vec{t}}|^2 \cos(2\alpha)$$

In der letzten Gleichung ist α der Winkel zwischen der Richtung des basalen Schubspannungsvektors $\underline{\vec{t}}$ und der Hauptspannungsrichtung des ebenen Spannungszustands $\underline{\tau}_p$, siehe Abbildung 51.

8.3 Formulierung eines Invariantensystems

Es werden folgende fünf Invarianten gebildet:

$$\begin{aligned}
 S_h &= \underline{1} : \underline{\sigma}_h = -3p & S_p &= \underline{\tau}_p : \underline{\tau}_p = 2\sigma_1^2 \\
 S_a &= \underline{N} : \underline{\tau}_a = \frac{2}{3}\sigma & S_b &= \underline{\tau}_b : \underline{\tau}_b = 2|\vec{t}|^2 \\
 & & S_{pb} &= \underline{\tau}_p : \underline{\tau}_b^2 .
 \end{aligned} \tag{8.12}$$

Die ersten vier Invarianten sind wie angegeben direkt mit charakteristischen Größen der entsprechenden Spannungstensoren verknüpft. Die beiden Tensoren $\underline{\tau}_p$ und $\underline{\tau}_b$ besitzen jeweils noch eine charakteristische Richtung, die frei wählbar ist. Da Richtungen aber nicht durch Invarianten beschrieben werden können, weist jeder der vier Spannungstensoren genau eine Invariante auf. Die letzte Invariante S_{pb} ist eine Simultaninvariante von $\underline{\tau}_b$ und $\underline{\tau}_p$. Wie man Gleichung (8.11) und Abbildung 51 entnehmen kann, ist sie ein Maß für den Winkel zwischen dem basalen Schubspannungsvektor \vec{t} und der Hauptspannungsrichtung des ebenen Spannungszustands $\vec{\epsilon}_1$. In Abhängigkeit vom Winkel α nimmt S_{pb} folgende Werte an:

$$S_{pb} = \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{2}S_b\sqrt{S_p} & \vec{t} \text{ in Richtung der maximalen Hauptnormalspannung} \\ 0 & \vec{t} \text{ in Hauptschubspannungsrichtung} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2}S_b\sqrt{S_p} & \vec{t} \text{ in Richtung der minimalen Hauptnormalspannung} \end{cases} .$$

Setzt man Gleichung (8.7) in die Gleichungen (8.3) ein, dann erhält man mit Gleichung (8.11) folgenden Zusammenhang zwischen den beiden Invariantensystemen:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= S_h \\
 S_2 &= \frac{1}{3}S_h^2 + \frac{3}{2}S_a^2 + S_b + S_p \\
 S_3 &= 3S_{pb} + \frac{1}{4}S_b(3S_a + 4S_h) + \frac{1}{2}S_p(2S_h - 3S_a) + \frac{3}{4}S_a^3 + \frac{3}{2}S_a^2S_h + \frac{1}{9}S_h^3 \\
 \Omega_1 &= \frac{1}{3}S_h + S_a \\
 \Omega_3 &= \frac{1}{9}S_h^2 + \frac{2}{3}S_hS_a + S_a^2 + \frac{1}{2}S_b
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

Dieses System läßt sich eindeutig nach den Invarianten gemäß Gleichung (8.12) auflösen:

$$\begin{aligned}
 S_h &= S_1 \\
 S_a &= \Omega_1 - \frac{1}{3}S_1 \\
 S_p &= S_2 - \frac{1}{2}S_1^2 + S_1\Omega_1 - 2\Omega_3 + \frac{1}{2}\Omega_1^2 \\
 S_b &= 2\Omega_3 - 2\Omega_1^2 \\
 S_{pb} &= \frac{1}{3}S_3 + \frac{1}{2}S_2(\Omega_1 - S_1) + \frac{1}{6}(3\Omega_3 + S_1^2)(S_1 - 3\Omega_1) + \frac{1}{2}\Omega_1^2(S_1 + \Omega_1)
 \end{aligned} \tag{8.14}$$

Damit ist die Äquivalenz der beiden Invariantensysteme bewiesen. Das Invariantensystem nach Gleichung (8.12) bzw. (8.14) ist somit vollständig und irreduzibel.

8.4 Herleitung eines vollständigen Satzes von Tensorgeneratoren

Nach Betten (1987) wird zunächst eine skalarwertige Hilfsfunktion h definiert.

$$h = \underline{Y} : \underline{X} \quad (8.15)$$

\underline{X} ist ein beliebiger symmetrischer Tensor 2-ter Stufe. Da \underline{Y} eine isotrope tensorwertige Tensorfunktion in Abhängigkeit von $\underline{\sigma}$ und \underline{N} ist, ist h eine skalarwertige isotrope Tensorfunktion mit den Argumenten \underline{X} , $\underline{\sigma}$ und \underline{N} . Eine solche Funktion kann gemäß der Darstellungstheorie isotroper Tensorfunktionen als Funktion von dem vollständigen System der Invarianten und Simultaninvarianten $J^{[\nu,\lambda,\mu]}$ der drei Tensoren \underline{X} , $\underline{\sigma}$ und \underline{N} geschrieben werden:

$$h = f(J^{[\nu,\lambda,\mu]}) \quad (8.16)$$

Ein vollständiges Invariantensystem, das jedoch noch redundante Elemente enthält (siehe Korsgaard (1990)), erhält man durch Spurbildung über folgende Tensorprodukte:

$$J^{[\nu,\lambda,\mu]} = \underline{1} : (\underline{N}^\nu \cdot \underline{\sigma}^\lambda \cdot \underline{X}^\mu) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \nu = 0, 1 ; \lambda, \mu = 0, 1, 2 \\ \nu = 0 ; \lambda = 0 ; \mu = 3 \\ \nu = 0 ; \lambda = 3 ; \mu = 0 \\ \text{ohne } \nu, \lambda, \mu = 0 \end{cases}$$

Da $\underline{N}^3 = \underline{N}^2 = \underline{N}$, tritt von \underline{N} nur die erste Potenz auf. Aufgrund der Definition (8.15) hängt h nur linear von \underline{X} ab. Es dürfen daher nur die in \underline{X} linearen Invarianten $L^{[\nu,\lambda]} = J^{[\nu,\lambda,1]}$ linear in f eingehen. Damit erhält man für h folgende Darstellung:

$$h = \sum_{\nu=0}^1 \sum_{\lambda=0}^2 \varphi_{(\nu,\lambda)} L^{[\nu,\lambda]} \quad (8.17)$$

Die Funktionen $\varphi_{(\nu,\lambda)}$ sind nur noch von den fünf Invarianten $J^{[\nu,\lambda,1]}$ ($\nu=0, \lambda=1,2$) ($\nu=1, \lambda=0,1,2$) abhängig. Diese bilden aber gerade das vollständige Invariantensystem von $\underline{\sigma}$ und \underline{N} .

Die sechs in \underline{X} linearen Invarianten lauten im einzelnen:

$$\begin{aligned} L^{[0,0]} &= \underline{1} : \underline{X} & L^{[1,0]} &= \underline{N} : \underline{X} \\ L^{[0,1]} &= \underline{\sigma} : \underline{X} & L^{[1,1]} &= (\underline{N} \cdot \underline{\sigma}) : \underline{X} \\ L^{[0,2]} &= \underline{\sigma}^2 : \underline{X} & L^{[1,2]} &= (\underline{N} \cdot \underline{\sigma}^2) : \underline{X} \end{aligned} \quad (8.18)$$

Die Vollständigkeit und Irreduzibilität des angegebenen Invariantensystems wurde für einen allgemeineren Fall von Korsgaard (1990) bewiesen.

Zur gesuchten Darstellung von \underline{Y} gelangt man, indem man h nach \underline{X} ableitet. Aus den Gleichungen (8.15) und (8.17) folgt damit:

$$\underline{Y} = \sum_{\nu=0}^1 \sum_{\lambda=0}^2 \varphi_{(\nu,\lambda)} \frac{dL^{[\nu,\lambda]}}{d\underline{X}} \quad .$$

Die Ableitungen $\frac{dL^{[\nu,\lambda]}}{d\underline{X}}$ ergeben sich gerade zu den Tensorgeneratoren $\underline{M}^{[\nu,\lambda]}$ aus Gleichung (8.2).

$$\underline{M}^{[\nu,\lambda]} = \frac{dL^{[\nu,\lambda]}}{d\underline{X}}$$

Hat man nun ein zu Gleichung (8.18) äquivalentes Invariantensystem L_α , dann erhält man durch Ableiten der Invarianten nach \underline{X} einen neuen Satz von Tensorgeneratoren \underline{M}_α . Das lineare Gleichungssystem, das L_α mit $L^{[\nu,\lambda]}$ verbindet, verknüpft auch \underline{M}_α mit $\underline{M}^{[\nu,\lambda]}$. Dessen Invertierbarkeit ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Vollständigkeit des neuen Systems. Da die neuen Tensorgeneratoren auch direkt durch Linearkombinationen der alten konstruiert werden können, ergibt sich die Frage, warum der Umweg über die Invarianten genommen wird. Zum einen ermöglichen die Erfahrungen, die beim Aufstellen des Invariantensystems (8.14) gewonnen wurden, ein schnelleres Finden eines äquivalenten Invariantensystems, zum anderen ist der Umgang mit Invarianten ggf. einfacher als das Rechnen mit Tensorgeneratoren.

8.5 Aufstellen eines Invariantensystems L

Der Tensor \underline{X} läßt sich analog zu $\underline{\sigma}$ eindeutig zerlegen in $\underline{X} = \underline{X}_h + \underline{X}_a + \underline{X}_p + \underline{X}_b$. Damit können die folgenden in \underline{X} linearen Invarianten definiert werden:

$$\begin{aligned} L_h &= \underline{1} : \underline{X}_h \\ L_a &= \underline{N} : \underline{X}_a \\ L_p &= \underline{\tau}_p : \underline{X}_p \\ L_b &= \underline{\tau}_b : \underline{X}_b \\ L_{pb} &= \underline{\tau}_b : (\underline{X}_p \cdot \underline{\tau}_b) = \underline{\tau}_b^2 : \underline{X}_p \\ L_{bp} &= \underline{\tau}_b : (\underline{X}_b \cdot \underline{\tau}_p) = (\underline{\tau}_b \cdot \underline{\tau}_p) : \underline{X}_b \quad . \end{aligned} \tag{8.19}$$

Ersetzt man in der Invariantendefinition (8.12) jeweils einen Spannungswert durch die entsprechende \underline{X} -Größe (in der letzten Gleichung von (8.12) sind dabei zwei unterschiedliche Ersetzungen möglich), dann erhält man das Gleichungssystem (8.19).

Gegensatz zu den basalen Formänderungen können hier Abweichungen von der Koaxialität durch den basalen Spannungstensor τ_b allein hervorgerufen werden. Dieser Unterschied in den Effekten zweiter Ordnung ergibt sich daraus, daß die Hauptachsenrichtungen von $\underline{\tau}_p$ nicht orientiert sind (siehe auch Abschnitt 8.2). Zur Festlegung der basalen Formänderungen ist jedoch aus Gründen der transversalen Isotropie eine orientierte Richtung notwendig. Eine solche läßt sich jedoch nur unter Zuhilfenahme von $\underline{\tau}_b$ konstruieren.

8.6 Lineare Spannungsabhängigkeit

Soll der Tensor \underline{Y} nur linear von $\underline{\sigma}$ abhängen, dann folgt aus Gleichung (8.22)

$$\underline{Y} = (\bar{\alpha}_{ha} S_a + \bar{\alpha}_h S_h) \underline{M}_h + (\bar{\alpha}_{ah} S_h + \bar{\alpha}_a S_a) \underline{M}_a + \bar{\alpha}_p \underline{M}_p + \bar{\alpha}_b \underline{M}_b \quad ,$$

d.h. bei transversaler Isotropie ist eine lineare Beziehung zwischen zwei symmetrischen Tensoren 2-ter Stufe durch sechs Konstanten $\bar{\alpha}_{ha}, \dots, \bar{\alpha}_b$ vollständig bestimmt. Die doppeltindizierten Tensorgeneratoren \underline{M}_{bp} und \underline{M}_{pb} sind quadratisch in den Spannungen. Sie können in der Darstellung für \underline{Y} nicht mehr auftreten. Aus dem gleichen Grund sind die Vorfaktoren von \underline{M}_h und \underline{M}_a nur lineare Funktionen der in $\underline{\sigma}$ linearen Invarianten S_a und S_h . Mit Hilfe von Gleichung (8.21) und (8.12) gelangt man zu folgender Darstellung:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \underline{A} : \underline{\sigma} \\ \underline{A} &= \alpha_h \underline{I}^h + \alpha_a \underline{I}^a + \alpha_{ah} \underline{I}^{ah} + \alpha_{ha} \underline{I}^{ha} + \alpha_p \underline{I}^p + \alpha_b \underline{I}^b \\ \underline{I}^{ha} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{1} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\underline{\vec{n}\vec{n}} - \frac{1}{3} \underline{1} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{2} \underline{1} \left(\underline{\vec{n}\vec{n}} - \frac{1}{3} \underline{1} \right) \\ \underline{I}^{ah} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\underline{\vec{n}\vec{n}} - \frac{1}{3} \underline{1} \right) \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{1} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \left(\underline{\vec{n}\vec{n}} - \frac{1}{3} \underline{1} \right) \underline{1} \quad . \end{aligned} \quad (8.23)$$

Zusätzlich zu den symmetrischen Tensoren nach Gleichung (8.4) treten noch die unsymmetrischen Tensoren (bezüglich einer Vertauschung des vorderen und hinteren Indexpaares) \underline{I}^{ah} und \underline{I}^{ha} auf. Sie haben die Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \underline{I}^{ha} : \underline{I}^{ah} &= \underline{I}^h \quad , \quad \underline{I}^{ah} : \underline{I}^{ha} = \underline{I}^a \\ \underline{I}^{ha} : \underline{I}^a &= \underline{I}^h : \underline{I}^{ha} = \underline{I}^{ha} \quad , \quad \underline{I}^a : \underline{I}^{ah} = \underline{I}^{ah} : \underline{I}^h = \underline{I}^{ah} \quad . \end{aligned} \quad (8.24)$$

Alle weiteren Produkte ergeben sich zu Null.

$$\underline{I}^{ha} : \underline{I}^h = \dots = \underline{I}^{ah} : \underline{I}^b = \dots = \underline{I}^b : \underline{I}^{ha} = \underline{0} \quad (8.25)$$

Damit lassen sich die 6 charakteristischen Größen des Tensors \underline{A} bzw. \underline{B} in eine 6×6 Matrix

einordnen:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \alpha_h & \alpha_{ha} & & & & \\ \alpha_{ah} & \alpha_a & & & & \\ & & \alpha_p & & & \\ & & & \alpha_p & & \\ & & & & \alpha_b & \\ & & & & & \alpha_b \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \beta_h & \beta_{ha} & & & & \\ \beta_{ah} & \beta_a & & & & \\ & & \beta_p & & & \\ & & & \beta_p & & \\ & & & & \beta_b & \\ & & & & & \beta_b \end{pmatrix} \quad (8.26)$$

mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} &= \begin{pmatrix} \alpha_h & \alpha_{ha} & & & & \\ \alpha_{ah} & \alpha_a & & & & \\ & & \alpha_p & & & \\ & & & \alpha_p & & \\ & & & & \alpha_b & \\ & & & & & \alpha_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_h & \beta_{ha} & & & & \\ \beta_{ah} & \beta_a & & & & \\ & & \beta_p & & & \\ & & & \beta_p & & \\ & & & & \beta_b & \\ & & & & & \beta_b \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{A}}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{A}}^{-1} &= \begin{pmatrix} \alpha_h & \alpha_{ha} & & & & \\ \alpha_{ah} & \alpha_a & & & & \\ & & \alpha_p & & & \\ & & & \alpha_p & & \\ & & & & \alpha_b & \\ & & & & & \alpha_b \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} (\alpha_h & \alpha_{ha})^{-1} & & & & \\ \alpha_{ah} & \alpha_a & & & & \\ & & \alpha_p^{-1} & & & \\ & & & \alpha_p^{-1} & & \\ & & & & \alpha_b^{-1} & \\ & & & & & \alpha_b^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Komponenten dieser Matrizen beziehen sich dabei auf folgende sechs Basistensoren :

$$\underline{\underline{b}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \underline{\underline{1}} \quad \text{mit } \underline{\underline{b}}_1 \underline{\underline{b}}_1 = \underline{\underline{I}}^h$$

$$\underline{\underline{b}}_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} (\underline{\underline{n}} \underline{\underline{n}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}}) \quad \text{mit } \underline{\underline{b}}_2 \underline{\underline{b}}_2 = \underline{\underline{I}}^a$$

$\underline{\underline{b}}_{3,4}$: 2 Basistensoren aus dem zweidimensionalen Unterraum der prismatischen Gleitung mit $\underline{\underline{b}}_3 \underline{\underline{b}}_3 + \underline{\underline{b}}_4 \underline{\underline{b}}_4 = \underline{\underline{I}}^p$ und $\underline{\underline{b}}_3 : \underline{\underline{b}}_4 = 0$

$\underline{\underline{b}}_{5,6}$: 2 Basistensoren aus dem zweidimensionalen Unterraum der basalen Gleitung mit $\underline{\underline{b}}_5 \underline{\underline{b}}_5 + \underline{\underline{b}}_6 \underline{\underline{b}}_6 = \underline{\underline{I}}^b$ und $\underline{\underline{b}}_5 : \underline{\underline{b}}_6 = 0$

Ist der Tensor $\underline{\underline{A}}$ bezüglich einer Vertauschung des vorderen und hinteren Indexpaares symmetrisch, dann gilt $\alpha_{ah} = \alpha_{ha}$. Er ist dann durch fünf Konstanten vollständig bestimmt. Dies ist eine bekannte Eigenschaft transversal isotroper Tensoren 4-ter Stufe.

Anhand der elastischen Materialeigenschaften soll die physikalische Bedeutung der fünf Koeffizienten $\alpha_{(\dots)}$ erläutert werden.

α_h : beschreibt den Zusammenhang zwischen der Volumendehnung und dem hydrostatischen Druck.

α_a : entspricht der axialen Dehnung durch eine axiale Spannung.

α_{ah} bzw. α_{ha} : beschreiben die Kopplung zwischen dem hydrostatischen Druck und der axialen Dehnung bzw. der axialen Spannung und der Volumendehnung.

α_p bzw. α_b : sind die Proportionalitätsfaktoren zwischen dem ebenen, deviatorischen Spannungszustand und dem ebenen Verzerrungszustand in der basalen Ebene bzw. in einer zur basalen Ebene senkrechten Ebene.

Ist das Materialverhalten elastisch isotrop, dann gilt:

$$\begin{aligned}\alpha_{ah} &= \alpha_{ha} = 0 \\ \alpha_h &= \frac{1}{3K} \quad \text{mit dem Kompressionsmodul } K \\ \alpha_p &= \alpha_b = \alpha_a = \frac{1}{2G} \quad \text{mit dem Schubmodul } G \quad .\end{aligned}$$

Üblicherweise werden Tensoren 4-ter Stufe, entsprechend der Voigt'schen Notation, durch eine 6×6 Matrix dargestellt. Die Tensorkomponenten bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems werden wie folgt in das Matrizenschema eingeordnet:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}} &= \begin{array}{c} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 32 \\ 31 \\ 21 \end{array} \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & A_{1132} & A_{1131} & A_{1121} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & A_{2232} & A_{2231} & A_{2221} \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & A_{3332} & A_{3331} & A_{3321} \\ A_{3211} & A_{3222} & A_{3233} & A_{3232} & A_{3231} & A_{3221} \\ A_{3111} & A_{3122} & A_{3133} & A_{3132} & A_{3131} & A_{3121} \\ A_{2111} & A_{2122} & A_{2133} & A_{2132} & A_{2131} & A_{2121} \end{pmatrix} \\ &= \begin{array}{c} 11 \\ 22 \\ 33 \\ 2 \times 32 \\ 2 \times 31 \\ 2 \times 21 \end{array} \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & 2A_{1132} & 2A_{1131} & 2A_{1121} \\ A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & 2A_{2232} & 2A_{2231} & 2A_{2221} \\ A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & 2A_{3332} & 2A_{3331} & 2A_{3321} \\ 2A_{3211} & 2A_{3222} & 2A_{3233} & 4A_{3232} & 4A_{3231} & 4A_{3221} \\ 2A_{3111} & 2A_{3122} & 2A_{3133} & 4A_{3132} & 4A_{3131} & 4A_{3121} \\ 2A_{2111} & 2A_{2122} & 2A_{2133} & 4A_{2132} & 4A_{2131} & 4A_{2121} \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Je nach physikalischer Bedeutung des Tensors $\underline{\underline{A}}$ erfolgt die Einordnung nach dem ersten oder zweiten Schema. Diese Schwierigkeit resultiert aus der nicht vorhandenen Orthonormalität

der zugrundeliegenden Basistensoren. Bei transversaler Isotropie mit 3-Achse = Symmetrieachse folgt für $\underline{\underline{A}}$ die Darstellung (Nye (1985)):

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\ a_{12} & a_{11} & a_{13} & & & \\ a_{13} & a_{13} & a_{33} & & & \\ & & & a_{44} & & \\ & & & & a_{44} & \\ & & & & & \frac{1}{2}(a_{11} - a_{12}) \end{pmatrix}. \quad (8.27)$$

Man erkennt eine stärkere Kopplung zwischen den Komponenten von $\underline{\sigma}$ und \underline{Y} als in Gleichung (8.26). Zwischen den Koeffizienten a_{ij} und $\alpha_{(\cdot)}$ (Gleichung (8.26)) besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{3}\alpha_h + \frac{1}{6}\alpha_a - \frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_{ah} + \frac{1}{2}\alpha_p \\ a_{12} &= \frac{1}{3}\alpha_h + \frac{1}{6}\alpha_a - \frac{\sqrt{2}}{3}\alpha_{ah} - \frac{1}{2}\alpha_p \\ a_{13} &= \frac{1}{3}\alpha_h - \frac{1}{3}\alpha_a + \frac{\sqrt{2}}{6}\alpha_{ah} \\ a_{33} &= \frac{1}{3}\alpha_h + \frac{2}{3}\alpha_a + \frac{2\sqrt{2}}{3}\alpha_{ah} \\ a_{44} &= \frac{1}{2}\alpha_b \end{aligned} \quad (8.28)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \alpha_h &= \frac{2}{3}a_{11} + \frac{2}{3}a_{12} + \frac{4}{3}a_{13} + \frac{1}{3}a_{33} \\ \alpha_a &= \frac{1}{3}a_{11} + \frac{1}{3}a_{12} - \frac{4}{3}a_{13} + \frac{2}{3}a_{33} \\ \alpha_{ah} &= -\frac{\sqrt{2}}{3}a_{11} - \frac{\sqrt{2}}{3}a_{12} + \frac{\sqrt{2}}{3}a_{13} + \frac{\sqrt{2}}{3}a_{33} \\ \alpha_p &= a_{11} - a_{12} \\ \alpha_b &= 2a_{44} \end{aligned} \quad (8.29)$$

Eine vollständige Entkopplung der Komponenten von \underline{Y} und $\underline{\sigma}$ erreicht man, indem die Untermatrix aus Gleichung (8.26)

$$\begin{pmatrix} \alpha_h & \alpha_{ah} \\ \alpha_{ah} & \alpha_a \end{pmatrix}$$

auf Hauptachsenform gebracht wird. Die Matrix hat die Eigenwerte

$$\alpha_{1,2} = \frac{\alpha_a + \alpha_h}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_h - \alpha_a}{2}\right)^2 + \alpha_{ah}^2} \quad (8.30)$$

und die Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} -t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \end{pmatrix}$$

mit

$$t_1 = \frac{\alpha_{ah}}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_h - \alpha_a}{2}\right)^2 + 2\alpha_{ah}^2 + (\alpha_h - \alpha_a)\sqrt{\left(\frac{\alpha_h - \alpha_a}{2}\right)^2 + \alpha_{ah}^2}}}$$

$$t_2 = \frac{\frac{\alpha_h - \alpha_a}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_h - \alpha_a}{2}\right)^2 + \alpha_{ah}^2}}{\sqrt{2\left(\frac{\alpha_h - \alpha_a}{2}\right)^2 + 2\alpha_{ah}^2 + (\alpha_h - \alpha_a)\sqrt{\left(\frac{\alpha_h - \alpha_a}{2}\right)^2 + \alpha_{ah}^2}}} .$$

Die Komponenten t_1 und t_2 der Eigenvektoren beziehen sich auf die oben eingeführten Basistensoren $\underline{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\underline{1}$ und $\underline{b}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(\underline{n}\underline{n} - \frac{1}{3}\underline{1})$. Damit besitzt der Tensor \underline{A} die beiden Eigentensoren

$$\underline{e}_1 = -t_1\underline{b}_1 + t_2\underline{b}_2 \quad \text{und} \quad \underline{e}_2 = t_2\underline{b}_1 + t_1\underline{b}_2 .$$

Bei verschwindendem Koppelterm, $\alpha_{ah} = 0$, gilt $t_1 = 0$ und $t_2 = 1$. Dann sind \underline{b}_1 und \underline{b}_2 direkt zwei Eigentensoren von \underline{A} . Die vier noch fehlenden Eigentensoren sind durch die Basistensoren $\underline{b}_{3,4}$ und $\underline{b}_{5,6}$ gegeben.

$$\underline{e}_{3,4} = \underline{b}_{3,4} \quad \text{und} \quad \underline{e}_{5,6} = \underline{b}_{5,6}$$

Es ist jeweils nur der 2-dimensionale Unterraum, in dem die Eigentensoren liegen, bestimmt. Die entsprechenden Eigenwerte kommen also doppelt vor.

$$\alpha_{3,4} = \alpha_p \quad \text{und} \quad \alpha_{5,6} = \alpha_b$$

Die beiden ersten Eigentensoren hängen im wesentlichen vom Koppelterm α_{ah} ab. Die restlichen vier Eigentensoren sind allein durch die Richtung der transversalen Isotropie bestimmt.

Bezogen auf ein Koordinatensystem mit den Eigentensoren als Basistensoren erhält man für \underline{A} die Darstellung

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \alpha_2 & & & & \\ & & \alpha_p & & & \\ & & & \alpha_p & & \\ & & & & \alpha_b & \\ & & & & & \alpha_b \end{pmatrix} . \quad (8.31)$$

Soll mit dem so angegebenen Tensor \underline{A} das Produkt $\underline{A} : \underline{\sigma}$ bestimmt werden, dann muß auch $\underline{\sigma}$ bezüglich der Basistensoren $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_6$ zerlegt werden, also in einem an \underline{A} angepaßten Koordinatensystem angegeben werden. Wird dagegen die Darstellung (8.26) benutzt, dann sind die Basistensoren nur durch die transversale Isotropie beeinflusst. Ein solches System ist somit bei einer größeren Anzahl von Problemen sinnvoll nutzbar.

Mehrabi u. Cowin (1990) haben die Eigenwerte und Eigentensoren eines Tensors 4-ter Stufe für unterschiedliche Symmetrieklassen durch Lösen des Eigenwertproblems bestimmt. Ihre Ergebnisse stimmen mit den hier angegebenen überein.

8.7 Darstellung einer antisymmetrischen isotropen Tensorfunktion

Betten (1987) gibt für einen symmetrischen Tensor $\underline{\sigma}$ und einen nichtsymmetrischen Tensor $\underline{\hat{X}}$ eine aus 20 Invarianten bestehende Integritätsbasis an. Zerlegt man $\underline{\hat{X}}$ in einen symmetrischen Anteil \underline{N} und einen antisymmetrischen Anteil \underline{W} und setzt $\underline{\hat{X}} = \underline{N} + \underline{W}$ in die Invariantendefinition ein, so erhält man ein neues System von Invarianten, die die Integritätsbasis von $\underline{\sigma}$, \underline{N} und \underline{W} bilden.

In Analogie zum Abschnitt 8.4 erhält man die Tensorgeneratoren $\underline{\Omega}_i$ einer antisymmetrischen Tensorfunktion mit den Argumenttensoren $\underline{\sigma}$ und \underline{N} , indem man die in \underline{W} linearen Invarianten der Integritätsbasis von $\underline{\sigma}$, \underline{N} und \underline{W} nach \underline{W} ableitet.

$$\underline{\Omega}_i = \frac{\partial L_i}{\partial \underline{W}}$$

Die Integritätsbasis enthält folgende in \underline{W} lineare Invarianten:

$$\begin{aligned} L_1 &= \underline{W} : (\underline{\sigma} \cdot \underline{N}) & , & & L_2 &= \underline{W} : (\underline{\sigma}^2 \cdot \underline{N}) \\ L_3 &= \underline{W} : (\underline{\sigma} \cdot \underline{N}^2) & , & & L_4 &= \underline{W} : (\underline{\sigma}^2 \cdot \underline{N}^2) \end{aligned} .$$

Entsprechend den Hinweisen von Korsgaard (1990) müßte noch bewiesen werden, daß diese linearen Invarianten vollständig sind. Dieser Beweis wurde im einzelnen nicht geführt. Die folgenden Punkte skizzieren jedoch eine mögliche Vorgehensweise. Jedem antisymmetrischen Tensor 2-ter Stufe ist genau ein Vektor zugeordnet. Das doppeltskalare Produkt zwischen einem antisymmetrischen und einem nichtsymmetrischen Tensor 2-ter Stufe entspricht dem Skalarprodukt zwischen den beiden zugeordneten Vektoren. Spannen die entsprechenden Vektoren von $\underline{\sigma}^i \cdot \underline{N}^j$ einen 3-dimensionalen Raum auf, dann kann der Tensor \underline{W} aus den Invarianten L_i und den Tensoren $\underline{\sigma}^i \cdot \underline{N}^j$ konstruiert werden. Zu untersuchen bleibt der Fall, wenn die entsprechenden Vektoren koplanar bzw. koaxial sind.

Aufgrund der Form von \underline{N} ($\underline{N} = \vec{n}\vec{n}$) enthalten die Invarianten L_3 und L_4 keine neue Information, so daß man nur die beiden Tensorgeneratoren

$$\underline{\Omega}_1 = \underline{\sigma} \cdot \underline{N} - \underline{N} \cdot \underline{\sigma} \quad \text{und} \quad \underline{\Omega}_2 = \underline{\sigma}^2 \cdot \underline{N} - \underline{N} \cdot \underline{\sigma}^2$$

erhält. Setzt man für $\underline{\sigma}$ die Zerlegung (8.7) ein, so folgt mit den Gleichungen (8.9) und (8.10)

$$\underline{\Omega}_1 = \underline{\tau}_b \cdot \underline{N} - \underline{N} \cdot \underline{\tau}_b \quad \text{und} \quad \underline{\Omega}_2 = \underline{\tau}_p \cdot \underline{\tau}_b - \underline{\tau}_b \cdot \underline{\tau}_p \quad . \quad (8.32)$$

Bei transversaler Isotropie kann ein antisymmetrischer Tensor 2-ter Stufe \underline{W} nur in folgender Weise von der Spannung abhängen:

$$\underline{W} = \varphi_1 (\underline{\tau}_b \cdot \underline{N} - \underline{N} \cdot \underline{\tau}_b) + \varphi_2 (\underline{\tau}_p \cdot \underline{\tau}_b - \underline{\tau}_b \cdot \underline{\tau}_p) \quad . \quad (8.33)$$

φ_1 und φ_2 sind darin Funktionen von den Invarianten aus Gleichung (8.12).

Mit dem Permutationstensor $\underline{\varepsilon}$ kann einem antisymmetrischen Tensor immer genau ein Vektor zugeordnet werden.

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} : \underline{W} \quad \text{und} \quad \underline{W} = \underline{\varepsilon} \cdot \vec{\omega}$$

Ist \underline{W} ein Spintensor, so entspricht $\vec{\omega}$ dem Drehgeschwindigkeitsvektor.

Der Vektor $\vec{\omega}_1$ des Tensorgenerators $\underline{\Omega}_1$ liegt in der basalen Ebene und steht senkrecht zum basalen Schubspannungsvektor \vec{t} , $\vec{\omega}_1 = \vec{n} \times \vec{t}$. Da $\underline{\Omega}_1$ nur linear von der Belastung abhängt, werden durch ihn Effekte 1. Ordnung erfaßt.

Der dem Tensorgenerator $\underline{\Omega}_2$ zugeordnete Vektor $\vec{\omega}_2$ liegt ebenfalls in der basalen Ebene. Die folgende Gegenüberstellung zeigt exemplarisch die Abhängigkeit des Vektors $\vec{\omega}_2$ von der Richtung von \vec{t} relativ zum Hauptachsensystem des ebenen Spannungszustandes $\underline{\tau}_p$:

$$\vec{\omega}_2 \parallel \begin{cases} \vec{n} \times \vec{t} & \vec{t} \text{ in Richtung der maximalen Hauptnormalspannung} \\ \vec{t} & \vec{t} \text{ in Hauptschubspannungsrichtung} \\ -\vec{n} \times \vec{t} & \vec{t} \text{ in Richtung der minimalen Hauptnormalspannung} \end{cases}$$

Der Zusammenhang mit der Invarianten S_{pb} nach Gleichung (8.12) ist offensichtlich. Für $S_{pb}^2 = \frac{1}{8} S_b^2 S_p$ fällt \vec{t} mit einer der Hauptspannungsrichtungen von $\underline{\tau}_p$ zusammen und es folgt $\vec{\omega}_1 \parallel \vec{\omega}_2$. In Abhängigkeit von der Invarianten S_{pb} ermöglicht $\underline{\Omega}_2$ eine Abweichung von der durch $\underline{\Omega}_1$ vorgegebenen Richtung. $\underline{\Omega}_2$ beschreibt somit Effekte 2. Ordnung.

8.8 Diskussion der Ergebnisse

In den letzten Abschnitten wurde die allgemeine Form der Abhängigkeit eines symmetrischen bzw. antisymmetrischen Tensors 2-ter Stufe \underline{Y} bzw. \underline{W} von dem Spannungstensor $\underline{\sigma}$ unter der Voraussetzung transversaler Isotropie abgeleitet. Den verwendeten Invarianten und Tensorgeneratoren kann eine klare physikalische Bedeutung zugeordnet werden. Sie können eindeutig in zwei Gruppen aufgeteilt werden, die Effekte 1. bzw. 2. Ordnung beschreiben. Hierdurch haben auch die Koeffizienten $\varphi_{(\dots)}$ in Gleichung (8.22) bzw. (8.33) die entsprechende physikalische Bedeutung und es kann mit Hilfe physikalischer Betrachtungen entschieden werden, von welchen Invarianten die Koeffizienten abhängen können. Beschränkt man sich zunächst auf Effekte 1. Ordnung, dann können die Koeffizienten $\varphi_h, \varphi_a, \varphi_p$ und φ_b im Prinzip unabhängig voneinander aus Experimenten bestimmt werden, da die entsprechenden Tensorgeneratoren eine orthogonale Basis des Spannungs- bzw. Dehnungsraumes bilden. So kann z.B. mit dehnungsgesteuerten Experimenten, die einen ebenen Verzerrungszustand mit Volumenkonstanz in der basalen Ebene erzeugen, die Funktion φ_p in Abhängigkeit von den Invarianten S_h, S_a, S_p und S_b ermittelt werden, da die anderen Tensorgeneratoren $\underline{M}_h, \underline{M}_a$ und \underline{M}_b diesen Verzerrungszustand nicht beeinflussen.

Der wesentliche Vorteil der hier vorgeschlagenen Invarianten und Tensorgeneratoren liegt also darin, daß physikalische Überlegungen zum Verformungsverhalten leicht in die allgemeine Gleichung eingearbeitet werden können, indem die beliebigen Funktionen $\varphi_{(\dots)}$ in ihrer Form spezifiziert werden. Desweiteren können diese Funktionen dann unabhängig voneinander bestimmt werden, da die einzelnen Einflüsse weitgehend entkoppelt sind.

9. Zusammenfassung und Ausblick

Nach einer kurzen Einführung in die Verformungsmechanismen des Einkristalls und einer Erläuterung der daraus resultierenden Spannungs-Dehnungsbeziehungen wurde für monokristallines Eis ein mehraxiales Stoffgesetz entwickelt. Der Tensor der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten wird additiv in drei Anteile aufgespalten. Sie entsprechen den Verformungsmechanismen der basalen und der prismatischen Gleitung. Dem dritten Anteil (den axialen Längenänderungen) wurden keine Gleitsysteme zugeordnet. Diese Verformungen sind im Experiment auch nur sehr selten beobachtet worden. Die drei Verformungsanteile werden jeweils durch ein eindimensionales Stoffgesetz beschrieben. Sie können unabhängig voneinander aus Experimenten bestimmt werden. Für den Hauptverformungsmechanismus der basalen Gleitung wird das eindimensionale Stoffgesetz aus der Analyse der Versetzungsbewegung ermittelt. Die Versetzungsdichte wird als interne Variable eingeführt, deren Evolutionsgleichung sich aus der angenommenen Versetzungsquellenverteilung ergibt. Trotz der einfachen Struktur des Gleichungssystems können mit diesem Stoffgesetz einaxiale Zug- und Druckversuche mit Zwischenentlastung und Belastungssteigerung qualitativ und quantitativ gut wiedergegeben werden. Eine Überprüfung des Stoffgesetzes anhand von mehraxialen Belastungspfaden konnte aufgrund fehlender Experimente nicht erfolgen.

Unzureichende experimentelle Daten verhinderten auch eine sinnvolle Ermittlung der einaxialen Stoffgesetze der prismatischen Gleitung bzw. der axialen Längenänderung. Die notwendigen mehraxialen Formulierungen zur Einbeziehung dieser Verformungsmechanismen wurden angegeben, eine Erweiterung des Stoffgesetzes ist somit problemlos möglich.

Obwohl die Materialgleichungen der einzelnen Verformungsmechanismen eindimensional sind, handelt es sich doch um ein dreidimensionales Stoffgesetz, das die Anisotropie des Monokristalls sehr gut beschreiben kann.

Die Ergebnisse des Kapitels 8 zeigen, daß das monokristalline Stoffgesetz im Sinne einer Theorie erster Ordnung vollständig ist (es werden in der Formulierung alle Tensorgeneratoren verwendet, die linear in der Spannung sind).

Im Kapitel 7 wurde eine auf lineares elastisch-viskoses Materialverhalten erweiterte Lösung des Einschlußproblems vorgestellt. Sie basiert auf einem neuen Konzept, das die Eigenspan-

nungen innerhalb des Einschlusses als eine innere Last des Systems definiert. Die Eigenspannungen können nicht von außen vorgegeben werden. Ihre zeitliche Veränderung ergibt sich aus der momentanen inneren und äußeren Belastung des Matrix-Einschluß-Systems. Die Eigenspannungen lassen sich durch die Integration der Belastungsgeschichte ermitteln. Die Lösung des Einschlußproblems kann durch die inkrementelle Formulierung auch bei nichtlinearem Materialverhalten näherungsweise eingesetzt werden, da das linearisierte Stoffgesetz der Matrix immer an die augenblickliche Spannung angepaßt werden kann.

Der Lösung des Einschlußproblems liegen die Annahmen von kleinen Verformungen und kugelförmigen Einschlüssen zugrunde. Sie kann analog zu einer Arbeit von Faivre (1971) auf ellipsoide Einschlüsse erweitert werden. Der von Harren (1991) vorgeschlagene Weg zur Berücksichtigung großer Deformationen ist auch hier anwendbar. Die Gleichungen werden jedoch wesentlich komplizierter, da die auf die Ausgangskonfiguration bezogenen Spannungs- und Verzerrungstensoren nicht mehr symmetrisch sind.

Basierend auf der Lösung des Einschlußproblems und den monokristallinen Materialgleichungen wurde ein selbstkonsistentes Stoffgesetz für den Polykristall ermittelt. Anhand des Gleichungssystems und mit Hilfe vergleichender Berechnungen wurden die Unterschiede zu den Formulierungen von Kröner (1961) und Budiansky u. Wu (1962) dargestellt. Im Gegensatz zu anderen Stoffmodellen kann der hier vorgeschlagene Ansatz sowohl das transiente als auch das stationäre Kriechen polykristallinen Eises qualitativ richtig wiedergeben. Die Einflüsse weiterer Verformungsmechanismen, wie z.B. Materialschädigung, Rekristallisation oder Korngrenzgleiten, müssen noch genauer untersucht werden, um auch im Bereich des tertiären Kriechens eine sinnvolle Materialbeschreibung zu ermöglichen.

Die Berechnungen einaxialer Zug- und Druckversuche haben gezeigt, wie sich in Körnern mit unterschiedlicher Kristallachsenorientierung die Eigenspannungen entwickeln. Steht die Kristallachse senkrecht zur Belastungsrichtung, dann entstehen im Druckversuch hohe Zugspannungen in der basalen Ebene. Positive Normalspannungen unterstützen die Rißbildung. Es kann daher erwartet werden, daß sich Risse bevorzugt in Ebenen ausbreiten, die die Belastungsrichtung enthalten. Dies stimmt sehr gut mit experimentellen Befunden überein. Die lokalen Spannungen können somit als wesentliche Parameter für die Beschreibung von Schädigungsvorgängen dienen. Die berechneten Eigenspannungen erreichen jedoch nicht die anhand von Experimenten abgeschätzte Größenordnung. Weitere Untersuchungen müssen zeigen, wie andere Definitionen des Tensors der inelastischen Nachgiebigkeitsraten \underline{M} dieses Ergebnis beeinflussen.

Für die Beurteilung der unterschiedlichen Definitionen des Tensors \underline{M} wäre eine parallele Simulation des Monokristalls mit Hilfe von finiten Elementen hilfreich. Die mit dem

Stoffgesetz berechneten Eigenspannungen könnten mit FEM-Rechnungen verglichen werden. Ein Vergleich der FEM-Rechnungen mit Experimenten könnte klären, in welchem Maße die Korngrenzen (im Sinne von Versetzungsquellen) das Verhalten der einzelnen Einkristalle eines Polykristalls beeinflussen. Die Implementierung des monokristallinen Stoffgesetzes bereitet prinzipiell keine Schwierigkeiten.

In einem nächsten Schritt können berechnete Verformungstexturen mit den im Experiment beobachteten verglichen werden.

Das vorgestellte selbstkonsistente Stoffgesetz charakterisiert die innere Struktur des Polykristalls durch interne Zustandsfunktionen, die die Eigenspannungen und die Versetzungsdichten repräsentieren. Diese Funktionen sind im Raum der möglichen Kristallorientierungen definiert. Die im Rahmen der Berechnung des einaxialen Zugversuches durchgeführte Diskretisierung der Zustandsfunktionen ist im Zusammenhang mit der Entwicklung des Stoffgesetzes das geeignete Verfahren. Soll das Stoffgesetz zur Berechnung technischer Bauteile verwendet werden, dann ist der zur Festlegung der internen Zustandsfunktionen benötigte Speicherplatz erheblich zu groß.

Onat u. Leckie (1988) entwickelten ein Verfahren, um eine skalarwertige Funktion eines Einheitsvektors \vec{n} in eine Fourier-Reihe zu entwickeln. Die Koeffizienten dieser Reihe sind zu symmetrischen Tensoren gerader Stufenzahl zusammengefaßt. Werden die internen Zustandsfunktionen durch eine an einer geeigneten Stelle abgebrochene Tensor-Reihe ersetzt, dann können aus den Differentialgleichungen des Stoffgesetzes gegebenenfalls Differentialgleichungen für die Koeffizienten-Tensoren ermittelt werden. Es stellt sich jedoch die Frage, wie eine Tensorreihe für die tensorwertige interne Zustandsfunktion zu definieren ist.

Mit dem hier skizzierten Verfahren ist es in Zukunft vielleicht möglich, eine Brücke zwischen den phänomenologischen Stoffgesetzen und den mikromechanisch orientierten Formulierungen zu schlagen. Zwar wird es mit einem vertretbaren Aufwand nicht möglich sein, ein makroskopisches Stoffgesetz für einen Polykristall nur aus den mikroskopischen Strukturen abzuleiten, jedoch können wertvolle Informationen über die Struktur der konstitutiven Beziehungen des Polykristalls gewonnen werden.

Literaturverzeichnis

- Aravas, N.; Aifantis, E. C.: On the Geometrie of Slip and Spin in Finite Plastic Deformation. *International Journal of Plasticity*, Vol. 7 (1991) 141-160
- Ashby, M. F.; Duval, P. : The Creep of Polycrystalline Ice. *Cold Regions Science and Technology*, 11 (1985) 285-300
- Babovsky, H.; Beth, T.; Neunzert, H.; Schulze-Reese, M.: *Mathematische Methoden in der Systemanalyse: Fourieranalysis. Mathematische Methoden in der Technik*, Bd. 5 , Teubner, Stuttgart (1987)
- Barnes, P.; Tabor, D.; Walker, F. R. S. and J. C. F.: The Friction and Creep of Polycrystalline Ice. *Proc. Roy. Soc. Lond. A.*, Volume 324 (1971) 127-155
- Betten, Josef: *Tensorrechnung für Ingenieure. Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik*, Teubner, Stuttgart (1987)
- Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun (1980)
- Bruhns, O. T.: On the Constitutive Relations of Austenitic Strainless Steeles. in: *Constitutive Laws for Engineering Materials - Theorie and Applications* (ed: Dessai, C. S. et al.), Vol.1, Elsevier, New York (1987) 675-682
- Budiansky, B.; Wu, T. T.: Theoretical Prediction of Plastic Strains of Polycrystals. *Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.* (1962) 1175- (zitiert nach: Hutchinson, 1970)
- Canova, G. R.: Effect of Texture and Grain Shape on Anisotropy. *Revue Phys. Appl.* 23 (1988) 533-548
- Champeney, D. C.: *Fourier Transforms and their Physical Applications*. Academic Press, London, New York (1973)
- Cole, D. M.: Preparation of Polycrystalline Ice Specimens for Laboratory Experiments. *Cold Regions Science and Technology*, Vol. 1 (1979) 153-159
- Dantl, G.: Die elastischen Moduln von Eis-Einkristallen. *Physik der kondensierten Materie*, Bd. 7, Springer-Verlag, Berlin (1968) 390-397

- Doetsch, Gustav:** Handbuch der Laplace-Transformation. Verlag Birkhäuser Basel (1950)
- Eshelby, J. D.:** Determination of Elastic Field of Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. Proc. Roy. Soc. Lond. A., Volume 241 (1957) 376-396
- Faivre, G.:** Hétérogénéités Ellipsoïdales dans un Milieu Elastique Anisotrope. Le Journal de Physique, Tome 32 (1971) 325-331
- Fletcher, N. H.:** The Chemical Physics of Ice. Cambridge University Press (1970) (zitiert nach: Glen, 1975)
- Fukuda, Akeharu; Higashi, Akira:** X-Ray Diffract. Topograph. Studies of Deform. Behaviour of Ice Single Crystals. Physics of Ice, Proc. of Int. Sym. on Phys. of Ice, München 1968 (1969) 239-250
- Fukuda, Akeharu; Shoji, Hitoshi:** A Dislocation Model of the Plastic Deformation of Single Crystals of Ice. Cold Regions Science and Technology, 04 (1981) 175-185
- Güldenpfennig, Jürgen:** Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elastoplastischer Wellen. Mitt. Inst. Mech., 12, Ruhr-Univ. Bochum (1977)
- Glen, John W.:** The Flow Law of Ice. Int. Ass. of Scientific Hydrology, Symposium of Chamonix, Pub. No. 47 (1958) 171-183
- Glen, John W.:** The Physics of Ice. CRREL, Monograph II-C2a (1974)
- Glen, John W.:** The Mechanics of Ice. CRREL, Monograph II-C2b (1975)
- Glockner, P. G.; Szyszkowski, W.:** An Engineering Multiaxial Constructive Model for Nonlinear Time-dependent Materials. International Journal of Solids Structures, Vol. 26, No. 1, 73-82 (1990)
- Gold, L. W.:** Deformation Mechanisms in Ice. Ice and Snow, The M. I. T. Press (1963)
- Griggs, D. T.; Coles, N. E.:** Creep of Single Crystals of Ice. SIPRE Tech., Rep. 11 (1954) 24 (zitiert nach: Hobbs, 1974)
- Haasen, Peter:** Physikalische Metallkunde. Springer-Verlag, Berlin (1984)
- Harren, S. V.:** The Finite Deformation of Rate-dependent Polycrystals- I. A Self-consistent Framework. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 39, No. 3 (1991) 345-360
- Hawkes, Ivor; Mellor, Malcolm:** Deformation and Fracture of Ice under Uniaxial Stress. Journal of Glaciology, Vol. 11, No. 061 (1972) 103-131

- Higashi, Akira:** Mechanisms of Plastic Deformation in Ice Single Crystals. Physics of Snow and Ice, Part 1, Sapporo Conference 1966 (1967) 277-289
- Higashi, Akira:** Mechanical Properties of Ice Single Crystals. Physics of Ice, Proc. of Int. Sym. on Phys. of Ice, München 1968 (1969) 197-212
- Hill, R.:** Continuum Mikro-Mechanics of Elastoplastic Polycrystals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 13 (1965) 89-101
- Hobbs, Peter V.:** Ice Physics. Clarendon Press Oxford (1974)
- Hutchinson, J. W.:** Elastic-Plastic Behaviour of Polycrystalline Metals and Composites. Proc. Roy. Soc. Lond. A., Volume 319 (1970) 247-272
- Hutchinson, J. W.:** Bounds and Self-Consistent Estimates for Creep of Polycrystalline Materials. Proc. Roy. Soc. Lond. A., Volume 348 (1976) 101-127
- Hutchinson, J. W.:** Creep and Plasticity of Hexag. Polycrystals as Related to Single Crystal Slip. Metallurgical Transactions A, Volume 8A (1977) 1465-1469
- Jacka, T. H.; Maccagnan, M.:** Ice Crystallograp. a. Strain Rate Changes with Strain in Compres. and Extens.. Cold Regions Science and Technology, 08 (1984) 269-286
- Jones, S. J.; Gilra, N. K.:** Dislocations in Ice Observed by X-Ray Topography. In: Physics and Chemistry of Ice (Ed.: Ed. Whalley, S.J. Jones, L.W. Gold), Roy. Soc. Can., Ottawa (1973) 344-349
- Jones, S. J.; Glen, J. W.:** The Mechanical Properties of Single Crystals of Pure Ice. Journal of Glaciology, Vol. 08, No. 054 (1969) 463-473
- Jones, Stephen J.; Brunet, Jean-Guy:** Deformation of Ice single Crystals Close to the Melting Point. Journal of Glaciology, Vol. 21, No. 085 (1978) 445-455
- Karr, Dale G.; Choi, Kyungsik:** A Three-dimensional Constitutive Damage Model for Polycrystalline Ice. Mechanics of Materials 8 (1989) 55-66
- Kinoshita, N.; Mura, T.:** Elastic Fields of Inclusions in Anisotropic Media. phys. stat. sol. (a) 5 (1971) 759-768
- Klingebeil, Eberhard:** Tensorrechnung für Ingenieure. B. I., Mannheim (1966)
- Kocks, U. F.; Westlake, D. G.:** Trans. TMS-AIME, Vol. 239 (1967) 1107 (zitiert nach: Hutchinson, 1977)
- Korsgaard, J.:** On the Representation of Symmetric Tensor-valued Isotropic Functions. International Journal of Engineering Science, Vol. 28, No. 12, 1331-1346 (1990)

-
- Kröner, Ekkehart: Zur Plastischen Verformung des Vielkristalls. *Acta Metallurgica*, Vol. 9 (1961) 155-161
- Kröner, Ekkehart: Berechnung der elast. Konst. des Vielkristalls aus den Konst. des Einkristalls. *Zeitschrift für Physik*, Bd. 151 (1958) 504-518
- Krajcinovic, D.: Continuous Damage Mechanics Revisited: Basic Concepts and Definitions. *J. Appl. Mech.* 52 (1985) 829-834
- Laws, N.; McLaughlin, R.: Self-Consist. Estimates for Viscoelastic Creep Compliances of Composite Materials. *Proc. Roy. Soc. Lond. A.*, Volume 359 (1978) 251-273
- Le Gac, H.; Duval, P.: Constitutive Relations for the Non Elastic Deformation of Polycrystalline Ice. *Physics and Mechanics of Ice, Symposium Copenhagen 1979* (1980) 51-59
- Lehmann, Theodor: *Elemente der Mechanik I-IV*. Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf (1974)
- Lile, R. C.: The Effect of Anisotropy on the Creep of Polycrystalline Ice. *Journal of Glaciology*, Vol. 21, No. 085 (1978) 475-483
- Mai: Étude par Topographie X du Comportement Dynamique des Dislocations dans la Glace. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)*, Sér.B, Tom.282, No 22 (1976) 515-518 (zitiert nach: Whitworth, 1978)
- Mehrabadi, M. M.; Cowin, S. C.: Eigentensors of Linear Anisotropic Elastic Materials. *Q. Jl Mech. appl. Math.*, Vol. 43, Pt. 1 (1990) 15-41
- Mellor, Malcolm; Cole, David M.: Deformation and Failure of Ice under Constant Stress or Constant Strain-Rate. *Cold Regions Science and Technology*, 05 (1982) 201-219
- Mellor, Malcolm; Testa, Richard: Creep of Ice under Low Stress. *Journal of Glaciology*, Vol. 08, No. 052 (1969) 147-152
- Michel, Bernard: *Ice Mechanics*. Les Presses de l'Université Laval, Québec (1978)
- Molinari, A.; Canova, G. R.; Ahzi, S.: A Self Consistent Approach of the Large Deform. Polycrystal Viscoplasticity. *Acta Metall.*, Vol. 35, No. 12 (1987) 2983-2994
- Muguruma, Jiro: Influence of the Surface Layer on the Plastic Deform. of Ice Single Crystals. *Physics of Ice, Proc. of Int. Sym. on Phys. of Ice, München 1968* (1969) 213-216

-
- Nemat-Nasser, S.:** Overall Stresses and Strains in solids with Microstructure. In: Modelling Small Deformations of Polycrystals (Ed.: J. Gittus, J. Zarka), Elsevier, London (1986) 41-64
- Nye, J. F.:** Physical Properties of Crystals, London (1985)
- Ohno, N. S. et al.:** J. Eng. Mater. Technol., Vol. 07 (1985) 1-6 (zitiert nach: Karr, 1988)
- Orowan, E.:** Crystal Plasticity III. Zeitschrift für Physik, Vol. 89 (1934) 614-635
- Parks, D. M.; Ahzi, S.:** Polycrystalline Plastic Deformation and Texture Evolution for Crystals Lacking Five Independent Slip Systems. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 38, No. 5 (1990) 701-724
- Pohé, J.; Bruhns, O. T.:** On a Constitutive Law for Polycrystalline Ice Based on the Concept of Internal Variables. Proceedings of the 11th International Symposium on Ice, IAHR 92, Banff, Alberta, Canada (1992) 49-60
- Pohé, J.:** persönliche Mitteilung (1992)
- Ramseier, R. O.:** Growth and Mechanical Properties of River and Lake Ice. Ph. D. thesis, Laval University (1972) (zitiert nach: Weertman, 1973)
- Readey, D. W.; Kingery, W. D.:** Plastic Deformation of Single Crystal Ice. Acta Metallurgica, Vol. 12 (1964) 171-178
- Reuss, A.:** Berechnung der Fließspannungen von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung von Einkristallen. Z. angew. Math. Mech. (1929) 49-58 (zitiert nach: Kröner, 1958)
- Rigsby, George P.:** Effect of Hydrost. Pressure on Velocity of Shear Defor. of Single Ice Crystals. Journal of Glaciology, Vol. 03, No. 024 (1958) 273-278
- Rigsby, George P.:** Crystal Orientation in Glacier and in Experimentally Deformed Ice. Journal of Glaciology, Vol. 03, No. 027 (1960) 589-606
- Sachs, G.:** Z. Verein Deut. Ing., Vol. 72 (1924) 734 (zitiert nach: Canova, 1988)
- Shoji, H.; Higashi, A.:** A Deformation Mechanism Map of Ice. Journal of Glaciology, Vol. 21, No. 085 (1978) 419-427
- Shoumsky, P. A.:** The Mechanism of Ice Straining and its Recrystallization. Int. Ass. of Scientific Hydrology, Symposium of Chamonix, Pub. No. 47 (1958) 244-248
- Sinha, N. K.:** Short-Term Rheology of Polycrystalline Ice. Journal of Glaciology, Vol. 21, No. 085 (1978) 457-473

- Steinemann, Samuel:** Experimentelle Untersuchungen zur Plastizität von Eis. Beiträge zur Geologie der Schweiz, Hydrologie Nr.10, Kümmerly & Frey AG., Geographischer Verlag, Bern (1958)
- Taylor, G. I.:** Plastic Stains in Metals. J. Inst. Met., Vol. 62 (1938) 307-324 (zitiert nach: Canova, 1988)
- Voigt, W.:** Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper. Wied. Ann. 38 (1889) 573-587 (zitiert nach: Kröner, 1958)
- Wakahama, Gorow:** On the Plastic Deformation of Single Crystal of Ice. Physics of Snow and Ice, Part 1, Sapporo Conference 1966 (1967) 291-311
- Waller, Heinz; Krings, Wolfgang:** Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik. B. I., Zürich (1975)
- Weertman, J.:** Creep of Ice. Physics and Chemistry of Ice, Roy. Soc. Can., Ottawa (1973)
- Whitworth, R. W.:** The Core Structure and the Mobility of Dislocations in Ice. Journal of Glaciology, Vol. 21, No. 085 (1978) 341-359

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoelasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepassten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chrosielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chrosielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation
Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller:
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenbau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann:
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 82**