



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

O. T. Bruhns

Große plastische Formänderungen
- Bad Honnef 1991

Heft Nr. 78



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

**INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

O. T. BRUHNS

**GROSSE PLASTISCHE FORMÄNDERUNGEN
BAD HONNEF 1991**

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 78

DEZEMBER 1991

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

© 1991 Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns
Lehrstuhl für Mechanik I
Ruhr-Universität Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung
(Fotokopie, Mikrokopie) bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

VORWORT

In der Woche vom 16.09. - 20.09.1991 fand im Physikzentrum Bad Honnef das 83. WE-Heraeus-Seminar statt. Dieses Seminar stand unter dem Thema "Große plastische Formänderungen" und war nach entsprechenden Veranstaltungen in den Jahren 1977, 1979, 1982, 1985 und 1988 bereits die sechste Veranstaltung zu diesem Thema. Wie in den Vorjahren wurden auf dem Seminar inhaltlich die folgenden vier Schwerpunkte behandelt:

- physikalische und kontinuumsmechanische Grundlagen inelastischen Materialverhaltens
- Berechnung großer plastischer Formänderungen mit Hilfe von analytischen sowie numerischen Methoden
- experimentelle Grundlagenuntersuchungen
- technische Anwendungen.

Das vorliegende Heft enthält die Kurzfassungen der auf dem Seminar gehaltenen Vorträge. Es soll damit auch jedem Teilnehmer die Gelegenheit geben, sich nochmals in aller Ruhe mit dem Vorgetragenen auseinanderzusetzen.

Das Gelingen einer Tagung wird neben dem wissenschaftlichen Programm, zu dem die Teilnehmer selbst durch Vortrag und intensive Diskussion beitragen, ganz entscheidend auch durch die Organisation der Veranstaltung bestimmt. Es ist mir deshalb ein Anliegen, meinem Mitarbeiter, Herrn Dr.-Ing. B. Kaempf, recht herzlich für seine viele Mühe im Zusammenhang mit der Vorbereitung und Durchführung des Seminars zu danken. Ein ganz besonderer Dank gilt auch der WE-Heraeus-Stiftung, die durch ihre großzügige Förderung sehr zum Gelingen der Veranstaltung beigetragen hat.

VERZEICHNIS DER TEILNEHMER

Altenbach, H.	TU Magdeburg
Altenbach, J.	TU Magdeburg
An, Q.	TH Darmstadt
Anthony, K.H.	Universität-GH Paderborn
Bederna, Ch.	Universität Hannover
Bednarczyk, H.	Universität Stuttgart
Bischoff-Beiermann, B.	Ruhr-Universität Bochum
Bluhm, J.	Universität-GH Essen
Bochmann, E.	Universität Hannover
Bonn, R.	GH Kassel
Brünig, M.	Universität Dortmund
Bruhns, O.-T.	Ruhr-Universität Bochum
Brünig, M.	Universität Dortmund
Diehl, H.	Audi AG. Ingolstadt
Dorsch, V.	Universität Hannover
Dung, N.L.	TU Hamburg-Harburg
Ehlers, W.	Universität-GH Essen
El-Dsoki, T.	Universität Hannover
Fedosseev, A.	RWTH Aachen
Foerster, A.	Universität Erlangen
Galal, A.	Universität Hannover
Günther, H.	FH Bielefeld
Haupt, P.	GH Kassel
Helisch, W.	RWTH Aachen
Imhof, M.	TH Darmstadt
Kaempf, B.	Ruhr-Universität Bochum
Kamlah, M.	GH Kassel
Kikillus, U.	Ruhr-Universität Bochum
Koczyk, S.	TU Magdeburg
Körber, J.	Ruhr-Universität Bochum
Kolling, A.	MPI
Köppe, H.	TU Magdeburg
Kollmann, F.G.	TH Darmstadt

Kunkel, R.	TH Darmstadt
Lachner, D.	TU München
Lassota, A.	TH Darmstadt
Mannl, V.	TU München
Miehe, C.	Universität Hannover
Mittelbach, M.	Ruhr-Universität Bochum
Niemunis, A.	Universität Karlsruhe
Ostrowski, L.	Universität Hannover
Paulun, J.	FH Holzminden
Pawelski, O.	MPI
Pohè, J.	Ruhr-Universität Bochum
Rammelkamp, J.	TU Hamburg-Harburg
Rasp, W.	MPI
Reigl, M.	TU München
Scherzer, M.	Institut für Mechanik, Chemnitz
Schieße, P.	Ruhr-Universität Bochum
Schumacher, R.	RWTH Aachen
Steck, E.	TU Braunschweig
Stein, E.	Universität Hannover
Tamme, A.	Institut für Mechanik, Chemnitz
Tsakmakis, Ch.	TH Darmstadt
Westerhoff, B.	Ruhr-Universität Bochum
Wriggers, P.	TH Darmstadt

VERZEICHNIS DER VORTRAGSTHEMEN

	Seite
C. Miehe, E. Stein: Ein Modell zur Finiten Elasto-Visko-Plastizität: Formulierung und Numerische Integration	8
C. Miehe: Zur Formulierung Multiplikativer Elastoplastizität	16
H.-P. Hackenberg, F.G. Kollmann: A Methodology for Formulating Large Strain Viscoplastic Constitutive Equations	21
Q. An, F.G. Kollmann: Viskoplastische Schalentheorie bei finiten Verzerrungen	27
H. Altenbach, A. Zolochovsky: Verallgemeinerte Deformationsgesetze und Versagenskriterien für Werkstoffe, die im Experiment Effekte höherer Ordnung aufweisen	31
H. Köppe: Verallgemeinerte viskoplastische Materialmodelle und ihre Implementierung in FE-Programme	34
R. Bonn, P. Haupt: Rotationssymmetrische inhomogene Deformationen in der finiten Plastizitätstheorie mit Verfestigung	39
P. Haupt, M. Kamlah, Ch. Tsakmakis: Geschwindigkeitsunabhängige Thermoplastizität als Grenzfall für langsame Prozesse	43
J. Paulun: Der plastische Spin	47
A. Tamme: Eine rationale Beschreibung der Grundmodelle der elastisch- plastischen Strukturmechanik	48

	Seite
S. Koczyk: Überlagerungen von Grundbeanspruchungen bei großen elastischplastischen Stabverformungen	52
M. Reigl: Freies elastoplastisches Biegen von schlanken Stäben	55
H. Günther: Versetzungsdynamik - der kinetische Energieterm	58
K.-H. Anthony: Versetzungsdynamik: Thermodynamische Ansätze	61
O. Pawelski, W. Rasp, A. Cremer: Physikalische und mathematische Simulation von stranggegossenen Stahlprodukten mit teilweise schmelzflüssigem Querschnitt	66
E. Doege, E. Bochmann: Reibung metallischer Werkstoffe als kritisches Phänomen	70
T. El-Dsoki: Die Berücksichtigung der Anisotropie in der Blechumformung	74
O. Pawelski, W. Rasp, A. Kolling: Zur Theorie des Dieless Drawing	78
E. Doege, M.S. Ragab, G.M.A. Galal: Numerical and Experimental Simulation of Ironing Process to Improve the Force Equilibrium Analysis Results	82
V. Mannl: Verbesserung der Unteren Schranke für das Strangpressen beliebiger Profile	86
P. Wriggers, C. Miehe: Zur Behandlung von nichtlinearen thermomechanischen Kontaktproblemen	90

	Seite
J. Bluhm, W. Ehlers: Neuere Überlegungen zur Berechnung nichtlinearer Prozesse kinematisch verfestigender Materialien	94
J. Rammelkamp, N.L. Dung, O. Mahrenholtz: Fehleruntersuchungen bei der Simulation von Umformpro- blemen mit Hilfe der FEM	98
A. Fedosseev, P. Wagner, G. Gottstein: Simulation des Walzprozesses mit Hilfe komplexer Strömungs- potentiale zur Beschreibung von Texturinhomogenitäten	102
W. Helisch, J. Betten: Irreduzible Invariantensysteme eines vierstufigen Tensors A_{ijkl} im zwei- und dreidimensionalen EUKLIDischen Raum	106
Ch. Tsakmakis: Über die Wahl der Variablen und das Torsionsproblem bei inkompressiblem Materialverhalten	110
B. Bischoff-Beiermann: Über die Berücksichtigung mikromechanischer Vorgänge bei der Formulierung eines makroskopischen Stoffgesetzes für polykristallines Eis	114
J. Pohé: Ein thermodynamisch konsistentes Stoffgesetz für poly- kristallines Eis	118
H. Bednarczyk: Die IR-Absorptionsspektren von Kunststoffen bei großen Verformungen	122
E.A. Steck: Constitutive Equations for the Inelastic Behaviour of Metals Based on Stochastic Models	128
P. Haupt, M. Kamlah, Ch. Tsakmakis: Modellierung des Verfestigungsverhaltens bei zyklischen plastischen Deformationen	132

	Seite
D. Besdo, L. Ostrowski:	
Experimentelle Bestimmung und phänomenologische Modellierung des materiellen Kriech-Ratchetting	136
D. Lachner:	
Cosserat-Kontinuum für plastische Umformung von Polykristallen	143
V. Dorsch:	
Vergleich verschiedener Integrationsverfahren für ein elastischplastisches Stoffgesetz im Dehnungsraum	146

Ein Modell zur Finiten Elasto-Visko-Plastizität: Formulierung und Numerische Integration

C. MIEHE & E. STEIN

Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik
Universität Hannover, D-3000 Hannover 1, Appelstr. 9a

1. Einleitung

Wir diskutieren ein konstitutives Modell zur (*multiplikativen*) *Elasto-Visko-Plastizität mit hyperelastischem Teil-Werkstoffverhalten*, das sich zur numerischen Implementation für Standardprobleme der Umformtechnik metallischer Werkstoffe eignet. Neue Aspekte der vorgeschlagenen Formulierung sind die (i) *Konstruktion sämtlicher Evolutionsgleichungen* für die internen Variablen aus einem Minimalprinzip basierend auf einer Penalty-Erweiterung der viskoplastischen Dissipationsfunktion (Verallgemeinerung der Drucker'schen Strategie: Konvexität & Normalität ergibt kanonische *symmetrische* Formulierung) und die Einführung eines speziellen (ii) *logarithmischen elastischen Teilstoffgesetzes*. Die Kombination von (i) und (ii) in Verbindung mit einem (iii) *Exponentialalgorithmus zur numerischen Integration der viskoplastischen Fließregel* ermöglicht die Implementation von in der linearen Viskoplastizitätstheorie üblichen Projektionsalgorithmen, die darüberhinaus im Fall der J_2 -Theorie algorithmisch exakt die Bedingung der plastischen Inkompressibilität erfüllen.

2. Konstitutives Modell zur Elasto-Visko-Plastizität

2.1. Zur Geometrie Multiplikativer Elasto-Plastizität. Sei $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ die Referenzkonfiguration des betrachteten Körpers und $\varphi_t(\mathbf{X}) : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die nichtlineare Deformationsabbildung zur Zeit $t \in \mathbb{R}_+$. In einer Nachbarschaft $\mathcal{N}(\mathbf{X})$ jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ betrachten wir die multiplikative Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$ der linearen Tangentenabbildung $\mathbf{F} := \nabla_{\mathbf{X}} \varphi_t(\mathbf{X})$ in einen elastischen Anteil \mathbf{F}^e und einen plastischen Anteil \mathbf{F}^p . \mathbf{F}^p definiert *lokal* eine makro-spannungs-freie *plastische Zwischenkonfiguration*, deren Lage wir als *gegeben* durch eine konstitutive Annahme betrachten. Mehr Details, insbesondere zur mikromechanischen Motivation der multiplikativen Zerlegung, finden sich z.B. in LEE [1969], ASARO [1983], MORAN, ORTIZ & SHIH [1990].

Im Rahmen einer räumlichen Formulierung der finiten Elastoplastizität (Bezug auf die Momentankonfiguration, vgl. SIMO & MIEHE [1991]) betrachten wir als Verzerungsmaß den elastischen Finger Tensor

$$\mathbf{b}^e := \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT}, \quad (2.1)$$

ein auf der Momentankonfiguration $\varphi_t(\mathcal{B})$ definiertes Tensorfeld. Materielle Zeitableitung von (2.1) ergibt

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{l} \mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \mathbf{l}^T + \mathbf{L}_v \mathbf{b}^e \quad (2.2)$$

mit dem räumlichen Geschwindigkeitsgradienten $\mathbf{l} := \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ und der Lie Zeitableitung (Oldroyd Fluß) $\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{b}^e := \mathbf{F}\dot{\mathbf{C}}^{p-1}\mathbf{F}^T$ von \mathbf{b}^e . $\mathbf{C}^{p-1} := [\mathbf{F}^p{}^T\mathbf{F}^p]^{-1}$ ist der inverse plastische rechte Cauchy–Green Tensor, ein auf der Referenzkonfiguration \mathcal{B} definiertes Tensorfeld.

2.2. Freie Energie, Spannungen und Plastische Dissipation. Sei ψ die Änderung der freien Energie während des isothermen elasto–visko–plastischen Prozesses von der Referenz– zur Momentankonfiguration. Wir nehmen an, daß ψ gegeben ist durch den konstitutiven Ausdruck

$$\psi = \hat{\psi}(\mathbf{b}^e, \alpha) \quad (2.3)$$

Dabei genügt die *freie Energie Funktion* $\hat{\psi}(\mathbf{b}^e, \alpha): \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ der Normalisierungsbedingung $\hat{\psi}(\mathbf{1}, 0) = 0$ für den Referenzzustand. $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ist eine phänomenologische interne Variable mit der Dimension einer Verzerrung (plastische Vergleichsdehnung), die die gespeicherte freie Energie infolge von Mikro–Spannungs–Feldern (verursacht durch Versetzungen und Punktdefekte) beschreibt. Die räumliche Formulierung (2.3) ist auf *isotropes Werkstoffverhalten* beschränkt als Folge der Objektivität–Forderung $\hat{\psi}(\mathbf{b}^e, \bullet) = \hat{\psi}(\mathbf{Q}\mathbf{b}^e\mathbf{Q}^T, \bullet) \quad \forall \mathbf{Q} \in SO(3)$ wobei $SO(3)$ die spezielle orthogonale Gruppe ist.

Die Clausius Planck Ungleichung (interne Entropieproduktion) liest sich für den isothermen Fall

$$\mathcal{D}^p := \Theta\gamma_{\text{int}} := \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d} - \dot{\psi} \geq 0 \quad (2.4)$$

mit dem Kirchhoff Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ und $\mathbf{d} := \text{sym}(\mathbf{l})$. Zeitdifferenzierung von (2.3) ergibt

$$\dot{\psi} = [\partial_{\mathbf{b}^e}\hat{\psi}\mathbf{b}^e] \cdot [2\mathbf{l} + (\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{b}^e)\mathbf{b}^{e-1}] + \partial_{\alpha}\hat{\psi} \cdot \dot{\alpha} \quad (2.5)$$

Wegen der Isotropie sind $\partial_{\mathbf{b}^e}\hat{\psi}$ und \mathbf{b}^e *kommutativ*. Wir erhalten durch Einsetzen von (2.5) in (2.4) und Anwendung der standard Argumentation der Rationalen Thermodynamik, siehe z.B. COLEMAN & GURTIN [1967], die konstitutiven Gleichungen

$$\boldsymbol{\tau} = 2\partial_{\mathbf{b}^e}\hat{\psi}(\mathbf{b}^e, \alpha)\mathbf{b}^e \quad , \quad \beta := \partial_{\alpha}\hat{\psi}(\mathbf{b}^e, \alpha) \quad (2.6)$$

für die Kirchhoff Spannungen $\boldsymbol{\tau}$, und die interne variable β konjugiert zu α (*Definition*). Damit reduziert sich die Clausius Planck Gleichung (2.4) auf den Ausdruck

$$\mathcal{D}^p = \boldsymbol{\tau} \cdot \left[-\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{b}^e)\mathbf{b}^{e-1} \right] + \beta \cdot [-\dot{\alpha}] \geq 0 \quad (2.7)$$

für die viskoplastische Dissipation. Diese Formulierung findet sich in der Arbeit von SIMO & MIEHE [1991].

2.3. Assoziierte Viskoplastische Evolutionsgleichungen. Assoziierte Evolutionsgleichungen lassen sich aus der Minimierung eines Penalty–Funktional basierend auf einer Erweiterung der Dissipationsfunktion ableiten, siehe z.B. MÜLLER–HOPPE & STEIN [1990]. Wir schreiben dazu die viskoplastische Dissipation (2.7) als ein inneres Produkt *thermodynamischer Kräfte* \mathbf{f} und *thermodynamischer Flüsse* \mathbf{e}

$$\mathcal{D}^p = \hat{\mathcal{D}}^p(\mathbf{f}, \mathbf{e}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e} \geq 0 \quad (2.8)$$

Dabei ist $\hat{\mathcal{D}}^p(\mathbf{f}, \mathbf{e}): \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}_+$ die viskoplastische Dissipationsfunktion basierend auf den Definitionen $\mathbf{f} := \{\boldsymbol{\tau}, \beta\}$ und $\mathbf{e} := \{-\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{b}^e)\mathbf{b}^{e-1}, -\dot{\alpha}\}$. Als wesentliche

Charakteristik der Thermoviskoplastizität führen wir ein *elastisches Gebiet* \mathbb{E}_f im Raum der thermodynamischen Kräfte ein

$$\mathbb{E}_f := \{ f \in \mathbb{R}^7 \mid \hat{\phi}(f) \leq 0 \} \quad (2.9)$$

basierend auf der konvexen *Fließkriterium Funktion* $\hat{\phi}(f): \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}$. Wir betrachten nun das Penalty Funktional $\hat{\mathcal{P}}^p(f, e): \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$\hat{\mathcal{P}}^p(f, e) := -\hat{\mathcal{D}}^p(f, e) + c \hat{\gamma}[\hat{\phi}^+(f)] \quad (2.10)$$

Hierbei ist $c \in \mathbb{R}_{+\setminus 0}$ der Penalty Parameter, $\hat{\gamma}(\phi^+): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine monoton steigende C^1 *Penalty Funktion*, die der Bedingung $\hat{\gamma}(0) = 0$ genügt und schließlich $\hat{\phi}^+(f): \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}_+$ definiert zu

$$\hat{\phi}^+(f) := \begin{cases} 0 & \text{für } \hat{\phi}(f) \leq 0, \\ \hat{\phi}(f) / \kappa_0 & \text{für } \hat{\phi}(f) > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

die *viskoplastische Belastungsfunktion*. κ_0 ist eine Skaliergröße (z.B. Anfangsfließspannung), die die Dimensionsunabhängigkeit von ϕ^+ bewirkt. Wir betrachten nun das Minimalproblem

$$\hat{f}^* = \text{Arg} \left\{ \underset{f \in \mathbb{R}^7}{\text{Min}} \hat{\mathcal{P}}^p(f, \hat{e}^*) \right\} \quad (2.12)$$

mit dem Minimierer \hat{f}^* von $\hat{\mathcal{P}}^p$ bei *festgehaltenem* $e = \hat{e}^*$. Die Inversion von (2.12) bestimmt die aktuellen thermodynamischen Flüsse \hat{e}^* in Abhängigkeit der aktuellen thermodynamischen Kräfte \hat{f}^*

$$\hat{e}^* = \lambda \partial_f \hat{\phi}(\hat{f}^*) \quad \text{mit} \quad \lambda := c \frac{d}{d\phi^+} [\hat{\gamma}(\hat{\phi}^+(\hat{f}^*))] \geq 0 \quad (2.13)$$

und so explizit die *assoziierten viskoplastischen Evolutionsgleichungen*

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v b^e) b^{e-1} &= \lambda \partial_\tau \hat{\phi}(\tau, \beta) \\ -\dot{\alpha} &= \lambda \partial_\beta \hat{\phi}(\tau, \beta) \end{aligned} \right\} \quad \text{mit} \quad \lambda := c \frac{d}{d\phi^+} [\hat{\gamma}(\hat{\phi}^+(\tau, \beta))] \geq 0 \quad (2.14)$$

Hierbei spielt der Parameter $c \in \mathbb{R}_{+\setminus 0}$ die Rolle eines zusätzlichen Materialparameters (Viskosität).

2.4. Modellproblem: J_2 -Theorie der Viskoplastizität. Im assoziierten Fall sind die thermoviskoplastischen Evolutionsgleichungen vollständig bestimmt durch *drei fundamentale konstitutive Funktionen*: die *freie Energie Funktion* $\hat{\psi}$, in (2.3), die *Fließkriterium Funktion* $\hat{\phi}$ in (2.9) und die *Penalty Funktion* $\hat{\gamma}$ in (2.10). Als einfaches Modellproblem betrachten wir folgende explizite Formulierung dieser Funktionen, die sich für qualitative Untersuchungen zur Metallplastizität eignen:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(b^e, \alpha) &= \left\{ \frac{1}{2} \kappa [\ln J^e]^2 + \frac{1}{4} \mu \text{tr} [\ln \bar{b}^e]^2 \right\} + \left\{ \frac{1}{2} h \alpha^2 \right\} \\ \hat{\phi}(\tau, \beta) &= \|\text{dev } \tau\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\beta + y_0] \\ \hat{\gamma}(\phi^+) &= \frac{1}{\epsilon + 1} [\phi^+]^{\epsilon+1} \quad , \quad \kappa_0 := \sqrt{\frac{2}{3}} y_0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die freie Energie Funktion enthält einen entkoppelten makroskopischen und mikroskopischen Anteil, $\hat{\psi} = \hat{\psi}_{macro}^e(\mathbf{b}^e) + \hat{\psi}_{micro}^e(\alpha)$, wobei der letztere assoziiert ist mit linearer mechanischer Verfestigung charakterisiert durch den Modul h . Der makroskopische Teil enthält die entkoppelten volumetrisch - isochore mechanische Anteile $\hat{\psi}_{macro}^{e,vol}(J^e) + \hat{\psi}_{macro}^{e,iso}(\bar{\mathbf{b}}^e)$ formuliert in Abhängigkeit der Logarithmen von $J^e := \sqrt{\det \mathbf{b}^e}$ und $\bar{\mathbf{b}}^e := J^{e-2/3} \mathbf{b}^e \in SL(3)$, wobei $SL(3)$ die spezielle lineare Gruppe mit Einheitsdeterminante bezeichnet. κ ist der makroskopische Kompressionsmodul und μ der Schubmodul. Die Fließkriteriumfunktion $\hat{\phi}$ ist die standard J_2 v. Mises Funktion formuliert für die Kirchhoffspannungen wobei $y_0 \in \mathbb{R}_+$ die Anfangsfließspannung bezeichnet. Die Penalty Funktion $\hat{\gamma}$ mit dem Exponenten ϵ charakterisiert ein in der Metallplastizität häufig verwandtes Potenzgesetz, siehe z.B. MÜLLER-HOPPE & STEIN [1990].

Auswertung von (2.6) ergibt die konstitutiven Gleichungen für die Kirchhoff Spannungen τ und die interne Variable β

$$\begin{aligned} \tau &= \kappa [\ln J^e] \mathbf{1} + \mu [\ln \bar{\mathbf{b}}^e] \\ \beta &= h \alpha \end{aligned} \quad (2.16)$$

wobei wir die Beziehung $\text{tr} [\ln \bar{\mathbf{b}}^e] = \ln [\det \bar{\mathbf{b}}^e] = 0$ benutzt haben. Das konstitutive Modell wird vervollständigt durch die assoziierten viskoplastischen Evolutionsgleichungen. Die Auswertung von (2.14) ergibt

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_v \mathbf{b}^e) \mathbf{b}^{e-1} &= \lambda \mathbf{n} \\ \dot{\alpha} &= \lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right\} \text{ mit } \begin{cases} \mathbf{n} := \text{dev } \tau / \|\text{dev } \tau\| \\ \lambda := c [\phi^+]^\epsilon \geq 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Die Fließregel (2.17)₁ ist *exakt volumenerhaltend*. Der Satz (2.15)–(2.17) von konstitutiven Gleichungen beschreibt für $y_0 = h = 0$ eine geometrisch nichtlineare Version des klassischen Norton Kriechgesetzes für den isochoren Teil der Deformation. Für $\epsilon = 1$ verhält sich der isochore Teil wie ein Newton Fluid mit linearer Viskosität $\eta := c^{-1}$.

3. Numerische Integration: Exponential Algorithmus

Als wichtigen algorithmischen Aspekt in Hinblick auf die numerische Implementation der oben vorgestellten Theorie diskutieren wir einen (*inkrementell objektiven*) *Exponential-Algorithmus*, der im Rahmen der finiten Elastoplastizität erstmals von WEBER & ANAND [1990] verwandt wurde, siehe auch SIMO [1991]. Der Algorithmus hält (i) *exakt die Bedingung der plastischen Inkompressibilität* ein und übernimmt in Verbindung mit dem oben formuliertem logarithmischen elastische Modell in einfacher Weise die (ii) *Struktur der in der geometrisch linearen Theorie üblichen Projektionsalgorithmen*.

'Pull-Back' der viskoplastischen Evolutionsgleichung (2.17)₁ zur Referenzkonfiguration ergibt mit den Transformationen $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{g} \mathbf{F}$, $\mathbf{C}^{p-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{b}^e \mathbf{F}^{-T}$, $\mathbf{N} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{n} \mathbf{F}^{-T}$ und $\dot{\mathbf{C}}^{p-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathcal{L}_v \mathbf{b}^e \mathbf{F}^{-T}$ die *materielle Form der Fließregel* (2.17)₁

$$\dot{\mathbf{C}}^{p-1} = [-2 \lambda \mathbf{N} \mathbf{C}] \mathbf{C}^{p-1} \quad (3.1)$$

Zur Integration dieser Fließregel verwenden wir den *Exponentialalgorithmus*

$$\mathbf{C}_{n+1}^{p-1} = \exp[-2 \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{N}_{n+1} \mathbf{C}_{n+1}] \mathbf{C}_n^{p-1} \quad (3.2)$$

(erster Ordnung und absolut stabil) analog zu dem Vorschlag von WEBER & ANAND [1990]. 'Push Forward' zur Momentankonfiguration ergibt eine inkrementell objektive Update Formel für den elastischen Finger Tensor

$$\mathbf{b}_{n+1}^e = \exp[-2 \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}] \mathbf{b}_{n+1}^{e, \text{trial}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{b}_{n+1}^{e, \text{trial}} := \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{C}_n^{p-1} \mathbf{F}_{n+1}^T \quad (3.3)$$

Wegen $\det [\exp(-2 \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1})] = \exp[\text{tr}(-2 \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1})] = 1$ folgt $\det \mathbf{b}_{n+1}^e = \det \mathbf{b}_{n+1}^{e, \text{trial}}$ und damit $J_{n+1}^e = J_{n+1}^{e, \text{trial}}$, d.h. der Algorithmus (3.3) erfüllt exakt die die J_2 -Theorie charakterisierende plastischen Inkompressibilität $J_{n+1}^p = J_n^p$. Multiplikation von (3.3) mit $J_{n+1}^{e-2/3}$ ergibt den Algorithmus

$$\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^e = \exp(-2 \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}) \bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e, \text{trial}} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e, \text{trial}} := \bar{\mathbf{F}}_{n+1} \mathbf{C}_n^{p-1} \bar{\mathbf{F}}_{n+1}^T \quad (3.4)$$

Wegen der durch die Isotropie implizierten Koaxialität von $\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^e$ und $\bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e, \text{trial}}$ können wir den Logarithmus von (3.4) bilden und erhalten den Algorithmus

$$\ln \bar{\mathbf{b}}_{n+1}^e = \ln \bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e, \text{trial}} - 2 \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1} \quad (3.5)$$

Dieser ergibt in Verbindung mit dem in (2.16)₁ eingeführten logarithmischen elastischen Stoffgesetz das folgende Update Schema für die (deviatorischen) Kirchhoff Spannungen

$$\text{dev} \boldsymbol{\tau}_{n+1} = \text{dev} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu \Delta \lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1} \quad (3.6)$$

mit $\text{dev} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}} := \mu \ln \bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e, \text{trial}}$. Wir heben hervor: *Der Algorithmus (3.6) ist identisch mit dem klassischen Projektionsalgorithmus der geometrisch linearen Theorie ('Radial-Return', siehe WILKINS [1964]).*

Den plastischen Parameters $\Delta \lambda_{n+1}$ in (3.6) bestimmen wir wie folgt: Mit der Definition $\phi_{n+1}^{\text{trial}} := \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\hat{\beta}(\alpha_n) + y_0]$ schreiben wir das v. Mises Fließkriterium (2.15)₂

$$\phi_{n+1} = [\phi_{n+1}^{\text{trial}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\beta}(\alpha_n)] - [2\mu \Delta \lambda_{n+1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\beta}(\alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda_{n+1})] \quad (3.7)$$

Damit erhält die viskoplastische Belastungsfunktion (2.11) die diskrete Form

$$\phi_{n+1}^+ := \begin{cases} 0 & \text{für } \phi_{n+1}^{\text{trial}} \leq 0, \\ \phi_{n+1} / \kappa_0 & \text{für } \phi_{n+1}^{\text{trial}} > 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Das algorithmische Gegenstück der konstitutive Gleichung (2.14)₃ für den viskoplastischen Parameter lautet $\Delta \lambda_{n+1} = c \hat{\gamma}'(\phi_{n+1}^+) \Delta t_{n+1} \geq 0$. Die inverse Darstellung $(\hat{\gamma}')^{-1}(\frac{1}{c} \frac{\Delta \lambda_{n+1}}{\Delta t_{n+1}}) - \phi_{n+1}^+ \equiv 0$ liefert eine Gleichung zur iterativen Bestimmung des viskoplastischen Parameters $\Delta \lambda_{n+1}$. Sie lautet mit (3.7) im Belastungsfall

$$\begin{aligned} \kappa_0 (\hat{\gamma}')^{-1}(\frac{1}{c} \frac{\Delta \lambda_{n+1}}{\Delta t_{n+1}}) + 2\mu \Delta \lambda_{n+1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\beta}(\alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta \lambda_{n+1}) \\ - [\phi_{n+1}^{\text{trial}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\beta}(\alpha_n)] \equiv 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

und kann z.B. im Rahmen einer lokalen Newton Iteration gelöst werden. In dem für das obige Modellproblem angenommenen Fall der *linearen Verfestigung* ist (3.9) für den Exponent $\epsilon = 1$ linear in $\Delta\lambda_{n+1}$ und man erhält die geschlossene Lösung

$$2\mu\Delta\lambda_{n+1} = \frac{\phi_{n+1}^{\text{trial}}}{1 + \frac{h}{3\mu} + \frac{\kappa_0}{2\mu c\Delta t_{n+1}}} . \quad (3.10)$$

In dem Grenzfall $c \rightarrow \infty$ erhält man die Lösung der klassischen (geschwindigkeitsunabhängigen) Plastizität. Wir fassen den diskutierten Integrationsalgorithmus in Box 1 zusammen. Die Berechnung der isotropen Tensorfunktionen $\ln \bar{\mathbf{b}}^e$ und $\exp \bar{\mathbf{b}}^e$ hängt natürlich kritisch von einer effektiven Implementation der Spektralanalyse des Tensors $\bar{\mathbf{b}}^e$ ab.

Box 1. Projektionsalgorithmus zur J_2 -v. Mises-Typ Viskoplastizität

1. *Elastischer Prädiktor*: Gegebene Anfangsdaten sind $\{C_n^{p-1}, \alpha_n\}$ und aktueller Wert F_{n+1} . Setze $\bar{F}_{n+1} := J_{n+1}^{-\frac{1}{3}} F_{n+1}$ und berechne

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e,\text{trial}} &:= \bar{F}_{n+1} C_n^{p-1} \bar{F}_{n+1}^T \\ \text{dev}[\boldsymbol{\tau}^{\text{trial}}] &:= \mu \ln \bar{\mathbf{b}}_{n+1}^{e,\text{trial}} \\ \hat{\phi}_{n+1}^{\text{trial}} &:= \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} [\hat{\beta}(\alpha_n) + y_0] \end{aligned} \right\}$$

IF $\phi^{\text{trial}} \leq 0$ set $\{C_{n+1}^{p-1}, \alpha_{n+1}\} = \{C_n^{p-1}, \alpha_n\}$ and EXIT.

2. *Plastischer Parameter*: Berechne $\Delta\lambda_{n+1} \geq 0$ durch Lösung von:

$$\begin{aligned} \kappa_0 (\hat{\gamma}')^{-1} \left(\frac{1}{c} \frac{\Delta\lambda_{n+1}}{\Delta t_{n+1}} \right) + 2\mu\Delta\lambda_{n+1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\beta}(\alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda_{n+1}) \\ - [\phi_{n+1}^{\text{trial}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\beta}(\alpha_n)] \equiv 0 \end{aligned}$$

3. *Projektion*: Setze $\mathbf{n}_{n+1} = \text{dev} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}} / \|\text{dev} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}}\|$ und führe Update aus

$$\left. \begin{aligned} \text{dev} \boldsymbol{\tau}_{n+1} &= \text{dev} \boldsymbol{\tau}_{n+1}^{\text{trial}} - 2\mu\Delta\lambda_{n+1} \mathbf{n}_{n+1}, \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\lambda_{n+1}, \end{aligned} \right\}$$

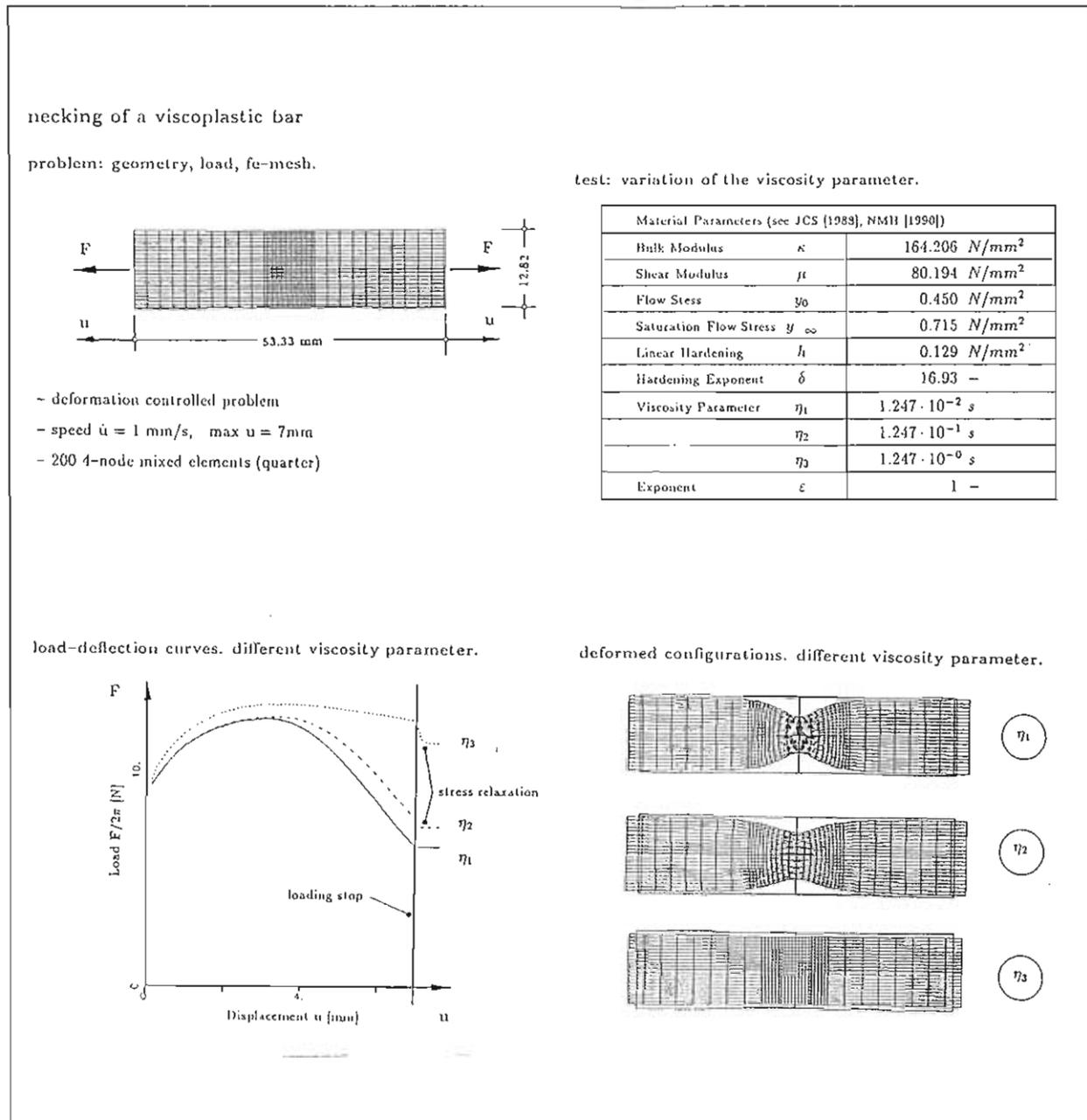
4. *Update der Zwischenkonfiguration*:

$$C_{n+1}^{p-1} = \bar{F}_{n+1}^{-1} \exp \left[\frac{\text{dev} \boldsymbol{\tau}_{n+1}}{\mu} \right] \bar{F}_{n+1}^{-T}.$$

4. Numerisches Beispiel

Als numerisches Beispiel zeigen wir in Box 2 das Einschnürproblem eines Zugstabes aus viskoplastischen Material, das bereits in der Arbeit von MÜLLER-HOPPE [1990] behandelt wurde. Verglichen werden die Lastverschiebungskurven und die deformierten Konfigurationen eines Zugstabes bei *Variation des Viskositätsparameter* $\eta := c^{-1}$. Im Gegensatz zu der Lösung von MÜLLER-HOPPE [1990] führt die Anwendung des in Box 1 beschriebenen Integrationsalgorithmus zu einer *exakten Einhaltung der plastischen Inkompressibilität* und einem *exakt symmetrischen algorithmischen Tangentenoperator* bei Verwendung des Newton Algorithmus.

Box 2. Einschnürung eines Zugstabes aus viskoplastischen Material



5. Zusammenfassung

Wir diskutierten ein konstitutives Modell zur finiten multiplikativen Viskoplastizität in einer räumlichen Formulierung relativ zur Momentankonfiguration. Wesentliches Merkmal dieser Theorie ist die Konstruktion der (kanonischen) assoziierten viskoplastischen Fließregel (2.14) basierend auf einem thermodynamischen Extremalprinzip. Der dieser Fließregel angepaßte Integrationsalgorithmus (3.3) ist vom Exponentialtyp und hat folgende Eigenschaften: Er erfüllt algorithmisch exakt die Bedingung der plastischen Inkompressibilität und gestattet darüberhinaus die unveränderte Implementation von aus der geometrisch linearen Theorie bekannten Projektionsalgorithmen.

6. Literatur

- Asaro, R. [1983]: "Micromechanics of Crystals and Polycrystals" In: *Advances in Applied Mechanics* (Ed.: T.Y. Wu, J.W. Hutchinson), **23**, 1-115.
- Coleman, B.D.; Gurtin, M.E. [1967], "Thermodynamics with Internal State Variables", *J. Chemistry and Physics*, **47**, 597-613.
- Lee, E.H. [1969], "Elastic-plastic Deformation at Finite Strains", *Journal of Applied Mechanics*, **36**, 1-6.
- Miehe, C.; Stein E. [1992], "Canonical Models of Finite Strain Elastoplasticity: Formulation and Numerical Implementation", to appear.
- Moran, B., Ortiz, M., Shih, C.F. [1990], "Formulation of Implicit Finite Element Methods for Multiplicative Deformation Plasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **29**, 483-514.
- Müller-Hoppe, N., [1990] "Beiträge zur Theorie und Numerik Finiter Inelastischer Deformationen", *Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover*, Bericht Nr.: F90/4.
- Simo, J.C. [1991], "Algorithms for Static and Dynamic Multiplicative Plasticity that Preserve the Classical Return Mapping Schemes of the Infinitesimal Theory", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, to appear.
- Simo, J.C.; Miehe, C. [1990], "Associated Coupled Thermoplasticity at Finite Strains: Formulation, Numerical Analysis and Implementation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, to appear.
- Stein, E.; Miehe, C. [1991], "Theory and Finite Element Computation of Finite Elasto-Visko-Plastic Strains", in *Anisotropy and Localization of Plastic Deformation*, Ed.: J.-P. Boehler, A.S. Kahn, Elsevier Applied Science, 409 - 412.
- Weber, G.; Anand, L. [1990], "Finite Deformation Constitutive Equations and a Time Integration Procedure for Isotropic, Hyperelastic-Viscoplastic Solids", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **79**, 173-202.
- Wilkins, M.L. [1964], "Calculation of Elastic-plastic Flow, *Meth. of Computational Physics*, **3**, Academic Press, New York.

Zur Formulierung Multiplikativer Elastoplastizität

C. MIEHE

Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik
Universität Hannover, D-3000 Hannover 1, Appelstr. 9a

1. Einleitung

Dargestellt wird eine kanonische konstitutive Struktur zur finiten multiplikativen Elastoplastizität für große plastische und große elastische Verzerrungen. Diese ist charakterisiert durch eine (i) *geometrische Formulierung relativ zur plastischen Zwischenkonfiguration* auf der Basis von (ii) *gemischtvarianten Spannungstensoren und Deformationsraten* und der Auswertung zweier thermodynamischer Prinzipie: des fundamentalen (iii) *Prinzips stets positiver interner Dissipation* sowie (iv) des sogenannten (iv) *'Prinzips der Maximalen Dissipation'*, das als Äquivalent zur Konvexität der Fließbedingung und Normalität der Fließregel die assoziierte Theorie kennzeichnet. Als ein wichtiges Ergebnis wird herausgestellt: Im Rahmen der assoziierten Theorie ist der *plastische Spin exakt Null*. Ferner ergibt sich deduktiv aus der kanonischen Struktur relativ zur Zwischenkonfiguration *im Fall der Isotropie* durch einfache Transformation eine duale Formulierung relativ zur Momentankonfiguration.

2. Kanonisches Modell zur Multiplikativen Elastoplastizität

2.1. Zur Geometrie der Plastischen Zwischenkonfiguration. Sei $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ die Referenzkonfiguration des betrachteten Körpers und $\varphi_t(\mathbf{X}) : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die nichtlineare Deformationsabbildung zur Zeit $t \in \mathbb{R}_+$. In einer Nachbarschaft $\mathcal{N}(\mathbf{X})$ jedes $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ betrachten wir die standard *multiplikative Zerlegung* $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$ der linearen Tangentenabbildung $\mathbf{F} := \nabla_{\mathbf{X}} \varphi_t(\mathbf{X})$ in einen elastischen Anteil \mathbf{F}^e und einen plastischen Anteil \mathbf{F}^p . \mathbf{F}^p definiert *lokal* eine makro-spannungs-freie *plastische Zwischenkonfiguration* $\mathcal{O}(\mathbf{X})$, deren Lage wir als *gegeben* durch eine konstitutive Annahme betrachten. Zur mikromechanischen Motivation der multiplikativen Zerlegung verweisen wir z.B. auf die Arbeiten von LEE [1969], MANDEL [1974], KRATOCHVIL [1973], ASARO [1983], LUBLINER [1990], MORAN, ORTIZ & SHIH [1990] und die dort angegebenen Referenzen.

Im Rahmen einer lokalen Formulierung relativ zur plastischen Zwischenkonfiguration $\mathcal{O}(\mathbf{X})$ charakterisiert der elastische rechte Cauchy-Green Tensor

$$\mathbf{C}^e := \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e \quad (2.1)$$

die elastischen Verzerrungen. Er spielt ferner die zentrale Rolle einer *Metrik* auf der Zwischenkonfiguration ('elastischer Pull-Back' der kovarianten Metrik \mathbf{g} der Momentankonfiguration: $\mathbf{C}^e := \mathbf{F}^{eT} \mathbf{g} \mathbf{F}^e$). Wir betrachten die *additive Zerlegung*

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p \quad \text{mit} \quad \mathbf{L}^e := \mathbf{F}^{e-1} \dot{\mathbf{F}}^e \quad \text{und} \quad \mathbf{L}^p := \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} \quad (2.2)$$

der totalen Deformationsrate $\mathbf{L} := \mathbf{F}^{e-1}(\mathbf{l})\mathbf{F}^e$ ('elastischer pull-back' des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten $\mathbf{l} := \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$) in elastischen Anteil \mathbf{L}^e und plastischen Anteil \mathbf{L}^p . \mathbf{L} , \mathbf{L}^e und \mathbf{L}^p sind auf $\mathcal{O}(\mathbf{X})$ definierte *gemischtvariante* Tensoren (kontravariant-kovariant). \mathbf{L}^e und \mathbf{L}^p beschreiben *entkoppelt* die Evolution der elastischen bzw. plastischen Teildeformation.

2.2. Satz konstitutiver Gleichungen. Wir geben eine Zusammenfassung der konstitutiven Gleichungen für den Fall der idealen (isothermen) Elastoplastizität für allgemein anisotropes Materialverhalten: Die freie Energie Ψ , der *gemischtvariante* Spannungstensor Σ , die interne plastische Dissipation \mathcal{D}^p , das Fließkriterium Φ und die Evolution \mathbf{L}^p der plastischen Deformation haben relativ zur Zwischenkonfiguration die konstitutive Struktur

$$\begin{aligned}
 \Psi &= \hat{\Psi}(\mathbf{C}^e) \\
 \Sigma &= 2\mathbf{C}^e \partial_{\mathbf{C}^e} \hat{\Psi}(\mathbf{C}^e) \\
 \mathcal{D}^p &= \Sigma \cdot \mathbf{L}^p \geq 0 \\
 \Phi &= \hat{\Phi}(\Sigma) \leq 0 \\
 \mathbf{L}^p &= \lambda \partial_{\Sigma} \hat{\Phi}(\Sigma) \\
 \lambda &\geq 0 \quad ; \quad \hat{\Phi}(\Sigma) \leq 0 \quad ; \quad \lambda \hat{\Phi}(\Sigma) = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Wir betrachten diesen Gleichungssatz als *kanonische Formulierung der multiplikativen Elastoplastizität*. Er ist vollständig bestimmt durch die Kenntnis der *zwei skalaren konstitutiven Grundfunktionen* $\hat{\Psi}(\mathbf{C}^e) : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\hat{\Phi}(\Sigma) : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$ für die freie Energie und das Fließkriterium. Die Struktur (2.3) der konstitutiven Gleichungen, die im wesentlichen mit den bei MANDEL [1974] und TEODOSIU & SIDOROFF [1976] angegebenen Formulierungen übereinstimmt, begründet sich wie folgt:

Sei Ψ die Änderung der freien Energie während des isothermen elastoplastischen Prozesses von der Referenz- zur Momentankonfiguration, i.e. die lokal gespeicherte *elastische* Formänderungsenergie. Konsistent mit der multiplikativen Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p$ nehmen wir an, daß Ψ gegeben ist durch den konstitutiven Ausdruck $\Psi = \bar{\Psi}(\mathbf{F}^e)$ mit der Normierung $\bar{\Psi}(\mathbf{1}) = 0$ für den Referenzzustand. Objektivität, i.e. $SO(3)$ Invarianz der Momentankonfiguration, führt zu der reduzierten Form (2.3)₁. Die Clausius-Planck Ungleichung für die interne Dissipation $\mathcal{D}^p := \sigma \cdot \mathbf{l} - \dot{\Psi} \geq 0$ liest sich nach Transformation auf die Zwischenkonfiguration

$$\mathcal{D}^p := \Sigma \cdot \mathbf{L} - \dot{\Psi} \geq 0 .
 \tag{2.4}$$

Hierbei ist $\Sigma := \mathbf{F}^{eT} \sigma \mathbf{F}^{e-T}$ der *gemischtvariante* Spannungstensor (kovariant - kontravariant) relativ zur Zwischenkonfiguration ('elastischer pull-back' des gemischtvarianten Kirchhoff Spannungstensors σ) und \mathbf{L} die in (2.2) definierte totale Deformationsrate. Zeitdifferentiation der freien Energie (2.3)₁ ergibt $\dot{\Psi} = \partial_{\mathbf{C}^e} \hat{\Psi} \cdot \dot{\mathbf{C}}^e = [2\mathbf{C}^e \partial_{\mathbf{C}^e} \hat{\Psi}] \cdot \mathbf{L}^e$, d.h. (2.4) erhält mit (2.2) die Form

$$\mathcal{D}^p := [\Sigma - 2\mathbf{C}^e \partial_{\mathbf{C}^e} \hat{\Psi}] \cdot \mathbf{L} + [2\mathbf{C}^e \partial_{\mathbf{C}^e} \hat{\Psi}] \cdot \mathbf{L}^p \geq 0 .
 \tag{2.5}$$

Die Standardargumentation der Klassischen Rationalen Thermodynamik impliziert die hyperelastische konstitutive Gleichung (2.3)₂ für die Spannungen und damit die Dissipationsungleichung (2.3)₃. Als wesentliche Charakteristik elastoplastischen Materialverhaltens betrachten wir nun ein elastisches Gebiet $\mathbf{E}_{\Sigma} := \{ \Sigma \in \mathbb{R}^9 \mid \hat{\Phi}(\Sigma) \leq 0 \}$

im *neundimensionalen* Spannungsraum charakterisiert durch das Fließkriterium (2.3)₄. Das sogenannte 'Prinzip der Maximalen Dissipation' (Äquivalent zur *Konvexität* der Fließkriteriumfunktion und *Normalität* der Fließregel, siehe z.B. LUBLINER [1990] und zur Konzeption DRUCKER [1951], ZIEGLER [1963]) fordert

$$\mathcal{D}^p - \mathcal{D}^{*p} := [\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^*] \cdot \mathbf{L}^p \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\Sigma}^* \in \mathbb{E}_{\boldsymbol{\Sigma}} \quad (2.6)$$

und impliziert die assoziierte *neundimensionale* Fließregel (2.3)₅ sowie die Belastungs-Entlastungsbedingungen (2.3)₆ in Kuhn-Tucker Form.

2.3. Diskussion: Plastischer Spin. Die vom Standpunkt der Geometrie und Thermodynamik *sinnvollste additive Zerlegungen* von \mathbf{L}^p in symmetrischen und antisymmetrischen (*kovarianten*) Anteil lautet

$$\mathbf{C}^e \mathbf{L}^p = \mathbf{D}^p + \mathbf{W}^p \quad (2.7)$$

mit der *plastischen Deformationsrate* $\mathbf{D}^p := \text{sym}(\mathbf{C}^e \mathbf{L}^p)$ und dem *plastischen Spin* $\mathbf{W}^p := \text{skew}(\mathbf{C}^e \mathbf{L}^p)$. Hierbei erfolgt das Senken des ersten (kontravarianten) Indexes von \mathbf{L}^p mit der Metrik \mathbf{C}^e auf der Zwischenkonfiguration. Diese Definitionen unterscheiden sich damit von Standardformulierungen, in denen das Senken des ersten Indexes mit der Standardmetrik \mathbf{G} der Referenz- und Zwischenkonfiguration erfolgt (wobei bei Verwendung kartesischer Koordinaten \mathbf{G} Einheitstensor ist und vielfach in der direkten Notation fortgelassen wird).

Sei $\mathbf{S} := \mathbf{C}^{e-1} \boldsymbol{\Sigma}$ der symmetrische kontravariante Spannungstensor auf der Zwischenkonfiguration ('elastischer pull-back' des kontravarianten Kirchhoff Spannungstensors $\boldsymbol{\tau}$, i.e. $\mathbf{S} := \mathbf{F}^{e-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{e-T}$). Mit der Kettenregel erhalten wir die wichtige Beziehung

$$\partial_{\mathbf{S}} \hat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{C}^e \partial_{\boldsymbol{\Sigma}} \hat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma}) \quad (2.8)$$

Basierend auf dieser Beziehung und der Zerlegung (2.7) reduziert sich die *neundimensionale assoziierte Fließregel* (2.3)_{5,6} zu

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{D}^p = \lambda \partial_{\mathbf{S}} \hat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma}) \\ \mathbf{W}^p = \mathbf{0} \\ \lambda \geq 0 \quad ; \quad \hat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma}) \leq 0 \quad ; \quad \lambda \hat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma}) = 0 \end{array} \right\} , \quad (2.9)$$

d.h. der in (2.7) eingeführte *plastische Spin* \mathbf{W}^p ist im Rahmen der assoziierten Theorie *exakt Null*. (2.9)₁ ist eine *sechsdimensionale Fließregel* für die in (2.7) eingeführte *plastische Deformationsrate* \mathbf{D}^p . Wir können sie schreiben in der Form $\mathbf{D}^p = \lambda \partial_{\mathbf{S}} \bar{\Phi}(\mathbf{S}; \mathbf{C}^e)$, wobei die Darstellung $\bar{\Phi}(\mathbf{S}; \mathbf{C}^e) = \hat{\Phi}(\boldsymbol{\Sigma})$ explizit die *Abhängigkeit des Fließkriteriums von der Metrik* \mathbf{C}^e hervorhebt. Die Fließregel (2.9)₁ ist durchaus nicht trivial: Die Normalenrichtung ergibt sich durch Ableitung des Fließkriteriums $\bar{\Phi}$ nach \mathbf{S} bei *festgehaltener Metrik* \mathbf{C}^e , obwohl \mathbf{S} und \mathbf{C}^e über das hyperelastische Stoffgesetz $\mathbf{S} = 2\partial_{\mathbf{C}^e} \hat{\Psi}(\mathbf{C}^e)$ in direkter funktionaler Beziehung stehen. Wir betonen ferner, daß der mit der Metrik \mathbf{G} definierte *plastische Spin* $\bar{\mathbf{W}}^p := \text{skew}(\mathbf{G} \mathbf{L}^p)$ (Standardformulierung) *im allgemeinen anisotropen Fall der assoziierten Theorie nicht verschwindet*.

2.4. Isotropes Materialverhalten. Im Fall der Isotropie ist die freie Energie Funktion in (2.3)₁ *isotrope Tensorfunktion* von \mathbf{C}^e , d.h. $\hat{\Psi}(\mathbf{C}^e) = \hat{\Psi}(\mathbf{Q} \mathbf{C}^e \mathbf{Q}^T)$ und

$\hat{\Phi}(\Sigma) = \hat{\Phi}(Q \Sigma Q^T) \quad \forall Q \in SO(3)$. Damit sind C^e und $\partial_{C^e} \hat{\Psi}$ *kommutativ*, d.h. Σ in (2.3)₂ und folglich L^p in (2.3)₅ sind *symmetrisch* im Sinne $\text{skew}(G^{-1}\Sigma) = \mathbf{0}$ und $\bar{W}^p := \text{skew}(G L^p) = \mathbf{0}$. Als Konsequenz verbleibt die assoziierte Fließregel $\bar{D}^p := \text{sym}(G L^p) = \lambda G \partial_{\Sigma} \hat{\Phi}(\Sigma)$ für die Deformationsrate der Standardformulierung.

Man erhält ferner durch eine Transformation des Gleichungssatzes (2.3) zur Momentankonfiguration mit $F^{e-T}(\Sigma)F^{eT} = \sigma$ und der im Fall der Isotropie gültigen Beziehungen $F^e(L^p)F^{e-1} = -\frac{1}{2}\mathbf{L}_v b^e b^{e-1}$ *deduktiv die räumliche Formulierung*

$$\begin{array}{l}
 \Psi = \hat{\Psi}(b^e) \\
 \sigma = 2\partial_{b^e} \hat{\Psi}(b^e) b^e \\
 \mathcal{D}^p = \sigma \cdot [-\frac{1}{2}\mathbf{L}_v b^e b^{e-1}] \geq 0 \\
 \Phi = \hat{\Phi}(\sigma) \leq 0 \\
 -\frac{1}{2}\mathbf{L}_v b^e b^{e-1} = \lambda \partial_{\sigma} \hat{\Phi}(\sigma) \\
 \lambda \geq 0 \quad ; \quad \hat{\Phi}(\sigma) \leq 0 \quad ; \quad \lambda \hat{\Phi}(\sigma) = 0
 \end{array} \tag{2.10}$$

basierend auf dem elastischen Finger Tensor $b^e := F^e F^{eT} = R^e C^e R^{eT}$ und der zugehörigen Oldroyd Rate $\mathbf{L}_v b^e := \dot{b}^e - l b^e - b^e l^T$. Damit ist die räumliche Formulierung, für die sich eine direkte Ableitung in der Arbeit von SIMO & MIEHE [1991] findet, eine *spezielle Formulierung der kanonischen konstitutiven Struktur (2.3) für den Fall der Isotropie*.

2.5. Modell Problem. Als einfaches Beispiel für isotropes Materialverhalten betrachten wir abschließend die assoziierte J_2 -Theorie mit freier Energie als quadratische Funktion logarithmischer Verzerrungen und v.Mises-Typ Fließkriterium. Der Satz (2.3) konstitutiver Gleichungen lautet in diesem Fall

$$\left. \begin{array}{l}
 \Psi = \frac{1}{2}\kappa [\ln J^e]^2 + \mu \text{tr} [\frac{1}{2} \ln \bar{C}^e]^2 \\
 \Sigma = \kappa [\ln J^e] \mathbf{1} + \mu [\ln \bar{C}^e] \\
 \mathcal{D}^p = \Sigma \cdot L^p \geq 0 \\
 \Phi = \|\text{dev} \Sigma\| - \sqrt{\frac{2}{3}} y_0 \leq 0 \\
 L^p = \lambda \text{dev} \Sigma / \|\text{dev} \Sigma\| \\
 \lambda \geq 0 \quad ; \quad \hat{\Phi}(\Sigma) \leq 0 \quad ; \quad \lambda \hat{\Phi}(\Sigma) = 0
 \end{array} \right\} \tag{2.11}$$

mit $J^e := \sqrt{\det C^e}$ und $\bar{C}^e := J^{e-2/3} C^e \in SL(3)$ und damit $\ln \bar{C}^e \in sl(3)$. κ ist der makroskopische Kompressionsmodul, μ der Schubmodul und y_0 die Fließspannung.

3. Zusammenfassung

Diskutiert wurde eine kanonische konstitutive Struktur zur multiplikativen Elastoplastizität für große plastische und große elastische Verzerrungen. Sie ist charakterisiert durch eine *geometrisch exakte* Formulierung relativ zu der lokal definierten plastischen Zwischenkonfiguration auf der Basis fundamentaler *gemischtvarianter* Deformationsraten und Spannungstensoren. In dieser Darstellung gelingt eine *additive Zerlegung* der

der Deformationsrate (2.2) in *entkoppelte* elastische und plastische Anteile und man erhält durch Auswertung von Dissipationsprinzipien die konstitutive Struktur (2.3), die formal der geometrisch linearen Theorie ähnelt. Herausgestellt wurde weiterhin die wichtige geometrische Eigenschaft des elastischen rechten Cauchy–Green Tensors C^e : Er spielt die Rolle einer *Metrik auf der Zwischenkonfiguration* und wird zum Senken und Heben von Indices genutzt, siehe z.B. (2.7). Ferner wurde gezeigt: (i) Der in (2.7) definierte plastische Spin ist im Rahmen der assoziierten Theorie exakt Null. (ii) Im Fall der Isotropie leitet sich in einfacher Weise aus der kanonischen Formulierung (2.3) relativ zur Zwischenkonfiguration die duale Formulierung (2.10) relativ zur Momentan-konfiguration ab.

4. Literatur

- Asaro, R. [1983],: "Micromechanics of Crystals and Polycrystals" In: *Advances in Applied Mechanics* (Ed.: T.Y. Wu, J.W. Hutchinson), **23**, 1–115.
- Drucker, D.C. [1951], "A More Fundamental Approach to Plastic Stress–Strain Relations", *Proceedings of the first U.S. National Congress of Applied Mechanics*, Chicago, June 11–16, 1951, 487–491.
- Kratochvil, J. [1973], "On a Finite Strain Theory of Elastic–Inelastic Materials", *Acta Mechanica*, **16**, 127–142.
- Lubliner, J. [1990], "Plasticity Theory", Macmillan Publishing Company, New York, 1990.
- Mandel, J. [1974], "Thermodynamics and Plasticity", In: *Foundations of Continuum Thermodynamics* (Ed.: J.J. Delgado Domingers, N.R. Nina, J.H. Whitelaw), Macmillan, London, 283–304.
- Miehe, C. [1992], "A Model of Finite Strain Thermoplasticity: Formulation and Numerical Implementation", to appear.
- Moran, B., Ortiz, M., Shih, C.F., [1990], "Formulation of Implicit Finite Element Methods for Multiplicative Deformation Plasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **29**, 483–514.
- Simo, J.C.; Miehe, C. [1990], "Associated Coupled Thermoplasticity at Finite Strains: Formulation, Numerical Analysis and Implementation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, in press.
- Teodosiu, C.; Sidoroff, F. [1976], "A Finite Theory of the Elastoviscoplasticity of Single Crystals," In: *Int. J. Eng. Sci.*, **14**, pp. 713–723.
- Weber, G.; Anand, L. [1990], "Finite Deformation Constitutive Equations and a Time Integration Procedure for Isotropic, Hyperelastic–Viscoplastic Solids", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **79**, 173–202.
- Ziegler, H. [1963], "Some Extremum Principles in Irreversible Thermodynamics with Application to Continuum Mechanics", In: *Progress in Solid Mechanics* (Ed.: I.N. Sneddon, R. Hill), **4**, North-Holland.

A METHODOLOGY FOR FORMULATING LARGE STRAIN VISCOPLASTIC CONSTITUTIVE EQUATIONS

H.-P. HACKENBERG and F.G. KOLLMANN

Technische Hochschule Darmstadt
Fachgebiet Maschinenelemente und Maschinenakustik

INTRODUCTION

The formulation of constitutive equations for large viscoplastic strains is still discussed controversially in the research literature. For small strains viscoplastic models based on the concept of internal state variables [2,7] are widely accepted and have reached a stage of significant maturity. In this paper, therefore, the concept of internal state variables shall be adopted for large strain viscoplastic deformations.

There exist relatively few viscoplastic constitutive models which have been formulated *a priori* for large strains (e.g. [1]). In this paper we base our work on the multiplicative decomposition of the deformation gradient \mathcal{F} [10,11]. It is well known, that there exists an intensive debate on the uniqueness of this decomposition. Many authors (e.g. Haupt [8]) argue that the $\hat{\mathcal{F}}_e \mathcal{F}_p$ -decomposition is not unique, since an arbitrary orthogonal tensor $\hat{\mathbf{Q}}$ can be placed between the elastic part $\hat{\mathcal{F}}_e$ and the inelastic one \mathcal{F}_p . Based on physical arguments given by Mandel [12], Cleja-Țigoiu and Sóos [4] introduce the *constitutive assumption* that the multiplicative decomposition of the deformation gradient is unique. This approach requires that not only an evolution equation for the plastic part of the deformation rate tensor but also the evolution of the plastic spin tensor is prescribed in the frame of the constitutive model. We follow the lines of Mandel and Cleja-Țigoiu and Sóos despite the fact, that a fully satisfactory physical motivation for the concept of plastic spin for polycrystalline materials is still lacking.

KINEMATICS OF INELASTICALLY DEFORMED SOLIDS

In this paper we adopt tensor calculus on manifolds as introduced into continuum mechanics by Marsden and Hughes [13]. We restrict all considerations to simple bodies at homogeneous and constant temperature. Let the reference configuration $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ be a representation of the material body. We assume that \mathcal{B} is a differentiable n -manifold and that it is mapped by a family of at least C^1 diffeomorphisms on a family $\mathcal{S}_t \subset \mathbb{R}^3$ of differentiable threedimensional manifolds. Here the time $t \in \mathbb{R}$ is a parameter and \mathcal{S}_t is the family of current configurations.

Therefore, we have the family of maps $\phi(t) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{S}_t$ as motion of the body. Since no ambiguity can arise, we will not indicate the dependence on time t in the sequel.

As mentioned in the introduction we assume the multiplicative decomposition of the total deformation gradient \mathcal{F}

$$\mathcal{F} = \hat{\mathcal{F}}_e \mathcal{F}_p . \quad (1)$$

This decomposition can be motivated by the introduction of an intermediate configuration $\hat{\mathcal{B}}$ which is defined by relaxing each material element from the current configuration \mathcal{S} to a stress free state. In general, the intermediate configuration is incompatible and therefore can not be reached physically.

The kinematics of inelastically deformed bodies has been studied in detail by Kollmann and Hackenberg [9]. In the following we use the notions of push-forward- (ϕ_*) and pull-back-operators (ϕ^*) as in [13]. If these operators are formed with the elastic or plastic part of the deformation gradient we use notations as e.g. ϕ_*^e and ϕ_e^* . We denote Riemannian metrics on \mathcal{B} , $\hat{\mathcal{B}}$ and \mathcal{S} by \mathbb{G} , $\hat{\mathbb{G}}$ and \mathbb{g} , respectively. Their inverses are indicated by \sharp as e.g. \mathbb{g}^\sharp .

Pushing forward the metric $\hat{\mathbb{G}}$ of the intermediate to the current configuration leads to the following deformation tensor

$$\bar{\mathbf{c}}^b := \phi_*^e(\hat{\mathbb{G}}) . \quad (2)$$

Its inverse is a Finger type deformation tensor

$$\bar{\mathbf{b}}^\sharp := (\bar{\mathbf{c}}^b)^{-1} = \phi_*^e(\hat{\mathbb{G}}^\sharp) = \hat{\mathcal{F}}_e \hat{\mathbb{G}}^\sharp \hat{\mathcal{F}}_e^T . \quad (3)$$

We introduce the spatial velocity gradient

$$\mathbf{l} := \text{grad } \mathbf{v} = \dot{\mathcal{F}} \mathcal{F}^{-1} . \quad (4)$$

Next, we define the covariant spatial deformation rate tensor

$$\mathbf{d}^b := {}^s(\mathbf{gl}) \quad (5)$$

where ${}^s(\cdot)$ denotes the symmetric part of the term in brackets. Correspondingly ${}^a(\cdot)$ denotes the skewsymmetric part. Inserting (4) into (5) leads under consideration of (1) to the additive decomposition

$$\mathbf{d}^b = \mathbf{d}_e^b + \mathbf{d}_p^b \quad (6)$$

$$\mathbf{d}_e^b := {}^s(\mathbb{g} \dot{\hat{\mathcal{F}}}_e \hat{\mathcal{F}}_e^{-1}) \quad (7)$$

$$\mathbf{d}_p^b := {}^s(\mathbb{g} \hat{\mathcal{F}}_e \dot{\mathcal{F}}_p \mathcal{F}_p^{-1} \hat{\mathcal{F}}_e^{-1}) . \quad (8)$$

However, the decomposition (6) - (8) is not unique. A second decomposition can be derived from the fact, that the strain rate tensor \mathbf{d}^b can also be obtained as Lie derivative [13] of Almansi's strain tensor

$$\mathbf{e}^b = \frac{1}{2}(\mathbb{g} - \phi_*(\mathbb{G})) = \frac{1}{2}(\mathbb{g} - \mathcal{F}^{-T} \mathbb{G} \mathcal{F}^{-1}) \quad (9)$$

$$\mathbf{d}^b = \mathcal{L}_v(\mathbf{e}^b) , \quad (10)$$

where the operator $\mathcal{L}_v(\cdot)$ indicates the Lie derivative formed with respect to the reference configuration. For Almansi's strain tensor the following decomposition holds [9]

$$\mathbf{e}^b = \mathbf{e}_e^b + \mathbf{e}_p^b \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_e^b := \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \tilde{\mathbf{c}}^b) \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_p^b := \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{c}}^b - \phi_*(\mathbf{G})). \quad (13)$$

From (11) and (10) we obtain a second decomposition of the strain rate tensor \mathbf{d}^b

$$\mathbf{d}^b = \mathbf{d}_e^{*b} + \mathbf{d}_p^{*b} \quad (14)$$

$$\mathbf{d}_e^{*b} := \mathcal{L}_v(\mathbf{e}_e^b) \quad (15)$$

$$\mathbf{d}_p^{*b} := \mathcal{L}_v(\mathbf{e}_p^b). \quad (16)$$

Next, we establish a relation between the two plastic parts \mathbf{d}_p^b and \mathbf{d}_p^{*b} , respectively, of the rate of deformation tensor \mathbf{d}^b . Eq.(8) motivates the definition of a plastic tensor

$$\hat{\mathbf{L}}_p := \dot{\mathcal{F}}_p \mathcal{F}_p^{-1}. \quad (17)$$

The tensor $\hat{\mathbf{L}}_p^b = \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{L}}_p$ can be decomposed into a symmetric and a skewsymmetric part

$$\hat{\mathbf{L}}_p^b = \hat{\mathbf{D}}_p^b + \hat{\mathbf{W}}_p^b \quad (18)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_p^b := {}^s(\hat{\mathbf{G}} \dot{\mathcal{F}}_p \mathcal{F}_p^{-1}) \quad (19)$$

$$\hat{\mathbf{W}}_p^b := {}^a(\hat{\mathbf{G}} \dot{\mathcal{F}}_p \mathcal{F}_p^{-1}). \quad (20)$$

It can be shown that [9]

$$\mathbf{d}_p^{*b} = \phi_*^e(\hat{\mathbf{D}}_p^b). \quad (21)$$

Therefore, we define

$$\mathbf{w}_p^{*b} := \phi_*^e(\hat{\mathbf{W}}_p^b). \quad (22)$$

Then the required relation follows as [5]

$$\mathbf{d}_p^b = {}^s(\mathbf{g} \tilde{\mathbf{b}}^{\parallel} (\mathbf{d}_p^{*b} + \mathbf{w}_p^{*b})). \quad (23)$$

We denote the tensors $\hat{\mathbf{W}}_p^b$ and \mathbf{w}_p^{*b} , as plastic spin tensors on the intermediate and current configuration, respectively.

CONSTITUTIVE EQUATIONS

In this section we only formulate constitutive equations for the plastic part of the deformation. Constitutive equations for the elastic part of the deformation are given in e.g. [6]

Inelastic constitutive models

Our basic approach is to formulate the inelastic constitutive equations on the intermediate configuration and then to transform it to the current configuration. As additional constitutive assumption we presuppose inelastic incompressibility

$$\det \mathcal{F}_p = 1 . \quad (24)$$

From (24) it can be concluded [9] that

$$\hat{D}_p^b : \hat{G}^\sharp = 0 . \quad (25)$$

Pushing forward (25) yields on the current configuration

$$d_p^{*b} : \tilde{b}^\sharp = 0 , \quad (26)$$

where (3) has been observed. Eq. (26) indicates, that the tensor d_p^{*b} is not a deviator.

Next, we formulate constitutive equations for the plastic parts of the deformation rate and the spin tensor, respectively. Consider as an example the plastic part of the deformation rate tensor. In the isothermal case the tensor \hat{D}_p^b depends on the list $\{\hat{T}^\sharp, \hat{G}, \hat{Z}_i\}$, where the quantities \hat{Z}_i , $i = 1, 2, \dots, n$ are a set of suitably defined internal variables. We stipulate the following constitutive equation

$$\hat{D}_p^b = \hat{D}_p^b(\text{dev } \hat{T}^\sharp, \hat{G}, \hat{Z}_i) . \quad (27)$$

Onat [14] has shown that the set of internal variables \hat{Z}_i can be restricted to scalars and tensors of even rank. Since the tensor \hat{D}_p^b is deviatoric, it is reasonable to assume that it depends on the deviator

$$\text{dev } \hat{T}^\sharp = \hat{T}^\sharp - \frac{1}{3}(\hat{T}^\sharp : \hat{G}) \hat{G}^\sharp \quad (28)$$

of the stress \hat{T}^\sharp . Considering (2) and (21) we obtain from (27)

$$d_p^{*b} = d_p^{*b}(\text{dev}^* \tau^\sharp, \tilde{c}^b, z_i) . \quad (29)$$

with

$$\text{dev}^* \tau^\sharp := \phi_*^e(\text{dev } \hat{T}^\sharp) = \tau^\sharp - \frac{1}{3}(\tau^\sharp : \tilde{c}^b) \tilde{b}^\sharp \quad (30)$$

$$z_i := \phi_*^e(\hat{Z}_i) . \quad (31)$$

A completely corresponding constitutive equation can be obtained for the plastic spin tensor w_p^{*b} which is omitted for the sake of brevity.

It has to be emphasized that the plastic constitutive equation (29) in combination with the elastic constitutive equations (which are not presented in this paper) is not sufficient for the description of the material behavior but an evolution equation for the tensor \tilde{b}^\sharp is required. It can be shown [5] that

$$\mathcal{L}_v(\tilde{b}^\sharp) = -2 \tilde{b}^\sharp d_p^{*b} \tilde{b}^\sharp , . \quad (32)$$

Considering $\bar{\mathbf{b}}^{\sharp} = (\bar{\mathbf{c}}^b)^{-1}$ we obtain from (29)

$$\mathcal{L}_v(\bar{\mathbf{b}}^{\sharp}) = \mathbf{f}(\text{dev}^* \boldsymbol{\tau}^{\sharp}, \bar{\mathbf{b}}^{\sharp}, \mathbf{z}_i), \quad (33)$$

where \mathbf{f} is a tensorvalued function of its arguments.

Since we will use the plastic constitutive equation (33) we have to rewrite the condition of plastic incompressibility [5]

$$\mathcal{L}_v(\bar{\mathbf{b}}^{\sharp}) : \bar{\mathbf{c}}^b = 0. \quad (34)$$

Finally, we have to formulate evolution equations for the internal variables \mathbf{z}_i . In an exemplaric manner we confine our considerations to the case, that the internal variables are a scalar \hat{S} and a second order tensor $\hat{\mathbf{Z}}^{\sharp}$ on the intermediate configuration. The scalar \hat{S} models isotropic hardening. The second order tensor $\hat{\mathbf{Z}}^{\sharp}$ can be interpreted as a back stress to describe kinematic hardening. The evolution equation for the scalar variable is

$$\dot{\hat{S}} = \dot{\hat{S}}(\text{dev } \hat{\mathbf{T}}^{\sharp}, \hat{\mathbf{G}}, \hat{S}, \hat{\mathbf{Z}}^{\sharp}). \quad (35)$$

Pushing forward (35) to the current configuration with $s = \phi_*^e(\hat{S}) = \hat{S}$ and $\mathbf{z}^{\sharp} = \phi_*^e(\hat{\mathbf{Z}}^{\sharp})$ yields

$$\dot{s} = \dot{s}(\text{dev}^* \boldsymbol{\tau}^{\sharp}, \bar{\mathbf{c}}^b, s, \mathbf{z}^{\sharp}). \quad (36)$$

The evolution equation for tensorial variable is

$$\dot{\mathbf{Z}}^{\sharp} = \dot{\mathbf{Z}}^{\sharp}(\text{dev } \hat{\mathbf{T}}^{\sharp}, \hat{\mathbf{G}}, s, \hat{\mathbf{Z}}^{\sharp}). \quad (37)$$

By push-forward with the elastic part of the deformation gradient we obtain

$$\mathcal{L}_v^e(\mathbf{z}^{\sharp}) = \mathbf{h}(\text{dev}^* \boldsymbol{\tau}^{\sharp}, \bar{\mathbf{c}}^b, s, \mathbf{z}^{\sharp}), \quad (38)$$

where the elastic Lie derivative $\mathcal{L}_v^e(\cdot)$ has been introduced in [9]. In (38) \mathbf{h} again is a tensorvalued function of its arguments.

In [6] we present an application of the constitutive frame formulated in this contribution to a viscoplastic model originally proposed by Anand and coworkers [3]. Furthermore, we discuss the implications of the assumption of small elastic strains, which is widely accepted for metals. Finally, we present numerical results for simple shear.

REFERENCES

- [1] Bammann, D. J.; Aifantis, E. C.: A model for finite-deformation plasticity. *Acta Mechanica* **69**, 97–117 (1987).
- [2] Bodner, S. R.; Partom, Y.: Constitutive Equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* **42**, 385–389 (1975).
- [3] Brown, S. B.; Kim, K. H.; Anand, L.: An internal variable constitutive model for hot working of metals. *Int. J. Plasticity* **5**, 95–130 (1989).

- [4] Cleja-Tigoiu, S.; Soós, E.: Elastoviscoplastic models with relaxed configurations and internal state variables. *ASME, Appl. Mech. Rev.* **43**(7), 131–151 (1990).
- [5] Hackenberg, H. - P.: *Ein Vergleich verschiedener inelastischer Stoffgesetzformulierungen für finite Deformationen am Beispiel des ebenen Scherversuchs*. Unpublished report MuM-Report 91/2, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt, Federal Republic of Germany 1991.
- [6] Hackenberg, H. - P.; Kollmann, F. G.: A methodology for formulating large strain viscoplastic constitutive equations with applications to simple shear. To appear in Proceedings of the IUTAM-Symposium "Finite Inelastic Deformation", Hannover, 08.19 – 23. 1991.
- [7] Hart, E. W.: Constitutive relations for the non-elastic deformation of metals. *Trans. ASME, J. Eng. Mat. Tech.* **98**, 193–202 (1976).
- [8] Haupt, P.: On the concept of an intermediate configuration and its application to a representation of viscoelastic-plastic material behavior. *Int. J. Plasticity* **1**, 303–316 (1988).
- [9] Kollmann, F. G.; Hackenberg, H. - P.: *Kinematics and rate-type elastic constitutive equations for finite rate dependent inelastic deformation of materials with small elastic strains*. Unpublished report MuM-Report 90/2, Technische Hochschule Darmstadt, Darmstadt, Federal Republic of Germany 1990.
- [10] Kröner, E.: Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **4**, 237–334 (1960).
- [11] Lee, E. H.: Elastic-plastic deformation at finite strains. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* **36**, 1–6 (1969).
- [12] Mandel, J.: Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. *Int. J. Solids Structures* **9**, 725–740 (1973).
- [13] Marsden, E.; Hughes, T. J. R.: *Mathematical foundations of elasticity*. Englewood Cliffs: Prentice Hall 1983.
- [14] Onat, E. T.: Representation of inelastic behavior in the presence of anisotropy and finite deformations. In: *Plasticity of metals: Theory, computations and experiment* (E. H. Lee; R. L. Mallet, eds.), pp. 519–544. Stanford, USA and Troy, USA: Stanford University and Renssler Polytechnical Institute 1982.

Viskoplastische Schalentheorie bei finiten Verzerrungen

Q. An, F. G. Kollmann, Maschinenelemente und Maschinenakustik, TH Darmstadt

1. Einleitung

Mit einem gemischten Variationsprinzip in Ratenform haben Kollmann und Mukherjee eine Theorie inelastischer Schalen bei kleinen Verzerrungen entwickelt [6]. Hierbei werden vereinheitlichte Modelle (unified constitutive models) mit inneren Zustandsvariablen benutzt ([1], [2], [3]), für die keine Fließflächen benötigt werden. Zur Behandlung anisotroper viskoplastischer Schalen haben Hughes und Liu ein degeneriertes Kontinuumselement mit voll nichtlinearer Kinematik entwickelt ([4], [5]).

Aus einer Theorie für das dreidimensionale Kontinuum wird in dieser Arbeit eine inelastische Schalentheorie bei kleinen elastischen Verzerrungen und finiten inelastischen Deformationen entwickelt. Hierbei werden bestimmte kinematische Grundannahmen eingearbeitet. Die Spannungs- und Verzerrungstensoren werden in der Momentankonfiguration eingeführt und durch Komposition mit der Abbildungsvorschrift $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X})$ auf die Referenzkonfiguration transformiert (z.B. $\mathbf{e}^b := \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G} \mathbf{F}^{-1}) \circ \phi$).

In dieser Arbeit wird der Tensoralkül auf Mannigfaltigkeiten angewendet, der von Marsden und Hughes [7] in die Kontinuumsmechanik eingeführt wurde. Ko- und kontravariante Tensoren werden mit Indizes "#" bzw. "b" gekennzeichnet (z.B. $\tau^\#$, \mathbf{e}^b). Gemischte Tensoren haben keinen solchen Indikator (z.B. \mathbf{F}).

2. Konstitutive Modelle

Es werden folgende Annahmen getroffen:

1. Das betrachtete Material ist strukturell isotrop.
2. Die elastischen Verzerrungen sind klein, die inelastischen Verformungen sind finit und inkompressibel.
3. Der Deformationsgradient läßt sich multiplikativ in einen elastischen Anteil $\hat{\mathbf{F}}_e$ und einen inelastischen Anteil \mathbf{F}_i zerlegen

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_i \quad . \quad (1)$$

Durch diese multiplikative Zerlegung wird eine Zwischenkonfiguration punktweise eingeführt. Mit Hilfe der multiplikativen Zerlegung lassen sich die konstitutiven Modelle für den elastischen und den inelastischen Anteil separat betrachten. Weil die elastischen und inelastischen Verzerrungsgrößen nur in der Zwischenkonfiguration eindeutig getrennt werden können, werden die konstitutiven Gleichungen zuerst bezüglich der Zwischenkonfiguration formuliert. Dann werden sie durch eine Push-Forward-Operation auf die Momentankonfiguration transformiert.

Somit ergibt sich für den elastischen Anteil aus dem St. Venant-Kirchhoff-Stoffgesetz die auf die Momentankonfiguration bezogene Gleichung

$$\tau^{\#} = 2\mu g^{\#} e_e^b g^{\#} + \lambda \text{tr}(g^{\#} e_e^b) g^{\#} \quad \text{mit} \quad e_e^b := \frac{1}{2}(g - \hat{F}_e^{-T} \hat{G} \hat{F}_e^{-1}) \circ \phi . \quad (2)$$

Hierbei sind λ und μ die Lamé-Konstanten, g und \hat{G} die Metriktensoren der Momentan- bzw. Zwischenkonfiguration, $g^{\#}$ die Inverse von g und $\tau^{\#}$ der Kirchhoffsche Spannungstensor.

Zur Beschreibung des inelastischen Verhaltens werden vereinheitlichte Werkstoffmodelle mit inneren Variablen benutzt. Analog erhält man für den inelastischen Anteil die auf der Momentankonfiguration formulierten Gleichungen

$$d^b = f^b(\tau^{\#}, z^{\#}), \quad \nabla z^{\#} = g^{\#}(\tau^{\#}, z^{\#}), \quad (3)$$

wobei d_i^b die Lie-Ableitung des inelastischen Verzerrungstensors und $\nabla z^{\#}$ die Lie-Ableitung der inneren Variablen $z^{\#}$ (kontravarianter Tensor zweiter Stufe) sind.

Aus (2) und (3) läßt sich nach aufwendigen Zwischenrechnungen eine Beziehung zwischen dem Spannungs- und dem Verzerrungsinkrement erhalten.

3. Schwache Form der Gleichgewichtsbedingungen

Die schwache Form der Gleichgewichtsbedingungen (GGB) lautet bei verschwindenden Volumenkräften

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := \int_{B_0} \tau^{\#} : e^b(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \, dV - \int_{\partial B_0 \tau} \mathbb{T} \cdot \mathbf{w} \, dS = 0 \quad (4)$$

$$\text{mit} \quad e^b(\mathbf{u}, \mathbf{w}) := \mathbf{F}^{-T} \frac{d}{d\xi} \{ \mathbf{F}^T e^b \mathbf{F} \} (\mathbf{u} + \xi \mathbf{w}) \Big|_{\xi=0} \mathbf{F}^{-1} . \quad (5)$$

Dabei sind dV und dS die Volumen- und Flächenelemente der Referenzkonfiguration, $\bar{\mathbf{T}}$ der vorgegebene auf die Referenzkonfiguration bezogene Spannungsvektor, sowie \mathbf{w} die Testfunktion für die Verschiebungen. Mit einem Newton-Verfahren lassen sich die Verschiebungen aus der Linearisierung von (4) iterativ berechnen, wobei die inkrementelle Form der konstitutiven Gleichungen eingearbeitet wird.

4. Schalentheorie

Für dünne Schalen wird angenommen, daß die Normalen zur SMF in der Referenzkonfiguration nach der Deformation gerade bleiben. Sie sind jedoch im allgemeinen nicht orthogonal zur deformierten SMF. Das heißt, die Schubverzerrungen und die Dehnung längs der Schalendickenrichtung werden berücksichtigt.

Werden diese Annahmen in die linearisierte schwache Form eingesetzt, so erfolgt nach der Integration über die Schalendicke die linearisierte schwache Form der GGB für Schalen

$$\begin{aligned}
 & \int_S \{ \mathbf{p}^\# : \mathbf{e}^b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \Delta \mathbf{u}; \mathbf{d}, \mathbf{v}, \Delta \mathbf{d}) + \mathbf{m}^\# : \boldsymbol{\kappa}^b(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \Delta \mathbf{u}; \mathbf{d}, \mathbf{v}, \Delta \mathbf{d}) \} dS \\
 & + \int_S \{ \mathbf{e}^b(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}; \mathbf{d}, \Delta \mathbf{d}) : \mathbf{c}_{ee} [\mathbf{e}^b(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \mathbf{d}, \mathbf{v})] + \mathbf{e}^b(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}; \mathbf{d}, \Delta \mathbf{d}) : \mathbf{c}_{e\kappa} [\boldsymbol{\kappa}^b(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \mathbf{d}, \mathbf{v})] \\
 & + \boldsymbol{\kappa}^b(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}; \mathbf{d}, \Delta \mathbf{d}) : \mathbf{c}_{\kappa e} [\mathbf{e}^b(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \mathbf{d}, \mathbf{v})] + \boldsymbol{\kappa}^b(\mathbf{u}, \Delta \mathbf{u}; \mathbf{d}, \Delta \mathbf{d}) : \mathbf{c}_{\kappa\kappa} [\boldsymbol{\kappa}^b(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \mathbf{d}, \mathbf{v})] \} dS \\
 & - \int_S (\Delta \bar{\mathbf{T}}_s \cdot \mathbf{w} + \Delta \bar{\mathbf{M}}_s \cdot \mathbf{v}) dS - \int_{l_e} (\Delta \bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{w}_e + \Delta \bar{\mathbf{M}}_e \cdot \mathbf{v}_e) dl \\
 = & \int_S \{ \mathbf{p}^\# : \mathbf{e}^b(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \mathbf{d}, \mathbf{v}) + \mathbf{m}^\# : \boldsymbol{\kappa}^b(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \mathbf{d}, \mathbf{v}) \} dS \\
 & - \int_S (\bar{\mathbf{T}}_s \cdot \mathbf{w} + \bar{\mathbf{M}}_s \cdot \mathbf{v}) dS - \int_{l_{e\sigma}} (\bar{\mathbf{T}}_e \cdot \mathbf{w}_e + \bar{\mathbf{M}}_e \cdot \mathbf{v}_e) dl .
 \end{aligned} \tag{6}$$

Alle in Gleichung (6) enthaltenen Größen sind auf der SMF der Referenzkonfiguration definiert. Hierbei ist $\mathbf{p}^\#$ der Schnittkraft- und $\mathbf{m}^\#$ der Schnittmomententensor. \mathbf{w} ist die Testfunktion für die Verschiebung der SMF und \mathbf{v} die des Direktors. $\Delta \mathbf{u}$ und $\Delta \mathbf{d}$ sind die entsprechenden Inkremente. \mathbf{e}^b ist ein verallgemeinerter Membranverzerrungstensor und $\boldsymbol{\kappa}^b$ ein verallgemeinerter

Verkrümmungstensor. e^b enthält außer den Membran- auch die Querschubverzerrungen. Entsprechend beschreibt κ^b die Verkrümmungen und Verdrillungen. $e^b(u, w, d, v)$ ist die Variation, $e^b(u, \Delta u, d, \Delta d)$ das räumliche Inkrement und $e^b(u, w, \Delta u, d, v, \Delta d)$ das räumliche Inkrement der Variation von e^b . c_{ee} , $c_{e\kappa}$ und $c_{\kappa\kappa}$ sind 4-stufige tangentielle Steifigkeitstensoren. \bar{T} und \bar{M} sind die äußeren Kräfte bzw. Momente, $\Delta\bar{T}$ und $\Delta\bar{M}$ das materielle Inkrement der äußeren Kräfte bzw. Momente. Aus der linearisierten schwachen Form wird das Verschiebungsincrement (Δu , Δd) berechnet. Danach werden der Spannungstensor und die inneren Variablen in den Integrationspunkten berechnet. Aus diesen Werten werden die tangentialen Steifigkeitstensoren und Schnittgrößen aktualisiert. Mit den aktualisierten Werten werden neue Verschiebungsinkremente ermittelt. So wird der Iterationsprozeß fortgesetzt.

Literaturverzeichnis

- [1] Anand, L.: Constitutive Equations for the Rate-Dependent Deformation of Metals at Elevated Temperatures. Trans. ASME, J. Eng. Mat. Tech. 104, 12-17 (1982).
- [2] Bammann, D. J.; Aifantis, E. C.: A Model for Finite-Deformation Plasticity. Acta Mech. 69, 97-117 (1987).
- [3] Bodner, S. R.; Partom, Y.: Constitutive Equations for Elastic-Viscoplastic Strain -Hardening Materials. J. Appl. Mech. 42, 385-389 (1975).
- [4] Hughes, T. J.R.; Liu, W. K.: Nonlinear Finite Element Analysis of Shells: Part I. Three-Dimensional Shells, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 26, 331-362 (1981).
- [5] Hughes, T. J.R.; Liu, W. K.: Nonlinear Finite Element Analysis of Shells: Part II. Two-Dimensional Shells, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 27, 167-181 (1981).
- [6] Kollmann, F. G.; Mukhjee, S.: A General, geometrically linear Theory of Inelastic Thin Shells. Acta Mech. 57, 41-67 (1985).
- [7] Marsden, J. E.; Hughes, T. J.: Mathematical Foundations of Elasticity. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. 1983.

**VERALLGEMEINERTE DEFORMATIONSGESETZE
UND VERSAGENSKRITERIEN FÜR
WERKSTOFFE, DIE IM EXPERIMENT EFFEKTE
HÖHERER ORDNUNG AUFWEISEN**

Holm Altenbach¹⁾ & Alexandr Zolochovsky²⁾

1) Technische Universität "Otto von Guericke" Magdeburg

2) Polytechnisches Institut Kharkov (Ukraine/ Sowjetunion)

1. Einleitung

Das reale Werkstoffverhalten kann durch unterschiedliche Modelle abgebildet werden. Eine wichtige Modellgruppe stellen die mathematischen Modelle dar, bei denen das Werkstoffverhalten mit unterschiedlichen mathematischen Mitteln beschrieben wird. Im Rahmen der Berechnung von Bauteilen und Konstruktionen werden mathematische Modelle nahezu ausschließlich angewandt. Dabei stehen festkörpermechanische (phänomenologische) Modelle [1] im Vordergrund, da sie besonders geeignet für den Einsatz numerischer Verfahren sind. Nachfolgend wird eine Gruppe von Modellen betrachtet, die für Werkstoffe, die im Experiment Effekte höherer Ordnung [2] aufweisen, besonders geeignet sind. Bei einheitlicher Vorgehensweise [3] läßt sich unterschiedliches Werkstoffverhalten (Elastizität, Plastizität, Kriechen und Versagen) analysieren.

2. Annahmen und mathematische Grundlagen

Betrachtet werden Werkstoffe, die bei vorausgesetzter Isotropie Effekte höherer Ordnung im Experiment zeigen. Zu den wichtigsten Effekten gehören unterschiedliches Verhalten bei Zug und Druck, Abweichungen des Zug- vom Torsionsverhalten bei einheitlicher Darstellungsweise, Poynting- bzw. Swift-Effekt sowie der Einfluß des hydrostatischen Drucks. Diese Effekte treten u.a. bei Grauguß, einigen Leichtmetall-Legierungen, Keramik- und Kompositwerkstoffen usw. in signifikanter Form auf. Bei Annahme der Existenz eines Potentials (z.B. elastisches Potential bzw. Kriechpotential) oder einer Grenzkurve für das Versagen lassen sich entsprechende Werkstoffmodelle einheitlich ableiten. Aus-

gangspunkt dabei ist der Spannungstensor \underline{g} , dessen Symmetrie ($\underline{g} = \underline{g}^T$) vorausgesetzt wird. Im Falle isotropen Werkstoffverhaltens läßt sich dieses durch die Invarianten des Spannungstensors

$$I_1 = \underline{g} \cdot \underline{1}, I_2 = \underline{g} \cdot \underline{g}, I_3 = (\underline{g} \cdot \underline{g}) \cdot \underline{g},$$

angeben. Kombinationen dieser Invarianten sind gleichfalls invariante Größen

$$\sigma_1 = BI_1, \sigma_2^2 = AI_1^2 + CI_2, \sigma_3^3 = DI_1^3 + KI_1I_2 + EI_3$$

A, B, C, D, E und K sind werkstoffspezifische Größen, die zu bestimmen sind. Damit ist das entsprechende Potential bzw. die Grenzfläche als Funktion dieser Invarianten zu formulieren. Für den Vergleich des einachsigen mit dem mehrachsigen Zustand bietet sich folgende Vergleichsspannung (äquivalente Spannung) an

$$\sigma_{EQ} = \alpha\sigma_1 + \sigma_2 + \gamma\sigma_3$$

α und γ können zur Berücksichtigung des "Gewichtes" der ungeraden Invarianten herangezogen werden. Der Einfachheit wegen wird hier $\alpha = \gamma = 1$ gesetzt.

3. Ermittlung der werkstoffspezifischen Konstanten

Die Ermittlung von 6 werkstoffspezifischen Größen ist kompliziert und erscheint derzeit vielfach nicht realistisch. Daher werden meist weitere Vereinfachungen getroffen. Beispielsweise kann man $D = K = 0$ setzen. Damit genügen 4 Grundversuche für die Ermittlung der verbleibenden Konstanten. Diese Grundversuche können beispielsweise der Zugversuch, der Druckversuch, reine Torsion und Rohr unter Innendruck sein.

WERKSTOFFVERSUCH experimentell ermittelte Kennwerte	KONSTITUTIVGLEICHUNGEN unbekannt: A, B, C, E
IDENTIFIKATIONSPROZEDUR A, B, C, E als Funktion der Kennwerte	

Die beschriebene Vorgehensweise hat den Vorteil, daß die Anpassung nicht nach formalen (rein mathematischen) Gesichtspunkten erfolgt, da das jeweilige physikalische Experiment (Werkstoffversuch) und das analoge mathematisch-mechanische Experiment (Analyse der Konstitutivgleichungen) verglichen werden.

4. Beispiele

Die vorgeschlagene Methodik wurde bisher in folgenden Fällen angewendet:

- elastisches Werkstoffverhalten [4],
- Kriechverhalten [5],
- Versagensbewertung [6] sowie
- Einbeziehung isotroper Schädigung [7]

Dabei gelang es in drei Fällen (Elastizität, Kriechen, Schädigung) alle werkstoffspezifische Größen zu identifizieren. Der anschließende Vergleich der theoretischen Ergebnisse für mehrachsige Beanspruchungen mit entsprechenden experimentellen Ergebnissen (Experimente, die von den Grundversuchen unabhängig sind!) ergab eine befriedigende Übereinstimmung. Derzeit werden weitere Vergleiche mit Experimenten angestrebt. Gleichzeitig werden erste anisotrope Modelle entwickelt.

Literatur

1. Altenbach, H.; Blumenauer, H. Neue Hütte 34(1989)6, 214 - 219
2. Truesdell, C.: Second-order Effects in the Mechanics of Materials. In: Reiner, M.; Abir, D. (eds.) Second Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics. Oxford: Pergamonn Press, 1964, 1 - 50
3. Zolochovsky, A.; Konkin, V.; Morachkovsky, O.; Koczyk, S. Technische Mechanik 6(1985)4, 27 - 36
4. Altenbach, H., Dankert, M.; Zolochovsky, A. Technische Mechanik 10(1989)4, 211 - 217
5. Altenbach, H.; Schießle, P.; Zolochovsky, A. Rheologica Acta 30(1991)4, 388 - 399
6. Altenbach, H.; Krause, J.; Zolochovsky, A. Technische Mechanik 12(1991)2, 113 - 117
7. Altenbach, H.; Zolochovsky, A. ZAMM (zum Druck akzeptiert)

Verallgemeinerte viskoplastische Materialmodelle und ihre Implementierung in FE-Programme

H. Köppe, Institut für Festkörpermechanik, TU Magdeburg

1. Einleitung

Neue Konstruktionswerkstoffe, der immer stärker werdende Zwang nach einer besseren Auslastung des Tragverhaltens von Konstruktionen und Baugruppen und eine genauere Schadensvorhersage erfordern für eine Vorausberechnung den Einsatz komplexerer Werkstoffmodelle, die über das klassische linear-elastische Materialverhalten hinausgehen. Bei der Verwendung der Finiten Elemente Methode (FEM) als numerisches Berechnungsverfahren entscheiden realitätsnahe Werkstoffabbildungen neben exakten Geometrie- und Belastungsmodellierungen über die Genauigkeit und Aussagefähigkeit der Ergebnisse sowie deren Relevanz für weiterführende Untersuchungen.

Neue Leichtmetalllegierungen, Kunststoffe, Keramikmaterialien, Kompositwerkstoffe usw. zeigen unter Belastung sowohl bei Raumtemperatur als auch bei erhöhten Temperaturen viskoplastische Eigenschaften, die sich komplexer darstellen als die bei traditionellen Konstruktionswerkstoffen. Experimentelle Untersuchungen zeigen für solche Materialien belastungsabhängige Krieeigenschaften, kompliziertes Verfestigungsverhalten und in der Regel Anisotropieeigenschaften.

Zur phänomenologischen Erfassung der wesentlichen Materialeigenschaften wurde deshalb ein verallgemeinertes Deformationsgesetz gewählt.

2. Konstitutivgleichungen

Zur Ableitung der Konstitutivgleichungen wird die Existenz eines Kriechpotentials der Form

$$F = 0.5 s_V^2 \quad (1)$$

vorausgesetzt. Ähnlich dem plastischen Potential wird es aus dem Prinzip der größten spezifischen Dissipationsleistung abgeleitet. Demnach gilt auch hier die Normalenregel

$$\overset{\circ}{e}_{ij}^{vp} = \overset{\circ}{\mu} \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} \quad (2)$$

$\overset{\circ}{\mu}$ - skalarer Multiplikator

In (1) entspricht S_V einer Vergleichsspannung

$$S_V = \alpha S + S_0 + \delta S_1 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} S &= b_{ij} s_{ij} \\ S_0^2 &= a_{ijkl} s_{ij} s_{kl} \\ S_1^3 &= c_{ijklmn} s_{ij} s_{kl} s_{mn} \end{aligned} \quad (4)$$

$b_{ij}, a_{ijkl}, c_{ijklmn}$ - Materialtensoren 2., 4. und 6. Stufe
 α, δ - skalare Gewichte für die ungeraden Spannungsinvarianten

Durch Einsetzen von (3), (4) in (2) erhält man

$$\overset{\circ}{e}_{ij}^{vp} = \overset{\circ}{\mu} S_V (\alpha b_{ij} + a_{ijkl} s_{kl} / S_0 + \delta c_{ijklmn} s_{kl} s_{mn} / S_1^2) \quad (5)$$

Die Bestimmung der skalaren Größe $\overset{\circ}{\mu}$ erfolgt aus der Äquivalenz der spezifischen Dissipationsleistung mit einem einachsigen Vergleichszustand. Verwendet man im einachsigen Fall das NORTON - BAILEYSCHES Kriechgesetz erhält man für den viskoplastischen Dehnungsgeschwindigkeitstensor

$$\overset{\circ}{e}_{ij}^{vp} = K S_V^n (\alpha b_{ij} + a_{ijkl} s_{kl} / S_0 + \delta c_{ijklmn} s_{kl} s_{mn} / S_1^2) \quad (6)$$

3. Die Finite-Element-Analyse

Zur Testung des verallgemeinerten Deformationsgesetzes wurde das kommerzielle Finite Elemente Programmsystem COSAR genutzt. Bei diesem System handelt es sich um eine leistungsfähige Software für den Berechnungsingenieur zur Strukturanalyse von Bauteilen. Wesentliche Bestandteile des Programmsy-

stems sind die Zweige Elastostatik, Dynamik, Temperaturfeldberechnung und nichtlineare Statik. Das Teilsystem nichtlineare Statik enthält Lösungsalgorithmen für Plastizitäts- und Viskoplastizitätsprobleme unter der Voraussetzung kleiner Deformationen.

Die Implementierung der Materialgesetze erfolgt auf der Grundlage einer von BERGANDER [1] vorgeschlagenen Standardformulierung. Damit wird eine relativ hohe Variabilität in der Möglichkeit des Austausches von Materialgesetzen bei geringen Aufwand erreicht.

Die Berechnungsstrategie für die Viskoplastizität sieht als erstes die Lösung des Randwertproblem und dann die des Anfangswertproblem vor. Zur numerischen Zeitintegration des entstehenden Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{g}[\mathbf{y}(t), t] \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0\end{aligned}\quad (7)$$

wird der Lösungsansatz (GMR-Generalized Midpoint Rule)

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t + \Delta t) &= \mathbf{y}(t) + \Delta t \cdot \mathbf{g}(\mathbf{y}(t + \theta \Delta t), t + \theta \Delta t) \\ \mathbf{y}(t + \theta \Delta t) &= (1 - \theta) \mathbf{y}(t) + \theta \mathbf{y}(t + \Delta t)\end{aligned}\quad (8)$$

gemacht.

Das in (8) entstandene nichtlineare algebraische Gleichungssystem muß für $\theta \neq 0$ iterativ gelöst werden. Im Fall $\theta = 0$ entsteht die einfache Euler-Integrationsvorschrift.

Zur Auswertung der Ergebnisse steht in COSAR ein umfangreicher und leistungsfähiger Postprozessor zur Verfügung.

4. Berechnungsbeispiel

Zum Zweck des Testes dieses allgemeinen Deformationsgesetzes wurde eine Zylinderschale unter Außendruck für die numerische Berechnung als rotationssymmetrisches Bauteil modelliert. Als Elemente werden isoparametrische 8-Knoten-Viereckelemente

verwendet (Bild 1). In der Gleichung für die Vergleichsspannung (4) wurde $\bar{\sigma} = 0$ angenommen. Weiterhin wird isotropes Materialverhalten vorausgesetzt.

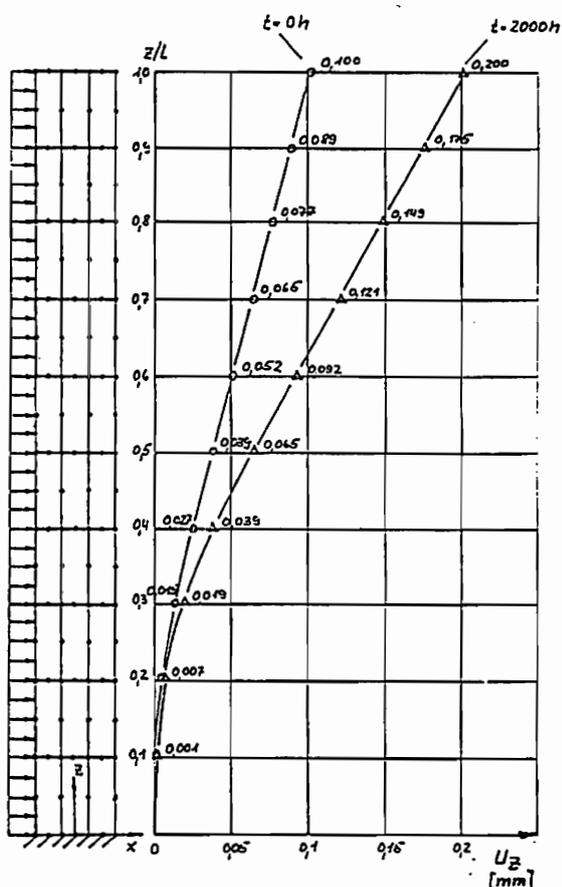


Bild 1

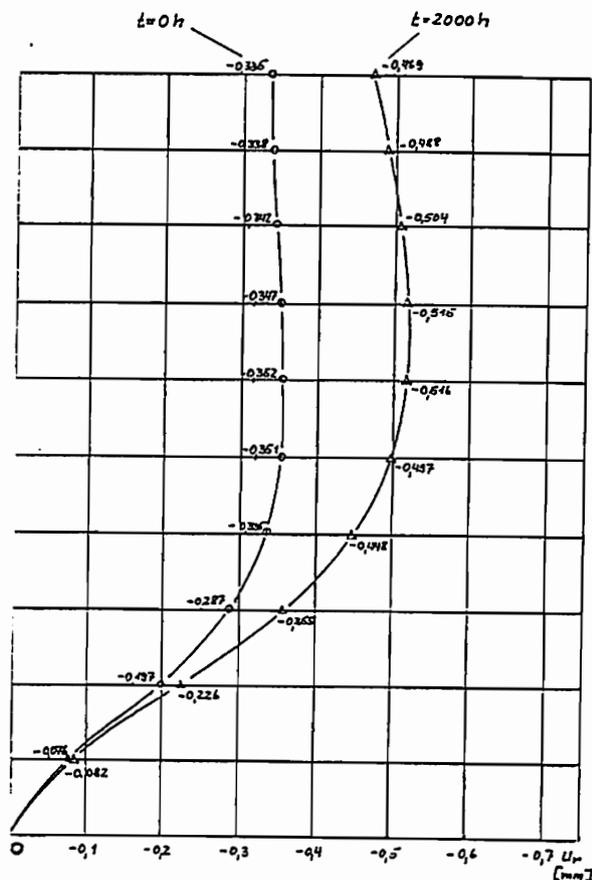


Bild 2.

Literatur:

- /1/ H. Bergander, Verallgemeinerte Darstellung inelastischer Deformationsgesetze zur Erleichterung der numerischen Lösung des Anfangs-Randwert-Problems, ZAMM 58 (1978) S. 489-499
- /2/ J. Betten, Zur Aufstellung von Stoffgleichungen in der Kriechmechanik anisotroper Körper, Rheologica acta Vol. 20 (1981) Nr.6
- /3/ H. Köppe, Erweiterung des PS COSAR auf die Lösung nichtlinearer Probleme der Festkörpermechanik, Technische Mechanik 10 (1989)
- /4/ H. Köppe, Die Verwendung eines verallgemeinerten Deformationsgesetzes zur numerischen Lösung

- A. Zolochovsky viskoplastischer Probleme, IX. Sympos.
Verformung und Bruch Magdeburg 1991,
Posterbeiträge
- /5/ H. Altenbach, Anisotrope mathematisch-mechanische Mo-
M. Dankert, delle für Werkstoffe mit von der Belastung
A. Zolochovsky abhängigen Eigenschaften, Techn. Mechanik
11 (1990) Heft 1, S. 5-13

ROTATIONSSYMMETRISCHE INHOMOGENE DEFORMATIONEN IN DER FINITEN PLASTIZITÄTSTHEORIE MIT VERFESTIGUNG

R. Bonn, P. Haupt, Institut für Mechanik, Gh Kassel - Universität

Zusammenfassung

Im Rahmen einer geschwindigkeitsunabhängigen Plastizitätstheorie für große Deformationen (HAUPT&TSAKMAKIS /1/) wird in diesem Beitrag das Problem des dickwandigen Zylinders unter Innendruck bei ebenem Verzerrungszustand behandelt. Bezogen auf die Basisvektoren der Referenzkonfiguration ergeben die Materialgleichungen in Kombination mit der Gleichgewichtsbedingung und einer Kompatibilitätsgleichung ein System quasilinearer partieller Differentialgleichungen. Die exakte Lösung dieses Systemes wird mit einem Extrapolationsverfahren (SMITH /2/) berechnet.

1. Theoretische Grundlagen

Dem Konzept der dualen Variablen (HAUPT&TSAKMAKIS /1/) folgend werden Verzerrungen, sowie deren zugeordnete Geschwindigkeiten über eine affine Abbildung Ψ aus dem GREENSchen Verzerrungstensor E definiert:

$$\Pi = \Psi^{T-1} E \Psi^{-1}, \quad \overset{\Delta}{\Pi} = \Psi^{T-1} \dot{E} \Psi^{-1} = \dot{\Pi} + (\dot{\Psi} \Psi^{-1})^T \Pi + \Pi (\dot{\Psi} \Psi^{-1}) \quad (1.1)$$

Über die Invarianz der spezifischen Spannungsleistung und der spezifischen komplementären Spannungsleistung,

$$\rho_R w = \tilde{T} \cdot \dot{E} = \Sigma \cdot \overset{\Delta}{\Pi}, \quad \overset{\nabla}{\tilde{T}} \cdot E = \Sigma \cdot \Pi, \quad (1.2)$$

folgt auf natürliche Weise eine Definition der dualen Spannungen Σ und der dualen Spannungsableitungen $\overset{\nabla}{\Sigma}$, basierend auf dem 2ten PIOLA-KIRCHHOFF-Spannungstensor \tilde{T} :

$$\Sigma = \Psi \tilde{T} \Psi^T, \quad \overset{\nabla}{\Sigma} = \Psi \overset{\nabla}{\tilde{T}} \Psi^T = \dot{\Sigma} - (\dot{\Psi} \Psi^{-1}) \Sigma - \Sigma (\dot{\Psi} \Psi^{-1})^T \quad (1.3)$$

Zur Beschreibung großer plastischer Formänderungen entsteht, ausgehend von der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten,

$$F = \hat{F}_e F_p, \quad (1.4)$$

mit der Wahl der Abbildung $\Psi = F_p$ ein System der Materialgleichungen bezogen auf die plastische Zwischenkonfiguration (vgl. dazu BONN&HAUPT/6/):

$$\text{Plastische Inkompressibilität:} \quad \text{Sp}(\hat{\Gamma}_p) = 0 \Leftrightarrow \det F_p = 1 \quad (1.5)$$

$$\text{Elastizitätsgesetz:} \quad \hat{S} = 2\mu \left[\hat{E}_e + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Sp}\hat{E}_e \right] \mathbf{1} \quad (1.6)$$

$$\text{Fließbedingung:} \quad (\hat{S}^D - \hat{X}^D) \cdot (\hat{S}^D - \hat{X}^D) = \frac{2}{3} g_0^2 \quad (1.7)$$

$$\text{Fließregel:} \quad \hat{D}_p = \lambda (\hat{S}^D - \hat{X}^D) \quad (1.8)$$

$$\text{Plastische Bogenlänge:} \quad \dot{s} = \sqrt{\frac{2}{3} \hat{D}_p \cdot \hat{D}_p} \quad (1.9)$$

$$\text{Kinematische Verfestigung:} \quad \hat{X}^D = c \hat{D}_p - b \dot{s} \hat{X} \quad (1.10)$$

2. Problemgleichungen für das dickwandige Rohr

Aus der Annahme der ebenen Deformation und aus Symmetrieüberlegungen für den plastischen Deformationsanteil gewinnt man in bezug auf die Basisvektoren der Referenzkonfiguration die folgenden Matrixdarstellungen für den Deformationsgradienten und seinen plastischen Anteil F_p :

$$\mathbf{F} \hat{=} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_p \hat{=} \begin{pmatrix} \alpha_p & 0 & 0 \\ 0 & \beta_p & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha_p \beta_p)^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

$$\text{mit } \alpha := \left(1 + \frac{\partial u}{\partial R}\right) = \frac{\partial r}{\partial R} \quad \text{und} \quad \beta := \left(1 + \frac{u}{R}\right) = \frac{r}{R} \quad (2.2)$$

Darin bezeichnet r den aktuellen Radius in der Momentankonfiguration und R den Radius in der Referenzkonfiguration. Werden (2.1) und (2.2) in die Materialgleichungen (1.5)-(1.10) eingesetzt, erhält man ein Differentialgleichungssystem, in dem nur die partielle Ableitung nach der Zeit t auftritt. Diese Differentialgleichungen werden durch eine *Kompatibilitätsbedingung* und die *Gleichgewichtsbedingung* komplettiert, in denen nur die partielle Ableitung nach R vorkommt:

$$\frac{\partial \beta}{\partial R} = \frac{\alpha - \beta}{R} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
 & \left[2\mu \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{\alpha}{\alpha_p^2} + \frac{\hat{S}_1^1}{\alpha} \right] \frac{\partial \alpha}{\partial R} + 2\mu \frac{\nu}{1-2\nu} \left[\alpha_p^2 \beta_p - \frac{\beta^2}{\beta_p^3} \right] \frac{\partial \beta_p}{\partial R} + \\
 & + \left[\frac{2\mu}{1-2\nu} \left\{ \nu \alpha_p \beta_p^2 - (1-\nu) \frac{\alpha^2}{\alpha_p^3} \right\} - 2 \frac{\hat{S}_1^1}{\alpha_p} \right] \frac{\partial \alpha_p}{\partial R} + \frac{2\mu \nu}{1-2\nu} \frac{\beta}{\beta_p^2} \frac{\partial \beta}{\partial R} = \\
 & = - \frac{\hat{S}_1^1 - \frac{\beta}{\alpha} \frac{\alpha_p^2}{\beta_p^2} \hat{S}_2^2}{R} \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Für das aus (2.3), (2.4) und den Materialgleichungen bestehende System hyperbolischer Differentialgleichungen existiert (s. z.B. HARTMAN&WINTNER) /3/) eine eindeutige Lösung. Die exakte Lösung des gesamten Problems kann mit numerischen Verfahren, welche die Methode der RICHARDSON-Extrapolation (s. z.B. HACKBUSCH /4/ und SMITH/2/) verwenden, im Rahmen der Maschinengenauigkeit beliebig genau bestimmt werden:

$$z_{\text{approx}}(R,t) = z_{\text{exakt}}(R,t) + O(h_0^k) \quad (2.5)$$

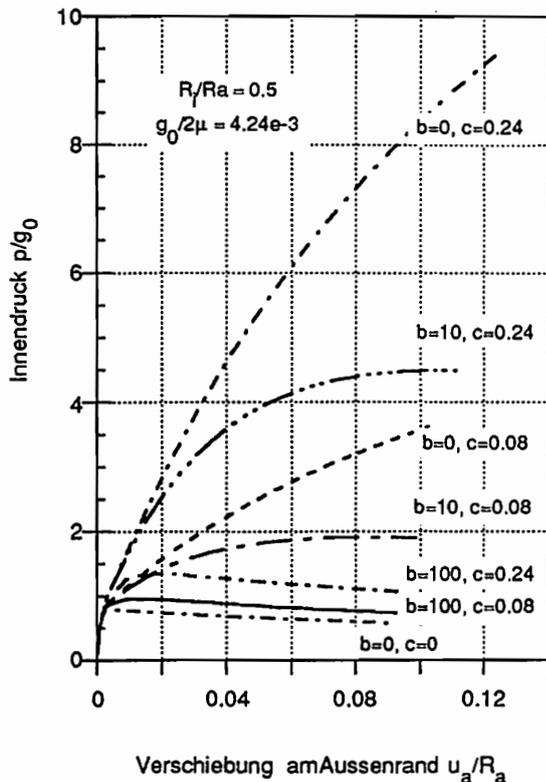


Abb.1 Verlauf des Innendruckes

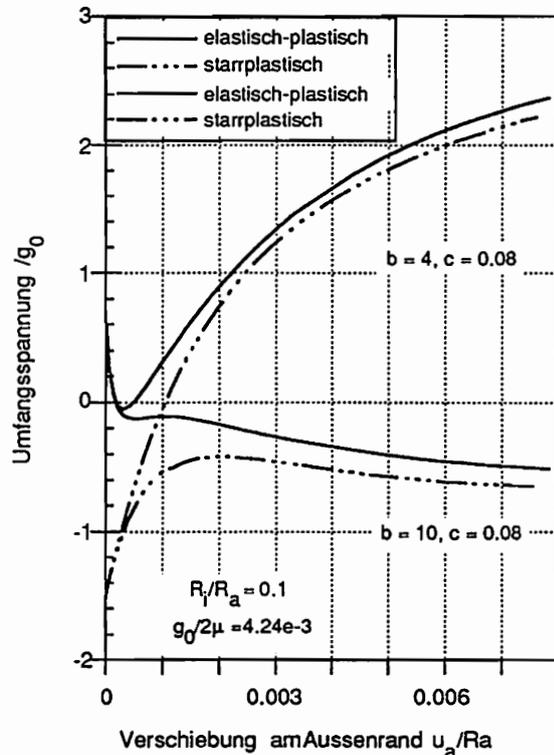


Abb. 2 Vergleich starrplastisch zu elastisch-plastisch

Die in (2.5) auftretende Fehlerordnung k kann durch mehrfache Anwendung des *Extrapolationsverfahren* ständig erhöht werden (s. z.B. STOER&BULIRSCH /5/ zur Vorgehensweise bei gewöhnlichen Differentialgleichungen)

3. Numerische Ergebnisse

Abb. 1 zeigt die Abhängigkeit des Innendruckes von den Parametern der kinematischen Verfestigung. Anhand von Abb. 2 läßt sich im Vergleich zum starrplastischen Material der Übergang von rein elastischem Materialverhalten zum plastischen Fließen aufzeigen. Die Effizienz des Extrapolationsverfahrens illustriert Abb.3, denn das extrapolierte Ergebnis (CPU-Zeit 4s) stimmt mit dem Ergebnis überein, das mit einer Schrittweite von $h=10^{-4}$ (CPU-Zeit 9600s) berechnet wurde. Darüberhinaus werden bei der Extrapolation weniger Rechenoperationen benötigt, was den Einfluß der Rundungsfehler drastisch vermindert.

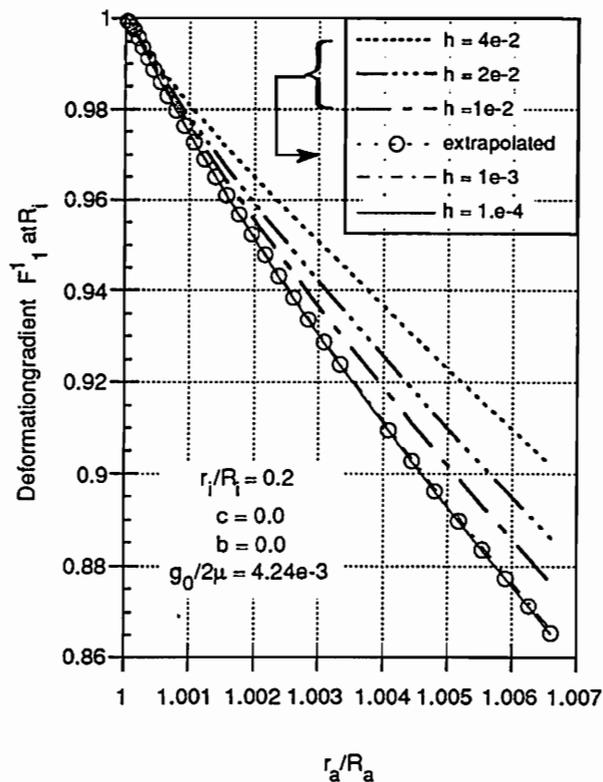


Abb.3 Effizienz des Extrapolationsverfahrens

Literaturverzeichnis

- /1/ HAUPT, P., TSAKMAKIS, CH.: On the Application of Dual Variables in Continuum Mechanics. Continuum Mechanics and Thermodynamics 1 (1989), pp 165-196
- /2/ SMITH, R. R.: Extrapolation Applied to the Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations. Dissertation University of California, San Diego 1970
- /3/ HARTMAN, P., WINTNER, A.: On hyperbolic partial differential equations. An. J. Math., Vol. 74, 1952, 834-864
- /4/ HACKBUSCH, W. : Extrapolation to the limit for numerical solutions of hyperbolic systems, Numerische Mathematik 28, 455-474, 1977
- /5/ BULIRSCH, R.; STOER, J: Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations by Extrapolation Methods, Numerische Mathematik 8, 1-13 (1966)
- /6/ BONN, R., HAUPT, P.: The Thick-Walled Tube under Internal Pressure, An Exact Solution for Plane Strain, to appear in BESDO, D., STEIN, E. (Eds.), Finite Inelastic Deformations -Theory and Applications-, IUTAM Symposium, Hannover, August 19-23, 1991, Springer Verlag, Heidelberg

Geschwindigkeitsunabhängige Thermoplastizität als Grenzfall für langsame Prozesse

P. Haupt, M. Kamlah, Ch. Tsakmakis, Institut für Mechanik der Gh Kassel

Zur thermodynamisch konsistenten Darstellung von viskoelastischen sowie auch viskoplastischen Materialeigenschaften kann man die Theorie der Inneren Variablen anwenden. Es ist für die folgenden Betrachtungen völlig ausreichend, von einem speziellen Modell der Viskoplastizität auszugehen, das aus einer linearen Elastizitätsbeziehung besteht,

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathbf{C} [\dot{\mathbf{E}}_e(t)] + \mathbf{C} \dot{\Theta}(t), \quad (1)$$

einer assoziierten Fließregel,

$$\dot{\mathbf{E}}_i(t) = \frac{1}{\eta} \langle f(\mathbf{T}, \mathbf{X}, \Theta) \rangle \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}}, \quad (2)$$

und einer Evolutionsgleichung der Form

$$\dot{\mathbf{X}} = c \dot{\mathbf{E}}_i - b |\dot{\mathbf{E}}_i| \mathbf{X} \quad \left(|\dot{\mathbf{E}}_i| = \sqrt{\frac{2}{3} \text{tr}(\dot{\mathbf{E}}_i)^2} \right). \quad (3)$$

In diesen Gleichungen bezeichnet \mathbf{T} den Cauchy-Spannungstensor, Θ die Temperatur und \mathbf{E}_e bzw. \mathbf{E}_i die elastischen bzw. inelastischen Anteile der Gesamtverzerrung:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_e + \dot{\mathbf{E}}_i \quad (4)$$

\mathbf{C} und \mathbf{C} sind Elastizitätstensoren und η , c und b weitere Materialkonstanten. Die sogenannte Fließfunktion $f(\cdot)$ ist eine skalarwertige Materialfunktion; die Gleichung

$$f(\mathbf{T}, \mathbf{X}, \Theta) = 0 \quad (5)$$

definiert eine Fläche im Spannungsraum, die sogenannte statische Fließfläche. Sie begrenzt den elastischen Bereich, das heißt, der inelastische Verzerrungsanteil ist für Spannungszustände innerhalb dieses Bereiches ($f \leq 0$) unveränderlich. Inelastische Dehnungsteile entstehen für positive Werte der Fließfunktion ($f > 0$). Dies wird durch die Einführung des Föppl-Symbols $\langle \rangle$ zum Ausdruck gebracht. Interpretiert man einen positiven Wert von f als Abstand von der statischen Fließfläche, so ist die inelastische Verzerrungsgeschwindigkeit diesem Abstand proportional, und die Materialkonstante η besitzt dann die Bedeutung einer Viskosität. Die (tensorwertige) innere Variable \mathbf{X} wird üblicherweise als Mittelpunkt der statischen Fließfläche (back stress) aufgefaßt. Die Evolutionsgleichung (3) als Erweiterung der linearen kinematischen Verfestigungshypothese geht auf einen Vorschlag von Armstrong und Frederick zurück (siehe dazu auch [1]). Offen-

sichtlich paßt dieses Materialmodell in den allgemeinen Rahmen der Thermodynamik der Inneren Variablen, wie er beispielsweise von Coleman und Gurtin [2] formuliert wurde (vgl. [3]).

Es sei nun eine Verzerrungs- und Temperaturgeschichte

$$\Lambda(t) = \{ \mathbf{E}(t), \Theta(t) \}, t \geq t_0 \quad (6)$$

vorgegeben, so daß $f(t_0) = 0$ und $f(t) > 0$ für $t > t_0$ gelten möge. Die Gleichungen (1)-(4) bestimmen dann bei geeignet vorgegebenen Anfangsbedingungen eine eindeutige Lösung $\mathbf{T}(t)$ bzw. $\mathbf{X}(t)$. Damit kann man auch die Fließfunktion f als Funktion der Zeit angeben:

$$f(t) = f(\mathbf{T}(t), \mathbf{X}(t), \Theta(t)) \quad (7)$$

Wenn man jetzt unter Beachtung der Kettenregel die totale zeitliche Ableitung von $f(t)$ bildet und die Zerlegung (4) der Deformation sowie die konstitutiven Annahmen (1)-(3) berücksichtigt, so ergibt sich die Identität

$$\dot{f}(t) + \frac{1}{\eta} K(t) f(t) = \Sigma(t) \cdot \dot{\Lambda}(t), t \geq t_0, \quad (8)$$

wobei die folgenden Abkürzungen verwendet wurden:

$$K(t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{C} \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \right] - c \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} + b \left(\mathbf{X} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \right) \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \right| \quad (9)$$

$$\Sigma(t) = \left\{ \mathbf{C} \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \right], \mathbf{C} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} + \frac{\partial f}{\partial \Theta} \right\} \quad (10)$$

$$\Sigma(t) \cdot \dot{\Lambda}(t) = \mathbf{C} \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \right] \cdot \dot{\mathbf{E}}(t) + \left(\mathbf{C} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} + \frac{\partial f}{\partial \Theta} \right) \dot{\Theta}(t) \quad (11)$$

Die Identität (8) ist auch schon von Kratochvil und Dillon [3] formuliert und analog zum folgenden ausgewertet worden. Für eine solche Auswertung ist die Eigenschaft

$$K(t) \geq K_0 > 0 \quad (12)$$

wesentlich, die eine Annahme über die Stabilität des Materialverhaltens darstellt. Äquivalent zu (8) gilt die explizite Formulierung

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{t_0}^t \Gamma(t, \tau) \cdot \dot{\Lambda}(\tau) d\tau \\ &= \Gamma(t, t_0) \cdot [\Lambda(t) - \Lambda(t_0)] + \int_0^{t-t_0} \frac{\partial}{\partial s} \Gamma(t, t-s) \cdot \Lambda_d^t(s) ds \end{aligned} \quad (13)$$

mit der Kernfunktion

$$\Gamma(t, \tau) = \left\{ e^{-\frac{1}{\eta} \int_{\tau}^t K(\sigma) d\sigma} \right\} \Sigma(\tau) \quad (14)$$

und der relativen Differenzgeschichte der Verzerrung und Temperatur,

$$\Lambda_d^t(s) = \Lambda(t-s) - \Lambda(t) = \{ \mathbf{E}(t-s) - \mathbf{E}(t), \Theta(t-s) - \Theta(t) \} . \quad (15)$$

Für verlangsamte Deformations- und Temperaturprozesse ($0 < \alpha < 1$)

$$\Lambda_{d(\alpha)}^t(s) = \Lambda_d^t(\alpha s) = \Lambda(t - \alpha s) - \Lambda(t) , \quad (16)$$

gilt mit $t_{o(\alpha)} = t - \frac{t - t_o}{\alpha}$ entsprechend zu Gleichung (13)

$$f_{(\alpha)}(t) = \Gamma_{(\alpha)}(t, t_{o(\alpha)}) \cdot [\Lambda(t) - \Lambda(t_o)] + \int_0^{t - t_{o(\alpha)}} \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{(\alpha)}(t, t-s) \cdot \Lambda_d^t(\alpha s) ds . \quad (17)$$

Hierin drückt der Index (α) die Abhängigkeit von dem Verlangsamungsfaktor α aus, die durch die Lösung der konstitutiven Differentialgleichungen (1)-(4) für den um α retardierten Verzerrungs- und Temperaturprozeß entsteht. Gleichung (17) ist unter der Annahme einer retardierten Prozeßgeschichte eine unmittelbare Folgerung aus der Differentialgleichung (8), vorausgesetzt, daß für jede Retardierung der inelastische Prozeß inelastisch bleibt, d.h. daß $f_{(\alpha)}(t) > 0$ für jedes $\alpha \neq 0$ gilt: Nur dann wird die zeitliche Entwicklung der Fließfunktion durch eine Differentialgleichung der Form (8) beschrieben.

Nach diesen Vorbereitungen ist es möglich, die folgende asymptotische Beziehung nachzuweisen (siehe [4]):

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} f_{(\alpha)}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\eta}{K_{(\alpha)}(t)} \Sigma_{(\alpha)}(t) \cdot \dot{\Lambda}(t) \quad (18)$$

Definiert man dementsprechend die plastische Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{E}}_p(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{E}}_{i(\alpha)}(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\eta} \frac{1}{\alpha} f_{(\alpha)}(t) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} , \quad (19)$$

so ergibt sich das Resultat

$$\dot{\mathbf{E}}_p(t) = \left\{ \frac{1}{K_{(0)}(t)} \Sigma_{(0)}(t) \cdot \dot{\Lambda}(t) \right\} \frac{\partial f_{(0)}}{\partial \mathbf{T}} , \quad (20)$$

oder in ausführlicher Form,

$$\dot{\mathbf{E}}_p(t) = \frac{\mathbf{C} \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \right] \cdot \dot{\mathbf{E}}(t) + \left(\mathbf{C} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} + \frac{\partial f}{\partial \Theta} \right) \dot{\Theta}(t)}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{C} \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \right] - c \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} + b \left(\mathbf{X} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \right) \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \right|} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} , \quad (21)$$

wobei der Index (0) hier unterdrückt wurde. Dies ist genau die **Fließregel** der geschwindigkeitsunabhängigen Plastizitätstheorie,

$$\dot{\mathbf{E}}_p(t) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} ,$$

die man durch Auswertung der Konsistenzbedingung $\dot{f}(t) = 0$ erhalten hätte.

Bei einem derartigen Grenzübergang ist auch das **Belastungskriterium** erfüllt. Dies läßt sich dadurch nachweisen, daß man die Zerlegung (4) der Deformation, die Fließregel (2) und das Elastizitätsgesetz (1) für verlangsamte Prozesse hinschreibt und unter Beachtung von (11) in Gleichung (18) einsetzt. Man kommt dann zu der Beziehung

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f_{(\alpha)}(t)}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{K_{(\alpha)}(t)} \mathbf{C} \left[\frac{\partial f_{(\alpha)}}{\partial \mathbf{T}} \right] \cdot \frac{\partial f_{(\alpha)}}{\partial \mathbf{T}} \right) = \\ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\eta}{K_{(\alpha)}(t)} \left[\frac{\partial f_{(\alpha)}}{\partial \mathbf{T}} \cdot \frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{T}}_{(\alpha)}(t) + \frac{\partial f_{(\alpha)}}{\partial \Theta} \dot{\Theta}(t) \right] . \quad (22) \end{aligned}$$

Aus der Definition (9) in der Form

$$K(t) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \cdot \mathbf{C} \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \right] + \bar{K}(t) , \quad \bar{K}(t) = -c \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} + b \left(\mathbf{X} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \right) \left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{T}} \right| \quad (23)$$

und der weiteren Annahme

$$\bar{K}(t) \geq 0 \quad (24)$$

zusätzlich zu (12) folgt dann die Ungleichung

$$1 - \frac{1}{K_{(\alpha)}(t)} \mathbf{C} \left[\frac{\partial f_{(\alpha)}}{\partial \mathbf{T}} \right] \cdot \frac{\partial f_{(\alpha)}}{\partial \mathbf{T}} \geq 0 , \quad (25)$$

da der Elastizitätstensor positiv definit ist. Unter der Voraussetzung, daß der Prozeß inelastisch bleibt ($f_{(\alpha)}(t) > 0$ für $\alpha \neq 0$), folgt daher aus (22) und (24)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial f_{(\alpha)}}{\partial \mathbf{T}} \cdot \frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{T}}_{(\alpha)}(t) + \frac{\partial f_{(\alpha)}}{\partial \Theta} \dot{\Theta}(t) \geq 0 . \quad (25)$$

In dieser Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen, wenn \bar{K} verschwindet. Der Sonderfall der Plastizität ohne Verfestigung (ideale Plastizität) ist durch $\bar{K}(t)=0$ gekennzeichnet. Für positives \bar{K} ist der Ausdruck (25) positiv, und die linke Seite von (22) ist genau dann positiv, wenn der Grenzwert von $\frac{1}{\alpha} f_{(\alpha)}(t)$ positiv ist. In diesem Sinn ist die Ungleichung (25) mit der Belastungsbedingung der geschwindigkeitsunabhängigen Plastizitätstheorie identisch, wobei das Gleichheitszeichen der neutralen Belastung entspricht.

Literaturverzeichnis

- 1 Haupt, P.; Kamlah, M.; Tsakmakis, Ch.: Continuous Representation of Hardening Properties in Cyclic Plasticity. Zur Veröffentlichung eingereicht
- 2 Coleman, B.D.; Gurtin, M.E.: Thermodynamics with Internal State Variables. **The Journal of Chemical Physics** 47 (1967), 597 - 613
- 3 Kratochvil, J.; Dillon, O.W.: Thermodynamics of Elastic-Plastic Materials as a Theory with Internal State Variables. **J. Appl. Phys.** 40 (1969), 3207 - 3218
- 4 Haupt, P.; Kamlah, M.; Tsakmakis, Ch.: On the Thermodynamics of Rate Independent Plasticity as an Asymptotic Limit of Viscoplasticity for Slow Processes. IUTAM Symposium Hannover 1991

Der plastische Spin

J. Paulun, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik,
Universität Hannover

Auf der Grundlage der Konzepte von Mandel /1/ und Kratochvil /2/ wird davon ausgegangen, daß elastische Formänderungen metallischer Werkstoffe durch die Deformation der Kristallgitterlinien beschrieben werden und entsprechend klein sind. Plastische Deformationen hingegen werden in dem Konzept durch das Wandern von Atomen bzw. Molekülen zwischen den Kristallgitterpunkten (Versetzung der Fehlstellen bei Schubbeanspruchung) beschrieben. Da Spannungen eindeutig aus elastischen Deformationen bestimmbar sind, und lediglich ihre Intensität plastische Formänderungen verursacht, ist die Schlußfolgerung eines gleichen Transformationsverhaltens von Spannungs- und plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten nicht zwingend.

Der hier vorgestellte Ansatz der Jaumann/Zaremba-Art für eine objektive Spannungsgeschwindigkeit des Tensors zur kinematischen Verfestigung

$$\overset{\circ}{\underline{\underline{\alpha}}} = \dot{\underline{\underline{\alpha}}} + \underline{\underline{\Omega}}\underline{\underline{\alpha}} - \underline{\underline{\alpha}}\underline{\underline{\Omega}}; \underline{\underline{\Omega}} = \underline{\underline{W}} - \underline{\underline{W}}_p; \underline{\underline{W}}_p = \eta (\underline{\underline{\alpha}} \underline{\underline{D}}_p - \underline{\underline{D}}_p \underline{\underline{\alpha}});$$
$$\eta = \sqrt{3/2} \cdot 6 \alpha_{eq} / (h_{\alpha}^2 + 3 \alpha_{eq}^2); \quad (\underline{\underline{W}}_p = \text{plastischer Spin})$$

wurde mit verschiedenen Deformations- und Spannungsmo­dellen untersucht. Das Testmodell "einfache Dehnung" als Vergleichsmodell führte im Gegensatz zu Ansätzen mit Lee-Derivationen bei Annahme einer linearen Verfestigung auch zu einem linearen Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Mit den Testmodellen "einfache Scherung" und "reiner Schub" konnte der Swift-Effekt (plastische Elongation dünnwandiger Rohre unter Torsion) auch im Gegensatz zu Lee-Ansätzen beschrieben werden. Vergleichbare Ansätze von Dafalias /3/ mit $\eta = \text{const.}$ und von anderen Autoren liefern zwar auch den Swift-Effekt, führen aber teilweise bei dem Modell "reiner Schub" zu übermäßig großen und damit nicht mehr plausiblen plastischen Elongationen.

Literaturverzeichnis:

- /1/ Mandel, J.: Plasticite Classique et Viscoplasticite. CISM Courses and Lectures, No. 97, Springer-Verlag 1971, Wien
- /2/ Kratochvil, J.: Finite-strain theory of crystalline elastic-inelastic materials. J. Appl. Phys. 42 (1971) 1104-1108
- /3/ Dafalias, Y.F.: The plastic spin. J. Appl. Mech., 52 (1985) 865-871

Eine rationale Beschreibung der Grundmodelle der elastisch-plastischen Strukturmechanik

A. Tamme, Institut für Mechanik, PF 408, O-9010 Chemnitz

Es bezeichne \mathbf{U} den Verschiebungsvektor, \mathbf{E} den Green'sche Deformationstensor, \mathbf{S} den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor und \mathbf{Q} einen Vektor (skalärer oder tensorieller) interner Parameter. Außerdem sei $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\mathbf{E})$ ein elastischer Materialtensor, $F = F(\mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{Q})$ eine vorgegebene Fließfunktion und $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{Q})$ eine Verfestigungsfunktion. Für den plastischen Anteil $\mathbf{E}^{pl} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^{el}$ des Verzerrungstensors gelte eine Fließregel der Form $\dot{\mathbf{E}}^{pl} = \lambda \mathbf{N}(\mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{Q})$

Damit kann die 3D-Anfangsrandwertaufgabe der elastisch-plastische Fließtheorie in materiell konvektiver Darstellung folgendermaßen formuliert werden:

Gesucht $\mathbf{U} = \mathbf{U}(X, t)$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}(X, t)$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(X, t)$, so daß für alle $t \in [0, 1]$

die schwache Formulierung des Kräftegleichgewichts:

$$\int_{\mathcal{B}_0} [\mathbf{S} : \mathbf{E}'(\mathbf{U}; \mathbf{V})] d\mathcal{B}_0 = \langle \mathcal{L}, \mathbf{V} \rangle \quad \forall \mathbf{V} = \delta \mathbf{U} \in \mathcal{V}_0,$$

die geometrischen Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}'(\mathbf{U}; \dot{\mathbf{U}}), \quad \mathbf{E}'(\mathbf{U}; \mathbf{V}) = \sum_{I=1}^3 \sum_{K=1}^3 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial U_{I,K}} V_{I,K}, \quad U_{I,K} = \frac{\partial U_I}{\partial X^K},$$

die Evolutionsgleichungen für die Spannungen und die internen Parameter: (1)

$$\dot{\mathbf{S}} = [\mathbf{L}(\mathbf{E})] : \{ \dot{\mathbf{E}} - \lambda \mathbf{N}(\mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{Q}) \}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{O} + \lambda \mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{Q}),$$

das Be- und Entlastungskriterium: $\lambda \geq 0$, $F(\mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{Q}) \leq 0$, $\lambda F = 0$

die Konsistenzbedingung: $\lambda > 0 \implies \dot{F}(\mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{Q}) = 0$

und die Anfangsbedingungen:

$$\mathbf{U}(X, 0) = \mathbf{U}_0(X), \quad \mathbf{S}(X, 0) = \mathbf{S}_0(X), \quad \mathbf{Q}(X, 0) = \mathbf{Q}_0(X)$$

erfüllt sind. Dabei ist $(\dot{}) = \frac{d}{dt}()$.

Viele praktische Aufgabenstellungen sind durch eine günstige Konstellation von Geometrie und Belastung gekennzeichnet, so daß es sinnvoll ist, diese Aufgabe durch *Dimensionserniedrigung* (/2/) in ein Ersatzproblem zu überführen, dessen numerische Lösung einen wesentlich geringeren numerischen Aufwand erfordert als das Ausgangsproblem. Die Möglichkeit der Dimensionserniedrigung basiert auf der Annahme folgender *Körperform-Hypothese*:

(HK) Die Bezugsplatzierung des materiellen Körpers sei die Anfangsplatzierung, beschrieben durch eine glatte dreidimensionale C^2 -Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{B}_0 = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} \mathcal{U}_\alpha \quad \text{mit einem Atlas } \mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\alpha, \mu_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{I}} .$$

a) Es existiere eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit ($m=1,2$ oder 3):

$$\mathcal{M}_0 = \{X_M \in \mathcal{B}_0 : X_M = \mu_\alpha^{-1}((X^1, \dots, X^m, \underbrace{0, \dots, 0}_{(3-m) \text{ mal}})^T)\} ,$$

die als **Mittelmannigfaltigkeit** bezeichnet wird.

b) Zu jedem $X \in \mathcal{B}_0$ gibt es eine $(3-m)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{H}_0(X) = \{X_T \in \mathcal{B}_0 : X_T = \mu_\alpha^{-1}(\underbrace{(0, \dots, 0, X^{m+1}, \dots, X^3)}_{m \text{ mal}})^T)\} ,$$

die als **Dickenmannigfaltigkeit** durch X bezeichnet wird.

Die eigentliche Dimensionserniedrigung wird erreicht, indem das auf der gesamten Körpermannigfaltigkeit definierte Verschiebungsfeld durch einen Satz von Quasiverschiebungsfeldern approximiert wird, die nur über der Mittelmannigfaltigkeit definiert sind. Dies läßt sich durch folgende *Geometrie-Hypothese* beschreiben:

(HG) Es sind Multiindexmengen

$$\mathcal{N}_k = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) : |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq p_k\} \quad (k = 1, \dots, d)$$

und ein d -tupel skalarer (**Quasiverschiebungs-**) Felder

$$\tilde{U}^{(1)} = \tilde{U}^{(1)}(Y, t), \dots, \tilde{U}^{(d)} = \tilde{U}^{(d)}(Y, t) ; \quad Y = (Y^1, \dots, Y^m)^T = (X^1, \dots, X^m)^T$$

auf \mathcal{M}_0 gegeben, deren Ableitungen

$$u_{(k;\alpha)} = \frac{\partial \tilde{U}^{(k)}(Y, t)^{|\alpha|}}{(\partial Y^1)^{\alpha_1} \dots (\partial Y^m)^{\alpha_m}} \quad k = 1, \dots, p ; \quad |\alpha| \leq p_k ,$$

das Feld $\mathcal{U} = \{u_{(k;\alpha)}\} \{k = 1, \dots, p, |\alpha| \leq p_k\}$ bilden.

Außerdem wird das Feld der Green'schen Deformationstensoren durch eine tensorwertige Abbildung $\mathcal{E} = \mathcal{E}(Z, \mathcal{U}(Y)) = \mathcal{E}_{KL}(Z, \mathcal{U}(Y)) dX^K \otimes dX^L$ mit (i.a. nichtlinearen) Differentialoperatoren $\mathcal{E}_{KL}(Z, \cdot)$ und $Z = (Z^1, \dots, Z^{3-m})^T = (X^{m+1}, \dots, X^3)^T$ approximiert, so daß gilt:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\nabla \mathcal{U}) \approx \mathcal{E}(Z, \mathcal{U}(Y)) .$$

Als Folge der Konstellation von Geometrie und Belastung stellt sich i.a. auch ein mechanischer Zustand ein, der durch einzelne verschwindend kleine Koeffizienten des Spannungstensors oder des Verzerrungstensors (bzgl. des fixierten Atlanten) gekennzeichnet ist. Ein solcher **reduzierter Zustand** ist durch folgende *Zustandshypothese* charakterisiert:

(HZ) Gegeben sind disjunkte Indexmengen

$$[\mathfrak{B}_0]_E = \left\{ (IJ) : \mathbf{E} \left(\frac{\partial}{\partial X^I}, \frac{\partial}{\partial X^J} \right) = E_{IJ} = 0 \forall X \in \mathcal{B}_0 \right\}$$

$$[\mathfrak{B}_0]_S = \left\{ (IJ) : \mathbf{S} (dX^I, dX^J) = S^{IJ} = 0 \forall X \in \mathcal{B}_0 \right\}$$

$$[\mathfrak{B}_0]_p = \left\{ (IJ) : (IJ) \notin [\mathfrak{B}_0]_E \cup [\mathfrak{B}_0]_S \right\}$$

der Indizes der Koeffizienten in denen die Verzerrungsraten ¹, die Spannungsraten bzw. weder Verzerrungs- noch Spannungsraten als Null vorgegeben sind.

Jede Spannungsrate $\dot{\mathbf{S}}$ und jede Verzerrungsraten $\dot{\mathbf{E}}$ besitzt demnach eine eindeutige Komponentenerlegung

$$\dot{\mathbf{S}} = {}^P\dot{\mathbf{S}} + {}^S\dot{\mathbf{S}} + {}^E\dot{\mathbf{S}} = {}^P\dot{\mathbf{S}} + {}^E\dot{\mathbf{S}} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{E}} = {}_P\dot{\mathbf{E}} + {}_S\dot{\mathbf{E}} + {}_E\dot{\mathbf{E}} = {}_P\dot{\mathbf{E}} + {}_S\dot{\mathbf{E}} \quad (2)$$

mit ${}^a\dot{\mathbf{S}} \in [SB_0]^a = \left\{ {}^a\mathbf{T} = T^{IJ} \cdot \frac{\partial}{\partial X^I} \otimes \frac{\partial}{\partial X^J} : T^{IJ} = T^{JI} = 0 \quad \forall (IJ) \notin [\mathfrak{B}_0]_a \right\}$

und ${}_a\dot{\mathbf{E}} \in [SB_0]_a = \left\{ {}_a\mathbf{T} = T_{IJ} \cdot dX^I \otimes dX^J : T_{IJ} = T_{JI} = 0 \quad \forall (IJ) \notin [\mathfrak{B}_0]_a \right\}$
($a = P, E, S$). Insbesondere gilt für die inkrementelle Spannungsleistung

$$P = \dot{\mathbf{S}} : \dot{\mathbf{E}} = \dot{S}^{IJ} \dot{E}_{IJ} = {}^P\dot{\mathbf{S}} : {}_P\dot{\mathbf{E}} + \underbrace{{}^S\dot{\mathbf{S}}}_{=0} : {}_S\dot{\mathbf{E}} + {}^E\dot{\mathbf{S}} : \underbrace{{}_E\dot{\mathbf{E}}}_{=0} = {}^P\dot{\mathbf{S}} : {}_P\dot{\mathbf{E}},$$

so daß für die Komponenten ${}^P\mathbf{S}$ und ${}_P\mathbf{E}$ die Bezeichnung *Komponenten mit Energieanteil* sinnvoll zu sein scheint. Analog zu (2) besitzt $\mathbf{L}(\mathbf{E})$ eine eindeutige Zerlegung

$$\mathbf{L} = \sum_{a=P,S,E} \sum_{b=P,S,E} {}^{ab}\mathbf{L} ; \quad {}^{ab}\mathbf{L} : [SB_0]_b \rightarrow [SB_0]^a ; \quad (a, b = P, E, S) \quad (3)$$

und die Evolutionsgleichung für die Spannungen in (1) läßt sich folgendermaßen aufspalten

$${}^a\dot{\mathbf{S}} = \sum_{b=P,S,E} \left\{ [{}^{ab}\mathbf{L}(\mathbf{E})] : {}_b\dot{\mathbf{E}} - \lambda [{}^{ab}\mathbf{L}(\mathbf{E})] : {}_b\mathbf{N}(\mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{Q}) \right\} ; \quad {}^S\dot{\mathbf{S}} = {}_E\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{O} \quad (4)$$

Anders als in der linearen Elastizitätstheorie ist eine Elimination der Spannungs- und Verzerrungskomponenten ohne Leistungsanteil aus (4) wegen der Nichtlinearitäten nur im Rahmen eines Linearisierungsprozesses möglich. Unter Benutzung der Bezeichnungen

$${}^{ab}\mathbf{A} = \begin{cases} {}^{ab}\mathbf{L} - {}^a\mathbf{S}\mathbf{L} : [{}^{SS}\mathbf{L}]^{-1} : {}^S\mathbf{L} & [\mathfrak{B}_0]_S \neq \emptyset \\ {}^{ab}\mathbf{L} & [\mathfrak{B}_0]_S = \emptyset \end{cases}$$

$${}_s\mathbf{A} = \begin{cases} -[{}^{SS}\mathbf{L}]^{-1} : {}^S\mathbf{L} & [\mathfrak{B}_0]_S \neq \emptyset \\ \mathbf{O} & [\mathfrak{B}_0]_S = \emptyset \end{cases}$$

$${}^a\mathbf{N}^* = \begin{cases} {}^a\mathbf{P}\mathbf{L} : {}_P\mathbf{N} + {}^S\mathbf{E}\mathbf{L} : {}_E\mathbf{N} & [\mathfrak{B}_0]_S \neq \emptyset \\ \mathbf{O} & [\mathfrak{B}_0]_S = \emptyset \end{cases}, \quad \text{und} \quad {}_s\tilde{\mathbf{N}} = -({}_s\mathbf{P}\mathbf{L} : {}_P\mathbf{N} + {}_s\mathbf{E}\mathbf{L} : {}_E\mathbf{N})$$

¹entsprechendes muß natürlich auch für das approximierende \mathcal{E} gelten

lassen sich folgende Funktionen erklären

$$\mathbf{A}^*({}^P\mathbf{E}, {}^P\mathbf{S}, {}^S\mathbf{E}, {}^E\mathbf{S}) := {}^{PP}\mathbf{A}({}^P\mathbf{E} + {}^S\mathbf{E} + {}^E\mathbf{E}, {}^P\mathbf{E} + {}^S\mathbf{S} + {}^E\mathbf{S})$$

$$\mathbf{B}^*({}^P\mathbf{E}, {}^P\mathbf{S}, {}^S\mathbf{E}, {}^E\mathbf{S}, \mathbf{Q}) := {}^{PP}\mathbf{A}({}^S{}^P\mathbf{A} : {}^P\mathbf{E}, {}^E{}^P\mathbf{A} : {}^P\mathbf{E}, \mathbf{O})^T$$

$$\mathbf{M}^*({}^P\mathbf{E}, {}^P\mathbf{S}, {}^S\mathbf{E}, {}^E\mathbf{S}, \mathbf{Q}) := ({}^S\tilde{\mathbf{N}}, {}^E\tilde{\mathbf{N}}, \mathbf{M}(\mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{Q}))^T$$

$$F^*({}^P\mathbf{E}, {}^P\mathbf{S}, {}^S\mathbf{E}, {}^E\mathbf{S}, \mathbf{Q}) := F({}^P\mathbf{E} + {}^S\mathbf{E} + {}^E\mathbf{E}, {}^P\mathbf{E} + {}^S\mathbf{S} + {}^E\mathbf{S}, \mathbf{Q}) .$$

Mit diesen Funktionen und den Substitutionen $\mathbf{Q}^* := {}^P\mathbf{Q}$, $\mathbf{E}^* := {}^P\mathbf{E} \approx {}^P\mathcal{E}$, $\mathbf{S}^* := {}^P\mathbf{S}$, $\mathbf{Q}^* := ({}^S\mathbf{Q}, {}^E\mathbf{S}, \mathbf{Q})^T$ kann (1) mittels der eingeführten Hypothesen in folgende Ersatzaufgabe überführt werden:

Gesucht: $\mathbf{U} = \{\mathcal{U}_{(k;\alpha)}\} \{k = 1, \dots, p, |\alpha| \leq p_k\} \mathbf{0}$, $\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^*(Y, Z)$,

$\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^*(Y, Z)$, so das zu jedem (Quasi-) Zeitpunkt gilt:

$$\int_{\mathcal{M}_0} \int_{\mathcal{H}(Z)} [\mathbf{S}^*(Y, Z)] : [\mathcal{E}^*]'(Z, \mathbf{U}; \mathbf{V}) dZ dY = \langle \mathcal{L}, \mathbf{V} \rangle \quad \forall \mathbf{V} = \delta \mathbf{U} \in \mathbf{V}_0$$

$$\dot{\mathcal{E}}^* = [\mathcal{E}^*]'(Z, \mathbf{U}; \mathbf{V}) , \quad [\mathcal{E}^*]'(Z, \mathbf{U}; \mathbf{V}) = \sum_{k=1}^d \sum_{|\alpha| \leq p_k} \frac{\partial \mathcal{E}^*(Z, \mathcal{U}(Y))}{\partial \mathcal{U}_{k,\alpha}} \mathbf{V}_{k,\alpha} \quad (5)$$

$$\dot{\mathbf{S}}^* = [\mathbf{L}^*(\mathcal{E}^*)] : \{\dot{\mathcal{E}} - \lambda \mathbf{N}(\mathcal{E}^*, \mathbf{S}^*, \mathbf{Q}^*)\} , \quad \dot{\mathbf{Q}}^* = [\mathbf{B}^*(\mathcal{E}^*, \mathbf{Q}^*)] - \lambda \mathbf{M}^*(\mathcal{E}^*, \mathbf{S}^*, \mathbf{Q}^*) ,$$

$$\lambda \geq 0 , \quad F^*(\mathcal{E}^*, \mathbf{S}^*, \mathbf{Q}^*) \leq 0 , \quad \lambda F = 0$$

$$\lambda > 0 \implies \dot{F}^*(\mathcal{E}^*, \mathbf{S}^*, \mathbf{Q}^*) = 0$$

$$\mathbf{U}(Y, 0) = \mathbf{U}_0(Y) , \quad \mathbf{S}^*(X, 0) = \mathbf{S}_0^*(X) , \quad \mathbf{Q}^*(X, 0) = \mathbf{Q}_0^*(X)$$

Zur numerischen Lösung wird oftmals eine inkrementell implizite Zeitintegration mit konsistenter Linearisierung empfohlen. Dabei kann die Berechnung der konsistenten Tangente bei Verwendung der Formulierung (5) völlig analog zum 3D-Problem erfolgen (/1/).

1 Literatur

A. Tamme:

/1/ Initial Boundary Value Problems of the Elastic-Plastic Flow Theory for Reduced Stress/Strain States and Their Numerical Solution by Means of Nested Linearisation, in Vorbereitung

/2/ Ein rationales Konzept zur Beschreibung der Grundmodelle der Strukturmechanik im Rahmen inelastischer Materialtheorien, in Vorbereitung

ÜBERLAGERUNG VON GRUNDBEANSPRUCHUNGEN BEI GROSZEN ELASTISCH-PLASTISCHEN STABVERFORMUNGEN

S. Koczyk, Institut für Festkörpermechanik, TU Magdeburg

Spezielle Annahmen bezüglich der Verformung des Querschnitts bzw. der Querschnittskontur sind charakteristisch für den Balken und ermöglichen eine effektive Berechnung, die gegebenenfalls durch weitere Untersuchungen an kritischen Stellen präzisiert werden kann. Die räumliche Belastung führt zu einer Überlagerung unterschiedlicher Beanspruchungen. Dies kann bei elastischem Materialverhalten und kleinen Verformungen problemlos ausgeführt werden. Bei Belastungen, die zu bleibenden Verformungen führen, hängen Spannungs- und Verformungszustand von der Reihenfolge ab, in der die Belastungen aufgebracht werden. Bei großen Deformationen muß man zusätzlich die Veränderung der Querschnittskontur berücksichtigen.

Im folgenden wird das Problem der Ermittlung des Spannungszustandes in einem Querschnitt beliebiger Form eines Balkens betrachtet. Es wird vorausgesetzt, daß sich Längskraft, Biegemomente, Querkräfte und Torsionsmoment gleichförmig und proportional zu einander vergrößern. Dies kann, was Biegemoment und Querkraft betrifft, im allgemeinen immer vorausgesetzt werden, bei den anderen Beanspruchungen ist jedoch eine beliebige Reihenfolge möglich. Unter der Voraussetzung gleichförmiger Lasteintragung liefert das Henckysche Deformationsgesetz eine hinreichend genaue Beschreibung des elastisch-plastischen Zustandes. Es wird ferner ein linear verfestigendes Material vorausgesetzt, welches in einfacher Weise den Übergang zum ideal elastisch-plastischen Material ermöglicht.

Das Verfahren beruht auf der Bestimmung der Querschnittsverwölbung infolge Torsion und Querkraftschub und benutzt die FEM als Lösungsmethode. Ausgangspunkt ist das elastische Potential, das im Falle der Torsion durch die Wölbfunktion ausgedrückt wird:

$$\pi_T = \frac{1}{2} \cdot \int_{(A)} G \cdot [(\frac{\partial \omega}{\partial x} - y)^2 + (\frac{\partial \omega}{\partial y} + x)^2] \cdot dA - M_t \cdot \varphi \quad (1)$$

Bei Querkraftbeanspruchung wird die Form des Querschnitts wie bei Biegung und Torsion als unveränderlich vorausgesetzt. Das elastische Potential ist unter Bezugnahme auf die Querschnittsverwölbung u_z in diesem Fall:

$$\Pi_Q = \frac{1}{2} \int_{(A)} G \cdot \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + f_{0x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + f_{0y} \right)^2 \right] \cdot dA - \int_{(A)} u_z \cdot \frac{dG_z}{dz} \cdot dA \quad (2)$$

f_{0x} und f_{0y} entsprechen den durch die Querkräfte F_{qx} und F_{qy} bedingten Gleitungen und werden als konstant vorausgesetzt. Es ist möglich, innerhalb des Querschnitts mit einem veränderlichen Gleitmodul zu rechnen. Dies ist der Ausgangspunkt zur Berücksichtigung elastisch-plastischen Materialverhaltens, wobei in jedem Punkt des Querschnitts der aktuelle Wert G_p des Gleitmoduls und des Sekantenmoduls E_p entsprechend dem Hencky-schen Deformationsgesetz zu bestimmen sind. (Eine Erweiterung auf allgemeineres Materialverhalten ist möglich.) Die Bestimmung der zu den gegebenen Schnittgrößen F_L , M_x , M_y , M_t , F_{qx} , F_{qy} gehörigen Deformationsgrößen ε_0 , α_x , α_y , ϑ , f_{0x} und f_{0y} erfolgt iterativ, ausgehend vom elastischen Zustand. In jedem Iterationsschritt müssen die Querschnittsverwölbungen von Torsion und Querkraft entsprechend dem veränderten G_p neu bestimmt werden. Außerdem ist die Ableitung $\frac{dG_z}{dz}$ anzugeben. Falls ε_0 , α_x und α_y bekannt sind, folgt G_z zu

$$G_z = E_p(x, y) \cdot (\varepsilon_0 + \alpha_x \cdot y + \alpha_y \cdot x) \quad (3)$$

Hieraus ergeben sich die zugehörigen Schnittgrößen

$$F_L = \varepsilon_0 \int_{(A)} E_p \cdot dA + \alpha_x \int_{(A)} E_p \cdot y \cdot dA + \alpha_y \int_{(A)} E_p \cdot x \cdot dA \quad (4)$$

$$M_x = \varepsilon_0 \int_{(A)} E_p \cdot y \cdot dA + \alpha_x \int_{(A)} E_p \cdot y^2 \cdot dA + \alpha_y \int_{(A)} E_p \cdot x \cdot y \cdot dA \quad (5)$$

$$M_y = \varepsilon_0 \int_{(A)} E_p \cdot x \cdot dA + \alpha_x \int_{(A)} E_p \cdot x \cdot y \cdot dA + \alpha_y \int_{(A)} E_p \cdot x^2 \cdot dA \quad (6)$$

oder in Matrixschreibweise

$$[F_z, M_x, M_y] = \mathbf{A} \cdot [\varepsilon_o, \varkappa_x, \varkappa_y]^T \quad (7)$$

Durch Inversion und Einsetzen in (3) kann die Ableitung durch die Querkräfte und die modifizierte Steifigkeiten ausgedrückt werden:

$$\frac{d\sigma_z}{dz} = E_p(x, y) \cdot [1, x, y] \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot [0, F_{qy}, F_{qx}]^T \quad (8)$$

Die gerechneten Beispiele zeigen bei ideal elastisch-plastischem Material eine gute Übereinstimmung mit den aus der Theorie bekannten Werten, wobei naturgemäß Kombinationen mit Torsion und Längskraft von besonderem Interesse sind. Abweichungen ergeben sich bei den Querkraftschubspannungen, die über die gesamte Fläche verteilt sind und nicht nur über den verbleibenden elastischen Rest desselben. Erweiterungen der Untersuchungen sind vorgesehen im Hinblick auf ein beliebiges Belastungsprogramm und in der Berücksichtigung der Wölbbehinderung bei Torsion und Querkraftschub.

Literaturverzeichnis

- /1/ Zienkiewicz O.C. - Methode der finiten Elemente, Carl Hanser Verlag München 1984
- /2/ Reckling K.-A. - Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York 1967
- /3/ Hahn H.G. - Elastizitätstheorie, LAMM Bd.62, Verlag B. G. Teubner Stuttgart 1985
- /4/ Zyczkowski M. - Combined Loadings in the Theory of Plasticity, PWN - Nijhoff, Warszawa 1981
- /5/ Smith J.O. and Sidebottom O.M. - Inelastic Behavior of Load-Carrying Members, John Wiley & Sons, Inc., New York/London/Sidney 1965

Freies elastoplastisches Biegen von schlanken Stäben

M. Reigl, Lehrstuhl A für Mechanik, Technische Universität München

„Freies Biegen“ bedeutet, in der Umformzone gibt es keine Berührung zwischen Werkstück und Werkzeug. Das Werkstück sei hier ein schlanker Bauteil, zum Beispiel ein schlanker Stab oder ein Blechstreifen, dessen Enden in verschieblichen und drehbaren Lagern eingespannt sind. Das Ziel ist, die Bewegungen dieser Lager zu bestimmen, die erforderlich sind, um das Bauteil in vorgegebener Weise plastisch zu verformen. Für starrplastisches Werkstoffverhalten stammen Untersuchungen von LIPPMANN [1].

Von den folgenden Voraussetzungen wird ausgegangen.

1. Das schlanke Bauteil sei in seinen Werkstoffeigenschaften homogen, habe über seiner Länge immer den gleichen Querschnitt und sei nicht verdrillt.
2. Alle ursprünglich ebenen Querschnitte bleiben eben und orthogonal zur neutralen (ungelängten) Faser (BERNOULLI-Hypothese).
3. Der Biegemomentenvektor sei parallel zu einer Flächenträgheitshauptachse des Querschnitts (gerade Biegung).
4. Querkraftverformungen werden wegen 2. nicht zugelassen, aber auch keine Dehnungen durch die Normalkraft, da i. allg. die mittlere Dehnung gegenüber der Biegedehnung klein bleibt.

Wegen Voraussetzung 4 hat der Stab immer die gleiche Länge und wegen der Schlankheitseigenschaft wird er geometrisch durch seine Mittellinie dargestellt. Neben den ortsfesten kartesischen Koordinaten x und y (siehe Abbildung 1) wird eine körperfeste dimensionslose Koordinate ζ entlang der Stabmittellinie festgelegt. ζ nimmt im Gelenk A den Wert $\zeta = 0$, im Gelenk B $\zeta = 1$ an.

Die Stabenden werden durch je eine Kraft mit den Komponenten F und H und die Momente M_A und M_B belastet, wobei aus dem Momentengleichgewicht

$$M_B = M_A + F \cdot a$$

folgt. Das Biegemoment an einer beliebigen Stelle des Balkens errechnet sich zu

$$M[x(\zeta), y(\zeta)] = -M_A - F \cdot x(\zeta) + H \cdot y(\zeta). \quad (1)$$

Ein Punkt D sei dadurch definiert, daß hier das Schnittmoment (1) extremal ist. Aus

$$\left. \frac{dM}{dx} \right|_D = 0$$

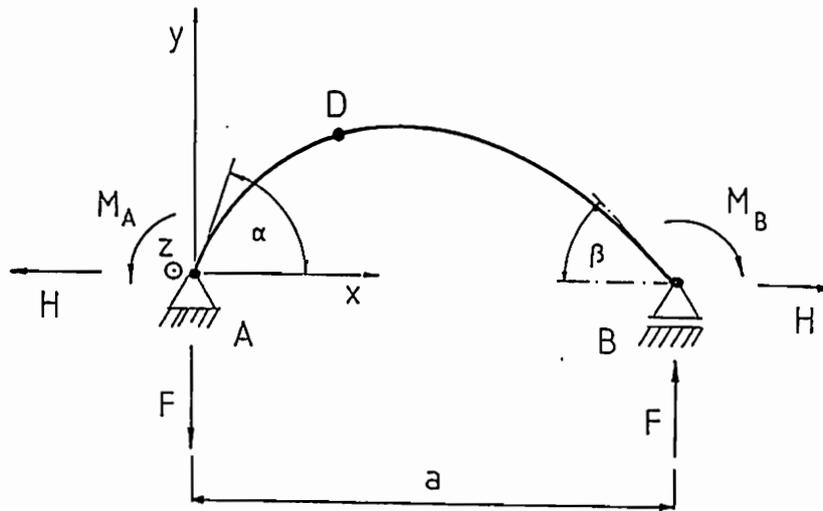


Abbildung 1: Bezeichnungen (nach LIPPMANN [1]).

folgt mit (1) der Zusammenhang zwischen den Kraftkomponenten F und H und der Steigung der Biegelinie im Punkt D

$$\frac{F}{H} = \frac{dy}{dx} \Big|_D. \quad (2)$$

Um aus einem anfangs geraden Werkstück nach der Umformung im von äußeren Lasten freien Zustand beispielsweise einen Kreisbogen zu erhalten, kann man reine Biegung anwenden, d.h. es tritt ein über der Balkenlänge konstantes Biegemoment $M = M_A = M_B$ auf, die Kräfte F und H fallen weg. Das gleiche Resultat erhält man auch durch lokale plastische Biegung, bei der das Moment weder örtlich noch zeitlich konstant ist.

Es wird im weiteren vorausgesetzt, daß der Punkt D sich nur in positive ζ -Richtung bewegt, also von Gelenk A ($\zeta = 0$) bis zum Gelenk B ($\zeta = 1$). Der Balken läßt sich dann im allgemeinen nach Abbildung 2 in drei Bereiche einteilen. Im ersten Bereich (I) findet nur elastische Verformung statt, im zweiten (II) plastifizieren die Randbereiche des Querschnitts, wobei im Querschnitt bei Punkt D maximale Plastifikation erreicht ist, und im dritten (III) federt der Balken nach zuvor erfolgter elastoplastischer Verformung elastisch zurück (Replastifizierung an irgendeiner Stelle sei hier ausgeschlossen).

Wegen Voraussetzung 4 hängt die Verformung nur vom Biegemoment M ab. Ist das Stoffgesetz für die Bereiche I, II, III in der Form

$$M = f_i(\kappa) \quad (3)$$

mit $i = I, II, III$ bekannt, wobei

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

mit $\dot{} = \frac{d}{d\zeta}$ die Krümmung darstellt, erhält man durch Gleichsetzen von (3) mit (1) die Differentialgleichungen für die Biegelinien:

$$f_i(\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}) = -M_A - F \cdot x(\zeta) + H \cdot y(\zeta). \quad (4)$$

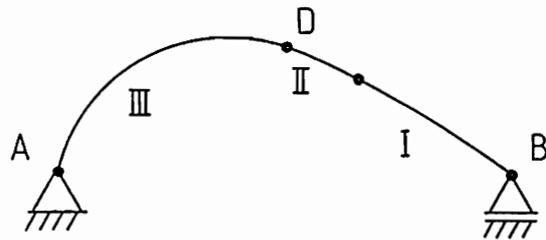


Abbildung 2: Einteilung des Stabes in Bereiche mit unterschiedlichem Verformungsverhalten. Bereich I: Elastische Verformung. Bereich II: Elastoplastische Verformung. Bereich III: Elastische Rückfederung.

Ist im Stoffgesetz (3) jedem Moment M eindeutig eine Krümmung κ zugeordnet, so ist auch die entsprechende Differentialgleichung (4) für bestimmte Randlasten M_A , F und H und für einen vorgegebenen ζ -Wert des Punktes D eindeutig. Da M_A , F und H aber nicht bekannt sind, muß (4) im allgemeinen iterativ gelöst werden. Aus der (nicht eindeutigen) Lösung errechnen sich die gesuchten geometrischen Größen α , β und a , mit denen der Umformprozeß gesteuert wird.

Ist das extremale Moment bei der Wanderung des Punktes D von A nach B konstant, erhält man nach Entfernung der Randlasten einen Kreisbogen, verändert es sich, dann lassen sich auch viele andere Formen erzeugen.

Literatur

- [1] Lippmann, H.: Free rigid/plastic plane bending of a slender beam. Ingenieur-Archiv 60 (1990) 293 – 302

Versetzungsdynamik - der kinetische Energieterm

H. Günther, Fachbereich Elektrotechnik, FH Bielefeld

1. Wir wollen hier auf den Zusammenhang der Versetzungsbewegung mit der Partikeldynamik im Newtonschen Sinne aufmerksam machen. In der Newtonschen Mechanik ergibt sich ein kinetischer Energieterm E_{kin} mit der Trägheit einer Masse M_0 in einem Inertialsystem aus dem dritten Newtonschen Axiom $(d/dt)(V M_0) = F$ durch Multiplikation mit der Geschwindigkeit V :

$(d/dt)(V^2 M_0/2) = E_{kin} = F \cdot V$. E_{kin} ist sowohl der zentrale Begriff für die Bewegung einzelner Massen als auch zur Beschreibung eines Systems aus sehr vielen Teilchen mithilfe der statistischen Thermodynamik. Plastische Deformation ist Bewegung von Versetzungen. Deren Reibung an dem diskreten Gitter lassen wir hier außeracht. Eine einzelne Versetzung läuft dann mit ihrem Spannungsfeld wie eine träge Masse mit konstanter Geschwindigkeit durch das Kontinuum. Sind Spannungsfelder vorhanden, so üben diese die sog. Peach-Köhlersche Kraft auf die Versetzung aus. Um aber die Differentialgleichung für die Bewegung einer Versetzung unter der Wirkung dieser Kraft aufstellen zu können, brauchen wir die träge Masse einer Versetzung gegenüber ihrem Gitter, vgl. hierzu Kröner [1]. Die Verzerrungsfelder einer mit der Geschwindigkeit V bewegten Versetzung werden bei $V = c_s$ unendlich für jede der mindestens zwei verschiedenen Schallgeschwindigkeiten c_s des Kontinuums. Ein Newtonsches Bewegungsgesetz für die Versetzung $(d/dt)(V M_0) = F$ ohne jegliche Geschwindigkeitsbegrenzung scheidet damit ebenso aus wie das aus der relativistischen Mechanik $(d/dt)(V M_0 / [1 - V^2/c^2]^{1/2}) = F$, da dies eine einzige

Grenzgeschwindigkeit zur Voraussetzung hätte. Nun führt zwar die Anwendung der Feldmasstheorie auch auf Bewegungsgesetze für Versetzungen, vgl. Pegel [2], Günther [3]. Für $V \ll c_s$ lassen sich nach Kosevich [4] sogar Versetzungsträgheiten aufschreiben. Für sehr kleine Versetzungsgeschwindigkeiten ist jedoch deren Gitterreibung so dominant, daß der kinetische Energieterm dann auch ganz weggelassen werden kann. Gibt man jedoch die Näherung $V \ll c_s$ auf, so erhalten wir komplizierte Integrodifferentialgleichungen, mit denen man in den meisten Fälle wohl kaum weiter kommt, vgl. jedoch [2], [3]. Wir skizzieren einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit, die darauf beruht, daß sich die Feldgleichungen für die Spannungsfelder von Versetzungen beliebiger Festkörper in zwei voneinander unabhängige Gleichungssysteme zerlegen lassen, derart, daß das Problem der mehrfachen Schallgeschwindigkeiten für die Gruppe der Feldgleichungen, die allein von den Versetzungen abhängen, verschwindet.

2. Mit den Zustandsvariablen ϵ = (symmetrischer) Tensor der elastischen Deformation, v = Materialgeschwindigkeit, α = Tensor der Versetzungsdichte, V = Versetzungsgeschwindigkeit, σ = symmetrischer Tensor der Kraftspannungen, p = Impulsdichte des Kontinuums, f = äußere Volumenkraftdichte, den Materialparametern C = Hookescher Tensor, ρ = Massendichte und den Materialgleichungen $p = \rho v$, $\sigma = C : \epsilon$ ($\leftrightarrow \epsilon = S : \sigma$, $C \cdot S = 1$) erhält man die Feldgleichungen, vgl. z.B. Günther [5],

(1)

$$-2(\epsilon_{ik,rr} + \epsilon_{rr,ik} - \epsilon_{ir,kr} - \epsilon_{kr,ir}) = e_{mni} \alpha_{nk,m} + e_{mnk} \alpha_{ni,m} + e_{mni} \alpha_{mn,k} + e_{mnk} \alpha_{mn,i},$$

$$C_{inrs} \epsilon_{rs,nk} + C_{knrs} \epsilon_{rs,ni} - 4\rho \partial_{tt} \epsilon_{ik} = -2\rho \partial_t j_{ik} - 2\rho \partial_t j_{ki} - f_{k,i} - f_{i,k},$$

$$C_{irppq} (v_{p,qr} + v_{q,pr}) - 2\rho \partial_{tt} v_i = 2C_{irppq} \partial_t j_{pq} - 2 \partial_t f_i.$$

(Komma = partielle Ableitung, ∂_t = partielle Zeitableitung, e_{ijk} = total antisymmetrischer Permutationstensor).

Was können diese Gleichungen? Gegeben seien die Versetzungsdichte α , die Versetzungsgeschwindigkeit \mathbf{v} , die äußere Kraftdichte \mathbf{f} sowie die Randbedingungen. Mithilfe der Methode der Spannungsfunktionen oder der Greenschen Funktionen für anisotrope Medien können wir dann die elastische Deformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ und die Materiegeschwindigkeit \mathbf{v} berechnen. Das eigentliche Problem der Plastizität, nämlich die Bewegung (sowie auch Erzeugung und Vernichtung) von Versetzungen zu berechnen, die durch die äußeren Kräfte erst hervorgerufen wird, können wir damit nicht lösen.

3. Man kann nun nachrechnen, daß das Gleichungssystem (1) folgenden beiden, voneinander unabhängigen Gleichungssystemen, äquivalent ist, vgl. [5],

$$(2) \quad \begin{aligned} \square \varepsilon_{ik}^v &= -\{e_{mni} \alpha_{nk,m} + e_{mnk} \alpha_{ni,m} + e_{mni} \alpha_{mn,k} + e_{mnk} \alpha_{mn,i} + \\ &\quad + (1/c^2) \partial_t (e_{irs} V_r \alpha_{sk} + e_{krs} V_r \alpha_{si})\} / 2 \\ \square v_i^v &= \partial_i e_{qrs} V_r \alpha_{sq} - \partial_r e_{ipq} V_p \alpha_{qr} - \partial_r e_{rpq} V_p \alpha_{qi}, \end{aligned}$$

$$(3) \quad C_{rimn} (1/2) \partial_r (s_{m,n} + s_{n,m}) - \rho \partial_{tt} s_i = -f_i - \rho c^2 (\partial_i S_{mpq}^m - 2 \partial_r S_{irpq}^m) C_{pqmn} \varepsilon_{mn}^v$$

Die gesuchten Felder $\boldsymbol{\varepsilon}$ und \mathbf{v} erhalten wir daraus gemäß

$$(4) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^v + \text{def } \mathbf{s}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}^v + \partial_t \mathbf{s}. \end{aligned}$$

Der nichtlineare Fall, auf den wir hier nicht eingehen, bietet keine prinzipielle Schwierigkeit. Die Zerlegung des Gleichungssystems (1) in die Gleichungssysteme (2) und (3) gelingt durch eine Zerlegung des Hookeschen Tensors \mathbf{C} eines beliebigen, anisotropen Mediums gemäß

$$(5) \quad \begin{aligned} C_{ikrs} &= C_{ikrs}^v + C_{ikrs}^m \quad \leftrightarrow \quad S_{ikrs} = S_{ikrs}^v + S_{ikrs}^m \\ \text{mit} \\ C_{ikrs}^v &= \rho c^2 (\delta_{ir} \delta_{ks} + \delta_{is} \delta_{kr} - \delta_{ik} \delta_{rs}) \quad \leftrightarrow \quad S_{ikrs}^v = (1/4 \rho c^2) (\delta_{ir} \delta_{ks} + \delta_{is} \delta_{kr} - 2 \delta_{ik} \delta_{rs}) \end{aligned}$$

Hierbei identifizieren wir die hier auftretende Größe c mit der Signalgeschwindigkeit c der sine-Gordon-Gleichung für Kinken auf Versetzungen, vgl. Seeger [6], [7]; $\square = \Delta - (1/c^2) \partial_{tt}$ ist der Wellenoperator.

Die Gleichungen (2), die allein die Versetzungen enthalten, gelten unabhängig von den Materialparametern des Hookeschen Tensors C für alle Festkörper in gleicher Weise. Die Symmetriestruktur des Körpers wirkt sich allein auf den Verschiebungsvektor s gemäß den Gleichungen der klassischen Elastizitätstheorie (3) aus. Die aus (2) berechneten Felder ε^V und v^V gehen hier in der mathematischen Form einer zusätzlichen Kraftdichte ein.

4. Die Gleichungen (2) erfüllen nun alle Voraussetzungen für die Anwendung der eingangs erwähnten Feldmassentheorie und erlauben für Versetzungen die Berechnung ihrer trägen Massen und damit eines Bewegungsgesetzes vom Typ

$$(6) \quad (d/dt)(V M_0 / [1 - v^2/c^2]^{1/2}) = F^i + F^e.$$

(6) berechnet die Versetzungsbewegung unter der Einwirkung der inneren und äußeren Kräfte F^i und F^e . Die einfache Struktur der Gleichungen (6) täuscht etwas, da die inneren Kräfte F^i erst aus den Feldgleichungen zu berechnen sind. Die Beschleunigung ganzer Versetzungen erfordert einen relativ großen Energieaufwand. Energetisch bevorzugt ist daher die Erzeugung und Vernichtung elementarer Versetzungsschleifen unter der Einwirkung der äußeren und inneren Kräfte. Derartige Prozesse sind eine unmittelbare Konsequenz der relativistischen Struktur der Gleichungen (2), die sich damit in Übereinstimmung mit den tatsächlich beobachteten Vorgängen bei der plastischen Deformation zu befinden scheinen.

Wir merken noch an, daß der Teilchencharakter der Versetzungen gemäß den Gleichungen (2) auch deren Beschreibung im Rahmen einer Statistik nahelegt. Insbesondere bei extrem heftigen plastischen Deformationen unter Mitwirkung einer sehr großen Zahl von Versetzungen impliziert dies die Einführung einer "eigenen" Temperatur dieser Versetzungen, die von der Temperatur des sie tragenden Gitters i.a. wesentlich verschieden sein wird.

Literaturverzeichnis

- [1] Kröner, E., Plastizität und Versetzungen. Sommerfeld, A.: Vorlesungen über Theoretische Physik, 363, Bd. 2. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig 1964.
- [2] Pegel, B., Eigenschwingungen paralleler Versetzungen, Habilitationsschrift Dresden 1968.
- [3] Günther, H., Zur Dynamik schneller Versetzungen, Akademie-Verlag Berlin 1973.
- [4] Kosevich, A. M., Us. fiz. nauk 84 (1964), 579.
- [5] Günther, H., On an internal symmetry for arbitrary dislocations in solids, Z. Phys. B 76 (1989), 89 - 98.
- [6] Seeger, A., Solitons in crystals. Continuum models of discrete systems. pp.253 - 327. University of Waterloo Press 1980.
- [7] Seeger, A., Solitons and statistical thermodynamics. In: Lecture Notes in Physics. Vol. 249. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1986.

VERSETZUNGSDYNAMIK: THERMODYNAMISCHE ANSÄTZE

K.- H. Anthony, Theoretische Physik, Universität-GH-Paderborn

Die Plastizität eines kristallinen Materials führt man auf der atomaren Skala auf die Dynamik von Versetzungen zurück. Diese Dynamik ist einerseits für die ausgeprägte Dissipation mechanischer Energie bei plastischer Verformung verantwortlich (Hyterese im Dehnungs-Spannungs-Diagramm), andererseits aber auch für die Ent- und Verfestigung eines plastisch verformten Materials. Auf der phänomenologischen, makroskopischen Ebene weist die plastische Verformung scheinbar kinematische Züge auf, wie sie von der kompatiblen, elastischen Deformation her bekannt sind. So treten bei reiner plastischer Deformation keine Risse im Körper auf und makroskopische Massenelemente erleiden affine Gestaltsänderungen. Tatsächlich kommt es aber auf der mikroskopischen Skala aufgrund der Versetzungsbewegung zu einer chaotischen Deformation des Materials. Dieses wird im Kleinen so vollständig zerrissen und umgelagert, daß von einer affinen Deformation der Massenelemente nicht mehr die Rede sein kann [1]. Dabei bleibt aber das Material zusammenhängend und die Kristallgitterstruktur erhalten.

Eine phänomenologische Plastizitätstheorie wird zwecks praktischer Handhabbarkeit eine Kontinuumstheorie sein müssen, die aber in einer Reihe von Punkten strukturell wesentlich über das wird hinausgehen müssen, was gegenwärtig in verschiedenen Ansätzen diskutiert wird. Nach meiner Meinung wird eine überwiegend aus der Tradition der Mechanik motivierte und strukturierte Theorie nicht ausreichen. Ich nenne einige wichtige Punkte:

1. *Zur Beschreibung der dissipativen Versetzungsdynamik muß die Thermodynamik der irreversiblen Prozesse herangezogen werden.*

Dabei ist zu beachten, daß das Versetzungsnetzwerk und seine Dynamik vom thermodynamischen Gleichgewicht weit entfernt sind. Insofern kann die Thermodynamik der irreversiblen Prozesse Onsagerscher Prägung [2], die vom "Prinzip des lokalen Gleichgewichts" ausgeht und als Extrapolation der Thermostatik nur in einer hinreichenden Nähe zum thermodynamischen Gleichgewicht anwendbar ist, für die Versetzungsdynamik nicht herangezogen werden. Es müssen neue Methoden für Versetzungsprozesse weit ab vom thermodynamischen Gleichgewicht entwickelt werden. Tatsächlich beobachtet man im Versetzungsnetzwerk Ordnungsstrukturen, wie sie für

dynamische Systeme weit weg vom Gleichgewicht ganz allgemein typisch sind.

In den bisher bekannten Ansätzen zu einer phänomenologischen Plastizitätstheorie bemüht man sich natürlich um thermodynamische Aspekte [3]. Die eingeführten Variablen, die mitunter direkt der Versetzungsdichte zugeordnet werden, sind aber nach meiner Meinung nur "innere" oder "verdeckte" Variablen im Sinne der Onsagerschen Thermodynamik des lokalen Gleichgewichts. Zudem sind diese Variablen nicht oder in nicht ausreichendem Maße der Struktur des Gitterdefekts Versetzung bzw. des Versetzungsnetzwerks angepaßt.

2. Die plastische Deformation sollte nach meiner Meinung als ein dissipativer Strömungsprozeß behandelt werden.

Das Wesentliche sind Massenströme in einem Medium mit Festkörpereigenschaften, d.h. mit innerer Struktur in Form der lokalen, anholonomen Kristallgitterstruktur und mit elastischen Eigenschaften, die der Verformung der lokalen Kristallstruktur zugeordnet sind. Dabei sind die Massenströme kinematisch an die Bewegung der Versetzungen gekoppelt, indem die letzteren die Anholonomität (Inkompatibilität) des gestörten Kristallgitters definieren. Neben dieser rein geometrischen Rolle müssen die Versetzungen aber auch den entscheidenden dynamischen Part übernehmen: Sie sind während plastischer Verformung aufgrund ihrer Bewegung, Erzeugung und Vernichtung Ursache und Ort der Dissipation mechanischer Energie.

3. In der Gesamtsicht sollte also am Anfang einer phänomenologischen Plastizitätstheorie das Versetzungsnetzwerk und seine kinematische und dynamische Beschreibung stehen.

In den bisherigen Versuchen zu einer Plastizitätstheorie geht man meist von einer kompatiblen Gesamtdeformation aus, die in inkompatible elastische und plastische Anteile zerlegt wird. (Die Annahme eines "materiellen", mitgeführten Koordinatensystems impliziert die kompatible Gesamtdeformation.) Mit diesem Verfahren, das offenbar die makroskopische Deformation an die Spitze der Überlegungen stellt, wird aber bereits das mit der Versetzungsbewegung verknüpfte Deformationschaos prinzipiell eliminiert. Andererseits wird aber mit der Aufteilung der kompatiblen Gesamtdeformation in plastische und elastische Distorsion ein für manche Fragestellungen durchaus brauchbares, pauschales Maß für das Versetzungsnetzwerk ins Spiel gebracht, nämlich der "Tensor der Versetzungsdichte". Dieses Vorgehen stammt aus der Theorie der Eigenspannungen und Versetzungen [4]. Es ist aber nur für statische Probleme angemessen, bei

denen es z.B. nur auf die den Eigenspannungen zugeordneten, inkompatiblen, elastischen Distorsionen ankommt und nicht auf die oben erwähnten chaotischen und dissipativen Massenbewegungen. Das Argument, daß es zur Beschreibung der makroskopischen Plastizität nur auf die über makroskopische Massenelemente gemittelte Versetzungsdichte ankäme und das mikroskopische Deformationschaos irrelevant sei, verkennt die Tatsache, daß es für die Dissipation gerade auf die Mikrostruktur des Versetzungsnetzwerks ankommt, d.h. auf Korrelationseffekte innerhalb des multipolartig aufgebauten Versetzungsnetzwerks. Diese fallen aber bei der Mittelung über makroskopische Massenelemente heraus.

4. Der Übergang vom elastischen zum plastischen Verhalten eines Materials (Entfestigung) ist mit Instabilitäten im Versetzungsnetzwerk verknüpft.

Instabilitäten sind aber Gegenstand einer nichtlinearen Theorie, die nicht mit einer Thermodynamik des lokalen Gleichgewichts erfaßt werden können. Auch hier zeigt sich, daß die Versetzungsdynamik weit ab vom thermodynamischen Gleichgewicht angesiedelt ist.

Ich versuche, die angesprochenen Fragen mit Hilfe des Lagrange-Formalismus (LF) in den Griff zu bekommen. Ich nenne hier einige wichtige Punkte:

1. Der LF der Felder ist eine Kontinuumstheorie für ganz allgemeine dynamische Prozesse ohne Beschränkung auf die Nähe des Gleichgewichts.

Es handelt sich insofern um die kompakteste Darstellung einer Dynamik, als alle Information über das System in einer einzigen Funktion, der Lagrange-Dichtefunktion, enthalten ist. Das dem Formalismus zugrunde liegende Hamiltonsche Variationsprinzip bietet auch die praktisch wichtige Möglichkeit einer numerischen Lösung des Problems mit Ritzschen Verfahren oder Finiten Elementen.

2. Der LF ist ein mächtiges Mittel zur Vereinigung verschiedener, zunächst disjunkter Theorien.

In der Plastizitätstheorie steht die Vereinigung von Deformationstheorie, Versetzungstheorie und Thermodynamik zur Debatte.

3. Die Thermodynamik der irreversiblen Prozesse läßt sich in den LF einfügen [5, 6, 7].

Insofern steht eine Thermodynamik zur Verfügung, die nicht auf die Nähe des Gleichgewichts beschränkt ist. Für eine Versetzungsdynamik ist das unabdingbar. Der wesentlichste Punkt dieses Ansatzes ist, daß alle zur

Entropieproduktion beitragenden Prozesse, also insbesondere die dissipativen, durch komplexe Felder beschrieben werden. So wird der Wärmeleitung ein komplexes "Feld der thermischen Erregung", einem Diffusionsprozeß ein komplexes "Materiefeld der diffundierenden Substanz" und einer Strömung ein komplexes "Materiefeld des strömenden Mediums" zugeordnet. Bei chemischen Reaktionen kommt es zu einem Energietransfer zwischen dem thermischen Erregungsfeld und den Materiefeldern der an der Reaktion beteiligten Substanzen. Im LF wird dieser Prozeß durch geeignete Kopplung der genannten Felder modelliert. Bei der Dissipation mechanischer Energie handelt es sich um einen irreversiblen Energietransfer von materiellen Freiheitsgraden, d.h. von Materiefeldern, auf das thermische Erregungsfeld.

4. *Die Dynamik von Strukturdefekten in kristallinem Material, d.h. die Wanderung der Defekte, ihre Erzeugung und Vernichtung, ist analog zur Diffusion und chemischen Reaktion chemischer Substanzen [8].*

Insofern läßt sich die unter Nr.2 angedeutete Diffusions-Reaktions-Theorie auf die Defektdynamik übertragen. Den einzelnen Defektsorten werden komplexe "Defektfelder" zugeordnet. Die Analogie ist unmittelbar einsichtig für punktförmige Defekte. Die Dynamik des linienförmigen Defekts Versetzung ist aber komplizierter. Auf folgende Weise sehe ich auch hier eine Möglichkeit, in Analogie zur Diffusions-Reaktions-Theorie voranzukommen:

Das Versetzungsnetzwerk wird in "Klassen von Versetzungen gleichen Typs" eingeteilt. Die Klassen entsprechen den in der Kristallphysik definierten "Gleitsystemen". Klassenmerkmale sind der Vektor \mathbf{n} der Linienrichtung und der Burgersvektor \mathbf{b} . Jeder Klasse wird nun ein komplexes "Versetzungsfeld" $V_{\{n,b\}}(\mathbf{x},t)$ zugeordnet, aus dem über die Beziehung

$$d_{\{n,b\}}(\mathbf{x},t) = V_{\{n,b\}}(\mathbf{x},t) \cdot V_{\{n,b\}}(\mathbf{x},t)^*$$

das "Feld der Versetzungsdichte vom Typ $\{n,b\}$ " definiert wird. Ein Anschluß an den gewohnten "Tensor der Versetzungsdichte" und an die in der Versetzungstheorie diskutierte, nichteuklidische Gittergeometrie ergibt sich über die Beziehung

$$\underline{v}_{\{n,b\}}(\mathbf{x},t) = \sum_{\text{Klassen } \{n,b\}} d_{\{n,b\}}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n} \otimes \mathbf{b} .$$

(\otimes bezeichnet das dyadische Produkt.) Mit Einführung der Versetzungsfelder $V_{\{n,b\}}(\mathbf{x},t)$ wird das Versetzungsnetzwerk einerseits aufgeschlüsselt nach den verschiedenen, am Netzwerk beteiligten

Versetzungstypen. Diese Beschreibung ist differenzierter als diejenige mit dem bekannten, aus der plastischen Distorsion abgeleiteten Versetzungsdichtetensor. Andererseits wird das Versetzungsnetzwerk im Rahmen des LF einer thermodynamischen Behandlung zugänglich gemacht. Die Korrelation der Versetzungen verschiedenen Typs im Versetzungsnetzwerk muß durch geeignete Kopplung der Felder $V_{\{n,b\}}(x,t)$ Rechnung erfaßt werden. Schließlich ist noch zu bemerken, daß in praxi nur wenige Gleitsysteme aktiviert sind, sodaß die Anzahl der verschiedenen Feldern $V_{\{n,b\}}(x,t)$ klein sein wird.

Literatur:

- [1] K.H. ANTHONY: *Unification of Continuum Mechanics and Thermodynamics by Means of Lagrange-Formalism - Present Status of the Theory and Presumable Applications.*
Arch. Mech. 41, S. 511-534, Warszawa 1989.
- [2] S.R. DeGROOT & P. MAZUR: *Non-Equilibrium Thermodynamics.*
North-Holland Publ. Comp. 1969.
- [3] Siehe z.B. die Beiträge dieses Symposiums.
- [4] E. KRÖNER: *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen.*
Springer-Verlag, 1958.
- [5] K.H. ANTHONY: *A New Approach to Thermodynamics of Irreversible Processes by Means of Lagrange-Formalism.*
In "Disequilibrium and Self-Organisation",
(Ed.: C.W. KILMISTER), Reidel Publ. Comp., 1986, S. 75 - 92.
- [6] K.H. ANTHONY: *Entropy and Dynamical Stability - A Method Due to Lagrange-Formalism as Applied to Thermodynamics of Irreversible Processes.* In "Trends in Applications of Mathematics to Mechanics", (Eds.: J.F. BESSELING & W. ECKHAUS),
Springer-Verlag, 1988, S. 297-320.
- [7] K.H. ANTHONY: *Phenomenological Thermodynamics of Irreversible Processes within Lagrange-Formalism.*
Acta Physica Hungarica 67, 321- 340, 1990.
- [8] K.H. ANTHONY: *Defect Dynamics and Lagrangian Thermodynamics of Irreversible Processes.* In "Continuum Models and Discrete Systems",
Vol.2, (Ed.: G.A. MAUGIN), Longman Scientific & Technical, 1991,
S. 231-242.

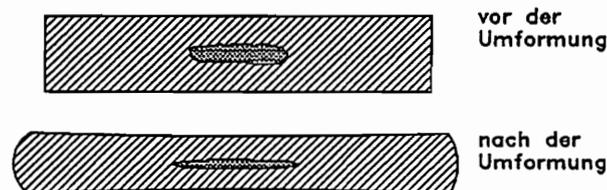
PHYSIKALISCHE UND MATHEMATISCHE SIMULATION VON STRANGGEGOSSENEN STAHL-PRODUKTEN MIT TEILWEISE SCHMELZFLÜSSIGEM QUERSCHNITT

O.Pawelski, W.Rasp, A.Cremer, Max-Planck-Institut für Eisenforschung, Düsseldorf

In der Strangießtechnik werden vermehrt Anstrengungen unternommen, den Energie- und Rohstoffverbrauch zu minimieren. Eine Möglichkeit, dieses Ziel zu erreichen, besteht darin, den Strang in der Stranggußanlage unter Ausnutzung der Gießwärme einer ersten Umformung durch Walzen zu unterziehen. Wird diese Deformation in einem Rollensegment der Stranggußanlage vorgenommen, das sich in geringem Abstand von der Kokille befindet, so wird die Umformung an einem teilerstarrten Strang durchgeführt /1/.

Beim Walzen teilerstarrter Stranggußbrammen kann in Abhängigkeit von der Dicke der bereits erstarrten Strangschale von einem unterschiedlichen Umformverhalten ausgegangen werden, Bild 1.

1) dicke Randschale; stabiles Walzen



2) dünne Randschale; Walzen führt zum Ausbeulen der Probenschmalseiten

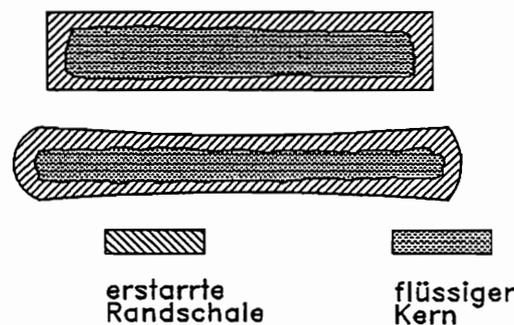


Bild 1: Schematische Darstellung des Umformverhaltens teilerstarrter Stranggußbrammen in Abhängigkeit von der Dicke der erstarrten Randschale.

Bei einer bereits weitgehend durchgestarrten Bramme wird sich ein stabiler Walzverlauf mit Längung der Breitseiten einstellen. Ist der Anteil des flüssigen Sumpfes am Volumen hoch, die Dicke der tragenden Randschale entsprechend klein, werden die Schmalseiten zusammengequetscht, wobei die Breitseiten weitgehend unverformt bleiben.

Walzversuche

Anhand von Warmwalzversuchen an Rechteckrohren aus Stahl St 37 wurde am Versuchswalzwerk des Max-Planck-Institutes untersucht, bei welcher Wanddicke sich ein stabiler Walzzustand einstellt. Dabei wurden unterschiedliche Erstarrungszustände des Stranges durch Wanddicken von 10 mm, 20 mm und 25 mm bei gleichbleibender Außenkontur der Proben realisiert (Probenhöhe 60 mm, Probenbreite 150 mm). Da der Druck des schmelzflüssigen Kerns auf die erstarrte Randschale im Vergleich zur Fließspannung des Probenmaterials gering ist (bei einer Anlagenbauhöhe von 10 m liegt der ferrostatische Druck unter 1 N/mm^2), wurde zugunsten einer einfachen Versuchsdurchführung der Einfluß des Innendruckes auf das Umformverhalten vernachlässigt.

Im Gegensatz zum konventionellen Walzen biegen sich die Probenbreitseiten beim Walzen von Hohlprofilen durch, Bild 2.

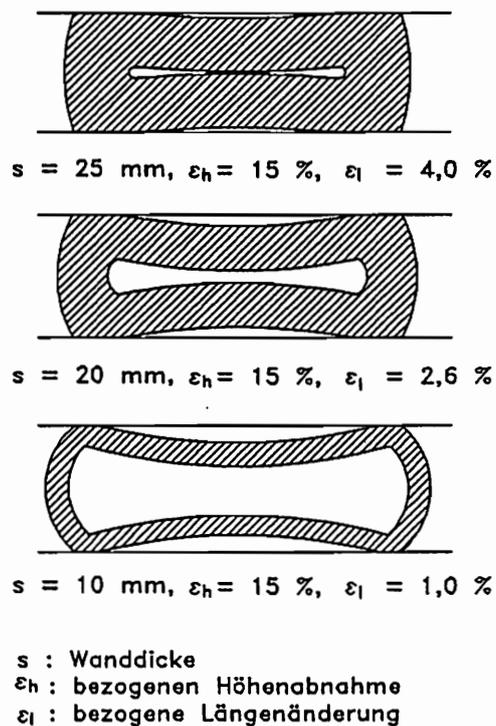


Bild 2: Schematische Darstellung des deformierten Probenquerschnittes nach dem Walzen

In Bild 2 ist zusätzlich die Streckung der Probenbreitseiten in Abhängigkeit von der Wanddicke bei einer bezogenen Höhenänderung $\epsilon_h = 15 \%$ eingetragen. Die Längenänderung der Probenbreitseite bei einer Wanddicke $s = 10 \text{ mm}$ beträgt $\epsilon_l = 1 \%$, bei einer Wanddicke $s = 25 \text{ mm}$ bereits $\epsilon_l = 4 \%$.

Untersuchungen an Walzsteckern zeigen, daß es bereits vor dem Einlauf der Probe in den Walzspalt zu einem Durchbiegen der Probenbreitseiten kommt.

Berechnung mit der Finiten-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode ist ein auf Variationsprinzipien basierendes numerisches Berechnungsverfahren, mit deren Hilfe sich neben integralen auch lokale Größen wie z.B. Formänderungen, Formänderungsgeschwindigkeiten und Spannungen berechnen lassen, die in praktischen Versuchen nur schwer oder gar nicht zu bestimmen sind.

Zur Berechnung des Umformprozesses werden Walze und Werkstück in einem 3 - dimensionalen Modell diskretisiert. Das Werkstück, bestehend aus 640 isoparametrischen 8-Knotenelementen, und die Walze sind in Bild 3 dargestellt, wobei aus Symmetriegründen nur ein Viertel des umzuformenden Werkstückes berechnet werden muß. Das Werkstoffverhalten wird mit einer Fließkurve für kohlenstoffarmen Stahl bei einer Temperatur von $1100 \text{ }^\circ\text{C}$ beschrieben, die Rechnung erfolgt isotherm. Die Verformungen der Walze bei hohen Temperaturen sind gering im Vergleich zu denen des Werkstückes. Daher wird zur Reduzierung der Rechenzeit die Walze als starr angenommen. In Bild 4 ist schematisch die Durchbiegung der Probenbreitseiten vor dem Eintritt in den Walzspalt an einer Probe mit einer Wanddicke $s = 10 \text{ mm}$ zu sehen.

Der Vergleich der aus dem Versuch erhaltenen Werte für die Durchbiegung mit den Ergebnissen der FEM-Berechnung zeigt dabei trotz der angenommenen Vereinfachungen in der Modell- und Materialbeschreibung (starre Walze, isotherme Berechnung) eine gute Übereinstimmung.

Literaturverzeichnis

- /1/ Ehrenberg H.J., Parschat L., Pleschiutschnigg F.P., Praßer C. und Rahmfeld W., Gießen und Gießwalzen bei der Mannesmannröhren-Werke AG, Stahl und Eisen 109(1989) Nr. 9,10, 453 - 462

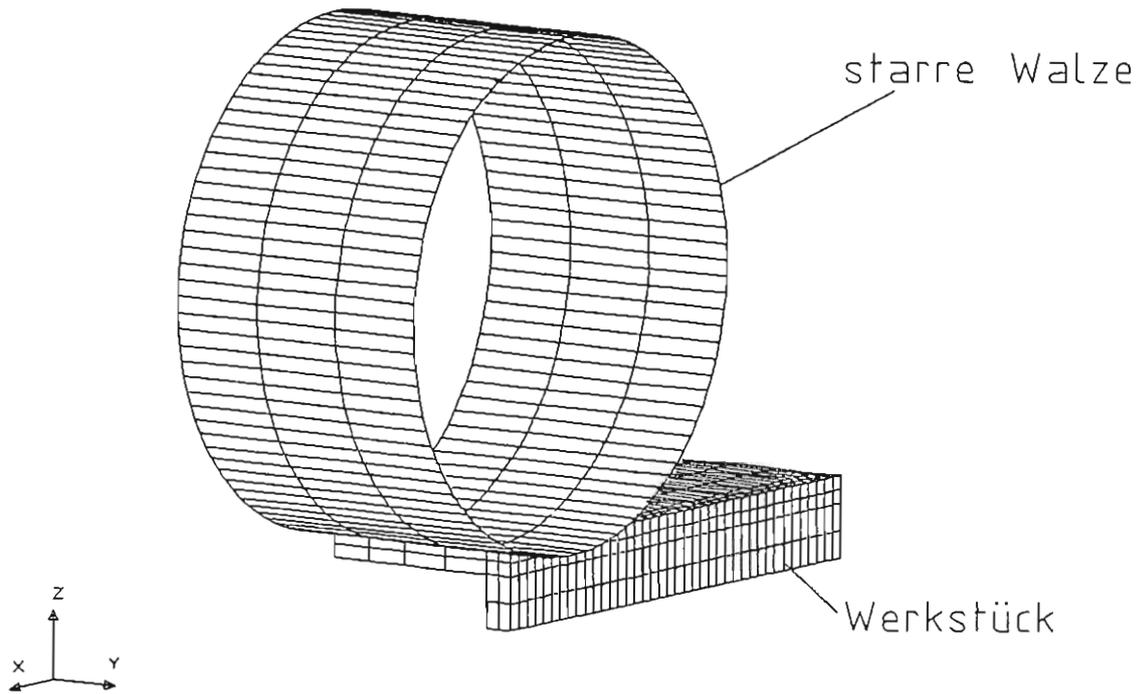
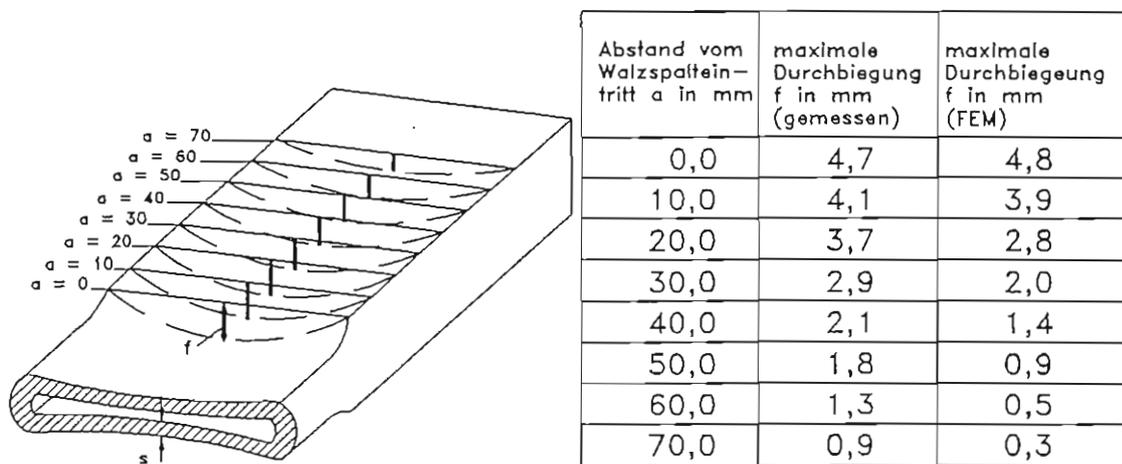


Bild 3: Ausgangsnetz der FEM-Berechnung. Aus Symmetriegründen ist nur ein Viertel der Probe diskretisiert.



a : Abstand vom Walzspalteintritt in mm
 Dicke der erstarrten Strangschale $s = 10$ mm
 bezogene Höhenabnahme $\varepsilon_h = 20$ %

Bild 4: Vergleich der mit FEM berechneten und im Versuch gemessenen Durchbiegung der Probenbreitseiten vor dem Walzspalt.

Reibung metallischer Werkstoffe als kritisches Phänomen

E. Doege, E. Bochmann;

Institut für Umformtechnik und Umformmaschinen; Universität Hannover

Einleitung

Die Wirkflächenreibung ist eine sensible Einflußgröße für das Simulationsergebnis eines Umformprozesses. Vorhersagen zum Reibverhalten einer umformtechnisch relevanten Kontaktpaarung sind bislang unzureichend. Zur Behandlung tribologischer Fragestellungen sind jedoch neue Ansätze zur erweiterten Beschreibung aufgestellt worden, die Gegenstand dieses Beitrages sein sollen.

Das Coulombsche Reibgesetz als linearer Ansatz hat nach wie vor eine zentrale Bedeutung, obgleich es einer rein empirischen Analyse entstammt. Die physikalischen Deutungen sind vielfältig, aber nicht eindeutig. Mit der Formulierung der Stoffgesetze nach Tresca bzw. von Mises wurde eine Einschränkung des Gültigkeitsbereiches für das Coulombsche Reibgesetz nötig. In der Wirkfuge können keine größeren Schubspannungen übertragen werden als im Kontinuum selbst. Damit ergibt sich für die Reibbelastung ein Grenzwert, der durch die Schubfließspannung k gegeben ist. Diese Einschränkung führt zu einer Reibbeschreibung mit Reibfaktoren, wie sie häufig in der Simulation von Massivumformprozessen Verwendung findet. Die Reibschubspannung ist hier abhängig von der Fließspannung des Kontinuums. Ziel von neuen Reibmodellen ist es, die Eigenschaften einer Kontaktpaarung metallischer Werkstoffe auf einheitliche physikalische Grundlagen zurückzuführen, um die Reibschubspannung mit einem Satz signifikanter Parameter beschreiben zu können.

Ansatz

Es ist bekannt, daß sich bei freier Umformung die Oberflächebeschaffenheit ändert. Dies läßt sich mit Streulichtmessungen an deformierten Blechproben zeigen, im Diese Veränderung läßt sich mit konventioneller Kenngrößen nur bedingt darstellen. Die gemessene Intensitäten repräsentieren Fourierkomponenten der Oberfläche. Aus dieser Betrachtung einer freien Oberfläche heraus und anderen Entwicklungen in diesem Bereich wird zunehmend auf die Darstellung einer Kontaktpaarung als selbstähnliche Struktur zurückgegriffen. Es lassen sich drei Postulate aufstellen.

- Reibung zwischen zwei Körpern kann nur dort auftreten, wo Kontakt besteht.
- Kontakt liegt dort vor, wo der Abstand zweier Körper kleiner ist als das Auf-

lösungsvermögen der sie beschreibenden Konturen.

- Das Reibverhalten zweier Körper muß von den Bezugsgrößen und dem Auflösungsvermögen der Betrachtung unabhängig sein.

Aus diesen Überlegungen heraus ist das Modell zur Beschreibung von Reibphänomenen entwickelt worden, dem der Name "Modell des kritischen Fraktals" gegeben wurde.

Modell

In der Regel ist die Reibung eine Problemstellung, an der drei Körper beteiligt sind: Werkzeug, Werkstück und eine Zwischenschicht. Das Problem wurde jedoch reduziert und die Eigenschaften auf das Werkstück abgebildet. In der Wirkfuge befinden sich eingeebnete Rauheiten. Die an der Kraftkopplung zwischen Werkzeug und Werkstück beteiligten Bereiche werden als Kontakt- oder Wechselwirkungszone bezeichnet. Das Verhalten der Rauheiten wurde durch ein Ersatzschema nachgebildet (s. Bild 1). Einflußgrößen lassen sich nach dem Modell des kritischen Fraktals gliedern in:

- den Traganteil,
- die Wechselwirkungsmechanismen und
- den Kopplungen der Kontaktzonen.

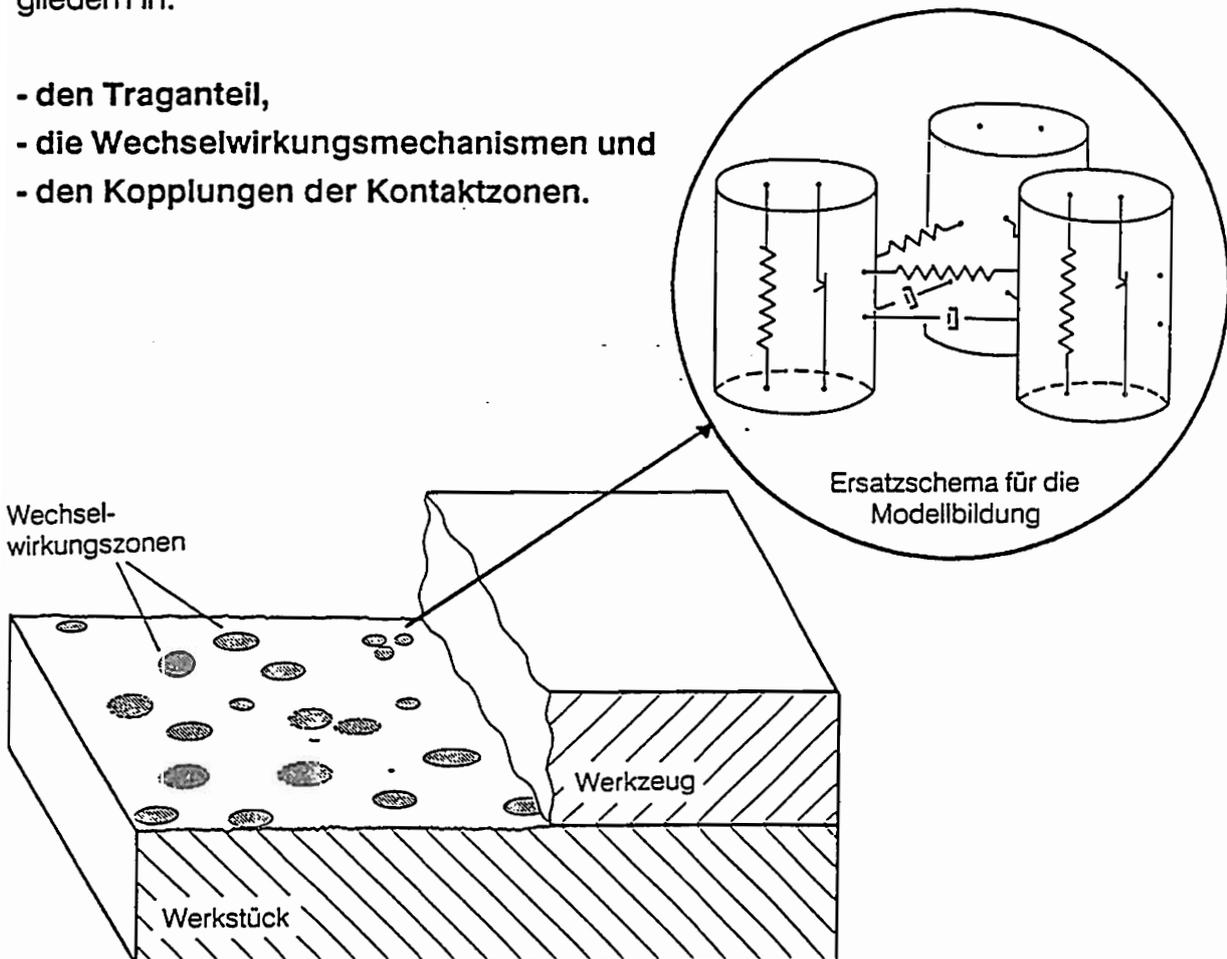


Bild 1: Wechselwirkungszone in der Wirkfuge

Waalsche Wechselwirkung von Bedeutung. Die Wechselwirkungen der metallischen Bindung sind um Größenordnungen höher als die Van der Waalschen. Beide sind extrem kurzreichweitig, wie man Messungen /2/ entnehmen kann. Qualitative Angaben über Bindungsenergien lassen sich der Literatur /3/ entnehmen.

Für ein System bestehend aus einzelnen Kontaktbereichen hat Sherif /6/ gezeigt, daß es zu selbsterregten Schwingungen kommt. Diese können wiederum das Reibverhalten einer Kontaktpaarung nachhaltig beeinflussen. Eine Entwicklung 3.-Ordnung kann sowohl die Zwischenschichtdämpfung als auch selbstinduzierte Schwingungen als Einflußgrößen berücksichtigen.

Zusammenfassung

Eine nominelle Kontaktfläche besteht aus einem fraktalen System von Wechselwirkungszonen, die sich in einem aktiven bzw. passiven Zustand befinden können. Beim Haften sind alle Wechselwirkungszonen in einem stationären aktiven Zustand und tragen zur Kraftkopplung von Werkzeug und Werkstück bei. Beim Gleiten ist nur ein Teil der Wechselwirkungszonen aktiv. Es finden ständig Übergänge vom aktiven zum passiven Zustand und umgekehrt statt. Bei einem Übergang von passiver zu aktiver Zustand wird Arbeit geleistet, die an das System als dissipative Leistung abgegeben wird. Bei einem Übergang von einer aktiven zu einer passiven Zone werden Anregungen in die Zwischenschicht emittiert, die zu Übergängen in benachbarten Zonen führen können oder dissipativ ins Kontinuum gestreut werden.

Literaturverzeichnis

- /1/ Doege, E.: Berichtskolloquium 'Prozeßsimulation in der Umformtechnik', Stuttgart, 16. Jan 1991
- /2/ Inglesfield, J.E.: Adhesion Between Al-Slabs and Mechanical Properties. In: J. Phys. F. 6, 1976, S.687-701
- /3/ Kittel, C.: Einführung in die Festkörperphysik. R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1976
- /4/ Kragelski, I.W.: Friction and Wear. Butterworths, Washington DC, 1965
- /5/ Majumdar, A.; Bhushan, B.: Fractal Model of Elastic-Plastic Contact Between Rough Surfaces. In: Journal of Tribology 113, Jan 1991, No.1
- /6/ Sherif, H.A.: Effect of stiffness on the establishment of selfexcited vibrations. In: Wear 141, 1991, S.227-234

Die Berücksichtigung der Anisotropie in der Blechumformung

T. El-Dsoki, Institut für Umformtechnik und Umformmaschinen,
Universität Hannover

Der Wunsch der Blechverarbeitenden Industrie nach genaueren Vorhersagen von Versagensfällen während des Umformprozesses, führt zu immer komplexeren Beziehungen in den Stoffgesetzen. Untersuchungen haben gezeigt, daß die Vernachlässigung der Anisotropie in der Simulation zu ungenauen Ergebnissen führt. Die Formulierung von neuen Stoffgesetzen bedeutet einen größeren Variablensatz, welcher mit Versuchsdaten aus dem Experiment in Relation gesetzt werden muß. Diese Problematik ist mit der Vorgehensweise nach Bild 1 zu bewältigen.

Die Eingabedaten in Form der realen Prozeßparameter sind sowohl für das experimentelle als auch für das theoretische Modell identisch. Zusätzlich werden für das FE-Modell noch Modellparameter benötigt, dies sind zum einen numerische Parameter (Element-Typ, Elementanzahl, etc.) und zum anderen auch Werkstoffdaten (Parameter des Stoffgesetzes, Reibzahl etc.). Mit diesen Daten wird die Simulation durchgeführt, und die Ergebnisse mit denen aus dem Experiment verglichen.

Die Differenz ist ein Hinweis auf falsche Materialdaten, sodaß diese gezielt geändert werden. Mit diesen neuen Daten wird der Kreislauf erneut durchlaufen, bis eine ausreichende Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation erreicht ist. /1/

Es wurden zwei Modelle der Anisotropie vorgestellt.

Das Modell von HILL /2/

$$2f(\sigma_{ij}) = H(\sigma_y - \sigma_z)^2 + J(\sigma_z - \sigma_x)^2 + K(\sigma_x - \sigma_y)^2 \\ + 2G\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 = 1$$

Bei diesem Modell sind die Parameter H, J, K, G, M und N Werkstoffparameter, welche über den r-Wert paarweise bestimmt werden können. Dieses Modell ist standardmäßig im FEM-Programm ABAQUS implementiert. Die Eingabe der Daten erfolgt als Verhältnis der Fließspannungen zu einer Bezugsfließspannung.

BESDO /3/ machte 1971 einen Vorschlag zur Erweiterung des Hill'schen Modells um den Einfluß der kinematischen Verfestigung. Die Fließbedingung bei rotations-symmetrischen bzw. ebenen Umformvorgängen lautet

$$k_{f_0}^2 = A(\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_y)(\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_z) + B(\hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_z)(\hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_x) + C(\hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_x)(\hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_y) \\ + D\hat{\tau}_{xy}(\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_y) + E\hat{\tau}_{xy}(2\hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_y) + F\hat{\tau}_{xy}^2$$

Die Spannungen stehen dabei in direktem Verhältnis zu den momentanen Formänderungsgeschwindigkeitshauptachsen. Die Berücksichtigung des Backstress erfolgt dabei wie folgt:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_i &= \sigma_i - a_i \\ \hat{\tau}_{xy} &= \tau_{xy} - a_{xy}\end{aligned}$$

Dieses Modell wurde über die von ABAQUS zur Verfügung gestellte Schnittstelle in die FE-Simulation eingebunden.

Bild 2 zeigt den Kraft-Weg Verlauf beim einstufigen Tiefziehen nach erfolgreicher Kalibrierung. Mit diesem Modell werden auch die Spannungs- und Dehnungsverläufe ausgewertet, welche den erwarteten Verlauf haben. Dabei ist zu berücksichtigen, daß bei der Simulation ein kugelförmiger Stempel zum Einsatz kam, so daß sowohl der Verlauf der Radial-Spannung (Bild 3) als auch der der Dehnung in Dickenrichtung (Bild 4) in Rondenmitte keinen konstanten Verlauf haben.

Zusammenfassung

Mit dem Modell nach BESDO sind genauere Ergebnisse zu erzielen als mit der Fließregel nach HILL. Die längere Rechenzeit ist durch die immer schneller werdenden Rechenanlagen dabei weniger problematisch als vielmehr die Möglichkeit zur Bestimmung der Anfangswerte der im Ansatz benötigten Parameter. Gegenüber der hier vorgestellten Vorgehensweise ist bei einer 3D-Behandlung noch sehr viel Arbeit bei der Bestimmung der Parameter zu erwarten.

Literaturverzeichnis

- /1/ Groche, P. Numerical Identification of Forging Parameters
Weiss, U. Modelling of Metal Forming Processes
pp. 237-244, Kluwer Academic Publishers, 1988
- /2/ Hill, R. The Mathematical Theory of Plasticity.
Oxford: Clarendon Press 1950
- /3/ Besdo, D. Zur anisotropen Verfestigung anfangs isotroper starrplastischer Medien.
Z. Angew. Math. Mech. 51 (1971), S. T97-T98

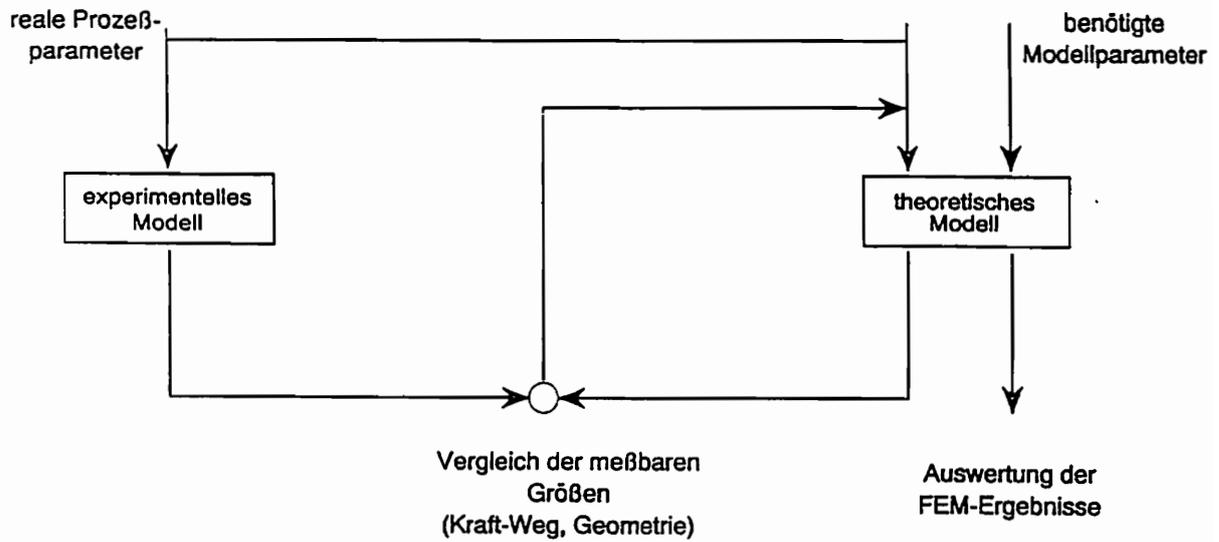


Bild 1 : Kalibrierung des FEM-Modelles

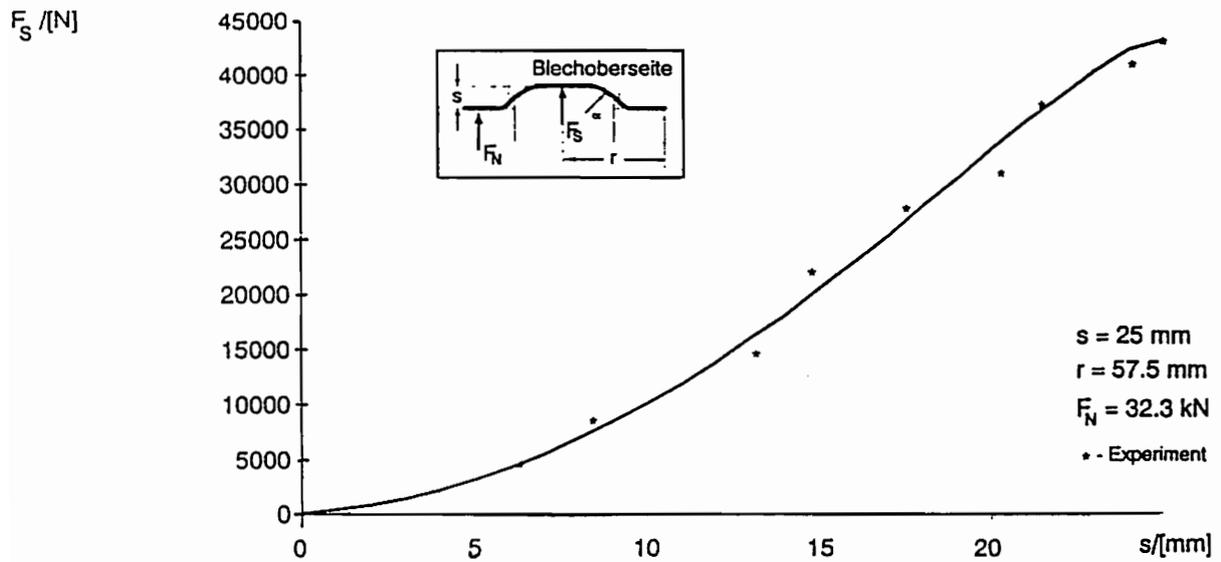


Bild 2 : Kraft-Weg-Verlauf beim einstufigen Tiefziehen

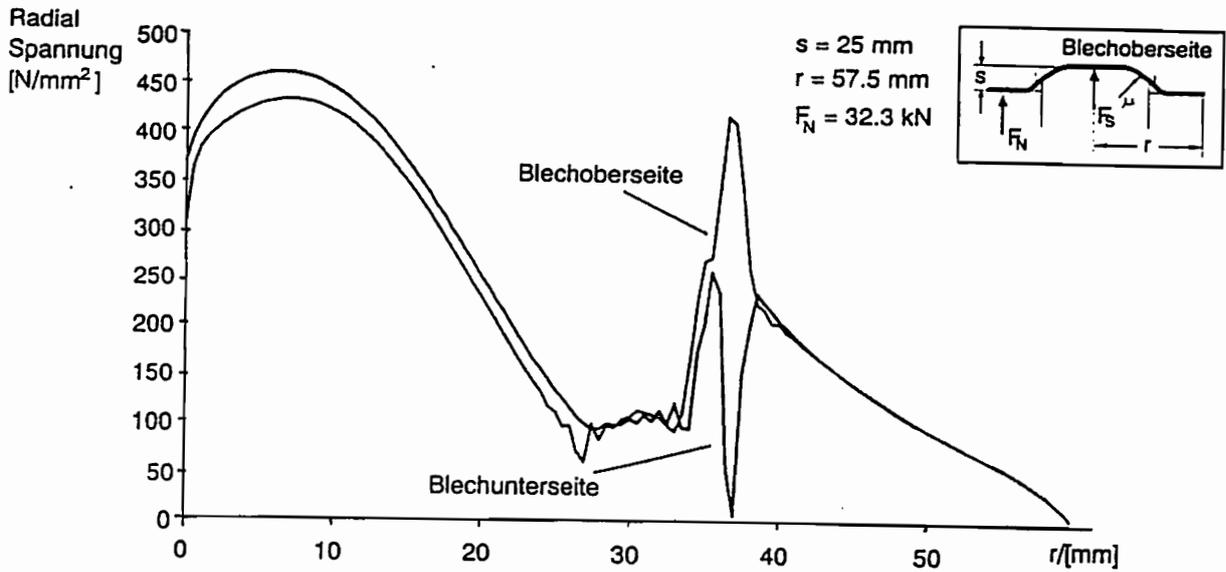


Bild 3 : Radial-Spannungs-Verläufe über den Radius r bezogen auf unverformte Ronde

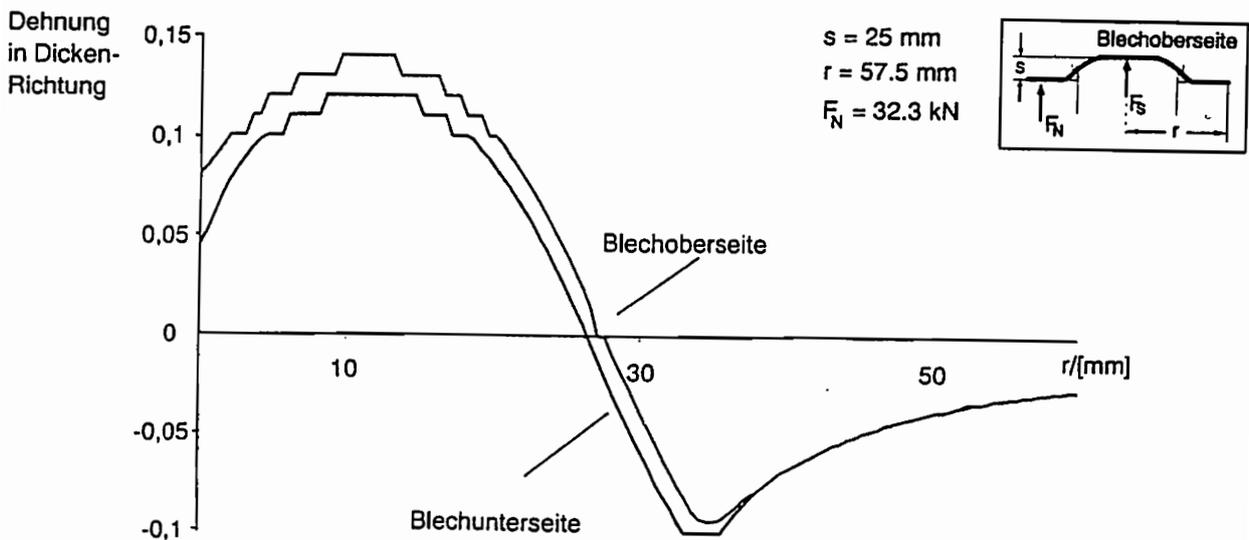


Bild 4 : Verläufe der Dehnung in Dicken-Richtung über den Radius r bezogen auf unverformte Ronde

ZUR THEORIE DES DIELESS DRAWING

O. Pawelski, W. Rasp, A. Kolling, Max-Planck-Institut für Eisenforschung, Düsseldorf

Funktionsprinzip

Werkzeugloses Drahtziehen ist ein Beispiel für Verfahren der flexiblen Umformtechnik. Vorteile des Prozesses sind die Möglichkeit großer Querschnittsabnahmen in einem Umformschritt, die niedrige Umformkraft durch Wegfall der Werkzeugreibung, die Möglichkeit eines variablen Querschnittes über der Länge, die Umformbarkeit schwer verformbarer Werkstoffe und die Eignung zur thermomechanischen Behandlung, Formgebung und Vergütung in einem Schritt. Nachteile sind seine Empfindlichkeit gegenüber Störgrößen, je nach Werkstoff und Temperatur Gefahr der Verzunderung und geringe Prozeßgeschwindigkeiten im Vergleich zu herkömmlichen Verfahren.

Erste experimentelle Untersuchungen wurden von Alexander und Weiss [1][2] durchgeführt. Bild 1 zeigt eine mögliche Kinematik des Prozesses. Man kann sich ein Ende fest eingespannt vorstellen, das andere bewegt durch eine Zugkraft oder durch eine vorgeschriebene Verschiebung beziehungsweise Geschwindigkeit. Die Heiz-, beziehungsweise Kühleinrichtung wird

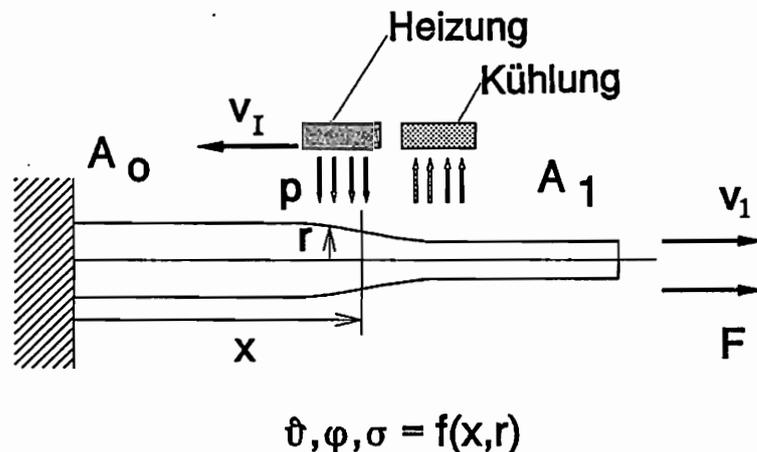


Bild 1: Prozeßkinematik

über den Draht geführt. Bei korrekter Prozeßführung ist im noch nicht erhitzten Bereich und im schon wieder abgekühlten Bereich die Fließbedingung nicht erfüllt. Daher wird nur der erhitzte Bereich umgeformt.

Versuchsaufbau

Die konkrete Umsetzung dieser Kinematik ist mit der in Bild 2 dargestellten Anlage möglich. Die Anlage hat eine Höhe von 2.60 m und eine maximal mögliche Zugkraft von 160 kN und ermöglicht damit die Umformung von ca. 2 cm dicken Stäben. Die Aufheizung erfolgt mit einer 10 kHz Induktionsanlage mit einer Nennleistung von 30 kW. Die Prozeßgrößen (Temperatur, Kraft, Geschwindigkeiten) sind über einen Rechner einerseits steuerbar, andererseits über denselben Rechner meßbar, so daß damit die Programmierung von Regelungen möglich ist.

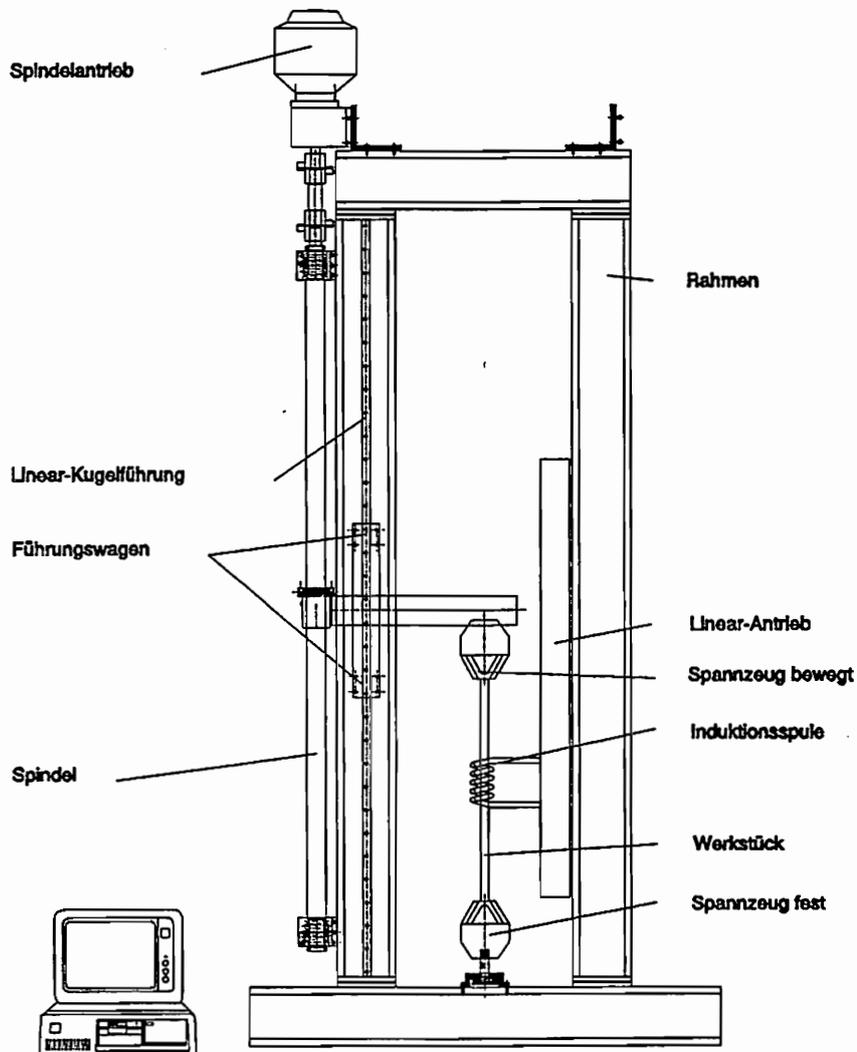


Bild 2: Aufbau der Versuchsanlage

Theoretische Überlegungen

Die Untersuchung der wesentlichen Prozeßgrößen und deren gegenseitigen Abhängigkeit ist Voraussetzung für das gezielte Einstellen der Eingangsgrößen, um die gewünschten Ausgangsgrößen zu erhalten. Insbesondere ist das Prozeßverhalten bei Störungen, etwa der Temperatur, der Zugkraft, des Querschnittes oder der Werkstoffeigenschaften, von Interesse. Deshalb ist es wichtig, über die reine Prozeßbeschreibung (im Sinne der Lösung der zugrundeliegenden Differentialgleichungen) hinaus Kriterien zu entwickeln, die eine Aussage über die Prozeßstabilität ermöglichen. Diese Stabilitätskriterien können statischer (Erfüllung des Kräftegleichgewichts) oder dynamischer Natur (im regelungstechnischen Sinne) sein. Zur möglichst allgemeinen Beschreibung sollte das Werkstoffmodell und das gesamte Prozeßmodell die wesentlichen Parameter Temperatur, Formänderung und Formänderungsgeschwindigkeit enthalten. Die Stoffgleichung

$$k_f = f(\varphi) g(\dot{\varphi}) h(\vartheta) \quad (1)$$

erfüllt diese Forderung und erlaubt ohne wesentliche Einschränkung der Funktionen f, g, h ($f, h > 0$ und h monoton fallend) die Formulierung einer statischen Stabilitätsbedingung

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} > f(\varphi) \quad (2)$$

bei vorgeschriebener konstanter Kraft als Randbedingung und Voraussetzung der Einachsigkeit. (Temperatur, Formänderung φ , Spannung, ... hängen nicht von Umfangsrichtung und Radius ab) Mit einfachen analytischen Abschätzungen lassen sich Bedingungen für die Einachsigkeit finden und mit FE-Rechnungen überprüfen. Bild 3 zeigt exemplarisch eine gekoppelte axialsymmetrische FE-Lösung für die Temperatur und die Formänderung über der Stabachse. Die Eingangsgrößen sind so gewählt, daß die Temperatur, Spannung und Formänderung nahezu einachsig sind. Diese numerischen Lösungen eignen sich gut, um die Gültigkeitsgrenzen der Annahmen für die analytischen Betrachtungen zu überprüfen.

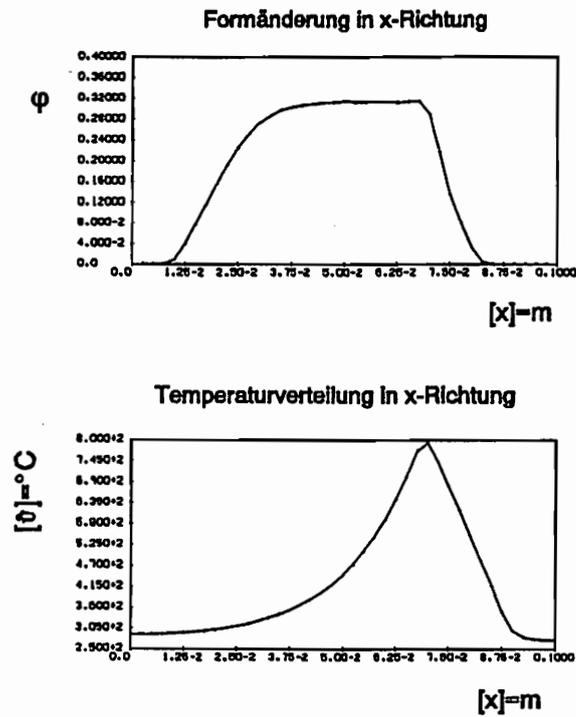


Bild 3: gekoppelte FE-Rechnung für ϑ und φ

Literaturverzeichnis

- /1/ Weiss, V.; Kot, R.A.: Die-less wire drawing with transformation plasticity. Wire Journal (1969) No. 9, p.182-189
- /2/ Alexander, J.M.; Turner, T.W.: A preliminary investigation of the die-less drawing of titanium and some steels. Proc. 15th MTDR Conf., 1974, p.525-537.

NUMERICAL AND EXPERIMENTAL SIMULATION OF IRONING PROCESS TO IMPROVE THE FORCE EQUILIBRIUM ANALYSIS RESULTS

E. Doege; Institut für Umformtechnik und Umformmaschinen, Universität Hannover
M. S. Ragab, G.M.A. Galal; Design and Production Department, Cairo University

1. Abstract

Neglecting the land in the ironing die is one of the often assumption in most of the theoretical analysis. Therefore, a simulation of the ironing process using finite element code **ABAQUS** has been done as well as experimental simulation using a new strip drawing apparatus. Experimental tests have been performed on St14O3 and Al Mg3 to measure the total drawing forces and then compared with the finite element results to verify the validity of the used FE model. The transverse force due to the land is then measured experimentally and also calculated by FEM. As a result, the effect of the land is taken into account in the equilibrium of the forces analysis by assuming a pressure distribution on the land. The calculated drawing force from Equilibrium of force method showed a good agreement with the experimental and also with the FE results.

2. Introduction

FEM has been widely applied in the study of metal forming processes mainly to understand how the process evolves. One of the earliest work in the analysis of the ironing using FEM is done by Odell /7/. Theoretical and experimental work were done to study the strip rolling process by /8/, and /9/, the velocity measurements at die/metal interface from experiments are used as input to elastic-plastic finite element program to calculate the coefficient of friction at the interface. A numerical method for wall ironing, based on one dimension finite difference method, has been developed by /10/, the state under the land is assumed completely plastic. Many testing apparatus have been made by /2/, /3/, /4/, /5/, and /6/ to simulate the ironing process in order to measure the forces on the die and punch, and then to calculate the friction coefficients at die and punch sides. Most of the reseachers in this review have neglected the land. Hence, experimental and numerical simulation are devoted to study the effect of the land on the drawing forces.

3. Experimental and Numerical study

The experiments were carried out on a strip drawing apparatus, whose details were reported in /1/.

Many attempts were made to reach the optimum model to minimize the cost of calculation and to have acceptable accurate results. A model of two layers and 80

elements of 4 nodes element in wall was used and also another finer model was discretized with 8 nodes element and three layers to have a more detailed stress distributions. The anisotropy effects due to Hill has been considered.

4. Results and Discussion

The used model has been validated by comparing the calculated longitudinal force to the measured ones, see fig. (1). As shown, a good agreement is found.

4.1 Land Effect on the Drawing Forces

To study the effect of the land experimentally, the strip was redrawn again after the first drawing till no change in the thickness is observed. The transverse forces at this redrawing is measured. The variation of the transverse force at fifth redrawing with the logarithmic strain are shown in fig. (2a). It is clear that the transverse force at the fifth redrawing (due to the land) is nearly constant at any drawing conditions.

In order to consider only the effect of land in the numerical analysis of the ironing process, two dies are used for the same model and drawing conditions, one with land and other without land. It is shown, fig.(2a), that the transverse forces (F_T) are higher in the presence of land and the difference in transverse forces between with and without land are nearly constant at the whole range of the reduction ratios, which confirms with the experimental results. Three different zones were defined which are the undeformed zone before the entrance of the die, the plastic zone under the inclined part of the die and the elastic zone under the land and, fig.(3). As shown, most of the elements below the land are under elastic strain. Therefore, the force on the land is due to the elastic deformation ($\phi_{elastic}$). In other words, the total strain in the strip takes place in the inclined part(2,6) and is maintained unchanged over the land(3,7), see schematic flow curve, fig.(3).

4.2 Drawing Stresses Calculation by Applying the Force Equilibrium

The equilibrium of forces is carried out in the inclined part and also in the land assuming a certain pressure distribution on it, fig.(4). Drawing stress in the inclined part is given by:

$$d \sigma_x / dt = (1/t) \{ \sigma_f + \mu_D P / \tan a - \mu_D (1 - \mu_D \tan a) P / \tan a \}. \quad (1)$$

The drawing stress in land is given by: $d \sigma_{x1} / dt_e = (1/t) (\mu_D - \mu_p) P_1$ (2)

A model for pressure distribution on the land P_1 is assumed which must satisfy two conditions; the pressure at the land entrance equals the pressure at the exit of the inclined part and the pressure at the land exit equals zero.

The model :- $P_1 = P_e ((x1/L)^2 - 2(x1/L) + 1)$ (3)

where, L land length, and P_e exit pressure at end of the inclined part

The differential equation of the drawing stress was solved numerically by using the modified Rung and Kutta method. A comparison of calculated drawing force with the experimental results shows a good agreement.

5. Conclusions

Experimental measurements and FE calculations showed that the land force has a constant value at any reduction ratio. FE analysis showed that the state of stress under the land is elastic. Furthermore, the boundary of the deformation zone is defined which could be classified to three different zones; the undeformed zone before the entrance of the die, the plastic zone under the inclined part of the die and the elastic zone under the land and at the exit of the die. Therefore, a modification of the equilibrium force method is carried out by including the land in the analysis and then a comparison with the experimental and FE results is done which showed a good agreement.

References

- /1/ E. Doege, M. S. Ragab, and G. M. A. Galal "Ein Streifenziehgerät zur Beurteilung der Reibungsverhältnisse beim Abstreckgleitziehen" *Blech Rohre Profile*, 9, pp. 666-671, Sept. 1991.
- /2/ S. Fukui, T. Ohi, H. Kudo, I. Takita and J. Seino "Some aspects of friction in metal-strip drawing" *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 4. No, pp. 297-312, 1962
- /3/ N. Kawai, and et. "Development of the anti-weldability test in metal forming by means of strip ironing type friction testing machine" *Journal of Eng. for Ind.* vol. 104, Nov. 1982
- /4/ M. Saito, H. Saiko and N. Kawai "Experimental analysis of ironing of thin metal cup" *Trans. of ASME* vol. 111, Feb. 1989
- /5/ X. J. Wang, D. Jonasson and J. L. Duncan "Ironing Dynamometer for studying wall ironing in the cupping process" *IDDRC* (1988)
- /6/ H. Kudo, S. Tanaka, K. Imamura and K. Suzuki "Investigation of cold forming friction and lubrication with a sheet drawing test" *Annals of the CIRP* vol 25/1, (1976)
- /7/ E. I. Odell "A study of wall ironing by the finite element technique" *Journal of Engineering for Industry* vol. 100, Feb. ,1978
- /8/ E. J. Appleby, and et. "A numerical solution of strip drawing employing measured boundary conditions obtained with transparent sapphire" *Num. methods in ind. forming process .Proc. Int. Conf.*, Swansea ,82
- /9/ E. J. Appleby and et. "New strip drawing experiments using transparent sapphire dies" *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 27. No. 11/12, pp. 725-740, 1985
- /10/ H. B. Ras, and et. "A numerical calculation of the stress distribution during wall ironing" *Proceeding of the NUMIFORM'86 Conf./ Gothenburg/ 25-29 August 1986*

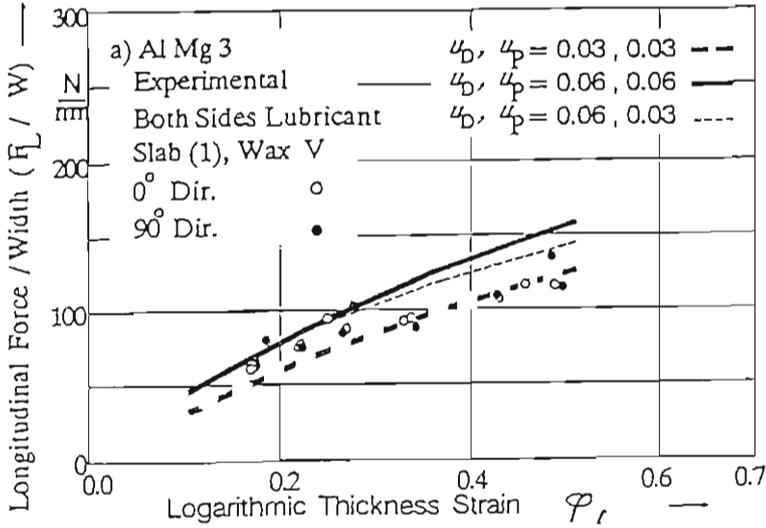


Fig. (1): Comparison between FE and Experimental Results

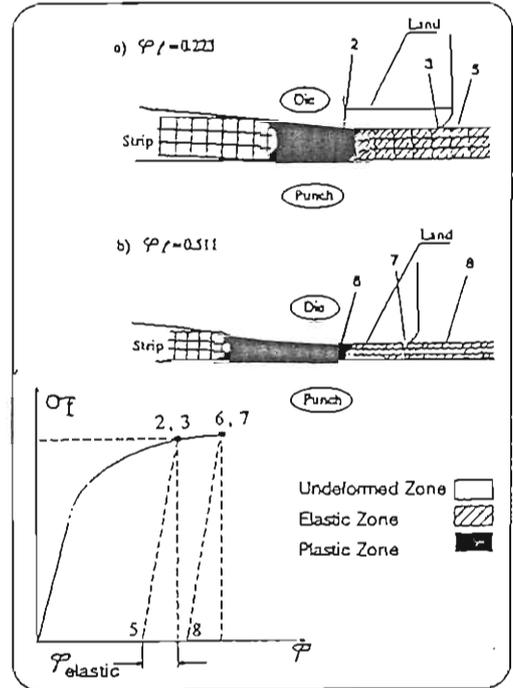


Fig. (3): Boundary of Deformation Zone

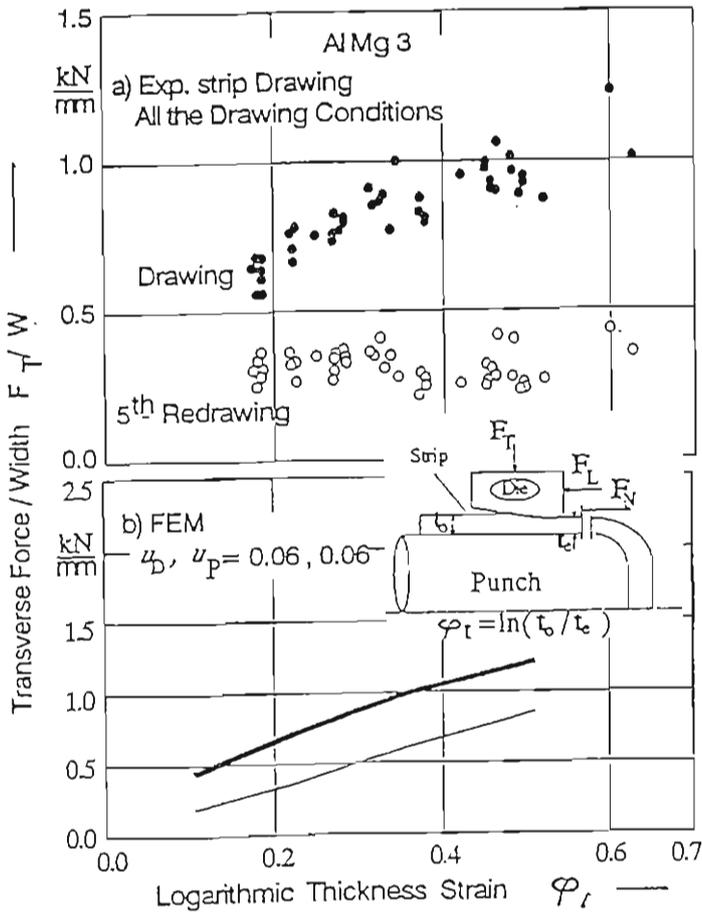


Fig. (2): The Measured & Calculated Trans. Force

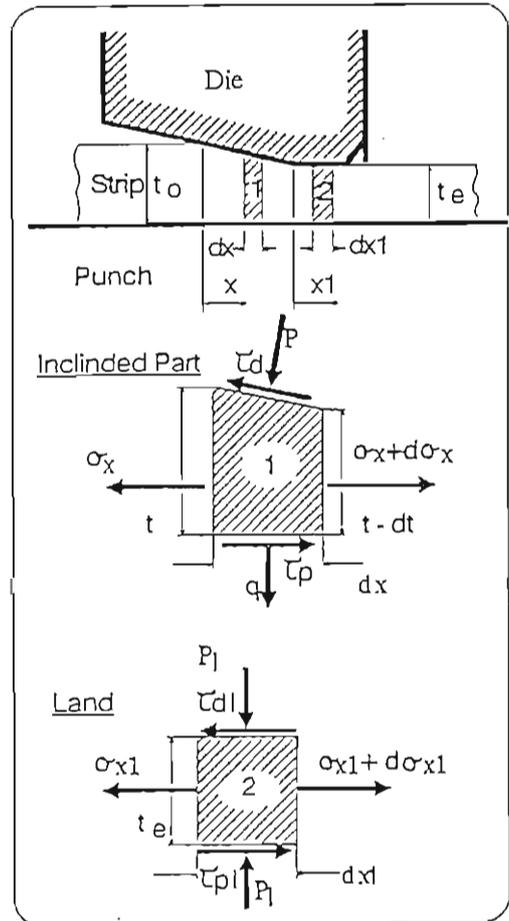


Fig. (4): Stress state in the ironing process

Verbesserung der Unteren Schranke für das Strangpressen beliebiger Profile

V. Mannl, Lehrstuhl A für Mechanik, TU München

Durch Strangpressen, bei dem ein Stempel einen meist kreisförmigen Block durch eine entsprechend geformte Düse in der Matrizenfrontplatte aus dem Ausnehmer der Presse drückt, wird eine unübersehbare Vielfalt von Profilstäben hergestellt. Die Verteilung des Materialflusses im Blockaufnehmer ist zwar z.B. für die Produktqualität von Bedeutung, seine Berechnung [1] aber meist zu aufwendig für die Praxis, in der man sich mit einer rechnerischen Abschätzung der Preßkraft begnügt. Für solche Abschätzungen eignen sich der Obere-Schranken-Satz und der Untere-Schrankensatz, s. z.B. [2]. Beide setzen voraus, daß sich der umzuformende Werkstoff als starrplastisch beschreiben läßt mit einer konvexen Fließbedingung, und daß die assoziierte Fließregel gilt.

Der Untere-Schranken-Satz verlangt zunächst für das Spannungsfeld im umgeformten Werkstück einen Ansatz, der das Fließkriterium nicht verletzt. Erfüllt er auch die differentiellen Gleichgewichtsbedingungen, so gilt

$$P_0 \leq P, \quad (1)$$

wo P_0 die Leistung der zum Spannungsansatz gehörenden Randspannungen mit dem tatsächlich auftretenden Geschwindigkeitszustand ist und die Leistung P entsprechend mit den tatsächlichen, wertemäßig unbekanntem Randspannungen zu bilden ist. Erfahrungsgemäß liefern Spannungsansätze, die das Fließkriterium und die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, für P_0 oft Werte, die erheblich unter der tatsächlichen Umformleistung P liegen, und daher lohnt sich der Aufwand, nach verbesserten Ansätzen zu suchen.

Für die Stempelkraft F beim zentrischen Strangpressen eines Kreisstabes aus einem Kreisblock liefert ein einfacher

zulässiger Spannungsansatz, vgl. [3], mit (1)

$$\begin{aligned} P_0 &= 2Y (A_B - A_R) w \leq Fw = P \\ \text{bzw.} \quad 2Y(A_B - A_R) &\leq F. \end{aligned} \quad (2)$$

Voraussetzung für (2) ist Reibungsfreiheit zwischen dem Block und den Werkzeugen; A_B ist der Blockquerschnitt, A_R der Stabquerschnitt. Diese Ungleichung bleibt auch gültig, wenn das Profil beliebig (einfach zusammenhängend) ist und exzentrisch stranggepreßt wird. Der Nachweis der vrallgemeinerten Gültigkeit ist ein nützliches Resultat, im eigentlichen Sinn ist der Spannungsansatz dabei noch nicht verbessert.

Eine zahlenmäßige Verbesserung zunächst für das zentrische Strangpressen eines Kreisstabes ergibt sich, indem beim Spannungsansatz die radiale Gleichgewichtsbedingung wie folgt geeignet ausgenutzt wird:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = \frac{-Y}{r}. \quad (3)$$

Mit der einachsigen Fließspannung Y erfüllen dann die radiale Hauptspannung σ_r und die Umfangshauptspannung σ_ϕ die TRESCAsche Fließbedingung, wenn die axiale Hauptspannung σ_z zwischen beiden liegt. Der Spannungsansatz soll eine möglichst große Druckspannung σ_z bzw. Abschätzung der Preßkraft F liefern. Dies wird mit $\sigma_z = \sigma_\phi$ erreicht, und die Integration von (3) zwischen vom Stabradius $r=a$ ($A_R = \pi a^2$) bis zum Blockradius $r=b$ ($A_B = \pi b^2$) liefert

$$\frac{1}{2} Y [3 (A_B - A_R) + A_B \ln \frac{A_B}{A_R}] \leq F. \quad (4)$$

In (4) ist berücksichtigt, daß sich in A_R keine Verbesserung gegenüber dem einfachen Ansatz in [3] finden läßt und die Radialspannung bei $r = a$ stetig sein muß. In der Praxis gilt $A_R \ll A_B$, d. h. (4) ergibt eine erhebliche Verbesserung

gegenüber (2).

Die Abschätzung (4) läßt sich auch auf das (exzentrische) Strangpressen beliebiger Profilformen übertragen. Dazu umschließe man den Profilquerschnitt durch einen virtuellen Kreis mit der Fläche A_B' , der einen im Gesamtblock enthaltenen kleineren Teilblock erzeugt. Für diesen Teilblock liefert (2) mit $A_B \Rightarrow A_B'$ einen Anteil der Preßkraftabschätzung. In einen weiteren zu A_B' konzentrischen, aber größeren und noch im Gesamtblock enthaltenen virtuellen Block vom Querschnitt A_B'' kann man sinngemäß die verbesserte Lösung (4) anwenden. Es verbleibt ein Restquerschnitt A_B''' des Gesamtblocks, für den der verbesserte Spannungsansatz

$$\sigma_z = -2Y(1 + 0,5 \ln \frac{A_B''}{A_B'})$$

zulässig ist. Insgesamt liefert dies

$$2Y[(A_B' - A_R) - \frac{1}{4}(A_B'' - A_B') + \frac{1}{4}A_B'' \ln \frac{A_B''}{A_B'} + (1 + \frac{1}{4} \ln \frac{A_B''}{A_B'}) (A_B - A_B'')] \leq F$$

und damit ist die Preßkraftabschätzung in Abhängigkeit von der in Grenzen noch freien Wahl von A_B' und A_B'' gegenüber (2) verbessert, wobei durch Variation von A_B' und A_B'' noch das Optimum bestimmt werden kann. Es läßt sich zeigen, daß eine kleinstmögliche Wahl des Querschnitts A_B' , innerhalb dessen keine Verbesserung erzielt wird, nicht notwendigerweise das Optimum liefert.

Literaturverzeichnis

1. Sailer, C.; Lippmann, H.; Mannl, V.: Two-dimensional extrusion process of axisymmetric workpieces of Al 99.5 including temperature calculations in the tools. In: Advanced Technology of Plasticity 1990, Proc. 3rd Int. Conf. on Technology of Plasticity, Kyoto, July 1-6, 1990, Vol. 1, pp.

491-496. Ed.: The Japan Soc. for Technology of Plasticity
1990

2. Lippmann, H.: Extremum and variational principles in
plasticity. Engng. Trans. 23 (1975) 393-421

3. Lippmann, H.: Mechanik des Plastischen Fließens. Berlin,
Heidelberg, New York: Springer 1981

ZUR BEHANDLUNG VON NICHTLINEAREN THERMOMECHANISCHEN KONTAKTPROBLEMEN

P. Wriggers, Institut für Mechanik, Technische Hochschule Darmstadt
&

C. Miehe, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover

1 Vorbemerkungen

Simulationen von thermomechanischen Prozessen rücken mit den heutigen schnellen Rechnern im Rahmen der Finite-Element-Methode in den Bereich der technischen Anwendungen vor. Dabei ist häufig auch die Formulierung und Behandlung des Kontaktes erforderlich. Im Kontaktbereich kann sowohl ein Wärmeübergang als auch eine Wärmeerzeugung stattfinden und den thermomechanischen Prozeß beeinflussen. Aus diesem Grund ist es wichtig, die thermischen Übergangsbedingungen im Kontaktbereich genau zu formulieren und algorithmisch für die Methode der finiten Elemente aufzubereiten.

2 Grundgleichungen und Materialgesetze im Kontaktbereich, FE-Diskretisierung

Die Formulierung des Kontaktes kann über Lagrangesche Multiplikatoren oder auch das Penalty Verfahren erfolgen, wenn man eine mathematisch ideal glatte Oberfläche annimmt und die Zwangsbedingung des Nicht-Eindringens formuliert. Hier soll sowohl für den Normal-, Tangential- und den thermischen Kontakt die Materialeigenschaft der Oberfläche berücksichtigt werden. Dies führt zu einer — wenn auch kleinen — Annäherung (Eindringung) der Körper, siehe Bild 1.

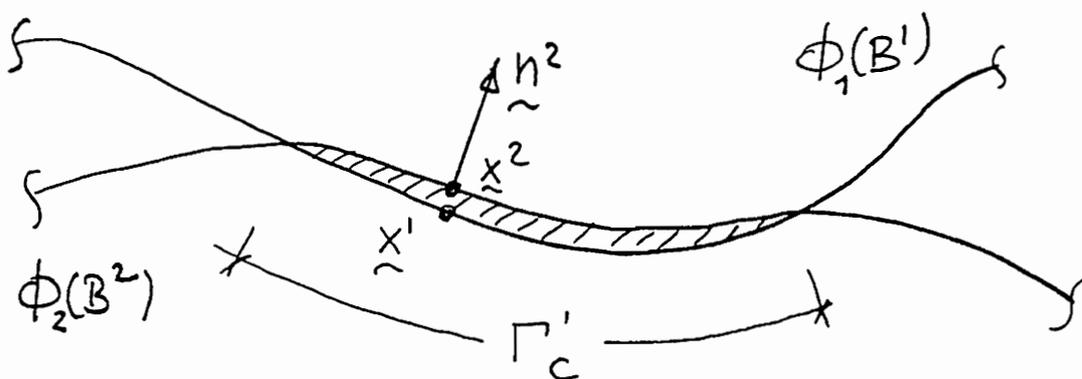


Bild 1 Annäherung der Körper im Kontaktbereich

Die Annäherung der Körper im Kontaktbereich läßt sich durch

$$g_{N+} = \begin{cases} 0 & \text{for } (x^1 - x^2) \cdot n^2 > 0 \text{ on } \Gamma_C \\ (x^1 - x^2) \cdot n^2 & \text{for } (x^1 - x^2) \cdot n^2 \leq 0 \text{ on } \Gamma_C \end{cases} \quad (1)$$

darstellen. Für die tangentielle Kontaktkinematik wird die relative tangentielle Gleitgeschwindigkeit im Kontaktbereich eingeführt, siehe z.B. Wriggers et.al. [1],

$$\dot{\mathbf{g}}_T = (\mathbf{1} - \mathbf{n}^2 \otimes \mathbf{n}^2)(\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2), \quad (2)$$

die sich additiv in einen elastischen Anteil und einen Reibanteil aufspalten läßt

$$\dot{\mathbf{g}}_{T+} = \dot{\mathbf{g}}_{T+}^{el} + \dot{\mathbf{g}}_{T+}^{in}. \quad (3)$$

Hierin ist der aktive, tangentielle, elastische Anteil wie folgt definiert

$$\dot{\mathbf{g}}_{T+}^{el} = \begin{cases} 0 & \text{for } (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) \cdot \mathbf{n}^2 > 0 \text{ on } \Gamma_C \\ \dot{\mathbf{g}}_T^{el} & \text{for } (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) \cdot \mathbf{n}^2 \leq 0 \text{ on } \Gamma_C \end{cases}. \quad (4)$$

Neben den kinematischen Beziehungen müssen wir noch die Materialgesetze im Kontaktbereich formulieren. Für den Normaldruck und die Reibspannung ist dies in Wriggers et.al. [1] ausführlich behandelt. Die dort angewandten und entwickelten Gesetze sind durch die Gleichungen (5) und (6) repräsentiert.

Normalkontakt

$$p_c = c_N |g_{N+}|^m \quad (5)$$

Tangentialer Kontakt

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_T &= c_T (\dot{\mathbf{g}}_{T+} - \dot{\mathbf{g}}_{T+}^{pl}) \\ \dot{\mathbf{g}}_{T+}^{in} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{t}_T}, \quad f = -\mu |p_c| + \|\mathbf{t}_T\| \leq 0 \\ \lambda &\geq 0, \quad \lambda f = 0, \quad f \leq 0 \\ \mathcal{D}_F &= \mathbf{t}_T \cdot \dot{\mathbf{g}}_{T+}^{in} \end{aligned} \quad (6)$$

Hierin ist p_c der Kontaktdruck, g_{N+} die Annäherung der Körper, \mathbf{t}_T die Reibspannung und $\dot{\mathbf{g}}_{T+}$ die tangentielle Geschwindigkeit. \mathcal{D}_F ist die Dissipation infolge Reibung.

Die in dieser Arbeit verwendeten Gesetzmäßigkeiten für den thermomechanischen Wärmeübergang im Kontaktbereich wurden in Anlehnung an Yovanovich, Song [2] und Yovanovich [3] formuliert. Es ergibt sich

$$q_c = \hat{h}_S(p_c)(\theta_1 - \theta_2), \quad (7)$$

wobei mit q_c der Wärmefluß und θ die Temperatur bezeichnet werden. Die in (5) bis (7) enthaltenen Materialkennwerte sind durch Experimente zu bestimmen. Mit (7) berücksichtigen wir bei thermomechanischen Kontaktproblemen im Kontaktbereich neben den üblichen Modellen für Normal- und Reibkontakt ein druckabhängiges Gesetz für die Wärmeleitung.

Für die Diskretisierung im Rahmen der Methode der finiten Elemente benötigen wir eine Variationsformulierung der mechanischen und thermischen Grundgleichungen. Sie ist für den mechanischen Teil durch

$$G(\Phi_t(X), \dot{\mathbf{u}}) = \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \int_{B^\alpha} \boldsymbol{\tau} \cdot \text{grad } \dot{\mathbf{u}} dV - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} da \right\} + \int_{\Gamma_c} [p_c \dot{g}_{N+} + \mathbf{t}_T \cdot \dot{\mathbf{g}}_{T+}] d\Gamma = 0 \quad (8)$$

und für den thermischen Teil durch

$$G(\Phi_t(X), \theta, \dot{\vartheta}) = \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \int_{B^\alpha} \frac{K}{J} \text{grad } \theta \cdot \text{grad } \dot{\vartheta} dV - \int_{B^\alpha} S \dot{\vartheta} dV - \int_{\Gamma_q} \bar{q}_n \dot{\vartheta} da + \int_{B^\alpha} c \dot{\theta} \dot{\vartheta} dV \right\} + \int_{\Gamma_c} q_c(p_c) (\dot{\vartheta}^1 - \dot{\vartheta}^2) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \frac{1}{2} D_F (\dot{\vartheta}^1 + \dot{\vartheta}^2) d\Gamma = 0 \quad (9)$$

gegeben.

Hierin sind die Gebiets- und Randintegrale über B_α , Γ_σ und Γ_q in der üblichen Weise definiert, siehe z. B. Miehe [4]. Der Einfluß des Kontaktbereiches ist in den Integralen über Γ_c beschrieben, wobei der mechanische Part die virtuelle Arbeit des Kontaktdruckes und der Tangentialspannungen enthält. Der thermische Teil liefert zum einen den Wärmeübergang und zum anderen die Dissipation infolge Reibung. Die Formulierung (8) und (9) ist die Basis für die Diskretisierung, die auf ein nichtlineares gekoppeltes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung für die Deformation, Geschwindigkeit und Temperatur führt. Die Lösung erfolgt mit einer Operator Split Technik, siehe Simo, Miehe [5], die es erlaubt, durch einen Produktalgorithmus die Teilprobleme im Zeitschritt entkoppelt zu lösen. Dies bedeutet eine erhebliche Steigerung der Effizienz der numerischen Simulation, da die Teilprobleme kleinere Dimension besitzen, was sich bei der Gleichungslösung bemerkbar macht.

3 Beispiel

Als Beispiel wird das Aufheizen eines Blockes infolge von Coulombscher Reibung für ein System mit adiabatischen thermischen Randbedingungen behandelt. Das FE-Netz ist in Bild 2 gegeben. Der Block B^2 wird mit einem Druck p gegen die Unterlage B^1 gedrückt und dann innerhalb von $T = 0.375 \cdot 10^{-3} s$ mit 100 gleichen Zeitschritten über die Unterlage gezogen. Die Materialdaten sind in der Tabelle 1 angegeben.

Ein Wärmeaustausch im Kontaktbereich wird nicht berücksichtigt, um das stationäre Endergebnis nach $T = 10 s$ überprüfen zu können. Es zeigt sich, daß die mit dem FE-Modell gewonnene mittlere Temperaturerhöhung in B^2 von $\vartheta = 1.27 K$ nur um 2,5 % von der analytischen Lösung abweicht.

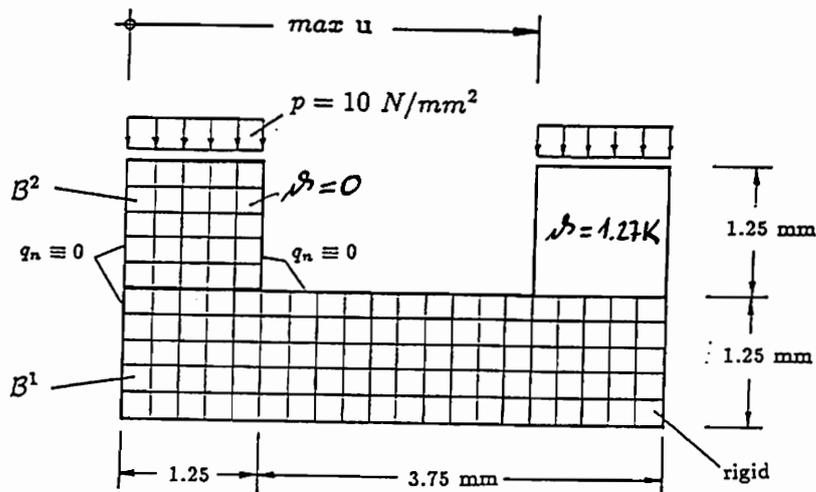


Bild 2 Anfangs- und Endzustand des Reibproblems.

Material Parameters: ALUMINIUM		
Bulk Modulus	κ	58333 N/mm^2
Shear Modulus	μ	26926 N/mm^2
Density	ρ	$2.7 \cdot 10^{-9} N s^2/mm^4$
Expansion Coefficient	α	$23.8 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
Conductivity	k	150 N/sK
Capacity	c	$0.9 \cdot 10^9 mm^2/s^2 K$
Friction Coefficient	μ	0.2 -

Tabelle 1 Materialdaten des Problems.

Literaturverzeichnis

- [1] Wriggers, P., Vu Van, T., Stein, E.: Finite-Element-Formulation of Large Deformation Impact-Contact-Problems with Friction, Computer & Structures, 37, 319-333, 1990.
- [2] Song, S., Yovanovich, M. M.: Explicit relative contact pressure expression: dependence upon surface roughness parameters and Vickers microhardness coefficients, AIAA Paper 87-0152, 1987.
- [3] Yovanovich, M. M.: Thermal Contact Correlations, AIAA Paper 81-1164, 1981.
- [4] Mische C.: Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Bericht-Nr. F 88/6, 1988.
- [5] Simo, J. C., Mische C.: Coupled Associative Thermoplasticity at Finite Strains: Formulation, Numerical Analysis and Implementation, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., to appear.

Neuere Überlegungen zur Berechnung nichtlinearer Prozesse kinematisch verfestigender Materialien

J. Bluhm, W. Ehlers, Fachgebiet Mechanik, FB 10, Universität - GH - Essen

Im Rahmen eines vollständig geometrisch nichtlinearen Berechnungsverfahrens (FEM) ist ein Randwertproblem der isothermen Elastoplastizität mit kinematischer Verfestigung erst dann als gelöst anzusehen, wenn die schwache Form des Gleichgewichts (Prinzip der virtuellen Verrückungen) und die aktuelle Fließfläche im Rahmen einer definierten Toleranz befriedigt werden. Der Spannungstensor und der von der Belastungsgeschichte abhängige Translationstensor (Verfestigungstensor) sind mit Hilfe konstitutiver Beziehungen zu bestimmen. Dieses Vorgehen setzt im Rahmen der endlichen Theorie mit multiplikativer Zerlegung des Deformationsgradienten, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$, die Berechnung der metrischen Größen einer spannungsfreien, aber im allgemeinen inkompatiblen plastischen Zwischenkonfiguration voraus. Zur Bestimmung der plastischen Metrik wird ein Verschiebungsfeld für die Zwischenkonfiguration formuliert, so daß sich in Verbindung mit dem Verschiebungsvektor für die Momentankonfiguration die elastischen und die plastischen Verzerrungen im Sinne einer endlichen Vorgehensweise, d. h. durch Addition der Zuwächse der linearen Freiwerte der Verschiebungsfelder, berechnen lassen.

Auf der Basis der multiplikativen Zerlegung von \mathbf{F} wird in [1] zur Beschreibung elastisch - plastischer Festkörper (geschwindigkeitsunabhängige Plastizität) ein konstitutives Modell vorgeschlagen, bei dem sowohl der elastische als auch der plastische Deformationsanteil als konstituierende Variablen aufgefaßt werden:

$$(\psi, \mathbf{T}) = R(\varphi) \quad , \quad \varphi = (\mathbf{F}_e, \mathbf{F}_p) \quad , \quad \hat{\mathbf{D}}_p = \hat{\mathbf{D}}_p(\varphi, \dots) \quad . \quad (1)$$

Darin kennzeichnen ψ die freie Helmholtzsche Energie und \mathbf{T} den Cauchyschen Spannungstensor. Die Beziehung (1)₃ für den plastischen Deformationsgeschwindigkeitstensor der Zwischenkonfiguration, $\hat{\mathbf{D}}_p = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{L}}_p + \hat{\mathbf{L}}_p^T)$ mit $\hat{\mathbf{L}}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1}$, ist als Evolutionsgleichung für \mathbf{F}_p zu verstehen, wobei \mathbf{F}_p als interne Variable aufgefaßt wird.

Bei Beachtung der Prinzipie „Bezugsinvarianz“ und „Dissipation“ ergeben sich für hyperelastisch - plastisches Materialverhalten die folgenden thermodynamischen Restriktionen des durch (1) definierten konstitutiven Modells:

$$\psi = \psi_e(\mathbf{E}_e) + \psi_p(\mathbf{E}_p) \quad , \quad \tau = \rho_0 \mathbf{F} \frac{\partial \psi_e}{\partial \mathbf{E}_e} \mathbf{F}^T \quad (2)$$

sowie

$$\hat{\mathbf{D}}_p \cdot (\hat{\tau} - \hat{\mathbf{Y}}) \geq 0 \quad (3)$$

mit

$$\tau = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{T} \quad , \quad \hat{\tau} = \mathbf{F}_e^{-1} \tau \mathbf{F}_e^{T-1} \quad , \quad \hat{\mathbf{Y}} = \rho_0 \mathbf{F}_p \frac{\partial \psi_p}{\partial \mathbf{E}_p} \mathbf{F}_p^T \quad . \quad (4)$$

Die additive Zerlegung von ψ geht auf [3] zurück. Die Beziehungen (2) kennzeichnen die thermodynamischen Gleichgewichtsgrößen; die Beziehung (3) kennzeichnet den Dissipationsmechanismus des Modells. Die Größe ψ_p wird als Funktional der Belastungsgeschichte verstanden und die Größe ψ_e als gespeicherte elastische Energie des Materials. Die Tensor \hat{Y} wird von Ehlers [1, 2] als Translationstensor der kinematischen Verfestigung bezüglich der Zwischenkonfiguration interpretiert.

Zur Beschreibung des elastischen Materialverhaltens wird das Elastizitätsgesetz von Simo & Pister [4] benutzt:

$$\tau = 2 \mu K_e + \lambda (\ln J_e) I \quad ; \quad K_e = \frac{1}{2} (F_e F_e^T - I) \quad , \quad J_e = \det F_e \quad . \quad (5)$$

Die Größen μ und λ kennzeichnen die Lamé - Konstanten der linearen Elastizitätstheorie.

Zur Bestimmung des Translationstensors wird in [2] für den plastischen Anteil der freien Helmholtzschen Energie der folgende Ansatz vorgeschlagen:

$$\psi_p = \psi_p (\bar{I}_p, J_p) \quad ; \quad \bar{I}_p = (J_p)^{-2/3} F_p F_p^T \cdot I \quad , \quad J_p = \det F_p \quad . \quad (6)$$

Daraus läßt sich folgende konstitutive Beziehung herleiten:

$$\hat{Y} = c_p \hat{K}_p^D + p_p I \quad ; \quad \hat{K}_p = \frac{1}{2} (F_p F_p^T - I) \quad . \quad (7)$$

Die von der Belastungsgeschichte abhängigen Materialparameter c_p und p_p werden im Vergleich mit dem Zugversuch bestimmt, wobei in bezug auf das plastische Materialverhalten plastische Inkompressibilität ($\det F_p = 1 \rightarrow \hat{D}_p \cdot I = 0$) vorausgesetzt wird. Die aus dem Zugversuch resultierenden Materialparameter lassen sich in Abhängigkeit der einaxialen plastischen Ingenieurdehnung ε_p darstellen [5]:

$$c_p = 2 \frac{(1 + \varepsilon_p)^2}{(1 + \varepsilon_p)^3 - 1} \hat{\alpha}_p \quad , \quad p_p = \frac{1}{6} \frac{(1 + \varepsilon_p)^3 - 1}{1 + \varepsilon_p} c_p \quad . \quad (8)$$

Der auf die Zwischenkonfiguration bezogene einaxiale Vergleichswert $\hat{\alpha}_p = \hat{\alpha}_p(\varepsilon_p)$ der kinematischen Verfestigung ist den Versuchsergebnissen anzupassen.

Die plastische Inkompressibilität beinhaltet die Forderung, daß \hat{D}_p die Form eines Deviators haben muß. Somit sind bei Verwendung einer assoziierten Fließregel und einer Fließbedingung von Misesschen Typs die Fließbedingung und die Fließregel in der plastischen Zwischenkonfiguration zu konstituieren:

$$\hat{F} = \frac{1}{2} (\hat{\tau}^D - \hat{Y}^D) \cdot (\hat{\tau}^D - \hat{Y}^D) - \frac{1}{3} \hat{\chi}^2(\varepsilon_p) = 0 \quad ,$$

$$\hat{D}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{\tau}} = \dot{\lambda} (\hat{\tau}^D - \hat{Y}^D) \quad ; \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad . \quad (9)$$

Das elastisch - plastische Materialverhalten ist im allgemeinen von der gesamten Deformationsgeschichte, die sich durch eine zeitlichen Diskretisierung erfassen läßt und auf ein inkrementelles Vorgehen bei der Bestimmung der aktuellen Fließfläche und des momentanen Spannungszustands führt, abhängig. Ausgehend von einem bekannten „endlichen“ Grundzustand, der geometrisch beschrieben wird

durch $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{e1} \mathbf{F}_{p1}$, lassen sich auf der Basis der konstitutiven Beziehungen (5)₁ und (7)₁ mit Hilfe eines Projektionsverfahrens (Radial - Return - Methode) die folgenden Beziehungen für die Spannungs- und Translationstensoren bezüglich der Zwischenkonfiguration für den „inkrementellen“ Nachbarzustand ($\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{E2} \mathbf{F}_{p1}$, \mathbf{F}_{E2} : Deformationsanteil des elastischen Prädiktorschritts) herleiten [5]:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_2 = \frac{2\alpha_2(1+c_{p2}\Lambda)}{1+2\alpha_2\Lambda+c_{p2}\Lambda} \hat{\mathbf{K}}_{E2}^D + \frac{2\alpha_2 c_{p2}\Lambda}{1+2\alpha_2\Lambda+c_{p2}\Lambda} \hat{\mathbf{K}}_{p1}^D + \left[\frac{2}{3}\alpha_2(\hat{\mathbf{K}}_{E2} \cdot \mathbf{I}) + \beta_2 \right] \mathbf{I}, \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_2 = \frac{2\alpha_2 c_{p2}\Lambda}{1+2\alpha_2\Lambda+c_{p2}\Lambda} \hat{\mathbf{K}}_{E2}^D + \frac{c_{p2}(1+2\alpha_2\Lambda)}{1+2\alpha_2\Lambda+c_{p2}\Lambda} \hat{\mathbf{K}}_{p1}^D + p_{p2} \mathbf{I}$$

mit $\Lambda = \dot{\Lambda} \Delta t$, den Abkürzungen $\alpha_2 = \mu - \lambda \ln(J_{E2})$ und $\beta_2 = \lambda \ln(J_{E2})$ und dem Verzerrungstensor $\hat{\mathbf{K}}_{E2} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}_{E2}^{-1} \mathbf{F}_{E2}^T)$ des elastischen Prädiktorschritts.

Der im Berechnungsverfahren benutzte Lösungsalgorithmus basiert auf einer konsistenten Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts. In Anlehnung an [6] wird ein elastisch - plastischer Tangentenoperator ermittelt. Nach iterativer Berechnung eines „inkrementellen“ Nachbarzustands – die schwache Form des Gleichgewichts und die Fließbedingung werden mit den inkrementellen Materialgleichungen (10) befriedigt – lassen sich mit Hilfe eines plastischen Verschiebungsfeldes und der plastischen Verzerrungszuwächse die plastischen Metrikgrößen einer neuen Zwischenkonfiguration im Sinne einer endlichen Vorgehensweise bestimmen. Die Ermittlung dieser plastischen Metrikoeffizienten kann geometrisch interpretiert werden als ein „Heranziehen“ der Zwischenkonfiguration des Grundzustands an die Momentankonfiguration des „inkrementellen“ Nachbarzustands. Der plastische Verzerrungszuwachs wird nach Berechnung der neuen plastischen Metrik zu Null gesetzt. Der „inkrementelle“ Nachbarzustand geht danach in einen „endlichen“ Nachbarzustand ($\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_{e2} \mathbf{F}_{p2}$) über, und ein neuer Iterationsprozeß innerhalb des Lastinkrements schließt sich an, sofern die schwache Form des Gleichgewichts und die Fließbedingung mit den konstitutiven Beziehungen (5)₁ und (7)₁ bzw. (10) mit $\Lambda = 0$ nicht im Rahmen einer gewählten Toleranz befriedigt werden.

Welchen Einfluß die Berechnung der plastischen Metrikoeffizienten im Sinne einer endlichen Vorgehensweise auf das Ergebnis bei der Berechnung von Randwertproblemen hat, soll am Beispiel eines Kragträgers mit Einzelmoment – Belastung: $M = 82,467$ [kNcm]; Abmessungen: $l = 200,0$ [cm], $b = 12,0$ [cm], $h = 1,0$ [cm]; Werkstoffkenngrößen: $E = 21000$ [kN/cm²], $\sigma_F = 21,0$ [kN/cm²] – verdeutlicht werden, siehe Abb. 1. Der einaxiale Wert α_p der kinematischen Verfestigung wird mit Hilfe der monoton steigenden Vergleichsfunktion $\alpha_{pV} = 1,575 \ln(13333,33 \varepsilon_{pV} + 1)$ bestimmt. Die Diskretisierung des Systems erfolgt innerhalb der Stabtheorie unter Verwendung der Timoshenko - Kinematik (isoparametrische Ansatzfunktionen; Balkenelemente mit variabler Schichteneinteilung). In bezug auf die Formulierung der Verschiebungsfelder für die Momentan- und für die Zwischenkonfiguration und auf die Umrechnung der Materialkennwerte bezüglich der Zwischenkonfiguration sei auf [5] verwiesen.

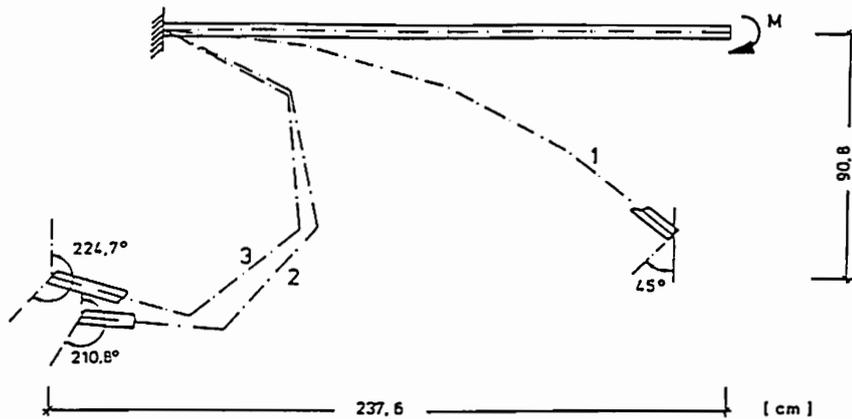


Abb. 1: Kragträger mit Einzelmoment („inkrementeller“ und „endlicher“ Nachbarzustand)

Das Aufbringen der Belastung erfolgt in einem Schritt. Nach Erreichen der Verformungsfigur 1, die der Lösung des elastischen Vergleichsproblems entspricht, wird erstmalig der Einfluß des plastischen Materialverhaltens berücksichtigt. Die Verformungsfigur 2 entspricht dem sogenannten „inkrementellen“ Nachbarzustand; die Verformungsfigur 3 ist das Ergebnis einer vollständig geometrisch nichtlinearen Berechnung. Vergleicht man die Verdrehungen der Endquerschnitte der Verformungsfiguren 2 und 3, dann zeigt sich, daß die Abweichung in einer Größenordnung von ca. 6,6 % liegt, obwohl die maximalen plastischen Dehnungen der Randfasern lediglich 0,85 % betragen. Im Endzustand weisen ca. 90 % der Querschnittsfläche elastisch - plastische Deformationen auf. Die Anzahl der Schichten erhöht sich von anfangs 2 auf insgesamt 8 Schichten pro Element.

Literatur:

- /1/ W. Ehlers: Eine neue thermodynamische Interpretation elastisch - plastischen Materialverhaltens, ZAMM 70 (1990), T301 - T303.
- /2/ W. Ehlers: Poröse Medien - ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie, Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen, Heft 47, Universität - GH - Essen, Essen 1989.
- /3/ A. E. Green und P. M. Naghdi: A general theory of an elastic - plastic continuum, Arch. Rational Mech. 18 (1965), 251 - 281, 19 (1965), 408.
- /4/ J. C. Simo und K. S. Pister: Remarks on constitutive equations for finite deformation problems: Computational implications, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 46 (1984), 201 - 215.
- /5/ J. Bluhm: Ein Modell zur Berechnung geometrisch nichtlinearer Probleme der Elastoplastizität mit Anwendung auf ebene Stabtragwerke, Fortschritt - Berichte VDI, Reihe 18, Nr. 94, VDI - Verlag, Düsseldorf 1991.
- /6/ F. Gruttmann und E. Stein: Tangentiale Steifigkeitsmatrizen bei Anwendung von Projektionsverfahren in der Elastoplastizität, Ing. - Archiv 58 (1988), 15 - 24.

Fehleruntersuchungen bei der Simulation von Umformproblemen mit Hilfe der FEM

J. Rammelkamp, N. L. Dung, O. Mahrenholtz
Arbeitsbereich Meerestechnik II — Strukturmechanik
Technische Universität Hamburg-Harburg

Da die Finite-Element-Methode (FEM) ein Näherungsverfahren ist, ist es von großem Interesse, wie genau die berechneten Ergebnisse sind. Einfluß auf die Ergebnislösung haben die Ansatzfunktionen, das gewählte Lösungsverfahren und die Beschreibung der Randbedingungen. Diese Art von Fehlerquellen sollen hier nicht untersucht werden. Bei gegebenen Algorithmen und Rechnergenauigkeit wird die Diskretisierung des Problemgebiets untersucht.

Aufgrund der abschnittsweise benutzten Ansatzfunktionen entstehen Abweichungen zwischen der FE-Näherungslösung und der wahren Lösung. Daraus ergeben sich lokale Differenzen:

$$e = (\text{wahre Lösung}) - (\text{FE-Näherung}) .$$

Solche punktwisen Definitionen sind schwer zu bestimmen und sind bei Singularitäten bedeutungslos. Skalare Maße bzw. Normen sind vorzuziehen.

Hauptsächlich für linear-elastische Probleme wurden bisher verschiedene *a posteriori*-Fehlerabschätzverfahren entwickelt. Die zur Zeit bedeutendsten Verfahren sind der Residual-Typ und der Postprozessing-Typ.

Der Residual-Typ wurde 1978 von Babuska und Rheinboldt vorgestellt [2]. Es wird eine Fehlernorm definiert, die hauptsächlich aus zwei Termen berechnet wird:

$$\| e \|^2 = C_1 \int_V r^2 dV + C_2 \int_S J^2 dS .$$

Beim 1. Term werden die inneren Restkräfte über das gesamte Volumen integriert. Die Restkräfte sind darin begründet, daß die FE-Lösung die Gleichgewichtsbedingungen nur im integralen Sinne erfüllt und nicht an jedem Punkt des Gebietes. Der 2. Teil ist bedeutender für Elemente mit niedrigen Ansatzfunktionen und wird durch die Diskontinuitäten in den ersten Ableitungen der Verschiebungen verursacht. Nur die Verschiebungen sind an den Elementrändern kontinuierlich. Dieses Verfahren ist sehr komplex und rechenzeitaufwendig und erfordert eine aufwendige Datenverwaltung.

Beim Postprozessing-Typ wird statt der wahren Lösung eine „zurückgewonnene“ höhere Ordnung der FE-Lösung verwendet:

$$\| e \|^2 = \int_V (\tilde{\sigma} - \hat{\sigma})^T (\tilde{\epsilon} - \hat{\epsilon}) dV$$

Das 1987 von Zienkiewicz und Zhu [6] vorgestellte Verfahren ist anwendbar für Elemente

jeder Ordnung. Die „zurückgewonnene“ höhere Ordnung der Lösung kann durch eine Anzahl verschiedener Projektions- oder Glättungsverfahren ermittelt werden. Eine generelle Konvergenzuntersuchung wurde in [1] angegeben. Der Hauptvorteil dieses Typs ist darin begründet, daß nicht nur globale, sondern auch lokale Fehlerabschätzungen berechenbar sind. Die enge Beziehung zwischen dem Residual- und dem Postprocessing-Typ wurde in [4] gezeigt. Der Postprocessing-Typ läßt sich relativ leicht in vorhandene Programme integrieren.

Im Gegensatz zu linear-elastischen Problemen treten bei Nichtlinearitäten, wie z. B. bei Umformproblemen zusätzliche Schwierigkeiten auf [5]. Der Einfluß der Iteration bei den nichtlinearen Beziehungen auf die Lösungsgüte wird nicht untersucht. Die Spannung wird aus zwei Näherungslösungen, dem hydrostatischen Druck und der deviatorischen Spannung berechnet. Dieses läßt sich dadurch vereinfachen, indem ein Fehlermaß nur in den deviatorischen Spannungen oder Formänderungsgeschwindigkeiten definiert wird. Ein weiterer Punkt der zu berücksichtigen ist, ist die Diskretisierung in Zeitrichtung. Das Fehlerabschätzverfahren sollte daher möglichst einfach und schnell sein. Der Postprocessing-Typ ist für Berechnungen von Umformvorgängen gut geeignet [5, 3].

Definiert man die Energienorm als Integral über die deviatorischen Spannungen mal der Formänderungsgeschwindigkeit, so entspricht dieses der Umformleistung. Hierzu läßt sich dann die Fehlernorm nach dem Postprocessing-Typ als Integration über das Produkt der lokalen Differenzen berechnen.

$$\begin{aligned} \| e \|^2 &= \int_V (\tilde{\sigma}' - \hat{\sigma}')^T (\tilde{\dot{\epsilon}} - \hat{\dot{\epsilon}}) dV \\ &= \int_V (\tilde{\sigma}' - \hat{\sigma}')^T \Phi^{-1} (\tilde{\sigma}' - \hat{\sigma}') dV \\ &= \int_V (\tilde{\dot{\epsilon}} - \hat{\dot{\epsilon}}) \Phi (\tilde{\dot{\epsilon}} - \hat{\dot{\epsilon}}) dV \end{aligned}$$

Die drei Schreibweisen lassen leicht unterschiedliche Ergebnisse erwarten, da die Stofffunktion Φ selbst von der FE-Lösung abhängt.

Es läßt sich nun ein Fehlerindikator definieren:

$$\eta = \frac{\| e \|}{\| u \|} \leq \bar{\eta} \quad \text{mit: } \| e \|^2 = \sum_M \| e \|_e^2 \quad (M = \text{Anz. Elemente})$$

$\bar{\eta}$ ist ein vorgegebener Grenzwert, mit dem sich ein Grenzwert in der Fehlernorm pro Element errechnen läßt:

$$\| \bar{e} \|_M^2 = \bar{\eta}^2 \frac{\| u \|}{M}$$

Das Verhältnis aus der Fehlernorm zur Grenzfehlernorm pro Element liefert dann einen Aufweitungs-/Verdichtungsindikator für adaptive Finite-Element-Methoden [5, 3]:

$$\xi_e = \frac{\| e \|_e}{\| \bar{e} \|_M}$$

Ist ξ_e größer als 1, so ist eine Netzverdichtung erforderlich. ξ_e kleiner 1 ermöglicht eine

Netzaufweitung.

Obwohl die Konvergenz des Postprocessing-Typs für diese Problemanwendungen (noch) nicht nachgewiesen wurde, sehen die Ergebnisse erfolgversprechend aus.

Ein axialsymmetrischer Zylinderstauchvorgang mit Haftreibung zwischen den Gesenken und dem Werkstück wurde mit einem starr-plastischen Stoffgesetz und drei unterschiedlichen Diskretisierungen (Bild 1) berechnet. Die lösungsangepaßte Elementaufteilung mit 130 Elementen liefert zu Beginn des Vorganges bezüglich der gesamten Fehlernorm gute Ergebnisse (Bild 2). Die Lösungsgradienten können mit diesem Netz während des Umformvorganges besser abgebildet werden und führen zu stärkeren Netzverzerrungen in diesen Bereichen als bei den anderen beiden Netzen. Die Fehlernorm nimmt daher über den Umformweg stärker zu.

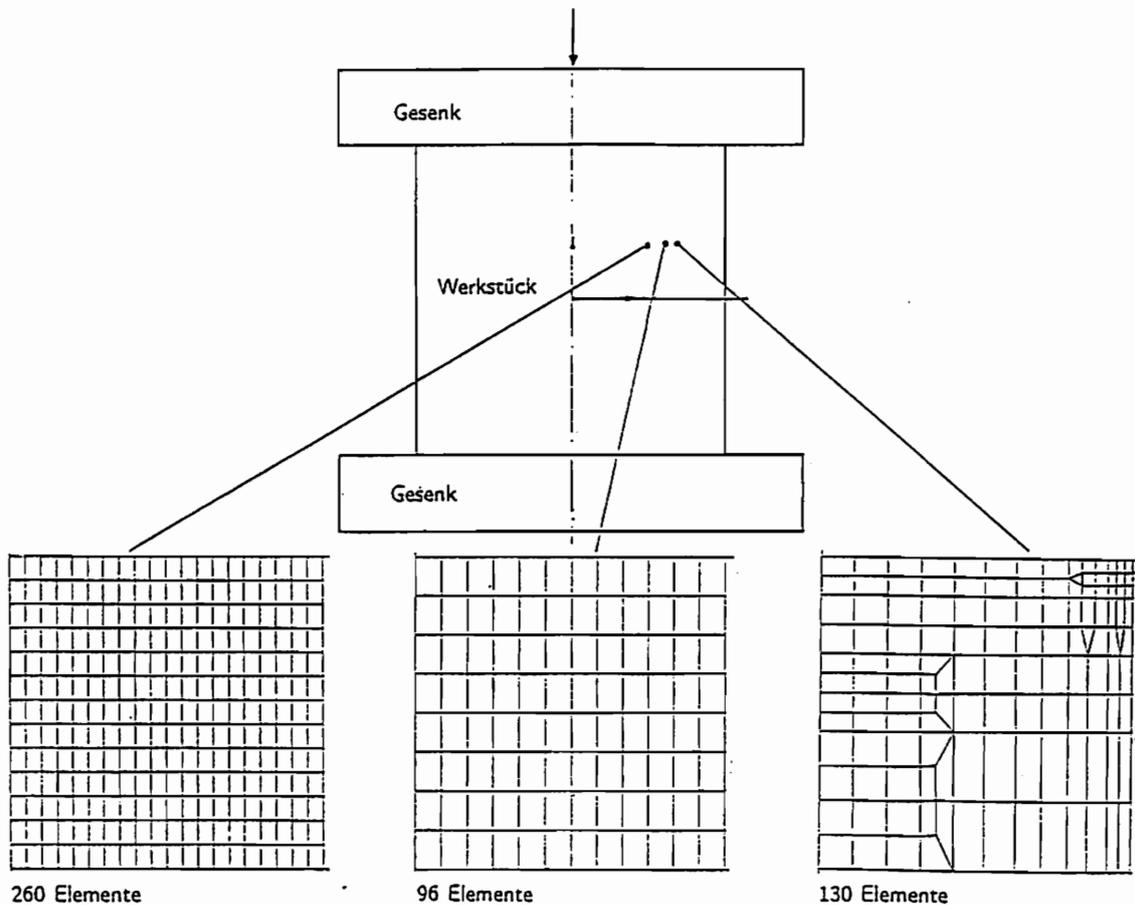


Bild 1: Diskretisierungen der Viertelsymmetrie einer axialsymmetrischen Zylinderprobe

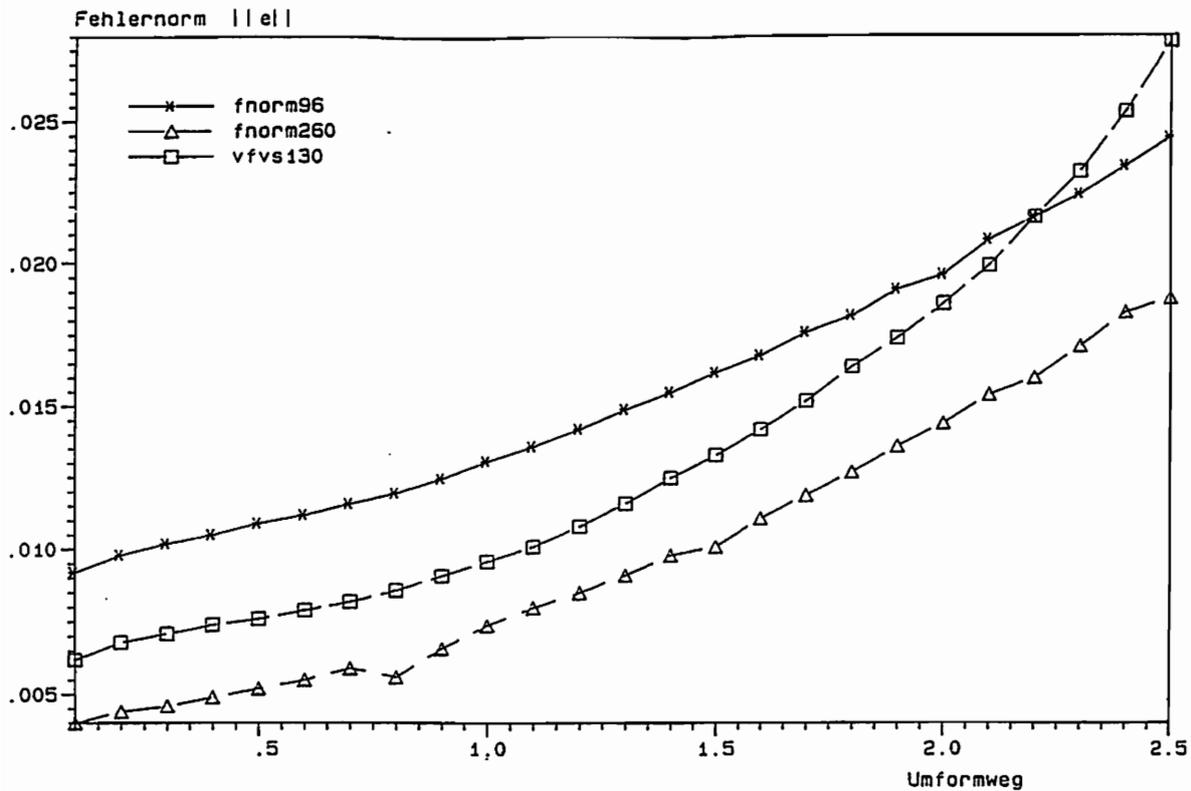


Bild 2: Gesamte Fehlernorm über den Umformweg

Literatur

- [1] Ainsworth, M.; Zhu, J.; Craig, A.W.; Zienkiewicz, O.C.: Analysis of the Zienkiewicz-Zhu A-Posteriori Error Estimator in the Finite Element Method. Int. J. Num. Meth. Engg., Vol. 28, 2161-2174, 1989.
- [2] Babuska, I.; Rheinboldt, W.C.: A *Posteriori* Error Estimates for the Finite Element Method. Int. J. Num. Meth. Engg., Vol. 12, 1597-1615, 1978.
- [3] Dung, N.L.; Rammelkamp, J.; Mahrenholtz, O.: Erarbeitung von Prozessoren zur Netzgenerierung in der Umformtechnik. VDI Forschungsheft 659/90, 1990.
- [4] Rank, E.; Zienkiewicz, O.C.: A Simple Error Estimator in the Finite Element Method. Commun. Appl. Numer. Math., Vol. 3, 243-249, 1987.
- [5] Zienkiewicz, O.C.; Liu, Y.C.; Huang, G.C.: Error Estimation and Adaptivity in Flow Formulation for Forming Problems. Int. J. Num. Meth. Engg. Vol. 25, 23-42, 1988.
- [6] Zienkiewicz, O.C.; Zhu, J.Z.: A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis. Int. J. Num. Meth. Engg. Vol. 24, 337-357, 1987.

SIMULATION DES WALZPROZESSES MIT HILFE KOMPLEXER STRÖMUNGSPOTENTIALE ZUR BESCHREIBUNG VON TEXTURINHOMOGENITÄTEN

A. Fedosseev, P. Wagner und G. Gottstein,
Institut für Metallkunde und Metallphysik, RWTH Aachen

Plastische Verformung von Metallen beim Walzen läuft hauptsächlich durch Gleitung von Versetzungen entlang bestimmter kristallographischer Richtungen auf bestimmten kristallographischen Ebenen ab. Eine inhomogene Formänderungsverteilung führt zur Entstehung von Texturinhomogenitäten im Walzgut. Für technologische Prozesse ist es besonders wichtig, die Entwicklung von Texturinhomogenitäten vorhersagen zu können. Eine genaue theoretische Texturvorsage braucht aber plastomechanisch berechnete Informationen über den Verformungszustand des Materials während des Walzens.

Ziele dieser Arbeit sind die plastomechanische Beschreibung des Walzprozesses und die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen den theoretisch berechneten Verformungsinhomogenitäten und den beim Walzen auftretenden Texturinhomogenitäten. Dieses Thema ist besonders aktuell für die schnelle Optimierung von Walzprozessen durch Vorausplanung und Simulation.

Zur theoretischen Modellierung von Walzprozessen verwendet man hauptsächlich die bekannte Finite-Elemente-Methode (FEM). Das breite Aufgabenspektrum in der Erforschung von Umformprozessen erfordert aber zum Teil spezielle Methoden. So ist für die Optimierung von Walzprozessen eine schnellere Methode wünschenswert. Eine dazu geeignete auf der Funktionentheorie beruhende Methode /1/ beschreibt den Walzprozess als ein Zusammenwirken eines homogenen Stromes (in Richtung der imaginären Achse) mit einer endlos großen Anzahl von Quellen auf der realen Achse (Abb. 1). Die Beschreibung einer solchen Überlagerung (Addition) mit Hilfe der Funktionentheorie liefert eine analytische Lösung und erfordert einen erheblich geringeren Rechenaufwand verglichen mit der FEM. In der

Strömungslehre von Flüssigkeiten und Gasen wurde diese Methode schon erfolgreich angewendet /2/.

Das komplexe Strömungspotential (KSP) für eine solchen Fluß ist:

$$w = \frac{\Delta\psi}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi z}{2H} - iV_{\infty} z, \quad (1)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= 2HV_0 C_1; & C_1 &= (D_0 - D_1)/2D_1; & z &= x_1 + ix_2; \\ V_{\infty} &= V_0 C_2; & C_2 &= (D_0 + D_1)/2D_1; \end{aligned}$$

H - Maßstabsfaktor; V_0 - Walzengeschwindigkeit; x_i - komplexe Koordinaten; D_0 und D_1 - Walzgutdicke vor und nach dem Walzen. Der Parameter H hängt über eine Transzendentengleichung von Fließ- und Walzenparametern ab:

$$R = H C_1 K_r^{3/2} \sin^2 \frac{\pi r}{2H} / (\pi C_2), \quad (2)$$

wobei

$$r = \frac{D_0 D_1}{D_0 + D_1}, \quad K_r = 1 + \frac{C_2^2}{C_1^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi r}{2H}.$$

Die Fließlinie wird beschrieben durch:

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{2V_0 H C_1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x_1}{2H} \operatorname{th} \frac{\pi x_2}{2H} \right) - V_0 C_2 x_1. \quad (3)$$

Man kann mit Hilfe der Bedingungen von CAUCHY-RIEMANN die Fließgeschwindigkeit ermitteln:

$$V_1 = V_0 C_1 \frac{\sin \frac{\pi x_1}{H}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x_2}{H} - \cos \frac{\pi x_1}{H}}; \quad V_2 = V_0 \left(C_1 \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi x_2}{H}}{\operatorname{ch} \frac{\pi x_2}{H} - \cos \frac{\pi x_1}{H}} + C_2 \right). \quad (4)$$

Hieraus ergibt sich der Verformungsgeschwindigkeitstensor:

$$\dot{\epsilon}_{11} = -\dot{\epsilon}_{22} = -V_0 \frac{\pi C_1}{H} \frac{\cos \frac{\pi x_1}{H} \operatorname{ch} \frac{\pi x_2}{H} - 1}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi x_2}{H} - \cos \frac{\pi x_1}{H} \right)^2}; \quad \dot{\epsilon}_{12} = V_0 \frac{\pi C_1}{H} \frac{\sin \frac{\pi x_1}{H} \operatorname{sh} \frac{\pi x_2}{H}}{\left(\operatorname{ch} \frac{\pi x_2}{H} - \cos \frac{\pi x_1}{H} \right)^2}. \quad (5)$$

Durch Integration entlang der Stromlinie und unter Berücksichtigung der Verfestigung ermittelt man den Formänderungs- und Spannungszustand im Walzspalt.

Eine realistische Beschreibung des Materialsflusses beim Walzen hängt i.a. von den Reibungsbedingungen zwischen Walze und Walzgut ab. Diese Bedingungen kann man berücksichtigen, indem man dem laminaren Fluß Störungen überlagert. Hierzu

betrachtet man im Walzspalt zusätzlich den Fluß eines Turbulenzsystems. Anzahl, Koordinaten und Leistung der Turbulenzen sind Variationsparameter, die den Randbedingungen des Walzens (Walzspaltgeometrie, Reibung u.s.w.) entsprechen.

Anhand einer schon berechneten Variante eines Walzprozesses wurde die KSP-Simulation mit experimentellen Ergebnissen und mit Ergebnissen aus FEM-Simulationen (Larstran-Shape und Mori /3/) verglichen. Die Walzbedingungen von Kupfer und der Formänderungszustand der KSP-Simulation sind in Abb. 2 dargestellt. Ein qualitativer und quantitativer Vergleich der entsprechenden Verteilungen der Vergleichsparameter und Linien gleicher Vor- bzw. Nacheilung zeigt ähnliche Ergebnisse (Abb. 3-4). Der Walzprozeß kann also mit Hilfe der KSP-Methode angemessen simuliert werden; die Simulation kann allerdings noch weiter verbessert werden.

Die vorgestellte Methode erlaubt es, die Verteilung des Dehnungstensors (Abb. 5), insbesondere die Größe der Schubkomponente zu bestimmen. Diese Schubkomponenten führen zu veränderten Texturen. Die Textursimulation nach der Taylor-Theorie /4/ ermittelt aus allen möglichen Kombinationen von 5 Gleitsystemen (GS) die aktiven GS und die entsprechenden Ableitungen sowie die daraus resultierenden Orientierungsänderungen. Die Taylor-Theorie setzt allerdings einen ebenen Dehnungszustand voraus. Mit Hilfe der KSP-Simulation ist es nun möglich, die tatsächliche Formänderung für eine verbesserte Textursimulation zu verwenden.

Literaturverzeichnis

- /1/ Кучеряев Б.В., Папченко В.И., Федосеев А.И. Влияние режимов обжатий алюминия марки АД1 на неоднородность деформации и текстуры прокатки, Технология легких сплавов, М, 1985, №3, с. 5-9.
- /2/ Lawrentjew M.A., Shabat B.V. Metod teorii funkzi kompleksnogo peremennogo, Isd.4-e, M., Nauka, 1973, 736s.Sowjet.
- /3/ Kopp R., Dohmen P.-M. Entwicklung und Erprobung einer abgesicherten FEM-Analyse des Walzvorgangs; Abschlußbericht zum VFWH-Forschungsvorhaben AW 110, Aachen, 1989.
- /4/ R.Fortunier, J.Hirsch in "Theoretical Methods of Texture Analysis", ed. H.J.Bunge (1987), p.231.

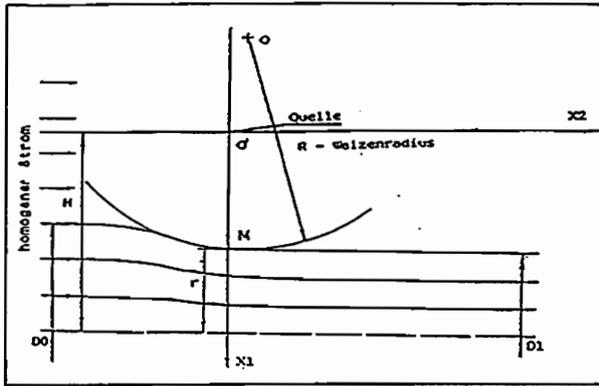


Abb. 1: Superposition eines homogenen Stromes und einer Quellenmenge

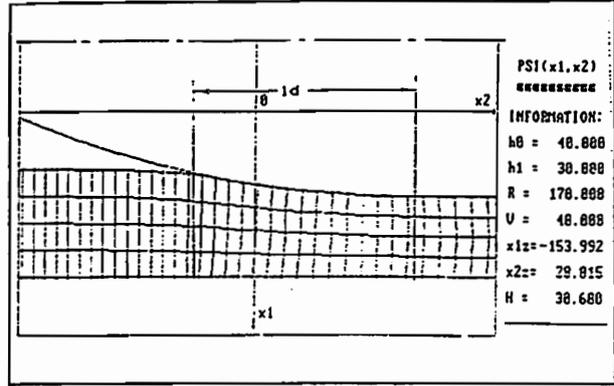


Abb. 2: Formänderungszustand der 2D-Simulation des Walzens

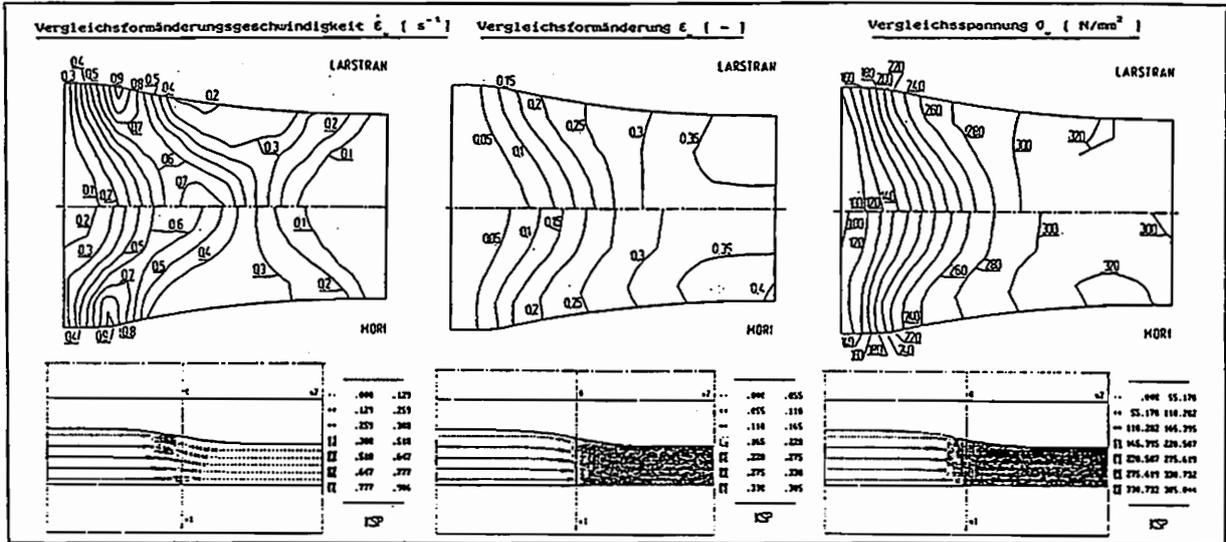


Abb. 3: Vergleichsparameter (v. Tresca)

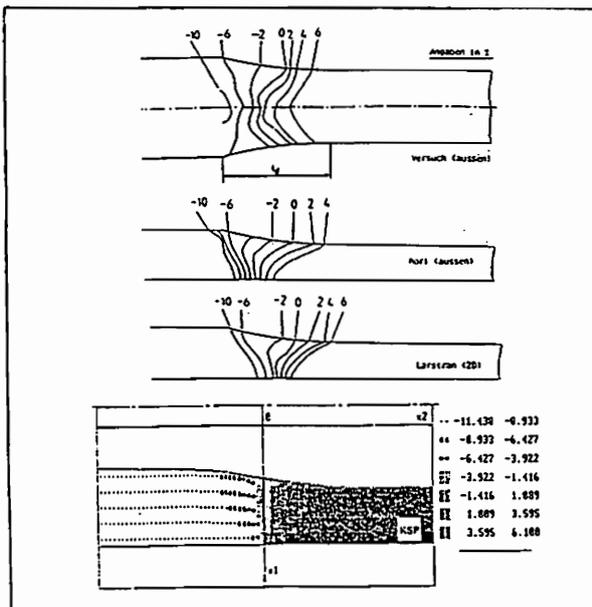


Abb. 4: Linien gleicher Vor- bzw. Nacheilung

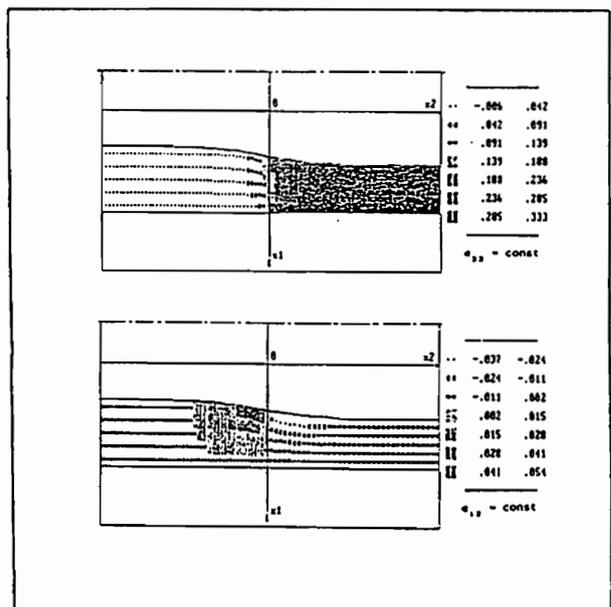


Abb. 5: Komponenten e_{22} , e_{12} des Dehnungstensors

Irreduzible Invariantensysteme eines vierstufigen Tensors A_{ijkl} im zwei- und dreidimensionalen EUKLIDischen Raum

W.Helisch, J.Betten

Mathematische Modelle in der Werkstoffkunde, RWTHAachen

Tensoren vierter Stufe spielen in der Kontinuumsmechanik eine Rolle bei der Berücksichtigung der Anisotropie in Werkstoffen. Sie treten als Argumente etwa in skalaren Tensorfunktionen auf, wie z.B. in der Elastizitätstheorie (elastisches Potential, elastische Formänderungsenergie), in der Plastizitätstheorie (plastisches Potential, Fließbedingung), in der Festigkeitslehre (Versagenskriterien bei mehraxialer Beanspruchung anisotroper Werkstoffe [1]) und in der Kriechmechanik (Kriechpotential des sekundären Kriechstadiums [2]), um nur einige Beispiele zu nennen.

Von mathematischem Interesse ist die Kenntnis von Integritätsbasen für Tensoren, da mit ihrer Hilfe Tensorfunktionen vereinfacht und dennoch vollständig dargestellt werden können.

Nach SCHUR [3] ist eine Integritätsbasis folgendermaßen definiert:

" Gibt es in dem Invariantensystem einer Gruppe ein endliches Teilsystem, derart, daß sich jede Invariante als ganze rationale Funktion dieses speziellen darstellen läßt, so heißt jenes Teilsystem eine *Integritätsbasis* des gesamten Invariantensystems ".

Minimal wird eine Integritätsbasis genannt, wenn alle Elemente der Integritätsbasis unverzichtbar (irreduzibel) sind.

Integritätsbasen sind bisher nur für Tensoren bis einschließlich zweiter Stufe bekannt. HILBERTs Theorem [4], wonach

für ein endliches System von Tensoren (nicht notwendig derselben Stufe) eine Integritätsbasis existiert, die aus einer begrenzten Zahl von Invarianten besteht,

rechtfertigt die Suche nach Integritätsbasen auch für Tensoren höherer Stufe. Im folgenden werden einige Ergebnisse über Integritätsbasen von Tensoren vierter Stufe im zwei- und dreidimensionalen Raum vorgestellt. Hierbei möge sich der Begriff der Invarianz auf die Gruppe der orthogonalen Transformationen $\underline{a}^T = \underline{a}^{-1}$ beziehen.

Man kann leicht zeigen, daß polynomiale Invarianten von Tensoren gerader Stufenzahl durch Kombinationen in Überschiebungen mit dem Einstensor δ darstellbar sind. Beispiele hierfür sind etwa Größen der Form A_{ijjj} (Grad 1), $A_{ijkl}A_{ijkl}$ (Grad 2), $A_{mnpq}A_{pqrs}A_{rsmn}$ (Grad 3), wobei die EINSTEINSche Summationsvereinbarung verwendet wird.

Mit Hilfe eines Computerprogramms kann die Anzahl $q(v)$ solcher voneinander verschiedener Größen bei vorgewähltem Grad v der Invarianten ermittelt werden. Unter der Voraussetzung der Symmetrie des Tensors \underline{A} :

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij} .$$

lauten diese Zahlen (unabhängig von der Dimension des Raumes):

Grad ν	1	2	3	4	5
Anzahl $q(\nu)$	2	5	19	88	553

Grade $\nu \geq 6$ können aus Kapazitätsgründen bisher nicht behandelt werden. Die Zahlen $q(\nu)$ beinhalten noch redundante Elemente, die über die Beziehung

$$D_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_r} := \epsilon_{i_1 \dots i_r} \epsilon_{j_1 \dots j_r} = \begin{vmatrix} \delta_{i_1 j_1} & \dots & \delta_{i_1 j_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{i_r j_1} & \dots & \delta_{i_r j_r} \end{vmatrix} \equiv 0_{i_1 \dots j_r} \quad \text{für } r \geq n+1$$

im n -dim. Raum eliminiert werden können. (Diese Beziehung beruht auf dem identischen Verschwinden der Permutationstensoren ϵ höherer Stufe als n .) So ergibt z.B. im 2-dim. Raum die Überschiebung $D_{ijkpqr} A_{nnir} A_{pjrk} = 0$ eine Beziehung zwischen Invarianten zweiten Grades, durch die eine der Größen durch andere ausgedrückt werden kann.

Werden alle möglichen Überschiebungen dieser Art aufgestellt und ausgewertet, so erhält man die Zahlen $r_n(\nu)$ der irreduziblen Elemente, die ebenfalls mit Hilfe eines Computerprogramms ermittelt werden können:

Grad ν	1	2	3	4	5
$r_2(\nu)$ (2-dim.)	2	2	1	0	0
$r_3(\nu)$ (3-dim.)	2	4	10	16	32

Auch hier wurden aus Kapazitätsgründen Grade $\nu \geq 6$ nicht behandelt. Die Ergebnisse aus diesen kombinatorischen Ansätzen legen also die Vermutung nahe, daß eine Integritätsbasis

- im 2-dim. Fall aus 5 Elementen und
- im 3-dim. Fall aus mindestens 64 Elementen

besteht. Die Vermutung, daß im 3-dim. Fall alle Invarianten höheren als sechsten Grades redundant sind, konnte jedoch noch nicht überprüft werden.

Eine andere, elegantere Möglichkeit, zu irreduziblen Invarianten eines Tensors zu gelangen, besteht darin, die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $\det(\underline{I} - \underline{A})$ mit dem isotropen Tensor \underline{I} entsprechender Stufenzahl zu bestimmen. Für einen Tensor zweiter Stufe lauten wegen $I_{ij} = \lambda \delta_{ij}$ die charakteristischen Polynome folgendermaßen:

$$\det(\lambda \delta_{ij} - A_{ij}) = \lambda^2 - J_1 \lambda - J_2 \quad (2\text{-dim.})$$

mit den Invarianten $J_1 \equiv A_{ii}$, $J_2 \equiv -\det(A_{ij})$ bzw.

$$\det(\lambda \delta_{ij} - A_{ij}) = \lambda^3 - J_1 \lambda^2 - J_2 \lambda - J_3 \quad (3\text{-dim.})$$

mit den Invarianten $J_1 \equiv A_{ii}$, $J_2 \equiv (A_{ij} A_{ji} - A_{ii} A_{jj})/2$, $J_3 \equiv \det(A_{ij})$

als Koeffizienten.

Eine analoge Formulierung für den symmetrischen Tensor vierter Stufe [5] führt mit dem isotropen Tensor $I_{ijkl} := \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$ und den Umindizierungen

$$i, j = 1,1; 2,2; 1,2 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad \text{im 2-dim. Raum bzw.}$$

$$i, j = 1,1; 2,2; 3,3; 1,2; 2,3; 3,1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad \text{im 3-dim. Raum}$$

über die Matrixschemata

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & 2A_{1112} \\ A_{2211} & A_{2222} & 2A_{2212} \\ A_{1211} & A_{1222} & 2A_{1212} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.}$$

$$A_{\alpha\beta} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & 2A_{1112} & 2A_{1123} & 2A_{1131} \\ & A_{2222} & A_{2233} & 2A_{2212} & 2A_{2223} & 2A_{2231} \\ \text{symmetrisch} & & A_{3333} & 2A_{3312} & 2A_{3323} & 2A_{3331} \\ \hline A_{1211} & A_{1222} & A_{1233} & 2A_{1212} & 2A_{1223} & 2A_{1231} \\ A_{2311} & A_{2322} & A_{2333} & & 2A_{2323} & 2A_{2331} \\ A_{3111} & A_{3122} & A_{3133} & \text{symmetrisch} & & 2A_{3131} \end{array} \right)$$

auf die charakteristischen Polynome

$$P(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} A_{1111} - (\lambda + 2\mu) & A_{1122} - \lambda & 2A_{1112} \\ A_{2211} - \lambda & A_{2222} - (\lambda + 2\mu) & 2A_{2212} \\ A_{1211} & A_{1222} & 2A_{1212} - 2\mu \end{vmatrix}$$

$$= 8\mu^3 - 4J_1(A_{\alpha\beta})\mu^2 - 2J_2(A_{\alpha\beta})\mu - J_3(A_{\alpha\beta}) - 2K_1\lambda - 2K_2\lambda\mu + 8\lambda\mu^2$$

mit den 5 irreduziblen Invarianten

$$J_1(A_{\alpha\beta}) \equiv \text{tr}(A_{\alpha\beta}) = A_{1111} + A_{2222} + 2A_{1212} .$$

$$J_2(A_{\alpha\beta}) \equiv \left[\text{tr}(A_{\alpha\beta}^{(2)}) - (\text{tr}(A_{\alpha\beta}))^2 \right] / 2 .$$

$$J_3(A_{\alpha\beta}) \equiv \det(A_{\alpha\beta}) .$$

$$K_1 \equiv (A_{1112} - A_{2212})^2 - A_{1212} (A_{1111} + A_{2222} - 2A_{1122}) .$$

$$K_2 \equiv J_1(A_{\alpha\beta}) + 2(A_{1212} - A_{1122})$$

als Koeffizienten im 2-dim. Fall bzw.

$$P(\lambda, \mu) := \begin{vmatrix} A_I - (2\mu + \lambda) & B_I - \lambda & B_{II} - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ B_I - \lambda & A_{II} - (2\mu + \lambda) & B_{III} - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ B_{II} - \lambda & B_{III} - \lambda & A_{III} - (2\mu + \lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{IV} - 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_V - 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{VI} - 2\mu \end{vmatrix}$$

mit den 11 irreduziblen Invarianten

$$I_1 \equiv K_1 + M_1 .$$

$$I_3 \equiv D + M_3 + K_1 M_2 + M_1 (K_2 - L_1^2 + 2L_2) .$$

$$I_5 \equiv M_2 D + M_3 (K_2 - L_1^2 + 2L_2) .$$

$$I_2 \equiv K_2 + M_2 + K_1 M_1 - L_1^2 + 2L_2 .$$

$$I_4 \equiv M_1 D + K_1 M_3 + M_2 (K_2 - L_1^2 + 2L_2) .$$

$$I_6 \equiv M_3 (L_1^2 - 4L_2 - K_2 + 2N) .$$

$$\begin{aligned} I_7 &= 4M_3(K_1 - L_1) - 2M_2(L_1^2 - 4L_2 - K_2 + 2N), \\ I_8 &= 4M_1(L_1^2 - 4L_2 - K_2 + 2N) - 8M_2(K_1 - L_1) - 12M_3, \\ I_9 &= 8(2M_1(K_1 - L_1) - L_1^2 + 4L_2 + K_2 - 2N + 3M_2), \\ I_{10} &= -16(2(K_1 - L_1) + 3M_1), \quad I_{11} = M_3 D \end{aligned}$$

als Koeffizienten im 3-dim. Fall.

Im letzteren Fall wurden folgende Abkürzungen benutzt:

$$\begin{aligned} K_1 &= A_I + A_{II} + A_{III}, & M_1 &= A_{IV} + A_V + A_{VI}, \\ K_2 &= A_I A_{II} + A_{II} A_{III} + A_{III} A_I, & M_2 &= A_{IV} A_V + A_V A_{VI} + A_{VI} A_{IV}, \\ K_3 &= A_I A_{II} A_{III}, & M_3 &= A_{IV} A_V A_{VI}, \\ L_1 &= B_I + B_{II} + B_{III}, & N &= A_I B_{III} + A_{II} B_{II} + A_{III} B_I, \\ L_2 &= B_I B_{II} + B_{II} B_{III} + B_{III} B_I, & D &= K_3 + 2L_3 - (A_I B_{III}^2 + A_{II} B_{II}^2 + A_{III} B_I^2), \\ L_3 &= B_I B_{II} B_{III}, \end{aligned}$$

in denen man die elementaren symmetrischen Funktionen erkennt.

Darüber hinaus wurde im 3-dim. Fall zur Vereinfachung der Darstellung der Invarianten vom orthotropen Fall mit

$A_{1112} = A_{1123} = A_{1131} = A_{2212} = A_{2223} = A_{2231} = A_{3312} = A_{3323} = A_{3331} = 0$ ausgegangen. Dies entspricht beim Tensor zweiter Stufe dem Hauptachsenfall $A_{ij} = \text{diag}\{A_I, A_{II}, A_{III}\}$ mit dem vollständigen Invariantensystem

$$J_1 = A_I + A_{II} + A_{III}, \quad J_2 = -(A_{II} A_{III} + A_{III} A_I + A_I A_{II}), \quad J_3 = A_I A_{II} A_{III}.$$

Es sei bemerkt, daß der orthotrope Sonderfall auch beim Tensor vierter Stufe die Anzahl der Koeffizienten im charakteristischen Polynom gegenüber dem allgemeinen Fall mit vollbesetzter Matrix nicht reduziert. Jedoch muß erwähnt werden, daß dieses Invariantensystem im Falle des Tensors vierter Stufe nicht vollständig ist [6].

Literatur:

- [1] BETTEN, J.: Applications of Tensor Functions to the Formulation of Yield Criteria for Anisotropic Materials, Intern. J. of Plasticity 4 (1988), S.29-46.
- [2] BETTEN, J.: Representation of Constitutive Equations in Creep Mechanics of Isotropic and Anisotropic Materials, in: PONTER, A.R.S., HAYHURST, D.R. (eds.), "Creep in Structures 1980". Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag 1981, S. 179-201.
- [3] SCHUR, I.: Vorlesungen über Invariantentheorie, bearbeitet und herausgegeben von H. GRUNSKY, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 143, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York 1968.
- [4] SPENCER, A.J.M.: Theory of Invariants, in: ERINGEN, A.C. (Hrsg.), Continuum Physics, Vol. I, Academic Press, New York / London 1971, S.239-353.
- [5] BETTEN, J.: Tensorrechnung für Ingenieure, Teubner-Verlag, Stuttgart, 1987.
- [6] BETTEN, J. und HELISCH, W.: Irreduzible Invarianten eines Tensors vierter Stufe, Z. angew. Math. Mech. (ZAMM) 71 (1991), in Vorbereitung.

ÜBER DIE WAHL DER VARIABLEN UND DAS TORSIONSPROBLEM BEI INKOMPRESSIBLEM MATERIALVERHALTEN

Ch. Tsakmakis, Institut für Mechanik, Technische Hochschule Darmstadt

1. Einleitung

Zur Darstellung von Materialeigenschaften bei großen Deformationen gibt es eine Fülle von Möglichkeiten bei der Wahl von Spannungs- und Verzerrungsgrößen. Es ist daher wünschenswert, eine systematische Methode zur Verfügung zu haben, die es ermöglicht, **unabhängig von Materialgleichungen** Spannungen eindeutig zu Verzerrungen zuzuordnen. Eine solche Zuordnung ist auch deswegen erwünscht weil sie die physikalische Theorie mit zusätzlicher Struktur bereichert.

Die Hill'sche Theorie über konjugierte Variablen liefert einen derartigen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen: Spannungen und Verzerrungen heißen zueinander konjugiert wenn sie im Sinne der Spannungsleistung verknüpft sind. Man kann zeigen (auf den Beweis wird hier verzichtet, s. aber dazu [1]), daß in der Menge aller Lagrange'schen konjugierten Paare aus Spannungen und Verzerrungen zwei Paare eine ausgezeichnete Rolle spielen. Die zueinander gehörigen Größen werden als dual bezeichnet. Bei Transformationen der Bezugskonfiguration mit Hilfe von regulären Abbildungen entsteht aus jedem der beiden Lagrange'schen Paare dualer Variablen, eine Menge aus Paaren räumlicher dualer Variablen. Die beiden Mengen bilden dann Äquivalenzklassen aus dualen Spannungen und Verzerrungen die in [2] als Familie 1 und Familie 2 bezeichnet wurden (in [2] sind einige ausführliche Betrachtungen über die beiden Familien von dualen Variablen zu finden). Im folgenden werden verschiedene Typen von Materialgleichungen **in ihrer einfachsten Form** anhand von dualen Variablen relativ zur momentanen Konfiguration formuliert und am Beispiel einer Torsions-Beanspruchung diskutiert. Dabei ist der Charakter der Effekte zweiter Ordnung von Interesse.

2. Torsionsbeanspruchung bei inkompressiblen Stoffgesetzen

Es bedeutet \mathbf{T} den Cauchy'schen Spannungstensor, \mathbf{T}_E die Extraspannung ($\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \mathbf{T}_E$), \mathbf{L} den räumlichen Geschwindigkeitsgradienten, \mathbf{D} den symmetrischen Anteil von \mathbf{L} , \mathbf{A} den Almansi'schen Verzerrungstensor, \mathbf{Q} den Finger'schen Verzerrungstensor, \mathbf{B} den linken Cauchy-Green-Tensor (s. auch [2]). Wegen Inkompressibilität gilt $\text{Sp}\mathbf{D} = 0$. Bei der Bildung von objektiven Tensorgeschwindigkeiten für einen Tensor zweiter Stufe \mathbf{S} gelten die Definitionen:

$$\overset{\vee}{\mathbf{S}} = \mathbf{S} - \mathbf{L}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}^T, \quad \overset{\Delta}{\mathbf{S}} = \mathbf{S} + \mathbf{L}^T\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{L}$$

2.1 Materialgleichungen vom Fluidtyp

Die folgenden Gleichungen sind die einfachsten Formen einer Materialgleichung für eine viskoelastische Flüssigkeit (λ, μ : Materialparameter):

$$\text{Familie 1 : } \overset{\vee}{\mathbf{T}}_E + \lambda\mathbf{T}_E = 2\mu\mathbf{D} \qquad \text{Familie 2 : } \overset{\Delta}{\mathbf{T}}_E + \lambda\mathbf{T}_E = 2\mu\mathbf{D}$$

Diese Gleichungen sind Sonderfälle der sog. rheologischen Zustandsgleichung von Oldroyd, bekannt als Fluid von Typ A und B (s. dazu [3]). Bei Fluiden spielt die Couette-Strömung eine ähnliche Rolle wie der Torsionsversuch eines vollen Kreiszyllinders bei Festkörpern. Für diese Strömung erhält man folgende Normalspannungs-Verteilung über den Radius r in physikalischen Komponenten:

$$\text{Familie 1 : } T^{<zz>} = -\rho \left[\frac{a^2}{2} r^2 - 2ab(\ln r) - \frac{b^2}{2r^2} \right] - \frac{2\mu\lambda b^2}{r^4}$$

$$\text{Familie 2 : } T^{<zz>} = -\rho \left[\frac{a^2}{2} r^2 - 2ab(\ln r) - \frac{b^2}{2r^2} \right] + \frac{6\mu\lambda b^2}{r^4}$$

Hier sind a und b Parameter, die von der Geometrie und den Randbedingungen abhängen. Man erkennt an diesen Beziehungen, daß im Falle daß der erste Summand betragsmäßig kleiner als der zweite ist, die beiden Normalspannungs-Verteilungen einen Weissenberg-Effekt mit gegensinnigem Charakter beschreiben.

2.2 Hyperelastische Materialien

Bei hyperelastischen Körpern wird die Extraspannung T_E von einem Potential w abgeleitet. Dies bedeutet, daß Hyperelastizität eine finite Theorie ist und deswegen ist nicht zu erwarten, daß die Effekte zweiter Ordnung von der Darstellung des Potentials w innerhalb jeder Familie abhängen. In der Tat, für das Mooney-Rivlin-Material gilt

$$w = C_1(I_B - 3) + C_2(II_B - 3) = -(4C_1 + 2C_2)I_A + 4C_1II_A = -(2C_1 + 4C_2)I_\alpha + 4C_2II_\alpha.$$

Hier sind C_1 und C_2 positive Materialkonstanten und $I_{(\)}$ bzw. $II_{(\)}$ die erste bzw. zweite Invariante des zugehörigen Tensors $(\)$. Man sieht, daß die Form der Materialgleichung erhalten bleibt beim Umrechnen zwischen den beiden Familien. Wir bezeichnen im folgenden als **Torsionsversuch mit freiem Ende** eine Torsionsbeanspruchung bei der die axiale Normalspannung im Mittel verschwindet, so daß ebene Querschnitte eben bleiben. In diesem Falle erfährt die Torsionsprobe immer eine Verlängerung mit zunehmender Drillung (positiver Poynting-Effekt). Die zugehörige Form der axialen Normalspannungs-Verteilung über den Radius hängt von der Wahl der Materialparameter ab: Je nachdem ob das Verhältnis C_1/C_2 kleiner oder größer 0,5 ist, hat der Kurvenverlauf einen konvexen oder konkaven Charakter (für Einzelheiten s. [1]).

2.3 Materialgleichungen vom inkrementellen Typ für Festkörper

Es reicht hier aus nur hypoelastische Stoffgleichungen zu diskutieren, denn man kann zeigen (s. dazu [1]), daß für andere Klassen von inkrementellen Materialgleichungen, insbesondere für plastische Körper, die

Verhältnisse vollkommen analog sind. Die einfachsten hypoelastischen Stoffgleichungen sind diejenigen eines hypoelastischen Körpers vom Grade "0", hier dargestellt im Rahmen jeder Familie (μ : Materialkonstante):

$$\text{Familie 1 : } \overset{\vee}{T}_E = 2\mu D$$

$$\text{Familie 2 : } \overset{\Delta}{T}_E = 2\mu D$$

Bei einer Torsionsbeanspruchung mit freiem Ende ergibt sich auch hier eine Verlängerung der Torsionsprobe in beiden Fällen. Der Verlauf aber der Normalspannung in axialer Richtung über den Radius hängt von der gewählten Familie zur Formulierung des Modells ab: Eine Formulierung im Rahmen der ersten bzw. zweiten Familie liefert einen konvexen bzw. konkaven Kurvenverlauf.

3. Abschließende Bemerkungen

Es wurden einfachste Formen von Materialgleichungen untersucht, formuliert mit dualen Variablen aus je zwei verschiedene Familien. Die Beispiele zeigen, daß bei finiten Materialmodellen die Effekte zweiter Ordnung nur durch die Wahl von Materialparametern bestimmt werden und unabhängig von der gewählten Familie sind. Bei inkrementell formulierten Materialmodellen hängen die Effekte zweiter Ordnung von der gewählten Familie ab und sind unabhängig von der Wahl der Parameter.

Literaturverzeichnis

- [1] Ch. Tsakmakis : "Methoden zur Darstellung von elastisch-inelastischen Materialeigenschaften", wird veröffentlicht
- [2] P. Haupt and Ch. Tsakmakis : "On the Application of Dual Variables in Continuum Mechanics", Continuum Mech. Thermodyn. 1(1989), S. 165-196
- [3] J.G. Oldroyd : "On the Formulation of Rheological Equations of State", Proc. Roy. Soc. London 200A(1950), S. 523-541

ÜBER DIE BERÜCKSICHTIGUNG MIKROMECHANISCHER VORGÄNGE BEI DER FORMULIERUNG EINES MAKROSKOPISCHEN STOFFGESETZES FÜR POLYKRISTALLINES EIS

B. Bischoff-Beiermann, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum

Monokristallines Eis besitzt eine für hexagonale Kristallstrukturen typische ausgeprägte Anisotropie der Materialeigenschaften [5]. Die basale Gleitung ist der Hauptverformungsmechanismus. Die Gleitgeschwindigkeit auf den nichtbasalen Kristallebenen, z.B. den prismatischen, ist bei vergleichbarer Belastung um mehr als vier Zehnerpotenzen geringer. Die im Experiment zu beobachtende Zunahme der basalen Versetzungsdichte äußert sich makroskopisch als eine Entfestigung des Einkristalls.

Polykristallines Eis verfestigt im Bereich des primären Kriechens. Dieser Unterschied zum Einkristall wird durch den Aufbau von Eigenspannungen hervorgerufen. Die "gut"-orientierten Körner erfahren größere inelastische Deformationen als ihre Umgebung, was in der Folge zu einer Spannungsreduktion führt. An den "schlecht"-orientierten Körnern müssen sich die Spannungen entsprechend erhöhen. Experimentell lassen sich die Gesamtdehnungen additiv aufspalten in einen spontanelastischen Anteil ε^e , einen verzögertelastischen Anteil ε^v und einen inelastischen Anteil ε^i . Wird am Ende eines Versuches die Probe entlastet, dann gehen die Dehnungen spontan um ε^e und im Laufe der Zeit noch um ε^v zurück. ε^v kann dabei mehr als 30 mal größer sein als ε^e . Das bedeutet, daß auch die Eigenspannungen um etwa diesen Faktor größer sein können als die äußeren Spannungen. Der für große Zeiten bzw. Spannungen zu beobachtende tertiäre Kriechbereich wird durch Rekristallisation bzw. Schädigungsmechanismen erklärt.

Diese experimentellen Befunde motivieren den Versuch, in einem makroskopischen Stoffgesetz für polykristallines Eis die Vorgänge auf der Mikroebene, insbesondere die Eigenspannungsentwicklung, zu berücksichtigen.

Die inelastischen **Verzerrungsgeschwindigkeiten des Monokristalls** \underline{d}^i werden in die Anteile \underline{d}^b und \underline{d}^p aufgespalten, die den Verformungsmechanismen der basalen und prismatischen Gleitung entsprechen. $\underline{d}^i = \underline{d}^b + \underline{d}^p$. Von den 3 Gleitsystemen der basalen Gleitung sind 2 linear unabhängig [1]. Nimmt man an, daß die Versetzungsdichten der 3 Gleitsysteme gleich sind und daß ein linearer Zusammenhang zwischen der resultierenden Schubspannung τ^b und der Geschwindigkeit der Versetzungen besteht, dann kann das monokristalline

Stoffgesetz in folgender Form geschrieben werden :

$$\underline{d}^b = \frac{\dot{\gamma}^b(\tau^b)}{2\tau^b} \cdot \underline{I}^b : \underline{\sigma} \quad , \quad \dot{\gamma}^b = b^b \cdot \lambda^b \cdot k \cdot \tau^b \quad , \quad 2 \cdot \tau^{b2} = \underline{\sigma} : \underline{I}^b : \underline{\sigma}$$

$$(\underline{I}^b)_{ij}{}^{kl} = \frac{1}{2} (n_i n^k \delta_j^l + n_j n^l \delta_i^k + n_j n^k \delta_i^l + n_i n^l \delta_j^k) - 2 n_i n_j n^k n^l \quad .$$

Es ist \mathbf{n} der Einheitsnormalenvektor der basalen Ebene, der mit der c-Achse des Kristalls zusammenfällt, $\dot{\gamma}^b$ bzw. τ^b die äquivalente Gleitgeschwindigkeit bzw. Schubspannung des einfachen Scherversuchs, $k \cdot \tau^b$ bzw. b^b die Geschwindigkeit bzw. der Burgersvektor der basalen Versetzungen und $\underline{\sigma}$ der Spannungstensor. Für die äquivalente basale Versetzungsdichte λ^b wird folgende Entwicklungsgleichung angenommen:

$$\dot{\lambda}^b = \left(\frac{1}{\pi \cdot G \cdot b^b} \int_0^{\tau^b} \tau \cdot \mu(\tau) d\tau - \lambda^b \right) \cdot \frac{2 \cdot k \cdot \tau^b}{d_{eq}} \quad .$$

Die Struktur der Gleichung ergibt sich aus der Annahme einer Frank-Read-Quelle. d_{eq} ist der äquivalente Quellenabstand und G der Schubmodul. $\mu(\tau) \cdot d\tau$ ist die Anzahl der Quellen, die zwischen τ und $\tau+d\tau$ aktiviert werden.

Für die prismatische Gleitung gelten entsprechende Gleichungen, wobei \underline{I}^P dann folgende Form hat:

$$(\underline{I}^P)_{ij}{}^{kl} = \frac{1}{2} \left\{ - (n_i n^k \delta_j^l + n_j n^l \delta_i^k + n_j n^k \delta_i^l + n_i n^l \delta_j^k) + n_i n_j n^k n^l - g_{ij} g^{kl} + (\delta_j^l \delta_i^k + \delta_i^l \delta_j^k) + (n_i n_j g^{kl} + g_{ij} n^k n^l) \right\}$$

δ_i^k , g^{kl} bzw. g_{ij} sind die gemischt-, kontra- bzw. kovarianten Komponenten (Metrik) des Einheitstensors 2-ter Stufe $\underline{1}$.

Die Tensoren \underline{I}^b bzw. \underline{I}^P projizieren den Spannungstensor $\underline{\sigma}$ in den zweidimensionalen Unterraum der basalen bzw. prismatischen Gleitung. Sie spannen zusammen einen vierdimensionalen Unterraum des Deviatorraumes auf. Die fehlende 5. Dimension entspricht einer Längenänderung des Kristalls in c-Achsenrichtung. Diese ist somit durch inelastische Deformationen nicht möglich.

Die **Verzerrungsgeschwindigkeiten des Polykristalls** \underline{D} werden additiv aufgespalten in einen elastischen und einen inelastischen Anteil. $\underline{D} = \underline{D}^e + \underline{D}^i$. Monokristall und Polykristall mögen dem gleichen elastisch isotropen Werkstoffgesetz genügen, das somit als bekannt vorausgesetzt werden kann. Die globalen inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten \underline{D}^i erhält man durch Mittelung der lokalen Größen über ein in geeigneter Weise zu definierendes repräsentatives Volumenelement:

$$\underline{\underline{D}}^i = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \underline{\underline{d}}^i dV = \langle \underline{\underline{d}}^i \rangle = \int \underline{\underline{d}}^i g(\mathbf{n}) d\omega^n \quad \text{mit} \quad \int g(\mathbf{n}) d\omega^n = 1$$

Die Mittelung über das Volumen läßt sich auch als Mittelung über alle in V enthaltenen Kornorientierungen schreiben. $\underline{\underline{d}}^i$ ist die mittlere inelastische Verzerrungsgeschwindigkeit aller Körner mit der Orientierung \mathbf{n} und $g(\mathbf{n}) \cdot d\omega^n$ ist deren Volumenanteil.

Zur **Berechnung der lokalen Größen** wird folgendes Ersatzproblem [6] betrachtet: In eine unendlich ausgedehnte homogene Matrix mit dem Werkstoffverhalten des Polykristalls wird eine monokristalline Kugel eingebettet. Wird die Matrix auf ihrem äußeren Rand homogen belastet, dann werden die Spannungen bzw. die Verzerrungsgeschwindigkeiten in der Matrix um $\Delta \underline{\underline{\sigma}}$ bzw. $\Delta \underline{\underline{d}}$ vom homogenen Zustand abweichen. Beschreibt man den Zusammenhang zwischen $\Delta \underline{\underline{\sigma}}$ und $\Delta \underline{\underline{d}}$ näherungsweise durch ein lineares Stoffgesetz der Form

$$\Delta \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{S}} : \Delta \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \underline{\underline{M}} : \Delta \underline{\underline{\sigma}}$$

mit dem Elastizitätstensor $\underline{\underline{S}}$ und einem geeignet zu definierenden Tensor 4-ter Stufe $\underline{\underline{M}}$, der das inelastische Materialverhalten beschreibt, dann erhält man nach längerer Rechnung [2] folgendes Ergebnis :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}^e$$

Die Spannungen $\underline{\underline{\sigma}}$ innerhalb des Kornes sind konstant [3],[4]. Sie ergeben sich als Summe aus der äußeren Last $\underline{\underline{\Sigma}}$ und den Eigenspannungen $\underline{\underline{\sigma}}^e$. Für die Eigenspannungen erhält man folgende Entwicklungsgleichung:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}}^e = \underline{\underline{E}} : \left(\underline{\underline{D}}^i - \underline{\underline{d}}^i(\mathbf{n}) - \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{M}}, \nu) : \underline{\underline{\sigma}}^e \right)$$

Die ersten beiden Terme entsprechen einer Gleichung von Kröner [7] zur Beschreibung der Vielkristallplastizität metallischer Werkstoffe. Sie läßt sich wie folgt interpretieren: Durch den Unterschied in den mikro- und makroskopischen Verzerrungsgeschwindigkeiten entsteht für den spannungsfreien Vergleichszustand eine Inkompatibilität in den Dehnungen. Multipliziert man diese Dehnungen mit dem Tensor $\underline{\underline{E}}$,

$$\underline{\underline{E}} = \frac{E \cdot (7 - 5\nu)}{15 \cdot (1 - \nu) \cdot (1 + \nu)} \left(\underline{\underline{1}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \underline{\underline{1}} \right) + \frac{2 \cdot E}{3 \cdot (1 + \nu)} \cdot \frac{1}{3} \underline{\underline{1}} \underline{\underline{1}},$$

dann erhält man nach Eshelby [3] die Spannungen im Einschluß.

Zusätzlich zu den homogenen Verzerrungsgeschwindigkeiten $\underline{\underline{D}}^i$ treten in der Matrix jedoch noch die Verzerrungsgeschwindigkeiten $\Delta \underline{\underline{d}}$ auf. Deren Beitrag zur Dehnungsinkompatibilität wird durch den 3. Term der Gleichung

beschrieben. Der Tensor 4-ter Stufe $\underline{\underline{B}}$ ist eine lineare Funktion des Tensors $\underline{\underline{M}}$. Er ist desweiteren von der Querkontraktionszahl ν abhängig.

$$\underline{\underline{B}} = \frac{1}{210 \cdot (7 - 5 \cdot \nu)^2} \cdot \left\{ \begin{aligned} & 200 \cdot \tilde{\underline{\underline{M}}} \cdot \underline{\underline{1}} + (1575 \nu^2 - 1530 \nu + 343) \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{11}} \\ & + (-8400 \nu^2 + 12000 \nu - 4040) \cdot \underline{\underline{M}}_1 + (12600 \nu^2 - 18000 \nu + 6200) \cdot \underline{\underline{M}}_2 \\ & + (12600 \nu^2 - 18000 \nu + 7000) \cdot \underline{\underline{M}}_3 + (-12600 \nu^2 + 15120 \nu - 4600) \cdot \underline{\underline{M}}_4 \end{aligned} \right\}$$

$$(\underline{\underline{M}}_1)_{ijkl} = \frac{1}{2} (M_{ikjl} + M_{iljk}) \quad , \quad \underline{\underline{1}} : \text{Einheitstensor 4-ter Stufe}$$

$$(\underline{\underline{M}}_2)_{ijkl} = \frac{1}{4} (\tilde{M}_{ik}^j \delta_{jl}^i + \tilde{M}_{il}^j \delta_{jk}^i + \tilde{M}_{ik}^i \delta_{jl}^j + \tilde{M}_{il}^i \delta_{jk}^j)$$

$$\underline{\underline{M}}_3 = \frac{1}{2} (\underline{\underline{1}} \tilde{\underline{\underline{M}}} + \tilde{\underline{\underline{M}}} \underline{\underline{1}}) \quad , \quad \tilde{M}_{ik} = M_{ijk}^j \quad , \quad \tilde{\underline{\underline{M}}} = M_{ki}^{ik}$$

Die Übereinstimmung zwischen einem mit diesem Stoffgesetz nachgerechneten Druckversuch mit konstanter Last und dem entsprechenden Experiment ist abhängig von der Wahl des Tensors $\underline{\underline{M}}$. Als sinnvoller Ansatz hat sich $\underline{\underline{M}} = \alpha \cdot \partial \underline{\underline{D}}^i / \partial \underline{\underline{\Sigma}}$ erwiesen. Die mit $\alpha=1$ berechneten sekundären Kriechraten fallen zu groß aus. $\alpha=0.1$ ergibt Kriechraten der richtigen Größenordnung. Die sich einstellenden Eigenspannungen sind jedoch noch zu klein. Eine mögliche Ursache könnte sein, daß ein Monokristall durch seine Einbettung in einen Polykristall, und der damit verbundenen höheren Versetzungsquellendichte auf seinem Rand, weicher ist als ein isolierter Kristall.

Literaturverzeichnis

- /1/ ASHBY, M.F.; DUVAL, P.: The Creep of Polykristalline Ice. Cold Regions Science and Technology 11 (1985), 285-300
- /2/ BISCHOFF-BEIERMANN, B.: Ein selbstkonsistentes Stoffgesetz für polykristallines Eis. Erscheint als ZAMM... (1992) 4/5/6 T464
- /3/ ESHELBY, J.D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. Proc. R. Soc. Lond. A, Vol. 241 (1957), 376-396
- /4/ FAIVRE, G.: Hétérogénéités ellipsoïdales dans un Milieu élastique anisotrope. Le Journal de Physique 32 (1971), 325-331
- /5/ HUTCHINSON, J.W.: Creep and Plasticity of Hexagonal Polycrystals as Related to Single Crystal Slip. Metall. Trans. A, Vol.8 (1977), 1465-1469
- /6/ KRÖNER, E.: Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. Zeitschrift für Physik, 151 (1958), 504-518
- /7/ KRÖNER, E.: Zur plastischen Verformung des Vielkristalls. Acta Metallurgica 9 (1961), 155-161

Ein thermodynamisch konsistentes Stoffgesetz für polykristallines Eis

J. Pohé

Lehrstuhl für Mechanik 1

Ruhr-Universität Bochum Universitätsstr. 150 4630 Bochum 1

Einleitung

Es wird ein Stoffgesetz vorgestellt, welches phänomenologisch das Verhalten von polykristallinem Eis beschreibt. Dabei sind folgende Kriterien berücksichtigt worden:

- Qualitativ und quantitativ ist eine gute Übereinstimmung mit dem experimentell erfaßbaren Werkstoffverhalten anzustreben.
- Mit Hilfe einer Anpassungsstrategie sei eine einfache Ermittlung der Materialfunktionen und -parameter durchführbar.
- Das Stoffgesetz sei thermodynamisch konsistent und ermögliche die Berechnung von isothermen, adiabaten und allgemeinen Prozessen.

Theoretische Grundlagen zur Beschreibung des Materialverhaltens

Die Dehnungsrate D sei, wie üblich, in einen elastischen und einen inelastischen Anteil additiv aufspaltbar.

$$D = D_{el} + D_{in}. \quad (1)$$

Der elastische Anteil möge dabei dem hypoelastischen Stoffgesetz folgen.

$$D_{el} = \frac{1}{2G} \left[\overset{\nabla}{S} - \frac{\nu}{1+\nu} tr \overset{\nabla}{S} \mathbf{1} \right] + \alpha \dot{T} \mathbf{1}. \quad (2)$$

Als Ansatz für die inelastische Dehnungsrate wurde folgende Form gewählt:

$$D_{in} = \alpha_1 I_2^{\alpha_2} \frac{1}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial J_2}{\partial S} \exp \left[-\frac{Q}{RT} \right]. \quad (3)$$

$$I_2 = [S' - \xi_v + \xi_r] : [S' - \xi_v + \xi_r] \quad (4)$$

$$J_2 = [S' - \xi_v] : [S' - \xi_v]. \quad (5)$$

Gleichung (3) enthält den Arrheniusfaktor mit der Aktivierungsenergie Q und der universellen Gaskonstante R . α_1 und α_2 sind noch zu bestimmende Parameter. Die Spannungsinvarianten I_2 und J_2 , die in Gl. (4) und (5) beschrieben sind, enthalten

weiterhin die tensoriellen internen Variablen ξ_v und ξ_r . Diese beschreiben die internen Spannungen in der Kristallstruktur einerseits und andererseits Versetzungen bzw. das Rekristallisationsverhalten des Werkstoffes. Die Evolutionsgleichungen dieser Grössen lauten

$$\overset{\nabla}{\xi}_v = c_{v1}(\gamma) c_{v2} (S' - \xi_v + \xi_r) D_{in} - c_{v3} (S'; \xi_v, \xi_r) [\xi_v - \xi_r]. \quad (6)$$

$$\overset{\nabla}{\xi}_r = c_{r1}(\gamma) c_{r2} (S' - \xi_v + \xi_r) D_{in} - c_{r3} (S'; \xi_v, \xi_r) [\xi_r - \xi_v]. \quad (7)$$

γ ist dabei ein Maß für eine modifizierte inelastische Arbeit.

$$\dot{\gamma} = g(S'; \xi_v, \xi_r) [S' - \xi_v + \xi_r] : D_{in}. \quad (8)$$

Thermodynamischer Rahmen

Basierend auf den Ausführungen von LEHMANN (1989) ist zu gewährleisten, daß das Stoffgesetz in einen thermodynamischen Rahmen eingebettet ist.

Der Ausgangspunkt für diese Betrachtungen ist der erste Hauptsatz der Thermodynamik in der Form

$$\dot{u} = \dot{w}_r + \dot{w}_h + \dot{w}_d - \frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \mathbf{q} + r \quad (9)$$

mit der spezifischen inneren Energie u , dem reversiblen Anteil w_r , dem dissipierten Anteil w_d und dem nichtdissipierten Anteil w_h der mechanischen Arbeit. \mathbf{q} ist der Wärmefluß und r sind weitere Energiequellen. Wählt man den Hencky-Dehnungstensor ε_r und die Entropie s als externe Zustandsgrössen, so kann mit einer zweifachen Legendre-Transformation und dem Ansatz

$$\dot{w}_r = \frac{1}{\varrho_0} \mathbf{S} : \overset{\nabla}{\varepsilon}_r \quad (10)$$

die Evolutionsgleichung für die spezifische Entropie aufgestellt werden.

$$T\dot{s} = \dot{w}_d + \dot{w}_h - \frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \mathbf{q} + r - \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \dot{\gamma} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_v} : \overset{\nabla}{\xi}_v - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_r} : \overset{\nabla}{\xi}_r. \quad (11)$$

Unter der Annahme, daß neben den klassischen reversiblen und irreversiblen thermodynamischen Prozessen weiterhin dissipative Prozesse als eine Folge von erzwungenen Gleichgewichtszuständen erscheinen und nichtdissipative Prozesse, die auf einer Wechselwirkung zwischen von außen zugeführter Arbeit und innerer mechanischer Energie, die in Mikro-Spannungsfeldern gespeichert wird, auftreten, kann Gl. (11) in zwei Bilanzgleichungen aufgeteilt werden.

$$\dot{w}_d = \frac{1}{\varrho} \operatorname{div} \mathbf{q} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} T\dot{T} - T\dot{\eta} \geq 0 \quad (12)$$

$$\dot{w}_h = \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \dot{\gamma} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_v} : \overset{\nabla}{\xi}_v + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_r} : \overset{\nabla}{\xi}_r + T\dot{\eta} - r \quad (13)$$

$\dot{\eta}$ bezeichnet hier eine Entropieproduktion aufgrund von Änderungen der internen Struktur. Aus (12) ist mit Hilfe der spezifischen Wärmekapazität (14)

$$c_p = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T^2} T \quad (14)$$

die Evolutionsgleichung der Temperatur (15) aufzustellen.

$$c_p \dot{T} = \dot{w}_d - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} + T\dot{\eta} \quad (15)$$

Mit

$$\dot{w}_d + \dot{w}_h = \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : \mathbf{D}_{in} \quad (16)$$

$$\dot{w}_d = \frac{\beta}{\rho_0} \mathbf{S} : \mathbf{D}_{in} \quad (17)$$

kann Gl. (18) formuliert werden:

$$\frac{1}{\rho_0} [1 - \beta] \mathbf{S} : \mathbf{D}_{in} = \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} \dot{\gamma} + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_v} : \overset{\nabla}{\xi}_v + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_r} : \overset{\nabla}{\xi}_r + T\dot{\eta} - r \quad (18)$$

Die aus den vier Differentialen der spezifischen freien Enthalpy Ψ entstehenden sechs Integrabilitätsbedingungen sind zu erfüllen.

Anpassung und Ergebnisse

Zur Bestimmung der noch unbekanntenen Materialfunktionen und -parameter wurde im wesentlichen auf die Versuchsergebnisse von MELLOR/ COLE (1982) zurückgegriffen. Mit diesen lassen sich an diskreten Stellen Zusammenhänge zwischen der Dehnungsrate und der Spannung der Form

$$\dot{\epsilon} = \lambda \sigma^\kappa \quad (19)$$

erstellen, mit deren Hilfe sog. "idealisierte Kurven" zu erzeugen sind. Diese dienen zur weiteren Anpassung, welche in Grundsatz so erfolgt, daß stets nur zwei freie Parameter in einem Schritt in Abhängigkeit der observierbaren Größen bestimmt werden müssen.

Abb. 1a zeigt die so erstellten Rechnungen im Vergleich zu den entsprechenden Versuchen aus Abb. 1b.

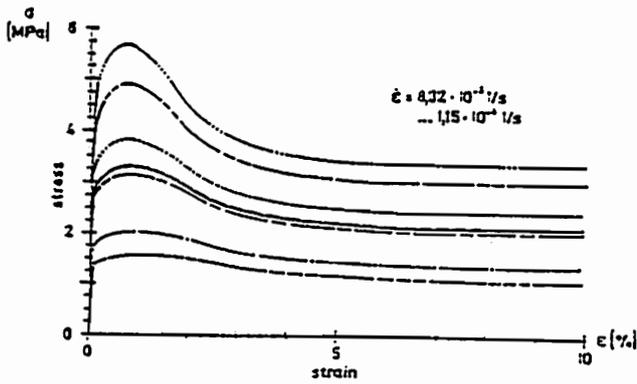


Abb. 1a: Verifikationsrechnungen beim einaxialen Druck

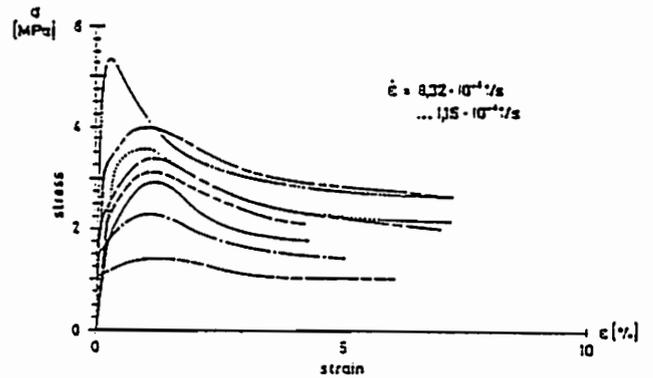


Abb. 1b: Experimente von MELLOR/ COLE (1982) zum einaxialen Druck

In Abb. 2 werden Rechnungen und Experimente bei konstanter Last miteinander verglichen. Abb. 3 schließlich zeigt Vorhersagen des Modells bei unterschiedlichen Temperaturniveaus, die jeweils als adiabate und isotherme Prozesse gerechnet wurden.

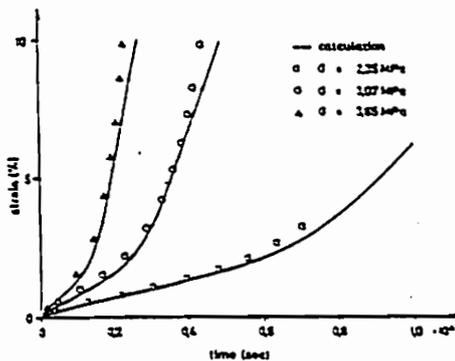


Abb. 2: Experimente und Verifikationsrechnungen bei konstanter Last

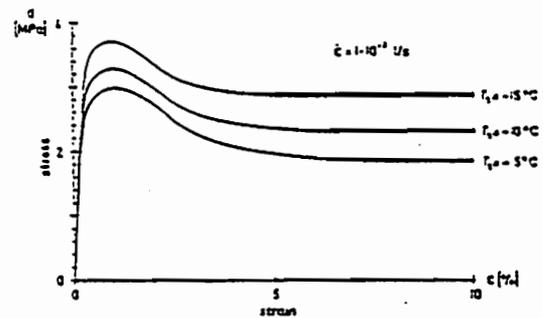


Abb. 3: Vorhersage bei unterschiedlichen Temperaturniveaus

Literatur

- BRUHNS, O.T., 1987, "On the Constitutive Relations of Austenitic Stainless Steels", in: *Constitutive Laws for Engineering Materials - Theory and Applications*, Vol. 1, C.S. Desai, E. Krempl, P.D. Kioussis, T. Kundu (eds.), Elsevier, New York, pp. 675 - 682.
- LEHMANN, TH., 1989, "On the Balance of Energy and Entropy at inelastic deformations of solid bodies", *Eur. J. Mech. A/ Solids*, Vol. 8, No. 3, Gauthier-Villars, pp. 235 - 251.
- MELLOR, M., COLE, D.M., 1982, "Deformation and Failure of Ice under Constant Stress or Constant Strain-Rate", *Cold Regions Science and Technology*, Elsevier, Amsterdam, Vol. 5, pp. 201 - 219.

DIE IR-ABSORPTIONSSPEKTREN VON KUNSTSTOFFEN BEI GROSSEN VERFORMUNGEN

H. Bednarczyk, Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart

Bereits bei früherer Gelegenheit [1] wurde darauf hingewiesen, daß die von vielen Experimentatoren beobachtete anomale Dispersion des spannungsoptischen Effektes bei Celluloid (vgl. hierzu [2] und die dort angegebene Literatur) seine Ursache in einem Dichroismus hat, der sich im infraroten Wellenlängenbereich des Lichtes abspielt. Die Celluloid-Probe mußte dabei bis in den anelastischen Bereich hinein (also bis zu bleibenden Verformungen) beansprucht werden. Blieben die Verformungen reversibel, die Beanspruchung also im rein elastischen Bereich, so blieb auch die Dispersion des spannungsoptischen Effektes normal. Ein erster Erklärungsversuch dieses experimentellen Befundes wurde in [1] und [3] gegeben und es wurde auch gezeigt, daß der Dichroismus bei normaler Dispersion des spannungsoptischen Effektes im ultravioletten Wellenlängenbereich stattfindet.

Unter Dichroismus einer Substanz versteht man (grob gesprochen) die Erscheinung, daß die in linear polarisiertem Licht aufgenommenen Absorptionsspektren dieser Substanz verschieden ausfallen, je nachdem, wie die Polarisationssebene relativ zur untersuchten Probe orientiert ist. Bei Substanzen, bei denen Dichroismus erst unter mechanischer Beanspruchung auftritt, spricht man gewöhnlich von "künstlichem Dichroismus".

Nun hängen bekanntlich Absorptionskoeffizient und Brechungsindex einer Substanz zusammen: sie sind in einem komplexen Eigenwert α enthalten, der sich aus dem Ausbreitungsproblem einer linear polarisierten Lichtwelle durch eine (nichtleitende) Substanz ergibt. Es gilt

$$\alpha = n \left(1 + i \frac{z}{k} \right), \quad (1)$$

wobei n den Brechungsindex, z den Absorptionskoeffizienten und k die Wellenzahl bedeutet. Modelliert man die Polarisation der Substanz durch Annahme schwingungsfähiger molekularer Dipole, wie dies in [3]

geschehen ist, so erhält man bei fehlendem Dichroismus (also bei nicht beanspruchtem Material) für α die seit langem in der Dispersionstheorie bekannte Formel (vgl. dazu etwa die Übersicht von Fahrenfort [4]):

$$\alpha^2 = 1 + \frac{J}{-\omega^2 + \omega_r^2 + i\delta\omega_r\omega} \quad (2)$$

J ist eine mit dem Aufbau des Dipols zusammenhängende charakteristische Konstante, ω_r dessen Resonanz-Kreisfrequenz, sowie δ dessen Dämpfungskonstante; ω bezeichnet die Kreisfrequenz der einfallenden Lichtwelle. Aus (1) und (2) erhält man die Abhängigkeiten $n(\omega)$ und $z(\omega)$. Durch $z(\omega)$ ist über

$$D = \exp(-zh) \quad (3)$$

die Durchlässigkeit einer Probe der Dicke h und damit die Form einer Absorptionsbande bestimmt. $n(\omega)$ gibt dann den Verlauf des "zugehörigen" Brechungsindex an. Natürlich kann man die Kreisfrequenz der einfallenden Lichtwelle auch durch deren Wellenlänge ersetzen.

Wird die Probe belastet, so ändern sich die Verhältnisse, und das Dipolmodell gestattet nun einen weitaus tieferen Einblick in den gekoppelten mechanisch-optischen Vorgang der Lichtausbreitung. Anstelle des einzigen, durch (2) definierten Eigenwertes α ergeben sich jetzt deren zwei gemäß

$$(\alpha_2)^2 = 1 + \frac{C_2 J}{-\omega^2 + \omega_r^2 + i\delta\omega_r\omega + S_2}, \quad (4)$$

$$(\alpha_3)^2 = 1 + \frac{C_3 J}{-\omega^2 + \omega_r^2 + i\delta\omega_r\omega + S_3}.$$

Die zugehörigen Eigenrichtungen fallen mit den Hauptrichtungen des ebenen Spannungszustandes zusammen, dem die Probe unterworfen wurde. Die 1-Richtung ist die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes; sie steht normal auf der Mittelebene der Probe. Der Unterschied zwischen (4) und

(2) besteht in den neu hinzugekommenen Koeffizienten C_2 , C_3 und S_2 , S_3 . Sie sind die Eigenwerte zweier Tensoren C und S deren Eigenrichtungen gleichfalls mit den Hauptrichtungen des aufgeprägten Spannungszustandes zusammenfallen. Das Dipolmodell weist sie als diejenigen Größen aus, auf die der mechanische Beanspruchungszustand der Probe Zugriff hat: C und S sind, bei vorausgesetzter Isotropie der unbeanspruchten Probe (sonst würde ja (2) nicht gelten) isotrope Funktionen des Verzerrungs- bzw. (unter gewissen Umständen) des Spannungszustandes. Die Bedeutung von S_2 und S_3 wird unmittelbar aus (4) klar: Sie stellen eine Änderung der Resonanzfrequenz des Dipols, also eine Verstimmung dar. In der Tat sagt das Dipolmodell, daß es sich bei S um zusätzliche Bettungskräfte des Dipols handelt, die durch die mechanische Beanspruchung der Probe erzeugt werden. C_2 und C_3 hingegen enthalten einen Orientierungseffekt: Durch die Verformung wird der ursprünglich isotropen Verteilung der Dipole eine Vorzugsrichtung aufgeprägt. Natürlich sind C_2 und C_3 durch die Verteilungsfunktion der Dipolrichtungen (Texturfunktion) bestimmt, die ihrerseits wiederum von der Verzerrungsgeschichte der Probe abhängt. Darüber soll in einer späteren Arbeit berichtet werden.

Wegen (4) und (1) gibt es bei der belasteten Probe auch 2 Hauptbrechungsindices $n_2(\omega)$ und $n_3(\omega)$, sowie 2 Hauptabsorptionskoeffizienten $Z_2(\omega)$ und $Z_3(\omega)$ und demzufolge gemäß (3) auch zwei Hauptdurchlässigkeiten $D_2(\omega)$ und $D_3(\omega)$. Die Hauptbrechungsindices beschreiben in bekannter Weise die Spannungsdoppelbrechung (im sichtbaren Licht). Die Hauptdurchlässigkeiten geben Anlaß zu zwei voneinander verschiedenen Absorptionsspektren, wenn die Probe mit linear polarisiertem Licht mit verschieden orientierten Polarisations Ebenen durchstrahlt wird. Meist werden die Polarisations Ebenen im Winkel von $\frac{\pi}{2}$ zueinander orientiert. Daß Dichroismus und Doppelbrechung miteinander zusammenhängen, ist seit geraumer Zeit bekannt. Es verwundert also nicht, daß Gleiches für künstlichen Dichroismus und Spannungsdoppelbrechung gilt.

Betrachten wir den reinen Verstimmungseffekt ($C_2 = C_3 = 1$), so erhalten wir den in Abb.1 gezeigten prinzipiellen Verlauf von n_2 , n_3 , D_2 , D_3 .

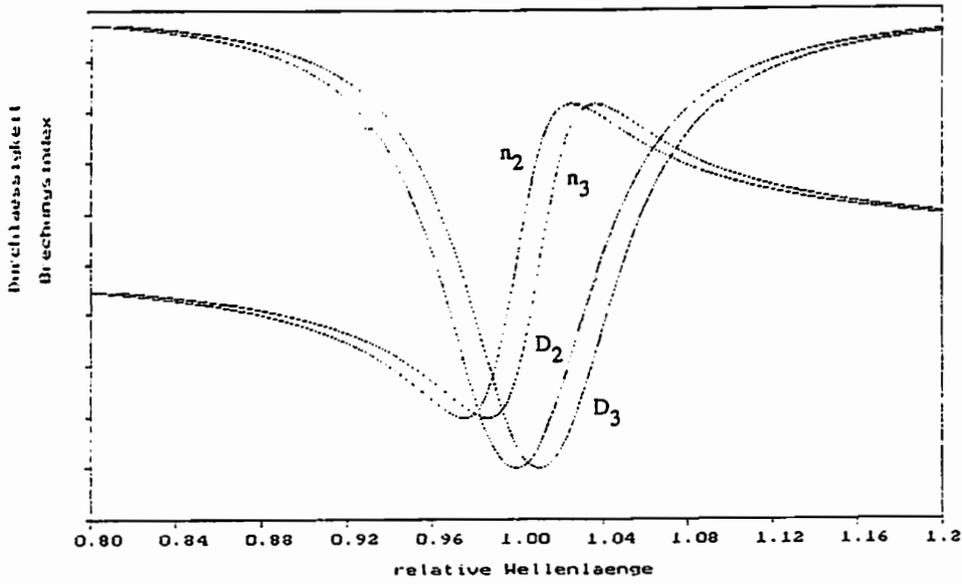


Abb. 1.

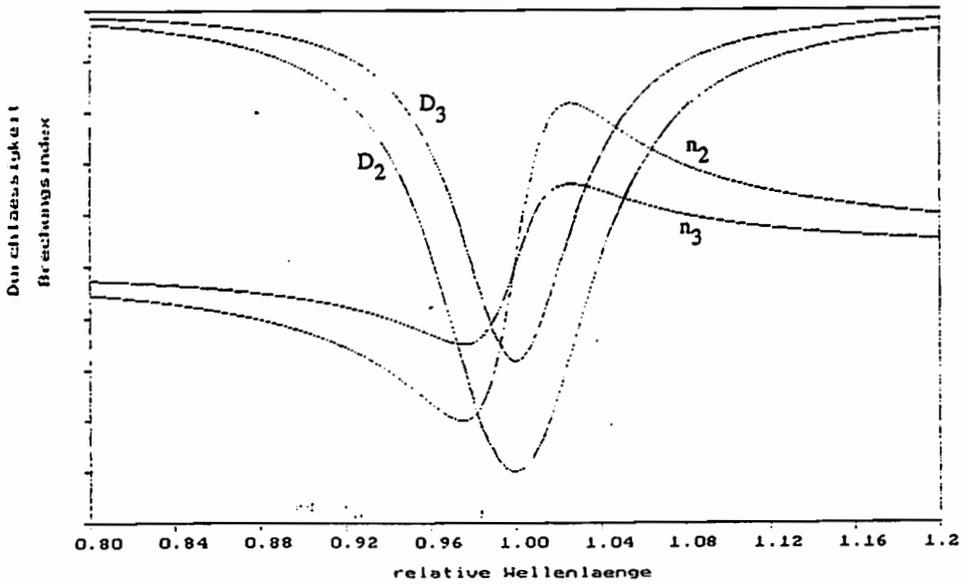


Abb. 2.

Liegt hingegen ein reiner Ausrichtungseffekt vor ($S_2 = S_3 = 0$), so erhalten wir den in Abb.2 dargestellten Verlauf von n_2 , n_3 , D_2 , D_3 . Wie bereits in [5] ausgeführt wurde, ist es ausgeschlossen, die experimentellen Befunde durch reine Verstimmungseffekte der molekularen Resonatoren zu erklären. Dies gilt sowohl für die anomale Dispersion der Spannungsdoppelbrechung als natürlich auch für den Dichroismus der IR-

Absorptionsspektren. Die meisten in polarisiertem Licht aufgenommenen IR-Absorptionsspektren verschiedener Polymere weisen dann auch den Dichroismus als praktisch reinen Ausrichtungseffekt aus. Umso bemerkenswerter sind daher Experimente, die trotzdem auf eine gleichzeitig mit der Ausrichtung einhergehende Verstimmung einzelner molekularer Resonatoren hinweisen. Als Beispiel möge das in [6] veröffentlichte Absorptionsspektrum von isotaktischem Polypropylen gelten (Abb.3). Die bei etwa $8,7\mu$ liegende Absorptionsbande läßt

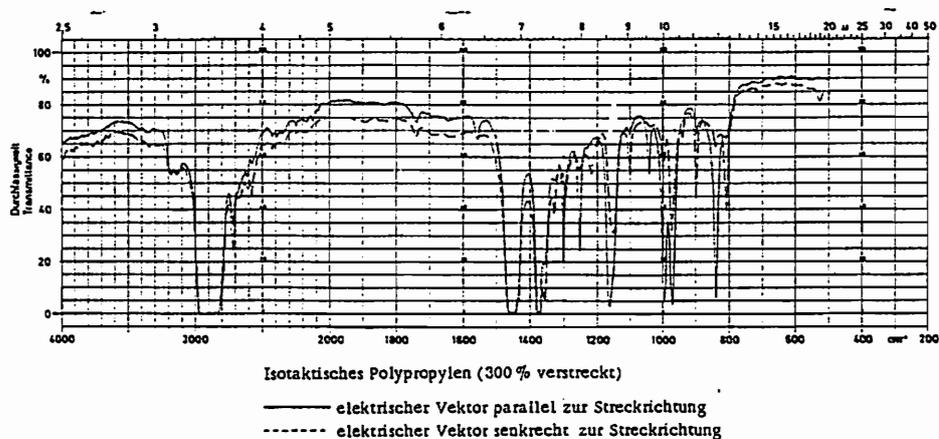


Abb. 3.

deutlich eine Verschiebung der Resonanzwellenlänge in Abhängigkeit von der Polarisationssebene des durchgehenden Lichtes erkennen, wie sie in Abb.1 dargestellt wurde. Die Bedeutung derartiger Absorptionsbanden liegt auf der Hand: Da die Verschiebung der Resonanzwellenlänge offensichtlich von überlagerten Makro-Spannungsfeldern stammen muß, könnten sie auch zum Studium von Eigenspannungszuständen herangezogen werden. Um hier sichere Aussagen zu ermöglichen, sind natürlich weitere Untersuchungen, vor allem auch experimenteller Art erforderlich.

Literaturverzeichnis

- [1] Bednarczyk, H.: Zur Dispersion der Spannungsdoppelbrechung photo-
plastischer Modellwerkstoffe. Mitt. Nr. 3 Inst. für Mechanik
Kassel. Grosse plastische Formänderungen, Bad Honnef 1985,
Herausg. O.T.Bruhns.

- [2] Mönch, E.: Die Dispersion der Doppelbrechung bei Zelluloid
als Plastizitätsmaß in der Spannungsoptik. Z. Ang. Phys 6 (1954)
p. 371-375

- [3] Bednarczyk, H.: Zur Dispersion der Spannungsdoppelbrechung.
ÖIAZ 133 (1988) p. 353 - 357

- [4] Fahrenfort, J.: The Methods and Results of Dispersion Studies.
Infrared Spectroscopy and Molecular Structure. M. Davies, Ed.
Elsevier Publ. Comp. 1963

- [5] Bednarczyk, H.: On the Connexion of Induced Birefringence
with Absorption Spectra of Transparent Materials. ÖIAZ 134 (1989)
p. 387 - 392.

- [6] Krohmer, P.: IR-Spektroskopie mit polarisiertem Licht. Analysen-
technische Berichte Heft 14 (1968). Herausgeber: Bodenseewerk
Perkin-Elmer, Überlingen.

CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR THE INELASTIC BEHAVIOUR OF METALS BASED ON STOCHASTIC MODELS

E. A. STECK

Institut für Allgemeine Mechanik und Festigkeitslehre
Technische Universität Braunschweig, W-3300 Braunschweig, FRG

The Stochastic Model

Describing the dislocation movements in crystalline materials and their temperature and stress activation by a discrete Markov chain results in a stochastic model which is successful in describing stationary deformation processes as well as transients after changes in external load or temperatures.

In former publications [1,2], this stochastic model for the description of inelastic deformation processes was presented. It describes the evolution of a probability distribution of "flow-units" over a one-dimensional state space of barrier heights.

For inelastic processes in crystalline media, it is generally accepted, that the dislocation gliding processes are due to effective stresses σ_{eff} , which result from the difference

$$\sigma_{\text{eff}} = \sigma_{\text{app}} - \sigma_b \quad (1)$$

between the applied stress σ_{app} and internal (back) stresses σ_b , closely related to the microstructure.

The concept of back stresses became widely accepted in the late 1960's and early 1970's [3]. Many different methods were developed to measure σ_b by creep tests, stress- and strain- transient dip tests and transmission electron microscopy (e.g. [3,4]).

In summary, the results of these investigations show that the build-up of back stresses correlates with the evolution of complex dislocation substructures, such as cells and dislocation pile-ups, and that stored elastic energy could be associated with the magnitude of the back-stresses. It could also be clearly stated, that back stresses possess a considerable statistical variation in their magnitude, spatial extent, and kinetics. Including the effective stress in the stochastic model and using a mean value formulation [5], the following set of constitutive equations is derived:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{ie} = A_1 \sinh\left(\frac{\delta V (\sigma - \bar{\sigma}_b)}{k_b T}\right) \exp\left(-\frac{U^* + \delta V \bar{\sigma}(i)}{k_b T}\right), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}}(i) = & C_1 \sinh\left(\frac{\delta V |\sigma - \bar{\sigma}_b|}{k_b T}\right) \exp\left(-\frac{U^* + \delta V \bar{\sigma}(i)}{k_b T}\right) - \\ & - C_2 \exp\left(-\frac{\alpha_1 U^* - \beta_1 \delta V \bar{\sigma}(i)}{k_b T}\right), \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}}_b = & D_1 \sinh\left(\frac{\delta V (\sigma - \bar{\sigma}_b)}{k_b T}\right) \exp\left(-\frac{U^* + \delta V \bar{\sigma}^{(i)}}{k_b T}\right) - \\ & - D_2 \exp\left(-\frac{\alpha_2 U^* - \beta_2 \delta V |\bar{\sigma}_b|}{k_b T}\right) \text{sign}(\sigma_{\text{eff}}), \end{aligned} \quad (4)$$

where $\dot{\bar{\epsilon}}_{ie}$ is the inelastic strain rate. $\bar{\sigma}^{(i)}$ and $\bar{\sigma}_b$ are the rates of the mean values of the isotropic hardening stress and the back stress respectively. σ is the applied stress, $\bar{\sigma}^{(i)}$ a measure for the barrier heights which are connected with isotropic hardening, U^* is the activation energy of self diffusion, and δV the activation volume. T is the absolute temperature, and k_b Boltzmanns constant. The remaining magnitudes are material parameters which have to be identified by experiment.

Parameter Identification

Numerical optimization techniques have been applied using mainly uniaxial creep experiments for the determination of the constants in equations 2 to 4. Creep experiments for aluminum Al 99.999 were used. In addition both, uniaxial as well as multiaxial experiments were carried out with the austenitic stainless steel AISI 316L from the same charge [6].

The numerical technique employed for the parameter estimation is the evolution strategy. It is a stochastic method which has the advantage that a local minimum can be overcome, any boundary condition can be included without restricting the method too much, and it can be employed easily. The disadvantage is the amount of computer time needed for the optimization.

Figures 1 and 2 show results of the parameter identification for cyclic processes and the cyclic saturation predicted by the model for the stainless steel AISI 316L.

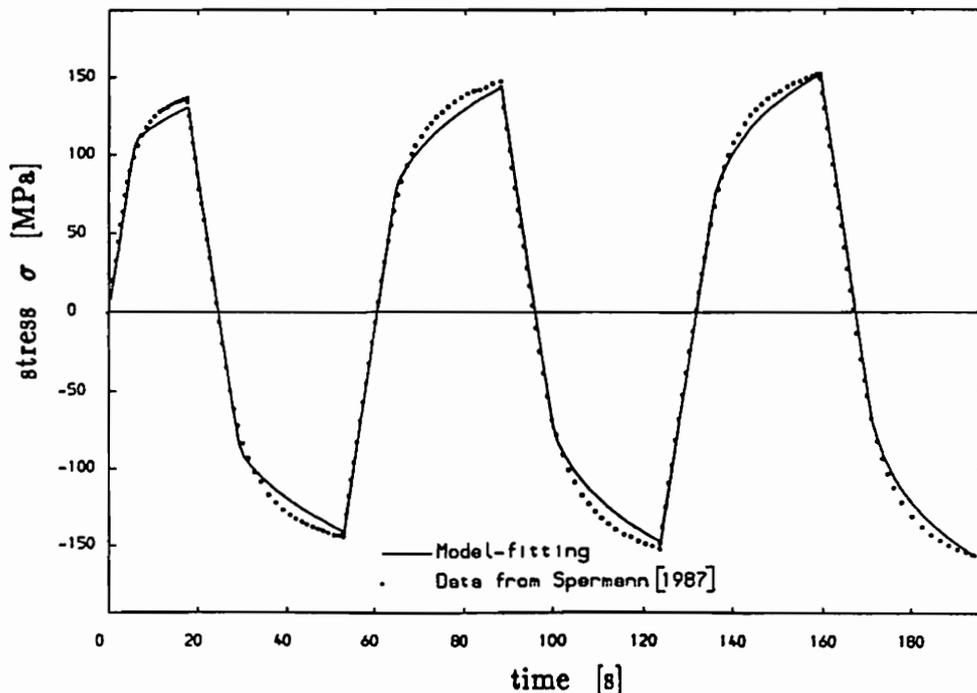


Fig. 1. Cyclic tension test (AISI 316L) $T=973K$, $\dot{\epsilon} = \pm 0.01$ 1/min

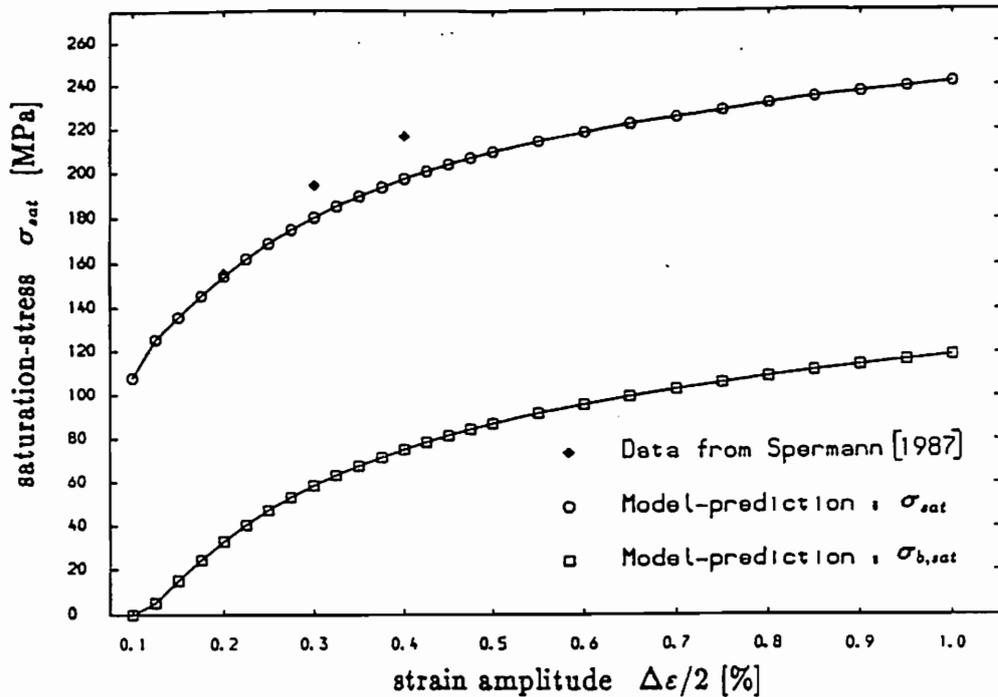


Fig. 2. Cyclic stress strain curve: $T=973$ K, $\dot{\epsilon} = \pm 0.04$ 1/min

Multiaxial Experiments and Finite-Element Calculations

In the area of fracture mechanics at the Technical University Braunschweig a method was developed that uses a photographic technique for the determination of the displacements on the specimen and the different components of the strain field [7]. The specimen chosen for the investigation was a plate with a central hole. On top of the plate surface in the area of the hole a grid of 5 or 13 lines per millimeter out of titaniumdioxide was applied. This layer material has a high capability of resisting elevated temperatures. The specimen was mounted in a force controlled testing machine. The method allows strain measurements of $\epsilon \geq 0.003$. Small elastic strains cannot be resolved. The best results can be achieved with considerable total strains above one percent.

The nonlinear material behaviour is introduced in the finite element formulation by incremental pseudo loads on the right hand side. The finite element code developed for the simulation is the program FEMI (Finite Element Method for Inelastic deformations) that provides eight-noded quadrilateral isoparametric elements for geometrically linear and physically nonlinear problems [6].

In figure 3 the total strain given by the multiaxial experiment after 48 hours of creep is shown with the predictions of the stochastic model. In the experiment a grid with 5 lines per millimeter was used. In the analysis of the photographs an average of 5 lines was taken and only strains above one percent were plotted.

The model predictions agree well with the experimental results in this case. The experiment was however designed so that the stresses occurring in the specimen in the section A-B are in the region of the stresses of the uniaxial creep curves used for the parameter determination.

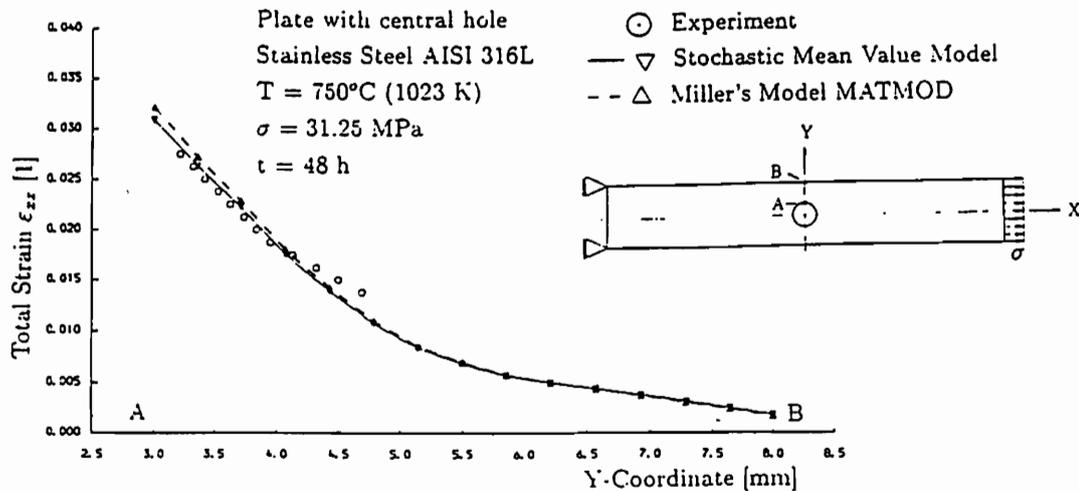


Fig. 3. Comparison of multiaxial experimental results and predictions

References

- [1] Steck, E.A.: A Stochastic Model for the High Temperature Plasticity of Metals. Int. Journal of Plasticity, Vol.1 (1985) 243-258
- [2] Steck, E.A.: A Stochastic Model for the Interaction of Plasticity and Creep in Metals. In: Ziegler, F., G.I. Schueller (eds.) Nonlinear Stochastic Dynamic Engineering Systems. IUTAM Symposium Innsbruck/Igls, Austria, pp.301-310. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1987
- [3] Ahlquist, C.N. and W.D. Nix: The Measurement of Internal Stresses during Creep of Al and Al-Mg Alloys. Acta Met. 19, (1971) 373-385
- [4] Grosskreutz, J.C. and H. Mughrabi: Description of the Work-Hardened Structure at Low Temperature in Cyclic Deformation. In: Argon, A.S. (ed.) Constitutive Equations in Plasticity, pp.251-326. Cambridge, Mas., London: MIT Press 1975
- [5] Schlums, H.: Ein stochastisches Werkstoffmodell zur Beschreibung von Kriechen und zyklischem Verhalten metallischer Werkstoffe. Dr.-Ing. Thesis, Technische Universität Braunschweig 1991
- [6] Kublik, F.: Vergleich zweier Werkstoffmodelle bei ein- und mehrachsigen Versuchsführungen im Hochtemperaturbereich. Dr.-Ing. Thesis, Technische Universität Braunschweig, 1991.
- [7] Andresen, K., Ritter, R. and E. A. Steck: Theoretical and Experimental Investigations of Crack Extension by FEM- and Grating Method. Proceedings on the European Symposium on Elastic-Plastic Fracture Mechanics, Freiburg FRG, 1989.
- [8] Spermann U.: Verfestigungs- und Kriechverhalten des austenitischen Werkstoffs AISI 316L. Primaerbericht (1912), Kernforschungszentrum Karlsruhe (1987)

Modellierung des Verfestigungsverhaltens bei zyklischen plastischen Deformationen

P. Haupt, M. Kamlah, Ch. Tsakmakis
Institut für Mechanik, Gesamthochschule Kassel

1 Einleitung

Charakteristische Phänomene der einachsigen zyklischen Plastizität wurden u. a. von Chaboche [1] und sehr ausführlich von Pape [2] dokumentiert. Beide Autoren führten jeweils dehnungsgesteuerte Versuche an rostfreien Stählen bei Raumtemperatur aus, bei denen Dehnungsamplitude und Mitteldehnung vorgegeben wurden. Nach Erhöhung bzw. Erniedrigung der Dehnungsamplitude bei festgehaltener Mitteldehnung beobachtet man *zyklische Verfestigung* bzw. *Entfestigung* der Spannungsamplitude. Die stabilisierte Spannungsamplitude ist dabei *unabhängig von der Mitteldehnung*. Nach Veränderung der Mitteldehnung stellt man *zyklische Relaxation der Mittelspannung* fest. In Bild 1 sind diese Effekte zu erkennen.

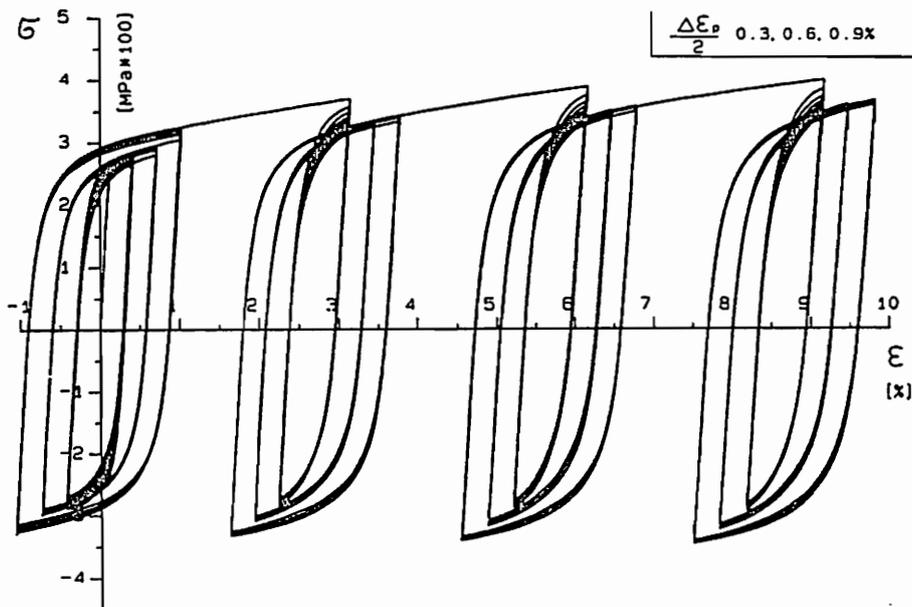


Bild 1: Dehnungsgesteuerter Versuch mit steigenden Verzerrungsamplituden bei verschiedenen Mitteldehnungen nach Pape [2]

In den letzten Jahren sind viele erfolgreiche Methoden zur Darstellung der zyklischen Plastizität entwickelt worden, die z. B. zusätzliche Fallunterscheidungen oder diskrete Parameter verwenden. Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen war die Frage, ob zyklische Plastizität nicht auch durch Größen dargestellt werden kann, die sich während des plastischen Prozesses *kontinuierlich* entwickeln (vgl. dazu auch die ausführlichen Untersuchungen in [3]).

Zu einer (vorerst eher qualitativen) Klärung dieser Frage wollen wir uns hier auf einachsige und kleine Deformationen beschränken. Wir betrachten ein elastisch-plastisches Materialmodell, wo der *linearisierte Greensche Verzerrungstensor* additiv in einen *elastischen* und einen *plastischen* Anteil zerfällt ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_p$), der *Cauchysche Spannungstensor* \mathbf{T} linear und isotrop von \mathbf{E}_e abhängt und die Evolutionsgleichung von \mathbf{E}_p durch die *Normalenregel* gegeben ist. Dazu nehmen wir die Existenz einer *v. Mises Fließfläche* mit kinema-

tischer, aber der Einfachheit halber ohne isotrope Verfestigung an (\mathbf{A}^D : Deviator von \mathbf{A} , $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} := \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$, \mathbf{A}^T : Transponierte von \mathbf{A} , $\text{tr} \mathbf{A}$: Spur von \mathbf{A}):

$$f := \frac{1}{2} (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) \cdot (\mathbf{T}^D - \mathbf{X}^D) - \frac{1}{3} k^2 \quad , \quad k = \text{const.} \quad (1)$$

Hierin bezeichnet der *Translationstensor* \mathbf{X} den Mittelpunkt des elastischen Bereichs im Spannungsraum, für den von *Armstrong* und *Frederick* die Evolutionsgleichung $\dot{\mathbf{X}} = c \dot{\mathbf{E}}_p - b \dot{s} \mathbf{X}$ (b, c : Materialkonstanten, $\dot{(\)}$: materielle Zeitableitung von $(\)$, $\dot{s} := \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{E}}_p \cdot \dot{\mathbf{E}}_p}$, s : *plastische Bogenlänge*) vorgeschlagen wurde (vgl. [1]). Im Falle einachsiger Zug-Druck-Belastungen bezüglich der plastischen Bogenlänge s geschrieben, reduziert sich die Armstrong-Frederick-Gleichung zu ($\xi := \frac{3}{2} X_{11}$, $\epsilon_p := E_{p11}$, $(\)' := \frac{d}{ds}(\)$)

$$\xi' + b \xi(s) = \frac{3}{2} c \epsilon_p' \quad , \quad \xi(0) = 0 \quad , \quad (2)$$

wobei für $\epsilon_p' = \text{sgn}(\dot{\epsilon}_p)$ gilt. Die kinematische Variable genügt also einem Maxwellmodell in Bezug auf die Bogenlängendarstellung. Die zyklischen Eigenschaften dieser Verfestigungsregel sind [1]:

- Unabhängigkeit der stabilisierten Spannungsamplitude von der plastischen Mitteldehnung
- zyklische Relaxation der Mittelspannung
- verschwindende zyklische Verfestigung und Entfestigung

Zur Verbesserung der letztgenannten Eigenschaft soll die Armstrong-Frederick-Gleichung (2) jetzt modifiziert werden.

2 Kinematische Verfestigung bezüglich einer transformierten Bogenlänge

Im Falle unbeschränkter monotoner Belastung besitzt $|\xi|$ gemäß der Verfestigungsregel (2) den asymptotischen Grenzwert $\frac{3}{2} \frac{c}{b}$. Offensichtlich kann man also das asymptotische Verhalten von ξ beeinflussen, wenn man annimmt, daß b keine Konstante ist. In diesem Sinne hat Marquis b als Funktion der plastischen Bogenlänge s in der Form $\hat{b}(s) = b_1 + b_2 e^{-b_3 s}$ gewählt, womit einmalige zyklische Ver- oder Entfestigungsprozesse beschrieben werden können (vgl. [1]). Im allgemeinen jedoch erlaubt die Wahl der plastischen Bogenlänge s als unabhängige Variable in der Materialfunktion \hat{b} nicht, dem Verlauf der jeweiligen Belastungsgeschichte (z. B. zyklisch oder monoton) Rechnung zu tragen.

Daher wollen wir an dieser Stelle \hat{b} als Funktion einer zusätzlichen inneren Variablen p einführen, sodaß sich die Evolutionsgleichung für ξ statt (2) jetzt

$$\xi' + \hat{b}(p) \xi(s) = \frac{3}{2} c \epsilon_p' \quad , \quad \xi(0) = 0 \quad . \quad (3)$$

schreibt. Auch für p ist eine Evolutionsgleichung zu definieren und zwar so, daß die zitierten Effekte der zyklischen Plastizität dargestellt werden. Für den Nachweis der thermodynamischen Konsistenz ist es wichtig, daß sich diese Vorgehensweise als Bogenlängentransformation interpretieren läßt. Jede positive Funktion $\hat{b}(p) > 0$ definiert nämlich eine Transformation von der plastischen Bogenlänge s auf eine neue Bogenlänge z über $\dot{z} = \hat{b}(p) \dot{s}$, indem jedem Inkrement von s ein positives Inkrement von z zugeordnet wird. Bezüglich z lautet (3) dann

$\frac{d}{dz}\xi + \xi(z) = \frac{3}{2} c \frac{d}{dz}\epsilon_p$ und hat damit die gleiche Struktur wie (2) mit $b = 1$. Für die Materialfunktion \hat{b} nehmen wir hier einfach

$$\hat{b}(p) := \frac{b}{1 + \alpha p} \quad (4)$$

an, wo b und α Materialkonstanten sind.

Im folgenden wollen wir eine geeignete Evolutionsgleichung für p motivieren. Dabei soll p die Bedeutung einer gewichteten Fläche unter einer der Größen des plastischen Prozesses haben. So ist z. B. mit

$$p := \frac{1}{s_0} \int_{s-s_0}^s |\epsilon_p(\sigma)| d\sigma \quad , \quad s_0 = \text{const.} \quad (5)$$

das Produkt ps_0 die Fläche unter $|\epsilon_p|$ in einem Intervall der Länge s_0 , das von der aktuellen Bogenlänge s zurück in die Geschichte der plastischen Verzerrung reicht (in diesem Sinne ist p ein Materialgedächtnis der Reichweite s_0 , bei dem die Geschichte der plastischen Verzerrung durch eine Sprungfunktion gewichtet wird). Die Interpretation als Fläche zeigt, daß p für zyklische plastische Verzerrungsprozesse mit verschwindender Mitteldehnung folgende Eigenschaften hat:

- nach Heraufsetzen der plastischen Verzerrungsamplitude wächst p kontinuierlich an
- nach Erniedrigung der plastischen Verzerrungsamplitude fällt p stetig ab
- dazwischen ändert sich p in Perioden konstanter plastischer Verzerrungsamplitude kaum

Für solche Prozesse zeigt p also qualitativ das gewünschte Verhalten der Spannungsamplitude. Daran ändert sich auch (qualitativ) nichts, wenn wir (5) durch das kontinuierlich nachlassende Materialgedächtnis

$$p := \frac{1}{s_0} \int_0^s e^{-\frac{s-\sigma}{s_0}} |\epsilon_p(\sigma)| d\sigma \quad , \quad s_0 = \text{const.} \quad (6)$$

ersetzen, um eine befriedigendere Formulierung zu erhalten. Das eigentliche Problem ist jedoch, daß p über $|\epsilon_p|$ weiterhin von der plastischen Mitteldehnung abhängt, weswegen wir hier eine andere Variable einführen wollen.

In der Einleitung haben wir charakteristische zyklische Eigenschaften der unmodifizierten Armstrong-Frederick-Gleichung (2) aufgezählt. Diese Eigenschaften bewirken nun, daß man die Fläche unter $|\xi|$, aufgetragen über der plastischen Bogenlänge s , ebenfalls als ein sich stetig anpassendes Maß für die aktuelle plastische Verzerrungsamplitude ansehen kann, das in diesem Fall aber unabhängig von der plastischen Mitteldehnung ist. Wir wollen daher nunmehr als Evolutionsgleichung

$$p := \frac{1}{s_0} \int_0^s e^{-\frac{s-\sigma}{s_0}} |\xi(\sigma)| d\sigma \quad , \quad s_0 = \text{const.} \quad (7)$$

oder äquivalent dazu

$$p' + \frac{1}{s_0} p(s) = \frac{1}{s_0} |\xi(s)| \quad , \quad p(0) = 0 \quad (8)$$

vorschlagen.

Zusammen mit (3) und (4) liefert (8) eine Verfestigungsregel, die aus zwei nichtlinear gekoppelten, gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung besteht und neben den bisherigen Materialkonstanten b und c die beiden Konstanten α und s_0 enthält. Wie bereits in (2) bestimmt b im wesentlichen, wie stark der Einfluß des Begrenzungsterms in (3) ist (für $b = 0$ erhält man lineare kinematische Verfestigung). Auch c behält seine Eigenschaft bei, die Anfangssteigung von ξ über s festzulegen. Die zusätzliche Materialkonstante s_0 gibt an, wie schnell das Flächengedächtnis (7) entlang der plastischen Bogenlänge s nachläßt. Dabei regelt α , wie groß der Einfluß von p auf die Evolution von ξ ist (für $\alpha = 0$ reduziert sich (3) zur unmodifizierten Armstrong-Frederick-Gleichung (2)). Zur qualitativen Ermittlung der Eigenschaften unseres Verfestigungsansatzes sind für Bild 2 diese Materialparameter grob gewählt worden. Man erkennt, daß die angestrebten Effekte dargestellt werden.

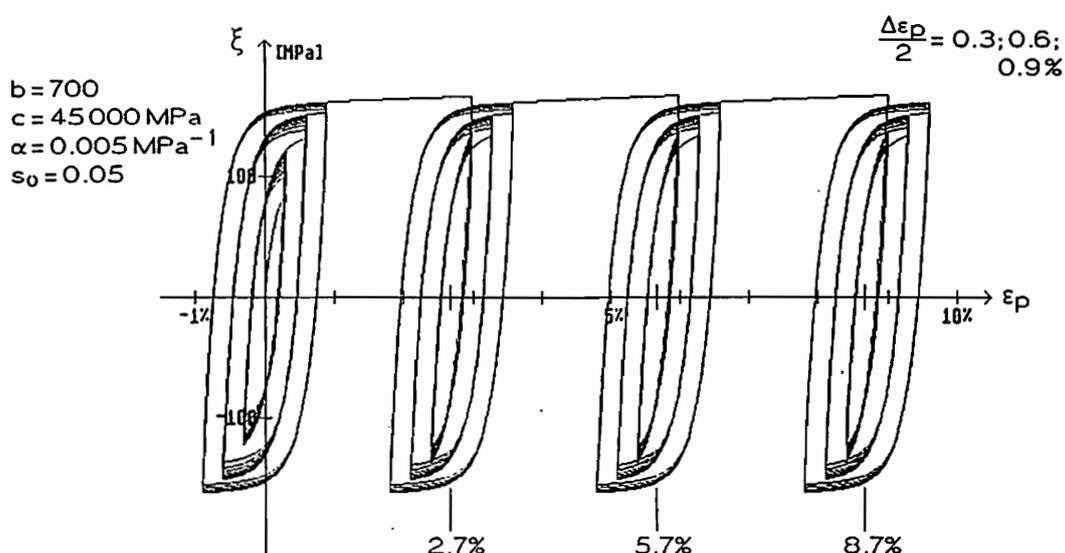


Bild 2: Simulation eines dehnungsgesteuerten Versuchs mit steigenden Verzerrungsamplituden bei verschiedenen Mitteldehnungen

Literatur

- [1] Chaboche, J. L.: Time Independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity. Int. J. Plasticity 2(1986)149-188
- [2] Pape, A.: Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells. Diss. Bochum 1988
- [3] Haupt, P.; Kamlah, M.; Tsakmakis, Ch.: Continuous Representation of Hardening Properties in Cyclic Plasticity. Zur Veröffentlichung eingereicht

Experimentelle Bestimmung und phänomenologische Modellierung des materiellen Kriech-Ratchetting

D. Besdo, L. Ostrowski, Institut für Mechanik, Universität Hannover

Phänomen des materiellen viskosen Ratchetting, (Sperrklinkeneffekt), [1]

Das Phänomen des Kriech-Ratchetting entspricht progressiven Deformationen $\Sigma \delta \varepsilon^{iv}$, die - Zyklus pro Zyklus- durch Überlagerung der primären (konstanten) und sekundären (zyklischen) Lasten entstehen, Abb. 1, (alternativ siehe [8]).

a) Durch zahlreiche isotherme oder atherme Experimente, an dünnwandigen Rohren, in breitem Last- und Temperaturbereich wurde die potentielle Neigung des Materials, **AlMgSi 0,5**, zum Ratchetting überprüft.

b) Die Bestimmung seiner Eigenschaften benötigte:

- Trennung zwischen transientem und asymptotischem Verhalten,
- Trennung zwischen zyklischer Verfestigung und Entfestigung. Beide haben unterschiedlichen Ursprung und verschiedene Folgen,
- Aufzeichnung der Differenz in den Dehnungen bei aufeinanderfolgenden quasi-geschlossenen Zyklen. Setzt man kleine Gesamtdeformationen voraus, so ist auch die inelastische Hysteresisbreite $\Delta \varepsilon^{iv}$ klein, d.h. die Zuwächse $\delta \varepsilon^{iv}$ sind noch kleiner, sie sind also Effekte zweiter Ordnung.

Experiment I: Multistep-Verfahren, Abb. 2

Methode: in Analogie mit den Untersuchungen an 304 Stainless Steel, [2].

Die Versuche erfolgten bei zwei Temperaturen: $\vartheta = 100^\circ\text{C}$ und $\vartheta = 150^\circ\text{C}$.

Die charakteristischen Größen bildeten, [3]:

- * die maximale Umfangsspannung σ_{RAT} in den zero-to-tension-Versuchen,
- * die Zykluszeit $2 \cdot t_{\text{R}}$ (rise time) eines Ratchetting-Zyklus und
- * die Anfangsdehnung $\Delta \varepsilon_{\text{GES}}$ des ersten dehnungsgesteuerten Schrittes OA.

Lastgeschichte I:

Die maximalen Spannungen σ_{RAT} wurden aus dem monotonen Zugversuch OA bei der Gesamtdehnung $\Delta \varepsilon_{\text{GES}} = 0.7\%$ ermittelt.

Lastgeschichte II:

Hier wurden die maximalen Spannungen σ_{RAT} durch den monotonen Zugversuch OA gefolgt durch die Relaxation $A_0 A_i$ mit variierten Haltezeiten t_{REL} ermittelt.

Ergebnisse: Die Versuche zeigen deutlich, daß die beiden Größen σ_{RAT} - die maximalen Spannungen des zyklischen Abschnittes BC - und die Relaxationszeit t_{REL} im Abschnitt $A_0 A_i$ einen signifikanten Einfluß auf die akkumulierte Ratchetting-Deformation ε_{RAT} haben. Der viskose Anteil der Spannungen bildet hier die eigentliche Antriebskraft der viskosen Deformationen. Bei der schrittweise erfolgten Reduzierung von σ_{RAT} und der Verkürzung von t_{R} verschwindet der viskose Charakter des Ratchetting - $\Delta \varepsilon_{\text{RAT}} \rightarrow 0$. Es kommt zu geschwindigkeitsunabhängigem Materialverhalten, und bei kleinen maximalen Spannungen kann sogar negatives Ratchetting eintreten, Abb. 3.

Experiment II: Abb. 4

Verglichen werden: stationäres*) Kriechen (Geschichte I), zyklisches Kriechen mit konstanten maximalen Spannungen und veränderlicher Schwingbreite (Geschichte II), und zyklisches Kriechen mit konstanter Schwingbreite und veränderlichen maximalen Spannungen (Geschichte III). Abb. 5 zeigt die experimentellen Ergebnisse für die Temperatur $\vartheta = 150^\circ\text{C}$. Die zyklischen Lasten (mit Haltezeit) entsprechen drei Zyklusperioden - 60., 6. und 0.6 sec.. Die Experimente wurden bei $\vartheta = 150^\circ\text{C}$ bis zum Bruch durchgeführt - der kürzeste Versuch dauerte ca. 8 Std., der längste ca. 300 Std.. Alle Experimente bei $\vartheta = 100^\circ\text{C}$ dauerten 500 Std. und markieren Anfang des sekundären Bereichs.

Ergebnisse: Materialverhalten

Das untersuchte Materialverhalten entspricht dem **unterbrochenen Kriechen**.

- * Kriechdehnungen ε_{zy}^{cr} bei zyklischen Lasten sind immer kleiner als Kriechdehnungen ε_{st}^{cr} bei maximalen stationären Lasten σ_{max} und größer als Kriechdehnungen ε_{st}^{cr} bei mittleren stationären Spannungen σ_{mit} .
- * Mit steigenden mittleren Spannungen σ_{mit} verschieben sich die Kriechdehnungen ε_{zy}^{cr} zu größeren Werten.
- * Mit zunehmender Zyklusfrequenz verringern sich die ε_{zy}^{cr} .

Damit wurden die Restriktionen für mathematische Beschreibung festgelegt. Die $\varepsilon_{st}^{cr}(\sigma_{max})$ bilden hier die obere Schranke, die $\varepsilon_{st}^{cr}(\sigma_{mit})$ die untere Schranke für die Dehnungen aus zyklischen Versuchen.

Eine konsistente Erweiterung des anisotropen Kriech-Modells nach Malinin, modifizierter Algorithmus für zyklische Lasten, [4]

Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen deuten auf einen anisotropen Kriechcharakter. Ähnlich wie bei der Plastizität wird der Spannungstensor in einen aktiven und einen passiven Anteil zerlegt (Hencky).

Annahmen über:

- * Kriechinkompressibilität
- * Existenz eines Kriechpotentials $f = \frac{3}{2} \beta_{ij} \beta_{ij} - [\Phi(\xi_e^{cr})]^2 = 0$ (1)
- * und Kriechintensität als Produkt zweier Funktionen

$$\xi_{ij}^{cr} = G(\vartheta) \cdot Q(\alpha_e) \quad \text{und} \quad Q(\alpha_e) = \exp\left(\frac{\alpha_e}{b}\right) \quad (2,3)$$

führen im einachsigen homogenen Spannungszustand und mit dem *Bailey-Orowan-Ansatz* zu

$$\xi^{cr} = G \operatorname{sgn}(\sigma - x) \exp\left(\frac{|\sigma - x|}{b}\right); \quad dx = A(\sigma) d\xi^{cr} - D \operatorname{sgn}(x) \exp\left(\frac{|x|}{b}\right) dt. \quad (4,5)$$

Die Lösung dieses Problems, das durch nichtlineare Gleichung von Riccati-Typ beschrieben werden kann, führt für die Kriechdehnung ξ^{cr} zu

$$\xi^{cr} = \ln \left[\frac{(1 - p \exp(-2 \xi_{MIN}^{cr} \cdot a^2 \cdot t))}{(1 - p)} \right] / a^2 + \xi_{MIN}^{cr} \cdot t, \quad (6)$$

$$\text{mit } a^2 = A(\sigma) / b \quad \text{und} \quad p = (\xi_0^{cr} - \xi_{MIN}^{cr}) / (\xi_0^{cr} + \xi_{MIN}^{cr}). \quad (7,8)$$

*) stationär - wird hier als Kriechen bei konstanten Spannungen verstanden.

Die Kriechrate $\xi^{cr}(t)$ bei konstanter Spannung σ_i wird somit durch

$$\xi^{cr}(t) = \xi_{MIN}^{cr}(\sigma_i) \cdot \frac{1 + p \cdot \exp[-2 \cdot \xi_{MIN}^{cr}(\sigma_i) \cdot a_i^2(\sigma_i) \cdot t]}{1 - p \cdot \exp[-2 \cdot \xi_{MIN}^{cr}(\sigma_i) \cdot a_i^2(\sigma_i) \cdot t]} \quad (9)$$

dargestellt.

Sequentielle Parameteridentifikation

* stationäres Kriechen

Die Materialfunktion $a^2(\sigma_i)$ wird durch nichtlineare Optimierung mit quadratischer Zielfunktion für die diskreten Punkte ($\sigma = \text{konst.}$) identifiziert.

Die gemessenen Werte

- ξ_{MIN}^{cr} - der minimalen Kriechrate und
- ξ_0^{cr} - der Anfangskriechraten,
- ξ_{MIN}^{cr} - der Kriechdehnung am Ende der Übergangsbereiche und
- t_{MIN} - der Dauer des primären Kriechens,

bilden eine vollständige Identifikationsbasis für den stationären Fall.

* zyklisches Kriechen

Für den Fall der Stufenbelastung und der zyklischen Lasten sind weitere Parameter in folgender Sequenz zu identifizieren :

a) Parameter b ,

für $t \rightarrow \infty$;

$$\dot{\chi} \equiv 0 = A(\sigma_i) \cdot (\xi_{MIN}^{cr})_i - D \cdot G \cdot \exp\left(\frac{\sigma_i}{b}\right) \cdot (\xi_{MIN}^{cr})_i^{-1}, \quad (10)$$

$$\text{d.h.} \quad \frac{a^2(\sigma_i) (\xi_{MIN}^{cr})_i^2}{a^2(\sigma_j) (\xi_{MIN}^{cr})_j^2} = \exp\left(\frac{\sigma_i - \sigma_j}{b}\right) \longrightarrow b; \quad (11)$$

b) Materialfunktion $A(\sigma_i)$ aus:

$$A(\sigma_i) = a^2(\sigma_i) \cdot b \longrightarrow A(\sigma); \quad (12)$$

c) Materialparameter G , D und die χ_0 , χ_{MAX} aus

$$\xi_0^{cr}(t=0) = G \exp\left(\frac{\sigma_i - (\chi_0)_i}{b}\right), \quad \xi_{MIN}^{cr}(t \rightarrow \infty) = G \exp\left(\frac{\sigma_i - (\chi_{MAX})_i}{b}\right), \quad (13)$$

für $t \rightarrow \infty$;

$$a^2(\sigma_i) \cdot b \cdot (\xi_{MIN}^{cr})_i^2 = D \cdot G \cdot \exp\left(\frac{\sigma_i}{b}\right), \quad (14)$$

$$\dot{\chi} \equiv 0 = A(\sigma_i) \cdot G \cdot \exp\left(\frac{\sigma_i - (\chi_{MAX})_i}{b}\right) - D \cdot \exp\left(\frac{(\chi_{MAX})_i}{b}\right). \quad (15)$$

Der Index i entspricht der Nummer der Spannungsniveaus.

d) Der Restspannungsverlauf des stationären Kriechens ist demnach

$$\chi_i = \sigma_i + b \cdot \ln\left(G / \xi_i^{cr}(t)\right). \quad (16)$$

Die Parameteridentifikation c) und d) erfolgte mittels quadratischer Optimierung. Das Problem ist durch das parametrisch nichtlineare Gleichungssystem nicht eindeutig bestimmt. Als Ergebnis (Erreichen des Minimum) bekommt man hier mehrere Parametertripel. Eine Lösung bildet der initiierte Wert der Restspannung $\chi_o(\sigma_{MIN})$ für die kleinste nominelle Spannung σ_{MIN} . Dieser Schlüsselwert wurde im Multistep-Verfahren experimentell bestimmt.

Zyklische Belastung

Wenn die Haltezeiten und die Belastungs- und Entlastungsdauer wie im Experiment II gleich oder vergleichbar sind, dann haben die entsprechenden Dehnungsänderungen in den einzelnen Schritten eine ähnliche Größenordnung.

Die Vernachlässigung der Dehnungszuwächse der transienten Lastintervalle darf daher bei einem Mehr-Zyklen-Verfahren nicht zugelassen werden, [7].

Die Riccati-Gleichung ist bei transienten Spannungen nicht mehr geschlossen zu integrieren. Zum Lösen des modifizierten Gleichungssystems (4,5) wurde der "Backward Differentiation Formulae"- Algorithmus angewendet.

Für die moderaten Lastraten und beliebig große Spannungen wurde eine ratenabhängige Evolution der Restspannung $\dot{\chi}$

$$\dot{\chi} = \exp\left(\frac{b}{b_o}\right) \cdot \left(\frac{\dot{\sigma}}{\dot{\sigma}_o}\right) \cdot \left[A(\sigma) \xi^{cr} - D \exp\left(\frac{\chi}{b}\right) \right] \quad (17)$$

mit zusätzlichen Parameter b_o und $\dot{\sigma}_o$ eingeführt.

Die Parameter b_o und $\dot{\sigma}_o$ sind numerisch als $b_o = 1 \text{ MPa}$ und $\dot{\sigma}_o = 1 \text{ MPa sec}^{-1}$ gefunden worden. Sie erfüllen optimal (Fehlerquadratmethode) die Anfangswertbedingungen für initiierte Kriechraten $\xi_o^{cr}(\sigma_i)$ im monotonen Zugversuch.

An dieser Stelle wird auf viskoplastische Modelle nach Chaboche und Nouligias hingewiesen [5,6]. Der Übergang von geschwindigkeitsunabhängiger Plastizität zur Viskoplastizität erfolgt dort durch multiplikative Erweiterung der Dehnrates, z.B. in Form einer exponentiellen Funktion, die bei sehr hohen Lastraten zur Sättigung (asymptotischer Verfestigungszustand) führt.

Überführung in power-law breakdown-Bereich für zyklische Lasten:

- Die Materialfunktion $a^2(\sigma)$ wird jetzt durch eine numerische Interpolation für jeden inkrementellen Schritt $\Delta\sigma$ ermittelt.
- Für die Haltezeiten, d.h. bei $\sigma_2 \equiv \sigma_{MAX}$ oder $\sigma_1 \equiv \sigma_{MIN}$ sind die Kriechfunktion $\Delta\varepsilon^{cr}$ aus Gl.(6) und die Kriechrate ξ^{cr} aus Gl.(4) zu bestimmen.
- Die Kriechanfangsrate $\xi_o^{cr}(\sigma_2)$ für $t = t_o$ ist durch

$$\xi_o^{cr}(\sigma_2) = G \cdot \exp\left((\sigma_2 - \chi_o(\sigma_2))/b\right) \quad (18)$$

ausgedrückt.

- Der Koeffizient p ist hier aber durch die Gleichung

$$p(\sigma_2) = \left(\xi_o^{cr}(\sigma_2) - \xi_{MIN}^{cr}(\sigma_2) \right) / \left(\xi_o^{cr}(\sigma_2) + \xi_{MIN}^{cr}(\sigma_2) \right) \quad (19)$$

dargestellt, wobei die Anfangskriechrate $\xi_o^{cr}(\sigma_2)$ jetzt andere Gegebenheiten widerspiegelt, vergleiche Gl. (8), [3].

Literaturverzeichnis

- [1] Chaboche, J.L.; Nouailhas, D.: *Constitutive Modeling of Ratchetting Effects - Part I: Experimental Facts and Properties of the Classical Models*. In J. of Engng. Mat. Techn. **111** (1989), S. 384-392.
- [2] Ruggles, M. B.; Krempl, E.: *The Influence of Test Temperature on the Ratchetting Behavior of Type 304 Stainless Steel*. In J. of Engng. Mat. Techn. **111** (1989), S. 378-383
- [3] Ostrowski, L.: *Zum Kriech-Ratchetting einer Aluminiumlegierung bei hohen Spannungen im moderaten Temperaturbereich*. Hannover, Universität, Institut für Mechanik, Diss. 1992 (in Druck)
- [4] Malinin, N. N.; Khadjinsky, G. M.: *Theory of Creep with Anisotropic Hardening*. In Int. J. mech. Sci. **14** (1972), S. 235-246
- [5] Chaboche, J. L.: *Constitutive Equations for Cyclic Plasticity and Cyclic Viscoplasticity*. In Int. J. of Plasticity **5** (1989), S. 247-302
- [6] Nouailhas, D.: *Unified Modelling of Cyclic Viscoplasticity: Application to Austenitic Stainless Steels*. In Int. J. of Plasticity **5** (1989), S. 501-520
- [7] Mroz, Z.; Trampczynski, W.; Hayhurst, D. R.: *Anisotropic Creep Hardening Rule for Metals and its Application to Cyclic Loading*. In Int. J. of Plasticity **4** (1988), S. 279-299
- [8] Bree, J.: *Incremental Growth due to creep and plastic yielding of thin tubes subjected to internal pressure and cyclic thermal stresses*. In J. of Strain Analysis **3** (1968), S. 122-127

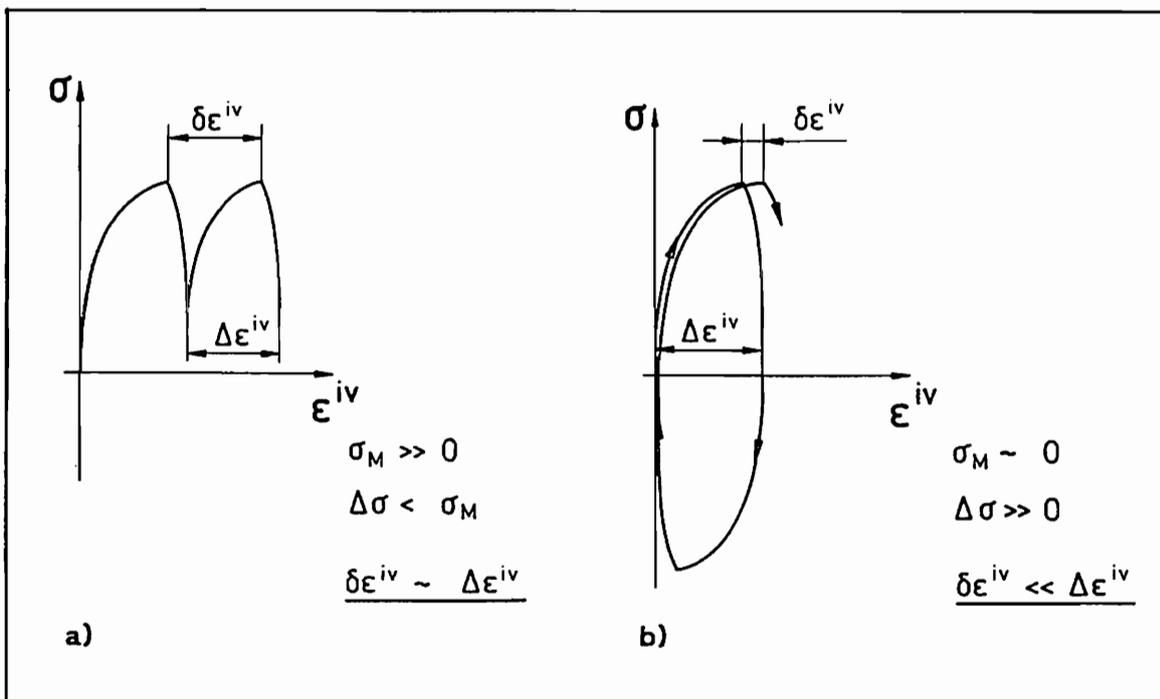


Abb. 1 Viskoses Ratchetting ohne Haltezeit

- a) quasi-wiederholter Zyklus
- b) quasi-umkehrbarer Zyklus

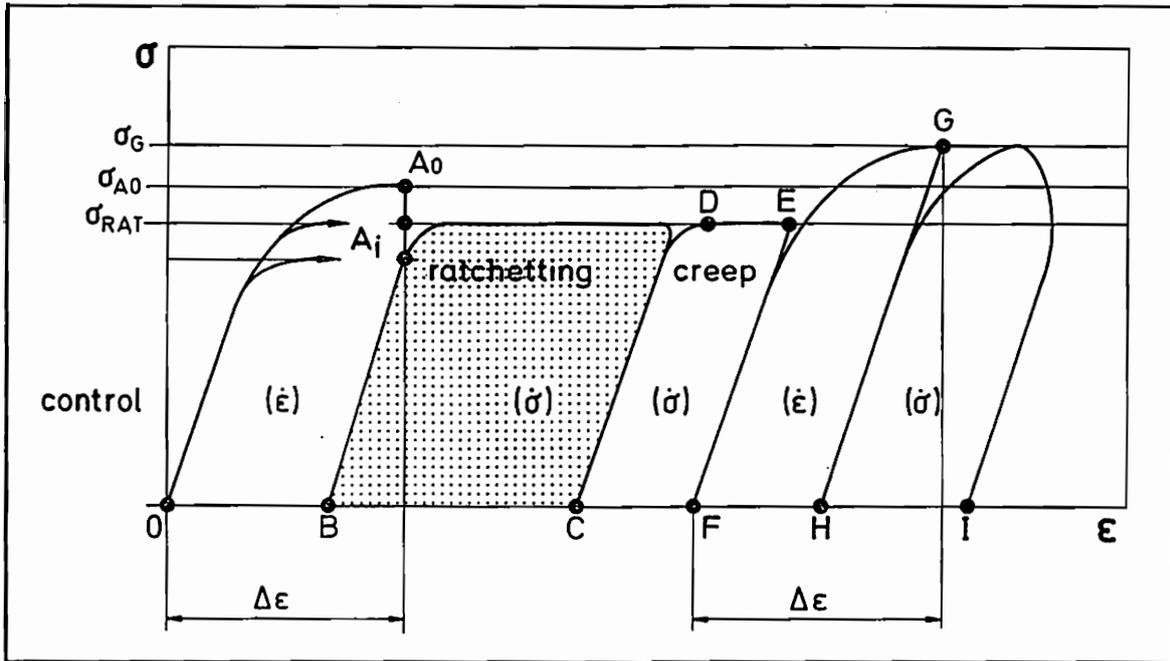


Abb. 2 Multistepversuch, Lastgeschichte I

OA₀ - dehnungsgesteuerte Belastung mit $\dot{\epsilon}_{OA} = 0.5 \cdot 10^{-5}$ bis $\Delta\epsilon_{GES} = 0.7\%$

A₀A_i - Relaxation (optional); 2.5, 5.0, 10.0 oder 60.0 Minuten

A_iB - dehnungsgesteuerte Entlastung $\dot{\epsilon}_{AB} = -\dot{\epsilon}_{OA}$ (sec⁻¹)

BC - 500 Zyklen, spannungsgesteuertes zero-to-tension Ratchetting mit $t_R = 25$ sec oder $t_R = 250$ sec

CD - spannungsgesteuerte Belastung

DE - Kriechen bei stationärer Last, $t_{CR} = 1$ h

EF - spannungsgesteuerte Entlastung

FG - dehnungsgesteuerte Belastung, wie OA₀

GH - dehnungsgesteuerte Entlastung, wie A_iB

HI - quasi-statischer spannungsgesteuerter Zyklus, $t_R = 30$ Minuten

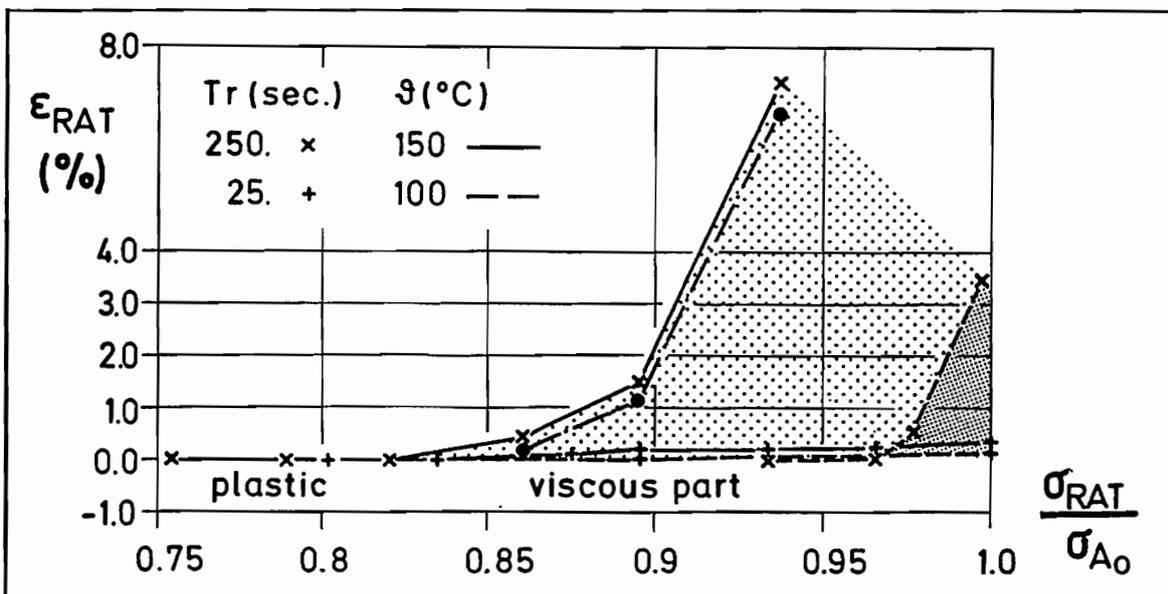


Abb. 3 Trennung des viskosen und geschwindigkeitsunabhängigen Bereichs

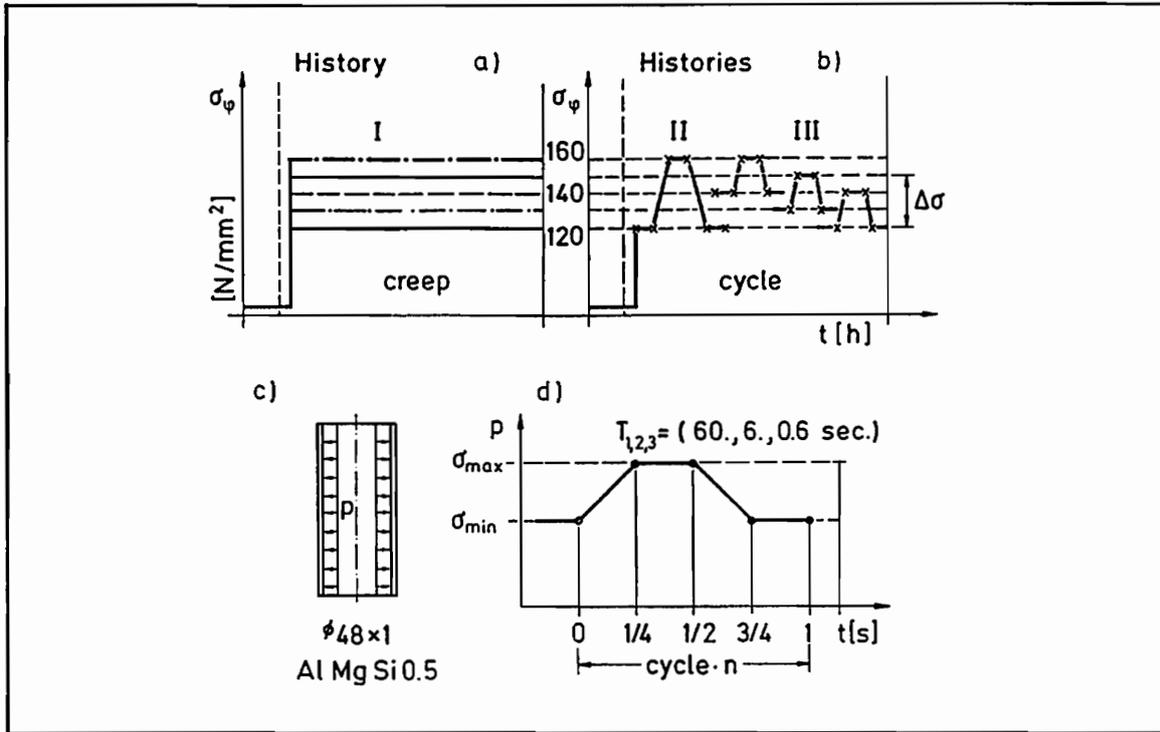


Abb. 4 Versuchsprogramm II,
 a) stationäres Kriechen, b) zyklisches Kriechen,
 c) Probant, d) Zyklusverlauf mit drei Lastfrequenzen

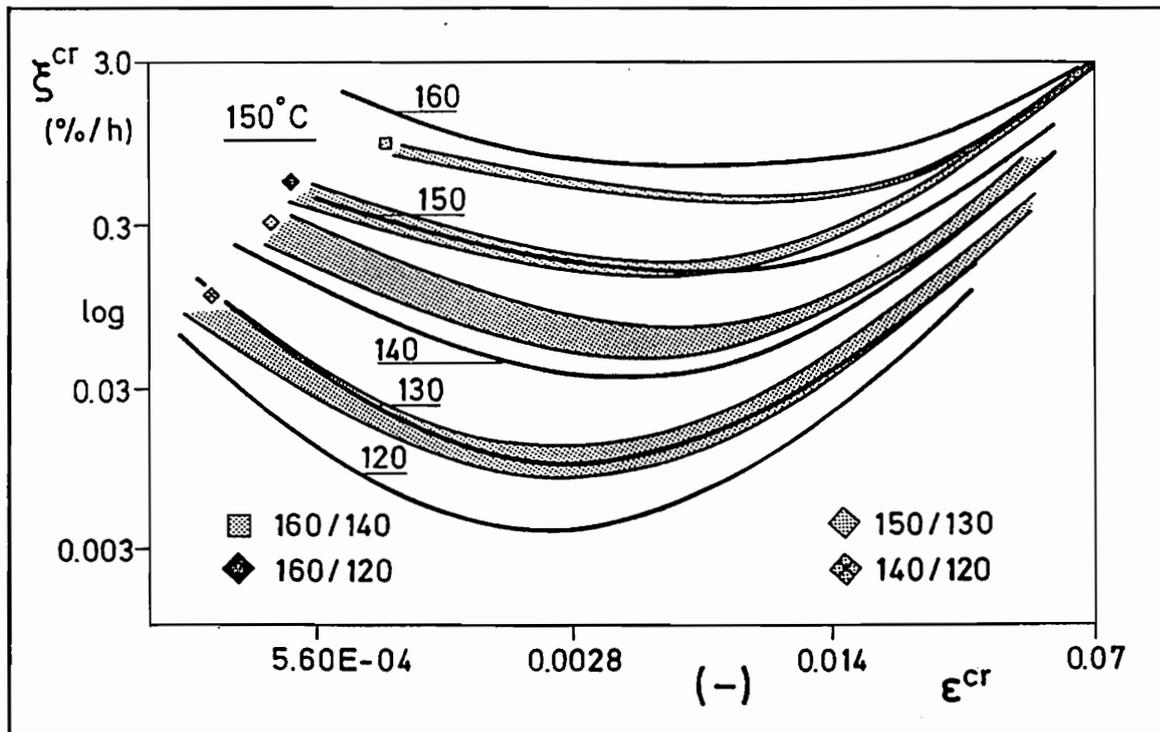


Abb. 5 Zustandsdiagramm $\xi^{cr} - \epsilon^{cr}$ für 150°C
 - stationäres Kriechen (durchgezogene Linie);
 - zyklisches Kriechen (schraffiertes Feld für Einhüllende bei drei Frequenzen)

COSSERAT-KONTINUUM FÜR PLASTISCHE UMFORMUNG VON POLYKRISTALLEN

D. Lachner, Lehrstuhl A für Mechanik, TU München

Einführung

In diesem Forschungsprojekt wird versucht durch die Anwendung eines erweiterten Kontinuums, des Cosserat-Kontinuums, Plastizität zu beschreiben. Durch dieses polare Kontinuumsmodell können auch unabhängige Drehungen der Materialbestandteile (der Materialstruktur) beschrieben werden. Hier werden als solche Materialbestandteile die Körner im polykristallinen Metall betrachtet. Um zu einer kontinuumsmäßigen Beschreibung zu kommen muß aber über die stark inhomogene Drehung der physikalischen Einzelkörner gemittelt werden. So gelangt man zur verschmierten Struktur des "Cosserat-Korns". Diese mittlere Korndrehung kann durch Ansätze des Cosserat-Kontinuums berechnet werden und ist mit durchgeführten Experimenten zu vergleichen.

Cosserat-Kontinuum

Das Cosserat-Kontinuum besitzt im Gegensatz zum gewöhnlichen Punktkontinuum drei zusätzliche Freiheitsgrade. Jeder Punkt des Cosserat-Kontinuums kann sich zusätzlich zu den drei translatorischen Freiheitsgraden noch um die drei Raumachsen drehen. Daraus resultieren Verkrümmungen und Verdrillungen des Materialinneren und man kann sich eine sogenannte Cosserat-Drehgeschwindigkeit Ω als Differenz zwischen dem makroskopischen Verdrehfeld aus den Verschiebungen und den freien, unabhängigen Drehungen der Materialbestandteile definieren.

Auf der statischen Seite treten nichtsymmetrische Spannungen und auch Momentenspannungen auf. Als beschreibende Gleichungen für die Plastizität stehen wie üblich das Gleichgewicht, die Verträglichkeitsbedingungen und das plastische Stoffgesetz mit Fließbedingung und assoziierter Fließregel zur Verfügung. Die entsprechenden Gleichungssätze werden ergänzt um die neuen Cosserat-Anteile. Als Fließbedingung können verschiedene v. Mises oder Tresca-ähnliche Ansätze verwendet werden. Darin gehen die mittlere Korngröße und zwei Konstanten als Werkstoffparameter ein.

Wendet man diesen Gleichungssatz mit v. Mises ähnlicher Fließbedingung auf die Kinematik der freien Torsion von axialsymmetrischen Voll- oder Hohlproben an, so sind zwei Differentialgleichungen für die Momentenspannung m_r und die relative Cosserat-Drehgeschwindigkeit Ω_r zu lösen. Dies geschieht mit entsprechenden Randbedingungen numerisch. Bei Anwendung einer Tresca-ähnlichen Fließbedingung ergibt sich eine vereinfachte, werkstoffparameter-unabhängige analytische Lösung.

Torsionsexperimente

In den Experimenten wird die mittlere Korndrehung von polykristallinem Reinstaluminium bei plastischer Torsion gemessen. Dazu wird die Kristallorientierung von etwa 60 markierten Körnern (Korndurchmesser ca. 1.5 mm) mit der v. Laue Röntgen-Rückstrahl-Methode gemessen. Aus der Orientierungsänderung vor und nach einzelner Verformungsschritte kann die Kristalldrehung berechnet werden. Die gemittelten Werte der Einzelkörner werden als mittlere Korndrehung bezeichnet. Um die für die v. Laue Technik nötige Korngröße zu erreichen ist eine Wärmebehandlung nötig. Experimente wurden durchgeführt für Voll- und Hohlproben mit Außendurchmesser 14 mm. Bei den Hohlproben traten wegen der dünnen Wandstärke im Größenbereich eines Korndurchmessers (1.5 mm) Instabilitäten auf, die die Ergebnisse ziemlich streuen ließen. Deshalb werden jetzt Versuche mit größeren Hohlproben (Außendurchmesser 39 mm, Wandstärke 8.5 mm) durchgeführt.

Ergebnisse

Die experimentell bestimmten Werte der mittleren Korndrehung werden mit den theoretischen Ergebnissen des Cosserat-Kontinuums verglichen. Anhand der Ergebnisse der ersten Vollprobe wurden die Werkstoffparameter im v. Mises ähnlichen Fließkriterium bestimmt. Die restlichen zwei Vollproben zeigen dann sehr gute Übereinstimmung mit der Theorie (mit v. Mises ähnlichem Fließkriterium). Die Abhängigkeit vom Korndurchmesser wird von der Theorie gut erfaßt. Die Theorie nach der Tresca ähnlichen Fließbedingung liefert größere Werte für die Relativdrehung.

Bei den Hohlproben (Durchmesser 14 mm) tritt aus erwähnten Gründen relativ große Streuung bei den Experimenten auf. Die Korngrößenabhängigkeit kann deshalb nicht mehr beobachtet werden. Jedoch liegen alle Experimente zwischen den Berechnungen mit der Tresca und der v. Mises ähnlichen Fließbedingung.

Die Experimente mit den größeren Hohlproben sind noch nicht abgeschlossen. Allgemein erkennt man, daß die Körner am Probenaußenrand dem makroskopischen Verdrehfeld hinterherhinken (also langsamer als dieses drehen). Dies kann man mit der gegenseitigen Behinderung der Körner im Materialinneren begründen.

Zusammenfassung

Es wird versucht mit Hilfe eines erweiterten Kontinuums, des Cosserat-Kontinuums, die Plastizität zu beschreiben. Insbesondere sollen auch unabhängige Drehungen des Materials modelliert werden. Die theoretischen Ansätze werden mit Experimenten verglichen. Dabei wird die Korndrehung mit der v. Laue Röntgen Methode gemessen. Ziel ist es, Größen wie innere Verkrümmungen und Verdrehungen oder auch Momentenspannungen als "innere Parameter" kontinuiersmäßig zu erfassen. Dies kann ein erster Schritt sein, um ihren Einfluß auf Materialverhalten wie Verfestigung und Schädigung zu studieren.

Literaturverzeichnis

- /1/ Lippmann, H.: Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fließens, *Acta Mechanica* 8 (1969), 255 - 284
- /2/ Besdo, D.: Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums, *Acta Mechanica* 20 (1974), 105 - 131
- /3/ Diepolder, W.: Das Cosserat-Kontinuum als Strukturmodell für plastische Korndrehungen, Dr.-thesis, TU München, 1989
- /4/ Diepolder, W., Mannl, V. and Lippmann, H.: The Cosserat-continuum, a model for grain rotations in metals?, *Int. J. Plasticity* 7 (1991), 313 - 328

Vergleich verschiedener Integrationsverfahren für ein elastisch-plastisches Stoffgesetz im Dehnungsraum

V. Dorsch, Institut für Mechanik, Universität Hannover

Das elastisch-plastische Stoffgesetz im Dehnungsraum nach Besdo [1] basiert auf einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen plastischen Anteil:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^{el} \cdot \underline{\underline{\hat{F}}} \quad (1)$$

Damit existieren drei Konfigurationen, die Referenzlage \tilde{K} , die aktuelle Lage K , sowie die Zwischenkonfiguration \hat{K} , von der aus der Übergang zu K für den betrachteten Körperpunkt rein elastisch erfolgt. In der Zwischenkonfiguration sind alle Materialpunkte lokal spannungsfrei. Folgende Deformationsmaße lassen sich bilden:

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}, \quad \underline{\underline{C}}^{el} = \underline{\underline{F}}^{elT} \cdot \underline{\underline{F}}^{el}, \quad \underline{\underline{\hat{C}}} = \underline{\underline{\hat{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\hat{F}}}, \quad \underline{\underline{\hat{B}}} = \underline{\underline{\hat{C}}}^{-1} \quad (2)$$

Die freie Energie Φ enthält bei elastischer Isotropie nur Invarianten von $\underline{\underline{C}}^{el}$, welche sich auch mit Tensoren der Referenzlage ausdrücken lassen:

$$\begin{aligned} I_1 &= \underline{\underline{C}}^{el} \cdot \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\hat{B}}}, \\ I_2 &= \underline{\underline{C}}^{el} \cdot \underline{\underline{C}}^{el} = \left(\underline{\underline{\hat{B}}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\hat{B}}} \right) \cdot \underline{\underline{C}} \end{aligned} \quad (3)$$

Aus der freien Energie erhält man das elastische Teilstoffgesetz für die 2.Piola-Kirchhoff Spannungen:

$$\underline{\underline{T}} = 2\bar{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{C}}} = G \left(\underline{\underline{\hat{B}}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\hat{B}}} - \underline{\underline{\hat{B}}} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} G (I_1 - 3) \underline{\underline{\hat{B}}} \quad (4)$$

Ein isotropes Fließkriterium wie das von Huber und Mises wird mit deviatorischen Greenschen Dehnungen in der Zwischenkonfiguration aufgestellt und mit Tensoren der Referenzlage ausgedrückt:

$$f = \frac{1}{4} \left(I_2 - \frac{1}{3} I_1^2 \right) - \frac{2}{3} y^2 \leq 0 \quad \text{mit } y = \frac{1+\nu}{E} Y \quad \text{und } Y \text{ als Fließspannung.} \quad (5)$$

Die aus der Forderung nach maximaler plastischer Verzerrungsleistung bei gleichzeitigem Erfüllen des Fließkriteriums hergeleitete Fließregel läßt sich bei kleinen elastischen Deformationen (Greenscher Tensor $\underline{\underline{\gamma}}^{el} \ll$ Einheitstensor $\underline{\underline{E}}$) wie folgt annähern:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\hat{B}}}} &= -\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\hat{C}}}} = -\frac{\lambda}{2} \left(\underline{\underline{\hat{B}}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\hat{B}}} - \frac{1}{3} I_1 \underline{\underline{\hat{B}}} \right), \\ \dot{\underline{\underline{\hat{C}}}} &= -\underline{\underline{\hat{C}}} \cdot \dot{\underline{\underline{\hat{B}}}} \cdot \underline{\underline{\hat{C}}} = \frac{\lambda}{2} \left(\underline{\underline{C}} - \frac{1}{3} I_1 \underline{\underline{\hat{C}}} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Integration durch sukzessive Approximation

Im Rahmen einer Numerik für das beschriebene Stoffgesetz entwickelte Tietze [2] einen halbanalytischen Integrationsalgorithmus.

Innerhalb eines plastischen Zeitschritts wird der Deformationsgradient als linear veränderlich angenommen:

$$\underline{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{F}}_n + \underline{\underline{\dot{F}}} t \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{\dot{F}}} = \left(\underline{\underline{F}}_{n+1} - \underline{\underline{F}}_n \right) / \Delta t. \quad (7)$$

Damit erhält man für den rechten Cauchy-Green Tensor einen quadratischen Ansatz:

$$\underline{\underline{C}}(t) = \underline{\underline{C}}_n + \underline{\underline{\dot{C}}}_n t + \underline{\underline{C}}_1 t^2 \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{C}}_1 = \frac{1}{\Delta t^2} \left(\underline{\underline{C}}_{n+1} - \underline{\underline{C}}_n - \underline{\underline{\dot{C}}}_n \Delta t \right). \quad (8)$$

Mit der Integrationsvorschrift nach Picard [3]

$$\hat{\underline{\underline{C}}}_{n+1}^{i+1}(\Delta t) = \hat{\underline{\underline{C}}}_n + \int^{\Delta t} \hat{\underline{\underline{C}}}_n^i \left(\hat{\underline{\underline{C}}}_{n+1}^i(t) \right) dt \quad (9)$$

ergibt sich nach Einsetzen von $\underline{\underline{C}}(t)$ aus Gl.8 ein Ansatz für $\hat{\underline{\underline{C}}}$:

$$\hat{\underline{\underline{C}}}_{n+1}^i(t) = a_0(t) \underline{\underline{C}}_n + a_1(t) \underline{\underline{\dot{C}}}_n + a_2(t) \underline{\underline{C}}_{n+1} + a_3(t) \hat{\underline{\underline{C}}}_n, \quad (10)$$

in dem nur noch die Koeffizienten a_i zeitabhängig sind. Wird dieser Ansatz nach der Zeit abgeleitet und mit der Fließregel (Gl.6) verglichen, ergeben sich Differentialgleichungen 1.Ordnung für die a_i . Nähert man nun den Fließparameter λ und die erste Invariante I_1 durch konstante Mittelwerte im Zeitschritt an, so lassen sich die Differentialgleichungen lösen. Ein Startwert für λ läßt sich aus der Konsistenzbedingung $\dot{f} = 0$ gewinnen. Die endgültige Berechnung erfolgt durch ein Einschlußverfahren, das den Wert des Fließkriteriums $f(\hat{\underline{\underline{B}}}, \underline{\underline{C}}, y) = 0$ und die plastische Volumenkonstanz $\det \hat{\underline{\underline{C}}} = 1$ berücksichtigt.

Integration durch Eulersche Verfahren

In Spannungsraumformulierungen haben sich zur Stoffgesetzintegration Einschrittverfahren (Mean-Normal, Radial-Return) bewährt [4, 5]. Übertragen auf den Dehnungsraum erfolgt hierbei die Stoffgesetzintegration durch eine lokale Iteration der plastischen Deformationen:

$$\hat{\underline{\underline{B}}}^{*i+1} = \hat{\underline{\underline{B}}}^i + \Delta \lambda^i \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{C}}} \Big|_i = \hat{\underline{\underline{B}}}^i + \Delta \lambda^i \underline{\underline{S}}^i. \quad (11)$$

Je nach dem ob eine Anfangsfließrichtung berücksichtigt wird, erhält man verschiedene Integrationsverfahren:

$\underline{\underline{S}}^i$	$\equiv \underline{\underline{S}}^i(\hat{\underline{\underline{B}}}^i, \underline{\underline{C}}_{n+1})$	implizit Euler backward
	$\equiv \frac{1}{2} \left\{ \underline{\underline{S}}^{el/pl}(\hat{\underline{\underline{B}}}_n, \underline{\underline{C}}^{el/pl}) \right.$	Trapezregel
	$\left. + \underline{\underline{S}}^i(\hat{\underline{\underline{B}}}^i, \underline{\underline{C}}_{n+1}) \right\}$	Crank-Nicholson

Der plastische Fließparameter $\Delta\lambda$ ergibt sich aus der Linearisierung der Konsistenzbedingung $f^{i+1} = f^i + \Delta f = 0$, die Forderung nach plastischer Volumenkonstanz geht mit

$$\underline{\underline{\hat{B}}}^{i+1} = \underline{\underline{\hat{B}}}^{*i+1} / \left(\det \underline{\underline{\hat{B}}}^{*i+1} \right)^{1/3} \quad (12)$$

ein. Bei Verwendung der Trapezregel ist ein elastisch-plastischer Übergang oder eine kurzfristige Entlastung zu beachten. Letztere äußert sich in einem negativen Wert der Belastungsbedingung:

$$b = \dot{f} \Big|_{\underline{\underline{\hat{B}}}=0} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}} \quad (13)$$

Für den Fall $b \geq 0$ wird $\underline{\underline{S}}^{el/pl} \equiv \underline{\underline{S}}_n$ gesetzt.

Vergleichende Rechnungen

Zunächst wurde mit den Verfahren ein ebener Schubversuch (simple shear), für den auch eine analytische Lösung angegeben werden kann, gerechnet. Die sukzessive Approximation lieferte wohl aufgrund des quadratischen $\underline{\underline{C}}$ -Ansatzes (vgl. Gl. 8) auch bei großen Deformationsschritten bis zu 15% hervorragende Ergebnisse (vgl. Abb. 1), während die anderen Verfahren die Schubterme zwar noch gut wiedergaben, die Effekte zweiter Ordnung aber nur sehr schlecht abbildeten.

Anschließend wurden alle drei Integrationsverfahren in ein FE-Programm implementiert und zur Berechnung eines reibungsfreien axialsymmetrischen Streckzieh- sowie eines Fließpreßvorgangs angewandt (vgl. Abb. 2). Da mit einer Zeitschrittsteuerung gerechnet wurde, machten sich die unterschiedlichen Eigenschaften der Verfahren durch die Größe der möglichen Zeitschritte, die Geschwindigkeit der Iteration und die Rechenzeit bemerkbar. Die Ergebnisse der Rechnungen waren praktisch identisch. Bei diesen Rechnungen zeichnet sich die Trapezregel bei kleineren plastischen Deformationen durch die schnellste Iteration und kürzeste Rechenzeit aus, während der Euler-backward Algorithmus die schlechtesten Eigenschaften aufwies. Bei größeren plastischen Formänderungen läßt der Vorsprung der Trapezregel nach; die sukzessive Approximation zeigt für alle Fälle gute Ergebnisse.

Literatur

- [1] Besdo, D.: Zur Formulierung von Stoffgesetzen der Plastomechanik im Dehnungsraum nach Ilyushins Postulat, Ing.-Archiv, 51(1981), 1-8
- [2] Tietze, P.: Finite-Element Anwendung eines isotropen elastisch-plastischen Stoffgesetzes im Dehnungsraum, VDI-Fortschritt Berichte, Reihe 18, Nr. 30, Düsseldorf, 1986
- [3] Laugwitz, D.: Ingenieurmathematik, BI-Hochschultaschenbücher Bd.61, Wien, Zürich, 1964
- [4] Simo, J., Taylor: Consistent Tangent Operators for Rate Independent Plasticity, Comp. Meths. appl. Mech. Engg., 48(1985), 101-118

[5] Schreyer, Kulak, Kramer: Accurate Numerical Solution for Elastic Plastic Models, J. Pressure Vessel Technology, 101(1979), 226-234.

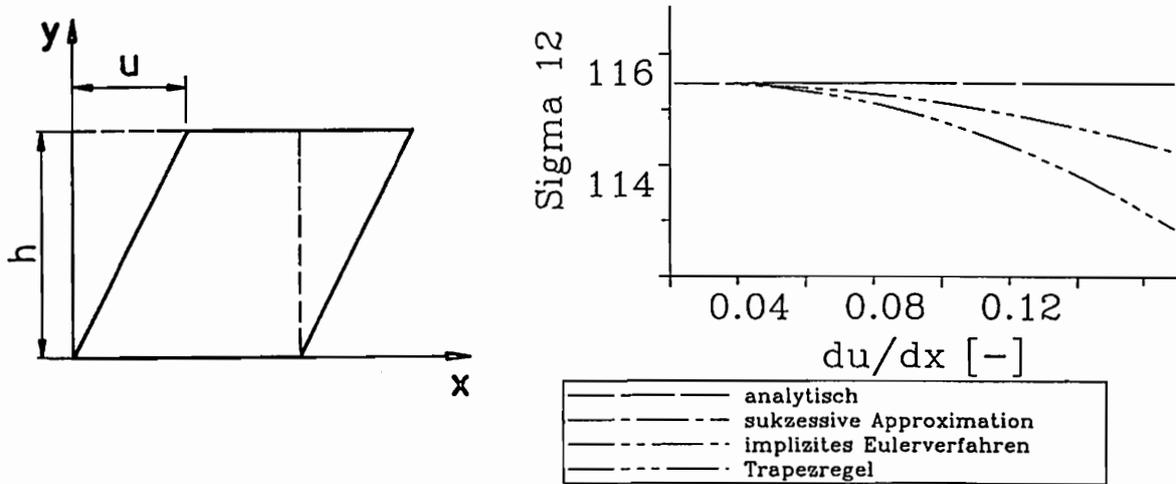
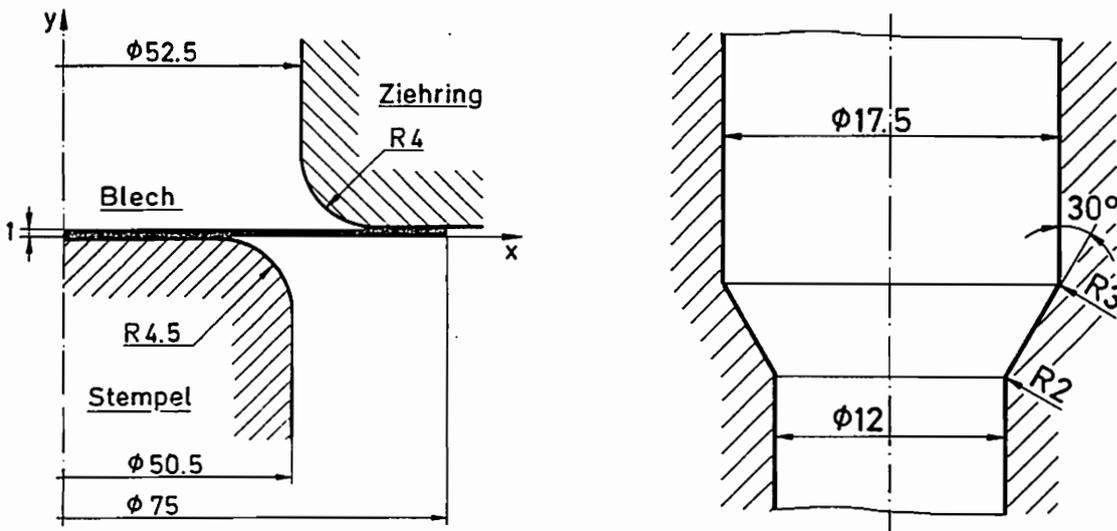


Abbildung 1: Schubspannungen beim simple shear Test



Streckziehen	Stempelweg (mm)	Iterationen	CPU-Zeit
sukz. Approx.	7.5	100%	100%
Trapezregel	7.5	98%	103%
impl. Euler	7.5	120%	123%
Fließpressen	Stempelweg (mm)	Iterationen	CPU-Zeit
sukz. Approx.	4.5	100%	100%
Trapezregel	4.5	91%	90%
impl. Euler	4.5	144%	139%

Abbildung 2: Streckzieh- und Fließpressvorgang

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoelasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chrosielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 78**