



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Thomas Heinrich Pingel

Beitrag zur Herleitung und
numerischen Realisierung eines
mathematischen Modells der
menschlichen Wirbelsäule

Heft Nr. 77



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

INSTITUT FÜR MECHANIK
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

THOMAS HEINRICH PINGEL

BEITRAG ZUR HERLEITUNG UND NUMERISCHEN REALISIERUNG
EINES
MATHEMATISCHEN MODELLS DER MENSCHLICHEN WIRBELSÄULE

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 77
1991

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

© 1991 Dr.-Ing. Thomas Heinrich Pingel

Oberspredey 34, 4620 Castrop-Rauxel

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder aus Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1987 - 1991 am Lehrstuhl für Allgemeine Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, deren Durchführung er jederzeit unterstützte und förderte.

Herrn Prof. Dr.-Ing. F. Baumgart sei für die Übernahme des zweiten Berichtes gedankt.

Herrn Prof. Dr.-Ing. B. Maidl gilt der Dank als "fachfremder" Prüfer.

Weiterer Dank gebührt Herrn Prof. Dr. med. J. Krämer und Herrn Prof. Dr.-Ing. L.-P. Nolte für die Förderung und das stetige Interesse an der Arbeit sowie für viele fruchtbare Diskussionen.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf

Prof. Dr.-Ing. F. Baumgart

Tag der Einreichung: 09.04.1991

Tag der mündlichen Prüfung: 12.07.1991

Zusammenfassung

Bereits die kleinste funktionale Einheit der Wirbelsäule, das Bewegungssegment nach JUNGHANNS, ist eine äußerst komplexe Struktur, die sich sowohl durch kinematische als auch materielle Nichtlinearitäten auszeichnet. Selbst bei der Betrachtung alltäglicher Bewegungen bzw. Belastungen treten sowohl große Verschiebungen und Verdrehungen, als auch große Dehnungen auf. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Entwicklung eines weitgehend wirklichkeitsgetreuen mathematischen Modells und seine approximative Lösung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente für ein solches Bewegungssegment vorgestellt.

Zur Beschreibung der physikalischen Situation wird die Umgeformte Lagrange-Jaumannsche Formulierung gewählt. Auf der Grundlage dieser Formulierung werden dreidimensionale finite Elemente entwickelt. Diese Elemente werden zur Beschreibung der Wirbel und der Knorpelgrundsubstanz des Anulus fibrosus verwendet. Besondere Beachtung wird einer möglichst realistischen Abbildung der unregelmäßigen Geometrie der posterioren knöchernen Strukturen geschenkt. Im besonderen gilt dies für die Modellierung kranialer und kaudaler Gelenkflächen der Wirbelbogengelenke. In diesem Zusammenhang wird auf die numerische Behandlung des Kontaktproblems, das bei einer Berührung der Gelenkflächen auftritt, eingegangen.

Die kollagenen Fasern des Anulus fibrosus und die ligamentären Strukturen, die das Bewegungsverhalten des Segmentes maßgeblich beeinflussen, werden gemäß ihrer anatomischen Lage durch Federelemente beschrieben.

Der Nucleus pulposus wird als nichtviskose inkompressible Flüssigkeit betrachtet. Er wird von denjenigen Kontinuumselementen eingeschlossen, die bei der Abbildung der Knorpelgrundsubstanz des Anulus fibrosus und der Endflächen der Wirbelkörper Verwendung finden. Diese Elemente erfüllen als Randbedingung die Inkompressibilität des umschlossenen Volumens, so daß eine Diskretisierung der Flüssigkeit nicht erforderlich ist.

Die Leistungsfähigkeit des vorgestellten Modells eines Bewegungssegmentes der Wirbelsäule wird anhand einiger Beispiele gezeigt, die sich an übliche experimentelle Situationen anlehnen.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	1
2. Anatomie des Bewegungssegmentes	6
2.1 Orientierung am Körper	6
2.2 Einteilung der Wirbelsäule	7
2.3 Lendenwirbel	7
2.4 Aufbau der Knochen	11
2.5 Aufbau der Gelenke	12
2.6 Zwischenwirbelscheiben	12
2.7 Bänder	14
2.8 Bewegungssegment	15
3. Biomechanik des Bewegungssegmentes	16
3.1 Mathematische Modelle	16
3.2 Die Bandscheibe als osmotisches System	18
3.3 Die dorsale Protrusion und der Bandscheibenprolaps	21
4. Analytisches Modell des Bewegungssegmentes	25
4.1 Einleitende Betrachtungen	25
4.2 Umgeformte Lagrange-Jaumannsche Formulierung	27
4.2.1 Kinematik der Bewegung	27
4.2.2 Der Deformationsgradient	29
4.2.3 Die Nansonsche Formel	31
4.2.4 Erhaltung der Masse	33
4.2.5 Erhaltung der Bewegungsgröße	34
4.2.6 Der Cauchysche Spannungstensor	35
4.2.7 Der Nominelle Spannungstensor	36
4.2.8 Der Jaumannsche Spannungsgeschwindigkeitstensor	38
4.2.9 Der Kirchhoffsche Spannungstensor	41
4.2.10 Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten	43
4.2.11 Hypoelastisches Materialverhalten	47
4.2.12 Berechnung der Spannungsinkremente	49

4.3	Isoparametrische dreidimensionale Elemente mit variabler Knotenzahl	51
4.3.1	Interpolationsfunktionen	51
4.3.2	Matrizen für die Formulierung der finiten Elemente	54
4.3.3	Numerische Bestimmung des Volumenintegrals	58
4.3.4	Lösung der Gleichgewichtsbedingung	59
4.3.5	Betrachtungen zur numerischen Effektivität	61
4.4	Von dreidimensionalen Elementen eingeschlossene ideale Fluide	63
4.4.1	Stoffgesetz idealer Fluide	63
4.4.2	Erweiterung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten	63
4.4.3	Modifikation der Tangential-Steifigkeitsmatrix	66
4.4.4	Modifikation des Lastvektors	69
4.4.5	Formulierung der Nebenbedingungen	70
4.4.6	Numerische Bestimmung des Flächenintegrals	70
4.4.7	Lösung des erweiterten Gleichungssystems	72
4.5	Umgeformte Lagrangesche Formulierung für eindimensionale Elemente	74
4.5.1	Bewegungsgleichung	74
4.5.2	Betrachtung eines geradlinigen Stabelementes	75
4.5.3	Formulierung des finiten Stabelementes mit zwei Knoten	76
4.5.4	Ermittlung der Materialeigenschaften aus Versuchsergebnissen	78
4.6	Betrachtung des Kontaktproblems	83
4.7	Aufbau des Finite-Elemente-Modells	86
4.7.1	Wirbel und Zwischenwirbelscheibe	88
4.7.2	Knöchernen Strukturen der Wirbelbogengelenke	93
4.7.3	Ligamente	93
4.7.4	Abbildungen	96
4.8	Beschreibung des Materialverhaltens	98
4.8.1	Knochen und Knorpelgrundsubstanz	98
4.8.2	Kollagene Fasern	99
4.8.3	Ligamente	102
4.9	Lagerungsbedingungen und Belastungen	105
4.10	Verwendete Soft- und Hardware	106

5. Anwendungsbeispiele	107
5.1 Allgemeines	107
5.2 Kompression	108
5.3 Flexion und Extension - Verifikation des Modells	111
5.4 Flexion und Extension mit Preload	120
5.5 Kompression und Volumenveränderung	130
5.6 Flexion und Extension mit Preload und Volumenveränderung	133
6. Ausblick	142
Literaturverzeichnis	143

1. Einleitung

Die aufrechte Haltung des Menschen ist in biologischer Sicht ohne Zweifel die Grundlage seiner Überlegenheit gegenüber anderen Wirbeltieren. Charakteristisch für die menschliche Wirbelsäule ist der scharfe Knick zwischen Kreuzbein und Lendenwirbelsäule, den wir als Tribut an den aufrechten Gang in Kauf nehmen mußten. Für die Wirbelsäule hat dies allerdings eine erhebliche Mehrbelastung zur Folge, aus der ein weitaus größerer Verschleiß im Vergleich zu allen anderen Wirbeltieren resultiert. Bei Vierfüßlerskeletten wurden weniger als drei Prozent mit Bandscheibenverschleißerscheinungen und ihren Folgen gefunden [8].

Obwohl bandscheibenbedingte (diskogene) Erkrankungen in der heutigen Zeit sehr häufig auftreten und als Zivilisationsschäden angesehen werden, leidet die Menschheit seit jeher unter ihnen. Bereits HIPPOKRATES (460-377 v. Chr.) [33] beschreibt das Ischiassyndrom, eine Neuralgie des Ischiasnervs (Nervus ischiadicus), die insbesondere durch lokale Kompression bei lumbalen Bandscheibenvorfällen verursacht wird. Er behandelte den Patienten mit Bädern und warmen Umschlägen oder durch Zerstörung des Gewebes (Kauterisation) mit dem Glüheisen. Der Kausalzusammenhang zwischen dem Bandscheibenvorfall und der Ischialgie ist allerdings erst 1934 von MIXTER und BARR [52] beschrieben worden, die eine Therapie durch Entfernung des Prolaps auf operativem Wege bevorzugten.

Bandscheibenbedingte Erkrankungen, die in der großen Mehrzahl auf degenerative Bandscheibenveränderungen zurückzuführen sind, haben große epidemiologische und volkswirtschaftliche Bedeutung. Pathologisch-anatomische Untersuchungen von SCHMORL und JUNGHANNS [74] haben gezeigt, daß jeder Mensch nach dem 30. Lebensjahr degenerative Veränderungen an den Bandscheiben aufweist. Die Statistiken der Krankenkassen und Rentenversicherungsanstalten der Bundesrepublik Deutschland weisen 20% aller Fälle von Arbeitsunfähigkeit sowie 50% aller vorzeitig gestellten Rentenanträge als Folgen bandscheibenbedingter Erkrankungen aus. In einigen Fabriken Englands fallen auf Grund bandscheibenbedingter Beschwerden im Bereich der Lendenwirbelsäule wie Kreuzschmerzen, Ischias und Hexenschuß pro Jahr bis zu 2600 Arbeitstage pro 1000 Arbeiter aus [90]. Nach Untersuchungen von KNEPEL [38] sucht jeder zehnte Patient eine Allgemeinpra-

xis und jeder zweite Patient eine orthopädische Fachpraxis mit einem Bandscheibensyndrom auf. Nach KRÄMER [40] handelt es sich bei 92,7% der Wirbelsäulenerkrankungen um degenerative Bandscheibenschäden. Von den bandscheibenbedingten Erkrankungen betreffen 61,9% den Bereich der Lendenwirbelsäule. An behandlungsbedürftigen Erkrankungen der Bandscheiben leiden vorwiegend Menschen mittleren Alters, wobei die 40- bis 50jährigen am häufigsten betroffen sind.

Die direkten Kosten bandscheibenbedingter Erkrankungen belaufen sich in den USA auf etwa 12 Milliarden Dollar pro Jahr. Einschließlich indirekter Kosten erreicht die Gesamtsumme den Betrag von 20 Milliarden Dollar. Exakte Vergleichszahlen liegen für die Bundesrepublik Deutschland bisher nicht vor. Entsprechend der geringeren Bevölkerungszahl ist jedoch von einer ähnlichen Größenordnung auszugehen, da die Krankheitsinzidenz sehr ähnlich ist.

Zu den tatsächlichen Beschwerden ergeben sich oft keine entsprechenden bzw. unterschiedliche röntgenologische oder pathologisch-anatomische Befunde [20]. Obwohl vielfach eine andere Meinung geäußert wird, treten Funktionsstörungen und Formveränderungen nicht grundsätzlich gemeinsam auf. Deformierungen können nicht mit Beschwerden gleichgesetzt werden, da für das Auftreten von Beschwerden die Entwicklungsdauer der Deformierung von entscheidender Bedeutung ist [40].

Diese Arbeit soll einen Beitrag leisten, das Bewegungs- und Tragverhalten des lumbalen Bewegungssegmentes auf Grund numerischer biomechanischer Studien besser zu verstehen und Grundlagen für neue mechanisch fundierte Richtlinien zur Prophylaxe und Therapie bandscheibenbedingter Erkrankungen zu erarbeiten.

Bereits die kleinste funktionelle Einheit der Wirbelsäule, das Bewegungssegment nach JUNGHANNS, ist eine äußerst komplexe Struktur, deren biomechanische Eigenschaften mit denen der gesamten Wirbelsäule vergleichbar sind [66]. Das Bewegungssegment besteht aus einer Zwischenwirbelscheibe und den beiden benachbarten Wirbeln. Weiterhin gehören dazu die Wirbelbogengelenke, das vordere und hintere Längsband, die Zwischenbogenbänder und alle Weichteile, die sich im Wirbelkanal, in den Zwi-

schenwirbellöchern sowie zwischen den übereinanderliegenden Dornfortsätzen und den Querfortsätzen befinden. Eine detaillierte Darstellung der Anatomie eines solchen Bewegungssegmentes erfolgt im zweiten Kapitel.

Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit der Biomechanik des Bewegungssegmentes. Im Rahmen biomechanischer Studien sind grundsätzlich die experimentellen, numerischen und radiologischen Untersuchungsmethoden zu unterscheiden. Zu berücksichtigen ist, daß eine große Anzahl klinisch-orthopädischer Fragestellungen nicht allein durch experimentelle biomechanische Untersuchungen zu beantworten sind. Im besonderen gilt dies für detaillierte Aussagen über den Kraftfluß in dem betrachteten Bewegungssegment. Mathematische Modelle auf der Grundlage begleitender experimenteller Untersuchungen sind daher unverzichtbar. Im Anschluß an die Betrachtung bestehender mathematischer Modelle zur Biomechanik des Bewegungssegmentes werden klinisch relevante Fragestellungen aufgezeigt, die mit einer Reduktion des Volumens des Nucleus pulposus verknüpft sind.

Im vierten Kapitel wird die Entwicklung eines weitgehend wirklichkeitstreuen mathematischen Modells eines Bewegungssegmentes dargestellt. Das zu behandelnde Problem zeichnet sich dabei sowohl durch kinematische als auch materielle Nichtlinearitäten aus. Selbst bei der Betrachtung alltäglicher Bewegungen bzw. Belastungen treten im Bewegungssegment zum einen große Verschiebungen und große Verdrehungen und zum anderen große Dehnungen auf.

Zur Beschreibung dieser physikalischen Situation wird die Umgeformte Lagrange-Jaumannsche Formulierung verwendet. Die darauf basierende Bewegungsgleichung wird unter Berücksichtigung eines hypoelastischen Materialverhaltens hergeleitet [47]. Auf der Grundlage dieser Formulierung werden dreidimensionale finite Elemente mit variabler Knotenzahl entwickelt, die zur Darstellung der Wirbel und der Knorpelgrundsubstanz des Anulus fibrosus dienen.

Der Nucleus pulposus wird als nichtviskose inkompressible Flüssigkeit betrachtet. Er wird von denjenigen Kontinuums-elementen eingeschlossen, die bei der Abbildung der knöchernen Endflächen der Wirbelkörper und der Knorpelgrundsubstanz des Anulus fibrosus Verwendung finden. Diese Ele-

mente erfüllen als Randbedingung die Inkompressibilität des umschlossenen Volumens, so daß eine Diskretisierung der Flüssigkeit nicht erforderlich ist. Die Bewegungsgleichung eines Körpers, in dem solche ideale Fluide eingeschlossen sind, wird hergeleitet [78]. Auf Grund der zu betrachtenden klinischen Fragestellungen ist dabei der Fall zu bedenken, daß das Volumen eines Fluids durch äußere Einwirkungen verändert wird. Dies führt zwar tatsächlich nicht zu einer Änderung der Dichte des Fluids, dennoch kann die Volumenveränderung am einfachsten durch eine fiktive Änderung der Dichte simuliert werden. Die Berücksichtigung solcher Fluide im Rahmen eines approximativen Lösungsverfahrens mit Hilfe der Methode der finiten Elemente wird eingehend dargestellt.

Die kollagenen Fasern des Anulus fibrosus und die ligamentären Strukturen, die das Bewegungsverhalten des Segmentes maßgeblich beeinflussen, werden durch Stabelemente beschrieben. Da die theoretischen Grundlagen zur Formulierung solcher Elemente allgemein bekannt sind, werden nur die Beziehungen angegeben, die für die Ermittlung der matriziellen Ausdrücke relevant sind. Ausführlich wird auf die auf Versuchsergebnissen basierende Bestimmung der Komponenten des Tensors der Materialeigenschaften eingegangen.

Die numerische Behandlung des Kontaktproblems, das bei einer Berührung der kranialen und kaudalen Gelenkflächen der Wirbelbogengelenke auftritt, ist Gegenstand weiterer Betrachtungen.

Die Geometrie des Finite-Elemente-Modells wurde an Hand eines bestimmten Wirbelsäulenpräparates ermittelt. In einem ersten Schritt erfolgte die computertomographische Betrachtung dieses Präparates. Die Entwicklung des Modells auf der Basis der daraus resultierenden Aufnahmen wird ausführlich dargestellt. Besondere Beachtung wurde dabei einer möglichst realistischen Abbildung der unregelmäßigen Geometrie der posterioren knöchernen Strukturen geschenkt. Vornehmlich gilt dies für die Modellierung der kranialen und der kaudalen Gelenkflächen der Wirbelbogengelenke.

Die elastischen Werkstoffgesetze der verschiedenen Elemente des Bewegungssegmentes werden auf der Basis umfangreicher experimenteller Unter-

suchungen bestimmt. Besondere Bedeutung kommt dabei der Erfassung der nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen der ligamentären Strukturen und der kollagenen Fasern des Anulus fibrosus zu.

Im sechsten Kapitel wird die Leistungsfähigkeit des vorgestellten mathematischen Modells an Hand von ausgewählten Anwendungsbeispielen gezeigt. In Anlehnung an experimentelle Studien werden dabei Belastungen des Bewegungssegmentes durch Kompressionskräfte und Flexions- bzw. Extensionsmomente untersucht. Darüber hinaus wird der Einfluß von Volumenveränderungen des Nucleus pulposus auf das Bewegungs- und Tragverhalten des Segmentes betrachtet. Es zeigt sich dabei eine außerordentlich gute Übereinstimmung der numerischen und experimentellen Ergebnisse, die auch vor dem Hintergrund der hohen Varianz in den Materialeigenschaften der menschlichen "Bauteile" positiv zu bewerten ist. Das entwickelte mathematische Modell ist somit für eine realistische Beschreibung des rein elastischen Bewegungs- und Tragverhaltens des Bewegungssegmentes geeignet. Im Gegensatz zu experimentellen Untersuchungen haben die numerischen Studien jedoch den besonderen Vorteil, detaillierte Aussagen über den Kraftfluß in dem betrachteten Bewegungssegment zu ermöglichen. An Hand einiger Beispiele, die bisher im wesentlichen unveröffentlicht waren, zeigt sich die hohe klinische Relevanz darauf basierender Analysen.

Den Abschluß der Arbeit bildet das sechste Kapitel mit einem Ausblick auf zukünftige numerische Studien.

2. Anatomie des Bewegungssegmentes

Im folgenden wird kurz auf die Anatomie des Bewegungssegmentes eingegangen. Weitere Einzelheiten können aus den Lehrbüchern und Atlanten der Medizin entnommen werden (s. z. B. [1, 10, 73, 87]).

2.1 Orientierung am Körper

Die Bezeichnungen für die Ebenen und die Richtungen des Körpers können der folgenden Abbildung entnommen werden.

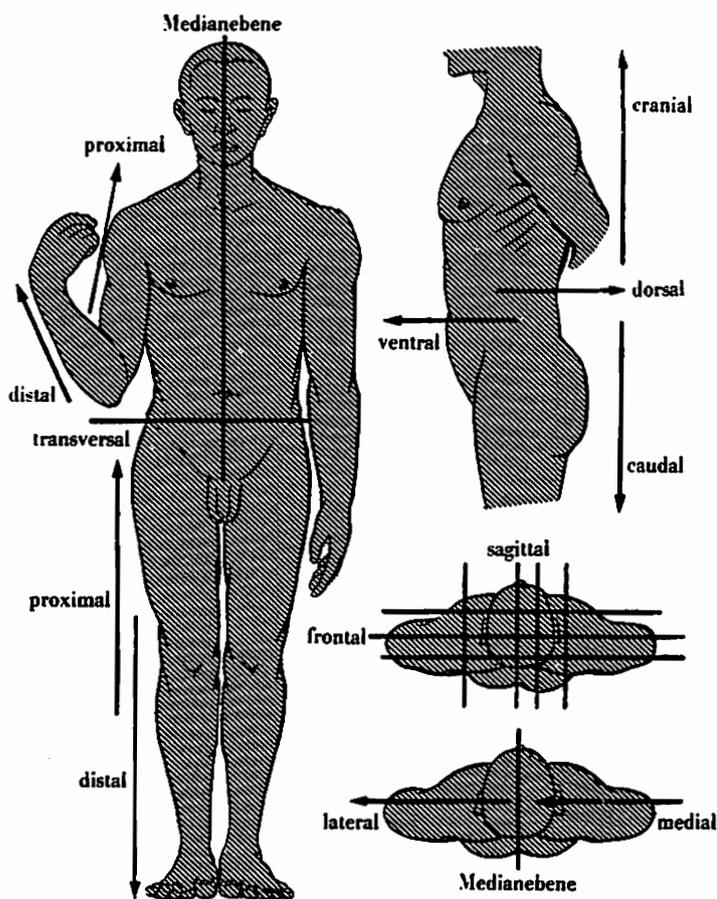


Abb. 2.1 Ebenen und Richtungen am Körper. (aus [1])

Bezeichnungen wie "oben" und "unten" gelten nur bei aufrechter Haltung und treffen bei einer anderen Lage des Körpers im Raum nicht mehr zu. Es werden demnach die Begriffe kranial (kopfwärts) und kaudal (fußwärts) verwendet.

2.2 Einteilung der Wirbelsäule

Die Wirbelsäule (*Columna vertebralis*) setzt sich als charakteristisches Kennzeichen der Wirbeltiere (*Vertebraten*) aus Wirbeln (*Vertebrae*) zusammen.

Die menschliche Wirbelsäule (Abb. 2.2) besteht aus 33-34 Wirbeln. Man unterscheidet 7 Halswirbel (*Vertebrae cervicales*), 12 Brustwirbel (*Vertebrae thoracicae*), 5 Lendenwirbel (*Vertebrae lumbales*), 5 zum Kreuzbein verschmolzene Kreuzbeinwirbel (*Vertebrae sacrales*) und 4-5 rudimentäre und oft verschmolzene Steißwirbel (*Vertebrae caudales*).

2.3 Lendenwirbel

Jeder Wirbel (Abb. 2.3) besteht aus einem Knochenstück, an dem man als Hauptanteile den Wirbelkörper (*Corpus vertebrae*) und den Wirbelbogen (*Arcus vertebrae*) unterscheiden kann.

Die Wirbelkörper nehmen im allgemeinen vom Schädel gegen das Becken an Volumen und Masse infolge der steigenden Belastung zu. Je größer die Körper werden, um so stärker entwickeln sich die oberen und unteren Endflächen, an denen die Zwischenwirbelscheiben anschließen, zu ebenen Flächen. Ein Horizontalschnitt durch den Wirbelkörper hat bei den Lendenwirbeln eine bohnenförmige Gestalt, wobei die Vorderfläche stark konvex und die Hinterfläche leicht konkav gebogen ist. In der Seitenansicht erscheint sowohl die Vorder- als auch die Hinterfläche leicht konkav, da die Ränder der knöchernen Wirbelkörperrandleisten über die Seitenflächen hinausragen.

Im oberen (kranialen) Bereich des Wirbelkörpers entspringt hinten (dorsal) der Wirbelbogen. An dem Wirbelbogen unterscheidet man die Wurzel (*Pediculus arcus vertebrae* bzw. *Radix arcus*) von dem eigentlichen Bogenstück, welches durch Fortsätze verstärkt wird.

Der Wirbelbogen umschließt mit der Rückfläche des Wirbelkörpers das Wirbelloch (*Foramen vertebrale*), welches das Rückenmark (*Medulla spinalis*) beherbergt. Bei Erwachsenen endet das Rückenmark auf der Höhe des

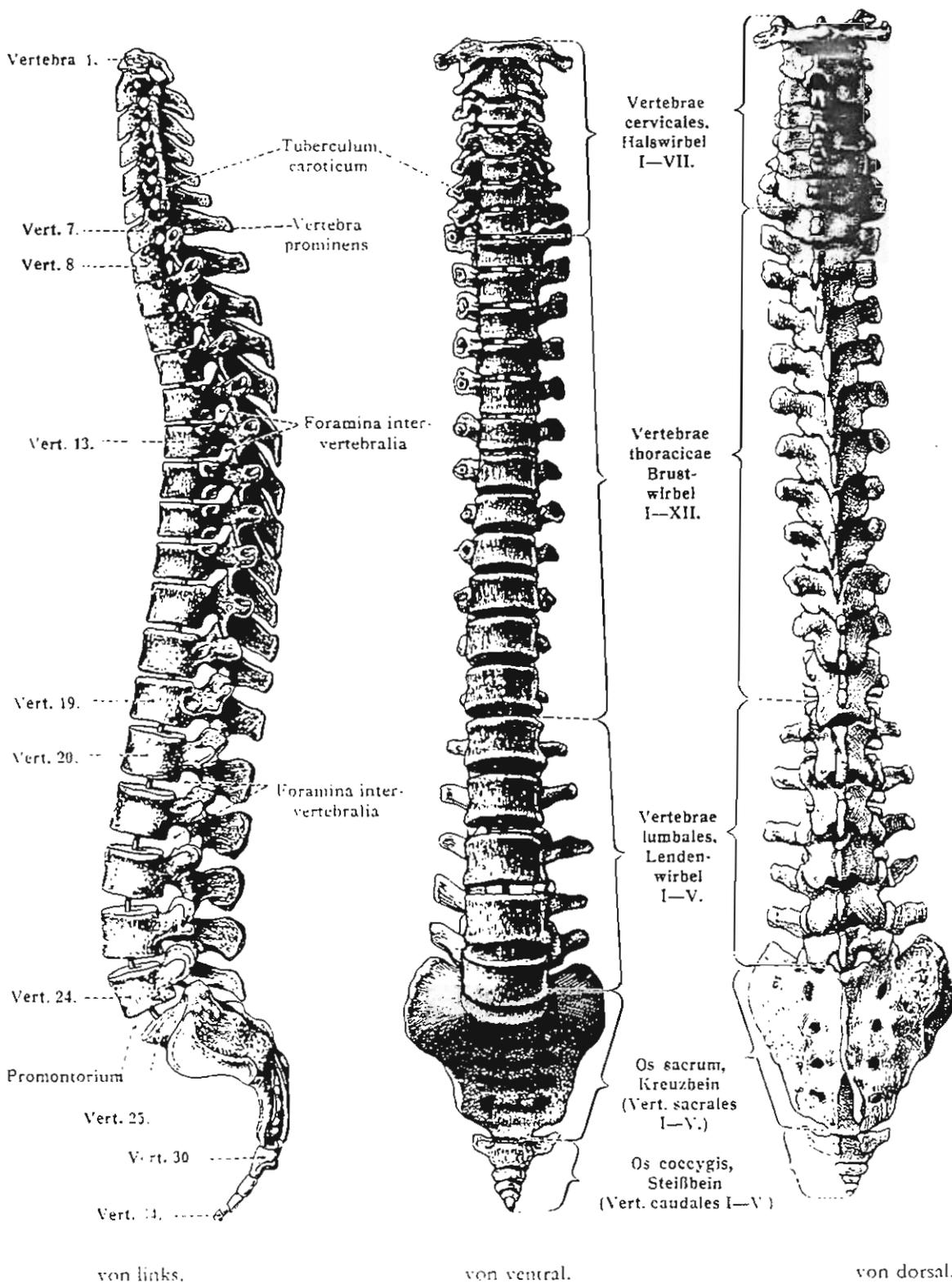
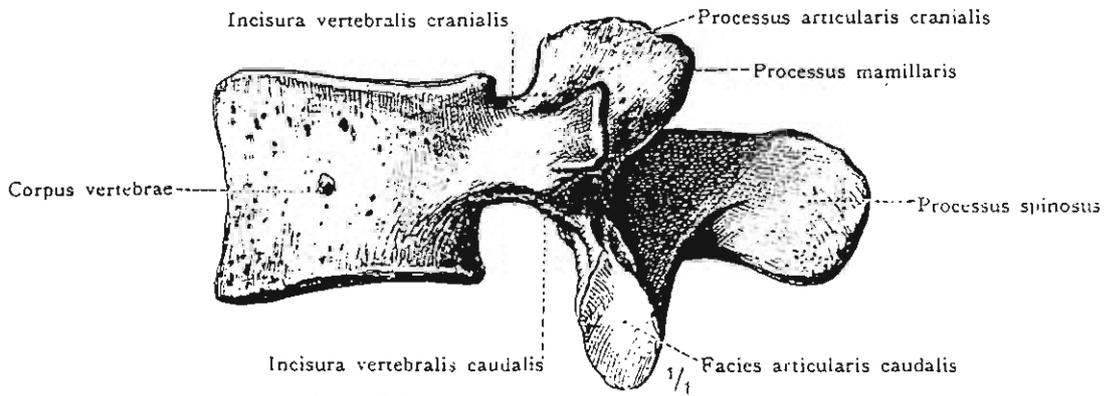
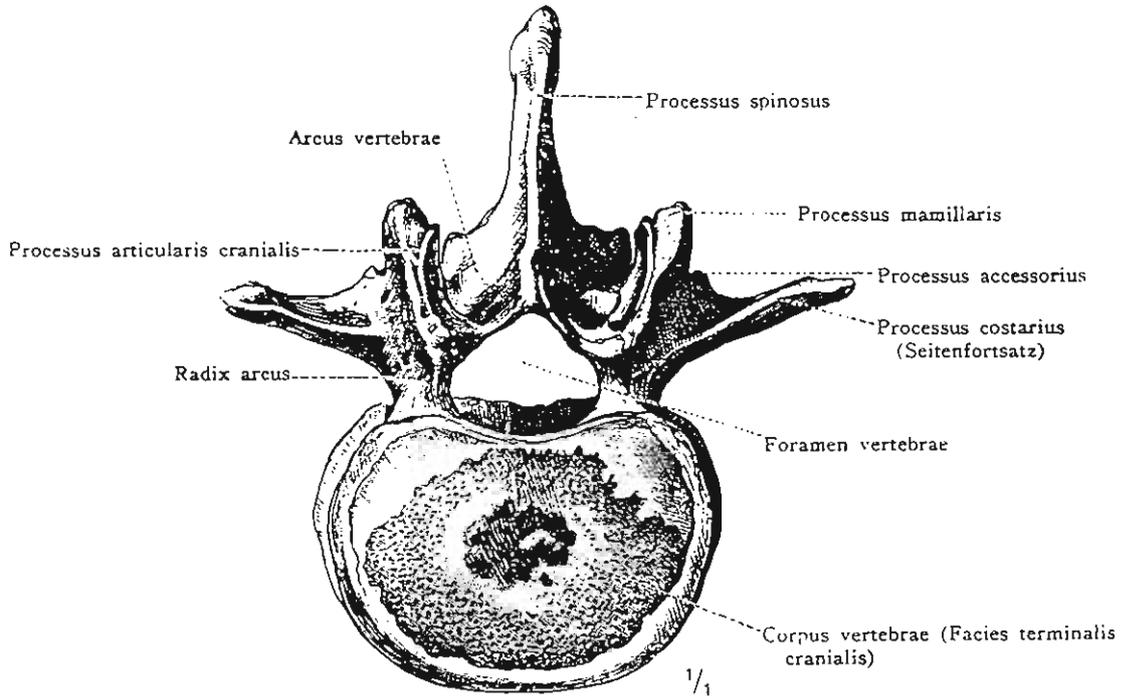


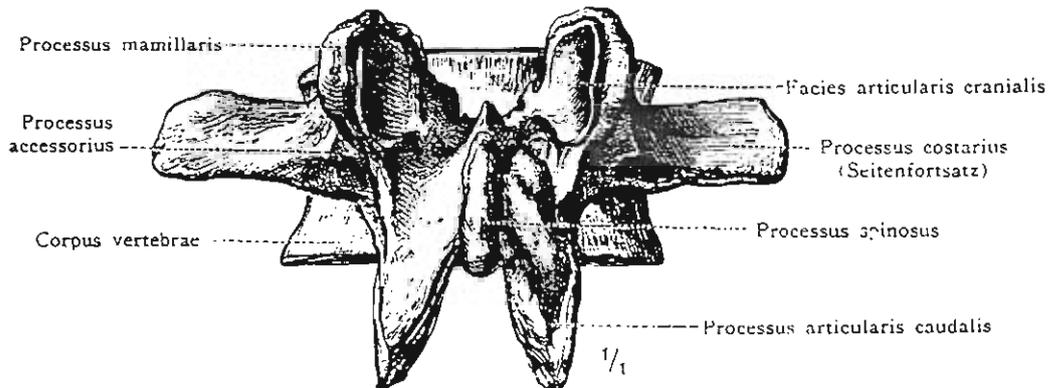
Abb. 2.2 Die Zusammensetzung der Wirbelsäule; Einteilung und Benennung der Wirbel. (aus [87])



Vertebra lumbalis II von links.



Vertebra lumbalis II von cranial.



Vertebra lumbalis II von hinten.

Abb. 2.3 Vertebra lumbalis II. (aus [87])

ersten oder zweiten Lendenwirbels. Je kleiner die erforderliche Querschnittsfläche des Foramen vertebrale und je größer der Wirbelkörper ist, desto weniger muß die Wurzel des Bogens seitlich ausladen, um den Kanal zu vergrößern. Bei den Lendenwirbeln verläuft sie nahezu rein sagittal. Das Foramen vertebrale wechselt infolgedessen seine Form. Im Bereich der Lendenwirbel ist es dreieckig und eng.

Die Wurzel des Bogens hat einen oberen flachen und einen unteren tiefen Ausschnitt (Incisura vertebralis cranialis und Incisura vertebralis caudalis), die bei benachbarten Wirbeln so zueinander stehen, daß das Zwischenwirbelloch (Foramen intervertebrale) (Abb. 2.2) für das Ganglion spinale und die hindurchtretenden Rückenmarksnerven (Abb. 2.4) gebildet wird.

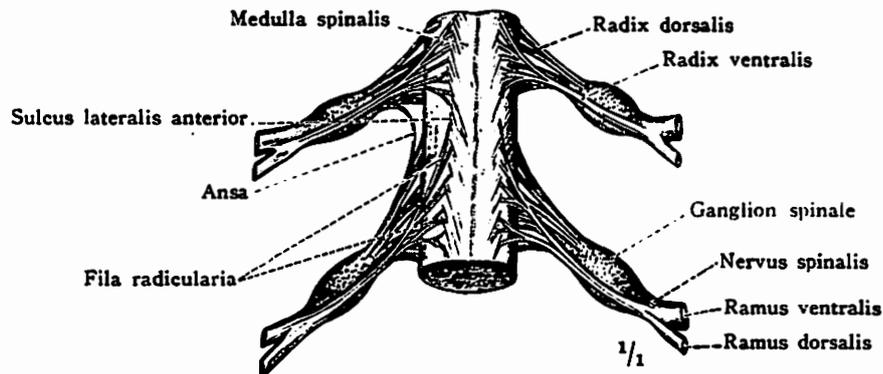


Abb. 2.4 Die Vereinigung der dorsalen und ventralen Wurzel des Rückenmarksnerven zu dem gemischten Stamm der Rückenmarksnerven, Nervus spinalis. Ganglion spinale. (aus [87])

Seitlich an den Bögen der Lendenwirbel entspringen die Rippenfortsätze (Processus costarii). Sie sind ihrer Herkunft nach Rippenanteile, die in den Wirbel einbezogen sind. Bleibt die knöcherne Verbindung aus, dann besteht eine Lendenrippe, wie es gelegentlich am ersten Lendenwirbel beobachtet wird.

Die seitlich vom Wirbelbogen ausgehenden Querfortsätze (Processus transversi) sind an den Halswirbeln und besonders an den Brustwirbeln ausgeprägt. Sie vervollständigen die Verbindung der Rippen mit der Wirbelsäu-

le. Im Bereich der Lendenwirbel sind die eigentlichen Querfortsätze kaum ausgebildet und stellen kleine, unwesentliche Knochenvorsprünge (Processus accessorii) dorsal an der Ursprungsstelle der Rippenfortsätze dar.

Jeder Wirbel steht mit seinem höheren und tieferen Nachbarn durch je zwei obere und untere überknorpelte Gelenkfortsätze in Verbindung (Processus articularis cranialis und Processus articularis caudalis). Sie entspringen am Wirbelbogen dorsal von der Incisura vertebralis cranialis bzw. der Incisura vertebralis caudalis und begrenzen das Foramen intervertebrale. Die Lage ihrer Gelenkflächen (Facies articularis cranialis und Facies articularis caudalis) ist dabei von besonderer Bedeutung für die Bewegungen der Wirbel gegeneinander. In Abhängigkeit von der Stellung der Gelenkflächen wird die relative Bewegung eines Wirbels in bezug auf seine Nachbarn, die ohne den Einfluß der Wirbelbogengelenke in den verschiedensten Richtungen erfolgen könnte, auf bestimmte Richtungen beschränkt und auch dort nur in gewissen Grenzen zugelassen. Bei den Lendenwirbeln stehen die Gelenkflächen senkrecht, fast sagittal und sind Teile eines zylindrischen Hohlmantels. Da die Achse dorsal vom Foramen vertebrale verläuft, ist eine Drehung in den Gelenken nicht möglich. Eine Ausnahme bilden die lumbosakralen Wirbelgelenke, die nahezu frontal ausgerichtet sind. Die Wirbelgelenke im Segment L4-L5 können eine Zwischenstellung einnehmen [72]. FARFAN [18] hat die wechselnde Anordnung der Wirbelbogen-Gelenkspalten dargestellt. Auf den kranialen Gelenkfortsätzen befindet sich ein Nebenhöcker (Processus mamillaris), der nur bei den oberen Lendenwirbeln deutlich ausgeprägt ist.

Von der Mitte des Wirbelbogens verläuft der Dornfortsatz (Processus spinosus) nach dorsal. Die Spitzen der Dorne sind unter der Haut zu fühlen oder auch zu sehen. Die Dornfortsätze der Lendenwirbel sind relativ kräftig und stehen nahezu horizontal.

2.4 Aufbau der Knochen

Der Knochen besteht aus der Knochenhaut (Periost), der Knochensubstanz und dem Knochenmark (Medulla ossium). Die Knochensubstanz setzt sich aus der festen Außenhaut (Substantia corticalis sive compacta) und einem inneren schwammartigen Gerüstwerk feiner Knochenbälkchen bzw. -platten

(Substantia spongiosa) zusammen. Das Knochenmark befindet sich in den Markhöhlen zwischen den Bälkchen der Spongiosa. Die Wirbelkörper gehören zu der Gruppe der kurzen Knochen, die im wesentlichen aus Spongiosa bestehen. Ihr Inneres wird von einem dichten System von Spongiosa durchzogen, und ein größerer zusammenhängender Markraum ist nicht vorhanden. An ihrer Außenseite verdickt sich die Spongiosa zur Corticalis. Nur an wenigen Stellen ist die Knochensubstanz so dicht gelagert, daß eine tatsächliche Compacta vorliegt. Die Endflächen der Wirbelkörper sind in einem schmalen äußeren Bereich glatt und ansonsten von sehr vielen kleinen Löchern durchsetzt, wobei in diesem Bereich im eigentlichen Sinne eine Corticalis fehlt.

2.5 Aufbau der Gelenke

Bei Gelenken (Articulationes) handelt es sich um bewegliche Verbindungen von Knochen, die durch Bindegewebe in sich geschlossen sind. Die Gelenkflächen (Facies articulares) der aneinandergrenzenden Knochen sind von hyalinem Gelenkknorpel (Cartilago articularis) überzogen und durch einen Spalt im Gewebe getrennt. Die Knorpelschicht ist für die Funktion des Gelenkes von herausragender Bedeutung, da sie durch ihre Formbarkeit vorhandene Inkongruenzen ausgleicht und das Gleiten der Gelenkflächen ermöglicht. Die Zwischenscheiben (Disci articulares), verschiebbare Gelenkflächen, die als elastische Polster wirken, dienen gleichermaßen zur Angleichung der Gelenkflächen. Die Gelenkkapsel (Capsula articularis) schließt das Gelenk nach außen vollständig ab. Die äußere fibröse Schicht besteht aus straffem kollagenem Bindegewebe (Membrana fibrosa), das sich am Rand der überknorpelten Flächen im Periost fortsetzt. Sie wird durch Seitenbänder (Ligamenta collateralia), die zur Führung und Sicherung des Gelenkes dienen, verstärkt. Die Gelenkinnenhaut (Membrana synovialis) enthält sehr viel Fettgewebe und ist dadurch weich und biegsam. Von ihr wird eine Schleimstoff enthaltende Flüssigkeit (Synovia) abgesondert, die während der Bewegung die Gelenkflächen schmiert.

2.6 Zwischenwirbelscheiben

Die Zwischenwirbelscheiben oder Bandscheiben (Disci intervertebrales bzw. Fibrocartilago intervertebrales) verbinden die einzelnen Wirbel zu

dem beweglichen System der Wirbelsäule. Die Zwischenwirbelscheiben sind aus Faserknorpel gebildet. In ihrem Inneren befindet sich ein flüssigkeitsreicher Gallertkern (Nucleus pulposus), der von dem Faserknorpelring (Anulus fibrosus) umschlossen wird. Der Anulus geht nach innen kontinuierlich in den Nucleus über. Die einzelnen Faserringlamellen verlaufen in konzentrischen Lagen spiralförmig von Wirbelkörper zu Wirbelkörper, wobei benachbarte Faserschichten grundsätzlich gegenseitig orientiert sind. Ventral und lateral sind die Lamellen zahlreicher und dicker als dorsal. Die Substanz zwischen den Fasern ist Knorpelgrundsubstanz. In Richtung der anliegenden Wirbelkörper werden die Zwischenwirbelscheiben durch dünne hyaline Knorpelplatten begrenzt. Bei der vollständig entwickelten Wirbelsäule werden die Endflächen der Wirbelkörper nicht gänzlich von den Knorpelplatten bedeckt, da diese an den inneren Rändern der knöchernen Wirbelkörperendleisten enden. Die Höhe der Knorpelplatten ist genau so groß wie die Höhe der knöchernen Randleisten gegenüber den Wirbelkörperendflächen. Die Fasern des Anulus fibrosus ziehen im Bereich der Knorpelplatten in diese hinein. In dem äußeren Bereich, in dem keine Knorpelplatten vorhanden sind, treten sie als Sharpey-Fasern in die knöchernen Randleisten ein und gehen in das Periost des Wirbelkörpers über. Infolgedessen ist eine besonders feste Verbindung zwischen Wirbelkörper und Zwischenwirbelscheibe und damit auch zwischen benachbarten Wirbelkörpern gewährleistet.

Die Lordose der Wirbelsäule im Bereich der Lendenwirbel ist durch die Form der Bandscheiben bedingt, die ventral höher sind als dorsal. Die Höhe der Bandscheiben nimmt von kranial nach kaudal zu, wobei die lumbosakrale Bandscheibe eine Ausnahme bildet. Sie ist ungefähr ein Drittel niedriger als die darüberliegende Bandscheibe.

Der Wassergehalt der Zwischenwirbelscheiben ändert sich in Abhängigkeit vom Lebensalter. Im Nucleus pulposus vermindert er sich von 90% im ersten Lebensjahr auf 74% im achten Lebensjahrzent [40]. Ein Vergleich des Wassergehaltes des Anulus fibrosus mit dem des Nucleus pulposus ergibt bei Neugeborenen einen deutlichen Unterschied von 10%, der mit dem Alter geringer wird [74]. Auf die Veränderungen des Wassergehaltes der Zwischenwirbelscheiben im Laufe eines Tages wird an späterer Stelle eingegangen.

2.7 Bänder

Die beiden Längsbänder erstrecken sich über die gesamte Wirbelsäule. Das breite vordere Längsband (Ligamentum longitudinale anterius) überzieht die Vorderflächen der Wirbelkörper, mit denen es fest verbunden ist. Es liegt den ventralen Anteilen des Anulus fibrosus dicht an, ist aber nach vielen Darstellungen der Anatomie nicht mit diesen verwachsen [28, 40, 86]. Neuere morphologische Studien vom PANJABI et al. [67] haben jedoch gezeigt, daß beide Längsbänder funktionell und anatomisch fest mit dem Anulus fibrosus verbunden sind. Das hintere Längsband (Ligamentum longitudinale posterius) verläuft im Inneren des Wirbelkanals. Im Bereich der Lendenwirbelsäule hat es die Form eines schmalen Streifens, der sich in Höhe der Zwischenwirbelscheiben verbreitert. Es ist fest mit dem Anulus fibrosus verwachsen, läßt jedoch nach Untersuchungen von STAHL [81] die dorsolateralen Bereiche der Zwischenwirbelscheiben zum Teil frei.

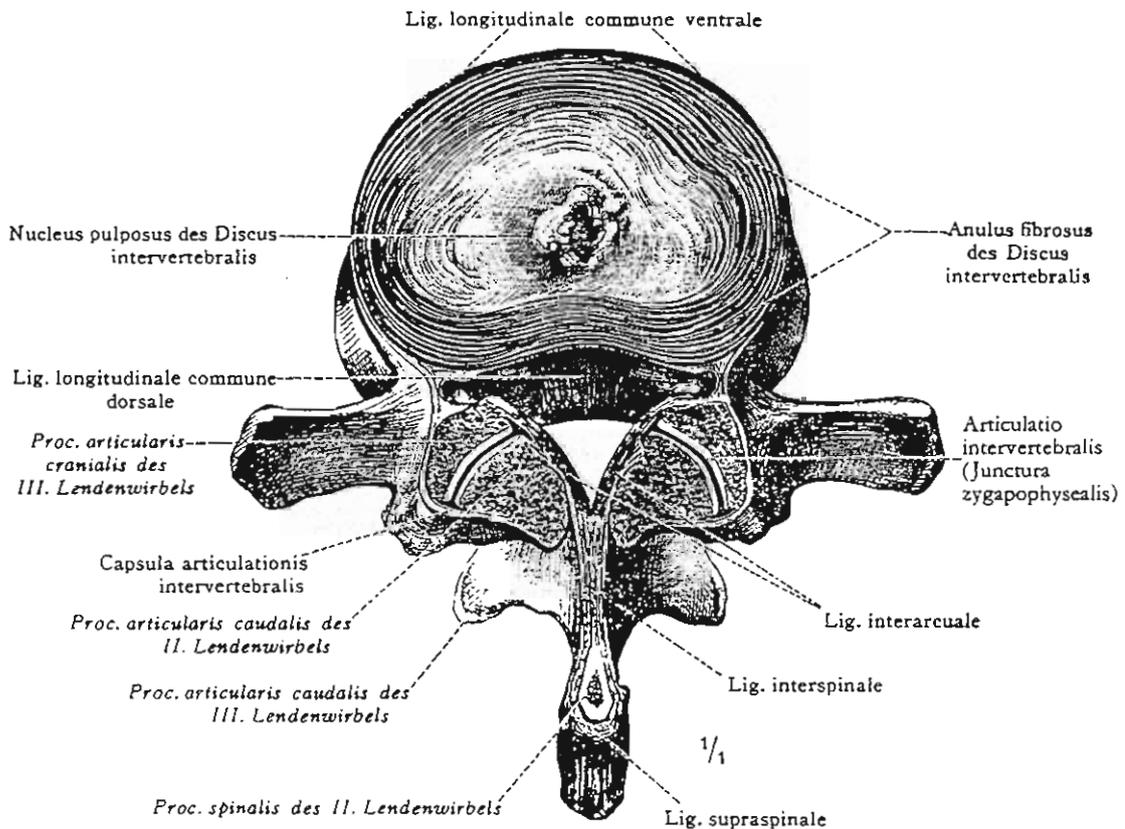


Abb. 2.5 Querschnitt durch den Discus intervertebralis zwischen dem zweiten und dritten Lendenwirbel. Kaudale Hälfte. (aus [87])

Die Zwischenbogenbänder (Ligamenta flava bzw. Ligamenta interarcualia) bestehen im Gegensatz zu allen anderen Bändern der Lendenwirbelsäule vorwiegend aus elastischen Fasern und haben daher ihre gelbliche Farbe. Sie spannen sich zwischen den Wirbelbögen und vervollständigen dorsal den Wirbelkanal.

Die Ligamenta intertransversaria verbinden die Querfortsätze benachbarter Wirbel. Im Bereich der Lendenwirbel sind sie an den Processus accessorii befestigt.

Die Ligamenta interspinalia und das Ligamentum supraspinale verlaufen zwischen den Dornfortsätzen. Die Fasern der Ligamenta interspinalia ziehen in der Regel von dem anterior-superioren Bereich des unteren Dornfortsatzes zu dem posterior-inferioren Bereich des darüberliegenden. In einigen Fällen läßt sich jedoch für den Verlauf der Fasern keine bestimmte Richtung identifizieren [67]. Das Ligamentum supraspinale verbindet die Spitzen der Dornfortsätze.

Die Lage der verschiedenen Ligamente wird durch Abb. 2.5 verdeutlicht.

2.8 Bewegungssegment

Das Bewegungssegment (JUNGHANNS [36], SCHMORL und JUNGHANNS [74]) ist die kleinste funktionelle Einheit in der Wirbelsäule. Es besteht aus einer Zwischenwirbelscheibe und den beiden benachbarten Wirbeln. Weiterhin gehören dazu die Wirbelbogengelenke, das vordere und hintere Längsband, die Zwischenbogenbänder und alle Weichteile, die sich in der gleichen Bewegungsschicht im Wirbelkanal, in den Zwischenwirbellöchern sowie zwischen den übereinanderliegenden Dornfortsätzen und den Querfortsätzen befinden.

3. Biomechanik des Bewegungssegmentes

Nach PANJABI und WHITE [66] ist das Bewegungssegment die kleinste funktionelle Einheit der Wirbelsäule, deren biomechanische Eigenschaften mit denen der gesamten Wirbelsäule vergleichbar sind. Im Rahmen biomechanischer Untersuchungen des Bewegungssegmentes werden die Relativbewegungen der Wirbel zueinander betrachtet. Für gewöhnlich erfolgt dazu eine Fixierung des unteren Wirbelkörpers und eine Belastung des oberen Wirbelkörpers durch unterschiedliche Kräfte bzw. Momente. Die daraus resultierenden Translationen und Rotationen sowie die davon abhängigen Größen sind Gegenstand der Studien [48, 49, 54, 55, 59, 60, 65, 89]. Grundsätzlich zu unterscheiden sind dabei die experimentellen, numerischen und radiologischen Untersuchungsmethoden. In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einem numerischen Ansatz, der auf der Basis experimentell erhobener Daten Aussagen über das Bewegungs- und Tragverhalten des lumbalen Bewegungssegmentes ermöglicht.

3.1 Mathematische Modelle

Eine große Anzahl klinisch-orthopädischer Fragestellungen kann nicht allein durch experimentelle biomechanische Untersuchungen beantwortet werden. Im besonderen gilt dies für die Bestimmung des Kraftflusses in dem Bewegungssegment. Mathematische Modelle auf der Grundlage begleitender experimenteller Untersuchungen sind daher unverzichtbar. Weiterhin ermöglicht erst ein solches numerisches Modell die Durchführung umfangreicher Parameterstudien zur Gewinnung qualitativer und quantitativer Aussagen.

Mathematische Modelle zur Biomechanik des Bewegungssegmentes wurden erst Ende der 60er Jahre in der amerikanischen Literatur von CHAFFIN [14] und ROBERTS und CHEN [71] vorgestellt. Sie beschränkten sich jedoch auf das zweidimensionale, sagittal-ebene Deformationsverhalten, wobei nur kleine Verschiebungen und Dehnungen zulässig waren. Bis zum heutigen Zeitpunkt sind eine Vielzahl weiterer mathematischer Modelle entwickelt worden. YOGANANDAN et al. [94] haben eine Aufstellung und Klassifikation der Modelle, die auf der Grundlage der Methode der finiten Elemente entwickelt wurden, angegeben.

Eines der leistungsfähigsten zweidimensionalen mathematischen Modelle haben NOLTE et al. [60] aufbauend auf den Arbeiten von BELYTCHKO et al. [5], MILLER et al. [51] und SCHULTZ et al. [76] entwickelt [54, 55, 59]. Dieses Modell basiert auf einer sagittal-ebenen Abbildung der Wirbelsäule, die einem seitlichen Röntgenbild zu entnehmen ist. Es besteht aus zwei starren Körpern zur Abbildung der Wirbelkörper sowie 15 Federn, mit denen die Weichteilstrukturen simuliert werden: vier Federn jeweils für die Bandscheibe und das Wirbelgelenk zur Wiedergabe ihrer Kompressions-, Schub- und Drehsteifigkeiten sowie sieben Federn für die ligamentären Strukturen (Abb. 3.1). Etwaige Implantate können durch entsprechende Rahmenkonstruktionen aus Biegebalken simuliert werden. In diesem Modell sind sowohl große Verschiebungen als auch große Verzerrungen zulässig. Die nichtlinear-elastischen Werkstoffgesetze der Federn sind auf der Grundlage umfangreicher experimenteller Studien ermittelt worden und finden in dem Modell Berücksichtigung.

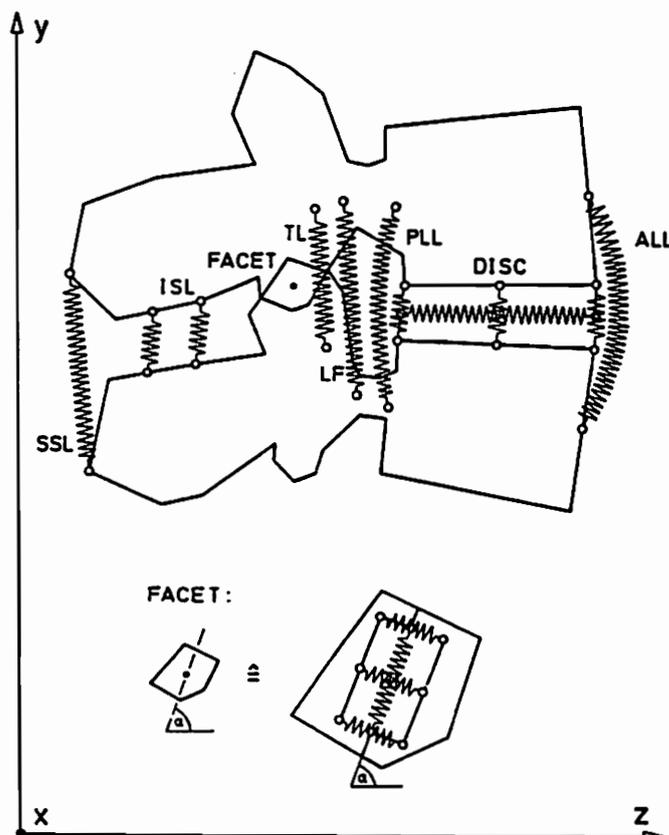


Abb. 3.1 Das mathematische Grundmodell für ein lumbales Junghanns'sches Bewegungssegment. (aus [54])

Mathematische Modelle, die nicht auf das sagittal-ebene Deformationsverhalten beschränkt sind, wurden im Laufe der letzten Jahre vorgestellt. BELYTSCHKO et al. [6] entwickelten ein axialsymmetrisches Modell, das KULAK et al. [42] erweiterten. Ein ebenfalls axialsymmetrisches Modell, in dem die tatsächliche Geometrie allerdings stark vereinfacht dargestellt ist, stellte SPILKER [80] vor. Eine wesentliche Einschränkung dieser Modelle resultiert daraus, daß ausschließlich axiale Lasten betrachtet werden können. Ein einfaches dreidimensionales Modell wurde von LIN et al. [43] gezeigt, wobei hier auf Grund der Vernachlässigung der posterioren Strukturen ebenfalls nur die Untersuchung axialer Belastungen sinnvoll ist. Komplexere dreidimensionale Modelle haben SHIRAZI-ADL et al. [78, 79], GOEL et al. [23, 24], HAKIM und KING [26] sowie YANG und KING [93] vorgestellt. In diesen mathematischen Modellen wird, wie auch im Rahmen dieser Arbeit, die Symmetrie der Wirbelsäule bezüglich der Medianebene verwendet, woraus eine Beschränkung auf die Lastfälle resultiert, bei denen die Belastung ebenfalls symmetrisch bezüglich der Medianebene ist.

Grundsätzlich bietet das hier vorgestellte mathematische Modell für die Biomechanik der menschlichen Wirbelsäule jedoch die Möglichkeit, die im täglichen Leben im allgemeinen komplexen Bewegungen in mehreren Ebenen in ihren Auswirkungen auf die Wirkungselemente eines einzelnen oder mehrerer Bewegungssegmente zu untersuchen.

3.2 Die Bandscheibe als osmotisches System

KRÄMER [40] beschreibt die Bandscheibe als osmotisches System, bei dem ein Stoff- und Flüssigkeitsaustausch zwischen dem Bandscheibeninnenraum und dem paravertebralen Gewebe bzw. der Spongiosa der angrenzenden Wirbel durch die Knorpelplatten und den Anulus fibrosus erfolgt (Abb. 3.2).

In den Weichteilen neben der Bandscheibe und in dem Gerüstwerk feiner Knochenbälkchen bzw. -platten der Wirbel herrscht der normale Gewebedruck, der als extradiskaler hydrostatischer Druck bezeichnet wird. Andererseits treten in der Zwischenwirbelscheibe in Abhängigkeit von der Belastung sehr unterschiedliche intradiskale hydrostatische Drücke auf. Gleichzeitig stellen sich sowohl extradiskal als auch intradiskal soge-

nannte onkotische Drücke ein. Der onkotische Druck setzt sich aus dem kolloidosmotischen Druck und dem Quelldruck zusammen. Als Osmose wird der Übergang des Lösungsmittels einer Lösung in eine stärker konzentrierte Lösung durch eine feinporige Membran, die zwar für das Lösungsmittel selbst, nicht aber für den gelösten Stoff durchlässig ist, bezeichnet. Der Ansaugdruck, der bei einem solchen osmotischen Vorgang von einer hochmolekularen Lösung auf ein Lösungsmittel einwirkt, wird als kolloidosmotischer Druck bezeichnet. Als Quelldruck wird der Druck bezeichnet, der einen quellbaren Körper bei einem entsprechenden Wasserangebot gegen Widerstände ausdehnt.

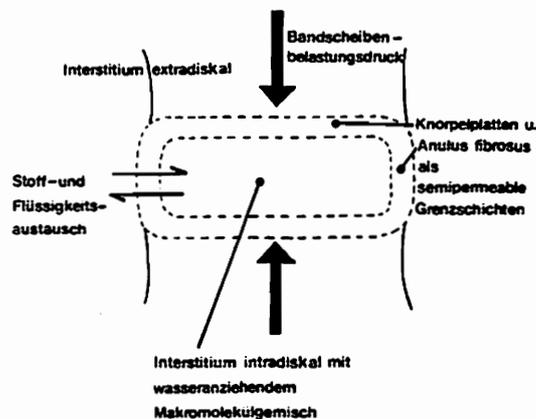


Abb. 3.2 Die Bandscheibe als osmotisches System. (aus [40])

Dem hydrostatischen und dem onkotischen Druck im Bandscheibeninnenraum stehen die entsprechenden Drücke außerhalb der Bandscheibe entgegen. Gewinnt eine der beiden Seiten ein Übergewicht, so kommt es zu Verschiebungen von Flüssigkeiten und Stoffwechselschlacken. In der Bandscheibe nehmen sowohl der hydrostatische als auch der onkotische Druck relativ hohe Werte an, wobei diese den Flüssigkeitsstrom gegensätzlich beeinflussen. KRÄMER [40] hat in Diffusionsversuchen festgestellt, daß Flüssigkeiten und Stoffwechselschlacken ab einer Belastung von 800 Newton (N) aus der Bandscheibe herausgepreßt werden, was zu einer Verminderung des Volumens des Bandscheibeninnenraums führt. Dieser Prozeß wird dadurch begrenzt, daß die resultierende Konzentrationserhöhung des Makromolekülgemisches im Bandscheibeninnenraum mit einem gesteigerten onkotischen Druck verbunden ist. Bei Belastungen unter 800 N findet ein umgekehrter Vorgang statt.

Eine Verminderung bzw. Erhöhung des Volumens des Bandscheibeninnenraums geht einher mit einer entsprechenden Veränderung der Höhe des Zwischenwirbelabschnittes. Eine Belastung der Bandscheibe, die zu einer Verminderung ihrer Höhe führt, ergibt sich z. B. im Sitzen und im Stehen, wohingegen das Liegen zu einer Zunahme der Höhe führt. Dieser Zusammenhang erklärt den Körperlängenverlust beim Menschen im Laufe eines Tages, der durchschnittlich 17,6 mm beträgt [40].

NACHEMSON und MORRIS [53] nahmen die ersten intradiskalen Druckmessungen in der dritten Lumbalbandscheibe in vivo beim Menschen vor. Sie haben dazu eine Nadel, die mit einer druckempfindlichen Polyäthylenmembran

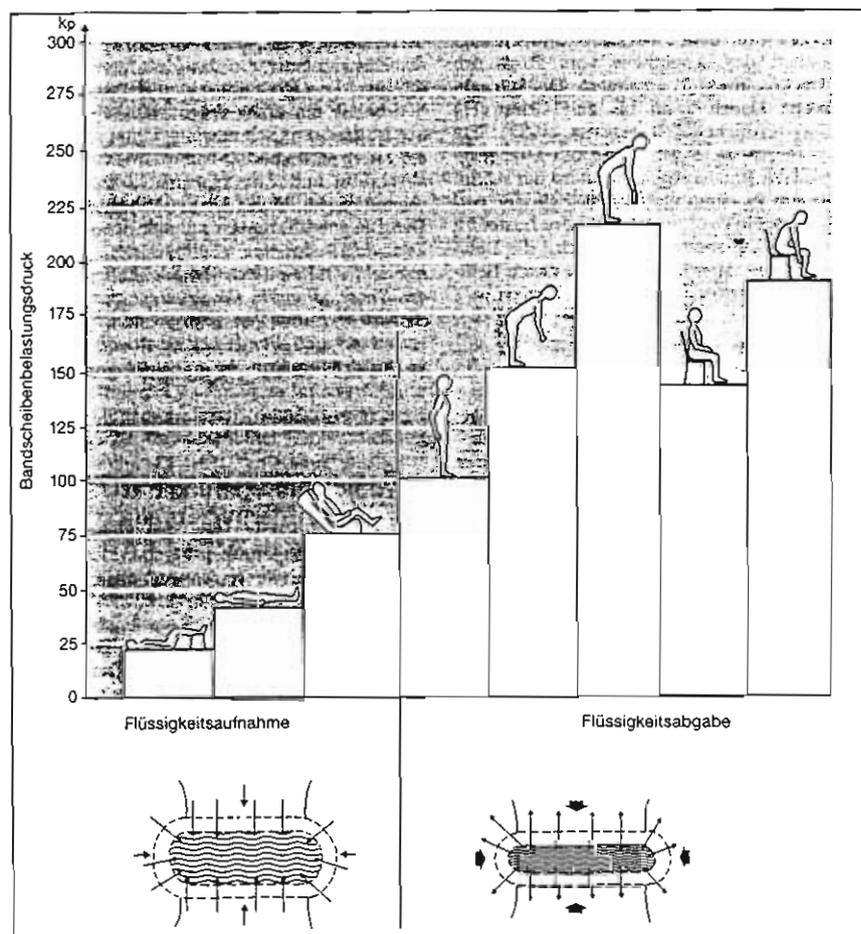


Abb. 3.3 Intradiskaler Druck in der 3. Lumbalbandscheibe bei verschiedenen Körperpositionen (nach NACHEMSON) und Flüssigkeitsverschiebungen an der Bandscheibengrenze (nach KRÄMER). (aus [40])

überzogen war, in den Bandscheibeninnenraum geschoben. Die gemessenen Belastungen und ihre Auswirkungen auf den Stoff- und Flüssigkeitsaustausch sind in Abb. 3.3 wiedergegeben.

In dieser Arbeit soll u. a. der Einfluß von Volumenänderungen des Bandscheibeninnenraums auf das Bewegungs- und Tragverhalten des Bewegungssegmentes untersucht werden. Dazu werden Parameterstudien mit unterschiedlichen physiologischen Lasten angestellt.

Ein Untersuchungsgegenstand ist die Instabilität des Bewegungssegmentes, die FARFAN und GRACOVETSKY [19] als abnormal vermehrte Beweglichkeit definiert haben. Die Ursache einer solchen Instabilität ist nach KOELLER et al. [39] in der Erniedrigung der Bandscheibenhöhe zu sehen.

3.3 Die dorsale Protrusion und der Bandscheibenprolaps

Als erste makroskopische Anzeichen degenerativer Veränderungen der Bandscheiben sind Risse in zentral gelegenen Teilen des Anulus fibrosus zu finden. In diese radiären und zirkulären Fissuren können temporär Teile des Nucleus pulposus eindringen und zu einer Spannung und Vorwölbung des hinteren Längsbandes führen. Diese Störung führt zu einer Irritation des Spinalnervs und wird als Lumbago bezeichnet, wenn sie in einer lumbalen Bandscheibe auftritt. Die akute Krankheitserscheinung verschwindet auf Grund einer Rückverlagerung rasch wieder, da der Anulus fibrosus grundsätzlich noch intakt ist.

Der Übergang von der Lumbago zu den lumbalen Bandscheibenprotrusionen ist fließend. Protrusionen sind dadurch gekennzeichnet, daß im Zusammenhang mit altersbedingten Veränderungen der Bandscheibe Teile des Nucleus pulposus weiter in die peripheren Bereiche des Anulus fibrosus eindringen, wobei auch Teile des Anulus fibrosus und der Knorpelplatten in diese Verlagerungsprozesse mit einbezogen sind. Entsprechend der Terminologieempfehlung des Arbeitskreises degenerative Wirbelsäulenerkrankungen der Deutschen Gesellschaft für Orthopädie und Traumatologie (DGOT) wird eine Bandscheibenvorwölbung ohne Perforation des Anulus fibrosus als Protrusion bezeichnet. Die Vorwölbung des hinteren Längsbandes bzw. der Oberfläche des Anulus fibrosus nimmt deutliche Formen

an, wobei die äußeren Schichten des Anulus fibrosus jedoch intakt bleiben. Die Rückverlagerung der verschobenen Partikel ist im allgemeinen in den Fällen möglich, in denen diese noch durch eine kräftige Lamelle des Anulus fibrosus überdeckt sind.

Eine in dorsolateraler Richtung verlaufende lumbale Protrusion zieht ein lokales Lumbalsyndrom nach sich, da die Protrusion in Kontakt mit den Spinalnervenwurzeln kommt und diese reizt. Dieses Lumbalsyndrom wird als Ischialgie bezeichnet. Die Krankheitserscheinungen sind dabei nicht nur von dem Ausmaß der Protrusion, sondern auch von ihrer Lokalisation abhängig [40]. Grundsätzlich zu unterscheiden sind Protrusionen, die mittig (paramedian), zur Seite (lateral) oder nach außen (intraforaminal) verlaufen (Abb. 3.4).

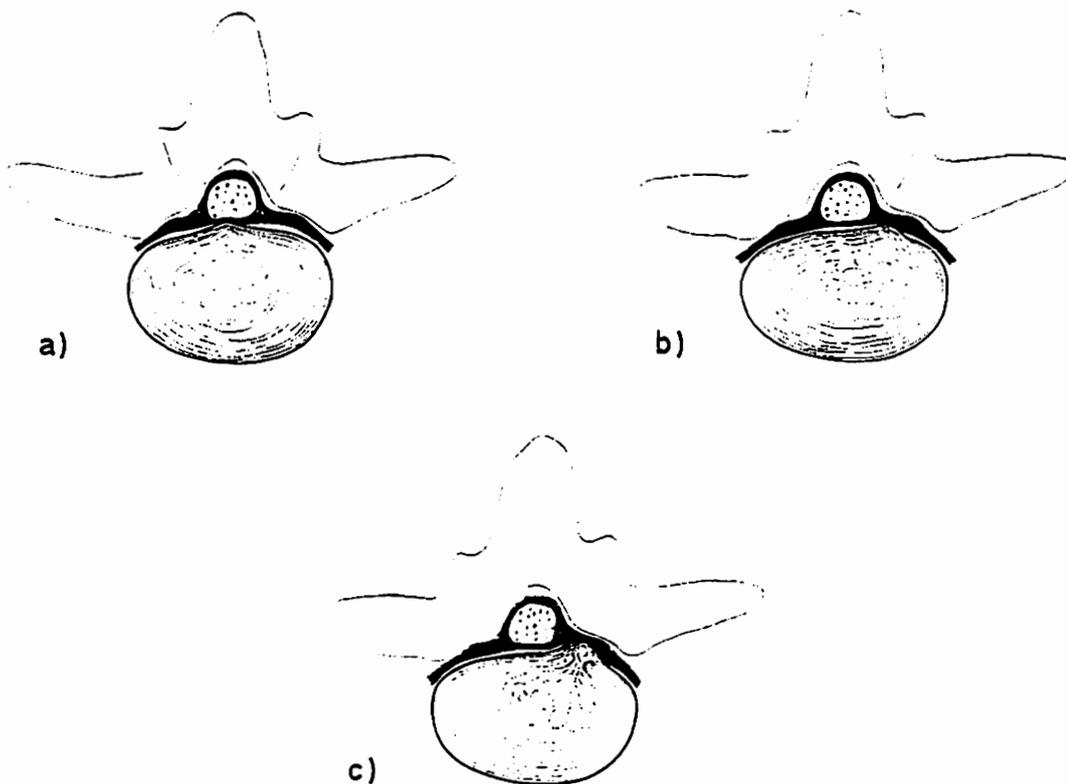


Abb. 3.4 Protrusionen lumbaler Bandscheiben. Der Anulus fibrosus ist intakt. Rückverlagerungsmöglichkeiten sind gegeben. (aus [40])

a) Mediale Protrusion: Lumbago

b) und c) Laterale Protrusion: Protrusionsischialgie

Häufig tritt eine Sequestration der verlagerten Gewebeteile ein, die dann nur noch von einer dünnen äußeren Lamelle des Anulus fibrosus gehalten werden.

Von einem Bandscheibenprolaps spricht man, wenn diese Lamelle einreißt, und es dem verlagerten Gewebe möglich ist, nach allen Richtungen in den Epiduralraum des Wirbelkanals vorzudringen. Der Prolaps kann dabei noch mit dem übrigen Bandscheibengewebe verbunden sein oder als freier Sequester vollständig getrennt im Wirbelkanal liegen (Abb. 3.5).

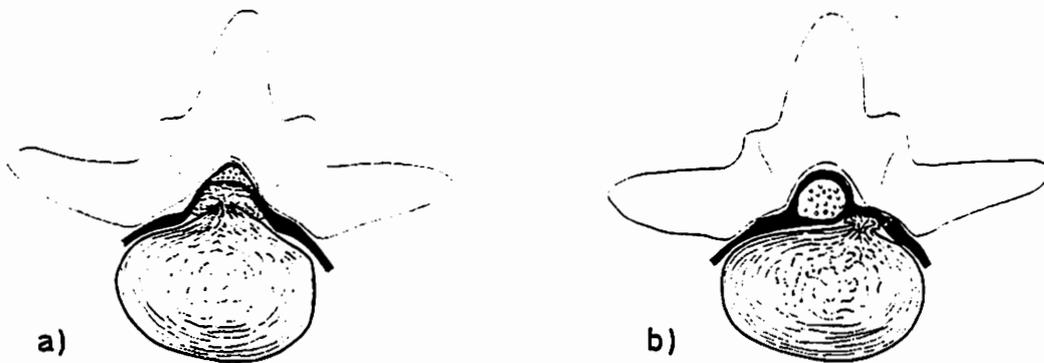


Abb. 3.5 Medialer und lateraler Vorfall einer lumbalen Bandscheibe. Der Anulus fibrosus ist perforiert. Rückverlagerungsmöglichkeiten sind nicht gegeben. (aus [40])

a) Medialer Prolaps: Kaudasyndrom

b) Lateraler Prolaps: Prolapsischialgie

In Abhängigkeit von dem Ausmaß des medialen Prolaps treten Lumbalsyndrome auf, die von der Lumbago über eine doppelseitige Ischialgie bis zum Kaudasyndrom, bei dem ein großer Prolaps sämtliche Nervenwurzeln im lumbalen Wirbelkanal komprimiert, reichen.

KRÄMER [41] gibt in Abhängigkeit von der klinischen Symptomatik Differentialindikationen zur perkutanen lumbalen Diskektomie, Chemonukleolyse und offenen Diskotomie an. Bei der perkutanen Diskektomie wird mit Hilfe von Faßzangen und Saugfräsen zentrales Bandscheibengewebe und Protrusionsmaterial aus einem lumbalen Zwischenwirbelabschnitt entfernt. Als Chemonukleolyse bezeichnet man die intradiskale Injektion bestimmter

Substanzen, die zu einer Auflösung des vorgewölbten Bandscheibengewebes führt.

Beide Verfahren beruhen somit auf einer invasiven Reduktion des Volumens des zentralen Bandscheibengewebes. Der Einfluß dieser Eingriffe auf das Bewegungs- und Tragverhalten des Bewegungssegmentes wird in dieser Arbeit untersucht.

4. Analytisches Modell des Bewegungssegmentes

4.1 Einleitende Betrachtungen

Bereits die kleinste funktionelle Einheit in der Wirbelsäule, das Bewegungssegment nach JUNGHANNS, ist eine äußerst komplexe Struktur. In diesem Kapitel wird die Entwicklung eines weitgehend wirklichkeitsgetreuen mathematischen Modells eines Bewegungssegmentes dargestellt.

Besondere Beachtung ist einer möglichst realistischen Beschreibung der unregelmäßigen Geometrie der knöchernen Strukturen des Bewegungssegmentes unter Verwendung dreidimensionaler Kontinuums-elemente mit variabler Knotenzahl zu schenken. In diesem Zusammenhang wird auch auf das Kontaktproblem, das bei einer Berührung der kranialen und der kaudalen Gelenkflächen der Wirbelbogengelenke auftritt, eingegangen. Eine Darstellung des Anulus fibrosus als flächenhafte Struktur [2, 45, 57, 58, 68, 82, 83, 84] ist auf Grund fehlender konstitutiver Gesetze nicht in Betracht gekommen. Statt dessen erfolgt die Beschreibung des Anulus fibrosus sowohl durch eindimensionale als auch durch dreidimensionale Kontinuums-elemente. Mit Hilfe der eindimensionalen Elemente lassen sich die kollagenen Fasern des Anulus fibrosus darstellen, wobei deren nicht-lineares Materialgesetz Berücksichtigung findet. Den Nucleus pulposus kann man als eine nichtviskose inkompressible Flüssigkeit betrachten, die von den Kontinuums-elementen eingeschlossen wird, die bei der Abbildung der Knorpelgrundsubstanz des Anulus fibrosus und der knöchernen Endflächen der Wirbelkörper Verwendung finden. Diese Elemente erfüllen als Randbedingung die Inkompressibilität des umschlossenen Volumens, so daß eine Diskretisierung der Flüssigkeit nicht erforderlich ist. Die Darstellung der verschiedenen Ligamente, die das Tragverhalten des Bewegungssegmentes maßgeblich beeinflussen, wird durch eindimensionale Kontinuums-elemente realisiert. Besondere Bedeutung kommt der Erfassung ihrer nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen zu.

Das zu behandelnde Problem zeichnet sich sowohl durch kinematische als auch materielle Nichtlinearitäten aus. Selbst bei der Betrachtung alltäglicher Bewegungen bzw. Belastungen treten im Bewegungssegment zum einen große Verschiebungen und große Verdrehungen und zum anderen große

Dehnungen auf. Als typische Formulierungen für die Beschreibung einer solchen physikalischen Situation bieten sich die Totale Lagrangesche Formulierung, die Umgeformte Lagrangesche Formulierung und die Umgeformte Lagrange-Jaumannsche Formulierung an [3, 21, 46, 62, 70].

4.2 Umgeformte Lagrange-Jaumannsche Formulierung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Ableitung der Umgeformten Lagrange-Jaumannschen Formulierung. Hierbei wird auf die ausführlichen Darstellungen in [16, 64, 91] Bezug genommen. Die Verwendung dieser Formulierung ermöglicht unter Berücksichtigung eines hypoelastischen Materialgesetzes eine realistische Beschreibung des Materialverhaltens der Knorpelgrundsubstanz und der knöchernen Strukturen.

4.2.1 Kinematik der Bewegung

Im Rahmen der Lagrangeschen (oder materiellen) Formulierung ist die Kinematik mit der mathematischen Beschreibung der Bewegung aller Partikeln eines Körpers verbunden. Die Abbildung eines Körpers B in den dreidimensionalen Euklidischen Raum wird als Konfiguration $\Phi(B)$ bezeichnet. Wir nehmen an, daß sowohl Φ als auch deren Inverse Φ^{-1} stetig differenzierbar sind. Für ein Partikel X eines Körpers B gilt

$$\mathbf{x} = \Phi(X), \quad X = \Phi^{-1}(\mathbf{x}), \quad (4.2.1)$$

wobei \mathbf{x} in einem feststehenden kartesischen Koordinatensystem der Ortsvektor des Punktes ist, den das Partikel X in der Konfiguration $\Phi(B)$ einnimmt. In der Komponentendarstellung ist der Punkt \mathbf{x} durch seine Koordinaten x_i gegeben.

Eine von der Zeit t abhängige Folge von Konfigurationen $\Phi_t(B)$ wird als Bewegung bezeichnet. Für den Ortsvektor \mathbf{x} des Punktes, an dem sich das Partikel X zum Zeitpunkt t befindet, schreiben wir

$$\mathbf{x} = \Phi_t(X) = \Phi(X, t). \quad (4.2.2)$$

Im folgenden wollen wir für diese Punkte die Bezeichnung räumliche bzw. materielle Punkte verwenden, da es sich um in Bewegung befindliche Massenpunkte des Kontinuums handelt.

Bei der Beschreibung der Bewegung des Körpers B ist die Verwendung einer unverformten Ausgangskonfiguration zum Zeitpunkt t_0 sinnvoll. Diese

sogenannte Referenz-Konfiguration ${}^0\Phi(B) = \Phi(X, t_0)$ ist zeitlich nicht veränderlich. Für ein Partikel X eines Körpers B gilt analog zu (4.2.1)

$$x = {}^0\Phi(X), \quad X = {}^0\Phi^{-1}(x), \quad (4.2.3)$$

wobei X der Ortsvektor des materiellen Punktes ist, den das Partikel X in der Konfiguration ${}^0\Phi(B)$ einnimmt. In der Komponentendarstellung sind dem materiellen Punkt X die Koordinaten X_j zugeordnet (Abb. 4.1).

Größen, die mit der Referenz-Konfiguration verbunden sind, werden in dieser Arbeit im allgemeinen durch Großbuchstaben oder den Index "0"

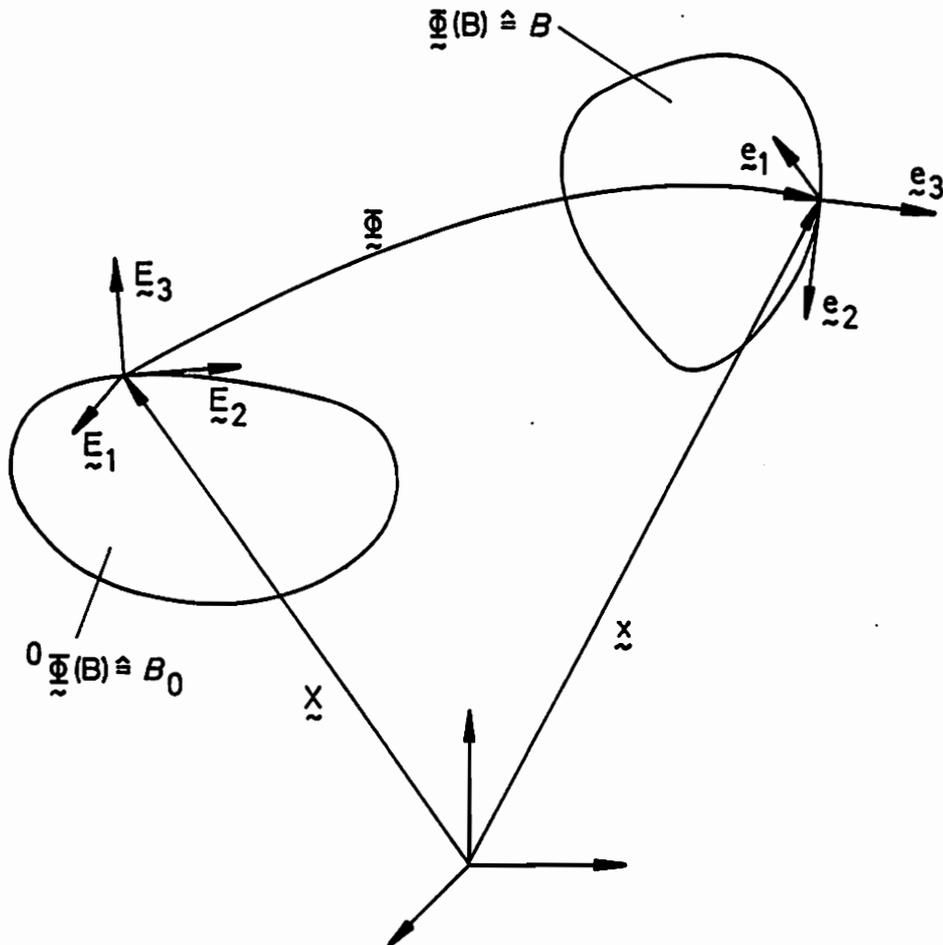


Abb. 4.1 Abbildung eines Körpers B in den Euklidischen Raum und Darstellung der Referenz- und der Momentan-Konfiguration

gekennzeichnet. Im Gegensatz dazu werden Größen, die mit einer Momentan-Konfiguration verbunden sind, durch kleine Buchstaben oder den Index "t" kenntlich gemacht.

Ersetzen von X in (4.2.2) durch den Ausdruck für X in (4.2.3) führt zu

$$\mathbf{x} = \Phi({}^0\Phi^{-1}(X), t). \quad (4.2.4)$$

In (4.2.3) wurde der Zusammenhang zwischen dem Partikel X und seiner Lage X in der Konfiguration ${}^0\Phi$ aufgezeigt. Da die Unterscheidung zwischen X und X von keiner besonderen Bedeutung ist, soll sie im folgenden zur Vereinfachung der Schreibweise nicht mehr gemacht werden. Unter Berücksichtigung dieser Modifikation ergibt sich

$$\mathbf{x} = \Phi(X, t), \quad X = \Phi^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (4.2.5)$$

Dies führt zu einer neuen Definition von Φ , die implizit in der Wahl einer Referenz-Konfiguration begründet ist. Φ entspricht dabei einer Abbildung der Referenz-Konfiguration zum Zeitpunkt t_0 auf eine Momentan-Konfiguration zum Zeitpunkt t . Für einen bestimmten Zeitpunkt t wird Φ als Deformation bezeichnet. (4.2.5) beschreibt eine zeitabhängige Folge solcher Deformationen.

4.2.2 Der Deformationsgradient

Im folgenden wollen wir eine solche Deformation Φ betrachten. Die verschiedenen Konfigurationen, die sich im Laufe der Bewegung zwischen der Referenz-Konfiguration und der Momentan-Konfiguration zu einem bestimmten Zeitpunkt t einstellen, sind in diesem Zusammenhang nicht von Interesse. Daher wird die zeitliche Abhängigkeit in (4.2.5) nicht benötigt und wir erhalten

$$\mathbf{x} = \Phi(X). \quad (4.2.6)$$

In der Komponentendarstellung hat (4.2.6) die Form

$$x_i = \Phi_i(X_j). \quad (4.2.7)$$

Um die Deformation lokal, d. h. in einer Umgebung des Partikels X , untersuchen zu können, fordern wir, daß die Ableitungen $\partial x_i / \partial X_j$ stetig sind. Dies ist durch die Annahmen bezüglich der Regularität von Φ in Abschnitt 4.2.1 gewährleistet. Unter Verwendung von (4.2.7) ergibt sich

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j. \quad (4.2.8)$$

In der invarianten (oder absoluten) Notation hat (4.2.8) die Form

$$dx = F \cdot dX, \quad (4.2.9)$$

wobei F ein Tensor zweiter Stufe ist, der definiert ist als

$$F = \text{Grad } \Phi(X), \quad (4.2.10)$$

und $F \cdot dX$ das Skalarprodukt des Tensors F und des Vektors dX bezeichnet.

Der Tensor F wird als materieller Deformationsgradient bezeichnet. Unter Berücksichtigung der orthonormalen Basen $\{E_i\}$ und $\{e_i\}$ hat F die Komponenten F_{ij} und es gilt

$$F = F_{ij} e_i \otimes E_j \quad \text{mit} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \quad (4.2.11)$$

wobei $e_i \otimes E_j$ das Tensorprodukt der Vektoren e_i und E_j bezeichnet [37].

Die Vektoren dX bzw. dx können als materielle Fasern bezeichnet werden. (4.2.9) beschreibt die Transformation der materiellen Faser dX an der Stelle X in der Referenz-Konfiguration in die materielle Faser dx an der Stelle x in der Momentan-Konfiguration. Unter der Voraussetzung $dX \neq 0$ folgt aus der Gleichung $F \cdot dX = 0$, daß eine materielle Faser dX existiert, deren Länge durch die Deformation auf Null reduziert wird. Dieser Fall kann ausgeschlossen werden, da er physikalisch unrealistisch ist. Aus $F \cdot dX \neq 0$ für alle $dX \neq 0$ folgt, daß der Tensor F nicht singulär ist. Dies führt zu

$$\det F \neq 0. \quad (4.2.12)$$

Im folgenden soll die übliche Notation

$$J = \det F \quad (4.2.13)$$

verwendet werden. Da F nicht singulär ist, existiert die Inverse F^{-1} .

4.2.3 Die Nansonsche Formel

Wir betrachten drei nicht komplanare materielle Fasern $dX^{(1)}$, $dX^{(2)}$ und $dX^{(3)}$ an der Stelle X in der Referenz-Konfiguration. Entsprechend (4.2.9) gilt

$$dx^{(i)} = F \cdot dX^{(i)} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.2.14)$$

Wir setzen voraus, daß die Bedingung $dX^{(1)} \cdot (dX^{(2)} \times dX^{(3)}) > 0$ von den drei Vektoren erfüllt wird, wobei $dX^{(2)} \times dX^{(3)}$ das Vektorprodukt der Vektoren $dX^{(2)}$ und $dX^{(3)}$ bezeichnet. Das Volumen des infinitesimalen Parallelepipeds, das von den drei Vektoren gebildet wird, kann berechnet werden als

$$dV = \det (dX^{(1)}, dX^{(2)}, dX^{(3)}), \quad (4.2.15)$$

wobei durch $dX^{(i)}$ Spaltenvektoren bezeichnet werden. Das korrespondierende Volumen in der Momentan-Konfiguration bestimmt sich analog zu (4.2.15) als

$$dv = \det (dx^{(1)}, dx^{(2)}, dx^{(3)}). \quad (4.2.16)$$

Unter Verwendung von (4.2.14) und (4.2.15) erhalten wir

$$dv = (\det F) dV = J dV. \quad (4.2.17)$$

J gibt in (4.2.17) das lokale Verhältnis zwischen dem Momentan-Volumen dv und dem Referenz-Volumen dV an. Da Volumina definitionsgemäß nur positive Werte annehmen können, folgt aus (4.2.17) die Bedingung

$$J = \det F > 0. \quad (4.2.18)$$

Die lokale Beziehung in (4.2.17) kann global in der Form

$$\int_B dv = \int_{B_0} J dV \quad (4.2.19)$$

dargestellt werden, wobei B die Momentan-Konfiguration und B_0 die Referenz-Konfiguration bezeichnet.

Im nächsten Schritt betrachten wir ein infinitesimales Element dS der materiellen Oberfläche in der Umgebung des Punktes X in der Referenz-Konfiguration. Für das Vektorelement dS gilt die Beziehung $dS = N dS$, wobei N ein nach außen gerichteter Einheitsvektor normal zu der Oberfläche dS ist. Mit dX wird eine beliebige materielle Faser bezeichnet, die den Rand von dS schneidet. Das Volumen des Zylinders, der von dem Oberflächenelement dS und dem Vektor dX gebildet wird, berechnet sich als $dV = dX \cdot dS$. Es wird vorausgesetzt, daß $dX \cdot dS > 0$ gilt. Das korrespondierende Volumen in der Momentan-Konfiguration bestimmt sich als $dv = dx \cdot ds$ mit $ds = n ds$, wobei n ein nach außen gerichteter Einheitsvektor normal zu der Oberfläche ds ist. Zu beachten ist, daß der Normalenvektor N nicht der Transformation in (4.2.9) gehorcht. Unter Berücksichtigung von (4.2.17) folgt dann

$$dx \cdot ds = J dX \cdot dS. \quad (4.2.20)$$

Unter Verwendung von (4.2.9) kommen wir zu

$$F^T \cdot ds = J dS, \quad (4.2.21)$$

wobei die willkürlich gewählte Größe dX entfernt wurde, und F^T die Transponierte des Tensors F bezeichnet. Ausgehend von (4.2.21) ergibt sich die Beziehung

$$ds = J (F^{-1})^T \cdot dS \quad \text{bzw.} \quad n ds = J (F^{-1})^T \cdot N dS, \quad (4.2.22)$$

die als Nansonsche Formel bekannt ist. Sie stellt einen Zusammenhang

zwischen Oberflächenelementen in der Referenz- und der Momentan-Konfiguration her, der natürlich auch für alle "inneren Oberflächenelemente" Gültigkeit besitzt.

4.2.4 Erhaltung der Masse

Der Satz von der Erhaltung der Masse sagt aus, daß sich die Masse $m(B)$ eines Körpers B während eines Deformationsprozesses nicht ändert, d. h. sie ist unabhängig von der Momentan-Konfiguration B , die der Körper B einnimmt. Die Masse $m(B)$ bestimmt sich als

$$m(B) = \int_B \rho(\mathbf{x}, t) \, dv, \quad (4.2.23)$$

wo ρ die Massendichte in dem materiellen Punkt \mathbf{x} in der Momentan-Konfiguration B zum Zeitpunkt t ist. Auf Grund der Massenerhaltung gilt

$$\int_B \rho(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_{B_0} {}^0\rho(\mathbf{X}) \, dV, \quad (4.2.24)$$

wobei ${}^0\rho$ die Massendichte in dem materiellen Punkt \mathbf{X} in der Referenz-Konfiguration B_0 bezeichnet. Unter Verwendung von (4.2.17) und der Voraussetzung der bereichsweisen Stetigkeit von ρ führt uns (4.2.24) zu der lokalen Aussage

$$\rho = \frac{1}{J} {}^0\rho \quad \text{bzw.} \quad \rho \, dv = {}^0\rho \, dV. \quad (4.2.25)$$

Den Satz von der Erhaltung der Masse können wir unter Berücksichtigung von (4.2.23) alternativ auch in der Form

$$\frac{d}{dt} m(B) = \frac{d}{dt} \int_B \rho(\mathbf{x}, t) \, dv = 0 \quad (4.2.26)$$

schreiben. Aus der Verallgemeinerung von (4.2.26) folgt

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho(\mathbf{x}, t) f(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_B \rho(\mathbf{x}, t) \dot{f}(\mathbf{x}, t) \, dv, \quad (4.2.27)$$

wobei f ein beliebiges Skalar-, Vektor- oder Tensorfeld ist, das über B definiert ist.

4.2.5 Erhaltung der Bewegungsgröße

Die Bewegungsgröße des Körpers B zur Zeit t ist definiert als

$$\int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dv. \quad (4.2.28)$$

Dieser Definition liegt die Bewegung zugrunde, die durch (4.2.5) beschrieben wird und für die gilt $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\Phi}(\mathbf{X}, t)$. Der hochgestellte Punkt bezeichnet hier und im folgenden die materielle Ableitung einer Größe nach der Zeit. Unter Verwendung von (4.2.5) und (4.2.24) kann die Bewegungsgröße in der Lagrangeschen Form ausgedrückt werden als

$$\int_{B_0}^0 \rho(\mathbf{X}) \mathbf{v}(\Phi(\mathbf{X}, t), t) dV. \quad (4.2.29)$$

Bei den äußeren Kräften, die auf einen Körper B einwirken, lassen sich volumenhaft und flächenhaft angreifende Kräfte unterscheiden. Diese sollen im folgenden als Körper- bzw. als Oberflächenkräfte bezeichnet werden. Die Körperkräfte sind bestimmt durch

$$\int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv \quad (4.2.30)$$

und die Oberflächenkräfte durch

$$\int_{\partial B} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \partial B) da, \quad (4.2.31)$$

wobei mit \mathbf{b} das Vektorfeld der spezifischen Massenkraft bezeichnet ist, welches über die Momentan-Konfiguration B definiert ist. \mathbf{t} ist das Vektorfeld der Spannungen, das für alle bereichsweise glatten Grenzflächen ∂B der Momentan-Konfiguration B definiert ist.

Die resultierende äußere Kraft auf den Körper B in der Momentan-Konfiguration B ist

$$\int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \, dv + \int_{\partial B} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \partial B) \, da. \quad (4.2.32)$$

Der Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße sagt aus, daß die Änderung der Bewegungsgröße gleich der Summe der auf einen Körper einwirkenden Kräfte ist. Unter Verwendung von (4.2.28), (4.2.32) und (4.2.27) schreiben wir

$$\begin{aligned} \int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \, dv + \int_{\partial B} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \partial B) \, da &= \frac{d}{dt} \int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, dv \\ &= \int_B \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \, dv. \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

4.2.6 Der Cauchysche Spannungstensor

Das Cauchysche Theorem sagt aus, daß der Spannungsvektor \mathbf{t} in einem materiellen Punkt \mathbf{x} von der Oberfläche nur durch den Einheitsvektor \mathbf{n} abhängig ist, wobei dieser normal zu der Oberfläche im Punkt \mathbf{x} steht und nach außen gerichtet ist. Um dies zu verdeutlichen, schreiben wir anstatt $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \partial B)$ nun $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$. Es existiert ein von \mathbf{n} unabhängiges Tensorfeld zweiter Stufe $\boldsymbol{\sigma}$, so daß

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \quad (4.2.34)$$

für alle materiellen Punkte \mathbf{x} in der Momentan-Konfiguration B zum Zeitpunkt t und für beliebige Einheitsvektoren \mathbf{n} gilt. Der Tensor $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ wird als Cauchyscher Spannungstensor bezeichnet.

Unter Berücksichtigung von Cauchys Theorem (4.2.34) in dem Ausdruck für die Erhaltung der Bewegungsgröße (4.2.33) erhalten wir

$$\int_B \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \, dv + \int_{\partial B} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \, da = \int_B \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \, dv, \quad (4.2.35)$$

und die Anwendung des Divergenztheorems [9] führt zu

$$\int_B [\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}, t) - \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)] dv = 0. \quad (4.2.36)$$

Unter der Voraussetzung, daß ρ , \mathbf{b} , $\boldsymbol{\sigma}$ und $\dot{\mathbf{v}}$ bereichsweise stetig sind, führt (4.2.36) zu der lokalen Impulsbilanz

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^T + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad (4.2.37)$$

die als erste Cauchysche Bewegungsgleichung bekannt ist und in der Komponentendarstellung folgende Form hat:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i. \quad (4.2.38)$$

Die zweite Cauchysche Bewegungsgleichung besagt, daß der Cauchysche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ symmetrisch ist [64]. Wir schreiben in der absoluten Notation

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \quad (4.2.39)$$

und in der Komponentendarstellung

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (4.2.40)$$

4.2.7 Der Nominelle Spannungstensor

Unter Berücksichtigung der Nansonschen Formel (4.2.22) kann die resultierende Oberflächenkraft (4.2.35) dargestellt werden als

$$\int_{\partial B} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da = \int_{\partial B_0} J \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot \mathbf{N} dA, \quad (4.2.41)$$

wobei \mathbf{N} ein nach außen gerichteter Einheitsvektor normal zu der Oberfläche ∂B_0 der Referenz-Konfiguration B_0 ist.

Wir führen die Notation

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (4.2.42)$$

ein und können (4.2.41) dann in der folgenden Form schreiben:

$$\int_{\partial B} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\partial B_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \, dA. \quad (4.2.43)$$

Der Tensor \mathbf{P} wird als erster Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor bezeichnet. Bei dem sogenannten Nominellen Spannungstensor \mathbf{S} handelt es sich um den transponierten ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor. Unter Berücksichtigung der Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors folgt aus (4.2.42) die Beziehung

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}^T = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (4.2.44)$$

Der Cauchysche Spannungstensor stellt den Zusammenhang zwischen einem Oberflächenelement in der Momentan-Konfiguration und dem darauf wirkenden Kraftvektor her. Im Gegensatz dazu setzt der Nominelle Spannungstensor den Kraftvektor in der Momentan-Konfiguration mit dem Oberflächenelement in der Referenz-Konfiguration in Beziehung. Der Zusammenhang zwischen den Komponenten der beiden Spannungstensoren wird aus der folgenden Gleichung ersichtlich, die sich nach Umformung aus (4.2.44) ergibt:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} F_{ik} S_{kj} = \frac{1}{J} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} S_{kj}. \quad (4.2.45)$$

Unter Berücksichtigung der orthonormalen Basen $\{\mathbf{E}_i\}$ und $\{\mathbf{e}_i\}$ ist $S_{kj} \, dA$ die Komponente in Richtung \mathbf{e}_j einer Kraft, die auf ein infinitesimales Oberflächenelement wirkt, dessen Normale in der Referenz-Konfiguration in Richtung \mathbf{E}_k verlief und das dort die Fläche dA hatte.

4.2.8 Der Jaumannsche Spannungsgeschwindigkeitstensor

Eine wichtige Eigenschaft eines Tensors ist die Invarianz seiner Komponenten gegenüber einer Starrkörperdrehung des Materials. Ein Lagrange-scher Tensor, der diese Bedingung erfüllt, wird als objektiv bezeichnet [64]. Es kann anschaulich gezeigt werden, daß die materiellen Zeitableitungen bzw. die materiellen Änderungsgeschwindigkeiten der Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors [44]

$$\frac{d}{dt} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = \dot{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} v_k \quad (4.2.46)$$

nicht drehinvariant sind. Dazu betrachten wir einen Stab, der durch eine konstante Zugkraft beansprucht wird. In der Ausgangslage fällt die Schwerelinie des Stabes mit der x-Achse eines feststehenden kartesischen Koordinatensystems zusammen. Die Cauchyschen Spannungen sind $\sigma_{xx} = p$ und $\sigma_{yy} = 0$. Nach einer Starrkörperdrehung des Stabes von 90° um die z-Achse erhalten wir die Spannungen $\sigma_{xx} = 0$ und $\sigma_{yy} = p$. Die Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors haben sich also durch die Starrkörperdrehung des Materials geändert und es gilt $\dot{\sigma}_{xx} \neq 0$ bzw. $\dot{\sigma}_{yy} \neq 0$. Damit ist gezeigt, daß die Tensoren σ und $\dot{\sigma}$ keine objektiven Lagrangeschen Tensoren sind.

Im folgenden wollen wir uns mit der Entwicklung eines objektiven Tensors beschäftigen, dessen Komponenten Ableitungen der Cauchyschen Spannungen nach der Zeit sind.

Wir betrachten zwei orthonormale Basen $\{e_i\}$ und $\{e'_i\}$. Da $\{e_i\}$ eine Basis ist, kann jeder der Vektoren e'_1, e'_2, e'_3 als Linearkombination der Vektoren e_1, e_2, e_3 ausgedrückt werden. Wir schreiben

$$e'_i = Q_{ij} e_j. \quad (4.2.47)$$

Die Multiplikation von (4.2.47) mit e_j führt uns dann zu

$$Q_{ij} = e'_i \cdot e_j, \quad (4.2.48)$$

woraus folgt, daß das Skalar Q_{ij} dem Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren e'_i und e_j entspricht.

Es läßt sich zeigen, daß die Transformation der Komponenten eines Tensors zweiter Stufe T bei einem Wechsel der Basen entsprechend (4.2.47) nach folgender Regel erfolgt [16, 64]:

$$T'_{ij} = Q_{ik} Q_{jl} T_{kl}. \quad (4.2.49)$$

Wir betrachten nun ein Partikel X eines Körpers B . Entsprechend (4.2.1) ist x der Ortsvektor des materiellen Punktes, den das Partikel X in der Konfiguration B einnimmt. Dieser Punkt wird als Ursprung der beiden Basen $\{e_i\}$ und $\{e'_i\}$ gewählt. Die Basis $\{e_i\}$ bezeichnet ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem und die Basis $\{e'_i\}$ ein körperfestes kartesisches Koordinatensystem, das an der Rotation des Körpers B um den Punkt x mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit Ω teilnimmt. Zum Zeitpunkt t stimmen die beiden Koordinatensysteme überein. Die Koordinaten x_i und x'_i sind durch die folgende Transformation verbunden:

$$x'_i = x_i - \Omega_{ij} x_j dt = (\delta_{ij} - \Omega_{ij} dt) x_j. \quad (4.2.50)$$

Der Tensor Ω wird auch als Spintensor bezeichnet. Seine kartesischen Komponenten sind gegeben durch

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (4.2.51)$$

wobei $\Omega_{ij} dt$ die Veränderung des Winkels zwischen den Vektoren e'_i und e_j im Laufe einer infinitesimalen Zeit dt angibt. Unter der Voraussetzung, daß die resultierende Winkeländerung unendlich klein ist, entspricht der Term $(\delta_{ij} - \Omega_{ij} dt)$ dem Kosinus des Winkels zwischen den Vektoren e'_i und e_j und damit dem Skalar Q_{ij} in (4.2.47).

Die Cauchyschen Spannungen in dem raumfesten Koordinatensystem werden zum Zeitpunkt t mit $\sigma_{ij}(t)$ und zu einem späteren Zeitpunkt $t + dt$ mit $\sigma_{ij}(t + dt)$ bezeichnet. Die materielle Zeitableitung ist definiert als

$$\dot{\sigma}_{ij} \equiv \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} [\sigma_{ij}(t + dt) - \sigma_{ij}(t)]. \quad (4.2.52)$$

JAUMANN [35] definierte die sogenannte Spannungsgeschwindigkeit als

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} \equiv \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} [\sigma'_{ij}(t + dt) - \sigma'_{ij}(t)], \quad (4.2.53)$$

wobei mit $\sigma'_{ij}(t + dt)$ und $\sigma'_{ij}(t)$ die Cauchyschen Spannungen in dem körperfesten Koordinatensystem bezeichnet werden.

Gemäß der oben angegebenen Definition entsprechen die Jaumannschen Spannungsgeschwindigkeiten den Ableitungen der Cauchyschen Spannungen nach der Zeit aus der Sicht eines Beobachters, der an der Starrkörperdrehung des Körpers teilnimmt. Im Gegensatz dazu beziehen sich die materiellen Zeitableitungen der Cauchyschen Spannungen auf die Sicht eines Beobachters, der in dem materiellen Punkt x fixiert ist. Demzufolge ist der Tensor der Spannungsgeschwindigkeiten $\overset{\nabla}{\sigma}$ ein objektiver Lagrangescher Tensor.

Die Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors im Punkt x zum Zeitpunkt $t + dt$ berechnen sich in dem raumfesten Koordinatensystem als

$$\sigma_{ij}(t + dt) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij}(t) dt \quad (4.2.54)$$

und in dem körperfesten Koordinatensystem als

$$\sigma'_{ij}(t + dt) = \sigma_{ij}(t) + \overset{\nabla}{\sigma}_{ij}(t) dt, \quad (4.2.55)$$

wobei Glieder höherer Ordnung in dt vernachlässigt wurden.

Die Transformation der Komponenten σ_{ij} bei einem Wechsel von der Basis $\{e_i\}$ zu der Basis $\{e'_i\}$ erfolgt nach der Regel (4.2.49). Wir schreiben

$$\sigma'_{ij}(t + dt) = (\delta_{ik} - \Omega_{ik} dt) (\delta_{jl} - \Omega_{jl} dt) \sigma_{kl}(t + dt). \quad (4.2.56)$$

Unter Berücksichtigung von (4.2.54) in (4.2.56) erhalten wir nach Umformungen die Beziehung

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij}(t + dt) = & \sigma_{ij}(t) \\ & + [\dot{\sigma}_{ij}(t) - \Omega_{ik} \sigma_{kj}(t) - \Omega_{jl} \sigma_{li}(t)] dt + \dots \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

Die Anwendung der Definition (4.2.53) bzw. der Vergleich von (4.2.55) und (4.2.57) führt zu der gesuchten Definition des Jaumannschen Spannungsgeschwindigkeitstensors [3, 16, 70, 85]:

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \Omega_{ik} \sigma_{kj} - \Omega_{jk} \sigma_{ki} \quad (4.2.58)$$

4.2.9 Der Kirchhoffsche Spannungstensor

Der Kirchhoffsche Spannungstensor τ ist definiert als

$$\tau = J \sigma \quad (4.2.59)$$

und in der Komponentendarstellung gilt

$$\tau_{ij} = J \sigma_{ij} \quad (4.2.60)$$

Für die Jaumannsche Ableitung des Kirchhoffschen Spannungstensors gilt gemäß (4.2.53)

$$\overset{\nabla}{\tau}_{ij} = J \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} + \dot{J} \sigma_{ij} \quad (4.2.61)$$

Der Zusammenhang zwischen den Komponenten des Cauchyschen und des Nominellen Spannungstensors ist durch (4.2.45) gegeben. Für die materiellen Zeitableitungen der Komponenten erhalten wir die Beziehung

$$\dot{\sigma}_{ij} = - \frac{\dot{J}}{J^2} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} S_{kj} + \frac{1}{J} \frac{\partial v_i}{\partial X_k} S_{kj} + \frac{1}{J} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \dot{S}_{kj} \quad (4.2.62)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Umgeformte Lagrangesche Formulierung verwendet. Um die daraus resultierenden Zusammenhänge unmißverständlich beschreiben zu können, erweitern wir die bislang verwendete Notation. Ein hochgestellter links stehender Index gibt den Zeitpunkt an, zu dem die Größe betrachtet wird. Die Konfiguration beziehungsweise die Basis,

auf die die betrachtete Größe bezogen ist, bezeichnet ein tiefgestellter links stehender Index. Dieser Index braucht nicht verwendet zu werden, wenn er dem oberen linken Index entspricht. An den Stellen, an denen diese Notation nicht notwendig ist, verzichten wir auf sie.

Bei der Umgeformten Lagrangeschen Formulierung wird die Momentan-Konfiguration als Referenz-Konfiguration für das nächste Inkrement verwendet. Der Zeitpunkt t soll den Beginn eines neuen Inkrementes bezeichnen. Für alle Partikel X des Körpers B gilt dann die Beziehung

$${}^t X_i = {}^t x_i, \quad (4.2.63)$$

und für das Verhältnis J zwischen dem Volumen dv in der Momentan-Konfiguration und dem Volumen dV in der Referenz-Konfiguration gilt

$${}^t J = 1 \quad \text{bzw.} \quad {}^t J = 1. \quad (4.2.64)$$

Weiterhin sind die verschiedenen Spannungsmaße am Anfang eines jeden Inkrementes identisch. Wir schreiben

$${}^t \sigma_{ij} = {}^t \tau_{ij} = {}^t S_{ij} \quad \text{bzw.} \quad {}^t \sigma_{ij} = {}^t \tau_{ij} = {}^t S_{ij}. \quad (4.2.65)$$

Die Indizierung der Komponenten des Nominellen Spannungstensors stellt dabei einen Sonderfall dar, da diese Spannungen sowohl mit der Momentan- als auch mit der Referenz-Konfiguration verbunden sind. Die Eindeutigkeit der Indizierung ist bei der Umgeformten Lagrangeschen Formulierung dennoch gegeben, da beide Konfigurationen zum Beginn eines Inkrementes übereinstimmen.

Unter Berücksichtigung der obengenannten Zusammenhänge bei der Umgeformten Lagrangeschen Formulierung und den Beziehungen (4.2.58) und (4.2.61) folgt aus (4.2.62)

$${}^t \dot{S}_{ij} = {}^t \nabla_{ij} - \frac{\partial {}^t v_i}{\partial {}^t x_k} {}^t \sigma_{kj} + {}^t \Omega_{ik} {}^t \sigma_{kj} + {}^t \Omega_{jk} {}^t \sigma_{ki}. \quad (4.2.66)$$

Die kartesischen Komponenten des Tensors der Deformationsgeschwindigkeit D sind gegeben durch

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.2.67)$$

Die gesuchte Beziehung zwischen den materiellen Zeitableitungen der Komponenten des Nominellen Spannungstensors und den Jaumannschen Ableitungen der Komponenten des Kirchhoffschen Spannungstensors [47] ergibt sich unter Berücksichtigung von (4.2.67) aus (4.2.66) als

$${}^t\dot{S}_{ij} = {}^t\nabla_{ij} - {}^t\sigma_{ik} {}^tD_{kj} - {}^tD_{ik} {}^t\sigma_{kj} + {}^t\sigma_{ik} \frac{\partial {}^t v_j}{\partial {}^t x_k}. \quad (4.2.68)$$

Im folgenden verwenden wir für $\partial {}^t v_j / \partial {}^t x_k$ auch die Notation ${}^t v_{j,k}$.

4.2.10 Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten

Der Ausdruck für die Erhaltung der Bewegungsgröße (4.2.35) kann unter Berücksichtigung von (4.2.25), (4.2.43) und (4.2.44) in eine Form gebracht werden, in der sich sämtliche Integrale auf die Referenz-Konfiguration beziehen. Wir schreiben

$$\int_{B_0} {}^0\rho(X) {}^0b(X,t) dV + \int_{\partial B_0} S^T(X,t) \cdot N dA = \int_{B_0} {}^0\rho(X) \ddot{\Phi}(X,t) dV, \quad (4.2.69)$$

wobei ${}^0b(X,t) = b(\Phi(X,t),t)$ berücksichtigt wurde. Die Anwendung des Divergenztheorems [9] auf das zweite Integral in (4.2.69) führt zu der Beziehung

$$\int_{B_0} [{}^0\rho(X) {}^0b(X,t) + \text{div } S(X,t) - {}^0\rho(X) \ddot{\Phi}(X,t)] dV = 0, \quad (4.2.70)$$

aus der sich die folgende lokale Aussage ergibt:

$$\text{div } S + {}^0\rho {}^0b = {}^0\rho \ddot{\Phi}. \quad (4.2.71)$$

Wenn der Körper B sich in Ruhe befindet, gilt die Gleichung $\dot{\phi}(X,t) = 0$ für alle Partikel X des Körpers B zu jedem Zeitpunkt t. Aus (4.2.71) folgt dann die Beziehung

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + {}^0\rho {}^0\mathbf{b} = 0, \quad (4.2.72)$$

die wir in der Komponentendarstellung in der Form

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial X_i} + {}^0\rho {}^0b_j = 0 \quad (4.2.73)$$

schreiben und deren Differentiation zu der folgenden Gleichung führt:

$$\frac{\partial \dot{S}_{ij}}{\partial X_i} + {}^0\rho {}^0\dot{b}_j = 0. \quad (4.2.74)$$

Weiterhin führen wir das Vektorfeld T der Nominellen Oberflächenspannungen ein, für das gilt

$$\mathbf{T}(X,t,\mathbf{N}) = \mathbf{S}^T(X,t) \cdot \mathbf{N}. \quad (4.2.75)$$

In der Komponentendarstellung ergibt sich

$$T_j = S_{ij} N_i. \quad (4.2.76)$$

Aus (4.2.43) folgt unter Berücksichtigung von (4.2.34) und (4.2.75) die lokale Beziehung

$$\mathbf{t} \, da = \mathbf{T} \, dA. \quad (4.2.77)$$

Dies bedeutet, daß $T_j \, dA$ die Komponente in Richtung \mathbf{e}_j einer Kraft ist, die auf ein infinitesimales Oberflächenelement wirkt, dessen vektorielle Fläche in der Referenz-Konfiguration $N_i \, dA$ war.

Für die materielle Ableitung der Komponente T_j des Vektors der Nominellen Oberflächenspannungen nach der Zeit gilt dann

$$\dot{T}_j = \dot{S}_{ij} N_i. \quad (4.2.78)$$

Innerhalb einer Zeit dt nimmt S_{ij} um den Wert $\dot{S}_{ij} dt$ zu. Der Zuwachs von T_j in der gleichen Zeit beträgt analog $\dot{T}_j dt$.

Wenn für eine vorgegebene materielle Zeitableitung bzw. für ein Inkrement der äußeren Belastung die materiellen Zeitableitungen der resultierenden Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen berechnet werden sollen, so kann die Systemantwort theoretisch dadurch ermittelt werden, daß man die Differentialgleichungen, die das Gleichgewicht beherrschen, löst und die Lösung dann den Randbedingungen unterwirft. Eine Lösung dieses Systems von Gleichungen ist praktisch jedoch nur für wenige Randwertprobleme möglich. Eine andere Möglichkeit, die eine Ausdehnung auf ein breites Spektrum von Aufgaben ermöglicht, bietet das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Dieses Prinzip sagt aus: wenn auf einen im Gleichgewicht befindlichen Körper beliebige, virtuelle Geschwindigkeiten δv während einer Zeit dt einwirken, so ist die gesamte innere virtuelle Arbeit gleich der gesamten äußeren virtuellen Arbeit.

Für die Herleitung des Prinzips werden die aus der Impulsbilanz folgende, das Gleichgewicht beschreibende Differentialgleichung (4.2.74), die Spannungsrandbedingung (4.2.78) und die Verschiebungsrandbedingung benötigt. Wir erhalten folgendes System von Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{S}_{ij}}{\partial X_i} + {}^0 \rho \quad {}^0 \dot{b}_j &= 0 \\ \dot{S}_{ij} N_i &= \dot{T}_j \quad \text{auf } \partial B_0^T \\ \dot{\phi}_i &= \dot{\xi}_i \quad \text{auf } \partial B_0^\xi, \end{aligned} \right\} \quad (4.2.79)$$

wobei auf einem Teil ∂B_0^ξ von ∂B_0 die Zeitableitungen der Deformationen $\dot{\xi}$ und auf dem verbleibenden Teil $\partial B_0^T = \partial B_0 \setminus \partial B_0^\xi$ die Zeitableitungen der Nominellen Oberflächenspannungen \dot{T} gegeben sind.

HILL [30, 31, 32] hat die das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten beschreibende Integralgleichung

$$\int_{B_0} \dot{S}_{ij} \delta \left(\frac{\partial v_j}{\partial X_i} \right) dV = \int_{\partial B_0} \dot{T}_j \delta v_j dA + \int_{B_0} {}^0\rho \ {}^0\dot{b}_j \delta v_j dV \quad (4.2.80)$$

angegeben. Eine Herleitung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen, das dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten grundsätzlich entspricht, wird in [91] vorgestellt.

Die Beziehung (4.2.68) zwischen den materiellen Zeitableitungen der Komponenten des Nominellen Spannungstensors und den Jaumannschen Ableitungen der Komponenten des Kirchhoffschen Spannungstensors wurde für die Umgeformte Lagrangesche Formulierung hergeleitet. Wir setzen (4.2.68) in (4.2.80) ein und erhalten unter Verwendung von (4.2.77) und (4.2.25) die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \int_B \left({}^t\tau_{ij}^{\nabla} - {}^t\sigma_{ik} \ {}^tD_{kj} - {}^tD_{ik} \ {}^t\sigma_{kj} + {}^t\sigma_{ik} \frac{\partial {}^t v_j}{\partial {}^t x_k} \right) \delta \left(\frac{\partial {}^t v_j}{\partial {}^t x_i} \right) {}^t dv \\ = \int_{\partial B} {}^t \dot{t}_j \delta {}^t v_j {}^t da + \int_B {}^t \rho \ {}^t \dot{b}_j \delta {}^t v_j {}^t dv, \end{aligned} \quad (4.2.81)$$

bei der sich alle Integrale entsprechend der Umgeformten Lagrangeschen Formulierung auf die Momentan-Konfiguration beziehen [32, 47].

Unter Beachtung der Symmetrie des Tensors τ^{∇} ergibt sich nach Umformung von (4.2.81) die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \int_B {}^t\tau_{ij}^{\nabla} \delta {}^t D_{ij} {}^t dv + \int_B \left({}^t\sigma_{ij} \ {}^t v_{k,j} \delta {}^t v_{k,i} - 2 \ {}^t\sigma_{ij} \ {}^t D_{kj} \delta {}^t D_{ki} \right) {}^t dv \\ = \int_{\partial B} {}^t \dot{t}_j \delta {}^t v_j {}^t da + \int_B {}^t \rho \ {}^t \dot{b}_j \delta {}^t v_j {}^t dv \end{aligned} \quad (4.2.82)$$

in der Form, die zur Formulierung der Finite-Elemente-Matrizen verwendet wird.

4.2.11 Hypoelastisches Materialverhalten

Von JAUMANN [35] wurde der Ansatz gemacht, daß ein Material, das als elastisch bezeichnet werden kann, die Mindestanforderung erfüllen muß, daß die Spannungsgeschwindigkeit bei bekanntem Spannungszustand eine homogene lineare Funktion der Verformungsgeschwindigkeit ist. Das Materialgesetz hat die Form

$$\dot{\tau}_{ij} = E_{ijkl}^{\tau} D_{kl}, \quad (4.2.83)$$

wobei die Komponenten E_{ijkl}^{τ} des Tensors E^{τ} im allgemeinen vom Spannungstensor abhängig sind. Nach TRUESDELL [88] werden diese Materialien als hypoelastisch bezeichnet [7, 56]. Es kann gezeigt werden, daß das Materialgesetz (4.2.83) für infinitesimale Dehnungen das Hookesche Gesetz als Sonderfall beinhaltet [70]. Da Spannungsänderungen unabhängig von der dafür benötigten Zeit sind, werden hypoelastische Stoffe als zähigkeitslos bezeichnet [70].

Die Beziehung zwischen den materiellen Zeitableitungen der Komponenten des Nominellen Spannungstensors und den Komponenten des Geschwindigkeitsgradienten ist von HILL [32] mit

$$\dot{S}_{ij} = \frac{\partial U}{\partial (\partial v_j / \partial X_i)} \quad (4.2.84)$$

gegeben worden, wobei das Potential U eine homogene quadratische Funktion des Geschwindigkeitsgradienten ist. Wir schreiben

$$U = \frac{1}{2} E_{ijkl}^S \frac{\partial v_j}{\partial X_i} \frac{\partial v_l}{\partial X_k}. \quad (4.2.85)$$

HILL [32] hat gezeigt, daß aus der Existenz des Potentials U für ein Material die Existenz eines homogenen quadratischen Potentials W mit

$$W = \frac{1}{2} E_{ijkl}^{\tau} D_{ij} D_{kl} \quad (4.2.86)$$

folgt. Die Beziehung zwischen den Jaumannschen Ableitungen der Komponenten des Kirchhoffschen Spannungstensors und den Komponenten des Tensors

der Deformationsgeschwindigkeit ergibt sich als

$$\overset{v}{t}_{ij} = \frac{\partial W}{\partial D_{ij}} = \frac{\partial^2 W}{\partial D_{ij} \partial D_{kl}} D_{kl} = E_{ijkl}^T D_{kl}, \quad (4.2.87)$$

wobei für die Komponenten des Tensors E^T die folgende Symmetrie gilt:

$$E_{ijkl}^T = E_{klij}^T. \quad (4.2.88)$$

Die Berücksichtigung der konstitutiven Beziehung (4.2.87) in (4.2.82) führt zu der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} & \int_B E_{ijkl}^T t_{D_{kl}} \delta^t D_{ij} t_{dv} + \int_B t_{\sigma_{ij}} t_{v_{k,j}} \delta^t v_{k,i} t_{dv} \\ & - \int_B 2 t_{\sigma_{ij}} t_{D_{kj}} \delta^t D_{ki} t_{dv} = \int_{\partial B} t_{\dot{t}_j} \delta^t v_j t_{da} + \int_B t_{\rho} t_{b_j} \delta^t v_j t_{dv} \end{aligned} \quad (4.2.89)$$

beziehungsweise zu der äquivalenten Variationsaussage

$$\begin{aligned} \delta \left[\int_B t_W t_{dv} + \frac{1}{2} \int_B (t_{\sigma_{ij}} t_{v_{k,j}} t_{v_{k,i}} - 2 t_{\sigma_{ij}} t_{D_{kj}} t_{D_{kl}}) t_{dv} \right. \\ \left. - \int_{\partial B} t_{\dot{t}_j} t_{v_j} t_{da} - \int_B t_{\rho} t_{b_j} t_{v_j} t_{dv} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.2.90)$$

Diese Variationsaussage führt zu symmetrischen Steifigkeitsmatrizen im Rahmen eines approximativen Lösungsverfahrens mit Hilfe der Methode der finiten Elemente [47].

Die Komponenten E_{ijkl}^T des Materialtensors folgen aus der Beziehung

$$\overset{v}{t}_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) D_{kl}, \quad (4.2.91)$$

die McMEEKING und RICE [47] als Verallgemeinerung der Materialgleichung von PRANDTL-REUSS für elastisches Materialverhalten angeben. Die Größen E und ν bezeichnen dabei den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl.

4.2.12 Berechnung der Spannungsinkremente

Aus der Beziehung (4.2.60) zwischen Kirchhoffschen und Cauchyschen Spannungen folgt der Ausdruck

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{1}{J} \dot{\tau}_{ij} - \frac{j}{J} {}^t\sigma_{ij}, \quad (4.2.92)$$

und durch den Austausch von σ durch τ in (4.2.58) erhalten wir [69]

$$\dot{\tau}_{ij} = \nabla \tau_{ij} + \Omega_{ik} \tau_{kj} + \Omega_{jk} \tau_{ki}. \quad (4.2.93)$$

Die Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors zum Zeitpunkt $t + dt$ lassen sich inkrementell unter Verwendung von (4.2.54) berechnen. Die Berücksichtigung von (4.2.92) und (4.2.93) in (4.2.54) führt zu

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t + dt) &= \sigma_{ij}(t) \\ &+ \frac{1}{J} \left(\nabla \tau_{ij}(t) + \Omega_{ik} \tau_{kj}(t) + \Omega_{jk} \tau_{ki}(t) - j \sigma_{ij}(t) \right) dt. \end{aligned} \quad (4.2.94)$$

Bei den weiteren Betrachtungen sind die Beziehungen zu beachten, die in Abschnitt 4.2.9 für die Umgeformte Lagrangesche Formulierung gegeben wurden. Für (4.2.94) schreiben wir dann

$$\begin{aligned} {}^{t+dt}\sigma_{ij} &= {}^t\sigma_{ij} \\ &+ \left(\nabla \tau_{ij} + \Omega_{ik} \tau_{kj} + \Omega_{jk} \tau_{ki} - j \sigma_{ij} \right) dt. \end{aligned} \quad (4.2.95)$$

Die materielle Zeitableitung der Determinante des Deformationsgradienten können wir unter Berücksichtigung von

$${}^{t+dt}x_i = {}^t x_i + {}^t v_i dt \quad \text{und} \quad {}^t X_i = {}^t x_i \quad (4.2.96)$$

durch den folgenden Ausdruck darstellen:

$${}^t j = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left(\det {}^{t+dt} {}^t F - \det {}^t F \right) = {}^t v_{k,k}. \quad (4.2.97)$$

Die Beziehungen (4.2.95), (4.2.97) und (4.2.87) führen uns zu dem gesuchten Ausdruck für die Cauchyschen Spannungen zum Zeitpunkt $t + dt$:

$$\begin{aligned} {}^{t+dt}\sigma_{ij} &= {}^t\sigma_{ij} \\ &+ (E_{ijkl}^T D_{kl} + \Omega_{ik} {}^t\sigma_{kj} + \Omega_{jk} {}^t\sigma_{ki} - v_{k,k} {}^t\sigma_{ij}) dt. \end{aligned} \tag{4.2.98}$$

Auf Grund des augenblicklichen Charakters dieser Gleichung ergeben sich die Cauchyschen Spannungen zum Zeitpunkt $t + dt$ nur dann exakt, wenn ein infinitesimales Zeitintervall dt beziehungsweise infinitesimale Zuwächse der Deformationen im Zeitintervall dt betrachtet werden.

4.3 Isoparametrische dreidimensionale Elemente mit variabler Knotenzahl

4.3.1 Interpolationsfunktionen

Bei der isoparametrischen Formulierung von finiten Elementen ist es von grundlegender Bedeutung, die Verschiebungen eines beliebigen Punktes des Elementes unter Verwendung von Interpolationsfunktionen durch die Verschiebungen der Knotenpunkte des Elementes zu beschreiben. Mit den gleichen Interpolationsfunktionen wird die Beziehung zwischen den Koordinaten eines beliebigen Punktes des Elementes und den Koordinaten der Knotenpunkte des Elementes hergestellt.

Die Interpolationsfunktionen, die auch als Formfunktionen bezeichnet werden, sind in einem natürlichen Koordinatensystem des Elementes definiert. Die Dimensionalität des natürlichen Koordinatensystems ist mit der Dimensionalität des Elementes identisch.

Da das natürliche Koordinatensystem und das globale Koordinatensystem bei dreidimensionalen Elementen die gleiche Ordnung haben, ist eine Ermittlung der Element-Matrizen im globalen Koordinatensystem vorteilhaft. Für ein Element mit N Knoten ergeben sich zwischen den Koordinaten folgende Beziehungen:

$$x_i = \sum_{k=1}^N h_k x_i^k. \quad (4.3.1)$$

Dabei sind x_i^k die globalen Koordinaten der N Knoten des Elementes und x_i die globalen Koordinaten eines beliebigen Punktes des Elementes.

Unter Verwendung der gleichen Interpolationsfunktionen werden die Ableitungen der globalen Element-Verschiebungen $v_i = \dot{u}_i$ in einem beliebigen Punkt des Elementes durch die entsprechenden globalen Größen in den N Knoten des Elementes ausgedrückt. Wir schreiben

$$v_i = \sum_{k=1}^N h_k v_i^k. \quad (4.3.2)$$

Das natürliche Koordinatensystem, in dem die Interpolationsfunktionen h_k definiert sind, hat die Koordinaten r , s und t , deren Definitionsbereich jeweils von -1 bis $+1$ reicht. Die Interpolationsfunktionen h_k haben im natürlichen Koordinatensystem am Knoten k den Wert 1 und an allen anderen Knoten den Wert Null. Unter Berücksichtigung dieser Eigenschaft hat BATHE [3] ein übliches Verfahren zur Bestimmung der Interpolationsfunktionen beschrieben und diese für ein dreidimensionales Element mit einer von 8 bis 20 variablen Knotenzahl angegeben. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Element mit einer von 8 bis 21 variablen Knotenzahl entwickelt (Abb. 4.2). Allgemein führt die Berücksichtigung eines weiteren Knotens zu einer zusätzlichen Interpolationsfunktion und zu Änderungen der bereits vorhandenen Interpolationsfunktionen.

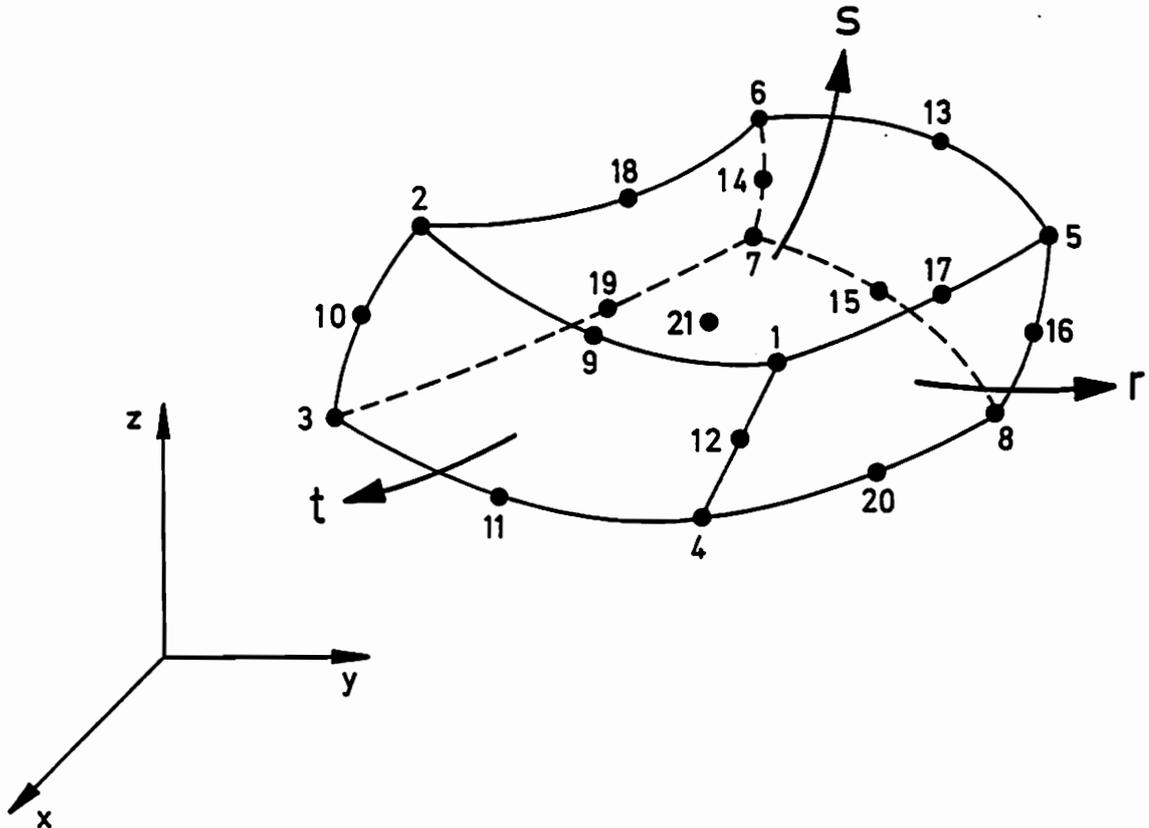


Abb. 4.2 Dreidimensionales Element mit einer von 8 bis 21 variablen Knotenzahl

Die Interpolationsfunktionen für das in Abbildung 4.2 dargestellte dreidimensionale Element können wir in der folgenden Form darstellen:

$$\left. \begin{aligned}
 h_1 &= g_1 - \frac{1}{2} (h_9 + h_{12} + h_{17}) - \frac{1}{8} h_{21} \\
 h_2 &= g_2 - \frac{1}{2} (h_9 + h_{10} + h_{18}) - \frac{1}{8} h_{21} \\
 h_3 &= g_3 - \frac{1}{2} (h_{10} + h_{11} + h_{19}) - \frac{1}{8} h_{21} \\
 h_4 &= g_4 - \frac{1}{2} (h_{11} + h_{12} + h_{20}) - \frac{1}{8} h_{21} \\
 h_5 &= g_5 - \frac{1}{2} (h_{13} + h_{16} + h_{17}) - \frac{1}{8} h_{21} \\
 h_6 &= g_6 - \frac{1}{2} (h_{13} + h_{14} + h_{18}) - \frac{1}{8} h_{21} \\
 h_7 &= g_7 - \frac{1}{2} (h_{14} + h_{15} + h_{19}) - \frac{1}{8} h_{21} \\
 h_8 &= g_8 - \frac{1}{2} (h_{15} + h_{16} + h_{20}) - \frac{1}{8} h_{21} \\
 h_i &= g_i - \frac{1}{4} h_{21} c_i \quad \text{für } i = 9, \dots, 20 \\
 h_{21} &= g_{21}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.3)$$

mit

$$g_j = \begin{cases} f(r_j) f(s_j) f(t_j) & \text{wenn Knoten } j \text{ vorhanden ist} \\ 0 & \text{wenn Knoten } j \text{ nicht vorhanden ist} \end{cases}$$

und

$$f(\beta_j) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \beta) & \text{für } \beta_j = +1 \\ (1 - \beta^2) & \text{für } \beta_j = 0 \quad \text{und} \quad \beta = r, s, t \\ \frac{1}{2} (1 - \beta) & \text{für } \beta_j = -1 \end{cases}$$

sowie

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn Knoten } i \text{ vorhanden ist} \\ 0 & \text{wenn Knoten } i \text{ nicht vorhanden ist} \end{cases}$$

4.3.2 Matrizen für die Formulierung der finiten Elemente

Die Matrizen für die Formulierung der finiten Elemente werden auf der Grundlage der Bewegungsgleichung (4.2.89) ermittelt. Für die Berechnung der Komponenten des Tensors der Deformationsgeschwindigkeiten D verwendet wird die Ableitung

$${}^t v_{i,j} = \frac{\partial {}^t v_i}{\partial {}^t x_j} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial h_k}{\partial {}^t x_j} \right) {}^t v_i^k = \sum_{k=1}^N {}^t h_{k,j} {}^t v_i^k, \quad (4.3.4)$$

wobei der tiefgestellte links stehende Index die Konfiguration bezeichnet, auf die die indizierte Größe bezogen ist.

Die Ableitungen der Interpolationsfunktionen nach den globalen Koordinaten werden mit Hilfe der Jacobischen Transformation [3, 77, 95] aus den Ableitungen der Interpolationsfunktionen nach den natürlichen Koordinaten gewonnen.

Im folgenden werden die verschiedenen Integrale der Bewegungsgleichung für ein bestimmtes finites Element betrachtet, und es wird deren matrixielle Schreibweise angegeben.

$$\int_B E_{ijkl}^T {}^t D_{kl} \delta {}^t D_{ij} {}^t dv$$

Die Auswertung des obenstehenden Integrals führt zu der Beziehung

$$\int_B E_{ijkl}^T {}^t D_{kl} \delta {}^t D_{ij} {}^t dv = \delta \hat{v}^T \left[\int_B B_{NL2}^T C B_{NL2} {}^t dv \right] \hat{v}. \quad (4.3.5)$$

Der Vektor \hat{v} beinhaltet die Ableitungen der globalen Element-Verschiebungen an den Knoten des Elementes nach der Zeit und hat die Form

$$\hat{v}^T = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} {}^t v_1^1 & {}^t v_1^2 & {}^t v_1^3 & {}^t v_2^1 & {}^t v_2^2 & {}^t v_2^3 & \dots & {}^t v_N^1 & {}^t v_N^2 & {}^t v_N^3 \end{array} \right]. \quad (4.3.6)$$

Die Transformationsmatrix B_{NL2} stellt die Verbindung zwischen den Zeit-

ableitungen der globalen Element-Verschiebungen an den Knoten des Elementes und den Komponenten des Tensors der Deformationsgeschwindigkeit D her. Wir schreiben

$$B_{NL2} = \begin{bmatrix} \underline{t}^{h_{1,1}} & 0 & 0 & \underline{t}^{h_{2,1}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \underline{t}^{h_{1,2}} & 0 & 0 & \dots & \underline{t}^{h_{N,2}} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{t}^{h_{1,3}} & 0 & \dots & 0 & \underline{t}^{h_{N,3}} \\ \underline{t}^{h_{1,2}} & \underline{t}^{h_{1,1}} & 0 & \underline{t}^{h_{2,2}} & \dots & \underline{t}^{h_{N,1}} & 0 \\ 0 & \underline{t}^{h_{1,3}} & \underline{t}^{h_{1,2}} & 0 & \dots & \underline{t}^{h_{N,3}} & \underline{t}^{h_{N,2}} \\ \underline{t}^{h_{1,3}} & 0 & \underline{t}^{h_{1,1}} & \underline{t}^{h_{2,3}} & \dots & 0 & \underline{t}^{h_{N,1}} \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

Die Matrix C verknüpft die Komponenten des Tensors der Deformationsgeschwindigkeit D mit den Komponenten des Spannungsgeschwindigkeitstensors $\underline{\dot{\tau}}$. Sie setzt sich aus den Komponenten des Materialtensors E^T zusammen und kann unter Verwendung der Materialgleichung (4.2.91) dargestellt werden als

$$C = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (4.3.8)$$

Die Laméschen Konstanten λ und μ sind in Abhängigkeit von dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.9)$$

$$\int_B {}^t \sigma_{ij} {}^t v_{k,j} \delta {}^t v_{k,i} {}^t dv$$

Das vorstehende Integral kann matriziell geschrieben werden als

$$\int_B {}^t \sigma_{ij} {}^t v_{k,j} \delta {}^t v_{k,i} {}^t dv = \delta \mathbf{v}^T \left[\int_B \mathbf{B}_{NL1}^T \boldsymbol{\sigma}_{NL1} \mathbf{B}_{NL1} {}^t dv \right] \hat{\mathbf{v}}. \quad (4.3.10)$$

Die Transformationsmatrix \mathbf{B}_{NL1} dient der Verbindung der Zeitableitungen der globalen Element-Verschiebungen an den Knoten des Elementes mit den Verzerrungsgeschwindigkeiten und hat die Form

$$\mathbf{B}_{NL1} = \begin{bmatrix} {}^t h_{1,1} & 0 & 0 & {}^t h_{2,1} & \dots & 0 & 0 \\ {}^t h_{1,2} & 0 & 0 & {}^t h_{2,2} & \dots & 0 & 0 \\ {}^t h_{1,3} & 0 & 0 & {}^t h_{2,3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & {}^t h_{1,1} & 0 & 0 & \dots & {}^t h_{N,1} & 0 \\ 0 & {}^t h_{1,2} & 0 & 0 & \dots & {}^t h_{N,2} & 0 \\ 0 & {}^t h_{1,3} & 0 & 0 & \dots & {}^t h_{N,3} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t h_{1,1} & 0 & \dots & 0 & {}^t h_{N,1} \\ 0 & 0 & {}^t h_{1,2} & 0 & \dots & 0 & {}^t h_{N,2} \\ 0 & 0 & {}^t h_{1,3} & 0 & \dots & 0 & {}^t h_{N,3} \end{bmatrix}. \quad (4.3.11)$$

Die Matrix $\boldsymbol{\sigma}_{NL1}$ setzt sich aus den Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors zum Zeitpunkt t zusammen und kann dargestellt werden als

$$\boldsymbol{\sigma}_{NL1} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{NL1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{NL1} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{NL1} \end{bmatrix}, \quad (4.3.12)$$

wobei die Matrizen $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{NL1}$ und 0 , aus denen die Matrix $\boldsymbol{\sigma}_{NL1}$ aufgebaut ist, gegeben sind durch

$$\tilde{\sigma}_{NL1} = \begin{bmatrix} \frac{{}^t\sigma_{11}}{2} & \frac{{}^t\sigma_{12}}{2} & \frac{{}^t\sigma_{13}}{2} \\ \frac{{}^t\sigma_{12}}{2} & \frac{{}^t\sigma_{22}}{2} & \frac{{}^t\sigma_{23}}{2} \\ \frac{{}^t\sigma_{13}}{2} & \frac{{}^t\sigma_{23}}{2} & \frac{{}^t\sigma_{33}}{2} \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.14)$$

Das dritte Integral, das für die Bestimmung der Steifigkeitsmatrizen zu betrachten ist, ist gegeben durch

$$\int_B 2 \, {}^t\sigma_{ij} \, {}^tD_{kj} \, \delta {}^tD_{ki} \, {}^t dv$$

In der matriziellen Schreibweise können wir das Integral darstellen als

$$\int_B 2 \, {}^t\sigma_{ij} \, {}^tD_{kj} \, \delta {}^tD_{ki} \, {}^t dv = \delta \hat{v}^T \left[\int_B \mathbf{B}_{NL2}^T \, \sigma_{NL2} \, \mathbf{B}_{NL2} \, {}^t dv \right] \hat{v} \quad (4.3.15)$$

Die Matrix σ_{NL2} setzt sich wie die Matrix σ_{NL1} aus den Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors zum Zeitpunkt t zusammen. Es ergibt sich als Gleichung (4.3.16)

$$\sigma_{NL2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 {}^t\sigma_{11} & 0 & 0 & 2 {}^t\sigma_{12} & 0 & 2 {}^t\sigma_{13} \\ 0 & 4 {}^t\sigma_{22} & 0 & 2 {}^t\sigma_{12} & 2 {}^t\sigma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 4 {}^t\sigma_{33} & 0 & 2 {}^t\sigma_{23} & 2 {}^t\sigma_{13} \\ 2 {}^t\sigma_{12} & 2 {}^t\sigma_{12} & 0 & {}^t\sigma_{11} + {}^t\sigma_{22} & {}^t\sigma_{13} & {}^t\sigma_{23} \\ 0 & 2 {}^t\sigma_{23} & 2 {}^t\sigma_{23} & {}^t\sigma_{13} & {}^t\sigma_{22} + {}^t\sigma_{33} & {}^t\sigma_{12} \\ 2 {}^t\sigma_{13} & 0 & 2 {}^t\sigma_{13} & {}^t\sigma_{23} & {}^t\sigma_{12} & {}^t\sigma_{11} + {}^t\sigma_{33} \end{bmatrix}$$

4.3.3 Numerische Bestimmung des Volumenintegrals

Die Elemente der Matrizen B_{NL1} und B_{NL2} sind Funktionen der natürlichen Koordinaten r , s und t . Daher muß das Volumenelement ${}^t dv$, über das die Integration in (4.3.5), (4.3.10) und (4.3.15) auszuführen ist, in natürlichen Koordinaten ausgedrückt werden. Es gilt die Transformation

$${}^t dv = \det {}^t J dr ds dt, \quad (4.3.17)$$

wobei $\det {}^t J$ die Determinante der Jacobischen Matrix zum Zeitpunkt t bezeichnet [3, 95]. Für ein Integral über die Momentan-Konfiguration B ergibt sich unter Verwendung von (4.3.17) der Ausdruck

$$\int_B F(r,s,t) {}^t dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det {}^t J F(r,s,t) dr ds dt, \quad (4.3.18)$$

in dem F eine beliebige Funktion der natürlichen Koordinaten ist.

Die numerische Integration der Matrizen erfolgt mit dem Verfahren der Gauß-Quadratur, bei dem sowohl die Lage der Stützstellen als auch die Gewichtungsfaktoren optimiert sind. Für die Integration in drei Dimensionen schreiben wir

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(r,s,t) dr ds dt = \sum_i \sum_j \sum_k \alpha_i \alpha_j \alpha_k F(r_i, s_j, t_k), \quad (4.3.19)$$

wobei die Stützstellen mit r_i , s_j und t_k und die Gewichtungsfaktoren mit α_i , α_j und α_k bezeichnet sind.

BATHE [3] gibt für dreidimensionale Elemente mit 8 Knoten als zuverlässige Integrationsordnung die $2 \times 2 \times 2$ - und für dreidimensionale Elemente mit 20 Knoten die $3 \times 3 \times 3$ -Gauß-Quadratur an. Für die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Elemente wird die Integrationsordnung entsprechend gewählt. Im allgemeinen werden die Steifigkeitsmatrizen mit dieser Integrationsordnung mit ausreichender Genauigkeit näherungsweise berechnet. Angaben über die Genauigkeit der $3 \times 3 \times 3$ -Gauß-Quadratur und ande-

rer Integrationsordnungen gibt HELLEN [27] exemplarisch für verschiedene Tragwerke.

4.3.4 Lösung der Gleichgewichtsbedingung

Unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichung (4.2.89) und der matrixiellen Ausdrücke in (4.3.5), (4.3.10) und (4.3.15) ergibt sich die Steifigkeitsmatrix für ein bestimmtes finites Element zum Zeitpunkt t als

$${}^{El}K_T = \int_B \left[B_{NL2}^T (C - \sigma_{NL2}) B_{NL2} + B_{NL1}^T \sigma_{NL1} B_{NL1} \right] {}^t dv. \quad (4.3.20)$$

Die Zeitableitungen der globalen Verschiebungen und der äußeren Knotenpunktlasten sind bei der gewählten Formulierung durch die Beziehung

$$K_T \dot{v} = \dot{R} \quad (4.3.21)$$

verknüpft. Die Matrix K_T wird als Tangential-Steifigkeitsmatrix bezeichnet und setzt sich aus den Element-Steifigkeitsmatrizen (4.3.20) zusammen. Die Vektoren \dot{v} und \dot{R} beinhalten die Ableitungen der globalen Verschiebungen an dem M Knoten des Systems bzw. der äußeren Knotenpunktlasten nach der Zeit. Wir schreiben

$$\dot{v}^T = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \dot{v}_1^1 & \dot{v}_2^1 & \dot{v}_3^1 & \dot{v}_1^2 & \dot{v}_2^2 & \dot{v}_3^2 & \dots & \dot{v}_1^M & \dot{v}_2^M & \dot{v}_3^M \end{array} \right] \quad (4.3.22)$$

und

$$\dot{R}^T = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \dot{R}_1^1 & \dot{R}_2^1 & \dot{R}_3^1 & \dot{R}_1^2 & \dot{R}_2^2 & \dot{R}_3^2 & \dots & \dot{R}_1^M & \dot{R}_2^M & \dot{R}_3^M \end{array} \right]. \quad (4.3.23)$$

Anschaulich stellt die obenstehende Gleichung (4.3.21) zum Zeitpunkt t den Zusammenhang zwischen einem infinitesimalen Lastzuwachs und dem daraus resultierenden infinitesimalen Verschiebungszuwachs her. Für endliche Lastzuwächse, die während der Zeitpunkte t und $t + \Delta t$ auf das System aufgebracht werden, hängen die Zuwächse der Verschiebungen im allgemeinen nichtlinear von diesen ab. Näherungsweise kann dieser nicht-

lineare Zusammenhang vernachlässigt werden. Wir sehen die inkrementellen Element-Verschiebungen, die sich als Lösung des linearen Gleichungssystems (4.3.21) ergeben, als hinreichend genaue Näherung der tatsächlichen Verschiebungszuwächse an, wenn die Lastzuwächse ausreichend klein gewählt werden [95]. Diese Linearisierung ist in den nachfolgenden Beziehungen berücksichtigt.

Der Zusammenhang zwischen den Inkrementen der äußeren Knotenpunktlasten im Zeitintervall Δt und den Ableitungen der äußeren Knotenpunktlasten zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$R_i^k = {}^t R_i^k \Delta t, \quad (4.3.24)$$

und die äußeren Knotenpunktlasten zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ berechnen sich aus den Inkrementen der äußeren Knotenpunktlasten mit

$${}^{t+\Delta t} R_i^k = {}^t R_i^k + R_i^k. \quad (4.3.25)$$

Analog zu den obenstehenden inkrementellen Zusammenhängen berechnen sich die Inkremente der globalen Element-Verschiebungen an den Knoten eines Elementes aus den Ableitungen der Größen nach der Zeit mit

$$u_i^k = {}^t v_i^k \Delta t, \quad (4.3.26)$$

und die Element-Verschiebungen der Element-Knoten zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ bestimmen sich gemäß der Gleichung

$${}^{t+\Delta t} u_i^k = {}^t u_i^k + u_i^k. \quad (4.3.27)$$

Die Inkremente der Cauchyschen Spannungen wurden bereits in Abschnitt 4.2.12 angegeben. Wir schreiben anstatt (4.2.98) jetzt näherungsweise

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} &= {}^t \sigma_{ij} \\ &+ (E_{ijkl}^T {}^t D_{kl} + {}^t \Omega_{ik} {}^t \sigma_{kj} + {}^t \Omega_{jk} {}^t \sigma_{ki} - {}^t v_{k,k} {}^t \sigma_{ij}) \Delta t, \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

wobei befriedigende Ergebnisse auch hier nur dann zu erwarten sind, wenn

dafür Sorge getragen wird, daß die Inkremente der Element-Verschiebungen im Zeitintervall Δt hinreichend klein sind.

4.3.5 Betrachtungen zur numerischen Effektivität

Die Tangential-Steifigkeitsmatrix K_T kann durch die numerische Multiplikation der in Abschnitt 4.3.2 gegebenen Matrizen gemäß Gleichung (4.3.20) ermittelt werden. Dieser Weg führt zu einer relativ übersichtlichen Programmierung, hat jedoch den Nachteil, numerisch nicht effektiv zu sein. Alle gegebenen Matrizen enthalten Nullelemente, wobei im besonderen die Matrizen B_{NL1} , σ_{NL1} und C spärlich besetzt sind. Eine Berechnung in der oben vorgeschlagenen Weise kann diesen Sachverhalt nicht berücksichtigen, was zu einer Vielzahl von Multiplikationen führt, bei denen zumindest ein Faktor gleich Null ist. Es erschien daher sinnvoll, die Multiplikation der Matrizen analytisch auszuführen.

Für ein dreidimensionales Element mit N Knoten ergibt sich eine Element-Steifigkeitsmatrix mit drei Zeilen und drei Spalten pro Knoten. Diese Zeilen- und Spaltentripel werden mit "i" beziehungsweise "k" indiziert. Die analytische Auswertung der Matrizenprodukte in (4.3.20) führt zu einer Element-Steifigkeitsmatrix, die sich aus Submatrizen mit drei Zeilen und drei Spalten aufbaut. Wir können die Submatrizen formal darstellen als

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 [3(k-1)+3]\text{-te Spalte} \\
 [3(k-1)+2]\text{-te Spalte} \\
 [3(k-1)+1]\text{-te Spalte}
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 [3(i-1)+1]\text{-te Zeile} \\
 [3(i-1)+2]\text{-te Zeile} \\
 [3(i-1)+3]\text{-te Zeile}
 \end{array}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{c|c|c}
 K_{11} & K_{12} & K_{13} \\
 \hline
 K_{21} & K_{22} & K_{23} \\
 \hline
 K_{31} & K_{32} & K_{33}
 \end{array} \right], \quad (4.3.29)$$

wobei die genannten Zeilen- und Spaltennummern die Lage der Elemente der Submatrizen in der Element-Steifigkeitsmatrix bezeichnen.

Im allgemeinen sind die Submatrizen vollständig besetzt. Exemplarisch

wird das Element K_{11} der Submatrizen, die zum Aufbau der Steifigkeitsmatrix eines Elementes dienen, angegeben:

$$\begin{aligned} K_{11} = & \frac{1}{2} (2 \lambda + 4 \mu - 2 {}^t\sigma_{11}) \quad {}^t h_{i,1} \quad {}^t h_{k,1} \\ & + \frac{1}{2} (2 \mu - {}^t\sigma_{11} + {}^t\sigma_{22}) \quad {}^t h_{i,2} \quad {}^t h_{k,2} \\ & + \frac{1}{2} ({}^t\sigma_{23}) \quad {}^t h_{i,3} \quad {}^t h_{k,2} \\ & + \frac{1}{2} ({}^t\sigma_{23}) \quad {}^t h_{i,2} \quad {}^t h_{k,3} \\ & + \frac{1}{2} (2 \mu - {}^t\sigma_{11} + {}^t\sigma_{33}) \quad {}^t h_{i,3} \quad {}^t h_{k,3}. \end{aligned} \tag{4.3.30}$$

Die Berechnung der Element-Steifigkeitsmatrix erfolgt unter Berücksichtigung ihrer Symmetrieeigenschaft nach der oben dargestellten Methode. Dieses Verfahren ist numerisch optimal, da die Anzahl der zeitaufwendigen Multiplikationen minimiert ist.

4.4 Von dreidimensionalen Elementen eingeschlossene ideale Fluide

In diesem Kapitel betrachten wir ideale Fluide, die von dreidimensionalen Elementen eingeschlossen sind. Die Räume des Tragwerks, in denen sich die Fluide befinden, werden als Kavitäten bezeichnet. Wir setzen voraus, daß die Kavitäten in der unverformten und spannungsfreien Ausgangskonfiguration vollständig durch die Fluide gefüllt sind.

4.4.1 Stoffgesetz idealer Fluide

Stoffe, die der Klasse der idealen Fluide angehören, sind dadurch gekennzeichnet, daß in ihnen an keinem Ort zu keiner Zeit Tangentialspannungen auftreten können. Solche Stoffe werden auch als nicht-viskose Flüssigkeiten bezeichnet. Aus der Voraussetzung der Tangentialspannungsfreiheit folgt für die Cauchyschen Spannungen die Bedingung

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j. \quad (4.4.1)$$

GUMMERT und RECKLING [25] haben unter Berücksichtigung der Tatsache, daß der Spannungsvektor bezüglich jeder beliebigen Schnittfläche des Fluids keine Tangentialkomponenten hat, gezeigt, daß die drei Normalspannungen gleich groß sind. Wir schreiben

$$\sigma_{ij} = p \delta_{ij}, \quad (4.4.2)$$

wobei p ein Skalar ist, das als Druck bezeichnet wird. Dieser Zusammenhang wird auch als Pascalsches Gesetz bezeichnet und beschreibt die Isotropie des Drucks. Da es sich bei den Normalspannungen nicht um Zugspannungen handeln kann, nimmt der Druck nur Werte an, die kleiner oder gleich Null sind.

4.4.2 Erweiterung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten

Die materiellen Zeitableitungen der Cauchyschen Spannungen ergeben sich aus (4.4.2) als

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{p} \delta_{ij}. \quad (4.4.3)$$

Der Zusammenhang zwischen den Komponenten des Cauchyschen und des Nomi-nellen Spannungstensors ist durch (4.2.45) gegeben. Unter Verwendung von (4.2.25) erhalten wir

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} S_{kj}, \quad (4.4.4)$$

und für die materiellen Zeitableitungen der Cauchyschen Spannungen folgt der Ausdruck

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\dot{\rho}}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} S_{kj} + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial v_i}{\partial X_k} S_{kj} + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \dot{S}_{kj}. \quad (4.4.5)$$

Aus dem Vergleich von (4.4.3) und (4.4.5) ergibt sich

$$\dot{p} \delta_{ij} = \frac{\dot{\rho}}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} S_{kj} + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial v_i}{\partial X_k} S_{kj} + \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \dot{S}_{kj}. \quad (4.4.6)$$

Die Berücksichtigung der in Abschnitt 4.2.9 genannten Beziehungen für die Umgeformte Lagrangesche Formulierung führt zu

$${}^t\dot{S}_{ij} = {}^t\dot{p} \delta_{ij} - {}^t p \frac{{}^t\dot{\rho}}{{}^t\rho} \delta_{ij} - {}^t p {}^t v_{i,j}. \quad (4.4.7)$$

Der Nucleus pulposus wird in dieser Arbeit als ideale inkompressible Flüssigkeit betrachtet. Für eine inkompressible Flüssigkeit gilt, daß alle Zustandsänderungen unter konstantem Volumen erfolgen. Solche Vorgänge werden auch als isochor bezeichnet. Die Dichte ρ des Fluids ist demzufolge in jedem Punkt x zu jedem Zeitpunkt t konstant. Im Rahmen der zu betrachtenden klinischen Fragestellungen ist jedoch der Fall zu bedenken, daß das Volumen des Fluids durch einen äußeren Eingriff verändert wird. Dies führt zwar tatsächlich nicht zu einer Änderung der Dichte, dennoch kann die Volumenänderung am einfachsten durch eine fiktive Änderung der Dichte des Fluids simuliert werden. Auf Grund dessen wird die materielle Zeitableitung der Dichte $\dot{\rho}$ weiterhin berücksichtigt. Um den physikalischen Gegebenheiten zu entsprechen, ist allerdings Sorge dafür zu tragen, daß kein Unterdruck auftreten kann.

Aus der Berücksichtigung der Beziehungen (4.2.25) und (4.2.97) folgt

$$\frac{\dot{t}\rho}{t\rho} = - \dot{t}v_{k,k}, \quad (4.4.8)$$

und für die materiellen Zeitableitungen der Komponenten des Nominellen Spannungstensors erhalten wir

$$\dot{t}S_{ij} = \dot{t}p \delta_{ij} + \dot{t}p \dot{t}v_{k,k} \delta_{ij} - \dot{t}p \dot{t}v_{i,j}. \quad (4.4.9)$$

Die linke Seite der aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten (4.2.80) resultierenden Bewegungsgleichung (4.2.89) ist um das Integral

$$\begin{aligned} \int_{B_F} \dot{t}S_{ij} \delta^t v_{j,i} \dot{t}dv &= \int_{B_F} \dot{t}p \delta_{ij} \delta^t v_{j,i} \dot{t}dv \\ &+ \int_{B_F} (\dot{t}p \dot{t}v_{k,k} \delta_{ij} - \dot{t}p \dot{t}v_{i,j}) \delta^t v_{j,i} \dot{t}dv \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

zu erweitern, wobei die Integration zum Zeitpunkt t über die Momentan-Konfiguration B_F aller mit einem Fluid gefüllten Kavitäten zu erfolgen hat. Für eine bestimmte Kavität gilt, daß der Druck zu einem bestimmten Zeitpunkt in dem gesamten Fluid konstant ist, wenn die von außen auf das Fluid einwirkenden Körperkräfte vernachlässigt werden. Die Beziehung (4.4.10) läßt sich dann als Summe über alle n Kavitäten in der Form

$$\begin{aligned} \int_{B_F} \dot{t}S_{ij} \delta^t v_{j,i} \dot{t}dv &= \sum_{m=1}^n \left[\dot{t}p^m \int_{\partial B_F^m} \dot{t}n_i \delta^t v_i \dot{t}da \right. \\ &\left. + \dot{t}p^m \int_{\partial B_F^m} \dot{t}n_i (\dot{t}v_{k,k} \delta^t v_i - \dot{t}v_{i,j} \delta^t v_j) \dot{t}da \right] \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

darstellen, wobei das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umgewandelt wurde [11]. Die Fläche, die die m -te Kavität begrenzt, wird mit ∂B_F^m bezeichnet. Es handelt sich bei dieser Fläche somit um eine Oberfläche des Festkörpers. Auf die daraus resultierenden Zusammenhänge wird an späterer Stelle ausführlich eingegangen.

Die Bewegungsgleichung eines Körpers, in dem ideale, gewichtslose Fluide mit einem veränderlichen Volumen eingeschlossen sind, ergibt sich zusammenfassend als

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^n \left[t_p^m \int_{\partial B_F^m} t_{n_i} \delta^t v_i \, t_{da} + t_p^m \int_{\partial B_F^m} t_{n_i} (t_{v_{k,k}} \delta^t v_i - t_{v_{i,j}} \delta^t v_j) \, t_{da} \right] \\ & + \int_B E_{ijkl}^T t_{D_{kl}} \delta^t D_{ij} \, t_{dv} + \int_B t_{\sigma_{ij}} t_{v_{k,j}} \delta^t v_{k,i} \, t_{dv} \quad (4.4.12) \\ & - \int_B 2 t_{\sigma_{ij}} t_{D_{kj}} \delta^t D_{ki} \, t_{dv} = \int_{\partial B} t_i^j \delta^t v_j \, t_{da} + \int_B t_\rho t_{b_j} \delta^t v_j \, t_{dv}. \end{aligned}$$

Die entsprechende Variationsaussage erhalten wir als Erweiterung der Variationsaussage (4.2.90), die in Abschnitt 4.2.11 für den reinen Festkörper gegeben ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \delta \left[\sum_{m=1}^n \left[t_p^m \int_{\partial B_F^m} t_{n_i} t_{v_i} \, t_{da} + t_p^m \frac{1}{2} \int_{\partial B_F^m} t_{n_i} (t_{v_{k,k}} t_{v_i} - t_{v_{i,j}} t_{v_j}) \, t_{da} \right] \right. \\ \left. + \int_B t_W \, t_{dv} + \frac{1}{2} \int_B t_{\sigma_{ij}} t_{v_{k,j}} t_{v_{k,i}} \, t_{dv} \quad (4.4.13) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_B 2 t_{\sigma_{ij}} t_{D_{kj}} t_{D_{ki}} \, t_{dv} - \int_{\partial B} t_i^j t_{v_j} \, t_{da} - \int_B t_\rho t_{b_j} t_{v_j} \, t_{dv} \right] = 0. \end{aligned}$$

Diese Variationsaussage führt im Rahmen der Methode der finiten Elemente zu symmetrischen Steifigkeitsmatrizen.

4.4.3 Modifikation der Tangential-Steifigkeitsmatrix

Die erweiterte Bewegungsgleichung beinhaltet zwei zusätzliche Integrale. Wir betrachten im folgenden das Integral

$$t_p^m \int_{\partial B_F^m} t_{n_i} (t_{v_{k,k}} \delta^t v_i - t_{v_{i,j}} \delta^t v_j) \, t_{da} .$$

Dieses Integral liefert einen symmetrischen Beitrag zu der Tangential-Steifigkeitsmatrix. Die Integration erfolgt über die Fläche, die die m-te Kavität begrenzt. Diese Fläche ist durch die Seitenflächen der dreidimensionalen Elemente, die diesen Raum umschließen, gegeben. Eine Diskretisierung des Fluids mit besonderen Fluid-Elementen [63] ist nicht erforderlich. Die zu integrierenden Größen ergeben sich aus den bereits bekannten Interpolationsfunktionen und der Geometrie der verformten dreidimensionalen Elemente. Die Auswertung des obenstehenden Integrals für ein bestimmtes dreidimensionales Element führt zu der Beziehung

$$\begin{aligned} & {}^t p^m \int_{\partial B_F^m} {}^t n_i ({}^t v_{k,k} \delta^t v_i - {}^t v_{i,j} \delta^t v_j) {}^t da \\ & = \delta \hat{v}^T \left[{}^t p^m \int_{\partial B_F^m} H^T N_1^T B_{NL1} {}^t da \right] \hat{v}. \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Der Vektor der materiellen Zeitableitungen der globalen Element-Ver-schiebungen \hat{v} und die Transformationsmatrix B_{NL1} sind in Abschnitt 4.3.2 gegeben. Die Matrix H hat die Form

$$H = \left[h_1 I_3 \mid h_2 I_3 \mid h_3 I_3 \mid \dots \mid h_N I_3 \right], \quad (4.4.15)$$

wobei mit I_3 eine quadratische Einheitsmatrix der Ordnung 3 bezeichnet ist. Die Matrix N_1 beinhaltet die Komponenten des Einheitsvektors, der normal auf dem Flächenelement ${}^t da$ steht und nach außen orientiert ist. Wir schreiben

$$N_1^T = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & -{}^t n_2 & {}^t n_1 & 0 & -{}^t n_3 & 0 & {}^t n_1 \\ \hline {}^t n_2 & -{}^t n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -{}^t n_3 & {}^t n_2 \\ \hline {}^t n_3 & 0 & -{}^t n_1 & 0 & {}^t n_3 & -{}^t n_2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (4.4.16)$$

Die in Abschnitt 4.3.4 für einen Festkörper gegebene Tangential-Steifigkeitsmatrix K_T wird entsprechend (4.4.14) erweitert. Für die modifizierte Tangential-Steifigkeitsmatrix K_{TF} gilt

$$K_{TF} = K_T + \sum_{m=1}^n K_F^m. \quad (4.4.17)$$

Für eine bestimmte Kavität wird die Matrix K_F^m aus den Element-Steifigkeitsmatrizen

$$E^l K_F^m = {}^t p^m \int_{\partial B_F^m} H^T N_1^T B_{NL1} {}^t da \quad (4.4.18)$$

aller angrenzenden dreidimensionalen Elemente aufgebaut. Es ist dabei über die Seitenflächen der dreidimensionalen Elemente zu integrieren, die die Kavität begrenzen. Für ein bestimmtes dreidimensionales Element mit N Knoten ergibt sich daraus formal eine Matrix vom Typ $(3N, 3N)$. Die in Abschnitt 4.3.5 beschriebene analytische Auswertung der Matrizenprodukte ist auch hier aus numerischer Sicht sinnvoll. Dies führt zu Submatrizen, deren formale Darstellung mit (4.3.29) gegeben ist. Für die Elemente der Submatrix, die dem i -ten bzw. dem k -ten Elementknoten zuzuordnen ist, ergibt sich

$$K_{ln} = {}^t p^m (h_i {}^t n_l {}^t h_{k,n} - h_i {}^t n_n {}^t h_{k,l}). \quad (4.4.19)$$

Zu beachten ist, daß die Hauptdiagonale dieser Submatrizen grundsätzlich unbesetzt ist. Weiterhin läßt sich zeigen, daß die Submatrizen vollständig unbesetzt sind, wenn der i -te oder der k -te Knoten nicht auf der zu betrachtenden Seitenfläche liegt. Daraus resultiert eine weitere Steigerung der Effizienz, da nur eine relativ geringe Anzahl von Submatrizen zu ermitteln ist. Als Beispiel sei hier ein Element mit 8 Knoten genannt, bei dem sich die Anzahl der zu ermittelnden Submatrizen von 36 auf 10 reduziert.

Besondere Beachtung ist der Tatsache zu schenken, daß die Matrix, die aus der Betrachtung der Seitenfläche eines einzelnen dreidimensionalen Elementes resultiert, nicht symmetrisch ist. Im allgemeinen ist es daher nicht ausreichend, nur die obere Dreiecksmatrix zu bestimmen. Aus der Symmetrie der Matrix K_F^m läßt sich jedoch ableiten, daß die Ermittlung bestimmter Submatrizen für die Berechnung der oberen Dreiecksmatrix der Gesamtsteifigkeitsmatrix ausreichend ist. Es handelt sich dabei um die

Submatrizen, bei denen die Systemknotennummer des k-ten Elementknotens größer oder gleich derjenigen des i-ten Elementknotens ist. Die Anzahl der zu betrachtenden Submatrizen wird daher durch die Unsymmetrie nicht vergrößert, und der numerische Aufwand bleibt unverändert.

4.4.4 Modifikation des Lastvektors

Im folgenden betrachten wird das zweite Integral, um das die Bewegungsgleichung erweitert wurde. Es ist gegeben durch

$$\boxed{\dot{p}^m \int_{\partial B_F^m} t_{n_i} \delta^t v_i \, da}$$

In der matriziellen Schreibweise erhalten wir für ein bestimmtes angrenzendes dreidimensionales Element die Beziehung

$$\dot{p}^m \int_{\partial B_F^m} t_{n_i} \delta^t v_i \, da = \delta^{\Delta T} \left[\dot{p}^m \int_{\partial B_F^m} N_2 \, da \right], \quad (4.4.20)$$

wobei für den Vektor N_2 gilt

$$N_2^T = \left[t_{n_1} h_1 \mid t_{n_2} h_1 \mid t_{n_3} h_1 \mid t_{n_1} h_2 \mid t_{n_2} h_2 \mid \dots \mid t_{n_3} h_N \right]. \quad (4.4.21)$$

Für den resultierenden Vektor der materiellen Zeitableitungen der Knotenpunktlasten \dot{R}_F^m schreiben wir

$$\dot{R}_F^m = \dot{p}^m N_F^m, \quad (4.4.22)$$

wobei der aus bekannten Größen bestehende Vektor N_F^m aus den Vektoren

$$E^1 N_F^m = \int_{\partial B_F^m} N_2 \, da \quad (4.4.23)$$

aufgebaut wird, die sich für die einzelnen angrenzenden Elemente ergeben, und die materielle Zeitableitung des Drucks \dot{p}^m unbekannt ist.

4.4.5 Formulierung der Nebenbedingungen

Die materielle Zeitableitung des Volumens der m-ten Kavität zum Zeitpunkt t bestimmt sich unter Verwendung von (4.2.19), (4.2.25) und (4.2.97) als

$$\dot{V}_F^m = \int_{B_F^m} t_{v_{k,k}} \, {}^t dv = \int_{\partial B_F^m} t_{n_k} \, t_{v_k} \, {}^t da. \quad (4.4.24)$$

Zusätzlich zu den unbekanntem Geschwindigkeiten der Knoten der finiten Elemente ergibt sich für jede Kavität die materielle Zeitableitung des Drucks als weitere Unbekannte. Andererseits erhalten wir für jede Kavität die obenstehende Gleichung (4.4.24), für die wir matriziell schreiben

$$\dot{V}_F^m = \mathbf{v}^T \mathbf{N}_F^m. \quad (4.4.25)$$

Da die materielle Zeitableitung des Volumens der Kavität eine bekannte Größe ist, kann diese Gleichung zur Bestimmung der zusätzlichen Unbekannten verwendet werden.

4.4.6 Numerische Bestimmung des Flächenintegrals

In diesem Abschnitt betrachten wir exemplarisch ein dreidimensionales finites Element, das eine Kavität durch die Seitenfläche begrenzt, auf der die Elementknoten 1 bis 4 liegen.

Die Matrizen \mathbf{H} , \mathbf{N}_1 , \mathbf{N}_2 und \mathbf{B}_{NL1} sind Funktionen der natürlichen Koordinaten r , s und t . Daher muß das Flächenelement ${}^t da$, über das die Integration in (4.4.14), (4.4.20) und (4.4.25) auszuführen ist, in natürlichen Koordinaten ausgedrückt werden. Für die betrachtete Seitenfläche ist die Koordinate t eine Konstante, und die Integration über die Koordinaten r und s erfolgt gemäß der Beziehung [11]

$$\int_{\partial B} F(r,s) \, {}^t da = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(r,s) \sqrt{EG - FF} \, dr \, ds, \quad (4.4.26)$$

wobei die Größen E, G und F gegeben sind durch

$$E = \left(\frac{\partial^t x_1}{\partial r} \right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial^t x_1}{\partial s} \right)^2, \quad F = \frac{\partial^t x_1}{\partial r} \frac{\partial^t x_1}{\partial s},$$

und F eine beliebige Funktion der natürlichen Koordinaten r und s ist. Für die numerische Integration gilt analog zu (4.3.19)

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(r,s) dr ds = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j). \quad (4.4.27)$$

BATHE [3] gibt für zweidimensionale Elemente mit 4 Knoten als zuverlässige Integrationsordnung die 2 × 2- und für zweidimensionale Elemente mit 8 Knoten die 3 × 3-Gauß-Quadratur an. Im allgemeinen werden die Steifigkeitsmatrizen unter Verwendung dieser Integrationsordnung mit ausreichender Genauigkeit näherungsweise berechnet.

Die Tangentenvektoren an der Stützstelle (r_i, s_j) an die Koordinatenlinien $r = r_i$ beziehungsweise $s = s_j$ sind

$$\mathbf{T}_r = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial^t x_1(r_i, s_j)}{\partial r} & \frac{\partial^t x_2(r_i, s_j)}{\partial r} & \frac{\partial^t x_3(r_i, s_j)}{\partial r} \end{array} \right]^T \quad (4.4.28)$$

und

$$\mathbf{T}_s = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial^t x_1(r_i, s_j)}{\partial s} & \frac{\partial^t x_2(r_i, s_j)}{\partial s} & \frac{\partial^t x_3(r_i, s_j)}{\partial s} \end{array} \right]^T. \quad (4.4.29)$$

Der Normaleneinheitsvektor n im Punkt (r_i, s_j) steht senkrecht auf den Tangentenvektoren und es gilt

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_r}{|\mathbf{T}_s \times \mathbf{T}_r|}. \quad (4.4.30)$$

Aus der Sicht eines Beobachters, der sich in der Kavität befindet, ist der Vektor n nach außen orientiert.

4.4.7 Lösung des erweiterten Gleichungssystems

Aus der Bewegungsgleichung (4.4.12) und den matriziellen Beziehungen in den Abschnitten 4.4.3 und 4.4.4 folgt analog zu (4.3.21) das Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_{TF} \mathbf{v} + \sum_{m=1}^n \left(\dot{t}_p^m \mathbf{N}_F^m \right) = \dot{\mathbf{R}}. \quad (4.4.31)$$

Die materiellen Zeitableitungen der globalen Verschiebungen der Knoten bestimmen sich als

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \sum_{m=1}^n \left(\dot{t}_p^m \mathbf{v}_2^m \right), \quad (4.4.32)$$

wobei die Vektoren \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2^m gegeben sind durch

$$\mathbf{v}_1 = (\mathbf{K}_{TF})^{-1} \dot{\mathbf{R}} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_2^m = (\mathbf{K}_{TF})^{-1} \mathbf{N}_F^m. \quad (4.4.33)$$

Unter Berücksichtigung der Bedingung (4.4.25) und der Beziehung (4.4.32) erhalten wir das Gleichungssystem

$$\left[\sum_{m=1}^n \dot{t}_p^m \mathbf{v}_2^m \right]^T \mathbf{N}_F^m = \mathbf{v}_1^T \mathbf{N}_F^m - \dot{t}_p^m \mathbf{V}_F^m, \quad (4.4.34)$$

dessen Lösungen die materiellen Zeitableitungen des Drucks \dot{t}_p^m sind.

Für ein System mit drei gefüllten Kavitäten können wir dieses Gleichungssystem alternativ auch in der folgenden Form darstellen:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{v}_2^1)^T \mathbf{N}_F^1 & | & (\mathbf{v}_2^2)^T \mathbf{N}_F^1 & | & (\mathbf{v}_2^3)^T \mathbf{N}_F^1 \\ \hline (\mathbf{v}_2^1)^T \mathbf{N}_F^2 & | & (\mathbf{v}_2^2)^T \mathbf{N}_F^2 & | & (\mathbf{v}_2^3)^T \mathbf{N}_F^2 \\ \hline (\mathbf{v}_2^1)^T \mathbf{N}_F^3 & | & (\mathbf{v}_2^2)^T \mathbf{N}_F^3 & | & (\mathbf{v}_2^3)^T \mathbf{N}_F^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{t}_p^1 \\ \dot{t}_p^2 \\ \dot{t}_p^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \mathbf{N}_F^1 - \dot{t}_p^1 \mathbf{V}_F^1 \\ \mathbf{v}_1^T \mathbf{N}_F^2 - \dot{t}_p^2 \mathbf{V}_F^2 \\ \mathbf{v}_1^T \mathbf{N}_F^3 - \dot{t}_p^3 \mathbf{V}_F^3 \end{bmatrix}. \quad (4.4.35)$$

Für ein System mit einer gefüllten Kavität, deren Volumen unveränderlich sei, ergibt sich aus (4.4.32), (4.4.33) und (4.4.34) der Ausdruck

$$\mathbf{v} = (\mathbf{K}_{TF})^{-1} \dot{\mathbf{R}} - \frac{\left[(\mathbf{K}_{TF})^{-1} \dot{\mathbf{R}} \right]^T \mathbf{N}_F^1}{\left[(\mathbf{K}_{TF})^{-1} \mathbf{N}_F^1 \right]^T \mathbf{N}_F^1} (\mathbf{K}_{TF})^{-1} \mathbf{N}_F^1. \quad (4.4.36)$$

Im weiteren gelten die Zusammenhänge, die bereits in Abschnitt 4.3.4 aufgestellt wurden.

4.5 Umgeformte Lagrangesche Formulierung für eindimensionale Elemente

In diesem Kapitel betrachten wir Stabelemente mit einem nichtlinear elastischen Stoffgesetz. Diese Elemente können eine beliebige Lage im Raum annehmen, wobei sowohl große Verschiebungen und Drehungen als auch große Verzerrungen zulässig sind. Da die theoretischen Grundlagen zur Formulierung solcher Elemente allgemein bekannt sind, werden im folgenden nur die Beziehungen angegeben, die für die Ermittlung der matriziellen Ausdrücke relevant sind. Ausführlich wird auf die auf Versuchsergebnissen basierende Bestimmung der Komponenten des Tensors der Materialeigenschaften eingegangen.

4.5.1 Bewegungsgleichung

BATHE [3] hat für die Umgeformte Lagrangesche Formulierung die linearisierte Bewegungsgleichung angegeben mit

$$\int_B {}^t C_{ijrs} {}^t e_{rs} \delta {}^t e_{ij} {}^t dv + \int_B {}^t \sigma_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} {}^t dv = \mathbf{u}^T \left[{}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{R} \right] \mathbf{u}, \quad (4.5.1)$$

wobei die Zuwächse ${}^t e_{ij}$ und ${}^t \eta_{ij}$ der Verzerrungen im Zeitintervall Δt definiert sind als

$${}^t e_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i}) \quad \text{und} \quad {}^t \eta_{ij} = \frac{1}{2} {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j}. \quad (4.5.2)$$

Die Änderungen der Verschiebungen in diesem Zeitintervall werden dabei mit u_i bezeichnet, und es gilt

$${}^t u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{mit} \quad u_i = {}^{t+\Delta t} u_i - {}^t u_i. \quad (4.5.3)$$

Das nichtlinear elastische Materialverhalten wird näherungsweise durch die linearisierte Materialgleichung

$${}^t s_{ij} = {}^t C_{ijrs} {}^t e_{rs} \quad (4.5.4)$$

beschrieben, wobei ${}^t s_{ij}$ die Zuwächse der zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungen im Zeitintervall Δt und ${}^t C_{ijrs}$ die Komponenten des Materialeigenschaftstensors zum Zeitpunkt t bezogen auf die Konfiguration zum Zeitpunkt t sind. Auf die Bestimmung der Komponenten des Materialtensors wird an späterer Stelle näher eingegangen.

Die Beziehung zwischen den Komponenten des Cauchyschen Spannungstensors und den Komponenten des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors ist gegeben durch

$${}^t s_{ij} = \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} \frac{\partial X_i}{\partial {}^t x_m} {}^t \sigma_{mn} \frac{\partial X_j}{\partial {}^t x_n}. \quad (4.5.5)$$

Wegen ${}^0 x_i \equiv X_i$ verwenden wir für $\partial X_i / \partial {}^t x_m$ auch die Notation ${}^0 x_{i,m}$.

4.5.2 Betrachtung eines geradlinigen Stabelementes

Im folgenden betrachten wir ein Stabelement mit zwei Knoten, bei dem die lokalen Koordinaten ${}^0 \tilde{x}_1$ und ${}^t \tilde{x}_1$ die Länge des Stabelementes in der Referenz- beziehungsweise der Momentan-Konfiguration messen.

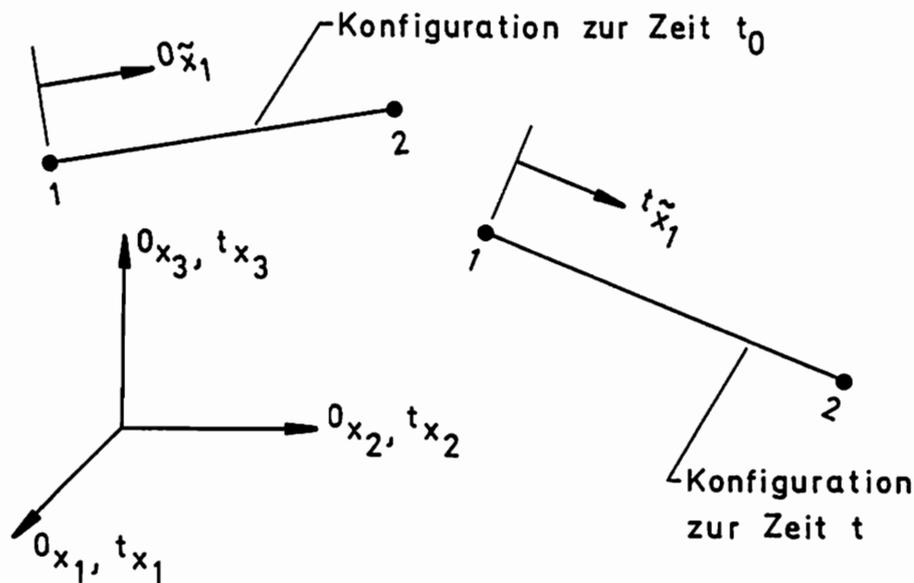


Abb. 4.3 Darstellung der Referenz- und der Momentan-Konfiguration eines 2-Knoten-Stabelementes

Wir nehmen an, daß die Schnittebenen, die in der Referenz-Konfiguration senkrecht zu ${}^0\tilde{x}_1$ stehen, in der Momentan-Konfiguration senkrecht zu ${}^t\tilde{x}_1$ stehen. Diese Schnittebenen bezeichnen wir mit 0A bzw. mit tA , wobei wir weiterhin annehmen, daß alle materiellen Punkte der Ebene 0A während der Deformation in die Ebene tA übergehen.

Wir schreiben die linearisierte Bewegungsgleichung (4.5.1) unter Verwendung der lokalen Koordinate in der Form

$$\int_B {}^t\tilde{C}_{1111} {}^t\tilde{e}_{11} \delta {}^t\tilde{e}_{11} {}^t dv + \int_B {}^t\tilde{\sigma}_{11} \delta {}^t\tilde{\eta}_{11} {}^t dv = \mathbf{u}^T \left[{}^{t+\Delta t}R - {}^tR \right] \mathbf{u}, \quad (4.5.6)$$

wobei die Zuwächse ${}^t\tilde{e}_{11}$ und ${}^t\tilde{\eta}_{11}$ der Verzerrungen im Zeitintervall Δt gegeben sind durch

$${}^t\tilde{e}_{11} = \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial {}^t\tilde{x}_1} \quad \text{und} \quad {}^t\tilde{\eta}_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial {}^t\tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial {}^t\tilde{x}_1}. \quad (4.5.7)$$

Es kann gezeigt werden, daß die Zuwächse dieser Verzerrungen unter Verwendung der Zuwächse der globalen Element-Verschiebungen darstellbar sind als

$${}^t\tilde{e}_{11} = \frac{\partial {}^t x_i}{\partial {}^t\tilde{x}_1} \frac{\partial u_i}{\partial {}^t\tilde{x}_1} \quad \text{und} \quad {}^t\tilde{\eta}_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial {}^t\tilde{x}_1} \frac{\partial u_i}{\partial {}^t\tilde{x}_1}. \quad (4.5.8)$$

4.5.3 Formulierung des finiten Stabelementes mit zwei Knoten

Die globalen Koordinaten bzw. die globalen Element-Verschiebungen in einem beliebigen Punkt eines Stabelementes mit zwei Knoten werden durch die entsprechenden globalen Größen in den Knoten des Elementes mit Hilfe der Beziehungen

$$x_i = \sum_{k=1}^2 h_k x_i^k \quad \text{und} \quad u_i = \sum_{k=1}^2 h_k u_i^k \quad (4.5.9)$$

ausgedrückt. Die Interpolationsfunktionen h_k sind von der natürlichen Koordinate r abhängig, die im Knoten 1 den Wert -1 und im Knoten 2 den Wert $+1$ annimmt. Wir erhalten

$$h_1 = \frac{1}{2} (1 - r) \quad \text{und} \quad h_2 = \frac{1}{2} (1 + r). \quad (4.5.10)$$

Für die Zuwächse der Verzerrungen (4.5.8) schreiben wir unter Berücksichtigung von (4.5.9)

$${}^t\tilde{\epsilon}_{11} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{k=1}^2 h_k {}^t x_i^k \right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{k=1}^2 h_k u_i^k \right) \left(\frac{\partial r}{\partial {}^t\tilde{x}_1} \right)^2 \quad (4.5.11)$$

$${}^t\tilde{\eta}_{11} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\sum_{k=1}^2 h_k u_i^k \right) \frac{\partial r}{\partial {}^t\tilde{x}_1} \right]^2,$$

wobei die Ableitung der natürlichen Koordinate nach der lokalen Koordinate gegeben ist durch

$$\frac{\partial r}{\partial {}^t\tilde{x}_1} = \frac{1}{2} {}^tL. \quad (4.5.12)$$

Das Volumenelement ${}^t dv$ kann unter Verwendung von (4.5.12) in natürlichen Koordinaten ausgedrückt werden als

$${}^t dv = {}^t A {}^t d\tilde{x}_1 = {}^t A \frac{1}{2} {}^t L dr. \quad (4.5.13)$$

Die Auswertung der Bewegungsgleichung (4.5.6) führt für ein bestimmtes finites Stabelement unter Verwendung der vorstehenden Beziehungen zu den matriziellen Ausdrücken

$$\int_B {}^t\tilde{c}_{1111} {}^t\tilde{\epsilon}_{11} \delta {}^t\tilde{\epsilon}_{11} {}^t dv = \delta \hat{u}^T K_L \hat{u} \quad (4.5.14)$$

$$\int_B {}^t\tilde{\sigma}_{11} \delta {}^t\tilde{\eta}_{11} {}^t dv = \delta \hat{u}^T K_{NL} \hat{u},$$

wobei der Vektor \hat{u} die globalen Element-Verschiebungen an den Knoten des Elementes beinhaltet und die Form

$$\hat{u}^T = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} t_{u_1}^1 & t_{u_2}^1 & t_{u_3}^1 & t_{u_1}^2 & t_{u_2}^2 & t_{u_3}^2 \\ \hline \end{array} \right] \quad (4.5.15)$$

hat. Die lineare Steifigkeitsmatrix K_L können wir darstellen als

$$K_L = \frac{t_{\tilde{c}_{1111}}^A}{t_L^3} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \frac{c_1 c_1}{t_L} & \frac{c_2 c_1}{t_L} & \frac{c_3 c_1}{t_L} & \frac{-c_1 c_1}{t_L} & \frac{-c_2 c_1}{t_L} & \frac{-c_3 c_1}{t_L} \\ \hline \frac{c_1 c_2}{t_L} & \frac{c_2 c_2}{t_L} & \frac{c_3 c_2}{t_L} & \frac{-c_1 c_2}{t_L} & \frac{-c_2 c_2}{t_L} & \frac{-c_3 c_2}{t_L} \\ \hline \frac{c_1 c_3}{t_L} & \frac{c_2 c_3}{t_L} & \frac{c_3 c_3}{t_L} & \frac{-c_1 c_3}{t_L} & \frac{-c_2 c_3}{t_L} & \frac{-c_3 c_3}{t_L} \\ \hline \frac{-c_1 c_1}{t_L} & \frac{-c_2 c_1}{t_L} & \frac{-c_3 c_1}{t_L} & \frac{c_1 c_1}{t_L} & \frac{c_2 c_1}{t_L} & \frac{c_3 c_1}{t_L} \\ \hline \frac{-c_1 c_2}{t_L} & \frac{-c_2 c_2}{t_L} & \frac{-c_3 c_2}{t_L} & \frac{c_1 c_2}{t_L} & \frac{c_2 c_2}{t_L} & \frac{c_3 c_2}{t_L} \\ \hline \frac{-c_1 c_3}{t_L} & \frac{-c_2 c_3}{t_L} & \frac{-c_3 c_3}{t_L} & \frac{c_1 c_3}{t_L} & \frac{c_2 c_3}{t_L} & \frac{c_3 c_3}{t_L} \\ \hline \end{array} \right], \quad (4.5.16)$$

wobei die Längen c_i durch $c_i = t_{x_i}^2 - t_{x_i}^1$ bestimmt sind. Für die nicht-lineare Steifigkeitsmatrix K_{NL} ergibt sich

$$K_{NL} = \frac{t_{\tilde{\sigma}_{11}}^A}{t_L} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right]. \quad (4.5.17)$$

Für jedes Stabelement werden die Matrizen K_L und K_{NL} der Tangential-Steifigkeitsmatrix (4.3.21) bzw. (4.4.17) hinzugefügt.

4.5.4 Ermittlung der Materialeigenschaften aus Versuchsergebnissen

Für alle Wirkungselemente des Bewegungssegmentes, die durch Stabelemente idealisiert werden, liegen Ergebnisse einachsiger Zugversuche vor. Bei den gemessenen Größen handelt es sich um die Längenänderung $t_{\Delta L}$ und um die zugehörige Normalkraft t_P . Eine allgemeinere Aussage ergibt sich aus der Verwendung der Ingenieurdehnung $t_{\Delta L} / l^0$ und der davon abhängigen

nominellen Spannung ${}^t P / {}^0 A$ (Abb. 4.4).

Das Produkt aus der Cauchyschen Spannung ${}^t \tilde{\sigma}_{11}$ und der Fläche ${}^t A$ zum Zeitpunkt t in (4.5.17) entspricht der Normalkraft in dem Stabelement, die von der zu diesem Zeitpunkt bekannten Ingenieurdehnung abhängig ist. Wir schreiben

$${}^t \tilde{\sigma}_{11} {}^t A = {}^t P. \quad (4.5.18)$$

Das Produkt der Komponente ${}^t \tilde{c}_{1111}$ des Materialeigenschaftstensors und der Fläche ${}^t A$ in (4.5.16) kann ebenfalls unter Verwendung der Versuchsergebnisse berechnet werden. Die entsprechende Beziehung wird im folgenden hergeleitet.

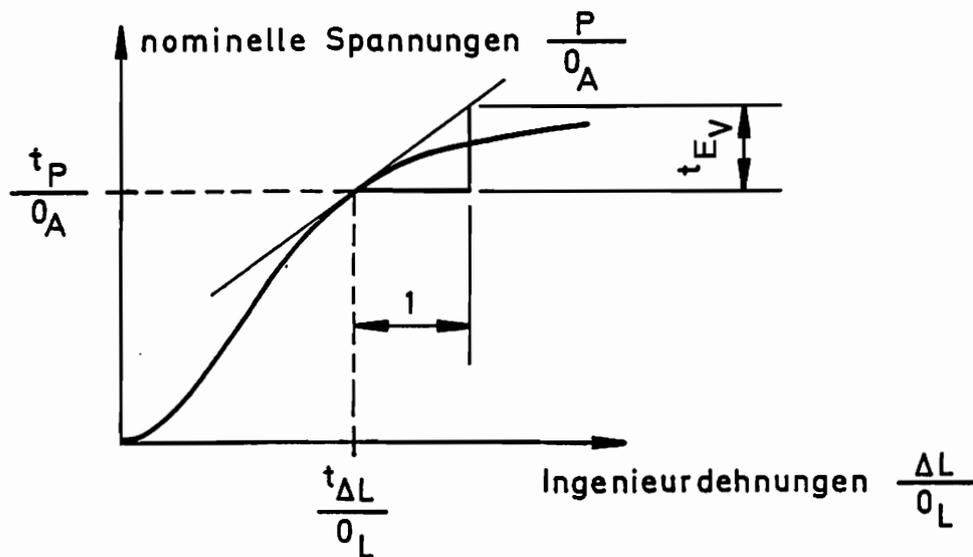


Abb. 4.4 Graphische Darstellung der Versuchsergebnisse

Aus (4.5.5) und (4.2.45) ergibt sich der Zusammenhang zwischen den zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungen und den nominellen Spannungen

$${}^t \tilde{S}_{011} = {}^t \tilde{S}_{11} \frac{\partial {}^t \tilde{x}_1}{\partial {}^0 \tilde{x}_1}, \quad (4.5.19)$$

wobei der linke tiefgestellte Index der nominellen Spannung auf ein

Oberflächenelement in der Referenz-Konfiguration verweist. Der Zuwachs der nominellen Spannungen im Zeitintervall Δt bestimmt sich aus (4.5.19) linearisiert als

$${}^0\tilde{S}_{11} = {}^0\tilde{s}_{11} \frac{\partial {}^t\tilde{x}_1}{\partial {}^0\tilde{x}_1} + {}^t\tilde{s}_{11} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial {}^0\tilde{x}_1}. \quad (4.5.20)$$

Aus den Versuchsergebnissen folgt eine zweite Beziehung zur Bestimmung des Zuwachses der nominellen Spannungen in diesem Zeitintervall. Es gilt

$${}^0\tilde{S}_{11} = {}^tE_V \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial {}^0\tilde{x}_1}, \quad (4.5.21)$$

wobei die Größe tE_V die Steigung der Tangente an die gemessene Kurve an der Stelle ist, die durch die Ingenieurdehnung zum Zeitpunkt t bezeichnet ist (Abb. 4.4).

Wir setzen die rechten Seiten von (4.5.20) und (4.5.21) gleich und erhalten nach Umformungen

$${}^0\tilde{S}_{11} = ({}^tE_V - {}^t\tilde{s}_{11}) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial {}^t\tilde{x}_1}. \quad (4.5.22)$$

Für einen linearen Ansatz ${}^t\tilde{x}_1({}^0\tilde{x}_1) = \lambda_{11} {}^0\tilde{x}_1$ gilt die Beziehung

$$\frac{\partial {}^t\tilde{x}_1}{\partial {}^0\tilde{x}_1} = \frac{{}^tL}{{}^0L}, \quad (4.5.23)$$

und die zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungen berechnen sich unter Berücksichtigung von (4.5.19) als

$${}^t\tilde{s}_{11} = \frac{{}^tP}{{}^0A} \frac{{}^0L}{{}^tL}. \quad (4.5.24)$$

Der Ausdruck (4.5.22) für den Zuwachs der auf die Referenz-Konfiguration bezogenen zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungen im Zeitintervall Δt

ergibt sich damit als

$${}^0\tilde{s}_{11} = \left({}^tE_V - \frac{{}^tP}{{}^0A} \frac{{}^0L}{{}^tL} \right) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial {}^t\tilde{x}_1}. \quad (4.5.25)$$

Weiterhin kann gezeigt werden, daß die materiellen Zeitableitungen der auf die Momentan-Konfiguration zum Zeitpunkt t bezogenen zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungen gemäß der Gleichung

$$\frac{d}{dt} {}^t\tilde{s}_{11} = \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho} \left(\frac{\partial {}^t\tilde{x}_1}{\partial {}^0\tilde{x}_1} \right)^2 \frac{d}{dt} {}^0\tilde{s}_{11} \quad (4.5.26)$$

von den materiellen Zeitableitungen der auf die Referenz-Konfiguration bezogenen zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungen abhängen. Für den linearisierten Zuwachs im Zeitintervall Δt der auf die Momentan-Konfiguration zum Zeitpunkt t bezogenen zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungen ergibt sich unter Berücksichtigung von (4.5.23) der Ausdruck

$${}^t\tilde{s}_{11} = \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho} \left(\frac{{}^tL}{{}^0L} \right)^2 \left({}^tE_V - \frac{{}^tP}{{}^0A} \frac{{}^0L}{{}^tL} \right) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial {}^t\tilde{x}_1}. \quad (4.5.27)$$

Aus (4.5.4) und (4.5.7) folgt, daß die Komponente ${}^t\tilde{C}_{1111}$ des Materialeigenschaftstensors damit bestimmt ist durch

$${}^t\tilde{C}_{1111} = \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho} \left(\frac{{}^tL}{{}^0L} \right)^2 \left({}^tE_V - \frac{{}^tP}{{}^0A} \frac{{}^0L}{{}^tL} \right). \quad (4.5.28)$$

Für das Produkt der Komponente ${}^t\tilde{C}_{1111}$ des Materialeigenschaftstensors und der Fläche tA erhalten wir

$${}^t\tilde{C}_{1111} {}^tA = \frac{{}^t\rho}{{}^0\rho} \left(\frac{{}^tL}{{}^0L} \right)^2 \left({}^tE_V - \frac{{}^tP}{{}^0A} \frac{{}^0L}{{}^tL} \right) {}^tA, \quad (4.5.29)$$

wobei auf Grund der Erhaltung der Masse gilt

$${}^t\rho {}^tL {}^tA = {}^0\rho {}^0L {}^0A \quad \text{bzw.} \quad \frac{{}^t\rho {}^tL {}^tA}{{}^0\rho {}^0L} = {}^0A. \quad (4.5.30)$$

Das Produkt ${}^t\tilde{C}_{1111} {}^tA$ in (4.5.16) kann damit in Abhängigkeit von der bekannten Länge des Stabelementes zum Zeitpunkt t und den daraus resultierenden Versuchsergebnissen ausgedrückt werden als

$${}^t\tilde{C}_{1111} {}^tA = {}^tE_V {}^0A \frac{{}^tL}{{}^0L} - {}^tP. \quad (4.5.31)$$

Es ist somit gewährleistet, daß auch für große Verzerrungen das tatsächliche Materialverhalten in einer numerischen Berechnung beschrieben wird.

4.6 Betrachtung des Kontaktproblems

In diesem Kapitel wird der reibungsfreie Kontakt zwischen einem beliebigen dreidimensionalen Körper und einer unverschieblichen ebenen Fläche F_G betrachtet. Der Körper ist durch dreidimensionale finite Elemente diskretisiert, und wir betrachten im folgenden ein bestimmtes Element. Das Kontaktproblem soll dann eintreten, wenn für mindestens einen Knoten k des finiten Elementes gilt, daß seine Projektion P auf die Ebene, in der die Fläche F_G liegt, innerhalb der Grenzen der Fläche F_G liegt und sein Abstand zu der Ebene kleiner als ein bestimmter Wert d_{Gap} ist.

Zum Zeitpunkt t_1 soll das Kontaktproblem eintreten. Der Abstand des Knotens k zu der Fläche F_G wird zu diesem Zeitpunkt mit 1d bezeichnet. Um eine weitere Annäherung des Knotens k an die Fläche F_G zu verhindern, wird dem statischen System ein Stabelement mit einer relativ hohen Steifigkeit hinzugefügt (Abb. 4.5). Dieses Stabelement ist im Knoten k mit dem dreidimensionalen Element verbunden und steht normal auf der Fläche F_G . Im folgenden bezeichnen wir dieses Stabelement auch als Kontaktfeder. Die Kontaktfeder hat in ihrem verzerrungsfreien Zustand die Länge d_{Gap} und wird demzufolge in einem vorgespannten Zustand in das verformte

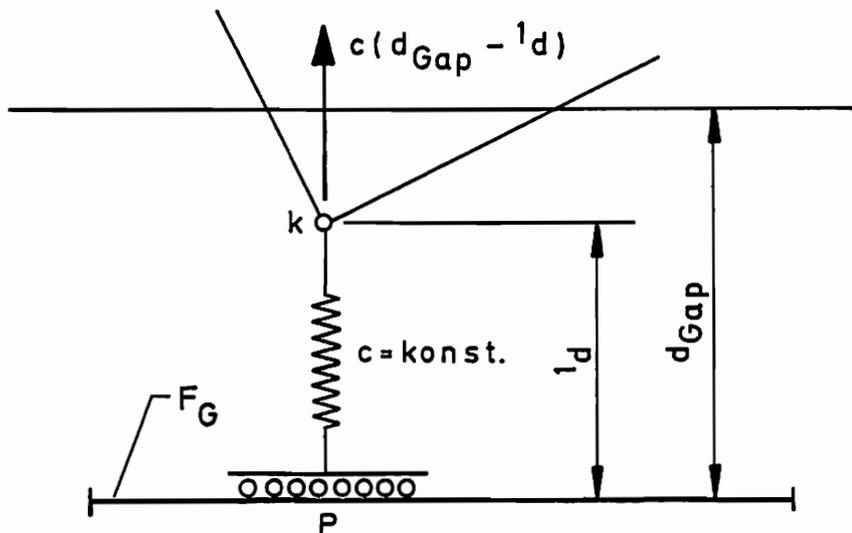


Abb. 4.5 Darstellung der Kontaktfeder und der Ungleichgewichtskraft zum Zeitpunkt t_1

System eingebaut. Die damit korrespondierende Normalkraft in der Feder stellt für das System eine Ungleichgewichtslast dar, die in dem Vektor der Ableitungen der äußeren Knotenpunktlasten $\dot{\mathbf{R}}$ berücksichtigt wird. Dies führt im allgemeinen dazu, daß sich der gewünschte minimale Abstand d_{Gap} zwischen dem Knoten k und der Fläche F_G näherungsweise einstellt.

Aus Abb. 4.5 ist ersichtlich, daß die Verschiebungen des Knotens k , die den Abstand dieses Knotens zu der Fläche F_G nicht beeinflussen, keine Verzerrungen des Stabelementes hervorrufen. Die Element-Steifigkeitsmatrix für dieses lineare finite Element mit einem Knoten ergibt sich analog zu Abschnitt 4.5.3 als

$$\mathbf{K}_L = \frac{{}^0E_V {}^0A}{d_{\text{Gap}}} \frac{1}{{}^1d^2} \begin{bmatrix} c_1c_1 & c_2c_1 & c_3c_1 \\ c_1c_2 & c_2c_2 & c_3c_2 \\ c_1c_3 & c_2c_3 & c_3c_3 \end{bmatrix}, \quad (4.6.1)$$

wobei die Längen c_i durch $c_i = {}^1x_i^k - {}^1x_i^P$ bestimmt sind. Für jede Kontaktfeder wird die Matrix \mathbf{K}_L der Tangential-Steifigkeitsmatrix (4.3.21) bzw. (4.4.17) hinzugefügt.

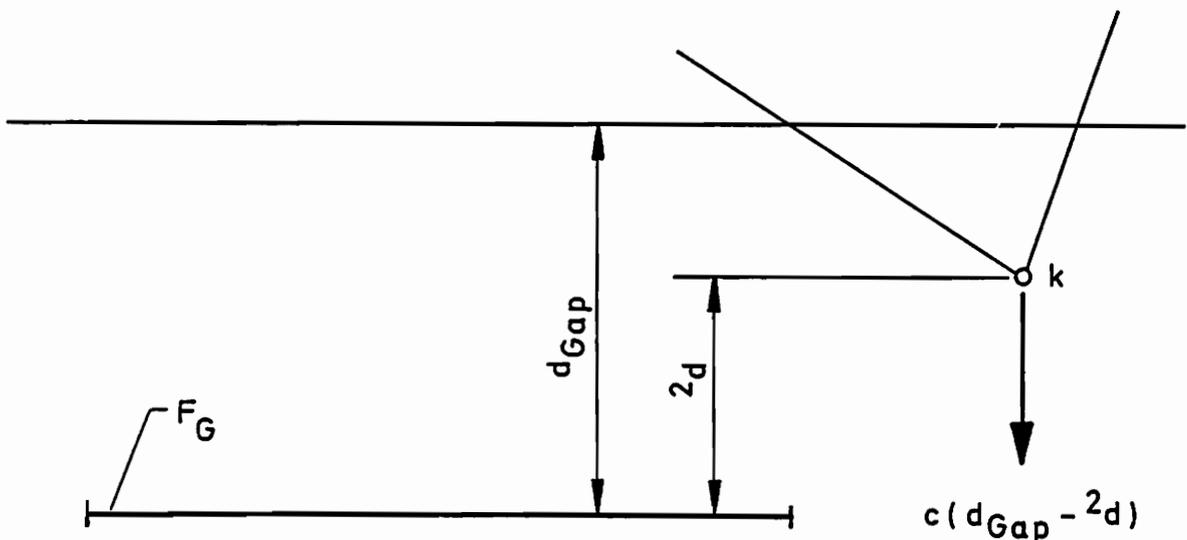


Abb. 4.6 Darstellung der Ungleichgewichtskraft zum Zeitpunkt t_2

Unter der Voraussetzung, daß das Kontaktproblem zu einem späteren Zeitpunkt t weiterhin vorliegt, wird die Matrix K_L zu diesem Zeitpunkt entsprechend (4.6.1) ermittelt und der Tangential-Steifigkeitsmatrix hinzugefügt. Eine Modifikation des Vektors \dot{R} erfolgt nicht, da die Kontaktfeder nicht neu hinzugefügt wird und somit auch keine Ungleichgewichtskräfte auftreten.

Darüber hinaus ist der Fall zu betrachten, daß das Kontaktproblem zu einem Zeitpunkt t_2 nicht mehr vorliegt. Dieser Fall kann einerseits dadurch eintreten, daß die Projektion des Knotens k auf die Ebene, in der die Fläche F_G liegt, nicht mehr innerhalb der Grenzen von F_G liegt (Abb. 4.6). Andererseits ist es aber auch möglich, daß der Abstand des Knotens k von der Fläche F_G im Laufe des Deformationsprozesses wieder einen Wert annimmt, der größer als d_{Gap} ist (Abb. 4.7).

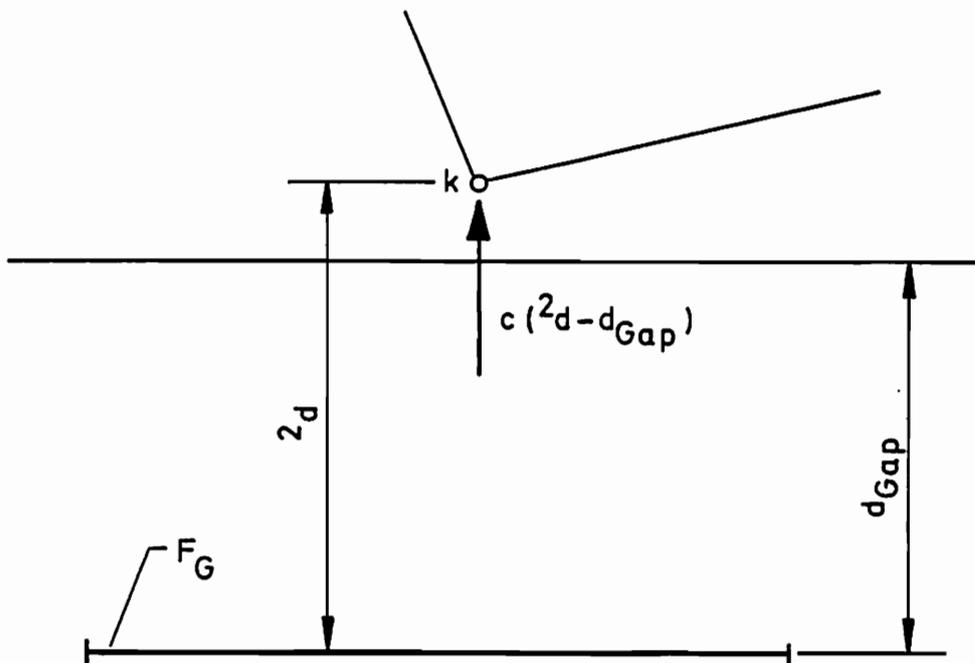


Abb. 4.7 Darstellung der Ungleichgewichtskraft zum Zeitpunkt t_2

In beiden Fällen ist die Ungleichgewichtskraft, die sich aus der Elimination der im allgemeinen gespannten Kontaktfeder ergibt, zu berücksichtigen. Diese Ungleichgewichtskraft hat den Betrag und die Richtung der Kraft, die vor der Elimination der Kontaktfeder von dieser auf den Körper übertragen wird, ist aber entgegengesetzt orientiert.

4.7 Aufbau des Finite-Elemente-Modells

Für Berechnungen auf der Grundlage der Methode der finiten Elemente ist eine Beschreibung des zu betrachtenden Kontinuums durch diskrete Elemente notwendig. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Finite-Elemente-Modell für das Bewegungssegment L4-L5 entwickelt. Dieses Modell wird kranial und kaudal jeweils durch einen Transversalschnitt des entsprechenden Lendenwirbels oberhalb des Pediculus arcus vertebrae begrenzt. Auf Grund der verfügbaren Rechnerkapazitäten wurde die Symmetrieeigenschaft der Wirbelsäule bezüglich der Medianebene bei der Modellbildung berücksichtigt (Abb. 4.8). Für die numerischen Studien resultiert daraus eine Beschränkung auf die Lastfälle, bei denen die Belastung ebenfalls symmetrisch zur Medianebene ist.

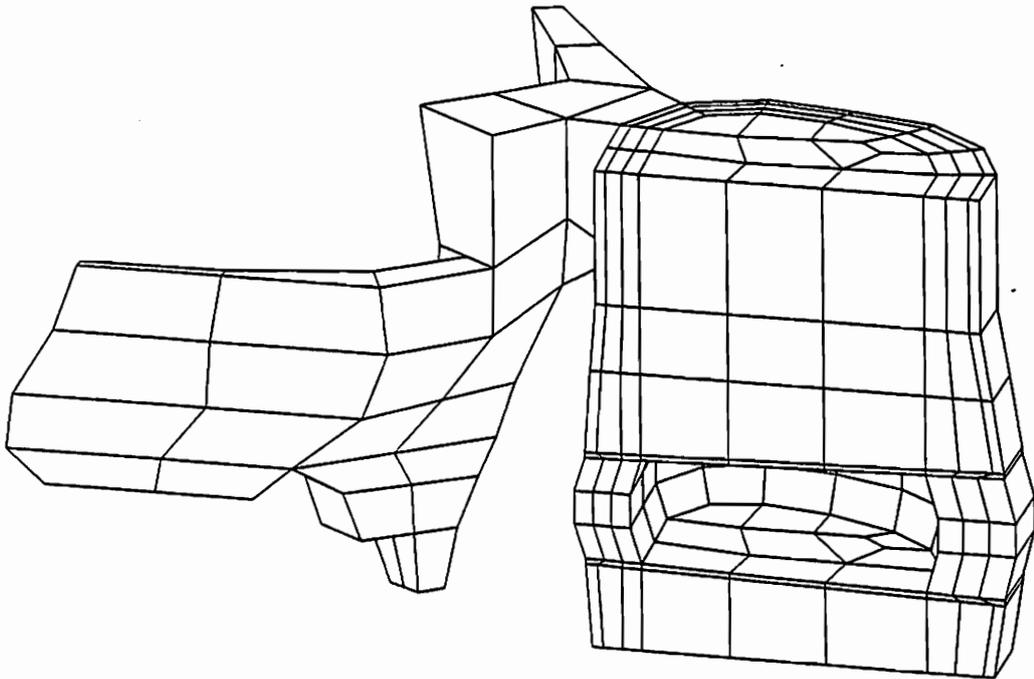


Abb. 4.8 Darstellung der Wirbel und der Knorpelgrundsubstanz des Anulus fibrosus mit Hilfe dreidimensionaler finiter Elemente

Wie aus der vorstehenden Abbildung ersichtlich ist, wird die kraniale Gelenkfläche des kaudalen Wirbelkörpers nicht mit finiten Elementen dargestellt. Dies ist darin begründet, daß die numerischen Studien im

Rahmen dieser Arbeit in Anlehnung an übliche experimentelle Untersuchungen zum Bewegungs- und Tragverhalten des Bewegungssegmentes [48, 49, 50], bei denen der kaudale Wirbelkörper in einem Kunststoffbett praktisch unverformbar gelagert wird, erfolgen. Aus diesem Grund kann die kraniale Gelenkfläche dieses Wirbelkörpers als raumfeste Fläche angesehen werden, woraus folgt, daß eine Darstellung mit finiten Elementen nicht erforderlich ist. Diese Vereinfachung ist für die numerische Effizienz des Modells von erheblicher Bedeutung und ermöglicht gleichzeitig eine beliebig genaue Beschreibung der Gelenkfläche durch starre flächenhafte Elemente, die jedoch keinen wesentlichen Einfluß auf die benötigte Rechenzeit hat. Die Modellierung der Gelenkfläche erfolgte hier mit Hilfe von 64 ebenen dreieckigen Elementen (Abb. 4.9).

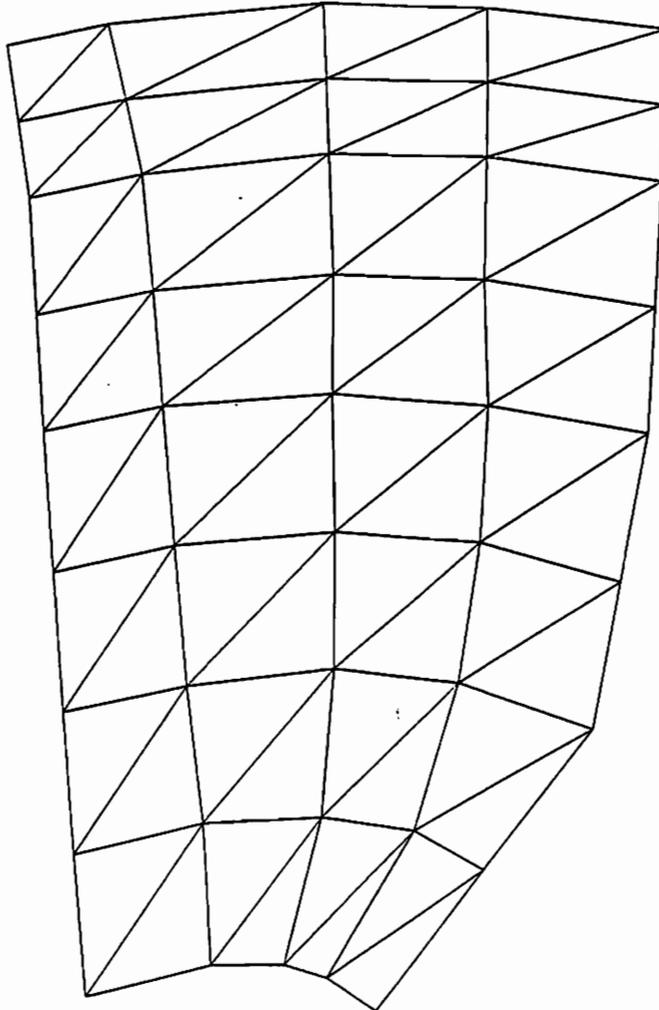


Abb. 4.9 Darstellung der kranialen Gelenkfläche des kaudalen Wirbels mit Hilfe starrer ebener Elemente

4.7.1 Wirbel und Zwischenwirbelscheibe

Die Geometrie der Wirbel L4 und L5 wurde an Hand eines bestimmten Wirbelsäulenpräparates, das von L1 bis L5 reichte, ermittelt. Abb. 4.10 zeigt das diesem Präparat entnommene lumbale Bewegungssegment L4-L5 zusammen mit der für eine Versuchsdurchführung notwendigen unteren Aufspannplatte aus Polyesterharz.

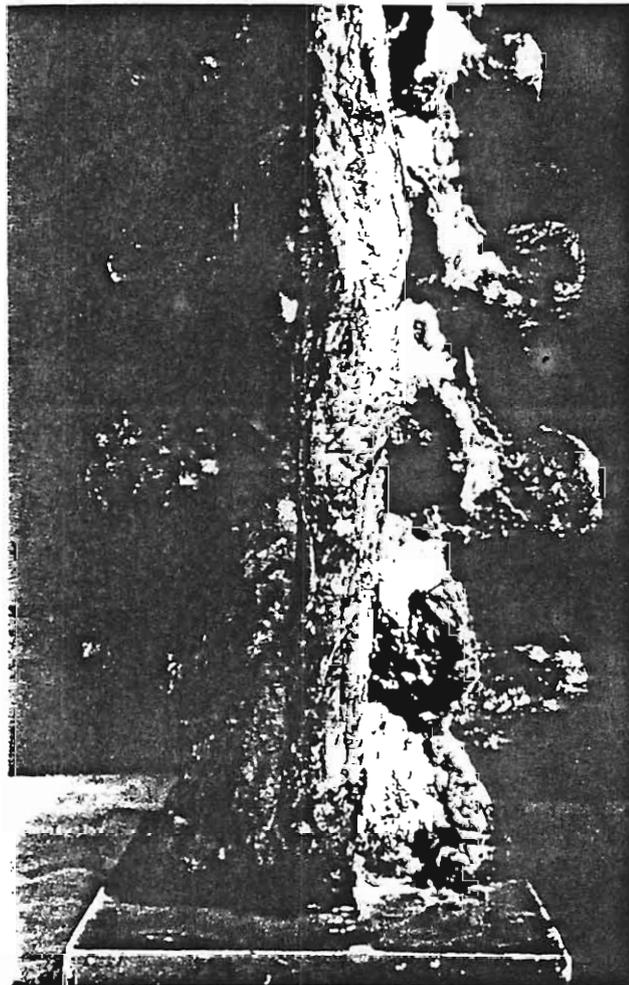


Abb. 4.10 Der Ermittlung der Geometrie der Wirbel L4 und L5 zugrunde liegendes lumbales Bewegungssegment

Das gesamte Präparat wurde in einem ersten Schritt computertomographisch betrachtet, wobei der Begriff Computertomographie eine röntgenologische Untersuchungstechnik bezeichnet, bei der aus den von einem Computer

aufbereiteten Meßergebnissen ein Dichteverteilungsgrad der untersuchten Schichten rekonstruiert wird (Abb. 4.11). Diese Schichten verlaufen parallel zueinander und haben einen konstanten Abstand von einem Millimeter. Die Justierung des Computertomographen erfolgte derart, daß eine der Schichten mit der Ebene, die die Bandscheibe zwischen den Wirbeln L4 und L5 in kranialer bzw. kaudaler Richtung halbiert, zusammenfällt.

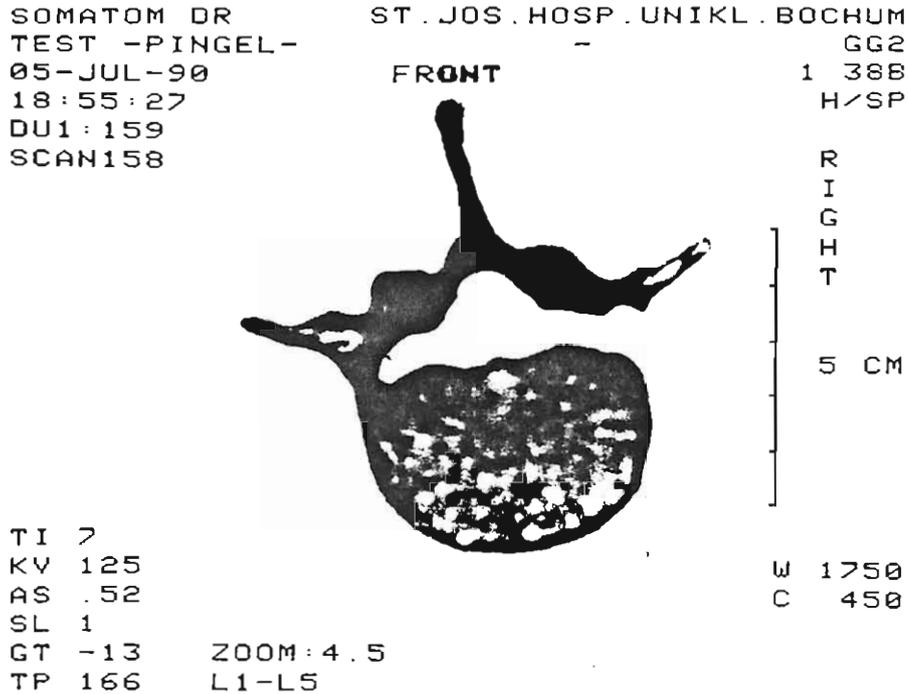


Abb. 4.11 Transversalschnitt durch den kaudalen Wirbel des Bewegungssegmentes L4-L5 auf der Höhe der kranialen Knochenendplatte (Schnitt 158)

Die computertomographischen Aufnahmen wurden in dem darauf folgenden Schritt per Hand digitalisiert. Für jede Schicht resultierten daraus die Koordinaten bestimmter Punkte der Kontur des Wirbels. Für die weitere Bearbeitung wurden diese Daten in das CAD-System AutoCAD eingelesen. Die geradlinige Verbindung aufeinanderfolgender Punkte führte zu einer zeichnerischen Darstellung der Kontur. Die Diskretisierung der Wirbel erfolgte auf graphischem Wege in AutoCAD. In verschiedenen Schichten wurde der Wirbelquerschnitt zuerst durch zweidimensionale Elemente mit maximal 8 Knoten diskretisiert.

Zu berücksichtigen ist, daß die Verteilung der finiten Elemente maßgeblich durch den materiellen Aufbau der Wirbel und der angrenzenden Strukturen beeinflusst wurde. An der Außenseite des Wirbelkörpers war eine Diskretisierung zu wählen, die einerseits eine Darstellung der kortikalen Außenhaut des Wirbels ermöglichte und andererseits im Bereich der Bandscheibe verwendet werden konnte.

Für den Schnitt, dessen Computertomogramm in Abb. 4.11 wiedergegeben ist, zeigt Abb. 4.12 sowohl die digitalisierte Kontur des Wirbels als auch die in Abhängigkeit davon gewählte Diskretisierung. Die radial am weitesten außen liegenden Elemente des Wirbelkörpers stellen den kortikalen Knochen und die davon umschlossenen Elemente den spongiösen Knochen dar.

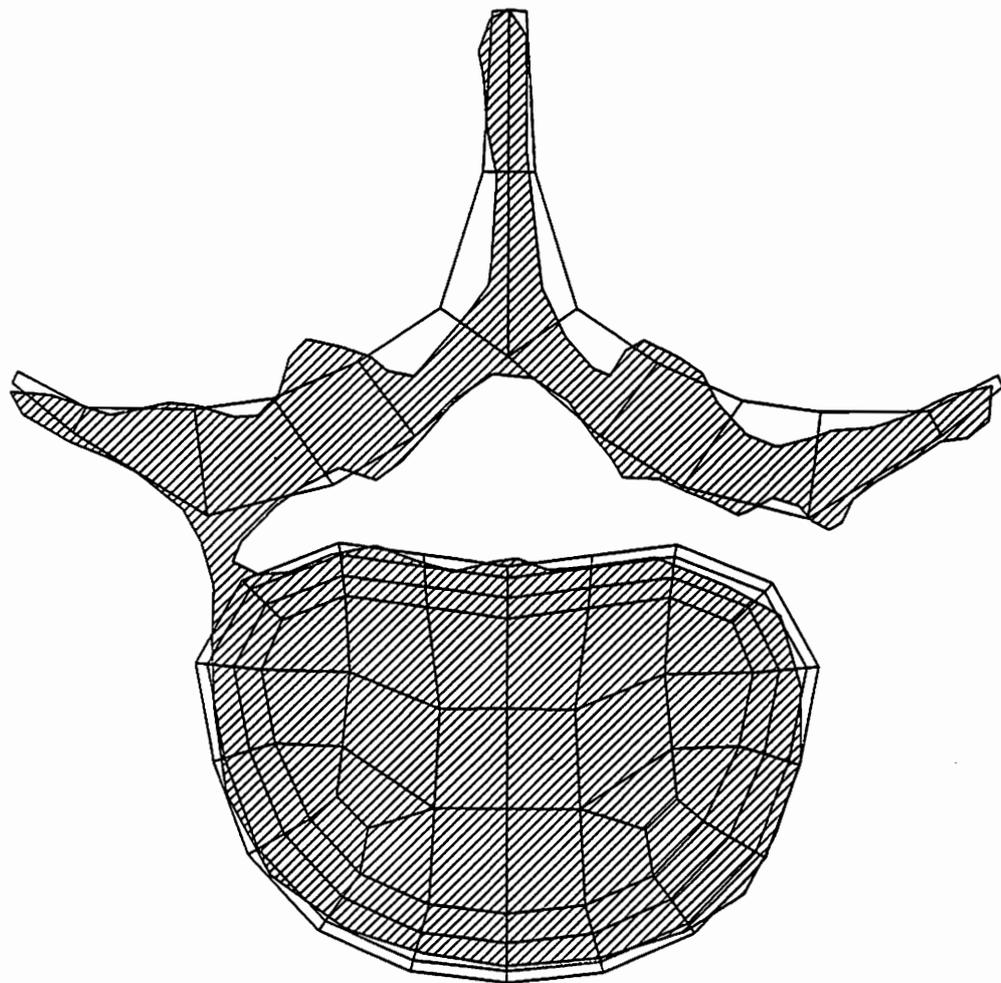


Abb. 4.12 Diskretisierung eines Transversalschnittes (Schnitt 158)

Im Bereich der posterioren knöchernen Strukturen wird auf eine Unterscheidung zwischen kortikalem und spongiösem Knochen näherungsweise verzichtet. Statt dessen wurde der realistischen Modellierung der kaudalen Gelenkfläche des kranialen Wirbels besondere Beachtung geschenkt. Darüber hinaus war zu beachten, daß an den Stellen, an denen die posterioren Ligamente an dem kranialen Wirbel angreifen, Knotenpunkte vorgesehen werden.

Aus der Verbindung der zweidimensionalen Elemente ergab sich das dreidimensionale Modell der Wirbel. Die Zwischenwirbelscheibe läßt sich in idealisierter Form unter Berücksichtigung der von HICKEY und HUKINS [29] gegebenen geometrischen Parameter darstellen. Die Knorpelgrundsubstanz des Anulus fibrosus wird durch dreidimensionale und die eingelagerten kollagenen Fasern durch eindimensionale Elemente beschrieben. Der Nucleus pulposus kann als ideale inkompressible Flüssigkeit betrachtet werden, deren Diskretisierung gemäß Abschnitt 4.4.3 nicht erforderlich ist.

Die kollagenen Fasern sind in konzentrischen Schichten angeordnet, wobei aufeinanderfolgende Bänder gegensinnig orientiert sind. Der Winkel zwischen den Fasern und der Horizontalen wird von WHITE und PANJABI [89] mit 30° und von HICKEY und HUKINS [29] mit 25° angegeben. Eine schematische Darstellung des Aufbaus der Zwischenwirbelscheibe kann Abb. 4.13 entnommen werden.

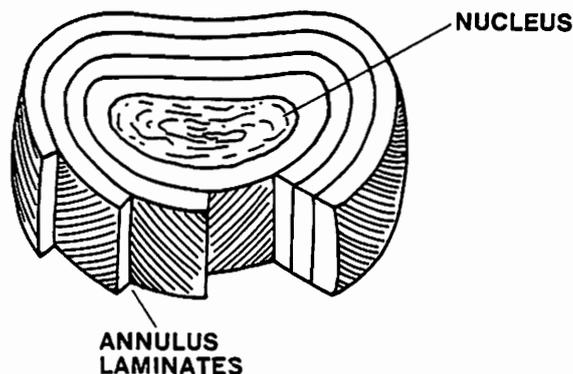


Abb. 4.13 Aufbau der Zwischenwirbelscheibe (aus [89])

In dem mathematischen Modell sind die Stabelemente, die zur Darstellung der kollagenen Fasern verwendet werden, in vier verschiedenen Lagen

angeordnet, die in radialer Richtung von außen nach innen durchnummeriert sind (Abb.4.14). Auf Grund der kreuzweisen Anordnung der eindimensionalen finiten Elemente beschreibt jede dieser Lagen zwei aufeinanderfolgende Bänder kollagener Fasern (Abb.4.15).

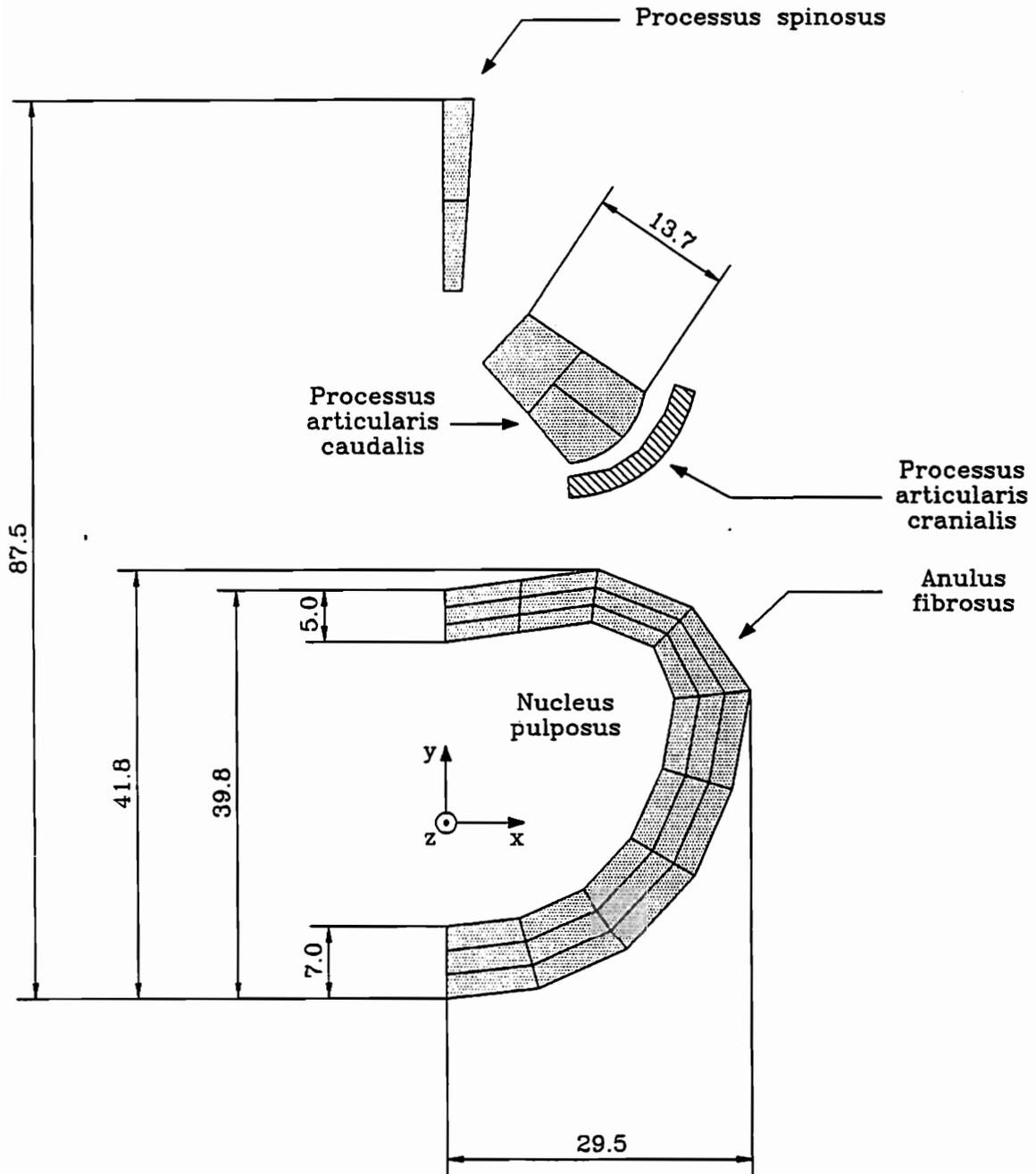


Abb. 4.14 Transversalschnitt durch die Zwischenwirbelscheibe und die auf gleicher Höhe liegenden posterioren knöchernen Strukturen (Schnitt 175)

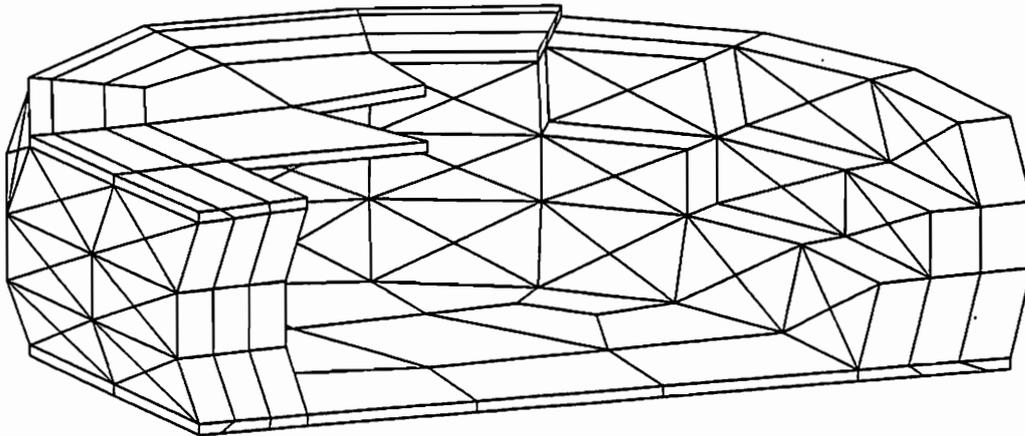


Abb. 4.15 Darstellung des Anulus fibrosus

Die Endplatten der Wirbelkörper sind aus kortikalem Knochen aufgebaut und haben eine Dicke von 0,5 mm. Die Höhe der dazwischenliegenden Bandscheibe ist veränderlich und nimmt in dorsaler Richtung von 11,0 mm auf 9,0 mm ab (Abb. 4.8 und Abb. 4.15).

4.7.2 Knöcherne Strukturen der Wirbelbogengelenke

Die Darstellung des kaudalen Gelenkfortsatzes des kranialen Wirbels und der kranialen Gelenkfläche des kaudalen Wirbels kann Abb. 4.16 entnommen werden. Das in Abschnitt 4.6 beschriebene Kontaktlimit d_{Gap} ist in dem vorgestellten Modell mit 0,8 mm angenommen worden. Auf eine explizite Berücksichtigung des Gelenkflächenknorpels (BAUMGART [4]) wurde im Rahmen dieser Arbeit näherungsweise verzichtet.

4.7.3 Ligamente

Die Lage der verschiedenen Ligamente ist in Abschnitt 2.7 beschrieben. Genaue Angaben über die Orientierung, die Länge und die Fläche der Ligamente sind von PANJABI et al. [67] gemacht worden. In dem mathematischen Modell sind die beiden Längsbänder fest mit dem Anulus fibrosus verbunden und werden jeweils durch drei Stabzüge dargestellt. Die Lage der zur Darstellung der weiteren Ligamente dienenden eindimensionalen Elemente ist Abb. 4.17 zu entnehmen. Die nicht auf dem Wirbel liegenden Knoten dieser Stabelemente sind unverschieblich gelagert.

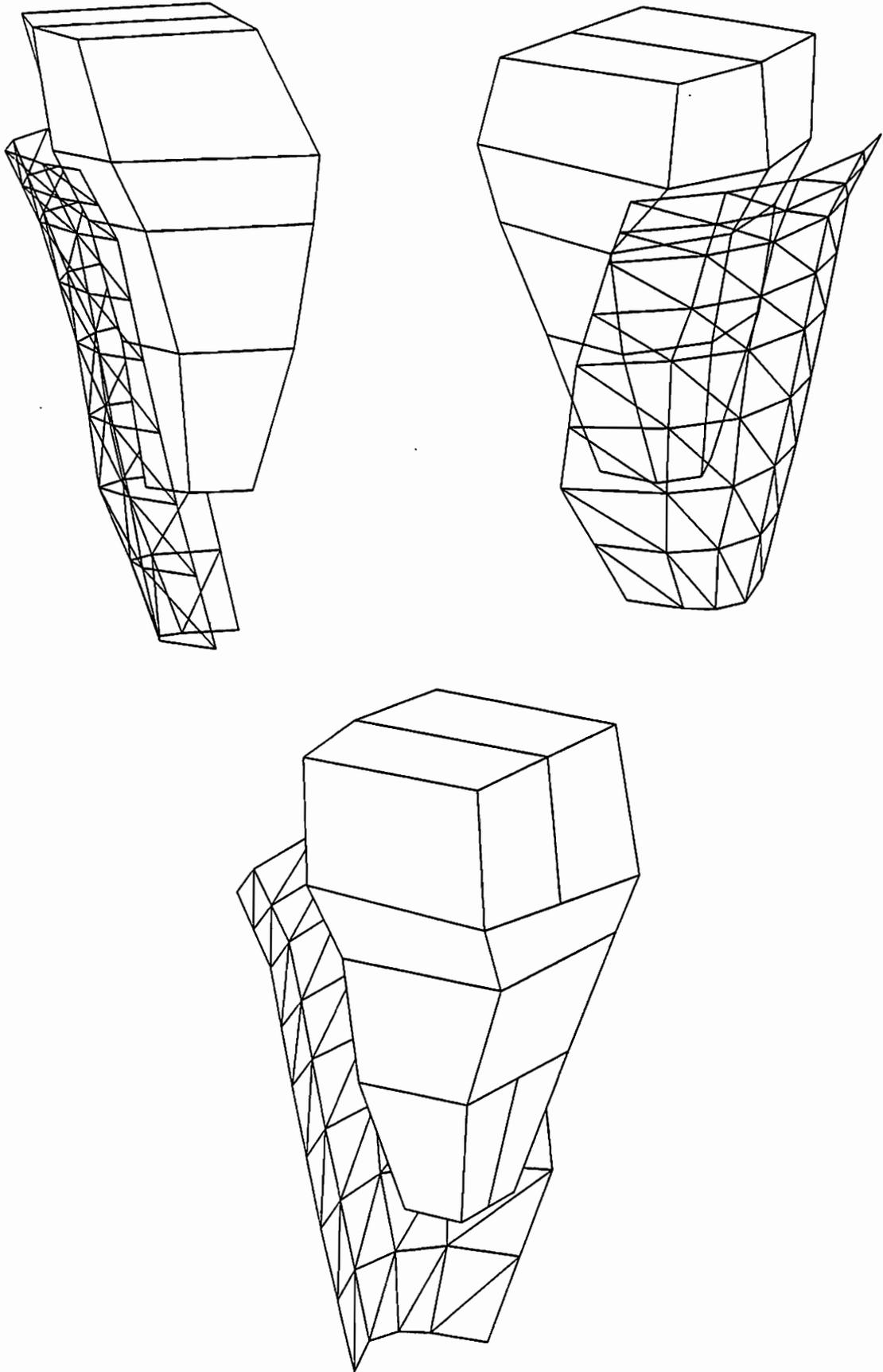


Abb. 4.16 Darstellung der knöchernen Strukturen des Wirbelbogengelenkes

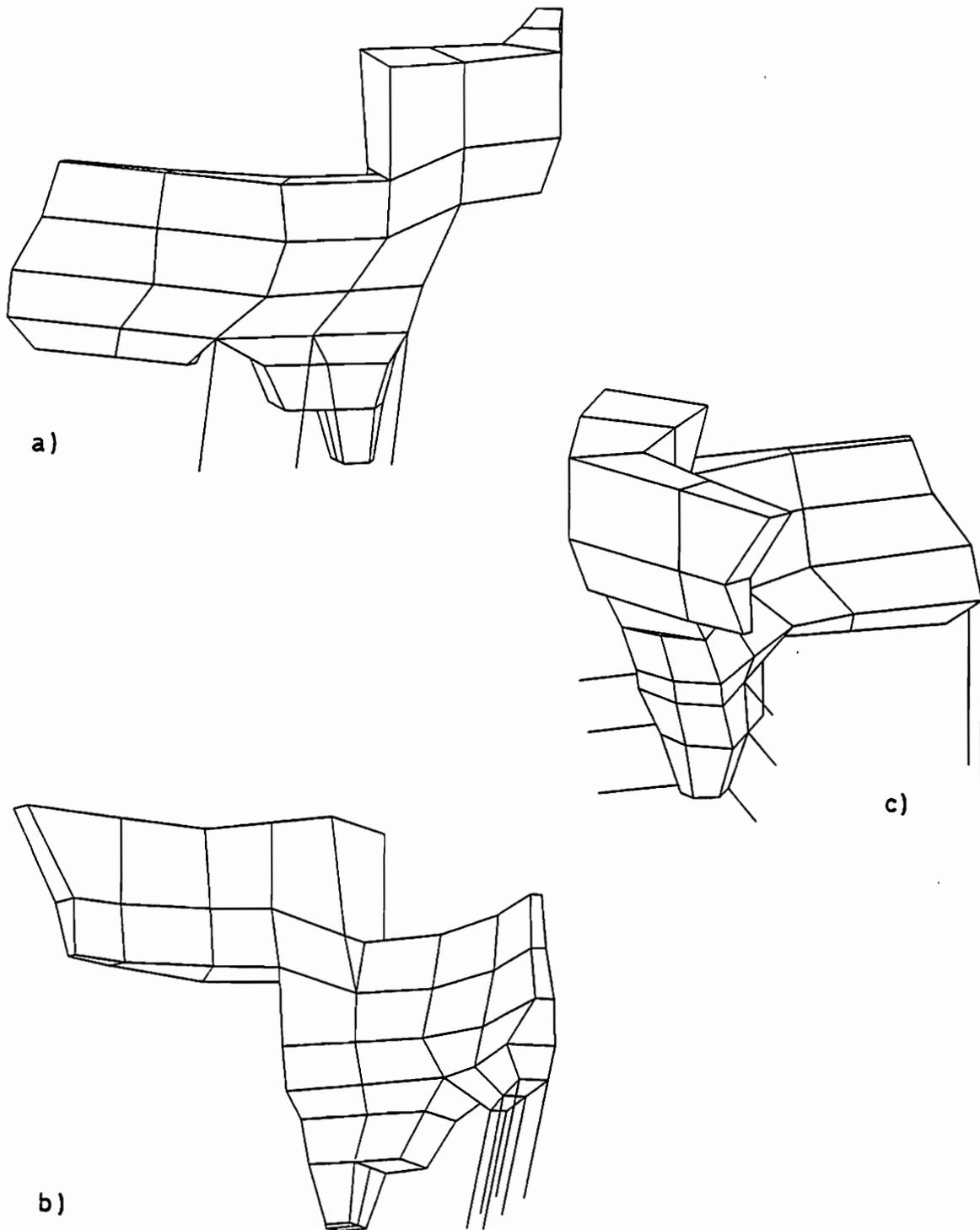


Abb. 4.17 Darstellung der Ligamente mit Hilfe eindimensionaler Elemente

a) Ligamenta flava

b) Ligamenta interspinalia

c) Ligamenta collateralia und Ligamentum supraspinale

4.7.4 Abbildungen

Die folgenden Abbildungen dienen der weiteren Veranschaulichung des entwickelten Modells.

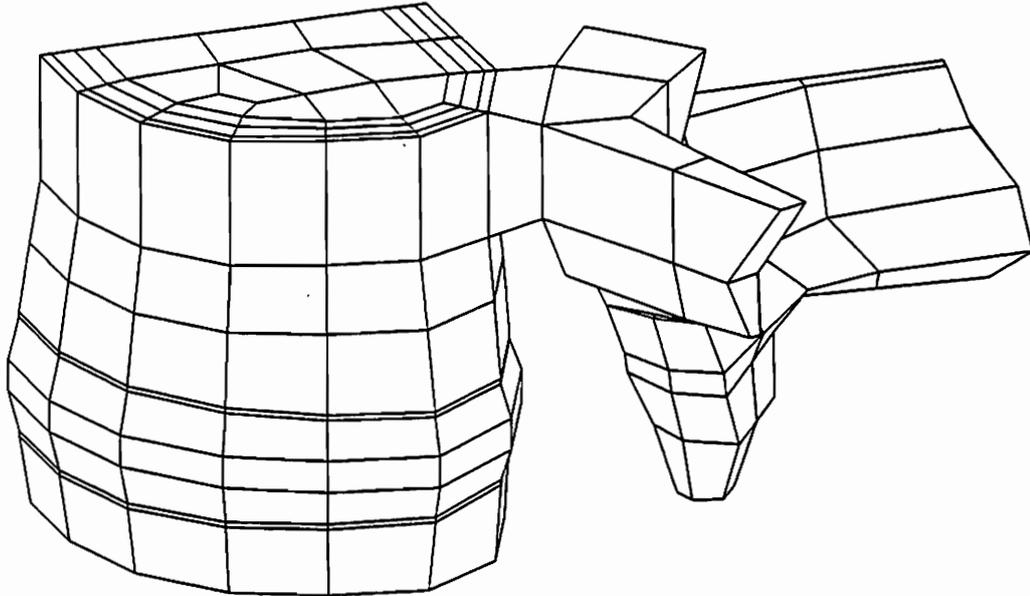


Abb. 4.18 Darstellung der Wirbel und der Knorpelgrundsubstanz

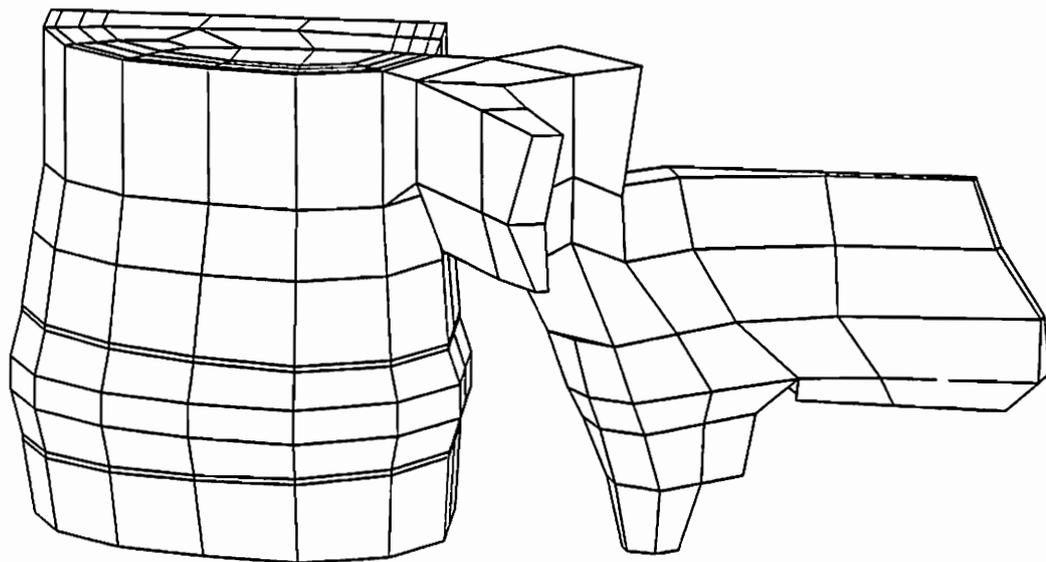


Abb. 4.19 Darstellung der Wirbel und der Knorpelgrundsubstanz

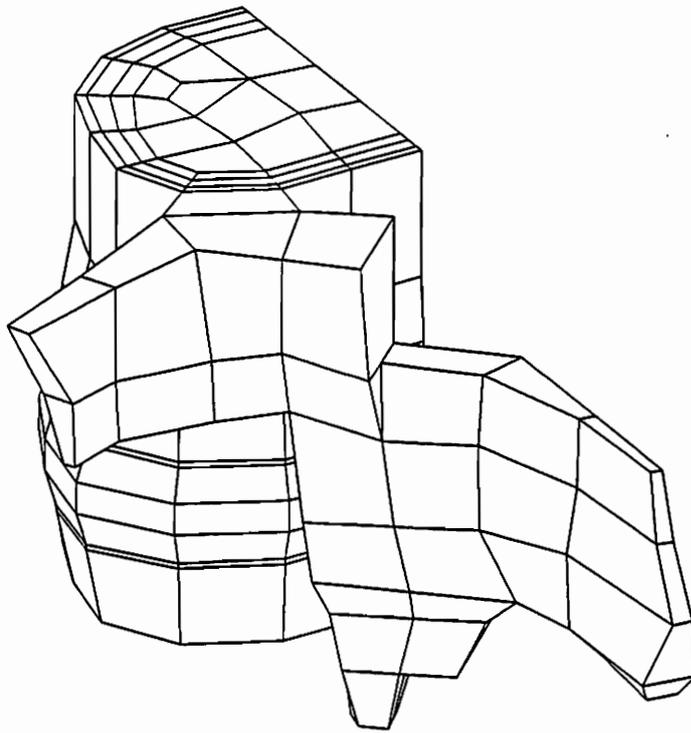


Abb. 4.20 Darstellung der Wirbel und der Knorpelgrundsubstanz

4.8 Beschreibung des Materialverhaltens

4.8.1 Knochen und Knorpelgrundsubstanz

Die Knorpelgrundsubstanz des Anulus fibrosus wird genau wie die knöchernen Strukturen des Bewegungssegmentes durch dreidimensionale finite Elemente dargestellt. Im Gegensatz zu den Wirbeln erfährt die Bandscheibe jedoch bereits bei alltäglichen Bewegungen große Dehnungen. Das in Abschnitt 4.2.11 beschriebene hypoelastische Materialgesetz gibt im Rahmen der Umgeformten Lagrange-Jaumannschen Formulierung das tatsächliche Materialverhalten der Knorpelgrundsubstanz unter Verwendung deformationsunabhängiger Werte für den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl auf realistische Weise wieder. Gleichzeitig kann es auf Grund der relativ kleinen Dehnungen der knöchernen Strukturen auch für deren Beschreibung verwendet werden. Entsprechend Abschnitt 2.4 sind dabei die unterschiedlichen Materialeigenschaften von kortikalem und spongiösem Knochen zu unterscheiden. SHIRAZI-ADL [78] gibt die in Tabelle 4.1 zusammengestellten Werte für den Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl der knöchernen Strukturen an. Da die gewählte Diskretisierung in den posterioren Bereichen keine Unterscheidung zwischen kortikalem und spongiösem Knochen erlaubt, wird dort näherungsweise ein homogenisierter Knochen angenommen.

Material	E [N/mm ²]	ν
kortikaler Knochen	12000,0	0,30
spongiöser Knochen	100,0	0,20
posteriore knöchernerne Strukturen	3500,0	0,25
Grundsubstanz des Anulus fibrosus	2,0	0,45

Tabelle 4.1 Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl ν

WU und YAO [92] sowie LIN et al. [43] geben Elastizitätsmoduln für den Anulus fibrosus an, denen jedoch die Annahme eines einphasigen Materials zugrunde liegt. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Anulus dagegen als

Verbund aus Knorpelgrundsubstanz und eingelagerten kollagenen Fasern dargestellt. Unter Berücksichtigung experimenteller Ergebnisse wurde der Elastizitätsmodul der Knorpelgrundsubstanz entsprechend Tabelle 4.1 angenommen.

Das Tragverhalten der reinen Knorpelgrundsubstanz wird für das in Abb. 4.24 dargestellte System unter Vernachlässigung der kollagenen Fasern aufgezeigt. Dabei sind sämtliche Knoten in der x- bzw. y-Richtung und die Knoten, deren z-Koordinate gleich Null ist, in der z-Richtung unverschieblich gelagert. Abb. 4.21 zeigt die Kraft P in Abhängigkeit von der Ingenieurdehnung der Knorpelgrundsubstanz.

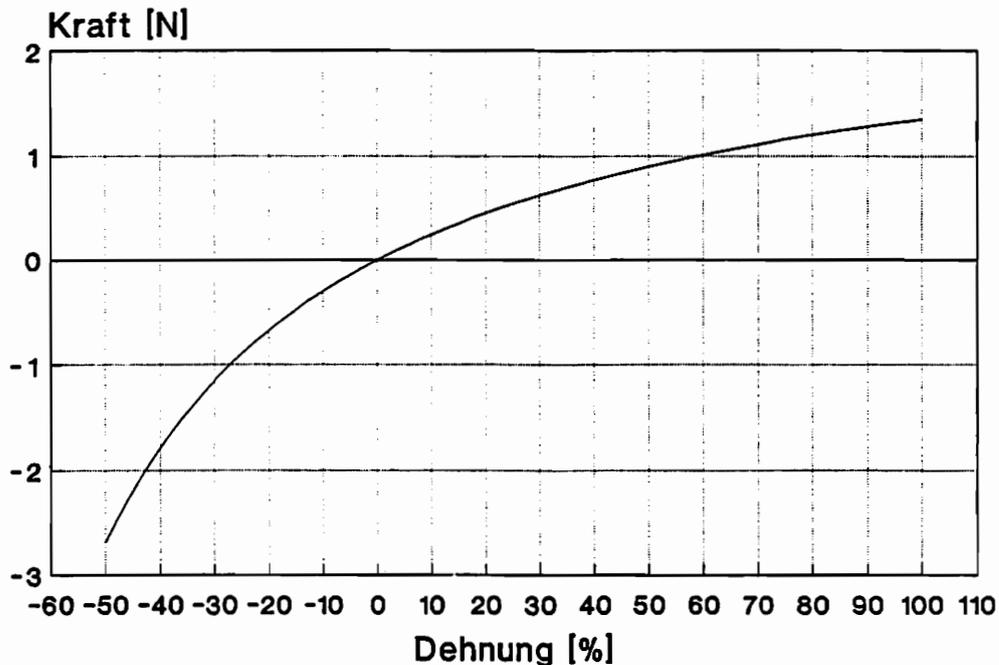


Abb. 4.21 Darstellung der Kraft P in Abhängigkeit von der Ingenieurdehnung der Knorpelgrundsubstanz

4.8.2 Kollagene Fasern

Basierend auf den Untersuchungen von EYRE [17] zur Biochemie der Zwischenwirbelscheibe wird angenommen, daß die kollagenen Fasern im Mittel einen Anteil von 20% des Gesamtvolumens des Anulus fibrosus einnehmen.

Zu berücksichtigen ist, daß diese Aussage einen globalen Charakter hat. Tatsächlich ist der Anteil der kollagenen Fasern an der Außenseite der Bandscheibe am größten und nimmt nach innen kontinuierlich ab [17, 34]. Darüber hinaus setzen sich die kollagenen Fasern umso weniger aus Kollagen des Typs I zusammen, je geringer ihr Abstand zum Kern der Bandscheibe ist [17, 34].

Im dem mathematischen Modell lassen sich diese Zusammenhänge dadurch beschreiben, daß den Stabelementen, die zur Darstellung der kollagenen Fasern verwendet werden, in verschiedenen Lagen unterschiedliche Querschnittsflächen bzw. Elastizitätsmoduln zugewiesen werden [78]. Die Veränderung dieser Größen ist in Abb. 4.22 dargestellt. Dabei nimmt der Elastizitätsmodul in radialer Richtung von außen nach innen um 35% und die Querschnittsfläche um 53% ab.

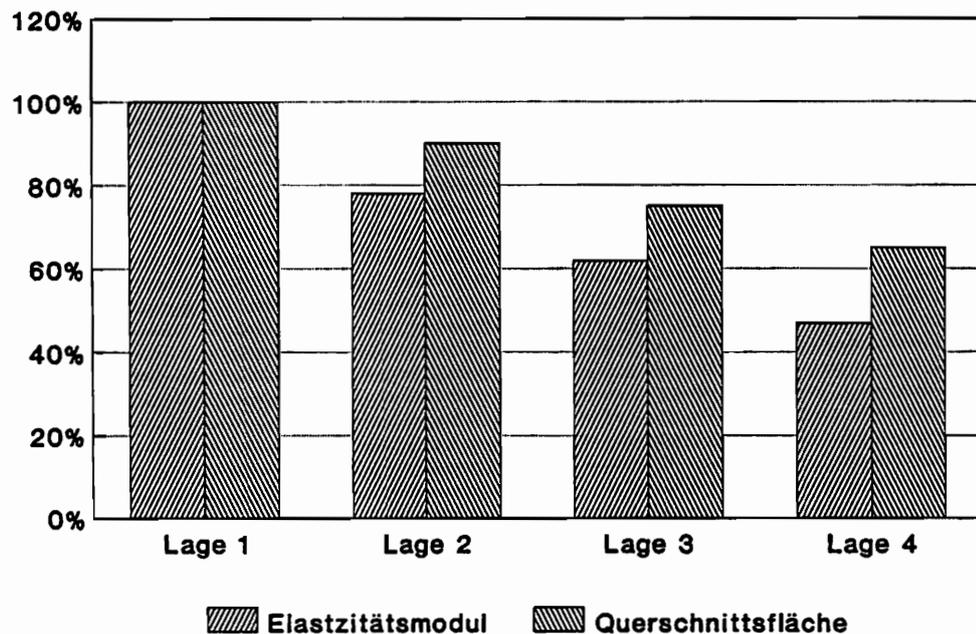


Abb. 4.22 Relative Änderung des Elastizitätsmoduls und der Querschnittsfläche der kollagenen Fasern in Abhängigkeit von ihrer Lage im Anulus fibrosus

SHIRAZI-ADL [78] gibt die Spannungen für die am weitesten außen liegen-

den kollagenen Fasern des Anulus fibrosus in Abhängigkeit von den Ingenieurdehnungen an. Dies führt unter Berücksichtigung der oben beschriebenen Zusammenhänge zu den in Abb. 4.23 dargestellten Beziehungen zwischen den Normalkräften in den Stabelementen und der Ingenieurdehnung.

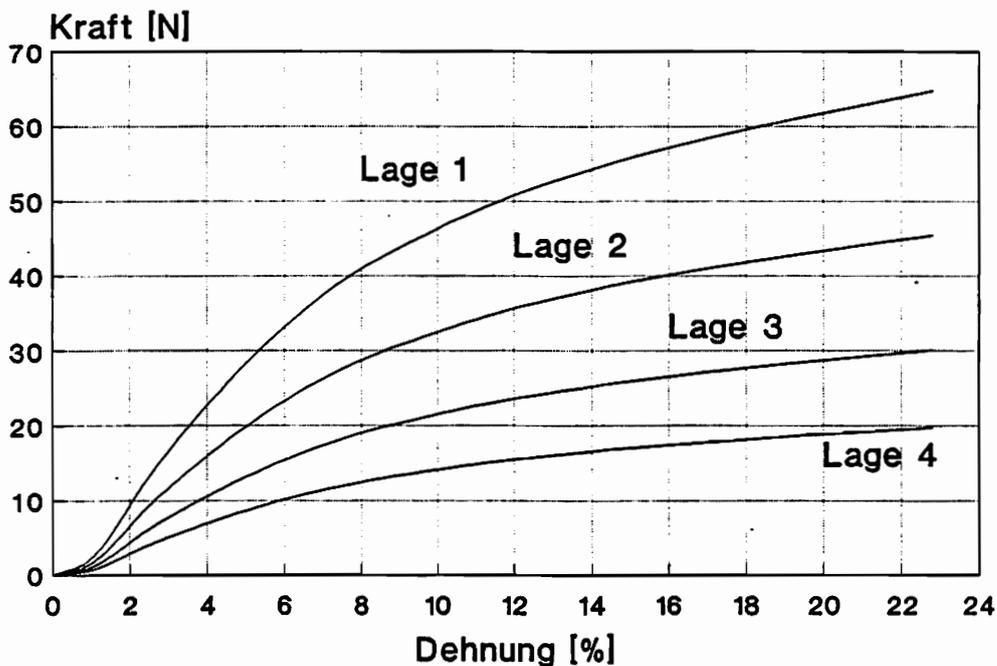


Abb. 4.23 Darstellung der Zugkräfte in den zur Beschreibung der kollagenen Fasern verwendeten Stabelementen in Abhängigkeit von der Ingenieurdehnung

Das Tragverhalten des Verbundsystems aus Knorpelgrundsubstanz und kollagenen Fasern wird an Hand des in Abb. 4.24 dargestellten Systems verdeutlicht. Für dieses Tragwerk wurde bereits in Abschnitt 4.8.1 unter Vernachlässigung der kollagenen Fasern die Abhängigkeit der Kraft P von der Ingenieurdehnung der Knorpelgrundsubstanz ermittelt. Unter Berücksichtigung kollagener Fasern, deren Volumen 20% des Volumens der Knorpelgrundsubstanz ausmacht, und für die die Spannungs-Dehnungs-Beziehung der im Anulus am weitesten außen liegenden kollagenen Fasern verwendet wird, ergibt sich der in Abb. 4.25 dargestellte Zusammenhang zwischen der Kraft P und der Ingenieurdehnung der Knorpelgrundsubstanz.

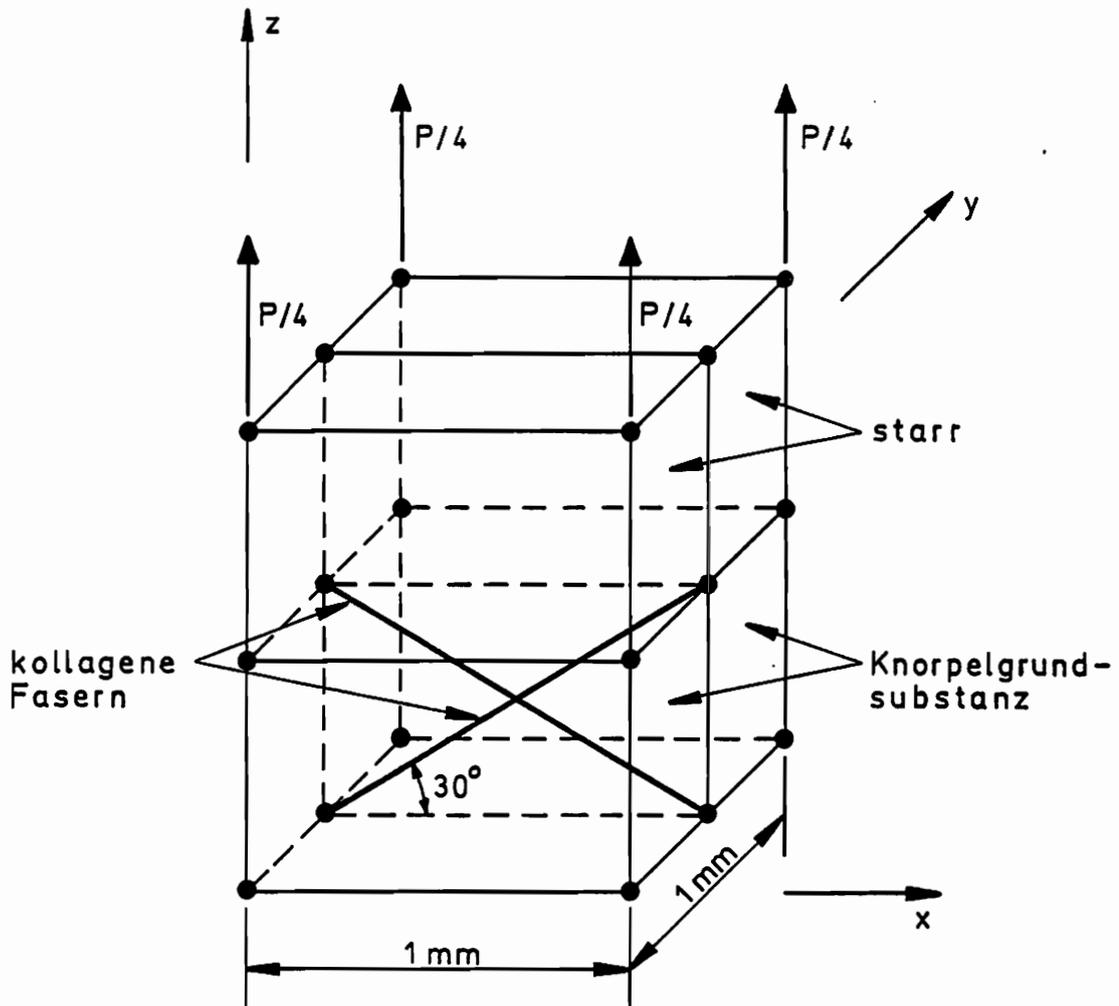


Abb. 4.24 Statisches System zur Veranschaulichung des Tragverhaltens des Verbundwerkstoffes aus Knorpelgrundsubstanz und kollagenen Fasern

4.8.3 Ligamente

NOLTE et al. [61] haben das Materialverhalten der verschiedenen Ligamente des lumbalen Bewegungssegmentes experimentell untersucht. Die gemessene Normalkraft wird als Funktion der Ingenieurdehnung dargestellt, wobei diejenige Konfiguration, in der ein Ligament erstmalig Last aufnimmt, als Referenz-Konfiguration definiert wurde. Zu beachten ist, daß eine präzise Bestimmung des ungedehnten und spannungsfreien Zustandes infolge des stark nichtlinearen Materialverhaltens äußerst schwierig bzw. nicht möglich ist [22]. Darüber hinaus ist eine Aussage

über die Deformationen des Bewegungssegmentes, die für ein bestimmtes Ligament zu der vorstehend definierten Konfiguration führen, nicht möglich [61, 92].

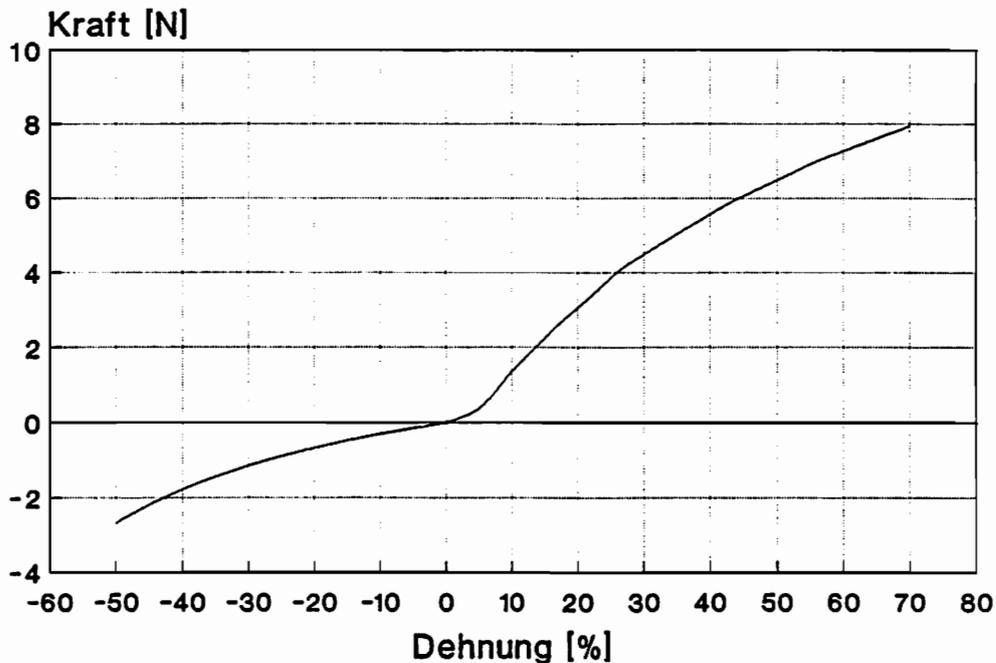


Abb. 4.25 Darstellung der Kraft P in Abhängigkeit von der Ingenieurdehnung der Knorpelgrundsubstanz

In dem mathematischen Modell stellt die unverformte Ausgangskonfiguration zum Zeitpunkt t_0 die Referenz-Konfiguration dar. Ein Stabelement, das zur Beschreibung der Ligamente verwendet wird, hat zu diesem Zeitpunkt die Länge 0L , die dem Abstand der Knotenpunkte des Elementes zueinander entspricht.

Auf Grund der oben dargestellten Zusammenhänge war es notwendig, die angegebenen Materialgesetze unter Berücksichtigung von in vitro ermittelten experimentellen Aussagen über das Tragverhalten eines lumbalen Bewegungssegmentes zu modifizieren. Für die verschiedenen Ligamente sind die Zugkräfte in Abhängigkeit von der Ingenieurdehnung in Abb. 4.26 dargestellt.

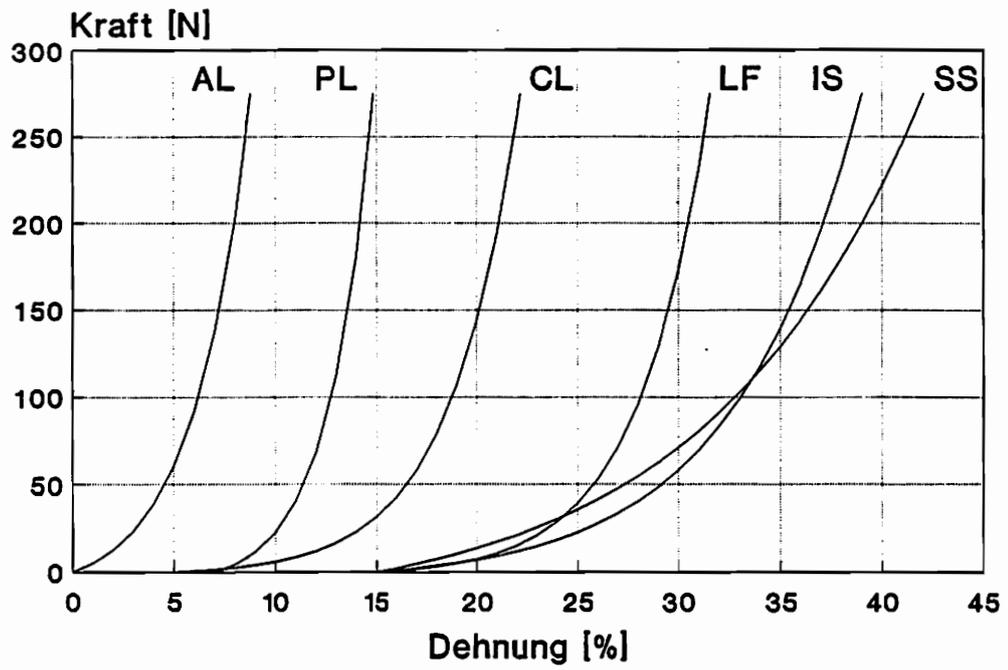


Abb. 4.26 Darstellung der Zugkräfte in den verschiedenen Ligamenten in Abhängigkeit von der Ingenieurdehnung

4.9 Lagerungsbedingungen und Belastungen

In üblichen experimentellen Untersuchungen zum Bewegungs- und Tragverhalten des Bewegungssegmentes werden sowohl das kraniale als auch das kaudale Ende des Präparates in Spannplatten eingegossen [48, 49, 50]. Die Verbindung der kaudalen Spannplatte mit der Aufspannvorrichtung des Versuchsstandes entspricht aus statischer Sicht einer Volleinspannung. In Übereinstimmung hiermit werden in dem mathematischen Modell die Knoten, die am weitesten in kaudaler Richtung liegen, unverschieblich gelagert.

Im Rahmen der experimentellen Untersuchungen im Biomechanischen Labor des Instituts für Mechanik an der Ruhr-Universität Bochum erfolgt die Einleitung von Kompressionskräften in den kranialen Wirbel durch ein von MICKLEY et al. [48, 49, 50] entwickeltes spezielles Lager, das die freie Deformation dieses Wirbels gewährleistet und demzufolge keine Zwangskräfte und Zwangsmomente hervorruft. Der Angriffspunkt der Kompressionskräfte wird sowohl experimentell als auch numerisch unter der Bedingung bestimmt, daß keine Rotationen des kranialen Wirbels unter reiner Kompression auftreten. Die am kranialen Ende des Modells gelegenen dreidimensionalen Elemente dienen der Darstellung der oberen Spannplatte, die im Vergleich mit dem Bewegungssegment als nahezu starr angesehen werden kann. Im Rahmen der numerischen Studien erfolgte die Aufbringung von Kompressionskräften grundsätzlich an dem unverformten System, wobei Verschiebungen der kranialen Spannplatte in der x- bzw. y-Richtung nicht zugelassen und in der z-Richtung für deren kranial gelegene Knoten eingepreßt wurden. Vergleichende Berechnungen zeigten, daß die auf Grund der gewählten Lagerungsbedingungen auftretenden Zwängungen vernachlässigbar gering sind.

In der Medianebene wirkende Momente wurden durch ein an der kranialen Spannplatte wirkendes Kräftepaar aufgebracht. Die Berücksichtigung besonderer Lagerungsbedingungen war für diesen Lastfall nicht erforderlich.

4.10 Verwendete Soft- und Hardware

Die entwickelten finiten Elemente wurden in das Programmsystem MESY eingebracht. Unter dem Begriff MESY (Mechanik der Systeme) ist sowohl ein allgemeines Konzept zur Behandlung strukturmechanischer Aufgabenstellungen als auch der Gruppenname für eine Reihe modularer Programmsysteme zu verstehen. Im besonderen ist das System für Forschungs- und Entwicklungsaufgaben in der Strukturmechanik geeignet, da es als Baukastensystem implementiert ist und als offenes System leicht erweitert werden kann. Der Benutzer hat die Möglichkeit, sein Problem individuell zu formulieren und die zur Verfügung stehenden MESY-Unterprogramme an geeigneter Stelle zu nutzen [15, 75]. Dies ermöglichte die Entwicklung eines Individualprogramms zur Lösung der im Rahmen dieser Arbeit betrachteten nichtlinearen Probleme.

Die numerischen Berechnungen wurden auf Personal-Computern mit 80386- und 80387-Prozessoren unter dem Betriebssystem MS-OS/2 durchgeführt.

5. Anwendungsbeispiele

5.1 Allgemeines

In Anlehnung an experimentelle Studien werden im Rahmen dieser Arbeit Belastungen des Bewegungssegmentes durch Kompressionskräfte und Flexions- bzw. Extensionsmomente untersucht. Darüber hinaus wird der Einfluß von Volumenveränderungen des Nucleus pulposus auf das Bewegungs- und Tragverhalten des Segmentes betrachtet.

Als Kompressionskräfte bezeichnen wir Lasten, die in Richtung der negativen z-Achse wirken. Der Angriffspunkt dieser Kräfte wird unter der Bedingung bestimmt, daß sie keine Rotationen des kranialen Wirbels hervorrufen. Flexions- bzw. Extensionsmomente wirken um die x-Achse, wobei der Momentenvektor der Flexionsmomente die Orientierung der positiven x-Achse hat, und der Momentenvektor der Extensionsmomente entgegengesetzt orientiert ist.

Für die Beschreibung des Bewegungs- und Tragverhaltens des Segmentes werden die Verschiebung der kranialen Aufspannplatte in axialer Richtung, die Rotation der kranialen Aufspannplatte, die Zunahme der Vorwölbung des Anulus fibrosus, die Dehnung des Anulus fibrosus, der intradiscale Druck und die Kräfte in den Ligamenten betrachtet.

Unter einer reinen Kompressionsbelastung des Bewegungssegmentes verschieben sich alle Punkte der kranialen Spannplatte in axialer Richtung um das gleiche Maß. Unter allen anderen Belastungen sind die axialen Verschiebungen verschiedener Punkte der Spannplatte auf Grund ihrer Rotation unterschiedlich. In diesen Fällen wird die mittlere Verschiebung in axialer Richtung der in der Medianebene gelegenen Punkte der kranialen Spannplatte angegeben. Verschiebungen in negativer z-Richtung werden dabei positiv dargestellt.

Sowohl für Flexions- als auch für Extensionsmomente werden die resultierenden Rotationen der kranialen Aufspannplatte positiv angegeben. Dies bedeutet, daß ein Momentenvektor und ein resultierender positiver Drehvektor die gleiche Orientierung haben.

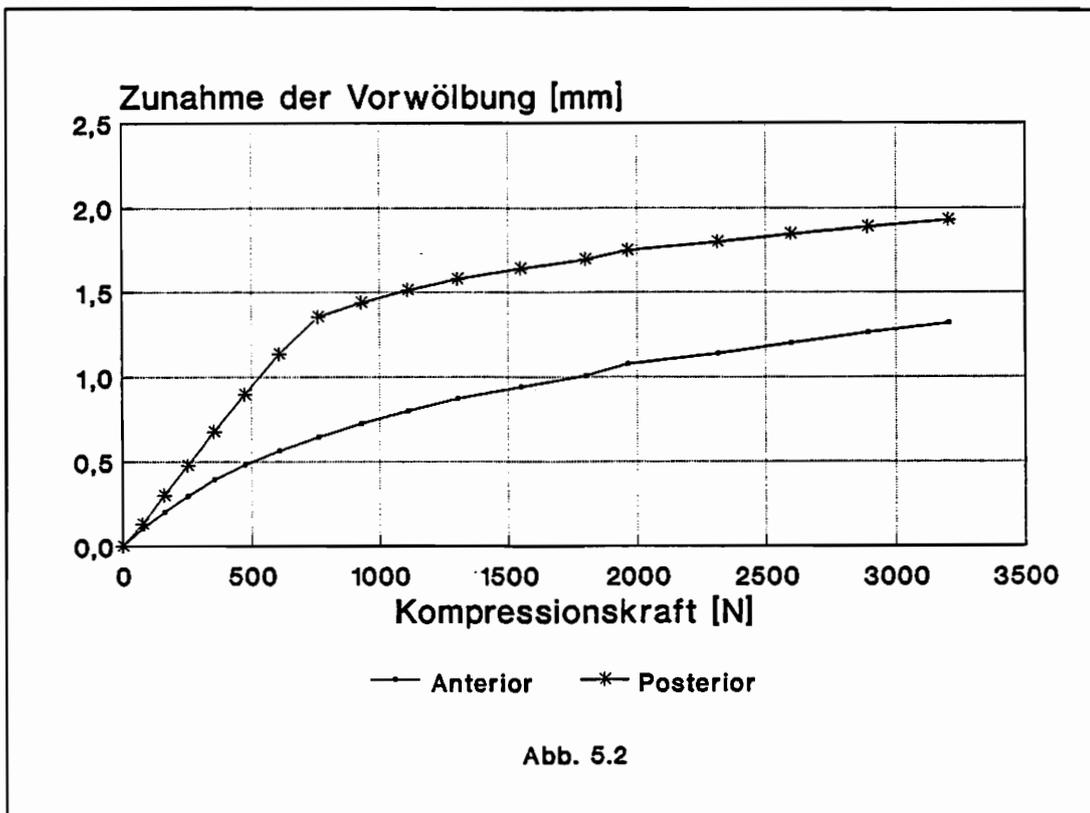
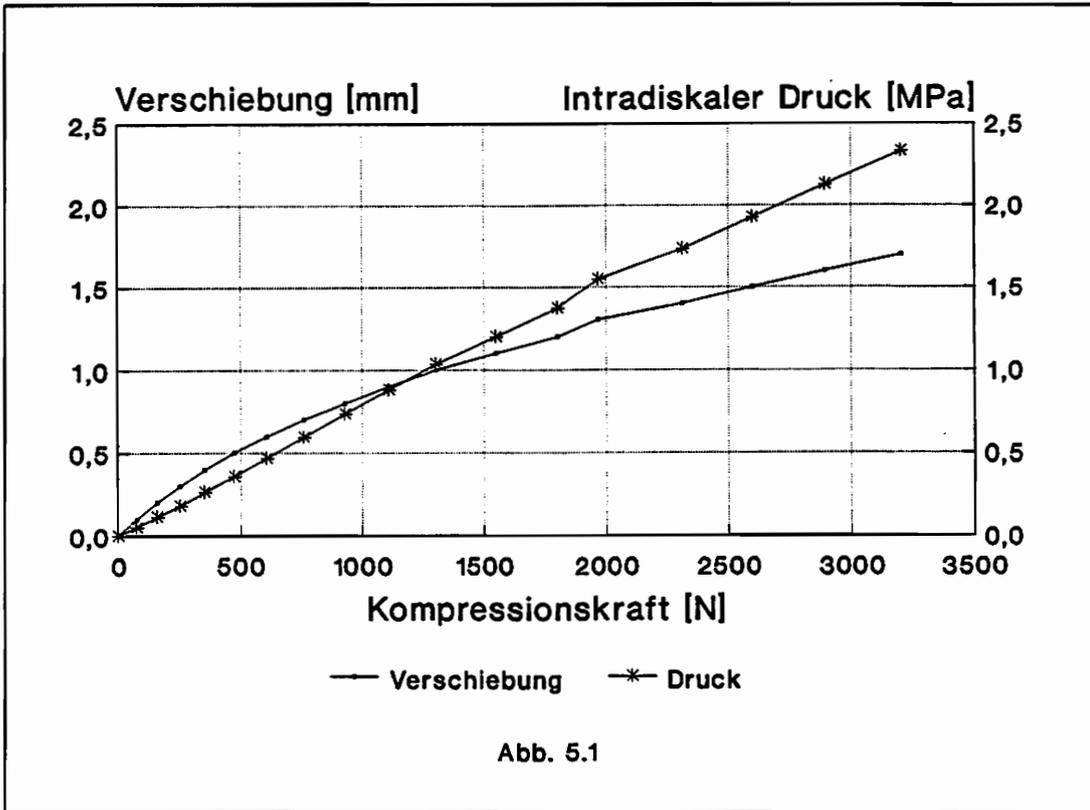
Als Vorwölbung des Anulus fibrosus wird das Maß bezeichnet, um das die Außenseite des Anulus fibrosus in der Bandscheibenmitte in radialer Richtung über die geradlinige Verbindung der knöchernen Endplatten hinausragt (Abb. 4.15). Die Veränderung der Vorwölbung wird in der Medianebene sowohl im anterioren als auch im posterioren Bereich des Anulus fibrosus untersucht, wobei positiven Werten eine Zunahme der Vorwölbung entspricht.

Die Dehnung des Anulus fibrosus wird an Hand eines Schnittes in der Medianebene untersucht. In dieser Ebene betrachten wir sowohl im anterioren als auch im posterioren Bereich des Anulus fibrosus die Ingenieurdehnung seiner inneren und äußeren Oberfläche.

Sämtliche angegebenen Kräfte und Momente beziehen sich auf ein vollständiges Bewegungssegment. Bei den numerischen Studien an dem halben Bewegungssegment wurde selbstverständlich nur die Hälfte der angegebenen Belastungen aufgebracht und demzufolge die Hälfte der angegebenen Ligamentkräfte berechnet.

5.2 Kompression

Im Falle einer reinen Kompressionsbelastung ist der intradiskale Druck nahezu linear von der aufgebrachten Belastung abhängig (Abb. 5.1), was durch experimentelle Untersuchungen bestätigt wird [13]. Die axiale Verschiebung der kranialen Spannplatte hängt dagegen nichtlinear von der Belastung ab, wobei eine Versteifung im Bereich höherer Lasten festzustellen ist (Abb. 5.1). Die Zunahme der Vorwölbung des Anulus fibrosus ist Abb. 5.2 zu entnehmen. In Übereinstimmung mit experimentellen Studien von BRINCKMANN et al. [12, 13] nimmt die Vorwölbung in dem posterioren Bereich des Anulus fibrosus stärker als in dem anterioren Bereich zu. Im Zusammenhang damit ergeben sich für den posterioren Bereich größere Dehnungen des Anulus fibrosus als für den anterioren Bereich (Abb. 5.3 und Abb. 5.4). In beiden Bereichen sind die Dehnungen der Innenseite des Anulus fibrosus größer als diejenigen der Außenseite, wobei sich in dem anterioren Bereich an der Außenseite sogar negative Dehnungen einstellen.



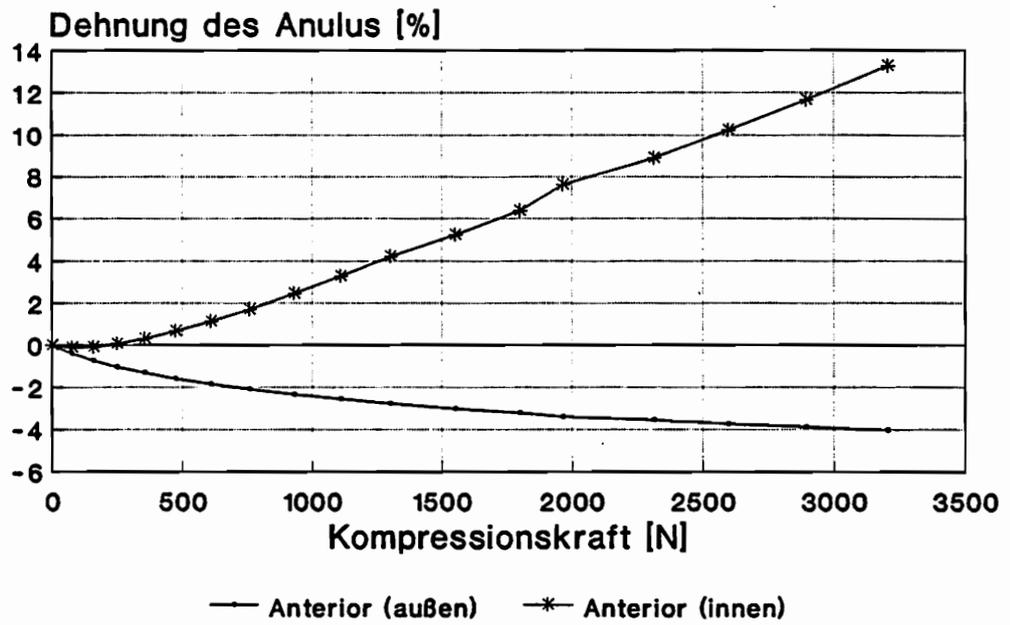


Abb. 5.3

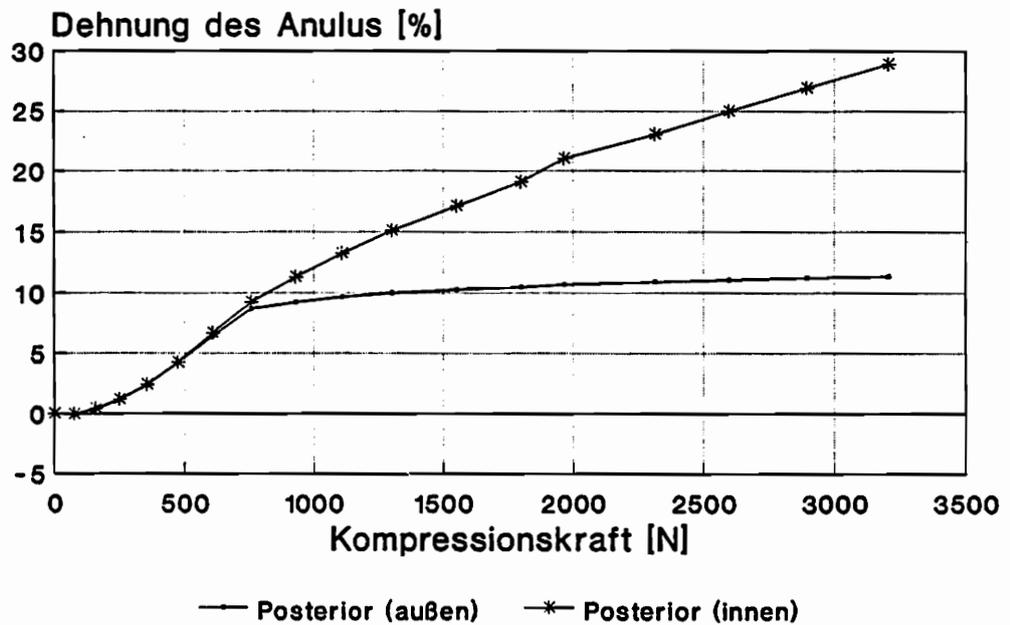


Abb. 5.4

5.3 Flexion und Extension - Verifikation des Modells

Die Rotation der kranialen Spannplatte hängt nichtlinear von dem aufbrachten Flexions- bzw. Extensionsmoment ab (Abb. 5.5 und Abb. 5.6). Im Falle der Flexionsmomente sind zwei verschiedene Bereiche zu unterscheiden. Der erste Bereich ist dadurch gekennzeichnet, daß die Rotation proportional zu dem aufbrachten Moment ansteigt. In dem zweiten Bereich, in dem die verschiedenen Ligamente mittragen (Abb. 5.13 und Abb. 5.14), hängt die Rotation nichtlinear von dem Flexionsmoment ab, wobei eine ständige Versteifung des Segmentes festzustellen ist. Im Falle der Extensionsmomente ergibt sich ein ähnliches Verhalten, das jedoch maßgeblich nicht durch die Ligamente (Abb. 5.15 und Abb. 5.16), sondern durch den Kontakt der Wirbelgelenksflächen geprägt wird. Die berechneten Rotationen sind nach dem 2-ten (100 Ncm) und 3-ten Lastinkrement (150 Ncm) nahezu gleich. Dies ist darauf zurückzuführen, daß nach dem 2-ten Lastinkrement der Kontaktfall festgestellt wurde, und daraufhin Kontaktfedern und Ungleichgewichtskräfte (Abb. 4.5) berücksichtigt wurden. Zu beachten ist, daß die im 2-ten Lastschritt berechnete Rotation zu groß ist, da der tatsächlich bereits eingetretene Kontakt noch keine Berücksichtigung fand. An späterer Stelle wird an Hand eines Beispielen gezeigt, wie die Genauigkeit der Berechnung für das hier geschilderte Problem durch eine feinere Lastinkrementierung gesteigert werden kann. Gleichzeitig wird für dieses Beispiel nachgewiesen, daß die Ungenauigkeiten in den Bereichen, in denen der Kontaktfall eintritt, keinen Einfluß auf die Genauigkeit der weiteren Berechnung haben.

Die Verifikation des mathematischen Modells erfolgt anhand von experimentellen Untersuchungen, die im Biomechanischen Labor des Instituts für Mechanik an der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt wurden [48, 49, 50]. Die Rotationen infolge von Flexions- und Extensionsmomenten wurden für das der Modellbildung zugrunde liegende Bewegungssegment L4-L5 (Abb. 4.10) in einer speziell konstruierten Versuchsanlage (Abb. 5.17 und Abb. 5.18) ermittelt. Die Versuchsergebnisse für dieses Bewegungssegment (NORM) zeigen eine gute Übereinstimmung mit den numerischen Ergebnissen (Abb. 5.5 und Abb. 5.6), die sich auch für weitere Bewegungssegmente (LD04 bzw. LD09) ergibt. Da die aufbrachten Flexions- bzw. Extensionsmomente sämtliche Tragelemente des Bewegungssegmentes beanspruchen, kann

gefolgert werden, daß das entwickelte mathematische Modell für eine realistische Beschreibung des Bewegungs- und Tragverhaltens eines Bewegungssegmentes geeignet ist.

Erwartungsgemäß nimmt die Vorwölbung des Anulus fibrosus unter der Einwirkung von Flexions- bzw. Extensionsmomenten jeweils in dem Bereich zu, der auf Grund der Belastung zusammengedrückt wird (Abb. 5.7 und Abb. 5.8). Im Gegensatz dazu nimmt die Vorwölbung des Anulus fibrosus in dem gegenüberliegenden Bereich im allgemeinen ab. Eine Ausnahme davon ergibt sich nur unter der Einwirkung von kleinen Flexionsmomenten in dem posterioren Bereich des Anulus.

Die Veränderung der Vorwölbung ist für beide Belastungen anterior deutlich größer als posterior. Die Beträge der Dehnungen des Anulus fibrosus sind dahingegen bei einer Belastung durch Flexionsmomente anterior und posterior nahezu gleich groß und bei einer Belastung durch Extensionsmomente nur geringfügig unterschiedlich (Abb. 5.9 bis Abb. 5.12). In allen Fällen sind die Dehnungen der Außenseite vom Betrag her größer als diejenigen der Innenseite, wobei die Unterschiede nicht erheblich sind.

Das Tragverhalten des Bewegungssegmentes infolge der Einwirkung von Kompressionskräften ist grundsätzlich verschieden von dem, das sich bei einer Belastung durch Flexions- bzw. Extensionsmomente ergibt. Im Falle einer reinen Kompressionsbelastung wird der Anulus fibrosus in seinem posterioren Bereich am stärksten belastet, wobei dort sowohl die größte Zunahme der Vorwölbung als auch die größte Dehnung zu finden ist. Von besonderer Bedeutung ist die Tatsache, daß diese maximale Dehnung an der Innenseite des Anulus fibrosus auftritt. Es ist anzunehmen, daß sich radiäre und zirkuläre Fissuren in zentral gelegenen Teilen des Anulus fibrosus auf Grund hoher Kompressionsbelastungen weiter in die peripheren Bereiche ausdehnen. Entsprechend Abschnitt 3.3 entspricht dies aus klinischer Sicht einer fortschreitenden Bandscheibendegeneration, die zu einer Protrusion führen kann. Im Gegensatz dazu wird die Bandscheibe infolge der untersuchten Flexions- und Extensionsmomente gleichmäßiger und darüber hinaus vergleichsweise gering belastet.

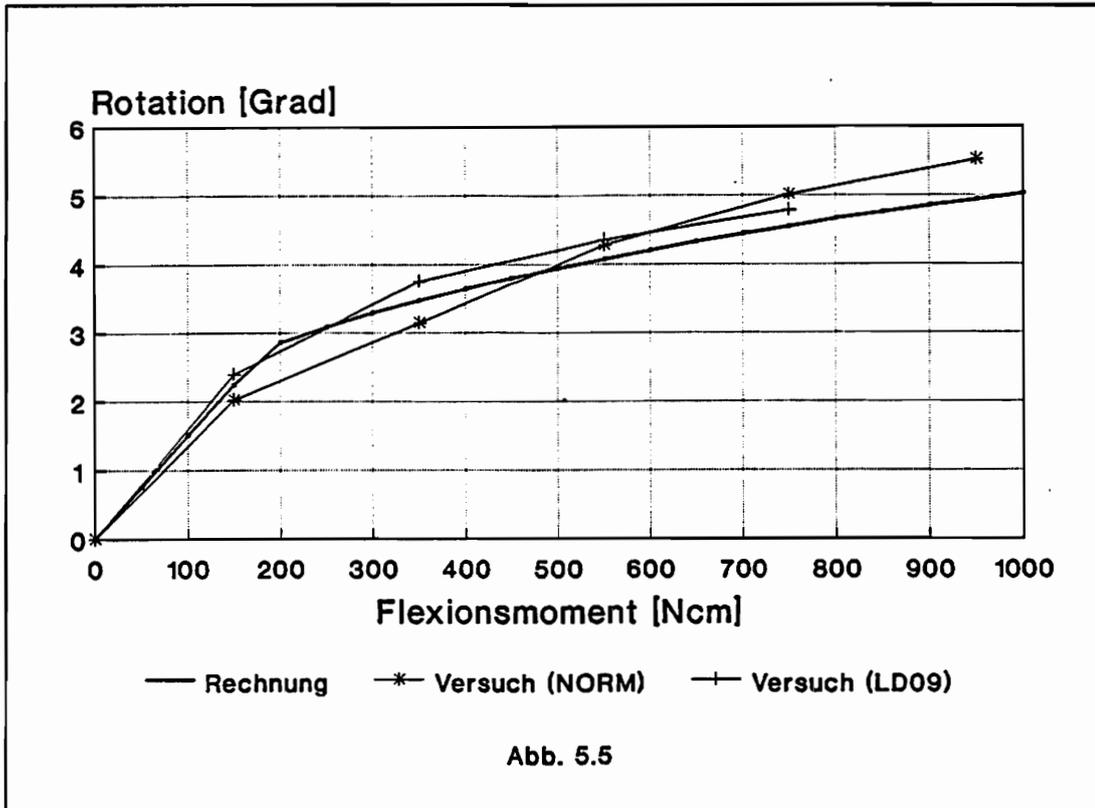


Abb. 5.5

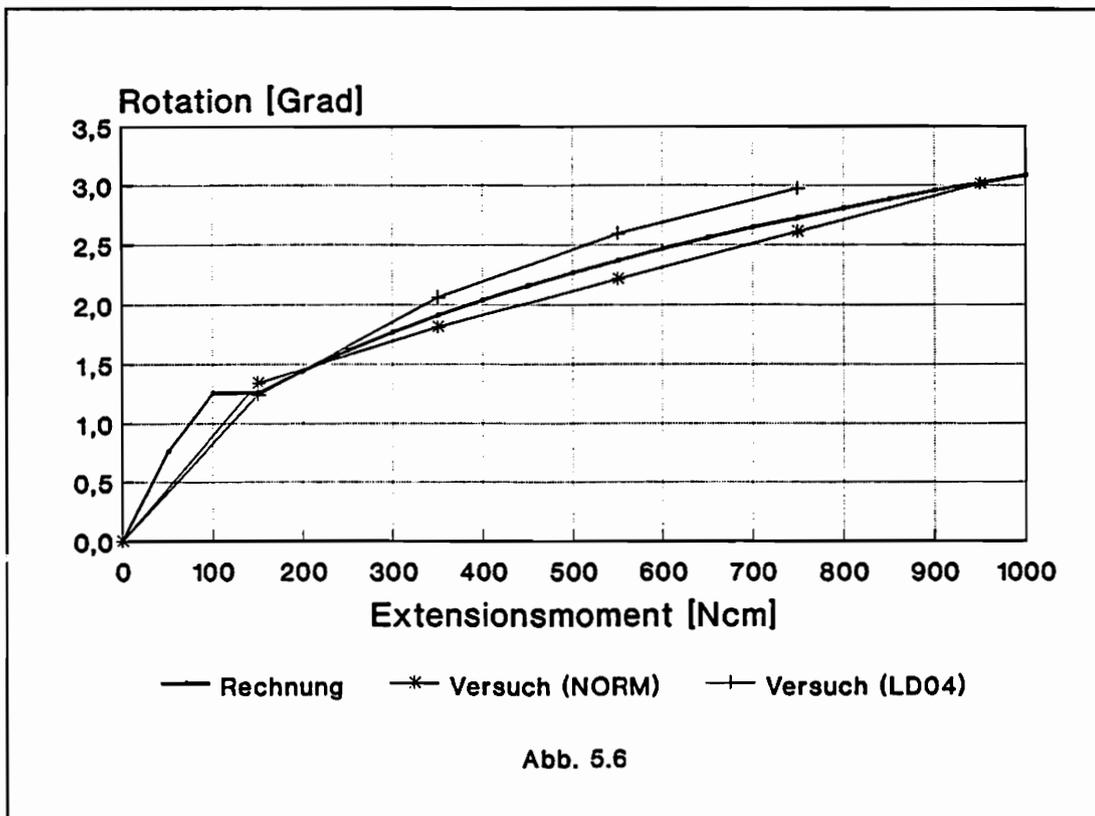
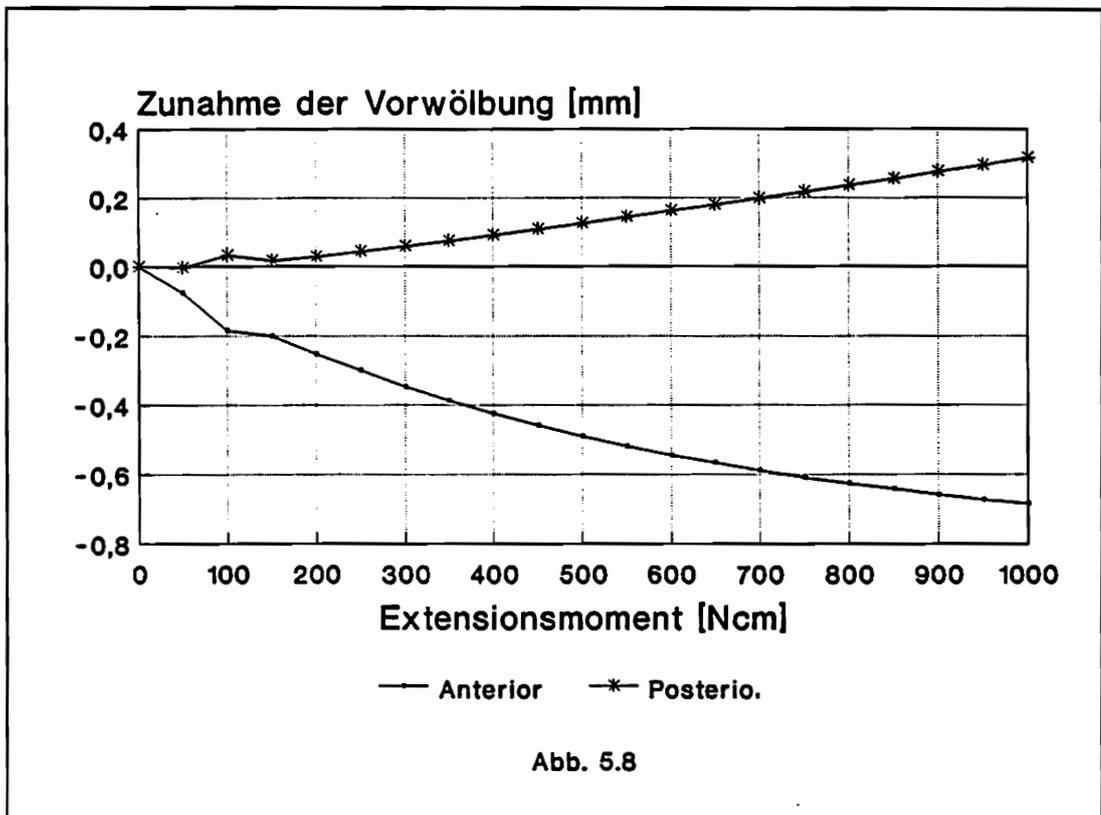
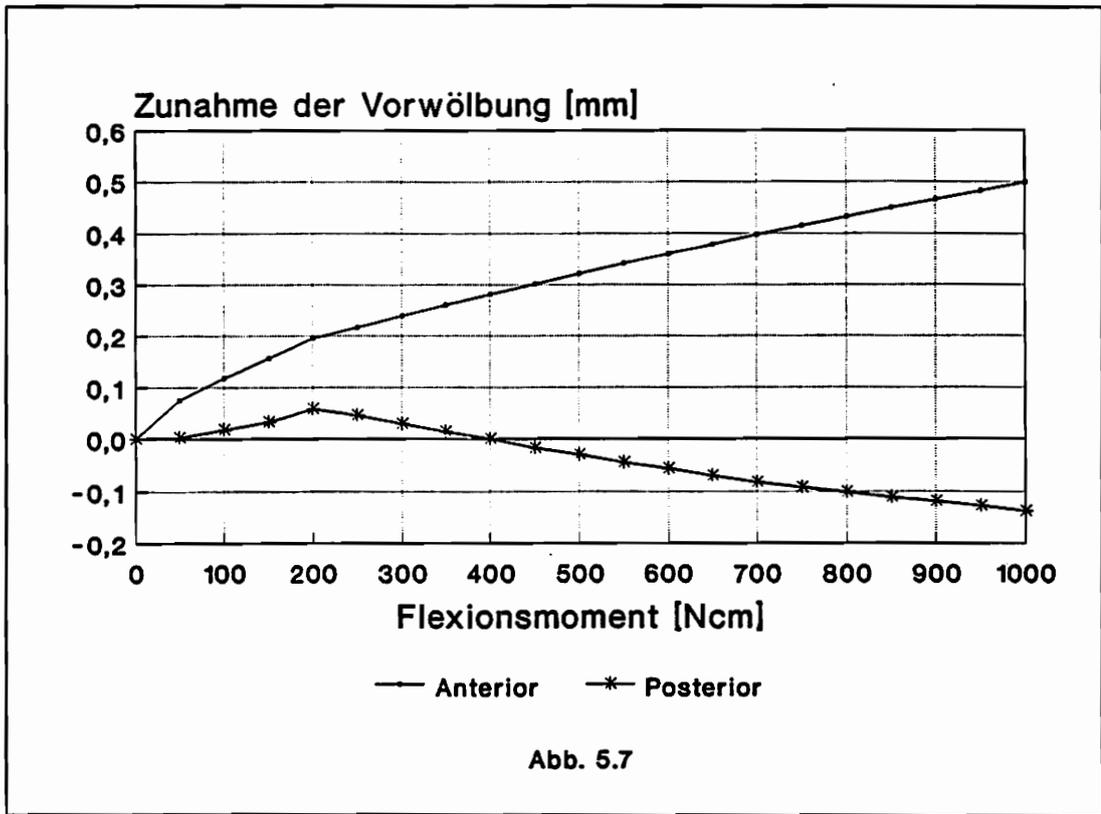
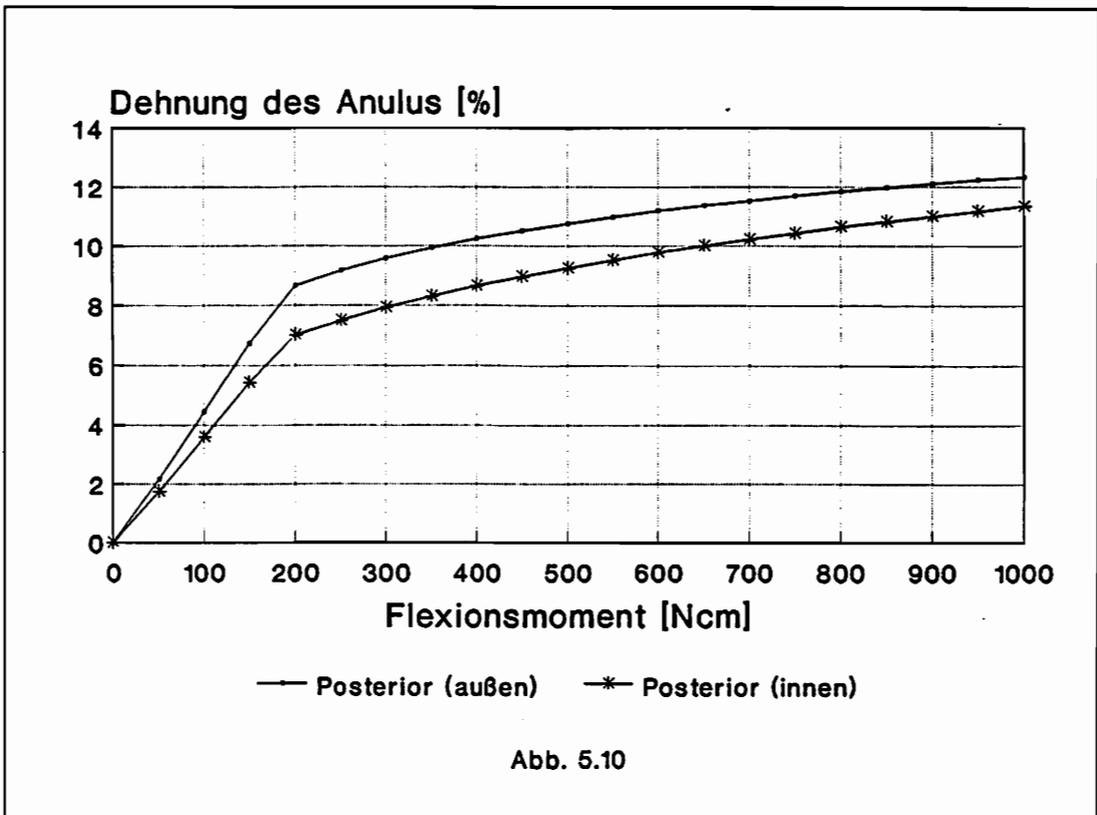
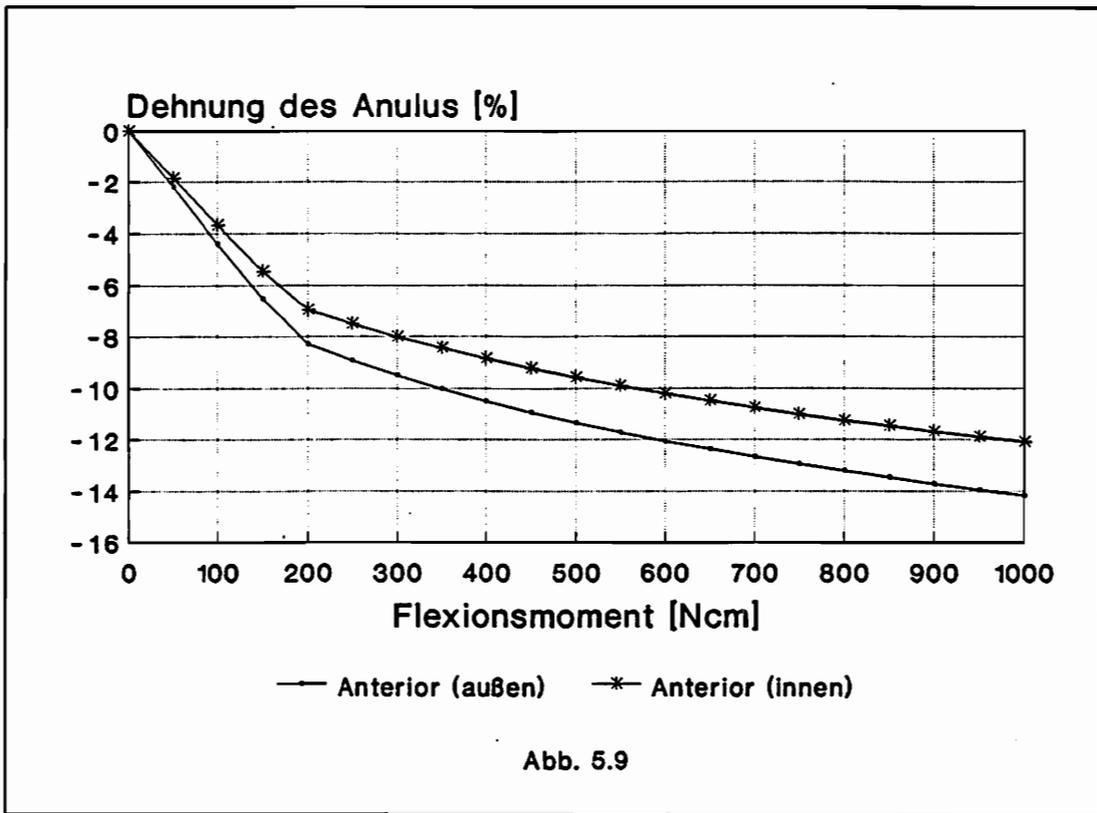
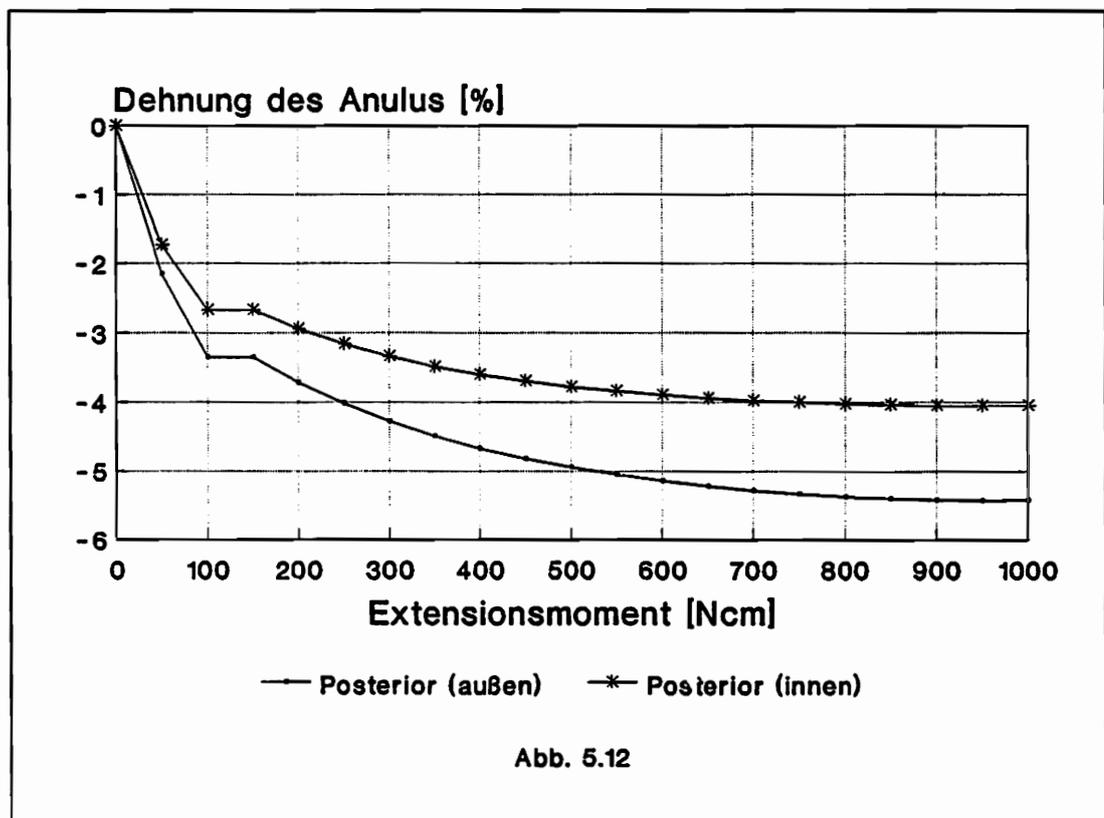
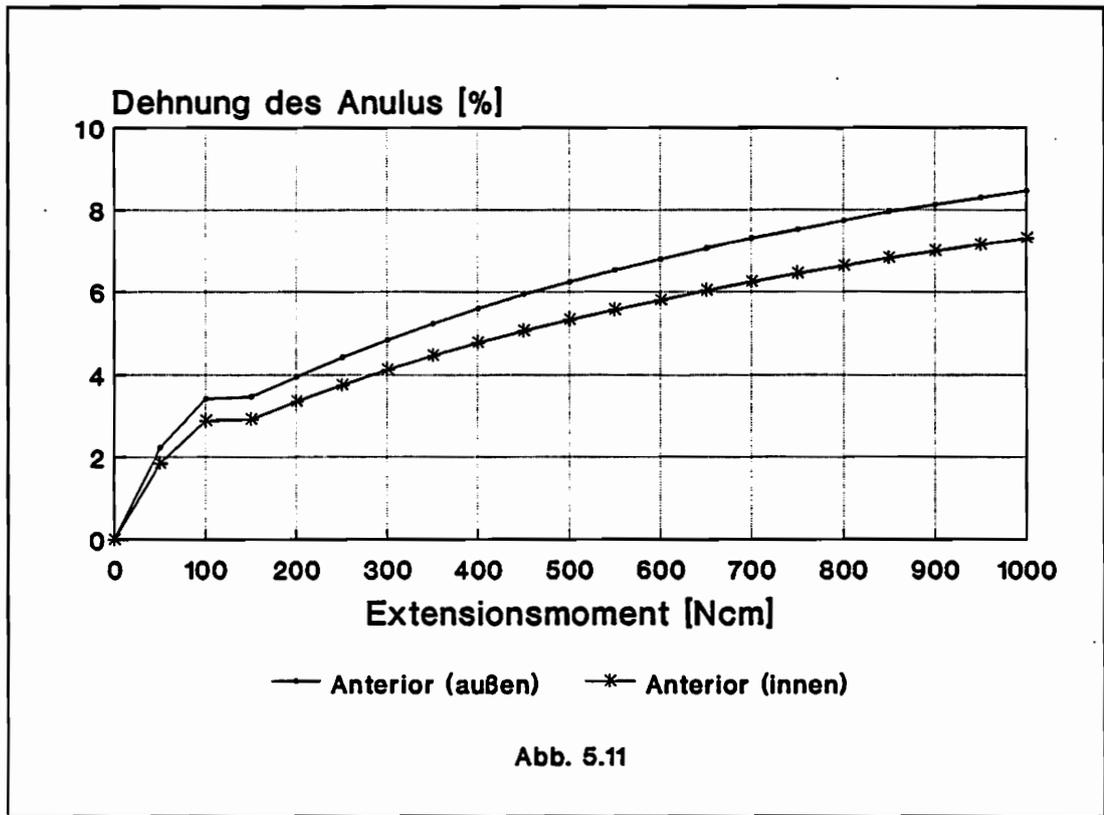
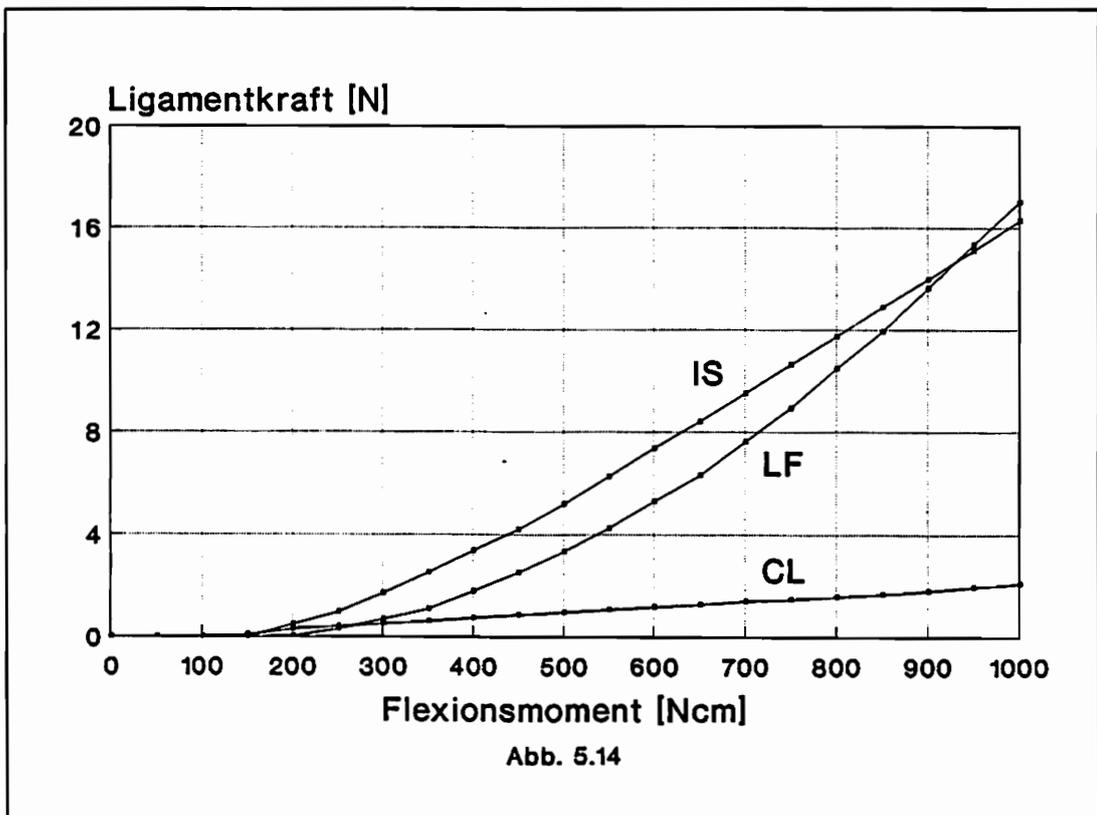
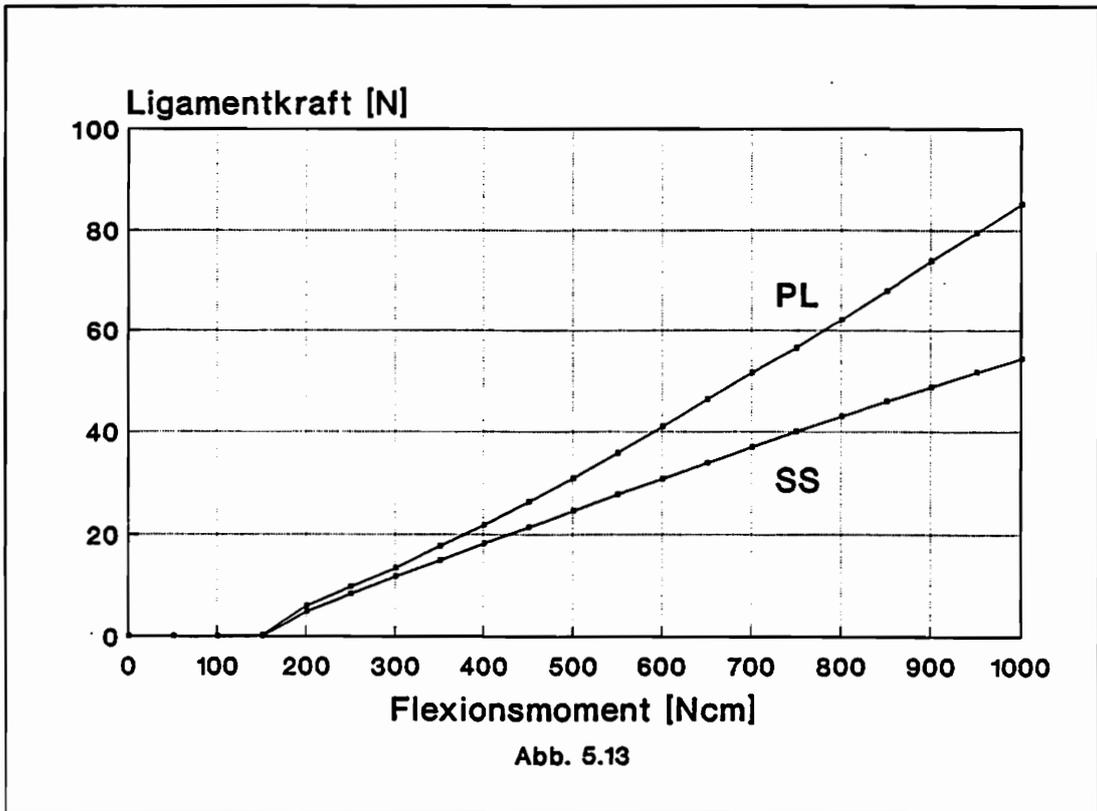


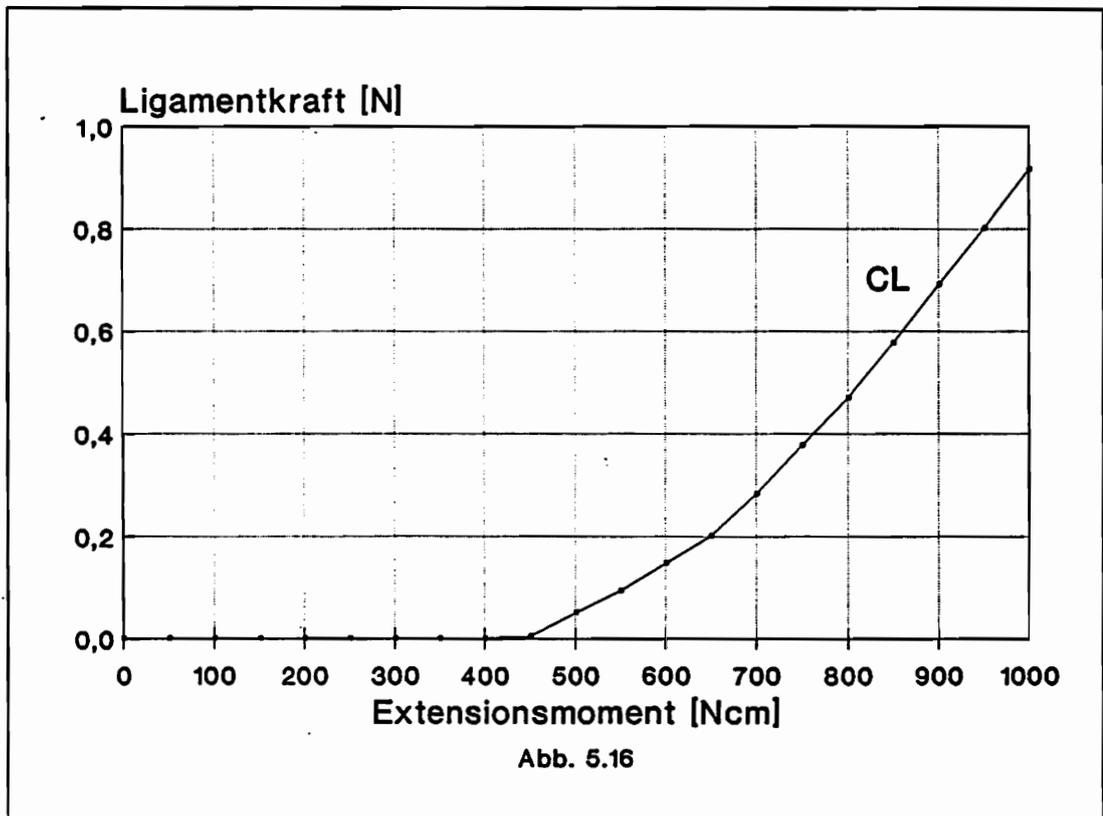
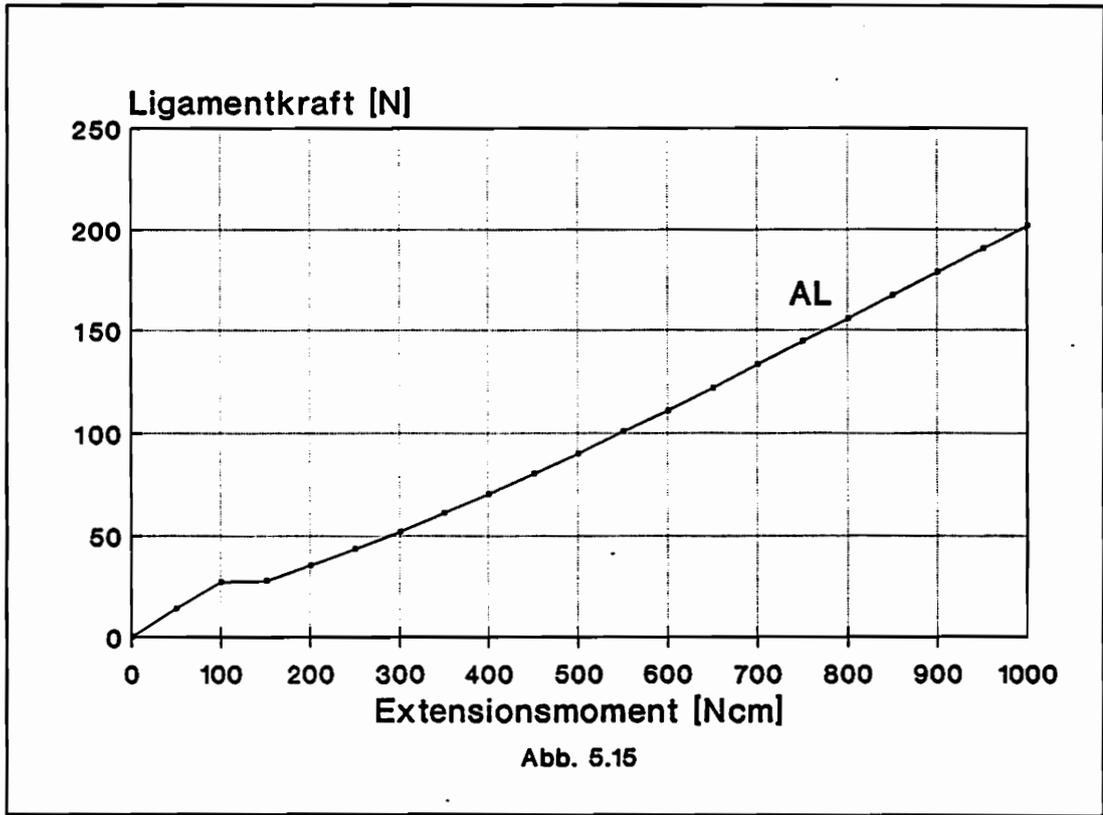
Abb. 5.6











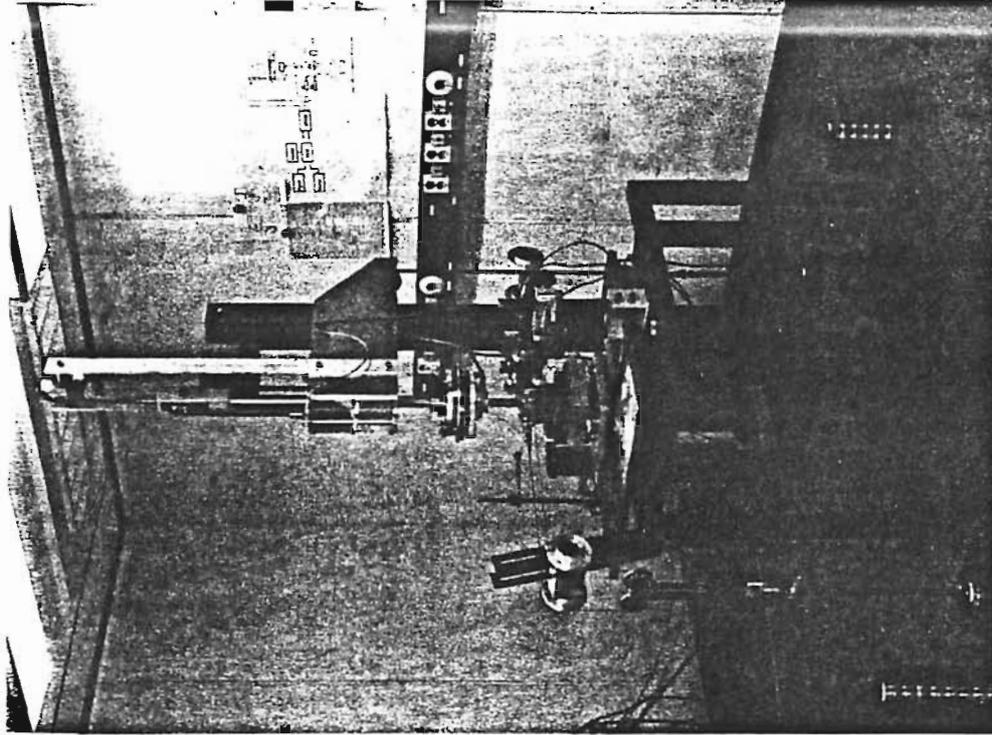


Abb. 5.18 Ansicht der vollständigen Belastungs-
vorrichtung (aus [50])

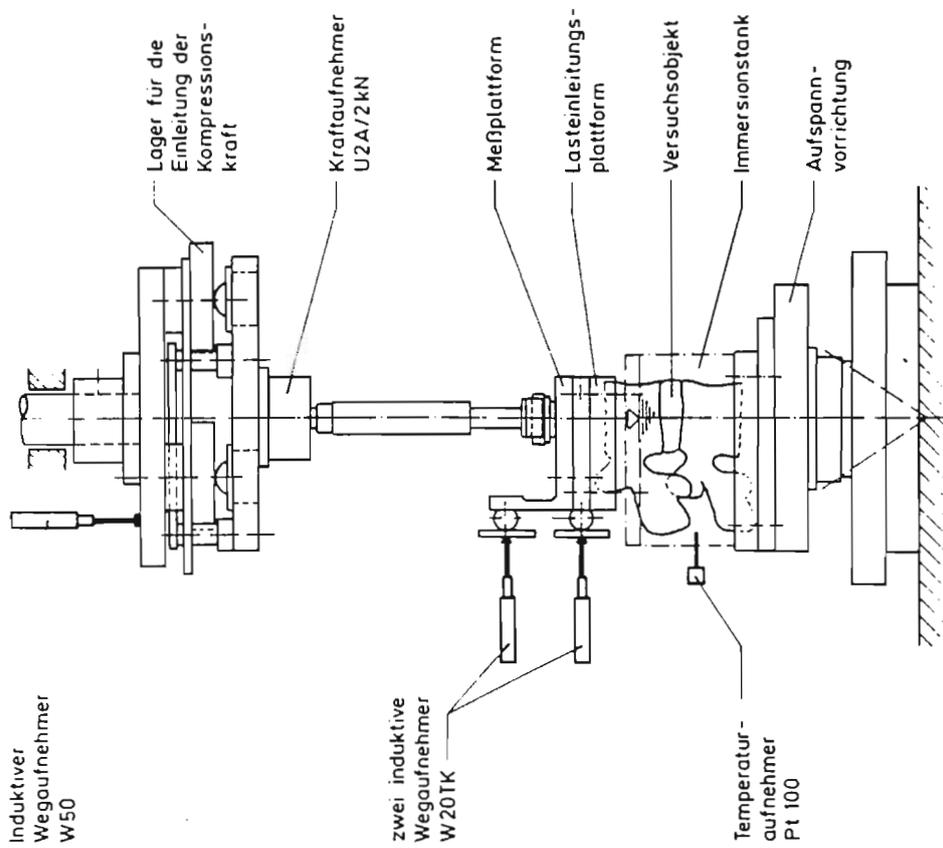


Abb. 5.17 Laterale Ansicht des aufgespannten
Versuchsobjekts (aus [50])

5.4 Flexion und Extension mit Preload

In diesem Abschnitt betrachten wir die Belastung des Bewegungssegmentes durch Flexions- und Extensionsmomente bei gleichzeitiger Wirkung von Kompressionskräften. Da die Kompressionskräfte in diesem Fall einer Vorbelastung des Segmentes entsprechen, verwenden wir auch den Begriff Preload für sie. Im Rahmen dieser Arbeit werden sechs verschiedene Vorbelastungen betrachtet: 200 N, 400 N, 600 N, 800 N, 1000 N und 2000 N.

Die Rotation der kranialen Spannplatte infolge von Flexionsmomenten wird durch etwaige Vorbelastungen gesteigert (Abb. 5.19). Dies ist in der Vergrößerung des auf das Bewegungssegment wirkenden Momentes durch die Verschiebung der Kompressionskraft in ventraler Richtung begründet. Bis zu einer Preload von 1000 N nimmt die Rotation im gesamten Momentenbereich mit einer größer werdenden Preload kontinuierlich zu. Für eine Preload von 2000 N ergibt sich im unteren Momentenbereich ein gegensätzliches Verhalten, da bei einer reinen Kompressionskraft von 2000 N bereits ein Kontakt der Gelenkflächen im Wirbelgelenk eintritt. In diesem Fall stellen sich die vergrößerten Rotationen erst nach einer Lösung des Kontaktes ein.

Über den Einfluß einer Vorbelastung auf die Rotationen infolge von Extensionsmomenten läßt sich keine eindeutige Aussage machen. Bis zu einem Extensionsmoment von 400 Ncm ergaben sich für alle untersuchten Vorbelastungen kleinere Rotationen als in dem Fall der reinen Momentenbelastung. In dem Bereich höherer Extensionsmomente wurden für Vorbelastungen bis 400 N gesteigerte Rotationen und für größere Vorbelastungen geringfügigere Rotationen berechnet.

Für eine Preload von 200 N bzw. 1000 N ergeben sich im Rahmen einer Berechnung mit 10 Lastinkrementen die in Abb. 5.20 dargestellten Rotationen. Für den Verlauf der Kurven in den Bereichen, in denen der Kontaktfall erstmalig eintritt, gelten die in Abschnitt 5.3 gemachten Bemerkungen. Zur Überprüfung der berechneten Ergebnisse wurde exemplarisch für eine Preload von 1000 N eine weitere Berechnung mit einer zehnfachen Inkrementzahl durchgeführt (Abb. 5.21). Es zeigt sich, daß die größere Inkrementierung nur in den Bereichen, in denen erstmalig ein Kontakt

festgestellt wird, zu ungenauen Ergebnissen führt. Ein negativer Einfluß auf die Genauigkeit der weiteren Berechnung ist jedoch nicht gegeben.

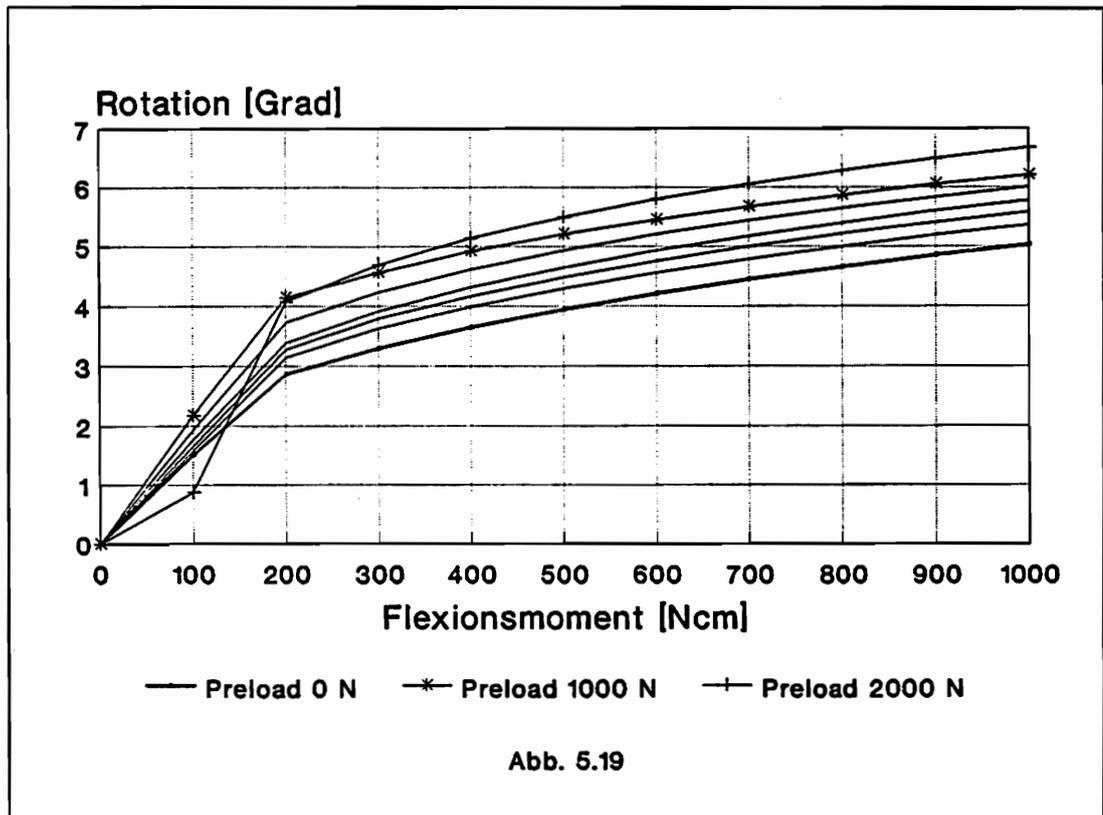
Der Einfluß der verschiedenen Vorbelastungen auf das Bewegungs- und Tragverhalten des Segmentes wird im folgenden für ein konstantes Flexions- bzw. Extensionsmoment von 1000 Ncm untersucht. Der intradiskale Druck steigt in beiden Fällen linear mit der aufgebrachten Preload an (Abb. 5.22 und Abb. 5.23). Die berechneten Drücke entsprechen dabei im wesentlichen denjenigen, die sich für eine reine Kompressionsbelastung ergeben (Abb. 5.1). Die axiale Verschiebung der kranialen Spannplatte infolge einer reinen Kompressionsbelastung wird durch das aufgebrachte Flexionsmoment deutlich vergrößert (Abb. 5.22) und durch das Extensionsmoment geringfügig reduziert (Abb. 5.23).

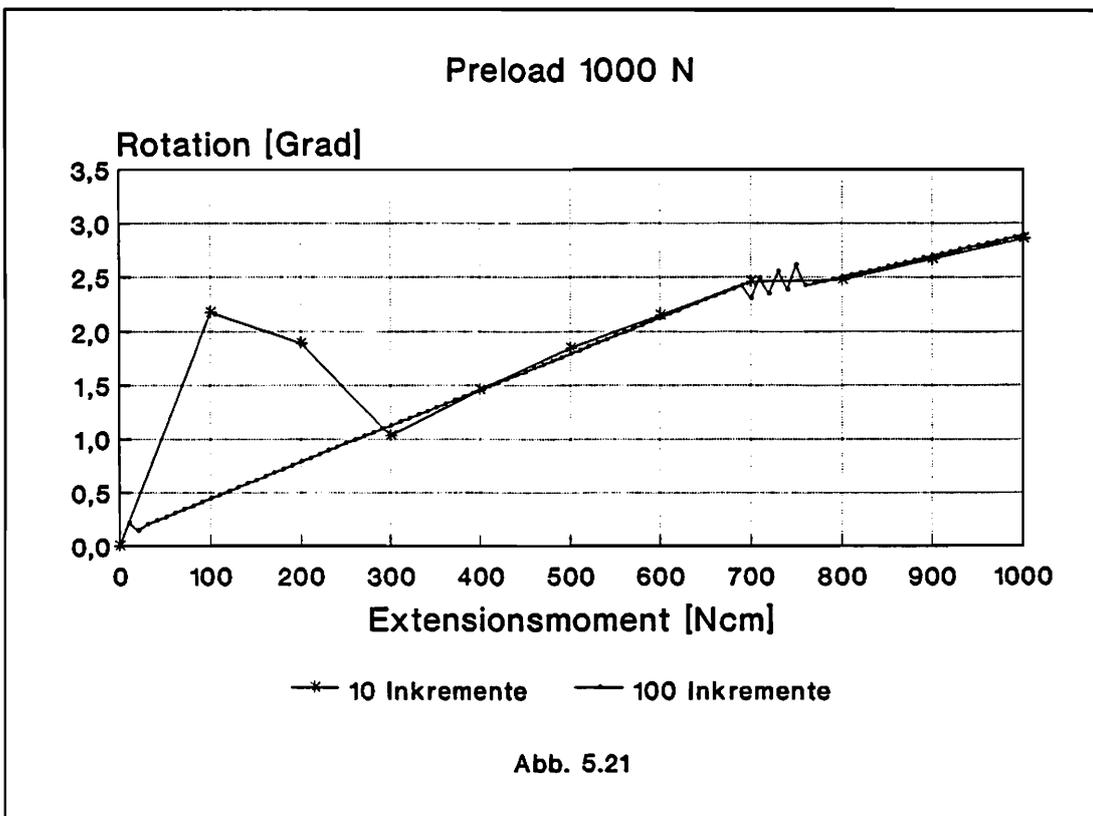
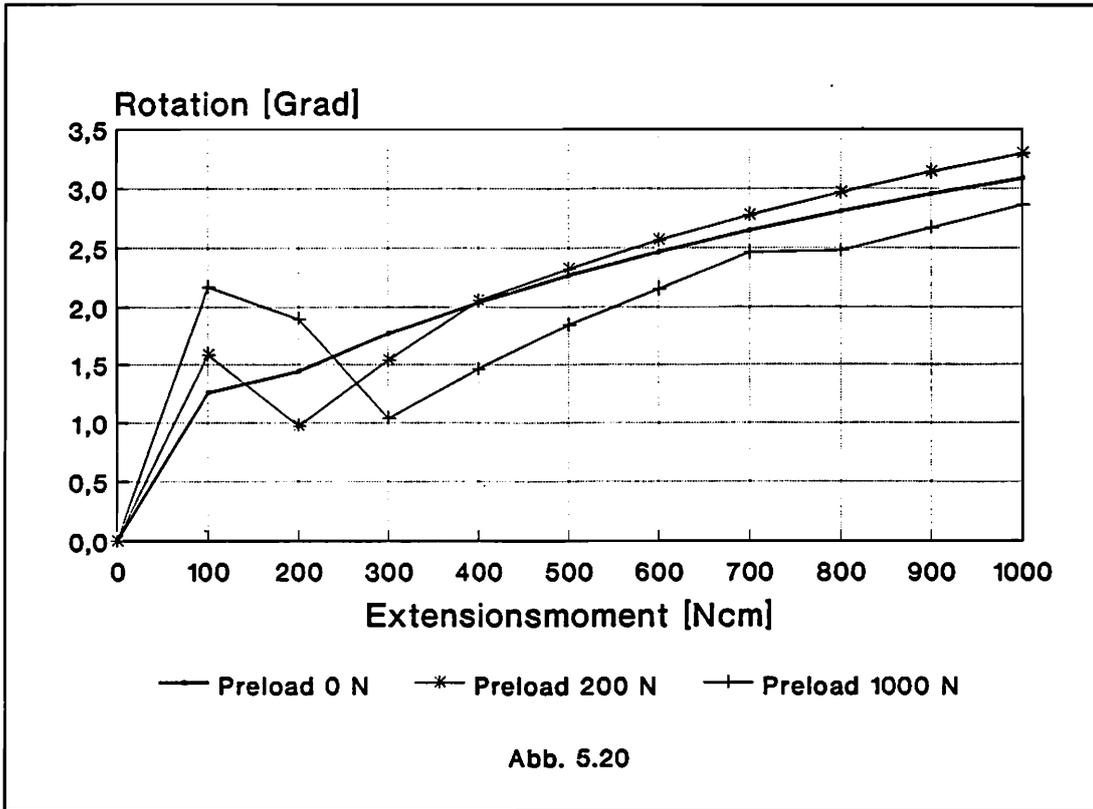
Die Vorwölbungen des Anulus fibrosus, die sich auf Grund einer reinen Momentenbelastung einstellen, werden durch Vorbelastungen vergrößert (Abb. 5.24 und Abb. 5.25). Im Falle einer reinen Kompressionsbelastung ergibt sich die maximale Vorwölbung im posterioren Bereich des Anulus (Abb. 5.2). Diese wird unter der Einwirkung des Flexionsmomentes erheblich verringert (Abb. 5.24) und durch das Extensionsmoment unwesentlich größer (Abb. 5.25).

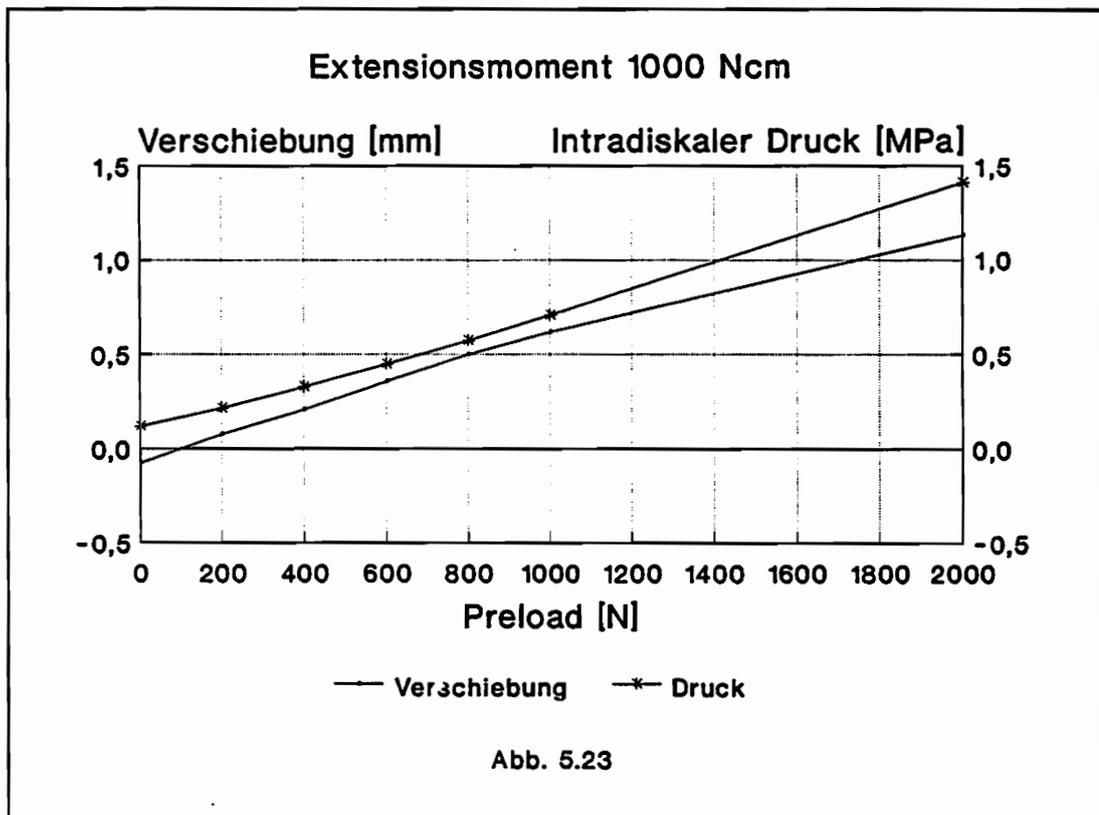
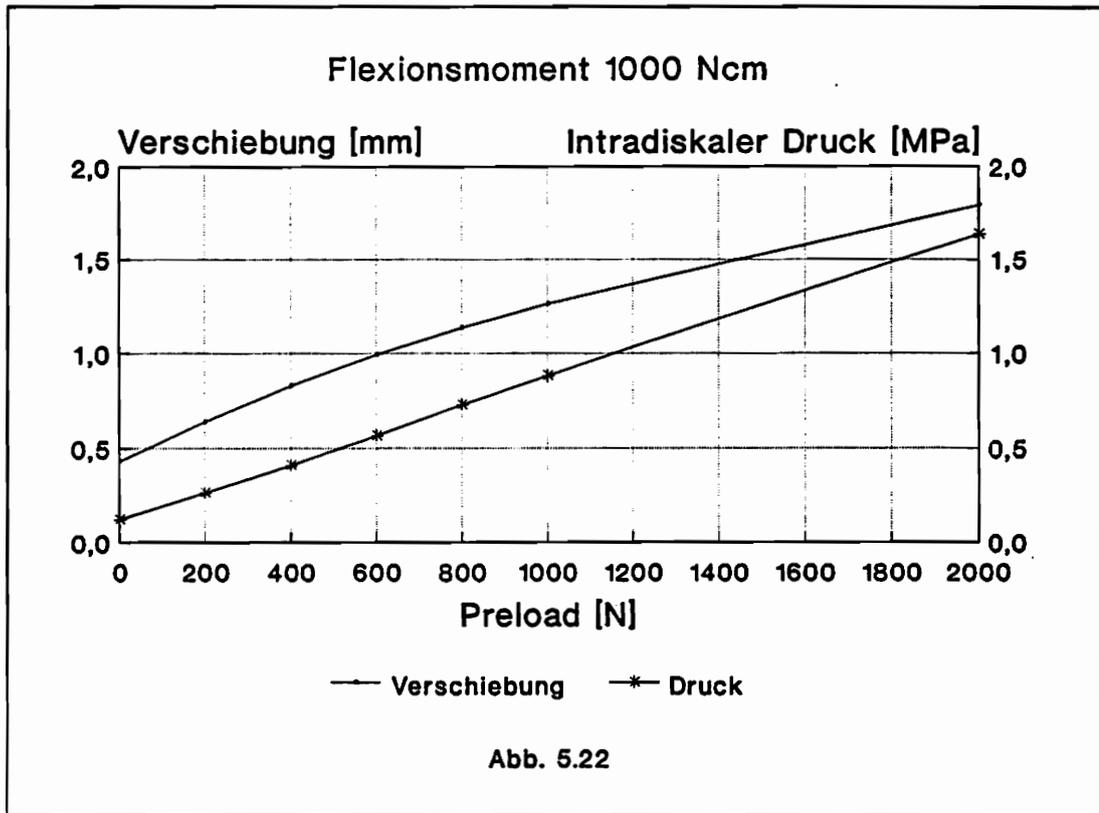
Bei der Betrachtung der Dehnungen des Anulus fibrosus zeigt sich kein einheitliches Verhalten (Abb. 5.26 bis Abb. 5.29). Besondere Beachtung ist dem Dehnungsverhalten im posterioren Bereich des Anulus zu schenken. Im Vergleich zu einer reinen Kompressionsbelastung führt das zusätzlich aufgebrachte Flexionsmoment dort zu erheblich gesteigerten Dehnungen an der Innenseite des Anulus (Abb. 5.27). Für eine Preload von 1000 N ergibt sich beispielsweise eine um 84% größere Dehnung. Die in Abschnitt 5.3 gemachten Bemerkungen über die klinische Relevanz einer solchen Beanspruchung des Anulus gelten hier im besonderen.

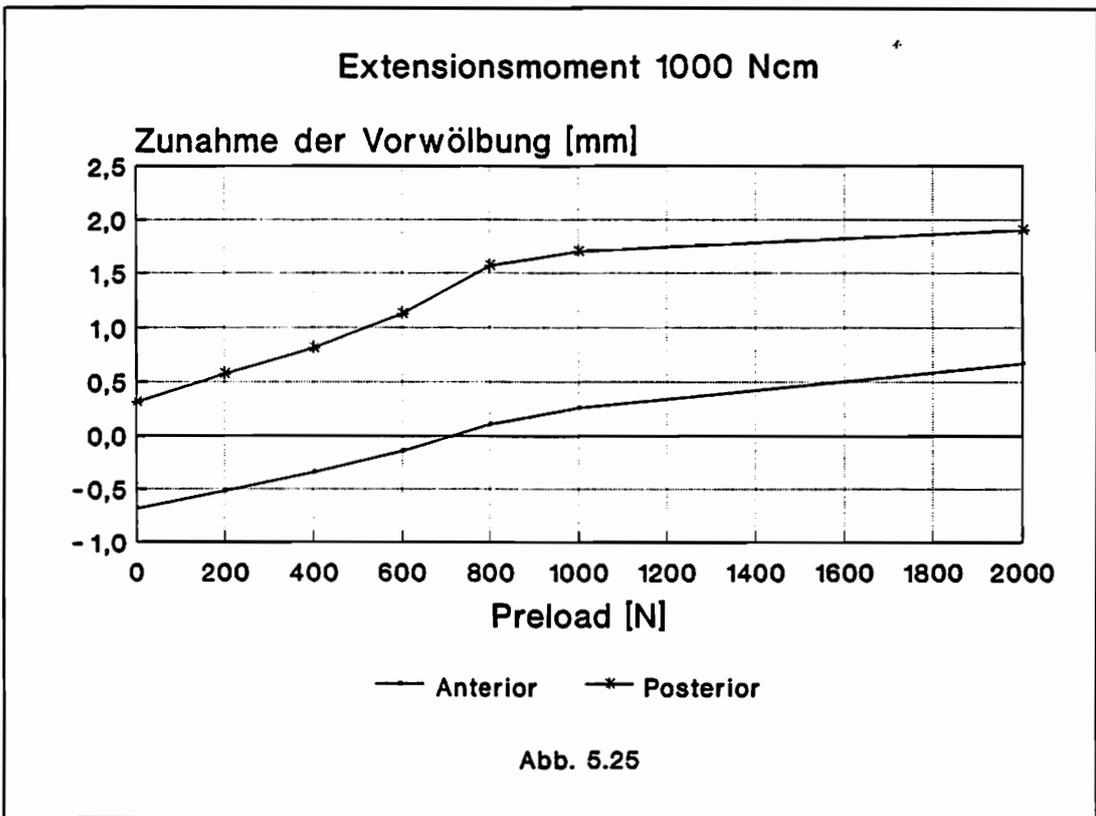
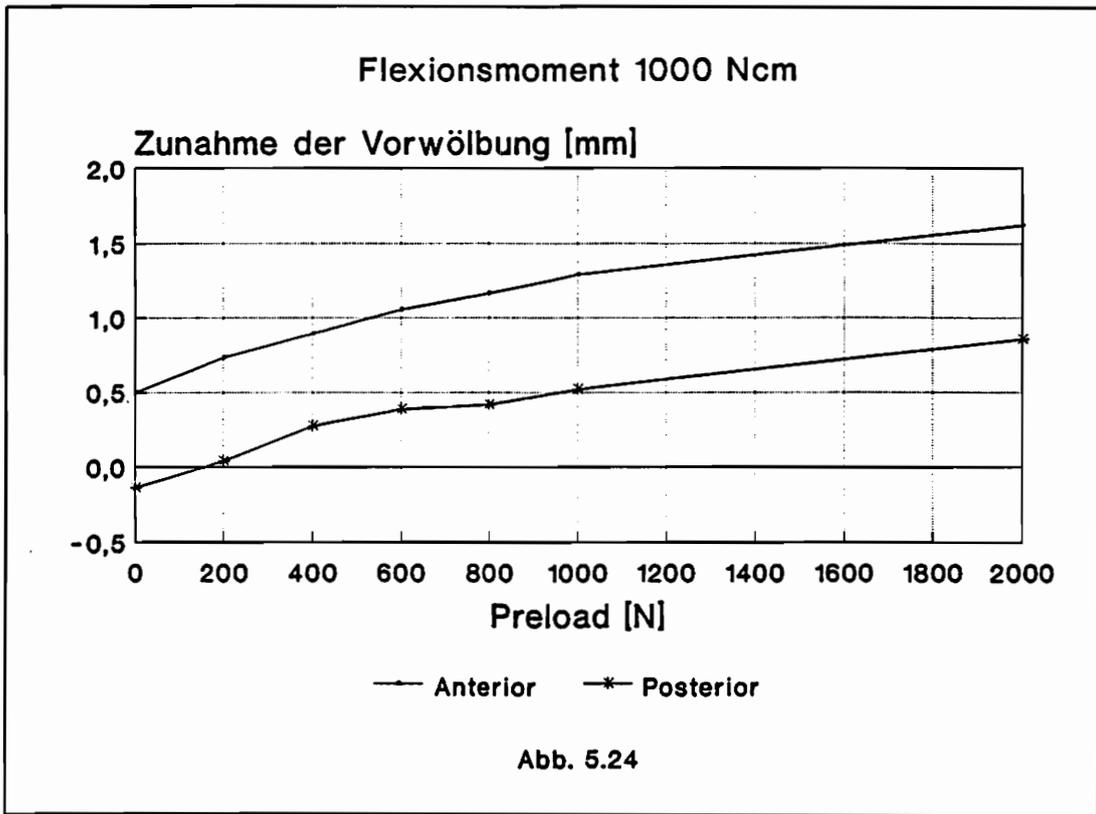
Die Vorbelastung des Bewegungssegmentes führt für einige Ligamente zu deutlich veränderten Ligamentkräften (Abb. 5.30 bis Abb. 5.33). Im besonderen gilt dies für das Ligamentum longitudinale anterius (AL), für das unter der alleinigen Wirkung von Extensionsmomenten sehr hohe Kräfte berechnet wurden (Abb. 5.15). Diese reduzieren sich jedoch bereits durch

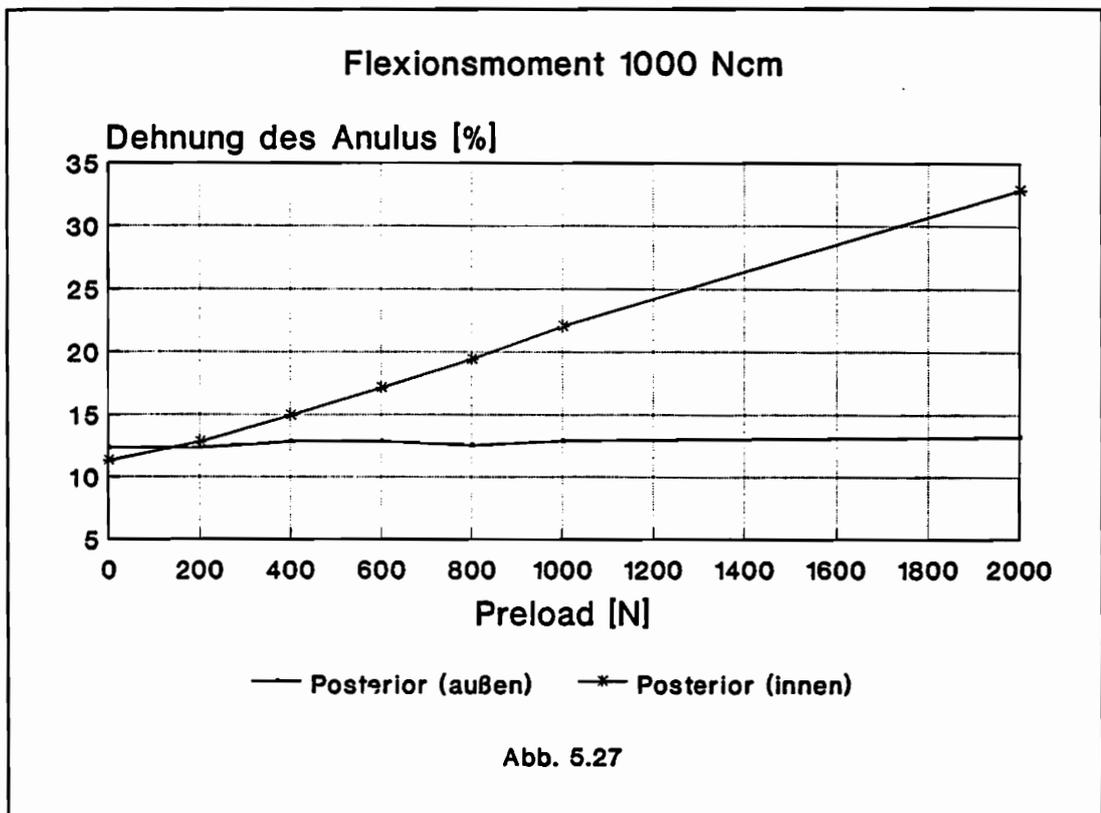
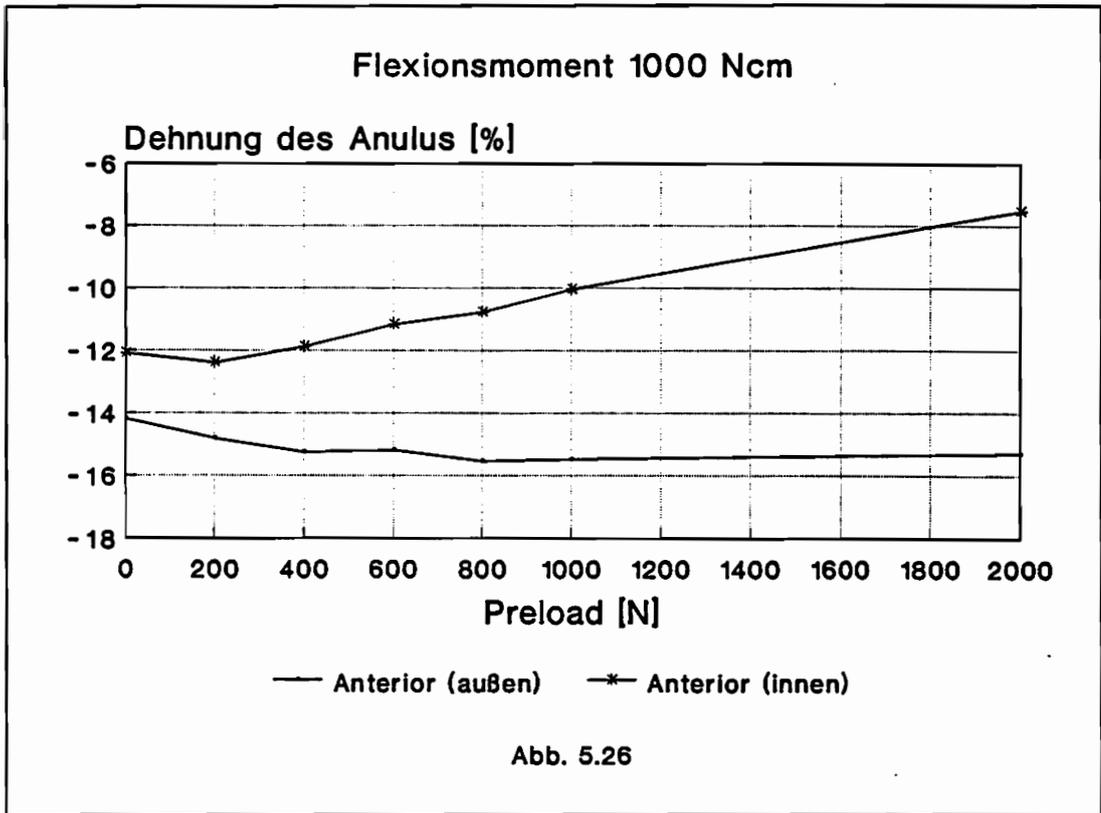
geringe Vorbelastungen erheblich (Abb. 5.32). Für eine Preload von 1000 N ergibt sich beispielsweise eine um 80% geringere Ligamentkraft. Im Gegensatz dazu erhöht sich die aus dem Flexionsmoment resultierende Kraft im Ligamentum supraspinale (SS) durch die Vorbelastung deutlich (Abb. 5.30). Im Falle einer Preload von 1000 N berechnet sich zum Beispiel eine um 45% größere Kraft.

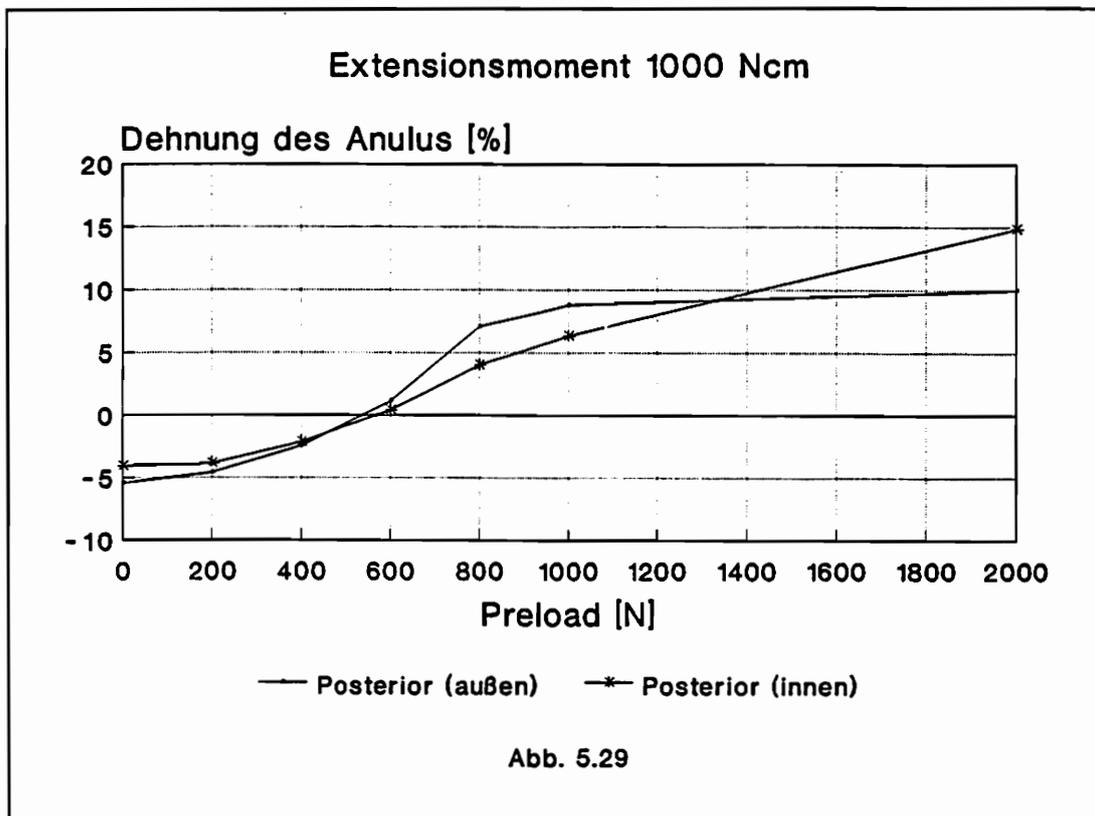
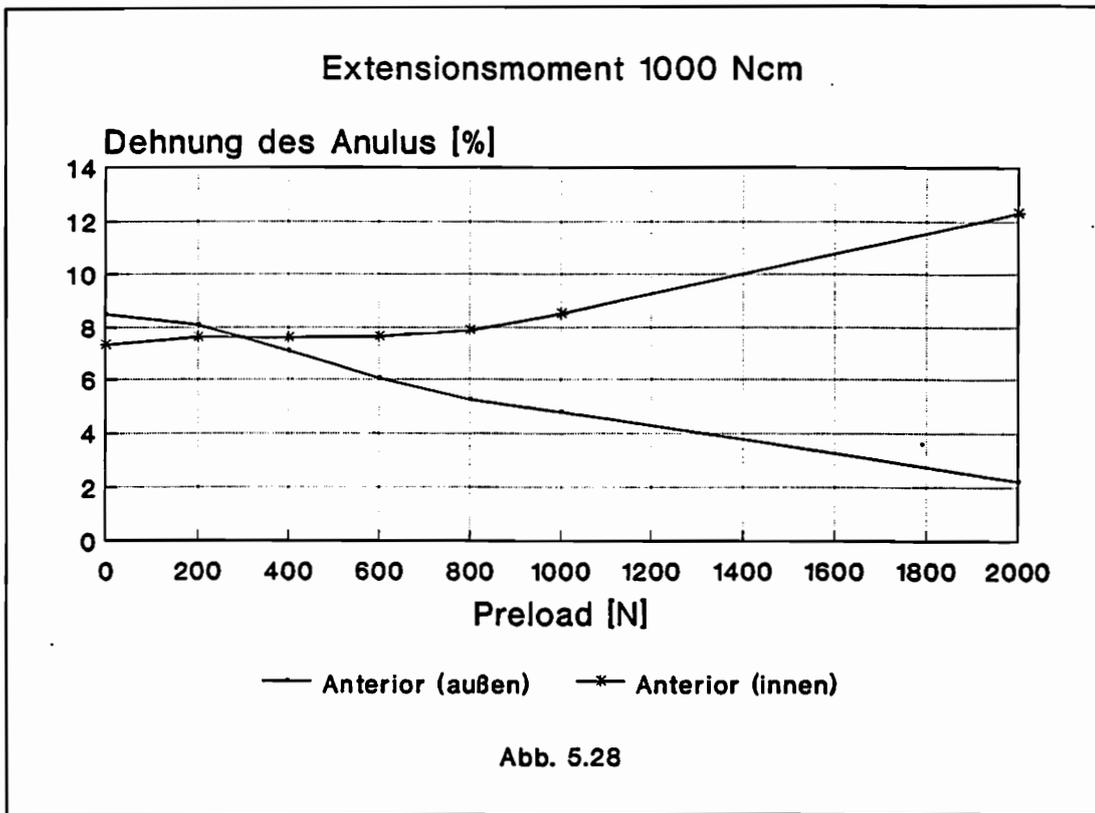


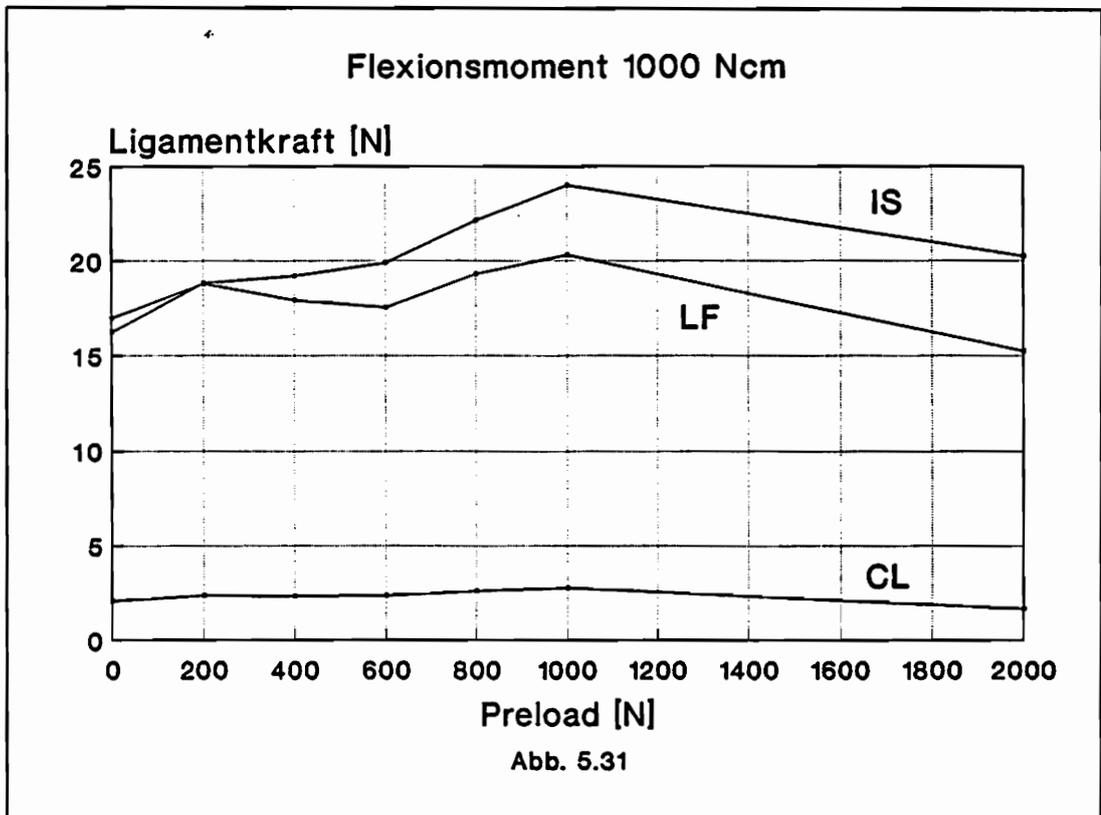
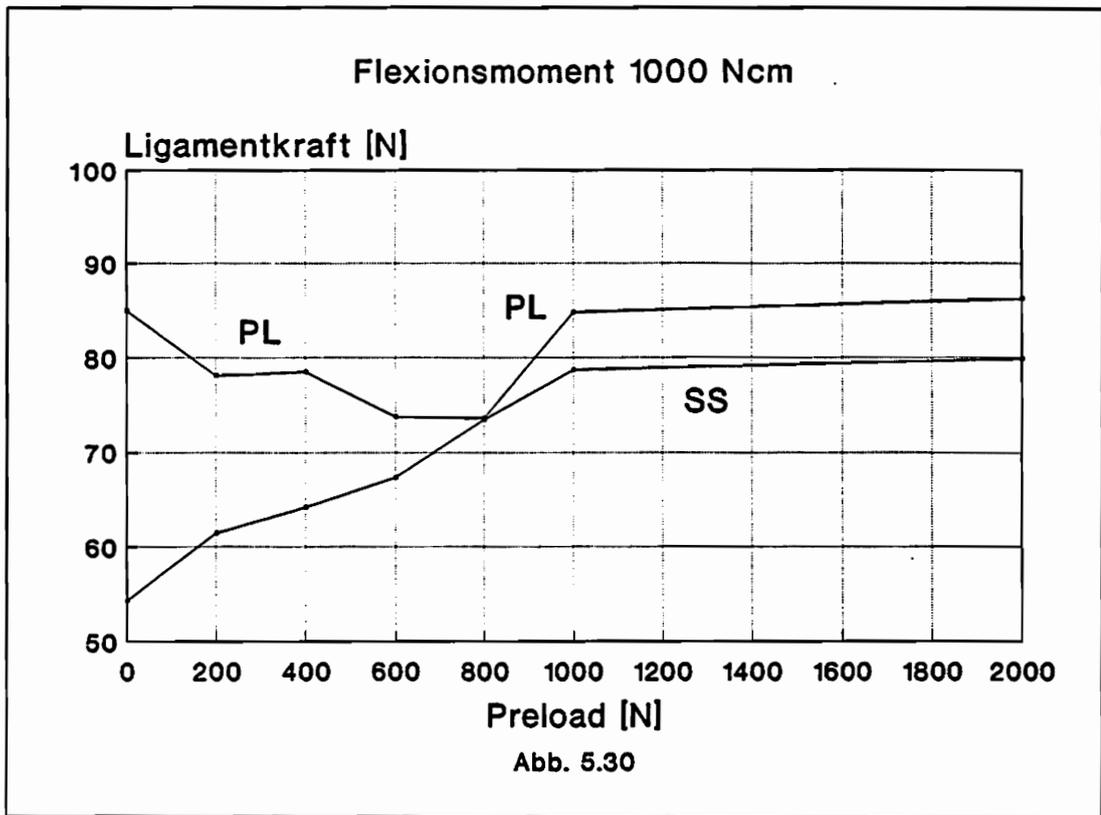


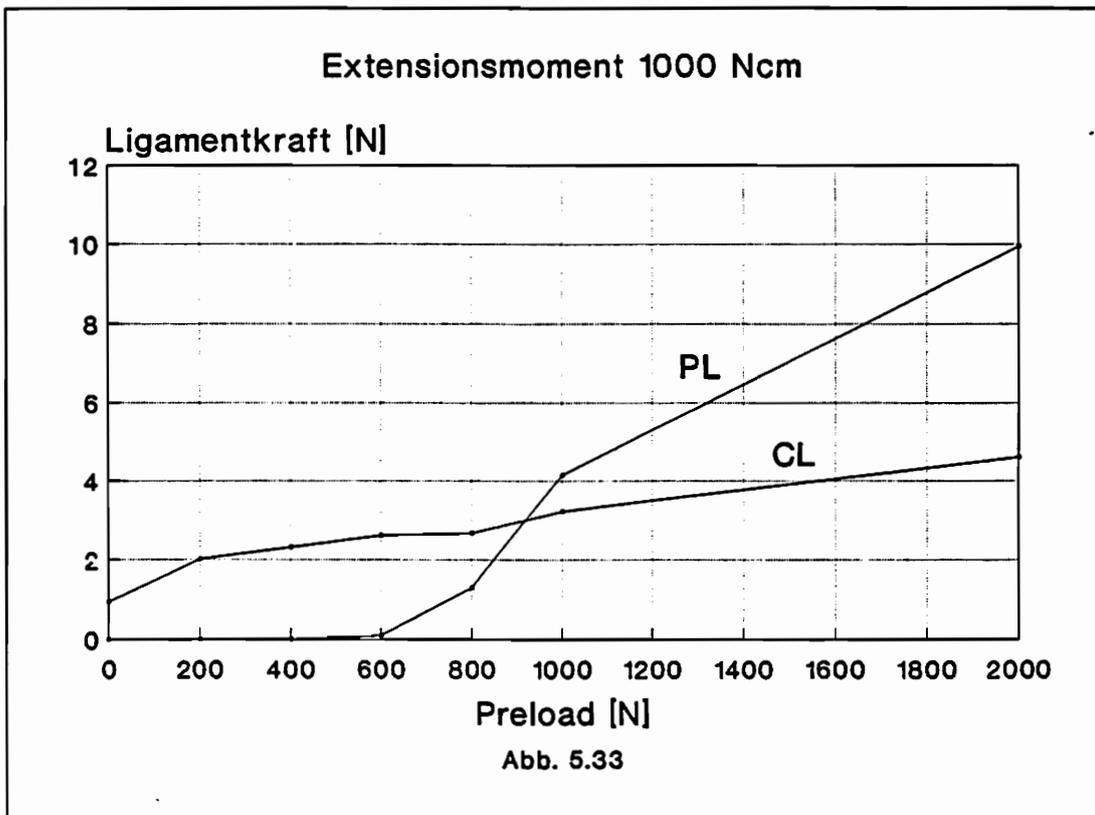
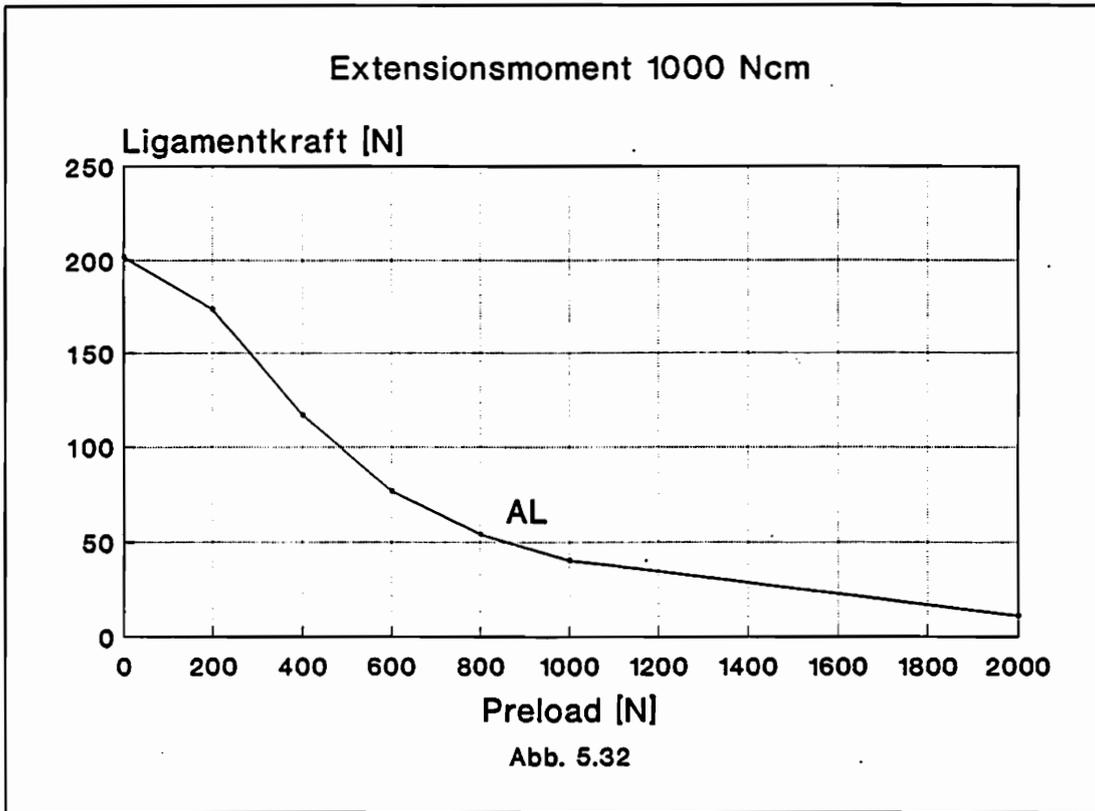












5.5 Kompression und Volumenveränderung

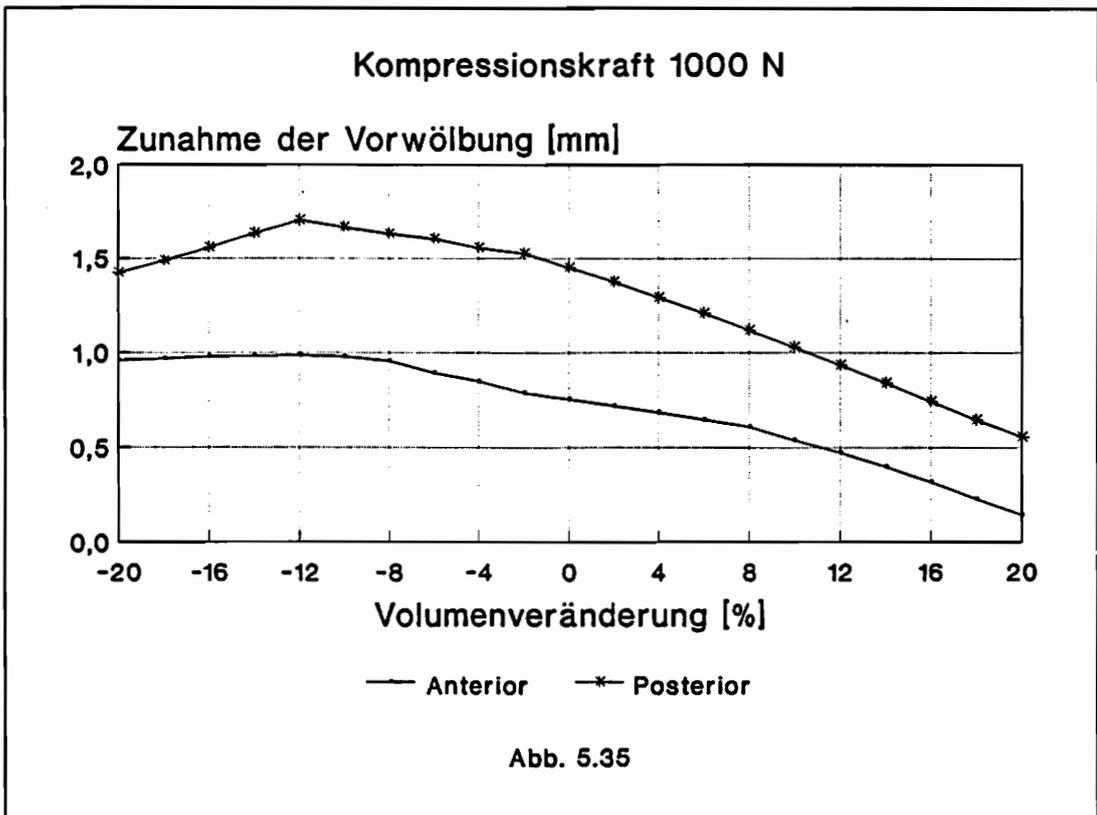
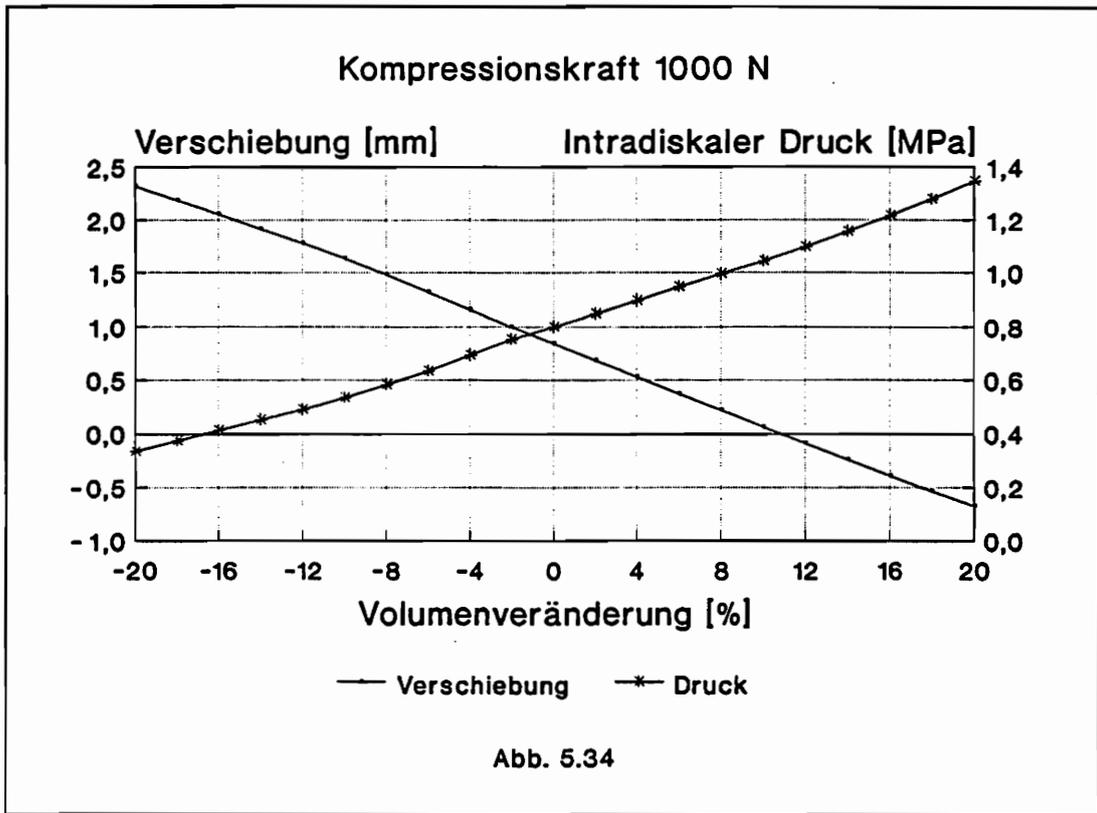
In den folgenden Abschnitten wird der Einfluß einer Veränderung des Volumens des Nucleus pulposus auf das Bewegungs- und Tragverhalten des Segmentes untersucht. Eine Reduktion des Volumens ergibt sich beispielsweise auf Grund osmotischer Vorgänge (Abschnitt 3.2) und klinischer Eingriffe (Abschnitt 3.3). Im Rahmen dieser Arbeit werden Veränderungen des Volumens bis zu 20% betrachtet.

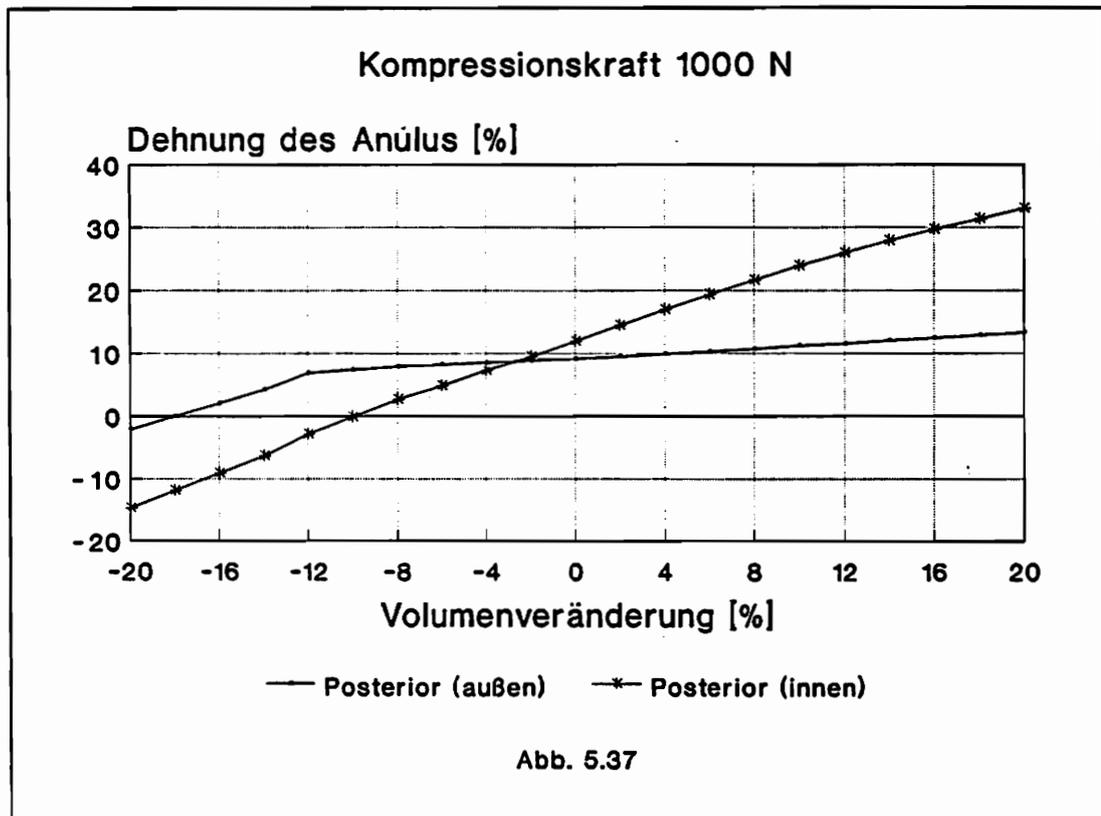
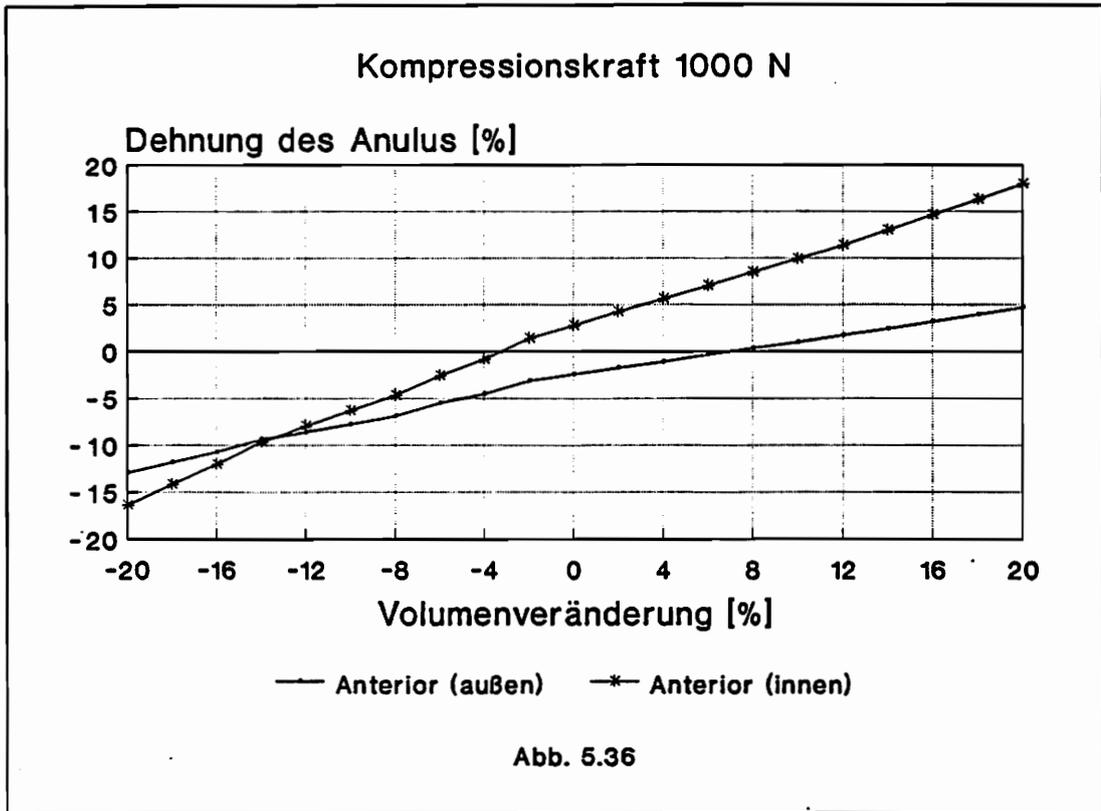
Der intradiskale Druck und die axiale Verschiebung der kranialen Spannplatte ändern sich nahezu linear mit der Volumenveränderung (Abb. 5.34). Eine Reduktion des Volumens führt erwartungsgemäß zu einem geringeren intradiskalen Druck und einer gesteigerten axialen Verschiebung, was durch experimentelle Studien bestätigt wird [13].

Die Vorwölbung des Anulus fibrosus wird sowohl anterior als auch posterior durch eine Erhöhung des Volumens des Nucleus pulposus verringert (Abb. 5.35). Die Reduktion des Volumens führt zunächst sowohl im anterioren als auch im posterioren Bereich des Anulus zu einer Vergrößerung der Vorwölbung. Anschließend bleibt diese Vorwölbung im anterioren Bereich praktisch unverändert und nimmt im posterioren Bereich sogar wieder ab. BRINCKMANN und GROOTENBOER [13] haben die Auswirkung einer Diskektomie auf die Vorwölbung des Anulus fibrosus experimentell an 19 Wirbelsäulenpräparaten untersucht. Infolge der Reduktion des Volumens des Nucleus ergab sich für 6 von insgesamt 7 betrachteten Bewegungssegmenten L4-L5 qualitativ das oben beschriebene Verhalten.

Die Dehnungen des Anulus fibrosus nehmen auf Grund einer Reduktion des Volumens des Nucleus ab (Abb. 5.36 und Abb. 5.37). Entsprechend führt eine Erhöhung des Volumens zu gesteigerten Dehnungen.

Zusammenfassend ergibt sich infolge einer Reduktion des Volumens des Nucleus pulposus für den Fall reiner Kompressionsbelastungen eine deutlich erhöhte Mobilität des Bewegungssegmentes in axialer Richtung, die jedoch keinen negativen Einfluß auf die Vorwölbung und die Dehnung des Anulus fibrosus hat.





5.6 Flexion und Extension mit Preload und Volumenveränderung

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Belastung des Bewegungssegmentes durch ein Flexions- bzw. Extensionsmoment in Höhe von 1000 Ncm bei gleichzeitiger Wirkung einer Preload von 1000 N. Untersucht wird der Einfluß einer Veränderung des Volumens des Nucleus pulposus auf das Bewegungs- und Tragverhalten des Segmentes.

Die Rotation der kranialen Spannplatte infolge des Flexionsmomentes vergrößert sich auf Grund einer fortschreitenden Reduktion des Volumens des Nucleus kontinuierlich (Abb. 5.38). Diese gesteigerte Mobilität stellt sich jedoch im Falle der Einwirkung des Extensionsmomentes nicht ein (Abb. 5.39). Statt dessen ergibt sich ein gegensätzliches Verhalten, das maßgeblich durch den Kontakt der Gelenkflächen geprägt wird.

Der intradiskale Druck und die Verschiebung der kranialen Spannplatte in axialer Richtung zeigen die gleiche Abhängigkeit von dem Volumen des Nucleus wie in dem Fall der reinen Kompressionsbelastung (Abb. 5.40 und 5.41). Eine Reduktion des Volumens führt unabhängig von der Art des aufgetragenen Momentes zu einem geringeren intradiskalen Druck und einer gesteigerten axialen Verschiebung. Diese wird im Vergleich zu einer reinen Kompressionsbelastung durch das Flexionsmoment wesentlich vergrößert und durch das Extensionsmoment geringfügig reduziert.

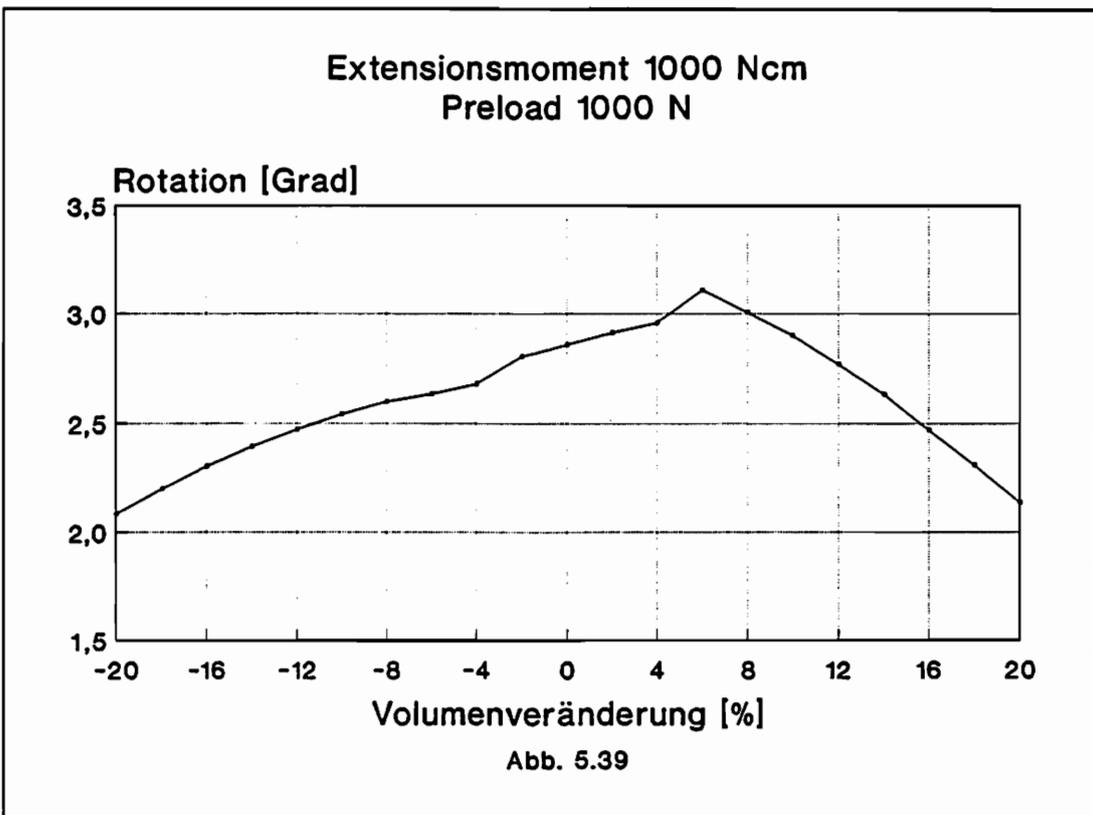
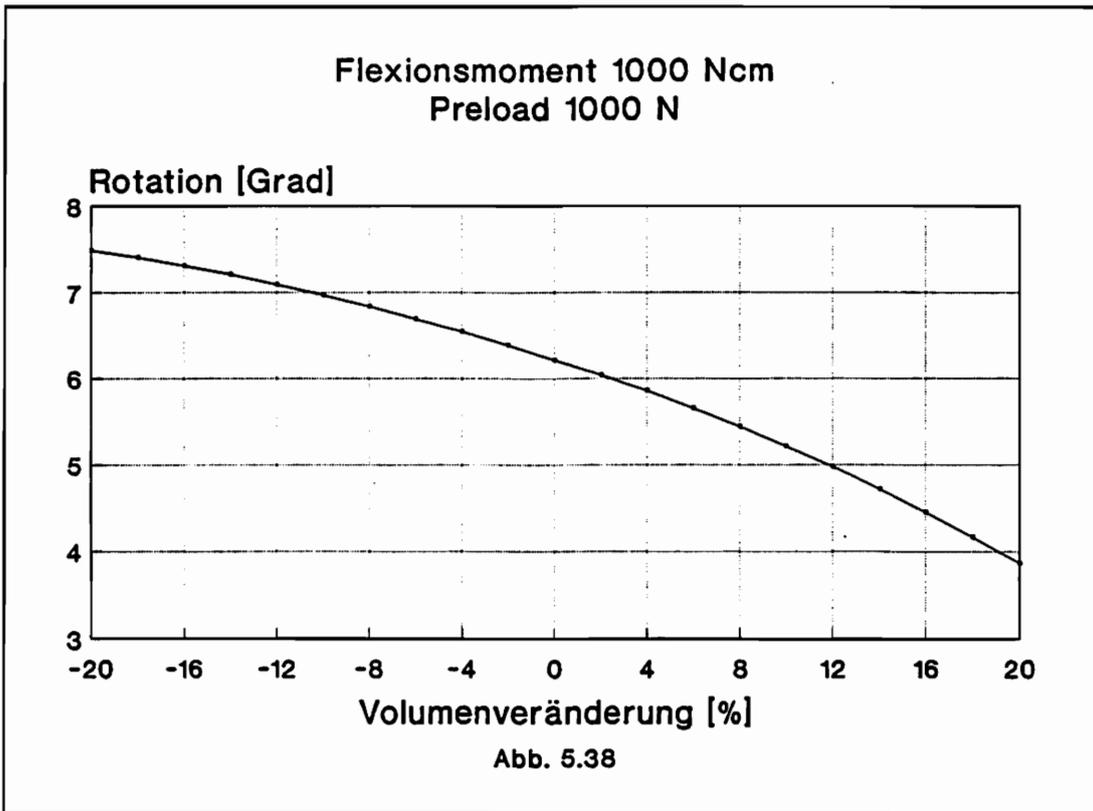
Im Falle einer alleinigen Wirkung der Kompressionskraft ergibt sich die maximale Vorwölbung im posterioren Bereich des Anulus fibrosus (Abb. 5.35). Diese reduziert sich unter der Einwirkung des Flexionsmomentes deutlich, wobei die Differenz für große Reduktionen des Volumens kleiner wird (Abb. 5.42). Infolge des Extensionsmomentes tritt dahingegen keine wesentliche Veränderung der Vorwölbung ein (Abb. 5.43).

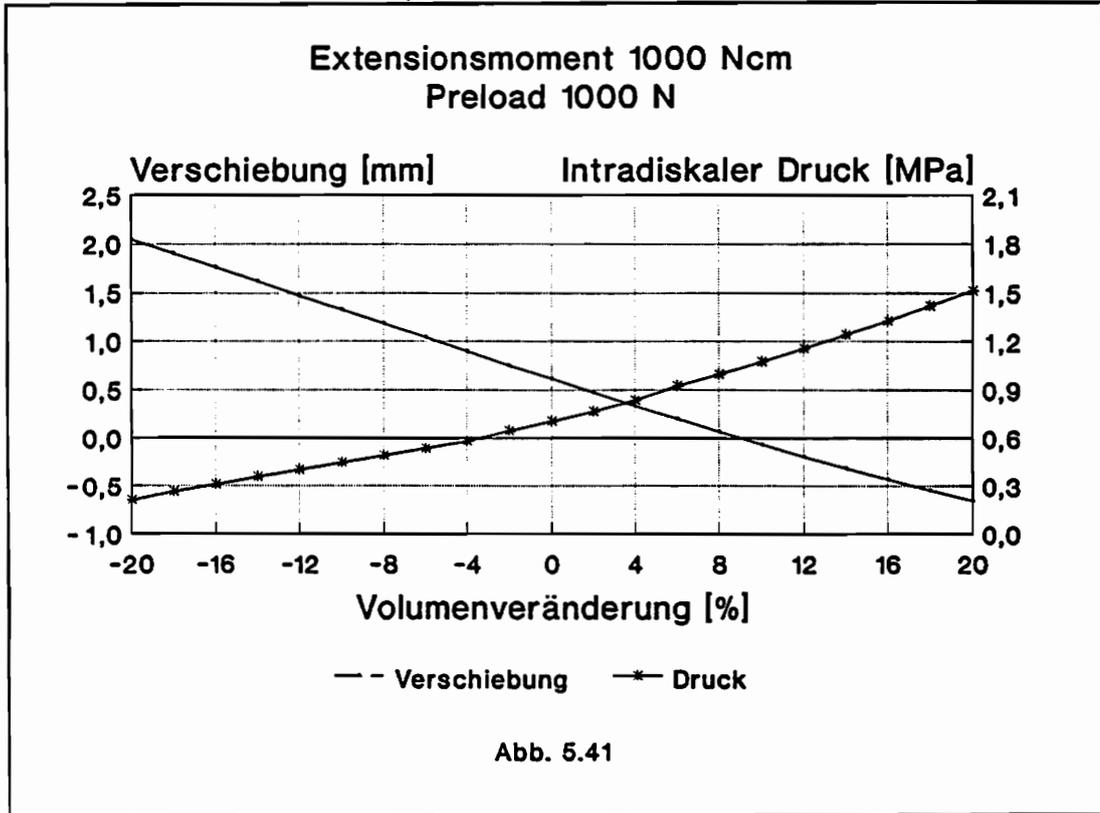
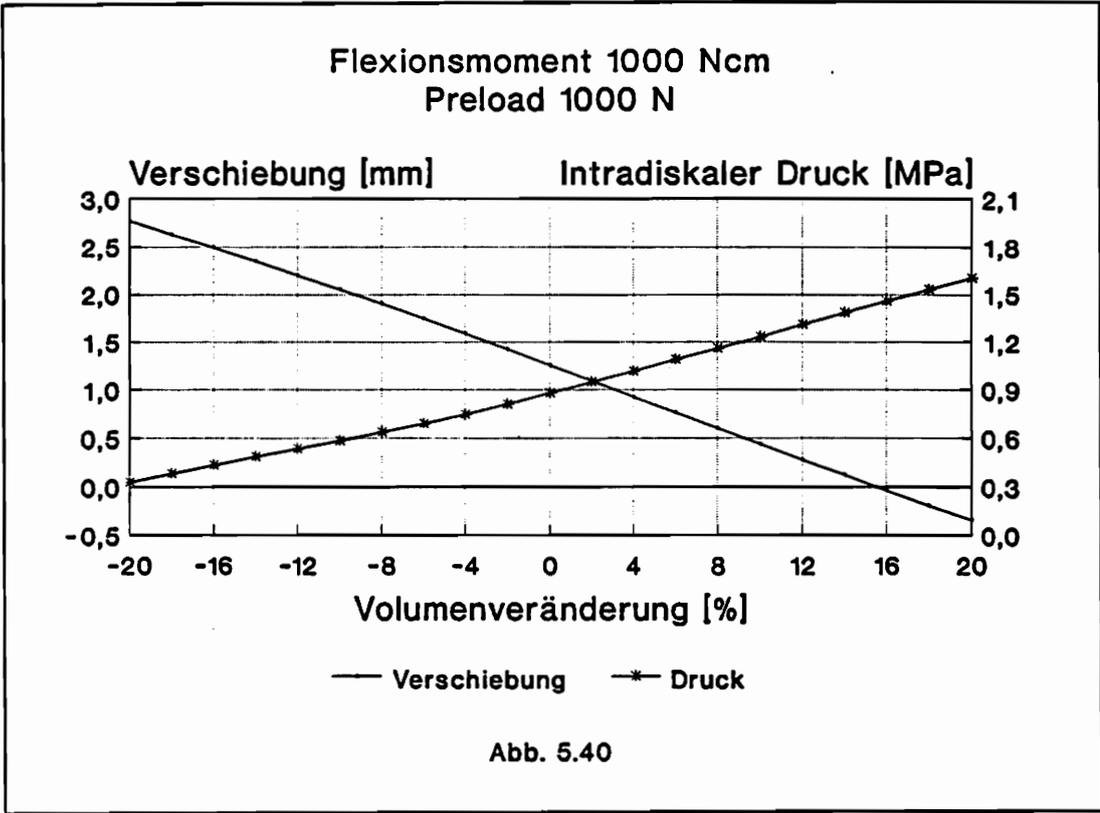
Die Dehnungen des Anulus fibrosus sind nahezu linear von dem Volumen des Nucleus pulposus abhängig, wobei eine Reduktion des Volumens zu verringerten Dehnungen führt (Abb. 5.44 bis Abb. 5.47). Die in Abschnitt 5.4 bereits näher betrachtete Dehnung der Innenseite des Anulus in seinem posterioren Bereich wird beispielsweise durch eine zehnpromzentige Reduktion des Volumens um 38% verkleinert (Abb. 5.45).

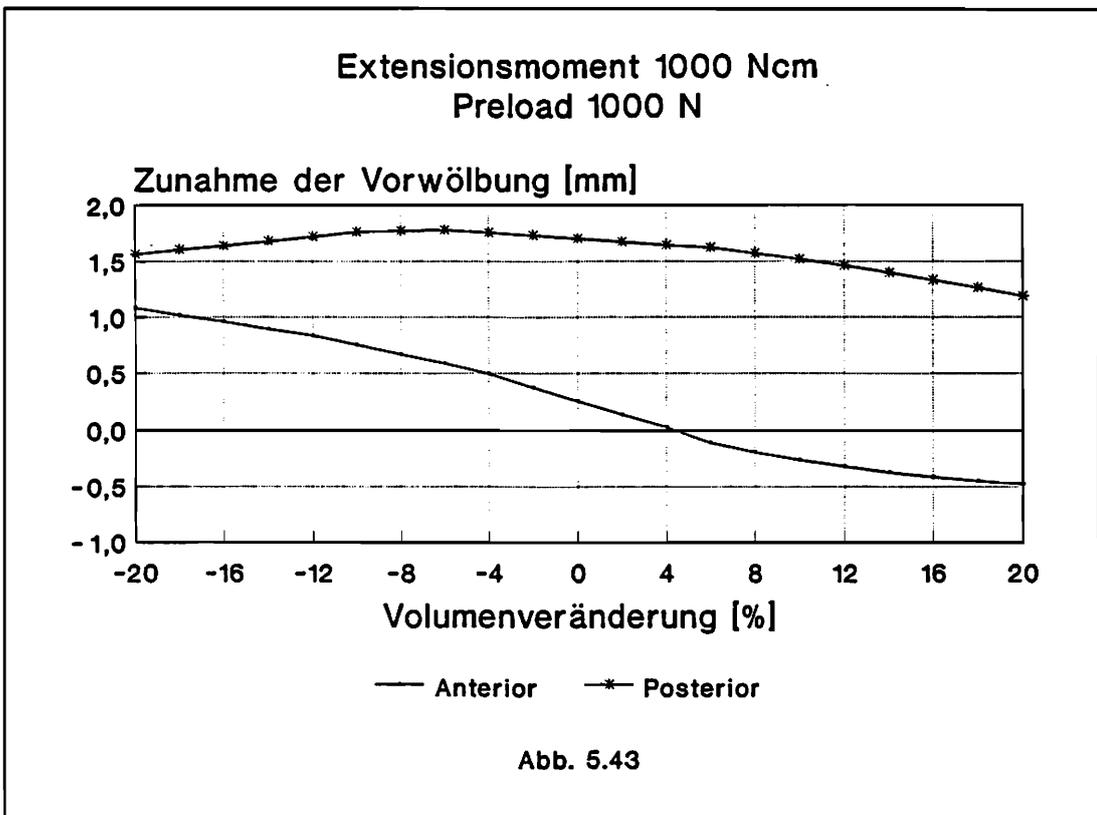
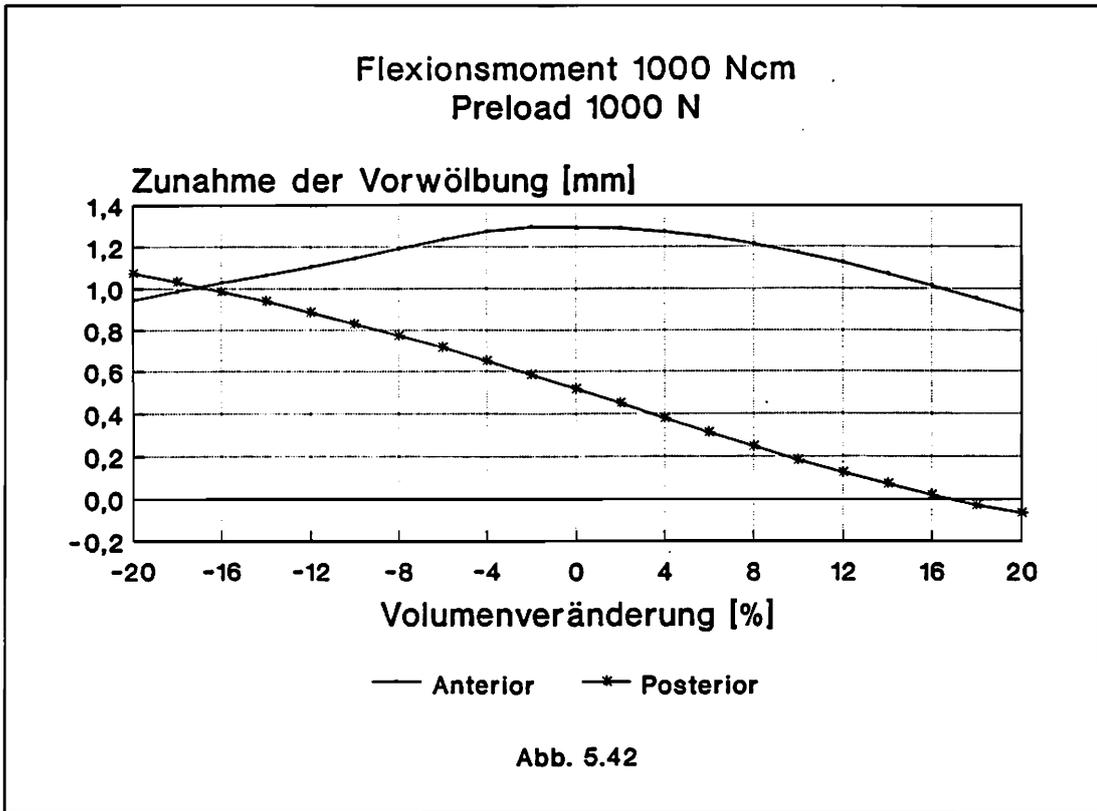
Die relevantesten Auswirkungen auf das Tragverhalten des Bewegungssegmentes infolge von Volumenveränderungen des Nucleus pulposus ergeben sich für die Kräfte in den Ligamenten (Abb. 5.48 bis Abb. 5.51). Aus einer Erhöhung des Volumens resultiert im Falle einer Flexionsbelastung eine starke Zunahme der Kraft im Ligamentum longitudinale posterius (PL) (Abb. 5.48). Entsprechendes gilt für das Ligamentum longitudinale anterius (AL) im Falle einer Extensionsbelastung (Abb. 5.50). Die berechneten maximalen Ligamentkräfte haben in beiden Fällen nur eine theoretische Bedeutung, da sie zu einem Versagen der Ligamente führen würden. NOLTE et al. [61] haben für das Ligamentum longitudinale anterius und das Ligamentum longitudinale posterius mittlere Reißlasten in Höhe von 514 N bzw. 259 N gemessen.

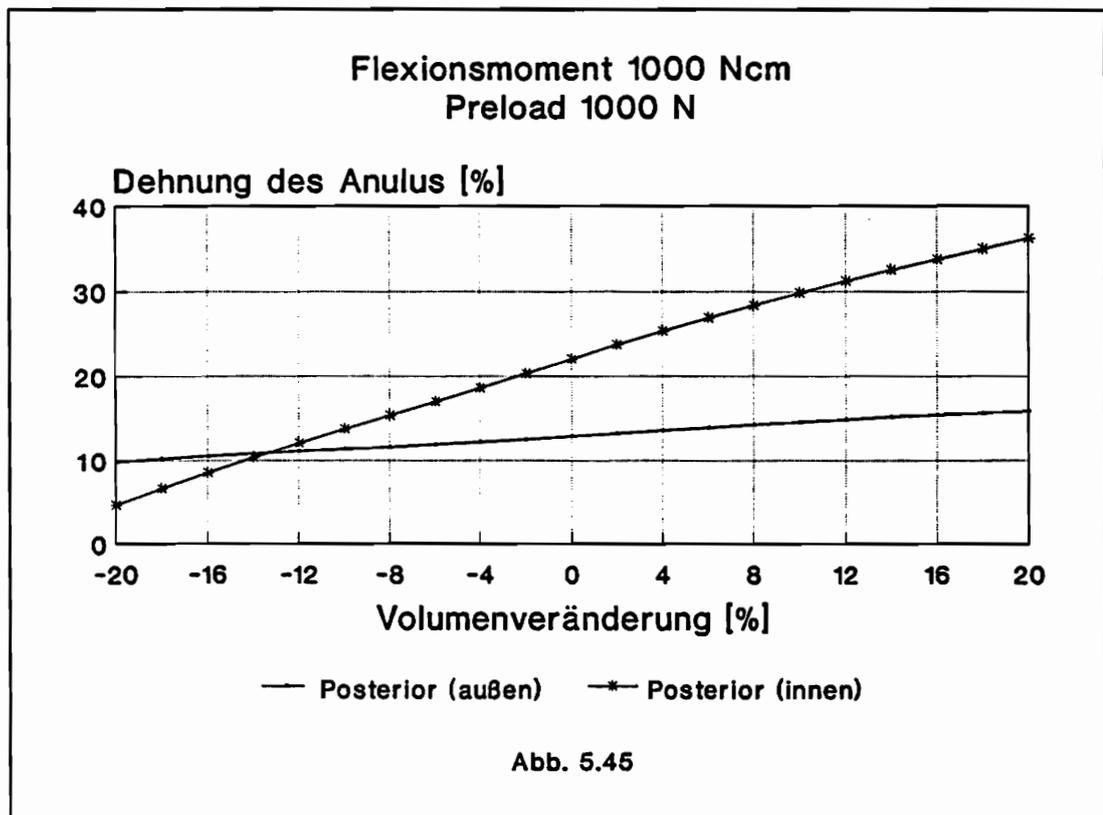
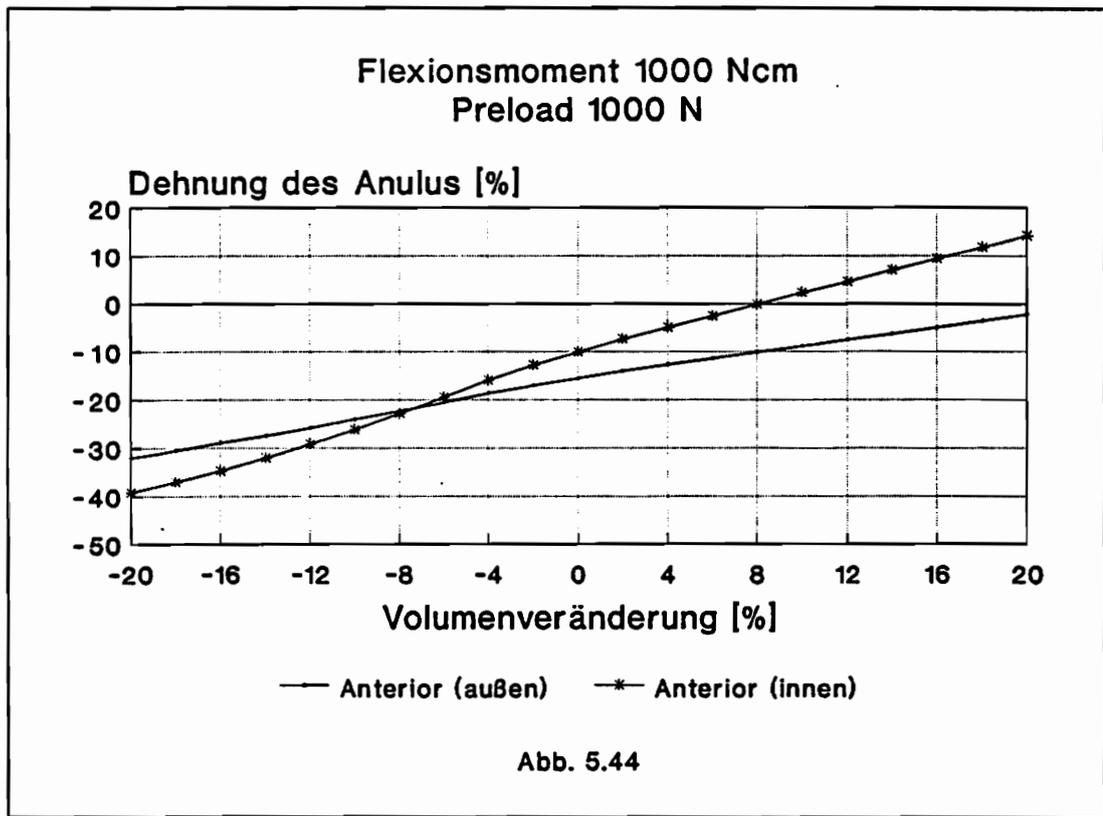
Aus einer Reduktion des Volumens des Nucleus pulposus resultiert im Falle einer Belastung durch das Extensionsmoment eine besonders große Zunahme der Kraft in den Ligamenta collateralia (CL) (Abb. 5.51). Bereits für eine zehnpromzentige Volumenverminderung ergibt sich eine um 346% vergrößerte Ligamentkraft. KRÄMER [40] beschreibt neben den primären diskogenen Schmerzen auch Beschwerden, die auf degenerative Veränderungen im Zwischenwirbelabschnitt zurückzuführen sind. Im besonderen handelt es sich dabei um Kapseldehnungsschmerzen, die infolge einer Höhenminderung der Zwischenwirbelscheibe bereits durch normale Bewegungsausschläge hervorgerufen werden. Die numerischen Ergebnisse zeigen somit eine Übereinstimmung mit den klinischen Erfahrungen.

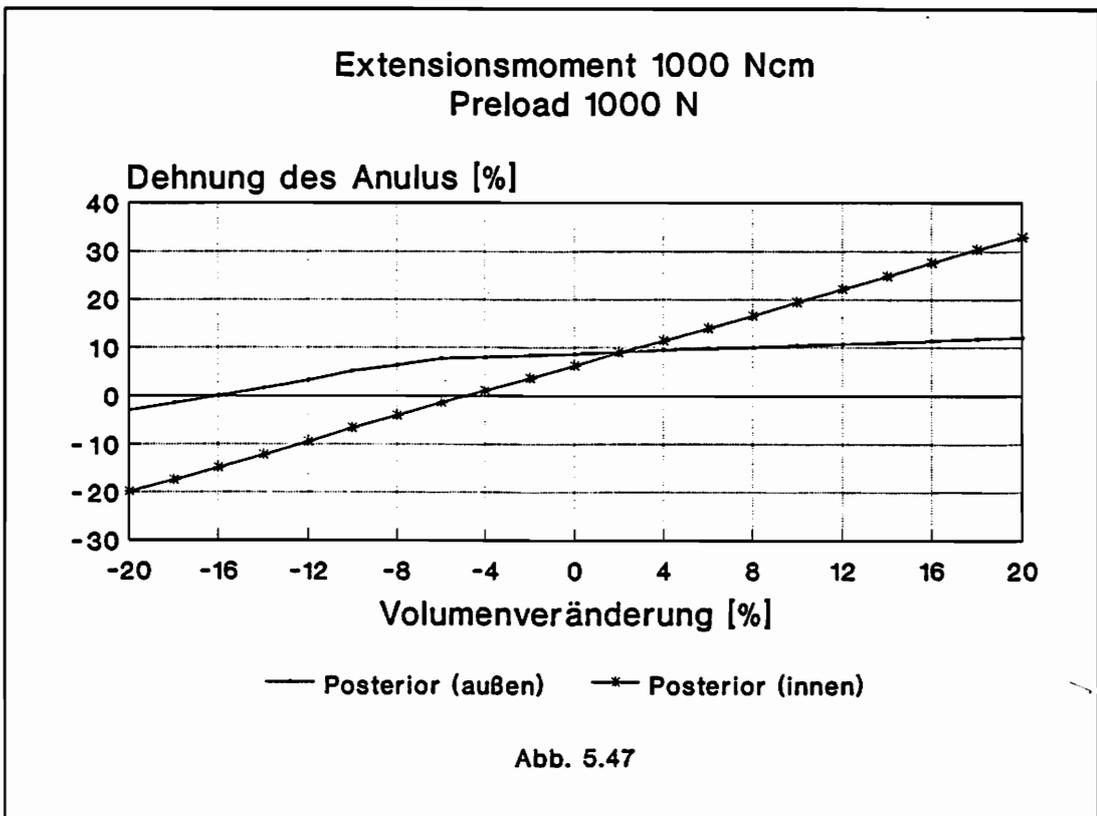
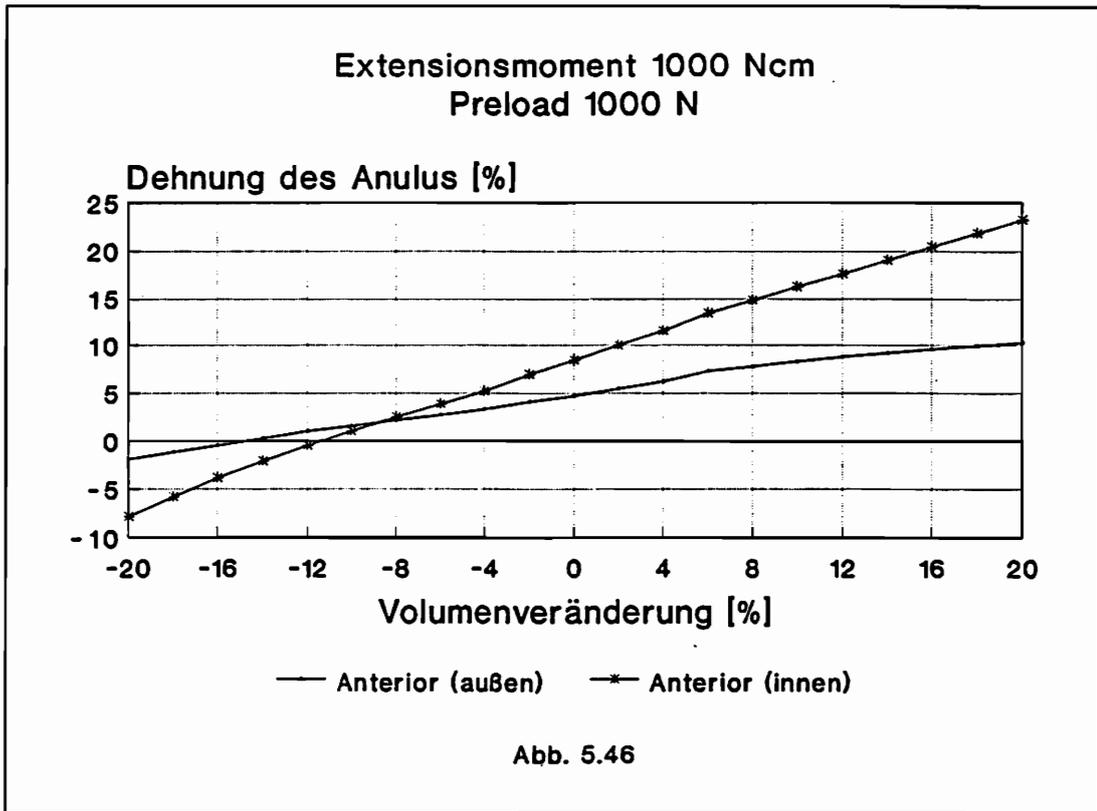
Für die untersuchten Belastungen ergibt sich infolge der Reduktion des Volumens des Nucleus pulposus eine erhöhte Mobilität des Bewegungssegmentes. Wie im Falle einer reinen Kompressionsbelastung hat diese jedoch keinen negativen Einfluß auf die Vorwölbung und die Dehnung des Anulus fibrosus. Statt dessen treten im Zusammenhang mit Extensionsbelastungen erheblich vergrößerte Kräfte in den Ligamenta collateralia auf, die Wirbelgelenksschmerzen hervorrufen können. Weiterhin kann davon ausgegangen werden, daß eine unphysiologische Höhenminderung der Zwischenwirbelscheibe und die daraus folgende abnorme Stellung der Wirbelgelenksflächen die Ursache für Wirbelgelenksarthrosen ist [40].

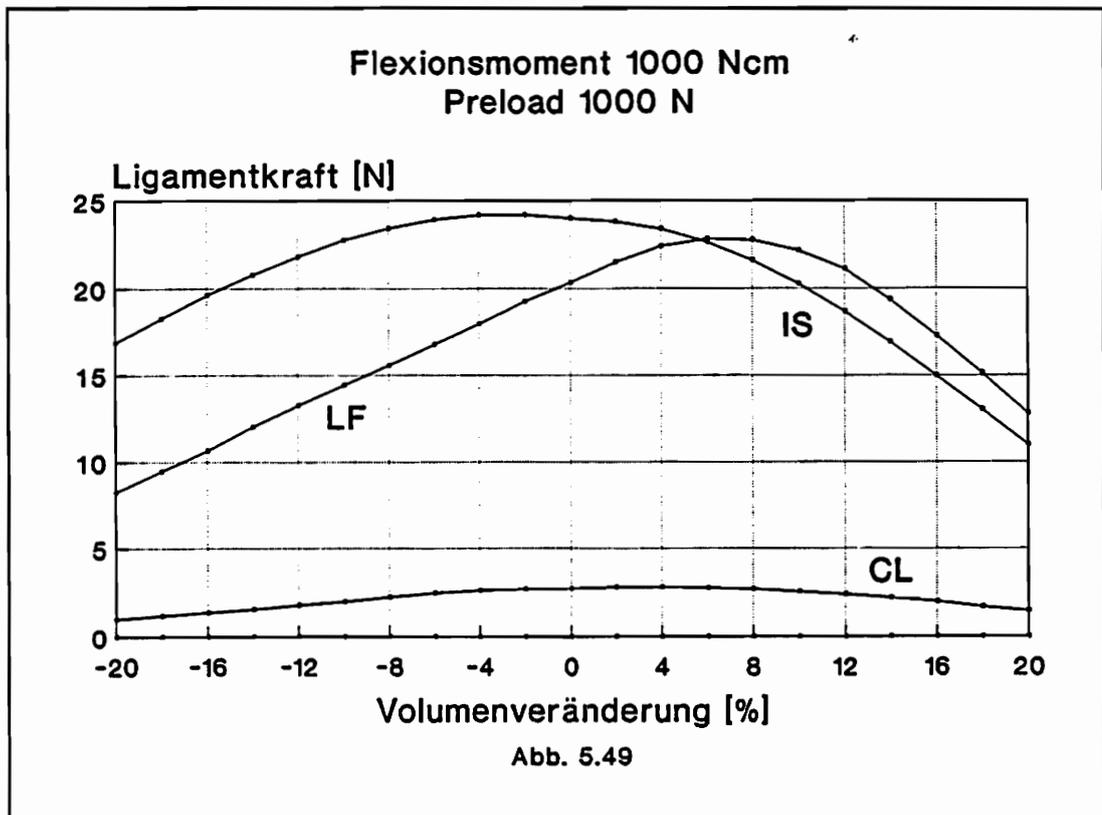
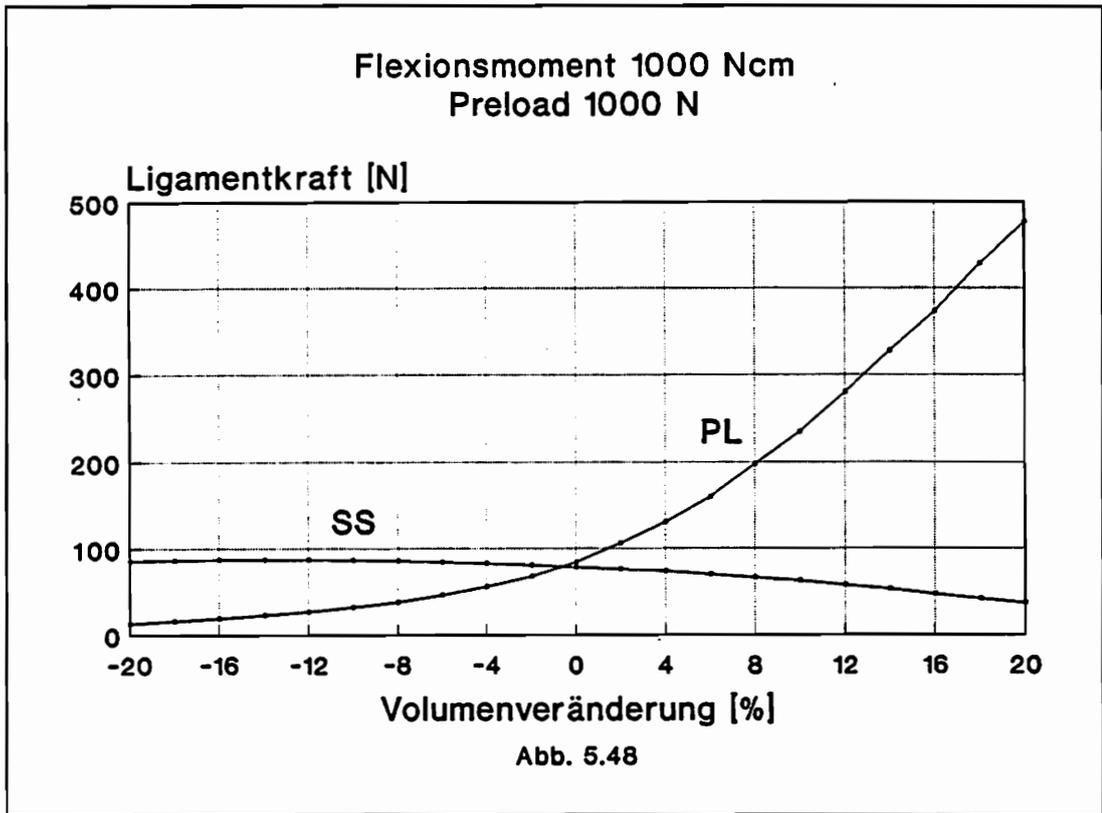


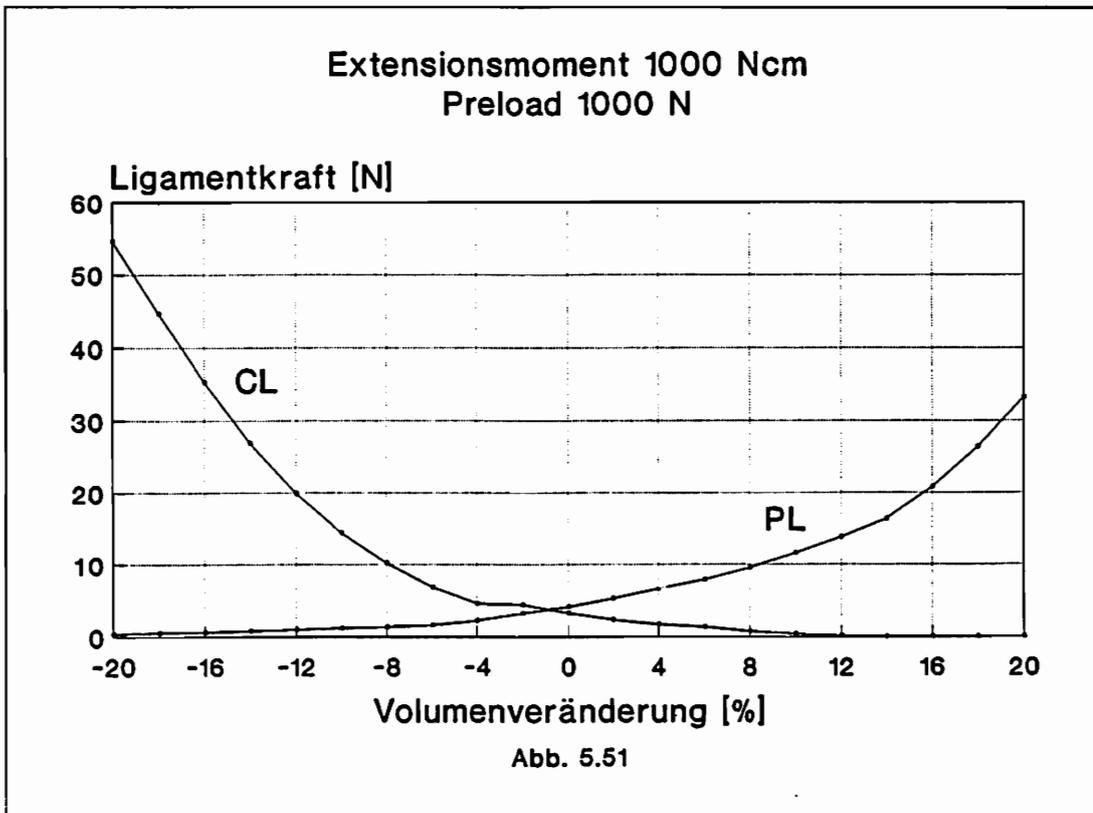
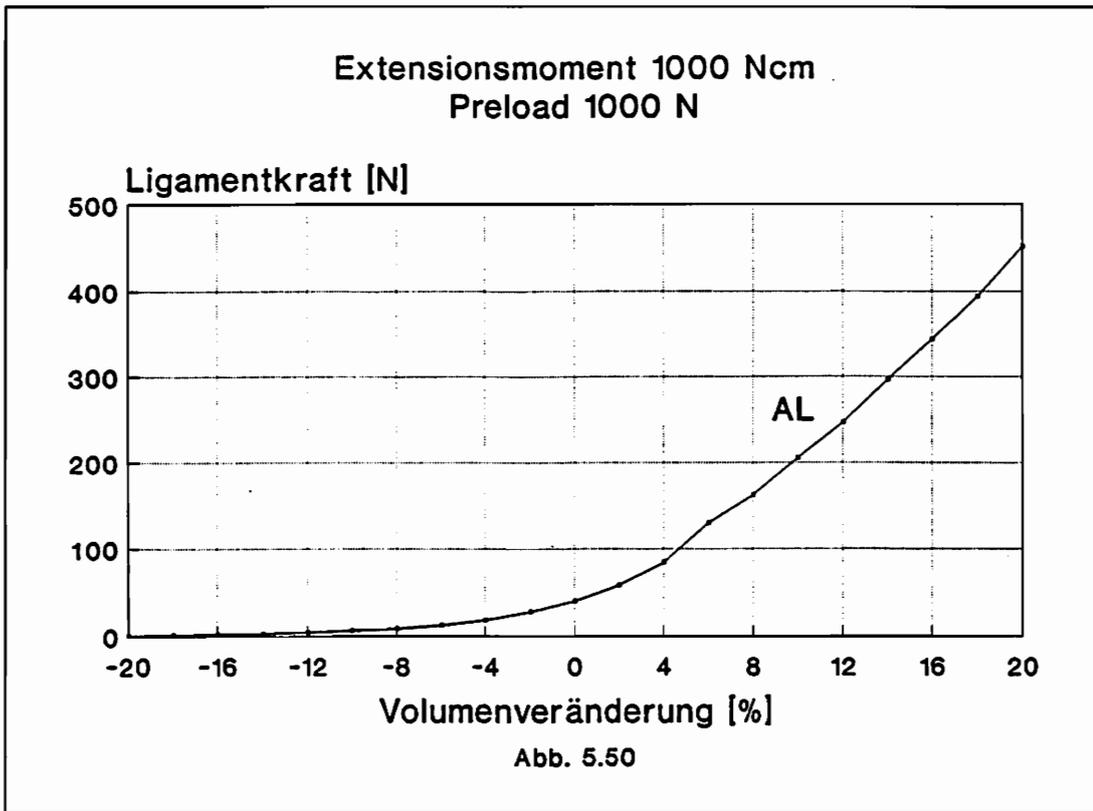












6. Ausblick

In allen ausgewählten Anwendungsbeispielen zeigte sich eine außerordentlich gute Übereinstimmung der numerischen und experimentellen Ergebnisse. Diese ist auch vor dem Hintergrund der hohen Varianz in den Materialeigenschaften der menschlichen "Bauteile" positiv zu bewerten. Das entwickelte mathematische Modell ist somit für eine realistische Beschreibung des rein elastischen Bewegungs- und Tragverhaltens des Bewegungssegmentes geeignet. Im Gegensatz zu experimentellen Untersuchungen haben die numerischen Studien jedoch den besonderen Vorteil, detaillierte Aussagen über den Kraftfluß in dem betrachteten Bewegungssegment zu ermöglichen. Die hohe klinische Relevanz darauf basierender Analysen zeigt sich im Rahmen dieser Arbeit bei der Betrachtung der Dehnungen des Anulus fibrosus bzw. der Kräfte in den Ligamenten. Darüber hinaus ergibt sich im Rahmen numerischer Untersuchungen die Problematik der Verwendung menschlicher Wirbelsäulenpräparate nicht, wobei sowohl biochemische und hygienische als auch ethische Aspekte zu bedenken sind.

Aus den dargestellten Ergebnissen wird ersichtlich, daß das Bewegungs- und Tragverhalten des betrachteten lumbalen Bewegungssegmentes maßgeblich durch den Kontakt der Gelenkflächen im Wirbelgelenk geprägt wird. Zukünftige numerische Studien sollten daher den Einfluß unterschiedlicher Stellungen der Gelenkflächen auf das Bewegungs- und Tragverhalten des Bewegungssegmentes untersuchen. Im Zusammenhang mit der Betrachtung mehrsegmentaler Wirbelsäulenabschnitte ist dabei eine systematische Erweiterung des vorgestellten Modells zur Erfassung des Kontaktes zweier deformierbarer Strukturen vorzunehmen. Weiterhin ermöglicht eine feinere Diskretisierung der Zwischenwirbelscheibe eine genauere Untersuchung ihres Tragverhaltens. Im besonderen könnten lokale Schädigungen des Anulus fibrosus betrachtet werden, die sowohl infolge degenerativer Veränderungen als auch auf Grund äußerer Eingriffe eintreten. Als Beispiel sei hier die Darstellung der Entwicklung einer medialen Protrusion und einer anschließenden perkutanen lumbalen Diskektomie genannt.

Auf Grund der bisherigen wirklichkeitsgetreuen Beschreibung des Bewegungs- und Tragverhaltens des Bewegungssegmentes ist Entsprechendes auch im Rahmen zukünftiger Studien zu erwarten.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ALVERDES, K.; BERTOLINI, R.: Grundlagen der Anatomie, 5. Aufl., VEB Georg Thieme, Leipzig, 1974
- [2] BASAR, Y.; KRÄTZIG, W. B.: Mechanik der Flächentragwerke, Vieweg & Sohn, Braunschweig - Wiesbaden, 1985
- [3] BATHE, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden: Matrizen und lineare Algebra, die Methode der finiten Elemente, Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo, 1986
- [4] BAUMGART, F.: Biomechanik und Implantattechnik, Z. angew. Math. Mech. 68 (1988), T12-T21
- [5] BELYTSCHKO, T. B.; ANDRIACCHI, T. P.; SCHULTZ, A. B.; GALANTE, J. O.: Analog studies of forces in the human spine: computational techniques, J. Biomechanics 6 (1973), 361-371
- [6] BELYTSCHKO, T. B.; KULAK, R. F.; SCHULTZ, A. B.; GALANTE, J. O.: Finite element stress analysis of an intervertebral disc, J. Biomechanics 7 (1974), 277-285
- [7] BERNSTEIN, B.: Hypo-Elasticity and Elasticity, Arch. Rational Mech. Analysis 6 (1963), 89-104
- [8] BETZEL, F.: Bandscheibenleiden - Ursache, Vorbeugung und Heilung, 4. Aufl., Umschau Verlag, Frankfurt am Main, 1974
- [9] BOWEN, R. M.; WANG, C.-C.: Introduction to Vectors and Tensors, Plenum, 1976
- [10] BRAUS, H.: Anatomie des Menschen - Erster Band - Bewegungsapparat, 2. Aufl., Julius Springer, Berlin, 1929

- [11] BRONSTEIN, I. N.; SEMENDJAJEW, K. A.: Taschenbuch der Mathematik, 20. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Thun - Frankfurt/Main, 1981
- [12] BRINCKMANN, P.; HORST, M.: The influence of vertebral body fracture, intradiscal injection and partial discectomy on the radial bulge and height of human lumbar discs, Spine 10 (1985), 138-145
- [13] BRINCKMANN, P.; GROOTENBOER, H.: The change of disc height, radial disc bulge and intradiscal pressure due to discectomy, An in-vitro investigation on human lumbar discs, Spine (1991) (im Druck)
- [14] CHAFFIN, D. B.: A computerized biomechanical model-development of and use in studying gross body action, ASME Paper No. 69-BHF5, 1969
- [15] CHROSCIELEWSKI, J.; NOLTE, L.-P.: Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY, Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 48, Ruhr-Universität Bochum, 1985
- [16] DUSZEK, M. K.: Problems of Geometrically Non-linear Theory of Plasticity, Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 21, Ruhr-Universität Bochum, 1980
- [17] EYRE, D. R.: Biochemistry of the Intervertebral Disc, Int. Rev. Connect. Tissue Res. 8 (1979), 227-291
- [18] FARFAN, H. F.: Biomechanik der Lendenwirbelsäule, Die Wirbelsäule in Forschung und Praxis, Band 80, Hippokrates, Stuttgart, 1979
- [19] FARFAN, H. F.; GRACOVETSKY, S.: The nature of instability, Spine 9 (1984), 714-719
- [20] FRYMOYER, J. W.; FRYMOYER, W. W.; WILDER, D. J.; POPE, M. H.: The mechanical and kinematic analysis of the lumbar spine in normal living human subjects in vivo, J. Biomechanics 12 (1979), 165-172

- [21] FUNG, Y. C.: Foundations of Solid Mechanics, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965
- [22] FUNG, Y. C.: Elasticity of soft tissues in simple elongation, Am. J. Physiol. 213 (1967), 1532-1544
- [23] GOEL, V. K.; KIM, Y. E.; LIM, T. H.; WEINSTEIN, J. N.: An analytic investigation of the mechanics of spinal instrumentation, Spine 13 (1988), 1003
- [24] GOEL, V. K.; WEINSTEIN, J. N.; LIU, Y. K.; KIM, Y. E.; OKUMA, T.: Biomechanics of spine stabilization, In: WEINSTEIN, J. N.; WIESEL, S. W.: The lumbar spine, ISSLS, W. B. Saunders Co., Philadelphia, 1990
- [25] GUMMERT, P.; RECKLING, K.-A.: Mechanik, 2. Aufl., Vieweg & Sohn, Braunschweig - Wiesbaden, 1987
- [26] HAKIM, N. S.; KING, A. I.: A three dimensional finite element dynamic analysis of a vertebra with experimental verification, J. Biomechanics 12 (1979), 277-292
- [27] HELLEN, T. K.: Effective quadrature rules for quadratic solid isoparametric finite elements, Int. J. num. Meth. Engng. 4 (1972), 597-599
- [28] HERCHENBACH, T.: Das Bewegungsverhalten des lumbalen Bewegungssegmentes von intakten und enukleierten Wirbelsäulenpräparaten, Diss., Bonn, 1988
- [29] HICKEY, D. S.; HUKINS, D. W. L.: Relation Between the Structure of the Annulus Fibrosus and the Function and Failure of the Intervertebral Disc, Spine 5 (1980), 106-116
- [30] HILL, R.: On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain, J. Mech. Phys. Solids 5 (1957), 229-241

- [31] HILL, R.: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, J. Mech. Phys. Solids 6 (1958), 236-249
- [32] HILL, R.: Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time, J. Mech. Phys. Solids 7 (1959), 209-225
- [33] HIPPOKRATES: Sämtliche Werke, Lüneburg, München, 1897
- [34] HUMZAH, M. D.; SOAMES, R. W.: Human Intervertebral Disc: Structure and Function, The Anatomical Record 220 (1988), 337-356
- [35] JAUMANN, G.: Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze, Sitz.ber. Akad. Wiss. Wien 120 (1911), 385
- [36] JUNGHANNS, H.: Die funktionelle Pathologie der Zwischenwirbelscheiben als Grundlage für klinische Betrachtungen, Langenbecks Arch. clin. Chir. 267 (1951), 393
- [37] KLINGBEIL, E.: Tensorrechnung für Ingenieure, Bibliographisches Institut, Mannheim - Wien - Zürich, 1966
- [38] KNEPEL, H.: Bedeutung und Häufigkeit bandscheibenbedingter Erkrankungen, Diss., Düsseldorf, 1977
- [39] KOELLER, W.; FUNKE, F.; HARTMANN, F.: Das Verformungsverhalten von lumbalen menschlichen Zwischenwirbelscheiben unter langeinwirkender axialer dynamischer Druckkraft, Z. Orthop. 119 (1981), 206-216
- [40] KRÄMER, J.: Bandscheibenbedingte Erkrankungen - Ursachen, Diagnose, Behandlung, Vorbeugung, Begutachtung, 2. Aufl., Georg Thieme Verlag, Stuttgart - New York, 1986
- [41] KRÄMER, J.: Perkutane Diskotomie, Chemonukleolyse oder offene Operation an der lumbalen Bandscheibe?, Med. Orth. Tech. 109 (1989), 89-93

- [42] KULAK, R. F.; BELYTSCHKO, T. B.; SCHULTZ, A. B.; GALANTE, J. O.: Nonlinear behavior of the human intervertebral disc under axial load, J. Biomechanics 9 (1976), 377-386

- [43] LIN, H. S.; LIU, Y. K.; RAY, G.; NIKRAVESH, P.: Systems identification for material properties of the intervertebral joint, J. Biomechanics 11 (1978), 1-14

- [44] MACVEAN, D. B.: Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren, ZAMP 19 (1968), 157-185

- [45] MAKOWSKI, J.; NOLTE, L.-P.: Simple equations in terms of displacements for finite axisymmetric deflections of shells of revolution, Int. J. Non-Linear Mech. 22 (1987), 1-13

- [46] MALVERN, L. E.: Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1969

- [47] MC MEEKING, R. M.; RICE, J. R.: Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation, Int. J. Solids Structures 11 (1975), 601-616

- [48] MICKLEY, K.; NOLTE, L.-P.: Experimentelle Bestimmung biomechanischer Modellparameter ein- und mehrsegmenteller Lendenwirbelabschnitte, VDI Berichte 731 (1989), 443-452

- [49] MICKLEY, K.; NOLTE, L.-P.; STUMPF, H.; LANGE, H.; BEERENS, C.; KRÄMER, J.: An experimental test-rig for the biomechanical analysis of human spine segments, RAM 6 (1990), 43-49

- [50] MICKLEY, K.; NOLTE, L.-P.; STUMPF, H.; LANGE, H.; BEERENS, C.; KRÄMER, J.: Eine Versuchsanlage für biomechanische Studien an menschlichen Wirbelsäulenpräparaten, Messtechnische Briefe 26 (1990), 10-16

- [51] MILLER, J. A. A.; HADERSPECK, K. A.; SCHULTZ, A. B.: Posterior element loads in lumbar motion segments, Spine 7 (1982), 192-203
- [52] MIXTER, W. J.; BARR, J. S.: Rupture of the intervertebral disc with involvement of the spinal canal, New Engl. J. Med. 211 (1934), 210
- [53] NACHEMSON, A.; MORRIS, J. M.: In vivo measurements of intradiscal pressure, J. Bone Jt. Surg. 46A (1964), 1077
- [54] NITZSCHKE, E.; NOLTE, L.-P.: Ein Computer-Simulationsmodell zur Abbildung der Biomechanik verschiedener Wirbelfusionen der Lendenwirbelsäule, In: Die Wirbelsäule in Forschung und Praxis, Band 107, Hippokrates Verlag, Stuttgart, 1988
- [55] NITZSCHKE, E.; PLATZEK, P.; NOLTE, L.-P.: Stabilitätsanalyse verschiedener Fusionsformen an der Lendenwirbelsäule mit Hilfe eines Computersimulationsmodells, Z. Orthop. 127 (1989), 597-601
- [56] NOLL, W.: On the Continuity of the Solid and Fluid States, Diss., J. Rational Mech. Analysis 4 (1955), 3-81
- [57] NOLTE, L.-P.: Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen, Diss., Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 39, Ruhr-Universität Bochum, 1983
- [58] NOLTE, L.-P.; MAKOWSKI, J.: Pressure loaded shells undergoing different levels of nonlinearity, Mech. Res. Comm. 21 (1986), 145-171
- [59] NOLTE, L.-P.; PANJABI, M. M.: Contribution to the stability analysis of intact and injured lumbosacral spinal segments, Proc. XII Int. Congr. of Biomech., ISB UCLA, 1989

- [60] NOLTE, L.-P.; PINGEL, T. H.; NITZSCHKE, E.: Entwicklung und Einsatz eines Computer-Simulationsmodells für die Wirbelsäule, Proc. des 3. Düsseldorfer Symposiums EDV in der Orthopädie und Traumatologie (im Druck)

- [61] NOLTE, L.-P.; PANJABI, M. M.; OXLAND, T. R.: Biomechanical properties of lumbar spinal ligaments, Proc. 8th European Conf. on Biomaterials, Heidelberg, 1989

- [62] ODEN, J. T.: Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972

- [63] OLSON, L. G.; BATHE, K.-J.: Analysis of fluid-structure interactions. A direct symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potential, Computers & Structures 21 (1985), 21-32

- [64] OGDEN, R. W.: Non-linear elastic deformations, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1984

- [65] PANJABI, M. M.; KRAG, M. H.; GOEL, V. K.: A technique for measurement and description of three dimensional six degree-of-freedom motion of a body joint with an application to the human spine, J. Biomechanics 14 (1981), 447-460

- [66] PANJABI, M. M.; WHITE, A. A.: Basic biomechanics of the spine, Neurosurgery 7 (1980), 76-93

- [67] PANJABI, M. M.; GREENSTEIN, G.; DURANCEAU, J.; NOLTE, L.-P.: Three dimensional quantitative morphology of lumbar spinal ligaments, Spinal Disorders (1991) (im Druck)

- [68] PIETRASZKIEWICZ, W.: Introduction to the Non-Linear Theory of Shells, Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 10, Ruhr-Universität Bochum, 1977

- [69] PINSKY, P. M.; ORTIZ, M.; PISTER, K. S.: Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis, Comput. Meths. Appl. Mech. Engng. 40 (1983), 137-158
- [70] PRAGER, W.: Einführung in die Kontinuumsmechanik, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1961
- [71] ROBERTS, S. B.; CHEN, P. H.: Elastostatic analysis of the human spine thoracic skeleton, J. Biomechanics 3 (1970), 527-545
- [72] SCHAIK, J. P. J. VAN; VERBIEST, H.; SCHAIK, F. D. J. VAN: The orientation of laminae and facet joints in the lower lumbar spine, Spine 10 (1985), 59-63
- [73] SCHIEBLER, T. H.: Lehrbuch der gesamten Anatomie des Menschen, Springer, Heidelberg, 1977
- [74] SCHMORL, G.; JUNGHANNS, H.: Die gesunde und die kranke Wirbelsäule in Röntgenbild und Klinik, 5. Aufl., Georg Thieme Verlag, Stuttgart, 1968
- [75] SCHRADER, K.-H.: MESY3 Benutzerhandbuch Version CDC CYBER 175 FORTRAN 77, Ruhr-Universität Bochum, 1983
- [76] SCHULTZ, A. B.; BELYTSCHKO, T. B.; ANDRIACCHI, T. P.; GALANTE, J. O.: Analog studies of forces in the human spine: mechanical properties and motion segment behavior, J. Biomechanics 6 (1973), 373-383
- [77] SCHWARZ, H. R.: Methode der finiten Elemente, 2. Aufl., Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Teubner Studienbücher Mathematik, Teubner, Stuttgart, 1984
- [78] SHIRAZI-ADL, A.: 3-D Nonlinear Finite Element Stress Analysis of a Lumbar Intervertebral Joint, Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering and Applied Mechanics, McGill University, Montreal, Quebec, Canada

- [79] SHIRAZI-ADL, A; SHRIVASTAVA, S. C.; AHMED, A. M.: Stress Analysis of the Lumbar Disc-Body Unit in Compression - A Three-Dimensional Nonlinear Finite Element Study, Spine 9 (1984), 120-134
- [80] SPILKER, R. L.: A Simplified Hybrid-stress Finite Element Model of the Intervertebral Disc, In: GALLAGHER, R. H.; SIMON, B. R.; JOHNSON, P. C.; GROSS, J. F.: Finite Elements in Biomechanics, John Wiley & Sons, Chichester, 1982
- [81] STAHL, C.: Experimentelle Untersuchungen zur Biomechanik der Halswirbelsäule, Diss., Düsseldorf, 1977
- [82] STUMPF, H.: Unified operator description, nonlinear buckling and post-buckling analysis of thin elastic shells, Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 34, 1982
- [83] STUMPF, H.: General concept of the analysis of thin elastic shells, Z. angew. Math. Mech. 66 (1986), 337-350
- [84] STUMPF, H.; MAKOWSKI, J.: On large strain deformation of shells, Acta Mechanica 45 (1986), 153-168
- [85] SZABO, L.; BALLA, M.: Comparison of some stress rates, Int. J. solids Structures 25 (1989), 279-297
- [86] TKACZUK, H.: Tensile properties of human lumbar longitudinal ligaments, Acta orthop. Scand., Suppl. 115, 1968
- [87] TOLDT, C.; HOCHSTETTER, F.: Anatomischer Atlas - Topographische und systematische Anatomie des Menschen in zwei Bänden, 26. Aufl., Urban & Schwarzenberg, München - Berlin - Wien, 1975
- [88] TRUESDELL, C. A.: Hypo-Elasticity, J. Rational Mech. Analysis 4 (1955), 83-133
- [89] WHITE, A. A.; PANJABI, M. M.: Clinical biomechanics of the spine, J. B. Lippincott Company, Philadelphia, 1978

- [90] WOOD, P. N.; BODLEY, E. M.: Epidemiology of back pain, In: JAYSON, M.: The Lumbar Spine and Backpain, Pitman, London, 1985
- [91] WRIGGERS, P.: Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Element-Methode, Habilitationsschrift, Hannover, 1986
- [92] WU, H.-C.; YAO, R.-F.: Mechanical behaviour of the human annulus fibrosus, J. Biomechanics 9 (1976), 1-7
- [93] YANG, K. H.; KING, A. I.: Mechanism of Facet Load Transmission as a Hypothesis for Low-Back Pain, Spine 9 (1984), 557-565
- [94] YOGANANDAN, N.; RAY, G.; MYKLEBUST, J. B.; SANCES, A.: Finite Element Analysis of the Spine, In: WEINSTEIN, J. N.; WIESEL, S. W.: The lumbar spine, ISSLS, W. B. Saunders Co., Philadelphia, 1990
- [95] ZIENKIEWICZ, O. C.: Methode der finiten Elemente, Carl Hanser Verlag, München - Wien, 1975

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 **Theodor Lehmann:**
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 **Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:**
Infinitesimal Thermoelasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 **Wolfgang Krings:**
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 **Burkhard Lücke:**
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 **Knut Schwarze:**
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 **Hubert Sommer:**
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 **H. Stumpf/F. J. Biehl:**
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 **Albert Meyers:**
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 **Berend Fischer:**
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 **Wojciech Pietraszkiewicz:**
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 **Wilfried Ullenboom:**
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 **Jürgen Güldenpfennig:**
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 **Pawel Rafalski:**
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 **Peter Hilgers:**
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 **Hans-Albert Lauert:**
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 **Martin Fritz:**
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermoeffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf:
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf:
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller:
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott:
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel:
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 77**