

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Ulfert Rott

Ein neues Konzept zur
Berechnung viskoplastischer
Strukturen

Heft Nr. 76



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik
Ruhr-Universität Bochum**

Ulfert Rott

Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 76
April 1991

Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Bei Herrn Prof. em. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Th. Lehmann möchte ich mich dafür bedanken, daß er mein Interesse für die Mechanik weckte und förderte. Herrn Prof. Dr.-Ing. O. T. Bruhns danke ich für die Betreuung meiner Arbeit.

Allen Mitarbeitern des Institutes, die zum Entstehen dieser Arbeit beitragen, sei ebenfalls herzlich gedankt. Besonders erwähnen möchte ich Herrn Dr.-Ing. A. Pape, der mir viele wertvolle Ratschläge geben konnte, Herrn Dr.-Ing. W. Fornefeld, mit dem ich in ausgezeichneter Zusammenarbeit das Finite-Elemente-Rumpfprogramm entwickelte, und Herrn Dipl.-Ing. Westerhoff, der mit Herrn Dipl.-Ing. P. Kathagen den Präprozessor schrieb und im Rahmen seiner Diplomarbeit das Finite-Elemente-Programm auf die Analyse von Scheibenproblemen erweiterte.

Bochum, im Mai 1991

Ulfert Rott

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Otto T. Bruhns

Prof. em. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Theodor Lehmann

Tag der Einreichung: 04.01.1991

Tag der mündlichen Prüfung: 26.04.1991

© 1991 Dr.-Ing. Ulfert Rott
Soldnerstr. 3, 4630 Bochum 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein allgemeines Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen vorgestellt.

Anhand eines Beispiels wird gezeigt, wie viskoplastische Materialgesetze für Stahl auf der Basis bewährter plastischer Stoffgesetze entwickelt werden können. Ein exakter Grenzübergang zu quasistatischer Prozeßführung erlaubt die Verwendung einer effizienten Strategie zur Ermittlung der Materialfunktionen.

Strukturanalysen werden mit Hilfe eines inkrementellen und iterativen Finite-Elemente-Algorithmus durchgeführt, der sich auch zur Berechnung endlicher Deformationen eignet.

Vergleiche mit aus der Literatur bekannten Versuchs- und Rechenergebnissen gestatten eine Beurteilung der Leistungsfähigkeit des vorgeschlagenen Konzeptes.

Summary

In this thesis a concept for the analysis of visco-plastic structures is introduced.

A procedure is shown which allows the development of visco-plastic material models for steel on the basis of approved plastic constitutive equations. Attainment of an exact limiting value for quasistatic processes permits the employment of an efficient strategy to determine the material functions.

Structural analyses are conducted with an iterative and incremental finite-element-algorithm that is also suitable for the calculation of finite deformations.

The performance of the proposed concept is assessed by comparison with experimental and numerical results from literature.

Inhaltsverzeichnis	Seite
Bezeichnungen	
1. Einleitung	1
2. Materialverhalten	3
2.1 Viskoplastische Stoffgesetze - Überblick	3
2.1.1 Das Stoffgesetz von <i>Hart</i>	8
2.1.2 Das Stoffgesetz von <i>Miller</i>	12
2.1.3 Das Stoffgesetz von <i>Chaboche</i>	16
2.1.4 Das Stoffgesetz von <i>Krempf</i>	21
2.1.5 Das Stoffgesetz von <i>Bruhns</i>	27
2.1.6 Zusammenfassende Beurteilung und Möglichkeiten zur Verbesserung	37
2.2 Konstitutive Gleichungen auf Basis eines neuen viskoplastischen Konzeptes	39
2.2.1 Voraussetzungen und Annahmen	39
2.2.2 Evolutionsgesetze für Dehnungen und interne Variable	39
2.2.3 Evolutionsgesetze für die Gleichgewichtsspannung	41
2.2.4 Die Materialfunktionen A, B und Φ	45
2.2.5 Eindeutigkeit der konstitutiven Gleichungen	47
2.3 Experimentelle Ergebnisse	52
2.4 Ermittlung der Materialfunktionen	54
2.4.1 Strategien zur Ermittlung der Materialfunktionen - Überblick	54
2.4.2 Formulierung des Problems	56
2.4.3 Bestimmung der Materialfunktionen $g(\chi)$ und $c(\chi)$	57
2.4.4 Bestimmung der viskosen Materialfunktionen $A(\Lambda, \nu)$, $B(\sqrt{f}, \ \sigma'\)$ und $\Phi(\Lambda)$	63

2.4.5	Bestimmung von $A(\Lambda, v)$	64
2.4.6	Bestimmung von $B(\sqrt{f}, \ \sigma'\)$ und $\Phi(\Lambda)$	73
2.5	Zusammenfassung	81
3.	Strukturverhalten	82
3.1	Die Methode der Finiten Elemente - Überblick	82
3.2	Problemstellung	88
3.3	Grundgleichungen der Methode der Finiten Elemente	89
3.3.1	Grundlegendes Konzept	89
3.3.2	Prinzip der virtuellen Arbeit für große Formänderungen	89
3.3.3	Update-Lagrange Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit	90
3.3.4	Zerlegung von Spannungen und Verzerrungen	92
3.3.5	Einbau des Werkstoffgesetzes	92
3.3.6	Inkrementelle Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit	96
3.4	Umsetzung in eine Finite-Element-Formulierung	98
3.4.1	Wahl der Elemente	98
3.4.2	Ansatzfunktionen	98
3.4.3	Das isoparametrische Konzept	99
3.4.4	Axialsymmetrisches Element	103
3.4.5	Elementmatrizen	107
3.4.6	Flächen- und Volumenintegration	117
3.4.7	Spannungsberechnung	118
3.4.8	Zeitintegration	122
3.4.9	Gleichgewichtssiteration	127
3.5	FE-Programm	130
3.5.1	Programmbeschreibung	130
3.5.2	Beschreibung des Präprozessors	131
3.5.3	Beschreibung des Postprozessors	133

3.6	Ergebnisse	134
3.6.1	Dünnwandiges Rohr unter Zug und Torsion	134
3.6.2	Dickwandiges Rohr unter Torsion und Innendruck	144
3.6.3	Inelastische Analyse von Druckbehältern	150
4.	Zusammenfassung und Ausblick	154
	Literaturverzeichnis	156

Bezeichnungen

Lateinische Symbole

Symbol	Bezeichnung	Seite
a	Materialkonstante (<i>Bruhns</i>)	35
a	Abkürzung	50
a	Materialkonstante	57
a	Materialkonstante für a_2	66
a_1	Materialfunktion	48
a_1	Materialkonstante für a_2	66
a_2	Materialfunktion	48
a_2	Materialkonstante für a_2	66
a_i	Ansatzkoeffizient	82
a_j	Koeffizient	122
\dot{a}^*	Temperaturfunktion (<i>Hart</i>)	9
a	anelastischer Dehnungstensor (<i>Hart</i>)	8
A	Materialkonstante, später -funktion (<i>Krempf</i>)	23
A	Fläche	89
A	Materialfunktion	42
A_1	Materialkonstante (<i>Miller</i>)	12
A_2	Materialkonstante (<i>Miller</i>)	12
A_A	Arbeit der flächenhaft angreifenden Kräfte	92
A_V	Arbeit der volumenhaft angreifenden Kräfte	92
b	Materialkonstante (<i>Chaboche</i>)	17
b	Materialfunktion (<i>Krempf</i>)	23
b	Abkürzung	50
b	Materialkonstante	57
b	Materialkonstante für a_2	66
b_1	Materialkonstante für a_2	68
b_2	Materialkonstante für a_2	68
b_j	Koeffizienten	122
B	Materialkonstante (<i>Miller</i>)	12
B	Materialfunktion	42
B_1	Materialkonstante (<i>Krempf</i>)	26
B_2	Materialkonstante (<i>Krempf</i>)	26
B_i	Randbedingung	82
[B]	Verzerrungs-Verschiebungsmatrix	85
[B_1]	lineare Verzerrungs-Verschiebungsmatrix	106
[B_{nl}]	Gradienten-Verschiebungsmatrix	106
c	Materialkonstante (<i>Chaboche</i>)	17

c	Materialfunktion (<i>Bruhns</i>)	29
c	Materialkonstante	57
c	Materialkonstante für a_1	67
c_i	Materialkonstante (<i>Hohenemser, Prager</i>)	4
c_1	Materialfunktion (<i>Bruhns</i>)	57
c_1	Materialkonstante für a_2	69
c_2	Materialfunktion (<i>Bruhns</i>)	57
c_2	Materialkonstante für a_2	69
c_3	Materialfunktion (<i>Bruhns</i>)	57
c_4	Materialfunktion (<i>Bruhns</i>)	31
c_5	Materialfunktion (<i>Bruhns</i>)	31
C	Materialkonstante (<i>franz. Norm</i>)	53
C_2	Materialkonstante (<i>franz. Norm</i>)	53
C_2	Materialkonstante (<i>Miller</i>)	12
C_3	Materialkonstante (<i>franz. Norm</i>)	53
C	Elastizitätstensor	85
$[C]$	Elastizitätsmatrix	85
$[C]$	symmetrischer Anteil der Spannungs-Verzerrungs- matrix	106
C_1	Materialfunktion (<i>Bruhns</i>)	28
C_2^*	Materialfunktion (<i>Bruhns</i>)	28
$[C^*]$	Spannungs-Verzerrungsmatrix	111
d	Materialfunktion (<i>Bruhns</i>)	34
d	Materialkonstante	57
d	Materialkonstante für a_1	67
d_1	Materialkonstante für Φ	74
d_2	Materialkonstante für Φ	74
d_3	Materialfunktion für B	74
d_4	Materialfunktion für B	74
d_5	Materialfunktion für B	74
d_6	Materialfunktion für B	74
D	Schrittkennzahl	124
D	Dehnungsgeschwindigkeitstensor	88
D_1	Materialfunktion (<i>Bruhns</i>)	28
D_2^*	Materialfunktion (<i>Bruhns</i>)	28
D_i	Tensor der rein viskosen Dehnungsgeschwindigkeit	93
e	Verzerrungstensor (linearer Anteil)	91
$[\Delta^{(i)} e]$	Vektor des Inkrementes des linearen Verzerrungs- tensors	107
E	Elastizitätsmodul	8
E_t	Tangentenmodul	23
f	Materialkonstante (<i>Hart</i>)	9
$f(\dots)$	Funktion von (...)	4

f_i	Ansatzfunktion	82
\mathbf{f}	Spannungstensor (<i>Krempf</i>)	22
\mathbf{f}	volumenhaft angreifende Kräfte	89
F	Fließfunktion	16
F	Zugkraft	135
F^*	Gedächtnisflächenfunktion (<i>Chaboche</i>)	18
\mathbf{F}	Deformationsgradiententensor	91
$[(^{i-1})\mathbf{F}]$	Vektor der Ungleichgewichtslasten	106
g	Quadrat des Fließflächenradius	4
\mathbf{g}_α	Basisvektoren	103
$[\mathbf{g}]$	nichtlineare vektorielle Funktion	126
G	Schubmodul	9
G	Grenzwert	67
h_{i1}	Interpolationsfunktion	100
H_1	Materialkonstante (<i>Miller</i>)	12
H_2	Materialkonstante (<i>Miller</i>)	12
$[\mathbf{H}]$	Matrix der Interpolationsfunktionen	106
J	Zielfunktion	69
J	Dichteverhältnis	91
$[\mathbf{J}]$	Jakobimatrix	117
k	konstanter Anteil des Fließflächenradius (<i>Chaboche</i>)	16
k_i	Materialkonstante (<i>Krempf</i>)	26
k	Überspannungsfunktion (<i>Krempf</i>)	22
K	Materialfunktion	41
K	Materialkonstante (<i>franz. Norm</i>)	53
K_0	Materialkonstante (<i>franz. Norm</i>)	52
$[\mathbf{K}]$	Steifigkeitsmatrix	106
l	Rohrlänge	134
L_{2m}	Differentialoperator der Ordnung $2m$	82
\mathbf{L}	Geschwindigkeitsgradiententensor	94
m	Materialkonstante (<i>Hart</i>)	9
m	Materialkonstante (<i>franz. Norm</i>)	53
m_0	Materialkonstante (<i>franz. Norm</i>)	52
M	Materialkonstante (<i>Hart</i>)	9
M	Abkürzung	112
M	Materialkonstante (<i>Hart</i>)	9
n	Exponent	3
n	Exponent (<i>franz. Norm</i>)	53
n_1	Exponent (<i>franz. Norm</i>)	53
n_3	Exponent (<i>franz. Norm</i>)	53
\mathbf{n}	Einheitsnormalentensor an die Fließfläche	6
\mathbf{n}	Einheitsnormalenvektor	89

\mathbf{n}^*	Einheitsnormalentensor an die Gedächtnisfläche (<i>Chaboche</i>)	18
$\bar{\mathbf{n}}$	Einheitsnormalentensor der Gleichgewichtsspannungen	28
N	Abkürzung	119
O	Fehlerordnung	123
p	Vergleichsdehnung	17
p	Fehlerwichtung	69
p_i	Belastungsparameter (<i>Bruhns</i>)	30
p_i	Koeffizienten	123
p_{ij}	Materialkonstante für d_i , $i = 3, 4, 5, 6$	76
\mathbf{p}	flächenhaft angreifende Kräfte	89
$[\mathbf{p}]$	physikalischer Lastvektor	106
q_i	Belastungsparameter (<i>Bruhns</i>)	30
q_i	interne Variable	5
q_i	Randbedingung	82
\dot{q}_{iH}	allgemeine Tensorfunktion	6
\dot{q}_{iR}	allgemeine Tensorfunktion	6
$[\mathbf{q}]$	viskoplastischer Lastvektor	113
Q	Aktivierungsenergie für Selbstdiffusion (<i>Hart</i>)	9
Q	Grenzradius der Fließfläche (<i>Chaboche</i>)	17
Q_m	asymptotischer Grenzradius der Fließfläche (<i>Chaboche</i>)	19
r	rechte Seite einer Differentialgleichung	82
r	Rohrradius	134
r_i	Koeffizienten	123
\mathbf{r}	Ortsvektor	90
R	Gaskonstante	9
R	variabler Anteil des Fließflächenradius (<i>Chaboche</i>)	16
R	Residuum	82
R	Materialfunktion (<i>Hart</i>)	9
$[\mathbf{R}]$	Vektor der Knotenkräfte	85
$[\mathbf{R}_p]$	Lastvektor	106
$[\mathbf{R}_q]$	viskoplastischer Lastvektor	106
S_i	Rand	82
\mathbf{S}	2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor	87
$[\mathbf{S}^*]$	Spannungs-Metrikmatrix	106
t	Zeit	8
t	Rohrdicke	134
T	Temperatur	5
\mathbf{T}	modifizierter Elastizitätstensor	22
$[\mathbf{T}]$	Transformationsmatrix	115
u	Verschiebung	135

u	Verschiebungsvektor	90
[u]	Vektor der Knotenverschiebungen	85
[$\Delta \mathbf{u}^i$]	Vektor der Inkremente der Knotenverschiebungen	107
v	Maß für Prozeßgeschwindigkeit	45
v	Geschwindigkeitsvektor	95
V	Volumen	85
w	Abweichung von linearer Verfestigung (<i>Bruhns</i>)	29
w_m	Wichtungsfaktor	118
W	Formänderungsarbeit	91
W	Tensor der Rotationsgeschwindigkeit	93
x	Transformationsvariable	51
x^α	globale Koordinate	99
y	relativer Fehler	69
y	unabhängige Veränderliche	122

Griechische Symbole

Symbol	Bezeichnung	Seite
α	Integrationsparameter	86
α	inelastischer Dehnungstensor (<i>Hart</i>)	8
β	Cosinus des Winkels zwischen den Normalentensoren (<i>Bruhns</i>)	31
γ	Scherung	4
γ	Viskositätskonstante	4
γ	Materialkonstante (<i>Chaboche</i>)	17
γ	Viskositätsfunktion (<i>Bruhns</i>)	31
Γ	Materialfunktion (<i>Hart</i>)	9
$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$	<i>Christoffelsymbol</i>	108
Δ	Strukturgedächtnisfunktion (<i>Bruhns</i>)	30
ε	Dehnung (einaxialer Zug)	3
ε	<i>Green-Lagrangescher-Dehnungstensor</i>	5
ε_1	linearer Anteil des Verzerrungstensors	95
$[\varepsilon_0]$	Vektor der Anfangsverzerrung	85
ζ	tensorwertige interne Variable für Gedächtnisfunktion (<i>Chaboche</i>)	18
η	Materialkonstante (<i>Chaboche</i>)	18
η	nichtlinearer Anteil des Verzerrungstensors	92
ϑ	Verdrillung	145
Θ	Temperaturfunktion (<i>Miller</i>)	12
x	interne Variable (<i>Bruhns</i>)	28
λ	Materialkonstante (<i>Hart</i>)	9
λ	Proportionalitätsfaktor	40
Λ	Überspannung	4
$\tilde{\Lambda}$	Vergleichswert für Überspannung	74
μ	Materialkonstante (<i>Chaboche</i>)	19
ν	Querkontraktionszahl	22
ξ^i	lokale Koordinate	99
ξ	kinematischer Verfestigungstensor	9
ρ	skalarwertige interne Variable für Gedächtnisfunktion (<i>Chaboche</i>)	18
ρ	Dichte	91
σ	Zugspannung	3
σ_V	Vergleichsspannung	149
$\bar{\sigma}$	Gleichgewichtsspannung beim einaxialen Zug	3
σ^*	Härte (<i>Hart</i>)	9
σ	<i>Cauchy-Spannungstensor</i>	4

σ_a	den anelastischen Dehnungen zugeordnete Spannung (<i>Hart</i>)	9
σ_f	viskose Reibungsspannung (<i>Hart</i>)	9
$\bar{\sigma}$	Tensor der Gleichgewichtsspannung	6
$\bar{\bar{\sigma}}$	Überspannungstensor	27
$[\sigma]$	Vektor der Spannungen	85
$[\sigma_0]$	Vektor der Anfangsspannung	85
τ	Schubspannung	4
τ	Zeit zwischen t und $t + \Delta t$	120
$\bar{\tau}$	Gleichgewichtsschubspannung	4
Φ	Überspannungsfunktion	4
Φ	Funktion	82
Φ_1	Überspannungsfunktion	35
Φ_2	Überspannungsfunktion	35
ψ	Formfunktion (<i>Krempf</i>)	22
ψ	Gesamtverdrillwinkel des Rohres	133

Vereinbarungen

$(\dots)^{-1}$	Inverse eines Tensors oder einer Matrix
$(\dots)^{-T}$	Transponierte eines Tensors oder einer Matrix
$(\dots)'$	Deviator eines Tensors
$\ (\dots)\ $	euklidische Norm eines Tensors
$(\dots) \cdot (\dots)$	verjüngendes Produkt
$(\dots)^{\cdot}$	substantielle Zeitableitung
$\frac{D}{dt}(\dots)$	substantielle Zeitableitung
$(\dots)_{\nabla}$	objektive Zeitableitung
$(\dots)_{,\alpha}$	partielle Ableitung
$(\dots) _{\alpha}$	kovariante Ableitung
$\mathbf{1}$	Einstensor
$\det(\dots)$	Determinante einer Matrix
$\text{div}(\dots)$	Divergenz eines Tensors (aktuelle Koordinaten)
$\text{Div}(\dots)$	Divergenz eines Tensors (Ausgangskoordinaten)
$\exp(\dots)$	Exponentialfunktion von (\dots)
$\text{grad}(\dots)$	Gradient eines Tensors (aktuelle Koordinaten)
$\text{Grad}(\dots)$	Gradient eines Tensors (Ausgangskoordinaten)
$\text{sym}(\dots)$	symmetrischer Teil eines Tensors
$\text{Sp}(\dots)$	Spur eines Tensors

Indizes

a	außen
e	elastisch, elastisch
i	inelastisch, innen
in	Anfangswert
l	linear
nl	nichtlinear
p	plastisch
v	viskos
0	Anfangswert
∞	Endwert

1. Einleitung

In vielen Bereichen des Maschinenbaus und des Bauingenieurwesens werden in zunehmendem Maße rechnergestützte Verfahren zur Festigkeitsberechnung von Bauteilen eingesetzt. Ein Grund für diese Tendenz besteht in den steigenden Anforderungen, die an die Produkte gestellt werden: Aus Kosten- und Gewichtsgründen werden Konstruktionen vor allem im Bereich der Automobil- und Luftfahrtindustrie ständig leichter, so daß ein Zwang zu optimaler Formgebung in bezug auf die Werkstoffbeanspruchung entsteht. Hohe Ansprüche an die Qualität von Blechen bei gleichzeitig möglichst geringen Preisen verlangen in der Umformtechnik eine genaue Auslegung der Werkzeuge für große Deformationen. Mit dem Fortschritt der Technik wachsen auch die Anforderungen, die an die Sicherheit gestellt werden müssen: Für Druckbehälter in Kraftwerken muß beispielsweise nachgewiesen werden, daß sie auch über sehr lange Zeiten hohen zyklischen thermischen und mechanischen Beanspruchungen ausgesetzt werden können, ohne zu versagen. Zahlreiche Konstruktionen sind so teuer (z. B. in der Raumfahrtindustrie) oder werden in Einzelfertigung hergestellt (beispielsweise Brücken oder offshore-Konstruktionen), daß Versuche an den Bauteilen selbst häufig nicht möglich sind.

Die rapide Entwicklung der Digitalrechner und der damit verbundene Kostenrückgang pro Rechenleistung stellt den Ingenieuren die zur Analyse und Optimierung von Konstruktionen erforderlichen Mittel zur Verfügung. So ist es beispielsweise mit Hilfe des Verfahrens der Finiten Elemente oder der Randelementmethode möglich, komplexe Strukturen linear-elastisch zu analysieren. Jedoch fehlen zur Beschreibung inelastischen Strukturverhaltens Modelle, die alle technisch relevanten Effekte beschreiben und gleichzeitig noch einfach genug sind, um in der Praxis überhaupt anwendbar zu sein. Moderne Materialgesetze für Stahl sollten neben zyklischem Verfestigungsverhalten auch geschwindigkeitsabhängige Phänomene wie das Anwachsen der Spannung bei erhöhter Prozeßgeschwindigkeit, Kriechen und Relaxation beschreiben können.

In dieser Arbeit soll daher ein Berechnungsverfahren zur Auslegung von Strukturen vorgestellt werden, die bis in den inelastischen Bereich belastet werden. Dabei soll insbesondere das viskoplastische Verhalten von austenitischen Stählen bei erhöhter Temperatur am Beispiel von AISI 316 L mod untersucht werden.

Die mathematische Beschreibung dieses Problems zerfällt in die Erfassung des Materialverhaltens und die damit verbundene Analyse des Strukturverhaltens. Dementsprechend ist auch die vorliegende Arbeit gegliedert: Im Kapitel 2 wird ein allgemeines Konzept vorgestellt, welches es ermöglicht, auf der Basis bewährter phänomenologischer, plastischer Materialgesetze

eine Erweiterung auf geschwindigkeitsabhängige Modellierung durchzuführen. Nach einem kurzen historischen Überblick und der Vorstellung einiger bekannter viskoplastischer Materialmodelle wird dieses Konzept am Beispiel eines von *Bruhns* entwickelten plastischen Stoffgesetzes beschrieben. Der große praktische Vorteil dieses Konzeptes besteht in der Trennung von Materialfunktionen, die das Verfestigungsverhalten modellieren, von denjenigen, die geschwindigkeitsabhängige (viskose) Effekte erfassen. Dadurch ist die Anwendung einer Anpassungsstrategie zur Ermittlung dieser Materialfunktionen überhaupt erst möglich. Die Beschreibung des Materialverhaltens beschränkt sich auf isotherme Prozesse ohne Schädigung und ohne Phasenumwandlung.

In dem darauf folgenden Kapitel wird eine Finite-Elemente-Formulierung zur Analyse des Strukturverhaltens bei großen, viskoplastischen Deformationen hergeleitet. Um eine größtmögliche Genauigkeit zu erreichen, findet eine Gleichgewichtsiteration in Verbindung mit einer inelastischen Tangentensteifigkeitsmatrix und einem viskoplastischen Lastvektor Verwendung. Zur Analyse axialsymmetrischer Strukturen wird ein Element entwickelt, welches im Gegensatz zu den üblicherweise verwendeten auch die Berechnung nichtlinearer Torsionsprobleme ermöglicht. An einige Beispielrechnungen zur Verifikation des FE-Programms schließt sich die inelastische Analyse zweier Druckbehälter an.

2. Materialverhalten

2.1 Viskoplastische Stoffgesetze - Überblick

Bereits seit 1909 ist es durch die Arbeiten von *Ludwik* allgemein bekannt, daß das Deformationsverhalten metallischer Werkstoffe geschwindigkeitsabhängig ist [2.1]. *Ludwik* untersuchte vor allem Zinn [2.2] und leitete daraus einen allgemeinen Zusammenhang zwischen „innerer Reibung“ σ und der Verformungsgeschwindigkeit her. Er nahm an, daß sich die innere Reibung aus einem quasistatischen Basiswert $\bar{\sigma}$ und einem geschwindigkeitsabhängigen Anteil zusammensetzt. In heutiger Schreibweise lautet sein Werkstoffgesetz bei einaxialem Zug

$$\dot{\epsilon} = \left(\frac{\sigma - \bar{\sigma}}{\sqrt{g_0}} \right)^n \quad (2.1)$$

und läßt sich daher als erstes Überspannungsmodell ansehen [2.3]. Abb. 2.1 zeigt schematisch den Verlauf der inneren Reibung σ in Abhängigkeit der Dehnung γ bei Stahl mit der Deformationsgeschwindigkeit v als Parameter [2.2].

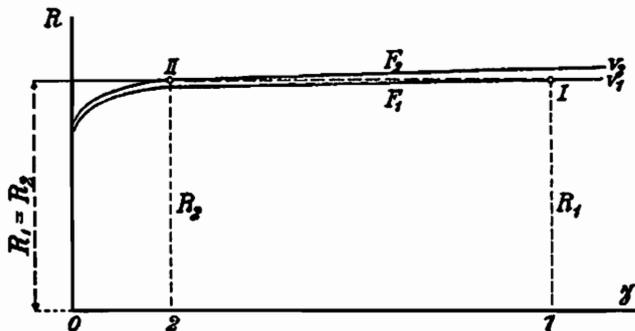


Abb. 2.1: Innere Reibung $R = \sigma$ in Abhängigkeit der Dehnung γ bei Stahl mit der Deformationsgeschwindigkeit v als Parameter aus [2.2]

Da jedoch die seinerzeit industriell verwendeten Kohlenstoffstähle nur eine geringe Dehnungsratenabhängigkeit aufweisen, setzte sich zunächst die von *v. Mises* vorgeschlagene Idealisierung [2.4] als elastisch-plastisches Werkstoffverhalten durch .

Im Jahre 1919 stellten *Bingham* und *Green* eine Theorie für viskoplastische Scherung auf [2.5], in der sie einen (2.1) entsprechenden Zusammenhang zwischen Schubspannung und Schergeschwindigkeit formulierten (s. a. [2.6]).

1932 veröffentlichten *Hohenemser* und *Prager* eine Arbeit, in der sie eine Systematik der einfachsten Idealstoffe entwickeln [2.7]. Danach soll sich die reine Scherung isotroper Stoffe ganz allgemein durch die Beziehung

$$\tau + c_1 \dot{\tau} + c_2 \gamma + c_3 \dot{\gamma} + c_4 = 0 \quad (2.2)$$

beschreiben lassen. Die Autoren verweisen darauf, daß (2.2) für $c_1 = c_2 = 0$ in das von *Bingham* vorgeschlagene Werkstoffgesetz übergeht.

Einen wesentlichen Beitrag zur Viskoplastizitätstheorie leistete auch *Kochendörfer*, der zunächst Naphtalinkristalle [2.8] und später Aluminium und Cadmium [2.9] untersuchte. Er verbindet das Überspannungskonzept mit der Vorstellung einer Werkstoffverfestigung durch Versetzungsbewegung und setzt daher

$$\dot{\gamma} = \Phi(\tau - \bar{\tau}) \quad (2.3)$$

mit einem Evolutionsgesetz für die Verfestigung

$$\dot{\bar{\tau}} = f(\bar{\tau}, \gamma, \dot{\gamma}) \quad (2.4)$$

an. Während die quasistatischen Größen $\bar{\sigma}$ bzw. $\bar{\tau}$ Ähnlichkeiten mit der kinematischen Verfestigung der klassischen Plastizitätstheorie aufweisen und daher im angelsächsischen Sprachraum gelegentlich als *back stress* oder *kinematic stress* bezeichnet werden, wird seit *Gilman* [2.10] für den isotropen Anteil der Verfestigung auch der Begriff *Schleppspannung* (*drag stress*) gebraucht.

Auf der Arbeit von *Hohenemser* und *Prager* aufbauend entwickelte *Perzyna* 1963 sein Überspannungsmodell [2.11], dessen wesentliche Kennzeichen die Übernahmen von Fließbedingung und Normalenregel aus der Plastizitätstheorie sind:

$$\dot{\epsilon}_i = \gamma \ll \Phi(\Lambda) \gg \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{1}{\sqrt{f}} \quad (2.5)$$

mit

$$\Lambda = \frac{(\sigma' \cdot \sigma')^{1/2}}{\sqrt{g}} - 1 = \sqrt{\frac{f}{g}} - 1 \quad (2.6)$$

und

$$\ll \Phi \gg = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \Lambda \leq 0 \\ \Phi, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.7)$$

Darin bezeichnen σ' den Spannungsdeviator, \sqrt{g} den Fließflächenradius, γ die Viskositätskonstante und Φ die Überspannungsfunktion, die die Geschwindigkeitsabhängigkeit der konstitutiven Gleichungen steuert. In [2.13] werden mehrere Ansätze für $\Phi(\Lambda)$ vorgeschlagen, deren einfachster

$$\Phi = \Lambda^n \quad (2.8)$$

auf ein *power-law* für die inelastische Verzerrungsrate führt. Als wesentliche Verbesserung gegenüber früheren geschwindigkeitsabhängigen Materialmodellen ist die Verwendung interner Variablen zur Beschreibung der Werkstoffverfestigung anzusehen. Das Stoffgesetz von *Perzyna* kann jedoch lediglich isotrope Verfestigung erfassen und ist daher nur für monotone Prozesse geeignet: die inelastische Arbeit bestimmt den Fließflächenradius \sqrt{g} . In [2.11] und [2.12] wird ein allgemeiner thermodynamischer Rahmen für die mathematische Formulierung viskoplastischen Materialverhaltens angegeben. Weiterhin ist erwähnenswert, daß bereits 1974 von *Zienkiewicz* und *Cormeau* FE-Rechnungen unter Benutzung der konstitutiven Gleichungen (2.5) - (2.7) veröffentlicht wurden, in denen sich ihre Brauchbarkeit für praktische Anwendungen zeigt [2.14, 2.15]. Seit Anfang der siebziger Jahre führte die Verwendung von hochlegierten Stählen wie AISI 304 und AISI 316 vor allem in Kernkraftwerken dazu, daß von industrieller und staatlicher Seite die Forderung nach erheblich verbesserten viskoplastischen Materialgesetzen laut wurde. Diese sollten auch für komplexe Belastungen geeignet und in FE-Programmen einsetzbar sein. Seit dieser Zeit existiert eine Fülle geschwindigkeitsabhängiger Materialgesetze, die diesen Anforderungen mehr oder weniger gut genügen. Die meisten von ihnen weisen eine ähnliche mathematische Struktur auf: Die Gesamtverzerrungsrate wird gewöhnlich in einen elastischen und einen inelastischen Anteil zerlegt

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_i \quad (2.8)$$

Diese Stoffgesetze werden auch vereinheitlicht (*unified*) genannt [2.18], denn sie unterscheiden bei der inelastischen Verzerrungsrate nicht mehr zwischen geschwindigkeitsabhängigen und geschwindigkeitsunabhängigen Raten.

Für den elastischen Anteil wird ein verallgemeinertes *Hookesches* Gesetz verwendet, während für die inelastischen Dehnungsraten eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_i(\sigma', T; q_i) \quad (2.9)$$

verwendet wird. Darin sind q_i interne Variable, die Tensoren 0. oder 2. und gegebenenfalls auch höherer Stufe sein können, und T bezeichnet die Temperatur. Für die internen Variablen werden Evolutionsgleichungen angegeben, die gewöhnlich aus einem Verfestigungsterm (*hardening*) und einem Erholungsterm (*recovery*) bestehen (*Bailey-Orowan-Beziehung*)

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(\sigma', T; q_i) = \hat{q}_{iH}(\sigma', T; q_i) \otimes \dot{\epsilon}_i - \hat{q}_{iR}(\sigma', T; q_i) \quad (2.10)$$

[2.16, 2.18]. Dabei bezeichnet \otimes eine je nach Stufe der Tensoren q_i und \hat{q}_{iH} geeignete multiplikative Verknüpfung.

Einzelne Materialmodelle unterscheiden sich hinsichtlich der Anzahl und Bedeutung der internen Variablen und der Form der Differentialgleichungen (2.9) und (2.10). Viele Modelle sind vom Überspannungstyp, d.h. sie verwenden (explizit oder implizit) eine Gleichgewichtsspannung $\bar{\sigma}$, die sich bei quasistatischer Prozeßführung einstellt. Damit soll elastisch-plastisches Materialverhalten als Grenzfall elastisch-plastischer Materialantwort angesehen werden. Für $\dot{\epsilon}_i$ wird dann gewöhnlich

$$\dot{\epsilon}_i = \ll \Phi \left(\frac{\sigma' - \bar{\sigma}'}{\sqrt{g}}, T \right) \gg \frac{\sigma' - \bar{\sigma}'}{\|\sigma' - \bar{\sigma}'\|} = \ll \Phi \left(\frac{\sigma' - \bar{\sigma}'}{\sqrt{g}}, T \right) \gg \mathbf{n} \quad (2.11)$$

angesetzt. Die inelastische Dehnungsrate weist also in Richtung des Überspannungstensors $\sigma' - \bar{\sigma}'$, und ihr Betrag hängt von dem Quotienten dieses Tensors und der die isotrope Verfestigung charakterisierenden Schleppspannung (*drag stress*) \sqrt{g} ab. Es soll darauf hingewiesen werden, daß die Bezeichnung *back stress* für die Gleichgewichtsspannung $\bar{\sigma}$ meiner Meinung nach unzweckmäßig ist, da sie auch für den Tensor der kinematischen Verfestigung verwendet wird [2.3].

Um einen besseren Überblick über die große Menge viskoplastischer Materialgesetze zu gewinnen, ist es zweckmäßig, sie in drei Hauptgruppen zu gliedern [2.17].

Die erste Gruppe enthält Stoffgesetze, die die Existenz einer Fließfläche voraussetzen, also annehmen, daß inelastische Deformationen erst ab einem bestimmten Spannungsniveau auftreten. Vom mathematischen Standpunkt aus äußert sich diese Annahme in einer Ungleichung als Nebenbedingung, der Fließbedingung (siehe z.B. (2.7)). Historisch gesehen lassen sich diese Modelle als Erweiterungen bereits vorhandener plastischer Materialgesetze auffassen. In dieser Interpretation liegt auch ein großer praktischer Vorteil: Häufig wird versucht, Evolutionsgleichungen, Materialfunktionen und sogar Materialparameter aus quasistatischen Versuchen zu ermitteln und aus Versuchen mit unterschiedlichen Dehnungsgeschwindigkeiten lediglich die Überspannungsfunktion Φ in (2.11) zu bestimmen. Als typischer Vertreter dieser Gruppe kann das Materialgesetz von *Perzyna* angesehen werden. Auf diesem Modell bauen beispielsweise diejenigen von *Bruhns* [2.63, 2.71], *Chaboche* [2.51 - 2.54], *Lehmann* [2.20, 2.21] und *Diehl-Fornfeld* [2.22, 2.23] auf. Das letztgenannte berücksichtigt vor allem auch Schädigung durch Scherbänder und deckt einen sehr großen Dehnungsgeschwindigkeitsbereich bis hin zu Hochgeschwindigkeitsprozessen ab. Ein anderes interessantes Materialgesetz dieser Gruppe ist das von *Meijers*

und *Roode* [2.24], das aus einer Superposition (*overlay*) endlich vieler, parallel geschalteter, elastisch-plastischer und elastisch-viskoser Basismodelle (sog. Fraktionen) besteht.

Die zweite Gruppe umfaßt Materialgesetze, bei denen keine Fließfläche verwendet wird. Bei ihnen tritt also inelastisches Werkstoffverhalten bei jedem Spannungsniveau auf. Sie sind im Grunde hochgradig nichtlineare, viskoelastische Materialgleichungen [2.17] und stellen plastisches Hystereseverhalten durch die Verwendung von Betragsfunktionen in den Evolutionsgleichungen (2.10) dar. Da diese Stoffgesetze auf eine Nebenbedingung verzichten, muß zur Erfassung des Übergangsverhaltens eine große mathematische Steifheit des Differentialgleichungssystems in Kauf genommen werden, was in der Praxis erhebliche Probleme bei der numerischen Integration verursacht. Ein weiteres Problem dieser engen Kopplung zwischen elastischen und inelastischen Dehnungsraten und des Verzichtes auf ein plastisches Basismodell besteht in der Identifikation der Materialfunktionen und -parameter, die oft nur durch unbefriedigendes Probieren erfolgen kann. Zu dieser Gruppe gehören beispielsweise die Stoffgesetze von *Bodner-Partom-Stouffer* [2.83], *Hart* [2.35, 2.36], *Miller* [2.45, 2.47], *Rhode-Swearengen-Krieg* [2.25, 2.26] und *Krempf* [2.65, 2.66]. Während bei den Modellen der ersten Gruppe zum großen Teil der phänomenologische Charakter überwiegt, wird bei denen der zweiten Gruppe häufig von der Betrachtung mikromechanischer Phänomene ausgegangen. Besonders deutlich wird dies bei dem stochastischen Modell von *Steck* [2.33, 2.34]. Darin wird von dem Verhalten sog. Fließeinheiten an Hindernissen ausgegangen und über Mittelwertformulierungen das makroskopische Materialverhalten beschrieben. Abschließend soll darauf hingewiesen werden, daß gelegentlich die Stoffgesetze dieser Gruppe im engeren Sinne als „vereinheitlicht“ bezeichnet werden [2.3].

In die dritte Gruppe sollen alle diejenigen Materialmodelle aufgenommen werden, die grundsätzlich andere Wege zur Beschreibung viskoplastischen Materialverhaltens beschreiten. Dabei ist vor allem die endochrone Theorie von *Valanis* [2.27] zu nennen, in der die Spannung als Integral der plastischen Dehnungsgeschichte berechnet wird, wobei als unabhängige Variable die sogenannte „interne Zeit“ verwendet wird. Durch Berücksichtigung der realen Zeit in der Definition dieser internen Größe ist es *Watanabe* und *Atluri* möglich, auch geschwindigkeitsabhängige Phänomene zu beschreiben [2.28, 2.29].

Ein anderes Konzept wird von *Krempf* und *Cernocky* bei ihrer auf Gesamtdehnung beruhenden Viskoplastizitätstheorie verwendet [2.30, 2.31]. Hierbei wird die Gleichgewichtsspannung bei Prozessen ohne Diffusion von der Gesamtdehnung abhängig gemacht. Bei Alterungsprozessen durch Diffusion tritt zusätzlich die Zeit als unabhängige Veränderliche auf

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma - \bar{\sigma}(\varepsilon, t)}{E \Phi(\sigma - \bar{\sigma}(\varepsilon, t))} \quad (2.12)$$

Seit 1984 geht *Krempf* jedoch von diesem Konzept zugunsten einer Formulierung mit Evolutionsgleichungen für interne Variable ab [2.32].

Auf den folgenden Seiten sollen typische und bekannte Vertreter der ersten beiden Gruppen vorgestellt und untersucht werden. Das jeweilige Modell wird beschrieben und seine konstitutiven Gleichungen angegeben. Dabei wurde versucht, die Bezeichnungsweisen vorsichtig einander anzugleichen, um die Lesbarkeit zu erleichtern. Anschließend werden aus der Literatur entnommene Ergebnisse einaxialer Testrechnungen angegeben, wobei so weit wie möglich auf Untersuchungen von AISI 316 oder - wenn dies nicht möglich ist - auf AISI 304 zurückgegriffen wird. Nach Hinweisen auf FE-Implementierungen und numerische Besonderheiten schließt jede Untersuchung mit einer Zusammenfassung der Vor- und Nachteile ab.

Auf einige grundsätzliche Probleme solcher Darstellungen soll hingewiesen werden: Die erste Schwierigkeit besteht darin, daß sich die meisten dieser Materialmodelle noch in der Entwicklungsphase befinden. Sie werden daher noch ständig modifiziert, so daß es manchmal unmöglich erscheint, von einem bestimmten Modell zu sprechen. Weiterhin müssen für Vergleiche, die über eine rein formale Untersuchung hinausgehen sollen, die Materialfunktionen und Parameter für ein bestimmtes Metall angegeben werden. Diese sind jedoch in der Regel nicht eindeutig identifizierbar, so daß Vergleiche notwendigerweise einer gewissen Willkür und Unvollständigkeit unterliegen.

2.1.1 Das Stoffgesetz von *Hart*

Grundlage seiner Arbeit ist die Aufspaltung der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\varepsilon}_i$ in einen anelastischen Teil \dot{a} , der gespeichert wird und der sich wieder abbauen kann, und einen Teil $\dot{\alpha}$, der keiner Erholung unterworfen ist und als im verallgemeinerten Sinne plastisch bezeichnet werden kann [2.35]

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_e + \dot{a} + \dot{\alpha} \quad (2.13)$$

Die anelastische Dehnung wird als Zustandsvariable angesehen und ist - ebenso wie α - ein Deviator. Sie beschreibt die durch die vorangegangene Belastungsgeschichte hervorgerufene Anisotropie und ist daher mit der kinematischen Verfestigung zu vergleichen. Als zweite Zustandsvariable

wird die Härte σ^* eingeführt, eine skalare Größe, die die isotrope Dehnungsverfestigung repräsentiert. Zur Formulierung der konstitutiven Gleichungen verwendet *Hart* noch die Zerlegung der Spannungen

$$\sigma' = \sigma'_a + \sigma'_f \quad (2.14)$$

sowie die Hilfsgröße $\dot{\epsilon}^*$, welche über einen *Arrheniusansatz* die Temperaturabhängigkeit von α beeinflusst. Unter Verwendung isotroper Tensorbeziehungen ergibt sich das System der konstitutiven Gleichungen zu

$$\dot{\epsilon}_i = \dot{a}^*(T) \left(\frac{\|\sigma'_f\|}{M} \right)^M \frac{\sigma'_f}{\|\sigma'_f\|} \quad (2.15)$$

$$\dot{\alpha} = \ln \left(\frac{\sigma^*}{\|\sigma'_a\|} \right)^{-1/\lambda} \dot{\epsilon}^* \frac{\sigma'_a}{\|\sigma'_a\|} \quad (2.16)$$

$$\frac{\dot{\sigma}^*}{\sigma^*} = \Gamma(\sigma^*, \|\sigma'_a\|) \sqrt{\dot{\alpha} \cdot \dot{\alpha}} - R(\sigma^*, T) \quad (2.17)$$

$$\dot{\epsilon}^* = \left(\frac{\sigma^*}{G} \right)^m f \exp \left(- \frac{Q}{RT} \right) \quad (2.18)$$

$$\sigma'_a = M a \quad (2.19)$$

Dabei sind M , M , m , λ und f Materialkonstante, Q die Aktivierungsenergie für Selbstdiffusion und R die Gaskonstante.

Die inelastische Dehnungsrate $\dot{\epsilon}_i$ folgt dem bei Kriechgesetzen häufig verwendeten *power-law* und weist in Richtung der Spannungen σ'_f , die als viskose Reibungsspannungen aufgefaßt werden können. Während in [2.35] die Funktion $a^*(T)$ noch als konstant angesetzt wird, muß in [2.36] bereits eine starke Abhängigkeit von der Temperatur angenommen werden. Das Evolutionsgesetz für die Härte σ^* enthält einen Term, der zur Dehnungsverfestigung beiträgt, und einen Erholungsterm, der jedoch bis zur halben Schmelztemperatur vernachlässigt werden kann. Der Zusammenhang zwischen anelastischen Dehnungen a und den zugeordneten Spannungen σ'_a ist linear elastisch.

Im folgenden soll versucht werden, das Stoffgesetz von *Hart* vom phänomenologischen Standpunkt aus zu interpretieren. Faßt man dazu σ'_a als kinematischen Verfestigungstensor auf und bezeichnet ihn in Analogie zu anderen Stoffgesetzen mit ξ , so folgt aus (2.14)

$$\sigma'_f = \sigma' - \sigma'_a = \sigma' - \xi \quad (2.20)$$

und σ'_f kann als Überspannung oder effektive Spannung bezeichnet werden. Damit läßt sich die inelastische Verzerrungsrate in der üblichen

Schreibweise als

$$\dot{\varepsilon}_i = \Phi(\|\sigma' - \xi\|, T) \frac{\sigma'_a - \xi}{\|\sigma'_a - \xi\|} = \Phi \mathbf{n} \quad (2.21)$$

darstellen. Weiterhin wird mit (2.19) in Verbindung mit (2.13) deutlich, daß das Evolutionsgesetz für σ'_a (bzw. ξ in der neuen Bezeichnungsweise) als lineare Dehnungsverfestigung mit Abklingterm aufgefaßt werden kann.

$$\dot{\xi} = M \dot{\varepsilon}_i - f(\sigma^*, \|\xi\|, T) \xi \quad (2.22)$$

Als nächstes werden einige numerische Untersuchungen des *Hartschen* Stoffgesetzes dargestellt, wobei wieder die ursprünglich benutzten Bezeichnungsweisen verwendet werden.

Die konstitutiven Gleichungen sind mathematisch außerordentlich steif und daher sehr schwierig zu integrieren [2.35]. Besondere Schwierigkeiten bietet das Evolutionsgesetz für die Rate $\dot{\alpha}$, wenn $\|\sigma'_a\|$ ungefähr die Größe der Härte σ^* erreicht hat. Dann nimmt $\dot{\alpha}$ wegen

$$\lambda \approx 0,15 \quad (2.23)$$

betragsmäßig sehr große Werte an, was zu plastischem Fließen führt. Numerisch zeigt sich diese Singularität durch Instabilität, weswegen *Kumar* und *Mukherjee* in der Umgebung dieser sog. viskoplastischen Grenze (2.16) durch

$$\dot{\alpha} = \frac{\|\dot{\varepsilon}_i\|}{1 + \frac{\sigma^* \Gamma}{M}} \frac{\sigma'_a}{\|\sigma'_a\|} \quad (2.24)$$

ersetzen [2.38 -2.40]. Nur damit war eine numerische Integration mit expliziten Algorithmen möglich. Erst *Cordts* und *Kollmann* [2.41] gelang mit Hilfe eines aufwendigen impliziten Algorithmus die numerische Integration des Systems (2.15)-(2.19). Dazu verwendeten sie die implizite *Eulerregel* und lösten das dabei entstehende nichtlineare Gleichungssystem mit einer Kombination aus *Newton-Raphson*- und beschleunigter *Jacobi*-Iteration.

In [2.42] wird das Stoffgesetz von *Hart* mit dem von *Miller* an Hand von einaxialen dehnungsgesteuerten monotonen und zyklischen Zugversuchen sowie Kriech- und Relaxationstests verglichen. Sie wurden für AISI 316 mit Hilfe der in [2.43] und [2.44] angegebenen Materialparameter durchgeführt, wobei der *recovery*-Term in (2.17) vernachlässigt wurde. Die Ergebnisse dieser numerischen Versuche sollen hier kurz zusammengefaßt werden: Bei Temperaturen bis etwa 550° C wird die Fließspannung sehr gut wiedergegeben, bei höheren Temperaturen sind die Abweichungen z.T.

beträchtlich (s. Abb. 2.2). Bei niedrigen Temperaturen wird der Einfluß der Dehnungsverfestigung geringfügig, bei hohen Temperaturen erheblich überschätzt.

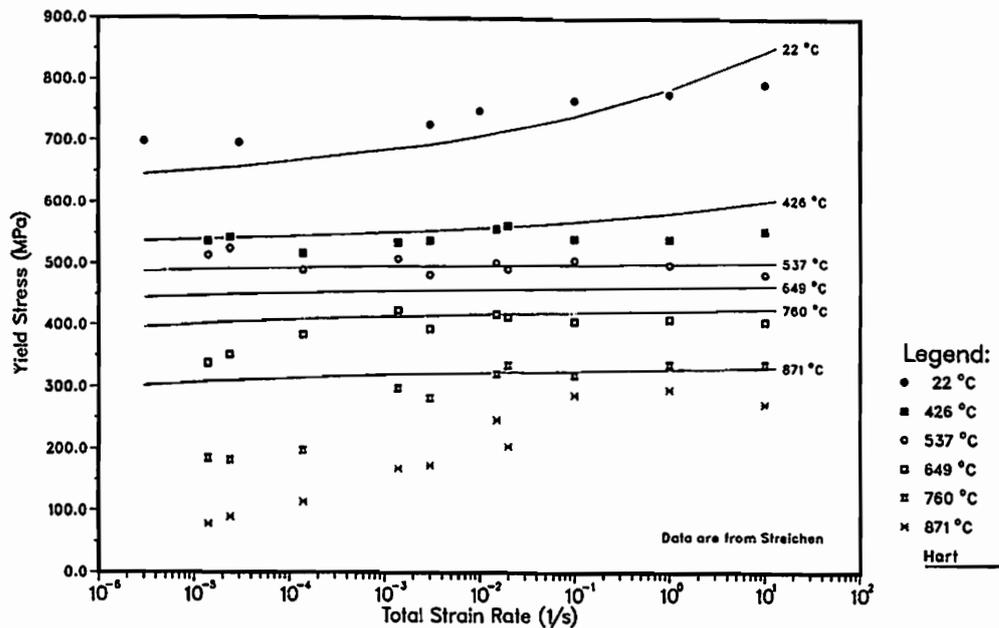


Abb. 2.2: Fließspannung von AISI 316 bei $\epsilon_i = 0,2\%$ in Abhängigkeit der Dehnungsgeschwindigkeit aus [2.42]

Bei zyklischen Tests weichen die Ergebnisse bei Raumtemperatur schon im 2. Zyklus um 100 % von den experimentell ermittelten Daten ab (s. Abb. 2.3). Das ist meines Erachtens darauf zurückzuführen, daß die Härte σ^* gemäß (2.17) viel zu stark mit $\dot{\alpha}$ anwächst (Γ nimmt nicht stark genug mit σ^* ab). Insgesamt fällt bei Zugversuchen auf, daß der transiente Teil der Spannungsdehnungskurve viel zu scharf wiedergegeben wird.

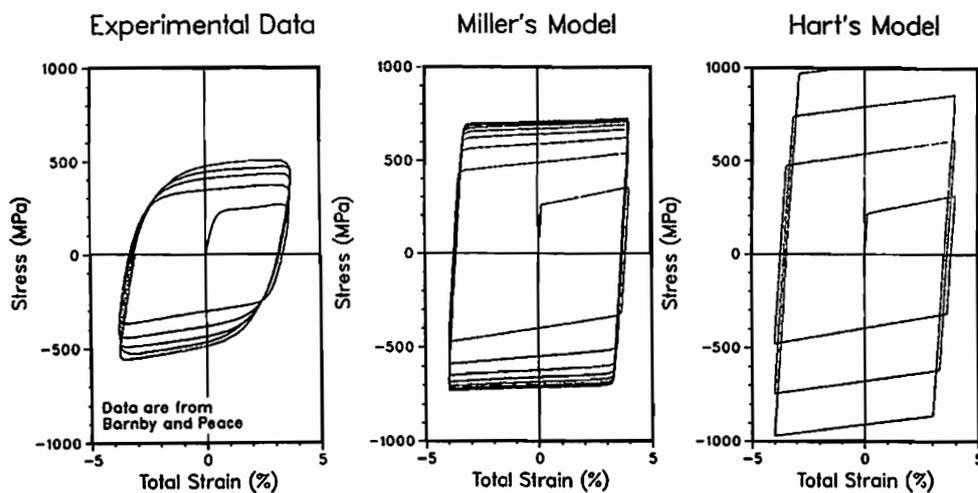


Abb. 2.3: Zyklische $\sigma - \epsilon$ -Kurven von AISI 316 bei 22 ° C und $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ aus [2.42]

Bei Relaxationsrechnungen ergeben sich sehr gute Übereinstimmungen zwischen Rechnungen und Experimenten. Der Grund dafür liegt darin, daß die entscheidende Materialfunktion $\Gamma(\sigma^*, \|\sigma'_a\|)$ mit Hilfe von Relaxationsversuchen bestimmt wird.

Als wesentlicher Nachteil des Stoffgesetzes von *Hart* wird in [2.42] angeführt, daß mit dem verwendeten Parametersatz keine realistischen Kriechkurven nachgerechnet werden konnten. Dies gelang erst mit einem neuen Wert für die Konstante f in (2.18) (s. a. Abb. 2.4).

Das abschließende Urteil in [2.42] über die Stoffgesetze von *Hart* und *Miller* besagt, daß es bisher nicht sinnvoll erscheint, sie in FE-Programme zu implementieren. Beide weisen selbst bei einaxialer Prozeßführung teilweise so große Abweichungen vom experimentell beobachteten Verhalten auf, daß sie erheblich verbessert werden müßten.

2.1.2 Das Stoffgesetz von *Miller*

Obwohl *Miller* [2.45] den phänomenologischen und makroskopischen Charakter seines Modells betont, baut er auf der Betrachtung mikromechanischer Mechanismen auf und verwendet Ansätze aus der Werkstoffwissenschaft. Ziel dieses Modells ist die Beschreibung des Hochtemperaturverhaltens unter besonderer Berücksichtigung von Kurzzeitplastizität (zyklische Ver- und Entfestigung, Bauschinger- und Dehnungsrateneffekte) sowie des Kriechens. Dazu wurde ein Materialgesetz vom vereinheitlichten Typ mit zwei internen Variablen entwickelt, welche die Verfestigung beschreiben sollen. Die isotrope Verfestigung, welche durch Korngrenzen, gelöste Atome, ausgefällte Teilchen und Versetzungsknäuel bewirkt wird, soll mit einer als *drag stress* D bezeichneten Variablen erfaßt werden. Die kinematische Verfestigung ξ wird von *Miller rest stress* genannt und entsteht durch Versetzungsanhäufungen und Durchbiegung von an Hindernissen fixierten Versetzungen.

Zur Entwicklung der konstitutiven Gleichungen geht *Miller* vom Fall stationären Kriechens aus, welches er durch einen modifizierten Ansatz vom *Garofalo*-Typ beschreibt

$$\dot{\epsilon}_i = B \Theta \cdot (T) \left\{ \sinh \left(\frac{\sigma' - \xi}{\sqrt{g}} \right)^{1,5} \right\}^n, \quad (2.25)$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_e + \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\epsilon}_i \frac{\sigma' - \xi}{\|\sigma' - \xi\|} = \dot{\epsilon}_e + \Phi \left(\frac{\sigma' - \xi}{\sqrt{g}}, T \right) \mathbf{n}. \quad (2.26)$$

Dabei wurde – im Gegensatz zu [2.45] – die dreidimensionale Formulierung gewählt [2.50], und die kinematische Verfestigung anstelle von \mathbf{R} mit

ξ und die isotrope Verfestigung anstelle von D mit \sqrt{g} bezeichnet, um so einen einfacheren Vergleich mit anderen Stoffgesetzen zu ermöglichen. Sinus-hyperbolicus-Ansätze werden häufig bei speziell für Kriechen entwickelte Stoffgesetze verwendet, um auch den Bereich hoher Spannungen zu erfassen, wenn das *Nortonsche* Gesetz nicht mehr gilt (sog. *power-law break-down*) [2.46]. B bezeichnet eine Bezugsdehnungsrate, und mit der Materialfunktion Θ' kann die Temperaturabhängigkeit der konstitutiven Gleichungen vollständig durch einen modifizierten *Arrheniusansatz* modelliert werden.

Die Evolutionsgleichungen für *rest stress* ξ und *drag stress* \sqrt{g} bestehen aus einem Verfestigungs- und einem Erholungsterm. Sie werden so bestimmt, daß die internen Variablen bei konstanter Spannung diejenigen Grenzwerte annehmen, die zur Beschreibung stationären Kriechens erforderlich sind. In [2.45, 2.47] werden die konstitutiven Gleichungen für SS 304 angegeben, die hier für den dreidimensionalen Fall mit den neuen Bezeichnungen

$$\dot{\xi} = H_1 \left\{ \dot{\epsilon}_i - \sqrt{\frac{3}{2}} B \Theta' \left(\sinh \left(A_1 \sqrt{\frac{3}{2}} \|\xi\| \right) \right)^n \frac{\xi}{\|\xi\|} \right\} \quad (2.27)$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\sqrt{g}} = H_2 \left\{ C_2 + \|\xi\| - \frac{A_1}{A_2} g^{3/2} \right\} \dot{\epsilon}_i \\ - H_2 C_2 B \Theta' \left(\sinh \left(A_2 g^{3/2} \right) \right)^n \end{aligned} \quad (2.28)$$

lauten. Die Evolutionsgleichungen sind ähnlich aufgebaut: Der anwachsende Teil ist proportional zur inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeit, und der abklingende Teil enthält jeweils die Temperaturfunktion Θ' und den Sinus-hyperbolicus mit der internen Variablen als Argument. Auf die Konsequenzen der Verwendung dieser rasch ansteigenden Funktion wird später noch eingegangen.

Für andere Materialien werden erweiterte Evolutionsgleichungen angesetzt. So wird für AISI 316 die isotrope Verfestigung nicht durch \sqrt{g} allein, sondern noch durch zwei zusätzliche Variablen beschrieben, um den Einfluß von gelösten Atomen auf die Reibungsspannung besser erfassen zu können [2.48]. Jedoch führen diese Terme zu der sogenannten negativen Dehnungsratenabhängigkeit, d.h. negativem Gradienten der Fließspannung in Abhängigkeit der Dehnungsrate [2.42]. Dieser Effekt führt zu numerischen Problemen, beispielsweise einem Oszillieren der $\sigma - \epsilon$ - Kurve, was sehr kleine Schrittweiten bei der numerischen Integration erfordert und physikalisch unsinnig ist.

Überhaupt scheint das Stoffgesetz von *Miller* besonders sensibel in bezug auf numerische Integration zu sein: Bereits in [2.45] wird auf die Schwier-

rigkeiten hingewiesen, die aus der mathematischen Steifheit des Differentialgleichungssystems resultieren. *Miller* verwendet in seinem MATMOD (*Materials Model*) genannten Programm den für solche Systeme besonders geeigneten Algorithmus von *Gear*, während in [2.42] die implizite *Eulerregel* mit *Newton*-Iteration bevorzugt wird. Interessant ist, daß *Hartmann* in [2.49] dagegen die explizite *Eulerregel* benutzt. Er nimmt die dabei erforderliche sehr kleine Schrittweite in Kauf, um die Genauigkeit zu erhöhen. Jedoch führen die aus der negativen Dehnungsratenabhängigkeit und der mathematischen Steifheit herrührenden Probleme dazu, daß bis 1987 keine FE-Version des *Millerschen* Stoffgesetzes existiert. Um diese Schwachstellen zu beheben, schlagen *Tanaka* und *Miller* [2.50] ein besonderes Integrationsverfahren vor, welches stabil und nicht-iterativ ist und auch bei negativer Dehnungsratenabhängigkeit zufriedenstellend arbeitet. Es soll so den Einbau des Stoffgesetzes in FE-Programme überhaupt erst ermöglichen. Daher ist es auf den ersten Blick um so erstaunlicher, daß *Schwesig* [2.16] bei seinen vergleichenden Untersuchungen der Modelle von *Chaboche-Rousselier*, *Hart* und *Miller*, die auch FE-Rechnungen umfassen, dem Materialgesetz von *Miller* gutmütiges numerisches Verhalten bescheinigt. Die Ursache hierfür liegt wohl darin, daß als Werkstoff AISI 304 bei 500° C verwendet wurde, bei dem die konstitutiven Gleichungen nicht auf negative Dehnungsratenabhängigkeit führen.

Im folgenden sollen die Ergebnisse einiger einaxialer numerischer Testrechnungen angegeben werden, die in [2.42] für AISI 316 mit Materialparametern aus [2.48] und in [2.49] für Hastelloy-X durchgeführt werden.

In [2.42] wurde zunächst die Fließspannung bei 0,2 % plastischer Dehnung mit der Temperatur als Parameter ermittelt. Die Übereinstimmung mit experimentell gefundenen Daten ist bis 649° C recht gut, bei höheren Temperaturen wird die Fließspannung deutlich zu groß berechnet.

Die $\sigma - \epsilon$ - Kurven zeigen einen viel zu eckigen Übergang. Bei zyklischen, dehnungsgesteuerten Prozessen wird ein Grenzyklus nach etwa 6 Zyklen erreicht, was gut mit Experimenten übereinstimmt, die Verfestigung ist jedoch um etwa 40 % zu hoch (s. Abb. 2.3). Erstaunlich ist jedoch vor allem, daß mit den hier verwendeten Materialparametern Kriechprozesse nur sehr ungenau berechnet werden (Abb. 2.4).

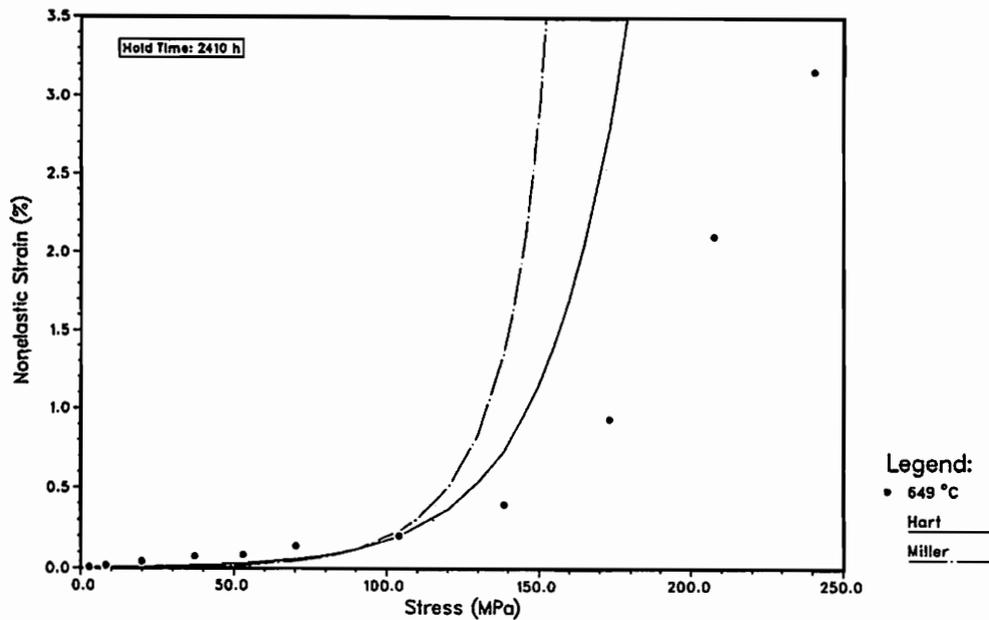


Abb. 2.4: Kriechdehnung bei AISI 316 nach 2410 h und $T = 649^{\circ} \text{C}$ aus [2.42]

Die Kriechdehnung wird bei Spannungen kleiner als 100 MPa deutlich unterschätzt, bei Spannungen größer als 100 MPa erheblich überschätzt, obwohl die Grundlage der konstitutiven Gleichungen ein Gesetz bildet, welches sich besonders für die Beschreibung von Kriechprozessen eignet. *Hartmann* kommt in [2.49] zu insgesamt ähnlich unbefriedigenden Ergebnissen. Es fällt auf, daß bei dem von ihm untersuchten Parametersatz bereits der 1. Zyklus zu Sättigung führt (Abb. 2.5).

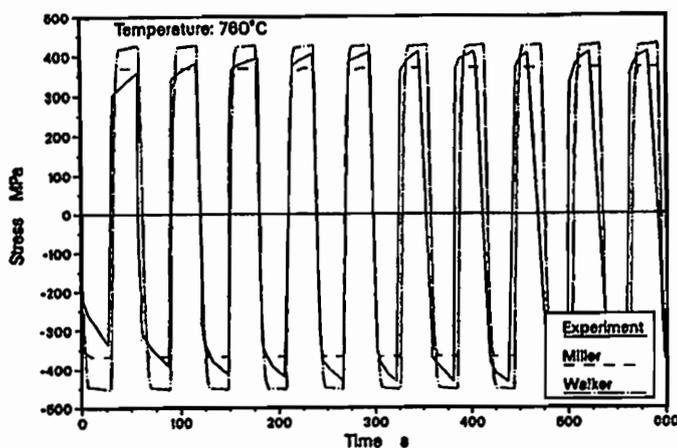


Abb. 2.5: Zyklische $\sigma - \epsilon$ - Kurven von Hastelloy-X bei 760°C und $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ aus [2.49]

Er begründet dieses Verhalten mit der Evolutionsgleichung für die isotrope Verfestigung \sqrt{g} : Stationäres Verhalten tritt auf, wenn der Verfestigungsterm ebenso groß ist wie der Erholungsterm. Der zweite Term ist jedoch durch Verwendung des Exponenten $\frac{3}{2}$ im Sinushyperbolicus und $n = 1,598$ sehr stark von \sqrt{g} abhängig, was dazu führt, daß Stationarität viel zu schnell erreicht wird. *Hartmann* schlägt daher eine Modifikation dieser Entwicklungsgleichung vor.

Abschließend ist festzustellen, daß das Stoffgesetz von *Miller* bereits bei einaxialen Prozessen nur teilweise befriedigende Ergebnisse zeigt. Eine Stärke der ursprünglichen Fassung [2.45] liegt in der geringen Anzahl von Materialparametern, eine für die Anwendung besonders große Schwäche in seiner numerischen Empfindlichkeit, was es für FE-Rechnungen (zumindest für AISI 316) weitgehend auszuschließen scheint.

2.1.3 Das Stoffgesetz von *Chaboche*

Das Ziel bei der Entwicklung dieses viskoplastischen Stoffgesetzes war vor allem die Beschreibung zyklischer Prozesse. Das Modell von *Chaboche* ist rein phänomenologisch und modulartig aufgebaut [2.51], um möglichst viele Effekte darstellen zu können. Seine wesentlichen Kennzeichen sind die Aufspaltung der Dehnungsrate in einen elastischen und einen inelastischen Anteil, die Existenz einer Fließgrenze, verschiedene komplexe Verfestigungsregeln sowie die Verwendung einer sogenannten Gedächtnisfläche im inelastischen Dehnungsraum. *Chaboche* bezeichnet sein Modell als vereinheitlicht, da es nicht zwischen plastischen und Kriechdehnungsraten unterscheidet. *Krempf* dagegen benutzt den Ausdruck „vereinheitlicht“ nur für Modelle vom *Hartschen* Typ, die keine Fließfläche verwenden [2.3].

Bei Verwendung der verallgemeinerten *v. Misesschen* Fließbedingung

$$F = (\sigma' - \xi) \cdot (\sigma' - \xi) - \frac{2}{3} (R + k)^2 \quad (2.29)$$

ergibt sich die Überspannung gemäß *Chaboche* zu

$$\Lambda = \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma' - \xi) \cdot (\sigma' - \xi)} - (R + k) \quad (2.30)$$

Es wird nun angenommen, daß die inelastischen Dehnungsinkremente in Richtung der Normalen an die Fließfläche erfolgen und daß ihr Betrag sich als Potenzfunktion der Überspannung ausdrücken läßt [2.52]

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_e + \sqrt{\frac{3}{2}} \left\langle \frac{\Lambda}{k} \right\rangle^n \mathbf{n} \quad , \quad (2.31)$$

wobei k als *drag stress* aufgefaßt werden kann [2.51]. In [2.53] wird für

AISI 316 L ein modifizierter Ansatz angegeben, der noch zusätzlich einen von $\frac{\Lambda}{k}$ abhängigen Exponentialterm enthält.

Der Schlüssel zur Beschreibung zyklischen Materialverhaltens ist die nicht-lineare kinematische Verfestigung ξ [2.54, 2.57]. Sie soll die schnellen Veränderungen bei plastischem Fließen erfassen. Ausgangspunkt bildet der Ansatz nach *Armstrong* und *Frederick* [2.55], der durch Erweiterung der linearen *Pragerschen* Verfestigung entsteht

$$\dot{\xi} = \frac{2}{3} c \dot{\epsilon}_i - \gamma \dot{p} \xi$$

mit

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_i \cdot \dot{\epsilon}_i} \quad . \quad (2.33)$$

Um komplexeres Verhalten nachbilden zu können, wird seit etwa 1981 die kinematische Verfestigung durch

$$\xi = \sum_{j=1}^M \xi_j \quad (2.34)$$

beschrieben. Dabei wird M gewöhnlich gleich 2 gesetzt, um Nah- und Fernwirkung der internen Spannungen zu trennen [2.53]. Es läßt sich zeigen [2.56], daß sich Ansätze der Form (2.32) als Zwei-Flächen-Modelle mit *Mroz'scher* Translationsregel auffassen lassen.

Die isotrope Verfestigung wird durch die Evolution der internen Variablen R dargestellt, während k den anfänglichen Fließflächenradius bezeichnet (2.29). Aus Experimenten ist bekannt, daß sich die isotrope Verfestigung bei monotoner Belastung nur langsam entwickelt und bei zyklischer Belastung einen Grenzwert annimmt. Zur mathematischen Modellierung dieses Verhaltens werden zwei Möglichkeiten vorgeschlagen [2.51]:

Die erste Möglichkeit besteht in der Verwendung einer Evolutionsgleichung für R der Form

$$\dot{R} = b (Q - R) \dot{p} \quad , \quad (2.35)$$

wobei Q den Grenzradius der Fließfläche beschreibt.

Die zweite, zum ersten Mal von *Marquis* [2.57] vorgeschlagene Möglichkeit besteht in einer Modifikation des Abklingterms im Evolutionsgesetz der kinematischen Verfestigung (2.33). Die darin auftretende Funktion hängt von der inelastischen Dehnung p ab, was jedoch aus thermodynamischer Sicht zumindest umstritten ist.

Ein großer praktischer Vorteil der Ansätze (2.32) und (2.35) besteht darin, daß sie sich im Falle einaxialer zyklischer Zug-Druckbelastung und konstanter Überspannung Λ analytisch integrieren lassen. Bei verschwindender

Überspannung ergibt sich beispielsweise

$$\sigma = \pm \left\{ k + Q + (R_0 - Q) \exp(-b (\varepsilon_{p0} - \varepsilon_p)) \right\} + \left(\frac{2}{3} \xi_0 \mp \frac{c}{\gamma} \right) \exp(\mp \gamma (\varepsilon_{p0} - \varepsilon_p)) \pm \frac{c}{\gamma} , \quad (2.36)$$

wobei der Index 0 die Anfangswerte bei jedem Halbzyklus bezeichnet und das obere Vorzeichen für Zug-, das untere für Druckbelastung gültig ist. Damit erleichtert sich die experimentelle Bestimmung der Materialparameter erheblich.

Weiterhin läßt sich zeigen, daß sich die Endsteigung im Zugbereich von der Anfangssteigung bei nachfolgender Druckbelastung um den Wert

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} \right)_{\text{Zug}} - \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon_p} \right)_{\text{Druck}} = -3 \gamma \xi \quad (2.37)$$

unterscheidet, wodurch ein zu steiler Anstieg der Spannungsdehnungskurve bei Belastungsumkehr vermieden werden kann.

Experimentelle Untersuchungen zeigen, daß der asymptotische Wert der zyklischen Verfestigung auch von der Vorgeschichte abhängt. Dieses Phänomen kann weder mit der kinematischen Verfestigung nach (2.32) noch mit der isotropen Verfestigung gemäß (2.35) beschrieben werden. *Chaboche* führt daher eine sogenannte Gedächtnisfläche im inelastischen Dehnungsraum ein

$$F^* = (\varepsilon_i - \zeta) \cdot (\varepsilon_i - \zeta) - \frac{3}{2} \rho^2 . \quad (2.38)$$

Plastisches Fließen innerhalb dieser Fläche ändert nicht den Gedächtniszustand, der durch die neuen internen Variablen ζ und ρ ausgedrückt wird. Sind dagegen die „Gedächtnisbedingung“

$$F^* = 0 \quad (2.39)$$

und die „Belastungsbedingung“

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_i} \cdot \dot{\varepsilon}_i > 0 \quad (2.40)$$

erfüllt, so wachsen sie gemäß

$$\dot{\rho} = \eta \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^* \dot{\rho} \quad (2.41)$$

und

$$\dot{\zeta} = \sqrt{\frac{3}{2}} (1 - \eta) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^* \dot{\rho} \mathbf{n}^* \quad (2.42)$$

an, wobei \mathbf{n} und \mathbf{n}^* die Normaleneinheitstensoren an Fließ- und Gedächtnisfläche bezeichnen. Die interne Variable ρ steuert über

$$\dot{Q} = 2 \mu (Q_m - Q) \dot{\rho} \quad (2.43)$$

den asymptotischen Wert des Fließflächenradius. Da ρ von der zyklischen Dehnungsschwingweite $\Delta \varepsilon_i$ abhängt, ist es so möglich, das unterschiedliche Ver- und Entfestigungsverhalten bei verschiedenen Schwingweiten zu modellieren. Beispielsweise ergibt sich bei zyklischer Zug - Druckbelastung und $\eta = 0,5$ der Wert

$$\rho = \frac{\Delta \varepsilon_i}{2} , \quad (2.44)$$

woraus

$$R_\infty = Q_M + (Q_0 - Q_M) e^{-\mu \Delta \varepsilon_i} \quad (2.45)$$

folgt.

Wesentlicher Kritikpunkt bei der Verwendung dieser Gedächtnisfläche ist, daß sie im inelastischen Dehnungsraum definiert wird. Plastische Dehnungen lassen sich gemäß [2.19] nicht als Zustandsvariablen verwenden. Daher führt *Pape* beispielsweise eine Gedächtnisfläche im Spannungsraum ein, die er als Mikrofläche bezeichnet [2.58].

Es existieren zahlreiche Modifikationen und Erweiterungen der hier vorgestellten konstitutiven Gleichungen. So wurden beispielsweise die Evolutionsgleichungen für kinematische und für isotrope Verfestigung um Terme erweitert, die keine Raten enthalten. Damit ist es möglich, zeitliche Erholung zu modellieren. Die große Vielfalt des Stoffgesetzes von *Chaboche* führt dazu, daß sich zahlreiche Parallelitäten zu anderen Theorien ergeben. So ist beispielsweise das plastische 2-Flächenmodell mit einer Gedächtnisfläche von *Ohno* und *Kachi* [2.59] unter stabilen zyklischen Bedingungen vollständig analog zu der plastischen Fassung des Stoffgesetzes von *Chaboche* [2.51].

In [2.53] werden numerische Ergebnisse für AISI 316 L bei 600° C mit experimentellen Daten verglichen. Dabei wurde der oben erwähnte modifizierte Ansatz für das viskoplastische Potential verwendet, um den sich pro Dehnungsgeschwindigkeitsdekade verringernden Abstand zweier $\sigma - \varepsilon$ - Kurven wiedergeben zu können. Weiterhin wurden in den Evolutionsgesetzen für isotrope und kinematische Verfestigung Zusatzterme für zeitliche Erholung berücksichtigt. Eine komplexe Prozeßführung bei einaxialem Kriechen ergibt bei dem untersuchten Zeitintervall nur mäßige Abweichungen (Abb. 2.6).

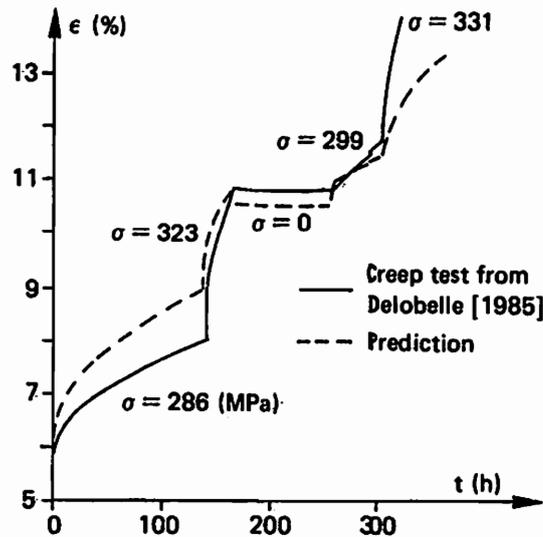


Abb. 2.6: Kriechdehnungen von AISI 316 L bei 600° C und verschiedenen Spannungsniveaus aus [2.53]

Da sich jedoch die Endsteigungen jedes Belastungsabschnittes deutlich unterscheiden, sind bei längeren Haltezeiten große Unterschiede zu erwarten. Dagegen liegen die zyklischen Sättigungskurven bei $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ nahezu deckungsgleich auf den gemessenen (Abb. 2.7).

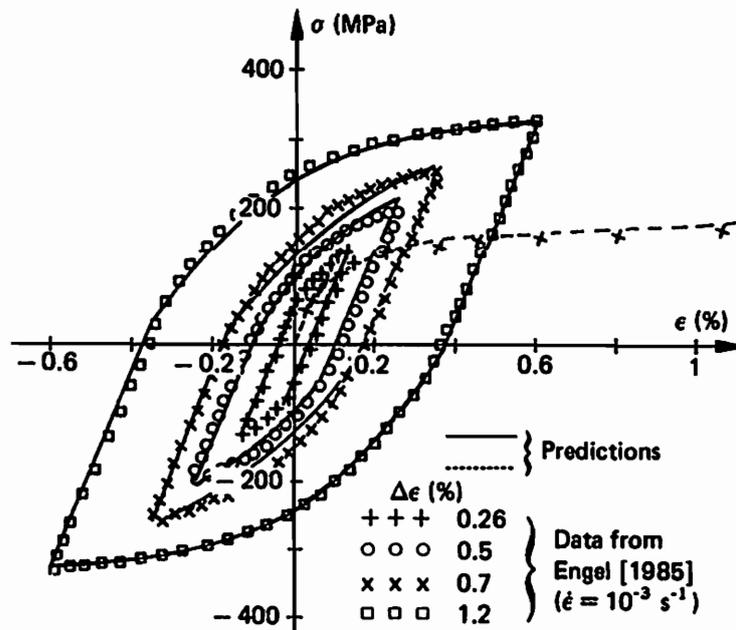


Abb. 2.7: Zyklische $\sigma - \epsilon$ - Kurven von AISI 316 L bei 600° C und $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ aus [2.53]

Eftis et al. [2.60] vergleichen die Vorhersagen des Modells von *Chaboche* mit denen von *Bodner-Partom*. Sie benutzten das Modell in einer nach *Abdel-Kader et al.* modifizierten Version mit geschwindigkeitsabhängiger Fließfläche, jedoch ohne Gedächtnisfläche. Das Modell ist in der Lage, die bei INCONEL 718 und hohen Temperaturen auftretende zyklische Entfestigung wiederzugeben. Es wird jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß der „optimale“ Parametersatz zur Beschreibung komplexer Belastungsgeschichten nur durch *trial and error* ermittelt werden kann, da sich die Einflüsse aller Materialfunktionen überlagern.

In [2.61] werden Ergebnisse zweier FE-Rechnungen mit dem Programm EVPCYCL vorgestellt. Dabei wurden eine gekerbte Probe unter zyklischer Last mit Haltezeiten und ein dünnes Rohr unter konstanter Last und zyklischem Temperaturgradienten jeweils aus AISI 316 L untersucht. Um im zweiten Fall befriedigende Übereinstimmung mit Meßergebnissen zu erhalten, mußte die kinematische Verfestigung verringert werden.

Abschließend kann festgehalten werden, daß das Stoffgesetz von *Chaboche* wegen seines modulartigen Aufbaus zahlreiche Effekte erfassen kann. Die Vielzahl seiner Materialparameter ermöglicht es, auch komplexe Belastungsgeschichten hinreichend genau nachzurechnen. Dieser Vorteil ist jedoch gleichzeitig ein großer praktischer Nachteil, da die Bestimmung dieser Parameter aus einfachen Standardversuchen nur iterativ möglich ist [2.60]. Auch das in [2.61] angegebene Verfahren der nachträglichen Korrektur von Materialparametern bei FE-Rechnungen erscheint fragwürdig. Der von *Chaboche* angegebene Grenzübergang zu elastisch-plastischem Materialverhalten durch $n \rightarrow \infty$ in (2.31) [2.51] - also der Einarbeitung einer Nebenbedingung durch eine Straffunktion - führt zu einem völlig geschwindigkeitsunabhängigen Stoffgesetz und nicht zu einem quasistatischen Grenzfall. Daher gelingt keine Trennung der Materialfunktionen, die für das quasistatische Verhalten maßgebend sind, von denen, die viskose Effekte modellieren. Auf die aus thermodynamischer Sicht kritische Verwendung von ϵ_i als Zustandsvariable in der Gedächtnisfläche wurde bereits hingewiesen.

2.1.4 Das Stoffgesetz von *Krempf*

Das Stoffgesetz von *Krempf* kann als vereinheitlichte Theorie ohne Fließ- und Belastungsbedingung auf der Basis des Überspannungskonzeptes charakterisiert werden. Hier sollen zunächst die in [2.62] vorgeschlagenen konstitutiven Gleichungen behandelt und diskutiert werden. Daran anschließend wird eine verbesserte Fassung dieses Modells vorgestellt und auf einige Gemeinsamkeiten mit dem INTERATOM-Modell von *Bruhns* [2.63] hingewiesen.

Ein wichtiger Grundgedanke der Theorie von *Krempf* ist die Aufteilung der aktuellen Spannungen σ in einen viskosen Anteil, die Überspannung, und einen plastischen Anteil, die Gleichgewichtsspannung $\bar{\sigma}$ (von *Krempf* mit g bezeichnet). Die Gleichgewichtsspannung spielt formal die Rolle der kinematischen Verfestigung in der klassischen Plastizitätstheorie. Physikalisch wird sie von *Krempf* jedoch anders als diejenige Spannung definiert, die das Material bei verschwindenden Raten ertragen kann [2.66]. Die inelastische Verzerrungsrate wird allein von der deviatorischen Überspannung abhängig gemacht

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_e + \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{k(\Lambda)} (\sigma' - \bar{\sigma}') \quad (2.46)$$

mit

$$\Lambda = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\sigma' - \bar{\sigma}'\|. \quad (2.47)$$

Die inelastische Verzerrungsgeschwindigkeit weist in Richtung des Überspannungsdeviators, was nach [2.3] durch von *Phillips* durchgeführte Experimente [2.64] abgesichert ist. Da somit der Überspannung die zentrale Rolle in *Krempfs* Stoffgesetz zukommt, nennt er seine Theorie auch VBO (*viscoplasticity theory based on overstress*).

In (2.46) ist k die positive, begrenzte, fallende Viskositätsfunktion, die die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Evolutionsgleichungen steuert. Da

$$k(\Lambda = 0) \neq 0 \quad (2.48)$$

gilt, hat das Modell von *Krempf* wie andere Überspannungsmodelle den prinzipiellen Schwachpunkt, daß der Grenzfall quasistatischer Prozesse nicht auf plastisches, sondern rein elastisches Materialverhalten führt. Das steht im Gegensatz zum grundlegenden physikalischen Ansatz des Überspannungskonzeptes (s.o.).

Für die Gleichgewichtsspannung $\bar{\sigma}$ wird in [2.66]

$$\dot{\bar{\sigma}} = \psi(\Lambda) \mathbf{T} \cdot \dot{\epsilon} - (\bar{\sigma} - f) \frac{\dot{\Phi}}{b(\Lambda)} \quad (2.49)$$

mit

$$\dot{\Phi} = \left(\frac{1}{1-2\nu^2} \dot{\epsilon}_i \cdot \dot{\epsilon}_i \right)^{1/2} \quad (2.50)$$

angegeben. Darin ist \mathbf{T} ein Tensor 4. Stufe, der aus dem Elastizitätstensor durch Division mit E hervorgeht. ψ wird als Formfunktion bezeichnet, da sie die Gestalt der $\sigma - \epsilon$ - Kurven beeinflusst, und der Spannungstensor f soll gemäß

$$\dot{f} = E_{t\infty} T \dot{\varepsilon} \quad (2.51)$$

die mathematische Modellierung des asymptotischen Verlaufs der $\sigma - \varepsilon$ - Kurven ermöglichen. Die Funktion b soll mit

$$b = \frac{A}{\psi(\lambda) - E_{t\infty}} \quad (2.52)$$

eine geschwindigkeitsunabhängige asymptotische Lösung für die Gleichgewichtsspannung ergeben. In [2.65] wird für den Grenzwert im einaxialen Zugversuch

$$(\bar{\sigma} - f)_{\infty} = \left(\Psi - \frac{df}{d\varepsilon} \right)_{\infty} \left(\frac{b}{\dot{\varepsilon}_i} \right)_{\infty} \dot{\varepsilon} \quad (2.53)$$

angegeben, woraus mit (2.51) und (2.52)

$$\sigma_{\infty} - E_{t\infty} \varepsilon_{\infty} = A \frac{\dot{\varepsilon}_{\infty}}{\dot{\varepsilon}_{i\infty}} = A \frac{E}{E - E_{t\infty}} \quad (2.54)$$

folgt. Man erkennt, daß A nicht - wie in [2.62, 2.65] und [2.66] behauptet - gleich der asymptotischen Differenz von $\bar{\sigma}$ und f ist, sondern daß dieses nur in guter Näherung zutrifft.

Die Evolutionsgleichungen von *Krempf* weisen im Vergleich zu anderen vereinheitlichten Modellen einige Besonderheiten auf. Die erste besteht darin, daß keine zeitliche Erholung oder Ausheilung modelliert werden kann, da entsprechende Terme in (2.48) fehlen. Die zweite, wesentliche Einschränkung ist die Annahme rein kinematischer Verfestigung, welches einer konstanten *drag stress* \sqrt{g} entspricht. *Krempf* begründet dieses in [2.3] mikromechanisch unter Zitierung der Versuche von *Gilman* [2.10], in [2.66] dagegen phänomenologisch: Wird

$$\dot{\varepsilon}_i = F \left(\frac{\sigma - \bar{\sigma}}{\sqrt{g}} \right) \quad (2.55)$$

nach der Überspannung aufgelöst

$$\sigma - \bar{\sigma} = \sqrt{g} F^{-1}(\dot{\varepsilon}_i), \quad (2.56)$$

so wird deutlich, daß bei zyklisch ansteigendem Wert von \sqrt{g} der viskose Anteil der Spannung ebenfalls zunimmt. Bei einigen Materialien (z.B. AISI 304) zeigen jedoch Experimente einen annähernd konstanten Anteil (s. vor allem die Untersuchungen von *Krempf* und *Lu* in [2.68]). Deshalb entwickelte *Krempf* ein zyklisch neutrales Modell, um später je nach Material den Einfluß der Verfestigung auf die viskose oder die plastische Spannungskomponente zu berücksichtigen.

Ein prinzipieller Einwand kann gegen die unübliche Verwendung von $\dot{\epsilon}$ anstelle von $\dot{\epsilon}_i$ im Evolutionsgesetz für die Gleichgewichtsspannung gemacht werden: Zustandsvariable sollten sich nicht aufgrund reversibler Deformationen ändern. In [2.65] wird jedoch pragmatisch mit Hilfe numerischer Testrechnungen gezeigt, daß nur durch diesen Ansatz quasi-elastisches Verhalten bei Entlastung zu modellieren ist.

Für das VBO-Modell in der hier vorgestellten Fassung gibt es nur wenige veröffentlichte Vergleiche mit experimentell ermittelten Daten. Für den Stahl AISI 104 wurde die Materialantwort auf sprunghafte Änderungen der Dehnungsgeschwindigkeit bestimmt und für eine Aluminiumlegierung (6061 T6), welche zyklisch neutrales Verhalten zeigt, wurden die Antworten bei komplexer zweiachsender Prozeßführung berechnet [2.62].

Bei den erstgenannten Tests fallen die im Vergleich zu Experimenten zu großen Über- und Unterschwinger auf, jedoch nähert sich die berechnete $\sigma - \epsilon$ - Kurve derjenigen bei konstanter Dehnungsrate (Abb. 2.8)

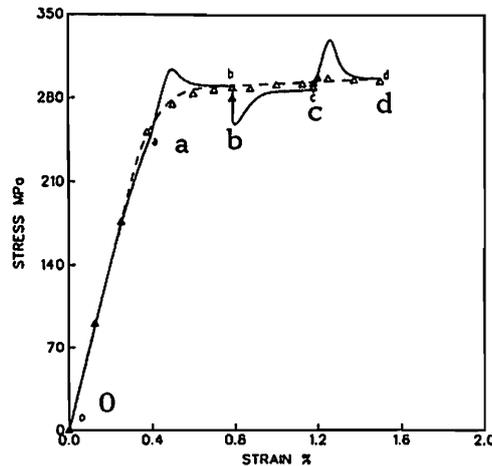


Abb. 2.8: Spannungsantwort von AISI 104 bei sprunghafter Änderung der Dehnungsgeschwindigkeit (0 - a und b - c: $\dot{\epsilon} = 3,8 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$, a - b und c - d: $\dot{\epsilon} = 3,8 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$), experimentelle Ergebnisse: Dreieckssymbole, Rechenergebnisse: durchgezogene Linie, Vergleichsrechnung bei $\dot{\epsilon} = 3,8 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$: gestrichelte Linie aus [2.62]

Die zyklischen Berechnungen ergeben sowohl bei proportionaler als auch nichtproportionaler Belastung sehr gute Übereinstimmungen mit Experimenten. Abb. 2.9 zeigt gemessene und berechnete Axial- und Schubspannungen in Abhängigkeit von Längs- bzw. Schubdehnung bei wechselnden radialen Belastungen.

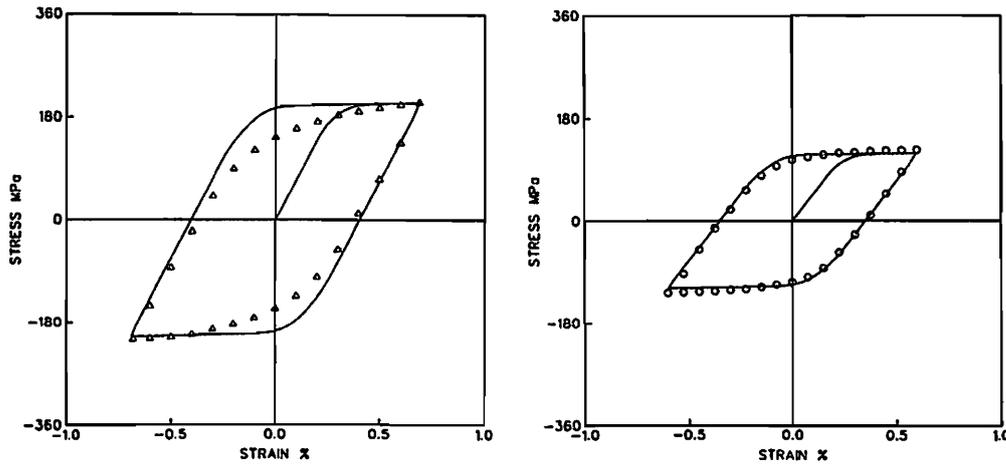


Abb. 2.9: Axial- und Schubspannung in Abhängigkeit von Längs- und Schubdehnung der Aluminiumlegierung 6061 T6 bei Raumtemperatur; zyklische, radiale Belastung mit $\dot{\epsilon}_{11} = \pm \sqrt{3} \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ und $\dot{\epsilon}_{12} = \pm 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ aus [2.62]

Die in [2.66] vorgestellten Rechnungen für Relaxation und Kurzzeitkriechen bei einer Nickellegierung zeigen jedoch nur mäßig befriedigende Ergebnisse. Das ist darauf zurückzuführen, daß alle Materialkonstanten bereits durch Zugversuche festliegen, was meines Erachtens einen großen praktischen Nachteil des VBO-Modells darstellt.

Auf besondere numerische Probleme wird weder in [2.62] noch in [2.66] eingegangen. *Krempf* verwendet zur Zeitintegration ein DGEAR genanntes Programmpaket, also wahrscheinlich den nach *Gear* [2.84] benannten Algorithmus.

In [2.69] wird eine verbesserte, von *Nishiguchi* entwickelte Version des Stoffgesetzes von *Krempf* vorgestellt. Die wesentlichen Modifikationen betreffen das Evolutionsgesetz für die Gleichgewichtsspannung $\bar{\sigma}$ und eine Erweiterung, um auch zyklische Ver- und Entfestigung erfassen zu können. Für inelastisch inkompressibles Materialverhalten wird für die Entwicklung von $\bar{\sigma}$

$$\dot{\bar{\sigma}} = \psi(\Lambda) \left(\frac{1}{1+\nu} \dot{\epsilon}_i' + \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_i \right) - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\|\bar{\sigma} - f\|}{b(\Lambda)} \dot{\epsilon}_i \quad (2.57)$$

und für die darin auftretende Materialfunktion

$$b(\Lambda) = \frac{A}{\psi(\Lambda) - E_{t\infty}} \frac{E - E_{t\infty}}{E} \quad (2.58)$$

angesetzt. Damit wird erreicht, daß A exakt gleich der asymptotischen Differenz von $\bar{\sigma}$ und f ist.

Um zyklische isotrope Verfestigung beschreiben zu können, wird dieser Grenzwert nicht mehr wie bisher als konstant angesetzt, sondern von der akkumulierten inelastischen Dehnung abhängig gemacht

$$\dot{A} = \sqrt{\frac{2}{3}} (B_1 - B_2 A) \|\dot{\epsilon}_i\| \quad (2.59)$$

Auch das Evolutionsgesetz für f wird gemäß der *Pragerschen* Verfestigungsregel modifiziert

$$\dot{f} = \frac{2}{3} \frac{E E_{t\infty}}{E - E_{t\infty}} \dot{\epsilon}_i \quad (2.60)$$

und daher als kinematischer Spannungsdeviator bezeichnet.

Besonders bei dieser verbesserten Fassung des VBO-Modells fallen einige große Ähnlichkeiten mit dem INTERATOM-Modell von *Bruhns* auf (siehe [2.63]). So ergibt sich bei Verwendung der in [2.62] und [2.69] vorgeschlagenen Überspannungsfunktion $k(\Lambda)$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + (1 + \nu) k_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Lambda}{E} \left(1 + \frac{\Lambda}{k_2}\right)^{k_3} \frac{\sigma' - \bar{\sigma}'}{\|\sigma' - \bar{\sigma}'\|} \quad (2.61)$$

mit den Materialkonstanten k_1, k_2, k_3 bis auf den Faktor $\sqrt{\frac{2}{3}}$ in der Definition der Überspannung formal völlige Analogie mit dem Modell von *Bruhns*, wenn $\bar{\sigma}$ die Rolle der kinematischen Verfestigung ξ übernimmt. Bei einaxialem Zug geht das Evolutionsgesetz der Gleichgewichtsspannung in

$$\dot{\sigma} = \left(\frac{2}{3} \frac{\Psi E}{E - E_{t\infty}} - \frac{|\sigma - f|}{A} \frac{\Psi - E}{E - E_{t\infty}} \right) \dot{\epsilon}_i \quad (2.62)$$

bzw.

$$\dot{\sigma}_\infty = \frac{2}{3} \frac{E E_{t\infty}}{E - E_{t\infty}} \dot{\epsilon}_i \quad (2.63)$$

über, was wiederum dem Entwicklungsgesetz für ξ entspricht, wenn man die Formfunktion ψ mit dem Tangentenmodul E_t identifiziert und der zweite Term in der Klammer die Koppelung mit der isotropen Verfestigung (2.59) bewirkt.

Ein grundsätzlicher Unterschied zwischen beiden Modelle besteht in der Verwendung einer Fließfläche bei dem Gesetz von *Bruhns* und darin, daß dort die isotrope Verfestigung von der reduzierten inelastischen Arbeit abhängig gemacht wird (vgl. dagegen (2.59)).

Von den beiden hier behandelten Versionen des VBO-Modells sind bisher keine FE-Rechnungen veröffentlicht worden. Die in [2.70] dargestellten Berechnungen eines dickwandigen Zylinders unter Innendruck und eines dünnwandigen Kessels aus AISI 316 L verwenden ein älteres, zusammen mit *Cernocky* entwickeltes Gesetz. Bei diesem wird für die Gleichge-

wichtsspannung kein Evolutionsgesetz, sondern eine von der Gesamtdehnung abhängige Funktion verwendet.

In [2.69] wird ein explizites 1 - Schritt Zeitintegrationsverfahren für die verbesserte Fassung des Stoffgesetzes von *Krempf* vorgestellt, welches auf der modifizierten Eulerregel aufbaut. Da lediglich Ergebnisse homogener FE-Rechnungen demonstriert werden, eignet sich auch diese Veröffentlichung nicht zur Einschätzung der Leistungsfähigkeit des VBO-Modells bei komplexen Spannungszuständen.

Abschließend kann festgehalten werden, daß bei dem Stoffgesetz von *Krempf* versucht wurde, zwischen geschwindigkeitsabhängigen und geschwindigkeitsunabhängigen Effekten zu trennen, was zunächst zu der Entwicklung eines zyklisch neutralen Modells geführt hat. Diese Trennung konnte jedoch nicht durchgehend beibehalten werden, was bei den Gleichgewichtsspannungen $\bar{\sigma}$ zum Ausdruck kommt, die nur im Grenzwert ratenunabhängig sind (siehe (2.48) und (2.54)). In einer verbesserten Fassung wurde vor allem die Modellierung isotroper Verfestigung ermöglicht. Jedoch bleibt der Nachteil bestehen, daß zur Beschreibung des Kriech- und Relaxationsverhaltens keine freien Materialparameter mehr vorhanden sind. Bei komplexen zweiaxialen Prozessen ohne zyklische Verfestigung hat sich das VBO-Modell dagegen gut bewährt.

2.6 Das Stoffgesetz von *Bruhns*

Das von *Bruhns et al.* entwickelte Stoffgesetz ist auch unter dem Namen INTERATOM-Modell bekannt. Dieses Materialmodell sollte in der Lage sein, bei möglichst einfacher Struktur komplexes zeitabhängiges und zeitunabhängiges Werkstoffverhalten zu beschreiben. Speziell sollten die Eigenschaften austenitischer Stähle bei hohen Temperaturen und wechselnder Belastung modelliert werden.

Dazu wird angenommen, daß geschwindigkeitsabhängige, irreversible Deformationen erst oberhalb einer Grenzspannung auftreten [2.71]. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß für den Grenzfall quasistatischer Prozeßführung das Materialverhalten durch ein elastisch-plastisches Gesetz dargestellt werden kann. Dementsprechend werden die aktuellen Spannungen σ in einen statischen (athermischen) Anteil $\bar{\sigma}$ und einen viskosen (thermisch aktivierten) Anteil $\bar{\sigma}$ zerlegt [2.72]

$$\sigma = \bar{\sigma} + \bar{\sigma} \quad . \quad (2.64)$$

Die statischen Spannungen $\bar{\sigma}$ können als Gleichgewichtsspannungen aufgefaßt werden und müssen bei inelastischen Prozessen der Fließbedingung

des zugrundeliegenden elastisch-plastischen Basismodells genügen. Zur Beschreibung der isotropen und kinematischen Werkstoffverfestigung werden eine skalare und eine tensorielle interne Variable eingeführt, für deren Entwicklungsgleichungen zunächst allgemein

$$\dot{\xi} = \mathbf{C}_1(\sigma, T; q_i) \dot{\varepsilon}_i - \mathbf{C}_2(\sigma, T; q_i) \varepsilon_i, \quad (2.65)$$

$$\dot{\chi} = \mathbf{D}_1(\sigma, T; q_i) \cdot \dot{\varepsilon}_i - \mathbf{D}_2(\sigma, T; q_i) \cdot \varepsilon_i \quad (2.66)$$

angesetzt wird (vgl. Kap. 2.1 (2.10)).

Für die Fließbedingung ergibt sich damit

$$\bar{F} = \bar{f}(\bar{\sigma} - \bar{\xi}) - g(\chi, T) = 0 \quad (2.67)$$

bzw.

$$F = f(\sigma - \xi) - g(\chi, T) \geq 0 \quad (2.68)$$

und bei Verwendung des Überspannungskonzeptes von *Perzyna* läßt sich so die Verzerrungsrate zu

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_e + \frac{1}{2} \ll \Phi(\sqrt{f} - \sqrt{g}, T) \gg \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{1}{\sqrt{f}} \quad (2.69)$$

ausdrücken.

Setzt man in der Fließbedingung speziell

$$f = (\sigma' - \xi) \cdot (\sigma' - \xi) \quad (2.70)$$

an und fordert, daß die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}$ gleiche Richtungen haben, so ergibt sich für den Normaleneinheitstensor an die Fließfläche

$$\mathbf{n} = \frac{\sigma' - \xi}{\|\sigma' - \xi\|} = \frac{\sigma' - \xi}{\sqrt{f}} = \bar{\mathbf{n}} = \frac{\bar{\sigma}' - \bar{\xi}}{\|\bar{\sigma}' - \bar{\xi}\|} = \frac{\bar{\sigma}' - \bar{\xi}}{\sqrt{g}}. \quad (2.71)$$

Die inelastische Verzerrungsrate kann daher als

$$\dot{\varepsilon}_i = \Phi(\Lambda, T) \mathbf{n} \quad (2.72)$$

mit

$$\Lambda = \sqrt{f} - \sqrt{g} \quad (2.73)$$

als verallgemeinerte Überspannung ausgedrückt werden.

Vereinfacht man die Evolutionsgleichungen für die internen Variablen

durch Vernachlässigung der Erholungsterme und setzt speziell

$$\mathbf{C}_1 = c(\kappa, T) \mathbf{1} , \quad (2.74)$$

$$\mathbf{D}_1 = \bar{\sigma}' - \xi , \quad (2.75)$$

so ergibt sich bei Verwendung eines hypoelastischen Werkstoffgesetzes das System der konstitutiven Gleichungen zu

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2G} \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{1} \right) + \ll \Phi(\Lambda, T) \gg \mathbf{n} , \quad (2.76)$$

$$\dot{\xi} = c(\kappa, T) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 , \quad (2.77)$$

$$\dot{\kappa} = (\bar{\sigma}' - \xi) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 . \quad (2.78)$$

Die interne Variable κ läßt sich somit als inelastische Arbeit der reduzierten statischen Spannungen $\bar{\sigma}$ auffassen und steuert über $g(\kappa, T)$ die isotrope Verfestigung. Die kinematische Verfestigungsrate hat die Richtung des inelastischen Dehnungsinkrementes, jedoch unterscheidet sich (2.77) vom klassischen *Pragerschen* Ansatz durch die Verwendung einer Materialfunktion $c(\kappa, T)$ anstelle einer Konstanten. Damit ist eine direkte Kopplung zwischen isotroper und kinematischer Verfestigung möglich. Um die Materialfunktionen $g(\kappa, T)$ und $c(\kappa, T)$ zu ermitteln, wird vom einaxialen isothermen, quasistatischen Prozeß ausgegangen. Das Basismodell liefert dann bei plastischen Prozessen den Zusammenhang

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = E_t(\varepsilon) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = E \left\{ 1 + \frac{2E}{3 \left(c + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \kappa} \right)} \right\}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} , \quad (2.79)$$

wobei E_t den Tangentenmodul bezeichnet.

Wird also nach Vorgabe der Funktion $g(\kappa, T)$

$$c(\kappa, T) = c_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \kappa} + w(\kappa, T) \quad (2.80)$$

gesetzt, so kann w als Abweichung vom Grenzfall linearer Verfestigung

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = E \left\{ 1 + \frac{2E}{3c_0} \right\}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.81)$$

aufgefaßt werden. Da man experimentell einen Übergang von zunächst rein isotroper zu rein linear-kinematischer Verfestigung feststellt [2.73], muß w für große Werte von κ verschwinden. Ein Koeffizientenvergleich in (2.79) liefert

$$w(x, T) = \frac{2}{3} \frac{E E_t}{E - E_t} - c_0, \quad (2.82)$$

und durch Betrachtung des Grenzfalles ergibt sich

$$c_0 = \frac{2}{3} \frac{E E_{t\infty}}{E - E_{t\infty}}. \quad (2.83)$$

In [2.84] werden einige geeignete Ansätze für $g(x, T)$ aufgeführt, welche den Bedingungen

$$g(x = 0) = g_0 > 0, \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \geq 0, \quad (2.85)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = g_\infty < \infty \quad (2.86)$$

genügen. Die Fähigkeit der präzisen Modellierung des komplexen Verfestigungsverhaltens austenitischer Stähle durch die Kopplung der Evolutionsgleichungen (2.77) und (2.78) sowie mit Hilfe der Beziehungen in (2.80), (2.82) und (2.83) ist als eine wesentliche Stärke des INTERATOM-Modells anzusehen. Um darüberhinaus auch Prozesse mit veränderlicher Belastungsrichtung (also z.B. zyklische Prozesse) darstellen zu können, wird w nicht direkt von x , sondern über

$$\Delta(x) = p_i \int_{x_{in,i}}^x \sqrt{\frac{g_0}{g}} dx + q_i \quad (2.87)$$

von der sog. Strukturgedächtnisfunktion abhängig gemacht

$$w = w(\Delta(x), T). \quad (2.88)$$

In (2.87) bezeichnet $x_{in,i}$ den Anfangswert von x zu Beginn jedes inelastischen Belastungspfades und wird jeweils neu belegt (*updating*). Auch die Parameter p_i und q_i bleiben während des i -ten inelastischen Prozesses konstant und ändern sich zu Beginn des $(i + 1)$ -ten gemäß

$$p_{i+1} = \min \left\{ \dot{p}_i; \frac{1}{4} (\text{sign}(\beta) \sqrt{|\beta|} + 3) \right\}, \quad (2.89)$$

$$q_{i+1} = \frac{1}{2} \Delta(x_{in,i+1}) \left\{ \text{sign}(\beta) \sqrt{|\beta|} + 1 \right\}. \quad (2.90)$$

Dabei ist β gemäß

$$\beta = \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_{i+1} \quad (2.91)$$

definiert und läßt sich als Cosinus des „Winkels“ zwischen den Normalentensoren interpretieren. Nur mit Hilfe solch eines *updating*-Verfahrens ist es möglich, für ein System konstitutiver Gleichungen gemäß (2.76)–(2.78) einen weichen Übergang der $\sigma - \varepsilon$ - Kurve bei Belastungsumkehr zu modellieren.

Für die Überspannungsfunktion $\Phi(\Lambda, t)$, welche die Zunahme der Spannung bei Erhöhung der Prozeßgeschwindigkeit bestimmt, wird

$$\Phi(\Lambda, T) = 2 \gamma(T) \frac{\Lambda}{E} \left(1 + \frac{\Lambda}{c_4(T)} \right)^{c_5(T)} \quad (2.92)$$

angegeben. Darin bezeichnet $\gamma(T)$ in Erweiterung des Ansatzes von *Perzyna* die von der Temperatur abhängige Viskositätsfunktion.

Für den Stahl 1.4948 (vergleichbar mit AISI 304) wurden die Materialfunktionen für einen Temperaturbereich von 20° C bis 550° C ermittelt und die Überspannungsfunktion für Dehnungsgeschwindigkeiten von $1 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ bis $1 \cdot 10^{-1} \text{ s}^{-1}$ angepaßt. Genauere Angaben über die Materialfunktionen sowie eine Liste der verwendeten Materialparameter finden sich in [2.76]. In [2.71] werden die Ergebnisse monotoner dehnungsgesteuerter Zugprozesse dargestellt, und auf die auch experimentell zu beobachtende Abnahme der Dehnungsratenabhängigkeit bei etwa 350° C hingewiesen (Abb. 2.10). Diese Rechenergebnisse sind jedoch keine wirklichen Tests der Leistungsfähigkeit dieses Modells, da die Materialfunktionen anhand der entsprechenden experimentellen Daten ermittelt wurden.

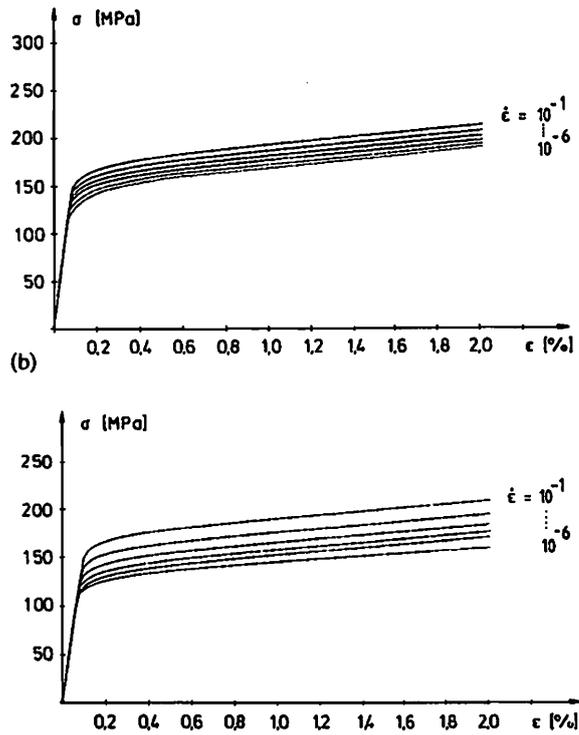


Abb. 2.10: Monotone $\sigma - \epsilon$ - Kurven von 1.4948 bei unterschiedlichen Dehngeschwindigkeiten und $T = 350^\circ\text{C}$ (oben) und $T = 550^\circ\text{C}$ (unten), Rechenergebnisse aus [2.71]

Die ebenfalls dargestellten zyklischen $\sigma - \epsilon$ - Kurven bei 550°C (Abb. 2.11) weisen recht gute Übereinstimmung mit den von *Corum* und *Pugh* bei 537°C und 593°C gemessenen Kurven auf [2.74] (s. Abb. 2.12).

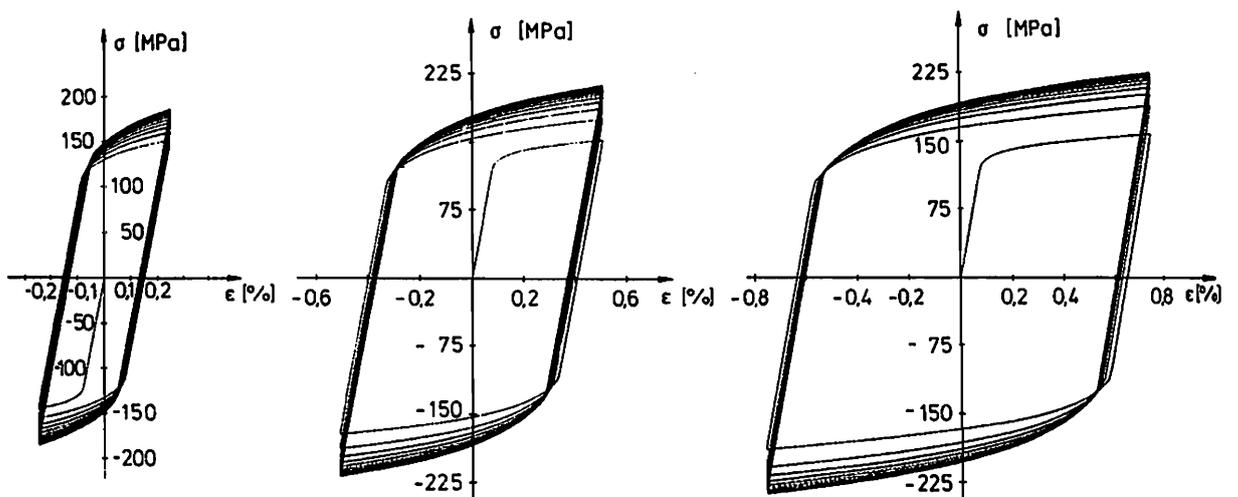


Abb. 2.11: Zyklische $\sigma - \epsilon$ - Kurven von 1.4948 bei $T = 550^\circ\text{C}$ und $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3}$ s $^{-1}$, Rechenergebnisse aus [2.71]

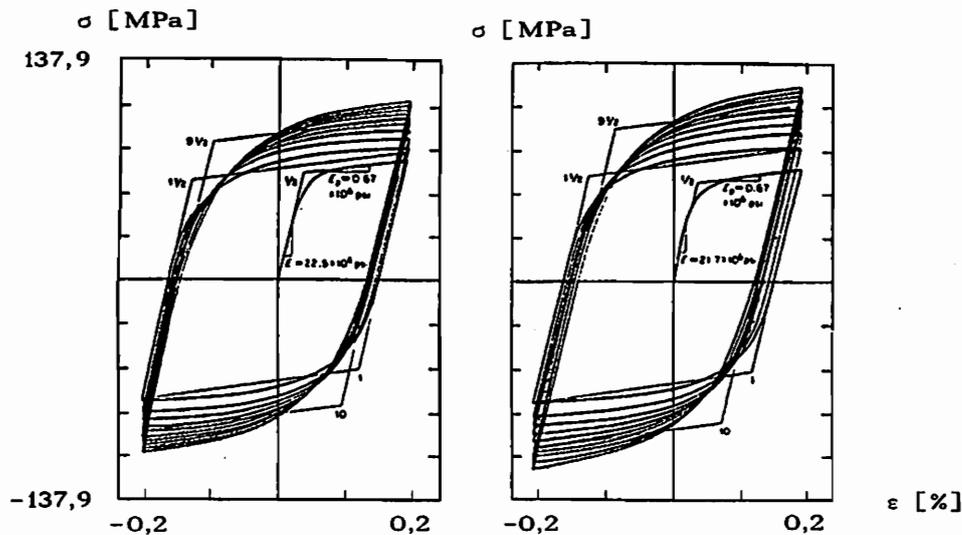


Abb. 2.12: Zyklische $\sigma - \varepsilon$ - Kurven von AISI 304 bei $T = 537^{\circ} \text{C}$ (links) und $T = 593^{\circ} \text{C}$ (rechts), $\dot{\varepsilon} = \pm 8,33 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, experimentelle Ergebnisse aus [2.74]

Auch ein komplexer nichtradialer Zug-Torsionstest zeigt sehr gute Übereinstimmung mit dem Experiment, was hier wesentlich durch die Strukturgedächtnisfunktion (2.87) bewirkt wird. Lediglich die $\tau - \gamma$ - Kurve weist insbesondere zu Beginn jedes Belastungszyklusses erwähnenswerte Abweichungen gegenüber den gemessenen Werten auf: Die Übergänge sind trotz des *updating*-Verfahrens nicht weich genug.

In [2.75] werden die Ergebnisse einiger komplexer einaxialer Prozesse mit Haltezeiten dargestellt, die anlässlich eines *benchmark*-Tests des CEC Fast Reactor Coordinating Committee durchgeführt wurden. Dazu sollte das Verhalten von AISI 316 bei 400°C berechnet werden, wenn dehnungsgesteuert bis 0,3% bzw. 1% belastet wird und anschließend lastgesteuerte Zyklen mit Haltezeiten gefahren werden. Bei der höheren Anfangsdehnung ist die Übereinstimmung auch beim 50 - ten Zyklus als sehr gut, bei der kleineren Dehnung noch als befriedigend zu bezeichnen. Ein weiterer Versuch, bei dem dehnungsgesteuert bis zu einer bestimmten Spannung belastet wurde und anschließend zyklische Kriechdehnungen und Belastungsphasen vorgegeben waren, zeigt jedoch die Grenzen dieses Materialmodells. Ohne eine erneute Anpassung der Materialfunktionen stimmten Versuch und Rechnung quantitativ nicht mehr überein. Es soll darauf hingewiesen werden, daß die Rechnungen für AISI 316 unter Verwendung eines Erholungsterms im Evolutionsgesetz für die kinematische Verfestigung erfolgen (siehe (2.65))

$$\dot{\xi} = c(x, T) \dot{\varepsilon}_i - d(x, T) \xi \quad (2.92)$$

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß das INTERATOM-Modell in der Lage ist, auch komplexe Belastungsprozesse recht gut wiederzugeben. Seine Schwäche liegt in der unbefriedigenden Modellierung von Prozessen mit Haltezeiten. In [2.77] sind für den Stahl 1.4948 Kriechdehnungen über einen Zeitraum von 2000 h bei 550° C und bei verschiedenen Spannungen aufgetragen. Am Ende dieses Zeitraumes belaufen sich die Abweichungen gegenüber Versuchsergebnissen auf etwa 50% und würden mit wachsender Zeit noch weiter zunehmen, da die stationäre Kriechdehnungsrate viel zu gering berechnet wird.

Der Grund für dieses Verhalten läßt sich an Hand der konstitutiven Gleichungen für den einaxialen Fall angeben. Dann geht das System (2.76) - (2.77) in

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \sqrt{\frac{2}{3}} \ll \Phi \gg , \quad (2.93)$$

$$\dot{\xi} = c \sqrt{\frac{2}{3}} \ll \Phi \gg , \quad (2.94)$$

$$\dot{\chi} = \sqrt{g} \ll \Phi \gg \quad (2.95)$$

über.

Für Kriechprozesse folgt aus

$$\dot{\sigma} = 0 \quad (2.96)$$

sofort

$$\dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \ll \Phi \gg \quad (2.97)$$

Man erkennt, daß bei vorgegebener Funktion $\Phi(\Lambda)$ der Kriechdehnungsverlauf $\varepsilon(t)$ eindeutig festliegt. Zu Beginn des Kriechprozesses hat die Über-
spannung

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma - \sqrt{\frac{3}{2}} \xi - \sqrt{g} \quad (2.98)$$

und damit Φ einen relativ großen Wert. Dieser baut sich gemäß

$$\dot{\Lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\sigma} - \Phi \left(c + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \chi} \right) \quad (2.99)$$

bei Kriechprozessen rapide ab und bleibt dann näherungsweise konstant. Bei kleinen Werten von Λ und Φ ändern sich auch die internen Variablen ξ

und κ nur gering, wodurch näherungsweise stationäres Verhalten erreicht wird. Daher zeigt das INTERATOM-Modell anfänglich eine viel zu große, wenig später eine deutlich zu kleine Kriechdehnungsrate.

Die Überspannungsfunktion, die dieses Verhalten hervorruft, ist allein aus Zugversuchen bestimmt worden. In der hier vorgestellten Version verbleiben keine Freiwerte zur Verbesserung des Kriechverhaltens. Es ist daher naheliegend, durch Einführung zusätzlicher Terme in das Differentialgleichungssystem (2.76)–(2.78) die Wiedergabe von Kriechprozessen zu verbessern. Dazu wird neben der bereits erwähnten Verwendung eines Erholungsterms für ξ (2.92) die Überspannungsfunktion noch zusätzlich von $\dot{\Lambda}$ abhängig gemacht [2.78]

$$\Phi(\Lambda, \dot{\Lambda}, T) = \frac{1}{2} \left\{ (\Phi_1 - \Phi_2) \tanh(a \dot{\Lambda}) + \Phi_1 + \Phi_2 \right\}, \quad (2.100)$$

wobei Φ_1 und Φ_2 jeweils von Λ und T abhängen. Wird darin a geeignet gewählt, so überwiegt bei positivem $\dot{\Lambda}$ die Funktion Φ_1 , bei negativem $\dot{\Lambda}$ die Funktion Φ_2 . Damit ist eine Trennung von Kriech- und Belastungsprozessen möglich und Φ_2 kann speziell zur Modellierung von Kriechversuchen herangezogen werden.

Eine Schwierigkeit des Ansatzes (2.100) besteht darin, daß $\dot{\Lambda}$ durch das System (2.76) – (2.78) implizit von den Raten der Zustandsgrößen abhängig wird und damit nur iterativ zu lösen ist. Der damit verbundene Anstieg der Rechenzeit kann bei FE-Rechnungen möglicherweise zu Problemen führen.

In [2.79] sind die Ergebnisse von Kriechrechnungen für den Stahl 1.4948 bei 550° C bei Verwendung des Ansatzes (2.100) dargestellt. In dem untersuchten Zeitintervall von 5000 h ergibt sich eine deutliche Verbesserung des Kriechverhaltens gegenüber dem ursprünglichen Modell [2.77].

In [2.76] wird darauf hingewiesen, daß das INTERATOM-Modell in die kommerziellen FE-Programmen LUNTUS, ADINA und ABAQUS implementiert wurde. Dabei traten numerische Schwierigkeiten nur bei sehr langsamer Prozeßführung ($\dot{\epsilon} \ll 1 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$) auf. Ergebnisse einer FE-Rechnung werden in [2.71] gezeigt: Ein dickwandiges Rohr aus AISI 304 wird durch Innendruck belastet, die Last anschließend konstant gehalten und wieder zurückgenommen. Auffallend sind die für das verwendete Material typischen großen Kriechdehnungen sowie die hohen Restspannungen nach Entlastung. *Pitzer* vergleicht in [2.80] drei unterschiedliche FE-Formulierungen miteinander und benutzt als Werkstoffgesetz das INTERATOM-Modell. Als Beispiele werden Rechenergebnisse der Spannungs- und Verschiebungsfelder eines dickwandigen Rohres und einer dickwandigen Kugel unter Innendruck sowie einiger Scheibenprobleme einander gegenübergestellt. *Pitzer* geht auch ausführlich auf die Probleme der numerischen Integration dieses mathematisch steifen Differentialgleichungssystems ein.

Er kommt zu dem Ergebnis, daß bei den von ihm untersuchten impliziten Integrationsverfahren die Trapezformel, bei den expliziten Verfahren der Algorithmus von *Fehlberg* am günstigsten ist. Abgesehen von dem Problem der mathematischen Steifheit, welches bei allen visko-plastischen Stoffgesetzen zu beachten ist, wird von keinen besonderen Problemen bei der Implementierung berichtet. Es ist jedoch zu beachten, daß alle hier aufgeführten FE-Rechnungen die Überspannungsfunktion gemäß (2.92) verwenden. Auf die möglicherweise entstehenden Schwierigkeiten beim Gebrauch der verbesserten Funktion (2.100) wurde bereits hingewiesen.

Neben der hier vorgestellten Fassung des INTERATOM-Modells existiert noch ein sogenanntes Langzeitmodell mit einem verallgemeinerten *Norton*-schen Kriechgesetz als zusätzlicher Dehnungsrate [2.81]. In [2.82] wird das Stoffgesetz von *Bruhns* auf endliche Deformationen erweitert.

Abschließend sollen die Vor- und Nachteile des INTERATOM-Modells zusammengefaßt dargestellt werden. Trotz seines vergleichsweise einfachen strukturellen Aufbaus ist dieses Werkstoffmodell in der Lage, das Verfestigungsverhalten austenitischer Stähle auch bei komplexer Belastung präzise zu beschreiben. Die dazu nötigen Materialfunktionen $g(\kappa, T)$ und $c(\kappa, T)$ lassen sich in relativ einfacher Weise aus einaxialen Versuchen ermitteln. Auch die Geschwindigkeits- und Temperaturabhängigkeit der $\sigma - \varepsilon$ - Kurven kann gut modelliert werden.

Diesen Vorteilen bei der Beschreibung von Belastungsprozessen stehen Schwächen in der Darstellung des Kriechverhaltens gegenüber. Die dem Modell zugrundeliegende Forderung nach einfacher Struktur zur leichten Identifikation von Materialfunktionen führt dazu, daß die Überspannungsfunktion Φ sowohl die Dehnungsratenabhängigkeit als auch das Kriechverhalten erfassen muß. Dieses ist jedoch wegen der völlig unterschiedlichen Deformationsgeschwindigkeiten bei Belastungs- und Kriechprozessen nicht möglich. Die konsequente Erweiterung des Modells gemäß (2.92) und (2.100) führt zwar zu deutlichen Verbesserungen, aber gleichzeitig zu Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Materialfunktionen, da diese sich nunmehr gegenseitig beeinflussen.

Ein weiterer Nachteil, den grundsätzlich alle viskoplastischen Stoffgesetze vom *Perzyna*-Typ aufweisen, besteht darin, daß der geforderte Grenzübergang bei quasistatischer Prozeßführung nicht durchführbar ist. Darauf wurde bereits bei der Kritik des Materialgesetzes von *Chaboche* hingewiesen, doch soll hier noch näher darauf eingegangen werden. Bei quasistatischen Prozessen sollen die viskosen Spannungen $\bar{\sigma}$ und mit (2.68) und (2.73) daher auch die Überspannung Λ verschwinden. Mit

$$\Phi(\Lambda = 0) = 0 \quad (2.101)$$

entsprechend Gleichung (2.92) bzw. den in [2.13] (s. Kap. 2.1) vorgeschla-

genen Ansätzen ergibt sich aus (2.76) in Verbindung mit den Evolutionsgesetzen (2.77) und (2.78) rein elastisches Materialverhalten:

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_e \quad , \quad (2.102)$$

$$\dot{\xi} = \mathbf{0} \quad , \quad (2.103)$$

$$\dot{x} = 0 \quad . \quad (2.104)$$

Damit können auch die Materialfunktionen c und g nicht aus quasistatischen Experimenten ermittelt werden. Ihre Übernahme aus solchen Versuchen läßt sich vom theoretischen Standpunkt nur durch eine näherungsweise Betrachtung, vom praktischen Standpunkt durch erfolgreiche Beschreibung des Verfestigungsverhaltens motivieren.

2.1.6 Zusammenfassende Beurteilung und Möglichkeit zur Verbesserung

Zusammenfassend lassen sich die hier vorgestellten viskoplastischen Stoffgesetze folgendermaßen beurteilen: Während die Modelle von *Hart* und *Miller* bereits Schwierigkeiten haben, einfache Standardprozesse befriedigend darzustellen, sind die Materialmodelle von *Chaboche*, *Krempf* und *Bruhns* in der Lage, das Verfestigungsverhalten austenitischer Stähle recht gut zu beschreiben. Ihre Schwäche liegt mehr in der Modellierung von Prozessen mit Haltezeiten. Der Grund dafür besteht bei dem Stoffgesetz von *Krempf* und der ursprünglichen Fassung des INTERATOM-Modells darin, daß die Materialfunktionen allein mit Belastungsprozessen vollständig bestimmt sind. Beim Modell von *Chaboche* und der verbesserten Version desjenigen von *Bruhns* ist die Ursache wohl eher in der Schwierigkeit zu finden, zahlreiche sich gegenseitig beeinflussende Materialfunktionen genau genug zu bestimmen. Auch im Hinblick auf das numerische Verhalten schneiden die Materialmodelle von *Hart* und *Miller* deutlich schlechter ab: Beim Modell von *Hart* bereitet die Polstelle an der viskoplastischen Grenze, bei dem von *Miller* die neg. Dehnungsratenabhängigkeit außerordentliche Schwierigkeiten.

Die hier vorgestellten Stoffgesetze sollen einerseits geschwindigkeitsabhängige Effekte wie die Abhängigkeit der Spannung von der Dehnungsgeschwindigkeit, Kriechen und Relaxation möglichst quantitativ erfassen, andererseits aber auch solche Effekte wie Verfestigung und Erreichen einer Grenzkurve bei zyklischen Belastungen beschreiben, welche bereits bei quasistatischer Prozeßführung auftreten. Keines der untersuchten Modelle ist in der Lage, alle diese Phänomene für technische Anwendungen genau genug darzustellen.

Die entscheidende Ursache dafür besteht m.E. darin, daß sie entweder zu einfach aufgebaut sind, um diese zahlreichen Effekte zu modellieren, oder so kompliziert sind, daß die Identifikation der Materialfunktionen mißlingt. Es ist daher sinnvoll, ein viskoplastisches Materialgesetz so zu formulieren, daß zumindest Gruppen von Funktionen ganz bestimmten Phänomenen zugeordnet sind, um damit ihre experimentelle Ermittlung weitgehend unabhängig voneinander durchführen zu können.

Hier wird versucht, die geschwindigkeitsunabhängigen Phänomene von den geschwindigkeitsabhängigen zu separieren. Der praktische Grund für diese Trennung besteht darin, daß es bereits eine Vielzahl von bewährten elastisch-plastischen Materialgesetzen gibt, die den oben genannten Anforderungen gerecht werden und deren Materialfunktionen sich aus einfachen Standardversuchen ermitteln lassen. Um darüberhinaus auch die erwähnten geschwindigkeitsabhängigen Effekte erfassen zu können, brauchen dann lediglich die neu hinzugekommenen Materialfunktionen bestimmt zu werden.

Als elastisch-plastisches Basismodell soll hier die plastische Fassung des INTERATOM-Modells [2.73] verwendet werden, da dieses Gesetz in der Lage ist, mit wenigen Materialfunktionen das Verfestigungsverhalten von austenitischem Stahl präzise zu beschreiben. Die Ermittlung der entscheidenden Verfestigungsfunktionen kann mit Hilfe einfacher zyklischer Versuche erfolgen und bereitet daher keine Schwierigkeiten. Um zu der Trennung von geschwindigkeitsunabhängigen von geschwindigkeitsabhängigen Effekten zu gelangen, ist es insbesondere erforderlich, das viskoplastische Stoffgesetz so zu formulieren, daß der Grenzübergang zum plastischen Basismodell durchführbar ist. Dies gelingt mit dem auf den folgenden Seiten vorgestellten Konzept, wobei grundsätzlich jedes klassische plastische Stoffgesetz mit Fließfläche als Basismodell Verwendung finden kann. Das Konzept erlaubt die Anwendung einer Anpassungsstrategie zur Ermittlung der Materialfunktionen, wobei insbesondere die viskosen Funktionen allgemeingültig, d.h. unabhängig vom speziell gewählten plastischen Basismodell bestimmt werden können.

2.2 Konstitutive Gleichungen auf Basis eines neuen viskoplastischen Konzeptes

2.2.1 Voraussetzungen und Annahmen

Es soll ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz entwickelt werden, welches sich für die Beschreibung des Verhaltens austenitischer Stähle in einem großen Temperaturbereich eignet. Dabei werden die folgenden Annahmen und Voraussetzungen getroffen:

Bis zu einer bestimmten Grenze, der Fließgrenze, verhält sich das Material rein elastisch, ab dieser Grenze zeigt das Materialverhalten eine Abhängigkeit sowohl von der Belastungsgeschichte als auch von der Prozeßgeschwindigkeit. Diese Arbeit beschränkt sich auf isotherme Prozesse, moderate Dehnungsgeschwindigkeiten und zunächst auf kleine Formänderungen. Das Material ist abgesehen von der durch inelastische Deformationen induzierten Richtungsabhängigkeit isotrop und kann als inelastisch inkompressibel angesehen werden. Phasenumwandlungen und Materialschädigung werden nicht berücksichtigt, woraus folgt, daß bei Kriechprozessen lediglich der primäre und sekundäre Bereich modelliert werden können. Weiterhin wird die Existenz eines Gleichgewichtszustandes angenommen, welchen das Material bei quasistatischer Prozeßführung annimmt.

2.2.2 Evolutionsgesetze für Dehnungen und interne Variable

Um zu einer Trennung von plastischen und viskosen Effekten und damit zu einem systematischen Verfahren zur Bestimmung der Materialfunktionen zu gelangen, wird ein von *Pitzer* [2.85] vorgeschlagenes Konzept aufgegriffen. Seine grundlegende Idee besteht in einer additiven Aufspaltung der inelastischen Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_i$ in zwei Anteile

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p + \dot{\epsilon}_v . \quad (2.105)$$

Bei quasistatischer Prozeßführung soll die Dehnungsrate $\dot{\epsilon}_v$ verschwinden und $\dot{\epsilon}_p$ in die geschwindigkeitsunabhängige plastische Dehnungsrate übergehen. Damit ist das Modell nicht mehr als *unified* im strengen Sinn zu bezeichnen, jedoch ist anders der angestrebte Grenzübergang nicht zu verwirklichen.

Wie beim INTERATOM-Modell wird die real anliegende Spannung σ in einen athermischen Gleichgewichtsanteil $\bar{\sigma}$ und eine thermisch aktivierte Überspannung $\bar{\sigma}$ zerlegt [2.72]

$$\sigma = \bar{\sigma} + \bar{\sigma} . \quad (2.64)$$

Für die elastische Dehnungsrate soll ein hypoelastisches Gesetz verwendet werden, während für $\dot{\epsilon}_p$ der Ansatz der klassischen Plastizitätstheorie und für $\dot{\epsilon}_v$ das Überspannungsmodell von *Perzyna* gültig sein sollen

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2G} \left(\dot{\sigma} - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(\dot{\sigma}) \mathbf{1} \right) + \lambda \mathbf{n} + \ll \Phi(\Lambda) \gg \mathbf{n} \quad (2.106)$$

Für die Evolution der internen Variablen ξ , α und Δ , welche die Verfestigung aufgrund der Belastungsgeschichte beschreiben, werden die Differentialgleichungen des plastischen Basismodells übernommen [2.73]

$$\dot{\xi} = c(\alpha) \dot{\epsilon}_p, \quad (2.77)$$

$$\dot{\alpha} = (\bar{\sigma}' - \xi) \cdot \dot{\epsilon}_p, \quad (2.78)$$

$$\dot{\Delta} = \rho \sqrt{\frac{g_0}{g}} \dot{\alpha}. \quad (2.107)$$

Sie unterscheiden sich von denen des viskoplastischen INTERATOM-Modells dadurch, daß hier die Verfestigung nur von der geschwindigkeitsunabhängigen Komponente der Dehnungsrate abhängig gemacht wird.

Als Fließbedingung wird wie üblich eine verallgemeinerte Fließbedingung nach *v. Mises* gewählt

$$F = f(\bar{\sigma}' - \xi) - g(\alpha) = (\bar{\sigma}' - \xi) \cdot (\bar{\sigma}' - \xi) - g(\alpha) = 0, \quad (2.108)$$

womit sich die verallgemeinerte deviatorische Überspannung gemäß

$$\Lambda = \sqrt{f} - \sqrt{g} = \|\bar{\sigma}' - \xi\| - \sqrt{g} \quad (2.109)$$

und die in (2.106) auftretende Nebenbedingung durch

$$\ll \alpha \gg = \begin{cases} \alpha, & \text{wenn } \Lambda \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.110)$$

ausdrücken lassen.

An dieser Stelle soll besonders darauf hingewiesen werden, daß eine die Belastungsbedingung enthaltende Nebenbedingung nicht - wie in der Plastizitätstheorie üblich und auch von *Pitzer* angesetzt - an den gesamten Term $\lambda \mathbf{n}$ geknüpft ist. Diese etwas ungewohnte Formulierung hängt mit der Forderung nach Eindeutigkeit zusammen, auf die im Kap. 2.2.5 eingegangen wird und die nur durch diesen Ansatz zu erreichen ist. Ein weiterer, hieraus resultierender Unterschied zu dem von *Pitzer* vorgeschlagenen

Modell besteht darin, daß in (2.106) die Richtungen der beiden inelastischen Dehnungsraten

$$\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left\| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\|^{-1} = \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\xi}}{\sqrt{f}} \quad (2.111)$$

zusammenfallen, während in [2.85]

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \sim \bar{\mathbf{n}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \left\| \frac{\partial f}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} \right\|^{-1} = \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}' - \boldsymbol{\xi}}{\sqrt{g}} \quad (2.112)$$

gilt.

Den Proportionalitätsfaktor λ erhält man - wie üblich - aus der Konsistenzbedingung

$$\dot{F} = 0 = 2 (\bar{\boldsymbol{\sigma}}' - \boldsymbol{\xi}) \cdot (\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{\boldsymbol{\xi}}) - \frac{\partial g}{\partial \chi} \dot{\chi} \quad (2.113)$$

zu

$$\lambda = \frac{\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}}{c + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial \chi}} = \frac{\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n}}{K}, \quad (2.114)$$

womit die Bedingung, daß $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ bei inelastischen Prozessen immer die Fließbedingung erfüllen muß, in (2.106) eingearbeitet ist.

2.2.3 Evolutionsgesetz für die Gleichgewichtsspannungen

Da die Fließbedingung (2.108) und über sie auch λ sowie die Inkremente der internen Variablen (2.77, 2.78) und (2.107) von der Gleichgewichtsspannung $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ abhängen, muß für sie noch eine zusätzliche Beziehung angegeben werden.

Zunächst wurde - analog zum viskoplastischen INTERATOM-Modell -

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\xi}\|} = \bar{\mathbf{n}} = \frac{\bar{\boldsymbol{\sigma}}' - \boldsymbol{\xi}}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}' - \boldsymbol{\xi}\|} \quad (2.71)$$

angesetzt, welches sich als Richtungsgleichheit der reduzierten Deviatorspannungen deuten läßt.

Dieser Ansatz ist jedoch nicht hinreichend: Löst man (2.71) nach $\bar{\boldsymbol{\sigma}}'$ auf und differenziert substantiell nach der Zeit, so ergibt sich nach Zwischenrechnung und Umsortierung

$$\frac{(\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{\boldsymbol{\xi}}) - \mathbf{n} \cdot (\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{n}}{\|\bar{\boldsymbol{\sigma}}' - \boldsymbol{\xi}\|} = \frac{(\dot{\boldsymbol{\sigma}}' - \dot{\boldsymbol{\xi}}) - \mathbf{n} \cdot (\dot{\boldsymbol{\sigma}}' - \dot{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{n}}{\|\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\xi}\|}, \quad (2.115)$$

was sich durch skalare Multiplikation mit \mathbf{n} als Identität herausstellt. In

den Zählern von (2.115) stehen jeweils die Tangentialkomponenten der Spannungsinkremente $\dot{\bar{\sigma}}'$ und $\dot{\sigma}'$, der Nenner entspricht den vom Fließflächenursprung aus gemessenen Abständen zu den Deviatorspannungen. Damit läßt sich (2.115) und dementsprechend (2.71) so interpretieren, daß sich $\bar{\sigma}'$ mit der gleichen „Winkelgeschwindigkeit“ wie σ' um den Punkt ξ dreht, ohne daß über die Normalkomponente von $\bar{\sigma}'$ eine Aussage gemacht wird. Gerade diese Komponente wird aber gemäß (2.114) in den Evolutionsgleichungen verwendet, woraus ersichtlich ist, daß (2.71) hier allein nicht genügt. Beim viskoplastischen INTERATOM-Modell wird die Kenntnis von $\dot{\bar{\sigma}} \cdot \mathbf{n}$ nicht benötigt, weshalb dort diese Schwierigkeit nicht auftritt. Pitzer schlägt in [2.85] ein Evolutionsgesetz der Form

$$\dot{\bar{\sigma}}' = \langle A \dot{\sigma}' + B (\sigma' - \bar{\sigma}') \rangle \quad (2.116)$$

vor, worin A und B zwei noch zu präzisierende Materialfunktionen sind. Dabei bedeuten die eckigen Klammern die Nebenbedingung

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x, & \text{wenn } F(\bar{\sigma}) = 0 \text{ und } \mathbf{n} \cdot \dot{\sigma} > 0 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.117)$$

also die Erfüllung der Fließbedingung durch die Gleichgewichtsspannung $\bar{\sigma}$ und der Belastungsbedingung durch die aktuelle Spannung σ . Der zweite Term in (2.116) bewirkt eine Annäherung der Spannungen σ' und $\bar{\sigma}'$ und ist erforderlich, um Kriechprozesse realistisch beschreiben zu können:

Ohne ihn folgt aus

$$\dot{\sigma} = 0 \quad (2.118)$$

auch

$$\dot{\bar{\sigma}} = 0, \quad (2.119)$$

woraus sich eine konstante Überspannung (vgl. (2.129) und (2.130) in Verbindung mit (2.114)) und mit (2.106) eine von Beginn des Kriechprozesses an konstante Dehnungsrate

$$\dot{\epsilon} = \Phi(\Lambda) \mathbf{n} \quad (2.120)$$

ergibt.

Jedoch bereitet die in $\mathbf{n} \cdot \dot{\sigma}$ formulierte Nebenbedingung (2.117) Schwierigkeiten: Sie führt dazu, daß

$$\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\frac{1}{2G} + \langle \frac{A}{K} \rangle} \left\{ \dot{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} - \langle \frac{B}{K} (\sigma' - \bar{\sigma}') \cdot \mathbf{n} \rangle - \langle \Phi \rangle \right\} \quad (2.121)$$

für

$$0 < \dot{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} - \langle \Phi \rangle < \langle \frac{B}{K} (\sigma' - \bar{\sigma}') \cdot \mathbf{n} \rangle \quad (2.122)$$

nicht definiert ist.

Daher wird (2.116) so modifiziert, daß die Nebenbedingung (2.117) auch bei dehnungsgesteuerten Prozessen eindeutig wird und darüberhinaus die Beziehung (2.71) gültig ist. Dazu wird $\dot{\sigma}'$ in Normal- und Tangentialkomponenten zerlegt

$$\dot{\sigma}' = \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} + (\dot{\sigma}' - \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}) , \quad (2.123)$$

für die Normalkomponente der Ansatz (2.116) mit geänderten Nebenbedingungen und für die Tangentialkomponente das Ergebnis von (2.115) eingesetzt.

Daraus ergibt sich als Evolutionsgesetz für die Gleichgewichtsspannung

$$\dot{\sigma}' = \langle A \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \rangle \mathbf{n} + \langle B (\sigma' - \bar{\sigma}') \rangle + \frac{\|\bar{\sigma}' - \xi\|}{\|\sigma' - \xi\|} (\dot{\sigma}' - \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \mathbf{n}) \quad (2.124)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\bar{\sigma} (\Lambda = 0) = \sigma . \quad (2.125)$$

Die Projektion $\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ nimmt dann die Form

$$\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\frac{1}{2G} + \langle \frac{A}{K} \rangle} \left\{ \dot{\varepsilon} \cdot \mathbf{n} - \langle \frac{B}{K} (\sigma' - \bar{\sigma}') \cdot \mathbf{n} \rangle - \langle \Phi \rangle \right\} \quad (2.126)$$

an (vgl. (2.121)), womit die Nebenbedingung (2.117) wegen

$$\frac{1}{2G} + \langle \frac{A}{K} \rangle > 0 \quad (2.127)$$

auch bei dehnungsgesteuerten Prozessen immer eindeutige Lösungen besitzt. Gl. (2.124) kann über (2.114) in das Stoffgesetz (2.106, 2.77, 2.78, 2.107) eingearbeitet werden und stellt daher keine zusätzliche Differentialgleichung dar. Bei Kenntnis von σ und der internen Variablen ξ , κ und Δ läßt sich die Überspannung stets mit Hilfe von (2.64) und (2.71) berechnen und braucht nicht durch Integration von (2.124) bestimmt zu werden, was einen großen Vorteil im Hinblick auf numerische Anwendungen darstellt.

Es soll noch erwähnt werden, daß ursprünglich beabsichtigt war, den Erholungsterm $B(\sigma' - \bar{\sigma}')$ in (2.124) an eine dritte Nebenbedingung der Form

$$\langle\langle\langle x \rangle\rangle\rangle = \begin{cases} x, & \text{wenn } \Lambda \geq 0 \text{ und } \mathbf{n} \cdot \dot{\sigma} \leq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.128)$$

zu koppeln. Diese Nebenbedingung läßt sich so motivieren, daß ein Abbau der Überspannung $\bar{\sigma}$ nur dann erfolgen kann, wenn in Bezug auf die wahre Spannung σ eine Entlastung oder zumindest eine neutrale Belastung auftreten. Ein großer praktischer Vorteil dieses Ansatzes ist es, daß mit ihm eine getrennte Ermittlung der Materialfunktionen A und B durch spannungsgesteuerte Zugversuche ($\langle\langle\langle B(\sigma' - \bar{\sigma}') \rangle\rangle\rangle \equiv 0$) und Kriechversuche ($\langle A \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \rangle \equiv 0$) möglich wäre. Jedoch führt dieser Ansatz zu dem gleichen Problem der Mehrdeutigkeit von $\dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n}$ wie (2.116).

Beachtet man (2.71), so läßt sich die tensorwertige Evolutionsgleichung für $\bar{\sigma}'$ durch eine skalare Gleichung für Λ ersetzen. Aus (2.109) folgt unter Verwendung der Fließbedingung (2.108)

$$\Lambda = \mathbf{n} \cdot (\sigma' - \bar{\sigma}') \quad (2.129)$$

und damit

$$\dot{\Lambda} = \dot{\mathbf{n}} \cdot (\sigma' - \bar{\sigma}') + \mathbf{n} \cdot (\dot{\sigma}' - \dot{\bar{\sigma}}') . \quad (2.130)$$

Differenziert man (2.71) nach der Zeit, so ergibt sich nach längerer Rechnung

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{\dot{\sigma}' - \dot{\xi}}{\|\sigma' - \xi\|} - \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \frac{\dot{\sigma}' - \dot{\xi}}{\|\sigma' - \xi\|} \quad (2.131)$$

und daraus mit Hilfe von (2.124) als Evolutionsgesetz für die Überspannung

$$\dot{\Lambda} = \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} (1 - \langle A \rangle) - \langle B \Lambda \rangle , \quad (2.132)$$

also eine wesentliche Vereinfachung gegenüber (2.124). Setzt man das Evolutionsgesetz für $\dot{\bar{\sigma}}'$ in (2.114) ein, dann erhält man

$$\lambda = \langle \frac{A}{K} \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \rangle + \langle \frac{B}{K} \Lambda \rangle , \quad (2.133)$$

d.h., daß nur der geschwindigkeitsunabhängige Anteil von λ von der Nebenbedingung (2.117) abhängt, wodurch sich die in Kap. 2.2.2 angesprochene formale Abweichung als sinngemäße Analogie zu klassischen Plastizitätstheorien darstellt.

Bei allgemeiner Prozeßführung ist $\dot{\epsilon}_p$ geschwindigkeitsabhängig und verschwindet bei positiver Überspannung auch bei Entlastungsprozessen nicht. Im Grenzfall verschwindender Überspannung und quasistatischer Prozeßgeschwindigkeit erhält man dagegen bei geeigneter Wahl der Materialfunktion A das geschwindigkeitsunabhängige System der konstitutiven Gleichungen des plastischen Basismodells

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_e + \left\langle \frac{\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n}}{K} \right\rangle \mathbf{n} , \quad (2.134)$$

$$\dot{\xi} = c(\chi) \dot{\epsilon}_p , \quad (2.77)$$

$$\dot{\chi} = (\bar{\sigma}' - \xi) \cdot \dot{\epsilon}_p , \quad (2.78)$$

$$\dot{\Delta} = p \sqrt{\frac{g_0}{g}} \dot{\chi} . \quad (2.107)$$

2.2.4 Die Materialfunktionen A, B und Φ

Der im Evolutionsgesetz für $\bar{\sigma}'$ (2.124) auftretenden Materialfunktion A kommt bei dem hier vorgeschlagenen Konzept entscheidende Bedeutung zu. Sie muß von einer Größe v abhängig gemacht werden, welche ein Maß für die Prozeßgeschwindigkeit darstellt. Nur durch Einführung dieser Größe wird die Evolutionsgleichung für $\bar{\sigma}'$ für verschwindende Überspannung geschwindigkeitsabhängig.

Ein solcher Ansatz ist zwingend erforderlich, da bei Beginn jedes inelastischen Prozesses die Überspannung gleich null ist. Bei Geschwindigkeitsunabhängigkeit von A wird das System der konstitutiven Gleichung (2.106, 2.77, 2.78, 2.107) ebenfalls unabhängig von den Raten, d.h. man erhält zu Beginn jeder beliebigen inelastischen Prozeßführung rein plastisches Materialverhalten. Da hier $\dot{\epsilon}_p$ über die Konsistenzbedingung berechnet wird (2.114) und $\dot{\epsilon}_v$ wegen

$$\Phi(\Lambda = 0) = 0 \quad (2.101)$$

verschwindet, verläßt der Spannungspunkt σ' auch bei weiterer Belastung nicht die Fließfläche, und damit bleibt der Prozeß geschwindigkeitsunabhängig. Wählt man die Materialfunktion $A(v, \Lambda)$ so, daß

$$A = 1, \text{ für } \Lambda = 0 \text{ und } v = 0, \quad (2.135)$$

$$A < 1, \text{ für } \Lambda = 0 \text{ und } v > 0,$$

gilt, dann wächst die Überspannung Λ bzw. $\bar{\sigma}$ bei nicht verschwindender Prozeßgeschwindigkeit auch für den Anfangswert

$$\bar{\sigma} = 0 \quad (2.136)$$

an (s. (2.132)).

Das Maß für die Prozeßgeschwindigkeit v kann grundsätzlich als Funktion der Spannungsgeschwindigkeit, einer Dehnungsrate oder einer Kombination beider Größen definiert werden. In jedem Fall wird damit das Differentialgleichungssystem (2.106, 2.77, 2.78, 2.107) nichtlinear in den Raten $\dot{\sigma}$ bzw. $\dot{\epsilon}$.

Das führt auf zwei Probleme, wobei das erste theoretischer, das zweite praktischer Natur ist. Zunächst muß nachweisbar sein, daß das System der konstitutiven Gleichungen (2.106, 2.77, 2.78, 2.107) in Verbindung mit (2.124) sowie den Nebenbedingungen (2.117) und (2.110) bei beliebiger Prozeßführung eindeutige Lösungen für $\dot{\sigma}$ bzw. $\dot{\epsilon}$ besitzt. Die andere Schwierigkeit liegt in der Notwendigkeit einer iterativen Rechnung, da das Differentialgleichungssystem nicht in jedem Fall explizit nach den Raten aufzulösen ist. Der damit verbundene Zuwachs in der Rechenzeit besonders bei FE-Anwendungen ist ein grundsätzlicher Nachteil dieses Konzeptes.

Während die Funktion $A(v, \Lambda)$ zusammen mit $\Phi(\Lambda)$ die Dehnungsratenabhängigkeit bestimmt, ermöglicht die Materialfunktion B in Verbindung mit $\Phi(\Lambda)$ die Modellierung von Kriechprozessen: Sie steuert über

$$\dot{\Lambda} = - \langle B \Lambda \rangle \quad (2.137)$$

die Abnahme der Überspannung, welche über Gleichung (2.120) die Kriechdehnungsrate bestimmt. Da experimentell ermittelte Kriechdehnungskurven in Abhängigkeit vom Spannungsniveau angegeben werden, ist es sinnvoll, B von dieser Größe abhängig zu machen. Bei der Anpassung der Materialfunktionen an experimentell gewonnene Kriechkurven stellte sich jedoch heraus, daß der Ansatz $B(\|\sigma'\|)$ nicht genügte, da er das Verfestigungsverhalten des Materials nicht berücksichtigt. Erst mit $B(\sqrt{f}, \|\sigma'\|)$ war es möglich, Kriechkurven realistisch darzustellen.

2.2.5 Eindeutigkeit der konstitutiven Gleichungen

Wie bereits bei der Formulierung der Evolutionsgleichung der Gleichgewichtsspannung deutlich wurde, stellt der Nachweis der Existenz einer eindeutigen Lösung das zentrale Problem bei den hier vorgestellten konstitutiven Gleichungen dar. Von jedem inkrementell formulierten Stoffgesetz ist zu fordern, daß sich - ausgehend von einem beliebigen Zustand - bei jeder möglichen Prozeßführung stets ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den Inkrementen ergibt. Da konventionelle Formulierungen linear in den Inkrementen sind, stellt sich dort dieses Problem nicht.

Nachdem die Eindeutigkeit der Nebenbedingung (2.117) auch für dehnungsgesteuerte Prozesse gezeigt wurde (2.126), soll im folgenden die Spannungs-Dehnungsbeziehung (2.106) untersucht werden, welche durch Verwendung der Funktion $A(v, \Lambda)$ in (2.124) nichtlinear in den Inkrementen ist.

Bei spannungsgesteuerter Prozeßführung ergibt sich unter Verwendung von (2.133)

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2G} \left(\dot{\sigma} - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(\dot{\sigma}) \mathbf{1} \right) + \left\{ \left\langle \frac{A}{K} \dot{\sigma} \cdot \mathbf{n} \right\rangle + \left\langle \frac{B}{K} \Lambda \right\rangle \right\} \mathbf{n} \quad (2.138)$$

und daraus bei vorgeschriebenen Dehnungsraten die inverse Beziehung

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} = 2G \left\{ \dot{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Sp}(\dot{\epsilon}) \mathbf{1} - \left\langle \frac{\frac{A}{K}}{\frac{1}{2G} + \frac{A}{K}} \right\rangle \left(\dot{\epsilon} \cdot \mathbf{n} - \frac{B}{K} \Lambda - \Phi \right) \mathbf{n} \right. \\ \left. - \left\langle \frac{B}{K} \Lambda + \Phi \right\rangle \mathbf{n} \right\} , \end{aligned} \quad (2.139)$$

deren Herleitung aus (2.138) sich analog dem Vorgehen in [2.86] ergibt. Die darin auftretende Nebenbedingung ist dabei entweder gemäß (2.117) oder mit (2.126) gemäß

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x, & \text{wenn } F(\bar{\sigma}) = 0 \text{ und } \dot{\epsilon} \cdot \mathbf{n} - \frac{B}{K} \Lambda - \Phi > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.140)$$

zu berechnen. Dabei konnten die in (2.126) auftretenden zweifachen *Maccauly*-Klammern fortgelassen werden, da bei Gültigkeit von $F(\bar{\sigma}) = 0$ auch $\Lambda \geq 0$ folgt.

Zur Klärung des Eindeutigkeitsproblems von (2.138) bzw. (2.139) muß zunächst das Maß für die Prozeßgeschwindigkeit v definiert werden. *Pitzer* schlägt in [2.85]

$$v = \sqrt{\dot{\sigma}' \cdot \dot{\sigma}'} , \quad (2.141)$$

also einen Ansatz in Spannungsgeschwindigkeiten vor. Eine grundsätzlich andere Möglichkeit besteht darin, eine Abhängigkeit von den Dehnungsraten, etwa in der Form

$$v = \sqrt{\dot{\epsilon}' \cdot \dot{\epsilon}'} \quad (2.142)$$

einzuführen. Diese Größe entspricht der im Stoffgesetz von *Diehl-Fornefeld* auftretenden Variablen PG bei isothermen Prozessen, welche dort das Verhältnis der beweglichen Versetzungen zu den insgesamt vorhandenen steuert [2.22].

Hier soll jedoch anders vorgegangen werden. Im Hinblick auf die später durchzuführende Ermittlung der Materialfunktion $A(\Lambda, v)$ aus Experimenten wird für sie der Produktansatz

$$A(\Lambda, v) = a_1(\Lambda) a_2(v) \quad (2.143)$$

gemacht. Setzt man diesen in (2.138) ein und löst nach $a_2(v)$ auf, so ergibt sich bei Gültigkeit von Fließ- und Belastungsbedingung

$$a_2(v) = \frac{K}{a_1(\Lambda)} \left\{ \dot{\epsilon}' \cdot \mathbf{n} - \frac{B}{K} \Lambda - \Phi \right\} \frac{1}{\dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n}} - \frac{K}{a_1(\Lambda) 2G} \quad (2.144)$$

Von den beiden naheliegenden Definitionen

$$v = |\dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n}| = |\dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n}| \quad (2.145)$$

bzw.

$$v = |\dot{\epsilon}' \cdot \mathbf{n}| \quad (2.146)$$

soll hier die erste benutzt werden, da eine Formulierung im Spannungsraum verwendet wird. Sie läßt sich noch zu

$$v = \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \quad (2.147)$$

vereinfachen, da die von v abhängige Materialfunktion A nur bei Gültigkeit der Nebenbedingung (2.117) auftritt. Es soll jedoch darauf hingewiesen werden, daß der Ansatz (2.146) bei Verwendung von FE-Programmen, die üblicherweise auf der Weggrößenmethode beruhen, vorteilhafter ist, da dann im Gegensatz zu (2.145) keine Iteration erforderlich ist (s.a. Kap. 2.2.4).

Mit dieser Definition erhält man die in Abb. 2.13 skizzierte Darstellung der konstitutiven Beziehungen im *Haigh-Westergaard*-Spannungsraum.

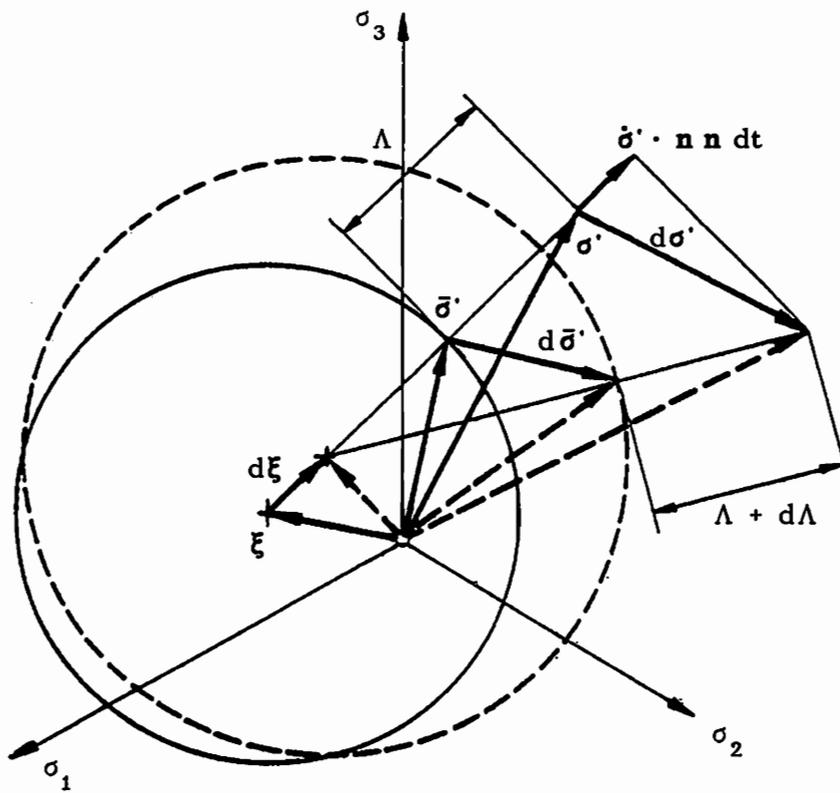


Abb. 2.13: Schematische Darstellung der konstitutiven Beziehungen im *Haigh-Westergaard*-Spannungsraum

Während sich die Nebenbedingung (2.117) eindeutig durch $\dot{\epsilon} \cdot \mathbf{n}$ ausdrücken läßt (s. (2.140)), ist ein eindeutiger Zusammenhang zwischen $\dot{\epsilon} \cdot \mathbf{n}$ und $\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ nicht von vornherein gegeben: In (2.126) tritt $A(\Lambda, \dot{\sigma} \cdot \mathbf{n})$ auf der rechten Seite auf, wodurch sich diese Gleichung nicht explizit nach $\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ auflösen läßt.

Bei spannungsgesteuerten Prozessen sind mit $\dot{\sigma}$ auch v und damit A eindeutig bestimmt, wodurch man bei gegebener Belastungsgeschichte den eindeutigen Zusammenhang $\dot{\epsilon}(\dot{\sigma})$ erhält (2.139). Dagegen muß für dehnungsgesteuerte Prozesse wegen des impliziten Zusammenhanges $\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ von $\dot{\epsilon} \cdot \mathbf{n}$ noch gezeigt werden, daß $a_2(v)$ und damit $\dot{\sigma}$ bei vorgegebenen Momentanwerten der Zustandsvariablen eindeutig von den Dehnungsraten abhängen.

Dazu wird die rechte Seite von (2.144) näher untersucht, wobei jeweils Prozesse mit gleicher Belastungsgeschichte (also gleichen Werten der Zustandsvariablen) miteinander verglichen werden, welche sich jedoch in der Steuergröße $\dot{\epsilon}$ unterscheiden.

Man kann sich diese Prozeßführung als sprunghafte Änderung der Dehnungsrate realisiert denken. Dann stellt die rechte Seite von (2.144) eine Hyperbelschar in $\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ mit $\dot{\epsilon} \cdot \mathbf{n}$ als Scharparameter dar

$$a_2(v) = \frac{a}{b} (\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n})^{-1} - \frac{1}{b} \quad (2.148)$$

Verschiedene Dehnungsgeschwindigkeiten führen in der Regel zu unterschiedlichen Momentanwerten für $\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n}$, was sich in unterschiedlichen Schnittpunkten der Kurven $a_2(v)$ und $\frac{a}{b} (\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n})^{-1} - \frac{1}{b}$ äußert. Eine hinreichende Bedingung für Eindeutigkeit der Beziehung $\dot{\epsilon}(\dot{\sigma})$ bei vorgegebener Belastungsgeschichte erhält man, wenn verlangt wird, daß es für jede Dehnungsrate und damit jedes $\dot{\epsilon} \cdot \mathbf{n}$ stets nur eine Lösung $a_2(v)$ von (2.144) gibt.

Ein Vergleich von (2.144) mit (2.126) zeigt, daß wegen (2.127) sowie

$$b = \frac{a_1 2G}{K} > 0 \quad (2.149)$$

a und $\dot{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ stets gleiche Vorzeichen haben müssen. Unter Beachtung des Definitionsbereiches von v erhält man damit den in Abb. 2.14 qualitativ dargestellten Verlauf der rechten Seite von (2.144) bei beliebigen, aber festen Werten der Zustandsvariablen $\dot{\epsilon} \cdot \mathbf{n}$ als Scharparameter.

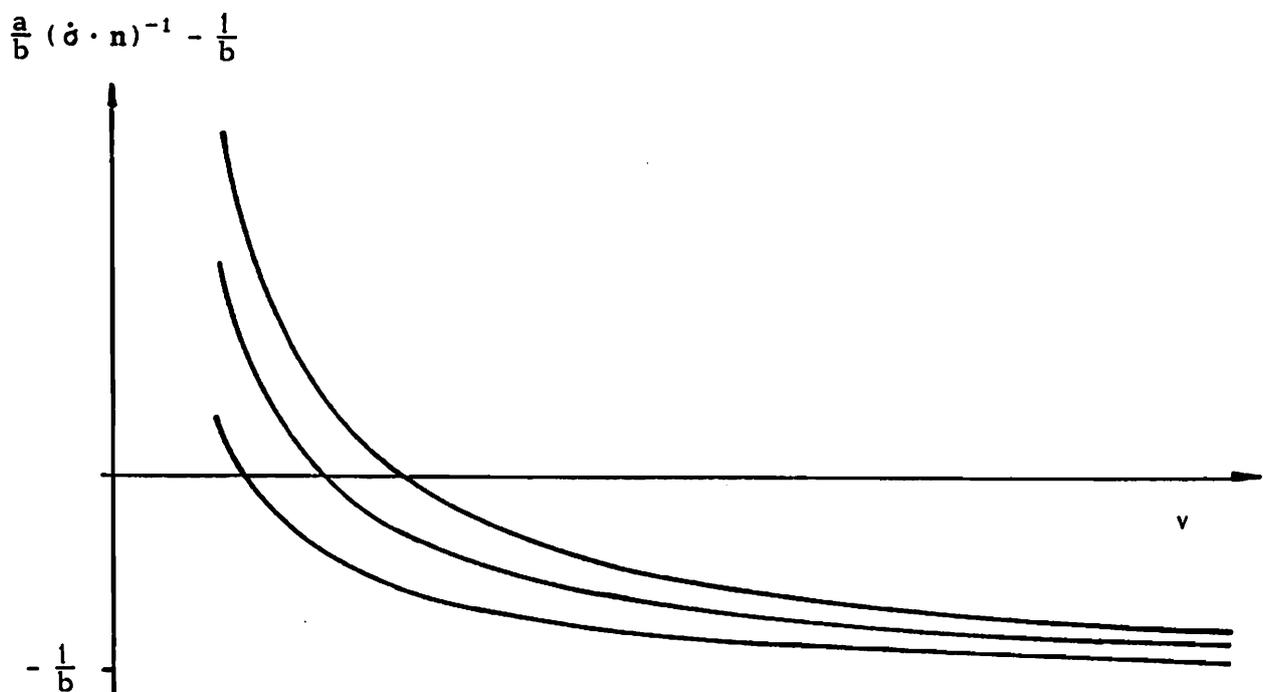


Abb. 2.14: Schematische Darstellung der rechten Seite von (2.144) bei festen Werten der Zustandsvariablen

Gesucht ist nun eine Funktion $a_2(v)$, welche jede Hyperbel genau einmal schneidet. Weiterhin soll wegen (2.135)

$$a_2(v = 0) = 1 \quad (2.150)$$

und zusätzlich

$$\frac{da_2}{dv} \leq 0, \quad (2.151)$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} a_2(v) = a_{2\infty} \geq 0 \quad (2.152)$$

gelten.

Geeignete Funktionen findet man am einfachsten durch die Transformation

$$v = \frac{1}{x}, \quad (2.153)$$

woraus

$$a_2(x) = \frac{a}{b} x - \frac{1}{n} \quad (2.154)$$

mit

$$a_2(0) = a_{2\infty} \quad (2.155)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_2(x) = 1 \quad (2.156)$$

folgen.

Wie Abb. 2.15 zeigt, erfüllen alle nicht konkaven Funktionen $a_2(x)$

$$\frac{d^2 a_2}{dx^2} \leq 0 \quad (2.157)$$

mit (2.155) und (2.156) die Forderung nach genau einem Schnittpunkt mit der Geradenschar $\frac{a}{b} x - \frac{1}{n}$.

Nach Rücktransformation erhält man die gesuchte Funktion $a_2(v)$, welche Eindeutigkeit der konstitutiven Gleichungen sicherstellt.

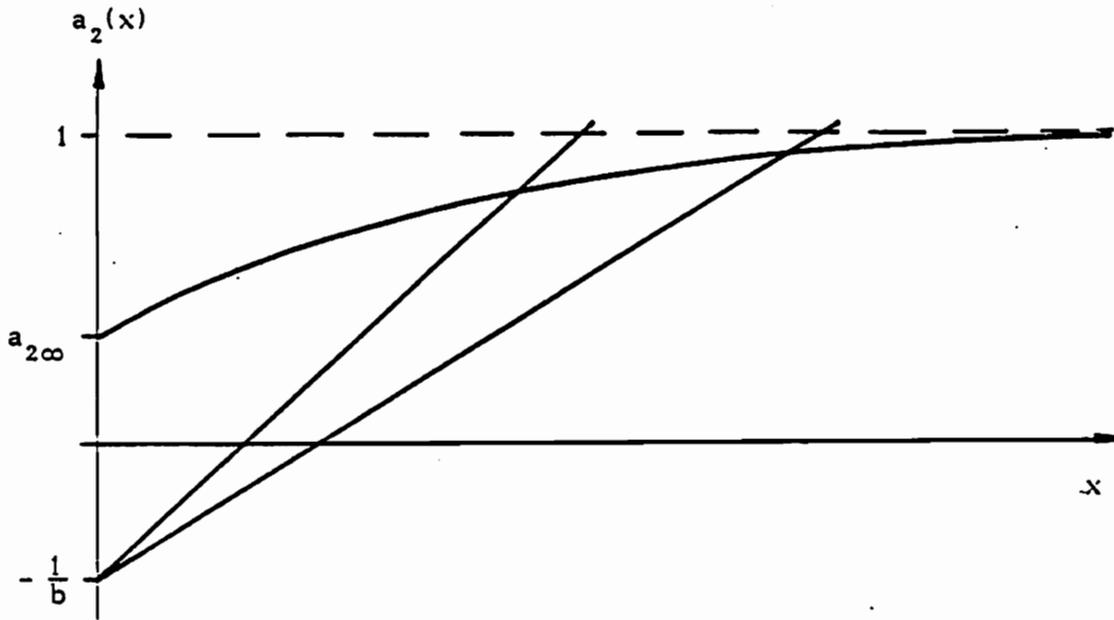


Abb. 2.15: Schematische Darstellung der transformierten rechten und linken Seite von (2.144) bei festen Werten der Zustandsvariablen

2.3. Experimentelle Ergebnisse

Experimentelle Grundlage für die Ermittlung der Materialfunktionen von AISI 316 L mod bei einer Temperatur von 550° C bilden Versuchsergebnisse, deren analytische Darstellungen in der französischen Norm [2.87] angegeben sind. Der austenitische Stahl AISI 316 L hat nach deutschen Normen die chemische Zusammensetzung X 2 CrNiMo 18 10 [2.96]. Metallographische Untersuchungen finden sich beispielsweise in [2.97].

Gemäß [2.87] läßt sich der monotone, quasistatische Zugversuch mit Hilfe der Beziehung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + 0,01 \left(\frac{\sigma}{K_0} \right)^{1/m_0} \quad (2.158)$$

beschreiben, welche bis zu einer plastischen Dehnung von 1 % gültig ist. Darin ist

$$K_0 = 1,17 \sigma_{0,2} \quad (2.159)$$

wobei $\sigma_{0,2}$ die mittlere Anfangsfließspannung bei

$$\varepsilon_1 = 0,2 \% \quad (2.160)$$

offset bezeichnet.

Zyklische Sättigungskurven können durch eine ähnliche Funktion dargestellt werden

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta \sigma}{E} + 0,01 \left(\frac{\Delta \sigma}{K} \right)^{1/m} . \quad (2.161)$$

Die Formel zur Beschreibung primären Kriechens

$$\varepsilon_1 = C_1 t^{C_2} \sigma^{n_1} \quad (2.162)$$

mit ε in %, t in h und σ in MPa gilt entweder bis

$$\varepsilon_1 = 1 \% \quad (2.163)$$

oder

$$t = t_{fp} = C_3 \sigma^{n_3} . \quad (2.164)$$

Das von diesem Zeitpunkt an auftretende sekundäre Kriechen läßt sich mit Hilfe der Gleichung

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1(t_{fp}) + 100 C \sigma^n (t - t_{fp}) \quad (2.165)$$

berechnen, welche wiederum nur bis

$$\varepsilon_2 = 1 \% \quad (2.166)$$

gültig ist.

In der genannten Norm finden sich keine Angaben über das Verhalten von AISI 316 L mod bei unterschiedlichen Dehnungsgeschwindigkeiten. In Ermangelung anderer Daten wird daher angenommen, daß sich der Geschwindigkeitseinfluß ebenso beschreiben läßt, wie es in [2.75] für $T = 625^\circ \text{C}$ erfolgt

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \left\langle 2 \gamma \frac{\Lambda}{E} \left(1 + \frac{\Lambda}{c_4} \right)^{c_5} \right\rangle n . \quad (2.167)$$

In der folgenden Tabelle sind die in (2.158) - (2.167) auftretenden Parameter aufgelistet:

elastische Parameter

E [MPa]	$1,492 \cdot 10^5$
ν [-]	0,3

plastische Parameter

$\sigma_{0,2}$ [MPa]	141,25
m_0 [-]	0,096
K [MPa]	739
m [-]	0,326

Kriechparameter

C_1 [-]	$2,9618 \cdot 10^{-12}$
C_2 [-]	0,42131
n_1 [-]	4,1800
C_3 [-]	$4,4926 \cdot 10^{19}$
n_3 [-]	-6,9467
C [-]	$5,2900 \cdot 10^{-26}$
n [-]	8,20

viskose Parameter

γ [s^{-1}]	$8,0 \cdot 10^{-29}$
c_4 [MPa]	0,01
c_5 [-]	8,7

Tab. 2.1: Parameter für AISI 316 L mod

2.4 Ermittlung der Materialfunktionen

2.4.1 Strategien zur Ermittlung der Materialfunktionen - Überblick

Der wesentliche Grundgedanke der hier vorgestellten Anpassungsstrategie besteht in der Trennung der Materialfunktionen, die das quasistatische Verfestigungsverhalten beschreiben, von denjenigen, die die viskosen Effekte modellieren. Diese Trennung beruht auf der Möglichkeit, den Grenzübergang bei verschwindender Prozeßgeschwindigkeit zu vollziehen, und erlaubt die sukzessive Bestimmung dieser beiden Gruppen von Materialfunktionen.

Ein weiteres wesentliches Merkmal ist die Zurückführung von Materialfunktionen auf experimentell observierbare Größen, wodurch in Verbindung mit den konstitutiven Gleichungen Punktmengen für die zu bestimmenden

Funktionen berechnet werden. Dieses Konzept der inkrementell zu bestimmenden Punktmenge mit anschließender analytischer Approximation wurde bereits bei der Anpassung von Kriechkurven recht erfolgreich eingesetzt [2.79] und wird in Kap. 2.4.5 ausführlich erläutert.

Üblicherweise werden Materialfunktionen durch Ausprobieren (s. z.B. [2.60]) oder durch Verwendung deterministischer (s. z.B. [2.21]) oder stochastischer [2.88, 2.23] Optimierungsverfahren ermittelt. Ausprobieren kann außerordentlich mühselig sein und ist von vornherein unbefriedigend. Optimierungsverfahren sind bei dem hier vorliegenden Problem extrem zeitaufwendig, da zur Ermittlung eines Zielfunktionswertes ein Differentialgleichungssystem integriert werden muß. Wenn man berücksichtigt, daß diese Integration u. U. sogar mehrmals - z.B. mit unterschiedlichen Dehnungsraten - erfolgen muß, und daß außerdem die starke Nichtlinearität oft eine extreme Sensibilität gegenüber geringsten Veränderungen der Materialparameter zur Folge hat, dann wird der große zeitliche Aufwand bei der Anpassung der Materialfunktionen mit konventionellen Methoden verständlich. Ein weiteres Problem bei deterministischen Optimierungsalgorithmen stellt die Wahl der Anfangsparameter dar.

Jedoch soll darauf hingewiesen werden, daß auch das hier vorgestellte Verfahren Nachteile aufweist. Das Problem einer sehr großen Sensibilität führte bei der Ermittlung der Materialfunktion B dazu, daß dazu auf ein Optimierungsverfahren zurückgegriffen werden mußte (s. Kap. 2.4.6). Im Falle der Bestimmung von A hat sich das neue Verfahren jedoch sehr bewährt.

Die Wahl des am besten geeigneten Verfahrens zur Ermittlung der Materialfunktionen konstitutiver Gleichungen ist nicht einfach. Es können jedoch die folgenden Empfehlungen gegeben werden:

Ist die analytische Struktur der Materialfunktionen unbekannt, so sollte das Verfahren der Reduktion dieser Funktion auf observierbare Größen verwendet werden. Sind dagegen ausschließlich Parameter zu bestimmen, dann können bei großer Sensibilität Optimierungsverfahren Vorteile haben. Wenn gleichzeitig viele Parameter berechnet werden müssen oder wenn ihre Startwerte nur ungenau bekannt sind, dann ist ein stochastisches Verfahren wie die Evolutionsstrategie von *Rechenberg* [2.89] empfehlenswert, da diese nicht bei Nebenminima hängenbleibt [2.23]. Sind allerdings nur wenige Parameter zu bestimmen und sind die Startwerte recht genau, wie hier bei den Materialfunktionen g und c , sollte ein deterministisches Optimierungsverfahren angewendet werden, da es in solch einem Fall gewöhnlich am schnellsten zum Ziel führt.

2.4.2 Formulierung des Problems

Ausgangspunkt aller Verfahren bildet das System der konstitutiven Gleichungen für den einaxialen Zug:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{2}{3} \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{K} + \sqrt{\frac{2}{3}} \ll \Phi \gg \operatorname{sign} \left(\frac{2}{3} \bar{\sigma} - \xi \right) \quad (2.168)$$

mit

$$\dot{\bar{\sigma}} = \langle A \dot{\sigma} \rangle + \ll B (\sigma - \bar{\sigma}) \gg \quad (2.169)$$

bzw. bei Dehnungssteuerung

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{\frac{1}{E} + \langle \frac{2}{3} \frac{A}{K} \rangle} \left\{ \dot{\varepsilon} - \ll \frac{2}{3} \frac{B}{K} (\sigma - \bar{\sigma}) \gg - \sqrt{\frac{2}{3}} \ll \Phi \gg \operatorname{sign} \left(\frac{2}{3} \bar{\sigma} - \xi \right) \right\}, \quad (2.170)$$

$$\dot{\xi} = c \frac{2}{3} \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{K}, \quad (2.171)$$

$$\dot{x} = \left(\frac{2}{3} \bar{\sigma} - \xi \right) \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{K}, \quad (2.172)$$

$$\dot{\Lambda} = p \sqrt{\frac{g_0}{g}} \dot{x}, \quad (2.107)$$

der verallgemeinerten Überspannung

$$\Lambda = \sqrt{f} - \sqrt{g} = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{2}{3} \bar{\sigma} - \xi \right)^2} - \sqrt{g}, \quad (2.173)$$

dem Maß für die Prozeßgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}} |\dot{\sigma}| \quad (2.174)$$

und den Nebenbedingungen

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x, & \text{wenn } \left(\frac{2}{3} \bar{\sigma} - \xi \right)^2 = \frac{2}{3} g \text{ und } \dot{\sigma} \operatorname{sign} \left(\frac{2}{3} \bar{\sigma} - \xi \right) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (2.175)$$

$$\ll x \gg = \begin{cases} x, & \text{wenn } \left(\frac{2}{3} \sigma - \xi \right)^2 \geq \frac{2}{3} g \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.176)$$

Zu bestimmen sind die plastischen Materialfunktionen $g(x)$ und $c(x)$, sowie die viskosen Materialfunktionen $A(\Lambda, v)$, $B(\sqrt{f}, \|\sigma'\|)$ und $\Phi(\Lambda)$.

2.4.3. Bestimmung der plastischen Materialfunktionen $g(x)$ und $c(x)$

Für die Materialfunktionen $g(x)$ und $c(x)$ können die Ansätze verwendet werden, die in [2.90] für das INTERATOM-Modell in geschwindigkeitsunabhängiger Formulierung gemacht werden

$$g(x) = g_0 + (g_\infty - g_0) (1 - e^{-c_1 x}) \quad (2.177)$$

mit

$$g_0 = \frac{2}{3} \sigma_0^2 \quad (2.178)$$

und

$$g_\infty = c_2 g_0 \quad (2.179)$$

sowie

$$c(x) = \frac{2}{3} \frac{E E_t}{E - E_t} - \frac{1}{2} \frac{dg}{dx} \quad (2.180)$$

Der Tangentenmodul $E_t(\varepsilon)$ berechnet sich aus der Spannungs-Dehnungsbeziehung, für die hier eine gebrochen-rationale Funktion

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & \text{wenn } \varepsilon \leq \frac{\sigma_0}{E} \\ \frac{a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c}{d + \varepsilon}, & \text{wenn } \varepsilon > \frac{\sigma_0}{E} \end{cases} \quad (2.181)$$

angesetzt wird. ε kann anschließend mit Hilfe von

$$\varepsilon = \varepsilon(\Delta(x)) \quad (2.182)$$

durch die interne Variable x ersetzt werden, woraus sich $E_t(\Delta(x))$ ergibt (s. [2.73]).

Die Koeffizienten der gebrochen-rationale Funktion in (2.181) lassen sich auch mit Hilfe des Tangentenmoduls an der Fließgrenze E_{t0} , des asymptotischen Tangentenmoduls $E_{t\infty}$ für $x \rightarrow \infty$ und des Ordinatenabschnittes c_3 der Asymptote an die Spannungs-Dehnungskurve ausdrücken (s. Abb. 2.16).

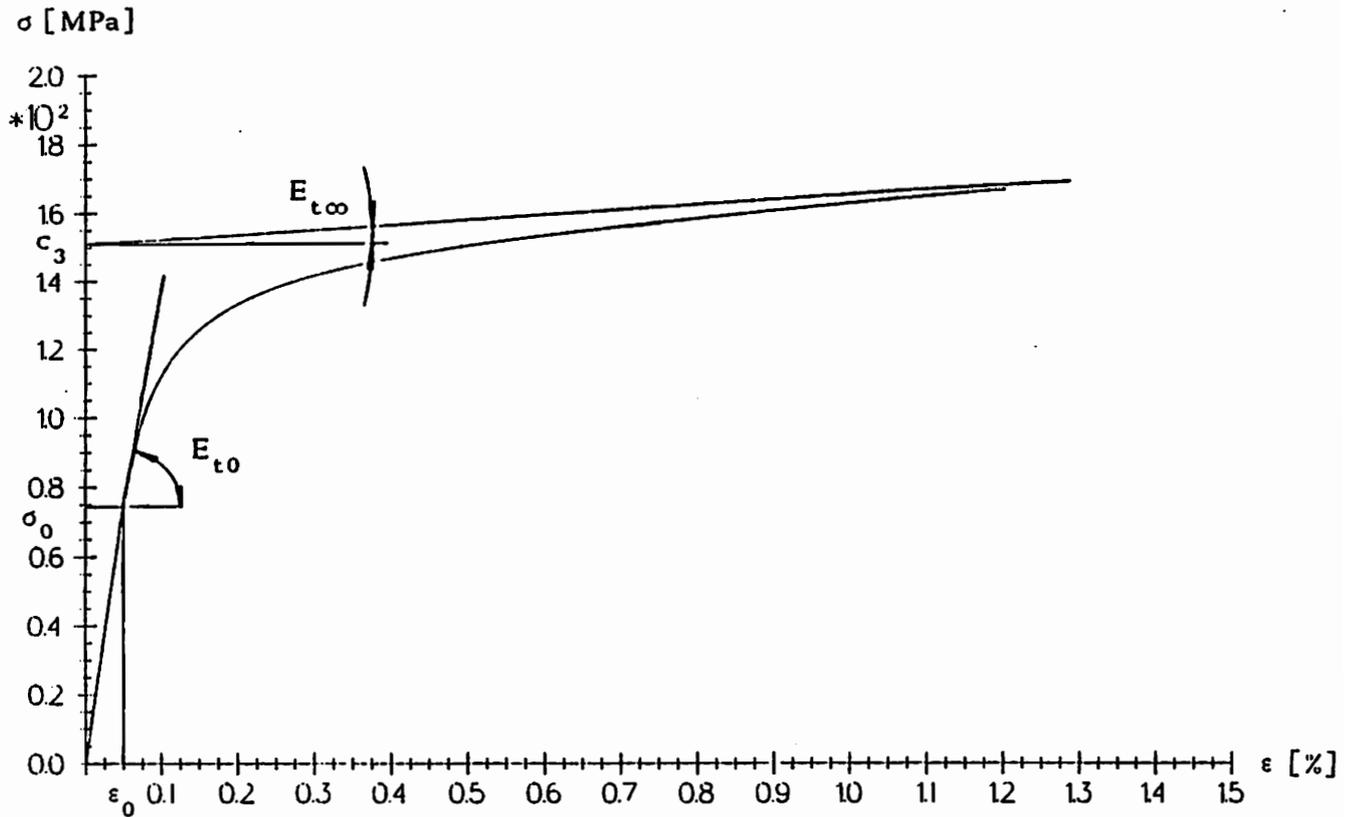


Abb. 2.16: Schematische Darstellung des einaxialen Zugversuches aus [2.73]

Zur Bestimmung der Materialparameter g_0 , E_{t0} , $E_{t\infty}$ sowie c_1 , c_2 und c_3 wird zunächst - im Gegensatz zu Tab. 2.1 -

$$\sigma_0 = 74,5 \text{ MPa} \quad (2.183)$$

angesetzt. Mit (2.158) folgt für den Tangentenmodul

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \left\{ \frac{1}{E} + \frac{0,01}{m_0 K_0} \left(\frac{\sigma}{K_0} \right)^{\frac{1-m_0}{m_0}} \right\}^{-1} \quad (2.184)$$

und damit als Anfangswert

$$E_{t0} = E_{t0}(\sigma_0) = 1,417 \cdot 10^5 \text{ MPa} . \quad (2.185)$$

Da (2.158) nur bis 1 % plastischer Dehnung gültig ist, wird der asymptotische Tangentenmodul an dieser Stelle bestimmt

$$\sigma_\infty = \sigma(\epsilon = 0,01) = 165,26 \text{ MPa} , \quad (2.186)$$

woraus mit (2.184)

$$E_{t\infty} = E_t(\sigma_\infty) = 1,57 \cdot 10^3 \text{ MPa} \quad (2.187)$$

folgt.

Aus der Gleichung der Asymptote

$$\sigma = c_3 + E_{t\infty} \varepsilon \quad (2.188)$$

folgt mit der Gesamtdehnung nach (2.158)

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{\sigma_{\infty}}{E} + 0,01 \left(\frac{\sigma_{\infty}}{K_0} \right)^{1/m_0} \quad (2.189)$$

für den Ordinatenabschnitt

$$c_3 = 147,82 \text{ MPa} . \quad (2.190)$$

Damit sind alle Materialparameter außer c_1 und c_2 , die in $g(x)$ und $c(x)$ auftreten, allein durch analytische Berechnungen bestimmt.

Die Sättigungskurve bei zyklischen Prozessen wird wesentlich vom Fließflächenradius $\sqrt{g_{\infty}}$, der sich gemäß (2.177) für $x \rightarrow \infty$ einstellt, und damit von c_2 bestimmt. Dagegen beeinflusst c_1 , wie schnell sich (asymptotische) Stationarität einstellt. Diese beiden Größen wurden von *Scholz* mit seinem in [2.91] beschriebenen Optimierungsprogramm durch Vergleich mit den plastischen Grenzkurven gemäß (2.161) ermittelt. Das Programm basiert auf einem modifizierten optimalen Gradientenverfahren und enthält eine Konvergenzbeschleunigung nach *Wynn*. Die Grenzyklen bei Spannungsamplituden von 100 MPa, 200 MPa, 300 MPa und 400 MPa wurden berechnet, wobei angenommen wurde, daß eine Extrapolation des Endwertes nach Berechnung von 7 Zyklen möglich ist, und die Abweichung von den Sollwerten minimiert. Die so berechneten Werte betragen

$$c_1 = 7,30 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}^{-1} \quad (2.191)$$

und

$$c_2 = 9,12 . \quad (2.192)$$

Eine Kontrollrechnung ergab mit diesen Materialparametern im monotonen Zugversuch ein nicht ganz befriedigendes Verfestigungsverhalten im Vergleich mit den experimentellen Daten. Das ist auf Verwendung der beiden unterschiedlichen analytischen Funktionen (2.158) und (2.181) zur Beschreibung der Spannungs-Dehnungskurven zurückzuführen. Der Parameter c_3 erlaubt eine Anhebung des Spannungsniveaus (s. Abb. 2.16) und liefert mit Hilfe der Modifikation

$$c_3 = 151,0 \text{ MPa}$$

(2.193)

eine hervorragende Übereinstimmung im gesamten Dehnungsbereich (s. Abb. 2.17).

In den Abb. 2.18 - 2.21 sind die Ergebnisse zyklischer Rechnungen zusammen mit der Grenzkurve nach (2.161) dargestellt. Ein qualitativer Vergleich dieser Kurven mit experimentell gewonnenen Daten zeigt, daß das Modell in der Lage ist, die Form zyklischer $\sigma - \epsilon$ - Kurven sehr genau wiederzugeben (Abb. 2.22 aus [2.91]). Dabei sind vor allem der weiche Übergang bei Wiederbelastung sowie die Symmetrie der Sättigungskurven hervorzuheben. Ein quantitativer Vergleich ergibt sowohl eine gute Modellierung der zyklischen Verfestigung bei Sättigung, die besonders bei den höheren Dehnungsschwingweiten recht groß ist, als auch eine befriedigende Berechnung der zur Sättigung erforderlichen Anzahl von Zyklen.

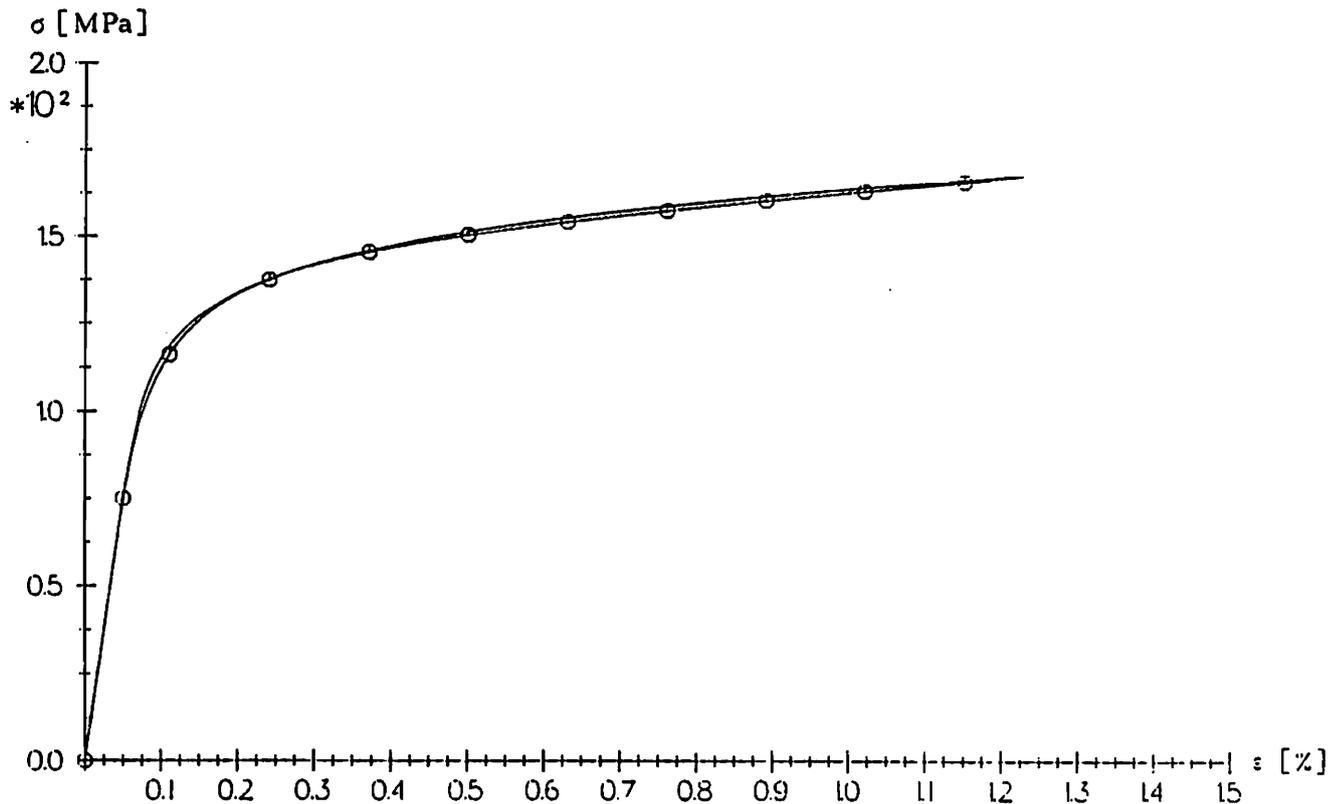


Abb. 2.17: Monotoner, quasistatischer Zug, experimentelle Daten nach (2.158) und Rechenergebnisse (Kreissymbole)

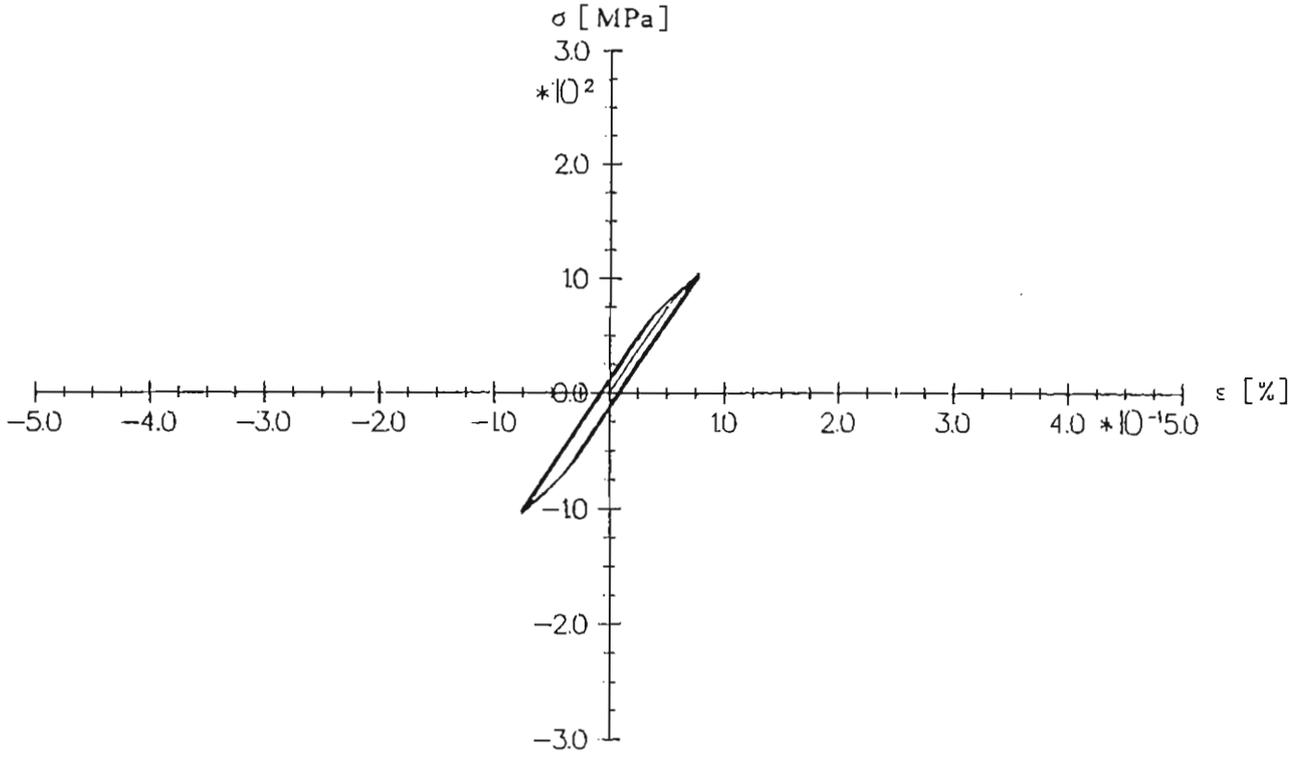


Abb. 2.18: Zyklische, quasistatische $\sigma - \epsilon -$ Kurve mit $\Delta\epsilon = 7,62 \cdot 10^{-2}\%$,
Rechenergebnis

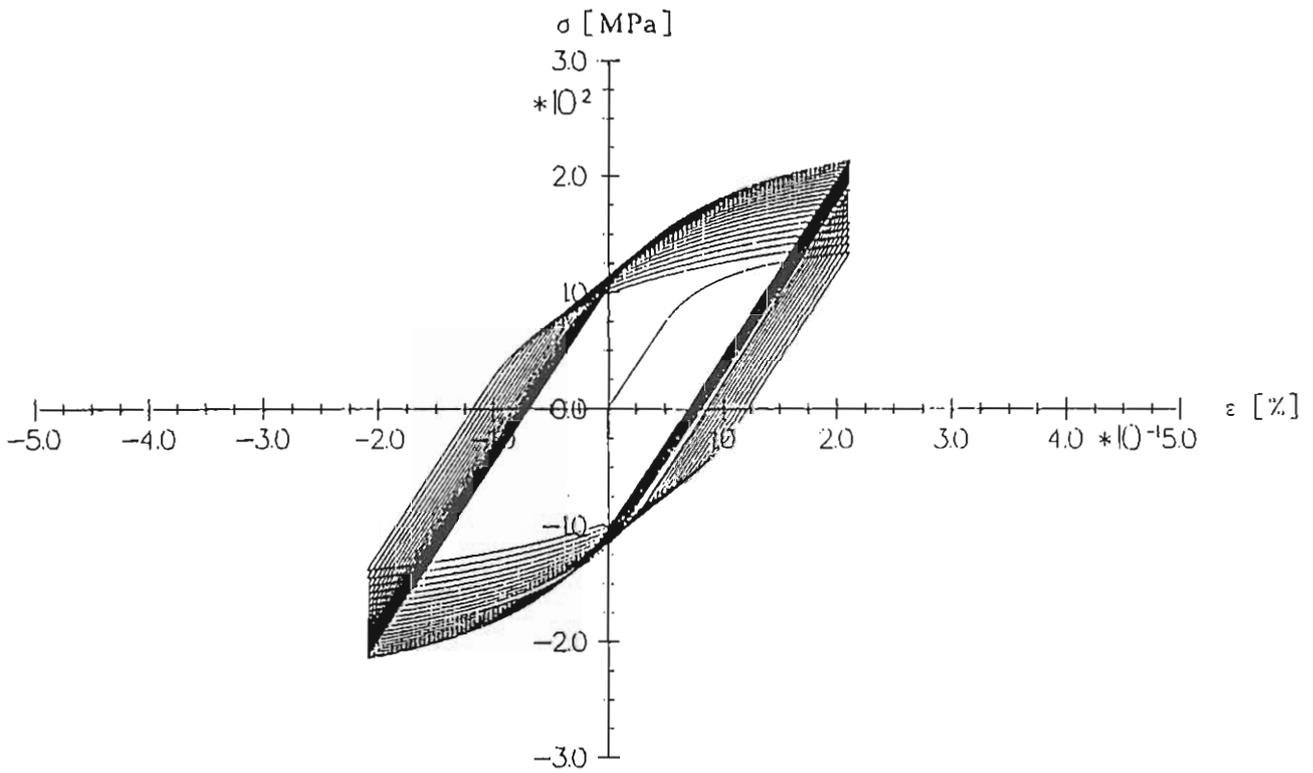


Abb. 2.19: Zyklische, quasistatische $\sigma - \epsilon -$ Kurve mit $\Delta\epsilon = 2,10 \cdot 10^{-1}\%$,
Rechenergebnis

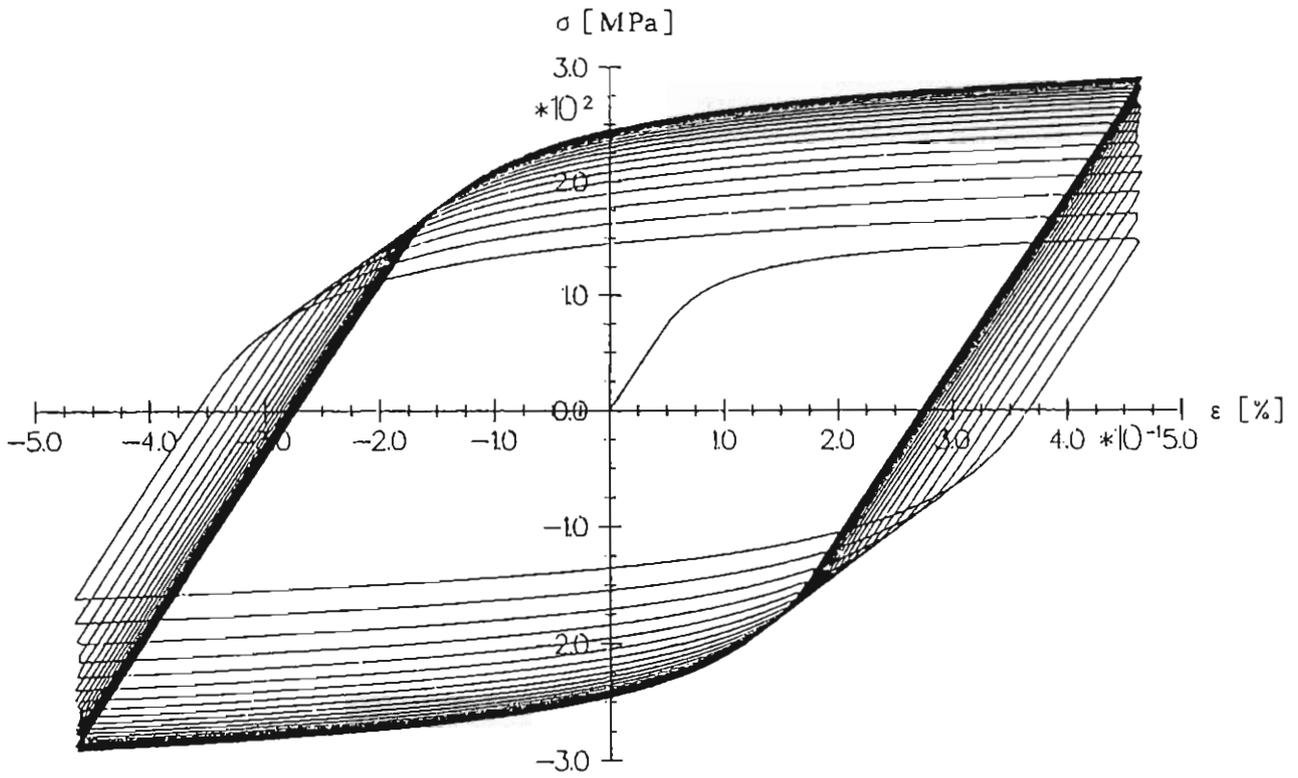


Abb. 2.20: Zyklische, quasistatische $\sigma - \epsilon -$ Kurve mit $\Delta\epsilon = 4,65 \cdot 10^{-1} \%$,
Rechenergebnis

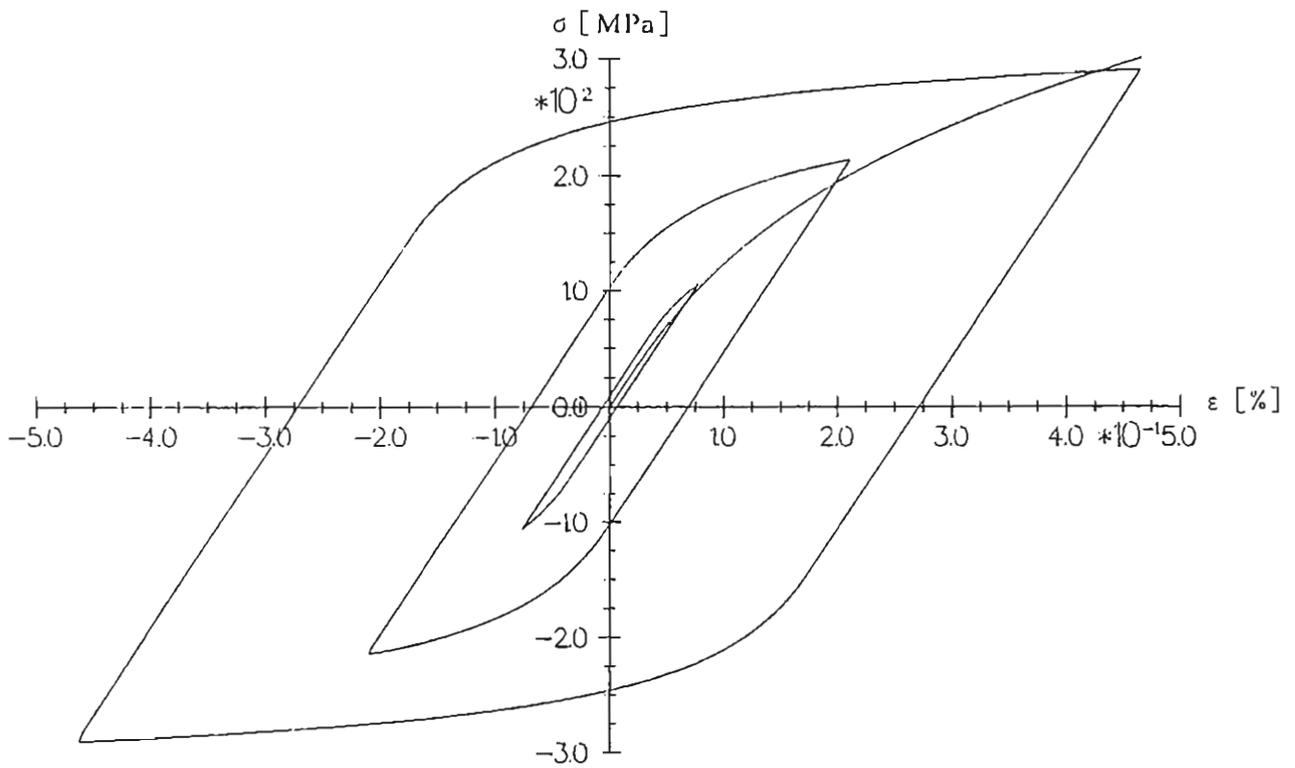


Abb. 2.21: Zyklische Grenzkurven der Prozesse nach Abb. 2.18 - 2.20 im
Vergleich zu experimentell gewonnener Kurve nach (2.161)

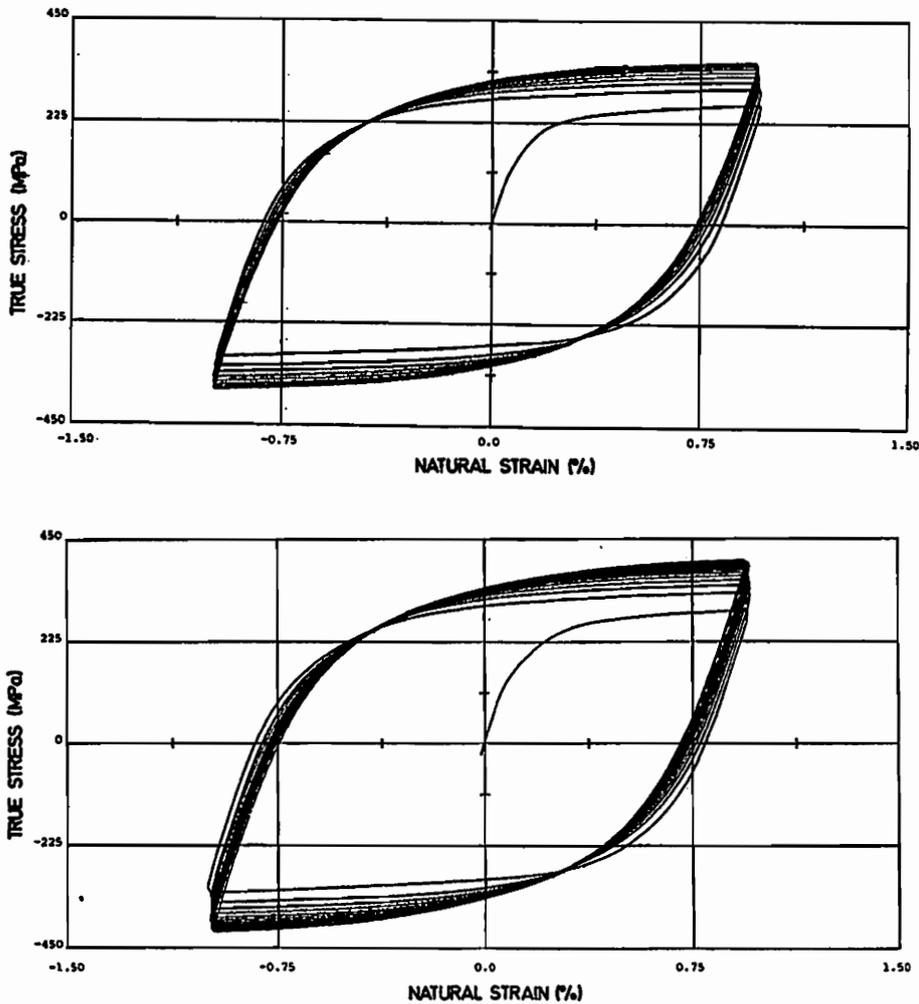


Abb. 2.22: Zyklische $\sigma - \varepsilon$ - Kurven von AISI 316 L mit $\Delta\varepsilon = 1,0 \cdot 10^0 \%$, $\dot{\varepsilon} = \pm 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (oben) und $\dot{\varepsilon} = \pm 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ (unten), experimentelle Ergebnisse bei Raumtemperatur aus [2.92]

2.4.4 Bestimmung der viskosen Materialfunktionen $A(\Lambda, \nu)$, $B(\sqrt{f}, \|\sigma'\|)$ und $\Phi(\Lambda)$ - grundsätzliches Vorgehen

Die Materialfunktionen $A(\Lambda, \nu)$, $B(\sqrt{f}, \|\sigma'\|)$ und $\Phi(\Lambda)$ können nicht unabhängig voneinander bestimmt werden, da es keinen Prozeß gibt, bei dem lediglich eine von ihnen auftritt. Bei Belastungsprozessen überwiegt jedoch der Beitrag von A zur inelastischen Dehnungsrate denjenigen der anderen beiden Funktionen bei weitem, so daß zunächst

$$\Phi \equiv 0$$

(2.194)

und

$$B \equiv 0 \quad (2.195)$$

gesetzt werden kann. Bei Kriechprozessen verschwindet dagegen der Einfluß von A völlig (s. (2.169)). Daher wird zunächst mit (2.194) und (2.195) A aus der Betrachtung von einaxialen Zugversuchen bestimmt und daran anschließend B und Φ aus dem Vergleich mit Kriechkurven ermittelt. Mit Hilfe einer Kontrollrechnung muß schließlich die Zulässigkeit von (2.194) und (2.195) überprüft werden.

2.4.5 Bestimmung von $A(\Lambda, \nu)$

Aus (2.168) und (2.169) erhält man in Verbindung mit dem Produktansatz (2.143)

$$A = a_1(\Lambda) a_2(\nu) = \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E} \right) \frac{3K}{2\sigma} \quad (2.196)$$

An der Fließgrenze σ_0 gilt voraussetzungsgemäß

$$a_1(\Lambda = 0) = 1 \quad (2.197)$$

und mit

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_t(\varepsilon, \nu)} \quad (2.198)$$

folgt aus (2.196)

$$a_2(\nu) = \left(\frac{1}{E_{t0}(\nu)} - \frac{1}{E} \right) \frac{3}{2} K_0 \quad (2.199)$$

Diese Gleichung läßt sich mit (2.180) weiter zu

$$a_2(\nu) = \frac{E_{t0}}{E_{t0}(\nu)} \frac{E - E_{t0}(\nu)}{E - E_{t0}} \quad (2.200)$$

umformen, wobei E_{t0} den Anfangstangentenmodul bei quasistatischer Prozeßführung darstellt (s. Abb. 2.23).

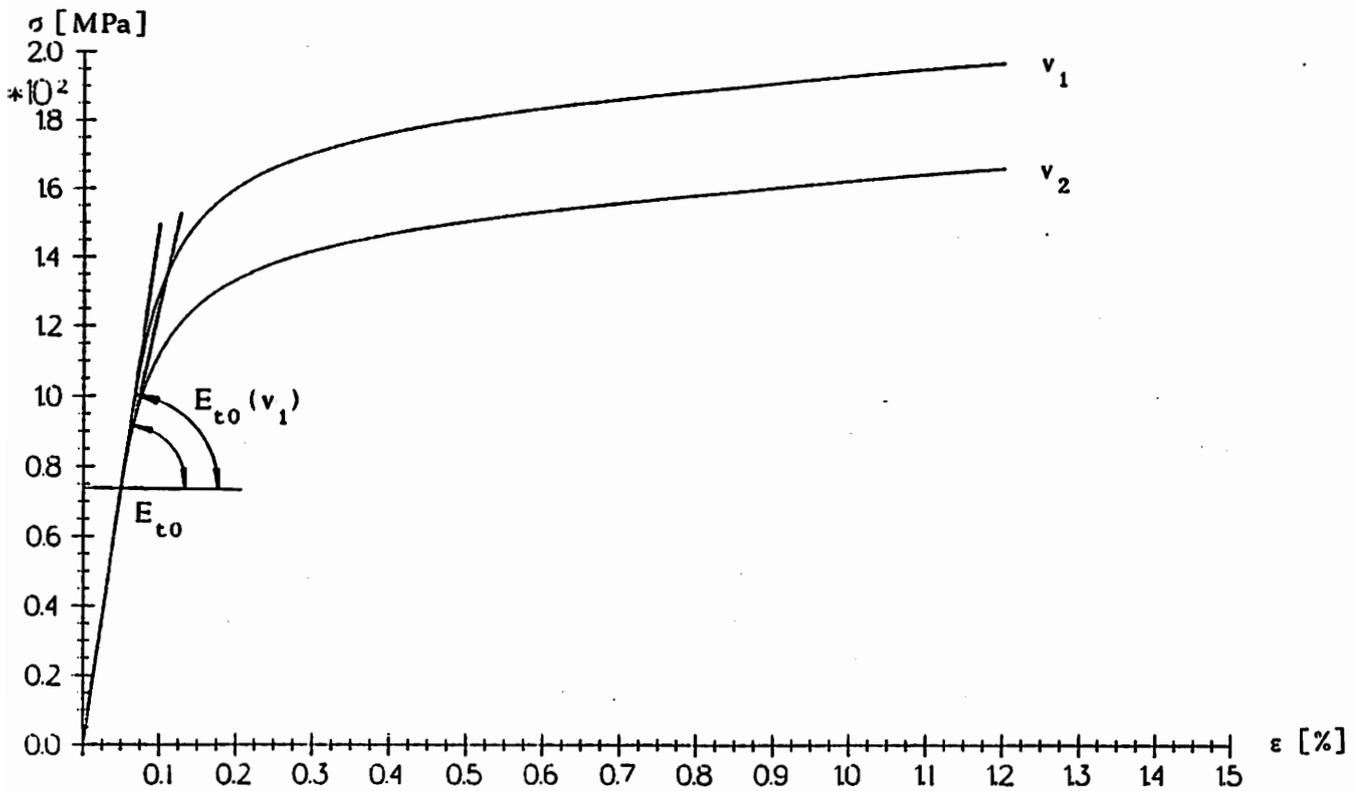


Abb.2.23: Schematische Darstellung des monotonen Zugversuches bei zwei unterschiedlichen Prozeßgeschwindigkeiten $v_2 \rightarrow 0, v_1 > v_2$

Die Gleichungen (2.199) und (2.200) zeigen, daß die Funktion $a_2(v)$ von

$$a_2(v = 0) = 1 \quad (2.201)$$

auf den Wert

$$\lim_{v \rightarrow \infty} a_2(v) = a_{2\infty} = 0 \quad (2.202)$$

monoton abfällt, wenn die plausible Annahme

$$\lim_{v \rightarrow \infty} E_{t0}(v) = E \quad (2.203)$$

gemacht wird.

Mit Hilfe von (2.167) kann E_{t0} für unterschiedliche Dehnungsraten und damit für verschiedene Prozeßgeschwindigkeiten

$$v \approx \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} \quad (2.204)$$

bestimmt werden.

Die so erhaltene Punktmenge wurde zunächst durch den zweiparametrischen Ansatz

$$a_2(v) = e^{a v^b} \quad (2.205)$$

mit

$$a = -4,237, \quad (2.206)$$

$$b = 4,989 \cdot 10^{-3} \quad (2.207)$$

angenähert, welcher die Bedingungen (2.201) und (2.202) sowie die aus der Forderung nach Eindeutigkeit resultierende Ungleichung (2.157) erfüllt. In (2.205) und im folgenden bezeichnet v die auf 1 MPa/s normierte Prozeßgeschwindigkeit.

Da $\dot{\epsilon}$ und damit v bei praktischen Anwendungen über mehrere Dekaden variieren, ist es nicht möglich, mit einem derart einfachen Ansatz $a_2(v)$ über den gesamten Definitionsbereich von v gleichmäßig gut zu erfassen. Die hier gewählten Parameter führen im Bereich

$$1 \cdot 10^0 \text{ MPa/s} \leq v \leq 1 \cdot 10^2 \text{ MPa/s} \quad (2.208)$$

zu einer besonders guten Approximation.

Mit Kenntnis der Funktion $a_2(v)$ ist es nun möglich, auch $a_1(\Lambda)$ durch observierbare Größen auszudrücken. Dazu wird angenommen, daß zu einem beliebigen Zeitpunkt t alle Zustandsgrößen und Materialfunktionen bekannt sind. Ebenso sind aus Versuchen (bzw. aus deren Beschreibung durch (2.167)) $\dot{\sigma}(t)$ und $\dot{\epsilon}(t)$ bekannt, woraus sich mit Hilfe der expliziten Eulerintegration die entsprechenden Werte zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ berechnen lassen (vgl. (2.168 - 2.176, 2.107)):

$$\bar{\sigma}_{(t+\Delta t)} = \bar{\sigma}_{(t)} + (A\sigma + B(\sigma - \bar{\sigma}))_{(t)} \Delta t, \quad (2.209)$$

$$\xi_{(t+\Delta t)} = \xi_{(t)} + c_{(t)} \frac{2}{3} \left(\frac{\dot{\sigma}}{K} \right)_{(t)} \Delta t, \quad (2.210)$$

$$x_{(t+\Delta t)} = x_{(t)} + \left(\frac{2}{3} \bar{\sigma} - \xi \right)_{(t)} \left(\frac{\dot{\sigma}}{K} \right)_{(t)} \Delta t, \quad (2.211)$$

$$\Delta_{(t+\Delta t)} = \Delta_{(t)} + p \sqrt{\frac{g_0}{g}}_{(t)} \dot{x}_{(t)} \Delta t, \quad (2.212)$$

wobei Abkürzungen der Form

$$c_{(t)} = c(x(t)) \quad (2.213)$$

verwendet wurden.

Damit ist es möglich,

$$\Lambda_{(t + \Delta t)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left| \frac{2}{3} \sigma - \xi \right|_{(t + \Delta t)} - \sqrt{g} (t + \Delta t) \quad (2.214)$$

sowie

$$a_{1(t + \Delta t)} = \left\{ \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{E} - \frac{2}{3} \frac{B}{K} (\sigma - \bar{\sigma}) - \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi \right\}_{(t + \Delta t)} \left(\frac{3K}{2\bar{\sigma} a_2} \right)_{(t + \Delta t)} \quad (2.215)$$

zu bestimmen, wodurch man die gesuchte Punktmenge $a_1(\Lambda)$ erhält.

Sie läßt sich gut durch eine Tangenshyperbolicus-Funktion der Form

$$a_1(\Lambda) = \frac{1 - G}{\tanh c - 1} \left\{ \tanh (d \Lambda + c) - 1 \right\} + G \quad (2.216)$$

darstellen, welche die Eigenschaften

$$a_1(\Lambda = 0) = 0 \quad ,$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} a_1(\Lambda) = G \quad ,$$

$$\frac{da_1}{d\Lambda} > 0 \quad (2.217)$$

aufweist. Der Grenzwert G und die Parameter c und d können Tab. 2.2 auf S. 77 entnommen werden, welche sämtliche Materialparameter für AISI 316 L mod bei 550° C enthält.

Mit den nun bekannten Materialfunktionen ergab sich eine hervorragende Übereinstimmung mit vorgegebenen $\sigma - \varepsilon$ - Kurven, wenn die Prozeßgeschwindigkeit v etwa in dem in (2.208) angegebenen Intervall lag. Bei deutlich anderen Geschwindigkeiten traten jedoch starke Abweichungen auf. Dieses ist auf der einen Seite darauf zurückzuführen, daß der Ansatz (2.205) den Verlauf $a_2(v)$ sowohl in der Umgebung von $v = 0$ als auch bei hohen Prozeßgeschwindigkeiten nicht genau genug erfassen kann. Andererseits ist aber auch die Bestimmung dieser Punktmenge mit recht großen Unsicherheiten behaftet, da dazu lediglich Daten an der Fließgrenze herangezogen wurden.

Um den gesamten Zugversuch bei verschiedenen Dehnungsraten präzise modellieren zu können, wurde die Funktion $a_2(v)$ nachträglich noch einer Optimierung unterworfen. Weiterhin sollte erreicht werden, daß bereits bei sehr kleinen, aber noch nicht verschwindenden Prozeßgeschwindigkeiten $v \leq v_0$ die $\sigma - \varepsilon$ - Kurve mit der des quasistatischen Grenzfalls übereinstimmt.

Dazu wurde zunächst (2.205) in einen zweigliedrigen Ansatz der Form

$$a_2(v) = \begin{cases} c_1 e^{a_1(v-v_0)^{b_1}} + (1-c_1) e^{a_2(v-v_0)^{b_2}}, & \text{wenn } v_0 < v < v_\infty \\ 1, & \text{wenn } v \leq v_0 \end{cases} \quad (2.218)$$

modifiziert, wobei v_∞ die maximale Prozeßgeschwindigkeit bezeichnet, für die das Modell Gültigkeit hat.

Dabei sollte der erste Summand den starken Abfall von a_2 in der Umgebung von v_0 , der zweite Term den Verlauf bei hohen Prozeßgeschwindigkeiten in der Nähe von v_∞ erfassen.

Exponentialfunktionen gemäß

$$a_2(v) = c e^{a(v-v_0)^b} \quad (2.219)$$

erfüllen jedoch nur dann die Bedingung

$$\frac{da_2}{dv} \leq 0 \quad (2.151)$$

sowie die Forderung nach Eindeutigkeit der konstitutiven Gleichungen (2.157), wenn sowohl

$$a < 0, b < 0, c < 0, v - v_0 \geq 0 \quad (2.220)$$

als auch

$$ab(v-v_0)^b + b + 1 - 2\frac{v_0}{v} \geq 0 \quad (2.221)$$

gilt. Im Grenzfall $v \rightarrow v_0$ führt dieses zu der Bedingung

$$b - 1 \geq 0, \quad (2.222)$$

während numerische Untersuchungen zur Approximation

$$b < 1 \quad (2.223)$$

verlangen, wodurch (2.221) nur mit

$$v_0 = 0 \quad (2.224)$$

zu verwirklichen ist.

Diese starke Einschränkung des Ansatzes (2.218) führte zu großen Problemen bei der Anpassung der Materialfunktionen: Bei verschwindendem v_0

wird zwar analytisch der quasistatische Grenzfall erreicht, numerische Rechnungen mit sehr kleinen Dehnungsraten weichen jedoch unbefriedigend stark von der plastischen Grenzkurve ab. Wird jedoch (2.222) nicht beachtet, so wurde zwar eine ausgezeichnete Übereinstimmung zwischen vorgegebenen und berechneten Kurven erreicht, jedoch ist dann das System der konstitutiven Gleichungen nicht mehr eindeutig in den Spannungsraten. Numerisch zeigte sich das in einem schwachen Oszillieren der Spannungs - Dehnungskurve.

Um sowohl Eindeutigkeit sicherzustellen als auch numerisch für kleine Dehnungsraten plastisches Materialverhalten zu simulieren, wurde der Ansatz

$$a_2(v) = \begin{cases} c_1 e^{a_1 v^{b_1}} + c_2 e^{a_2 v^{b_2}}, & \text{wenn } v_0 < v < v_\infty \\ 1, & \text{wenn } v \leq v_0 \end{cases} \quad (2.225)$$

mit

$$c_1 = (1 - c_2 e^{a_2 v_0^{b_2}}) e^{-a_2 v_0^{b_2}} \quad (2.226)$$

gewählt. Die Ungleichung (2.221) führt hier auf die Bedingungen

$$a_i > - \frac{b_i + 1}{b_i v^{b_i}}, \quad i = 1, 2 \quad (2.227)$$

Da die rechten Seiten dieser Ungleichungen monoton mit v ansteigen, genügt die Überprüfung bei der maximal zulässigen Prozeßgeschwindigkeit v_∞ . Die Restriktionen (2.220) sowie (2.227) wurden in das von *Scholz* entwickelte deterministische Optimierungsprogramm (s. Kap. 2.4.3) eingebaut, um den Parametersatz a_1 , a_2 , b_1 , b_2 und c_2 zu bestimmen, der die Zielfunktion

$$J = \sum_{i=1}^N (y(i) - p(i))^2 \quad (2.228)$$

minimiert. Dabei bezeichnen $y(i)$ die relativen Fehler an je 10 Stützstellen der Spannungs - Dehnungskurven für $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, $1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $1 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ sowie der plastischen $\sigma - \epsilon -$ Kurve. Für das viskoplastische Modell wurde gefordert, daß die Dehnungsrate

$$\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1} \quad (2.229)$$

als quasistatische Dehnungsgeschwindigkeit anzusehen ist.

Während der Optimierung stellte sich heraus, daß es zweckmäßig ist, nicht nur die relativen Fehler der Spannungen in der Zielfunktion zu

berücksichtigen, sondern auch die Steigungen $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ der Spannungs-Dehnungskurven im letzten - näherungsweise linearen - Teil in (2.228) aufzunehmen. Dazu wurden der Differenzenquotient der jeweils letzten beiden Stützstellen mit der vorgegebenen Steigung verglichen und ihre relativen Fehler so gewichtet, daß an dieser Stelle ein absoluter Fehler von 1 MPa einen gleich großen Beitrag zur Zielfunktion leistet wie ein Steigungsfehler mit

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \cdot 1 \cdot 10^{-2} = 1 \text{ MPa} . \quad (2.230)$$

Diese Forderung führte bei einer Wichtung von 1 in den Spannungen zu einer Wichtung von 0,1 in den Ableitungen.

Da der erste Term im Ansatz (2.225) lediglich den steilen Abfall von $a_2(v)$ bei kleinen Prozeßgeschwindigkeiten modellieren soll und damit als Korrekturen des eingliedrigen Ansatzes (2.205) angesehen werden kann, können die Startparameter recht genau abgeschätzt werden. Die Optimierung lieferte den in Tab. 2.2 auf S. 77 aufgeführten Satz von Materialparametern, wobei die geringfügige Veränderung der Werte a_2 , b_2 und c_2 gegenüber den entsprechenden Werten für (2.205) auffällt.

In der Abb. 2.24 ist der Verlauf der Materialfunktion $A(\Lambda, v)$ dargestellt, wobei ihr großer Wertebereich und der große Definitionsbereich von v eine teilweise logarithmische Darstellung erforderlich machten.

Die mit diesen Werten berechneten $\sigma - \varepsilon$ - Kurven zeigen für die Grenzfälle $\dot{\varepsilon} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ und $1 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ nahezu völlige Übereinstimmung mit den vorgegebenen Werten (s. Abb. 2.25 und 2.26, wobei die Kreissymbole die mit dem System (2.106, 2.77, 2.78, 2.107) ermittelten Kurven kennzeichnen).

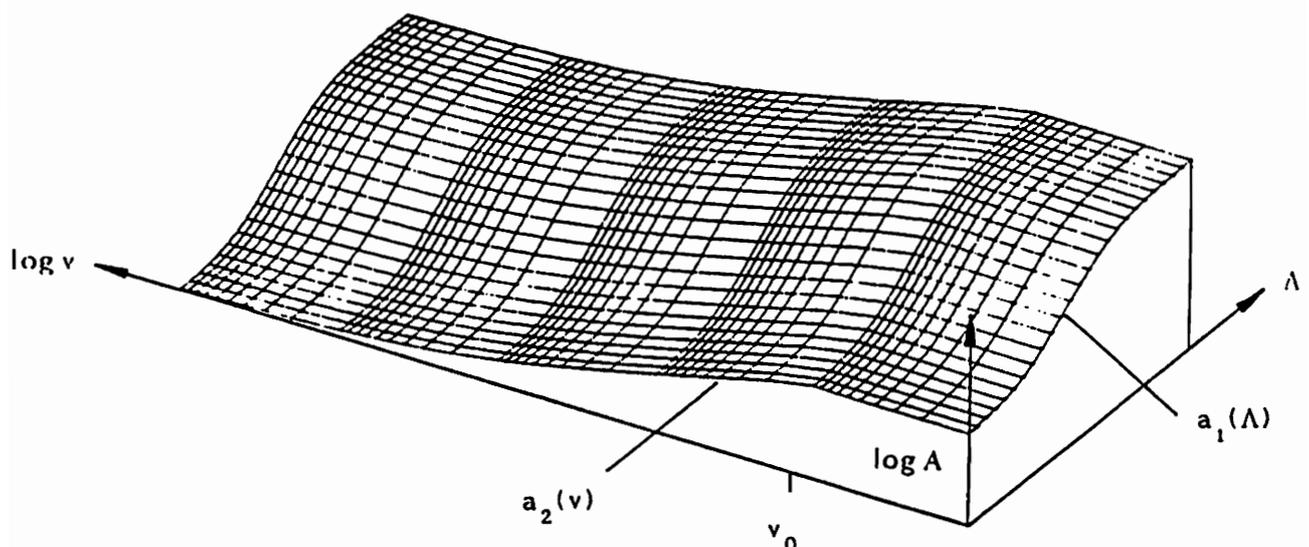


Abb. 2.24: $\log A$ in Abhängigkeit der Überspannung Λ und dem Logarithmus der Prozeßgeschwindigkeit v

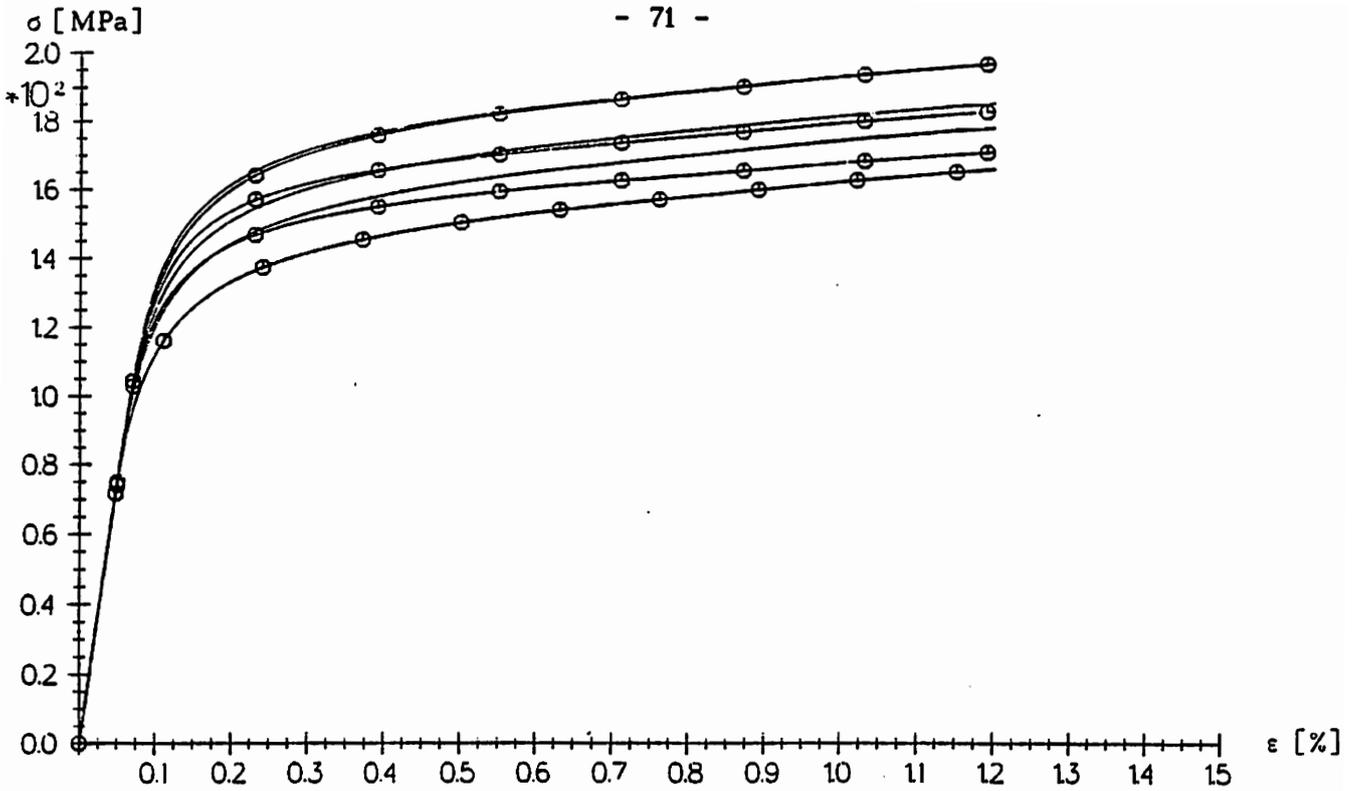


Abb. 2.25: Monotoner Zug bei den Dehnungsraten $\dot{\epsilon} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, $1,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, $1,0 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ und $1,0 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ (deckungsgleich), vorgegebene Kurven und Rechenergebnisse (Kreissymbole)

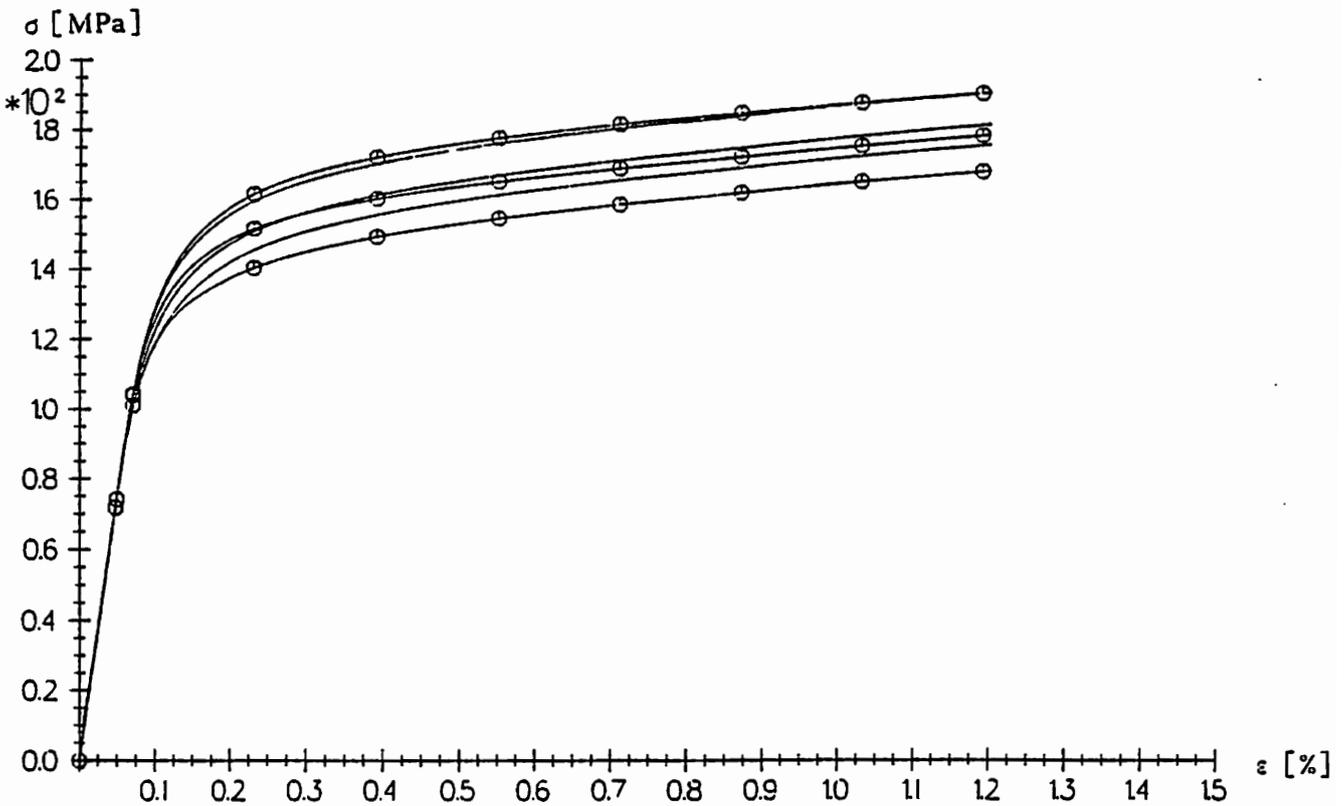


Abb. 2.26: Monotoner Zug bei den Dehnungsraten $\dot{\epsilon} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, $1,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ und $1,0 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$, vorgegebene Kurven und Rechenergebnisse (Kreissymbole)

Bis etwa $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ist das Ergebnis der Anpassung noch als gut zu bezeichnen (Abb. 2.26), während geringere Dehnungsgeschwindigkeiten deutlich zu kleine Spannungen ergeben ($\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ in Abb. 2.25). Dieses Ergebnis ist auf die Auswahl der Dehnungsraten zurückzuführen, die bei der Optimierung des modifizierten Ansatzes (2.225) Verwendung fanden, und läßt sich sicherlich noch verbessern. Hier wurde darauf verzichtet, da (2.167) vermutlich die Spannungen bei kleinen Dehnungsraten überschätzt und daher das Ergebnis der Anpassung durchaus zufriedenstellend ist.

Abschließend kann festgehalten werden, daß es mit der in Kap. 2.4.1 angesprochenen Strategie möglich war, eine von zwei Variablen abhängige Materialfunktion schnell und genau zu bestimmen. Diese Methode ist auch dann anwendbar, wenn die Zurückführung einer unbekanntem Funktion auf observierbare Größen nur inkrementell möglich ist, wie es für $a_1(\Lambda)$ zutrifft. Nachdem auf diese Weise der Verlauf der Materialfunktionen bestimmt worden war, konnte ihre Approximation mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens noch verbessert werden.

2.4.6 Bestimmung von $B(\sqrt{f}, \|\sigma'\|)$ und $\Phi(\Lambda)$

Die erfolgreiche Anwendung des oben vorgestellten Verfahrens bei der Berechnung der Materialfunktion $A(\Lambda, v)$ legte es nahe, auf entsprechende Weise auch die Funktion $B(\sqrt{f}, \|\sigma'\|)$ zu bestimmen. Macht man für $\Phi(\Lambda)$ einen Ansatz, der die Bedingungen

$$\Phi(\Lambda = 0) = 0 \quad (2.101)$$

und

$$\frac{d\Phi}{d\Lambda} > 0 \quad (2.231)$$

erfüllt, so läßt sich B analog (2.209 - 2.212) durch numerische Integration eines Kriechprozesses und Vergleich mit experimentellen Daten (2.162 - 2.166) berechnen:

$$B(t + \Delta t) = \frac{K(t + \Delta t)}{\Lambda(t + \Delta t)} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\varepsilon}(t + \Delta t) - \Phi(t + \Delta t) \right) \quad (2.232)$$

Es stellte sich jedoch heraus, daß dieses Vorgehen in der Praxis nicht durchführbar ist, da es auf den speziellen Ansatz für $\Phi(\Lambda)$ zu empfindlich reagiert. Diese Sensibilität läßt sich durch Untersuchung von (2.232) in Verbindung mit

$$\dot{\Lambda} = - \langle B \Lambda \rangle \quad (2.137)$$

bei Kriechprozessen (s. (2.132) erklären:

Führt der Ansatz für $\Phi(\Lambda)$ momentan auf einen im Vergleich zum Experiment zu kleinen Wert, so wird mit (2.232) ein vergleichsweise zu großer Wert für B berechnet. Dieser ergibt dann mit (2.137) eine zu starke Abnahme der Überspannung Λ , womit die Abweichung vom so berechneten Wert für Φ gegenüber dem wahren Wert noch größer wird, wenn dieses nicht durch den Ansatz für $\Phi(\Lambda)$ überkompensiert wird. Numerisch zeigt sich dieses Verhalten darin, daß Λ im Verlaufe der Integration schließlich verschwindet, woraus mit (2.168) und (2.169) eine ebenfalls verschwindende Kriechdehnungsrate folgt.

Ist andererseits Φ zu einem bestimmten Zeitpunkt zu groß, dann ergibt (2.232) einen im Vergleich zu kleinen Wert für B , und mit (2.137) erhält man eine zu geringe Abnahme von Λ . Damit wird Φ jedoch auch im nächsten Schritt als zu groß berechnet, falls die zu kleine Veränderung von Λ nicht über den Ansatz $\Phi(\Lambda)$ ausgeglichen wird. Bei der numerischen Berechnung der Punktmenge für B führt das schließlich wegen der kleinen vorgegebenen Kriechdehnungsraten auf negative Werte für B .

Aufgrund dieser starken Empfindlichkeit des Differentialgleichungssystems von der Wahl für $\Phi(\Lambda)$ mußte zur Bestimmung der verbleibenden Materialfunktionen auf konventionelle Optimierungsverfahren zurückgegriffen werden.

Die Funktion $\Phi(\Lambda)$ soll vorwiegend die stationäre Kriechdehnungsrate steuern. Da diese bei unterschiedlichen Spannungsniveaus um etwa zwei Dekaden variiert (vgl. den Exponenten bei σ in (2.165)), wird für die auf 1 s^{-1} normierte Materialfunktion eine schnell mit Λ ansteigende Funktion angesetzt

$$\Phi(\Lambda) = e^{d_1 (\Lambda/\tilde{\Lambda})^{d_2}} - 1, \quad (2.233)$$

$$\tilde{\Lambda} = 1 \text{ MPa} .$$

Die Materialfunktion $B(\sqrt{f}, \|\sigma'\|)$ bestimmt gemäß (2.137) die Evolution der Überspannung bei Kriechprozessen und so über (2.233) auch die stationäre Kriechdehnungsrate. Ihre zweite unabhängige Veränderliche $\|\sigma'\|$ soll die Anpassung bei unterschiedlichen Spannungsniveaus ermöglichen und kann bei den folgenden Betrachtungen zunächst als konstanter Parameter angesehen werden. Aus den oben dargestellten Versuchen zur numerischen Berechnung von B ist bekannt, daß diese Funktion zunächst sehr rasch mit \sqrt{f} ansteigt. Weiterhin sollte $B(\sqrt{f}, \|\sigma'\| = \text{konst.})$ monoton sein und - wegen (2.137) - eine Sättigung aufweisen. Eine hinreichende Bedingung für stationäres Kriechen stellt

$$B(\sqrt{f}^*, \|\sigma'\|) = 0 \quad (2.233)$$

dar, wobei hier und im folgenden das * - Zeichen Werte bei Stationarität kennzeichnet.

Dann verschwinden wegen

$$\dot{\sigma}' = 0 \quad (2.234)$$

auch die Raten von $\bar{\sigma}'$, ξ , κ , Δ und Λ , woraus sich schließlich

$$\dot{\varepsilon}^* = \sqrt{\frac{3}{2}} \Phi(\Lambda^*) = \sqrt{\frac{3}{2}} \Phi^* \quad (2.235)$$

ergibt. Ein geeigneter Ansatz, der alle diese Forderungen erfüllt, stellt

$$B(\sqrt{f}, \|\sigma'\|) = \begin{cases} d_3 \tanh(d_4 \sqrt{f} + d_5) + d_6, & \text{wenn } \sqrt{f} \geq \sqrt{f}^* \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.236)$$

mit

$$\sqrt{f^*} = \frac{1}{d_4} \left\{ \operatorname{arctanh} \left(- \frac{d_6}{d_3} \right) - d_5 \right\} \quad (2.237)$$

und den von $\|\sigma'\|$ abhängigen Koeffizienten d_3 bis d_6 dar. Um die Konstanten d_1 und d_2 in (2.232) sowie die Funktionen d_3 bis d_6 in (2.236) zu bestimmen, wird die Abweichung von berechneten und experimentell ermittelten Kriechkurven bei vier Spannungsniveaus mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens minimiert. Als Belastungsvorgeschichte wurde ein einaxialer Zug mit $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ gewählt. Die zur Optimierung herangezogenen Spannungsniveaus betragen 100, 120, 140 und 160 MPa, die maximale Kriechzeit beläuft sich auf $t_\infty = 5000 \text{ h}$. Diese Zeit ist lang genug, um bei dem untersuchten Material zu näherungsweise stationärem Kriechen zu führen, und ist so kurz, daß auch das primäre Kriechen noch wesentlich ist.

Im folgenden soll die Abschätzung der Startwerte von d_1 bis d_6 kurz erläutert werden.

Dazu wird davon ausgegangen, daß zu Beginn eines Kriechprozesses alle internen und externen Variablen und damit auch alle Materialfunktionen durch die Berechnung des vorangegangenen Belastungsprozesses bekannt sind. Die Gleichungen (2.162) bis (2.166) liefern außerdem die Dehnungsraten $\dot{\epsilon}_0$ zu Anfang des primären Kriechens und $\dot{\epsilon}^*$ bei stationärem Zustand. Eine wesentliche Annahme zur Abschätzung der Startwerte besteht darin, daß bei allen Kriechprozessen hinreichend genau

$$g(x) = \text{konst.} \quad (2.238)$$

gesetzt werden kann. Diese Annahme ist zumindest bei den höheren Spannungsniveaus wegen des asymptotischen Verlaufes der Materialfunktion $g(x)$ (2.177) sehr genau erfüllt, auch wenn sich x im Prozeßverlauf deutlich ändert. Bei niedrigen Spannungen sind auch die Kriechdehnungen sehr klein, so daß sich die interne Variable x als Maß der reduzierten inelastischen Arbeit wenig ändert. Daher ist auch für solche Prozesse die Annahme (2.238) gut erfüllt, obwohl sich g in diesem Bereich stark mit x ändert.

Um Aussagen über den stationären Zustand zu machen, wird ein bestimmtes Spannungsniveau herausgegriffen (hier 100 MPa) und für die sich dabei einstellende stationäre Überspannung

$$\Lambda^* = 0,2 \Lambda_0 \quad (2.239)$$

angesetzt, wobei Λ_0 den Wert bei Kriechbeginn kennzeichnet.

Mit Hilfe von (2.137) kann ein mittlerer Wert

$$B = - \frac{1}{t_\infty} \ln \left(\frac{\Lambda^*}{\Lambda_0} \right) \quad (2.240)$$

berechnet und so der Anfangswert B_0 abgeschätzt werden. Damit ist neben dem stationären Wert Φ^* aus (2.235) auch

$$\Phi_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\varepsilon}_0 - \frac{\Lambda}{K} \Big|_0 B_0 \quad (2.241)$$

bekannt, und die Parameter d_1 und d_2 können bestimmt werden:

$$d_2 = \frac{\ln \left(\frac{\ln(\Phi^* + 1)}{\ln(\Phi_0 + 1)} \right)}{\ln \left(\frac{\Lambda^*}{\Lambda_0} \right)}, \quad (2.242)$$

$$d_1 = \frac{\ln(\Phi_0 + 1)}{\Lambda^{d_2}}. \quad (2.243)$$

Mit Kenntnis der Funktion $\Phi(\Lambda)$ liegen über (2.235), (2.238) und

$$\sqrt{f^*} = \Lambda^* + \sqrt{g} \quad (2.244)$$

auch die Argumente $\sqrt{f^*}$ fest, bei denen für die verbleibenden Spannungsniveaus die Funktion B verschwinden muß. Damit sind die Funktionswerte und die Argumente von $B(\sqrt{f}, \|\sigma'\|)$ zu Prozeßanfang und bei Stationarität bekannt.

Nimmt man an, daß der Wendepunkt der Funktion (2.236) in der Mitte zwischen $\sqrt{f_0}$ und $\sqrt{f^*}$ liegt, so verbleibt als einziger Freiwert d_4 , welcher die Steigung in diesem Punkt bestimmt. Für ihn wird zunächst

$$d_4 = 1,0 \quad (2.245)$$

gesetzt, womit alle Startwerte d_1 bis d_6 abgeschätzt sind.

Um die Abhängigkeit $d_i(\|\sigma'\|)$ zu beschreiben, wird

$$d_i = p_{i1} + p_{i2} \|\sigma'\| + p_{i3} \|\sigma'\|^2 \quad i = 3, 4, 5, 6 \quad (2.246)$$

angesetzt, worin die p_i so gewählt werden, daß (2.246) monoton ist.

Die Parameter $d_1, d_2, p_{31}, \dots, p_{63}$ wurden anschließend mit Hilfe des bereits in Kap. 2.4.3 erwähnten Programms so optimiert, daß die Abweichungen zwischen vorgegebenen und berechneten Kriechkurven an 10 gleichmäßig verteilten Stützstellen minimiert werden. Dabei stellte es sich heraus, daß die oben skizzierte Abschätzung trotz der zahlreichen Annahmen recht gut war. Die Parameterwerte sämtlicher Materialfunktionen für AISI 316L mod sind in der Tab. 2.2 aufgelistet, während in der Abb. 2.27 und Abb. 2.28 der Verlauf von $\Phi(\Lambda)$ und $B(\sqrt{f}, \|\sigma'\|)$ dargestellt ist.

Materialfunktion g gemäß (2.177) - (2.179)

$$\begin{array}{ll} \sigma_0 \text{ [MPa]} & 74,5 \\ c_1 \text{ [MPa}^{-1}] & 7,300 \cdot 10^{-2} \end{array} \quad c_2 \text{ [-]} \quad 9,12$$

Materialfunktion c gemäß (2.180)

$$\begin{array}{ll} E_{t0} \text{ [MPa]} & 1,417 \cdot 10^5 \\ c_3 \text{ [MPa]} & 151,0 \end{array} \quad E_{t\infty} \text{ [MPa]} \quad 1,57 \cdot 10^5$$

Materialfunktion A = a₁(Λ) a₂(v) gemäß (2.216) und (2.218)

$$\begin{array}{ll} G \text{ [-]} & 75,0 \\ d \text{ [MPa}^{-1}] & 0,269 \\ c \text{ [-]} & -3,901 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a_1 \text{ [-]} & -5,182 \cdot 10^1 \\ b_1 \text{ [-]} & 1,734 \cdot 10^{-2} \end{array} \quad \begin{array}{ll} a_2 \text{ [-]} & -4,268 \\ b_2 \text{ [-]} & 4,982 \cdot 10^{-3} \\ c_2 \text{ [-]} & 9,691 \cdot 10^{-1} \end{array}$$

$$v_0 \text{ [MPa/s]} \quad 1,2 \cdot 10^{-3} \quad v_\infty \text{ [MPa/s]} \quad 1,3 \cdot 10^3$$

Materialfunktion Φ gemäß (2.233)

$$d_1 \text{ [-]} \quad 6,117 \cdot 10^{-1} \quad d_2 \text{ [-]} \quad 3,326$$

Materialfunktion B gemäß (2.237) und (2.246)

$$\begin{array}{ll} p_{31} \text{ [s}^{-1}] & 3,521 \cdot 10^{-8} \\ p_{33} \text{ [MPa}^{-2} \text{ s}^{-1}] & 3,287 \cdot 10^{-14} \end{array} \quad p_{32} \text{ [MPa}^{-1} \text{ s}^{-1}] \quad 3,526 \cdot 10^{-10}$$

$$\begin{array}{ll} p_{41} \text{ [MPa}^{-1}] & 9,547 \cdot 10^{-1} \\ p_{43} \text{ [MPa}^{-3}] & 3,316 \cdot 10^{-7} \end{array} \quad p_{42} \text{ [MPa}^{-2}] \quad 2,307 \cdot 10^{-5}$$

$$\begin{array}{ll} p_{51} \text{ [-]} & -4,985 \cdot 10^1 \\ p_{53} \text{ [MPa}^{-2}] & -3,780 \cdot 10^{-5} \end{array} \quad p_{52} \text{ [MPa}^{-1}] \quad -1,705 \cdot 10^{-1}$$

$$\begin{array}{ll} p_{61} \text{ [s}^{-1}] & 2,324 \cdot 10^{-8} \\ p_{63} \text{ [MPa}^{-2} \text{ s}^{-1}] & 4,018 \cdot 10^{-14} \end{array} \quad p_{62} \text{ [MPa}^{-1} \text{ s}^{-1}] \quad 2,747 \cdot 10^{-10}$$

Tab. 2.2: Parameter der plastischen und viskosen Materialfunktionen für
AISI 316L mod bei 550° C

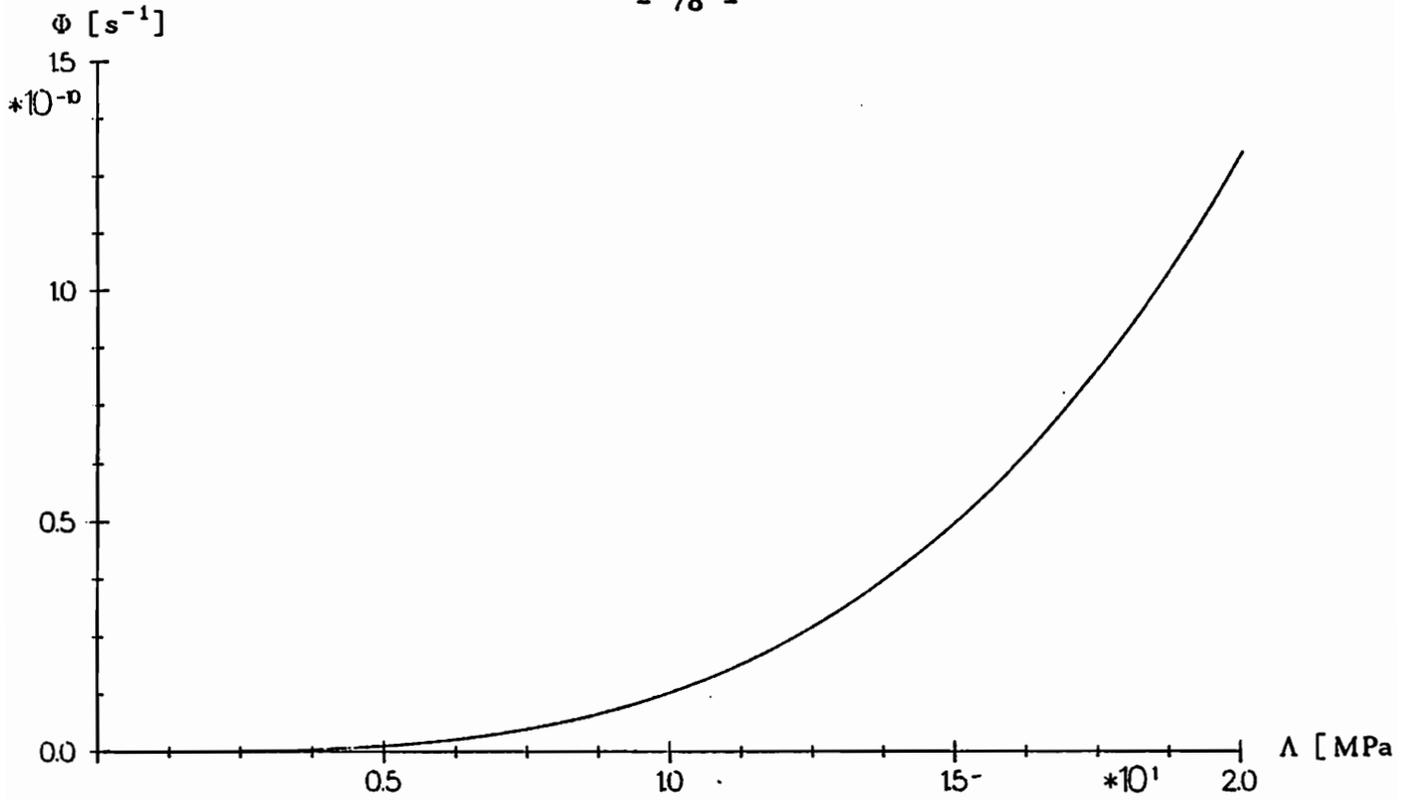


Abb. 2.27: Verlauf der Materialfunktion $\Phi(\Lambda)$

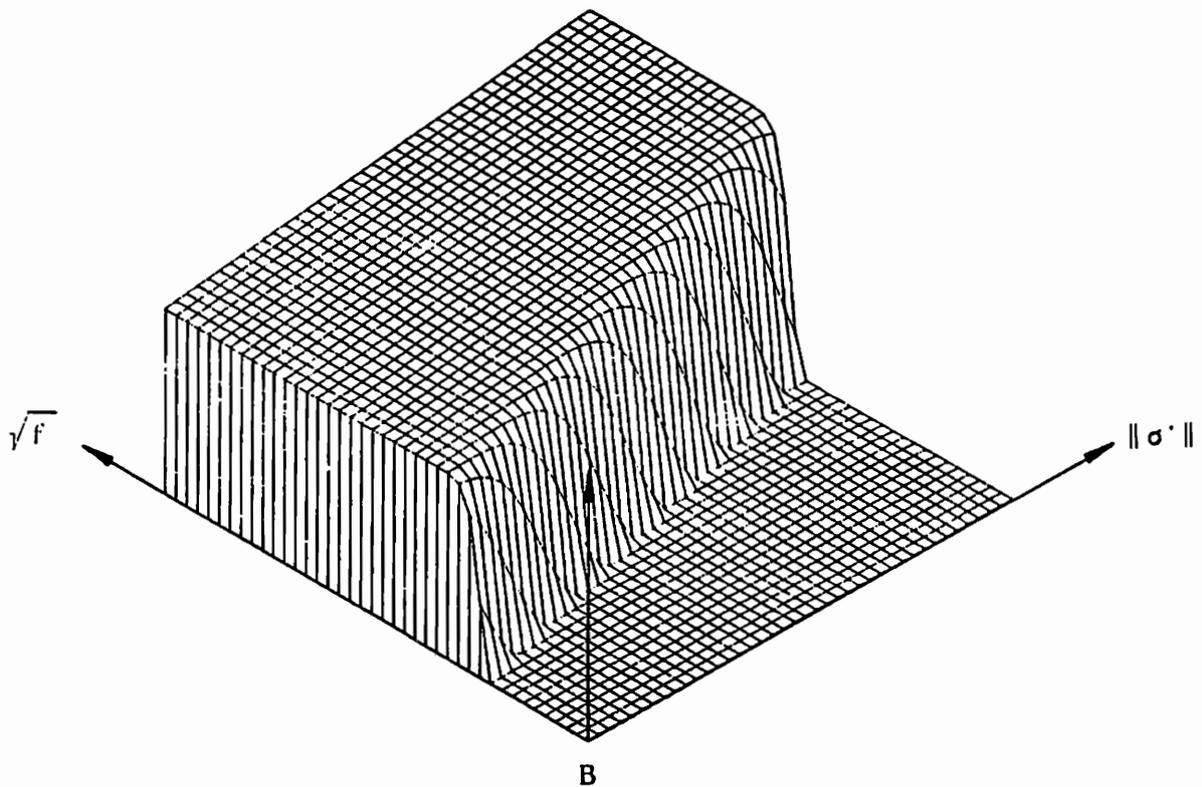


Abb. 2.28: Verlauf der Materialfunktion $B(\sqrt{f}, \|\sigma'\|)$

Abb. 2.29 zeigt die experimentell gewonnenen Kriechkurven im Vergleich mit den berechneten. Die Übereinstimmung bei den niedrigen Spannungsniveaus und bei 160 MPa ist außerordentlich gut, bei 140 MPa weichen Rechnung und Experiment deutlicher voneinander ab.

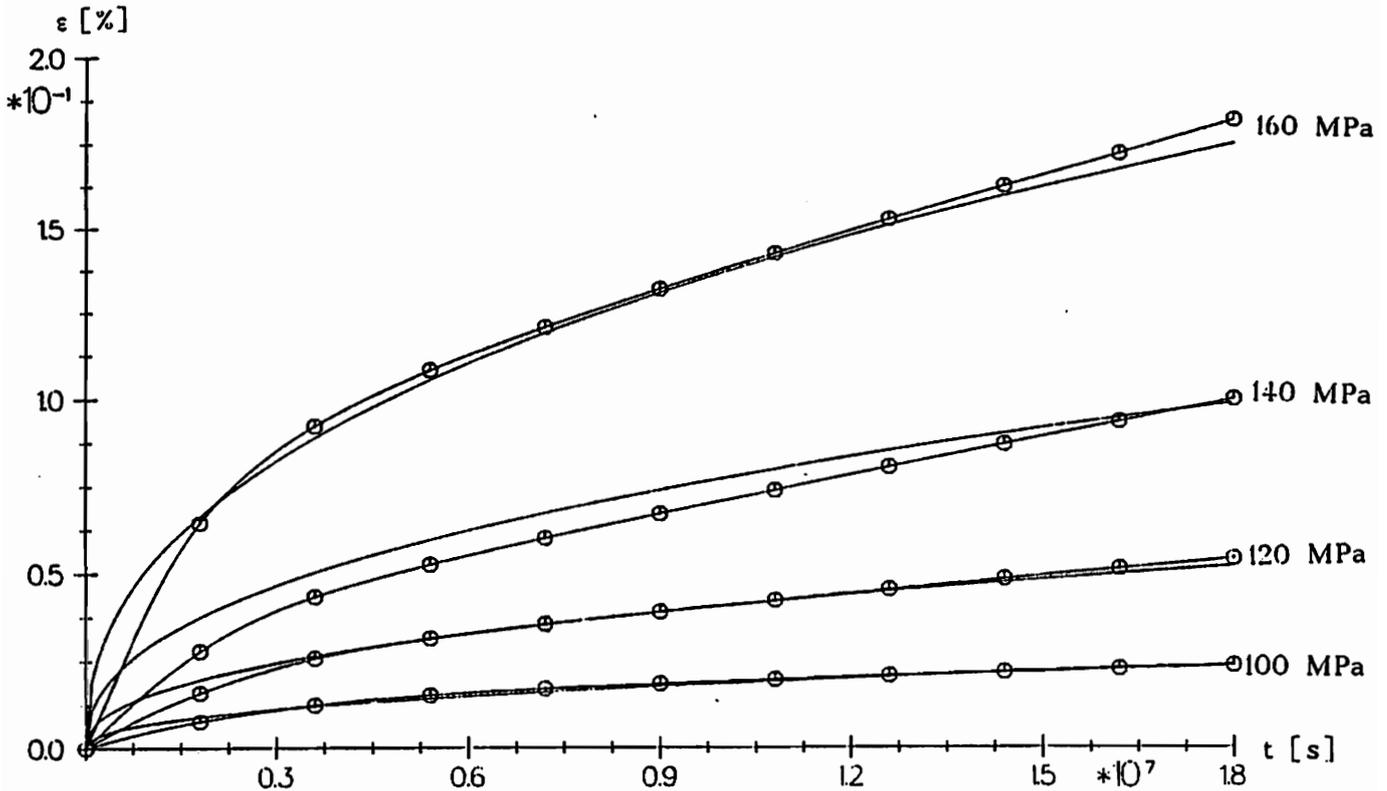


Abb. 2.29: Kriechkurven bei $\sigma = 100$ MPa, 120 MPa, 140 MPa und 160 MPa, vorgegebene Kurven nach (2.162) - (2.165) und Rechenergebnisse (Kreissymbole)

In Abb. 2.30 sind Kriechkurven auf Spannungsniveaus wiedergegeben, die - im Gegensatz zu den in Abb. 2.29 dargestellten - nicht der Optimierung zugrundegelegt wurden. Auch hier ist das Ergebnis sehr zufriedenstellend, jedoch findet man auch hier bei einer Spannung (150 MPa) größere Abweichungen.

Insgesamt ist die Übereinstimmung der Kurven als sehr gut zu bezeichnen, insbesondere wenn man das Ergebnis mit anderen aus der Literatur bekannten Beispielen vergleicht.

Damit sind alle Materialfunktionen bestimmt, und es muß lediglich überprüft werden, ob die Annahmen (2.194) und (2.195) bei der Ermittlung von $A(\lambda, \nu)$ zulässig waren. Numerische Kontrollrechnungen ergeben, daß die Beiträge von $B(\sqrt{f}, \|\sigma'\|)$ und $\Phi(\lambda)$ tatsächlich zu vernachlässigen sind. In den Abb. 2.25 und 2.26 sind die Rechenergebnisse unter Verwendung des vollständigen Differentialgleichungssystems dargestellt.

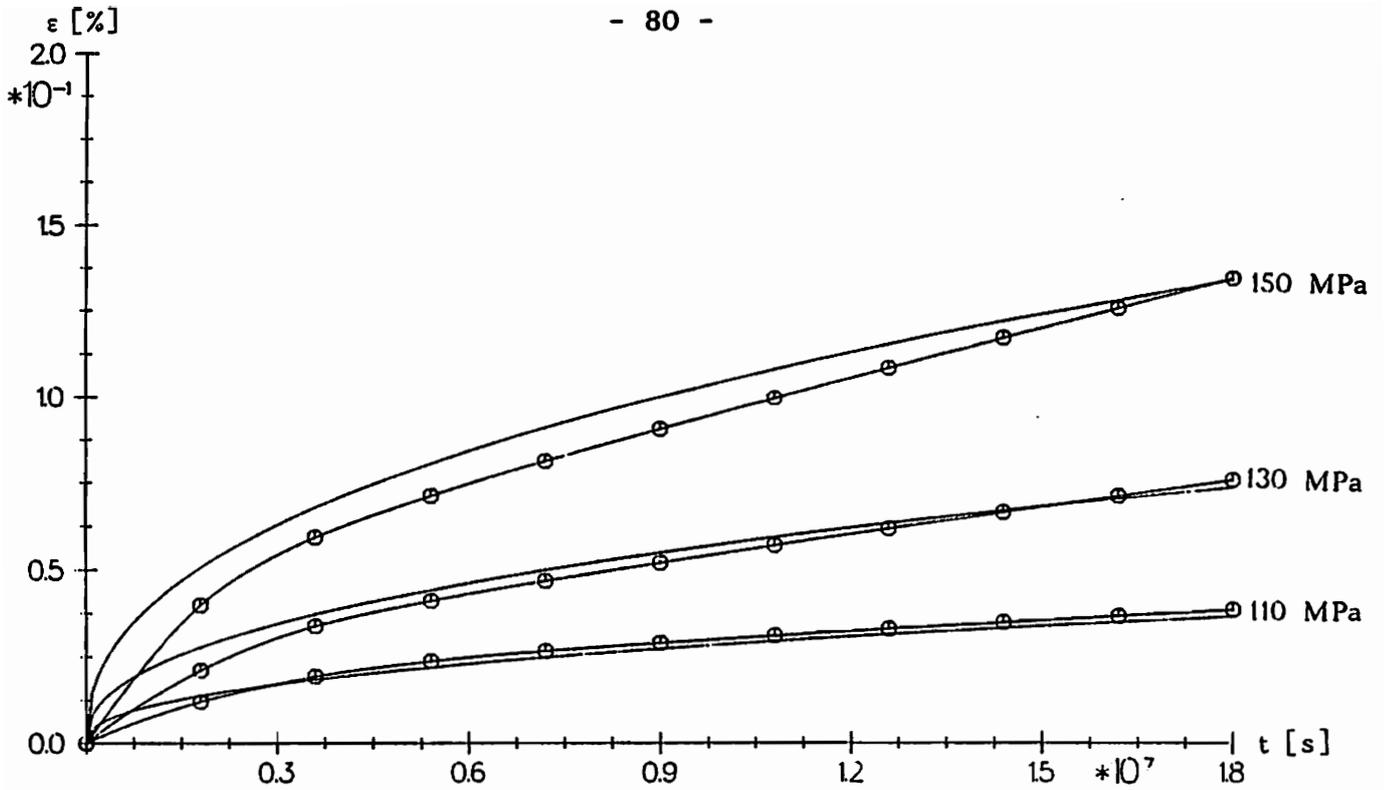


Abb. 2.30: Kriechkurven bei $\sigma = 110 \text{ MPa}$, 130 MPa und 150 MPa , vorgegebene Kurven nach (2.162) - (2.165) und Rechenergebnisse (Kreis-symbole)

Abb. 2.31 zeigt das Resultat einer zyklischen Berechnung bei $\dot{\epsilon} = \pm 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ und die im Vergleich zu der entsprechenden quasistatischen Rechnung deutlich höheren Spannungen (vgl. Abb. 2.19 und die experimentellen Ergebnisse aus [91] in Abb. 2.22).

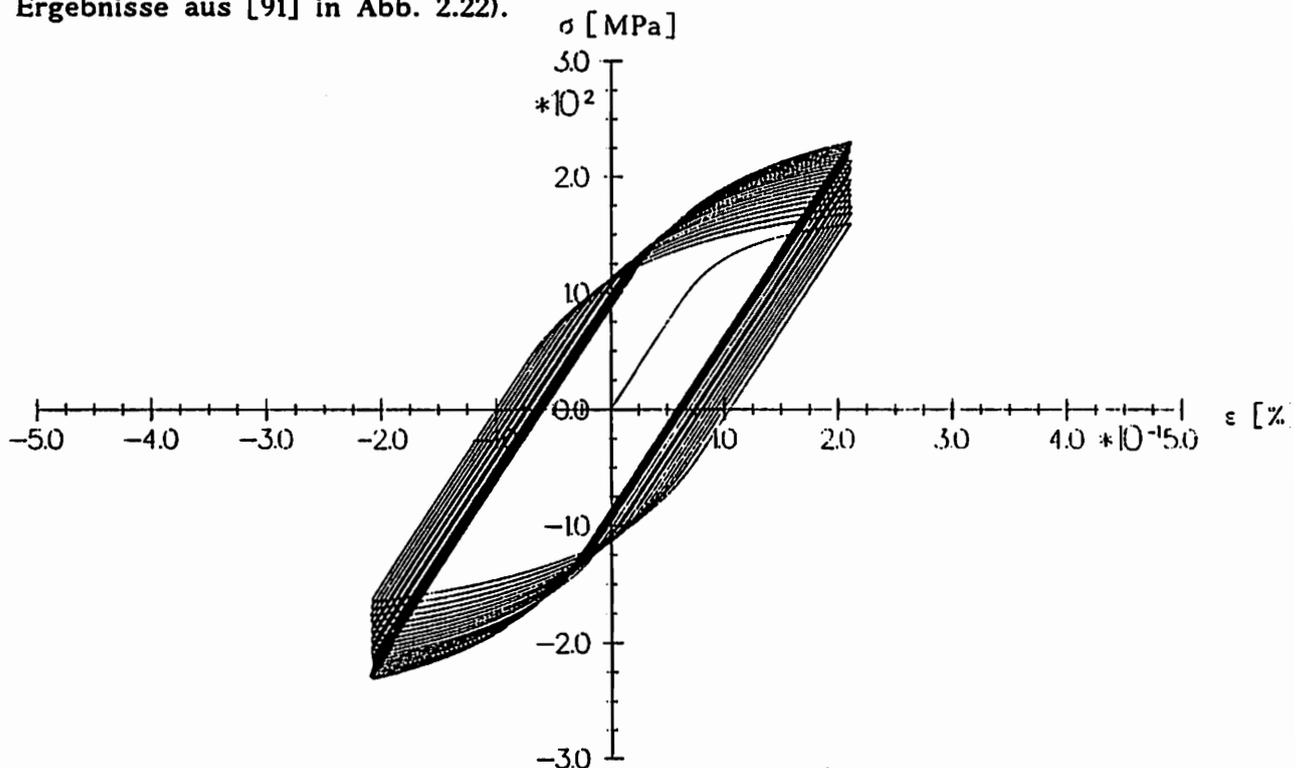


Abb. 2.31: Zyklische $\sigma - \epsilon$ - Kurve mit $\Delta \epsilon = 2,10 \cdot 10^{-1} \%$, $\dot{\epsilon} = \pm 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$, Rechenergebnis

2.5 Zusammenfassung

Das Ziel bei der Entwicklung des hier vorgestellten viskoplastischen Konzeptes war eine Trennung der geschwindigkeitsunabhängigen von den geschwindigkeitsabhängigen Phänomenen. Der praktische Grund für diese Trennung ist der Wunsch, Materialfunktionen sukzessive, und damit überhaupt oder zumindest leichter ermitteln zu können.

Wesentliche Kennzeichen dieses Konzeptes sind die Aufspaltung der Verzerrungsgeschwindigkeit gemäß (2.105) und die Einführung einer Evolutionsgleichung für die Gleichgewichtsspannung (2.124). Da so der Grenzübergang zu quasistatischer Prozeßführung exakt vollziehbar ist, kann zur Beschreibung des geschwindigkeitsunabhängigen Verfestigungsverhaltens jedes beliebige klassische Plastizitätsmodell Verwendung finden.

Das hier benutzte INTERATOM-Modell ermöglicht die Bestimmung der Verfestigungsfunktionen aus monotonen und zyklischen, quasistatischen Zugversuchen. Zur Ermittlung der viskosen Materialfunktionen, deren Verlauf zunächst weitgehend unbekannt war, konnte teilweise eine neue Strategie angewendet werden, die auf einem inkrementellen Vergleich mit experimentell observierbaren Größen beruht.

Die Übereinstimmungen zwischen experimentellen Daten und numerischen Ergebnissen sind insgesamt sehr zufriedenstellend, wenn auch sicherlich im Detail Verbesserungen möglich sind. Daher wird augenblicklich im Rahmen einer Studienarbeit die Verwendung eines Mehrflächenmodells als plastisches Basismodell untersucht, welches von *Bruhns* und *Müller* entwickelt wurde [2.93]. Es läßt sich als Kombination des 2 - Flächenmodells von *Dafalias-Popov* [2.94, 2.95] und des INTERATOM-Modells auffassen und ist in der Lage, auch komplexe nichtradiale Prozesse zu beschreiben. Andere Ansatzpunkte zur Verbesserung stellen die funktionalen Ansätze für die viskosen Materialfunktionen dar.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß die Verwendung des vorgestellten viskoplastischen Konzeptes zu einer wesentlich einfacheren Ermittlung der Materialfunktionen führt als dieses bisher möglich war. Daraus resultiert eine gute Modellierung sowohl plastischer als auch viskoser Phänomene.

3. Strukturverhalten

3.1. Die Methode der Finiten Elemente - Überblick

Die Methode der Finiten Elemente (FEM) kann als eines der wirkungsvollsten Berechnungsverfahren zur näherungsweise Lösung von Differentialgleichungen angesehen werden. Sie ist sowohl in der Festkörper- als auch in der Strömungsmechanik weit verbreitet. Ihre Entwicklung ist eng mit dem rasanten Fortschritt in der Leistungsfähigkeit elektronischer Digitalrechner verbunden, jedoch lassen sich erste Ansätze dieser Methode bereits zu Beginn dieses Jahrhunderts feststellen. Hier soll ein kurzer Überblick über diese Entwicklung gegeben werden, dessen Schwerpunkt auf der Darstellung von Arbeiten liegen soll, die wesentliche Beiträge zur Analyse viskoplastischen Strukturverhaltens lieferten.

Bei den Verfahren zur näherungsweise Lösung von Differentialgleichungen lassen sich zwei große Gruppen unterscheiden [3.1]. Die erste Gruppe geht von der Differentialgleichung selbst aus

$$L_{2m}(\Phi) = r, \quad (3.1)$$

wobei L_{2m} einen Differentialoperator der Ordnung $2m$, Φ die gesuchte Funktion und r die rechte Seite bezeichnet. Die Lösungsfunktion muß zusätzlich die Randbedingungen

$$B_i(\Phi) = q_i \Big|_{S_i} \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

auf den Rändern S_i erfüllen.

Zur näherungsweise Lösung von (3.1) wird ein Ansatz der Form

$$\tilde{\Phi} = \sum_{i=1}^n a_i f_i \quad (3.3)$$

gemacht, worin die linear unabhängigen Funktionen f_i so zu wählen sind, daß sie allen Randbedingungen (3.2) genügen. Die Koeffizienten a_i werden so berechnet, daß ein geeignet definiertes gewichtetes Mittel des Residuums

$$R = r - L_{2m}(\tilde{\Phi}) \quad (3.4)$$

verschwindet. Beim Verfahren nach *Galerkin* wird beispielsweise verlangt, daß das Integral der mit den Ansatzfunktionen gewichteten Residuen den Wert Null annimmt. Ein großer numerischer Nachteil dieser Methode

besteht darin, daß die Matrix des entstehenden linearen Gleichungssystems für die Koeffizienten a_i unsymmetrisch ist [3.2]. Andere Möglichkeiten bestehen in der Minimierung des Integrales der Fehlerquadrate oder in der Forderung, daß das Residuum an gewissen Punkten verschwindet (punktweise Kollokation).

Die zweite Gruppe verwendet nicht die Differentialgleichung (3.1) als Ausgangspunkt, sondern das Funktional Π des zugeordneten C^{m-1} - Variationsproblems [3.3]. Ein großer Vorteil dieses Verfahrens, das auf *Ritz* [3.4] zurückgeht, gegenüber denjenigen der ersten Gruppe besteht darin, daß die Ansatzfunktionen $\tilde{\Phi}$ nur die wesentlichen und nicht auch noch die natürlichen Randbedingungen erfüllen müssen. Dabei sind die wesentlichen Randbedingungen solche, deren Ableitung höchstens $m-1$ beträgt. In der Strukturmechanik entsprechen ihnen die geometrischen Randbedingungen. Die natürlichen Randbedingungen (Kräfte- und Momentenrandbedingungen) sind dagegen bereits implizit im Funktional Π enthalten und werden daher bei Stationarität von Π im Mittel erfüllt.

Werden die Funktionen $\tilde{\Phi}$ nicht über den gesamten Bereich, sondern nur jeweils über ein Element dieses Bereiches angesetzt, so gelangt man vom *Ritzschen* Verfahren zur Methode der Finiten Elemente. Die großen Vorteile der FEM gegenüber dem Verfahren nach *Ritz* bestehen darin, daß durch die Elemententeilung wesentlich einfacher Funktionen gefunden werden können, die die geometrischen Randbedingungen erfüllen. Da darüberhinaus in den Elementen jeweils gleiche Ansatzfunktionen verwendet werden können, läßt sich der Berechnungsablauf stark schematisieren. Ein weiterer großer rechentechnischer Vorteil ist die Bandstruktur der Systemsteifigkeitsmatrix, wodurch sich der Speicherplatzbedarf drastisch reduzieren läßt.

Als erste Arbeit, die von Ingenieuren auf diesem Gebiet veröffentlicht wurde, kann die im Jahre 1956 erschienene von *Turner* et al. angesehen werden [3.5]. Um die Auslenkungen schlanker, versteifter Flugzeugtragflächen berechnen zu können, werden Steifigkeitsmatrizen für Stäbe, Scheiben und Balken hergeleitet und aus ihnen die Gesamtsteifigkeitsmatrix aufgebaut. Es wird darauf hingewiesen, daß die Genauigkeit solcher Berechnungen durch Erhöhung der Knotenanzahl gesteigert werden kann.

Der Begriff „Finite Elemente“ wurde zum erstenmal von *Clough* in seiner 1960 publizierten Arbeit verwendet [3.6], welche sich mit der Analyse des ebenen Spannungszustandes befaßt.

In den folgenden Jahren wurde die FEM mit großem Erfolg zur Lösung geometrisch und physikalisch linearer Probleme herangezogen. Da damals in erster Linie die Berechnung der Schnittkräfte in Tragflächen von Überschallflugzeugen im Mittelpunkt des Interesses stand, wurde zunächst vor allem die Kraftgrößenmethode angewandt, bei der die Kräfte und nicht die Verschiebungen als Unbekannte auftreten. Im Laufe der Zeit setzte sich

jedoch die Verschiebungsmethode durch [3.7], da sich bei ihr einfacher universell brauchbare Ansatzfunktionen angeben lassen.

Mit wachsender Leistungsfähigkeit der elektronischen Rechenanlagen entstand etwa ab Mitte der sechziger Jahre der Wunsch, auch plastisches Materialverhalten berechnen zu können. Das sich so ergebende nichtlineare Problem kann entweder durch inkrementelle oder iterative Berechnungsverfahren gelöst werden [3.8].

Bei der erstgenannten Methode wird das System in vielen kleinen Schritten belastet und die Steifigkeitsmatrix zu Beginn jedes aktuellen Lastschrittes neu berechnet, das Problem also linearisiert. Der Nachteil dieses Verfahrens besteht darin, daß sich auch bei noch so kleiner Schrittweite die entstehenden Fehler akkumulieren. Beim iterativen Verfahren wird das verhindert, indem für die verformte Konfiguration die Erfüllung der globalen Gleichgewichtsbedingungen verlangt wird. Dazu wird die gesamte Last in einem Schritt aufgebracht und anschließend werden aus dem so berechneten Verschiebungsfeld die Spannungen ermittelt. Da diese jedoch wegen der Nichtlinearität des Problems nicht auf globales Gleichgewicht führen, wird die Lösung für das Verschiebungsfeld iterativ verbessert (sog. Gleichgewichtssiteration). Die Nachteile des iterativen Verfahrens liegen in numerischen Schwierigkeiten bei stark nichtlinearen Systemen und dem Problem, die Entlastung einzelner Elemente zu erfassen. Daher wird in der Praxis häufig eine gemischte Methode angewendet, bei der die Last schrittweise aufgebracht und in jedem Lastschritt eine Gleichgewichtssiteration durchgeführt wird. Der im Vergleich zur rein inkrementellen Methode höhere Rechenzeitbedarf kann durch die höhere Genauigkeit gerechtfertigt werden. Wird mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix iteriert, dann entspricht dieses Vorgehen mathematisch einer *Newton-Raphson*-Iteration in jedem Lastschritt. Das Verfahren mit konstanter Steifigkeitsmatrix läßt sich als modifizierte *Newton-Raphson*-Iteration deuten und wird von *Zienkiewicz* auch als Methode der Anfangsspannungen oder -verzerrungen bezeichnet [3.9].

Als grundlegende Arbeiten zur Behandlung plastischen Materialverhaltens sind diejenigen von *Marcal* und *King* (1967) [3.10] und vor allem die von *Yamada* et al. [3.11] des folgenden Jahres anzusehen. In der letztgenannten Arbeit wird zum erstenmal eine plastische Steifigkeitsmatrix unter Verwendung der *Prandtl-Reuss*-Gleichungen explizit angegeben, während *Marcal* und *King* lediglich den Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungsinkrementen in matrizieller Schreibweise herleiten. Als Beispiele werden in [3.10] die mittlerweile klassischen Probleme des dickwandigen Zylinders unter Innendruck und einer gelochten Aluminiumscheibe berechnet und mit experimentellen Ergebnissen verglichen. *Zienkiewicz* et al. greifen wenig später die in [3.11] vorgeschlagene Formulierung einer veränderlichen Steifigkeitsmatrix auf [3.12].

Während in der Anfangsphase der Entwicklung der FEM die Impulse vorwiegend aus der Luft- und Raumfahrttechnik kamen [3.7], verlangte ab Anfang der siebziger Jahre der Bau von Kernkraftwerken größte Sicherheit in der Auslegung von Druckbehältern. Die dort verwendeten Materialien zeigen bei Betriebstemperatur ein deutlich geschwindigkeitsabhängiges Verhalten. Daher wurde von staatlicher und industrieller Seite nicht nur die Forschung auf dem Gebiet der Materialtechnologie (s. Kap. 2.1), sondern auch auf numerischem Sektor gefördert. Erste Versuche, das Kriechverhalten von Strukturen zu berechnen, finden sich in [3.13] und [3.14]. Entscheidende Fortschritte bei der Analyse viskoplastischen Strukturverhaltens wurden von *Zienkiewicz* in Zusammenarbeit mit *Corneau* erzielt, die als erste das Stoffgesetz von *Perzyna* (s. Kap. 2.1) in FE-Programme implementierten [3.15, 3.16]. Dazu gehen sie vom Prinzip der virtuellen Arbeit für kleine Deformationen aus, welches sich in matrizieller Schreibweise gemäß

$$\int_{0V} [\mathbf{B}]^T [\boldsymbol{\sigma}] dV = [\mathbf{R}] \quad (3.5)$$

schreiben läßt, worin $[\mathbf{B}]$ die Verzerrungs-Verschiebungsmatrix und $[\mathbf{R}]$ den Vektor der Knotenkräfte bezeichnen.

Mit Hilfe des viskoplastischen Materialgesetzes

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (3.6)$$

ergibt sich aus (3.5) die FE-Formulierung

$$\left\{ \int_{0V} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] dV \right\} [\mathbf{u}] = [\mathbf{R}] + \int_{0V} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}_0] dV - \int_{0V} [\mathbf{B}]^T [\boldsymbol{\sigma}_0] dV + \int_{0V} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\boldsymbol{\varepsilon}_i] dV. \quad (3.7)$$

Das Problem der Lösung von (3.7) besteht in der Berechnung von $\boldsymbol{\varepsilon}_i$. In [3.17] werden dazu das explizite Eulerverfahren

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i \approx \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(t) \Delta t \quad (3.8)$$

oder alternativ ein Prediktor-Korrektor-Verfahren mit (3.8) als Prediktor und

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_i \approx \left\{ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(t) + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i(t + \Delta t) \right\} \frac{\Delta t}{2} \quad (3.9)$$

als Korrektor vorgeschlagen. In [3.16] wird auf eine Gleichgewichtsiteration verzichtet und behauptet, daß in der Praxis gewöhnlich ein Integrations-

schritt gemäß (3.8) und (3.9) die Genauigkeitsanforderungen erfüllt. Trotzdem wird in [2.14] dem expliziten Eulerverfahren der Vorzug gegeben, da es auch bei der Integration keine Iteration erfordert und mit geringerem Speicherplatz auskommt.

Das große Problem der aus der Anwendung von (3.8) resultierenden numerischen Instabilität wird in dem vielzitierten Aufsatz von *Cormeau* [2.15] behandelt. Er gibt darin für geometrisch lineare Probleme, ideal-viskoplastisches Materialverhalten gemäß des Überspannungsmodells von *Perzyna* und explizite Euler-Integration als maximale stabile Schrittweite den sehr kleinen Wert

$$\Delta t = \frac{4(1+\nu)}{3E} \frac{\sqrt{g_0}}{\gamma} \quad (3.10)$$

an (vgl. Kap. 2.1 (2.6)) und behauptet, daß sich diese Schranke auch sinnvoll für verfestigendes Material und implizite Integration anwenden ließe. Der letztgenannten Behauptung wird von *Hughes* und *Taylor* in [3.17] widersprochen, die beweisen, daß bei Verwendung der Integrationsvorschrift

$$\Delta \varepsilon_i \approx \left\{ (1 - \alpha) \dot{\varepsilon}_i(t) + \alpha \dot{\varepsilon}_i(t + \Delta t) \right\} \Delta t \quad (3.11)$$

mit

$$\alpha \geq 0,5 \quad (3.12)$$

unbedingte Stabilität erreicht wird. In [3.17] wird auch auf die sonst wenig beachtete Frage nach der Genauigkeit der numerischen Integration eingegangen und an einem Beispiel gezeigt, daß sich bei gleicher Schrittweite die Genauigkeit durch Erhöhung von α verbessern läßt.

Die in den folgenden Jahren in der Literatur immer wieder auftretende Frage nach geeigneten Integrationsverfahren wird von *Krieg* auf eine Gruppe vereinheitlichter viskoplastischer Stoffgesetze erweitert [2.18]. Er untersucht die Materialgesetze von *Bodner-Partom*, *Hart*, *Krieg*, *Miller*, *Robinson-Pugh-Corum* und weitere und zeigt, daß sie alle eine ähnliche mathematische Struktur aufweisen und sich in bestimmten Bereichen mathematisch steif verhalten. *Krieg* empfiehlt, in den Bereichen, wo die Genauigkeit das begrenzende Kriterium darstellt, explizite Verfahren anzuwenden. In Bereichen, in denen die Stabilität entscheidend ist, muß dagegen auf implizite Verfahren zurückgegriffen werden.

In einer Veröffentlichung von *Kanachi et al.* [3.18] wird die bei der Berechnung von $\Delta \varepsilon_i$ nach (3.11) erforderliche Iteration vermieden, indem für $\dot{\varepsilon}_i(t + \Delta t)$ eine abgebrochene Taylorreihenentwicklung verwendet wird

$$\dot{\varepsilon}_i(t + \Delta t) \approx \dot{\varepsilon}_i(t) + \left(\frac{\partial \dot{\varepsilon}_i}{\partial \sigma} \right) (t) \Delta \sigma \quad (3.13)$$

Damit können die inelastischen Verzerrungen auch bei impliziter Integration ohne Iteration berechnet werden. Da jedoch sowohl (3.11) als auch (3.13) Näherungen enthalten, wird am Ende eines Lastschrittes kein Gleichgewicht erreicht. Um ein Anwachsen dieses Fehlers zu vermeiden, schlägt *Kanchi* vor, den Residuumlastervektor im folgenden Lastschritt bei den äußeren Lasten zu berücksichtigen. Dieses Verfahren wird auch auf geometrisch nichtlineare Probleme angewendet, was jedoch m. E. wegen der Verwendung des Cauchy-Spannungstensors im dabei zugrundegelegten Prinzip der virtuellen Arbeit unzulässig ist. Eine ausführlichere Darstellung findet man in [3.19].

Bereits ab Mitte der siebziger Jahre erschienen Veröffentlichungen, die neben viskoplastischem Materialverhalten auch geometrische Nichtlinearität berücksichtigen. Als erste Arbeit auf diesem Gebiet ist diejenige von *Nagarajan* und *Popov* [3.20] anzusehen, auf welche die meisten der späteren Autoren zurückgreifen. Sie verwenden den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor \mathbf{S} und den Green-Lagrangeschen-Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ als zugeordnete statische und geometrische Größen bei der Berechnung des Prinzips der virtuellen Arbeit. Alle Größen werden auf die Anfangskonfiguration bezogen (Total-Lagrangesche Formulierung). Das Werkstoffgesetz wird gemäß

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_i) \quad (3.14)$$

und

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \gamma \ll \Phi \gg \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{S}} \quad (3.15)$$

in \mathbf{S} und $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$ formuliert. Da im Materialgesetz keine objektive Zeitableitung verwendet wird, können nur Deformationen mit kleinen Rotationen berechnet werden, was als große Einschränkung dieser FE-Formulierung anzusehen ist. Das gleiche gilt für die Arbeiten von *Klee* und *Paulun* [3.21, 3.22], die von derselben Gleichung für die virtuelle Arbeit ausgehen. In [3.21] werden Algorithmen bei expliziter und bei impliziter Integration von (3.15) angegeben, wobei bei der expliziten Integration keine Gleichgewichtiteration durchgeführt wird (inkrementelles Verfahren). Um die dadurch entstehenden Fehler klein zu halten, wird die Hälfte der Schrittweite empfohlen, die *Cormeau* angibt (3.10).

Weitere wesentliche Beiträge zur Behandlung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Probleme stammen von *Nagtegaal* [3.23, 3.24]. Um auch große Rotationen beschreiben zu können, verwendet er eine inkrementelle Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit, wobei er eine konstante Verzerrungsrate während eines Inkrementes annimmt [3.24]. Er geht davon aus, daß das Stoffgesetz in der Form

$$\dot{\sigma} = \mathbf{C} \mathbf{D} + \dot{\sigma}_0 \quad (3.16)$$

vorliegt, wobei sich \mathbf{C} während des Belastungsprozesses ändern kann. Durch Einführung mitrotierender Spannungs- und Verzerrungsmaße gelingt es ihm, (3.16) in eine Beziehung zwischen den Inkrementen von \mathbf{S} und ϵ umzuformen.

Während bis etwa Mitte der achtziger Jahre nahezu ausschließlich das Überspannungsmodell von *Perzyna* bei der Analyse viskoplastischer Strukturen Verwendung fand, werden in der letzten Zeit häufig Arbeiten veröffentlicht, die wesentlich kompliziertere Materialmodelle zugrunde legen. Sie behandeln gewöhnlich spezielle Probleme der Zeitintegration der konstitutiven Gleichungen oder stellen Ergebnisse bei der Benutzung verschiedener Stoffgesetze einander gegenüber. Da diese Veröffentlichungen bereits zu einem großen Teil bei der Darstellung der jeweiligen viskoplastischen Materialmodelle erwähnt wurden (Kap. 2.1), soll an dieser Stelle nicht näher auf sie eingegangen werden.

Eine Übersicht kommerzieller FE-Programme, die Hilfen bei der Auswahl geeigneter Systeme geben kann, findet sich in [3.25].

3.2 Problemstellung

Im Rahmen dieser Arbeit soll nichtlineares, geschwindigkeitsabhängiges Werkstoffverhalten bei inhomogenen Prozessen untersucht werden. Da der Schwerpunkt auf der Verifikation von Stoffgesetzen liegt, findet eine Beschränkung auf die Berechnung solcher einfacher Strukturen statt, wie sie bei Experimenten üblich sind. Dabei handelt es sich in erster Linie um axialsymmetrische Proben unter rotationssymmetrischer Belastung. Zur Berechnung der dabei auftretenden Spannungs- und Verzerrungszustände wurde zusammen mit *Fornfeld* [3.26] ein FE-Programm unter Verwendung des viskoplastischen INTERATOM-Modells entwickelt, welches neben der physikalischen auch geometrische Linearität berücksichtigt. Während *Fornfeld* dieses Programm für die Analyse von Hochgeschwindigkeitsdeformationen mit Materialschädigung ausbaute [2.23], soll hier seine Erweiterung auf Torsionsprobleme und der Einbau des in Kap. 2.2 hergeleiteten Stoffgesetzes vorgestellt werden. Trotz der Beschränkung auf isotherme Prozeßführung in dieser Arbeit erlaubt der modulartige Aufbau des Programms eine relativ einfache Erweiterung auf nichtisotherme Probleme [3.27].

3.3 Grundgleichungen der Methode der Finiten Elemente

3.3.1 Grundlegendes Konzept

Das dieser Methode zugrunde liegende Konzept besteht in der Überführung eines Systems partieller Differentialgleichungen in ein linearisiertes algebraisches Gleichungssystem, für welches effektive Lösungsverfahren zur Verfügung stehen. Dazu wird das Differentialgleichungssystem in einen Integralausdruck über das zu untersuchende Gebiet umgeformt. Durch Zerlegung des Gebietes in diskrete Teilbereiche (die finiten Elemente) kann das Integral als Summe der Integrale über die Elemente dargestellt werden. Die Unbekannten werden durch elementweise Ansatzfunktionen in Abhängigkeit der Elementknotenwerte ausgedrückt. Einsetzen dieser Ansatzfunktionen in den Integralausdruck liefert ein algebraisches Gleichungssystem für die Knotenwerte. Nach dessen Lösung kann mit Hilfe der Ansätze eine Näherungslösung für das gesamte Gebiet angegeben werden.

3.3.2 Prinzip der virtuellen Arbeit für große Formänderungen

Den Ausgangspunkt für die Herleitung des Prinzips der virtuellen Arbeit bildet der Impulssatz für ein ruhendes, verformtes Körperelement:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

Nach skalarer Multiplikation mit der virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ und Integration über das aktuelle Volumen erhält man mit Hilfe des Gaußschen Satzes das bezüglich der verformten Konfiguration aufgestellte Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\int_{\mathbf{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} \delta(\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T) dV = \int_{\mathbf{A}} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{\mathbf{V}} \rho \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dV . \quad (3.18)$$

Dabei wurden die Vertauschbarkeit von Gradientenbildung und Variation, die Symmetrie des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und das Theorem von *Cauchy*

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (3.19)$$

ausgenutzt.

Die linke Seite von (3.18) stellt die virtuelle Formänderungsarbeit δW dar, während auf der rechten Seite die virtuelle Arbeit der äußeren flächenhaft verteilt angreifenden Kräfte $\delta A_{\mathbf{A}}$ und aller volumenhaft angreifenden Kräfte

te δA_V stehen. Wenn auf dem Teil der Oberfläche A_P die Spannungen und auf A_u die Verschiebungen vorgegeben sind, so verschwindet wegen

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.20)$$

auf A_u der entsprechende Anteil des Oberflächenintegrals.

3.3.3 Update-Lagrangesche Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit

In der Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit gemäß (3.18) sind alle Größen auf die unbekannt verformte Lage bezogen. Zur Auswertung der Integrale muß eine Transformation auf eine bekannte Konfiguration durchgeführt werden. Dabei bieten sich insbesondere die unverformte Ausgangslage und bei einer Aufteilung der Belastung in einzelne Lastschritte die Konfiguration des zuletzt berechneten Schrittes an. Das erstgenannte Vorgehen ist als Total-Lagrangesche Formulierung bekannt, während das zweite als Update-Lagrangesches Verfahren bezeichnet wird.

Bei geschwindigkeitsabhängigen Materialgesetzen kann das in Kap. 3.1 dargestellte Verfahren, bei dem die gesamte Last in einem Schritt aufgebracht wird, zu erheblichen Fehlern führen, da der genaue zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit der Körperpunkte unbekannt ist. Um größtmögliche Genauigkeit zu erreichen, wird daher das inkrementelle Verfahren mit einer Gleichgewichtsiteration kombiniert. Aus diesem Grund und wegen der differentiellen Beschreibung des Materialverhaltens liegt hier eine Update-Lagrangesche Formulierung nahe.

Um die im folgenden auftretenden Größen eindeutig zu bestimmen, wird eine aus [3.1] stammende Schreibweise verwendet: Linke obere Indizes kennzeichnen die Konfiguration, in der die betreffende Größe auftritt, während der linke untere Index die Bezugskonfiguration dieser Größe angibt. So sind beispielsweise ${}^t S_{0\beta}^\alpha$ die gemischtvarianten Komponenten des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors in körperbezogener Darstellung in der Konfiguration zur Zeit t , bezogen auf die Anfangskonfiguration. Bei Eindeutigkeit werden die linksstehenden Indizes weggelassen.

Das Problem besteht also darin, aus der bekannten Konfiguration zum Zeitpunkt t die neue Konfiguration zur Zeit $t + \Delta t$ zu berechnen. Dabei bezeichnet ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$ die Verschiebung aus der Ausgangskonfiguration zur Zeit t in die unbekannt Lage zur Zeit $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{r} - {}^t \mathbf{r} \quad (3.21)$$

Die virtuelle Formänderungsarbeit

$$\delta W = \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} \delta (\text{grad}^{t+\Delta t} \mathbf{u} + (\text{grad}^{t+\Delta t} \mathbf{u})^T) {}^{t+\Delta t} dV \quad (3.22)$$

wird mit Hilfe der Beziehungen

$$J = \frac{{}^{t+\Delta t} V}{{}^t V} = \frac{{}^t \rho}{{}^{t+\Delta t} \rho} \quad (3.23)$$

und

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{e} = \frac{1}{2} (\text{grad}^{t+\Delta t} \mathbf{u} + (\text{grad}^{t+\Delta t} \mathbf{u})^T) \quad (3.24)$$

sowie der Definition des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{S} = J ({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{-1}) ({}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma}) ({}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{-1})^T \quad (3.25)$$

umgeformt: Aus der Definition des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t} d\mathbf{r} \cdot {}^{t+\Delta t} d\mathbf{r} - {}^t d\mathbf{r} \cdot {}^t d\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{Grad}^{t+\Delta t} \mathbf{u} + (\text{Grad}^{t+\Delta t} \mathbf{u})^T + (\text{Grad}^{t+\Delta t} \mathbf{u})^T \text{Grad}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

folgt

$$\delta {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon} = ({}^{t+\Delta t} \mathbf{F})^T \delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{e} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} . \quad (3.27)$$

Damit läßt sich die virtuelle Formänderungsarbeit als Integral über das bekannte Gebiet ${}^t V$ darstellen

$$\delta W = \int_{tV} {}^{t+\Delta t} \mathbf{S} \cdot \delta {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon} {}^t dV . \quad (3.28)$$

\mathbf{S} und $\boldsymbol{\varepsilon}$ sind bezüglich der Elementararbeit konjugierte Spannungs- und Verzerrungsmaße [3.28].

Mit der auf das Ausgangsvolumen bezogenen Belastung ${}^{t+\Delta t} \mathbf{p}$ lautet das vollständige Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\begin{aligned} \int_{tV} {}^{t+\Delta t} \mathbf{S} \cdot \delta {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon} {}^t dV &= \int_{oA} {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} \cdot \delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} {}^o dA \\ &+ \int_{tV} {}^t \rho {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} \cdot \delta {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} {}^t dV . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Zur Lösung von (3.29) mit Hilfe der Verschiebungsmethode müssen alle auftretenden Größen als Funktionen des unbekanntes Verschiebungsfeldes ausgedrückt werden. Das dadurch entstehende nichtlineare Gleichungssystem in \mathbf{u} wird durch geometrische und physikalische Linearisierung gelöst. Dazu werden Spannungen und Verzerrungen zerlegt und das Spannungsinkrement über das Materialgesetz als Funktion der Verzerrungen ausgedrückt.

3.3.4 Zerlegung von Spannungen und Verzerrungen

Da der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor auf die Konfiguration zur Zeit t bezogen ist, läßt er sich in einen bekannten Anteil und einen Zuwachs zerlegen

$${}^{t+\Delta t}_t \mathbf{S} = {}^t_t \mathbf{S} + \Delta {}^t_t \mathbf{S} \quad . \quad (3.30)$$

Die Variation des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors wird in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil aufgespalten

$$\delta {}^{t+\Delta t}_t \boldsymbol{\varepsilon} = \delta {}^t_t \boldsymbol{\varepsilon} = \delta {}^t_t \mathbf{e} + \delta {}^t_t \boldsymbol{\eta} \quad (3.31)$$

mit

$$\delta {}^t_t \mathbf{e} = \frac{1}{2} \delta (\text{Grad } \mathbf{u} + (\text{Grad } \mathbf{u})^T) \quad (3.32)$$

und

$$\delta {}^t_t \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} \delta ((\text{Grad } \mathbf{u})^T \text{Grad } \mathbf{u}) \quad . \quad (3.33)$$

Vernachlässigt man das Produkt der beiden kleinen Größen $\Delta {}^t_t \mathbf{S} \cdot \delta \boldsymbol{\eta}$ (s. z.B. [3.1, 3.29]), so ergibt sich aus (3.29)

$$\begin{aligned} & \int_{{}^t_t V} \Delta {}^t_t \mathbf{S} \cdot \delta {}^t_t \mathbf{e} \, {}^t_t dV + \int_{{}^t_t V} {}^t_t \mathbf{S} \cdot \delta {}^t_t \boldsymbol{\eta} \, {}^t_t dV \\ & = \delta A_V + \delta A_A - \int_{{}^t_t V} {}^t_t \mathbf{S} \cdot \delta {}^t_t \mathbf{e} \, {}^t_t dV \quad . \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.3.5 Einbau des Werkstoffgesetzes

Um große Deformationen berechnen zu können, muß das in Kap. 2.2 hergeleitete Werkstoffgesetz auf diesen Fall verallgemeinert werden. Dazu wird angenommen, daß die elastischen Deformationen klein sind, was bei

Metallen gewöhnlich zutrifft. Dann läßt sich die Verzerrungsgeschwindigkeit in einen elastischen und einen inelastischen Anteil aufspalten

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_i = \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_p + \mathbf{D}_v \quad (3.35)$$

(vgl. (2.105)). Für \mathbf{D}_e wird ein hypoelastisches Gesetz der Form

$$\mathbf{D}_e = \frac{1}{2G} \left(\overset{\nabla}{\sigma} - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(\overset{\nabla}{\sigma}) \mathbf{1} \right) \quad (3.36)$$

mit der objektiven Zeitableitung nach *Jaumann* [3.30]

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \dot{\sigma} - \mathbf{W}\sigma + \sigma\mathbf{W} \quad (3.37)$$

angesetzt. Damit ergibt sich das System der konstitutiven Gleichungen für große Deformationen zu

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2G} \left(\overset{\nabla}{\sigma} - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(\overset{\nabla}{\sigma}) \mathbf{1} \right) + \lambda \mathbf{n} + \ll \Phi \gg \mathbf{n} \quad (3.38)$$

mit

$$\lambda = \left\langle \frac{A}{K} \overset{\nabla}{\sigma}' \cdot \mathbf{n} \right\rangle + \left\langle \frac{B}{K} \Lambda \right\rangle \quad (3.39)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\sigma} &= \mathbf{C}\mathbf{D} - 2G\mathbf{D}_i^* \\ &= 2G \left\{ \mathbf{D} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Sp}(\mathbf{D}) \mathbf{1} - \left\langle \frac{A}{K} \right\rangle \frac{A}{2G + K} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} \right\} \\ &\quad - 2G \left\{ \left(1 - \left\langle \frac{A}{K} \right\rangle \right) \left\langle \frac{B}{K} \Lambda + \Phi \right\rangle \right\} \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

den Evolutionsgleichungen für die internen Variablen

$$\overset{\nabla}{\xi} = c \lambda \mathbf{n}, \quad (3.41)$$

$$\dot{\chi} = (\overset{\nabla}{\sigma}' - \xi) \cdot \lambda \mathbf{n}, \quad (3.42)$$

$$\dot{\Delta} = \sqrt{\frac{E_0}{g}} \dot{\chi}, \quad (3.43)$$

der verallgemeinerten Überspannung

$$\Lambda = \sqrt{f} - \sqrt{g} = \left\{ (\overset{\nabla}{\sigma}' - \xi) \cdot (\overset{\nabla}{\sigma}' - \xi) \right\}^{1/2} - \sqrt{g}, \quad (3.44)$$

dem Maß für die Prozeßgeschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n} , \quad (3.45)$$

sowie den Nebenbedingungen

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x, & \text{wenn } f(\bar{\boldsymbol{\sigma}}') = g \text{ und } \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \mathbf{n} > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} , \quad (3.46)$$

$$\ll x \gg = \begin{cases} x, & \text{wenn } \Lambda \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} . \quad (3.47)$$

Man beachte, daß der Tensor vierter Stufe \mathbf{C} in (3.40) von der Belastungsgeschichte und der Prozeßgeschwindigkeit abhängt.

Um das Werkstoffgesetz in das Prinzip der virtuellen Arbeit (3.34) einzubauen, muß das Inkrement des 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors durch den Zuwachs der Cauchy-Spannungen gemäß (3.40) ausgedrückt werden. Dazu wird von der Näherung

$$\Delta_t \mathbf{S} \approx {}_t^t \dot{\mathbf{S}} \Delta t \quad (3.48)$$

ausgegangen und die substantielle Zeitableitung des 2. Piola - Kirchhoff-Spannungstensors

$${}_{\tau}^{\tau} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{{}_{\tau}^{\tau} \rho}{{}_{\tau}^{\tau} \rho} \mathbf{F} {}_{\tau}^{\tau} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T , \quad t \leq \tau \leq t + \Delta t , \quad (3.49)$$

mit dem Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \frac{\partial {}^{\tau} X^{\alpha}}{\partial {}^{\tau} x^{\beta}} {}^{\tau} \mathbf{g}_{\alpha} {}^t \mathbf{g}^{\beta} \quad (3.50)$$

berechnet. Die substantielle Zeitableitung von (3.49) ergibt [3.31]

$${}_{\tau}^{\tau} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{{}_{\tau}^{\tau} \dot{\rho}}{{}_{\tau}^{\tau} \rho} \mathbf{F} {}_{\tau}^{\tau} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T + \frac{{}_{\tau}^{\tau} \rho}{{}_{\tau}^{\tau} \rho} (\dot{\mathbf{F}} {}_{\tau}^{\tau} \mathbf{S} \mathbf{F}^T + \mathbf{F} {}_{\tau}^{\tau} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T + \mathbf{F} {}_{\tau}^{\tau} \mathbf{S} \dot{\mathbf{F}}^T) \quad (3.51)$$

mit

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F} . \quad (3.52)$$

Zum Zeitpunkt $\tau = t$ gilt

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} , \quad (3.53)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} , \quad (3.54)$$

$$J = 1, \quad (3.55)$$

woraus sich mit der *Jaumannschen* Zeitableitung

$${}^t \dot{\mathbf{S}} = {}^t \overset{\nabla}{\sigma} - \frac{{}^t \dot{\rho}}{{}^t \rho} {}^t \sigma + ({}^t \mathbf{W} - {}^t \mathbf{L}) {}^t \sigma - {}^t \sigma ({}^t \mathbf{W} - {}^t \mathbf{L}) . \quad (3.56)$$

ergibt. Mit der Definition des Geschwindigkeitsgradiententensors

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \text{grad } \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T) + \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{v} - (\text{grad } \mathbf{v})^T) \\ &= \mathbf{D} + \mathbf{W} \end{aligned} \quad (3.57)$$

und der Kontinuitätsgleichung [3.32]

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = - \text{Sp} (\mathbf{D}) \quad (3.58)$$

folgt

$$\dot{\mathbf{S}} = \overset{\nabla}{\sigma} + \text{Sp} (\mathbf{D}) \sigma - \mathbf{D} \sigma - \sigma \mathbf{D} . \quad (3.59)$$

Der Dehnungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} läßt sich unter der Annahme zeitlich konstanter Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \text{const.} = \frac{D\mathbf{r}}{dt} = \frac{D\mathbf{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} \quad (3.60)$$

mit Hilfe der Verschiebungen ausdrücken:

Zum betrachteten Zeitpunkt $\tau = t$ fallen die aktuellen Koordinaten mit denen der Referenzkonfiguration zusammen, d.h.

$${}^t \mathbf{D} = \frac{1}{2\Delta t} (\text{Grad } \mathbf{u} + (\text{Grad } \mathbf{u})^T) = \frac{1}{\Delta t} {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_1 . \quad (3.61)$$

Setzt man (3.58) in Verbindung mit dem Werkstoffgesetz (3.40) in (3.48) ein, so erhält man für den Zuwachs des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor

$$\Delta_t \mathbf{S} \approx {}^t \mathbf{C} {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_1 - 2 G D_i^* \Delta t + \text{Sp} ({}^t \boldsymbol{\varepsilon}_1) {}^t \sigma - {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_1 {}^t \sigma - {}^t \sigma {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_1 . \quad (3.62)$$

Das hier dargestellte Vorgehen entspricht einer expliziten Euler-Integration von $\Delta_t \mathbf{S}$. Damit lautet das Prinzip der virtuellen Arbeit für einen Zeitschritt

$$\begin{aligned} & \int_{t_V} \left\{ {}_t \mathbf{C} \, {}_t \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \text{Sp}({}_t \boldsymbol{\varepsilon}_1) \, {}_t \boldsymbol{\sigma} - {}_t \boldsymbol{\varepsilon}_1 \, {}_t \boldsymbol{\sigma} - {}_t \boldsymbol{\sigma} \, {}_t \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \right\} \cdot \delta_t \mathbf{e} \, {}_t dV \\ & + \int_{t_V} {}_t \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta_t \boldsymbol{\eta} \, {}_t dV \\ & = \delta A_V + \delta A_A - \int_{t_V} {}_t \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta_t \mathbf{e} \, {}_t dV + \Delta t \int_{t_V} 2 G \mathbf{D}_i^* \cdot \delta_t \mathbf{e} \, {}_t dV. \quad (3.63) \end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt die linearisierte Form des Prinzips der virtuellen Arbeit nach (3.29) dar. Es soll ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß sich die Näherungen zur Berechnung des Spannungskrementes $\Delta_t \mathbf{S}$ nur auf Ermittlung der Steifigkeitsmatrix beziehen. Die für die Gleichgewichtsiteration benötigten Spannungen am Ende eines Zeitschrittes werden ohne diese Näherungen berechnet.

3.3.6 Inkrementelle Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit

Da das nichtlineare Gleichungssystem für das Verschiebungsfeld \mathbf{u} (3.29) mit Hilfe einer Gleichgewichtsiteration gelöst werden soll, muß das Problem inkrementell in den Verschiebungen formuliert werden. Dazu wird die unbekannte Verschiebung ${}_t \mathbf{u}$ durch die Folge ${}^{(i)}\mathbf{u}$ mit

$${}^{(i)}\mathbf{u} = {}^{(i-1)}\mathbf{u} + \Delta {}^{(i)}\mathbf{u} \quad i=1, 2, \dots \quad (3.64)$$

angenähert.

Dementsprechend wird auch die Verzerrung ${}^{t+\Delta t} {}_t \boldsymbol{\varepsilon}$ durch ${}^{(i)} {}_t \boldsymbol{\varepsilon}$ approximiert

$${}^{t+\Delta t} {}_t \boldsymbol{\varepsilon} \approx {}^{(i)} {}_t \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.65)$$

Aus der Variation der Verschiebungen

$$\delta {}^{(i)}\mathbf{u} = \delta ({}^{(i-1)}\mathbf{u} + \Delta {}^{(i)}\mathbf{u}) = \delta \Delta {}^{(i)}\mathbf{u} \quad (3.66)$$

folgt

$$\delta {}^{(i)} {}_t \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \Delta {}^{(i)} {}_t \mathbf{e} + \delta \Delta {}^{(i)} {}_t \boldsymbol{\eta} \quad (3.67)$$

wobei in

$$\begin{aligned} \delta \Delta_{\mathbf{t}}^{(i)} \mathbf{e} &= \frac{1}{2} (\delta \text{Grad}(\Delta^{(i)} \mathbf{u}) + \delta \text{Grad}(\Delta^{(i)} \mathbf{u})^T \\ &\quad + \delta \text{Grad}(\Delta^{(i)} \mathbf{u})^T \text{Grad}(\Delta^{(i-1)} \mathbf{u}) \\ &\quad + \text{Grad}(\Delta^{(i-1)} \mathbf{u})^T \delta \text{Grad}(\Delta^{(i)} \mathbf{u})) \end{aligned} \quad (3.68)$$

die in $\Delta^{(i)} \mathbf{u}$ linearen und in

$$\begin{aligned} \delta \Delta_{\mathbf{t}}^{(i)} \eta &= \frac{1}{2} (\delta \text{Grad}(\Delta^{(i)} \mathbf{u})^T \text{Grad}(\Delta^{(i)} \mathbf{u}) \\ &\quad + \text{Grad}(\Delta^{(i)} \mathbf{u})^T \delta \text{Grad}(\Delta^{(i)} \mathbf{u})) \end{aligned} \quad (3.69)$$

die in $\Delta^{(i)} \mathbf{u}$ quadratischen Terme zusammengefaßt sind. Diese Aufspaltung der Verzerrungen findet man auch bei *Paulun* [3.33] und *Klee* [3.21]. Nach Aufteilung der Spannungen ${}^{(i)} \mathbf{S}$ in den bekannten Anteil ${}^{(i-1)} \mathbf{S}$ und das Inkrement $\Delta^{(i)} \mathbf{S}$

$$\Delta^{(i)} \mathbf{S} = {}^{(i)} \mathbf{S} - {}^{(i-1)} \mathbf{S} \quad (3.70)$$

stellt sich das Prinzip der virtuellen Arbeit folgendermaßen dar

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{t}_V} \Delta^{(i)} \mathbf{S} \cdot \delta \Delta_{\mathbf{t}}^{(i)} \mathbf{e} \, {}^t dV + \int_{\mathbf{t}_V} \Delta^{(i)} \mathbf{S} \cdot \delta \Delta_{\mathbf{t}}^{(i)} \eta \, {}^t dV \\ + \int_{\mathbf{t}_V} {}^{(i-1)} \mathbf{S} \cdot \delta \Delta^{(i)} \eta \, {}^t dV = \delta A_V + \delta A_A - \int_{\mathbf{t}_V} {}^{(i-1)} \mathbf{S} \cdot \delta \Delta_{\mathbf{t}}^{(i)} \mathbf{e} \, {}^t dV . \end{aligned} \quad (3.71)$$

Da das zweite Integral auf der linken Seite Größen enthält, die gegenüber den restlichen von höherer Ordnung klein sind, wird es in der Iteration nicht berücksichtigt (s. a. [3.1] sowie (3.34)). Damit entspricht die Formulierung (3.71) für einen Iterationsschritt der Gleichung (3.34) für einen Zeitschritt.

Aus (3.61) folgt

$$\Delta_{\mathbf{t}}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2} (\text{Grad}(\Delta^{(i)} \mathbf{u}) + \text{Grad}(\Delta^{(i)} \mathbf{u})^T) \quad (3.72)$$

und daraus mit Hilfe von (3.62) für das Spannungskrement

$$\begin{aligned} \Delta^{(i)} \mathbf{S} \approx {}^t \mathbf{C} \Delta_{\mathbf{t}}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \text{Sp}(\Delta_{\mathbf{t}}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_1) {}^t \boldsymbol{\sigma} - \Delta_{\mathbf{t}}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_1 {}^t \boldsymbol{\sigma} - {}^t \boldsymbol{\sigma} \Delta_{\mathbf{t}}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \\ - \{2 G \mathbf{D}_i^*\} \Delta t , \end{aligned} \quad (3.73)$$

wobei der Klammerausdruck $\{\dots\}$ nur für $i = 1$ gültig ist. In (3.73) ist die Näherung eines von \mathbf{D} unabhängigen Tensors \mathbf{C} enthalten, was einer Linearisierung in der Verzerrungsgeschwindigkeit entspricht.

(3.71) bildet zusammen mit (3.73) den Ausgangspunkt für die inkrementelle FE-Formulierung.

3.4 Umsetzung in eine Finite-Element-Formulierung

In der Kontinuumsmechanik hat sich heute die Verschiebungsmethode gegenüber der Kraftgrößenmethode deutlich durchgesetzt (s. a. Kap. 3.1). Die Gründe dafür liegen vor allem in den einfacher zu bestimmenden Ansatzfunktionen und den prinzipiellen Vorteilen bei dynamischen und nichtlinearen Problemen [3.34].

3.4.1 Wahl der Elemente

Im folgenden wird exemplarisch ein Ringelement zur Analyse allgemeiner rotationssymmetrischer Probleme hergeleitet. Da für den Lastvektor die gleichen Ansatzfunktionen wie für die Steifigkeitsmatrix verwendet werden, ergibt sich eine konsistente Formulierung.

Zweidimensionale Probleme werden nahezu ausschließlich mit Hilfe von Dreiecks- oder Viereckselementen behandelt. Der Vorteil der Dreieckselemente liegt in der besseren Anpassungsmöglichkeit an komplizierte Geometrien. Schwierigkeiten treten jedoch durch geometrische Anisotropie und unterschiedliches Konvergenzverhalten bei verschiedenen Netzen auf [3.35]. Da sich bei den hier zu behandelnden relativ einfachen Geometrien der genannte Vorteil nicht auswirken kann, werden im folgenden Viereckselemente entwickelt.

3.4.2 Ansatzfunktionen

Die Wahl der Ansätze bei einem finiten Element hat entscheidenden Einfluß auf Rechenzeit, Genauigkeit, Konvergenzverhalten und numerische Stabilität der gesamten Rechnung. Daher wird auch in der Literatur [3.1, 3.2, 3.8, 3.34, 3.35, 3.36] ausführlich auf die Anforderungen an die Ansätze eingegangen.

Wie bereits in Kap. 3.1 dargelegt, brauchen die Ansatzfunktionen nur die wesentlichen Randbedingungen zu befriedigen, da die natürlichen von vornherein im integralen Sinn erfüllt werden. Durch Verwendung konformer Elemente ist das Verschiebungsfeld auch an den Elementrändern stetig, wodurch die Kompatibilitätsbedingungen bereits durch den Ansatz

erfüllt werden. Obwohl strenggenommen nur die Verwendung solcher konformer Elemente erlaubt ist, werden gelegentlich (z. B. bei Plattenproblemen) auch mit nichtkonformen Elementen gute Ergebnisse erzielt [3.2]. Vollständigkeit der Ansätze stellt sicher, daß Starrkörperverschiebungen und konstante Verzerrungszustände exakt erfaßt werden. Zusätzlich ist Invarianz der Interpolationsfunktionen gegenüber Drehungen und Verschiebungen des Koordinatensystems zu fordern. Sind alle diese Bedingungen erfüllt, was z. B. mit vollständigen Polynomen zu erreichen ist [3.1], so gewährleistet das Element bei Linearität des Problems monotone Konvergenz. Bei nichtlinearen Problemen ist dagegen Konvergenz nicht a priori gesichert [3.9].

3.4.3 Das isoparametrische Konzept

Da nach *Bathe* [3.1] isoparametrische und verwandte Elemente besonders effektiv sind, soll hier dieses Konzept Verwendung finden. Im Hinblick auf die spätere Anwendung wird es für zweidimensionale Probleme dargestellt. Die Erweiterung auf dreidimensionale Elemente ist prinzipiell zwar einfach, erfordert jedoch in Bezug auf Speicherplatz und Rechenzeit wesentlich höheren numerischen Aufwand.

Zur Zustandsbeschreibung werden sowohl körperfeste, elementweise definierte Koordinaten ξ^i (sog. lokale Koordinaten) als auch raumfeste, globale Koordinaten x^α eingeführt. Bei rotationssymmetrischen Problemen sind Zylinderkoordinaten als globale Koordinaten zweckmäßig. Die natürlichen Koordinaten werden so gewählt, daß sie ein allgemeines Viereck in ein Quadrat mit der Kantenlänge 2 transformieren. Abb. 3.1 zeigt ein 4-Knotenelement in allgemeiner Lage mit Numerierung der Knoten und Bezeichnung der Knotenpunktverschiebungen.

Auf der Grundlage dieser Darstellung lassen sich iso-, sub- oder superparametrische Elemente ableiten, je nachdem ob für die Interpolation des Deformationsverhaltens und der Geometrie gleiche oder verschiedene Ansatzfunktionen verwendet werden. Ist der Grad der Funktion zur Beschreibung der Geometrie größer als der für die Deformation, so spricht man von superparametrischen Elementen, im umgekehrten Fall von subparametrischen.

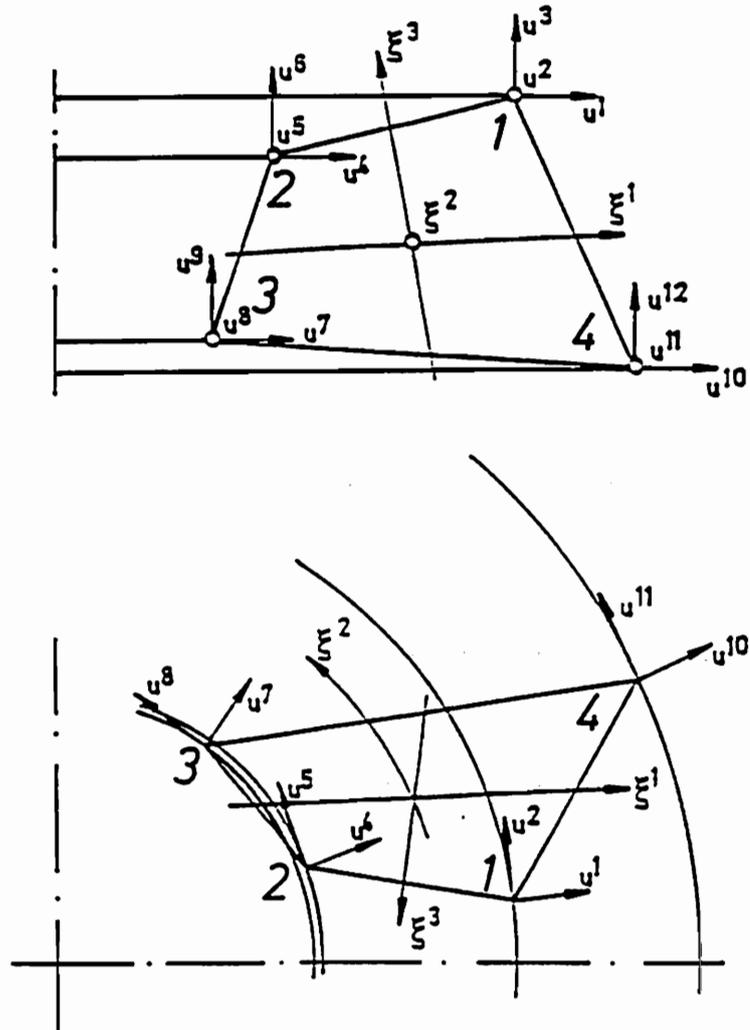


Abb. 3.1: Axialsymmetrisches Element mit lokalen Koordinaten ξ^i , Knotennumerierung und Bezeichnung der Knotenpunktverschiebungen

Die Interpolationsfunktionen lassen sich auf systematischem Weg mit Hilfe der Lagrangeschen Funktion gewinnen:

$$h_{il} = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+1} (\xi^1 - \xi_j^1) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{m+1} (\xi^3 - \xi_k^3)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+1} (\xi_i^1 - \xi_j^1) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{m+1} (\xi_i^3 - \xi_k^3)} \quad (3.74)$$

Darin ist m der Grad des Ansatzes, und der rechte untere Index kennzeichnet die lokale Koordinate als Knotenkoordinate. Man beachte, daß die Koordinate in Umfangsrichtung ξ^2 überzählig ist: Alle Körperpunkte mit gleichen Koordinaten ξ^1 und ξ^3 haben aufgrund der Rotationssymmetrie identische Werte der Zustandsvariablen. Es genügt daher, einen beliebigen Schnitt des Kreisringelementes zu betrachten (s. a. Abb. 3.1).

Das Problem des effizientesten Ansatzgrades wird in der Literatur nicht eindeutig geklärt. Das deutet darauf hin, daß diese Frage nur problemabhängig und nicht allgemein beantwortet werden kann. In Kap. 3.6.2 wird darauf an Hand eines Beispielen näher eingegangen.

Die Auswertung der Formel (3.74) für die im FE-Programm implementierten 4-, 8- und 12-Knotenelemente ergibt die unten aufgeführten Formfunktionen:

4-Knotenelement

$$h_i = \frac{1}{4} (1 + \xi^1 \xi_i^1) (1 + \xi^3 \xi_i^3) \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (3.75)$$

8-Knotenelement

$$h_i = \frac{1}{4} (1 + \xi^1 \xi_i^1) (1 + \xi^3 \xi_i^3) (\xi^1 \xi_i^1 + \xi^3 \xi_i^3 - 1) \quad i = 1, 3, 5, 7,$$

$$h_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^1 \xi_i^1) (1 + \xi^3 \xi_i^3) \quad i = 2, 6, \quad (3.76)$$

$$h_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^3 \xi_i^3) (1 + \xi^1 \xi_i^1) \quad i = 4, 8,$$

12-Knotenelement

$$h_i = \frac{1}{32} (1 + \xi^1 \xi_i^1) (1 + \xi^3 \xi_i^3) \{ 9 (\xi^1 \xi_i^1 + \xi^3 \xi_i^3) - 10 \} \quad i = 1, 4, 7, 10,$$

$$h_i = \frac{9}{32} (1 - \xi^3 \xi_i^3) (1 + \xi^1 \xi_i^1) (1 + 9 \xi^3 \xi_i^3) \quad i = 5, 6, 11, 12$$

$$\xi_i^1 = \pm \frac{1}{3} \quad \xi_i^3 = \pm 1, \quad (3.77)$$

$$h_i = \frac{9}{32} (1 - \xi^1 \xi_i^1) (1 + \xi^3 \xi_i^3) (1 + 9 \xi^1 \xi_i^1) \quad i = 2, 3, 8, 9$$

$$\xi_i^3 = \pm \frac{1}{3} \quad \xi_i^1 = \pm 1.$$

Die Interpolationsfunktion h_i nimmt am i -ten Knoten den Wert 1 und an den übrigen Knoten den Wert 0 an. In Abb. 3.2 sind die Verläufe der Formfunktionen h_i dargestellt.

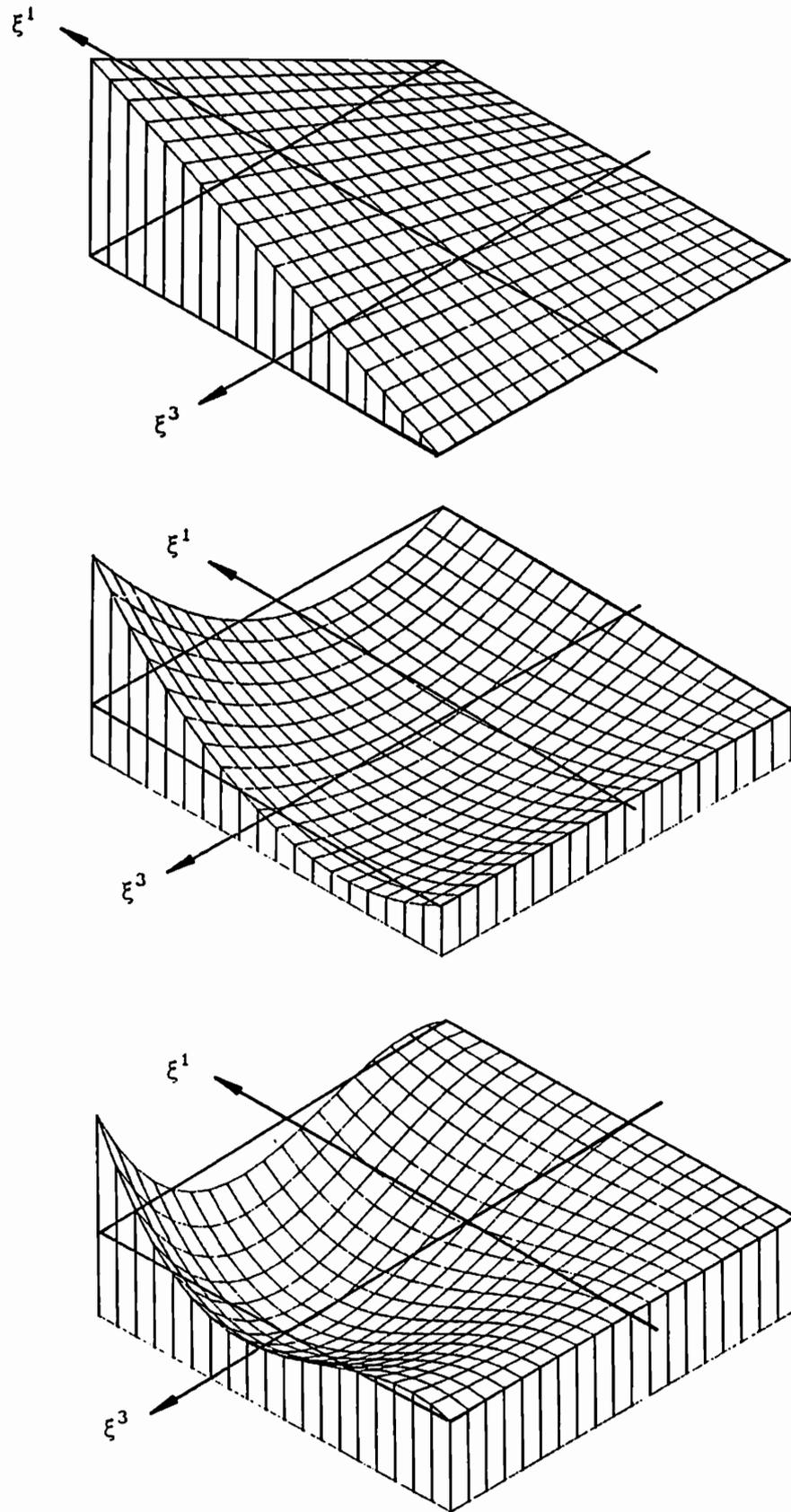


Abb. 3.2: Verlauf der Formfunktion h_1 beim 4-, 8- und 12-Knotenelement

3.4.4. Axialsymmetrisches Element

Bei Verwendung von krummlinigen Koordinaten muß beachtet werden, daß die raumfesten Basisvektoren \mathbf{g}_α im allgemeinen ortsabhängig sind. Bei den hier verwendeten Zylinderkoordinaten erhält man den folgenden Zusammenhang zwischen den Basisvektoren ${}^\tau \mathbf{g}_\alpha$ eines Punktes mit den Koordinaten x^α und den Basisvektoren ${}^\tau \mathbf{g}_{\alpha i}$ eines anderen Punktes (hier des i-ten Knotens) mit den Koordinaten x_i^α (s. Abb. 3.3))

$$\begin{aligned} {}^\tau \mathbf{g}_{1i} &= \cos(x^2 - x_i^2) {}^\tau \mathbf{g}_1 - \frac{1}{x^1} \sin(x^2 - x_i^2) {}^\tau \mathbf{g}_2, \\ {}^\tau \mathbf{g}_{2i} &= x_i^1 \left\{ \sin(x^2 - x_i^2) {}^\tau \mathbf{g}_1 + \frac{1}{x^1} \cos(x^2 - x_i^2) {}^\tau \mathbf{g}_2 \right\}, \\ {}^\tau \mathbf{g}_{3i} &= {}^\tau \mathbf{g}_3. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Dabei bezeichnet τ eine Zeit zwischen t und $t + \Delta t$.

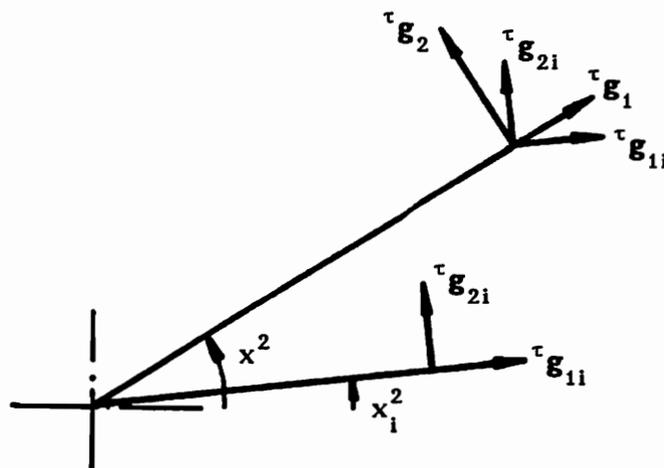


Abb. 3.3: Zusammenhang zwischen den Basisvektoren ${}^\tau \mathbf{g}_\alpha$ des Punktes mit den Koordinaten x^α und den Basisvektoren ${}^\tau \mathbf{g}_{\alpha i}$ des Punktes mit den Koordinaten x_i^α

Das isoparametrische Konzept verlangt, daß die Geometrie mit denselben Formfunktionen interpoliert wird wie die Verschiebungen

$$\begin{aligned} {}^\tau \mathbf{u}(\xi^j) &= \sum_i h_i(\xi^j) {}^\tau \mathbf{u}_i \\ &= \sum_i h_i(\xi^j) \left\{ {}^\tau u_i^1 {}^\tau \mathbf{g}_{1i} + {}^\tau u_i^2 {}^\tau \mathbf{g}_{2i} + {}^\tau u_i^3 {}^\tau \mathbf{g}_{3i} \right\} \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$j = 1, 3,$$

$${}^\tau \mathbf{r}(\xi^j) = \sum_i h_i(\xi^j) {}^\tau \mathbf{r}_i \quad j = 1, 3. \quad (3.80)$$

Dabei werden die Komponenten des Verschiebungsvektors ${}^t\mathbf{u}$ zur Zeit t im Sinne des Update-Lagrange-Verfahrens in bezug auf die Basisvektoren zur Zeit t ausgedrückt. Die Summen mit dem Index i laufen von 1 bis N , wobei N die Anzahl der Elementknoten bezeichnet.

Aufgrund der Ortsabhängigkeit der Basisvektoren (s. (3.78)) sind diese Ansätze nichtlinear in den Komponenten. Da die üblicherweise verwendeten axialsymmetrischen Elemente keine Knotenpunktverschiebungen in Umfangsrichtung zulassen, tritt diese Schwierigkeit dort nicht in Erscheinung. Um den mit dieser Nichtlinearität verbundenen Anwachs in der Rechenzeit zu minimieren, wird ein besonderes Update-Verfahren verwendet, bei welchem die Unabhängigkeit aller Zustandsvariablen von der Koordinaten ξ^2 ausgenutzt wird: Mit jedem neuen Lastschritt wird ein materiell anderer repräsentativer Schnitt des Kreisringelementes betrachtet. Wird dieser Schnitt jeweils bei

$${}^t x_i^2 = 0 \quad (3.81)$$

durchgeführt, so haben die Basisvektoren ${}^t\mathbf{g}_\alpha$, auf welche sämtliche Größen bezogen sind, alle die gleiche Richtung und unterscheiden sich lediglich in ihrem Betrag. Damit werden die Ausdrücke für die Verschiebungskomponenten entkoppelt und stark vereinfacht, was sich in einer drastischen Reduktion der Rechenzeit niederschlägt

$$\begin{aligned} {}^t u^1 &= \sum_i h_i {}^t u_i^1, \\ {}^t u^2 &= \sum_i h_i \frac{{}^t x_i^1}{{}^t x^1} {}^t u_i^2, \end{aligned} \quad (3.82)$$

$${}^t u^3 = \sum_i h_i {}^t u_i^3.$$

Um die Koordinaten ${}^t x^\alpha$ eines Punktes mit den körperfesten Koordinaten ξ^1, ξ^3 in Abhängigkeit der Knotenkoordinaten ${}^t x_i^\alpha$ und der Interpolationsfunktionen angeben zu können, geht man im Gegensatz zu den Verschiebungen zweckmäßig von einer Darstellung des Ortsvektors in bezug auf ${}^t\mathbf{g}_\alpha$ aus

$${}^t \mathbf{r} = {}^t x^1 {}^t \mathbf{g}_1 + {}^t x^3 {}^t \mathbf{g}_3. \quad (3.83)$$

Schreibt man (3.83) für die Ortsvektoren der Knotenpunkte, setzt diese Ausdrücke in den Ansatz (3.80) ein und drückt die Basisvektoren ${}^{\tau}\mathbf{g}_{\alpha i}$ gemäß (3.78) durch ${}^{\tau}\mathbf{g}_{\alpha}$ aus, so ergeben sich die Koordinaten des betrachteten Punktes zu

$$\begin{aligned} {}^{\tau}x^1 &= \sqrt{\left(\sum_i h_i {}^{\tau}x_i^1 \cos {}^{\tau}x_i^2\right)^2 + \left(\sum_i h_i {}^{\tau}x_i^1 \sin {}^{\tau}x_i^2\right)^2}, \\ {}^{\tau}x^2 &= \arctan \frac{\sum_i h_i {}^{\tau}x_i^1 \sin {}^{\tau}x_i^2}{\sum_i h_i {}^{\tau}x_i^1 \cos {}^{\tau}x_i^2}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

$${}^{\tau}x^3 = \sum_i h_i {}^{\tau}x_i^3.$$

Die Koordinaten ${}^{\tau}x^{\alpha}$ hängen also nichtlinear von den Knotenkoordinaten ${}^{\tau}x_i^{\alpha}$ ab, was eine Folge des hier verwendeten krummlinigen Koordinatensystems ist.

Als Zusammenhang zwischen den Koordinaten eines Punktes zu einer beliebigen Zeit τ und den auf die Basisvektoren zur Zeit t bezogenen Verschiebungskomponenten ${}^{\tau}u^{\alpha}$ erhält man

$$\begin{aligned} {}^{\tau}x^1 &= \sqrt{\left({}^{\tau}u^1 + {}^t x^1\right)^2 + \left({}^{\tau}u^2 + {}^t x^1\right)^2}, \\ {}^{\tau}x^2 &= \arctan \frac{{}^{\tau}u^2 + {}^t x^1}{{}^{\tau}u^1 + {}^t x^1}, \\ {}^{\tau}x^3 &= {}^{\tau}u^3 + {}^t x^3. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Aus (3.85) wird deutlich, daß es zweckmäßig ist, die Verschiebungskomponenten in der kovarianten Basis und nicht - wie ursprünglich in [3.26] - in der kontravarianten darzustellen. Die energetisch konjugierten Größen werden dementsprechend in der kontravarianten Basis ausgedrückt.

Setzt man den Ansatz für das inkrementelle Verschiebungsfeld $\Delta^{(i)}\mathbf{u}$ gemäß (3.79) in das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Fassung (3.71) ein und beachtet, daß

$$\delta^{(i)}\mathbf{u} = \delta \Delta^{(i)}\mathbf{u} \quad (3.86)$$

gilt, so ergibt sich bei Vernachlässigung volumenhaft angreifender Kräfte das linearisierte Gleichungssystem auf Elementebene zu

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \int_{{}^tV_e} [{}^{(i)}\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{C}] [{}^{(i)}\mathbf{B}_1]^t dV_e + \int_{{}^tV_e} [{}^{(i)}\mathbf{B}_{nl}]^T [{}^{(0)}\mathbf{S}^*] [{}^{(i)}\mathbf{B}_{nl}]^t dV_e \right\} \\
 & [\Delta^{(i)}\mathbf{u}] = \int_0^{A_e} [\mathbf{H}]^T [\mathbf{p}]^0 dA_e - \int_{{}^tV_e} [{}^{(i)}\mathbf{B}_1]^T [{}^{(i-1)}\mathbf{S}]^t dV_e \\
 & - \left\{ \Delta t \int_{{}^tV_e} [{}^{(i)}\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{q}]^t dV_e \right\} . \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

Nach Zusammenbau der Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren erhält man das linearisierte Gleichungssystem für die Inkremente der Knotenpunktverschiebungen

$$[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{nl}] [\Delta^{(i)}\mathbf{u}] = [\mathbf{R}_p] - [{}^{(i-1)}\mathbf{F}] - \{[\mathbf{R}_q]\} . \quad (3.88)$$

Darin bezeichnen $[\mathbf{K}_1]$ und $[\mathbf{K}_{nl}]$ den linearen bzw. den nichtlinearen Anteil der Systemsteifigkeitsmatrix, der Lastvektor $[\mathbf{R}_p]$ enthält die Knotenlasten einschließlich der durch Kondensation berücksichtigten geometrischen Randbedingungen, $[{}^{(i-1)}\mathbf{F}]$ umfaßt die aus dem vorangegangenen Iterationsschritt stammenden Ungleichgewichtslasten und $[\mathbf{R}_q]$ kann als viskoplastischer Lastvektor angesehen werden.

Die Elementmatrizen und Elementvektoren in (3.87) werden im folgenden Kapitel angegeben.

3.4.5. Elementmatrizen

Mit Hilfe der linearen Verzerrungs-Verschiebungsmatrix $[\mathbf{B}_1]$ und der Gradienten-Verschiebungsmatrix $[\mathbf{B}_{n1}]$ können die in $\Delta^{(i)}\mathbf{u}$ linearen und quadratischen Variationen des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors berechnet werden

$$[\delta \Delta^{(i)} \mathbf{e}] = [{}^{(i)}\mathbf{B}_1] [\delta \Delta^{(i)} \mathbf{u}], \quad (3.89)$$

$$[\text{Grad } \Delta^{(i)} \mathbf{u}] = [{}^{(i)}\mathbf{B}_{n1}] [\Delta^{(i)} \mathbf{u}]. \quad (3.90)$$

Darin ist

$$[\Delta^{(i)} \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} \Delta^{(i)} u_1^1 \\ \Delta^{(i)} u_1^2 \\ \Delta^{(i)} u_1^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta^{(i)} u_N^3 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

der Vektor der Inkremente der Knotenpunktverschiebungen und $[\delta \Delta^{(i)} \mathbf{e}]$ enthält die Variation des linearen Anteils des Verzerrungstensors

$$[\delta \Delta^{(i)} \mathbf{e}] = \delta \begin{bmatrix} \Delta_t^{(i)} e^{11} \\ \Delta^{(i)} e^{22} \\ \Delta_t^{(i)} e^{33} \\ 2 \Delta_t^{(i)} e^{12} \\ 2 \Delta_t^{(i)} e^{13} \\ 2 \Delta_t^{(i)} e^{23} \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

Zur Berechnung von $[{}^{(i)}\mathbf{B}_1]$ muß die kovariante Ableitung des Verschiebungsvektors \mathbf{u} bekannt sein. Beachtet man, daß aufgrund der Axialsymmetrie die partiellen Ableitungen nach x^2 verschwinden

$$\frac{\partial h_i}{\partial t x^2} = \frac{\partial h_i}{\partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial t x^2} = 0, \quad (3.93)$$

da

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial t_{x^2}} = \frac{\partial \xi^3}{\partial t_{x^2}} = 0, \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial \xi^2} = 0 \quad (3.95)$$

gilt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Grad } \mathbf{u} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t_{x^\beta}} \mathbf{t} \mathbf{g}^\beta = u^\alpha |_{,\beta} \mathbf{t} \mathbf{g}_\alpha \mathbf{t} \mathbf{g}^\beta = (u^\alpha_{,\beta} + \Gamma_{\rho\beta}^\alpha u^\rho) \mathbf{t} \mathbf{g}_\alpha \mathbf{t} \mathbf{g}^\beta \\ &= \begin{pmatrix} \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial t_{x^1}} t u_i^1 & - \sum_i h_i t_{x^1}^1 t u_i^2 & \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial t_{x^3}} t u_i^1 \\ \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial t_{x^1}} \frac{t_{x^1}^1}{t_{x^1}} t u_i^2 & \sum_i \frac{h_i}{t_{x^1}} t u_i^1 & \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial t_{x^3}} \frac{t_{x^1}^1}{t_{x^1}} t u_i^2 \\ \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial t_{x^1}} t u_i^3 & 0 & \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial t_{x^3}} t u_i^3 \end{pmatrix} \\ &\quad \mathbf{t} \mathbf{g}_\alpha \mathbf{t} \mathbf{g}^\beta. \quad (3.96) \end{aligned}$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß in Zylinderkoordinaten lediglich die *Christoffelsymbole*

$$\Gamma_{22}^1 = - t_{x^1}^1, \quad (3.97)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{t_{x^1}} \quad (3.98)$$

nicht verschwinden.

Nach längerer Zwischenrechnung erhält man aus (3.68) mit Hilfe von (3.96) die 6 x (3*N) Verzerrungs-Verschiebungsmatrix zu

$[{}^{(0)}\mathbf{B}_1] =$

$$\begin{bmatrix}
 h_{1,1} (1 + (1-1)u_{,1}^1) & h_{1,1} \epsilon_{X_1}^1 (1-1)u^2 + \epsilon_{X_1}^1 (1-1)u_{,1}^2 & h_{1,1} (1-1)u_{,1}^3 & h_{2,1} (1 + (1-1)u_{,1}^1) & \dots & h_{N,1} (1-1)u_{,1}^3 \\
 h_1 \left(\frac{1}{\epsilon_{X_1}^1}\right)^3 (1 + \frac{1}{\epsilon_{X_1}^1} (1-1)u^1) & h_1 \epsilon_{X_1}^1 \left(\frac{1}{\epsilon_{X_1}^1}\right)^3 (1-1)u^2 & 0 & h_2 \left(\frac{1}{\epsilon_{X_1}^1}\right)^3 (1 + \frac{1}{\epsilon_{X_1}^1} (1-1)u^1) & \dots & 0 \\
 h_{1,3} (1-1)u_{,3}^1 & h_{1,3} \epsilon_{X_1}^1 \epsilon_{X_1}^1 (1-1)u_{,3}^2 & h_{1,3} (1 + (1-1)u_{,3}^3) & \dots & & h_{N,3} (1 + (1-1)u_{,3}^3) \\
 h_1 \left\{ \left(\frac{1}{\epsilon_{X_1}^1}\right)^2 (1-1)u^2 + \frac{1}{\epsilon_{X_1}^1} (1-1)u_{,1}^2 \right\} & - h_1 \epsilon_{X_1}^1 \left(\frac{1}{\epsilon_{X_1}^1}\right)^2 (1 + (1-1)u_{,1}^1) & 0 & \dots & & 0 \\
 - h_{1,1} \frac{1}{\epsilon_{X_1}^1} (1-1)u^2 & + h_{1,1} \frac{\epsilon_{X_1}^1}{\epsilon_{X_1}^1} (1 + \frac{1}{\epsilon_{X_1}^1} (1-1)u^1) & & & & \\
 h_{1,1} (1-1)u_{,3}^1 + h_{1,3} (1 + (1-1)u_{,1}^1) & h_{1,1} \epsilon_{X_1}^1 \epsilon_{X_1}^1 (1-1)u_{,3}^2 & h_{1,1} (1 + (1-1)u_{,3}^3) & \dots & & h_{N,1} (1 + (1-1)u_{,3}^3) \\
 & + h_{1,3} \epsilon_{X_1}^1 (1-1)u^2 + \epsilon_{X_1}^1 (1-1)u_{,1}^2 & + h_{1,3} (1-1)u_{,3}^3 & & & + h_{N,3} (1-1)u_{,3}^3 \\
 \frac{1}{\epsilon_{X_1}^1} (h_1 (1-1)u_{,3}^2 - h_{1,3} (1-1)u^2) & \frac{\epsilon_{X_1}^1}{\epsilon_{X_1}^1} \left(-\frac{1}{\epsilon_{X_1}^1} h_1 (1-1)u_{,3}^3\right) & 0 & \dots & & 0 \\
 & + h_{1,3} (1 + \frac{1}{\epsilon_{X_1}^1} (1-1)u^1) & & & &
 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

In (3.99) wurde von der abkürzenden Schreibweise

$$\frac{\partial h_i}{\partial t_{x\alpha}} = h_{i,\alpha} \quad (3.100)$$

Gebrauch gemacht. $t_{x_i}^1$ bezeichnet die radiale Koordinate des i-ten Knotens zur Zeit t.

Die Gradienten-Verschiebungsmatrix $[{}^{(i)}\mathbf{B}_{nl}]$ tritt lediglich bei der Berechnung der Steifigkeitsmatrix $[\mathbf{K}_{nl}]$ auf (3.87). Da hier eine während eines Lastschrittes konstante Steifigkeitsmatrix verwendet wird, braucht nur $[{}^{(i)}\mathbf{B}_{nl}]$ bestimmt zu werden. Mit (vgl. die tensorielle Schriebweise in (3.96))

$$[\text{Grad } \Delta^{(i)} \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} \Delta^{(i)} u^1|_1 \\ \Delta^{(i)} u^2|_1 \\ \Delta^{(i)} u^3|_1 \\ \Delta^{(i)} u^1|_2 \\ \Delta^{(i)} u^2|_2 \\ \Delta^{(i)} u^1|_3 \\ \Delta^{(i)} u^2|_3 \\ \Delta^{(i)} u^3|_3 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

sowie (3.91) erhält man die $8 \times (3 \cdot N)$ -Matrix

$$[{}^{(1)}\mathbf{B}_{nl}] = \begin{bmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 & h_{2,1} & \dots & 0 \\ 0 & h_{1,1} \frac{t_{x_1}^1}{t_{x_1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_{1,1} & 0 & \dots & h_{N,1} \\ 0 & -h_i t_{x_1}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_1 \frac{1}{t_{x_1}} & 0 & 0 & h_2 \frac{1}{t_{x_1}} & \dots & 0 \\ h_{1,3} & 0 & 0 & h_{2,3} & \dots & 0 \\ 0 & h_{1,3} \frac{t_{x_1}^1}{t_{x_1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_{1,3} & 0 & \dots & h_{N,3} \end{bmatrix} \cdot \quad (3.102)$$

Die Gleichung (3.73) zur Berechnung des Spannungskrementes $\Delta^{(i)}\mathbf{S}$ läßt sich in matrizieller Schreibweise gemäß

$$[\Delta^{(i)}\mathbf{S}] \approx [\mathbf{C}^*] [\Delta^{(i)}\mathbf{\varepsilon}_1] + \{[\mathbf{q}]\} \Delta t \quad (3.103)$$

ausdrücken. Mit den linearen Verzerrungskrementen

$$[\Delta^{(i)}\mathbf{\varepsilon}_1] = \begin{bmatrix} \Delta_t^{(i)} e_1^{11} \\ \Delta_t^{(i)} e_1^{22} \\ \Delta_t^{(i)} e_1^{33} \\ 2 \Delta_t^{(i)} e_1^{12} \\ 2 \Delta_t^{(i)} e_1^{13} \\ 2 \Delta_t^{(i)} e_1^{23} \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

und den entsprechend sortierten Inkrementen $[\Delta^{(i)}\mathbf{S}]$ ergibt sich die Spannungs-Verzerrungsmatrix

Darin ist

$$M = \left\langle \frac{\frac{A}{K}}{\frac{1}{2G} + \frac{A}{K}} \right\rangle \quad (3.106)$$

(vgl. (3.40)), und $n_{\alpha\beta}$ sind die Komponenten des Normaleneinheitstensors \mathbf{n} an die Fließfläche. Man erkennt, daß $[\mathbf{C}^*]$, und damit die Steifigkeitsmatrix, aufgrund der Nichtlinearität des Problems unsymmetrisch ist. Eine Abschätzung der Größenordnungen der Terme $2G \frac{\nu}{1-2\nu}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ und $M n_{\alpha\beta} n_{\gamma\delta}$ zeigt jedoch, daß $\sigma_{\alpha\beta}$ gegenüber den anderen Größen sehr klein und damit vernachlässigbar ist. Die auf diese Weise symmetrisierte inelastische Spannungs-Verzerrungsmatrix wird mit $[\mathbf{C}]$ bezeichnet.

Der viskoplastische Lastvektor $[\mathbf{q}]$ ergibt sich zu

$$[\mathbf{q}] = -2G \left\{ \left(1 - \left\langle \frac{\frac{A}{K}}{\frac{1}{2G} + \frac{A}{K}} \right\rangle \right) \ll \frac{B}{K} \Lambda + \Phi \gg \right\} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{22} \\ n_{33} \\ n_{12} \\ n_{13} \\ n_{23} \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Mit Kenntnis der Matrizen $[\mathbf{B}_1^{(i)}]$ und $[\mathbf{C}]$ kann der lineare Teil der Elementsteifigkeitsmatrix ermittelt werden. Um den nichtlinearen Anteil der Steifigkeitsmatrix zu berechnen, muß zusätzlich noch gemäß

$${}^{(i-1)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta^{(i)} \boldsymbol{\eta} = [\delta \Delta^{(i)} \mathbf{u}]^T [\mathbf{B}_{nl}^{(i)}]^T [{}^{(i-1)}\mathbf{S}^*] [\mathbf{B}_{nl}^{(i)}] [\Delta^{(i)} \mathbf{u}] \quad (3.108)$$

(vgl. (3.71)) die Spannungs-Metrikmatrix $[{}^{(i-1)}\mathbf{S}^*]$ bestimmt werden

$$\begin{aligned}
 & [{}^{(1-1)}\mathbf{S}^*] = \\
 & \begin{bmatrix}
 {}_t S_{22} & 0 & 0 & {}_t S_{12} \left(\frac{1}{t_{X1}}\right)^2 & 0 & {}_t S_{13} & 0 & 0 \\
 0 & {}_t S_{11} \left(\frac{1}{t_{X1}}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}_t S_{13} \left(\frac{1}{t_{X1}}\right)^2 & 0 \\
 0 & 0 & {}_t S_{11} & 0 & {}_t S_{12} \left(\frac{1}{t_{X1}}\right)^2 & 0 & 0 & {}_t S_{13} \\
 {}_t S_{12} \left(\frac{1}{t_{X1}}\right)^2 & 0 & 0 & {}_t S_{22} \left(\frac{1}{t_{X1}}\right)^2 & 0 & {}_t S_{23} \left(\frac{1}{t_{X1}}\right)^2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & {}_t S_{12} \left(\frac{1}{t_{X1}}\right)^2 & 0 & {}_t S_{22} \left(\frac{1}{t_{X1}}\right)^2 & 0 & 0 & {}_t S_{23} \left(\frac{1}{t_{X1}}\right)^2 \\
 {}_t S_{13} & 0 & 0 & {}_t S_{23} \left(\frac{1}{t_{X1}}\right)^2 & 0 & {}_t S_{33} & 0 & 0 \\
 0 & {}_t S_{13} \left(\frac{1}{t_{X1}}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}_t S_{33} \left(\frac{1}{t_{X1}}\right)^2 & 0 \\
 0 & 0 & {}_t S_{13} \left(t_{X1}^{-1}\right)^2 & 0 & {}_t S_{23} \left(\frac{1}{t_{X1}}\right)^2 & 0 & 0 & {}_t S_{33}
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.109}$$

Zur Berechnung des Lastvektors $[\mathbf{R}_p]$ muß δA_A auf Elementebene in matrizieller Schreibweise formuliert werden

$$\int_{\circ A_e} {}^{t+\Delta t} \mathbf{p} \cdot \delta^{(i)} \mathbf{u} \, {}^0 dA =$$

$$\int_{\circ A_e} \left\{ \sum_i h_i \delta^{(i)} u_i^1 {}^{t+\Delta t} p_1 + \sum_i h_i {}^t x_i^1 \delta^{(i)} u_i^2 \frac{{}^{t+\Delta t} p_2}{{}^t x_i^1} + \sum_i h_i \delta^{(i)} u_i^3 {}^{t+\Delta t} p_3 \right\} {}^0 dA$$

$$= \delta^{(i)} [\mathbf{u}] \int_{\circ A_e} [\mathbf{H}]^T [\mathbf{p}] \, {}^0 dA \quad (3.110)$$

Die Interpolationsmatrix $[\mathbf{H}]$ enthält die Ansatzfunktionen gemäß (3.74) und die Radialkoordinaten der jeweiligen Knoten

$$[\mathbf{H}] =$$

$$\begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & h_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 {}^t x_1^1 & 0 & 0 & h_2 {}^t x_2^1 & 0 & \dots & h_N {}^t x_N^1 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & 0 & 0 & h_2 & \dots & 0 & h_N \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

und $[\mathbf{p}]$ die physikalischen Komponenten der flächenhaft verteilten Lasten

$$[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} p_1 \\ {}^{t+\Delta t} p_2 \frac{1}{{}^t x^2} \\ {}^{t+\Delta t} p_3 \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

Am Ende des i -ten Iterationsschrittes werden die Cauchy-Spannungen ${}^{(i)} \boldsymbol{\sigma}$ durch numerische Integration des Stoffgesetzes (3.38) - (3.47) ermittelt (s. Kap. 3.4.7). Die Transformationsmatrix $[\mathbf{T}]$ ermöglicht die Berechnung der 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungen

$$[{}^{(i)} \mathbf{S}] = [\mathbf{T}] [{}^{(i)} \boldsymbol{\sigma}] \quad (3.113)$$

mit

$$\begin{aligned}
 [T] = & \\
 & \begin{bmatrix}
 (x^1_{,1})^2 & 0 & (x^1_{,3})^2 & 0 & 2x^1_{,1}x^1_{,3} & 0 \\
 ({}^t x^1_{,1})^4 (x^2_{,1})^2 & ({}^t x^1_{,1})^4 (x^2_{,2})^2 & ({}^t x^1_{,1})^4 (x^2_{,3})^2 & \frac{({}^t x^1_{,1})^4}{({}^t x^1_{,1})^2} 2x^2_{,1}x^2_{,2} & 2({}^t x^1_{,1})^4 x^2_{,1}x^2_{,3} & \frac{({}^t x^1_{,1})^4}{({}^t x^1_{,1})^2} 2x^2_{,2}x^2_{,3} \\
 (x^3_{,1})^2 & 0 & (x^3_{,3})^2 & 0 & 2x^3_{,1}x^3_{,3} & 0 \\
 ({}^t x^1_{,1})^2 x^1_{,1}x^2_{,1} & 0 & ({}^t x^1_{,1})^2 x^1_{,3}x^2_{,3} & \frac{({}^t x^1_{,1})^2}{({}^t x^1_{,1})^2} x^1_{,1}x^2_{,2} & ({}^t x^1_{,1})^2 \{x^1_{,1}x^2_{,3} + x^1_{,3}x^2_{,1}\} & \frac{({}^t x^1_{,1})^2}{({}^t x^1_{,1})^2} x^1_{,3}x^2_{,2} \\
 x^1_{,1}x^3_{,1} & 0 & x^1_{,3}x^3_{,3} & 0 & x^1_{,1}x^3_{,3} + x^1_{,3}x^3_{,1} & 0 \\
 ({}^t x^1_{,1})^2 x^2_{,1}x^3_{,1} & 0 & ({}^t x^1_{,1})^2 x^2_{,3}x^3_{,3} & \frac{({}^t x^1_{,1})^2}{({}^t x^1_{,1})^2} x^2_{,2}x^3_{,3} & ({}^t x^1_{,1})^2 \{x^2_{,1}x^3_{,3} + x^2_{,3}x^3_{,1}\} & \frac{({}^t x^1_{,1})^2}{({}^t x^1_{,1})^2} x^2_{,2}x^3_{,3}
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(1)J

(3.114)

Dabei wurden die Abkürzungen

$$x^{\alpha}_{,\beta} = \frac{\partial t_{x^{\alpha}}}{\partial (i)_{x^{\beta}}} = \frac{\partial t_{x^{\alpha}}}{\partial \xi^j} \frac{\partial \xi^j}{\partial (i)_{x^{\beta}}} \quad (3.115)$$

mit $\frac{\partial t_{x^{\alpha}}}{\partial \xi^j}$ gemäß (3.84) und [3.29]

$$(i)_{\mathbf{J}} = \frac{(i)_{\mathbf{V}}}{t_{\mathbf{V}}} = \frac{t_{\rho}}{(i)_{\rho}} = \sqrt{\frac{\| (i)_{\mathbf{g}_{\alpha\beta}} \|}{\| t_{\mathbf{g}_{\alpha\beta}} \|}} \frac{1}{\| \mathbf{F}_{\cdot\beta}^{\alpha} \|} = \frac{(i)_{x^1}}{t_{x^1}} \frac{1}{|x^1_{,1} x^3_{,3} - x^1_{,3} x^3_{,1}|} \quad (3.116)$$

verwendet.

Da die Terme $\frac{\partial \xi^j}{\partial (i)_{x^{\beta}}}$ in (3.115) nicht direkt berechnet werden können, werden sie durch Inversion der Jakobimatrix

$$[\mathbf{J}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_{x^1}}{\partial \xi^1} & 0 & \frac{\partial t_{x^1}}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial t_{x^2}}{\partial \xi^1} & 1 & \frac{\partial t_{x^2}}{\partial \xi^3} \\ \frac{\partial t_{x^3}}{\partial \xi^1} & 0 & \frac{\partial t_{x^3}}{\partial \xi^3} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

mit $\tau = t + \Delta t$ bestimmt.

3.4.6 Flächen- und Volumenintegration

Zur Integration der Elementmatrizen (3.87) müssen die globalen Koordinaten $t_{x^{\alpha}}$ mit Hilfe der Interpolationsfunktionen (3.75) - (3.77) und den Komponentengleichungen (3.84) als Funktion der lokalen Koordinaten ξ^j ausgedrückt werden. Dann ergibt sich bei Berücksichtigung der Axialsymmetrie

$$\int_{V_e} [\dots] (t_{x^{\alpha}}) t_{dV_e} = 2 \pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\dots] (\xi^1, \xi^3) t_{x^1}(\xi^1, \xi^3) \| [\mathbf{J}] \| d\xi^1 d\xi^3 \quad (3.118)$$

mit der Determinanten $\| [\mathbf{J}] \|$ der Jakobimatrix nach (3.117) mit $\tau = t$. Die numerische Integration von (3.118) kann beispielsweise mit Newton-Cotes-Formeln (vorgegebener Stützstellenabstand) oder mit der Gauß-Quadratur (optimierte Gewichtungsfaktoren und Lage der Stützstellen) erfolgen. Bei isoparametrischen Elementen wird üblicherweise das letztgenannte Verfahren verwendet, wobei die Anzahl der Stützstellen vom Integranden abhängt. Ein Polynom vom Grade $(2n-1)$ wird mit n Stützstellen exakt integriert. Aufgrund des rotationssymmetrischen Problems sind die in der Steifigkeitsmatrix auftretenden Funktionen jedoch keine Polynome in ξ^j . Daher können die entsprechenden Integrale nur näherungsweise

ermittelt werden. Die Lastvektoren $[\mathbf{R}_P]$ können dagegen numerisch exakt berechnet werden, wenn der Verlauf der flächenhaft angreifenden Lasten durch Polynome dargestellt werden kann.

Bathe gibt in [3.1] Empfehlungen für zuverlässige Integrationsordnungen bei isoparametrischen Elementen: Für das 4-Knotenelement wird als Integrationsordnung 2×2 , für das 8-Knotenelement 3×3 und für ein 16-Knotenelement 4×4 vorgeschlagen. Diese Integrationsordnungen werden auch hier verwendet, wobei jedoch anstelle des 16-Knotenelementes das mit 12 Knoten gemäß (3.77) tritt. *Bathe* weist darauf hin, daß eine reduzierte oder auch eine selektive Integration durch Verringerung der Rechenzeit Vorteile haben kann. Um mit diesen Verfahren zuverlässige Ergebnisse zu erzielen, müssen jedoch gewisse Kriterien eingehalten werden. Reduzierte Integrationsordnungen werden auch gelegentlich bei Berechnungen verwendet, bei denen inkompressibles Materialverhalten zugrundegelegt wird.

Bei der Gauß-Quadratur werden die Integrale durch Summen ersetzt, wobei die Summanden an den sog. Gaußpunkten berechnet und mit den Faktoren w_m gewichtet werden

$$\int_{V_e} [\dots] ({}^t x^\alpha) {}^t dV_e = 2\pi \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s w_m w_n [\dots] (\xi_m^1, \xi_n^3) {}^t x^1 (\xi_m^1, \xi_n^3) \|\mathbf{J}\| \Big|_{(\xi_m^1, \xi_n^3)}. \quad (3.119)$$

Man beachte, daß unterschiedliche Integrationsordnungen r und s in den verschiedenen Richtungen möglich sind.

3.4.7 Spannungsberechnung

Nach jedem Schritt der Gleichgewichtsiteration müssen die Spannungen ${}^{(i)}\mathbf{S}$ ermittelt werden. Die Exaktheit einer FE-Analyse hängt in erster Linie davon ab, wie genau die rechte Seite des linearisierten Gleichungssystems (3.87) berechnet wird, während das Konvergenzverhalten vor allem von der Steifigkeitsmatrix beeinflusst wird. Um ${}^{(i)}\mathbf{S}$ zu bestimmen, werden die konstitutiven Gleichungen (3.38) - (3.47) numerisch von t bis $t + \Delta t$ integriert und daran anschließend mit Hilfe von $[\mathbf{T}]$ die Cauchy-Spannungen ${}^{(i)}\boldsymbol{\sigma}$ in 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungen transformiert.

Für die Integration müssen die zeitlichen Veränderungen der Spannungskomponenten $\dot{\sigma}_{\alpha\beta}$ berechnet werden. Die substantielle Zeitableitung des Spannungstensors zu einem beliebigen Zeitpunkt t ergibt sich mit (3.37) zu [2.19]

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma} &= \overset{\nabla}{\sigma} + \mathbf{W}\sigma - \sigma\mathbf{W} = \frac{D}{dt} \left\{ \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{g}^\alpha \mathbf{g}^\beta \right\} \\
 &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \sigma_{\alpha\beta} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial t_{X^\rho}} \frac{D t_{X^\rho}}{dt} \right\} \mathbf{g}^\alpha \mathbf{g}^\beta \\
 &+ \sigma_{\alpha\beta} \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}^\alpha}{\partial t_{X^\rho}} \frac{D t_{X^\rho}}{dt} \mathbf{g}^\beta + \mathbf{g}^\alpha \frac{\partial \mathbf{g}^\beta}{\partial t_{X^\rho}} \frac{D t_{X^\rho}}{dt} \right\} .
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

In dieser Gleichung kann der erste Term als lokale, der zweite als konvektive Zeitableitung bezeichnet werden [3.37], während die zweite geschweifte Klammer die Ortsabhängigkeit der Basisvektoren erfaßt.

Mit

$$\frac{D t_{X^\rho}}{dt} = v^\rho \tag{3.121}$$

sowie der Definition des Christoffelsymbols als Operator, der auf den Basisvektor angewandt seine Ableitung ergibt [3.38]

$$\frac{\partial \mathbf{g}^\alpha}{\partial t_{X^\rho}} = \Gamma_{\rho\beta}^\alpha \mathbf{g}^\beta , \tag{3.122}$$

erhält man nach längerer Rechnung

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{\alpha\beta} &= \left\{ (d_{\cdot,\alpha}^\mu - v^\mu_{,\alpha}) \sigma_{\mu\beta} + \sigma_{\alpha\mu} (d_{\cdot,\beta}^\mu - v^\mu_{,\beta}) \right\} \\
 &+ 2G \left\{ d_{\alpha\beta} + \frac{v}{1-2v} d_{\cdot,\rho}^\rho g_{\alpha\beta} - N n_{\alpha\beta} \right\} .
 \end{aligned} \tag{3.123}$$

Darin sind $v^\alpha_{,\beta}$ die partiellen Ableitungen der kontravarianten Geschwindigkeitskomponenten nach τ_{X^1} und τ_{X^3} und $d_{\cdot,\beta}^\alpha$ die gemischtvarianten Komponenten des Geschwindigkeitsgradiententensors

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= d_{\cdot,\beta}^\alpha \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta = \text{sym}(\mathbf{L}) \\
 &= \text{sym} \begin{pmatrix} v^1_{,1} & -t_{X^1} v^2 & v^1_{,3} \\ v^2_{,1} + \frac{1}{t_{X^1}} & \frac{1}{t_{X^1}} v^1 & v^2_{,3} \\ v^3_{,1} & 0 & v^3_{,3} \end{pmatrix} \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta .
 \end{aligned} \tag{3.124}$$

Die Größe

$$N = \left\langle \frac{\frac{A}{K}}{\frac{1}{2G} + \frac{A}{K}} \right\rangle \left\{ d_{\cdot,\gamma}^\delta n_{\cdot,\delta}^\gamma - \left\langle \frac{B}{K} \Lambda + \Phi \right\rangle \right\} + \left\langle \frac{B}{K} \Lambda + \Phi \right\rangle \tag{3.125}$$

läßt sich als Betrag des inelastischen Dehnungsgeschwindigkeitstensors \mathbf{D}_i interpretieren.

Aus (3.123) folgt mit (3.124) für die zeitlichen Ableitungen der Komponenten des Cauchy-Spannungstensors

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{11} &= \sigma_{12} v^2_{,1} + \sigma_{13} (v^1_{,3} - v^3_{,1}) \\
 &\quad + 2G \left\{ v^1_{,1} + \frac{\nu}{1-2\nu} (v^1_{,1} + \frac{1}{x^1} v^1 + v^3_{,3}) - N n_{11} \right\}, \\
 \dot{\sigma}_{22} &= \sigma_{12} (x^1)^2 v^2_{,1} + \sigma_{22} \frac{2}{x^1} v^1 + \sigma_{23} (x^1)^2 v^2_{,3} \\
 &\quad + 2G \left\{ x^1 v^1 + \frac{\nu}{1-2\nu} ((x^1)^2 v^1_{,1} + x^1 v^1 + (x^1)^2 v^3_{,3}) - N n_{22} \right\}, \\
 \dot{\sigma}_{33} &= \sigma_{13} (v^3_{,1} - v^1_{,3}) - \sigma_{23} v^2_{,3} \\
 &\quad + 2G \left\{ v^3_{,3} + \frac{\nu}{1-2\nu} (v^1_{,1} + \frac{1}{x^1} v^1 + v^3_{,3}) - N n_{33} \right\}, \\
 \dot{\sigma}_{12} &= \sigma_{11} \frac{1}{2} (x^1)^2 v^2_{,1} - \sigma_{22} \frac{1}{2} v^2_{,1} + \sigma_{12} \frac{1}{x^1} v^1 + \sigma_{13} \frac{1}{2} (x^1)^2 v^2_{,3} \\
 &\quad + \sigma_{13} \frac{1}{2} (v^1_{,3} - v^3_{,1}) \\
 &\quad + 2G \left\{ \frac{1}{2} (x^1)^2 v^2_{,1} - N n_{12} \right\}, \\
 \dot{\sigma}_{13} &= \sigma_{11} \frac{1}{2} (v^3_{,1} - v^1_{,3}) + \sigma_{33} \frac{1}{2} (v^1_{,3} - v^3_{,1}) - \sigma_{12} \frac{1}{2} v^2_{,3} - \sigma_{23} \frac{1}{2} v^2_{,1} \\
 &\quad + 2G \left\{ \frac{1}{2} (v^1_{,3} + v^3_{,1}) - N n_{13} \right\}, \\
 \dot{\sigma}_{23} &= -\sigma_{22} \frac{1}{2} v^2_{,3} + \sigma_{33} \frac{1}{2} (x^1)^2 v^2_{,1} + \sigma_{12} \frac{1}{2} (v^3_{,1} - v^1_{,3}) \\
 &\quad + \sigma_{13} \frac{1}{2} (x^1)^2 v^2_{,1} + \sigma_{23} \frac{1}{x^1} v^1 \\
 &\quad + 2G \left\{ \frac{1}{2} (x^1)^2 v^2_{,3} - N n_{13} \right\}. \tag{3.126}
 \end{aligned}$$

Dabei beschreiben die Terme der jeweils ersten Zeile (bzw. bei $\dot{\sigma}_{12}$ und $\dot{\sigma}_{23}$ der ersten beiden Zeilen) die Veränderung der Spannungskomponenten aufgrund der Krümmlichkeit des Koordinatensystems und großer Rotationen.

Die Differentialgleichungen für $\dot{\xi}_{\alpha\beta}$ erhält man wegen der Analogie der Herleitung aus (3.41), indem $\sigma_{\alpha\beta}$ in (3.126) durch $\xi_{\alpha\beta}$ und die jeweils letzte Zeile durch $(+c \lambda n_{\alpha\beta})$ ersetzt werden.

Aus (3.42) ergibt sich mit (3.39)

$$\dot{\kappa} = \lambda \sqrt{g(\kappa)} \tag{3.127}$$

und daraus

$$\dot{\Lambda} = \lambda \sqrt{g_0} \quad (3.128)$$

Bei der numerischen Integration von (3.126) - (3.128) tritt die Schwierigkeit auf, daß (3.126) von der Materialfunktion A und damit von

$$v = \left\langle \frac{\frac{A(\Lambda, v)}{K}}{\frac{1}{2G} + \frac{A(\Lambda, v)}{K}} \right\rangle \left\{ \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} - \left\langle \frac{B}{K} \Lambda + \Phi \right\rangle \right\} \quad (3.129)$$

abhängig ist. Da diese Gleichung nicht explizit nach v aufzulösen ist, muß jedem Integrationsschritt eine iterative Berechnung vorangehen. Es zeigte sich, daß mit dem *Newton-Raphson*-Verfahren akzeptable Rechenzeiten erzielt werden können.

In den konstitutiven Gleichungen treten die Geschwindigkeiten der Körperpunkte v^α und deren Ableitungen $v^\alpha_{,\beta}$ nach den aktuellen raumfesten Koordinaten auf. Da die FE-Analyse nur Konfigurationen zu diskreten Zeitpunkten ergibt, muß über den Geschwindigkeitsverlauf $\mathbf{v}(t)$ eine geeignete Annahme getroffen werden. Prinzipiell läßt sich die Geschwindigkeit aus den Verschiebungen \mathbf{u} oder dem Ortsvektor \mathbf{r} bestimmen. Bei unterschiedlichen räumlichen Interpolationen (sub- bzw. superparametrische Elemente) erhält man je nach Wahl verschiedene Ableitungen $v^\alpha_{,\beta}$. Hier soll die Geschwindigkeit aus der substantiellen Ableitung des Ortsvektors

$${}^\tau \mathbf{v} = {}^\tau v^\alpha {}^\tau \mathbf{g}_\alpha = \frac{D\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} {}^\tau \mathbf{g}_\alpha = {}^\tau \dot{x}^\alpha {}^\tau \mathbf{g}_\alpha \quad (3.130)$$

berechnet werden. Für den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit zwischen t und $t + \Delta t$ bieten sich die beiden Annahmen

$$\mathbf{v}(\tau) = \text{konst.} \quad (3.131)$$

oder

$${}^\tau v^\alpha(\tau) = \text{konst.} \quad (3.132)$$

an. Hier wird die zweite Möglichkeit gewählt, die bei Zylinderkoordinaten einer während eines Lastschrittes konstanten Radial-, Winkel- und Axialgeschwindigkeit entspricht

$${}^\tau v^\alpha = {}^\tau \dot{x}^\alpha = \frac{{}^\tau x^\alpha - t x^\alpha}{\tau - t} = \frac{{}^\tau x^\alpha - t x^\alpha}{\Delta t} \quad (3.133)$$

Aus (3.84) folgen damit die kontravarianten Komponenten des Geschwindigkeitstensors als nichtlineare Funktionen der Knotenkoordinaten τx_i^α , welche sich aus dem Vergleich der am Ende jedes Iterationsschrittes bekannten Konfigurationen zur Zeit t und zur Zeit $t + \Delta t$ berechnen lassen

$$\tau x_i^\alpha = \frac{\Delta \tau}{\Delta t} {}^{t+\Delta t} x_i^\alpha + \left(1 - \frac{\Delta \tau}{\Delta t}\right) {}^t x_i^\alpha . \quad (3.134)$$

Die partiellen Ableitungen nach den aktuellen raumfesten Koordinaten erhält man aus (3.84) und (3.117) zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^\alpha(\xi^i, t)}{\partial \tau x^\beta} &= \frac{\partial}{\partial \tau x^\beta} \left\{ \frac{\tau x^\alpha(\xi^i) - {}^t x^\alpha(\xi^i)}{\Delta \tau} \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta \tau} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left\{ \tau x^\alpha(\xi^i) - {}^t x^\alpha(\xi^i) \right\} \frac{\partial \xi^i}{\partial \tau x^\beta} . \end{aligned} \quad (3.135)$$

3.4.8 Zeitintegration

Die zahlreichen Algorithmen zur numerischen Integration von Anfangswertproblemen der Form

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) \quad (3.136)$$

mit

$$y(t_0) = y_0 \quad (3.137)$$

lassen sich entweder nach der Integrationsart in explizite, implizite und Prädiktor-Korrektor-Verfahren oder nach der Anzahl der Stützstellen in Einschritt-, Mehrschritt- und Extrapolationsverfahren einteilen [3.39, 3.40]. Diese Algorithmen berechnen den Funktionswert y_{n+1} zur Zeit $t_n + \Delta t$ im allgemeinen nach der Näherungsformel

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^k a_j y_{n-j} + \sum_{m=-1}^1 b_m \dot{y}_{n-m} , \quad (3.138)$$

worin bei expliziten Verfahren b_{-1} verschwindet.

Ihre Leistungsfähigkeit kann durch die Kriterien Genauigkeit, Stabilität und Rechengeschwindigkeit beschrieben werden [3.41]. Die Genauigkeit wird durch die numerischen Rundungsfehler und den Quadratur- oder Verfahrensfehler durch Verwendung der Näherung (3.138) begrenzt [3.42, 3.8]. Während der erstgenannte Fehler bei Verkleinerung der Schrittweite ansteigt, verringert sich dabei der Verfahrensfehler [3.43]. Ein Integrationsverfahren hat eine Verfahrensgenauigkeit von k - ter Ordnung, wenn

sein Ergebnis bis zum k -ten Glied einschließlich mit der entsprechenden Taylorreihe übereinstimmt.

Im folgenden werden zunächst einige der wichtigsten Einschrittformeln und daran anschließend zwei allgemeine Mehrschrittverfahren vorgestellt.

Das bekannteste explizite Einschrittverfahren ist das von *Euler*

$$y_{n+1} = y_n + \dot{y}_n \Delta t + O(t^2), \quad (3.139)$$

dessen Genauigkeit lediglich die Ordnung 1 hat. Ein großer Nachteil dieses Verfahrens ist seine numerische Instabilität. Daher verwendet man häufig ein analog aufgebautes implizites Verfahren, die unbedingt stabile Trapezregel

$$y_{n+1} = y_n + (\dot{y}_n + \dot{y}_{n+1}) \frac{\Delta t}{2} + O(t^3). \quad (3.140)$$

Deren Nachteil besteht - wie bei allen impliziten Verfahren - darin, daß bei jedem Integrationsschritt ein nichtlineares Gleichungssystem zu lösen ist. Diese Schwierigkeit vermeiden die Prädiktor-Korrektor-Verfahren. Das aus dem expliziten *Euler*-Verfahren als Prädiktor und der Trapezregel als Korrektor bestehende Verfahren

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{n+1} &= y_n + \dot{y}_n \Delta t, \\ y_{n+1} &= y_n + (\dot{y}_n + \dot{\tilde{y}}_{n+1}) \frac{\Delta t}{2} + O(t^3) \end{aligned} \quad (3.141)$$

wird gewöhnlich nach *Heun* benannt.

In der Literatur werden häufig Algorithmen der Struktur

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t \sum_{i=0}^{m-1} r_i f_i + O(\Delta t^{m+1}), \\ f_i &= f(t_n + \Delta t p_i, y_n + \Delta t \sum_{j=0}^{i-1} q_{ij} f_j) \end{aligned} \quad (3.142)$$

als verallgemeinerte *Runge-Kutta*-Verfahren bezeichnet [3.43], wobei m die Ordnung angibt. Sind für $j \geq i$ die Koeffizienten $q_{ij} = 0$, so sind die Verfahren explizit, anderenfalls implizit. In diesem Sinne läßt sich das *Euler*-Verfahren als *Runge-Kutta*-Formel 1. Ordnung, das Verfahren von *Heun* als *Runge-Kutta*-Formel 2. Ordnung auffassen.

Für $n = 4$ erhält man aus (3.142) das klassische *Runge-Kutta*-Verfahren 4. Ordnung. Dieses Verfahren ist sehr gebräuchlich, hat jedoch den Nachteil, daß pro Schritt vier Funktionsauswertungen erforderlich sind. *Zurmühl* gibt zur automatischen Schrittweitensteuerung die sog. Schrittkenzahl

$$D = \left| \frac{f_2 - f_3}{f_1 - f_2} \right| \quad (3.143)$$

an, deren Wert zwischen 0,025 und 0,075 liegen sollte [3.44]. In der Praxis wird jedoch gewöhnlich eine Kontrollrechnung mit halber Schrittweite Δt_2 bevorzugt und als Korrektur eine Richardson-Extrapolation verwendet [3.8]

$$y = \frac{y_1 (\Delta t_2)^2 - y_2 (\Delta t_1)^2}{(\Delta t_2)^2 - (\Delta t_1)^2} . \quad (3.144)$$

Fehlberg entwickelte eine *Runge-Kutta*-Formel 4. Ordnung und eine 5. Ordnung so, daß beide Formeln in den ersten fünf Funktionsaufrufen übereinstimmen. Damit kann eine höhere Genauigkeit und eine geringere Rechenzeit im Vergleich zu der oben dargestellten Doppelrechnung erzielt werden.

Einschrittformeln berücksichtigen nicht, daß bereits die zurückliegenden Werte y_{n-1} , y_{n-2} usw. sowie deren Ableitungen bekannt sind. Bei den Mehrschrittformeln werden diese Informationen dagegen verarbeitet. Bei dem Verfahren nach *Adams-Bashforth* wird durch die Stützpunkte \dot{y}_n , \dot{y}_{n-1} usw. ein Interpolationspolynom gelegt und damit der Wert y_{n+1} extrapoliert

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \sum_{i=0}^q a_i \dot{y}_{n-i} + O(\Delta t^{q+1}) . \quad (3.145)$$

Das Verfahren von *Nyström* ist analog dazu aufgebaut, jedoch beginnt hierbei die Extrapolation bereits an der Stelle y_{n-1}

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \Delta t \sum_{i=0}^q a_i \dot{y}_{n-i} . \quad (3.146)$$

Als prinzipieller Nachteil der Mehrschrittformeln ist die dazu erforderliche Anlaufrechnung anzusehen. Diese kann mit Einschrittverfahren erfolgen, wobei jedoch beachtet werden muß, daß diese die gleiche Fehlerordnung aufweisen [3.43].

Ein besonderes Problem bei der numerischen Integration viskoplastischer Materialgleichungen stellt ihre numerische Steifheit dar. Ein System von Differentialgleichungen wird in einem Intervall als steif bezeichnet, wenn die Lösungsfunktionen ein stark unterschiedliches Wachstumsverhalten aufweisen [3.43]. Auf die sich daraus ergebenden Schwierigkeiten bei der Auswahl geeigneter Integrationsalgorithmen wurde bereits in Kap. 2.1 hingewiesen. Hier soll kurz auf einige Arbeiten eingegangen werden, die sich schwerpunktmäßig mit dieser Problematik befassen.

Krieg [2.18] empfiehlt ganz allgemein für die Integration vereinheitlichter viskoplastischer Stoffgesetze in den numerisch steifen Intervallen die implizite Trapezregel in Verbindung mit einer *Picard*-Iteration, was m. E. auf das *Heun*-Verfahren mit mehrmals angewandtem Korrektorschritt hinausläuft.

Mukherjee [2.40] untersucht speziell das Materialgesetz von *Hart* und vergleicht das Verfahren von *Heun* mit einem Prädiktor-Korrektor-Verfahren höherer Ordnung, dem expliziten *Euler*-Algorithmus, dem Verfahren von *Adams*, einer Kombination der beiden ersten und einer Kombination der beiden letzten Verfahren sowie mit dem Verfahren von *Gear* [2.84]. Das nach *Adams* benannte Verfahren ist ein Mehrschrittverfahren 3. Ordnung gemäß der allgemeinen Formel (3.145), während der Algorithmus von *Gear* speziell für steife System entwickelt wurde. Er geht im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Verfahren nicht von der Differentialgleichung (3.136), sondern von deren charakteristischem Polynom aus [3.43]. Obwohl *Mukherjee* wegen Stabilitätsproblemen das Stoffgesetz von *Hart* im Bereich der sog. viskoplastischen Grenze modifizierte, versagte der Algorithmus von *Gear* bei dehnungsgesteuerten Testrechnungen. Bei Verwendung einer von *Kumar et al.* [2.39] vorgestellten Schrittweitensteuerung scheidet beim Rechenzeitvergleich das Verfahren, welches den Algorithmus von *Adams* außerhalb und den von *Euler* innerhalb der viskoplastischen Grenze kombiniert, am besten ab. An zweiter Stelle steht das explizite *Euler*-Verfahren.

Im Gegensatz zu diesen Untersuchungen wendet *Miller* den Algorithmus von *Gear* erfolgreich bei der Integration seines Stoffgesetzes an [2.47], wobei er allerdings eine hohe Rechenzeit aufgrund der dazu benötigten Inversion der *Jakobi*-Matrix in Kauf nimmt.

Cordts und *Kollmann* [2.41] verwenden die implizite *Euler*-Regel (3.140) zur Integration des vollständigen Modells von *Hart* und vermindern die Rechenzeit zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems durch eine Verbindung der *Newton-Raphson*-Iteration mit der beschleunigten *Jakobi*-Iteration.

Schwesig [2.37] vergleicht mehrere viskoplastische Stoffgesetze miteinander und entwickelt dazu ein neues Integrationsverfahren [3.59]. Er geht vom allgemeinen *Euler*-Verfahren als einfacher Kollokation im Zeitinkrement aus und erweitert es zu einer quadratischen Approximation mit einer zusätzlichen Stützstelle bei $t + \frac{\Delta t}{2}$.

Steck et al. [3.45] versuchen erfolglos eine Schrittweitensteuerung des klassischen *Runge-Kutta*-Verfahrens mit Hilfe der Schrittkenzahl (3.143). Bei einem Rechenzeitvergleich zur Zeitintegration seines stochastischen Werkstoffmodells erweist sich das explizite *Euler*-Verfahren als am schnellsten, dicht gefolgt vom Verfahren von *Heun*. Das implizite *Euler*-Verfahren und ein impliziter *Runge-Kutta*-Algorithmus 4. Ordnung mit

Newton-Iteration benötigten etwa die doppelte, das entsprechende explizite *Runge-Kutta*-Verfahren sogar die zehnfache Zeit.

In [2.80] behandelt *Pitzer* ausführlich die Zeitintegration des INTERATOM-Modells und untersucht dazu sowohl explizite Verfahren als auch Prädiktor-Korrektor-Methoden. Bei den expliziten Verfahren zeigt sich das von *Fehlberg* der Ordnung 8 dem klassischen *Runge-Kutta*-Verfahren als überlegen. Bei den Prädiktor-Korrektor-Verfahren verwendet er die explizite *Euler*-Regel als Prädiktor und die implizite *Euler*-Formel, die Trapezregel (3.140) sowie die Optimal-Regel

$$y_{n+1} = y_n + \left(\dot{y}_n + 3\dot{y}_{n+\frac{2}{3}} \right) \frac{\Delta t}{4} \quad (3.147)$$

als Korrektor. Als insgesamt am besten geeigneter Algorithmus stellt sich die Kombination aus *Euler*- und Trapezregel, also das Verfahren von *Heun*, heraus.

Abschließend kann festgehalten werden, daß kein Integrationsverfahren eindeutig als überlegen angesehen werden kann. Ein Grund für diese Unsicherheit besteht in den unterschiedlichen Wichtungen der Beurteilungskriterien Genauigkeit, Stabilität und Rechengeschwindigkeit. Als äußerst wichtig für die Schnelligkeit eines Verfahrens ist darüberhinaus die Schrittweitensteuerung anzusehen, die recht unterschiedlich durchgeführt wird. Eine weitere Schwierigkeit für einen objektiven Vergleich bildet die Tatsache, daß die Eignung eines Integrationsverfahrens nicht nur von der Struktur des betrachteten Materialgesetzes, sondern auch von der Prozeßführung abhängt.

Da eine eingehende Untersuchung des hier verwendeten Stoffgesetzes in bezug auf günstige Integrationsverfahren noch aussteht und das FE-Programm auch für andere Materialgesetze ausgelegt werden sollte, wurde die Möglichkeit geschaffen, verschiedene Integrationsalgorithmen zu benutzen. Dabei stehen die *Euler*-Regel, das Verfahren von *Heun*, ein *Runge-Kutta*-Verfahren 3. Ordnung sowie das klassische Verfahren 4. Ordnung, ein den *Runge-Kutta*-Verfahren ähnliches nach *Merson* [3.41], das *Nyström*-Verfahren und das Verfahren nach *Fehlberg* zur Auswahl. Die Schrittweitensteuerung erfolgt einheitlich über eine Doppelrechnung mit anschließender Extrapolation zur Verkleinerung des Verfahrensfehlers.

3.4.9 Gleichgewichtsiteration

In diesem Kapitel soll zunächst allgemein auf die Gleichgewichtsiteration eingegangen werden und daran anschließend die Bedeutung des viskoplastischen Lastvektors näher erläutert werden.

Eine Gleichgewichtsiteration wird verwendet, damit sich die unvermeidlichen Fehler nicht akkumulieren (s. Kap. 3.1). Den Ausgangspunkt für diese Iteration bildet die Aufspaltung der Knotenverschiebungen des i -ten Schrittes in einen aus dem vorangegangenen Schritt bekannten Anteil $[\Delta^{(i-1)}\mathbf{u}]$ und in das zu berechnende Inkrement $[\Delta^{(i)}\mathbf{u}]$ gemäß (3.64)

$$[\mathbf{u}^{t+\Delta t}] \approx [{}^{(i)}\mathbf{u}] = [{}^{(i-1)}\mathbf{u}] + [\Delta^{(i)}\mathbf{u}] . \quad (3.148)$$

Wäre das Ergebnis des $(i-1)$ -ten Schrittes gleich der exakten Lösung $[\mathbf{u}^{t+\Delta t}]$, so erhielte man mit

$$[\Delta^{(i)}\mathbf{u}] = [\mathbf{0}] \quad (3.149)$$

aus (3.88) für $i > 1$

$$[\mathbf{0}] = [{}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_p] - [{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})] = [\mathbf{g}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})] . \quad (3.150)$$

Zur Veranschaulichung des Iterationsprozesses wird (3.150) als Nullstellensuche der in den Knotenverschiebungen nichtlinearen Funktion $[\mathbf{g}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})]$ aufgefaßt. Entwickelt man diese Funktion in eine Taylorreihe an der Stelle $[{}^{(i-1)}\mathbf{u}]$ und bricht diese nach dem linearen Glied ab, so erhält man

$$[\mathbf{g}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})] \approx [\mathbf{g}({}^{(i-1)}\mathbf{u})] + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(i-1)\mathbf{u}} \{ [{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}] - [{}^{(i-1)}\mathbf{u}] \} . \quad (3.151)$$

Da der Lastvektor $[{}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_p]$ unabhängig von den unbekanntenen Knotenverschiebungen ist, ergibt sich daraus mit Hilfe von (3.150)

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(i-1)\mathbf{u}} \{ [{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}] - [{}^{(i-1)}\mathbf{u}] \} &\approx [\mathbf{g}({}^{(i-1)}\mathbf{u})] - [\mathbf{g}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})] \\ &= [{}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_p] - [{}^{(i-1)}\mathbf{F}({}^{(i-1)}\mathbf{u})] . \end{aligned} \quad (3.152)$$

Diese Gleichung mit der Tangentensteifigkeitsmatrix $\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(i-1)\mathbf{u}}$ stellt die Iterationsvorschrift nach *Newton-Raphson* für das nichtlineare Gleichungssystem (3.150) dar. Verwendet man dagegen in (3.152) die Matrix des ersten Iterationsschrittes $\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(0)\mathbf{u}}$, so führt dieses auf die sog. modifizierte *Newton-Raphson*-Iteration

$$\left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(0)\mathbf{u}} [\Delta^{(i)}\mathbf{u}] \approx [{}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_p] - [{}^{(i-1)}\mathbf{F}({}^{(i-1)}\mathbf{u})] . \quad (3.153)$$

Vergleicht man (3.153) mit (3.88), so ist offensichtlich, daß $[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}] \Big|_{(0) \mathbf{u}}$ der Systemsteifigkeitsmatrix $[\mathbf{K}_l + \mathbf{K}_{nl}]$ entspricht. Die FE-Formulierung als Iterationsverfahren zur Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems macht deutlich, daß alle Näherungen zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix im Verlaufe des Iterationsprozesses vollständig kompensiert werden.

Um die Bedeutung des viskoplastischen Lastvektors zu veranschaulichen, ist es zweckmäßig, das INTERATOM-Modell als Stoffgesetz zu verwenden und sich darüberhinaus auf geometrisch lineare Probleme zu beschränken. Kann außerdem das Volumen als konstant angesehen werden, so geht der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor in den Cauchy-Spannungstensor über. Dann ergibt sich als Spannungsinkrement in einem Zeitschritt

$$\Delta \sigma = \mathbf{C} \Delta \varepsilon_l - 2G \int_t^{t+\Delta t} \Delta \dot{\varepsilon}_l dt, \quad (3.154)$$

worin \mathbf{C} den konstanten Elastizitätstensor bezeichnet. Führt man die Integration mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens aus, so erhält man als FE-Formulierung auf Elementebene

$$\left\{ \int_{V_e} [{}^{(i)}\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [{}^{(i)}\mathbf{B}] dV_e \right\} [\Delta {}^{(i)}\mathbf{u}] \\ = \int_{A_e} [\mathbf{H}]^T [\mathbf{p}] dA_e - \int_{V_e} [{}^{(i)}\mathbf{B}]^T [{}^{(i-1)}\sigma] dV_e - \left\{ \Delta t \int_{V_e} [{}^{(i)}\mathbf{B}]^T [\mathbf{q}] dV_e \right\}. \quad (3.155)$$

In diesem Fall stellt die Annahme

$$\dot{\varepsilon}_l = 0 \quad (3.156)$$

bei der Integration von (3.154) die einzige Näherung bei der Herleitung von (3.155) dar. Der letzte Term in (3.155) tritt nur im ersten Iterationsschritt auf, da sich in den folgenden bei Gültigkeit von (3.156) die inelastischen Dehnungsinkremente bei der Berechnung von $\Delta \sigma$ wegheben.

Ist (3.156) exakt erfüllt, dann führt (3.155) auf ein lineares Gleichungssystem in $[{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}]$, da $\Delta \sigma$ und damit $[{}^{(i-1)}\sigma]$ linear von den Verschiebungen abhängt

$$[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}] \Big|_{(0) \mathbf{u}} \{ [{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}] - [{}^{(0)}\mathbf{u}] \} = [{}^{t+\Delta t}\mathbf{R}_p] - [{}^{(0)}\mathbf{F}({}^{(0)}\mathbf{u})] - [\mathbf{R}_q]. \quad (3.157)$$

(3.157) liefert also bereits im ersten Iterationsschritt die exakte Lösung $[{}^{t+\Delta t}\mathbf{u}]$. Demnach läßt sich (3.155) als die Beschreibung eines rein elastischen Problems mit einem um den viskoplastischen Lastvektor $[\mathbf{R}_q]$ erweiterten Lastvektor auffassen.

Läßt man dagegen die Annahme (3.156) fallen, so wird das Gleichungssystem nichtlinear, weshalb eine Iteration erforderlich ist. Dabei entspricht das Ergebnis des ersten Iterationsschrittes dem Verschiebungsfeld $[{}^{t+\Delta t}u^*]$, welches sich bei konstanter Dehnungsrate ergeben würde. Abb. 3.4 zeigt schematisch den Verlauf einer solchen Gleichgewichtsiteration.

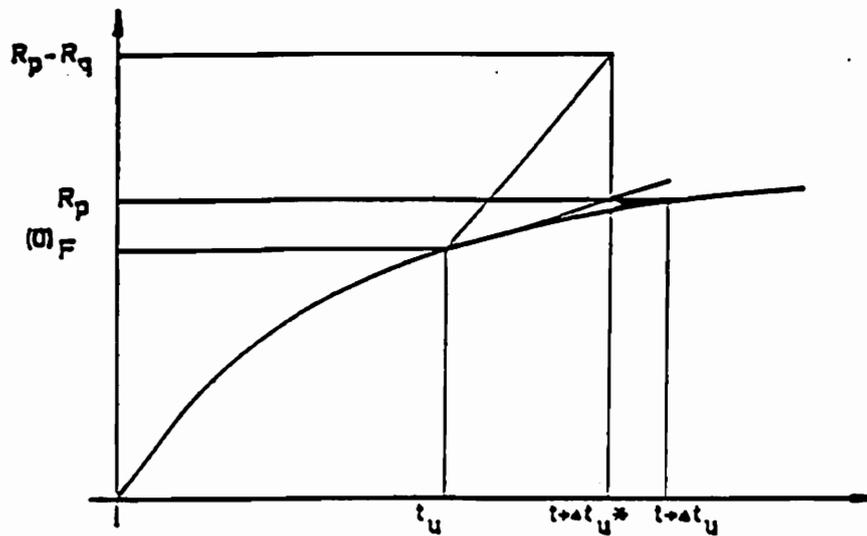


Abb. 3.4: Schematische Darstellung der Gleichgewichtsiteration unter Berücksichtigung des viskoplastischen Lastvektors $[R_q]$

Ein Beispiel, bei dem (3.156) exakt gilt, ist ein - zumindest abschnittsweise - linear verfestigendes Material, dem eine konstante Gesamtdehnungsrate aufgeprägt wird

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} = \text{konst.} \quad (3.158)$$

3.5. FE-Programm

3.5.1 Programmbeschreibung

Mit Hilfe der in den Kap. 3.3 und 3.4 hergeleiteten Gleichungen wurde ein FORTRAN-Programm zur Berechnung allgemeiner axialsymmetrischer Deformationen entwickelt. Es ist stark modular aufgebaut und ermöglicht daher relativ einfach den Einbau anderer Werkstoffgesetze. An Programme werden die sich teilweise widersprechenden Forderungen nach geringem Speicherplatzbedarf, hoher Rechengeschwindigkeit und übersichtlicher Struktur gestellt. Hier wurde in erster Linie auf möglichst große Übersichtlichkeit Wert gelegt, um eine einfache Pflege des Programms zu gewährleisten. Im Zuge der ständigen Verbesserung der Rechanlagen in bezug auf Speicherplatzkapazität und Rechengeschwindigkeit nimmt die Bedeutung dieser Anforderungen an nichtkommerzielle Software vergleichsweise ab.

Den Kern der Datenverwaltung bilden je ein eindimensionales Arbeitsfeld für *real*- und *integer*-Größen, um eine optimale Ausnutzung des Speicherplatzes zu gestatten. Das Programm ist *restart*-fähig, da inelastische Analysen von Systemen mit vielen Freiheitsgraden teilweise erhebliche Rechenzeiten verlangen, und es wird durch einen Prä- und einen Postprozessor unterstützt.

Im folgenden soll kurz der Programmablauf dargestellt werden:

Zunächst werden sämtliche Geometrie- und Materialdaten sowie die Netzstruktur über eine Eingabedatei eingelesen. Diese Daten werden nach einer Adreßberechnung auf den beiden Arbeitsvektoren abgelegt. Anschließend wird von einer zweiten Datei die Belastung des ersten Schrittes eingelesen, die sich aus Knotenkräften, flächenhaft verteilten Lasten und vorgegebenen Verschiebungen zusammensetzt. Die symmetrisierte nichtlineare Steifigkeitsmatrix $[\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_{n1}]$ wird in *skyline*-Struktur abgelegt und dreieckszerlegt. Daran anschließend wird die in Kap. 3.4.9 beschriebene Gleichgewichtsiteration durchgeführt.

Dazu berechnet das Programm die rechte Seite des linearisierten Gleichungssystems (3.88), welche sich im ersten Iterationsschritt aus äußeren Lasten, Lasten aus Elementspannungen, dem viskoplastischen Lastvektor und gegebenenfalls aus Lasten aufgrund vorgeschriebener Verschiebungen zusammensetzt. In den folgenden Iterationsschritten werden nur die ersten beiden Anteile benötigt. Nach Lösung des Gleichungssystems mit dem [3.1] entnommenen Unterprogramm *Colsol* erhält man die Inkremente der Knotenverschiebungen $[\Delta^{(i)}\mathbf{u}]$, woraus sich mit (3.85) in Verbindung mit (3.148) die neue Zwischenkonfiguration ergibt. Die Spannungsberechnung gemäß Kap. 3.4.7 und 3.4.8 liefert nach Transformation in 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen mit (3.114) die Ungleichgewichtslasten $[\mathbf{F}^{(i)}]$. Bei

Erfüllung eines Abbruchkriteriums wird die Iteration beendet und die momentane Konfiguration wird unter Berücksichtigung von (3.81) zur Ausgangskonfiguration des folgenden Lastschrittes.

Zur Beschleunigung des Konvergenzverhaltens ist es möglich, nach einer ungeraden Anzahl von Iterationen aus den Verschiebungsinkrementen eine neue Konfiguration mit Hilfe des ϵ -Algorithmus von *Wynn* zu schätzen [3.46], der als Verallgemeinerung der Extrapolationsformel von *Aitken* [3.47] angesehen werden kann.

Die Steuerung der Ausgabe auf dem Bildschirm und auf eine Datei erfolgt über eine *integer*-Variable, die beim Programmstart belegt werden muß.

3.5.2 Beschreibung des Präprozessors

Bereits bei mäßig großen Systemen kostet die manuelle Erstellung der Eingabedateien - vor allem die Eingabe der Knoten- und Verschiebungszidentztafeln - sehr viel Zeit und ist recht fehleranfällig. Daher wurde im Rahmen zweier Studienarbeiten ein Präprozessor entwickelt, der eine rechnergestützte Eingabe von Geometrie und Belastung bei ebenen Problemen ermöglicht. Die eingelesenen Daten werden sofort graphisch dargestellt und lassen sich korrigieren. Um Bereiche extremer Netzverfeinerungen darzustellen, wie sie beispielsweise zur Erfassung großer Spannungsgradienten erforderlich sind, lassen sich Ausschnitte der Struktur vergrößern. Der Präprozessor erstellt die für das FE-Programm benötigten Eingabedateien, die sich auch an mehreren Schnittstellen einlesen und verbessern bzw. modifizieren lassen. Er enthält zwei Algorithmen zur Bandbreitenminimierung und ermöglicht das Plotten der Struktur mit und ohne Netz, Knoten- und Freiheitsgradnumerierung und Belastung.

Nach Eingabe der Umfangsstruktur wird das Elementnetz erzeugt, was bei einfachen Strukturen automatisch, sonst interaktiv erfolgen kann. Es bestehen mehrere Möglichkeiten der automatischen Netzverfeinerung, von denen die beiden wichtigen Verfeinerungen in ein und zwei Richtungen in der Abb. 3.5 skizziert sind. An die Eingabe der Knotenfreiheitsgrade schließt sich eine Bandbreitenoptimierung an, die im folgenden kurz erläutert werden soll.

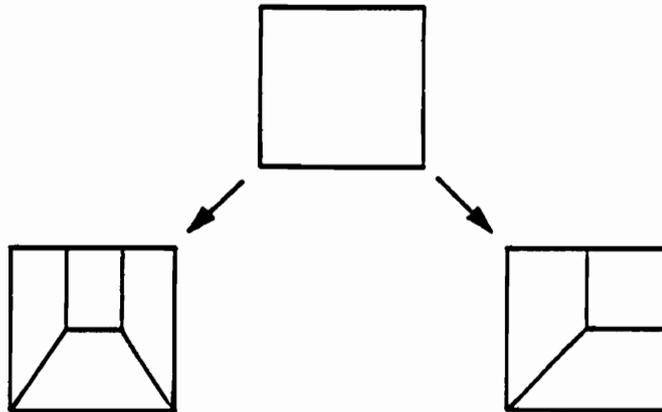


Abb.3.5: Möglichkeiten der Netzverfeinerung

Die Bandbreite der Systemsteifigkeitsmatrix und damit der Speicherplatzbedarf hängt entscheidend von der Numerierung der Knotenfreiheitsgrade ab. Daher wurden zahlreiche Algorithmen entwickelt, die eine möglichst günstige Numerierung erzeugen sollen. Da sie alle eine Ausgangsnumerierung auf lediglich heuristischem Wege verbessern, ist es nicht sicher, ob sie auch wirklich das optimale Ergebnis liefern [3.2]. Im Präprozessor sind die beiden ältesten Algorithmen, der von *Rosen* [3.48] und derjenige von *Cuthill-McKee* [3.49, 3.50], implementiert. Sie haben den Vorteil, daß viele andere Bandbreitenoptimierer auf ihnen aufbauen und somit eine einfache Erweiterungsmöglichkeit des Programms gegeben ist. Die grundlegende Idee von *Rosen* besteht darin, einen der beiden Indizes des die Bandbreite bestimmenden Indexpaares mit einem dritten Index so zu vertauschen, daß die Bandbreite verkleinert wird. Dieser Algorithmus liefert in der Regel eine wesentliche Bandbreitenreduzierung, hat aber den entscheidenden Nachteil, daß er zahlreiche Vertauschungsschritte und damit sehr viel Rechenzeit benötigt, wenn die Ausgangsnumerierung ungünstig ist. Da dies bei automatischer Netzgenerierung häufig der Fall ist, wird ihm der Algorithmus von *Cuthill-McKee* vorgeschaltet, der die Voroptimierung leistet.

Dieser Algorithmus beruht auf graphentheoretischen Überlegungen. Sie laufen darauf hinaus, daß von einem Startfreiheitsgrad mit minimalem

Grad (d. h. mit möglichst wenig Nachbarfreiheitsgraden) aus alle benachbarten Freiheitsgrade mit zunehmendem Grad durchnumeriert werden. Dabei werden hier als Freiheitsgrade die jeweiligen Verschiebungsmöglichkeiten der Knoten bezeichnet. Ausgehend von diesen Freiheitsgraden mit der Distanz 1 zum Startknoten werden wiederum deren Nachbarfreiheitsgrade nach dem gleichen Prinzip sortiert, bis das gesamte System erfaßt worden ist. Bei benachbarten Freiheitsgraden von gleichem Grad ist die Numerierung selbstverständlich willkürlich. Da aber nicht unbedingt der Freiheitsgrad mit der geringsten Anzahl von Nachbarn zu der kleinsten Bandbreite führt, müssen mehrere Freiheitsgrade mit niedrigem Grad als Startwerte ausprobiert werden. Diese Unwägbarkeit stellt den entscheidenden Nachteil dieses Verfahrens dar.

Nach der Optimierung werden die Daten überprüft und aus ihnen die erste Eingabedatei für das FE-Programm erzeugt. Anschließend können die Belastungen und die vorgegebenen Verschiebungen eingegeben werden, woraus die zweite Eingabedatei erstellt wird. Zur Vereinfachung der Eingabe bei sehr feinen Netzen können Teile der Struktur vergrößert auf dem Bildschirm dargestellt werden (*zoom*-Effekt).

3.5.3 Beschreibung des Postprozessors

Der Postprozessor ist im wesentlichen ein Graphikprogramm, welches die Darstellung der Rechenergebnisse in zwei- oder dreidimensionaler Ansicht ermöglicht. Dazu wird vor allem auf die Programmbibliothek ERLGRAPH 2. OM zurückgegriffen [3.58].

3.6 Ergebnisse

Zur Überprüfung der theoretischen Überlegungen und zur Ausschaltung von Programmierfehlern wurde ein umfangreiches Testprogramm durchgeführt. Die Ergebnisse der wichtigsten Testrechnungen werden im folgenden dargestellt. Da die wenigen Probleme, die eine analytische Lösung zulassen, einfaches Materialverhalten voraussetzen, soll auch gezeigt werden, wie sich das hier implementierte viskoplastische Modell mit geringfügigen Änderungen geeignet modifizieren läßt. Daran anschließend werden Spannungsanalysen zweier Druckbehälter unter nicht-monotoner Belastung als aus der Literatur bekannte Beispiele demonstriert. Alle Berechnungen beziehen sich, wenn nicht ausdrücklich anderes angegeben wird, auf AISI 316L mod bei 550°C.

3.6.1 Dünnwandiges Rohr unter Zug und Torsion

Für analytische und halbanalytische Vergleichsrechnungen eignet sich besonders die Untersuchung eines dünnwandigen, kreiszylindrischen Körpers, der durch Zug und Torsion belastet wird. Unter den üblichen kinematischen Annahmen, daß Radien gerade, Querschnittsflächen eben und die Mantelflächen kreiszylindrisch bleiben [2.86], erhält man als einzige nicht-verschwindende Geschwindigkeitsableitungen

$$v^1_{,1} = \frac{\dot{t}}{t}, \quad (3.159)$$

$$v^2_{,2} = \frac{\dot{\Psi}}{l}, \quad (3.160)$$

$$v^3_{,3} = \frac{\dot{l}}{l}, \quad (3.161)$$

sowie den ebenfalls benötigten Ausdruck (s. (3.124))

$$\frac{v_1}{x^1} = \frac{\dot{r}}{r}. \quad (3.162)$$

Darin stellen r , l und t die Momentanwerte des Radius, der Rohrlänge und der Rohrdicke dar; mit Ψ wird der Gesamtverdrillwinkel des Rohres bezeichnet.

Nimmt man an, daß lediglich die Spannungen

$$\sigma_{33} = \sigma \quad (3.163)$$

und

$$\sigma_{23} = \tau r \quad (3.164)$$

auftreten, so erhält man bei hypoelastischem Materialgesetz gemäß (3.38) für die Inkremente der physikalischen Größen bei Dehnungssteuerung ($\dot{\epsilon}$ und $\dot{\Psi}$ vorgegeben)

$$\dot{i} = \dot{\epsilon} l, \quad (3.165)$$

$$\dot{\sigma} = E \left(\frac{\dot{i}}{l} - \frac{\tau}{G} \frac{r \dot{\Psi}}{2l} \right), \quad (3.166)$$

$$\dot{\tau} = \left(G + \frac{1}{2} \sigma \right) r \frac{\dot{\Psi}}{l}. \quad (3.167)$$

Führt man dagegen den Belastungsprozeß spannungsgesteuert durch, so lautet das System der Differentialgleichungen

$$\dot{i} = l \left(\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\tau}{G} \frac{r \dot{\Psi}}{2l} \right), \quad (3.168)$$

$$\dot{\Psi} = 2 l \frac{\dot{\tau}}{(2G + \sigma) r}. \quad (3.169)$$

Bei beiden Prozeßführungen ergeben sich die Inkremente der Rohrdicke und des Rohrradius zu

$$\dot{t} = -\nu t \frac{\dot{\sigma}}{E}, \quad (3.170)$$

$$\dot{r} = -r \left(\nu \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\tau}{G} \frac{r \dot{\Psi}}{2l} \right). \quad (3.171)$$

Bei reinem Zug folgt aus (3.166) bei spannungsfreiem Ausgangszustand

$$\sigma = E \ln \frac{l}{l_0} \quad (3.172)$$

sowie aus (3.170) und (3.171)

$$t = t_0 e^{-\nu \frac{\sigma}{E}}, \quad (3.173)$$

$$r = r_0 e^{-\nu \frac{\sigma}{E}}, \quad (3.174)$$

woraus sich bei Vollquerschnitten die Zugkraft F in Abhängigkeit der Verschiebung u gemäß

$$\frac{F}{A_0 E} = \left(1 + \frac{u}{l_0} \right)^{-2\nu} \ln \left(1 + \frac{u}{l_0} \right) \quad (3.175)$$

ergibt.

Abb. 3.6 zeigt diese Funktion als durchgezogene Linie, die Ergebnisse der FE-Rechnung als Kreissymbole. Man erkennt, daß die FE-Analyse die geometrische Nichtlinearität dieses Problems präzise erfaßt.

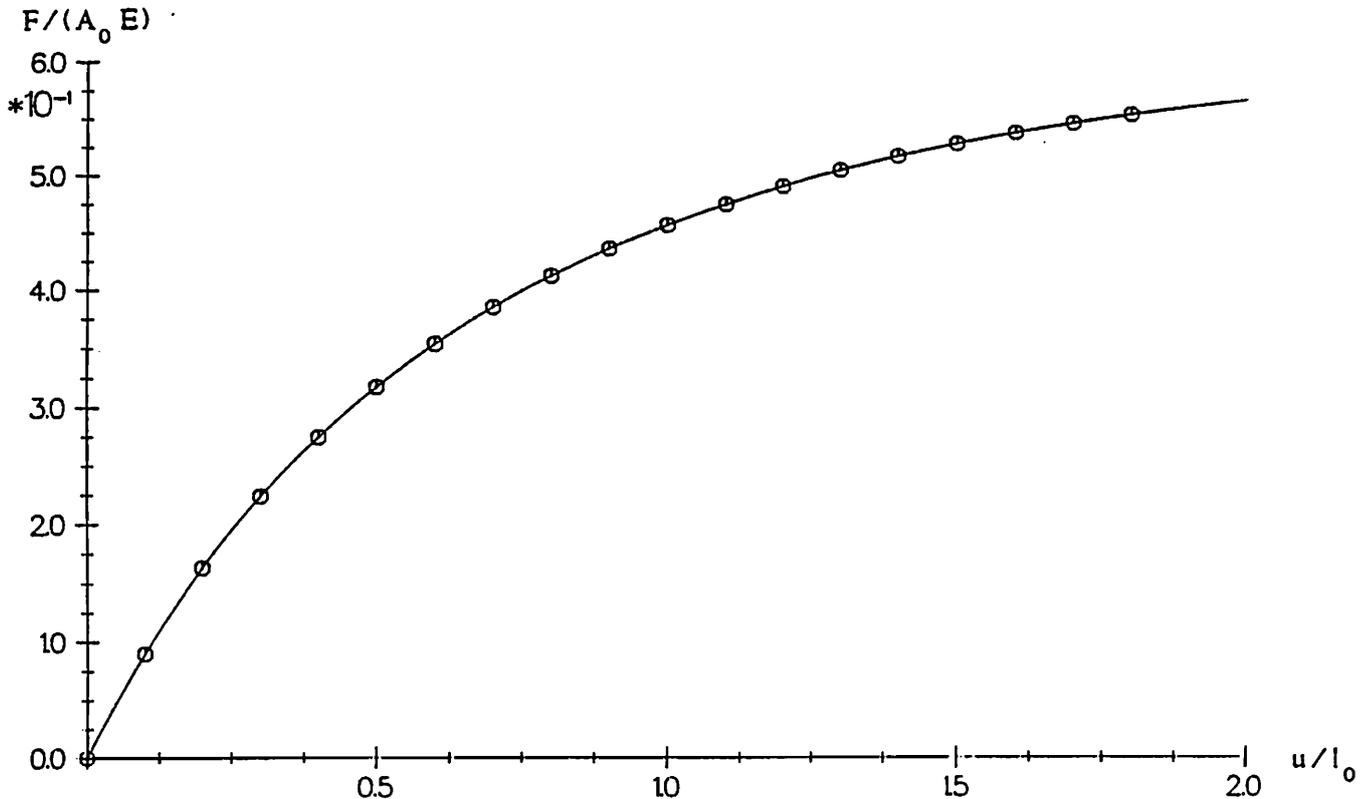


Abb. 3.6: Dimensionslose Zugkraft $F/(A_0 E)$ in Abhängigkeit der auf die Ausgangslänge bezogenen Verschiebung u/l_0 eines Stabes, analytische Lösung und FE - Rechnung (Kreissymbole)

Die Torsion eines dünnwandigen Rohres wird bei vorgeschriebener Verdrehung $\Psi(t)$ durch die Differentialgleichungen (3.166), (3.167), (3.170) und (3.171) beschrieben. Im folgenden soll zunächst der Fall

$$\dot{i} = 0, \quad (3.176)$$

der demjenigen der reinen Scherung entspricht, untersucht werden. Aus (3.166) und (3.167) folgt

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = - \frac{(1 + \nu) \tau}{G + \frac{1}{2} \sigma}, \quad (3.177)$$

woraus man nach Integration

$$\sigma_{1/2} = -2 G \pm \sqrt{4 G^2 - 2(1 + \nu) \tau^2} \quad (3.178)$$

erhält. Für den zunächst geltenden Fall

$$\sigma > -2 G \quad (3.179)$$

ergibt sich nach einigen Zwischenrechnungen

$$r = r_0 \exp \left\{ \frac{\nu-1}{\nu+1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{2G^2} (1+\nu)} \right) \right\} . \quad (3.180)$$

Einsetzen dieser Gleichung sowie (3.178) in (3.167) liefert die folgende Beziehung zwischen Schubspannung τ und Verdrillung Ψ

$$d\Psi = \frac{r_0 \exp \left\{ \frac{1-\nu}{\nu+1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{2G^2} (1+\nu)} \right) \right\}}{r_0 \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{2G^2} (1+\nu)}} \frac{d\tau}{G} , \quad (3.181)$$

welche sich nicht analytisch integrieren läßt [3.51, 3.52], sodaß auf numerische Integration zurückgegriffen werden muß. Jedoch zeigen bereits analytische Untersuchungen, daß alle von ψ abhängigen Funktionen oszillierend verlaufen. Dabei schwanken die Normal- und Schubspannung sowie der Rohrradius und die Rohrdicke zwischen

$$-4 G \leq \sigma \leq 0 ,$$

$$-\sqrt{\frac{2}{1+\nu}} G \leq \tau \leq \sqrt{\frac{2}{1+\nu}} G ,$$

$$r_0 \exp \left(\frac{2(\nu-1)}{1+\nu} \right) \leq r \leq r_0 ,$$

$$t_0 \leq t \leq t_0 \exp \left(\frac{2\nu}{1+\nu} \right) . \quad (3.182)$$

In Abb. 3.7 ist exemplarisch der Verlauf $\tau(\psi)$ dargestellt, welcher durch numerische Integration der konstitutiven Gleichungen gewonnen wurde. Diese Rechnungen wurden - im Gegensatz zu den sonstigen - mit den nach [2.76] für AISI 316 bei 625 °C geltenden Werten für den Schubmodul und die Querkontraktionszahl

$$G = 5,923 \cdot 10^4 \text{ MPa} , \quad (3.183)$$

$$\nu = 0,29 \quad (3.184)$$

erstellt.

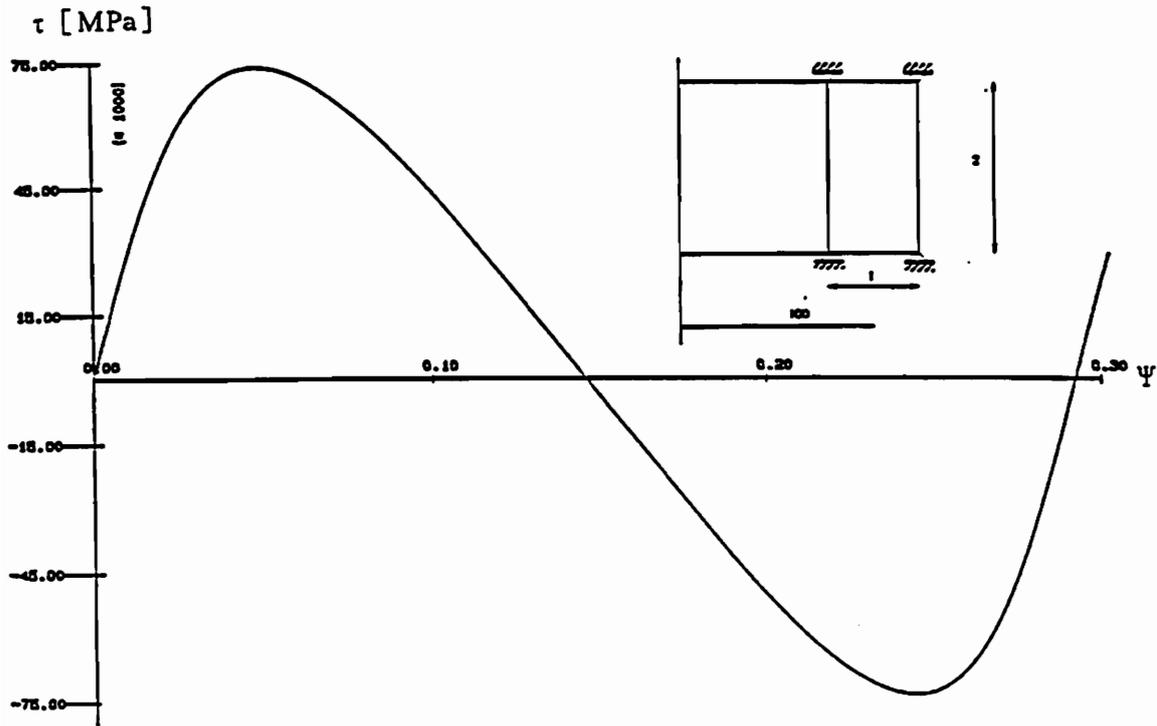


Abb. 3.7: Oszillieren der Schubspannung τ bei Verdrillung eines dünnwandigen Rohres

Das Oszillieren der Spannungen bei Verwendung der *Jaumannschen* Zeitableitung im Falle sehr großer Rotationen ist seit langem bekannt. Als erster machte *Lehmann* im Jahre 1972 auf diese Problematik aufmerksam [3.54]. Er untersuchte die reine Scherung bei verschwindenden elastischen Deformationen und zeigte, daß der Ansatz einer linearen kinematischen Verfestigung der Form

$$\overset{\nabla}{\xi} = c \mathbf{D}_i \quad (3.185)$$

in Verbindung mit der verallgemeinerten Fließbedingung nach *v. Mises* zu einem Oszillieren der Spannungen führt. *Dienes* gibt in seinem 1979 veröffentlichten Aufsatz [3.55] den Spannungsverlauf ebenfalls für reine Scherung, jedoch bei rein hypoelastischem Materialverhalten, an

$$\tau = G \sin(\tan \gamma), \quad (3.186)$$

wobei γ hier den Scherwinkel bezeichnet.

Das oszillierende Verhalten der Lösungsfunktionen tritt jedoch erst im Bereich von Dehnungen auf, die in der Praxis überhaupt nicht erreicht werden können. Die entsprechenden FE-Rechnungen beschränken sich auch

aus Gründen der Rechenzeit auf maximale Dehnungen von

$$\gamma = \Psi \frac{r}{l} \approx 35\% . \quad (3.187)$$

Abb. 3.8 - 3.10 zeigen wiederum sowohl die aus der numerischen Integration als auch die aus der FE-Rechnung erhaltenen Ergebnisse. Während die Schubspannung in dem betrachteten Bereich noch annähernd linear von der Dehnung abhängt, weichen die Funktionen $\sigma(\gamma)$ und $r(\gamma)$ bereits deutlich davon ab.

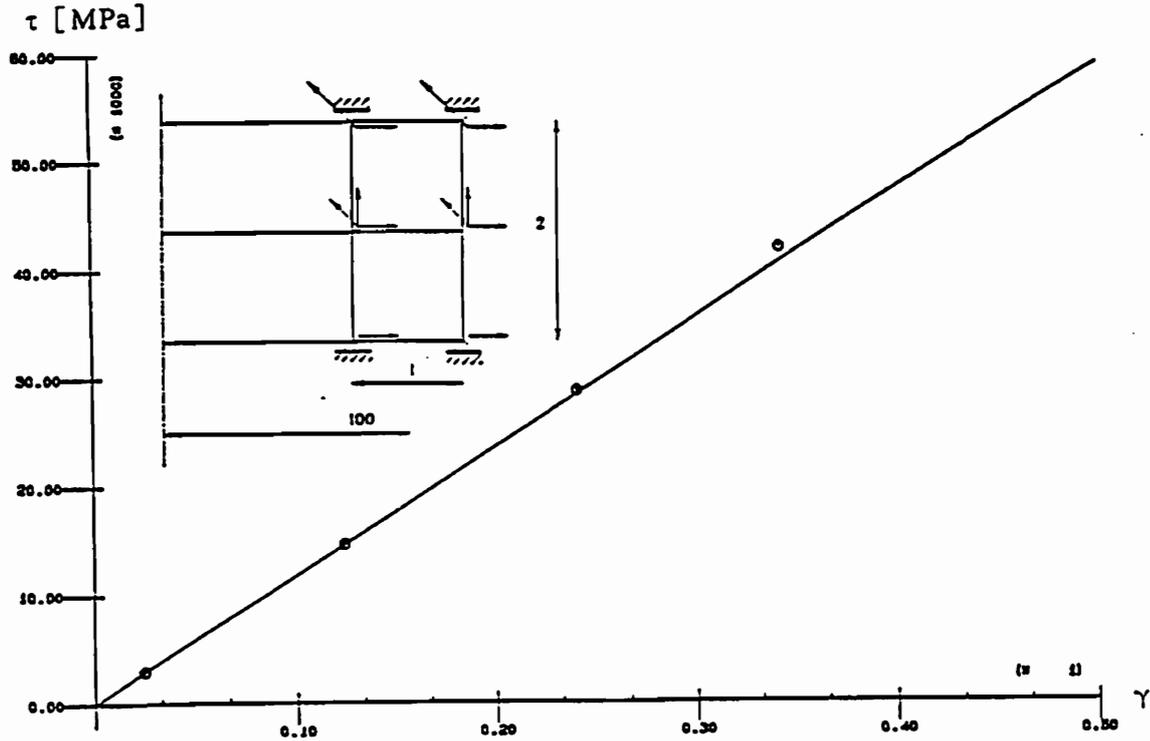


Abb. 3.8: Verlauf der Schubspannung τ in Abhängigkeit der Dehnung γ , Ergebnisse der numerischen Integration und der FE-Rechnung (Kreissymbole)

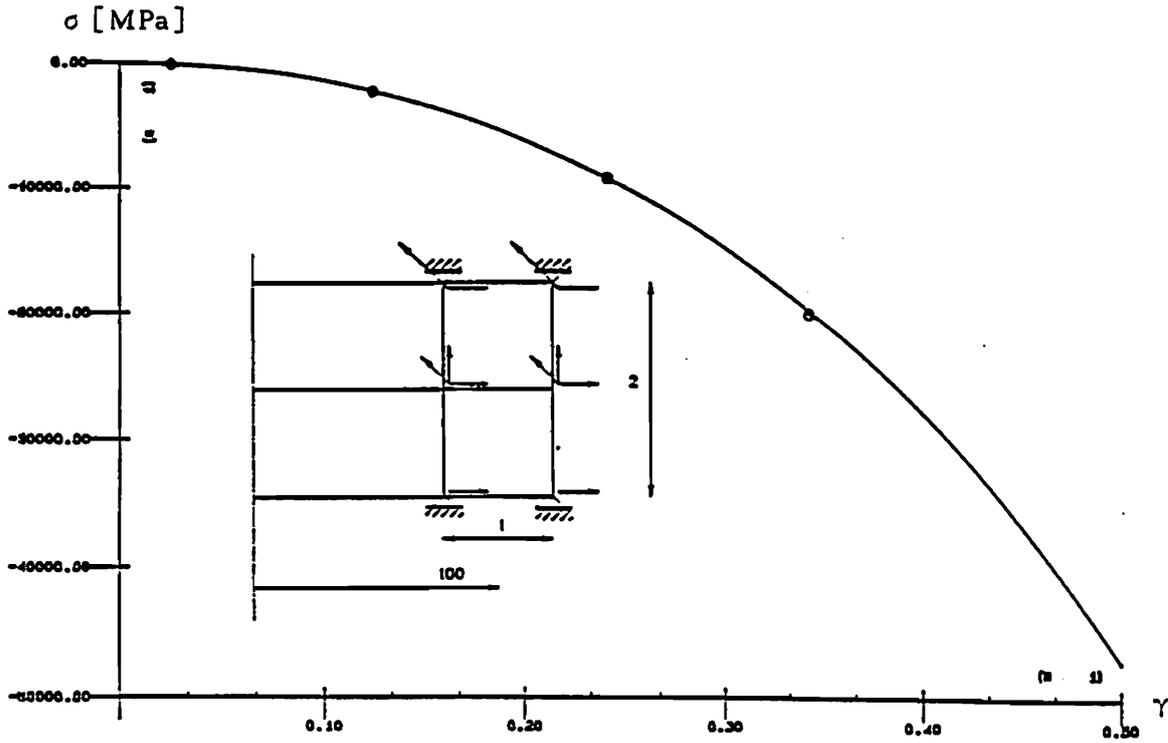


Abb. 3.9: Verlauf der Normalspannung σ in Abhängigkeit der Dehnung γ , Ergebnisse der numerischen Integration und der FE-Rechnung (Kreissymbole)

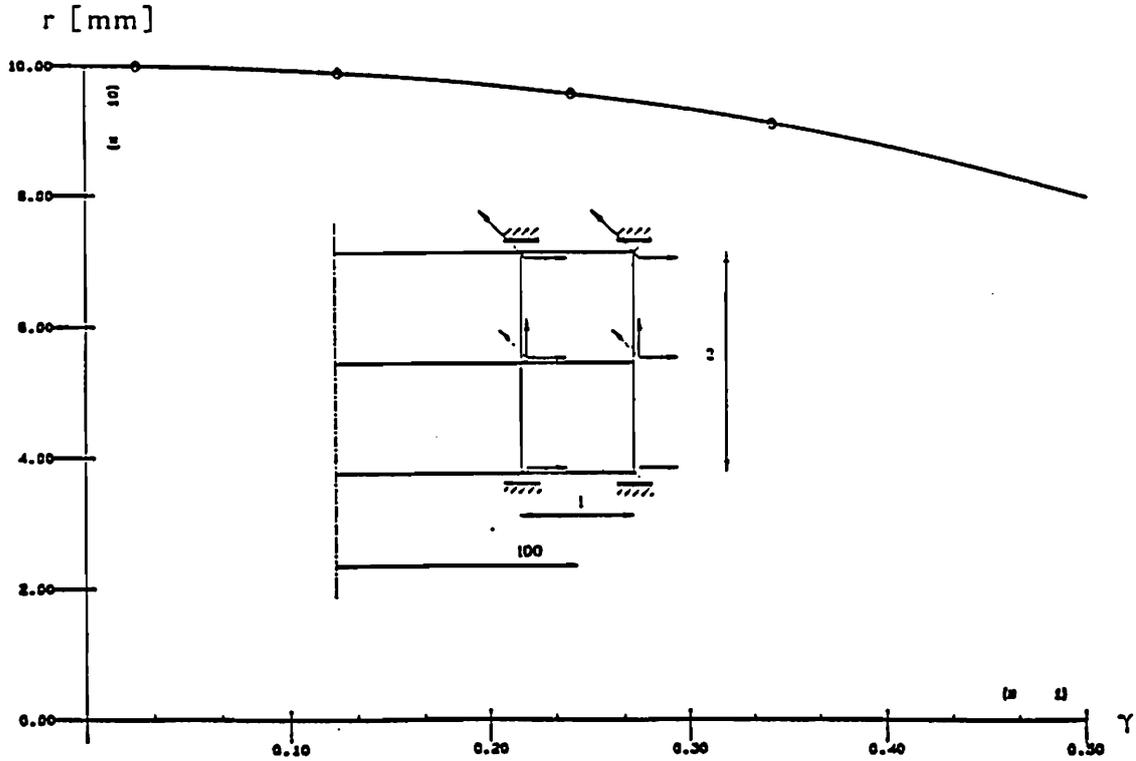


Abb. 3.10: Verlauf des Radius r in Abhängigkeit der Dehnung γ , Ergebnisse der numerischen Integration und der FE-Rechnung (Kreissymbole)

Nach der Behandlung des Falles der festen Einspannung soll noch kurz auf das Torsionsproblem mit der Randbedingung

$$\dot{\sigma} = 0 \quad (3.188)$$

eingegangen werden.

Aus (3.170) folgt sofort

$$t = t_0 \quad (3.189)$$

und aus (3.168) sowie (3.171) in Verbindung mit (3.169)

$$l = l_0 \exp\left(\frac{\tau}{2G}\right)^2, \quad (3.190)$$

$$r = t_0 \exp - \left(\frac{\tau}{2G}\right)^2. \quad (3.191)$$

Setzt man diese Beziehungen in (3.169) ein, so erhält man wiederum ein nicht geschlossenes lösbares Integral

$$\int_0^{\tau^*} \exp\left(\frac{\tau^2}{2G^2}\right) d\tau = G \Psi \frac{r_0}{l_0}. \quad (3.192)$$

Entwicklung der Exponentialfunktion in eine *Taylor*-Reihe ergibt nach Integration die im Gegensatz zum zuerst behandelten Fall monoton steigende Funktion $\Psi(\tau)$

$$\left\{ \frac{\tau}{\sqrt{2}G} + \frac{1}{1!3} \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}G}\right)^3 + \dots + \frac{1}{n!(2n+1)} \left(\frac{\tau}{\sqrt{2}G}\right)^{2n+1} + \dots \right\} \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi \frac{r_0}{l_0}. \quad (3.193)$$

Nach der Überprüfung geometrisch nichtlinearer, elastischer Probleme soll im folgenden die Gleichgewichtssiteration in bezug auf die Lösung eines geometrisch linearen, aber elastisch-viskoplastischen Problems getestet werden. Dazu wurden die Spannungen in einem zylindrischen Stab aus AISI 316L mod bei 550°C berechnet, der auf Zug belastet wird und dessen Lagerung eine unbehinderte Querkontraktion ermöglicht. Abb. 3.11 zeigt den Verlauf der $\sigma - \varepsilon$ - Kurve bei Verwendung der konstitutiven Gleichungen (3.38) - (3.47) und einer Dehnungsrate von $0,01 \text{ s}^{-1}$. Die durchgezogene Kurve wurde durch numerische Integration des Stoffgesetzes berechnet, während die Kreissymbole wiederum die Ergebnisse der FE-Rechnung darstellen. Die Übereinstimmung dieser Rechnungen ist ausgezeichnet, was sich auch in den Verläufen der Prozeßgeschwindigkeit v , der Überspannungsfunktion Φ , der für die Verfestigung maßgeblichen Größe $\frac{A}{K}$ und der die Kriechdehnungsrate bestimmenden Größe $\frac{B}{K}$ zeigt (s. Abb. 3.12 - 3.15).

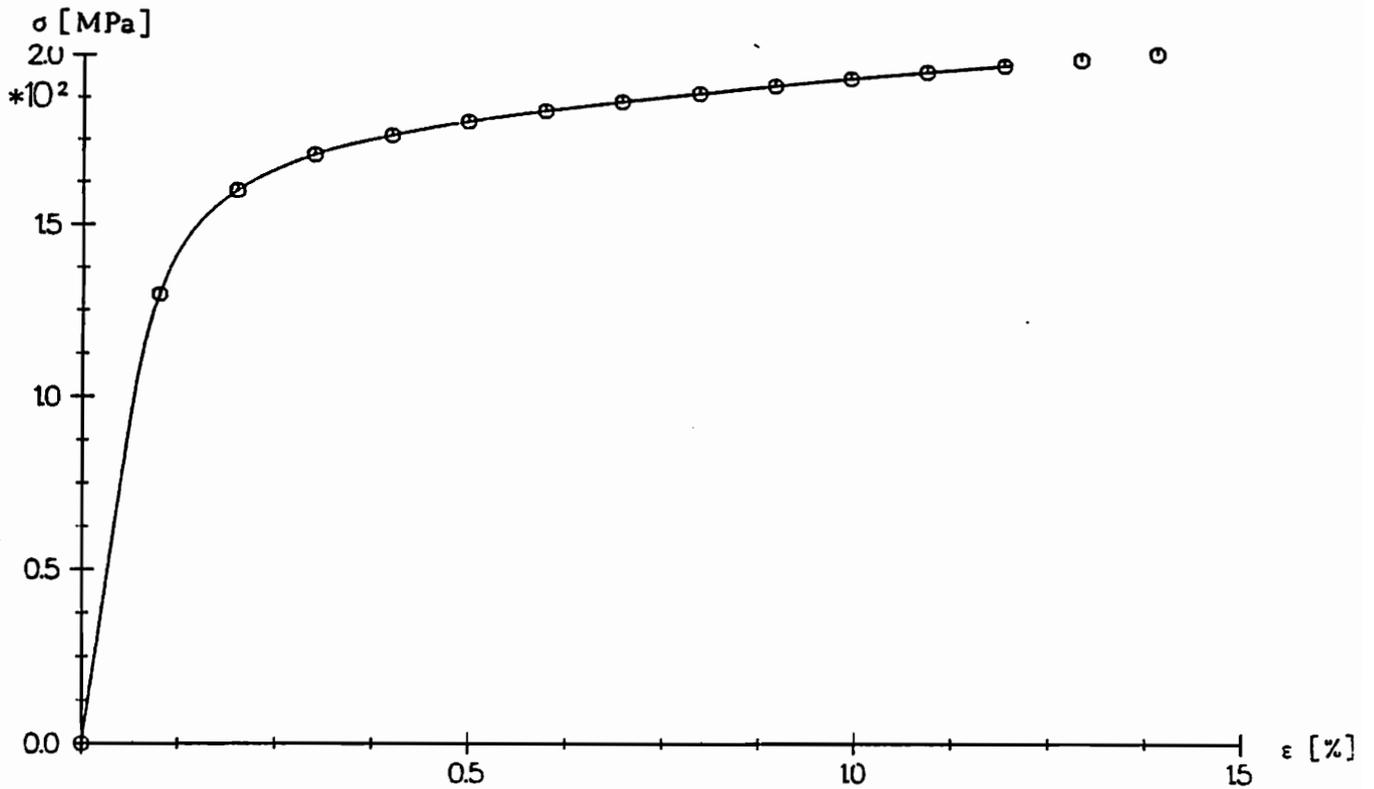


Abb.3.11: σ in Abhängigkeit von ϵ beim monotonen Zug mit $\dot{\epsilon} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, Stoffgesetzintegration und FE-Rechnung (Kreissymbole)

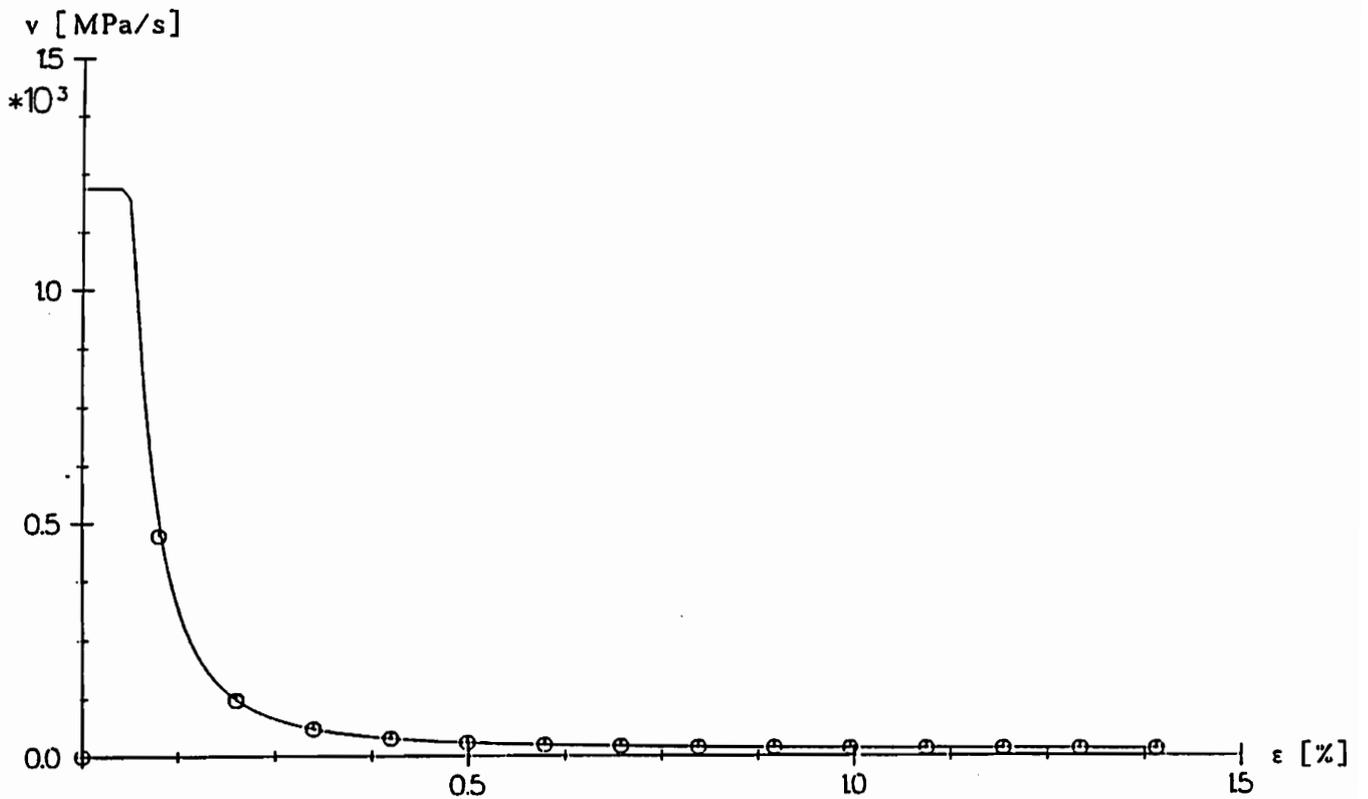


Abb.3.12: Prozeßgeschwindigkeit v in Abhängigkeit von ϵ beim monotonen Zug mit $\dot{\epsilon} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, Stoffgesetzintegration und FE-Rechnung (Kreissymbole)

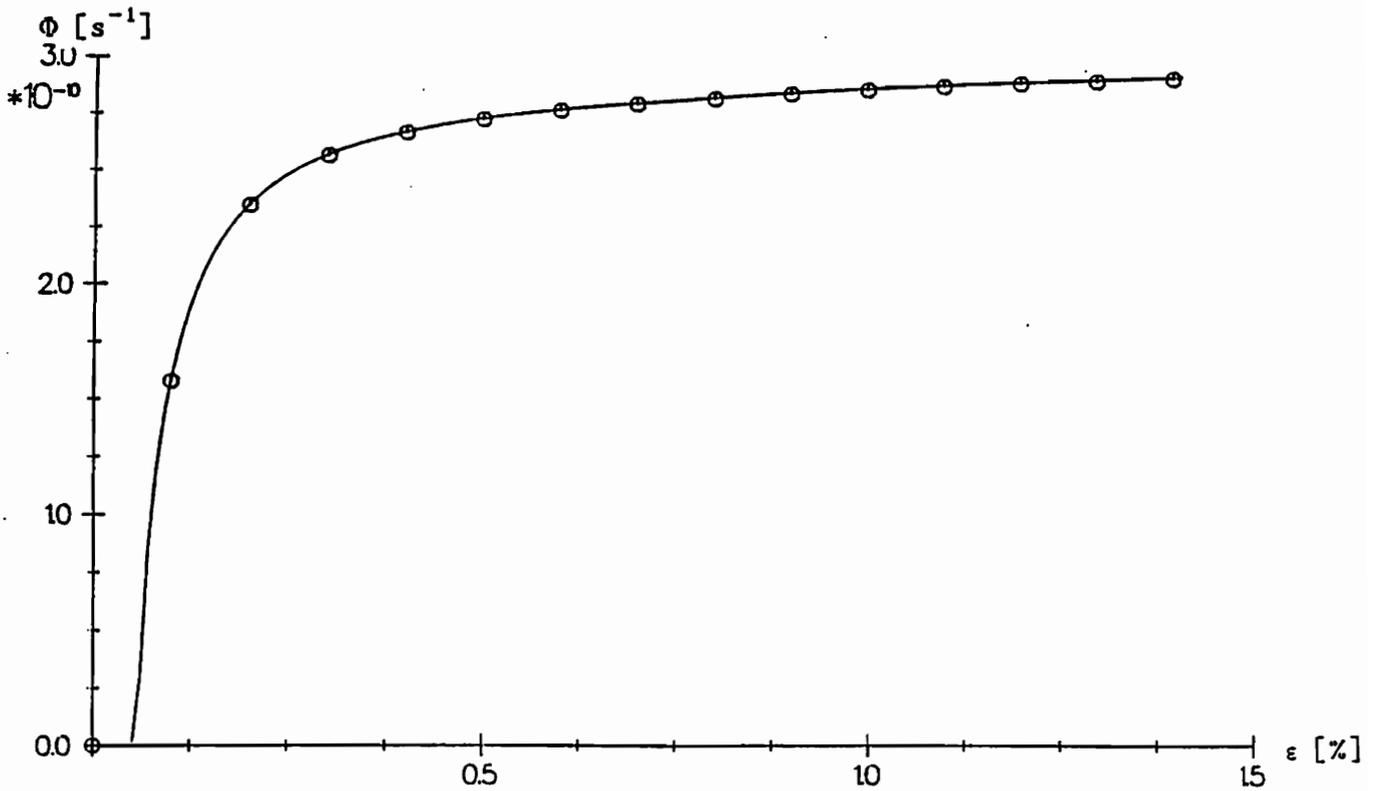


Abb.3.13: Überspannungsfunktion Φ in Abhängigkeit von ϵ beim monotonen Zug mit $\dot{\epsilon} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, Stoffgesetzintegration und FE-Rechnung (Kreissymbole)

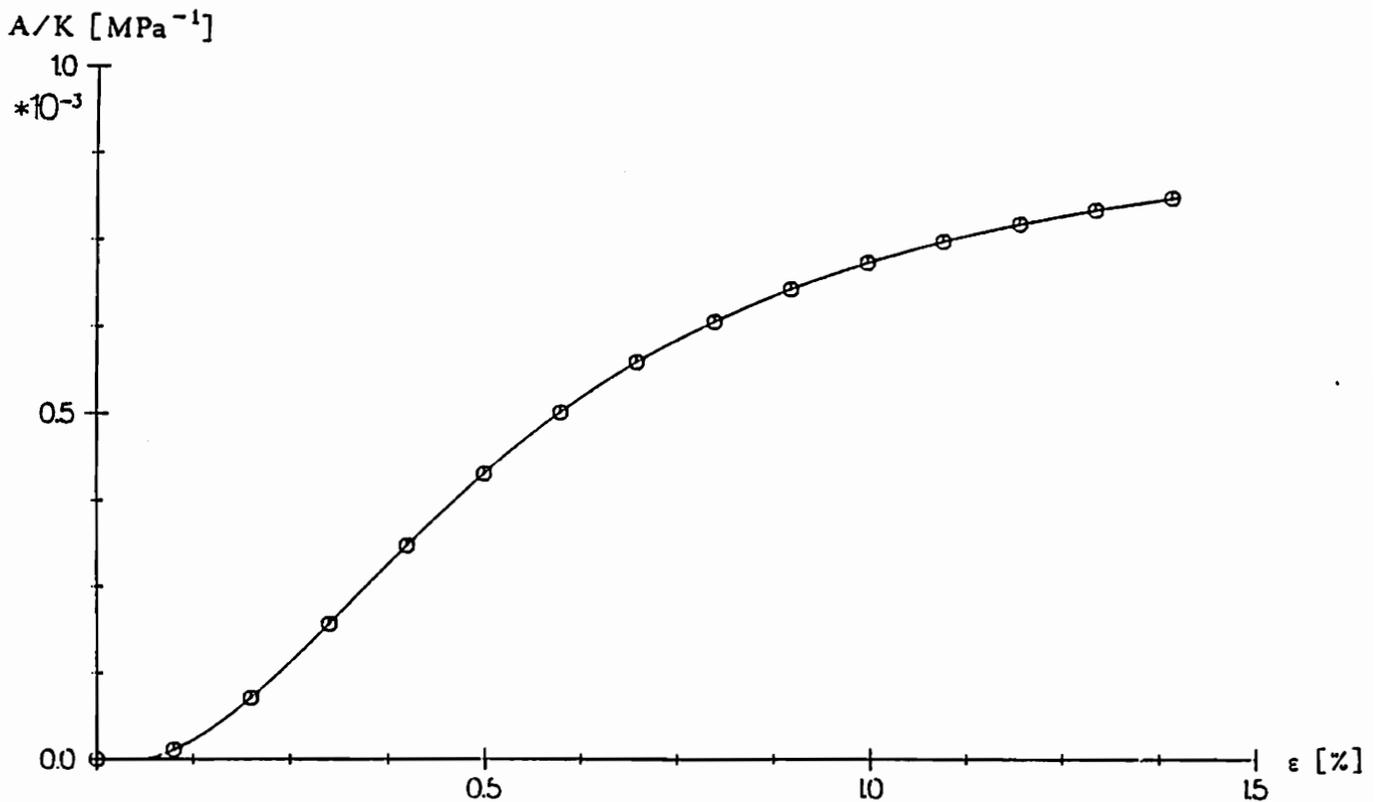


Abb.3.14: $\frac{A}{K}$ in Abhängigkeit von ϵ beim monotonen Zug mit $\dot{\epsilon} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, Stoffgesetzintegration und FE-Rechnung (Kreissymbole)

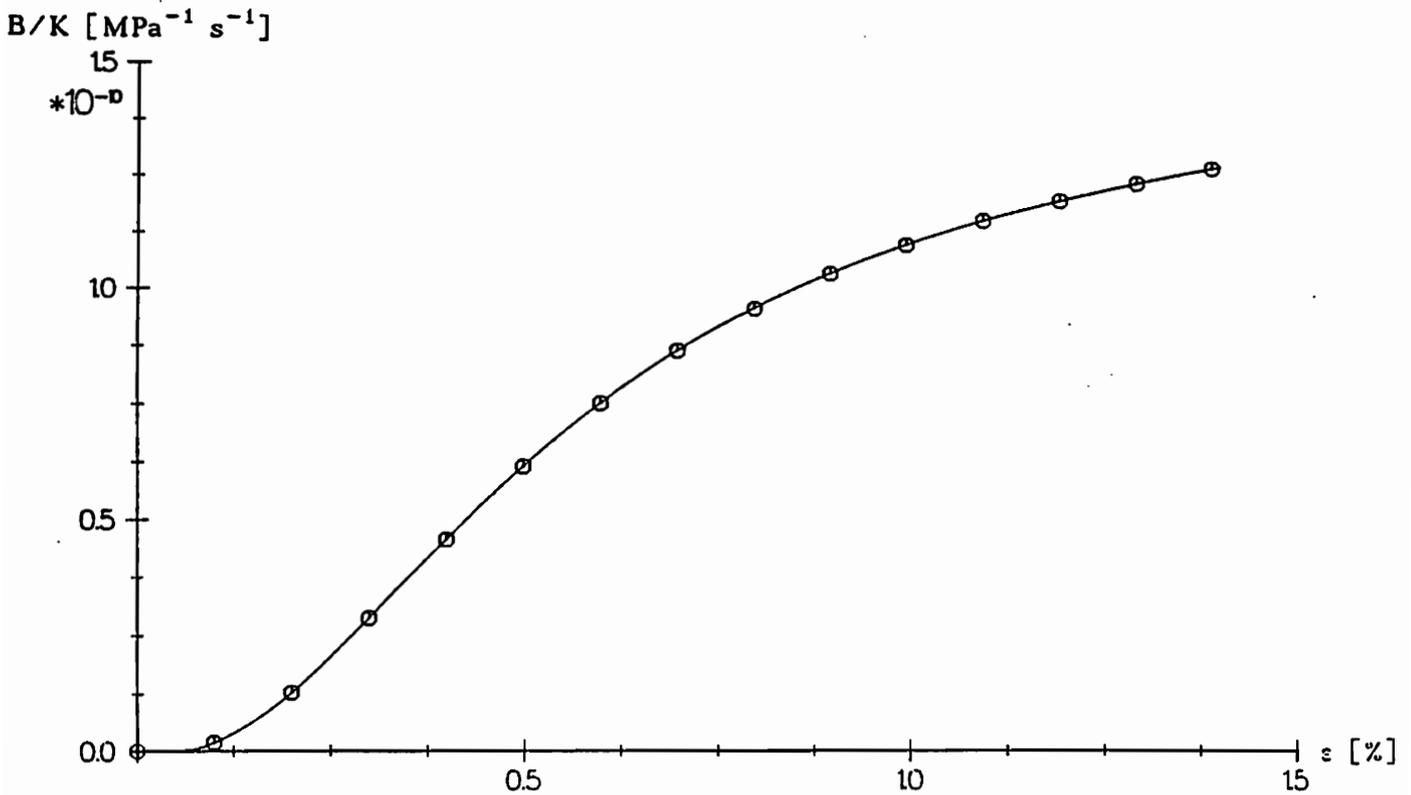


Abb.3.15: $\frac{B}{K}$ in Abhängigkeit von ϵ beim monotonen Zug mit $\dot{\epsilon} = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, Stoffgesetzintegration und FE-Rechnung (Kreissymbole)

3.6.2 Dickwandiges Rohr unter Torsion und Innendruck

Während die Analyse homogener Spannungszustände noch mit Hilfe analytischer Verfahren oder durch Zeitintegration der konstitutiven Gleichungen möglich ist, sind nur für wenige einfache inhomogene Probleme die Lösungen für das Verschiebungs- und Spannungsfeld bekannt. Diese setzen in der Regel elastisches oder elastisch-idealplastisches Werkstoffverhalten voraus. Solche Probleme eignen sich sehr gut für Überprüfungen von FE-Programmen. Dazu wird das hier implementierte Werkstoffgesetz durch Änderung seiner Materialfunktionen und Materialparameter so modifiziert, daß eine präzise Simulation elastisch-idealplastischen Werkstoffverhaltens möglich ist.

Zunächst werden die Materialfunktionen, welche die Geschwindigkeitsabhängigkeit beeinflussen, betrachtet. Setzt man

$$A \approx 1 ,$$

$$B \approx 0 ,$$

$$\Phi \equiv 0, \quad (3.194)$$

so geht das elastisch-viskoplastische Materialmodell in das zugrunde liegende elastisch-plastische INTERATOM-Modell über. Dieses erlaubt allein durch Änderung der Materialparameter und damit ohne weiteren Eingriff in das FE-Programm die Simulation elastisch-idealplastischen Materialverhaltens. Setzt man in (2.177)

$$c_1 = 0 \text{ MPa}^{-1} \quad (3.195)$$

ein, so wird die isotrope Verfestigungsfunktion unabhängig von der internen Variablen κ

$$g(\kappa) = g_0 \quad (3.196)$$

und mit

$$c_2 = 1 \quad (3.197)$$

folgt

$$g_\infty = g_0 \cdot \quad (3.198)$$

Aus numerischen Gründen wird mit dem Anfangstangentenmodul

$$E_t = 1,0 \cdot 10^2 \text{ MPa} \ll E \quad (3.199)$$

und dem asymptotischen Modul

$$E_{t\infty} = 1,0 \cdot 10^1 \text{ MPa} \quad (3.200)$$

eine sehr geringe kinematische Verfestigung zugelassen. Wird weiterhin der Materialparameter c_3 mit

$$c_3 = 76,0 \text{ MPa} \quad (3.201)$$

und damit nahe der Anfangsfließspannung σ_0 festgesetzt, so wird elastisch-idealplastisches Materialverhalten ausgezeichnet approximiert (s. Abb.3.16).

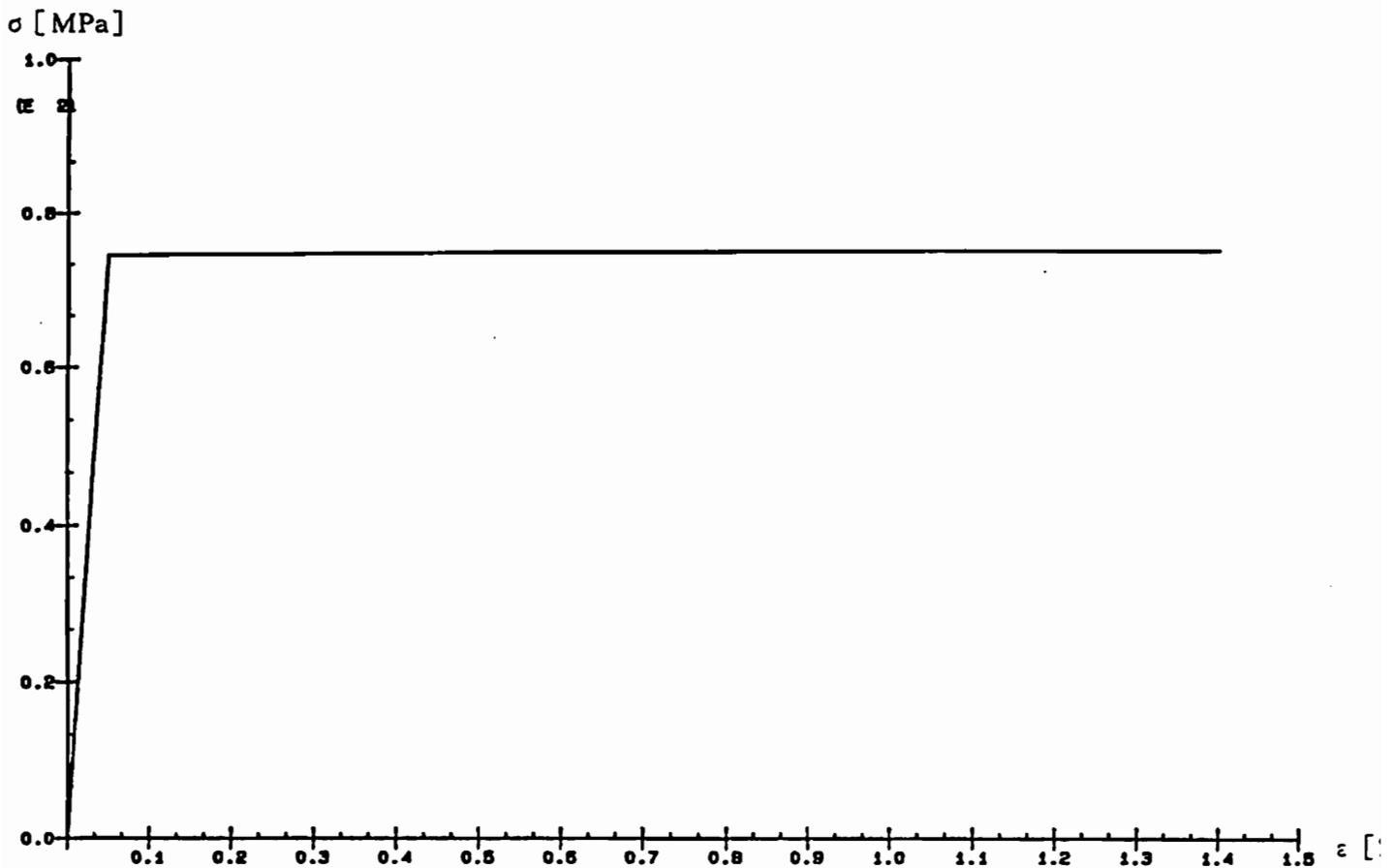


Abb. 3.16: Simulation elastisch-idealplastischen Materialverhaltens

Für diesen einfachen Fall kann die Spannungsverteilung in einem dickwandigen Rohr, welches mit der konstanten Verdrillung

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dz} = 2 \frac{\varepsilon_{\varphi z}}{r} \quad (3.202)$$

tordiert wird, angegeben werden:

$$\tau = \sigma_{\varphi z} = \begin{cases} G \vartheta r, & \text{wenn } r \leq r^* = \frac{\tau_0}{G \vartheta} \\ \tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.203)$$

Abb. 3.17 zeigt die Spannungsverteilung in einem Rohr mit einem Innenradius r_i von 100 mm und einem Außenradius r_a von 140 mm. Die FE-Rechnung wurde mit vier 4-Knotenelementen und je drei Gaußpunkten durchgeführt. Es soll besonders hervorgehoben werden, daß die FE-Analyse den elastisch-plastischen Übergang im zweiten Element präzise erfaßt.

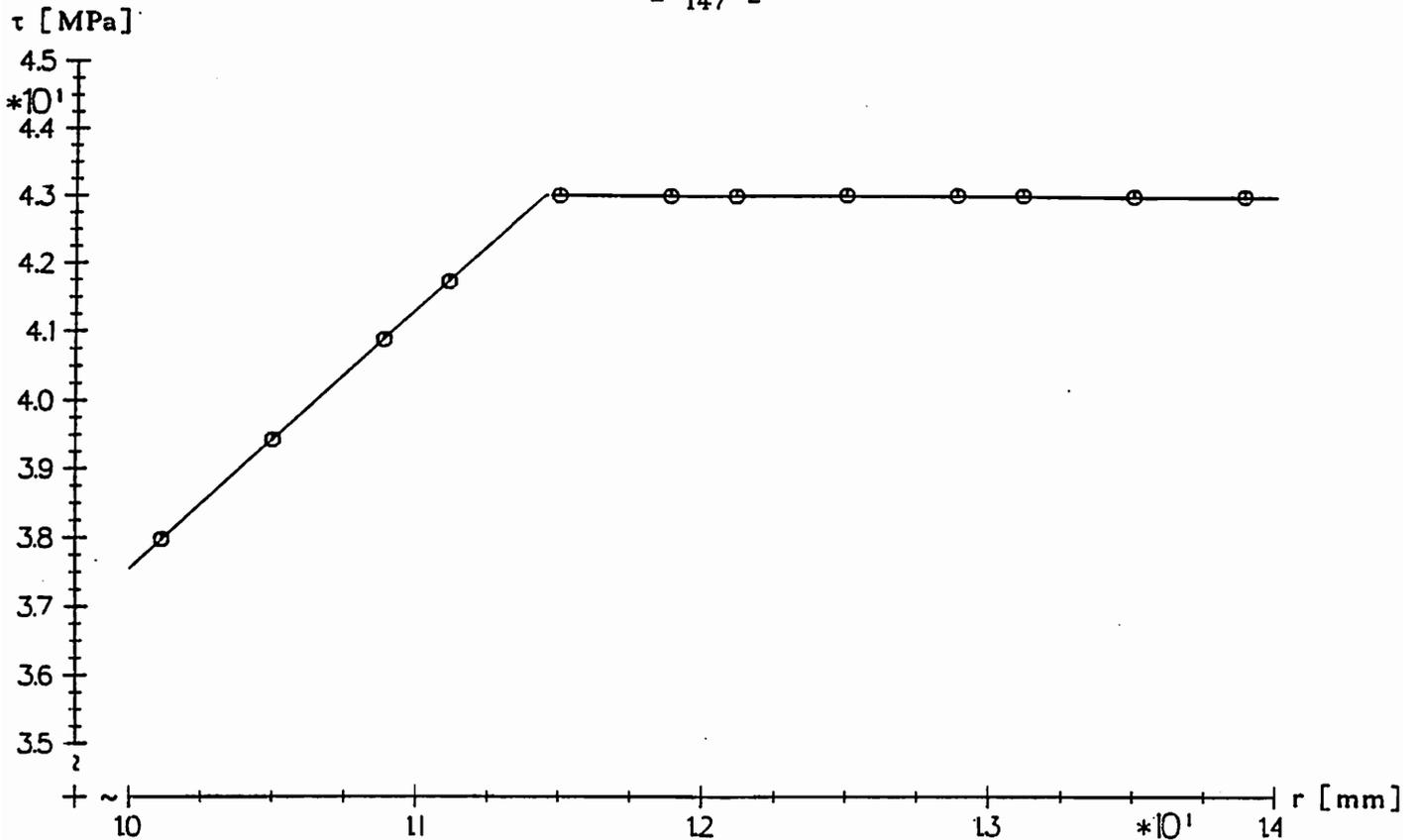


Abb. 3.17: Verlauf der Schubspannungen τ in Abhängigkeit des Radius bei elastisch-idealplastischem Materialverhalten, analytische Lösung und FE-Rechnung (Kreissymbole)

Als letztes Testbeispiel soll das dickwandige Rohr bei vorgeschriebener Radialverschiebung am Innenrand behandelt werden. Setzt man ebenen Verzerrungszustand und elastisch-idealplastisches, inkompressibles Werkstoffverhalten voraus, so ergibt sich der elastisch-plastische Grenzradius zu [3.56]

$$r^* = \sqrt{\frac{2 G r_i u_r}{\tau_0}} \quad (3.204)$$

Im elastischen Bereich des Zylinders erhält man als Spannungsverläufe

$$\sigma_{rr} = \tau_0 \left(\frac{r^{*2}}{r_a^2} - \frac{r^{*2}}{r^2} \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \tau_0 \left(\frac{r^{*2}}{r_a^2} + \frac{r^{*2}}{r^2} \right),$$

$$\sigma_{zz} = \tau_0 \frac{r^{*2}}{r_a^2} \quad (3.205)$$

und im plastischen Bereich ergeben sich die Spannungen zu

$$\sigma_{rr} = -\tau_0 \left(1 - \frac{r^{*2}}{r_a^{*2}} + 2 \ln \frac{r^*}{r} \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \tau_0 \left(1 + \frac{r^{*2}}{r_a^{*2}} - 2 \ln \frac{r^*}{r} \right),$$

$$\sigma_{zz} = \tau_0 \left(\frac{r^{*2}}{r_a^{*2}} - 2 \ln \frac{r^*}{r} \right). \quad (3.206)$$

Abb. 3.18 zeigt diese Spannungsverläufe zusammen mit den aus der FE-Rechnung erhaltenen Werten. Dabei ist anzumerken, daß die FE-Analyse aus numerischen Gründen mit einer Querkontraktionszahl ν von 0,49 durchgeführt wurde.

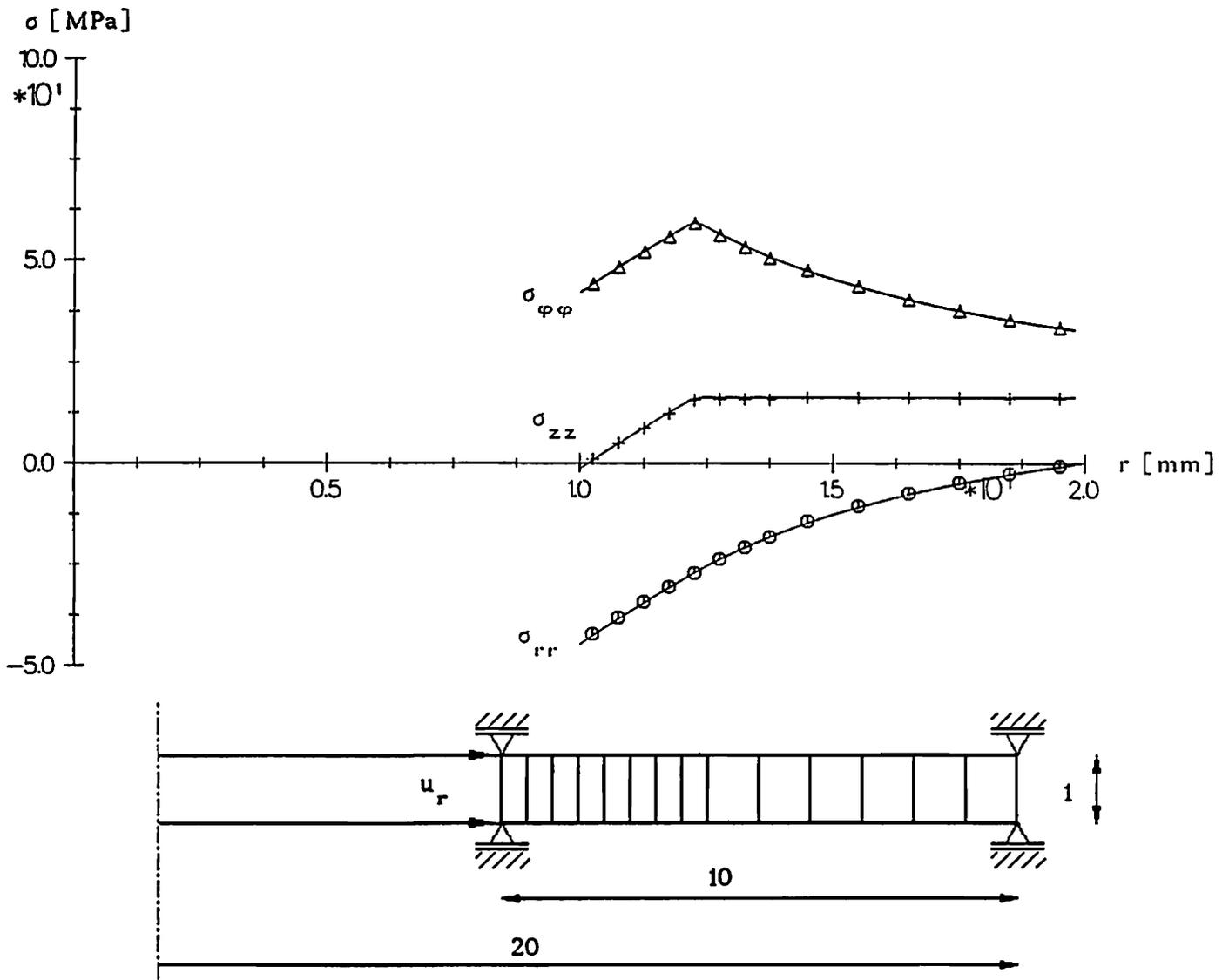


Abb. 3.18: Spannungsverläufe beim dickwandigen Rohr aus elastisch-idealplastischem Material bei vorgegebener Radialverschiebung am Innenrand, analytische Lösung und FE-Rechnung

Bei den hier verwendeten 4-Knotenelementen führt der lineare Ansatz (3.75) zu einem qualitativ falschen Spannungsverlauf innerhalb der Elemente (s. a. [3.57], [3.26]). In Abb. 3.18 tritt dieses Phänomen nicht in Erscheinung, da wie üblich lediglich die Spannungen am mittleren Gaußpunkt dargestellt sind. Abb. 3.19 zeigt dagegen die Radialspannungen an allen drei Gaußpunkten bei Verwendung von 4- und 8-Knotenelementen. Die Spannungssprünge in den 4-Knotenelementen sind so stark, daß sich in den Elementen sogar ein Wechsel von Zug- zu Druckspannungen einstellt, während die quadratischen Ansätze die Spannungsverteilung an allen Gaußpunkten gut wiedergeben. Trotzdem wird die elastisch-plastische Grenze auch von den 4-Knotenelementen gut erfaßt.

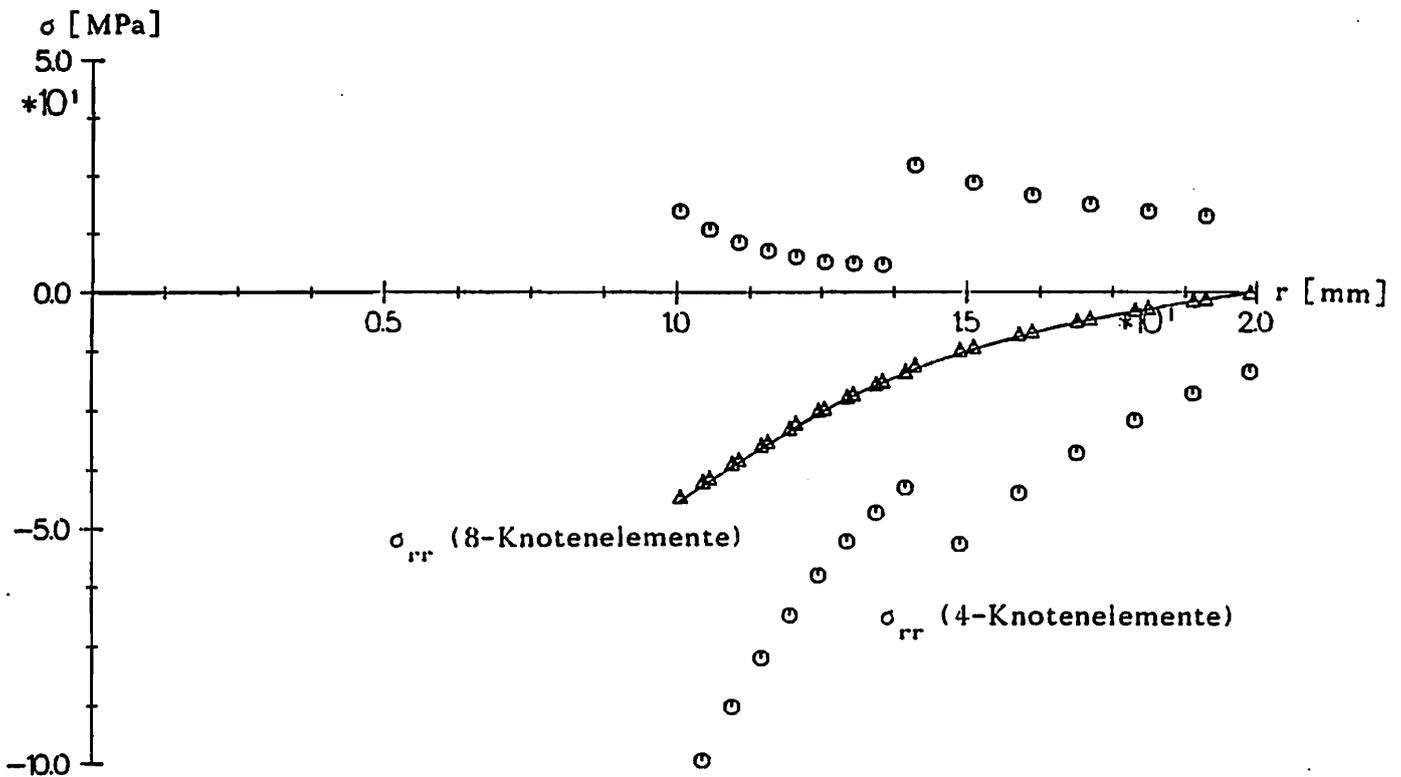


Abb. 3.19: Radialspannung an den äußeren Gaußpunkten bei 4- und 8-Knotenelementen und analytische Lösung (durchgezogene Linie)

Abschließend soll auf den großen praktischen Vorteil aufmerksam gemacht werden, wenn in FE-Programmen Materialmodelle implementiert sind, die mit geringfügigen Änderungen auch elastisch-idealplastisches Verhalten beschreiben können. Nur in diesen Fällen sind einfache Kontrollrechnungen auch bei inhomogenen Spannungszuständen möglich.

3.6.3 Inelastische Analyse von Druckbehältern

Nachdem an Hand von einfachen Testrechnungen nachgewiesen wurde, daß das FE-Programm in der Lage ist, allgemeine axialsymmetrische, inelastische Strukturen zu berechnen, sollen im folgenden zwei Druckbehälter analysiert und mit entsprechenden Rechnungen, die aus der Literatur bekannt sind, verglichen werden.

Zunächst soll ein dickwandiges Rohr unter Innendruck mit Haltezeit analysiert werden. *Bruhns et al.* berechneten diesen Fall für einen Innenradius von 16 mm und einem doppelt so großen Außenradius [2.71]. Das Rohr aus austenitischem Stahl 1.4948, welcher dem Werkstoff AISI 304 sehr ähnlich ist, wird dabei innerhalb von 500 s durch einen Innendruck in Höhe der Fließspannung σ_0 belastet. Anschließend wird dieser Druck für 200 h konstant gehalten und danach wird das Rohr wiederum in 500 s entlastet. Abb. 3.20 zeigt die mit Hilfe des viskoplastischen INTERATOM-Modells (s. Kap. 2.1.5) berechneten Verläufe der Vergleichsspannungen

$$\sigma_v = \|\sigma'\| \quad (3.207)$$

und die Radialverschiebungen u_r am Ende der Belastungsphase, nach der Haltezeit und nach der Entlastung.

In den Abb. 3.21 und 3.22 sind die entsprechenden Größen für AISI 316L mod dargestellt, welche unter Verwendung des hier vorgestellten Materialmodells ermittelt wurden. Die Abmessungen sind ebenso wie die Belastungsgeschwindigkeit mit den oben angegebenen identisch.

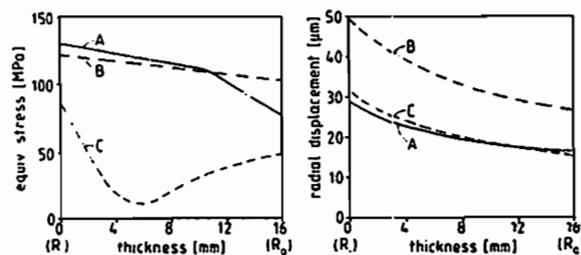


Abb. 3.20: Verlauf der Vergleichsspannung σ_v und der Radialverschiebungen u_r bei einem dickwandigen Rohr aus 1.4948 nach Belastung (A), nach einer Haltezeit (B) und nach Entlastung (C) aus [2.71]

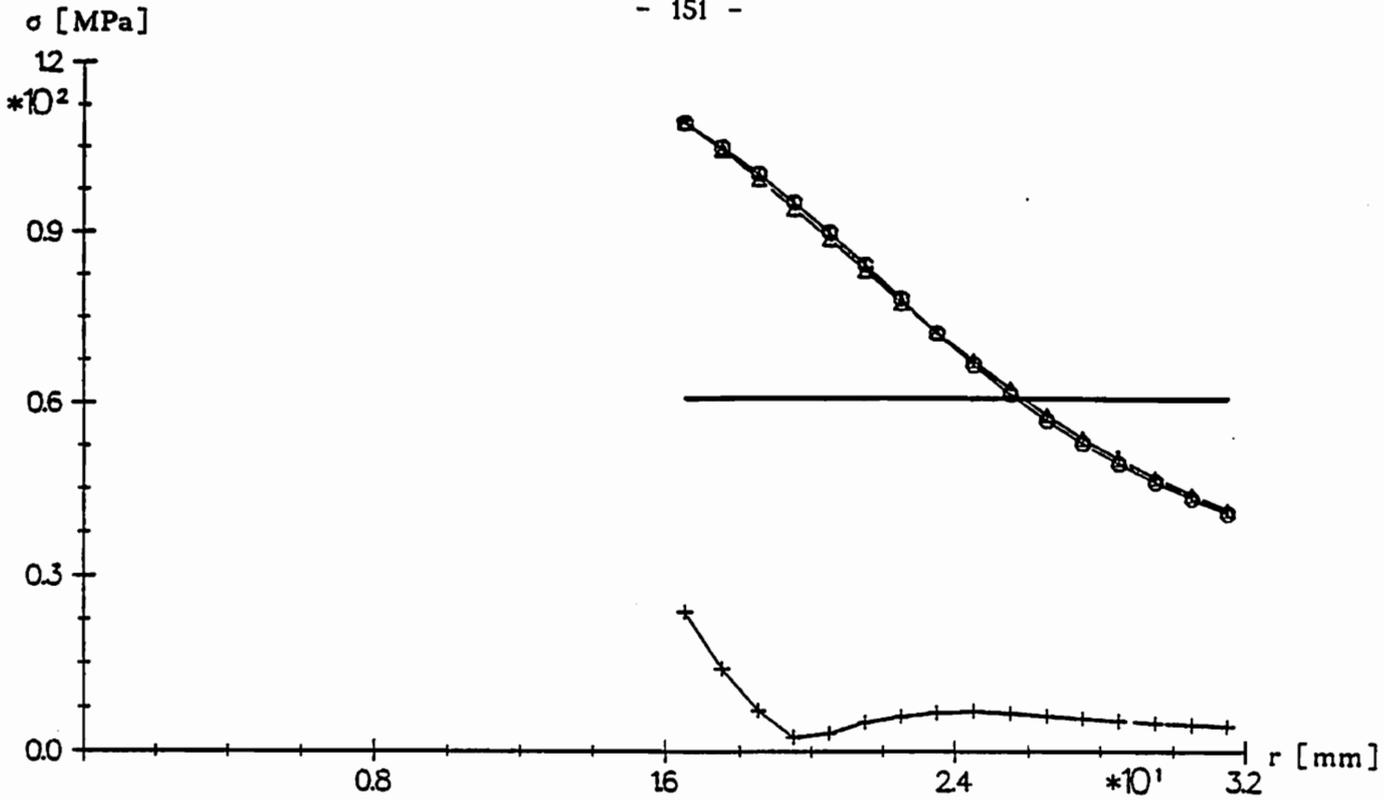


Abb. 3.21: Verlauf der Vergleichsspannung σ_v bei einem dickwandigen Rohr aus AISI 316L mod nach Belastung (Kreissymbole), nach einer Haltezeit (Dreiecke) und nach Entlastung (Kreuze)

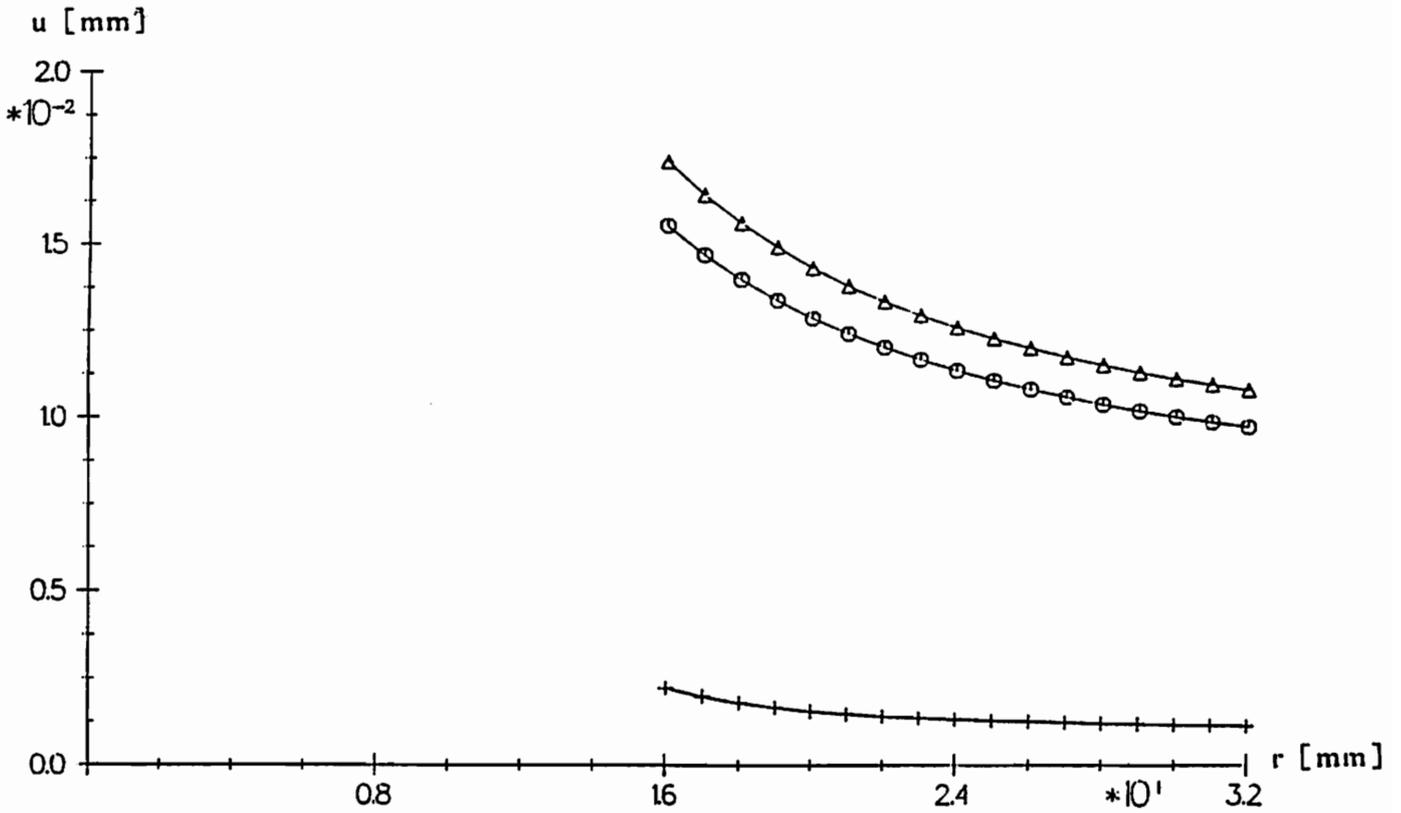


Abb. 3.22: Verlauf der Radialverschiebung u_r bei einem dickwandigen Rohr aus AISI 316L mod nach Belastung (Kreissymbole), nach einer Haltezeit (Dreiecke) und nach Entlastung (Kreuze)

Vergleicht man Abb. 3.20 mit 3.21, so erkennt man, daß die Spannungsverläufe am Ende der Belastungsphase qualitativ gut miteinander übereinstimmen: In beiden Fällen nimmt die Vergleichsspannung zunächst annähernd linear ab. Bei der Abb. 3.20 schließt sich daran ein steilerer, ebenfalls näherungsweise linearer Abschnitt an, während in Abb. 3.21 deutlicher das logarithmische Abklingen der Vergleichsspannung im elastischen Teil des Rohres zu erkennen ist (s. (3.206)). Dieser Übergang findet an der elastisch-inelastischen Grenze

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \quad (3.207)$$

statt, die in Abb. 3.21 durch eine horizontale Linie gekennzeichnet ist. Es fallen die höhere Verfestigung von AISI 316L mod und die geringeren Spannungsumlagerungen bei diesem Material am Ende der Haltezeit auf. Diese führen in beiden Fällen dazu, daß die Vergleichsspannungen zunächst kleiner, dann größer als am Ende der Belastungsphase sind. Die Spannungsverläufe nach der Entlastung ähneln sich sehr: Einer sehr hohen Spannung am Innenrand schließt sich ein steiler Abfall mit einem Minimum bei etwa einem Drittel der Rohrwand an. Bei der FE-Rechnung für AISI 316L mod steigt die Vergleichsspannung kurz an und fällt dann leicht zum Außenrand hin ab, während bei 1.4948 der Anstieg monoton erfolgt. Auf die bemerkenswert großen Restspannungen am Rohrrinnenrand wird bereits in [2.71] hingewiesen.

Die Radialverschiebungen gleichen bei beiden Berechnungen einer Hyperbel (Abb. 3.20 und 3.22). Sie nehmen am Ende der Haltezeit bei 1.4948 so stark zu, daß u_r nach der Entlastung etwa ebenso groß ist wie nach der Belastung. Bei AISI 316L mod sind diese Kriechdehnungen deutlich geringer, was dazu führt, daß die Radialverschiebungen nach Entlastung vergleichsweise klein sind.

Abb. 3.23 zeigt die Spannungsanalyse eines Druckkessels mit geradem Boden, welche [3.9] entnommen ist. Dieser Druckbehälter wird in 1 s mit dem Innendruck p_i belastet und anschließend wird dieser Druck für $1 \cdot 10^4$ s konstant gehalten. In der untenstehenden Abbildung ist die Verteilung der Vergleichsspannung σ_v in MPa dargestellt. Die linke Seite zeigt ein in [3.59] vorgestelltes Rechenergebnis, bei welchem der Behälter aus AISI 304 bei 500° C auf 100 MPa belastet wird. Als Materialmodell wird dabei das von *Hart* verwendet. Auf der rechten Seite ist das Ergebnis einer Spannungsanalyse für AISI 316L mod bei 550° C und einem dem Beispiel in [3.9] entsprechenden Innendruck von 83,75 MPa zu sehen.

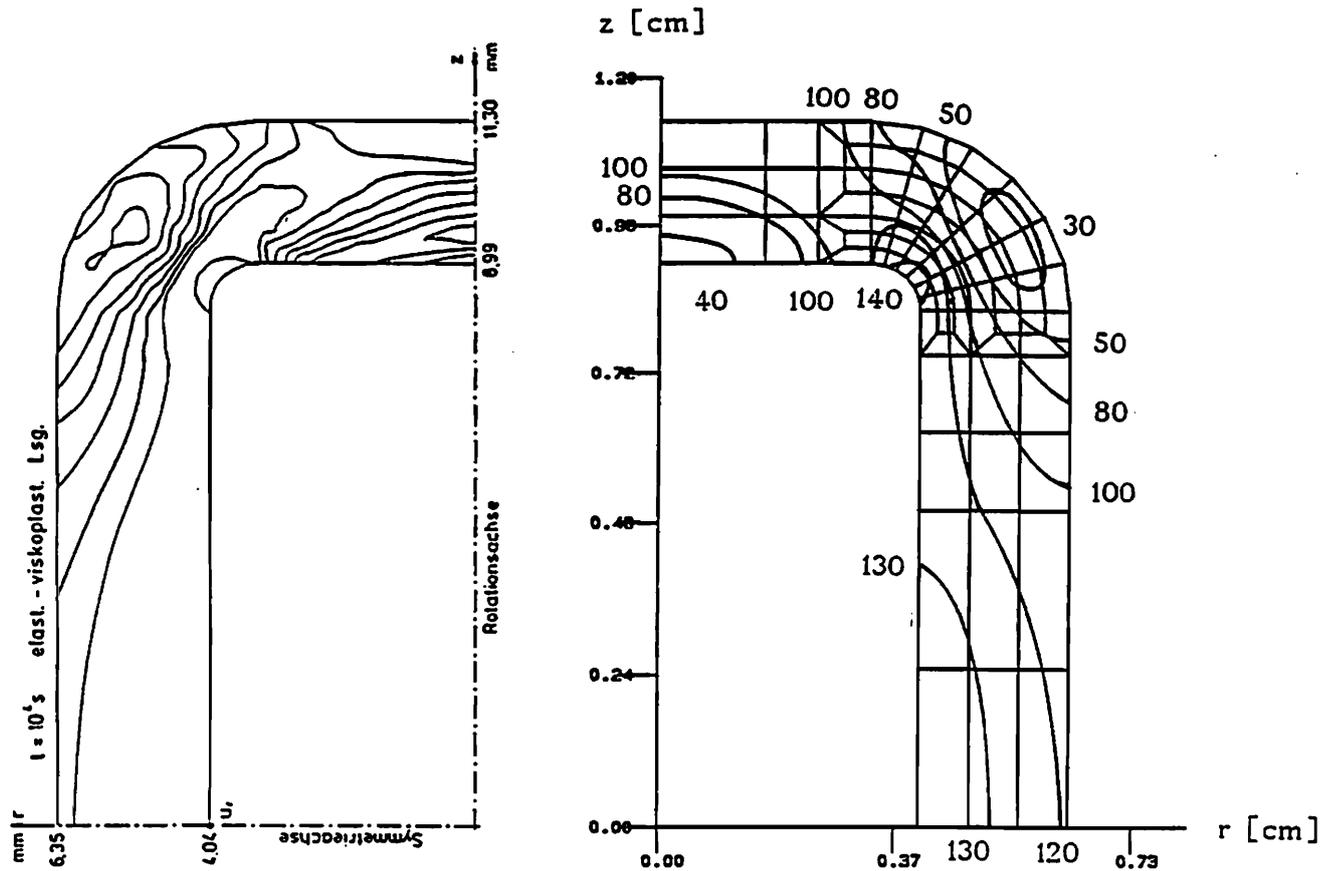


Abb. 3.23: Vergleich zweier FE-Analysen eines Druckkessels mit geradem Boden: AISI 304 bei 500° C unter Verwendung des Stoffgesetzes von *Hart* (links) aus [3.59], AISI 316L mod bei 550° C unter Verwendung des modifizierte INTERATOM-Modells (rechts)

Ein qualitativer Vergleich der Isolinien zeigt eine recht gute Übereinstimmung beider Rechnungen: An der Innenseite des Überganges zum Deckel tritt die maximale Vergleichsspannung auf, die sich zur Außenseite hin sehr schnell abbaut. Dort beobachtet man eine Senke des Spannungsfeldes. Auch der charakteristische Verlauf der 120 MPa - Isolinie bei der Analyse des Druckbehälters aus 316L mod findet seine Entsprechung in der [3.59] entnommenen Darstellung.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war die Entwicklung eines Berechnungsverfahrens zur Analyse viskoplastischer Strukturen.

Es wurde ein Konzept hergeleitet, welches einen exakten Grenzübergang zu elastisch-plastischem Materialverhalten gestattet. Dadurch war es möglich, Materialfunktionen, welche das Verfestigungsverhalten beschreiben, von denjenigen zu separieren, die viskose Effekte erfassen. Damit konnte die Bestimmung dieser Funktionen wesentlich erleichtert werden. Zur Ermittlung einer viskosen Materialfunktion, deren Verlauf zunächst völlig unbekannt war, fand eine neue Strategie Verwendung, die auf einem inkrementellen Vergleich mit experimentell observierbaren Größen beruht. Am Beispiel des austenitischen Stahls AISI 316 L mod wurde gezeigt, daß mit Hilfe des auf der Basis des Stoffgesetzes von *Bruhns* hergeleiteten viskoplastischen Materialmodells sowohl das zyklische Verfestigungsverhalten als auch die Dehnungsratensensitivität sowie primäres und sekundäres Kriechen sehr gut beschrieben werden können.

Dieses Stoffgesetz wurde in ein Finite-Elemente-Programm implementiert, welches sich zur Analyse axialsymmetrischer Strukturen auch bei großen Deformationen eignet und durch einen Prä- und Postprozessor unterstützt wird. Es beruht auf einer Update-Lagrangeschen Formulierung mit Konvergenzbeschleunigung und erlaubt mittels der Verwendung spezieller isoparametrischer 4-, 8- und 12-Knotenelemente auch die Analyse nichtlinearer Torsionsprobleme. Kontrollrechnungen wiesen ausgezeichnete Übereinstimmungen mit analytischen und halbanalytischen Vergleichsrechnungen sowie mit aus der Literatur bekannten Festigkeitsberechnungen von Druckbehältern auf.

Im folgenden soll noch kurz auf laufende und geplante Forschungslinien eingegangen werden. Im Rahmen einer Studienarbeit wird zur Zeit die Anwendung des vorgestellten Konzeptes auf das Mehrflächenmodell von *Bruhns-Müller* [2.93] untersucht. In einem weiteren Arbeitsschritt soll das Stoffgesetz zur Berechnung nichtisothermer Prozesse erweitert werden. Dazu müssen unter Beachtung thermodynamischer Restriktionen die Temperaturerhöhung durch Energiedissipation berücksichtigt und die Abhängigkeit der Materialfunktionen von der Temperatur bestimmt werden (s. z.B. die Arbeiten von *Lehmann* [2.20] und *Szegan* [2.21]). Außerdem sind Rechenzeitvergleiche geplant, um das am besten geeignete numerische Integrationsverfahren zu ermitteln.

Um nichtisotherme, inhomogene Prozesse berechnen zu können, muß das FE-Programm auf Wärmeleitungsprobleme erweitert werden, was bereits von *Feldmüller* durchgeführt wurde [3.27]. Zur Analyse von inelastischen

Scheibenproblemen wurden die Elementmatrizen für den ebenen Spannungszustand berechnet, welche zur Zeit im Rahmen einer Diplomarbeit in das FE-Programm eingebaut werden. Weiterhin ist die Implementierung anderer Stoffgesetze, einschließlich eines Modells zur Beschreibung von Phasenumwandlungen, geplant.

Literaturverzeichnis

- [2.1] Ludwick, P.; *Elemente der Technologischen Mechanik*, Berlin (1909)
- [2.2] Ludwick, P.; Über den Einfluß der Deformationsgeschwindigkeit bei bleibenden Deformationen mit besonderer Berücksichtigung der Nachwirkungserscheinungen, *Physikalische Zeitschrift* **10**, 1910, 411 - 417.
- [2.3] Krempl, E.; Models of Viscoplasticity, Some Comments on Equilibrium (Back) Stress and Drag Stress, *Acta Mech.* **69**, 1987, 25 - 42.
- [2.4] v. Mises, R.; Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand, *Göttinger Nachrichten, Gesell. d. Wiss. Math. - Phys. Klasse*, 1913, 582 - 592.
- [2.5] Bingham, E.C., Green, H.; Paint, a Plastic Material and Not a Viscous Liquid; The Measurement of Its Mobility and Yield Value, *Proc. ASTM* **19**, 1919, 640.
- [2.6] Bingham, E.C.; *Fluidity and Plasticity*, Mc Graw Hill, New York.
- [2.7] Hohenemser, K., Prager, W.; Über die Ansätze der Mechanik isotropen Kontinua, *ZAMM* **12**, 216 - 226.
- [2.8] Kochendörfer, A.; Zur Dynamik der Plastischen Verformung, Untersuchung an Naphtalinkristallen, *Zeitschrift für Kristallographie* **97**, 1937, 263 - 299.
- [2.9] Kochendörfer, A.; Theorie der Kristallplastizität, *Zeitschrift für Physik* **108**, 1938, 244 - 264.
- [2.10] Gilman, J.J.; Progress in the microdynamical theory of plasticity, *Proc. 5th US National Congress of Applied Mechanics*, ASME, New York, 1966, 385.
- [2.11] Perzyna, P.; The constitutive equations for rate sensitive plastic materials, *Quart. Appl. Math.* **20**, 1963, 321 - 332.
- [2.12] Perzyna, P.; On thermodynamic foundations of viscoplasticity, in: *Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads*, Lindholm, U.S. (ed.), IUTAM Symp. San Antonio 1967, Springer Verlag, (1968).

- [2.13] Perzyna, P.; Thermodynamic Theory of Viscoplasticity, in: *Advances in Applied Mechanics*, C.-S. Yih (ed.), Academic Press, (1971).
- [2.14] Zienkiewicz, O.C., Corneau, I.C.; Viscoplasticity - plasticity and creep in elastic solids - a unified numerical solution approach, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **8**, 1974, 821 - 845.
- [2.15] Corneau, J.; Numerical stability in quasistatic elasto/visco-plasticity, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **9**, 1975, 109 - 127.
- [2.16] Schwesig, M. et al.; Erfahrungen aus der Anwendung inelastischer Stoffgesetze bei höheren Temperaturen, in: *Numerische Methoden der Plastomechanik*, Tagungsband, D. Besdo (ed.), Hannover (1989), 280 - 297.
- [2.17] Haupt, P., Korzen, M., Bumb, H.; Inelastisches Werkstoffverhalten: Experimentell beobachtete Phänomene und mathematische Modellbildung, *Abschlußbericht BMFT-Vorhaben 1500 516*, Darmstadt, 1985.
- [2.18] Krieg, R.D.; Numerical integration of some new unified plasticity-creep formulations, *Proc. 4th SMIRT Conference*, M6/4, 1977.
- [2.19] Lehmann, Th.; General frame for the definition of constitutive laws for large non-isothermic elastic-plastic and elastic-viscoplastic deformations, in: *The Constitutive Law in Thermoplasticity*, Th. Lehmann (ed.), *CISM Courses and Lectures*, Springer Verlag, (1984) 379 - 463.
- [2.20] Lehmann, Th.; On a generalized constitutive law for finite deformations in thermo-viscoplasticity, in: *Constitutive Laws for Engineering Materials, Theory and Application*, C.S. Desai, E. Krempl, P.D. Kioussis, T. Kundu (eds.), Elsevier, New York, (1987)
- [2.21] Szepan, F.; Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermo-mechanischen Kopplung, *Mitt. Inst. Mech.* **70**, Bochum, 1989.
- [2.22] Diehl, H.; Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder, *Mitt. Inst. Mech.* **66**, Bochum, 1989.

- [2.23] Fornefeld, W.; Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells, *Mitt. Inst. Mech.* **73**, Bochum, 1990.
- [2.24] Meijers, P., Roode, J.; Experimental Verification of Constitutive Equations for Creep and Plasticity Based on Overlay Models, *ASME J. Pressure Vessel Techn.* **105**, 277 - 284, 1983.
- [2.25] Rohde, R.W., Swearingen, J.C., Krieg, R.D.; A Physically-Based Internal Variable Model for Rate-Dependent Plasticity, *Proceedings of the Pressure Vessels and Piping Conference*, Montreal, 15 - 28, 1978.
- [2.26] Rohde, R.W., Swearingen, J.C.; Deformation Modeling Applied to Stress Relaxation of Four Solder Alloys, *ASME J. Engng. Mat. Techn.* **102**, No. 2, 207 - 214, 1980.
- [2.27] Valanis, K.C.; Fundamental Consequences of a New Intrinsic Time Measure Plasticity as a Limit of the Endochronic Theory, *Arch. Mech.* **32**, 171 - 191, 1980.
- [2.28] Watanabe, O., Atluri, S.N.; Internal Time, General Internal Variable, and Multi-Yield-Surface Theories of Plasticity and Creep: A Unification of Concepts, *Int. J. Plasticity* **2** (1), 37 - 57, 1986.
- [2.29] Watanabe, O., Atluri, S.N.; Constitutive Modeling of Cyclic Plasticity and Creep, Using an Internal Time Concept, *Int. J. Plasticity* **2**, 107 - 134, 1986.
- [2.30] Krempl, E., Cernocky, E.P.; A Theory of the Thermoviscoplasticity Based on Infinitesimal Total Strain, *Int. J. Solids Structures* **16**, No. 8, 723 - 741, 1980.
- [2.31] Krempl, E.; Viscoplasticity Based on Total Strain. The Modeling of Creep With Special Considerations of Initial Strain and Aging, *ASME J. Eng. Mat. Techn.* **101**, 1979, 380 - 386.
- [2.32] Krempl, E.; Viscoplasticity Based on Overstress with a Differential Growth Law for the Equilibrium Stress, *Kurzfassungen der wissenschaftl. Jahrestagung der G.A.M.M.*, 1984, 2 - 14.

- [2.33] Steck, E.; A Stochastic Model for High-Temperature Plasticity of Metals, *Int. J. Plasticity* **1**, 1985, 243 - 258.
- [2.34] Kublik, F.; Numerische Simulation von einachsigen Kriechversuchen, in: *Numerische Methoden der Plastomechanik*, D. Besdo (ed.), Tagungsband, Hannover (1989), 142 - 156.
- [2.35] Hart, E. W.; Constitutive relations for the non-elastic deformation of metals, *Trans. ASME, J. Engng. Mat. Techn.* **98**, 1976, 193 - 202.
- [2.36] Hart, E.W.; Constitutive relations for non-elastic deformation, *Nucl. Engng. Design* **46**, 1978, 179 - 185.
- [2.37] Schwesig, M.; Arbeits- und Ergebnisbericht 1985-1987, Teilprojekt B2: Berechnung stählerner Flächentragwerke bei hohen Temperaturen unter wechselnder Beanspruchung. *SFB Nr. 319 Stoffgesetze für das inelastische Verhalten metallischer Werkstoffe - Entwicklung und technische Anwendung, Arbeitsbericht 1985/86/87*.
- [2.38] Kumar, V., Mukherjee, S.; Creep analysis of structures using a new equation of state type constitutive relation, *Comp. Structures* **6**, 1976, 429 - 437.
- [2.39] Kumar, V., Morjaria, M., Mukherjee, S.; Numerical integration of some stiff constitutive models of inelastic deformation, *Trans. ASME, J. Engng. Mat. Techn.* **102**, 1980, 92 - 96.
- [2.40] Mukherjee, S.; *Boundary Element Methods in Creep and Fracture*, Applied Science Publishers, London und New York, 1982.
- [2.41] Cordts, D., Kollmann, F.G.; An implicit time integration scheme for inelastic constitutive equations with internal state variables, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **23**, 1986, 533 - 554.
- [2.42] Hartmann, G., Kollmann, F.G.; A Computational Comparison of the Inelastic Constitutive Models of Hart and Miller, *Acta Mech.* **69**, 1987, 139 - 165.
- [2.43] Wire, G.L., et.al.; A state variable analysis of inelastic deformation of thin walled tubes, *Trans. ASME, J. Engng. Mat. Techn.* **103**, 1981, 305 - 325.

- [2.44] Huong, F.M., Ellis, F.V., Li, C.Y.; Comparison of load relaxation data of Type 316 austenitic stainless steel with Hart's deformation model, *Met. Trans.* **8A**, 1977, 699 - 704.
- [2.45] Miller, A.K.; An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic and creep deformation: Part I - Equations development and analytical procedures, *Trans. ASME, J. Engng. Mat. Techn.* **98**, 1976, 97 - 105.
- [2.46] Frost, H.J., Ashley, M.F.; *Deformation Mechanism Maps*, Oxford¹ (1982)
- [2.47] Miller, A.K.; An inelastic constitutive model for monotonic, cyclic and creep deformation: Part II - Application to type 304 stainless steel, *Trans. ASME, J. Engng. Mat. Techn.* **98**, 1976, 106 - 113.
- [2.48] Schmidt, C.G., Miller, A.K.; An unified phenomenological model for nonelastic deformation of type 316 stainless steel, Part I and II, *Res. Mechanica* **3**, 1981, 109 - 129, 175 - 193.
- [2.49] Hartmann, G.; Comparison of the uniaxial behavior of the inelastic constitutive models of Miller and Walker by numerical experiments, *Int. J. Plasticity* **6**, 1990, 189 - 206.
- [2.50] Tanaka, T.G., Miller, A.K.; Development of a method for integrating time-dependent constitutive equations with large, small or negative strain rate sensitivity, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **26**, 1988, 2457 - 2485.
- [2.51] Chaboche, J.L.; Constitutive equations for cyclic plasticity, *Int. J. Plasticity* **5**, 1989, 247 - 302.
- [2.52] Chaboche, J.L., Rousselier, G.; On the plastic and viscoplastic constitutive equations - Part I: Rules developed with internal variable concept, *J. Pressure Vessel Techn.* **105**, 1983, 153 - 158.
- [2.53] Nouailhas, D.; Unified modelling of cyclic viscoplasticity: application to austenitic stainless steels, *Int. J. Plasticity* **5**, 1989, 501 - 520.
- [2.54] Chaboche, J.L., Nouailhas, D.; On Various Non-Linear Kinematic Hardening Rules in Cyclic Plasticity and Viscoplasticity, in: *Computational Mechanics '88 - Theory and applications 1*, S.N. Atluri, G. Yagawa (eds.), Springer Verlag, 1988.

- [2.55] Armstrong, P.J., Frederick, C.O.; A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, *G.E.G.B. Report RD/B/N 731*.
- [2.56] Tsakmakis, Ch.; Über inkrementelle Materialgleichungen zur Beschreibung großer inelastischer Deformationen, *VDI-Fortschrittsberichte Reihe 18 Nr. 36*, VDI-Verlag, 1987.
- [2.57] Chaboche, J.L.; Cyclic plasticity modeling and ratchetting effects, in: *Constitutive Laws for Engineering Materials, Theory and Applications. vol. 1*, C.S. Desai, E. Krempl, P.D. Kiousis, T. Kundee (eds.), Elsevier (1987), 47 - 58.
- [2.58] Pape, A.; Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhalten von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells, *Mitt. Inst. Mech. 57*, Bochum, 1988.
- [2.59] Ohno, N., Kachi, Y.; Description of Stress- and Strain-Controlled Cyclic Plasticity Using the Cyclic Non-Hardening Region Model, *8th SMIRT Conference, no. L2/2*, Brussels.
- [2.60] Eftis, J., Abdel-Kader, M.S., Jones, D.L.; Comparisons between the modified Chaboche and Bodner-Partom viscoplastic constitutive theories at high temperature, *Int. J. Plasticity 5*, 1989, 1 - 27.
- [2.61] Chaboche, J.L.; Modelling of cyclic viscoplasticity in finite element codes, in: *Constitutive Laws for Engineering Materials, Theory and Application, vol. 2*, C.S. Desai, E. Krempl, P.D. Kiousis, T. Kundee (eds.), Elsevier (1987), 1165 - 1172.
- [2.62] Yao, D., Krempl, E.; Viscoplasticity theory based on overstress. The prediction of monotonic and cyclic proportional and nonproportional loading paths of an aluminium alloy, *Int. J. Plasticity 1*, 1985, 259 - 274.
- [2.63] Bruhns, O.T.; The INTERATOM model, in: *Constitutive Modelling in the Range of Inelastic Deformations*, O.T. Bruhns, INTERATOM No. 68.09030.6, 1984, 33 - 63.
- [2.64] Phillips, A.; Combined stress experiments in plasticity and viscoplasticity. The effects of temperature and time, in: *Plasticity of metals at finite strain: theory, computation and experiment*, E.H. Lee, R.L. Mallett (eds.), Division of Applied Mechanics, Stanford

University, Stanford, Cal. and the Department of Mechanical Engineering, Aeronautical Engineering and Mechanics, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, N.Y., 1982, 230 - 252.

- [2.65] Krempl, E., McMahon, J.J., Yao, D.; Viscoplasticity based on overstress with a differential growth law for the equilibrium stress, *Mech. Mat.* **5**, 1986, 25 - 48.
- [2.66] Krempl, E.; Isotropic and orthotropic formulations of the viscoplastic theory based on overstress, in: *Constitutive Laws for Engineering Materials - Theory and Applications*, Vol. I, C.S. Desai, E. Krempl, P.D. Kiousis, T. Kundu (eds.), Elsevier (1987), 137 - 148.
- [2.67] Gilman, J.J.; Progress in the microdynamical theory of plasticity. *Proc. 5th US National Congress of Applied Mechanics*, ASME, New York (1966), 385.
- [2.68] Krempl, E., Lu, H.; The Hardening and Rate-Dependent Behavior of Fully Annealed AISI type 304 Stainless Steel Under Biaxial In-Phase and Out-of-Phase Strain Cycling at Room Temperature, *J. Engng. Mat. Techn.* **106**, Transactions of the ASME, 1984, 376 - 382.
- [2.69] Sham, T.-L., Chow, H.W.; A finite element method for an incremental viscoplasticity theory based on overstress, *Euro. J. Mech., A/Solids* **8**, no. 6, 1989, 415 - 436.
- [2.70] Youtsos, A.G., Donea, J., Verzeletti, G.; Viscoplastic behaviour of stainless steels AISI 316 L and 316 H, *Acta Mech.* **76**, 1989, 161 - 187.
- [2.71] Bruhns, O.T., Boecke, B., Link, F.; The constitutive relations of elastic-inelastic materials at small strains, *Nucl. Engng. Design* **83**, 1984, 325 - 331.
- [2.72] Bruhns, O.T., Lehmann, Th.; Optimum deformation rate in large inelastic deformation, in: *Metal Forming Plasticity*, IUTAM Symposium Tutzing 1978, H. Lippmann (ed.), Springer Verlag, Berlin (1979), 120 - 138.
- [2.73] Bruhns, O.T. et al.; New constitutive equations to describe infinitesimal elastic-plastic deformations, *ASME*, 82-PVP-71, 1 - 6.

- [2.74] Corum, J.M., Pugh, C.E.; High-Temperature Structural Design Program Progress Report for Period Ending December 31, 1974, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee, USA, *Report ORNL-5048*, 1975.
- [2.75] Bruhns, O.T., Hübel, H.; Constitutive equations for the inelastic behaviour of stainless steels, in: *Recent Advances in Design Procedures for High Temperature Plant*, The Institution of Mechanical Engineers, (1988).
- [2.76] Bruhns, O.T.; Constitutive modelling in the range of inelastic deformations, *INTERATOM No. 68.09030*, 1984, 33 - 63.
- [2.77] Breitling, H.; Hochtemperaturlauslegung natriumführender Systeme, Teil A1 - Werkstoffverhalten, 4. Zwischenbericht, *INTERATOM No. 55.06265.6*, 1983.
- [2.78] Bruhns, O.T. et al.; The Interatom Model, in: *Advances in Constitutive Laws for Engineering Materials*, J. Fan, S. Murakami (eds.), Vol. 1, Pergamon Press, 16 - 21.
- [2.79] Pitzer, M., Rott, U.; Werkstoffbeschreibende Beziehungen für den austenitischen Stahl WN 1.4948 - Verifikation des IA-Werkstoffmodells, 1989, unveröffentlicht.
- [2.80] Pitzer, M.; Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes, *Mitt. Inst. Mech. 61*, Bochum, 1988.
- [2.81] Bruhns, O.T., Boecke, B.; The Model of INTERATOM, in: *Computational Mechanics '88 - Theory and Applications*, S.N. Atluri, G. Yagawa (eds.), Springer (1988)
- [2.82] Bruhns, O.T.; On the constitutive relations of austenitic stainless steels, in: *Constitutive Laws for Engineering Materials - Theory and Applications*, vol. I, C.S. Desai, E. Krempl, P.D. Kiousis, T. Kundu (eds.), Elsevier, New York (1987), 675 - 682.
- [2.83] Bodner, S.R., Partom, Y.; A Large Deformation Elastic-Viscoplastic Analysis of a Thick-Walled Spherical Shell, *J. Appl. Mech. 42*, 751 - 757, 1972.
- [2.84] Gear, C.W., The Automatic Integration of Stiff Ordinary Differential Equations, *Comm. of the ACM 14*, 185 -190, 1971.

- [2.85] Pitzer, M., Vortrag, unveröffentlicht
- [2.86] Zander, G., Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast, *Mitt. Inst. Mech.* **27**, Bochum, 1982.
- [2.87] RCC-MR Design and Construction Rules for Mechanical Components of FBR Nuclear Islands, AFCEN , 1985.
- [2.88] Müller, D., Hartmann, G.; Identifikation von Werkstoffparametern mit einem numerischen Optimierungsverfahren nach der Evolutionsstrategie in : *Workshop über große plastische Formänderungen, Bad Honnef 1988*, *Mitt. Inst. Mech.* **63**, O.T. Bruhns (ed.), Bochum, 1989.
- [2.89] Rechenberg, J.; *Evolutionsstrategie*, Friedrich Frommann Verlag, (1973)
- [2.90] Bruhns, O.T., Pitzer, M.; Constitutive Modelling in the Range of Inelastic Deformations - Evaluation of Parameters, EG-Bericht, 1986.
- [2.91] Scholz, Ch.; Ein Beitrag zur Gestaltsoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen, *Mitt. Inst. Mech.* **71**, Bochum, 1989
- [2.92] Youtsos, A.G., Gutierrez, E., Verzeletti, G.; Viscoplastic behaviour of stainless steel AISI 316L under cyclic loading conditions, *Acta Mech.* **84**, 1990, 109 - 125.
- [2.93] Bruhns, O.T., Müller, R.; Some Remarks on the Application of a Two-Surface Model in Plasticity, *Acta Mech.* **53**, 1984, 81 - 100.
- [2.94] Dafalias, Y.F., Popov, E.P.; Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity, *J. Appl. Mech.* **43**, 1976, 645 - 651.
- [2.95] Dafalias, Y.F., Popov, E.P.; A model of nonlinearly hardening materials for complex loading, *Acta Mech.* **21**, 1975, 173 - 192.
- [2.96] Otto, W., Schäming, K; *Internationaler Vergleich von Standard-Werkstoffen*, Beuth-Verlag, 3. Auflage.
- [2.97] Weiss, B., Stichler, R.; Phase Instabilities During High Temperature Exposure of 316 Austenitic Stainless Steel, *Metall. Transaction* **3**, 1972, 851 - 866.

- [3.1] Bathe, K.-J.; *Finite-Elemente-Methoden*, Springer-Verlag, (1986)
- [3.2] Schwarz, H.R.; *Methode der finiten Elemente*, 2., überarbeitete und erweiterte Auflage, B. G. Teubner, (1984).
- [3.3] Courant, R.; Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations, *Bulletin of the American Mathematical Society* **49**, 1943, 1 - 23.
- [3.4] Ritz, W.; Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, *ZAMM* **135**, Heft 1, 1908, 1 - 61.
- [3.5] Turner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C., Topp, L.J.; Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, *J. Aeronautical Science* **23**, 1956, 805 - 823.
- [3.6] Clough, R.W.; The Finite Element in Plane Stress Analysis, *Proceedings, 2nd A.S.C.E. Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh, Pa., (1960).
- [3.7] Argyris, J.H., Mlejnek, H.-D.; *Die Methode der Finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik*, Band 1 - 3, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig - Wiesbaden, (1986).
- [3.8] Dankert, J.; *Numerische Methoden der Mechanik*, Springer-Verlag, Wien, (1977).
- [3.9] Zienkiewicz, O.C.; *Methode der finiten Elemente*, Carl Hanser Verlag, München, (1975).
- [3.10] Marcal, P.V., King, I.P.; Elastic-plastic analysis of two dimensional stress systems by the finite element method, *Int. J. Mech. Sci.* **9**, 1967, 143 - 155.
- [3.11] Yamada, Y., Yoshimura, N., Saurai, T.; Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Method, *Int. J. Mech. Sci.* **10**, 1968, 343 - 354.
- [3.12] Zienkiewicz, O.C., Valliappan, S., King, I.P.; Elasto-plastic solution of engineering problems, Initial-stress, finite element approach, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1969, 75 - 100.

- [3.13] Greenbaum, G.A., Rubinstein, M.F.; Creep analysis of axisymmetric bodies using finite elements, *Nucl. Engng. Design* **7**, 1968, 378.
- [3.14] Sutherland, W.A; AXICRP. Finite element computer code for creep analysis of plane stress, plane strain and axisymmetric bodies, *Nucl. Engng. Design* **11**, 1970, 269.
- [3.15] Zienkiewicz, O.C., Corneau, I.C.; Visco-Plasticity solution by finite element process, *Arch. Mech.* **24**, 1972, 873 - 889.
- [3.16] Zienkiewicz, O.C., Owen, D.R.J., Corneau, I.C.; Analysis of viscoplastic effects in pressure vessels by the finite element method, *Nucl. Engng. Design* **28**, 1974, 278 - 288.
- [3.17] Hughes, Th.,J.R., Taylor, R.L.; Unconditionally stable algorithms for quasi-static elasto/visco-plastic finite element analysis, *Comp. Structures* **8**, 1978, 169 - 173.
- [3.18] Kanchi, M.B., Zienkiewicz, O.C., Owen, D.R.J.; The visco-plastic approach to problems of plasticity and creep involving geometric non-linear effects, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **12**, 1978, 169 - 181.
- [3.19] Owen, D.R.J, Hinton, E.; *Finite Elements in Plasticity, Theorie and Practice*, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., (1980).
- [3.20] Nagarajan, S., Popov, E.P.; Plastic and viscoplastic analysis of axisymmetric shells, *Int. J. Solids Structures* **11**, 1975, 1 - 9.
- [3.21] Klee, K.-D.; Theoretische und numerische Behandlung geometrisch nichtlinearer viskoplastischer Kontinua, *Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität D 3000 Hannover, Bericht F 79/1*, 1979.
- [3.22] Klee, K.-D., Paulun, J.; On numerical treatment of large elastic-viscoplastic deformations, *Arch. Mech.* **32**, 3, 1980, 333 - 345.
- [3.23] Nagtegaal, J.C., de Jong, J.E.; Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis, *Int. J. Num. Meth. Engng.* **17**, 1981, 15 - 41.
- [3.24] Nagtegaal, J.C.; On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* **33**, 1982, 469 - 484.

- [3.25] Brebbia, C.A.; *Finite element systems: a handbook*, Brebbia, C.A. (ed.), *Southampton: Computational Mechanics Centre*, Springer-Verlag, Berlin, (1982).
- [3.26] Rott, U., Fornefeld, W.; Internes Arbeitspapier zum FE-Programm BRUNS, unveröffentlicht, 1988.
- [3.27] Feldmüller, A.; Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotroper geschädigter Kontinua, *Mitt. Inst. Mech.* **75**, Bochum, 1991.
- [3.28] Macvean, D.B.; Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren, *ZAMM* **19**, 1968, 157 - 185.
- [3.29] Schmid, U.; Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern, *Mitt. Inst. Mech.* **50**, Bochum, 1987.
- [3.30] Jaumann, G.; Geschlossenes System physikalischer und chemischer Differentialgesetze, *Sitzungsbericht Kaiserl. Akad. der Wissenschaften, Wien, Abt. IIa*, 120, 1911.
- [3.31] Bruhns, O.T.; Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Verzweigungslasten elasto-plastisch deformierter Kontinua, *Mitt. 74-9, Inst. KIB*, Bochum, 1974.
- [3.32] Betten, J.; *Elastizitäts- und Plastizitätslehre*, 2. Auflage, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, (1986).
- [3.33] Paulun, J.; Zur Theorie und Berechnung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Kontinua mit Anwendung der Methode der finiten Elemente, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Technischen Universität Hannover, Bericht-Nr. F77/4, 1977.
- [3.34] Buck, K.E., Scharpf; Einführung in die Matrizen-Verschiebungsmethode in: *Finite Elemente in der Statik*, Buck, K.E., Scharpf, D.W., Stein, E., Wunderlich, W. (eds.), Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, (1973).
- [3.35] Gallagher, R.H.; *Finite-Element-Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, (1976).

- [3.36] Marsal, D.; *Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen*, Bibliographisches Institut, Mannheim, (1976).
- [3.37] Becker, E., Bürger, W.; *Kontinuumsmechanik*, B.G. Teubner, Stuttgart, (1975).
- [3.38] Klingbeil, E.; *Tensorrechnung für Ingenieure*, Bibliographisches Institut, Mannheim, (1966).
- [3.39] Waller, H., Krings, H.; *Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik*, Bibliographisches Institut, Mannheim, (1975).
- [3.40] Goßmann, E., Waller, H.; Übersicht über numerische Integrationsmethoden für technische Schwingungsprobleme, *Forsch. Ing.-Wes.* **50**, Nr. 5, 1984, 149 - 159.
- [3.41] Rechenberg, P.; *Die Simulation kontinuierlicher Prozesse mit Digitalrechnern*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, (1972).
- [3.42] Jordan-Engeln, G., Reutter, F.; *Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit Standard-FORTRAN-Programmen*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 3., überarbeitete und erweiterte Auflage, (1981).
- [3.43] Engeln-Müllges, G., Reutter, F.; *Numerische Mathematik für Ingenieure*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 4., überarbeitete Auflage, (1985).
- [3.44] Zurmühl, R.; *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*, 5., neubearbeitete Auflage, Springer-Verlag, Berlin, (1965).
- [3.45] Steck, E., Kublick, F., Gröhlich, H.; Arbeits- und Ergebnisbericht 1985 - 1987 des SFB 319, Teilprojekt B1: *Berechnungsverfahren für metallische Bauteile bei Beanspruchungen im Hochtemperaturbereich*.
- [3.46] Brezinski, C.; *Algorithmes d'accélération de la convergence*, Editions Technip, Paris, (1978).
- [3.47] Aitken, A.C.; On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **46**, 1926, 289 - 305.
- [3.48] Rosen, R.; Matrix bandwidth minimization, *Proc. ACM Nat. Conf.*, Brandon Systems Press, Princeton, N.J., 1968, 585 - 595.

- [3.49] Cuthill, E.; Several strategies for reducing the band width of matrices, in: *Sparse matrices and their applications*, Rose, D.J., Willoughby, R.A. (eds.), New York, 1972, 157 - 166.
- [3.50] Cuthill, E., McKee, J.; Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices, in: *Proc. ACM Nat. Conf.*, New York, 1969, 157 - 172.
- [3.51] Gröbner, W., Hofreiter, N.; *Integraltafel, Erster Teil, Unbestimmte Integrale*, 4., verbesserte Auflage, Springer-Verlag, Wien, (1965).
- [3.52] Meyer zur Capellen, W.; *Integraltafeln*, Springer-Verlag, Berlin, (1950).
- [3.53] Rott, U.; Ein finites Element zur Beschreibung axialsymmetrischer Prozesse, in: *Numerische Methoden der Plastomechanik*, Tagungsband, D. Besdo (ed.), Hannover (1989), 233 - 243.
- [3.54] Lehmann, Th.; Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für große elasto-plastische Formänderungen, *Ing.-Archiv* **41**, 1972, 297 - 310.
- [3.55] Dienes, J.K.; On the Analysis of Rotation and Stress Rate in Deforming Bodies, *Acta Mech.* **32**, 1979, 217 - 232.
- [3.56] Szabo, J.; *Höhere Technische Mechanik*, 4., verbesserte und erweiterte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, (1964).
- [3.57] Schreiber, L.; Versagenskriterium und -lasten für dickwandige Behälter, *Inst. Mech. Mitt.* **2**, Kassel, 1985.
- [3.58] Mitteilungsblatt des Rechenzentrums Erlangen Nr. 37, F. Wolf (ed.), 1986
- [3.59] Schwesig, M; Erfahrungen aus der Anwendung inelastischer Stoffgesetze bei höheren Temperaturen, in: *Numerische Methoden der Plastomechanik*, Tagungsband, D. Besdo (ed.), Hannover (1989), 280 -297.

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoelastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen, elastoelastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elastoelastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauer:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen

- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermoeffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY

- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und Ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowsky/Helmut Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67 **Michael Geis:**
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 **Günter Renker:**
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 **Berthold Schleck:**
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 **Frank Szepan:**
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 **Christian Scholz:**
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 **J. Badur/H. Stumpf:**
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory
- Nr. 73 **Werner Fornefeld:**
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 **J. Saczuk/H. Stumpf:**
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 **Andreas Feldmüller:**
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 **Ulfert Rott:**
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 76**