



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Werner Fornefeld

Zur Parameteridentifikation und
Berechnung von
Hochgeschwindigkeitsdeformationen
metallischer Werkstoffe anhand
eines Kontinuums-Damage-Modells

Heft Nr. 73



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik
Ruhr-Universität Bochum**

Werner Fornefeld

**Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindig-
keitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines
Kontinuums-Damage-Modells**

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 73
Januar 1990**

Herausgeber : Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Universität-Gh Kassel und am Lehrstuhl für Mechanik I der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns danke ich für die Unterstützung dieser Arbeit und für die Übernahme des Referates. Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller danke ich für die Übernahme des Korreferates.

Allen Mitarbeitern der Mechanik- Institute in Kassel und Bochum, die zum Entstehen der Arbeit beigetragen haben, danke ich herzlich. Besonders erwähnen möchte ich meinen langjährigen Kollegen Dr.-Ing. H. Diehl, der mit dem Rahmen seiner Kontinuums-Damage-Theorie eine wesentliche Grundlage dieser Arbeit stellte und Herrn Dipl.-Ing. U. Rott für die konstruktive Zusammenarbeit bei der Entwicklung des FE-Rumpfprogramms.

Abschließend danke ich der Fraunhofer-Gesellschaft für die finanzielle Förderung und Herrn Dr.-Ing. C.-P. Woidneck für seine Hilfe bei der Abwicklung des Forschungsvorhabens.

Januar 1990

Werner Fornefeld

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns
Prof. Dr.-Ing. H. Waller

Tag der Einreichung: 15.11.1989
Tag der mündlichen Prüfung : 26.01.1990

© 1990 Dr.-Ing. Werner Fornefeld
Kiefernweg 40
4630 Bochum

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie) bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Kurzfassung

Das Bestreben, Material- und Strukturverhalten metallischer Werkstoffe bei immer größeren Dehngeschwindigkeiten zu erforschen, hat zur Entwicklung spezieller experimenteller und numerischer Verfahren geführt.

Bei diesen Hochgeschwindigkeitsdeformationen treten inhomogene Spannungs- bzw. Dehnungszustände auf. Die Auswertung der Experimente etwa zum Zweck der Anpassung eines Stoffgesetzes erfordert deshalb numerische Lösungsmethoden. Zusätzliche Überlegungen werden durch die Temperatureinflüsse, die sich bei geschwindigkeitsabhängigem Materialverhalten oft nicht separieren lassen, notwendig.

In dieser Arbeit wird zur Beschreibung des Materialverhaltens bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen eine Kontinuums-Damage-Theorie verwendet, die als Innere-Variable-Theorie thermodynamisch konsistent formuliert ist und viskoplastische Deformationen durch ein Überspannungsmodell mit isotroper und kinematischer Verfestigung beschreibt. Die Schädigung durch Mikroscherbänder wird durch einen Damage-Tensor erfaßt. Der Gültigkeitsbereich erstreckt sich über 10 Dekaden der Dehngeschwindigkeiten.

Für die Bestimmung der Materialparameter wird ein mehrstufiges iteratives Konzept entwickelt, das auf der Evolutionsstrategie aufbaut. Die Evolutionsstrategie ist ein Optimierungsverfahren für technische Systeme, das sich aus Auswahlkriterien der biologischen Evolution ableitet. Seine Vorteile gegenüber den deterministischen Verfahren werden aufgezeigt. Die Anpassungsstrategie kann auf die Anpassung verschiedenster Stoffgesetze verallgemeinert werden.

Die numerische Simulation von Hochgeschwindigkeitsdeformationen wird ausgehend vom Prinzip der virtuellen Arbeit für große Deformationen und den konstitutiven Gleichungen in einer Update-Lagrangische Formulierung durch einen Finite-Elemente-Algorithmus zur Berechnung rotationssymmetrischer Prozesse realisiert. Besondere Bedeutung hat in diesem Zusammenhang die Diskussion der Orts- und Zeitdiskretisierung, sowie eine Kombination der Integration der Bewegungsgleichungen mit der Gleichgewichtsiteration.

Wie die aufgezeigten Einflüsse der Probengeometrie auf die Meßwerte unterstreichen, ist eine deutliche Trennung von Materialverhalten und Strukturverhalten erforderlich.

Im Rahmen weiterer numerischer Simulationen werden Vorhersagen zur Wellenausbreitung, Temperaturentwicklung und Auswirkung der Schädigung getroffen.

Summary

The investigation of material behaviour at high rates of strain led to special experimental and numerical methods.

High strain rate deformations are characterized by inhomogeneous states of stress and strain. Therefore the interpretation of experiments e.g. to develop a material model requires numerical methods. We have also to consider the influence of temperature, which can not be separated when strain rate sensitive materials are investigated.

In this paper the constitutive behaviour of materials under dynamic loading is described by a continuum damage theory, which is valid for nonisothermal processes and is consistent with the second law of thermodynamics. Microstructural changes are modelled by internal variables, e.g. damage due to shear bands is described by a second order tensor. Dislocation induced viscoplastic deformations are modelled using a flow rule of "overstress"-type with isotropic and kinematic hardening. This theory is applicable for strain rates of 10^{-5} to 10^5 s⁻¹.

We present an iterative, multi-step concept to determine material parameters, which is based on the evolutionary strategy. The evolutionary strategy is an optimization method for engineering systems, which imitates the principles of biological evolution. The advantages of this method compared with deterministic procedures are outlined. The concept of determination of parameters mentioned above may be applied to other constitutive models as well.

The calculation of high velocity deformations is based on the principle of virtual work and the constitutive equations. An updated Lagrangian formulation is used to build up a finite element algorithm to analyse axisymmetric processes. We pay special attention to discretisation in space and time and to the coupling of time integration of the equations of motion with the iteration for dynamic equilibrium.

Material behaviour and the behaviour of the structure have to be distinguished, because there is an influence of the specimen shape on the results of experiments. We are able to confirm those effects with our FE-code. Further numerical simulations are done in order to predict the wave propagation, the evolution of temperature and the effects of damage.

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG, INHALTSANGABE	1
Kap. A. EVOLUTIONSSTRATEGIE	5
A.1 Grundlagen der Evolutionsstrategie	5
A.2 Erweiterte Evolutionsstrategie	8
Kap. B. MATERIALVERHALTEN	13
B.1 Experimente zu HGDn metallischer Werkstoffe	13
B.1.1 Übersicht über die Experimente	13
B.1.2 Versuchsauswertung	19
B.1.3 Experimentelle Ergebnisse zur Mikromechanik	23
B.1.4 Darstellung der Ergebnisse	25
B.1.5 Zusammenfassung der wichtigsten experimentellen Befunde	27
B.2 Modellbildung	28
B.3 Anpassung des Materialmodells	33
B.3.1 Definition des Vergleichsmaterials	34
B.3.2 Anpassungsstrategie	36
B.3.3 Ergebnisse von Testrechnungen homogener Spannungszustände	43
Kap. C. STRUKTURVERHALTEN	54
Einleitung und Überblick	54
C.1 Grundgleichungen der FE-Methode	55
C.1.1 Prinzip der virtuellen Arbeit für große Formänderungen	55
C.1.2 Konstitutive Gleichungen	56
C.2 Update-Lagrangesche Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit	58
C.3 Umsetzung in eine FE-Formulierung	64
C.3.1 Wahl der Elemente	64

C.3.2	Ansatzfunktionen	65
C.3.3	Aufbau der Matrizen	67
C.3.4	Aufbau des Gleichungssystems	72
C.3.5	Numerische Integration	74
C.3.6	Zeitintegration der konstitutiven Gleichungen	76
C.3.7	Zeitintegration der Bewegungsgleichungen und Kopplung mit der Gleichgewichtsiteration	80
C.3.8	Bemerkungen	82
C.4	Ergebnisse der FE-Rechnungen	84
C.4.1	Statische Berechnungen	84
C.4.2	Ergebnisse dynamischer Untersuchungen	87
C.4.3	Berechnung von Experimenten zu HGDn	95
C.4.4	Simulation des Taylortests	102
ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSBEMERKUNGEN		105
Anhang 1:	Materialgleichungen und Parameter	108
Anhang 2:	Kinematik	113
Anhang 3:	Aufbereitung des Stoffgesetzes für die FE-Formulierung	118
Literatur		127

Bezeichnungen

Aufgeführt werden nur die wichtigsten Bezeichnungen. Weitere in der Arbeit verwendete Symbole und Parameter sind im Text erklärt. Materialfunktionen und Materialparameter sind im Anhang 1 aufgelistet.

a	Vektor
A	Tensor
()'	Deviator
[]	Matrix
[]⁻¹	inverse einer Matrix
()^o	objektive Zeitableitung nach Jaumann
()[#]	objektive Zeitableitung
()[.]	substantielle Zeitableitung
1	Einstensor
[]_α	falls Fließbedingung erfüllt; sonst 0
< >_α	falls Belastungsbedingung erfüllt; sonst 0
A	Fläche
[B_I]	Verzerrungs-Verschiebungsmatrix
[B_{nI}]	Gradienten-Verschiebungsmatrix
[C*]	Spannungs-Verzerrungsmatrix
[C]	symmetrisierte Spannungs-Verzerrungsmatrix
D	Dehngeschwindigkeitstensor
D_r, D_i	reversibler und irreversibler Anteil des Dehngeschwindigkeits-tensors
D_{vt}	durch thermisch aktivierte Versetzungsbewegung verursachter Anteil des Dehngeschwindigkeitstensors
D_o	schädigungsinduzierter Anteil des Dehngeschwindigkeitstensors
D	Dissipation
E	Elastizitätsmodul
f	volumenhaft verteilt angreifende Kräfte
F	Kraft
F_T	Fließbedingung
F	Deformationsgradient
F_T	Überspannung
g	freie Enthalpie
g_T	Fließflächenradius
G	Schubmodul
G_{D/v}	Fließflächen im (τ, ϑ)-Raum
h_i	Ansatzfunktionen

$[k]$	Elementsteifigkeitsmatrix
$[k_l]$	Elementsteifigkeitsmatrix bei linearer Verzerrung
$[k_{nl}]$	Elementsteifigkeitsmatrix bei nichtlinearer Verzerrung
$[H]$	Interpolationsmatrix
$[J]$	Jacobi-Matrix
$[K]$	Gesamtsteifigkeitsmatrix
$[K_l]$	Gesamtsteifigkeitsmatrix bei linearer Verzerrung
$[K_{nl}]$	Gesamtsteifigkeitsmatrix bei nichtlinearer Verzerrung
L	Geschwindigkeitsgradient
$LC_{D,v}$	Belastungsbedingungen
$[M]$	Massenmatrix
N	Versetzungsdichte
N_{mob}	Dichte der beweglichen Versetzungen
p	flächenhaft verteilt angreifende Kräfte
p	Parametersatz
PG	Prozeßgeschwindigkeit
\mathcal{P}	Population
q	Wärmefluß
$[q]$	viskoplastischer Lastvektor
r	Radius
r	Ortsvektor
$[r_\alpha]$	Elementlastvektoren
$[R_\alpha]$	globale Lastvektoren
S	2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$[S^*]$	Spannungs-Metrikmatrix
u	Maß der Prozeßgeschwindigkeit
$u_{\cdot,q}$	Gleichgewichtswert vom Maß der Prozeßgeschwindigkeit
$[u]$	Verschiebungsvektor
$[\Delta u]$	Verschiebungsinkremente
$[v]$	Geschwindigkeitsvektor
V	Volumen
w_i	Wichtungsfaktoren
W	Formänderungsarbeit
W_i	inelastischer Spin
t	Zeit
X_r	kinematischer Verfestigungstensor
Z, Z^0	Damagetensor
δ	Variation
$\delta e, \delta \eta$	linearer und nichtlinearer Anteil der Variation des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors
ε	Green-Lagrangescher Verzerrungstensor
$\dot{\varepsilon}_D, D_D$	damageinduzierte Verzerrungsrate

$\varepsilon_{vL}, \mathbf{A}_{vL}$	lokale versetzungsinduzierte Verzerrung
ϑ, Θ^0	Temperaturkonzentrationen
Θ	Temperatur
κ	Maß für die Versetzungsdichte
μ	Mittelwert (nur Kap. A)
ξ, η	lokale Koordinaten
ρ	Dichte
σ	Standardabweichung (nur Kap. A)
σ_F	Fließspannung bei statischen Prozessen
σ_0	Proportionalitätsgrenze
σ	Cauchy-Spannungstensor
τ, σ^0	Spannungskonzentrationstensor
Φ	Überspannungsfunktion

HGDn sind grundsätzlich inhomogener Natur und entziehen sich meist der analytischen Behandlung. Die Beschreibung gelingt dann nur mit Hilfe numerischer Lösungsverfahren, wie etwa der Methode der Finiten Elemente, die sich als universelles Werkzeug zur Berechnung komplexer Fragestellungen herauskristallisiert hat.

Eine hochdynamisch beanspruchte Struktur durchläuft während der Belastung den gesamten Bereich der Dehngeschwindigkeiten von quasistatischen bis hin zu den Maximalwerten. Eine Trennung des Materialverhaltens in bestimmte Bereiche, wie es Fig. 1 oder andere in der Literatur verbreitete Übersichtstabellen implizieren, ist also allenfalls durch die innerhalb gewisser Abschnitte des Spektrums der Dehnungsraten beobachteten Gemeinsamkeiten im Verformungsverhalten gegeben, nicht aber durch die in einer Struktur oder Probe insgesamt vorliegende Belastungsgeschwindigkeit. Die Modellierung von Materialeigenschaften einer bestimmten Dehngeschwindigkeit sollte also mindestens auch für alle kleineren Dehngeschwindigkeiten gültig sein, um einen Einsatz innerhalb der FE-Methode zu ermöglichen.

Zur Charakterisierung des Materialverhaltens in einem weiten Geschwindigkeitsbereich werden $\sigma(\dot{\epsilon})$ -Diagramme verwendet (Fig.2). In ihnen sind jeweils Fließspannungen unter der Annahme konstanter Dehnungsrate und Temperatur aufgetragen. Die in Fig.2 angedeuteten Bereiche I,II,IV werden bestimmten dominanten Versetzungsmechanismen zugeordnet:

- Bereich I) athermische Versetzungsbewegung
- Bereich II) thermisch aktivierte Versetzungsbewegung
- Bereich IV) viskos gedämpfte Versetzungsbewegung

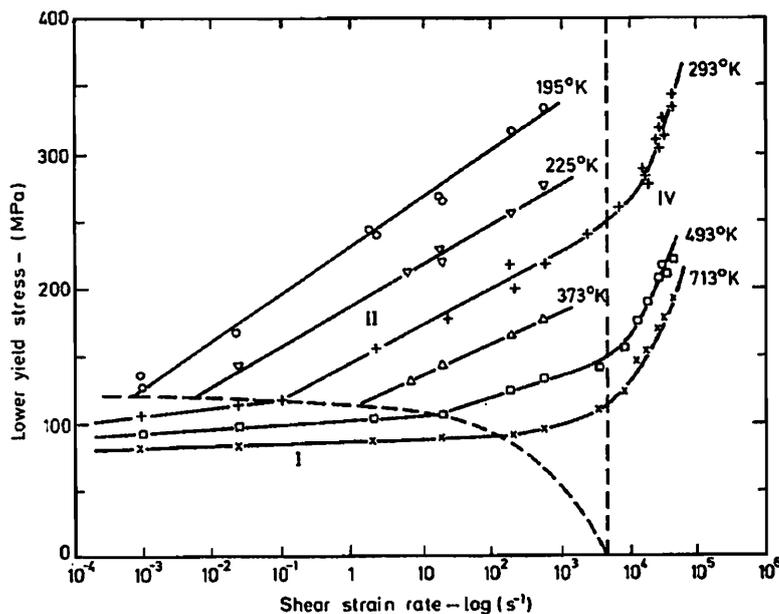


Fig. 2: Fließspannungs-Dehngeschwindigkeitsdiagramm aus [77]

Die oben angesprochene Art der Darstellung ist weit verbreitet und findet sich für viele Werkstoffe in den Asby-Maps.

Bereits an dieser Stelle sei angemerkt, daß es insbesondere im Bereich moderater Dehnungsraten keine isothermen Experimente und im Bereich großer Dehnungsraten weder Experimente konstanter Temperatur noch konstanter Dehnungsrate gibt. Dies relativiert die von den Experimentatoren vorgelegten $\sigma(\epsilon)$ - und $\sigma(\dot{\epsilon})$ -Kurven und veranlaßte uns, die durchgeführten Versuche kritisch zu untersuchen. Geschwindigkeitsabhängige Stoffgesetze, wie sie z.B. für viskoplastisches Materialverhalten formuliert werden, können i.a. nur bei moderaten und hohen Dehnungsraten angepaßt werden. Die dafür erforderlichen Experimente laufen im Sekundenbereich ab, so daß eine isotherme Versuchsführung nicht gewährleistet werden kann. Eine Anpassung erfordert also entweder die Berücksichtigung der Temperatur in allen Gleichungen oder die Zusatzannahme einer näherungsweise isothermen Prozeßführung, so daß die Temperatur nur als Parameter auftaucht.

Die in der Literatur vorgestellten Ergebnisse sind bei dynamischen Prozessen immer auch vom Strukturverhalten der Proben beeinflußt und stehen nicht, wie in quasistatischen Versuchen, für das Materialverhalten selbst.

Die Trennung des Strukturverhaltens vom eigentlichen Materialverhalten wird in dieser Arbeit auch durch die Einteilung der Kapitel unterstrichen:

Im Kap. B steht das Materialverhalten im Vordergrund. Wir verwenden ein thermodynamisch konsistent formuliertes Stoffgesetz vom Überspannungstyp mit besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Mikroscherbänder. Die phänomenologische Theorie versucht dabei die mikromechanischen Ursachen des Deformationsverhaltens so weit wie möglich zu erfassen. Es werden in Kap.B.1 die experimentellen Befunde angesprochen und das für die Beschreibung verwendete Modell vorgestellt, während in Kap.B.2 schwerpunktmäßig die Anpassung des Stoffgesetzes behandelt wird. Der bisherigen Praxis, die Bestimmung der Materialparameter der Erfahrung, dem Fingerspitzengefühl und der Geduld des Anpassers zu überlassen, stellen wir ein Optimierungsverfahren gegenüber. Innerhalb dieses Kapitels werden dann auch die Eigenschaften des angepaßten Materialmodells aufgezeigt.

Wir untersuchen in Kap.B ausschließlich einachsige Spannungszustände, wobei eine Modifikation der allgemeinen Definition der Prozeßgeschwindigkeit (PG) zweckmäßig ist. Zu diesem Zeitpunkt kann die Anpassung noch nicht abgeschlossen werden, weil insbesondere für die inneren Variablen, die zur Beschreibung der Schädigung verwendet werden, bei HGDn kein einachsiger Zustand vorliegt. Wir führen dort nur eine Voranpassung an fiktive einachsige Prozesse durch. Die endgültige Bestimmung der Parameter erfolgt dann in Kap.C, wo auch der Einfluß der verschiedenen Definitionen der PG diskutiert wird.

In Kap. C steht das Strukturverhalten im Vordergrund. Ausgehend von dem in Kap. B vorgelegten Stoffgesetz wird ein FE-Modell zur Berechnung dynamischer rotationssymmetrischer Probleme entwickelt. In einer Update-Lagrangesche Formulierung werden die Grundgleichungen aufbereitet und mit dem Stoffgesetz verknüpft. Eine vertiefende Betrachtung führen wir in diesem Zusammenhang bzgl. der Zeitintegration des Stoffgesetzes und der Bewegungsgleichungen durch. Abschließend diskutieren wir Vergleichsrechnungen und Ergebnisse der dynamischen Analyse. Die Methode der FE ist im Rahmen dieser Arbeit nicht Selbstzweck, sondern sie wird als Werkzeug benutzt, um hochdynamische Prozesse und dabei insbesondere die durchgeführten Experimente nachrechnen zu können.

Zu Beginn stellen wir jedoch in Kap. A ein wichtiges Hilfsmittel zur Parameteridentifikation vor, die Evolutionsstrategie. Dabei handelt es sich um ein der biologischen Evolution nachempfundenenes, bei der Anpassung äußerst effizientes numerisches Optimierungsverfahren, das durch die sprunghafte Weiterentwicklung der Computeranlagen auch bei komplexen Problemen erfolgversprechend angewendet werden kann.

A. Evolutionsstrategie

Die Evolutionsstrategie wird seit etwa 25 Jahren in der Optimierung technischer Systeme eingesetzt. Ursprünglich wurde sie angewendet, weil mathematische Zugänge zur optimalen Formgebung von Stromlinienkörpern nicht ausreichten; schon bald konnte das "experimentelle" Stadium verlassen werden und es wurden numerische Simulationen der Evolution durchgeführt. Eine ausführliche Darstellung der Umsetzung der Prinzipien der biologischen Evolution in ein technisches Optimierungsverfahren finden wir bei *Rechenberg* [8]. Es ist verwunderlich, daß ein ebenso einfaches wie effektives Verfahren auch nach der Veröffentlichung von *Rechenberg* 1973 keine größere Beachtung gefunden hat (Eine uns bekannte Ausnahme [9] bestätigt eher die Regel). Gerade bei der Anpassung von Stoffgesetzen, aber auch bei vielen anderen Optimierungsproblemen des Ingenieurwesens wäre dieses universelle Hilfsmittel einsetzbar.

A.1 Grundlagen der Evolutionsstrategie

Die Evolutionsstrategie stellt ein Verfahren dar, das die Auswahlprinzipien der biologischen Evolution zur Optimierung technischer Systeme heranzieht. Der Optimierungsprozeß läuft dabei nicht deterministisch ab, sondern wird durch Erzeugung zufälliger Varianten (Mutationen) und anschließender Aussonderung unvorteilhafter Varianten gesteuert. Alle deterministischen Verfahren haben den Nachteil, bei Vorliegen von lokalen Optima das globale Optimum nicht erreichen zu können. Die Evolutionsstrategie als stochastisches Verfahren hat dagegen die Möglichkeit, sich von Nebenoptima zu lösen und das absolute Optimum zu finden. Die Grundidee des Verfahrens kann bereits an der vereinfachten Nachahmung der Evolution, dem zweigliedrigen Wettkampfschema (Fig. A.1) vorgestellt werden: Ein Parametersatz \mathbf{p} wird mutiert,

$$\mathbf{p}_{\text{neu}} = \mathbf{p}_{\text{alt}} + \delta \quad (\text{A.1})$$

um dann nach einer Simulation mit dem Ausgangsparametersatz anhand eines Qualitätswertes verglichen zu werden. Auf diese Art und Weise gefundene Verbesserungen werden übernommen, Verschlechterungen fallen dem Ausleseprozeß zum Opfer.

Die Erzeugung von Mutationen erfolgt in der technischen Realisierung durch einen Zufallszahlengenerator, der normalverteilte Zufallszahlen mit dem Mittelwert μ und der Standardabweichung σ erzeugt.

In der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{A.2})$$

regelt die Standardabweichung die Verteilung der Zufallszahlen um den Mittelwert und ermöglicht so eine Steuerung des Umfangs der Mutationen. Die auf Rechnern verfügbaren Zufallszahlengeneratoren liefern i.a. gleichverteilte Zufalls-

zahlen im Intervall $[0, 1]$. Aus je zwei unabhängigen gleichverteilten Zufallszahlen y_1, y_2 werden nach der Box-Muller-Transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{-2 \ln y_1} \cos(2\pi y_2) \\ x_2 &= \sqrt{-2 \ln y_1} \sin(2\pi y_2) \end{aligned} \tag{A.3}$$

zwei normalverteilte Zahlen x_1, x_2 ($\mu = 0, \sigma = 1$) gewonnen. Die Veränderung der Standardabweichung wird im Rahmen der erweiterten Evolutionsstrategie ein wesentliches Mittel zur Konvergenzbeschleunigung sein.

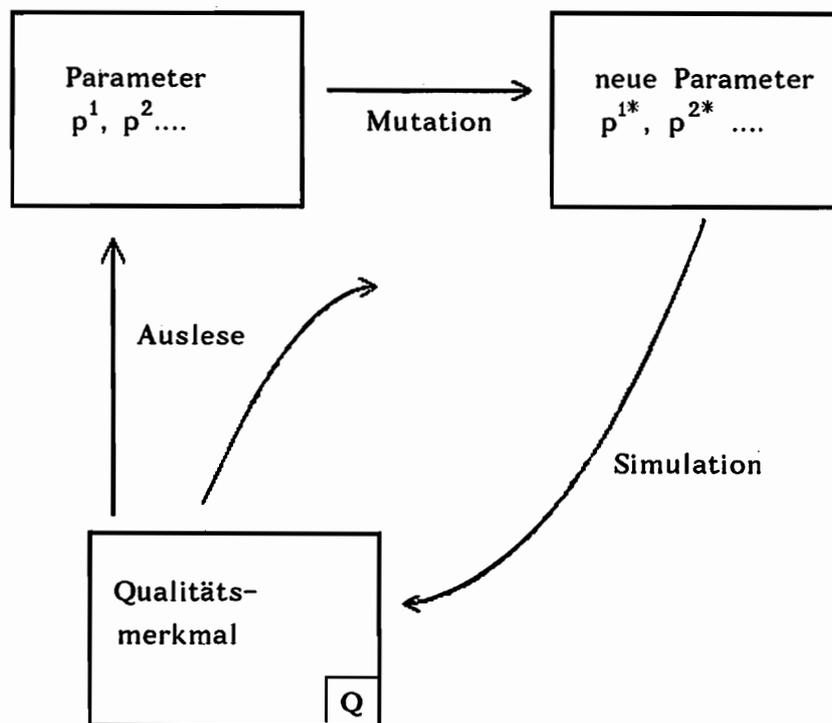


Fig. A.1: Einfachste Stufe der Evolutionsstrategie (zweigliedriges Wettkampfschema)

Wir wollen Ablauf und Effektivität des zweigliedrigen Wettkampfschemas und der erweiterten Evolutionsstrategie an einem Beispiel verfolgen: Gesucht wird das Minimum der Funktion

$$F(x) = 1 - \sin(x)/x, \quad x > 0 \tag{A.4}$$

dessen Graph in Fig. A.2 dargestellt ist. Der Startwert wird mit $x_0 = 64$ so festgelegt, daß 10 lokale Minima bis zum absoluten Minimum übersprungen werden müssen. Das Minimum gilt als gefunden, wenn der Funktionswert $< 10^{-8}$ ist. Bei der Definition des Qualitätswertes wählen wir naheliegend $Q = F(x)$.

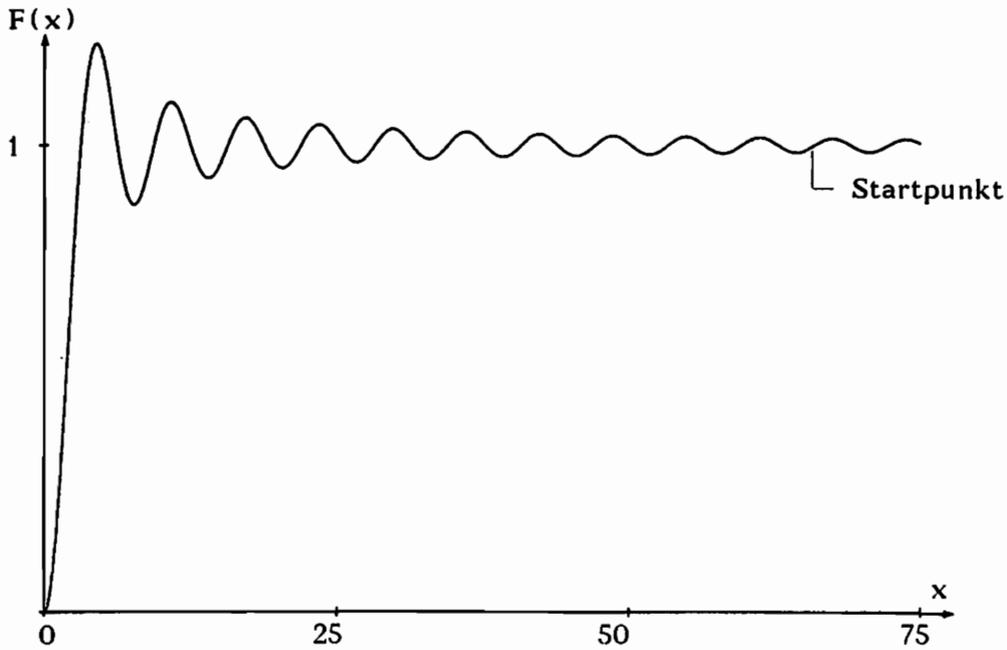


Fig. A.2: Testfunktion $1 - \sin(x)/x$

Die Wahl der Standardabweichung hat entscheidenden Einfluß auf den Erfolg der Rechnung. In Fig. A.3 ist dargestellt, wie sich die Annäherung an das Minimum vollzieht. Aufgetragen sind jeweils repräsentative Verläufe von verschiedenen Rechenläufen gleicher Standardabweichung, aber anderer Zufallszahlenfolgen. (Man beachte die unterschiedlichen Maßstäbe im oberen und unteren Bereich)

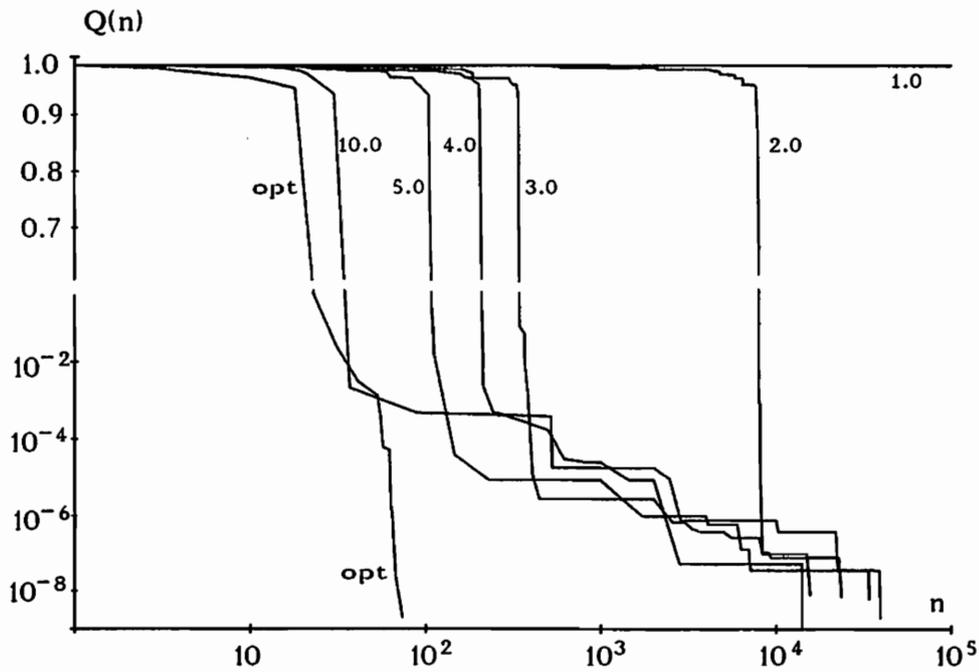


Fig. A.3: Entwicklung des Qualitätsmerkmals für verschiedene Standardabweichungen

Es lassen sich bereits einige Erkenntnisse für die erweiterte Evolutionsstrategie gewinnen:

- Mit einer zu kleinen Standardabweichung (hier < 1) ist mit einer vertretbaren Anzahl von Schritten (hier < 100000) i.a. kein Ergebnis zu erwarten.
- Mit einer großen Standardabweichung (hier $\gg 10$) kann zwar in die Nähe des Optimums gelangt werden, aber das geforderte Abbruchkriterium wird nicht erreicht.
- Kleine Standardabweichungen haben Vorteile bei der Annäherung in der Umgebung des absoluten Minimums.

Zum Vergleich ist eine Kurve (opt) eingetragen, bei der die Standardabweichung von Hand vor jedem 10. Mutationsschritt, angepaßt an den jeweiligen Fortschritt der Annäherung, geändert wurde. Während bei konstanter Standardabweichung für die Ermittlung des Minimums mindestens 10000 Schritte erforderlich waren, läßt sich bei optimaler Steuerung die Aufgabe mit weniger als 100 Mutationen lösen.

A. 2 Erweiterte Evolutionsstrategie

Das oben angeführte Beispiel motiviert eine Erweiterung der technischen Realisierung entsprechend dem zugrundeliegenden biologischen Modell. In Frage kommen dabei als Ergänzungen zur Mutation, wie sie schon im zweigliedrigen Wettkampfschema verwendet wird, folgende Mechanismen:

- i) Aufbau einer Population
- ii) Rekombination (cross-over)
- iii) Inversion
- iv) Isolation
- v) Selektion
- vi) lernende Population

Diese Begriffe werden nun im einzelnen erläutert.

zu i): Bereits beim einfachen Mimikry-Versuch [8] zeigt sich, daß sich eine Gruppe schneller höherentwickelt als ein einzelner Parametersatz. Wir fassen deshalb m Parametersätze p_i zu einer Population \mathcal{P} zusammen.

$$\mathcal{P} = (p_1, p_2 \dots p_m) \quad (A.5)$$

Erst eine Population ermöglicht die Anwendung der unter ii)-iv) beschriebenen Mechanismen. Für die praktische Anwendung wird die Größe einer Population (im Gegensatz zur Natur) konstant gehalten, wobei sich eine relativ kleine Zahl (ca.10) als guter Kompromiß zwischen Vielfalt der Parametersätze und Optimierung der Rechenzeit herausgestellt hat.

zu ii) und iii): Mit der Rekombination und Inversion stehen weitere Möglichkeiten zur Verfügung, aus einer Population heraus neue Parametersätze für die Simulation zu gewinnen. Die Rekombination tauscht dabei einzelne Parameter (z.B. den i -ten) aus verschiedenen (i.a. 2) Parametersätzen p_j , p_k aus, während die Inversion Parameter innerhalb eines Satzes vertauscht.

$$\begin{array}{ll} \text{Rekombination} & p_j^i = p_k^i \\ \text{Inversion} & p_j^i = p_j^k \end{array} \quad (\text{A.6})$$

Letzteres mag zwar bei der biologischen Evolution eine Rolle spielen, es ist für uns jedoch ohne Bedeutung, weil die Parameter bei technischen Prozessen von verschiedener Größenordnung sein können und damit ein Austausch sinnlos ist.

zu iv): Die Isolation sorgt für getrennte Entwicklung von Teilpopulationen, wie sie in der Natur z.B. durch geographische Trennung vorkommt. Bei der geringen Größe der Gesamtpopulation für unser Optimierungsproblem verzichten wir auf diesen Mechanismus.

zu v): Der Aufbau und die Entwicklung von Populationen wird durch die Selektion kontrolliert. Sie sorgt dafür, daß die Zahl der Glieder einer Gruppe konstant bleibt und trifft jeweils das schlechteste Glied. Für diese Auslese wird ein Qualitätskriterium benötigt, welches jedem Parametersatz ein Qualitätsmerkmal zuordnet und so die Einordnung in die Population ermöglicht. Bei unserer späteren Anwendung definieren wir als Qualitätsmerkmal die Summe der Abstandsquadrate zwischen Soll- und Istkurve mit einer dem Benutzer freigestellten Gewichtung bestimmter Kurvenbereiche. Das Qualitätsmerkmal $Q=0$ identifiziert dabei perfekte Anpassung und wird i.a. nicht erreicht.

zu vi): Die lernende Population ist der wichtigste Aspekt bei der Optimierung der Evolutionsstrategie und soll deshalb hier genauer vorgestellt werden. Voraussetzung für die Realisierung des Lernverhaltens ist zum einen die Verwendung eines mehrgliedrigen Evolutionsschemas und zum anderen die Unterscheidung des technischen Parametersatzes in Objektparameter und Strategieparameter. Die Optimierung der Objektparameter (Parameter des Stoffgesetzes) wird von den Strategieparametern (Standardabweichung der einzelnen Parameter) so gesteuert, daß größtmöglicher Fortschritt im Sinne des Qualitätsmerkmals erreicht wird. Zu diesen Strategieparametern kann man neben den Mutationsstreuweiten σ noch die Rekombinations- und Inversionshäufigkeiten, sowie eine maximale Lebensdauer eines Datensatzes hinzufügen. Die Veränderung der Strategieparameter erfolgt durch Kontrolle der Erfolgshäufigkeit (Anteil der Mutationen, bei denen eine Verbesserung des Qualitätsmerkmals erzielt wird), die

etwa bei 20% liegen sollte. (Dieser Wert ist abhängig von der Qualitätsfunktion.)

Mit i) - vi) ergibt sich die in Fig. A.4 dargestellte erweiterte Evolutionsstrategie.

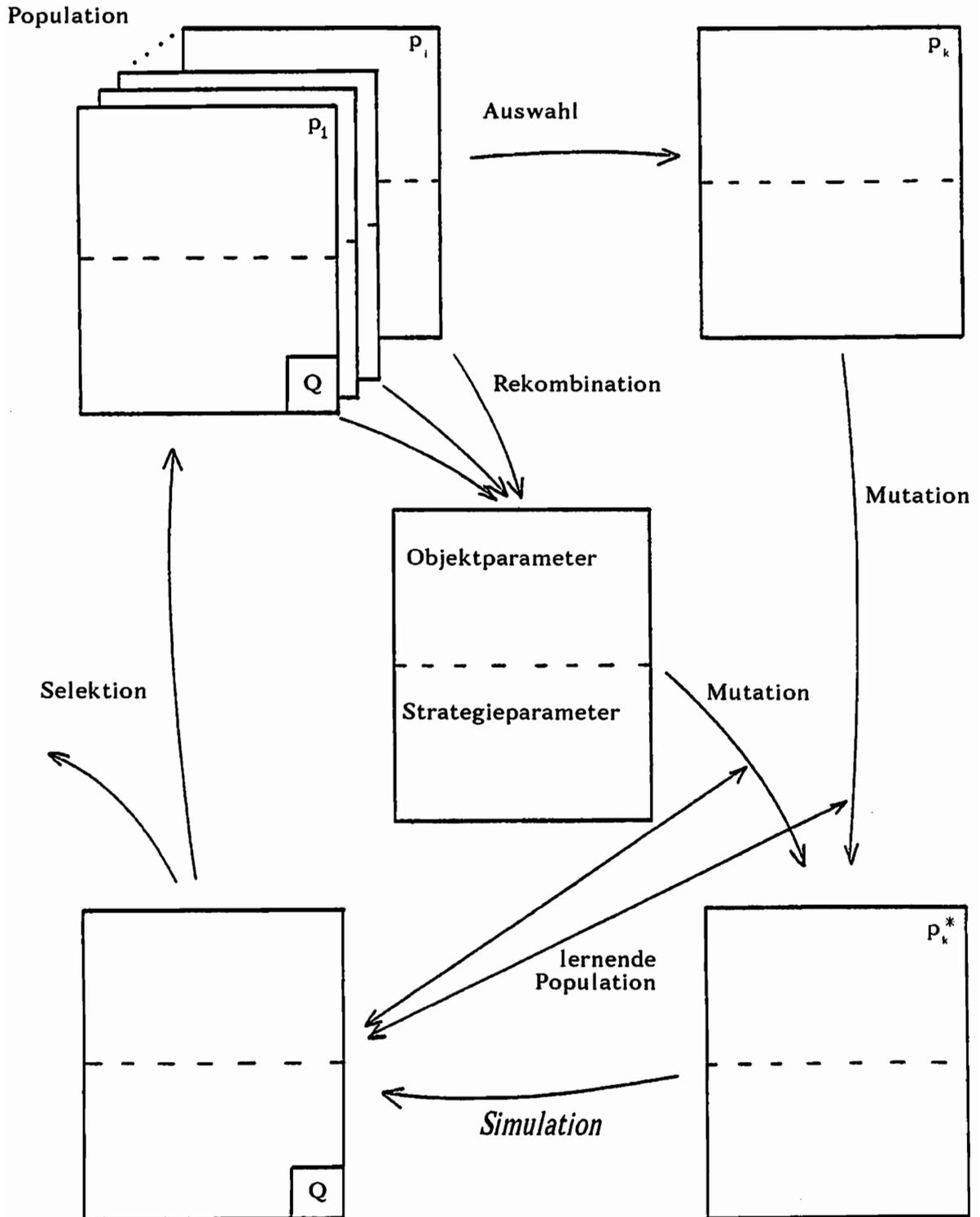


Fig. A.4: Erweiterte Evolutionsstrategie

Mit der erweiterten Evolutionsstrategie wurden ebenfalls Berechnungen anhand des oben vorgestellten Beispiels durchgeführt. Weil die Zahl der Einflußfaktoren auf die Konvergenzgeschwindigkeit groß ist, können wir im Rahmen dieser Arbeit nur einen Bruchteil der ausgeführten Untersuchungen dokumentieren. Wir verzichten deshalb auf die Darstellung der Auswirkung der Gruppengröße, der Häufigkeit der Erfolgskontrolle, der erzielten Erfolgshäufigkeit und der Möglichkeiten des Verlassens lokaler Extrema. In Fig. A.5 und 6 sind wieder die Entwicklung des Qualitätsmerkmals und des Parametersatzes dargestellt, wobei für alle Rechenläufe eine Gruppengröße von 1 galt und die Kontrolle der Erfolgshäufigkeit nach jeder 100. Mutation durchgeführt wurde. Die Anfangsstandardabweichung liegt für die Kurven 1-6 bei 10.0 und bei den Kurven 7 und 8 bei 1.0. Beide Standardabweichungen führten im Beispiel des zweigliedrigen Wettkampfschemas zu einer benötigten Schrittzahl von mehr als 10000.

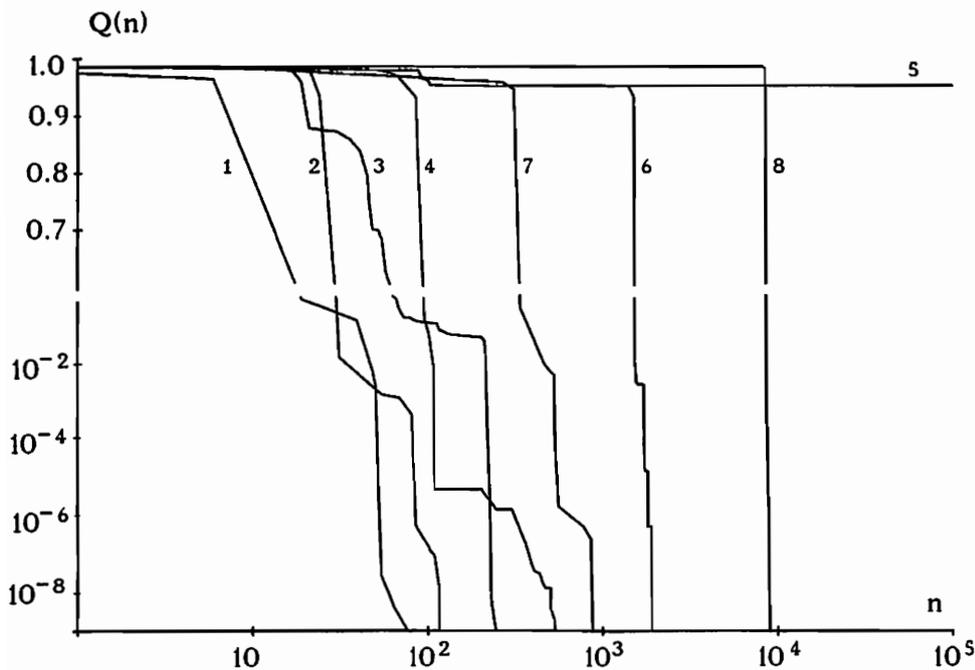


Fig. A.5: Entwicklung des Qualitätsmerkmals

Wir stellen fest:

- Die Kurven 1-3 sind gekennzeichnet durch ein schnelles Auffinden des absoluten Minimums bei einer moderaten Änderung der Strategieparameter. (Die Standardabweichung für die Mutation der Standardabweichung σ_{σ}^* betrug 1.0)
- Die Kurven 4-6 zeigen, daß im Fall schwacher Änderungen der Strategieparameter ($\sigma_{\sigma}^* = 0.1$) eine wesentlich schlechtere Konvergenz erzielt wird.
- Kurve 6 zeigt, daß die Möglichkeit eines Sprungs der Strategieparameter die Konvergenz wesentlich beschleunigen kann. Dies wird deutlich im Vergleich mit Kurve 5, die außer der Sprungmöglichkeit mit denselben Parametern gerechnet wurde und nicht innerhalb der zugelassenen Schrittzahl konvergierte.

- Die Kurven 7 und 8 machen deutlich, daß eine schwache Änderung der Strategieparameter ein Hängenbleiben in Nebenminima fördert, dieser Nachteil aber durch Aussprungmöglichkeiten behoben werden kann.

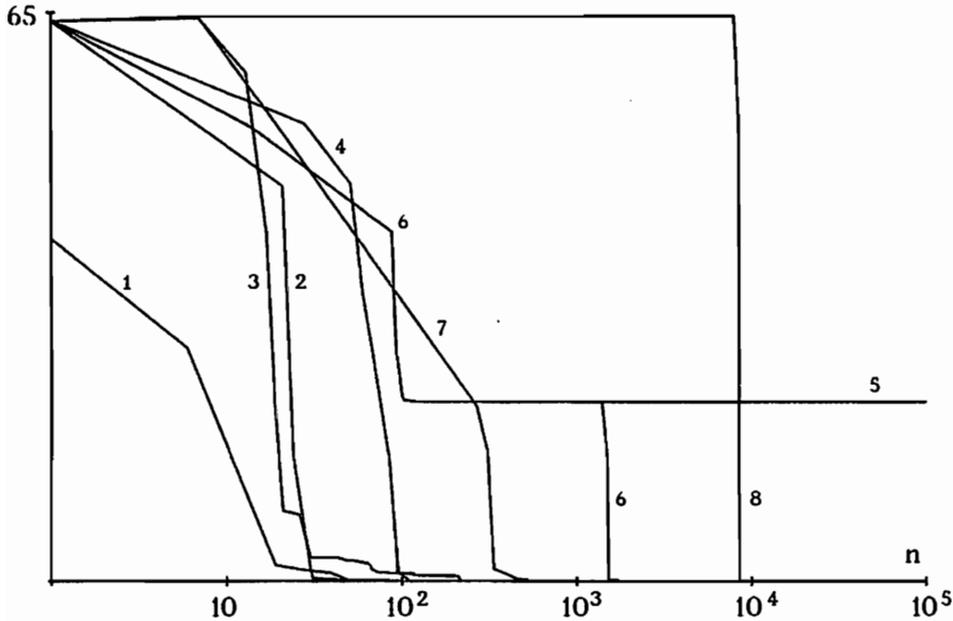


Fig. A.6: Entwicklung des Parameters x

Konvergenzverhalten und Abbruchkriterium

Die Konvergenz der Evolutionsstrategie wird von der Qualitätsdichteverteilung beeinflusst und zwar so, daß sich Nebenminima der Qualitätsfunktion störend auswirken, wie wir im vorigen Beispiel drastisch gesehen haben. Die Nebenminima stellen aber kein prinzipielles Problem der Evolutionsstrategie dar, sondern allenfalls ein programmtechnisches! Gleichwohl verhindern sie die Anwendung deterministischer Verfahren (Gradientenverfahren, Gauß-Seidel-Verfahren).

Wie bereits angesprochen, wird das Qualitätsmerkmal $Q=0$ i.a. nicht erreicht. In der Praxis läßt sich jedoch i.a. eine problemangepaßte Genauigkeitsschranke als Abbruchkriterium finden. Alternativ dazu kann auch die Rechenzeit (bei einer aufwendigen Simulation) den Abbruch steuern. In keinem Fall sollte man das Verhältnis vom besten zum schlechtesten Parametersatz einer Population verwenden, weil dabei oft ein Abbruch in Nebenminima erfolgt.

Die Evolutionsstrategie ist universell einsetzbar bei der Lösung von Optimierungsproblemen, sei es, wie im Rahmen dieser Arbeit zur Anpassung von Teilen des Materialgesetzes an Versuchsdaten, oder auch zum Curve-fitting, zur gesamten Anpassung aller Materialparameter oder darüberhinaus etwa zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme.

Die Evolutionsstrategie in der erweiterten Form zeichnet sich dadurch aus, daß sie bereits viele Merkmale eines Expertensystems aufweist.

B. Materialverhalten

B.1 Experimente zu HGDn metallischer Werkstoffe

B.1.1 Übersicht über die Experimente

Einleitung

Bereits zu Beginn des 20. Jh. wurden zur Untersuchung des Werkstoffverhaltens bei verschiedenen Verformungsgeschwindigkeiten Hochgeschwindigkeitsdeformationen durchgeführt. Mit Fallwerken bzw. Pendelhämmern waren Dehnungsraten von bis zu $10^1/s$ und mit Zerreißkanonen von bis zu $1000^1/s$ zu erreichen. Dabei konnten bedingt durch unzureichende Meßtechnik nur qualitative Aussagen gemacht werden. Erst in den 40er Jahren erlaubten neuentwickelte Meßmethoden auch quantitative Beschreibungen durch Spannungs-Dehnungs- bzw. Spannungs-Dehnungsgeschwindigkeitskurven.

Die Verfahren zur Untersuchung des Materialverhaltens bei hohen Verformungsgeschwindigkeiten sind insgesamt wesentlich aufwendiger, teurer und fehleranfälliger als die quasistatischen Experimente. Dies führt in vielen Fällen, wie auch in unserem Forschungsvorhaben, zu einer Trennung der Aufgaben zwischen Experimentator und Modellentwickler.

Eine Zusammenstellung der Entwicklung von Prüfverfahren und eine umfangreiche Darstellung der Ergebnisse von HGDn findet sich bei *Jähn* [10]. Einen Überblick über die Anwendungsbereiche der verwendeten Verfahren gibt die folgende Tabelle:

Verfahren	erzielte Dehnungsrate [s^{-1}]
mechanische Antriebe (Spindeln)	$\dot{\epsilon} < 10^{-2}$
hydraulische Antriebe	$\dot{\epsilon} < 10^0$
Pendelschlagwerk	$10^0 - 10^2$
Fallgewichte	$10^0 - 10^3$
rotierende Scheiben	$10^1 - 5 \cdot 10^3$
Split-Hopkinson-Bar	$10^3 - 10^5$
Expandierender Ring	$10^2 - 10^4$
Plate Impact	$10^5 - 10^7$
Laser	$\dot{\epsilon} > 10^7$

Tab. A.1: Anwendungsbereiche von Experimenten zu HGDn

An dieser Stelle soll eine kurze Zusammenfassung der heutzutage gebräuchlichsten Experimente genügen. Detailliertere Beschreibungen der verwendeten Meßapparatur sowie Meßergebnisse kann man den Proceedings verschiedener Tagungen [11]-[23] entnehmen.

Split-Hopkinson-Bar (SHB)

Der SHB-Versuch (wegen der ursprünglichen Anwendung mit reiner Druckbeanspruchung auch Split-Hopkinson-Pressure-Bar-Test (SHPB) genannt) ist ein weitverbreiteter Standardversuch zur Messung von Materialeigenschaften bei HGDn [24]-[34]. Modifikationen des Originalversuchs (Fig.B.2a) erlauben die Untersuchung von Zug-, Druck-, Scher- und kombinierter Beanspruchung.

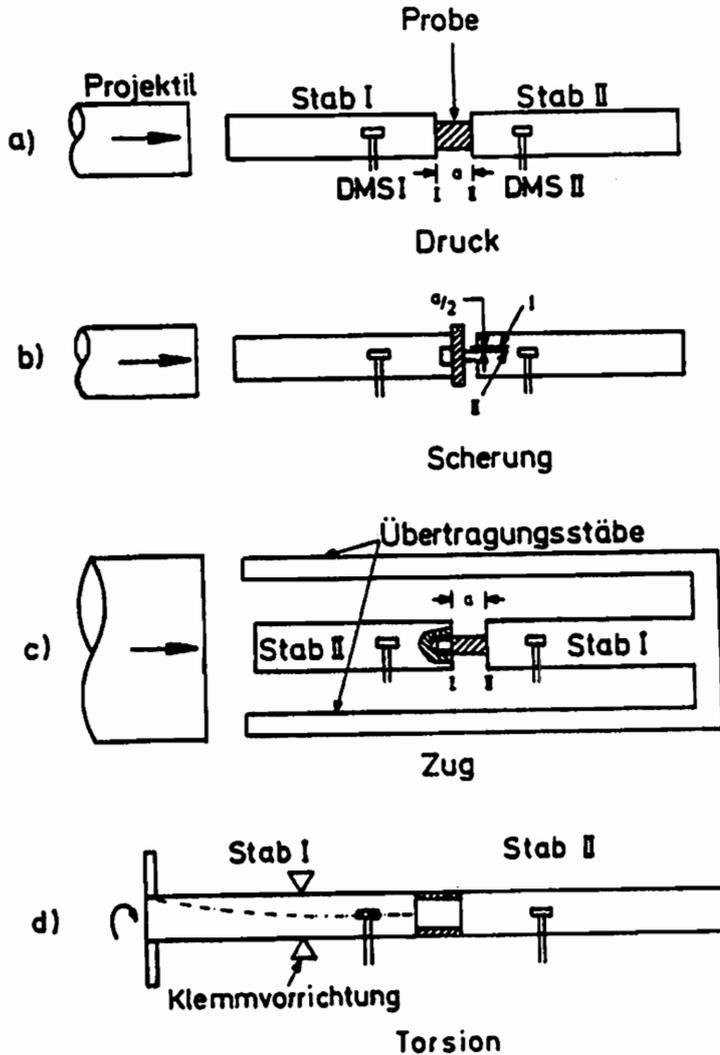


Fig.B.2: Verschiedene Ausführungen des SHPB-Tests aus [10]

Die Probe befindet sich zwischen zwei sich elastisch verhaltenden Stäben, von denen einer (Input-Bar) zur Einleitung einer Welle in die Probe und der zweite (Output-Bar) zur Messung der durchgelaufenen Welle dient. Störungen durch die Berührungsflächen zwischen Stab und Probe sollen durch Schleifen der Oberflächen und einen Ölfilm gering gehalten werden. Die Länge der Stäbe ist i.a. so gewählt, daß Wellenreflexionen in ihnen während der Versuchsdauer keine Rolle spielen. Die Probenabmessungen sind dagegen so klein, daß dort eine Vielzahl von Reflexionen auftritt. Durch DMS, die meist symmetrisch zur Probe am Input- und Output-Bar angebracht sind, werden reflektierte und transmittierte Wellen gemessen und die mittlere in der Probe herrschende Spannung berechnet.

Expandierender Ring

Bei diesem Versuch (Fig.B.3) wird ein Treibring von einer durch Sprengstoff verursachten Druckwelle aufgeweitet. Die ringförmige außenliegende Probe wird durch die Druckwelle beschleunigt und löst sich vom Treibring ab.

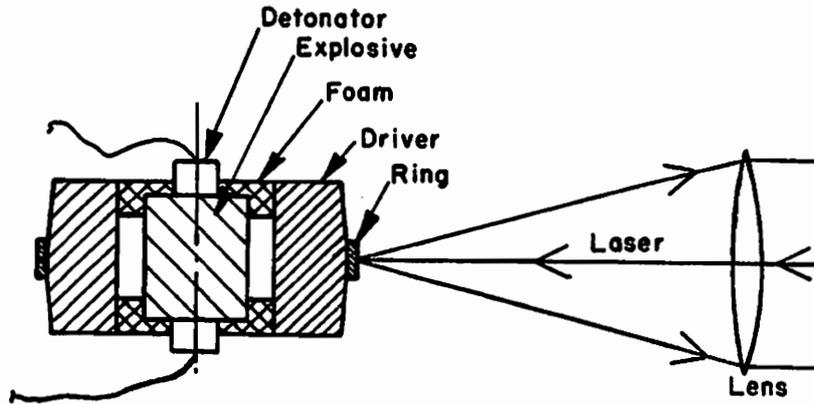


Fig. B. 3: Typischer Versuchsaufbau für den expandierenden Ring aus [37]

Auf Grund des entstehenden näherungsweise einaxialen Spannungszustandes im Ring wird dieser Versuch mit $\sigma = -\rho r \ddot{r}$ ausgewertet. Anfangs bereitete die zweimalige Differentiation des gemessenen Verlaufs $r(t)$ Schwierigkeiten [36]. Diese wurden durch die direkte Messung von $\dot{r}(t)$ [37],[35] mittels Lasertechnik, woraus dann $r(t)$ integriert und $\ddot{r}(t)$ differenziert wird, beseitigt. Eine verbesserte Versuchstechnik (Verwendung von 3 Ringen [35] bzw. elektrische Beschleunigung [38]) erhöht die Güte (Verwertbarkeit) der Ergebnisse.

Plate Impact

Für die Untersuchung höchster Dehngeschwindigkeiten (bis etwa 10^7 1/s) wird der Flat-Plate-Impact-Test verwendet [40]-[45], der Ergebnisse bei einem einachsigen Verzerrungszustand liefert.

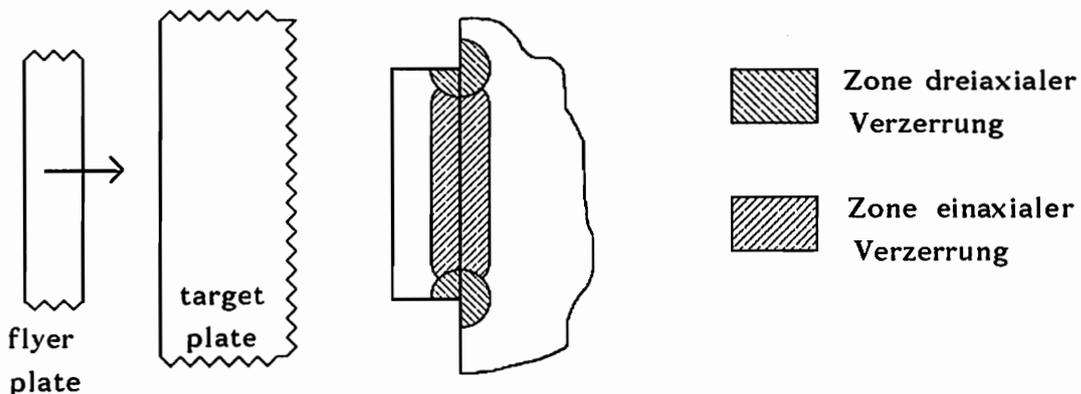


Fig. B. 4: Schematische Darstellung des Flat-Plate-Impact

Ausgewertet werden diese Versuche durch gemessene (Lasertechnik) Geschwindigkeitsverläufe auf der Targetrückseite. Die mehrachsigen Spannungszustände erlauben es nicht direkt, die bei anderen Experimenten üblichen $\sigma(\epsilon)$ - bzw. $\sigma(\dot{\epsilon})$ -Kurven anzugeben. Es sind zur Auswertung zusätzliche Annahmen (z.B. bzgl. der Dehnungsverteilung) erforderlich.

Fallwerke

Ein Gewicht fällt aus einer vorbestimmten Höhe auf die Probe und erzeugt dabei große plastische Deformationen [49]. Bei Dehnungsraten von ca. $100 \text{ }^1/\text{s}$ können so unter fest vorgegebenen und definierten Bedingungen vergleichbare Resultate erzielt werden. Reproduzierbarkeit und Vergleichbarkeit zu anderen Experimenten leiden jedoch unter Einflüssen wie Oberflächenreibung, Temperaturverteilung, Dehngeschwindigkeitsabfall und Probengeometrie.

Pendelschlagwerk (PSW) und Rotationsschlagwerk (RSW)

Bei diesen Versuchen wird durch die große kinetische Energie eines Pendels (Fig.B.5) bzw. einer rotierenden Scheibe (Fig.B.6) eine Probe zerrissen.

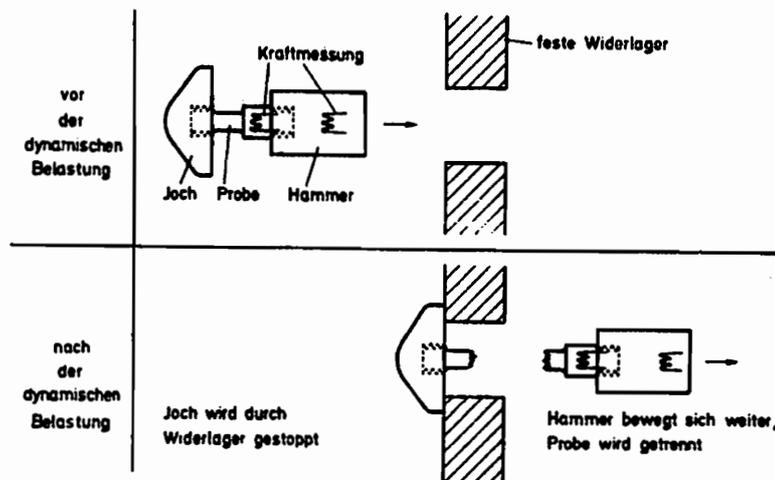


Fig. B.5: Funktionsprinzip des Pendelschlagwerkes aus [57]

Durch DMS an der Probe (Fig.C. 17) werden Spannung und Dehnung aufgezeichnet. Mit Pendelschlagwerken lassen sich bedingt durch die Länge des Pendels maximale Dehngeschwindigkeiten von $200 \text{ }^1/\text{s}$ erreichen, während beim Rotationsschlagwerk die erreichbare Umfangsgeschwindigkeit die Dehngeschwindigkeit begrenzt. Bei Erreichen der gewünschten Umfangsgeschwindigkeit wird eine zuvor eingezogene Kralle fernentriegelt, klinkt aus und trifft das Joch der Probe. Die in [57] verwendete Ausführung des RSW erreicht Dehnungsraten von $4000 \text{ }^1/\text{s}$ bei einer Umfangsgeschwindigkeit von 50 m/s , während der in [58] und [60] vorgestellte Meßaufbau Umfangsgeschwindigkeiten bis zu 150 m/s ermöglicht.

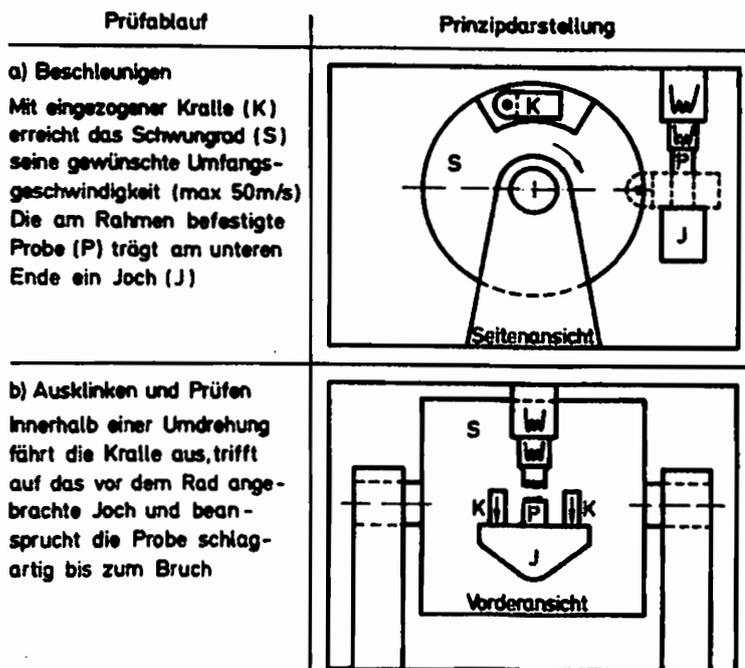


Fig.B.6: Arbeitsweise des Rotationsschlagwerkes aus [57]

Der Versuchsaufbau in [60] unterscheidet sich weiterhin dadurch, daß die Probe in die feststehende Klaue eingeschwenkt wird (Fig.B.7) und dadurch zusätzliche Probleme entstehen können. (Schon der Einschwenkvorgang stellt für die Probe eine dynamische Belastung dar.)

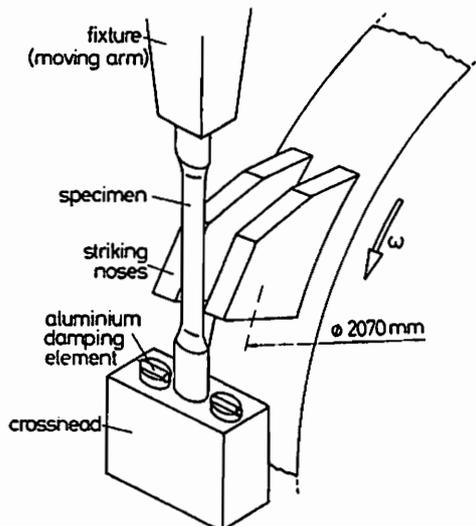


Fig.B.7: Schematic of rotating disk impact machine aus [58]

Dasselbe Prinzip wie beim PSW und RSW wird bei den Experimenten in [61] verwendet: Die Probe wird durch eine Gaskanone auf eine Geschwindigkeit zwischen 50 und 250 m/s gebracht und gegen ein festes Ziel geschossen.

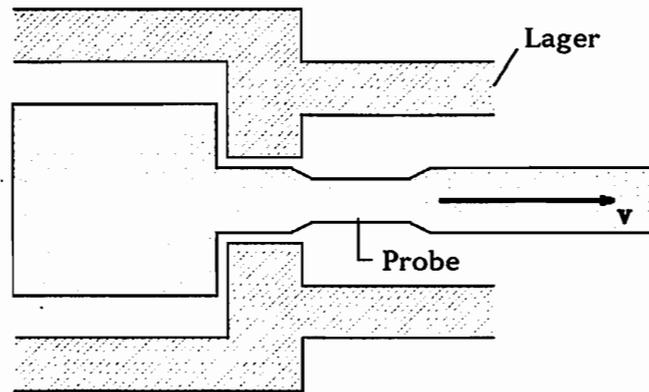


Fig.B.8: Prinzipskizze des dynamischen Zugversuchs

Die Versuchsauswertung erfolgt durch Fotos, die im Abstand von $2 \mu\text{s}$ aufgenommen werden. Es wird also nur die Oberflächendeformation registriert, eine Messung von Dehnung oder Spannung erfolgt nicht.

CFC-Test

Zur Untersuchung von Scherbandbildung bei HGDn wird der CFC-Test (contained fragmented cylinder) durchgeführt [46]-[48]. Dabei wird ein mit Sprengstoff gefüllter Zylinder durch die Detonation dynamisch aufgeweitet. Bei den Versuchen werden Dehnungsraten von ca. 10^4 1/s erreicht.

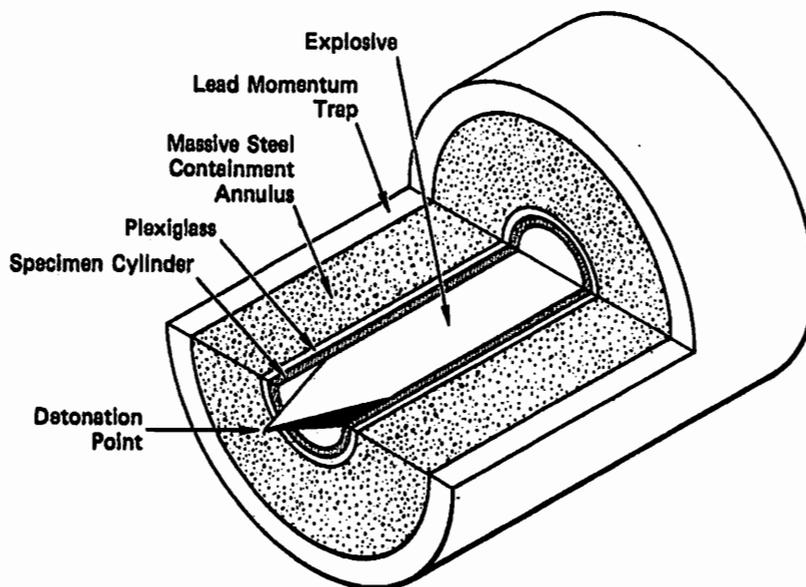


Fig.B.9: CFC-Test aus [48]

Meßergebnisse sind Anzahl, Größe und Verteilung der Scherbänder. Im Gegensatz zu anderen Experimenten, die ebenfalls Scherbänder erzeugen, liegt hier keine durch die Probengeometrie induzierte Spannungskonzentration vor.

Laserschocks [50]

Mit einem Laserstrahl wird eine große Energie auf einer kleinen Fläche konzentriert und führt dort zu einer Verflüssigung innerhalb von einigen ns. Die damit verbundene Ausdehnung induziert eine Schockwelle in die Probe. Mit diesem Verfahren lassen sich Dehnungsraten größer 10^7 1/s erreichen.

Taylor-Test [51]

Bei diesem von *Taylor* 1948 entwickelten Versuch wird ein stumpfes zylindrisches Projektil gegen eine starre Wand geschossen, um dann aus der Gestalt der Probe nach dem Versuch die sog. "dynamische Fließspannung" zu bestimmen. Dieses einfache Experiment erfreut sich auch heute noch großer Beliebtheit, zum einen durch mögliche Modifikationen wie höhere Aufprallgeschwindigkeiten [52] oder Biegeeinflüsse [53] und zum anderen als Vergleichsmöglichkeit für numerische Simulationen [54]-[56].

B.1.2 Versuchsauswertung

Die Versuchsauswertung von HGDn wird gegenüber quasistatischen u.a. dadurch erschwert, daß

- 1) die Proben zumindest teilweise oder zeitweise inhomogene Deformationen erleiden ,
- 2) die räumliche und zeitliche Schwankung der Meßgrößen nicht aufgelöst werden kann und deshalb Mittelwerte gebildet werden,
- 3) zur Versuchsauswertung bereits Annahmen über das Materialverhalten gemacht werden müssen (Wellenausbreitung),
- 4) eine Steigerung der Dehngeschwindigkeit bis an die Grenzen der gesamten Meßapparatur betrieben wird,
- 5) eine Steuerung der Belastung (wie man bei "langsamen" Versuchen etwa spannungs- oder dehnungsgesteuerte Abläufe wählt) nicht möglich ist ,
- 6) lokal nur Spannungs- oder Dehnungsmessung möglich ist,
- 7) auf eine Temperaturmessung i.a. verzichtet wird.

Auf die technischen Schwierigkeiten, wie etwa

- Justierung der Proben zur Vermeidung zusätzlicher Biegebeanspruchung
- Maßhaltigkeit der Proben (die Abmessungen sind i.a. klein)
- Störungen in der Meßapparatur durch Schwingungen
- Reibung und Oberflächenbeschaffenheit beim SHB-Test
- exakte Angabe der Randbedingungen

soll im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen werden.

Die konkrete Ermittlung von Spannungs-Dehnungskurven wird anhand von Verfahren dargestellt, die später mit dem FE-Programm "nachgerechnet" werden. Es sind dies:

- 1) das RSW nach [57] und 2) der expandierende Ring [37].

zu 1) Da Spannungs- und Dehnungsmessung bei inelastischem Materialverhalten nicht an derselben Stelle erfolgen können, wird in Vorversuchen zunächst die Kraftantwort an verschiedenen Stellen des Systems gleichzeitig gemessen (Fig. B.10,11).

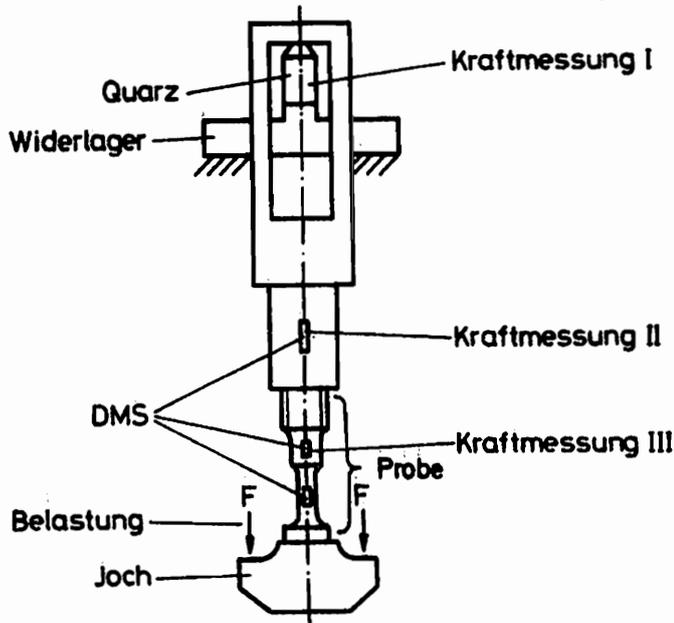
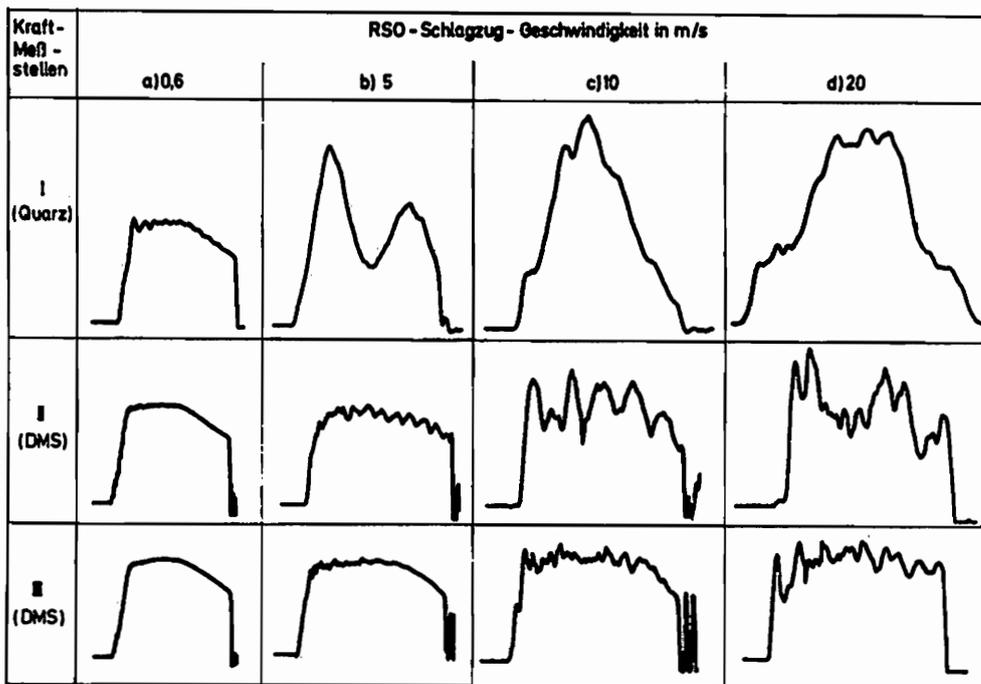


Fig.B.10: Anordnung der Kraftmeßstellen am Rotationsschlagwerk aus [57]



Kraft-Zeit-Diagramme der drei Kraftmeßstellen bei vier unterschiedlichen Schlaggeschwindigkeiten (Kraftmaßstab: 1 cm = 7000 N, Zeitmaßstab: a) 1 cm = 2 ms, b) 1 cm = 250 μ s, c) 1 cm = 100 μ s, d) 1 cm = 50 μ s) Werkstoff: mittelfester Baustahl

Fig.B.11: Gemessene Kraft-Zeit-Diagramme aus [57]

Aus den Kraft-Zeit-Diagrammen der verschiedenen Kraftmeßstellen wird deutlich, daß

- i) das Signal umso unregelmäßiger und dadurch unbrauchbarer wird, je weiter die Meßstelle von der Probe entfernt ist,
- ii) bei höheren Geschwindigkeiten eine Auswertung der Kraftanzeige nur in unmittelbarer Nähe der Probe möglich ist,
- iii) Überschwingen und Störungen bei allen Schlaggeschwindigkeiten vorhanden sind.

Zur Beseitigung der Störschwingungen wird am Joch ein Feder-Dämpfer-Element aus Hartgummi angebracht, welches im wesentlichen dafür sorgt, daß ein moderater Anstieg der Dehngeschwindigkeit in der Probe erfolgt. Man erhält dann etwa folgendes Spannungs-Zeit- bzw. Dehnungs-Zeit-Diagramm: (Fig.B.12)

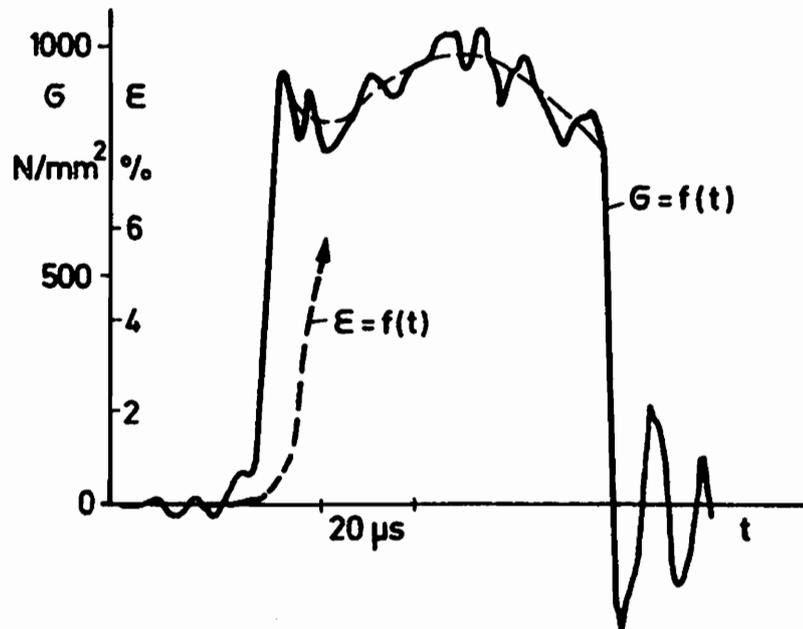


Fig. B.12: Meßkurven $\sigma(t)$, $\epsilon(t)$ aus [57]

Zitat: " Als auswertbar werden die Diagramme angesehen, bei denen eine genügende Anzahl von Schwingungen, z.B. mehr als fünf, das Festlegen einer mittelwertbildenden Kurve ermöglicht und das Überschwingen nicht mehr als 10% des wahren Kurvenverlaufs ausmacht." Aus den so geglätteten $\sigma(t)$ - und $\epsilon(t)$ -Verläufen wird die Zeit t eliminiert und es folgt das "Meßergebnis", die $\sigma(\epsilon)$ -Kurve Fig. B.13.

Je Meßkurve $\sigma(\epsilon)$ erhält man für eine feste Dehnung einen Punkt der Darstellung $\sigma(\dot{\epsilon})$, wie sie in der Literatur weit verbreitet ist. (z.B. [10], [24],[57],[62]-[65])

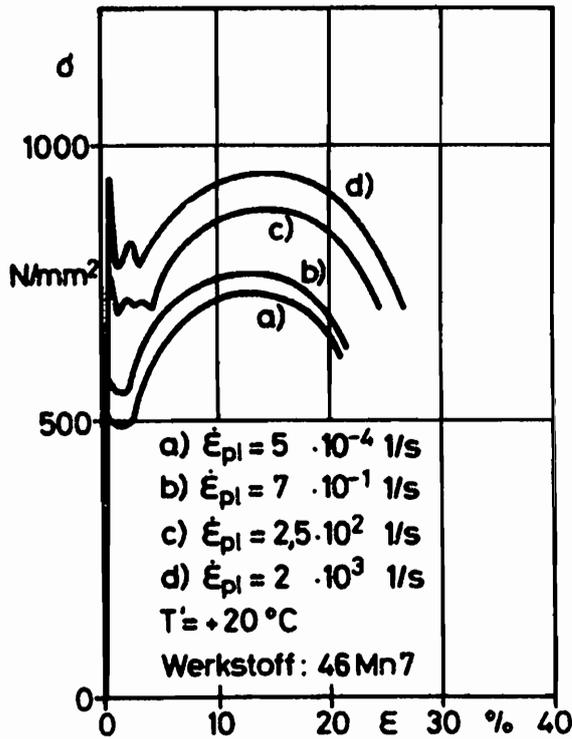


Fig. B.13: $\sigma(\epsilon)$ -Kurve aus [57]

zu 2) Schlüssel zur Auswertung der Experimente mit dem expandierenden Ring ist die Messung der Radialgeschwindigkeit des Rings mittels Lasertechnik. Das Ergebnis einer solchen Messung ist in (Fig.B.14) dargestellt.

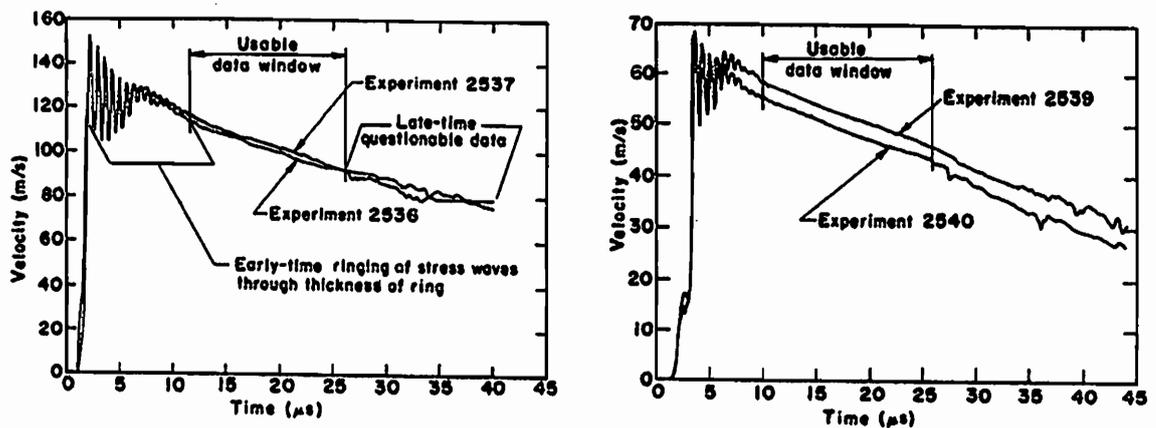


Fig.B.14: Radialgeschwindigkeit des expandierenden Rings aus [37]

Aus $\dot{r}(t)$ kann durch Integration bzw. Differentiation $r(t)$ und $\ddot{r}(t)$ gewonnen werden. Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \sigma &= -\rho r \ddot{r} \\
 \epsilon &= \ln(r/r_0) \\
 \dot{\epsilon} &= \dot{r}/r
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

Wie bereits aus Fig.B.14 deutlich wird, kann bei einem Versuch nur ein begrenzter Datenbereich ausgewertet werden. Dieser liefert mit (B.1):

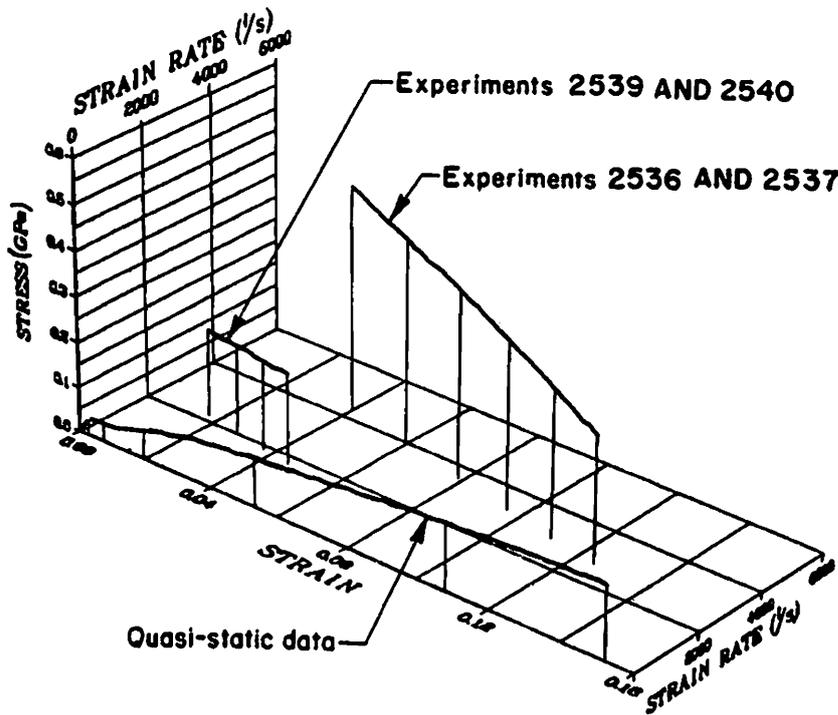


Fig.B.15: Darstellung des Spannungsverlaufs beim expandierenden Ring aus [37]

Fig.B.15 zeigt sowohl, daß bei höheren Dehnungsraten höhere Spannungen vorliegen als auch, daß bei jedem Versuch veränderliche Dehnungsraten auftreten.

B.1.3 Experimentelle Ergebnisse zur Mikromechanik

Die hier angeführten Erkenntnisse beschäftigen sich mit zwei Aspekten, nämlich der Entwicklung von Versetzungsdichte und Materialschädigung insbesondere durch Scherbandbildung. Für die Einzelheiten der dazu durchgeführten Experimente verweisen wir auf unsere Berichte [1]-[5] und die dort zitierten Literaturstellen.

Die Messung der Versetzungsdichte N liefert [24],[66],[67]

$$\frac{\partial N(\epsilon, \dot{\epsilon})}{\partial \dot{\epsilon}} > 0 \quad . \quad (B.2)$$

Die Dichte der beweglichen Versetzungen N_{mob} läßt sich experimentell durch die Dämpfung von Ultraschallwellen bestimmen [68]-[70] und zwar bis zu Dehnungsraten von etwa 8000 $1/s$ und Temperaturen von 500 K. Man beobachtet, daß das Verhältnis von beweglichen Versetzungen zur Gesamtversetzungszahl mit wachsender Dehnungsrate abnimmt und folgende Extremwerte annimmt:

$$\begin{aligned} N_{mob} / N &\approx 10^{-2} \quad \text{für langsame Prozesse} \\ N_{mob} / N &\approx 10^{-3} \quad \text{für schnelle Prozesse} \end{aligned} \quad . \quad (B.3)$$

Entscheidend für das Verhalten von Metallen bei HGDn ist weiterhin der Einfluß der Schädigung, da sich dieser im Gegensatz zu langsamen Deformationen schon bei kleineren mittleren Dehnungen bemerkbar macht.

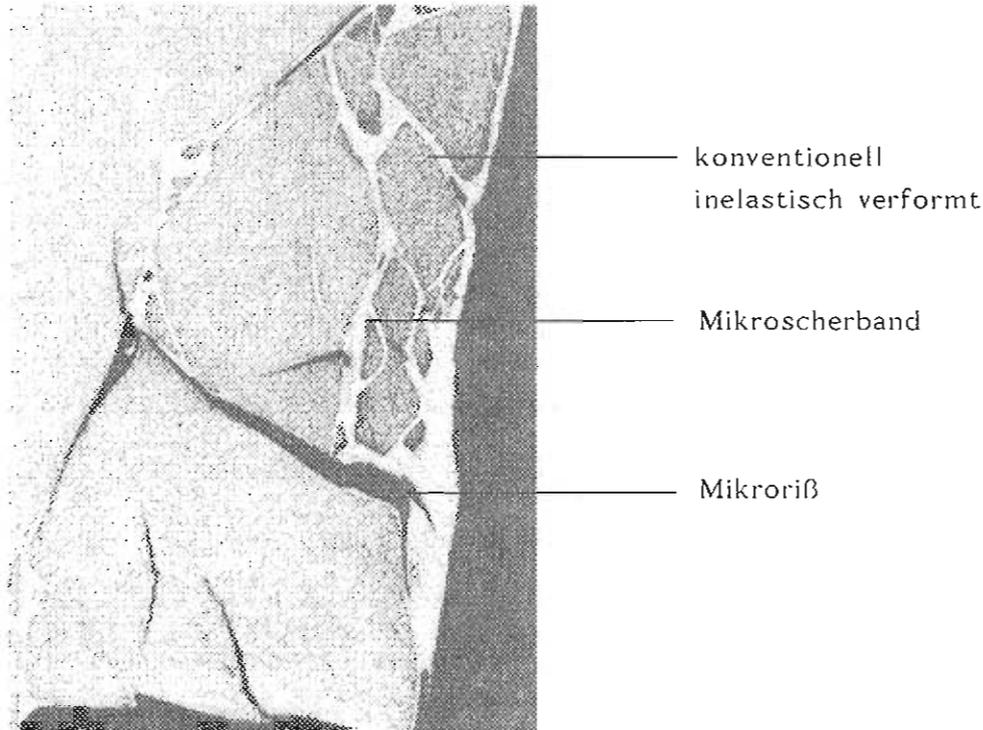


Fig. B. 16: Vergrößerter Ausschnitt nach einer HGD aus [46]

Fig. B. 16 zeigt die Struktur einer Stahlplatte nach einem Durchschlagversuch. Wir erkennen die Partitionierung des Körpers durch Risse und Scherbänder, wobei die Fragmente zusätzlich durch versetzungsinduzierte Verzerrungen inelastisch verformt sind. Die gesamte Deformation setzt sich also zusammen aus einem schädigungsinduzierten Anteil (mikrolokalisierte Scherungen, Abgleitungen an Mikrorissen, Rißöffnung, Porenwachstum) und einem versetzungsinduzierten Anteil, wobei verschiedene Versetzungsmechanismen beteiligt sein können.

Schädigung wird verursacht durch Entstehung und Wachstum von Mikrodefekten und deren Vereinigung zu Makrodefekten, wie sie in CFC-Tests beobachtet werden. Die Mikrodefekte entstehen an den im Material vorhandenen 3D-Gitterfehlern und entwickeln sich je nach Prozeßgeschwindigkeit unterschiedlich:

- i) Bei langsamen Prozessen können lokale Spannungskonzentrationen an Mikrodefekten durch Versetzungsbewegung abgebaut werden und die entstehende Wärme wird abgeleitet.
- ii) Bei moderaten Prozeßgeschwindigkeiten kann die Wärme nicht schnell genug abgeführt werden, so daß es zur lokalen Entfestigung durch " adiabatic heating" kommt .
- iii) Bei schnellen Prozessen reicht die endliche Versetzungsgeschwindigkeit nicht

mehr aus, um Spannungskonzentrationen abzubauen und es stellen sich lokale Brüche oder Scherungen ein.

iv) Bei sehr schnellen Prozessen spielen die Spannungskonzentrationen keine Rolle mehr und es kommt zu einer homogenen Defekterzeugung.

Für die von *Diehl* [6] besonders untersuchte Schädigung durch Mikroscherbänder lassen sich folgende quantitative Angaben machen:

- MiSB entstehen durch eine HGD in einer Anzahl von $10^3 - 10^5 / \text{cm}^3$
- MiSB werden ab einer Größe von einigen μm beobachtet.

B.1.4 Darstellung der Ergebnisse

Die Experimentatoren geben als Resultat ihrer Versuche fast ausschließlich Spannungs-Dehnungs- bzw. Spannungs-Dehngeschwindigkeits-Kurven, jeweils für verschiedene Temperaturen an. Eine Zusammenstellung der Literaturergebnisse für $\sigma(\dot{\epsilon})$ -Kurven findet man für eine Vielzahl von Metallen bei *Jähn* [10] (Seite 61-74). Weitere aktuelle Resultate sind in den Proceedings zu den Tagungen [11]-[23] enthalten.

Anhand von zwei durchaus repräsentativen Beispielen wollen wir diese Ergebnisse diskutieren.

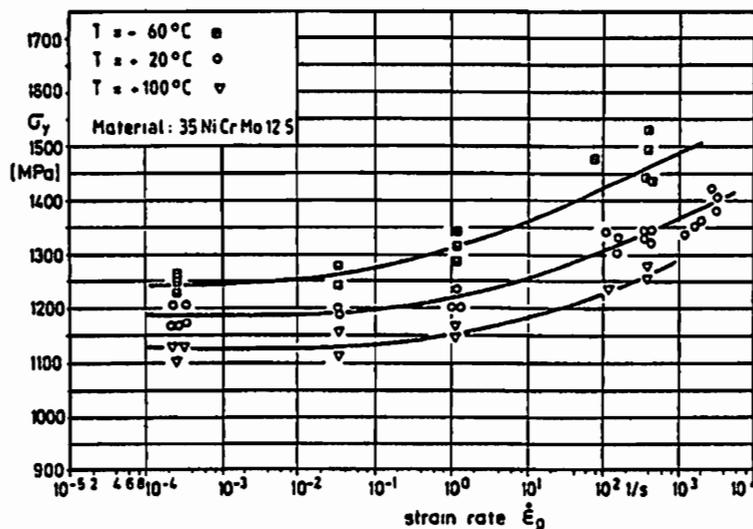


Fig. B.17: Fließspannung $\sigma_{0.2}$ in Abhängigkeit der Verzerrungsrate für verschiedene Temperaturen aus [71]

Gemeinsamkeiten:

- Die $\sigma(\dot{\epsilon})$ -Kurven zeigen für fast alle Materialien einen typischen Verlauf, und zwar einen sehr flachen Anstieg im Bereich niedriger und moderater Dehnungsraten, der dann in einen wesentlich steileren Anstieg für große Dehnungsraten übergeht.
- Die Versuchsergebnisse für hohe Dehngeschwindigkeiten zeigen eine wesentlich größere Streuung als die quasistatischen.

- Für konstante Dehnungsraten steigt die gemessene Spannung mit der Dehnung an.
- Für konstante Dehnungsraten fällt die gemessene Spannung i.a. mit der Temperatur ab.
- Resultate von HGDn implizieren die bei quasistatischen Versuchen gewohnten einachsigen Spannungszustände.

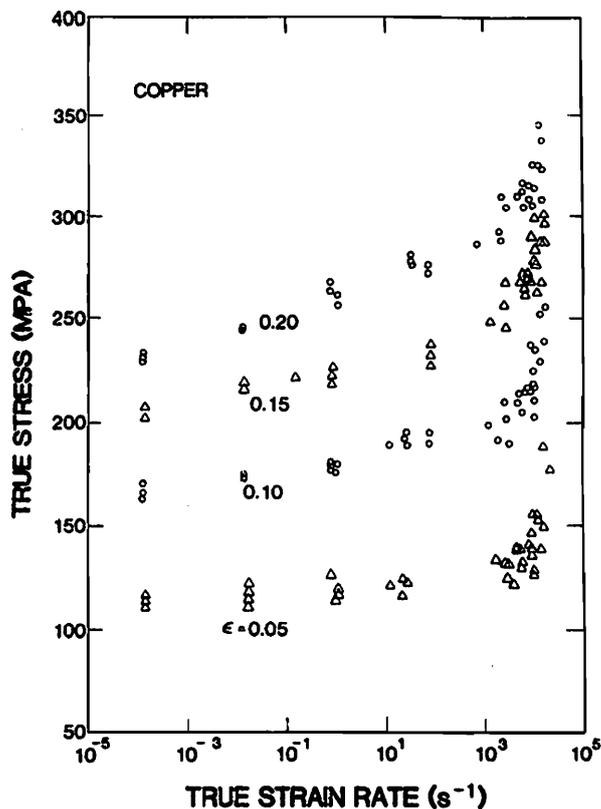


Fig. B.18: Flow stress measured at constant strain versus strain rate for copper. aus [24]

Unterschiede in den Darstellungen verschiedener Autoren:

- In den Diagrammen findet man verschiedene Spannungswerte aufgetragen:
 - * Fließspannung, z.B. definiert als Spannung bei 0,2% bleibender Dehnung
 - * Spannung bei verschiedenen Werten der Dehnung (5%... 20%)
 - * Zugfestigkeit R_m

- Als Dehnungsrate wird angegeben:

- * plastische Dehnungsrate
- * Gesamtdehnungsrate

Man findet auch

- * elastische Dehnungsrate
- * mittlere Dehnungsrate
- * Dehnungsrate bei einer bestimmten Gesamtdehnung

- Es lassen sich auch Unterschiede der Meßwerte selbst von 100% (in [10]) bis zu 500% (in [72]) finden.

Die experimentelle Untersuchung eines Werkstoffs wird ergänzt durch die Ergebnisse von "langsamen" Versuchen über die beispielsweise in [73] nachgelesen werden kann. Dort wird auch auf die Unterschiede zwischen Spannungs- und Dehnungssteuerung eingegangen, die bei HGDn gar nicht zur Diskussion stehen.

Einige Experimente, die bei quasistatischen Untersuchungen üblicherweise durchgeführt werden, sind bei hohen Dehngeschwindigkeiten versuchstechnisch nicht zu realisieren. Dazu zählen Relaxations- und Kriechversuche, sowie Geschwindigkeitswechselversuche und zyklische Versuche.

B.1.5 Zusammenfassung der wichtigsten experimentellen Befunde

Wir wollen an dieser Stelle die für viele Metalle und Legierungen charakteristischen Ergebnisse sowohl der speziellen HGDn als auch der langsamen Versuche kurz zusammenstellen.

- Der qualitative Verlauf der $\sigma(\varepsilon)$ -Kurven entspricht Fig. B.19
- Der qualitative Verlauf der $\sigma(\dot{\varepsilon})$ -Kurven entspricht Fig. B.20

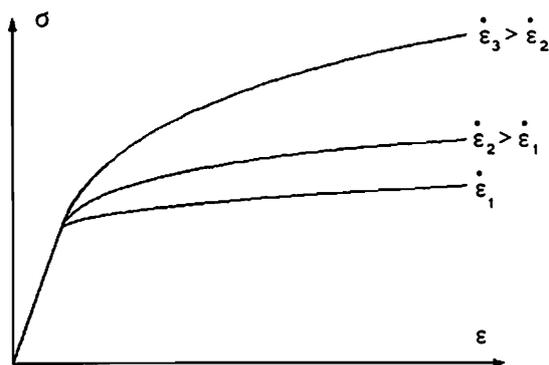


Fig. B.19: Typische $\sigma(\varepsilon)$ -Kurven

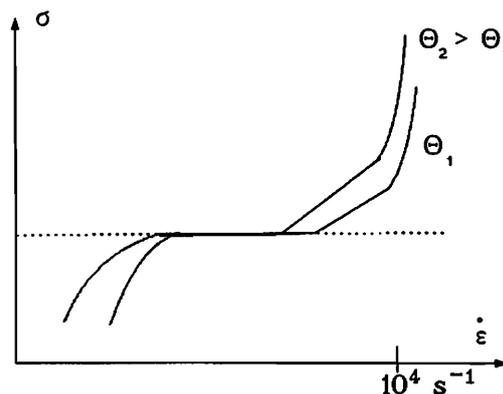


Fig. B.20: Typische $\sigma(\dot{\varepsilon})$ -Kurven

- Es können 3 Bereiche mit $\sigma(\dot{\varepsilon}) \approx \text{konst.}$, $\sigma(\dot{\varepsilon}) \approx \log \dot{\varepsilon}$ und $\sigma(\dot{\varepsilon}) \approx \dot{\varepsilon}$ unterschieden werden. Ihnen können entsprechende Versetzungsmechanismen, nämlich athermische, thermisch aktivierte und viskos gedämpfte Versetzungsbewegung zugeordnet werden.
- Die Versetzungsdichte steigt mit der Dehnungsgeschwindigkeit und der Dehnung.
- Aus den $\sigma(\varepsilon)$ - und $\sigma(\dot{\varepsilon})$ -Kurven läßt sich ein Anwachsen der Proportionalitätsgrenze σ_0 und der $\sigma(\varepsilon)$ -Kurven mit $\dot{\varepsilon}$ und Θ^{-1} feststellen.
- Temperaturverläufe werden i.a. nicht gemessen; für den Bereich der HGDn liegen uns nur am IFAM (Fraunhofer-Institut für angewandte Materialforschung Bremen) gemessene Proben temperaturen nach Fallwerksversuchen vor.
- Alle uns bekannten Untersuchungen zeigen, daß Metalle unter dynamischer Druckbeanspruchung Scherbandbildung aufweisen.

- Scherbänder treten in einer Dichte von 10^3 bis 10^5 cm^{-3} auf und wachsen bzw. vereinigen sich bei Belastung. Entstehung und Verlauf des Wachstums können nicht beobachtet werden.
- Unterhalb einer prozeßgeschwindigkeitsabhängigen Grenze wurde keine Scherbandbildung beobachtet.
- Der qualitative Verlauf von schädigungsrelevanten Größen (z.B. Spannungskonzentrationen τ , Scherbandschädigung Z und schädigungsinduzierte Verzerrungsrate $\dot{\varepsilon}_D$) ist in Fig. B.21 dargestellt.

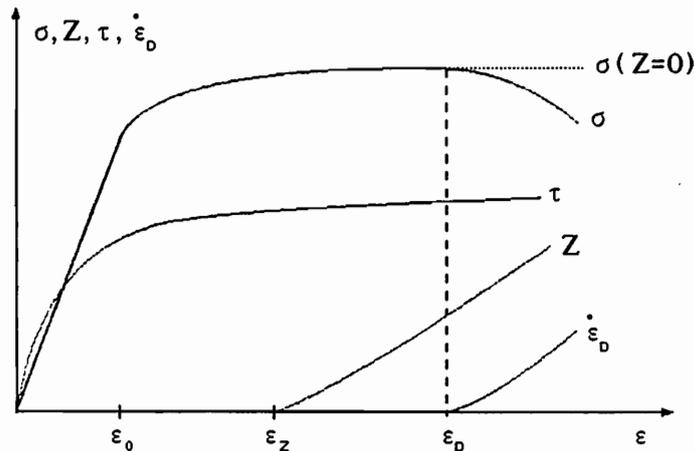


Fig. B.21: Qualitativer Verlauf von σ , τ , Z , $\dot{\varepsilon}_D$ bei schneller monotoner Belastung

B.2 Modellbildung

Nach der Zusammenstellung der wichtigsten Meßergebnisse und Beobachtungen wollen wir nun die Grundzüge des von uns entwickelten Materialmodells vorstellen. Details und weitergehende Erläuterungen finden sich in unseren Berichten [1]-[5] und der Dissertation von *Diehl* [6].

Die wichtigsten allgemeinen Merkmale des Modells sind hier zunächst zusammengestellt und werden im Anschluß erläutert:

- Beschreibung großer Deformationen
- Verwendung von inneren Variablen
- Gültigkeit über einen weiten Geschwindigkeitsbereich $10^{-4} < \dot{\varepsilon} < 10^5 \text{ s}^{-1}$
- thermodynamische Konsistenz
- Material- und Bilanzgleichungen bilden ein quasilineares hyperbolisches System
- Baukastenprinzip
- Einführung von u als Maß der Prozeßgeschwindigkeit
- Einteilung der Beschreibung in 2 Phasen
- Bestimmung der Zeit t^* sowie Anfangsgröße und -orientierung eines Makroscherbandes

Anhand des Aufbaus nach dem Baukastenprinzip (Fig.B.22) läßt sich die Umsetzung der experimentellen Beobachtungen in das Materialmodell aufzeigen.

Die Beschreibung von HGDn unterscheidet 2 Phasen:

Phase 1 ($0 \leq t \leq t^*$) wird durch eine Kontinuums-Damage-Theorie für langsame und schnelle Prozesse beschrieben. Nach der Entstehung eines Makrodefektes zum Zeitpunkt t^* muß parallel dazu das Wachstum dieses Makrodefektes in Phase 2 beschrieben werden.

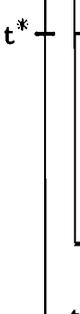
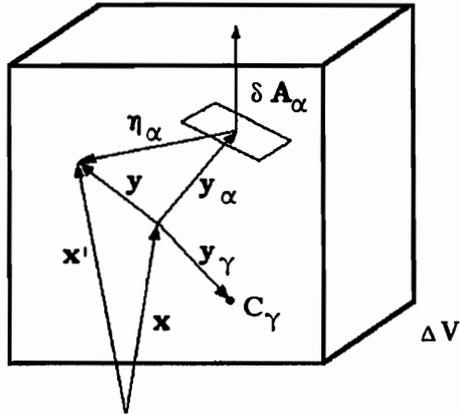
t^*  t	Kontinuums-Damage-Theorie	Versetzungsmechanismen	athermisch	$\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}_v + \dot{\epsilon}_d$
			therm. aktiviert *	
			viskos gedämpft	
	Damage	Mikro-Scherbänder *	$\dot{\epsilon}_d = \dot{\epsilon}_{ds} + \dot{\epsilon}_{dr} + \dot{\epsilon}_{dp}$	
		Mikro-Risse		
		Mikro-Poren		Deformation
Fragmentierungstheorie	Makro-Scherbänder		Ausbreitung	
	Makro-Risse		der	
	Makro-Poren		Makrodefekte	

Fig. B.22: Baukasten des Materialmodells

Im Rahmen dieser Arbeit kommt nur die Kontinuums-Damage-Theorie für Phase 1 zur Anwendung. Die inneren Variablen werden durch Mittelwertbildung über die Felder eines repräsentativen Volumenelementes identifiziert. (Fig. B.23)

Das Volumenelement stellt einen Polykristall mit endlich vielen Mikrodefekten, wie einem Mikroscherband δA_α und einer Inklusion C_γ dar. Die durch den Index m gekennzeichneten Mikrofelder beschreiben das Verhalten in ΔV . Sie enthalten jeweils einen quasihomogenen Anteil und einen Summenterm über lokale Störungen, wie z.B. Spannungskonzentrationen.



$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{y} \quad , \quad \mathbf{y} = \text{lokale Koordinaten}$$

$$\mathbf{x}'_{\alpha} = \mathbf{x} + \mathbf{y}_{\alpha}$$

$$\boldsymbol{\eta}_{\alpha} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{\alpha}$$

Fig. B.23: Repräsentatives Volumenelement ΔV mit Scherband δA_{α} und Inklusion C_{γ}

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{y}) &= \boldsymbol{\sigma}_{\text{hom}}(\mathbf{y}) + \sum_{\alpha} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}(\mathbf{y}) \\ \boldsymbol{\Theta}_m(\mathbf{y}) &= \boldsymbol{\Theta}_{\text{hom}}(\mathbf{y}) + \sum_{\alpha} \Delta \boldsymbol{\Theta}_{\alpha}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{Z}_m(\mathbf{y}) &= \sum_{\alpha} \delta A_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} * \mathbf{e}_{\alpha} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{\alpha}) \end{aligned}$$

Homogenisierung

Viskoplastizitätstheorie
versetzungsinduzierter Prozesse
mit kinematischer und
isotroper Verfestigung

$$\boldsymbol{\sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma}_{\text{hom}} \rangle + \dots$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{v,\text{hom}} \rangle + \dots$$

Variable der
Damage-Theorie

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = \langle \sum_{\alpha} \Delta \boldsymbol{\sigma}_{\alpha} \rangle + \dots$$

$$\boldsymbol{\Theta}^0 = \langle \sum_{\alpha} \Delta \boldsymbol{\Theta}_{\alpha} \rangle + \dots$$

$$\mathbf{Z}^0 = \langle \mathbf{Z}_m \rangle + \dots > 0$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^0 = \text{sym} \langle \sum_{\alpha} \mathbf{L}_{\alpha} \rangle + \dots$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{rev}} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_D^0$$

$$\mathbf{g} = \hat{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Theta}; \boldsymbol{\sigma}^0, \mathbf{Z}^0, \dots; \kappa \dots)$$

Die Mittelwertbildung (Homogenisierung) der Mikrofelder liefert die Zustandsgrößen der Kontinuumstheorie.

Die Mittelwerte der lokalen Störungen charakterisieren die Schädigung; sie werden durch eine Reihe approximiert, deren Glieder mit hochgestelltem Index (j) bezeichnet sind. Wir brechen die Reihe bereits nach dem nullten Glied ab.

Für die Mittelwerte der quasihomogenen Anteile wird eine Viskoplastizitätstheorie versetzungsinduzierter Prozesse mit isotroper und kinematischer Verfestigung angesetzt. Die Damage-Theorie enthält je ein Maß für die Spannungs- und Temperaturkonzentrationen sowie den Damage-Tensor Z^0 und die damageinduzierte Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}_D^0$. Die Kopplung der beiden Anteile erfolgt über die Zerlegung der Dehnungsraten und die Thermodynamik, wobei die Enthalpie sowohl Variablen der Viskoplastizitätstheorie als auch Schädigungsgrößen enthält.

Nach ihrer Identifizierung müssen für die Variablen der Viskoplastizitätstheorie und der Damage-Theorie Evolutionsgesetze angegeben werden. Desweiteren wird ein thermodynamisches Potential, wozu wir, wie bereits angedeutet, die freie Enthalpie verwenden, und ein Wärmeleitgesetz benötigt.

Die Schädigung wird beschrieben durch die Mittelwerte der lokalen Störungen, z.B. den Spannungskonzentrationstensor σ^0 . Es ist daher naheliegend, Nebenbedingungen für Damage-Größen im (σ^0, Θ^0) -Raum zu formulieren, so daß z.B. auch bei makroskopischer Entlastung noch eine Zunahme der Schädigung erfolgen kann.

Aus dem Damage-Tensor Z^0 leiten sich unmittelbar die Versagenskriterien ab: Versagen ist definiert wenn

- 1) die Schädigung durch Mikroscherbänder einen kritischen Wert überschreitet oder
- 2) ein Makroscherband \mathcal{M} entsteht.

Die Entstehung eines Makroscherbandes wird von der Damage-Theorie nach Festlegung eines problemabhängig gewählten Volumens ΔV vorhergesagt.

Aus dem Baukasten werden für die Berechnung von HGDn bis zur Entstehung eines Makroscherbandes nur zwei Bausteine benötigt (sie sind in Fig. B.22 mit einem * gekennzeichnet):

- 1) Gleichungen zur Beschreibung thermisch aktivierter Versetzungsbewegung
- 2) Gleichungen für die Evolution der Schädigung durch Mikroscherbänder.

Diese Fassung wird bei *Diehl* mit Version 1.2 bezeichnet und ist durch gewisse Vereinfachungen aus dem allgemeinen Werkstoffmodell (Version 1.1), für das noch keine Anpassung vorliegt, abgeleitet. Es ist gültig für den Bereich - thermisch aktivierter versetzungsinduzierter Deformation (also Dehnungsraten

von ca. 10^{-4} bis 10^5 s^{-1})

- moderater schädigungsinduzierter Deformation
- hinreichend monotoner und radialer Prozesse ohne lange Haltezeiten bei hohen Temperaturen

und stellt somit eine Kontinuums-Damage-Theorie für langsame und schnelle Prozesse dar.

Abschließend sind die Materialgleichungen von Modell 1.2 zusammengestellt: (Wir weisen noch darauf hin, daß im Rahmen dieser Arbeit die Evolutionsgleichung für Z^0 nicht nach [6], sondern in der Fassung aus [4] verwendet wird.)

Evolutionsgleichungen für die Variablen der Versetzungsmechanismen

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{vr}} = \gamma_{\tau} \left[\Phi_{\tau} \right]_{\tau} \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}_{\tau}}{\|\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}_{\tau}\|} \quad (\text{B.4})_1$$

$$\text{falls } F_{\tau} = (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}_{\tau}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}_{\tau}) - g_{\tau}(\chi, \Theta, u) \geq 0$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{\tau} = c_{\tau} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{vr}} \quad (\text{B.4})_2$$

$$\dot{\chi} = K(\chi, \Theta) \boldsymbol{\sigma}' \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{vr}} \quad (\text{B.4})_3$$

Wir definieren die Prozeßgeschwindigkeit durch

$$\text{PG} = \max \left\{ 0, \|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\| + \chi_{u1} \dot{\Theta} \right\} \quad (\text{B.5})_1$$

Evolutionsgleichung für das Maß u der Prozeßgeschwindigkeit

$$\ddot{u} + c(\alpha + \text{PG}) \dot{u} + \frac{c^2}{4} (\alpha + \text{PG})^2 \{u - u_{**}(\text{PG})\} = 0 \quad (\text{B.5})_2$$

Evolutionsgleichungen für die Damage-Variablen

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^0 = \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + K d_4 (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{vr}}) - m \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (\text{B.6})$$

$$\text{mit } \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = d_1 \dot{\boldsymbol{\sigma}} + d_2 (\boldsymbol{\sigma}^0 \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma}^0) + d_3 (\mathbf{Z}^0 \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{Z}^0)$$

$$\dot{\mathbf{Z}}^0 = \left[d_z \right]_z \ll \text{LC}_z \gg \left\{ \mu_3 (\boldsymbol{\sigma}')^2 + (\mu_4 + \omega) \mathbf{Z}^0 \right\} \quad (\text{B.7})$$

$$\text{falls } \text{LC}_z = (2 \boldsymbol{\sigma}^{01} - \nu_z \mathbf{1}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\sigma}}^0 + m \boldsymbol{\sigma}^0) > 0$$

$$\text{und } G_z = \boldsymbol{\sigma}^{01} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{01} - \nu_z \text{tr} \boldsymbol{\sigma}^0 - h_z \geq 0$$

$$\dot{\epsilon}_o^0 = [d_o]_o \lll LC_o \ggg \frac{\sigma^0}{\|\sigma^0\|} \quad (\text{B.8})$$

$$\text{falls } LC_o = (2\sigma^{0i} - \nu_o \mathbf{1}) \cdot (\dot{\sigma}^0 + m\sigma^0) > 0$$

$$\text{und } G_o = \sigma^{0i} \cdot \sigma^{0i} - \nu_o \text{tr} \sigma^0 - h_o \geq 0$$

$$\dot{\Theta} = [d_{\Theta v}]_v \quad \text{falls } G_v \geq 0 \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{\epsilon}_{vl} = \gamma_{vl} [\Phi_{vl}]_v \frac{\sigma^{0i}}{\|\sigma^{0i}\|} \quad (\text{B.10})$$

$$\text{falls } G_v = \sigma^{0i} \cdot \sigma^{0i} - h_v \geq 0$$

Die Materialbeschreibung wird vervollständigt durch die Gleichung für die thermoelastische Dehngeschwindigkeit, das Wärmeleitgesetz

$$\dot{\epsilon}_{,vv} = \{ \lambda_2 \dot{\Theta} + \lambda_3(\zeta) \text{tr} \dot{\sigma} \} \mathbf{1} + \lambda_4(\zeta) \dot{\sigma} \quad (\text{B.11})_1$$

$$\tau_q \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = -k \text{grad} \Theta \quad (\text{B.11})_2$$

und den ersten Hauptsatz (siehe Anhang 3.6).

Die Materialfunktionen und Parameter sind in Anhang 1 aufgelistet.

B.3 Anpassung des Materialmodells

Das in Kap. B.1 vorgestellte Modell enthält zur quantitativen Beschreibung des Materialverhaltens 20 Materialfunktionen und 21 einzelne Konstanten mit insgesamt 85 Materialparametern. Eine vollständige Beschreibung aller Ansätze sowie einen Abriß der historischen Entwicklung ist in [4] nachzulesen. Die Zusammenstellung der gemeinsam mit *Diehl* angepaßten Materialfunktionen und -parameter enthält Anhang 1.

Die für die Bestimmung aller Parameter erforderlichen Versuche sind noch nicht vollständig an einem Material durchgeführt worden. Dies liegt daran, daß sich jeder Experimentator für seine Untersuchungen ein Material auswählt, daß die zu untersuchende Eigenschaft besonders ausgeprägt zeigt. So liegen Informationen über die Änderungen der Mikrostruktur durch Versetzungen bei verschiedenen Li-Verbindungen vor, während die Geschwindigkeitsabhängigkeit des makros-

kopischen Deformationsverhaltens oft an Al-Legierungen studiert wird. Wir definieren deshalb ein fiktives Vergleichsmaterial, dessen Verhalten qualitativ für eine große Klasse realer Materialien repräsentativ ist. Anhand der Daten dieses Vergleichsmaterials werden auch die Effekte, die dieses Stoffgesetz beschreiben kann, in Kap. B.3.3 vorgestellt.

B.3.1 Definition des Vergleichsmaterials

Fig. B.24 zeigt den Verlauf von $\sigma(\epsilon)$ -Kurven für isotherme Prozesse bei kleinen Deformationen mit $\dot{\epsilon} = \text{konst} = k$, wie wir sie als Resultat monotoner Zugversuche vorgeben. Sie sind gekennzeichnet durch:

- a) Die phänomenologische Fließgrenze σ_0 wächst monoton mit k .
- b) Die $\sigma(\epsilon)$ -Kurven fächern erst bei großen Dehnungen auf, d.h. der Tangentenmodul wächst mit ϵ und k ($d\sigma_0/dk > 0$).
- c) Die Kurven sind bei ϵ_0 glatt.
- d) $\lim_{k \rightarrow 0} \sigma_0 = \sigma_f$, $d\sigma_0/dk \rightarrow 0$ für $k \rightarrow 0$, $\epsilon_f = \frac{\sigma_f}{E}$

Die Anpassung erfordert einen analytisch zu behandelnden Ansatz für $\sigma(\epsilon)$. Wir wählen einen Potenzansatz

$$\sigma(\epsilon) = \begin{cases} E \epsilon & \epsilon < \epsilon_0 \\ \sigma_0 (N(\epsilon))^n & \epsilon \geq \epsilon_0 \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

$$\text{mit } N(\epsilon) = \frac{1}{n} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) + 1 \quad n \ll 1$$

wobei $\sigma_0(k) = E \epsilon_0(k)$ und $n = \text{konst}$. Fig. B.24 zeigt die Kurven für die spezielle Wahl

$$\begin{aligned} \sigma_0(k_1 = 10^{-5}) &= 1.04 \sigma_f \\ \sigma_0(k_2 = 10^{-1}) &= 1.10 \sigma_f \\ \sigma_0(k_3 = 10^4) &= 2.0 \sigma_f \\ n &= 1/18 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Für die Anpassung des Vergleichsmaterials werden u.a. benötigt:

- i) Mindestens 3 Werte $\sigma_0(k_i)$ für konstante Dehnraten $\dot{\epsilon} = k_i$ (siehe oben)
- ii) Der Verlauf $\sigma(\epsilon, k_*)$ für eine moderate Dehnraten k_* im Bereich, in dem thermische Aktivierung dominiert. Wir wählen $k_* = 10^{-1} \text{ s}^{-1}$.

Aus den so gewählten Ansätzen lassen sich insbesondere analytische Ausdrücke für E_t , $\dot{\epsilon}_{vt}$ und α angeben [4]. Weiterhin wird die durch geeignete Be- und Entlastung näherungsweise bestimmte Fließgrenze

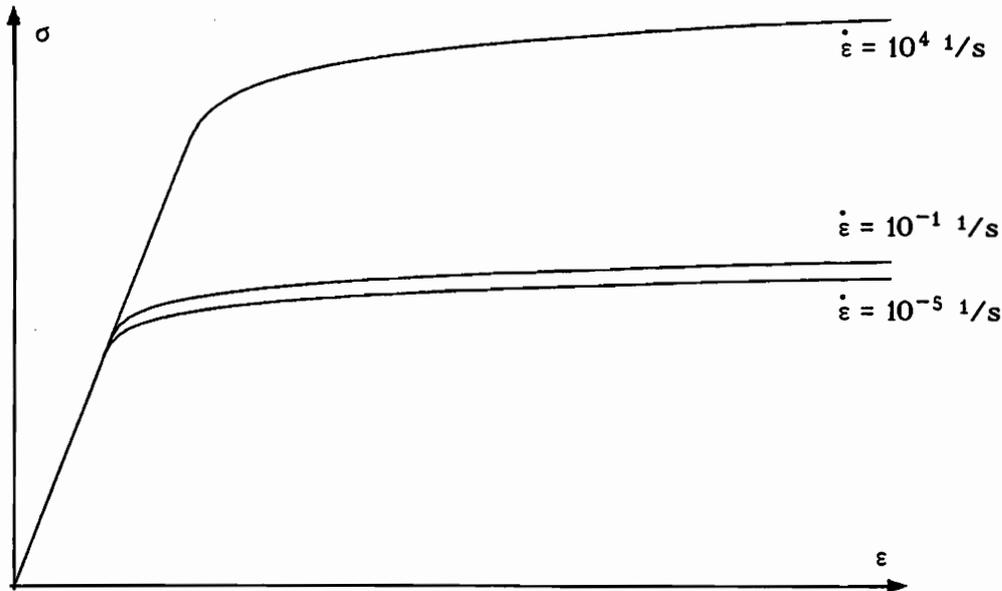


Fig. B.24: Spannungs-Dehnungskurven nach B.12 und B.13

$$\sigma_T(\varepsilon, k) = \left\{ (\sigma, \varepsilon) \mid F_T(\sigma(\varepsilon, k), X_T(\varepsilon, k), \chi(\varepsilon, k), u(\varepsilon, k), \Theta_0) = 0 \right\} \quad (\text{B.14})$$

und die isotrope Verfestigung vorgegeben, und zwar so, daß

- i) die Überspannung \mathcal{F}_T mit ε streng monoton wächst
- ii) die kinematische Verfestigung ebenfalls monoton mit der Dehnung wächst und für große Dehnungen gegen eine Konstante strebt.

Vervollständigt wird die Definition des Vergleichsmaterials für isotherme versetzungsinduziert gesteuerte Prozesse durch die Angabe eines Gleichgewichtswertes von u für eine moderate Dehnungsrate ($u_{\infty} (k_1 = 10^{-5})$ und $u_{\infty} (k_3 = 10^4)$ waren bereits beim Aufstellen der Materialfunktion für u_{∞} festgelegt worden.) und der Angabe der Konstanten im Evolutionsgesetz von u . Die beiden letzten Vorgaben führen dazu, daß u vor Erreichen der Fließgrenze seinen Gleichgewichtswert erreicht und Relaxations- bzw. Geschwindigkeitswechselfersuche plausibel beschrieben werden können.

Zur Anpassung der Schädigungsgesetze:

Die Evolution der Schädigung kann in den Experimenten nicht direkt beobachtet werden. Die einzige Ausnahme bildet der durch die schädigungsinduzierte Verzerrungsrate verursachte Abfall der Spannungen bei größeren Dehnungen (vgl. Fig.B.21). Bezüglich der Mikrostruktur liegen höchstens einige Meßwerte vor, die nach HGDn mit einer bestimmten Dehnungsrate und Dehnung ermittelt werden. Wir sind daher gegenüber der Anpassung des viskoplastischen Teils des Stoffgesetzes mehr auf Plausibilitätsbetrachtungen angewiesen, die dann durch Lösen des Dgl.-Systems überprüft werden müssen.

Beschreibung des Temperatureinflusses, nichtisotherme Prozesse:

Repräsentative Werte für Dichte, spezifische Wärme, Wärmeleitfähigkeit oder Wärmeausdehnungskoeffizient können Tabellen [114] entnommen werden.

Die Größenordnung des Anteils der Dissipation aufgrund thermisch aktivierter Versetzungsbewegung wird mit

$$D_{VT} \approx 0.9 \sigma \dot{\epsilon}_{VT} \quad (\text{B.15})$$

und des Anteils der Dissipation aus Scherbandwachstum mit

$$D_{SB} \approx 0.05 D_{VT} \quad (\text{B.16})$$

vorgegeben. Die Dissipation aufgrund von Recovery-Effekten bei lokalen Spannungskonzentrationen und aufgrund lokaler Temperaturkonzentrationen sei vorhanden, aber im Verhältnis zu den beiden oben angeführten Anteilen vernachlässigbar. Abgeschlossen wird die Definition des Vergleichsmaterials durch die Angabe der Abhängigkeit der Anfangsfließspannung von der Temperatur und des thermischen Entfestigungsverhaltens.

B.3.2 Anpassungsstrategie

Einleitung:

Die Anpassung von Materialfunktionen und -parametern an reales Materialverhalten oder wie hier an ein fiktives Vergleichsmaterial erfolgt in mehreren Stufen. In einer ersten Stufe verhalten wir uns so, wie viele andere Modellentwickler es bei der Bestimmung ihrer Parameter auch tun. Unter mehr oder weniger stark vereinfachenden Annahmen, wie etwa konstanter Dehngeschwindigkeit oder konstanter Temperatur, wird zunächst eine Voranpassung durchgeführt. Dabei treffen wir unsere Annahmen so, daß aus je einem Versuch oder einer Versuchsreihe eine Funktion mit allen Parametern ermittelt werden kann. In einer zweiten Stufe werden dann die vereinfachenden Annahmen fallengelassen und die Anpassung verfeinert, bevor dann in der dritten Stufe das Modell im FE-Programm angewendet wird, um die tatsächlich durchgeführten Versuche nachzurechnen und gegebenenfalls weitere Änderungen im Parametersatz vorzunehmen. Bei der Anpassung an reale Materialien sind die Vorgaben des Vergleichsmaterials durch Meßwerte zu ersetzen.

Das hier vorgestellte Verfahren läßt sich in analoger Weise auch auf andere Stoffgesetze übertragen, wobei u.U. die dritte Anpassungsstufe entfallen kann.

Vorüberlegungen:

Die Anpassung innerhalb der ersten beiden Stufen erfolgt zweckmäßig an einachsigen Spannungszuständen. Die Spezialisierung des Modells auf solche Spannungszustände wird in [4], S.214-216, Gln.(6.6.35)-(6.6.52), durchgeführt. In der ersten Anpassungsstufe wollen wir nur isotherme Prozesse mit konstanter Dehngeschwindigkeit untersuchen, wie sie zur Bestimmung von Materialeigenschaften standardmäßig verwendet werden. (Daß die Annahme einer isothermen Prozeßführung bei moderaten Dehnungsraten zulässig ist, bezweifeln wir.)

Nur für eine konstante Prozeßgeschwindigkeit PG ist es möglich, die Materialgleichungen so zu vereinfachen, daß eine Anpassung ohne numerische Integration des gesamten Stoffgesetzes durchgeführt werden kann, denn nur in diesem Fall kann das Maß u der Prozeßgeschwindigkeit durch seinen Gleichgewichtswert u_{eq} ersetzt werden. Dazu ist es allerdings erforderlich, die Definition der Prozeßgeschwindigkeit (B.5) vorübergehend zu modifizieren, weil sie für monotone Versuche konstanter Verformungsgeschwindigkeit nicht $PG = \text{konst}$ liefert. Wir definieren also

$$PG = \max \left\{ 0, |\dot{\epsilon}| + \chi_{u1} \dot{\Theta} \right\} \quad . \quad (B.17)$$

(B.17) wird für die Berechnung aller einachsigen Spannungszustände beibehalten. Wir werden erst im Rahmen der FE-Berechnung wieder auf die Definition (B.5) zurückgreifen und dort dann auch die sich daraus ergebenden Unterschiede aufzeigen. Die Annahme $\Theta = \text{konst.}$ in Verbindung mit der alternativen Definition der Prozeßgeschwindigkeit hat nicht zu überschätzende Erleichterungen zur Folge und erlaubt zusammen mit der Definition des Vergleichsmaterials eine effektive Anpassung. Unter den oben angesprochenen Einschränkungen kann die Anpassung für verschiedene konstante Temperaturen und Dehngeschwindigkeiten erfolgen.

In der nächsten Stufe werden allgemeine einachsige Prozesse (also auch $\dot{\epsilon} \neq \text{konst}$ und $\Theta \neq \text{konst}$) untersucht, wobei die wesentliche Aufgabe darin besteht, die Evolution von u so zu wählen, daß Geschwindigkeitswechselfersuche beschrieben werden können. An dieser Stelle kommt dann die Evolutionsstrategie zum Einsatz. Abgeschlossen wird die zweite Stufe durch Hinzunahme der Schädigungseinflüsse. Auf die dritte Stufe der Anpassung durch FE-Berechnungen, die in diesem Fall bei Berücksichtigung der Schädigung erforderlich ist, gehen wir in Kap C.3 ein.

Stufe 1:

Ausgangspunkt der Anpassung ist ein monotoner Zugversuch mit einer konstanten Dehnungsrate k_* in einem Bereich, in dem thermisch aktivierte Versetzungsbe-
wegung dominiert. Wir wählen

$$k_* = 10^{-1} \text{ s}^{-1}. \quad (B.18)$$

Für die Funktion g_r , die ein Maß für den Fließflächenradius ist, fordern wir

$$\frac{\partial g_r}{\partial \chi} \geq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g_r}{\partial \Theta} \leq 0 \quad . \quad (B.19)$$

Insbesondere soll die Spannung bei Fließbeginn monoton mit der Temperatur abnehmen

$$\frac{\partial g_r (\chi = \chi_0, \Theta)}{\partial \Theta} < 0 \quad . \quad (B.20)$$

Wir wählen den Produktansatz

$$g_T(x, \Theta, u) = \Gamma_{T1}^{(0)}(x, \Theta) \Gamma_{T1}^{(1)}(x, \Theta) \Gamma_{T2}(u) \quad , \quad (B.21)$$

bei dem $\Gamma_{T1}^{(0)}$ den Anfangsbereich erfaßt, während $\Gamma_{T1}^{(1)}$ ein unbeschränktes Wachstum von g_T bei großen Versetzungsdichten verhindert. Mit der aus den Meßergebnissen gewonnenen plastischen Verzerrungsrate werden die Parameter in den Ansätzen für $\dot{\epsilon}_{VT}$ und c_T so gewählt, daß die aus (B.12) berechnete plastische Dehnungsrate möglichst gut approximiert wird. Dazu verwenden wir die Evolutionsstrategie.

Die Abhängigkeit des Fließbeginns von $\dot{\epsilon}$ wird durch die Funktion $\Gamma_{T2}(u)$ bestimmt und hier speziell durch $\Gamma_{T2}(u_{\cdot q})$. Wir legen zunächst den Verlauf von $u_{\cdot q}$ fest:

$$u_{\cdot q}(PG) = u_{\cdot q}(k_x) = u_0 - 2(u_0 - u_\infty)(U(k_x))^2 + (u_0 - u_\infty)(U(k_x))^4 \quad (B.22)$$

$$\text{mit } U(k_x) = \frac{1}{\chi_{u2}} \log(1 + \chi_{u3} k_x) \quad .$$

Um den Gültigkeitsbereich des Stoffmodells über die ursprüngliche Grenze der PG von 10^4 s^{-1} hinaus zu erweitern, wird $u_0 = 10^{-2}$ und $u_\infty = 0$ gesetzt. Damit ergibt sich der in Fig. B.25 skizzierte Verlauf. Diese Erweiterung wurde notwendig, weil sich innerhalb einer FE-Analyse bei typischen HGDn lokale Zonen mit erhöhten Dehnungsraten ausbilden. Sie können dort z.T. erheblich über dem auf die Probenlänge bezogenen Mittelwert liegen. Der aktuelle Wert von u (hier also $u_{\cdot q}$) beeinflusst über die Funktion Γ_{T2} (und damit g_T) im wesentlichen den Fließbeginn. Wir tragen deshalb die Fließspannung σ_0 als Funktion der PG auf (Fig. B.26) und erkennen den Anstieg mit der PG.

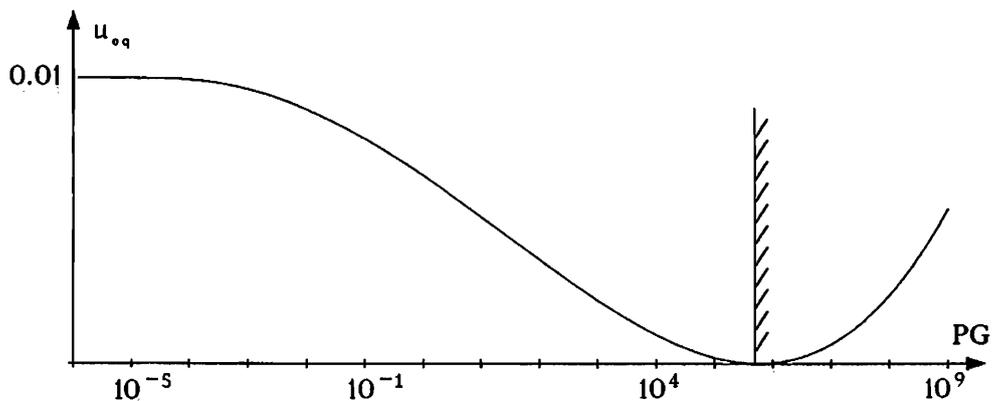


Fig. B.25: Gleichgewichtswert von u

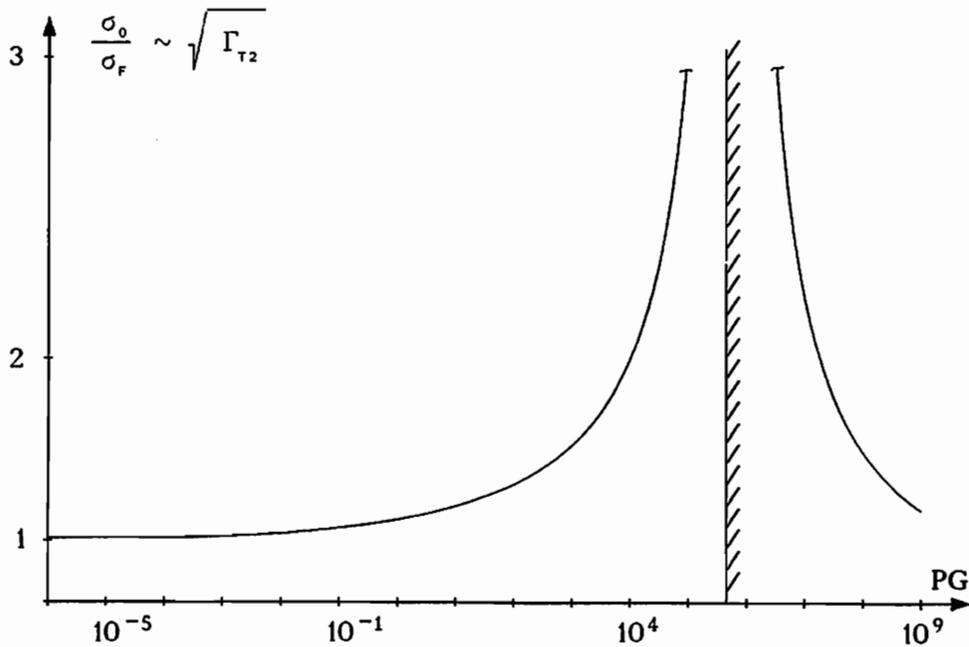


Fig.B.26: Anfangsfließspannung als Funktion der PG

Sowohl in Fig.B.25 als auch in Fig.B.26 ist zu beachten, daß der Gültigkeitsbereich des Stoffgesetzes in der hier vorgestellten Anpassung nicht verlassen wird. Diese Grenze liegt etwa bei $PG = 5.8 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$.

Stufe 2:

In diesem Stadium der Bestimmung der Materialparameter werden die Einschränkungen $\dot{\epsilon} = \text{konst}$ und $\Theta = \text{konst}$ aufgehoben. Für variable Dehngeschwindigkeiten muß nun das Evolutionsgesetz von u angepaßt werden. Wir erhalten für einen isothermen Relaxationsversuch

$$\ddot{u} = -c\alpha\dot{u} + \left(\frac{c\alpha}{2}\right)^2 (u - u_0) \quad (\text{B.23})$$

und können mit dem Produkt $c\alpha$ bestimmen, wie schnell u wieder auf u_0 anwächst. Damit wird ebenfalls festgelegt, wie rasch die plastische Verzerrungsrate auf Null zurückgeht und wie weit die Spannung absinkt. Mit einem Geschwindigkeitswechselversuch bei hinreichender großer Dehnungsrate kann c bestimmt werden, da α dann gegen $|\dot{\epsilon}|$ vernachlässigbar ist.

Die Temperaturabhängigkeit in den Materialfunktionen erfassen wir getrennt für isotherme Prozesse und für solche, bei denen Änderungen der Temperatur, sei es durch Dissipation oder durch eine vorgeschriebene Belastung $\dot{\Theta} \neq 0$, erfolgen.

- a) Eine Erhöhung der Ausgangstemperatur führt zu einer Erniedrigung der Fließspannung. Die temperaturbehafteten Parameter im Produktansatz für g_T lassen sich demnach aus Meßergebnissen leicht bestimmen.
- b) Die Temperaturerhöhung bei adiabaten monotonen Zugversuchen erreicht etwa die Größenordnung von 20K bei einer Dehnung von 10%, d.h. der Einfluß auf g_T ist gering. Erst bei sehr großen Deformationen oder bei zyklischen Prozessen erreicht die Temperaturerhöhung Werte, die deutliche Auswirkungen in den Stoffgleichungen haben. Die Berechnung der thermischen Entfestigung wird möglich durch Hinzunahme v von Temperaturänderungen in die Definition der PG. Für große positive $\dot{\theta}$ kann die plastische Verzerrungsrate größer als die Gesamtdehnungsrate werden, d.h. die Spannungen fallen ab.

Für den bis hier erreichten Stand der Anpassung gilt die bereits in der Einleitung angesprochene Problematik der Kopplung verschiedener Effekte, so daß eine direkte Bestimmung von Funktionen und Parametern nicht mehr möglich ist. An dieser Stelle greift wieder das in Kap. A beschriebene Hilfsmittel der Evolutionsstrategie. Die in Stufe 1 und 2 ermittelten Materialparameter werden als Ausgangspopulation für das Optimierungsverfahren verwendet. Nach jeder Mutation des Parametersatzes wird die Simulation (eine komplette Integration des Dgl-Systems) durchgeführt und die Güte des neuen Parametersatzes anhand des Vergleichs der gemessenen und gerechneten $\sigma(\epsilon)$ -Kurven bestimmt. Den weiteren Ablauf der erweiterten Evolutionsstrategie haben wir bereits in Kap. A ausführlich dargestellt.

Die Anwendung der Evolutionsstrategie auf die Parameterbestimmung eines Stoffgesetzes unterscheidet sich von dem einfachen Beispiel in Kap. A in verschiedener Hinsicht:

- 1) Die Anzahl der Parameter ist (wesentlich) größer.
- 2) Die Rechenzeit für die Simulation ist erheblich höher, weil die Stoffgesetzintegration wesentlich aufwendiger als ein Funktionsaufruf ist.
- 3) Das absolute Optimum ist unbekannt.
- 4) Die Parameter variieren innerhalb größerer Bereiche.
- 5) Innerhalb der Simulation kann ein Abbruch wegen unzulässiger Parameterkombinationen nötig werden.
- 6) Die Struktur der Qualitätsdichte ist unbekannt.

Um die Möglichkeiten des Verfahrens darzustellen, betrachten wir folgendes Beispiel:

Es liege als Meßergebnis eine $\sigma(\epsilon)$ -Kurve für einen monotonen adiabaten Zugversuch konstanter Dehnungsrate vor. Wir führen dann die Anpassung gemäß Stufe 1 unter der Annahme einer konstanten PG durch und unterstellen, die mit dem so ermittelten Parametersatz berechnete $\sigma(\epsilon)$ -Kurve sei mit der Meßkurve identisch. Vervollständigen wir nun das Stoffgesetz um die temperatur-

behafteten Anteile, so liegt die aus der Integration des Dgl.-Systems gewonnene $\sigma(\varepsilon)$ -Kurve unterhalb der "Meßkurve". In Fig.B.27 ist zur Verdeutlichung des Unterschieds zwischen adiabater und isothermer Berechnung nur ein Ausschnitt der Spannungsdehnungslinie dargestellt. Mit dem vorliegenden Parametersatz wurde die Evolutionsstrategie gestartet, wobei allerdings nur einige Parameter für die Mutation freigegeben waren. Das Resultat der Optimierung ist in Fig.B.27 mit Kreuzen gekennzeichnet.

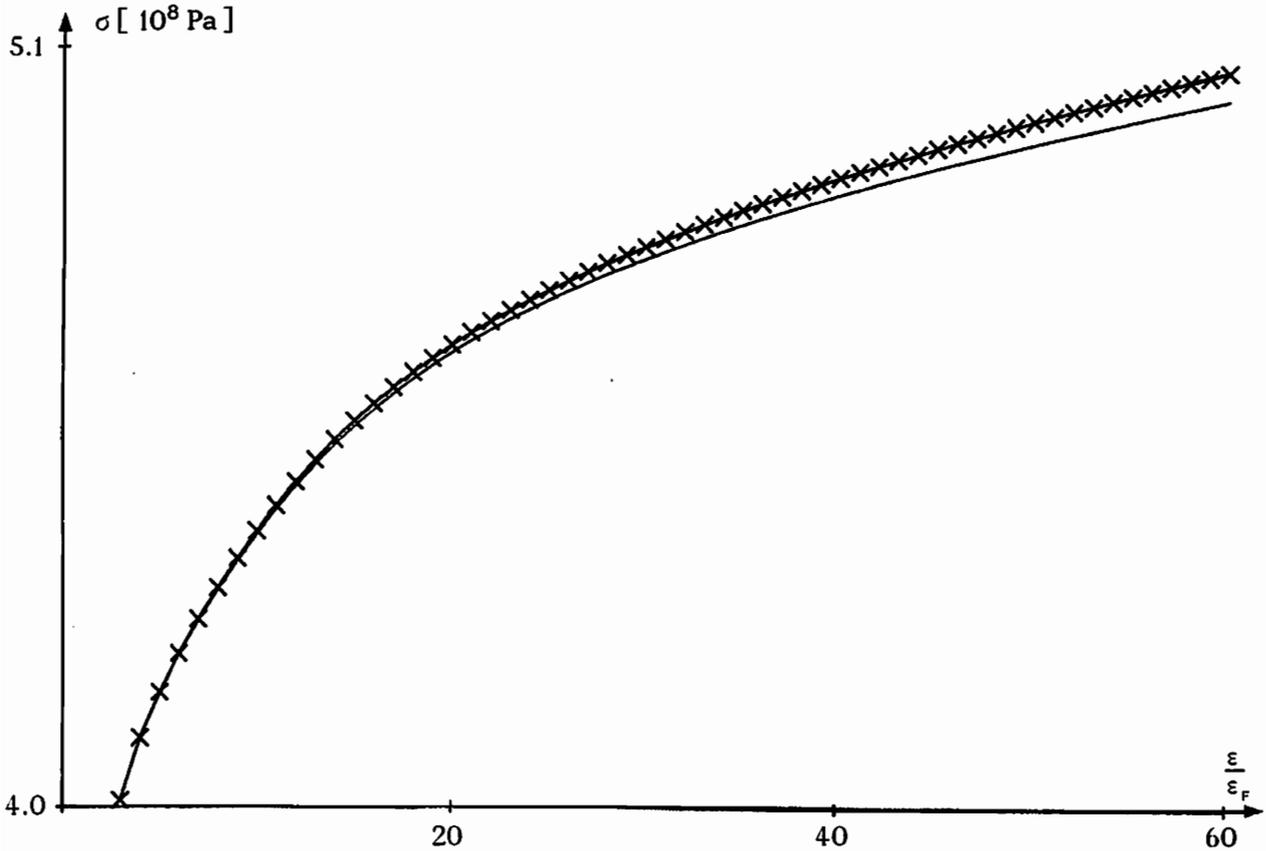


Fig.B.27: Anwendung der Evolutionsstrategie zur Parameteroptimierung

Das Qualitätsmerkmal ist definiert durch:

$$Q = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_{\text{ist}} - \sigma_{\text{soll}}}{\sigma_F} \right)_i^2, \quad n = \text{Anzahl der "Meßpunkte"} \quad (\text{B.24})$$

Durch die Evolutionsstrategie wurde das Qualitätsmerkmal von $3.4 \cdot 10^{-3}$ auf $3.2 \cdot 10^{-6}$ verbessert. Das hier vorgestellte Ergebnis wurde nach ca. 1300 Mutationen erreicht. Die vollständige Anpassung müßte als Simulationsrechnung nicht nur diese $\sigma(\varepsilon)$ -Kurve enthalten, sondern auch alle anderen relevanten Versuche, wie etwa Relaxations- oder zyklische Versuche, um zu verhindern, daß Verbesserungen nicht auf Kosten von schlechteren Resultaten an anderer Stelle erzielt werden. Dies wurde bislang wegen der hohen Rechenzeit noch nicht praktiziert.

Abgeschlossen wird die zweite Stufe der Anpassung durch die Bestimmung aller Parameter der Schädigung. Die erforderlichen Ergebnisse können nur jeweils nach Integration des Stoffgesetzes gewonnen werden.

Stufe 3:

Diese letzte Stufe zur Bestimmung der Konstanten des Materialgesetzes ist nur in Ausnahmefällen erforderlich. Es sind dies dynamische Probleme und solche, bei denen inhomogene Zustände zur Anpassung verwendet werden müssen oder sollen (z.B. Berücksichtigung von Wärmeleitung). Zur Parameteridentifikation wird das Materialmodell in ein FE-Programm eingebaut und damit werden die zur Verfügung stehenden Versuchsergebnisse nachgerechnet. Dabei ist zu beachten, daß die Meßkurven auf Grund der Inhomogenitäten grundsätzlich keine $\sigma(\epsilon)$ -Kurven für eine gesamte Probe sein können. Eine Anwendung der Evolutionsstrategie in dieser Anpassungsstufe ist zwar prinzipiell leicht möglich, sie wird aber wegen eines zu großen Rechenzeitbedarfs der Simulation und unzulänglicher Meßdaten nicht durchgeführt.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß die vollständige Anpassung aus 3 Abschnitten besteht:

- 1) Voranpassung nach Stufe 1 und 2 (oder 3 falls notwendig),
- 2) Definition aller notwendigen Versuche, die nachgerechnet werden sollen,
- 3) ggf. nachträgliche Verbesserung der Parameter mit der Evolutionsstrategie.

B.3.3 Ergebnisse von Testrechnungen homogener Spannungszustände (Modell 1.2)

Für die Berechnung einachsiger Spannungszustände wird das zuvor beschriebene Modell auf einachsige Spannungszustände spezialisiert und numerisch integriert. Nach Substitution $v = \dot{u}$ erhalten wir ein lineares Dgl.-System erster Ordnung für die Variablen $\sigma, \varepsilon, X_T, \kappa, u, v, \sigma^0, \sigma_q^0, \varepsilon_v^0, \Theta^0, Z^0, Z_q^0$ und Θ :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}^*(\mathbf{y}) \quad (\text{B.25})$$

mit $\mathbf{y} = (\sigma, \varepsilon, X_T, \kappa, u, v, \sigma^0, \sigma_q^0, \varepsilon_v^0, \Theta^0, Z^0, Z_q^0, \Theta)$.

Im Hinblick auf die später erforderliche Integration des Stoffgesetzes innerhalb des Finite-Element-Algorithmus beschränken wir uns bei der Lösung von (B.25) auf die Anwendung von Einschrittverfahren [101]. Neben der impliziten Trapezregel und der Mittelpunktsregel verwenden wir ein 4-stufiges Runge-Kutta-Verfahren und einen 13-stufigen Algorithmus von Fehlberg, wobei jeweils eine Schrittweitensteuerung vorgenommen wird. Bezüglich der Rechenzeit und Genauigkeit erwies sich das Fehlberg-Verfahren als überlegen. Eine eingehendere Diskussion der Zeitintegrationsverfahren wird im Rahmen der FE-Berechnung in Kap. C.4 erfolgen.

Das Dgl.-System (B.25) enthält in der vollständigen Form eine gegenseitige Abhängigkeit der Raten von Temperatur, Spannung und der damageinduzierten Verzerrung.

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \dot{\Theta}, \dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}_0) \quad (\text{B.26})$$

Stellt man die betreffenden Gleichungen um, so erhält man ein Gleichungssystem, dessen Koeffizienten sowohl von den Momentanwerten als auch von den Raten selbst (nämlich über die Belastungsbedingungen) abhängig sind. Das auf Grund der Nebenbedingungen nichtlineare Gleichungssystem wird auf die Gestalt

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 + \langle a_{2z} \rangle + \langle a_{20} \rangle \\ b_1 & b_2 + \langle b_{2z} \rangle + \langle b_{20} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 + \langle a_{3z} \rangle + \langle a_{30} \rangle \\ b_3 + \langle b_{3z} \rangle + \langle b_{30} \rangle \end{bmatrix} \quad (\text{B.27})$$

gebracht und iterativ gelöst.

Auf den folgenden Bildern sind die Ergebnisse von Testrechnungen zum Modell 1.2 dargestellt. Wir werden zunächst isotherme viskoplastische Prozesse konstanter Dehnungsrate behandeln, um dann allgemeine viskoplastische Prozesse unter Einbeziehung der Temperatur vorzustellen. Den Abschluß bilden die Resultate des vollständigen Modells, d.h. unter Berücksichtigung der Schädigung.

Isotherme viskoplastische Prozesse konstanter Dehnungsrate

Die Ergebnisse dehngesteuerter einachsiger Zugversuche sind in Fig.B.28 und Fig.B.29 für zwei Temperaturniveaus dargestellt und zwar über einen Bereich der Dehnung von $60 \varepsilon_f$. Dieser Bereich wird einheitlich (wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt) auch bei allen folgenden Bildern verwendet. In beiden Figuren sind die $\sigma(\varepsilon)$ -Kurven über einen Dehngeschwindigkeitsbereich von 9 Zehnerpotenzen ($\dot{\varepsilon} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ bis $\dot{\varepsilon} = 10^5 \text{ s}^{-1}$) eingezeichnet. Die Anpassung erfolgte wohl-gemerkt nur mit der dritten Kurve von unten ($\dot{\varepsilon} = 10^{-1}$).

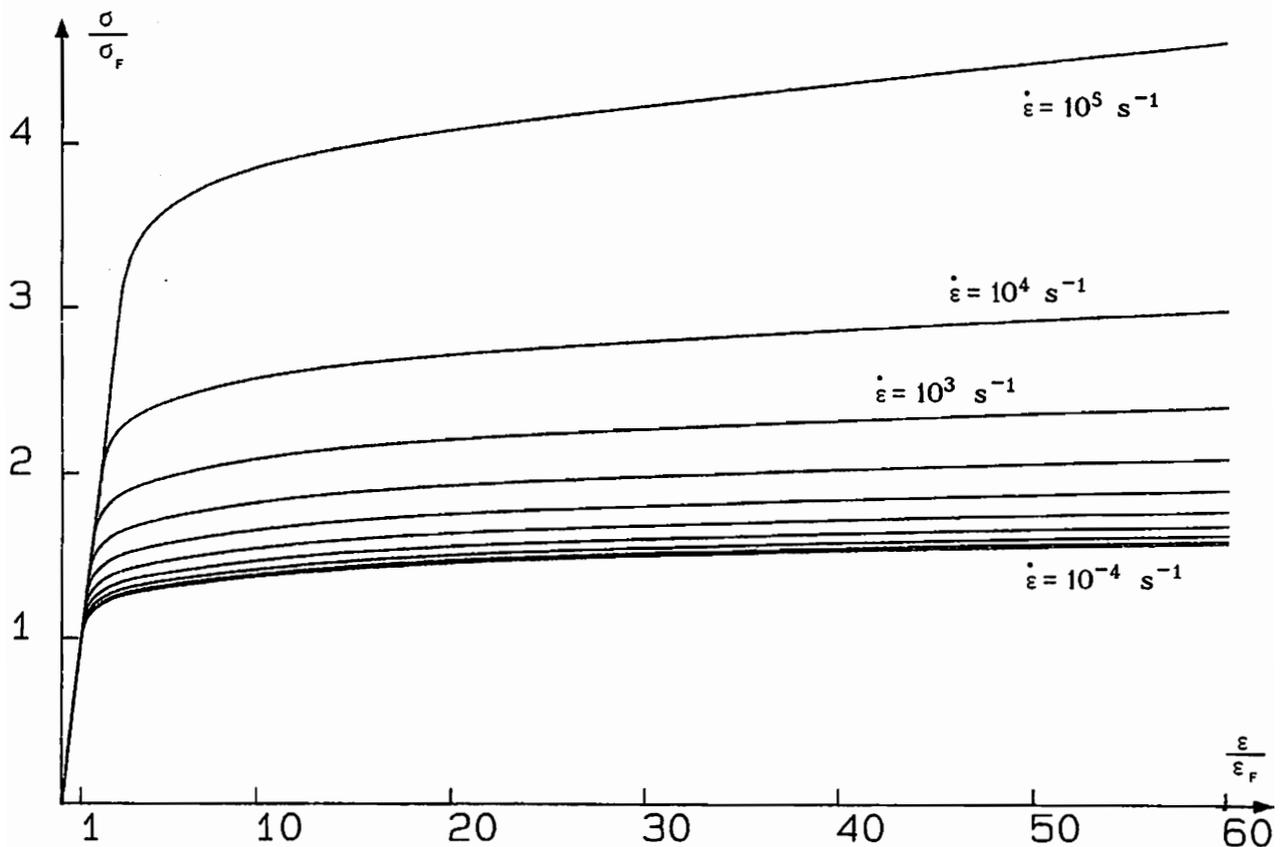


Fig. B.28: Monotone Zugversuche $\dot{\varepsilon} = 10^{-4} \dots 10^5 \text{ s}^{-1}$, $\Theta = 300\text{K}$

Zum Vergleich mit in der Literatur zu findenden Darstellungen wird in Fig.B.30 die Fließspannung σ_0 in Abhängigkeit der Dehnungsrate (logarithmiert) und der Temperatur aufgetragen. Man erkennt deutlich den steilen Anstieg im Bereich großer Dehngeschwindigkeiten, der auf allen Temperaturniveaus beobachtet wird. Unterschiede existieren in der quantitativen Ausgestaltung, sowohl hinsichtlich der Abgrenzung der einzelnen Bereiche als auch des Verhältnisses der Fließspannung für verschiedene Temperaturen.

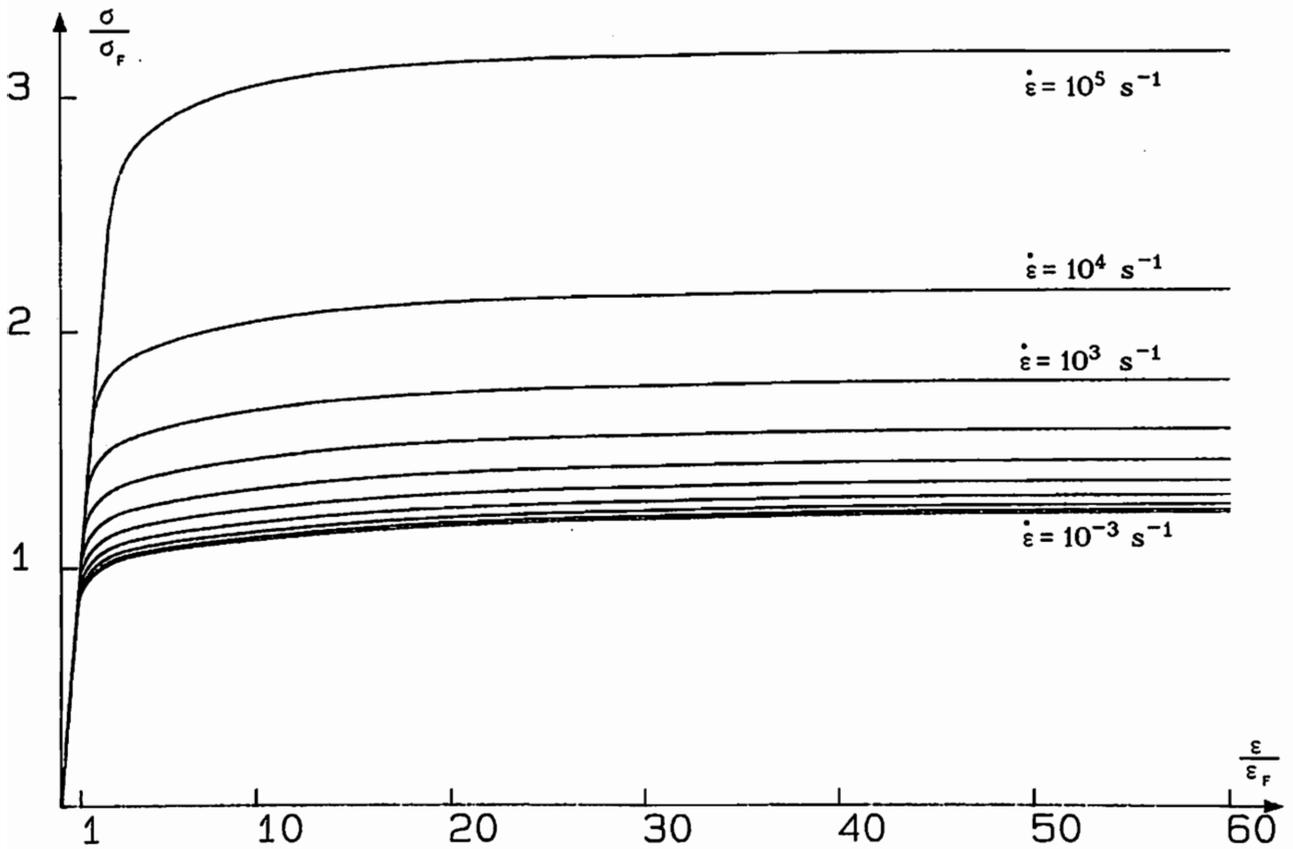


Fig.B.29: Monotone Zugversuche $\dot{\epsilon} = 10^{-4} \dots 10^5 \text{ s}^{-1}$, $\Theta = 600\text{K}$

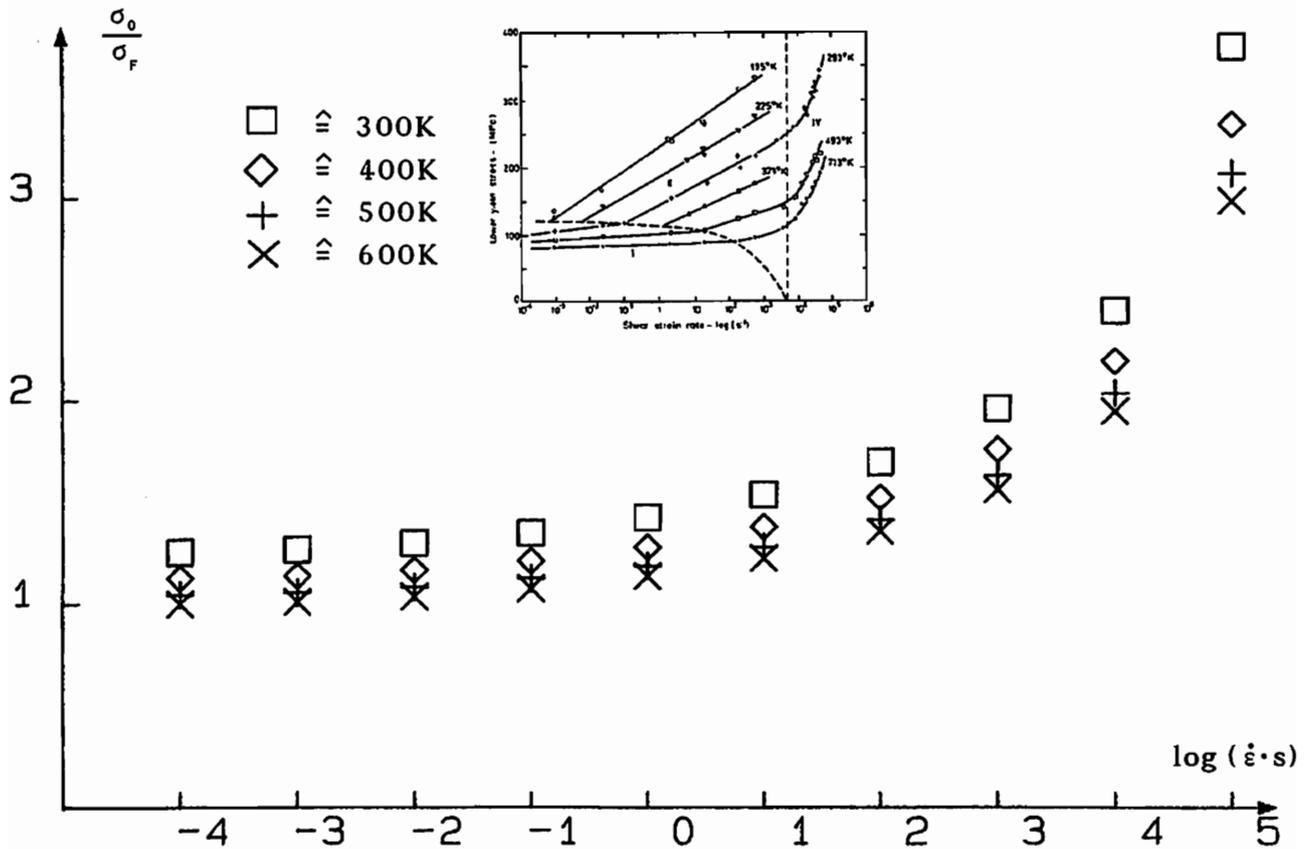


Fig.B.30: Proportionalitätsgrenze σ_0 in Abhängigkeit von Dehngeschwindigkeit und Temperatur

Wir wollen nun Prozesse konstanter Temperatur (300 K) und stückweise konstanter Dehnungsrate simulieren.

Fig.B.31 zeigt einen Geschwindigkeitswechselfersuch mit einem Sprung von $\dot{\epsilon} = 10^2 \text{ s}^{-1}$ nach $\dot{\epsilon} = 10^0 \text{ s}^{-1}$ und zurück; die niedrigere Dehnungsrate wird über $10 \epsilon_f$ aufrechterhalten. Die zum Vergleich eingetragene Kurve $\sigma(\epsilon)$ für $\dot{\epsilon} = 10^2 \text{ s}^{-1}$ macht deutlich, daß das Spannungsniveau des konstant schnellen Versuches nicht mehr erreicht wird. Der Spannungsabfall nach dem ersten Umschalten von ϵ hängt wesentlich von der Geschwindigkeit ab, mit der der neue Gleichgewichtswert u_{eq} erreicht wird. Da die Änderung von u nur von einer Konstanten gesteuert wird, können in verschiedenen Geschwindigkeitsbereichen Abweichungen vom experimentell beobachteten Verhalten auftreten [63].

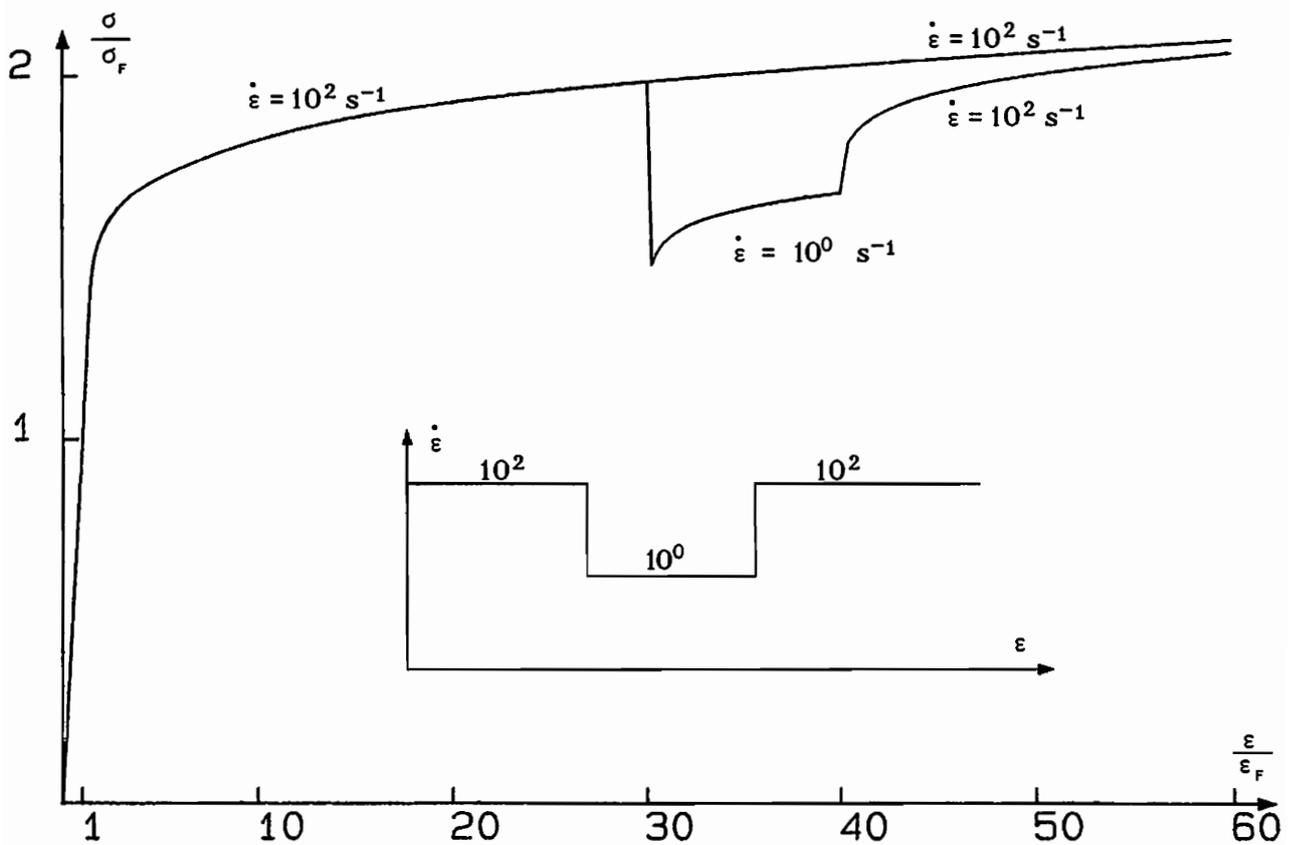


Fig. B.31: Stain-rate-jump-test $\dot{\epsilon} = 10^2, 10^0, 10^2 \text{ s}^{-1}$

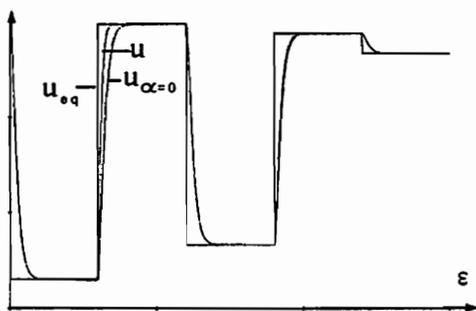


Fig. B.32: Verlauf von u bei Geschwindigkeitswechseln

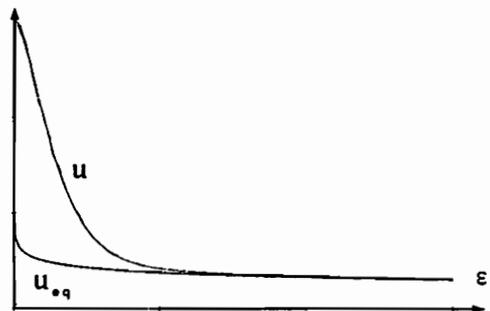


Fig. B.33: Verlauf von u bei linear veränderlicher PG

Wir wollen die Reaktion von u auf Veränderungen der PG näher untersuchen und betrachten dazu 2 Fälle.

1) In Fig. B.32 wechseln Abschnitte konstanter PG in verschieden großen Sprüngen ($\dot{\epsilon} = 10^4, 10^{-4}, 10^3, 10^{-3}, 10^{-2} \text{ s}^{-1}$). Dargestellt sind die Verläufe vom Gleichgewichtswert u_{∞} , der Lösung u aus (B.5) und einer Lösung u , bei der $\alpha = 0$ gewählt wurde. Wir erkennen, daß das Erreichen des Gleichgewichtswertes bei einem Sprung von einer kleinen zu einer großen PG nahezu unabhängig von α erfolgt, während im entgegengesetzten Fall das Verhältnis α/PG steuert, wie rasch sich u an u_{∞} annähert. Der Gleichgewichtswert wird jeweils innerhalb einer Fließdehnung angenommen. Bemerkenswert ist noch, daß $u(\epsilon)$ entgegen dem Anschein in Fig. B.32, nicht nur stetig, sondern glatt ist.

2) In Fig. B.33 wird die PG linear mit der Zeit verändert ($\text{PG} = k \cdot t$ mit $k = 500 \text{ s}^{-2}$ und $t_{\text{max}} = 0.2 \mu\text{s}$). Es ist wiederum deutlich die verzögerte Annäherung von u an seinen Gleichgewichtswert zu erkennen.

Als letztes Beispiel stückweise konstanter Dehnungsrate ist in Fig. B.34 ein Relaxationsversuch dargestellt. Nach Halten der Dehnung zeigt sich qualitativ zunächst ein steiler Abfall der Spannung, der sich rasch verlangsamt und in eine sehr flache $\sigma(t)$ -Kurve übergeht. Aus dem Dgl.-System folgt $\sigma \rightarrow \text{konst.}$ für $t \rightarrow \infty$.

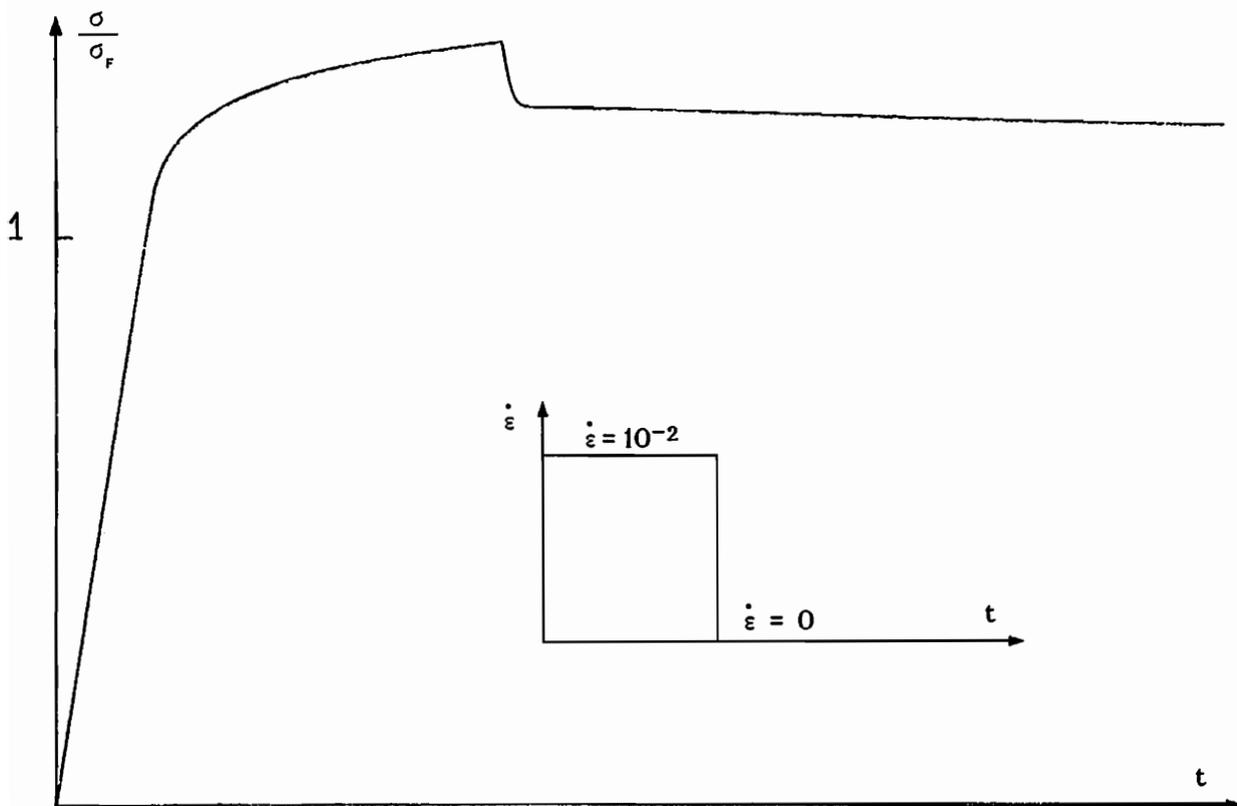


Fig. B.34: Relaxationsversuch nach $5\epsilon_F$ ($\dot{\epsilon} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$)

Im folgenden wollen wir den Temperatureinfluß näher untersuchen. Dazu sind zunächst in den Bildern B.35 und B.36 Zugversuche mit konstanter Dehnungsrate für den Geschwindigkeitsbereich $\dot{\epsilon}$ von 10^5 bis 10^{-3} s^{-1} bei einer Anfangstemperatur von 300 K und 600 K gegenübergestellt. Es wird deutlich, daß insbesondere bei höheren Temperaturen die zusätzliche Erwärmung infolge Dissipation zur Entfestigung führt.

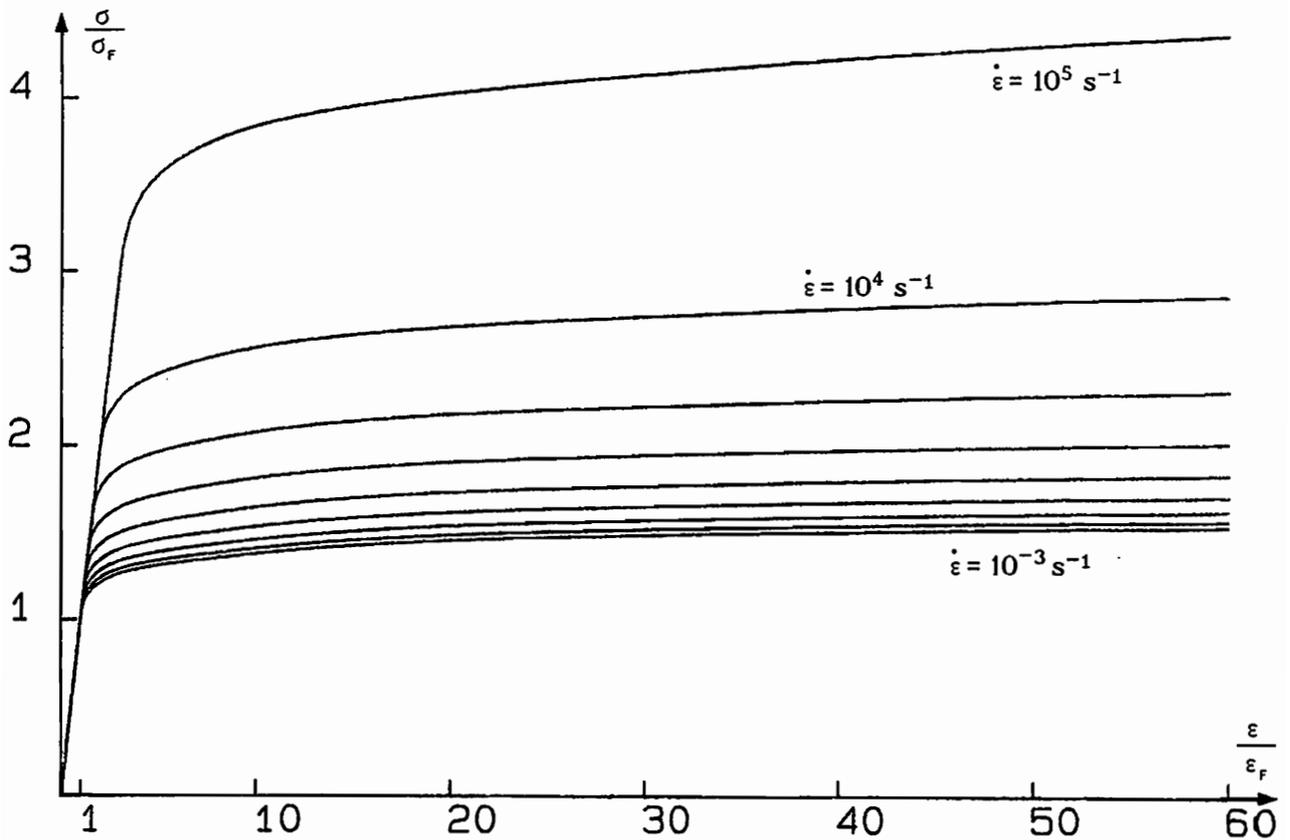


Fig.B.35: Monotone Zugversuche $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \dots 10^5 \text{ s}^{-1}$
Ausgangstemperatur $\Theta=300\text{K}$

Den Einfluß der Dissipation zeigt Fig.B.37, wo für zwei Dehnungsraten die $\sigma(\epsilon)$ -Kurven mit und ohne Temperatureinfluß dargestellt sind. Die jeweils obere Kurve gilt für konstante Temperatur. Sowohl die Erwärmung als auch der Einfluß der Temperaturänderung auf die $\sigma(\epsilon)$ -Kurven über die Definition der Prozeßgeschwindigkeit führt zu einem Absenken der $\sigma(\epsilon)$ -Kurven.

Den Abschluß der Bilder zum viskoplastischen Teil des Stoffgesetzes bilden die Ergebnisse eines zyklischen Versuchs mit Temperatureinfluß. Wir erkennen zunächst eine Verfestigung durch die Vergrößerung der Versetzungsdichte und dann thermische Entfestigung (Fig.B.38).

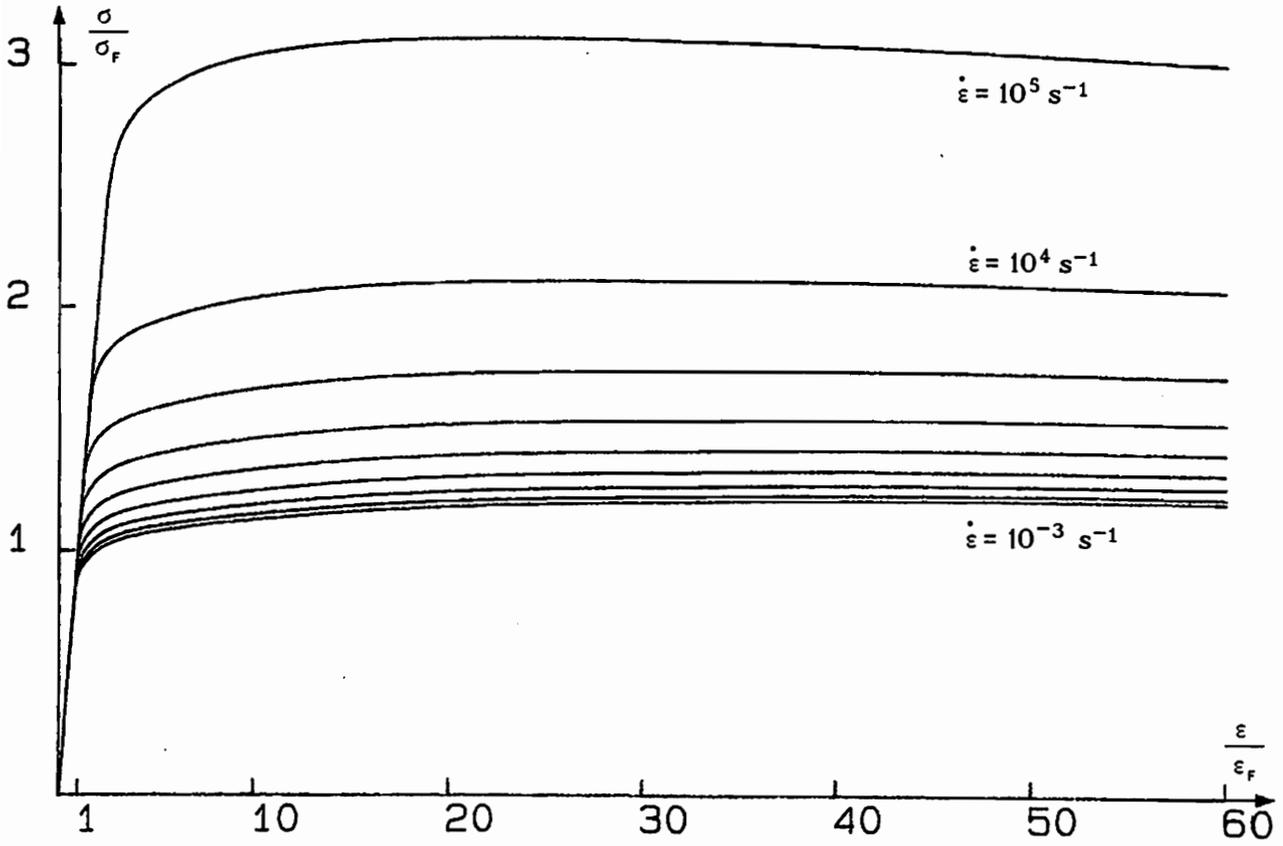


Fig.B.36: Monotone Zugversuche $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \dots 10^5 \text{ s}^{-1}$, Ausgangstemperatur $\Theta = 600\text{K}$

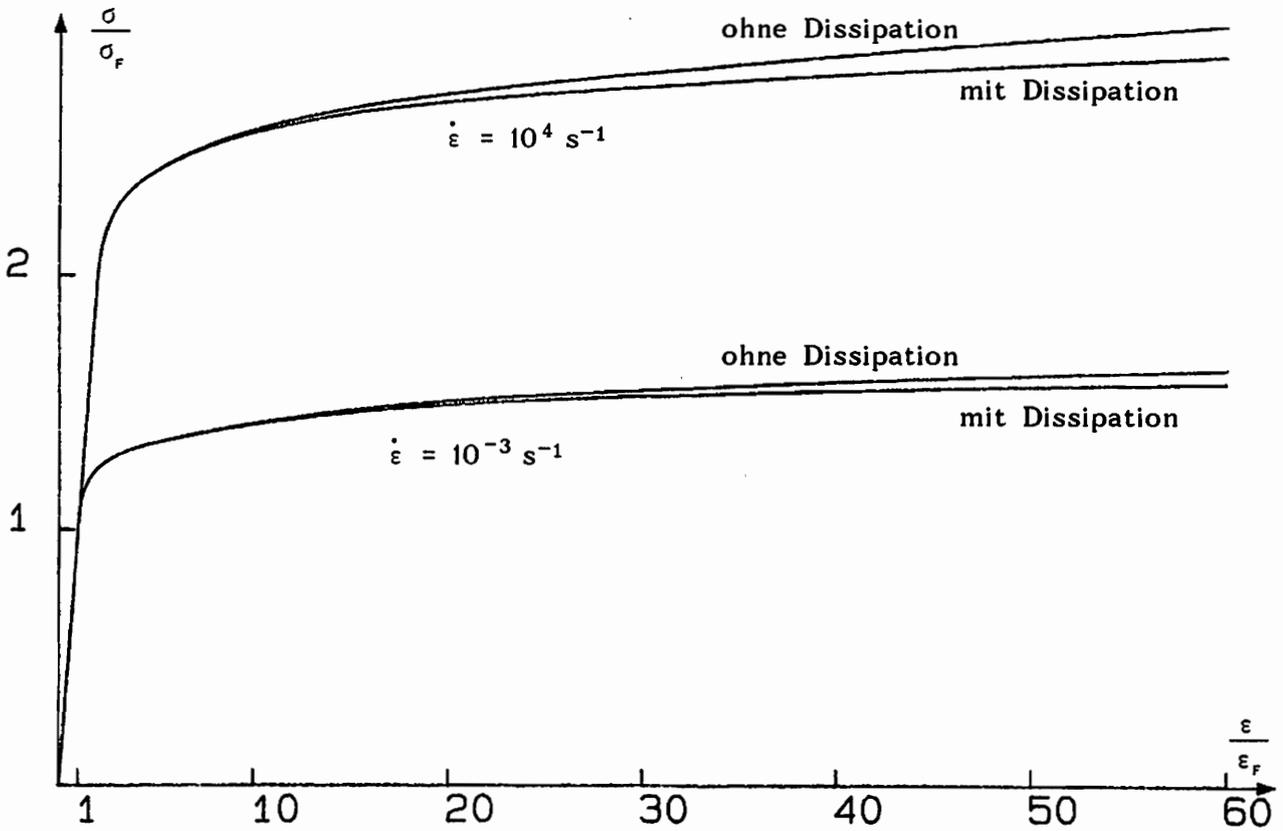


Fig.B.37: Monotone Zugversuche mit/ohne Dissipation, Ausgangstemperatur $\Theta = 300\text{K}$

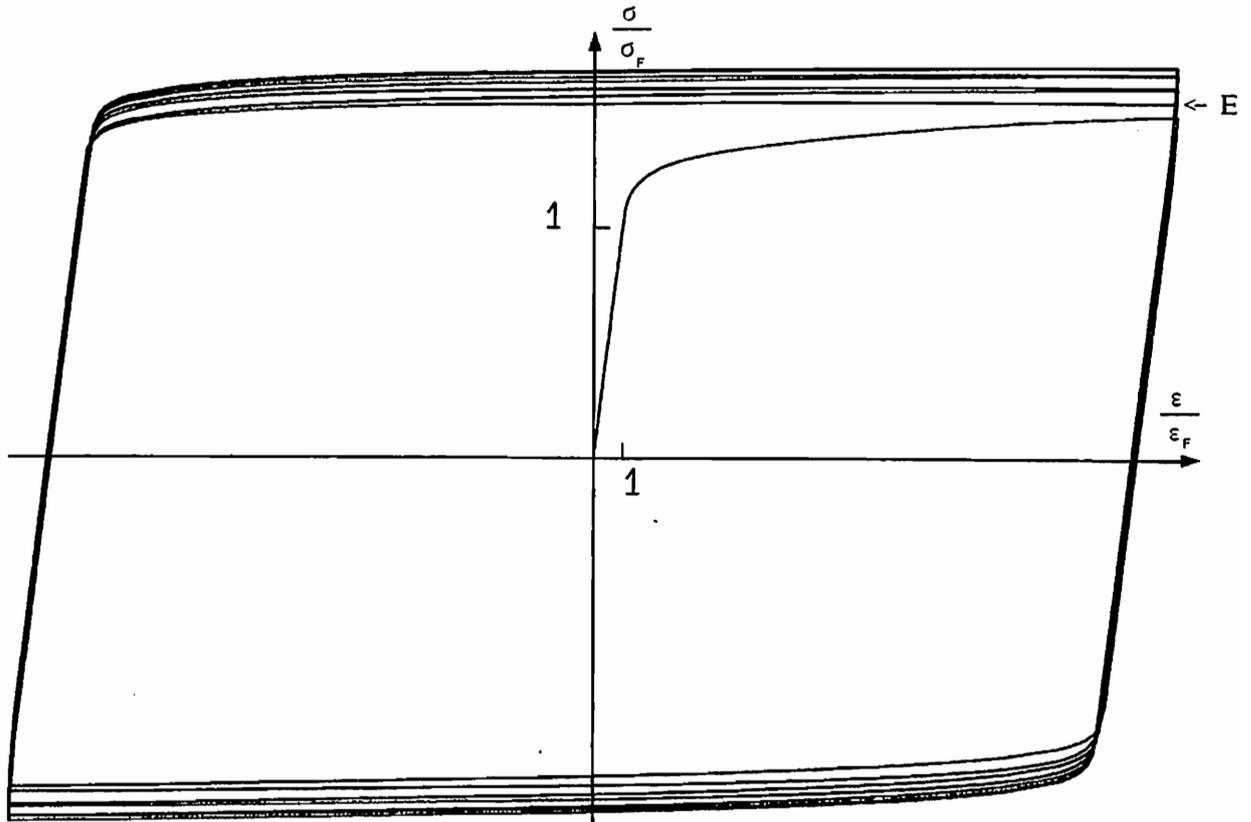


Fig.B.38: Zyklischer Versuch mit $\dot{\epsilon} = 10^{-2} \text{ s}^{-1}$: $\sigma(\epsilon)$

Kombinierte inelastische Beanspruchung (Versetzungsmechanismen + Schädigung)

Die vorgestellten Rechnungen wurden mit dem vollständigen Modell 1.2 durchgeführt.

In Fig.B.39 und Fig.B.40 sind monotone Zugversuche im gesamten Dehngeschwindigkeitsspektrum von 10^{-3} bis 10^5 s^{-1} dargestellt. Dabei kann insbesondere die Entfestigung durch Schädigung für $\dot{\epsilon} > 10^2 \text{ s}^{-1}$ beobachtet werden.

Für $\dot{\epsilon} = 10^4 \text{ s}^{-1}$ und $\Theta_0 = 300\text{K}$ ist der Verlauf der schadigungsrelevanten Größen in Fig.B.41a-d aufgezeigt.

Den Abschluß bilden die Bilder B.43 und B.44, die die Entwicklung der Schädigung (ϵ_D^0 und Z^0) zeigen und das Bild B.42, welches den Verlauf der Spannungskonzentrationen σ^0 bei verschiedenen Dehnraten veranschaulicht. Bei sehr kleinen Dehngeschwindigkeiten bauen sich die Spannungskonzentrationen schnell ab und Kriterien für das Einsetzen der Schädigung werden nicht erfüllt. Bei moderaten Raten können Spannungskonzentrationen nicht mehr in gleichem Maße abgebaut werden, während bei hochdynamischen Prozessen ein ständiges Anwachsen erfolgt.

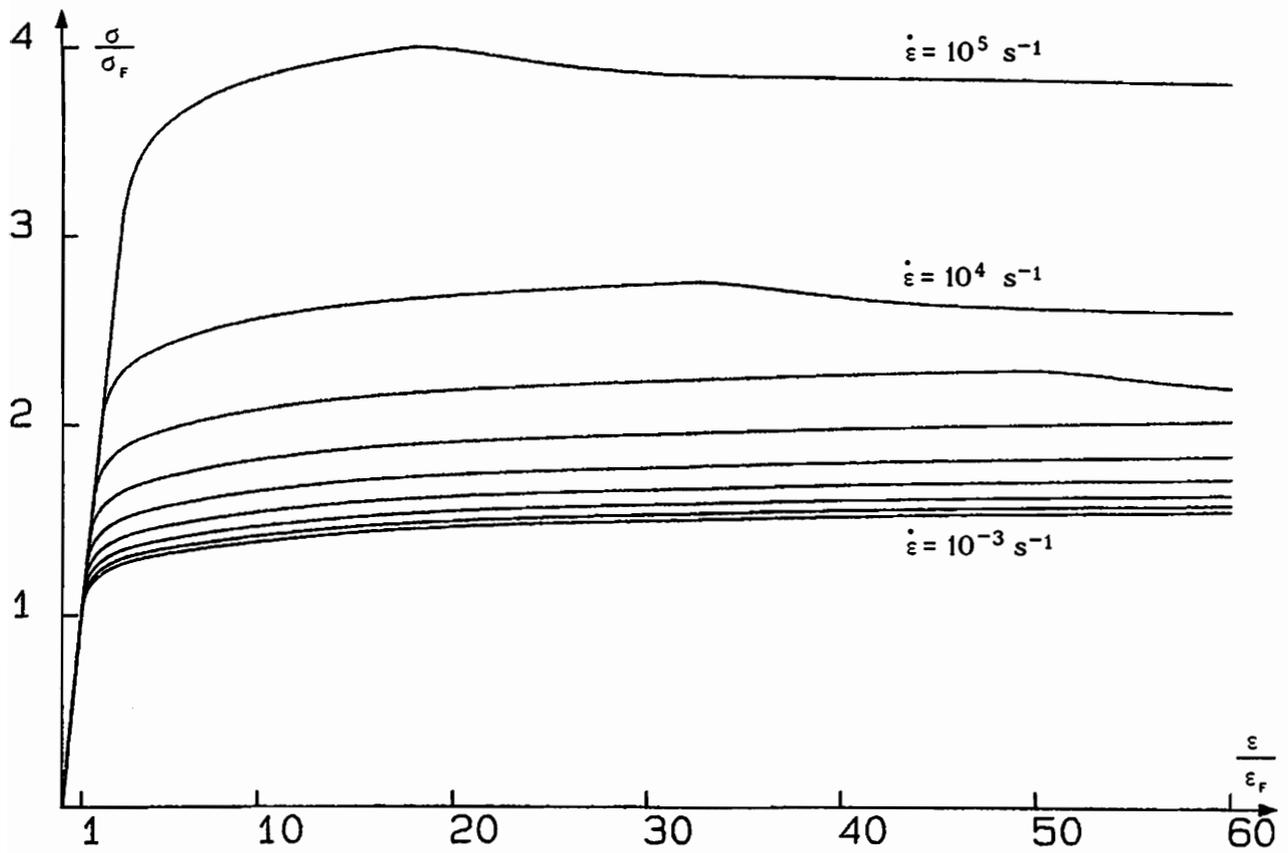


Fig.B.39: Monotone Zugversuche $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \dots 10^5 \text{ s}^{-1}$, Ausgangstemperatur $\Theta = 300\text{K}$

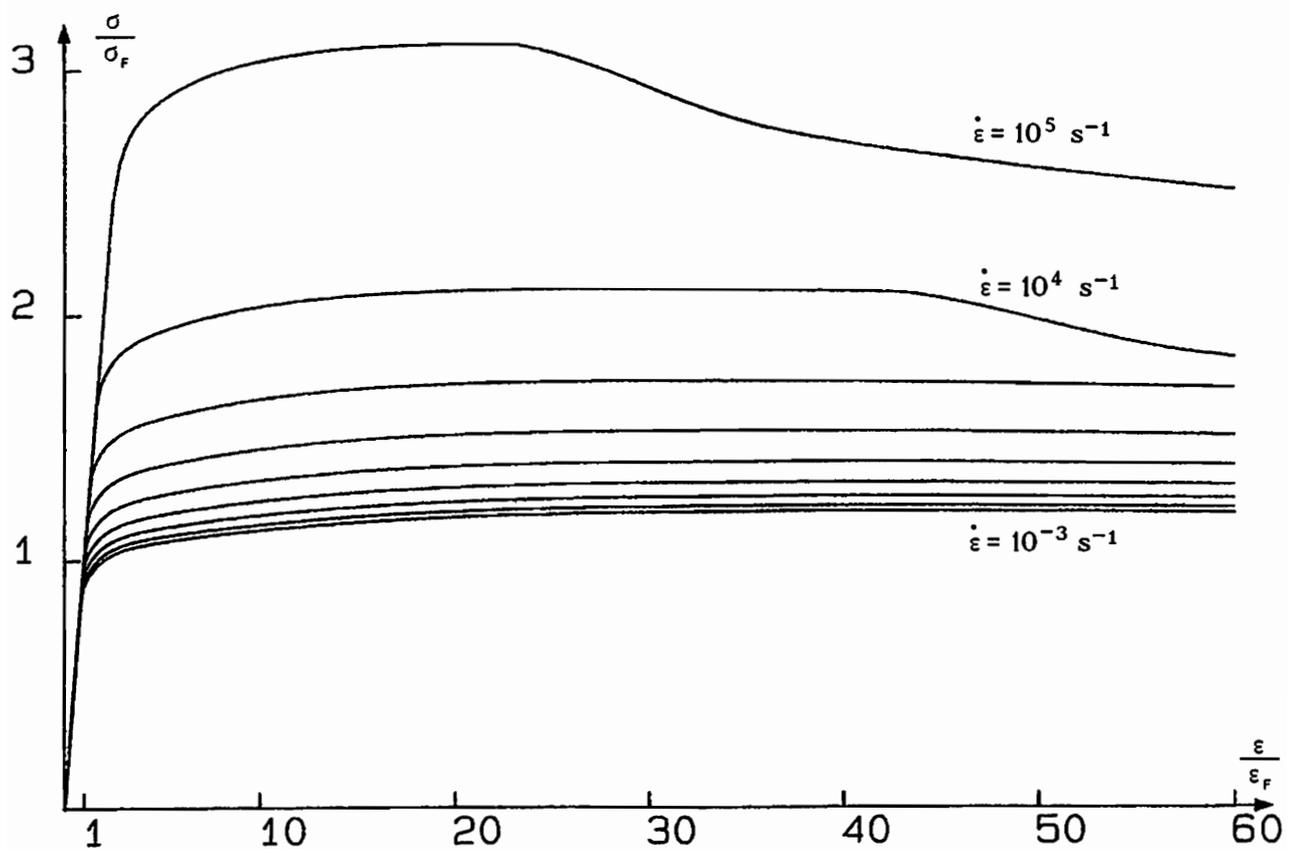


Fig.B.40: Monotone Zugversuche $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \dots 10^5 \text{ s}^{-1}$, Ausgangstemperatur $\Theta = 600\text{K}$

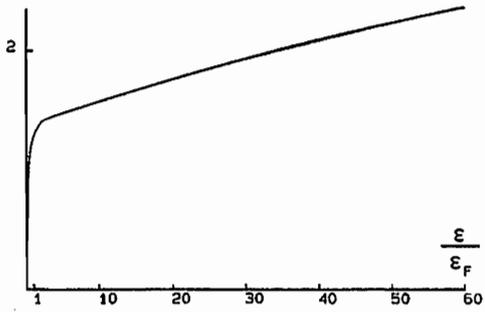


Fig. B. 41a: Verlauf $\sigma^0(\epsilon)$ bei $\dot{\epsilon} = 10^4 \text{ s}^{-1}$

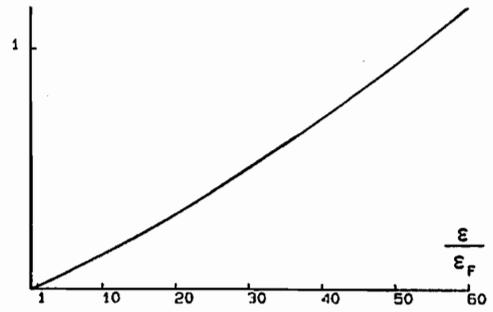


Fig. B. 41b: Verlauf $\epsilon_v^0(\epsilon)$ bei $\dot{\epsilon} = 10^4 \text{ s}^{-1}$

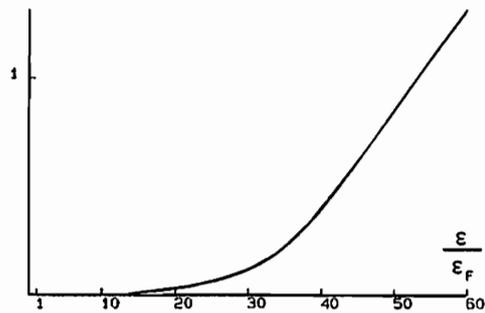


Fig. B. 41 c: Verlauf $Z^0(\epsilon)$ bei $\dot{\epsilon} = 10^4 \text{ s}^{-1}$

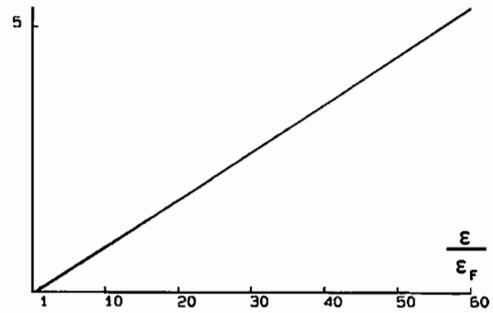


Fig. B. 41 d: Verlauf $\Theta^0(\epsilon)$ bei $\dot{\epsilon} = 10^4 \text{ s}^{-1}$

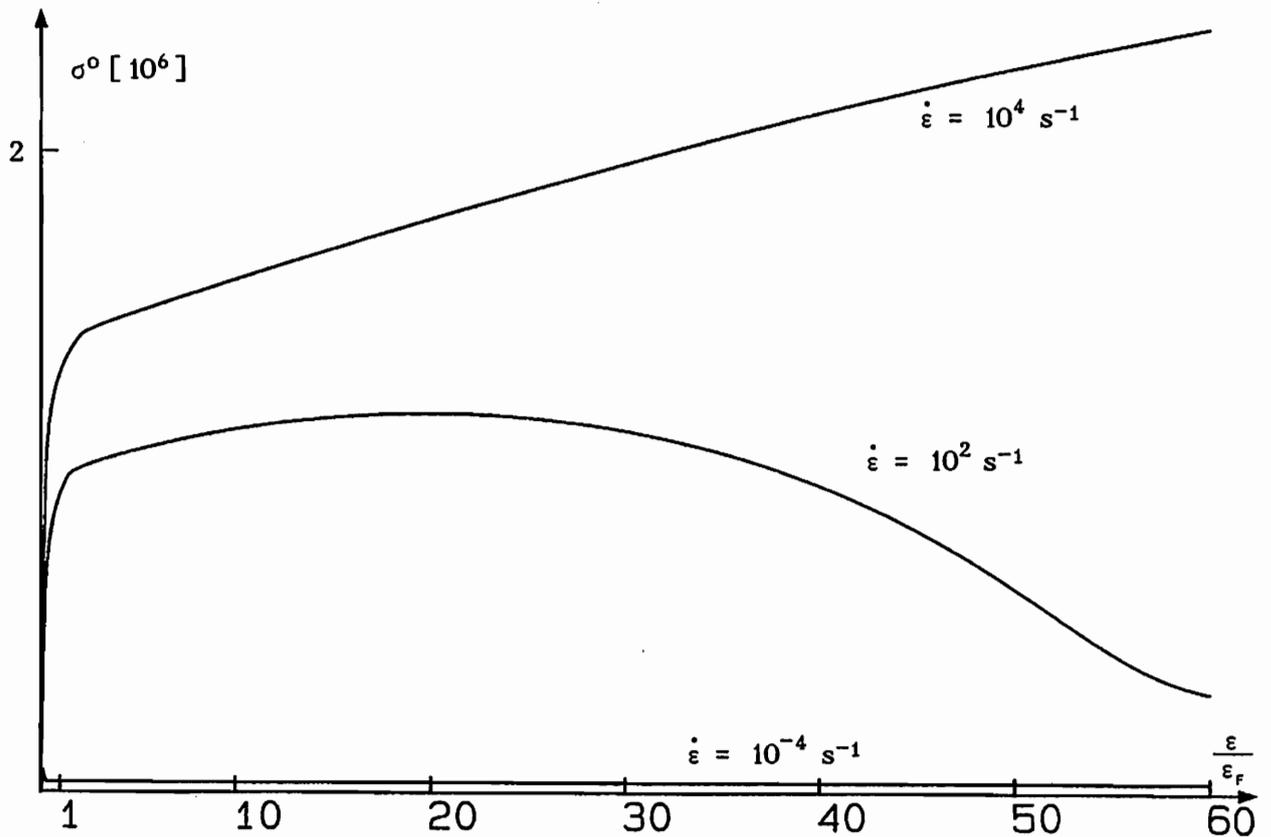


Fig. B. 42: Verlauf der Spannungskonzentrationen σ^0 bei verschiedenen $\dot{\epsilon}$

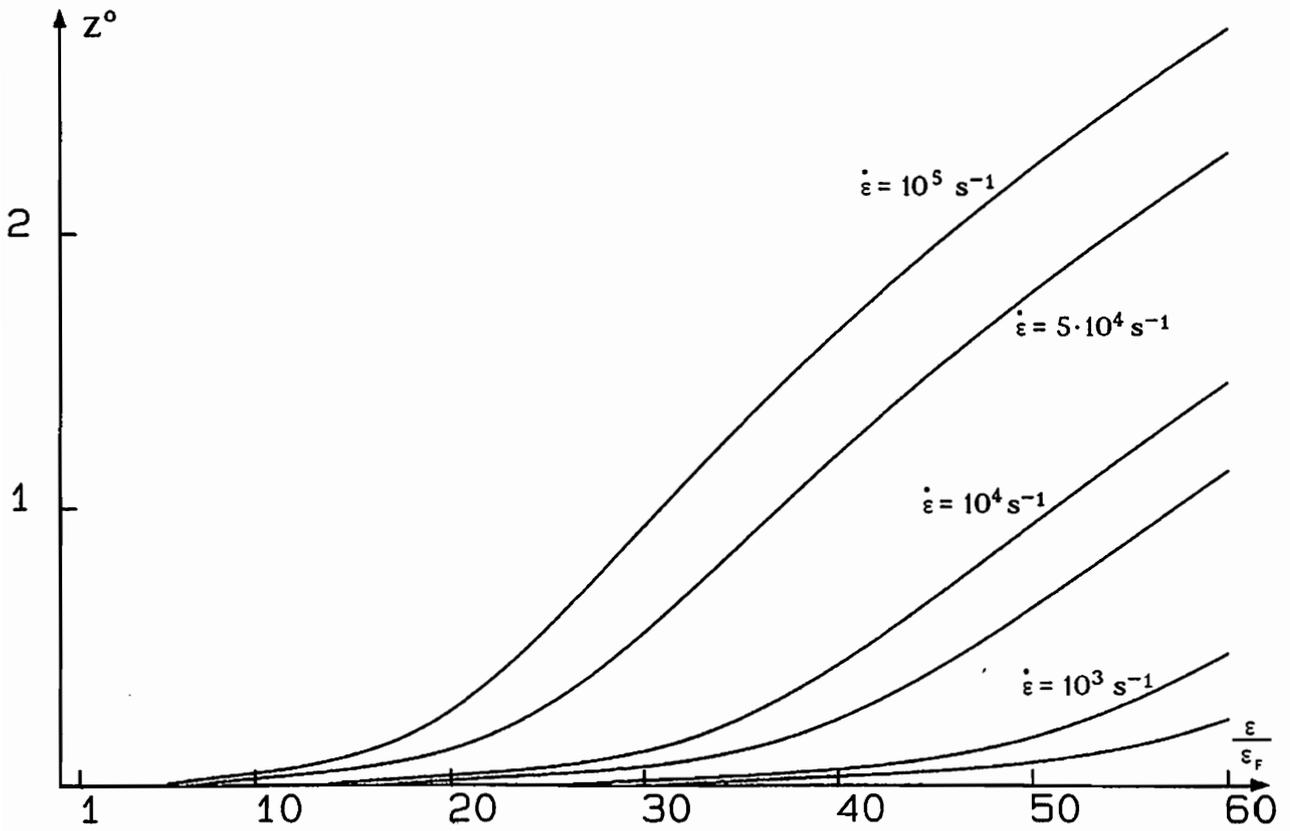


Fig. B.43: Verlauf von $Z^0(\epsilon, \dot{\epsilon})$ für $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^2$ bis 10^5 s^{-1}

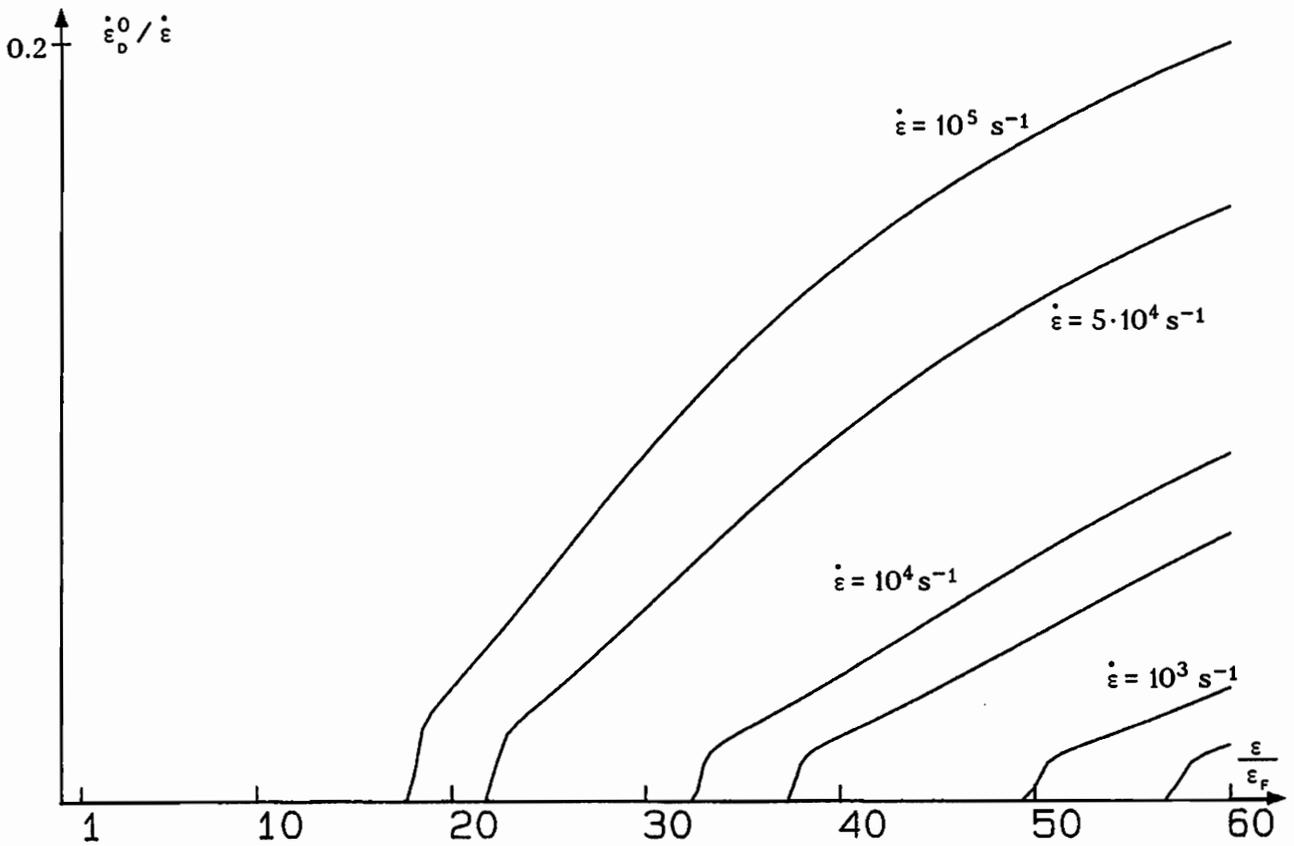


Fig. B.44: Verlauf der schädigungsinduzierten Verzerrungsrate für $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^2$ bis 10^5 s^{-1}

C. Strukturverhalten

Einleitung und Überblick über Berechnungsverfahren von HGDn

Nachdem wir in Teil B dieser Arbeit das Materialverhalten selbst untersucht und berechnet haben, soll nun das Verhalten von Strukturen im Vordergrund stehen. Wir betrachten speziell die einfachsten axialsymmetrischen Strukturen, nämlich die von den Experimentatoren sowohl für Zug- als auch Druckversuche verwendeten Rundproben. Besonders an den vorgestellten Beispielen wird deutlich gemacht, daß bei dynamischer Belastung aus dem Strukturverhalten i.a. nicht direkt auf das Materialverhalten geschlossen werden kann. Die Strukturantwort einer Probe mit einer einfachen Geometrie hängt zwar wesentlich vom vorliegenden Stoffgesetz ab, ist aber nicht wie im statischen Fall der Materialantwort gleichzusetzen.

Die Berechnung dynamisch belasteter Strukturen, die ein inelastisches Materialverhalten zeigen, entzieht sich der analytischen Lösung. Die deshalb erforderliche numerische Simulation wird überwiegend mit FE-Methoden durchgeführt. Dabei kommen sowohl die Lagrangesche als auch die Eulersche Betrachtungsweise zum Einsatz. Letztere bewährt sich hauptsächlich in Codes wie etwa HULL oder TRIOIL zur Analyse von extremen HGDn, bei denen Materialdurchdringung und -ablösung auftreten oder Flüssigkeiten beteiligt sind. Die Lagrange-sche Betrachtungsweise, bei der das FE-Netz an materiellen Punkten fixiert ist, hat Vorteile bei der Berechnung von "moderaten" Deformationen und bei der Verwendung von komplexeren Stoffgesetzen. Man findet sie z.B. in den Codes EPIC, HEMP und NIKE. Eine vertiefte Erörterung der einzelnen Programmpakete beider Betrachtungsweisen mit den zugrundegelegten Materialgleichungen findet man in den Übersichtsartikeln [80]-[83]. Mit den oben angeführten Programmen ist es dank einer rasant fortgeschrittenen Entwicklung verfügbarer Rechengeschwindigkeit möglich, Probleme mit einigen zigtausend Elementen zu berechnen.

Der Gültigkeitsbereich und die Form des hier verwendeten Stoffgesetzes legt die Lagrangesche Betrachtungsweise nahe. In Standardwerken [84]-[86] wird die FE-Verschiebungsmethode zur Berechnung von statischen und dynamischen Problemen bei elastischem und elastoplastischem Materialverhalten ausführlich dargestellt. Ausgehend von den dort beschriebenen Verfahren werden wir im Rahmen dieser Arbeit einige Aspekte der Formulierung von FE-Modellen nicht-linearer dynamischer Prozesse näher untersuchen. Dies sind:

- Zeitintegration der Bewegungsgleichungen
- Zeitintegration des Stoffgesetzes
- Diskretisierung in Ort und Zeit (Elementwahl)
- Kombination der Integration der Bewegungsgleichung und der Gleichgewichtsiteration
- Formulierung für viskoplastisches Materialverhalten incl. Schädigung

In einem ersten Schritt wurde gemeinsam mit *Rott* [87] ein FE-Programm zur Lösung statischer rotationssymmetrischer Probleme unter Verwendung eines viskoplastischen Stoffgesetzes von *Bruhns* [88] entwickelt. Darauf aufbauend verfolgen wir die oben angesprochenen Punkte, während *Rott* eine Erweiterung zur Berechnung der Torsion durchführt.

In diesem Kapitel werden die Grundgleichungen der Methode der FE in einer Update-Lagrangesche Formulierung aufbereitet und dann unter Berücksichtigung der Stoffgleichungen die Zeitintegration diskutiert. Zum Abschluß folgen Ergebnisse des FE-Programms.

C.1 Grundgleichungen der FE-Methode

Der Grundgedanke dieser Methode besteht in der Überführung des partiellen Differentialgleichungssystems in ein linearisiertes algebraisches Gleichungssystem, für welches effektive Lösungsverfahren zur Verfügung stehen. Dazu wird das Differentialgleichungssystem in einen Integralausdruck über das entsprechende Gebiet umgeformt. Durch Zerlegung des Gebietes (hier des Körpers) in diskrete Teilbereiche (die finiten Elemente) kann das Integral als Summe der Integrale der Elemente dargestellt werden. Die Unbekannten werden durch elementweise Ansatzfunktionen in Abhängigkeit der Elementknotenwerte ausgedrückt. Einsetzen der Ansatzfunktionen in den Integralausdruck liefert ein algebraisches Gleichungssystem für die Knotenwerte. Nach dessen Lösung kann mit Hilfe der Ansätze eine Näherungslösung für das gesamte Gebiet angegeben werden.

Die Berechnung von HGDn umfaßt i.a. die Beschreibung von

- physikalisch nichtlinearem Verhalten (Materialverhalten)
- geometrisch nichtlinearem Verhalten (große Formänderungen)
- Trägheitseinflüssen
- Schädigung, Versagen

und deren Kopplung. Wir spezialisieren hier das FE-Modell für rotationssymmetrische dreidimensionale adiabate Prozesse und sind damit in der Lage, nahezu alle Experimente auf dem Gebiet der HGDn numerisch zu simulieren. Die Grundgleichungen des Verfahrens bilden das Prinzip der virtuellen Arbeit (P.d.v.A) und das Materialgesetz.

C.1.1 Prinzip der virtuellen Arbeit für große Formänderungen

Den Ausgangspunkt für die Herleitung des Prinzips der virtuellen Arbeit bildet der Impulssatz für ein bewegtes, verformtes Körperelement:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{0} \quad (\text{C.1})$$

Nach skalarer Multiplikation mit der virtuellen Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ und Integration

über das aktuelle Volumen erhält man mit Hilfe des Gaußschen Satzes das bezüglich der verformten Konfiguration aufgestellte Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} \delta(\text{grad } \mathbf{u} + (\text{grad } \mathbf{u})^T) dV = \int_A \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_V \rho (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} dV . \quad (\text{C.2})$$

Dabei wurden die Vertauschbarkeit von Gradientenbildung und Variation, die Symmetrie des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und das Theorem von Cauchy $\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ ausgenutzt.

Die linke Seite von (C.2) stellt die virtuelle Formänderungsarbeit δW dar, während auf der rechten Seite die virtuelle Arbeit der äußeren flächenhaft verteilt angreifenden Kräfte δA_A und aller volumenhaft angreifenden Kräfte δA_V steht. Wenn auf dem Teil der Oberfläche A_P die Spannungen und auf A_u die Verschiebungen vorgegeben sind, so verschwindet wegen $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ auf A_u der entsprechende Anteil des Oberflächenintegrals.

C.1.2 Konstitutive Gleichungen

Für die Berechnung großer Deformationen verwenden wir die von Diehl [4],[6] durchgeführte Erweiterung des in Kap. B vorgestellten Stoffgesetzes. An dieser Stelle wollen wir die entsprechenden Gleichungen noch einmal kurz zusammenstellen und verwenden dazu eine abkürzende Schreibweise:

$$\mathbf{Z}^0 \rightarrow \mathbf{Z} , \quad \boldsymbol{\sigma}^0 \rightarrow \boldsymbol{\tau} , \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_D^0 \rightarrow \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_D , \quad \Theta^0 \rightarrow \vartheta , \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_V^0 \rightarrow \dot{\mathbf{A}}_{vL} \quad (\text{C.3})$$

Ausgangspunkt der Materialgleichungen ist die additive Zerlegung des Dehngeschwindigkeitstensors \mathbf{D} in einen reversiblen und einen irreversiblen Anteil

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_R + \mathbf{D}_i \quad (\text{C.4})$$

mit

$$\mathbf{D}_R = \frac{(\Delta^3 + \lambda_4 \text{tr } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} - 3\lambda_4 \boldsymbol{\sigma}}{\Delta^2 (\Delta^3 + (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) / \tilde{K})} \lambda_2 \dot{\Theta} + \frac{\lambda_4}{\Delta^3} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\lambda_3 \Delta^3 \mathbf{1} - (\lambda_4 / \tilde{K}) \boldsymbol{\sigma}}{\Delta^3 (\Delta^3 + (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) / \tilde{K})} \text{tr } \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{C.5})_1$$

und

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{D}_{vT} + \mathbf{D}_D , \quad (\text{C.5})_2$$

wobei

$$\tilde{K} = \frac{1}{3\lambda_3 + \lambda_4} \quad (\text{C.5})_3$$

und

$$\Delta = \det \mathbf{V}_R , \quad (\text{C.5})_4$$

Die Jaumannsche Spannungsrate $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$ ergibt sich in der Form

$$\overset{\circ}{\sigma} = \frac{\Delta^3}{\lambda_4} \left[\mathbf{D} - \mathbf{D}_{v\tau} - \mathbf{D}_o - \{ \dots \} \dot{\Theta} - \{ \dots \} \text{tr} \mathbf{D}_r \right] . \quad (\text{C.6})_1$$

Wir definieren eine weitere objektive Zeitableitung durch (σ stellvertretend für einen Tensor 2.Stufe)

$$\overset{\#}{\sigma} = \overset{\circ}{\sigma} - \sigma (\text{tr} \mathbf{D}_r) \quad (\text{C.6})_2$$

Die inelastischen Verzerrungsraten sind:

$$\text{a) } \mathbf{D}_o = [d_o]_o \lll \text{LC}_o \ggg \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|} \quad (\text{C.7})_1$$

$$\text{falls } \text{LC}_o = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{2}{\Delta} \tau' - \nu_o \mathbf{1} \right) \cdot (\overset{\#}{\tau} + m\tau) > 0$$

$$\text{und } G_o = \frac{1}{\Delta^2} \tau' \cdot \tau' - \frac{\nu_o}{\Delta} \text{tr} \tau - h_o \geq 0 .$$

$$\text{b) } \mathbf{D}_{v\tau} = \gamma_\tau [\Phi_\tau]_\tau \frac{\sigma' - \mathbf{X}_\tau}{\|\sigma' - \mathbf{X}_\tau\|} \quad (\text{C.7})_2$$

$$\text{falls } F_\tau = \frac{1}{\Delta^2} (\sigma' - \mathbf{X}_\tau) \cdot (\sigma' - \mathbf{X}_\tau) - g_\tau(x, \Theta, u) \geq 0 .$$

Vervollständigt wird das Stoffgesetz durch die Evolutionsgleichungen der internen Variablen

$$\overset{\#}{\tau} = \mathbf{D} \overset{\#}{\sigma} + K d_4 (\sigma \cdot \mathbf{D}_{v\tau}) \tau - m \tau \quad (\text{C.8})_1$$

$$\text{mit } \mathbf{D} \overset{\#}{\sigma} = d_1 \overset{\#}{\sigma} + \frac{1}{\Delta} d_2 (\tau \overset{\#}{\sigma} + \overset{\#}{\sigma} \tau) + \frac{1}{\Delta} d_3 (\mathbf{Z} \overset{\#}{\sigma} + \overset{\#}{\sigma} \mathbf{Z})$$

$$\overset{\#}{\mathbf{Z}} = [d_z]_z \lll \text{LC}_z \ggg \left\{ \frac{\mu_3}{\Delta^2} (\sigma')^2 + \frac{1}{\Delta} (\mu_4 + \omega) \mathbf{Z} \right\} \quad (\text{C.8})_2$$

$$\text{falls } \text{LC}_z = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{2}{\Delta} \tau' - \nu_z \mathbf{1} \right) \cdot (\overset{\#}{\tau} + m\tau) > 0$$

$$\text{und } G_z = \frac{1}{\Delta^2} \tau' \cdot \tau' - \frac{\nu_z}{\Delta} \text{tr} \tau - h_z \geq 0$$

$$\dot{\Theta} = [d_{\Theta v}]_v \quad (\text{C.8})_3$$

$$\overset{\#}{\mathbf{A}}_{vL} = \Delta^2 \gamma_{vL} [\Phi_{vL}]_v \frac{\tau'}{\|\tau'\|} + \mathbf{A}_{vL} \text{tr} \mathbf{D}_r \quad (\text{C.8})_4$$

$$\text{falls } G_v = \frac{1}{\Delta^2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} - h_v \geq 0$$

und

$$\ddot{\mathbf{X}}_T = \Delta c_T \mathbf{D}_{vT} \quad (\text{C.9})_1$$

$$\dot{\mathbf{x}} = K(\boldsymbol{\chi}, \Theta) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}_{vT} \quad (\text{C.9})_2$$

$$\ddot{\mathbf{u}} + c(\alpha + PG) \dot{\mathbf{u}} + \frac{c^2}{4} (\alpha + PG)^2 \{ \mathbf{u} - \mathbf{u}_{,eq}(PG) \} = 0 \quad (\text{C.9})_3$$

$$\mathbf{W}_i = \gamma_{TW} \left[\Phi_{TW} \right]_T \frac{\mathbf{X}_T \boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{X}_T}{\| \boldsymbol{\sigma}' \| \| \mathbf{X}_T \|} \quad (\text{C.10})$$

C. 2 Update-Lagrangesche Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit

In der Formulierung des Prinzips der virtuellen Arbeit gemäß (C.2) sind alle Größen auf die unbekannte verformte Lage bezogen. Zur Auswertung muß eine Transformation auf eine bekannte Konfiguration durchgeführt werden. Dabei bieten sich insbesondere die unverformte Ausgangslage und bei einer Aufteilung der Belastung in einzelne Lastschritte die Konfiguration des zuletzt berechneten Schrittes an. Das erstgenannte Vorgehen ist als Total-Lagrangesche Formulierung bekannt, während das zweite als Update-Lagrangesche Verfahren bezeichnet wird.

Die Bezeichnung der Konfiguration erfolgt analog [84]: Der linke obere Index steht für die Konfiguration, in der die betreffende Größe auftritt, während der linke untere Index die Bezugskonfiguration dieser Größe angibt. So sind ${}^t S_{0\beta}^\alpha$ die gemischtvarianten Komponenten des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors in körperbezogener Darstellung in der Konfiguration zur Zeit t bezogen auf die Anfangskonfiguration. Bei Eindeutigkeit werden die linksstehenden Indizes weggelassen.

Bei der hier vorliegenden inkrementellen Beschreibung des Stoffgesetzes liegt eine Update-Lagrangesche Formulierung nahe. Aus der bekannten Konfiguration zum Zeitpunkt t soll die neue Konfiguration zur Zeit $t+\Delta t$ berechnet werden. Dabei bezeichnet ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$ die Verschiebung aus der Ausgangskonfiguration zur Zeit t in die unbekannte Lage zur Zeit $t + \Delta t$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{r} - {}^t \mathbf{r} \quad (\text{C.11})$$

Die virtuelle Formänderungsarbeit

$$\delta W = \int_{t+\Delta t} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} \delta (\text{grad}^{t+\Delta t} \mathbf{u} + (\text{grad}^{t+\Delta t} \mathbf{u})^T) {}^{t+\Delta t} dV \quad (\text{C.12})$$

wird mit

$$J = \frac{{}^{t+\Delta t}V}{{}^tV} = \frac{{}^t\rho}{{}^{t+\Delta t}\rho} \quad (\text{C.13})$$

und

$$\mathbf{e}_{t+\Delta t} = \frac{1}{2} (\text{grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u} + (\text{grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u})^T) \quad (\text{C.14})$$

sowie

$$\mathbf{S}_{t+\Delta t} = J ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{-1}) ({}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}) ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{-1})^T \quad (\text{C.15})$$

umgeformt: Aus der Definition des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{dr} \cdot {}^{t+\Delta t}\mathbf{dr} - {}^t\mathbf{dr} \cdot {}^t\mathbf{dr}) \\ &= \frac{1}{2} (\text{Grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u} + (\text{Grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u})^T + (\text{Grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u})^T \text{Grad}^{t+\Delta t}\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

folgt

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} = ({}^{t+\Delta t}\mathbf{F})^T \delta \mathbf{e}_{t+\Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \quad (\text{C.17})$$

Damit läßt sich die virtuelle Formänderungsarbeit als Integral über das bekannte Gebiet tV darstellen.

$$\delta W = \int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t}\mathbf{S} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} {}^t dV \quad (\text{C.18})$$

\mathbf{S} und $\boldsymbol{\varepsilon}$ sind bezüglich der Elementararbeit konjugierte Spannungs- und Verzerrungsmaße [89].

Mit der auf das Ausgangsvolumen bezogenen Belastung ${}^{t+\Delta t}{}_o\mathbf{p}$ lautet das vollständige Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\begin{aligned} \int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t}\mathbf{S} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{t+\Delta t} {}^t dV &= \int_{{}^oA} {}^{t+\Delta t}{}_o\mathbf{p} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} {}^o dA \\ &+ \int_{{}^tV} {}^t\rho {}^{t+\Delta t}(\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} {}^t dV \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Zur Lösung von (C.18) mit Hilfe der Verschiebungsmethode müssen alle auftretenden Größen als Funktionen des unbekanntes Verschiebungsfeldes ausgedrückt werden. Das dadurch entstehende nichtlineare Gleichungssystem in \mathbf{u} wird durch geometrische und physikalische Linearisierung gelöst. Dazu werden Spannungen und Verzerrungen zerlegt und das Spannungsinkrement über das Materialgesetz als Funktion der Verzerrungen ausgedrückt.

Zerlegung von Spannungen und Verzerrungen

Die Spannungen werden in einen bekannten Anteil und einen Zuwachs zerlegt

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{S} = {}^t \mathbf{S} + \Delta {}^t \mathbf{S} \quad . \quad (\text{C.20})$$

Die Variation des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors wird in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil aufgespalten

$$\delta {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon} = \delta {}^t \boldsymbol{\varepsilon} = \delta {}^t \mathbf{e} + \delta {}^t \boldsymbol{\eta} \quad (\text{C.21})$$

mit

$$\delta {}^t \mathbf{e} = \frac{1}{2} \delta (\text{Grad } \mathbf{u} + (\text{Grad } \mathbf{u})^T) \quad (\text{C.22})$$

$$\delta {}^t \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} \delta ((\text{Grad } \mathbf{u})^T \text{Grad } \mathbf{u}) \quad , \quad (\text{C.23})$$

wobei von der abkürzenden Schreibweise $\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$ Gebrauch gemacht wurde.

Mit der Vernachlässigung des Produkts $\Delta {}^t \mathbf{S} \cdot \delta {}^t \boldsymbol{\eta}$ zweier kleiner Größen wird (C.18) zu

$$\int_{t_V} \Delta {}^t \mathbf{S} \cdot \delta {}^t \mathbf{e} \, {}^t dV + \int_{t_V} {}^t \mathbf{S} \cdot \delta {}^t \boldsymbol{\eta} \, {}^t dV = A_V + A_A - \int_{t_V} {}^t \mathbf{S} \cdot \delta {}^t \mathbf{e} \, {}^t dV \quad . \quad (\text{C.24})$$

Einbau des Werkstoffgesetzes

Für den Spannungszuwachs $\Delta {}^t \mathbf{S}$ in (C.24) kann näherungsweise

$$\Delta {}^t \mathbf{S} \approx {}^t \dot{\mathbf{S}} \Delta t \quad (\text{C.25})$$

gesetzt werden. Zur Berechnung der substantiellen Zeitableitung des 2. Piola - Kirchhoff Spannungstensors wird von

$${}^\tau \boldsymbol{\sigma} = \frac{{}^\tau \rho}{{}^t \rho} \mathbf{F} {}^\tau \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad , \quad t \leq \tau \leq t + \Delta t \quad (\text{C.26})$$

mit dem Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \frac{\partial {}^\tau x^\alpha}{\partial {}^t x^\beta} {}^\tau \mathbf{g}_\alpha {}^t \mathbf{g}^\beta \quad (\text{C.27})$$

ausgegangen. Die substantielle Zeitableitung von (C.26) liefert [91]

$${}^\tau \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{{}^\tau \dot{\rho}}{{}^t \rho} \mathbf{F} {}^\tau \mathbf{S} \mathbf{F}^T + \frac{{}^\tau \rho}{{}^t \rho} (\dot{\mathbf{F}} {}^\tau \mathbf{S} \mathbf{F}^T + \mathbf{F} {}^\tau \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T + \mathbf{F} {}^\tau \mathbf{S} \dot{\mathbf{F}}^T) \quad (\text{C.28})$$

mit

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F} \quad . \quad (\text{C.29})$$

Zum Zeitpunkt $\tau = t$ gilt $\mathbf{F} = \mathbf{1}$, $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}$, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S}$, $J=1$ und mit der Jaumannschen Zeitableitung erhält man

$${}^t \dot{\mathbf{S}} = {}^t \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{{}^t \dot{\rho}}{{}^t \rho} {}^t \boldsymbol{\sigma} + ({}^t \boldsymbol{\Omega} - {}^t \mathbf{L}) {}^t \boldsymbol{\sigma} - {}^t \boldsymbol{\sigma} ({}^t \boldsymbol{\Omega} - {}^t \mathbf{L}) . \quad (\text{C.30})$$

Die hier verwendete objektive Zeitableitung der Spannungen

$$\overset{\#}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr} \mathbf{D} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr} \mathbf{D} \quad (\text{C.31})$$

mit $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W} - \mathbf{W}_i$

liefert mit der Definition des Geschwindigkeitsgradiententensors

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = \operatorname{grad} \mathbf{v} &= \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{v} + (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T) + \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{v} - (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T) \\ &= \mathbf{D} + \mathbf{W} \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

und der Kontinuitätsgleichung [92]

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = - \operatorname{tr} (\mathbf{D}) \quad (\text{C.33})$$

$$\dot{\mathbf{S}} = \overset{\#}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} + 2 \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr} \mathbf{D} - \mathbf{D} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{D} - \mathbf{W}_i \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{W}_i . \quad (\text{C.34})$$

Der Dehngeschwindigkeitstensor \mathbf{D} läßt sich unter der Annahme zeitlich konstanter Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \text{const.} = \frac{D\mathbf{r}}{dt} = \frac{D\mathbf{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}}{\Delta t} \quad (\text{C.35})$$

mit Hilfe der Verschiebungen ausdrücken.

Zum betrachteten Zeitpunkt $\tau = t$ fallen die aktuellen Koordinaten mit denen der Referenzkonfiguration zusammen, d.h.

$${}^t \mathbf{D} = \frac{1}{2\Delta t} (\operatorname{Grad} \mathbf{u} + (\operatorname{Grad} \mathbf{u})^T) = \frac{1}{\Delta t} {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_l . \quad (\text{C.36})$$

Mit dem Stoffgesetz (C.6) in der Form

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} &= 2G \left[\mathbf{D} - \mathbf{D}_{vT} - \mathbf{D}_\theta - \mathbf{C}_1 \dot{\Theta} - \mathbf{C}_2 \operatorname{tr} \mathbf{D}_R \right] \\ &= \mathbf{C} \mathbf{D} - 2G \left[\mathbf{D}_{vT} + \mathbf{D}_\theta + \mathbf{C}_1 \dot{\Theta} \right] = \mathbf{C} \mathbf{D} - 2G \mathbf{D}_i^* \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

erhalten wir für den Zuwachs des 2. Piola - Kirchhoff Spannungstensors

$$\begin{aligned} \Delta_t \mathbf{S} &\approx \Delta t \left[2G\mathbf{D} + \sigma \operatorname{tr}\mathbf{D} - \mathbf{D}\sigma - \sigma\mathbf{D} - 2G(\mathbf{D}_{\text{VT}} + \mathbf{D}_0 + \mathbf{C}_1\dot{\Theta} + \mathbf{C}_2 \operatorname{tr}\mathbf{D}) - \mathbf{W}_i\sigma + \sigma\mathbf{W}_i \right] \\ &= \mathbf{C}_{t_1} \varepsilon_1 - \left[2G(\mathbf{D}_{\text{VT}} + \mathbf{D}_0 + \mathbf{C}_1\dot{\Theta}) - \mathbf{W}_i\sigma + \sigma\mathbf{W}_i \right] \Delta t \\ &\quad + \operatorname{tr}(\varepsilon_1) \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \sigma - \begin{matrix} t \\ t_1 \end{matrix} \sigma - \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \sigma \begin{matrix} t \\ t_1 \end{matrix} \varepsilon_1^T \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Dieses Vorgehen entspricht einer expliziten zeitlichen Eulerintegration von $\Delta_t \mathbf{S}$. Damit lautet das Prinzip der virtuellen Arbeit für einen Zeitschritt

$$\begin{aligned} &\int_{t_V} \left[\mathbf{C}_{t_1} \varepsilon_1 + \operatorname{Sp}(\varepsilon_1) \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \sigma - \begin{matrix} t \\ t_1 \end{matrix} \sigma - \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \sigma \begin{matrix} t \\ t_1 \end{matrix} \varepsilon_1^T \right] \cdot \delta_t \mathbf{e} \, {}^t dV + \int_{t_V} \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \sigma \cdot \delta_t \eta \, {}^t dV \\ &= A_V + A_A - \int_{t_V} \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \sigma \cdot \delta_t \mathbf{e} \, {}^t dV + \Delta t \int_{t_V} 2G\mathbf{D}_i^* \delta_t \mathbf{e} \, {}^t dV. \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

Diese Gleichung stellt die linearisierte Form des Prinzips der virtuellen Arbeit nach (C.18) dar. (C.39) ist in Momentanwerten für den Zeitpunkt t formuliert und deshalb nicht geeignet, eine Gleichgewichtsiteration zur Berechnung des Zeitschrittes zu begründen. Man beachte, daß die Näherung (C.25) nur für die Berechnung der Steifigkeitsmatrix verwendet wird und somit keine Vorschrift zur Ermittlung der Spannungen am Ende des Zeitschrittes darstellt.

Inkrementelle Formulierung

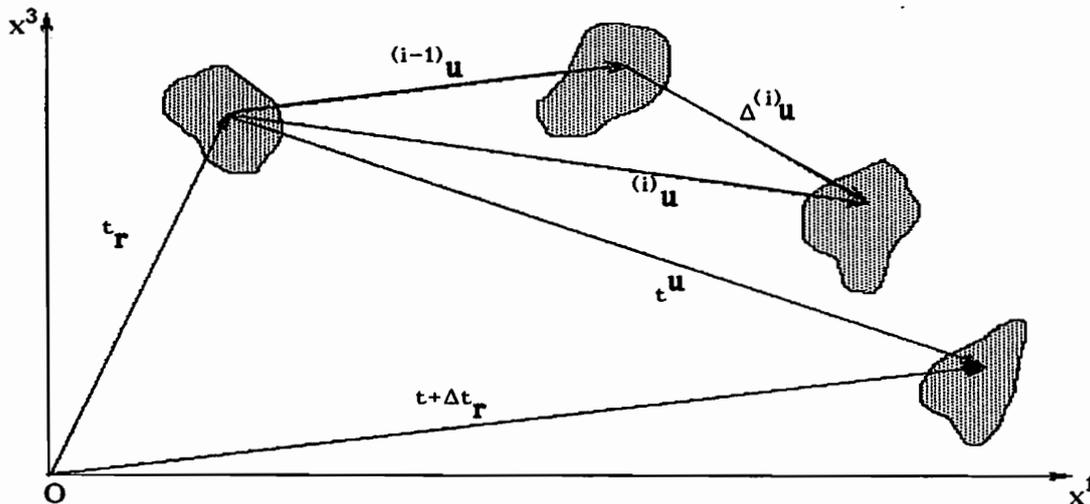


Fig.C.1: Zerlegung der Verschiebung

Neben der linearisierten Form für einen Zeitschritt benötigen wir zur Durchführung einer Gleichgewichtsiteration eine inkrementelle Formulierung in dem Sinne, daß die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (C.19) iterativ über die

Inkrement der Knotenpunktverschiebungen ermittelt wird. Dazu wird die unbekannte Verschiebung \mathbf{u}_t durch die Folge ${}^{(i)}\mathbf{u}_t$ mit

$${}^{(i)}\mathbf{u}_t = {}^{(i-1)}\mathbf{u}_t + \Delta {}^{(i)}\mathbf{u}_t \quad i = 1, \dots \quad (\text{C. 40})$$

angenähert (Fig. C.1) .

Entsprechend wird die Verzerrung $\mathbf{\varepsilon}_t^{t+\Delta t}$ durch ${}^{(i)}\mathbf{\varepsilon}_t$ approximiert.

$$\mathbf{\varepsilon}_t^{t+\Delta t} \approx {}^{(i)}\mathbf{\varepsilon}_t \quad (\text{C. 41})$$

Aus der Variation der Verschiebungen

$$\delta {}^{(i)}\mathbf{u}_t = \delta ({}^{(i-1)}\mathbf{u}_t + \Delta {}^{(i)}\mathbf{u}_t) = \delta \Delta {}^{(i)}\mathbf{u}_t \quad (\text{C. 42})$$

folgt

$$\delta {}^{(i)}\mathbf{\varepsilon}_t = \delta \Delta {}^{(i)}\mathbf{e}_t + \delta \Delta {}^{(i)}\boldsymbol{\eta}_t \quad (\text{C. 43})$$

wobei in

$$\begin{aligned} \delta \Delta {}^{(i)}\mathbf{e}_t &= \frac{1}{2} (\delta \text{Grad} (\Delta {}^{(i)}\mathbf{u}_t) + \delta \text{Grad} (\Delta {}^{(i)}\mathbf{u}_t)^T \\ &+ \delta \text{Grad} (\Delta {}^{(i)}\mathbf{u}_t)^T \text{Grad} ({}^{(i-1)}\mathbf{u}_t) \\ &+ \text{Grad} ({}^{(i-1)}\mathbf{u}_t)^T \delta \text{Grad} (\Delta {}^{(i)}\mathbf{u}_t)) \end{aligned} \quad (\text{C. 44})$$

die in $\Delta {}^{(i)}\mathbf{u}_t$ linearen und in

$$\begin{aligned} \delta \Delta {}^{(i)}\boldsymbol{\eta}_t &= \frac{1}{2} (\delta \text{Grad} (\Delta {}^{(i)}\mathbf{u}_t)^T \text{Grad} (\Delta {}^{(i)}\mathbf{u}_t) \\ &+ \text{Grad} (\Delta {}^{(i)}\mathbf{u}_t)^T \delta \text{Grad} (\Delta {}^{(i)}\mathbf{u}_t)) \end{aligned} \quad (\text{C. 45})$$

die in $\Delta {}^{(i)}\mathbf{u}_t$ quadratischen Terme zusammengefaßt sind. Dieses Vorgehen ist analog bei *Paulun* [93] und *Klee* [94] zu finden. Nach Aufteilung der Spannungen ${}^{(i)}\mathbf{S}$ in den bekannten Anteil ${}^{(i-1)}\mathbf{S}$ und das Inkrement $\Delta {}^{(i)}\mathbf{S}$ stellt sich das Prinzip der virtuellen Arbeit folgendermaßen dar:

$$\begin{aligned} &\int_{t_V} \Delta {}^{(i)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta {}^{(i)}\mathbf{e}_t \, {}^t dV + \int_{t_V} \Delta {}^{(i)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta {}^{(i)}\boldsymbol{\eta}_t \, {}^t dV \\ &+ \int_{t_V} {}^{(i-1)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta {}^{(i)}\boldsymbol{\eta}_t \, {}^t dV = A_V + A_A - \int_{t_V} {}^{(i-1)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta {}^{(i)}\mathbf{e}_t \, {}^t dV \end{aligned} \quad (\text{C. 46})$$

Da das zweite Integral auf der linken Seite Größen enthält, die gegenüber den restlichen von höherer Ordnung klein sind, wird es in der Iteration nicht berücksichtigt (vgl. den analogen Schritt in (C.24)) Damit entspricht die Formulierung (C.46) für einen Iterationsschritt der Gleichung (C.18) für einen Zeitschritt. Aus der in (C.46) schon benutzten Zerlegung

$$\Delta^{(i)} \mathbf{S} = {}^{(i)} \mathbf{S} - {}^{(i-1)} \mathbf{S} \quad (\text{C.47})$$

folgt mit (C.38) und

$$\Delta_t^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2} (\text{Grad}(\Delta^{(i)} \mathbf{u}) + \text{Grad}(\Delta^{(i)} \mathbf{u})^T) \quad (\text{C.48})$$

gemäß (C.36) für das Spannungsinkrement

$$\Delta^{(i)} \mathbf{S} \approx \mathbf{C} \Delta^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \text{Sp}(\Delta^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_1) \boldsymbol{\sigma} - \Delta^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \Delta^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}_1^T - \{2 \mathbf{G} \mathbf{D}_i^*\} \Delta t \quad (\text{C.49})$$

wobei $\{\dots\}$ nur für $i = 1$ gültig ist. Im Vergleich zu (C.38) enthält (C.49) zusätzliche Näherungen.

(C.46) bildet zusammen mit (C.49) den Ausgangspunkt für die inkrementelle FE-Formulierung.

C.3 Umsetzung in eine Finite-Element-Formulierung

Bei FE-Rechnungen in der Kontinuumsmechanik hat sich die Verschiebungsmethode gegenüber der Kraftgrößenmethode durchgesetzt. Dabei zeigen sich ihre Vorteile insbesondere bei dynamischen und nichtlinearen Problemen [66].

C3.1 Wahl der Elemente

Für die Berechnung von rotationssymmetrischen Problemen wird im folgenden ein Ringelement hergeleitet. Da für den Lastvektor ebenso wie bei der Berechnung der Massenmatrix die gleichen Ansatzfunktionen wie für die Steifigkeitsmatrix verwendet werden, ergibt sich eine konsistente Formulierung. Im Zweidimensionalen werden nahezu ausschließlich Dreiecks- oder Viereckselemente verwendet, wobei man nach Argyris [85] keiner der beiden Elementfamilien eine Überlegenheit attestieren kann. Der Vorteil der Dreieckselemente liegt in der besseren Anpassungsmöglichkeit an komplizierte Geometrien. Schwierigkeiten treten jedoch durch geometrische Anisotropie und unterschiedliche Konvergenzgeschwindigkeiten bei verschiedenen Netzen auf [95]. Weil bei den hier zu behandelnden Geometrieverhältnissen sich der Vorteil der Anpassung an die Geometrie nicht auswirken kann, entwickeln wir ein Viereckselement.

C.3.2 Ansatzfunktionen

Die Wahl der Ansätze bei einem finiten Element hat entscheidenden Einfluß auf Rechenzeit, Genauigkeit, Konvergenzverhalten und numerische Stabilität der gesamten Rechnung. Daher wird auch in der Literatur [85],[86],[95]-[97] ausführlich auf die Anforderungen an die Ansätze eingegangen.

Die Ansatzfunktionen brauchen nur die wesentlichen Randbedingungen zu erfüllen, die natürlichen werden von vornherein im integralen Sinn erfüllt. Die Befriedigung der geometrischen Randbedingungen gewährleistet Kompatibilität der Elemente (Kontinuität der Verschiebungen). Obwohl strenggenommen nur die Verwendung solcher konformer Elemente erlaubt ist, werden gelegentlich (z. B. bei Plattenproblemen) auch mit nichtkonformen Elementen gute Ergebnisse erzielt [98]. Vollständigkeit der Ansätze stellt sicher, daß Starrkörperverschiebungen und konstante Verzerrungszustände exakt erfaßt werden. Zusätzlich ist Invarianz der Interpolationsfunktionen gegenüber Drehungen und Verschiebungen des Koordinatensystems zu fordern. Sind alle diese Bedingungen erfüllt, was z. B. mit vollständigen Polynomen zu erreichen ist, so gewährleistet das Element im elastischen monotone Konvergenz.

Isoparametrisches Konzept

Im Hinblick auf die spätere Anwendung wird das isoparametrische Konzept hier für ein ebenes Problem dargestellt. Durch dieses Konzept ist die Erweiterung auf dreidimensionale Anwendungen prinzipiell leicht möglich, erfordert jedoch wesentlich höheren numerischen Aufwand (Speicherplatz, Rechenzeit).

Es hat sich als zweckmäßig erwiesen; neben den raumfesten globalen Koordinaten elementweise definierte natürliche Koordinaten einzuführen (Fig.C.2).

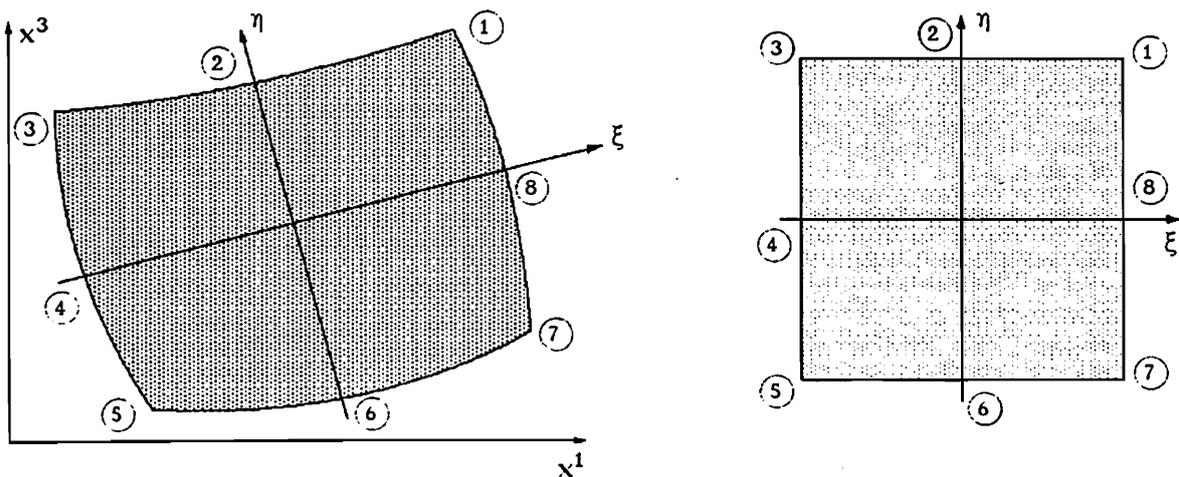


Fig. C.2: Isoparametrisches 8-Knotenelement

Die natürlichen Koordinaten transformieren ein allgemeines Viereck in ein Qua-

drat der Kantenlänge 2. Auf der Grundlage dieser Darstellung lassen sich iso-, sub- oder superparametrische Elemente ableiten, je nachdem ob für die Interpolation des Deformationsverhaltens und der Geometrie gleiche oder verschiedene Ansatzfunktionen verwendet werden. Ist der Grad der Funktion zur Beschreibung der Geometrie größer als der für die Deformation, so spricht man von superparametrischen Elementen, im umgekehrten Fall von subparametrischen. Die isoparametrischen (gleiche Ansätze) und verwandte Elemente sind i. a. besonders effektiv .

Die Interpolationsfunktionen lassen sich auf systematischem Weg mit Hilfe der Lagrangeschen Funktion gewinnen:

$$h_{il} = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+1} (\xi - \xi_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{m+1} (\eta - \eta_k)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+1} (\xi_i - \xi_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{m+1} (\eta_l - \eta_k)} ; \quad (C.50)$$

m: Grad des Ansatzes

ξ_j, η_k : Knotenkoordinaten .

Die Frage nach der Wahl des effizientesten Elementes wird in der Literatur nicht eindeutig beantwortet. Während *Miehe* [99] bei komplizierten Materialmodellen das bilineare 4-Knotenelement vorzieht, neigen *Bathe* und *Argyris* dazu, eher Elemente mit höheren Ansatzfunktionen zu verwenden. Der oft verwendete Kompromiß ist das quadratische 8-Knotenelement der Serendipity-Klasse. Wir werden die Wahl der Elemente für die Analyse von HGDn anhand von 3 Elementtypen diskutieren.

Ansätze:

Bilineares 4-Knotenelement:

$$h_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \quad i = 1,2,3,4 \quad . \quad (C.51)$$

Quadratisches 8-Knotenelement:

$$h_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \quad i = 1,3,5,7$$

$$h_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i) \quad i = 2,6 \quad (C.52)$$

$$h_i = \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 + \xi \xi_i) \quad i = 4,8 \quad .$$

Kubisches 12-Knotenelement

$$\begin{aligned}
 h_i &= \frac{1}{32} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) [9(\xi^2 + \eta^2) - 10] & i = 1,4,7,10 \\
 h_i &= \frac{9}{32} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) (1 + 9\eta \eta_i) & i = 5,6,11,12 \\
 \xi_i &= \pm \frac{1}{3} & \eta_i = \pm 1 \\
 h_i &= \frac{9}{32} (1 + \eta \eta_i) (1 - \xi^2) (1 + 9\xi \xi_i) & i = 2,3,8,9 \\
 \eta_i &= \pm \frac{1}{3} & \xi_i = \pm 1
 \end{aligned} \tag{C.53}$$

Quartische oder höhere Ansätze spielen aus Gründen der Handhabbarkeit keine Rolle. Die Ansatzfunktion h_i nimmt am i -ten Knoten (s. Fig. C.2) den Wert 1 und an den übrigen Knoten den Wert 0 an. Mit den Interpolationsfunktionen (C.51)-(C.53) werden sämtliche oben angesprochenen Bedingungen erfüllt. Es ergibt sich als Interpolation der Geometrie

$$\begin{aligned}
 x_\alpha &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \hat{x}_{i\alpha} & \alpha = 1, 3 \\
 & & N = \text{Anzahl der Elementknoten}
 \end{aligned} \tag{C.54}$$

und der Verschiebung

$$u_\alpha = \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \hat{u}_{i\alpha} \quad \alpha = 1, 3 \tag{C.55}$$

C.3.3 Aufbau der Matrizen

Bei der Berechnung von rotationssymmetrischen Prozessen handelt es sich um ein zweidimensionales Problem. Wir verwenden Zylinderkoordinaten, wie sie im Anhang 2 beschrieben sind.

$$\begin{aligned}
 u_2 &\equiv 0, \\
 u_1 &= u_1(x^1, x^3), & u_3 &= u_3(x^1, x^3)
 \end{aligned} \tag{C.56}$$

Berücksichtigt man diese kinematischen Voraussetzungen bei der Auswertung des Prinzips der virtuellen Arbeit, so erhält man mit den isoparametrischen Ansätzen nach Volumenintegration ein zweidimensionales finites Element. Dazu müssen alle in (C.49) auftretenden Größen als Funktionen der Verschiebungskremente $\Delta^{(i)} u_\alpha$ ($\alpha = 1,3$) ausgedrückt werden. Wir verwenden dazu die Ansätze

$$\Delta^{(i)} u_\alpha = \sum_{k=1}^N h_k(\xi, \eta) \Delta^{(i)} \hat{u}_{k\alpha} \quad \alpha = 1, 3 \tag{C.57}$$

mit h_k gemäß (C.51) - (C.53) und den Inkrementen der diskreten Knotenverschiebungen $\Delta^{(i)} \hat{u}_{k\alpha}$. Für die Ortsableitungen erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t x^\beta} \Delta^{(i)} u_\alpha = \Delta^{(i)} u_{\alpha,\beta} = \sum_{k=1}^N h_k(\xi,\eta)_{,\beta} \Delta^{(i)} \hat{u}_{k\alpha} \quad (C.58)$$

Damit können die im P.d.v.A. (C.46) auftretenden Variationen $\delta \Delta_t^{(i)} e$, $\delta \Delta_t^{(i)} \eta$, sowie der für die Berechnung des Spannungsinkrementes erforderliche Term $\Delta_t^{(i)} \varepsilon_1$ durch die Inkremente der Knotenpunktverschiebungen angegeben werden.

Im einzelnen erhalten wir:

$$a) [\delta \Delta^{(i)} e] = [{}^{(i)}B_1] [\delta \Delta^{(i)} \hat{u}] \quad (C.59)$$

mit

$$[\delta \Delta^{(i)} e] = \delta \begin{bmatrix} \Delta^{(i)} e_{11} \\ \Delta^{(i)} e_{22} \\ \Delta^{(i)} e_{33} \\ 2 \Delta^{(i)} e_{13} \end{bmatrix} \quad (C.60)$$

und

$$[\delta \Delta^{(i)} \hat{u}] = \delta \begin{bmatrix} \Delta^{(i)} \hat{u}_{11} \\ \Delta^{(i)} \hat{u}_{13} \\ \Delta^{(i)} \hat{u}_{21} \\ \Delta^{(i)} \hat{u}_{23} \\ \vdots \\ \Delta^{(i)} \hat{u}_{N3} \end{bmatrix} \quad (C.61)$$

sowie der linearen Verzerrungs - Verschiebungsmatrix $[{}^{(i)}B_1]$ gemäß

$$[{}^{(i)}B_1] = \quad (C.62)$$

$$\begin{bmatrix} h_{1,1}(1 + {}^{(i-1)}u_{1,1}) & h_{1,1} {}^{(i-1)}u_{3,1} & h_{2,1}(1 + {}^{(i-1)}u_{1,1}) & \dots \\ h_1 ({}^t x^{1+(i-1)} u_1) & 0 & h_2 ({}^t x^{1+(i-1)} u_1) & \dots \\ h_{1,3} {}^{(i-1)}u_{1,3} & h_{1,3} (1 + {}^{(i-1)}u_{3,3}) & h_{2,3} {}^{(i-1)}u_{1,3} & \dots \\ h_{1,1} {}^{(i-1)}u_{1,3} + & h_{1,3} {}^{(i-1)}u_{3,1} + & h_{2,1} {}^{(i-1)}u_{1,3} + & \dots \\ h_{1,3} (1 + {}^{(i-1)}u_{1,1}) & h_{1,1} (1 + {}^{(i-1)}u_{3,3}) & h_{2,3} (1 + {}^{(i-1)}u_{1,1}) & \dots \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c} \dots h_{N,1}^{(i-1)} u_{3,1} \\ \dots 0 \\ \dots h_{N,3} (1 + u_{3,3}^{(i-1)}) \\ \dots h_{N,3}^{(i-1)} u_{3,1} + \\ \dots h_{N,1} (1 + u_{3,3}^{(i-1)}) \end{array} \right]$$

b) $[\text{Grad } \Delta^{(i)} u] = [B_{nl}] [\Delta^{(i)} \hat{u}]$ (C.63)

mit

$$[\text{Grad } \Delta^{(i)} u] = \left[\begin{array}{c} \Delta^{(i)} u_{1,1} \\ \Delta^{(i)} u_{3,1} \\ \Delta^{(i)} u_{2,2} \\ \Delta^{(i)} u_{3,1} \\ \Delta^{(i)} u_{3,3} \end{array} \right] \quad (C.64)$$

und

$$[\Delta^{(i)} \hat{u}] = \left[\begin{array}{c} \Delta^{(i)} \hat{u}_{11} \\ \Delta^{(i)} \hat{u}_{13} \\ \Delta^{(i)} \hat{u}_{21} \\ \vdots \\ \Delta^{(i)} \hat{u}_{N3} \end{array} \right] \quad (C.65)$$

sowie der Gradienten - Verschiebungsmatrix $[B_{nl}]$

$$[B_{nl}] = \quad (C.66)$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} h_{1,1} & 0 & h_{2,1} & 0 & h_{3,1} & 0 & \dots & h_{N,1} & 0 \\ 0 & h_{1,1} & 0 & h_{2,1} & 0 & h_{3,1} & \dots & 0 & h_{N,1} \\ {}^t x^1 h_1 & 0 & {}^t x^1 h_2 & 0 & {}^t x^1 h_3 & 0 & \dots & {}^t x^1 h_N & 0 \\ h_{1,3} & 0 & h_{2,3} & 0 & h_{3,3} & 0 & \dots & h_{N,3} & 0 \\ 0 & h_{1,3} & 0 & h_{2,3} & 0 & h_{3,3} & \dots & 0 & h_{N,3} \end{array} \right]$$

$$[q] = [q_{vr}] + [q_o] + [q_\Theta] \quad (C.71)$$

$$= -2G \begin{bmatrix} D_{vr}^{11} + 2\sigma^{13} W_{1,3}^1 \\ D_{vr}^{22} \\ D_{vr}^{33} - 2\sigma^{13} W_{1,3}^1 \\ D_{vr}^{13} + \sigma^{11} W_{1,3}^1 - \sigma^{33} W_{1,3}^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_o^{11} \\ D_o^{22} \\ D_o^{33} \\ D_o^{13} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_\Theta^{11} \\ D_\Theta^{22} \\ D_\Theta^{33} \\ D_\Theta^{13} \end{bmatrix}$$

mit $[D_o]$ und $[D_\Theta] = \dot{\Theta} \cdot [A^{\sigma\Theta}]$ aus dem Anhang 3.

$$d) \quad {}^{(i-1)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta^{(i)} \boldsymbol{\eta} = [\delta \Delta^{(i)} \hat{\mathbf{u}}]^T [B_{nl}]^T [{}^{(i-1)}\mathbf{S}^*] [B_{nl}] [\Delta^{(i)} \hat{\mathbf{u}}] \quad (C.72)$$

mit der Spannungs-Metrikmatrix $[{}^{(i-1)}\mathbf{S}^*]$

$$[{}^{(i-1)}\mathbf{S}^*] = \quad (C.73)$$

$$\begin{bmatrix} {}^{(i-1)}S^{11} & t_g^{11} & 0 & 0 & {}^{(i-1)}S^{13} & t_g^{11} & 0 \\ 0 & {}^{(i-1)}S^{11} & t_g^{33} & 0 & 0 & {}^{(i-1)}S^{13} & t_g^{33} \\ 0 & 0 & {}^{(i-1)}S^{22} & t_g^{22} & 0 & 0 & 0 \\ {}^{(i-1)}S^{13} & t_g^{11} & 0 & 0 & {}^{(i-1)}S^{33} & t_g^{11} & 0 \\ 0 & {}^{(i-1)}S^{13} & t_g^{33} & 0 & 0 & {}^{(i-1)}S^{33} & t_g^{33} \end{bmatrix}$$

$$e) \quad {}^{(i-1)}\mathbf{S} \cdot \delta \Delta^{(i)} \mathbf{e} = [\delta \Delta^{(i)} \hat{\mathbf{u}}]^T [{}^{(i)}B_1]^T [{}^{(i-1)}\mathbf{S}] \quad (C.74)$$

mit

$$[{}^{(i-1)}\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} {}^{(i-1)}S^{11} \\ {}^{(i-1)}S^{22} \\ {}^{(i-1)}S^{33} \\ {}^{(i-1)}S^{13} \end{bmatrix} \quad (C.75)$$

$$f) \quad \mathbf{p} \cdot \delta \Delta^{(i)} \mathbf{u} = [\delta \Delta^{(i)} \hat{\mathbf{u}}]^T [H]^T [\mathbf{p}] \quad (C.76)$$

mit der Interpolationsmatrix

$$[H] = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & \dots & h_N & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & \dots & 0 & h_N \end{bmatrix} \quad (C.77)$$

$$g) \quad {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \Delta^{(i)} \mathbf{u} = [\delta \Delta^{(i)} \hat{\mathbf{u}}]^T [H]^T [H] [{}^{(i)} \ddot{\mathbf{u}}] \quad (C.78)$$

mit der Interpolationsmatrix $[H]$ nach (C.77).

C.3.4 Aufbau des Gleichungssystems

Das P.d.v.A. führt wie gezeigt mit den Ansätzen für die Verschiebungen auf ein nichtlineares Gleichungssystem in den Inkrementen der Knotenpunktverschiebungen. Das nichtlineare Gleichungssystem wird gelöst, indem die Gleichungen in den Inkrementen linearisiert werden und die Lösung durch eine Gleichgewichtsiteration bestimmt wird. Mit der Näherung

$$\Delta^{(i)} \mathbf{S} \cdot \delta \Delta_t^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon} \approx \Delta^{(i)} \mathbf{S} \cdot \delta \Delta_t^{(i)} \mathbf{e} \quad (C.79)$$

kann der zweite Term in (C.46) vernachlässigt werden.

Da im Hinblick auf die Anwendung des modifizierten Newton-Raphson-Verfahrens innerhalb eines Zeitschritts mit einer konstanten Steifigkeitsmatrix gerechnet werden soll, kann auf der linken Seite von (C.46) $i = 1$ gesetzt werden und daher zur Berechnung von $[\Delta^{(1)} \mathbf{S}]$ nach (C.67)

$$[\Delta^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}_1] = [\Delta^{(1)} \mathbf{e}] = [{}^{(1)} \mathbf{B}_1] [\Delta^{(1)} \hat{\mathbf{u}}] \quad (C.80)$$

verwendet werden. Aus der unsymmetrischen Spannungs-Verzerrungsmatrix $[C^*]$ ergibt sich eine ebenfalls unsymmetrische Steifigkeitsmatrix, wodurch das Auflösen des Gleichungssystems wesentlich aufwendiger wird. Wegen

$$\frac{\sigma}{G} \ll 1 \quad (C.81)$$

können wir die Terme $\sigma^{\alpha\beta}$ in $[C^*]$ vernachlässigen und wir erhalten so die symmetrische Spannungs-Verzerrungsmatrix $[C]$. Diese Näherung verringert den Aufwand bei der Lösung des Gleichungssystems, erhöht aber u.U. die Anzahl der Gleichgewichtsiterationen.

Die oben angesprochenen Näherungen werden ebenso wie die Approximation des Spannungszuwachses in der Steifigkeitsmatrix durch die Iteration vollständig kompensiert.

Bei der Berechnung der äußeren Lasten soll der Einfluß der volumenhaft angreifenden Kräfte (nicht der Trägheitskräfte) vernachlässigt werden:

$$A_V = - \int_V \rho \int_{t_0}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV \quad (C.82)$$

Die flächenhaft angreifenden Kräfte beziehen wir auf die unverformte Konfiguration

$$A_A = \int_A \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} \, dA \quad (C.83)$$

Nach Einbau der Matrizen aus Kapitel C.3.2 in das Prinzip der virtuellen Arbeit ergibt sich das linearisierte Gleichungssystem auf Elementebene zu

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{V_e} [{}^{(1)}\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{C}] [{}^{(1)}\mathbf{B}_1] {}^t dV_e + \int_{V_e} [\mathbf{B}_{nl}]^T [{}^{(0)}\mathbf{S}^*] [\mathbf{B}_{nl}] {}^t dV_e \right\} [\Delta {}^{(i)} \hat{\mathbf{u}}] \quad (C.84) \\ & = \int_{A_e} [\mathbf{H}]^T [\mathbf{p}] {}^o dA_e - \int_{V_e} [{}^{(i)}\mathbf{B}_1]^T [{}^{(i-1)}\mathbf{S}] {}^t dV_e \\ & - \left\{ \Delta t \int_{V_e} [{}^{(1)}\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{q}_{vr}] {}^t dV_e \right\} - \left\{ \Delta t \int_{V_e} [{}^{(1)}\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{q}_o] {}^t dV_e \right\} \\ & - \left\{ \Delta t \int_{V_e} [{}^{(1)}\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{q}_\Theta] {}^t dV_e \right\} - \int_{V_e} \rho [\mathbf{H}]^T [\mathbf{H}] {}^t dV_e) [{}^{(i)} \ddot{\mathbf{u}}] \end{aligned}$$

mit

$\int_{V_e} [{}^{(1)}\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{C}] [{}^{(1)}\mathbf{B}_1] {}^t dV_e = [\mathbf{k}_1]$	inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix bei linearer Verzerrung,
$\int_{V_e} [\mathbf{B}_{nl}]^T [{}^{(0)}\mathbf{S}^*] [\mathbf{B}_{nl}] {}^t dV_e = [\mathbf{k}_{nl}]$	inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix bei nichtlinearer Verzerrung,
$\int_{A_e} [\mathbf{H}]^T [\mathbf{p}] {}^o dA_e = [\mathbf{r}_p],$	äußerer Elementlastvektor,
$\int_{V_e} [{}^{(i)}\mathbf{B}_1]^T [{}^{(i-1)}\mathbf{S}] {}^t dV_e = [{}^{(i-1)}\mathbf{f}]$	Vektor der Lasten aus Elementspannungen,
$\Delta t \int_{V_e} [{}^{(1)}\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{q}_{vr}] {}^t dV_e = [\mathbf{r}_{vr}]$	viskoplastischer Elementlastvektor,
$\Delta t \int_{V_e} [{}^{(1)}\mathbf{B}_1]^T [\mathbf{q}_o] {}^t dV_e = [\mathbf{r}_o]$	damageinduzierter Elementlastvektor,

$$\Delta \int_{V_e} {}^t \mathbf{B}_1^T [q_\Theta] {}^t dV_e = [r_\Theta] \quad \text{Temperaturlastvektor und}$$

$${}^0 \rho \int_{V_e} [H]^T [H] {}^t dV_e = [m] \quad \text{konsistente Elementmassenmatrix.}$$

Der Zusammenbau der Elementsteifigkeitsmatrizen, -lastvektoren und -massenmatrizen liefert

$$\begin{aligned} [M] [{}^{(i)}\ddot{\hat{u}}] + [K_l + K_{nl}] [\Delta {}^{(i)}\hat{u}] \\ = [R_p] - [{}^{(i-1)}F] - \{ [R_{v_r}] \} - \{ [R_b] \} - \{ [R_\Theta] \} \end{aligned} \quad (C.85)$$

Die geometrischen Randbedingungen werden an dieser Stelle durch Kondensation der Gesamtsteifigkeitsmatrix berücksichtigt.

C.3.5 Numerische Integration

Zur Berechnung der Elementmatrizen müssen die Matrizenfunktionen (C.84) integriert werden. Transformiert man die globalen Koordinaten x^α mit Hilfe der isoparametrischen Ansätze (C.51)-(C.53) auf die lokalen Koordinaten ξ, η und berücksichtigt dabei die Unabhängigkeit von x^2 , so erhält man für das Ringelement

$$\int_{V_e} [\dots](x^1, x^3) {}^t dV_e = 2 \pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\dots](\xi, \eta) {}^t x^1(\xi, \eta) \det[J] d\xi d\eta \quad (C.86)$$

mit der Jakobimatrix

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^t x^1}{\partial \xi} & \frac{\partial {}^t x^3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial {}^t x^1}{\partial \eta} & \frac{\partial {}^t x^3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (C.87)$$

Die numerische Integration von (C.86) kann beispielsweise mit Newton-Cotes-Formeln (vorgegebener Stützstellenabstand) oder mit der Gauß-Quadratur (optimierte Gewichtungsfaktoren und Lage der Stützstellen) erfolgen. Bei isoparametrischen Elementen wird üblicherweise das letztgenannte Verfahren verwendet, wobei die Anzahl der Stützstellen vom Integranden abhängt. Ein Polynom vom Grade $(2n-1)$ wird mit n Stützstellen exakt integriert. Da aber die Steifigkeitsmatrix des Ringelementes kein Polynom in ξ und η darstellt, ist sie nicht exakt integrierbar. Zuverlässige Integrationsordnungen für isoparametrische Elemente werden in *Bathe* [84] vorgeschlagen. Oftmals wird zur Reduktion der Rechenzeit

und zur "Verbesserung" der Ergebnisse eine reduzierte Integration verwendet, deren Anwendung sich auf rechentechnische Erfahrung stützt. Bei nichtlinearen Problemen fehlt eine solche Erfahrung und es gibt Beispiele, daß die Ergebnisse mit reduzierter Integration deutlich schlechter werden. Bei Verwendung der zuverlässigen Integrationsordnung werden jeweils die Lastvektoren exakt integriert.

Die in den Verzerrungs - Verschiebungsmatrizen $[B_1]$ und $[B_{n1}]$ auftretenden partiellen Ableitungen nach ${}^t x^\alpha$ müssen durch Ableitungen nach den lokalen Koordinaten ξ und η ersetzt werden mittels

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial {}^t x^1} \\ \frac{\partial}{\partial {}^t x^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial {}^t x^1} & \frac{\partial \eta}{\partial {}^t x^1} \\ \frac{\partial \xi}{\partial {}^t x^3} & \frac{\partial \eta}{\partial {}^t x^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (C.88)$$

Da die Jakobimatrix $J(\xi, \eta)$ nicht allgemein invertierbar ist, wird die Inverse nur an diskreten Punkten (hier den Gaußpunkten) berechnet. Die Volumenintegration wird also folgendermaßen durchgeführt:

$$\begin{aligned} \int_{V_e} {}^t dV_e &= 2 \pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^t x^1(\xi, \eta) \det[J] \, d\xi \, d\eta \\ &= 2 \pi \sum_{j=1}^{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} w_j \, w_k \, {}^t x^1(\xi_j, \eta_k) \det[J] \Big|_{(\xi_j, \eta_k)} \quad (C.89) \end{aligned}$$

n_s	ξ_i, η_i	w_i
2	-0.5773502692 0.5773502692	1.0 1.0
3	-0.7745966692 0.0 0.7745966692	0.5555555556 0.8888888889 0.5555555556
4	-0.8611363116 -0.3399810436 0.3399810436 0.8611363116	0.3478548451 0.6521451549 0.6521451549 0.3478548451

Tab. C.1

Wir verwenden für das

- 4- Knotenelement $n_i = 2$ Stützstellen pro Koordinatenrichtung
 8- Knotenelement $n_i = 3$ Stützstellen pro Koordinatenrichtung
 12- Knotenelement $n_i = 4$ Stützstellen pro Koordinatenrichtung
 mit den Gaußpunktkoordinaten und Gewichten nach Tabelle C.1.

C.3.6 Zeitintegration der konstitutiven Gleichungen

Zur Berechnung der rechten Seite des FE-Gleichungssystems (C.85) müssen die konstitutiven Gleichungen in jedem Iterationsschritt von t bis $t + \Delta t$ integriert werden. Aus den kinematischen Beziehungen (C.32) erhalten wir unter Beachtung der objektiven Zeitableitung die substantielle Zeitableitung des Cauchy-Spannungstensors σ und der inneren Variablen.

$$\dot{\sigma} = \overset{\#}{\sigma} + \sigma \operatorname{tr}(\mathbf{D}) + (\mathbf{W} - \mathbf{W}_i) \sigma - \sigma (\mathbf{W} - \mathbf{W}_i) \quad (\text{C.90})_1$$

$$\dot{\mathbf{X}}_T = \Delta c_T \mathbf{D}_{vT} + (\mathbf{W} - \mathbf{W}_i) \mathbf{X}_T - \mathbf{X}_T (\mathbf{W} - \mathbf{W}_i) + \mathbf{X}_T \operatorname{tr}(\mathbf{D}) \quad (\text{C.90})_2$$

$$\dot{\chi} = K(\chi, \Theta) \sigma \cdot \mathbf{D}_{vT} \quad (\text{C.90})_3$$

$$\begin{aligned} \dot{\tau} = & d_1 \overset{\#}{\sigma} + \frac{1}{\Delta} d_2 (\tau \overset{\#}{\sigma} + \overset{\#}{\sigma} \tau) + \frac{1}{\Delta} d_3 (\mathbf{Z} \overset{\#}{\sigma} + \overset{\#}{\sigma} \mathbf{Z}) + K d_4 (\sigma \cdot \mathbf{D}_{vT}) \tau - m \tau \\ & + (\mathbf{W} - \mathbf{W}_i) \tau - \tau (\mathbf{W} - \mathbf{W}_i) + \tau \operatorname{tr}(\mathbf{D}) \end{aligned} \quad (\text{C.90})_4$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = [d_z]_z \ll \text{LC}_z \gg \left\{ \frac{\mu_3}{\Delta^2} (\sigma')^2 + \frac{1}{\Delta} (\mu_4 + \omega) \mathbf{Z} \right\} + (\mathbf{W} - \mathbf{W}_i) \mathbf{Z} - \mathbf{Z} (\mathbf{W} - \mathbf{W}_i) + \mathbf{Z} \operatorname{tr}(\mathbf{D}) \quad (\text{C.90})_5$$

$$\dot{\vartheta} = [d_{\Theta v}]_v \quad (\text{C.90})_6$$

$$\dot{\mathbf{A}}_{vL} = \Delta^2 \gamma_{vL} [\Phi_{vL}]_v \frac{\tau'}{\|\tau'\|} + 2 \mathbf{A}_{vL} \operatorname{tr} \mathbf{D}_R + (\mathbf{W} - \mathbf{W}_i) \mathbf{A}_{vL} - \mathbf{A}_{vL} (\mathbf{W} - \mathbf{W}_i) \quad (\text{C.90})_7$$

$$\ddot{u} + c(\alpha + \text{PG}) \dot{u} + \frac{c^2}{4} (\alpha + \text{PG})^2 \{u - u_{**}(\text{PG})\} = 0 \quad (\text{C.90})_8$$

mit den entsprechenden Nebenbedingungen.

Der erste Hauptsatz schließlich lautet für adiabate Prozesse:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} = & \frac{1}{\hat{\rho} c_{\sigma x}} \left[\Delta (1 - \hat{\xi}_\tau) \sigma \cdot \mathbf{D}_{v\tau} + \Delta \sigma \cdot \mathbf{D}_D + \mu_6 \vartheta [d_{\Theta v}]_v + \mu_1 \frac{m}{\Delta^2} (\text{tr } \tau)^2 \right. \\ & + \mu_2 \frac{m}{\Delta^2} \tau \cdot \tau + \frac{1}{\Delta^2} \left\{ \frac{2\mu_3}{\Delta} (\sigma')^2 + (\mu_4 + \omega) \mathbf{Z} \right\} \cdot (\dot{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z} \text{tr } \mathbf{D}) \\ & \left. - \lambda_2 \Theta \text{tr } \dot{\sigma} + \frac{\lambda_2}{\Delta} \Theta (\text{tr } \sigma) (\text{tr } \mathbf{D}) - v_4 \Theta \dot{x} \right] \quad (C.90)_9 \end{aligned}$$

Durch die Beschränkung auf adiabate Prozesse entspricht (C.90)₉ dann einer "Evolutionsgleichung für die Temperatur".

Die Dgl zur Bestimmung von u als Maß der Prozeßgeschwindigkeit wird durch die Substitution $\dot{u} = v$ (u und v dürfen in diesem Zusammenhang nicht mit den Knotenpunktverschiebungen und -geschwindigkeiten verwechselt werden) in ein Dgl.system 1.Ordnung überführt.

$$\dot{u} = v \quad (C.90)_{8a}$$

$$\dot{v} = -c (\alpha + \text{PG}) v - \frac{c^2}{4} (\alpha + \text{PG})^2 \{u - u_{*q}(\text{PG})\} \quad (C.90)_{8b}$$

Durch die Kopplung der Raten von Temperatur und Spannung läßt sich (C.90) nicht direkt integrieren. Die erforderliche Aufbereitung der Gleichungen sowie eine Zusammenstellung der Raten für die einzelnen Komponenten würde den Rahmen dieses Kapitels sprengen und wurde deshalb in den Anhang 3 verlagert. Festzuhalten ist, daß wir zur Beschreibung des Materialverhaltens ein System aus 31 Dgln 1.Ordnung erhalten.

Die Komponenten des Dehngeschwindigkeitstensors werden durch die Geschwindigkeitskomponenten v^α zum Zeitpunkt τ mit $t \leq \tau \leq t + \Delta t$ ausgedrückt. Sie werden näherungsweise mit dem isoparametrischen Ansatz (C.54) als Differenzenquotienten berechnet:

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{v}} = \tau_{v^\alpha} \tau_{\mathbf{g}_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial \tau} (\xi, \eta) \left(\sum_{i=1}^N h_i (\xi, \eta) \tau_{\hat{x}_i^\alpha} \right) \tau_{\mathbf{g}_\alpha} \quad (C.91) \\ &\approx \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^N h_i (\xi, \eta) ({}^{t+\Delta t} \hat{x}_i^\alpha - {}^t \hat{x}_i^\alpha) \tau_{\mathbf{g}_\alpha} . \end{aligned}$$

Das Ersetzen des Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten gilt exakt nur bei zeitlich konstantem $\frac{1}{\Delta t} ({}^{t+\Delta t} \hat{x}_i^\alpha - {}^t \hat{x}_i^\alpha)$ und damit v^α . In Zylinderkoordinaten und kontravarianten Komponenten entspricht dies der Annahme konstanter Radial-, Winkel- und Axialgeschwindigkeit während eines Zeitin-

krementes. Dabei bewegt sich z.B. bei der reinen Torsion jeder materielle Punkt auf einer Kreisbahn.

Dagegen entspricht die Annahme $v = \text{konst}$ (C.91), die bei der Berechnung der Steifigkeitsmatrix verwendet wurde, der Bewegung auf einer Sehne. Beide Betrachtungsweisen fallen für hinreichend kleine Zeitschritte zusammen.

Unter der Voraussetzung konstanter Maßzahlen des Geschwindigkeitsvektors folgt

$$\begin{aligned} \tau_X^\alpha &= v^\alpha(\tau-t) + t_X^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^N h_i(\xi, \eta) \left[t^{+\Delta t} \hat{x}_i^\alpha \frac{\tau-t}{\Delta t} + t_X^\alpha (1 - \frac{\tau-t}{\Delta t}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.92})$$

Für die Diskussion der durchzuführenden numerischen Integration fassen wir das Dgl.-System zusammen:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(\mathbf{L}, \mathbf{Y}) \quad (\text{C.93})$$

Bei dem vorliegenden System handelt es sich - ähnlich anderen viskoplastischen Stoffgesetzen - um ein steifes Dgl.-System. Dies hat seine Ursache darin, daß

- bis zum Erreichen der Fließgrenze bei HGDn der gesamte Wertebereich von u durchlaufen wird und
- verschiedene Mechanismen nacheinander aktiviert werden (Erreichen des Gleichgewichtswertes u_{eq} , Anwachsen der Spannungskonzentrationen, Beginn plastischer Verzerrungen, Einsetzen der Schädigung etc.) und jeweils eine feine Unterteilung zur Erfassung ihres Beginns und Anstiegs erforderlich ist.

Aus der Lösung des FE-Gleichungssystems sind die Verschiebungsinkremente \hat{u} der Knoten bekannt und mit (C.91) können die v^α angegeben werden. Zusammen mit den vorliegenden Zustandsgrößen zur Zeit t kann das Dgl.-System integriert werden. Dabei bieten sich zunächst explizite Verfahren an, deren Vorteil gegenüber den impliziten darin liegt, daß eine direkte Integration ohne vorherige Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems erfolgen kann.

Explizite Integration

Die Lösung von (C.93) mit der Polygonzugmethode

$$\mathbf{Y}_{t+\Delta t} = \mathbf{Y}_t + \Delta t \dot{\mathbf{Y}}_t \quad (\text{C.94})$$

gewährleistet selbst bei extremer Verkleinerung der Schrittweite keine stabile Integration. Wir verwenden hier das klassische Runge-Kutta-Verfahren mit der Konsistenzordnung 4 und einen Fehlberg-Algorithmus der Konsistenzordnung 8. Beide Alternativen gewinnen wir aus der allgemeinen Darstellung eines m -stufigen Verfahrens:

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{L}_t, \mathbf{Y}_t)$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{L}_{t+\delta_2 \Delta t}, \mathbf{Y}_t + \Delta t \beta_2 \mathbf{f}_1)$$

⋮

$$\mathbf{f}_m = \mathbf{f}(\mathbf{L}_{t+\delta_m \Delta t}, \mathbf{Y}_t + \Delta t [\beta_{m1} \mathbf{f}_1 + \dots + \beta_{m,m-1} \mathbf{f}_{m-1}])$$

(C.95)

$$\Rightarrow \mathbf{Y}_{t+\Delta t} = \mathbf{Y}_t + \Delta t \sum_{i=1}^m \gamma_i \mathbf{f}_i$$

Die Koeffizienten δ_i , β_j und γ_i für das 4-stufige RK-Verfahren finden sich ebenso wie die des 13-stufigen Algorithmus von Fehlberg in [101]. Da aus ingenieurmäßiger Sicht nicht die Stabilität alleine, sondern auch die erzielte Genauigkeit relevant ist, werden beide Verfahren mit einer Schrittweitenkontrolle ausgestattet [103].

Implizite Integration

Die impliziten Verfahren zeichnen sich gegenüber den expliziten insbesondere durch bessere Stabilitätseigenschaften und höhere Konsistenzordnung bei gleichstufigen Verfahren aus. Ihr Nachteil besteht darin, daß die Vektoren \mathbf{f}_i nicht direkt, sondern nur als Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems ermittelt werden können. Wir verzichten hier auf die Berücksichtigung der rückwärts genommenen Eulerformel mit der Konsistenzordnung 1 als einfachster impliziter Integration und verwenden zwei Verfahren der Konsistenzordnung 2 mit der allgemeinen Darstellung

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{L}_t, \mathbf{Y}_t)$$

$$\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{L}_{t+\delta \Delta t}, \mathbf{Y}_{t+\beta \Delta t})$$

(C.96)

$$\Rightarrow \mathbf{Y}_{t+\Delta t} = \mathbf{Y}_t + \Delta t [\gamma \mathbf{f}_1 + (1-\gamma) \mathbf{f}_2] \quad \gamma \neq 1$$

Mit $\gamma = \frac{1}{2}$ und $\delta = \beta = 1$ liefert (C.96) die implizite Trapezregel, die auch als Verfahren von Heun bekannt ist, während $\gamma = 0$ und $\delta = \beta = \frac{1}{2}$ die Mittelpunktsregel darstellt.

Die Diskussion der verschiedenen Zeitintegrationsverfahren von *Pitzer* [100] kann auf unsere Formulierung nicht ohne weiteres übertragen werden. *Pitzer* verwendet eine Formulierung in Geschwindigkeiten und erhält durch die Lösung eines FE-Schrittes nur die aktuellen Geschwindigkeiten \mathbf{L}_t . Erst eine nochmalige Berechnung eines FE-Schrittes für den Zeitpunkt $t + \Delta t$ ermöglicht es, von der Näherung $\mathbf{L}_t \approx \mathbf{L}_{t+\Delta t}$ abzugehen. Die Formulierung in Verschiebungen liefert bereits einen Mittelwert $\mathbf{L}_{t,t+\Delta t}$ für das zu berechnende Zeitintervall, so daß sich ein zusätzlicher FE-Schritt erübrigt. In einer dynamischen Analyse wäre es

auch möglich, die zur Zeit t bekannten Knotenpunktgeschwindigkeiten und die Näherungswerte für $t+\Delta t$ zur Bestimmung von L_t und $L_{t+\Delta t}$ zu verwenden. Da dies zu einer unterschiedlichen Behandlung der Stoffgesetzintegration in dynamischen und statischen Berechnungen führt, wird darauf verzichtet.

C.3.7 Zeitintegration der Bewegungsgleichungen und Kopplung mit der Gleichgewichtsiteration

Zur Lösung der Bewegungsgleichung (C.85) stehen 2 Typen von Methoden zur Verfügung, die Modenüberlagerung und die direkte Integration. Bei der Modenüberlagerung wird vor der Zeitintegration ein Basiswechsel von den Finite-ElementKoordinaten zur Basis der Eigenvektoren des verallgemeinerten Eigenproblems

$$K\Phi = \omega^2 M\Phi \quad (C.97)$$

durchgeführt. Dieses Verfahren bietet dann Vorteile, wenn nur wenige Moden für die Lösung berücksichtigt werden müssen. Bei Stoßbelastungen sind jedoch auch die höheren Eigenformen von Interesse.

Die direkten Integrationsmethoden beruhen auf Ansätzen für den Zeitverlauf der Beschleunigungen, wie sie in [103]-[107] dargestellt sind. Die Wahl des für eine stabile Integration erlaubten Zeitschritts Δt ist bei expliziten Integrationsverfahren insbesondere in nichtlinearen Berechnungen schwierig [107] und vereinfacht sich wesentlich bei Anwendung eines impliziten, unbedingt stabilen Integrationsverfahrens. Wir verwenden hier die Wilson- Θ -Methode, eine Erweiterung der linearen Beschleunigungsmethode, die für $\Theta=1.4$ unbedingt stabil ist und das Newmark-Verfahren, welches als Sonderfall die implizite Trapezregel enthält. Die oben angesprochenen Stabilitätseigenschaften können nur für lineare Systeme nachgewiesen werden.

Die Wilson- Θ -Methode:

Unter der Annahme, daß die Beschleunigung von der Zeit t bis $t+\Theta\Delta t$ linear verläuft, erhält man für die Beschleunigung, Geschwindigkeit und Verschiebung zum Zeitpunkt τ ($0 \leq \tau \leq \Theta\Delta t$):

$$\begin{aligned} {}^{t+\tau}\ddot{u} &= {}^t\ddot{u} + \frac{\tau}{\Theta\Delta t} ({}^{t+\Theta\Delta t}\ddot{u} - {}^t\ddot{u}) \\ {}^{t+\tau}\dot{u} &= {}^t\dot{u} + {}^t\ddot{u} \tau + \frac{\tau^2}{2\Theta\Delta t} ({}^{t+\Theta\Delta t}\ddot{u} - {}^t\ddot{u}) \\ {}^{t+\tau}u &= {}^tu + {}^t\dot{u} \tau + \frac{1}{2} {}^t\ddot{u} \tau^2 + \frac{\tau^3}{6\Theta\Delta t} ({}^{t+\Theta\Delta t}\ddot{u} - {}^t\ddot{u}) \end{aligned} \quad (C.98)$$

Einsetzen von (C.98) in (C.85) liefert

$$\left[M \frac{6}{\Theta^2 \Delta t^2} + K \right] [{}^{t+\Theta\Delta t} \hat{u}] = [{}^{t+\Theta\Delta t} R^*] + M \left[\frac{6}{\Theta^2 \Delta t^2} {}^t \hat{u} + \frac{6}{\Theta \Delta t} {}^t \dot{\hat{u}} + 2 {}^t \ddot{\hat{u}} \right] \quad (C.99)$$

mit $[{}^{t+\Theta\Delta t} R^*] = [{}^t R] + \Theta ([{}^{t+\Delta t} R] - [{}^t R])$

Die Lösung dieser nichtlinearen Bewegungsgleichung erfordert eine Kombination der Gleichgewichtsiteration mit der Wilson- Θ -Methode. Dazu wird die Verschiebung ${}^{t+\Theta\Delta t} u$ entsprechend der inkrementellen Formulierung (C.40) zerlegt

$${}^{t+\Theta\Delta t} u = {}^{t+\Theta\Delta t} u^{(i)} = {}^{t+\Theta\Delta t} u^{(i-1)} + \Delta u^{(i)} \quad (C.100)$$

und dies liefert

$${}^{t+\Theta\Delta t} \ddot{u}^{(i)} = \frac{6}{\Theta^2 \Delta t^2} ({}^{t+\Theta\Delta t} u^{(i-1)} - {}^t u + \Delta u^{(i)}) - \frac{6}{\Theta \Delta t} {}^t \dot{u} + 2 {}^t \ddot{u} \quad (C.101)$$

Das resultierende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} [\hat{K}] [\Delta \hat{u}^{(i)}] &= [{}^{t+\Theta\Delta t} R_p] - [{}^{t+\Theta\Delta t} F^{(i-1)}] - \{ [{}^{t+\Theta\Delta t} (R_{vr} + R_o + R_\Theta)] \} \\ &\quad - [M] \left(\frac{6}{\Theta^2 \Delta t^2} ({}^{t+\Theta\Delta t} \hat{u}^{(i-1)} - {}^t \hat{u}) - \frac{6}{\Theta \Delta t} {}^t \dot{\hat{u}} + 2 {}^t \ddot{\hat{u}} \right) \end{aligned} \quad (C.102)$$

mit $[\hat{K}] = \left[M \frac{6}{\Theta^2 \Delta t^2} + K \right]$

stellt das modifizierte Newton-Raphson-Verfahren dar.

Das Newmark-Verfahren:

Ausgehend von der Annahme einer linearen Beschleunigung in $[t, t+\Delta t]$ erhalten wir

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \dot{u} &= {}^t \dot{u} + [(1-\delta) {}^t \ddot{u} + \delta {}^{t+\Delta t} \ddot{u}] \Delta t \\ {}^{t+\Delta t} u &= {}^t u + {}^t \dot{u} \Delta t + [(\frac{1}{2} - \alpha) {}^t \ddot{u} + \alpha {}^{t+\Delta t} \ddot{u}] \Delta t^2 \end{aligned} \quad (C.103)$$

Durch spezielle Wahl von α und δ kann das Verfahren u.a. zur zentralen Differenzenmethode oder zum Wilson- Θ -Verfahren mit $\Theta=1$ entarten. Das Newmark-Verfahren wurde in verschiedenen Parameterkombinationen zur Berechnung von elastischen Stoßproblemen von *Wriggers* [108] untersucht. Wir verwenden $\delta = \frac{1}{2}$ und $\alpha = \frac{1}{4}$. Dies führt zur Kombination von Integration und Gleichgewichtsiteration analog dem Wilson- Θ -Verfahren

$$[\hat{K}] [\Delta \hat{u}^{(i)}] = [{}^{t+\Delta t} R_p] - [{}^{t+\Delta t} F^{(i-1)}] - \left\{ [{}^{t+\Delta t} (R_{v_r} + R_o + R_\Theta)] \right\} \\ - [M] \left[\frac{1}{\alpha \Delta t^2} ({}^{t+\Delta t} \hat{u}^{(i-1)} - {}^t \hat{u}) - \frac{1}{\alpha \Delta t} {}^t \dot{\hat{u}} + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) {}^t \ddot{\hat{u}} \right] \quad (C.104)$$

C.3.8 Bemerkungen

- i) Die Gleichgewichtsiteration ist erforderlich, da bei der inkrementellen Schritt-für-Schritt-Lösung jeder Fehler, der zu einer bestimmten Zeit begangen wird, die Lösung zu allen späteren Zeiten direkt verschlechtert.
- ii) Den Ausgangspunkt für die iterative Berechnung der Knotenpunktverschiebungen $[{}^{t+\Delta t} u]$ bildet die Aufspaltung der i -ten Näherung in den aus dem $(i-1)$ -ten Schritt bekannten Knotenpunktverschiebungsvektor $[{}^{(i-1)} u]$ und das unbekannte Inkrement $[\Delta^{(i)} u]$

$$[{}^{t+\Delta t} u] \approx [{}^{(i)} u] = [{}^{(i-1)} u] + [\Delta^{(i)} u] \quad (C.105)$$

Entspricht das Ergebnis des $(i-1)$ -ten Iterationsschrittes der exakten Lösung $[{}^{t+\Delta t} u] = [{}^{(i-1)} u]$, so erhält man mit $[\Delta^{(i)} u] = [0]$ aus (C.84) für $i > 1$:

$$[g({}^{t+\Delta t} u)] = [0] = [{}^{t+\Delta t} R_p] - [{}^{t+\Delta t} F({}^{t+\Delta t} u)] \quad (C.106)$$

Die rechte Seite des nichtlinearen Gleichungssystems enthält den bekannten Vektor der äußeren Lasten $[{}^{t+\Delta t} R_p]$, der von den Verschiebungen unabhängig sein soll und den von den Knotenpunktverschiebungen abhängigen Vektor der Lasten aus Elementspannungen $[{}^{t+\Delta t} F({}^{t+\Delta t} u)]$.

Für das Iterationsverfahren entwickeln wir die Funktion $[g({}^{t+\Delta t} u)]$ in eine Taylorreihe um $[{}^{(i-1)} u]$ und brechen nach dem ersten Glied ab.

$$[g({}^{t+\Delta t} u)] \approx [g({}^{(i-1)} u)] + \left[\frac{\partial g}{\partial u} \right] \Big|_{(i-1)u} ([{}^{t+\Delta t} u] - [{}^{(i-1)} u]) \quad (C.107)$$

Mit (C.105) folgt

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u} \right] \Big|_{(i-1)u} ([{}^{t+\Delta t} u] - [{}^{(i-1)} u]) \approx [{}^{t+\Delta t} R_p] - [{}^{(i-1)} F({}^{(i-1)} u)] \quad (C.108)$$

wobei die rechte Seite den Vektor der Ungleichgewichtslasten bildet und $\left[\frac{\partial F}{\partial u} \right] \Big|_{(i-1)u}$ die Tangentensteifigkeitsmatrix ist. Damit ist eine Iterationsvorschrift zur Lösung der Gleichgewichtsbedingungen angegeben. Dieses Verfahren ist allgemein als Newton-Raphson-Methode bekannt. (Fig.C.3 links)

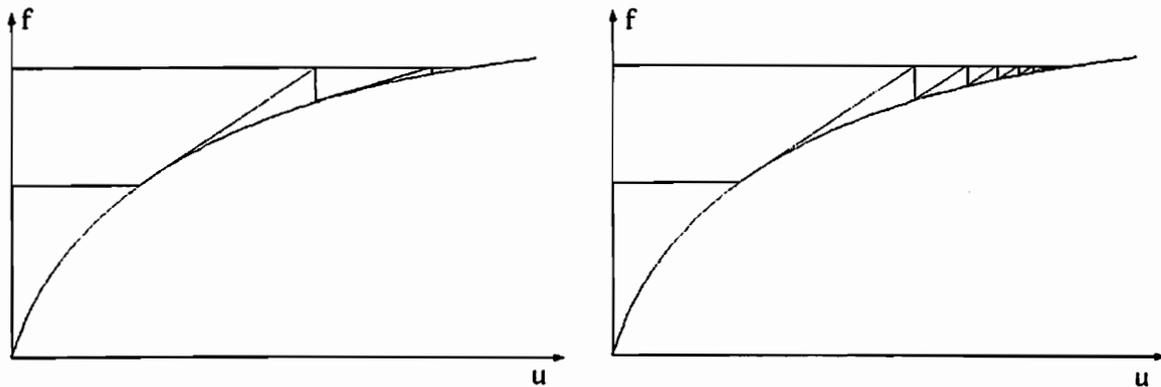


Fig.C.3: Gleichgewichtsiteration mit Hilfe des Standard- und modifizierten Newton-Raphson-Verfahrens

Beim sog. modifizierten Newton-Raphson-Verfahren (Fig.C.3 rechts) verwendet man anstelle der Tangentensteifigkeitsmatrix die Näherung $[\frac{\partial F}{\partial u}]|_{(0)u}$:

$$[\frac{\partial F}{\partial u}]|_{(0)u} [\Delta^{(i)} u] \approx [{}_{t+\Delta t} R_p] - [{}^{(i-1)} F({}^{(i-1)} u)] \quad (C.109)$$

Dabei ist $[\frac{\partial F}{\partial u}]|_{(0)u}$ die Anfangssteifigkeitsmatrix $[K_1+K_{n1}]$ zu Beginn eines Lastschrittes darstellt. An dieser Stelle wird deutlich, daß die Näherungen beim Aufbau der Steifigkeitsmatrix (Symmetrisierung von $[C^*]$ in Kap. C.3.3 und die Annahme $v=konst.$) im Verlauf des Iterationsverfahrens vollständig kompensiert werden. Zur Berechnung des Lastvektors aus Elementspannungen ist jedoch in jedem Iterationsschritt eine aktualisierte Zeitintegration der konstitutiven Gleichungen von t bis $t+\Delta t$ erforderlich.

Zur Bestimmung der Tangentensteifigkeitsmatrix ist es erforderlich, die Inkremente des 2.Piola-Kirchhoff-Spannungstensors mit Hilfe des Deformationsgradienten umzurechnen. Damit läßt sich keine zu C.84 analoge Formulierung einer Steifigkeitsmatrix gewinnen.

- iii) Das modifizierte Newton-Raphson-Verfahren ist ausreichend, weil Masseneinflüsse das Konvergenzverhalten der Gleichgewichtsiteration verbessern.
- iv) Konsistente Massenmatrizen werden verwendet, weil bei Stoßbelastung höhere Eigenformen angesprochen werden, die möglichst genau wiedergegeben werden sollen. [108]

C.4 Ergebnisse der FE-Rechnungen

Die in Kap. C.1 - C.3 hergeleiteten FE-Gleichungen wurden in einem FORTRAN-Programm auf einer Workstation SUN 3/60 implementiert. Das Programm ist modular aufgebaut, um Kompatibilität zur Lösung anderer Problemstellungen zu gewährleisten. Es verwendet ein eindimensionales Arbeitsfeld zur speicherplatzoptimierten Verwaltung aller Daten und einen Skyline-Gleichungslöser. Eine Restartfähigkeit ist bei einem Programm, daß viele Lastschritte in einer erheblichen Rechenzeit durchläuft, unabdingbar.

Optional ist für den Benutzer das Zeitintegrationsverfahren, die Anzahl der Gaußstützstellen (damit ist eine reduzierte Integration möglich), die Genauigkeitsabfrage bei Gleichgewichtsiteration und Zeitintegration der konstitutiven Gleichungen, sowie der Elementtyp. Die Klartextausgabe der Ergebnisse erlaubt in einer nachgeschalteten Aufbereitung die Darstellung des räumlichen und zeitlichen Verlaufs von Verschiebungen und beliebigen Spannungskomponenten oder inneren Variablen.

C.4.1 Statische Berechnungen

Die als Sonderfall in der FE-Formulierung enthaltene Möglichkeit der Berechnung statischer Probleme erlaubt es, die Ortsdiskretisierung unabhängig zu untersuchen. In diesem Zusammenhang wollen wir den Begriff statischer Probleme nicht direkt an die vorliegende Dehngeschwindigkeit koppeln, sondern unabhängig von der Belastungsrate bei der Vernachlässigung von Trägheitskräften von statischen Prozessen sprechen.

Am Beispiel des dickwandigen Rohres unter Innendruck kann bei elastischem Materialverhalten die Güte der Elemente abgeschätzt werden. In Fig.C.4 b-d sind die berechneten Spannungsverteilungen bei Verwendung von 4-, 8- und 12-Knotenelementen der analytischen Lösung gegenübergestellt. Wir verwenden im einzelnen folgende Diskretisierungen:

Elementtyp	Anzahl der Elemente	Anzahl der Unbekannten	Anzahl der GP
4-Knoten	6	12	24
8-Knoten	3	15	27
12-Knoten	2	16	18

Die Anzahl der Unbekannten und auch die Rechenzeit ist bei den 3 Diskretisierungen etwa gleich. Bezüglich der Genauigkeit erkennen wir die bereits verschiedentlich [76],[78] aufgezeigte Schwäche der linearen 4-Knotenelemente bei stark inhomogener Spannungsverteilung. Wir kommen auf diesen Punkt später noch einmal zurück; an dieser Stelle wollen wir nur festhalten, daß höherwertige Elemente bei gleicher Anzahl von Unbekannten eine effektivere Berechnung der angesprochenen Spannungszustände erlauben.

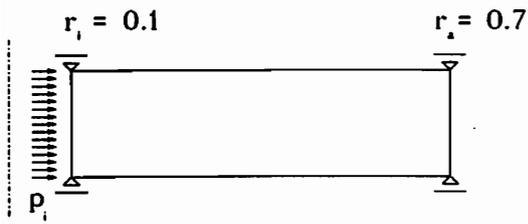


Fig. C. 4a: Rohr unter Innendruck

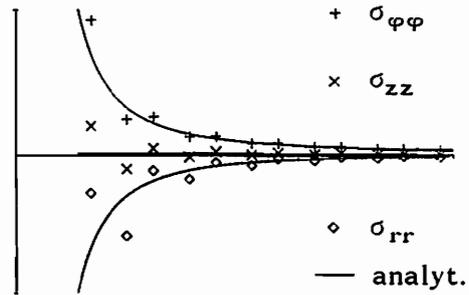


Fig. C. 4b: 4-Knotenelement

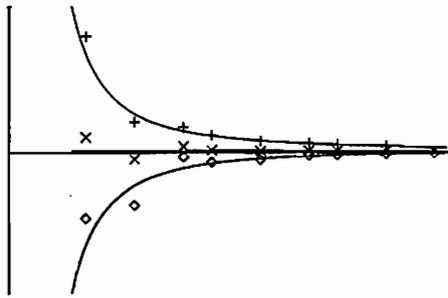


Fig. C. 4c: 8- Knotenelement

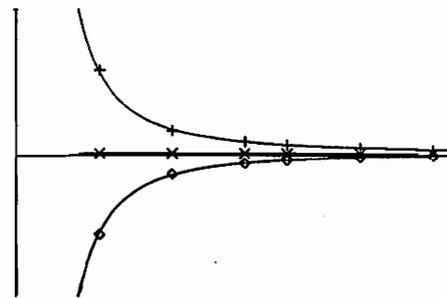


Fig. C. 4d: 12-Knotenelement

Die Schwäche der Elemente mit linearen Ansatzfunktionen verstärkt sich noch bei der Berechnung einer dickwandigen Kugel.

Im folgenden betrachten wir einen einfachen statischen Prozeß im Sinne der oben angesprochenen Definition, und zwar den homogenen Zugstab.

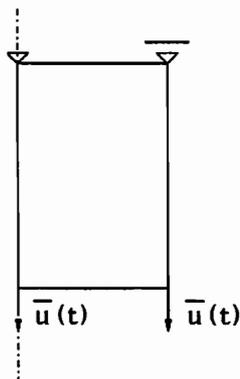


Fig. C.5: homogener Zugstab

Dieses Beispiel zeichnet sich dadurch aus, daß die Prozeßgeschwindigkeit nach Definition (B.5) selbst bei isothermer Berechnung nicht mehr konstant ist. Die Ergebnisse eines homogenen isothermen Zugversuchs bei der FE-Analyse unterscheiden sich also von denen bei der Anpassung durch die Zeitintegration des

Stoffgesetzes mit der alternativen Definition der PG (B.17) erzielten. Wir vergleichen die PG in beiden Fällen für einen isothermen Zugversuch kleiner Deformationen, der nach Def. (B.17) $PG_{1-D} = |\dot{\epsilon}|$ liefert:

Def. (B.5) liefert für elastisches Verhalten $PG_{3-D} = \sqrt{1 + 2\nu^2} |\dot{\epsilon}| \approx 1.09 |\dot{\epsilon}|$

und für starr-plastisches Verhalten $PG_{3-D} = \sqrt{3/2} |\dot{\epsilon}|$.

Die mit den in Kap. B bestimmten Materialparametern berechneten Spannungsdehnungskurven können also mit der dreidimensionalen FE-Beschreibung nicht nachvollzogen werden. Es ist eine Modifikation der ursprünglichen Definition der PG erforderlich. Mit

$$PG_{n,u} = \sqrt{2/3} \|D\| + \chi_{u,i} \dot{\theta} \quad (C.110)$$

kann für starr-plastisches Werkstoffverhalten Identität der Ergebnisse gewährleistet werden. Beim vorliegenden elastisch-viskoplastischen Stoffgesetz sind jedoch geringe Abweichungen vorhanden (Fig. C.6).

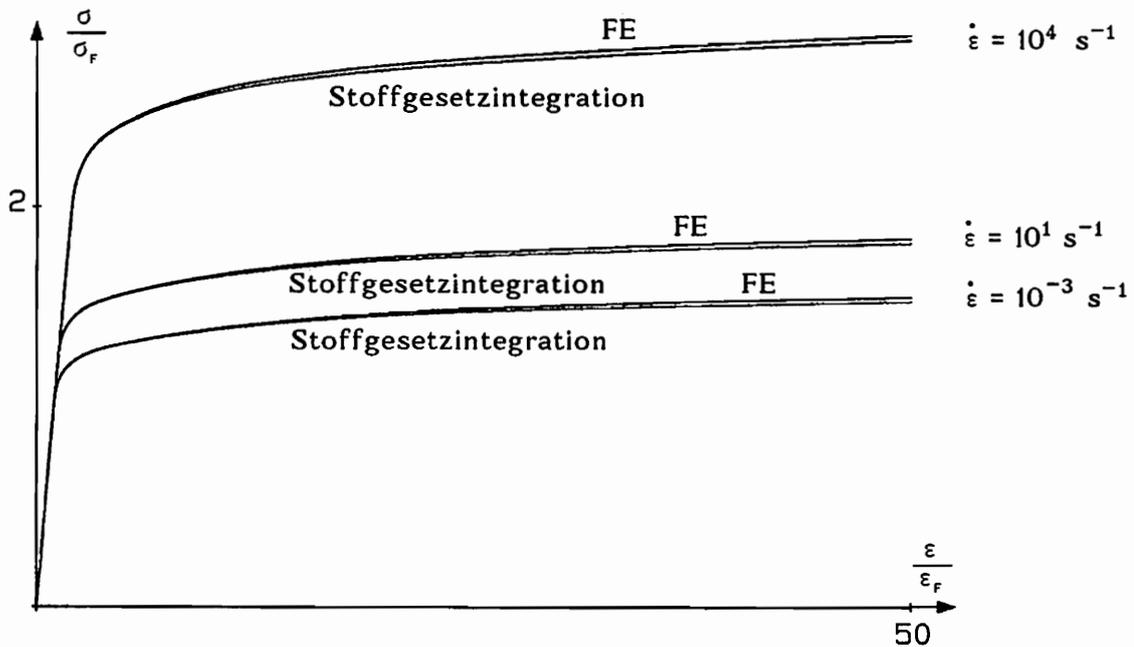


Fig.C.6: Vergleich FE-Berechnung mit der Stoffgesetzintegration

Derselbe Effekt wie durch die Definition C. 110 kann übrigens unter Beibehaltung der alten Definition durch Änderung der Konstanten $\chi_{u,3}$ von $2.6034 \cdot 10^4$ auf $2,1257 \cdot 10^4$ erreicht werden.

Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang noch die Tatsache, daß bei Berücksichtigung der Schädigung die Abweichungen zwischen FE-Lösung und Stoffgesetzintegration wesentlich größer werden (Fig. C.7).

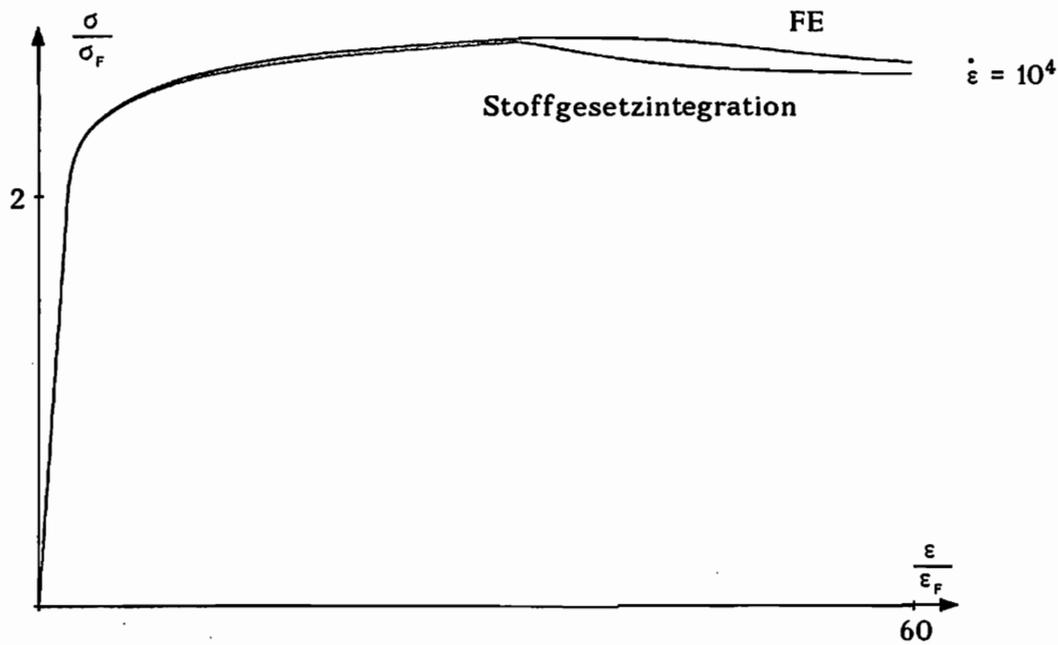


Fig.C. 7: Vergleich FE-Berechnung mit der Stoffgesetzintegration bei Schädigung

Damit verlassen wir die statischen Berechnungen und widmen uns dem eigentlichen Ziel der Arbeit, der Analyse dynamisch belasteter Strukturen

C. 4.2 Ergebnisse dynamischer Untersuchungen

a) elastisch

Als erste Stufe der Untersuchung betrachten wir den elastischen Stoß eines homogenen Stabes gegen eine starre Wand.

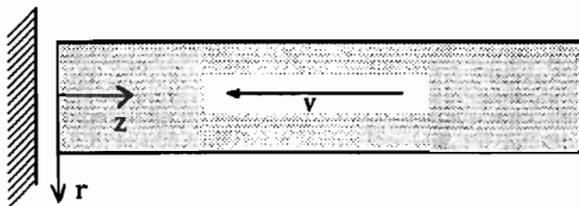


Fig.C. 8: Stoß eines zylindrischen Stabes gegen eine starre Wand

Für dieses Beispiel liegen unter der Annahme eines einaxialen Spannungszustandes sowohl die analytische Lösung $\sigma = \rho \cdot c \cdot v$ als auch numerische Vergleichslösungen bei *Wriggers* [108] vor. Mit kleinen Stabdurchmessern konnten wir diese Ergebnisse verifizieren, insbesondere was die Aspekte der numerischen Dämpfung bei bestimmten Parameterkombinationen des Newmark-Verfahrens angeht. Die dazu erforderliche Probengeometrie liegt jedoch weit entfernt von der bei den Experimenten verwendeten. In diesem Zusammenhang können wir auch feststellen,

daß das Wilson- Θ -Verfahren zur Integration der Bewegungsgleichungen für $\Theta=1.4$, wie es in der Literatur auf Grund der optimalen Stabilitätseigenschaften oft verwendet wird, nicht in der Lage ist, Wellenausbreitungsvorgänge korrekt zu beschreiben. Die analytische Lösung läßt sich nur mit $\Theta=1.0$ nachvollziehen; $\Theta = 1.0$ ist aber identisch mit dem Newmark-Verfahren ohne numerische Dämpfung. Vergleichsergebnisse für den elastischen Stoß unter Berücksichtigung des rotationssymmetrischen Spannungszustandes finden wir in [109]. Fig.C. 9a-c zeigen die Spannungsverläufe nach etwa der halben Zeit, die die Welle für einen Durchlauf des Stabes benötigt.

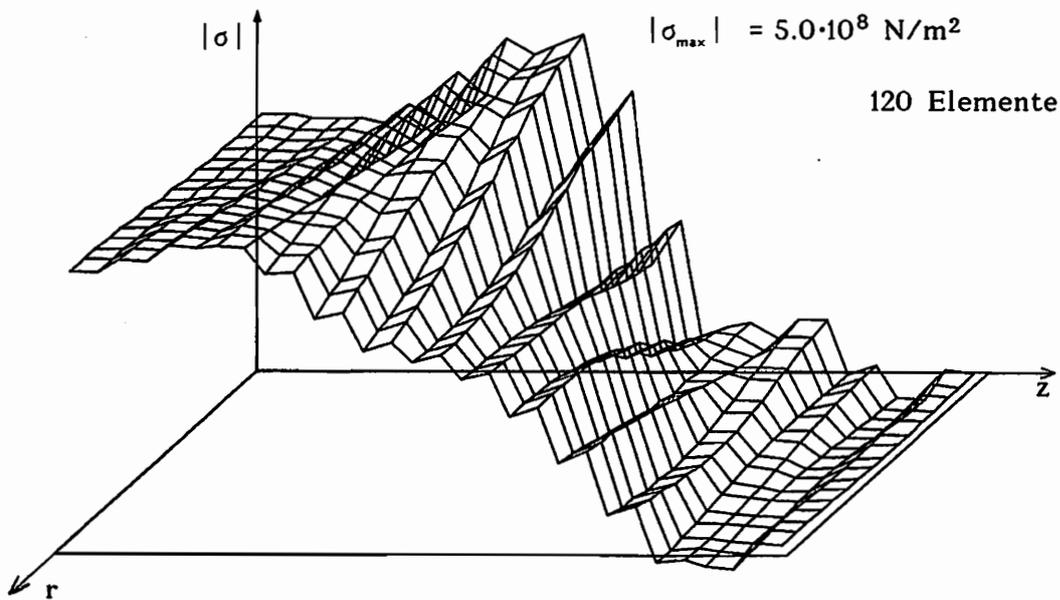


Fig.C. 9a: Axialspannungsverteilung beim elastischen Stoß (4-Knotenelement)

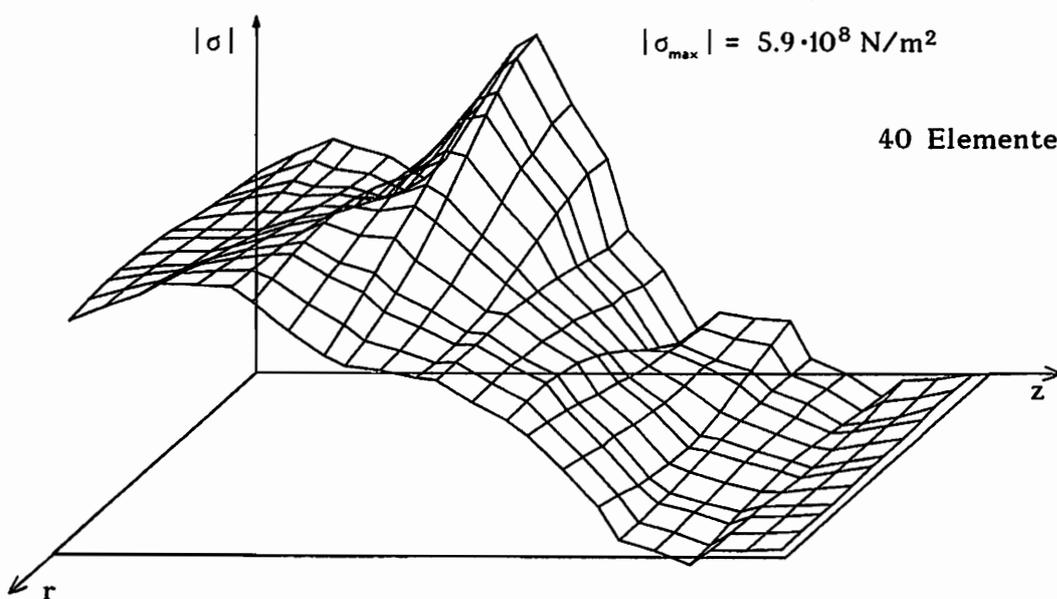


Fig.C. 9b: Axialspannungsverteilung beim elastischen Stoß (8-Knotenelement)

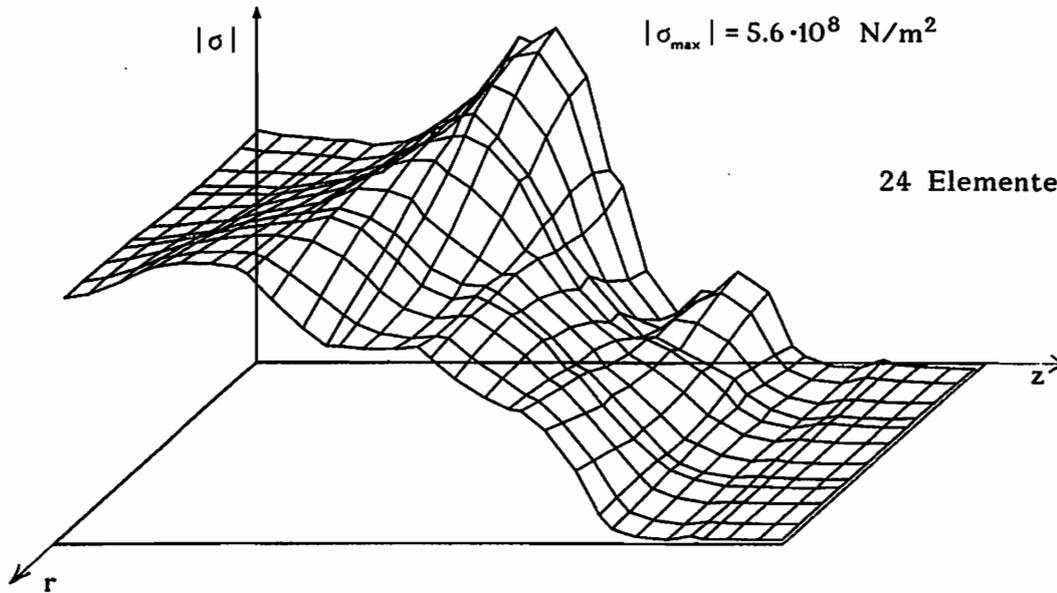


Fig.C.9c: Axialspannungsverteilung beim elastischen Stoß (12-Knotenelement)

Verglichen wird die Diskretisierung durch 4-, 8- und 12-Knotenelemente mit vergleichbarer Rechenzeit. Auf allen Bildern ist eine Spannungsspitze etwa in der Mitte der Probe auf der Symmetrieachse festzustellen. Diese wird auch von anderen Autoren [109] beobachtet. Die Lage und Ausprägung der Spannungsspitze hängt von den untersuchten Geometrieverhältnissen ab. Das Spannungsniveau im Stoßbereich ist jedoch bei allen Diskretisierungen etwa gleich.

Weiterhin läßt sich bereits für den elastischen Fall feststellen, daß insbesondere in der Anfangsphase eines Stoßes innerhalb der Probe sowohl in axialer als auch in radialer Richtung eine inhomogene Spannungsverteilung vorliegt. Im weiteren Verlauf (nach einigen Wellendurchgängen) verschwinden die ausgeprägten Inhomogenitäten und wir können näherungsweise von einachsigen Verhalten reden.

Zum Abschluß registrieren wir in Fig.C.9a die bereits angesprochene Schwäche der linearen 4-Knotenelemente. Der Verlauf der Spannung wird trotz der feinen Diskretisierung nur sägezahnartig angenähert. Diese Schwäche ist noch markanter bei viskoplastischem Materialverhalten und bei Schädigung.

Auf Grund der inhomogenen Spannungsverteilung bei dynamischer Beanspruchung ist es nicht möglich, für einen Versuch eine einzige $\sigma(\varepsilon)$ -Kurve anzugeben. Wir wählen deshalb eine andere Darstellung der Ergebnisse.

In Anlehnung an einige Experimentatoren, die Kräfte entweder durch Piezoelektrische Elemente oder über die elastischen Eigenschaften eines speziellen Kraftmeßteils bestimmen, geben wir Kurven $F(t)$ an. Dabei definieren wir F als resultierende Kraft in einem Schnitt durch die Struktur:

$$F = \int_A \sigma^{33} dA \tag{C.111}$$

Wir geben zunächst für elastisches Verhalten den Verlauf $F(t)$ an der in der Skizze gekennzeichneten Stelle an und stellen fest, daß für die verschiedenen Elementtypen unterschiedliche Resultate gewonnen werden.

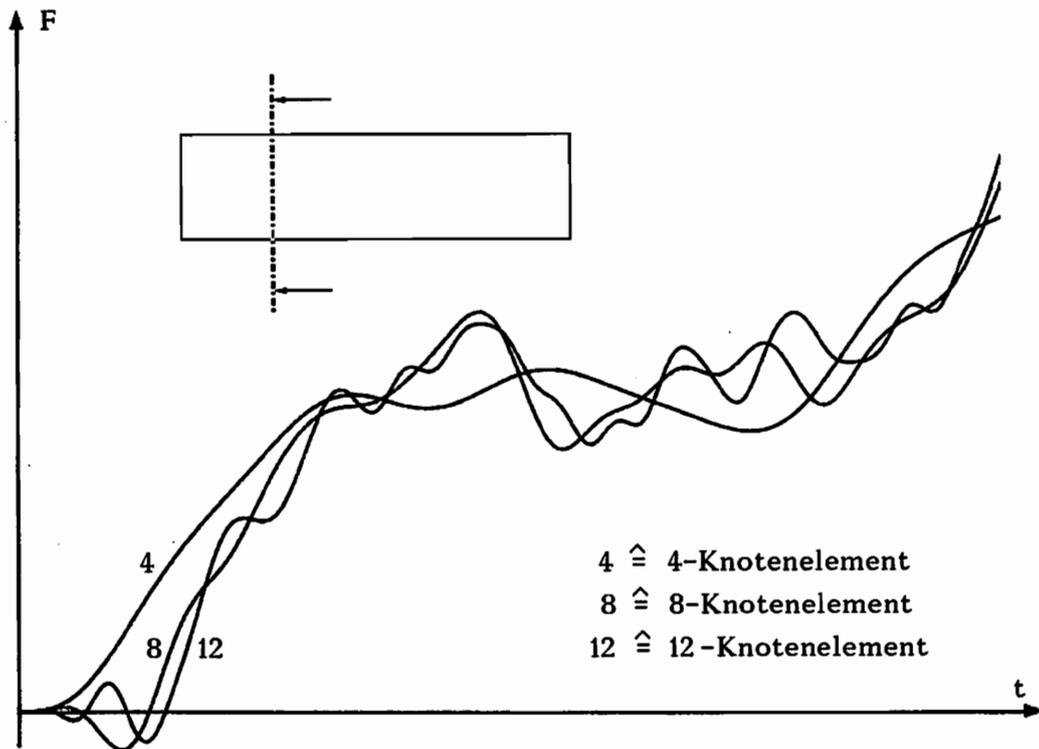


Fig.C.10: Schnittkraftverlauf beim elastischen Stoß

Das 4-Knotenelement zeigt wiederum Schwächen, weil es auf Grund seiner Ansätze nicht in der Lage ist, eine Wellenausbreitung innerhalb eines Elements zu beschreiben. Verschiebungen an einer Seite des Elements führen unmittelbar zu einer entsprechenden Reaktion an der anderen Seite. Dies führt zu einer (wenn auch geringen und durch feinere Diskretisierung zu behebenden) Vergrößerung der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit. 8- und 12-Knotenelemente liefern ähnlich gute Ergebnisse.

b) elastisch-viskoplastisch

Wir wenden uns nun dem viskoplastischen Materialverhalten zu und erörtern zu Beginn die Zeitintegration des Stoffgesetzes. Anhand eines Beispiels, bei dem Aufbau und Lösung des FE-Gleichungssystems nicht ins Gewicht fallen, sollen Tendenzen aufgezeigt werden. Im Einzelfall können jedoch Unterschiede dazu auftreten, weil die erzielten Rechenzeiten nicht nur von der Art des Beispiels, sondern auch von der Schrittweite und der geforderten Genauigkeit bei der Gleichgewichtssiteration beeinflußt werden. Alle Rechenzeiten sind auf die des Fehlberg-Verfahrens bezogen. Für die Darstellung der Verfahren verweisen wir auf Kap. C.3 zurück.

Fehlberg	Runge-Kutta	implizite Trapezregel	Mittelpunktsregel	implizite Trapezregel	expl. Euler
mit	mit	mit	mit	ohne	ohne
	Schrittweitensteuerung			Schrittweitensteuerung	
1.0	2.76	3.13	3.60	0.19	0.44

Tab. C. 2: Rechenzeitvergleich für verschiedene Zeitintegrationsverfahren

Die ersten 4 Verfahren sind mit einer Schrittweitensteuerung ausgestattet und erreichen etwa dieselbe Genauigkeit. Die beiden anderen Integrationen wurden mit einer auf 1/20 bzw. 1/100 reduzierten Schrittweite durchgeführt. Bei dieser Schrittweite erfolgte die Integration zwar stabil, jedoch lag die Genauigkeit deutlich unter der der anderen Verfahren.

Bemerkungen zur Rechenzeit:

- i) Die Schrittweite zur Integration der Bewegungsgleichungen ist i.a. größer als die zur Integration des Stoffgesetzes. Letztere schwankt innerhalb der Struktur. Beim Durchgang einer Wellenfront durch ein Element ist eine wesentlich feinere Unterteilung erforderlich, als in Elementen außerhalb einer Wellenfront. Nun ist es so, daß es unwirtschaftlich ist, die Schrittweite eines Lastschrittes der kleinsten erforderlichen Schrittweite für die Zeitintegration anzupassen. Andererseits ist es auch nicht zweckmäßig, die Schrittweite auf den maximal für die stabile Integration der Bewegungsgleichungen zulässigen Wert ansteigen zu lassen. Dies hat seine Ursache darin, daß während der Gleichgewichtsiteration in jedem Iterationsschritt das Stoffgesetz von t bis $t+\Delta t$ integriert wird und bei großen Lastschritten naturgemäß viele Iterationsschritte erforderlich sind. Anschaulich bedeutet das, daß bei n Gleichgewichtsiterationen pro GP die gesamte $\sigma(t)$ -Kurve n -mal integriert wird, obwohl nur die n -te Integration als Ergebnis benötigt wird. Diese Tatsache auszunutzen, um z.B. bei den ersten Iterationen durch verringerte Genauigkeitsanforderungen die Zeitintegration zu beschleunigen, gelingt leider nicht.
- ii) Insbesondere bei größeren Lastschritten innerhalb der Gleichgewichtsiteration fällt durch die Tatsache, daß im ersten Iterationsschritt eine deutliche Abweichung des Verschiebungsfeldes von der späteren Lösung vorhanden ist, eine überproportionale Zunahme der Rechenzeit an. Durch die schlechte Näherung für das Verschiebungsfeld wird über die Komponenten des Dehn- geschwindigkeitstensors das Stoffgesetz für eine "falsche" Geschwindigkeit integriert. Bei uns ergibt sich durch die dadurch hervorgerufene Änderung

von u und der damit verbundenen Verfeinerung bei der Zeitintegration eine unangenehme und unnötige Verlängerung der Rechenzeit. In den darauffolgenden Iterationsschritten ist die Näherung für das Verschiebungsfeld bereits wesentlich verbessert und die Rechnung läuft schneller ab.

Einfluß der Probengeometrie und der Geschwindigkeit:

Wie bereits bei den elastischen Vergleichsrechnungen angesprochen, hat auf Grund der radialen Trägheit die verwendete Geometrie einen Einfluß auf die Spannungsverteilung in der Probe. Wir untersuchen diesen Effekt und den Einfluß der Geschwindigkeit für viskoplastisches Materialverhalten näher am Beispiel der Probe aus Fig. C.8.

In Fig.C.11 ist der Kontaktkraftverlauf für die ersten $2\mu\text{s}$ eines Aufstauchversuchs im Geschwindigkeitsbereich von 10 m/s bis 100 m/s dargestellt. Die Geschwindigkeit 10 m/s stellt dabei etwa die maximale Geschwindigkeit dar, bei der elastisches Materialverhalten vorliegt. Wir erkennen zunächst, daß die Zunahme der maximalen Kontaktkraft nicht proportional zur Geschwindigkeit ist.

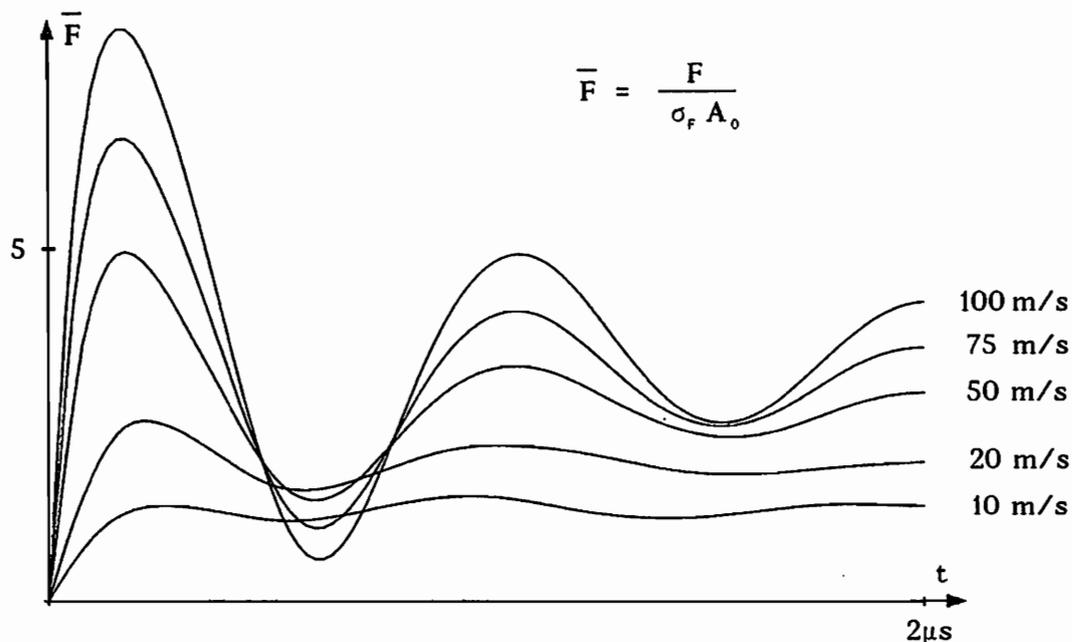


Fig.C.11: Einfluß der Geschwindigkeit

Weiterhin ist bemerkenswert, daß die Axialspannung durch den mehrachsigen Spannungszustand weit oberhalb der Werte liegt, die bei vergleichbaren Dehnungsraten in Kap.B.2 durch die Stoffgesetzintegration erzielt wurden. Nach dem Erreichen des ersten Maximums findet ein deutlicher Spannungsabfall statt, der bei ungünstiger Probengeometrie und hoher Geschwindigkeit sogar zu einem Vorzeichenwechsel der Kontaktkraft führen kann. Dies wäre einem zeitweisen Abheben der Probe gleichzusetzen. Ob ein solches unwahrscheinliches Phänomen in den Experimenten beobachtet werden kann, ist uns nicht bekannt.

Zur Erfassung der Abhängigkeit der Kontaktkraft von der Probengeometrie ist in Fig. C.12 bei einer Anfangsgeschwindigkeit von 50 m/s der Radius der Probe vom 0.5-1.5fachen des Ausgangswertes variiert worden. Bei der dargestellten Kraft handelt es sich um auf die jeweilige Ausgangsfläche normierte Werte.

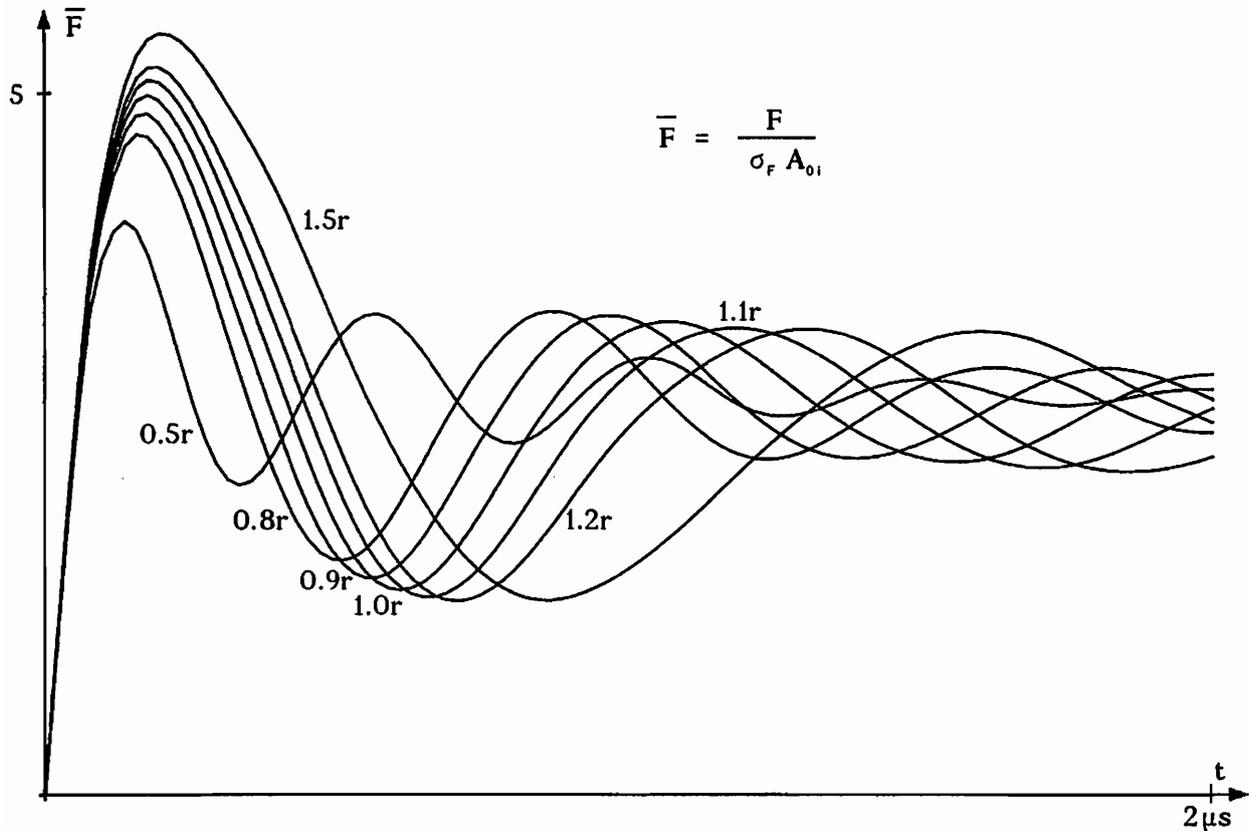


Fig. C.12: Einfluß des Probendurchmessers

In gedrungenen Proben werden höhere mittlere Spannungen als in schlanken erreicht und auch die Amplitude der erzeugten Schwingung ist deutlich größer. Nach dem Anfangsbereich pendeln sich bei allen Proben etwa dieselben Spannungswerte ein.

c) vollständiges Kontinuums-Damage-Modell

Wir berücksichtigen nun auch die Schädigung durch Mikroscherbänder und stellen anhand des $F(t)$ -Verlaufs in der Meßlänge fest, daß die aus der Anpassung einaxialer Spannungszustände gewonnenen Parameter in der 3-D-Beschreibung nicht den durch die Experimentatoren beobachteten Spannungsabfall nachbilden. Eine Neuanpassung ist erforderlich, weil insbesondere die Evolution der Spannungskonzentrationen, die den Beginn und die Entwicklung der Schädigung beeinflussen, in der eindimensionalen Modellbildung stark abweicht. Das Resultat der Neuanpassung ist in Fig. C.13 dargestellt und die neuen Parameter sind im Anhang 1 aufgelistet.

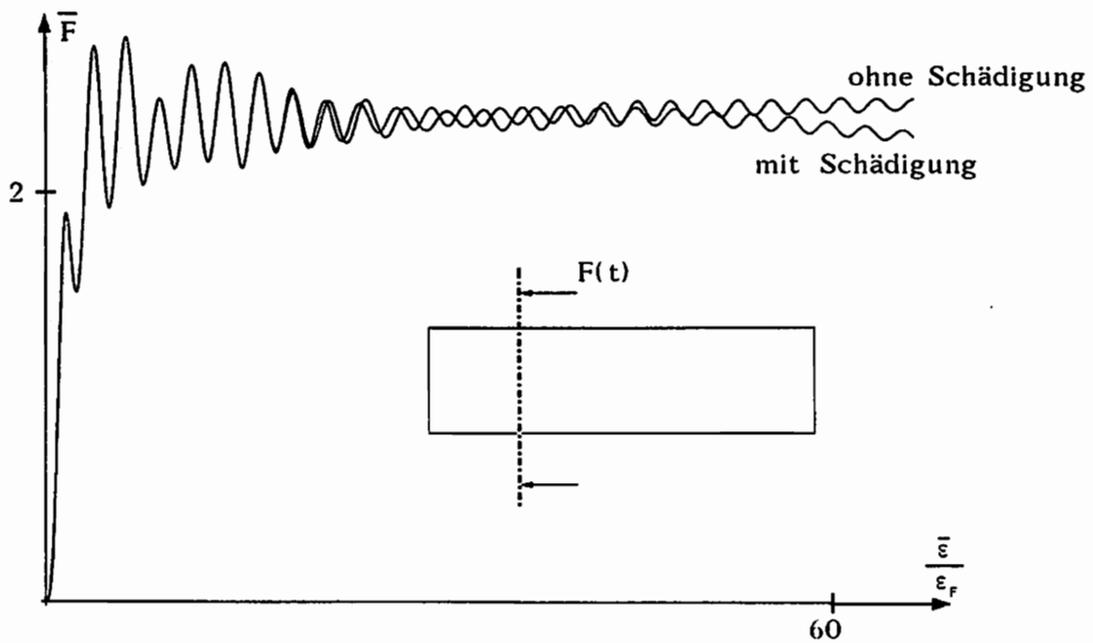


Fig.C.13: Einfluß der Schädigung auf den Kraftverlauf in der Meßlänge

Wir erkennen im Anfangsbereich identische Verläufe, die sich erst nach Einsetzen der Schädigung, und dabei insbesondere der schädigungsinduzierten Verzerrungsrate auseinanderentwickeln.

Die hier durchgeführte Neuanpassung einiger Materialparameter stellt die 3. Stufe der Anpassung, wie sie in Kap.B.2 vorgestellt wurde, dar.

C.4.3 Berechnung von Experimenten zu HGDn

Expandierender Ring (vgl. Fig. B.3)

Wir verlassen nun die Parameterstudien und wenden uns der Nachrechnung von Experimenten zu. Dazu wählen wir zunächst den in Kap. B.2 vorgestellten expandierenden Ring. Versuchsdaten, wie die verwendete Geometrie und Versuchsdauer entnehmen wir [37]

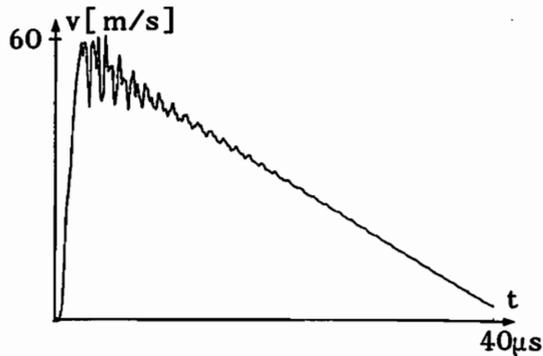


Fig. C.14: Radialgeschwindigkeit beim expandierenden Ring

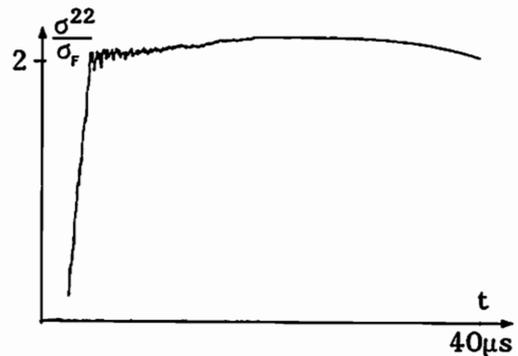


Fig. C.15: Umfangsspannung beim expandierenden Ring

Wir beobachten die Störungen im Anfangsbereich durch Wellenreflexionen in radialer Richtung, die nach dem Ablösen der Probe vom Treibring verschwinden. Die sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen (vgl. Fig. B.14) empfiehlt diesen Versuch als Grundlage zur Anpassung.

Die Spannungs-Dehnungskurve (Fig. C.16) zeigt ein relativ konstantes Spannungs-

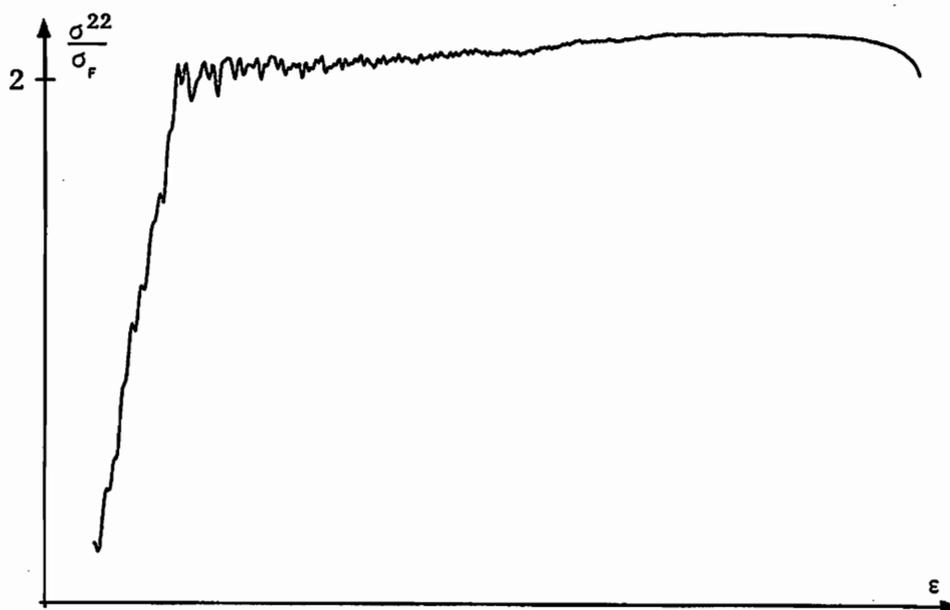


Fig. C.16: Spannungs-Dehnungskurve beim expandierenden Ring

Zur Berechnung der mit dem RSW durchgeführten Zugversuche diskretisieren wir Meßlänge und Kraftmeßteil und können dann $F(t)$ -Kurven sowohl für die Meßlänge als auch das Kraftmeßteil angeben. Im dargestellten Fall (Fig.C.18) wurde viskoplastisches Materialverhalten und Temperaturänderungen berücksichtigt. Wir erkennen eine deutliche Abnahme der Schwingungen der Kraft innerhalb der Meßlänge nach einigen Wellenreflexionen, während im Kraftmeßteil die Schwingungen deutlich langsamer abklingen.

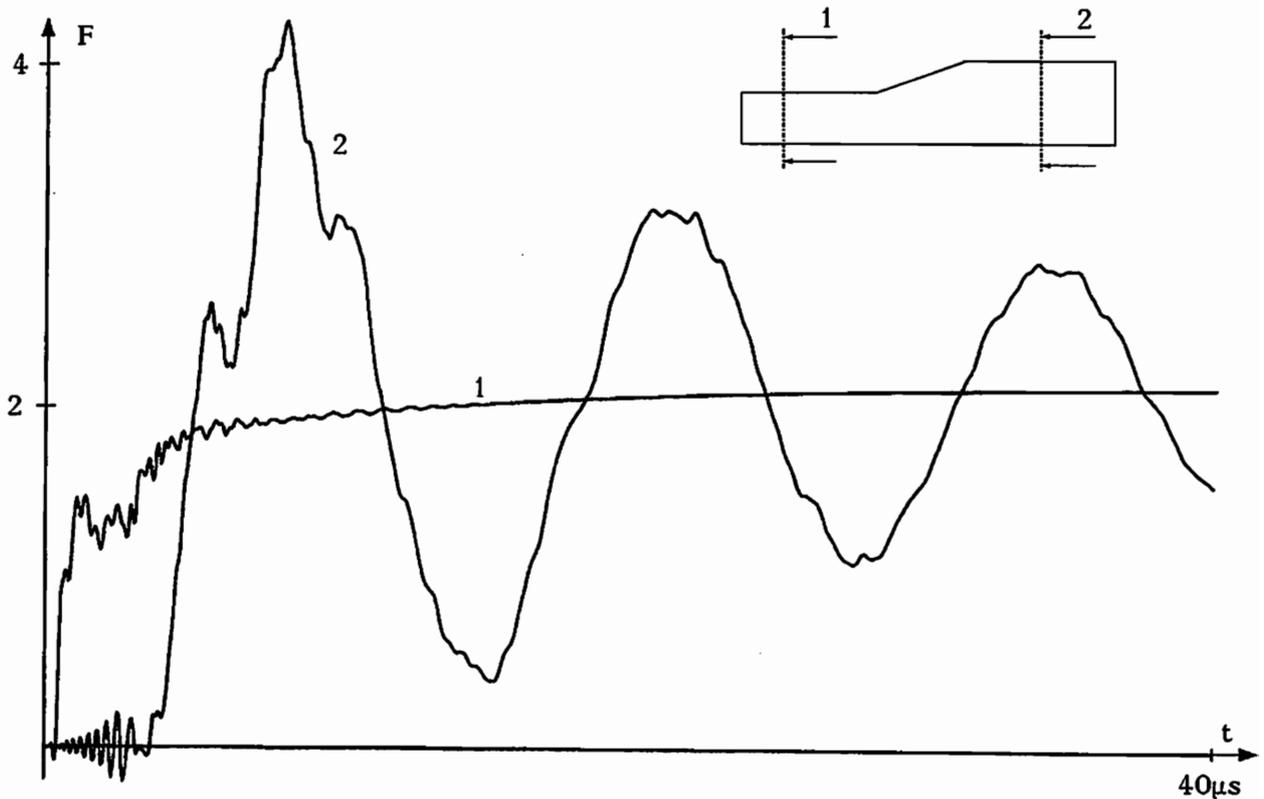


Fig.C.19: Kraftverlauf in der Meßlänge und im Kraftmeßteil ($v = 50 \text{ m/s}$)

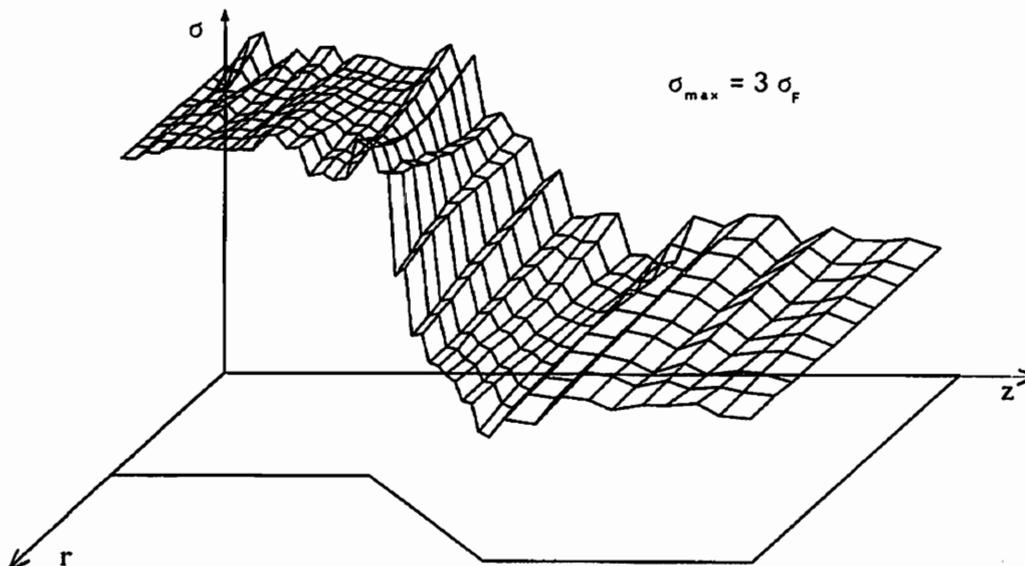


Fig.C.20: Spannungsverlauf nach $8\mu s$

Fig. C.20 zeigt deutlich die Reduzierung der Spannungen im Kraftmeßteil durch die Querschnittsvergrößerung auf.

Eine in einer Vergleichsrechnung durchgeführte Modifikation der Geometrie des Kraftmeßteils reduzierte dort ebenfalls die Schwingungen. Ob eine solche Geometrieänderung vom Versuchsaufbau und der Durchführung der Experimente noch vertretbar ist, kann hier nicht geklärt werden.

An diesem Beispiel wird weiterhin deutlich, daß es möglich ist, aus der im Kraftmeßteil gewonnenen Information auf die Kraft in der Probe zu schließen, wenn man die Wellenausbreitung und das Überschwingen beachtet. Wir wollen hier aber ausdrücklich festhalten, daß im Kraftmeßteil nicht der zeitversetzte Verlauf der Kraft in der Probe gemessen wird.

Bereits Meyer (Fig. B.11) zeigte den Einfluß der Lage der Kraftmesseinrichtung auf das Ergebnis auf. Wir konnten die dort aufgezeigten Verläufe prinzipiell verifizieren und untersuchen zusätzlich die Auswirkungen der Modellbildung, in dem Sinn, daß der Spannungszustand innerhalb der Meßlänge von der Wahl des zugrundeliegenden mechanischen Modells abhängt. In Fig.C.20 wurde neben Meßlänge und Kraftmeßteil auch die Krafteinleitung berücksichtigt und der Verlauf der resultierenden Kraft in den 3 skizzierten Schnitten dargestellt. Schwingungen im Kraftmeßteil bleiben erhalten, jedoch reduzieren sie sich in der Meßlänge. (vgl. Fig. C.19)

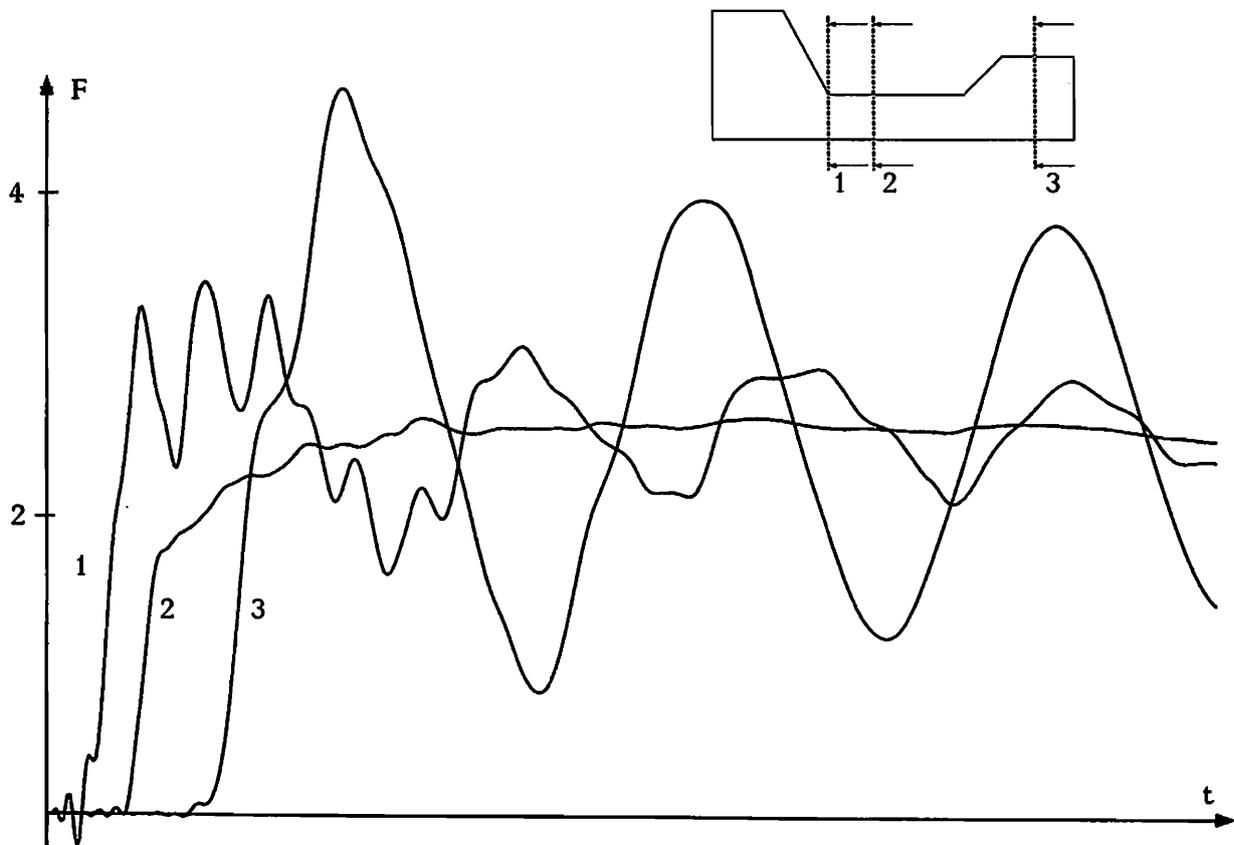
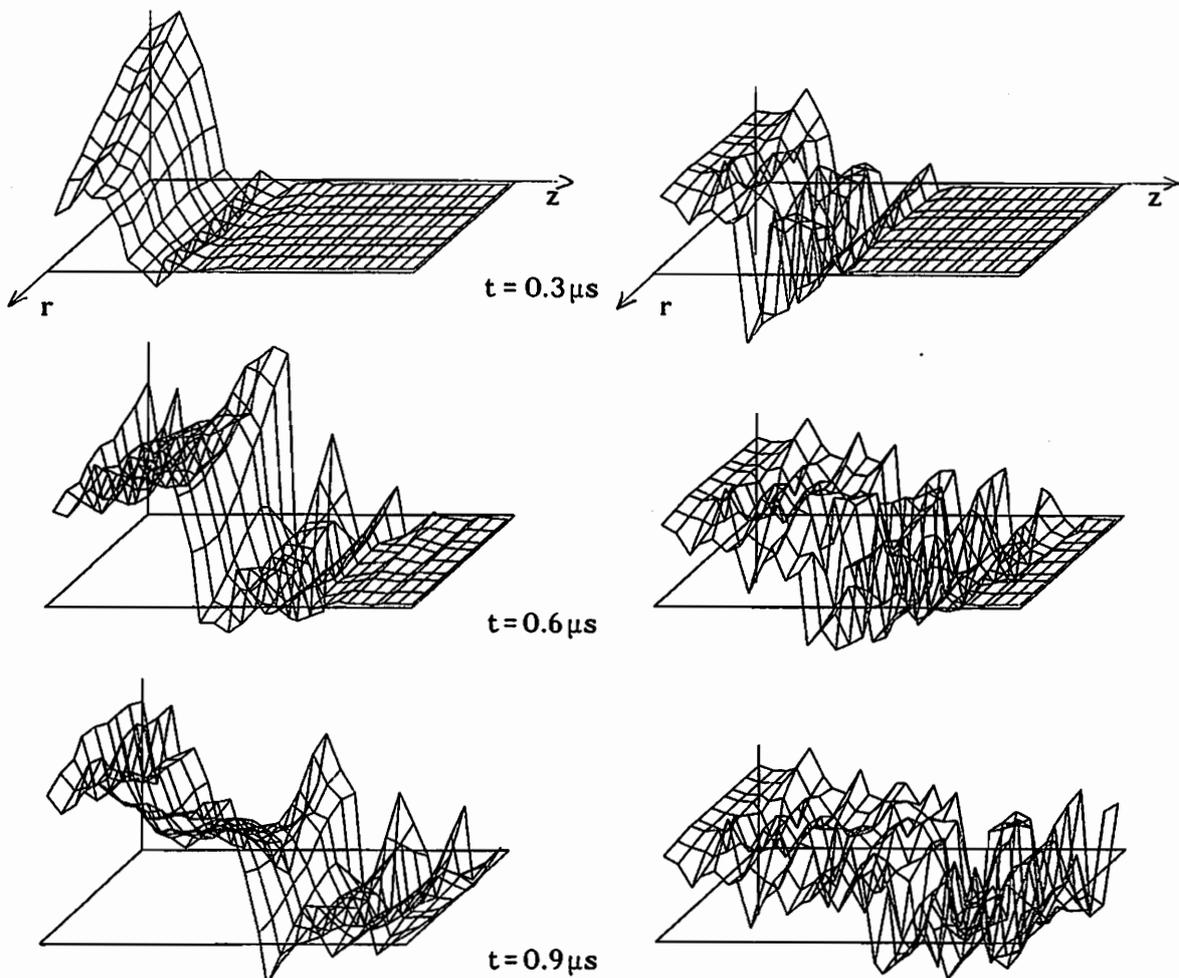


Fig.C.21: Kraftverläufe in der Probe ($v = 50 \text{ m/s}$)

Entwicklung der Zustandsgrößen am Beispiel einer Druckprobe

Bereits mehrfach angesprochen wurde die inhomogene Verteilung aller Zustandsgrößen bei einer HGD. Wir wollen nun die Entwicklung solcher Inhomogenitäten aufzeigen und untersuchen dazu die Meßlänge der in Fig.C.17 dargestellten Probe in einem Druckversuch.

Im linken Teil der Fig.C.22 ist die Entwicklung der Axialspannung während der ersten $2\mu\text{s}$ der Belastung dargestellt. Wir beobachten neben der Ausbreitung der Druckspannungen einen Vorlauf einer Zugspannungswelle. Diese Zugspannungswelle entsteht in der numerischen Simulation durch die Ansätze (in diesem Fall quadratische) und wurde auch bereits in den $F(t)$ -Kurven (Fig. C.10,19,21) wiedergegeben. Sie führt dazu, daß die Axialspannungskomponente des Spannungskonzentrationstensors, die im rechten Teil von Fig.C.22 aufgetragen ist, zunächst ebenfalls positiv ist. Da die Spannungskonzentrationen besonders im Anfangsbereich empfindlich auf Spannungsänderungen reagieren, sind die der eigentlichen Welle vorauslaufenden Störungen ausgeprägter als bei den Spannungen. Die Verläufe der Zustandsgrößen glätten sich relativ schnell und bei den Spannungen stellen sich nach 2-3 Wellendurchgängen einigermaßen homogene Verteilungen ein, während dieser Prozeß bei den Spannungskonzentrationen deutlich länger dauert.



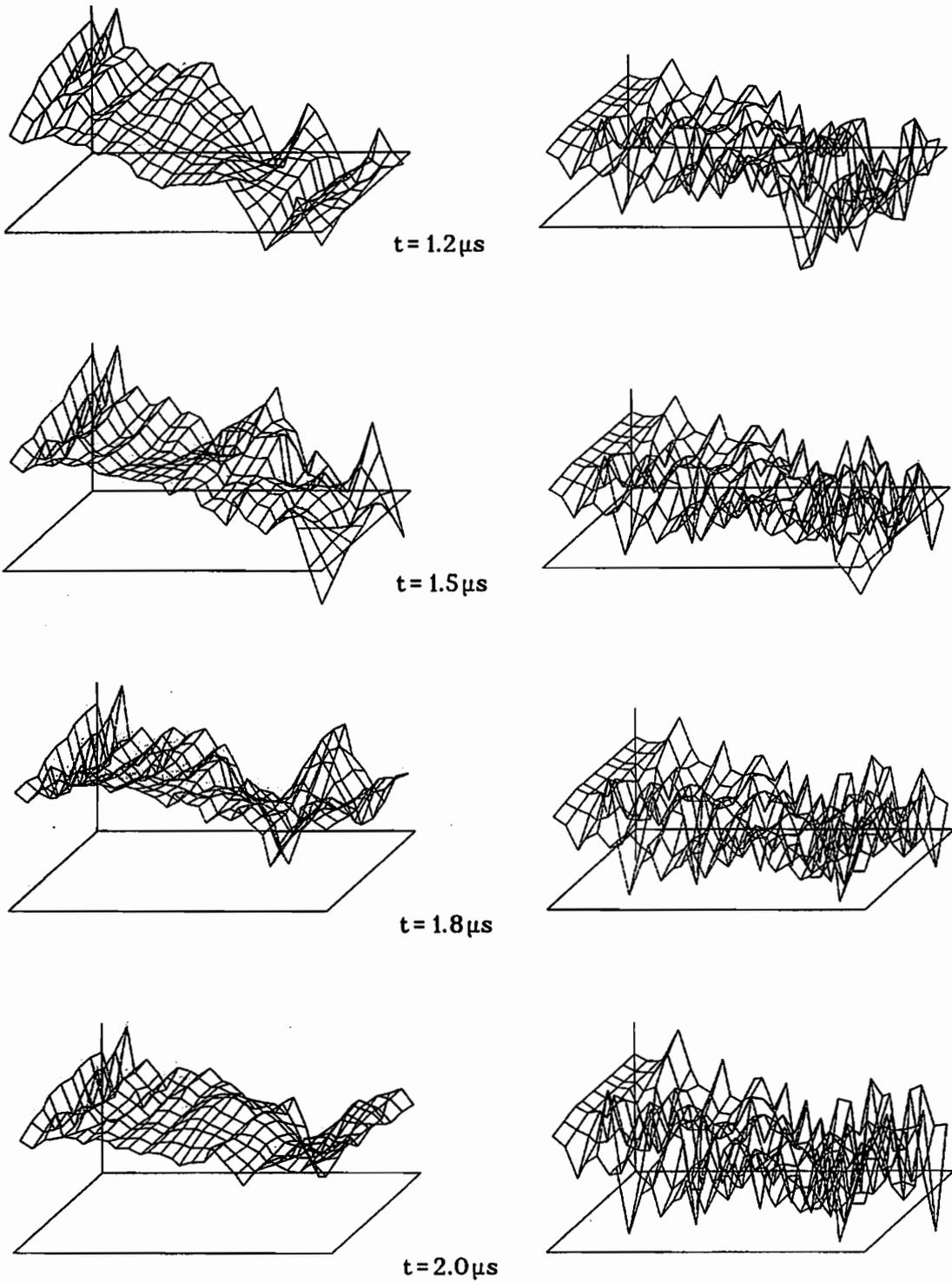


Fig. C.22: Zeitliche Entwicklung der Spannungen und Spannungskonzentrationen
(Druckspannungen sind nach oben aufgetragen.)

Zusammenfassung der Resultate der Vergleichsrechnungen

Am Ende dieses Abschnitts wollen wir die wichtigsten Erkenntnisse des Vergleichs von Experiment und Rechnung kurz zusammenfassen:

- Das Rechenmodell liefert eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen beim expandierenden Ring. Dieses Experiment empfiehlt sich daher zur Bestimmung von Materialkennwerten.
- Die Spannungs-Dehnungs-Kurven sind bei HGDn vor allem im Anfangsbereich eines Versuches nicht zu messen. Allenfalls mit dem expandierenden Ring kann nach einer kurzen Anfangsphase die "direkte" Messung von $\sigma(\epsilon)$ -Kurven erfolgen.
- Bei allen Versuchen mit zylindrischen Zug- oder Druckproben (RSW, SHB etc) kann nur mit Zusatzannahmen aus einer $F(t)$ -Kurve als integralem Wert über eine $F(\bar{\epsilon})$ -Kurve eine Abhängigkeit der Spannung von der mittleren Dehnung ($\sigma(\bar{\epsilon})$) angegeben werden.
- Spannungs-Dehngeschwindigkeits-Kurven im eigentlichen Sinne lassen sich nicht experimentell bestimmen. Weder beim expandierenden Ring noch beim RSW kann die Dehnungsrate konstant gehalten werden; beim RSW ist jedoch die Annahme einer konstanten Verformungsgeschwindigkeit näherungsweise erfüllt.
- Die Proportionalitätsgrenze σ_0 läßt sich durch kein Experiment bestimmen. Zuverlässig können nur Momentanwerte der Spannung für größere Dehnungen (z.B. 3%) bestimmt werden.
- Dehnungen, die durch DMS an der Oberfläche gemessen werden, sind nur bei homogenen Spannungszuständen repräsentativ für den gesamten Querschnitt. Der Anfangsbereich von HGDn entzieht sich also der DMS-Messung.
- Bei HGDn zeigt sich besonders im Anfangsbereich ein Größeneffekt der Probe, der sich nach unseren Berechnungen bei großen Verformungen verliert. Einen Einfluß der Probenabmessungen beobachtete auch *Albertini* [30] für Radienverhältnisse von 1:10, bei denen er jedoch vor allem Abweichungen bei größeren Dehnungen gemessen hat. Deren Ursache kann in unterschiedlichen Randbedingungen zu suchen sein.

C.4.4 Numerische Simulation des Taylortests (Aufstauchversuch, Impact)

Zum Abschluß berechnen wir mit dem Aufstauchversuch ein Experiment, das oft als Vergleichsmöglichkeit für numerische Simulationen herangezogen wird.

Wir wählen für diese Rechnung eine zylindrische Vollprobe mit 60mm Länge und 20mm Durchmesser, die mit einer Geschwindigkeit von 100m/s auf eine starre glatte Wand prallt. Dabei stellen wir nicht die Übereinstimmung mit dem Experiment in den Vordergrund, sondern untersuchen anhand der Materialeigenschaften des von uns definierten Vergleichsmaterials die Einflüsse der Schädigung.

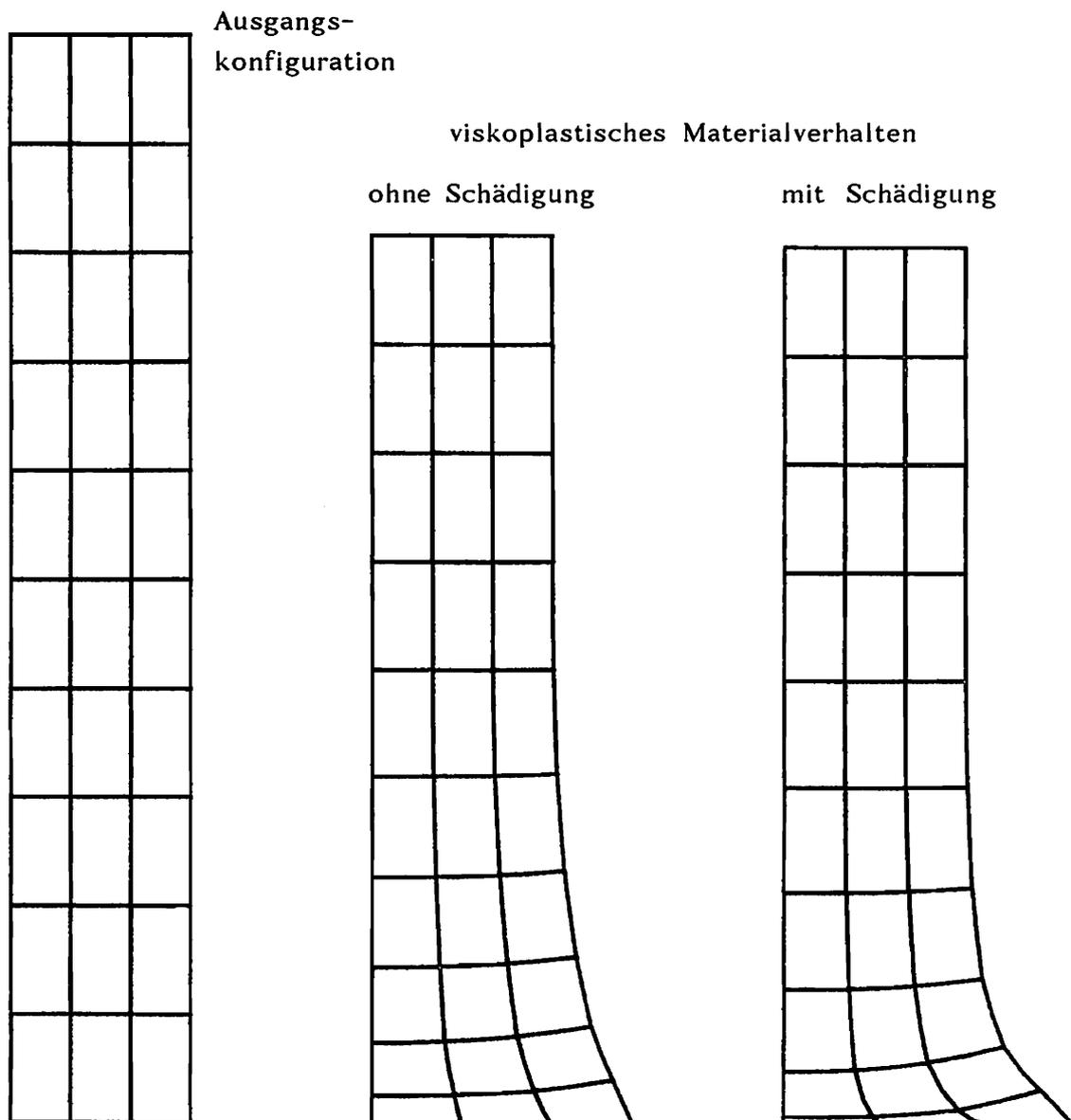


Fig.C.23 : Numerische Simulation des Taylor-Tests
(Verformungen 4-fach vergrößert)

Die in Fig. C.23 angegebenen Deformationszustände beziehen sich auf den Zeitpunkt $55\mu\text{s}$ nach Beginn des Aufpralls. Das entspricht etwa dem Zeitpunkt, bei dem die Kontaktkraft das Vorzeichen wechselt und damit anzeigt, daß der Zylinder sich wieder von der Wand ablöst. Die Verformungen haben dann ihre Maximalwerte erreicht. Die Radiusvergrößerung beträgt im viskoplastischen Fall etwa 11%, während unter Berücksichtigung der Schädigung 15% erreicht werden.

Im folgenden sind die Verläufe von Versetzungsdichte, Temperatur und der Schädigung zum angegebenen Zeitpunkt aufgetragen.

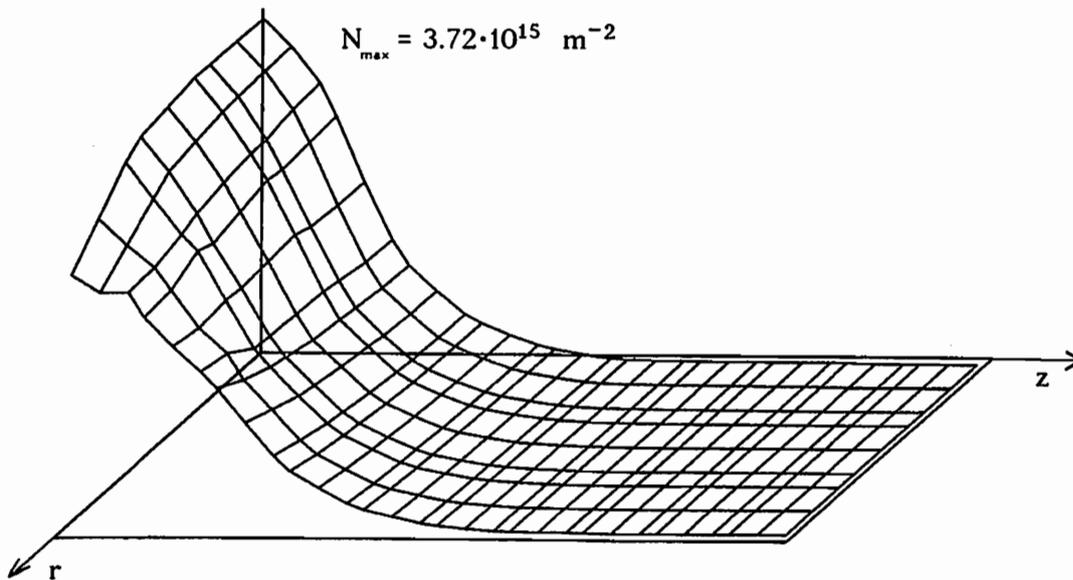


Fig. C.24: Verteilung der Versetzungsdichte beim Impact

Die Versetzungsdichte zeigt bei viskoplastischem Materialverhalten einen qualitativ gleichen Verlauf mit einem Maximalwert von $3.4 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$.

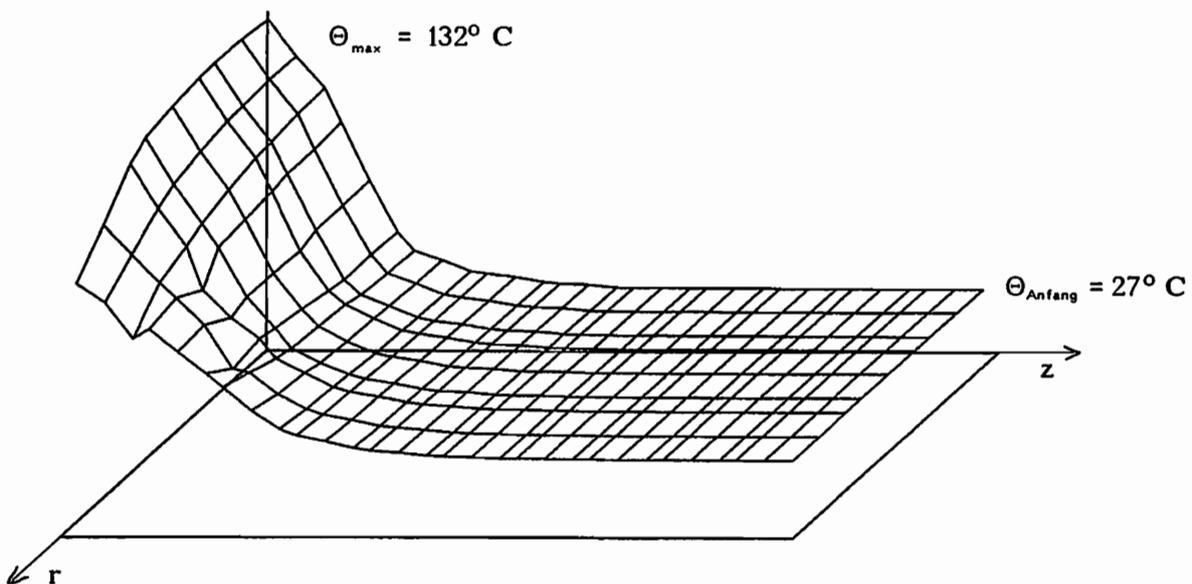


Fig. C.25: Temperaturverteilung beim Impact

Die Maximaltemperatur bei Anwendung des viskoplastischen Stoffgesetzes alleine liegt bei 76°C , so daß die Temperaturerhöhung durch die berücksichtigte Schädigung mehr als verdoppelt wird. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß Wärmeleitung vernachlässigt wurde.

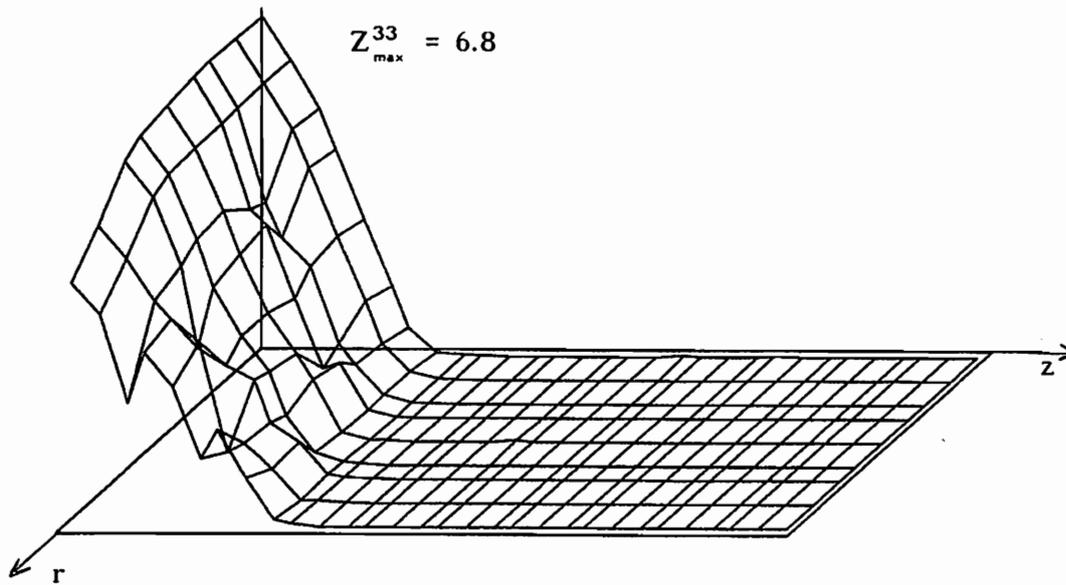


Fig. C. 26 : Verteilung der Schädigung (Z^{33}) beim Impact

Mit Temperatur- Schädigungs- und Versetzungsdichteverteilung, die unmittelbar nach dem Versuch gemessen werden können, bietet sich die Möglichkeit, auch den Taylortest zur Anpassung von Stoffgesetzen heranzuziehen.

Zusammenfassung und Schlußbemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurde auf der Grundlage einer speziellen Kontinuums-Damage-Theorie ein Verfahren zur Berechnung von HGDn entwickelt.

Mit diesem Verfahren werden zwei Ziele verfolgt:

- a) Simulation von Versuchen; damit verbunden ist eine Strategie zur Identifikation der Parameter des Materialmodells.
- b) Vorhersagen für beliebige axialsymmetrische HGDn.

Die Experimente im Bereich von HGDn sind nicht nur erheblich aufwendiger in der Durchführung als die bei niedrigen Deformationsgeschwindigkeiten, sondern bereiten auch bei der Auswertung der Meßergebnisse zusätzliche Schwierigkeiten. Deshalb haben wir zu Beginn die experimentellen Befunde unter dem speziellen Gesichtspunkt der Auswertbarkeit dargestellt.

Im Anschluß wurde das verwendete Kontinuums-Damage-Modell vorgestellt und der Gültigkeitsbereich abgesteckt:

- Phase 1 ($t < t^*$) bis zum Entstehen eines Makrodefektes
- Dehnungsraten von 10^{-4} bis 10^5 s^{-1} bei denen thermisch aktivierte Versetzungsbewegung und Schädigung durch Mikroscherbänder vorliegt.

Für dieses Stoffgesetz wurde eine Anpassungsstrategie entwickelt, die den Problemen bei der Durchführung der Experimente Rechnung trägt. Die Anpassung erfolgt iterativ, wobei im ersten Schritt getroffene Annahmen wie etwa isotherme Prozeßführung später nicht mehr erforderlich sind. Zusammen mit dem Hilfsmittel der Evolutionsstrategie wurde so ein systematischer Rahmen zur Anpassung erarbeitet, der auch auf andere Stoffgesetze übertragbar ist.

In einer ausführlichen Darstellung wurden die durch das Materialgesetz beschriebenen Effekte aufgezeigt. Es sind dies:

- Anstieg der Spannung mit Dehnung und Dehnungsrate
- Anstieg der Fließgrenze mit der Dehnungsrate
- Kombination von isotroper und kinematische Verfestigung
- Entfestigung durch Temperaturerhöhung
- Entfestigung durch Scherbandbildung
- Abhängigkeit der Fließgrenze von der Temperatur
- Schädigung nur bei großen Dehnungsraten

Diese Effekte, die wir bei der Vergleichsrechnung homogener Spannungszustände beobachten konnten, werden überlagert von dem Strukturverhalten, das bei allen dynamischen Problemen eine Rolle spielt.

Zur Berechnung des Strukturverhaltens wurde ausgehend vom Prinzip der virtuellen Arbeit für große Deformationen und den konstitutiven Gleichungen in einer Update-Lagrangesche Formulierung ein FE-Algorithmus zur Berechnung rotationssymmetrischer dynamischer Probleme entwickelt. Wir beschränkten uns dabei auf adiabate Prozesse. Mit diesem Programm wurden dann die durchgeführten Experimente, wie Zug-, Druckversuch, expandierender Ring und Impact nachgerechnet und die Orts- und Zeitdiskretisierung diskutiert.

Wir können festhalten, daß die höherwertigen Elemente bei der Beschreibung dynamischer Probleme Vorteile besitzen. Bzgl. der Zeitintegration erwiesen sich die expliziten Verfahren hoher Konsistenzordnung als überlegen. Dies liegt auch in der Tatsache begründet, daß während eines Zeitschrittes mit $v = \text{konst.}$ gerechnet wurde und in Verbindung mit der impliziten Integration der Bewegungsgleichungen große Lastschritte verwendet werden können. Bei Verwendung von gemittelten Geschwindigkeiten oder Ansätzen $v(t)$ analog zum Newmark-Verfahren könnte der Vergleich zugunsten der impliziten Verfahren ausgehen. Insbesondere für den Fall, daß man sehr kleine Lastschritte und unbedingt stabile Zeitintegrationsverfahren ohne Schrittweitenkontrolle verwendet, liefert die Trapezregel das schnellste Rechenverfahren.

Die bei HGDn typischen inhomogenen Spannungsverteilungen erlauben es nicht, Spannungs-Dehnungsbeziehungen für eine gesamte Probe anzugeben. Durch die FE-Methode ist es allerdings möglich, den Spannungsverlauf an diskreten Punkten zu verfolgen. Die so zu gewinnenden Verläufe sind auf Grund von Zwischenentlastungen und stark schwankenden Dehngeschwindigkeiten wenig geeignet, das Materialverhalten einer Probe zu beschreiben. Wir verwenden die resultierende Kraft in einem Schnitt durch die Probe und die mittlere Dehnung in der Meßlänge, um einen direkten Bezug zu den Experimenten herzustellen und konnten so die Messungen verschiedener Autoren verifizieren.

Die durchgeführten Rechnungen benötigten auf Grund des komplexen Materialmodells erhebliche Rechenzeiten. Wie die Erfahrung lehrt, sind derartige Aussagen nur kurze Zeit gültig und werden von der fortschreitenden Rechnerentwicklung korrigiert.

Wir konnten im Rahmen dieser Arbeit nicht alle Probleme im Zusammenhang mit der Berechnung von HGDn erfassen. Die Möglichkeiten der Ergänzung und Verbesserung sind vielfältig und zielen hauptsächlich in 3 Richtungen:

1) Verbesserung des Werkstoffmodells

- Hinzunahme weiterer Schädigungsmechanismen wie Poren und Ribbildung
- Hinzunahme des Einflusses der athermischen Versetzungsbewegung
- Verbesserung der Anpassung für Kriechen und Relaxation

2) Verbesserung der numerischen Simulation

- Aufheben der Rotationssymmetrie (vollständige 3-D-Beschreibung)
- Berücksichtigung der Makrodefekte und deren Ausbreitung
- Berücksichtigung der Wärmeleitung (Prozesse moderater Dehnungsrate)
- Kontaktprobleme
- Materialabtrennung

3) Anpassung an reale Materialien

Auf Grund des modularen Aufbaus sowohl von Materialmodell als auch FE-Programm sollten die oben angesprochenen Ergänzungen je nach Priorität unabhängig voneinander angegangen werden können.

Anhang 1 : Zusammenstellung der Materialfunktionen und Materialparameter für Modell 1.2 LD

Diese Zusammenstellung unterscheidet sich von der ersten Fassung bei *Diehl* dadurch, daß alle Funktionen bereits für große Deformationen angegeben werden und daß einige Parameter im Laufe der Anpassung geändert worden sind. Die hier aufgelisteten Funktionen und Parameter wurden bei den FE-Berechnungen verwendet; es handelt sich also um das Modell 1.2LD. Für die Übertragung der Funktionen auf die Berechnung von großen Deformationen wird die Determinante Δ benötigt.

$$\text{Es gilt: } \Delta^2 = \det(\mathbf{1} + \mathbf{E}_R) \approx 1 + 2 \text{tr } \mathbf{E}_R$$

mit dem reversiblen Green'schen Verzerrungstensor \mathbf{E}_R . Diese Gleichung stellt keine explizite Gleichung für Δ dar, kann aber nach Approximation von $\text{tr } \mathbf{E}_R$ durch eine Taylorreihe in $\Delta-1$ in eine quadratische Gleichung für Δ überführt werden.

1) Materialfunktionen zur Beschreibung thermisch aktivierter Versetzungsmechanismen

a) Der Fließflächenradius g_r

$$g_r(\kappa, \Theta, u) = \Gamma_{T1}^{(0)}(\kappa, \Theta) \Gamma_{T1}^{(1)}(\kappa, \Theta) \Gamma_{T2}(u)$$

$$\text{mit } \Gamma_{T1}^{(0)}(\kappa, \Theta) = g_{T0} \left\{ 1 + \frac{\chi_{g11} \kappa + \chi_{g13} \kappa^2}{1 + \chi_{g12} \kappa} \right\}^2 \left\{ 1 - \chi_{g14} \arctan \left(\chi_{g15} \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} - 1 \right) \right) \right\}$$

$$\Gamma_{T1}^{(1)}(\kappa, \Theta) = 1 - \chi_{g19} \arctan \left(\chi_{g110} \kappa \left(\frac{\Theta}{\Theta_0} - 1 \right) \right)$$

$$\Gamma_{T2}(u) = \chi_{g16} + \frac{\chi_{g17}}{u \chi_{g18}}$$

$\Gamma_{T1}^{(0)}$ beschreibt das anfängliche Verfestigungsverhalten; $\Gamma_{T1}^{(1)}$ wird erst bei großen Versetzungsdichten aktiv.

Alle hier und im weiteren aufgeführten Materialparameter sind auf SI-Einheiten bezogen; wir geben nur die Maßzahlen an.

$$\chi_{g11} = 1,6 \cdot 10^{-7} \quad \chi_{g12} = 1,8 \cdot 10^{-6} \quad \chi_{g13} = 3,44 \cdot 10^{-15}$$

$$\chi_{g14} = 0,33 \quad \chi_{g15} = 2 \quad \chi_{g16} = -0,253$$

$$\chi_{g17} = 0,1196 \quad \chi_{g18} = 0,517 \quad \chi_{g19} = 0,64$$

$$\chi_{g110} = 10^{-8} \quad g_{T0} = 6 \cdot 10^{16}$$

b) Der Gleichgewichtswert der Prozeßgeschwindigkeit

$$u_{EQ}(PG) = u_0 - 2(u_0 - u_\infty)(U(PG))^2 + (u_0 - u_\infty)(U(PG))^4$$

$$U(PG) = \frac{1}{\chi_{u2}} \log(1 + \chi_{u3} PG)$$

$$u_0 = 10^{-2} \quad u_\infty = 0.0 \quad \chi_{u2} = 10.177 \quad \chi_{u3} = 2,6034 \cdot 10^4$$

c) Die Überspannungsfunktion Φ aus der Fließregel für ε_{VT}

$$\Phi_T(\mathcal{F}_T) = 1 - \exp(-\chi_{t6} \mathcal{F}_T)$$

$$\mathcal{F}_T = \left(\sqrt{(\sigma' - \mathbf{X}_T) \cdot (\sigma' - \mathbf{X}_T)} - \sqrt{g_T} \right) / \sqrt{g_T} \quad , \quad \chi_{t6} = 25$$

d) Die Funktion γ_T aus der Fließregel für ε_{VT}

$$\gamma_T(x, u) = \chi_{t7} u_{EQ}^{-1}(u) \left\{ \chi_{t11} + \chi_{t12} e^{-\chi_{t13} x} + \chi_{t14} e^{-\chi_{t15} x} \right\}$$

$$\chi_{t11} = 1,47 \quad \chi_{t12} = -0,4387 \quad \chi_{t13} = 9,424 \cdot 10^{-6}$$

$$\chi_{t14} = 0,3008 \quad \chi_{t15} = 5,6233 \cdot 10^{-7} \quad \chi_{t17} = 0,83283$$

u_{EQ}^{-1} ist die Umkehrfunktion zu $u_{EQ}(PG)$

e) Die Funktion c_T aus der Evolutionsgleichung der kinematischen Verfestigung

$$c_T(x) = \chi_{ct6} \left\{ e^{C(x)} - 1 \right\}$$

$$C(x) = \chi_{ct11} + \chi_{ct12} e^{-\chi_{ct13} x} + \chi_{ct14} e^{-\chi_{ct15} x}$$

$$\chi_{ct11} = 0,832 \quad \chi_{ct12} = 3,535 \quad \chi_{ct13} = 1,099 \cdot 10^{-6}$$

$$\chi_{ct14} = 3,687 \quad \chi_{ct15} = 4,68 \cdot 10^{-7} \quad \chi_{ct16} = 10^7$$

f) Die Funktion $K(x, \Theta) \equiv K(x)$:

$$K(x) = \left(1 - \frac{x}{\chi_{max}} \right)$$

$$\chi_{max} = 1.0 \cdot 10^9$$

2) Materialgleichungen zur Beschreibung der Scherbandschädigung

a) Materialfunktionen aus der Evolutionsgleichung für τ : Es sei $\tau := \frac{1}{\Delta} \|\tau\|$

$$d_1(\tau, u) = \chi_{,01} e^{-\chi_{,02} u - \chi_{,03} \tau}$$

$$d_2(\tau) = \chi_{,04} e^{-\chi_{,05} \tau}$$

$$d_3(\tau) = \frac{\chi_{,06}}{(1 + \chi_{,07} \tau)^{\chi_{,08}}}$$

$$d_4(\tau) = \frac{\chi_{,09}}{(1 + \chi_{,10} \tau)^{\chi_{,11}}}$$

$$m(\tau, \|\mathbf{A}_{VL}\|) = \frac{\chi_{,12} \|\mathbf{A}_{VL}\| \Delta^{-2}}{(1 + \chi_{,13} \tau)^{\chi_{,14}} (1 + \chi_{,15} \|\mathbf{A}_{VL}\| \Delta^{-2})^{\chi_{,16}}}$$

$\chi_{,01} = 13$	$\chi_{,02} = 10^3$	$\chi_{,03} = 7 \cdot 10^{-6}$	$\chi_{,04} = 6 \cdot 10^{-8}$
$\chi_{,05} = 2,3 \cdot 10^{-5}$	$\chi_{,06} = 10^5$	$\chi_{,07} = 3,5 \cdot 10^{-5}$	$\chi_{,08} = 5,5$
$\chi_{,09} = 1,2$	$\chi_{,10} = 6,6 \cdot 10^{-3}$	$\chi_{,11} = 2$	$\chi_{,12} = 2 \cdot 10^7$
$\chi_{,13} = 2 \cdot 10^{-6}$	$\chi_{,14} = 3$	$\chi_{,15} = 1$	$\chi_{,16} = 1$

b) Materialfunktionen für die Evolution von \mathbf{Z}

$$v_z = \text{konst}$$

$$h_z(\vartheta) = \frac{h_{z0}}{1 + \chi_{z1} \vartheta}$$

$$d_z(\zeta, \mathcal{G}_z) = \frac{d_{z0}}{(1 + \chi_{z2} \zeta)^{\chi_{z3}}} \arctan(\mathcal{G}_z)$$

mit $\zeta := \frac{1}{\Delta} \|\mathbf{Z}\|$, $\mathcal{G}_z = G_z / h_{z0}$

$$G_z = \frac{1}{\Delta^2} \tau' \cdot \tau' - \frac{v_z}{\Delta} \text{tr} \tau - h_z \geq 0$$

$$v_z = 3 \cdot 10^4 \quad h_{z0} = 1,05 \cdot 10^{12} \quad (1,75 \cdot 10^{12}) \quad \chi_{z1} = 2$$

$$d_{z0} = 16,5 \cdot 10^{-15} \quad (8 \cdot 10^{-15}) \quad \chi_{z2} = 0,8 \quad \chi_{z3} = 3$$

Die Zahlenwerte in Klammern beziehen sich auf die Anpassung an fiktive einachsige Prozesse.

c) Materialfunktionen aus der Fließregel für \mathbf{D}_0

$$v_0 = \text{konst}$$

$$h_0(\zeta) = \frac{h_{00}}{1 + \frac{2}{\pi} \chi_{z4} \arctan(\chi_{z5} \zeta)}$$

$$d_0(\zeta, q_0) = \frac{d_{00} \zeta}{1 + \chi_{z6} \zeta} \arctan(\chi_{z7} q_0)$$

mit $q_0 := G_0 / h_{00}$

$$G_0 = \frac{1}{\Delta^2} \tau' \cdot \tau' - \frac{v_0}{\Delta} \text{tr} \tau - h_0 \geq 0$$

$$d_{00} = 3,674235 \cdot 10^{-15} \quad v_0 = 3 \cdot 10^4 (=v_z) \quad h_{00} = 3,5 \cdot 10^{12}$$

$$\chi_{z4} = 35 \quad \chi_{z5} = 1 \quad \chi_{z6} = 0,1 \quad \chi_{z7} = 10^2$$

d) Materialfunktionen aus der Evolutionsgleichung für \mathbf{A}_{vL}

$$\gamma_{vL} = \text{konst}$$

$$h_v = \text{konst}$$

$$\Phi_{vL}(q_{vL}) = q_{vL} \quad \text{mit } q_{vL} = \left(\frac{1}{\Delta} \sqrt{\tau' \cdot \tau'} - \sqrt{h_v} \right) / \sqrt{h_v}$$

$$\gamma_{vL} = 0,6124 \quad h_v = 3 \cdot 10^9$$

e) Materialfunktionen aus der Evolutionsgleichung für ϑ

$$d_{\Theta v}(u, \vartheta, q_v) = T_1(u) \left\{ 1 - \frac{T_2(u) \vartheta}{1 + T_2(u) \vartheta} \right\} q_v$$

$$T_1(u) = \chi_{\Theta 1} \left(1 + \chi_{\Theta 2} e^{-\chi_{\Theta 3} u} \right)$$

$$T_2(u) = \chi_{\Theta 4} u^{\chi_{\Theta 5}}$$

$$\chi_{\Theta 1} = 10^{-2} \quad \chi_{\Theta 2} = 7,5 \cdot 10^4 \quad \chi_{\Theta 3} = 5 \cdot 10^2$$

$$\chi_{\Theta 4} = 2 \cdot 10^{14} \quad \chi_{\Theta 5} = 4$$

3) Materialfunktionen und -parameter zur Beschreibung thermoelastischen Verhaltens

a) Einfluß der Schädigung auf das elastische Verhalten

$$\lambda_3(\zeta) / \lambda_{3,0} = \lambda_4(\zeta) / \lambda_{4,0} = 1 + \frac{k_1 \zeta}{1 + k_2 \zeta}$$

$$k_1 = 300 \quad k_2 = 1000 \quad \lambda_{3,0} = -1,4338821 \cdot 10^{-12}$$

$$\lambda_{4,0} = 6,1957868 \cdot 10^{-12} \quad (\rightarrow E = 2,1 \cdot 10^{11})$$

b) Dgl. für u

$$PG = \max \{ 0, \| \mathbf{D} \| + \chi_{u1} \dot{\Theta} \}$$

$$c = 5 \cdot 10^4 \quad \alpha = 10^{-4} \quad \chi_{u1} = 10^{-5}$$

c) Parameter aus dem Ansatz für die Enthalpie

$$\rho = 7,5 \cdot 10^3 \quad \lambda_2 = 10^{-5} \quad c_{\sigma x} = 480 \quad \tau_4 = 2,53 \cdot 10^{-8}$$

$$k = 12 \quad \mu_1 = \mu_2 = 6,76 \cdot 10^{-9} \quad \mu_3 = 3,5 \cdot 10^{-17}$$

$$\mu_4 = 10^7 \quad \mu_6 = 1,1 \cdot 10^8 \quad \nu_2 = 1,677 \cdot 10^{-12} \quad \nu_3 = 5 \cdot 10^{-11}$$

$$\nu_4 = 1,66 \cdot 10^{-4}$$

4) Materialfunktionen und -parameter für den inelastischen Spin

$$\Phi_{TW}(\mathcal{F}_T) = \Phi_T(\mathcal{F}_T)$$

$$\gamma_{TW}(u) = \chi_{110} u_{EQ}^{-1}(u)$$

$$\chi_{110} = 0,979$$

Anhang 2: Kinematik

Zur Beschreibung endlicher Deformationen eines Kontinuums in raumfester Betrachtungsweise wird neben dem kartesischen Koordinatensystem X^α mit den Basisvektoren \mathbf{e}_α ein der Geometrie des Problems angepaßtes Koordinatensystem x^α mit den ortsveränderlichen Basen $\mathbf{g}^\alpha(x^\rho)$ eingeführt.

Dabei sind die Basisvektoren als partielle Ableitungen des Ortsvektors nach den Koordinaten definiert:

$$\mathbf{g}_\alpha(x^\rho) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha} \quad . \quad (2.1)$$

Die reziproke Basis ist:

$$\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad . \quad (2.2)$$

Aus den Basisvektoren ergibt sich die entsprechende Metrik des krummlinigen Koordinatensystems:

$$g^{\alpha\beta}(x^\rho) = \mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta \quad , \quad (2.3)$$

$$g_{\alpha\beta}(x^\rho) = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta \quad . \quad (2.4)$$

Die Metrik erlaubt die Umrechnung der kovarianten Komponenten eines Tensors in die kontravarianten und umgekehrt:

$$u^\alpha = g^{\alpha\beta} u_\beta \quad , \quad (2.5)$$

$$u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta \quad . \quad (2.6)$$

Die Christoffelsymbole verknüpfen die Ableitungen der Basisvektoren mit den Basisvektoren selbst:

$$\mathbf{g}_{\alpha,\beta} = \frac{\partial \mathbf{g}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \mathbf{g}_\rho \quad , \quad (2.7)$$

$$\mathbf{g}^\alpha_{,\beta} = \frac{\partial \mathbf{g}^\alpha}{\partial x^\beta} = -\Gamma_{\rho\beta}^\alpha \mathbf{g}^\rho \quad . \quad (2.8)$$

Die Christoffelsymbole lassen sich aus der Metrik berechnen:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (g_{\beta\sigma,\alpha} + g_{\sigma\alpha,\beta} + g_{\alpha\beta,\sigma}) \quad . \quad (2.9)$$

Durch Ableitung tensorieller Größen nach den Koordinaten erhält man beispielsweise als Gradienten eines Vektors:

$$\text{grad } \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^\rho} \mathbf{g}^\rho = \frac{\partial}{\partial x^\rho} (u^\alpha \mathbf{g}_\alpha) \mathbf{g}^\rho = u^\alpha |_\beta \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\rho . \quad (2.10)$$

$u^\alpha |_\beta$ wird als kovariante Ableitung bezeichnet, es gilt:

$$u^\alpha |_\rho = u^\alpha_{,\rho} + \Gamma_{\beta\rho}^\alpha u^\beta , \quad (2.11)$$

$$u_\alpha |_\rho = u_{\alpha,\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}^\beta u_\beta . \quad (2.12)$$

Ein Linienelement in der Ausgangskonfiguration $d^\circ \mathbf{r} = d^\circ x^\alpha \mathbf{g}_\alpha$ wird in der aktuellen Konfiguration durch $d\mathbf{r} = dx^\alpha \mathbf{g}_\alpha$ beschrieben. Der Deformationsgradient \mathbf{F} bildet das Linienelement $d\mathbf{r}$ in $d^\circ \mathbf{r}$ ab:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{F} d^\circ \mathbf{r} \quad (2.13)$$

mit
$$\mathbf{F} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta . \quad (2.14)$$

Aus dem Deformationsgradienten wird die Differenz der Quadrate der Linienelemente im verformten und unverformten Zustand berechnet:

$$\begin{aligned} ds^2 - d^\circ s^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} - d^\circ \mathbf{r} \cdot d^\circ \mathbf{r} = d^\circ \mathbf{r} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) d^\circ \mathbf{r} \\ &= d^\circ \mathbf{r} \cdot (2\boldsymbol{\varepsilon}) d^\circ \mathbf{r} . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Der so definierte Green-Lagrangesche Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ läßt sich auch durch die Verschiebungen ausdrücken:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{Grad } \mathbf{u} + (\text{Grad } \mathbf{u})^T + \text{Grad } \mathbf{u} (\text{Grad } \mathbf{u})^T) . \quad (2.16)$$

Die Geschwindigkeit \mathbf{v} eines Körperpunktes ist definiert als substantielle Zeitableitung des Ortsvektors:

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \mathbf{g}_\alpha = \dot{x}^\alpha \mathbf{g}_\alpha . \quad (2.17)$$

Durch Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach den aktuellen Koordinaten erhält man den Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^\beta} \mathbf{g}^\beta = v^\alpha |_\beta \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta . \quad (2.18)$$

Die Zerlegung des Geschwindigkeitsgradiententensors in seinen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil gemäß

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} = \frac{1}{2} (v^\alpha |_\beta + v_\beta |^\alpha) \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta + \frac{1}{2} (v^\alpha |_\beta - v_\beta |^\alpha) \mathbf{g}_\alpha \mathbf{g}^\beta \quad (2.19)$$

liefert den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} und den Tensor der Rotationsgeschwindigkeit \mathbf{W} .

Zylinderkoordinaten

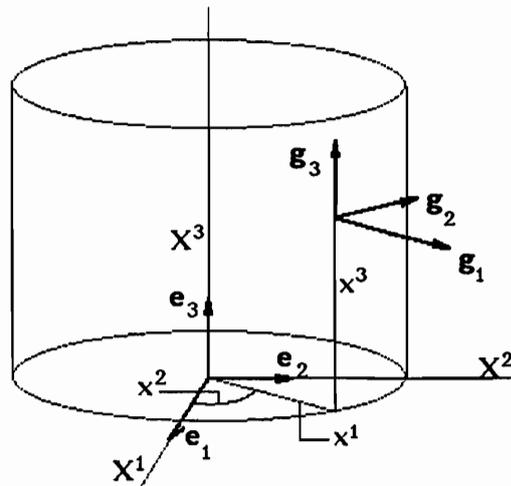


Fig. A2.1: Zylinderkoordinaten

Der Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten X^α und den Zylinderkoordinaten x^α lautet:

$$\begin{aligned} X^1 &= x^1 \cos x^2 \\ X^2 &= x^1 \sin x^2 \\ X^3 &= x^3 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Aus dem Ortsvektor

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= X^\alpha \mathbf{e}_\alpha \\ &= x^1 \cos x^2 \mathbf{e}_1 + x^1 \sin x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.21)$$

erhält man mit (2.1) die ortsabhängigen kovarianten Basisvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \cos x^2 \mathbf{e}_1 + \sin x^2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_2 &= -x^1 \sin x^2 \mathbf{e}_1 + x^1 \cos x^2 \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.22)$$

und mit (2.2) und (2.3) die Metriken:

kovariante Metrik	kontravariante Metrik
$g_{\alpha\beta}(x^\rho) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$g^{\alpha\beta}(x^\rho) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{x^1})^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$

Die Christoffelsymbole ergeben sich nach (2.9) zu:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x^1} & 0 \\ \frac{1}{x^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_{\alpha\beta}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Damit erhält man die kovarianten Ableitungen der Verschiebungen:

$$u_{\alpha} |_{\beta} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} - \frac{1}{x^1} u_2 & u_{1,3} \\ u_{2,1} - \frac{1}{x^1} u_2 & u_{2,2} + x^1 u_1 & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$$u^{\alpha} |_{\beta} = \begin{bmatrix} u^1_{,1} & u^1_{,2} - x^1 u^2 & u^1_{,3} \\ u^{2,1} + \frac{1}{x^1} u^2 & u^{2,2} + \frac{1}{x^1} u^1 & u^{2,3} \\ u^{3,1} & u^{3,2} & u^{3,3} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Für den Sonderfall $u_2 \equiv 0$ und $u_1 = u_1(x^1, x^3)$ bzw. $u_3 = u_3(x^1, x^3)$ (z.B. Rohr unter Innendruck und Längskraft) vereinfachen sich (2.25-26) zu

$$u_{\alpha} |_{\beta} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & 0 & u_{1,3} \\ 0 & x^1 u_1 & 0 \\ u_{3,1} & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$u^{\alpha} |_{\beta} = \begin{bmatrix} u^1_{,1} & 0 & u^1_{,3} \\ 0 & \frac{1}{x^1} u^1 & 0 \\ u^3_{,1} & 0 & u^3_{,3} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Man beachte $u_2 |_2 \neq 0$

Der Lagrangesche Verzerrungstensor \mathfrak{s} aus (2.16) berechnet sich mit (2.27-28) und (2.5-6) zu:

$$\begin{aligned}
 {}^t_0\mathfrak{s} = {}^t_0\mathfrak{s}_1 + {}^t_0\mathfrak{s}_{nl} = & \begin{bmatrix} u_{1,1} & 0 & \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) \\ 0 & {}^0x^1u_1 & 0 \\ \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix} {}^0\mathfrak{g}^\alpha \quad {}^0\mathfrak{g}^\beta \\
 & + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (u_{1,1})^2 + (u_{3,1})^2 & 0 & u_{1,3}u_{1,1} + u_{3,3}u_{3,1} \\ 0 & (u_1)^2 & 0 \\ u_{1,3}u_{1,1} + u_{3,3}u_{3,1} & 0 & (u_{1,3})^2 + (u_{3,3})^2 \end{bmatrix} {}^0\mathfrak{g}^\alpha \quad {}^0\mathfrak{g}^\beta
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Weiterhin erhält man mit

$$v^\alpha_{,\beta} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & 0 & v_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ v_{3,1} & 0 & v_{3,3} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

die gemischtvarianten Maßzahlen des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors \mathbf{D}

$$d^\alpha_{\beta} = \begin{bmatrix} v_{1,1} & 0 & \frac{1}{2}(v_{1,3} + v_{3,1}) \\ 0 & {}^t\frac{1}{x^1}v_1 & 0 \\ \frac{1}{2}(v_{1,3} + v_{3,1}) & 0 & v_{3,3} \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Anhang 3: Aufbereitung des Stoffgesetzes für die Zeitintegration im Rahmen der FE-Formulierung

Für die Berechnung des Lastvektors aus Elementspannungen müssen in jedem Iterationsschritt die Spannungen, die inneren Variablen und die Prozeßvariablen integriert werden. Diese Integration läßt sich z.B. für das Stoffgesetz in der Ursprungsfassung des FE-Programms direkt nach der Aufstellung des Differentialgleichungssystems durchführen, denn alle Raten hängen dort nur von den Momentanwerten ab. In unserem Fall liegt jedoch durch den ersten Hauptsatz und das Elastizitätsgesetz eine Kopplung der Raten von Spannung, Temperatur und schädigungsinduzierter Verzerrung vor, die eine Aufbereitung des Differentialgleichungssystems erforderlich macht.

Aus der objektiven Zeitableitung der Spannungen

$$\overset{\#}{\sigma} = \dot{\sigma} - \Omega \sigma + \sigma \Omega - \sigma (\text{tr} \mathbf{D}_R) \quad (3.1)$$

mit $\Omega = \mathbf{W} - \mathbf{W}_i$

und der elastischen Dehngeschwindigkeit \mathbf{D}_R

$$\mathbf{D}_R = \frac{(\Delta^3 + \lambda_4 \text{tr} \sigma) \mathbf{1} - 3 \lambda_4 \sigma}{\Delta^2 (\Delta^3 + (\text{tr} \sigma) / \tilde{\mathbf{K}})} \lambda_2 \dot{\Theta} + \frac{\lambda_4}{\Delta^3} \sigma + \frac{\lambda_3 \Delta^3 \mathbf{1} - (\lambda_4 / \tilde{\mathbf{K}}) \sigma}{\Delta^3 (\Delta^3 + (\text{tr} \sigma) / \tilde{\mathbf{K}})} \text{tr} \sigma \quad (3.2)$$

erhalten wir

$$\overset{\#}{\sigma} = \frac{\Delta^3}{\lambda_4} \left[\mathbf{D}_R - \left\{ (a_1 \mathbf{1} - a_2 \sigma) \lambda_2 - (a_3 \mathbf{1} - a_4 \sigma) \frac{b_1}{b_2} \right\} \dot{\Theta} - (a_3 \mathbf{1} - a_4 \sigma) \frac{\text{tr} \mathbf{D}_R}{b_2} \right] - \sigma (\text{tr} \mathbf{D}_R) \quad (3.3)$$

Dabei sind folgende Abkürzungen verwendet worden

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{(\Delta^3 + \lambda_4 \text{tr} \sigma)}{\Delta^2 (\Delta^3 + (\text{tr} \sigma) / \tilde{\mathbf{K}})} & b_1 &= \frac{3 \lambda_2 \Delta}{\Delta^3 + (\text{tr} \sigma) / \tilde{\mathbf{K}}} \\ a_2 &= \frac{3 \lambda_4}{\Delta^2 (\Delta^3 + (\text{tr} \sigma) / \tilde{\mathbf{K}})} & & \\ a_3 &= \frac{\lambda_3}{\Delta^3 + (\text{tr} \sigma) / \tilde{\mathbf{K}}} & b_2 &= \frac{\tilde{\mathbf{K}}^{-1}}{\Delta^3 + (\text{tr} \sigma) / \tilde{\mathbf{K}}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$a_4 = \frac{-\lambda_4 \tilde{\mathbf{K}}^{-1}}{\Delta^3 (\Delta^3 + (\text{tr } \sigma) / \tilde{\mathbf{K}})} \quad \tilde{\mathbf{K}} \text{ nach (C.5)}_3 .$$

Mit der Zerlegung der Dehngeschwindigkeiten ergibt sich für plastisch inkompressibles Materialverhalten

$$\begin{aligned} \overset{\#}{\sigma} = & \frac{\Delta^3}{\lambda_4} \left[\mathbf{D} - \mathbf{D}_{\text{vr}} - \mathbf{D}_0 - \left\{ (a_1 \mathbf{1} - a_2 \sigma) \lambda_2 - (a_3 \mathbf{1} - a_4 \sigma) \frac{b_1}{b_2} \right\} \dot{\Theta} \right. \\ & \left. - (a_3 \mathbf{1} - a_4 \sigma) \frac{\text{tr } \mathbf{D}}{b_2} \right] - \sigma (\text{tr } \mathbf{D}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Zusammen mit dem ersten Hauptsatz

$$\begin{aligned} \hat{\rho} c_{\sigma x} \dot{\Theta} + \lambda_2 \Theta \text{tr } \dot{\sigma} - \frac{\lambda_2}{\Delta} \Theta (\text{tr } \sigma) (\text{tr } \mathbf{D}) + \nu_4 \Theta \dot{x} = & \Delta (1 - \hat{\xi}_r) \sigma \cdot \mathbf{D}_{\text{vr}} + \Delta \sigma \cdot \mathbf{D}_0 \\ + \mu_6 \vartheta [d_{\Theta v}]_v + \mu_1 \frac{m}{\Delta^2} (\text{tr } \tau)^2 + \mu_2 \frac{m}{\Delta^2} \tau \cdot \tau \\ + \frac{1}{\Delta^2} \left\{ \frac{2\mu_3}{\Delta} (\sigma')^2 + (\mu_4 + \omega) \mathbf{Z} \right\} \cdot (\overset{\circ}{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z} \text{tr } \mathbf{D}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

und den damageinduzierten Verzerrungsraten

$$\mathbf{D}_0 = [d_0]_0 \lll \text{LC}_0 \ggg \frac{\sigma'}{\|\sigma'\|} \quad (3.7)$$

erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\overset{\#}{\sigma}^{11} = \frac{\Delta^3}{\lambda_4} \left[\mathbf{D}^{11} - \mathbf{D}_{\text{vr}}^{11} - \mathbf{D}_0^{11} - \left\{ (a_1 - a_2 \sigma^{11}) \lambda_2 - (a_3 - a_4 \sigma^{11}) \frac{b_1}{b_2} \right\} \dot{\Theta} - a_3 \frac{\text{tr } \mathbf{D}}{b_2} \right]$$

$$\overset{\#}{\sigma}^{22} = \frac{\Delta^3}{\lambda_4} \left[\mathbf{D}^{22} - \mathbf{D}_{\text{vr}}^{22} - \mathbf{D}_0^{22} - \left\{ \left(\frac{a_1}{(x^1)^2} - a_2 \sigma^{22} \right) \lambda_2 - \left(\frac{a_3}{(x^1)^2} - a_4 \sigma^{22} \right) \frac{b_1}{b_2} \right\} \dot{\Theta} - a_3 \frac{\text{tr } \mathbf{D}}{b_2} \right]$$

$$\overset{\#}{\sigma}^{33} = \frac{\Delta^3}{\lambda_4} \left[\mathbf{D}^{33} - \mathbf{D}_{\text{vr}}^{33} - \mathbf{D}_0^{33} - \left\{ (a_1 - a_2 \sigma^{33}) \lambda_2 - (a_3 - a_4 \sigma^{33}) \frac{b_1}{b_2} \right\} \dot{\Theta} - a_3 \frac{\text{tr } \mathbf{D}}{b_2} \right]$$

$$\overset{\#}{\sigma}^{13} = \frac{\Delta^3}{\lambda_4} \left[\mathbf{D}^{13} - \mathbf{D}_{\text{vr}}^{13} - \mathbf{D}_0^{13} - \left\{ (-a_2 \sigma^{13}) \lambda_2 - (-a_4 \sigma^{13}) \frac{b_1}{b_2} \right\} \dot{\Theta} \right]$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho} c_{\sigma x} \dot{\Theta} = & \Delta \left[\sigma^{11} D_{VT}^{11} + \sigma^{22} D_{VT}^{22} (x^1)^4 + \sigma^{33} D_{VT}^{33} + 2 \sigma^{13} D_{VT}^{13} \right] \left[1 - \frac{v_4 \Theta_0}{\Delta} - \frac{v_3 x}{\Delta} - \frac{v_2 c_T}{\Delta^2} \right] \\
 & + \Delta \left[\sigma^{11} D_0^{11} + \sigma^{22} D_0^{22} (x^1)^4 + \sigma^{33} D_0^{33} + 2 \sigma^{13} D_0^{13} \right] + \mu_6 \vartheta \left[d_{\Theta v} \right]_v \\
 & + \mu_1 \frac{m}{\Delta^2} \left[\tau^{11} + \tau^{22} (x^1)^2 + \tau^{33} \right]^2 + \mu_2 \frac{m}{\Delta^2} \left[(\tau^{11})^2 + (\tau^{22})^2 (x^1)^4 + (\tau^{33})^2 \right] \\
 & + \frac{d_z}{\Delta \rho} \left\{ \left[\frac{\mu_3}{\Delta^2} \{ (\sigma^{11})^2 + (\sigma^{33})^2 \} + \frac{\mu_4 + \omega}{\Delta} Z^{11} \right]^2 + \left[\frac{\mu_3}{\Delta^2} \sigma^{122} (x^1)^2 + \frac{\mu_4 + \omega}{\Delta} Z^{22} \right]^2 (x^1)^4 \right. \\
 & + \left[\frac{\mu_3}{\Delta^2} \{ (\sigma^{13})^2 + (\sigma^{33})^2 \} + \frac{\mu_4 + \omega}{\Delta} Z^{33} \right]^2 + 2 \left[\frac{\mu_4 + \omega}{\Delta} Z^{12} \right]^2 \\
 & \left. + 2 \left[\frac{\mu_4 + \omega}{\Delta} Z^{23} \right]^2 + 2 \left[\frac{\mu_3}{\Delta^2} \{ \sigma^{11} \sigma^{13} + \sigma^{13} \sigma^{33} \} + \frac{\mu_4 + \omega}{\Delta} Z^{13} \right]^2 \right\} \\
 & \left\langle \left\langle LC_z (\overset{\#}{\sigma}^{\alpha\beta}) \right\rangle \right\rangle + \frac{\lambda_2 \Theta}{\Delta} \left[\sigma^{11} + \sigma^{22} (x^1)^2 + \sigma^{33} \right] \text{tr} \mathbf{D} \\
 & - \lambda_2 \Theta \left[\overset{\#}{\sigma}^{11} + \sigma^{11} \text{tr} \mathbf{D} + (\overset{\#}{\sigma}^{22} + \sigma^{22} \text{tr} \mathbf{D}) (x^1)^2 + \overset{\#}{\sigma}^{33} + \sigma^{33} \text{tr} \mathbf{D} \right]
 \end{aligned}$$

$$D_0^{11} = [d_0]_0 \left\langle \left\langle LC_0 (\overset{\#}{\sigma}) \right\rangle \right\rangle \sigma^{11} / \sqrt{(\sigma^{111})^2 + (\sigma^{122})^2 (x^1)^4 + (\sigma^{133})^2 + 2(\sigma^{13})^2}$$

$$D_0^{22} = [d_0]_0 \left\langle \left\langle LC_0 (\overset{\#}{\sigma}) \right\rangle \right\rangle \sigma^{122} / \sqrt{(\sigma^{111})^2 + (\sigma^{122})^2 (x^1)^4 + (\sigma^{133})^2 + 2(\sigma^{13})^2}$$

$$D_0^{33} = [d_0]_0 \left\langle \left\langle LC_0 (\overset{\#}{\sigma}) \right\rangle \right\rangle \sigma^{133} / \sqrt{(\sigma^{111})^2 + (\sigma^{122})^2 (x^1)^4 + (\sigma^{133})^2 + 2(\sigma^{13})^2}$$

$$D_0^{13} = [d_0]_0 \left\langle \left\langle LC_0 (\overset{\#}{\sigma}) \right\rangle \right\rangle \sigma^{13} / \sqrt{(\sigma^{111})^2 + (\sigma^{122})^2 (x^1)^4 + (\sigma^{133})^2 + 2(\sigma^{13})^2} .$$

(3.8)₁₋₉

(3.8)₅ kann vereinfachend geschrieben werden:

$$\hat{\rho} c_{\sigma x} \dot{\Theta} = \Theta_1 + \Theta_2 \left\langle \left\langle LC_z \right\rangle \right\rangle - \lambda_2 \Theta \left[\overset{\#}{\sigma}^{11} + \overset{\#}{\sigma}^{22} (x^1)^2 + \overset{\#}{\sigma}^{33} \right] \quad (3.8)_{51}$$

Die Identität der beiden Belastungsbedingungen für $v_z = v_o$ vereinfacht die weitere Rechnung:

$$LC_o = LC_z = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{2}{\Delta} \tau^1 - v_z \mathbf{1} \right) \cdot \left(\overset{\#}{\tau} + m\tau \right) \quad (3.9)$$

Durch ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} \Delta LC_z = & \left\{ \frac{2}{\Delta} \tau^{11} - v_z \right\} \left\{ \overset{\#}{\sigma}^{11} \left(d_1 + \frac{2}{\Delta} d_2 \tau^{11} + \frac{2}{\Delta} d_3 Z^{11} \right) + \overset{\#}{\sigma}^{13} \left(\frac{2}{\Delta} d_2 \tau^{13} + \frac{2}{\Delta} d_3 Z^{13} \right) + d_4 \dot{x} \tau^{11} \right\} \\ & + \left\{ \frac{2}{\Delta} \tau^{122} - \frac{v_z}{(x^1)^2} \right\} (x^1)^4 \left\{ \overset{\#}{\sigma}^{22} \left(d_1 + \frac{2}{\Delta} d_2 \tau^{22} (x^1)^4 + \frac{2}{\Delta} d_3 Z^{22} (x^1)^4 \right) + d_4 \dot{x} \tau^{22} \right\} \\ & + \left\{ \frac{2}{\Delta} \tau^{133} - v_z \right\} \left\{ \overset{\#}{\sigma}^{33} \left(d_1 + \frac{2}{\Delta} d_2 \tau^{33} + \frac{2}{\Delta} d_3 Z^{33} \right) + \overset{\#}{\sigma}^{13} \left(\frac{2}{\Delta} d_2 \tau^{13} + \frac{2}{\Delta} d_3 Z^{13} \right) + d_4 \dot{x} \tau^{33} \right\} \\ & + \frac{2}{\Delta} \tau^{112} (x^1)^2 \left\{ \overset{\#}{\sigma}^{11} \left(\frac{1}{\Delta} d_2 \tau^{12} + \frac{1}{\Delta} d_3 Z^{12} \right) + \overset{\#}{\sigma}^{13} \left(\frac{1}{\Delta} d_2 \tau^{23} + \frac{1}{\Delta} d_3 Z^{23} \right) \right. \\ & \quad \left. + \overset{\#}{\sigma}^{22} \left(\frac{1}{\Delta} d_2 \tau^{12} + \frac{1}{\Delta} d_3 Z^{12} \right) (x^1)^2 + d_4 \dot{x} \tau^{12} \right\} \\ & + \frac{2}{\Delta} \tau^{113} \left\{ \overset{\#}{\sigma}^{13} \left(d_1 + \frac{1}{\Delta} d_2 (\tau^{33} + \tau^{11}) + \frac{1}{\Delta} d_3 (Z^{11} + Z^{33}) \right) \right. \\ & \quad \left. + \overset{\#}{\sigma}^{11} (d_2 \tau^{13} + d_3 Z^{13}) + \overset{\#}{\sigma}^{33} (d_2 \tau^{13} + d_3 Z^{13}) + d_4 \dot{x} \tau^{13} \right\} \\ & + \frac{2}{\Delta} \tau^{123} (x^1)^2 \left\{ \overset{\#}{\sigma}^{13} \left(\frac{1}{\Delta} d_2 \tau^{12} + \frac{1}{\Delta} d_3 Z^{12} \right) + \overset{\#}{\sigma}^{33} \left(\frac{1}{\Delta} d_2 \tau^{23} + \frac{1}{\Delta} d_3 Z^{23} \right) \right. \\ & \quad \left. + \overset{\#}{\sigma}^{22} \left(\frac{1}{\Delta} d_2 \tau^{23} + \frac{1}{\Delta} d_3 Z^{23} \right) (x^1)^2 + d_4 \dot{x} \tau^{23} \right\} \quad (3.10) \end{aligned}$$

und umsortieren läßt sich die Belastungsbedingung auf folgende Form bringen:

$$\Delta LC_z = LC_{z_1} \overset{\#}{\sigma}^{11} + LC_{z_2} \overset{\#}{\sigma}^{22} + LC_{z_3} \overset{\#}{\sigma}^{33} + LC_{z_4} \overset{\#}{\sigma}^{13} + LC_{z_0} \quad (3.11)$$

Wir erhalten so das zur Bestimmung der Raten erforderliche Gleichungssystem:

$$\mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{B} \quad (3.12)$$

Darin sind

und

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\sigma\sigma} & \mathbf{A}^{\sigma\Theta} & \mathbf{A}^{\sigma D} \\ \mathbf{A}^{\Theta\sigma} & \mathbf{A}^{\Theta\Theta} & \mathbf{A}^{\Theta D} \\ \mathbf{A}^{D\sigma} & \mathbf{A}^{D\Theta} & \mathbf{A}^{DD} \end{bmatrix}_{9*9} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \# \\ \sigma \\ \dot{\Theta} \\ \mathbf{D}_0 \end{bmatrix}_{9*1} \quad (3.13)$$

Für die Untermatrizen von \mathbf{A} ergibt sich:

$$\mathbf{A}^{\sigma\sigma} = \frac{\lambda_4}{\Delta^3} [\mathbf{1}]_{4*4} \quad \mathbf{A}^{\sigma D} = [\mathbf{1}]_{4*4} \quad \mathbf{A}^{DD} = [\mathbf{1}]_{4*4}$$

$$\mathbf{A}^{\Theta\Theta} = \hat{\rho} c_{\sigma x} \quad \mathbf{A}^{D\Theta} = [\mathbf{0}]_{4*4}$$

$$\mathbf{A}^{\sigma\Theta} = \begin{bmatrix} (a_1 - a_2 \sigma^{11}) \lambda_2 - (a_3 - a_4 \sigma^{11}) \frac{b_1}{b_2} \\ \left(\frac{a_1}{(x')^2} - a_2 \sigma^{22} \right) \lambda_2 - \left(\frac{a_3}{(x')^2} - a_4 \sigma^{22} \right) \frac{b_1}{b_2} \\ (a_1 - a_2 \sigma^{33}) \lambda_2 - (a_3 - a_4 \sigma^{33}) \frac{b_1}{b_2} \\ (-a_2 \sigma^{13}) \lambda_2 - (-a_4 \sigma^{13}) \frac{b_1}{b_2} \end{bmatrix}_{4*1}$$

$$\mathbf{A}^{\Theta\sigma} = \begin{bmatrix} \lambda_2 \Theta - \Theta_2 LC_{z_1} \\ \lambda_2 \Theta (x')^2 - \Theta_2 LC_{z_2} \\ \lambda_2 \Theta - \Theta_2 LC_{z_3} \\ -\Theta_2 LC_{z_4} \end{bmatrix}_{4*1} \quad \mathbf{A}^{\Theta D} = \begin{bmatrix} -\Delta \sigma^{11} \\ -\Delta \sigma^{22} (x')^4 \\ -\Delta \sigma^{33} \\ -2\Delta \sigma^{13} \end{bmatrix}_{4*1}$$

$$\mathbf{A}^{D\sigma} = \begin{bmatrix} -d_b^* \sigma^{111} LC_{D_1} & -d_b^* \sigma^{111} LC_{D_2} & -d_b^* \sigma^{111} LC_{D_3} & -d_b^* \sigma^{111} LC_{D_4} \\ -d_b^* \sigma^{122} LC_{D_1} & -d_b^* \sigma^{122} LC_{D_2} & -d_b^* \sigma^{122} LC_{D_3} & -d_b^* \sigma^{122} LC_{D_4} \\ -d_b^* \sigma^{133} LC_{D_1} & -d_b^* \sigma^{133} LC_{D_2} & -d_b^* \sigma^{133} LC_{D_3} & -d_b^* \sigma^{133} LC_{D_4} \\ -d_b^* \sigma^{113} LC_{D_1} & -d_b^* \sigma^{113} LC_{D_2} & -d_b^* \sigma^{113} LC_{D_3} & -d_b^* \sigma^{113} LC_{D_4} \end{bmatrix}_{4*4}$$

$$\text{mit } d_b^* = [d_b]_0 / \sqrt{(\sigma^{111})^2 + (\sigma^{122})^2 (x')^4 + (\sigma^{133})^2 + 2(\sigma^{113})^2}$$

Die rechte Seite **B** des Gleichungssystems lautet:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} v_{1,1} - \gamma_T [\Phi_T]_T (\sigma^{11} - X_T^{11}) \\ \frac{v_1}{(x^1)^3} - \gamma_T [\Phi_T]_T (\sigma^{122} - X_T^{22}) \\ v_{3,3} - \gamma_T [\Phi_T]_T (\sigma^{133} - X_T^{33}) \\ \frac{1}{2} (v_{1,3} + v_{3,1}) \\ \Theta_1 + \Theta_2 LC_{z_0} - \lambda_2 \left(v_{1,1} + \frac{v_1}{x^1} + v_{3,3} \right) (\sigma^{11} + \sigma^{22} (x^1)^2 + \sigma^{33}) \\ d_0^* \sigma^{111} LC_{D_0} \\ d_0^* \sigma^{122} LC_{D_0} \\ d_0^* \sigma^{133} LC_{D_0} \\ d_0^* \sigma^{113} LC_{D_0} \end{array} \right]_{9 \times 1}$$

Mit den Lösungen $\overset{\#}{\sigma}$, Θ und D_0 des Gleichungssystems (3.12) erhalten wir das Differentialgleichungssystem des Stoffgesetzes in folgender Form:

Raten der Spannungen:

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}^{11} &= \overset{\#}{\sigma}^{11} + \sigma^{13} (v_{1,3} - v_{3,1}) - 2 \sigma^{13} W_{i,3}^1 + \sigma^{11} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \\
 \dot{\sigma}^{22} &= \overset{\#}{\sigma}^{22} - \frac{2}{x^1} v_1 \sigma^{22} + \sigma^{22} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \\
 \dot{\sigma}^{33} &= \overset{\#}{\sigma}^{33} + \sigma^{13} (v_{3,1} - v_{1,3}) + 2 \sigma^{13} W_{i,3}^1 + \sigma^{33} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \\
 \dot{\sigma}^{13} &= \overset{\#}{\sigma}^{13} + \frac{1}{2} \sigma^{11} (v_{3,1} - v_{1,3}) + \frac{1}{2} \sigma^{33} (v_{1,3} - v_{3,1}) + (\sigma^{11} - \sigma^{33}) W_{i,3}^1 + \sigma^{13} (\text{tr } \mathbf{D}_R)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Raten der kinematischen Verfestigung:

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_T^{11} &= \Delta c_T \gamma_T [\Phi_T]_T (\sigma^{11} - X_T^{11}) + X_T^{13} (v_{1,3} - v_{3,1}) - 2 X_T^{13} W_{i,3}^1 + X_T^{11} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \\
 \dot{X}_T^{22} &= \Delta c_T \gamma_T [\Phi_T]_T (\sigma^{122} - X_T^{22}) - \frac{2}{x^1} v_1 X_T^{22} + X_T^{22} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \\
 \dot{X}_T^{33} &= \Delta c_T \gamma_T [\Phi_T]_T (\sigma^{133} - X_T^{33}) + X_T^{13} (v_{3,1} - v_{1,3}) + 2 X_T^{13} W_{i,3}^1 + X_T^{33} (\text{tr } \mathbf{D}_R)
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_T^{13} = \Delta c_T \gamma_T [\Phi_T]_T (\sigma^{113} - X_T^{33}) + \frac{1}{2} (X_T^{33} - X_T^{11}) (v_{3,1} - v_{1,3}) + (\sigma^{11} - \sigma^{33}) W_{1,3}^1 \\ + X_T^{13} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \end{aligned}$$

mit den Funktionen c_T, γ_T und Φ_T aus Anhang 1
und

$$\text{tr } \mathbf{D}_R = v_{1,1} + \frac{v_1}{x^1} + v_{3,3} \quad (3.16)$$

Rate der Versetzungsdichte:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa} = K \gamma_T [\Phi_T]_T \left[\sigma^{11} (\sigma^{111} - X_T^{11}) + \sigma^{22} (\sigma^{122} - X_T^{22}) (x^1)^4 + \sigma^{33} (\sigma^{133} - X_T^{33}) \right. \\ \left. + 2 \sigma^{13} (\sigma^{113} - X_T^{13}) \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

mit den Funktionen K, γ_T und Φ_T aus Anhang 1.

Die Prozeßgeschwindigkeit ergibt sich zu:

$$PG = \sqrt{2/3} \sqrt{v_{1,1}^2 + (\frac{1}{x^1} v_1)^2 + v_{3,3}^2 + \frac{1}{2} (v_{1,3} + v_{3,1})^2} + \chi_{u1} \dot{\Theta} \quad (3.18)$$

Raten der Spannungskonzentrationen:

$$\begin{aligned} \dot{\tau}^{11} = d_1 \overset{\#}{\sigma}^{11} + \frac{2}{\Delta} d_2 (\overset{\#}{\sigma}^{11} \tau^{11} + \overset{\#}{\sigma}^{13} \tau^{13}) + \frac{2}{\Delta} d_3 (\overset{\#}{\sigma}^{11} Z^{11} + Z^{13} \overset{\#}{\sigma}^{13}) + d_4 \dot{\kappa} \tau^{11} - m \tau^{11} \\ + \tau^{13} (v_{1,3} - v_{3,1}) - 2 \tau^{13} W_{1,3}^1 + \tau^{11} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \\ \dot{\tau}^{12} = \frac{1}{\Delta} d_2 (\tau^{21} \overset{\#}{\sigma}^{11} + \tau^{23} \overset{\#}{\sigma}^{13} + \tau^{21} \overset{\#}{\sigma}^{22} (x^1)^2) + \frac{1}{\Delta} d_3 (Z^{21} \overset{\#}{\sigma}^{11} + Z^{23} \overset{\#}{\sigma}^{13} + Z^{21} \overset{\#}{\sigma}^{22} (x^1)^2) \\ + d_4 \dot{\kappa} \tau^{12} - m \tau^{12} + \frac{1}{2} \tau^{23} (v_{1,3} - v_{3,1}) + \tau^{12} \frac{1}{x^1} v_1 - \tau^{23} W_{1,3}^1 + \tau^{12} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \\ \dot{\tau}^{13} = d_1 \overset{\#}{\sigma}^{13} + \frac{2}{\Delta} d_2 (\overset{\#}{\sigma}^{13} (\tau^{11} + \tau^{33}) + \tau^{13} (\overset{\#}{\sigma}^{11} + \overset{\#}{\sigma}^{33})) + d_4 \dot{\kappa} \tau^{13} - m \tau^{13} \\ + \frac{2}{\Delta} d_3 (\overset{\#}{\sigma}^{13} (Z^{11} + Z^{33}) + Z^{13} (\overset{\#}{\sigma}^{11} + \overset{\#}{\sigma}^{33})) + \frac{1}{2} \tau^{11} (v_{3,1} - v_{1,3}) \\ + \frac{1}{2} \tau^{33} (v_{1,3} - v_{3,1}) + \tau^{11} W_{1,3}^1 - \tau^{33} W_{1,3}^1 + \tau^{13} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \quad (3.19) \\ \dot{\tau}^{22} = d_1 \overset{\#}{\sigma}^{22} + \frac{2}{\Delta} d_2 \tau^{22} \overset{\#}{\sigma}^{22} (x^1)^4 + \frac{2}{\Delta} d_3 Z^{22} \overset{\#}{\sigma}^{22} (x^1)^4 + d_4 \dot{\kappa} \tau^{22} - m \tau^{22} - \frac{2}{x^1} v_1 \tau^{22} \\ + \tau^{22} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \\ \dot{\tau}^{23} = \frac{1}{\Delta} d_2 (\tau^{23} \overset{\#}{\sigma}^{33} + \tau^{21} \overset{\#}{\sigma}^{13} + \tau^{23} \overset{\#}{\sigma}^{22} (x^1)^2) + \frac{1}{\Delta} d_3 (Z^{23} \overset{\#}{\sigma}^{33} + Z^{21} \overset{\#}{\sigma}^{13} + Z^{23} \overset{\#}{\sigma}^{22} (x^1)^2) \\ + d_4 \dot{\kappa} \tau^{23} - m \tau^{23} + \frac{1}{2} \tau^{12} (v_{3,1} - v_{1,3}) + \tau^{23} \frac{1}{x^1} v_1 + \tau^{12} W_{1,3}^1 + \tau^{23} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\tau}^{33} = & d_1 \overset{\#}{\sigma}^{33} + \frac{2}{\Delta} d_2 (\overset{\#}{\sigma}^{13} \tau^{13} + \overset{\#}{\sigma}^{33} \tau^{33}) + \frac{2}{\Delta} d_3 (\overset{\#}{\sigma}^{13} Z^{13} + Z^{33} \overset{\#}{\sigma}^{33}) + d_4 \dot{\kappa} \tau^{33} - m \tau^{33} \\ & + \tau^{13} (v_{3,1} - v_{1,3}) + 2 \tau^{13} W_{i,3}^1 + \tau^{33} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \end{aligned}$$

Raten von \mathbf{A}_{VL} :

$$\text{Mit } A_1 = \frac{\Delta^2 \gamma_{VL} [\Phi_{VL}]_V}{\sqrt{(\tau^{11})^2 + (\tau^{122})^2 (X^1)^4 + (\tau^{133})^2 + 2(\tau^{112})^2 + 2(\tau^{113})^2 + 2(\tau^{123})^2}} \quad (3.20)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{A}_{VL}^{11} = & A_1 \tau^{111} + A_{VL}^{13} (v_{1,3} - v_{3,1}) - 2 A_{VL}^{13} W_{i,3}^1 + 2 A_{VL}^{11} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \\ \dot{A}_{VL}^{12} = & A_1 \tau^{112} + \frac{1}{2} A_{VL}^{23} (v_{1,3} - v_{3,1}) + A_{VL}^{12} \frac{1}{X^1} v_1 - A_{VL}^{23} W_{i,3}^1 + 2 A_{VL}^{12} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \\ \dot{A}_{VL}^{13} = & A_1 \tau^{113} + \frac{1}{2} (A_{VL}^{11} - A_{VL}^{33}) (v_{3,1} - v_{1,3}) + (A_{VL}^{11} - A_{VL}^{33}) W_{i,3}^1 + 2 A_{VL}^{13} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \\ \dot{A}_{VL}^{22} = & A_1 \tau^{122} - \frac{2}{X^1} v_1 A_{VL}^{22} + 2 A_{VL}^{22} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \quad (3.21) \\ \dot{A}_{VL}^{23} = & A_1 \tau^{123} + \frac{1}{2} A_{VL}^{12} (v_{3,1} - v_{1,3}) + \frac{1}{X^1} v_1 A_{VL}^{23} + A_{VL}^{12} W_{i,3}^1 + 2 A_{VL}^{23} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \\ \dot{A}_{VL}^{33} = & A_1 \tau^{133} + A_{VL}^{13} (v_{3,1} - v_{1,3}) + 2 A_{VL}^{13} W_{i,3}^1 + 2 A_{VL}^{33} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \end{aligned}$$

Raten des Schädigungstensors \mathbf{Z} :

$$\text{Mit } A_2 = [d_z]_z \ll \text{LC}_z \gg \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \text{falls } \text{LC}_z = & \frac{2}{\Delta^2} \left[(\tau^{111} - \frac{\Delta}{2} v_z) (\overset{\#}{\sigma}^{11} + m \tau^{11}) + \tau^{112} m \tau^{12} + (\tau^{122} - \frac{\Delta}{2} v_z) (\overset{\#}{\sigma}^{22} + m \tau^{22}) \right. \\ & \left. + \tau^{113} (\overset{\#}{\sigma}^{13} + m \tau^{13}) + (\tau^{133} - \frac{\Delta}{2} v_z) (\overset{\#}{\sigma}^{33} + m \tau^{33}) + \tau^{123} m \tau^{23} \right] \quad (3.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } G_z = & \frac{1}{\Delta^2} \left[(\tau^{111})^2 + (\tau^{122})^2 + (\tau^{133})^2 + 2(\tau^{113})^2 + 2(\tau^{111} \tau^{113} + \tau^{133} \tau^{113}) \right. \\ & \left. - \frac{v_z}{\Delta} (\tau^{11} + \tau^{22} + \tau^{33}) - h_z \geq 0 \right] \quad (3.24) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{Z}^{11} = & A_2 \left[\frac{\mu_3}{\Delta^2} [(\sigma^{111})^2 + (\sigma^{113})^2] + \frac{1}{\Delta} (\mu_4 + \omega) Z^{11} \right] + Z^{13} (v_{1,3} - v_{3,1}) - 2 Z^{13} W_{i,3}^1 \\ & + 2 Z^{11} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \\ \dot{Z}^{12} = & A_2 \left[\frac{1}{\Delta} (\mu_4 + \omega) Z^{12} \right] + \frac{1}{2} Z^{23} (v_{1,3} - v_{3,1}) + Z^{12} \frac{1}{X^1} v_1 - Z^{23} W_{i,3}^1 + 2 Z^{12} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \end{aligned}$$

$$\dot{Z}^{13} = A_2 \left[\frac{\mu_3}{\Delta^2} \left[\sigma^{111} \sigma^{113} + \sigma^{113} \sigma^{133} \right] + \frac{1}{\Delta} (\mu_4 + \omega) Z^{13} \right] + \frac{1}{2} (Z^{11} - Z^{33}) (v_{3,1} - v_{1,3}) + (Z^{11} - Z^{33}) W_{1,3}^1 + 2 Z^{13} (\text{tr } \mathbf{D}_R) \quad (3.25)$$

$$\dot{Z}^{22} = A_2 \left[\frac{\mu_3}{\Delta^2} (\sigma^{122})^2 (x^1)^2 + \frac{1}{\Delta} (\mu_4 + \omega) Z^{22} \right] - \frac{2}{x^1} v_1 Z^{22} + 2 Z^{22} (\text{tr } \mathbf{D}_R)$$

$$\dot{Z}^{23} = A_2 \left[\frac{1}{\Delta} (\mu_4 + \omega) Z^{23} \right] + \frac{1}{2} Z^{12} (v_{3,1} - v_{1,3}) + \frac{1}{x^1} v_1 Z^{23} + Z^{12} W_{1,3}^1 + 2 Z^{23} (\text{tr } \mathbf{D}_R)$$

$$\dot{Z}^{33} = A_2 \left[\frac{\mu_3}{\Delta^2} \left[(\sigma^{113})^2 + (\sigma^{133})^2 \right] + \frac{1}{\Delta} (\mu_4 + \omega) Z^{33} \right] + Z^{13} (v_{3,1} - v_{1,3}) + 2 Z^{13} W_{1,3}^1 + 2 Z^{33} (\text{tr } \mathbf{D}_R)$$

mit den Funktionen m, ω und $[d_z]_z$ aus Anhang 1.

Das Maß u der Prozeßgeschwindigkeit wird bestimmt durch

$$\ddot{u} = c (\alpha + \text{PG}) \dot{u} + \frac{c^2}{4} (\alpha + \text{PG})^2 \{ u - u_{\text{Eq}}(\text{PG}) \} \quad (3.26)$$

mit der Definition von PG und der Funktion u_{Eq} aus Anhang 1.

Die Temperaturänderung folgt direkt aus dem Gleichungssystem (3.12), während sich die Rate der Temperaturkonzentrationen ϑ aus

$$\dot{\vartheta} = [d_{\Theta v}]_v \quad (3.27)$$

berechnet .

Abgeschlossen wird das Differentialgleichungssystem durch die Evolutionsgleichung für den inelastischen Spin:

$$W_{1,3}^1 = -W_{1,1}^3 = A_3 \left[X_T^{11} \sigma^{113} + X_T^{13} \sigma^{133} - X_T^{13} \sigma^{111} - X_T^{33} \sigma^{113} \right] \quad (3.28)$$

$$\text{mit } A_3 = \frac{\gamma_{\text{TW}} [\Phi_{\text{TW}}]_T}{\sqrt{(\sigma^{111})^2 + (\sigma^{122})^2 (x^1)^4 + (\sigma^{133})^2 + 2(\sigma^{113})^2} \sqrt{(X_T^{11})^2 + (X_T^{22})^2 (x^1)^4 + (X_T^{33})^2 + 2(X_T^{13})^2}} \quad (3.29)$$

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] **H. Diehl, W. Fornefeld:** Werkstoffverhalten bei hochdynamischer Beanspruchung - Teil 1, Interner Bericht Inst. f. Mechanik der GhKassel, August 1986
- [2] **H. Diehl, W. Fornefeld:** Werkstoffverhalten bei hochdynamischer Beanspruchung - Teil 2, Interner Bericht Inst. f. Mechanik der Gh Kassel, Februar 1987
- [3] **H. Diehl, W. Fornefeld:** Werkstoffverhalten bei hochdynamischer Beanspruchung - Teil 3, Interner Bericht Inst. f. Mechanik der Ruhruniversität Bochum, März 1988
- [4] **H. Diehl, W. Fornefeld:** Werkstoffverhalten bei hochdynamischer Beanspruchung - Teil 4, Interner Bericht Inst. f. Mechanik der Ruhruniversität Bochum, Februar 1989
- [5] **H. Diehl, W. Fornefeld:** Werkstoffverhalten bei hochdynamischer Beanspruchung - Teil 5, Interner Bericht Inst. f. Mechanik der Ruhruniversität Bochum, erscheint Anfang 1990
- [6] **H. Diehl:** Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder , Mitteilung Nr. 66 aus dem Institut für Mechanik der Ruhruniversität Bochum 1989
- [7] **U.S. Lindholm** in R.F. Bunshah (Ed.): Techniques in Metals Research Vol.5, Part 1, Interscience, New York 1971
- [8] **I. Rechenberg :** Evolutionsstrategie, Friedrich Frommann Verlag, 1973
- [9] **D. Müller, G. Hartmann:** Identifikation von Werkstoffparametern mit einem numerischen Optimierungverfahren nach der Evolutionsstrategie, in [75]
- [10] **F. Jähn:** Ein neues Verfahren zur Bestimmung der Fließspannungen von metallischen Werkstoffen bei höchsten Dehngeschwindigkeiten, Dissertation Universität Karlsruhe 1979
- [11] **J. Harding (Ed.):** Mechanical Properties at High Rates of Strain, The Institute of Physics, Bristol and London, 1974
- [12] **J. Harding (Ed.):** Mechanical Properties at High Rates of Strain, The Institute of Physics, Bristol and London, 1979

- [13] **J. Harding (Ed.):** Mechanical Properties at High Rates of Strain, The Institute of Physics, Bristol and London, 1984
- [14] **J. Philibert (Ed.):** Proceedings of the Conference on Mechanical and Physical Behaviour of Materials under Dynamic Loading DYMAT '85, Journal de Physique C-5, 1985
- [15] **C.Y. Chiem, H.D. Kunze, L.W. Meyer (Eds.):** Impact Loading and Dynamic Behaviour of Materials (Proc.IMPACT '87), DGM Informationsgesellschaft, 1988
- [16] **K. Kawata, J. Shioiri (Eds.):** High Velocity Deformation of Solids, IUTAM - Symposium Tokyo 1977, Springer-Verlag 1978
- [17] **K. Kawata, J. Shioiri (Eds.):** Macro - and Micro-Mechanics of High Velocity Deformation and Fracture, IUTAM-Symposium Tokyo 1985, Springer-Verlag 1987
- [18] **S. Nemat-Nasser, R.J. Asaro, G.A. Hegemier (Eds.):** Theoretical Foundation for Large-Scale Computations for Nonlinear Material Behavior, Martinus Nijhoff Publishers, 1984
- [19] **J.A. Zukas, T. Nicholas, H.F. Swift, L.B. Gresczuk, D.R. Curran (Eds.):** Impact Dynamics, John Wiley & Sons, 1982
- [20] **J. Chandra, J.E. Flaherty (Eds):** Computational Aspects of Penetration Mechanics, Lecture Notes in Engineering 3, Springer-Verlag 1983
- [21] **N. Perrone, S.N. Atluri (Eds):** Nonlinear and Dynamic Fracture Mechanics, ASME AMD -Vol. 35, 1979
- [22] **M.A. Meyers, L.E. Murr (Eds.):** Shock Waves and High-Strain-Rate Phenomena in Metals, Plenum Press 1981
- [23] **L.E. Murr, K.P. Staudhammer, M.A. Meyers (Eds.):** Metallurgical Applications of Shock-Wave and High-Strain-Rate Phenomena, Marcel Dekker Inc., 1986
- [24] **P.S. Follansbee:** High Strain Rate Deformation of FCC Metals and Alloys in [23]
- [25] **L.W. Meyer, S. Manwaring:** Critical Adiabatic Shear Strength of Low Alloyed Steel under Compressive Loading, in [23]
- [26] **Z. Rosenberg, D. Dawicke, S. Bless:** A New Technique for Heating Specimen in Split Hopkinson Bar Experiments Using Induction Coil Heaters, in [23]

- [27] **C. Albertini, M. Montagnani:** Testing Techniques Based on the Split Hopkinson Bar, in [11]
- [28] **K.H. Hartmann, H.D. Kunze, L.W. Meyer:** Metallurgical Effects on Impact Loaded Materials, in [22]
- [29] **N.G. Ohlson:** Experimental Methods in Biaxial Loading at High Strain Rates, in [14]
- [30] **C. Albertini, M. Montagnani, E.V Pizzinato:** Specimen Size and Shape Effects at High Strain-rate on the Mode of Yielding and Flow of AISI 316, in [15]
- [31] **Y.C.T Yeung Wye Kong, B. Parsons, B.N. Cole:** The Dispersive Behaviour of a Hopkinson Pressure Bar in Material Property Tests, in [11]
- [32] **L.D. Bertholf, C.H. Karnes:** Two-Dimensional Analysis of the Split Hopkinson Pressure Bar System, J. Mech. Phys. Solids 1975 , Vol 23, p1-19
- [33] **E.D.H. Davies, S.C. Hunter:** The Dynamic Compression Testing of Solids by the Method of the Split Hopkinson Pressure Bar, J. Mech. Phys. Solids 1963 Vol11, p 155-179
- [34] **T. Nojima, K. Ogawa:** New Applications of Split Hopkinson Bar to Materials Testing, in [14]
- [35] **R.H. Warnes, R.R. Karpp, P.S. Follansbee:** The Freely Expanding Ring - A Test to Determine Material Strength at High Strain Rates, in [14]
- [36] **R.E. Rowlands, T. Liber, I.M. Daniel, P.G Rose:** High-Order Numerical Differentiation of Experimental Information, Experimental Mech. Vol13 1973 p 105-113
- [37] **R.H. Warnes, T.A. Duffey, R.R. Karpp, A.E. Carden:** An Improved Technique for Determining Material Properties Using the Expanding Ring, in [22]
- [38] **W.H. Gourdin:** Electromagnetic Ring Expansion: Experiment, Analysis and Applications to High- Stain- Rate Testing, in [15]
- [39] **L.E. Murr:** Residual Microstructure - Mechanical Property Relationship in Shock-Loaded Metals and Alloys, in [22]
- [40] **P.S. DeCarli, M.A. Meyers:** Design of Uniaxial Strain Shock Recovery Experiments in [22]

- [41] **Y. Yeshurun, D.G. Brandon, Z. Rosenberg:** Impact Damage Mechanisms in De-based Alumina, in [15]
- [42] **M. Perez, J. Costeraste:** Infrared Method for Postshock Temperature Measurements of Solids, in [15]
- [43] **R.J. Clifton, P. Kumar:** Dislocation Configurations Due to Plate Impact, in [16]
- [44] **D.A. Shockey, D.R. Curran, L. Seaman:** Computer Modelling of Microscopic Failure Processes under Dynamic Loads, in [14]
- [45] **R.W. Klopp, R.J. Clifton, T.G. Shawi:** Pressure-Shear Impact and the Dynamic Viscoplastic Response of Metals, *Mechanics of Materials* 4 1985 p 375-385
- [46] **D.A. Shockey:** Materials Aspects of the Adiabatic Shear Phenomenon, in [23]
- [47] **L. Seaman, D.R. Curran, D.C. Erlich, T. Cooper, O. Dullum:** Shear Band Observations and Derivations of Requirements for a Shear Band Model, in [14]
- [48] **D.A. Shockey, D.C. Erlich:** Metallurgical Influences on Shear Band Activity, in [22]
- [49] **H.D. Kunze, L.W. Meyer:** Materials for Extreme Dynamic Loads, in [23]
- [50] **I. Gilath, S. Eliezer, M. Dariel, L. Kornblit:** High Strain Rate Ductility of Aluminium in Uniaxial Tension as an Effect of Laser Induced Shock Waves, in [15]
- [51] **G.I. Taylor:** The Use of Flat-Ended Projectiles for Determining Dynamic Yield Stress, Part I, *Proc. Roy. Soc. London*, A 194, 289-299, 1948
- [52] **M. Ravid, S.R. Bodner, I. Holeman:** Analysis of Very High Speed Impact, *Int. J. Engng. Sci.* 1987 Vol 25, No. 4, p 473-482
- [53] **S.T. Jenq, W. Goldsmith, J.M. Kelly:** Effect of Target Bending in Normal Impact of a Flat-Ended Cylindrical Projectile near the Ballistic Limit, *Int. J. Solids Structures* 1988 Vol 24, No. 12, p 1243-1266
- [54] **H. Fukuoka, H. Toda:** High Velocity Impact of Mild Steel Cylinder, in [16]
- [55] **D. Bois, A. Grave, M.L. Meyniel:** Numerical Simulations of Impact Test on a Rigid Wall, in [15]

- [56] **E. El-Magd, W. Abdel-Ghany, M. Homayun:** Application of the FEM to Elastoplastic Wave Propagation in Metals, Eng. Comp. 1985, Vol2, p114-120
- [57] **L.W. Meyer:** Werkstoffverhalten hochfester Stähle unter einsinnig dynamischer Belastung, Dissertation Universität Dortmund 1981
- [58] **K. Kussmaul, W. Issler:** Impact Loading of Tensile Specimen - Numerical Analysis and Experimental Results, in [15]
- [59] **F.-J. Behler, B.-O. Reinders:** Mechanical Twinning of Armco-Iron as Function of Strain-Rate, in [15]
- [60] **K. Kussmaul, C. Zimmermann, W. Issler:** Dynamic Tensile Testing with a Large Scale 33MJ Rotating Disk Impact Machine, in [14]
- [61] **K. Hoog:** The Tensile Impact as a Method to Evaluate the Dynamic Behaviour of Materials, in [15]
- [62] **L.W. Meyer, H.D. Kunze, K. Seifert:** Dynamic Behavior of High Strength Steels under Tension, in [22]
- [63] **J. Harding:** Material Behaviour at High Rates of Strain, in [15]
- [64] **J.D. Campbell, W.G. Ferguson:** The Temperature and Strain Rate Dependence of Shear Strength of Mild Steel, Phil. Mag. 1970 Vol.21 p63-82
- [65] **U.S. Lindholm:** Deformation Maps in the Region of High Dislocation Velocity, in [17]
- [66] **K. E. Buck, D.W. Scharpf:** Einführung in die Matrizen-Verschiebungsmethode, in [96]
- [67] **R.J. Asaro:** Micromechanics of Crystals and Polycrystals, Adv. Appl. Mech 23, 1983, p2-117
- [68] **J. Shioiri et al.:** Experimental Studies on the Behaviour of Dislocations in Copper at High Rates of Strain, in [16]
- [69] **J. Shioiri:** An Ultrasonic Study of the Rate Controlling Mechanism of Dislocation Motion at High Rates of Strain, in [14]
- [70] **J. Shioiri, K. Sakino:** Comparison of Flow Stresses of Aluminium at High Rates of Strain Calculated on the Basis of Ultrasonic Study of Dislocation Behavior with Directly Measured Ones, in [15]

- [71] **L.W. Meyer, L. Staskewitsch:** Mechanical Behaviour of some Steels under Dynamic Loading, in [16]
- [72] **Th. Nicholas:** Material Behavior at High Strain Rates, Kap.8 in [19]
- [73] **M. Korzen:** Beschreibung des inelastischen Materialverhaltens im Rahmen der Kontinuumsmechanik: Vorschlag einer Materialgleichung vom viskoelastisch-plastischen Typ, Dissertation TH Darmstadt, 1988
- [74] **T.Belytschko, T.J.R.Hughes (Eds.):** Computational Methods for Transient Analysis, North-Holland, 1983
- [75] **O.T. Bruhns (Ed.):** Workshop über große plastische Formänderungen, Bad Honnef 1988, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 63, Bochum, 1989
- [76] **L. Schreiber:** Versagenskriterium und -Lasten für dickwandige Behälter, Dissertation, Mitteilung Nr.2 aus dem Institut für Mechanik, Gesamthochschule Kassel 1985
- [77] **J. D. Campbell, W. G. Ferguson:** The Temperature and Strain Rate Dependence of Shear Strength of Mild Steel, Phil. Mag. Vol.21 1/1970 p63-82
- [78] **K. E. Buck:** Rotationskörper unter beliebiger Belastung, in [96]
- [79] **P.G. Bergan (Ed.) :** Finite Elements in Nonlinear Mechanics Vol.2, Tapir Publishers 1978
- [80] **J.A. Zukas:** Numerical Simulation of Impact Phenomena, Kap.10 in [19]
- [81] **J.N. Reddy:** Impact of Laminated Composite Plate: A Review of Recent Computational Developments, in [29]
- [82] **J.A. Zukas:** Three Dimensional Computer Codes for High Velocity Impact Simulation, Kap. 11 in [19]
- [83] **K.D. Kimsey:** Calculation of Penetration, in [18]
- [84] **K.-J. Bathe:** Finite-Elemente-Methoden, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1986
- [85] **J. H. Argyris, H.-P. Mlejnek:** Die Methode der Finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik, Band 1 -3 , F. Vieweg & Sohn , Braunschweig-Wiesbaden 1986
- [86] **O.C. Zienkiewicz:** Methode der finiten Elemente, Carl Hanser Verlag, München, 1975, 1. Auflage

- [87] **U. Rott, W. Fornefeld:** Internes Arbeitspapier zum FE-Programm BRUNS
- [88] **O.T. Bruhns, B. Boecke, F. Link:** The Constitutive Relations of Elastic-Inelastic Materials at Small Strains, Nuclear Engineering and Design 83, 1984, p 325-331
- [89] **D.B. Macvean:** Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren, ZAMP 19 (1968), 157-185
- [90] **U. Schmid:** Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern, Dissertation, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 50, Bochum, 1987
- [91] **O.T. Bruhns:** Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Verzweigungslasten elasto-plastisch deformierter Kontinua, Mitteilung 74-9, Institut KIB, Bochum, 1974
- [92] **J. Betten:** Elastizitäts- und Plastizitätslehre, 2. Auflage, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1986
- [93] **J. Paulun:** Zur Theorie und Berechnung geometrisch und physikalisch nicht-linearer Kontinua mit Anwendung der Methode der finiten Elemente, Dissertation, Hannover, 1977
- [94] **K.-D. Klee:** Theoretische und numerische Behandlung geometrisch nichtlinearer viskoplastischer Kontinua, Dissertation, Hannover, 1979
- [95] **R.H. Gallagher:** Finite-Element-Analysis, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1976
- [96] **K.E. Buck, D.W. Scharpf, E. Stein, W. Wunderlich:** Finite Elemente in der Statik, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf, 1973
- [97] **J. Dankert:** Numerische Methoden der Mechanik, Springer Verlag, Wien, New York, 1977
- [98] **H.R. Schwarz:** Methode der finiten Elemente, 2., überarbeitete und erweiterte Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1984
- [99] **C. Miehe:** Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse, Dissertation, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover NR F88/6
- [100] **M. Pitzer:** Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes, Dissertation, Mitteilung aus dem Institut für Mechanik Nr. 61, Bochum, 1988

- [101] **R.D. Grigorieff:** Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen, Band 1, B.G. Teubner 1972
- [102] **R.D. Grigorieff:** Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen, Band 2, B.G. Teubner 1972
- [103] **E. Fehlberg:** Klassische Runge-Kutta-Formeln fünfter und siebter Ordnung mit Schrittweitenkontrolle, Computing 4, 1969
- [104] **G.L. Goudreau:** Large Scale Computation, in [18]
- [105] **M.J. Mikkola, M.T.E Tuomala, H. Sinisalo:** Finite Element Analysis of Quasi-static and Dynamic Problems of Elastic Viscoplastic Solids, in [79]
- [106] **T.J.R. Hughes:** Analysis of Transient Algorithms with Particular Reference to Stability Behavior, in [74]
- [107] **T. Belytschko, R. Mullen:** Explicit Integration of Structural Problems in [79]
- [108] **P. Wriggers:** Zur Berechnung von Stoß- und Kontaktproblemen mit Hilfe der FE-Methode, Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover NR F81/1
- [109] **K. Tanaka, T. Kurokawa, K. Ueda:** Plastic Stress Wave Propagation in a Circular Bar Induced by a Longitudinal Impact, in [17]
- [110] **H.-G. Höck:** Mechanisches Verhalten metallischer Werkstoffe bei Wellenausbreitung, in: D. Besdo (Hrsg.): Workshop zu Numerischen Methoden in der Plastomechanik, Universität Hannover, Institut für Mechanik, 1986
- [111] **L.D. Bertholf, C.H. Karnes:** Axisymmetric Elastic-Plastic Wave Propagation in 6061-T6 Aluminium Bars of Finite Length, in J. of App. Mech. Vol.36 No.3 1969 p533-541
- [112] **K. Kawata, S. Hashimoto, K. Kurokawa:** Analysis of High Velocity Tension of Bars of Finite Length of BCC and FCC Metalls with their own Constitutive Equations, in [16]
- [113] **T.Belytschko:** An Overview of Semidiscretization and Time Integration Procedures, in [74]
- [114] **W. Beitz, K.-H. Küttner (Hrsg.):** Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau, 16.korrigierte und ergänzte Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo 1987

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalem Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity

- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells

- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen

- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz K. Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte

- Nr. 52 W. Trampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 J. Makowsky/H. Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotations-symmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 J. Makowski/H. Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf /Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten

- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationschalen
- Nr. 72 Jerzy Makowski / Jacek Chrościelewski / Helmut Stumpf:
Theoretical foundations of computational analysis of shells undergoing finite elastic deformation
- Nr. 73 Werner Fornefeld:
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 73**