



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Christian Scholz

Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung
druckbelasteter Rotationsschalen

Heft Nr. 71



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik
Ruhr-Universität Bochum**

Christian Scholz

**Ein Beitrag zur
Gestaltoptimierung
druckbelasteter Rotationsschalen**

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 71
Dezember 1989**

Herausgeber: Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Otto T. Bruhns

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

Tag der Einreichung: 02.10.1989

Tag der mündlichen Prüfung: 15.12.1989

© 1989 Dr.-Ing. Christian Scholz
Brahmsstr. 14, 4630 Bochum 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. em. Dr.-Ing. Th. Lehmann für die Aufgabenstellung, meine Aufnahme als wissenschaftlichem Mitarbeiter in den Lehrstuhl und für die Übernahme eines Referates und Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns für die weitere Betreuung der Arbeit. Weiter danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns und Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller für ihr freundliches Interesse an dieser Arbeit, hilfreiche Hinweise zu der Bewältigung der damit verbundenen Probleme und für die Übernahme von Referaten.

Die dargestellten Ergebnisse wurden mit Hilfe eigens entwickelter Computerprogramme ermittelt. Die dafür nötigen Rechner wurden mir freundlicherweise vom Lehrstuhl für Mechanik I zur Verfügung gestellt. Ich möchte an dieser Stelle allen Mitarbeitern des Institutes danken, die zu der Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben. In besonderem Maße möchte ich Herrn Dr.-Ing. Albert Meyers und Herrn Dr.-Ing. Guido Obermüller nennen, die meine Arbeit mit vielen wertvollen Ratschlägen und der Unterstützung bei der Lösung zahlreicher numerischer Probleme sehr gefördert haben. Abschließend danke ich Herrn Dipl.-Ing. Bernd Leicht, Herrn Dr.-Ing. Guido Obermüller, Herrn Dipl.-Ing. Ulfert Rott und Herrn Dr.-Ing. Frank Szepan für das Korrekturlesen der Arbeit.

Dezember 1989

Christian Scholz

Zusammenfassung

Aufbauend auf einer Theorie für schubweiche Schalen wird ein finites Element entwickelt, mit dessen Hilfe sich für allgemeine Rotationsschalen die Spannungen unter Druckbelastung und der betragsmäßig kleinste Beuldruck bestimmen lassen.

Es wird eine Parametrisierung für den Meridianlinienverlauf einer allgemeinen Rotationsschale vorgeschlagen. Die dabei einzuhaltenden Restriktionen lassen sich nur als Boolesche Funktion angeben.

Mit Hilfe eines speziell für diesen Fall entwickelten Optimierungsverfahrens werden optimale Meridianlinienverläufe ermittelt; Füllvolumen und Schalendicke werden vorgegeben. Die Zielfunktion wird so formuliert, daß die größte auftretende Vergleichsspannung besonders klein und der Beuldruck besonders groß werden.

Es ergeben sich mehrere optimale Formen für dasselbe Füllvolumen; aus diesen kann gegebenenfalls anhand weiterer Kriterien ausgewählt werden.

Summary

Based on a theory for shear deformable shells a special finite element is constructed, which enables stress- and buckling-analysis of general axisymmetric shells.

The meridian curve of the shell is described by a finite number of parameters. Geometric constraints are expressed in terms of boolean functions. A special optimization technique is developed in order to get optimal shapes of the meridian curve for prescribed wall thickness and enclosed volume, while not only resulting stresses have to be minimized but also the buckling pressure has to be maximized.

Several optimal shapes for the same enclosed volume have been observed. A selection requires additional criteria.

Inhaltsverzeichnis

<i>Titel/Kapitel</i>	<i>Seite</i>
Vorwort	1
Zusammenfassung/Abstract	2
Inhaltsverzeichnis	3
Liste der Formelzeichen	5
1.1 Einleitung	12
1.2 Aufgabenstellung	13
1.3 Aktueller Stand der Forschung	14
1.4 Lösungsweg	16
2.1 Parametrisierung der Schalenform	17
2.2 Geometrische Restriktionen	18
2.3 Anmerkungen zur numerischen Behandlung	19
3 Bestimmung der Schnittgrößen und des kritischen Druckes	21
3.1 Schalentheorie	21
3.1.1 Einführung	21
3.1.2 Schreibweise	22
3.1.3 Geometrie des Schalenraumes	23
3.1.4 Verschiebungsansatz	25
3.1.5 Kinematische Beziehungen	26
3.1.6 Schnittgrößen	27
3.1.7 Äußere Lasten, Virtuelle Arbeit, Gleichgewicht	28
3.1.8 Vorschreibbare Randgrößen	29
3.1.9 Konstitutive Gleichungen	30
3.2 Stabilitätsuntersuchung	31
3.2.1 Einführung	31
3.2.2 Schreibweise	31
3.2.3 Prinzip der virtuellen Arbeit in inkrementeller Schreibweise	32
3.2.4 Stabilitätsanalyse mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit	34

3.3 Finite-Elemente-Formulierung	35
3.3.1 Vorbemerkungen zum Finite-Elemente-Verfahren	35
3.3.2 Schreibweise	36
3.3.3 Prinzip der virtuellen Arbeit, Verfahren von Ritz	36
3.3.4 Unterteilung der Rotationsschale in Elemente	37
3.3.5 Kegelschalenelement	38
3.3.6 Parametrisierung, Spezialisierung der Grundgleichungen	39
3.3.7 Ansatz für den Verschiebungsverlauf	44
3.3.8 Kinematische Beziehungen mit Verschiebungsansatz	44
3.3.9 Last-Verformungs-Pfad, Gleichgewichtsiteration	46
3.3.10 Indifferenzkriterium	47
3.3.11 Bestimmung des ersten kritischen Druckes	48
3.3.12 Anschlußzylinder, Randbedingungen	49
3.3.13 Numerische Beschreibung der Elemente	50
3.3.14 Numerik des Finite-Elemente-Programmes	52
3.3.15 Vergleichsspannung	54
3.3.16 Vektoriteration nach v. Mises	56
3.3.17 Dimensionslose Kennzahlen	58
4 Optimierung	60
4.1 Zielfunktion	60
4.2 Parameter und Restriktionen	61
4.3 Modifikation des optimalen Gradientenverfahrens	62
4.4 Konvergenzbeschleunigung	64
4.5 Behandlung der Restriktionen	66
4.6 Quadratische Optimierung	69
5.1 Ablaufdiagramm für die Optimierung	72
5.2 Ablaufdiagramm für die Behandlung der Restriktionen	73
5.3 Ablaufdiagramm für die Bestimmung des Zielfunktionswertes	74
6 Ergebnisse	75
6.1 Optimale Schalenformen	75
6.2 Zahlenwerte, Bezeichnungsweise	79
6.3 Darstellung ausgewählter Ergebnisse	79
7 Zusammenfassung und Ausblick	89
7.1 Zusammenfassung	89
7.2 Ausblick	89
Literaturverzeichnis	91

Liste der Formelzeichen

Lateinische Buchstaben:

- \mathbf{A}_{0ij} konstante Hilfssteifigkeitsmatrix
- \mathbf{A}_{1ijk} in den Verschiebungen lineare Hilfsgröße der Steifigkeit
- \mathbf{A}_{2ijkl} in den Verschiebungen quadratische Hilfsgröße der Steifigkeit
- δA gesamte virtuelle Arbeit
- $\delta A^{(i)}$ innere virtuelle Arbeit, virtuelle Arbeit der inneren Lasten
- $\delta A^{(a)}$ äußere virtuelle Arbeit, virtuelle Arbeit der äußeren Lasten
- \mathbf{a}_α Basisvektor in der Schalenmittelfläche
- \mathbf{a}_3 Basisvektor senkrecht zu der Schalenmittelfläche
- $\overset{\circ}{\mathbf{a}}_\alpha$ Basisvektor in der unverformten Schalenmittelfläche
- $\overset{\circ}{\mathbf{a}}_3$ Basisvektor senkrecht zu der unverformten Schalenmittelfläche
- $\overset{\circ}{\mathbf{a}}_\alpha^*$ Basisvektor im unverformten Schalenraum
- $\overset{\circ}{\mathbf{a}}_3^*$ Basisvektor im unverformten Schalenraum
- a_1, a_2 Koeffizienten in Zielfunktion
- $\overset{\circ}{a}$ Fundamentalgröße, Maßzahl der unverformten Schalenmittelfläche
- $a_{\alpha\beta}$ kovarianter Metriktensor der Schalenmittelfläche
- a_{ij} Metrik des Schalenraumes
- $\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}$ kovarianter Metriktensor der unverformten Schalenmittelfläche
- $\overset{\circ}{a}_{ij}$ kovarianter Metriktensor des unverformten Schalenraumes
- B Schalenelastizitätskonstante, Biegesteifigkeit
- \mathbf{B}_{0ik} konstanter Anteil der kinematischen Beziehungen
- \mathbf{B}_{1ijk} in den Verschiebungen linearer Anteil der kinematischen Beziehungen
- $\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta}$ kovarianter Krümmungstensor der unverformten Schalenmittelfläche
- $\overset{\circ}{b}_{\alpha}^{\beta}$ gemischtvarianter Krümmungstensor der unverf. Schalenmittelfläche
- $\overset{\circ}{C}$ Randkurve
- \mathbf{C} symmetrische, positiv definite Matrix
- c^λ äußere Momentenlasten

D	Schalanelastizitätskonstante, Dehnsteifigkeit
D	Operator für Zusammenhang Verzerrungsgradienten-Verzerrungen
D	Elastizitätsmatrix in der FEM
D[*]	Diagonalmatrix
D_r	Operator für Zusammenhang Schnittgrößen-Randlasten
E	Elastizitätsmodul
F^o	unverformte Schalenmittelfläche
f	allgemeine Funktion
f	Lastvektor, rechte Seite des Gleichungssystems bei FE-Rechnung
f_z	Zielfunktion
f_a	Vektor der äußeren Knotenlasten
f_i	Vektor der inneren Knotenlasten
g_{ij}	Metrik des dreidimensionalen Kontinuums
g_{ij}^o	Metrik des unverformten, dreidimensionalen Kontinuums
H	Matrix der Formfunktionen
H^{αβρλ}	isotroper Elastizitätstensor
K_e	linear-elastische Steifigkeitsmatrix
K_{v1}	in den Vorverformungen lineare Steifigkeitsmatrix
K_{v2}	in den Vorverformungen quadratische Steifigkeitsmatrix
K_{g1}	in den Anfangsspannungen lineare Steifigkeitsmatrix
K_{g2}	in den Anfangsspannungen quadratische Steifigkeitsmatrix
K_t	tangentiale Steifigkeitsmatrix
K_{ges}	Steifigkeitsmatrix für das gesamte System (Schale)
L	meridiane Länge eines Elementes
L	Linksdreiecksmatrix, Hauptdiagonalkomponenten gleich 1
L_z	Länge des Anschlußzylinders
L_{Zyl}	geschätzte Abklinglänge für die Randeffekte bei Zylinderschalen
M^{αβ}	symmetrisierter 2. Piola-Kirchhoffscher Momententensor
M_{ξξ}	Moment für Meridianrichtung
M_{φξ}	gemischtes Moment
M_{φφ}	Moment für Umfangsrichtung

$m^{\alpha\beta}$	1. <i>Piola-Kirchhoffscher</i> Momententensor
m^λ	Momentenlast auf dem Rand
$\tilde{N}^{\alpha\beta}$	symmetrischer 2. <i>Piola-Kirchhoffscher</i> Pseudo-Dehnungskrafttensor
$N_{\xi\xi}$	Dehnungskraft in Meridianrichtung
$N_{\varphi\xi}$	Schubkraft in Schalenmittelfläche
$N_{\varphi\varphi}$	Dehnungskraft in Umfangsrichtung
$n^{\alpha\beta}$	1. <i>Piola-Kirchhoffscher</i> Dehnungskrafttensor
n^λ	Dehnungskraft auf dem Rand, tangential Schalenmittelfläche
n^3	Querkraft auf dem Rand, senkrecht Schalenmittelfläche
n	Anzahl (der Torusstücke, Vektorkomponenten, Elemente etc.)
\mathbf{n}	Normalenvektor
$\tilde{\mathbf{n}}$	Einheitsnormalenvektor
n_p	Anzahl der Parameter
n_T	Anzahl der Torusstücke
p	innerer Druck
p_k	kritischer Druck
\tilde{p}	normierter innerer Druck
\tilde{p}_k	normierter kritischer Druck
\mathbf{p}	Lastvektor aus innerer Druckbelastung
\mathbf{p}^*	Vektor der äußeren Lasten
p^λ	äußere Lasten tangential Schalenmittelfläche
p^3	äußere Last senkrecht zu Schalenmittelfläche
\mathbf{p}_r	Vektor der Randlasten
\tilde{Q}^α	2. <i>Piola-Kirchhoffscher</i> Querkraftvektor
Q_ξ	Querkraft für Meridianrichtung
Q_φ	Querkraft für Umfangsrichtung
q^α	1. <i>Piola-Kirchhoffscher</i> Querkraftvektor
$q^{*\lambda}$	1. <i>Piola-Kirchhoffscher</i> Hilfskraftvektor

R	Radius des Anschlußzylinders
R	Rechtsdreiecksmatrix, Hauptdiagonalkomponenten positiv
r	aktueller Radius der Rotationsschalenmittelfläche
r	Ortsvektor zu der Schalenmittelfläche
$\overset{\circ}{r}$	Ortsvektor zu der unverformten Schalenmittelfläche
r_i	Querschnittsradius des i-ten Torusstückes <i>oder</i> Komponente von r
S	Schalanelastizitätskonstante, Schersteifigkeit
s	Schrittvektor im Raum der Optimierungsparameter
s₀	im erlaubten Gebiet liegender Teil von s
s₁	neuer Schrittvektor im Raum der Optimierungsparameter
d$\overset{\circ}{s}$	differentieller Weg auf der Randkurve (Ringintegral)
T_e	Gleichgewichtsoperator, Zusammenhang äußere Lasten-Schnittgrößen
T_k	Operator für Zusammenhang Verschiebungen-Verzerrungsgradienten
t	Dicke der Schale
t	abweichender Schrittvektor im Raum der Optimierungsparameter
\tilde{t}	auf Radius R bezogene Schalendicke, normierte Schalendicke
u	Verschiebung in Meridianrichtung
u	Verschiebungsvektor
\hat{u}	Knotenpunktverschiebungsvektor
\hat{u}_k	kritischer Knotenpunktverschiebungsvektor
$\overset{\circ}{u}$	Knotenpunktverschiebungsvektor im Grundzustand
$\overset{+}{u}$	inkrementeller Knotenpunktverschiebungsvektor
$\overset{+}{u}_e$	Eigenvektor, Beulvektor
δu	Variation eines Vektors mit Verschiebungskomponenten
u_{α}	Komponente von u (zugehörige Basis: $\overset{\circ}{a}^\alpha$)
u₃	Komponente von u (zugehörige Basis: $\overset{\circ}{a}^3$)
v	Verschiebung in Umfangsrichtung
v*	Verschiebungsvektor eines beliebigen Punktes im Schalenraum
v	Verschiebungsvektor der Schalenmittelfläche
v_a	Komponente von v (zugehörige Basis: $\overset{\circ}{a}^\alpha$)
v₃	Komponente von v (zugehörige Basis: $\overset{\circ}{a}^3$)

w	Verschiebung senkrecht zu Schalenmittelfläche
\mathbf{w}	Verschiebungsvektor für Normalenvektor
w_α	Komponente von \mathbf{w} (zugehörige Basis: \mathbf{a}^α)
w_3	Komponente von \mathbf{w} (zugehörige Basis: \mathbf{a}^3)
V	Füllvolumen der Schale (ohne Anschlußzylinder)
x	1. Koordinate des kartesischen Bezugssystems im dreidim. Raum
x_i	einzelner Optimierungsparameter
\mathbf{x}	Vektor aller Optimierungsparameter
y	2. Koordinate des kartesischen Bezugssystems im dreidim. Raum
\mathbf{y}	Hilfsvektor
y_0	Lage der Kegelspitze auf der y -Achse im dreidimensionalen Raum
z	3. Koordinate des kartesischen Bezugssystems im dreidim. Raum

Griechische Buchstaben:

α	Kegelsteigungswinkel <i>oder</i> Winkel zwischen zwei Vektoren
α_i	Öffnungswinkel des i -ten Torusstückes
$\alpha_{\alpha\beta}$	Verzerrung der Schalenmittelfläche
$\beta_{\alpha\beta}$	Verkrümmung der Schalenmittelfläche
$\overset{0}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$	Christoffelsymbol 2. Art für die unverformte Schalenmittelfläche
γ_α	Verscherung der Schalenmittelfläche in Querrichtung
γ_ξ	Querverscherung der Schalenmittelfläche in Meridianrichtung
γ_φ	Querverscherung der Schalenmittelfläche in Umfangsrichtung
γ_{ij}	Greenscher Verzerrungstensor des dreidimensionalen Kontinuums
$\gamma_{\alpha\beta}$	Komponente des Greenschen Verzerrungstensors
$\gamma_{\alpha 3}$	Komponente des Greenschen Verzerrungstensors
γ_{33}	Komponente des Greenschen Verzerrungstensors
Δ_x	kleine Schrittweite im Raum der Optimierungsparameter
δ	Änderung des Radius über die Elementlänge
δ_β^α	Kronecker-Symbol

ε	kleine, positive Zahl, Genauigkeit
ε_i	Vektor, ε in der i-ten Komponenten, sonst Null
$\delta \mathbf{e}$	Variation eines Vektors mit Verzerrungskomponenten
$\delta \mathbf{e}^+$	in den Verschiebungsinkrementen lineare, virtuelle Verzerrungen
$\delta \mathbf{e}^{++}$	in den Verschiebungsinkrementen quadratische, virtuelle Verzerrungen
$\delta \mathbf{e}^{\circ+}$	in den Verschiebungen gemischt quadratische, virtuelle Verzerrungen
$\varepsilon_{\xi\xi}$	Dehnung in Meridianrichtung
$\varepsilon_{\xi\varphi}$	Verscherung der Schalenmittelfläche
$\varepsilon_{\varphi\varphi}$	Dehnung in Umfangsrichtung
ζ	Parameter für Dickenrichtung der Schale
η	Parameter für das Element
Θ^α	Parameter, Koordinate in der Schalenmittelfläche
Θ^3	Parameter, Koordinate senkrecht zu der Schalenmittelfläche
κ	Schubfaktor
$\kappa_{\xi\xi}$	Verkrümmung der Schalenmittelfläche in Meridianrichtung
$\kappa_{\xi\varphi}$	gemischte Verkrümmung der Schalenmittelfläche
$\kappa_{\varphi\varphi}$	Verkrümmung der Schalenmittelfläche in Umfangsrichtung
λ	Eigenwert
λ_i	i-ter Parameter für die Schalengeometrie
μ	mittlerer Elementradius
$\mu_\alpha^{\circ\rho}$	Schalentensor, Shifter für den unverformten Schalenraum
ν	<i>Poissonsche</i> Querkontraktionszahl
ξ	Parameter, Wegkoordinate auf Kegeloberfläche in Meridianrichtung
σ	Vektor mit 2. <i>Piola-Kirchhoffschen</i> Schnittgrößen
σ_ν	Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsarbeitshypothese
σ_m	mittlere Spannung
$\tilde{\sigma}$	normierte Spannung
$\tilde{\sigma}_\nu$	normierte Vergleichsspannung
\circ	

σ	in den Verschiebungen lineare Schnittgrößen
δ	in den Verschiebungsinkrementen lineare Schnittgrößen
σ^o	in den Verschiebungen quadratische Schnittgrößen
σ^+	in den Verschiebungen gemischt quadratische Schnittgrößen
$\sigma_{\xi\xi}$	Spannung in Meridianrichtung in Schale
$\sigma_{\varphi\varphi}$	Spannung in Umfangsrichtung in Schale
τ	Vektor mit 1. Piola-Kirchhoffschen Schnittgrößen
τ_{ik}	Spannungsdeviator
φ	Parameter, Winkelkoordinate für Umfangsrichtung auf Kegelfläche
$\delta\varphi$	Variation eines Vektor von Verzerrungsgradienten
$\varphi_{\alpha\rho}$	Deformationsgradient für \mathbf{v}
$\varphi_{\alpha 3}$	Deformationsgradient für \mathbf{v}
$\psi_{\alpha\rho}$	Deformationsgradient für \mathbf{w}
$\psi_{\alpha 3}$	Deformationsgradient für \mathbf{w}
ψ_{ξ}	Verdrehung (Neigung) der Meridianlinie
ψ_{φ}	Verdrehung (Neigung) des Umfangskreises (Breitenkreises)

Andere Zeichen:

∇f	Gradientenvektor der Funktion f
\parallel	parallel, Kollinearität der rechts und links stehenden Vektoren
\mathbf{A}^T	Transponierte der Matrix \mathbf{A} , entsprechend bei Vektoren
$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{x}$	Skalarprodukt, Punkt fehlt bei eindeutigen Zusammenhängen wie \mathbf{Ax}
\dot{u}	Ableitung der Größe u nach dem Umfangswinkel φ
u'	Ableitung der Größe u nach der Meridiankoordinaten ξ
$\mathbf{r}_{,i}$	partielle Ableitung des Ortsvektors \mathbf{r} nach der i -ten Koordinaten
$u^{\alpha} _{\beta}$	kovariante Ableitung von u^{α} nach der β -ten Koordinaten
$\delta\mathbf{x}$	Variation des Vektors \mathbf{x}
$\ \mathbf{x}\ $	Norm des Vektors \mathbf{x} , z.B. Euklidische Norm

1.1 Einleitung

Gekrümmte Flächentragwerke - kurz Schalen genannt - finden sowohl im Bauingenieurwesen als auch im Maschinenbau Anwendung. Mit ihnen können häufig auftretende Lastfälle effektiv und elegant beherrscht werden. Beispiele dafür sind Gewölbe und Kuppeln von Gebäuden, Kühltürme, Parabolspiegel und -antennen, Hochdruckbehälter, Druckkabinen von Flugzeugen und Unterseebooten.

Eine Erhöhung der Steifigkeit solcher Schalen kann erreicht werden durch Einbringen von Versteifungsstreben, durch eine gezielte Formgebung der Schale und durch den Einsatz spezieller Werkstoffe, wie beispielsweise Verbund- und Faserverbundwerkstoffe. Die Wahl des Werkstoffes -isotrop, orthotrop oder anisotrop- entscheidet auch über die Zahl der Werkstoffparameter, die nötig sind, um das mechanische Werkstoffverhalten zu beschreiben.

Die Belastung einer Schale setzt sich in der Regel aus dem Eigengewicht und statischen oder quasistatischen, inneren oder äußeren Drücken zusammen. Je nach Anwendungsfall wirken weitere Lasten, beispielsweise die bei Zentrifugen auftretenden *Trägheitswirkungen* der Schale und der Füllung oder die in Abgasanlagen von Kraftfahrzeugen zu beobachtenden *dynamischen Druckbelastungen* oder die *stochastischen Windlasten* an Kühltürmen; hinzukommen können *thermische Beanspruchungen* wie in Kesseln oder Raumflugkörpern und andere mehr.

Eine in der Technik sehr häufig vorkommende Schalenform ist die Rotationschale, auch drehsymmetrische Schale genannt, die sich dadurch auszeichnet, daß sie gut statische, rotationssymmetrische Lasten zu tragen imstande ist, leicht hergestellt werden kann und außerdem einer Berechnung verhältnismäßig gut zugänglich ist. Wenn der Meridianlinienverlauf ein Kegelschnitt (Hyperbel, Parabel, Ellipse) ist, kann man gelegentlich sogar noch analytische Lösungen für die Schnittgrößen finden.

Erst in neuerer Zeit ist es mit dem Fortschreiten der Rechentechnik möglich geworden, auch weitere Aspekte in die Betrachtungen aufzunehmen. Dabei sollen hier die *Stabilitätsuntersuchungen* und die *Optimierung* genannt werden.

Stabilitätsuntersuchungen dienen der Ermittlung von Beullasten. Diese müssen zunächst als kritisch angesehen werden, da sie in der Praxis häufig zu einer Zerstörung der Schale führen; aus diesem Grund werden sie auch als *kritische Lasten* bezeichnet. Da in dieser Arbeit die wesentliche Last eine Drucklast ist, wird in der Folge von kritischen Drücken gesprochen. Unter kritischen Drücken sollen solche verstanden werden, bei denen es für die Schale zwei oder mehrere differentiell benachbarte Verformungszustände gibt, die alle einen Gleichgewichtszustand darstellen. Im allgemeinen gibt es mehrere kritische Drücke, die in der Regel ver-

schieden groß sind; der kleinste ist dabei häufig der technisch interessanteste, da er während des Aufbringens der Last als erster erreicht wird. Eine im allgemeinen sehr rechenaufwendige Nachbeulanalyse liefert Informationen über das weitere Verhalten der Schale. Es wird grundsätzlich zwischen einem *Verzweigungsproblem* und einem *Durchschlagproblem* unterschieden. Letzteres zeichnet sich dadurch aus, daß sich bei einer Erhöhung des Druckes über den kritischen Druck hinaus der Verformungszustand der Schale schlagartig bis zum theoretischen Erreichen eines neuen Gleichgewichtszustandes verändert¹⁾; die Schale wird dabei in den meisten Fällen zerstört; die zugehörige kritische Last nennt man auch Berstdruck. Dieser tritt in der Praxis selten als *erster* kritischer Druck auf; in einigen technischen Anwendungsfällen, wie z.B. den Berstscheiben, ist es aber gerade nötig, diesen zu bestimmen, was zur Zeit fast ausschließlich experimentell geschieht.

Optimierung ist zunächst ein sehr allgemeiner Ausdruck für ein Verfahren, dessen Ziel die Minimierung oder Maximierung einer oder mehrerer Größen ist. Um dieses Ziel zu erreichen, werden bestimmte Größen oder auch von Optimierungsparametern abhängige Funktionen verändert. Bezogen auf Schalen können z.B. folgende Ziele angestrebt werden: Minimales Gewicht, maximale Formtreue bei veränderlicher Belastung, maximal ertragbare Last, minimale Herstellungskosten oder Kombinationen aus ihnen. Die Optimierungsparameter können u.a. den Dickenverlauf der Schale, den Verlauf der Schalenmittelfläche im Raum oder die Werkstoffparameter²⁾ beschreiben. Der Rechenaufwand für eine Optimierung ist ähnlich groß wie derjenige einer Stabilitätsuntersuchung. Daher muß häufig auf eine Optimierung auf analytischem oder numerischem Wege verzichtet werden. Mit der fortschreitenden Entwicklung leistungsfähiger Rechenanlagen und geeigneter Berechnungsverfahren können solche Aufgaben aber in zunehmendem Maße bewältigt werden.

1.2 Aufgabenstellung

Gesucht wird der Meridianlinienverlauf einer Rotationsschale mit vorgegebenem Füllvolumen, so daß bei Druckbeanspruchung gleichzeitig

- die größte, in der Schale auftretende Vergleichsspannung möglichst klein
- und der kritische Druck (Beuldruck) möglichst groß

- 1) Bei dynamischen Belastungsvorgängen kann der Durchschlag aufgrund der Trägheitswirkungen zeitlich verzögert auftreten.
- 2) Unter Werkstoffparametern seien diejenigen Größen verstanden, die die physikalischen Eigenschaften des Werkstoffes beschreiben, z.B.: Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl, Dichte. Die Ausrichtung der Fasern in Faserwerkstoffen bewirkt beispielsweise eine Anisotropie, die beim Herstellungsprozess in relativ großem Umfang vorherbestimmt werden kann.

werden. Vorausgesetzt werden

- konstante Schalendicke
- isotropes, linearelastisches Werkstoffverhalten (*Hookesches Gesetz*),
- Vernachlässigbarkeit der Normalspannungen in Dickenrichtung,
- kein Auftreten thermischer Einflüsse,
- Spannungsfreiheit der Schale im unausgelenkten Zustand (Urzustand),
- Vernachlässigbarkeit des Eigengewichtes,
- kein Wirken von Trägheitskräften und
- quasistatische Druckbeanspruchung von innen oder außen.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Optimierung mit einer Zielfunktion durchgeführt, die eine Stabilitätsuntersuchung der Schale einschließt. Zu deren Bewältigung sind außerordentlich große Rechenzeiten erforderlich; ohne obige Voraussetzungen wäre eine Bewältigung der gestellten Aufgabe nicht möglich. Bei Bereitstellung geeigneter Rechenanlagen können viele der oben genannten Voraussetzungen fallengelassen werden. Die theoretischen Grundlagen und numerischen Verfahren, mit deren Hilfe auch allgemeinere Problemstellungen behandelt werden können, sind bereits jetzt schon vorhanden, so daß sich, wegen der raschen Entwicklung der Rechentechnik, in absehbarer Zeit auch die Anwendungsmöglichkeiten erweitern.

Da die Randbedingungen einen entscheidenden Einfluß auf die Spannungen und Beuldrücke haben, aber nicht zu speziell gewählt werden sollen, geht hier die Schale in einen Zylinder noch zu definierender Länge über, der seinerseits am Ende radial verschieblich eingespannt ist. So ergeben sich praxisnahe Schnittgrößenverläufe, wie sie beispielsweise bei zylindrischen Druckbehältern an den Übergängen zu den Abschlußkappen beobachtet werden.

1.3 Aktueller Stand der Forschung

Grundlage aller Berechnungen mechanischen Verhaltens von Schalen sind die Schalentheorien. Die Entwicklung auf diesem Gebiet schreitet sehr rasch voran, zumal der aktuelle Stand der Rechentechnik es erlaubt, an technisch interessanten Beispielen vergleichende Berechnungen durchzuführen. Der Einfluß von Vernachlässigungen auf das Ergebnis kann anhand der Gleichungen nur schwer abgeschätzt werden. In diesem Zusammenhang ist auch die Arbeit von *Nolte*[26] zu sehen, in der einige Theorien und die dabei enthaltenen Vernachlässigungen gegenübergestellt sind. Eine Reihe von Untersuchungen baut beispielsweise auf der Theorie von *Basar*[2] auf, die mäßig große Rotationen und Schubquerverformungen beinhaltet; die Arbeit von *Recke*[28] weist auf die bestehenden Probleme bei der Berücksichtigung großer Rotationen hin.

Parallel dazu wurden diese Theorien auf technisch interessante Aufgabenstellungen angewandt. So beschäftigen sich viele Untersuchungen, häufig

aufbauend auf den Büchern von *Pflüger*[27], mit dem Tragverhalten (Stabilität) von Schalen. Da aus Versuchen bekannt ist, daß mit einer linearen Stabilitätsberechnung häufig zu große kritische Drücke³⁾ bestimmt werden, besteht ein entsprechendes Interesse, die Berechnungen zu verfeinern. So gibt *Eckstein*[7] einige Beiträge zur nichtlinearen Stabilitätsberechnung einschließlich der Bestimmung der Gleichgewichtspfade im Nachbeulbereich. Das dynamische Tragverhalten und die kinetische Stabilität werden von *Sanal*[30] untersucht, wobei bereits thermische Einflüsse in die Berechnungen eingeschlossen werden. Die Überlegungen lassen sich auf stochastische Belastungen ausweiten, wie sie von *Kasperski*[18] behandelt werden. Praktisch sehr wichtig ist auch der Einfluß der Imperfektionen, die sich unter anderem aus Herstellungstoleranzen der Schale und Inhomogenitäten des Werkstoffes ergeben, auf das Stabilitätsverhalten; dazu liegen die Arbeiten von *Jürcke*[17] und *Rothert*[29] vor. Wie oben schon erwähnt, unterliegen Schalen häufig zusätzlich einer thermischen Belastung; hiermit beschäftigen sich die Arbeiten von *Zhen-han Yao*[39] und *Tanh Nahan Nguyen*[34]. Mit der Verfeinerung des Werkstoffgesetzes läßt sich auch das elastoplastische Verhalten von Schalen berücksichtigen; in diesem Zusammenhang sind die Arbeiten von *Wunderlich*[37] und *Schnabel*[31] zu sehen. Natürlich können die an dieser Stelle angegebenen Veröffentlichungen nur beispielhaft aktuelle Forschungsgebiete ansprechen; sie zeigen aber, wieviele Aspekte hierbei von technischem Interesse sind. Eine große Zahl von Literaturhinweisen und einen guten Überblick über die Arbeiten zur Stabilität von Rotationsschalen gibt das Buch von *Hampe*[15].

Mit der rechentechnischen Möglichkeit, Schalen in ihrem mechanischen Verhalten hinreichend schnell und genau zu berechnen, wird auch zunehmend versucht, Schalen zu optimieren. So bestimmt die Arbeit von *Meyers*[25] den Wanddickenverlauf von schnelllaufenden, rotations-symmetrischen Zentrifugenschalen, so daß das Gewicht der Schale bei vorgegebener maximaler Vergleichsspannung ein Minimum annimmt; die aktuelle Veröffentlichung von *Skrzypek*[33] ermittelt den optimalen Verlauf der Wanddicke an Torusschalen unter Außendruck, so daß der kritische Druck ein Maximum wird.

Der Wanddickenverlauf von Schalen wird sehr häufig als Optimierungsparameter verwendet. Verhältnismäßig wenige Arbeiten variieren den Meridianlinienverlauf von Rotationsschalen, was sich vor allem damit erklärt, daß die Schalengleichungen für allgemeine Schalen nicht mehr analytisch gelöst werden können; *Han-Chung Wang*[36] erreicht eine Gewichtsminimierung einer Schale konstanter Dicke durch die Wahl eines

³⁾ Mit der Bestimmung zu hoher kritischer Drücke rechnet man auf die unsichere Seite, muß also mit entsprechenden Sicherheitsfaktoren diesen Fehler kompensieren.

speziellen Meridianlinienverlaufes. Bei Beschränkung auf bestimmte Schalenformen und starken Vereinfachungen in der zugrundegelegten Schalentheorie ist noch eine analytische Lösung möglich; so versucht *Mansfield* [24] mit verschiedenen Ansätzen für den Verlauf der Meridianlinie die optimale Form einer Abschlußkappe auf einem Zylinder unter Anwendung der Membrantheorie zu finden. Mit dem zunehmenden Einsatz von Verbundwerkstoffen ergeben sich neue Parameter; so beschäftigt sich *Eschenauer* [10] u.a. mit der optimalen Faserrichtung in druckbelasteten Kugelschalen aus glasfaserverstärktem Kunststoff. Der bei der Optimierung von Schalen notwendig hohe Rechenaufwand schränkt die Anwendungen zur Zeit noch sehr ein.

1.4 Lösungsweg

Zur Lösung der oben gestellten Aufgabe sind zahlreiche Teilaufgaben zu bewältigen. An dieser Stelle wird ein kurzer Überblick über die einzelnen Lösungsschritte gegeben und mit einigen Anmerkungen in die Problematik eingeführt.

Sehr viele in der Literatur genannte Optimierungsverfahren eignen sich zur Parameteroptimierung. Auch in dieser Arbeit soll ein solches Verfahren zur Anwendung gebracht werden. Dafür wird zunächst eine Parametrisierung entwickelt, die es erlaubt, einen möglichst allgemeinen Meridianlinienverlauf der Schale mit einer verhältnismäßig kleinen Zahl von Parametern zu beschreiben. Das Verfahren wird dabei so gewählt, daß gleichzeitig auch das vorzugebende, von der Schale einzuschließende Volumen eingehalten werden kann. Im Anschluß daran werden die bei der Optimierung zu berücksichtigenden (geometrischen) Restriktionen formuliert.

Wesentlich für die Optimierung ist auch die Definition einer Zielfunktion. Hier sollen in die Zielfunktion die größte in der Schale auftretende Vergleichsspannung und der kritische Druck einfließen. Nach einer Darstellung der verwendeten Schalentheorie wird ein einfaches Ringelement entwickelt, das es nach Einbau in ein Finite-Elemente-Programm ermöglicht, sowohl die Vergleichsspannungen als auch den betragsmäßig kleinsten kritischen Druck zu bestimmen. Die dafür notwendigen einzelnen Rechenschritte werden erläutert.

Es wird ein Optimierungsverfahren vorgeschlagen, das zum einen mit einer Konvergenzbeschleunigung ausgestattet ist und zum anderen auch Restriktionen berücksichtigen kann, die nicht in Form eines Systems von Ungleichungen vorliegen, sondern als logische (*Boolesche*) Funktion. Im Anschluß wird die Zielfunktion definiert.

Auf die auftretenden Schwierigkeiten bei der numerischen Behandlung der gestellten Aufgabe wird im einzelnen hingewiesen. Eine Diskussion der Ergebnisse schließt die Arbeit ab.

2.1 Parametrisierung der Schalenform

Viele in der Literatur angegebene Optimierungsverfahren eignen sich zur Parameteroptimierung. Dabei wird ein Minimum einer vorzugebenden Funktion gesucht, deren Argumente die sogenannten Parameter sind.

Hier beschreiben die Parameter den Verlauf der Meridianlinie der Rotationschale. Die Parametrisierung soll so gewählt werden, daß mit einer kleinen Anzahl von Parametern möglichst viele verschiedene Schalenformen beschrieben werden können. Eine Möglichkeit soll hier vorgestellt werden.

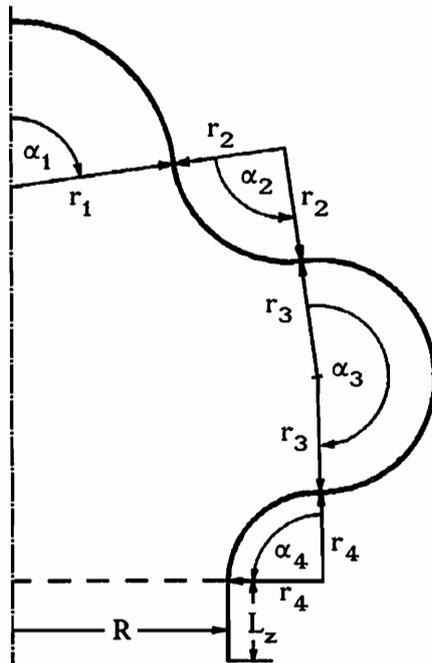


Bild 2.1: Parametrisierung des Meridianlinienverlaufes

Die Schale wird aus mehreren Torusschalenstücken zusammengesetzt. Wie obiges Bild zeigt, beginnt das *erste* Torusstück an der Symmetrieachse und senkrecht zu dieser. Die einzelnen Stücke gehen mit stetiger Steigung (erste Ableitung nach der Meridiankoordinaten) ineinander über. Der *letzte* Torus schließt entsprechend glatt an einen Zylinder mit einer definierten Länge L_z und dem Radius R an; die gestrichelt markierte Oberkante des Zylinders ist die Bezugslinie für das eingeschlossene Volumen der Schale. Der sich ergebende Meridianlinienverlauf wird eindeutig durch die *Radien* r_i und die *Öffnungswinkel* α_i der n einzelnen Torusschalenstücke beschrieben. Mit den Forderungen, daß die Meridianlinie senkrecht auf der Symmetrieachse steht und in erster Ableitung stetig in den anschließenden Zylinder übergeht, genügen $n-1$ Radien und $n-1$ Winkel zur vollständigen Beschreibung. Hierin entsprechen die Vorzeichen der Winkel denjenigen der Krümmung der Torusstücke in Meridianrichtung; die Radien sind immer positiv. Die *Meridianlängen* l_i der Torusstücke sind mit den Radien und dem Betrag der Öffnungswinkel gegeben.

Alle genannten Größen lassen sich (iterativ) bestimmen, wenn die Parameter

$$\begin{aligned}\lambda_{2j-1} &= l_{j+1} / l_1, & (j=1, 2, \dots, n-1), \\ \lambda_{2j} &= l_1 / r_{j+1}, & (j=1, 2, \dots, n-2),\end{aligned}\tag{2.1}$$

und das *Volumen* V gegeben sind.

2.2 Geometrische Restriktionen

Mit der oben angegebenen Parametrisierung können auch physikalisch unmögliche Schalenformen erzeugt werden. Um solche Fälle auszuschließen, sind folgende geometrische Restriktionen einzuhalten:

- Mit Ausnahme des Startpunktes darf die Meridianlinie der Schale nicht durch die Symmetrieachse,
- nicht durch sich selbst
- und nicht durch den anschließenden Zylinder verlaufen.

Bei der Einhaltung der Restriktionen genügt es nicht, nur die Meridianlinie als Linie zu berücksichtigen; es muß die Dicke der Schale mitbeachtet werden. Dadurch werden die Ermittlungen der Bereiche, in denen Überschneidungen stattfinden, recht aufwendig. Die numerische Behandlung zwingt zu einigen weiteren Beschränkungen.

Die Berechnungen der Spannungsverläufe und des kritischen Druckes werden mit einem Finite-Element-Verfahren bestimmt, wobei ein sehr einfaches Element zur Anwendung kommt. Um die Ergebnisse nicht zu stark zu verfälschen, muß die Krümmung der Meridianlinie in Abhängigkeit von der Elementlänge beschränkt werden. Entsprechend dürfen die Radien r_i nicht zu klein gewählt werden. Ohne diese Beschränkung werden die in den Torusschalen auftretenden Spannungsspitzen nicht mehr erfaßt und somit eventuell die größte in der Schale auftretende Vergleichsspannung und der kritische Druck nicht hinreichend genau bestimmt. Die Wahl einer unteren Schranke für den Radius ist an die Elementlänge in Meridianrichtung zu koppeln.

Bei sehr großen Radien r_i treten numerische Schwierigkeiten bei der Überprüfung der Einhaltung der Restriktionen und bei der Volumeniteration auf. Um diese Schwierigkeiten auszuschließen, werden die Radien beschränkt. Platten und Scheiben, die hier als Sonderfall ein Torus mit unendlichem Radius wären, lassen sich demnach aus numerischen Gründen nicht exakt nachbilden.

Kontaktprobleme an Berührungspunkten der Schale mit sich selbst werden von dem verwendeten Finite-Elemente-Programm nicht behandelt; da eine solche Schale sich nicht ohne weiteres herstellbar wäre, muß zusätzlich ein zu definierender Abstand zwischen möglichen Kontaktpunkten eingehalten werden.

Vorwegnehmend kann schon jetzt gesagt werden, daß hier während der Optimierung die aufgeführten Restriktionen fast immer von selbst eingehalten werden. Läßt man allerdings nur die Vergleichsspannungen und nicht den kritischen Druck in die Zielfunktion einfließen, so werden auch mehrere Optima gefunden, die direkt am Rand der Restriktionen liegen.

Mathematisch (numerisch) gestaltet sich bei der gewählten Parametrisierung die Beschreibung der Restriktionen so aufwendig, daß sie nicht in Form eines Systems von *linearen* bzw. *linearisierten* Ungleichungen angegeben werden können; man erhält als Aussage für gegebene Parameter bei einem festgelegten Volumen nur, daß die Restriktionen eingehalten oder nicht eingehalten sind, also eine logische (*Boolesche*) Aussage.

2.3 Anmerkungen zur numerischen Behandlung

Die Volumeniteration und die Überprüfung der Einhaltung der Restriktionen werden günstigerweise gleichzeitig (d.h. mit demselben Unterprogramm) ausgeführt. Der dafür angewendete Algorithmus wird im folgenden in seinen wesentlichen Punkten dargestellt.

In einer Startrechnung wird zunächst überprüft, ob die vorgegebenen Parameter in Grenzen liegen, in denen eine Erfüllung des Volumens möglich ist und numerische Probleme ausgeschlossen werden.

Der Radius r_1 und die Länge l_1 des ersten Torus (Bezugswerte) werden fest eingestellt bzw. von der vorhergegangenen Rechnung übernommen, wenn die Schalenform nur schwach variiert wurde.

Es folgt die Schleife für die Volumeniteration. Als Startpunkt der Meridianlinie wird der Schnittpunkt der Bezugslinie für die Volumenberechnung und der Symmetrieachse gewählt. Mit den gegebenen Parametern und den gewählten Größen wird der Verlauf der Meridianlinie aufgebaut. Der Öffnungswinkel des letzten Torus wird so bestimmt, daß dieser mit stetiger Steigung in den Zylinder übergeht. Mit einer linearen Transformation aller bis dahin bestimmten Werte wird dieser Übergangspunkt so gelegt, daß er zum einen auf der Bezugslinie für die Volumenberechnung liegt und zum anderen der Radius des Zylinders zu 1 wird. Auf diesen Radius werden bei der abschließenden Darstellung der Ergebnisse alle anderen Längenmaße bezogen.

Es liegt damit eine Schalenform vor, die den vorgegebenen Parametern entspricht. In einer mathematisch recht komplizierten, aber numerisch nicht aufwendigen Rechnung erfolgt nun die Überprüfung, ob die oben genannten Restriktionen eingehalten sind. Ist das nicht der Fall, werden die Startwerte so lange verändert, bis entweder eine Schalenform gefunden ist, die die Restriktionen einhält, oder auch eine Veränderung der Startwerte in vorgegebenem Rahmen keinen Erfolg bringt. In letzterem Fall sind die Restriktionen nicht eingehalten.

Ist eine Schalenform gefunden, die die Restriktionen erfüllt, so wird das Volumen bestimmt, das zwischen der Schale und der Bezugslinie (-fläche) liegt. In zwei weiteren Schritten werden die entsprechenden Volumina für einen geringfügig veränderten Radius r_1 bestimmt. Eine Extrapolation beziehungsweise Interpolation mit den dann vorhandenen drei Radien r_1 und den zugehörigen Volumina ergibt einen geschätzten Radius r_1 . Das zugehörige Volumen wird bestimmt und mit dem zu erfüllenden verglichen. Weitere Extrapolationen oder Interpolationen mit jeweils drei Wertepaaren ergeben mit vorgegebener Genauigkeit das geforderte Volumen. Sollten während dieser Volumeniteration irgendwelche Restriktionen nicht eingehalten sein, wird mit dem Radius r_1 als Parameter eine Intervallschachtelung für den Übergang in den unzulässigen Bereich⁴⁾ durchgeführt. Anhand des zugehörigen Volumens entscheidet es sich dann, ob es möglich ist, eine Schalenform zu finden, die den vorgegeben Parametern entspricht, das Volumen umschließt und gleichzeitig die Restriktionen erfüllt. Wenn es eine solche Schalenform gibt, die alle Bedingungen erfüllt, wird in angegebener Weise die Volumeniteration fortgeführt, bis die Geometriewerte mit vorgegebener Genauigkeit bekannt sind.

Bei jedem Verlassen des Unterprogrammes wird an die aufrufende Routine die Information übergeben, ob die Restriktionen eingehalten und somit die bestimmten Geometriewerte brauchbar sind.

4) Im unzulässigen Bereich sind die Restriktionen nicht eingehalten.

3 Bestimmung der Schnittgrößen und des kritischen Druckes

Dieses Kapitel befaßt sich mit der Mechanik der Schale und teilt sich in drei Unterkapitel. In dem ersten Unterkapitel (3.1) wird die verwendete Schalentheorie vorgestellt und in dem darauf folgenden (3.2) die Theorie zur Bestimmung des kritischen Druckes. Das dritte Unterkapitel (3.3) entwickelt, auf den ersten beiden aufbauend, ein Element, das nach Einbau in ein Finite-Elemente-Programm gestattet, sowohl die größte in der Schale auftretende Vergleichsspannung als auch den kritischen Druck für eine allgemeine Rotationsschale zu bestimmen. In diesem Zusammenhang wird auch auf Besonderheiten und Schwierigkeiten bei der numerischen Behandlung hingewiesen und Lösungen vorgeschlagen.

3.1 Schalentheorie

3.1.1 Einführung

Gemeinsames Merkmal aller Schalentheorien ist, daß sie den eigentlich dreidimensionalen Spannungs- und Verzerrungszustand durch Bezug auf eine *Schalenmittelfläche* in einen *zweidimensionalen* überführen. Scheiben und Platten verstehen sich als Sonderformen einer Schale, die in der Regel kein *ebenes* sondern ein *gekrümmtes Flächentragwerk* ist. Der dreidimensionale Verzerrungszustand wird beschrieben durch die *Schalenverzerrungsgrößen*⁵⁾, die wiederum über die *konstitutiven Gleichungen* (Elastizitätsgesetz) mit den *Schnittgrößen* gekoppelt sind. Wegen der *kinematischen Überbestimmtheit* einer Schale liegen in der Regel mehr Verzerrungsgrößen als *Verschiebungsgrößen* vor. Werden die Verschiebungen aus den Verzerrungen bestimmt, so sind daher noch die *Kompabilitätsbedingungen* (Verträglichkeitsbedingungen) zu beachten.

Erste Schalenberechnungen wurden anhand der *Membran-Theorie* durchgeführt, bei der nur drei Verschiebungen zur Beschreibung des Verzerrungs- und Spannungszustandes angesetzt werden. Bei ihr werden ausschließlich die drei zur Schalenmittelfläche tangentialen Spannungen und Verzerrungen berücksichtigt, die wie die Verschiebungen als konstant über die Schalendicke angenommen werden (Analogon: Zugstab). Aus den Gleichgewichtsbedingungen lassen sich die Schnittgrößen (hier Kräfte) bestimmen. Über die konstitutiven Gleichungen ergeben sich die Verzerrungsgrößen. Da drei Verzerrungsgrößen und drei Verschiebungen zugrundegelegt werden, lassen sich die Verschiebungen durch Lösen der kinematischen Beziehungen (drei lineare partielle Differentialgleichungen) unter Einbeziehung der Randbedingungen bestimmen. Momente und Querkräfte etc. bleiben hierbei unberücksichtigt.

⁵⁾ So wie die Schnittgrößen der Schale mit den Spannungen des dreidimensionalen Kontinuums korrespondieren, so korrespondieren die Verzerrungsgrößen mit den Verzerrungen.

Bei den meisten technischen Anwendungsfällen liefert die *technische Schalentheorie* (Biegetheorie für schubstarre Schale) ausreichend genaue Informationen über das mechanische Verhalten einer Schale. Auch hier sind drei Verschiebungen Grundlage der Beschreibungen. Die Spannungen und Verzerrungen sind allerdings in Erweiterung zur Membrantheorie über die Schalendicke (linear) veränderlich. Der Spannungszustand wird durch drei Schnittkräfte und zwei Schnittmomente beschrieben; diesen fünf Schnittgrößen werden fünf Verzerrungsgrößen gegenübergestellt. Es liegt hier eine *Kirchhoff-Love-Theorie* (entsprechend der *Bernoulli-Hypothese* für den Stab oder der *Kirchhoff-Theorie* für Platten) vor, deren Kennzeichen ist, daß die Querschnitte bei einer Verzerrung senkrecht zur Schalenmittelfläche bleiben und sich nicht verwölben. Der Vorteil dieser Theorie ist vor allem in der relativ kleinen Zahl von Unbekannten zu sehen. Die Querkräfte lassen sich aus den anderen Schnittgrößen mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen bestimmen.

Eine weitere Verfeinerung ergibt sich durch Hinzunahme von Querkraftverformungen (*Theorie der schubweichen Schale*); gerade bei schwach gekrümmten, dicken Flächentragwerken ergeben sich so wesentliche Verbesserungen. Die Querschnitte stehen nur im unverformten Zustand senkrecht auf der Schalenmittelfläche; bei einer Verformung neigen sie sich gegenüber der Normalen auf der Schalenmittelfläche, werden aber nicht verwölbt. Zusätzlich zu den drei Verschiebungen sind noch zwei weitere Größen zur Beschreibung der Neigung (Rotation) der Querschnitte einzuführen. *Basar*[2] hat eine *nichtlineare* Theorie für die schubweiche Schale entwickelt, die auch *große Verformungen* zuläßt; die vorliegende Arbeit wendet diese an.

Bei allen bislang genannten Theorien wird nur eine maximal lineare Abhängigkeit der Verschiebung von der Koordinaten in Dickenrichtung angenommen. Läßt man auch Terme zu, die quadratisch in der Koordinaten in Dickenrichtung sind, so läßt sich zusätzlich eine Verwölbung des Schalenquerschnittes beschreiben. Als Schnittgrößen kommen so zwei Wölbmomente hinzu, analog zu zwei Verzerrungsgrößen für die Beschreibung der Verwölbungen in Richtung der zwei Schalenparameter. Der Aufwand für die Entwicklung einer entsprechenden konsistenten nichtlinearen Theorie ist sehr groß. Anstelle weiterer Verfeinerungen kann man die Schale auch als dreidimensionales Kontinuum betrachten.

3.1.2 Schreibweise

Die von *Basar*[2] auf variationstheoretischer Grundlage entwickelte Theorie für schubweiche Schalen ist in tensorieller Schreibweise formuliert. Die wichtigsten Grundgleichungen werden in der Folge dargestellt; weitere Informationen können direkt aus der genannten Veröffentlichung entnommen werden.

Nachfolgende Gleichungen sind vorwiegend in *Komponentenschreibweise* angegeben. Fett gedruckte *Kleinbuchstaben* bedeuten *Vektoren*, fett gedruckte *Großbuchstaben* *Matrizen*. *Griechische* Indizes laufen von *1 bis 2*, *lateinische*, sofern nichts anderes angegeben wird, von *1 bis 3*. Generell gilt die *Einsteinsche Summationskonvention*. Größen *ohne bestimmte Kennzeichnung* beschreiben die *Schalenmittelfläche*. Der *unverformte Zustand* wird mit einer *hochgestellten Null* (z.B. $\overset{\circ}{a}$) gekennzeichnet. Die Beschreibung des *Schalenraumes* und nicht der Schalenmittelfläche wird durch einen *hochgestellten Stern* (z.B. a^*) markiert.

Das δ ohne Indizes ist das *Variationssymbol*, das δ_α^β das *Kronecker-Symbol*. Ein d_α bezeichnet die *kovariante Ableitung* aller nachfolgenden Terme hinsichtlich der *unverformten Metrik*. Ansonsten wird, wie allgemein gebräuchlich, eine partielle Ableitung mit einem Komma und eine kovariante Ableitung mit einem vertikalen Strich hinter den Indizes der abzuleitenden Größe gekennzeichnet. Sofern nicht etwas anderes angegeben wird, liegt die Basis der unverformten Schalenmittelfläche zugrunde.

3.1.3 Geometrie des Schalenraumes

Nach Vorgabe einer Parametrisierung der unverformten Schalenmittelfläche $\overset{\circ}{r}(\Theta^\alpha, \Theta^3=0)$ findet man durch partielle Differentiation des Ortsvektors die Basisvektoren

$$\overset{\circ}{a}_\alpha = \overset{\circ}{r}_{,\alpha} \tag{3.1.1}$$

in der Schalenmittelfläche. Der dritte Basisvektor wird definiert als

$$\overset{\circ}{a}_3 = \frac{\overset{\circ}{a}_1 \times \overset{\circ}{a}_2}{|\overset{\circ}{a}_1 \times \overset{\circ}{a}_2|} \tag{3.1.2}$$

und ist somit der Einheitsnormalenvektor auf der unverformten Schalenmittelfläche. Der zugehörige kovariante Metriktensor bestimmt sich nach

$$\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{a}_\alpha \cdot \overset{\circ}{a}_\beta, \tag{3.1.3}$$

bzw. der kontravariante Metriktensor $\overset{\circ}{a}^{\alpha\beta}$ durch Inversion von $\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}$ gemäß

$$\overset{\circ}{a}^{\alpha\rho} \overset{\circ}{a}_{\rho\beta} = \delta_\beta^\alpha, \tag{3.1.4}$$

und diese dienen dem Herauf- oder Herunterziehen der Indizes

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{a}^\alpha &= \overset{\circ}{a}^{\alpha\beta} \overset{\circ}{a}_\beta, \\ \overset{\circ}{a}_\alpha &= \overset{\circ}{a}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{a}^\beta. \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Nach Einführung der Größe

$$\overset{\circ}{a} = \det(\overset{\circ}{a}_{\alpha\beta}) \tag{3.1.6}$$

ergibt sich für ein Flächenelement

$$dF = \sqrt{\overset{\circ}{a}} d\Theta^1 d\Theta^2. \tag{3.1.7}$$

Der Krümmungstensor der somit definierten Schalenmittelfläche berechnet sich zu

$$\overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (\overset{\circ}{a}_{\alpha} \cdot \overset{\circ}{a}_{3,\beta} + \overset{\circ}{a}_{\beta} \cdot \overset{\circ}{a}_{3,\alpha}) \quad (3.1.8)$$

bzw. in gemischtvarianter Darstellung

$$\overset{\circ}{b}_{\alpha}^{\beta} = \overset{\circ}{b}_{\alpha\rho} \overset{\circ}{a}^{\rho\beta} \quad (3.1.9)$$

nach Überschiebung mit der kontravarianten Metrik. Die Basisvektoren an einem beliebigen Punkt des Schalenraumes lauten

$$\overset{\circ}{a}_{\alpha}^* = \overset{\circ}{\mu}_{\alpha}^{\rho} \overset{\circ}{a}_{\rho} \quad \text{mit} \quad \overset{\circ}{\mu}_{\alpha}^{\rho} = \delta_{\alpha}^{\rho} - \Theta^3 \overset{\circ}{b}_{\alpha}^{\rho}, \quad (3.1.10)$$

$$\overset{\circ}{a}_{3}^* = \overset{\circ}{a}_{3} = \overset{\circ}{a}^3. \quad (3.1.11)$$

Die Christoffelsymbole 2. Art für die unverformte Schalenmittelfläche errechnen sich nach

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \overset{\circ}{a}^{\gamma} \cdot \overset{\circ}{a}_{\alpha,\beta}. \quad (3.1.12)$$

Die Basis $\overset{\circ}{a}_{3}$ wird getrennt von den anderen beiden betrachtet; alle Beziehungen werden auf die *unverformte Schalenmittelfläche* spezialisiert. Die partiellen Ableitungen der Basisvektoren im Schalenraum werden durch die *Ableitungsgleichungen von Gauss*

$$\overset{\circ}{a}_{\alpha,\beta} = \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\rho} \overset{\circ}{a}_{\rho} + b_{\alpha\beta} \overset{\circ}{a}_{3}, \quad (3.1.13)$$

$$\overset{\circ}{a}_{,\beta}^{\alpha} = -\overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\rho}^{\alpha} \overset{\circ}{a}^{\rho} + b_{\beta}^{\alpha} \overset{\circ}{a}_{3}$$

und *Weingarten*

$$\overset{\circ}{a}_{3,\alpha} = -b_{\alpha}^{\rho} \overset{\circ}{a}_{\rho} \quad (3.1.14)$$

angegeben.

Ein Vektor \mathbf{u} wird beispielsweise durch

$$\mathbf{u} = u_{\alpha} \overset{\circ}{a}^{\alpha} + u_3 \overset{\circ}{a}^3 \quad (3.1.15)$$

dargestellt und seine partiellen Ableitungen lassen sich mit mit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,\alpha} &= (u^{\rho}|_{\alpha} - b_{\alpha}^{\rho} u^3) \overset{\circ}{a}_{\rho} + (u^3_{,\alpha} + b_{\alpha\rho}^{\rho} u^{\rho}) \overset{\circ}{a}_{3}, \\ &= (u_{\rho}|_{\alpha} - b_{\alpha\rho}^{\rho} u_3) \overset{\circ}{a}^{\rho} + (u_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\rho} u_{\rho}) \overset{\circ}{a}^3 \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

angeben. Die zweite Zeile dieser Gleichung fließt in die Bestimmung der Deformationsgradienten ein. Die kovarianten Ableitungen der Komponenten errechnen sich nach

$$\begin{aligned} u^{\rho}|_{\alpha} &= u^{\rho}_{,\alpha} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda}^{\rho} u^{\lambda}, \\ u_{\rho}|_{\alpha} &= u_{\rho,\alpha} - \overset{\circ}{\Gamma}_{\rho\alpha}^{\lambda} u_{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

3.1.4 Verschiebungsansatz

Ein beliebiger Punkt des Schalenraumes verschiebe sich gemäß der Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* &= (\mathbf{r} - \overset{\circ}{\mathbf{r}}) + \Theta^3 (\mathbf{a}_3 - \overset{\circ}{\mathbf{a}}_3) , \\ &= \mathbf{v} + \Theta^3 \mathbf{w} . \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Die Verschiebung setzt sich somit zusammen aus der Verschiebung \mathbf{v} der Schalenmittelfläche (1. Klammer) und der Änderung \mathbf{w} des Normalenvektors auf der ehemals unverformten Schalenmittelfläche, was einer Neigung der schubverformten, aber weiterhin ebenen Querschnitte (2. Klammer) um einen Rotationswinkel ω gegenüber der Senkrechten auf der verformten Schalenmittelfläche entspricht. Diese verallgemeinerten Verschiebungen werden bezüglich der Basis der unverformten Schale angegeben,

$$\mathbf{v} = v_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{a}}^\alpha + v_3 \overset{\circ}{\mathbf{a}}^3 = v^\alpha \overset{\circ}{\mathbf{a}}_\alpha + v^3 \overset{\circ}{\mathbf{a}}_3 , \quad (3.1.19)$$

$$\mathbf{w} = w_\alpha \overset{\circ}{\mathbf{a}}^\alpha + w_3 \overset{\circ}{\mathbf{a}}^3 = w^\alpha \overset{\circ}{\mathbf{a}}_\alpha + w^3 \overset{\circ}{\mathbf{a}}_3 , \quad (3.1.20)$$

und ihre partiellen Ableitungen lassen sich, wie im vorherigen Abschnitt angemerkt, nach Einführung von Deformationsgradienten

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\rho} &= v_{\rho|\alpha} - \overset{\circ}{b}_{\rho\alpha} v_3 , \\ \varphi_{\alpha 3} &= v_{3,\alpha} + \overset{\circ}{b}_\alpha^\lambda v_\lambda , \\ \psi_{\alpha\rho} &= w_{\rho|\alpha} - \overset{\circ}{b}_{\rho\alpha} w_3 , \\ \psi_{\alpha 3} &= w_{3,\alpha} + \overset{\circ}{b}_\alpha^\lambda w_\lambda , \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

verkürzt in der Form

$$\mathbf{v}_{,\alpha} = \varphi_{\alpha\rho} \overset{\circ}{\mathbf{a}}^\rho + \varphi_{\alpha 3} \overset{\circ}{\mathbf{a}}^3 , \quad (3.1.22)$$

$$\mathbf{w}_{,\alpha} = \psi_{\alpha\rho} \overset{\circ}{\mathbf{a}}^\rho + \psi_{\alpha 3} \overset{\circ}{\mathbf{a}}^3 \quad (3.1.23)$$

schreiben. Die Basisvektoren der verformten Schale lassen sich damit zu

$$\mathbf{a}_\alpha = \overset{\circ}{\mathbf{a}}_\alpha + \mathbf{v}_{,\alpha} = (\delta_\alpha^\rho + \varphi_{\alpha.\rho}) \overset{\circ}{\mathbf{a}}_\rho + \varphi_{\alpha 3} \overset{\circ}{\mathbf{a}}_3 , \quad (3.1.24)$$

$$\mathbf{a}_3 = \overset{\circ}{\mathbf{a}}_3 + \mathbf{w} = w^\alpha \overset{\circ}{\mathbf{a}}_\alpha + (1 + w_3) \overset{\circ}{\mathbf{a}}_3 \quad (3.1.25)$$

berechnen. Mit der Forderung, daß auch der Basisvektor \mathbf{a}_3 die Länge 1 hat, ergibt sich

$$w_3 = -1 \begin{cases} + \sqrt{1 - w_\alpha w^\alpha} & \text{für } \cos(\omega) \geq 0 , \\ - \sqrt{1 - w_\alpha w^\alpha} & \text{für } \cos(\omega) \leq 0 , \end{cases} \quad (3.1.26)$$

wobei das negative Vorzeichen vor dem Wurzelausdruck bei den in dieser Arbeit auftretenden Rotationswinkeln ω ausgeschlossen werden kann. Frei und zur vollständigen Beschreibung ausreichend sind schließlich die Verschiebungsgrößen v_α , v_3 und w_α .

3.1.5 Kinematische Beziehungen

Ausgehend von dem *Greenschen Verzerrungstensor* für dreidimensionale Kontinua

$$\begin{aligned}\gamma_{ij} &= \frac{1}{2} (\mathbf{g}_{ij} - \overset{\circ}{\mathbf{g}}_{ij}) = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,i} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}_j + \mathbf{v}_{,j} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{g}}_i + \mathbf{v}_{,i} \cdot \mathbf{v}_{,j}) , \\ &= \frac{1}{2} (v_{i|j} + v_{j|i} + v^k|_i v_{k|j})\end{aligned}\quad (3.1.27)$$

erhält man analog

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (a_{ij} - \overset{\circ}{a}_{ij}) = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{,i}^* \cdot \overset{\circ}{\mathbf{a}}_j^* + \mathbf{v}_{,j}^* \cdot \overset{\circ}{\mathbf{a}}_i^* + \mathbf{v}_{,i}^* \cdot \mathbf{v}_{,j}^*) \quad (3.1.28)$$

und nach Einsetzen der vorstehenden Beziehungen und Unterdrücken der in Θ^3 quadratischen Terme den Verzerrungstensor

$$\gamma_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\beta} + \Theta^3 \beta_{\alpha\beta} , \quad (3.1.29)$$

$$\gamma_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha} , \quad (3.1.30)$$

$$\gamma_{33} = 0 \quad (3.1.31)$$

mit

$$\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\alpha.}^{\lambda} \varphi_{\beta\lambda} + \varphi_{\alpha 3} \varphi_{\beta 3}) , \quad (3.1.32)$$

$$\begin{aligned}\beta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (w_{\alpha| \beta} + w_{\beta| \alpha} - \overset{\circ}{b}_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\beta\lambda} - \overset{\circ}{b}_{\beta}^{\lambda} \varphi_{\alpha\lambda} - 2 \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} w_3 + \\ &\quad + \varphi_{\beta.}^{\lambda} \psi_{\alpha\lambda} + \varphi_{\alpha.}^{\lambda} \psi_{\beta\lambda} + \varphi_{\beta 3} \psi_{\alpha 3} + \varphi_{\alpha 3} \psi_{\beta 3}) ,\end{aligned}\quad (3.1.33)$$

$$\gamma_{\alpha} = w_{\rho} (\delta_{\alpha}^{\rho} + \varphi_{\alpha.}^{\rho}) + \varphi_{\alpha 3} (1 + w_3) \quad (3.1.34)$$

für das zweidimensionale Kontinuum in *Lagrangescher Betrachtungsweise*. Es handelt sich hierbei um den Verzerrungstensor der Schalenmittelfläche; im Gegensatz zu den Verzerrungen γ_{ij} werden die Größen $\alpha_{\alpha\beta}$, $\beta_{\alpha\beta}$ und γ_{α} in der Folge Verzerrungsgrößen genannt. Bei Variation der Deformationsgradienten nach den unabhängigen Verschiebungsgrößen bestimmt man in matrizieller Schreibweise zunächst

$$\delta \boldsymbol{\varphi} = \delta \begin{bmatrix} \varphi_{\rho\lambda} \\ \varphi_{\rho 3} \\ w_{\lambda} \\ w_{\lambda/\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{d}_{\rho} & -\overset{\circ}{b}_{\rho\lambda} & 0 \\ \overset{\circ}{b}_{\rho}^{\lambda} & d_{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d_{\rho} \end{bmatrix} \cdot \delta \begin{bmatrix} v_{\lambda} \\ v_3 \\ w_{\lambda} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_k \cdot \delta \mathbf{u} \quad (3.1.35)$$

und darauf aufbauend entsprechend die Variation der Verzerrungsgrößen

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \begin{bmatrix} \alpha_{\alpha\beta} \\ \gamma_{\alpha} \\ \beta_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \end{bmatrix} \cdot \delta \begin{bmatrix} \varphi_{\rho\lambda} \\ \varphi_{\rho 3} \\ w_{\lambda} \\ w_{\lambda/\rho} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \quad (3.1.36)$$

mit

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \frac{1}{2} (\delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\lambda + \delta_\beta^\rho \delta_\alpha^\lambda + \delta_\alpha^\rho \varphi_{\beta.}^\lambda + \delta_\beta^\rho \varphi_{\alpha.}^\lambda) , \\
 D_{12} &= \frac{1}{2} (\delta_\alpha^\rho \varphi_{\beta 3} + \delta_\beta^\rho \varphi_{\alpha 3}) , \\
 D_{21} &= \delta_\alpha^\rho w^\lambda , \\
 D_{22} &= \delta_\alpha^\rho (1 + w_3) , \\
 D_{23} &= \delta_\alpha^\lambda + \varphi_{\alpha.}^\lambda - \frac{w^\lambda}{1 + w_3} \varphi_{\alpha 3} , \\
 D_{31} &= -\frac{1}{2} (\delta_\alpha^\rho \overset{\circ}{b}_\beta^\lambda + \delta_\beta^\rho \overset{\circ}{b}_\alpha^\lambda - \delta_\alpha^\rho \psi_{\beta.}^\lambda - \delta_\beta^\rho \psi_{\alpha.}^\lambda) , \\
 D_{32} &= \frac{1}{2} (\delta_\alpha^\rho \psi_{\beta 3} + \delta_\beta^\rho \psi_{\alpha 3}) , \\
 D_{33} &= \frac{1}{2} \left\{ (\overset{\circ}{b}_\alpha^\lambda \varphi_{\beta 3} + \overset{\circ}{b}_\beta^\lambda \varphi_{\alpha 3}) - \left[\left(\frac{w^\lambda}{1 + w_3} \right) \Big|_\alpha \varphi_{\beta 3} + \left(\frac{w^\lambda}{1 + w_3} \right) \Big|_\beta \varphi_{\alpha 3} \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{w^\lambda}{1 + w_3} (2 \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} + \overset{\circ}{b}_{\rho\alpha} \varphi_{\beta.}^\rho + \overset{\circ}{b}_{\rho\beta} \varphi_{\alpha.}^\rho) \right\} , \\
 D_{34} &= \frac{1}{2} \left[(\delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\lambda + \delta_\beta^\rho \delta_\alpha^\lambda) + (\delta_\alpha^\rho \varphi_{\beta.}^\lambda + \delta_\beta^\rho \varphi_{\alpha.}^\lambda) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{w^\lambda}{1 + w_3} (\delta_\alpha^\rho \varphi_{\beta 3} + \delta_\beta^\rho \varphi_{\alpha 3}) \right] .
 \end{aligned}$$

3.1.6 Schnittgrößen

Ausgehend von dem 2. Piola-Kirchhoffschen⁶⁾ Spannungstensor s^{ij} des dreidimensionalen Kontinuums werden die Schnittgrößen

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}^{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \overset{\circ}{\mu} s^{\alpha\beta} d\Theta^3 , \\
 \tilde{Q}^\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \overset{\circ}{\mu} s^{\alpha 3} d\Theta^3 , & \overset{\circ}{\mu} &= \sqrt{\frac{\overset{\circ}{a}^*}{a}} , & (3.1.37) \\
 M^{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \overset{\circ}{\mu} s^{\alpha\beta} \Theta^3 d\Theta^3
 \end{aligned}$$

definiert. $\tilde{N}^{\alpha\beta}$ und $M^{\alpha\beta}$ sind symmetrische (symmetrisierte) Piola-Kirchhoffsche Schnittgrößen der 2. Art. Sie sind damit Schnittgrößen in Richtung der verformten Basis.

6) Aus dem Verzerrungstensor und dem Spannungstensor errechnet sich die virtuelle Formänderungsarbeit des Kontinuums. Dabei müssen -bei Vorliegen endlicher Verformungen- immer bestimmte Spannungs- und Verzerrungstensoren miteinander verknüpft werden. Siehe dazu: Donald B. Macvean, Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren, ZAMP 19 (1968), S. 157 ff

Es lassen sich in entsprechender Weise auch Piola-Kirchhoffsche Schnittgrößen der 1. Art herleiten, die auf die unverformte Basis bezogen sind; der Zusammenhang zwischen den Größen 1. und 2. Art ist durch

$$\begin{bmatrix} n^{\rho\lambda} \\ q^{\rho} \\ q^{*\lambda} \\ m^{\rho\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ 0 & D_{23} & D_{33} \\ 0 & 0 & D_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{N}^{\alpha\beta} \\ \tilde{Q}^{\alpha} \\ M^{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.1.38)$$

gegeben. Die Piola-Kirchhoffschen Schnittgrößen der 1. Art sind hierin mit kleinen Buchstaben bezeichnet; $n^{\rho\lambda}$ und $m^{\rho\lambda}$ sind *nicht* symmetrisch. Während sich die Größen $n^{\rho\lambda}$, q^{ρ} und $m^{\rho\lambda}$ physikalisch interpretieren lassen, ist dieses für $q^{*\lambda}$ nicht ohne weiteres möglich.

3.1.7 Äußere Lasten, Virtuelle Arbeit, Gleichgewicht

In der Regel treten an einer Schale nur äußere Lasten in Form von Drücken p^{λ} und p^3 auf, wobei angenommen wird, daß diese direkt auf die Schalenmittelfläche wirken. Nur der Vollständigkeit halber sollen hier auch Momente c^{λ} beachtet werden. Dazu wird ein Lastvektor

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} p^{\lambda} \\ p^3 \\ c^{\lambda} \end{bmatrix} \quad (3.1.39)$$

eingeführt und gefordert, daß die konjugierte Verschiebung der in Gleichung (3.1.35) bezeichnete Vektor \mathbf{u} ist.

Bei ihrer Einführung wird die virtuelle Arbeit zunächst nur für Systeme angegeben, bei denen die Randgrößen keine Arbeit leisten. Das ist insbesondere der Fall, wenn die Ränder der Schale frei (keine Last) oder zwangsverformt (keine virtuelle Verschiebung) sind. Grundsätzlich verschwindet die Summe der virtuellen Arbeiten der inneren und der äußeren Lasten

$$\delta A = \delta A^{(i)} + \delta A^{(a)} = 0, \quad (3.1.40)$$

wobei sich im aktuell betrachteten Fall die innere virtuelle Arbeit zu

$$\begin{aligned} \delta A^{(i)} &= - \int\int_{(\overset{\circ}{F})} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \delta \mathbf{s} \, d\overset{\circ}{F} = - \int\int_{(\overset{\circ}{F})} (\tilde{N}^{\alpha\beta} \delta\alpha_{\alpha\beta} + \tilde{Q}^{\alpha} \delta\gamma_{\alpha} + M^{\alpha\beta} \delta\beta_{\alpha\beta}) \, d\overset{\circ}{F}, \\ &= - \int\int_{(\overset{\circ}{F})} \boldsymbol{\tau}^T \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} \, d\overset{\circ}{F}, \quad (3.1.40a) \\ &= - \int\int_{(\overset{\circ}{F})} (n^{\rho\lambda} \delta\varphi_{\rho\lambda} + q^{\rho} \delta\varphi_{\rho 3} + q^{*\lambda} \delta w_{\lambda} + m^{\rho\lambda} \delta w_{\rho/\lambda}) \, d\overset{\circ}{F} \end{aligned}$$

und die äußere zu

(3.1.40b)

$$\delta A^{(a)} = \iint_{(\bar{F})} \mathbf{p}^{*\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{F} = \iint_{(\bar{F})} (\rho^\alpha \delta v_\alpha + \rho^3 \delta v_3 + c^\alpha \delta w_\alpha) \, d\bar{F}$$

berechnen. Nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf das Integral für die innere virtuelle Arbeit und unter Beachtung der Randbedingungen erhält man zunächst

$$\delta A^{(i)} = \iint_{(\bar{F})} (\mathbf{T}_e \cdot \boldsymbol{\tau})^{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\bar{F} \quad (3.1.41)$$

mit

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} d_\rho & -\overset{\circ}{b}_\rho^\lambda & 0 & 0 \\ \overset{\circ}{b}_\rho^\lambda & d_\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_\rho \end{bmatrix}$$

und damit die Gleichgewichtsbedingungen

$$\mathbf{p} + \mathbf{T}_e \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad (3.1.42)$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \rho^\alpha + n^{\rho\alpha}|_\rho - \overset{\circ}{b}_\rho^\alpha q^\rho &= 0, \\ \rho^3 + \overset{\circ}{b}_\rho^\lambda n^{\rho\lambda} + q^\rho|_\rho &= 0, \\ c^\alpha - q^{*\alpha} + m^{\rho\alpha}|_\rho &= 0. \end{aligned}$$

Mit den bereits angegebenen Beziehungen lassen sich diese Gleichgewichtsbedingungen auch in den Piola-Kirchhoffschen Schnittgrößen der 2. Art schreiben.

3.1.8 Vorschreibbare Randgrößen

Auf die Ränder der Schale wirken Lasten in Form von *vektoriellen Randgrößen*. Diese vektoriellen Randgrößen errechnen sich aus den tensoriellen Schnittgrößen durch

$$\mathbf{p}_r = \begin{bmatrix} n^\lambda \\ n^3 \\ m^\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{r11} & D_{r12} & D_{r13} \\ D_{r21} & D_{r22} & D_{r23} \\ 0 & 0 & D_{r33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{N}^{\alpha\beta} \\ \tilde{Q}^\alpha \\ M^{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_r \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.1.43)$$

mit

$$\begin{aligned}
 D_{r_{11}} &= \frac{1}{2} (\delta_{\beta}^{\lambda} \overset{\circ}{s}_{\alpha} + \delta_{\alpha}^{\lambda} \overset{\circ}{s}_{\beta} + \overset{\circ}{s}_{\alpha} \varphi_{\beta.}^{\lambda} + \overset{\circ}{s}_{\beta} \varphi_{\alpha.}^{\lambda}) , \\
 D_{r_{12}} &= \overset{\circ}{s}_{\alpha} w^{\lambda} , \\
 D_{r_{13}} &= -\frac{1}{2} (\overset{\circ}{s}_{\alpha} \overset{\circ}{b}_{\beta}^{\lambda} + \overset{\circ}{s}_{\beta} \overset{\circ}{b}_{\alpha}^{\lambda} - \overset{\circ}{s}_{\alpha} \psi_{\beta.}^{\lambda} - \overset{\circ}{s}_{\beta} \psi_{\alpha.}^{\lambda}) , \\
 D_{r_{21}} &= \frac{1}{2} (\overset{\circ}{s}_{\alpha} \varphi_{\beta 3} + \overset{\circ}{s}_{\beta} \varphi_{\alpha 3}) , \\
 D_{r_{22}} &= \overset{\circ}{s}_{\alpha} (1 + w_3) , \\
 D_{r_{23}} &= \frac{1}{2} (\overset{\circ}{s}_{\alpha} \psi_{\beta 3} + \overset{\circ}{s}_{\beta} \psi_{\alpha 3}) , \\
 D_{r_{33}} &= \frac{1}{2} \left[\delta_{\beta}^{\lambda} \overset{\circ}{s}_{\alpha} + \delta_{\alpha}^{\lambda} \overset{\circ}{s}_{\beta} + \overset{\circ}{s}_{\alpha} \varphi_{\beta.}^{\lambda} + \overset{\circ}{s}_{\beta} \varphi_{\alpha.}^{\lambda} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{w^{\lambda}}{1 + w_3} (\overset{\circ}{s}_{\alpha} \varphi_{\beta 3} + \overset{\circ}{s}_{\beta} \varphi_{\alpha 3}) \right]
 \end{aligned}$$

und dem Einheitsnormalenvektor $\overset{\circ}{s} = \overset{\circ}{s}_{\alpha} \overset{\circ}{a}^{\alpha}$ auf der unverformten Randkurve $\overset{\circ}{C}$. Man vergleiche die Strukturen von D_r und D .

3.1.9 Konstitutive Gleichungen

Das Werkstoffgesetz wird in Form von konstitutiven Gleichungen angegeben. Hier soll der Zusammenhang zwischen den Verzerrungsgrößen und den Schnittgrößen durch

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}^{\alpha\beta} &= D H^{\alpha\beta\rho\lambda} \alpha_{\rho\lambda} & \text{mit } D &= \frac{Et}{1 - \nu^2} , & (3.1.44) \\
 \tilde{Q}^{\alpha} &= S \overset{\circ}{a}^{\alpha\lambda} \gamma_{\lambda} & \text{mit } S &= \frac{\kappa}{2} \frac{Et}{1 + \nu} , \quad \kappa \approx 5/6 , \\
 M^{\alpha\beta} &= B H^{\alpha\beta\rho\lambda} \beta_{\rho\lambda} & \text{mit } B &= \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}
 \end{aligned}$$

und mit

$$H^{\alpha\beta\rho\lambda} = \frac{1-\nu}{2} [a^{\alpha\rho} a^{\beta\lambda} + a^{\alpha\lambda} a^{\beta\rho} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\rho\lambda}]$$

beschrieben sein. Dabei wird ein isotroper Werkstoff mit dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν vorausgesetzt. Die Schale hat eine Dicke t und die Normalspannungen τ^{33} senkrecht zur Schalenmittelfläche werden unterdrückt. Der Faktor κ berücksichtigt den nicht konstanten Verlauf der Schubspannungen über die Schalendicke und kann über die Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden. Bei der Herleitung wird die verformte Metrik durch die unverformte approximiert; daher gelten die hier angegebenen konstitutiven Gleichungen nur für hinreichend kleine Verzerrungen. Siehe dazu *Basar*[2] und *Zienkiewicz*[40].

3.2 Stabilitätsuntersuchung

3.2.1 Einführung

Unter bestimmten Belastungen treten an Schalen (und auch an anderen mechanischen Systemen) Verformungs- bzw. Verschiebungszustände auf, die nicht mehr *eindeutig* von der Last abhängen. Der aktuelle, zu untersuchende Zustand wird in der Folge *Grundzustand* genannt. Den unverformten Zustand nennt man *Urzustand*.

Aufgabe einer Stabilitätsuntersuchung ist es, den Zustand und die zugehörige Belastung (Last) zu ermitteln, an dem ein indifferenter Gleichgewichtszustand vorliegt. Diese Last ist zunächst als *kritisch* anzusehen, weil man zu diesem Zeitpunkt noch keine Information darüber hat, ob sich bei einer weiteren Erhöhung der Last die Verformungen bzw. Verschiebungen so weit vergrößern, daß die Tragfähigkeit des Systems verloren geht. Bei Schalen beispielsweise ist zur Bestimmung des weiteren Verhaltens eine *Nachbeulanalyse* erforderlich, die in der Regel sehr aufwendig ist.

Pflüger[27] gibt in seinem Buch eine grundlegende Einführung in die Stabilitätsanalyse an mechanischen Systemen. Grundsätzlich kann eine Stabilitätsanalyse mit Hilfe der Gleichgewichtsmethode oder der Energiemethode durchgeführt werden; letztere spaltet sich noch in das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials und das Prinzip der virtuellen Arbeit auf. Hier wird das Prinzip der virtuellen Arbeit sowohl zur Spannungs- als auch zur Stabilitätsanalyse herangezogen.

In diesem Unterkapitel werden die theoretischen Überlegungen zur Stabilitätsuntersuchung und die zur Analyse nötigen Gleichungen angesprochen. Die numerische Ausführung wird später bei der Entwicklung des Finiten Elementes behandelt.

3.2.2 Schreibweise

Aufbauend auf den Bezeichnungen des Unterkapitels 3.1 bezeichnet σ den Vektor der tensoriellen Schnittgrößen und ε den Vektor der konjugierten Verzerrungsgrößen. Größen, die den sich im Gleichgewicht befindlichen Grundzustand beschreiben, werden mit einer hochgestellten Null (\circ) gekennzeichnet; so sind die Komponenten von $\overset{\circ}{\sigma}$ die Schnittgrößen und diejenigen von $\overset{\circ}{\varepsilon}$ die zugehörigen Verzerrungsgrößen im Grundzustand. Die hinzukommenden Anteile bei dem Übergang zum Nachbarzustand werden mit einem hochgestellten Pluszeichen versehen; so lauten die genannten Vektoren im Nachbarzustand $\overset{\circ}{\sigma} + \overset{+}{\sigma}$ und $\overset{\circ}{\varepsilon} + \overset{+}{\varepsilon}$. Bei der Stabilitätsuntersuchung sind mindestens noch die in den Verschiebungen quadratischen Terme nötig. Um diese Anteile zu kennzeichnen, werden entsprechend zwei

Kopfzeichen verwendet. Es wird dabei vorausgesetzt, daß die Verzerrungsgrößen sich mit den kinematischen Beziehungen und daraus die Schnittgrößen mit den konstitutiven Gleichungen in Abhängigkeit von den Verschiebungen angeben lassen.

3.2.3 Prinzip der virtuellen Arbeit in inkrementeller Schreibweise

Wie bereits angegeben, lautet das Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\delta A = \delta A^{(i)} + \delta A^{(a)} = 0 . \quad (3.2.1)$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \delta A^{(i)} &= - \int \int_{(\overset{\circ}{F})} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\overset{\circ}{F} , & (3.2.1a) \\ &= - \int \int_{(\overset{\circ}{F})} (\tilde{N}^{\alpha\beta} \delta \alpha_{\alpha\beta} + \tilde{Q}^\alpha \delta \gamma_\alpha + M^{\alpha\beta} \delta \beta_{\alpha\beta}) \, d\overset{\circ}{F} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta A^{(a)} &= \int \int_{(\overset{\circ}{F})} \mathbf{p}^{*T} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\overset{\circ}{F} + \oint_{(\overset{\circ}{C})} \mathbf{p}_r^T \cdot \delta \mathbf{u} \, d\overset{\circ}{s} , & (3.2.1b) \\ &= \int \int_{(\overset{\circ}{F})} (p^\alpha \delta v_\alpha + p^3 \delta v_3 + c^\alpha \delta w_\alpha) \, d\overset{\circ}{F} + \\ &\quad + \oint_{(\overset{\circ}{C})} (n^\alpha \delta v_\alpha + n^3 \delta v_3 + m^\alpha \delta w_\alpha) \, d\overset{\circ}{s} \end{aligned}$$

die virtuellen Arbeiten der inneren und äußeren Lasten. Das gegenüber Gleichung (3.1.40b) zusätzlich auftretende Ringintegral über die Randkurve enthält die virtuelle Arbeit der Randlasten. Es verschwindet bei Vorliegen homogener Randbedingungen oder hebt sich gegen ein weiteres Integral auf, wenn die Randlasten als am Teilsystem angetragene Schnittgrößen verstanden werden können⁷⁾.

Die Verschiebung des Nachbarzustandes setzt sich nun zusammen aus der Verschiebung des Grundzustandes und einer *inkrementellen* (theoretisch differentiellen) Verschiebung vom Grund- zum Nachbarzustand. Mit den kinematischen Beziehungen und den konstitutiven Gleichungen übertragen

7) Schreiben wir die virtuelle Arbeit für ein Teilsystem auf, wie das bei der Herleitung des FE-Verfahrens geschehen wird, so verstehen sich die Randgrößen als Schnittgrößen; Schnittgrößen leisten aber keine Arbeit bei einer virtuellen Verschiebung, was sich später beim Zusammenbau der Teilsysteme zu einem Gesamtsystem darin zeigt, daß dabei die Schnittgrößen herausfallen. Die Gleichungen sind hier schon im Hinblick auf die spätere Anwendung formuliert.

sich die Abhängigkeiten auch auf die Verzerrungsgrößen und die Schnittgrößen, so daß formal für den Nachbarzustand

$$\mathbf{u} = \overset{\circ}{\mathbf{u}} + \overset{+}{\mathbf{u}}, \quad (3.2.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overset{\circ\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overset{\circ+}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3.2.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \overset{\circ\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \overset{+}{\boldsymbol{\sigma}} + \overset{\circ+}{\boldsymbol{\sigma}} + \overset{++}{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.2.4)$$

geschrieben werden kann, wenn maximal in $\overset{+}{\mathbf{u}}$ quadratische Terme mitgenommen werden. Variiert man nun die Verzerrungsgrößen nach den unbekanntem inkrementellen Verschiebungen $\overset{+}{\mathbf{u}}$, so kann man

$$\delta \mathbf{u} = \delta \overset{+}{\mathbf{u}}, \quad (3.2.5)$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \delta \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta \overset{\circ+}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta \overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.2.6)$$

schreiben. Diese Variation ist im Sinne von *Pflüger*[27] eine spezielle Variation. Überträgt man die Beziehungen auf die Ausdrücke in der Formulierung der virtuellen Arbeit und nimmt auch hier nur Terme mit, die maximal quadratisch in $\overset{+}{\mathbf{u}}$ sind, so erhält man für die virtuelle Arbeit in inkrementeller Schreibweise

$$\begin{aligned} \delta A^{(i)} = & - \int \int_{(\overset{\circ}{F})} (\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \overset{\circ\circ}{\boldsymbol{\sigma}})^T \cdot \delta (\overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overset{\circ+}{\boldsymbol{\varepsilon}}) d\overset{\circ}{F} - \\ & - \int \int_{(\overset{\circ}{F})} \overset{+}{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \delta \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}} d\overset{\circ}{F} - \\ & - \int \int_{(\overset{\circ}{F})} [(\overset{+}{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \delta \overset{\circ+}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \overset{\circ+}{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \delta \overset{+}{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \overset{\circ+}{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \delta \overset{\circ+}{\boldsymbol{\varepsilon}}] d\overset{\circ}{F} - \\ & - \int \int_{(\overset{\circ}{F})} (\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} + \overset{\circ\circ}{\boldsymbol{\sigma}})^T \cdot \delta \overset{++}{\boldsymbol{\varepsilon}} d\overset{\circ}{F}, \end{aligned} \quad (3.2.7a)$$

$$\delta A^{(a)} = \int \int_{(\overset{\circ}{F})} \mathbf{p}^{*T} \cdot \delta \overset{+}{\mathbf{u}} d\overset{\circ}{F} + \oint_{(\overset{\circ}{C})} \mathbf{p}_r^T \cdot \delta \overset{+}{\mathbf{u}} d\overset{\circ}{s}. \quad (3.2.7b)$$

Es wird vorausgesetzt, daß der Grundzustand einen Gleichgewichtszustand darstellt; dann verschwindet aber jede, also auch die spezielle Variation des Grundzustandes in den Ausdrücken der virtuellen Arbeiten. Schreibt man die restlichen Ausdrücke nun aus, wendet dort den *Gauß*schen Integralsatz an und erfüllt mit $\overset{+}{\mathbf{u}}$ die Randbedingungen, so erhält man Bestimmungsgleichungen für das indifferente Gleichgewicht. Diese Bestimmungsgleichungen sind in der Regel nichtlinear und enthalten auch die Verschiebungen $\overset{\circ}{\mathbf{u}}$ und Schnittgrößen $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$ des Grundzustandes.

3.2.4 Stabilitätsanalyse mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit

Die eigentliche Stabilitätsanalyse besteht nun darin, aus den Gleichgewichtsgleichungen und den Bestimmungsgleichungen für das indifferente Gleichgewicht alle kritischen Punkte (Verschiebungen und zugehörige Lasten) zu bestimmen. Im allgemeinen sind alle Gleichungen nichtlinear und es sei darauf hingewiesen, daß in obigen Gleichungen durch Beschränkung auf in \bar{u} maximal quadratische Terme schon eine Vereinfachung vorgenommen wurde. Trotzdem sind die Gleichungen immer noch nichtlinear. Es sollen nun die wichtigsten Möglichkeiten genannt werden, die zur einer Lösung des Problems führen.

Der praktisch interessanteste Wert ist die Größe der *ersten* kritischen Last, das heißt derjenigen kritischen Last, die man beginnend ab dem Urzustand bei einer Belastung entlang des Belastungspfades als erste erreicht. Die (nichtlinearen) Gleichgewichtsbedingungen müssen an jedem Punkt des Belastungspfades erfüllt sein. Damit ist auch schon das Verfahren der *nichtlinearen Stabilitätsanalyse* genannt. Es liegt dabei eine Nichtlinearität der Last-Verformungs-Kurve (Gleichgewichtsbedingungen) vor und gleichzeitig sind auch die Bestimmungsgleichungen für die Indifferenz (Stabilitätsgleichungen) der Gleichgewichtslage nichtlinear. Der Rechenaufwand zu deren Lösung (nichtlineares Eigenwertproblem) ist zwar sehr groß, aber der Vorteil liegt darin, daß eine Nachbeulanalyse angefügt werden kann. Ferner können hierbei Imperfektionen wie Formabweichungen und Anfangsspannungen berücksichtigt werden.

Die *allgemeine lineare Stabilitätsanalyse* linearisiert die Gleichgewichtsbedingungen, so daß dort die Verschiebungen des Nachbarzustandes linear enthalten sind. Auch die geometrischen Beziehungen können in gewissem Rahmen linearisiert werden. Zu lösen ist ein lineares Eigenwertproblem, eine Untersuchung des Nachbeulverhaltens ist möglich, beschränkt sich aber auf eine *Anfangsnachbeulanalyse*. Die ermittelte kritische Last selbst ist in der Regel für praktische Problemstellungen hinreichend genau.

Die *klassische lineare Stabilitätsanalyse* vereinfacht die Gleichungen insofern noch weiter, als nun auch noch die Verzerrungen des Grundzustandes vernachlässigt werden; damit wird das Problem auf ein *Verzweigungsproblem* überführt. Die Gleichgewichtsbedingungen sind entsprechend einfacher und es ergibt sich wieder ein lineares Eigenwertproblem. Die kritische Last wird ungenau ermittelt und eine Untersuchung des Nachbeulbereiches ist unmöglich. Der Rechenaufwand ist immer noch sehr hoch.

Die beiden zuletzt genannten Möglichkeiten zur (näherungsweise) Bestimmung der kritischen Last werden bei der Herleitung des Elementes im Kapitel 3.3 verdeutlicht. Die Stabilitätsanalyse erfolgt mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit.

3.3 Finite-Elemente-Formulierung

3.3.1 Vorbemerkungen zum Finite-Elemente-Verfahren

Mit den Kompatibilitätsbedingungen, den Gleichgewichtsbedingungen und dem Werkstoffgesetz kann man sich ein Differentialgleichungssystem erzeugen, mit dessen Hilfe sich der Schnittgrößen- und Verschiebungsverlauf bei gegebener Belastung einer Schale bestimmen läßt. Die dazu nötige Integration mit Berücksichtigung der Randbedingungen bereitet aber gerade bei Schalen wegen des schnellen Abklingens der Randeffekte numerisch große Probleme und führt deshalb auf nicht immer zuverlässige Ergebnisse. Eine analytische Integration der Gleichungen ist nur bei starken Vereinfachungen in der zugrundegelegten Theorie und Beschränkung auf bestimmte Schalenformen möglich.

Gerade die *Methode der finiten Elemente* (in der Folge: FEM) bietet hier neue Lösungsmöglichkeiten mit theoretisch beliebig steigerbarer Genauigkeit der Ergebnisse. Der Grundgedanke der FEM besteht darin, ein gegebenes (mechanisches, thermodynamisches, strömungsmechanisches oder auch elektrisches) System in mehrere Teilsysteme (*finite Elemente*) zu unterteilen, deren Eigenschaften man kennt oder zumindest zufriedenstellend genau ermitteln kann, und durch Kombination der charakterisierenden Gleichungen der Teilsysteme ein Gesamtgleichungssystem aufzubauen, dessen Lösung das Verhalten des zu beschreibenden physikalischen Systems (in der Regel näherungsweise) wiedergibt. Die Eigenschaften der Teilsysteme kann man beispielsweise dadurch erhalten, daß man das oben genannte Differentialgleichungssystem für jedes einzelne Element löst. Aus dem Grundgedanken der FEM kann auch schon entnommen werden, daß die Qualität der Ergebnisse unter anderem von der Modellbildung (Wahl der Teilsysteme, Theorie zur Beschreibung der Eigenschaften der Teilsysteme, Vereinfachungen, Näherungen, etc.) abhängt. Die Anwendung der FEM ist gewöhnlich nur in Verbindung mit einer numerischen Behandlung sinnvoll, weil die zu bearbeitenden Datenmengen fast immer den Rahmen einer analytischen Lösung sprengen. Auch hieraus ergeben sich Fehler, beispielsweise wegen der immer gegebenen Beschränkung der Rechengenauigkeit.

Die im folgenden zu bewältigende Aufgabe besteht im wesentlichen darin, mit einem Minimum an Speicherbedarf und Rechenzeit eine möglichst genaue Beschreibung der interessierenden Eigenschaften des physikalischen Systems (hier der Schale) zu erreichen.

Nach einer kurzen Einführung in die Grundgedanken wird im folgenden, auf den schon hergeleiteten Gleichungen aufbauend, ein FE-Verfahren vorgestellt, mit dem eine Bestimmung der kritischen Last einer Schale möglich ist. Die Bestimmung des Schnittgrößen- und Verschiebungs-

verlaufes des vollständig linearisierten Systems unter einer vorgegebenen Belastung versteht sich als besonders einfach zu behandelnder Spezialfall.

3.3.2 Schreibweise

Dieses Kapitel greift auf bereits hergeleitete Gleichungen und ihre Schreibweise zurück. Da die FEM bei ihrer numerischen Behandlung Vektoren und Matrizen verarbeitet, wird zur Vereinfachung und in Anlehnung an die bisherige Schreibweise, für ein Skalarprodukt y einer Matrix A mit einem Vektor x wahlweise, wie bisher,

$$y = A x \quad \text{oder} \quad y_i = A_{ij} x_j$$

geschrieben, es wird also die Einsteinsche Summationskonvention übernommen, aber zwischen kovarianter und kontravarianter Schreibweise der Tensoren nicht mehr unterschieden.

Der Verschiebungszustand wird in der Folge durch eine Funktion angenähert, die von sogenannten Knotenpunktverschiebungen und dem Ort abhängig gemacht wird. Zur Kennzeichnung dieser Knotengrößen werden diese mit einem $\hat{}$ versehen; \hat{u} ist dann beispielsweise der Knotenpunktverschiebungsvektor.

Ableitungen nach der Meridiankoordinaten ξ werden mit einem Strich (z.B. u') und Ableitungen nach der Umfangskoordinaten φ mit einem Punkt (z.B. \dot{u}) gekennzeichnet.

3.3.3 Prinzip der virtuellen Arbeit, Verfahren von Ritz

Wie in Kapitel 3.1.7 gezeigt, ist das *Prinzip der virtuellen Arbeit*

$$\delta A = \delta A^{(i)} + \delta A^{(a)} = 0, \quad (3.3.1)$$

wobei hier

$$\delta A^{(i)} = - \int_{(\overset{\circ}{F})} \sigma^T \cdot \delta \varepsilon \, d\overset{\circ}{F}, \quad (3.3.1a)$$

$$\delta A^{(a)} = \int_{(\overset{\circ}{F})} p^{*T} \cdot \delta u \, d\overset{\circ}{F} + \oint_{(\overset{\circ}{C})} p_r^T \cdot \delta u \, d\overset{\circ}{s}, \quad (3.3.1b)$$

gilt, mit den *Gleichgewichtsbedingungen* äquivalent. Solange ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen in einem System gegeben ist, läßt sich, zumindest prinzipiell, ein Gesamtpotential des Systems angeben. Das *Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials* sagt aus, daß sich bei einem System unter einer Last derjenige Verschiebungszustand einstellt, für den das Gesamtpotential ein Minimum annimmt. Es ergibt sich hieraus ein Variationsproblem, da zur Bestimmung des Gesamtpotentials über das gesamte System zu integrieren ist und die Verschiebungen selbst noch Funktionen vom Ort sind. Das Prinzip der

virtuellen Arbeit ist somit die Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials. Der Grundgedanke des *Verfahrens von Ritz* ist, daß ein Näherungsansatz für den Verschiebungsverlauf eines Systems dann den tatsächlichen Verlauf gut wiedergibt, wenn auch für ihn das Gesamtpotential ein Minimum annimmt. Voraussetzung ist allerdings, daß die Verschiebungsansätze die geometrischen Randbedingungen des Systems erfüllen. Mit einem Ansatz für die Verschiebungen gelangt man zu dem sogenannten *Weggrößenverfahren*, das in der Folge angewandt werden soll; bei diesem Verfahren können die in Weggrößen geschriebenen (geometrischen) Randbedingungen leicht erfüllt werden.

3.3.4 Unterteilung der Rotationsschale in Elemente

Die Unterteilung eines Systems in einzelne Elemente hat in der Regel entscheidenden Einfluß auf die Genauigkeit der Ergebnisse der FE-Rechnung. So wird man bemüht sein, in Bereichen großer Spannungsgradienten die Unterteilung besonders fein und ansonsten gröber zu wählen. Dabei sind drei wesentliche Kriterien zu beachten; eine große Zahl von Elementen bewirkt einen größeren *Speicherbedarf* und eine größere *Rechenzeit*, eine feinere Unterteilung ergibt aber die *aussagefähigeren Ergebnisse* an Orten mit großen Spannungsgradienten. In die Beurteilung muß auch einfließen, daß Elemente mit einem groben (sehr einfachen) Ansatz für den Verschiebungsverlauf nur gute Ergebnisse bringen, wenn bei ihrer Verwendung eine feine Unterteilung gewählt wird; wesentlich ist letztendlich die Zahl der *Freiheitsgrade* und die Wahl der *Unterteilung*.

Die *Netzgenerierung*, wie die Unterteilung auch genannt wird, setzt einige Erfahrung voraus, da die Orte von Spannungskonzentrationen, an denen das Netz feiner zu wählen ist, schon bekannt sein müssen. Abhilfe kann dadurch geschaffen werden, daß man mit einem groben Netz zunächst eine FE-Startrechnung durchführt und mit den sich ergebenden Ergebnissen die Feinmaschigkeit des Netzes für die eigentliche Rechnung steuert. Dieses Vorgehen ist nötig, wenn wenig Speicherplatz zur Verfügung steht und eine hohe Genauigkeit gefordert wird; ansonsten kann auch von vornherein ein feineres Netz gewählt werden, wenn das System nicht in extremen Maße Spannungskonzentrationen enthält.

Ebenso wie die Zahl der Freiwerte (Knotenpunktverschiebungen) hat auch die Form des Elementes einen Einfluß auf die Ergebnisse. Es ist nicht unbedingt nötig, daß die Kontur des Systems exakt mit den Elementen nachgebildet wird, aber Abweichungen von dem realen System haben sicher immer auch einen Einfluß auf die Qualität der Ergebnisse. Verbesserungen lassen sich auch hierbei häufig mit einem feineren Netz von Knotenpunkten erreichen.

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen soll Bezug auf die zu behandelnde Aufgabenstellung genommen werden. Für einen beliebigen vorgegebenen Verlauf der Meridianlinie einer Rotationsschale ist ein Netz zu generieren. Gesucht ist die größte in der Schale auftretende Vergleichsspannung und der kritische Druck. Da hier die Rechenzeit das entscheidende Kriterium ist, wird eine gleichmäßige Unterteilung der Meridianlinie vorgenommen

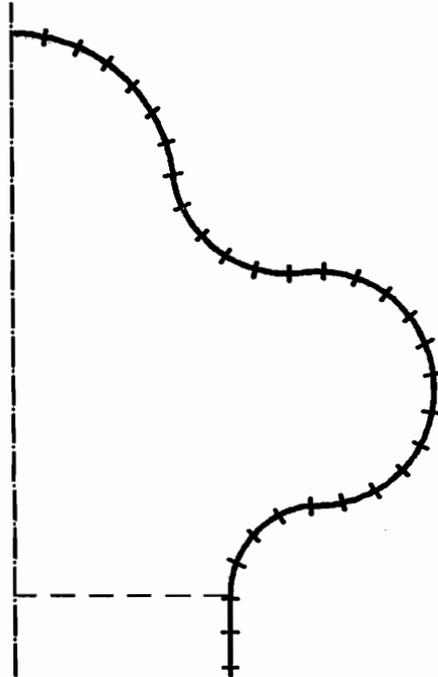


Bild 3.3.1: Unterteilung der Schalenmeridianlinie in Elemente

und auf eine Startrechnung verzichtet. Es empfiehlt sich der Einsatz von Ringelementen. Das verwendete Element und die Vorteile dieser Wahl werden in der Folge beschrieben.

3.3.5 Kegelschalenelement

Nachfolgende Skizze gibt die Form des zur Schalenberechnung verwendeten Elementes wieder.

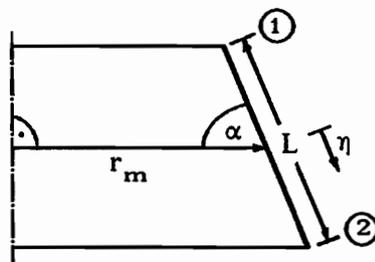
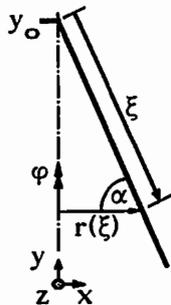


Bild 3.3.2: Geometrie des Kreiskegelstumpfschalenelementes

Wesentliche geometrische Größen sind hierin der Öffnungswinkel α , der mittlere Radius r_m und die Elementmeridianlänge L ; alle anderen lassen sich nach Wahl einer Parametrisierung für das einzelne Element aus ihnen bestimmen.

3.3.6 Parametrisierung, Spezialisierung der Grundgleichungen

Zur Beschreibung eines beliebigen Punktes der Schalenmittelfläche werden zwei Flächenparameter ξ und φ eingeführt. Der aktuelle Radius r läßt sich aus ξ und dem bereits eingeführten Steigungswinkel α berechnen. Mit nachstehender Parametrisierung läßt sich ein beliebiger Punkt (x,y,z) der Schalenmittelfläche, bezeichnet mit dem Ortsvektor \mathbf{r} , auch mit Hilfe von (ξ, φ) angeben.



$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \cos \alpha \sin \varphi \\ y_0 - \xi \sin \alpha \\ \xi \cos \alpha \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \sin \varphi \\ y_0 - r \tan \alpha \\ r \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (3.3.2)$$

Bild 3.3.3: Parametrisierung einer Kegelschale

Die im Kapitel 3.1 angegebenen Beziehungen für eine allgemeine Schale lassen sich nun für die Kegelschale spezialisieren.

Durch partielle Ableitung des Ortsvektors \mathbf{r} und Einführung eines Rechtsschraubensystems ergeben sich die Komponenten der Basisvektoren auf der unverformten Schalenmittelfläche

$$\overset{o}{\mathbf{a}}_{1i} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin \varphi \\ -\sin \alpha \\ \cos \alpha \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \overset{o}{\mathbf{a}}_{2i} = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ 0 \\ -r \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad \overset{o}{\mathbf{a}}_{3i} = \begin{bmatrix} \sin \varphi \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ \cos \varphi \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

und damit die Metrik

$$\overset{o}{\mathbf{a}}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}, \quad \overset{o}{\mathbf{a}}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix}, \quad \sqrt{\overset{o}{\mathbf{a}}_{\alpha\beta}} = r \quad (3.3.4)$$

und die Krümmung

$$\overset{o}{\mathbf{b}}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r \sin \alpha \end{bmatrix}, \quad \overset{o}{\mathbf{b}}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

der unverformten Schalenmittelfläche. Für die FE-Methode werden die kinematischen Beziehungen und die konstitutiven Gleichungen benötigt. Schreibt man diese mit obiger Metrik aus, so sind die Verschiebungen mit denselben Einheiten versehen wie die Koordinaten in der entsprechenden Richtung. Für die Rechnungen ist das unerheblich; für die anschauliche Deutung der Ergebnisse ist allerdings die Einführung von Verschiebungen, Verzerrungen und Schnittgrößen angebracht, die die gewohnten Einheiten tragen. Die Umrechnung von den vorhandenen zu den gewohnten Größen geschieht durch Multiplikation oder Division mit dem aktuellen Radius r (siehe Metrik); sie kann auch sofort in die Gleichungen einbezogen werden, so daß die Gleichungen gleich in den gewünschten, gewohnten Größen geschrieben sind.

So kann man für die Verschiebungen

$$\begin{aligned}
 v_1 &= u, \\
 v_2 &= v r, \\
 v_3 &= w, \\
 w_1 &= \psi_\xi, \\
 w_2 &= \psi_\varphi r,
 \end{aligned}
 \tag{3.3.6a}$$

für die Verzerrungen

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \varepsilon_{\xi\xi}, \\
 \alpha_{12} &= \alpha_{21} = \varepsilon_{\xi\varphi} r = \varepsilon_{\varphi\xi} r, \\
 \alpha_{22} &= \varepsilon_{\varphi\varphi} r^2, \\
 \beta_{11} &= \kappa_{11}, \\
 \beta_{12} &= \beta_{21} = \kappa_{\xi\varphi} r = \kappa_{\varphi\xi} r, \\
 \beta_{22} &= \kappa_{\varphi\varphi} r^2, \\
 \gamma_1 &= \gamma_\xi, \\
 \gamma_2 &= \gamma_\varphi r
 \end{aligned}
 \tag{3.3.6b}$$

und für die konjugierten Schnittgrößen

$$\begin{aligned}
 N^{11} &= N_{\xi\xi}, \\
 N^{12} &= N^{21} = N_{\xi\varphi} r = N_{\varphi\xi} r, \\
 N^{22} &= N_{\varphi\varphi} r^2, \\
 M^{11} &= M_{\xi\xi}, \\
 M^{12} &= M^{21} = M_{\xi\varphi} r = M_{\varphi\xi} r, \\
 M^{22} &= M_{\varphi\varphi} r^2, \\
 Q^1 &= Q_\xi, \\
 Q^2 &= Q_\varphi r
 \end{aligned}
 \tag{3.3.6c}$$

schreiben. Die konstitutiven Gleichungen werden gleichzeitig zu der Form

$$\begin{bmatrix} N_{\xi\xi} \\ N_{\xi\varphi} \\ N_{\varphi\varphi} \\ M_{\xi\xi} \\ M_{\xi\varphi} \\ M_{\varphi\varphi} \\ Q_\xi \\ Q_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & 0 & \nu D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\nu)D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & 0 & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & 0 & \nu B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu)B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu B & 0 & B & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi\xi} \\ \varepsilon_{\xi\varphi} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \kappa_{\xi\xi} \\ \kappa_{\xi\varphi} \\ \kappa_{\varphi\varphi} \\ \gamma_\xi \\ \gamma_\varphi \end{bmatrix}
 \tag{3.3.7}$$

vereinfacht.

Die kinematischen Beziehungen lassen sich mit obigen Größen und Beschränkung auf in den Verschiebungen maximal quadratischen Termen in der Form

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{\xi\xi} &= \delta u' + \\ &+ u' \delta u' + \left(-\frac{\cos \alpha}{r} v + v'\right) \left(-\frac{\cos \alpha}{r} \delta v + \delta v'\right) + w' \delta w', \end{aligned} \quad (3.3.8a)$$

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{\cos \alpha}{r} \delta u + \frac{1}{r} \delta \dot{v} + \frac{\sin \alpha}{r} \delta w + \\ &+ \left(\frac{1}{r} \dot{u} - \frac{\cos \alpha}{r} v\right) \left(\frac{1}{r} \delta \dot{u} - \frac{\cos \alpha}{r} \delta v\right) + \\ &+ \left(\frac{\cos \alpha}{r} u + \frac{1}{r} \dot{v}\right) \left(\frac{\cos \alpha}{r} \delta u + \frac{1}{r} \delta \dot{v}\right) + \\ &+ \frac{\sin \alpha}{r} \left[\left(\frac{\cos \alpha}{r} u + \frac{1}{r} \dot{v}\right) \delta w + w \left(\frac{\cos \alpha}{r} \delta u + \frac{1}{r} \delta \dot{v}\right)\right] - \\ &- \frac{\sin \alpha}{r^2} [\dot{w} \delta v + v \delta \dot{w}] + \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} [v \delta v + w \delta w] + \frac{1}{r^2} \dot{w} \delta \dot{w}, \end{aligned} \quad (3.3.8b)$$

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{\xi\varphi} &= \frac{1}{2r} \delta \dot{u} - \frac{\cos \alpha}{r} \delta v + \frac{1}{2} \delta v' + \\ &+ \frac{1}{2r} \left[\left(\frac{1}{r} \dot{u} - \frac{\cos \alpha}{r} v\right) \delta u' + u' \left(\frac{1}{r} \delta \dot{u} - \frac{\cos \alpha}{r} \delta v\right)\right] - \\ &- \frac{\sin \alpha}{2r} [w' \delta v + v \delta w'] + \frac{1}{2r} [w' \delta \dot{w} + \dot{w} \delta w'] + \\ &+ \frac{\sin \alpha}{2r} [w \left(-\frac{\cos \alpha}{r} \delta v + \delta v'\right) + \left(-\frac{\cos \alpha}{r} v + v'\right) \delta w] + \\ &+ \frac{1}{2r} \left[\left(\frac{\cos \alpha}{r} u + \frac{1}{r} \dot{v}\right) \left(-\frac{\cos \alpha}{r} \delta v + \delta v'\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\cos \alpha}{r} v + v'\right) \left(\frac{\cos \alpha}{r} \delta u + \frac{1}{r} \delta \dot{v}\right)\right], \end{aligned} \quad (3.3.8c)$$

$$\begin{aligned} \delta \chi_{\xi\xi} &= \delta \psi'_{\xi} + \\ &+ \psi'_{\xi} \delta u' + u' \delta \psi'_{\xi} + \\ &+ \left[\left(-\frac{\cos \alpha}{r} \psi_{\varphi} + \psi'_{\varphi}\right) \left(-\frac{\cos \alpha}{r} \delta v + \delta v'\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\cos \alpha}{r} v + v'\right) \left(-\frac{\cos \alpha}{r} \delta \psi_{\varphi} + \delta \psi'_{\varphi}\right)\right], \end{aligned} \quad (3.3.8d)$$

$$\begin{aligned} \delta \chi_{\varphi\varphi} &= \frac{\sin \alpha}{r} \left[\left(\frac{\cos \alpha}{r} u + \frac{1}{r} \dot{v}\right) + \frac{\sin \alpha}{r} \delta w\right] + \left(\frac{\cos \alpha}{r} \delta \psi_{\xi} + \frac{1}{r} \delta \dot{\psi}_{\varphi}\right) \\ &- \frac{\sin \alpha}{r^2} [\psi_{\varphi} \delta \dot{w} + \dot{w} \delta \psi_{\varphi}] + \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} [v \delta \psi_{\varphi} + \psi_{\varphi} \delta v] + \\ &+ \left[\left(\frac{1}{r} \dot{\psi}_{\xi} - \frac{\cos \alpha}{r} \psi_{\varphi}\right) \left(\frac{1}{r} \delta \dot{u} - \frac{\cos \alpha}{r} \delta v\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{r} \dot{u} - \frac{\cos \alpha}{r} v\right) \left(\frac{1}{r} \delta \dot{\psi}_{\xi} - \frac{\cos \alpha}{r} \delta \psi_{\varphi}\right)\right] - \\ &- \frac{\sin \alpha}{r} [\psi_{\xi} \delta \psi_{\xi} + \psi_{\varphi} \delta \psi_{\varphi}] + \\ &+ \left[\left(\frac{\cos \alpha}{r} \psi_{\xi} + \frac{1}{r} \dot{\psi}_{\varphi}\right) \left(\frac{\cos \alpha}{r} \delta u + \frac{1}{r} \delta \dot{v}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\cos \alpha}{r} u + \frac{1}{r} \dot{v}\right) \left(\frac{\cos \alpha}{r} \delta \psi_{\xi} + \frac{1}{r} \delta \dot{\psi}_{\varphi}\right)\right] + \\ &+ \frac{\sin \alpha}{r} \left[\left(\frac{\cos \alpha}{r} \psi_{\xi} + \frac{1}{r} \dot{\psi}_{\varphi}\right) \delta w + w \left(\frac{\cos \alpha}{r} \delta \psi_{\xi} + \frac{1}{r} \delta \dot{\psi}_{\varphi}\right)\right], \end{aligned} \quad (3.3.8e)$$

$$\begin{aligned}
 \delta \chi_{\xi\varphi} = & \frac{\sin \alpha}{2r} \left(-\frac{\cos \alpha}{r} \delta v + \delta v' \right) + \frac{1}{2r} \delta \dot{\psi}_{\xi} - \frac{\cos \alpha}{r} \delta \psi_{\varphi} + \frac{1}{2} \delta \psi'_{\varphi} + \\
 & + \frac{\sin \alpha}{2r} \left[\left(-\frac{\cos \alpha}{r} \psi_{\varphi} + \psi'_{\varphi} \right) \delta w + w \left(-\frac{\cos \alpha}{r} \delta \psi_{\varphi} + \delta \psi'_{\varphi} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{r} \dot{\psi}_{\xi} - \frac{\cos \alpha}{r} \psi_{\varphi} \right) \delta u' + u' \left(\frac{1}{r} \delta \dot{\psi}_{\xi} - \frac{\cos \alpha}{r} \delta \psi_{\varphi} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{r} \dot{u} - \frac{\cos \alpha}{r} v \right) \delta \psi'_{\xi} + \psi'_{\xi} \left(\frac{1}{r} \delta \dot{u} - \frac{\cos \alpha}{r} \delta v \right) \right] - \\
 & - \frac{\sin \alpha}{2r} \left[\psi_{\varphi} \delta w' + w' \delta \psi_{\varphi} \right] + \tag{3.3.8f} \\
 & + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\cos \alpha}{r} \psi_{\xi} + \frac{1}{r} \dot{\psi}_{\varphi} \right) \left(-\frac{\cos \alpha}{r} \delta v + \delta v' \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \left(-\frac{\cos \alpha}{r} v + v' \right) \left(\frac{\cos \alpha}{r} \delta \psi_{\xi} + \frac{1}{r} \delta \dot{\psi}_{\varphi} \right) \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{\cos \alpha}{r} \psi_{\varphi} + \psi'_{\varphi} \right) \left(\frac{\cos \alpha}{r} \delta u + \frac{1}{r} \delta \dot{v} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{\cos \alpha}{r} u + \frac{1}{r} \dot{v} \right) \left(-\frac{\cos \alpha}{r} \delta \psi_{\varphi} + \delta \psi'_{\varphi} \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \gamma_{\xi} = & \delta w' + \delta \psi'_{\xi} + \\
 & + \left[\psi_{\xi} \delta u' + u' \delta \psi_{\xi} \right] + \tag{3.3.8g} \\
 & + \left[\left(-\frac{\cos \alpha}{r} v + v' \right) \delta \psi_{\varphi} + \psi_{\varphi} \left(-\frac{\cos \alpha}{r} \delta v + \delta v' \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta \gamma_{\varphi} = & -\frac{\sin \alpha}{r} \delta v + \frac{1}{r} \delta \dot{w} + \delta \psi_{\varphi} + \\
 & + \left[\left(\frac{1}{r} \dot{u} - \frac{\cos \alpha}{r} v \right) \delta \psi_{\xi} + \psi_{\xi} \left(\frac{1}{r} \delta \dot{u} - \frac{\cos \alpha}{r} \delta v \right) \right] + \tag{3.3.8h} \\
 & + \left[\left(\frac{\cos \alpha}{r} u + \frac{1}{r} \dot{v} \right) \delta \psi_{\varphi} + \psi_{\varphi} \left(\frac{\cos \alpha}{r} \delta u + \frac{1}{r} \delta \dot{v} \right) \right] + \\
 & + \frac{\sin \alpha}{r} \left[\psi_{\varphi} \delta w + w \delta \psi_{\varphi} \right]
 \end{aligned}$$

schreiben. Mit der Elastizitätsmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D & 0 & \nu D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(1-\nu)D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & 0 & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & 0 & \nu B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu)B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu B & 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix}, \tag{3.3.9}$$

und den *neu definierten* Vektoren

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left[\varepsilon_{\xi\xi} \quad \varepsilon_{\xi\varphi} \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} \quad \chi_{\xi\xi} \quad \chi_{\xi\varphi} \quad \chi_{\varphi\varphi} \quad \gamma_{\xi} \quad \gamma_{\varphi} \right], \tag{3.3.10}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \left[N_{\xi\xi} \quad N_{\xi\varphi} \quad N_{\varphi\varphi} \quad M_{\xi\xi} \quad M_{\xi\varphi} \quad M_{\varphi\varphi} \quad Q_{\xi} \quad Q_{\varphi} \right] \tag{3.3.11}$$

ergibt sich für die virtuelle innere Arbeit wieder

$$\delta A^{(i)} = - \int_{(\overset{\circ}{F})} \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\overset{\circ}{F} = - \int_{(\overset{\circ}{F})} \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\overset{\circ}{F}. \tag{3.3.12}$$

3.3.7 Ansatz für den Verschiebungsverlauf

Als lokaler Parameter entlang der Meridianlinie des betrachteten Elementes wird η verwendet. η ist -1 an dem Knoten 1 des Elementes und $+1$ an dem Knoten 2 des Elementes (siehe Bild 3.3.2). Die Knoten liegen an den Elementrändern. Wie von *Zienkiewicz*[40] vorgeschlagen, wird ein linearer Verlauf der Verschiebungen über das Element in Meridianrichtung angenommen, also der denkbar einfachste Ansatz gewählt. Wenn auch eine Stabilitätsuntersuchung durchgeführt werden soll, wird für die Umfangsrichtung zusätzlich eine Fourier-Reihe angesetzt. Mit den Abkürzungen

$$s_i = \sin(i\varphi) \quad , \quad c_i = \cos(i\varphi) \quad , \quad j = 2i - 1 \quad , \quad k = 2i$$

lauten die vollständigen Ansätze

$$\begin{aligned} u(\eta, \varphi) = & \frac{1-\eta}{2} \left[u_{10} + \sum_{i=1}^n (u_{1j} s_i + u_{1k} c_i) \right] + \\ & + \frac{1+\eta}{2} \left[u_{20} + \sum_{i=1}^n (u_{2j} s_i + u_{2k} c_i) \right] , \end{aligned} \quad (3.3.13a)$$

$$\begin{aligned} v(\eta, \varphi) = & \frac{1-\eta}{2} \left[v_{10} + \sum_{i=1}^n (v_{1j} s_i + v_{1k} c_i) \right] + \\ & + \frac{1+\eta}{2} \left[v_{20} + \sum_{i=1}^n (v_{2j} s_i + v_{2k} c_i) \right] , \end{aligned} \quad (3.3.13b)$$

$$\begin{aligned} w(\eta, \varphi) = & \frac{1-\eta}{2} \left[w_{10} + \sum_{i=1}^n (w_{1j} s_i + w_{1k} c_i) \right] + \\ & + \frac{1+\eta}{2} \left[w_{20} + \sum_{i=1}^n (w_{2j} s_i + w_{2k} c_i) \right] , \end{aligned} \quad (3.3.13c)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\xi}(\eta, \varphi) = & \frac{1-\eta}{2} \left[\psi_{\xi 10} + \sum_{i=1}^n (\psi_{\xi 1j} s_i + \psi_{\xi 1k} c_i) \right] + \\ & + \frac{1+\eta}{2} \left[\psi_{\xi 20} + \sum_{i=1}^n (\psi_{\xi 2j} s_i + \psi_{\xi 2k} c_i) \right] , \end{aligned} \quad (3.3.13d)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\varphi}(\eta, \varphi) = & \frac{1-\eta}{2} \left[\psi_{\varphi 10} + \sum_{i=1}^n (\psi_{\varphi 1j} s_i + \psi_{\varphi 1k} c_i) \right] + \\ & + \frac{1+\eta}{2} \left[\psi_{\varphi 20} + \sum_{i=1}^n (\psi_{\varphi 2j} s_i + \psi_{\varphi 2k} c_i) \right] \end{aligned} \quad (3.3.13e)$$

und die Koeffizienten der Fourier-Reihen (eckige Klammern) sind die verallgemeinerten Knotenpunktverschiebungen. Die Funktionen, die die Verschiebungen mit den Knotenpunktverschiebungen koppeln, heißen Formfunktionen.

Für allgemeine Berechnungen sind alle Koeffizienten mitzunehmen; schließt man allerdings *Torsion* aus, so entfallen die Koeffizienten v_{10} , v_{20} , $\psi_{\varphi 10}$ und $\psi_{\varphi 20}$; wird außerdem eine *radiale Starrkörperverschiebung* bzw. ein *Ausknicken der gesamten Schale* ausgeschlossen, so entfallen alle Koeffizienten für $i=1$. Bei einer numerischen Berechnung spielt der Freiheitsgrad (Zahl der freien Verschiebungen) eine wesentliche Rolle, da

er den Speicherplatzbedarf und die Rechenzeit bestimmt; aus diesem Grunde sollte man bei sehr speziellen Fragestellungen mögliche Vereinfachungen auch durchführen. Wird eine Rotationsschale nur durch Innen- oder Außendruck und axial wirkendes Eigengewicht belastet, so bewirken obige Vereinfachungen meistens keine wesentliche Verfälschung der Ergebnisse. Auch die Fourierreihen müssen irgendwo abgebrochen werden. Das Kriterium für die Zahl $(2n+1)$ der mitzunehmenden Reihenglieder ist die zu erwartende Zahl n der Wellen in Umfangsrichtung, die beim Beulen auftritt; sie ist unter anderem um so größer, je stärker gekrümmt die Schale ist. Um dieses abzuschätzen, ist, wenn nicht schon irgendwelche Ergebnisse oder Erfahrungen vorliegen, eine Stabilitätsanalyse nötig, die auch vereinfacht durchgeführt werden kann (siehe unten). Bei den Rechnungen zu der vorliegenden Arbeit wurden die genannten Vereinfachungen eingeführt und $n=6$ gewählt. Kriterium für diese Wahl waren die Ergebnisse aus [7], [13], [15], [17] und [27].

Die Knotenpunktverschiebungen werden zu dem *Knotenpunktverschiebungsvektor* $\hat{\mathbf{u}}$ zusammengefaßt. Die Komponenten werden nach den Knotennummern sortiert, da diese besondere Struktur die numerische Behandlung vereinfacht

$$\hat{\mathbf{u}}^T = (u_{1i} \ v_{1i} \ w_{1i} \ \psi_{\xi 1i} \ \psi_{\varphi 1i} \ u_{2i} \ v_{2i} \ w_{2i} \ \psi_{\xi 2i} \ \psi_{\varphi 2i}) \quad (3.3.14)$$

Mit dem Vektor $\hat{\mathbf{u}}$ und der *Formfunktionenmatrix* \mathbf{H} läßt sich die Verschiebung

$$\mathbf{u}^T = (u \ v \ w \ \psi_{\xi} \ \psi_{\varphi}) \quad (3.3.15)$$

an einem beliebigen Punkt des Elementes gemäß

$$\mathbf{u}(\eta, \varphi) = \mathbf{H}(\eta, \varphi) \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (3.3.16)$$

bestimmen.

3.3.8 Kinematische Beziehungen mit Verschiebungsansatz

Die Formfunktionen lassen sich nach den Parametern η und φ ableiten. Die kinematischen Beziehungen enthalten die Ableitungen nach ξ und φ . Mit der Kopplung

$$d\xi = \frac{L}{2} d\eta \quad (3.3.17)$$

lauten die benötigten Ableitungen der Verschiebungen

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} &= \frac{d\mathbf{H}}{d\eta} \frac{d\eta}{d\xi} \hat{\mathbf{u}}, \\ \frac{d\mathbf{u}}{d\varphi} &= \frac{d\mathbf{H}}{d\varphi} \hat{\mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

wobei die Ableitungen komponentenweise auszuführen sind. Die kinematischen Beziehungen enthalten in \mathbf{u} lineare und quadratische Terme;

um beide erfassen zu können, werden die kinematischen Beziehungen in der Form

$$\delta \varepsilon_i = [\mathbf{B}_{0ik} + \mathbf{B}_{1ijk} \hat{u}_j] \delta \hat{u}_k \quad (3.3.19)$$

geschrieben, wobei mit den Indizes die Zuordnung der Faktoren zueinander eindeutig wird; in der Folge werden die Indizes immer angegeben, wenn die Zuordnung nicht sofort ersichtlich ist. Wie die Matrix \mathbf{H} sind auch \mathbf{B}_0 und \mathbf{B}_1 von η und φ abhängig. \mathbf{B}_1 ist symmetrisch in den letzten beiden Indizes.

Bezugnehmend auf die Schreibweise in Kapitel 3.2 gilt

$$\delta \varepsilon_i^+ = \mathbf{B}_{0ik} \delta \hat{u}_k^+ , \quad (3.3.20a)$$

$$\delta \varepsilon_i^{o+} = \mathbf{B}_{1ijk} \hat{u}_j^o \delta \hat{u}_k^+ , \quad (3.3.20b)$$

$$\delta \varepsilon_i^{++} = \mathbf{B}_{1ijk} \hat{u}_j^+ \delta \hat{u}_k^+ , \quad (3.3.20c)$$

$$\sigma_l^o = \mathbf{D}_{li} \mathbf{B}_{0ik} \hat{u}_k^o , \quad (3.3.20d)$$

$$\sigma_l^+ = \mathbf{D}_{li} \mathbf{B}_{0ik} \hat{u}_k^+ , \quad (3.3.20e)$$

$$\sigma_l^{oo} = \mathbf{D}_{li} \mathbf{B}_{1ijk} \hat{u}_j^o \hat{u}_k^o , \quad (3.3.20f)$$

$$\sigma_l^{o+} = \mathbf{D}_{li} \mathbf{B}_{1ijk} \hat{u}_j^o \hat{u}_k^+ , \quad (3.3.20g)$$

$$\sigma_l^{++} = \mathbf{D}_{li} \mathbf{B}_{1ijk} \hat{u}_j^+ \hat{u}_k^+ \quad (3.3.20h)$$

und es können die Hilfsgrößen

$$\mathbf{A}_{0ij} = \int \int_{(\bar{F})} \mathbf{B}_{0pi} \mathbf{D}_{pq} \mathbf{B}_{0qj} d\bar{F}^o , \quad (3.3.21a)$$

$$\mathbf{A}_{1ijk} = \int \int_{(\bar{F})} \mathbf{B}_{0pi} \mathbf{D}_{pq} \mathbf{B}_{1qjk} d\bar{F}^o , \quad (3.3.21b)$$

$$\mathbf{A}_{2ijkl} = \int \int_{(\bar{F})} \mathbf{B}_{1pij} \mathbf{D}_{pq} \mathbf{B}_{1qkl} d\bar{F}^o \quad (3.3.21c)$$

eingeführt werden, mit deren Hilfe sich die *linear-elastische Steifigkeitsmatrix*

$$\mathbf{K}_{eij} = \mathbf{A}_{0ij} , \quad (3.3.22a)$$

die *Vorverformungssteifigkeitsmatrizen*

$$\mathbf{K}_{v1ij} = (\mathbf{A}_{1ipj} + \mathbf{A}_{1jpi}) \hat{u}_p^o , \quad (3.3.22b)$$

$$\mathbf{K}_{v2ij} = \mathbf{A}_{2ipjq} \hat{u}_p^o \hat{u}_q^o \quad (3.3.22c)$$

und die *Geometriesteifigkeitsmatrizen*

$$\mathbf{K}_{g1ij} = \mathbf{A}_{1pij} \hat{u}_p^o , \quad (3.3.22.d)$$

$$\mathbf{K}_{g2ij} = \mathbf{A}_{2pqij} \hat{u}_p^o \hat{u}_q^o \quad (3.3.22e)$$

definieren lassen, die alle symmetrisch sind.

Entsprechend lauten der *Vektor der inneren Knotenlasten*

$$\mathbf{f}_1 = (\mathbf{K}_{v1} + \mathbf{K}_{v2} + \mathbf{K}_e) \overset{\circ}{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_{ev} \overset{\circ}{\mathbf{u}} \quad (3.3.23)$$

und der *Vektor der äußeren Knotenlasten*

$$\mathbf{f}_a = \int\int_{(\overset{\circ}{F})} \mathbf{H}^T \mathbf{p} \, d\overset{\circ}{F} \quad (3.3.24)$$

worin \mathbf{p} wie in den Unterkapiteln 3.1 und 3.2 der Vektor der äußeren flächenmäßig wirkenden Lasten ist. Die Matrizen für die einzelnen Elemente werden aufgestellt und entsprechend der beteiligten Knoten zu Gesamtmatrizen addiert; diese werden zur Berechnung der Eigenschaften des gesamten mechanischen Systems herangezogen. Auf die numerische Vorgehensweise wird noch eingegangen.

3.3.9 Last-Verformungs-Pfad, Gleichgewichtsiteration

Das Prinzip der virtuellen Arbeit in inkrementeller Schreibweise (siehe 3.2.3) läßt sich mit obigen Matrizen in der Form

$$\{ -[\mathbf{K}_e + (\mathbf{K}_{v1} + \mathbf{K}_{g1}) + (\mathbf{K}_{v2} + \mathbf{K}_{g2})] \overset{\dagger}{\mathbf{u}} - \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_a \} \delta \overset{\dagger}{\mathbf{u}} = 0$$

oder, da die Gleichung für beliebige virtuelle Verschiebungen $\delta \overset{\dagger}{\mathbf{u}}$ gültig sein muß, in der Form

$$[\mathbf{K}_e + (\mathbf{K}_{v1} + \mathbf{K}_{g1}) + (\mathbf{K}_{v2} + \mathbf{K}_{g2})] \overset{\dagger}{\mathbf{u}} = \mathbf{f}_a - \mathbf{f}_1 \quad (3.3.25)$$

schreiben, wobei die Beziehungen

$$\mathbf{f}_1 \delta \overset{\dagger}{\mathbf{u}} = \int\int_{(\overset{\circ}{F})} (\overset{\circ}{\sigma} + \overset{\circ\circ}{\sigma})^T \cdot \delta(\overset{\dagger}{\mathbf{e}} + \overset{\circ\circ}{\mathbf{e}}) \, d\overset{\circ}{F} \quad (3.3.26a)$$

$$\mathbf{K}_e \overset{\dagger}{\mathbf{u}} \delta \overset{\dagger}{\mathbf{u}} = \int\int_{(\overset{\circ}{F})} \overset{\dagger}{\sigma}^T \cdot \delta \overset{\dagger}{\mathbf{e}} \, d\overset{\circ}{F} \quad (3.3.26b)$$

$$(\mathbf{K}_{v1} + \mathbf{K}_{v2}) \overset{\dagger}{\mathbf{u}} \delta \overset{\dagger}{\mathbf{u}} = \int\int_{(\overset{\circ}{F})} [(\overset{\dagger}{\sigma}^T \cdot \delta \overset{\circ\circ}{\mathbf{e}} + \overset{\circ\circ}{\sigma}^T \cdot \delta \overset{\dagger}{\mathbf{e}}) + \overset{\circ\circ}{\sigma}^T \cdot \delta \overset{\circ\circ}{\mathbf{e}}] \, d\overset{\circ}{F} \quad (3.3.26c)$$

$$(\mathbf{K}_{g1} + \mathbf{K}_{g2}) \overset{\dagger}{\mathbf{u}} \delta \overset{\dagger}{\mathbf{u}} = \int\int_{(\overset{\circ}{F})} (\overset{\circ}{\sigma} + \overset{\circ\circ}{\sigma})^T \cdot \delta \overset{\dagger\circ}{\mathbf{e}} \, d\overset{\circ}{F} \quad (3.3.26d)$$

$$\mathbf{f}_a \delta \overset{\dagger}{\mathbf{u}} = \int\int_{(\overset{\circ}{F})} \mathbf{p}^{*T} \cdot \delta \overset{\dagger}{\mathbf{u}} \, d\overset{\circ}{F} \quad (3.3.26e)$$

bestehen (vergleiche 3.2.7a). Der Gleichgewichtszustand ist durch

$$\mathbf{f}_a - \mathbf{f}_1 = 0 \quad (3.3.27)$$

gekennzeichnet und für diesen Fall versteht sich

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_e + (\mathbf{K}_{v1} + \mathbf{K}_{g1}) + (\mathbf{K}_{v2} + \mathbf{K}_{g2}) \quad (3.3.28)$$

als tangentielle Steifigkeitsmatrix; das heißt, daß bei dem aktuellen

Verformungszustand eine differentielle Veränderung der äußeren Last eine entsprechende Verformung

$$\mathbf{K}_t \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}_a \quad (3.3.29)$$

bewirkt. Der *Last-Verformungs-Pfad* wird, beginnend beim *Urzustand*, inkrementell durchlaufen. Dafür wird die äußere Last \mathbf{f}_a schrittweise geringfügig erhöht und danach mit einer *Gleichgewichtsiteration* der zugehörige Verformungszustand ermittelt. Ein Newton-Verfahren eignet sich zu der Gleichgewichtsiteration nicht, da an einem Extrempunkt der Last-Verformungs-Kurve die Inverse der tangentialen Steifigkeitsmatrix nicht gebildet werden kann. Ziel der Gleichgewichtsiteration ist, daß

$$\mathbf{f}_a + \hat{\mathbf{f}}_a - \mathbf{f}_i = \mathbf{0} \quad (3.3.30)$$

ist, wobei sowohl die tangentiale Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_t als auch \mathbf{f}_i von dem Verschiebungszustand abhängen.

Da in dieser Arbeit die kritischen Drücke mit Hilfe der *klassischen linearen Stabilitätsanalyse* ermittelt werden, wird auch die Gleichgewichtsiteration nicht durchgeführt. Die Arbeit von *Eckstein*[7] gibt weitere Hinweise zu diesem Themenbereich.

3.3.10 Indifferenzkriterium

Gemäß *Pflüger*[27] lautet das Indifferenzkriterium:

Ein Zustand ist indifferent, wenn es mindestens einen Nachbarzustand gibt, bei dessen Variation von der Summe der virtuellen inneren und äußeren Arbeiten der Anteil verschwindet, der die spezielle vom Grund- zum Nachbarzustand führende Variation enthält.

Im vorliegenden Fall ist dieses Kriterium durch

$$\mathbf{K}_t \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (3.3.31)$$

gegeben, wobei $\hat{\mathbf{u}}$ sich als die spezielle vom Grund- zum Nachbarzustand führende Variation versteht und im Indifferenzpunkt als Eigenvektor die Richtung eines neuen Gleichgewichtspfades darstellt, während gleichzeitig die Summe aus der zugehörigen Grundzustandsverschiebung und dem Eigenvektor

$$\hat{\mathbf{u}}^0 + \hat{\mathbf{u}}_e$$

die Beulform wiedergibt.

3.3.11 Bestimmung des ersten kritischen Punktes

Zur Abschätzung der Lage des kritischen Punktes, worunter die Kombination aus Last und zugehöriger Verschiebung verstanden sei, kann folgendermaßen vorgegangen werden. Es wird zunächst ein erster Grundzustand mit einem Lastschritt und einer Gleichgewichtsiteration bestimmt, so daß

$$\mathbf{K}_t \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (3.3.32)$$

gilt. Die kritische Verschiebung $\hat{\mathbf{u}}_k$ wird geschätzt als ein Vielfaches λ der bereits vorliegenden Verschiebung

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \lambda \hat{\mathbf{u}} \quad (3.3.33)$$

und, da die vorliegende Verschiebung in die Berechnung der Steifigkeitsmatrizen eingeflossen ist, kann damit

$$[\mathbf{K}_e + \lambda (\mathbf{K}_{v1} + \mathbf{K}_{g1}) + \lambda^2 (\mathbf{K}_{v2} + \mathbf{K}_{g2})] \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{0} \quad (3.3.34)$$

geschrieben werden. Die Lösung dieses quadratischen Eigenwertproblems ist mit geringfügig mehr Aufwand als bei einem linearen Eigenwertproblem möglich.

Ist die vorliegende Verschiebung die Verschiebung des kritischen Punktes, so ist $\lambda=1$. Entsprechend ist $\lambda < 1$, wenn der aktuelle Punkt oberhalb, und $\lambda > 1$, wenn der aktuelle Punkt unterhalb des kritischen Punktes liegt. Der Eigenwert λ liefert somit eine Information über die Lage des aktuellen Punktes bezüglich des indifferenten Punktes. Unter Ausnutzung der Eigenschaft, daß am kritischen Punkt $\lambda=1$ ist, läßt sich das Eigenwertproblem zu der Form

$$[\mathbf{K}_e + \lambda (\mathbf{K}_{v1} + \mathbf{K}_{g1} + \mathbf{K}_{v2} + \mathbf{K}_{g2})] \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{0} \quad (3.3.35)$$

linearisieren, womit die Funktion der Eigenwertanalyse erhalten bleibt und die kritischen Punkte und Eigenvektoren noch exakt ermittelt werden können. Dafür wird die äußere Last solange inkrementell erhöht, bis das Eigenwertproblem den kleinsten Eigenwert $\lambda=1$ besitzt; die an diesem Punkt wirkende Last ist dann die kritische Last. Die Eigenvektoren zu dem Eigenwert $\lambda=1$ geben die Richtungen der neuen (sekundären) Gleichgewichtspfade an. Ihre weitere Verfolgung liefert, mit den hier angegebenen Gleichungen, allerdings keine exakten Ergebnisse, da die kinematischen Beziehungen nur bis zur zweiten Ordnung entwickelt wurden.

Die Berechnung des Belastungspfades erfordert soviel zeitlichen Rechenaufwand, daß eine daran gekoppelte Optimierung im vorliegenden Fall zu viel Rechenzeit benötigt. Aus diesem Grunde wird hier das *klassische Stabilitätsproblem* gelöst, das allerdings den kritischen Druck nur ungenau

wiedergibt. Dabei wird nur der in der Grundzustandsverschiebung lineare Anteil der Geometriesteifigkeitsmatrix beachtet, womit sich das Eigenwertproblem auf

$$[\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_{g1}] \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{0} \quad (3.3.36)$$

reduziert. Die Last-Verformungskurve wird als linear angenommen, so daß sich eine Gleichgewichtssiteration erübrigt und von der tangentialen Steifigkeitsmatrix für die Berechnung der Verformung bei gegebener Last nur der linear-elastische Teil übrigbleibt. Das Problem wird auf ein *Verzweigungsproblem* reduziert, bei dem sich bei bestimmten (kritischen) Lasten mehrere Gleichgewichtspfade schneiden. An dieser Stelle interessiert nur der betragsmäßig kleinste kritische Druck. Mit einer Iteration wird der betragsmäßig kleinste Eigenwert λ ermittelt und es gelten die Beziehungen

$$\mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}_a \quad (\text{Gleichgewicht}), \quad (3.3.37)$$

$$[\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_{g1}] \hat{\mathbf{u}}_e = \mathbf{0} \quad (\text{Eigenwertproblem, Eigenwert, Beulvektor}), \quad (3.3.38)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_k = \lambda \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{Verformung zu kritischem Druck}), \quad (3.3.39)$$

$$\mathbf{f}_k = \lambda \hat{\mathbf{f}}_a = \lambda \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{kritischer Druck}), \quad (3.3.40)$$

worin der Beulvektor $\hat{\mathbf{u}}_e$ die Beulform des Systems beschreibt. Der kritische Druck wird meistens zu groß bestimmt und man erhält keine Information darüber, ob der Druck wirklich zu einer Zerstörung der Schale führt, also wirklich kritisch ist, weil die sekundären Gleichgewichtspfade nicht mehr bestimmt werden können.

3.3.12 Anschlußzylinder, Randbedingungen

Wie eingangs schon erwähnt, wird hier zur Simulation praxisnaher Gegebenheiten der Rand der Schale nicht direkt irgendwelchen Bedingungen unterworfen, sondern mit einem Anschlußzylinder noch ein Stück fortgesetzt. Auf diese Weise lassen sich die Effekte am Übergang der Schale zum weiteren System beobachten, ohne sie zu stark zu beeinflussen. Randstörungen verursachen in der Regel Extremwerte in den Schnittgrößenverläufen, die allerdings wegen der Krümmung der Schale schnell mit der Entfernung von dem Rand abklingen; das ist auch der Grund für die Probleme bei der numerischen Integration der Schalengleichungen. Die Abklinglänge läßt sich nach *Hampel*[16], Band 2 näherungsweise mit

$$L_{Zyl} = 4 \sqrt{R t \sqrt{3(1 - \nu^2)}} \quad (3.3.41)$$

angeben; hierin sind ν die Querkontraktionszahl, t die Schalendicke und R der Radius der Zylinderschale, auf den in dieser Arbeit alle Längen

bezogen werden. L_{Zyl} ist die Länge des Zylinders, ab der man (nach *Hampe*) die Randeﬀekte beider Ränder getrennt betrachten kann. Zugrundegelegt wird hierbei die Biegetheorie. Es muß angemerkt werden, daß bei Verwendung einer Theorie für die schubweiche Schale die Extrema der Schnittgrößen kleiner wiedergegeben werden als bei Verwendung der Biegetheorie und die Abklinglänge gleichzeitig etwas größer.

Sowohl an der Symmetrieachse als auch an dem unteren Rand der Zylinderschale wird gefordert, daß die Verschiebung u und die Verdrehung ψ_ξ in Richtung der Meridianlinie verschwinden. Mit diesen Randbedingungen wird der Werkstoffzusammenhalt an der Symmetrieachse erzwungen und ein Auslaufen der Schnittgrößenverläufe im Zylinder ermöglicht; es werden keine speziellen Randeﬀekte am Zylinder induziert.

3.3.13 Numerische Beschreibung des Elementes

Zur Beschreibung des einzelnen Elementes stehen die Koordinaten der Knotenpunkte und die Werkstoffparameter (Elastizitätsmodul E , Querkontraktionszahl ν , Schubfaktor κ) zur Verfügung. Aus den Koordinaten der Knotenpunkte lassen sich der Steigungswinkel α und die Elementmeridianlänge L errechnen.

Der Steigungswinkel α fließt unter anderem in die *Transformationsmatrix* ein, welche für die Umrechnung der lokalen in die globalen Koordinaten und die entsprechende Transformation der Vektoren und Steifigkeitsmatrizen benötigt wird.

Mit der Kenntnis der Elementmeridianlänge L lassen sich Matrizen \mathbf{H} und \mathbf{B}_0 aufstellen. Bei der vorliegenden Aufgabenstellung wirkt auf die Schale nur eine Flächenlast p^3 . Der Lastvektor (rechte Seite des Gleichungssystemes) errechnet sich formal nach

$$\mathbf{f}_a = \int \int_{(\overset{\circ}{F})} \mathbf{H}^T \mathbf{p} \, d\overset{\circ}{F} \quad . \quad (3.3.42)$$

Die Integration über die Fläche kann hierbei analytisch ausgeführt werden. Dazu wird der aktuelle Radius r in Abhängigkeit von dem lokalen Parameter η durch

$$r = \mu + \eta \delta \quad (3.3.43)$$

beschrieben, worin μ der mittlere Radius und δ die halbe Differenz aus den Radien des oberen und des unteren Knotenpunktes ist. Da eine Rotationsfläche vorliegt und der Druck über den Umfang der Schale

konstant ist, kann die Integration über den Umfang leicht ausgeführt werden, so daß sich

$$\mathbf{f}_a = \int_{\eta=-1}^{+1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathbf{H}^T \mathbf{p} \, r \, d\varphi \, \frac{L}{2} \, d\eta = 2\pi \frac{L}{2} \int_{\eta=-1}^{+1} \mathbf{H}^T \mathbf{p} \, (\mu + \eta \delta) \, d\eta \quad (3.3.44)$$

ergibt.

Die Integration der Steifigkeitsmatrizen läßt sich auch noch analytisch ausführen. Der dazu notwendige programmiertechnische Aufwand ist allerdings recht hoch, da noch eine Grenzwertbetrachtung an der Rotationsachse der Schale durchgeführt werden muß, an der die Integrale singulär werden. Ausreichend genaue Werte ergibt auch eine Vierpunkt-Gauss-Integration, die außerdem den Vorteil hat, daß keine singulären Punkte betrachtet werden müssen, da die Stützstellen für die Integration nicht auf der Symmetrieachse der Schale liegen können. Es empfiehlt sich, die Integration über den Umlauf analytisch auszuführen, was mit der Kenntnis

$$\begin{aligned} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin n\varphi \, d\varphi &= 0, & \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos n\varphi \, d\varphi &= 0, & (\forall n \in \mathbb{N}), \\ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin^2 n\varphi \, d\varphi &= \frac{1}{2}, & \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos^2 n\varphi \, d\varphi &= \frac{1}{2}, & (\forall n \in \mathbb{N}), \\ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin n\varphi \sin m\varphi \, d\varphi &= 0, & \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos n\varphi \cos m\varphi \, d\varphi &= 0, & (n \neq m), \\ \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin n\varphi \cos m\varphi \, d\varphi &= 0, & & & (\forall n, m \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

auch programmiertechnisch sehr elegant berücksichtigt werden kann. Über η wird mit einer Vierpunkt-Gauss-Legendre-Integration integriert. Bei jedem Schritt müssen die Matrizen \mathbf{B}_0 beziehungsweise \mathbf{B}_1 neu aufgestellt werden. Die für die einzelnen festgelegten Stützstellen gebildeten Matrizen (z.B. $\mathbf{B}_0^T \mathbf{D} \mathbf{B}_0$) werden bei diesem Integrationsverfahren mit entsprechenden Faktoren versehen und die Produkte addiert.

Bei der Aufstellung und Multiplikation der Matrizen sind zahlreiche Skalarprodukte zu bilden. Da die Matrizen selbst sehr viele Komponenten mit dem Wert 0 besitzen, läßt sich viel Rechenzeit sparen, wenn Produkte mit diesen Komponenten nicht ausgeführt werden. Mit einer besonderen Verwaltung der Matrizen wird diese Einsparungsmöglichkeit genutzt.

Die für die einzelnen Elemente gebildeten Steifigkeitsmatrizen, Schnittgrößen und Lastvektoren (rechte Seite) werden vom eigentlichen FE-Programm für den Zusammenbau zu einem Gesamtgleichungssystem benötigt.

3.3.14 Numerik des Finite-Elemente-Programmes

In einem ersten Schritt wird eine Netzgenerierung durchgeführt. An der Symmetrieachse beginnend werden aus der Vorgabe der Torusschalenstücke die Koordinaten der Knotenpunkte der Elemente entlang der Meridianlinie erzeugt und abgespeichert. Es folgt die Ablage der Elementdaten wie Elastizitätsmodul E , Querkontraktionszahl ν und Schubfaktor χ . Auch eine Indexrechnung für die Bearbeitung der Matrizen wird durchgeführt. Die Randbedingungen und äußeren Lasten werden bei der späteren Rechnung ebenfalls benötigt und besonders speicherplatzsparend abgelegt.

Nach der genannten Vorbelegung der Matrizen folgt im zweiten Schritt der Aufbau des Gleichungssystems für die linear-elastische Rechnung. Die entsprechende Steifigkeitsmatrix und der Lastvektor aus der Druckbelastung werden für jedes einzelne Element bestimmt, auf das globale Koordinatensystem transformiert und zu einer Gesamtsteifigkeitsmatrix und einem Gesamlastvektor (rechte Seite) zusammengestellt. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix wird, weil sie hier eine ausgeprägte Bandstruktur hat, als Skyline-Matrix (siehe *Bathe*[3]) abgelegt; so müssen nur die benötigten Komponenten neben der Hauptdiagonalen abgespeichert werden.

Im dritten Schritt werden die Randbedingungen in das System übernommen. Dieses gestaltet sich hier sehr einfach, da nur homogene Randbedingungen in den Verschiebungen vorliegen; es werden in der Steifigkeitsmatrix alle Komponenten der zu der Verschiebung gehörenden Zeile und Spalte auf Null und das Hauptdiagonalelement auf Eins gesetzt. Eine Kondensation, das heißt ein vollständiges Streichen der entsprechenden Zeilen und Spalten in dem Gleichungssystem, wird nicht durchgeführt, weil dann für die spätere Auswertung der Ergebnisse wieder eine spezielle Verwaltung benötigt wird.

Als viertem Schritt wird die Steifigkeitsmatrix nach dem Cholesky-Verfahren in eine Form

$$\mathbf{K}_{ges} = \mathbf{L} \mathbf{D}^* \mathbf{L}^T \quad (3.3.46)$$

gebracht; siehe dazu *Engeln-Müllges*[8] und *Bathe*[3]. Darin ist \mathbf{L} eine Linksdreiecksmatrix, also eine Matrix, die nur unterhalb der Hauptdiagonalen mit Werten und auf der Hauptdiagonalen selbst nur mit Einsen belegt ist; \mathbf{D}^* ist eine Diagonalmatrix. Die Zerlegung wird so durchgeführt, daß auf dem Speicherplatz von \mathbf{K}_{ges} nach der Zerlegung \mathbf{L} und \mathbf{D}^* liegen; es wird also sehr speicherplatzsparend gearbeitet. Es könnte noch mehr Speicherplatz gespart werden, wenn nur die tatsächlich belegten Komponenten der Matrizen abgespeichert würden; auch dafür wäre aber wieder eine entsprechende Verwaltung nötig. Eine Zerlegung in

der angegebenen Form ist nur möglich, wenn die Matrix \mathbf{K}_{ges} symmetrisch ist; das ist hier der Fall. Eine unsymmetrische Matrix \mathbf{C} kann in

$$\mathbf{C} = \mathbf{LDR} \quad (3.3.47)$$

zerlegt werden, worin \mathbf{R} eine Rechtsdreiecksmatrix ist, die nur oberhalb der Hauptdiagonalen belegt ist und auf der Hauptdiagonalen selbst Einsen enthält.

Im fünften Schritt wird aus dem Lastvektor \mathbf{f} (rechte Seite) durch sogenanntes Rückwärtseinsetzen die Verschiebung $\hat{\mathbf{u}}$ bestimmt.

$$\mathbf{L D}^* \mathbf{L}^T \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (3.3.48)$$

Der Lastvektor \mathbf{f} wird dabei (speicherplatzsparend) mit dem Knotenpunktverschiebungsvektor $\hat{\mathbf{u}}$ überschrieben.

Im sechsten Schritt werden für jedes einzelne Element die linear-elastische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e und die Transformationsmatrix neu aufgestellt. Durch Transformation der entsprechenden Komponenten des Verschiebungsvektors $\hat{\mathbf{u}}$ erhält man den Verschiebungsvektor für die Knoten des Elementes in dem lokalen Koordinatensystem. Mit den Knotenpunktverschiebungen und dem Verschiebungsansatz lassen sich die Verzerrungen und damit die Schnittgrößen im Element bestimmen. Aus diesen Schnittgrößen wird (siehe unten) für jeden Knoten des Elementes eine Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungsarbeitshypothese gebildet und zusammen mit den Schnittgrößen abgespeichert; so ist es möglich, später auch Schnittgrößenverläufe graphisch auszugeben. Mit den nun bekannten Spannungen bzw. Verschiebungen läßt sich außerdem die Geometriesteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{g1} aufstellen. Diese wird, wie das früher mit \mathbf{K}_e gemacht wurde, auf das globale Koordinatensystem transformiert und zu einer Gesamtmatrix hinzugezogen. Auch diese Gesamtmatrix wird in Skyline-Form speicherplatzsparend abgelegt; ein weiterer Vorteil liegt in der Gleichheit der Verwaltung für beide Steifigkeitsmatrizen.

In einem siebten Schritt wird abschließend eine Vektoriteration nach *v. Mises* durchgeführt (siehe unten). Diese ergibt den betragsmäßig kleinsten Eigenwert (hier: kritischer Druck) und den zugehörigen Eigenvektor (hier: Beulform). Der Eigenvektor wird separat abgespeichert, um den Verschiebungsvektor für eventuelle spätere Ausgaben bereitzuhalten und auch die Beulform abschließend graphisch darstellen zu können.

In Anpassung an die spezielle Problemstellung werden einige rechenzeit-sparende Erweiterungen vorgenommen. Falls beispielsweise schon einmal eine Iteration ausgeführt wurde, wird der alte Eigenvektor übernommen. Wenn sich das aktuelle System von dem vorher berechneten nicht sehr unterscheidet (was hier häufig gegeben ist), läßt sich auf diese Weise viel

Rechenzeit bei der Iteration sparen, weil sich bei geringer Änderung der Systemgeometrie in der Regel auch die Beulform nur wenig verändert. Während der Vorbereitung weiterer FE-Rechnungen werden nur die Knotenkoordinaten neu belegt und die Steifigkeitsmatrizen gelöscht. Die Verwaltung der Daten braucht nicht neu organisiert zu werden; auch die Randbedingungen und die Last (Druck) bleiben hier unverändert.

3.3.15 Vergleichsspannung

Bei der Berechnung von Schalen sind die Schnittgrößen gewöhnlich auf die aktuelle Schnittlänge bezogen. Der Verlauf der Normalspannungen über die Schalendicke kann mit der Definition der Schnittgrößen in der Schalentheorie durch

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi} &= \frac{N_{\xi\xi}}{t} - \zeta \frac{M_{\xi\xi}}{6t^3}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{N_{\varphi\varphi}}{t} - \zeta \frac{M_{\varphi\varphi}}{6t^3}\end{aligned}\tag{3.3.49}$$

angenähert werden, wobei der Parameter ζ in Dickenrichtung an der inneren Oberfläche der Schale -1 und an der äußeren $+1$ ist. Extremwerte der Normalspannungen liegen damit an den Oberflächen der Schale vor. Bei rotationssymmetrischer Druckbeanspruchung einer Rotationsschale und der Wahl der lokalen Koordinatenachsen parallel zu den Krümmungshauptachsen treten vor Beginn des Beulens keine Schubspannungen in der Schalenebene auf. Der Verlauf der Schubspannungen in Schalendickenrichtung läßt sich nicht ohne weiteres angeben. Er ergibt sich aus einer Gleichgewichtsbetrachtung am Schalenelement; die Schubspannungen verschwinden an den Oberflächen (Rändern) und werden an der Schalenmittelfläche maximal. Weil der Schubspannungsverlauf und in der Folge dann das Extremum der Vergleichsspannung nur schwer bestimmt werden können, wird in dieser Arbeit der Einfluß der Schubspannung bei der Bestimmung der Vergleichsspannung vernachlässigt.

Die Vergleichsspannung nach der Gestaltänderungshypothese ist definiert zu

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2} \tau_{ik} \tau_{ki}}\tag{3.3.50}$$

mit

$$\tau_{ik} = \sigma_{ik} - \sigma_m \delta_{ik}, \quad \sigma_m = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

und errechnet sich für ein beliebiges kartesisches Koordinatensystem demnach zu

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2] + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}.\tag{3.3.51}$$

Nach Einsetzen derjenigen Spannungen, die berücksichtigt werden sollen, und Bestimmung des Maximums des Verlaufes über die Schalendicke (ζ) erhält man die Vergleichsspannung in Abhängigkeit von den Schnittgrößen

$$\sigma_v = \frac{1}{t} \sqrt{T_{11} + f T_{12} + f^2 T_{22}} \quad (3.3.52)$$

mit den Termen

$$T_{11} = N_{\xi\xi}^2 - N_{\xi\xi} N_{\varphi\varphi} + N_{\varphi\varphi}^2,$$

$$T_{12} = \left| 2(N_{\xi\xi} M_{\xi\xi} + N_{\varphi\varphi} M_{\varphi\varphi}) - (N_{\xi\xi} M_{\varphi\varphi} + N_{\varphi\varphi} M_{\xi\xi}) \right|,$$

$$T_{22} = M_{\xi\xi}^2 - M_{\xi\xi} M_{\varphi\varphi} + M_{\varphi\varphi}^2,$$

$$f = \frac{6}{t}.$$

Bei der Bestimmung der größten entlang der Meridianlinie auftretenden Vergleichsspannung wird zunächst aus allen Knoten derjenige herausgesucht, an dem die größte Vergleichsspannung auftritt. Zur Interpolation des tatsächlichen Spannungsmaximums wird eine quadratische Parabel durch den aktuellen und die beiden benachbarten Spannungswerte gelegt und der Scheitelpunkt der Parabel bestimmt. Diese Interpolation ist nötig, da es einerseits zu aufwendig ist, das Maximum der Vergleichsspannung entlang der Meridianlinie für jedes Element zu suchen, und andererseits die Spannungsmaxima nicht immer an den Knoten liegen müssen. Ohne die Interpolation würden die Spannungswerte, die ja in die Zielfunktion einfließen, so sehr springen, daß eine Minimumsuche (Optimierung) mit einem Gradientenverfahren sehr erschwert werden würde.

Anzumerken ist außerdem, daß die Spannungen an den Knoten wegen der Annäherung der Schalenkontur mit Geradenstücken und den daraus induzierten Spannungsspitzen (durch Biegemomente) an den Knoten größer ermittelt werden als sie an der tatsächlichen Schale in praxi zu beobachten wären. Bei einer groben Unterteilung in Elemente werden nur die Normalkräfte gut wiedergegeben, während Biegemomente und Querkräfte nur durch eine sehr feine bzw. angepaßte Unterteilung ausreichend genau bestimmt werden können. Dieser Effekt wird durch den sehr einfachen Verschiebungsansatz für das einzelne Element noch wesentlich verstärkt. Die Auswirkung auf die Vergleichsspannung ist noch relativ klein, der kritische Druck aber wird auch mit einer großen Zahl von Elementen (100) und einer weiter gleichmäßigen Unterteilung der Meridianlinie in Elemente immer noch nicht zufriedenstellend genau (Fehler kleiner als 3%) ermittelt. Aus numerischen Gründen ist eine Unterteilung in noch mehr Elemente kritisch: Bei einer zu großen Zahl von Elementen beginnen die numerischen Fehler zu dominieren.

3.3.16 Vektoriteration nach v. Mises

Die Vektoriteration nach v. Mises liefert den betragsmäßig größten und die inverse Vektoriteration den betragsmäßig kleinsten Eigenwert und den dazugehörigen Eigenvektor. Mit einer abschließenden Bildung des *Rayleigh-Quotienten* mit dem letzten Eigenvektor aus der Vektoriteration läßt sich der Eigenwert noch einmal verbessern (siehe dazu *Bronstein*[5]). In dem hier zu behandelnden Fall ist der betragskleinste Eigenwert λ und der zugehörige Eigenvektor $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{e}}$ des allgemeinen Eigenwertproblems

$$[\mathbf{K}_{\mathbf{e}} + \lambda \mathbf{K}_{\mathbf{g}1}] \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{e}} = 0 \quad (3.3.53)$$

zu bestimmen. Nach der vorher ausgeführten Rechnung liegen $\mathbf{K}_{\mathbf{e}}$ in zerlegter Form (*Cholesky*) und $\mathbf{K}_{\mathbf{g}1}$ als Skyline-Matrix vor. Die Konvergenz der Iteration hängt wesentlich von der Dominanz des größten bzw. kleinsten Eigenwertes ab; wenn hier zwei Eigenwerte betragsmäßig nahe beieinander liegen, kann zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens ein *Shiften* (Verschieben) aller Eigenwerte in der Art vorgenommen werden, daß der gesuchte Eigenwert betragsmäßig besonders groß bzw. klein und damit dominant wird.

Zu Beginn der Iteration wird zunächst der Eigenvektor zu dem gesuchten Eigenwert geschätzt (vorbelegt). Eine bewährte Wahl ist, alle nicht durch Randbedingungen festgelegte Komponenten des Vektors auf Eins zu setzen. Die eigentliche inverse Vektoriteration wird gemäß der Vorschrift

$$\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{e}(i+1)} = -\mathbf{K}_{\mathbf{e}}^{-1} \mathbf{K}_{\mathbf{g}1} \frac{1}{\lambda_{(i)}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{e}(i)} \quad (3.3.54)$$

ausgeführt, wobei die Norm des aktuellen genäherten Eigenvektors

$$\frac{1}{\lambda_{(i)}} = \left\| \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{e}(i)} \right\| \quad (3.3.55)$$

einerseits einen geschätzten aktuellen Eigenwert $\lambda_{(i)}$ liefert und andererseits ein zu starkes Anwachsen oder Abklingen der Zahlenwerte während der Iteration verhindert. Die Norm kann beispielsweise die Euklidische Norm oder aber der Wert der betragsgrößten Komponente des Vektors sein. Hier wird letztere gewählt, weil dann auch das Vorzeichen des Eigenwertes bekannt ist.

Die Iteration wird abgebrochen, wenn eine vorgegebene Genauigkeit ε in der Form

$$\left| \frac{\lambda_{(i+1)}}{\lambda_{(i)}} - 1 \right| \leq \varepsilon \quad (3.3.56)$$

erreicht ist. In der vorliegenden Arbeit wurde $\varepsilon=10^{-5}$ gewählt; damit ist die maximal erreichbare Genauigkeit der gegebenen Arithmetik gefordert. Da die Iteration in der Regel alternierend zum Eigenwert konvergiert, ist die Abweichung des ermittelten Eigenwertes vom exakten meistens kleiner als die geforderte Genauigkeit.

Im vorliegenden Fall gibt der Eigenwert als Faktor zum ursprünglich aufgetragenen Innendruck der Schale den kritischen Druck an. Ein *positiver* Eigenwert bezeichnet einen kritischen *Innendruck*, ein *negativer* Eigenwert bezeichnet einen kritischen *Außendruck*.

Wesentlich rechenzeitaufwendiger wird die Iteration, wenn der kleinste kritische Innendruck gesucht wird. Man muß dann solange Eigenvektoren und Eigenwerte bestimmen und danach alle Eigenwerte verschieben (shiften), bis sich das geforderte Vorzeichen des Eigenwertes ergibt. Jede Schale hat zwar einen kritischen Außendruck, eine Kugelschale hat aber beispielsweise keinen kritischen Innendruck, solange man nur Verzweigungslasten bestimmt. Im Extremfalle muß man also sämtliche Eigenvektoren und Eigenwerte bestimmen, um den kleinsten kritischen Innendruck zu finden oder seine Existenz als Verzweigungslast ausschließen zu können. In dieser Arbeit fließt in die Zielfunktion der betragskleinste Eigenwert ein; es wird also jeweils nur eine inverse Vektoriteration durchgeführt. Wie oben bereits erwähnt, verändert sich die Geometrie der Schale zwischen einem Aufruf der Zielfunktion und dem nächsten nur gering. Da in der Regel dann auch die Eigenvektoren ähnlich sind, wird viel Rechenzeit dadurch gespart, daß der vorherige Eigenvektor als Startvektor übernommen wird. Häufig genügen zwei Iterationsschritte, um den Eigenwert auf fünf Dezimalstellen genau zu bestimmen.

Auch der Beulvektor muß die geometrischen Randbedingungen erfüllen; die nicht vorgeschriebenen Komponenten des Beulvektors hängen von den vorgeschrieben ab. Um nicht bei jedem Iterationsschritt die geometrischen Randbedingungen für den Beulvektor von neuem erzwingen zu müssen, wird die Geometriesteifigkeitsmatrix vor der Iteration in ähnlicher Weise behandelt wie die linear-elastische Steifigkeitsmatrix bei der Spannungsberechnung vor der Zerlegung. Es genügt dann, diejenigen Komponenten des Beulvektors, die vorgeschrieben sind, vor der Iteration einmal richtig zu belegen, und die Belegung bleibt während der Iteration erhalten.

Bei schlechter Konvergenz kann mit einem Konvergenzbeschleunigungsverfahren der sich nach unendlich vielen Iterationsschritten ergebende Eigenwert geschätzt werden. Hier liefert das Verfahren von *Aitken* (siehe *Brezinski*[4]) ausgezeichnete Ergebnisse; die Begründung ist darin zu sehen, daß sich die inverse Vektoriteration wie die Iteration mit einer Exponentialfunktion verhält, und das Konvergenzbeschleunigungsverfahren nach *Aitken* gerade unter dieser Annahme hergeleitet wurde. Über die Genauigkeit der Schätzung erhält man aber zunächst keine Information. Die Extrapolationsformel nach *Aitken* lautet

$$\lambda_{\infty} \approx \lambda_{(i-1)} + \frac{(\lambda_{(i)} - \lambda_{(i-1)}) \cdot (\lambda_{(i-2)} - \lambda_{(i-1)})}{(\lambda_{(i)} - \lambda_{(i-1)}) + (\lambda_{(i-2)} - \lambda_{(i-1)})} \quad (3.3.57)$$

Diese Schätzung sollte erst durchgeführt werden, wenn immer dieselbe Komponente des Beulvektors extremal wird und die Iteration konvergiert. Konvergenz liegt vor, wenn die Veränderung der Eigenwerte betragsmäßig von einem Schritt zum nächsten kleiner wird; wenn dieses Kriterium nicht erfüllt ist, besteht die Möglichkeit, daß nicht der betragsmäßig kleinste Eigenwert geschätzt wird, sondern ein anderer. Eine vergleichbare Schätzung des zugehörigen Vektors (beispielsweise mit dem *Wynn*-Verfahren; siehe auch Kapitel 4.4) ergibt allerdings *keine* zufriedenstellenden Ergebnisse, wenn man zum Schätzen eine kleine Zahl von Eigenvektoren vorgibt; die Zahl der Eigenvektoren, die man hier für ein genaues Ergebnis benötigte ($n+1$ bei n Komponenten), ist zum einen größer als die Zahl der Iterationsschritte, die man für die Bestimmung eines hinreichend genauen ersten Eigenvektors braucht, und würde zum anderen in den meisten Fällen im Speicher des Rechners keinen Platz mehr finden; auch die erforderliche numerische Genauigkeit wäre nicht mehr gegeben. Eine komponentenweise Schätzung nach *Aitken* liefert auch nicht zuverlässig genug geeignete Ergebnisse. Es ist aber möglich, durch spezielles Lösen des Gleichungssystems mit der Kenntnis des Eigenwertes den zugehörigen normierten Eigenvektor zu bestimmen; der dafür nötige numerische Aufwand läßt sich in den meisten Fällen allerdings nicht rechtfertigen. Bei den Rechnungen zu der vorliegenden Arbeit wird immer so lange nach *v. Mises* iteriert, bis die geforderte Genauigkeit des Eigenwertes erreicht ist, weil der Eigenvektor, der die Beulform beschreibt, auch ein sehr interessantes Ergebnis der Rechnung ist.

3.3.17 Dimensionslose Kennzahlen

Physikalische Phänomene werden meistens mit Hilfe von Modellen auf mathematischer Grundlage beschrieben. Da mathematische Funktionen im allgemeinen nur von dimensionslosen Argumenten abhängen können, kommt so nur eine Darstellung in dimensionslosen Größen in Frage. Besonders hilfreich ist die Einführung *dimensionsloser Kennzahlen*, wenn die Phänomene von sehr vielen Größen beeinflußt werden; diese Problematik zeigt sich beispielsweise in der Thermodynamik und der Strömungsmechanik.

Auch Rechner arbeiten mit reinen Zahlenwerten. Hier kommt noch das Problem hinzu, daß die Werte normiert werden müssen, um die numerischen Fehler möglichst klein zu halten und ein Verlassen des Zahlenbereiches der Rechenanlage zu vermeiden.

Die wesentlichen dimensionsbehafteten Größen der vorliegenden Schale sind

- der Elastizitätsmodul E,
- die Schalendicke t (hier konstant),
- und der Radius R des anschließenden Zylinders.

Auf diese Größen sollen alle anderen bezogen werden; bezogene Größen werden mit einer übergestellten Schlange gekennzeichnet. Die hier interessantesten Ergebnisse sind das Volumen, die Vergleichsspannung und der kritische Druck. Die Vergleichsspannung hängt von der Druckbelastung ab, daher wird zunächst der Druck dimensionslos gemacht.

Wird ein unendlich langes Rohr (keine Randeffekte) durch Außendruck belastet, so findet man unter Anwendung der Biegetheorie den kritischen Druck

$$p_k = \frac{E t^3}{3(1 - \nu^2) R^3} \quad (3.3.58)$$

Alle Drücke werden auf diesen Wert bezogen, so daß sich jeweils der dimensionslose Druck nach

$$\tilde{p} = \frac{3(1 - \nu^2) R^3}{E t^3} p \quad (3.3.59)$$

bestimmen läßt. Entsprechend errechnet man als Normalspannung in einer druckbelasteten Kugelschale

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{pR}{2t} = \frac{3(1 - \nu^2) R^4}{2 E t^4} \tilde{p} \quad (3.3.60)$$

und kann damit die Spannungen mit dem Bezug

$$\tilde{\sigma} = \frac{2t}{pR} \sigma = \frac{2 E t^4}{3(1 - \nu^2) R^4} \frac{\sigma}{\tilde{p}} \quad (3.3.61)$$

dimensionslos machen. Dieser Bezug läßt sich im FE-Programm auch sehr gut zur Normierung der Steifigkeitsmatrizen verwenden, so daß die Komponenten in der Nähe von 1 liegen; die numerische Genauigkeit läßt sich so noch etwas steigern.

Alle Längen werden auf den Radius der Zylinderschale bezogen, so daß sich beispielsweise

$$\tilde{t} = \frac{t}{R} \quad (3.3.62)$$

ergibt. Durch die Belastung der Schale mit dem Druck

$$\tilde{p} = 1$$

geben die Eigenwerte λ sofort den dimensionslosen kritischen Druck an und eine entsprechende Normierung im Programm ergibt die Vergleichsspannungen auch in der dimensionslosen Schreibweise. Der Vorteil der gewählten Bezüge ist darin zu sehen, daß sich die Ergebnisse sofort anschaulich interpretieren lassen.

4 Optimierung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Optimierung, die eine Hauptaufgabe der vorliegenden Arbeit darstellt. Nach Definition der Zielfunktion wird auf diejenigen zwei Verfahren eingegangen, die im wesentlichen zur Lösung des gestellten Problems herangezogen wurden und sich als besonders geeignet herausstellten. Bei diesen Verfahren handelt es sich um ein modifiziertes *optimales Gradientenverfahren* und ein Verfahren der *quadratischen Optimierung* oder auch *quadratic programming problem* (siehe dazu Aoki[1] und Künzi[20]). Beide Verfahren gehören zu dem Bereich der Parameteroptimierung, zu dem auch die Bücher von Zahradnik[38] und Foulds[11] zahlreiche, wertvolle Hinweise liefern.

Bei der Beschreibung der Verfahren wird, in Anlehnung an die Aufgabenstellung, nur von Minimumsuche gesprochen. Die Ermittlung von Maxima läuft entsprechend ab.

4.1 Zielfunktion

Die Wahl einer Zielfunktion setzt in der Regel einige Erfahrung mit dem Verhalten der in der Zielfunktion enthaltenen Teilfunktionen voraus und kann in vielfältiger Weise geschehen. Häufig angewandte Zielfunktionen f_z sind

$$f_z = \sum_{(i)} a_i |f_i| \quad (4.1a)$$

und

$$f_z = \sum_{(i)} a_i f_i^2, \quad (4.1b)$$

worin die Teilfunktionen f_i , die beispielsweise eine Abweichung von Sollwerten darstellen können, nach einer Normierung bzw. Quadratur mit Koeffizienten a_i gewichtet sind.

Hier soll der Meridianlinienverlauf bei vorgegebenem eingeschlossenen Volumen so bestimmt werden, daß die größte in der Schale auftretende Vergleichsspannung $\tilde{\sigma}_v$ ein Minimum und der betragsmäßig kleinste Beuldruck \tilde{p}_k ein Maximum werden; beide Werte sind bezogen. Vorwegnehmend kann schon hier gesagt werden, daß bei den meisten gerechneten Schalen der Beuldruck \tilde{p}_k und die Vergleichsspannung $\tilde{\sigma}_v$ in der gleichen Größenordnung liegen und Werte annehmen können, die gewöhnlich größer als 1 sind. Würde hier eine Zielfunktion in der Form

$$f_z = a_1 \tilde{\sigma}_v + a_2 \left| \frac{1}{\tilde{p}_k} \right| \quad (4.1c)$$

gewählt, so würde für $a_1 = a_2$ ein großer Wert der Vergleichsspannung gegenüber dem kleinen Wert des inversen kritischen Druckes dominieren. Auch eine entsprechende Vergrößerung des Koeffizienten a_2 führt auf

keine befriedigenden Ergebnisse, da a_2 je nach Größenordnung der Werte $\tilde{\sigma}_v$ und \tilde{p}_k ständig angepaßt werden müßte. Eine solche variable Veränderung der Zielfunktion ist schon allein deswegen nicht sinnvoll, weil dann die Ergebnisse schlecht zu interpretieren wären.

Die genannten Überlegungen führen auf die Festlegung der Zielfunktion in der Form

$$f_z = \left| \frac{\tilde{\sigma}_v}{\tilde{p}_k} \right|. \quad (4.2)$$

Ein Vorteil ist darin zu sehen, daß auch bei unbezogenen Größen σ_v und p_k die Zielfunktion dimensionslos wird. Die etwa gleiche Größenordnung der bezogenen Größen $\tilde{\sigma}_v$ und \tilde{p}_k führt auf Werte der Zielfunktion, die gewöhnlich zwischen 0.1 und 10 liegen, wodurch numerische Probleme von dieser Seite nicht zu erwarten sind. Eine Wichtung der einzelnen Größen ist gegebenenfalls mit einer Einbringung von Exponenten möglich, womit man sich allerdings gleichzeitig auf dimensionslose Größen beschränken müßte.

Um dem Leser einen Eindruck zu geben, wie rechenaufwendig eine Zielfunktionsauswertung ist, seien hier zwei Zeiten im Vergleich genannt. Zur Bestimmung der größten Vergleichsspannung in der Schale (130 Elemente; ca. 3% Fehler) werden auf dem bereitgestellten Rechner (Atari MegaST4) 13 Sekunden benötigt; wird eine Stabilitätsuntersuchung (Verzweigungslast) hinzugenommen (30 Elemente), so werden in Abhängigkeit von der Zahl der Vektoriterationschritte im Mittel ungefähr 14 Minuten (!) benötigt. Die Zahl der Elemente geht linear in die Rechenzeit und den Speicherplatzbedarf ein.

4.2 Parameter und Restriktionen

Im Kapitel 2 wurde die Geometrie der Schalenmeridianlinie besprochen. Aus diesem Kapitel kann auch entnommen werden, daß die Restriktionen sich nicht oder nur mit hohem Aufwand in Form von linearisierten Ungleichungen angeben lassen. Dieser Umstand erfordert eine besondere Behandlung und führt auf die Entwicklung und Anwendung spezieller Optimierungsverfahren.

Die Zahl n_p der Parameter hängt nach der Gleichung

$$n_p = 2 n_T - 3 \quad (4.3)$$

von der Zahl n_T der Torusschalenstücke ab. Je mehr Torusstücke gewählt werden, desto besser kann man eine optimale Form annähern; gleichzeitig steigt aber auch die Zahl der (lokal) optimalen Schalenformen für ein gegebenes eingeschlossenes Volumen und der Rechenaufwand für die Optimierung. Damit ist auch schon ein weiteres Problem genannt, das hier behandelt werden muß: Die Zielfunktion ist nicht unimodal, sondern

multimodal. Es ist in der Regel nicht mehr möglich das absolute Optimum zu finden, also dasjenige, das von allen vorhandenen Optimalpunkten der Zielfunktion den mathematisch besten (kleinsten oder größten) Funktionswert liefert.

Es soll in dieser Arbeit versucht werden, mehrere optimale Schalenformen zu finden und zwischen ihnen unter Hinzunahme einiger weiterer, eher praktischer Kriterien, wie beispielsweise der Herstellbarkeit der Schale, eine Auswahl zu treffen.

Zu den Restriktionen muß bemerkt werden, daß sie sich auch in Form von Ungleichungen angeben lassen, die aber alle nichtlinear, sehr kompliziert und nicht sicher konvex sind. Die Zahl der zu beachtenden Ungleichungen steigt mit der Fakultät (!) der Zahl der Torusschalenstücke und ist somit häufig sehr groß. Da die Restriktionen nicht sicher konvex sind, kann auch dadurch die Zahl der Optima weiter ansteigen. Gleichzeitig besteht das Problem, daß für diesen Fall zur Zeit keine Optimierungsverfahren vorliegen, die das absolute Optimum ermitteln können.

4.3 Modifikation des optimalen Gradientenverfahrens

Das optimale Gradientenverfahren sucht entlang der Richtung des an dem aktuellen Punkt im Parameterraum bestimmten Gradienten der Zielfunktion nach einem Optimum (hier: lokales Minimum). Die lineare Suche ist ein zentrales Problem, da die Zahl der Zielfunktionsaufrufe möglichst klein zu halten ist. Ist das gesuchte Minimum gefunden, so wird an diesem Punkt ein neuer Gradient bestimmt, der gleichzeitig die neue Suchrichtung festlegt. Das zweite zentrale Problem ist die numerische Bestimmung des Gradienten, weil sehr häufig, wie auch hier, seine analytische Bestimmung zu aufwendig oder sogar unmöglich ist und die Zahl der benötigten Zielfunktionsaufrufe eine wesentliche Rolle spielt. Das optimale Gradientenverfahren ist in vielen Fällen nicht so gut, wie der Name vermuten läßt, weil es bei stark gekrümmten Zielfunktionen nur mit sehr vielen, kleinen Schritten in das Minimum führt. Die Zahl der Zielfunktionsaufrufe steigt damit sehr stark an. Die Modifikationen sollen nun so gewählt werden, daß die Funktion des Verfahrens erhalten bleibt und die Zahl der Zielfunktionsaufrufe möglichst klein wird. Die Konvergenz soll zusätzlich durch die Anwendung eines Konvergenzbeschleunigungsverfahrens verbessert werden.

Bei vielen Gradientenverfahren bzw. gradientengesteuerten Verfahren ist die Festlegung der Schrittweite eine zentrale Schwierigkeit. Sie ergibt sich dadurch, daß man mit dem Gradienten zwar eine neue verfahrensspezifische Suchrichtung ermittelt hat, aber keine Aussage über die Krümmung entlang der Suchrichtung erhält. Hier wird dafür so verfahren, daß zunächst in Abhängigkeit von der geforderten Genauigkeit eine

Schrittweite gewählt wird, die so groß sein kann wie die geforderte Genauigkeit selbst. Zu Beginn eines jeden Schrittes wird zunächst ein genäherter Gradient der Zielfunktion an dem aktuellen Punkt im Parameterraum bestimmt. Normalerweise wird dazu jeder Parameter geringfügig vergrößert und verkleinert; der Quotient aus der Differenz der zugehörigen Funktionswerte f_z zu der Differenz der Parameterschritte liefert genähert die partielle Ableitung nach dem entsprechenden Parameter x_i .

$$\frac{\partial f_z}{\partial x_i} \approx \frac{f_z(x_i + \delta_{ij} \Delta_x) - f_z(x_i - \delta_{ij} \Delta_x)}{2 \Delta_x} \quad (4.4a)$$

Dieses wird für jeden Parameter ausgeführt und ergibt so einen genäherten Gradienten am aktuellen Punkt im Parameterraum. Da die Zielfunktionsauswertung sehr rechenzeitaufwendig ist, wird hier der Gradient durch

$$\frac{\partial f_z}{\partial x_i} \approx \frac{f_z(x_i + \delta_{ij} \Delta_x) - f_z(x_i)}{\Delta_x} \quad (4.4b)$$

angenähert und, zur Vermeidung von systematischen Fehlern, das Vorzeichen von Δ_x jeweils mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators festgelegt. Der Betrag von Δ_x wird gleich der geforderten Genauigkeit gesetzt; Δ_x kann (betragsmäßig) aber nicht beliebig klein gewählt werden, weil sonst die numerischen Fehler größer werden würden als die gleichzeitige Änderung des Zielfunktionswertes und somit der numerisch ermittelte Gradient keine Aussagefähigkeit mehr besäße.

Der negative Gradient zeigt in Richtung des stärksten Gefälles der Zielfunktion. Die lineare Suche des optimalen Gradientenverfahren wird nun ersetzt durch folgende Vorgehensweise. Liefert ein Schritt mit der aktuellen Schrittweite in Richtung des negativen Gradienten keine Verbesserung, das heißt Verkleinerung des Zielfunktionswertes, so wird die aktuelle Schrittweite so lange halbiert, bis sich eine Verbesserung ergibt; anderenfalls wird die Schrittweite so lange verdoppelt, bis sich keine Verbesserung mehr ergibt. Für die Optimierung mit nur einem Parameter entspricht dieses Verfahren einer Intervallschachtelung für die Nullstelle des Gradienten. Die genannte Vorgehensweise hat zwei Vorteile; es werden nur relativ wenige Zielfunktionsauswertungen benötigt und die Schrittweite paßt sich sehr schnell an die aktuellen Begebenheiten an. Als Nachteil ist zu werten, daß alle Parameter ungefähr die gleiche Größenordnung haben müssen; diese Schwierigkeit kann aber mit einer automatischen Wichtung der Parameter beseitigt werden.

Vorausgesetzt, daß keine Restriktionen verletzt sind, wird die Optimierung zunächst unterbrochen, wenn die Schrittweite kleiner wird als die geforderte Genauigkeit. Eine nachfolgende Überprüfung der *Kuhn-Tucker*-Bedingungen entscheidet, ob die Optimierung abgebrochen oder fortgeführt wird. Die *Kuhn-Tucker*-Bedingungen fordern für diesen Fall, daß der

Gradient zum Nullvektor wird. Diese Forderung, die eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums darstellt, bereitet bei der numerischen Bearbeitung einige Schwierigkeiten, weil der Gradient, sofern er nicht analytisch ermittelt wird, nur genähert bestimmt werden kann. Die *Kuhn-Tucker*-Bedingungen werden hier als erfüllt angesehen, wenn ein Schritt Δ_x in die positive und negative Richtung eines jeden Parameters x_i nur zu einer Verschlechterung, nämlich Vergrößerung, der Zielfunktion führt; andernfalls hat man mit den durchgeführten Rechnungen schon einen neuen Gradienten der Zielfunktion für den nächsten Optimierungsschritt ermittelt.

4.4 Konvergenzbeschleunigung

Es ist bekannt, daß reine Gradientenverfahren in vielen Anwendungsfällen eine relativ schlechte Konvergenz zeigen. Diese kann gelegentlich wesentlich gesteigert werden, wenn ein Konvergenzbeschleunigungsverfahren zur Verbesserung hinzugezogen wird. Das soll hier geschehen.

Vorausgesetzt, daß mit dem optimalen Gradientenverfahren einige Schritte ausgeführt wurden, liegen die Punkte, an denen jeweils der Gradient bestimmt wurde, meistens alternierend um eine irgendwie gekrümmte Linie im Parameterraum; diese Linie endet in einem lokalen Optimum. Aufgabe des Konvergenzbeschleunigungsverfahrens ist es, aus einer beschränkten Zahl von Punkten auf der genannten Linie denjenigen Punkt zu extrapolieren, der nach unendlich vielen Iterationsschritten erreicht wird. Im Idealfall sollte bei der vorliegenden Anwendung dieser extrapolierte Punkt das gesuchte Minimum sein.

In der vorliegenden Arbeit wird das *Wynn*-Verfahren angewandt. Das *Wynn*-Verfahren bestimmt aus einer wählbaren (ungeraden) Zahl von Vektoren, die die Zwischenergebnisse einer Iteration sind, denjenigen Vektor, der sich nach unendlich vielen Iterationsschritten ergibt. Für den eindimensionalen Fall entspricht das *Wynn*-Verfahren dem *Aitken*-Verfahren⁸⁾ (siehe auch: 3.3.16 Vektoriteration, *Brezinski*[4]).

Sollen n (ungerade) Vektoren $\overset{(1)}{x}_j$ vorgegeben werden, so wird eine Hilfsspalte mit $n+1$ Hilfsvektoren $\overset{(0)}{x}_j$ auf Null gesetzt. Die hochgestellte und in Klammern gesetzte Zahl bezeichnet die Spalte (Nummer des Schrittes); der Index bezeichnet den Vektor innerhalb der Spalte. Mit jedem Rechenschritt wird die Zahl der Vektoren um 1 verringert. Nur nach jeweils zwei solchen Rechenschritten zeigt die Spalte von Vektoren wieder Konvergenzeigenschaften, während der Schritt dazwischen als Hilfsschritt

⁸⁾ Das *Aitken*-Verfahren wird auch *Steffenson*-Verfahren genannt und häufig als Referenz für andere Verfahren verwendet. Bei der Verarbeitung von Vektoren mit n Komponenten müssen bei diesem Verfahren $n+2$ Vektoren vorgegeben werden. Diese Zahl ist häufig zu groß für eine Anwendung in der Numerik.

zu verstehen ist; aus diesem Grund ist auch eine ungerade Zahl von Vektoren vorzugeben. Die Rechenvorschrift für die Bestimmung einer Vektorenspalte aus den zwei vorhergehenden lautet

$$\mathbf{x}_j^{(i)} = \mathbf{x}_{j+1}^{(i-2)} + \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \quad (4.5)$$

mit

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_{j+1}^{(i-1)} - \mathbf{x}_j^{(i-1)},$$

und nach $n-1$ solchen Schritten steht nur noch ein Vektor in der aktuellen Spalte; dieser ist das geschätzte Iterationsergebnis. Die Schätzung wird um so besser, je mehr Vektoren vorgegeben werden; der numerische Fehler ist allerdings auch hier zu beachten, so daß man die Zahl der vorgegebenen Vektoren nicht zu groß wählen sollte. Bei den Rechnungen zur Konvergenzbeschleunigung werden häufig Differenzen etwa gleichgroßer Zahlen gebildet; die dabei auftretenden numerischen Fehler können gegebenenfalls die Größenordnung der Differenzen annehmen, womit das Verfahren versagt. Entsprechende Testrechnungen liefern Anhaltswerte für die Zahl der vorzugebenden Vektoren.

Obwohl bei dem angewendeten Optimierungsverfahren die lineare Suche wesentlich vereinfacht wurde, liefert auch dafür die Konvergenzbeschleunigung nach *Wynn* häufig erstaunlich gute Ergebnisse. Das soll einem Testbeispiel gezeigt werden.

Es wird eine Funktion in Abhängigkeit von zwei Parametern, deren Wert wie eine Rinne in Form einer logarithmischen Spirale zum Zentrum hin abfällt, als Zielfunktion vorgegeben. Das nachfolgende Bild 4.1 zeigt die Höhenlinien. Der invers dargestellte zentrale Teil ist ein verbotenes Gebiet

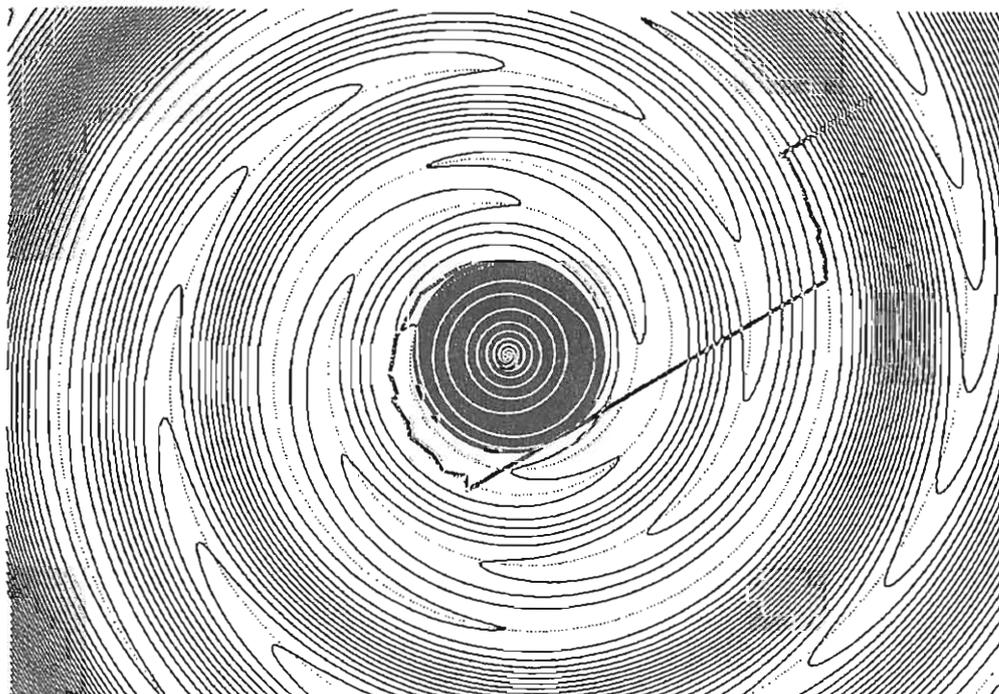


Bild 4.1: Konvergenzbeschleunigung im optimalen Gradientenverfahren

und die zusätzlich eingezeichnete Linie gibt den Verlauf der Optimierung an. Der Startpunkt liegt rechts oben im Bildbereich. Nach einigen Schritten mit dem modifizierten optimalen Gradientenverfahren bewirkt ein Schritt mit dem *Wynn*-Verfahren eine wesentliche Verbesserung, nämlich ein Überspringen einer Windung der Spirale. Ab dort führt die normale Optimierung bis an die Restriktion, deren Behandlung im nächsten Abschnitt beschrieben wird. Die Zahl der Zielfunktionsaufrufe, die hier als wesentliches Kriterium herangezogen wird, vermindert sich dadurch auf ein Drittel; ein Großteil der übrigen Aufrufe wird für die Bestimmung des Minimums an der Restriktion benötigt.

Eine Spirale, wie im Testbeispiel gezeigt, wird von einem Gradientenverfahren normalerweise mit sehr vielen Schritten durchlaufen, weil das Verfahren immer der Rinne folgen muß. Mit einer Schätzung des Iterationsergebnisses nach dem *Wynn*-Verfahren wird hier eine Verbesserung erreicht. Dazu muß aber gesagt werden, daß ein solcher Schritt nicht immer erfolgreich ist. Nach der Schätzung des Iterationsergebnisses wird, falls dieser Punkt nicht im verbotenen Bereich (festgelegt durch Restriktionen) liegt, dort der Funktionswert ermittelt. Ist dieser besser als derjenige an dem bisherigen Punkt, so wird er als neuer Startpunkt für die weitere Optimierung übernommen; ansonsten wird die Optimierung wie gewöhnlich fortgeführt.

Da die lineare Suche nicht vollständig ausführt wird, ist einerseits die Schrittweite relativ groß, andererseits liegen die einzelnen Punkte der Optimierungsschritte auf einer Zick-Zack-Linie um die *Rinne* herum. Mehrere Testrechnungen ergaben, daß bei Vorgabe von 11 Vektoren für die Konvergenzbeschleunigung nach *Wynn* gute Ergebnisse erlangt werden. Werden weniger Vektoren vorgegeben, so ist die Schätzung häufig schlecht, und werden mehr vorgegeben, so ist häufig das Minimum schon gefunden, bevor das *Wynn*-Verfahren überhaupt zum Tragen kommt. Die Zahl der vorgegebenen Vektoren sollte also jeweils problembezogen gewählt werden; die Zahl der Parameter der Zielfunktion ist als Kriterium in diese Wahl einzubeziehen.

Wird bei einem Schritt zu einem nach *Wynn* bestimmten Punkt eine Restriktion verletzt, so wird ähnlich verfahren wie bei einem entsprechenden Schritt nach einem Gradientenverfahren.

4.5 Behandlung der Restriktionen

Die Berücksichtigung nichtlinearer Restriktionen bereitet in der Optimierung häufig Schwierigkeiten. Grundlegende Überlegungen wurden von *Zoutendijk* (siehe *Aoki*[1]) angestellt. In ähnlicher Weise soll auch hier vorgegangen werden.

Soll ein Minimum unter Beachtung bestimmter Beschränkungen gefunden werden, so kann es passieren, daß das (ein) Minimum der Zielfunktion direkt an der Schranke (hier: Restriktion) liegt. Der in das erlaubte Gebiet zeigende Einheitsnormalenvektor auf der Restriktion sei mit \mathbf{n}_R bezeichnet. Die notwendige Bedingung für das Vorliegen eines Minimums an der Restriktion lautet

$$\nabla f_z \parallel \mathbf{n} , \quad (4.6)$$

das heißt, der Gradient der Zielfunktion und der Normalenvektor auf der Restriktion müssen kollinear sein. Ziel des Verfahrens muß die Erfüllung dieses Kriteriums sein.

Gegenüber dem schon beschriebenen Verfahren erweitert sich die Problematik insofern, als nun Gradient *und* Normalenvektor zur Bestimmung einer neuen Suchrichtung herangezogen werden. Besonders interessant, weil eindeutig, ist das konvexe Problem, bei dem die Krümmungen der Zielfunktion und der Restriktion genau ein Minimum bilden. Das Bild 4.2 zeigt einen solchen Fall, wobei die Restriktion dick und die Höhenlinien der Zielfunktion dünn gezeichnet sind.

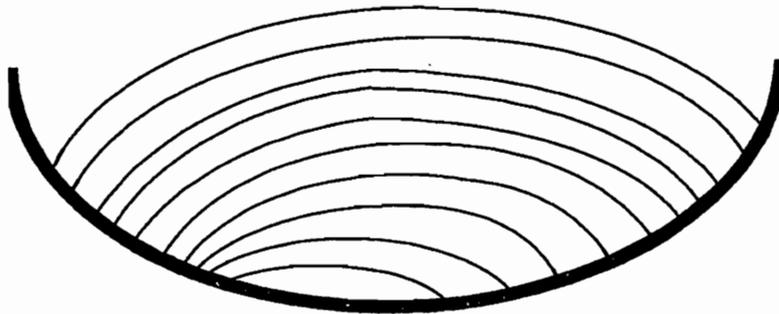


Bild 4.2: Konvexes Problem

Über die Krümmungen von Zielfunktion und Restriktionen liegen für die nachfolgenden Überlegungen keine Informationen vor. Bild 4.3 zeigt die

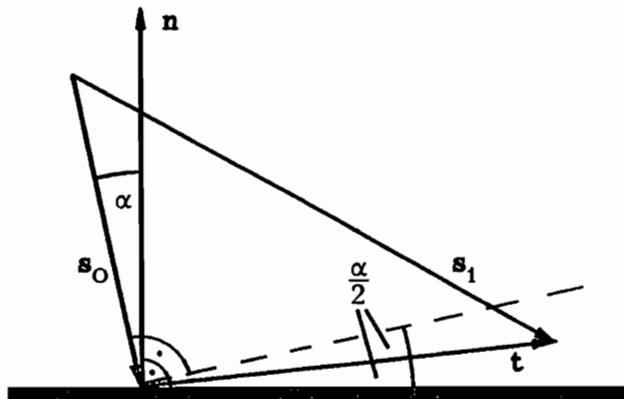


Bild 4.3: Linearisierte Verhältnisse, Behandlung der Restriktionen

Verhältnisse für den linearisierten Fall. Der nicht eingezeichnete und zu \mathbf{s}_0 kollineare Vektor \mathbf{s} bezeichnet den Schritt von dem Punkt, an dem der Gradient der Zielfunktion bestimmt wurde, zu dem Punkt, zu dem der Schritt führen sollte; \mathbf{s} ist dem Gradienten entgegengerichtet, wenn wie hier ein Minimum gesucht wird. Derjenige Teil von \mathbf{s} , der im erlaubten Gebiet liegt, wird mit \mathbf{s}_0 bezeichnet und endet an der Restriktion, die als dicke Gerade eingezeichnet ist. Derjenige Schritt, der abweichend von dieser ursprünglichen Richtung ausgeführt wird, wird durch \mathbf{t} beschrieben. Der vollständige neue Schritt ist die vektorielle Summe aus \mathbf{s}_0 und \mathbf{t} und wird \mathbf{s}_1 genannt. In der Folge bezeichnet eine hochgestellte Schlange einen auf die Länge 1 normierten Vektor, zum Beispiel $\tilde{\mathbf{s}}$.

Die wesentliche Frage, die nun beantwortet werden muß, ist, welche Richtung und welche Länge der Vektor \mathbf{t} haben soll. Zu der Richtung sind folgende wesentliche Aussagen zu machen. In Bild 4.3 ist eine gestrichelte Linie senkrecht zu \mathbf{s}_0 eingezeichnet; mit der Annahme, daß die Zielfunktion nicht gekrümmt ist, handelt es sich hierbei um diejenige Höhenlinie der Zielfunktion, die durch den aktuellen Punkt an der Restriktion verläuft. Der Winkel zwischen dieser Linie und der auch als geradlinig angenommenen Restriktion ist gleich dem Winkel α zwischen dem Normalenvektor und dem Gradienten ($-\mathbf{s}$) der Zielfunktion. Der abweichende Schritt \mathbf{t} darf weder eine Verschlechterung der Zielfunktion bewirken, noch in das verbotene Gebiet führen, muß also zwischen der gestrichelten Linie und der dicken Restriktionsgrenze verlaufen. Bezieht man in die Überlegungen ein, daß in praxi Zielfunktion und Restriktion gekrümmt sein können, so wird man, solange keine Informationen über die Krümmungen vorliegen, eine mittlere Lage wählen. In Verbindung mit der noch zu beschreibenden Schrittweitensteuerung hat sich die Winkelhalbierende in Testrechnungen als sehr günstig für die Konvergenz des Verfahrens herausgestellt.

Bezüglich der Schrittweitensteuerung ist anzumerken, daß schon das übergeordnete Programm über eine solche verfügt, also diese von dort aus geschehen kann. Das bedeutet, daß die Schrittweite bei der Behandlung der Restriktionen nach Möglichkeit erhalten bleiben sollte. Es wird hier die Länge von \mathbf{s}_1 zunächst so groß gewählt wie die Länge des ursprünglichen Schrittes \mathbf{s} . Die Forderung, daß diese Vorgehensweise eine schnelle Annäherung an ein an der Restriktion gelegenes Minimum bewirkt, hat sich in zahlreichen Testrechnungen als sehr gut erfüllt herausgestellt. Die gesamte Vorgehensweise ist nun folgende: Vor jedem Schritt \mathbf{s} mit dem Gradientenverfahren wird überprüft, ob der Endpunkt die Restriktionen verletzt; ist das nicht der Fall, so wird das Verfahren ohne Unterbrechung fortgeführt. Ansonsten wird mit Hilfe einer Intervallschachtelung zunächst derjenige Punkt auf dem Schrittvektor \mathbf{s} bestimmt, der mindestens eine Strecke ε auf \mathbf{s} von der Restriktionsgrenze entfernt im erlaubten Gebiet

liegt. Der Vektor, der vom Schrittstartpunkt zu diesem Punkt führt, heißt \mathbf{s}_0 . Mit Hilfe eines Verfahrens, das eine Kombination aus einer Intervallschachtelung und dem *Jacobi*-Verfahren (dieses Verfahren dient normalerweise zur Diagonalisierung von Matrizen) darstellt, wird iterativ der Einheitsnormalenvektor $\tilde{\mathbf{n}}$ auf der Restriktion bestimmt. Die weitere Rechnung läßt sich gut formelmäßig angeben:

$$-\cos \alpha = \tilde{\mathbf{s}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{s}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}, \quad (4.7a)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad (4.7b)$$

$$\tilde{\mathbf{t}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} (\tilde{\mathbf{s}}_0 + \tilde{\mathbf{n}}), \quad (4.7c)$$

$$t = |\mathbf{t}| = \sqrt{|\mathbf{s}|^2 + |\mathbf{s}_0|^2 (\sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1) - |\mathbf{s}_0| \sin \frac{\alpha}{2}}, \quad (4.7d)$$

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_0 + \mathbf{t} = \mathbf{s}_0 + t \tilde{\mathbf{t}}. \quad (4.7e)$$

Führt dieser Schritt zu einer erneuten Verletzung der Restriktionen, so wird t so oft halbiert, bis der neue Zielpunkt im erlaubten Gebiet liegt; diese Vorgehensweise entspricht im eindimensionalen einer Intervallschachtelung für das Minimum an der Restriktion. Auf eine eventuelle Verschlechterung (Vergrößerung) der Zielfunktion reagiert das übergeordnete Gradientenverfahren mit einer entsprechenden Schrittweitensteuerung. Das Verfahren wird abgebrochen und das Minimum als gefunden angesehen, wenn der Winkel α zwischen dem Schrittvektor \mathbf{s} und dem Normalenvektor \mathbf{n} kleiner wird, als die Genauigkeit (Winkelabweichung) des iterativ bestimmten Normalenvektors.

Die Konvergenz des Verfahrens an sich ist recht gut. Eine Konvergenzbeschleunigung nach *Wynn* bewirkt gelegentlich noch eine zusätzliche Verbesserung. Führt ein Schritt mit Hilfe des *Wynn*-Verfahrens zu einer Verletzung der Restriktionen, so wird, wie oben, iterativ auf dieser Richtung ein Punkt an der Grenze der Restriktionen bestimmt. Der Schritt wird nur ausgeführt, wenn er zu einer Verbesserung der Zielfunktion führt.

4.6 Quadratische Optimierung

Das Problem der Gradientenverfahren ist die Wahl einer neuen Suchrichtung und der zugehörigen Schrittweite. Mit der Bestimmung der Krümmung der Zielfunktion kann dieses Problem vereinfacht werden. Bei der quadratischen Optimierung wird das Verhalten der Zielfunktion in der Nähe des aktuellen Punktes \mathbf{x}_0 mit Hilfe der quadratischen Funktion

$$f_z(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \mathbf{C} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (4.8)$$

approximiert. Dabei wird vorausgesetzt, daß die *Hesse*-Matrix \mathbf{C} positiv

definit und symmetrisch ist. Gesucht wird der Schrittvektor

$$\mathbf{s} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \quad (4.9)$$

vom aktuellen Punkt \mathbf{x}_0 zu dem Minimum der Funktion f . Sind \mathbf{C} und ∇f bekannt, so läßt sich \mathbf{s} (klassisches Verfahren) nach

$$\mathbf{s} = -\mathbf{C}^{-1} \nabla f \quad (4.10)$$

bestimmen. Das Problem ist hierbei die eventuell schrittweise Bestimmung der Matrix \mathbf{C}^{-1} , für deren vollständige Ermittlung eine große Zahl ($n(n+1)/2$ bei n Parametern) von Zielfunktionsaufrufen nötig ist. Eine Reihe von Optimierungsverfahren unterscheiden sich in der Vorgehensweise, wie sie während der laufenden Optimierung diese Matrix sukzessive aufbauen und aktualisieren. Zu nennen sind hier die Namen *Davidon*, *Powell*, *Fletcher*, *Broyden*, *Goldfarb* und *Shanno*. Die ersten drei Namen bezeichnen eine bestimmte Formel für die Entwicklung von \mathbf{C}^{-1} ; die letzten vier Namen sind mit einer verbesserten numerischen (BFGS-) Methode verbunden. Weitere Entwicklungen versuchen die Effizienz dieses Verfahrens noch zu erhöhen.

In dieser Arbeit wird das *klassische Verfahren* aus dem Bereich der quadratischen Optimierung mit der bereits beschriebenen Konvergenzbeschleunigung nach *Wynn* versehen. Unter der Voraussetzung, daß die Zielfunktion die oben angegebene quadratische Form hat, lassen sich der Gradient und die *Hesse*-Matrix wahlweise nach

$$\nabla_i f = \frac{1}{2\varepsilon} (f(-2\varepsilon_i) - 4f(-\varepsilon_i) + 3f(0)) , \quad (4.11a)$$

$$C_{ii} = \frac{1}{\varepsilon^2} (f(-2\varepsilon_i) - 2f(-\varepsilon_i) + f(0)) , \quad (4.11b)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{\varepsilon^2} (f(-\varepsilon_i - \varepsilon_j) - f(0)) + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_i f + \nabla_j f) - \frac{1}{2} (C_{ii} + C_{jj})$$

oder

$$\nabla_i f = \frac{1}{2\varepsilon} (f(\varepsilon_i) - f(-\varepsilon_i)) , \quad (4.11c)$$

$$C_{ii} = \frac{1}{\varepsilon^2} (f(-\varepsilon_i) - 2f(0) + f(\varepsilon_i)) , \quad (4.11d)$$

$$C_{ij} = \frac{-1}{\varepsilon^2} (f(\varepsilon_i - \varepsilon_j) - f(0)) + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_i f - \nabla_j f) + \frac{1}{2} (C_{ii} + C_{jj})$$

oder

$$\nabla_i f = \frac{1}{2\varepsilon} (-3f(0) + 4f(\varepsilon_i) - f(2\varepsilon_i)) , \quad (4.11e)$$

$$C_{ii} = \frac{1}{\varepsilon^2} (f(0) - 2f(\varepsilon_i) + f(2\varepsilon_i)) , \quad (4.11f)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{\varepsilon^2} (f(\varepsilon_i + \varepsilon_j) - f(0)) - \frac{1}{\varepsilon} (\nabla_i f + \nabla_j f) - \frac{1}{2} (C_{ii} + C_{jj})$$

exakt bestimmen. Für jede andere Zielfunktion stellen die bestimmten Werte Näherungen dar. Hierin ist ε eine vorzugebende, kleine, positive Zahl und der angefügte Index bezeichnet die dafür aktuell gültige

Komponente (den Parameter); alle anderen Komponenten sind Null. Die Lage \mathbf{x}_0 ist für das Ergebnis \mathbf{s} unerheblich und wird durch eine entsprechende Koordinatensystemverschiebung zu einem Nullvektor gemacht. Eine Auswahl zwischen den angegebenen Gleichungen wird nötig, wenn eine der Stützstellen die Restriktionen verletzt.

Die Zahl der Zielfunktionsaufrufe ist mit

$$n_z = n(n + 1)/2 \quad (4.12)$$

bei n Parametern der Zielfunktion bekannt. Für kleine Zahlen n bedeutet das keine wesentliche Erhöhung der Zahl n_z gegenüber dem reinen Gradientenverfahren, wenn man die zu erwartende bessere Konvergenz in den Vergleich einbezieht. Wenn die Parameterzahl n groß ist, kann auf eines der oben genannten Verfahren bzw. eine Verbesserung zurückgegriffen werden.

Die Matrix \mathbf{C} kann, sofern sie tatsächlich positiv definit ist, in

$$\mathbf{C} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} \quad (4.13)$$

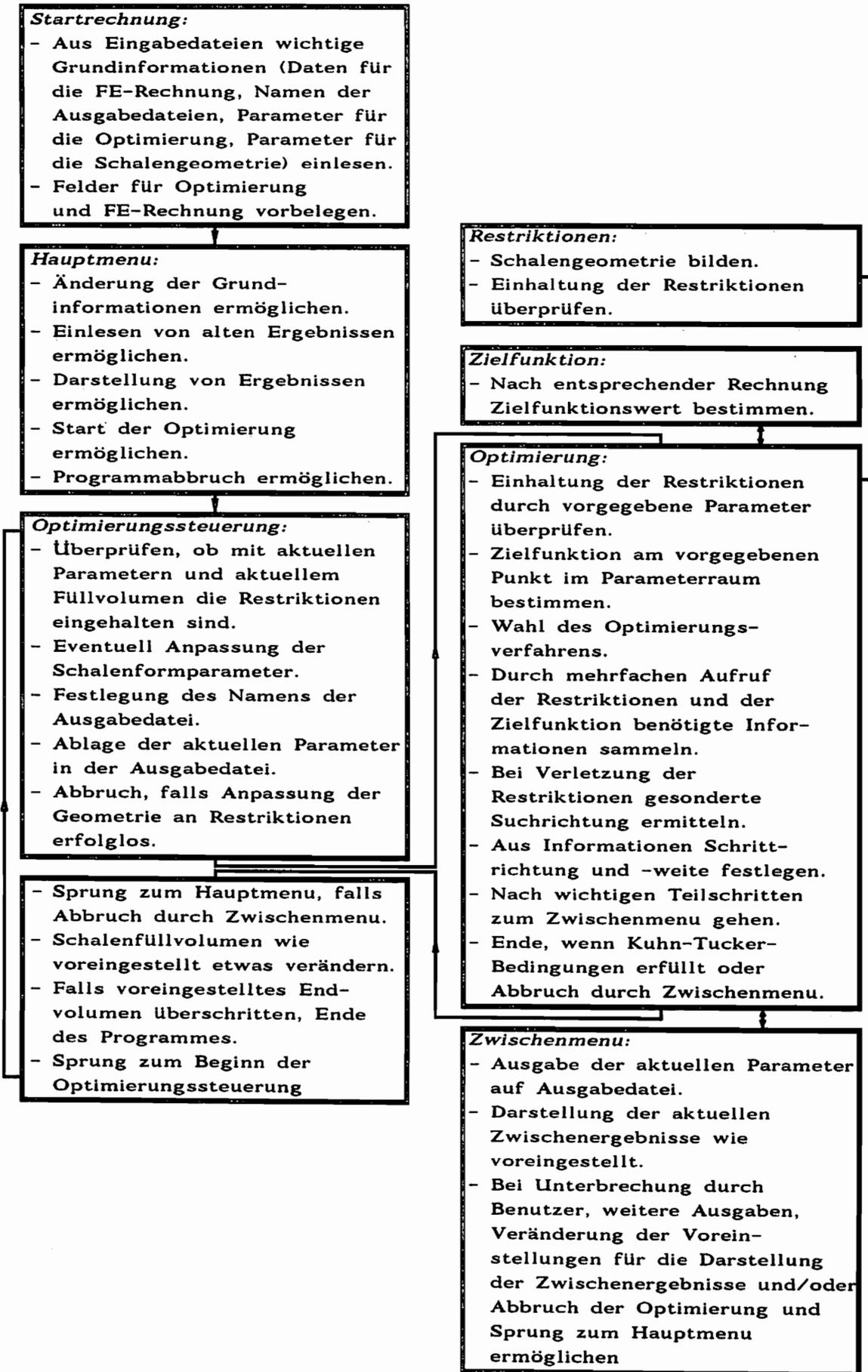
zerlegt werden; ist dieses nicht der Fall, so kann diese Eigenschaft während der Zerlegungsprozedur abgefragt werden. Nur wenn \mathbf{C} positiv definit ist, kann der Schrittvektor \mathbf{s} durch sogenanntes Rückwärtseinsetzen bestimmt werden; andernfalls wird zu dem bereits beschriebenen Gradientenverfahren übergegangen, wobei der Gradient für den ersten Schritt schon bekannt ist und übernommen werden kann. Mit dem Gradientenverfahren ist auch das Auffinden eines Minimums von einer bereichsweise konkaven Zielfunktion möglich.

Die gute Konvergenz des quadratischen Verfahrens bewirkt, daß weniger Vektoren für die Konvergenzbeschleunigung vorgegeben werden müssen. Testrechnungen ergaben, daß bei Vorgabe von $n+2$ Vektoren bei n Optimierungsparametern gute Erfolge erzielt werden. Im Einzelfall kann die Zahl der Vektoren angepaßt werden.

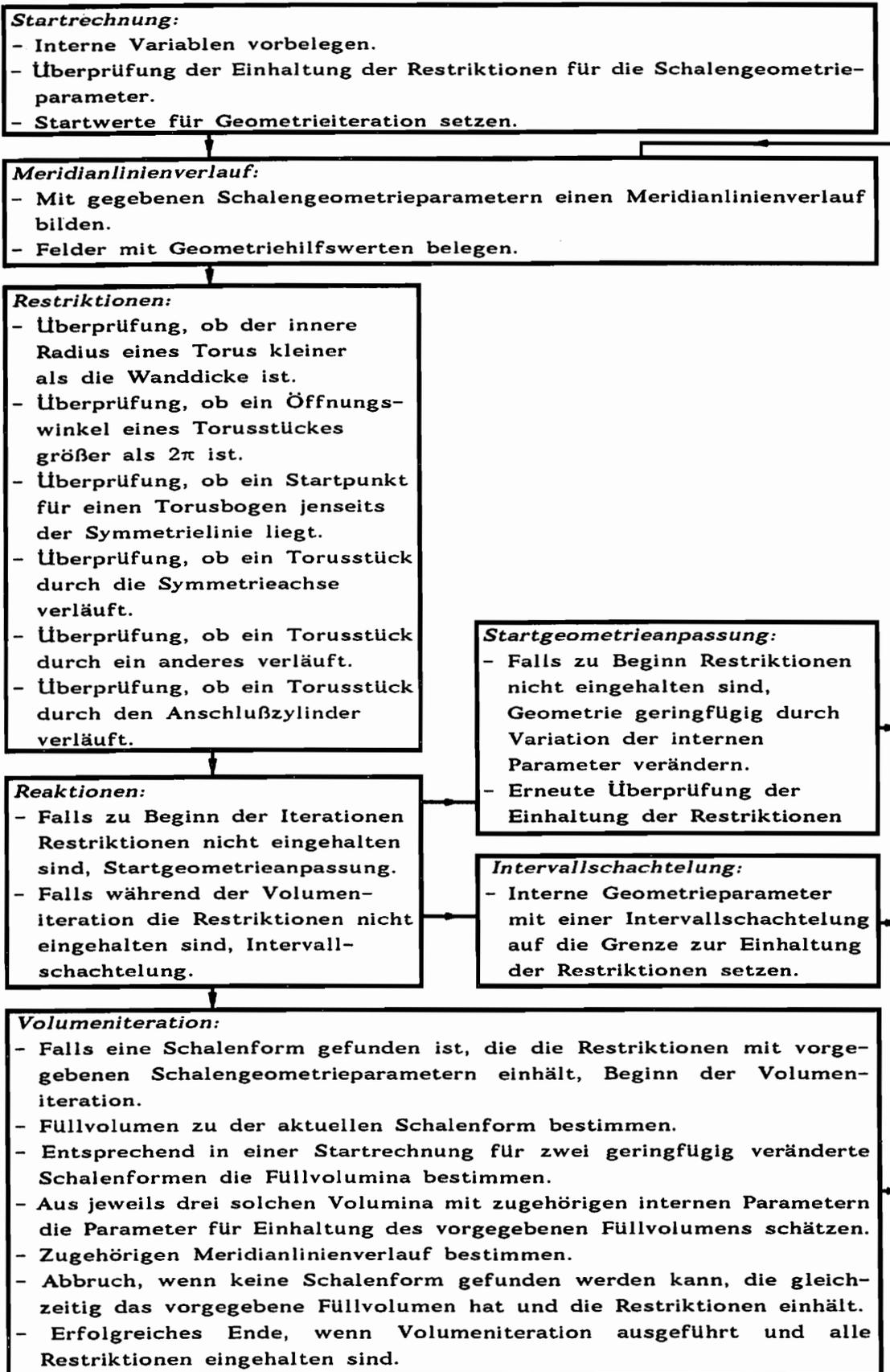
Die Berücksichtigung der Restriktionen bereitet hier Schwierigkeiten, wenn wie bei dem Gradientenverfahren vorgegangen wird; Testrechnungen zeigen eine schlechte Konvergenz. Aus diesem Grunde wird bei einer Verletzung der Restriktionen in das Gradientenverfahren übergegangen. Umgekehrt wird von dem Gradientenverfahren zu dem quadratischen Verfahren übergegangen, wenn bei mindestens n aufeinanderfolgenden Schritten die bestimmten Zielfunktionswerte ein konvexes Verhalten zeigen.

Das gesuchte Minimum ist mit dem quadratischen Verfahren gefunden, wenn der Gradient im Rahmen der Rechengenauigkeit zu Null wird und \mathbf{C} gleichzeitig positiv definit ist. Von den numerischen Fehlern abgesehen können hier also das notwendige und in beschränkten Maße auch das hinreichende Kriterium für das Vorliegen eines lokalen Minimums überprüft werden.

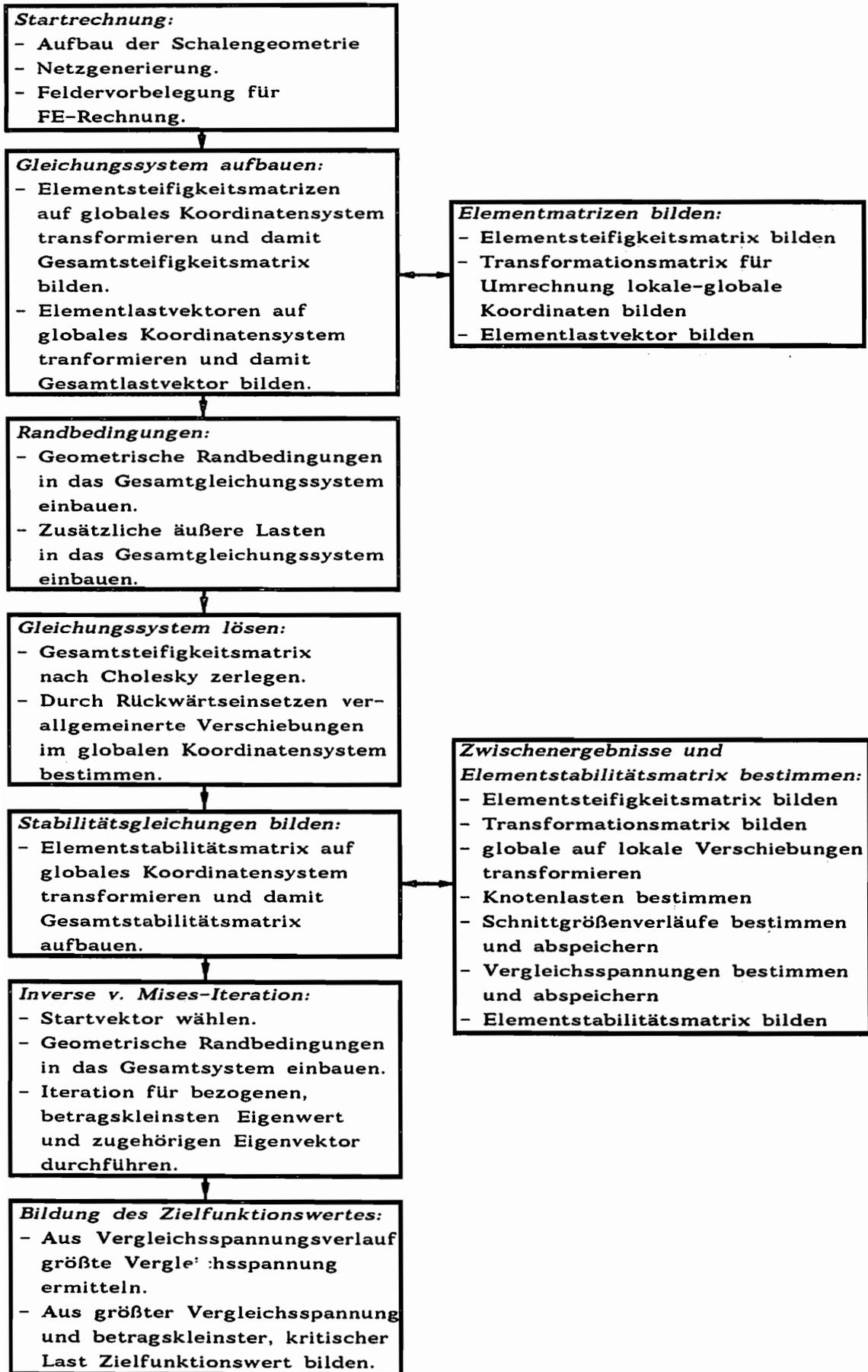
5.1 Ablaufdiagramm für die Optimierung



5.2 Ablaufdiagramm für die Behandlung der Restriktionen



5.3 Ablaufdiagramm für die Bestimmung des Zielfunktionswertes



6 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden einige optimale Schalenformen für verschiedene eingeschlossene Volumina gezeigt und die erhaltenen Ergebnisse diskutiert. Die anschließende Zusammenfassung zieht noch einmal einen roten Faden durch die vorliegende Arbeit, die mit einem kurzen Ausblick abgeschlossen wird.

6.1 Optimale Schalenformen

Die zu behandelnde Fragestellung läßt das vorzugebende Füllvolumen der Schale offen. Aus Vorüberlegungen heraus wird man zunächst annehmen, daß die Kugel- bzw. Halbkugelschale ein Optimum sei. Zu bedenken ist auch der Einfluß der Randbedingungen. Hier wird, um die Randbedingungen nicht zu speziell vorzugeben, die Schale auf einen Zylinder mit festgelegter Länge aufgesetzt. Das Füllvolumen wird aber nur für die Schale ohne den anschließenden Zylinder bestimmt. Wenn die Schale in den Zylinder hineinragt, so zählt das entsprechende Volumen negativ.

Das Füllvolumen wird in einer ersten Reihe von Optimierungsrechnungen zunächst als Null vorgegeben und dann schrittweise etwas erhöht; ab dem Volumen der Halbkugelschale (bei vorgegebener Normierung 2.094...) werden die Schritte vergrößert, weil sich danach die Schalenformen nicht mehr wesentlich verändern. Interessant ist hierbei unter anderem der Verlauf der Zielfunktionswerte in Abhängigkeit von dem Schalenfüllvolumen.

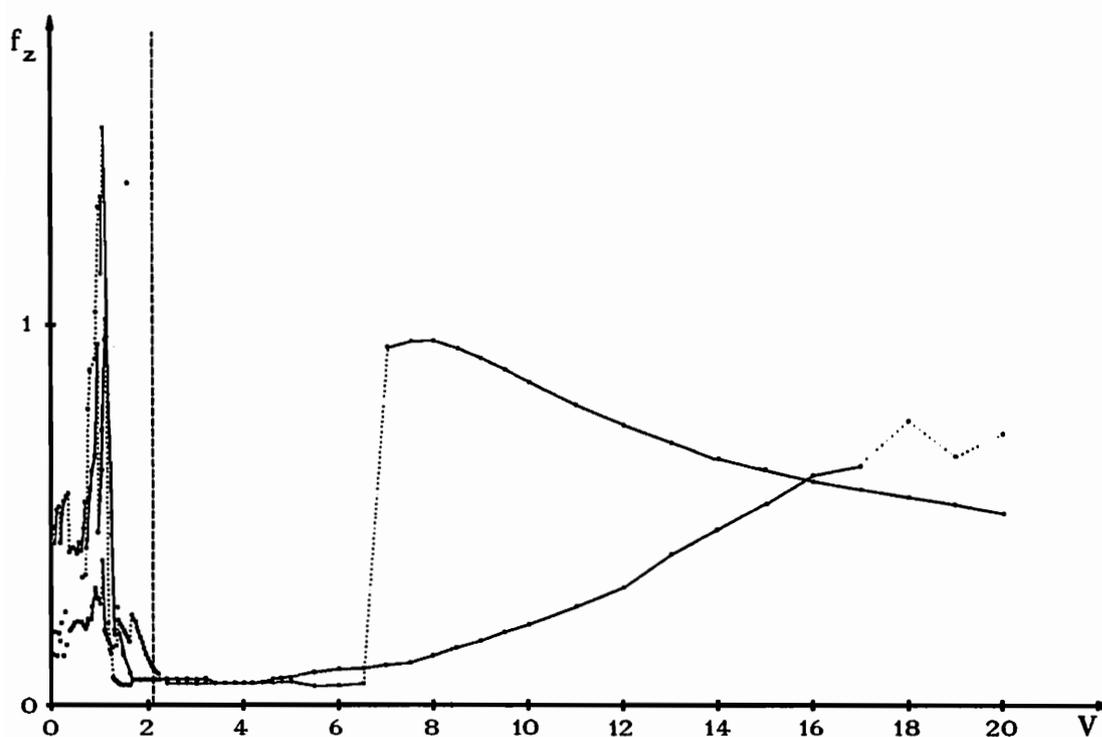


Bild 6.1: Optimallinien, Zielfunktionswerte in Abhängigkeit vom Füllvolumen

Beginnend mit einer vorgegebenen Schalenform wird unter Beibehaltung des Volumens eine Optimierung ausgeführt. Es ergeben sich so die Parameter und der Zielfunktionswert für dasjenige Minimum, das in Abhängigkeit vom Startpunkt gefunden wird. Die Parameter werden nun beibehalten und das Volumen geringfügig verändert. Diese dienen als Startpunkt für die nächste Optimierung und so weiter. Auf diese Weise entsteht ein Verlauf des Zielfunktionswertes (und der Parameter) in Abhängigkeit vom Volumen. Wenn das ehemalige Minimum durch die Veränderung des Volumens zu einem Sattelpunkt wird, sucht das Optimierungsverfahren ein neues Minimum. In dem Bild zeigt sich ein solcher Fall als Sprung im Zielfunktionsverlauf. Weil hier die Zielfunktion minimiert wird, führt ein solcher Sprung immer zu einem verringerten Zielfunktionswert. In Abhängigkeit vom Startwert erhält man so mehrere kaskadenförmige Kurven. Sie lassen sich vervollständigen, indem gerade nach Sprüngen die Volumeninkremente mit umgekehrtem Vorzeichen ausgeführt werden. Die wesentliche Aussage des Bildes 6.1 ist, daß es für ein festes Volumen mehrere optimale Schalenformen gibt.

In Bild 6.1 ist der gesamte Volumenbereich dargestellt, für den Optimierungen der Schalenform durchgeführt wurden. Das Füllvolumen einer Halbkugelschale ist in diesem Bild durch eine gestrichelte Linie gekennzeichnet. Für kleinere Füllvolumina sind sehr viel mehr kaskadenförmige Verläufe erkennbar als für größere.

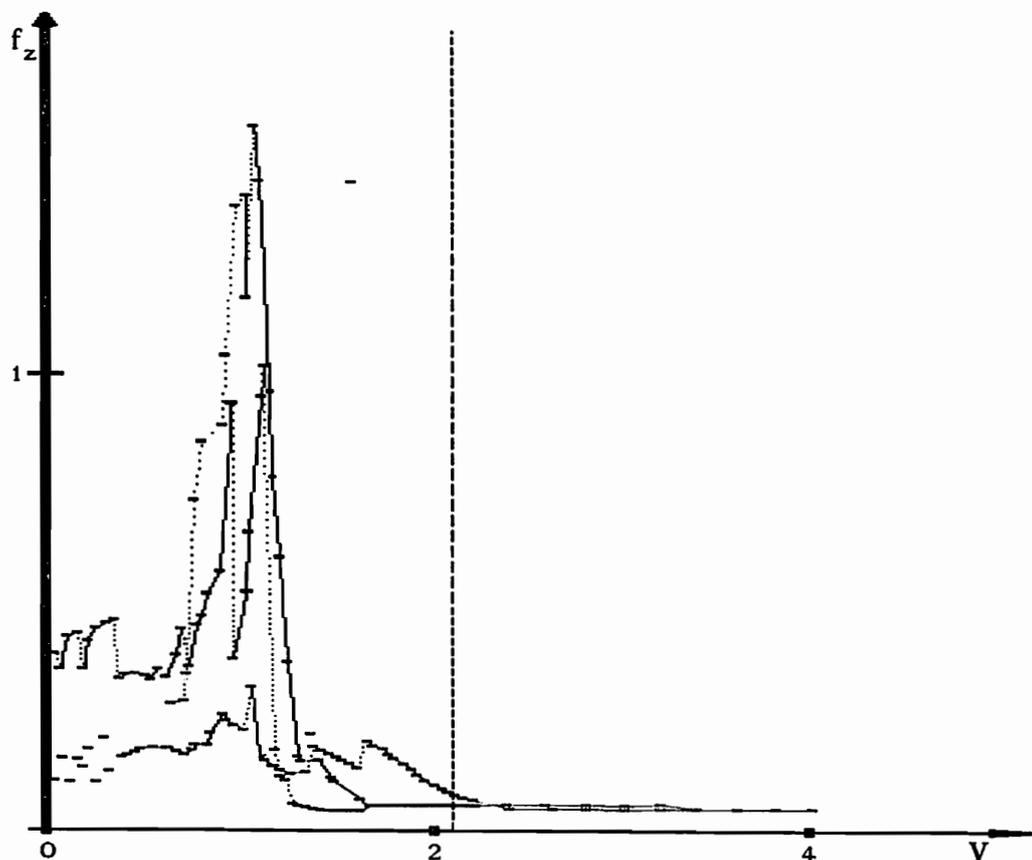


Bild 6.2: Horizontal verzerrter Ausschnitt von Bild 6.1, Kaskaden

Vorstehendes Bild 6.2 zeigt als horizontal verzerrten Ausschnitt von Bild 6.1 speziell diesen interessanten Bereich. Wie schon im Bild 6.1 sind ermittelte Optima durch einen rechteckigen Punkt angegeben. Wenn vermutet werden kann, daß zwei aufeinanderfolgende Punkte zu derselben Optimallinie gehören, so sind sie mit einer durchgezogenen Linie verbunden; ist hingegen zu vermuten, daß sie nicht zu derselben Optimallinie gehören, so sind sie mit einer gepunkteten Linie verbunden. Gerade, wenn das Füllvolumen im Bereich um 0 liegt, ist kein Zusammenhang zwischen den Punkten mehr zu erkennen. Hier ist dann auch auf eine graphische Verbindung verzichtet worden.

Für das zuletzt genannte Springen der Zielfunktionswerte in demselben Optimierungsverlauf können zum Beispiel folgende Ursachen vorliegen:

- Zu Beginn einer jeden Optimierung werden von der vorhergegangenen die Formparameter übernommen und das Volumen etwas verändert. Werden dabei Restriktionen nicht eingehalten, so müssen die Parameter solange verändert werden, bis entweder eine weitere Anpassung zwecklos erscheint oder eine Schalenform mit dem geforderten Füllvolumen gefunden ist, die auch die Restriktionen einhält. Nach einer solchen Anpassung können die Parameter einen Startpunkt in der Nähe eines anderen, neuen Optimums liegen. Die nachfolgende Optimierung führt mit großer Wahrscheinlichkeit zu diesem neuen Optimum.
- Wie bereits erwähnt, können die Schrittweiten zur Bestimmung des Zielfunktionsgradienten im Parameterraum aus numerischen Gründen nicht beliebig klein gewählt werden. Sollten die numerischen Fehler größer sein als angenommen, so hätte das eventuell ein Entstehen von Scheinoptima zu Folge. Eine solche Instabilität der numerischen Ergebnisse könnte in einer getrennten Arbeit behandelt werden. Die endliche Schrittweite kann auch dann zu dem beobachteten Springen der Zielfunktionswerte führen, wenn die Schalenform zu sensibel auf kleine Änderungen der sie beschreibenden Parameter reagiert. So können zwei Optima im Parameterraum so nahe beieinanderliegen, daß ein Schritt mit der vorgegebenen Mindestweite von einem Optimum zu einem anderen führt.
- Das verwendete Optimierungsverfahren enthält eine Konvergenzbeschleunigung. Es kann geschehen, daß eine Schätzung des Optimierungsergebnisses mit Hilfe eines solchen Verfahrens einen Schritt in ein neues Optimum bewirkt; ein solcher Schritt kann aber im vorliegenden Fall nur zu einer Verminderung des Zielfunktionswertes führen, weil er sonst nicht ausgeführt würde.

Eine Aufgabe wird in der Folge sein, die gefundenen optimalen Schalenformen graphisch darzustellen und weitere Auswahlkriterien zu finden, da ja mehrere optimale Schalenformen mit demselben Füllvolumen gefunden wurden. Zunächst sollen aber eher grundsätzliche Fragen beantwortet werden.

Interessant ist unter anderem die Frage, wie sich die Schalenformen verändern, wenn die Dicke der Schale sehr klein gewählt wird. Diese Frage läßt sich weitgehend mit einer Grenzbetrachtung beantworten. Ist die Schale sehr dünn, so bildet sich bei Druckbelastung im wesentlichen ein Membranspannungszustand in der Schale aus; durch Randbedingungen induzierte zusätzliche Schnittgrößen klingen extrem rasch entlang der Meridianlinie ab. Die optimale Schalenform ist hierfür bei starrem Rand also eine Kugelkappe beziehungsweise eine ellipsoidähnliche Form (siehe *Mansfield*[24] und *Magnucki*[23]). Gerade bei einem betragsmäßig kleinen Füllvolumen der Schale entstehen so bei gleichem Druck extrem hohe Normalspannungen.

Mit zunehmender Schalendicke gewinnen die Momente an Bedeutung; durch zusätzliche Krümmungen der Schalenmeridianlinie wird die Schale meistens stabiler, weist in unserem Sinne also einen höheren kritischen Druck auf; über den Einfluß auf die Vergleichsspannung kann keine generelle Aussage gemacht werden. Es entstehen neben einer ellipsoidähnlichen Form für dasselbe Füllvolumen noch weitere optimale Formen, bei denen die Meridianlinie in irgendeiner Weise zusätzlich gekrümmt ist. Mit Erhöhung der Zahl der Torusschalenstücke, mit denen die Schalenkontur hier angenähert wird, wächst auch die Zahl der lokalen Optima bei vorgegebenem Füllvolumen an. Bei Vorgabe des Volumens und der wichtigsten kennzeichnenden Größen (Schalendicke t , Elastizitätsmodul E , Querkontraktionszahl ν , Radius des Schalenrandes R , Randbedingungen) läßt sich eine gute, aber nicht sicher die beste Schalenform finden, indem zunächst mit *kleiner* Dicke eine optimale Form bestimmt und diese dann als Startpunkt für die Optimierung mit der *vorgegebenen* Dicke verwendet wird.

Eine andere, rechenzeitsparende Vorgehensweise ist, zunächst mit einer kleinen Zahl von Torusschalenstücken (z.B. 2) zu beginnen. Ist dann ein Optimum gefunden, so wird die Zahl der Torusstücke um 1 erhöht und damit der Torus mit der längsten Meridianlänge in zwei Tori aufgeteilt. Mit jeder Unterteilung der Schale in noch mehr Torusstücke erhält man eine immer bessere Annäherung an die optimale Form. Gleichzeitig hat man den Vorteil mit einem schnell gefundenen und guten Startpunkt die nächste Optimierung beginnen zu können.

Zu dem Einfluß der Querkraftverformung, die bei nicht dünnen Schalen an Bedeutung gewinnt, auf die Optimierungsergebnisse sind nur wenige Rechnungen durchgeführt worden. Einige Testrechnungen für größere Füllvolumina als das Halbkugelvolumen ergaben, daß optimale Formen für sehr dünne Schalen auch dann noch sehr gut sind, wenn zum Vergleich bei gleicher Meridianlinienform die Schalendicke groß gewählt wird. Ein anschließender erneuter Optimierungslauf ergab keine deutlich sichtbare Veränderung der Form.

6.2 Zahlenwerte, Bezeichnungsweise

Sofern nichts anderes angegeben wird, wurden nachfolgende Ergebnisse mit den Werten

$$\nu = 0.3 , \quad (5.1)$$

$$\tilde{t} = \frac{t}{R} = 0.01 \quad (5.2)$$

ermittelt. Der Druck p und der Elastizitätsmodul werden so vorgeschrieben, daß sich die Vergleichsspannung σ_v und der kritische Druck p_k wie oben beschrieben normiert errechnen. Der Druck wird so vorgegeben, daß sich die bezogene Normalspannung $\tilde{\sigma}_{\xi\xi}$ in einer Kugelschale zu 1 ergibt

$$p = 2\tilde{t} = 0.02 , \quad (5.3)$$

und der Elastizitätsmodul so, daß die Eigenwerte den kritischen Druck bezogen auf denjenigen einer unendlich langen Zylinderschale ($\tilde{p}_{Zyl} = 1$) angeben

$$E = \frac{6(1-\nu^2)}{\tilde{t}^2} \quad p = 5.46 \cdot 10^4 . \quad (5.4)$$

Bezüglich der normierten Spannungen ist anzumerken, daß die normierte Vergleichsspannung in einer Zylinderschale mit dem Radius R mindestens $\sqrt{3}$ und in einer Kugelschale mit gleichem Radius mindestens $\sqrt{2}$ beträgt. Alle Werte sind durch die Bezüge einheitslos. Die in den Matrizen enthaltenen Zahlenwerte haben keine extremen Größenordnungen, bewirken also keine numerischen Probleme.

6.3 Darstellung ausgewählter Ergebnisse

Auf den folgenden Seiten werden einige optimale Schalenformen vorgestellt und dazu der Schnittgrößenverlauf bei einer Belastung durch Innendruck angegeben. Das jeweilige Bild mit der Schalenform zeigt als gepunktete Linie die normierte ausgelenkte Form (linearelastisches Verhalten). Das jeweils zugehörige zweite Bild zeigt die Normalkraft- und Biegemomentenverläufe, sowie den daraus ermittelten Vergleichsspannungsverlauf; dieses gibt auch das Maximum des Vergleichsspannungsverlaufes, den bestimmten kritischen Druck und den daraus ermittelten Wert der Zielfunktion an.

Zu jedem Volumen werden zwei optimale Schalenformen angegeben. An dem ersten Beispiel soll gleichzeitig die Darstellung erläutert werden. Bei Forderung eines (bezogenen) Volumens von 0.4 erhält man unter anderem die von Bild 6.3 gezeigte, optimale Schalenform. Die Parameter, die die Schalenform festlegen, sind rechts oben im Zeichenfeld angegeben.

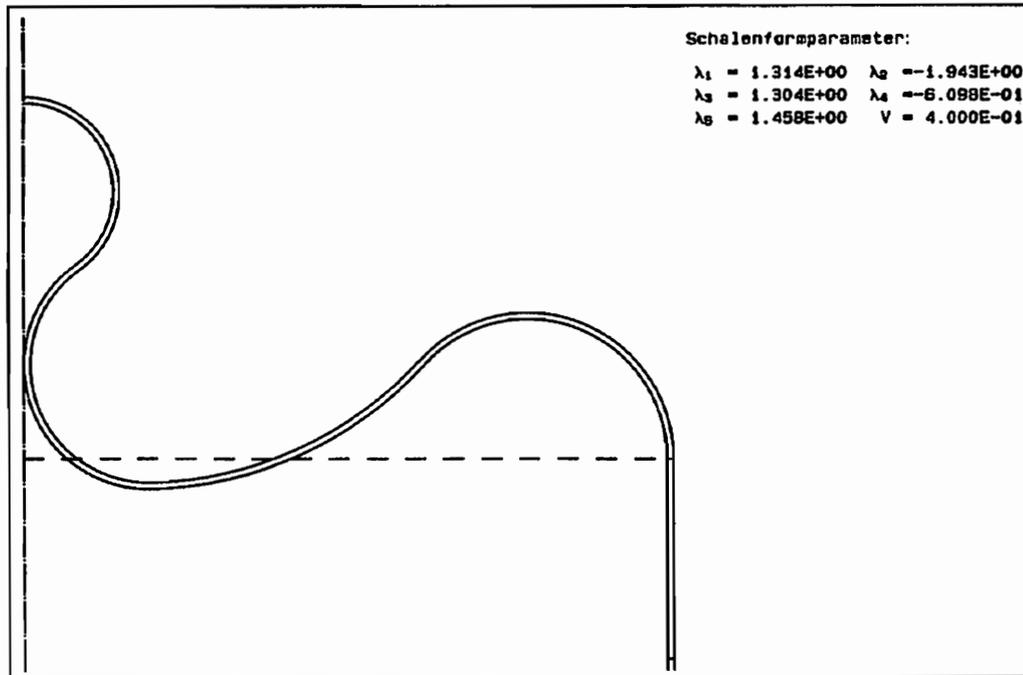


Bild 6.3: Darstellung einer optimalen Schalenform

Die Strichpunktlinie am linken Zeichenfeldrand ist die Symmetrieachse der Rotationsschale. Wie im Maschinenbau üblich wird nur eine Hälfte der Schnittfläche gezeichnet; die räumliche Schalenform entsteht durch Rotation des Bildes um die Symmetrieachse. Von der Schale werden die äußere und die innere Oberfläche als sichtbare Kante (Schnitt) gezeigt. Das gilt auch für denjenigen Teil des Anschlußzylinders, der in die Berechnung einbezogen wird; der eventuell weitere Teil des Anschlußzylinders wird gestrichelt gezeichnet. Die jeweilige Zeichnung wird so vergrößert, daß sie in maximaler Größe innerhalb des Zeichenfeldes dargestellt werden kann. Durch den Bezug (Normierung) aller geometrischen Größen auf den mittleren Radius der Zylinderschale ist dieser Radius selbst nach dem Bezug gleich 1. Die gestrichelte Linie am Oberrand der Zylinderschale ist die Bezugslinie für die Bestimmung des Füllvolumens der Schale. Das Volumen oberhalb dieser Linie (Fläche) ist positiv. Ein interessantes Ergebnis ist auch die Verschiebung, die die Schale unter Innendruck erfährt.

In allen weiteren Bildern für die Schalenform wird die verschobene Schalenmeridianlinie qualitativ als gepunktete Linie angegeben, wobei eine Belastung durch Innendruck vorausgesetzt wird. Gepunktete Verbindungen zwischen der unverformten und der verformten Schalenmeridianlinie kennzeichnen die Lage der Knotenpunkte, die für die FE-Rechnung gewählt wurden.

Bild 6.4 zeigt dieselbe Schalenform wie Bild 6.3, aber jetzt mit Angabe des qualitativen Verschiebungsverlaufes. Die ermittelten Schnittgrößen-

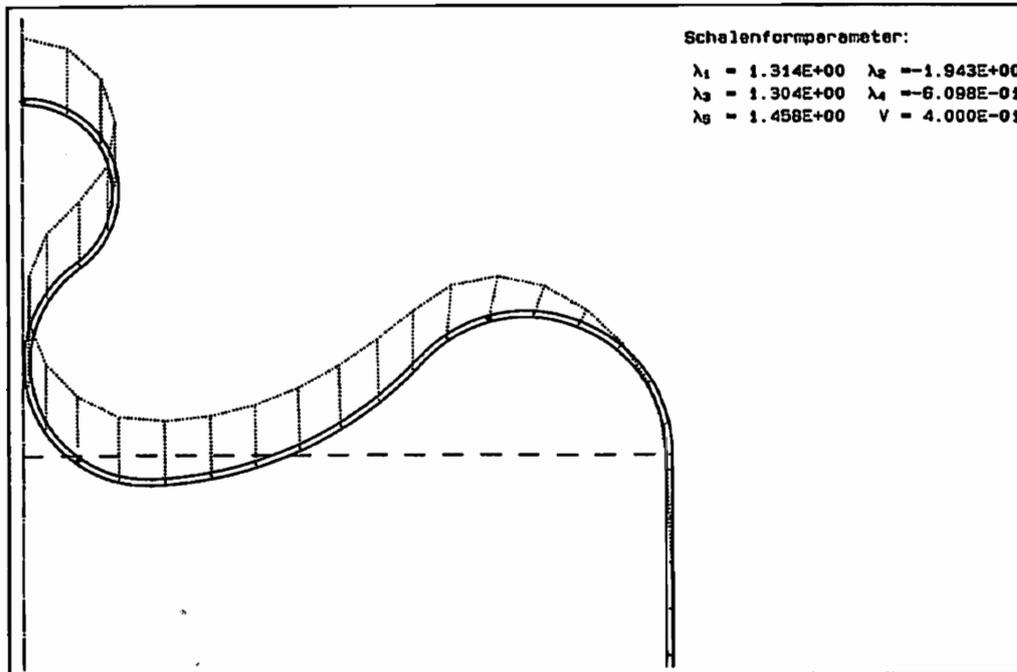


Bild 6.4: Optimale Schalenform und die Verschiebungen unter Innendruck verläufe und der daraus nach der Gestaltänderungshypothese errechnete Vergleichsspannungsverlauf werden in Bild 6.5 qualitativ graphisch dargestellt. Mit Hilfe der rechts unten angegebenen Verlaufs-extrema lassen sich einzelne Werte auch zahlenwertmäßig angeben. Bei der Angabe der Schnittgrößenverläufe sind die Schnittgrößen für die Meridianrichtung durchgezogen und diejenigen für die Umfangsrichtung gestrichelt.

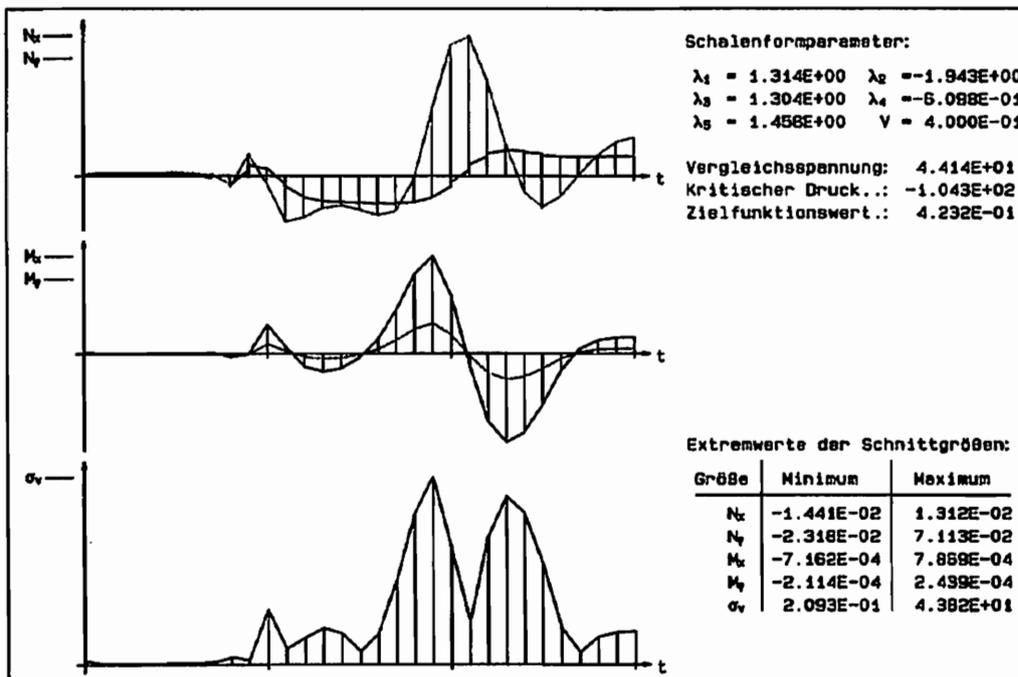


Bild 6.5: Schnittgrößenverläufe

gepunktet angegeben. Die Verläufe sind dabei über den Parameter t aufgetragen, der vom Schnittpunkt der Schalenmeridianlinie mit der Symmetrieachse entlang der Meridianlinie bis zum unteren Rand des durchgezogenen gezeichneten Zylinders läuft. An diesem Rand ist die Zylinderschale radial verschieblich eingespannt. Zur Vereinfachung der Zuordnung eines Knotenpunktes auf der Meridianlinie zu der entsprechenden Stelle im Schnittgrößenverlauf sind zum einen auch in den Schnittgrößenverläufen die

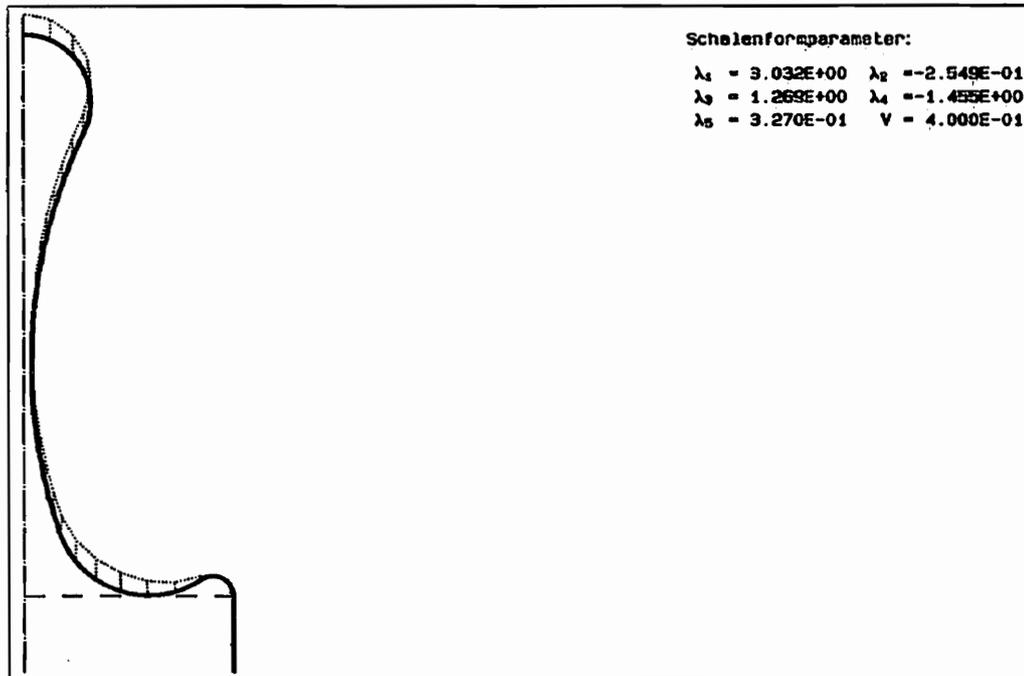


Bild 6.6: Optimale Schalenform

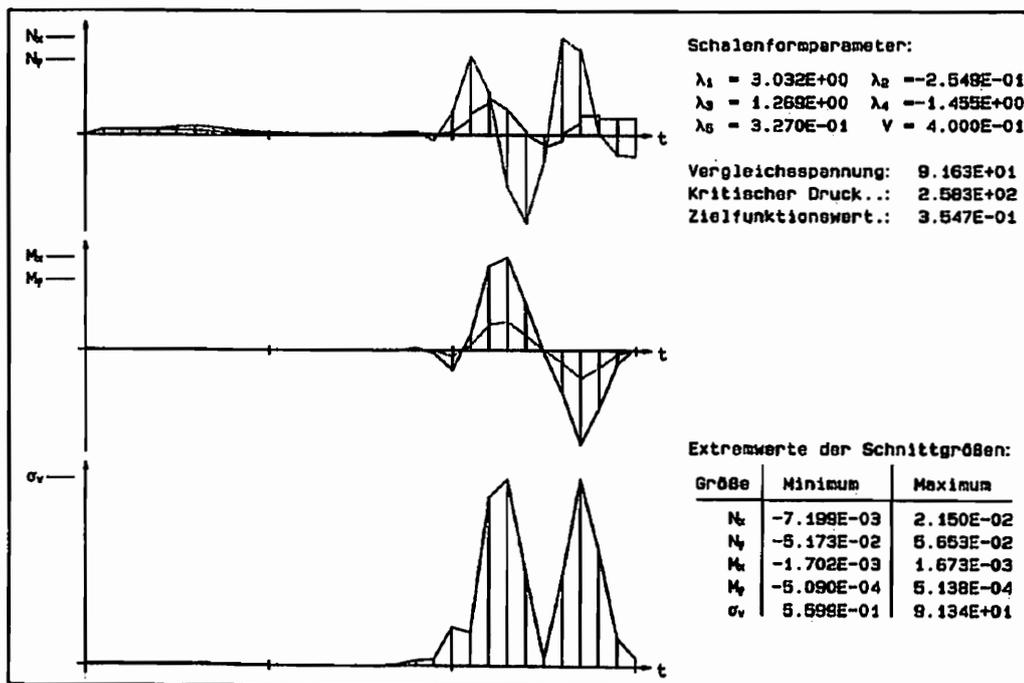


Bild 6.7: Schnittgrößenverläufe

Knotenpunkte durch vertikale Linien gekennzeichnet und zum anderen sowohl im Meridianlinienverlauf als auch in den Schnittgrößenverläufen jeder zehnte Knoten gesondert markiert.

Die in den Bildern 6.4 und 6.5 dargestellte Schalenform hält zwar die geometrischen Restriktionen ein, ist aber nicht oder nicht ohne weiteres herstellbar. Die Bilder 6.6 und 6.7 zeigen eine weitere optimale Form für eine Schale, die dasselbe Füllvolumen hat. Auch diese ist aber nicht ohne weiteres herstellbar und daher praktisch unbrauchbar.

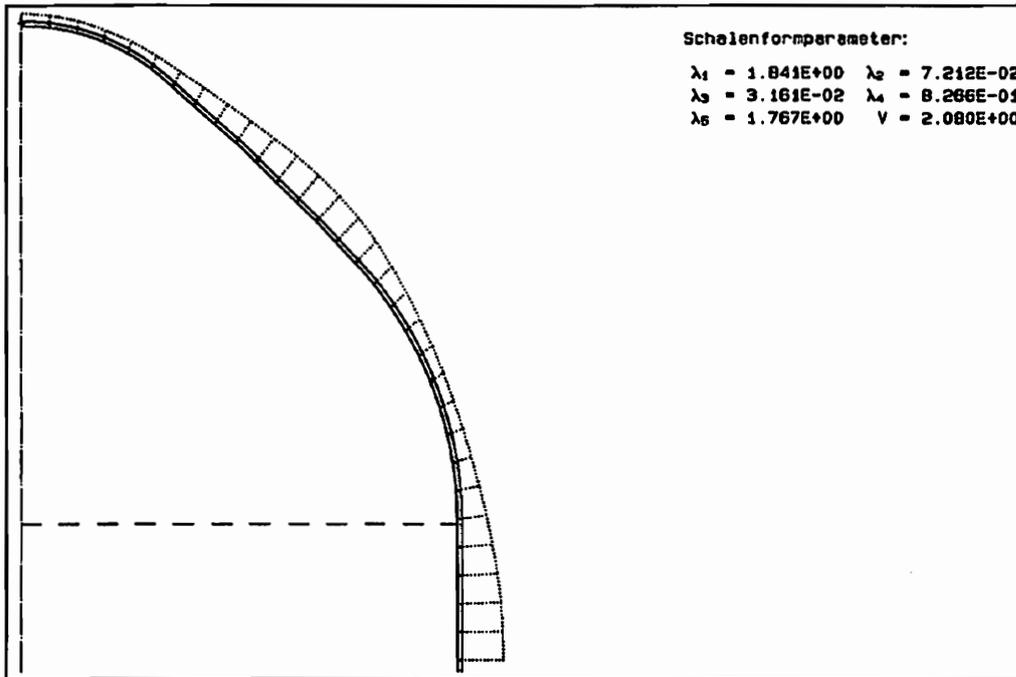


Bild 6.8: Optimale Schalenform

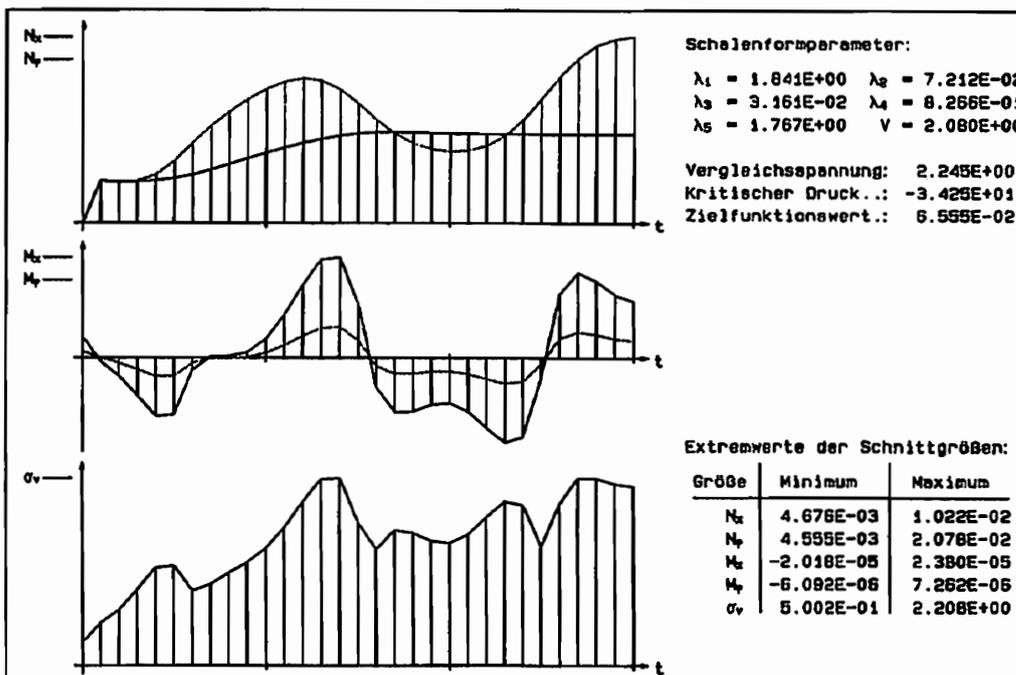


Bild 6.9: Schnittgrößenverläufe

Bislang sind für das Volumen $V=0.4$ noch keine praktisch brauchbaren, optimale Schalenformen gefunden worden.

Die Bilder 6.8 und 6.9 und die Bilder 6.10 und 6.11 zeigen optimale Schalenformen für ein Füllvolumen, das etwas kleiner als das einer Halbkugelschale ist. Hier ist die in dem Bild 6.8 angegebene Schale praktisch brauchbar, die in Bild 6.10 dargestellte aber nicht. Für die praktisch brauchbare Schale findet man hier den kleineren Zielfunktionswert.

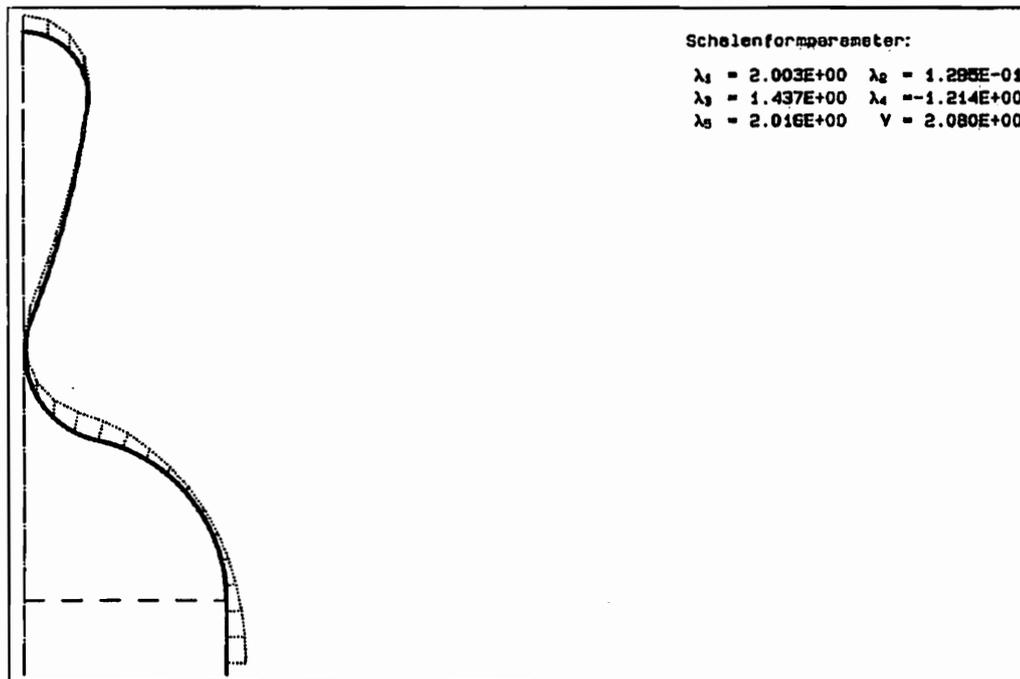


Bild 6.10: Optimale Schalenform

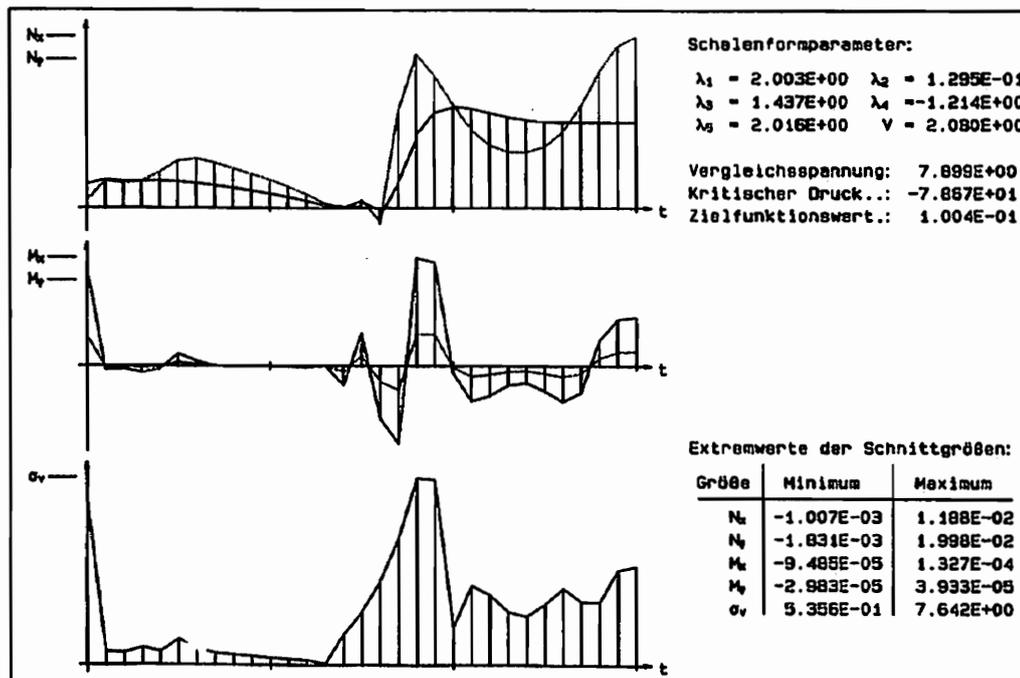


Bild 6.11: Schnittgrößenverläufe

Die nächsten vier Bilder (6.12 bis 6.15) zeigen zwei optimale Schalenformen, die etwas mehr als das dreifache Füllvolumen einer Halbkugelschale haben. Beide sind bedingt praktisch brauchbar, da sie nicht mit geringem Aufwand hergestellt werden können. Eine Auswahl zwischen ihnen ist anhand irgendwelcher weiterer, zum Beispiel räumlicher Beschränkungen möglich.

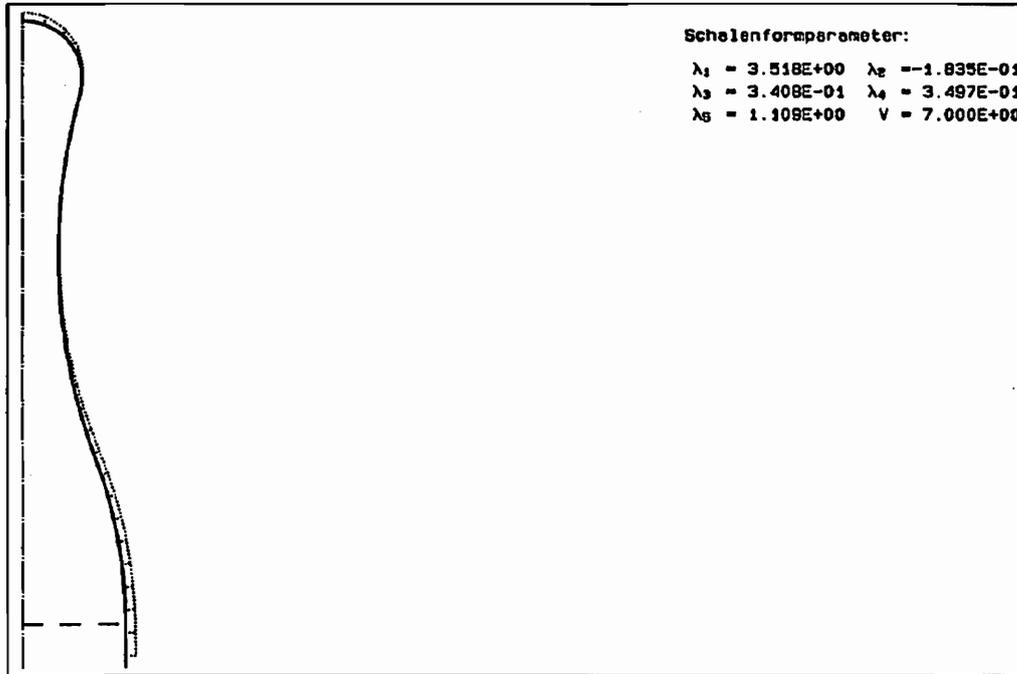


Bild 6.12: Optimale Schalenform

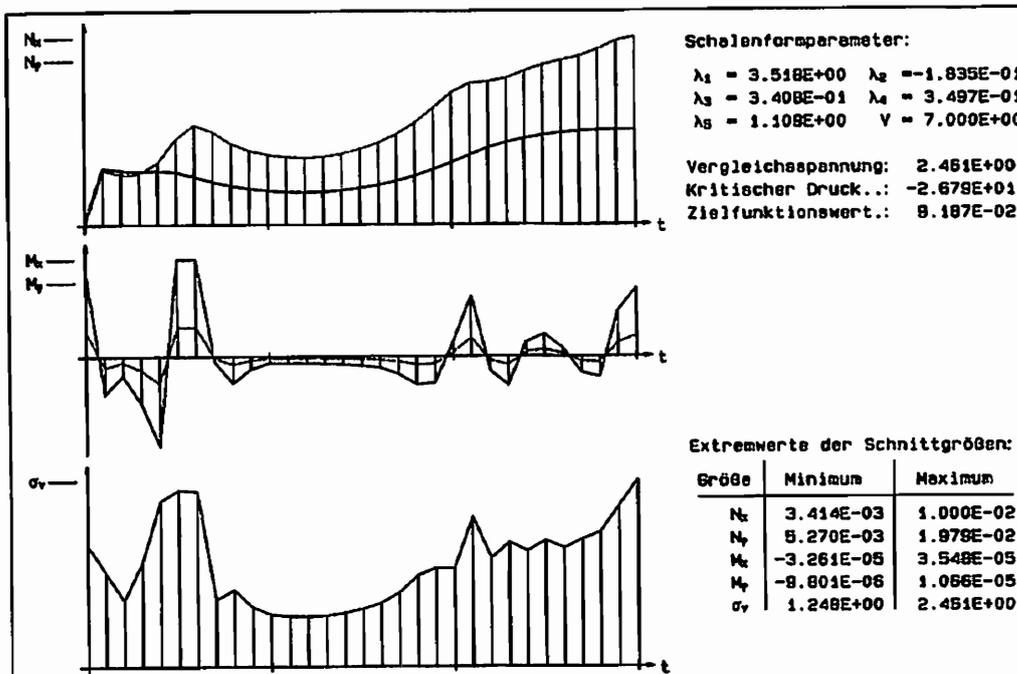


Bild 6.13: Schnittgrößenverläufe

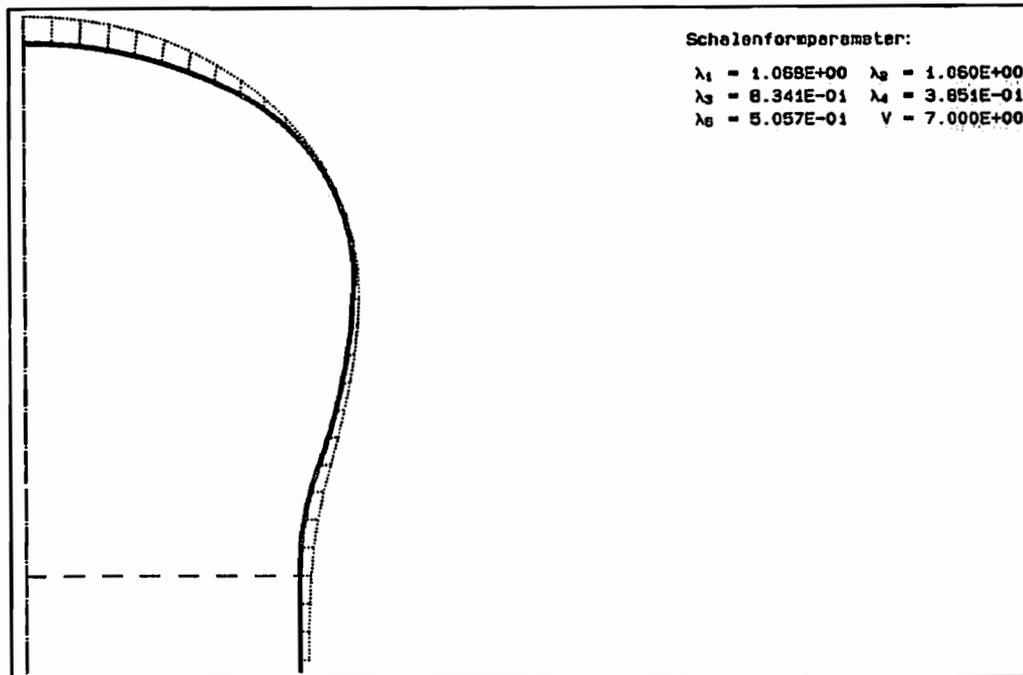


Bild 6.14: Optimale Schalenform

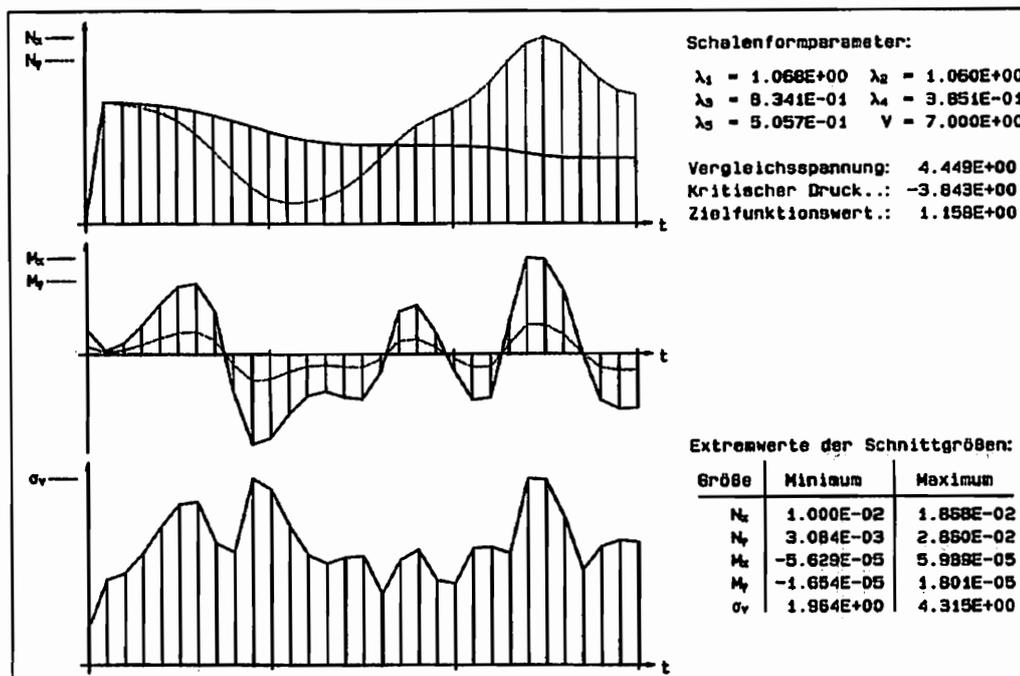


Bild 6.15: Schnittgrößenverläufe

Die letzten vier Bilder (6.16 bis 6.19) beziehen sich auf Schalen mit etwa dem achtfachen Füllvolumen einer Halbkugelschale. Gegenüber den Bildern 6.12 bis 6.15 ist ihre Form nicht wesentlich geändert. Die dortigen Aussagen gelten hier entsprechend.

Die gezeigten optimalen Schalenformen stellen nur eine kleine Auswahl dar. Weitere optimale Formen lassen sich dadurch finden, daß man für ein bestimmtes Füllvolumen der Schale verschiedene Formen als Startpunkt

im Parameterraum wählt. Gerade bei Schalen mit kleinem Füllvolumen lassen sich so vielleicht auch optimale Formen finden, die eine praktisch interessante Lösung darstellen. Fordert man mit der Zielfunktion hingegen nur, daß die größte in der Schale auftretende Vergleichsspannung ein Minimum annimmt, so ergeben sich die Krümmungen der optimalen Schalenmeridianlinie geringer als bei Hinzunahme des Beuldruckes. Die so gefundenen optimalen Schalenformen für kleine positive oder sogar negative Füllvolumina lassen sich häufig auch praktisch anwenden.

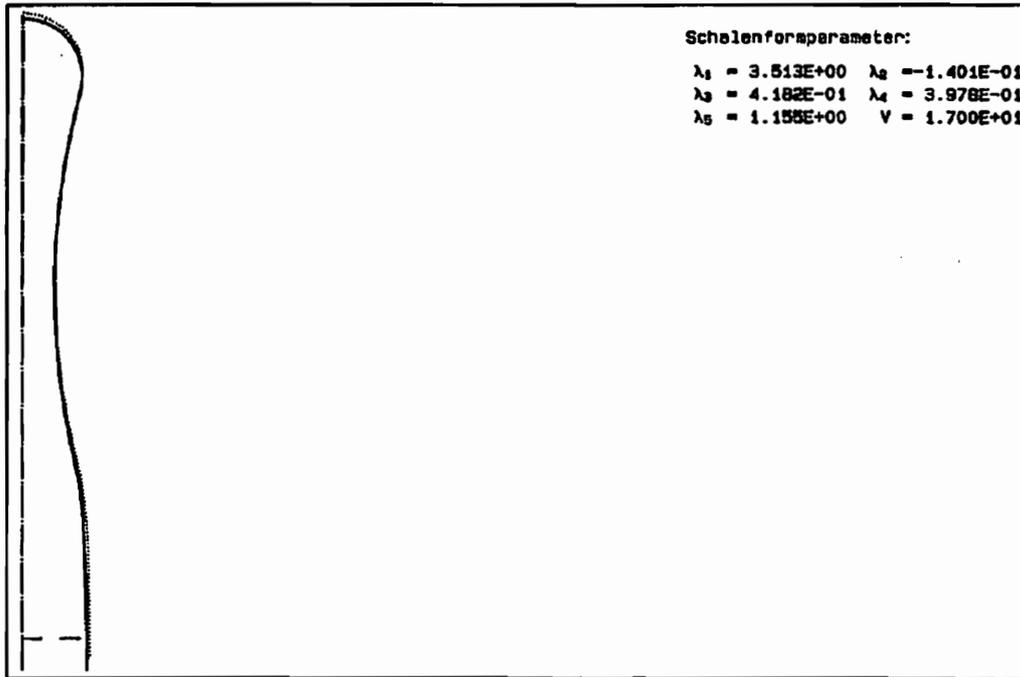


Bild 6.16: Optimale Schalenform

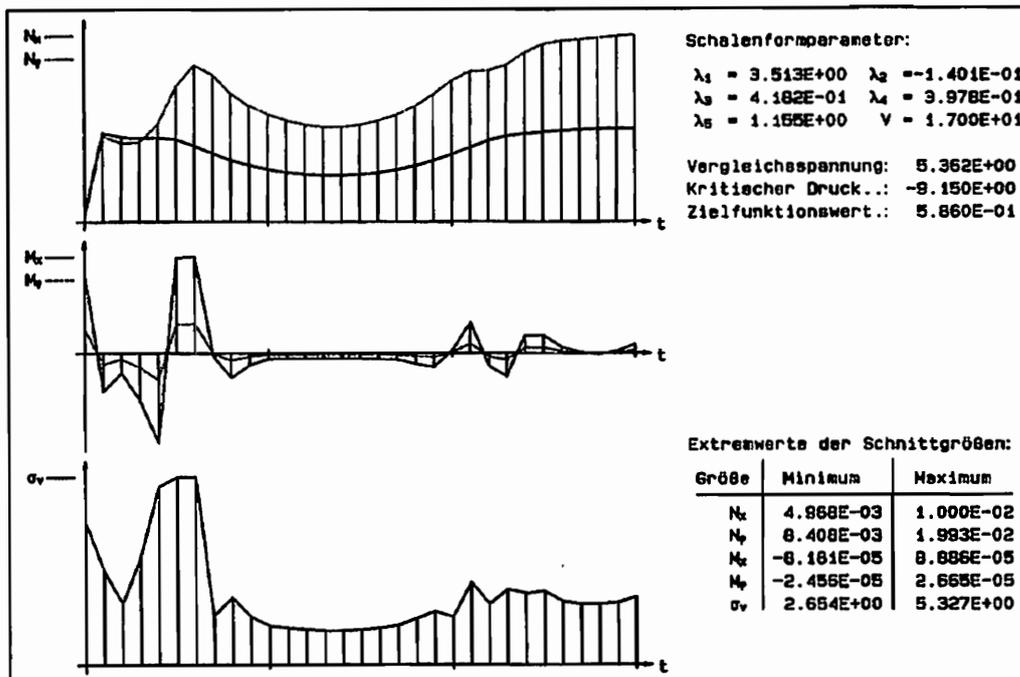


Bild 6.17: Schnittgrößenverläufe

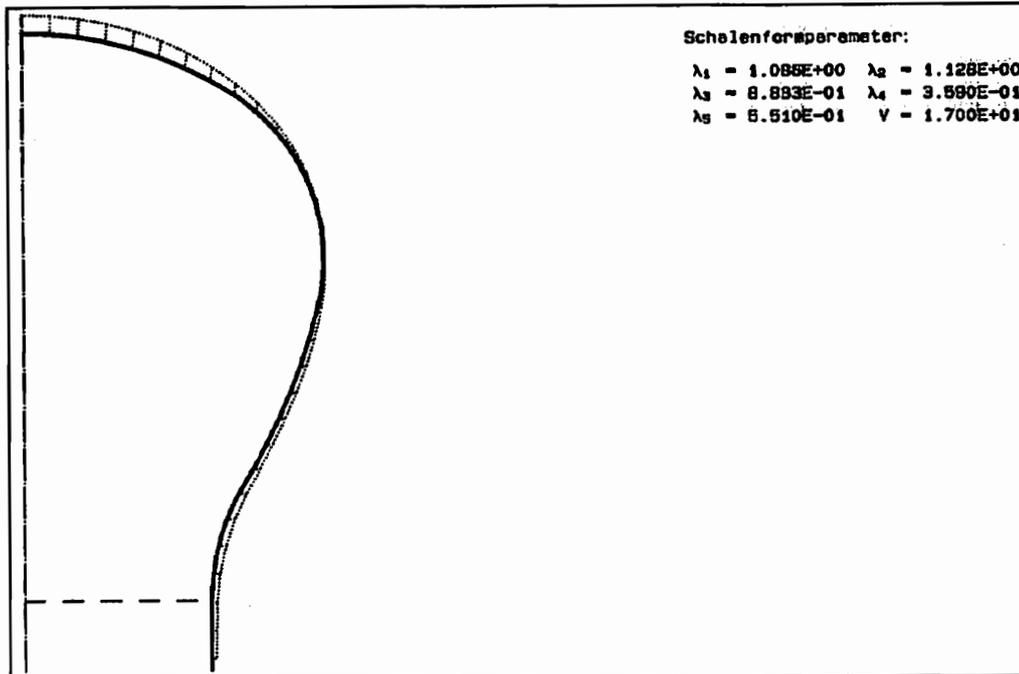


Bild 6.18: Optimale Schalenform

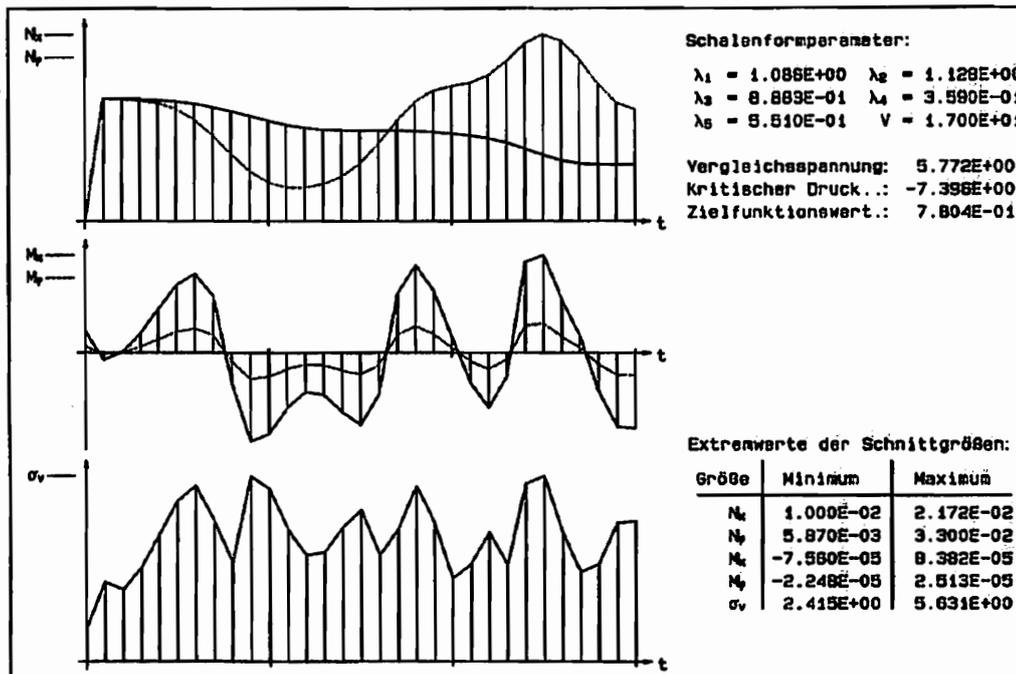


Bild 6.19: Schnittgrößenverläufe

Die vorgestellten optimalen Schalenformen stellen nur eine Auswahl aus der Vielzahl der ermittelten Formen dar. Ziel sollte sein, einen ersten Eindruck zu vermitteln und vielleicht Ansätze für weitere Arbeiten zu diesem Aufgabenbereich zu liefern. Eine Optimierung in der vorgestellten Weise erfordert einen erheblichen Rechenaufwand, dürfte aber auf lange Sicht eher zu weiteren Verbesserungen beitragen als eine *empirische* Optimierung, die sich nur auf Experimente stützt.

7 Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

Aufbauend auf einer Schalentheorie für schubweiche Schalen von *Basar* [2] wurde ein Finite-Element-Verfahren entwickelt, das es gestattet, sowohl die Verformungen als auch die Schnittgrößenverläufe und die kritischen Lasten (als Lösung des nichtlinearen Eigenwertproblems) allgemeiner Rotationsschalen zu ermitteln. Es wurden *lineare Verschiebungsansätze* gewählt und die kritischen Drücke als *klassische Verzweigungslasten* für die *schubweiche Schale* ermittelt.

Die Rotationschale konstanter Dicke wurde aus Torusschalenstücken zusammengesetzt. Damit wurde eine weitgehende Nachbildung beliebiger Schalenkonturen (Meridianlinien) möglich. Die geometrischen Restriktionen ergaben sich nicht in Form eines Systems von Ungleichungen, sondern als logische (*Boolesche*) Funktion.

Es wurde ein spezielles Optimierungsverfahren, basierend auf dem *optimalen Gradientenverfahren* und der *quadratischen Optimierung*, entwickelt, das eine *Konvergenzbeschleunigung* enthält und *Restriktionen* beachten kann, die in oben genannter Form vorliegen.

Nach Definition einer Zielfunktion, die gleichzeitig die größte in der Rotationschale auftretende *Vergleichsspannung* möglichst klein und den *kritischen Druck* möglichst groß fordert, wurden für verschiedene Füllvolumina optimale Schalenformen ermittelt. Einige ausgewählte Schalenformen wurden dargestellt und die Ergebnisse diskutiert. Bei Vorliegen mehrerer optimaler Schalenformen für dasselbe Füllvolumen muß anhand des Zielfunktionswertes und weiterer zu definierender Kriterien die für den jeweiligen Anwendungsfall beste Form ausgewählt werden; einige mögliche Kriterien für diese zusätzliche, abschließende Auswahl wurden genannt.

7.2 Ausblick

Der vorliegenden Arbeit liegen einige Annahmen zugrunde, die den Aufwand bei der Berechnung verringern. Dazu gehören Annahmen über die Werkstoffeigenschaften und das Beulverhalten der Schale. Gerade im Hinblick auf die zunehmende Anwendung von Verbundwerkstoffen ist eine Ausdehnung der Untersuchungen auf orthotrope oder anisotrope Werkstoffe von großem Interesse. Eine wesentliche Steigerung der Qualität der Ergebnisse ist mit einer Verfeinerung des Netzes und der Verschiebungsansätze möglich; gleichzeitig erhöht sich allerdings erheblich der Rechenaufwand. Besonderes Interesse verdient die Stabilitätsanalyse. Die kritischen Lasten sind nicht als Verzweigungslasten zu bestimmen, sondern als Lösung des nichtlinearen Eigenwertproblems.

Außerdem ist zu bemerken, daß die vollständigen Gleichungen sich nicht mehr nach Umfangswellenzahl und Meridianwellenzahl entkoppeln lassen und daher für die Ermittlung der kritischen Lasten der vollständige Verschiebungsansatz mitzunehmen ist. Für diese Berechnungen sind sehr leistungsfähige Rechenanlagen erforderlich; ihre Bereitstellung bleibt abzuwarten.

Auf dem Gebiet der Optimierungsverfahren ist eine ständige Entwicklung zu erkennen. Die Auswahl des günstigsten Verfahrens für die jeweilige Aufgabenstellung bleibt weiterhin eine Aufgabe des Anwenders. Interessant bei der Gestaltoptimierung an Schalen wäre beispielsweise noch die gleichzeitige Veränderung von *Meridianlinienverlauf und Schalendicke*; die Betrachtungen können auch auf *dynamische oder thermische Belastungen* ausgeweitet werden. Die Grundlage für solche Berechnungen ist schon vorhanden; Einschränkungen dürften vorwiegend durch die vorhandene Rechenkapazität gegeben sein. Mit einer Vergrößerung der zu bearbeitenden Datenmengen steigt auch der numerische Fehler; um dieses Problem zu lösen, müssen spezielle Lösungsverfahren entwickelt und die Genauigkeit der Rechenanlagen gesteigert werden.

Ohne nennenswerten Mehraufwand lassen sich zusätzlich, falls gewünscht, Imperfektionen in der Form von Vorspannungen oder Vorverzerrungen im Urzustand berücksichtigen. Solche Imperfektionen ergeben sich häufig zwangsläufig bei der Herstellung der Schale und lassen sich nicht immer genau lokalisieren. Eine interessante Aufgabe könnte sein, den Einfluß von Imperfektionen in die Zielfunktion mit einfließen zu lassen, also eine Schalenform zu suchen, die einerseits hohe Belastungen zuläßt und andererseits nicht zu sensibel auf Herstellungsfehler reagiert.

Die in der Praxis auftretenden Probleme bei der Anwendung von Schalen werden zahlreiche weitere Fragestellungen liefern. Für ihre zufriedenstellende Beantwortung wird sicher noch einige Zeit nötig sein.

Literaturverzeichnis:

- [1] M. Aoki,
Introduction to Optimization Techniques,
Macmillan Company, New York 1971

- [2] Y. Basar,
Eine konsistente Theorie für Flächentragwerke endlicher Verformungen
und deren Operatordarstellung auf variationstheoretischer Grundlage,
ZAMM, Zeitschrift für angewandte Mathematik u. Mechanik,
66(1986)7, 297-303

- [3] K.-J. Bathe, E. L. Wilson,
Numerical methods in finite element analysis,
Prentice-Hall, New Jersey 1976

- [4] C. Brezinski,
algorithmes d'accélération de la convergence, étude numérique,
Éditions Technip, Paris 1978

- [5] Bronstein, Semendjajew,
Taschenbuch der Mathematik, 19. Auflage,
B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1979

- [6] O.T. Bruhns,
Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Verzweigungslasten elasto-
plastisch deformierter Kontinua,
Mitteilung Nr. 74-9, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau,
Ruhr-Universität Bochum, 1974

- [7] U. Eckstein,
Nichtlineare Stabilitätsberechnung elastischer Schalentragwerke,
Mitteilung Nr. 83-3, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau,
Ruhr-Universität Bochum, 1983

- [8] G. Engeln-Müllges, F. Reutter,
Numerische Mathematik für Ingenieure,
Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich 1985

- [9] H. Eschenauer, W. Schnell,
Elastizitätstheorie I, 2. Auflage,
Bibliographisches Institut, Zürich 1986

- [10] H. Eschenauer,
Rechnerische und experimentelle Untersuchungen zur Strukturoptimierung von Bauweisen (ein Forschungsvorhaben der DFG, 1980-1984),
Forschungslaboratorium für angewandte Strukturoptimierung am
Institut für Mechanik und Regelungstechnik,
Universität-Gesamthochschule Siegen, 1985
- [11] L.R. Foulds,
Optimization Techniques,
Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin 1981
- [12] P. Funk,
Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik,
2. Auflage
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1970
- [13] W. Flügge,
Statik und Dynamik der Schalen, 3. Auflage
Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1962
- [14] P. L. Gould,
Analysis of Shells and Plates,
Springer-Verlag, New York 1988
- [15] E. Hampe,
Rotationssymmetrische Flächentragwerke/
Stabilität der Rotationsschalen,
VEB-Verlag für Bauwesen, Berlin 1983
- [16] E. Hampe,
Statik rotationssymmetrischer Flächentragwerke,
Bände 1, 2, 3 und 4, 3. Auflage
VEB-Verlag für Bauwesen, Berlin 1968
- [17] R. K. Jürcke,
Zur Stabilität und Imperfektionsempfindlichkeit elastischer Schalen-
tragwerke /Finite-Element-Formulierung der Anfangs-Nachbeul-Theorie,
Mitteilung Nr. 85-5, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau,
Ruhr-Universität Bochum, 1985
- [18] M. Kasperski,
Identifikation bemessungskritischer Lastanteile aus stochastischen
Prozessen am Beispiel der Naturzugkühltürme unter Windbelastung,
Mitteilung Nr. 88-6, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau,
Ruhr-Universität Bochum, 1988

- [19] E. Klingbeil,
Tensorrechnung für Ingenieure,
Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich 1966
- [20] H.P. Künzi, H.G. Tzschach, C.A. Zehnder,
Mathematische Optimierung
B.G. Teubner, Stuttgart 1966
- [21] Th. Lehmann,
Elemente der Mechanik I - IV,
Studienbücher Naturwissenschaft und Technik,
Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf 1974
- [22] H. Leipholz,
Einführung in die Elastizitätstheorie,
G. Braun, Karlsruhe 1968
- [23] K. Magnucki, T. Wegner, W. Szyk,
On buckling of ellipsoidal cups under internal pressure,
Ingenieur-Archiv 58 (1988) 339-342, Springer-Verlag 1988
- [24] E. H. Mansfield,
An optimum surface of revolution for pressurised shells,
International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 23,
pp. 57-62, Pergamon Press Ltd., 1981
- [25] A. Meyers,
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugen-
schalen,
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 8,
Ruhr-Universität Bochum, 1977
- [26] L.-P. Nolte,
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch
nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen,
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 39,
Ruhr-Universität Bochum, 1983
- [27] A. Pflüger,
Stabilitätsprobleme der Elastostatik, 3. Auflage
Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1975

- [28] L. Recke,
Behandlung großer Rotationen elastischer Flächentragwerke auf der Basis einer Theorie schubweicher Schalen und eines gemischten Finite-Element-Konzepts,
Mitteilung Nr. 86-12, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1986
- [29] H. Rothert, D. Mierau,
Das Stabilitätsverhalten geometrisch imperfekter Rotationsschalen,
ZAMM, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 66(1986)4, T83-84
- [30] Z. Sanal,
Dynamisches Tragverhalten und kinetische Stabilität windbeanspruchter Kühlturmschalen aus Stahlbeton unter Berücksichtigung temperaturbedingter Ribbildung,
Mitteilung Nr. 85-1, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1985
- [31] F. Schnabel,
Einfluß zeitabhängigen elastisch-plastischen Materialverhaltens auf die Tragfähigkeit von Rotationsschalen,
Mitteilung Nr. 87-5, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1987
- [32] W. Schnell/H. Eschenauer,
Elastizitätstheorie II,
Bibliographisches Institut, Zürich 1984
- [33] J. Skrzypek, J. Bielski,
Unimodal and bimodal optimal design of elastic toroidal shells subject to buckling under external pressure,
Mechanics of Structures and Machines 16(3), pp. 359-386, 1988-89
- [34] Tanh Nahan Nguyen,
Rotationssymmetrische Spannbetonbehälter unter Kälteschock,
Mitteilung Nr. 88-9, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, 1988
- [35] Md. Wahhaj Uddin,
Buckling of general spherical shells under external pressure,
International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 29 No. 7, pp. 469-481, Pergamon Journals Ltd. 1987

- [36] Han-Chung Wang, Will J. Worley,
An Approach to Optimum Shape Determination for a Class of Thin
Shells of Revolution,
Journal of Applied Mechanics,
The American Society of Mechanical Engineers, 1968
- [37] W. Wunderlich, F. Schnabel, H. Obrecht,
Tragfähigkeit zusammengesetzter Rotationsschalen im geometrisch
und physikalisch nichtlinearen Bereich,
Mitteilung Nr. 86-3, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau,
Ruhr-Universität Bochum, 1986
- [38] R.L. Zahradnik,
Theory and Techniques of Optimization,
Barnes & Noble, New York 1971
- [39] Zhen-han Yao,
Ringelemente für elastische Rotationsschalen unter instationärer
thermischer Beanspruchung,
Mitteilung Nr. 86-8, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau,
Ruhr-Universität Bochum, 1986
- [40] O.C. Zienkiewicz, J. Bauer, K. Morgan, E. Onate
A simple and efficient element for axisymmetric shells,
International Journal for numerical methods in engineering,
Vol. 11, 1545-1558 (1977)

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity

- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells

- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen

- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz K. Labisch:
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte

- Nr. 52 W. Trampczynski:
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:
Wellenausbreitung in akustischen Medien
Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 J. Makowsky/H. Stumpf:
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotations-symmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 J. Makowski/H. Stumpf:
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns:
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten

- Nr. 66 Herbert Diehl:
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis:
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan:
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz:
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationschalen

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 71**