



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Berthold Schieck

Große elastische Dehnungen in  
Schalen aus hyperelastischen  
inkompressiblen Materialien

Heft Nr. 69



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

INSTITUT FÜR MECHANIK  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Berthold Schieck

GROSSE ELASTISCHE DEHNUNGEN  
IN SCHALEN AUS  
HYPERELASTISCHEN INKOMPRESSIBLEN MATERIALIEN

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 69  
1989

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

© 1989 Dr.-Ing. Berthold Schieck

Am Alten Bahnhof 6, App. 24, 6100 Darmstadt

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Verfielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder aus Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1984 - 1988 am Lehrstuhl für allgemeine Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Herrn o. Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, deren Durchführung er unterstützte und förderte.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Y. Başar sei für die Übernahme des zweiten Berichtes gedankt.

Herrn o. Prof. Dr.-Ing. Hartmann gilt der Dank als "fachfremder" Prüfer.

Weiterer Dank gebührt Herrn Dr.-Ing. L.-P. Nolte, Herrn Prof. Doc. dr. inż. Wojciech Pietraszkiewicz, Herrn dr. inż. J. Makowski und Herrn dr. inż. j. Chroscielewski für die Förderung und das stetige Interesse an der Arbeit sowie für viele fruchtbare Diskussionen.

Referenten:

o. Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf  
Prof. Dr.-Ing. Y. Başar

Tag der Einreichung:

Tag der mündlichen Prüfung: 12.01.1989

## Zusammenfassung

Ausgehend von der Annahme einer modifizierten Normalenhypothese in den kinematischen Beziehungen des Schalenraumes wird unter der Voraussetzung inkompressibler, hyperelastischer Werkstoffe die Verformungsenergiedichtefunktion in Lagrangescher Formulierung aufgestellt. Deren Abschätzung mit Hilfe eines auf die Schalendicke bezogenen Kleinheitsparameters ergibt eine erste Approximation der Verformungsenergiedichte für große elastische Dehnungen. Das daraus in Verbindung mit dem Potential der Lasten resultierende Variationsproblem wird in eine Finite-Elemente-Formulierung als mögliches direktes Lösungsverfahren überführt. Das dreieckförmige 54-Freiheitsgrade-Schalenelement nach [12, 18] kommt in einer speziell für Vektorrechner entwickelten Version in Verbindung mit einer Weiterentwicklung des Finite-Elemente-Programmsystems MESY [11, 58] zur Anwendung.

Zusätzlich werden auf der Grundlage eines Klassifikationsschemas für die Größenordnungen der Dehnungen und Rotationen verschiedene Approximationsstufen der Schalentheorie hergeleitet und die Parallelen zur "klassischen" Theorie dünner elastischer Schalen mit kleinen Dehnungen dargelegt. Ein neuer Ansatz für die erforderlichen Abschätzungen reduziert hierbei den Arbeitsaufwand zur Herleitung erheblich.

An Hand mehrerer Berechnungsbeispiele lassen sich verschiedene Theorievarianten in ihrem Lösungsverhalten vergleichen. Dazu werden neben bekannten auch neue noch unveröffentlichte Beispiele vorgestellt.

Die Berechnungen wurden auf einem Vektorrechner ausgeführt. Zu diesem Zweck wurde ein neues Konzept zur Vektorisierung auf Elementebene entwickelt, das in dieser Arbeit erstmals vorgestellt wird.

## INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
<b>1. Einleitung</b>	1
<b>2. Differentialgeometrische Elemente der Schale</b>	4
2.1 Die Differentialgeometrie der unverformten Schale	4
2.2 Die Differentialgeometrie der verformten Schale	7
2.3 Die verallgemeinerte Normalenhypothese	10
2.4 Die Inkompressibilitätsbedingung	14
<b>3. Die Dehnungen des Schalenraums bei Annahme großer Dehnungen und Rotationen</b>	15
3.1 Einleitende Betrachtungen	15
3.2 Eine Möglichkeit zur Beschreibung großer Dehnungen im Schalenraum	16
3.3 Dehnung und Krümmung der Schalenbezugsfläche	18
3.4 Die Entwicklung des Greenschen Dehnungstensors in eine Taylorreihe	19
<b>4. Eine erste Approximation der Verformungsenergiedichte für hyperelastische Schalen</b>	23
4.1 Die klassische Schalentheorie	23
4.2 Änderung der klassischen Hypothesen bei Annahme großer Dehnungen	25
4.3 Die Verformungsenergiedichte mäßig dünner Schalen beim Auftreten großer elastischer Dehnungen	27
4.4 Abschätzung zulässiger Fehler	33
4.5 Die erste und die zweite Variation der Verformungsenergiedichte	36
<b>5. Vereinfachungen der Schalenkinematik durch Begrenzung der Dehnungen und Rotationen</b>	40
5.1 Einleitung	40

5.2	Ein Klassifikationsschema für Dehnungen und Rotationen	40
5.3	Vereinfachte kinematische Beziehungen	43
<b>6.</b>	<b>Randbedingungen und Lasten</b>	<b>50</b>
6.1	Kinematische Randvariablen	50
6.2	Kontinuitätsbedingung für Finite Elemente	54
6.3	Totlasten	54
6.4	Drucklasten	57
<b>7.</b>	<b>Elastische Werkstoffgesetze</b>	<b>60</b>
7.1	Das Hookesche Gesetz	60
7.2	Nichtlineare, hyperelastische Werkstoffgesetze	61
<b>8.</b>	<b>Programmierung der Schalentheorie als ein Finites Element</b>	<b>64</b>
8.1	Der Übergang von der Variationsformulierung zur Finite Elemente Methode (FEM)	64
8.2	Der Vektorrechner Control Data Cyber 205	67
8.3	Die vektorisierte Elementroutine	69
8.4	Kompatible vektorielle Programmierung	79
8.5	Nichtlineare FEM mit MESY	82
8.6	Effizienz der Vektorisierung auf Elementebene	83
<b>9.</b>	<b>Beispiele für Schalen mit großen Dehnungen</b>	<b>85</b>
9.1	Theorievarianten	85
9.2	Testbeispiele	87
9.2.1	Zylinderschale unter diametralem Zug	87
9.2.2	eingespannte Kreisplatte unter Drucklast	89
9.2.3	Kugel unter Außendruck	92
9.3	weitere Beispiele	100
9.3.1	beidseitig eingespannte Zylinderschale unter Außendruck	100
9.3.2	beidseitig eingespannte parabolische Rotations- schalen unter Außendruck	101

## VII

9.3.3 Schlauch mit sinusförmigem Längsprofil unter axialem Zug	101
9.4 Zusammenfassung	106
<b>ANHANG</b>	<b>108</b>
<b>A1 Grundlagen aus der Tensorrechnung</b>	<b>108</b>
<b>A2 Zur Differentialgeometrie</b>	<b>115</b>
A2.1 Zur unverformten Konfiguration	115
A2.2 Zur verformten Konfiguration	116
A2.3 Zur verallgemeinerten Normalenhypothese	116
A2.4 Zur Existenz des Verschiebungsfeldes	118
<b>A3 Zu den Dehnungen im Schalenraum bei Annahme großer Dehnungen</b>	<b>121</b>
A3.1 Zum polaren Zerlegungssatz	121
A3.2 Zur Beschreibung großer Dehnungen	122
A3.3 Zur Dehnung und Krümmung der Schalenbezugsfläche	123
A3.4 Abschätzung der höheren Ableitungen des Dehnungstensors in Normalenrichtung	124
<b>A4 Zur Approximation der Verformungsenergiedichte</b>	<b>128</b>
A4.1 Vergleich mit anderen Approximationen	128
A4.2 Membrantheorie	128
A4.3 Übergang zu kleinen Dehnungen	129
<b>LITERATURVERZEICHNIS</b>	<b>130</b>

## 1. EINLEITUNG

Die Entwicklung der modernen Schalentheorien wurde durch die grundlegenden Arbeiten von [21, 23 u. 24] wesentlich beeinflusst. Die kinematischen Hypothesen, die zu den auf diesen Arbeiten aufbauenden Schalentheorien gehören, sind allgemein als Kirchhoff-Love-Hypothese bekannt. Sie schließt die transversale Schubverformung  $\gamma_{\alpha 3}$  aus und setzt kleine Dehnungen voraus, sodaß geometrisch nichtlineare Schalentheorien zunächst nur für große Rotationen in Verbindung mit kleinen Dehnungen entwickelt wurden. Die Anforderungen aus der Luft- und Raumfahrt sowie die Erfordernisse bei der Auslegung großer Schalenstrukturen (z.B. Kühltürme) im Bauingenieurwesen haben diesen Trend gefördert. Der Entwicklungsstand dieser Schalentheorien ist in [2, 3-5, 18, 34, 40, 42, 45, 50-52, 53, 55, 56, 57, 62-67, 74, 75] sowie vielen anderen Publikationen eindrucksvoll dokumentiert und hat in den letzten Jahren einen gewissen Abschluß erreicht.

Somit tritt erst in jüngerer Zeit das Problem großer Dehnungen in Schalen-tragwerken in den Vordergrund des Interesses, wobei sich die Forschungen hauptsächlich auf Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien konzentrieren [6, 9, 10, 19, 20, 28-31, 35, 59-61, 68, 69-72]. Während in den genannten Arbeiten meist von einer modifizierten Normalenhypothese ausgegangen wird, befaßt sich [36] mit einer schubweichen Schalentheorie für große Dehnungen auf der Basis des Cosserat Continuum.

Bisher ist jedoch kein Berechnungsprogramm mit beliebig geformten Schalen-elementen für große Dehnungen entwickelt bzw. vorgestellt worden, das auf einer Schalentheorie für große Dehnungen beruht.

Die in [49] für kleine Dehnungen entwickelte Vorgehensweise, die sich als sehr erfolgreich erwiesen hat, gestattet es, bei entsprechender Verallgemeinerung ausgehend von der Formulierung der Verformungsenergiedichte in Lagrangescher Darstellung eine Schalentheorie für große Dehnungen zu entwickeln, die sich eng an den Formelapparat der Kirchhoff-Love-Schalentheorien anlehnt. Sie kann daher unter Ausnutzung bisheriger Erfahrungen leicht programmiert werden. Diese Schalentheorie ist insbesondere durch die Verwendung einer modifizierten Normalenhypothese geprägt, die nur die transversale Schubdehnung  $E_{\alpha 3}$  im gesamten Schalenraum ausschließt, jedoch

die Dickenänderung oder eine Querschnittsverwölbung nicht behindert. Die bisher gebräuchlichen kinematischen Hypothesen verhindern dagegen sowohl bei schubsteifen als auch bei schubweichen Schalentheorien eine Querschnittsverwölbung, die sich zum Beispiel aus der örtlichen Änderung der Dickenänderung ergibt.

Im zweiten Kapitel werden die differentialgeometrischen Elemente der unverformten und der verformten Schale aufgestellt. Anschließend wird eine verallgemeinerte Normalenhypothese eingeführt und diskutiert. Danach wird die für gummiartige Materialien allgemein angenommene Inkompressibilitätsbedingung vorgestellt.

Im nachfolgenden Abschnitt wird der Dehnungszustand im Schalenraum mit Hilfe des Greenschen Dehnungstensors beschrieben. Durch eine Reihenentwicklung des Dehnungstensors ist es möglich, den Dehnungszustand allein durch Tensoren darzustellen, die auf der Schalenbezugsfläche definiert sind. Dabei ergibt sich auch die Definition eines gegenüber der "klassischen" Kirchhoff-Love-Schalentheorie kleiner Dehnungen modifizierten Kleinheitsparameters.

Im vierten Kapitel wird nach einem Überblick über die "klassische" Schalentheorie der modifizierte Kleinheitsparameter für die Schalentheorie großer Dehnungen diskutiert. Anschließend wird die Verformungsenergiedichte für Schalen mit großen elastischen Dehnungen aufgestellt und mit dem eingeführten Kleinheitsparameter zu einer ersten Approximation abgeschätzt. Eine etwas gröbere Abschätzung ergibt eine vereinfachte Approximation. Betrachtungen über weitere zulässige Fehler, die innerhalb des vorhandenen inneren Fehlers der Approximation der Verformungsenergiedichte liegen, schließen sich an. Die erste und die zweite Variation der Verformungsenergiedichte wird als Grundlage für die noch folgende Finite-Elemente-Formulierung aufgestellt.

Ausgehend von den im Rahmen des inneren Fehlers zulässigen Fehlern in den Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen und von einem Klassifikationsschema für die Größenordnungen der Dehnungen und Rotationen werden im fünften Kapitel vereinfachte kinematische Beziehungen aufgestellt.

Das sechste Kapitel behandelt die Randbedingungen und die Lasten, während das siebte elastische Werkstoffgesetze zum Inhalt hat.

Die Programmierung der Schalentheorie als ein Finites Element auf einem Vektorrechner wird im achten Kapitel vorgestellt. Dabei wird zunächst der Zusammenhang zwischen der Variationsformulierung und der Methode der Finiten Elemente kurz erläutert. Nach der Einführung in die spezifischen Eigenschaften eines Vektorrechners am Beispiel der Cyber 205 wird die Realisierung der Elementroutine als einhochgradig vektorisiertes Programm besprochen. Untersuchungen über die Effizienz des vorgestellten Konzepts zur Vektorisierung auf Elementebene bilden den Abschluß dieses Kapitels.

Eine Anzahl eindrucksvoller Beispiele, teils aus der Literatur bekannt, teils bisher unveröffentlicht, bilden als neuntes Kapitel den Abschluß der Arbeit. Anhand dieser Beispiele wird die Leistungsfähigkeit der hergeleiteten Schalentheorie großer Dehnungen und ihrer vereinfachten Variante demonstriert und ihre Entwicklung durch Vergleiche mit den Resultaten aus Berechnungen mit einer Kirchhoff-Love-Schalentheorie für große Rotationen gerechtfertigt.

Im Anhang werden diejenigen Zwischenrechnungen und Beweise, die für die Nachvollziehbarkeit der theoretischen Herleitungen zwar wichtig aber für das allgemeine Verständnis entbehrlich sind zusammengefaßt. Im Hauptteil wird bei Bedarf auf die entsprechenden Teile des Anhangs verwiesen. Dabei sind die Kapitel des Anhangs und des Hauptteils in der Regel einander direkt zugeordnet.

Besondere Beachtung verdienen dennoch wegen ihrer Bedeutung der Beweis zur Existenz des Verschiebungsfeldes (A2.4) und der Beweis zur Abschätzung der höheren Ableitungen des Dehnungstensors in Normalenrichtung. Diese Beweise wurden im Anhang untergebracht, weil aus schalentheoretischer Sicht nur die Ergebnisse interessieren und die umfangreichen Herleitungen zu weit von der eigentlichen Entwicklung der Schalentheorie großer Dehnungen wegführen.

## 2. DIFFERENTIALGEOMETRISCHE ELEMENTE DER SCHALE

Nach der Betrachtung der Differentialgeometrie der unverformten Schale werden die differentialgeometrischen Elemente der verformten Schale hergeleitet. Es folgen die Einführung einer verallgemeinerten Normalenhypothese und der für große elastische Dehnungen allgemein angenommenen Inkompressibilitätsbedingung.

Die Differentialgeometrie des Schalenraums wird unter anderem in [2, 17, 22 u. 49] beschrieben.

Vektoren sind im folgenden im Gegensatz zu skalaren Größen fett geschrieben. Die Einsteinsche Summationskonvention wird angewandt. Griechische Indizes nehmen dabei die Werte 1 und 2 an, lateinische Indizes durchlaufen 1, 2 und 3.

Die für das Verständnis der Arbeit erforderlichen Definitionen aus der Tensorrechnung sind im Anhang 1 zusammengefaßt.

### 2.1 Die Differentialgeometrie der unverformten Schale

Der Schalenraum wird durch die krummlinigen Koordinaten  $\theta^1$  und  $\theta^2$  parallel zur Schalenmittelfläche und durch die Koordinate  $\theta^3 = \xi$  normal zur Mittelfläche aufgespannt.

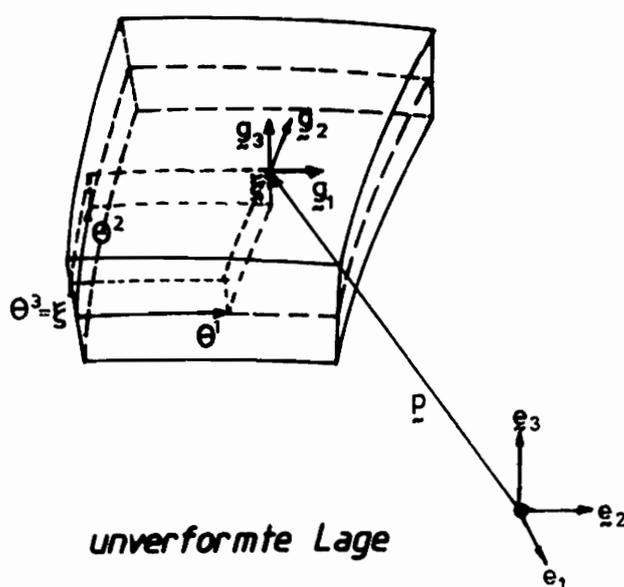


Bild 2.1

Dabei bezeichnet

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\theta^\alpha, \xi) = \mathbf{r}(\theta^\alpha) + \xi \mathbf{n}(\theta^\alpha) \quad (2.1.1)$$

den Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt im Schalenraum, während  $\mathbf{r}$  den dazugehörigen Punkt auf der Mittelfläche angibt.  $\mathbf{n}$  stellt den Normalenvektor auf der Mittelfläche dar (Bild 2.1). Der Definitionsbereich für  $\xi$  ist durch das Intervall

$$-\frac{h}{2} \leq \xi \leq \frac{h}{2} \quad (2.1.2)$$

gegeben, in dem  $h$  für die Schalendicke steht.

Die den Schalenkoordinaten  $\theta^\alpha$  und  $\theta^3 = \xi$  zugeordneten Basisvektoren  $\mathbf{g}_i$  erhalten wir aus den partiellen Ableitungen des Ortsvektors  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{p},_\alpha = \mathbf{r},_\alpha + \xi \mathbf{n},_\alpha \quad , \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{p},_3 = \mathbf{n} \quad .$$

Hierin und im folgenden Text bedeuten

$$(\dots),_\alpha = \frac{\partial(\dots)}{\partial\theta^\alpha} \quad \text{und} \quad (\dots),_3 = \frac{\partial(\dots)}{\partial\xi} \quad . \quad (2.1.4)$$

Die Basisvektoren auf der Mittelfläche werden durch

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r},_\alpha = \mathbf{g}_\alpha|_{\xi=0} \quad (2.1.4)$$

bezeichnet. Der Normalenvektor  $\mathbf{n}$  ergibt sich aus der Beziehung

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} \quad . \quad (2.1.5)$$

Die den Basisvektoren zugeordneten Komponenten des Metriktensors erhalten wir aus den Skalarprodukten

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta \quad , \quad \mathbf{g}_{\alpha 3} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_{3\alpha} = 0 \quad , \quad \mathbf{g}_{33} = \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_3 = 1 \quad , \quad (2.1.6)$$

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha} \cdot a_{\beta} \quad , \quad a_{\alpha 3} = a_{\alpha} \cdot n = a_{3\alpha} = 0 \quad , \quad a_{33} = n \cdot n = 1 \quad .$$

Zu den Komponenten der "ebenen" Metriktensoren werden noch die Determinanten

$$g = \text{Det}(g_{\alpha\beta}) = |g_1 \times g_2|^2 \quad \text{sowie} \quad a = \text{Det}(a_{\alpha\beta}) = |a_1 \times a_2|^2 \quad (2.1.7)$$

definiert.

Die Komponenten  $b_{\alpha\beta}$  des Krümmungstensors der Mittelfläche ergeben sich aus den partiellen Ableitungen der Basisvektoren zu

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = a_{\alpha,\beta} \cdot n = a_{\beta,\alpha} \cdot n = -n_{,\alpha} \cdot a_{\beta} = -n_{,\beta} \cdot a_{\alpha} \quad . \quad (2.1.8)$$

Analog dazu berechnen wir die Krümmungstensorkomponenten  $h_{\alpha\beta}$  der zur Mittelfläche parallelen Flächen  $\xi = \text{const.}$ :

$$h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}(\xi) = h_{\beta\alpha} = g_3 \cdot g_{\alpha,\beta} = g_3 \cdot g_{\beta,\alpha} = -g_{3,\beta} \cdot g_{\alpha} = -g_{3,\alpha} \cdot g_{\beta} \quad . \quad (2.1.9)$$

Es gilt dann

$$h_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta,3} \quad . \quad (2.1.10)$$

d.h.,  $h_{\alpha\beta}$  beschreibt die Änderung der Metriktensorkomponenten über die Schalendicke. Weiteres Differenzieren ergibt nach einigen Umformungen (A2.1.6) die Beziehung

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2b_{\alpha\beta} \xi + b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} \xi^2 \quad . \quad (2.1.11)$$

Für die Integration über den Schalenraum wird das Volumenelement  $dV$  benötigt, das wir aus der Gleichung

$$dV = (g_1 \times g_2) \cdot n \, d\theta^1 \, d\theta^2 \, d\xi = \sqrt{a} \, \mu \, d\theta^1 \, d\theta^2 \, d\xi \quad (2.1.12)$$

zu

$$\mu = 1 - b_{\lambda}^{\lambda} \xi + (b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2) \xi^2 = 1 - b_{\lambda}^{\lambda} \xi + \frac{b}{a} \xi^2 \quad (2.1.13)$$

bestimmen, wobei  $b$  für

$$b = \text{Det}(b_{\alpha\beta}) \quad (2.1.14)$$

steht.

Um die kovarianten Ableitungen auf der Mittelfläche berechnen zu können,

$$\begin{aligned} v_{\alpha|\beta} &= v_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} v_{\lambda} \quad , \\ v^{\alpha}{}_{|\beta} &= v^{\alpha}{}_{,\beta} + \Gamma_{\lambda\beta}^{\alpha} v^{\lambda} \quad , \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

werden die Christoffelsymbole zu

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = a^{\lambda} \cdot a_{\alpha,\beta} = - a^{\lambda}{}_{,\alpha} \cdot a_{\beta} \quad (2.1.16)$$

ermittelt. Aus (A1.22) und (2.1.8) ergibt sich weiter

$$\Gamma_{\alpha\beta}^3 = b_{\alpha\beta} \quad , \quad \Gamma_{3\beta}^{\alpha} = -b_{\beta}^{\alpha} \quad \text{und} \quad \Gamma_{3\alpha}^3 = 0 \quad , \quad (2.1.17)$$

sodaß wir auch die Ableitung eines Tensors  $\mathbf{E}$  im Schalenraum bei  $\xi=0$  zu

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{,k} &= (E_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j)_{,k} = E_{ij;k} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \\ &= (E_{ij,k} - \Gamma_{ik}^m E_{mj} - \Gamma_{jk}^m E_{im}) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

bestimmen können (vergl. A1.20 - A1.22).

## 2.2 Die Differentialgeometrie der verformten Schale

Alle Größen, die sich auf den verformten Zustand beziehen, werden durch einen oberen Querstrich gekennzeichnet. Hierdurch ist es möglich, sie von den entsprechenden Größen in der unverformten Lage zu unterscheiden.

Zunächst betrachten wir den verformten Schalenraum ohne zusätzliche kinematische Hypothesen. Sie werden erst im nächsten Abschnitt behandelt.

Durch ein Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}(\theta^\alpha, \xi)$  wird jeder Punkt der unverformten Schale mit dem Ortsvektor  $\mathbf{p}$  in die verformte Lage mit dem Ortsvektor  $\bar{\mathbf{p}}$  überführt. Das Verschiebungsfeld der Referenzfläche, der Fläche, die in der unverformten Lage die Mittelfläche ist, soll mit  $\mathbf{v}(\theta^\alpha) = \mathbf{u}(\theta^\alpha, \xi=0)$  bezeichnet werden. Es gilt also

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \mathbf{u} \quad (2.2.1)_1$$

im Schalenraum und

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} + \mathbf{v} \quad (2.2.1)_2$$

auf der Referenzfläche.

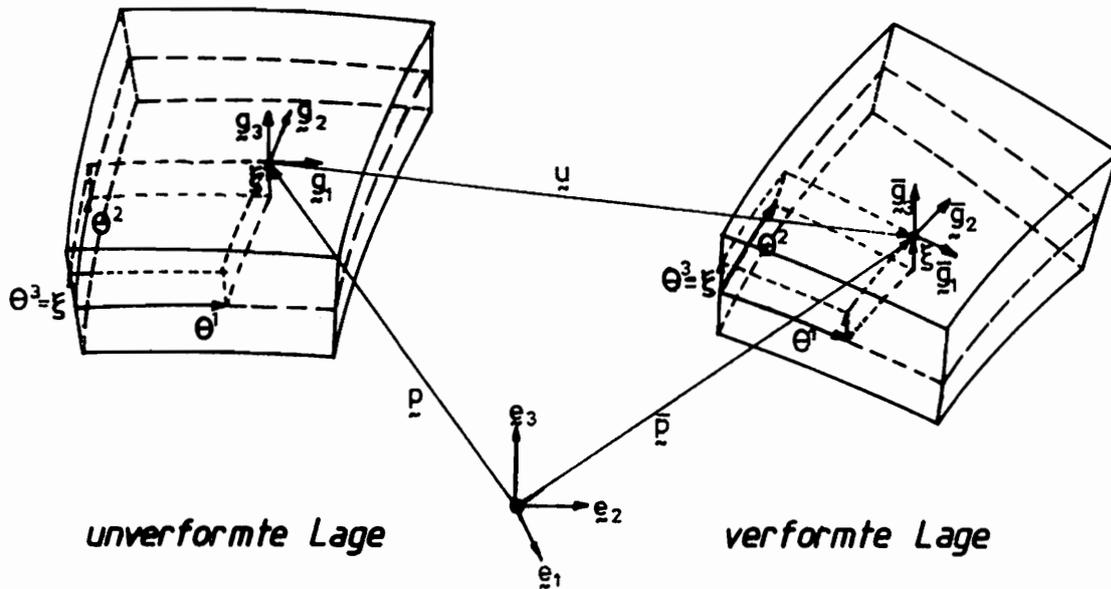


Bild 2.2

Die Basisvektoren erhalten wir - wie in der unverformten Konfiguration - aus den partiellen Ableitungen der Ortsvektoren:

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha = \mathbf{g}_\alpha + \mathbf{u}_{,\alpha} \quad , \quad \bar{\mathbf{a}}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{v}_{,\alpha} \quad , \quad (2.2.2)$$

$$\bar{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{n} + \mathbf{u}_{,3} \quad . \quad \bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{n} + \mathbf{u}_{,3}|_{\xi=0} \quad .$$

Die Basisvektoren  $\bar{\mathbf{g}}_3$  und  $\bar{\mathbf{a}}_3$  sind im allgemeinen nun nicht mehr normal zu  $\bar{\mathbf{g}}_\alpha$  bzw.  $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$ ,

$$\bar{\mathbf{g}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 \neq 0 \quad , \quad \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 \neq 0 \quad ; \quad (2.2.3)$$

ebenso ist der Betrag von  $\bar{\mathbf{g}}_3$  bzw.  $\bar{\mathbf{a}}_3$  nicht mehr gleich 1,

$$|\bar{\mathbf{g}}_3| \neq 1 \quad , \quad |\bar{\mathbf{a}}_3| \neq 1 \quad . \quad (2.2.4)$$

Somit ist es erforderlich, die Basisvektoren  $\bar{\mathbf{g}}_3$  in der  $\xi$  - Richtung deutlich von den Normalenvektoren  $\bar{\mathbf{n}}$  zu unterscheiden, die durch

$$\bar{\mathbf{n}}(\theta^\alpha, \xi) = \frac{\bar{\mathbf{g}}_1 \times \bar{\mathbf{g}}_2}{|\bar{\mathbf{g}}_1 \times \bar{\mathbf{g}}_2|} \quad (2.2.5)$$

im Schalenraum und durch

$$\overset{\circ}{\bar{\mathbf{n}}}(\theta^\alpha) = \frac{\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2}{|\bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2|} \quad (2.2.6)$$

auf der Referenzfläche gegeben sind.

Die Komponenten  $\bar{b}_{\alpha\beta}$  des Krümmungstensors der verformten Bezugsfläche betragen analog zu (2.1.8)

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = \bar{b}_{\beta\alpha} = \bar{\mathbf{a}}_{\alpha,\beta} \cdot \overset{\circ}{\bar{\mathbf{n}}} = \bar{\mathbf{a}}_{\beta,\alpha} \cdot \overset{\circ}{\bar{\mathbf{n}}} = - \overset{\circ}{\bar{\mathbf{n}}}_{,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta = - \overset{\circ}{\bar{\mathbf{n}}}_{,\beta} \cdot \bar{\mathbf{a}}_\alpha \quad . \quad (2.2.7)$$

Die Krümmung der Flächen  $\xi = \text{const.}$ , die in der unverformten Lage parallel zur Mittelfläche verlaufen, betragen entsprechend

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\beta\alpha} = \bar{\mathbf{g}}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{g}}_{\beta,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}} = - \bar{\mathbf{n}}_{,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}_\beta = - \bar{\mathbf{n}}_{,\beta} \cdot \bar{\mathbf{g}}_\alpha \quad . \quad (2.2.8)$$

Die Komponenten  $\bar{g}_{\alpha\beta}$  und  $\bar{a}_{\alpha\beta}$  des Metrikensoren in der verformten Konfiguration ergeben sich aus den Skalarprodukten zwischen den Basisvektoren zu

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\alpha\beta} &= \bar{\mathbf{g}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{g}}_\beta \quad , & \bar{a}_{\alpha\beta} &= \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_\beta \quad , \\ \bar{g}_{\alpha 3} &= \bar{\mathbf{g}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 \quad , & \bar{a}_{\alpha 3} &= \bar{\mathbf{a}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}_3 \quad , \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$$\bar{g}_{33} = \bar{g}_3 \cdot \bar{g}_3 \quad \text{und} \quad \bar{a}_{33} = \bar{a}_3 \cdot \bar{a}_3 .$$

Da wir (noch) keine Normalenhypothese eingeführt haben, sind  $\bar{g}_{\alpha 3}$  und  $\bar{a}_{\alpha 3}$  nicht null; ebenso sind  $\bar{g}_{33}$  und  $\bar{a}_{33}$  verschieden von eins.

Die Determinanten  $\bar{g}$  und  $\bar{a}$  sind durch

$$\bar{g} = \text{Det}(\bar{g}_{\alpha\beta}) \quad \text{und} \quad \bar{a} = \text{Det}(\bar{a}_{\alpha\beta}) \quad (2.2.10)$$

gegeben. Die kovariante Ableitung auf der verformten Bezugsfläche wird durch das Symbol  $||$  (statt  $|$ ) von der kovarianten Ableitung auf der unverformten Bezugsfläche unterschieden,

$$v_{\alpha} ||_{\beta} = v_{\alpha, \beta} - \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda} v_{\lambda} , \quad (2.2.11)$$

wobei  $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda}$  für die Christoffelsymbole in der verformten Lage steht.

### 2.3 Die verallgemeinerte Normalenhypothese

Wie aus dem vorherigen Abschnitt ersichtlich ist, gibt es (zunächst) keinen Grund, daß die Komponenten  $\bar{g}_{\alpha\beta}$  bzw.  $\bar{a}_{\alpha\beta}$  (2.2.9) des Metriktensors für die verformte Konfiguration zu null werden.

Für Schalen mit nur kleinen Dehnungen ist es jedoch eine bekannte und bewiesene Tatsache, daß  $\bar{g}_{\alpha\beta}$  und  $\bar{a}_{\alpha\beta}$ , die die Schubdeformation in der  $\xi$ -Richtung angeben, um die Ordnung  $\frac{h}{L}$  kleiner sind als die Membran- und Biegedehnungen und daher bei langwelligen Deformationsmustern näherungsweise vernachlässigt werden dürfen [21, 23, 24, 35, 49, 51, 52].  $h$  bezeichnet hierbei die Schalendicke und  $L$  die halbe Wellenlänge des Deformationsmusters. Das Deformationsmuster gilt als langwellig, wenn  $\frac{h}{L}$  kleiner oder ungefähr gleich  $\frac{1}{10}$  ist. Die daraus resultierenden Schalentheorien werden als Schalentheorien der ersten Approximation der Verformungsenergiegedichte bezeichnet.

Die entsprechenden kinematischen Hypothesen sind in der Kirchhoff-Love-Hypothese zusammengefaßt. Sie verlangt

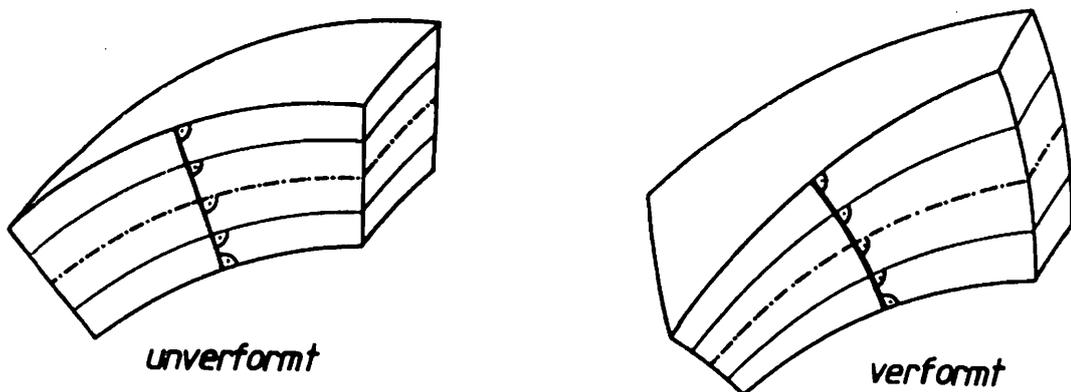
1. kleine Dehnungen, sodaß sich die Schalendicke durch die Verformung nicht ändert,
2. die Normalenvektoren  $\mathbf{n}$  normal zur Schalenmittelfläche vor der Verformung gehen bei der Deformation in Normalen  $\bar{\mathbf{n}}$  normal zur verformten Schalenmittelfläche über, und
3. die Fasern in der Normalenrichtung, der  $\xi$ -Richtung, bleiben auch nach der Verformung der Schale geradlinig.

In eine Formel zusammengefaßt lautet die K-L-Hypothese

$$\mathbf{u}(\theta^\alpha, \xi) = \mathbf{v}(\theta^\alpha) + \xi \mathbf{n}(\theta^\alpha) \quad (2.3.1)$$

Alle drei Bestandteile der Kirchhoff-Love-Hypothese vertragen sich nicht mit der Annahme großer Dehnungen. Einerseits ändert sich beim Auftreten großer Dehnungen die Schalendicke deutlich. Damit liegt ein Widerspruch mit der ersten Annahme der K-L-Hypothese vor.

Andererseits ist der Dehnungszustand der Schale nicht überall gleich. Daher ist auch die Dickenänderung örtlich unterschiedlich. Dort, wo sich die Dickenänderung örtlich ändert, haben die Normalen auf die Oberfläche, auf die Mittelfläche bzw. Bezugsfläche und auf die "Unterfläche" verschiedene Richtungen (siehe Bild 2.3). Dieses widerspricht der zweiten und der dritten Forderung der K-L-Hypothese.



**Bild 2.3:** Zur Veranschaulichung der modifizierten Normalenhypothese.

Dennoch verwenden viele Autoren auch beim Auftreten großer Dehnungen in

der Schalentheorie Normalenhypothesen, da sich dadurch die kinematischen Beziehungen wesentlich vereinfachen lassen. Diese Normalenhypothesen müssen im Vergleich zur Kirchhoff-Love-Hypothese so modifiziert sein, daß sie zumindest die Dickenänderung der Schale zulassen [6, 9, 10, 28, 29, 30, 31, 35, 59, 60, 68, 69].

Alle Normalenhypothesen haben gemeinsam, daß mit  $\bar{g}_{\alpha 3} = 0$  bzw.  $\bar{a}_{\alpha 3} = 0$  gerechnet wird. Wie wir später (Kapitel 3) sehen werden, ist  $\bar{a}_{\alpha 3} = 0$  äquivalent zu  $\gamma_{\alpha 3} = 0$ , das heißt, daß es keine transversale Schubverformung gibt. Diese Annahme ist - wenn auch noch nicht exakt bewiesen - bei hinreichend langwelligen Deformationsmustern zulässig.

Die zur Zeit allgemein übliche modifizierte Normalenhypothese [s.o.] läßt sich durch die Formel

$$\mathbf{u}(\theta^\alpha, \xi) = \mathbf{v}(\theta^\alpha) + \zeta(\theta^\alpha, \xi) \overset{0}{\bar{\mathbf{n}}}(\theta^\alpha) \quad (2.3.2)$$

beschreiben. Diese Beziehung ergibt zwar auf der Referenzfläche

$$\bar{a}_{\alpha 3} = \bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_3 = 0 \quad , \quad (2.3.3)$$

aber im Schalenraum ist für  $\xi \neq 0$

$$\bar{g}_{\alpha 3} = \bar{g}_\alpha \cdot \bar{g}_3 \approx 0 \quad (2.3.4)$$

nicht exakt null. Zusätzlich bleibt die Querschnittsverwölbung behindert, da sich die  $\xi$ -Koordinate zwar längen oder verkürzen aber nicht krümmen kann. Die Folge ist, daß die Beschreibung der örtlichen Dickenänderung problematisch bleibt.

In dieser Arbeit soll eine Normalenhypothese gewählt werden, die nur die transversale Schubverformung ausschließt, also lediglich

$$\bar{g}_{\alpha 3} = \bar{g}_\alpha \cdot \bar{g}_3 = 0 \quad (2.3.5)$$

fordert. Hieraus folgt unmittelbar

$$\bar{g}_3(\theta^\alpha, \xi) = \lambda_3(\theta^\alpha, \xi) \bar{n}(\theta^\alpha, \xi) \quad , \quad (2.3.6)_1$$

abgekürzt

$$\bar{g}_3 = \lambda_3 \bar{n} \quad , \quad (2.3.6)_2$$

wobei  $\lambda_3$  die Dehnung (den Stretch-Faktor) in der  $\xi$ -Richtung angibt. In Ergänzung zu (2.2.9) erhalten wir nun

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.3.7)$$

und

$$\bar{g}_{33} = (\lambda_3)^2 \quad \text{sowie} \quad \bar{a}_{33} = (\lambda_3^0)^2 \quad . \quad (2.3.8)$$

Dabei bezeichnet

$$\lambda_3^0 = \lambda_3|_{\xi=0} \quad (2.3.9)$$

den Dehnungsfaktor (Stretchfaktor) für die  $\xi$ -Richtung auf der Bezugsfläche. Somit ist

1. die Dickenänderung nicht behindert,
2. es besteht dennoch die gewünschte Orthogonalitätsbeziehung im Schalenraum, und
3. die Querschnittsverwölbung infolge der örtlichen Dickenände unbehindert (siehe Bild 2.3).

Für das Verschiebungsfeld gilt somit unter Beachtung von (2.3.5 u. 6):

$$\mathbf{u}(\theta^\alpha, \xi) = \mathbf{v}(\theta^\alpha) + \int_0^\xi \lambda_3(\theta^\alpha, \xi) \bar{\mathbf{n}}(\theta^\alpha, \xi) d\xi \quad . \quad (2.3.10)$$

Wie wir im Kapitel 3 sehen werden, braucht das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  des Schalenraumes nicht explizit bestimmt zu werden, um den Dehnungszustand der Schale bestimmen zu können. Die Existenz dieses Verschiebungsfeldes wird unter der Berücksichtigung der Inkompressibilität des Materials (Kapitel 2.4) im Anhang A2.4 bewiesen.

## 2.4 Die Inkompressibilitätsbedingung

Wenn man von Schaumstoffen absieht, weisen die meisten Werkstoffe, die große elastische Dehnungen zulassen, inkompressibles oder annähernd inkompressibles Materialverhalten auf. Am bekanntesten ist das inkompressible Verformungsverhalten von Gummi und vielen anderen Elastomeren. Ebenso ändern fast alle weichen Biomaterialien wie Haut, Sehnen oder Bänder wegen des hohen Wassergehalts in ihren Zellen bei der Verformung nicht ihr Volumen. Auch Memorymetalle kennen im hyperelastischen Zustand isochorisches Verformungsverhalten, wobei die elastischen Dehnungen durchaus mehrere Prozente betragen können und damit nicht mehr klein sind.

Aus der Inkompressibilitätsbedingung

$$\text{Det } \mathbf{F} = 1 \quad (2.4.1)$$

erhalten wir nach einigen Umformungen (siehe A2.3.6)

$$\text{Det } \mathbf{F} = \lambda_3 \sqrt{\frac{\bar{g}}{g}} = 1 \quad (2.4.2)$$

Dabei steht  $\mathbf{F}$  für den Deformationsgradiententensor

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad (2.4.3)$$

Das gleiche Resultat ergibt sich aus dem Ansatz über das Volumenelement  $\delta V$ , das bei der Deformation den Rauminhalt beibehält:

$$\frac{\bar{\delta V}}{\delta V} = \frac{(\bar{\mathbf{g}}_1 \times \bar{\mathbf{g}}_2) \cdot \bar{\mathbf{g}}_3}{(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3} = \frac{\lambda_3 \sqrt{\bar{g}}}{\sqrt{g}} = 1 \quad (2.4.4)$$

In Verbindung mit der Normalenhypothese (2.3.5) ist nun das Verformungsfeld  $\mathbf{u}$  des gesamten Schalenraums allein durch das Verschiebungsfeld  $\mathbf{v}$  der Schalenbezugsfläche bestimmt. Der Beweis hierfür wird im Anhang A2.4 geführt. Somit erfüllen die Normalenhypothese und die Inkompressibilitätsbedingung die Kompatibilitätsbedingung.

### 3. DIE DEHNUNGEN DES SCHALENRAUMS BEI ANNAHME GROSSER DEHNUNGEN UND ROTATIONEN

#### 3.1 Einleitende Betrachtungen

Die allgemeinen kinematischen Beziehungen in einer Schale mit großen Dehnungen sind sehr kompliziert. Die Annahme einer Normalenhypothese führt zu wesentlichen Vereinfachungen, insbesondere wenn sie mit der Annahme inkompressiblen Materialverhaltens - wie es bei einer Reihe von Werkstoffen vorliegt - kombiniert wird. Daher werden diese Annahmen in fast allen Veröffentlichungen über Schalen aus hyperelastischen Materialien mit großen Dehnungen [6, 9, 10, 28-30, 35, 59, 60, 68, 68] getroffen.

Nur wenige Autoren [z.B. 36] berücksichtigen die transversale Schubverformung. Sie kann jedoch, wie Parameterstudien in [36] zeigen, bei hinreichend langwelligem Deformationsmuster vernachlässigt werden.

Auch in dieser Arbeit gehen wir von einer Normalenhypothese und der Inkompressibilität des Werkstoffs aus. Beide Annahmen wurden bereits in der Kinematik des Schalenraumes bei der Bestimmung der differentialgeometrischen Elemente berücksichtigt und ausgiebig diskutiert (Kapitel 2.2 bis 2.4).

Bisher wurden für den Krümmungsänderungstensor, der maßgeblichen Größe für die Biegedehnungen, seitens verschiedener Autoren unterschiedliche Maße vorgeschlagen [9, 56, 59, 68, 76]. In dieser Arbeit wird in Anlehnung an die Vorgehensweise in [49] der Dehnungstensor in eine Taylorreihe bezüglich der  $\xi$ -Koordinate entwickelt. Als Krümmungsänderungstensor bezeichnen wir dann den in  $\xi$  linearen Term dieser Reihe. Wieviele weitere Glieder für eine hinreichend genaue Beschreibung des Dehnungsverlaufs zu berücksichtigen sind und welche zusätzlichen Fehler in den Dehnungsmaßen erlaubt werden können, entscheiden wir später an Hand energetischer Betrachtungen.

### 3.2 Eine Möglichkeit zur Beschreibung großer Dehnungen im Schalenraum

Aus dem polaren Zerlegungssatz für den Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  ergibt sich der rechte Cauchy-Greensche Dehnungstensor (Stretchtensor)  $\mathbf{U}$ ,

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} \quad , \quad (3.2.1)$$

der den Dehnungszustand der Schale beschreibt und die "wahren" ingenieurmäßigen Dehnungen angibt. So gilt zum Beispiel für die Beträge der Basisvektoren im unverformten und im verformten Zustand die Beziehung [49]

$$|\bar{\mathbf{g}}_i| = |\mathbf{U} \mathbf{g}_i| \quad . \quad (3.2.2)$$

Aus dem rechten Cauchy-Greenschen Dehnungstensor kann durch Abspalten des 1-Tensors der Tensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  der Ingenieurdehnungen bestimmt werden,

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{U} - \mathbf{1} \quad , \quad (3.2.3)$$

der im eindimensionalen Fall das Verhältnis  $\Delta l/l$  wiedergibt.

Auf Grund seiner differentialgeometrischen Bedeutung wäre  $\mathbf{U}$  ideal zur Beschreibung großer Dehnungen geeignet; jedoch bereitet seine Berechnung mit Hilfe der Wurzelfunktion aus einem Tensor erhebliche Probleme. Daher wählen wir als einfacher bestimmbares Dehnungsmaß den Greenschen Dehnungstensor  $\mathbf{E}$ , der durch die Beziehung

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{U} \mathbf{U} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (2 \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}) \quad (3.2.4)$$

definiert ist. Wie man sieht, sind der Tensor der Ingenieurdehnungen  $\boldsymbol{\epsilon}$  und der Greensche Dehnungstensor  $\mathbf{E}$  für kleine Dehnungen gleichwertig. Bei großen Dehnungen treten jedoch erhebliche Unterschiede auf, die unbedingt beachtet werden müssen. Dieses geschieht am einfachsten dadurch, daß wir das Materialgesetz in Form der Verformungsenergiedichte ebenfalls mit Hilfe des Greenschen Dehnungstensors beschreiben, wobei wir die aus (3.2.4) folgende Beziehung

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U} \mathbf{U} = \mathbf{1} + 2 \mathbf{E} \quad (3.2.5)$$

ausnützen.

Aus der Definition des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  (A3.2.1) folgt nach kurzer Rechnung (A3.2.2-8)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \frac{1}{2} (\bar{g}_{ij} - g_{ij}) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \\ &= \frac{1}{2} (u_{i;j} + u_{j;i} + u_{k;i} u^k_{;j}) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j . \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Dabei steht das Semikolon ; für die kovariante Ableitung im drei-dimensionalen Raum, so wie sie in den Formeln (A1.20 u. 21) definiert wurde.

Nun läßt sich leicht zeigen, daß die Normalenhypothese (2.3.5) die transversalen Schubdehnungen  $E_{\alpha 3}$  und damit auch  $U_{\alpha 3}$  und  $\epsilon_{\alpha 3}$  unterdrückt:

$$E_{\alpha 3} = \bar{g}_{\alpha 3} = 0 \quad , \quad (3.2.7)$$

$$U_{\alpha 3} = \epsilon_{\alpha 3} = 0 \quad . \quad (3.2.8)$$

Die Dehnung in der 3. Richtung ( $\xi$ -Richtung) ergibt sich aus der Beziehung

$$E_{33} = \epsilon_{33} + \frac{1}{2} \epsilon_{33} \epsilon_{33} = \frac{1}{2} [(\lambda_3)^2 - 1] \quad , \quad (3.2.9)$$

in der der Stretchfaktor  $\lambda_3 = \lambda_3(\xi)$  für die "lokale" Dickenänderung steht. Er folgt aus der Inkompressibilität des Materials (2.4.4) und läßt sich aus der Determinante des Maßensors in der verformten Lage berechnen. Nach etlichen Umformungen (siehe Anhang A3.2) ergibt sich  $\lambda_3$  zu

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{g}{\bar{g}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2E_{\lambda} + \frac{4}{g} \text{Det}(E_{\alpha\beta})}} \quad . \quad (3.2.10)$$

### 3.3 Dehnung und Krümmung der Schalenbezugsfläche

Die Greenschen Dehnungen  $\gamma$  der Schalenbezugsfläche  $\xi=0$ ,

$$\gamma = \mathbf{E}|_{\xi=0} \quad (3.3.1)$$

lassen sich nach Einführung der in der Literatur über Schalentheorie [z.B. 49] häufig verwandten "linearen Dehnungs- und Rotationsgrößen" für das Verschiebungsfeld  $\mathbf{v}$  der Schalenbezugsfläche,

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta} &= v_{\alpha;\beta} = v_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} v_{\lambda} - b_{\alpha\beta} v_3 \quad , \\ \varphi_{\alpha} &= v_{3;\alpha} = v_{3,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} v_{\lambda} \quad , \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}(\xi=0) \quad , \quad \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = C_{\alpha\beta}^{\lambda}(\xi=0) \quad ,$$

in der gewohnten Form

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda\beta} + \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta}) \quad (3.3.3)$$

angeben. Die Basisvektoren auf der verformten Bezugsfläche lauten mit Hilfe von (3.3.2)

$$\bar{\mathbf{a}}_{\alpha} = \mathbf{a}_{\alpha} + \mathbf{v}_{,\alpha} = \mathbf{a}_{\alpha} + \varphi_{\alpha}^{\lambda} \mathbf{a}_{\lambda} + \varphi_{\alpha} \mathbf{n} \quad (3.3.4)$$

Für den Normalenvektor  $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$  erhalten wir dann aus (2.2.6) nach einiger Rechnung (siehe Anhang)

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{n}} &= \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \left[ \mathbf{a}^{\lambda} (-\varphi_{\lambda} - \varphi_{\rho}^{\rho} \varphi_{\lambda} + \varphi_{\lambda}^{\rho} \varphi_{\rho}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{n} (1 + \varphi_{\lambda}^{\lambda} + \text{Det}(\varphi_{\rho}^{\lambda})) \right] \quad , \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

wobei das Verhältnis  $\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}$  aus (3.2.10) zu

$$\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} = \overset{\circ}{\lambda}_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\gamma_{\lambda}^{\lambda} + \frac{4}{a} \text{Det}(\gamma_{\alpha\beta})}} \quad (3.3.6)$$

bestimmt wird.

Die Krümmung der Bezugsfläche in der verformten Lage  $\bar{b}_{\alpha\beta}$  (2.2.7) ergibt sich aus der Beziehung

$$\begin{aligned}\bar{b}_{\alpha\beta} &= \bar{n} \cdot \bar{a}_{\alpha,\beta} = \bar{n} \cdot (\bar{a}_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \bar{a}_{\lambda}) \\ &= \bar{n} \cdot \bar{a}_{\alpha|\beta} \quad ,\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

aus der nach kurzer Rechnung (siehe Anhang)

$$\begin{aligned}\bar{b}_{\alpha\beta} &= \overset{0}{\lambda_3} [(1 + \varphi_{\lambda}^{\lambda} + \text{Det}(\varphi_{\rho}^{\lambda})) (b_{\alpha\beta} + b_{\lambda\beta} \varphi_{\alpha}^{\lambda} + \varphi_{\alpha|\beta}) \\ &\quad + (\varphi_{\rho}^{\lambda} \varphi_{\lambda} - (1 + \varphi_{\lambda}^{\lambda}) \varphi_{\rho}) (\varphi_{\alpha|\beta}^{\rho} - b_{\beta}^{\rho} \varphi_{\alpha})] \\ &= \bar{b}_{\beta\alpha}\end{aligned}\tag{3.3.8}$$

folgt. Die Symmetrie von  $\bar{b}_{\alpha\beta}$  wird erst offensichtlich, wenn man  $\varphi_{\alpha|\beta} + b_{\lambda\beta} \varphi_{\alpha}^{\lambda}$  und  $\varphi_{\alpha|\beta}^{\rho} - b_{\beta}^{\rho} \varphi_{\alpha}$  ausschreibt [49].

In der "klassischen" Kirchhoff-Love-Schalentheorie kleiner Dehnungen und großer Rotationen [2, 40, 42, 49, 50] wird der Faktor  $\sqrt{a/\bar{a}}$  ( $=\lambda_3$  für inkompressibles Material) meistens zu  $1+O(\theta^2)$  abgeschätzt. Im Bereich großer Dehnungen ist das jedoch keinesfalls erlaubt, weil im Gegensatz zur Theorie kleiner Dehnungen der Dickenänderung eine bedeutende Rolle zukommt.

### 3.4 Die Entwicklung des Greenschen Dehnungstensors in eine Taylorreihe

Um den Verlauf der Dehnungen längs der "Dickenkoordinate"  $\xi$  nur mit Hilfe auf der Bezugsfläche definierter Größen zu beschreiben, ist es erforderlich, den Dehnungstensor in eine Taylorreihe bezüglich  $\xi$  zu entwickeln:

$$\begin{aligned}E &= E_0 + E_{(1)}\xi + \frac{1}{2} E_{(2)}\xi^2 + \dots + \frac{1}{n!} E_{(n)}\xi^n \\ &= \gamma + \kappa \xi + \nu \xi^2 + \dots \quad .\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

Hierbei bedeuten  $E_0, E_{(1)} \dots E_{(n)}$

$$E_0 = E|_{(\xi=0)} =: \gamma$$

und (3.4.2)

$$E_{(n)} = \frac{\partial^n E}{\partial \xi^n} |_{\xi=0} = E, \underbrace{33 \dots 3}_n |_{\xi=0} \cdot$$

Die Komponenten von  $E_{(n)}$  erhalten wir gemäß der Beziehung (A1.20) aus den Gleichungen

$$E_{(1)} = E_{(1)ij} a^i \otimes a^j = E_{ij;3} |_{\xi=0} a^i \otimes a^j, \quad (3.4.3)$$

$$E_{(2)} = E_{(2)ij} a^i \otimes a^j = E_{ij;33} |_{\xi=0} a^i \otimes a^j$$

usw.,

in denen die kovarianten Ableitungen unter Benutzung der Christoffelsymbole (A1.21 u. 22) sowie der analogen Anwendung von (2.1.16)

$$E_{\alpha\beta;3} = E_{\alpha\beta,3} + h_{\alpha}^{\lambda} E_{\lambda\beta} + h_{\beta}^{\lambda} E_{\lambda\alpha} \quad (3.4.4)$$

und nach weiteren Umformungen

$$E_{\alpha\beta;33} = E_{\alpha\beta,33} + 2h_{\alpha}^{\lambda} E_{\lambda\beta;3} + 2h_{\beta}^{\lambda} E_{\lambda\alpha;3} - 2h_{\alpha}^{\lambda} h_{\beta}^{\rho} E_{\lambda\rho} \quad (3.4.5)$$

ergeben. Aus den Beziehungen (3.2.6, 2.1.10, A2.3.1, A2.1.6 u. A2.3.5) folgt

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta,3} &= \frac{1}{2} (\bar{g}_{\alpha} \cdot \bar{g}_{\beta} - g_{\alpha\beta}),_3 \\ &= \frac{1}{2} (\bar{g}_{\alpha,3} \cdot \bar{g}_{\beta} + \bar{g}_{\alpha} \cdot \bar{g}_{\beta,3}) + h_{\alpha\beta} \\ &= h_{\alpha\beta} - \lambda_3 \bar{h}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

sowie

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha\beta,33} &= h_{\alpha\beta,3} - \lambda_{3,3} \bar{h}_{\alpha\beta} - \lambda_3 \bar{h}_{\alpha\beta,3} \\
 &= -b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} - \lambda_{3,3} \bar{h}_{\alpha\beta} - \lambda_3 \lambda_{3,\alpha||\beta} + (\lambda_3)^2 \bar{h}_{\alpha}^{\lambda} \bar{h}_{\lambda\beta} \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{3.4.7}$$

so daß sich die Komponenten von  $E_{(1)} = \kappa$  und  $E_{(2)} = 2\nu$  zu

$$E_{(1)\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + b_{\alpha}^{\lambda} \gamma_{\lambda\beta} + b_{\beta}^{\lambda} \gamma_{\lambda\alpha} - \lambda_3 \bar{b}_{\alpha\beta}
 \tag{3.4.8}$$

und

$$\begin{aligned}
 E_{(2)\alpha\beta} = 2\nu_{\alpha\beta} &= (\lambda_3)^2 \bar{b}_{\alpha}^{\lambda} \bar{b}_{\lambda\beta} - \lambda_3 (\lambda_{3,\alpha||\beta}) - (\lambda_{3,3}) \bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} \\
 &\quad + 2b_{\alpha}^{\lambda} E_{(1)\lambda\beta} + 2b_{\beta}^{\lambda} E_{(1)\lambda\alpha} - 2b_{\alpha}^{\lambda} b_{\beta}^{\rho} \gamma_{\lambda\rho}
 \end{aligned}
 \tag{3.4.9}$$

ergeben. Unter Zuhilfenahme der Identitäten

$$E_{\lambda,3}^{\lambda} = E_{\lambda;3}^{\lambda} \quad (E_{\lambda}^{\lambda} = \text{Spur}(E) \text{ ist ein Skalar})
 \tag{3.4.10}$$

und

$$(\text{Det}(E_{\beta}^{\alpha}))_{,3} = (\text{Det}(E_{\beta}^{\alpha}))_{;3} = \frac{1}{a} (\text{Det } E_{\alpha\beta})_{,3}
 \tag{3.4.11}$$

folgt  $\lambda_{3,3}$  aus (3.3.6):

$$\begin{aligned}
 \lambda_{3,3}|_{\xi=0} &= \frac{1}{2\lambda_3} ((\lambda_3)^2)_{,3} = \frac{1}{2\lambda_3} [(\bar{g})^{-1}]_{,3} = \frac{-1}{2\lambda_3} (\bar{g})^{-2} (\bar{g})_{,3} \\
 &= -(\lambda_3)^3 [E_{(1)\lambda}^{\lambda} + \frac{2}{a} (\gamma_{11} E_{(1)22} + \gamma_{22} E_{(1)11} - 2\gamma_{12} E_{(1)12})].
 \end{aligned}
 \tag{3.4.12}$$

Wie in Kapitel 4.4 noch gezeigt wird, können wir den Term  $\lambda_{3,\alpha||\beta}$  in (3.4.9) streichen, so daß er an dieser Stelle nicht berechnet werden muß.

Die höheren Ableitungen der Dehnungen nach der "Dickenkoordinate"  $\xi$  sind zu komplex, als daß es einen Sinn hätte, sie hier explizit auszurechnen. Im Anhang A3.4 zeigen wir, daß für sie die Abschätzung

$$\frac{||E_{(n+1)}||}{||E_{(n)}||} = O(\max(|b_{\alpha\beta}|, |\bar{b}_{\alpha\beta}|, \frac{1}{L})) \quad , \quad n \geq 1 \quad .
 \tag{3.4.13}$$

mit  $L$  als charakteristische Wellenlänge des Deformationsmusters gilt.

Damit können wir die Dehnungsverteilung über die Schalendicke ( $-\frac{h}{2} \leq \xi \leq \frac{h}{2}$ ) bei der Einführung eines relativen Fehlers durch

$$E = (\gamma + \kappa \xi + \nu \xi^2) [1 + O(\max(h|b_{\alpha\beta}|, h|\bar{b}_{\alpha\beta}|, (\frac{h}{L})^2))] \quad (3.4.14)$$

annähern. Im Kapitel 4.3 wird mittels energetischer Abschätzungen gezeigt, daß die quadratische Approximation der Dehnungsverteilung hinreichend genau ist.

#### 4. EINE ERSTE APPROXIMATION DER VERFORMUNGSENERGIEDICHTE FÜR HYPERELASTISCHE SCHALEN

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels betrachten wir die Annahmen, die zur "klassischen" Schalentheorie dünner elastischer Schalen mit kleinen Dehnungen führen. Um moderate oder große Dehnungen zuzulassen, müssen im zweiten Abschnitt die klassischen Hypothesen modifiziert werden. Anschließend wird die Verformungsenergiedichte für das Schalenkontinuum in eine Taylorreihe bezüglich der "Dickenkoordinate"  $\xi$  entwickelt. Mit Hilfe der geänderten Hypothesen läßt sich die Verformungsenergiedichte abschätzen, so daß nur noch die von der Größenordnung her führenden Terme übrigbleiben.

##### 4.1 Die klassische Schalentheorie

Es gibt zwei grundsätzlich verschiedene Wege, die Verformungsenergiedichtefunktion der klassischen Theorie dünner elastischer Schalen herzuleiten [49]. Die erste Möglichkeit besteht in der Einführung der Kirchhoff-Love-Hypothese in die Kinematik des Schalenkontinuums, die andere in der Definition eines Kleinheitsparameters  $\theta$ , dessen Quadrate gegenüber 1 vernachlässigt werden dürfen. [21, 23, 49].

Die Kirchhoff-Love-Hypothese fordert, daß Fasern, die vor der Deformation normal zur Bezugsfläche (Schalenmittelfläche) verlaufen, auch nach der Deformation lotrecht zur verformten Bezugsfläche stehen, gerade bleiben und ihre Länge nicht ändern. Sie muß stets im Zusammenhang mit der Annahme kleiner Dehnungen gesehen werden, denn sonst wäre die Forderung, daß es in der Normalenrichtung keine Längenänderung gibt, unhaltbar. Eine detaillierte Erörterung verschiedener Normalenhypothesen befindet sich im Kapitel 2.3.

Die Kirchhoff-Love-Hypothese ermöglicht es, den Dehnungsverlauf im Schalenraum nur durch die Dehnung und Krümmungsänderung der Bezugsfläche (Schalenmittelfläche) zu beschreiben:

$$E(\theta^\alpha, \xi) = \gamma(\theta^\alpha) + \xi \kappa(\theta^\alpha) ; \quad (4.1.1)$$

$\mathbf{E}$  = Dehnungstensor an beliebiger Stelle,  
 $\boldsymbol{\gamma}$  = Dehnungstensor auf der Bezugsfläche,  
 $\boldsymbol{\kappa}$  = Krümmungsänderungstensor der Bezugsfläche.

Auf Grund der Voraussetzung kleiner Dehnungen können statt der wahren (ingenieurmäßigen) Dehnungen die einfacher zu berechnenden Greenschen Dehnungs- und Krümmungsänderungstensoren

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} &= \gamma_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j = \frac{1}{2} (\bar{a}_{ij} - a_{ij}) \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j \\ &= \frac{1}{2} (\bar{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

und

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j = (b_{\alpha\beta} - \bar{b}_{\alpha\beta}) \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta\tag{4.1.3}$$

Verwendung finden, wobei die Dehnungen in der  $\xi$ -Richtung üblicherweise vernachlässigt werden. Nehmen wir linear elastisches (Hookesches) Material an und berücksichtigen, daß die Schale sehr dünn sein soll, erhalten wir die erste Approximation der Verformungsenergiedichte

$$\phi = \frac{1}{2} h (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{H} \boldsymbol{\gamma} + \frac{h^2}{12} \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{H} \boldsymbol{\kappa}) ,\tag{4.1.4}$$

in der  $\mathbf{H}$  für den modifizierten Elastizitätstensor steht (vergl. [49]).

Zum selben Ergebnis gelangt man durch Einführung des **Kleinheitsparameters**  $\theta$  [21, 23, 49],

$$\theta = \max \left( \frac{h}{L} , \sqrt{\frac{h}{R}} , \sqrt{\eta} \right) ,\tag{4.1.5}$$

$h$  = Schalendicke,

$L$  = charakteristische Wellenlänge des Deformationsmusters,

$R$  = kleinster Hauptkrümmungsradius,

$\eta$  = größte Hauptdehnung,

dessen Quadrat gegenüber 1 vernachlässigt werden darf,

$$\theta^2 \ll 1 . \quad (4.1.6)$$

Die auf das Volumen bezogene Verformungsenergiedichte  $W$ ,

$$W = \mathbf{E} \cdot \mathbf{L} \mathbf{E} = W(\theta^\alpha, \xi) , \quad (4.1.7)$$

$\mathbf{L}$  = Elastizitätstensor ,

wird in eine Taylorreihe bezüglich der Normalenkoordinate  $\xi$  entwickelt und über  $\xi$  integriert. Durch anschließendes Streichen aller Terme, die um mindestens die Größenordnung  $\theta^2$  kleiner als führende Terme sind, ergibt sich die Verformungsenergiedichte zu

$$\phi = \frac{1}{2} h(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{H} \boldsymbol{\gamma} + \frac{h^2}{12} \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{H} \boldsymbol{\kappa}) (1 + O(\theta^2)) . \quad (4.1.8)$$

$O(\dots)$  bedeutet "Terme der Ordnung von (...)" und gibt, verglichen mit 1, den relativen Fehler an.

#### 4.2 Änderung der klassischen Hypothesen bei Annahme großer Dehnungen

Die bei großen Dehnungen auftretende Dickenänderung der Schale ist mit der Kirchhoff-Love-Hypothese unvereinbar. Folglich kann als kinematische Annahme nur eine modifizierte Normalenhypothese aufrecht erhalten bleiben. Im Kapitel 2.3 wird dieses Problem ausführlich dargelegt. Die in dieser Arbeit gewählte Normalenhypothese (2.3.5) fordert, daß die Normalen zu einer Fläche, die vor der Verformung parallel zur Bezugsfläche war, auch nach der Deformation noch normal zu der nun verformten Fläche verlaufen. In [60] wird gezeigt, daß die Annahme einer Normalenhypothese zu einem relativen Fehler  $O(h^2/L^2)$  in der Verformungsenergiedichte führt. Gilt

$$\frac{h}{L} \leq \theta \quad \text{mit} \quad \theta^2 \ll 1 , \quad (4.2.1)$$

so liegt dieser Fehler innerhalb der im Rahmen unserer Approximation noch zu wählenden Fehlermarge (siehe 4.3.15).

Eine Begrenzung der größten Hauptdehnung  $\eta$  findet zunächst nicht statt. Da

eine extreme Kompression der Schale sowohl zu Problemen in der Kinematik als auch in der Beschreibung des Werkstoffs führt, sollen extreme Stauchungen  $\eta \approx -1$  von den nachfolgenden Überlegungen ausgeschlossen bleiben. Ansonsten muß für große Dehnungen

$$\eta = O(1) \quad (4.2.2)$$

angenommen werden. Sehr große Dehnungen  $\eta > 1$  leiten, wie wir noch sehen (Kapitel 4.5), zur Membrantheorie über.

Am interessantesten wird es sein, wenn die Biegedehnungen dieselbe Größenordnung wie die Membrandehnungen erreichen. Folglich kann

$$\sqrt{\frac{h}{R}} \leq \theta \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{h}{\bar{R}}} \leq \theta, \quad R = \min \left( \frac{1}{b_{\alpha\beta}} \right), \quad \bar{R} = \min \left( \frac{1}{\bar{b}_{\alpha\beta}} \right) \quad (4.2.3)$$

nicht mehr bestehen bleiben. Andernfalls beschränkten wir uns automatisch auf kleine Biegedehnungen  $O(\theta^2)$ , wie es aus den Beziehungen (3.4.1 und 3.4.8) leicht ersichtlich ist. Dennoch benötigen wir eine Begrenzung der Relationen  $h/R$  und  $h/\bar{R}$ , damit das betrachtete Kontinuum seinen flächenhaften Charakter behält. In den nachfolgenden Betrachtungen wird daher die Krümmung durch

$$\frac{h}{R} \leq \theta \quad \text{und} \quad \frac{h}{\bar{R}} \leq \theta \quad (4.2.4)$$

abgeschätzt.

Somit kann der Kleinheitsparameter  $\theta$  für Schalen unter großen Dehnungen zu

$$\theta = \max \left( \frac{h}{L}, \frac{h}{R}, \frac{h}{\bar{R}} \right), \quad \theta^2 \ll 1, \quad (4.2.5)$$

definiert werden.  $R$  und  $\bar{R}$  geben die kleinsten Hauptkrümmungsradien in der unverformten und der verformten Konfiguration an, während  $h$  die Schalendicke und  $L$  die charakteristische Wellenlänge des Deformationsmusters (A3.4.5) bezeichnet. Insbesondere bleibt anzumerken, daß die Definition für  $\theta$  durch die Abschätzung (3.4.13) gerechtfertigt und folglich auf

natürliche Weise vorgegeben ist.

Durch die Definition für  $\theta$  (4.2.5) ist die "zulässige Dicke" der Schalen, für die die Betrachtungen dieser Arbeit gültig sind, dadurch begrenzt, daß  $\theta^2$  sehr viel kleiner als 1 (z. B.  $\frac{1}{100}$ ) sein muß. Solche Schalen werden im folgenden als mäßig dünn bezeichnet.

#### 4.3 Die Verformungsenergiedichte mäßig dünner Schalen beim Auftreten großer elastischer Dehnungen

Mit  $W$  wird die Verformungsenergiedichte pro Volumenelement bezeichnet, die für einen beliebigen isotropen, ideal elastischen Werkstoffs nur von den Dehnungsinvarianten [17] abhängt. Die Dehnungsinvarianten lassen sich durch die gebräuchlichen Dehnungstensoren ausdrücken. Gut geeignet sind zum Beispiel die Greenschen Dehnungen  $E$ , die man bei Lagrangescher Formulierung des Problems sehr einfach aus dem Verschiebungsfeld berechnen kann. Wegen der Annahme inkompressibler Materialien in Verbindung mit einer Normalenhypothese sind die Dehnungsinvarianten und damit auch die Verformungsenergiedichte nur noch vom zweidimensionalen Dehnungstensor abhängig:

$$W = W(E_{\alpha\beta} g^\alpha \otimes g^\beta) . \quad (4.3.1)$$

Im Kapitel 7.2 wird am Beispiel von Mooney-Rivlin-Material gezeigt, wie man bei inkompressiblen Material in Verbindung mit der Annahme  $E_{\alpha 3} = 0$  (3.2.7) von der allgemeinen dreidimensionalen Formulierung der Verformungsenergiedichte auf die zweidimensionale Formulierung gemäß (4.3.1) kommt.

Ziel einer jeden Schalentheorie ist es, alle relevanten Größen des Schalenraums durch Größen, die auf der Bezugsfläche definiert sind, auszudrücken. Zu diesem Zweck entwickeln wir die Verformungsenergiedichtefunktion in eine Taylorreihe bezüglich der  $\xi$ -Koordinate,

$$\begin{aligned} W(\xi) = & W_0 + W_{(1)} \cdot E_{(1)} \xi + \frac{1}{2} (W_{(2)} \cdot E_{(1)}^2 + W_{(1)} \cdot E_{(2)}) \xi^2 \\ & + \frac{1}{6} (W_{(3)} \cdot E_{(1)}^3 + 3W_{(2)} \cdot E_{(1)} \otimes E_{(2)} + W_{(1)} \cdot E_{(3)}) \xi^3 \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

$$+ \frac{1}{24} (W_{(4)} \cdot E_{(1)}^4 + 6W_{(3)} \cdot E_{(1)}^2 \otimes E_{(2)} + W_{(2)} \cdot (3E_{(2)}^2 + 4E_{(1)} \otimes E_{(3)}) + W_{(1)} \cdot E_{(4)}) \xi^4$$

$$+ \dots ,$$

wobei  $W_0$  und  $W_{(1)}$  für

$$W_0 = W|_{\xi=0} \quad \text{und} \quad W_{(n)} = \frac{\partial^n W}{(\partial E)^n} |_{\xi=0} \quad (4.3.3)$$

stehen.  $E_{(n)}$  und  $E_{(n)}^m$  bedeuten

$$E_{(n)} = \frac{\partial^n E}{\partial \xi^n} |_{\xi=0} \quad \text{und} \quad E_{(n)}^m = \underbrace{E_{(n)} \otimes E_{(n)} \otimes \dots \otimes E_{(n)}}_{m \text{ - mal}} . \quad (4.3.4)$$

Die Ableitung nach einem Tensor wird in diesem Zusammenhang durch

$$\frac{\partial W}{\partial E} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} \frac{\partial E_{ij}}{\partial E} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} g_i \otimes g_j \quad (4.3.5)$$

definiert, wobei  $E_{ij} = E \cdot (g_i \otimes g_j)$  berücksichtigt ist. Wegen (4.3.1) treten jedoch keine Ableitungen von  $W$  nach  $E_{\alpha 3}$  oder  $E_{33}$  auf, das heißt, diese Ableitungen sind null.

Die Integration der Reihenentwicklung für  $W$  über die "Dickenkoordinate"  $\xi$  ergibt die auf die Referenzfläche bezogene Verformungsenergiedichte  $\phi$ . Bei der Integration muß gemäß der Beziehung (2.1.12) der Shifter  $\mu$  (2.1.13) berücksichtigt werden. Durch Auswahl der "unverformten Mittelfläche" als Bezugsfläche ergeben die Integrale über ungerade Potenzen von  $\xi$  den Wert Null. Damit ist die Wahl derjenigen Fläche als Bezugsfläche, die im unverformten Zustand die Mittelfläche ist, auch im Bereich großer Dehnungen vorteilhaft und gerechtfertigt. Wir erhalten

$$\phi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mu W d\xi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1 - b_{\lambda}^{\lambda} \xi + \frac{b}{a} \xi^2) W_{(\xi)} d\xi$$

$$= h \left\{ W_0 \left(1 + \frac{h^2}{12} \frac{b}{a}\right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + W_{(1)} \cdot \left[ -\frac{h^2}{12} b_\lambda^\lambda E_{(1)} + \left( \frac{h^2}{24} + \frac{h^4}{160} \frac{b}{a} \right) E_{(2)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{h^4}{480} b_\lambda^\lambda E_{(3)} + \left( \frac{h^4}{1920} + \frac{h^6}{10752} \frac{b}{a} \right) E_{(4)} - \dots + \dots \right] \\
 & \hspace{20em} (4.3.6) \\
 & + W_{(2)} \cdot \left[ \left( \frac{h^2}{24} + \frac{h^4}{160} \frac{b}{a} \right) E_{(1)}^2 - \frac{h^4}{160} b_\lambda^\lambda E_{(1)} \otimes E_{(2)} \right. \\
 & \quad \left. + \left( \frac{h^4}{1920} + \frac{h^6}{10752} \frac{b}{a} \right) (3E_{(2)}^2 + 4E_{(1)} \otimes E_{(3)}) - \dots + \dots \right] \\
 & + W_{(3)} \cdot \left[ -\frac{h^4}{480} b_\lambda^\lambda E_{(1)}^3 + \left( \frac{h^4}{320} + \frac{h^6}{1792} \frac{b}{a} \right) E_{(1)}^2 \otimes E_{(2)} - \dots + \dots \right] \\
 & + W_{(4)} \cdot \left[ \left( \frac{h^4}{1920} + \frac{h^6}{10752} \frac{b}{a} \right) E_{(1)}^4 - \dots + \dots \right] \\
 & + \dots \} .
 \end{aligned}$$

Als nächstes werden die Größenordnungen der einzelnen Terme miteinander verglichen, um Terme untergeordneter Bedeutung zu streichen. Ausgehend von dem gegenüber der klassischen Schalentheorie "abgeschwächten" Kleinheitsparameter  $\theta$  (4.2.5) sollen nur solche Terme vernachlässigt werden, die mit Sicherheit um die Ordnung  $O(\theta^2)$  relativ kleiner sind als vergleichbare führende Terme. Dazu benutzen wir, daß die Größenordnungen der Ableitungen der Dehnungen nach  $\xi$  mit steigender Ordnung der Ableitung abnehmen (3.4.13, 4.2.4, 4.2.5):

$$h \frac{\|E_{(n+1)}\|}{\|E_{(n)}\|} = O\left(\max\left(\frac{h}{L}, \frac{h}{R}, \frac{h}{\bar{R}}\right)\right) = O(\theta) \quad , \quad n \geq 1 \quad . \quad (4.3.7)$$

Des weiteren soll für das Werkstoffgesetz

$$\|W_{(n)}\| \lesssim O(n! 2^n) \quad , \quad n \geq 2 \quad , \quad (4.3.8)$$

gelten. Für Mooney-Rivlin- oder Neo-Hookean-Material (siehe Beispiel im

Kapitel 7.2) sowie viele andere hyperelastische Materialien kann (4.3.8) als hinreichend genau erfüllt angesehen werden. Gilt die Abschätzung (4.3.8) nicht, so ist die Konvergenz für  $W$  (4.3.2) und infolgedessen auch für  $\phi$  (4.3.6) gefährdet.

Im einzelnen lassen sich nun die Terme in (4.3.6) folgendermaßen abschätzen:

$$W_0 \left(1 + \frac{h^2}{12} \frac{b}{a}\right) = W_0 (1 + O(\theta^2)) \quad (4.3.9)$$

$$\text{mit } h^2 \frac{b}{a} = O\left(\frac{h^2}{R^2}\right) = O(\theta^2) \quad ,$$

$$\begin{aligned} W_{(1)} \cdot \left[ -\frac{h^2}{12} b_\lambda^\lambda E_{(1)} + \left(\frac{h^2}{24} + \frac{h^4}{160} \frac{b}{a}\right) E_{(2)} \right. \\ \left. - \frac{h^4}{480} b_\lambda^\lambda E_{(3)} + \left(\frac{h^4}{1920} + \frac{h^6}{10752} \frac{b}{a}\right) E_{(4)} - \dots + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

$$= W_{(1)} \cdot \left[ -\frac{h^2}{12} b_\lambda^\lambda E_{(1)} + \frac{h^2}{24} (1 + O(\theta^2)) E_{(2)} + O(\theta^3 h ||E_{(1)}||) \right]$$

$$+ O(\theta^3 h ||E_{(1)}||) + \dots ]$$

$$= W_{(1)} \cdot \left( -\frac{h^2}{12} b_\lambda^\lambda E_{(1)} + \frac{h^2}{24} E_{(2)} \right) (1 + O(\theta^2)) \quad ,$$

$$W_{(2)} \cdot \left[ \left(\frac{h^2}{24} + \frac{h^4}{160} \frac{b}{a}\right) E_{(1)}^2 - \frac{h^4}{160} b_\lambda^\lambda E_{(1)} \otimes E_{(2)} \right]$$

$$+ \left(\frac{h^4}{1920} + \frac{h^6}{10752} \frac{b}{a}\right) (3E_{(2)}^2 + 4E_{(1)} \otimes E_{(3)}) - \dots + \dots ]$$

(4.3.11)

$$\begin{aligned}
 &= W_{(2)} \cdot \left[ \frac{h^4}{24} E_{(1)}^2 (1+O(\theta^2)) + O(\theta^2 h^2 ||E_{(1)}^2||) + O(\theta^2 h^2 ||E_{(1)}^2|| + \dots] \\
 &= W_{(2)} \cdot \frac{h^4}{24} E_{(1)}^2 (1+O(\theta^2)) ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &W_{(3)} \cdot \left[ -\frac{h^4}{480} b_\lambda E_{(1)}^3 + \left( \frac{h^4}{320} + \frac{h^6}{1792} \frac{b}{a} \right) E_{(1)}^2 \otimes E_{(2)} - \dots + \dots \right] \\
 &= O(||W_{(2)}|| \theta^2 h^2 ||E_{(1)}^2||) ,
 \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

$$\begin{aligned}
 &W_{(4)} \cdot \left[ \left( \frac{h^4}{1920} + \frac{h^6}{10752} \frac{b}{a} \right) E_{(1)}^4 - \dots + \dots \right] \\
 &= O(||W_{(2)}|| \theta^2 h^2 ||E_{(1)}^2||) .
 \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

Die in der Gleichung (4.3.2) nicht mehr aufgeführten weiteren Glieder der Reihenentwicklung sind unter Berücksichtigung unserer Annahmen um mindestens eine Potenz von  $\theta$  kleiner als der kleinste ausgeschriebene Term. Nach der Integration über die Schalendicke sind die in der Beziehung (4.3.6) nicht mehr aufgeführten Terme sogar um mindestens  $\theta^2$  kleiner als die kleinsten angegebenen. Dadurch sind mit den Abschätzungen (4.3.9 - 4.3.13) alle wesentlichen Anteile der auf die Referenzfläche bezogenen Verformungsenergiedichte  $\phi$  erfaßt.

Wir erhalten als Approximation der Verformungsenergiedichte

$$\phi = h \left[ W_0 + W_{(1)} \cdot \left( \frac{h^2}{24} E_{(2)} - \frac{h^2}{12} b_\lambda E_{(1)} \right) + \frac{h^2}{24} W_{(2)} \cdot E_{(1)} \otimes E_{(1)} \right] (1+O(\theta^2)) . \tag{4.3.14}$$

Unter Verwendung der gebräuchlichen Formelzeichen, die in (3.4.1, 3.4.9 u. 3.4.9) definiert sind, läßt sich die Verformungsenergiedichte in gewohnterer Schreibweise angeben:

$$\phi = h \left[ W|_{\gamma} + \frac{h^2}{12} (\nu - b_{\lambda}^{\lambda} \kappa) \cdot \frac{\partial W}{\partial E}|_{\gamma} + \frac{h^2}{24} (\kappa \otimes \kappa) \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial E \otimes \partial E}|_{\gamma} \right] (1 + O(\theta^2)) . \quad (4.3.15)$$

Die  $(\dots)_{\alpha 3}$  - Komponenten von  $\gamma$ ,  $\kappa$  und  $\nu$  entfallen auf Grund der Normalenhypothese (3.2.7). Die Ableitungen von  $W$  nach  $E_{\alpha 3}$  oder  $E_{33}$  sind wegen der Formulierung des Werkstoffgesetzes nur in den Komponenten des zweidimensionalen Dehnungstensors (4.3.1) identisch null. Es folgt somit

$$\begin{aligned} \phi = h \left[ W|_{\gamma_{\alpha\beta}} + \frac{h^2}{12} (\nu_{\alpha\beta} - b_{\lambda}^{\lambda} \kappa_{\alpha\beta}) \frac{\partial W}{\partial E_{\alpha\beta}}|_{\gamma_{\lambda\mu}} \right. \\ \left. + \frac{h^2}{24} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 W}{\partial E_{\alpha\beta} \partial E_{\lambda\mu}}|_{\gamma_{\rho\eta}} \right] (1 + O(\theta^2)) . \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

Eine weitere Abschätzung mit dem etwas größeren relativen Fehler der Ordnung  $O(\theta)$  ergibt eine vereinfachte Approximation der Verformungsenergiedichte

$$\begin{aligned} \phi &= h \left[ W|_{\gamma} + \frac{h^2}{24} (\kappa \otimes \kappa) \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial E \otimes \partial E}|_{\gamma} \right] (1 + O(\theta)) \\ &= h \left[ W|_{\gamma_{\alpha\beta}} + \frac{h^2}{24} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 W}{\partial E_{\alpha\beta} \partial E_{\lambda\mu}}|_{\gamma_{\rho\eta}} \right] (1 + O(\theta)) . \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Im Kapitel 4.4 wird gezeigt, daß der vernachlässigte Term nur sehr geringe Bedeutung hat, sodaß die vereinfachte Approximation (4.3.17) in der Berechnungspraxis mit der "vollständigen" Approximation (4.3.16) fast gleichwertig ist. Die Beispiele im Kapitel 9 werden dieses bestätigen.

In den Kapiteln A4.2 und A4.3 des Anhangs wird der Übergang zur Membrantheorie einerseits und zur Schalentheorie kleiner Dehnungen andererseits kurz dargestellt.

#### 4.4 Abschätzung zulässiger Fehler

Im vorherigen Abschnitt (4.3) wurde die Verformungsenergiedichte  $\phi$  wesentlich vereinfacht, indem wir die einzelnen Terme mit einem - von der Größenordnung her akzeptablen - relativen Fehler abgeschätzt haben. Die konsequente Weiterführung dieser Denkweise wirft die Frage auf, welche zusätzlichen Fehler in den Dehnungsmaßen  $\gamma$ ,  $\kappa$  und  $\nu$  zum Ziele ihrer Vereinfachung (siehe 3.3.8, 3.4.8 u. 3.4.9) erlaubt werden können, ohne die Qualität der Approximation (4.3.16) zu verändern.

Grundsätzlich sind zunächst in  $\gamma$ ,  $\kappa$  und  $\nu$  relative Fehler der Größenordnung  $O(\theta^2)$  zulässig [45, 36, 38, 41]. In diesem Kapitel wird anhand detaillierter Betrachtungen untersucht, welcher größerer Fehler in  $\kappa$  und  $\nu$  zugelassen werden kann. Dabei wird auch gezeigt, daß der zusätzliche Fehler beim Übergang auf die vereinfachte Approximation (4.3.17) nahezu vernachlässigbar klein ist.

Zunächst schätzen wir die Größenordnung der Verformungsenergiedichte pro Volumeneinheit durch

$$W \approx \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial E} \Big|_E \cdot E \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial E \otimes \partial E} \Big|_{E=0} \cdot (E \otimes E) \quad (4.4.1)$$

ab, was unter der Voraussetzung

$$\|E\| \lesssim 1 \quad (\text{siehe Anhang A4.2}) \quad (4.4.2)$$

sicherlich gerechtfertigt ist. Einsetzen in (4.3.15) ergibt die Ordnung von  $\phi$ :

$$\phi \approx h \cdot W_{(2)} \cdot \left[ \frac{1}{2} \gamma \otimes \gamma + \frac{h^2}{12} \gamma \otimes (\nu - b_\lambda^\lambda \kappa) + \frac{h^2}{24} \kappa \otimes \kappa \right] \quad (4.4.3)$$

Da nicht die Membrantheorie gesucht ist (siehe Anhang A4.3), kann

$$\|\gamma\| \leq O\left(\frac{1}{\theta} \|\kappa\| h\right) \quad (4.4.4)$$

und

$$h \|\nu\| \leq O(\theta \|\kappa\|) \quad (\text{vergl. (4.3.7)}) \quad (4.4.5)$$

angenommen werden.

Weiterhin sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$$1. \text{ Fall: } \|\gamma\| \leq O(\sqrt{\theta} h \|\kappa\|) \quad (4.4.6)$$

Hieraus folgt wegen (4.5.2 u. A4.2.4), daß die Dehnungen ziemlich klein sind,

$$\|\gamma\| \leq O(\theta\sqrt{\theta}) \quad (4.4.7)$$

Es ergibt sich mit  $\theta \lesssim \frac{1}{10}$

$$W_{(2)} \cdot (\gamma \otimes \gamma) \leq O(\theta h^2 W_{(2)} \cdot (\kappa \otimes \kappa)) \lesssim O\left(\frac{h^2}{12} W_{(2)} \cdot (\kappa \otimes \kappa)\right) \quad (4.4.8)$$

und

$$W_{(2)} \cdot (\gamma \otimes (v - b_{\lambda}^{\lambda} \kappa)) \leq O(\theta\sqrt{\theta} W_{(2)} \cdot (\kappa \otimes \kappa)) \quad (4.4.9)$$

so daß die Biegeenergie überwiegt (4.4.8). Man erkennt nun, daß in  $\kappa$  ein absoluter Fehler der  $O(\theta\sqrt{\theta} \frac{1}{h} \|\gamma\|)$  kleiner als  $O(\theta^2 \|\kappa\|)$  ist und somit die Marge des relativen Fehlers der Ordnung  $O(\theta^2)$  in  $\phi$  nicht überschritten wird. Ebenso ist in  $v$  ein absoluter Fehler der Ordnung  $O(\frac{1}{2} \theta \|\gamma\|)$  kleiner als  $O(\theta\sqrt{\theta} h \|\kappa\|)$  und somit um  $O(\theta^2)$  kleiner als die Biegeenergie.

$$2. \text{ Fall: } O\left(\frac{1}{\theta} \|\kappa\| h\right) \geq \|\gamma\| \geq O(\sqrt{\theta} \|\kappa\| h) \quad (4.4.10)$$

Es folgt:

$$O(\theta \|\gamma\|) \leq \|\kappa\| h \leq O\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} \|\gamma\|\right) \quad (4.4.11)$$

$$h^2 \|\nu\| \leq O(\theta h \|\kappa\|) \leq O(\sqrt{\theta} \|\gamma\|) \quad (4.4.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{12} W_{(2)} \cdot (\kappa \otimes \kappa) &\leq O\left(\frac{1}{12 \theta} W_{(2)} \cdot \gamma \otimes \gamma\right) \\ &\lesssim O(W_{(2)} \cdot \gamma \otimes \gamma) \quad , \quad \theta \lesssim \frac{1}{10} \quad , \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{6} W_{(2)} \cdot (\gamma \otimes (v - b_\lambda^\lambda x)) &\leq O\left(\frac{1}{6} \sqrt{\theta} W_{(2)} \cdot \gamma \otimes \gamma\right) \\ &\lesssim O\left(\frac{1}{20} W_{(2)} \cdot \gamma \otimes \gamma\right), \quad \sqrt{\theta} \lesssim \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

Die Membranenergie überwiegt also gegenüber der Biegeenergie. Ein absoluter Fehler  $O(\theta^2 \left(\frac{1}{h}\right)^2 \|\gamma\|)$  in  $v$  ändert den relativen Fehler  $O(\theta^2)$  in  $\phi$  nicht. Schätzen wir einen Fehler in der Biegeenergie gegenüber der Membranenergie ab, ergibt sich für  $x$  ein zulässiger absoluter Fehler  $O(\theta \sqrt{\theta} \frac{1}{h} \|\gamma\|)$ , wobei  $\theta \approx \frac{1}{10}$  bis  $\frac{1}{20}$  angenommen wird, wie es im Bereich der Ingenieur Anwendung meistens gegeben ist.

Zusammenfassend bleibt festzuhalten, daß  $x$  durch

$$x_{\alpha\beta} + O(\theta^2 \|\gamma\|) + O(\theta \sqrt{\theta} \frac{1}{h} \|\gamma\|) \quad (4.4.15)$$

angenähert werden darf. Für  $v$  ergibt die Fehlerabschätzung

$$v_{\alpha\beta} + O(\theta^2 \frac{1}{h^2} \|\gamma\|) \quad (4.4.16)$$

Auf Grund der geringen Bedeutung von  $v$  liegt es nun nahe, dessen Formel (3.4.9) im Rahmen des zulässigen Fehlers (4.4.16) möglichst weitgehend zu vereinfachen. Hierzu läßt sich mit Hilfe von (A3.4.3 u. A3.4.5)  $\lambda_{3,\alpha} \|\beta$  zu

$$\lambda_{3,\alpha} \|\beta = O\left(\frac{1}{h^2} \theta^2 \|\gamma\|\right) \quad (4.4.17)$$

abschätzen, so daß es ebenso wie

$$b_\alpha^\lambda b_\beta^\rho \gamma_{\lambda\rho} = O\left(\frac{1}{h^2} \theta^2 \|\gamma\|\right) \quad (4.4.18)$$

gestrichen werden kann. Auch der Term  $\overset{\circ}{\lambda}_{3,3} \overset{\circ}{B}_{\alpha\beta}$  (vergl. 3.4.12) kann zu

$$\begin{aligned} - \overset{\circ}{\lambda}_{3,3} \overset{\circ}{B}_{\alpha\beta} &= (\overset{\circ}{\lambda}_3)^2 [\overset{\circ}{\kappa}_\lambda^\lambda + O(\|\gamma\| \|\kappa\|)] \overset{\circ}{\lambda}_3 \overset{\circ}{B}_{\alpha\beta} \\ &= [1 + O(\|\gamma\|)] \cdot [\overset{\circ}{\kappa}_\lambda^\lambda + O(\theta \|\gamma\|)] \overset{\circ}{\lambda}_3 \overset{\circ}{B}_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

$$= \kappa_{\lambda}^{\lambda} \overset{\circ}{\lambda}_3 \bar{b}_{\alpha\beta} + O(\theta^2 ||\gamma||)$$

vereinfacht werden, genauso

$$\bar{b}_{\alpha}^{\lambda} \bar{b}_{\lambda\beta} = \bar{b}_{\lambda\alpha} \bar{a}^{\lambda\rho} \bar{b}_{\rho\beta} = \bar{b}_{\lambda\alpha} a^{\lambda\rho} \bar{b}_{\rho\beta} + O(\theta^2 ||\gamma||) \quad . \quad (4.4.20)$$

Infolgedessen erhalten wir für  $v$  den im Rahmen des zulässigen Fehlers (4.4.15) wesentlich vereinfachten Zusammenhang

$$v_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [ (\overset{\circ}{\lambda}_3)^2 \bar{b}_{\lambda\alpha} \bar{b}_{\rho\beta} a^{\lambda\rho} + \kappa_{\lambda}^{\lambda} \overset{\circ}{\lambda}_3 \bar{b}_{\alpha\beta} + 2b_{\alpha}^{\lambda} \kappa_{\lambda\beta} + 2b_{\beta}^{\lambda} \kappa_{\lambda\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} ] + O\left(\frac{1}{h^2} \theta^2 ||\gamma||\right) \quad . \quad (4.4.21)$$

Auf Grund der Beziehungen (3.3.6) (Wurzelfunktion) und (3.3.8) empfiehlt es sich nicht,  $\overset{\circ}{\lambda}_3 \bar{b}_{\alpha\beta}$  zu  $\bar{b}_{\alpha\beta}$  zu vereinfachen. Für die Berechnung von  $\kappa$  (3.4.8) muß  $\overset{\circ}{\lambda}_3 \bar{b}_{\alpha\beta}$  ohnehin exakt ermittelt werden, so daß die Werte in einem Finite-Elemente-Programm bereits vorliegen.

Die Beziehungen (4.4.9) und (4.4.14) zeigen, daß die Bedeutung von  $v$  fast vernachlässigbar klein ist. Dieses werden wir in den Beispielen bestätigt finden. Den größten Einfluß auf die Verformungsenergiedichte hat  $v$  im Bereich  $||\gamma|| \approx h ||\kappa||$ , wobei gemäß (4.4.14) sein Anteil an  $\phi$  um etwa  $\frac{1}{20}$  kleiner ist als der von  $\gamma$ . In vielen Beispielen können folglich  $v$  und konsequenterweise auch  $b_{\lambda}^{\lambda} \kappa$  in  $\phi$  (4.3.15 u. 4.3.16) vernachlässigt werden, was zur vereinfachten Approximation (4.3.17) führt.

#### 4.5 Die erste und die zweite Variation der Verformungsenergiedichte

Das Gesamtpotential  $J$  einer Schale besteht aus der Summe der inneren Arbeit  $A_i$ , der Lastpotentiale und des Potentials der Randlasten:

$$J = A_i + A_{\text{Drucklasten}} + A_{\text{Totlasten}} + A_{\text{Randlasten}} \quad (4.5.1)$$

$$= A_i + A_a \quad .$$

Durch die erste Variation des Gesamtpotentials erhält man die Gleich-

gewichtsbedingungen,

$$\delta J = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Gleichgewicht} \quad . \quad (4.5.2)$$

Die zweite Variation liefert das Stabilitätskriterium,

$$\delta^2 J \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0 \quad \rightarrow \quad \text{stabil (notwendig aber nicht hinreichend)} \\ = 0 \quad \rightarrow \quad \text{indifferent} \\ < 0 \quad \rightarrow \quad \text{labil} \end{array} \right. \quad . \quad (4.5.3)$$

Die innere Arbeit  $A_i$  wird hierbei aus der Verformungsenergiedichte  $\phi$  gebildet,

$$A_i = \int_{\mathcal{A}} \phi \, d\mathcal{A} = \int \int_{\theta^1, \theta^2} \sqrt{a} \, \phi \, d\theta^1 \, d\theta^2 \quad . \quad (4.5.4)$$

Daher ist es erforderlich, die erste und die zweite Variation der Verformungsenergiedichte zu berechnen.

Um bei der Variation von  $\phi$  die Darstellungen übersichtlich zu halten, führen wir die Abkürzungen

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \quad , \quad \mathbf{M} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\mathbf{L}}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{v}} \quad (4.5.5)$$

ein. Die erste und die zweite Variation der Verformungsenergiedichte (4.3.15) ergeben somit

$$\delta \phi = (\mathbf{N} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa} + \underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \delta \mathbf{v}) (1 + O(\theta^2)) \quad (4.5.6)$$

und

$$\begin{aligned} \delta^2 \phi = & (\delta \mathbf{N} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma} + \delta \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\kappa} + \delta \underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \delta \mathbf{v}) \\ & + \mathbf{N} \cdot \delta^2 \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{M} \cdot \delta^2 \boldsymbol{\kappa} + \underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \delta^2 \mathbf{v} \quad (1 + O(\theta^2)) \quad . \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Analog zur Theorie der großen Rotationen in der klassischen Schalentheorie soll auch beim Auftreten großer Dehnungen angenommen werden, daß sich die Ordnung des relativen Fehlers nahezu unverändert auf die Variationen über-

trägt.

Im einzelnen stehen die Abkürzungen (4.5.5), die die zu den Greenschen Dehnungsmaßen  $\gamma$ ,  $\kappa$  und  $\nu$  gehörenden "Schnittgrößen" darstellen, für

$$N = h \left[ \underbrace{W_{(1)}} + \frac{h^2}{12} \underbrace{W_{(2)} \cdot (\nu - b_\lambda^\lambda \kappa)} + \frac{h^2}{24} \underbrace{W_{(3)} \cdot \kappa \otimes \kappa} \right] (1+O(\theta^2)) \quad , \quad (4.5.8)$$

$$M = \frac{h^3}{12} \left[ \underbrace{W_{(2)} \cdot \kappa - b_\lambda^\lambda W_{(1)}} \right] (1+O(\theta^2)) \quad (4.5.9)$$

sowie

$$\underline{L} = \frac{h^3}{12} \underline{W_{(1)}} (1+O(\theta^2)) \quad , \quad (4.5.10)$$

und deren Variationen für

$$\begin{aligned} \delta N = h \left\{ \underbrace{\left[ W_{(2)} + \frac{h^2}{12} W_{(3)} \cdot (\nu - b_\lambda^\lambda \kappa) + \frac{h^2}{24} W_{(4)} \cdot \kappa \otimes \kappa \right]} \cdot \delta \gamma \right. \\ \left. + \frac{h^2}{12} \underbrace{W_{(2)} \cdot (\delta \nu - b_\lambda^\lambda \delta \kappa)} + \frac{h^2}{12} \underbrace{W_{(3)} \cdot \kappa \otimes \delta \kappa} \right\} (1+O(\theta^2)) \quad , \quad (4.5.11) \end{aligned}$$

$$\delta M = \frac{h^3}{12} \left[ \underbrace{\left( W_{(3)} \cdot \kappa - W_{(2)} b_\lambda^\lambda \right)} \cdot \delta \gamma + W_{(2)} \cdot \delta \kappa \right] (1+O(\theta^2)) \quad (4.5.12)$$

und

$$\underline{\delta L} = \frac{h^3}{12} \underline{W_{(2)}} \cdot \delta \gamma (1+O(\theta^2)) \quad , \quad (4.5.13)$$

was aus (4.3.15) leicht herzuleiten ist.

Alle in (4.5.8 - 4.5.13) hervorgehobenen Terme sind im Vergleich zur klassischen Theorie neu hinzugekommen. Die unterbrochen markierten Anteile beschreiben das nichtlineare Werkstoffverhalten, während die durchgehend gekennzeichneten Glieder den nichtlinearen Dehnungsverlauf sowie die über die Schalendicke veränderliche Metrik berücksichtigen und im Rahmen der vereinfachten Approximation (4.3.17) entfallen. Das Auslassen auch der unterbrochen unterstrichenen Terme ergibt eine nicht energiekonsistente

Schalentheorie, die man auch aus der klassischen Schalentheorie in der Formulierung der virtuellen Arbeit erhalten kann, indem man sie auf nicht-lineares Materialverhalten erweitert.

In den Kapiteln 6.3 und 6.4 besprechen wir die Lasten und ihre Anteile am Gesamtpotential und dessen Variationen.

Im Hinblick auf die freie Wahl des hyperelastischen Werkstoffgesetzes und die äußerst komplizierte Kinematik des Schalenraums werden die Differentialgleichungen der Gleichgewichts- und Stabilitätsbedingungen nicht hergeleitet; vielmehr zeigen wir im Kapitel (8.1) den Übergang vom Variationsprinzip (4.5.2) zu einer effizienten FEM-Formulierung.

## 5. VEREINFACHUNGEN DER SCHALENKINEMATIK DURCH BEGRENZUNG DER DEHNUNGEN UND ROTATIONEN

### 5.1 Einleitung

Die Dehnungen und Rotationen, die bei der Verformung der Schale auftreten, erreichen in der praktischen Anwendung oft nicht die theoretisch zulässigen Grenzen. Daher ist es sinnvoll, ausgehend von einem Klassifikationsschema für die Dehnungen und Rotationen nach möglichen Vereinfachungen in den kinematischen Beziehungen zu suchen.

Jedoch werden wir anhand der Rechenzeiten (Kapitel 9) erkennen müssen, daß die im folgenden vorgeschlagenen Vereinfachungen im Bereich großer Dehnungen in der Schalenbiegetheorie nur verhältnismäßig wenig Zeitersparnis ermöglichen. Dafür lassen sich aber die Ergebnisse aus den Abschätzungen auf die klassische Schalentheorie übertragen, so daß sie nicht nur einen neuen Weg zur Herleitung bekannter Schalentheorien [34, 40, 42, 49] eröffnen, sondern auch eine interessante neue Variante zu einer bestehenden Theorie liefern.

### 5.2 Ein Klassifikationsschema für Dehnungen und Rotationen

Der polare Zerlegungssatz gestattet die (lokale) Aufspaltung des Verformungszustandes der Schale in reine Dehnungen und reine Rotationen (Kapitel A3.1) [siehe auch 49, 73]. Sowohl die Dehnungen als auch die Rotationen können somit unabhängig voneinander unterschiedliche Größenordnungen annehmen. Die daraus resultierenden Einflüsse auf die kinematischen Beziehungen sollen durch Abschätzungen im Rahmen der zulässigen Fehler in den Dehnungsmaßen  $\gamma$  und  $\kappa$  (siehe Kapitel 4.4) untersucht werden.

Zu diesem Zweck wird in Anlehnung an [40, 42, 49] das folgende Klassifikationsschema vorgeschlagen, in dem  $\theta$  für eine kleine Zahl mit  $\theta^2 \ll 1$  im Sinne des Kleinheitsparameters (4.1.5) oder (4.2.5) steht:

$O(1)$        $\rightarrow$     endlich oder finit ,

$O(\sqrt[4]{\theta})$     $\rightarrow$     semi-finit ,

- $O(\sqrt{\theta})$     -    groß ,
- $O(\theta)$         -    moderat ,
- $O(\theta\sqrt{\theta})$  -    ziemlich klein ,
- $O(\theta^2)$       -    klein .

Die Annahme  $||\gamma|| = O(\theta^2)$  führt zur klassischen Schalentheorie finiter Rotationen [40, 40, 49], die Annahme, daß der Rotationsvektor  $\Omega$  klein ist,  $|\Omega| = O(\theta^2)$ , zu einer geometrisch linearen Schalentheorie. Beide Annahmen zusammen ergeben die klassische lineare Schalentheorie. Das Ziel der noch folgenden Betrachtungen ist festzustellen, welche Vereinfachungen in den Bereichen  $O(\theta^2) \leq ||\gamma|| \leq O(1)$  und  $O(\theta^2) \leq |\Omega| \leq O(1)$  möglich sind.

Die Abschätzungen hierfür werden im nächsten Abschnitt 5.3 besprochen. Dieser Abschnitt behandelt noch einige wichtige Vorarbeiten.

Passend zu dem mit Hilfe des polaren Zerlegungssatzes ermittelten Rotationstensor  $R$  läßt sich ein Rotationsvektor  $\Omega$  mit der Eigenschaft

$$\Omega = e \sin \omega \tag{5.2.1}$$

definieren [49]. Hierbei gibt  $\omega$  den Rotationswinkel und  $e$  den Einheitsvektor in Richtung der Rotationsachse an. Die Gleichungen

$$\begin{aligned} R e &= e \quad , \quad \text{tr}(R) = R \cdot 1 = 1 + 2 \cos \omega \quad , \\ R &= \cos \omega \cdot 1 + \sin \omega \cdot e \times 1 + (1 - \cos \omega) e \otimes e \quad , \\ || R - \cos \omega \cdot 1 - (1 - \cos \omega) e \otimes e || &= 2 \sin \omega \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

legen die Beziehungen zwischen  $R$  und  $\Omega$  im Bereich  $|\omega| < \frac{\pi}{2}$  eindeutig fest [52].

Die Dehnungs- und Krümmungstensoren (3.3.3 u. 3.3.8) lassen sich durch die "linearen Dehnungsgrößen" (3.3.2) ausdrücken, die sich wiederum durch die Ingenieurdehnungen  $\epsilon$  und den Rotationsvektor  $\Omega$  [49] darstellen lassen:

$$\varphi_{\alpha} = (\delta_{\alpha}^{\lambda} + \varepsilon_{\alpha}^{\lambda}) (e_{\rho\lambda} \Omega^{\rho} + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} \Omega^3 \Omega_{\lambda}) , \quad (5.2.3)$$

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} - (\delta_{\beta}^{\lambda} + \varepsilon_{\beta}^{\lambda}) [ e_{\alpha\lambda} \Omega^3 + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} (e_{\nu\alpha} e_{\rho\lambda} \Omega^{\nu} \Omega^{\rho} + a_{\alpha\lambda} (\Omega^3)^2) ] , \quad (5.2.4)$$

$$e_{\alpha\beta} = \sqrt{a} e_{\alpha\beta} , e_{11} = e_{22} = 0 , e_{12} = -e_{21} = 1 . \quad (5.2.5)$$

Um die nachfolgenden Betrachtungen zu vereinfachen, wählen wir ein lokales orthonormales Hilfskoordinatensystem mit den Basisvektoren  $\mathbf{a}_i^*$ . Es gilt folglich

$$\mathbf{a}_i^* \cdot \mathbf{a}_j^* = \delta_{ij} . \quad (5.2.6)$$

Dieses lokale Hilfskoordinatensystem wird räumlich stets so orientiert, daß

$$\mathbf{a}_3^* = \mathbf{n} \quad (5.2.7)$$

gilt und die Komponenten von  $\Omega$  in diesem Koordinatensystem

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega \cdot \mathbf{a}_1^* = 0 , \\ \Omega_2 &= \Omega \cdot \mathbf{a}_2^* \neq 0 \quad \text{und} \\ \Omega_3 &= \Omega_3 = \Omega \cdot \mathbf{n} \neq 0 \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

erfüllen. Damit sich die Komponenten eines Tensors bezüglich der  $\mathbf{a}_i^*$ -Basis von den Komponenten bezüglich der normalen  $\mathbf{a}_i$ -Basis auch in der Notation unterscheiden, werden in den Kapiteln 5.2 und 5.3 die Indizes für die Komponenten zur  $\mathbf{a}_i^*$ -Basis fett geschrieben. Wir erhalten für die "linearen Dehnungsgrößen":

$$\varphi_{11} = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} \Omega_3 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} (1 + \varepsilon_{11}) [(\Omega_2)^2 + (\Omega_3)^2] , \quad (5.2.9)$$

$$\varphi_{22} = \varepsilon_{22} + \varepsilon_{12} \Omega_3 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} (1 + \varepsilon_{22}) (\Omega_3)^2 , \quad (5.2.10)$$

$$\varphi_{12} = \varepsilon_{12} - (1+\varepsilon_{22})\Omega_3 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} \varepsilon_{12} [(\Omega_3)^2 - (\Omega_2)^2] , \quad (5.2.11)$$

$$\varphi_{21} = \varepsilon_{12} + (1+\varepsilon_{11})\Omega_3 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} \varepsilon_{12} (\Omega_3)^2 , \quad (5.2.12)$$

$$\varphi_1 = -(1+\varepsilon_{11})\Omega_2 + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} \varepsilon_{12} \Omega_2 \Omega_3 , \quad (5.2.13)$$

$$\varphi_2 = -\varepsilon_{12} \Omega_2 + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} (1+\varepsilon_{22})\Omega_2 \Omega_3 . \quad (5.2.14)$$

Ausgehend von diesen Beziehungen lassen sich problemlos verschiedene Approximationen des Dehnungs- und des Krümmungstensors finden, die für unterschiedliche Begrenzungen der Größenordnungen der Dehnungen und Rotationen gelten.

### 5.3 Vereinfachte kinematische Beziehungen

Die Näherungen für  $\gamma$ ,  $\kappa$  und  $\nu$  sollen natürlich nicht die Ordnung des relativen Fehlers in der Verformungsenergiedichte ändern. Zu diesem Zweck rufen wir uns noch einmal die im Kapitel 4.4 hergeleiteten zulässigen Fehler in Erinnerung:

$$\gamma \approx \gamma (1+O(\theta^2)) , \quad (5.3.1)$$

$$\kappa \approx \kappa (1+O(\theta^2)) + O\left(\frac{1}{h} \theta \sqrt{\theta} \|\gamma\|\right) , \quad (5.3.2)$$

$$\nu \approx \nu + O(\theta^2 \|\gamma\|) . \quad (5.3.3)$$

Aus der Beziehung (3.4.8) folgt, daß unter der Annahme  $\|\gamma\| \leq O(1)$  (A4.2.4) in  $\bar{b}_{\alpha\beta}$  ein absoluter Fehler der Ordnung  $O(\theta \sqrt{\theta} \frac{1}{h} \|\gamma\|)$  zulässig ist:

$$\bar{b}_{\alpha\beta} \approx \bar{b}_{\alpha\beta} + O(\theta \sqrt{\theta} \frac{1}{h} \|\gamma\|) . \quad (5.3.4)$$

Nebenbei haben wir somit auch gezeigt, daß im Bereich kleiner Dehnungen - mit  $\theta = \max\left(\frac{h}{L}, \sqrt{\frac{h}{R}}, \sqrt{\|\gamma\|}\right) - \kappa$  durch

$$\kappa_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - \bar{b}_{\alpha\beta} + O(\theta^2 \|\gamma\|) \quad (5.3.5)$$

hinreichend genau approximiert wird.

Die möglichen Vereinfachungen für  $\gamma$  beschränken sich im wesentlichen auf den Bereich kleiner Dehnungen. Sie sind daher weitgehend bekannt, so daß es ausreicht, die wichtigsten am Schluß des Kapitels kurz zusammenzufassen.

Mögliche Vereinfachungen für  $\kappa$  und  $\nu$ , die über die in (5.3.5) für  $\kappa$  bei kleinen Dehnungen oder die in (4.4.21) für  $\nu$  bei großen Dehnungen bereits vorgestellten Vereinfachungen hinausgehen, beschränken sich auf den Term (3.3.8),

$$\lambda_3 \bar{B}_{\alpha\beta} = (\lambda_3)^2 \{ [1 + \varphi_{\lambda}^{\lambda} + \text{Det}(\varphi_{\rho}^{\lambda})] (b_{\alpha\beta} + b_{\beta}^{\lambda} \varphi_{\alpha}^{\lambda} + \varphi_{\alpha|\beta}) + [\varphi_{\rho}^{\lambda} \varphi_{\lambda} - (1 + \varphi_{\lambda}^{\lambda}) \varphi_{\rho}] (\varphi_{\alpha|\beta}^{\rho} - b_{\beta}^{\rho} - b_{\beta}^{\rho} \varphi_{\alpha}) \} , \quad (5.3.6)$$

in dem ein absoluter Fehler  $O(\theta\sqrt{\theta} \|\gamma\|)$  erlaubt ist (5.3.4). Der Faktor  $(\lambda_3)^2$  (3.3.14) läßt sich in eine Taylorreihe entwickeln,

$$\begin{aligned} (\lambda_3)^2 &= \frac{1}{1 + 2\gamma_{\lambda}^{\lambda} + \frac{4}{a} (\gamma_{11}\gamma_{12} - \gamma_{12}\gamma_{12})} \\ &= 1 - 2\gamma_{\lambda}^{\lambda} + (2\gamma_{\lambda}^{\lambda})^2 - \frac{4}{a} (\gamma_{11}\gamma_{12} - \gamma_{12}\gamma_{12}) + O(\|\gamma\|^3) , \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

so daß er unter Annahme moderater Dehnungen

$$\|\gamma\| \leq O(\theta) \quad (5.3.8)$$

zu

$$(\lambda_3)^2 = 1 - 2\gamma_{\lambda}^{\lambda} + O(\theta\|\gamma\|) \quad (5.3.9)$$

vereinfacht werden darf. Soll hierbei der Fehler unter 1 % bleiben, darf  $\gamma_{\alpha\beta}$  3 bis 5 % nicht wesentlich überschreiten. Bei kleinen Dehnungen  $\|\gamma\| = O(\theta^2)$  wird allgemein mit  $(\lambda_3)^2 = 1 + O(\theta^2)$  gerechnet.

Weitere Möglichkeiten bietet die Linearisierung der quadratischen Terme  $1 + \varphi_\lambda^\lambda + \text{Det}(\varphi_\rho^\lambda)$  und  $\varphi_\rho^\lambda \varphi_\lambda - (1 + \varphi_\lambda^\lambda) \varphi_\rho$  in (5.3.6). Zu diesem Zweck schätzen wir unter den Voraussetzungen  $||\gamma|| < 1$  und  $|\Omega| < 1$

$$b_{\alpha\beta} + b_\beta^\lambda \varphi_\alpha^\lambda + \varphi_{\alpha|\beta} = O\left(\frac{\theta}{h}\right) \quad (5.3.10)$$

und

$$\varphi_{\alpha|\beta}^\rho - b_\beta^\rho \varphi_\alpha = O\left(\frac{\theta}{h} \max(||\gamma||, |\Omega|)\right) \quad (5.3.11)$$

ab. Mit (5.2.9 - 5.2.12) ergibt sich  $\text{Det}(\varphi_\rho^\lambda)$  zu

$$\begin{aligned} \text{Det}(\varphi_\rho^\lambda) &= \varphi_{11} \varphi_{22} - \varphi_{12} \varphi_{21} \\ &= \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} \varepsilon_{12} + (\Omega_3)^2 (1 + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} - \varepsilon_{12} \varepsilon_{12}) \\ &\quad + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} \{ - (1 + \varepsilon_{11}) (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{12} \Omega_3) [(\Omega_2)^2 + (\Omega_3)^2] \\ &\quad - (1 + \varepsilon_{22}) (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12} \Omega_3) (\Omega_3)^2 \\ &\quad + \varepsilon_{12} [\varepsilon_{12} + (1 + \varepsilon_{11}) \Omega_3] [(\Omega_3)^2 - (\Omega_2)^2] \\ &\quad + \varepsilon_{12} [\varepsilon_{12} - (1 + \varepsilon_{22}) \Omega_3] (\Omega_3)^2 \} \\ &\quad + \frac{1}{4 \cos^4 \frac{\omega}{2}} \{ (1 + \varepsilon_{11}) (1 + \varepsilon_{22}) [(\Omega_2)^2 + (\Omega_3)^2] (\Omega_3)^2 \\ &\quad - \varepsilon_{12} \varepsilon_{12} [(\Omega_3)^2 - (\Omega_2)^2] (\Omega_3)^2 \} , \quad (5.3.12) \end{aligned}$$

so daß bei Annahme moderater Dehnungen

$$||\varepsilon|| = O(||\gamma||) \leq O(\theta) \quad (5.3.13)$$

und "semi-finit/moderater(kleiner)" Rotationen, d. h. semi-finit um  $\mathbf{a}_2^*$  und je nach  $O(||\gamma||)$  moderat oder klein um  $\mathbf{n}$ ,

$$|\Omega_2| \leq O(\sqrt[4]{\sqrt{\theta}}) , \quad |\Omega_3| \leq O(||\gamma||) , \quad (5.3.14)$$

$$\text{Det}(\varphi_{\rho}^{\lambda}) \leq O(\sqrt{\theta} ||\gamma||) \quad (5.3.15)$$

folgt. Im Zusammenhang mit (5.3.4, 5.3.6, 5.3.10) ist nun zu erkennen, daß der Term (5.3.15) unter der Voraussetzung (5.3.14) in (5.3.6) vernachlässigt werden darf.

Die Abschätzung von  $\varphi_{\rho}^{\lambda} \varphi_{\lambda} - (1+\varphi_{\lambda}^{\lambda}) \varphi_{\rho}$  ist ein wenig aufwendiger. Zuerst führen wir eine Transformation unter Anwendung der in (5.2.6 - 5.2.8) definierten Hilfsbasis durch, um

$$\varphi_{\rho}^{\lambda} \varphi_{\lambda} - \varphi_{\lambda}^{\lambda} \varphi_{\rho} = (\varphi_{\lambda\eta} \varphi_{\lambda} - \varphi_{\lambda\lambda} \varphi_{\eta}) \mathbf{a}_{\eta}^* \cdot \mathbf{a}_{\rho} \quad (5.3.16)$$

zu erhalten. Das Skalarprodukt  $\mathbf{a}_{\eta}^* \cdot \mathbf{a}_{\rho}$  hat die Ordnung  $O(1)$ ,

$$|\mathbf{a}_{\eta}^* \cdot \mathbf{a}_{\rho}| \leq |\mathbf{a}_{\rho}| = O(1) , \quad (5.3.17)$$

so daß es für die folgende Untersuchung bedeutungslos ist. Zur Bestimmung der Ordnung von (5.3.16) betrachten wir nun unter den Voraussetzungen (5.3.13, 5.3.14) die beiden Fälle  $\eta=1$  und  $\eta=2$ .

Für  $\eta=1$  folgt:

$$\varphi_{\lambda 1} \varphi_{\lambda} - \varphi_{\lambda \lambda} \varphi_1 = \varphi_{21} \varphi_2 - \varphi_{22} \varphi_1 = O(||\gamma|| |\Omega_2|) . \quad (5.3.18)$$

$\eta=2$  ergibt:

$$\varphi_{22} \varphi_{\lambda} - \varphi_{\lambda \lambda} \varphi_2 = \varphi_{12} \varphi_1 - \varphi_{11} \varphi_2 = O(||\gamma|| |\Omega_2|) . \quad (5.3.19)$$

Aus dem Zusammenhang mit den Beziehungen (5.3.4, 5.3.11) ist nun ersichtlich, daß der Term  $\varphi_{\rho}^{\lambda} \varphi_{\lambda} - (1+\varphi_{\lambda}^{\lambda}) \varphi_{\rho}$  in (5.3.6) durch  $-\varphi_{\rho}$  ersetzt werden kann.

Somit folgt unter Annahme moderater Dehnungen (5.3.13) und semi-finiten/moderater(kleiner) Rotationen (5.3.14) der vereinfachte Zusammenhang

$$\lambda_3 \bar{b}_{\alpha\beta} = (1 - 2\gamma_\lambda^\lambda) [ (1 + \varphi_\lambda^\lambda)(b_{\alpha\beta} + b_{\lambda\beta} \varphi_\alpha^\lambda + \varphi_{\alpha|\beta}) - \varphi_\lambda (\varphi_{\alpha|\beta}^\lambda - b_\beta^\lambda \varphi_\alpha) ] + O(\theta\sqrt{\theta} \frac{1}{h} ||\gamma||) . (5.3.20)$$

Beim Übergang auf kleine Dehnungen ergeben sich die Komponenten des Krümmungsänderungstensors zu

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} = & -(1 + \varphi_\lambda^\lambda) (b_{\lambda\beta} \varphi_\alpha^\lambda + \varphi_{\alpha|\beta}) - \varphi_\lambda^\lambda b_{\alpha\beta} \\ & + \varphi_\lambda (\varphi_{\alpha|\beta}^\lambda - b_\beta^\lambda \varphi_\alpha) + O(\theta\sqrt{\theta} \frac{1}{h} ||\gamma||) . \end{aligned} \quad (5.3.21)$$

Der angegebene absolute Fehler liegt in beiden Fällen innerhalb der in Kapitel 4.5 hergeleiteten zulässigen Grenzen. Die Formel (5.3.21) kann unter Beachtung ihres auf kleine Dehnungen und semi-finiten/kleiner Rotationen begrenzten Gültigkeitsbereichs in die Beziehung (3.8 aus [42]) überführt werden. Der mit  $\bar{\Omega}_\alpha \leq O(\sqrt[4]{\theta})$  gegenüber  $\Omega_\alpha \leq O(\sqrt{\theta})$  in [42] vergrößerte Gültigkeitsbereich stellt keinen Widerspruch dar, sondern liegt an dem in dieser Arbeit erstmals vorgestellten neuen vereinfachten Konzept zur Abschätzung von  $\kappa_{\alpha\beta}$  und  $\bar{b}_{\alpha\beta}$  und entspricht den Erfahrungen aus der Anwendung.

Auf Grund der kompakten Formulierung der Beziehung (5.3.21) - es werden nur 17 Rechenoperationen (+, -, ·) zur vollständigen numerischen Auswertung benötigt, (3.8 aus [42]) dagegen braucht 38 Rechenoperationen - lohnt es sich kaum, durch Einführen größerer Fehler, wie sie in [42] oder [45] vorgeschlagen werden, weiter vereinfachte Varianten - z. B. (3.23 aus [42]), 16 Rechenoperationen - herzuleiten.

Bei Annahme höchstens moderater Dehnungen in Verbindung mit in etwa moderaten Rotationen,

$$\begin{aligned} ||\gamma|| & \leq O(\theta) , \\ |\Omega|^2 & \leq O(||\gamma||\sqrt{\theta}) \leq O(\theta) , \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

folgt

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha \varphi_\beta &\leq O(|\boldsymbol{\gamma}| \sqrt{\theta}) , \\ \varphi_{\alpha\beta} &\leq O(\sqrt{\theta}) , \\ \varphi^\lambda_{\lambda} &= \varphi_{11} + \varphi_{22} \leq O(|\boldsymbol{\gamma}|) , \end{aligned} \tag{5.3.23}$$

so daß  $\lambda_3 \bar{b}_{\alpha\beta}$  durch

$$\lambda_3 \bar{b}_{\alpha\beta} = (1 - 2\gamma^\lambda_\lambda)(b_{\alpha\beta} + \varphi^\lambda_\lambda b_{\alpha\beta} + b_{\lambda\beta} \varphi^\lambda_\alpha + \varphi_{\alpha|\beta}) + O(\theta\sqrt{\theta} \frac{1}{h} |\boldsymbol{\gamma}|) \tag{5.3.24}$$

hinreichend genau approximiert wird. Falls nur kleine Dehnungen auftreten, erhalten wir die Krümmungsänderungsbeziehung der klassischen Schalentheorie moderater Rotationen [49]

$$\kappa_{\alpha\beta} = -(\varphi_{\alpha|\beta} + b^\lambda_\beta \varphi_{\lambda\alpha}) = \kappa_{\beta\alpha} . \tag{5.3.25}$$

Eine Vereinfachung von  $\boldsymbol{\gamma}$  ist im Bereich großer Dehnungen kaum möglich. Die einzige Ausnahme stellt der Fall ziemlich kleiner Rotationen dar,

$$|\boldsymbol{\Omega}| \leq O(\theta\sqrt{|\boldsymbol{\gamma}|}) , \tag{5.3.26}$$

so daß aus  $\varphi_\alpha \varphi_\beta \leq O(\theta^2 |\boldsymbol{\gamma}|)$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\alpha} + \varphi^\lambda_\alpha \varphi_{\lambda\beta}) (1+O(\theta^2)) \tag{5.3.27}$$

folgt.

Besser sieht es bei Annahme kleiner Dehnungen aus. So gilt für annähernd rotationssymmetrische Verformungen einer Rotationsschale ( $\theta^1$  ist die Meridiankoordinate,  $\theta^2$  der Umfangswinkel)

$$|\boldsymbol{\gamma}_{11}| \leq O(\theta^2 |\boldsymbol{\gamma}|) \text{ und } |\boldsymbol{\Omega}_3| \leq O(\theta^2 |\boldsymbol{\gamma}|) , \tag{5.3.28}$$

womit wir

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \varphi_{11} + \frac{1}{2} (\varphi_{11}^1 + \varphi_{11} + \varphi_1 \varphi_1) + o(\theta^2 ||\boldsymbol{\gamma}||) \\ \varphi_{12} &= 0 + o(\theta^2 ||\boldsymbol{\gamma}||) \\ \varphi_{22} &= \varphi_{22} + o(\theta^2 ||\boldsymbol{\gamma}||)\end{aligned}\tag{5.3.29}$$

erhalten [34] .

Treten nur moderate/kleine Rotationen auf

$$\begin{aligned}|\Omega_2| &\leq o(\sqrt{||\boldsymbol{\gamma}||}) = o(\theta) \\ |\Omega_3| &\leq o(||\boldsymbol{\gamma}||) = o(\theta^2)\end{aligned}\tag{5.3.30}$$

ergibt sich

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta}) (1+o(\theta^2)) .\tag{5.3.31}$$

Im Falle kleiner Dehnungen und Rotationen

$$|\Omega| \leq o(||\boldsymbol{\gamma}||) = o(\theta^2)\tag{5.3.32}$$

ist  $\boldsymbol{\gamma}$  linear:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\alpha}) .\tag{5.3.33}$$

## 6. RANDBEDINGUNGEN UND LASTEN

### 6.1 Kinematische Randvariablen

Zur Formulierung der geometrischen Randbedingungen werden die kinematischen Randvariablen benötigt, die die Verformung des Schalenrandes beschreiben. Da durch das Variationsprinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials (4.5.2) die Gleichgewichtsbedingungen gegeben sind, müssen nur die wesentlichen geometrischen Randbedingungen vorgeschrieben werden [38].

Die wesentlichen kinematischen und auch die statischen Randbedingungen erhält man, indem man die erste Variation des Gesamtpotentials unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes partiell integriert. Dabei ist für die erste Variation der inneren Arbeit (4.5.6) in Ansatz zu bringen.  $\gamma$ ,  $\kappa$  und  $\nu$  bzw. deren Variationen lassen sich analog zur Reihenentwicklung (3.4.1) auch durch eine Reihenentwicklung von  $1/2 (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})$  bzw. der Variation hiervon ermitteln. Damit können nun die erforderlichen Transformationen durchgeführt werden. Jedoch bleiben noch viele Fragen offen, da die Arbeiten hierzu angesichts ungelöster Probleme noch nicht abgeschlossen sind. Daher wird in dieser Arbeit zu diesem Problemkreis keine Formel präsentiert. Dennoch können bereits die folgenden Aussagen getroffen werden:

Die vereinfachte Approximation (4.3.17) ist eine Schalentheorie mit vier Randparametern, so wie wir es auch von den Kirchhoff-Love-Schalentheorien großer Rotationen gewohnt sind. Die "vollständige" Approximation (4.3.15) ist eine Theorie mit sechs Randparametern. Zu den vier Parametern Verschiebung und Rotation des Randes kommt noch die Dickenänderung  $\lambda_3$  am Rand und der Gradient der Dickenänderung  $\lambda_{3,\nu}$ , der einer Querschnittswölbung äquivalent ist. Wird jedoch mit dem vereinfachten  $\nu_{\alpha\beta}$  (4.4.21) gerechnet, so entfällt vermutlich der letztgenannte Randparameter.

Da der Einfluß einer am Rand vorgeschriebenen Dickenänderung sehr rasch abklingt und sich kaum weiter als etwa eine Schalendicke weit in die Schale hinein auswirkt, beschränken sich die nachfolgenden Betrachtungen auf die vier "klassischen" Randvariablen, die in jedem Falle auch zu beiden Approximationen der Theorie großer Dehnungen gehören.

Zur Beschreibung der Verformung des Schalenraums definieren wir auf dem Rand der Referenzfläche bezogene Basisvektoren:  $\mathbf{a}_t$  in tangentialer Richtung zur Randkurve,  $\mathbf{a}_\nu$  in normaler Richtung zur Randkurve aber tangential zur Bezugsfläche und  $\mathbf{n}$  als Normalenvektor zur Referenzfläche.  $\mathbf{n}$  ist identisch mit dem Normalenvektor aus dem Kapitel 2.

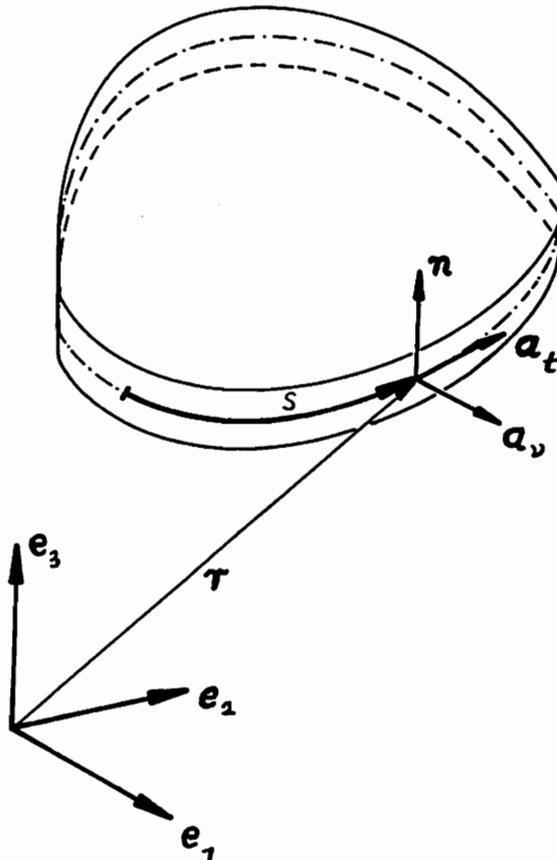


Bild 6.1: Schalenrand

Der Randtangentialvektor  $\mathbf{a}_t$  ergibt sich aus der partiellen Ableitung des Ortsvektors  $\mathbf{r}(\theta^\alpha(s))$  nach dem "laufenden" Randkurvenparameter  $s$ :

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{r}(\theta^\alpha(s))_{,s} = \mathbf{a}_\alpha \theta^\alpha_{,s} \quad (6.1.1)$$

Die Funktion  $\theta^\alpha(s)$  gibt die Flächenkoordinaten  $\theta^\alpha$  für den durch  $s$  gegebenen Punkt auf dem Rand der Schale an. Die Randnormalenvektor  $\mathbf{a}_v$  wird mit Hilfe der Beziehung

$$\mathbf{a}_v = \frac{1}{|\mathbf{a}_t|} \mathbf{a}_t \times \mathbf{n} \quad , \quad |\mathbf{a}_v| = 1 \quad (6.1.2)$$

berechnet. Analog werden die entsprechenden Größen  $\bar{\mathbf{a}}_t$  und  $\bar{\mathbf{a}}_v$  in der verformten Lage der Schale definiert.

Mit Hilfe von (6.1.1 - 6.1.2) lassen sich die Randverschiebungen  $\mathbf{u}$  in physikalischen Komponenten darstellen, deren Richtungen sich auf den Rand beziehen:

$$\mathbf{u} = u^t \mathbf{a}_t + u^v \mathbf{a}_v + u^3 \mathbf{n} \quad . \quad (6.1.3)$$

Im Rahmen von vier kinematischen Randparametern können nur die Randverschiebung und die Randverdrehung der Bezugsfläche vorgeschrieben werden:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(s) = \mathbf{u}(s, \xi=0) = v^t \mathbf{a}_t + v^v \mathbf{a}_v + v^3 \mathbf{n} \quad , \quad (6.1.4)$$

$$\bar{\mathbf{n}} = n^t \mathbf{a}_t + n^v \mathbf{a}_v + n^3 \mathbf{n} \quad , \quad (6.1.5)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_t = a^{tt} \mathbf{a}_t + a^{tv} \mathbf{a}_v + a^{t3} \mathbf{n} \quad , \quad (6.1.6)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_v = a^{vt} \mathbf{a}_t + a^{vv} \mathbf{a}_v + a^{v3} \mathbf{n} \quad . \quad (6.1.7)$$

Der "verformte" Randtangentialvektor  $\bar{\mathbf{a}}_t$  ist analog zu den Definitionen (6.1.1) bereits durch die Randverschiebung gegeben. Der Randnormalenvektor  $\bar{\mathbf{a}}_v$  besitzt nur einen frei wählbaren Parameter, da er definitionsgemäß normal zu  $\bar{\mathbf{a}}_t$  verlaufen muß und den Betrag 1 hat. Auf Grund der Normalenhypothese ist die Richtung von  $\bar{\mathbf{a}}_3$  am Rand durch den Normalenvektor  $\bar{\mathbf{n}}$  normal zur Bezugsfläche vorgegeben. Die Richtung von  $\bar{\mathbf{n}}$  verläuft aber normal zu  $\bar{\mathbf{a}}_t$  und  $\bar{\mathbf{a}}_v$  .

Somit können für die Randverschiebung und Randverdrehung der Bezugsfläche vier Komponenten aus Verschiebung und Rotation unabhängig voneinander vorgeschrieben werden, zum Beispiel

$$v_t = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_t, \quad v_v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_v \quad \text{sowie} \quad v_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (6.1.8)$$

für die Verschiebungen und

$$n_v = \overset{0}{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a}_v \quad (6.1.9)$$

für die Verdrehung.

Berücksichtigen wir die nichtlinearen Beziehungen für  $\overset{0}{\mathbf{n}}$  (3.3.5), so gibt es nur wenige "einfache" geometrische Randbedingungen für die Randkurve der Bezugsfläche. Unter "einfachen geometrischen Randbedingungen" verstehen wir alle in den Verschiebungen und ihren Gradienten linearen Randbedingungen, die zudem in der Formulierung keine Linearkombinationen aus den Verschiebungen und ihren Gradienten erfordern. Die wichtigsten sind:

a) **freier Rand**: natürliche Randbedingung, keine wesentliche geometrische Randbedingung;

b) **unverschiebliche** aber verdrehbare **Auflagerung** des Randes der Bezugsfläche:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^* = \text{vorgeschriebene Verschiebung}; \quad (6.1.10)$$

c) **Einspannung** des Randes der Bezugsfläche:

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad v_{3,v} = 0. \quad (6.1.11)$$

Es gibt auch "lineare" **geometrische Randbedingungen**, in deren Formulierung Linearkombinationen aus Verschiebungskomponenten und deren Gradienten bestimmte Werte vorgeschrieben werden. Dazu gehört die

**verschiebliche Auflagerung**,

$$c_1 v_t + c_2 v_v + c_3 v_3 = c_4 \quad (6.1.12)$$

mit  $c_1 = \text{const.}$ ,  $c_2 = \text{const.}$ ,  $c_3 = \text{const.}$ ,  $c_4 = \text{const.}$  .

In vielen Sonderfällen können die "linearen" Randbedingungen "einfach" sein.

Nichtlineare Randbedingungen, zum Beispiel

a) vorgeschriebene Randverdrehungen

$$n_v = n_v^* \neq 0, \quad (6.1.12)$$

oder

b) Randbedingungen auf Symmetrielinien

$$v_v = 0 \quad \text{und} \quad n_v = 0 \quad (6.1.13)$$

können bei Anwendung numerischer Verfahren wie FEM nur iterativ approximiert werden. Die Randbedingungen auf Symmetrielinien sind unter bestimmten, häufig vorliegenden geometrischen Verhältnissen nur einfach.

## 6.2 Kontinuitätsbedingung für Finite Elemente

Die Kontinuitätsbedingung fordert die Verträglichkeit der Verformungen an den Rändern benachbarter Finiter Elemente. Sie gilt als hinreichend erfüllt, wenn keine in der Verformungsenergiedichte vorkommende Größe auf dem Elementrand unendlich groß wird [39, 77].

Wir wenden diese Forderung auf (4.3.16) an, wobei für  $v$  der vereinfachte Ausdruck (4.4.21) eingesetzt werden soll. Unter Beachtung von (3.3.2, 3.3.3, 3.3.6, 3.3.8 u. 3.4.8) erkennen wir, daß in der Verformungsenergiedichte die Verschiebungen und ihre ersten und zweiten Ableitungen in Richtung der Koordinaten  $\theta^\alpha$  auftreten. Folglich müssen die Verschiebungen in allen Richtungen zweimal differenzierbar sein. Das ist jedoch am Elementrand nur gewährleistet, wenn die Verschiebungen und ihre ersten Ableitungen auch über den Elementrand hinweg stetig verlaufen ( $C_1$ -Kontinuität).

## 6.3 Totlasten

Die Lasten, die auf ein mechanisches System einwirken, können in zwei Gruppen unterteilt werden. Diejenigen Lasten, deren (auf die Punkte des Kontinuums bezogenen) Beträge und Wirkungsrichtungen nicht von den Verformungen abhängen, heißen Totlasten. Ein typisches Beispiel hierfür ist das Eigengewicht. Lasten, die vom aktuellen Verformungszustand abhängig sind, bezeichnen wir als Folgelasten. Ein Beispiel hierfür sind Druck-

lasten, die immer senkrecht auf die aktuelle Oberfläche einwirken.

In diesem Abschnitt werden die Totlasten behandelt, im folgenden die Drucklasten.

Passend zum Variationsprinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials wird das Potential der Totlasten in Verschiebungsform angegeben. In der Schalentheorie ist es üblich, alle Lasten  $p$  auf der Bezugsfläche angreifen zu lassen, so daß

$$A_{\text{Totlasten}} = - \int_{\mathcal{A}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, d\mathcal{A} = - \int_{\theta^2} \int_{\theta^1} \sqrt{a} \, \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, d\theta^1 \, d\theta^2 \quad (6.3.1)$$

folgt. Für Randlasten gilt entsprechend

$$A_{\text{Randtotlasten}} = - \int_C \{ \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{H} \cdot (\bar{\mathbf{n}} - \mathbf{n}) \} ds, \quad (6.3.2)$$

wobei  $C$  der Rand und  $s$  die Bogenlänge des Randes ist.  $\mathbf{H}$  steht für ein Randmoment; die Richtung von  $\mathbf{H}$  ist tangential zur Bezugsfläche und senkrecht zur Richtung eines achsialen Momentes  $\mathbf{M}$ , welches am Rand angreift; die Beträge von  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{M}$  sind gleich [52].

Es ist jedoch fragwürdig, in wie weit die übliche Annahme des Lastangriffs auf der Bezugsfläche für mäßig dünne Schalen (4.2.4) gerechtfertigt ist. Das skizzierte Beispiel soll die Problematik veranschaulichen.

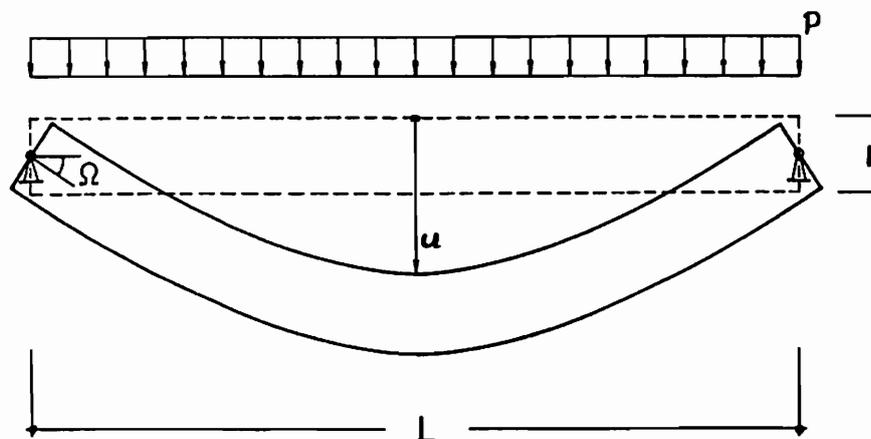


Bild 6.2

Die Last  $\mathbf{p}$  greift außerhalb der Bezugsfläche  $\xi=0$  an. Die Verschiebung  $\mathbf{u}$  der Lastangriffspunkte läßt sich in die Verschiebung  $\mathbf{v}$  der zugeordneten Punkte der Referenzfläche und die Verformung der Materialfasern zwischen der Referenzfläche und den Lastangriffspunkten aufteilen. Unter Zuhilfenahme von (2.3.6, 3.4.12, 4.4.2, 4.4.4, A2.3.2, 4.2.5) können wir  $\mathbf{u}$  umformen und zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= \mathbf{v} + \int_0^\xi \bar{\mathbf{g}}_3 \, d\xi - \xi \mathbf{n} = \mathbf{v} + \int_0^\xi \lambda_3(\xi) \cdot \bar{\mathbf{n}}(\xi) \, d\xi - \xi \mathbf{n} \\
 &= \mathbf{v} + \int_0^\xi \{ \lambda_3|_{\xi=0} \bar{\mathbf{n}}|_{\xi=0} + (\lambda_{3,3}|_{\xi=0} \bar{\mathbf{n}}|_{\xi=0} + \lambda_3|_{\xi=0} \bar{\mathbf{n}}_{,3}|_{\xi=0}) \xi + \\
 &\quad + (\dots) \xi^2 + \dots \} \, d\xi - \xi \mathbf{n} \tag{6.3.3} \\
 &= \mathbf{v} + \bar{\mathbf{a}}_3 \xi + O(|\boldsymbol{\kappa}| h^2) \bar{\mathbf{n}} + O(|\boldsymbol{\gamma}| \frac{h^2}{L}) \mathbf{a}_\alpha + \dots - \xi \mathbf{n} \\
 &= \mathbf{v} + (\bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{n}) \xi + O(\theta h) \bar{\mathbf{n}} + O(\theta h) \mathbf{a}_\alpha .
 \end{aligned}$$

abschätzen. Sei  $\Omega$  der größte Rotationswinkel und  $L$  die charakteristische Länge, so ergibt sich für den in Bild 6.2 dargestellten Fall  $u \approx \frac{1}{4} \Omega L$ . Sicherlich darf diese Abschätzung für zahlreiche Probleme verallgemeinert werden,

$$|\mathbf{u}| = O(\Omega L) = O(\Omega \frac{h}{\theta}) , \tag{6.3.4}$$

so daß für große Rotationen  $\Omega = O(1)$

$$\mathbf{u} = [\mathbf{v} + (\bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{n}) \xi] (1 + O(\theta^2)) \tag{6.3.5}$$

folgt. Hiermit erhalten wir ein verbessertes Potential der Totlasten, in dem  $|(\bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{n}) \xi| = O(\Omega h)$  abzuschätzen ist und daher nicht gegenüber  $\mathbf{u}$  (6.3.4) vernachlässigt werden darf,

$$A_{\text{Totlasten}} = - \int_V \mathbf{p}(\theta^\alpha, \xi) \cdot [ \mathbf{v}(\theta^\alpha) + (\bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{n}) \xi ] \, dV (1 + O(\theta^2)) . \tag{6.3.6}$$

Es läßt sich nun zeigen, daß für das Eigengewicht sowie alle anderen gleichmäßig über das Schalenvolumen verteilten Lasten die resultierende Belastung nach wie vor an der Bezugsfläche angreift. Für nicht von  $\xi$  abhängige Volumenkräfte gilt also weiterhin auch unter Beachtung von (2.1.12) die Formel (6.3.1); sie ist dann jedoch mit einem relativen Fehler der Ordnung  $O(\theta^2)$  behaftet.

Bei einem außermittigem Lastangriff, z. B. auf der Oberfläche, erhält die Formel (6.3.6) ihre eigentliche Bedeutung; insbesondere, wenn die Last nicht senkrecht zur Oberfläche angreift und die Rotationen groß sind. Vernachlässigen der in (6.3.6) gegenüber (6.3.1) zusätzlichen Terme kann zu einem relativen Fehler  $O(\theta)$  im Potential der Lasten führen.

Die Variation der Totlasten ergibt

$$\delta A_{\text{Totlasten}} = - \int_V p(\theta^\alpha, \xi) \cdot [ \delta v(\theta^\alpha) + \xi \delta \bar{a}_3 ] dV (1+O(\theta^2)) \quad (6.3.7)$$

und, falls Lasten außerhalb der Bezugsfläche angreifen ( $\xi \neq 0$ ):

$$\delta^2 A_{\text{Totlasten}} = - \int_V p(\theta^\alpha, \xi) \cdot \delta^2 \bar{a}_3 \xi dV . \quad (6.3.8)$$

#### 6.4 Drucklasten

Drucklasten (hydrostatischer Druck, Gasdruck) sind eine wichtige Belastungsart für Schalen. Die Publikationen [15, 41] zeigen anhand verschiedener Beispiele, daß Drucklasten nicht einfach durch scheinbar äquivalente Totlasten ersetzt werden können. Insbesondere beim Auftreten großer Dehnungen führt eine solche Vereinfachung zu erheblichen Fehlern, da die Drucklast immer auf die aktuelle Oberfläche wirkt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur ortsunabhängige hydrostatische Drucklasten  $q = \text{const.}$  betrachtet. Das spezifische Gewicht des belastenden Mediums findet keine Berücksichtigung, so daß kein Auftrieb entsteht.

Unter diesen Voraussetzungen wird in [41]

$$\int_C q \bar{a}_t \cdot (\hat{v} \times \tilde{v}) \, ds = 0 \quad (6.4.1)$$

als hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials der Drucklast  $q$  angegeben.  $\hat{v}$  und  $\tilde{v}$  sind zwei verschiedene aber beliebig wählbare zulässige Variationen der Verschiebung auf dem Rand  $C$  der betrachteten Schale;  $\bar{a}_t$  ist der in (6.1.1) definierte Randtangentialvektor. Es gibt zwei Möglichkeiten, (6.4.1) zu erfüllen:

(I) Die Schale ist geschlossen, so daß kein Rand existiert.

(II) Die zulässigen Randverschiebungen genügen der Forderung

$$\bar{a}_t \cdot (\hat{v} \times \tilde{v}) = 0 . \quad (6.4.2)$$

Die zweite Bedingung kann z. B. dadurch erfüllt werden, daß jeder Punkt des Randes nur noch einen translatorischen Freiheitsgrad besitzt [41].

Eine [41] ergänzende Möglichkeit eröffnet sich durch eine geometrische Interpretation von (6.4.2):

(II') Der Schalenrand muß dicht mit einer Kontaktfläche abschließen.

Dadurch verliert jeder Punkt des Randes nur einen translatorischen Freiheitsgrad. Das Kreuzprodukt aus zwei verschiedenen zulässigen Variationen  $\hat{v}$  und  $\tilde{v}$  der Randverschiebungen ergibt einen Vektor normal zur Kontaktfläche, während der Randtangentialvektor  $\bar{a}_t$  auf der Kontaktfläche zu liegen kommt, so daß das Spatprodukt aus  $\bar{a}_t$ ,  $\hat{v}$  und  $\tilde{v}$  (6.4.2) den Wert null ergibt.

Sowohl die Möglichkeit (I) als auch die geometrische Interpretation von (II) erlauben, das Potential der Drucklast sich als das Produkt aus dem Druck und dem von der Schale gegebenenfalls mit den Kontaktflächen eingeschlossenen Volumen vorzustellen. Bei einer Schale aus inkompressiblem Material ist es folglich auch beim Auftreten großer Dehnungen bedeutungslos, ob die Drucklast auf die Außenfläche, die Innenfläche oder auf irgendeine andere Fläche im Schalenraum wirkt. Der Unterschied im Potential ist in jedem Falle nur eine Konstante, die bei der Variation herausfällt.

Ohne Herleitung übernehmen wir die erste Variation des Potentials der Drucklasten, die formal identisch mit der negativen virtuellen Arbeit ist, aus [41]:

$$\begin{aligned}\delta^A_{\text{Drucklasten}} &= - \int_{\mathcal{A}} q \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{v} \, d\mathcal{A} \\ &= - q \int_{\theta^2} \int_{\theta^1} \sqrt{\bar{a}} \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{v} \, d\theta^1 \, d\theta^2 .\end{aligned}\tag{6.4.3}$$

Die zweite Variation ergibt

$$\delta^2_{\text{Drucklasten}} = - q \int_{\mathcal{A}} \left\{ \delta \left( \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \bar{\mathbf{n}} \right) \cdot \delta \mathbf{v} + \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \bar{\mathbf{n}} \cdot \delta^2 \mathbf{v} \right\} \, d\mathcal{A} .\tag{6.4.4}$$

Die Symmetrie von (6.4.4) bezüglich der Variationen ergibt sich nur beim Einhalten der Bedingung (6.4.1). Daher empfiehlt es sich, in einem FEM-Programm die Elementsteifigkeitsmatrizen für die Drucklast zu symmetrisieren; andernfalls ergibt sich die Symmetrie erst nach der Addition aller Elementsteifigkeitsmatrizen zur Gesamtsteifigkeitsmatrix und Anpassen der Gesamtsteifigkeitsmatrix an die Randbedingungen.

## 7. ELASTISCHE WERKSTOFFGESETZE

In dieser Arbeit werden nur Schalen betrachtet, deren Werkstoffe eine Verformungsenergiedichte besitzen, die ausschließlich von den aktuellen Dehnungen abhängt. Das Werkstoffverhalten wird also weder von der Zeit (z. B. Kriechen) noch von der Verformungsgeschichte (wie bei plastischer Verformung) beeinflusst. Solches Materialverhalten heißt hyperelastisch. Dabei kann hyperelastisches Verhalten auch zusammen mit großen Dehnungen auftreten.

Als isotrop bezeichnet man Werkstoffe, die sich in allen Richtungen gleichartig verhalten. Zusätzlich kann der Werkstoff - wie Gummi - inkompressibel sein.

Mit Ausnahme der Isotropie sind alle soeben aufgeführten Annahmen wichtige Voraussetzungen für die Herleitungen im Kapitel (4.3). Die Annahme isotroper Werkstoffe gestattet uns darüber hinaus die freie Wahl der körperbezogenen, meist krummlinigen Koordinaten  $\theta^\alpha$ , ohne daß dadurch zusätzliche Probleme bei der Beschreibung des Materialverhaltens entstehen.

Verbundwerkstoffe, die im allgemeinen hochgradig anisotropes Verhalten aufweisen, werden von den Betrachtungen in dieser Arbeit ausgeschlossen, zumal bei laminierten Materialien - wie z. B. Autoreifen - die Vernachlässigung der transversalen Schubverformungen fragwürdig erscheint.

Aus den genannten Gründen beschränken wir uns im folgenden auf isotrope Werkstoffe.

### 7.1 Das Hookesche Gesetz

Solange die Dehnungen hinreichend klein sind, reagieren die meisten Materialien linear elastisch. Die Verformungsenergiedichte  $W$  ist dann quadratisch in den Dehnungen,

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{L} \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}, \quad (7.1.1)$$

wobei  $\mathbf{L}$  der Elastizitätstensor und  $\mathbf{E}$  ein Dehnungstensor ist.

Im Bereich kleiner Dehnungen  $\|E\| = O(\theta^2)$  ist es gleichgültig, welcher Dehnungstensor verwandt wird, da sich in diesem Fall alle Dehnungstensoren nur um einen relativen Fehler  $O(\theta^2)$  unterscheiden (in diesem Zusammenhang müssen Dehnungs- und Stretchtensoren unterschieden werden. Der meist verwandte Dehnungstensor für kleine Dehnungen ist der Greensche Dehnungstensor (3.2.9). Eine Zusammenstellung weiterer Dehnungstensoren findet sich in [32].

Für kompressibles isotropes Material lauten die Komponenten des linearen Elastizitätstensors

$$L_{ijkl} = G(a_{ik}a_{jl} + a_{il}a_{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} a_{ij}a_{kl}), \quad (7.1.2)$$

wobei  $G$  für den Schubmodul und  $\nu$  für die Querdehnzahl stehen. Bei ungehinderter Dehnung in der 3. Richtung, wie es bei Schalen im allgemeinen der Fall ist, ergeben sich die Komponenten des modifizierten Elastizitätstensors [49] zu

$$H^{\alpha\beta\lambda\mu} = G(a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}). \quad (7.1.3)$$

Der Übergang auf inkompressible Werkstoffe ist aus mechanischer Sicht nicht erlaubt, indem man in (7.1.3) einfach  $\nu=0,5$  einsetzt. Allerdings läßt sich für einige inkompressible Materialien, wie z. B. für Mooney-Rivlin-Material, unter der Annahme kleiner Dehnungen eine formale Zuordnung zwischen  $H^{\alpha\beta\lambda\mu}$  für  $\nu=0,5$  und  $\frac{\partial^2 W}{\partial E_{\alpha\beta} \partial E_{\lambda\mu}}$  finden, indem  $G$  geeignet gewählt wird.

## 7.2 Nichtlineare, hyperelastische Werkstoffgesetze

Materialien, die sich auch beim Auftreten moderater und großer Dehnungen elastisch verhalten, weisen im allgemeinen nichtlineare Spannungs-Dehnungsbeziehungen auf. Somit ist die Verformungsenergiedichte keineswegs nur eine quadratische Funktion der Dehnungen. Für verschiedene Materialien, meist Varianten von Gummi, der inkompressibel ist, aber auch für einige Biomaterialien, die ebenfalls als inkompressibel angenommen werden können, ist in [31] eine Übersicht gängiger Werkstoffgesetze in Form von Verformungsenergiedichtefunktionen gegeben. Weiche Biomaterialien

finden wir ausführlich in [16] beschrieben.

Das bekannteste Werkstoffgesetz für Gummi ist das sogenannte **Mooney-Rivlin-Material**, dessen Verformungsenergiedichte

$$\begin{aligned} W &= c_1(I_1-3) + c_2(I_2-3) \quad , \quad I_3 = 1 \\ &= c_1[(\lambda_1)^2+(\lambda_2)^2+(\lambda_3)^2-3] + c_2[(\lambda_1)^{-2}+(\lambda_2)^{-2}+(\lambda_3)^{-2}-3] \quad , \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3=1 \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

lautet [1, 28].  $I_i$  steht für die üblichen Dehnungsinvarianten [17],  $\lambda_i$  für die "principle stretches", die man z. B. als Eigenwerte des rechten Cauchy-Greenschen Dehnungstensors (3.2.5) erhält.  $c_1$  und  $c_2$  sind die beiden Materialkonstanten, deren Summe gleich dem halben Schubmodul für infinitesimal kleine Dehnungen ist:

$$(c_1 + c_2) = \frac{1}{2} G. \quad (7.2.2)$$

In [1] wird für  $c_1$  und  $c_2$

$$c_1 = 0,4375 G \quad \text{und} \quad c_2 = 0,0625 G \quad (7.2.3)$$

vorgeschlagen.

Aus der Beziehung (3.2.4) folgt nun

$$(\lambda_i)^2 = 1 + 2 E_i \quad , \quad (7.2.4)$$

wobei  $E_i$  einen Eigenwert des Greenschen Dehnungstensor  $E$  darstellt. Damit kann das Mooney-Rivlin-Materialgesetz unter der Voraussetzung einer Normalenhypothese (2.3.4, 3.2.7) mit Hilfe der vorstehenden Betrachtungen auch in der Form

$$W = \frac{1}{B} [c_1(A^2 + 4AD - 4D) + c_2(A^2 + 8AD - 4D + 16D^2)] \quad , \quad (7.2.5)$$

$$A = 2(E_1 + E_2) = 2E_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta} \quad , \quad D = E_1 E_2 = \frac{1}{a} \text{Det}(E_{\alpha\beta}) \quad , \quad B = 1 + A + 4D,$$

angegeben werden. Aus dieser Darstellung lassen sich die Ableitungen der Verformungsenergiedichte nach dem zweidimensionalen Greenschen Dehnungstensor bilden (vergl. Kapitel 4.3). Diese Vorgehensweise kann sinngemäß auch auf alle anderen hyperelastischen isotropen Werkstoffgesetze angewendet werden.

Auf Grund der im Vergleich zu anderen Werkstoffgesetzen noch einfach handhabbaren Form wird im Rahmen dieser Arbeit für die Berechnungsbeispiele im Kapitel 9 das Mooney-Rivlin-Materialgesetz anderen, womöglich besseren Werkstoffgesetzen vorgezogen.

Durch die Wahl von

$$c_1 = \frac{1}{2} G \quad , \quad c_2 = 0 \quad (7.2.6)$$

erhalten wir das sogenannte ~~Neo-Hookean-Material~~. Im Sonderfall, daß eine Hauptdehnung gleich null ist, sind Mooney-Rivlin- und Neo-Hookean-Material identisch. Für diesen Spezialfall,  $\lambda_2=1$  oder  $E_2=0$ , läßt sich leicht die Gültigkeit der für die Konvergenz der Reihenentwicklung in Kapitel 4.3 wichtigen Formel (4.3.8) zeigen. Wir erhalten

$$W_{(n)} = \frac{\partial^n W}{(\partial E_1)^n} = (c_1+c_2) n! 2^n (\lambda_1)^{-2n-2} \quad , \quad n \geq 2 \quad (7.2.7)$$

Bei beliebiger Verformung eines Mooney-Rivlin-Materials läßt sich keine geschlossene Formel für  $W_{(n)}$  angeben, so daß auf einen Beweis der Abschätzung (4.3.8) verzichtet werden muß.

Weitere interessante Materialgesetze werden in [1, 14, 16, 46, 47] vorgestellt. Beachtenswert ist hierbei, daß im Bereich moderater Dehnungen praktisch alle Materialgesetze für inkompressible Gummimaterialien in der numerischen Auswertung ähnliche Werte ergeben.

## 8. PROGRAMMIERUNG DER SCHALENTHEORIE ALS "VEKTORISIERTES" FINITES ELEMENT

### 8.1 Der Übergang von der Variationsformulierung zur Finite Elemente Methode (FEM)

Ausgehend von dem in den Verschiebungen  $\mathbf{v}$  der Schalenbezugsfläche formulierten Gesamtpotential  $J$  (siehe (4.5.1), (4.3.16) und Kapitel 6.3, 6.4),

$$J = J(\mathbf{v}) , \quad (8.1.1)$$

leiten wir aus der ersten Variation des Gesamtpotentials

$$\delta J(\mathbf{v}) = 0 \quad (8.1.2)$$

(4.5.2), die das Variationsproblem darstellt, durch Diskretisieren die Newton-Raphson-Iterationsformel her.

In der Methode der Finiten Elemente in Verschiebungsformulierung wird das Verschiebungsfeld  $\mathbf{v}$  elementweise durch Interpolationsfunktionen  $\overset{*}{\mathbf{v}}$  angenähert. Deren Verläufe sind durch die Verschiebungen und Verschiebungsgradienten  $q_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , in bestimmten Knotenpunkten gegeben ist:

$$\mathbf{v} \approx \overset{*}{\mathbf{v}}(q_i) . \quad (8.1.3)$$

Die  $q_i$ -Werte werden auch als Knotenfreiheitsgrade bezeichnet. Damit keine "energetischen Lücken" entstehen, müssen die Interpolationsfunktionen  $\overset{*}{\mathbf{v}}$  entlang der Elementränder bestimmte Übergangsbedingungen, die Kontinuitätsbedingungen (Kapitel 6.2), erfüllen.

Einsetzen von (8.1.3) in (8.1.1) und (8.1.2) ergibt

$$J(\mathbf{v}) \approx J(\overset{*}{\mathbf{v}}) = J(q_i) \quad (8.1.4)$$

und

$$\delta J(\mathbf{v}) \approx \delta J(\overset{*}{\mathbf{v}}) = \delta J(q_i) = \sum_i \frac{\partial J(q_j)}{\partial q_i} \delta q_i = 0 , \quad (8.1.5)$$

Somit folgt

$$\frac{\partial J}{\partial q_i} = 0 \quad (8.1.6)$$

als diskrete Form der Gleichgewichtsbedingungen.

Das Gesamtpotential  $J$  ist im allgemeinen eine Funktion, die vom Verschiebungsfeld  $u$  und somit auch von den Knotenfreiheitsgraden  $q_i$  hochgradig nichtlinear abhängt, wodurch das Gleichungssystem (8.1.6) nichtlinear ist. Nur bei gleichzeitiger Annahme kleiner Dehnungen und Rotationen ist das Gesamtpotential (8.1.4) quadratisch und somit das Gleichungssystem (8.1.6) linear.

Zur iterativen Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (8.1.6) gehen wir von einer "Lösung"  $q_i^n$  aus, die in der Nähe der gesuchten Lösung  $q_i$  liegt.  $q_i^n$  ist das Ergebnis von  $n$  bereits erfolgten Iterationen. Für  $n=0$  sind die  $q_i^0$  die Startwerte für den Iterationsalgorithmus. Um ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Verbesserungen  $\Delta q_i^n$  zu erhalten, die zusammen mit  $q_i^n$  eine verbesserte Lösung

$$q_i^{n+1} = q_i^n + \Delta q_i^n \quad (8.1.7)$$

ergeben, entwickeln wir das Gleichungssystem (8.1.6) um  $q_i^n$  in eine Taylorreihe, die nach dem linearen Glied abgebrochen wird:

$$\frac{\partial J}{\partial q_j} \Big|_{q_i^{n+1}} = \frac{\partial J}{\partial q_j} \Big|_{q_i^n} + \sum_k \frac{\partial^2 J}{\partial q_j \partial q_k} \Big|_{q_i^n} \Delta q_k^n + \dots = 0 \quad (8.1.8)$$

Durch Umformen erhält man ein lineares Gleichungssystem für  $\Delta q_k^n$ :

$$\sum_k \frac{\partial^2 J}{\partial q_j \partial q_k} \Big|_{q_i^n} \Delta q_k^n + \frac{\partial J}{\partial q_j} \Big|_{q_i^n} = 0 \quad (8.1.9)$$

Die Formeln (8.1.7) und (8.1.9) stellen die Iterationsformeln für den Newton-Raphson-Algorithmus dar. Dabei heißt

$$\frac{\partial^2 J}{\partial q_j \partial q_k} =: \text{STM} \quad (8.1.10)$$

Steifigkeitsmatrix und

$$\frac{\partial J}{\partial q_j} =: \text{RKV} \quad (8.1.11)$$

Restkraftvektor.

Formal kann man den Restkraftvektor und die Steifigkeitsmatrix aus der ersten und zweiten Variation des Gesamtpotentials erhalten, indem man die Variationssymbole  $\delta$  und  $\delta^2$  durch die partiellen Ableitungen nach den Knotenfreiheitsgraden  $q_i$  ersetzt:

$$\begin{aligned} \delta(\dots) &\rightarrow \frac{\partial}{\partial q_j}(\dots), \\ \delta^2(\dots) &\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial q_j \partial q_k}(\dots), \\ \delta J &\rightarrow \text{RKV}, \\ \delta^2 J &\rightarrow \text{STM}. \end{aligned} \quad (8.1.12)$$

Somit lassen sich die im Kapitel 4.5 gebildeten Variationen der Verformungsenergiedichte und die in den Kapiteln 6.3 und 6.4 angegebenen Variationen der Lastpotentiale zur Aufstellung der Steifigkeitsmatrix und des Restkraftvektors verwenden.

Die Integration über die Schalenbezugsfläche wird elementweise mit Hilfe eines geeigneten numerischen Verfahrens, z. B. einer Gauß-Quadratur, ausgeführt [13, 27, 39]. Dabei müssen alle Funktionen nur in den Integrationsstützpunkten ausgewertet werden.

Es ist hilfreich, die Komponenten des Dehnungs- und Krümmungstensors  $\gamma_{\alpha\beta}$  und  $\bar{b}_{\alpha\beta}$  durch die linearen Dehnungsgrößen  $\varphi_\alpha$ ,  $\varphi_{\alpha\beta}$ ,  $\varphi_{\alpha|\beta}$  und  $\varphi_{\alpha\beta|\gamma}$  auszudrücken (Kapitel 3.3). Die Ableitungen der linearen Dehnungsgrößen nach den Knotenfreiheitsgraden sind verformungsunabhängig. Daraus ergibt sich

$$\varphi_\alpha = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \varphi_\alpha q_i. \quad (8.1.13)$$

Für die anderen linearen Dehnungsgrößen gilt (8.1.13) entsprechend. Mit

Hilfe der linearen Dehnungsgrößen und ihren Ableitungen nach den Knotenfreiheitsgraden lassen sich  $\gamma_{\alpha\beta}$ ,  $\lambda_3$ ,  $\bar{n}$  und  $\bar{b}_{\alpha\beta}$  sowie deren Ableitungen nach den Knotenfreiheitsgraden ausdrücken; hieraus ergeben sich  $x_{\alpha\beta}$ ,  $v_{\alpha\beta}$  und deren Ableitungen. Einsetzen in die durch die Substitution (8.1.12) modifizierten Variationen der Verformungsenergiedichte und Lastpotentiale ergibt nach Ausführung der numerischen Integration über die Elementfläche die Elementsteifigkeitsmatrix und den Elementrestkraftvektor. Die Überlagerung der Elementsteifigkeitsmatrizen ergibt die Systemsteifigkeitsmatrix, die Superposition der Elementrestkraftvektoren den Systemrestkraftvektor.

Vor der Lösung des so gewonnenen linearen Gleichungssystems müssen noch einige Modifikationen zur Anpassung an die Randbedingungen und zur Steuerung der Last- und Verschiebungsschrittweite vorgenommen werden [11 und dort zitierte Literatur].

Als Elementtyp für die programmtechnische Realisierung wurde das auf COWPER zurückgehende dreieckförmige "high-precision" Schalenelement mit 54 Freiheitsgraden und biquintischen Ansatzfunktionen für die Verschiebungen ausgewählt. Dieses finite Schalenelement ist in [12, 18] beschrieben. Es berücksichtigt die exakte Geometrie des zu untersuchenden Problems und erfüllt alle Anforderungen hinsichtlich der Konformität bzw. Kontinuität ( $C_1$ -Kontinuität), wie sie im Kapitel 6.2 dargelegt sind.

## 8.2 Der Vektorrechner Control Data Cyber 205

Der Vektorrechner Cyber 205 von Control Data ist eine SIMD (single instruction multiple data) -Maschine. Das heißt, daß sie sehr effektiv dieselbe Operation mit einer großen Datenmenge ausführen kann. Durch eine spezielle Architektur, die sogenannten **Pipelines**, ist sie in der Lage, einfache Anweisungen, wie z. B. das kleine FORTRAN-Programmstück

$$\begin{array}{l} \text{DO } 1, J = 1, 100 \\ 1 \quad A(J) = B(J) + C(J) \end{array} \quad (8.2.1)$$

in einer fließbandähnlichen Serienproduktion abzarbeiten. Zu diesem Zweck sind alle wichtigen Rechenoperationen innerhalb der Pipelines in viele

elementare Unteroperationen aufgeteilt, die - wie am industriellen Fließband - an verschiedenen, aufeinander folgenden physikalischen Orten ausgeführt werden. Jede elementare Unteroperation benötigt nur noch einen Maschinentakt Bearbeitungszeit. Nachdem sich die Pipeline auf eine bestimmte Operation, z. B. die Multiplikation, eingestellt hat und die ersten beiden Eingabedaten die Pipeline betreten haben, vergeht noch einige Zeit, bis die Eingabedaten und das entstehende Ergebnis alle Stationen der Unteroperationen durchlaufen haben. Diese Zeit ist zusammen mit der Zeit, die zum Umstellen auf eine neue Operation benötigt wird, die sogenannte **Startzeit**. Danach aber verläßt mit jedem Maschinentakt ein Ergebnis die Pipeline. Der **Zeitbedarf**  $T$  für  $n$  gleiche Operationen auf  $n$  Datensätzen (siehe Beispiel 8.2.1) beträgt folglich

$$T = S + n t , \tag{8.2.2}$$

wobei  $S$  die Startzeit (ca. 1000 ns) und  $t$  die Zeitdauer eines Maschinentaktes bei einem Rechner mit einer Pipeline ist. Bei Rechnern mit zwei Pipelines, wie bei der Bochumer Cyber 205, steht  $t$  für die Dauer eines halben Maschinentakte  $s$  (ca. 10 ns). Bei aufwendigen Operationen wie Division, Quadratwurzel, trigonometrischen Funktionen, Potenzen oder Logarithmen muß für  $t$  eine deutlich größere Zeit eingesetzt werden.

An der Formel (8.2.2) ist deutlich erkennbar, daß die **effektive Rechengeschwindigkeit** von der Anzahl  $n$  der Daten, die die gleiche Operation durchlaufen, der sogenannten Vektorlänge  $n$ , abhängt.

n	2	10	20	50	100	200	1000
Operationen je Sekunde (+, -, ·)	$2 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^6$	$17 \cdot 10^6$	$33 \cdot 10^6$	$50 \cdot 10^6$	$67 \cdot 10^6$	$91 \cdot 10^6$

$$\tag{8.2.3}$$

In einem "gewöhnlichen" Rechner werden alle Rechenoperationen nacheinander an derselben physikalischen Stelle im Rechner ausgeführt und benötigen

mehrere Maschinentakte Bearbeitungszeit. Daher kann die nächste Operation erst beginnen, nachdem die vorherige abgeschlossen wurde. Die im "normalen" Rechenwerk der Cyber 205 effektiv erreichbare Rechengeschwindigkeit liegt bei etwa  $2 \cdot 10^6$  Operationen je Sekunde.

Um die mögliche Rechenleistung der Cyber 205 in sinnvoller Weise ausnützen zu können, sollten also Vektorlängen von mindestens  $n=20$  (ca. 8-fache Rechengeschwindigkeit gegenüber der konventionellen Recheneinheit), besser  $n=100$  (ca. 16-fache Geschwindigkeit) oder gar  $n=1000$  (45-fache Geschwindigkeit, 90 % der Höchstgeschwindigkeit) angestrebt werden.

Voraussetzung für diese hohen Rechengeschwindigkeiten ist, daß die Daten in den Feldern in der richtigen Anordnung unmittelbar aufeinander folgend vorliegen. Dieses ist ganz besonders bei mehrdimensionalen Feldern zu berücksichtigen, wobei die Reihenfolge der (z. B. FORTRAN-normgemäßen) Ablage der einzelnen Daten im Speicher des Rechners beachtet werden muß. Es gibt zwar auch Befehle zum Umordnen der Datenfelder, jedoch verbrauchen sie im Vergleich zu den eigentlichen Rechenoperationen so viel Zeit, daß man auf ihre Anwendung möglichst verzichten sollte.

Weitere Details zur Bochumer Cyber 205 sind in [37] zu finden, insbesondere ist dort auch die Programmierung der Rechenanlage beschrieben.

Am Beispiel (8.2.1) erkennen wir auch die Herkunft der Bezeichnung "Vektorrechner", denn  $A(J)$ ,  $B(J)$  und  $C(J)$  erinnern formal an die mathematische Struktur eines höherdimensionalen Vektors.

### 8.3 Die vektorisierte Elementroutine

Die so genannten "high-precision" Finiten Elemente mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung - z. B. quintischen Polynomen - zeichnen sich durch die "exakte" Approximation der Geometrie der zu untersuchenden Struktur und durch die konformen Ansätze für das Verschiebungsfeld aus. Damit erfüllen sie alle kontinuumsmechanischen Anforderungen an ein Finites Element. Außerdem ermöglichen sie, das zu analysierende System mit wenigen Elementen und somit auch nur wenigen kinematischen Freiheitsgraden hinreichend genau zu erfassen [18]. Dafür wird eine aufwendige Elementformulierung

lierung in Kauf genommen.

Da man mit wenigen Unbekannten auskommt aber aufwendige Elemente benutzt, ergibt sich, daß die Elementroutine bis zu über 98 % der Rechenzeit verbraucht [43, 44]. Somit bietet es sich an, die Elementroutine zu vektorisieren. Wie die Tabelle (8.6.1) zeigt, erreichen wir bei 23-facher Beschleunigung des Elementalgorithmus die Verkürzung der gesamten Rechenzeit um Faktor 21. Trotzdem beanspruchen die Ausführungen der Elementroutine immer noch etwa 85 % der Rechenzeit.

In [43, 44] werden grundlegende Gedanken zur Vektorisierung Finiter Elemente auf "long vector"-Maschinen wie z. B. der Cyber 205 vorgestellt und mit einigen schon bestehenden Konzepten zur Vektorisierung auf Elementebene verglichen. Wie aus Tabelle (8.2.3) hervorgeht, sollten Vektorlängen  $n > 100$  angestrebt werden, um eine mindestens 50-prozentige Ausnutzung der möglichen Rechnerleistung zu erzielen. Somit sind die "natürlichen" Vektorlängen wie die Anzahl der unabhängigen Tensorkomponenten (3), die Zahl der Elementfreiheitsgrade (54) oder der Integrationspunkte (21) im gewählten 54-Freiheitsgrade-Element [12, 18] für eine effektive Vektorisierung zu kurz.

Das Konzept, mehrere Elemente "simultan", d. h. gleichzeitig zu berechnen, wird wegen des damit verbundenen großen Speicherbedarfs verworfen. Beispielsweise haben 100 Elemente gleichzeitig bereits 148500 unabhängige Komponenten der Elementssteifigkeitsmatrizen.

Es ist dagegen sinnvoll, verschiedene von einander unabhängige Möglichkeiten zur Vektorisierung miteinander zu verbinden, so daß sich die resultierende Vektorlänge aus dem Produkt der einzelnen Vektorlängen ergibt. Bereits in [43, 44] wurde die Kombination der Vektorlängen aus den 54 Elementfreiheitsgraden mit den 21 Integrationspunkten vorgeschlagen, so daß man  $54 \cdot 21 = 1134$  als für die Problemlösung typische Vektorlänge erhält. Damit wäre ein Ausnutzungsgrad von etwa 92 % gegeben. Durch unumgängliche Operationen zur Zusammenstellung einiger Vektoren und dadurch, daß in einigen Programmteilen prinzipiell nur Vektorlängen von 21 oder 54 oder "mittlere" Vektorlängen von  $\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 54 = 567$  möglich sind, sinkt die effektive Rechengeschwindigkeit auf etwa 60 % der theoretisch möglichen

Höchstgeschwindigkeit. Hierbei zählen als effektive Operationen nur solche Rechnungen, die auch an einem herkömmlichen Rechner ausgeführt werden müßten; jedoch geht in die Rechenzeit auch der Zeitbedarf für die ineffektiven Operationen mit ein.

Der erforderliche Speicherbedarf ist zwar gewaltig, gemessen an dem in modernen Vektorrechnern zur Verfügung stehenden Hauptspeichern (central memories) aber ohne besondere Probleme (paging, etc.) zu bewältigen. Speicherplätze für Variablen, die nur bis zu einer bestimmten Stelle im Programm benötigt werden, bekommen durch EQUIVALENCE-Anweisungen neue Variablennamen zugewiesen. Dadurch bleibt der Speicherbedarf auf etwa 107000 REAL-Zahlen begrenzt.

Der Elementalgorithmus entspricht weitgehend der in [43, 44] vorgestellten Version; jedoch wurde die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix neu konzipiert, um die effektive Rechengeschwindigkeit zu erhöhen.

Im einzelnen läßt sich die Elementroutine in 12 Abschnitte unterteilen:

**1. Abschnitt:** Berechnung der **Transformationsmatrizen** zwischen den elementbezogenen und den systembezogenen Koordinaten. Da die meist krummlinigen Elementränder des Dreieckelements in einem  $\theta^1$ - $\theta^2$ -Koordinatenkreuz geradlinig verlaufen, ist die Transformation linear und für die gesamte Elementfläche konstant. Eine sinnvolle Vektorisierung ist nicht möglich, bei einem Anteil an der Rechenzeit von 0,04 % auch nicht erforderlich.

**2. Abschnitt:** Bestimmung der Koeffizienten der Ansatzpolynome [siehe 18] für die Verläufe (**Formfunktionen**) der Ableitungen des Verschiebungsfeldes  $u$  nach den Knotenfreiheitsgraden  $q_i$ . Dabei ist  $\frac{\partial}{\partial q_i} u$  die Verschiebung, die entsteht, wenn nur ein  $q_i = 1$  und alle anderen  $q_{j \neq i} = 0$  sind. Die Verläufe dieser Verschiebungszustände können als "**Einheitsverschiebungen**" bezeichnet werden. Sind nachher die "Verformungen" der Knotenfreiheitsgrade bekannt, ergibt sich das dazugehörige Verschiebungsfeld aus der Beziehung

$$u = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} u q_i \quad (8.3.1)$$

Da die Ermittlung der Koeffizienten für die Formfunktionen nur auf der Ebene der Elementkoordinaten sinnvoll möglich ist, müssen die Verschiebungen der Knotenfreiheitsgrade  $q_i$  zunächst von den systembezogenen Richtungen auf Elementkoordinaten transformiert werden.

Die bestehenden Beziehungen erlauben eine effektive Vektorisierung der Rechenoperationen zur Bestimmung der gesuchten Koeffizienten nur unter Einschluß vieler "Nulloperationen", das sind Rechnungen, die immer null ergeben und daher ineffektiv sind. Möchte man die Nulloperationen vermeiden, verkürzt sich die erzielbare Vektorlänge so sehr, daß man schließlich mehr Rechenzeit benötigt.

**3. Abschnitt:** Ermittlung der Werte für die "Einheitsverschiebungen"  $\frac{\partial}{\partial q_i} u$  in den Integrationspunkten. Außerdem müssen die Gradienten bis zur zweiten Ableitung der Einheitsverschiebungsfelder nach den Elementkoordinaten gebildet werden. In diesem Abschnitt wird erstmals die kombinierte Vektorlänge von  $21 \cdot 54 = 1134$  aus der Anzahl der Integrationspunkte im Element und aus der Zahl der Elementfreiheitsgrade erreicht.

**4. Abschnitt: Transformation** der Ergebnisse des vorherigen Abschnitts von Elementkoordinaten auf die Systemkoordinaten ( $\theta^\alpha$ -Koordinaten). Die Vektorlänge beträgt hierbei 1134.

**5. Abschnitt:** Berechnung der Geometrieparameter wie z. B. der Komponenten  $b_{\alpha\beta}$  des Krümmungstensors oder der Christoffelsymbole in den Integrationspunkten. Die Vektorlänge beträgt 21, der Rechenzeitbedarf liegt unter einem Prozent der Gesamtrechenzeit.

**6. Abschnitt:** Bestimmung der Ableitungen der linearen Dehnungsgrößen  $\varphi_\alpha$ ,  $\varphi_{\alpha\beta}$ ,  $\varphi_{\alpha|\beta}$  und  $\varphi_{\alpha\beta|\gamma}$  (Kapitel 3.3) in den Integrationspunkten nach den Knotenfreiheitsgraden. Um die angestrebte Vektorlänge von 1134 zu erreichen, müssen ca. 35 % Nulloperationen in Kauf genommen werden. Dennoch beträgt die effektive Rechengeschwindigkeit 44 % des theoretischen Maximalwertes, wobei einige Operationen, die nur mit einer Vektorlänge von 21 sinnvoll ausgeführt werden können ebenso berücksichtigt sind wie einige Befehle zum Erzeugen langer Vektoren.

Die Resultate aus den Abschnitten 1 bis 6 hängen nicht vom Verformungs-  
zustand der Schale ab. Sie sind lediglich Funktionen der Schalengeometrie  
und der Topologie der Diskretisierung. Statt diese Werte in jedem Itera-  
tionszyklus neu zu ermitteln, könnte man sie auch zwischenspeichern. Die  
für die Speicherung von etwa 27000 Real-Zahlen je Element erforderlichen  
"page-faults" benötigten jedoch deutlich mehr Zeit als deren Neu-  
berechnung.

Die Abschnitte 1 bis 6 verbrauchen etwa 10 % der Rechenzeit.

**7. Abschnitt:** Ermittlung der **linearen Dehnungsgrößen** in den Integrations-  
punkten. Hierzu multipliziert man die Ableitungen der linearen Dehnungs-  
größen nach den Knotenfreiheitsgraden mit den aktuellen Werten der Knoten-  
freiheitsgrade im Sinne eines Skalarproduktes analog zur Formel (8.1.13).  
75 % der Grenzrechengeschwindigkeit werden erreicht.

**8. Abschnitt:** Berechnung aller benötigten Größen des Dehnungszustandes der  
Schale wie z. B.  $\gamma_{\alpha\beta}$ ,  $\kappa_{\alpha\beta}$ ,  $\sqrt{a/a} \bar{n}$  sowie  $\lambda_3$  und deren erste Ableitungen  
nach den Knotenfreiheitsgraden. Die Vektorlängen betragen 21 bei den nicht  
abgeleiteten Größen und 1134 bei den abgeleiteten Größen. Die effektive  
Rechengeschwindigkeit liegt bei ca. 75 % der Grenzrechengeschwindigkeit.

**9. Abschnitt:** Aufstellung des **Elementlastvektors** aus Flächenlasten, die  
sowohl aus Tot- als auch aus Drucklasten bestehen können. Die Formeln  
hierfür ergeben sich mit Hilfe der Substitution (8.1.12) direkt aus  
(6.3.7) und (6.4.3). Die Integration über die Schalenfläche erfolgt  
numerisch.

**10. Abschnitt:** Der **Restkraftvektor** ergibt sich, wie aus den Beziehungen  
(4.4.1, 4.4.4, 8.1.11, 8.1.12) folgt, als Resultierender aus dem Last-  
vektor und dem "Vektor der inneren Kräfte". Der "Vektor der inneren  
Kräfte" wird mit Hilfe der Substitutionen (8.1.12) aus der ersten Varia-  
tion der Verformungsenergiedichte (4.4.6) gebildet. Auch hier erfolgt die  
Integration über die Schalenfläche numerisch. Bei der Bestimmung von **N**, **M**  
und **L** beträgt die Vektorlänge zwangsläufig nur 21, ebenso bei der  
numerischen Integration. Die Berechnung des Ausdrucks (4.4.6) erlaubt eine  
Vektorlänge von 1134, allerdings müssen aus den Vektoren der Länge 21 für

die Werte der Komponenten von  $N$ ,  $M$  und  $L$  in den 21 Integrationspunkten durch periodische Wiederholungen Vektoren der Länge  $21 \cdot 54 = 1134$  gebildet werden. Dennoch erzielen wir in diesem Berechnungsabschnitt 44 % der maximal möglichen Rechengeschwindigkeit.

Bis hierhin beträgt die Rechenzeit für ein Element bei der aufwendigsten programmierten Theorievariante 36 Millisekunden, in denen etwa  $1,7 \cdot 10^6$  Rechenoperationen (hauptsächlich  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ), davon  $1,15 \cdot 10^6$  effektive Operationen, ausgeführt werden. Die daraus folgenden Rechengeschwindigkeiten betragen  $47 \cdot 10^6$  bzw.  $32 \cdot 10^6$  Fließkommaoperationen je Sekunde (floating-point-operations per second, 47 MFLOPS bzw. 32 MFLOPS,  $M = 10^6$ ). Durch Abzählen der Rechenoperationen im Programm wurde ein Zeitbedarf von lediglich etwa 28 Millisekunden ermittelt. Die zusätzlich verbrauchte Rechenzeit von 8 ms wird wahrscheinlich zur Programmablaufsteuerung benötigt. Obwohl die "skalare" und die "vektorielle" Recheneinheit parallel zueinander verschiedene Aufgaben ausführen können, blockieren offensichtlich von Zeit zu Zeit noch nicht abgeschlossene Steueroperationen in der "scalar unit" den ungehinderten Programmablauf. Diese Vermutung wird durch den deutlich niedrigeren relativen Mehrbedarf an Rechenzeit bei der Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrix bestätigt. Dort entfallen wesentlich weniger "DO"-Anweisungen, "IF"-Abfragen und Subroutine-"CALL's" auf wesentlich mehr Rechenoperationen.

**11. Abschnitt:** Die Berechnung der **Elementsteifigkeitsmatrix** benötigt bei der aufwendigsten programmierten Theorie über 87 % der Rechenoperationen und etwa 84 % der Rechenzeit der Elementroutine. Sie ist damit das numerische Kernstück im Elementalgorithmus. Bei ihrer "vektorierten" Programmierung muß folglich unbedingt auf das Erzielen höchstmöglicher Rechengeschwindigkeit geachtet werden.

Die Formeln für die Steifigkeitsmatrix ergeben sich mit Hilfe der Substitution (8.1.12) aus den Beziehungen (4.4.1, 4.4.4, 8.1.10). Die Gleichung (4.4.7) beschreibt somit den prinzipiellen Aufbau der Steifigkeitsmatrix, wozu ggf. auch noch Anteile aus den Lasten (6.4.4, 6.3.8) hinzukommen. Die Integration über die Schalenfläche geschieht wieder numerisch.

Der Formel (4.4.7) entnehmen wir, daß sich die Steifigkeitsmatrix in zwei

Teile aufspalten läßt, wovon der erste Teil durch Operationen der Art

$${}_1STM_{ij}^g = \sum \frac{\partial(\dots)^g}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial(\dots)^g}{\partial q_j} \quad (8.3.2)$$

gekennzeichnet ist. Der andere Teil besteht aus Termen folgenden Aufbaus:

$${}_2STM_{ij}^g = \sum \text{Faktor}^g \cdot \frac{\partial^2(\dots)^g}{\partial q_i \partial q_j} \quad (8.3.3)$$

Die Indizes i und j geben die Zeilen- und die Spaltennummer des betrachteten Elements der Steifigkeitsmatrix an. Der hochgestellte Index g steht für die Integrationspunkte der Gauß-Quadratur.

Mit Hilfe der den Integrationspunkten zugeordneten Flächengewichten  $G^g$  läßt sich die numerische Integration ausführen:

$$STM_{ij} = \sum_g G^g \cdot ({}_1STM_{ij}^g + {}_2STM_{ij}^g) \quad (8.3.4)$$

Um bei der Auswertung der zu (8.3.2) passenden Rechenoperationen möglichst große Vektorlängen zu erreichen, organisieren wir den Aufbau aller Felder nach dem folgenden Schema:

g =	1	2	3	...	21	1	2	3	...	21	...	1	2	3	...	21	(8.3.5)
i =	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	...	54	54	54	54	54	

Das heißt, in einem FORTRAN-Programm müßte bei der Dimensionierung der Arrays die erste Dimension stets für die Integrationspunkte und die zweite Dimension für die Ableitungen nach den Knotenfreiheitsgraden  $q_i$  vorgesehen werden. Das gewählte Berechnungsschema für (8.3.2) erkennen wir nun leicht an diesem Beispiel:

```

DO 1,JO=1,54
DO 1,I=1,55-J0
J=JO+I-1
DO 1,G=1,21
1 STM(G,I,J) = STM(G,I,J) + A(G,I) * B(G,J) .
    
```

(8.3.6)

Die Berechnung der Steifigkeitsmatrix erfolgt also nicht zeilen- oder spaltenweise sondern in der Diagonalenrichtung, wobei wegen der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix nur eine Hälfte berechnet wird. Die vektorielle Struktur tritt noch nicht klar zum Vorschein, dafür ist aber die Beziehung zu (8.3.2) leicht einzusehen.

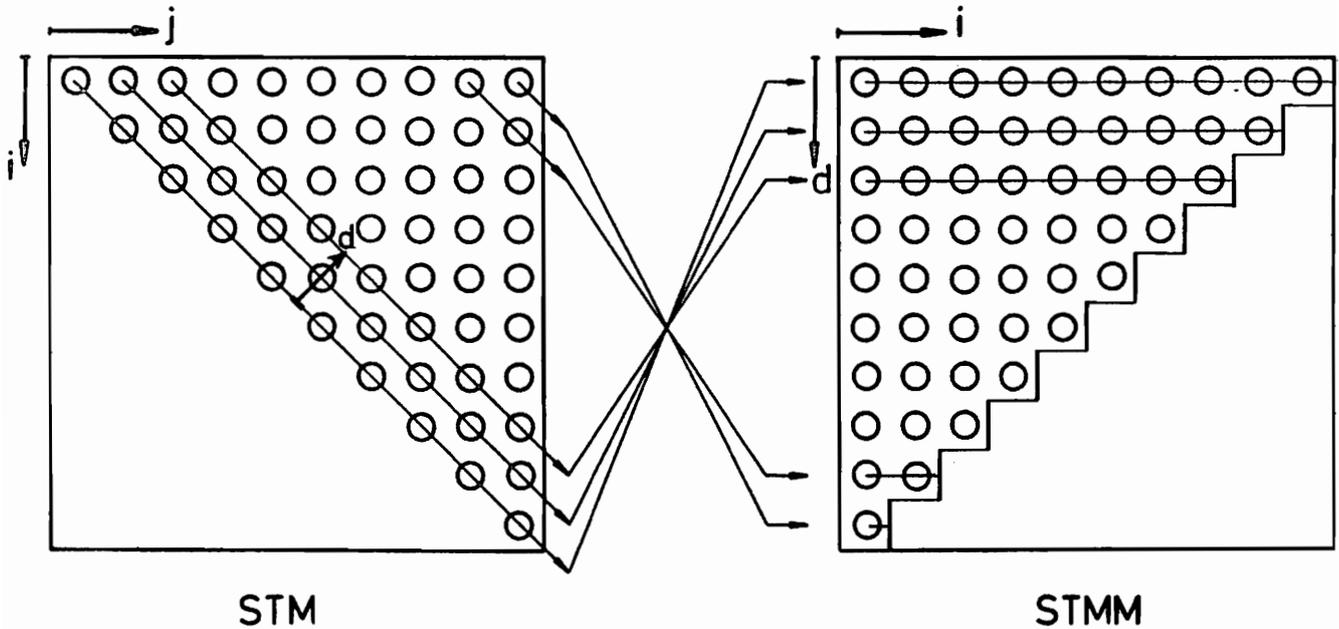


Bild 8.1: Berechnungsschema für die Steifigkeitsmatrix

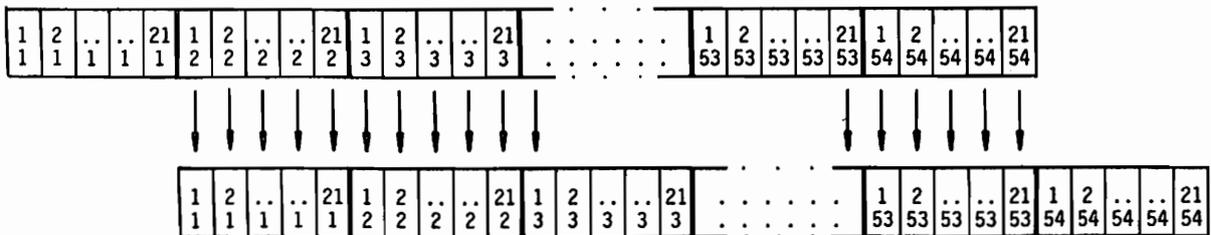


Bild 8.2: Berechnung der n-ten Nebendiagonalen, indem die Datenfelder um n\*21 gegeneinander verschoben werden

Die vektorielle Struktur in (8.3.6) kommt in dem zu (8.3.6) äquivalenten Programm deutlich zum Vorschein:

```
DO 2,D=1,54
DO 3,I=1,55-D
DO 3,G=1,21
3  STMM(G,I,D) = STMM(G,I,D) + A(G,I) * B(G,D-1+I)
2  CONTINUE
```

(8.3.7)

Die Schleife 3 ist vektorisierbar, da wir sie so programmiert haben, daß in STMM, A und B jeweils 21·(55-D) Daten in unmittelbarer Reihenfolge zur Bearbeitung anstehen. Jedoch ist die Steifigkeitsmatrix STMM nun nach der Zeile und der Diagonale nummeriert. Irgendwann muß STMM wieder in STM zurücktransformiert werden, am besten bei der numerischen Integration.

Die Vektorlänge schwankt also zwischen 21·54 = 1134 und 21, so daß die für die Rechenzeit bedeutsame mittlere Vektorlänge 577,5 beträgt (≅ 85 % der maximalen Rechengeschwindigkeit). Der entscheidende Vorteil gegenüber anderen vektoriellen Algorithmen besteht darin, daß keine Operationen zum Auf- oder Umbau der Datenfelder (Vektoren) nötig sind.

Die Berechnungen der zweiten Ableitungen in (8.3.3) lassen sich in zu (8.3.2) analoge Formeln überführen, z. B.

$$\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial q_i} \varphi_\alpha^\lambda \frac{\partial}{\partial q_j} \varphi_{\lambda\beta} + \frac{\partial}{\partial q_j} \varphi_\alpha^\lambda \frac{\partial}{\partial q_i} \varphi_{\lambda\beta} + \frac{\partial}{\partial q_i} \varphi_\alpha \frac{\partial}{\partial q_j} \varphi_\beta + \frac{\partial}{\partial q_j} \varphi_\alpha \frac{\partial}{\partial q_i} \varphi_\beta \right) .$$

(8.3.8)

Somit können wir das vorhin vorgestellte Konzept auch hierfür anwenden und kommen mit einem Minimum an Operationen zum Aufbau langer Vektoren aus kurzen Feldern aus.

Um nicht unnötig viel Speicherplatz zu verbrauchen, empfiehlt es sich, bereits die Elemente der gerade in der Berechnung befindlichen Diagonalen der Steifigkeitsmatrix numerisch zu integrieren. Das heißt, die numerische

Integration kommt unmittelbar vor das Ende der Schleife 2 im Programm-schema (8.3.7).

Die Berechnung einer Elementsteifigkeitsmatrix erfordert  $12,0 \cdot 10^6$  Rechenoperationen, die 193 ms (Millisekunden) Rechenzeit verbrauchen, 16 ms mehr, als durch das einfache Abzählen der Operationen erwartet wird. Diesen Mehrbedarf an Rechenzeit haben wir bereits im Zusammenhang mit dem 10. Programmierabschnitt zu erklären versucht. Trotzdem erreichen wir eine effektive Rechengeschwindigkeit von 68 % der Grenzrechengeschwindigkeit.

**12. Abschnitt: Übergabe** der Elementsteifigkeitsmatrix und des Elementrestkraftvektors an das FE-Programmsystem. Durch Überlagerung der einzelnen Elementsteifigkeitsmatrizen und -Restkraftvektoren entsteht die System- oder Gesamtsteifigkeitsmatrix sowie der System- oder Gesamtrestkraftvektor. Der Zeitbedarf hierfür ist minimal.

Insgesamt braucht die Elementroutine für ca.  $13,7 \cdot 10^6$  effektive Rechenoperationen 229 ms Zeit, dieses entspricht einer **effektiven Rechengeschwindigkeit** von 60 MFLOPS, 60 % der theoretischen Höchstgeschwindigkeit der Vektorpipelines.

Die neuesten Entwicklungen auf dem Gebiet der Vektorrechner wie die Cray 2 oder die ETA 10 -Familie relativieren den Erfolg des vorgestellten Konzepts ein wenig, denn sie erlauben schon bei Vektorlängen von ungefähr 50 zufriedenstellende Rechenleistungen. Für die Cray 2 ist 64 oder ein Vielfaches davon sogar die optimale Vektorlänge. Andererseits erlaubt der vorgeschlagene Algorithmus, einfachere Elemente, beispielsweise die häufig angewandten "bikubischen" Schalenelemente mit 3 Knoten, 27 Freiheitsgraden (keine 2. Ableitungen in den Knoten!) und 12 Intergrationsstützpunkten [18], so zu vektorisieren, daß sie mit einer kombinierten Vektorlänge von  $12 \cdot 27 = 324$  auch auf den neuesten Vektorrechnern deutlich effektiver rechnen können als bei der Verwendung nur einer einfachen Vektorlänge. Natürlich läßt sich das Konzept auch zur Vektorisierung der oft recht einfachen dreidimensionalen Elemente für die räumliche Strukturanalyse verwenden.

#### 8.4 Kompatible vektorielle Programmierung

Das Problem, vektorielle Software kompatibel für Vektorrechner verschiedener Hersteller zu entwickeln, ist bis heute nicht zufriedenstellend gelöst, denn es gibt noch keine genormten Erweiterungen zur expliziten Vektorisierung innerhalb der gängigen höheren Programmiersprachen.

Dennoch ist **implizite Vektorisierung** möglich, indem man die oft sehr strengen Regeln zur **Autovektorisierung** des Programms beim Compilieren einhält. Autovektorisieren beim Compilieren bedeutet, daß der Compiler vektorisierbare Anweisungen in Schleifen erkennt und diese dann auch entsprechend in den Maschinencode überträgt. Bei einigen autovektorisierenden Compilern sind die Regeln so eng gefaßt [37], daß man für fast jede Rechenanweisung möglichst eine eigene Schleife programmiert. So wird von den beiden äquivalenten Programmstücken

```
C   BEISPIEL 1
      DO 1,J=1,100
      K=J+20
1    C(J) = A(J) + B(K)
C
C
C
C   BEISPIEL 2
      DO 2,J=1,100
2    C(J) = A(J) + B(20+J)
```

(8.4.1)

nur das zweite Beispiel von allen autovektorisierenden Compilern als vektorisierbar erkannt, denn Schleife 1 im ersten Beispiel enthält die nicht vektorisierbare Anweisung  $K=J+20$ . Also ist die implizite Vektorisierung durch Einhalten der Regeln für die Autovektorisierbarkeit eines Programms zwar ein gangbarer Weg, kompatible vektorisierte Software herzustellen, andererseits führt sie zu unübersichtlichen Programmen, denen man zudem die Parallelität, d. h. die vorgesehene Vektorisierbarkeit, nicht sofort ansieht.

**Explizite Vektorisierung** ist auf zweierlei Weise möglich: zum einen durch Verwendung entsprechender anlagenbezogener Spracherweiterungen, die zu

```
PROGRAM PRVECOM (INPUT, VPRO, COLISTE, OUTPUT, TAPE1=INPUT, TAPE2=
:VPRO, TAPE3=COLISTE, TAPE4=OUTPUT)
C
C PROGRAMM ZUR VORUEBERSETZUNG (PRECOMPILATION) VON NORMGERECHTEN
C FORTRAN-SUBROUTINEN ZUR DARSTELLUNG VEKTORIELLER OPERATIONEN IN
C CYBER 200 FORTRAN.
C
C ANPASSUNGEN AN ANDERE VEKTORIELLE DARSTELLUNGEN SIND LEICHT MOEGlich.
C
C BERTHOLD SCHIECK      BOCHUM      FEBRUAR 1986
C
C DAZUGEHOEERIGE SUBROUTINEN:
C
C   CALL V (P1)      ( A, B, L )
C
C   CALL V (P1) (OP1) (P2)      ( A, B, C, L )
C
C UND
C
C   CALL V (P1) (OP1) (P2) (OP2) (P3)      ( A, B, C, D, L )
C
C MIT:
C   A = ERGEBNIS, B, C UND GGF. D = EINGABE-SKALARE ODER VEKTOREN,
C   L = VEKTORLAENGE,
C
C   (P1), (P2), (P3) = V FUER VEKTOR ODER 1 FUER SKALAR, JENACHDEM
C                   OB B, C, ODER D VEKTOREN ODER SKALARE SIND.
C
C   (OP1), (OP2), (OP3) = A, S, M, D ODER P , JENACHDEM OB DIE VERKNUEPFUNG
C                       +, -, *, / ODER ** IST.
C   A = ADITION +           S = SUBTRAKTION -
C   M = MULTIPLIKATION *     D = DIVISION /           P = POTENZIEREN **
C
C FUER DIE VEKTOREN AUF PARAMETERPOSITION MUSS DAS FELDELEMENT FUER DIE
C ERSTE VEKTORKOMPONENTE STEHEN, Z.B. A(1), NICHT EINFACH A !
C
C DIE ABARBEITUNG ERFOLGT GRUNDSAETZLICH VON LINKS NACH RECHTS.
C
C BEISPIELE:
C
C   CALL VVAVMV ( A(1), B(47,11), C(3), D(1), L )
C   IST AEQUIVALENT ZUR CYBER 200 FORTRAN-ANWEISUNG
C   A(1;L) = ( B(47,11;L) + C(3;L) ) * D(1;L)
C
C   CALL VVS1DV ( A(1), B(1), C, D(1), L )
C   IST AEQUIVALENT ZU
C   A(1;L) = ( B(1;L) - C ) / D(1;L)
C   C IST EIN SKALAR, ES HANDELT SICH ALSO UM EINE LINKED OPERATION
C
C   CALL VVP1 ( A(1), B(1), C, L )
C   IST AEQUIVALENT ZU
C   A(1;L) = B(1;L) ** C
C
C VEKTORIELLE INTRINSICS, DIE AUF SKALARE INTRINSICS ZURUECKZUFUEHREN
C SIND, WIE Z.B. SIN, COS, TAN, ABS, SQRT, U.S.W., ENTSPRECHEND DEN
C CYBER 200 ROUTINEN VSIN VCOS, VTAN, VABS, U.S.W. SOWIE DIEJENIGEN
C QB-FUNCTIONS, DIE KEINE BITVEKTOREN BENUTZEN, DAS SIND ALLE QBS- UND
C DIE QBV-FUNCTIONS INTL, GATHP, GATHR, REV, SCATP, SCATR, ADJM, AVG,
C AVGD, DELT, POLY, EQI, GEI, LTI UND NEI, KOENNEN UMGESATZT WERDEN.
C
C REGELN :
C CALL V8... FUER SIN COS TAN U.S.W. SOWIE FUER QBV-FUNCTIONS,
C CALL S8... FUER DIE QBS-FUNCTIONS.
C DIE PARAMETERLISTE WIRD NACH DER REGEL >> ZUERST DAS ERGEBNIS BZW. DER
C ERGEBNISVEKTOR, DANN DIE PARAMETER, ZUM SCHLUSS DIE VEKTORLAENGE <<
C GEBILDET, WOBEI FUER VEKTOREN STETS DAS 1. FELDELEMENT, Z.B. A(1), ANZU-
C GEBEN IST, ANALOG ZU DEN OBEN BESCHRIEBENEN ROUTINEN.
C DIE NAMEN UND LEISTUNGEN SOWIE DIE BENOETIGTEN PARAMETER NEBEN DEM
C ERGEBNIS UND DER VEKTORLAENGE KOENNEN DEM CYBER 205 -HANDBUCH ENTNOMMEN
C WERDEN.
C
C BEISPIELE:
C CALL VBSIN ( ERG(1) , WINKEL(1) , LAENGE )
C   STATT   ERG(1;LAENGE) = VSIN ( WINKEL(1;LAENGE) ; LAENGE )
C CALL VBGATHP ( ERG(1) , ARGUMT(1) , I1 , I2 , LAENGE )
C   STATT:   ERG(1;LAENGE) = QBVGATHP ( ARGMT(1;LAENGE) , I1 , I2 ; LAENGE
C )
C CALL SBDOT ( ERG , VECT1(1) , VECT2(1) , LAENGE )
C   STATT   ERG = QBSDOT ( VECT1(1;LAENGE) , VECT2(1;LAENGE) )
C
C
C HINWEIS: BITVEKTOREN UND ALLE DAMIT VERBUNDENEN KONSTRUKTIONEN WERDEN
C ***** NICHT ERZEUGT, DA SIE IN NORMGEMAESSEN FORTRAN UND SOMIT IM
C QUELLPROGRAMM NICHT REALISIERT WERDEN KOENNEN.
```

nicht portabler Software führen; zum anderen, indem man eine Unterprogramm-bibliothek benutzt, die alle benötigten Rechenoperationen in Form von Subroutinen enthält, die ihrerseits autovektorisierbar sind.

Der zusätzliche Bedarf an Rechenzeit für die nun erforderlichen Unterprogrammaufrufe ist auf einem konventionellen "skalaren" Rechner relativ gering (1 % bis 10 %), er überschreitet jedoch an einem Vektorrechner leicht 50 % der eigentlich erforderlichen Rechenzeit. Außerdem ist ein solches Programm sehr unübersichtlich, da die Rechenoperationen immer in den Namen der aufgerufenen Unterprogramme versteckt sind. Diese beiden Mängel lassen sich durch ein Übersetzungsprogramm beheben, das die Subroutine-"CALL's" in äquivalente Vektoranweisungen aus der Sprach-erweiterung des vorgesehenen Rechners umsetzt. Weil entsprechende Software nicht angeboten wird, mußte sie erst hergestellt werden.

Da einerseits die Erstellung einer "Vektorunterprogramm-bibliothek" ziemlich einfach ist, andererseits das Übersetzungsprogramm (das bei der Übersetzung der Vektorsubroutinen auch deren Syntax auf mögliche Fehler überprüft) nicht zum Thema dieser Arbeit gehört, wird auf eine Beschreibung sowohl der Vektorbibliothek als auch des Übersetzungsprogramms verzichtet. Die Namensgebung der Vektorroutinen und die Dienstleistungen des Übersetzungsprogramms können dem nebenstehenden Ausschnitt aus dem Programmkopf entnommen werden.

Das Schalenelement ist mit Hilfe der oben aufgeführten Hilfen innerhalb des FORTRAN 77 -Sprachschatzes explizit vektorisiert programmiert und in das FORTRAN 200 der Cyber 205 übersetzt worden. Somit konnten einzelne Programmteile auf dem normalen Rechner des Rechenzentrums entwickelt und geprüft werden, bevor sie in die Elementroutine eingebaut wurden.

Die Rechenzeiten für ein typisches Beispiel werden noch im Kapitel 8.6 ausführlich besprochen. Die dort ermittelte Steigerung der Rechengeschwindigkeit für die Elementroutine beträgt Faktor 23.

### 8.5 Nichtlineare FEM mit MESY

Unter dem Begriff MESY (Mechanik der Systeme) ist sowohl ein allgemeines Konzept zur Behandlung strukturmechanischer Aufgabenstellungen als auch der Gruppenname einer Reihe modularer Programmsysteme zu verstehen. Dieses Konzept und die dazugehörigen Programmbibliotheken werden seit 1966 von SCHRADER et al. entwickelt [58], nichtlineare Steuerroutinen ergänzen seit 1985 das Programmsystem [11]. Der Grundgedanke dieses Konzeptes ist, ein Problem durch befehlsartige Aufrufe von Subroutinen, den "MESY-Befehlen", problemorientiert zu formulieren. Der Benutzer schreibt hierzu ein Hauptprogramm, im MESY-Kontext als "Individualprogramm" bezeichnet, in dem er den Bearbeitungsvorgang durch Aufruf entsprechender MESY-Befehle, die als Unterprogramme in einer Programmbibliothek vorliegen, steuert.

Im Rahmen dieser Vorgehensweise wird nun statt eines Elementes aus der MESY-Bibliothek das eigene Schalenelement aufgerufen und dessen Resultate, die Elementsteifigkeitsmatrix und der Elementrestkraftvektor durch entsprechende MESY-Befehle an das MESY-System übergeben.

Die in [11] beschriebenen Befehle zur Steuerung nichtlinearer Probleme ermöglichen die automatische Umschaltung zwischen Last- und Verschiebungssteuerung sowie eine automatische Schrittweitenregelung der Last- oder Verschiebungsinckremente. Anstelle der Last- oder Verschiebungssteuerung steht auch eine Riks-Wempner-konstante-Bogenlängen-Methode zur Verfügung [11 und dort zitierte Literatur]. Als Konvergenzkriterium haben wir verschiedene lokale und globale Normen zur Auswahl, die sowohl auf die Verschiebungszuwächse als auch auf die Ungleichgewichtskräfte angewandt werden können.

Da der verwendete Vektorrechner Control Data Cyber 205 nur im "batch"-Betrieb arbeitet, also interaktive Eingriffe in den Programmablauf nicht zuläßt, ist es sehr wichtig, daß die oben aufgeführten Steuerroutinen selbständig arbeiten und "entscheiden". Für "Unglücksfälle" ist das Programm restartfähig.

## 8.6 Effizienz der Vektorisierung auf Elementebene

Im Kapitel 8.3 wird die Vektorisierung der Elementroutine vorgestellt. Im Gegensatz dazu wurde das Finite Elemente-Programmsystem MESY (Version MECMESY, die in [11] beschriebene Erweiterung zu MESY3) unverändert, also in nicht vektorisierter Form, übernommen. Bemerkenswert ist hierbei, daß der autovektorisierende Compiler nahezu keine vektorisierbaren Anweisungen finden konnte. Damit wird die Erfahrung bestätigt, nach der parallele (vektorielle) Rechnerarchitekturen sich nur dann sinnvoll und effektiv nutzen lassen, wenn der Programmierer das explizit vorsieht. Dieses unterstreicht die Bedeutung der im Kapitel 8.4 vorgestellten Gedanken zur Erstellung vektorisierbarer Software.

Es stellt jedoch keinen entscheidenden Nachteil dar, daß nur die Elementroutine die besonderen Eigenschaften des Vektorrechners ausnutzt, während der Rest des FE-Programms, insbesondere der Gleichungslöser, "skalar" abläuft, denn ca. 90 % der Rechenzeit wird für die Elemente aufgewandt.

Die für die Beispiele des Kapitels 9 typische Diskretisierung umfaßt unter Berücksichtigung vorhandener Symmetrien 25 Knotenpunkte mit 32 Elementen. Das System hat somit vor der Anpassung an die Randbedingungen 450 Freiheitsgrade, was bei MESY auch der Anzahl der Systemgleichungen entspricht. Die einfache Bandbreite im symmetrischen Gleichungssystem beträgt 108, inklusive der Hauptdiagonalen.

Der 32-fache Aufruf der Elementroutine benötigt bei der aufwendigsten Theorievariante  $32 \cdot 0,225 = 7,2$  Sekunden Rechenzeit, der Aufbau der Systemgleichungen 0,14 Sekunden und die Lösung des Gleichungssystems 0,60 Sekunden. Somit beträgt der Anteil der vektorisierten Elementroutine an der Rechenzeit je Gleichgewichtsiteration 91 %. Unter Berücksichtigung der Zeiten für die Ausgabe der Rechenergebnisse braucht die Elementroutine bei durchschnittlich 3 Iterationen je Lastschritt immer noch etwa 85 % der Gesamtrechenzeit. Daraus ergibt sich, daß man durch Vektorisieren des restlichen FE-Programms noch maximal 15 bis 17 % Rechenzeit einsparen könnte, wobei der Aufwand der dafür erforderlichen, völlig neuen Programmierung vieler wichtiger Routinen in keinem vertretbaren Verhältnis zum möglichen Erfolg stände.

Die in Kapitel 8.4 beschriebene Programmieretechnik mit Hilfe der "Vektor-subroutinen" erlaubt es, die Rechenzeit für ein und dasselbe Programm sowohl bei Ausnutzung der Architektur des Vektorrechners als auch bei rein "skalärer" Berechnung auf derselben Anlage miteinander zu vergleichen. In der ersten Zeile der folgenden Tabelle stehen die Zeiten für die in das Vektorrechner-FORTRAN 200 übersetzte Version des Schalenelements, in der zweiten Zeile die Zeiten für die FORTRAN 77 -Version mit den Aufrufen der Routinen aus der "Vektorbibliothek" in vektorisierter Form und in der letzten Zeile die Zeiten für die Berechnung mit nicht vektorisierten Routinen aus der "Vektorbibliothek".

Version	Zeit für eine Elementroutine	Zeit für eine Laststufe 32 Elemente, 2 Iterationen
FORTRAN 200	0.225s	17s
Vektorroutinen vektoriert	0.350s	26s
Vektorroutinen nicht vektoriert	5.30s	364s

Tabelle (8.6.1)

Aus den Werten der Tabelle ermitteln wir eine Steigerung der Rechengeschwindigkeit in der Elementroutine um Faktor 23. Dem entspricht eine 21-fache Rechengeschwindigkeit für das gesamte Programm.

Bemerkenswert ist ferner der deutliche Unterschied in den Rechenzeiten der beiden vektorisierten Formen des Schalenelements. Der zusätzliche Zeitbedarf der vektorisierten, aber nicht in FORTRAN 200 übersetzten Version wird für die Unterprogrammaufrufe verbraucht (siehe Kapitel 8.4).

## 9. BEISPIELE FÜR SCHALEN MIT GROBEN DEHNUNGEN

Durch Nachrechnen einiger Beispiele aus der Literatur überprüfen wir die hergeleitete Schalentheorie auf ihre praktische Anwendbarkeit und zeigen dabei auch die Grenzen ihrer Gültigkeit auf. Vergleiche verschiedener Theorievarianten helfen, die Bedeutung der neuen Schalentheorie einzuschätzen. Ergänzend hierzu werden bisher noch nicht veröffentlichte Beispiele vorgestellt.

### 9.1 Theorievarianten

In den Beispielen werden drei Theorievarianten der Schalentheorie großer Dehnungen getestet. Die "vollständige" Approximation (4.3.15) der Verformungsenergiedichte, die zu den vollständigen Gleichungen aus Kapitel 4.5 führt, wird in den Beispielen mit "MLU" bezeichnet. Die vereinfachte Approximation (4.3.17), die durch das Weglassen der durchgehend unterstrichenen Terme in den Beziehungen des Kapitels 4.5 deutlich Rechenzeit einspart, wird "MLUR" genannt (siehe Tabelle 9.1). Eine Beschränkung auf moderate Dehnungen in Verbindung mit einer Begrenzung der Rotationen auf "semi-finit/moderat (small)" (5.3.14) erlaubt, im  $\kappa_{\alpha\beta}$  (3.4.8) für  $\lambda_3 \bar{b}_{\alpha\beta}$  die vereinfachte Beziehung (5.3.20) einzusetzen. In Verbindung mit der vereinfachten Approximation (4.3.17) ergibt sich dann die mit "MLUR" bezeichnete Theorievariante. Diese Theorien sind energiekonsistent.

Als Materialgesetz wird Mooney-Rivlin-Material verwendet, das als Sonderfall auch das Neo-Hookean-Material enthält (Kapitel 7). Falls ein linear elastisches Materialgesetz eingesetzt wird, werden die Theorien mit "L..." statt mit "M..." als ersten Buchstaben gekennzeichnet, z.B. "LLU" statt "MLU".

Durch zusätzliches Auslassen auch der unterbrochen unterstrichenen Terme in den Beziehungen des Kapitels 4.5 erhalten wir eine nicht energiekonsistente Theorie. Die zusätzlich entfallenden Terme beschreiben den Einfluß der Nichtlinearitäten des Werkstoffgesetzes. Es wird nur noch mit einer "Normalkraft" aus Membrandehnungen ohne Berücksichtigung des Einflusses der Biegeverformung auf die Normalkraft und mit einem aktualisierten Elastizitätstensor zur Bestimmung des "Biegemomentes" aus den

Biegedehnungen gerechnet. Man kann diese Theorievariante auch aus der klassischen Schalentheorie (4.1.8) erhalten, indem man in den Variationen von (4.1.8)  $H\gamma$  durch die aktuelle "Membrankraft"  $N = \frac{\partial W}{\partial \gamma}$  ersetzt und ansonsten statt des linearen Elastizitätstensors  $H$  den "aktuellen Elastizitätstensor"  $\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \otimes \partial \gamma}$  verwendet. Daher läßt sich diese Variante als "Theorie kleiner Dehnungen angepaßt an Materialgesetze großer Dehnungen", im folgenden "MSU" genannt, bezeichnen. Obwohl eine solche Approximation zunächst vernünftig zu sein scheint, fehlt jedoch eine mechanische Grundlage, wodurch die gegenüber den energiekonsistenten Theorien deutlich abweichenden Ergebnisse begründet sind.

Zum Vergleich wurden auch Berechnungen mit "klassischen" Kirchhoff-Love-Schalentheorien für kleine Dehnungen durchgeführt [24, 42, 45, 49]. Die Theorie für unbegrenzte Rotationen wird nachfolgend "LSU" genannt und die für große Rotationen "LSL". Die lineare Schalentheorie heißt in dieser Bezeichnungsweise dann "LSS".

Nachfolgend sind die genannten Theorievarianten nochmals aufgeführt und die Rechenzeit für die Elementroutine angegeben:

- MLU = Mooney material, large strains, unrestricted rotations, 0.225s
- MLUR = Mooney material, large strains, unrestricted rotations, reduced theory, 0.149 s
- MMLR = Mooney material, moderate strains, large/moderate(small) rotations, reduced theory, 0.132s
- LLU = linear material, large strains, unrestricted rotations, 0.223s
- MSU = Mooney material, small strains, unrestricted rotations, 0.130s
- LSU = linear material, small strains, unrestricted rotations,  
= klassische Schalentheorie finiter Rotationen, 0.130s
- LSL = linear material, small strains, large/small rotations  
= klassische Schalentheorie großer Rotationen, 0.113s
- LSS = linear material, small strains, small rotations  
= klassische lineare Schalentheorie

**Tabelle 9.1**

Der erste Buchstabe steht für das Materialgesetz, der zweite für die Größe der Dehnungen, der dritte für die Rotationen und ggf. R als vierter Buchstabe für die reduzierte Theorie großer (oder moderater) Dehnungen.

Auffällig ist der deutliche Zeitunterschied von 30 % bzw. 50 % zwischen den Varianten MLU und MLUR, der hauptsächlich darauf beruht, daß der komplizierte Ausdruck (4.4.21) für  $v$  nicht mehr berechnet werden muß. Da beide Theorienvarianten, wie wir an Hand der Beispiele noch sehen werden, praktisch gleiche Ergebnisse liefern, ist MLUR die interessanteste Theorie für Schalen großer Dehnungen. Deutlich geringer ist die Zeitersparnis mit 10 % bis 15 % beim Übergang von einer Theorie unbegrenzter Rotationen auf große/moderate(kleine) Rotationen (5.3.14, 5.2.7). Obwohl das Programm auch die klassische lineare Schalentheorie (LSS) und die Membrantheorie enthält, werden hierfür keine Rechenzeiten genannt, da diese beiden Theorien nicht rechenzeitoptimal, sondern nur zu Testzwecken programmiert sind.

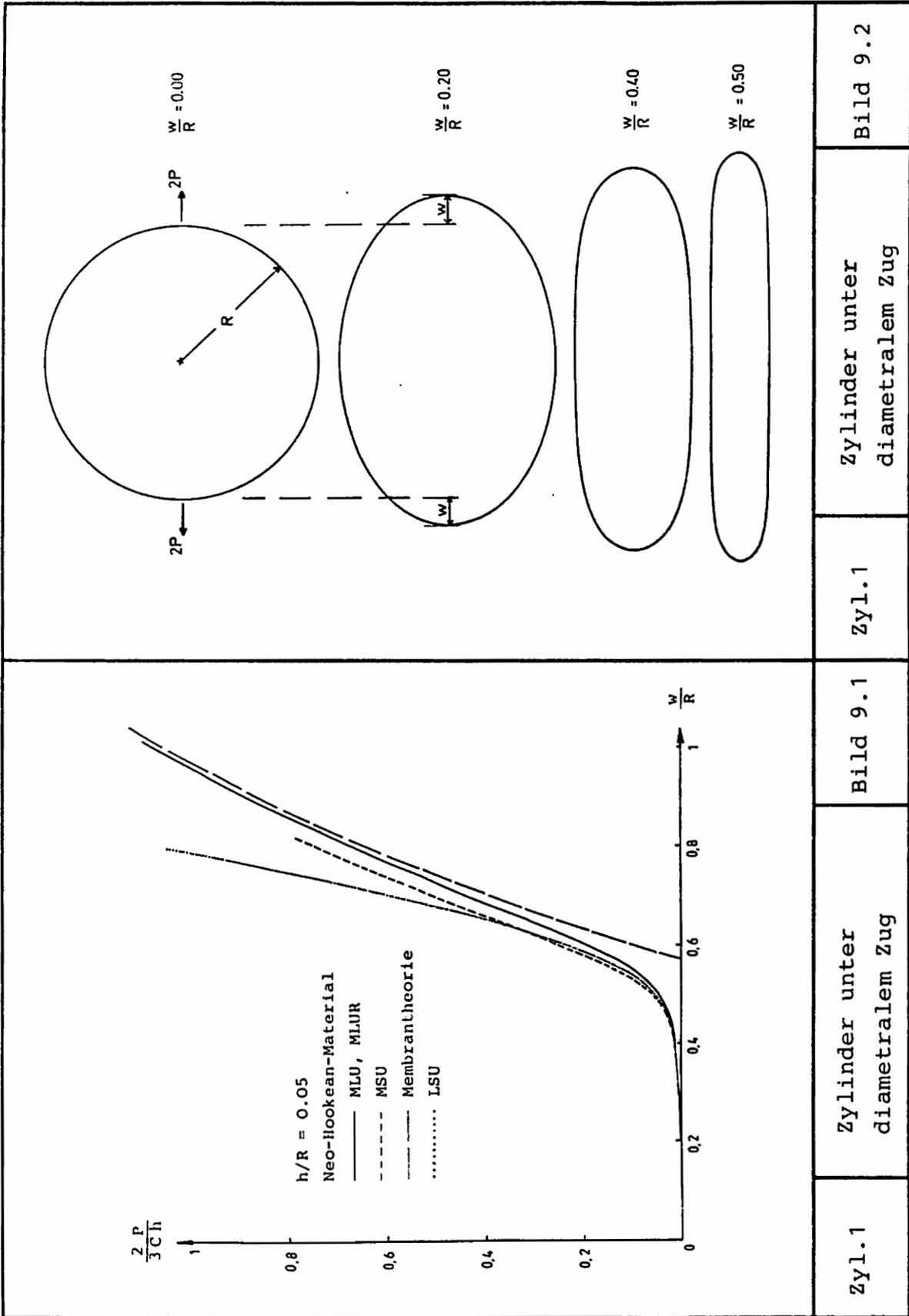
## 9.2 Testbeispiele

Bisher gibt es in der Literatur nur wenige Berechnungsbeispiele für Schalen aus Gummi, in denen große Dehnungen sowohl aus der Membrantragwirkung als auch aus dem Biegetragverhalten gleichzeitig auftreten. Häufig verletzen die Beispiele die Dünnhheitshypothese (4.2.5) erheblich, so daß sie als Testbeispiel für die in dieser Arbeit hergeleiteten Approximation (4.3.15) und die daraus abgeleiteten weiteren Vereinfachungen nicht geeignet sind. Das gilt auch für das Beispiel in [10]. Andere Beispiele unterscheiden sich in ihrer Tragwirkung nur unwesentlich von einer Membran, sobald die Dehnungen größer werden [20, 71].

Im folgenden werden drei Beispiele vorgestellt, für die das oben genannte nicht oder nur bedingt gilt.

### 9.2.1 Zylinderschale unter diametralem Zug

In [30, 31] wird die im Bild 9.2 dargestellte durch zwei diametral gegenüberstehenden Steckenlasten belastete (unendlich lange) Zylinderschale vorgestellt. In diesem Beispiel treten in der Nähe der Lastangriffsstellen große Dehnungen sowohl aus Biegung als auch aus der Membrankraft auf. Bei einer Verschiebung  $w$  des Kraftangriffspunktes um  $\frac{w}{R} = 0,50$  betragen im Kraftangriffspunkt die Dehnungen der Bezugsfläche + 5 % und die Biegedehnungen + 25 %. Bis auf geringe Abweichungen, stimmen die Ergebnisse mit [31] überein.



Zyl.1	Zylinder unter diametralem Zug	Bild 9.1	Zyl.1	Zylinder unter diametralem Zug	Bild 9.2
-------	--------------------------------	----------	-------	--------------------------------	----------

Bei einer größeren Verschiebung als  $\frac{w}{R} > 0,40$  entstehen deutliche Unterschiede zur vereinfachten, nicht energiekonsistenten Theorie MSU, während die konsistente reduzierte Theorie MLUR dieselben Ergebnisse wie die vollständige Theorie liefert. Die Theorie MSU ergibt bei  $\frac{w}{R} = 0,50$  am Kraftangriffspunkt völlig falsche Dehnungen, nämlich - 3,3 % für die Membrandehnung (anderes Vorzeichen!) und  $\pm 20$  % für die Biegedehnung. Dasselbe gilt für die klassische Schalentheorie.

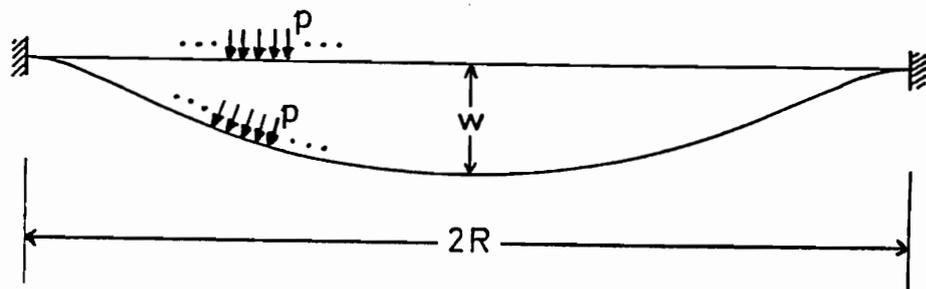
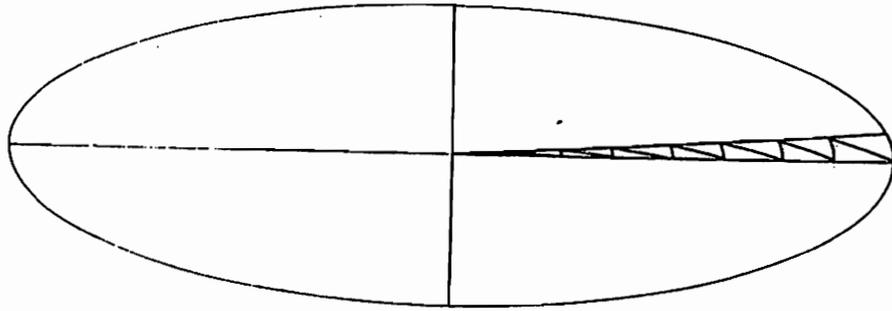
Dieses Beispiel ist als Test für Schalentheorien großer Dehnungen mit einer Normalenhypothese nur bedingt geeignet, denn in der Umgebung des Kraftangriffspunktes liegt bereits bei einer Verformung  $\frac{w}{R} = 0,50$  die Krümmung mit  $h/\bar{R} \approx \frac{1}{2}$  außerhalb der zulässigen Grenzen. Auch das Verhältnis  $\frac{h}{L}$  mit L als charakteristische Länge (A3.4.5, 4.2.5) nimmt mit zunehmender Verformung  $\frac{w}{R} > 0,50$  immer kleinere und damit letztendlich unzulässige Werte an.

### 9.2.2 eingespannte Kreisplatte unter Drucklast

In [71] werden Kreisplatten aus Neo-Hookean-Material unter Drucklast bei verschiedenen Lagerungen (unverschiebliche frei drehbare Auflagerung und Einspannung) des äußeren Randes untersucht. Ein Vergleich des Ergebnisses für die unverschiebliche aber frei drehbare Auflagerung (= "Membranlagerung") mit der Membranlösung ergibt, daß, sobald die Dehnungen die 1%-Grenze deutlich überschreiten, die Platte sich durch ein Membran gut beschreiben läßt. Dasselbe erhalten wir beim Nachrechnen des Beispiels aus [20]. Der Übergang vom Biegetragverhalten zum Membrantragverhalten erfolgt, bevor die Dehnungen groß werden.

Anders liegen die Verhältnisse bei der eingespannten Kreisplatte. Mit zunehmendem Abstand vom Rand findet der Übergang vom Biegetragverhalten der Randzone zum Membrantragverhalten des mittleren Bereichs statt. Bei einem Verhältnis  $\frac{u}{R} = 0,10$  liegt der Momentennullpunkt in einem Abstand von ungefähr  $\frac{R}{2}$  vom Rand, bei einer Deformation  $\frac{w}{R} = 0,25$  liegt er bei ca.  $\frac{R}{4}$ . Die Membrandehnungen betragen an der Einspannstelle bei einer Deformation von  $\frac{w}{R} = 0,20$  etwa + 3,7 % und die Biegedehnungen  $\pm 15$  %.

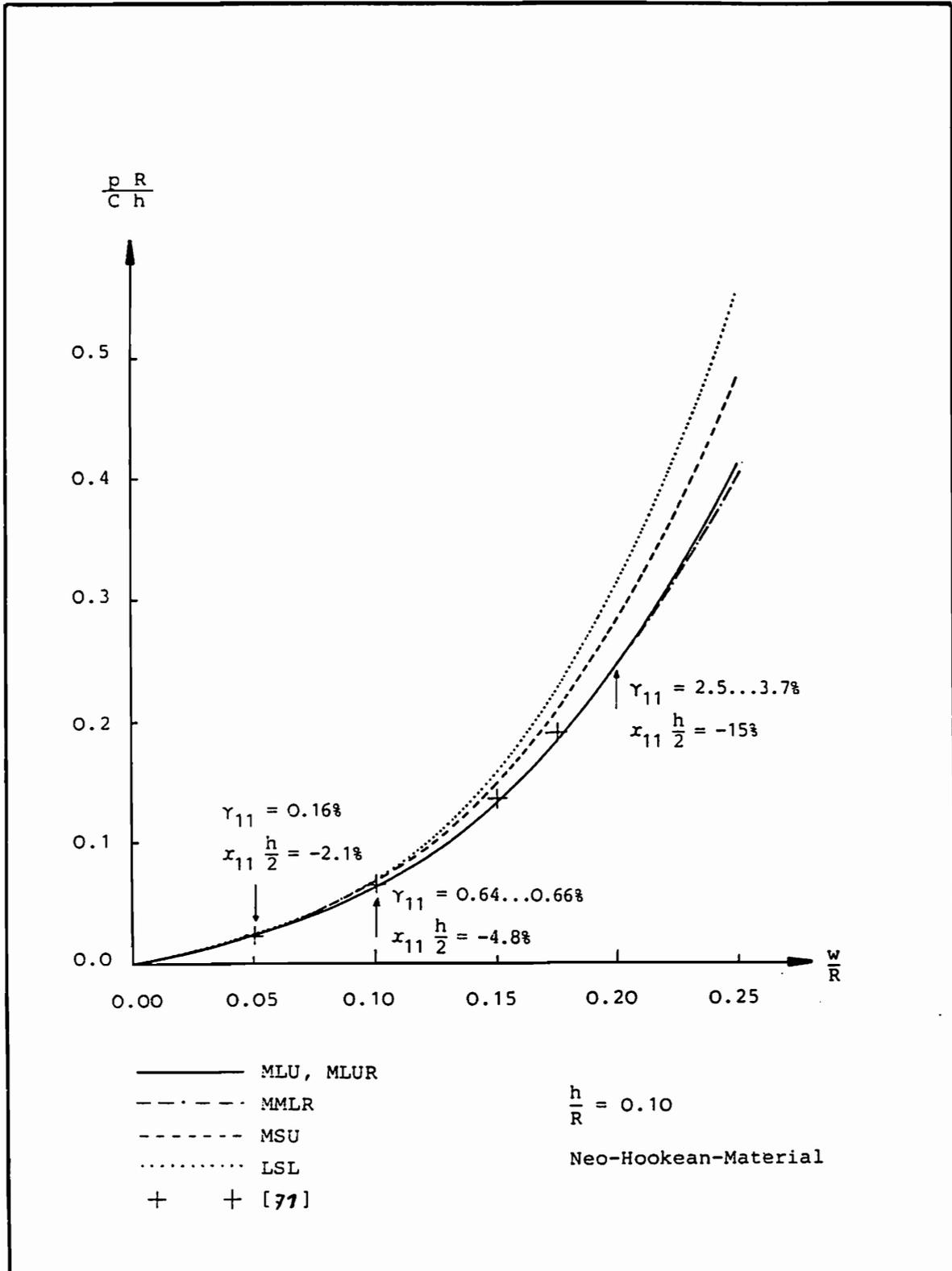
Die in [71] angegebene Last-Verschiebungskurve wurde unter einigen verein-



Platte

eingespannte Kreisplatte

Bild 9.3



Platte	eingespannte Kreisplatte	Bild 9.4
--------	--------------------------	----------

fachenden Annahmen ermittelt, da nicht eine möglichst genaue Lösung, sondern das prinzipielle mechanische Verhalten Gegenstand der Untersuchung war. Daher sind die Verformungen in [71] etwas kleiner als bei einer hinreichend fein diskretisierten FEM-Lösung. Auffällig ist, daß sich bereits bei Membrandehnungen ab 0,2 % Unterschiede zwischen der klassischen Schalentheorie großer Rotationen (LSL) und der Schalentheorie großer Dehnungen (MLU) zeigen. Die reduzierte Theorie MLUR führt zu denselben Ergebnissen wie MLU, während die nicht energiekonsistente Approximation MSU zwischen MLU und LSL liegt. Die Theorievariante für moderate Dehnungen und große/moderate Rotationen MMLR ergibt ab  $\frac{w}{R} = 0,20$  ( $\gamma_{11} = 3,7$  % am Rand) geringfügig andere Resultate als MLU und MLUR.

### 9.2.3 Kugel unter Außendruck

Die Ermittlung des Verzweigungspunktes in der Last-Verformungsbeziehung einer Hohlkugel unter hydrostatischem Außendruck ist ein sehr empfindlicher Test für Schalentheorien. Geringe "Defekte" in der Theorie führen zu deutlich sichtbaren Abweichungen der Ergebnisse vom Sollwert. Die Berechnungen aus [19] und [25] dienen uns als Referenzlösung, wobei zu berücksichtigen ist, daß [19] die Einflüsse einer transversalen Schubverformung berücksichtigt.

[25] gibt für den Fall kleiner Dehnungen eine kritische Last von

$$P_{kr} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{R}\right)^2, \quad (9.2.3.1)$$

$E$  = E-Modul,  $\nu$  = Querdehnzahl,  
 $h$  = Schalendicke,  $R$  = Radius der Kugel,

an. Hieraus berechnet sich für inkompressibles Material ( $\nu = 0,5$ ) und kleine Dehnungen die kritische Dehnung zu

$$\epsilon_{kr} = -\frac{1}{3} \frac{h}{R}. \quad (9.2.3.2)$$

Diese Werte wurden für linear elastisches Material und bei Annahme kleiner Dehnungen bei hinreichend feiner Diskretisierung wegen der großen Zahl der Halbwellen des Deformationsmusters (2 bis 3 Elemente je Halbwelle) mit

einer Genauigkeit von ca. 0,5 % erreicht. Auch Mooney-Material und die Annahme großer Dehnungen (Theorie MLU) führt nicht zu wesentlich anderen Resultaten; der Unterschied ergibt z. B. bei einer relativen Schalendicke von  $\frac{h}{R} = 0,005 = 0,5 \%$  eine Zunahme der kritischen Last von ca. 2 %.

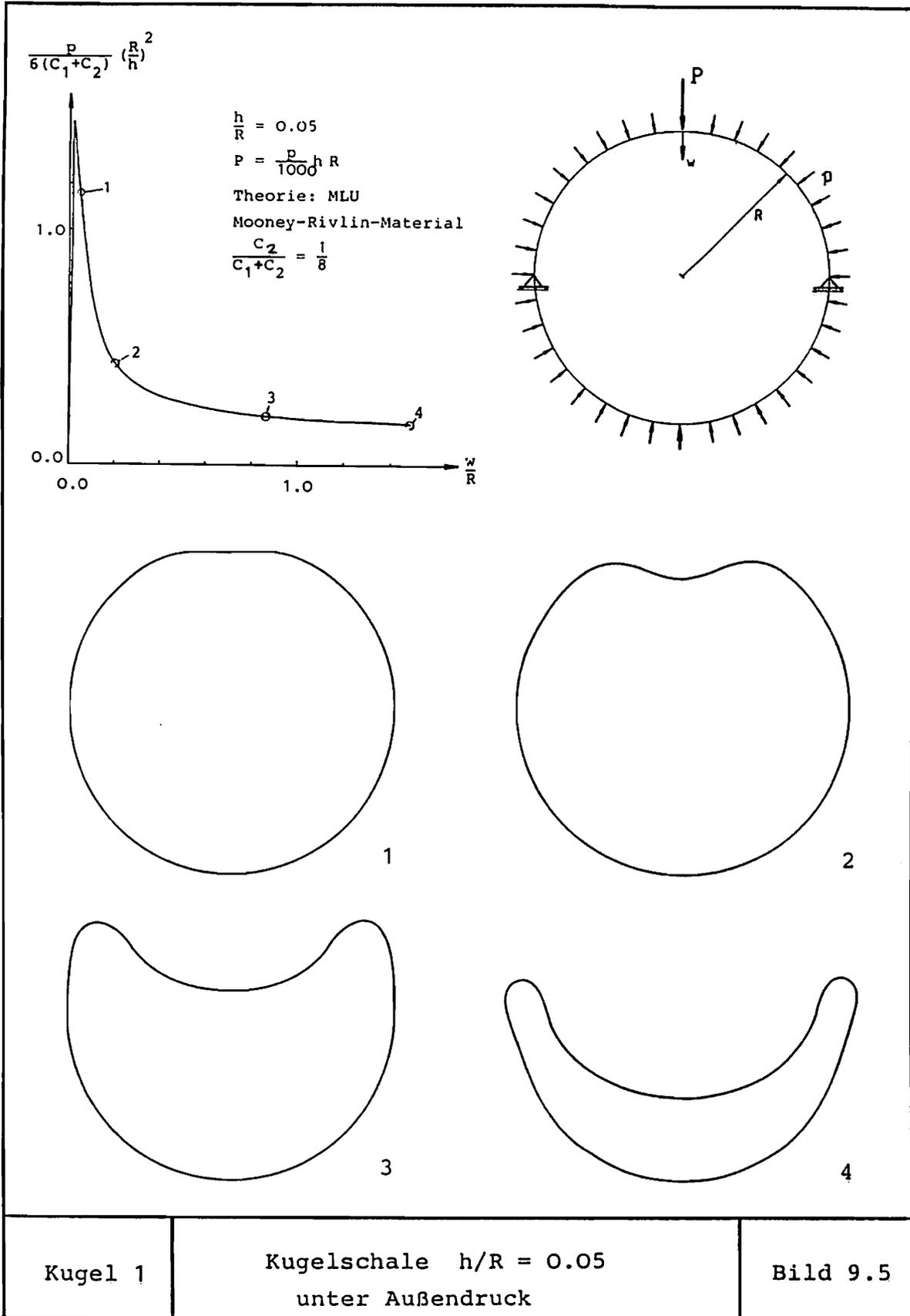
Für den Bereich großer Dehnungen sind in [19] für unterschiedlich dicke "Gummibälle" in Verbindung mit verschiedenen Werkstoffgesetzen die kritischen Dehnungen mit einer absoluten Genauigkeit von  $\pm 0,05$  Dehnungs-% gegeben. Um die Ergebnisse mit den eigenen Berechnungen vergleichen zu können, muß zwischen den in [19] gegebenen Werten interpoliert werden. Als Werkstoffgesetz wurde Neo-Hookean-Material ausgewählt. In der folgenden Tabelle sind die kritischen Dehnungen auf der Außenfläche der Kugel und die Anzahl der Wellen des Deformationsmusters für zwei Verhältnisse  $\frac{h}{R}$  gegenübergestellt.

$\frac{h}{R}$	$-\epsilon_{kr}$ [19]	$-\epsilon_{kr}$ eigene Rechnung	Wellen	$\frac{h}{L}$
5 %	1.5 % (bis 1.6 %)	1.59 %	7	0.11
10 %	2.8 % (2.76 % ?)	3.00 %	5	0.16

**Tabelle 9.2.1:** Kritische Dehnungen der Außenhaut einer Kugel

Das Verformungsmuster ist rotationssymmetrisch. Aus der Anzahl der Wellen des Beulmusters läßt sich das Verhältnis  $\frac{h}{L}$  berechnen, wobei für L die halbe Wellenlänge des Verformungsmusters einzusetzen ist. Der Vergleich der Differenzen zwischen den Ergebnissen mit den jeweiligen Verhältnissen  $\frac{h}{L}$  bestätigt die aus dem Verhalten eines schubweichen Knickstab [54] abgeleitete Vermutung, der zufolge die Normalenhypothese einen relativen Fehler der Größe  $\approx 2,5 \left(\frac{h}{L}\right)^2$  verursacht. Somit ist die Gültigkeit einer Schalentheorie mit Normalenhypothese auf  $\frac{h}{L} \lesssim 0,10$  begrenzt, wenn ein Fehler von ca. 3 % als noch akzeptabel angesehen wird.

Um das Beul- und Nachbeulverhalten einer Gummikugel zu demonstrieren, wird ein Gummiball mit  $\frac{h}{R} = 0,05$  durch hydrostatischen Druck p und durch eine Einzellast  $P = \frac{p}{1000} h R$  am "Nordpol" belastet. Am "Äquator" ist der Ball seitlich verschieblich gelagert, so als wäre er mittels einiger Fäden

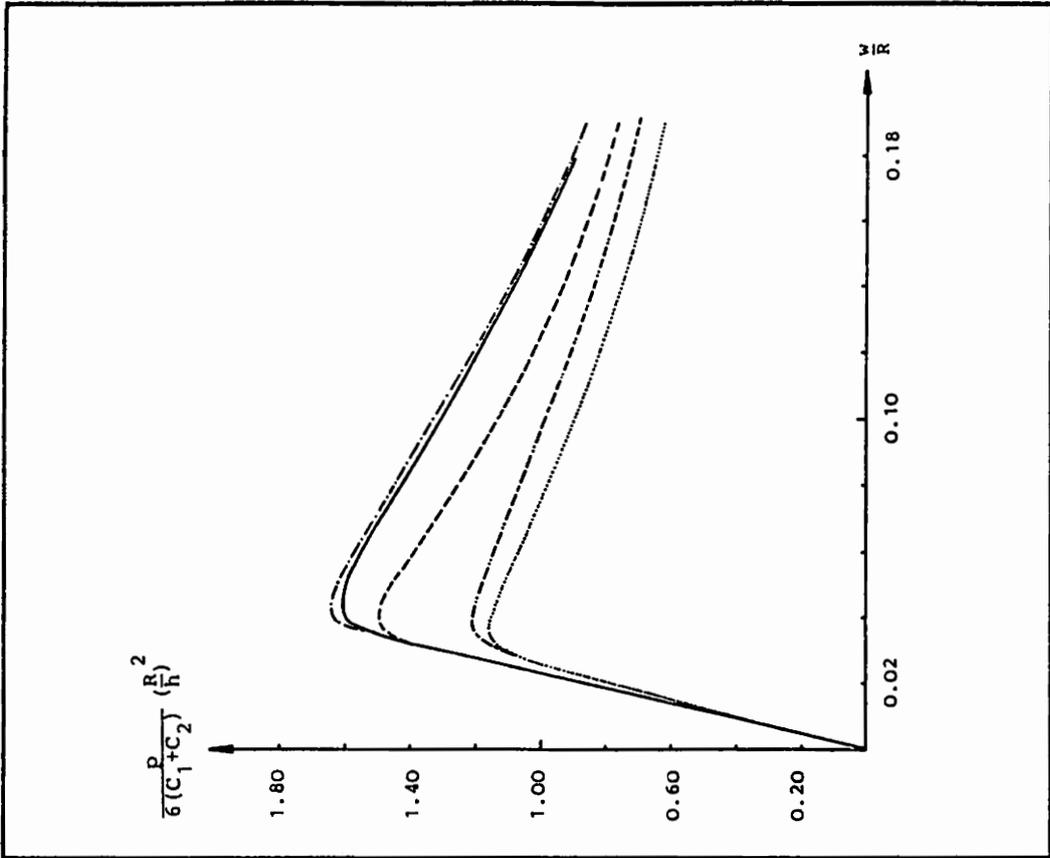
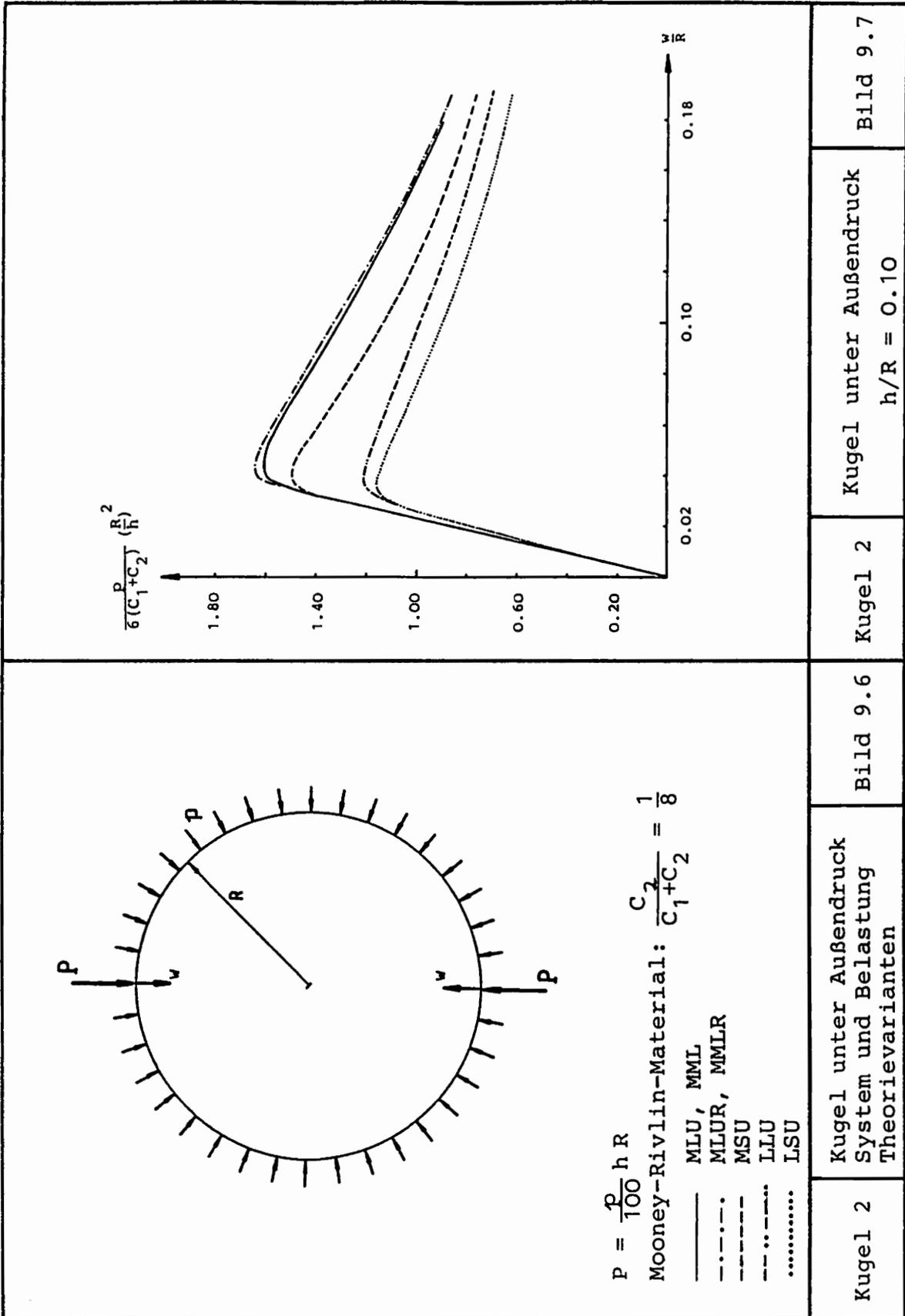


aufgehängt. Als Werkstoffgesetz wird Mooney-Rivlin-Material mit  $c_2/(c_1+c_2) = \frac{1}{8}$  [1] gewählt. Unter Berücksichtigung der Lastimperfektion werden über 99,5 % der "perfekten" kritischen Last erreicht. Die Membrandehnungen betragen - 1,70 % entsprechend - 1,57 % Dehnung der Außenhaut. Nach dem "Überschreiten" der Beullast drückt sich die Beule unter der Einzellast am Nordpol weiter ein, während die Belastung bei zunehmender Verformung abnimmt. Alle anderen Beulwellen bleiben fast nicht wahrnehmbar klein, ca.  $\frac{R}{1000}$ , und bilden sich mit abnehmender Belastung zurück. Bei weiter zunehmender Verformung wird schließlich der obere Teil der Kugel invertiert in den unteren hineingedrückt (Bild 9.5). Hierbei erreichen die Membrandehnungen im Bereich der stärksten Biegebeanspruchung bis zu + 7 % in Umfangsrichtung und - 3,5 % in Meridienrichtung, während die Biegedehnungen Werte zwischen  $\pm 10$  % und  $\pm 25$  % annehmen. In dem anderen Teil der Schale bleiben die Dehnungen wegen der nur noch kleinen Belastung im Promillebereich, nur die Biegedehnungen betragen im invertierten oberen Teil ca.  $\pm 5$  %.

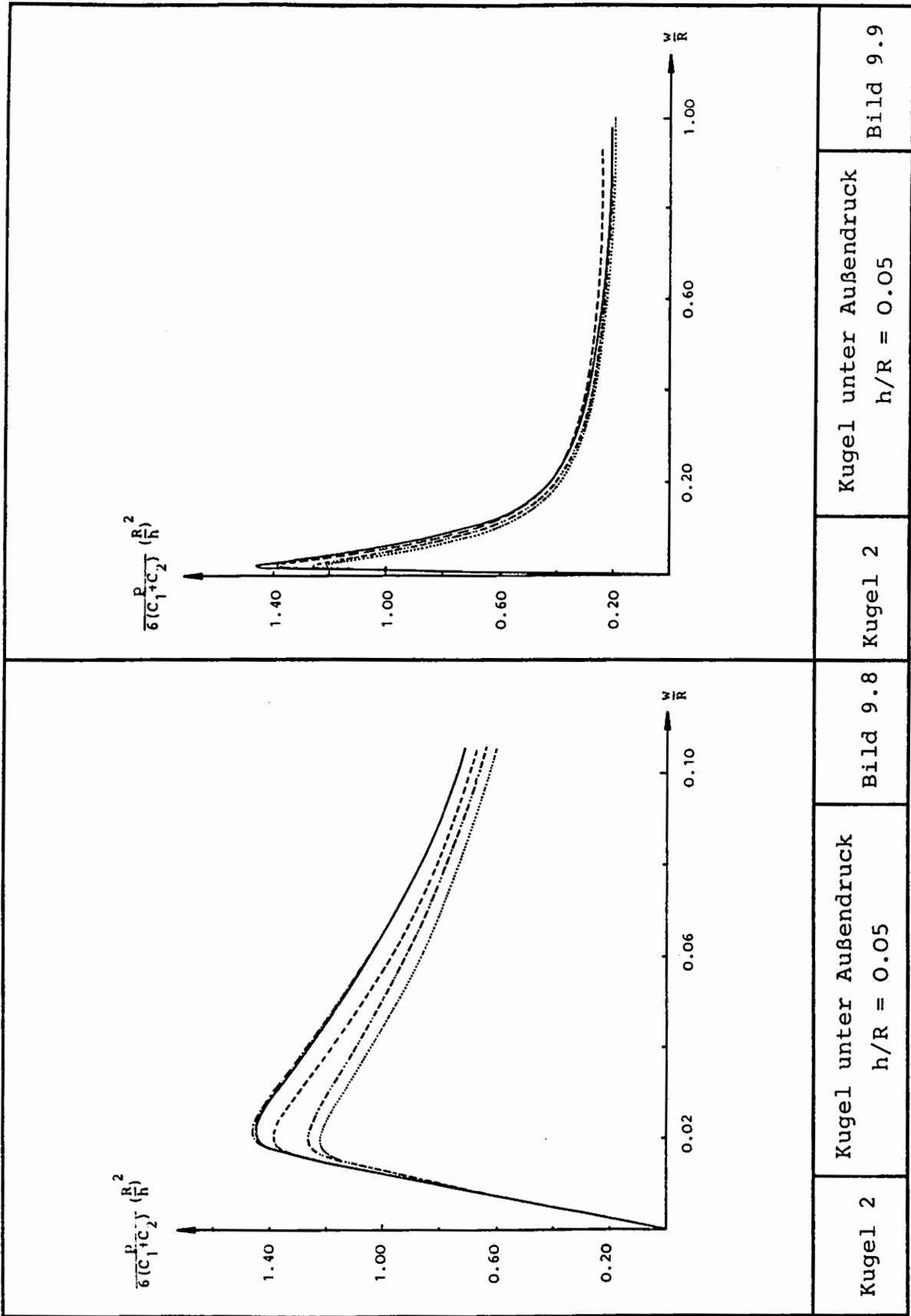
Die nun folgenden vergleichenden Untersuchungen der verschiedenen Theorievarianten werden - um Rechenzeit einzusparen - unter der Annahme eines zur Äquatorialebene symmetrischen Deformationsmusters durchgeführt. Durch diese Voraussetzung steigt die Traglast der Schale nur geringfügig an, so daß das prinzipielle Verhalten der Struktur erhalten bleibt.

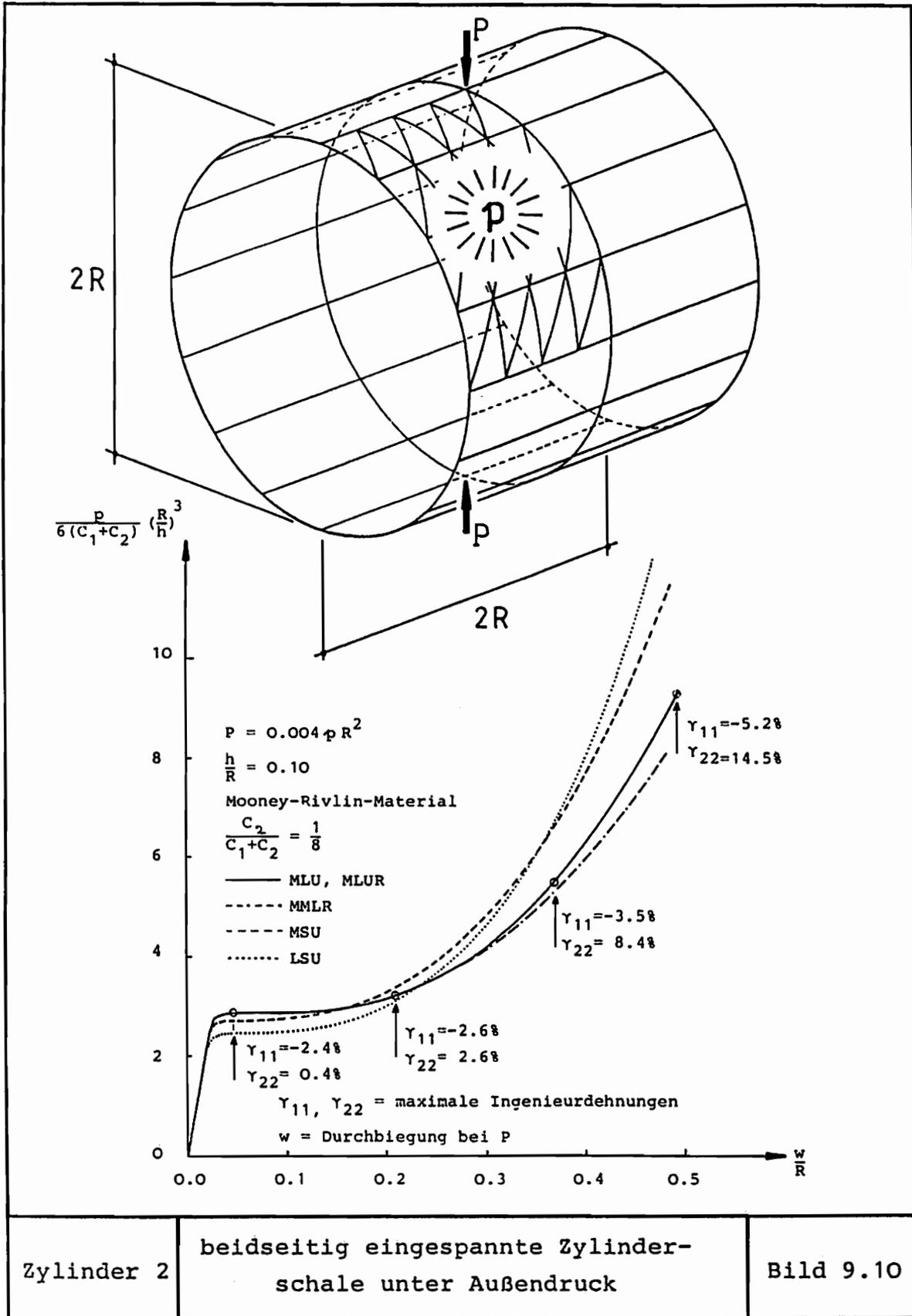
Zwei verschieden dicke Kugelschalen werden untersucht,  $\frac{h}{R} = 5$  % und  $\frac{h}{R} = 10$  %. Auffällig ist, daß die reduzierte energiekonsistente Theorievariante (MLUR), die vernachlässigt die Dehnungsanteile, die quadratisch über die Schalendicke verteilt sind, im Vergleich zur vollständigen Theorie großer Dehnungen (MLU) nur geringfügig (0,7 % und 1,7 %) größere Traglasten ergibt. Die Theorien moderater Dehnungen und großer/moderater Rotationen (MML und MMLR) führen bei weniger als 1 % Abweichung zu praktisch den gleichen Ergebnissen wie die Theorien für große Dehnungen und unbegrenzte Rotationen (MLU und MLUR).

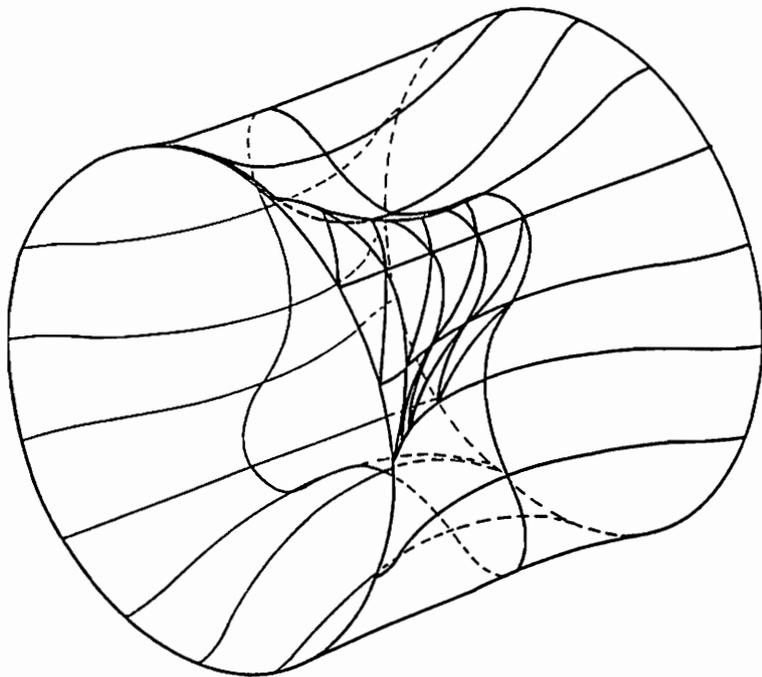
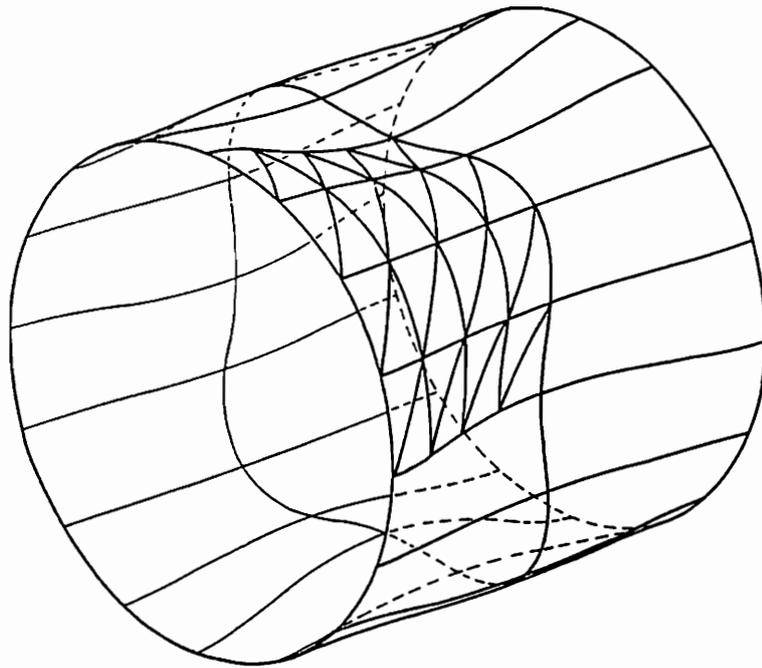
Dem gegenüber liefert die nicht energiekonsistente Theorievariante MSU 4 % und 6,5 % zu geringe Traglasten. Im Nachbeulbereich berechnet sie dafür bis zu 16 % ( $\frac{h}{R} = 0,05$ ) zu große Lasten. Die klassische Schalentheorie gibt sogar um 17 % und 28 % zu geringe maximal mögliche Lasten an, dafür nähert



Kugel 2	Kugel unter Außendruck System und Belastung Theorievarianten	Bild 9.6	Kugel 2	Kugel unter Außendruck $h/R = 0.10$	Bild 9.7
---------	--	----------	---------	-------------------------------------	----------







Zylinder 2

beidseitig eingespannte Zylinder-  
schale unter Außendruck

Bild 9.11

sie sich im Nachbeulbereich auf bis zu 5 % der Lösung der Theorie großer Dehnungen (MLU). Zu Vergleichszwecken wurde auch noch eine Last-Verschiebungskurve für linear elastisches Material in Verbindung mit der Theorie großer Dehnungen (LLU) ermittelt.

### 9.3 weitere Beispiele

Weitere bisher unveröffentlichte Beispiele wurden so ausgewählt, daß die (Membran-)Dehnungen Werte zwischen 3 % und 10 % erreichen. Sie zeigen die Leistungsfähigkeit der Schalentheorie großer Dehnungen in Verbindung mit einem FE-Programm für beliebige Schalengeometrien. Vergleichsrechnungen mit den verschiedenen Theorievarianten helfen, die Schalentheorien für große Dehnungen in Verbindung mit den Ergebnissen aus Kapitel 9.2 einzuordnen.

#### 9.3.1 beidseitig eingespannte Zylinderschale unter Außen- druck

Die kritischen Dehnungen einer unendlich langen Zylinderschale sind selbst bei Dickenverhältnissen um  $\frac{h}{R} = 0,10$  noch ziemlich klein und überschreiten kaum die in [44] gegebene Grenze von

$$\epsilon = p_{kr} \cdot \frac{R}{h} \frac{(1-\nu^2)}{E} = \frac{1}{4} \left(\frac{h}{R}\right)^2, \quad \nu = 0.5. \quad (9.3.1.1)$$

Durch geeignete Randbedingungen, z. B. durch die Einspannung an den Rändern, steigt die kritische Last und damit auch die kritische Dehnung erheblich an. Dazu darf die Länge der Schale nicht zu groß gewählt werden; die Mitte sollte noch im "Randstörungsbereich" liegen. Im Bild 9.10 sind für ein ausgewähltes Beispiel,  $\frac{h}{R} = 10\%$ ,  $L = 2R$ , die Last-Verschiebungskurven des Punktes unter der Störlast  $P$  für verschiedene Theorievarianten dargestellt. Da dieser Zylinder, wie überprüft wurde, vier Beulwellen über den Umfang verteilt aufweist, reicht es aus, ein achtel - eigentlich sogar nur ein sechzehntel - der Struktur bei Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften zu diskretisieren. Es zeigt sich, daß die vollständige (MLU) und die reduzierte (MLUR) Theorie gleiche Ergebnisse liefern. Die Theorie für moderate Dehnungen und große/moderate(kleine) Rotationen (MMLR) ergibt nach Überschreiten eines Dehnungsmaßes von ca. 3 % bis 5 % zunehmend abweichende Ergebnisse (vergl. Kreisplatte, Bild 9.4), während die klassi-

sche Schalentheorie (LSU) mit 14 % zu geringer kritischer Last und die nicht energiekonsistente Variante (MSU) mit einer viel zu großen Steifigkeit im Nachbeulbereich zu fast unbrauchbaren Ergebnissen führen.

### **9.3.2 beidseitig eingespannte parabolische Rotationsschalen unter Außendruck**

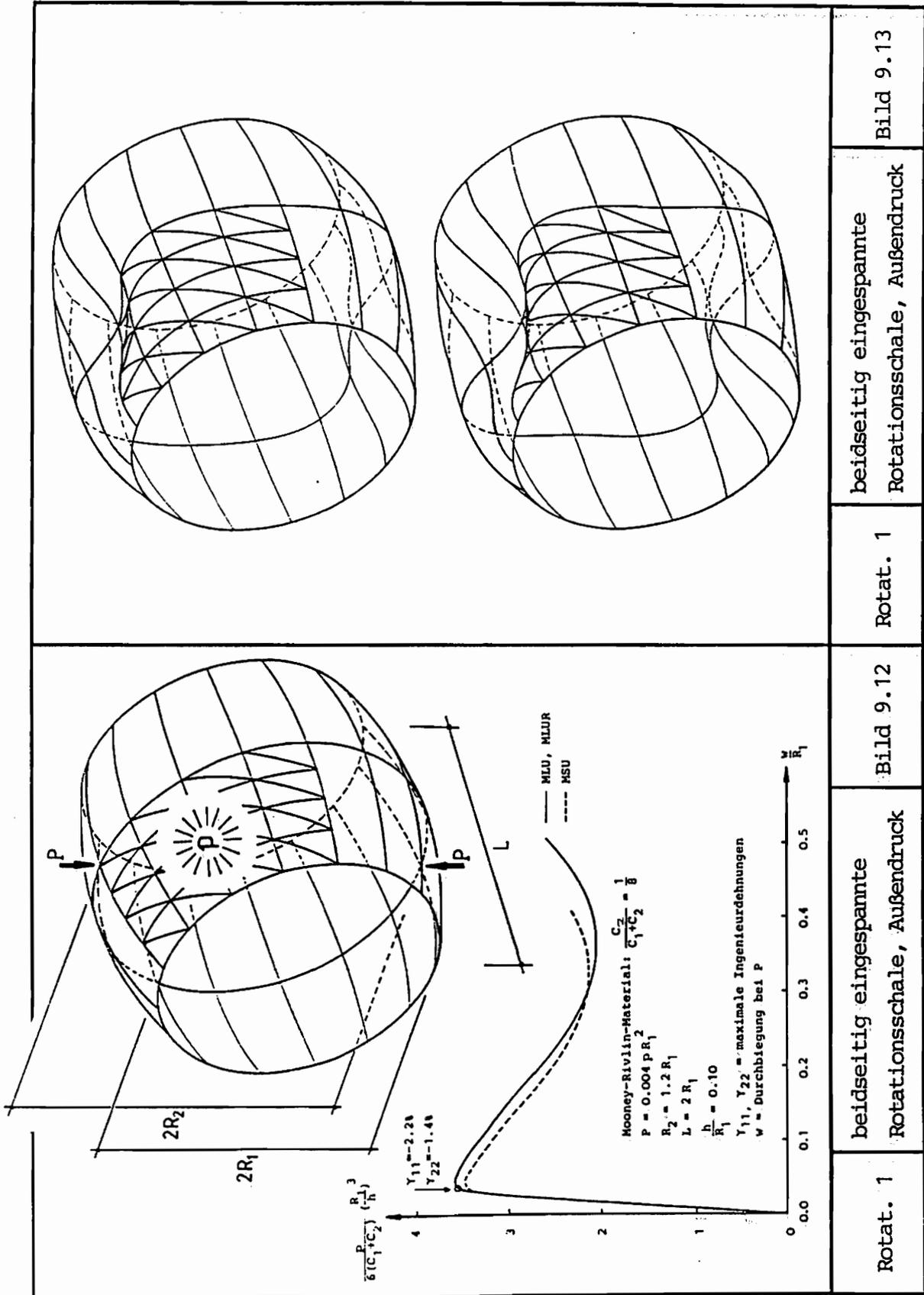
Die beiden in den Bildern 9.12 und 9.14 wiedergegebenen Rotationsschalen mit parabelförmigem Verlauf der Radien sind gewissermaßen Variationen des Zylinders aus dem vorhergegangenen Beispiel. Bei den gewählten Verhältnissen der Radien bilden beide Strukturen vier über den Umfang verteilte Beulwellen aus, so daß es bei zwei diametral gegenüberstehenden Störlasten ausreicht, ein achtel der Schale zu diskretisieren. Es wurde nur mit den Theorievarianten MLU, MLUR und MSU gerechnet. Von der klassischen Schalentheorie wären bei Dehnungen bis zu über 15 % ohnehin keine besonders guten Ergebnisse zu erwarten gewesen. Wie bei fast allen Beispielen gibt es zwischen den beiden energiekonsistenten Theorien MLU und MLUR für große Dehnungen keine Unterschiede in den Ergebnissen. Die nicht energiekonsistente Variante MSU führt zu deutlichen Abweichungen.

### **9.3.3 Schlauch mit sinusförmigem Längsprofil unter axialem Zug**

Ein sehr schönes Beispiel stellen die in den Bildern 9.17 und 9.19 dargestellten Schlauchstücke mit sinusförmigem Verlauf des Durchmessers über die Länge dar. Sie werden durch eine achsiale Zugkraft und durch ein Paar diametral gegenüberstehenden Einzelkräften belastet. Dabei sind die Einzelkräfte so groß, daß sie einen erheblichen Anteil an der Verformung haben.

Durch die "Umlenkkräfte", die aus der Längsbelastung im Bereich des "Bauches" entstehen, wird dieser quasi durch eine Art Außendruck belastet. Zusammen mit den Einzelkräften, die auf dem "Bauch" stehen, ergibt sich ein Stabilitätsproblem.

Wegen der Symmetrie reicht es wieder aus, nur ein achtel der Gesamtstruktur zu diskretisieren. Dabei können die dargestellten Schlauchstücke Teil eines sehr langen Schlauches mit sinusförmigem Längsprofil sein.



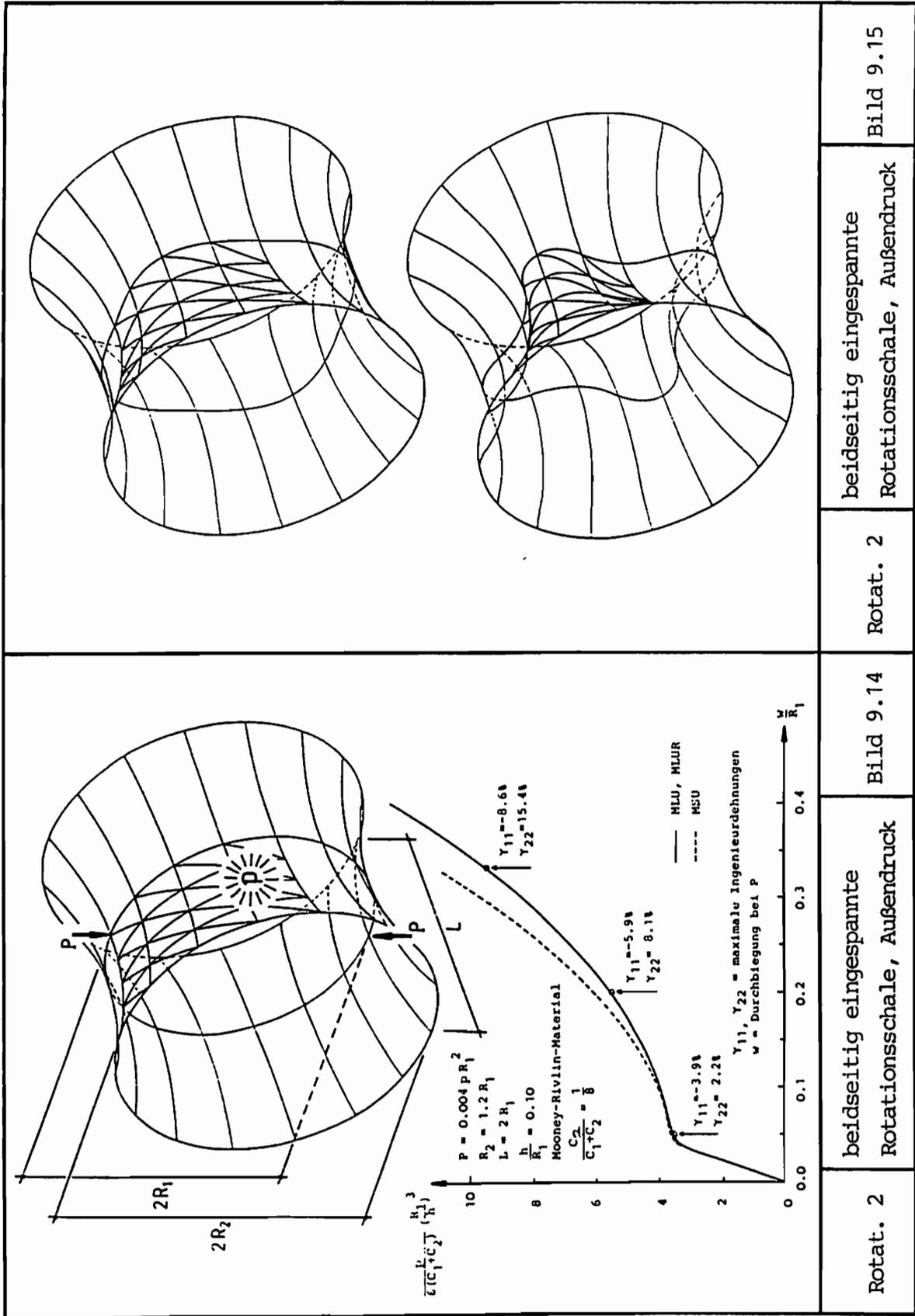


Bild 9.15

beidseitig eingespannte  
Rotationschale, Außendruck

Rotat. 2

Bild 9.14

beidseitig eingespannte  
Rotationschale, Außendruck

Rotat. 2

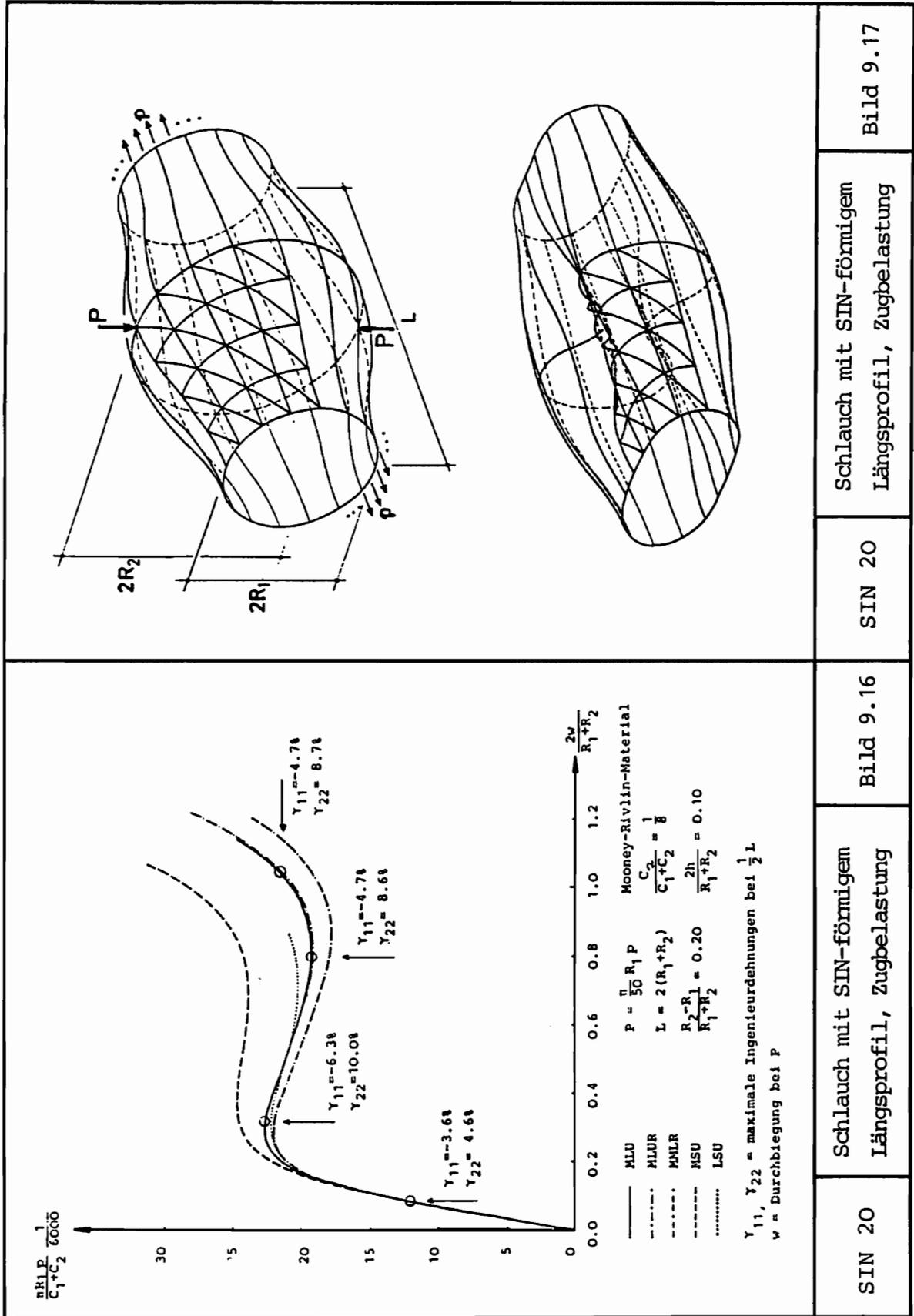


Bild 9.17

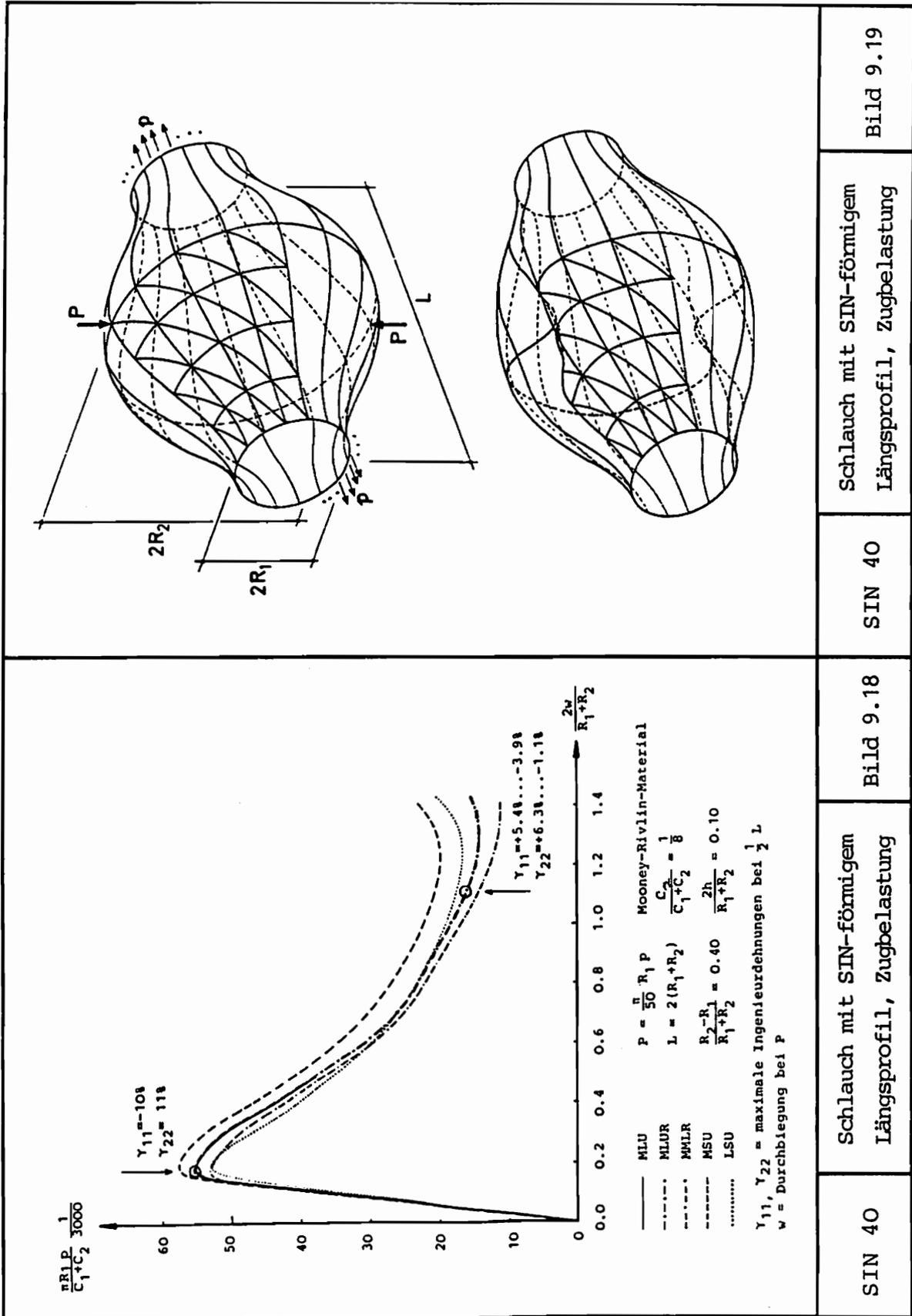
Schlauch mit SIN-förmigem Längsprofil, Zugbelastung

SIN 20

Bild 9.16

Schlauch mit SIN-förmigem Längsprofil, Zugbelastung

SIN 20



Schlauch mit SIN-förmigem Längsprofil, Zugbelastung

SIN 40

Schlauch mit SIN-förmigem Längsprofil, Zugbelastung

Bild 9.18

Schlauch mit SIN-förmigem Längsprofil, Zugbelastung

SIN 40

Wiederum ergeben die beiden energiekonsistenten Theorien großer Dehnungen (MLU, MLUR) praktisch identische Lösungen.

Die Theorie moderater Dehnungen führt in beiden Beispielen zu Fehlern zwischen 3 % und 6 %; im Nachbeulminimum des Schlauches mit  $\pm 40$  % Radiusänderung ergibt sich sogar ein 21 %-iger Fehler. Die nicht energiekonsistente Variante MSU liefert in beiden Fällen viel zu hohe Lasten. Daß die klassische Schalentheorie (kleiner Dehnungen, LSU) in beiden Beispielen Ergebnisse erzeugt, die manchmal sehr dicht bei den Ergebnissen für große Dehnungen (MLU, MLUR) liegen, ist bei Dehnungen zwischen 5 % und 10 % wohl eher ein glücklicher Zufall; bedenken wir doch, daß sie bei der Bestimmung der kritischen Lasten für Gummibälle (Kapitel 9.2.3) stets die schlechtesten Ergebnisse liefert, obwohl dabei die Dehnungen "nur" in einem Bereich zwischen - 1,6 % und - 3,0 % liegen.

#### 9.4 Zusammenfassung

Die "vollständige" Schalentheorie großer Dehnungen (MLU) (4.3.15) kann durch Streichen des Terms in der Verformungsenergiedichte, der die nicht-lineare Dehnungsverteilung über die Schalendicke und die über die Höhe veränderliche Metrik berücksichtigt, in eine energiekonsistente, wesentlich weniger aufwendige "reduzierte" Schalentheorie großer Dehnungen (MLUR) (4.3.17) überführt werden, die innerhalb des gleichermaßen durch den Kleinheitsparameter  $\theta$  (4.2.5) eingegrenzten Gültigkeitsbereich der Approximation bei etwa  $\frac{2}{3}$  des Rechenzeitbedarfs praktisch identische Ergebnisse liefert.

Eine nicht konsistente, aus der "Anschauung" durch Modifikation der klassischen Schalentheorie gebildete Theorievariante erweist sich als in ihrem Verhalten gegenüber den konsistenten Varianten kaum einschätzbar und ist somit weder aus theoretischer noch aus numerischer Sicht haltbar. Dagegen zeigt die Erfahrung, daß die klassische Schalentheorie bei einem Rechenzeitbedarf, der nur 25 % unter dem der rechenzeitgünstigen "reduzierten" Theorie großer Dehnungen (MLUR) liegt, stets zu niedrige kritische Lasten ergibt, so daß man sich zum Teil erheblich auf der sicheren Seite befindet.

Die Theorien moderater Dehnungen sind bis zu Membrandehnungen von 3% bis 5% sehr gut, darüber hinaus können sie jedoch insbesondere in Verbindung mit der Annahme großer/moderater(kleiner) Dehnungen (siehe Kapitel 5.3) zu erheblichen Fehlern in den Last-Verschiebungsbeziehungen führen.

## ANHANG

Die Kapitel des Anhangs enthalten Zwischenrechnungen und zusätzliche Erläuterungen zu den entsprechenden Kapiteln des Hauptteiles. Dabei besteht im allgemeinen eine direkte Zuordnung der einzelnen Kapitel zueinander.

### A1 GRUNDLAGEN AUS DER TENSORRECHNUNG

Die Beschreibung der Geometrie des Schalenraums ist untrennbar mit der Anwendung der Tensorrechnung verbunden. Daher sollen in diesem Kapitel die wichtigsten Definitionen der Tensoralgebra in dem Umfang dargestellt werden, wie er für das Verständnis unbedingt erforderlich ist. Ausführliche Einführungen in die Tensorrechnung finden sich in [2, 17, 22 u. 33].

Soweit nicht ausdrücklich anders angegeben, betrachten wir stets den dreidimensionalen Euklidischen Raum, der durch die drei orthogonalen und normierten Basisvektoren  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  aufgespannt ist. Um vektorielle und tensorielle Größen von Skalaren zu unterscheiden, sind alle Vektoren und Tensoren fett geschrieben. Die Einsteinsche Summationskonvention wird angewandt, d. h., über in einem Produkt von Größen doppelt vorkommende gegenständige Indizes (einer oben, einer unten) wird summiert. Lateinische Indizes nehmen die Werte 1 bis 3, griechische Indizes die Werte 1 und 2 an. Folglich bedeuten

$$u^i v_i := \sum_{i=1}^3 u^i v_i, \quad u^\alpha v_\alpha := \sum_{\alpha=1}^2 u^\alpha v_\alpha. \quad (\text{A1.1})$$

Die unten stehenden Indizes heißen kovariant, die oben stehenden kontravariant.

Der Raum wird durch Einführung beliebiger, ggf. auch krummliniger Koordinaten  $\theta^i$ ,  $i=1,2,3$ , aufgespannt. Ein beliebiger Ortsvektor  $\mathbf{x}$  läßt sich entsprechend als

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathbf{x}(\theta^i) = x^j(\theta^i) \mathbf{e}_j \quad (\text{A1.2})$$

darstellen.

Hieraus können wir die zu den Koordinaten  $\theta^i$  gehörenden (lokalen) kovarianten **Basisvektoren**  $\mathbf{g}_i$  durch Differentiation des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  definieren:

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} = \mathbf{x}_{,i} \quad . \quad (\text{A1.3})$$

Die Basisvektoren sind stets linear unabhängig, sodaß mit Hilfe der Gleichung

$$\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \delta_j^i \quad , \quad (\text{A1.4})$$

in der  $\delta_j^i$  für das Kronecker-Delta und  $\cdot$  als Operator für das Skalarprodukt aus zwei Vektoren stehen, eindeutig eine zu  $\mathbf{g}_j$  gehörende zweite Basis, die sogenannte kontravariante Basis  $\mathbf{g}^i$ , definieren läßt.

Nun können wir einen beliebigen Vektor  $\mathbf{v}$  wahlweise in **kovarianten oder kontravarianten Komponenten** des krummlinigen Koordinatensystems  $\theta^i$  darstellen:

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{g}^i = v^i \mathbf{g}_i \quad . \quad (\text{A1.5})$$

Die Komponenten lassen sich durch Skalarmultiplikation von (A1.5) mit  $\mathbf{g}_j$  bzw.  $\mathbf{g}^j$  zu

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}_i \quad \text{und} \quad v^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}^i \quad (\text{A1.6})$$

berechnen. Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  ergibt somit

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^i v_i = u_i v^i \quad . \quad (\text{A1.7})$$

**Ein Tensor ist eine Größe, die aus ihren Komponenten mit den dazugehörigen Basisvektoren besteht.** Die Anzahl der Indizes an den Komponenten gibt die Stufe des Tensors an. Somit ist ein Vektor ein Tensor erster Stufe.

Tensoren sind koordinateninvariant. Daher unterliegen die Komponenten bestimmten Transformationsgesetzen, die man beachten muß, wenn man die Basisvektoren zum Zwecke einer Koordinatentransformation ändert [2, 22].

Allgemein ist ein **Tensor der zweiten Stufe** durch

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \\ &= T_i^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j = T_j^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j \end{aligned} \quad (\text{A1.8})$$

definiert. Hierbei steht  $\otimes$  für das dyadische Produkt. Die Anwendung eines Tensors 2. Stufe auf einen Vektor  $\mathbf{v}$  ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \mathbf{v} &= T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j v_k \mathbf{g}^k \\ &= T^{ij} v_j \mathbf{g}_i = T_{ij} v^j \mathbf{g}^i = T_j^i v^j \mathbf{g}_i = T_i^j v_j \mathbf{g}^i, \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

wobei die Identität

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \quad (\text{A1.10})$$

angewendet wird. Die Komponenten  $T^{ij}$  eines Tensors zweiter Stufe erhält man demnach zu

$$T^{ij} = (\mathbf{T} \mathbf{g}^j) \cdot \mathbf{g}^i. \quad (\text{A1.11})$$

Zur Definition Tensoren höherer Ordnung und ihrer Anwendung brauchen wir (A1.8 - A1.11) nur zu verallgemeinern.

Als **Identität**, **Einheitstensor 1** oder auch **Metriktensor** wird derjenige Tensor zweiter Stufe bezeichnet, der einen beliebigen Vektor  $\mathbf{v}$  auf sich selbst abbildet:

$$\mathbf{v} = \mathbf{1} \mathbf{v}. \quad (\text{A1.12})$$

Die Komponentendarstellung von  $\mathbf{1}$  ergibt sich mit Hilfe von (A1.8) und (A1.10) zu

$$\begin{aligned}
 1 &= g_{ij} g^i \otimes g^j \\
 &= g^{ij} g_i \otimes g_j \\
 &= g_i \otimes g^i = g^i \otimes g_i \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{A1.13}$$

wobei wir

$$g_{ij} := g_i \cdot g_j \quad \text{und} \quad g^{ij} := g^i \cdot g^j \tag{A1.14}$$

definieren. Weiter folgt

$$g^{ij} g_{jk} = g^i \cdot g^j g_j \cdot g_k = g^i \cdot (1 g_k) = \delta_k^i \quad . \tag{A1.15}$$

Ebenfalls mit Hilfe des Einheitstensors leiten wir die **Regel zum Herauf- und Herunterziehen der Idizes** her:

$$v = v_i g^i = 1 v = g_{ij} g^i \otimes g^j v^k g_k = g_{ij} v^k g^i \delta_k^j \quad . \tag{A1.16}$$

Wir erhalten

$$v_i = g_{ij} v^j \quad \text{und analog} \quad v^i = g^{ij} v_j \quad . \tag{A1.17}$$

Diese Regel gilt verallgemeinert auch komponentenweise für Tensoren höherer Stufe.

Desweiteren benötigen wir das **Skalarprodukt zwischen Tensoren**. Sind beide Tensoren T und U Tensoren gleicher Stufe, so ist das Ergebnis ein Skalar,

$$\begin{aligned}
 T \cdot U &= (T^{ij\dots k} g_i \otimes g_j \otimes \dots \otimes g_k) \cdot (U_{lm\dots n} g^l \otimes g^m \otimes \dots \otimes g^n) \\
 &= T^{ij\dots k} U_{ij\dots k} \quad .
 \end{aligned}
 \tag{A1.18}$$

Verallgemeinert man die Definition des Skalarprodukts auf Tensoren unterschiedlicher Ordnung, so ergibt sich ein Tensor mit der Ordnung, die der Differenz der Ordnungen der Ausgangstensoren entspricht.

Die Multiplikation (Verkettung) zweier Tensoren (2. Stufe) wird durch die Gleichung

$$\begin{aligned} U \cdot V &= (U^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) (V^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) \\ &= U^{ij} v_j^k \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_k \end{aligned} \quad (\text{A1.19})$$

beschrieben.

Die **Addition** geschieht komponentenweise. Für die Verbindung der Addition mit einem Produkt (skalar, dyadisch oder Verkettung) gilt das Distributivgesetz.

Bei der **Differentiation tensorieller Größen** muß auch die Änderung der Basis Berücksichtigung finden, so daß wir

$$\begin{aligned} v_{,i}^j &= (v^j \mathbf{g}_j)_{,i} = v^j_{,i} \mathbf{g}_j + v^j \mathbf{g}_{j,i} =: v^{j,i} \mathbf{g}_j \\ &= (v_j \mathbf{g}^j)_{,i} = v_{j,i} \mathbf{g}^j + v_j \mathbf{g}^{j,i} =: v_{j;i} \mathbf{g}^j \end{aligned} \quad (\text{A1.20})$$

erhalten, wobei  $(\dots)_{,i}$  für die partielle Ableitung und  $(\dots)_{;i}$  für die kovariante Ableitung steht. Die **Definition der kovarianten Ableitung** folgt direkt aus (A1.20) zu

$$\begin{aligned} v^{j,i} &= v^j_{,i} + v^k \mathbf{g}_{k,i} \cdot \mathbf{g}^j =: v^j_{,i} + v^k C^j_{ki} \\ v_{j;i} &= v_{j,i} + v_k \mathbf{g}^k_{,i} \cdot \mathbf{g}_j =: v_{j,i} - v_k C^k_{ji} \end{aligned} \quad (\text{A1.21})$$

Hierbei stehen die **Christoffelsymbole** für

$$\begin{aligned} C^k_{ij} &= \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_{i,j} = - \mathbf{g}^k_{,j} \cdot \mathbf{g}_i = C^k_{ji} \\ \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_i &= \delta_i^k \Rightarrow (\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_i)_{,j} = 0 = \mathbf{g}^k_{,j} \cdot \mathbf{g}_i + \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_{i,j} \end{aligned} \quad (\text{A1.22})$$

Die Definition der Christoffelsymbole läßt sich auch in

$$\mathbf{g}^i_{,j} = - C^i_{jk} \mathbf{g}^k \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_{i,j} = C^k_{ij} \mathbf{g}_k \quad , \quad (\text{A1.23})$$

umformen.

Für die Differentiation Tensoren höherer Stufe gilt die Verallgemeinerung von (A1.20) und (A1.21).

Die **Determinante eines Tensors** ist durch

$$\text{Det}(\mathbf{T}) = \frac{\text{Det}(T_{ij} \dots)}{\text{Det}(g_{kl} \dots)} = \frac{\text{Det}(T^{ij} \dots)}{\text{Det}(g_{kl} \dots)} \quad (\text{A1.24})$$

definiert [22, 33].

Die **Transponierte**  $\mathbf{T}^T$  eines Tensors  $\mathbf{T}$  (2. Stufe) erhält man durch Vertauschen der Basisvektoren in der Komponentendarstellung,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T &= (T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j)^T = T^{ij} \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_i \\ &= (T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j)^T = T_{ij} \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^i \quad . \end{aligned} \quad (\text{A1.25})$$

Die Verkettung eines Tensors  $\mathbf{T}$  mit seiner **Inversen**  $\mathbf{T}^{-1}$  ergibt den Einheitstensor,

$$\mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} = \mathbf{1} \quad , \quad (\text{A1.26})$$

so daß für die Komponenten

$$T^{ij} T^{-1}_{jl} = \delta^i_l \quad (\text{A1.27})$$

folgt.

Ein Tensor  $\mathbf{R}$  ist ein ordentlicher Rotationstensor, wenn

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \quad \text{und} \quad \text{Det}(\mathbf{R}) = +1 \quad (\text{A1.28})$$

gilt.

Es fehlt noch, die **Norm eines Tensors** zu definieren. Analog zum Betrag eines Vektors bietet es sich an, hierzu das tensorielle Skalarprodukt (A1.18) heranzuziehen, sodaß wir die Norm zu

$$||\mathbf{T}|| = \sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}} = \sqrt{T^{ij} T_{ij}} \quad (\text{A1.29})$$

erhalten.

## A2 ZUR DIFFERENTIALGEOMETRIE

### A2.1 Zur unverformten Konfiguration

Weitere nützliche Identitäten:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{a}_1 = \sqrt{a} \mathbf{a}^2, \quad \mathbf{a}_2 \times \mathbf{n} = \sqrt{a} \mathbf{a}^1. \quad (\text{A2.1.1})$$

Beweis:  $(\mathbf{n} \times \mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{a}_i = \sqrt{a} \mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}_i = \sqrt{a} \delta_i^2,$

dabei ist  $\mathbf{a}_3 \equiv \mathbf{n}$  und  $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \sqrt{a} \mathbf{n}.$

Aus (A1.15) folgt

$$a^{11} = \frac{1}{a} a_{22}, \quad a^{22} = \frac{1}{a} a_{11} \quad \text{und} \quad a^{12} = -\frac{1}{a} a_{12}. \quad (\text{A2.1.2})$$

Aus  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$  folgt durch Differenzieren

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{,\alpha} = 0. \quad (\text{A2.1.3})$$

Aus  $\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$  ergibt sich ebenfalls durch Differenzieren

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{n} &= -\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{n}_{,\beta} \\ &= \mathbf{g}_{\beta,\alpha} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{g}_\beta \cdot \mathbf{n}_{,\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A2.1.4})$$

Es folgt nun mit (2.1.9)

$$\mathbf{n}_{,\alpha} = -h_{\alpha\beta} \mathbf{g}^\beta = b_{\alpha b} \mathbf{a}^b. \quad (\text{A2.1.5})$$

Differenzieren von (2.1.10) ergibt

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,33} &= -2 h_{\alpha\beta,3} = 2 (\mathbf{g}_{3,\beta} \cdot \mathbf{g}_\alpha)_{,3} \\ &= 2 (\mathbf{g}_{3,3\beta} \cdot \mathbf{g}_\alpha + \mathbf{g}_{3,\beta} \cdot \mathbf{g}_{3,\alpha}) \\ &= 2 (0 + \mathbf{n}_{,\beta} \cdot \mathbf{n}_{,\alpha}) \end{aligned} \quad (\text{A2.1.6})$$

$$= 2 b_{\beta}^{\lambda} b_{\lambda\alpha} = 2 b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} .$$

Da  $b_{\alpha\beta}$  nicht von  $\xi$  abhängt, sind die höheren Ableitungen von  $g_{\alpha\beta}$  gleich null, sodaß (2.1.11) folgt.

## A2.2 Zur verformten Konfiguration

Analog zum Krümmungstensor

$$\mathbf{b} = b_{\alpha\beta} \mathbf{a}^{\alpha} \mathbf{a}^{\beta} \quad (\text{A2.2.1})$$

der unverformten Schalenmittelfläche ist der Krümmungstensor  $\bar{\mathbf{b}}$  der verformten Bezugsfläche durch

$$\bar{\mathbf{b}} = \bar{b}_{\alpha\beta} \bar{\mathbf{a}}^{\alpha} \bar{\mathbf{a}}^{\beta} \quad (\text{A2.2.2})$$

definiert. Diese Definitionen müssen beim Herauf- und Herunterziehen der Indizes beachtet werden. So gilt z.B. für  $\bar{b}_{\beta}^{\alpha}$

$$\bar{b}_{\beta}^{\alpha} = \bar{a}^{\alpha\lambda} \bar{b}_{\lambda\beta} \quad (\text{A2.2.3})$$

Die Identitäten (A2.1.1) bis (A2.1.5) gelten entsprechend auch für die verformte Lage; nicht jedoch die Beziehung (A2.1.6), da  $\bar{\mathbf{g}}_3$  verschieden von  $\bar{\mathbf{n}}$  sein kann. Folglich ist auch (2.1.11) in der verformten Lage ungültig.

Die Christoffelsymbole  $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\lambda}$  werden analog zu  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$  (2.1.16) berechnet.

## A2.3 Zur verallgemeinerten Normalenhypothese

In diesem Abschnitt werden weitere Beziehungen hergeleitet, die später benötigt werden.

Mit Hilfe von (2.2.8) und (2.3.6) ergibt

$$\bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}_{\beta} = (\lambda_{3,\alpha} \bar{\mathbf{n}} + \lambda_3 \bar{\mathbf{n}}_{,\alpha}) \cdot \bar{\mathbf{g}}_{\beta} = -\lambda_3 \bar{h}_{\alpha\beta} , \quad (\text{A2.3.1})$$

Aus  $\bar{\mathbf{g}}_{\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$  folgt

$$(\bar{\mathbf{g}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{n}})_{,3} = 0$$

$$\bar{\mathbf{g}}_{\alpha,3} \cdot \bar{\mathbf{n}} + \bar{\mathbf{g}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{n}}_{,3} = 0$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}}_{,3} \cdot \bar{\mathbf{g}}_\alpha &= - \bar{\mathbf{g}}_{3,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{n}} \\ &= (-\lambda_{3,\alpha} \bar{\mathbf{n}} - \lambda_3 \bar{\mathbf{n}}_{,\alpha}) \cdot \bar{\mathbf{n}} \\ &= -\lambda_{3,\alpha} + \lambda_3 \bar{h}_\alpha^\lambda \bar{\mathbf{g}}_\lambda \cdot \bar{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{n}}_{,3} \cdot \bar{\mathbf{g}}_\alpha = -\lambda_{3,\alpha} \quad . \quad (\text{A2.3.2})$$

Analog ergibt sich mit (2.3.6)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_{3,3} \cdot \bar{\mathbf{g}}_\alpha &= (\lambda_{3,3} \bar{\mathbf{n}} + \lambda_3 \bar{\mathbf{n}}_{,3}) \cdot \bar{\mathbf{g}}_\alpha \\ &= -\lambda_3 \lambda_{3,\alpha} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A2.3.3})$$

Ebenfalls aus (2.3.6) folgt

$$\bar{\mathbf{g}}_3 \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = (\lambda_3)^2 \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{g}}_{3,3} \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 = \lambda_3 \lambda_{3,3} \quad . \quad (\text{A2.3.4})$$

Aus (2.2.8) ergibt sich durch Differenzieren

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\alpha\beta,3} &= -(\bar{\mathbf{n}}_{,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}_\beta)_{,3} = -\bar{\mathbf{n}}_{,3\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}_\beta - \bar{\mathbf{n}}_{,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{g}}_{3,\beta} \\ &= -(\bar{\mathbf{n}}_{,3} \cdot \bar{\mathbf{g}}_\beta)_{,\alpha} + \bar{\mathbf{n}}_{,3} \cdot \bar{\mathbf{g}}_{\beta,\alpha} + \bar{h}_\alpha^\lambda \bar{\mathbf{g}}_\lambda \cdot \bar{\mathbf{g}}_{3,\beta} \\ &= \lambda_{3,\alpha\beta} + \bar{\mathbf{n}}_{,3} \bar{C}_{\alpha\beta}^i \bar{\mathbf{g}}_i - \bar{h}_\alpha^\lambda \lambda_3 \bar{h}_{\lambda\beta} \\ &= \lambda_{3,\alpha\beta} - \bar{C}_{\alpha\beta}^\rho \lambda_{3,\rho} + \bar{C}_{\alpha\beta}^3 \lambda_3 \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{n}})_{,3} - \bar{h}_\alpha^\lambda \lambda_3 \bar{h}_{\lambda\beta} \\ &= \lambda_{3,\alpha} \delta_{\alpha\beta} - \lambda_3 \bar{h}_\alpha^\lambda \bar{h}_{\lambda\beta} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A2.3.5})$$

Aus (2.3.5 u. 6) sowie (2.1.7) folgt mit  $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^i$  als Deformationsgradienten und  $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$  als kartesische Basis folgt

$$\begin{aligned}
 \text{Det } \mathbf{F} &= \text{Det}(\bar{\mathbf{g}}_1 \otimes \mathbf{g}^1) \\
 &= \text{Det}((\bar{\mathbf{g}}_1 \otimes \mathbf{e}^1)(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{g}^j)) \\
 &= \text{Det}(\bar{\mathbf{g}}_1 \otimes \mathbf{e}^1) \text{Det}(\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{e}^j)^{-1} \quad (\text{A2.3.6}) \\
 &= (\bar{\mathbf{g}}_1 \times \bar{\mathbf{g}}_2) \cdot \bar{\mathbf{g}}_3 [(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3]^{-1} \\
 &= \lambda_3 \sqrt{\frac{\bar{g}}{g}} .
 \end{aligned}$$

#### A2.4 Zur Existenz des Verschiebungsfeldes

**Beweis:**

Durch Einsetzen von (2.3.6) in (2.3.7) erhalten wir

$$\mathbf{u}(\theta^\alpha, \xi) = \mathbf{v}(\theta^\alpha) + \int_0^\xi \bar{\mathbf{g}}_3(\theta^\alpha, \xi) \, d\xi \quad (\text{A2.4.1})$$

Eine Reihenentwicklung von  $\bar{\mathbf{g}}_3$  in der  $\xi$ -Richtung ergibt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\theta^\alpha, \xi) &= \mathbf{v}(\theta^\alpha) + \int_0^\xi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \bar{\mathbf{g}}_3|_{\xi=0} \xi^n \, d\xi \\
 &= \mathbf{v}(\theta^\alpha) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \bar{\mathbf{g}}_3|_{\xi=0} \xi^{n+1} \quad (\text{A2.4.2}) \\
 &= \mathbf{v}(\theta^\alpha) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \overset{\circ}{\bar{\mathbf{g}}}_3, (3^n) \xi^{n+1} ,
 \end{aligned}$$

wobei

$$\overset{\circ}{(\dots)}, (3^n) := \frac{\partial^n (\dots)}{\partial \xi^n} \Big|_{\xi=0} \quad (\text{A2.4.3})$$

als abgekürzte Schreibweise für die Ableitungen bei  $\xi=0$  definiert wird.

In dieser Beziehung sind die Vektoren  $\overset{\circ}{\bar{\mathbf{g}}}_3, (3^n)$  unbekannt. Sie lassen sich, wie nun gezeigt wird, aus dem Verschiebungsfeld  $\mathbf{v}$  der Schalenbezugsfläche

berechnen.

Die Reihenentwicklung der Normalenhypothese (2.3.5) ergibt

$$\begin{aligned} \bar{g}_a \cdot \bar{g}_3 = 0 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \overset{\circ}{g}_{\alpha, (3^n)} \cdot \overset{\circ}{g}_{3, (3^n)} \xi^{m+n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n \frac{1}{(n-s)!s!} \overset{\circ}{g}_{\alpha, (3^{n-s})} \cdot \overset{\circ}{g}_{3, (3^s)} \xi^n . \end{aligned} \quad (\text{A2.4.4})$$

Als weitere Unbekannte treten die Vektoren  $\overset{\circ}{g}_{\alpha, (3^n)}$  auf, sodaß für jedes  $n \in \mathbb{N}^0$  drei Vektoren, nämlich  $\bar{g}_i, (3^n)$ , d.h. neun skalare Größen, zu bestimmen sind. Dabei liefert (A2.4.4) für jedes  $n$  bereits zwei von den erforderlichen neun skalaren Bestimmungsgleichungen.

Aus der Inkompressibilitätsbedingung (2.4.4) folgt mit (2.1.12 u. 13)

$$(\bar{g}_1 \times \bar{g}_2) \cdot \bar{g}_3 = (g_1 \times g_2) \cdot n = \mu = 1 - b_{\lambda}^{\lambda} \xi + \frac{b}{a} \xi^2 . \quad (\text{A2.4.5})$$

Die Reihenentwicklung von (A2.4.5) ergibt nach einigen Umformungen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \sum_{s=0}^n ( \overset{\circ}{g}_{1, (3^{m-n})} \times \overset{\circ}{g}_{1, (3^{n-s})} ) \cdot \overset{\circ}{g}_{1, (3^s)} \xi^n . \quad (\text{A2.4.6})$$

Diese Gleichung liefert jeweils die dritte skalare Bestimmungsgleichung.

Die (n-1). Ableitung von (A3.2.1),

$$(\bar{g}_{\alpha} \cdot \bar{g}_{\beta})_{, (3^{n-1})} = (-\lambda_3 \bar{h}_{\alpha\beta})_{, (3^{n-1})} , \quad (\text{A2.4.7})$$

liefert weitere vier skalare Bestimmungsgleichungen. Sie enthalten die noch nicht ausgenutzte Symmetriebedingung  $\bar{g}_{3, \alpha} \cdot \bar{g}_{\beta} = \bar{g}_{3, \alpha} \cdot \bar{g}_{\beta}$ , die sich analog zu (A2.1.5) aus der Normalenhypothese durch Differenzieren nach  $\theta^{\alpha}$  bzw.  $\theta^{\beta}$  ergibt und somit von allen anderen bisher ausgenutzten Beziehungen linear unabhängig ist. Die Differentiation von  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  erfolgt mit Hilfe der Beziehung (A2.3.5), die Differentiation von  $\lambda_3$  mit Hilfe der Inkompressibilitätsbedingung (2.4.4).

Die (n-1). Ableitung von (A2.3.3),

$$(\bar{g}_{3,3}, \bar{g}_{\alpha})_{(3^{n-1})} = (-\lambda_3 \overset{\circ}{\lambda}_{3,\alpha})_{(3^{n-1})} \quad , \quad (A2.4.8)$$

steuert die letzten beiden skalaren Gleichungen bei.

Da  $\xi$  beliebig ist, entsteht für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein lineares Gleichungssystem aus neun linear unabhängigen Gleichungen. Die Lösung dieser Gleichungssysteme erfolgt sukzessive, beginnend mit  $n=1$ . Dabei sind

$$\overset{\circ}{g}_{\alpha} = \bar{a}_{\alpha} = a_{\alpha} + v_{,\alpha} \quad (A2.4.9)$$

und

$$\overset{\circ}{g}_3 = \bar{a}_{\alpha} = \lambda_3 \overset{\circ}{n} \quad (A2.4.10)$$

bereits durch das Verschiebungsfeld  $v$  der Schalenbezugsfläche gegeben.

Sind nun für ein gegebenes  $n^* \in \mathbb{N}$  die Gleichungssysteme für alle  $n \in \{1, 2, \dots, n^*\}$  bereits gelöst worden, dann sind nur die Vektoren  $\overset{\circ}{g}_i, (3^{n^*})$  unbekannt, sodaß die neun skalaren Bestimmungsgleichungen eine eindeutige Lösung ergeben. Dabei dienen die Beziehungen (A2.4.9 u. 10) als Induktionsverankerung.

Auf Grund des Prinzips der vollständigen Induktion sind nun alle Vektoren  $\overset{\circ}{g}_i, (3^n)$  und somit auch das Verschiebungsfeld  $u$  im Schalenraum (A2.4.2) allein durch das Verschiebungsfeld  $v$  der Schalenbezugsfläche bestimmt, was zu zeigen war.

### A3 ZU DEN DEHNUNGEN IM SCHALENRAUM BEI GROSSEN DEHNUNGEN

#### A3.1 Zum polaren Zerlegungssatz

Der Verzerrungszustand der verformten Schale wird durch den Deformationsgradiententensor  $F$  beschrieben, der durch die Beziehung

$$F = \bar{g}_i \otimes g^i = (g_i + u_{,i}) \otimes g^i = 1 + u_{,i} \otimes g^i \quad (\text{A3.1.1})$$

definiert werden kann. Der Deformationsgradiententensor bildet die unverformten kovarianten Basisvektoren  $g_i$  auf die verformten Basisvektoren  $\bar{g}_i$  ab:

$$\bar{g}_i = F g_i = (\bar{g}_j \otimes g^j) g_i = \bar{g}_j \delta_i^j = \bar{g}_j \quad .66(\text{A3.1.2})$$

Somit läßt sich jeder durch zwei benachbarte Punkte im unverformten Schalenraum gegebener Vektor  $w$  in die verformte Lage  $\bar{w}$  überführen:

$$F w = F w^i g_i = w^i \bar{g}_i = \bar{w} \quad (\text{A3.1.3})$$

Da im unverformten Zustand benachbarte Punkte (z. B. Moleküle oder Atome) im verformten Zustand nicht einen gemeinsamen Punkt einnehmen können (chemische Reaktionen sollen hier nicht betrachtet werden), folgt, daß  $F$  ein invertierbarer Tensor ist:

$$\begin{aligned} \bar{w} = F w \quad \Leftrightarrow \quad w = F^{-1} \bar{w} , \\ F^{-1} F = F F^{-1} = 1 . \end{aligned} \quad (\text{A3.1.4})$$

Daher läßt sich  $F$  mit Hilfe des polaren Zerlegungssatzes, wie er in [45,69] beschrieben ist, in einen ordentlichen Rotationstensor  $R$  und den symmetrischen positiv definiten (rechten) Cauchy-Greenschen Dehnungstensor (Stretchtensor)  $U$  aufspalten:

$$\begin{aligned} F &= R U , \\ R^{-1} &= R^T , \quad \text{Det}(R) = + 1 , \end{aligned} \quad (\text{A3.1.5})$$

$$U^T = U .$$

Es ist auch eine andere Zerlegung von  $F$  möglich,  $F = V R$ , wobei  $V$  dieselben Eigenschaften wie  $U$  hat; diese Zerlegung ist jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht interessant.

Der Stretchtensor  $U$  ergibt sich aus

$$F^T F = U R^T R U = U U = U^2 , \quad (A3.1.6)$$

so daß

$$U = 1 + \epsilon = \sqrt{F^T F} \quad (A3.1.7)$$

folgt, wobei  $\epsilon$  den Tensor der Ingenieurdehnungen darstellt.

### A3.2 Zur Beschreibung großer Dehnungen

Um bei der Bestimmung des Dehnungstensors das Berechnen der Wurzel eines Tensors zu vermeiden (A3.1.7), wählen wir als ein einfach bestimmbares Dehnungsmaß den Greenschen Dehnungstensor  $E$ . Dieser ist durch die Beziehung

$$E = \frac{1}{2} (U U - 1) = \frac{1}{2} (2 \epsilon + \epsilon \epsilon) \quad (A3.2.1)$$

definiert. Einsetzen der Gleichungen (A3.1.6) und (A3.1.1) in (A3.1.7) ergibt

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (F^T F - 1) = \frac{1}{2} [(g^i \otimes \bar{g}_i) (\bar{g}_j \otimes g^j) - 1] \\ &= \frac{1}{2} (\bar{g}_{ij} g^i \otimes g^j - g_{ij} g^i \otimes g^j) \\ &= \frac{1}{2} (\bar{g}_{ij} - g_{ij}) g^i \otimes g^j . \end{aligned} \quad (A3.2.2)$$

Weiter folgt

$$\bar{g}_{ij} - g_{ij} = \bar{g}_i \cdot \bar{g}_j - g_{ij}$$

$$= (\mathbf{g}_i + \mathbf{u}_{,i}) \cdot (\mathbf{g}_j + \mathbf{u}_{,j}) - g_{ij} \quad (\text{A3.2.3})$$

$$= \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{g}_i + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j} .$$

Unter Verwendung der aus (A1.20-22) und (2.1.9) folgenden Beziehungen

$$\mathbf{u}_{,j} = u_{i;j} \mathbf{g}^i \quad (\text{A3.2.4})$$

$$\mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{g}_j = u_{j;i} = u_{j,i} - C^k_{ij} u_k \quad (\text{A3.2.5})$$

$$u_{\alpha;\beta} = u_{\alpha,\beta} - C^{\lambda}_{\alpha\beta} u_{\lambda} - h_{\alpha\beta} u_3 \quad (\text{A3.2.6})$$

$$u_{3;\beta} = u_{3,\beta} + h^{\lambda}_{\alpha} u_{\lambda} \quad (\text{A3.2.7})$$

erhalten wir für den ebenen Greenschen Dehnungstensor

$$E_{\alpha\beta} \mathbf{g}^{\alpha} \otimes \mathbf{g}^{\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha;\beta} + u_{\beta;\alpha} + u_{i;\alpha} u^i{}_{;\beta}) \mathbf{g}^{\alpha} \otimes \mathbf{g}^{\beta} \quad (\text{A3.2.8})$$

(vergl. [45, 72]).

### A3.3 Zur Dehnung und Krümmung der Schalenbezugsfläche

Die Basisvektoren auf der verformten Bezugsfläche Lage ergeben sich aus (2.2.2, A1.20, A3.2.4 u. 3.3.2) zu

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_{\alpha} &= \mathbf{a}_{\alpha} + \mathbf{v}_{,\alpha} = \mathbf{a}_{\alpha} + v_{i;\alpha} \mathbf{a}^i = \mathbf{a}_{\alpha} + v_{\lambda;\alpha} \mathbf{a}^{\lambda} + v_{3;\alpha} \mathbf{n} , \\ &= \mathbf{a}_{\alpha} + \varphi^{\lambda}_{\alpha} \mathbf{a}_{\lambda} + \varphi_{\alpha} \mathbf{n} . \end{aligned} \quad (\text{A3.3.1})$$

Der Normalenvektor  $\overset{\circ}{\mathbf{n}}$  wird aus (2.2.6) bestimmt:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{n}} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{a}}} \bar{\mathbf{a}}_1 \times \bar{\mathbf{a}}_2 = \frac{1}{\sqrt{\bar{a}}} (\mathbf{a}_1 + \varphi^{\lambda}_1 \mathbf{a}_{\lambda} + \varphi_1 \mathbf{n}) \times (\mathbf{a}_2 + \varphi^{\lambda}_2 \mathbf{a}_{\lambda} + \varphi_2 \mathbf{n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\bar{a}}} [ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 (1 + \varphi^{\lambda}_{\lambda} + \varphi^1_1 \varphi^2_2 - \varphi^1_2 \varphi^2_1) \\ &\quad + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{n} (\varphi_2 + \varphi^1_1 \varphi_2 - \varphi^1_2 \varphi_1) \\ &\quad + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{n} (-\varphi_1 - \varphi^2_2 \varphi_1 - \varphi^2_1 \varphi_2) ] . \end{aligned} \quad (\text{A3.3.2})$$

Einsetzen von (A2.1.1) ergibt nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} \bar{n}^0 = \sqrt{\frac{\bar{a}}{\bar{a}}} & [ \bar{a}^\lambda (-\varphi_\lambda - \varphi_\rho^\rho \varphi_\lambda + \varphi_\lambda^\rho \varphi_\rho) \\ & + n (1 + \varphi_\lambda^\lambda + \text{Det}(\varphi_\rho^\lambda)) ] . \end{aligned} \quad (\text{A3.3.3})$$

Aus (A3.3.1) folgt mit

$$\mathbf{a}_{\alpha|\beta} = b_{\alpha\beta} \mathbf{n} \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_{|\beta} = -b_\beta^\lambda \mathbf{a}_\lambda \quad (\text{A3.3.4})$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_{\alpha|\beta} = b_{\alpha\beta} \bar{\mathbf{n}}_{,\beta} + \varphi_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta} \mathbf{n} + \varphi_{\alpha|\beta}^\lambda \mathbf{a}_\lambda \\ + \varphi_{\alpha|\beta} \mathbf{n} - \varphi_\alpha b_\beta^\lambda \mathbf{a}_\lambda , \end{aligned} \quad (\text{A3.3.5})$$

sodaß die Auswertung von (3.3.7) (3.3.8)

$$\begin{aligned} \bar{b}_{\alpha\beta}^0 = \lambda_3 [ (1 + \varphi_\lambda^\lambda + \text{Det}(\varphi_\rho^\lambda)) (b_{\alpha\beta} + b_{\lambda\beta} \varphi_\alpha^\lambda + \varphi_{\alpha|\beta}) \\ + (\varphi_\rho^\lambda \varphi_\lambda - (1 + \varphi_\lambda^\lambda) \varphi_\rho) (\varphi_{\alpha|\beta}^\rho - b_\beta^\rho \varphi_\alpha) ] \end{aligned} \quad (\text{A3.3.5})$$

ergibt.

#### A3.4 Abschätzung der höheren Ableitungen des Dehnungstensors in Normalenrichtung

In diesem Abschnitt wird die Gültigkeit der Abschätzung für die höheren Ableitungen des Dehnungstensors nach der "Dickenkoordinate"  $\xi$  (3.4.13) mit Hilfe eines Beweises durch vollständige Induktion gezeigt.

Zunächst ist es erforderlich, die Wurzelfunktion für  $\lambda_3$  (3.2.10) in eine konvergente Taylorreihe zu entwickeln. Dazu benutzen wir die Reihenentwicklung [5] für

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-1)!}{i!(i-1)!2^{i-1}} (-x)^i , \quad |x| < 1 \quad (\text{A3.4.1})$$

aus der wir

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{1+c}} \left[ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i-1)!}{i!(i-1)!2^{i-1}} \left(\frac{c-x}{1+c}\right)^i \right], \quad -1 < x < 2c+1 \quad (\text{A3.4.2})$$

herleiten und  $x = 2E_{\lambda}^{\lambda} + \frac{4}{g} \text{Det}(E_{\alpha\beta})$  setzen.

Durch die Wahl von  $c$  als Konstante, wobei vorausgesetzt wird, daß die Dehnungen begrenzt sind, läßt sich nun  $\lambda_3 = \lambda_3(\xi)$  durch ein konvergentes unendliches Polynom

$$\lambda_3 = P(E_{\alpha\beta}) \quad (\text{A3.4.3})$$

ausdrücken. Die Abkürzung  $P(x,y,\dots)$  steht für

$$P(x,y,\dots) = \sum_{i,j,\dots} \{ a_{ij\dots} x^i y^j \dots \} \quad (\text{A3.4.4})$$

mit  $a_{ij\dots} = \text{Konstanten}$

sowie  $i,j,\dots \in \{0,1,2,3,\dots\}$ ,

und stellt ein Polynom aus  $x,y,\dots$  dar.

Als nächstes setzen wir voraus, daß die Dehnungen  $E = E(\theta^{\alpha}, \xi)$  hinreichend glatt über den Schalenraum verteilt sind, so daß die Ableitungen in tangentialer Richtung von  $E_{\alpha\beta}$  mit Hilfe einer charakteristischen Länge  $L$  durch

$$E_{\alpha\beta|\gamma} = O\left(\frac{|E_{\alpha\beta}|}{L}\right), \quad (\text{A3.4.5})$$

$L = \text{charakteristische Wellenlänge des Deformationsmusters}$

abgeschätzt werden können. Entsprechendes soll auch für die Ableitungen höherer Ordnung gelten. Das Symbol  $O(\dots)$  bedeutet Ordnung von  $(\dots)$  im Sinne von [18].

Die Formeln (3.4.8 - 3.4.9) lassen im Zusammenhang mit der Reihenentwicklung für  $\lambda_3$  (A3.4.3) und der Abschätzung der "tangentialen" Ableitungen der Dehnungen (A3.5.5) vermuten, daß die Ordnungen der einzelnen

Terme in den Ableitungen der Greenschen Dehnungen bezüglich der "Dickenkoordinate"  $\xi$  nach einer bestimmten Regel abnehmen:

$$E_{\alpha\beta; \underbrace{33\dots3}_n} = O(|(h_{\lambda\rho})^i \cdot (\bar{h}_{\mu\nu})^j \cdot \frac{\partial^k E_{\sigma\eta}}{\partial \xi^k} \cdot (\frac{1}{L})^l \cdot P(E_{\gamma\sigma})|), \quad (A3.4.6)$$

$$n \geq 1, k < n, \frac{\partial^0 E_{\sigma\eta}}{\partial \xi^0} := 1, i+j+k+l = n, i,j,k,l \in \{0,1,2,3,\dots,n\}.$$

Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion. Aus den Beziehungen (3.4.4 - 3.4.7) folgt

$$E_{\alpha\beta;3} = h_{\alpha\beta} - \lambda_3 \bar{h}_{\alpha\beta} + h_{\alpha}^{\lambda} E_{\lambda\beta} + h_{\beta}^{\lambda} E_{\lambda\alpha} \quad (A3.4.7)$$

und

$$E_{\alpha\beta;33} = (\lambda_3)^2 \bar{h}_{\alpha}^{\lambda} \bar{h}_{\lambda\beta} - \lambda_3 \lambda_{3,\alpha} | |_{\beta} - \lambda_{3,3} \bar{h}_{\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} + 2h_{\alpha}^{\lambda} E_{\lambda\beta;3} + 2h_{\beta}^{\lambda} E_{\lambda\alpha;3} - 2b_{\alpha}^{\lambda} b_{\beta}^{\rho} E_{\lambda\rho}, \quad (A3.4.8)$$

so daß man nach Einsetzen von (A3.4.3 u. A3.4.5) und Berücksichtigen der Abschätzung

$$P(E_{\alpha\beta})_{,i} = O(|E_{\alpha\beta,i} P(E_{\lambda\rho})|) \quad (A3.4.9)$$

die Gültigkeit der Regel (A3.4.6) für  $n=1$  und  $n=2$  nachgewiesen ist. Dieses dient uns als Induktionsverankerung.

Für den Induktionsschluß ist zu zeigen, daß aus der Gültigkeit der Formel (A3.4.6) für ein beliebiges  $n$  die Gültigkeit für  $n+1$  folgt. Zu diesem Zweck differenzieren wir (A3.4.6) und erhalten

$$E_{\alpha\beta; \underbrace{33\dots3}_{n+1}} = (E_{\alpha\beta; \underbrace{3\dots3}_n})_{,3} = (E_{\alpha\beta; \underbrace{3\dots3}_n})_{,3} + h_{\alpha}^{\lambda} E_{\lambda\beta; \underbrace{3\dots3}_n} + h_{\beta}^{\lambda} E_{\lambda\alpha; \underbrace{3\dots3}_n} \quad (A3.4.10)$$

$$= O(|(h_{\lambda\rho})^i \cdot (\bar{h}_{\mu\nu})^j \cdot \frac{\partial^k E_{\sigma\eta}}{\partial \xi^k} \cdot (\frac{1}{L})^l \cdot P(E_{\gamma\delta})|),_3$$

$$+ O(|(h_{\lambda\sigma})^{i+1} \cdot (\bar{h}_{\mu\nu})^j \cdot \frac{\partial^k E_{\sigma\eta}}{\partial \xi^k} \cdot (\frac{1}{L})^l \cdot P(E_{\gamma\delta})|),$$

$$n \geq 1, k < n, \frac{\partial^0 E_{\sigma\eta}}{\partial \xi^0} := 1, i+j+k+l = n, i, j, k, l \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Durch Einsetzen von  $h_{\alpha\beta,3} = b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta}$  (A2.1.6),  $\bar{h}_{\alpha\beta,3} = -\lambda_3 \bar{h}_{\alpha}^{\lambda} \bar{h}_{\lambda\beta} + \lambda_{3,\alpha} | |_{\beta}$  (A2.3.5),  $\lambda_3 = P(E_{\alpha\beta})$  (A3.4.3) und der Abschätzung der Ableitungen in tangentialer Richtung (A3.4.5) erhält man

$$E_{\alpha\beta; \underbrace{33\dots3}_{n+1}} = O(|(h_{\lambda\rho})^i \cdot (\bar{h}_{\mu\nu})^j \cdot \frac{\partial^k E_{\sigma\eta}}{\partial \xi^k} \cdot (\frac{1}{L})^l \cdot P(E_{\gamma\delta})|), \quad (A3.4.11)$$

$$n \geq 2, k < n+1, \frac{\partial^0 E_{\sigma\eta}}{\partial \xi^0} := 1, i+j+k+l = n+1, i, j, k, l \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n+1\},$$

womit der Induktionsschluß und damit nun auch die Allgemeingültigkeit der Regel (A3.4.6) bewiesen ist.

Gegebenenfalls mehrmaliges Einsetzen der Beziehung (3.4.4) in (A3.4.11) führt zu der Abschätzung

$$E_{\alpha\beta; \underbrace{33\dots3}_{\bar{n}}} = O(|(h_{\lambda\rho})^i \cdot (\bar{h}_{\mu\nu})^j \cdot E_{\sigma\eta; \underbrace{3\dots3}_{\bar{k}}} \cdot (\frac{1}{L})^l \cdot P(E_{\gamma\delta})|), \quad (A3.4.12)$$

$$n \geq 1, k < n, E_{\sigma\eta; \underbrace{3\dots3}_0} := 1, i+j+k+l = n, i, j, k, l \in \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}.$$

Durch Auswertung an der Stelle  $\xi=0$  und anschließende rekursive Anwendung ergibt sich die für die energetischen Abschätzungen im vierten Kapitel sehr wichtige Beziehung (3.4.13)

$$\frac{||E_{(n+1)}||}{||E_{(n)}||} = O(\max(|b_{\alpha\beta}|, |\bar{b}_{\alpha\beta}|, \frac{1}{L})), \quad n \geq 1 \quad (A3.4.13)$$

Diese Abschätzung wird in [25] für die zylindrische Deformation von Zylinderschalen durch eine Reihenentwicklung mit geschlossenen Formeln bestätigt.

#### A4. ZUR APPROXIMATION DER VERFORMUNGSENERGIEDICHTE

##### A4.1 Vergleich mit anderen Approximationen

Für die zylindrische Deformation einer Zylinderschale aus Mooney-Rivlin-Material wird in [25] die Verformungsenergiedichte unter vergleichbaren Voraussetzungen hergeleitet. Die dort angegebene Approximation ist äquivalent zu (4.3.16), wenn wir uns ebenfalls auf den genannten geometrischen Sonderfall beschränken.

Eine andere in [55] hergeleitete Approximation der Verformungsenergiedichte geht von geringfügig anderen Voraussetzungen aus, die zu einem relativen Fehler der Ordnung  $O(\max(h/R, h^2/\bar{R}^2))$  führen. So entfallen alle Terme, die die Krümmung der unverformten Schale als Faktor enthalten. Weil auch dort im Laufe der Herleitungen angenommen wird, daß die transversalen Schubdehnungen vernachlässigbar klein sind, muß sich die Verformungsenergiedichte in [55] durch eine zusätzliche Abschätzung von (4.3.15) mit  $\frac{h}{R} \leq \theta^2 \ll 1$  ergeben.

Dadurch daß jedoch statt mit Krümmungsänderungstensoren  $\kappa$  (3.4.1 u. 3.4.8) mit  $\bar{\rho}_{\alpha\beta} = \bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}$  (2.2 in [55]) gerechnet wird, entsteht ein relativer Fehler der Ordnung  $O\left(\frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\kappa\|} \frac{1}{a^\alpha \otimes a^\beta}\right)$  im Anteil der Biegeenergie an der Verformungsenergiedichte ( $\mathbf{b} = b_{\alpha\beta} a^\alpha \otimes a^\beta$ ).

##### A4.2 Membrantheorie

Der Fall, daß die Biegedehnungen wesentlich kleiner sind als die Membrandehnungen,

$$h \|\kappa\| \leq O(\theta \|\gamma\|) \quad , \quad (A4.2.1)$$

ergibt nach Anwendung der Abschätzung

$$W \approx \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial E} \cdot E \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial E \otimes E} \cdot E \otimes E \quad (A4.2.2)$$

und Einsetzen in (4.3.15) die Membrantheorie

$$\phi = h \cdot W(\gamma) (1 + C' J^2) \quad . \quad (A4.2.3)$$

Daher können wir uns im Rahmen der Schalenbiegetheorie allgemein auf den Fall

$$||\boldsymbol{\gamma}|| \leq O(1) \quad (\text{A4.2.4})$$

beschränken. Aus der Formel für  $\kappa_{\alpha\beta}$  (3.4.8) und der Definition für  $\theta$  (4.2.5) folgt andernfalls  $h||\boldsymbol{\kappa}|| \leq O(\theta||\boldsymbol{\gamma}||)$  (A4.2.1), wodurch der Grenzfall zum Übergang auf die Membrantheorie vorliegt.

### A4.3 Übergang zu kleinen Dehnungen

Das Einsetzen der Abschätzungen für kleine Dehnungen,

$$\theta = \max \left( \frac{h}{L}, \sqrt{\frac{h}{R}}, \sqrt{\eta} \right), \quad (\text{A4.3.1})$$

$$||\boldsymbol{\gamma}|| = O(\theta^2), \quad h||\boldsymbol{\kappa}|| = O(\theta^2), \quad h^2||\boldsymbol{\nu}|| = O(\theta^4),$$

überführt (4.3.16) in die gewohnte Verformungsenergiedichte der klassischen Schalentheorie [45]

$$\phi = \frac{1}{2} h \left( H^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12} H^{\alpha\beta\lambda\mu} \kappa_{\alpha\beta} \kappa_{\lambda\mu} \right) (1 + O(\theta^2)) . \quad (\text{A4.3.2})$$

Hierbei beträgt unter der Annahme des Hookeschen Gesetzes bei ungehinderter Dehnung in der  $\xi$ -Richtung (3. Richtung) die Verformungsenergie pro Volumeneinheit mit Hilfe des modifizierten Elastizitätstensors

$$W = \frac{1}{2} H^{\alpha\beta\lambda\mu} E_{\alpha\beta} E_{\lambda\mu} . \quad (\text{A4.3.3})$$

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] **ANAND, L.:** Moderate deformations in extension-torsion of inkompressible isotropic elastic material, *J. Mech. Phys. Solids* vol. 34 (1986) no. 3, 293-304.
- [2] **BAŞAR, Y.; KRÄTZIG, W.B.:** *Mechanik der Flächentragwerke*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden (1985).
- [3] **BAŞAR, Y.:** Zur Struktur konsistenter inkrementeller Theorien für geometrisch nichtlineare Flächentragwerke und deren Operator-darstellung, *Ing.-Arch.* vol. 56 (1986), 209-220.
- [4] **BAŞAR, Y.:** Eine konsistente Theorie für Flächentragwerke endlicher Verformungen und deren Operator-darstellung auf variationstheoretischer Grundlage, *ZAMM* vol. 66 (1986), 297-308.
- [5] **BAŞAR, Y.:** A consistent shell theory for finite deformations, *Acta Mech.* vol. 76 (1989), 73-87.
- [6] **BIRICIKOĞLU, V.; KALNINIS, A.:** Large elastic deformations of shells with inclusion of transverse normal strain, *Int. J. Solids Structures* vol. 7 (1971), 431-444.
- [7] **BRODLAND, G.W.; COHEN, H.:** Deflection and snapping of spherical caps, *Int. J. Solids Structures* vol. 23 (1987), 1341-1356.
- [8] **BRONSTEIN, I.N.; SEMENDJAJEW, K.A.:** *Taschenbuch der Mathematik*, 19. Auflage (1980), herausgegeben von G. Grosche und V. Ziegler.
- [9] **CHERNYKH, K.F.:** Deformation of a shell boundary, *Lecture Notes in Engineering* vol. 19: "Finite Rotations in Structural Mechanics", *Proc. Euromech Colloquium 197* (1985), Jabłonna, Poland, edited by W. Pietraszkiewicz, Springer-Verlag (1986).
- [10] **CHERNYKH, K.F.:** Nonlinear theory of isotropically elastic thin shells, *Mech. of Solids* vol. 15 (1982) no. 2, 118-127.

- [11] **CHROSCIELEWSKI, J.; NOLTE, L.-P.:** Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY, Mitt. aus dem Inst. f. Mech. 48, Ruhr-Universität Bochum (1985).
  
- [12] **COWPER, G.R.:** CURSHL, a high-precision finite element for shells of arbitrary shape, National Research Council of Canada, Aeronautical Report (1972).
  
- [13] **COWPER, G.R.:** Gaussian quadrature formulas for triangles, Int. J. Num. Meth. Eng. 7 (1973), 405-408.
  
- [14] **DEMIRAY, H.; VITO, R.P.:** Large deformation analysis of soft bio-materials, Int. J. Eng. Sci, vol. 14 (1976), 789-793.
  
- [15] **FLOEGL, H.; MANG, H.:** Zum Einfluß der Verschiebungsabhängigkeit ungleichförmigen hydrostatischen Druckes auf das Ausbeulen dünner Schalen allgemeiner Form, Ing.-Archiv vol. 50 (1981), 15-30.
  
- [16] **FUNG, Y.C.:** Biomechanics, mechanical properties of living tissues, Springer-Verlag (1981).
  
- [17] **GREEN, A.E.; ZERNA, W.:** Theoretical elasticity, second edition, Clarendon Press, Oxford (1968).
  
- [18] **HARTE, R.:** Doppelt gekrümmte finite Dreieckelemente für die lineare und geometrisch nichtlineare Berechnung allgemeiner Flächentragwerke, technisch-wiss. Mitt. Nr. 82-10, Inst. f. konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum (1982).
  
- [19] **HAUGHTON, D.M.; OGDEN, R.W.:** On the incremental equations in non-linear elasticity - II, bifurcation of pressurized spherical shells, J. Mech. Phys. Solids vol. 26 (1978), 111-138.
  
- [20] **HUGHES, T.J.R.; CARNOY, E.:** Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strains, Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. vol. 39 (1983), 69-82.

- [21] JOHN, F.: Estimates for the derivatives of the stress in a thin shell and interior shell equations, Communications on Pure and Appl. Math. vol. 18 (1965), 235-267.
- [22] KLINGBEIL, E.: Tensorrechnung für Ingenieure, Bibliographisches Inst., Mannheim (1966).
- [23] KOITER, W.T.: A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells, in "Theory of Thin Elastic Shells", Proc. IUTAM Symp. Delft 1959, North-Holland Publ. Co., Amsterdam (1960).
- [24] KOITER, W.T.: On the nonlinear theory of thin elastic shells, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., Ser. B, vol. 69 (1966).
- [25] KOLLAR; DULACSKA: Schalenbeulung, Werner-Verlag Düsseldorf (1975).
- [26] KRÄTZIG, W.B.; BAŞAR, Y.; WITTEK, U.: Nonlinear behaviour and elastic stability of shells, Beitrag in "Buckling of Shells" ed. E. Ramm, S. 19, Springer-Verlag (1982).
- [27] LAURSEN, M.E.; GELLERT, M.: Some criteria for numerically integrated matrices and quadrature formulas for triangles, Int. J. Num. Meth. Eng. vol. 12 (1978), 67-76.
- [28] LIBAI, A.; SIMMONDS, J.G.: Large strains constitutive laws for the cylindrical deformation of shells, Int. J. Non-Linear Mech. vol. 16 (1981), no. 2, 91-103.
- [29] LIBAI, A.; SIMMONDS, J.G.: Highly non-linear cylindrical deformations of rings and shells, Int. J. Non-Linear Mech. vol. 18 (1983) no. 3, 181-197.
- [30] LIBAI, A.; SIMMONDS, J.G.: Nonlinear elastic shell theory, Adv. in Appl. Mech. vol. 23 (1983), 271-371.
- [31] LIBAI, A.; SIMMONDS, J.G.: The nonlinear theory of shells of one spatial dimension, (in Vorbereitung zur Veröffentlichung).

- [32] **MACVEAN, D.B.:** Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Dehnungstensoren, ZAMP vol. 19 (1968), 157-185.
- [33] **MAKOWSKI, J.:** Tensoralgebra, interner Vortrag am Lehrstuhl für Mechanik II, Ruhr-Universität Bochum (WS 1986/87), (auf Englisch).
- [34] **MAKOWSKI, J.; NOLTE, L.-P.:** Simple equations in terms of displacements for finite axisymmetric deflections of shells of revolution, Int. J. Non-Linear Mech. vol. 22 (1987) no. 1, 1-13.
- [35] **MAKOWSKI, J.; STUMPF, H.:** Finite strains and rotations in shells, Lecture Notes in Engineering vol. 19: "Finite Rotations in Structural Mechanics", Proc. Euromech Colloquium 197 (1985), Jabłonna, Poland, edited by W. Pietraszkiewicz, Springer-Verlag (1986).
- [36] **MAKOWSKI, J.; STUMPF, H.:** Buckling equations for elastic shells with rotational degrees of freedom undergoing finite strain deformation, to appear in Int. J. Solids Structures vol. 25 (1989).
- [37] **MARES, R.; WOJCIESZYNSKI, R.:** Vektorisieren in Cyber 200-Fortran, Bochumer Schriften zur parallelen Datenverarbeitung, Rechenzentrum der Ruhr-Universität Bochum (Nov. 1983).
- [38] **MICHLIN, S.G.:** Variationsmethoden der mathematischen Physik, Akademie-Verlag, Berlin (1962).
- [39] **MOAN, T.:** Orthogonal polynomials and "best" integration formulas on a triangle, with particular reference to finite element approximations, ZAMM vol. 54 (1974), 501-508.
- [40] **NOLTE, L.-P.:** Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen, Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 39, Ruhr-Universität Bochum (1983).
- [41] **NOLTE, L.-P.; MAKOWSKI, J.:** Pressure loaded shells undergoing different levels of nonlinearity, Mech. Res. Comm. vol. 21 (1986),

145-171.

- [42] **NOLTE, L.-P.; MAKOWSKI, J.; STUMPF, H.:** On the derivation and comparative analysis of large rotation shell theories, Ing.-Arch. vol. 56 (1986), 145-160.
  
- [43] **NOLTE, L.-P.; SCHIECK, B.:** Vectorized high precision finite elements with application to nonlinear shell problems, Parallel Computing 85, edited by M. Feilmeier, G. Joubert, U. Schendel, Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), (1986), 305-310.
  
- [44] **NOLTE, L.-P.; SCHIECK, B.:** Beitrag zur Vektorisierung höherwertiger Finiter Elemente, Proc. 1985 Conference on Supercomputers and Applications, edited by H. Ehlich, K.-H. Schloßer, B. Wojcieszynski, Bochumer Schriften zur parallelen Datenverarbeitung (Aug. 1986), 139-154.
  
- [45] **NOLTE, L.-P.; STUMPF, H.:** Energy-consistent large rotation shell theories in Lagrangean description, Mech. Research Comm. vol. 10 (1983) no. 4, 213-221.
  
- [46] **OGDEN, R.W.:** Nonlinear elastic deformations, Ellis Horwood ltd., Chichester (1984).
  
- [47] **OGDEN, R.W.; CHADWICK, P.:** On the deformation of solid and tubular cylinders of incompressible isotropic elastic material, J. Mech. Phys. Solids vol. 20 (1972), 77-90.
  
- [48] **PFLÜGER, A.:** Stabilitätsprobleme der Elastostatik, 3. Auflage, Berlin (1975).
  
- [49] **PIETRASZKIEWICZ, W.:** Introduction to the non-linear theory of shells, Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 10, Ruhr-Universität Bochum (1977).
  
- [50] **PIETRASZKIEWICZ, W.:** Finite rotations in the nonlinear theory of thin shells, in "Thin Shell Theory, New Trends and Applications", CISM Courses and Lectures no. 240, Springer-Verlag Wien - New York (1980),

154-208.

- [51] **PIETRASZKIEWICZ, W.:** On consistent approximations in the geometrically non-linear theory of shells, Mitt. Inst. Mech. 26, Ruhr-Univ. Bochum (1981).
  
- [52] **PIETRASZKIEWICZ, W.:** Geometrically non-linear theories of thin elastic shells, Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 55, Ruhr-Universität Bochum (1987).
  
- [53] **RECKE, L.; WUNDERLICH, U.:** Rotations as primary unknowns in the non-linear theory of shells and corresponding finite element models, Lecture Notes in Engineering vol. 19, Proc. Euromech Colloquium 197 (1985), Jabłonna, Poland, Springer-Verlag (1986).
  
- [54] **ROIK, K.:** Vorlesung über Stahlbau, 2. Auflage, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München (1983).
  
- [55] **SCHMIDT, R.:** Variationsprinzip für geometrisch nichtlineare Schalentheorien bei Rotationen mittlerer Größenordnung, Diss. Ruhr-Universität Bochum (1980).
  
- [56] **SCHMIDT, R.:** Polar decomposition and finite rotation vector in first-order finite elastic strain shell theory, Lecture Notes in Engineering vol. 19: "Finite Rotations in Structural Mechanics", Proc. Euromech Colloquium 197 (1985), Jobłonna, Poland, edited by W. Pietraszkiewicz, Springer-Verlag (1986).
  
- [57] **SCHMIDT, R.; PIETRASZKIEWICZ, W.:** Variational principles in the geometrically nonlinear theory of shells undergoing moderate rotations, Ing. Arch. vol. 50 (1981), p 181.
  
- [58] **SCHRADER, K.-H.:** MESY3 Benutzerhandbuch Version CDC Cyber 175 FORTRAN 77, Ruhr-Universität Bochum (1983).
  
- [59] **SIMMONDS, J.G.:** The strain energy density of rubber-like shells, Dep. Appl. Math. Comp. Sci. (DAMACS) Report 83-07, University of Virginia,

Charlottesville; Int. J. Solids Structures vol. 21 (1985) no. 1, 67-77.

- [60] **SIMMONS, J.G.:** The strain-energy density of rubber-like shells of revolution undergoing torsionless, axisymmetric deformation (axisshells), J. Appl. Mech. vol. 53 (1986), 593-596.
- [61] **SIMMONS, J.G.:** The strain-energy density of compressible, rubber-like axisshells, J. Appl. Mech. vol. 54 (1987), 453-454.
- [62] **STUMPF, H.:** Generating functionals and extremum principles in non-linear elasticity with applications to nonlinear plate and shallow shell theory, in "Lecture Notes in Math. 503, Springer-Verlag (1976), 500-510.
- [63] **STUMPF, H.:** The derivation of dual extremum and complementary stationary principles in geometrical non-linear shell theory, Ing. Arch. 48 (1979), 221-237.
- [64] **STUMPF, H.:** On the linear and nonlinear stability analysis in the theory of thin elastic shells, Lecture XV ICTAM Toronto/Canada (1980), Ing. Arch. 51 (1981), 195-213.
- [65] **STUMPF, H.:** The stability equations of the consistent nonlinear elastic shell theory with moderate rotations, IUTAM-Symp. "Stability in the Mechanics of Continua", Nümbrecht/Germany (1981), Proc. 89-100, Springer-Verlag (1982).
- [66] **STUMPF, H.:** Unified operator description, nonlinear buckling and post-buckling analysis of thin elastic shells, Mitt. aus dem Inst. f. Mechanik 34, Ruhr-Universität Bochum (1982).
- [67] **STUMPF, H.:** On the post-buckling analysis of thin elastic shells, ZAMM 63 (1983), T101-T103.
- [68] **STUMPF, H.; MAKOWSKI, J.:** On large strain deformation of shells, Acta Mechanica vol. 45 (1986), 153-168.

- [69] **TABER, L.A.:** On approximate large strain relations for a shell of revolution, *Int. J. Non-Linear Mech.* vol. 20 (1985) no. 1, 27-39.
- [70] **TABER, L.A.:** Large elastic deformation of shear deformable shells of revolution: Theory and Analysis, *J. Appl. Mech.* vol. 54 (1987), 578-584.
- [71] **TABER, L.A.:** A variational principle for large axisymmetric strain of incompressible circular plates, *Int. J. Non-Linear Mech.* vol. 21 (1986) no. 5, 327-337.
- [72] **TABER, L.A.:** Asymptotic expansions for large elastic strain of a circular plate, *Int. J. Solids Structures* vol. 23 (1987) no. 6, 719-731.
- [73] **TRUESDELL, C.; NOLL, W.:** The non-linear field theories of mechanics, *Handbuch der Physik*, herausgegeben von S. Flügge, Bd. III/3, Springer-Verlag (1965).
- [74] **WITTEK, U.:** Beitrag zum Tragverhalten der Strukturen bei endlichen Verformungen unter besonderer Beachtung des Nachbeulmechanismus dünner Flächentragwerke, *techn.-wiss. Mitt. Nr. 80-1*, Inst. f. Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum (1980).
- [75] **WUNDERLICH, W.:** Incremental formulation for geometrically nonlinear problems, *Proc. US-Germany symposium "formulation and computational algorithms in finite element analysis"* MIT, Boston (1976).
- [76] **YOSHITSURA YOKOO; HIROYUKI MATSUNAGA:** A general nonlinear theory of elastic shells, *Int. J. Solids Structures* vol. 10 (1974), 261-274.
- [77] **ZIENKIEWICZ, O.C.:** *The finite element method*, 3rd. edition, Mc. Graw-Hill, London (1977).

## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalem Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:  
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Guldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity

- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr.18 Uwe Kolberg:  
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells

- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorie unter Berücksichtigung großer Rotationen

- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowsky/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz K. Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Trajapczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity

- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien, Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 J. Makowsky/H. Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU:  
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotations-symmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt:  
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer:  
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 J. Makowski/H. Stumpf:  
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O.T. Bruhns:  
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert:  
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller:  
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl:  
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder

- Nr. 67 Michael Geis:  
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit  
der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker:  
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck:  
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen  
inkompressiblen Materialien

# ERRATA ZUR DISSERTATION

## "GROSSE ELASTISCHE DEHNUNGEN IN SCHALEN AUS HYPERELASTISCHEN INKOMPRESSIBLEN MATERIALIEN"

VON BERTHOLD SCHIECK

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 69, November 1989

Stand der entdeckten Fehler: 31.12.92

Die fehlerhaften Stellen sind durch Unterstreichen gekennzeichnet.

Seite 7, die zweite Formel mit der Nummer (2.1.17):

Statt (2.1.17) muß es heißen: (2.1.18)

Seite 9, Formel (2.2.7):  $\bar{b}_{\alpha\beta} = \dots = - \bar{n}_{,\alpha} \cdot \bar{a}_{\beta} = - \bar{n}_{,\beta} \cdot \bar{a}_{\alpha}$

Seite 9, Formel (2.2.8):  $\bar{h}_{\alpha\beta} = \dots = - \bar{n}_{,\alpha} \cdot \bar{g}_{\beta} = - \bar{n}_{,\beta} \cdot \bar{g}_{\alpha}$

Seite 11, Formel (2.3.1):  $u(\theta^{\alpha}, \xi) = v(\theta^{\alpha}) + \xi \left( \bar{n}(\theta^{\alpha}) - n(\theta^{\alpha}) \right)$

Seite 12, Formel (2.3.2):  $u(\theta^{\alpha}, \xi) = v(\theta^{\alpha}) + \zeta(\theta^{\alpha}, \xi) \bar{n}(\theta^{\alpha}) - \xi n(\theta^{\alpha})$

Seite 13, Formel (2.3.7):  $\bar{g}_{\alpha 3} = \bar{a}_{\alpha 3} = 0$

Seite 13, Formel (2.3.10):

$$u(\theta^{\alpha}, \xi) = v(\theta^{\alpha}) + \int_0^{\xi} \lambda_3(\theta^{\alpha}, \xi) \bar{n}(\theta^{\alpha}, \xi) d\xi - \xi n(\theta^{\alpha})$$

Seite 19, Formel (3.3.7):

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = \bar{n} \cdot \bar{a}_{\alpha,\beta} = \bar{n} \cdot (\bar{a}_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \bar{a}_{\lambda}) = \bar{n} \cdot \bar{a}_{\alpha|\beta}$$

Seite 20, letzte Zeile über der Formel (3.4.4):

... sowie der analogen Anwendung von (2.1.16 - 18)

Seite 59, unmittelbar nach der Formel (6.4.4) ist einzufügen:

Bei einer Verschiebungsformulierung mit  $v$  als das gesuchte Verschiebungsfeld ist  $\delta^2 v \equiv 0$ .

Seite 62, Formel (7.2.5), zweite Zeile:

$$A = 3(E_1 + E_2) = 2E_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}, \quad D = E_1 E_2 = \frac{1}{g} \text{Det}(E_{\alpha\beta})$$

Seite 78, 8. Zeile: ... von 62% der Grenzrechengeschwindigkeit.

Seite 118, 8. und 9. Zeile:

Durch Einsetzen von (2.3.6) in (2.3.10) erhalten wir

$$u(\theta^\alpha, \xi) = v(\theta^\alpha) + \int_0^\xi \bar{g}_3(\theta^\alpha, \xi) d\xi - \xi n(\theta^\alpha). \quad (\text{A2.4.1})$$

Seite 118, Formel (A2.4.2):

an jede Zeile der Formel muß  $-\xi n$  angehängt werden.

Seite 119, Formel (A2.4.6): Die vollständige Formel lautet

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \sum_{s=0}^n \frac{\left( \overset{0}{g}_{1, (3^{m-n})} \times \overset{0}{g}_{1, (3^{m-s})} \right) \cdot \overset{0}{g}_{1, (3^s)} \xi^m}{(m-n)! (n-s)! s!} = 1 - \frac{b^\lambda}{a} + \frac{b}{a} \xi^2.$$

Seite 119, eine Zeile über der Formel (A2.4.7):

Die  $(n-1)$ . Ableitung von (A2.3.1),

Seite 119, Formel (A2.4.7):

$$\left( \overset{0}{g}_{3, \alpha} \cdot \overset{0}{g}_\beta \right), (3^{n-1}) = \left( -\lambda_3 \overset{0}{h}_{\alpha\beta} \right), (3^{n-1})$$

Seite 124, letzte Zeile über der Formel (A3.4.1): wicklung [8] für

Seite 125, vorletzter Abschnitt, letzte Zeile: Sinne von [21].

Seite 126, Formel (A3.4.8), letzter Term:

$$\text{statt } -2b_\alpha^\lambda b_\beta^\rho E_{\lambda\rho} \text{ muß es heißen } -2h_\alpha^\lambda h_\beta^\rho E_{\lambda\rho}.$$



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 69**