

**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Johannes Groß-Weege

Zum Einspielerverhalten von  
Flächentragwerken

Heft Nr. 58



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

INSTITUT FÜR MECHANIK  
RUHR - UNIVERSITÄT BOCHUM

JOHANNES GROSS-WEEGE

ZUM EINSPIELVERHALTEN  
VON FLÄCHENTRAGWERKEN

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 58

JUNI 1988

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

© 1988 Dr.-Ing. Johannes Groß-Weege  
Marktstraße 16, 4236 Hamminkeln

Alle Rechte vorbehalten.

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1984 - 1987 während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl für Allgemeine-Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, deren Durchführung er jederzeit unterstützte und förderte. Herrn Prof. Dr.-Ing. O. Bruhns gilt mein Dank für die Übernahme des Koreferates. Ganz besonders möchte ich mich bei Herrn Priv.-Doz. Dr.-Ing. D. Weichert bedanken, dessen engagiertes Interesse zur Entstehung dieser Arbeit wesentlich beigetragen hat.

Referenten: Prof. Dr.-Ing. Helmut Stumpf  
Prof. Dr.-Ing. Otto Bruhns  
Priv.-Doz. Dr.-Ing. Dieter Weichert

Tag der Einreichung: 19.1.1988  
Tag der mündlichen Prüfung: 6.6.1988

## **Zusammenfassung**

Mechanische Bauteile und Strukturen werden häufig derart belastet, daß in ihnen plastische Deformationen auftreten. Ist die Belastung dabei zeitlich veränderlich, so stellt sich insbesondere die Frage, ob nach einer großen Anzahl von Lastwechseln Versagen aufgrund unbegrenzt akkumulierter plastischer Dehnungen auftritt. Dieses Strukturversagen steht im Gegensatz zum "Einspielen" ("Shakedown"), bei dem die während des gesamten Belastungsprozesses entstehenden plastischen Deformationen begrenzt bleiben. Die vorliegende Arbeit behandelt die theoretische und numerische Untersuchung des Einspielverhaltens von Flächentragwerken unter veränderlichen thermischen und mechanischen Belastungen. Dabei wird insbesondere der Einfluß endlicher Verformungen berücksichtigt.

## **Summary**

Under the action of external loads mechanical structures often undergo elastic-plastic deformations. If the loads are variable in time the problem arises whether failure due to the unlimited accumulation of plastic strains occurs after a great number of loading cycles. In contrast to this kind of structural failure "shakedown" may occur, such that the plastic strains, accumulated during the whole loading process, are limited. The presented work deals with the theoretical and numerical investigation of the shakedown behaviour of shells under variable mechanical and thermal loading taking account of the influence of finite deformations.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. Einleitung	1
2. Das Einspielen elasto-plastischer Körper	6
2.1 Grundbeziehungen des dreidimensionalen Problems	6
2.2 Verallgemeinerung des MELANSchen Theorems	17
2.3 Bestimmung von Einspiellastfaktoren	27
3. Anwendung auf Flächentragwerke	31
3.1 Geometrie	31
3.2 Spannungszustand	41
3.3 Werkstoffgesetze	46
3.4 Bestimmung von Einspiellastfaktoren	53
4. Finite-Element-Formulierung für rotationssymmetrische Flächentragwerke	62
4.1 Einführende Bemerkungen	62
4.2 Grundlegende Beziehungen in diskretisierter Form	63
4.3 Programmtechnische Realisierung	78
5. Numerische Beispiele	80
5.1 Allgemeines	80
5.2 Einige einführende Beispiele	82
5.2.1 Kreiszyinderschale unter Innendruck und Ringlast	82
5.2.2 Rohr unter Innendruck und Axiallast	86
5.2.3 Konvergenzuntersuchungen	90

5.3	Einfluß geometrisch nichtlinearer Effekte	93
5.3.1	Kreiszylinderschale unter variablem Innendruck	93
5.3.2	Kreisplatte unter variabler Gleichlast	97
5.4	Einfluß kombinierter thermischer und mechanischer Belastung	100
5.4.1	Rohr unter Innendruck und variabler Innentemperatur	100
5.4.2	Kreiszylinderschale unter Axiallast und Temperaturbelastung	104
5.5	Einfluß der Art des Querschnitts	106
5.5.1	Kreisplatte unter Gleichlast und Randmoment	106
6.	Schlußbemerkungen	108
	Literatur	109
Anhang A	Zur numerischen Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems	122

## 1. EINLEITUNG

Bei der Konstruktion von Bauteilen und Tragwerken des Ingenieurbaus ist die Beurteilung ihrer Gebrauchsfähigkeit und Sicherheit gegen Versagen unter der Einwirkung äußerer Lasten oftmals wichtiger als die genaue Kenntnis der in ihrem Innern auftretenden Spannungen und Verschiebungen. Aus Gründen einer ökonomischen Bemessung wird dabei häufig das Auftreten plastischer Verformungen in Kauf genommen. Andererseits kann man dies auch nicht immer ganz ausschließen, wenn unbekannte Eigenspannungen im unbelasteten Körper existieren. Steht das Bauteil oder Tragwerk unter der Wirkung zeitlich veränderlicher Lasten, so ist eine spezifische Art des Versagens die unbegrenzte Akkumulation plastischer Dehnungen in seinem Innern. Dabei kann zwischen zwei möglichen Formen dieser Versagensart unterschieden werden. Die eine Form ist durch das Auftreten alternierender plastischer Dehnungen gekennzeichnet, die zu einem lokalen plastischen Ermüden des Materials und schließlich zum Bruch führen. Man bezeichnet diesen Versagensfall deshalb als Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität". Die zweite Form des Versagens ist das inkrementelle unbegrenzte Anwachsen plastischer Verformungen während eines Belastungsprozesses. Dieser Versagensfall führt zu übermäßigen (lokalen und/oder globalen) Verformungen und damit zur Gebrauchsunfähigkeit des Tragwerks und wird als "Inkrementelles Versagen" bezeichnet. Beide Versagensformen können auch simultan auftreten und sind dadurch gekennzeichnet, daß kein Zeitpunkt während des Belastungsprozesses gefunden werden kann, jenseits dessen keine zusätzlichen plastischen Verformungen auftreten. Dieses Strukturverhalten steht im Gegensatz zum "Einspielen" ("Shakedown"), bei dem die in der Anfangsphase des Belastungsprozesses im Körper entstehenden plastischen Dehnungen eine derartige Eigenspannungsverteilung im Innern der Struktur hervorrufen, daß von einem bestimmten Zeitpunkt an keine zusätzlichen plastischen Dehnungen mehr entstehen und das Tragwerk somit im weiteren Verlauf des Belastungsprozesses nur noch rein elastisches Verhalten zeigt. Die Sicherheit eines Tragwerks erfordert deshalb, daß es "einspielt".

Die Vorherbestimmung dieses strukturellen Verhaltens war das Ziel der grundlegenden Arbeiten von MELAN [67] und KOITER [52], die hinreichende Kriterien für Einspielen (MELANSches Theorem) und Nicht-Einspielen

(KOITERSches Theorem) für elastisch-idealplastische Körper in quasistatischen Prozessen liefern. Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Theoreme sind die Existenz einer konvexen Fließfläche, die Gültigkeit der Normalitätsregel für die plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten, die Vernachlässigung von Temperaturänderungen und viskosen Effekten sowie die Beschränkung auf geometrisch lineare Probleme. Sie bilden die Grundlage der klassischen Einspieltheorie ("Shakedown-Theory"), welche für den Sonderfall proportionaler Belastung auf die bekannte Grenzlasttheorie starr-plastischer Körper ("Limit Analysis" [23]) führt. Ausgehend vom KOITERSchen Theorem haben GOKHFELD [30], SAWCZUK [105] und KÖNIG [44] hinreichende Kriterien für "Inkrementelles Versagen" und für Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität" entwickelt und diese, wie auch das MELANSche Theorem, auch mit Hilfe generalisierter Variablen (Spannungs- und Dehnungsrepräsentanten) formuliert. Anwendungen der Theoreme beschränken sich hauptsächlich auf die im Bauwesen häufig vorkommenden Rahmentragwerke und sind dort bereits fester Bestandteil der Strukturanalyse (entsprechende Programmsysteme sind in [27,73,78,102] vorgestellt worden). Es existieren zwar auch vereinzelt Anwendungen auf spezielle flächenhafte Strukturen wie zum Beispiel Scheiben [7,18,31,76], Platten [2,3] oder rotationssymmetrische Sandwich-Schalen [69,71], ein einheitliches Konzept, welches allgemein beliebige Flächentragwerke umfaßt, ist bisher allerdings nicht bekannt.

Experimentelle Untersuchungen von Einspielproblemen (siehe z. B. [1,56,58]) haben die Ergebnisse von numerischen Berechnungen qualitativ bestätigt und damit die grundsätzliche Bedeutung der Einspieltheorie untermauert. Unterschiede zwischen den numerischen und experimentellen Ergebnissen werden in der Regel damit begründet, daß die theoretischen Untersuchungen Geometrieänderungen und/oder Materialverfestigung nicht berücksichtigen. Eine Ergänzung der klassischen Theoreme zur Berücksichtigung dieser und anderer Effekte erscheint schon deshalb sinnvoll (ausführliche Literaturübersichten über neuere Arbeiten finden sich in [46,51,62,63,107]). Während die Erfassung von Temperaturdehnungen auf der Grundlage der erweiterten Theoreme von PRAGER [99] und DE DONATO [19] keine Probleme bereitet, sind die bisher bekannten Erweiterungen der klassischen Theoreme zur Beschreibung verfestigenden Materialverhaltens [37,60,65,94,124], dynamischer Prozesse [14,46], temperaturabhängiger

Materialeigenschaften [41,99] sowie gewisser geometrischer Effekte [50,60,121,125] häufig auf Sonderfälle beschränkt. Ein einheitliches abgeschlossenes Konzept zur Erfassung all dieser Einflüsse liegt zur Zeit noch nicht vor. Anwendungen der erweiterten Theoreme, insbesondere numerische Beispiele, sind nur ganz vereinzelt bekannt [124].

Einspielprobleme können im Prinzip auch durch eine inkrementelle Vorgehensweise [10,38,43] behandelt werden. Dabei wird mit Hilfe der bekannten inkrementellen Verfahren eine elasto-plastische Analyse des Tragwerks durchgeführt und gleichzeitig kontrolliert, ob sich die im Inneren auftretenden plastischen Dehnungen im Verlauf des Belastungsprozesses stabilisieren. Diese Verfahren setzen die Kenntnis der Belastungsgeschichte voraus. Nachteile liegen darin, daß man unter Umständen sehr viele Lastzyklen rechnen muß, um eine zuverlässige Langzeitaussage treffen zu können. Dabei besteht grundsätzlich die Gefahr der Fehlerakkumulation. Außerdem erhält man keine Angaben über die Größe der Sicherheit gegen Versagen.

Im Gegensatz zu dieser Vorgehensweise stehen Verfahren, die auf der Anwendung der genannten Einspieltheoreme beruhen. Charakteristisch und attraktiv an diesen Verfahren ist die Tatsache, daß die Belastungsgeschichte beliebig sein darf und nur die äußeren Belastungsgrenzen bekannt sein müssen. Darüberhinaus liefern sie Schranken für den Sicherheitsfaktor gegen Versagen und zwar unabhängig von der Anzahl der Lastwechsel. Das MELANSche Theorem ist dabei dem KOITERSchen wegen seiner sicheren Aussage vorzuziehen, da es untere Schranken für den Sicherheitsfaktor gegen Versagen liefert.

Die Ziele der vorliegenden Arbeit sind eine Verallgemeinerung des MELANSchen Theorems zur Berücksichtigung endlicher Verformungen, seine Anwendung auf allgemeine Flächentragwerke sowie die numerische Untersuchung des Einspielverhaltens von Flächentragwerken anhand ausgewählter Beispiele.

Ausgehend von grundlegenden Beziehungen der klassischen Plastizitätstheorie wird dazu in Kapitel 2 unter der Annahme kleiner Dehnungen eine Erweiterung des MELANSchen Theorems auf geometrisch nichtlineare Probleme

vorgeschlagen. Dabei werden die klassischen Voraussetzungen elastisch-idealplastischen Materialverhaltens, quasistatischer Belastung, der Existenz einer konvexen Fließfläche und der Gültigkeit der Normalitätsregel beibehalten. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß die auftretenden endlichen Verformungen nur kleine zeitliche Änderungen erfahren, was bei vielen technischen Problemen den Gegebenheiten entspricht. Die vorgestellte Erweiterung stellt eine Verallgemeinerung zweier in der Literatur vorliegender Formulierungen von MAIER [60] und WEICHERT [121] dar. Mit Hilfe eines angegebenen Klassifikationsschemas können die beiden genannten Formulierungen als Sonderfälle des erweiterten Theorems identifiziert werden. Als weitere Sonderfälle sind auch das geometrisch lineare MELANSche Theorem [67], das statische Grenzlast Theorem für proportionale Belastungen [23] sowie die Erfassung von geometrischen Imperfektionen enthalten. Zusätzlich zur rein mechanischen Belastung werden auch Temperaturänderungen berücksichtigt. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, daß die Materialeigenschaften temperaturunabhängig sind, und viskose Effekte werden vernachlässigt.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Anwendung des erweiterten MELANSchen Theorems auf Flächentragwerke, wobei die bekannte Schalentheorie von DONNELL, MUSHTARI und VLASOV benutzt wird. Die Reduzierung des 3-dimensionalen Problems auf ein 2-dimensionales Problem erfordert besondere Betrachtungen bei der Herleitung einer Fließbedingung, die ausschließlich im Raum der Schnittgrößen formuliert ist. Dabei stellt sich auch das Problem, daß die Belastungsgeschichte entsprechend der Vorgehensweise der klassischen Einspieltheorie nicht bekannt ist. Dieser Umstand führt schließlich dazu, daß die beiden möglichen Versagensfälle "Inkrementelles Versagen" und Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität" getrennt behandelt werden. Die Sicherheitsfaktoren für beide Versagensfälle erhält man jeweils als Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme.

Zur Berechnung numerischer Beispiele werden in Kapitel 4 die Finite-Element-Algorithmen zur Bestimmung der Einspiellasten axialsymmetrisch belasteter Rotationsschalen erstellt. Die Einhaltung des Schrankencharakters der erweiterten MELANSchen Theorems erfordert dabei eine Formulierung in ausschließlich statischen Größen. Dieser Teil der Arbeit umfaßt im wesentlichen die Diskretisierung von Schnittgrößenzuständen, die Berechnung

einer rein elastischen Vergleichslösung, die Konstruktion von Restschnittgrößenzuständen sowie die Bestimmung der beiden Sicherheitsfaktoren gegen "Inkrementelles Versagen" und Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität".

In Kapitel 5 wird schließlich das Einspielverhalten von Flächentragwerken anhand mehrerer Beispiele numerisch untersucht. In einem ersten Abschnitt werden dazu einige Schalenprobleme im Rahmen der geometrisch linearen Theorie behandelt, um einerseits grundsätzliche Merkmale des Einspielverhaltens zu verdeutlichen und andererseits das Lösungsverhalten und die Konvergenzeigenschaften des Verfahrens zu testen. In den dann folgenden Abschnitten wird der Einfluß endlicher Verformungen, wechselnder Temperaturen sowie unterschiedlicher Querschnittsarten auf das Einspielverhalten untersucht. Es werden verschiedene Typen von Flächentragwerken (Kreiszyinderschalen, Kegelschalen, Kreisplatten) unter wechselnden thermischen und mechanischen Belastungen behandelt. Die berechneten Lösungen werden mit vorliegenden Lösungen aus der Literatur, so vorhanden, verglichen, und auftretende Unterschiede werden diskutiert.

## 2. DAS EINSPIELEN ELASTO-PLASTISCHER KÖRPER

### 2.1 GRUNDBEZIEHUNGEN DES DREIDIMENSIONALEN PROBLEMS

Wir betrachten das Verhalten eines elastisch-idealplastischen Körpers B (Abb. 2.1) unter dem Einfluß quasistatischer äußerer Wirkungen  $a$ .

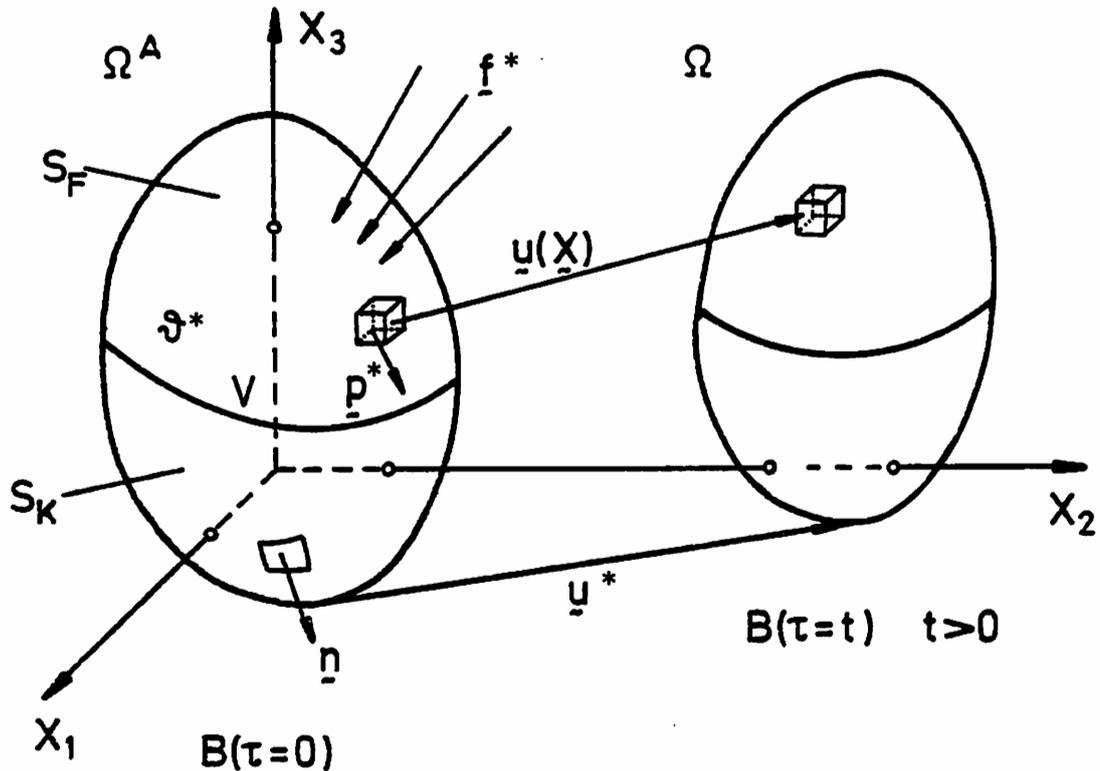


Abb. 2.1 Bezeichnungen zum dreidimensionalen Problem

In der Ausgangskonfiguration  $\Omega^A$  zur Zeit  $\tau = 0$  hat B das Volumen  $V$  und seine materiellen Punkte werden durch ihre Ortsvektoren  $X$  mit den Koordinaten  $[X_1, X_2, X_3]$  in einem raumfesten kartesischen Koordinatensystem markiert. Die Verformung von B aufgrund von  $a$  wird durch die räumlichen und zeitabhängigen Koordinaten  $[x_1, x_2, x_3]$  der Ortsvektoren  $x$  aller Punkte  $X$  beschrieben. Die jeweilige aktuelle Konfiguration  $\Omega$  von B ist dann durch die Verschiebungsvektoren  $u$  aller materiellen Punkte von B mit den Komponenten

$$u_i = x_i(X, \tau) - X_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1.1)$$

definiert. Die hinreichend glatte Oberfläche  $S$  von B besteht aus den von-

einander unabhängigen Teilen  $S_F$  und  $S_K$ , auf denen statische bzw. kinematische Randbedingungen vorgegeben sind. Als äußere Wirkungen berücksichtigen wir Volumenkräfte  $p^*(X, \tau)$  in  $V$ , Flächenlasten  $f^*(X, \tau)$  auf  $S_F$ , vorgeschriebene Verschiebungen  $u^*(X, \tau)$  auf  $S_K$  sowie vorgeschriebene Temperaturdifferenzen  $\theta^*(X, \tau) = \theta(X, \tau) - \theta(X, 0)$  in  $V$  und auf  $S$ . Zusammengefaßt ergeben sich die äußeren Wirkungen  $a$  somit zu

$$a(X, \tau) = [p^* \text{ in } V, f^* \text{ auf } S_F, u^* \text{ auf } S_K, \theta^* \text{ in } V \text{ und auf } S], \quad (2.1.2)$$

wobei ausdrücklich darauf hingewiesen sei, daß diese nicht nur Funktionen des Ortes sondern auch der Zeit sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß die zeitlichen Änderungen so langsam verlaufen, daß dynamische Effekte vernachlässigt werden können. Da bei technischen Problemen in der Regel nur die Ausgangskonfiguration eines Bauteils bekannt ist, wollen wir im folgenden sämtliche Größen hierauf beziehen, d. h. wir werden von der LAGRANGESchen Betrachtungsweise ausgehen. Unter diesen Voraussetzungen ergeben sich die Grundbeziehungen des Problems wie folgt:

(1) kinematische Bedingungen

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \delta_{ij} + u_{i,j} && \text{in } V \\ E_{ij} &= \frac{1}{2} (F_{ki} F_{kj} - \delta_{ij}) && \text{in } V \quad (2.1.3) \\ u_i &= u_i^* && \text{auf } S_K \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen  $F_{ij}$  und  $E_{ij}$  die Komponenten des Deformationsgradienten  $F(X)$  bzw. des GREENSchen Dehnungstensors  $E(X)$ .  $\delta_{ij}$  ist das Kronecker Symbol und das Komma bedeutet Differentiation der beteiligten Größe nach der dem Komma folgenden Koordinate.

(2) statische Bedingungen

$$t_{ij,i} = - p_j^* \quad \text{in } V$$

$$t_{ij} n_i = f_j^* \quad \text{auf } S_F \quad (2.1.4)$$

$$\sigma_{ik} F_{jk} = t_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Dabei sind  $t_{ij}$  und  $\sigma_{ij}$  die Komponenten des ersten PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensors  $t$  bzw. des zweiten PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensors  $\sigma$ .  $n_i$  bezeichnet die Komponenten des nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektors  $n$  auf  $S$ .

### (3) Werkstoffgesetz

Wir nehmen an, daß die Gesamtdehnungen  $E$  additiv zerlegt werden können in einen rein elastischen Anteil  $E^e$ , einen Anteil  $E^\theta$  verursacht durch die Temperaturdifferenz  $\theta^*$  und einen rein plastischen Anteil  $E^p$ , so daß gilt

$$E_{ij} = E_{ij}^e + E_{ij}^\theta + E_{ij}^p . \quad (2.1.5)$$

Diese Zerlegung ist zwar bei beliebigen Dehnungen nicht allgemein gültig (LEE [55]), allerdings hat CASEY [13] gezeigt, daß sie im approximativen Sinn unter anderem dann gerechtfertigt ist, wenn nur kleine Gesamtdehnungen begleitet von höchstens moderaten Gesamtrotationen zugelassen werden. Gerade dieses Verhalten zeigen Flächentragwerke, wo schon bei kleinen Dehnungen moderate Rotationen auftreten können. Wir nehmen weiter an, daß keine thermomechanische Kopplung vorliegt, so daß Temperaturänderungen weder die elastischen noch die plastischen Materialparameter beeinflussen. Durch diese Einschränkung muß allerdings auf die Berücksichtigung größerer Temperaturänderungen verzichtet werden.

Für den elastischen Anteil  $E^e$  der Dehnungen  $E$  setzen wir die Gültigkeit des HOOKEschen Gesetzes voraus, wonach  $E^e$  linear mit dem zweiten PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensor  $\sigma$  verbunden ist:

$$E_{ij}^e = L_{ijkl} \sigma_{kl} . \quad (2.1.6)$$

Hierbei bezeichnet  $L_{ijkl}$  die Komponenten des zeitlich konstanten und positiv definiten Tensors  $L$  der elastischen Koeffizienten mit den folgenden Symmetrieeigenschaften

$$L_{ijkl} = L_{klij} = L_{klji} = L_{jikl} \quad (2.1.7)$$

Für isotropes Material nimmt  $L$  die bekannte Form

$$L_{ijkl} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\delta_{ik} \delta_{jl} - \nu \delta_{ij} \delta_{kl}] \quad (2.1.8)$$

an, wobei  $E$  den Elastizitätsmodul (Young's Modul) und  $\nu$  die Querkontraktionszahl (Poisson-Zahl) bezeichnen.

Die Temperaturdehnungen  $E^\theta$  sind gegeben durch [9]

$$E_{ij}^\theta = \alpha_{ij} \theta^* \quad (2.1.9)$$

mit  $\alpha_{ij}$  als Komponenten des Wärmeausdehnungstensors  $\alpha$ , welcher für isotropes Material die Form

$$\alpha_{ij} = \alpha_\theta \delta_{ij} \quad (2.1.10)$$

hat. Dabei bezeichnet  $\alpha_\theta$  den als zeitlich konstant angenommenen Wärmeausdehnungskoeffizienten.

Für den plastischen Anteil  $E^p$  der Dehnungen  $E$  nehmen wir die Existenz einer ausgeprägten konvexen Fließfläche an, die den Bereich  $C$  der rein elastischen Zustände begrenzt. Diese Fließgrenze ist durch die Fließbedingung  $F(\sigma) = 0$  gegeben. Da wir uns auf idealplastisches Materialverhalten beschränken, ist  $F$  von der Belastungsgeschichte unabhängig. Für Spannungszustände, die innerhalb des Bereiches  $C$  liegen, verhält sich das Material rein elastisch. Wir bezeichnen diese als "sichere" Spannungszustände  $\sigma^s$ , für die die Bedingung

$$F(\sigma^S) < 0 \quad (2.1.11)$$

gilt. Nur für Spannungszustände, für die  $F(\sigma) = 0$  gilt, können plastische Deformationen auftreten; Zustände mit  $F(\sigma) > 0$  sind physikalisch nicht möglich. Die Form der Fließfunktion  $F$  hängt vom betrachteten Material ab. Für die meisten isotropen duktilen Metalle stimmt die HUBER-MISES-Fließbedingung, die wir im weiteren benutzen werden, recht gut mit experimentellen Ergebnissen überein. Sie lautet [9]

$$F(\sigma) = 3\sigma_{ij} \sigma_{ij} - (\sigma_{kk})^2 - 2\sigma_F^2 = 0, \quad (2.1.12)$$

wobei  $\sigma_F$  die Fließgrenze aus dem einachsigen Zugversuch bezeichnet. Wir nehmen weiterhin an, daß für die plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten  $\dot{E}^D$  die Normalitätsregel gilt. Diese besagt, daß  $\dot{E}^D$  entweder null ist oder in die Richtung der Normalen an die Fließfläche  $F$  zeigt:

$$\dot{E}_{ij}^D = \lambda \frac{\partial F(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} . \quad (2.1.13)$$

Hierbei gelten für den Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  folgende Bedingungen:

$$\lambda = 0 \text{ für } \left\{ \begin{array}{l} F < 0 \text{ bzw.} \\ F = 0 \text{ und } \dot{F} < 0 \end{array} \right\} \text{ und} \quad (2.1.14)$$

$$\lambda > 0 \text{ für } F = \dot{F} = 0 .$$

In den obigen Gleichungen (2.1.13) und (2.1.14) bedeutet der übergestellte Punkt die Ableitung der entsprechenden Größe nach der Zeit. Gleichung (2.1.13) wird auch als assoziiertes Fließgesetz bezeichnet, weil dort die plastischen Dehnungen mit der Fließbedingung verbunden sind. Für Fließbedingungen mit Ecken, definiert mit Hilfe von  $n$  Fließfunktionen  $F_k$  ( $k = 1, n$ ), ist diese Beziehung von PRAGER [100] und KOITER [52] erweitert worden. Es gilt dann

$$\dot{E}_{ij}^p = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial F_k(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2.1.15)$$

wobei für die Proportionalitätsfaktoren  $\lambda_k$  und die Fließfunktionen  $F_k$  die Bedingungen (2.1.14) entsprechend gelten. Damit ist die Beziehung (2.1.15) an die PRAGERSche Verträglichkeitsbedingung gebunden, wonach nur solche Fließfunktionen  $F_k$ , die aktiv sind ( $F_k = 0$ ), einen Beitrag zu  $\dot{E}^p$  leisten:

$$\lambda_k F_k = 0 \quad (k = 1, n) . \quad (2.1.16)$$

Unter diesen Voraussetzungen, nämlich der Existenz einer konvexen Fließfläche und der Gültigkeit der Normalitätsregel, kann gezeigt werden (Abb. 2.2), daß für einen Spannungszustand  $\sigma$  auf der Fließfläche mit zugehörigem  $\dot{E}^p$  und einem beliebigen "sicheren" Spannungszustand  $\sigma^s$  gemäß (2.1.11) die folgende Ungleichung gilt:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^s) \dot{E}_{ij}^p > 0 . \quad (2.1.17)$$

Im Rahmen der geometrisch linearen Theorie folgt diese Beziehung aus dem DRUCKERSchen Stabilitätskriterium [22] und ist auch als "lokales Maximumprinzip" bekannt.

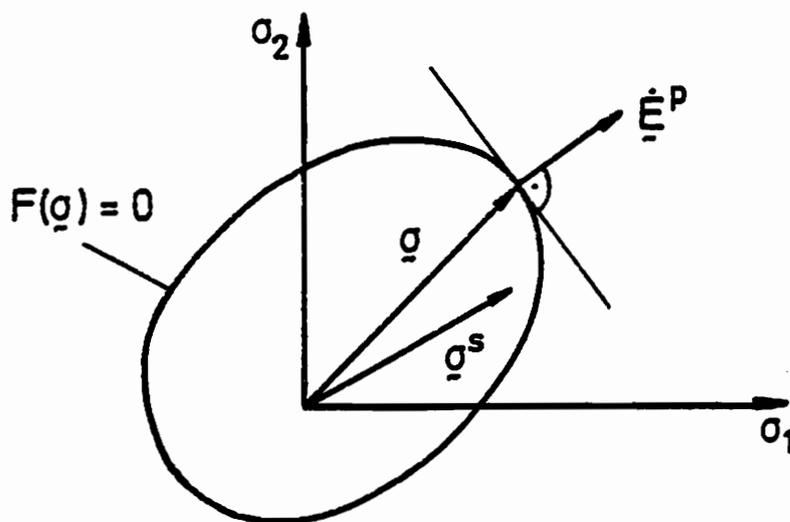


Abb. 2.2 Konvexität der Fließfläche und Normalitätsregel

Für die weiteren Betrachtungen spalten wir die im Vektor  $\mathbf{a}$  zusammengefaßten äußeren Wirkungen in einen zeitlich konstanten Anteil  $\mathbf{a}^R$  und einen zeitlich veränderlichen Anteil  $\mathbf{a}^r$  auf, so daß gilt

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{a}^R(\mathbf{X}) + \mathbf{a}^r(\mathbf{X}, \tau). \quad (2.1.18)$$

Dabei nehmen wir der Einfachheit halber an, daß für Zeiten  $\tau \leq \tau^R$  der zeitlich veränderliche Anteil  $\mathbf{a}^r$  gleich null ist und der Körper unter der alleinigen Wirkung von  $\mathbf{a}^R$  die Referenzkonfiguration  $\Omega^R$  einnimmt. Da  $\Omega^R$  eine Gleichgewichtskonfiguration sein soll, gelten hierfür die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} F_{ij}^R &= \delta_{ij} + u_{i,j}^R && \text{in } V \\ E_{ij}^R &= \frac{1}{2} (F_{ki}^R F_{kj}^R - \delta_{ij}) && \text{in } V \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

$$u_i^R = u_i^{R*} \quad \text{auf } S_K$$

$$\begin{aligned} t_{ij,i}^R &= -p_j^{R*} && \text{in } V \\ t_{ij}^R n_i &= f_j^{R*} && \text{auf } S_F \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

$$\sigma_{ik}^R F_{jk}^R = t_{ij}^R$$

$$\sigma_{ik}^R = \sigma_{ki}^R$$

$$E_{ij}^R = E_{ij}^{Re} + E_{ij}^{R\theta} + E_{ij}^{Rp}$$

$$E_{ij}^{Re} = L_{ijkl} \sigma_{kl}^R \quad (2.1.21)$$

$$E_{ij}^{R\theta} = \alpha_{ij} \theta^{R*}$$

$$E_{ij}^{Rp} = E_{ij}^{Rp}(\mathbf{a}^R)$$

Für Zeiten  $\tau > \tau^R$  verursachen die zeitlich veränderlichen äußeren Wirkungen  $\mathbf{a}^r$  Zusatzverschiebungen  $\mathbf{u}^r$ , Zusatzspannungen  $\boldsymbol{\sigma}^r$  und Zusatzdehnungen  $\mathbf{E}^r$  in B, dessen Konfiguration unter der Wirkung von  $\mathbf{a}^R + \mathbf{a}^r$  wir als aktuelle Konfiguration  $\Omega$  bezeichnen wollen. Wir nehmen an, daß  $\Omega$  ebenfalls wie  $\Omega^R$  eine Gleichgewichtskonfiguration ist, so daß die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^R + u_i^r \\ F_{ij} &= F_{ij}^R + F_{ij}^r = \delta_{ij} + u_{i,j}^R + u_{i,j}^r && \text{in } V \\ E_{ij} &= E_{ij}^R + E_{ij}^r = \frac{1}{2} [(F_{ki}^R + F_{ki}^r)(F_{kj}^R + F_{kj}^r) - \delta_{ij}] && \text{in } V \\ u_i &= u_i^{R*} + u_i^{r*} && \text{auf } S_K \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

$$\begin{aligned} (t_{ij}^R + t_{ij}^r)_{,i} &= -p_j^{R*} - p_j^{r*} && \text{in } V \\ (t_{ij}^R + t_{ij}^r)n_i &= f_j^{R*} + f_j^{r*} && \text{auf } S_F \\ (\sigma_{ik}^R + \sigma_{ik}^r)(F_{jk}^R + F_{jk}^r) &= t_{ij}^R + t_{ij}^r \\ (\sigma_{ik}^R + \sigma_{ik}^r) &= (\sigma_{ki}^R + \sigma_{ki}^r) \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

$$\begin{aligned} E_{ij}^e &= E_{ij}^{Re} + E_{ij}^{re} = L_{ijkl} (\sigma_{kl}^R + \sigma_{kl}^r) \\ E_{ij}^\theta &= E_{ij}^{R\theta} + E_{ij}^{r\theta} = \alpha_{ij} (\theta^{R*} + \theta^{r*}) \\ E_{ij}^D &= E_{ij}^{RD} + E_{ij}^{rD} \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

Durch Vergleich der Gleichungen (2.1.22) - (2.1.24) mit den Gleichungen (2.1.19) - (2.1.21) erhalten wir die entsprechenden Bedingungen für die Zusatzfeldgrößen:

$$F_{ij}^r = u_{i,j}^r \quad \text{in } V$$

$$E_{ij}^r = \frac{1}{2} [F_{ki}^R F_{kj}^r + F_{ki}^r F_{kj}^R + \underline{\underline{F_{ki}^r F_{kj}^r}}] \quad \text{in } V \quad (2.1.25)$$

$$u_i^r = u_i^{r*} \quad \text{auf } S_K$$

$$t_{ij,i}^r = -p_j^{r*} \quad \text{in } V$$

$$t_{ij}^r n_i = f_j^{r*} \quad \text{auf } S_F \quad (2.1.26)$$

$$\underline{\underline{\sigma_{ik}^R F_{jk}^r + \sigma_{ik}^r F_{jk}^R}} + \underline{\underline{\sigma_{ik}^r F_{jk}^r}} = t_{ij}^r$$

$$\sigma_{ij}^r = \sigma_{ji}^r$$

$$E_{ij}^{re} = L_{ijkl} \sigma_{kl}^r$$

$$E_{ij}^{r\theta} = \alpha_{ij} \theta^{r*} \quad (2.1.27)$$

$$E_{ij}^{rp} = E_{ij}^{rp} (a^R, a^r(\tau))$$

In den Gleichungen (2.1.25) und (2.1.26) sind die in den Zusatzfeldgrößen nichtlinearen Anteile durch doppeltes Unterstreichen markiert. Der einfach unterstrichene Term in (2.1.26)<sub>3</sub> enthält den Einfluß des Referenzspannungszustandes  $\sigma^R$  auf die Zusatzfeldgrößen.

Für die weiteren Betrachtungen ist es zweckmäßig, sich von der zeitlich veränderlichen Zusatzbelastung  $a^r$  zu befreien, indem man eine partikuläre Lösung für das überlagerte Problem konstruiert. Eine besondere partikuläre Lösung ist dabei die Lösung eines fiktiven rein elastischen Vergleichsproblems. Dazu wird ein rein elastischer Vergleichskörper  $\hat{B}$  (Abb. 2.3) eingeführt, der für Zeiten  $\tau \leq \tau^R$  die gleiche Konfiguration  $\hat{\Omega}^R$  wie der Realkörper  $B$  hat und den gleichen Spannungen  $\sigma^R$  wie im Realkörper  $B$  unterworfen ist, aber für  $\tau > \tau^R$  im Gegensatz zu  $B$  auf die zeitlich veränderlichen äußeren Zusatzwirkungen rein elastisch reagiert. Diese äußeren Zusatzwirkungen erzeugen nun Zusatzverschiebungen  $\hat{u}^{or}$ , Zusatzspannungen  $\hat{\sigma}^{or}$  und Zusatzdehnungen  $\hat{E}^r$ , wodurch  $\hat{B}$  in eine fiktive Konfiguration  $\hat{\Omega}$  über-

führt wird. Es wird angenommen, daß  $\hat{\Omega}$  eine Gleichgewichtskonfiguration ist, so daß entsprechend (2.1.25) - (2.1.27) die folgenden Gleichungen gelten. Dabei ist zu berücksichtigen, daß im rein elastischen Vergleichskörper  $\hat{B}$  keine plastischen Zusatzdehnungen auftreten können.

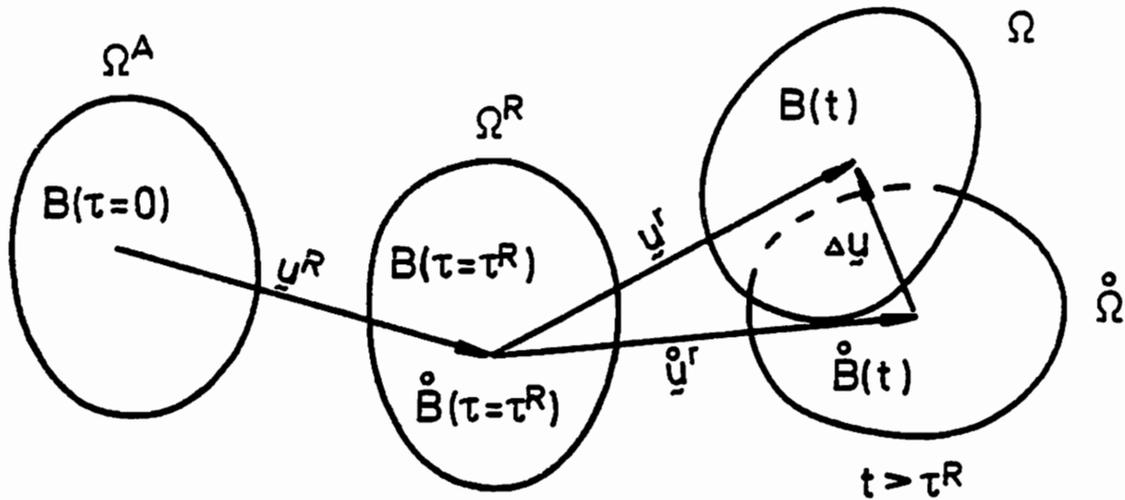


Abb. 2.3 Zum Konzept des rein elastischen Vergleichskörpers  $\hat{B}$

$$F_{ij}^{or} = u_{i,j}^{or} \quad \text{in } V$$

$$E_{ij}^{or} = \frac{1}{2} [F_{ki}^R F_{kj}^{or} + F_{ki}^{or} F_{kj}^R + \underline{\underline{F_{ki}^{or} F_{kj}^{or}}}] \quad \text{in } V \quad (2.1.28)$$

$$u_i^{or} = u_i^{r*} \quad \text{auf } S_K$$

$$t_{ij,i}^{or} = -p_j^{r*} \quad \text{in } V$$

$$t_{ij}^{or} n_i = f_j^{r*} \quad \text{auf } S_F \quad (2.1.29)$$

$$\underline{\underline{\sigma_{ik}^R F_{jk}^{or}}} + \underline{\underline{\sigma_{ik}^{or} F_{jk}^R}} + \underline{\underline{\sigma_{ik}^{or} F_{jk}^{or}}} = t_{ij}^{or}$$

$$\sigma_{ik}^{or} = \sigma_{ki}^{or}$$

$$E_{ij}^{or} = E_{ij}^{re} + E_{ij}^{r\theta}$$

$$E_{ij}^{re} = L_{ijkl} \sigma_{kl}^{or} \quad (2.1.30)$$

$$E_{ij}^{or} = \alpha_{ij} \theta^{r*}$$

Die Differenz der Zustände von B und  $\hat{B}$  ist dann durch die folgenden Differenzfelder beschrieben:

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= u_i^r - u_i^{or} \\ \Delta F_{ij} &= F_{ij}^r - F_{ij}^{or} \\ \Delta E_{ij} &= E_{ij}^r - E_{ij}^{or} \\ \Delta \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^r - \sigma_{ij}^{or} \\ \Delta t_{ij} &= t_{ij}^r - t_{ij}^{or} . \end{aligned} \tag{2.1.31}$$

Durch Vergleich der Gleichungen (2.1.25) - (2.1.27) für den Realkörper B mit den Gleichungen (2.1.28) - (2.1.30) für den Vergleichskörper  $\hat{B}$  ergeben sich die Bedingungen für die Differenzfelder:

$$\begin{aligned} \Delta F_{ij} &= \Delta u_{i,j} && \text{in } V \\ \Delta E_{ij} &= \frac{1}{2} [F_{ki}^R \Delta F_{kj} + \Delta F_{ki} F_{kj}^R + \underline{\underline{F_{ki}^r F_{kj}^r - F_{ki}^{or} F_{kj}^{or}}}] && \text{in } V \end{aligned} \tag{2.1.32}$$

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= 0 && \text{auf } S_K \\ \Delta t_{ij,i} &= 0 && \text{in } V \\ \Delta t_{ij} n_i &= 0 && \text{auf } S_F \end{aligned} \tag{2.1.33}$$

$$\underline{\underline{\sigma_{ik}^R \Delta F_{jk} + \Delta \sigma_{ik} F_{jk}^R + \sigma_{ik}^r F_{jk}^r - \sigma_{ik}^{or} F_{jk}^{or}}} = \Delta t_{ij}$$

$$\Delta \sigma_{ij} = \Delta \sigma_{ji}$$

$$\Delta E_{ij} = \Delta E_{ij}^e + \Delta E_{ij}^\theta + E_{ij}^{rp}$$

$$\Delta E_{ij}^e = L_{ijkl} \Delta \sigma_{kl} \quad (2.1.34)$$

$$\Delta E_{ij}^\theta = 0$$

## 2.2. VERALLGEMEINERUNG DES MELANSCHEN THEOREMS

### Allgemeine Bemerkungen

WEICHERT [119,121,122] hat sich in mehreren Arbeiten mit dem Einfluß geometrischer Nichtlinearitäten auf das Einspielen elasto-plastischer Körper beschäftigt. Er hat dabei gezeigt, daß eine Erweiterung des MELANSchen Theorems auf geometrisch nichtlineare Probleme nur möglich ist, wenn gewisse Angaben bezüglich der zum betrachteten Lastfall gehörenden Verformungen gemacht werden können. Dies ist immer dann möglich, wenn Gestalt und Belastungsgeschichte Aussagen über die zu erwartenden Deformationsmuster zulassen. Die Berücksichtigung großer zeitlich veränderlicher Zusatzverformungen  $u^r$  ist dann nur unter solchen Voraussetzungen möglich, die eine numerische Anwendung nicht ohne weiteres zulassen [121]. Aus diesem Grunde werden wir uns in dieser Arbeit auf die Berücksichtigung kleiner zeitlich veränderlicher Zusatzverformungen beschränken, so daß Bewegungen kleiner Amplitude einer endlichen Vorverformung  $u^R$  infolge  $a^R$  überlagert werden. Dieser Fall entspricht bei vielen technischen Problemen den Gegebenheiten, z. B. bei Problemen wo kleine zeitlich veränderliche Lasten (Temperatur, Wind, Schnee) großen zeitlich konstanten Lasten (Eigengewicht, ständige Verkehrslasten) überlagert werden oder wo große Lasten zeitlichen Schwankungen mit kleinen Amplituden unterworfen sind. Unter dieser Voraussetzung befassen wir uns mit dem folgenden Problem:

### Problemstellung

Ein elastisch-idealplastischer Körper B befindet sich unter dem Einfluß zeitlich konstanter äußerer Wirkungen  $a^R$  in der Referenzkonfiguration  $\Omega^R$  im Gleichgewicht. Wird B unter dem Einfluß zusätzlicher zeitlich veränderlicher äußerer Wirkungen  $a^r$  einspielen?

**Annahmen**

Da wir uns auf den Fall beschränken, daß die durch die zeitlich veränderlichen äußeren Wirkungen  $a^r$  hervorgerufenen Zusatzverformungen  $u^r$  und Zusatzspannungen  $\sigma^r$  klein sind, berücksichtigen wir im folgenden in den das Problem beschreibenden Gleichungen nur die Terme, die in den Zusatzfeldgrößen (Index "r") höchstens linear sind, d. h. wir vernachlässigen in den Gleichungen (2.1.25 - 26), (2.1.28 - 29) und (2.1.32 - 33) alle doppelt unterstrichenen Terme.

In die Bedingung (2.1.33)<sub>3</sub>, die in der noch folgenden Beweisführung benötigt wird, geht der Differenzdeformationsgradient  $\Delta F_{ij}$  ein. Dieser enthält gemäß den Gleichungen (2.1.32)<sub>1</sub> und (2.1.31)<sub>1</sub> die unbekannte Zusatzverformung  $u^r$  des Realkörpers B, von der wir voraussetzen, daß sie klein ist, so daß die Gesamtverformung  $u = u^R + u^r$  in der Nähe von  $u^R$  liegt. Wir nehmen deshalb an, daß wir einen Bereich  $U$  um die bekannte endliche Vorverformung  $u^R$  kennen, innerhalb dessen die unbekannte Gesamtverformung  $u$  liegt, so daß gilt (Abb. 2.4):

$$u = u^R + u^r = u^R + \underline{u}^r + \Delta u \in U \quad \text{bzw.} \tag{2.2.1}$$

$$\Delta u \in \tilde{U} = U - u^R - \underline{u}^r$$



Abb. 2.4 Veranschaulichung des Bereichs  $U$

Unter diesen Voraussetzungen gilt die folgende Behauptung:

**Behauptung**

Der Körper B spielt ein, wenn ein zeitlich konstanter Differenzspannungszustand (Eigenspannungszustand)  $\Delta \bar{\sigma}$  existiert, so daß für alle Zeiten  $\tau > \tau^R$  gilt:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \underline{\sigma_{ik}^R \Delta \bar{u}_{j,k}} + \Delta \bar{\sigma}_{ik} F_{jk}^R = \Delta \bar{t}_{ij} \\
 & \Delta \bar{t}_{ij,i} = 0 \quad \text{in } V \\
 & \Delta \bar{t}_{ij} n_i = 0 \quad \text{auf } S_F \\
 & \Delta \bar{\sigma}_{ij} = \Delta \bar{\sigma}_{ji} \quad (2.2.2) \\
 & \dot{\Delta \bar{\sigma}}_{ij} = 0 \\
 & \underline{\dot{\Delta \bar{u}}_i} = 0 \\
 & \underline{\Delta \bar{u}_i} = 0 \quad \text{auf } S_K
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad F(\sigma^R + \overset{OR}{\sigma}(\tau) + \Delta \bar{\sigma}) < 0 \quad \text{in } V \quad (2.2.3)$$

für alle  $\Delta \bar{u} \in \tilde{U}$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \int_V (\sigma_{ij}^* L_{ijkl} \sigma_{kl}^* + \underline{u_{i,j}^* \sigma_{lj}^R \delta_{ik} u_{k,l}^*}) \, dV > 0 \quad (2.2.4) \\
 & \text{für } (\sigma_{ik}^R u_{j,k}^* + \sigma_{ik}^* F_{jk}^R)_{,i} = 0 \quad \text{in } V \\
 & \text{und } (\sigma_{ik}^R u_{j,k}^* + \sigma_{ik}^* F_{jk}^R) n_i = 0 \quad \text{auf } S_F
 \end{aligned}$$

Die Bedingung (3) kann interpretiert werden als ein energetisches Stabilitätskriterium für elastische Gleichgewichtszustände auf der Grundlage des Prinzips vom stationären Wert des konjugierten Gesamtpotentials [33,118]. Damit ist (2.2.4) in jedem Fall dann erfüllt, wenn der Spannungszustand  $\sigma^R$  ein sicherer Spannungszustand gemäß (2.1.11) und  $\Omega^R$  eine stabile Gleichgewichtskonfiguration ist. Zu einem völlig äquivalenten Ergebnis, allerdings auf der Grundlage einer Formulierung in reinen Verschiebungsgrößen und unter der Einschränkung  $F_{ij}^R = \delta_{ij}$  kommt auch NGUYEN QUOC SON [79-81].

**Beweis**

Wir gehen von der folgenden quadratischen Form  $W$  aus:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\Delta\sigma_{ij} - \Delta\bar{\sigma}_{ij}) L_{ijkl} (\Delta\sigma_{kl} - \Delta\bar{\sigma}_{kl}) dV$$

$$+ \frac{1}{2} \int_V \sigma_{lj}^R \delta_{ik} (\Delta u_{i,j} - \Delta \bar{u}_{i,j}) (\Delta u_{k,l} - \Delta \bar{u}_{k,l}) dV \geq 0 . \quad (2.2.5)$$

Aufgrund der Bedingung (2.2.4) ist  $W$  immer größer oder gleich null. Die zeitliche Ableitung von  $W$  unter Berücksichtigung der Symmetrien von  $L_{ijkl}$  und  $\sigma_{lj}^R$  ergibt sich zu

$$\dot{W} = \int_V (\Delta\sigma_{ij} - \Delta\bar{\sigma}_{ij}) L_{ijkl} \Delta\dot{\sigma}_{kl} dV + \int_V \sigma_{lj}^R (\Delta u_{k,j} - \Delta \bar{u}_{k,j}) \Delta\dot{u}_{k,l} dV , \quad (2.2.6)$$

und mit Hilfe der zeitlichen Ableitungen von (2.1.34)<sub>2</sub> und (2.1.34)<sub>1</sub> folgt

$$\dot{W} = \int_V (\Delta\sigma_{ij} - \Delta\bar{\sigma}_{ij}) (\Delta\dot{E}_{ij} - \dot{E}_{ij}^{rp}) dV + \int_V \sigma_{ij}^R (\Delta u_{k,j} - \Delta \bar{u}_{k,j}) \Delta\dot{u}_{k,i} dV . \quad (2.2.7)$$

Die zeitliche Ableitung von (2.1.32)<sub>2</sub> unter Berücksichtigung der Tatsache, daß  $F_{ki}^R$  zeitlich konstant ist, eingesetzt in (2.2.7) ergibt dann

$$\dot{W} = \int_V (\Delta\sigma_{ij} - \Delta\bar{\sigma}_{ij}) \frac{1}{2} (F_{ki}^R \Delta\dot{F}_{kj} + \Delta\dot{F}_{ki} F_{kj}^R) dV +$$

$$\frac{\int_V \sigma_{ij}^R (\Delta u_{k,j} - \Delta \bar{u}_{k,j}) \Delta \dot{u}_{k,i} \, dV}{V} - \int_V (\Delta \sigma_{ij} - \Delta \bar{\sigma}_{ij}) \dot{E}_{ij}^{rp} \, dV, \quad (2.2.8)$$

und aufgrund der Symmetrie von  $\Delta \sigma_{ij}$  und  $\Delta \bar{\sigma}_{ij}$  folgt

$$\begin{aligned} \dot{W} = & \int_V (\Delta \sigma_{ij} - \Delta \bar{\sigma}_{ij}) F_{kj}^R \Delta \dot{F}_{ki} \, dV + \frac{\int_V \sigma_{ij}^R (\Delta u_{k,j} - \Delta \bar{u}_{k,j}) \Delta \dot{u}_{k,i} \, dV}{V} \\ & - \int_V (\Delta \sigma_{ij} - \Delta \bar{\sigma}_{ij}) \dot{E}_{ij}^{rp} \, dV. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Einsetzen der zeitlichen Ableitung von (2.1.32)<sub>1</sub> und Umformen liefert

$$\begin{aligned} \dot{W} = & \int_V [(\Delta \sigma_{ij} - \Delta \bar{\sigma}_{ij}) F_{kj}^R + \underbrace{\sigma_{ij}^R (\Delta u_{k,j} - \Delta \bar{u}_{k,j})}_{\Delta \dot{u}_{k,i}}] \Delta \dot{u}_{k,i} \, dV \\ & - \int_V (\Delta \sigma_{ij} - \Delta \bar{\sigma}_{ij}) \dot{E}_{ij}^{rp} \, dV, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

und unter Berücksichtigung von (2.1.33)<sub>3</sub>, (2.1.32)<sub>1</sub> und (2.2.2)<sub>1</sub> folgt

$$\dot{W} = \int_V (\Delta t_{ik} - \Delta \bar{t}_{ik}) \Delta \dot{u}_{k,i} \, dV - \int_V (\Delta \sigma_{ij} - \Delta \bar{\sigma}_{ij}) \dot{E}_{ij}^{rp} \, dV. \quad (2.2.11)$$

Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.2.11) kann mit Hilfe des GAUßschen Satzes wie folgt umgeformt werden:

$$\int_V (\Delta t_{ik} - \Delta \bar{t}_{ik}) \Delta \dot{u}_{k,i} dV = \int_{S_F} (\Delta t_{ik} - \Delta \bar{t}_{ik}) n_i \Delta \dot{u}_k dS +$$

$$\int_{S_K} (\Delta t_{ik} - \Delta \bar{t}_{ik}) n_i \Delta \dot{u}_k dS - \int_V (\Delta t_{ik,i} - \Delta \bar{t}_{ik,i}) \Delta \dot{u}_k dV. \quad (2.2.12)$$

Unter Beachtung der Gleichungen (2.1.33)<sub>1,2</sub> und (2.1.32)<sub>3</sub> sowie (2.2.2)<sub>2,3</sub> ergibt sich, daß die rechte Seite von (2.2.12) zu null wird. Damit vereinfacht sich (2.2.11) zu

$$\dot{W} = - \int_V (\Delta \sigma_{ij} - \Delta \bar{\sigma}_{ij}) \dot{E}_{ij}^{rP} dV. \quad (2.2.13)$$

Aufgrund der Forderung (2.2.3) des erweiterten MELANSchen Theorems gilt

$$\sigma_{ij}^R + \sigma_{ij}^r + \Delta \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^S \quad (2.2.14)$$

mit  $\sigma^S$  als "sicheren" Spannungszustand gemäß (2.1.11). Setzen wir Gleichung (2.2.14) und zusätzlich (2.1.31)<sub>4</sub> in (2.2.13) ein, so erhalten wir schließlich

$$\dot{W} = - \int_V (\sigma_{ij}^R + \sigma_{ij}^r - \sigma_{ij}^S) \dot{E}_{ij}^{rP} dV. \quad (2.2.15)$$

Die Summe aus den Spannungen  $\sigma^R$  und  $\sigma^r$  liefert den Gesamtspannungszustand  $\sigma$ , dem die plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten  $\dot{E}^{rP}$  zugeordnet sind. Unter Berücksichtigung von Ungleichung (2.1.17) ist damit klar, daß  $\dot{W}$  immer negativ ist und nur dann zu null werden kann, wenn  $\dot{E}^{rP}$  zu null wird. Da  $W$  aber lt. Voraussetzung immer größer oder gleich null ist, muß  $\dot{W}$  und

damit  $\dot{E}^{rp}$  irgendwann zu null werden bzw. zumindest gegen null gehen. Das bedeutet, daß jenseits dieses Zeitpunktes keine zusätzlichen plastischen Dehnungen mehr auftreten und der Körper im weiteren Verlauf des Belastungsprozesses nur noch rein elastisches Verhalten zeigt, d. h. der Körper spielt ein. In der obigen Beweisführung wurde dabei vorausgesetzt, daß keine Singularitäten in den Spannungs- und Verschiebungsfeldern auftreten. Damit ist gezeigt, daß die Bedingungen (2.2.2) - (2.2.4) ein **hinreichendes** Kriterium für Einspielen darstellen. Wird in (2.2.3) zusätzlich das Gleichheitszeichen zugelassen, dann liefern diese Bedingungen gleichzeitig auch ein **notwendiges** Kriterium für Einspielen, da Spannungszustände mit  $F(\sigma) > 0$  physikalisch nicht möglich sind.

Im folgenden wird gezeigt, daß die plastischen Deformationen im Falle des Einspielens endlich bleiben. Dazu benutzen wir analog zur Vorgehensweise von KOITER [52] die Bedingung, daß die während des gesamten Belastungsprozesses dissipierte Arbeit begrenzt bleibt. Es sei  $s > 1$  ein Sicherheitsfaktor der Struktur gegen Versagen infolge Nicht-Einspielen. Aufgrund des notwendigen Kriteriums für Einspielen lautet die Bedingung (2.2.3) dann

$$F(s[\sigma^R + \sigma^o(\tau) + \Delta\bar{\sigma}]) \leq 0 \quad \text{in } V \quad (2.2.16)$$

oder unter Berücksichtigung von (2.2.14)

$$F(s\sigma^S) \leq 0 \quad \text{in } V \quad (2.2.17)$$

Wegen der Konvexität der Fließfläche und der Gültigkeit der Normalitätsregel für die plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten gilt auch

$$(\sigma_{ij} - s\sigma_{ij}^S) \dot{E}_{ij}^{rp} \geq 0 \quad (2.2.18)$$

Umformen unter Berücksichtigung von  $s > 1$  und Integration über  $V$  liefert

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{E}_{ij}^{rp} \, dV \leq \frac{s}{s-1} \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^S) \dot{E}_{ij}^{rp} \, dV \quad (2.2.19)$$

wobei der Ausdruck auf der linken Seite der Ungleichung die globale Dissipationsleistung  $\dot{D}$  darstellt. Da sich der Gesamtspannungszustand  $\sigma$  additiv aus den Spannungszuständen  $\sigma^R$  und  $\sigma^I$  zusammensetzt, ist das Integral auf der rechten Seite von (2.2.19) infolge (2.2.15) identisch mit  $-\dot{W}$ . Damit ergibt sich (2.2.19) zu

$$\dot{D} \leq - \frac{s}{s-1} \dot{W} . \quad (2.2.20)$$

Durch Integration beider Seiten von  $\tau = 0$  bis  $\tau = T$ , wobei T den Zeitpunkt des Einspielens bezeichnet, folgt

$$D \leq - \frac{s}{s-1} \int_0^T \dot{W} \, d\tau = \frac{s}{s-1} [W(0) - W(T)] . \quad (2.2.21)$$

Da  $W(T)$  per Voraussetzung nie negativ ist, ergibt sich eine obere Schranke für D in der Form

$$D \leq \frac{s}{s-1} W(0) \quad (2.2.22)$$

oder mit Hilfe von (2.2.5)

$$D \leq \frac{s}{s-1} \frac{1}{2} \int_V (\Delta \bar{\sigma}_{ij} L_{ijkl} \Delta \bar{\sigma}_{kl} + \sigma_{lj}^R \delta_{ik} \Delta \bar{u}_{i,j} \Delta \bar{u}_{k,l}) \, dV . \quad (2.2.23)$$

Die rechte Seite von (2.2.23) ist lt. Voraussetzung positiv und endlich. Damit ist gezeigt, daß die während des gesamten Belastungsprozesses dissipierte Arbeit begrenzt ist, falls Einspielen stattfindet. Die Ungleichung (2.2.23) liefert jedoch keine Aussagen über den Verformungszustand, der natürlich von der Belastungsgeschichte abhängt. Obere Schranken für die Verformungen in einzelnen Punkten des Körpers können mit Hilfe der sogenannten "Bounding Methods" bestimmt werden. Entsprechende Verfahren wurden u. a. von DOROSZ [21], KÖNIG [4,37,39], MARTIN [66], POLIZZOTTO

[92] und PONTER [93] entwickelt. Ausgangspunkt all dieser Arbeiten ist dabei die Ungleichung (2.2.23), wobei bei allen geometrisch linearen Verfahren der unterstrichene Ausdruck wegfällt.

### Sonderfälle

Die oben hergeleitete Erweiterung des MELANSchen Theorems bei Beschränkung auf kleine Zusatzverformungen enthält die folgenden Sonderfälle:

- (1) Setzen wir überall  $F_{ij}^R = \delta_{ij}$ , so erhalten wir die von MAIER [60,61] vorgeschlagene Erweiterung des MELANSchen Theorems zur Berücksichtigung von Effekten 2. Ordnung. Zu beachten ist hierbei jedoch, daß MAIER von vornherein diskretisierte Systeme behandelt und eine linearisierte Fließbedingung benutzt, so daß er sein Verfahren mit Hilfe von kinematischen Größen formulieren kann. MAIER bezeichnet diese Näherung als "Linearisierung bezüglich eines gegebenen Vorspannungszustandes".
- (2) Vernachlässigen wir in den Gleichungen (2.1.33)<sub>3</sub> und (2.2.2)<sub>1</sub> die unterstrichenen Terme, so erhalten wir den "Sonderfall B" nach WEICHERT [121]. Dies zieht auch den Wegfall der Bedingungen (2.2.2)<sub>6,7</sub> und (2.2.3)<sub>2</sub> nach sich und führt dazu, daß die Bedingung (2.2.4) aufgrund des Wegfalls des 2. Terms von vornherein erfüllt ist, weil L positiv definit ist. Im Beweis des Theorems fallen dann alle unterstrichenen Ausdrücke weg. WEICHERT bezeichnet diese Näherung als "Linearisierung bezüglich eines gegebenen Verschiebungsfeldes".
- (3) Setzen wir zusätzlich zu den in (2) genannten Vereinfachungen  $F_{ij}^R = \delta_{ij}$  und  $\sigma_{ij}^R = 0$ , so erhalten wir die ursprüngliche geometrisch lineare Formulierung des MELANSchen Theorems. Mit  $\sigma_{ij}^R \neq 0$  können zusätzliche konstante Spannungszustände berücksichtigt werden.
- (4) Setzen wir zusätzlich zu den in (2) genannten Vereinfachungen  $F_{ij}^R = \delta_{ij}$  und  $\sigma_{ij}^r(\tau) = 0$ , so erhalten wir als Sonderfall das geometrisch lineare statische Grenzlast-Theorem für proportionale Belastung ("Limit Analysis") [23].

(5) Setzen wir zusätzlich zu den in (2) genannten Vereinfachungen  $\sigma_{ij}^R = 0$ , so kann mit Hilfe von  $F_{ij}^R$  der Einfluß von geometrischen Imperfektionen berücksichtigt werden. Wählen wir den Vorverformungszustand gerade so, daß er einem aufgrund der Belastung zu erwartenden Deformationsmuster des Körpers entspricht, so kann damit geprüft werden, ob die jeweiligen Verformungen einen stabilisierenden oder destabilisierenden Einfluß auf das Einspielen ausüben. Wenn die Sicherheit gegen Versagen unter Berücksichtigung der Verformungen größer ist als ohne Berücksichtigung der Verformungen ( $F_{ij}^R = \delta_{ij}$ ), so haben wir es mit einem stabilen, anderenfalls mit einem instabilen Prozeß zu tun. Eine hierzu analoge Vorgehensweise unter Benutzung des KOITERSchen Theorems, wobei allerdings die elastischen Verformungen vernachlässigt werden, findet man in den Arbeiten [45,50,111] von KÖNIG. Die darin entwickelte Methode ist eine Erweiterung eines von DUSZEK [24] im Rahmen der klassischen Grenzlasttheorie eingeführten Verfahrens zur Stabilitätsanalyse starrplastischer Körper.

#### **Erweiterungen bezüglich des Materialverhaltens**

Außer den oben genannten Erweiterungen des MELANSchen Theorems zur Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearitäten existieren in der Literatur auch Erweiterungen bezüglich des Materialverhaltens. Die wichtigsten seien hier kurz genannt:

##### **(1) nichtassozierte Fließgesetze**

Für die Gültigkeit von Ungleichung (2.1.17), die für den Beweis des erweiterten MELANSchen Theorems von zentraler Bedeutung ist, ist die Gültigkeit der Normalitätsregel nicht zwingend erforderlich. Aufbauend auf einem Verfahren von PALMER [86] hat MAIER [59] gezeigt, daß das MELANSche Theorem auch für nichtassozierte Fließgesetze seine Gültigkeit behält, sofern sichere Spannungszustände  $\sigma^S$  gemäß (2.1.11) mit einer modifizierten konvexen Fließfläche  $F^S$ , von PALMER als "G-surface" bezeichnet, definiert werden. Da der durch  $F^S(\sigma^S) < 0$  definierte sichere Bereich innerhalb des durch  $F(\sigma) < 0$  definierten elastischen Bereiches  $C$  liegt, ist bei Annahme nichtassoziierter Fließgesetze die Möglichkeit des Einspielens geringer als bei assoziierten Fließgesetzen. Die Form der modifizierten Fließfläche  $F^S$  hängt dabei vom jeweiligen nichtassozierten Fließgesetz ab.

## (2) thermomechanische Kopplung

Die Berücksichtigung temperaturabhängiger Materialparameter und zwar insbesondere des Elastizitätsmoduls  $E$  und der Fließspannung  $\sigma_F$  findet man in den Arbeiten von KÖNIG [41] bzw. PRAGER [99]. Während letzteres nichts an der ursprünglichen Form des MELANSchen Theorems ändert, kann dieses bei Berücksichtigung eines temperaturabhängigen  $E$ -Moduls nicht mehr mit Hilfe von Eigenspannungszuständen formuliert werden. In der Praxis ist der Einfluß der Temperaturabhängigkeit des  $E$ -Moduls auf das Einspielverhalten von Tragwerken lt. KÖNIG jedoch sehr gering.

## (3) verfestigendes Materialverhalten

Bereits MELAN [68] erwähnte die Möglichkeit einer Berücksichtigung verfestigenden Materialverhaltens, wobei er sich auf die PRAGERSche kinematische Verfestigung beschränkte. Unter einer Vielzahl von weiteren Arbeiten über dieses Thema (z. B. [60,65,94,126]) seien hier insbesondere die Arbeiten von KÖNIG [37], in der erstmals ein allgemeines lineares Verfestigungsmodell Berücksichtigung findet, sowie WEICHERT und GROSS-WEEGE [124], die ein 2-Flächenmodell der Fließbedingung benutzen, erwähnt. Das letztere Modell berücksichtigt im Gegensatz zu allen anderen den Umstand, daß eine unbegrenzte Verfestigung den physikalischen Tatsachen nicht entspricht.

### 2.3 BESTIMMUNG VON EINSPIELLASTFAKTOREN

Bisher haben wir noch keine Annahmen über den zeitlichen Verlauf der äußeren Zusatzwirkungen  $\mathbf{a}^r$  gemacht. Im weiteren gehen wir davon aus, daß diese Lasten lokal und komponentenweise in gegebenen und fixierten Grenzen variieren. Dann können wir den Bereich  $A$  der möglichen äußeren Zusatzwirkungen  $\mathbf{a}^r$  mit Hilfe der Proportionalitätsfaktoren  $\mu_i$  ( $i = 1, n$ ) durch

$$A = \{ \mathbf{a}^r \mid \mathbf{a}^r = \mu_i \mathbf{a}_i^{or} ; \mu_i \in [\mu_i^- ; \mu_i^+] \} \quad (2.3.1)$$

darstellen, wobei  $\mathbf{a}_i^{or}$   $n$  voneinander unabhängige Zusatzwirkungen mit gegebenen fixierten Werten (z.B. Volumenkräfte, Flächenlasten, vorgeschriebene Verschiebungen, vorgeschriebene Temperaturdifferenzen oder Kombinationen daraus) und  $\mu_i^-$  bzw.  $\mu_i^+$  untere und obere Schranken der

Proportionalitätsfaktoren  $\mu_i$  bezeichnen. Es sei angemerkt, daß im Falle proportionaler Belastung (Limit Analysis) für alle  $i = 1, n$   $\mu_i^- = \mu_i^+$  zu setzen ist.

Bei gegebenem Bereich  $A$  gibt uns das erweiterte MELANSche Theorem eine Antwort auf die Frage, ob der Körper unter den genannten Voraussetzungen einspielt. In der Praxis ist es jedoch in der Regel viel wichtiger zu wissen, wie groß man den Bereich  $A$  wählen darf, so daß der Körper gerade noch einspielt, bzw. wie groß bei gegebenem  $A$  die Sicherheit gegen Versagen aufgrund unbegrenzt akkumulierter plastischer Dehnungen ist. In diesem Fall wird also der größte Lastfaktor  $\alpha$  gesucht, mit dem die Proportionalitätsfaktoren  $\mu_i$  multipliziert werden können, so daß Einspielen gerade noch stattfindet. Diesen Wert von  $\alpha$  bezeichnet man als Einspiellastfaktor ("Shakedown"-Sicherheitsfaktor)  $\alpha_{SD}$ , und man erhält ihn als Lösung des folgenden Optimierungsproblems

$$\alpha_{SD} = \max_{\Delta \bar{\sigma}} \alpha \quad \left| \quad F(\bar{\sigma}^R + \alpha \bar{\sigma}^{OR}(\bar{a}^R) + \Delta \bar{\sigma}) < 0 \quad \text{in } V \quad (2.3.2) \right.$$

für alle  $\bar{a}^R \in A$  und  $\Delta \bar{u} \in \tilde{U}$ .

$\Delta \bar{\sigma}$  muß dabei die Bedingungen (2.2.2) erfüllen. Es sei darauf hingewiesen, daß infolge der Linearisierung der Gleichungen für die Zusatzfeldgrößen ein linearer Zusammenhang zwischen  $\bar{a}^R$  und  $\bar{\sigma}^{OR}$  besteht.

Die Bestimmung des Einspiellastfaktors  $\alpha_{SD}$  umfaßt somit im wesentlichen die Lösung der folgenden 4 Teilprobleme:

- (1) Bestimmung der Lösung des zeitlich konstanten Referenzproblems ("R") (geometrisch nichtlinear, elasto-plastisch) und zwar sowohl des Spannungszustandes als auch des Verformungszustandes. Die Lösung dieses Problems, z. B. mit Hilfe der bekannten inkrementellen Verfahren, setzen wir im Rahmen dieser Arbeit als bekannt voraus.
- (2) Bestimmung der Lösung des zeitlich veränderlichen rein elastischen Vergleichsproblems, insbesondere des Spannungszustandes  $\bar{\sigma}^{OR}$ , für alle Lastzustände  $\bar{a}^R \in A$ . Hierbei sind die Gleichungen (2.1.28) - (2.1.30)

zu erfüllen.

- (3) Konstruktion von zeitlich konstanten Differenzspannungsfeldern, die die Bedingungen (2.2.2) erfüllen müssen.
- (4) Lösung des Optimierungsproblems (2.3.2).

Bei der Lösung von (2.3.2) stellt sich zunächst das Problem, wie die Bedingung "für alle  $\mathbf{a}^r \in A$ " erfüllt werden kann. Hierfür sind 2 verschiedene Methoden bekannt:

- (1) Je nach Anzahl  $n$  der unabhängig voneinander variierenden äußeren Zusatzwirkungen  $\mathbf{a}^r$  stellt der Bereich  $A$  ein  $n$ -dimensionales rechtwinkliges Parallelepipid dar. KÖNIG und KLEIBER [43] haben bewiesen, daß Einspielen für alle  $\mathbf{a}^r \in A$  stattfindet, wenn Einspielen für alle Lastzustände  $\mathbf{a}_i^r$  ( $i = 1, k$ ), die den  $k = 2^n$  Eckpunkten von  $A$  entsprechen, stattfindet. Dieses Verfahren werden wir bei der numerischen Anwendung auch benutzen.
- (2) GOKHFELD und CHERNIAVSKI [29] schlagen ein Verfahren vor, bei dem die ursprüngliche Fließfläche  $F$  durch eine fiktive Fließfläche  $F^*$  wie folgt ersetzt wird:

$$F^*(\boldsymbol{\sigma}^R + \Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \max_{\mathbf{a}_r} F(\boldsymbol{\sigma}^R + \alpha_{\sigma}^{or}(\mathbf{a}^r) + \Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \quad \text{in } V. \quad (2.3.3)$$

Da  $F^*$  dann nur noch zeitlich konstante Spannungen enthält, wird somit das Einspielproblem auf ein Grenzlastproblem für einen fiktiven inhomogenen Körper zurückgeführt. Der zur Bestimmung von  $F^*$  erforderliche Optimierungsprozeß kann im Falle stückweise ebener Fließflächen für jeden Punkt des Körpers unabhängig von  $\Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  geführt werden, da dann keine Kopplung zwischen  $\sigma^{or}(\mathbf{a}^r)$  und  $\Delta\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  besteht. Dies hat den Vorteil, daß zunächst (2.3.3) gelöst werden kann und danach erst der Einspiellastfaktor  $\alpha_{SD}$  gemäß (2.3.2) bestimmt wird. Im Falle linearisierter Fließbedingungen hat MAIER [59] ein völlig entsprechendes Verfahren entwickelt, während im Falle nichtlinearer Fließbedingungen dieses

Verfahren im Prinzip der Methode (1) entspricht.

### 3. ANWENDUNG AUF FLÄCHENTRAGWERKE

#### 3.1 GEOMETRIE

Wir bezeichnen einen Körper als Flächentragwerk, wenn seine Dickenabmessung  $2H$  wesentlich kleiner ist als die Erstreckung in den übrigen Richtungen. Ein solches Tragwerk wird demnach durch zwei im Abstand  $2H$  verlaufende Flächen, die Laibungen, von seiner Umgebung abgegrenzt. Bilden die Laibungen keine geschlossenen Flächen, so dient die Schalenrandfläche als dritte Abgrenzung. Die gedachte Fläche, die die Tragwerksdicke an jeder Stelle halbiert, heißt Mittelfläche  $\Gamma$ , ihre Schnittlinie mit der Randfläche der Rand  $S$  des Flächentragwerks.

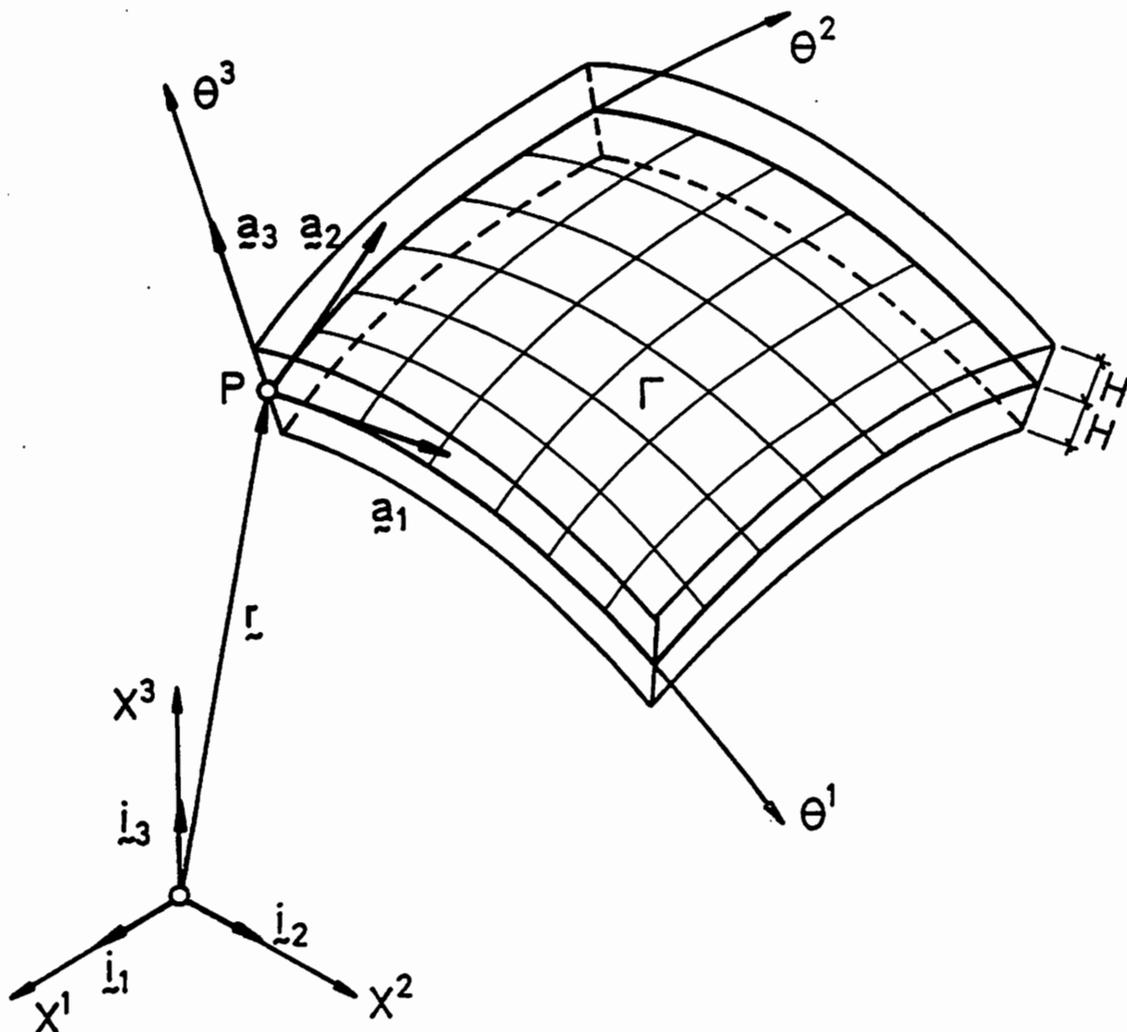


Abb. 3.1 Definitionen zur Schalengeometrie

Die hinreichend glatte Mittelfläche  $\Gamma$  sei durch konvektive GAUßsche Flächenparameter  $\theta^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) markiert, und die zu  $\Gamma$  orthogonale Richtung sei durch die Koordinate  $\theta^3$  charakterisiert. Im dreidimensionalen euklidischen Punktraum ist  $\Gamma$  durch die Vektorgleichung

$$\mathbf{r} = X^k(\theta^\alpha) \mathbf{i}_k \quad (3.1.1)$$

definiert, wobei  $\mathbf{r}(\theta^\alpha)$  den Ortsvektor eines Punktes  $P$  auf  $\Gamma$  und  $X^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) dessen Komponenten in einem feststehenden räumlichen kartesischen Koordinatensystem bezeichnen. Mit Hilfe der Flächenparameter läßt sich in jedem Punkt  $P$  auf  $\Gamma$  ein orthonormiertes Koordinatensystem mit den kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{a}_\alpha$  und dem dazu orthogonalen Einheitsnormalenvektor  $\mathbf{a}_3$  definieren (Abb. 3.1):

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r},_{\alpha} , \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} . \quad (3.1.2)$$

Hierbei bedeutet das Komma die partielle Ableitung der betreffenden Größe nach der dem Komma folgenden Flächenkoordinatenrichtung und das Symbol  $\times$  kennzeichnet das übliche Vektorkreuzprodukt. Griechische Indizes nehmen die Werte 1 und 2 an, während Lateinische Indizes von 1 bis 3 laufen. Aufgrund der Definition von  $\mathbf{a}_3$  (3.1.2)<sub>2</sub> ergibt sich:

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3 = 0 , \quad \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1 . \quad (3.1.3)$$

Hierbei kennzeichnet der zwischengestellte Punkt das Skalarprodukt der beiden beteiligten Vektoren. Die kovarianten Komponenten des Metriktensors der Mittelfläche erhält man zu

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad (3.1.4)$$

mit der dazugehörigen Determinante

$$a = |a_{\alpha\beta}| = a_{11} a_{22} - (a_{12})^2 . \quad (3.1.5)$$

Die kontravarianten Basisvektoren  $a^\alpha$  sind definiert durch die Orthogonalitätsbedingungen

$$a^\alpha \cdot a_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (3.1.6)$$

mit  $\delta_\beta^\alpha$  als Kronecker-Symbol. Die entsprechenden kontravarianten Komponenten des Metrikensors ergeben sich dann zu

$$a^{\alpha\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta \quad (3.1.7)$$

mit der dazugehörigen Determinante

$$|a^{\alpha\beta}| = \frac{1}{a} . \quad (3.1.8)$$

Aus (3.1.4), (3.1.6) und (3.1.7) folgen die Beziehungen

$$a^\alpha = a^{\alpha\beta} a_\beta , \quad a_\alpha = a_{\alpha\beta} a^\beta , \quad a^{\alpha\lambda} a_{\lambda\beta} = \delta_\beta^\alpha . \quad (3.1.9)$$

Die Differentiation des Einheitsnormalenvektors  $a_3$  nach  $\theta^\alpha$  definiert zwei Flächenvektoren  $a_{3,\alpha}$ , deren Komponenten

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -a_{3,\alpha} \cdot a_\beta = a_3 \cdot a_{\alpha,\beta} \quad (3.1.10)$$

die kovarianten Komponenten des Krümmungstensors der Mittelfläche darstellen. Analog erhält man auch die gemischten Komponenten zu

$$b_\beta^\alpha = a_3 \cdot a^\alpha_{,\beta} . \quad (3.1.11)$$

Jeder Punkt des Flächentragwerks kann damit durch seine Komponenten  $\theta^i$

identifiziert werden. Die Gleichung  $\theta^3 = 0$  spezifiziert die Mittelfläche  $\Gamma$  und der Bereich  $|\theta^3| \leq H$  wird als Flächentragwerks- bzw. Schalenraum bezeichnet. Ein beliebiger Punkt  $\bar{P}$  des Schalenraumes hat dann den Ortsvektor

$$\bar{r}(\theta^i) = r(\theta^\alpha) + \theta^3 a_3(\theta^\alpha). \quad (3.1.12)$$

Analog zur Beschreibung der Mittelflächengeometrie kann damit jeder Punkt des Schalenraumes mit einem System von Basisvektoren ausgestattet werden. Man erhält dann die kovarianten Basisvektoren  $\bar{a}_\alpha, \bar{a}_3$  zu

$$\bar{a}_\alpha = \bar{r},_\alpha = a_\alpha + \theta^3 a_{3,\alpha}, \quad \bar{a}_3 = \bar{r},_3 = a_3 \quad (3.1.13)$$

mit der Metrik

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = \bar{a}_\alpha \cdot \bar{a}_\beta, \quad \bar{a}_{\alpha 3} = 0, \quad \bar{a}_{33} = 1. \quad (3.1.14)$$

Will man alle benötigten Größen auf die Koordinaten der Mittelfläche  $\Gamma$  beziehen, so kann mit Hilfe von (3.1.12) der "Shifter"-Tensor  $\mu$  eingeführt werden mit

$$\mu_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha - \theta^3 b_\beta^\alpha. \quad (3.1.15)$$

Damit kann ein beliebiger Vektor  $u$  entweder auf die Basis  $\bar{a}_\alpha$  oder die Basis  $a_\alpha$  bezogen werden mit

$$\begin{aligned} u &= \bar{u}^\alpha \bar{a}_\alpha + \bar{u}^3 \bar{a}_3 = \bar{u}_\alpha \bar{a}^\alpha + \bar{u}_3 \bar{a}^3 = \\ &= u^\alpha a_\alpha + u^3 a_3 = u_\alpha a^\alpha + u_3 a^3, \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

wobei die Vektorkomponenten  $\bar{u}^\alpha$  bzw.  $\bar{u}_\alpha$  der schalenraumbezogenen Darstellung und die Komponenten  $u^\alpha$  bzw.  $u_\alpha$  der mittelflächenbezogenen Darstellung mit Hilfe des "Shifter"-Tensors ineinander überführt werden

können:

$$\bar{u}_\alpha = \mu_\alpha^\beta u_\beta, \quad \bar{u}^\alpha = (\mu^{-1})_\beta^\alpha u^\beta. \quad (3.1.17)$$

Dabei ist  $(\mu^{-1})$  definiert durch

$$(\mu^{-1})_\gamma^\alpha \mu_\beta^\gamma = \delta_\beta^\alpha. \quad (3.1.18)$$

Zur Definition der Ableitungen in der mittelflächenbezogenen Darstellung werden die Christoffelsymbole zweiter Art benötigt. Sie sind gegeben durch

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = a_{\alpha,\beta} \cdot a^\mu = \frac{1}{2} a^{\mu\lambda} (a_{\lambda\alpha,\beta} + a_{\beta\lambda,\alpha} - a_{\alpha\beta,\lambda}). \quad (3.1.19)$$

Die partielle Ableitung eines beliebigen Vektors  $u$  kann dargestellt werden als

$$\begin{aligned} u_{,\beta} &= (u^\alpha|_\beta - b_\beta^\alpha u_3) a_\alpha + (u_{3,\beta} + b_{\alpha\beta} u^\alpha) a_3 \\ &= (u_\alpha|_\beta - b_{\alpha\beta} u_3) a^\alpha + (u_{3,\beta} + b_\beta^\alpha u_\alpha) a_3, \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

wobei die kovariante Ableitung auf der Mittelfläche definiert ist als

$$u^\alpha|_\beta = u^\alpha_{,\beta} + \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha u^\lambda, \quad (3.1.21)$$

$$u_\alpha|_\beta = u_{\alpha,\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda u_\lambda.$$

Analog hierzu werden kovariante Ableitungen für Komponenten von Tensoren höherer Ordnung definiert, so zum Beispiel durch

$$u^{\alpha\beta}|_\lambda = u^{\alpha\beta}_{,\lambda} + \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha u^{\mu\beta} + \Gamma_{\lambda\mu}^\beta u^{\alpha\mu}, \quad (3.1.22)$$

$$u_{\alpha\beta}|_\lambda = u_{\alpha\beta,\lambda} - \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu u_{\mu\beta} - \Gamma_{\beta\lambda}^\mu u_{\alpha\mu}.$$

### Vereinfachende Annahmen

Entsprechend der Vorgehensweise in den Arbeiten von PIETRASZKIEWICZ [89] und WEICHERT [120,123] werden zur Vereinfachung die folgenden Annahmen getroffen:

- (1) Das Flächentragwerk sei dünn, d. h.  $2H/R_{\min} \ll 1$  mit  $R_{\min}$  als kleinsten Hauptkrümmungsradius der unverformten Schalenmittelfläche. Dann kann der "Shifter"-Tensor  $\mu$  näherungsweise durch den Einheits-tensor ersetzt werden und es besteht kein Unterschied mehr zwischen der mittelflächenbezogenen Darstellung und der schalenraumbezogenen Darstellung:

$$\mu_{\beta}^{\alpha} \approx \delta_{\beta}^{\alpha} . \quad (3.1.23)$$

- (2) Die Komponenten des Verschiebungsvektors  $u$  sind analytische Funktionen von  $\theta^3$ . Dann können diese in Taylorreihen entwickelt werden mit

$$u_i = \sum_{k=0}^n \binom{k}{i} (\theta^3)^k + R^n . \quad (3.1.24)$$

Dabei ist  $n$  eine natürliche Zahl, die den Grad der Taylorreihenentwicklung angibt, und  $R^n$  das dazugehörige Restglied.  $\binom{k}{i}$  ist definiert als

$$\binom{k}{i} = \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k u_i}{(\partial \theta^3)^k} \right|_{\theta^3 = 0} . \quad (3.1.25)$$

- (3) Unter Vernachlässigung des Restgliedes werden die Taylorreihen (3.1.24) der Komponenten  $u_{\alpha}$  nach dem ersten Glied ( $n = 1$ ) abgebrochen.
- (4) Unter Vernachlässigung des Restgliedes wird die Taylorreihe (3.1.24) der Komponente  $u_3$  nach dem nullten Glied ( $n = 0$ ) abgebrochen.

(5) Die Komponenten  $E_{\alpha 3}$  des GREENSchen Dehnungstensors  $E$  ("transverse shearing strains") sind sehr klein im Vergleich zu den Komponenten  $E_{\alpha\beta}$  und werden vernachlässigt:

$$E_{\alpha 3} \approx 0 . \quad (3.1.26)$$

Diese Einschränkungen führen auf die bekannte KIRCHHOFF-LOVE-Hypothese für dünne Schalen. Annahme (4) führt insbesondere dazu, daß die Dicke des betrachteten Flächentragwerks während des Deformationsprozesses an jeder Stelle unverändert bleibt. Für elastische Schalenbereiche ist es jedoch möglich, die Dickenänderung des betrachteten Querschnitts in erster Näherung mittels der elastischen Querkontraktion zu ermitteln während in vollplastischen Schalenbereichen die sehr weitgehend gültige Inkompressibilitätsannahme zum gleichen Zweck benutzt werden kann. Für letzteres gilt dann in erster Näherung [25]

$$E_{33} = -E_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta} . \quad (3.1.27)$$

Unter Berücksichtigung dieser Annahmen können die Komponenten des GREENSchen Dehnungstensors  $E$  in einen von  $\theta^3$  unabhängigen und einen von  $\theta^3$  linear abhängigen Teil aufgespalten werden:

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta} + \theta^3 \kappa_{\alpha\beta} , \\ E_{\alpha 3} &= \gamma_{\alpha 3} + \theta^3 \kappa_{\alpha 3} , \\ E_{33} &= \gamma_{33} + \theta^3 \kappa_{33} . \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Dabei sind die Komponenten des Dehnungstensors der Mittelfläche  $\gamma$  und des Krümmungsänderungstensors  $\kappa$  gemäß [25] gegeben zu

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} u_3 + \frac{1}{2} [u_{3|\alpha} u_{3|\beta} + b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} (u_3)^2]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} (u^\lambda|_\alpha u_{\lambda|\beta} + u^\lambda|_\beta u_{\lambda|\alpha}) + b_\alpha^\gamma b_\beta^\lambda u_\lambda u_\gamma] \\
 & + \frac{1}{2} (b_\alpha^\lambda u_\lambda u_{3|\beta} + b_\beta^\lambda u_\lambda u_{3|\alpha} - b_\alpha^\lambda u_{\lambda|\beta} u_3 - b_\beta^\lambda u_{\lambda|\alpha} u_3) , \quad (3.1.29)
 \end{aligned}$$

$$\gamma_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (\varphi_\alpha + u_{3|\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda + u^\lambda|_\alpha \varphi_\lambda + b_\alpha^\lambda \varphi_\lambda u_3) ,$$

$$\gamma_{33} = \frac{1}{2} \varphi^\lambda \varphi_\lambda ;$$

$$\begin{aligned}
 \kappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} [ & \varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} + u^\lambda|_\alpha \varphi_{\lambda|\beta} + u^\lambda|_\beta \varphi_{\lambda|\alpha} - (b_\alpha^\lambda \varphi_{\lambda|\beta} + b_\beta^\lambda \varphi_{\lambda|\alpha}) u_3 \\
 & + (b_\beta^\lambda u_{3|\alpha} + b_\alpha^\lambda u_{3|\beta}) \varphi_\lambda + (b_\alpha^\lambda b_\beta^\gamma + b_\beta^\lambda b_\alpha^\gamma) u_\gamma \varphi_\lambda] , \quad (3.1.30)
 \end{aligned}$$

$$\kappa_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (b_\alpha^\lambda \varphi_\lambda + \varphi^\lambda|_\alpha \varphi_\lambda) ,$$

$$\kappa_{33} = -b_\lambda^\gamma \varphi_\gamma \varphi^\lambda .$$

Hierbei bezeichnet  $\varphi_\alpha$  die Koeffizienten des linearen Terms der Taylorreihenentwicklungen (3.1.24) für  $u_\alpha$ . Will man nun den Dehnungszustand allein durch die Verschiebungskomponenten  $u_\alpha$  und  $u_3$  ausdrücken, so können dazu gemäß [25] die aus (3.1.26) resultierenden Bedingungen

$$\gamma_{\alpha 3} = 0 , \quad (3.1.31)$$

$$\kappa_{\alpha 3} = 0$$

benutzt werden. Dann werden die Beziehungen für  $\gamma_{\alpha\beta}$  und  $\kappa_{\alpha\beta}$  allerdings sehr kompliziert. Zu deren Vereinfachung werden zunächst folgende weiteren Annahmen [89] getroffen:

- (6) Die Dehnungen seien in jedem Punkt der Schale so klein, daß  $\eta$ , der größte Eigenwert des GREENSchen Dehnungstensors  $E$ , sehr viel kleiner als eins ist.
- (7) Die Verformung der Schalenmittelfläche gehorche der Bedingung  $(2H / L_w)^2 \ll 1$ , wobei  $L_w$  die Wellenlänge des Deformationsmusters der Schalenmittelfläche bezeichnet.

Die Annahmen (1) bis (7) bilden die Grundlage der sogenannten ersten LOVE schen Approximation der Verformungsenergiedichte [57] für isotrope elastische Schalen. Hierauf aufbauend existiert eine Vielzahl von Arbeiten, die sich mit der Vereinfachung der Beziehungen (3.1.29) und (3.1.30) unter Berücksichtigung großer Verformungen beschäftigen. Erwähnt seien hier beispielhaft die Theorien von KOITER [53], SANDERS [103], PIETRASZKIEWICZ [90], BASAR [5], NOLTE und STUMPF [82] sowie PIETRASZKIEWICZ und SZWABOWICZ [91]. Diese Arbeiten befassen sich allerdings ausschließlich mit elastischen Schalen, während auf dem Gebiet elasto-plastischer Schalen spezielle Theorien von DUSZEK [25] und SAWCZUK [109] entwickelt wurden. Aufgrund der Voraussetzung der additiven Zerlegung des GREENSchen Dehnungstensors gemäß (2.1.5) dürfen wir höchstens moderate Rotationen zulassen. Beschränken wir uns zusätzlich auf flache, d. h. schwach gekrümmte Schalen, so ist aufgrund von numerischen Untersuchungen von NOLTE [83], durchgeführt an rein elastischen Schalen, zu erwarten, daß die bekannte Theorie von DONNELL [20], MUSHTARI [74] und VLASOV [117] für die Mehrzahl baupraktischer Berechnungen recht gute Ergebnisse liefert. Der Gültigkeitsbereich dieser Theorie, die als Sonderfall in den Theorien [25,82,90] enthalten ist, wird durch die folgenden Einschränkungen [89] festgelegt. Als Maß für die Kleinheit der abzuschätzenden Größen wird dabei der gemeinsame Parameter  $\theta$  mit

$$\theta = \max \left( \frac{2H}{L_w}, \frac{2H}{d}, \sqrt{\frac{2H}{R_{\min}}}, \sqrt{\eta} \right), \quad \theta^2 \ll 1 \quad (3.1.32)$$

benutzt, und ergänzend zu den bereits bekannten Variablen in  $\theta$  bezeichnet  $d$  den Abstand eines betrachteten Punktes  $P$  vom Schalenrand:

- (1) Beschränkung der Geometrie der Mittelfläche derart, daß nur flache, d. h. schwach gekrümmte Schalen zugelassen werden, so daß gilt

$$|K| = 0 \left( \frac{\theta^2}{L_w^2} \right). \quad (3.1.33)$$

Dabei bedeutet  $0 (\dots)$  "von der Ordnung von ...", und das GAUßsche Krümmungsmaß  $K$  ist definiert als

$$K = b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1. \quad (3.1.34)$$

- (2) Beschränkung der Rotationen und Verschiebungen auf

- moderate Rotationen um Tangenten:

$$\Omega \cdot a_\alpha = 0 (\theta),$$

- kleine Rotationen um Normalen:

(3.1.35)

$$\Omega \cdot a_3 = 0 (\theta^2),$$

- kleine Tangentialverschiebungen:

$$u_\alpha = 0 (\theta u_3).$$

Hierbei bezeichnet  $\Omega$  den Rotationsvektor mit dem Betrag  $\sin \omega$ , wobei  $\omega$  den Rotationswinkel angibt.

Unter diesen Voraussetzungen können der Dehnungstensor  $\gamma$  und der Krümmungsänderungstensor  $\kappa$  wie folgt vereinfacht werden [110,113]:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha} - 2b_{\alpha\beta} u_3 + u_{3,\alpha} u_{3,\beta}) \quad \text{in } \Gamma \quad (3.1.36)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = -u_{3|\alpha\beta} \quad \text{in } \Gamma$$

Um die kinematischen Bedingungen zu vervollständigen, seien hier noch die entsprechenden Randbedingungen angegeben:

$$\begin{aligned} u_{\nu} &= u^{\alpha} \nu_{\alpha} = u_{\nu}^* && \text{auf } S_K \\ u_t &= u^{\alpha} t_{\alpha} = u_t^* && \text{auf } S_K \\ u_n &= u_3 = u_3^* && \text{auf } S_K \\ \beta_{\nu} &= -u_{3,\alpha} \nu^{\alpha} = \beta_{\nu}^* && \text{auf } S_K \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

Dabei bezeichnen  $t_{\alpha}$  und  $\nu_{\alpha}$  die Komponenten des Tangentenvektors  $t$  und dessen Normalenvektors  $\nu$ , wobei  $\nu$ ,  $t$  und  $a_3$  ein orthonormiertes Dreibein auf  $S$  bilden. Die kinematischen Randgrößen sind zusammen mit den korrespondierenden statischen Randgrößen in Abb. 3.2 dargestellt.

### 3.2 SPANNUNGSZUSTAND

Während bei elastischem Werkstoffverhalten die Form der Spannungsverteilung über die Tragwerksdicke durch die kinematischen Annahmen eindeutig über das HOOKEsche Gesetz definiert ist, sind bei Auftreten elasto-plastischer Verformungen Spannungs- und Dehnungsverlauf voneinander entkoppelt. Die kinematischen Annahmen legen dann nur noch den Dehnungszustand fest, wo hingegen der Spannungsverlauf von der Belastungsgeschichte abhängt. Die zu den Dehnungsrepräsentanten  $\gamma$  und  $\kappa$  adjungierten Spannungsrepräsentanten  $N$  und  $M$  können mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit definiert werden. Dazu sei der Spannungszustand gemäß [123] dargestellt durch die Potenzreihe

$$\sigma^{ij} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sigma^{ij}_{(k)} (\theta^3)^k \quad 1 < n < \infty, \quad (3.2.1)$$

wobei die Koeffizientenmatrizen  $\sigma_{(k)}^{ij}$  die Koeffizienten der Taylorreihenentwicklung des als analytische Funktion von  $\theta^3$  angenommenen tatsächlichen Spannungszustands sind mit

$$\sigma_{(k)}^{ij}(\theta^1, \theta^2) = \frac{\partial^k \sigma^{ij}}{(\partial \theta^3)^k} \Big|_{\theta^3 = 0} \quad (3.2.2)$$

PIETRASZKIEWICZ [89] hat gezeigt, daß im Rahmen der ersten Approximation der Verformungsenergiedichte in isotrop elastischen Schalen näherungsweise ein ebener Spannungszustand vorliegt. Wir setzen dies auch für elasto-plastische Schalen voraus und nehmen an, daß die Spannungskomponenten  $\sigma^{33}$  und  $\sigma^{3\alpha}$  vernachlässigt werden können:

$$\sigma^{33} \approx 0, \quad (3.2.3)$$

$$\sigma^{3\alpha} \approx 0.$$

Durch Einsetzen von (3.2.1) und (3.1.28)<sub>1</sub> in das Prinzip der virtuellen Arbeit erhalten wir gemäß [123] die Definition der Spannungsrepräsentanten (Schnittgrößen) **N** und **M** zu

$$N^{\alpha\beta}(\theta^1, \theta^2) = \int_{-H}^{+H} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} (\theta^3)^k d\theta^3, \quad (3.2.4)$$

$$M^{\alpha\beta}(\theta^1, \theta^2) = \int_{-H}^{+H} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} (\theta^3)^{k+1} d\theta^3.$$

Für dünne linear elastische Schalen werden in den Reihen (3.2.4) die Glieder  $n > 1$  vernachlässigt. Dies entspricht einer linearen Spannungsverteilung über den Querschnitt, wodurch man einen umkehrbar eindeutigen Zusammenhang zwischen Spannungen und Schnittgrößen erhält. Damit kann ein

beliebiger linear elastischer Spannungszustand (Index "e") in der folgenden Form dargestellt werden:

$$e_{\sigma}^{\alpha\beta} = e_{\sigma(0)}^{\alpha\beta} + e_{\sigma(1)}^{\alpha\beta} \theta^3 = \frac{e_N^{\alpha\beta}}{2H} + \frac{3}{2} \frac{e_M^{\alpha\beta}}{H^3} \theta^3 . \quad (3.2.5)$$

Wie bereits erwähnt ergibt sich bei elasto-plastischen Schalen im allgemeinen kein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang zwischen Spannungen und Schnittgrößen. Eine bestimmte Paarung [N, M] kann hervorgerufen werden durch verschiedene Spannungsverteilungen  $\sigma$ , die sich nur durch querschnittsbedingte Restspannungen  $s$  (sogenannte Pseudo-Restspannungen) voneinander unterscheiden. Aufgrund dieses Sachverhaltes benutzen wir abweichend von der Darstellungsweise von WEICHERT [120,123] die folgende Aufspaltung des Spannungszustandes  $\sigma$ :

$$\sigma^{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^1 \tilde{\sigma}_{(k)}^{\alpha\beta} (\theta^3)^k + s^{\alpha\beta} (\theta^3) , \quad (3.2.6)$$

wobei die Koeffizienten  $\tilde{\sigma}_{(0)}^{\alpha\beta}$  und  $\tilde{\sigma}_{(1)}^{\alpha\beta}$  mit Hilfe der Bedingungen

$$\int_{-H}^{+H} s^{\alpha\beta} d\theta^3 = s_N^{\alpha\beta} = 0 , \quad (3.2.7)$$

$$\int_{-H}^{+H} s^{\alpha\beta} \theta^3 d\theta^3 = s_M^{\alpha\beta} = 0$$

bestimmt werden können. Diese Darstellungsweise wird sich bei den weiteren Betrachtungen als besonders zweckmäßig erweisen. Die Spannungsrepräsentanten N und M ergeben sich damit wie folgt:

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-H}^{+H} \sum_{k=0}^1 \tilde{\sigma}_{(k)}^{\alpha\beta} (\theta^3)^k d\theta^3, \quad (3.2.8)$$

$$M^{\alpha\beta} = \int_{-H}^{+H} \sum_{k=0}^1 \tilde{\sigma}_{(k)}^{\alpha\beta} (\theta^3)^{k+1} d\theta^3.$$

Analog zu (3.2.5) läßt sich nun jeder elasto-plastische Spannungszustand in der folgenden Form darstellen:

$$\sigma^{\alpha\beta} = \tilde{\sigma}_{(0)}^{\alpha\beta} + \tilde{\sigma}_{(1)}^{\alpha\beta} \theta^3 + s^{\alpha\beta} (\theta^3) = \frac{N^{\alpha\beta}}{2H} + \frac{3}{2} \frac{M^{\alpha\beta}}{H^3} \theta^3 + s^{\alpha\beta} (\theta^3). \quad (3.2.9)$$

Durch Vergleich mit (3.2.5) wird ersichtlich, daß die Existenz von  $s$  an das Auftreten plastischer Verformungen gebunden ist.

Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit ist es nun möglich, die Gleichgewichtsbedingungen im Innern  $\Gamma$  und auf dem Rand  $S_F$  zu bestimmen. Für die DONNELL-MUSHTARI-VLASOV Theorie ergeben sich diese wie folgt [110,113]:

$$N^{\alpha\beta} |_{\beta} + p^{\alpha*} = 0 \quad \text{in } \Gamma \quad (3.2.10)$$

$$(M^{\alpha\beta} |_{\alpha} + u_{3,\alpha} N^{\alpha\beta}) |_{\beta} + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + p^{3*} = 0 \quad \text{in } \Gamma$$

$$v_{\alpha} v_{\beta} N^{\alpha\beta} = N_{vv}^* \quad \text{auf } S_F$$

$$t_{\alpha} v_{\beta} N^{\alpha\beta} = N_{tv}^* \quad \text{auf } S_F \quad (3.2.11)$$

$$v_{\beta} (M^{\alpha\beta} |_{\alpha} + u_{3,\alpha} N^{\alpha\beta}) - M_{tv,\alpha} t^{\alpha} = N_{nv}^* - M_{tv,t}^* \quad \text{auf } S_F$$

$$v_{\alpha} v_{\beta} M^{\alpha\beta} = M_{vv}^* \quad \text{auf } S_F$$

$$\text{mit } M_{tv} = -M^{\alpha\beta} t_{\alpha} v_{\beta}.$$

Hierbei bezeichnen  $p^{\alpha*}$  und  $p^{3*}$  die Komponenten der verteilten Flächenlasten  $\mathbf{p}^*$ , bezogen auf die unverformte Mittelfläche  $\Gamma$ , und die statischen Randgrößen sind gemäß Abb. 3.2 definiert.

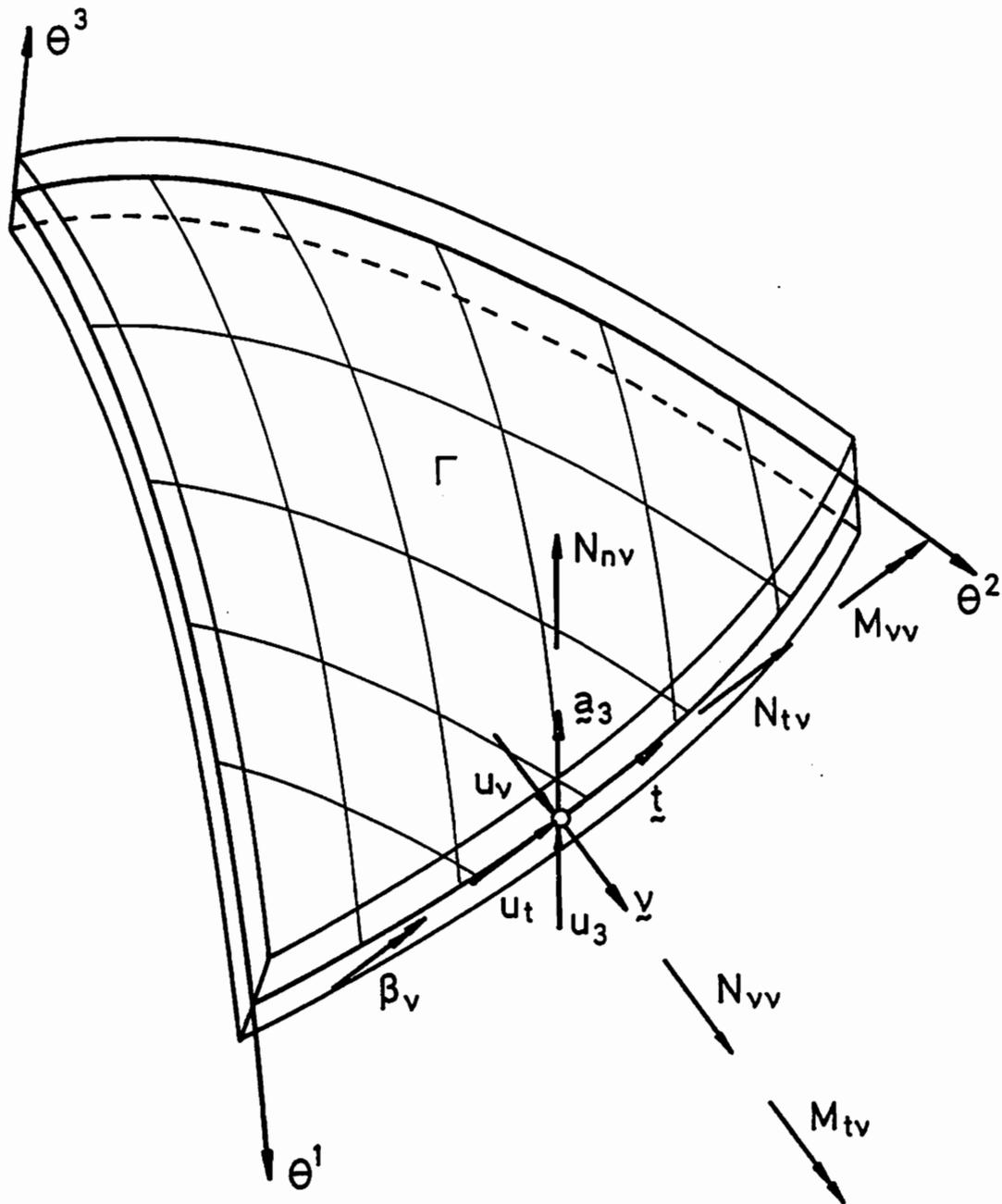


Abb. 3.2 Definition der Schalenrandgrößen

### 3.3 WERKSTOFFGESETZE

Die additive Zerlegung der Gesamtdehnungen  $E$  entsprechend (2.1.5) unter Berücksichtigung von (3.1.28) ergibt

$$E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^e + E_{\alpha\beta}^{\theta} + E_{\alpha\beta}^p = \gamma_{\alpha\beta} + \theta^3 \kappa_{\alpha\beta} . \quad (3.3.1)$$

Unter der Voraussetzung eines linear über die Tragwerksdicke verlaufenden Temperaturfeldes

$$\theta^* (\theta^i) = \bar{\theta}^* (\theta^\alpha) + \frac{\Delta\theta^* (\theta^\alpha)}{2H} \theta^3 \quad (3.3.2)$$

können die Temperaturdehnungen  $E^{\theta}$  entsprechend (3.1.28) aufgespalten werden in

$$E_{\alpha\beta}^{\theta} = \gamma_{\alpha\beta}^{\theta} + \theta^3 \kappa_{\alpha\beta}^{\theta} \quad (3.3.3)$$

mit [6]

$$\gamma_{\alpha\beta}^{\theta} = a_{\alpha\beta} \alpha_{\theta} \bar{\theta}^* , \quad \kappa_{\alpha\beta}^{\theta} = a_{\alpha\beta} \alpha_{\theta} \frac{\Delta\theta^*}{2H} . \quad (3.3.4)$$

Damit folgt aus (3.3.1)

$$E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^e + E_{\alpha\beta}^p + \gamma_{\alpha\beta}^{\theta} + \theta^3 \kappa_{\alpha\beta}^{\theta} = \gamma_{\alpha\beta} + \theta^3 \kappa_{\alpha\beta} . \quad (3.3.5)$$

Eine analoge Aufspaltung des elastischen und plastischen Anteils der Dehnungen  $E$  ist im Falle des Auftretens von querschnittsbedingten Restspannungen  $s$  nicht möglich, weil diese aufgrund von (3.2.6) nichtlinear über den Querschnitt verteilt sind und dies wegen der vorausgesetzten Gültigkeit des HOOKEschen Gesetzes zu einem über den Querschnitt nichtlinearen Verlauf der elastischen Dehnungen und infolge von (3.3.5) auch der plastischen Dehnungen führen würde. Im allgemeinen kann man das Materialverhalten also nur mit Hilfe der Spannungen und Dehnungen selbst und nicht mit deren Repräsentanten beschreiben. Eine Ausnahme bilden je-

doch die beiden folgenden Sonderfälle:

- (1) Die elastischen Dehnungen sind vernachlässigbar gegenüber den plastischen Dehnungen. Dieser Fall, der in der Regel bei Umformvorgängen vorliegt, bildet die Grundlage der Theorie starr-plastischer Körper (siehe z. B. [98]).
- (2) Das Tragwerk verhält sich rein elastisch, d. h. es treten keine plastischen Dehnungen auf. Dann können die elastischen Dehnungen entsprechend (3.1.28) aufgespalten werden, so daß gilt

$$E_{\alpha\beta}^e = \gamma_{\alpha\beta}^e + \theta^3 \kappa_{\alpha\beta}^e . \quad (3.3.6)$$

Für isotrope Materialien ergeben sich dabei die Komponenten von  $\gamma^e$  und  $\kappa^e$  zu

$$\gamma_{\alpha\beta}^e = \frac{1}{D} G_{\alpha\beta\gamma\lambda} N^{\gamma\lambda} , \quad (3.3.7)$$

$$\kappa_{\alpha\beta}^e = \frac{1}{B} G_{\alpha\beta\gamma\lambda} M^{\gamma\lambda} ,$$

wobei die Dehnsteifigkeit  $D$  und die Biegesteifigkeit  $B$  definiert sind als

$$D = 2 \frac{EH}{1-\nu^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{2}{3} \frac{EH^3}{1-\nu^2} . \quad (3.3.8)$$

Der Elastizitätstensor  $G$  mit den bekannten Symmetrieeigenschaften (2.1.7) hat dabei die Komponenten

$$G_{\lambda\mu\rho\sigma} = \frac{1}{2(1-\nu)} (a_{\lambda\rho} a_{\mu\sigma} + a_{\lambda\sigma} a_{\mu\rho} - \frac{2\nu}{1+\nu} a_{\lambda\mu} a_{\rho\sigma}) . \quad (3.3.9)$$

Die in (2.1.12) angegebene HUBER-MISES-Fließbedingung lautet nun unter Berücksichtigung der Schalenmetrik sowie der Vereinfachung (3.1.23):

$$F(\sigma) = 3a_{ik} a_{jl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} - (a_{ij} \sigma^{ij})^2 - 2\sigma_F^2 = 0 . \quad (3.3.10)$$

Führen wir hierin noch die Vereinfachungen (3.2.3) ein, so ergibt sich

$$F(\sigma) = 3a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\lambda\mu} - (a_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta})^2 - 2\sigma_F^2 = 0 \quad (3.3.11)$$

als flächenhafte Approximation von (3.3.10). In verallgemeinerter Schreibweise kann die Fließbedingung durch

$$F(\sigma) = I_{\alpha\beta\lambda\mu} \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\lambda\mu} - \sigma_F^2 = 0 \quad (3.3.12)$$

dargestellt werden, wobei der Fließtensor  $I$  im allgemeinen Fall plastische Anfangsanisotropie beschreibt [9] und bei isotropen Materialien übergeht in

$$I_{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{3}{2} a_{\alpha\lambda} a_{\beta\mu} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} a_{\lambda\mu} . \quad (3.3.13)$$

Will man die Fließbedingung in Abhängigkeit der Schnittgrößen formulieren, stößt man erneut auf das Problem, daß der Spannungszustand in einem beliebigen Punkt der Schale keine eindeutige Funktion der Schnittgrößen ist, falls plastische Deformationen aufgetreten sind, d. h.  $s \neq 0$  ist. Solange sich die Schale allerdings rein elastisch verhält, kann mit Hilfe von (3.2.5) der Spannungszustand eindeutig durch die Schnittgrößen bestimmt werden. Damit liegen die Punkte möglicher maximaler Spannung im Querschnitt von vornherein fest, nämlich bei  $\theta^3 = \pm H$ . Eingesetzt in (3.2.5) ergibt sich dann

$$e_{\sigma_{\max}^{\alpha\beta}} = \frac{e_N^{\alpha\beta}}{2H} \pm \frac{3}{2} \frac{e_M^{\alpha\beta}}{H^2} . \quad (3.3.14)$$

Diese Beziehung führen wir in die verallgemeinerte Fließbedingung (3.3.12)

ein. Beziehen wir hierin noch die Schnittgrößentensoren  $N$  und  $M$  durch die Abkürzungen

$$n^{\alpha\beta} = \frac{N^{\alpha\beta}}{N_p}, \quad m^{\alpha\beta} = \frac{M^{\alpha\beta}}{M_p} \quad (3.3.15)$$

mit

$$N_p = \sigma_F \cdot 2H, \quad M_p = \sigma_F \cdot H^2 \quad (3.3.16)$$

auf die entsprechenden vollplastischen Querschnittstraglasten  $N_p$  und  $M_p$ , so erhält man nach Division durch  $\sigma_F^2$

$$F(\sigma)/\sigma_F^2 = I_{\alpha\beta\lambda\mu} (n^{\alpha\beta} n^{\lambda\mu} + \frac{9}{4} m^{\alpha\beta} m^{\lambda\mu} \pm 2 \frac{3}{2} n^{\alpha\beta} m^{\lambda\mu}) - 1 = 0 \quad (3.3.17)$$

und damit eine Aussage über den Beginn des plastischen Fließens in der ersten Randfaser. Nimmt der Maximalwert von (3.3.17) den Wert null an, so ist die Grenze der elastischen Tragfähigkeit des Querschnitts erreicht. Die Fließbedingung des elastischen Grenzzustandes (Anfangsfließbedingung) lautet also

$$F_A = F_{nn} + \frac{9}{4} F_{mm} \pm 3 F_{nm} - 1 = 0, \quad (3.3.18)$$

wobei die folgenden Abkürzungen benutzt wurden:

$$\begin{aligned} F_{nn} &= I_{\alpha\beta\lambda\mu} n^{\alpha\beta} n^{\lambda\mu}, \\ F_{mm} &= I_{\alpha\beta\lambda\mu} m^{\alpha\beta} m^{\lambda\mu}, \\ F_{nm} &= I_{\alpha\beta\lambda\mu} n^{\alpha\beta} m^{\lambda\mu}. \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Die Anfangsfließbedingung bestimmt das Ende der elastischen Tragfähigkeit des Querschnitts. Sein weiteres Tragverhalten soll anhand der Abb. 3.3 verdeutlicht werden.

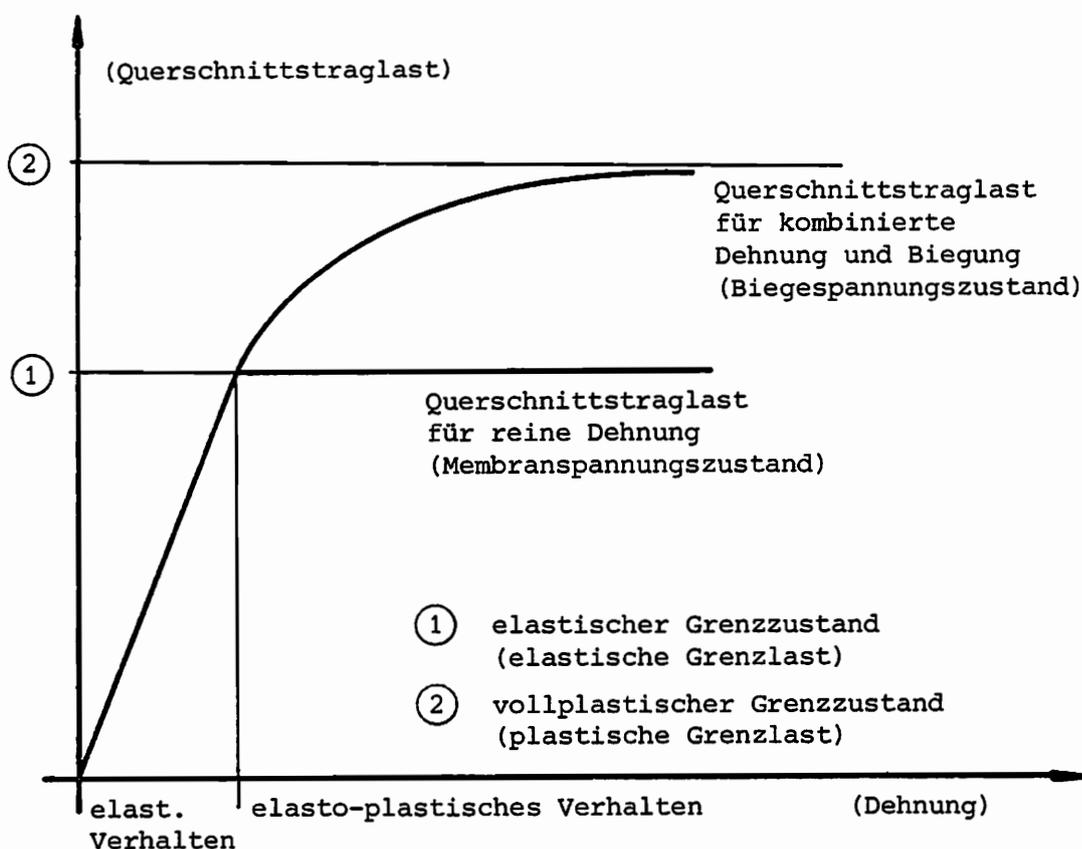


Abb. 3.3 einachsige Spannungs-Dehnungs-Verhalten eines Querschnitts

Man erkennt, daß nur für reine Membranzustände nach Erreichen des elastischen Grenzzustandes die Grenze der Tragfähigkeit erreicht ist und somit auch ein idealplastisches Querschnittsverhalten vorliegt. Weist die Beanspruchung dagegen Momentenanteile auf, so steigt die Traglast des Querschnitts infolge seines allmählichen Durchplastizierens weiter an, d. h. der Querschnitt durchläuft einen Verfestigungsprozeß, auch wenn jede Querschnittsfaser für sich elastisch-idealplastisches Materialverhalten zeigt. Erst mit der Spannungsverteilung des vollplastischen Grenzzustandes wird die Tragfähigkeitsgrenze erreicht. Man erkennt weiter, daß für einen beliebigen elasto-plastischen Zustand die Querschnittstraglast vom jeweiligen Dehnungszustand und damit von der Belastungsgeschichte abhängt (hierzu siehe auch [25,108]). Interessiert man sich allerdings nur für den

vollplastischen Grenzzustand, wie es bei Problemen der Grenzlastanalyse sowie der Analyse des "Inkrementellen Versagens" der Fall ist, so kann die entsprechende Querschnittsgrenzlast zumindest näherungsweise nur in Abhängigkeit der Schnittgrößen bestimmt werden. ILYUSHIN [35] war der erste, der sich mit diesem Problem befaßte. Er leitete folgende Näherung der Fließbedingung für den vollplastischen Grenzzustand (Grenzfließbedingung) her [6]:

$$F_{G1} = F_{nn} + F_{mm} \pm 1/\sqrt{3} F_{nm} - 1 = 0 . \quad (3.3.20)$$

Aufgrund einer Untersuchung von ROBINSON [101], in der diverse Approximationen der Grenzfließbedingung behandelt werden, liefert diese Näherung Grenzlasten, die gegenüber der exakten Lösung maximal mit einem Fehler von 6 % auf der sicheren und 3,5 % auf der unsicheren Seite behaftet sind. Zwar gibt es genauere Approximationen von IVANOV [36,101], die aber wegen ihrer Komplexität (sie enthalten irrationale Terme) für unsere Zwecke nicht geeignet sind. Der große Vorteil der Bedingung (3.3.20) liegt darin, daß sie nur linear in den Polynomen  $F$  und damit quadratisch in den Schnittgrößen ist. Eine weitere einfache Näherung ist die sogenannte Sandwich-Schalen Approximation [101]

$$F_{G2} = F_{nn} + F_{mm} \pm 2 F_{nm} - 1 = 0 , \quad (3.3.21)$$

wobei die hiermit ermittelten Grenzlasten gegenüber der exakten Lösung mit einem Fehler von maximal 20 % auf der sicheren und 0 % auf der unsicheren Seite behaftet sind [101]. Für Schalen mit Sandwich-Querschnitt liefert diese Grenzfließbedingung jedoch exakte Ergebnisse. Sandwich-Schalen finden häufig in Leichtkonstruktionen (z. B. bei Luft- und Raumfahrzeugen) Anwendung. Hierbei besteht die Schale aus zwei dünnen tragenden Schichten, die durch einen Kern geringer Festigkeit getrennt sind. Bei der Anwendung von (3.3.21) ist dann allerdings zu beachten, daß die vollplastischen Traglasten  $N_p$  und  $M_p$  im Gegensatz zu (3.3.16) nun wie folgt definiert sind:

$$N_p = 2\sigma'_F T , M_p = 2\sigma'_F T H' . \quad (3.3.22)$$

Dabei bezeichnen  $\sigma'_F$  und  $T$  die Fließspannung und die Dicke einer einzelnen tragenden Schicht und  $2H'$  ist die Dicke des Kerns, dessen Festigkeit vernachlässigt wird. Zu erwähnen ist noch, daß im Falle von Sandwich-Schalen die Anfangsfließbedingung (3.3.18) durch die Bedingung (3.3.21) zu ersetzen ist, d. h. daß Anfangsfließbedingung und Grenzfließbedingung in diesem Fall identisch sind. Die beiden Näherungen (3.3.20) und (3.3.21) sind beispielhaft für zwei verschiedene Schnittgrößenzustände zusammen mit der exakten Grenzfließbedingung [101] in Abb. 3.4 graphisch dargestellt, wobei zum Vergleich auch die Anfangsfließbedingung (3.3.18) eingezeichnet ist.

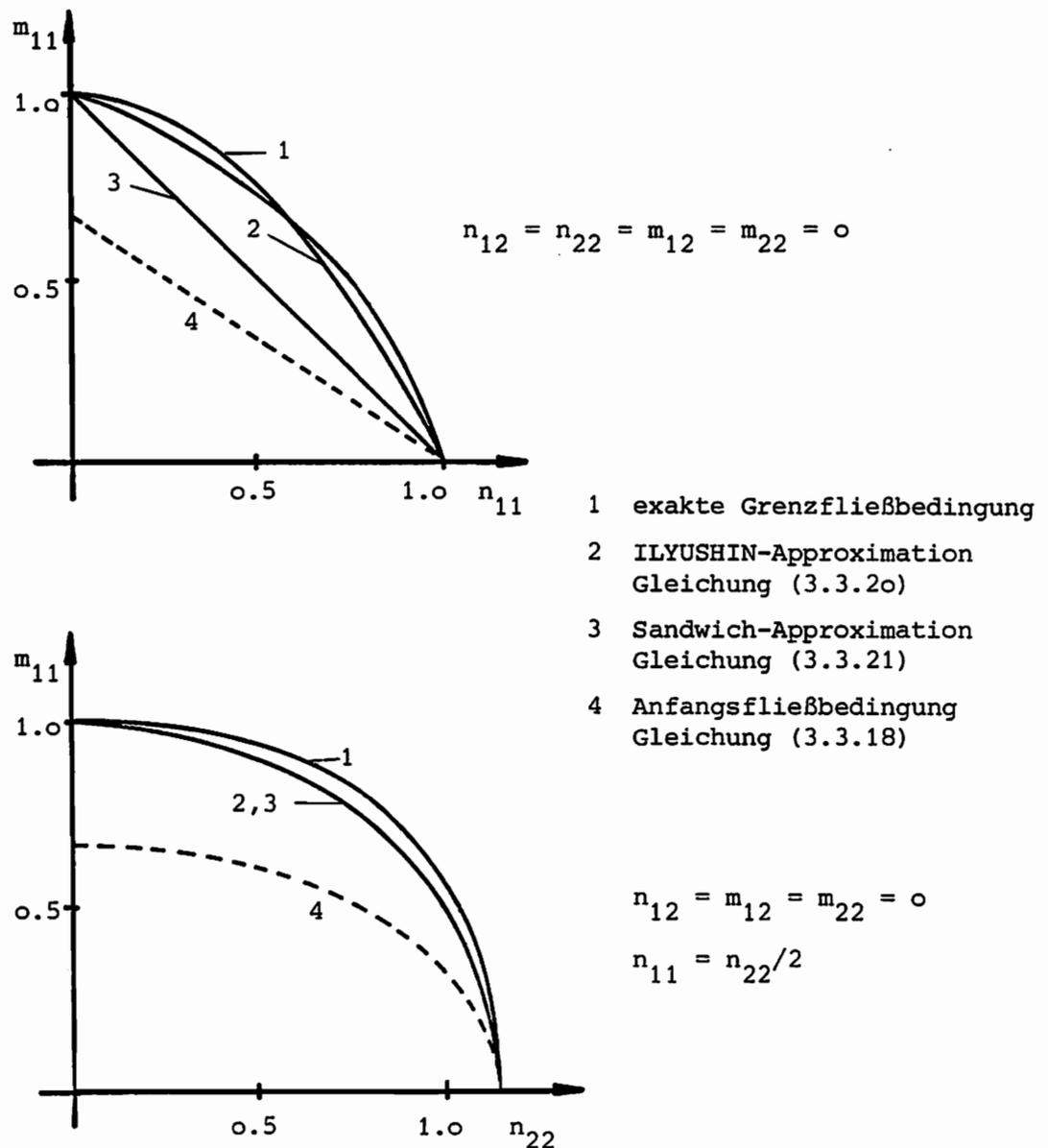


Abb. 3.4 Vergleich verschiedener Approximationen der Grenzfließbedingung

### 3.4 BESTIMMUNG VON EINSPIELLASTFAKTOREN

Entsprechend den Ausführungen im Kapitel 2.3 gliedert sich die Bestimmung des Einspiellastfaktors  $\alpha_{SD}$  in 4 Punkte, die nun im Hinblick auf die Anwendung auf Flächentragwerke nacheinander abgehandelt werden:

- (1) Die Lösung des zeitlich konstanten Referenzproblems unter Zugrundelegung der DONNELL-MUSHTARI-VLASOV-Theorie, d. h. der Bedingungen (3.1.36 - 37) und (3.2.10 - 11) sowie entsprechender Materialgesetze setzen wir wiederum als bekannt voraus.
- (2) Zur Lösung des zeitlich veränderlichen rein elastischen Vergleichsproblems sind nun entsprechend der Vorgehensweise im Kapitel 2 die bezüglich der Zusatzfeldgrößen (Index "r") linearisierten Feldgleichungen (3.1.36 - 37) und (3.2.10 - 11) sowie die entsprechenden elastischen Materialgesetze zu erfüllen. Der Übersichtlichkeit wegen unterdrücken wir dabei im folgenden den Index "r".

$$\overset{0}{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\overset{0}{u}_{\alpha|\beta} + \overset{0}{u}_{\beta|\alpha} - 2b_{\alpha\beta} \overset{0}{u}_{3+} + u_{3,\alpha}^R \overset{0}{u}_{3,\beta} + \overset{0}{u}_{3,\alpha} u_{3,\beta}^R) \quad \text{in } \Gamma \quad (3.4.1)$$

$$\overset{0}{\kappa}_{\alpha\beta} = -\overset{0}{u}_{3,\alpha\beta} \quad \text{in } \Gamma$$

$$\overset{0}{u}_v = u_v^* \quad \text{auf } S_K$$

$$\overset{0}{u}_t = u_t^* \quad \text{auf } S_K \quad (3.4.2)$$

$$\overset{0}{u}_3 = u_3^* \quad \text{auf } S_K$$

$$\overset{0}{\beta}_v = \beta_v^* \quad \text{auf } S_K$$

$$N^{\alpha\beta}|_{\beta} + p^{\alpha*} = 0 \quad \text{in } \Gamma \quad (3.4.3)$$

$$(M^{\alpha\beta}|_{\alpha} + u_{3,\alpha}^R N^{\alpha\beta} + \overset{0}{u}_{3,\alpha} N^{R\alpha\beta})|_{\beta} + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + p^{3*} = 0 \quad \text{in } \Gamma$$

$$\begin{aligned}
 v_{\alpha} v_{\beta} N^{\alpha\beta} &= N_{vv}^* && \text{auf } S_F \\
 t_{\alpha} v_{\beta} N^{\alpha\beta} &= N_{tv}^* && \text{auf } S_F \\
 v_{\beta} (M^{\alpha\beta} |_{\alpha} + u_{3,\alpha}^R N^{\alpha\beta} + \bar{u}_{3,\alpha} N^{R\alpha\beta}) &&& (3.4.4) \\
 - \bar{M}_{tv,\alpha} t^{\alpha} &= N_{nv}^* - M_{tv,t}^* && \text{auf } S_F \\
 v_{\alpha} v_{\beta} M^{\alpha\beta} &= M_{vv}^* && \text{auf } S_F
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \bar{M}_{tv} = -\bar{M}^{\alpha\beta} t_{\alpha} v_{\beta}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\gamma}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{D} G_{\alpha\beta\gamma\lambda} N^{\gamma\lambda} + a_{\alpha\beta} \alpha_{\theta} \bar{\theta}^* && (3.4.5) \\
 \bar{\chi}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{B} G_{\alpha\beta\gamma\lambda} M^{\gamma\lambda} + a_{\alpha\beta} \alpha_{\theta} \frac{\Delta\theta^*}{2H}
 \end{aligned}$$

Bei der Bestimmung einer Näherungslösung dieses Problems ist zu beachten, daß das MELANSche Theorem nur dann seinen Schrankencharakter behält, wenn die statischen Bedingungen (3.4.3) und (3.4.4) punktweise erfüllt sind (hierzu siehe MORELLE [70]).

- (3) Zur Bestimmung von zeitlich konstanten Differenzspannungszuständen erinnern wir uns zunächst an deren Definition (2.1.31)<sub>4</sub>:

$$\Delta\sigma = \sigma - \bar{\sigma} . \quad (3.4.6)$$

Ersetzen wir hierin den tatsächlichen elasto-plastischen Spannungszustand  $\sigma$  durch die Beziehung (3.2.9) sowie den fiktiven rein elastischen Spannungszustand  $\bar{\sigma}$  durch die Beziehung (3.2.5), so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \Delta\sigma^{\alpha\beta} &= \frac{N^{\alpha\beta}}{2H} + \frac{3}{2} \frac{M^{\alpha\beta}}{H^3} \theta^3 + s^{\alpha\beta} (\theta^3) - \left( \frac{N^{\alpha\beta}}{2H} + \frac{3}{2} \frac{M^{\alpha\beta}}{H^3} \theta^3 \right) \\
 &= \frac{\Delta N^{\alpha\beta}}{2H} + \frac{3}{2} \frac{\Delta M^{\alpha\beta}}{H^3} \theta^3 + s^{\alpha\beta} (\theta^3) , && (3.4.7)
 \end{aligned}$$

wobei die Differenzschnittgrößentensoren  $\Delta N$  und  $\Delta M$  entsprechend (3.4.6) definiert sind als

$$\Delta N^{\alpha\beta} = N^{\alpha\beta} - \bar{N}^{\alpha\beta}, \quad \Delta M^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta} - \bar{M}^{\alpha\beta}. \quad (3.4.8)$$

Analog zu den Ausführungen in Kapitel 2 müssen diese die bezüglich der Zusatzfeldgrößen (Index "r") linearisierten homogenen statischen Bedingungen erfüllen:

$$\Delta N^{\alpha\beta} |_{\beta} = 0 \quad \text{in } \Gamma \quad (3.4.9)$$

$$(\Delta M^{\alpha\beta} |_{\alpha} + u_{3,\alpha}^R \Delta N^{\alpha\beta} + \Delta u_{3,\alpha} N^{R\alpha\beta}) |_{\beta} + b_{\alpha\beta} \Delta N^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{in } \Gamma$$

$$v_{\alpha} v_{\beta} \Delta N^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{auf } S_F$$

$$t_{\alpha} v_{\beta} \Delta N^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{auf } S_F$$

$$v_{\beta} (\Delta M^{\alpha\beta} |_{\alpha} + u_{3,\alpha}^R \Delta N^{\alpha\beta} + \Delta u_{3,\alpha} N^{R\alpha\beta}) - \Delta M_{tv,\alpha} t^{\alpha} = 0 \quad \text{auf } S_F \quad (3.4.10)$$

$$v_{\alpha} v_{\beta} \Delta M^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{auf } S_F$$

$$\text{mit } \Delta M_{tv} = - \Delta M^{\alpha\beta} t_{\alpha} v_{\beta}$$

Aufgrund der Definition (3.2.7) der querschnittsbedingten Restspannungen  $s$  gehen diese nicht in die statischen Bedingungen (3.4.9) und (3.4.10) ein. Infolge (2.2.2)<sub>7</sub> muß weiterhin gelten

$$\Delta u_3 = 0 \quad \text{auf } S_K \quad (3.4.11)$$

Außerdem ist zu berücksichtigen, daß  $\Delta \sigma$  und  $\Delta u_3$  zeitlich konstant sein müssen:

$$\Delta \dot{N}^{\alpha\beta} = \Delta \dot{M}^{\alpha\beta} = \Delta \dot{s}^{\alpha\beta} = \Delta \dot{u}_3 = 0. \quad (3.4.12)$$

- (4) Das Optimierungsproblem (2.3.2), dessen Lösung uns den Einspiellastfaktor  $\alpha_{SD}$  liefert, lautet nun unter Berücksichtigung von (3.2.5) und (3.4.7)

$$\alpha_{SD} = \max_{\Delta\bar{N}, \Delta\bar{M}, \bar{s}} \alpha \quad (3.4.13)$$

unter der Nebenbedingung

$$F \left\{ \sigma^R + \alpha \left[ \frac{\bar{N}(a^r)}{2H} + \frac{3}{2} \frac{\bar{M}(a^r)}{H^3} \theta^3 \right] + \frac{\Delta\bar{N}}{2H} + \frac{3}{2} \frac{\Delta\bar{M}}{H^3} \theta^3 + \bar{s}(\theta^3) \right\} < 0 \quad \text{in } V$$

für alle  $a^r \in A$  und  $\Delta\bar{u}_3 \in \tilde{U}$ . Hierbei ist die Fließbedingung (3.3.11) zu benutzen. Die numerische Anwendung von (3.4.13) erfordert die Diskretisierung von  $\Delta\bar{N}$ ,  $\Delta\bar{M}$  und  $\bar{s}$ , wobei die Bedingungen (3.2.7) und (3.4.9-11) zu erfüllen sind. Die Einhaltung der Fließbedingung muß dann in mehreren, zur Mittelfläche parallelen Flächen ("Schichtenmodell" der Schale) kontrolliert werden. Da wir es hierdurch immer noch mit einem dreidimensionalen Problem zu tun haben, ist diese Vorgehensweise numerisch sehr aufwendig (vgl. hierzu auch die Arbeit von MORELLE und FONDER [72]).

Um zu einer zu (3.4.13) äquivalenten Darstellung nur in den Spannungsrepräsentanten zu gelangen, d. h., um das 3-dimensionale Problem auf ein 2-dimensionales Problem zu reduzieren, kann wie folgt vorgegangen werden:

Für einen gegebenen zeitlich konstanten querschnittsbedingten Restspannungszustand  $\bar{s}$  definieren wir einen zeitlich konstanten elastischen Bereich  $S$  als einen konvexen Bereich im Raum der Schnittgrößen mit Hilfe der Bedingung  $\bar{s}(N, M) < 0$ . Dabei ist die Form von  $S$  bestimmt durch die Forderung, daß die Bedingung

$$\bar{s} \{ N^R + \bar{N}(a^r) + \Delta\bar{N}, M^R + \bar{M}(a^r) + \Delta\bar{M} \} < 0 \quad \text{in } \Gamma \quad (3.4.14)$$

äquivalent zu der Bedingung

$$F \left\{ \sigma^R + \frac{\bar{N}(a^r) + \Delta\bar{N}}{2H} + \frac{3}{2} \frac{\bar{M}(a^r) + \Delta\bar{M}}{H^3} \theta^3 + \bar{s}(\theta^3) \right\} < 0 \quad \text{in } V \quad (3.4.15)$$

sein soll. Das bedeutet, falls (3.4.14) erfüllt ist, soll automatisch auch (3.4.15) erfüllt sein. Aus dieser Forderung ergeben sich die folgenden Eigenschaften von  $\bar{S}$ :

- $\bar{S}$  hängt vom jeweils gewählten querschnittsbedingten Restspannungszustand  $\bar{s}$  ab. Damit ist auch die Anzahl der voneinander verschiedenen elastischen Bereiche  $S$  abhängig von der Anzahl der möglichen querschnittsbedingten Restspannungszustände  $\bar{s}$ .
- Für  $\bar{s} = 0$  ist die Bedingung  $\bar{S} = 0$  identisch mit der Anfangsfließbedingung  $F_A = 0$  (3.3.18).
- Der durch  $\bar{S} < 0$  definierte elastische Bereich  $S$  liegt innerhalb des durch die Grenzfließbedingung definierten Querschnittstraglastbereiches.

Aufgrund der geforderten Äquivalenz zwischen (3.4.14) und (3.4.15) läßt sich somit das Optimierungsproblem (3.4.13) in die folgende Form überführen:

$$\alpha_{SD} = \max_{\Delta\bar{N}, \Delta\bar{M}, \bar{S}} \alpha \quad (3.4.16)$$

unter der Nebenbedingung

$$\bar{S} \{ N^R + \alpha \bar{N}(a^r) + \Delta\bar{N}, M^R + \alpha \bar{M}(a^r) + \Delta\bar{M} \} < 0 \quad \text{in } \Gamma$$

für alle  $a^r \in A$  und  $\Delta\bar{u}_3 \in \tilde{U}$ .

Diese Vorgehensweise sowie der Begriff des zeitlich konstanten elastischen Bereichs  $S$  ("elastic locus") wurden von KÖNIG [39] eingeführt. KÖNIG [40,42] gibt auch an, wie man für verschiedene Strukturen und Fließbedingungen elastische Bereiche konstruieren kann. Während dieses Verfahren für analytische Lösungen grundsätzlich geeignet ist, läuft es für numerische Anwendungen im Prinzip auf die Lösung des ursprünglichen Problems (3.4.13) hinaus. Aus diesem Grunde gehen wir in dieser

Arbeit einen anderen Weg (vergleiche hierzu auch die entsprechende Vorgehensweise von GOKHFELD und CHERNIAVSKI [30]). Dazu betrachten wir die beiden möglichen Versagensfälle "Inkrementelles Versagen" und Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität", die bei Überschreiten des Einspiellastfaktors  $\alpha_{SD}$  eintreten können. Ein "Inkrementelles Versagen" setzt voraus, daß in einem genügend großen Bereich auf der Mittelfläche  $\Gamma$  der jeweilige vollplastische Grenzzustand des Querschnitts erreicht wird, so daß sich inkrementell ein Versagensmechanismus ausbildet. Ein Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität" kann dagegen eintreten, wenn in einer einzelnen Querschnittsfaser eines Punktes auf  $\Gamma$  alternierende plastische Dehnungen auftreten, ohne daß dabei notwendigerweise der vollplastische Grenzzustand des Querschnitts erreicht werden muß. Will man nun nur den Sicherheitsfaktor  $\alpha_{IV}$  gegen "Inkrementelles Versagen" bestimmen, so darf man infolge der obigen Betrachtungen in der Nebenbedingung des Optimierungsproblems (3.4.16) anstelle der Bedingung  $\bar{S}(N,M) < 0$  die Grenzfließbedingung  $F_{G1}(N,M) < 0$  (bzw.  $F_{G2}(N,M) < 0$ ) benutzen. Damit erhalten wir den Sicherheitsfaktor  $\alpha_{IV}$  als Lösung des folgenden Optimierungsproblems:

$$\alpha_{IV} = \max_{\Delta\bar{N}, \Delta\bar{M}} \alpha \quad (3.4.17)$$

unter der Nebenbedingung

$$F_{G1,2} \{ (N^R + \alpha \bar{N}(a^r) + \Delta\bar{N}) / N_p, (M^R + \alpha \bar{M}(a^r) + \Delta\bar{M}) / M_p \} < 0 \quad \text{in } \Gamma$$

für alle  $a^r \in A$  und  $\Delta\bar{u}_3 \in \tilde{U}$ . Hierbei bezeichnen  $N_p$  und  $M_p$  die vollplastischen Querschnittstraglasten, definiert in (3.3.16) für Vollquerschnitte bzw. in (3.3.22) für Sandwich-Querschnitte. Die Einhaltung des Sicherheitsfaktors  $\alpha_{IV}$  allein bietet natürlich noch keine Garantie dafür, daß das Tragwerk auch einspielt, denn gemäß obiger Betrachtungen ist hierdurch ein Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität" nicht ausgeschlossen. Wir müssen diesen Versagensfall also gesondert behandeln. Das Problem der Bestimmung des Sicherheitsfaktors  $\alpha_{AP}$  gegen Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität" ist allerdings zur Zeit noch nicht vollständig gelöst. Lediglich für die

folgenden Sonderfälle existiert ein sicheres Kriterium, wobei jeweils vorausgesetzt wird, daß die Fließbedingung eine gerade Funktion von  $\sigma$  ist ( $F(\sigma) = F(-\sigma)$ ), was bei der benutzten HUBER-MISES-Fließbedingung der Fall ist:

- Platten ohne Membrankräfte (KÖNIG [40,47]),
- Zustände dehnungsloser Verbiegungen bei Schalen,
- einparametrische Belastungen, d. h. die variable Belastung hängt nur von einem freien Parameter ab (TIN LOI [115]),
- lineare Fließbedingungen (TIN LOI [116]).

Für diese Fälle erhalten wir den Sicherheitsfaktor  $\alpha_{AP}$  zu

$$\alpha_{AP} = \max_{\hat{N}, \hat{M}} \alpha \quad (3.4.18)$$

unter der Nebenbedingung

$$F_A \{(\alpha \hat{N}(\mathbf{a}^r) + \hat{N})/N_P, (\alpha \hat{M}(\mathbf{a}^r) + \hat{M})/M_P\} < 0 \quad \text{in } \Gamma$$

für alle  $\mathbf{a}^r \in A$ , wobei  $\hat{N}$  und  $\hat{M}$  beliebige zeitlich konstante Schnittgrößenzustände darstellen, welche keinerlei zusätzliche Bedingungen zu erfüllen brauchen. Insbesondere brauchen  $\hat{N}$  und  $\hat{M}$  auch keine statischen Bedingungen zu erfüllen.

Da beide Versagensfälle abgedeckt sein müssen ergibt sich der Einspiellastfaktor  $\alpha_{SD}$  schließlich zu

$$\alpha_{SD} = \min (\alpha_{IV}, \alpha_{AP}). \quad (3.4.19)$$

### Sonderfälle

In allen Fällen, in denen keine querschnittsbedingten Restspannungen auftreten können und somit Anfangsfließbedingung und Grenzfließbedingung identisch sind, das sind

- Sandwich-Schalen,
- Scheibentragwerke,
- Membranzustände bei Schalen,

ist die Nebenbedingung in (3.4.17) mehr einschränkend als die Nebenbedingung in (3.4.18). Daraus ergibt sich sofort

$$\alpha_{IV} \leq \alpha_{AP},$$

und unter Berücksichtigung von (3.4.19) folgt

$$\alpha_{SD} = \alpha_{IV}.$$

In diesen Fällen muß das Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität" also nicht gesondert betrachtet werden.

#### **Ergänzende Bemerkungen**

- (1) Die Lösung von (3.4.18) liefert ausnahmslos eine obere Schranke für den Sicherheitsfaktor  $\alpha_{AP}$  (KÖNIG [44,48], GOKHFELD und CHERNIAVSKI [30]) und damit wegen (3.4.19) auch für den Einspiellastfaktor  $\alpha_{SD}$ . Letzteres wird sofort einsichtig, wenn man sich die Bedeutung der Nebenbedingung in (3.4.18) klarmacht. Diese stellt nämlich sicher, daß der zum gegebenen Bereich A der möglichen äußeren Lasten gehörende Bereich R der möglichen Schnittgrößenzustände innerhalb des rein elastischen Bereiches C, definiert durch die Anfangsfließbedingung  $F_A < 0$ , eingeschlossen werden kann (siehe Abb. 3.5).
- (2) Im Falle proportionaler Belastung schrumpft der Bereich R der möglichen äußeren Schnittgrößenzustände entsprechend den Bemerkungen im Abschnitt 2.3 zu einem Punkt. Daraus ergibt sich, daß in diesem Fall die Nebenbedingung in (3.4.18) immer erfüllt werden kann, so daß ein Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität" von vornherein ausgeschlossen ist. Dies entspricht auch den physikalischen Tatsachen, so daß für proportionale Belastung also nur die Bedingung (3.4.17) zu erfüllen ist.

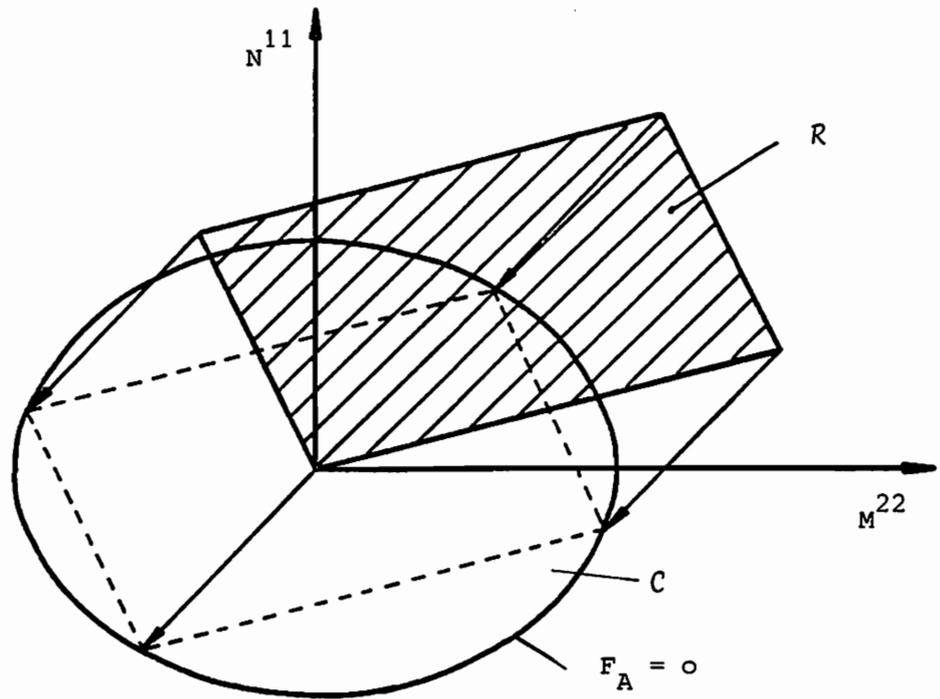


Abb. 3.5 Verdeutlichung der Nebenbedingung (3.4.18)

## 4. FINITE-ELEMENT-FORMULIERUNG FÜR ROTATIONSSYMMETRISCHE FLÄCHENTRAGWERKE

### 4.1 EINFÜHRENDE BEMERKUNGEN

Aufbauend auf den in den vorangegangenen Abschnitten hergeleiteten theoretischen Grundlagen werden im folgenden die Finite-Element-Algorithmen zur Berechnung von Einspiellastfaktoren axialsymmetrisch belasteter Rotationschalen erstellt. Dabei folgen wir der im Kapitel 3.4 vorgenommenen Gliederung in 4 Teilpunkte, wobei die Lösung des zeitlich konstanten Referenzproblems (Punkt 1) hier wiederum als bekannt vorausgesetzt wird. Wir werden uns also mit den übrigen 3 Punkten befassen; dies sind

- die Lösung des zeitlich veränderlichen rein elastischen Vergleichsproblems,
- die Bestimmung zeitlich konstanter Differenzschnittgrößenzustände und
- die Bestimmung der Sicherheitsfaktoren  $\alpha_{IV}$  und  $\alpha_{AP}$  als Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme.

Der Einfachheit halber bechränken wir uns dabei auf die im Kapitel 2.2 (S. 25,26) aufgeführten Sonderfälle (2) bis (5), d.h. wir vernachlässigen den Einfluß des Referenzspannungszustandes auf die Zusatzfeldgrößen.

Das allgemeine Konzept der Finite-Element-Methode, zumindest in Form des Weggrößenverfahrens, ist hinreichend bekannt und es existiert heute eine Vielzahl von Büchern über dieses Thema (siehe die Literaturübersicht von NOOR [85]). Wir werden uns daher nur mit solchen Aspekten befassen, die von der üblichen Weggrößenformulierung abweichen. Der wichtigste ergibt sich dabei aus der Forderung, daß zur Erhaltung des Schrankencharakters des erweiterten MELANschen Theorems die statischen Bedingungen in allen Fällen punktweise erfüllt werden müssen. Dies kann dadurch erreicht werden, daß man von einer Finite-Element-Diskretisierung mit Hilfe von Ansätzen für die Spannungsrepräsentanten ausgeht. Die hierbei an die Ansätze zu stellenden Forderungen wie die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen im Innern und auf dem Rand sowie die Einhaltung der notwendigen Kontinuitätsbedingungen zwischen den Elementen sind im allgemeinen wesentlich schwieriger zu erfüllen als die entsprechenden Forderungen an Ver-

schiebungsansätze. Aus diesem Grunde sind reine Spannungsansätze (bzw. Ansätze für die Spannungsrepräsentanten) in der klassischen Finite-Element-Methode praktisch ohne Bedeutung geblieben (alle größeren Finite-Element-Programmsysteme basieren fast ausschließlich auf Verschiebungsansätzen [11]).

Dennoch haben sich im Laufe der Jahre für geometrisch lineare Probleme zumindest theoretisch zwei unterschiedliche Finite-Element-Formulierungen mit Ansätzen für die Spannungen (Spannungsrepräsentanten) auf der Grundlage des Prinzips vom Minimum der Komplementärenergie herausgebildet. Die erste Methode basiert auf einer Formulierung in Spannungsfunktionen und benutzt die Analogie zwischen den Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen einerseits und den Beziehungen zwischen den Spannungen (Spannungsrepräsentanten) und den Spannungsfunktionen andererseits. Diese Vorgehensweise geht auf ELIAS [26] zurück und wurde für ebene Spannungszustände von GROSS-WEEGE und WEICHERT [31] erfolgreich auf Einspiel-Probleme angewandt. Die zweite Methode, die wir im folgenden auch benutzen werden, wurde von FRAEIJNS DE VEUBEKE [28] entwickelt. Anwendungen dieser Methode auf Einspiel-Probleme im Rahmen geometrisch linearer Theorien findet man in den Arbeiten von NGUYEN DANG HUNG und KÖNIG [75] sowie MORELLE und NGUYEN DANG HUNG [69]. In Erweiterung der Arbeiten [28,69,75] werden wir hier zusätzlich Temperaturdehnungen und Vorverformungen berücksichtigen.

#### 4.2 GRUNDLEGENDE BEZIEHUNGEN IN DISKRETISIERTER FORM

##### Geometriebeschreibung

Die Mittelfläche  $\Gamma$  einer Rotationsschale entstehe gemäß Abb. 4.1 durch Drehung einer willkürlichen ebenen Kurve, der Meridiankurve, um die z-Achse und sei beschrieben durch Zylinderkoordinaten  $z, r, \theta$  mit der zugehörigen orthonormalen Basis  $[e_z, e_r, e_\theta]$ . Mit Hilfe der Flächenparameter  $s \in [0, L]$  und  $\theta \in [0, 2\pi]$ , wobei  $s$  die Bogenlänge entlang eines Meridians von  $\Gamma$  bezeichnet, ist der Ortsvektor eines Punktes auf  $\Gamma$  durch

$$r(s, \theta) = z(s)e_z + r(s)e_r(\theta) \quad (4.2.1)$$

gegeben [64]. Teilt man die Meridiankurve durch Wahl von  $N+1$  Knotenpunkten

in  $N$  Elemente auf, dann ist ein typisches Element  $e$  durch zwei aufeinanderfolgende Knotenpunkte  $k$  und  $k+1$  mit den Werten  $s_k$  bzw.  $s_{k+1}$  von  $s$  gekennzeichnet. Mit Hilfe von (4.2.1) lässt sich in jedem Punkt auf  $\Gamma$  ein orthogonales System von Basisvektoren  $[\underline{a}_s, \underline{a}_\theta, \underline{a}_n]$  errichten mit

$$\underline{a}_s \hat{=} \underline{a}_1 = \underline{r},_s = z',_s \underline{e}_z + r',_s \underline{e}_r = \cos \phi \underline{e}_z + \sin \phi \underline{e}_r,$$

$$\underline{a}_\theta \hat{=} \underline{a}_2 = \underline{r},_\theta = r \, d\underline{e}_r(\theta)/d\theta = r \underline{e}_\theta, \quad (4.2.2)$$

$$\underline{a}_n \hat{=} \underline{a}_3 = \frac{\underline{a}_s \times \underline{a}_\theta}{|\underline{a}_s \times \underline{a}_\theta|} = -\sin \phi \underline{e}_z + \cos \phi \underline{e}_r,$$

wobei  $\phi = \phi(s)$  den Winkel zwischen der  $z$ -Achse und der Tangente an die Meridiankurve bezeichnet (s. Abb. 4.1).

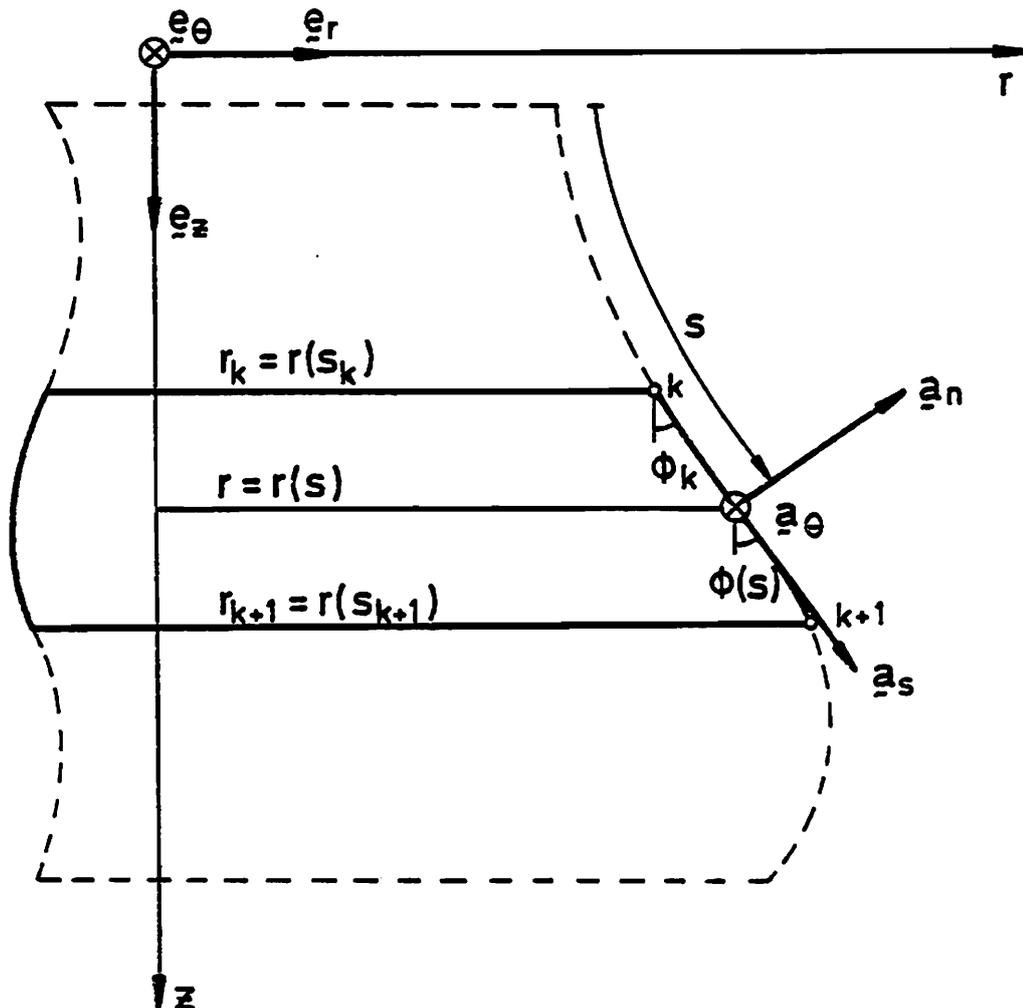


Abb. 4.1 Definitionen zur Geometrie von Rotationsschalen

Ausgehend von den hergeleiteten Ausdrücken (4.2.1 - 2) erhält man mit Hilfe der in Kapitel 3.1 zusammengestellten differentialgeometrischen Beziehungen die einzigen nichtverschwindenden Komponenten des Metrik- und Krümmungstensors sowie der Christoffelsymbole zu:

$$a_{11} = 1, \quad b_{11} = \phi',_s, \quad \Gamma_{22}^1 = -r \sin \phi, \quad (4.2.3)$$

$$a_{22} = r^2, \quad b_{22} = -r \cos \phi, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} \sin \phi.$$

Bei Schalen mit konstanter Meridiankrümmung R erhält man folgende vereinfachte Beziehungen für r und  $\phi$  (s. Abb. 4.1):

$$r(s) = r_k + R(\cos \phi(s) - \cos \phi_k), \quad s \in [s_k, s_{k+1}] \quad (4.2.4)$$

$$\phi(s) = \phi_k - \frac{s - s_k}{R} \frac{180^\circ}{\pi}, \quad \phi',_s = -\frac{1}{R} \frac{180^\circ}{\pi}, \quad \phi',_{ss} = 0.$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir uns der Einfachheit halber auf rotationssymmetrische Lastfälle mit rotationssymmetrischen Verformungsmustern beschränken. Dadurch ergeben sich die folgenden Vereinfachungen:

$$N^{12} = M^{12} = p^2 = 0, \quad (4.2.5)$$

$$\gamma_{12} = \kappa_{12} = u_2 = 0.$$

Zusätzlich sind alle Feldgrößen in Umfangsrichtung konstant, so daß die entsprechenden Ableitungen nach der Umfangskoordinate (Index 2 bzw.  $\theta$ ) verschwinden.

#### Ansätze für die Schnittgrößen

Wir approximieren die im Vektor  $S^e$  zusammengefaßten Elementschnittgrößen  $N^e$  und  $M^e$  mit

$$S^e = [N_s^e, N_\theta^e, M_s^e, M_\theta^e]^T, \quad (4.2.6)$$

mittels eines Ansatzes der Form

$$\mathbf{S}^e = N_1 \cdot \mathbf{b}_1^e + N_2 \cdot \mathbf{b}_2^e. \quad (4.2.7)$$

Dabei enthalten die Matrizen  $N_1$  und  $N_2$  Formfunktionen, die so zu wählen sind, daß  $\mathbf{S}^e$  die linearisierten Gleichgewichtsbedingungen (3.4.3) erfüllt. Unter Vernachlässigung des Einflusses von  $\mathbf{N}^R$  ergeben sich diese mit Hilfe von (4.2.3) und (4.2.5) in physikalischen Komponenten zu

$$\begin{aligned} N_{s,s} r + N_s \sin \phi - N_\theta \sin \phi + p_s^* r = 0 & \quad \text{in } \Gamma \\ - N_\theta \cos \phi + N_s r (\phi_{,s} + u_{n,ss}^R) + \\ [N_{s,s} r + N_s \sin \phi] u_{n,s}^R + M_{s,ss} r & \quad (4.2.8) \\ - M_{\theta,s} \sin \phi - M_\theta \phi_{,s} \cos \phi + 2M_{s,s} \sin \phi \\ + M_s \phi_{,s} \cos \phi + p_n^* r = 0. & \quad \text{in } \Gamma \end{aligned}$$

Damit sind  $N_1$  und  $N_2$  von  $u_n^R$  abhängig, wobei man im allgemeinen auch  $u_n^R$  mit Hilfe von Ansatzfunktionen und Freiwerten approximieren wird. Diese Freiwerte werden dann während der Rechnung konstant gehalten; werden sie gleich null gesetzt, so ist die Referenzkonfiguration  $\Omega^R$  gleich der Anfangskonfiguration  $\Omega^A$ . Der Ansatz (4.2.7) besteht aus 2 Anteilen, wobei der erste Term  $N_1 \cdot \mathbf{b}_1^e$  mit den Elementfreiwerten  $\mathbf{b}_1^e$  die homogenen Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, während der zweite Term  $N_2 \cdot \mathbf{b}_2^e$  die partikuläre Lösung enthält. Dadurch sind die Elementfreiwerte  $\mathbf{b}_2^e$  vollständig durch die gegebenen Flächenlasten  $p_s^*$  und  $p_n^*$  bestimmt. Die eigentlichen Unbekannten im Ansatz (4.2.7) sind also die Elementfreiwerte  $\mathbf{b}_1^e$ , welche im Gegensatz zu den Knotenfreiwerten in der Finite-Element-Verschiebungsmethode keine direkte mechanische Bedeutung haben.

#### Bestimmung der rein elastischen Vergleichslösung

Zur Bestimmung der fiktiven rein elastischen Vergleichslösung benutzen wir

aus den bereits erwähnten Gründen das Prinzip vom Minimum der Komplementärenergie [118], wobei zur Vereinfachung die kinematischen Randgrößen auf  $S_k$  zu null vorgeschrieben sein sollen. Ausgeschrieben für axial-symmetrisch belastete Rotationsschalen ergibt sich die Komplementärenergie des Elementes  $e$  mit den Knotenpunkten  $k$  und  $k+1$  in Matrixschreibweise zu

$$\pi_c^e = 2\pi \int_{S_k}^{S_{k+1}} \left[ \frac{1}{2} S^{eT} \cdot L \cdot S^e + S^{eT} \cdot E^\theta \right] r \, ds, \quad (4.2.9)$$

wobei die Elastizitätsmatrix

$$L = \frac{1}{2EH} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/H^2 & -3\nu/H^2 \\ 0 & 0 & -3\nu/H^2 & 3/H^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.10)$$

und der Vektor der Temperaturdehnungen

$$E^\theta = \alpha_\theta \begin{bmatrix} \bar{\theta}^* \\ \bar{\theta}^* \\ \Delta\theta^*/2H \\ \Delta\theta^*/2H \end{bmatrix} \quad (4.2.11)$$

unter Berücksichtigung von (4.2.3) aus den Beziehungen (3.3.7 - 9) bzw.

(3.3.4) hergeleitet werden können. In (4.2.9) steht der hochgestellte Index "T" für "transponiert". Einsetzen des Ansatzes (4.2.7) in (4.2.9) und Integration über die Elementfläche ergibt die diskretisierte Form

$$\pi_c^e = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{1}{2} \mathbf{b}_i^{eT} \cdot \mathbf{F}_{ij}^e \cdot \mathbf{b}_j^e + \mathbf{b}_i^{eT} \cdot \mathbf{E}_i^e \right] \quad (4.2.12)$$

mit den Elementflexibilitätsmatrizen

$$\mathbf{F}_{ij}^e = 2\pi \int_{s_k}^{s_{k+1}} \mathbf{N}_i^{eT} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{N}_j^e r \, ds \quad (4.2.13)$$

und den Vektoren

$$\mathbf{E}_i^e = 2\pi \int_{s_k}^{s_{k+1}} \mathbf{N}_i^{eT} \cdot \mathbf{E}^{\hat{\theta}} r \, ds. \quad (4.2.14)$$

Durch Addition der Element-Komplementärenergien  $\pi_c^e$  über alle N Elemente erhalten wir schließlich die globale Komplementärenergie  $\pi_c$  der Gesamtstruktur zu

$$\pi_c = \sum_{e=1}^N \pi_c^e = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[ \frac{1}{2} \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{F}_{ij} \cdot \mathbf{b}_j + \mathbf{b}_i^T \cdot \mathbf{E}_i \right], \quad (4.2.15)$$

wobei man die globalen Flexibilitätsmatrizen  $\mathbf{F}_{ij}$  und die globalen Vektoren  $\mathbf{b}_i$  und  $\mathbf{E}_i$  durch die übliche Überlagerung der entsprechenden Elementflexibilitätsmatrizen  $\mathbf{F}_{ij}^e$  bzw. der Vektoren  $\mathbf{b}_i^e$  und  $\mathbf{E}_i^e$  erhält. Im Vektor  $\mathbf{b}_i$  sind dabei die Freiwerte der Gesamtstruktur zusammengefaßt. In (4.2.15) sind die statischen Randbedingungen sowie die notwendigen Kontinuitätsbedingungen für die Schnittgrößen zwischen zwei benachbarten Elementen e und e+1 im Knotenpunkt k noch nicht berücksichtigt. Unter Vernachlässigung des

Einflusses von  $N^R$  ergeben sich diese mit Hilfe von (4.2.3) und (4.2.5) aus den Bedingungen (3.4.4) und lauten in physikalischen Komponenten

$$\begin{aligned}
 - N_s^e + N_s^{e+1} &= N_s^*, \\
 - N_n^e + N_n^{e+1} &= N_n^*, \\
 - M_s^e + M_s^{e+1} &= M_s^*
 \end{aligned}
 \tag{4.2.16}$$

mit

$$N_n^e = M_{s,s}^e + (M_{s,\theta}^e - M_{\theta}^e) \frac{1}{r} \sin \phi + N_s^e u_{n,s}^{Re}.
 \tag{4.2.17}$$

Hierbei ist darauf zu achten, daß in jedem Knotenpunkt  $k$  nur dann statische Randbedingungen vorgeschrieben sein dürfen, wenn nicht gleichzeitig die korrespondierenden kinematischen Randbedingungen vorgeschrieben sind. Die vorgeschriebenen statischen Randgrößen  $[N_s^*, N_n^*, M_s^*]$  im Knotenpunkt  $k$  sind dabei gemäß Abb. 4.2 definiert.

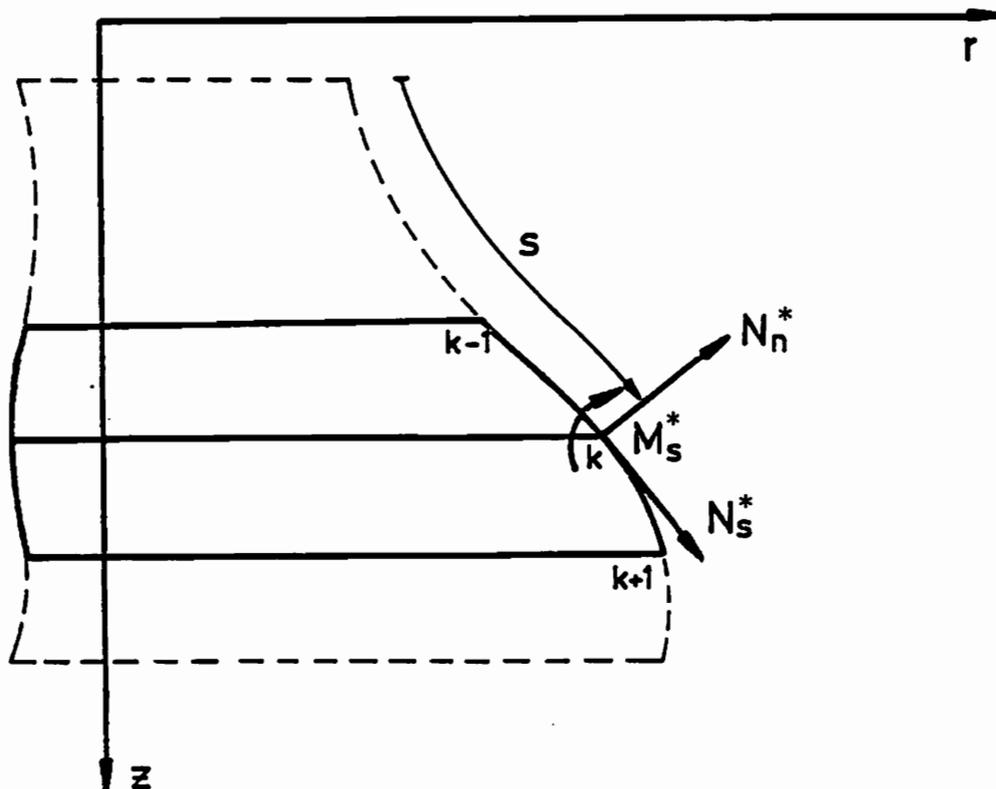


Abb. 4.2 Definition der vorgeschriebenen statischen Randgrößen

Wir fassen die statischen Randgrößen im Knotenpunkt  $k$  des Elementes  $e$  im Vektor  ${}^k\mathbf{g}^e$  zusammen und erhalten

$${}^k\mathbf{g}^e = [N_s^e, N_n^e, M_s^e]^T \Big|_{S=S_k} . \quad (4.2.18)$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung (4.2.17) sowie des Ansatzes (4.2.7) ergibt sich  ${}^k\mathbf{g}^e$  in der folgenden diskretisierten Form

$${}^k\mathbf{g}^e = {}^k\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{b}_1^e + {}^k\mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{b}_2^e, \quad (4.2.19)$$

wobei die Matrizen  ${}^k\mathbf{C}_1$  und  ${}^k\mathbf{C}_2$  von der Lage des jeweiligen Knotenpunktes und wegen (4.2.7) und (4.2.17) auch von der bekannten Referenzverformung  $u_n^R$  abhängen. Damit ergeben sich die statischen Rand- und Kontinuitätsbedingungen (4.2.16) im Knotenpunkt  $k$  zu

$$\begin{bmatrix} -{}^k\mathbf{C}_1 & {}^k\mathbf{C}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^e \\ \mathbf{b}_1^{e+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -{}^k\mathbf{C}_2 & {}^k\mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2^e \\ \mathbf{b}_2^{e+1} \end{bmatrix} = {}^k\mathbf{g}^* . \quad (4.2.20)$$

Diese Beziehungen können wir für alle  $N+1$  Knotenpunkte der Gesamtstruktur zusammenfassen. Wir erhalten dann ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{b}_2 = \mathbf{g}^* . \quad (4.2.21)$$

Durch Hinzufügen dieses Gleichungssystems zur Funktion (4.2.15) mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren  $\mathbf{q}$  erhalten wir

$$\hat{\pi}_c = \pi_c + (\mathbf{g}^* - \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{b}_1 - \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{b}_2)^T \cdot \mathbf{q} . \quad (4.2.22)$$

Die so erweiterte Funktion der Komplementärenergie nimmt für die Lösung einen stationären Wert an, so daß ihre Variation nach den Komponenten von  $\mathbf{b}_1$  und  $\mathbf{q}$  zu null wird. Unter Beachtung von (4.2.15) erhalten wir damit

zwei Bedingungen:

$$F_{11} \cdot b_1 + F_{12} \cdot b_2 + E_1 - C_1^T \cdot q = 0, \quad (4.2.23)$$

$$C_1 \cdot b_1 + C_2 \cdot b_2 = g^*. \quad (4.2.24)$$

Lösen wir die erste Gleichung nach  $b_1$  auf, so erhalten wir

$$b_1 = F_{11}^{-1} \cdot [C_1^T \cdot q - F_{12} \cdot b_2 - E_1]. \quad (4.2.25)$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung folgt dann

$$C_1 \cdot F_{11}^{-1} \cdot C_1^T \cdot q = C_1 \cdot F_{11}^{-1} \cdot E_1 + [C_1 \cdot F_{11}^{-1} \cdot F_{12} - C_2] \cdot b_2 + g^* \quad (4.2.26)$$

oder

$$K \cdot q = g^\theta + g^p + g^* \quad (4.2.27)$$

mit

$$K = C_1 \cdot F_{11}^{-1} \cdot C_1^T \quad (4.2.28)$$

als Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems,

$$g^\theta = C_1 \cdot F_{11}^{-1} \cdot E_1 \quad (4.2.29)$$

als Vektor der Temperaturlasten,

$$g^p = [C_1 \cdot F_{11}^{-1} \cdot F_{12} - C_2] \cdot b_2 \quad (4.2.30)$$

als Vektor der verteilten Flächenlasten und  $g^*$  als Vektor der vorgeschriebenen Randlasten. Unter Berücksichtigung von (4.2.22) können die

Lagrange-Multiplikatoren  $q$  aus energetischen Gründen aufgefaßt werden als die zu den statischen Randgrößen  $[N_s, N_n, M_s]$  korrespondierenden kinematischen Randgrößen  $[u_s, u_n, \varphi_s]$ . Damit entspricht die Darstellung (4.2.27) der Darstellung in der klassischen Finite-Element-Verschiebungsmethode, obwohl hier von Ansätzen für die Schnittgrößen ausgegangen wurde. In der Arbeit von FRAEIJIS DE VEUBEKE [28] werden die statischen Rand- und Kontinuitätsbedingungen schon auf Elementebene berücksichtigt, indem direkt von einem entsprechend erweiterten Variationsprinzip der Komplementärenergie ausgegangen wird (hierzu siehe auch PIAN [87]). Das Ergebnis stimmt mit unserem überein. Durch Lösen des Gleichungssystems (4.2.27) erhalten wir den Vektor  $q$ , der eingesetzt in (4.2.25) die Freiwerte  $b_1$  des Gesamtsystems liefert. Damit können mit Hilfe von (4.2.7) auch die Elementschnittgrößen  $S^e$  bestimmt werden.

#### Bestimmung von Differenzschnittgrößenzuständen

Gemäß den Ausführungen im Kapitel 3.4 müssen Differenzschnittgrößenzustände  $\Delta S^e$  die homogenen statischen Bedingungen (4.2.8) und (4.2.16) erfüllen. Aufgrund dieser Forderung folgt

$$\begin{aligned} b_2 &= 0, \\ g^* &= 0. \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

Damit reduziert sich das Gleichungssystem (4.2.21) auf

$$C_1 \cdot b_1 = 0. \tag{4.2.32}$$

Bezeichnen wir die Anzahl der im Vektor  $b_1^e$  zusammengefaßten Elementfreiwerte mit NE, so ergibt sich die Anzahl NG der im Vektor  $b_1$  zusammengefaßten Freiwerte des Gesamtsystems zu

$$NG = N * NE \tag{4.2.33}$$

mit N als Anzahl der Elemente. In der Matrix  $C_1$  sind die homogenen stati-

schen Rand- und Kontinuitätsbedingungen berücksichtigt. Deren Anzahl NS ergibt sich aus

$$NS = 3 * (N + 1) - NK, \quad (4.2.34)$$

wobei NK die Anzahl der vorgeschriebenen kinematischen Randbedingungen angibt. Damit hat das Gleichungssystem (4.2.32) NS Gleichungen für NG Unbekannte. Für  $NS < NG$ , was in der Regel der Fall ist, stellt (4.2.32) ein unterbestimmtes Gleichungssystem dar. Dann können die Freiwerte  $b_1$  des Gesamtsystems mit Hilfe von NGU unabhängigen Freiwerten  $\Delta b_1$ , wobei

$$NGU = NG - NS, \quad (4.2.35)$$

dargestellt werden als

$$b_1 = X \cdot \Delta b_1, \quad b_1^e = X^e \cdot \Delta b_1. \quad (4.2.36)$$

Dabei wird die Matrix X unter Anwendung eines Gauß-Jordan-Eliminationsverfahrens [112] aus der Forderung

$$C_1 \cdot X = 0 \quad (4.2.37)$$

bestimmt, und die Matrix  $X^e$  enthält den zum Element e gehörenden Teil der Matrix X. Bei beliebiger Wahl von  $\Delta b_1$  wird damit die Bedingung (4.2.32) identisch erfüllt und die Differenzschnittgrößenzustände im Element e ergeben sich zu

$$\Delta S^e = N_1 \cdot X^e \cdot \Delta b_1. \quad (4.2.38)$$

#### Bestimmung des Sicherheitsfaktors $\alpha_{IV}$

Aufgrund der Ausführungen in Kapitel 3.4 ergibt sich der Einspiellastfaktor  $\alpha_{SD}$  als der kleinere Wert der beiden Sicherheitsfaktoren  $\alpha_{IV}$  gegen

"Inkrementelles Versagen" und  $\alpha_{AP}$  gegen Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität". Der Sicherheitsfaktor  $\alpha_{IV}$  ergibt sich dabei als Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems (3.4.17), welches nun mit Hilfe von (4.2.6 - 7) und (4.2.38) in folgende diskretisierte Form übergeht:

$$\alpha_{IV} = \max_{\Delta b_1} \alpha \quad (4.2.39)$$

unter der Nebenbedingung

$$(S^{eR} + \alpha S^{eQ}(a^r) + \Delta S^e)^T \cdot T \cdot M_G \cdot T^T \cdot (S^{eR} + \alpha S^{eQ}(a^r) + \Delta S^e)^{-1} < 0 \quad \text{in } r^e$$

für alle  $a^r \in A$  und alle Elemente  $e = 1, N$  mit

$$\Delta S^e = N_1 \cdot X^e \cdot \Delta b_1. \quad (4.2.40)$$

Dabei werden die Elementschnittgrößen  $S^e$  in den Nebenbedingungen von (4.2.39) mit Hilfe der Matrix  $T$  dimensionslos gemacht:

$$T = \begin{bmatrix} 1/N_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/N_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/M_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/M_p \end{bmatrix} \quad (4.2.41)$$

wobei die vollplastischen Traglasten  $N_p$  und  $M_p$  gemäß (3.3.16) für Vollquerschnitte und (3.3.22) für Sandwich-Querschnitte definiert sind. Weiterhin bezeichnet  $S^{eR}$  die Elementschnittgrößen aus der gegebenen Lösung des zeitlich konstanten Referenzproblems und  $S^{eQ}(a^r)$  die Elementschnitt-

größen im rein elastischen Vergleichskörper, welche mit Hilfe des vorgestellten Finite-Element-Verfahrens berechnet werden. Die Matrix  $M_G$  in der Nebenbedingung von (4.2.39) ergibt sich dabei aus der Definition der jeweils benutzten Grenzfließfunktion  $F_{G1}$  bzw.  $F_{G2}$  zu

$$M_G = \frac{1}{4\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 4\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & \underline{+} 2 & \bar{+} 1 \\ & 4\sqrt{3} & \bar{+} 1 & \underline{+} 2 \\ & & 4\sqrt{3} & -2\sqrt{3} \\ \text{sym.} & & & 4\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (4.2.42)$$

im Falle der ILYUSHIN-Approximation (3.3.20) bzw.

$$M_G = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & \underline{+} 2 & \bar{+} 1 \\ & 2 & \bar{+} 1 & \underline{+} 2 \\ & & 2 & -1 \\ \text{sym.} & & & 2 \end{bmatrix} \quad (4.2.43)$$

im Falle der Sandwich-Schalen-Approximation (3.3.21).

Das Optimierungsproblem (4.2.39) hat eine lineare Zielfunktion und nicht-lineare (quadratische) Nebenbedingungen in Form von Ungleichungen. Die Anzahl der Unbekannten ist  $NU = NGU+1$ , wobei  $NGU$  die Anzahl der unabhängigen Freiwerte im Vektor  $\Delta b_1$  angibt und zusätzlich  $\alpha$  als Unbekannte auftritt. Bei der numerischen Lösung kann die Einhaltung der Nebenbedingungen in (4.2.39) nur in einer endlichen (beschränkten) Anzahl von

Kontrollpunkten auf der Meridiankurve von  $\Gamma$  erzwungen werden. Deswegen ist eine nachfolgende Überprüfung der Nebenbedingungen (Fließbedingung) in möglichst vielen Punkten jedes Elementes erforderlich, und gegebenenfalls muß die Rechnung mit einer entsprechend veränderten Wahl der Kontrollpunkte wiederholt werden. Die Anzahl der Nebenbedingungen hängt deshalb zum einen davon ab, in wievielen Punkten  $P(s)$  die Fließbedingung kontrolliert werden soll und zum anderen von der Anzahl  $n$  der unabhängig voneinander variierenden Zusatzwirkungen  $a^r$ . Bezeichnet  $NF$  die Anzahl der Kontrollpunkte auf der Meridiankurve von  $\Gamma$  und  $NL$  die Anzahl der zu untersuchenden Lastkombinationen ( $NL = 2^n$ , siehe Abschnitt 2.3), so ergibt sich die Anzahl der Nebenbedingungen zu  $M = NF \cdot NL \cdot 2$ . Der Faktor 2 ergibt sich aus der Tatsache, daß in jedem Kontrollpunkt  $P(s)$  zwei Fließbedingungen einzuhalten sind, da in (4.2.42) und (4.2.43) jeweils 2 Vorzeichen zu berücksichtigen sind. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Optimierungsproblem (4.2.39) mit Hilfe des von PIERRE und LOWE [88] entwickelten nichtlinearen Optimierungsprogramms LPNLP gelöst. Das diesem Programm zugrundeliegende Lösungsverfahren wird im Anhang A kurz erläutert.

#### Bestimmung des Sicherheitsfaktors $\alpha_{AP}$

Wir erhalten den Sicherheitsfaktor  $\alpha_{AP}$  gegen Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität" als Lösung des Optimierungsproblems (3.4.18), welches mit Hilfe von (4.2.6 - 7) folgende diskretisierte Form annimmt:

$$\alpha_{AP} = \max_{\hat{S}^e} \alpha \quad (4.2.44)$$

unter der Nebenbedingung

$$(\alpha S^e(a^r) + \hat{S}^e)^T \cdot T \cdot M_A \cdot T^T \cdot (\alpha S^e(a^r) + \hat{S}^e) - 1 < 0 \quad \text{in } r^e$$

für alle  $a^r \in A$  und alle Elemente  $e = 1, N$ . Dabei ergibt sich die Matrix  $M_A$  aus der Definition der Anfangsfließfunktion  $F_A$  (3.3.18) zu

$$M_A = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 & -4 & \pm 12 & \mp 6 \\ & 8 & \mp 6 & \pm 12 \\ & & 18 & -9 \\ \text{sym.} & & & 18 \end{bmatrix} \quad (4.2.45)$$

Aufgrund der Tatsache, daß der Vektor  $\hat{S}^e$  ganz beliebig sein darf, kann das Optimierungsproblem (4.2.44) in jedem Punkt P(s) jedes Elementes e getrennt gelöst werden. Bezeichnen wir den lokalen Sicherheitsfaktor gegen "Alternierende Plastizität" im Punkt P(s) mit  $\alpha_{AP}(s)$ , so erhalten wir den globalen Sicherheitsfaktor  $\alpha_{AP}$  zu

$$\alpha_{AP} = \min_s \alpha_{AP}(s), \quad s \in [0, L]. \quad (4.2.46)$$

Die Bestimmung des lokalen Sicherheitsfaktors  $\alpha_{AP}(s)$  kann aufgrund der anschaulichen Interpretation der Nebenbedingungen in (4.2.44) bzw. (3.4.18) (siehe Kapitel 3.4, Abb. 3.5) vereinfacht werden. Es ergibt sich dann

$$\alpha_{AP}(s) = \max \alpha \quad (4.2.47)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\frac{1}{2} [ \pm(\mu_i^+ - \mu_i^-) \alpha S_i^e(\bar{a}_i^{or}) ]^T \cdot T \cdot M_A \cdot T^T \cdot \frac{1}{2} [ \pm(\mu_i^+ - \mu_i^-) \alpha S_i^e(\bar{a}_i^{or}) ] - 1 < 0, \quad i=1, n,$$

wobei alle Vorzeichenkombinationen  $\pm$  zu berücksichtigen sind und n die Anzahl der unabhängig voneinander variierenden Lasten  $\bar{a}_i^{or}$  (2.3.1) bezeichnet. Das Optimierungsproblem (4.2.47) hat damit nur noch eine Unbekannte, nämlich  $\alpha$ , sowie in  $\alpha$  quadratische Nebenbedingungen, so daß dessen numerische Lösung keine Schwierigkeiten bereitet.

#### 4.3 PROGRAMMTECHNISCHE REALISIERUNG

Für die numerischen Berechnungen wurde das im vorherigen Kapitel entwickelte Finite-Element-Verfahren in ein FORTRAN-Programm umgesetzt. Entsprechend dem Flußdiagramm in Abb. 4.3 beinhaltet dieses Programm den gesamten Rechengang von der Erstellung der jeweiligen elastischen Vergleichslösung über die Bestimmung von Differenzschnittgrößenzuständen bis zur Bestimmung des Einspiellastfaktors. Zur Bestimmung der Lösung des zeitlich konstanten nichtlinearen Referenzproblems, welche bisher immer als bekannt vorausgesetzt wurde, haben wir das Programmsystem MECMESY benutzt. Einzelheiten bezüglich dieses Systems und der entsprechenden theoretischen Grundlagen sind [16,84] zu entnehmen. Die Lösung des jeweiligen Optimierungsproblems besorgt das Optimierungsprogramm LPNLP, welches dazu in unser Programm integriert wurde.

Das Programm ist so aufgebaut, daß außer Einspiel-Problemen grundsätzlich auch Grenzlast-Probleme behandelt werden können. Für beide Problemstellungen können jeweils zwei unterschiedliche Querschnittsarten (Sandwich-Querschnitt oder Vollquerschnitt) und zwei verschiedene Approximationen der Grenzfließbedingung (ILYUSHIN-Approximation oder Sandwich-Schalen-Approximation) berücksichtigt werden. In allen Fällen können außer der üblichen mechanischen Belastung auch Temperaturlasten erfaßt werden. Für jedes behandelte Problem wird zusätzlich die jeweilige elastische Grenzlast berechnet. Im Programm sind bisher ein Kreiszyinderschalen-Element und ein Kegelstumpfschalen-Element implementiert, jedoch können grundsätzlich noch weitere Elemente (flache Kugelschale, etc.) eingebaut werden.

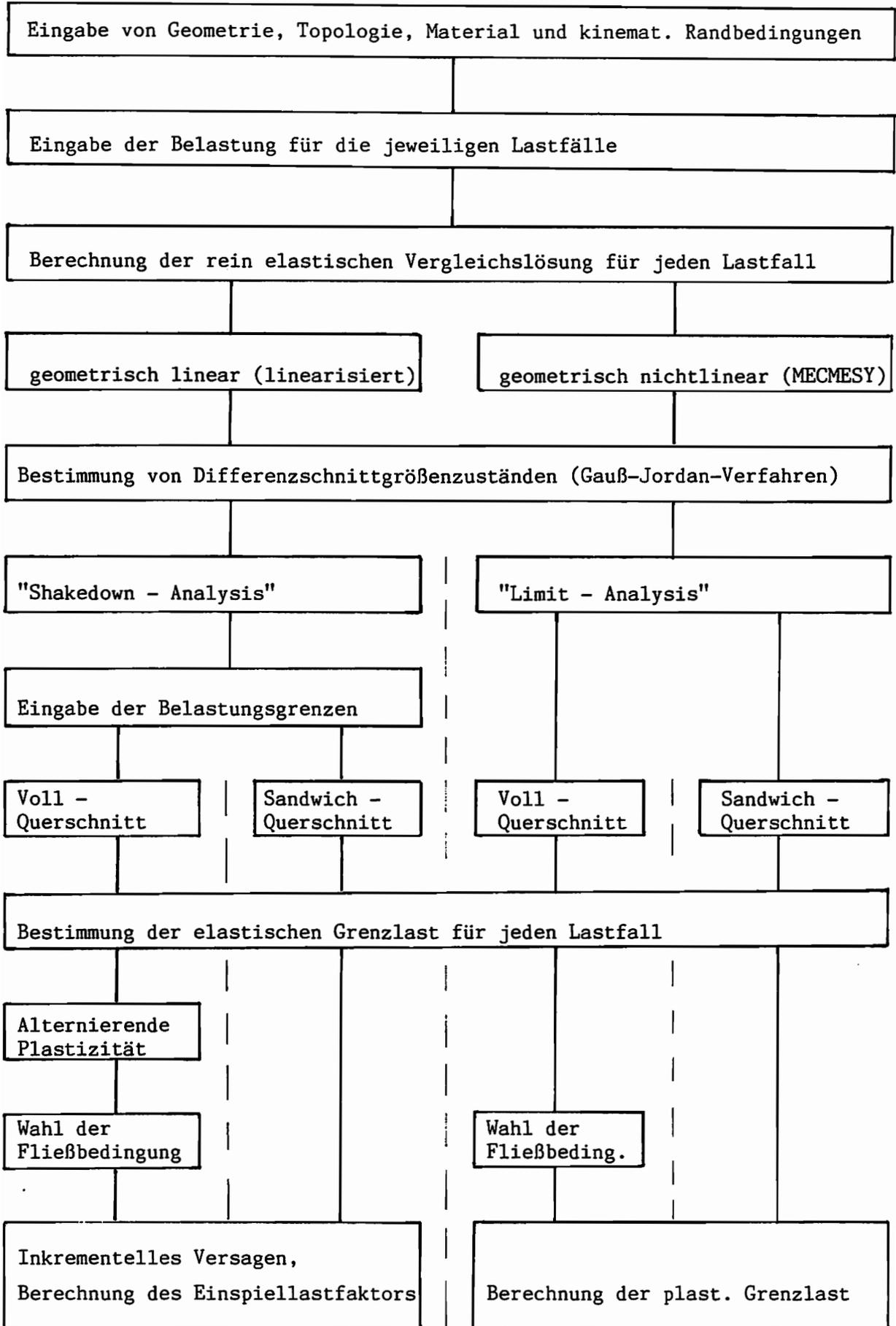


Abb. 4.3 Flußdiagramm des Finite-Element-Programms

## 5. NUMERISCHE BEISPIELE

### 5.1 ALLGEMEINES

In diesem Kapitel wird das Einspielverhalten axialsymmetrisch belasteter Rotationsschalen numerisch untersucht und die Leistungsfähigkeit des vorgestellten Verfahrens demonstriert. Im ersten Abschnitt betrachten wir dazu einige Probleme im Rahmen der geometrisch linearen Theorie, um einerseits die beim Einspielen auftretenden grundsätzlichen Phänomene zu diskutieren und andererseits das Lösungsverhalten sowie die Konvergenzeigenschaften des Verfahrens zu testen. In den dann folgenden Abschnitten beschäftigen wir uns mit dem Einfluß dreier verschiedener Effekte auf das Einspielverhalten, und zwar mit dem Einfluß geometrisch nichtlinearer Effekte, kombinierter thermischer und mechanischer Belastung, sowie dem Einfluß der jeweiligen Querschnittsart (Vollquerschnitt oder Sandwich-Querschnitt). Alle diese Effekte können mit dem vorgestellten Verfahren problemlos erfaßt werden, wobei durch die direkte Anwendung des erweiterten MELANSchen Theorems seine Schrankeneigenschaften erhalten bleiben: Jede Lösung, die gefunden wird, garantiert im Rahmen der getroffenen Voraussetzungen das Nichtversagen (Einspielen). Wie im Kapitel 2.2 bereits erwähnt, ist der Sonderfall proportionaler Belastung im erweiterten MELANSchen Theorem enthalten. Damit können mit Hilfe unseres Verfahrens uneingeschränkt auch Grenzlaster-Probleme (Limit Analysis) behandelt werden. Die Wahl einer Diskretisierung mittels Finiter Elemente macht das Verfahren darüber hinaus flexibel hinsichtlich der Behandlung unterschiedlicher Schalengeometrien, Belastungen und Randbedingungen. Durch die Verwendung eines nichtlinearen Optimierungsprogrammes ist eine Erweiterung des Verfahrens auf allgemeinere Problemstellungen wie Einspielen unter Berücksichtigung einer optimalen Formgebung ("Optimum Design") und/oder der Begrenzung der Verformungen ("Bounding Methods") grundsätzlich möglich. Außerdem war damit eine Einschränkung auf lineare Fließbedingungen nicht erforderlich, und wir konnten die HUBER-MISES Fließbedingung benutzen.

Im Gegensatz hierzu beruhen die in der Literatur nur vereinzelt vorliegenden Lösungen für Einspielprobleme bei Schalen in der Regel auf der Verwendung linearer bzw. linearisierter Fließbedingungen und gelten aus-

schließlich für geometrisch lineare Probleme. Analytische Lösungen [12,30,40,56,58,96,105] existieren darüber hinaus nur für ganz spezielle Probleme, wobei häufig zusätzliche Vereinfachungen (z. B. Vernachlässigung von Randstörungen, Behandlung nur eines einzelnen Versagensfalles, Berücksichtigung nur zyklischer Belastungen) eingeführt werden. Numerische Lösungen [34,69,71,77] liegen ebenfalls nur für eine eingeschränkte Klasse von Problemen (Sandwich-Schalen, keine Temperaturlasten, dünne Rohre) vor. In beiden Fällen bleibt zudem der Schrankencharakter der Lösungen oftmals unklar. Zum Zwecke des Vergleichs haben wir einige der vorliegenden Lösungen nachgerechnet. Die Unterschiede zwischen den jeweiligen Lösungen werden dabei in den folgenden Beispielen im einzelnen deutlich gemacht, und deren Ursachen werden diskutiert.

Ergebnisse von Einspieluntersuchungen können anschaulich in sogenannten Shakedown - (Interaktions-) Diagrammen dargestellt werden. In solchen Diagrammen wird die Umhüllende aller sicheren Belastungsbereiche  $A_{SD}^i$ , innerhalb derer Einspielen gerade noch stattfindet, dargestellt. Man erhält diese wie folgt: Für verschiedene Verhältnisse von  $\mu_1^+ / \mu_2^+ / \dots / \mu_n^+$  (bzw.  $\mu_1^- / \mu_2^- / \dots / \mu_n^-$ ), welche jeweils verschiedene Belastungsbereiche  $A^i$  definieren ( $n$  bezeichnet die Anzahl der unabhängig voneinander variierenden Lasten), berechnen wir mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens den jeweils zugehörigen Einspiellastfaktor  $\alpha_{SD}^i$ . Damit können wir den jeweiligen sicheren Belastungsbereich  $A_{SD}^i$  durch eine proportionale Vergrößerung des entsprechenden Belastungsbereichs  $A^i$  um den Faktor  $\alpha_{SD}^i$  bestimmen, und aus der Überlagerung aller Bereiche  $A_{SD}^i$  kann schließlich die Umhüllende konstruiert werden.

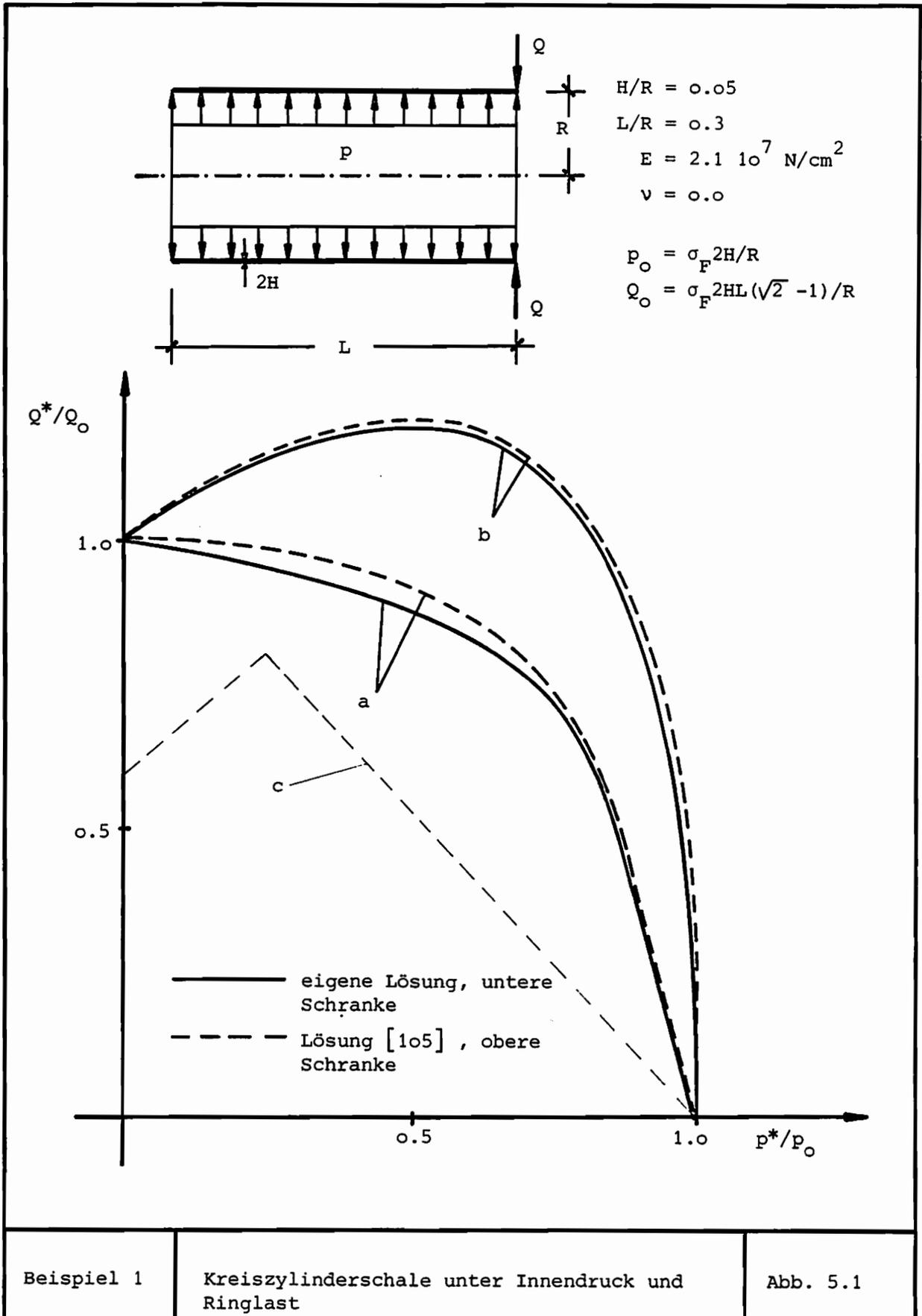
Alle nachfolgenden Beispiele wurden auf der Rechenanlage CDC CYBER 855 des Rechenzentrums der Ruhr-Universität Bochum gerechnet. Dabei traten in der Regel keine Konvergenzschwierigkeiten bei der Anwendung des Optimierungsprogramms auf.

## 5.2 EINIGE EINFÜHRENDE BEISPIELE

### 5.2.1 Kreiszyllinderschale unter Innendruck und Ringlast

Wir betrachten die in Abb. 5.1 dargestellte kurze Kreiszyllinderschale, die durch Innendruck  $p$  sowie eine Ringlast  $Q$  belastet wird. Beide Lasten variieren unabhängig voneinander in den Grenzen  $0 \leq p \leq p^*$  bzw.  $0 \leq Q \leq Q^*$ . Es wird nur der Versagensfall "Inkrementelles Versagen" behandelt. Für dieses Problem hat SAWCZUK [105,106] eine analytische Lösung in Form einer oberen Schranke bestimmt. Dazu benutzte er eine modifizierte Version des KOITERSchen Theorems sowie die sogenannte "quadratische" Fließbedingung ("one-moment limited-interaction yield surface") (siehe Abb. 5.2). Um unsere Lösung möglichst genau mit derjenigen von SAWCZUK vergleichen zu können, haben wir diese Fließbedingung zusätzlich in unser Programm eingebaut. Das Shakedown-Diagramm für dieses Beispiel ist in Abb. 5.1 dargestellt, wobei außer den Ergebnissen für zweiparametrische variable Belastung (Kurven a) auch die Ergebnisse für proportionale Belastung (plastische Grenzlast: Kurven b; elastische Grenzlast: Kurve c) dargestellt sind. Man erkennt, daß unsere Ergebnisse zu kleineren Einspiel- und Grenzlasten führen als die Ergebnisse von SAWCZUK. Dies muß auch so sein, da unser Verfahren untere Schranken liefert, während SAWCZUK's Ergebnisse obere Schranken sind. Wegen des in weiten Bereichen sehr geringen Unterschieds zwischen den beiden Lösungen (maximal 4 %), stellen beide eine recht gute Näherung der exakten Lösung dar.

Da die "quadratische" Fließbedingung nur eine sehr ungenaue und zudem unsichere Näherung der HUBER-MISES-Grenzfließbedingung darstellt, haben wir dieses Beispiel auch mit Hilfe der genaueren und auf der sicheren Seite liegenden ILYUSHIN-Approximation (siehe Abb. 5.2) berechnet. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.3 dargestellt, wobei wiederum die Lösung von SAWCZUK zum Vergleich herangezogen wurde. Eine numerische Lösung dieses Problems wurde auch von NGUYEN DANG HUNG und MORELLE [77] unter Anwendung des MELANSchen Theorems und der linearen Sandwich-Approximation der TRESCA-Grenzfließbedingung bestimmt (Abb. 5.3). Im Gegensatz zu unserer Lösung läßt diese jedoch keinen Schrankencharakter erkennen.

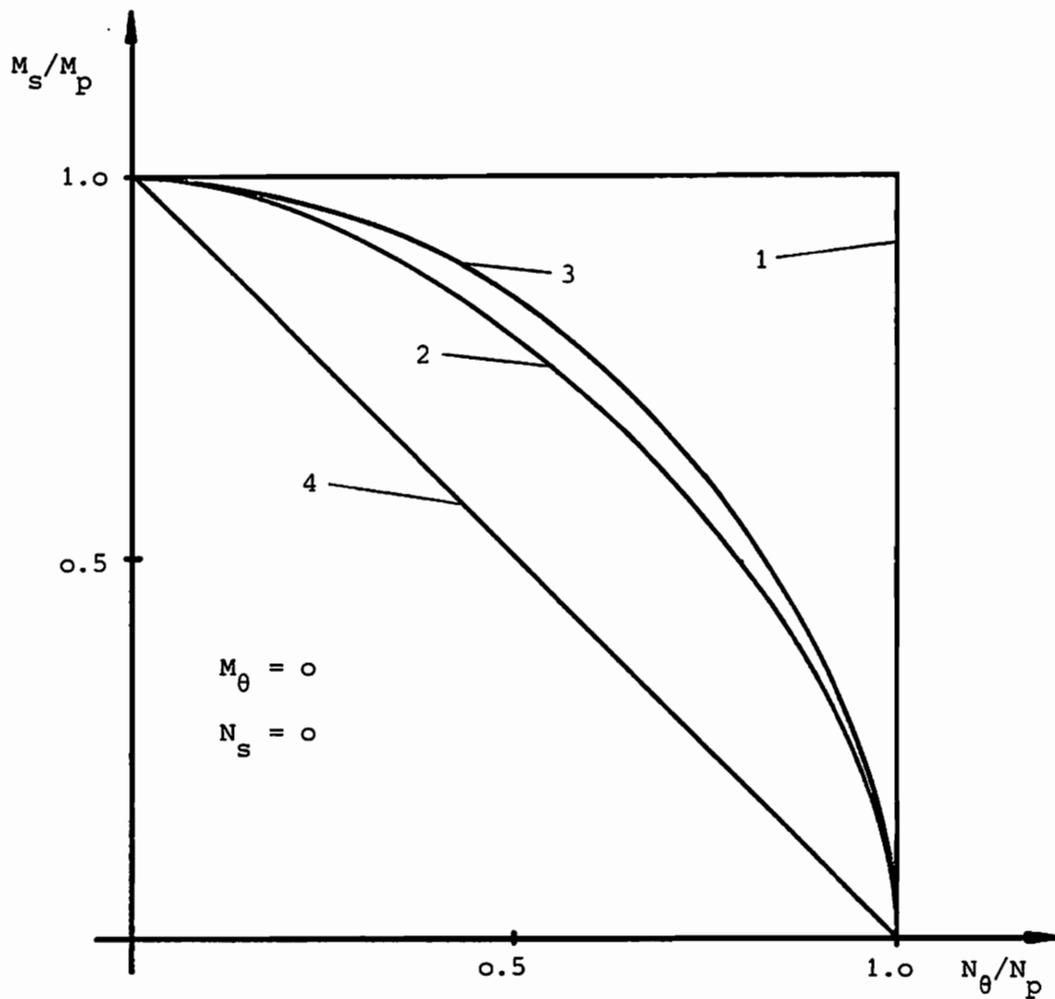


Beispiel 1

Kreiszyllinderschale unter Innendruck und Ringlast

Abb. 5.1

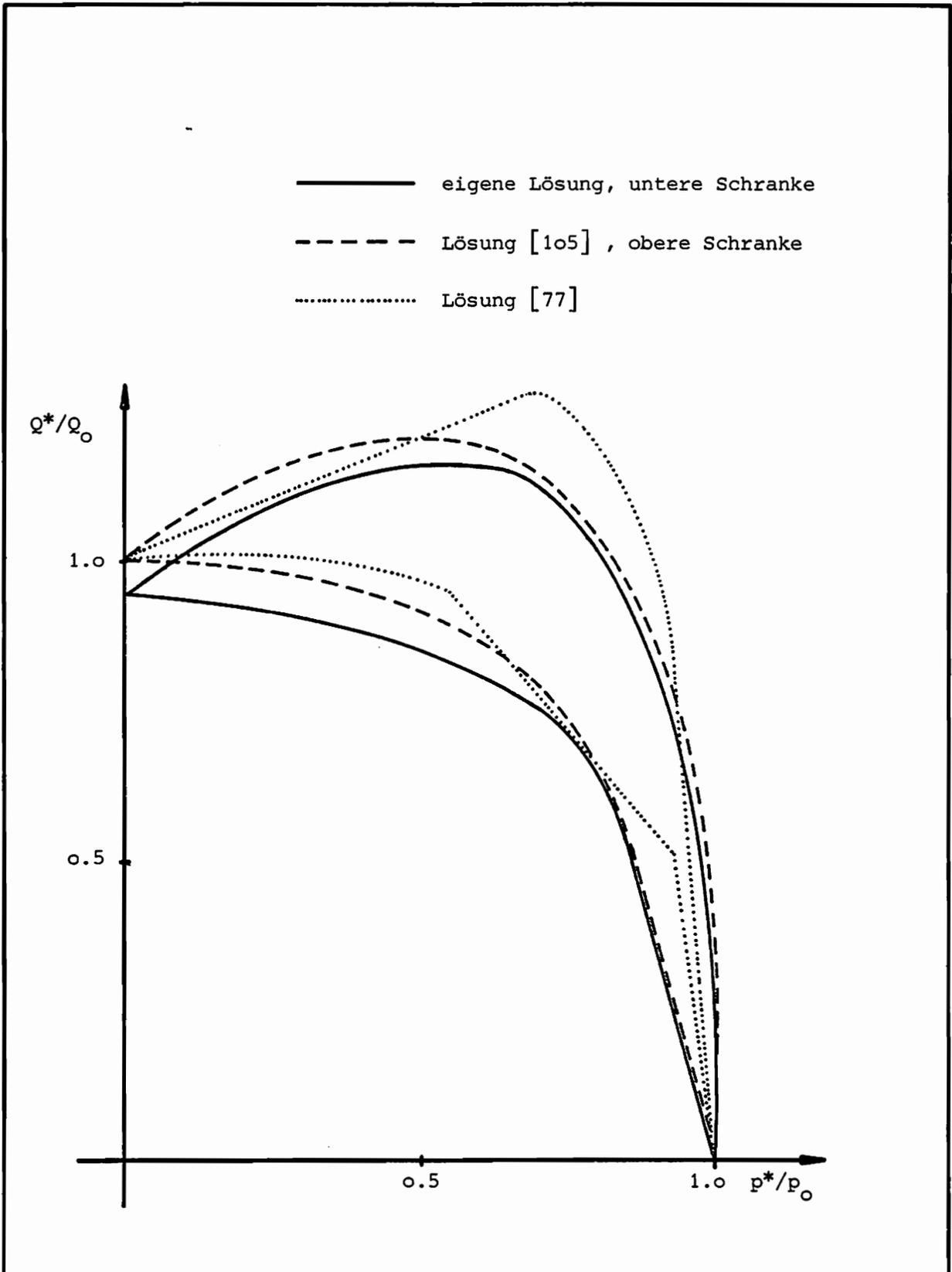
- 1 "quadratische" Fließbedingung  
("one-moment limited-interaction yield surface")
- 2 HUBER-MISES Fließbedingung,  
ILYUSHIN-Approximation der Grenzfließbedingung
- 3 HUBER-MISES Fließbedingung,  
exakte Grenzfließbedingung
- 4 TRESCA Fließbedingung,  
Sandwich-Approximation der Grenzfließbedingung



Beispiel 1

Vergleich verschiedener Fließbedingungen

Abb. 5.2



Beispiel 1	Kreiszylinderschale unter Innendruck und Ringlast	Abb. 5.3
------------	---	----------

### 5.2.2 Rohr unter Innendruck und Axiallast

Als ein Beispiel, bei dem der Unterschied zwischen der Einspiellast und der plastischen Grenzlast wesentlich stärker ausgeprägt ist als im vorherigen Beispiel, behandeln wir das in Abb. 5.4 dargestellte "geriffelte" Rohr unter Innendruck  $p$  und axialer Ringlast  $Q$ . Unter Berücksichtigung der Symmetrien in der Geometrie und der Belastung des Rohres können wir die Berechnung an dem vergrößert dargestellten Ersatzsystem einer entsprechend gelagerten Kegelstumpfschale durchführen. Dabei behandeln wir die folgenden 3 Lastfälle:

a) zweiparametrische Belastung

$$0 \leq p \leq p^* \quad ; \quad 0 \leq Q \leq Q^*$$

b) einparametrische Belastung

$$p = \text{konstant} \quad ; \quad 0 \leq Q \leq Q^*$$

c) proportionale Belastung

Die Berechnungen werden für einen Vollquerschnitt durchgeführt, und als Grenzfließbedingung wird die Sandwich-Schalen-Approximation (3.3.21) benutzt. Bei den Lastfällen a) und b) werden beide Versagensfälle "Inkrementelles Versagen" und Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität" berücksichtigt. Das Shakedown-Diagramm ist in Abb. 5.5 dargestellt, wobei zum Vergleich auch die elastische Grenzlast für proportionale Belastung (Kurve d) eingezeichnet ist. Bei der Interpretation des Diagrammes ist zu berücksichtigen, daß bei den Berechnungen nur positive oder nur negative axiale Ringlasten  $Q$  zugelassen waren, so daß ein Vorzeichenwechsel für  $Q$  ausgeschlossen war. Weiterhin ist zu beachten, daß die Grenzkurven für den Versagensfall "Alternierende Plastizität" obere Schranken darstellen, während alle anderen Kurven, mit Ausnahme der Kurve der elastischen Grenzlast, untere Schranken sind. Man erkennt, daß für positive Werte von  $Q$  die jeweiligen Einspiellasten im Falle zweiparametrischer Belastung (Kurve a) in weiten Bereichen des Diagrammes wesentlich kleiner sind, als die entsprechenden plastischen Grenzlasten im Falle proportionaler Belastung (Kurve c), während für negative Werte von  $Q$  zumindest im Falle des "Inkrementellen Versagens" keine Unterschiede auf-

treten. Weiterhin ist festzustellen, daß im Falle der zweiparametrischen (Kurve a) wie auch der einparametrischen Belastung (Kurve b) für dieses Beispiel der Versagensfall "Alternierende Plastizität" den kritischen Versagensfall darstellt.

Das Beispiel macht einige charakteristische und allgemein gültige Merkmale des Einspielverhaltens von Tragwerken deutlich (vgl. auch [30]): Es sei  $\alpha_{SD}(\bar{p}, \bar{Q})$  der Einspiellastfaktor für  $p$  und  $Q$  im Falle der zweiparametrischen Belastung  $0 \leq p \leq \bar{p}$  und  $0 \leq Q \leq \bar{Q}$ . Ferner sei  $\alpha_G(\bar{p}, \bar{Q})$  der Grenzlastfaktor für  $p$  und  $Q$  im Falle der proportionalen Belastung  $p = \bar{p}$  und  $Q = \bar{Q}$ . Dann gilt:

$$\alpha_{SD}(\bar{p}, \bar{Q}) \leq \min \{ \alpha_{SD}(\bar{p}, 0); \alpha_{SD}(0, \bar{Q}) \}$$

aber

$$\alpha_G(\bar{p}, \bar{Q}) \geq \min \{ \alpha_G(\bar{p}, 0); \alpha_G(0, \bar{Q}) \}.$$

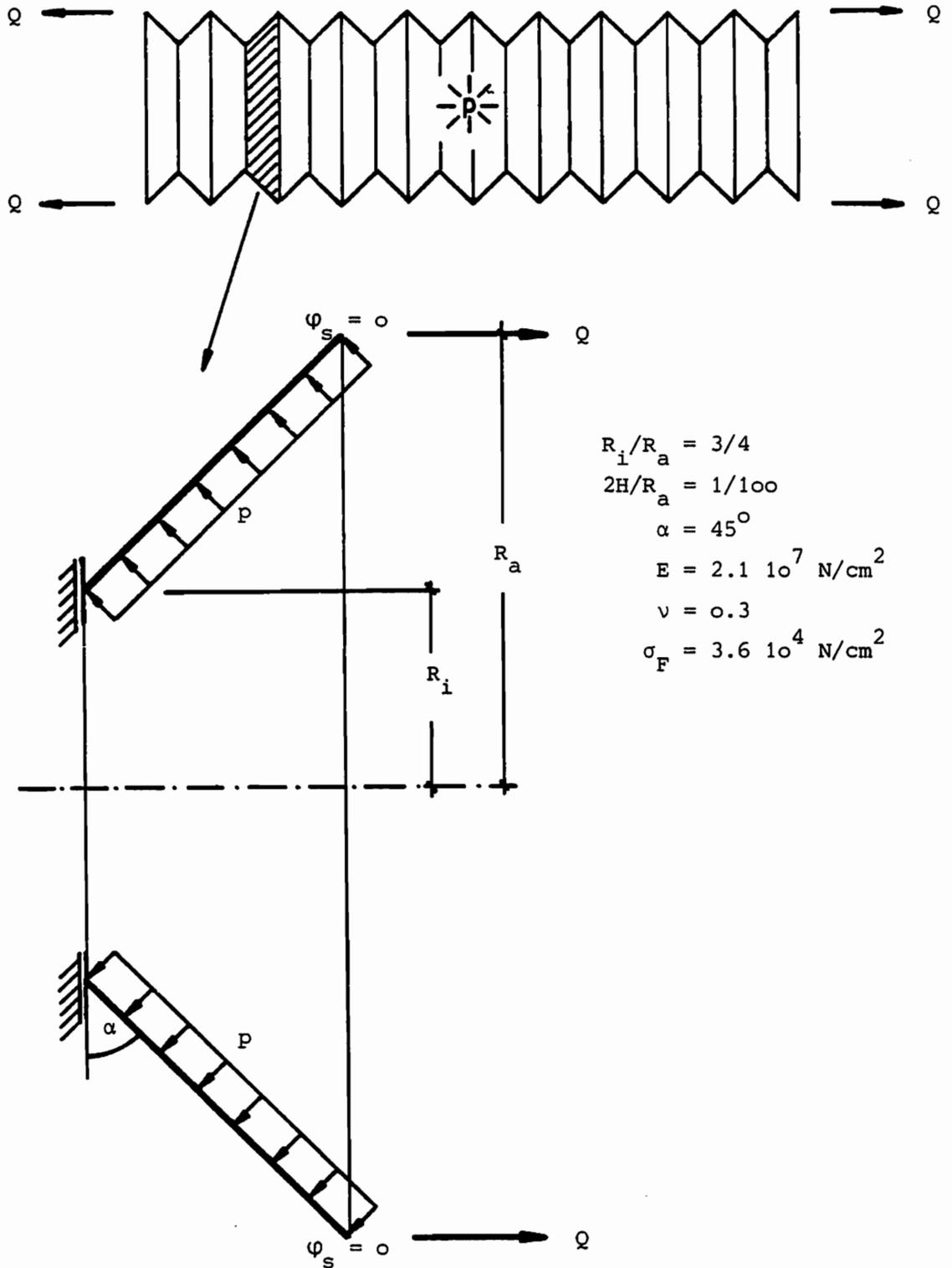
Damit liegt die begründete Vermutung nahe, daß für  $\alpha_G(\bar{p}, \bar{Q}) > \min \{ \alpha_G(\bar{p}, 0); \alpha_G(0, \bar{Q}) \}$  größere Unterschiede zwischen der jeweiligen Einspiellast und der zugehörigen plastischen Grenzlast auftreten können, während im anderen Falle nur kleinere bzw. gar keine Unterschiede zu erwarten sind. Bezeichnen wir mit  $\alpha_e(\bar{p}, \bar{Q})$  den Grenzlastfaktor der elastischen Grenzlast für proportionale Belastung von  $p$  und  $Q$ , so gilt weiter:

$$\alpha_{SD}(\bar{p}, \bar{Q}) \leq 2 \alpha_e(\bar{p}, \bar{Q})$$

aber

$$\alpha_{SD}(\bar{p}, \bar{Q}) \geq \alpha_e(\bar{p}, \bar{Q}).$$

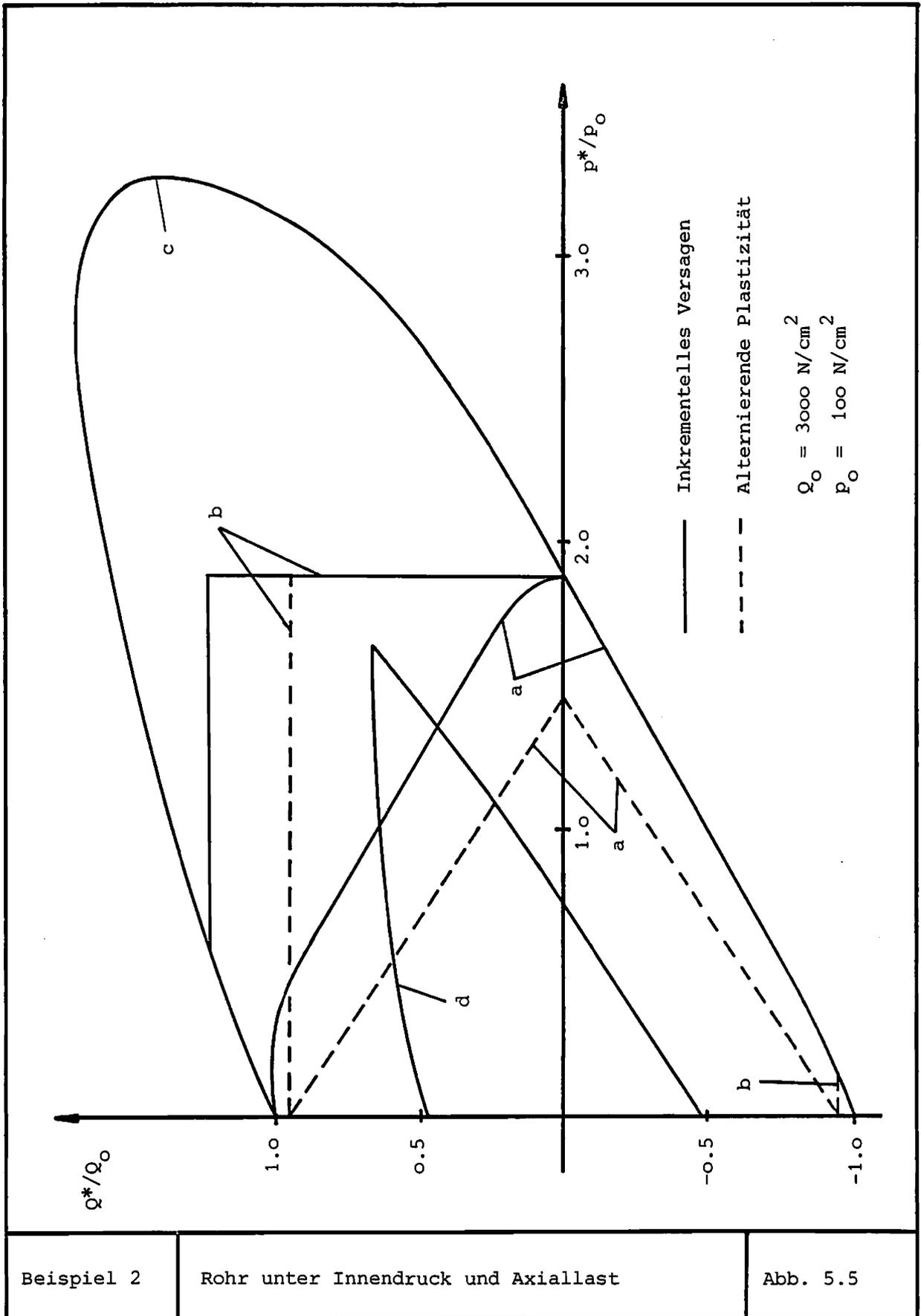
Die erste Bedingung folgt unmittelbar aus dem Kriterium der Sicherheit gegen Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität", welches gemäß Kap. 3.4 (siehe auch Abb. 3.5) in allen Fällen eine obere Schranke für Einspielen liefert.



Beispiel 2

Rohr unter Innendruck und Axiallast

Abb. 5.4



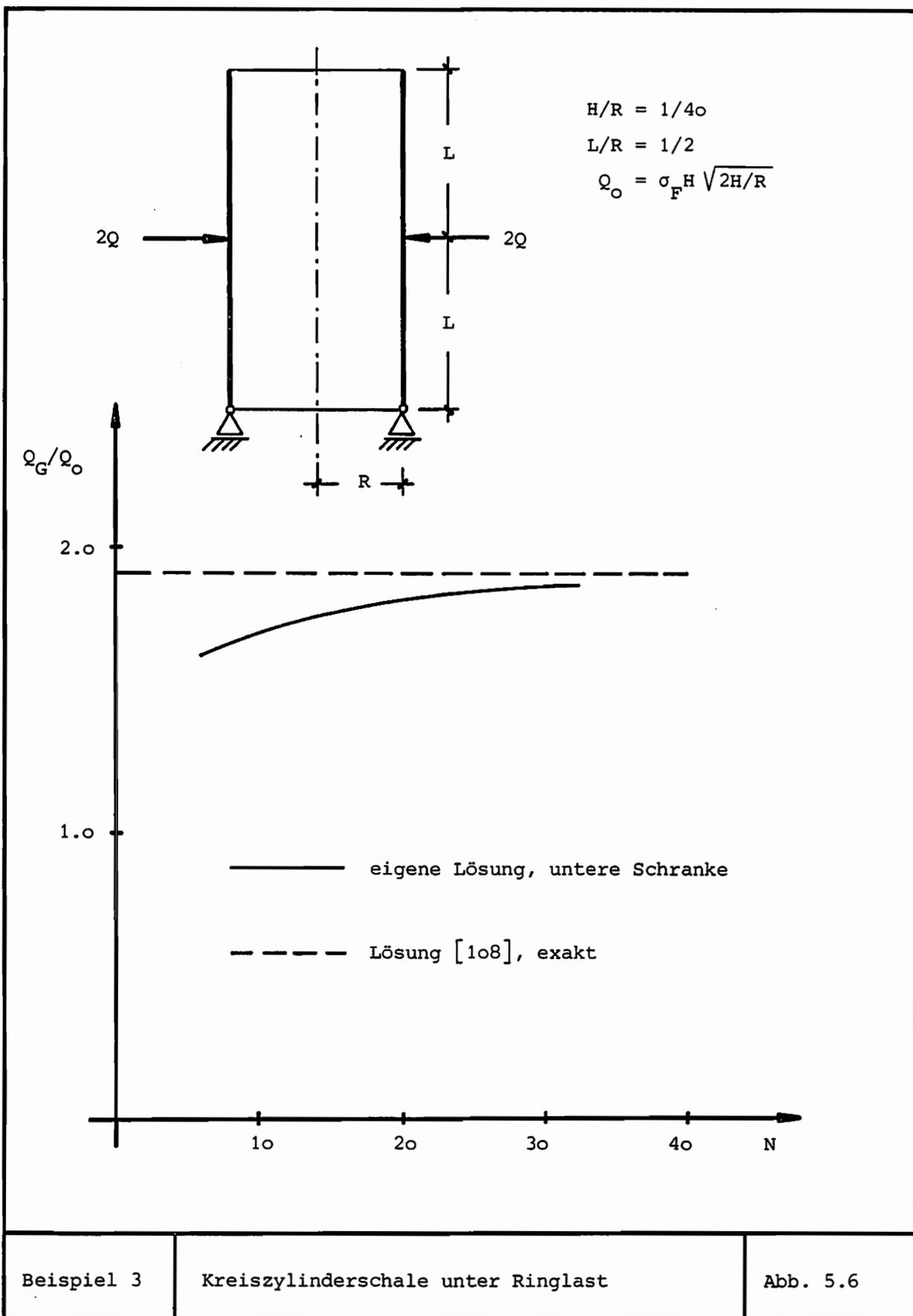
Beispiel 2

Rohr unter Innendruck und Axiallast

Abb. 5.5

### 5.2.3 Konvergenzuntersuchungen

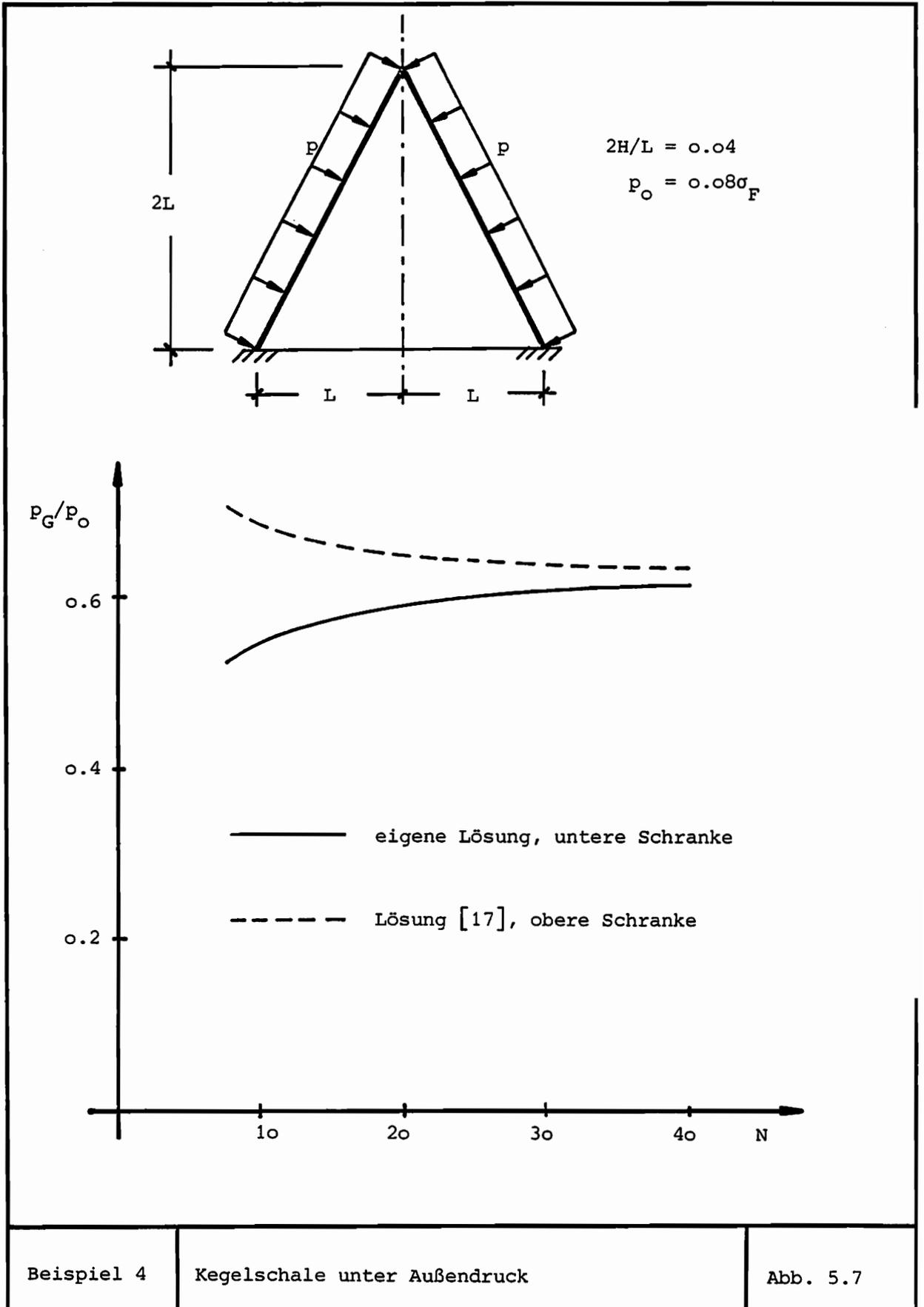
Um die Konvergenzeigenschaften der beiden im Programm implementierten Elemente zur Berechnung von Kreiszyylinder- bzw. Kegel(stumpf)schalen zu testen, haben wir jeweils ein Beispiel mit proportionaler Belastung berechnet. Die beiden Systeme sind in den Abbildungen 5.6 und 5.7 dargestellt. Im Rahmen der geometrisch linearen Theorie wurde dabei für unterschiedlich feine Diskretisierungen die plastische Grenzlast des jeweiligen Problems bestimmt. In den beiden Abbildungen sind die entsprechenden Lösungen in Abhängigkeit von der Anzahl  $N$  der Unbekannten dargestellt. In beiden Fällen, wie auch bei den jeweiligen Vergleichslösungen, wurde bei der Berechnung die Sandwich-Schalen Approximation der Grenzfließbedingung benutzt. Im Falle der Zylinderschale wurden unsere Ergebnisse einer exakten Lösung von SAWCZUK [108] gegenübergestellt, während im Falle der Kegelschale eine numerische Lösung in Form einer oberen Schranke von CHWALA und BIRON [17] zum Vergleich herangezogen wurde. Beide Elemente zeigen für das jeweilige Beispiel ein gutes Konvergenzverhalten.



Beispiel 3

Kreiszyllinderschale unter Ringlast

Abb. 5.6



Beispiel 4

Kegelschale unter Außendruck

Abb. 5.7

### 5.3 EINFLUSS GEOMETRISCH NICHTLINEARER EFFEKTE

#### 5.3.1 Kreiszyllinderschale unter variablem Innendruck

Wir betrachten eine kurze beidseitig eingespannte Kreiszyllinderschale unter Innendruck  $p$ , der um  $\pm \lambda[\%]$  schwankt (Abb. 5.8). Entsprechend der allgemeinen Vorgehensweise in Kapitel 2 kann  $p$  damit dargestellt werden als

$$p = p^R + p^r$$

$$p^R = \text{konstant}$$

$$-\lambda p^R \leq p^r \leq +\lambda p^R.$$

Bei der geometrisch nichtlinearen Berechnung des jeweiligen Referenzzustandes  $(\sigma^R(p^R), u^R(p^R))$  infolge der zeitlich konstanten Last  $p^R$  wurde darauf geachtet, daß die Verformungen (insbesondere die Rotationen) entsprechend den Forderungen (3.1.35) begrenzt waren. Die Berechnungen wurden für verschiedene Werte der Fließspannung  $\sigma_F$  durchgeführt, und zum Vergleich wurde auch die geometrisch lineare Lösung berechnet. Die Ergebnisse sind im Shakedown-Diagramm in Abb. 5.8 dargestellt, wobei nur der Versagensfall "Inkrementelles Versagen" berücksichtigt wurde. Als Grenzfließbedingung wurde in allen Fällen die Sandwich-Schalen-Approximation benutzt. Mit Hilfe der im Diagramm eingezeichneten Geraden für verschiedene Werte von  $\lambda$  kann man die jeweilige Einspiellast  $p_{SD}^R$  ablesen. In Abb. 5.9 ist diese in Abhängigkeit von  $\lambda$  dargestellt. Man erkennt, daß gegenüber der geometrisch linearen Lösung deutlich höhere Einspiellasten resultieren. Der Unterschied ist umso größer, je höher die jeweilige Fließspannung  $\sigma_F$  und je kleiner  $\lambda$  ist. Für  $\lambda < 2,5 \%$  verlassen wir in diesem Beispiel den Gültigkeitsbereich der DONNELL-MUSHTARI-VLASOV-Theorie (moderate Rotationen). Das bedeutet, daß innerhalb des Gültigkeitsbereiches dieser Theorie für  $\lambda < 2,5 \%$  kein Versagen für dieses Beispiel zu erwarten ist. Zu beachten ist ferner, daß wegen der vorgenommenen Linearisierung (siehe Kapitel 2.2) die Verformungen infolge von  $p^r$  klein sein sollen, also im allgemeinen eine Größenordnung kleiner als die Verformungen infolge  $p^R$ . Aus diesem Grunde ist für Werte von  $\lambda$  größer als

10 % Vorsicht geboten.

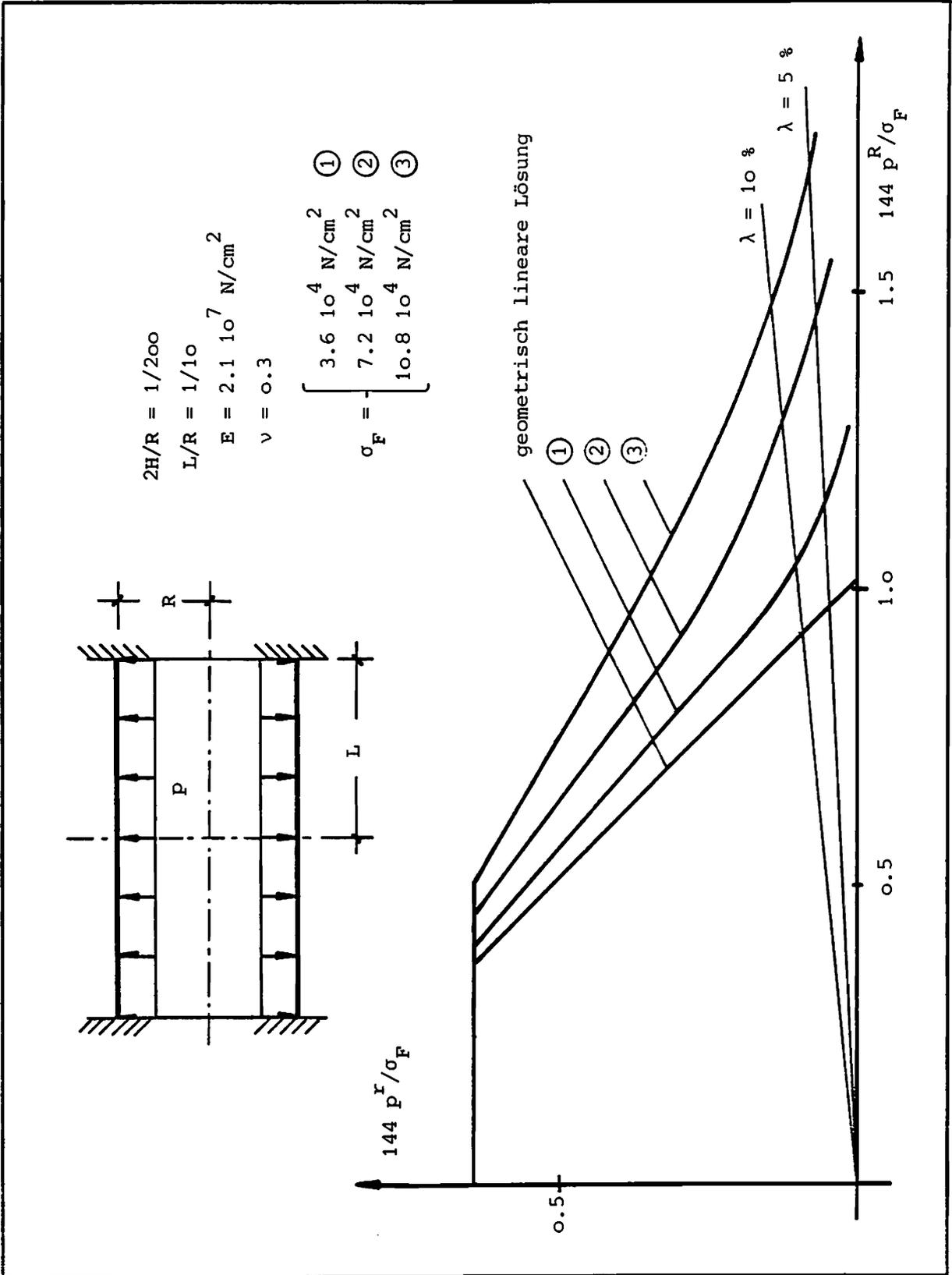
Zusätzliche Berechnungen für geänderte Verhältnisse von L/R zeigen, daß der Einfluß der nichtlinearen Effekte nur bei sehr kurzen Rohren auftritt. Er nimmt rapide ab, je länger das Rohr wird. Dies kann damit erklärt werden, daß in diesem Fall die Lasten (außer im Randbereich) nur noch in Umfangsrichtung über Membranwirkung abgetragen werden. Die Lösung hierfür kann mit Hilfe der "Kesselformel" bestimmt werden und ist ebenfalls in Abb. 5.9 dargestellt.

Eine zusätzliche Berechnung des Sicherheitsfaktors gegen Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität" zeigt, daß dieser Versagensfall nur für kleinere Werte von  $p^R$  und gleichzeitigen größeren Werten für  $\lambda$  eintritt. Die entsprechenden Grenzwerte ergeben sich wie folgt:

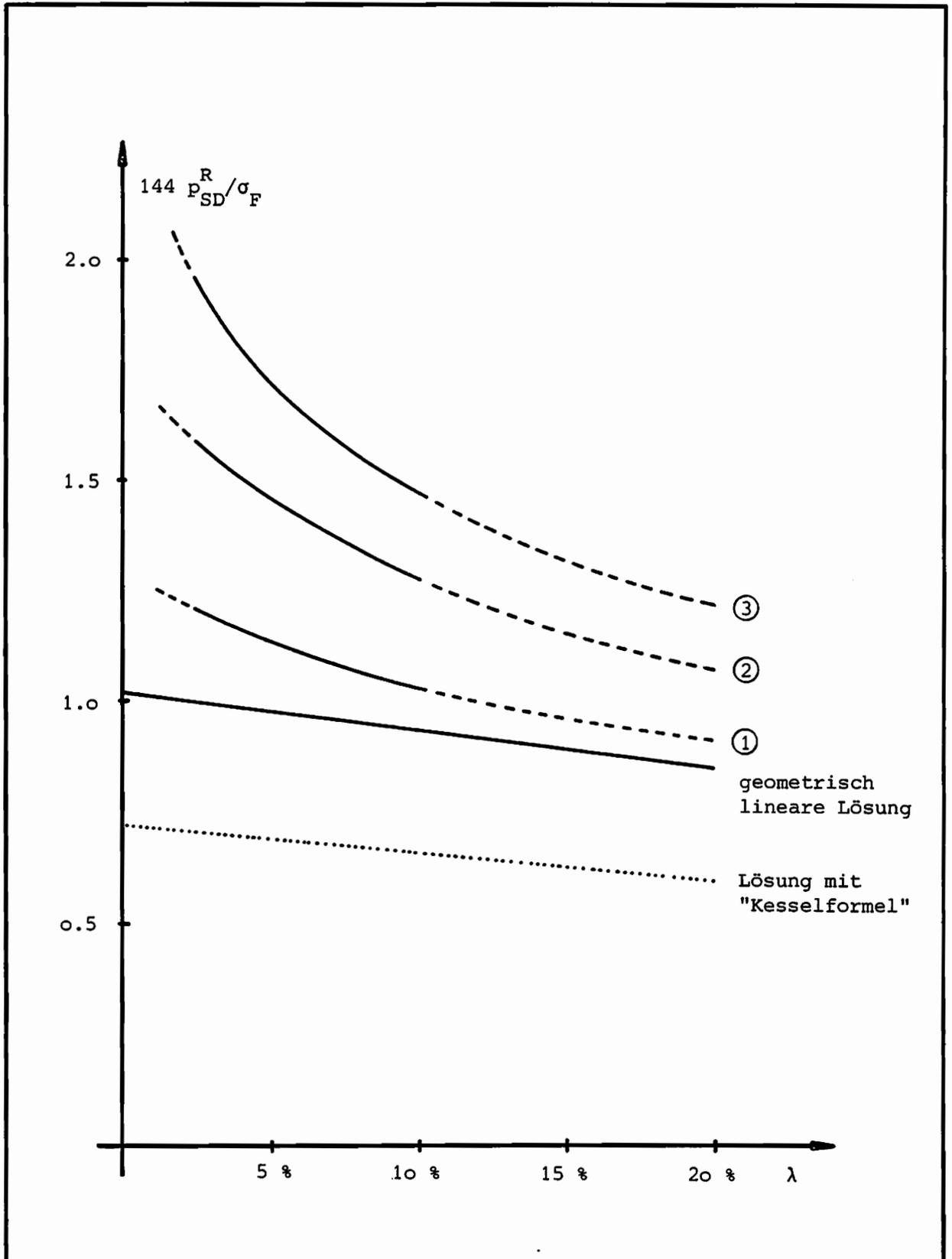
Kurven	linear	①	②	③
$144 p^R / \sigma_F$	0,57	0,62	0,69	0,78
$\lambda$ [%]	45	46	47	49

Für den Sonderfall proportionaler Belastung, d. h.  $\lambda = 0$ , existiert für dieses Beispiel eine geometrisch lineare Vergleichslösung von SAVE und MASSONNET [104], die folgende Schranken für die exakte plastische Grenzlast  $p_G^R$  angeben:

$144 p_G^R / \sigma_F$	Autor
0,94	[104], untere Schranke
1,02	eigene Lösung, untere Schranke
1,14	[104], obere Schranke



Beispiel 5	Kreiszylinderschale unter variablem Innendruck	Abb. 5.8
------------	--	----------



Beispiel 5

Kreiszyllinderschale unter variablem Innendruck

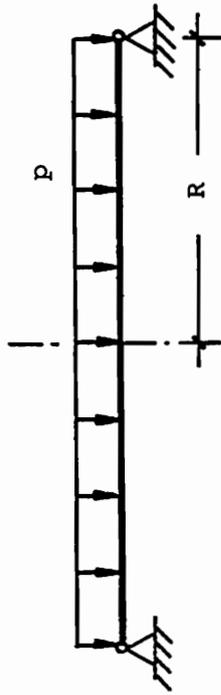
Abb. 5.9

### 5.3.2 Kreisplatte unter variabler Gleichlast

Ein Beispiel, bei dem der Einfluß der geometrisch nichtlinearen Effekte wesentlich stärker ausgeprägt ist, ist die allseitig gelenkig, aber unverschieblich gelagerte Kreisplatte (Abb. 5.10). Wir untersuchen für den gleichen Lastfall wie im vorherigen Beispiel nur den Versagensfall "Inkrementelles Versagen" und benutzen die Sandwich-Schalen-Approximation als Grenzflußbedingung. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 5.10 und 5.11 graphisch dargestellt. Aus den gleichen Gründen wie beim vorherigen Beispiel liegt hier der Gültigkeitsbereich wiederum etwa bei  $\lambda = 2,5 - 10 \%$ .

Durch Vergleich der Abb. 5.11 mit Abb. 5.9 wird ersichtlich, daß bei der Kreisplatte die Einspiellast gegenüber der geometrisch linearen Lösung wesentlich stärker zunimmt als dies bei der Kreiszylinderschale der Fall ist. Qualitativ zeigt sich jedoch in beiden Beispielen ein sehr ähnliches Verhalten. Insbesondere ergibt sich in beiden Fällen ein stabilisierender Einfluß der geometrisch nichtlinearen Effekte. Natürlich sind im allgemeinen auch Beispiele denkbar, in denen ein gegenteiliges Verhalten auftritt. Weiterhin ist im Vergleich zur jeweiligen linearen Lösung nicht allein ein quantitativer Unterschied zu erkennen. Vielmehr kann die geometrisch lineare Lösung den überproportional starken Anstieg der Einspiellast im Bereich kleiner  $\lambda$  - Werte ( $\lambda < 5 \%$ ) nicht wiedergeben.

Für den Sonderfall proportionaler Belastung ( $\lambda = 0 \%$ ) berechnete CHEN [15] im Rahmen der geometrisch linearen Theorie die exakte Lösung für dieses Beispiel zu  $p_G^R/\sigma_F = 159,68$ . Wir ermittelten als untere Schranke einen Wert von 159,43, der damit nur um 0,16 % unter der exakten Lösung liegt.

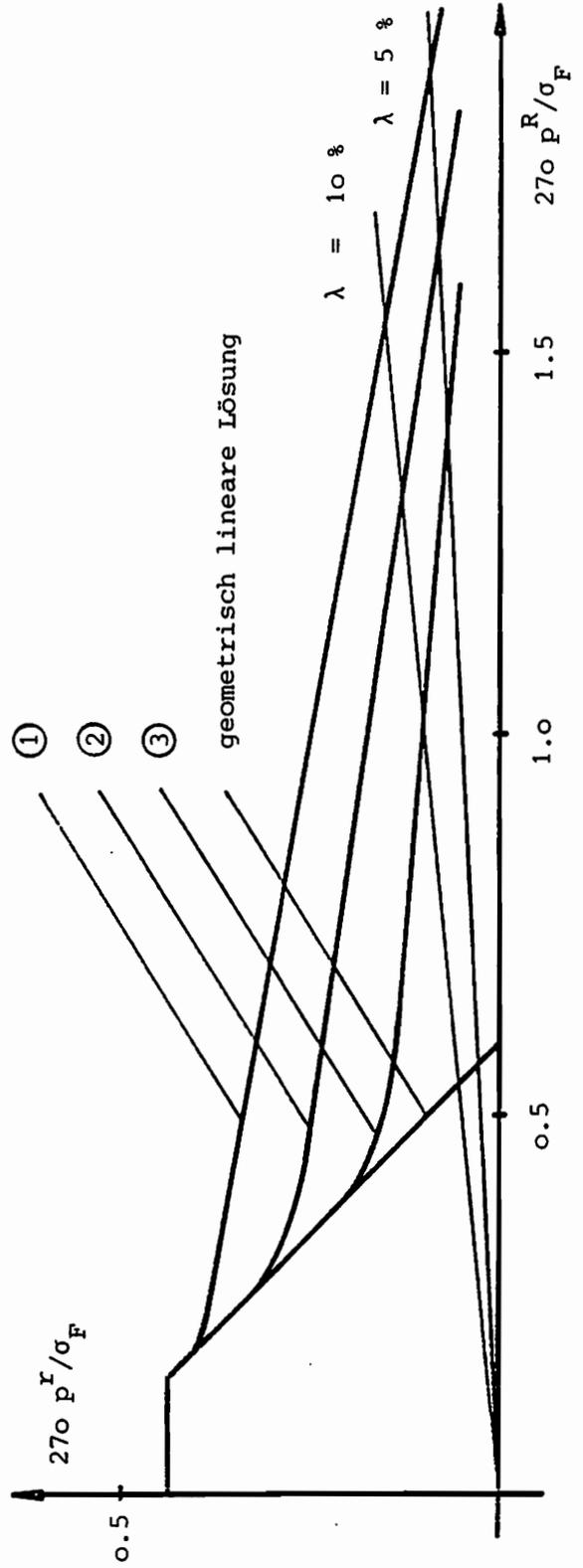


$$2H/R = 5.5/150$$

$$E = 2.06 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

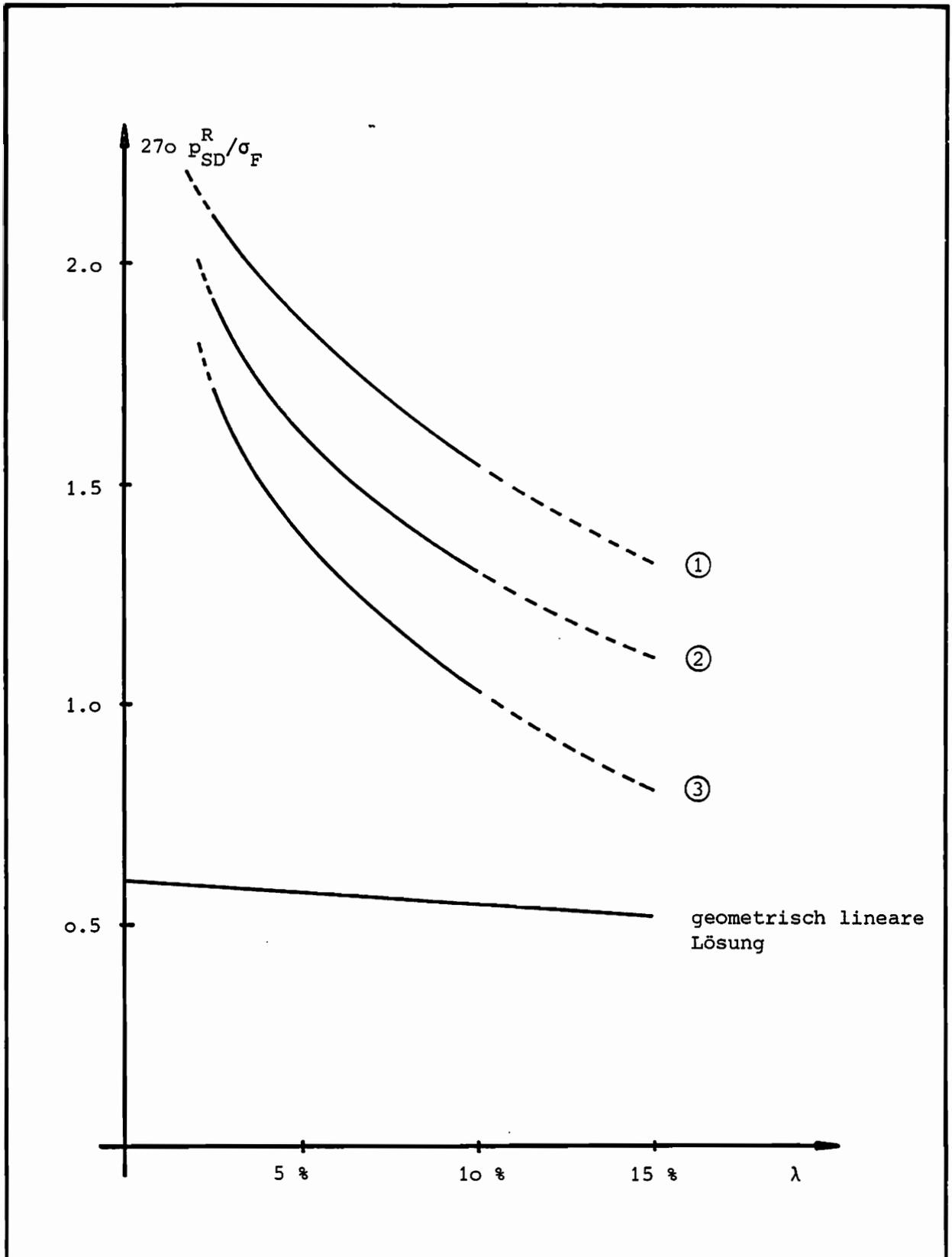
$$\sigma_F = \begin{cases} 270.0 \text{ N/mm}^2 & \textcircled{1} \\ 202.5 \text{ N/mm}^2 & \textcircled{2} \\ 135.0 \text{ N/mm}^2 & \textcircled{3} \end{cases}$$



Beispiel 6

Kreisplatte unter variabler Gleichlast

Abb. 5.10



Beispiel 6

Kreisplatte unter variabler Gleichlast

Abb. 5.11

## 5.4 EINFLUSS KOMBINierter THERMISCHER UND MECHANISCHER BELASTUNG

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Einspielverhalten von Kreis-  
zylinderschalen unter kombinierter thermischer und mechanischer Belastung.  
Probleme dieser Art treten unter anderem häufig in Kraftwerken und ver-  
fahrenstechnischen Betrieben auf.

### 5.4.1 Rohr unter Innendruck und variabler Innentemperatur

Wir betrachten das in Abb. 5.12 dargestellte Rohr unter zeitlich konstan-  
tem Innendruck  $p$  und einer ebenfalls zeitlich konstanten axialen Ringlast  
 $Q$ , deren Wert zu  $Q = pR/2$  festgelegt ist. Dieser Wert für  $Q$  entspricht der  
Größe der axialen Ringlast eines an beiden Enden geschlossenen Rohres  
unter Innendruck. Die zeitlich veränderliche Temperatur  $\theta_i$  im Innern des  
Rohres variere in den Grenzen  $\theta_a \leq \theta_i \leq \theta_i^*$ , wobei  $\theta_a$  die zeitlich kon-  
stante Außentemperatur bezeichnet. Es wird vorausgesetzt, daß die Tempera-  
tur über die Dicke des Rohres linear veränderlich ist.

Mit der Lösung dieses Problems im Rahmen der geometrisch linearen Theorie  
hat sich erstmals BREE [12] beschäftigt. Unter Vernachlässigung der  
Schnittgrößen in Axialrichtung hat er über ein einfaches Modell eines  
einachsigen Spannungszustandes eine analytische Lösung bestimmt. In  
jüngster Zeit beschäftigen sich weiterhin HYDE, SAHARI und WEBSTER [34]  
mit diesem Problem. Sie wählen ein inkrementelles Verfahren und das  
PRANDTL-REUBSche Fließgesetz mit der HUBER-MISES Fließbedingung. Zur  
Lösung benutzen sie eine Finite-Element-Diskretisierung mit Hilfe von  
axialsymmetrischen isoparametrischen Elementen. Sowohl die Lösung von BREE  
wie auch diejenige von HYDE et. al. besitzen keinen Schrankencharakter, da  
beide Verfahren nicht von den klassischen Einspieltheoremen ausgehen.  
Außerdem gelten beide Lösungen nur für zyklische Belastungsgeschichten.

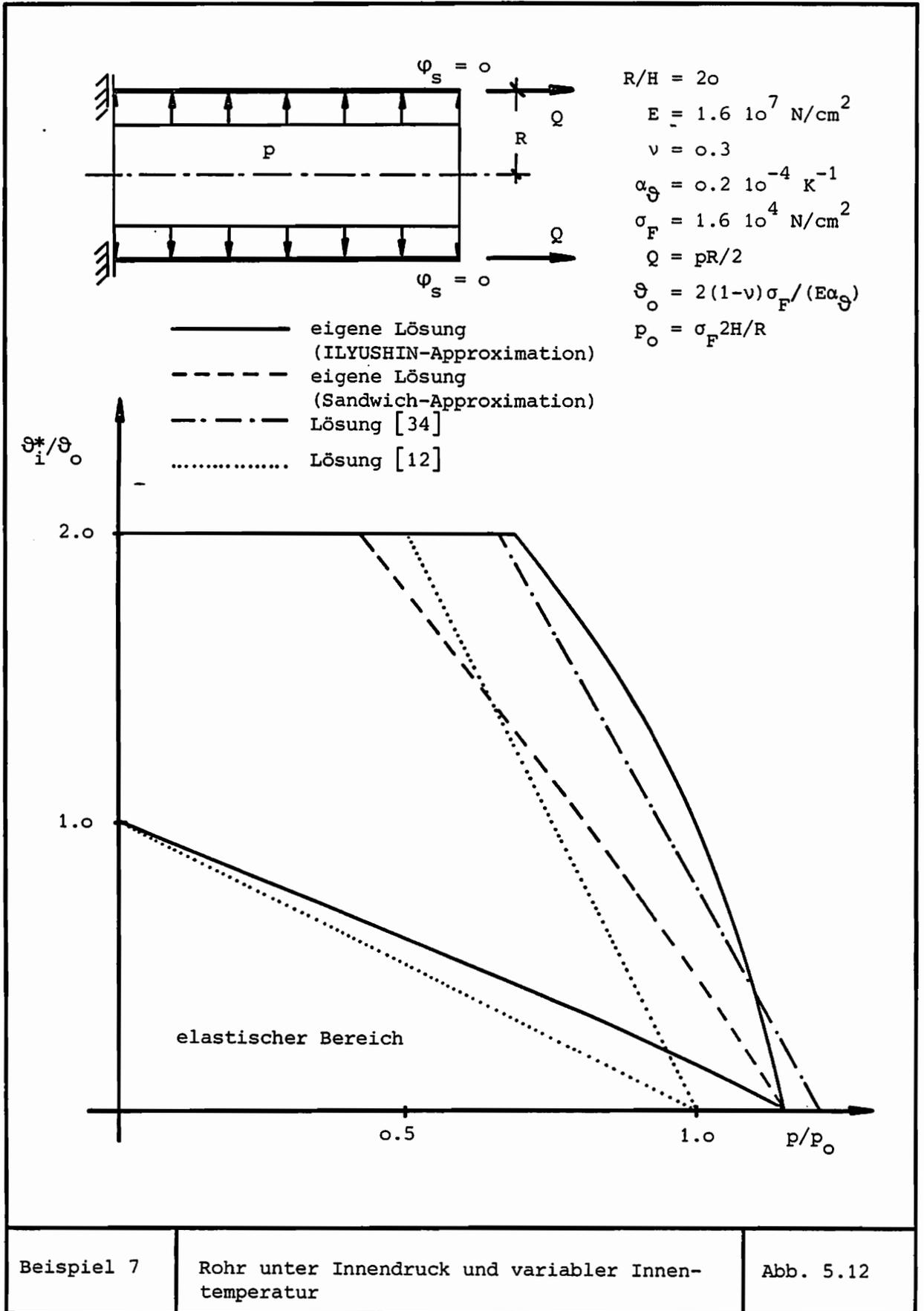
Im Gegensatz hierzu liegen unsere Lösungen gegenüber der exakten Lösung  
auf der sicheren Seite und decken alle möglichen Belastungsgeschichten  
innerhalb der gegebenen Belastungsgrenzen ab. Im Shakedown-Diagramm in  
Abb. 5.12 sind unsere Lösungen zusammen mit denjenigen von BREE und von  
HYDE et. al. dargestellt. Dabei haben wir als Grenzfließbedingung sowohl  
die ILYUSHIN-Approximation als auch die Sandwich-Schalen-Approximation  
benutzt. Man erkennt, daß die Lösung von HYDE et. al. näherungsweise mit

unserer Lösung unter Benutzung der ILYUSHIN-Approximation übereinstimmt, wohingegen die Lösung von BREE quantitativ doch größere Unterschiede zeigt. Allerdings hat die Lösung von BREE in diesem Beispiel zumindest konservativen Charakter. Qualitativ zeigen alle Lösungen dennoch ein ähnliches Verhalten. Die etwas höhere plastische Grenzlast für  $p$  im Falle  $\theta_i = 0$  von HYDE et. al. ist darauf zurückzuführen, daß diese auch den Einfluß von Radialspannungen sowie allgemein einen nichtlinearen Verlauf der Spannungen über die Dicke berücksichtigen.

Unsere Berechnungen ergeben, daß für Lasten von  $p \leq 0,6 p_0$  ( $p_0 = \sigma_F 2H/R$ ) ein nur durch die Temperaturwechsel bedingtes Versagen aufgrund "Alternierender Plastizität" eintritt, während für  $0,6 p_0 < p < 1,155 p_0$  die kombinierte thermische und mechanische Belastung zum "Inkrementellen Versagen" führt. Das Erreichen der plastischen Grenzlast von  $p = 1,155 p_0$  bei  $\theta_i = 0$  führt dagegen zum sofortigen Versagen ("instantaneous collapse") des Rohres.

Die Ergebnisse machen deutlich, daß das Auftreten wechselnder Temperaturen die plastische Grenzlast für  $p$  reduziert. In diesem Beispiel ist eine Abminderung auf bis zu 60 % derjenigen Grenzlast zu verzeichnen, die man erhält, wenn keine Temperaturwechsel berücksichtigt werden. Die dazu erforderlichen Temperaturschwankungen betragen hier lediglich maximal  $140^\circ$  K. Geht man von normalen Außentemperaturen aus, so liegen die auftretenden Temperaturen in einem Bereich, in dem ihr Einfluß auf die Materialkennwerte wie auch viskose Eigenschaften noch nicht sonderlich stark ausgeprägt sind. Eine Vernachlässigung dieser Effekte erscheint somit noch gerechtfertigt.

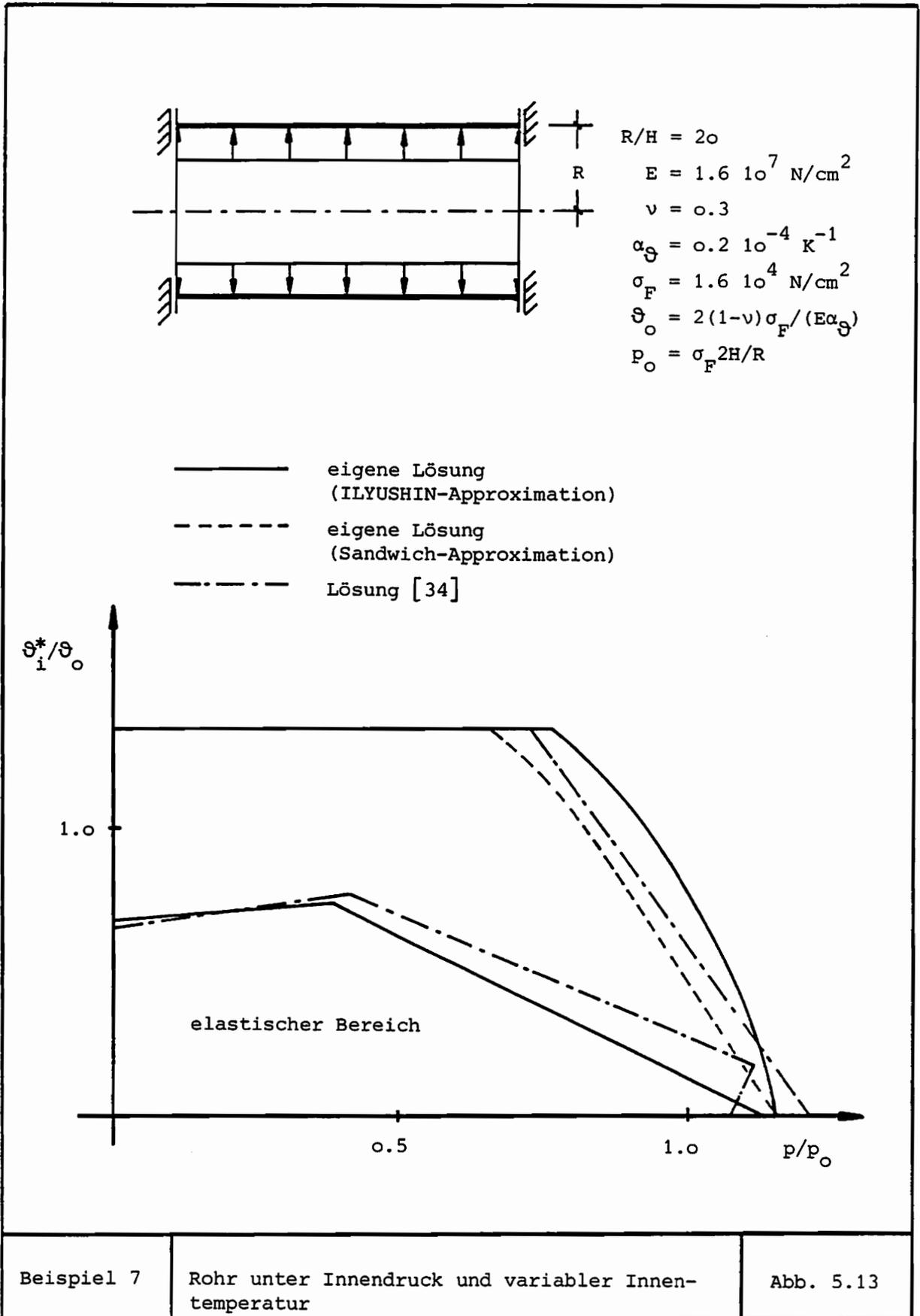
Werden die Randbedingungen derart geändert, daß die Verformungen in Axialrichtung behindert sind, so ergeben sich die in Abb. 5.13 dargestellten Ergebnisse. Qualitativ zeigt sich kein wesentlicher Unterschied zu den vorherigen Ergebnissen. Allerdings beträgt die maximal zulässige Temperaturschwankung nunmehr nur noch  $94,6^\circ$  K. Dies ist zurückzuführen auf die aus den Temperaturschwankungen resultierenden Zwängungsspannungen in Axialrichtung.



Beispiel 7

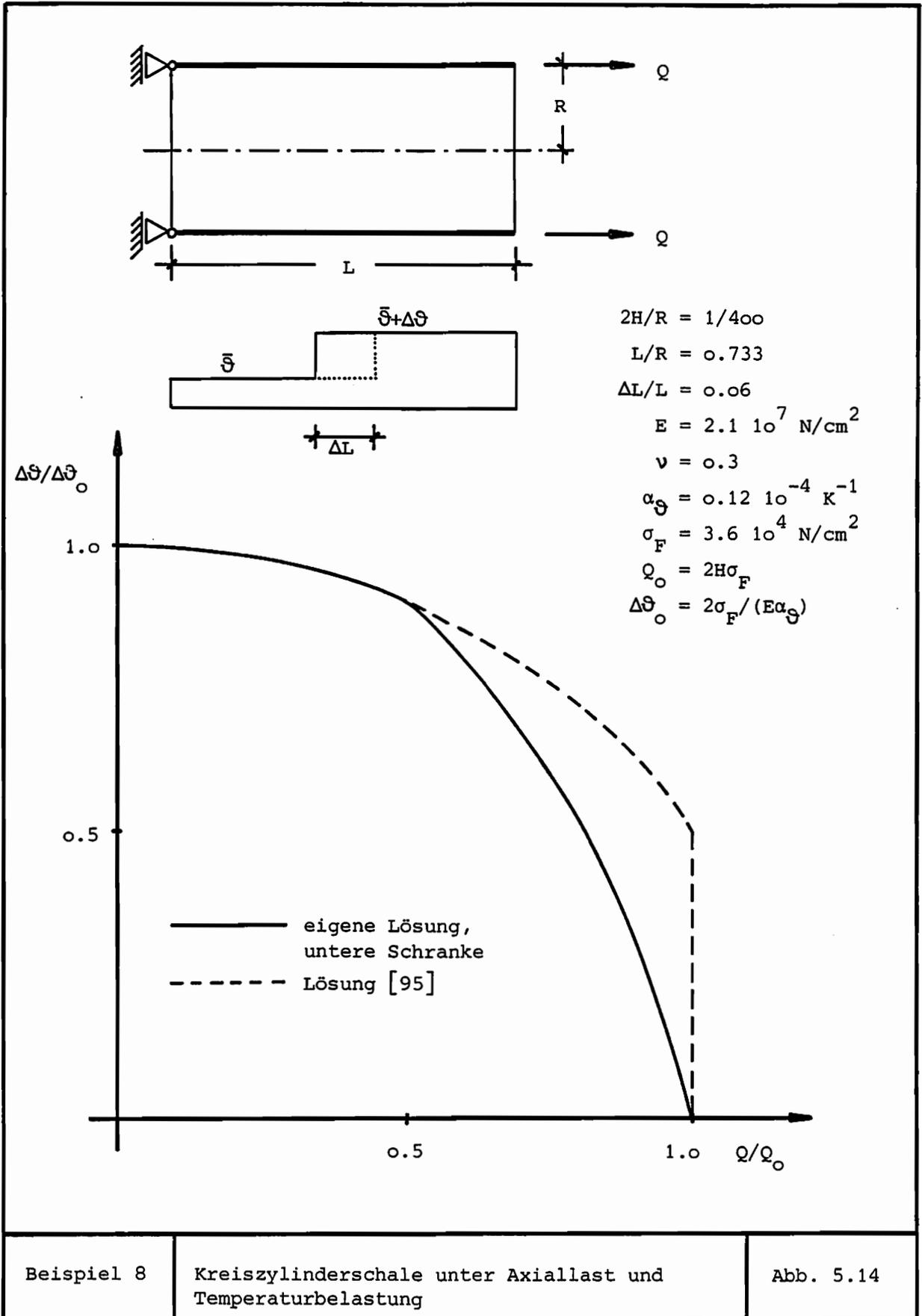
Rohr unter Innendruck und variabler Innentemperatur

Abb. 5.12



#### 5.4.2 Kreiszyllinderschale unter Axiallast und Temperaturbelastung

Während wir uns im vorherigen Beispiel mit zeitlich veränderlichen, in Axialrichtung jedoch gleichmäßig verteilten Temperaturfeldern beschäftigt haben, behandeln wir im folgenden den Fall, daß das Temperaturfeld in Axialrichtung einen Sprung von  $\bar{\theta}$  auf  $\bar{\theta} + \Delta\theta$  aufweist. Dazu betrachten wir die in Abb. 5.14 dargestellte Kreiszyllinderschale, welche außer durch die angegebene Temperaturverteilung auch noch durch eine zeitlich konstante axiale Ringlast  $Q$  belastet wird. Die Unstetigkeitsstelle im Temperaturfeld bewege sich dabei in Axialrichtung beliebig innerhalb eines Bereiches der Länge  $\Delta L$ . Es wird angenommen, daß die Temperatur konstant über die Schalendicke verteilt ist. Die Ergebnisse der geometrisch linearen Berechnung unter Benutzung der Sandwich-Schalen-Approximation der Grenzfließbedingung sind im Shakedown-Diagramm in Abb. 5.14 dargestellt. Dabei ist zum Vergleich auch eine analytische Lösung von PONTIER [95-97] eingezeichnet. Diese hat keinen Schrankencharakter, da ein inkrementelles Verfahren benutzt wurde. PONTIER's Lösung stimmt in einigen Bereichen exakt mit unserer Lösung überein, während sie in anderen Bereichen zu größeren Einspiellasten führt. Im Vergleich zum vorherigen Beispiel ergibt sich ein qualitativer Unterschied, da nunmehr für alle Werte der mechanischen Last  $Q$  mit  $0 \leq Q < 1,0 Q_0$  ( $Q_0 = 2H\sigma_F$ ) ein "Inkrementelles Versagen" eintritt. Für  $Q = 1,0 Q_0$  und  $\Delta\theta = 0$  wird die plastische Grenzlast des Systems erreicht. Die hier auftretende maximale Temperaturdifferenz beträgt  $\Delta\theta_{\max} = 285,7^\circ \text{K}$ . Abhängig von der Größe von  $\bar{\theta}$  ist in diesem Temperaturbereich schon mit einer merklichen Abnahme der Fließspannung  $\sigma_F$  um bis zu 30 % zu rechnen, so daß die ermittelten Ergebnisse ihren konservativen Charakter verlieren.



Beispiel 8

Kreiszyklinderschale unter Axiallast und Temperaturbelastung

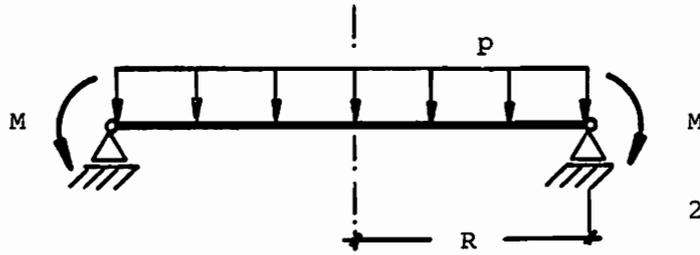
Abb. 5.14

## 5.5 EINFLUSS DER ART DES QUERSCHNITTS

### 5.5.1 Kreisplatte unter Gleichlast und Randmoment

Wir behandeln die in Abb. 5.15 dargestellte gelenkig gelagerte Kreisplatte, die durch eine gleichmäßig verteilte Flächenlast  $p$  und ein Randmoment  $M$  entlang des äußeren Randes belastet wird. Dabei variieren  $p$  und  $M$  unabhängig voneinander in den Grenzen  $0 \leq p \leq p^*$  bzw.  $0 \leq M \leq M^*$  (zweiparametrische Belastung). Als Querschnittsform wird sowohl der Vollquerschnitt als auch der Sandwich-Querschnitt behandelt, und als Grenzfließbedingung wird die Sandwich-Schalen-Approximation der HUBER - MISES Fließbedingung benutzt. Es wird eine geometrisch lineare Berechnung durchgeführt. Für dieses Problem hat KÖNIG [40] analytisch unter Benutzung der Sandwich-Schalen-Approximation der TRESKA Grenzfließbedingung die exakte Lösung bestimmt. Unter Berücksichtigung der Beziehung zwischen den beiden Fließbedingungen von HUBER-MISES und von TRESKA (siehe [104]) kann man mit Hilfe der Lösung von KÖNIG eine obere Schranke für unsere Lösung angeben. Alle 3 Lösungen sind im Shakedown-Diagramm in Abb. 5.15 dargestellt. Man erkennt, daß unsere Lösung den Schrankencharakter erfüllt.

Dieses Beispiel läßt vermuten, daß die Lösungen für den Sandwich-Querschnitt obere Schranken für die jeweiligen Lösungen für den Vollquerschnitt liefern. Für Platten, in denen keine Membrankräfte wirken, ist dies tatsächlich auch der Fall. Jedoch gilt es nicht allgemein für Flächentragwerke.



$$2H/R = 1/100$$

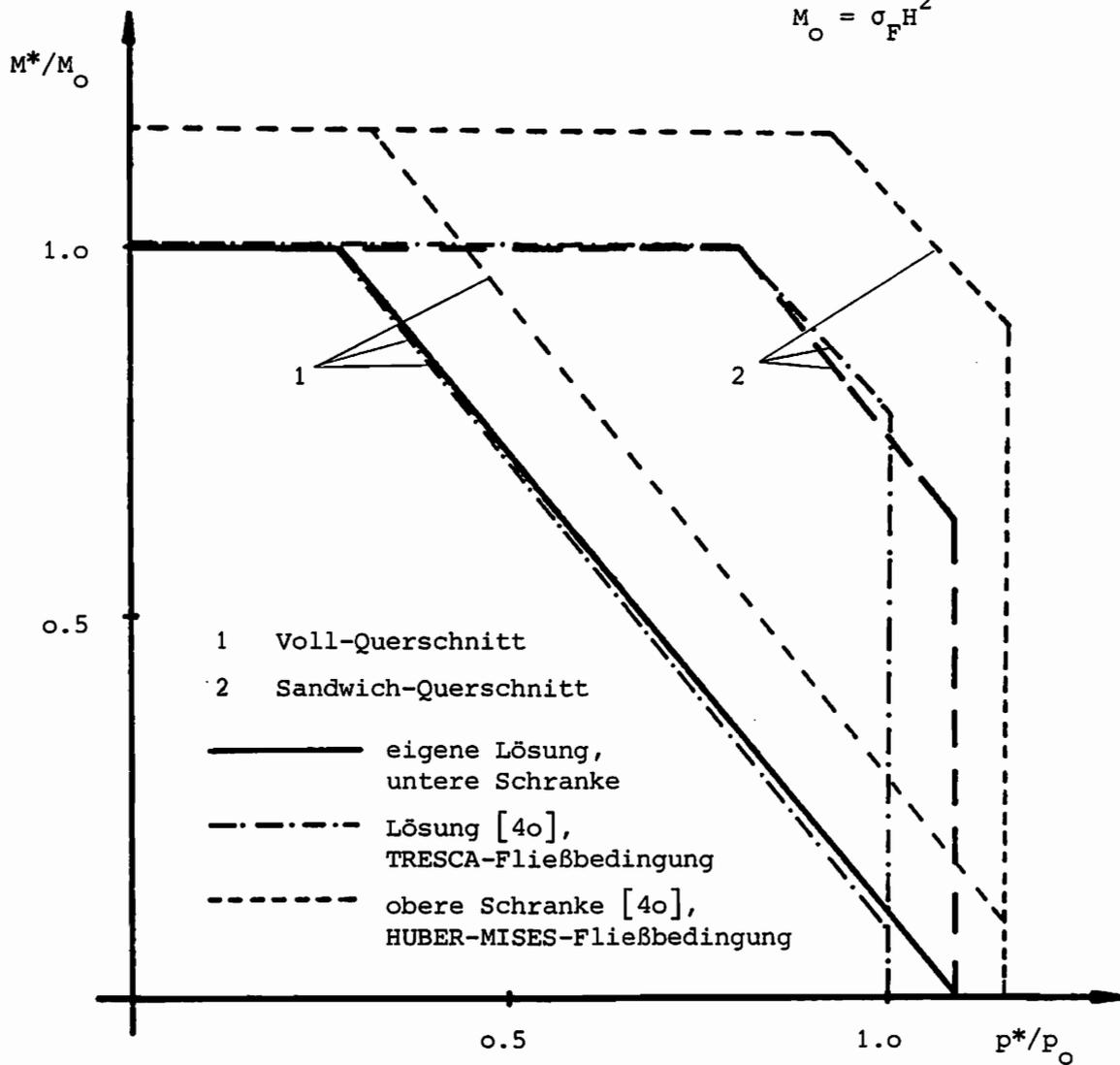
$$E = 2.1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$$

$$\nu = 1/3$$

$$\sigma_F = 3.6 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$$

$$p_0 = 6\sigma_F H^2 / R^2$$

$$M_0 = \sigma_F H^2$$



Beispiel 9

Kreisplatte unter Gleichlast und Randmoment

Abb. 5.15

## 6. SCHLUSSBEMERKUNGEN

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren zur Untersuchung des Einspielverhaltens von Flächentragwerken unter Berücksichtigung endlicher Verformungen und wechselnder Temperaturen vorgestellt. Die Leistungsfähigkeit des Verfahrens wird anhand mehrerer numerischer Beispiele demonstriert. Diese Beispiele verdeutlichen den in einigen Fällen erheblichen Unterschied zwischen variabler Belastung und proportionaler Belastung bei der Beurteilung der Sicherheit gegen Versagen, wobei sich insbesondere der Einfluß wechselnder Temperaturen zeigt. Darüberhinaus wird auch der Einfluß endlicher Verformungen deutlich, deren Berücksichtigung eine verbesserte Erfassung des globalen Strukturverhaltens ermöglicht.

Im Hinblick auf eine praxisgerechte Weiterentwicklung des Verfahrens ist in erster Linie eine genauere Modellierung des lokalen Materialverhaltens unter Einbeziehung der Materialverfestigung, temperaturabhängiger Materialkennwerte und viskoser Eigenschaften anzustreben. Weiterentwicklungen auf allgemeinere Problemstellungen wie Einspielen unter Berücksichtigung einer optimalen Formgebung ("Optimum Design") und/oder der Begrenzung der Verformungen ("Bounding Methods") sind theoretisch grundsätzlich möglich und bieten sich aus numerischer Sicht auch an, da das Verfahren ein allgemeines nichtlineares Optimierungsprogramm benutzt.

## LITERATUR

- [1] ALI M.H.; KÖNIG J.A.; MAHRENHOLTZ O.: Experimental investigations on shakedown of portal frames, Eng. Trans. 32 (1984) 349-359.
- [2] ALWIS W.A.M.; GRUNDY P.: Shakedown analysis of plates, Int. J. Mech. Sci. 27 (1985) 71-82.
- [3] ALWIS W.A.M.; GRUNDY P.: On the carrying capacity of rectangular plates under moving loads, Int. J. Mech. Sci. 27 (1985) 187-197.
- [4] AIKOČIUNAS J.; BORKOWSKI A.; KÖNIG J.A.: Improved bounds for displacements at shakedown, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 28 (1981) 365-376.
- [5] BASAR Y.: Eine geometrisch nichtlineare Schalentheorie, Konstruktiver Ingenieurbau-Berichte Nr. 38/39, Ruhr-Universität Bochum 1981.
- [6] BASAR Y.; KRÄTZIG W.B.: Mechanik der Flächentragwerke, Braunschweig: Vieweg 1985.
- [7] BELYTSCHKO T.: Plane stress shakedown analysis by finite elements, Int. J. Mech. Sci. 14 (1972) 619-625.
- [8] BEST M.J.: Fundamentals of non-linear programming, In: Cohn M.Z.; Maier G. (eds.) Engineering Plasticity by Mathematical Programming, 449-446 Pergamon Press 1979.
- [9] BETTEN J.: Elastizitäts- und Plastizitätslehre, Braunschweig: Vieweg 1985.
- [10] BORKOWSKI A.; KLEIBER M.: On a numerical approach to shakedown analysis of structures, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 22 (1980) 101-119.
- [11] BREBBIA C.A.: Finite Element Systems; A Handbook, Berlin: Springer-Verlag 1982.

- [12] BREE J.: Elastic-plastic behaviour of thin tubes subjected to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast-nuclear-reactor fuel elements, *Journal of Strain Analysis* 2 (1967) 226-238.
- [13] CASEY J.: Approximate kinematical relations in plasticity, *Int. J. Solids Structures* 21 (1985) 671-682.
- [14] CERADINI G.: Dynamic shakedown in elastic-plastic bodies, *J. Engng. Mech. Div.* 106 (1980) 481-498.
- [15] CHEN Y.Z.: A numerical procedure for evaluating the plastic limit load of a circular plate using Mises yield criterion. *Computers & Structures* 24 (1986) 821-822.
- [16] CHROSCIELEWSKI J.; NOLTE L.P.: Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY, *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik* 48, Ruhr-Universität Bochum 1985.
- [17] CHWALA U.S.; BIRON A.: Limit analysis of shells of revolution of arbitrary shape under pressure. *Rapport N° 1775, Labor. de Rech. et d'Essais de Matériaux, Ecole Polytechnique de Montréal* 1969.
- [18] CORRADI L.; ZAVELANI A.: A linear programming approach to shakedown analysis of structures, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 3 (1974) 37-53.
- [19] DE DONATO O.: Second shakedown theorem allowing for cycles of both loads and temperature, *Ist. Lombardo Scienza Lettere (A)* 104 (1970) 265-277.
- [20] DONNELL L.H.: Stability of thin walled tubes under torsion, *NACA Technical Report No. 479* 1933.
- [21] DOROSZ S.: An improved bound to maximum deflections of elastic-plastic structures at shakedown, *J. Struct. Mech.* 6 (1978)

267-287.

- [22] DRUCKER D.C.: A more fundamental approach to plastic stress-strain relations, Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 487-491, Chicago: ASME 1951.
- [23] DRUCKER D.C.; PRAGER W.; GREENBERG H.J.: Extended limit design theorems for continuous media, Quart. Appl. Math. 9 (1951) 381-387.
- [24] DUSZEK M.K.: On stability of rigid-plastic structures at the yield-point load, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Techn. 21 (1973) 79-87.
- [25] DUSZEK M.K.: Foundations of the nonlinear plastic shell theory, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 31, Ruhr-Universität Bochum 1982.
- [26] ELIAS Z.M.: Duality in finite element methods, J. of Engng. Mech. Div., ASCE, 94 (1968) 931-946.
- [27] ERBATUR F.: Computer shakedown analysis of planar structures, Comp. & Struct. 18 (1984) 1121-1126.
- [28] FRAELJS DE VEUBEKE B.: Displacement and equilibrium models in the finite element method, In: Zienkiewicz O.C.; Holister G.S. (eds.) Stress-Analysis 145-197, John Wiley and Sons 1965.
- [29] GOKHFELD D.A.; CHERNIAVSKY O.F.: Methods of solving problems in the shakedown theory of continua, In: Sawczuk A. (ed.) Foundations of Plasticity (Proceedings) 435-450, Warsaw 1972.
- [30] GOKHFELD D.A.; CHERNIAVSKY O.F.: Limit analysis of structures at thermal cycling, Alphen aan den Rijn: Sijthoff und Noordhoff 1980.
- [31] GROSS-WEEGE J.; WEICHERT D.: Zur numerischen Untersuchung des Einspielverhaltens elasto-plastischer Scheiben unter mechanischen und thermischen Wechsellasten, Ing.-Archiv 57 (1987) 297-306.

- [32] GRUNDY P.: The application of shakedown theory to the design of steel structures, In: L.J. Morris (ed.) Instability and plastic collapse of steel structures, 184-194 London: Granada 1983.
- [33] GUO ZHONG-HENG: The unified theory of variational principles in non-linear elasticity, Arch. Mech. 32 (1980) 577-596.
- [34] HYDE T.H.; SAHARI B.B.; WEBSTER J.J.: The effect of axial loading and axial restraint on the thermal ratchetting of thin tubes, Int. J. Mech. Sci. 27 (1985) 679-692.
- [35] ILYUSHIN A.A.: Plasticité, Paris: Eyrolles 1956 (Französ. Übersetzung des russ. Originalwerks, Moskau 1948).
- [36] IVANOV G.V.: Approximation of the interaction between the membrane forces and moments at the Mises yield condition (in Russisch), Meh. Tverd. Tela 6 (1968) 74-75.
- [37] KLEIBER M.; KÖNIG J.A.; SAWCZUK A.: Studies on plastic structures: stability, anisotropic hardening, cyclic loads, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 33 (1982) 487-556.
- [38] KLEIBER M.; KÖNIG J.A.: Incremental shakedown analysis in the case of thermal effects, Int. J. Num. Meth. Engng. 20 (1984) 1567-1573.
- [39] KÖNIG J.A.: Theory of shakedown of elastic-plastic structures, Arch. Mech. Stos. 18 (1966) 227-238.
- [40] KÖNIG J.A.: Shakedown theory of plates, Arch. Mech. Stos. 21 (1969) 623-637.
- [41] KÖNIG J.A.: A shakedown theorem for temperature dependent elastic moduli, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Tech. 17 (1969) 161-165.
- [42] KÖNIG J.A.: A method of shakedown analysis of frames and arches, Int. J. Solids Structures 7 (1971) 327-344.

- [43] KÖNIG J.A.; KLEIBER M.: On a new method of shakedown analysis, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Tech. 26 (1978) 165-171.
- [44] KÖNIG J.A.: On upper bounds to shakedown loads, ZAMM 59 (1979) 349-354.
- [45] KÖNIG J.A.: On stability of the incremental collapse process, Arch. Inz. Lad. 26 (1980) 219-229.
- [46] KÖNIG J.A.; MAIER G.: Shakedown analysis of elastic-plastic structures: A review of recent developments, Nucl. Eng. Design 6 (1981) 81-95.
- [47] KÖNIG J.A.: Shakedown analysis in structural design, In: Mahrenholtz O.; Sawczuk A. (eds.) Mechanics of inelastic media and structures. 133-142, Warschau 1982.
- [48] KÖNIG J.A.: Shakedown criteria in the case of loading and temperature variations, J. de Mécan. Théor. et Appl. 21 (1982) (special issue) 99-108.
- [49] KÖNIG J.A.: On some recent developments in the shakedown theory, Advances in Mechanics 5 (1982) 237-258.
- [50] KÖNIG J.A.: Stability of the incremental collapse, In: Inelastic Structures under Variable Loads; Proceedings Euromech Colloquium 174, Palermo 1983, 329-344.
- [51] KÖNIG J.A.: Shakedown of elastic-plastic structures, Amsterdam: Elsevier 1987.
- [52] KOITER W.T.: General theorems for elastic-plastic solids, In: Sneddon I.N.; Hill R. (eds.) Progress in Solid Mechanics, 165-221, Amsterdam: North-Holland 1960.
- [53] KOITER W.T.: On the nonlinear theory of thin shells, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., Ser. B 69 (1966) 1-54.

- [54] KÜNZI H.P.; KRELLE W.; VON RANDOW R.: Nichtlineare Programmierung, Berlin: Springer-Verlag 1979.
- [55] LEE E.H.: Elastic-plastic deformations at finite strains, J. Appl. Mech. 36 (1969) 1-6.
- [56] LEERS K.; KLIE W.; KÖNIG J.A.; MAHRENHOLTZ O.: Experimental investigations on shakedown of tubes, In: Sawczuk A.; Bianchi G. (eds.) Plasticity Today (Proceedings) 259-275, London: Elsevier 1985.
- [57] LOVE A.E.H.: Mathematical theory of elasticity, 4th edition, Cambridge University Press 1927.
- [58] MAHRENHOLTZ O.; LEERS K.; KÖNIG J.A.: Shakedown of Tubes: A theoretical analysis and experimental investigation, In: Reid S.R. (ed.) Metal Forming and Impact Mechanics, 155-172, Oxford: Pergamon Press 1985.
- [59] MAIER G.: Shakedown theory in perfect elasto-plasticity with associated and non-associated flow-laws, Meccanica 6 (1969) 250-260.
- [60] MAIER G.: A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects, In: Sawczuk A. (ed.) Foundations of Plasticity (Proceedings), 417-433, Warsaw 1972.
- [61] MAIER G.: Shakedown analysis, In: Cohn M.Z.; Maier G. (eds.) Engineering Plasticity by Mathematical Programming 107-134, New York: Pergamon Press 1979.
- [62] MAIER G.; MUNRO J.: Mathematical Programming Applications to Engineering Plastic Analysis, Appl. Mech. Rev. 35 (1982) 1631-1643.
- [63] MAIER G.; LLOYD SMITH D.: Update to "Mathematical Programming Applications to Engineering Plastic Analysis", In: C.R. Steele; G.S. Springer (eds.) Applied Mechanics Update 1986, ASME
- [64] MAKOWSKI J.; NOLTE L.-P.: Simple equations in terms of displacements

- for finite axisymmetric deflections of shells of revolution, Int. J. Non-Linear Mech. 22 (1987) 1-13,
- [65] MANDEL J.: Adaptation d'une structure plastique ecrouissable et approximations, Mech. Res. Comm. 3 (1976) 483-488.
- [66] MARTIN J.B.: Plasticity: Fundamentals and General Results, Cambridge: The MIT Press 1975.
- [67] MELAN E.: Theorie statisch unbestimmter Tragwerke aus ideal-plastischem Baustoff, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Math. Naturwiss. Kl. Abt. 2 A, 145 (1938) 195-218.
- [68] MELAN E.: Der Spannungszustand eines Mises-Henky'schen Kontinuums bei veränderlicher Belastung, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa, 147 (1938) 73-87.
- [69] MORELLE P.; NGUYEN DANG HUNG: Etude numérique de l'adaptation plastique des plaques et des coques de révolution par les éléments finis d'équilibre, J. de Mécan. Théor. et Appl. 2 (1983) 567-599.
- [70] MORELLE P.: Structural shakedown analysis by dual finite-element formulations, Eng. Struct. 6 (1984) 70-79.
- [71] MORELLE P.: Numerical shakedown analysis of axisymmetric sandwich shells: an upper bound formulation, Int. J. Num. Meth. Engng. 23 (1986) 2071-2088.
- [72] MORELLE P.; FONDER G.: Shakedown and limit analysis of shells - a variational and numerical approach, In: De Roeck G.; Quiroga A.S. (eds.) Shell and Spatial Structures: Computational Aspects, Lecture Notes in Engineering 26, 381-405, Springer-Verlag 1987.
- [73] MÜLLER-HOEPPE N.; PAULUN J.; STEIN E.: Einspiellasten ebener Stabtragwerke unter Normalkrafteinfluß, Bauingenieur 61 (1986) 23-26.
- [74] MUSHTARI K.M.: Einige Verallgemeinerungen der Theorie dünner Schalen

(in Russisch) Istvestia Fiz.-Mat. obsh. pri Kazanskam Universitete 11  
(1938) Serie 8.

- [75] NGUYEN DANG HUNG; KÖNIG J.A.: A finite element formulation for shakedown problems using a yield criterion of the mean, *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.* 8 (1976) 179-192.
- [76] NGUYEN DANG HUNG; PALGEN L.: Shakedown analysis by displacement method and equilibrium finite elements, *Proc. SMIRT-5, L3/3, Berlin* 1979.
- [77] NGUYEN DANG HUNG; MORELLE P.: Numerical shakedown analysis of plates and shells of revolution, *Proceedings of the 3rd world congress and exhibition on FEM's, Beverly Hills, 1981.*
- [78] NGUYEN DANG HUNG: CEPAO - an automatic program for rigid-plastic analysis and optimization of frame structures, *Eng. Struct.* 6 (1984) 33-51.
- [79] NGUYEN QUOC SON; GARY G.: Interaction buckling-progressive deformation, *Nucl. Eng. Design* 75 (1982) 235-243.
- [80] NGUYEN QUOC SON: On the interaction buckling-progressive deformation, *In: Inelastic Structures under Variable Loads; Proceedings Euromech Colloquium 174, Palermo 1983, 345-355.*
- [81] NGUYEN QUOC SON; GARY G.: Flambage par deformations plastiques cumulées sous charge cyclique additionnelle, *J. de Mécan. théor. et appl.* 2 (1983) 351-373.
- [82] NOLTE L.P.; STUMPF H.: Energy-consistent large rotation shell theories in lagrangean description, *Mech. Res. Comm.* 10 (1983) 213-221.
- [83] NOLTE L.P.: Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen, *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik* 39,

Ruhr-Universität Bochum 1983.

- [84] NOLTE L.P.; CHROSCIELEWSKI J.: Large rotation elastic-plastic analysis of flexible shells, In: Taylor C.; Owen D.R.J.; Hinton E.; Damjanic F.B. (eds.) Numerical Methods for Non-Linear Problems, Vol. 3, Pineridge Press 1986.
- [85] NOOR A.K.: Books and monographs on finite element technology, Finite Elements in Analysis and Design 1 (1985) 101-111.
- [86] PALMER A.C.: A limit theorem for materials with non-associated flow-laws, J. de. Mécan. 5 (1966) 217-222.
- [87] PIAN T.H.H.: Formulations of finite element methods for solid continua, In: Gallagher R.H.; Yamoda Y.; Oden J.T. (eds.) Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design, 49-83 The University of Alabama Press 1971.
- [88] PIERRE D.A.; LOWE M.J.: Mathematical programming via augmented Lagrangians, London: Addison-Wesley 1975.
- [89] PIETRASZKIEWICZ W.: Introduction to the nonlinear theory of shells, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 10, Ruhr-Universität Bochum 1977.
- [90] PIETRASZKIEWICZ W.: Finite rotations in the nonlinear theory of thin shells, In: Olszak W. (ed.) Thin Shell Theory, New Trends and Applications, 155-208, Wien: Springer-Verlag 1980.
- [91] PIETRASZKIEWICZ W.; SZWABOWICZ M.L.: Entirely lagrangian nonlinear theory of thin shells, Arch. Mech. 33 (1981) 273-288.
- [92] POLIZZOTTO C.: A unified treatment of shakedown theory and related bounding techniques, SM Archives 7 (1982) 19-75.
- [93] PONTER A.R.S.: An upper bound on the small displacements of elastic-plastic structures, J. Appl. Mech. 39 (1972) 959-963.

- [94] **PONTER A.R.S.:** A general shakedown theorem for elastic-plastic bodies with workhardening, Proc. SMIRT-3, L5/2, London 1975.
- [95] **PONTER A.R.S.; COCKS A.C.F.:** The incremental strain growth of elastic-plastic bodies subjected to high levels of cyclic thermal loading, J. of Applied Mechanics 51 (1984) 470-474.
- [96] **PONTER A.R.S.; KARADENIZ S.:** An extended shakedown theory for structures that suffer cyclic thermal loading; Part 1: Theory; Part 2: Applications, J. of Applied Mechanics 52 (1985) 877-889.
- [97] **PONTER A.R.S.; CARTER K.F.; KARADENIZ S.:** The effects of thermal loading on the deformation of shell structures, In: Bevilacqua L.; Feijóo R.; Valid R. (eds.) Inelastic Behaviour of Plates and Shells, Berlin: Springer-Verlag 1986.
- [98] **PRAGER W.:** Probleme der Plastizitätstheorie, Basel: Birkhäuser 1955.
- [99] **PRAGER W.:** Shakedown in elastic-plastic media subjected to cycles of load and temperature, Proc. Symp. Plasticita nella Scienza delle costruzioni, Bologna 1956, 239-244.
- [100] **PRAGER W.:** An Introduction to Plasticity, Reading/London: Addison-Wesley 1959.
- [101] **ROBINSON M.:** A comparison of yield surfaces for thin shells, Int. J. Mech. Sci. 13 (1971) 345-354.
- [102] **RONCA P.; COHN M.Z.:** Shakedown analysis of reinforced concrete arch bridges, J. de Mécanique appliquée 4 (1980) 367-384.
- [103] **SANDERS J.L.:** Nonlinear theories for thin shells, Quart. Appl. Math. 21 (1963) 21-36.
- [104] **SAVE M.A.; MASSONNET C.E.:** Plastic Analysis and Design of Plates, Shells and Disks, Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1972.

- [105] SAWCZUK A.: On incremental collapse of shells under cyclic loading, In: Niordson F.I. (ed.) Theory of Thin Shells, 328-340 Berlin: Springer-Verlag 1969.
- [106] SAWCZUK A.: Evaluation of upper bounds to shakedown loads for shells, J. Mech. Phys. Solids 17 (1969) 291-301.
- [107] SAWCZUK A.: Shakedown analysis of elastic-plastic structures, Nucl. Eng. Design 28 (1974) 121-136.
- [108] SAWCZUK A.: On plastic analysis of shells, In: Koiter W.T.; Mikhailov G.K. (eds.) Theory of Shells, 27-63, North-Holland Publishing Company 1980.
- [109] SAWCZUK A.: On plastic shell theories at large strains and displacements, Int. J. Mech. Sci. 24 (1982) 231-244.
- [110] SCHMIDT R.: Variationsprinzip für geometrisch nichtlineare Schalentheorien bei Rotationen mittlerer Größenordnung, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum 1980.
- [111] SIEMASZKO A.; KÖNIG J.A.: Analysis of stability of incremental collapse of skeletal structures, J. Struct. Mech. 13 (1985) 301-321.
- [112] STIEFEL E.: Note on Jordan elimination, linear programming and Tchebycheff approximation, Numer. Math. 2 (1960) 1-17.
- [113] STUMPF H.: Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 34, Ruhr-Universität Bochum 1982.
- [114] STUMPF H.: General concept of the analysis of thin elastic shells, ZAMM 66 (1986) 337-350.
- [115] TIN LOI F.: Shakedown analysis of curved beams, J. Struct. Mech. 12 (1984) 319-333.

- [116] TIN LOI F.: Shakedown analysis of nonsandwich structures, J. Struct. Mech. 12 (1984) 303-317.
- [117] VLASOV V.Z.: General theory of shells and its applications in engineering, NASA Technical Translation TTF-99, Washington 1964.
- [118] WASHIZU K.: Variational Methods in Elasticity and plasticity, 3rd edition, Oxford: Pergamon Press 1982.
- [119] WEICHERT D.: Shakedown at finite displacements; a note on Melan's theorem, Mech. Res. Comm. 11 (1983) 121-127.
- [120] WEICHERT D.: The initial boundary-value problem for geometrically nonlinear elastic-plastic shells, Eng. Fract. Mech. 21 (1985) 799-806.
- [121] WEICHERT D.: On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic-plastic structures, Int. J. Plasticity 2 (1986) 135-148.
- [122] WEICHERT D.: Elastic-plastic structures under variable loads at small strains and moderate rotations, Proc. Euromech Colloquium 197, In: Lecture Notes in Engineering 19, 343-356, Berlin: Springer-Verlag 1986.
- [123] WEICHERT D.: Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 53, Ruhr-Universität Bochum 1987.
- [124] WEICHERT D.; GROSS-WEEGE J.: The numerical assessment of elastic-plastic sheets under variable mechanical and thermal loads using a simplified two-surface yield-condition, erscheint im Int. J. Mech. Sci.
- [125] WEICHERT D.: Shakedown of shell-like structures allowing for certain geometrical nonlinearities, erscheint im Arch. of Mech.

- [126] ZARKA J.; CASIER J.: Cyclic loading on an elastic plastic structure: practical rules, Laboratoire de Mecanique des Solides, Ecole Polytechnique E.N.S. des Mines de Paris, 1977.

## ANHANG A

### ZUR NUMERISCHEN LÖSUNG DES NICHTLINEAREN OPTIMIERUNGSPROBLEMS

Im Rahmen dieser Arbeit lösen wir das Optimierungsproblem (4.2.39) numerisch mit Hilfe des von PIERRE und LOWE [88] entwickelten nichtlinearen Optimierungsprogramms LPNLP, welches wir unseren speziellen Bedürfnissen entsprechend angepaßt und erweitert haben. Im folgenden soll kurz die diesem Programm zugrundeliegende Lösungsstrategie erläutert werden. Dazu betrachten wir das Optimierungsproblem

$$f^* = \max_x f(x) \quad \text{mit } x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad (\text{A-1})$$

unter den Nebenbedingungen

$$g_j(x) \leq 0, \quad j=1,2,\dots,m, \quad (\text{A-2})$$

wobei die  $m+1$  Funktionen  $f$  und  $g_j$  im allgemeinen Fall nichtlineare Funktionen in  $x$  darstellen. Im weiteren setzen wir voraus, daß diese Funktionen stetig differenzierbar sind. Die Funktion  $f(x)$  wird Zielfunktion genannt, während die Nebenbedingungen (A-2) auch als Restriktionen bezeichnet werden. Ein Punkt  $x$ , der den Nebenbedingungen genügt, heißt zulässiger Punkt. Die Menge  $Z$  aller zulässigen Punkte mit

$$Z = \{x \mid g_i(x) \leq 0 \text{ für alle } i=1,2,\dots,m\} \quad (\text{A-3})$$

heißt zulässiger Bereich. Eine Nebenbedingung ist aktiv in  $x$  für  $g_i(x) = 0$ . Ein zulässiger Punkt  $x^*$ , der für  $f(x^*)$  das Maximum über  $Z$  liefert, heißt Lösungspunkt mit  $f(x^*) \geq f(x)$  für alle  $x \in Z$ . Das Maximum  $f(x^*) = f^*$  heißt Lösungswert des Programms.

Die Grundidee des Lösungsverfahrens von LPNLP besteht darin, daß das Optimierungsproblem (A-1) mit den Nebenbedingungen (A-2) (restringiertes Optimierungsproblem) in ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen (freies Optimierungsproblem) transformiert wird. Dazu wird die Ziel-

funktion  $f(x)$  mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_i$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) und Gewichtungsfaktoren ("penalty weights")  $w_\alpha > 0$  ( $\alpha=1,2$ ) um die Nebenbedingungen (A-2) erweitert, so daß sich folgendes Problem ergibt [88]:

$$\hat{L}^* = \max_{x,\lambda} \hat{L}(x,\lambda,w) \quad (A-4)$$

mit

$$\hat{L}(x,\lambda,w) = L(x,\lambda) - w_1 \sum_{j \in M} g_j^2 - w_2 \sum_{j \in N} g_j^2, \quad (A-5)$$

wobei

$$L(x,\lambda) = f(x) - \lambda_i g_i(x) \quad (A-6)$$

und

$$M = \{j | \lambda_j > 0\}, \quad N = \{j | \lambda_j = 0 \text{ und } g_j \geq 0\}. \quad (A-7)$$

Die Funktion  $L(x,\lambda)$  (A-6) ist die übliche Lagrange-Funktion des Problems (A-1, A-2).

Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Lösung des Problems (A-4) äquivalent zur Lösung des ursprünglichen Problems (A-1, A-2) ist. Dazu befassen wir uns zunächst mit der Herleitung notwendiger Bedingungen für einen Lösungspunkt  $x^*$ , indem wir ein Problem mit 2 Variablen und 3 Nebenbedingungen (Abb. A.1) betrachten. Der Verlauf der Zielfunktion ist hierbei durch verschiedene Kurven  $f(x) = \text{konstant}$  gekennzeichnet. Das Maximum von  $f$  unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen liege im Punkte  $x^*$ , in dem die Restriktionen 1 und 2 aktiv sind. Betrachten wir nun einen vergrößerten Ausschnitt der Umgebung von  $x^*$ , so stellen wir fest, daß der Gradient von  $f(x)$  im Punkte  $x^*$ ,  $\nabla f(x^*)$ , innerhalb eines Kegels (schraffierter Bereich) liegt, der durch die Gradienten der aktiven Restriktionen in diesem Punkt aufgespannt wird. Kein anderer zulässiger Punkt erfüllt diese Bedingung.

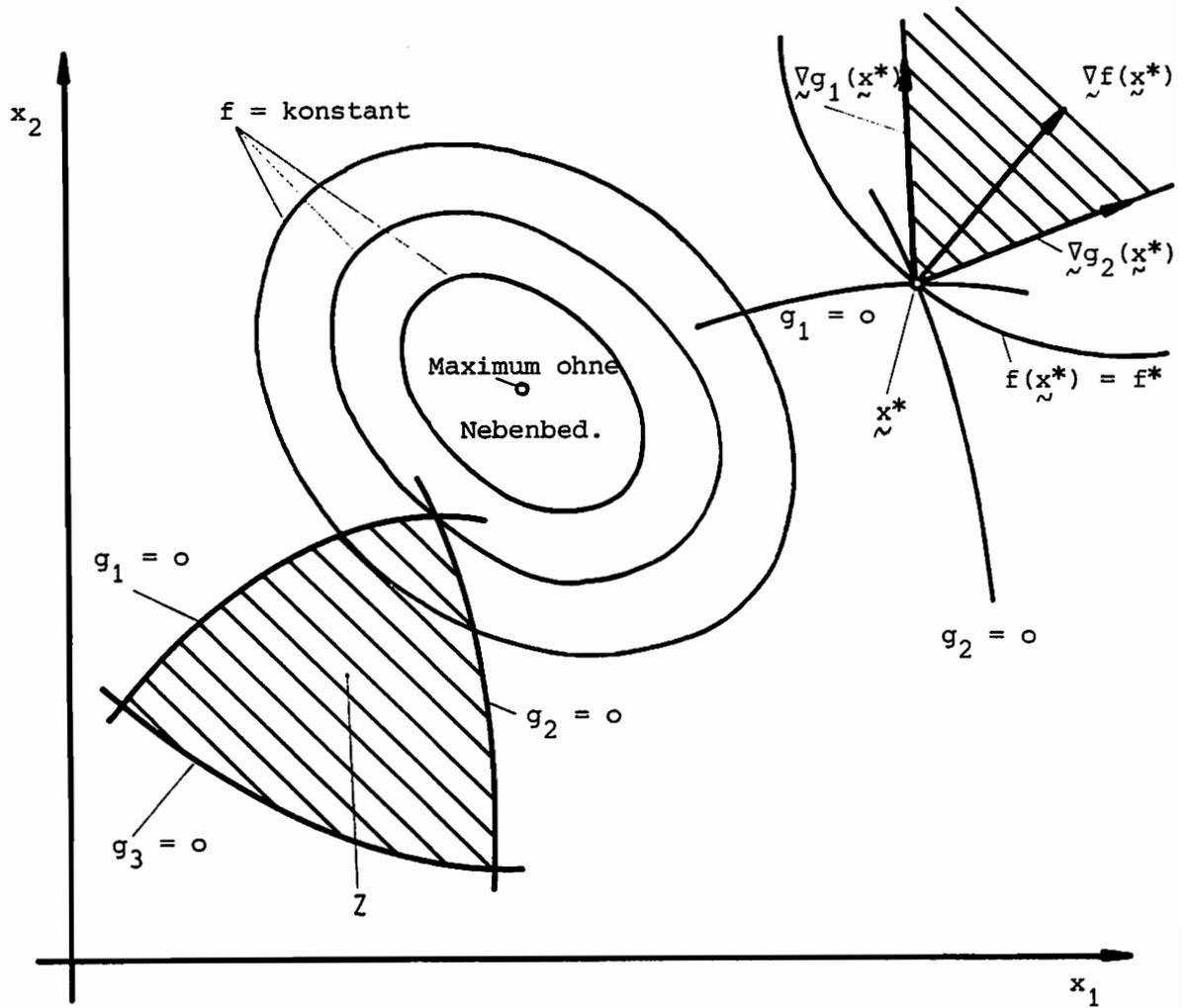


Abb. A.1 Veranschaulichung der KUHN-TUCKER-Bedingungen

Die auf diese Weise durch rein geometrische Überlegungen ermittelten Bedingungen sind die sogenannten KUHN-TUCKER-Bedingungen [8,54,88]. Sie lauten

$$g_i(x^*) \leq 0$$

$$\nabla f(x^*) - \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$$

(A-8)

$$\lambda_i^* \geq 0$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i=1,2,\dots,m$$

und liefern notwendige Bedingungen für einen Lösungspunkt  $x^*$  des Problems (A-1, A-2). Auf weitere Bedingungen, z.B. die sogenannte Regularitätsvoraussetzung ("constraint qualification") gehen wir hier nicht näher ein, da diese in der Regel erfüllt sind (siehe auch [8,54,88]). Unter Berücksichtigung von (A-7) und (A-8)<sub>1,4</sub> gilt in einem Lösungspunkt auch  $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla_x \hat{L}(x^*, \lambda^*) = 0$ . Eine hinreichende Bedingung für einen Lösungspunkt  $x^*$  ergibt sich aus dem folgenden Theorem von PIERRE und LOWE [88]:

Ist  $\hat{L}(x^*, \lambda^*, w)$  ein nicht restringiertes lokales Maximum von  $\hat{L}(x, \lambda^*, w)$  für endliche Werte von  $w$  und erfüllen  $x^*, \lambda^*$  die Kuhn-Tucker-Bedingungen (A-8), so ist  $f(x^*)$  ein restringiertes lokales Maximum von  $f(x)$ . Sind sowohl Zielfunktion  $f(x)$  als auch die Funktionen  $g_j(x)$  konvexe Funktionen (wie es bei unseren Problemen der Fall ist), so ist jedes lokale Maximum von  $f$  zugleich ein globales Maximum von  $f$ .

Damit ist die Äquivalenz der Lösung des Problems (A-4) mit derjenigen des Problems (A-1, A-2) sichergestellt und unsere Aufgabe besteht somit darin, ein lokales Maximum von  $\hat{L}(x, \lambda^*, w)$  über  $x$  zu finden. In der Praxis sind dabei die optimalen Werte  $\lambda^*$  von vornherein nicht bekannt, so daß eine iterative Vorgehensweise zur Anwendung kommt. Für feste Werte von  $w$  und  $\lambda^0$  wird ein nichtrestringiertes Maximum von  $\hat{L}$  generiert. Die Lösung sei  $\hat{x}^0$  mit  $\nabla_x \hat{L}(\hat{x}^0, \lambda^0, w) \approx 0$ , wobei  $\hat{x}^0$  im allgemeinen nicht alle Nebenbedingungen erfüllen wird, solange  $\lambda^0 \neq \lambda^*$  ist. Außerdem erfordern die Kuhn-Tucker-Bedingungen  $\nabla_x L = 0$  und nicht  $\nabla_x \hat{L} = 0$ . Um  $\nabla_x L = 0$  zu erfüllen, wird im nächsten Iterationsschritt des Algorithmus der Wert  $\lambda$  verändert, indem  $\nabla_x L(\hat{x}^0, \lambda) = \nabla_x \hat{L}(\hat{x}^0, \lambda) \approx 0$  gesetzt wird. Mit diesem festen Wert für  $\lambda$  wird dann das nächste Maximum von  $\hat{L}$  bestimmt, u.s.w.

Die Lösung des Optimierungsproblems ohne Nebenbedingungen in dem jeweiligen Iterationszyklus beinhaltet eine Folge von eindimensionalen Optimierungsproblemen ("line search") im  $n$ -dimensionalen Raum. Sie basieren auf dem Iterationsschema

$$x^{k+1} = x^k + \rho r^k, \tag{A-9}$$

wobei  $\mathbf{r}^k$  die Suchrichtung und  $\rho$  die jeweilige Schrittweite bezeichnet. Die Suchrichtung  $\mathbf{r}^k$  ergibt sich dabei allgemein zu

$$\mathbf{r}^k = \mathbf{H}^k \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \hat{L}^k, \quad (\text{A-10})$$

wobei die Matrix  $\mathbf{H}^k$  im erweiterten Programm LPNLP alternativ nach drei verschiedenen Verfahren berechnet werden kann. Zusätzlich zum vorhandenen DFP- und SSVM-Algorithmus [88] haben wir den neueren BFGS-Algorithmus [54] implementiert. Die optimale Schrittweite  $\rho$  in (A-9) ergibt sich dabei aus der Forderung

$$\hat{L}(\mathbf{x}^{k+1}) = \max_{\rho} \hat{L}(\mathbf{x}^k + \rho \mathbf{r}^k) := \max_{\rho} y(\rho), \quad (\text{A-11})$$

wobei das in LPNLP benutzte eindimensionale Suchverfahren auf der Annahme beruht, daß  $y(\rho)$  lokal mit Hilfe einer quadratischen Form, deren Maximalpunkt bekannt ist, approximiert werden kann.

Zur numerischen Anwendung des Optimierungsprogramms LPNLP ist zu sagen, daß wir in allen unseren Beispielen zufriedenstellendes Konvergenzverhalten erzielten, wobei der BFGS-Algorithmus gegenüber den beiden anderen Algorithmen eine bis zu doppelt so hohe Konvergenzgeschwindigkeit aufwies.

## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics -of Finite  
Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,  
viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen  
elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit  
stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszu-  
standes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur  
Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentri-  
fugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:  
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen  
Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Be-  
lastung

- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode

- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr.32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells

- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme

- Nr. 46 J. Makowski/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz K. Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter in-stationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Trampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien, Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 J. Makowski/H. Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells

Nr. 58 Johannes Groß-Weege:  
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 58**