



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Andreas Pape

Zur Beschreibung des  
transienten und stationären  
Verfestigungsverhaltens von  
Stahl mit Hilfe eines  
nichtlinearen Grenzflächenmodells

Heft Nr. 57



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik  
Ruhr-Universität Bochum

Andreas Pape

Zur Beschreibung des transienten und stationären  
Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines  
nichtlinearen Grenzflächenmodells

Ruhr-Universität Bochum  
Institut für Mechanik  
-Bibliothek-

Inv.-Nr.:            Preis: /  
Standort:             
Sachgebiet:

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr.57  
Mai 1988

**Herausgeber :**

**Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum**

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen .

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann danke ich für die Unterstützung durch viele wertvolle Anregungen und für die Übernahme des Referates .

Herrn Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns danke ich für die Übernahme des Korreferates .

Weiterhin gilt mein herzlicher Dank allen , die zum Entstehen der Arbeit beigetragen haben.

Bochum , Mai 1988

Andreas Pape

**Referenten:**

Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann  
Prof. Dr.-Ing. O.T. Bruhns

eingereicht : 29.1.1988  
Tag der mündlichen Prüfung: 3.5.1988

© 1988 Dr.-Ing. Andreas Pape  
Am Heisterbach 137  
4600 Dortmund 30

Alle Rechte vorbehalten . Auch die fotomechanische Vervielfältigung ( Fotokopie , Mikrokopie ) bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors .

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein einfaches Grenzflächenmodell entwickelt, das speziell zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens von Stählen unter wechselnder Beanspruchung dient. Dabei werden auch transiente Phänomene, die bei Belastungswechsel zu beobachten sind, mit Hilfe eines zusätzlichen isotropen Verfestigungsmechanismus berücksichtigt.

Das Modell wird anhand zyklischer, weggesteuerter Zug/Druck- und Torsionsversuche an dünnwandigen Stahlrohren aus Ck 15 überprüft. Mit Hilfe eines Spline-Interpolationsverfahrens wird die Entwicklung der isotropen und kinematischen Verfestigung im Zug/Druckversuch quantifiziert.

Zusätzlich enthält das Versuchsprogramm nichtproportionale Belastungspfade in Form von Rechteck-, Kreis- und Dreieckbeanspruchung. Der Einfluß von Deformationspfad und Deformationsamplitude wird hierbei in bezug auf das Verhalten bei Zug/Druckbelastung beurteilt.

## Summary

A simple bounding surface model is developed with special regard to the hardening behaviour of polycrystalline metals under varying loads. Hereby also transient phenomena, as to appear in the course of alternating loading conditions, are considered by means of an additional isotropic hardening mechanism in the subspace of microstresses.

The model is tested by simulating cyclic strain-controlled loading histories, which have been obtained from axial/torsional experiments on Ck 15 steel tubes. A special procedure has been developed, by using polynomial splines of grade three to quantify the amount of isotropic and kinematic hardening during axial loadings.

Moreover nonproportional loading histories with rectangular, circular and triangular shapes have been applied, and the hardening behaviour under such conditions is compared to the uniaxial case.

**Bezeichnungen und Vereinbarungen**

<b>1.</b>	<b>Einleitung</b>	<b><u>1</u></b>
<b>2.</b>	<b>Grundlagen der geometrisch nichtlinearen Mechanik</b>	<b><u>4</u></b>
2.1	Beschreibung der Deformation und der Deformationsgeschwindigkeit	4
2.2	Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensor	8
2.3	Anwendung auf dünnwandige Rohre unter Axial- und Torsionslast	12
<b>3.</b>	<b>Experimentelle Ergebnisse einaxialer und zweiaxialer Zug/Druck- und Torsionsversuche</b>	<b><u>17</u></b>
3.1	Allgemeines	17
3.2	Experimentelle Einrichtung	17
3.3	Versuchsprogramm	21
3.4	Einaxiale Versuche mit konstanter plastischer Dehnungsamplitude	24
3.4.1	Bestimmung der isotropen und kinematischen Verfestigung	24
3.4.2	Stationärer Stufentest	26
3.4.3	Zyklische Versuche mit wiederholtem Amplitudenwechsel	29
3.4.4	Zyklische Versuche mit Vordehnungen	35
3.5	Zweiaxiale Zug/Druck- und Torsionsversuche mit konstanter Gesamtdeformationsamplitude	43
3.5.1	Einfluß des Deformationspfades auf das Verfestigungsverhalten	43
3.5.2	Einfluß der Deformationsamplitude auf das Verfestigungsverhalten	48
<b>4.</b>	<b>Mikromechanische Deutung der plastischen Deformation metallischer Festkörper</b>	<b><u>54</u></b>
4.1	Allgemeines	54
4.2	Modell mit heterogener Versetzungsstruktur	56

<b>5.</b>	<b>Konstitutive Gleichungen für elasto - plastische Formänderungen</b>	<b><u>62</u></b>
5.1	Allgemeines	62
5.2	Das Zwei-Flächenmodell von Dafalias/Popov	63
5.3	Das Modell von Tseng/Lee	65
5.4	MFG - Modell	67
5.5	Ermittlung der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeit	75
<b>6.</b>	<b>Thermodynamische Konsistenz der Materialgleichungen</b>	<b><u>77</u></b>
6.1	Allgemeines	77
6.2	Interne Variable	78
6.3	Energiebilanzgleichungen und irreversible Entropieproduktion	78
<b>7.</b>	<b>Bestimmung der Materialparameter für die isotrope und kinematische Verfestigung</b>	<b><u>85</u></b>
7.1	Allgemeines	85
7.2	Kinematische Verfestigung	85
7.3	Isotrope Verfestigung	87
<b>8.</b>	<b>Vergleich zwischen Rechnung und Experiment</b>	<b><u>92</u></b>
8.1	Allgemeines	92
8.2	Differentialgleichungssystem für Axial- und Torsionsbeanspruchung	92
8.3	Zug/Druckversuche	96
8.4	Zweiachiale Versuche	101
8.5	Einfluß des Korrekturterms der Normalenregel	107
<b>9.</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b><u>110</u></b>

**Literaturverzeichnis**

## Bezeichnungen und Vereinbarungen

### I. Lateinische Symbole

Symbol	Bezeichnung	Seite
$a$	Materialparameter	73
$a_i$	Koeffizient der Spline-Ausgleichsfunktion	24
$A$	2.Invarianante von $\underline{g}$	82
$A$	Querschnittsfläche	19
$b$	Materialparameter	72
$b_i$	Koeffizient der Spline-Ausgleichsfunktion	24
$\underline{B}$	Linker Cauchy-Green Tensor	8
$c$	Materialparameter	73
$c_i$	Koeffizient der Spline-Ausgleichsfunktion	24
$C_A^*$	axiale Maschinensteifigkeit	19
$C_A$	axiale Gesamtsteifigkeit	19
$C_T^*$	Maschinentorsionssteifigkeit	19
$C_T$	Gesamt torsionssteifigkeit	20
$\underline{C}$	Rechter Cauchy - Green Tensor	9
$d$	Materialparameter	75
$\hat{d}_1, \hat{d}_2$	Materialparameter	75
$d_o$	Außendurchmesser	19
$d_i$	Innendurchmesser	19
$d_i$	Koeffizient der Spline-Ausgleichsfunktion	24
$\underline{D}$	Verzerrungsgeschwindigkeits- tensor	7
$\underline{D}_{(e)}$	elastischer Verzerrungsgeschwindigkeitstensor	70
$\underline{D}_{(p)}$	plastischer Verzerrungsgeschwindigkeitstensor	69
$\underline{e}_\alpha$	kartesischer Basisvektor	4
$E$	Elastizitätsmodul	19
$\underline{E}$	Almansi-Verzerrungstensor	13
$\underline{E}_o$	Green-Lagrange Verzerrungstensor	13
$\underline{E}_H$	Hencky - Verzerrungstensor	9
$\underline{F}$	Deformationsgradient	9
$F$	Fließfläche	68
$F$	Axialkraft	19
$f$	plastisches Potential	62
$\underline{g}_\alpha$	kovarianter Basisvektor	4
$G$	Gleitmodul	19
$G$	Grenzfläche	68
$g_{\alpha\beta}$	kovarianter Metriktensor	4

$h_m$	Verfestigungsmodul	76
$J$	Funktionaldeterminante	11
$k$	Radius der Fließfläche	74
$k^*$	Radius der Grenzfläche	68
$l$	Radius der Mikrofläche	68
$L$	Belastungsbedingung	69
$L$	Meßlänge	12
$M$	Mikrofläche	68
$\tilde{n}$	Normaleneinheitsvektor der Fließfläche	62
$\tilde{q}$	Wärmeflußvektor	79
$r, \varphi, z$	Zylinderkoordinaten	12
$\tilde{r}$	Ortsvektor	4
$R$	mittlerer Radius	12
$S$	Entropie	79
$s$	spezifische Entropie	79
$\tilde{S}$	gewichteter Cauchy-Spannungstensor (Kirchhoff-Spannungstensor)	10
$\tilde{t}$	Deviator des Kirchhoff-Spannungstensors	11
$T$	Temperatur in °C	22
$T$	Temperatur in K	79
$u$	spezifische innere Energie	78
$\tilde{v}$	Geschwindigkeit	6
$W$	mechanische Arbeit	80
$W_d$	dissipierte Arbeit	80
$W_h$	gespeicherte Arbeit	80
$W_p$	plastische Arbeit	80
$W_r$	reversible Arbeit	80
$x^\alpha$	allgemeine Koordinaten der aktuellen Konfiguration	4
$\overset{\circ}{x}^\alpha$	allgemeine Koordinaten der Anfangskonfiguration	4
$z^\alpha$	kartesische Koordinaten	4

## II. Griechische Symbole

$\tilde{\alpha}$	Mikrospannungstensor	16
$\alpha$	axiale Komponente des Mikrospannungstensors	25
$\alpha$	linearer Wärmeausdehnungskoeffizient	70
$\beta$	reversibler Dehnungsbereich	60
$\gamma$	Gleitung	19
$\Gamma$	isotroper Modul	75
$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$	Christoffelsymbole	6
$\delta$	Abklingterm für kinematische Verfestigung	74
$\Delta$	Entfestigungsfunktion	72
$\varepsilon$	axiale Dehnung	19
$\zeta$	Dissipationskoeffizient	83
$\eta$	interne Entropie	81

$\eta$	Spannungsdifferenztensor	72
$\tilde{x}$	Korrekturterm der Normalenregel	69
$\lambda$	plastischer Multiplikator	69
$\Delta$	kinematische Verfestigungsfunktion	73
$\mu$	effektive Verfestigungsarbeit	69
$\nu$	Querkontraktionszahl	70
$\xi$	Dissipationskoeffizient	69
$\rho$	Dichte	10
$\sigma$	Cauchy - Spannungstensor	10
$\sigma$	Axialspannung	14
$\tau$	Deviator des Cauchy - Spannungstensors	11
$\tau$	Schubspannung	12
$\Phi$	kinematische Grenzfunktion	73
$\psi$	Verdrehwinkel	12
$\psi$	spezifische freie Enthalpie	79

### Vereinbarungen

$\underline{\underline{S}}$	Tensor erster oder zweiter Stufe
$\underline{\underline{S}}^{-1}$	Inverse
$\underline{\underline{S}}^T$	Transponierte
$\det \underline{\underline{S}}$	Determinante
$Sp \underline{\underline{S}}$	Spur von $\underline{\underline{S}}$
$\underline{\underline{1}}$	Einstensor
$grad ( )$	Gradient
$div ( )$	Divergenz
$( )^\alpha  _\beta$	kovariante Ableitung
$( )^\cdot$	substantielle Zeitableitung
$\nabla ( )$	objektive Zeitableitung nach Jaumann

Weiterhin gilt für Produkte von Tensoren die Summationskonvention :

$$\underline{\underline{S}} \underline{\underline{W}} = s^\alpha_\beta w^\beta_\gamma g_\alpha g^\gamma = (s^\alpha_1 w^1_\gamma + s^\alpha_2 w^2_\gamma + s^\alpha_3 w^3_\gamma) g_\alpha g^\gamma$$

$$d\underline{\underline{r}} \cdot d\underline{\underline{r}} = dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta}$$

$$\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{S}} = s^\alpha_\beta s^\beta_\alpha = Sp \underline{\underline{S}}^2$$

Griechische Indizes bezeichnen Zahlenwerte in bezug auf ein allgemeines, raumfestes Koordinatensystem. Bei in einem Ausdruck zweimal auftretenden Indizes wird über diese von 1 bis 3 summiert.

## 1. Einleitung

In vielen Anwendungsbereichen sind metallische Werkstoffe, die als Strukturkomponenten, z.B. im Kraftwerks- oder Anlagenbau, zum Einsatz gelangen, gleichförmig oder ungleichförmig wechselnden, inelastischen Beanspruchungen ausgesetzt. Eine Voraussetzung zur Auslegung derartiger Bauteile ist eine ausreichende Kenntnis des Materialverhaltens bei homogenen, d.h. örtlich konstanten Beanspruchungen, die versuchstechnisch vielfach durch Zug/Druck- und Torsionsbelastung dünnwandiger Rohre realisiert werden. Standen am Anfang monotone, einaxiale Prozesse, die durch stark idealisierende, idealplastische oder linear verfestigende Modelle angenähert werden können, im Mittelpunkt, so ist man in neuerer Zeit an realistischen Stoffgesetzen mit nichtlinearer Charakteristik interessiert, die für Prozesse mit wiederholter Belastungsumkehr (zyklische Prozesse) geeignet sind. In der Anwendung ist man bestrebt, einerseits den Fehler in numerischen Verfahren zur Festigkeitsberechnung komplizierter Strukturen zu reduzieren, und andererseits Aussagen über Lebensdauer und Schädigungsverlauf von Bauteilen unter bestimmten Einsatzbedingungen zu erhalten.

Insbesondere das Konzept der Mehrflächenmodelle, das auf Arbeiten von Mróz [ 58 ] und Eisenberg/Phillips [ 59 ] Mitte der sechziger Jahre zurückgeht, und von Dafalias/Popov [ 61 ], Krieg [ 60 ], Tanaka/Murakami/Ōoka [ 76 ] modifiziert bzw. im Hinblick auf eine praktikable Rechnerimplementierung weiterentwickelt wurde, erscheint geeignet, transiente, elasto-plastische Phänomene, wie sie bei Belastungswechseln und Belastungsumkehr bedeutsam sind, zu erfassen. Darüber hinaus ist bei zyklischen Prozessen ein Einspielerverhalten zu beobachten, das sowohl von der Belastungsamplitude als auch von der Belastungsgeschichte abhängt und zusätzliche asymptotische Entwicklungsgleichungen erforderlich macht.

Neben den Fortschritten, die auf den Gebieten der konstitutiven Gleichungen und der experimentellen Arbeiten erzielt wurden, sind noch zwei andere Entwicklungen aufzuzeigen, die die Plastizitätstheorie in den vergangenen zwei Dekaden gekennzeichnet haben. Da ist zum einen der Ausbau der klassischen infinitesimalen Theorie auf große Formänderungen und zum anderen der Versuch, durch thermodynamisch konsistente Materialgleichungen der Kopplung thermo-mechanischer Vorgänge, die bei bestimmten Einsatzbedingungen dominant werden kann, gerecht zu werden. Hier sind vor allem die Arbeiten von Lehmann [ 78 ], Green/Naghdi [ 80 ] und Ziegler [ 79 ] zu nennen.

In der vorliegenden Arbeit werden Belastungsfälle behandelt, bei denen aufgrund der Materialeigenschaften und der Versuchsbedingungen die Einflüsse von Prozeßgeschwindigkeit und -temperatur vernachlässigt werden können. Die aus den experimentellen Ergebnissen abgeleiteten Aussagen sind der zeitunabhängigen, isothermen Plastizitätstheorie zuzuordnen, in der nur quasistatische Prozesse untersucht werden.

In Kapitel 2 werden die grundlegenden mechanischen Größen eingeführt, die zur Formulierung der konstitutiven Gleichungen und deren experimenteller Verifikation erforderlich sind. Anschließend werden die wichtigsten experimentellen Ergebnisse aus zyklischen Versuchen an dünnwandigen Rohren unter kombinierter Zug/Druck- und Torsionsbeanspruchung dargestellt und diskutiert. Im Mittelpunkt stehen dabei die Einflüsse von De-

formationspfad und Deformationsamplitude. Für viele Stähle ist charakteristisch, daß bei Vergrößerung der Dehnungsamplitude eine zusätzliche Verfestigung entsteht, auch wenn vorher bereits ein stationärer Zustand erreicht war. Andererseits ist bei Verkleinerung der Dehnungsamplitude ein Rückgang der Verfestigung zu beobachten. Diese Erscheinung soll im folgenden als „transientes Verfestigungsverhalten“ bezeichnet werden und ist z.B. auch beim Übergang von proportionaler auf nicht-proportionale Belastung und umgekehrt bedeutsam.

Das einaxiale Versuchsprogramm umfaßt weggesteuerte Versuche mit konstanter plastischer Dehnungsamplitude in wechselnder Reihenfolge und bei verschiedenen Vordehnungen. In den Zug- und Druckentlastungspunkten wird mit Hilfe eines Spline-Interpolationsverfahrens der Fließpunkt bestimmt und die isotrope und kinematische Verfestigung im Rahmen eines erweiterten  $v$ . Mises-Modells identifiziert. Das zweiachsiges Versuchsprogramm besteht aus proportionalen und nicht-proportionalen, zyklischen Belastungen. Die proportionalen Prozesse sind dadurch gekennzeichnet, daß das Spannungsinkrement momentan mit der Richtung des Spannungszustandes übereinstimmt. Dies wird dadurch erreicht, daß Dehnung und Scherung zeitlich phasengleich verlaufen. Bei nicht-proportionalen Prozessen besteht dagegen entweder eine konstante Phasendifferenz, oder die Phasenverläufe von Dehnung und Scherung sind prinzipiell unterschiedlich. Es ist bekannt, daß derartige nicht-proportionale Prozesse eine höhere Verfestigung induzieren als proportionale Prozesse. Die Verfestigung, die während dreier unterschiedlicher Typen von nicht-proportionaler Belastung entsteht (Darstellung in der normalisierten Dehnungsebene als Quadrat, Kreis und Dreieck), wird mit Hilfe von Zug/Druckfolgeversuchen ermittelt.

In Kapitel 4 wird auf die mikromechanische Deutung der plastischen Verformungen eingegangen. Elektronenmikroskopische Untersuchungen haben gezeigt, daß Versetzungen mit zunehmender plastischer Deformation geordnete Strukturen mit Gebieten stark verschiedener Versetzungsdichte bilden. Aufgrund der Formierung harter und weicher Gebiete entsteht eine inhomogene lokale Spannungsverteilung. Nix und Ilshner entwickelten mit diesem Konzept ein Modell mit „vorwärts und rückwärts“ gerichteten Mikrospannungen zur Erklärung des Kriechverhaltens nach teilweiser Entlastung (forward and backward straining) [ 50 ]. Hasegawa, Yakou und Kocks zeigen in [ 46 ], daß dadurch auch einige Phänomene, die der zeitunabhängigen Plastizität zugeordnet sind, wie z.B. der Bauschinger-Effekt, erklärbar sind.

Die experimentellen Ergebnisse bilden die Grundlage für die Entwicklung eines konstitutiven Modells, das als Vereinfachung des Zwei-Flächen Modells von Dafalias / Popov [ 62 ] angesehen werden kann, da nur die Fließfläche isotrop und kinematisch verfestigt, die Grenzfläche jedoch idealplastischen Charakter hat. Ein zusätzlicher isotroper Verfestigungsmechanismus im Raum einer internen Variable, die die lokale ( Mikro- ) Spannungsverteilung beschreibt, gestattet es, Ver- und Entfestigungsvorgänge in Abhängigkeit der Vorgeschichte zu simulieren. Die dazu benötigte Fläche, die als Mikrofläche bezeichnet werden soll, stellt das „nicht-perfekte, verschwindende Gedächtnis“ der konstitutiven Gleichungen an die vorausgegangene plastische Deformation dar ( evanescent memory ). Eine ähnliche Indexfläche, jedoch mit perfektem Gedächtnis, wurde erstmals von Chaboche u.a. eingeführt [ 26 ].

Die thermodynamische Konsistenz der konstitutiven Gleichungen wird in Kapitel 6 diskutiert . Aufbauend auf die von Lehmann formulierte allgemeine Theorie großer , nicht-isothermer , inelastischer Formänderungen [ 12 , 78 ] wird dargestellt , mit welchen Restriktionen die Beachtung der Energiebilanzgleichungen und der irreversiblen Entropieproduktion verbunden ist .

Im siebten und achten Kapitel erfolgen die Bestimmung der Parameter und der Vergleich zwischen Rechnung und Experiment . Das Gleichungssystem ist bei großen plastischen , isothermen Deformationen anwendbar . Bei den Zug/Druckversuchen liegt der Schwerpunkt auf der Erfassung der Amplitudenabhängigkeit des Einspielverhaltens . Bei der Untersuchung der zwei axialen Prozesse wird auf die von Lehmann vorgeschlagene Korrektur der Normalenregel [ 77 ] – allerdings unter Einschränkung auf kleine Formänderungen – eingegangen .

## 2. Grundlagen der geometrisch nichtlinearen Mechanik

### 2.1 Beschreibung der Deformation und der Deformationsgeschwindigkeit

Zur Beschreibung des vorliegenden elasto-plastischen Problems werden zwei raumfeste Koordinatensysteme eingeführt ( Abb.2.1 ) [ 1,2 ] :

- a) ein kartesisches Koordinatensystem  $z^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$
- b) ein krummliniges Koordinatensystem  $x^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ .

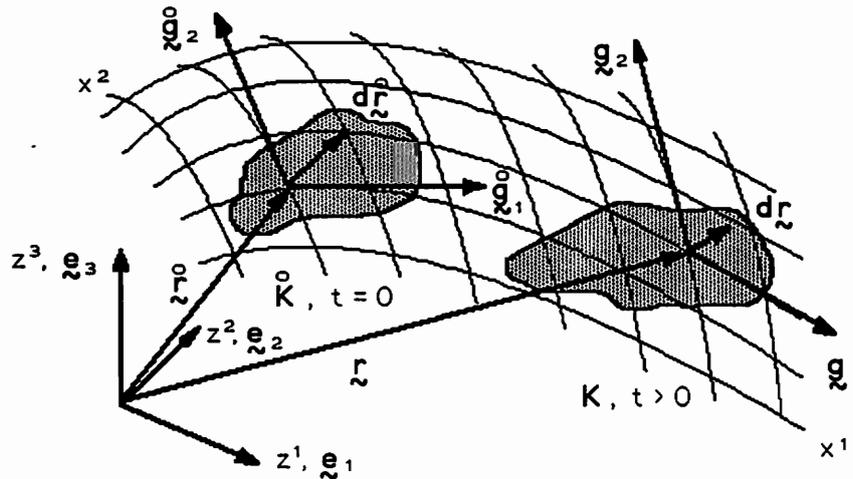


Abb. 2.1 Raumfeste Basisssysteme in Ausgangs - und Endlage

Für den Ortsvektor  $\underline{r}$  eines materiellen Punktes in der aktuellen Konfiguration  $K$  gilt

$$\underline{r} = z^\alpha \underline{e}_\alpha \quad , \quad \underline{e}_\alpha \cdot \underline{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (2.1)$$

Ist ein Zusammenhang der krummlinigen Koordinaten  $x^\alpha$  mit den kartesischen Koordinaten  $z^\alpha$  durch  $z^\alpha = z^\alpha(x^\rho)$  gegeben, so ist die infinitesimale Änderung von  $\underline{r}$

$$d\underline{r} = \frac{\partial z^\rho}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \underline{e}_\rho = dx^\alpha \underline{g}_\alpha \quad , \quad (2.2)$$

mit den kovarianten Basisvektoren und Metrik der aktuellen Konfiguration

$$\underline{g}_\alpha = \frac{\partial z^\rho}{\partial x^\alpha} \underline{e}_\rho = \underline{g}_\alpha(x^\rho) \quad (2.3)$$

$$g_{\alpha\beta} = \underline{g}_\alpha \cdot \underline{g}_\beta = g_{\alpha\beta}(x^\rho)$$

Für die reziproke Basis gilt :

$$\underline{g}^\alpha = g^{\alpha\rho} \underline{g}_\rho \quad \text{und} \quad g^{\alpha\nu} g_{\nu\beta} = \delta_\beta^\alpha \quad (2.4)$$

Zur Zeit  $t_0$  befinde sich der Körper im unverformten, kräftefreien Ausgangszustand mit der Temperatur  $T_0$ . In dieser Konfiguration hat man die Koordinaten  $\overset{0}{x}^\alpha, \overset{0}{z}^\alpha$  und die Basis bzw. Metrik

$$\overset{0}{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \overset{0}{z}^\alpha}{\partial \overset{0}{x}^\beta} \underline{e}_\alpha \quad , \quad \overset{0}{g}_{\alpha\beta} = \overset{0}{g}_{\alpha\gamma} \cdot \overset{0}{g}_{\gamma\beta} \quad (2.5)$$

$\overset{0}{x}^\alpha, \overset{0}{z}^\alpha$  werden materielle oder Lagrange-Koordinaten genannt, da sie jedem Körperpunkt einen Wertetripel zuordnen,  $x^\alpha, z^\alpha$  sind dagegen räumliche oder Eulersche Koordinaten, da sie dem Raumpunkt zugeordnet sind. Die Deformation ist vollständig beschrieben, wenn stetig differenzierbare, umkehrbare Funktionen

$$x^\alpha = x^\alpha(\overset{0}{x}^\rho, t) \quad (2.6)$$

bekannt sind, so daß der Deformationsgradient  $\underline{F}$

$$\underline{F} = F^\alpha_\beta \underline{g}_\alpha \overset{0}{g}^\beta = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overset{0}{x}^\beta} \underline{g}_\alpha \overset{0}{g}^\beta \quad (2.7)$$

der ein Linienelement der Ausgangskonfiguration in die aktuelle Konfiguration gemäß

$$d\underline{r} = \underline{F} d\underline{r}^0 \quad (2.8)$$

transformiert, bestimmbar ist. Neben Ausgangskonfiguration  $\overset{0}{K}$  und Endkonfiguration  $K$  ist bei großen elasto-plastischen Formänderungen die Zwischenkonfiguration  $K^*$  von Bedeutung. Sie ist eine im allgemeinen mit der Gesamtdeformation inkompatible Zwischenkonfiguration [ 3, 4 ], deren Einführung eine Aufspaltung der Gesamtdeformation in einen elastischen und einen plastischen Anteil ermöglicht ( Abb.2.2 ).

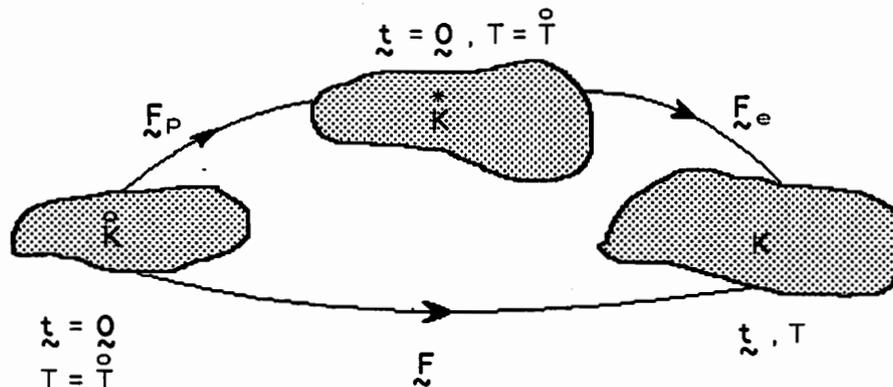


Abb. 2.2 Anfangs-, Zwischen-, und Endkonfiguration bei finiten elasto-plastischen Deformationen

Mit der Kettenregel folgt aus Gl. ( 2.7 ) eine multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{*\nu}} \frac{\partial x^{*\nu}}{\partial \bar{x}^\rho} \mathbf{g}_\alpha \bar{\mathbf{g}}^\rho = \tilde{\mathbf{F}}_e \tilde{\mathbf{F}}_p, \quad \tilde{\mathbf{F}}_e = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{*\rho}} \mathbf{g}_\alpha \bar{\mathbf{g}}^\rho, \quad \tilde{\mathbf{F}}_p = \frac{\partial x^{*\alpha}}{\partial \bar{x}^\rho} \mathbf{g}_\alpha \bar{\mathbf{g}}^\rho, \quad (2.9)$$

wobei ein Linienelement  $d\tilde{\mathbf{r}}$  zuerst eine plastische Verformung

$$d\tilde{\mathbf{r}}^* = \tilde{\mathbf{F}}_p d\tilde{\mathbf{r}}^0 \quad (2.10)$$

und anschließend eine thermoelastische Verformung erfährt

$$d\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{F}}_e d\tilde{\mathbf{r}}^* \quad (2.11)$$

Substantielle Ableitung nach der Zeit von Gl. ( 2.9 ) ergibt

$$\dot{\tilde{\mathbf{F}}} = \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_e \tilde{\mathbf{F}}_p + \tilde{\mathbf{F}}_e \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_p \quad (2.12)$$

Die substantielle Ableitung nach der Zeit ist durch die partielle Ableitung nach der Zeit bei festgehaltenen Körperkoordinaten  $\bar{x}^\rho$  gegeben [ 5,6,7 ]

$$\dot{\tilde{\mathbf{F}}} = \frac{D}{dt} (\tilde{\mathbf{F}}) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\bar{x}^\rho} (\tilde{\mathbf{F}}) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\bar{x}^\gamma} F^\alpha{}_\rho + F^\mu{}_\rho \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha v^\gamma \right) \mathbf{g}_\alpha \bar{\mathbf{g}}^\rho, \quad (2.13)$$

wobei der letzte Term in der rechten Klammer die zeitliche Änderung des Basisvektors  $\mathbf{g}_\alpha$  beschreibt

$$\dot{\mathbf{g}}_\alpha = v^\rho \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \mathbf{g}_\mu \quad (2.14)$$

Die  $v^\alpha$  sind die kontravarianten Komponenten der räumlichen Geschwindigkeit eines Körperpunktes mit dem momentanen Ortsvektor  $\tilde{\mathbf{r}}$

$$\tilde{\mathbf{v}} = v^\alpha \mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial t} \Big|_{\bar{x}^\mu} = \frac{D\tilde{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{x}^\alpha \mathbf{g}_\alpha \quad (2.15)$$

und  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  sind die Christoffelsymbole zweiter Art [ 22 ] , die aus

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \left( g_{\gamma\rho,\beta} + g_{\rho\beta,\gamma} + g_{\beta\gamma,\rho} \right) \quad (2.16)$$

zu berechnen sind . Skalare Multiplikation mit der Inversen des Deformationsgradienten

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{\partial \overset{\circ}{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \underline{\underline{g}}_\alpha \underline{\underline{g}}^\mu \quad \text{ergibt :}$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{F}}^{-1} &= \left( F^\alpha_{\cdot\rho} (F^{-1})^\rho_{\cdot\mu} + v^\gamma \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \right) \underline{\underline{g}}_\alpha \underline{\underline{g}}^\mu = \left( v^\alpha_{\cdot\mu} + v^\gamma \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \right) \underline{\underline{g}}_\alpha \underline{\underline{g}}^\mu \\ &= v^\alpha|_\mu \underline{\underline{g}}_\alpha \underline{\underline{g}}^\mu = \text{grad } \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{L}} . \end{aligned} \quad (2.17)$$

In Gl. ( 2.17 ) ist  $v^\alpha|_\mu = v^\alpha_{\cdot\mu} + v^\gamma \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha$  die kovariante Ableitung des Geschwindigkeitsvektors . Sie definiert den Geschwindigkeitsgradienten  $\underline{\underline{L}}$  , der sich in einen symmetrischen Anteil und einen antimetrischen Anteil zerlegen läßt

$$v^\alpha|_\beta = \frac{1}{2} ( v^\alpha|_\beta + v_\beta|^\alpha ) + \frac{1}{2} ( v^\alpha|_\beta - v_\beta|^\alpha ) = d_\beta^\alpha + w^\alpha_\beta . \quad (2.18)$$

Der symmetrische Anteil  $\underline{\underline{D}} = d_\beta^\alpha \underline{\underline{g}}_\alpha \underline{\underline{g}}^\beta$  wird als Verzerrungsgeschwindigkeitstensor und der antimetrische Anteil als Spintensor  $\underline{\underline{W}} = w^\alpha_\beta \underline{\underline{g}}_\alpha \underline{\underline{g}}^\beta$  bezeichnet . Aus Gl. ( 2.12 ) folgt :

$$\underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \underline{\underline{F}}^{-1} = \dot{\underline{\underline{F}}}_e \underline{\underline{F}}_e^{-1} + \underline{\underline{F}}_e \dot{\underline{\underline{F}}}_p \underline{\underline{F}}_p^{-1} \underline{\underline{F}}_e^{-1} . \quad (2.19)$$

Lee u.a. [ 4,8-10 ] haben gezeigt , daß bei finiten elastoplastischen Deformationen eine Entkopplung des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors  $\underline{\underline{D}}$  in einen elastischen Anteil  $\underline{\underline{D}}_{(e)}$  und einen inelastischen Anteil  $\underline{\underline{D}}_{(p)}$  , nur dann erfolgen kann , wenn die im rechten Term von Gl.( 2.19 ) enthaltene unbestimmte Rotation der Zwischenkonfiguration  $\underline{\underline{W}}$  eliminiert wird , da

$$\underline{\underline{D}} = \text{sym} \left\{ \dot{\underline{\underline{F}}}_e \underline{\underline{F}}_e^{-1} \right\} + \text{sym} \left\{ \underline{\underline{F}}_e \dot{\underline{\underline{D}}}_p^* \underline{\underline{F}}_e^{-1} \right\} + \text{sym} \left\{ \underline{\underline{F}}_e \dot{\underline{\underline{W}}}^* \underline{\underline{F}}_e^{-1} \right\} . \quad (2.20)$$

In der klassischen Plastizitätstheorie ist ein konstitutives Gesetz für den plastischen Spintensor  $\dot{\underline{\underline{W}}}^*$  nicht vorgesehen ( andere Ansätze siehe z.B. Dafalias [ 11 ] ) , so daß die beiden letzten Terme in Gl.( 2.20 ) nicht zur Definition der inelastischen Verzerrungsgeschwindigkeit herangezogen werden können . Diese Schwierigkeiten , die zum Teil dadurch begründet sind , daß die substantielle Ableitung raumbezogener Größen nicht objektiv , d.h. nicht invariant gegenüber überlagerten Starrkörperrotationen ist [ 12 ] , lassen sich durch eine Beschreibung in körperfesten Koordinaten umgehen . Lehmann benutzt anstelle von Gl.( 2.9 ) eine multiplikative Aufspaltung des Metriktransformationstensors  $q^i_k$  [ 13 , 14 ]

$$q_s^r = \overset{\circ}{g}^{rk} g_{ks} = \overset{\circ}{g}^{rm} \overset{*}{g}_{mn} \overset{*}{g}^{nl} g_{ls} = \underset{(p)}{q}^r_k \underset{(e)}{q}^k_s \quad , \quad (2.21)$$

und gelangt so zu einer additiven Aufspaltung der Verzerrungsgeschwindigkeit

$$d_s^r = \underset{(e)}{d}_s^r + \underset{(p)}{d}_s^r \quad (2.22)$$

( r , s kennzeichnen körperfeste Koordinaten )

Dies entspricht , bei Übergang zu raumfester Betrachtung , der Definition , die von Thermann/Raniecki [ 15 ] vorgeschlagen wird

$$\underline{D}_{(p)} = \text{sym} \{ \underline{F}_e \underline{L}^* \underline{F}_e^{-1} \} - \text{sym} \{ \underline{F}_e \underline{W} \underline{F}_e^{-1} \} = \text{sym} \{ \underline{F}_e \underline{D}^* \underline{F}_e^{-1} \} \quad , \quad (2.23)$$

und aus Gl. ( 2.18 ) folgt die additive Aufspaltung der raumbezogenen Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\underline{D} = \underline{D}_{(e)} + \underline{D}_{(p)} = \left( \underset{(e)}{d}_{\beta}^{\alpha} + \underset{(p)}{d}_{\beta}^{\alpha} \right) \underline{g}_{\alpha} \underline{g}^{\beta} \quad (2.24)$$

## 2.2 Zuordnung von Spannungs - und Verzerrungstensor

Das Längenquadrat eines infinitesimalen Linienelementes in der aktuellen Konfiguration ist durch das Skalarprodukt

$$ds^2 = d\underline{r} \cdot d\underline{r} = dx^{\alpha} dx^{\beta} g_{\alpha\beta} \quad (2.25)$$

gegeben . Der entsprechende Ausdruck im kräftefreien Ausgangszustand lautet

$$d\bar{s}^2 = d\bar{\underline{r}} \cdot d\bar{\underline{r}} = \underline{F}^{-1} d\underline{r} \cdot \underline{F}^{-1} d\underline{r} = d\underline{r} (\underline{F}^{-1})^T \cdot \underline{F}^{-1} d\underline{r} = d\underline{r} \underline{B}^{-1} d\underline{r} \quad , \quad (2.26)$$

wobei der linke Cauchy-Green Tensor  $\underline{B} = \underline{F} \underline{F}^T$  ein symmetrischer , objektiver , auf die aktuelle Konfiguration bezogener Tensor ist

$$\underline{B} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{\beta}} \overset{\circ}{g}^{\beta\mu} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \underline{g}_{\alpha} \underline{g}_{\rho} = B^{\alpha\beta} \underline{g}_{\alpha} \underline{g}_{\beta} \quad (2.27)$$

Subtrahiert man Gl. ( 2.26 ) von Gl. ( 2.25 ) , so erhält man als Maß für die Verzerrung zweier infinitesimal benachbarter Punkte

$$\frac{1}{2} ( ds^2 - ds_0^2 ) = \frac{1}{2} ( g_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}^{-1} ) dx^\alpha dx^\beta = e_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad ( 2.28 )$$

mit dem Almansi-Verzerrungstensor  $\underline{\underline{E}} = e_{\alpha\beta} \underline{\underline{g}}^\alpha \underline{\underline{g}}^\beta$  . Analog läßt sich mit

$$ds^2 = d\underline{\underline{r}}_0^T \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} d\underline{\underline{r}}_0 = d\underline{\underline{r}}_0^T \underline{\underline{C}} d\underline{\underline{r}}_0 \quad ( 2.29 )$$

und dem rechten Cauchy-Green Tensor  $\underline{\underline{C}}$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} g_{\mu\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\beta} \underline{\underline{g}}_0^\alpha \underline{\underline{g}}_0^\beta = C_{\alpha\beta} \underline{\underline{g}}_0^\alpha \underline{\underline{g}}_0^\beta \quad ( 2.30 )$$

ein Verzerrungstensor definieren , der auf die Ausgangskonfiguration bezogen ist und als Greenscher Verzerrungstensor

$$\underline{\underline{E}}_0 = e_{\alpha\beta} \underline{\underline{g}}_0^\alpha \underline{\underline{g}}_0^\beta = \frac{1}{2} ( C_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} ) \underline{\underline{g}}_0^\alpha \underline{\underline{g}}_0^\beta \quad ( 2.31 )$$

bezeichnet wird . Durch Anwendung des polaren Zerlegungstheorems auf den Deformationsgradienten  $\underline{\underline{F}}$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{R}} \quad , \quad ( 2.32 )$$

mit dem eigentlich orthogonalen Drehtensor  $\underline{\underline{R}}$  ( $\det \underline{\underline{R}} = 1$ ) gelten auch die Zusammenhänge

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^2 \quad \text{und} \quad \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{V}}^2 \quad ( 2.33 )$$

Im Hinblick auf thermodynamische Überlegungen ( siehe Kapitel 6 ) wird ein weiterer Verzerrungstensor  $\underline{\underline{E}}_H$  eingeführt , der zur Klasse der logarithmischen oder Hencky-Verzerrungstensoren gehört

$$\underline{\underline{E}}_H = \frac{1}{2} \ln ( \underline{\underline{V}}^2 ) = e_{(H)\alpha\beta} \underline{\underline{g}}_0^\alpha \underline{\underline{g}}_0^\beta \quad ( 2.34 )$$

und eine isotrope Tensorfunktion darstellt [ 16 ]. In bezug auf die Wahl von Spannungs- und Verzerrungstensor gilt eine bestimmte Zuordnungsvorschrift , die durch die Verzerungsleistung gegeben ist . Substantielle Ableitung des Linienelementvektors  $d\underline{\underline{r}}$  ergibt

$$d\dot{\underline{r}} = \frac{D}{dt} (dx^\alpha \underline{g}_\alpha) = dv^\alpha \underline{g}_\alpha + dx^\alpha v^\rho \underline{g}_{\alpha,\rho} \quad (2.35)$$

$$= dv^\alpha \underline{g}_\alpha + v^\rho \Gamma_{\rho\alpha}^\beta dx^\alpha \underline{g}_\beta = (v^\alpha{}_{,\beta} + v^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha) dx^\beta \underline{g}_\alpha = v^\alpha{}_{|\beta} dx^\beta \underline{g}_\alpha .$$

Multipliziert man skalar mit  $2 d\underline{r}$ , erhält man

$$\begin{aligned} (ds^2)^\circ &= 2 d\underline{r} \cdot d\dot{\underline{r}} = 2 v^\alpha{}_{|\beta} dx^\beta dx^\mu g_{\alpha\mu} = 2 v_\mu{}_{|\beta} dx^\mu dx^\beta \\ &= 2 d_{\mu\beta} dx^\mu dx^\beta \end{aligned} \quad (2.36)$$

und es wird deutlich, daß der in Gl. ( 2.18 ) als symmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten  $\underline{L}$  eingeführte Tensor  $\underline{D}$  die reine Streckgeschwindigkeit eines Linienelements beschreibt, die invariant gegenüber überlagerten Starrkörperrotationen ist, was für die substantielle Ableitung der oben definierten Verzerrungstensoren nicht zutrifft. Somit erhält man aus dem Skalarprodukt

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho} \underline{\sigma} : \underline{D} \quad (2.37)$$

mit der momentanen Dichte  $\rho$  und dem Cauchy-Spannungstensor  $\underline{\sigma}$ , der das aktuelle Flächenelement  $d\underline{A}$  auf den aktuellen Kraftvektor  $d\underline{f}$  gemäß

$$d\underline{f} = \underline{\sigma} \cdot d\underline{A} \quad (2.38)$$

abbildet, einen Ausdruck für die Leistung, die durch die Deformation benötigt wird. Spannungs- und Verzerrungstensoren, die – bei geeignet gewählter Zeitableitung des Verzerrungstensors – die Verzerrungsleistung  $\dot{w}$  ergeben, nennt man einander zugeordnet. Eine Zusammenstellung und Diskussion derartiger konjugierter Paare ist in [ 17, 18 ] zu finden. Wendet man die objektive Jaumann-Ableitung auf den Hencky-Verzerrungstensor an

$$\overset{\nabla}{\underline{E}}_H = \dot{\underline{E}}_H - \underline{W} \underline{E}_H + \underline{E}_H \underline{W} \quad (2.39)$$

und multipliziert mit dem Cauchy-Spannungstensor, so gilt bei isotropen Materialien auch

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho} \underline{\sigma} : \underline{D} = \frac{1}{\rho} \underline{\sigma} : \overset{\nabla}{\underline{E}}_H \quad (2.40)$$

Weiterhin ist es aus thermodynamischen Gründen vorteilhaft, den Kirchhoff-Spannungstensor oder gewichteten Cauchy-Spannungstensor  $\underline{S}$  einzuführen

$$\underline{S} = J \underline{\sigma} \quad (2.41)$$

mit der Funktionaldeterminante  $J$

$$J = \frac{dV}{dV_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = \left| F_{\beta}^{\alpha} \right| \frac{\sqrt{|g_{\alpha\beta}|}}{\sqrt{|g_{\alpha\beta}^0|}} \quad (2.42)$$

Der Deviator des Kirchhoff-Spannungstensors  $\underline{\underline{S}}$  ist

$$\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{S}} - \frac{1}{3} \text{Sp} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{1}} = t_{\beta}^{\alpha} g_{\alpha} g_{\beta} \quad (2.43)$$

und mit dem Deviator des Cauchy-Spannungstensors  $\underline{\underline{Q}}$

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{Q}} - \frac{1}{3} \text{Sp} \underline{\underline{Q}} \underline{\underline{1}} = \tau_{\beta}^{\alpha} g_{\alpha} g_{\beta} \quad (2.44)$$

gilt auch

$$\underline{\underline{t}} = J \underline{\underline{\tau}} \quad (2.45)$$

Damit kann die Verzerrungsleistung auf das konstante Ausgangsvolumen bezogen werden

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{D}} = \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{E}}_H \quad (2.46)$$

Die plastische Verzerrungsleistung ist

$$\dot{w}_p = \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{D}}_{(p)} = \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{t}} : \underline{\underline{D}}_{(p)} \quad (2.47)$$

da der hydrostatische Spannungszustand keinen Beitrag zur plastischen Verzerrungsleistung liefert. Bei metallischen Werkstoffen kann in vielen Fällen die Dichteänderung vernachlässigt werden, da sie nur von den (kleinen) elastischen Formänderungen verursacht ist. Dann gilt

$$\underline{\underline{S}} \approx \underline{\underline{Q}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{t}} \approx \underline{\underline{\tau}}$$

### 2.3 Anwendung auf dünnwandige Rohre unter Axial - und Torsionslast

Die Beschreibung des dünnwandigen Rohres unter kombinierter Axial - und Torsionsbeanspruchung erfolgt in Zylinderkoordinaten  $x^\alpha$  mit  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \varphi$ ,  $x^3 = z$ . Der Übergang zu kartesischen Koordinaten geschieht durch die Abbildung

$$z^1 = r \cos \varphi, \quad z^2 = r \sin \varphi, \quad z^3 = z \quad (2.48)$$

so daß der Ortsvektor  $\underline{r}$  dargestellt werden kann als  $\underline{r} = r \cos \varphi \underline{e}_1 + r \sin \varphi \underline{e}_2 + z \underline{e}_3$ . Aus Gl. (2.4) folgen Basisvektoren und Metrik zu

$$\begin{aligned} \underline{g}_1 &= \frac{\partial \underline{r}}{\partial x^1} = \cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \varphi \underline{e}_2 \\ \underline{g}_2 &= \frac{\partial \underline{r}}{\partial x^2} = -r \sin \varphi \underline{e}_1 + r \cos \varphi \underline{e}_2 \\ \underline{g}_3 &= \frac{\partial \underline{r}}{\partial x^3} = \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad g^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

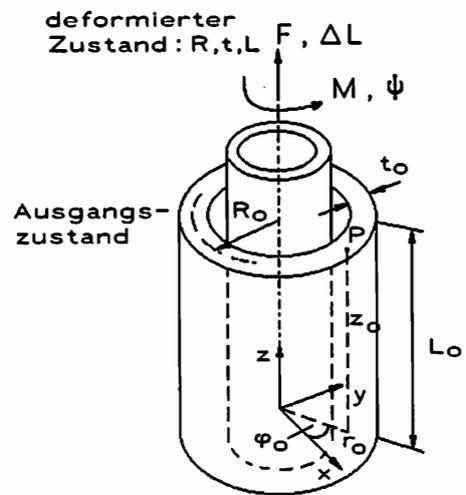


Abb. 2.3 Die Deformation des dünnwandigen Rohres

mit den einzig nicht verschwindenden Christoffelsymbolen  $\Gamma_{22}^1 = -r$ ,  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = 1/r$ .

Die Deformation des dünnwandigen Rohres ist bereits in früheren Arbeiten ausführlich behandelt worden [ 19,20 ]. Unter kombinierter Beanspruchung durch Axialkraft und Torsionsmoment verforme sich der Körper wie in Abb.2.3 dargestellt. Ist L die aktuelle Länge des Zylinders,  $\psi$  die absolute Verdrehung des Endquerschnitts, t die aktuelle Wandstärke und  $R = (R_a + R_i) / 2$  der mittlere Radius, und sind r,  $\varphi$ , z die Koordinaten eines beliebigen Punktes P in der verformten Lage und  $r_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $z_0$  die entsprechenden Koordinaten des gleichen Punktes  $P_0$  in der unverformten Ausgangslage, so gilt

$$\frac{r - R}{r_0 - R_0} = \frac{t}{t_0}, \quad \varphi - \varphi_0 = \frac{\psi}{L} z, \quad z = \frac{L}{L_0} z_0 \quad (2.50)$$

Dabei sind  $R_0$ ,  $t_0$ ,  $L_0$  die Abmessungen im Ausgangszustand und es wurde vorausgesetzt, daß die Deformation homogen ist (Radien bleiben gerade, Querschnittsflächen eben und kreiszylindrisch [ 93 ]). Der Zusammenhang zwischen aktuellen Koordinaten  $x^\alpha$  und Anfangskoordinaten  $\overset{0}{x}^\alpha$  in Gl. (2.6) läßt sich dann darstellen als

$$r = \frac{t}{t_0} (r_0 - R_0) + R$$

$$\varphi = \psi \frac{z_0}{L_0} + \varphi_0 \quad (2.51)$$

$$z = \frac{L}{L_0} z_0$$

Damit lassen sich Deformationsgradient  $\underline{F} = F^\alpha_\beta \underline{g}^\alpha \underline{g}^\beta$ , Almansi-Verzerrungstensor  $\underline{E} = e_{\alpha\beta} \underline{g}^\alpha \underline{g}^\beta$  und der Greensche Verzerrungstensor  $\underline{\overset{0}{E}} = \overset{0}{e}_{\alpha\beta} \overset{0}{g}^\alpha \overset{0}{g}^\beta$  berechnen

$$F^\alpha_\beta = \begin{vmatrix} \frac{t}{t_0} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\psi}{L_0} \\ 0 & 0 & \frac{L}{L_0} \end{vmatrix}, \quad e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 - \left(\frac{t_0}{t}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right) & r^2 \frac{\psi}{L} \\ 0 & r^2 \frac{\psi}{L} & 1 - \left(\frac{\psi r_0}{L}\right)^2 - \left(\frac{L_0}{L}\right)^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{0}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \left(\frac{t}{t_0}\right)^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \left(\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right) & r^2 \frac{\psi}{L_0} \\ 0 & r^2 \frac{\psi}{L_0} & \left(\frac{\psi r}{L_0}\right)^2 + \left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - 1 \end{vmatrix} \quad (2.52)$$

Für kleine Deformationen sind Anfangs- und Endkonfiguration näherungsweise gleich und es gilt  $e_{\alpha\beta} \approx \overset{0}{e}_{\alpha\beta} \approx e_{(H)\alpha\beta}$ .

Das Geschwindigkeitsfeld erhält man durch substantielle Ableitung nach der Zeit von Gl. (2.51).

$$v^1 = \frac{\partial x^1}{\partial t} \Big|_{x^0} = \frac{\dot{t}}{t} (r - R) + \dot{R}$$

$$v^2 = \frac{\partial x^2}{\partial t} \Big|_{x^0} = \dot{\psi} \frac{z}{L} \quad (2.53)$$

$$v^3 = \frac{\partial x^3}{\partial t} \Big|_{x^0} = \frac{\dot{L}}{L} z$$

Die Komponenten des Geschwindigkeitsgradienten  $\underline{\dot{L}}$ , der Verzerrungsgeschwindigkeit  $\underline{\dot{D}}$  und des Spintensors  $\underline{W}$  ( Gl. ( 2.18 ) ) sind

$$v^\alpha|_\beta = \begin{vmatrix} \dot{t} & -R\dot{\psi}\frac{z}{L} & 0 \\ \frac{\dot{\psi}z}{RL} & \frac{\dot{R}}{R} & \frac{\dot{\psi}}{L} \\ 0 & 0 & \frac{\dot{L}}{L} \end{vmatrix},$$

$$d^\alpha_\beta = \begin{vmatrix} \frac{\dot{t}}{t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{R}}{R} & \frac{1}{2}\frac{\dot{\psi}}{L} \\ 0 & \frac{1}{2}R^2\frac{\dot{\psi}}{L} & \frac{\dot{L}}{L} \end{vmatrix}, \quad w^\alpha_\beta = \begin{vmatrix} 0 & -R\dot{\psi}\frac{z}{L} & 0 \\ \frac{\dot{\psi}z}{RL} & 0 & \frac{1}{2}\frac{\dot{\psi}}{L} \\ 0 & -\frac{R\dot{\psi}}{2L} & 0 \end{vmatrix}. \quad ( 2.54 )$$

wobei  $R$  der mittlere Radius ist und die Differenz  $r - R$  vernachlässigt wird .

Der Spannungszustand ist mit der bei dünnwandigen Rohren üblichen Vernachlässigung der Radialspannung – aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt , daß dann auch die Umfangsspannung verschwindet – und den oben getroffenen Annahmen bezüglich der Deformation durch die Axialspannung  $\sigma_z^z$  und die Schubspannung  $\sigma_z^\varphi$  ( ebener Spannungszustand ) gekennzeichnet . Mit den physikalischen Komponenten  $\sigma$  und  $\tau$

$$\sigma = \sigma_z^z \sqrt{g_{33}} \sqrt{g^{33}} = \sigma_z^z \quad ( 2.55 )$$

$$\tau = \sigma_z^\varphi \sqrt{g_{22}} \sqrt{g^{33}} = \sigma_z^\varphi R$$

hat der Cauchy - Spannungstensor und der dazugehörige Deviator in gemischtvarianter Darstellung folgende Form

$$\sigma^\alpha_\beta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau/R \\ 0 & \tau R & \sigma \end{vmatrix}, \quad \tau^\alpha_\beta = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & \tau/R \\ 0 & \tau R & \frac{2}{3}\sigma \end{vmatrix}. \quad ( 2.56 )$$

Substantielle Ableitung

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x^p} (\sigma_{\beta}^{\alpha}) g_{\alpha} g^{\beta} + \sigma_{\beta}^{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x^p} (g_{\alpha} g^{\beta}) \quad (2.57)$$

führt mit

$$\dot{g}_{\alpha} = v^{\mu} \Gamma_{\mu\alpha} g_{\delta} = (v^{\delta} |_{\alpha} - v^{\delta, \alpha}) g_{\delta} \quad \text{und} \quad (2.58)$$

$$\dot{g}^{\alpha\beta} = -v^{\mu} \Gamma_{\mu\delta}^{\beta} g^{\delta} = (v^{\beta, \delta} - v^{\beta} |_{\delta}) g^{\delta} \quad \text{auf}$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \left( \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{x^p} \sigma_{\beta}^{\alpha} + \sigma_{\beta}^{\mu} (v^{\alpha} |_{\mu} - v^{\alpha, \mu}) - \sigma_{\mu}^{\alpha} (v^{\mu} |_{\beta} - v^{\mu, \beta}) \right) g_{\alpha} g^{\beta} \\ &= \dot{\sigma}_{\beta}^{\alpha} g_{\alpha} g^{\beta} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Die Maßzahlen des Tensors der substantiellen Zeitableitung sind

$$\dot{\sigma}_{\beta}^{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\tau \dot{\psi} \frac{z}{L} \\ 0 & 0 & \dot{\tau} / R \\ -\tau \dot{\psi} \frac{z}{L} & \dot{\tau} R & \dot{\sigma} \end{vmatrix} \quad (2.60)$$

Wendet man nun die Jaumann-Ableitung an

$$\overset{\nabla}{\sigma} = \left( \dot{\sigma}_{\beta}^{\alpha} - w^{\alpha}_{\nu} \sigma_{\beta}^{\nu} + w^{\nu}_{\beta} \sigma_{\nu}^{\alpha} \right) g_{\alpha} g^{\beta} \quad (2.61)$$

so erhält man den Tensor

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{\beta}^{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R \tau \frac{\dot{\psi}}{L} & \frac{\dot{\tau}}{R} - \sigma \frac{\dot{\psi}}{2L} \\ 0 & \dot{\tau} R - \sigma R^2 \frac{\dot{\psi}}{2L} & \dot{\sigma} + \tau R \frac{\dot{\psi}}{L} \end{vmatrix} \quad (2.62)$$

der einen objektiven Spannungsfluß darstellt und somit den bei der Formulierung konsti-

tativer Gleichungen vorausgesetzten Invarianzbedingungen genügt . Der Deviator des Cauchy - Spannungsflusses ist gegeben durch

$$\tau_{\beta}^{\alpha} = \sigma_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{3} \dot{\sigma}^{\nu} \delta_{\beta}^{\alpha} = \begin{vmatrix} -\frac{\dot{\sigma}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{\sigma}}{3} - R \tau \frac{\dot{\psi}}{L} & \frac{\dot{\tau}}{R} - \sigma \frac{\dot{\psi}}{2L} \\ 0 & \dot{\tau} R - \sigma \frac{R^2 \dot{\psi}}{2L} & \frac{2}{3} \dot{\sigma} + \tau \frac{R \dot{\psi}}{L} \end{vmatrix} \quad (2.63)$$

Um die Aufstellung der Tensoren , die für die konstitutiven Gleichungen benötigt werden , zu vervollständigen , sei an dieser Stelle schon der kinematische Verfestigungstensor oder Mikrospannungstensor  $\underline{\alpha}$  eingeführt . Er ist ein symmetrischer, deviatorischer Tensor zweiter Stufe , der in der v. Mises  $J_2$ - Theorie den Mittelpunkt der Fließfläche im Spannungsraum festlegt . Auf seine Bedeutung wird in den folgenden Kapiteln noch ausführlich eingegangen .

$$\underline{\alpha} = a_{\gamma}^{\beta} \underline{g}_{\beta} \underline{g}^{\gamma} \quad , \quad a_{\gamma}^{\beta} = \begin{vmatrix} -(a_{\varphi} + a_z) & 0 & 0 \\ 0 & a_{\varphi} & a_{\varphi z} / R \\ 0 & R a_{\varphi z} & a_z \end{vmatrix} \quad (2.64)$$

Anwendung der Jaumann - Ableitung führt auf

$$\nabla_a^{\beta} = \begin{vmatrix} -(\dot{a}_z + \dot{a}_{\varphi}) & 0 & 0 \\ 0 & \dot{a}_{\varphi} - \frac{\dot{\psi}}{L} R a_{\varphi z} & \frac{1}{R} (\dot{a}_{\varphi z} - \frac{1}{2} R \frac{\dot{\psi}}{L} (a_z - a_{\varphi})) \\ 0 & R (\dot{a}_{\varphi z} - \frac{1}{2} R \frac{\dot{\psi}}{L} (a_z - a_{\varphi})) & \dot{a}_z + \frac{\dot{\psi}}{L} R a_{\varphi z} \end{vmatrix}$$

$$\dot{\underline{\alpha}} = \nabla_a^{\beta} \underline{g}_{\beta} \underline{g}^{\gamma} \quad (2.65)$$

### 3. Experimentelle Ergebnisse einaxialer und zweiaxialer Zug/Druck- und Torsionsversuche

#### 3.1 Allgemeines

Es ist das Ziel dieses Kapitels, die Entwicklung der kinematischen und isotropen Verfestigung bei verschiedenen einaxialen und zweiaxialen Belastungsprogrammen experimentell zu ermitteln. Unter „Verfestigung“ wird im allgemeinen das Anwachsen der Spannungen mit zunehmender plastischer Deformation verstanden. Dies gilt jedoch nur bei monotonen Prozessen. Entlastungen, Richtungswechsel und periodische Verformungen führen zu einem komplexen Materialverhalten, bei dem Ver- und Entfestigungsvorgänge in gegenseitige Wechselwirkung treten können. Um diese Zusammenhänge näher untersuchen zu können, liegt der Schwerpunkt der experimentellen Arbeit auf zyklischen Belastungsprozessen. Hier stellt sich aufgrund der Gleichmäßigkeit und Periodizität ein stationärer Zustand ein, der Schlußfolgerungen auf den Einfluß der Versuchsparameter wie z.B. Deformationsamplitude und Deformationspfad erlaubt.

Die Gesamtverfestigung wird vielfach im Rahmen eines idealisierten Modells in einen kinematischen und einen isotropen Anteil aufgespalten. Dabei ist vorausgesetzt, daß eine Fließbedingung gemäß Gl. (3.1) existiert

$$F = \text{Sp} [\underline{\underline{t}} - \underline{\underline{\alpha}}]^2 - k^2 = 0 \quad (3.1)$$

Im Vorgriff auf Kapitel 5, in dem die konstitutiven Gleichungen besprochen werden, soll hier schon angedeutet werden, daß der Tensor  $\underline{\underline{\alpha}}$  (s. Gl. (2.42)) die kinematische Verfestigung und  $k$  die isotrope Verfestigung beschreibt. Kapitel 4 enthält zusätzlich eine physikalische Interpretation dieser Größen.

Im folgenden wird zunächst die experimentelle Einrichtung und das Versuchsprogramm beschrieben. Anschließend wird die Methode zur Bestimmung der Verfestigungsanteile beschrieben. Danach wird in den Abschnitten 3.4 und 3.5 auf die wichtigsten Phänomene bei einaxialen und zweiaxialen Zug/Druck- und Torsionsversuchen eingegangen.

#### 3.2 Experimentelle Einrichtung

Die Versuche wurden auf der servo-hydraulischen Universalwerkstoffprüfmaschine<sup>1)</sup> (SCHENCK Model N<sup>o</sup> POZ 505) des Lehrstuhls durchgeführt<sup>2)</sup>, die eine kombinierte Zug/Druck- und Torsionsbelastung von max.  $\pm 160$  KN bzw.  $\pm 1000$  Nm zuläßt. Abb.3.1 zeigt eine schematische Darstellung der mit der Prüfmaschine verbundenen Meß- und Regeleinrichtungen. Kernstück der Anlage ist ein 12 Bit Prozeßrechner vom Typ HP1000<sup>1)</sup> mit 40 Analogeingängen und 8 Analogausgängen. Die Verarbeitungsfrequenz beträgt max. 55 KHz mit einer Auflösung im größten Meßbereich ( $\pm 10V$ ) von 5 mV. Die Versuche wurden ausschließlich weggesteuert durchgeführt. Die vom Rechner ermittelten Signale werden im D/A Konverter in analoge

1) mit Mitteln der Volkswagenstiftung beschafft

2) Meinen Kollegen Dr.-Ing. H.A.Lauert, Dipl.-Ing. G.Obermüller, Dipl.-Ing.Ch.Scholz, Herrn P.Grundmann und Herrn U. Böhme danke ich für die Unterstützung.

Sollwerte für den Hub  $s$  des Axialzylinders und den Drehwinkel  $\psi$  ( $\alpha$  in Abb. 3.1) des Torsionszylinders umgewandelt. In einer geschlossenen Regelstrecke, bestehend aus zwei PID-Reglern, Hydraulikaggregat, induktiven Weggebern einschließlich Verstärker, werden Soll- und Istwert ständig angegeglichen. Der aus den momentanen Werten für Kraft  $F$ , Moment  $M$ , Hub  $s$  und Drehwinkel  $\psi$  bestehende Datensatz wird dann nach Umwandlung im A/D Konverter dem Rechner zur weiteren Verarbeitung (Terminal, Plattenspeicher, Plotter) zugeführt. Hierbei sind verschiedene Störeinflüsse, die die Auswertung der Meßwerte beeinträchtigen können, zu berücksichtigen. Zum einen ist durch die begrenzte Auflösung die Meßgenauigkeit auf  $\approx 2 \cdot 10^{-4}$  (bezogen auf eine Meßlänge  $L_0 = 100 \text{ mm}$ ) beschränkt. Dies wird bei der Auswertung dadurch berücksichtigt, daß anstelle der Meßwerte Spline-Ausgleichsfunktionen verwendet werden. Zum anderen ist aus den vorliegenden Verschiebungen  $s$ ,  $\psi$  nur indirekt auf die Verformung der Probe bzw. der theoretischen Meßlänge zu schließen,

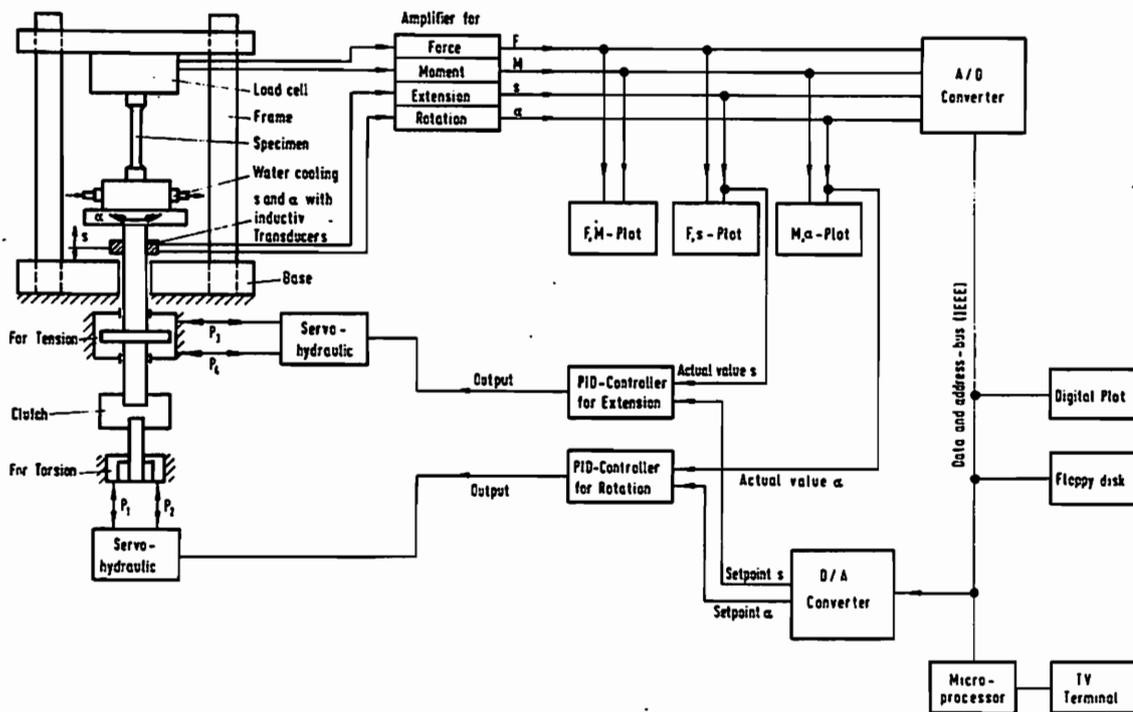


Abb. 3.1 Schematische Darstellung der Versuchseinrichtung

da die Meßwerte der induktiven Weggeber, die den Hub und die Verdrehung des unteren Einspannkopfes registrieren, durch die elastischen Verformungen der Maschine ( Traverse ), Einspannung und Probenradien verfälscht sind. Dabei sind die Störeinflüsse bei Zug/Druckversuchen wegen der im Vergleich zur Torsion relativ geringen Maschinensteifigkeit am größten. Es wurden deshalb zunächst Vorversuche mit einem Präzisionsextensometer ( Empfindlichkeit  $1 \frac{mV}{V}$  ), der auf der Probenoberfläche befestigt ist und die axiale Dehnung der Probe mißt, durchgeführt, um zu überprüfen, in wie weit der Maschinenweggeber zur Dehnungsmessung verwendet werden kann. Abb. 3.2 zeigt das Ergebnis eines derartigen Kontrollversuchs für einen geschlossenen Zyklus. Man erkennt, daß Abweichungen aufgrund der zusätzlichen elastischen Verformungen beim Maschinenweggeber-signal auftreten, die aber korrigiert werden können, indem man die Gesamtdeformation aufspaltet in

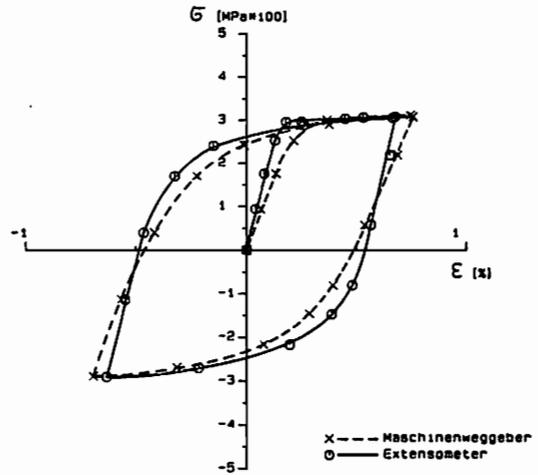


Abb.3.2 Vergleich der Maschinenweggeberanzeige mit dem Extensometersignal beim Zug/Druckversuch

$$\Delta s = \epsilon L_0 + \frac{\Delta F}{C_A^*} \quad (3.2)$$

$$\Delta \psi = \gamma \frac{L_0}{R_0} + \frac{\Delta M}{C_T^*}$$

wobei  $\epsilon$ ,  $\gamma$  Dehnung bzw. Gleitung der Probe und  $C_A^*$ ,  $C_T^*$  die axiale bzw. azimutale Maschinensteifigkeiten sind, die bei bekanntem Elastizitätsmodul und Gleitmodul ( $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $G = 80 \text{ GPa}$ ) und gemessener Gesamtsteifigkeit  $C_A$ ,  $C_T$  eliminiert werden können

$$\frac{1}{C_A^*} = \frac{1}{C_A} - \frac{L}{EA} \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{C_T^*} = \frac{1}{C_T} - \frac{L}{W_T G R}$$

Dabei ist  $A = \frac{\pi}{4} (d_a^2 - d_i^2)$  die aktuelle Fläche und  $W_T = \frac{\pi}{16 d_a} (d_a^4 - d_i^4)$  das Torsionswiderstandsmoment. Leider stand ein zwei axialer Extensometer nicht zur Verfügung, so daß die Verdrehung der Probe nicht direkt, sondern nur mit Hilfe des Rechners gemäß Gl. (3.2) ermittelt werden kann. Dies führt vor allem bei zwei axialen Versuchen, bei denen die Axialkraft und das Torsionsmoment nicht unabhängig sind, zu Abweichungen des errechneten Belastungsweges vom tatsächlich gefahrenen Belastungsweg. Es wird jedoch davon ausgegangen, daß dieser Umstand im Hinblick auf die Interpretation der Meßergebnisse keine entscheidenden Auswirkungen hat. Eine Überprüfung der Maschinenanzeige bei Torsion kann zudem auf indirekte Weise durchgeführt werden. Die v. Mises Fließbedingung, die bei metallischen Werkstoffen i. A. gut erfüllt ist, besagt, daß die Schubfließspannung  $\tau_f$  um den Faktor  $1/\sqrt{3}$  kleiner ist, als die Zugfließspannung  $\sigma_f$ . In Abb.3.3 ist der stationäre Zyklus ( $n \geq 10$ ) eines zyklischen Tor-

sionsversuchs und eines zyklischen Zug/ Druckversuchs aufgetragen . Man erkennt , daß die effektive gesättigte Spannungsamplitude des Torsionsversuchs  $\sqrt{3} \tau$  nahezu identisch mit der Axialspannung  $\sigma$  ist. Weitere Versuche haben gezeigt, daß Zug- und Torsionsversuch bis zu einer effektiven Dehnungsamplitude von  $\Delta \varepsilon_p = \Delta \gamma_p / \sqrt{3} \leq 5\%$  äquivalent sind . Bei größeren Verformungen machen sich Textureinflüsse bemerkbar und die Torsionsfließspannung ist merklich kleiner als die Zugfließspannung. Damit ist aber auch die Gewißheit gegeben, daß aus dem Maschinenweggebersignal des Gesamtverdrehwinkels  $\psi$  auf die Scherung der Probe geschlossen werden kann , da der axiale Weggeber mit dem Extensometer überprüfbar ist ( siehe Abb. 3.2). Die Darstellung der experimentellen Ergebnisse erfolgt daher auch entweder im  $\sigma, \varepsilon$  bzw.  $\sqrt{3} \tau, \gamma / \sqrt{3}$  Diagramm oder unter Benutzung der effektiven Spannung und effektiven Dehnung  $\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$  bzw.  $\bar{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma^2/3}$ , mit der auf die aktuelle Fläche bezogenen Axialspannung ( unter Annahme inkompressibler Deformation )

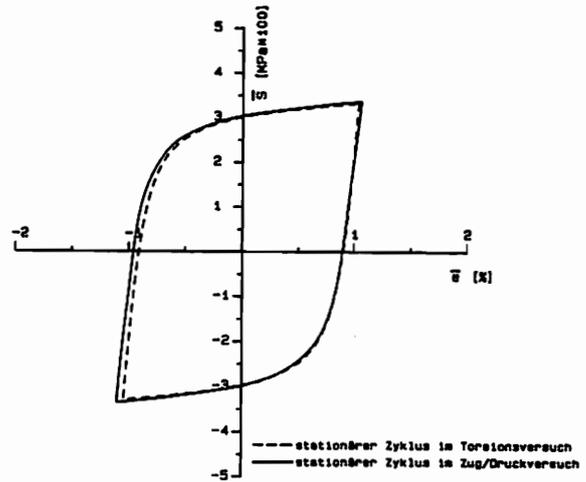


Abb.3.3 Stationärer Zyklus beim Torsionsversuch im Vergleich zum Zug/Druckversuch

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F A_0}{A_0 A} = \frac{F L}{A_0 L_0} \quad (3.4)$$

der am Außendurchmesser wirkenden Schubspannung

$$\tau = \frac{M}{W_T} = \frac{16 M d_a}{\pi (d_a^4 - d_i^4)} \quad (3.5)$$

und dem Green-Lagrange Dehnungsmaß ( vgl.Gl. (2.39) )

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad , \quad \gamma = \frac{\Delta \psi R_0}{L_0} \quad (3.6)$$

Alle Versuche wurden bei Raumtemperatur ( 26 °C ) unter quasistatischen Bedingungen (  $\dot{\varepsilon} \approx 5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{s}$  ) durchgeführt . Das verwendete Material , ein unlegierter , ferritischer Edelstahl mit 0.15 % Kohlenstoffanteil ( Ck 15 ) , zeichnet sich durch relativ hohe Duktilität aus . Die chemische Zusammensetzung und Probenform ist Abb. 3.4 zu entnehmen . Zur Beseitigung möglicher , durch den Herstellungsprozeß bedingter Vorverfestigung bzw.Texturen wurden die Proben bei 900 °C für zwei Stunden in Vakuum normalisiert .

C	Si	Mn	S	Cr	Cu
0.15	0.29	0.39	0.012	0.026	0.215

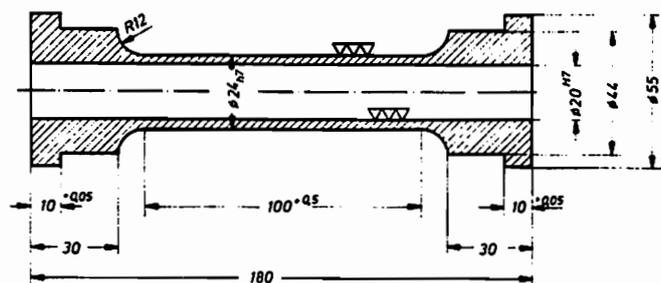


Abb.3.4 Chemische Zusammensetzung in Gew.% und Probenform ( Ck 15 )

### 3.3 Versuchsprogramm

Das Versuchsprogramm umfaßt die Abschnitte A , B und C . Block A enthält zyklische , einaxiale Zug/Druck- und Torsionsversuche mit konstanter plastischer Dehnungsamplitude  $\Delta \varepsilon_p / 2$  ( Tabelle 3.1 ) .

Versuch A1 dient zur qualitativen Bestimmung der Funktionsverläufe  $\alpha(\varepsilon_p)$  und  $\sqrt{3/2} k(\varepsilon_p)$  . Die Versuche A2 , ... , A5 sind zyklische Zug/Druckversuche, die zum Ziel haben , die Entwicklung der isotropen und kinematischen bei wechselnden Dehnungsamplituden zu klären . Dabei ist der Dehnungsbereich wegen der Beulneigung bei Druckbelastung auf 3% beschränkt . Die Zyklenzahl liegt zwischen 10 und 20 Zyklen pro Amplitude . Das Materialverhalten kann dann näherungsweise als stationär angesehen werden . Die Versuche A6 , ... , A9 enthalten Belastungsabschnitte mit mittleren Dehnungen ( Vordehnung )  $\varepsilon_m > 0$  . Versuch A10 ist ein zyklischer Torsionsversuch mit positiver und negativer Vorverformung und A11 ist ein monotoner Zugversuch mit 18% maximaler Dehnung .

Block B und C sind den komplexen Belastungen , bei denen zweiaxiale Spannungszustände vorherrschen , zugeordnet . Während im Abschnitt B der Einfluß des Deformationspfades untersucht wird , ist Abschnitt C dem Einfluß der Deformationsamplitude gewidmet . Die Darstellungsformen der komplexen Belastungswege sind in Tabelle ( 3.2 ) eingezeichnet .

Im Unterschied zu den einaxialen Versuchen wird nun die Gesamtdeformationsamplitude  $\Delta \tilde{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma^2/3}$  bzw. die axiale Amplitude  $\Delta \varepsilon$  konstant gehalten . Der radiale Dehnungsweg B1 ist dadurch gekennzeichnet , daß der normalisierte Dehnungsvektor  $( \varepsilon , \gamma/\sqrt{3} )$  ständig auf der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten der Dehnungsebene liegt ( Tab. 3.2 ) . Die dazugehörigen Phasenverläufe sind synchron ( phasengleich , " in-phase " ) und die axiale Phase ist identisch mit der Scherphase .

Die komplexen Belastungswege B2 und B3 haben in der normalisierten Dehnungsebene die Form eines Quadrats bzw. eines Kreises . Hier sind die Phasenverläufe für Dehnung und Scherung gleich , aber mit einem konstanten Phasenabstand , der  $90^\circ$  beträgt , versehen . Sie werden als phasenversetzt bezeichnet ( "Out-of-phase" ).

Bei Versuch B4 und C3 ( dreieckförmiger Dehnungsweg ) liegen zwei unterschiedliche Phasen vor , denn die axiale Phase ist identisch mit Versuch B1 und die azimutale Phase mit Versuch B2 . Der Winkel , den ein Schenkel mit der Horizontalen einschließt , beträgt in Versuch B4  $60^\circ$  und in Versuch C3  $45^\circ$  . Bei Versuch B2 und B3 wird zunächst axial bis zum Maximalwert belastet und anschließend der Deformationsweg linksläufig entsprechend der eingezeichneten Pfeilrichtung durchlaufen .

Einaxiales Versuchsprogramm		
<p style="text-align: center;"> <math>\varepsilon_p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}</math>  <math>\Delta \varepsilon_p = \text{konst.}</math> </p>		
<b>Stahl Ck 15 , <math>d_a = 26</math> , <math>d_l = 20</math> , <math>L_o = 100</math></b>		
Versuch	Bezeichnung	$\Delta \varepsilon_p / 2$ [%]
A1	stationärer Stufentest	1.0
A2	Zyklischer Zug/Druckversuch mit zunehmender Dehnungsamplitude	0.9 , 1.2 , 1.5
A3	dto.	0.5 , 0.8 , 1.1 , 1.4
A4	Zyklischer Zug/Druckversuch mit abnehmender Dehnungsamplitude	1.2 , 0.9 , 0.6 0.3 , 0.15
A5	Zyklischer Zug/Druckversuch mit wechselnder Dehnungsamplitude	0.15 , 0.9 , 0.3 , 1.2
A6	Zyklischer Zug/Druckversuch mit Vordehnung , anwachsende Ampl.	0.3 , 0.6 , 0.9
A7	Zyklischer Zug/Druckversuch mit Vordehnung , abnehmende Ampl.	0.9 , 0.6 , 0.3
A8	dto.	0.9 , 0.6 , 0.3
A9	Zyklischer Zug/Druckversuch mit Vordehnung , zunehmende Ampl.	0.9 , 1.5
A10	Zyklischer Torsionsversuch mit positiver und neg. Vorverformung	$\Delta \gamma_p / 2\sqrt{3}$ 0.9 , 1.5
A11	Monotoner Zugversuch	

Tab. 3.1 Übersicht über das einaxiale Versuchsprogramm , Block A , Zug/Druckversuche A1 - A9 , A10 , Torsionsversuch A11

Zweiachsiges Zug/Druck- und Torsionsversuche, Stahl Ck15		
Deformation der Probe $\epsilon = \frac{1}{L_0} \left[ \Delta s - \frac{\Delta F}{C_A^*} \right] ; C_A^* = 330\,000 \frac{N}{mm}$ $\gamma = \frac{R_0}{L_0} \left[ \Delta \psi - \frac{\Delta M}{C_T^*} \right] ; C_T^* = 80\,000 \frac{Nm}{rad}$		
Versuch	Darstellung	Phasenverlauf
B 1 Radialer Deformationspfad		
B 2 Rechteck		
B3, C1, C2 Kreis (*)		
B 4, C 3 Dreieck		

Tab. 3.2 Übersicht über das zweiachsiges Versuchsprogramm Block B und C. Der mit (\*) gekennzeichnete Versuch ist aus [ 39 ] in geänderter Darstellung entnommen

### 3.4 Einaxiale Versuche mit konstanter plastischer Dehnungsamplitude

#### 3.4.1 Bestimmung der Isotropen und kinematischen Verfestigung

Bei Materialien mit Arbeitsverfestigung und kontinuierlichem elasto-plastischen Übergang ist der Fließpunkt keine objektive und exakt bestimmbare Größe, sondern ist abhängig vom zugrunde liegenden Meßverfahren, von der Genauigkeit der eingesetzten Meßapparatur und häufig auch von einem willkürlich gewählten Parameter wie einer bestimmten zugelassenen plastischen Dehnung oder einer bestimmten Tangentenneigung. Ein Überblick über gebräuchliche Methoden ist in [ 21 ] zu finden.

Um den Einfluß des Meßfehlers so gering wie möglich zu halten, wird nun folgendes Verfahren angewendet. Die Bestimmung des Fließpunktes erfolgt nicht während des Experiments, sondern wird mit Hilfe von Spline-Ausgleichsfunktionen und einer Ausgleichsgeraden für den elastischen Bereich nachträglich aus den Zug/Druckentlastungspunkten eines jeden Zyklus rekonstruiert. Die verwendeten Splinefunktionen sind glatte, kubische Polynome mit minimaler Krümmung, die es gestatten, den Meßfehler durch geeignete Wahl von Wichtungen zu kompensieren. Sind  $x_i$  und  $x_{i+1}$  die Abszissen zweier aufeinanderfolgender Meßwerte, so ist die interpolierende Splinefunktion  $S(x)$  durch das Polynom [ 23 ]

$$S(x) = P_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \quad (3.7)$$

gegeben. Dabei gilt

$$x \in [x_i, x_{i+1}] \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad ,$$

und  $n$  ist die Anzahl der Meßpunkte. Die Koeffizienten  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  und  $d_i$  werden so bestimmt, daß die Sprünge  $r_i$  der dritten Ableitung der Splinefunktion in  $x_i$  proportional der Differenz zwischen den Ordinaten der Meßwerte  $u_i$  und den Funktionswerten  $y_i$  ist

$$r_i = w_i(u_i - y_i) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.8)$$

Mit den Proportionalitätskonstanten (Wichtungen)  $w_i$  kann zwischen Interpolation (große Wichtung) und Ausgleichsgerade (kleine Wichtung) gewählt werden. Für die  $r_i$  gilt

$$\begin{aligned} r_0 &= P_0'''(x_0) \\ r_i &= P_i'''(x_i) - P_{i-1}'''(x_i) \quad , \quad i = 1, \dots, n-1 \\ r_n &= -P_{n-1}'''(x_n) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Das weitere Verfahren ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Im elastischen Bereich

wird eine Ausgleichsgerade mit Hilfe der Fehlerquadratminimummethode bestimmt. Anschließend wird durch den Punkt der Splinefunktion, der eine um 60% gegenüber dem Elastizitätsmodul verringerte Steigung hat, eine Extrapolationstangente gelegt. Der Fließpunkt ergibt sich dann als Schnittpunkt der Tangente mit der Ausgleichsgeraden. Man muß hierbei allerdings berücksichtigen, daß das Verfahren insofern eine systematische Ungenauigkeit beinhaltet, als daß der ermittelte Fließpunkt von dem idealen Fließpunkt wegen der zugelassenen plastischen Dehnung abweicht. Der Wert der 60% Tangentenreduktion ist empirisch gefunden worden und ist etwa mit einer Offsetdehnung von ca.  $3 \cdot 10^{-4}$  vergleichbar, hat aber den Vorteil, daß die

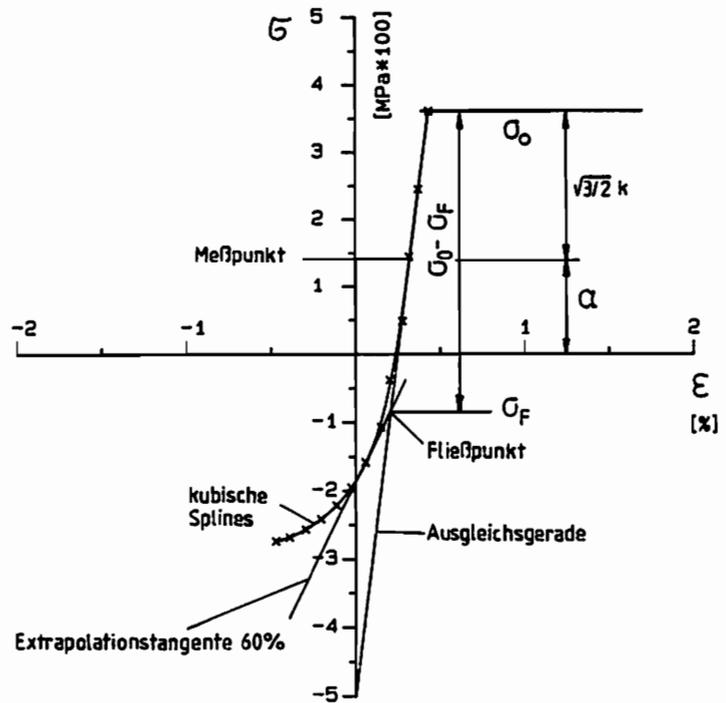


Abb. 3.5 Bestimmung des Fließpunktes

Streuung geringer ist als bei vergleichbaren Offset-Werten. Ist nun die Fließspannung bekannt, und ist  $\sigma_0$  die Maximalspannung im Entlastungspunkt, so ergibt sich aus Gl.( 3.1 ) für die isotrope und kinematische Verfestigung

$$\sqrt{\frac{3}{2}} k = \frac{1}{2} ( \sigma_0 - \sigma_f ) \quad ( 3.10 )$$

$$\alpha = \frac{1}{2} ( \sigma_0 + \sigma_f ) .$$

Anmerkung : In Gl.( 2.42 ) wurde der kinematische Verschiebungstensor  $\underline{\alpha}$  allgemein mit einer unabhängigen azimuthalen Komponente  $a_\varphi$  eingeführt. Diese Komponente ist durch die bei großen Formänderungen zu berücksichtigende Starrkörperrotation begründet. Bei kleinen Formänderungen und bei reiner Zug/Drucklast dagegen, darf aufgrund der Symmetrie angesetzt werden

$$a_r = a_\varphi = - \frac{2}{3} a_z = - \frac{2}{3} \alpha$$

Die Fließbedingung nimmt dann die einfache Form

$$\frac{2}{3} \left[ ( \sigma - \alpha )^2 + 3 ( \tau - \alpha_{\varphi z} )^2 \right] = k^2$$

an, so daß die isotrope und kinematische Verfestigung durch Gl.( 3.10 ) angegeben werden können.

### 3.4.2 Stationärer Stufentest

Mit dem im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Verfahren ist die Fließfläche in den beiden äußeren Punkten der Spannungs-Dehnungshysterese bestimmbar. Zur Klärung der Frage, wie der Verlauf der isotropen und kinematischen Verfestigung dazwischen aussieht, wurde der Versuch A1 durchgeführt (Abb. 3.6).

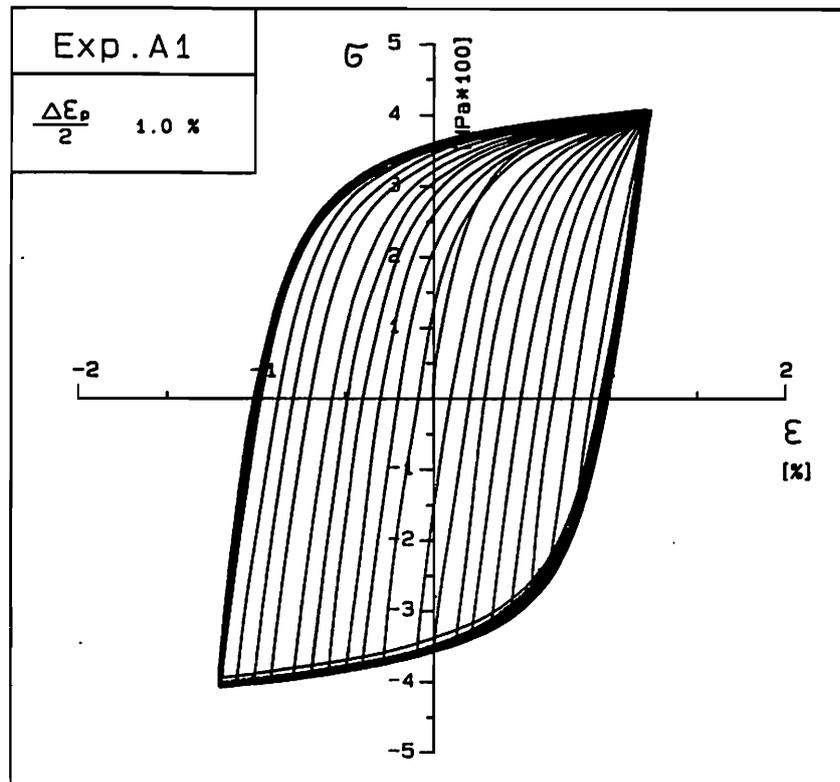


Abb. 3.6 Stationärer Stufentest

Der Verlauf der isotropen und kinematischen Verfestigung wird durch stufenweise Entlastungen bestimmt. Da aufgrund der teilweise geringen plastischen Dehnung das beschriebene Extrapolationsverfahren nicht angewendet werden kann, wird der Fließpunkt mit Hilfe einer Offset-Dehnung  $\epsilon_p = 5 \cdot 10^{-4}$  ermittelt. Abbildung 3.7 zeigt eine schematische Darstellung des Versuchsablaufs, der in vier Schritte aufgeteilt werden kann:

- o Drei volle Hauptzyklen, um stationären Zustand für die Hauptamplitude  $\Delta \epsilon_p = 1\%$  zu erreichen
- o Entlastung im Druckbereich bei 0.9% plastischer Dehnung und Gegenbelastung bis zur Hauptamplitude

- o ein voller Hauptzyklus zur Wiederherstellung des stationären Zustandes
- o Wiederholung der beiden vorhergehenden Schritte mit stufenweiser Verringerung der Zwischenentlastungen bei 0.8, 0.7, ..., -0.9%.

Man erhält somit an vier Stellen Lage und Größe der Fließfläche. Diese sind in Abbildung 3.7 als

- linker Innenzyklus
- rechter Innenzyklus
- linker Hauptzyklus
- rechter Hauptzyklus

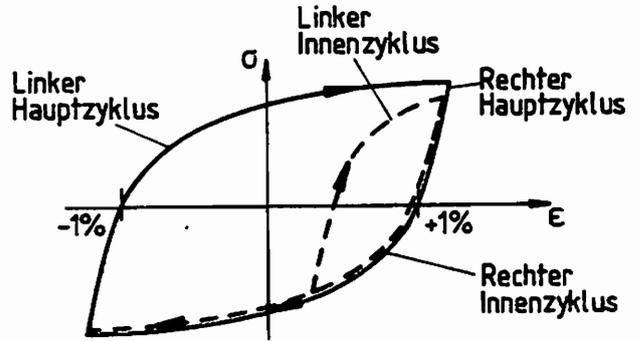


Abb. 3.7 Schematische Darstellung des Versuchsablaufs

eingetragen. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 3.8 und 3.9 dargestellt. Abb. 3.8 ermöglicht den Vergleich zwischen dem linken Innenzyklus und dem linken Hauptzyklus. Durchgezogene Linien verbinden die Meßpunkte der Gesamtspannung (Druckspannung). Die Meßpunkte des linken Hauptzyklus liegen nahezu auf einer horizontalen Linie, d.h. der erreichte stationäre Zustand wird nicht durch die Zwischenentlastungen gestört. Man erkennt, daß sich die Meßpunkte des linken Innenzyklus asymptotisch denen des linken Hauptzyklus annähern. Vergleicht man damit

eintragene. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 3.8 und 3.9 dargestellt. Abb. 3.8 ermöglicht den Vergleich zwischen dem linken Innenzyklus und dem linken Hauptzyklus. Durchgezogene Linien verbinden die Meßpunkte der Gesamtspannung (Druckspannung). Die Meßpunkte des linken Hauptzyklus liegen nahezu auf einer horizontalen Linie, d.h. der erreichte stationäre Zustand wird nicht durch die Zwischenentlastungen gestört. Man erkennt, daß sich die Meßpunkte des linken Innenzyklus asymptotisch denen des linken Hauptzyklus annähern. Vergleicht man damit

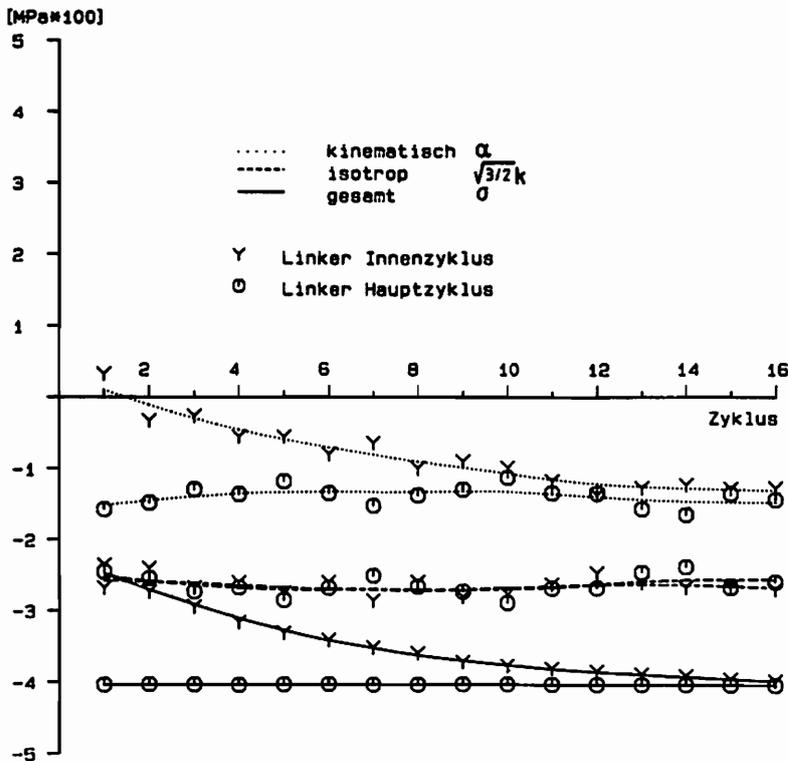


Abb. 3.8 Verfestigungsdiagramm für linken Innenzyklus und linken Hauptzyklus

die rechnerisch ermittelten Werte für die kinematische Verfestigung (gepunktete Linien), so ist festzustellen, daß die Verläufe  $\alpha(\epsilon_p)$  und  $\sigma(\epsilon_p)$  ähnlich sind, und daß der Radius der Fließfläche  $\sqrt{3/2} k$  (gestrichelte Linien) beim Innenzyklus und Hauptzyklus nahezu übereinstimmen. In ähnlicher Weise läßt sich auch Abbildung 3.9 interpretieren, in der der rechte Innenzyklus mit dem rechten Hauptzyklus verglichen wird, allerdings sind hier die Spannungsdifferenzen geringer. Es lassen sich folgende Schlußfolgerungen ziehen:

- o Befindet sich das Material im stationären Zustand, und wird es gleichmäßig und periodisch beansprucht, so kann der Radius der Fließfläche  $\sqrt{3/2} k$  als konstant angesehen werden. Unter dem stationären Zustand wird derjenige Zustand verstanden, in dem die Spannungsamplitude  $\Delta\sigma/2$  unverändert bleibt. Dieser Zustand wird bei dem untersuchten Material Ck15 je nach Belastungsamplitude in etwa 5 - 10 Zyklen erreicht.
- o Der Verlauf der kinematischen Verfestigung  $\alpha(\epsilon_p)$  kann ermittelt werden, in dem man von der Gesamtspannung in jedem Punkt der Spannungs-Dehnungshysterese einen konstanten Wert  $\sqrt{3/2} k$  subtrahiert.

Zu ähnlichen Ergebnissen gelangt auch Trampczinski mit der Methode der sukzessiven Entlastung [24,25]. Hierbei wird nach Entlastung solange in Gegenrichtung belastet, bis erneut eine bestimmte Offset-Dehnung erreicht ist.

Da nun der Verlauf der kinematischen und isotropen Verfestigung im stationären Zustand bekannt ist, kann der Einfluß von Dehnungsamplitude und Vordehnungen untersucht werden.

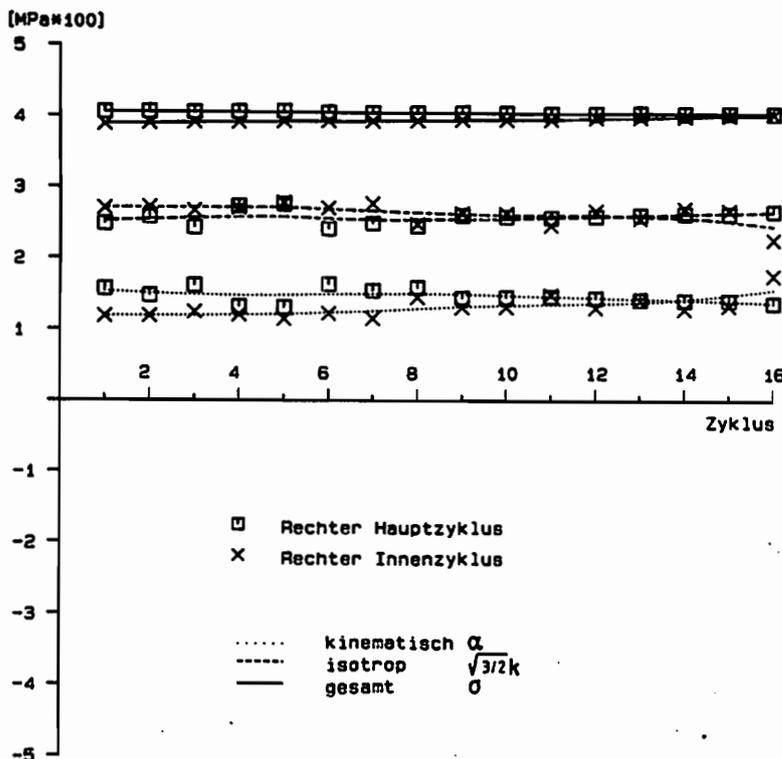


Abb. 3.9  
Verfestigungsdiagramm für rechten Innenzyklus und rechten Hauptzyklus

### 3.4.3 Zyklische Versuche mit wiederholtem Amplitudenwechsel

Abbildung 3.10 zeigt den zyklischen Zug/Druckversuch A2 , der drei Amplituden in aufsteigender Reihenfolge ( jeweils 15 Zyklen )  $\Delta \varepsilon_p / 2 = 0.9, 1.2, 1.5 \%$  enthält. Es ist für den untersuchten Werkstoff Ck15 charakteristisch , daß der stationäre Zustand relativ schnell erreicht wird und demzufolge die Spannungsdifferenz zwischen dem ersten und letzten Zyklus relativ gering ist .

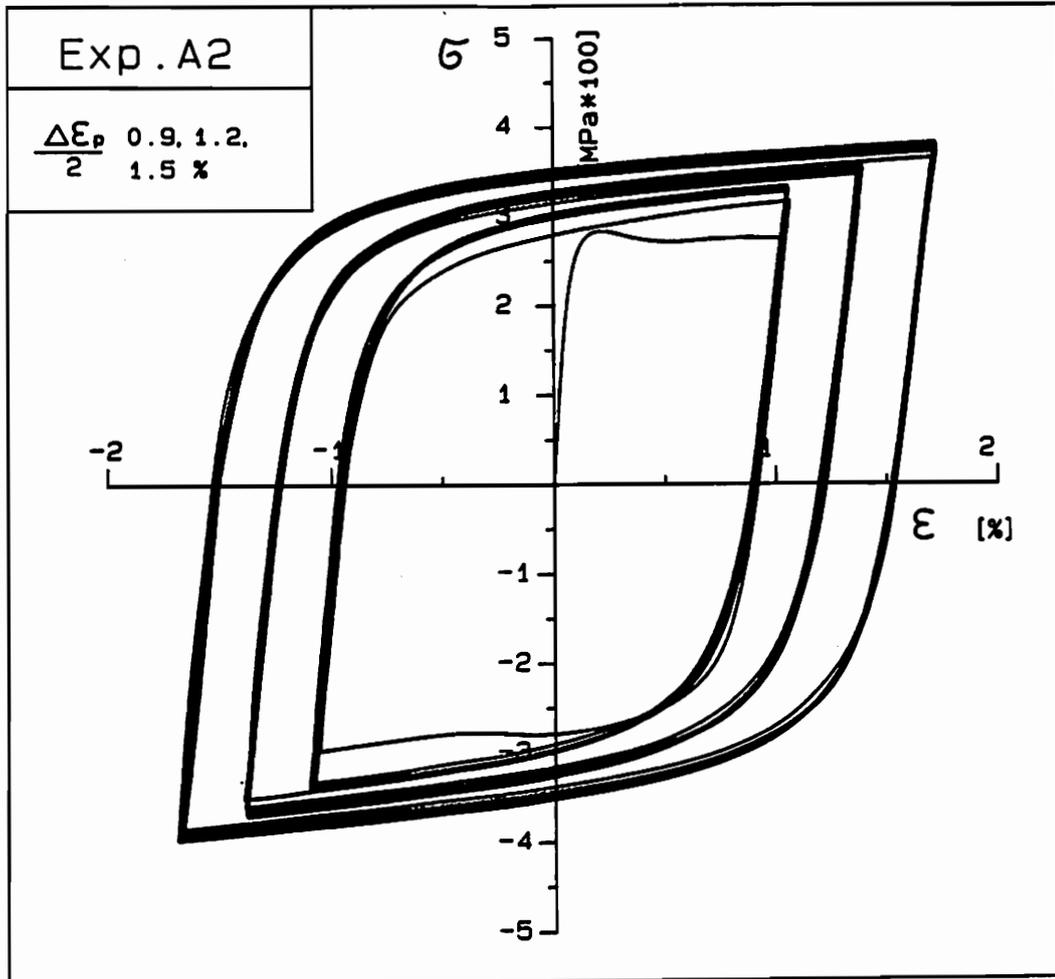


Abb. 3.10 Zyklischer Zug/Druckversuch A2

Abbildung 3.11 zeigt ein Beispiel für die Bestimmung der Verfestigung aufgrund der in Abschnitt 3.4.1 erläuterten Methode . Die plastische Amplitude beträgt 0.3% . Die kinematische Verfestigung  $\alpha$  , die isotrope Verfestigung  $\sqrt{3/2} k$  und die Gesamtspannung  $\sigma$  sind für den linken und rechten Halbzyklus über der Anzahl der Zyklen aufgetragen. Da die Variation innerhalb einer Amplitude gering ist , wird in den folgenden Verfestigungsdiagrammen nur noch der Meßwert des stationären Zustandes dargestellt .

Kennzeichnend für zyklische , einaxiale Versuche mit Amplitudenvariation ist das asymptotische Einspielverhalten des Materials . Nach einer genügend großen Zahl von periodischen Deformationen wird die Spannungsamplitude  $\Delta \sigma / 2$  stationär . Ihre Größe hängt von der plastischen Dehnungsamplitude und von der Vorgeschichte ab . Sind alle

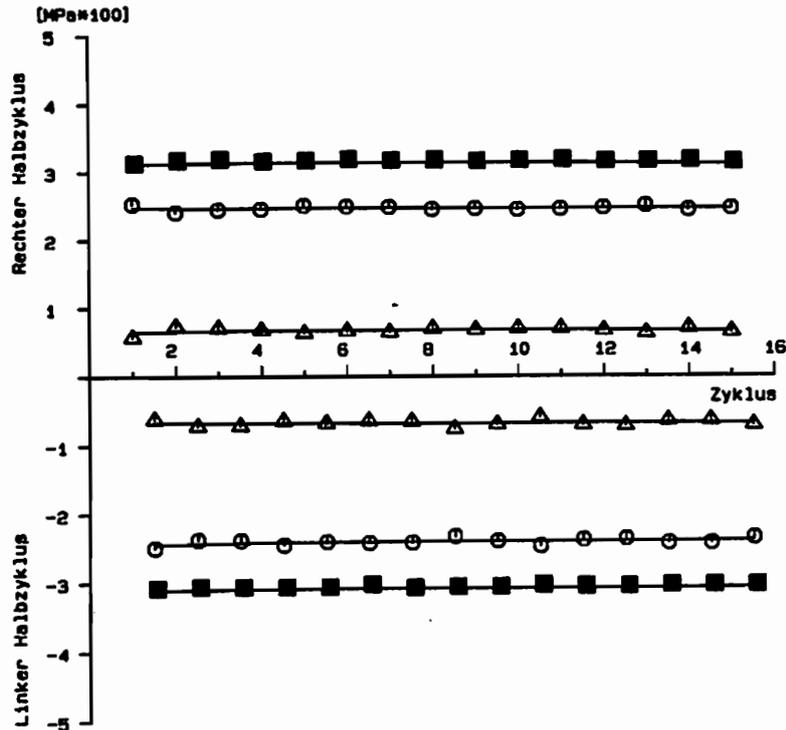


Abb. 3.11 Verfestigungsdiagramm für zyklischen Zug/Druckversuch  $\Delta \epsilon_p / 2 = 0.3\%$

- ..... $\Delta$  kinematische Verfestigung  $\alpha$
- $\square$  isotrope Verfestigung  $\sqrt{\frac{3}{2}} k$
- Gesamtspannung  $\sigma$

Dehnungsamplituden der Belastungsgeschichte kleiner als die aktuelle Amplitude, wird der stationäre Zustand durch kontinuierliche Verfestigung erreicht und die stationäre Spannungsamplitude stellt eine obere Schranke dar.

Das gilt auch für die kinematische und isotrope Verfestigung, die beide mit der Dehnungsamplitude variieren. Abb. 3.13 enthält die Kennlinien der isotropen und kinematischen Verfestigung im stationären Zustand aufgetragen über dem Dehnungsbereich  $\Delta \epsilon_p$  als Ergebnis der Versuche A2 und A3, der aus vier Dehnungsamplituden in aufsteigender Reihenfolge (Abb. 3.12) besteht. Man erkennt, daß die Sättigungswerte in dem betrachteten Dehnungsbereich  $0.5\% \leq \Delta \epsilon_p \leq 3\%$  einen annähernd linearen Verlauf haben. Der Anstieg der kinematischen Verfestigung ist dabei etwas größer als bei der isotropen Verfestigung.

Einige Zahlenwerte sind in Tabelle 3.3 zusammengestellt. Sie werden bei der Bestimmung der Materialkonstanten in Kapitel 7 verwendet. Jeder eingetragene Meßwert ist charakteristisch für eine bestimmte Dehnungsamplitude, obwohl nur zwei Proben für diese Versuchsreihe verwendet wurden (Mehrfachbelegung), da sich gezeigt hat, daß der Einfluß der Deformationsgeschichte bei monoton aufsteigender Dehnungsamplitude vernachlässigbar ist. Dieser Auslöschungseffekt ist auch bei der Untersuchung anderer Werkstoffe festgestellt worden [26, 29, 32].

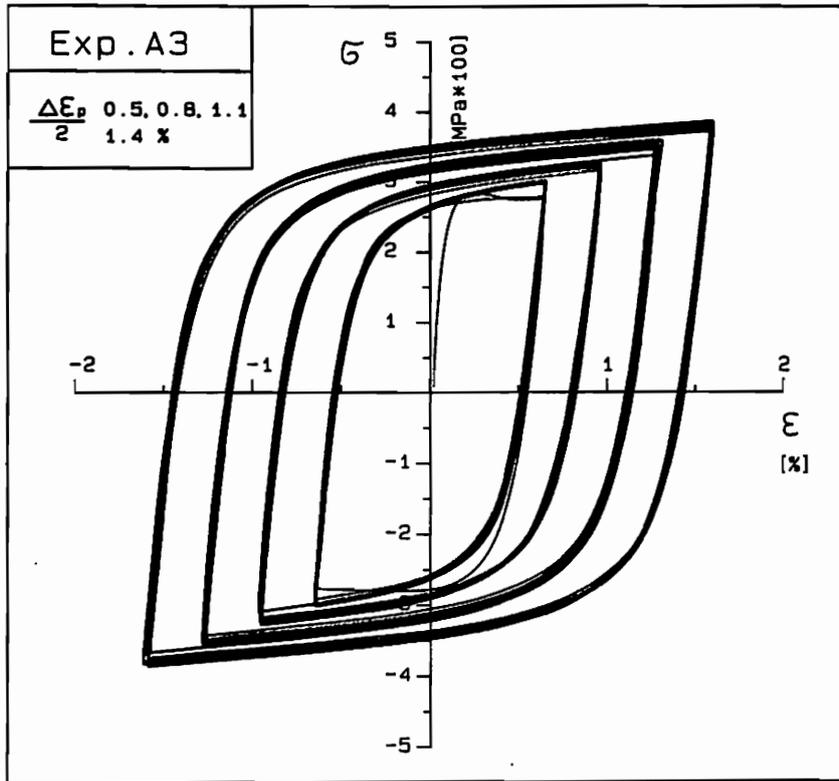


Abb. 3.12 Zyklischer Zug/Druckversuch A3

Abb. 3.13 Verfestigungsdiagramm im stationären Zustand (Zug/Druck)

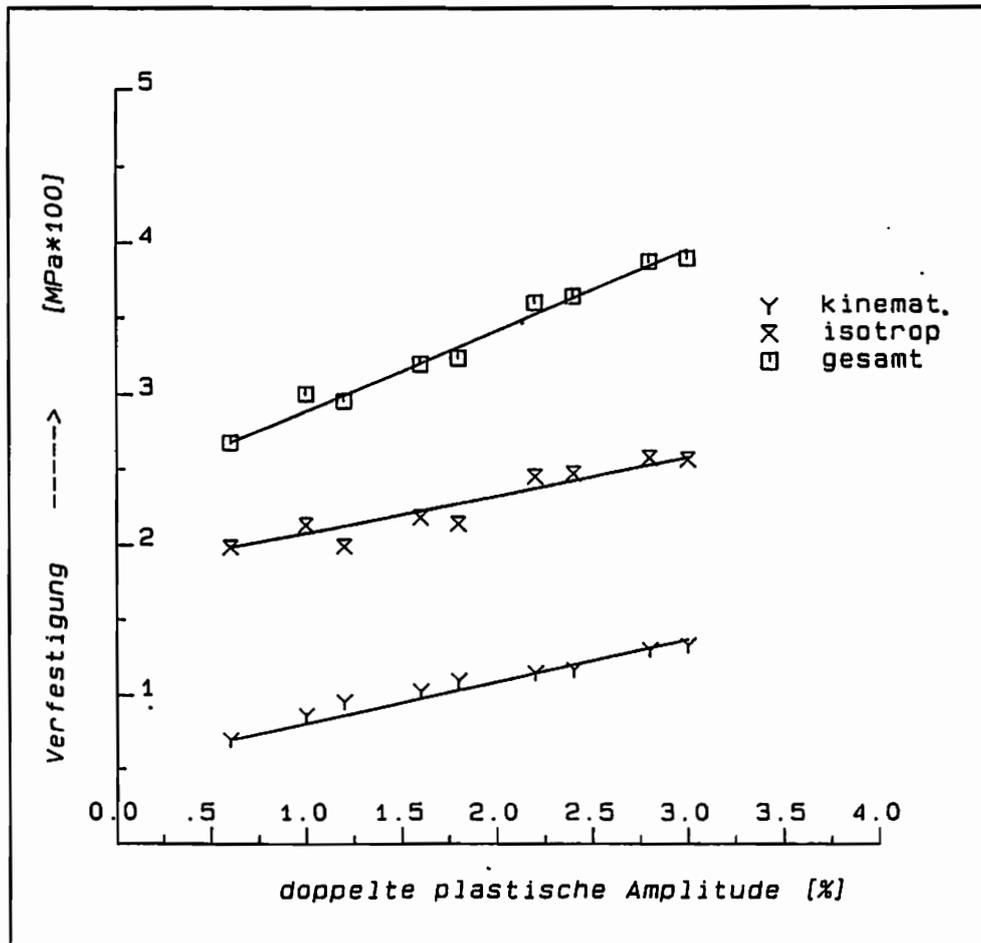


Tabelle 3.3 Verfestigung im stationären Zustand ( zu Abb.3.13) Zug/Druck , T = 25° , Ck 15			
Dehnungs- bereich $\Delta \varepsilon_p$	kinematisch $\alpha$	isotrop $\sqrt{\frac{3}{2}} k$	gesamt $\sigma$
0.6 %	71 MPa	200 MPa	271 MPa
1.2 %	86 MPa	214 MPa	300 MPa
1.8 %	100 MPa	229 MPa	329 MPa
2.4 %	120 MPa	243 MPa	363 MPa
3.0 %	133 MPa	257 MPa	390 MPa

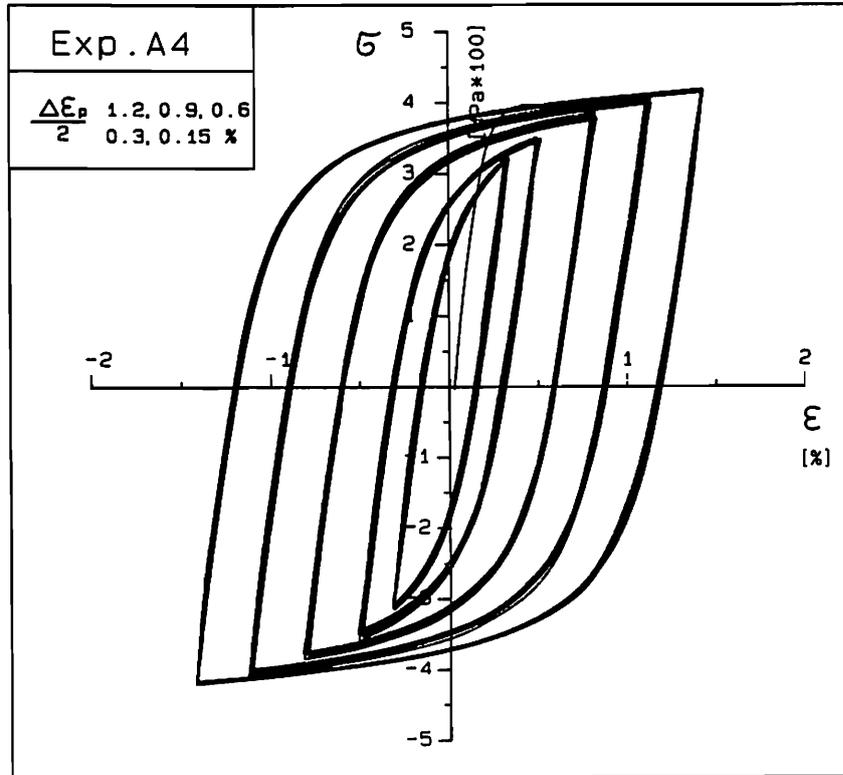


Abb. 3.14 Zyklischer Zug/Druckversuch A4

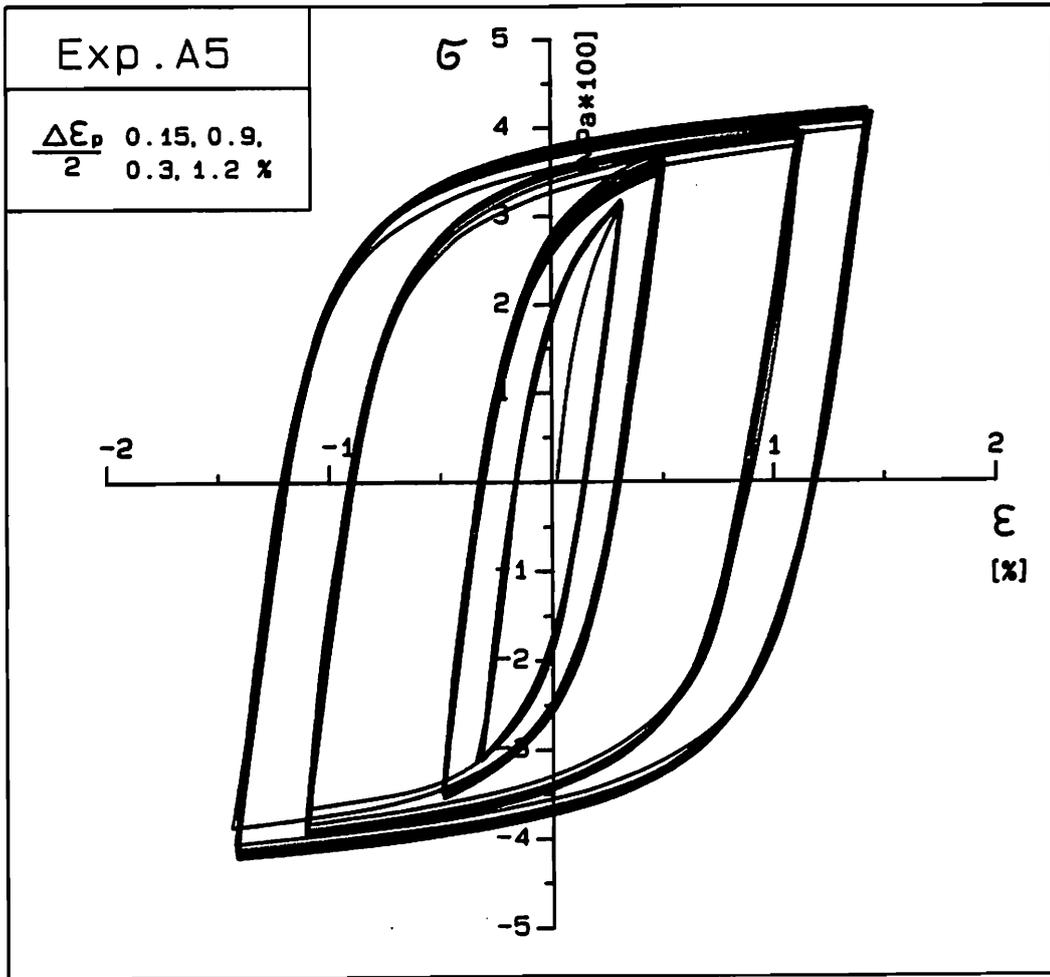


Abb. 3.15 Zyklischer Zug/Druckversuch A 5

Bei abnehmender Amplitudenfolge ist dagegen ein Kumulierungseffekt zu beobachten. Beispiele dafür sind die Versuche A4 ( Abb. 3.14 ) und A5 ( Abb. 3.15 ) . Auch hier tritt eine Stabilisierung ein , jedoch ist sie mit einer kontinuierlichen Entfestigung verbunden und die stationäre Spannungsamplitude stellt eine untere Schranke dar . Aufgrund des Kumulierungseffekts ist diese untere Schranke von der Deformationsgeschichte abhängig . Die bleibende Verfestigung ist um so ausgeprägter , je größer die vorhergehende Dehnungsamplitude ist .

In dem Verfestigungsdiagramm Abb. 3.16 sind die Ergebnisse der Versuche mit alternierender Amplitudenfolge dargestellt . Jeder Meßwert entspricht dem stationären Zustand ( 20. Zyklus ) einer Dehnungsamplitude . Die Entwicklung der kinematischen und isotropen Verfestigung ist durch ein transientes Verhalten gekennzeichnet . Damit ist gemeint , daß der Werkstoff bei Amplitudenvergrößerung verfestigt und bei Amplitudenverkleinerung entfestigt , ehe er in den stationären Zustand übergeht . Vergleicht man in Abb. 3.16 den ersten und letzten Meßwert in bezug auf die horizontale Hilfslinie , so erkennt man , daß der kumulative Effekt in erster Linie die isotrope Ver-

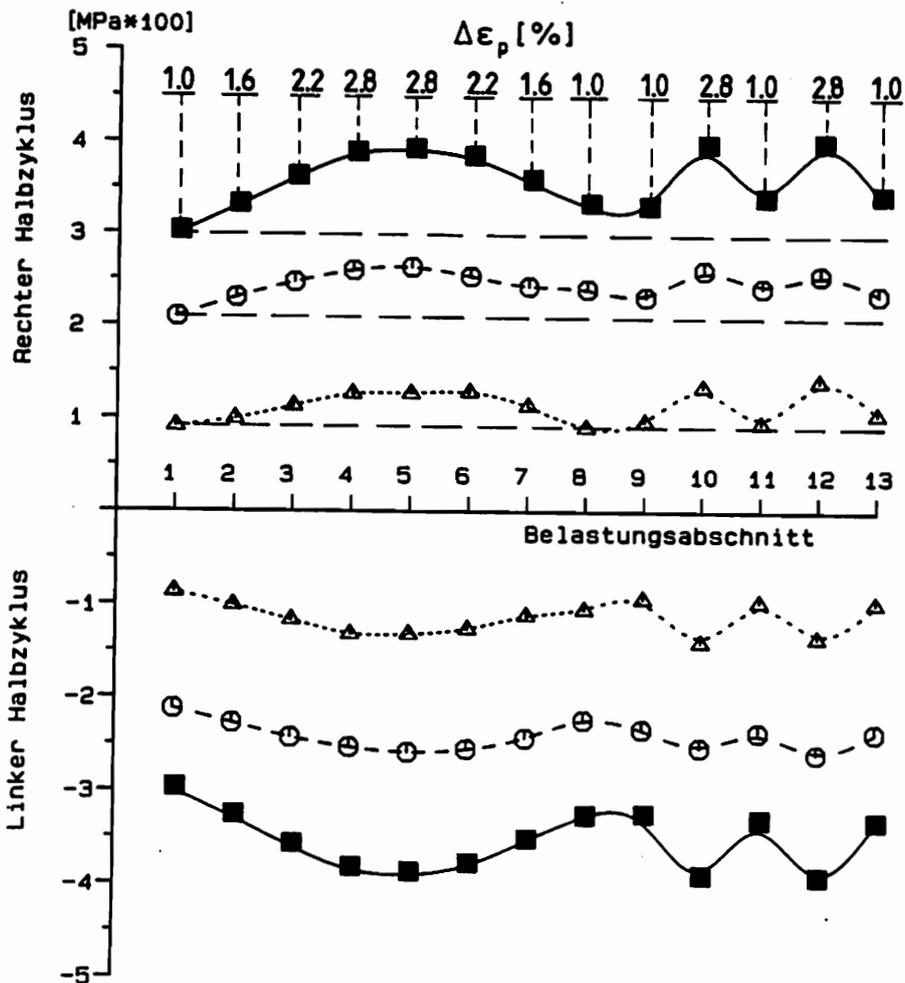


Abb. 3.16 Verfestigungsdiagramm der Versuche mit alternierender Amplitude, dargestellt ist der stationäre Meßwert der jeweiligen Amplitude.

- ..... $\Delta$  kinematische Verfestigung  $\alpha$
- $\ominus$  isotrope Verfestigung  $\sqrt{\frac{3}{2}} k$
- $\blacksquare$  Gesamtspannung  $\sigma$

festigung beeinflusst, während die kinematische Verfestigung im Grenzfall der Stationarität nur von der Dehnungsamplitude abhängt.

Zum Abschluß dieses Abschnitts werden die wichtigsten Phänomene bei einaxialen Versuchen mit wechselnder Amplitudenfolge zusammengefaßt:

- o Sowohl die kinematische als auch die isotrope Verfestigung sind von der Dehnungsamplitude abhängig. Die Belastungsgeschichte beeinflusst durch den Kumulierungseffekt in erster Linie die isotrope Verfestigung

- o Das transiente Verfestigungsverhalten von Stahl ist einerseits durch kontinuierliche Verfestigung ( stationäre Spannungsamplitude ist obere Schranke ) bei Vergrößerung der Dehnungsamplitude und andererseits durch Entfestigung ( stationäre Spannungsamplitude ist untere Schranke ) bei Amplitudenverringern gekennzeichnet . Nach dem Übergangsbereich wird das Materialverhalten stationär .

#### 3.4.4 Zyklische Versuche mit Vordehnungen

Die Versuche A6 , ... , A10 enthalten verschiedene Kombinationen von monotonen und zyklischen Belastungsabschnitten . Versuch A6 ( Abb. 3.17 ) besteht aus vier zyklischen Abschnitten mit jeweils drei Dehnungsamplituden in aufsteigender Reihenfolge  $\Delta \varepsilon_p/2 = 0.3 , 0.6 , 0.9\%$  ( 10 Zyklen ) . Die mittleren Dehnungen betragen  $\varepsilon_m = 0 , 2.7 , 5.7 , 8.7\%$  .

Es ist zu erkennen , daß bei der kleinsten Amplitude  $\Delta \varepsilon_p/2 = 0.3\%$  , die unmittelbar der Vordehnung folgt , eine deutliche Entfestigung auftritt . Die Entfestigung ist besonders ausgeprägt auf der Zugseite , also in Richtung der Vordehnung . Durch die Vordehnung wird das Material plastisch anisotrop und positive Spannungen ( rechter Halbzyklus ) sind betragsmäßig größer als vergleichbare negative Spannungen ( linker Halbzyklus ) . Im Verlauf der zyklischen Deformation besteht die Tendenz , die Anisotropie abzubauen .

Dieses Phänomen ist als "cyclic mean stress relaxation" bekannt [ 27 ] . Wie weit die Vordehnung neutralisiert wird , hängt von der Vordehnung und der zyklischen Dehnungsamplitude ab . In Abbildung 3.18 sind die Meßwerte des 10. Zyklus , der dem stationären Zustand nahe kommt , eingetragen . Man erkennt , daß die stabile Zugspannung der kleinsten Amplitude (  $\Delta \varepsilon_p/2 = 0.3\%$  ) höher ist als die Druckspannung . Dies bedeutet bleibende Anisotropie . Bei den beiden größeren Amplituden ist dieser Unterschied nicht mehr so ausgeprägt und die mittlere Spannung geht gegen null .

Diese Aussagen gelten auch für die kinematische Verfestigung ( gepunktete Linien ) , die qualitativ den gleichen Verlauf hat wie die Gesamtspannung . Die isotrope Verfestigung ist dagegen nicht merklich durch die Vordehnung beeinflusst .

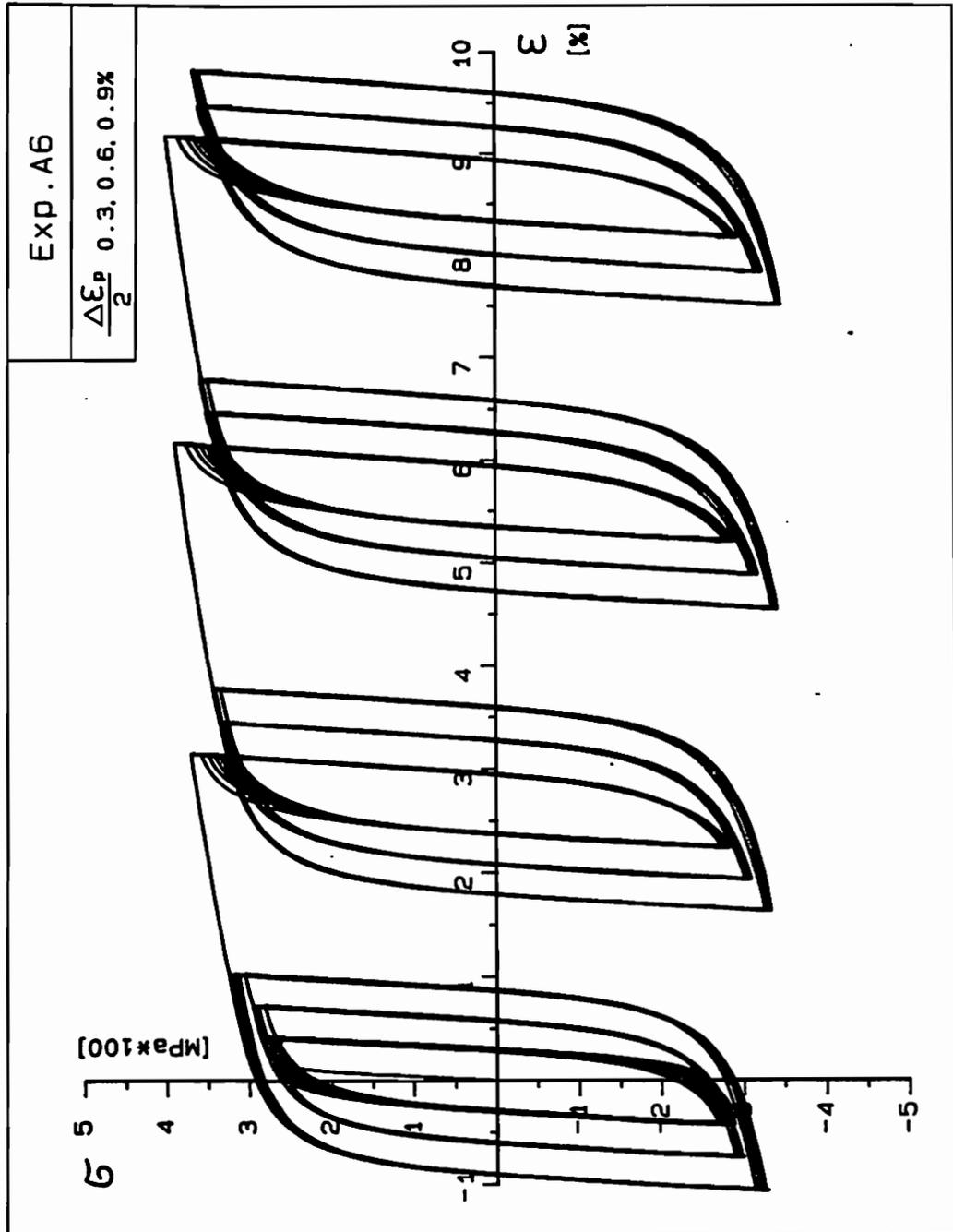


Abb. 3.17 Zyklischer Zug/Druckversuch A6 mit drei Vordehnungen und aufsteigender Amplitude

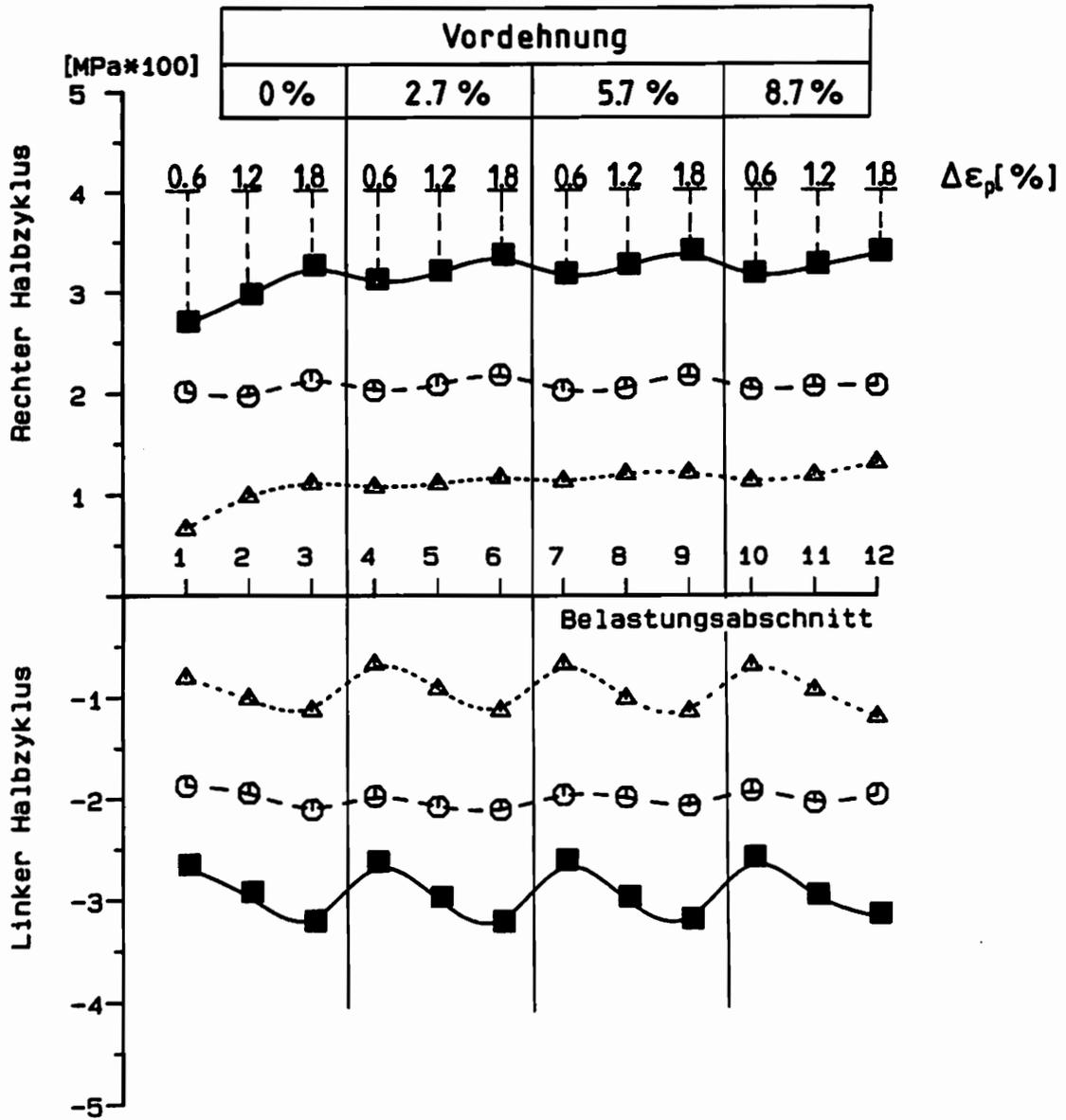


Abb. 3.18 Verfestigungsdiagramm zu Versuch A6 ( Abb. 3.17 ). Dargestellt sind jeweils die Meßpunkte des 10. Zyklus. Vordehnung und plastische Amplitude sind der Abbildung zu entnehmen .

- .....  $\Delta$  kinematische Verfestigung  $\alpha$
- $\ominus$  isotrope Verfestigung  $\sqrt{\frac{3}{2}} k$
- Gesamtspannung  $\sigma$

Versuch A7 ( Abb. 3.19 ) ist ähnlich wie A6 aufgebaut . Lediglich die Amplitudenfolge ist umgekehrt (  $\Delta \epsilon_p / 2 = 0.9, 0.6, 0.3\%$  ) . Man erkennt in dem dazugehörigen Vefestigungsdiagramm ( Abb. 3.20 ), daß aufgrund der relativ großen Amplitude , die unmittelbar der Vordehnung folgt , die Anisotropie weitgehend abgebaut wird , so daß die Meßwerte des linken und rechten Halbzyklus nahezu den gleichen Verlauf aufweisen .

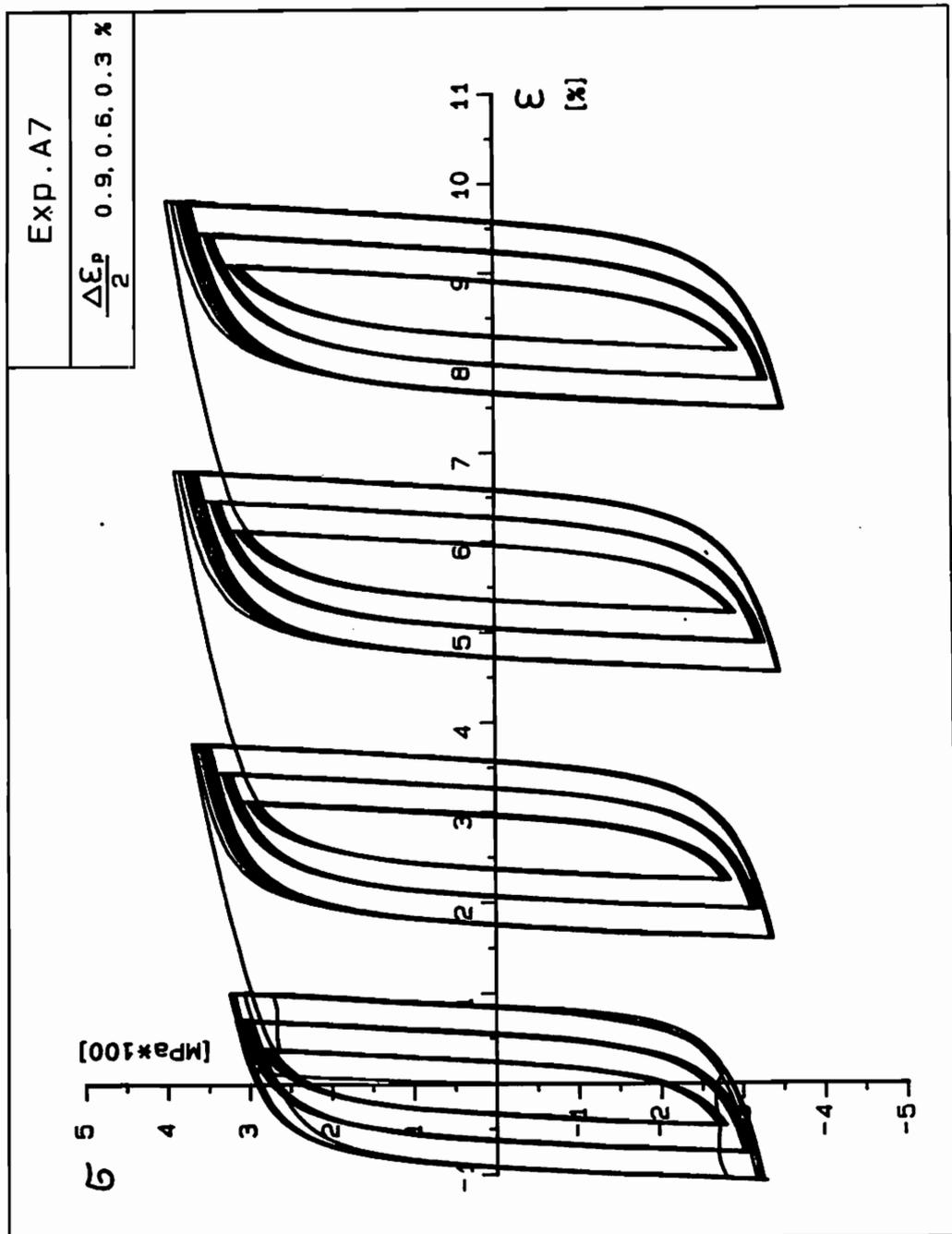


Abb. 3.19 Zyklischer Zug/Druckversuch A7 mit drei Vordehnungen und abnehmender Amplitude

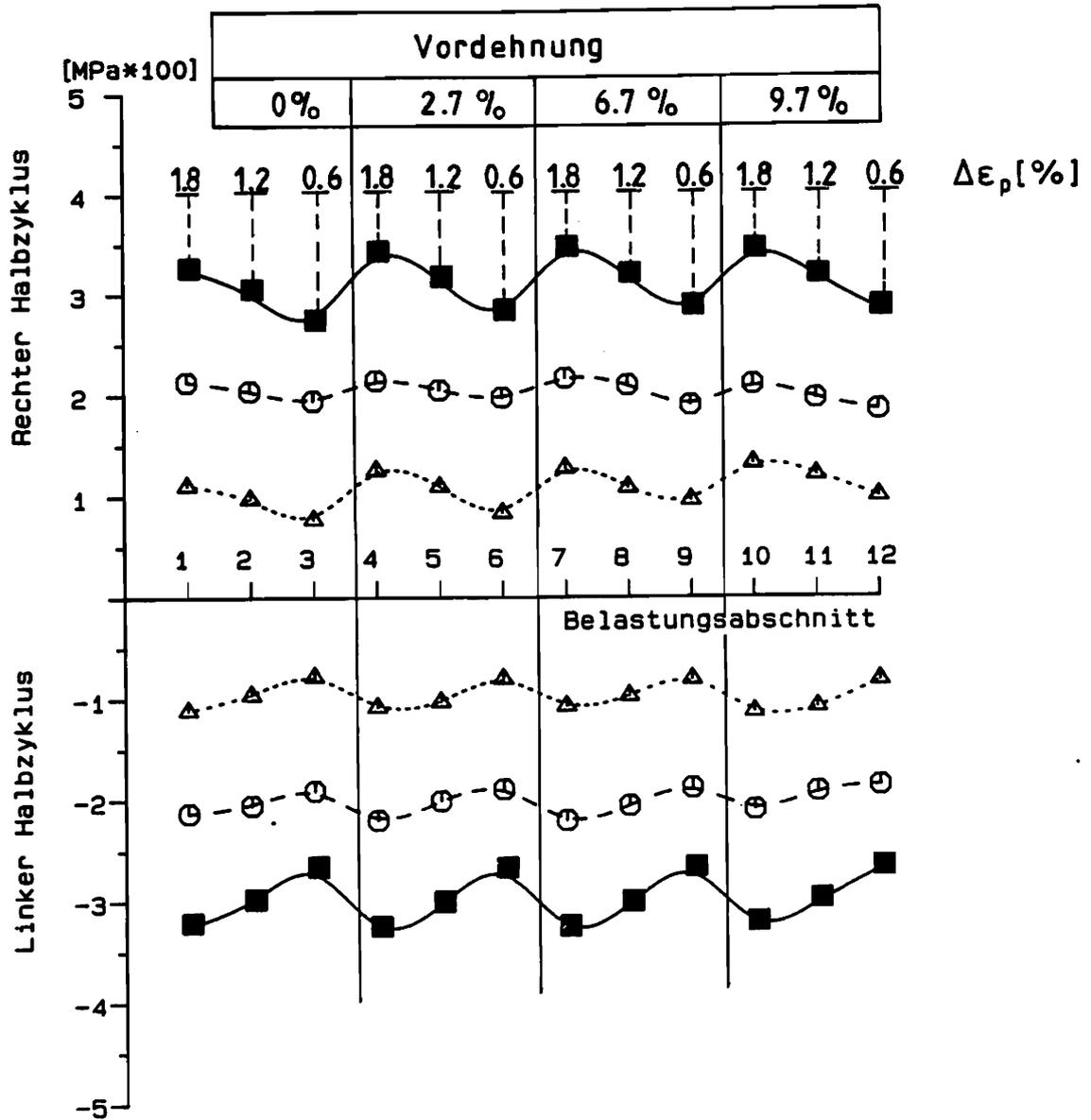


Abb. 3.20 Verfestigungsdiagramm zu Versuch A7 ( Abb. 3.19 ). Dargestellt sind die Meßwerte des 10. Zyklus . Vordehnung und plastische Dehnungsamplitude sind der Abbildung zu entnehmen .

- ..... $\Delta$  kinematische Verfestigung  $\alpha$
- $\square$  isotrope Verfestigung  $\sqrt{\frac{3}{2}} k$
- Gesamtspannung  $\sigma$

Dies zeigt auch Versuch A8 ( Abb. 3.21 ) , der im Unterschied zu A6 und A7 zu-  
erst eine Vordehnung und anschließend zyklische Belastung enthält . Es ist interessant  
zu beobachten, daß in Versuch A8 das Material trotz der Vordehnung im Verlauf der  
ersten Zyklen verfestigt . Die Ursache hierfür liegt in dem besonderen Verfestigungs-  
verhalten des untersuchten Werkstoffs bei Erstbelastung . Nach dem Spannungsab-  
fall vom oberen zum unteren Fließpunkt ( siehe auch Versuch A11 , Abb. 3.24 ) ist eine  
instabile , plastische Zone mit nahezu konstanter Spannung zu beobachten , in der  
einzelne Versetzungsfronten den gesamten Probenkörper durchlaufen , ohne auf nen-  
nenswerten Widerstand zu stoßen . Diese Erscheinung wird als Lüders-Band [ 28 ]  
bezeichnet . Sie tritt nur bei der ersten plastischen Verformung sowohl im Zug/Druckver-  
such als auch im Torsionsversuch auf oder nach sehr langer Liegezeit ( " strain-ageing " ).

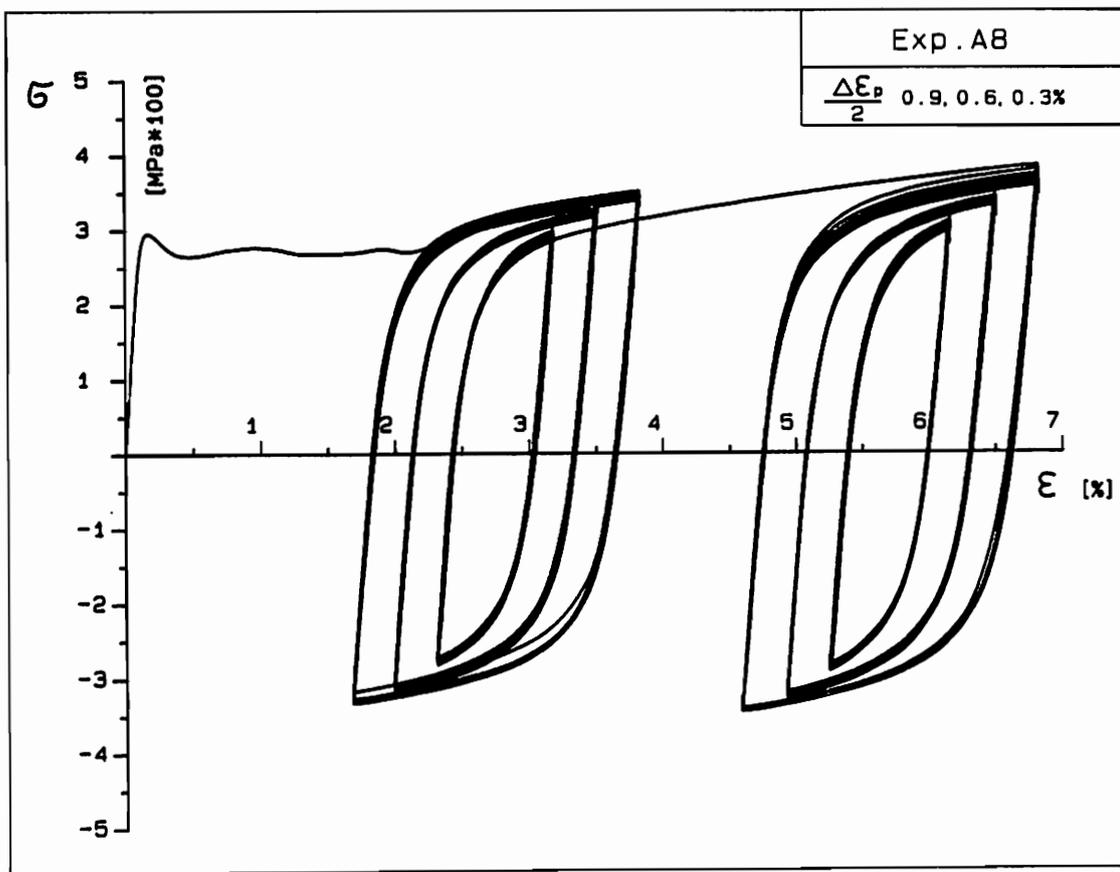


Abb. 3.21 Zyklischer Zug/Druckversuch A8 mit Vordehnung

Die Versuche A9 ( Abb.3.22 ) und A10 ( Abb.3.23 ) sind ein zyklischer Zug/Druck-  
bzw. Torsionsversuch mit gleichen effektiven Dehnungsamplituden . Man erkennt , daß  
der Torsionsversuch qualitativ und quantitativ mit dem Zug/Druckversuch überein-  
stimmt , sofern die Darstellung in effektiven Größen erfolgt . Der Torsionsversuch  
enthält zusätzlich eine negative Vorverformung ,die betragsmäßig größer ist ,als die  
positive Vorverformung . Der größte Spannungsabfall ist daher auf der Seite der nega-  
tiven Spannungen zu finden .

Die Einflüsse von kombinierter Vordehnung und Amplitudenvariation bei einaxialen Versuchen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen :

- Nach einer Vordehnung tritt Entfestigung ein , falls die während der Vordehnung erreichte Spannung größer ist , als die Gleichgewichtsspannung der nachfolgenden zyklischen Verformung
- Die Entfestigung ist unsymmetrisch . Sie ist in Richtung der Vordehnung stärker ausgeprägt als auf der Gegenseite und führt zu einer Relaxation der mittleren Spannung . Periodische Verformungen mit relativ kleiner Amplitude können den Einfluß der Vordehnung nicht vollständig neutralisieren und es bleibt eine plastische Anisotropie bestehen . Bei größeren Dehnungsamplituden dagegen , geht die mittlere Spannung gegen null
- Die Vordehnung beeinflusst in erster Linie die kinematische Verfestigung .

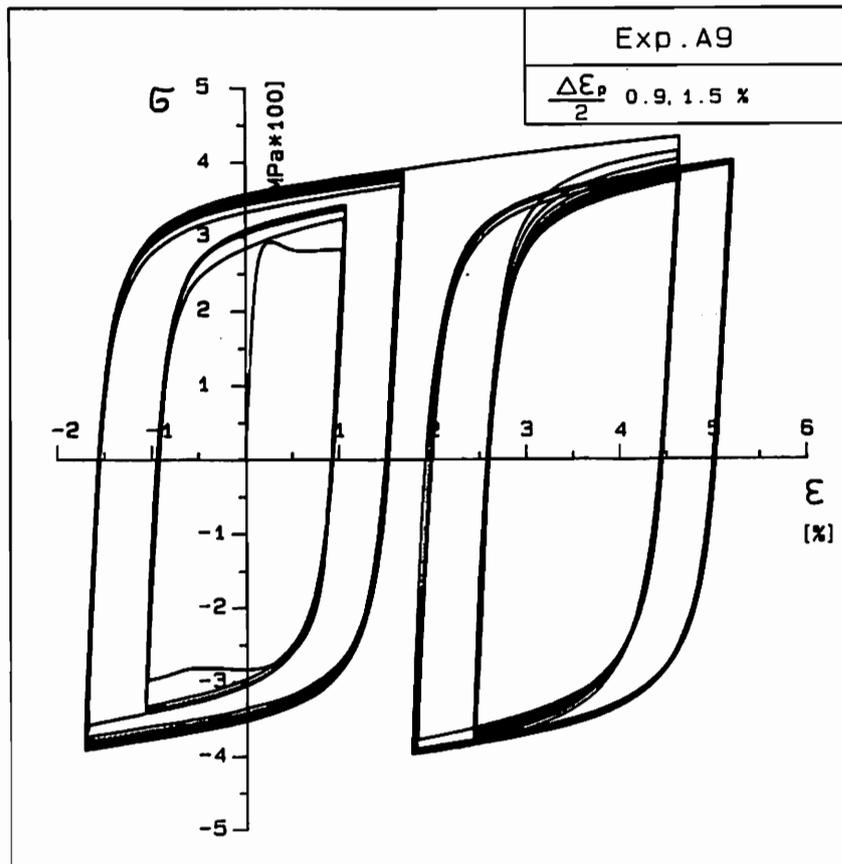


Abb. 3.22 Zyklischer Zug/Druckversuch A9

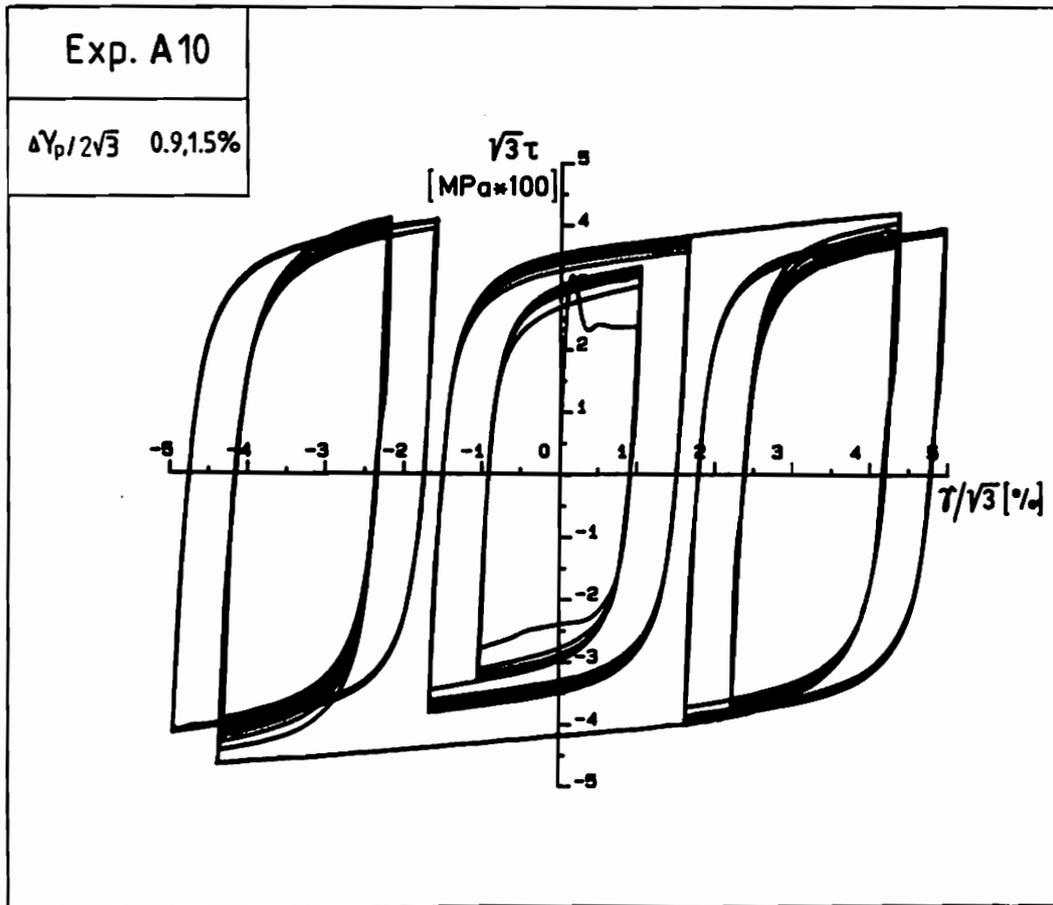
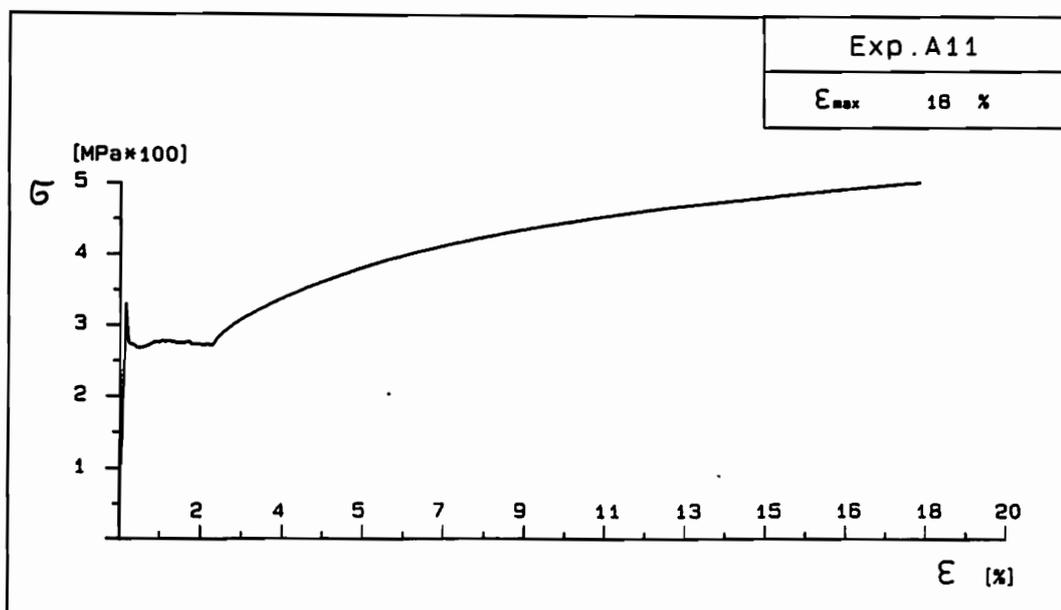


Abb. 3.23 Zyklischer Torsionsversuch A10

Abb. 3.24 Monotoner Zugversuch A11



### 3.5 Zweiachsiges Zug/Druck- und Torsionsversuche mit konstanter Gesamtdeformationsamplitude

#### 3.5.1 Einfluß des Deformationspfades auf das Verfestigungsverhalten

Es ist seit längerem bekannt, daß kombinierte nicht-proportionale Belastungen zu einer höheren Verfestigung führen als einaxiale Prozesse mit vergleichbarer effektiver Lastgröße. Das gilt sowohl für weggesteuerte als auch für kraftgesteuerte Versuche [ 30, 31 ]. Die ersten systematischen Untersuchungen gehen auf Lamba/Sidebottom zurück, die kreisförmig phasenversetzte Belastungen an OFHC-Kupfer durchführten. Sie stellten fest, daß die gesättigte Spannungsamplitude um ca. 40 % höher liegt, als im entsprechenden einaxialen Fall [ 32 ]. Inzwischen liegt eine Vielzahl weiterer Untersuchungen, hauptsächlich an austenitischen Stählen, vor [ 33 - 40 ]. Dabei wurde gefunden, daß die maximale Verfestigung bei kreisförmigen Belastungen auftritt und die Verfestigung im einaxialen Versuch um bis zu 80% übertrifft [ 37, 38 ].

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse von vier verschiedenen Typen zweiachsialer Belastung vorgelegt. Tabelle 3.4 gibt eine Übersicht über den Versuchsabschnitt B, in

Zweiachsiges Versuchsprogramm - Abschnitt B Einfluß des Deformationspfades auf das Verfestigungsverhalten		
Versuch	Darstellung	Axiale Amplitude $\Delta\epsilon/2$
B 1		0.9 %
B 2		0.9 %
B 3*		0.9 %
B 4		0.6 %

Tabelle 3.4 Zweiachsiges Versuchsprogramm, Abschnitt B. Der mit (\*) gekennzeichnete Versuch ist aus [ 39 ] entnommen.

dem ein radialer Belastungsweg ( B1 ), ein quadratischer ( B2 ), ein kreisförmiger ( B3 ) und ein dreieckiger Belastungsweg untersucht werden . Der Versuch B3 ist aus [ 39 ] in veränderter Darstellung übernommen .

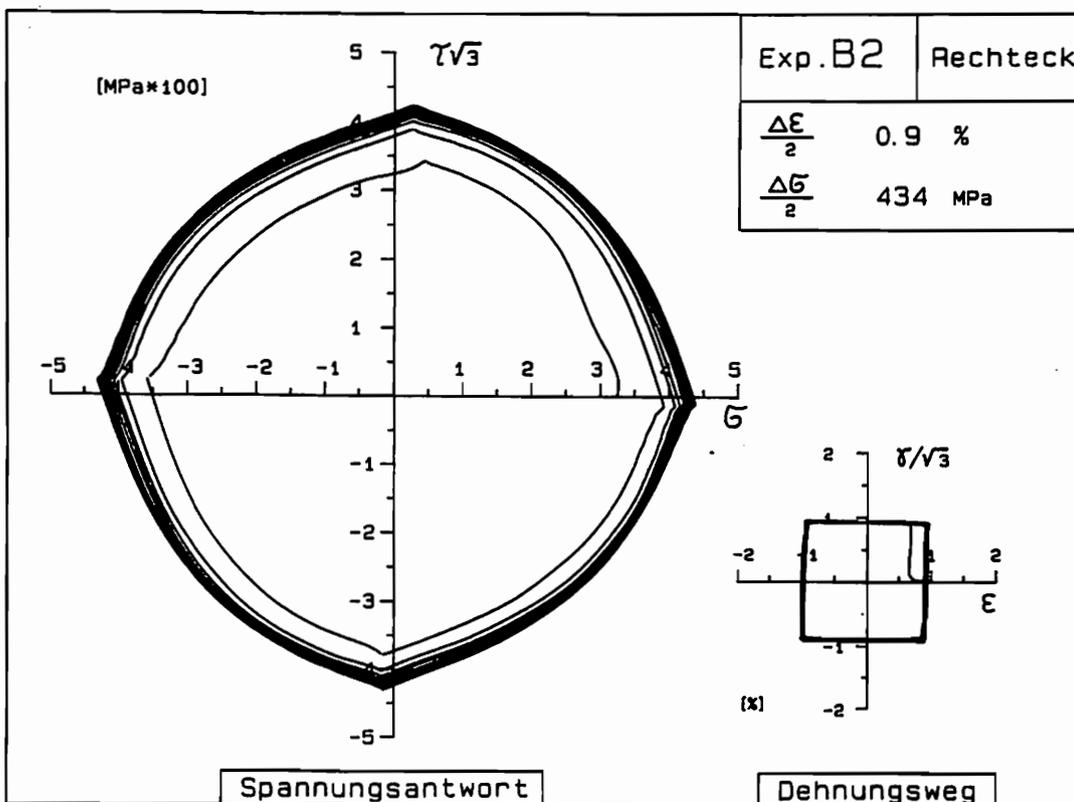
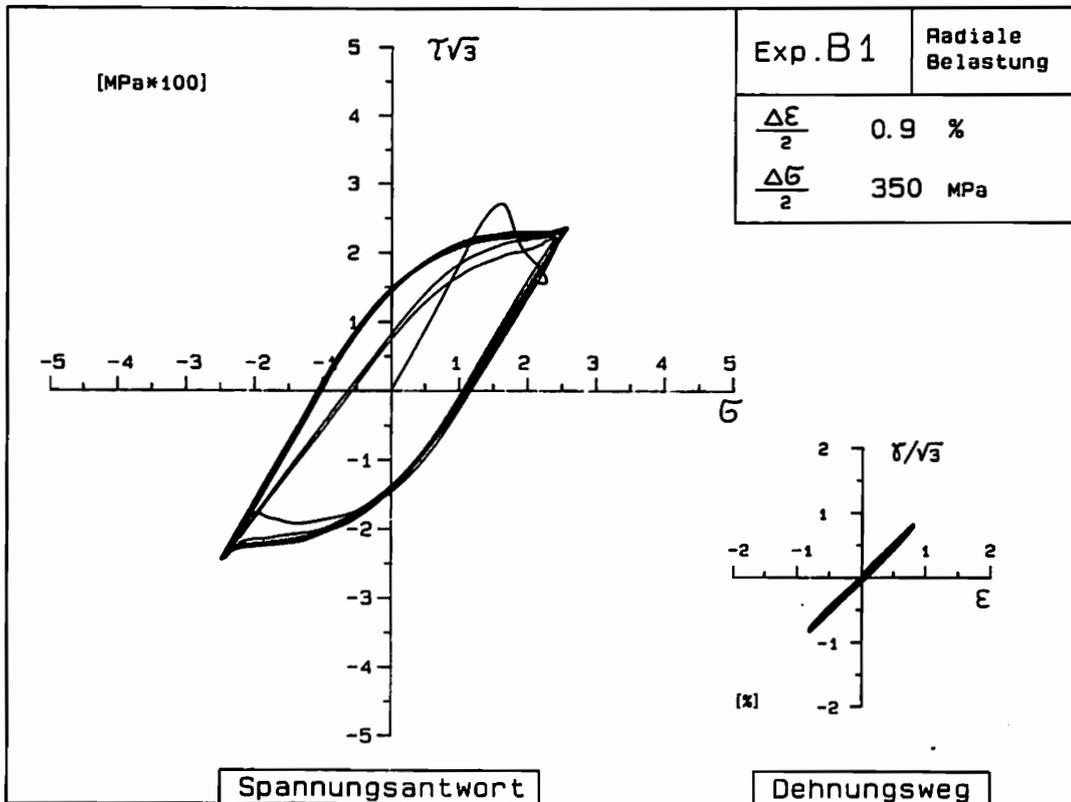


Abb. 3.25 ( oben )  
Darstellung von Versuch  
B1 in der  $\sigma - \sqrt{3}\tau$  Ebene

$$\left( \Delta \sigma / 2 = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} \right)$$

Abb. 3.26 ( unten )  
Darstellung von Versuch  
B2 in der  $\sigma - \sqrt{3}\tau$  Ebene

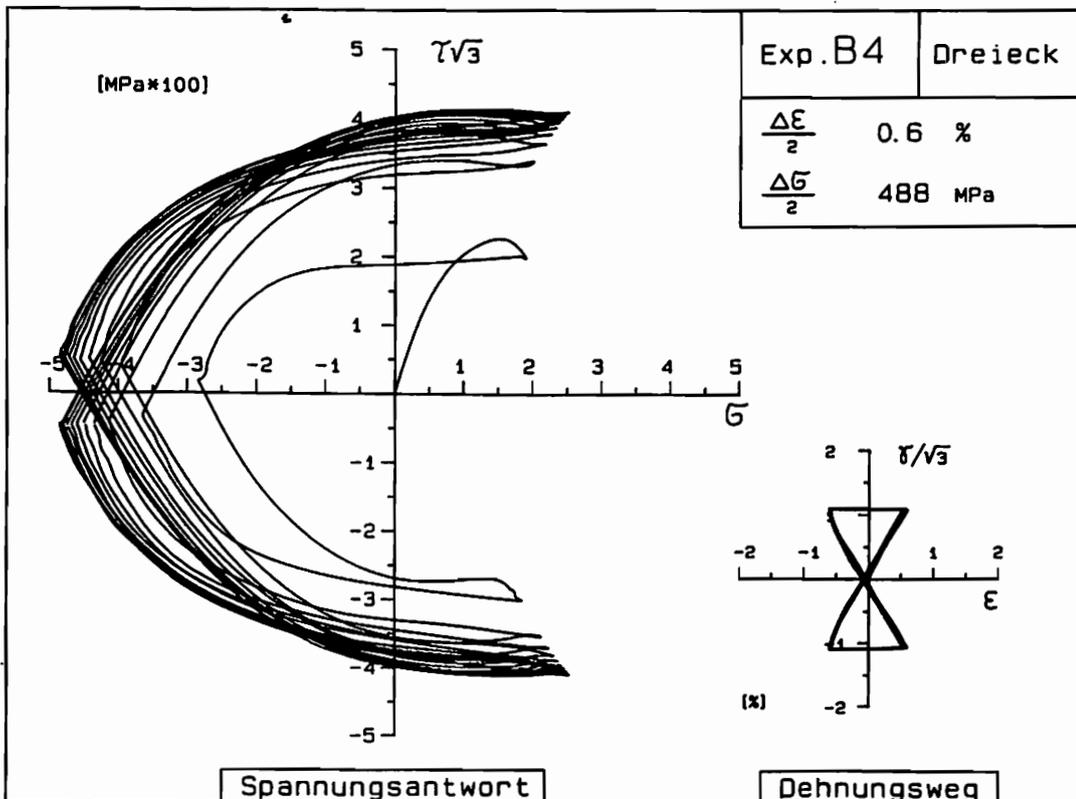
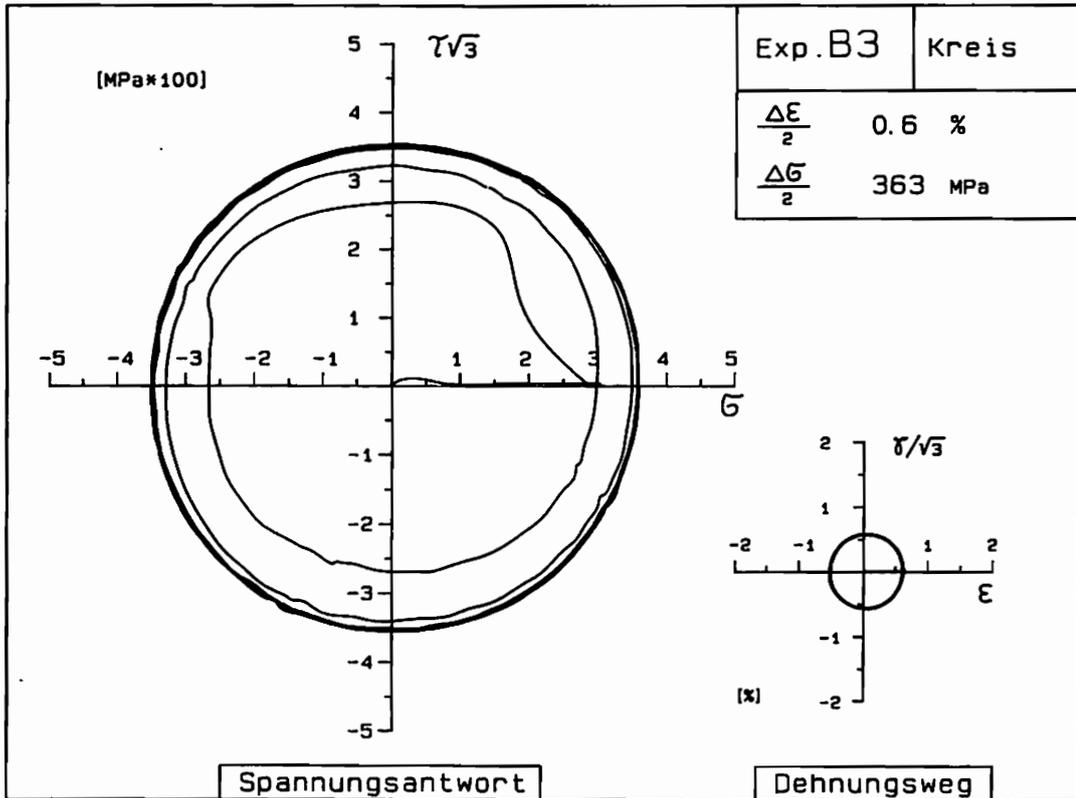


Abb. 3.27 ( oben )  
Darstellung von Versuch  
B3 in der  $\sigma - \sqrt{3} \tau$  Ebene  
( aus [ 39 ] )

$$\left( \Delta \sigma / 2 = (\sigma^2 + 3 \tau^2)^{1/2} \right)$$

Abb. 3.28 ( unten )  
Darstellung von Versuch  
B4 in der  $\sigma - \sqrt{3} \tau$  Ebene

Die Abbildungen 3.25 - 3.28 zeigen die Darstellung der Versuche in der Normal-Schubspannungsebene . Versuch B1 ( Abb. 3.25 ) , der aus einem phasengleichen , unter  $45^\circ$  verlaufenden , radialen Belastungsweg besteht , verursacht keine erhöhte Verfestigung . Unter Benutzung der effektiven Dehnungsamplitude  $\Delta \tilde{\epsilon} / 2 = \sqrt{2} * 0.9\%$  und der effektiven Spannungsamplitude  $\Delta \sigma / 2 = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$  ergeben sich etwa die gleichen Werte wie im Zug/Druckversuch ( vgl. Abb. 3.13 ) . Dies kann als Indiz für die Isotropie des Werkstoffs gewertet werden , die richtungsabhängige Effekte bei radialen Dehnungswegen ausschließt . Der Versuch kann also im Rahmen einaxialer Belastungen gedeutet werden . Der Verfestigungsverlauf ist am Ende dieses Abschnitts in Abb. 3.31 dargestellt .

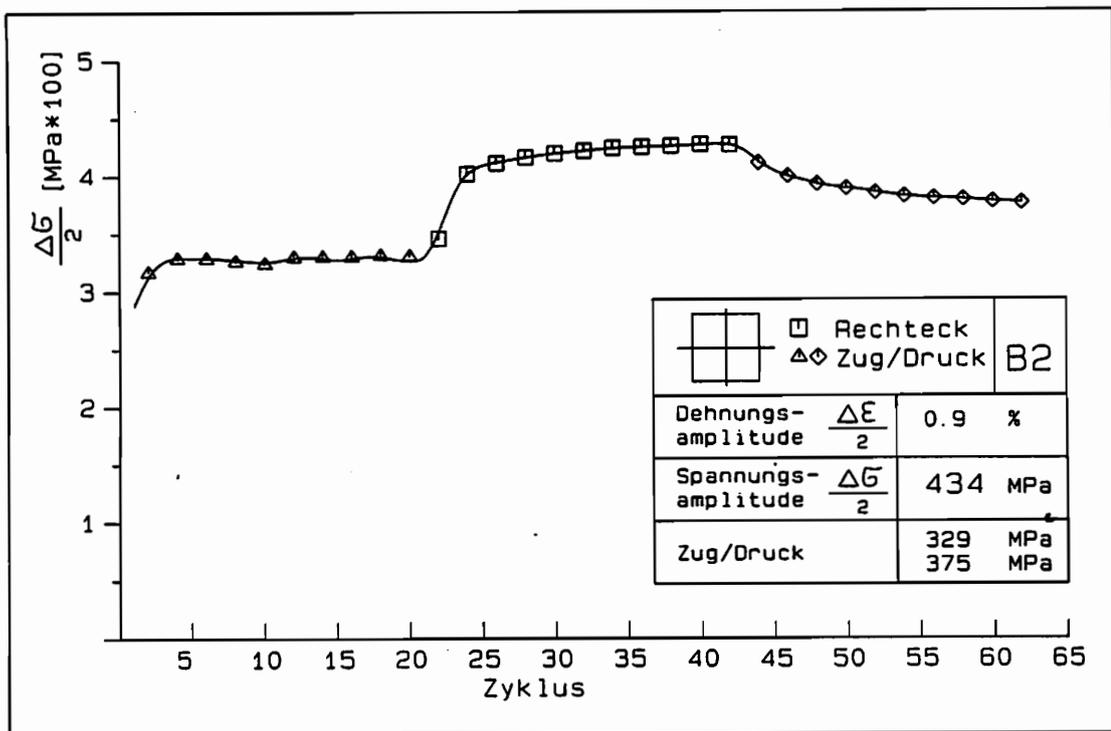


Abb. 3.29 Verfestigungsdiagramm für Versuch B2  
 $\Delta \sigma / 2 = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2}$

Versuch B2 ist ein rechteckiger Dehnungspfad mit 0.9% axialer Amplitude ( Abb.3.26 ). Derartige rechteckig phasenversetzte Dehnungswegen verursachen eine deutliche höhere Verfestigung als im Zug/Druckversuch gleicher effektiver Amplitude . Abb. 3.29 ermöglicht einen Vergleich zwischen Rechteck- und Axialbelastung . Es ist zu beachten , daß der Werkstoff beim Übergang von Axial- auf Rechtecklast verfestigt und beim Übergang von Rechteck- auf Axiallast entfestigt . Die effektive Dehnungsamplitude beträgt wie in Versuch B1 0.9 % .

Zu einem ähnlichen Ergebnis führt auch der Versuch B3 ( Abb. 3.27 ) mit kreisförmigem Dehnungsweg . Die Verfestigung ist geringer als bei Rechteckbelastung ( siehe Abb. 3.30 ) . Ein Grund dafür liegt darin , daß der Kreis , der dem Rechteck eingeschrieben ist , die kleinere Bogenlänge hat .

Wesentlich höher dagegen ist die Verfestigung beim dreieckförmigen Belastungsweg ( Abb. 3.28 ). Im Verfestigungsdiagramm Abb.3.31 ist zu erkennen , daß der dreieckförmige Pfad trotz der geringen Zyklenzahl und der kleinen Dehnungsamplitude ( 0.6% gegenüber 0.9% wegen starker Beulneigung ) eine deutlich höhere Verfestigung induziert als der kreisförmige und der rechteckige Dehnungsweg . Bezogen auf den einaxialen Referenztest liegt eine Steigerung von nahezu 50% vor , legt man jedoch vergleichbare Werte zugrunde , dürfte die Verfestigung bei Dreiecksbelastung noch wesentlich größer ausfallen .

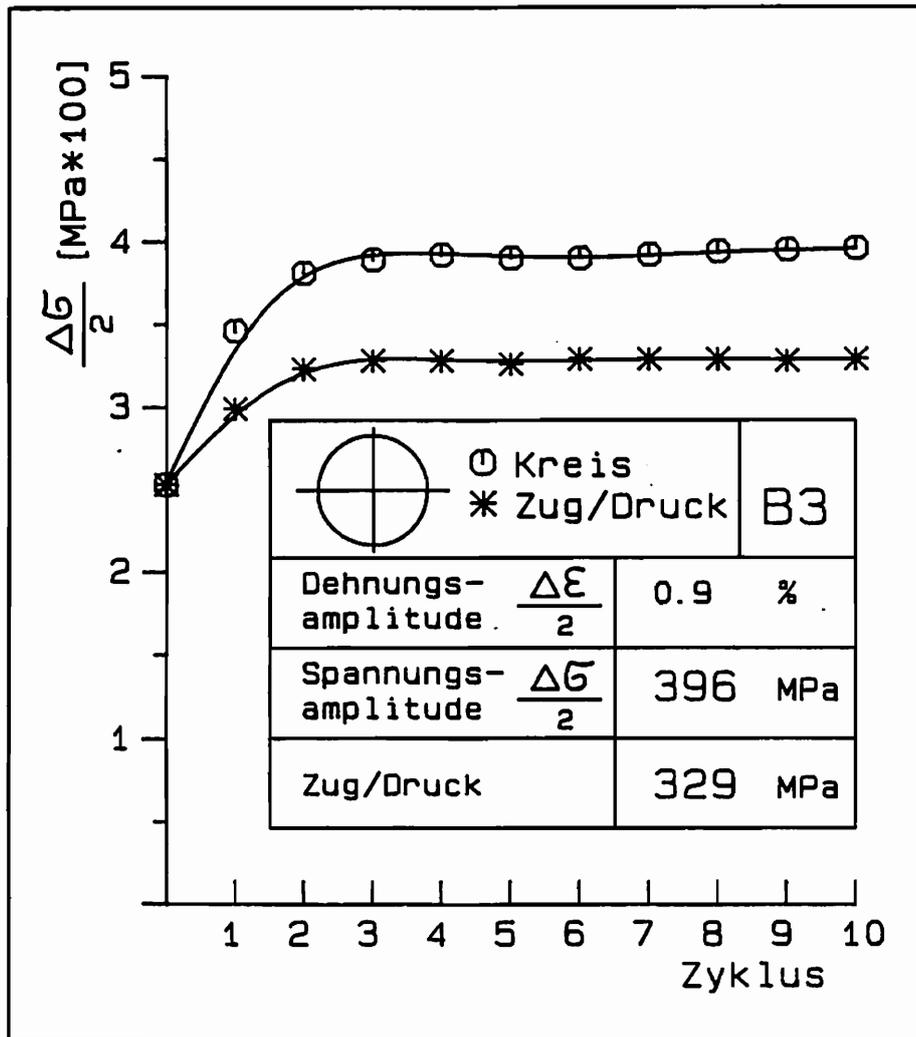


Abb. 3.30 Verfestigungsdiagramm zu Versuch B3 (Abb.3.27)

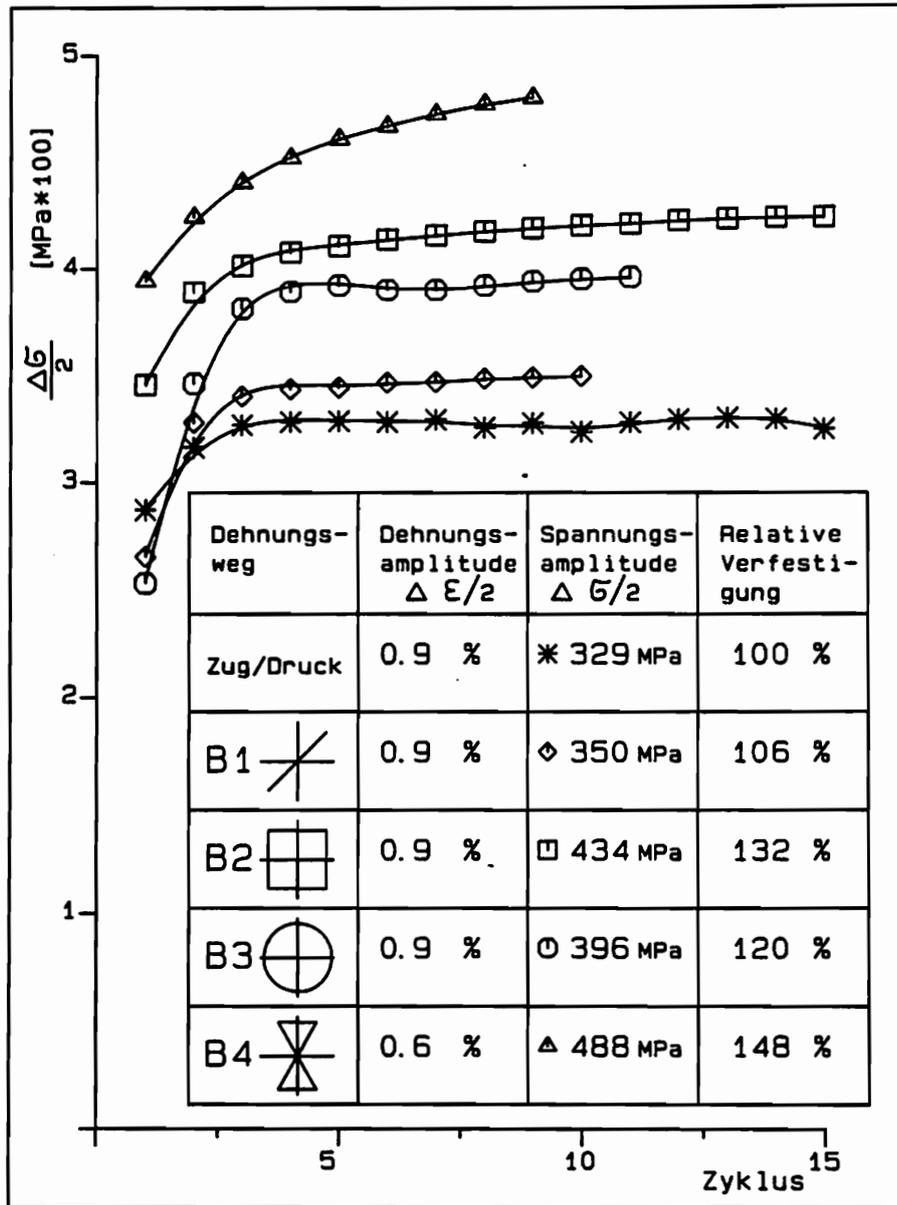


Abb. 3.31 Überblick über das Verfestigungsverhalten bei zweiaxialen Versuchen B1-B4 ( $\Delta \sigma/2 = [\sigma^2 + 3\tau^2]^{1/2}$ )

### 3.5.2 Einfluß der Deformationsamplitude auf das Verfestigungsverhalten

In Abschnitt 3.4.3 wurde gezeigt, daß sowohl die isotrope als auch die kinematische Verfestigung bei einaxialen Versuchen von der Dehnungsamplitude beeinflusst ist. In diesem Abschnitt soll die Frage geklärt werden, welchen Effekt die Amplitudenvariation auf die Verfestigung bei zweiaxialen Belastungen hat. Das Versuchsprogramm von Abschnitt C ist in Tabelle 3.5 zusammengestellt. Der Versuchsblock C1 umfaßt drei kreisförmige Pfade mit aufsteigender Amplitudenfolge, während Block C2 auch eine Amplitudenverringerng enthält (C1 und C2 sind in veränderter Darstellung aus [39] entnommen). Versuch C3 ist eine Dreiecksbelastung wie Versuch B4, jedoch mit einer

45° Steigung anstelle 60°. Um das zur Bestimmung der isotropen und kinematischen Verfestigung entwickelte Verfahren auch hier anwenden zu können und um die Effekte der zwei axialen Prozesse im Vergleich zum Zug/Druckversuch beurteilen zu können, wird nach jeder Amplitude in Versuch C3 ein zyklischer Zug/Druck-Kontrollversuch durchgeführt. Der axiale Folgetest erlaubt es, die zusätzliche Verfestigung in bezug auf die isotrope und kinematische Verfestigung einzuordnen. Dehnungsweg und Spannungsantwort sind in den Abbildungen 3.32 und 3.33 dargestellt.

Zweiaxiales Versuchsprogramm • Abschnitt C Einfluß der Deformationsamplitude auf das Verfestigungsverhalten		
Versuch	Darstellung	Axiale Amplitude $\Delta\varepsilon/2$
C1*		0.6, 0.9, 1.2%
C2*		0.9, 0.6, 1.2%
C3		0.3, 0.4, 0.5%

Tabelle 3.5

Versuchsabschnitt C, Einfluß der Deformationsamplitude auf das Verfestigungsverhalten. Die mit (\*) gekennzeichneten Versuche sind aus [39] entnommen.

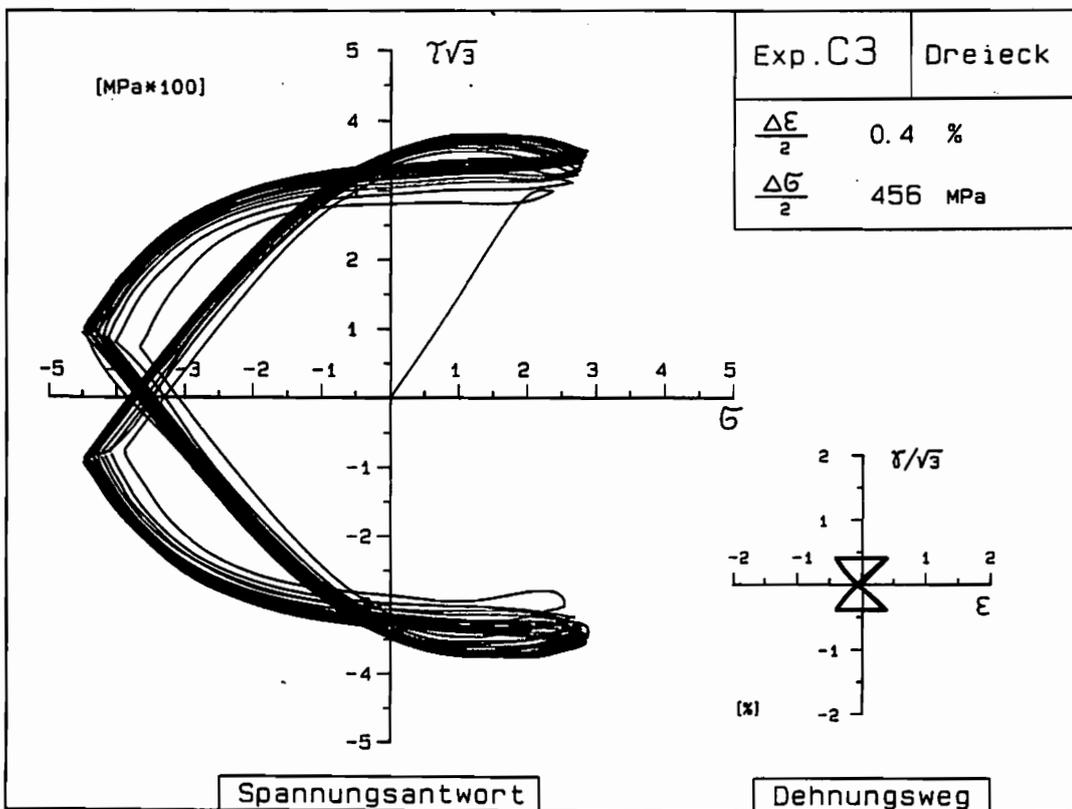
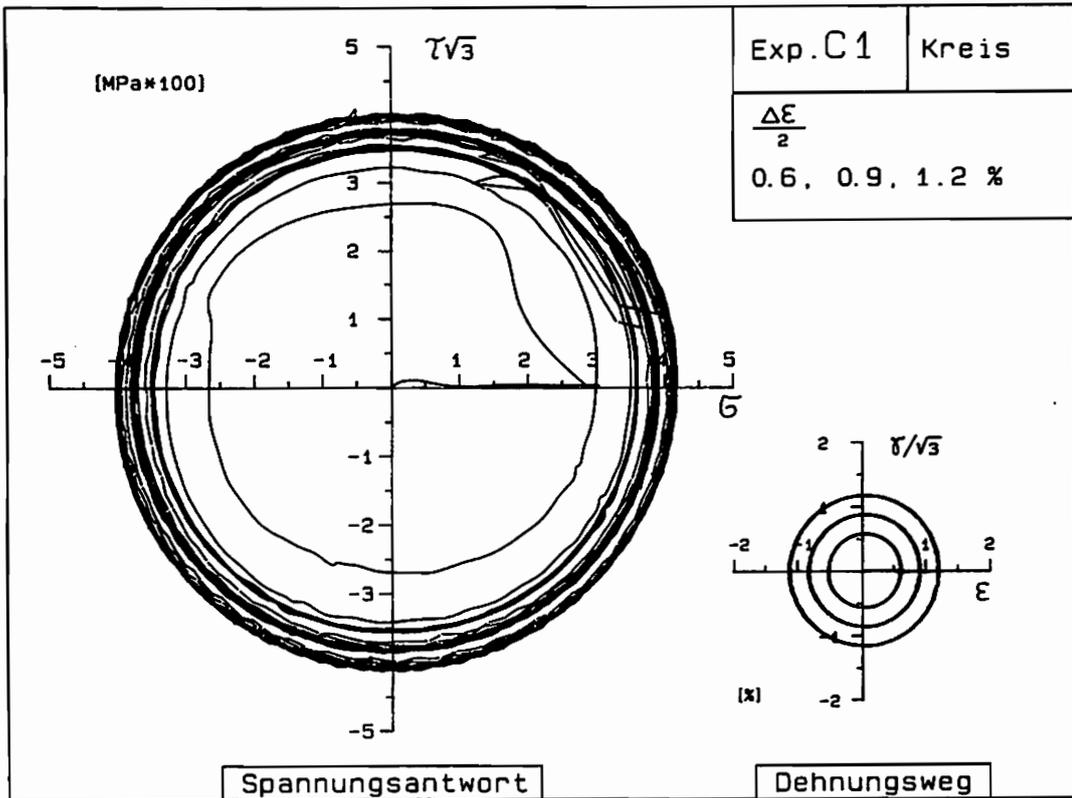


Abb. 3.32 ( oben )  
 Kreisförmiger Deformationsweg  
 mit drei Amplituden , Versuch C1  
 ( aus [ 39 ] )

Abb. 3.33 ( unten )  
 Dreieckförmiger Deformationsweg  
 mit drei Amplituden , Versuch C3

Die Abbildungen 3.34 und 3.35 illustrieren das Verfestigungsverhalten beim kreisförmigen Deformationsweg. Im Versuch C1 erfolgt eine mit zunehmender Amplitude schwächer werdende Verfestigung, deren Übergänge nicht so ausgeprägt sind wie der stufenförmige Verlauf beim Zug/Druckversuch. Abb. 3.35 zeigt, daß Amplitudenverkleinerung, ähnlich wie im einaxialen Fall, mit Entfestigung verbunden ist.

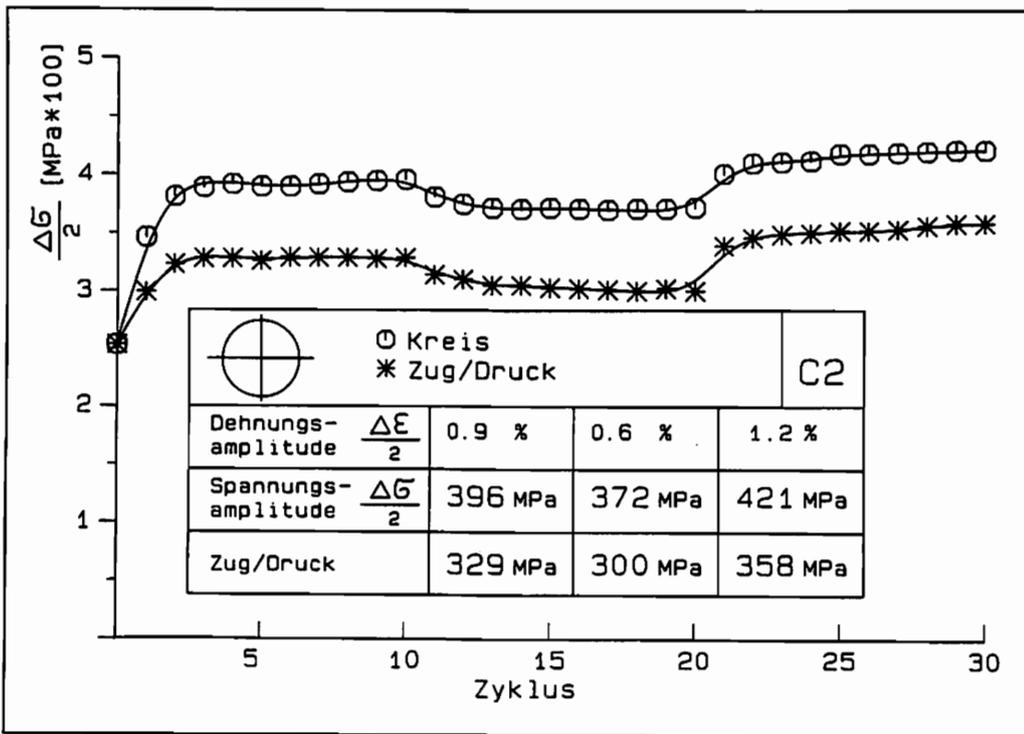
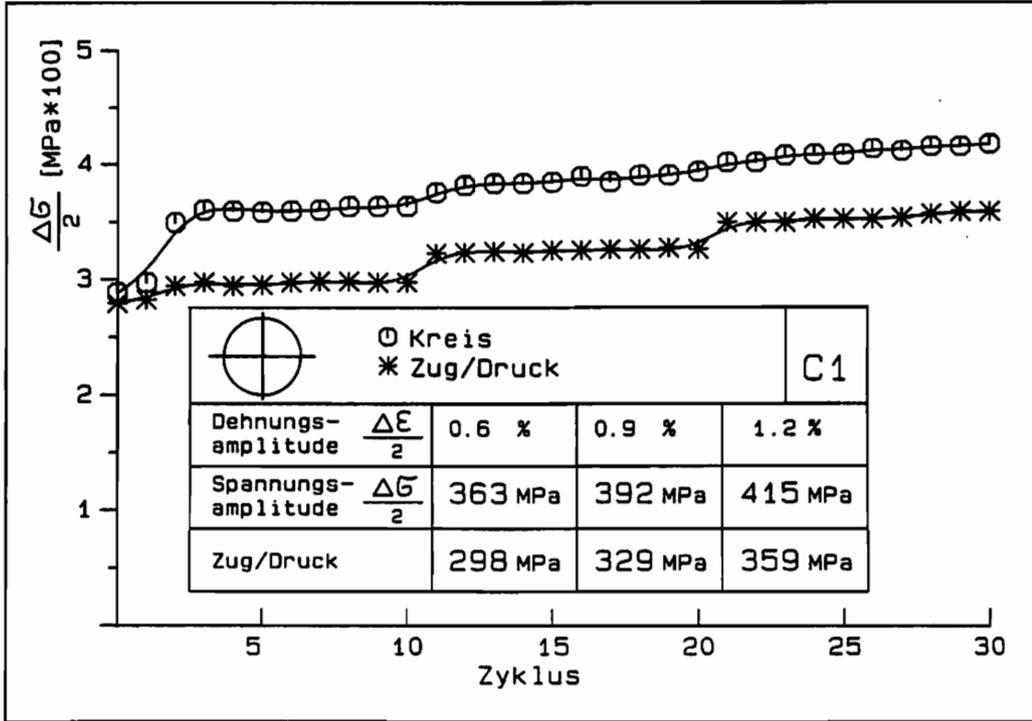


Abb. 3.34 ( oben )  
 Verfestigungsverhalten im Versuch C1  
 ( Bezeichnungen siehe Abb. 3.31 )

Abb. 3.35 ( unten )  
 Verfestigungsverhalten im Versuch C2  
 ( Bezeichnungen siehe Abb. 3.31 )

Bei der Dreieckbelastung bestätigt Abb. 3.36 die außerordentlich hohe Verfestigung, die bei diesem Versuchstyp entsteht. Abb. 3.37 und 3.38 zeigen die nachfolgende Entfestigung während des axialen Folgetests. Die Entfestigung scheint sich in erster Linie auf den isotropen Anteil auszuwirken, während der kinematische Anteil keine signifi-

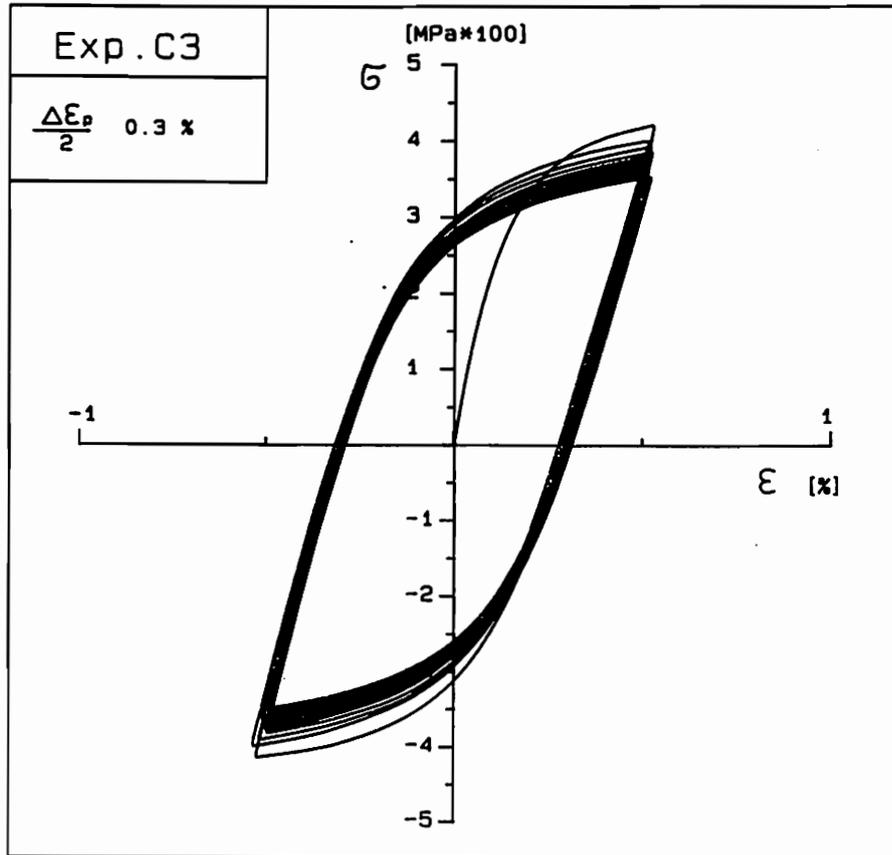
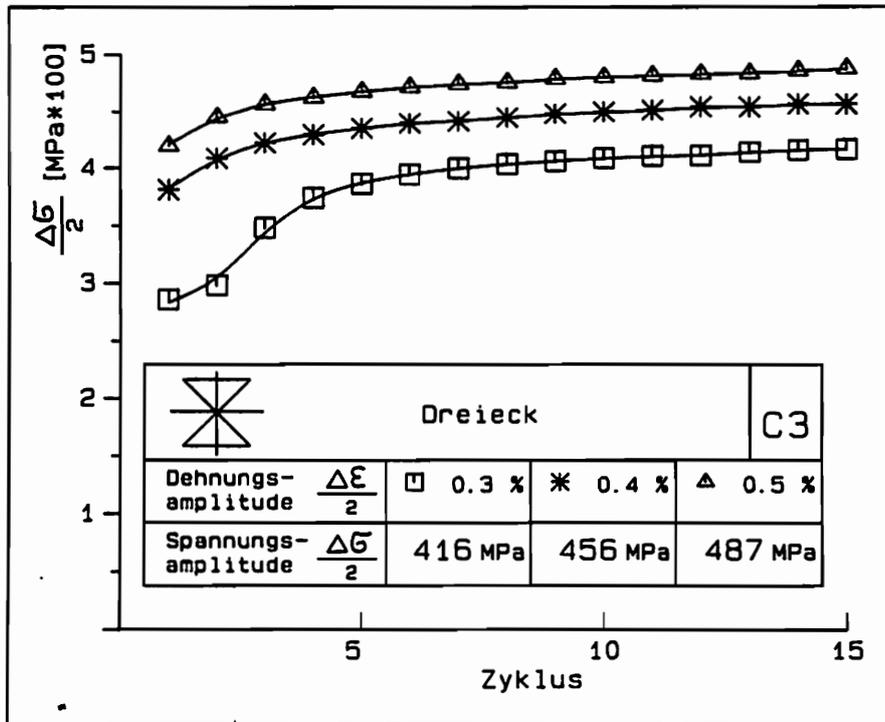
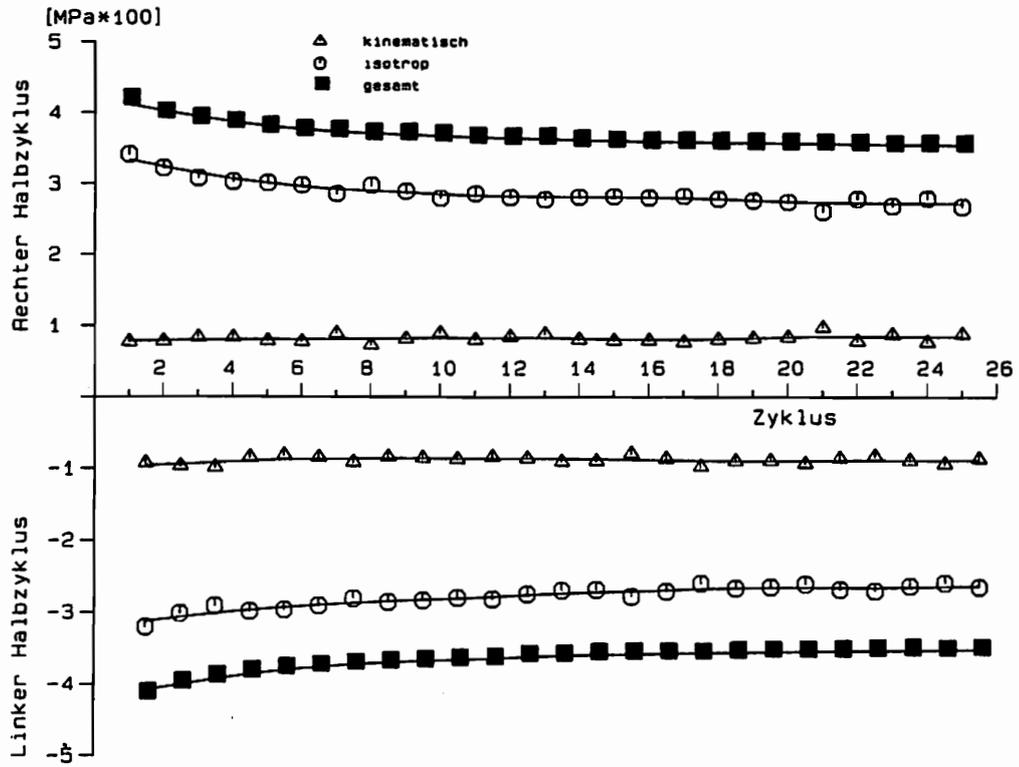


Abb. 3.36 (oben)  
Verlauf der Verfestigung bei Dreieckbelastung ( Abb. 3.34 )

Abb. 3.37 ( unten )  
Axialer Folgetest nach Dreieckbelastung

kanten Änderungen erfährt . Das deutet darauf hin , daß durch bestimmte zweiachiale Prozesse eine Aktivierung zusätzlicher Gleitsysteme und eine vermehrte Produktion von Versetzungen initiiert werden . Die Ergebnisse der axialen Folgetests sind in Abb. 3.39 zusammengefaßt .



$\frac{\Delta \epsilon}{2}$	Zug/Druck-Folgetest nach Dreiecksbelastung		
	0.3 %	0.4 %	0.5 %
$\circ$ gesamt [ MPa ]	417 351	452 389	476 419
+ isotrop [ MPa ]	332 268	371 301	388 326
* kinematisch [ MPa ]	78 83	74 87	83 93
	n=1    n=25	n=1    n=25	n=1    n=25

Abb. 3.38 ( oben )

Verfestigungsdiagramm eines axialen Folgetests in C3 ( zu Abb. 3.37 )

Abb. 3.39 ( unten )

Zusammenstellung der axialen Folgetests im Versuch C3

#### 4. Mikromechanische Deutung der plastischen Deformation metallischer Festkörper

##### 4.1 Allgemeines

Die plastische Verformung wird durch das Abgleiten kristallographischer Ebenen in Folge äußerer Beanspruchung erklärt. Diese Ebenen werden als Gleitebenen bezeichnet und zeichnen sich durch eine sehr hohe Atomdichte aus. In der Gleitebene gibt es bestimmte Vorzugsrichtungen mit dichtest gepackter Atomanordnung, in der die Gleitung sich fortbewegt. Gleitebene und Gleitrichtung bilden ein Gleitsystem. In Abb. 4.1 ist ein Einkristall mit der Querschnittsfläche A unter axialer Belastung dargestellt. Mit den Winkeln  $\lambda$  für die Gleitrichtung und  $\chi$  für die Neigung der Gleitebene ergibt sich für die in bezug auf das Gleitsystem aufgelöste Schubspannung [ 41, 42 ]

$$\tau_k = \frac{F}{A} \sin \chi \cos \lambda \quad , \quad (4.1)$$

die einen Maximalwert  $\tau_{\max} = 1/2 \frac{F}{A}$  für  $\chi = \lambda = 45^\circ$  annehmen kann. Viele für die technische Anwendungen geeignete Werkstoffe, wie z.B. austenitische, rostfreie Stähle kristallisieren vorwiegend in kubisch flächenzentrierter

Form mit 12 Gleitsystemen. Kubisch raumzentrierte Kristalle, die bei dem hier untersuchten Werkstoff Ck 15 vorherrschen, haben dagegen eine größere Vielfalt möglicher Gleitsysteme. Experimentelle Untersuchungen an Eisen haben gezeigt, daß sich bei diesem Werkstoff die Bestimmung von Gleitsystemen schwieriger gestaltet [ 42 ] .

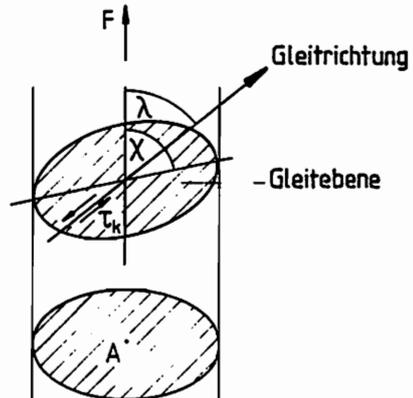


Abb. 4.1 Gleitsystem beim Einkristall

Nun gleitet eine kristallographische Ebene nicht vollständig ab, sondern es entstehen Diskontinuitäten zwischen Ebenen, die abgeschert sind, und anderen nicht deformierten Ebenen. Die dabei auftretenden Liniendefekte werden als Versetzungen bezeichnet. Sie beeinflussen in entscheidender Weise die makroskopische Plastizität und Festigkeit von Metallen.

Die Eigenschaft von Metallen, plastisch verformbar zu sein, hängt hauptsächlich mit der Wanderung von Versetzungen entlang der Gleitebene unter Einwirkung der im Gleitsystem herrschenden Schubspannung zusammen. Abb. 4.2 zeigt einen derartigen Gleitvorgang einer Versetzungslinie. Zur Kennzeichnung einer Versetzung dient der Burgers-

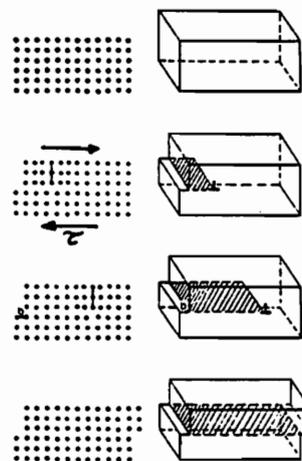


Abb. 4.2 Wanderung einer Stufenversetzung auf der Gleitebene ( aus [ 43 ] )

vektor  $\vec{b}$ . Er gibt den Betrag und die Richtung an, in der das Kristallgitter verzerrt ist. Versetzungen werden nach dem Winkel bezeichnet, den die Versetzungslinie mit dem Burgersvektor bildet. Dies läßt sich anhand des Versetzungsringes erläutern. In Abb. 4.3 ist die Gleitebene mit einem schraffierten Bereich dargestellt, in dem eine Versetzung um einen Atomab-

stand vorliegt. Umläuft man die Berandung entsprechend der eingezeichneten Pfeilrichtung, stößt man auf vier ausgezeichnete Punkte A, B, C, D, in denen die Richtung der Versetzungslinie entweder senkrecht (A, B) oder parallel (C, D) zum Burgersvektor orientiert ist. Die Versetzungslinie, die durch A und B geht, wird als Stufenversetzung bezeichnet und mit dem Symbol  $\perp$  gekennzeichnet. Der horizontale Strich symbolisiert die Gleitebene und der senkrechte Strich die eingeschobene Halbebene. In Punkt B befindet sich eine Stufenversetzung mit entgegengesetztem Vorzeichen zu A. Die Versetzungen in C und D werden als Schraubenversetzungen bezeichnet. Bei ihnen ist die Versetzungslinie parallel zum Burgersvektor. Der Name rührt daher, daß die Gitterebene entlang einer Schraubenlinie verzerrt wird. Die Stufenversetzungen in A und B sind in Abb. 4.4 in einer Ansicht dargestellt, die senkrecht zur Gleitebene steht. Die Stufenversetzungen haben eine Ausdehnung senkrecht zur Zeichenebene und durchlaufen den Kristall horizontal entlang der Gleitebene. Die damit verknüpfte makroskopische Dehnung hat die Richtung des Burgersvektors. Die Gleitung von Versetzungen auf der Gleitebene wird als grundlegender Vorgang während plastischer Deformationen betrachtet [ 44, 45 ]. Versetzungen können nicht nur die beschriebenen Konfigurationen einnehmen, sondern auch beliebige Winkel mit dem Burgersvektor bilden. Man spricht dann von ge-

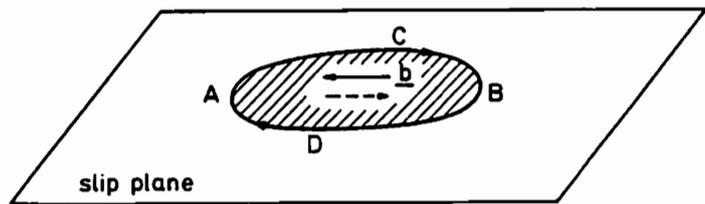


Abb. 4.3 Versetzungsring in der Gleitebene mit Burgersvektor  $\vec{b}$  (aus [ 43 ])

Die Stufenversetzungen in A und B sind in Abb. 4.4 in einer Ansicht dargestellt, die senkrecht zur Gleitebene steht. Die Stufenversetzungen haben eine Ausdehnung senkrecht zur Zeichenebene und durchlaufen den Kristall horizontal entlang der Gleitebene. Die damit verknüpfte makroskopische Dehnung hat die Richtung des Burgersvektors. Die Gleitung von Versetzungen auf der Gleitebene wird als grundlegender Vorgang während plastischer Deformationen betrachtet [ 44, 45 ]. Versetzungen können nicht nur die beschriebenen Konfigurationen einnehmen, sondern auch beliebige Winkel mit dem Burgersvektor bilden. Man spricht dann von ge-

Die Stufenversetzungen in A und B sind in Abb. 4.4 in einer Ansicht dargestellt, die senkrecht zur Gleitebene steht. Die Stufenversetzungen haben eine Ausdehnung senkrecht zur Zeichenebene und durchlaufen den Kristall horizontal entlang der Gleitebene. Die damit verknüpfte makroskopische Dehnung hat die Richtung des Burgersvektors. Die Gleitung von Versetzungen auf der Gleitebene wird als grundlegender Vorgang während plastischer Deformationen betrachtet [ 44, 45 ]. Versetzungen können nicht nur die beschriebenen Konfigurationen einnehmen, sondern auch beliebige Winkel mit dem Burgersvektor bilden. Man spricht dann von ge-

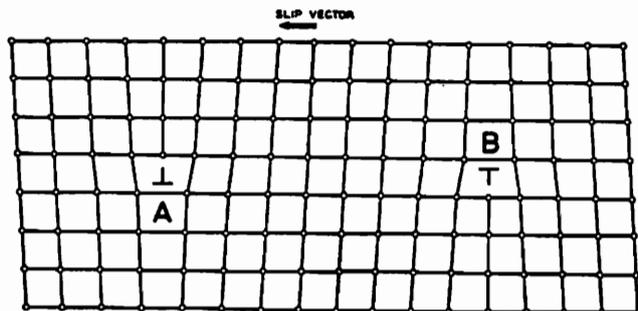


Abb. 4.4 Stufenversetzungen A und B im Schnitt senkrecht zu Abb. 4.3 (aus [ 43 ])

gemischten Versetzungen . Welche Art vorherrscht , hängt von der Gitterstruktur ab . Im kubisch-raumzentrierten Kristall sind vorwiegend Schraubenversetzungen anzutreffen , während im kubisch - flächenzentrierten Gitter Stufenversetzungen dominieren .

Versetzungen besitzen eine elastische Energie und üben Kräfte aufeinander aus . Sie haben die Tendenz , sich räumlich in Netzwerken zu organisieren und geordnete Strukturen zu bilden . Sie sind komplizierte geometrische Gebilde , die auch in Form von .. Dipolen " und .. Wäldern " zu beobachten sind [ 45 ] .

Ihre Wirkungsweise ist sehr unterschiedlich , sie können z.B. leicht beweglich sein , oder fest verankert zwischen Fremdeinschlüssen , Verunreinigungen oder anderen Gitterbaufehlern . Derartig fixierte Versetzungen dienen bei einer bestimmten kritischen Schubspannung als Quelle neuer Versetzungen ( Frank-Read Quelle ) , so daß sich die Versetzungsdichte in einem Kristall aufgrund plastischer Deformationen erhöht . Auch das Gegenteil , daß Versetzungen ausheilen und sich gegenseitig neutralisieren , ist möglich .

Eine mathematische Beschreibung der Gesetzmäßigkeiten , denen die Bildung und Bewegung von Versetzungen unterliegen , ist bisher nur in Spezialfällen gelungen .

#### 4.2 Modell mit heterogener Versetzungsstruktur

Elektronenmikroskopische Untersuchungen haben gezeigt , daß die räumliche Verteilung der Versetzungen innerhalb des Kristalls mit zunehmender plastischer Deformation inhomogen wird . Es bildet sich eine zellenartige Versetzungsstruktur aus , in der sich drei verschiedene Gebiete unterscheiden lassen ( Abb. 4.5 , [ 46 ] ) , eine annähernd versetzungsfreie Zone ( weiß , wie C1 ) , die das Zellinnere bildet , eine Zellwandperipherie ( grau , wie B1 ) mit mittlerer Versetzungsdichte und ein innerer Zellwandkern ( schwarz , wie A ) mit sehr hoher Versetzungsdichte . Die beweglichen Versetzungen können das Zellinnere ohne größeren Widerstand passieren , während im grauen Bereich , die äußere Fließspannung  $\sigma_p$  gerade noch groß genug ist , die Versetzungen in Richtung des Zellwandkerns voranzutreiben , wo sie sich zu Versetzungsknäueln zusammenballen ( tangled cell walls ) und undurchdringliche Hindernisse für nachfolgende Versetzungen bilden . Der schwarze Zellwandkern stellt eine harte und stabile Barriere dar , an der sich neu ankommende Versetzungen aufstauen , so daß

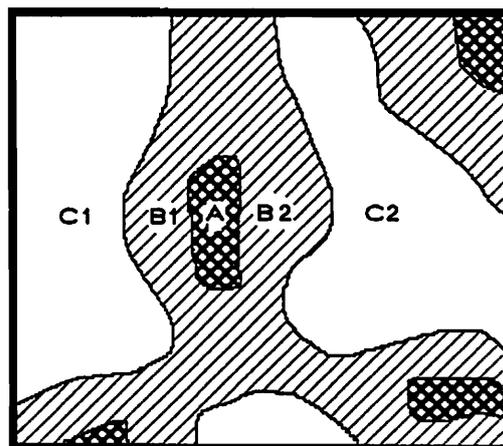


Abb. 4.5  
Inhomogene Versetzungsverteilung im verformten Metall ( aus [ 46 ] )

mit zunehmender Deformation eine Verdichtung der schwarzen Gebiete und Ausdehnung der grauen Gebiete erfolgt und eine periodisch geordnete Substruktur aus harten und weichen Gebieten entsteht .

Zur Beschreibung der Mechanismen , die zur Ausbildung derartiger Zellstrukturen führen , sind verschiedene Theorien entwickelt worden [ 46 , 47 , 48 ] . Es wird angenommen , daß Versetzungen , die weitreichende elastische Kräfte ( long range internal stress ) aufeinander ausüben , bestrebt sind , energetisch günstige Konfigurationen einzunehmen , in denen die freie Enthalpie des Kristalls ein Minimum hat . Dieser Prozeß ist nicht allein auf die Gleitebene beschränkt , sondern setzt sich auch dreidimensional mit der Bildung von vernetzten Wällen endlicher Wandstärke senkrecht zur Gleitebene fort . Innerhalb der Zellwände ist eine Formierung der Versetzungen entsprechend ihrer Polarität zu vermuten , so daß sich Versetzungen mit einem Vorzeichen vorwiegend auf einer Seite der Zellwand ansammeln ( z.B im Gebiet B1 ) , während Versetzungen mit umgekehrtem Vorzeichen auf der gegenüberliegenden Seite ( Gebiet B2 ) zu finden sind . Die Zellwände besitzen deshalb ein Erinnerungsvermögen daran , von welcher Seite die Versetzungen eingetroffen sind . Belastungswechsel und -umkehr verursachen dann eine Neuformierung und Umordnung der Zellstruktur , die z.B. in Form des Bauschinger-effektes beobachtet werden kann [ 46 ] . Darauf wird am Ende dieses Kapitels noch genauer eingegangen .

Aufgrund der Formierung harter Zellwände mit hoher Versetzungsdichte , die weiche , annähernd versetzungsfreie Gebiete umschließen , ist eine lokale Spannungsverteilung zu erwarten , die örtlich große Unterschiede aufweist , insbesondere in den Übergangsbereichen zwischen den Zellwänden und dem Zellinneren .

Dabei wird die lokale Spannung als die Spannung verstanden , die durch die Wechselwirkung von Gebieten hoher Versetzungsdichte mit Gebieten geringer Versetzungsdichte auf der Mikroskala entsteht . Sie wird daher auch als Mikrospannung bezeichnet . Ihr phänomenologisches , gemittelttes Äquivalent ist durch die tensorielle Variable  $\underline{\alpha}$  ( vgl. Gl.( 2.64 )) gegeben . Die Differenz zwischen äußerer Spannung  $\underline{t}$  und Mikrospannung  $\underline{\alpha}$  ist die interne Spannung . Sie kann sowohl vorwärts ( Belastung ) , als auch rückwärts ( Entlastung ) gerichtet sein ( Abb. 4.6 ) und bestimmt die Richtung , in der sich die Versetzungen bewegen .

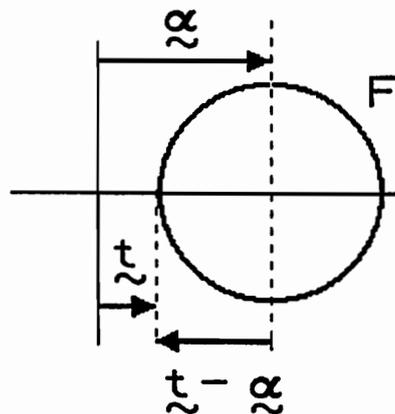


Abb. 4.6 Äußere Spannung  $\underline{t}$  und Mikrospannung  $\underline{\alpha}$  im Modell,  $\underline{t} - \underline{\alpha}$  Interne Spannung

Ein typisches Beispiel für eine lokale Spannungsverteilung ist in Abbildung 4.7 illustriert. Die während der Vordehnung erreichte Spannung wird mit  $\sigma_p$ , die aktuelle Spannung mit  $\sigma$  bezeichnet. Die Pfeile geben die Richtung an, in der die lokale (oder die interne) Spannung relativ zu  $\sigma_p$  wirkt. „Vorwärts“ (rückwärts) bedeutet, daß sie die gleiche (entgegengesetzte) Richtung hat wie  $\sigma_p$ . Die horizontalen Linien markieren das Nullniveau bei Vordehnung (untere Linie), bei Entlastung (mittlere Linie) und bei Belastungsumkehr (obere Linie). Über dem jeweiligen Nullniveau ist die Spannung vorwärts und unter dem Nullniveau ist die Spannung rückwärts gerichtet. Es werden die Fälle

Vordehnung	$\sigma / \sigma_p = +1$
Entlastung	$\sigma / \sigma_p = 0$
Spannungsumkehr	$\sigma / \sigma_p = -1$

diskutiert [46]: (1) Während der Vordehnung  $\sigma = \sigma_p$  ist die lokale Spannung im gesamten Kristall vorwärts gerichtet. Die mittlere Linie bedeutet das aktuelle Spannungsniveau. Die interne Spannung ist die Abweichung der lokalen Spannung von der äußeren Spannung. Sie ist an der Zellwandperipherie ungefähr null. Hier sind die unter der Wirkung von  $\sigma_p$  eintreffenden Versetzungen gerade im Gleichgewicht, so daß sie sich im grauen Bereich aufstauen. In der harten Zellwand steigt die lokale Spannung sehr steil an und hat dort die gleiche Richtung wie  $\sigma_p$ , da die Spannungskonzentration in erster Linie von der Zusammenballung der Versetzungen unter Wirkung von  $\sigma_p$  entstanden ist. Im Zellinneren dagegen ist die interne Spannung rückwärts gerichtet (backward internal stress), um die in den Zellwänden wirkende Spannung zu kompensieren. Da die Fläche des Zellinneren groß gegenüber der Zellwanddicke ist, sind die lokalen Spannungen hier betragsmäßig kleiner.

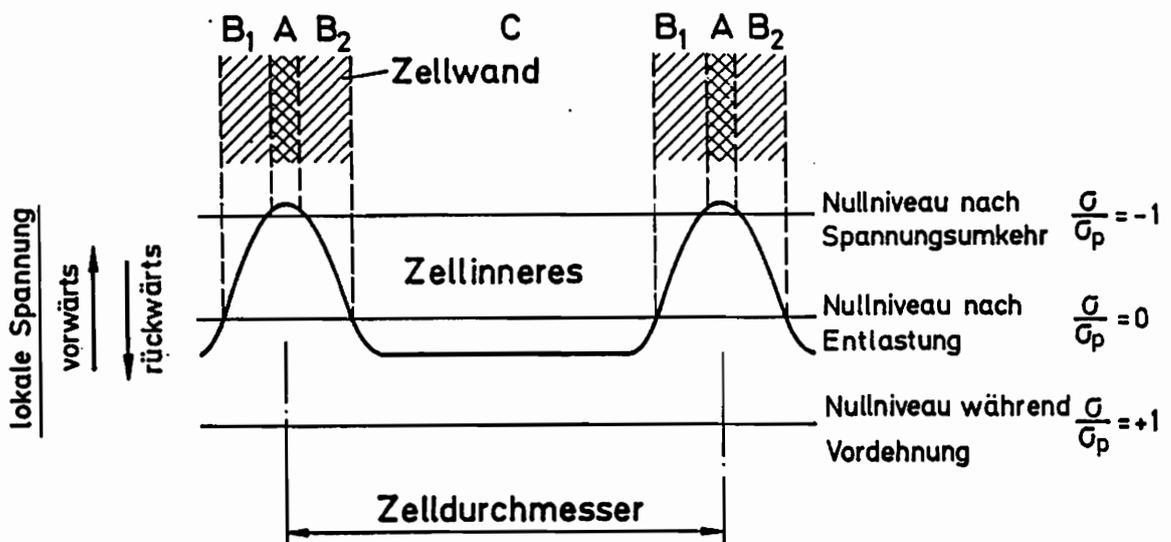


Abb. 4.7 Lokale Spannungsverteilung in harten und weichen Gebieten der Subkornstruktur (umgeschrieben aus [46])

- (2) Nach Entlastung  $\sigma = 0$  ist die lokale Spannung rückwärtig im Zellinneren und – aus Gleichgewichtsgründen – vorwärtsgerichtet in den Zellwänden . Die rückwärtige lokale Spannung begünstigt ein frühes Fließen bei Belastungsumkehr .
- (3) Bei Belastungsumkehr  $\sigma = -\sigma_p$  ist die gesamte lokale Spannung rückwärts gerichtet . Es wurde beobachtet , daß eine vollständige Umordnung und Auflösung der Zellstruktur stattfindet , gefolgt von einer relativ schnell ablaufenden Neuformierung mit umgekehrtem Vorzeichen .

Das Modell bietet eine Erklärung für eine Reihe von Phänomenen , nicht nur in der zeitunabhängigen Plastizität , sondern auch bei thermisch aktivierten Prozessen . Insbesondere ist beobachtet worden , daß die Zellstrukturen das Kriechverhalten beeinflussen ("creep structure" ) . Ursprünglich wurde das Modell entwickelt , um Vorwärts - und Rückwärtskriechen nach einer Spannungsrelaxation  $\Delta\sigma$  zu erklären [ 50 ] . In Abb. 4.8 ist der Einfluß der Spannungsrelaxation nach einer stationären Kriechphase  $\dot{\epsilon}_s$  dargestellt . Ist die Spannungsrelaxation genau gleich dem kritischen Wert  $\Delta\sigma_c = \sigma - \sigma_i$  , nämlich der Differenz zwischen äußerer Spannung  $\sigma$  und interner Spannung  $\sigma_i$  , findet kein weiteres Kriechen statt . Andererseits bewirkt die Existenz der internen Spannungen ein Vorwärtskriechen , falls  $\Delta\sigma < \Delta\sigma_c$  und ein Rückwärtskriechen , falls  $\Delta\sigma > \Delta\sigma_c$  . Mit diesem Verfahren kann die interne Spannung indirekt gemessen werden [ 51 ] .

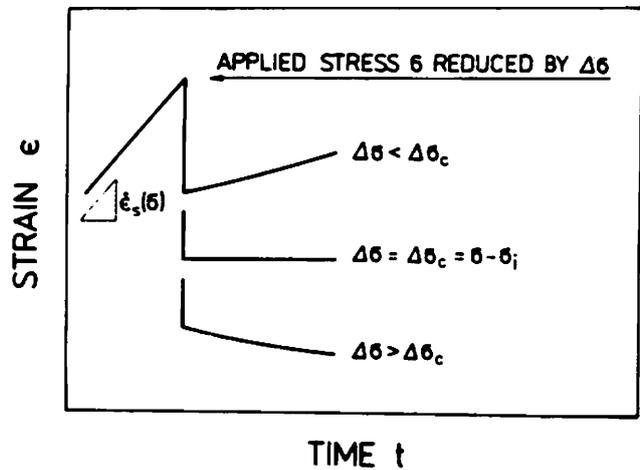


Abb. 4.8 Vorwärts- und Rückwärtskriechen nach einer Spannungsrelaxation [ 51 ]

Ein weiteres wichtiges Phänomen , daß mit dem Modell erklärt werden kann , ist der Bauschinger - Effekt , der sowohl bei Einkristallen als auch bei Vielkristallen festgestellt wurde [ 52 ] . Im letzteren Falle können jedoch auch andere Ursachen , wie z.B. intergranulare Zwangsbedingungen eine Rolle spielen [ 54 ] . Der Bauschinger - Effekt beschreibt die Tendenz des Materials , nach Vordehnung und Belastungsumkehr dem Fließvorgang einen geringeren Widerstand entgegenzusetzen . Er bewirkt , daß die Fließgrenze in Richtung der unmittelbaren Vordehnung ansteigt , während sie in entgegengesetzter Richtung abnimmt ( Abb. 4.9 ) .

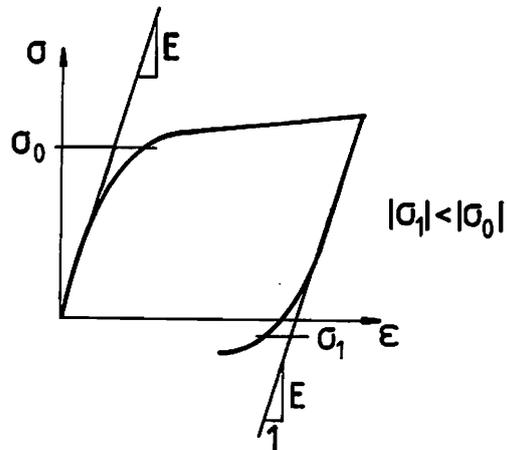


Abb. 4.9 Der Bauschinger - Effekt beim Zug/Druckversuch

Zum Bauschinger - Effekt existieren zahlreiche experimentelle Untersuchungen , sowohl an Einkristallen und reinen Metallen als auch an Vielkristallen und Ein- und Mehrphasen-Legierungen [ 53 , 55 , 56 ] . Zur quantitativen Erfassung kann der Parameter  $\beta$  verwendet werden , der den Dehnungsbereich nach Belastungsumkehr bezeichnet , in dem eine Unterbrechung des Verfestigungsprozesses stattfindet [ 54 ] . Die geometrische Konstruktion von  $\beta$  ist in Abb. 4.10 illustriert . Die Ent- bzw. Gegenbelastungskurve ist mit der Linie BD in absoluten Spannungen eingezeichnet . Spiegelt man die Erstbelastungskurve in A , so erhält man als Schnittpunkt mit der absoluten Gegenbelastungskurve den Punkt E und entsprechend durch Abtragen der gleichen Strecke den Punkt F auf der Erstbelastungskurve . Aus F ergibt sich  $\beta$  wie eingezeichnet . Verschiebt man die absolute Rückbelastungskurve um  $\beta$  , nähern sich die beiden Zweige asymptotisch . Daher müßte  $\beta$  eigentlich abgezogen werden , will man den Verfestigungsprozeß mithilfe eines monoton wachsenden Parameters , wie etwa der kumulativen plastischen Dehnung beschreiben [ 54 ] .

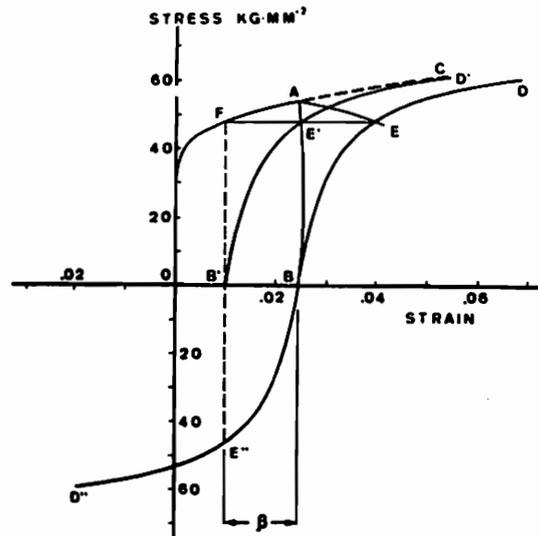


Abb. 4.10 Zur Konstruktion der reversiblen Dehnung  $\beta$  [ 54 ]

Der durch  $\beta$  festgelegte Dehnungsbereich korrespondiert mit der „reversiblen“ Bewegung der Versetzungen durch Gebiete mit kleinem Widerstand , wie z.B. die weißen Flächen im Zellstrukturmodell . Die frühe Bewegung der Versetzungen wird dabei von der rückwärtigen internen Spannung im Zellinneren ausgelöst . Sieht man die harten Zellwände als Barrieren an , so ist  $\beta$  das makroskopische Äquivalent der freien Weglänge ( mean free path ) , die dem Zelldurchmesser entspricht und entlang derer die Versetzungen ungehindert abgleiten [ 49 ] . Diese Versetzungen tragen nichts zur weiteren Verfestigung bei ( „ lost strain range “ ) , vielmehr nimmt die Gesamtversetzungsdichte  $\rho_t$  bei diesem Vorgang um etwa 15 % ab , wie elektronenmikroskopische Untersuchungen , die von Hasegawa u.a. an polykristallinem Aluminium durchgeführt wurden [ 52 ] , gezeigt haben ( Abb. 4.11 ) .

In der phänomenologischen Theorie ist der Mikrospannungs- oder kinematische Verfestigungstensor  $\underline{\sigma}$  eingeführt worden , um den Bauschinger-Effekt zu erfassen . Er bewirkt eine Verschiebung der Fließfläche in Richtung der Vordehnung und trägt somit dem richtungsabhängigen Einfluß der plastischen Verformung ( induzierte Anisotropie ) Rechnung .

Im nächsten Kapitel werden die konstitutiven Gleichungen für elasto-plastische Formänderungen erläutert . Der Schwerpunkt liegt dabei auf den Entwicklungsgleichungen für die Verfestigung . Es wird versucht , einen allgemeinen Verfestigungsmechanismus

mithilfe einer Indexfläche im Raum der Mikrospannung, der sowohl Verfestigung als auch Entfestigung in Abhängigkeit der Deformationsgeschichte zulässt, auf der Basis des hier beschriebenen Modells mit heterogener Versetzungsstruktur zu interpretieren.

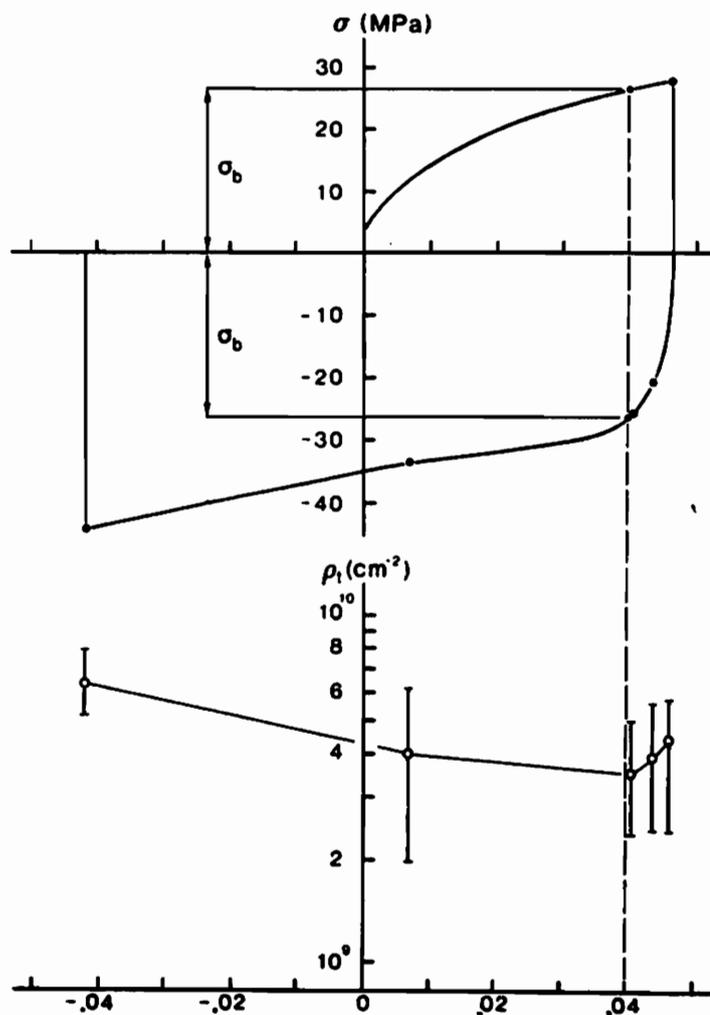


Abb. 4.11 Verlauf der Versetzungsdichte während Belastungsumkehr ( aus [ 52 ] )

## 5. Konstitutive Gleichungen für elasto-plastische Formänderungen

### 5.1 Allgemeines

Die mathematische Behandlung der plastischen Verformung metallischer Körper fußt auf dem von Hill formulierten Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipationsleistung [ 57 ]. Es besagt, daß von allen zulässigen Spannungszuständen  $\sigma_{ij}^*$  mit  $f(\sigma_{ij}^*) \leq k_f$  der wahre Spannungszustand  $\sigma_{ij}$  ein Maximum an plastischer Arbeit erzeugt

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{(p),ij} \geq 0 \quad (5.1)$$

In Abbildung 5.1 ist zu erkennen, daß die wahren Spannungen  $\sigma_{ij}$  die größte Projektion in Richtung der Fließflächennormalen haben. Da der Gradient einer skalaren Funktion  $f$  senkrecht auf  $f = \text{const.}$  steht, ergibt sich für die plastische Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\underline{\dot{D}}_{(p)} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \quad (5.2)$$

Gl. ( 5.2 ), die als Normalenregel bezeichnet wird, läßt sich auch formal aus dem Prinzip der maximalen Dissipationsleistung mit der Methode der Lagrange - Multiplikatoren herleiten. Für die noch unbestimmte, skalare Funktion  $\lambda$  ( Lagrangescher Multiplikator ) gilt zunächst nur  $\lambda > 0$ .

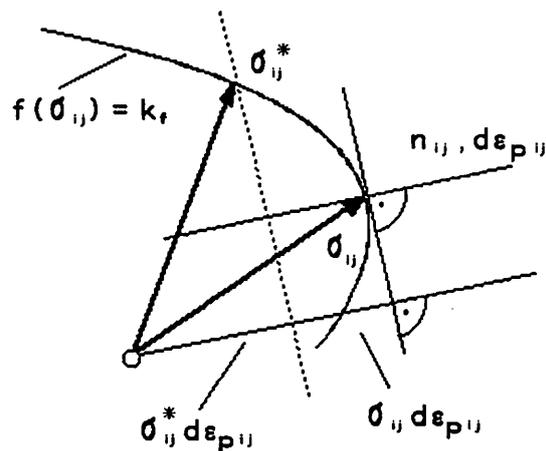


Abb. 5.1 Zum Prinzip der maximalen Dissipationsleistung

Eine Interpretation der Funktion  $f$  als plastisches Potential geht auf v. Mises zurück. In der v. Mises - schen Theorie hängt das Fließkriterium nur von der zweiten Invariante des Spannungsdeviators ab (  $J_2$  - Theorie ). Sie setzt isotropes Materialverhalten voraus und basiert auf der Überlegung, daß nur der Betrag der Spannungen, nicht aber ihre Richtung für den Eintritt des Fließens verantwortlich ist. Die Fließfläche  $F$  hat die quadratische Form

$$F = J_2(\underline{\underline{t}}) - k^2 = \text{Sp } \underline{\underline{t}}^2 - k^2 = 0 \quad (5.3)$$

Sie erlaubt eine Unterscheidung zwischen elastischem Materialverhalten  $F < 0$  und plastischem Materialverhalten  $F = 0$ . Die Annahme der Existenz einer Fließfläche im Spannungsraum stellt zusammen mit der Fließregel Gl. ( 5.2 ) das Fundament der klassischen Plastizitätstheorie dar. Zahlreiche Modifikationen wurden im Laufe der Zeit eingeführt, um eine bessere Übereinstimmung mit experimentellen Beobachtungen zu erzielen.

Dazu gehören die Einführung der effektiven ( internen ) Spannung  $\bar{\sigma}$  -  $\bar{\epsilon}$  ( kinematische Verfestigung ) , die Möglichkeit einer Rotation der Fließfläche ( anisotrope Verfestigung ) mittels eines Tensors vierter Stufe oder auch die Berücksichtigung der dritten Invarianten  $J_3 = \text{Sp } \bar{\epsilon}^3$  in der Fließbedingung .

Nachdem aufgrund einer eingehenden Untersuchung des Materialverhaltens bei Entlastung und Belastungsumkehr im Zug/Druckversuch das Konzept der Mehrflächenmodelle von Eisenberg und Phillips [ 59 ] eingeführt und von Mróz [ 58 ] konkretisiert wurde , entwickelten Dafalias und Popov [ 61 ] und Krieg [ 60 ] unabhängig voneinander praktikable und auf die numerische Anwendung bezogene Zwei-Flächenmodelle . Sie verallgemeinerten die im Zug/Druckversuch zu beobachtende Grenzkurve mit Hilfe einer Grenzfläche , innerhalb derer sich die Fließfläche bewegt . In [ 62 ] leiten sie die Entwicklungsgleichungen für die isotrope und kinematische Verfestigung der Grenzfläche bei beliebigem Verfestigungsgesetz der Fließfläche ( Prager - , Ziegler - , Phillips - , Mróz - Regel ) her .

Lamba und Sidebottom machten in [ 32 ] darauf aufmerksam , daß sich mit dem Zwei-Flächenkonzept auch bei kombinierten Belastungen gute Übereinstimmung mit dem Experiment erzielen lassen . Inzwischen ist dies durch eine Reihe weiterer Arbeiten bestätigt worden . Bruhns und Müller zeigen in [ 65 ] die Anwendbarkeit des Modells von Dafalias/Popov bei zweiaxialen Spannungszuständen und McDowell u.a. gelangen zu ähnlichen Erkenntnissen in bezug auf verschiedene zyklische Belastungsprogramme [ 67, 68, 69 ] . Auch viskoplastische Effekte sind bereits eingearbeitet worden ( Benallal u. Marquis in [ 72 ] ) .

Alle bisher genannten Modelle basieren auf einer Formulierung im Spannungsraum . Eine alternative Möglichkeit , die jedoch aus thermodynamischen Gründen nicht unumstritten ist , besteht darin , entweder analoge Flächen im Dehnungsraum zu definieren wie z.B. Naghdi und Nikkel in [ 74 ] , oder zusätzliche Verfestigungsbereiche im Raum der plastischen Dehnungen einzuführen . Letztere Möglichkeit geht auf Chaboche u.a. zurück [ 26 , 29 , 63 ] . In [ 64 ] weisen Chaboche und Rousselier außerdem darauf hin , daß unter gewissen Voraussetzungen Einflächenmodelle mit nichtlinearem Verfestigungsgesetz und Zwei-Flächenmodelle äquivalent sein können . Das Konzept zusätzlicher Flächen im Dehnungsraum benutzen auch Tanaka , Murakami und Ōoka [ 76 ] und Ohno und Kachi in [ 66 ] .

Da das Modell von Dafalias/Popov von grundlegender Bedeutung ist , wird dieses im folgenden kurz erläutert . Danach wird auf eine alternative Formulierung von Tseng/Lee [ 70,71 ] eingegangen , ehe zum Abschluß dieses Kapitels der Vorschlag eines konstitutiven Modells erfolgt , in dessen Mittelpunkt die Erfassung des Verfestigungsverhaltens unter wechselnder Beanspruchung steht ( MFG - Modell ) .

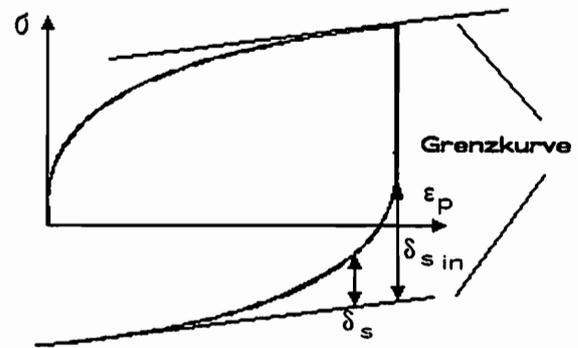
## 5.2 Das Modell von Dafalias/Popov ( 1976 )

Das plastische Verformungsverhalten duktiler Materialien im Zugversuch mit Belastungsumkehr ist dadurch gekennzeichnet , daß nach einem Übergangsbereich mit rascher

Änderung des Tangentenmoduls ein annähernd linearer Verlauf der Fließspannung zu beobachten ist, die asymptotisch in eine Grenzkurve mündet ( Abb. 5.2 ). In dem Modell von Dafalias / Popov [ 62 ] hängt der Plastizitätsmodul K

$$K = K_0 + h \left( \frac{\delta_s}{\delta_s - \delta_{s\text{in}}} \right), \quad (5.4)$$

der im Zug/Druckversuch den Tangentenmodul festlegt



$$\dot{\sigma} = K \dot{\epsilon}_p, \quad (5.5)$$

Abb. 5.2  
Fließ- und Grenzkurve im Zugversuch

ab von dem Abstand  $\delta_s$  zwischen Fließ- und Grenzkurve.  $\delta_{s\text{in}}$  ist der Abstand bei Fließbeginn. Hier ist K unendlich groß, was im  $\sigma - \epsilon_p$  Diagramm der vertikalen Tangente entspricht. Für  $\delta_s \rightarrow 0$  verschmelzen Fließ- und Grenzkurve und der Plastizitätsmodul wird  $K_0 = \text{const.}$ .

Die Verallgemeinerung auf mehraxiale Spannungszustände führt auf ein Zwei-Flächenmodell, bei dem im allgemeinen sowohl die Fließfläche ( durch  $\alpha_{ik}$  ), als auch die Grenzfläche ( durch  $\beta_{ik}$  ) verschieblich ist :

$$\begin{aligned} \text{Fließfläche} & \quad f(\sigma_{ik} - \alpha_{ik}, k) = 0 \\ \text{Grenzfläche} & \quad F(\sigma_{ik} - \beta_{ik}, \bar{k}) = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

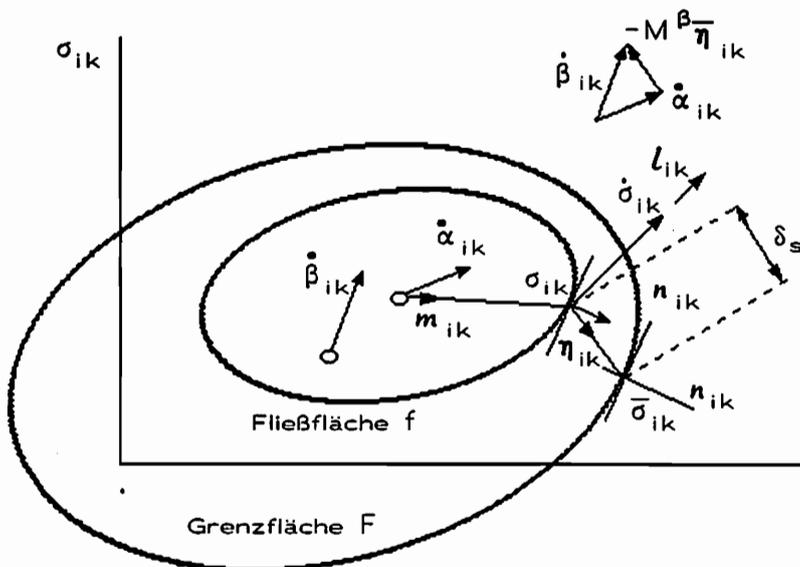


Abb. 5.3  
Das Zwei-Flächenmodell von Dafalias / Popov mit verschiedenen Verfestigungsgesetzen ( Prager, Ziegler, Phillips, Mróz )

Prager

$$\dot{\alpha}_{ik} = M^p n_{ik}$$

Ziegler

$$\dot{\alpha}_{ik} = M^z m_{ik}$$

Mróz

$$\dot{\alpha}_{ik} = M^m \eta_{ik}$$

Phillips

$$\dot{\alpha}_{ik} = M^{ph} l_{ik}$$

Aufgrund der Beobachtungen im Zug/Druckversuch folgerten Dafalias/Popov, daß die Fließfläche stets von der Grenzfläche umschlossen sein muß und daß keine Überschneidungen stattfinden dürfen. Das bedeutet, daß die Fließfläche nur in dem Punkt die Grenzfläche berühren darf, der die gleiche äußere Normalenrichtung  $n_{ik}$  hat wie der Spannungspunkt auf der Fließfläche (Abb. 5.3). Diese Tangentialitätsbedingung, die zum erstenmal von Mróz im Rahmen seines Vielflächenmodells abgeleitet wurde, läßt sich auch so formulieren, daß der Spannungspunkt stets der Berührungspunkt ist.

Gibt man die Kinematik der Fließfläche vor, z.B. durch eines der in Abb. 5.3 dargestellten Verfestigungsgesetze, führt die Tangentialitätsbedingung auf das Translationsgesetz für die Grenzfläche

$$\dot{\beta}_{ik} = \dot{\alpha}_{ik} - M^{\beta} \bar{\eta}_{ik} \quad (5.7)$$

wobei  $\bar{\eta}_{ik}$  den Einheitsvektor bezeichnet ( $\bar{\eta}_{ik} = \eta_{ik} / \|\eta_{ik}\|$ ). Mit der Annahme, daß die Grenzfläche in der v. Mises'schen Form darstellbar ist, ergibt sich für den Fall der Berührung  $f = F = 0$  aus  $\dot{F} = 0$ :

$$\dot{\beta}_{ik} = \dot{\alpha}_{ik} - \frac{1}{(\sigma_{rs} - \beta_{rs}) \bar{\eta}_{rs}} \left[ 2 \bar{k} \dot{\bar{k}} + (\sigma_{lm} - \beta_{lm}) (\dot{\sigma}_{lm} - \dot{\alpha}_{lm}) \right] \bar{\eta}_{ik} \quad (5.8)$$

In der letzten Gleichung ist  $\bar{k}$  der Radius der Grenzfläche und der Einfachheit halber sind alle Tensoren auf ein kartesisches Koordinatensystem bezogen (kleine Formänderungen).

Der Abbildung 5.3 ist zu entnehmen, daß der Abstand  $\delta_s$  die Norm des verallgemeinerten Differenzvektors  $\eta_{rs}$  ist

$$\delta_s = \|(\bar{\sigma}_{ik} - \sigma_{ik})\| = \|\eta_{ik}\| \quad (5.9)$$

der folgendermaßen durch die gegebenen Größen ausgedrückt werden kann:

$$\eta_{ik} = \lambda (\sigma_{ik} - \alpha_{ik}) + \beta_{ik} - \sigma_{ik} \quad (5.10)$$

wobei  $\lambda$  ein Ähnlichkeitsverhältnis zwischen Fließ- und Grenzfläche darstellt.

### 5.3 Das Modell von Tseng/Lee (1983)

Ein alternatives Zwei-Flächenmodell wurde von Tseng/Lee entwickelt. Es ist wesentlich von Versuchen beeinflusst, die Phillips u.a. bezüglich der Form und der Größe von

Fließkurven durchführten und die auf einen dominanten Einfluß des Spannungsinkrements hindeuten. Im Unterschied zum Modell von Dafalias/Popov ist die äußere Fläche feststehend. Sie verfestigt nur isotrop, falls ein Kontakt mit der Fließfläche vorliegt. Sie wird als Memory - Fläche bezeichnet, da ihre Größe von der maximalen Spannung der Deformationsgeschichte abhängt. Die Bewegung der Fließfläche wird vom Spannungsinkrement vorgegeben, ist zu diesem i.A. jedoch nicht parallel, da andernfalls die Bedingung der Tangentialität nicht erfüllbar wäre ( Abb. 5.4 ).

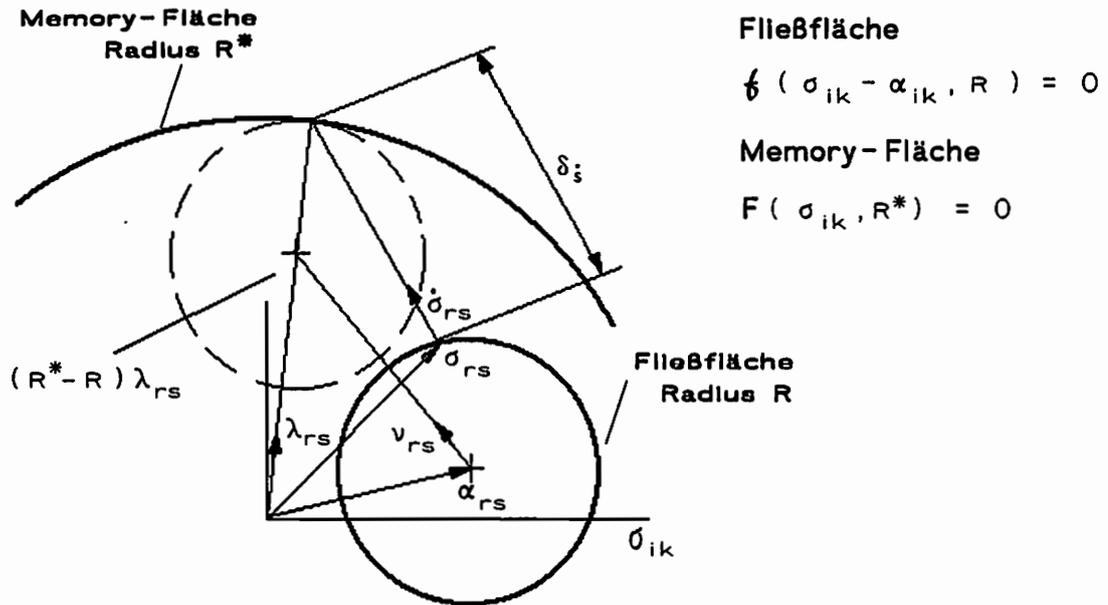


Abb. 5.4 Das Zwei - Flächenmodell von Tseng/Lee

Die Fließfläche bewegt sich derart in Richtung des Schnittpunktes des Spannungsinkrements mit der Memory - Fläche, daß sie auf diese im Punkt mit gleicher äußerer Normale trifft. Die geometrische Konstruktion veranschaulicht das kinematische Verfestigungsgesetz

$$\dot{\alpha}_{rs} = \mu_T v_{rs} \quad (5.11)$$

Die Fließfläche bewegt sich in Richtung von  $v_{rs}$ , das wiederum als Funktion des Spannungsinkrements ausgedrückt werden kann :

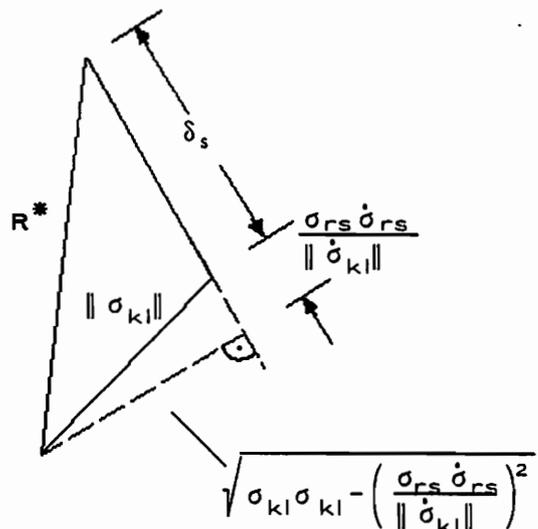


Abb. 5.5  
Zur Konstruktion der kinematischen Verfestigungsregel von Tseng/Lee

$$v_{rs} = \frac{(R^* - R) \lambda_{rs} - \alpha_{rs}}{\| (R^* - R) \lambda_{rs} - \alpha_{rs} \|} \quad (5.12)$$

Dabei ist  $\lambda_{rs}$  entsprechend der Abbildung 5.6 darstellbar durch

$$\lambda_{rs} = \frac{\sigma_{rs} + \delta_i \frac{\dot{\sigma}_{rs}}{\|\dot{\sigma}_{kl}\|}}{\| \sigma_{rs} + \delta_i \frac{\dot{\sigma}_{rs}}{\|\dot{\sigma}_{kl}\|} \|} \quad (5.13)$$

und der Abstand  $\delta_i$  in Richtung des Spannungsinkrements ist (Abb. 5.5):

$$\delta_i = \sqrt{R^{*2} - \sigma_{kl} \sigma_{kl} + \left( \frac{\sigma_{rs} \dot{\sigma}_{rs}}{\|\dot{\sigma}_{kl}\|} \right)^2} - \frac{\sigma_{rs} \dot{\sigma}_{rs}}{\|\dot{\sigma}_{kl}\|} \quad (5.14)$$

Im Vergleich zum Mrózschen Verfestigungsgesetz ist augenfällig, daß die Kinematik erheblich aufwendiger ist, obwohl die Memory-Fläche immer den Spannungsnullpunkt als Mittelpunkt hat. Jedoch sind mit diesem Modell gute Resultate erzielt worden [68, 94, 95]. Zudem ist es aus dem Grunde bemerkenswert, da es die zur Zeit einzige Alternative zum Mrózschen Verfestigungsgesetz darstellt.

#### 5.4 MFG - Modell

Das MFG - Modell ist ein Modell mit drei konstituierenden Flächen - nämlich der Mikrofläche, der Fließfläche und der Grenzfläche. Die Fläche M, in Abb. 5.6 schraffiert eingetragen, da sie nicht im Spannungsraum, sondern im Raum der internen Variable  $\alpha$  definiert ist, dient zur Erfassung des Einflusses der Deformationsgeschichte. Die Mikrofläche hat im Wesentlichen eine Indexfunktion und beschreibt die Abhängigkeit des inelastischen Materialverhaltens von Deformationspfad und Deformationsamplitude. Daher kann das MFG-Modell in die Klasse der Zwei-Flächenmodelle eingeordnet werden.

Es kann als nichtlineares Grenzflächenmodell bezeichnet werden, da die Bewegung der Fließfläche nichtlinear vom Abstand zur Grenzfläche abhängt. Die Grenzfläche ist idealplastisch ( $k^* = \text{const.}$ ). Die Fließfläche nähert sich ihr nur bis auf sehr kleine Werte, so daß der zugeordnete Spannungszustand  $t^*$  virtuellen Charakter hat. Dadurch lassen sich numerische Instabilitäten und nichtdefinierte Ausdrücke, wie sie im

Fall einer finiten Berührung im Modell von Dafalias/Popov auftreten, vermeiden. Darüberhinaus sind keine zusätzlichen Entwicklungsgleichungen erforderlich. Die virtuelle Spannung  $\underline{t}^*$  läßt sich eliminieren, so daß aus der Annahme der Grenzfläche lediglich Restriktionen für die Bewegung der Fließfläche resultieren, ansonsten aber die Struktur und das Berechnungsschema der klassischen Theorie erhalten bleiben.

Wesentliches Merkmal des Zwei-Flächenmodells ist der nichtlineare Verlauf des Tangentenmoduls, der vom Abstand der Fließfläche zur Grenzfläche abhängt. Dieser Abstand wird durch den Tensor  $\underline{\eta}$  ausgedrückt. Nähert sich die Fließfläche der Grenzfläche, so wird die Bewegung mit zunehmender Deformation immer kleiner und geht schließlich gegen null, so daß eine Berührung nur asymptotisch stattfindet. Dadurch läßt sich das elasto-plastische Übergangsverhalten mit zu Beginn großem und dann stetig kleiner werdendem Tangentenmodul inhärent modellieren. Ein weicher elasto-plastischer Übergang wird zudem noch durch Berücksichtigung diskreter interner Variabler, die bei Belastungswechseln ihren Wert ändern, gewährleistet.

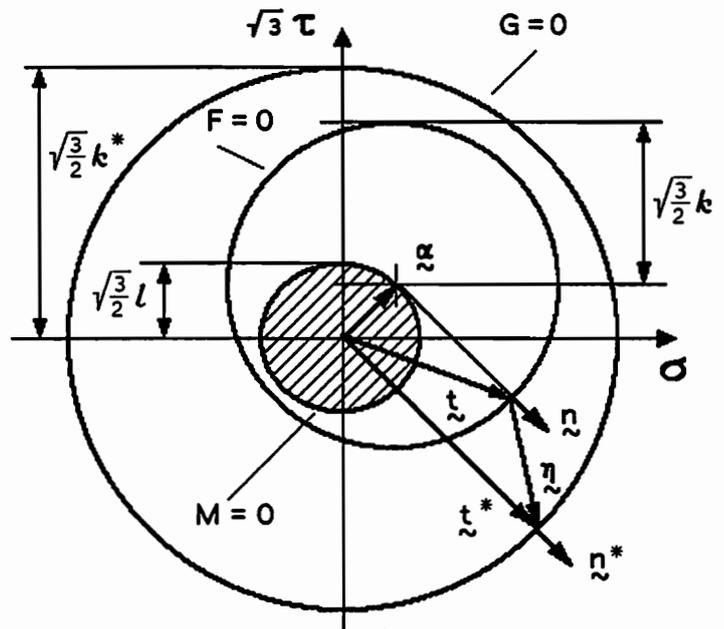


Abb. 5.6 Darstellung des MFG-Modells in der Normal-Schubspannungsebene

Es wird angenommen, daß alle drei Flächen in der v. Misesschen Form dargestellt werden können:

**Mikrofläche**  $M = \text{Sp } \underline{\alpha}^2 - l^2 = 0$  ( 5.15 )

**Fließfläche**  $F = \text{Sp } [ \underline{t} - \underline{\alpha} ]^2 - k^2 (\mu, T) = 0$  ( 5.16 )

**Grenzfläche**  $G = \text{Sp } \underline{t}^{*2} - k^{*2} = 0$  ( 5.17 )

Die Fläche M wird als Mikrofläche bezeichnet, da ihre Größe  $l$  vom Betrag der Mikrospannungen  $\underline{\alpha}$  abhängt. Die Mikrospannungen wiederum können als Maß für die plastische Verformung angesehen werden. Die Fließfläche verfestigt isotrop durch  $k$  und kinematisch durch  $\underline{\alpha}$ . Sie ist i.A. eine Funktion geeigneter interner und externer Zustandsvariabler

$F ( \underline{\Sigma}, T, \underline{\alpha}, \mu, l ) = 0$  ( 5.18 )

Die externen Zustandsvariable sind der gewichtete Cauchy-Spannungstensor  $\underline{\underline{S}}$  und die Temperatur  $T$ ;  $\underline{\underline{\alpha}}$ ,  $\mu$  und  $l$  repräsentieren die internen Zustandsvariable, mit Hilfe derer der plastische Materialzustand – im Rahmen der betrachteten Phänomene eindeutig – festgelegt ist. Die Bedeutung der tensoriellen internen Variablen  $\underline{\underline{\alpha}}$  wurde bereits eingehend erläutert. Sie läßt sich direkt als gemittelt, makroskopisches Äquivalent der lokalen (Mikro-) Spannungsverteilung interpretieren. Die skalare interne Variable  $l$ , die die Größe der Mikrofläche angibt, korrespondiert mit der Dichte der freien Versetzungen, die sowohl zu- als auch abnehmen kann. Die dritte interne Variable  $\mu$  charakterisiert das Fortschreiten des plastischen Prozesses. Sie ist eine monoton wachsende Größe die aus der effektiven plastischen Arbeit abgeleitet ist. Ihr Entwicklungsgesetz lautet:

$$\dot{\mu} = (1 - \xi) (\underline{\underline{t}} - \underline{\underline{\alpha}}) : \underline{\underline{D}}_{(p)} \quad (5.19)$$

Der reduzierten Verfestigungsarbeitsrate  $\dot{\mu}$  liegt die Überlegung zugrunde, daß nur ein Teil der plastischen (effektiven) Arbeit durch interne Strukturänderungen (Verfestigung) verbraucht wird, während der Rest unmittelbar dissipiert wird. Die Aufspaltung

$$\dot{w}_p = \dot{w}_d + \dot{w}_h = \underbrace{\xi \dot{w}_p}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{(1 - \xi) \dot{w}_p}_{\text{Verfestigung}} \quad (5.20)$$

geht auf Lehmann zurück [78]. Obwohl Messungen ergeben haben, daß – im stationären Fall – etwa 90% der plastischen Arbeit dissipiert wird, ist hier ein kleinerer Wert von  $\xi = 0.6$  angenommen. Dies ist dadurch gerechtfertigt, daß bei zyklischen Prozessen mit ständigem Wechsel von Be- und Entlastung ein relativ großer Anteil der Energie der Verfestigung zugeführt wird, insbesondere im elasto-plastischen Übergangsbereich mit hohem Spannungsgradienten. Denkbar ist auch,  $\xi$  als interne Variable einzuführen (siehe Kapitel 6).

Das Auftreten plastischer Deformationen ist an die Erfüllung der Fließbedingung Gl. 5.16 und einer Belastungsbedingung

$$L = \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{S}}} : \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{S}} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} > 0 \quad (5.21)$$

geknüpft. Als Fließregel wird, einem Vorschlag Lehmanns folgend, eine modifizierte Normalenregel verwendet [77], die besagt, daß die plastische Verzerrungsgeschwindigkeit nicht nur vom Spannungszustand, sondern auch vom Spannungszinkrement abhängt. Daher wird angesetzt

$$\underline{\underline{D}}_{(p)} = \langle \lambda \rangle \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{S}}} + \langle \kappa \rangle \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{t}} \quad (5.22)$$

wobei  $\langle \rangle$  die Macauley Klammer bedeutet mit  $\langle \lambda \rangle = \lambda H(L)$  und  $H(L) = 0$ , falls  $L \leq 0$  und  $H(L) = 1$ , falls  $L > 0$ . Im Fall  $F < 0$  befindet sich der Körper im rein elastischen Zustand, der näherungsweise durch ein hypoelastisches Stoffgesetz beschrieben wird [ 1, 14 ]

$$\underline{\underline{D}}_{(e)} = \frac{1}{2G} \left\{ \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \text{Sp} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \underline{\underline{1}} \right\} + \alpha \dot{T} \underline{\underline{1}}, \quad ( 5.23 )$$

mit dem linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha$ . Für die Gesamtverzerrungsgeschwindigkeit gilt

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_{(e)} + \underline{\underline{D}}_{(p)} \quad ( 5.24 )$$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2G} \left\{ \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \text{Sp} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} \underline{\underline{1}} \right\} + \alpha \dot{T} \underline{\underline{1}} + \langle \lambda \rangle \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{S}}} + \langle x \rangle \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$$

In Kap. 3 wurde dargestellt, daß sowohl die kinematische als auch die isotrope Verfestigung von der Belastungsgeschichte beeinflusst ist. Anhand zyklischer einaxialer Deformationen ist versucht worden, das Zusammenwirken von aktueller Dehnungsamplitude mit der unmittelbar vorhergehenden Amplitude zu klären. Die Beobachtungen können unter dem Begriff des transienten Verfestigungsverhaltens zusammengefaßt werden. Demnach ist Verfestigung oder Entfestigung keine charakteristische Materialeigenschaft, sondern sind zwei gleichwertige Erscheinungsformen einer Stabilisierungstendenz, die sowohl positiv (Verfestigung bei Amplitudenvergrößerung) als auch negativ (Entfestigung bei Amplitudenverkleinerung) sein kann und als Einspiel- oder Adaptionsvorgang der internen Struktur deutbar ist. Weitere wichtige Einflüsse wie Temperaturniveau, zurückliegende Wärmebehandlung oder Kaltverfestigung können im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden.

Um den Einspielvorgang zumindest qualitativ mit der richtigen Tendenz erfassen zu können, wird die Überlagerung eines Entfestigungs- mit einem Verfestigungsmechanismus vorgeschlagen. Dazu dient die Mikrofläche  $M$ . Das Innere der Fläche ist der Entfestigungsbereich  $M < 0$ , während die Berandung  $M = 0$  Verfestigung bedeutet (Abb. 5.7). Jede Entlastung, z.B. in einem zyklischen Zug/Druckversuch, bewirkt eine „versteckte“ Entfestigung, die bei Amplitudenverkleinerung zu einer langsamen und kontinuierlichen Absenkung der Spannungsamplitude führt. Man kann den sich schließlich einstellenden stationären Zustand als „dynamisches Gleichgewicht“ zwischen der Ausheilung und der Neuproduktion von Versetzungen interpretieren [ 56 ]. Dies wird im Modell dadurch realisiert, daß die Zunahme der Festigkeit im Fall  $M = 0$  genau die vorhergehende Entfestigung  $M < 0$  kompensiert.

In dem Modell mit heterogener Versetzungsstruktur (Kap. 4) korrespondiert der Entfestigungsbereich  $M < 0$  mit der Auflösung der an den harten Zellwandkernen auf-

gestauten Versetzungen ( dynamic pile-ups ) nach Belastungsumkehr . Die Versetzungen werden aus den grauen Gebieten , der Zellperipherie ( Abb. 4.5 ) , unter der Einwirkung der rückwärtigen ( negativen ) lokalen Spannung im Zellinneren ( weiße Gebiete ) herausgelöst . In Abb. 4.7 ist zu erkennen , daß diese negative lokale Spannung schon bei Entlastung im Zellinneren wirkt , um die Spannungskonzentration in den Zellwänden zu kompensieren , wodurch auch ein rückwärtiges Fließen während der Entlastung erklärbar ist . Zusammen mit der Auflösung der metastabilen grauen Gebiete relaxieren auch die Kräfte , die während der Vordehnung auf die Versetzungen gewirkt haben . Es findet keine bedeutende Neuproduktion von Versetzungen statt , vielmehr nimmt die Versetzungsdichte um ca. 15% ab , wie elektronenmikroskopische Untersuchungen ergeben haben [ 52 ] . Der Bereich  $M < 0$  kann auch als reversibler plastischer Bereich bezeichnet werden . Zu seiner Charakterisierung dient der Parameter  $\beta$  , der entsprechend der Konstruktion in Abb.4.10 zur Beschreibung des Bauschingereseffektes benutzt wird [ 54 ] . Die Bezeichnung von  $\beta$  als „unwirksamer“ Dehnungsbereich ( lost strain range ) deutet an , daß hier die Verfestigung stagniert . Wird nun weiter in Gegenrichtung belastet bis  $\sigma / \sigma_p \approx - 1$  , beginnen sich auch die harten Zellwände aufzulösen und relativ schnell mit umgekehrten Vorzeichen neu zu formieren , da die lokale Spannung nun auch in den Zellwänden ihr Vorzeichen umgedreht hat ( Abb.4.7 , obere Linie ist Nullniveau ) . Von nun an ist weitere Verfestigung zu erwarten , was qualitativ dem Fall  $M=0$  entspricht .

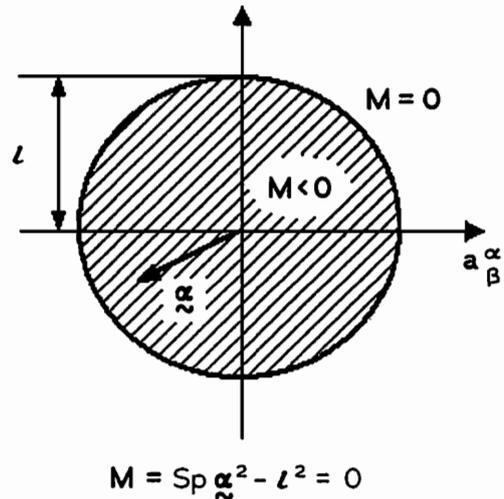


Abb. 5.7 Mikrofläche  $M$  zur Beschreibung des transienten Verfestigungsverhaltens

Mit Einführung der Mikrofläche ist es möglich , das transiente Verfestigungsverhalten in den konstitutiven Gleichungen zu berücksichtigen . Der Radius der Fläche ist ein Maß für die vorausgegangene Verfestigung . Die Fläche kann nicht unbeschränkt anwachsen , da sie von der quadratischen Norm des Mikrospannungstensors abhängt , der wiederum durch die äußere Grenzfläche beschränkt ist . Andererseits kann sie aufgrund des latenten Entfestigungsmechanismus kleiner werden , so daß allgemeine transiente Prozesse erfaßbar sind . Es sind zwei Fälle zu unterscheiden :

Fall 1 Verfestigung  $M = 0$

Falls der aktuelle Vektor der Mikrospannungen  $\alpha$  die durch Gl.( 5.15 ) definierte Fläche gerade berührt , so daß  $M = 0$  , dann wächst der Radius  $l$  an . Da  $M > 0$  ausgeschlossen ist , muß gelten

$$\dot{l} = \frac{Sp \alpha \cdot \dot{\alpha}}{l} = \frac{Sp \alpha \cdot \dot{\alpha}}{l} > 0 . \quad \left\{ \begin{array}{l} M = 0 \\ l \neq 0 \end{array} \right. \quad ( 5.25 )$$

Für den isotropen , normalisierten Ausgangszustand ist  $l = 0$  , dann ist im ersten Inkrement

$$\dot{l} = |\dot{\underline{\underline{g}}}| \cdot \begin{cases} M = 0 \\ l = 0 \end{cases} \quad ( 5.26 )$$

Fall 2 Entfestigung  $M < 0$

Falls der aktuelle Vektor der Mikrospannungen  $\underline{\underline{g}}$  innerhalb der Fläche liegt , so daß  $M < 0$  , nimmt der Radius  $l$  ab

$$\dot{l} = \Delta \dot{\mu} < 0 \quad \begin{cases} M < 0 \\ Sp \underline{\underline{g}} \cdot \underline{\underline{g}} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Delta = b \left[ \frac{Sp \underline{\underline{g}}^2}{l^2} - 1 \right] < 0 \quad ( 5.27 )$$

$$b = b(T)$$

Im folgenden werden die konstitutiven Gleichungen für die kinematische und isotrope Verfestigung erläutert . Dabei kommt dem Radius der Mikrofläche  $l$  eine besondere Bedeutung zu , da er die Grenzwerte der beiden Verfestigungsanteile bestimmt .

In Abbildung 5.8 ist das kinematische Verfestigungsgesetz illustriert . Die Bewegung der Fließfläche ist durch die Bedingung eingeschränkt , daß die Grenzfläche in keinem Punkt geschnitten werden darf . Denn im Falle einer Durchdringung beider Flächen wären auch Spannungszustände außerhalb der Grenzfläche möglich . Dies widerspricht jedoch dem Konzept der Grenzfläche . In der Abbildung sind zwei zugeordnete Punkte auf der Fließfläche  $\underline{\underline{t}}$  und der Grenzfläche  $\underline{\underline{t}}^*$  durch den Vektor  $\underline{\underline{\eta}}$  verbunden . Die Zuordnung ist durch die Normalenrichtung  $\underline{\underline{n}}$  gegeben . Die Konstruktion wurde von Mroz im Rahmen eines Vielflächenmodells mit bereichsweise konstantem Verfestigungsmodul entwickelt [ 58 ] . Die Spannungs-Dehnungskurve wird bei diesem Modell durch einen Polygonzug angenähert , der jedesmal , wenn eine innere Fläche auf die nächstgelegene äußere trifft , seine Steigung verringert .

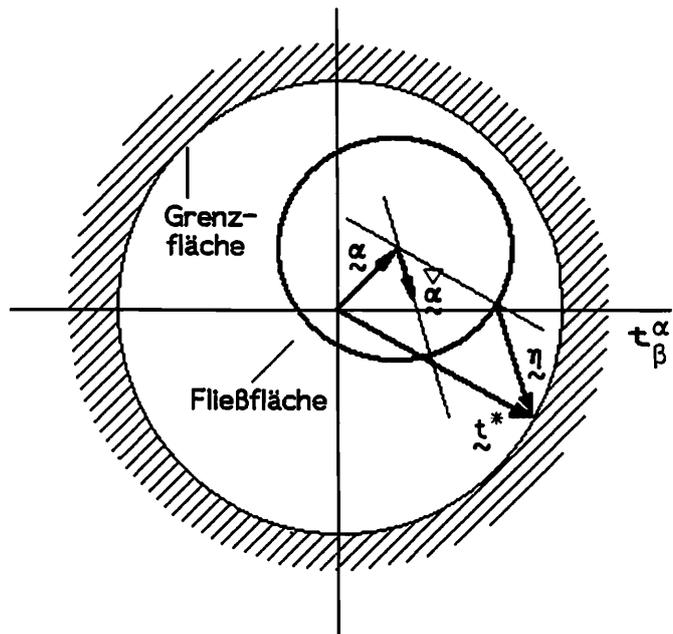


Abb. 5.8 Zur kinematischen Verfestigung beim MFG - Modell

Dieses Modell erwies sich aus rechentechnischen Gründen als unpraktisch und wurde durch kontinuierliche Zwei - Flächenmodelle ersetzt, die vielfach auf dem Fließ- und Grenzflächenkonzept von Dafalias und Popov beruhen.

Der virtuelle Spannungszustand  $\underline{t}^*$  kann aufgrund der Tangentialitätsbedingung eliminiert werden

$$\underline{t}^* = k^* \underline{n} = \frac{k^*}{k} (\underline{t} - \underline{\alpha}) \quad (5.28)$$

Für den Verbindungsvektor erhält man aus Gl.(5.10) mit  $\underline{\beta} = \underline{0}$

$$\underline{\eta} = \underline{t}^* - \underline{t} = \frac{k^*}{k} (\underline{t} - \underline{\alpha}) - \underline{t} \quad (5.29)$$

Die Bewegung der Fließfläche erfolgt in Richtung von  $\underline{\eta}$  (vgl. Gl. 5.7)

$$\dot{\underline{\alpha}} = \Lambda \dot{\underline{\mu}} \underline{\eta} \quad (5.30)$$

wobei  $\Lambda$  der kinematische Modul ist und  $\dot{\underline{\mu}}$  die Verfestigungsarbeitsrate darstellt. Es wird angesetzt

$$\Lambda = \frac{a}{\delta} \left[ 1 - \frac{\underline{\alpha} : \underline{n}}{\Phi} \right] \quad (5.31)$$

Der kinematische Modul beeinflusst wesentlich den Tangentenmodul der Spannungs-Dehnungskurve. Der Term in der Klammer in Gl. (5.31) ist ein vorzeichenrichtiger Abklingterm, der bei Vordehnung eine Abnahme und bei Belastungsumkehr eine Vergrößerung des Tangentenmoduls bewirkt. Im Falle axialer Belastung gilt

$$\Lambda = \frac{a}{\delta} \left[ 1 - \frac{\pm \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha}{\Phi} \right] \quad \begin{cases} + \dot{\epsilon}_p > 0 \\ - \dot{\epsilon}_p < 0 \end{cases} \quad (5.32)$$

Um die Dehnungsamplitudenabhängigkeit der kinematischen Verfestigung realisieren zu können, ist die kinematische Grenzfunktion  $\Phi$  vom Radius der Mikrofläche abhängig

$$\Phi = \Phi(l) \quad \text{und} \quad \dot{\Phi} \geq 0 \quad (5.33)$$

Der einfachst mögliche Ansatz ist linear

$$\Phi = c l + \Phi_0 \quad (5.34)$$

Bei monotonen Prozessen , wie z.B. Vordehnung , ist  $M=0$  . Daraus folgt

$$l = \sqrt{\frac{2}{3}} |\alpha| \quad (5.35)$$

und der kinematische Modul ist immer positiv wegen

$$\Lambda = \frac{a}{\delta} \left[ 1 - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \alpha}{c \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha + \Phi_0} \right] > 0 , \quad (5.36)$$

falls  $c \geq 1$  und  $\Phi_0 > 0$  . Weiterhin ist in Gl. ( 5.31 )

$$a = a(T) \quad \text{und} \\ \delta = |\underline{\alpha} - \underline{\alpha}^0| = \sqrt{\text{Sp}(\underline{\alpha} - \underline{\alpha}^0)^2} \quad (5.37)$$

Mit Einführung von  $\delta$  ist es möglich , den Einfluß von Entlastungen auf das Materialverhalten zu erfassen . Die diskrete interne Variable  $\underline{\alpha}^0$  erhält den jeweiligen Wert von  $\underline{\alpha}$  bei Erfüllung des Fließkriteriums und bleibt konstant bis zur nächsten Entlastung . Bei Zug/Druck gilt

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{3}} (\alpha - \alpha^0) \quad (5.38)$$

und für  $\delta = 0$  ist der Tangentenmodul nahe dem Elastizitätsmodul  $E$

$$\dot{\alpha} \rightarrow \infty , \quad \dot{\varepsilon}_p \rightarrow 0 , \quad \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \rightarrow E \quad (5.39)$$

wodurch ein kontinuierlicher elasto-plastischer Übergang erreicht wird . Derartige diskrete interne Variable wurden in diesem Zusammenhang erstmals von Dafalias/Popov mit der Begründung eingeführt , daß abrupte Wechsel in der Belastungsrichtung das nachfolgende Materialverhalten beeinflussen [ 62 ] . Es ist zu bemerken , daß dieser Grenzübergang nur näherungsweise vollzogen wird , da andernfalls undefinierte Ausdrücke auftreten würden . Die Benutzung diskreter interner Variabler ist dadurch motiviert , eine möglichst realistische Wiedergabe des Materialverhaltens zu erzielen , so daß dieses Vorgehen in erster Linie als numerischer Kunstgriff zu deuten ist.

Die isotrope Verfestigung wird durch den Radius der Fließfläche  $k$  beschrieben . Sie ist zugleich das phänomenologische Äquivalent der Gesamtversetzungsdichte . Es wird angenommen , daß eine Abhängigkeit der Form

$$k = k(\mu, T) \quad (5.40)$$

vorliegt . Dann ist

$$\dot{k} = \frac{\partial k}{\partial \mu} \dot{\mu} + \frac{\partial k}{\partial T} \dot{T} = \Gamma \dot{\mu} + \frac{\partial k}{\partial T} \dot{T} \quad , \quad ( 5.41 )$$

mit dem isotropen Modul  $\Gamma$

$$\Gamma = \frac{d}{k_0} [ \hat{k}_{\text{stat}} - k ] \quad ( 5.42 )$$

und  $d = d(T) \quad , \quad k_0 = k_0(T) \quad .$

Analog zur kinematischen Grenzfunktion  $\Phi$  läßt sich  $\hat{k}_{\text{stat}}$  als isotrope Grenzfunktion ansehen . Auch hier gilt es , den Einfluß der vorausgegangenen Verfestigung zu erfassen . Daher wird angenommen , daß

$$\begin{aligned} \hat{k}_{\text{stat}} &= \hat{d}_1 l + \hat{d}_2 \quad \text{mit} \\ \hat{d}_1 &= \hat{d}_1(T) \quad \text{und} \quad \hat{d}_2 = \hat{d}_2(T) \quad . \end{aligned} \quad ( 5.43 )$$

Auf die Bedeutung der Grenzfunktionen  $\Phi$  und  $\hat{k}_{\text{stat}}$  wird noch ausführlich in Kapitel 7 zur Bestimmung der Parameter eingegangen .

### 5.5 Ermittlung der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeit

Die Lösung des elasto-plastischen Problems bei isothermer , homogener Verformung reduziert sich auf die Ermittlung der noch unbekanntem Funktion  $\lambda$  in Gl.( 5.22 ). Hierbei gibt es zwei Möglichkeiten der Darstellung , die entweder dem spannungsge- steuerten Versuch oder dem weggesteuerten Versuch

$$\underline{D}_{(p)} = \underline{D}_{(p)} \left( \underline{\dot{\epsilon}} \right) \quad \text{bzw.} \quad \underline{D}_{(p)} = \underline{D}_{(p)} \left( \underline{D} \right) \quad ( 5.44 )$$

entspricht . Üblicherweise wird  $\lambda$  aus der Konsistenzbedingung  $\dot{F} = 0$  bestimmt. Man kann jedoch auch die plastische Verzerrungsgeschwindigkeit nach Betrag und Richtung festlegen und anstelle dessen den Betrag der kinematischen Verfestigung aus der Konsistenzbedingung ermitteln . Aus der zeitlichen Ableitung von Gl. ( 5.16 ) erhält man für isotherme Prozesse (  $\dot{T} = 0$  )

$$\dot{F} = 0 = (\underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\alpha}) : \left( \underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\alpha} \right) - k \Gamma \dot{\mu} \quad ( 5.45 )$$

Nach Einsetzen der Entwicklungsgleichungen ergibt sich

$$\lambda = \frac{(\underline{\dot{\epsilon}} - \underline{\alpha}) : \underline{\dot{\epsilon}} \{ 1 - x(1-\xi) h_m \}}{2 k^2 (1-\xi) h_m} \quad , \quad ( 5.46 )$$

wobei  $h_m$  den Verfestigungsmodul

$$h_m = \Delta \left[ k^* k - (\underline{t} - \underline{\alpha}) : \underline{t} \right] + k \Gamma \quad (5.47)$$

bezeichnet . Damit wird Gl. ( 5.22 )

$$\underline{D}_{(p)} = \frac{(\underline{t} - \underline{\alpha}) : \underline{t}}{k^2 (1 - \xi) h_m} \left\{ 1 - x (1 - \xi) h_m \right\} (\underline{t} - \underline{\alpha}) + x \underline{t} \quad (5.48)$$

Zur Invertierung wird die kinematische Grundgleichung ( 2.24 ) skalar mit  $(\underline{t} - \underline{\alpha})$  multipliziert . Nimmt man vereinfachend  $\nu = 0.5$  , folgt

$$(\underline{t} - \underline{\alpha}) : \underline{D} = (\underline{t} - \underline{\alpha}) : \underline{t} \left\{ \frac{1}{2G} + \frac{1 - x (1 - \xi) h_m}{k^2 (1 - \xi) h_m} + x \right\} \quad (5.49)$$

Mithilfe von Gl. ( 5.49 ) läßt sich das Skalarprodukt , das die Spannungskremente enthält , eliminieren

$$\underline{D}_{(p)} = \frac{2G}{1 + 2Gx} \left\{ \frac{(\underline{t} - \underline{\alpha}) : \underline{D}}{k^2} \frac{1 - x (1 - \xi) h_m}{(1 - \xi) h_m + 2G} (\underline{t} - \underline{\alpha}) + x \underline{D} \right\} \quad (5.50)$$

(  $h_m$  nach Gl. ( 5.47 ) ) .

Das Vorgehen ist auch bei Berücksichtigung elastischer Kompressibilität möglich [ 20 ]. Für den Spannungsfluß ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{t} &= 2G (\underline{D} - \underline{D}_{(p)}) \\ &= 2G \left[ \underline{D} (1+x) - \frac{2G}{1+2Gx} \frac{(\underline{t} - \underline{\alpha}) : \underline{D}}{k^2} \frac{1-x(1-\xi)h_m}{(1-\xi)h_m+2G} (\underline{t} - \underline{\alpha}) \right] \quad (5.51) \end{aligned}$$

Hieraus sind die materiellen Spannungsänderungen  $\dot{\underline{\sigma}}$  und  $\dot{\underline{\tau}}$  gemäß Gl. ( 2.61 ) zu berechnen . Bei proportionalen Prozessen

$$\underline{t} = \text{const. } \underline{t}$$

sind alle Entwicklungsgleichungen unabhängig von  $x$  und Gl. ( 5.50 ) vereinfacht sich zu

$$\underline{D}_{(p)} = 2G \frac{(\underline{t} - \underline{\alpha}) : \underline{D}}{k^2 [(1 - \xi) h_m + 2G]} (\underline{t} - \underline{\alpha}) \quad (5.52)$$

## 6 . Thermodynamische Konsistenz der Materialgleichungen

### 6.1 Allgemeines

Der Begriff der thermodynamischen Konsistenz läßt sich im wesentlichen hinsichtlich zweier Kriterien konkretisieren . Zum einen ist die Erfüllung der Entropieungleichung in Form des Zweiten Hauptsatzes gemeint , zum anderen sind Restriktionen , die aus der Energiebilanzgleichung resultieren , zu beachten . Die für alle irreversiblen Prozesse gültige Aussage , daß die Entropie nicht abnehmen kann , ist eine Erfahrungstatsache , die bisher niemals widerlegt werden konnte . Der Zweite Hauptsatz ist daher als wesentliches physikalisches Grundgesetz anzusehen . Inelastische Formänderungen sind in hohem Maße dissipativ und irreversibel , so daß die Entropie als ein Maß der Irreversibilität eine wichtige Zustandsgröße bei allgemeinen thermomechanischen Prozessen darstellt . Insbesondere bei schnell ablaufenden Verformungen , bei denen der Einfluß der Temperaturänderungen auf das Verfestigungsverhalten nicht vernachlässigt werden darf , kommt der Kopplung zwischen thermodynamischen und mechanischen Größen praktische Bedeutung zu . Im konstitutiven Gesetz findet diese Kopplung bei der Formulierung von Energiebilanzgleichungen Berücksichtigung , die aus dem Ersten Hauptsatz der Thermodynamik abgeleitet sind .

Ein allgemeiner Rahmen , in dem die genannten thermodynamischen Überlegungen enthalten sind , wurde von Lehmann [ 12 , 78 ] ausgearbeitet und bei verschiedenen Problemstellungen wie der Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder [ 20 ] , der Berechnung der Einschnürung beim Zugstab [ 83 ] , sowie des plastischen Setzens von Schraubenfedern [ 84 ] angewendet . Die wesentlichen Annahmen zur Behandlung großer , nicht - isothermer , inelastischer Deformationen polykristalliner Körper seien hier noch einmal zusammenfassend dargestellt .

- ( A ) Der Körper wird als klassisches Kontinuum betrachtet .
- ( B ) Der thermodynamische Zustand eines materiellen Punktes ist eindeutig bestimmt durch einen endlichen Satz interner und externer Zustandsvariabler im kleinen Zustandsraum , auch wenn der Körper als ganzes nicht im thermodynamischen Gleichgewicht ist . Die Beschränkung auf einen begrenzten Zustandsraum ist notwendig , da die Vorgänge , die in der Mikrostruktur ablaufen , nicht im einzelnen bekannt sind . Konsequenterweise ist die darauf aufbauende Theorie eine phänomenologische Theorie , deren Ziel es ist , aufgrund repräsentativer Experimente , Materialgesetze zu ermitteln , die eine Vorhersage des Werkstoffverhaltens unter komplexer Belastung ermöglichen .
- ( C ) Dissipative ( plastische ) Prozesse erscheinen als eine Folge von erzwungenen Gleichgewichtszuständen ( constraint equilibrium ) .

Entsprechend der Zielsetzung dieser Arbeit, isotherme, quasistatische Prozesse bei wechselnden, zyklischen ein- und zwei axialen Spannungszuständen zu beschreiben, basieren die Ansätze der Entwicklungsgleichungen auf phänomenologischen Überlegungen, die anhand des durchgeführten Versuchsprogramms überprüfbar sind. Dabei wird die Übereinstimmung mit dem Experiment als vorrangig betrachtet. Es ist jedoch zu beachten, daß bei allgemeinen Prozessen, z.B. mit veränderlichem Temperaturniveau, der thermodynamischen Konsistenz eine praktische Bedeutung zukommt, da nur auf diesem Weg der Wechselwirkung von mechanischen und thermischen Energieformen Rechnung getragen werden kann. Im Rahmen dieser Arbeit ist es jedoch nicht möglich, auf wichtige Fragen, die mit diesem Themenkreis zusammenhängen, wie z.B. die Temperaturabhängigkeit der Materialparameter, einzugehen. Daher beschränkt sich der folgende Abschnitt nur darauf, die Zulässigkeit der konstitutiven Gleichungen innerhalb des thermodynamischen Rahmens zu diskutieren und auf kritische Punkte, die bei einem weiteren Ausbau des Modells zu beachten sind, hinzuweisen.

## 6.2 Interne Variable

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, inelastische Deformationen als thermodynamischen Prozeß zu behandeln [ 82 ]. Hier wird das Konzept der „internen Variablen“ benutzt. Danach ist die (spezifische) innere Energie  $u$  darstellbar (vgl. Annahme B) als

$$u = u \left( \underline{\underline{\epsilon}}_r, s, l, \mu, \underline{\underline{\alpha}} \right) \quad (6.1)$$

Der reversible Verzerrungstensor  $\underline{\underline{\epsilon}}_r$  und die Entropie  $s$  sind von außen kontrollierbare, externe Variable, die durch den betrachteten physikalischen Prozeß festliegen. Die internen Variable  $\underline{\underline{\alpha}}$ ,  $l$  und  $\mu$ , die in Kap.5 zur Kennzeichnung des Verfestigungszustandes eingeführt wurden, stellen dagegen eine repräsentative Auswahl aus einer größeren Zahl relevanter interner Variabler dar. Sie sollen einerseits eine angemessene Beschreibung des Problems ermöglichen und andererseits eine praktikable Behandlung gewährleisten. Ihre Entwicklungsgleichungen müssen dem Prinzip der materiellen Objektivität genügen [ 16, 80 ]. Für zeitunabhängige, irreversible (plastische) Prozesse ist charakteristisch, daß ihre materielle zeitliche Änderung nur von den externen Variablen, deren erster Zeitableitung und den aktuellen Werten der internen Variablen abhängt.

## 6.3 Energiebilanzgleichungen und irreversible Entropieproduktion

Die zeitliche Änderung der inneren Energie ist durch den Ersten Hauptsatz der Thermodynamik festgelegt

$$\dot{u} = \dot{w} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{\underline{q}} + r \quad (6.2)$$

der die zugeführte mechanische Arbeit mit der Divergenz des Wärmeflusses  $\underline{q}$  und den inneren Energiequellen  $r$  verknüpft. Im folgenden werden nur die ersten beiden Terme auf der rechten Seite berücksichtigt ( $r=0$ ). Die Einführung der spezifischen freien Enthalpie  $\psi$

$$\psi = u - \frac{1}{\rho_0} \underline{S} : \underline{\epsilon}_r - Ts = \psi(\underline{S}, T, \underline{\alpha}, \mu, l) \quad (6.3)$$

ermöglicht den Übergang (Legendre-Transformation [14, 15]) auf den zum reversiblen Dehnungstensor  $\underline{\epsilon}_r$  konjugierten Kirchhoffspannungstensor  $\underline{S}$  und der zur Entropie  $s$  konjugierten absoluten Temperatur  $T$ . Die freie Enthalpie ist eine thermodynamische Zustandsgröße und besitzt ein vollständiges Differential

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{S}} : \underline{\dot{S}} + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\alpha}} : \underline{\dot{\alpha}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \dot{\mu} + \frac{\partial \psi}{\partial l} \dot{l} \quad (6.4)$$

Für die Entropieproduktion  $\dot{\underline{S}}$  bestehen Beschränkungen durch den Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ( $\underline{S} = \int_{(V)} \rho s \, dV$ ,  $s$  spezifische Entropie)

$$\dot{\underline{S}} \geq \frac{\dot{Q}}{T} \quad (6.5)$$

Demnach kann die während eines irreversiblen Prozesses erzeugte Entropie nicht abnehmen, da die von außen zugeführte Wärme positiv ist

$$\dot{Q} = - \int_{(A)} \underline{q} \cdot d\underline{A} > 0 \quad (6.6)$$

Bei reversiblen Prozessen gilt

$$\dot{\underline{S}} = \frac{\dot{Q}}{T} \quad (6.7)$$

Mit der Identität  $\operatorname{div} \frac{\underline{q}}{T} = \frac{1}{T} \operatorname{div} \underline{q} - \frac{1}{T^2} \underline{q} \cdot \operatorname{grad} T$  läßt sich Gl. (6.5) umformen

$$T \dot{\underline{S}} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{q} - \frac{1}{\rho T} \underline{q} \cdot \operatorname{grad} T \geq 0 \quad (6.8)$$

Setzt man Gl. (6.4) unter Zuhilfenahme der zeitlichen Ableitung von  $\psi$ .

$$\dot{\psi} = \dot{u} - \frac{1}{\rho_0} \overset{\nabla}{\underline{\underline{S}}} : \underline{\underline{\epsilon}}_r - \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{S}} : \overset{\nabla}{\underline{\underline{\epsilon}}}_r - \dot{T} s - T \dot{s} \quad (6.9)$$

und des Ersten Hauptsatzes Gl. ( 6.3 ) in den Zweiten Hauptsatz ein , erhält man die Clausius - Duhem Ungleichung [ 91 ]

$$\begin{aligned} \dot{w} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{S}}} : \overset{\nabla}{\underline{\underline{S}}} - \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} : \overset{\nabla}{\underline{\underline{\alpha}}} - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \dot{\mu} - \frac{\partial \psi}{\partial l} \dot{l} - \\ - \frac{1}{\rho_0} \overset{\nabla}{\underline{\underline{S}}} : \underline{\underline{\epsilon}}_r - \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{S}} : \overset{\nabla}{\underline{\underline{\epsilon}}}_r - \dot{T} s - \frac{1}{\rho T} \underline{\underline{q}} \cdot \text{grad } T \geq 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Der reversible Anteil der mechanischen Arbeit liefert keinen Beitrag zur Entropieproduktion . Aus diesem Grund müssen  $\underline{\underline{S}}$  und  $\underline{\underline{\epsilon}}_r$  einander zugeordnet sein im Sinne von Gl. ( 2.37 ) und der reversible Verzerrungstensor ist der logarithmische Hencky - Tensor nach Gl. ( 2.34 ) ( $\underline{\underline{\epsilon}}_r = \underline{\underline{E}}_H$ ) . Damit folgt

$$\begin{aligned} \dot{w}_d + \dot{w}_h - \left( \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{S}}} + \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{\epsilon}}_r \right) : \overset{\nabla}{\underline{\underline{S}}} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} : \overset{\nabla}{\underline{\underline{\alpha}}} - \\ - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \dot{\mu} - \frac{\partial \psi}{\partial l} \dot{l} - \frac{1}{\rho T} \underline{\underline{q}} \cdot \text{grad } T \geq 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Da  $\psi$  nicht von den Gradienten der externen Variablen  $\overset{\nabla}{\underline{\underline{S}}}$  und  $\dot{T}$  abhängt , diese aber unabhängig voneinander beliebige Werte annehmen , so daß Ugl. ( 6.11 ) verletzt sein kann , folgt , daß die beiden Klammern in Ugl. ( 6.11 ) identisch null sein müssen . Damit lassen sich zunächst die kalorische und die thermische Zustandsgleichung ableiten

$$s = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (6.12)$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}_r = - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{S}}} \quad (6.13)$$

In Ugl. ( 6.11 ) wird angenommen , daß die Gesamtarbeitsrate sich zusammensetzt aus

$$\dot{w} = \dot{w}_r + \dot{w}_d + \dot{w}_h \quad (6.14)$$

wobei  $\dot{w}_r$  die reversible Arbeitsrate ,  $\dot{w}_d$  die dissipierte Arbeitsrate und  $\dot{w}_h$  den Teil der Arbeitsrate bezeichnet , der in der internen Struktur gespeichert wird

$$\dot{w}_d = \xi \dot{w}_p = \xi \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{t}} : \underline{\underline{D}}_{(p)} \quad (6.15)$$

$$\dot{w}_h = (1-\xi) \dot{w}_p = (1-\xi) \underline{\underline{t}} : \underline{\underline{D}}_{(p)} \quad (6.16)$$

Mit den Gl. ( 6.2, 6.4, 6.9 ) erhält man die Enthalpiebilanzgleichung , in der die von außen zugeführte Arbeit und Wärme mit der Änderung der freien Enthalpie bilanziert werden

$$\begin{aligned} \dot{w}_d + \dot{w}_h - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{\underline{q}} &= -T \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \underline{\underline{S}}} : \underline{\underline{\dot{S}}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} \right\} + \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} \left\{ \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T} \right\} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T} \right\} \dot{\mu} + \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T} \right\} \dot{l} \quad (6.17) \end{aligned}$$

In der Enthalpiebilanzgleichung treten sowohl dissipative als auch nicht-dissipative Terme auf . Diese werden getrennt durch eine weitere Aufspaltung in die Bilanzgleichung für die gespeicherte Energie

$$\dot{w}_h = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \dot{\mu} + \frac{\partial \psi}{\partial l} \dot{l} + T \dot{\eta} \quad (6.18)$$

und die Bilanzgleichung für die dissipierte Energie

$$\begin{aligned} \dot{w}_d &= c_p \dot{T} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \underline{\underline{q}} - T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \underline{\underline{S}}} : \underline{\underline{\dot{S}}} - T \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \underline{\underline{\alpha}}} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \mu} \dot{\mu} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial l} \dot{l} \right\} - T \dot{\eta} \quad (6.19) \end{aligned}$$

mit der Wärmekapazität  $c_p$  bei konstanter Spannung und konstanten internen Variablen

$$c_p = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \quad (6.20)$$

Gl.(6.19) dient zur Berechnung der Temperaturänderung . Sie enthält die thermomechanischen Koppelterme , die jedoch vielfach vernachlässigbar sind [ 78 ] . Bei der Aufspaltung der Enthalpiebilanzgleichung tritt eine weitere Größe  $\dot{\eta}$  auf , die die Entropieproduktion aufgrund interner Strukturänderungen , z.B. der in Kap.4 erläuterten Formation von geordneten Zellversetzungsstrukturen , beschreibt. Ihre Einführung ermöglicht die Elimination der nicht-dissipativen Terme in der Clausius- Duhem Ungleichung . Zusammen mit der Bilanzgleichung für die gespeicherte Energie führt die Clausius - Duhem Ungleichung auf die Aussage , daß die irreversible Entropieproduktion nicht negativ sein darf

$$T \dot{s}_{irr} = \frac{\xi}{\rho_0} \underline{\underline{t}} : \underline{\underline{D}}_p + T \dot{\eta} - \frac{1}{\rho T} \underline{\underline{q}} \cdot \operatorname{grad} T \geq 0 \quad (6.21)$$

Vor einer Diskussion der Restriktionen , die sich aus Ugl. ( 6.21 ) ergeben , wird zunächst untersucht , welche Folgerungen aus der Bilanzgleichung für die gespeicherte Energie Gl . ( 6.18 ) zu ziehen sind . Man erhält

$$\frac{1-\xi}{\rho_0} \underline{\underline{t}} : \underline{\underline{D}}_P = \frac{\partial \psi}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \dot{\mu} + \frac{\partial \psi}{\partial l} \dot{l} + T \dot{\eta} , \quad ( 6.22 )$$

wobei angenommen wird , daß die Abhängigkeit von  $\underline{\underline{\alpha}}$  durch die zweite Invariante  $A = \text{Sp } \underline{\underline{\alpha}}^2$  darstellbar ist . Für den Fall  $M = 0$  läßt sich Gl. ( 6.23 ) vereinfachen<sup>1)</sup>. Es ist

$$M = A - l^2 = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial A} ( ) = \frac{\partial}{\partial l} ( ) \frac{1}{2l} \quad \text{und} \quad \dot{l} = \frac{\dot{A}}{2l} , \quad ( 6.23 )$$

damit wird

$$\frac{1-\xi}{\rho_0} \underline{\underline{t}} : \underline{\underline{D}}_P = 2 \frac{\partial \psi}{\partial A} \dot{A} + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \dot{\mu} + T \dot{\eta} . \quad ( 6.24 )$$

Mit den Entwicklungsgleichungen für  $\underline{\underline{\alpha}}$  Gl. ( 5.30 ) und  $\dot{\mu}$  Gl. ( 5.19 ) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1-\xi}{\rho_0} \underline{\underline{t}} : \underline{\underline{D}}_P^* &= \frac{1-\xi}{\rho_0} \left[ 4\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial A} \wedge \left[ \frac{k^*}{k} \underline{\underline{\alpha}} : (\underline{\underline{t}} - \underline{\underline{\alpha}}) - \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{t}} \right] + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right] * \\ & * (\underline{\underline{t}} - \underline{\underline{\alpha}}) : \underline{\underline{D}}_P + T \dot{\eta} . \end{aligned} \quad ( 6.25 )$$

Die Bilanzgleichung verlangt , daß

$$1 = 4\rho_0 \wedge \frac{\partial \psi}{\partial A} \left[ \frac{k^*}{k} \underline{\underline{\alpha}} : (\underline{\underline{t}} - \underline{\underline{\alpha}}) - \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{t}} \right] + \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \quad ( 6.26 )$$

und

$$T \dot{\eta} = \frac{1-\xi}{\rho_0} \underline{\underline{\alpha}} : \underline{\underline{D}}_P \quad ( 6.27 )$$

Wie aus Gl. ( 6.27 ) zu ersehen , ist die interne Entropieproduktion mit der Leistung der lokalen Spannungen verknüpft . Da diese sowohl positiv als auch negativ sein kann , muß auch  $\xi > 1$  möglich sein , da

$$T \dot{\eta} \geq 0 . \quad ( 6.28 )$$

<sup>1)</sup> Der Fall  $M < 0$  führt auf das gleiche Ergebnis ( mit geänderter Bilanzgleichung )

Das bedeutet, daß die im Gefüge gespeicherte Energie kurzfristig abgegeben und dissipiert wird

$$\dot{w}_h = (1 - \xi) \dot{w}_p < 0 \quad (6.29)$$

$$\dot{w}_d = \xi \dot{w}_p > \dot{w}_p \quad (6.30)$$

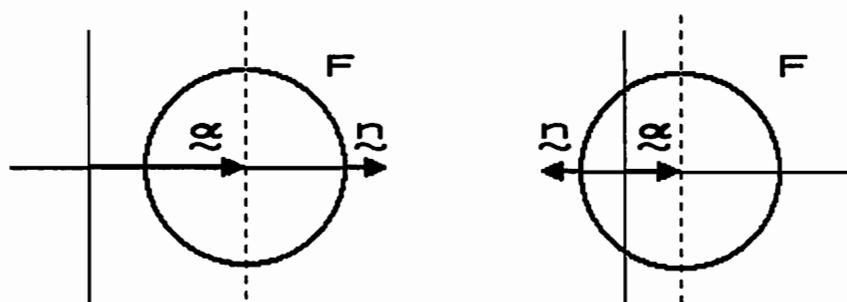
Dies ist zulässig, da keine Beschränkungen für die gespeicherte Energierate existiert  $\dot{w}_h \geq 0$  [ 12 ]. Eine Möglichkeit zur Erfüllung von Gl. ( 6.28 ) besteht darin, für  $\xi$  eine Abhängigkeit vom Skalarprodukt des Mikrospannungstensors mit der plastischen Verformungsgeschwindigkeit anzunehmen

$$\xi = 1 - \zeta \frac{\underline{\alpha} : \underline{n}}{|\underline{\alpha}|} \quad (6.31)$$

Dabei ist  $\underline{n}$  der Fließflächennormalenvektor und  $\zeta$  eine Materialkonstante mit  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Falls  $\underline{\alpha}$  parallel  $\underline{n}$  gilt  $\xi < 1$ , während für  $\underline{\alpha}$  antiparallel  $\underline{n}$   $\xi > 1$  wird

$$\xi = \begin{cases} 1 - \zeta, & \text{falls } \underline{\alpha} \parallel \underline{n} \uparrow \uparrow \\ 1 + \zeta, & \text{falls } \underline{\alpha} \parallel \underline{n} \uparrow \downarrow \end{cases} \quad (6.32)$$

Für  $\zeta = 0.4$  ergibt sich der in den Rechnungen benutzte ( allerdings konstante ) Wert von  $\xi = 0.6$ . Abb. 6.1 zeigt eine Illustration anhand eines Zug/Druckversuchs. Links ist der Fall der Verfestigung dargestellt, in dem die von außen zugeführte Energie teilweise



Verfestigung  $\xi < 1$

$$\begin{aligned} \dot{w}_h &> 0 \\ \dot{w}_d &< \dot{w}_p \end{aligned}$$

Entfestigung  $\xi > 1$

$$\begin{aligned} \dot{w}_h &< 0 \\ \dot{w}_d &> \dot{w}_p \end{aligned}$$

Abb. 6.1 Zur Energiedissipation bei Verfestigung und Entfestigung

im Gefüge gespeichert wird  $\dot{w}_h > 0$ . Nach Belastungsumkehr ist kurzfristig  $\underline{g}: \underline{D}_{(p)}$  kleiner null. Dieser Fall bedeutet Entfestigung, die durch die vorübergehende Abnahme der Versetzungsdichte begründet werden kann. Die dabei frei werdende Energie wird dissipiert, so daß unmittelbar nach Belastungsumkehr  $\dot{w}_d > \dot{w}_p$  gilt.

Für die reversible Entropieproduktion ergibt sich aus Ugl. ( 6.21 )

$$\frac{\xi}{\rho_0} ( \underline{t} - \underline{\alpha} ) : \underline{D}_P + \frac{1}{\rho_0} \underline{\alpha} : \underline{D}_P - \frac{1}{\rho T} \underline{q} \cdot \underline{\text{grad}} T \geq 0 \quad ( 6.33 )$$

Unter der Annahme, daß die Entropieproduktion durch plastische Deformation und Wärmeausgleich unabhängige Prozesse sind [ 53 ], kann Ugl. ( 6.33 ) in die Aussagen

$$\xi k^2 + \underline{\alpha} : ( \underline{t} - \underline{\alpha} ) \geq 0 \quad ( 6.34 )$$

$$- \frac{1}{\rho T} \underline{q} \cdot \underline{\text{grad}} T \geq 0 \quad ( 6.35 )$$

zerlegt werden. Dabei ist Ungleichung ( 6.35 ) für den internen Wärmeaustausch immer erfüllt, da die zugeführte Wärme  $\underline{q}$  dem Temperaturgradienten entgegengesetzt ist. Aufgrund von Ugl. ( 6.34 ) muß verlangt werden, daß die Fließfläche den Spannungspunkt stets umschließt, da dann das rechtsstehende Skalarprodukt kleiner ist als  $k^2$ . Diese Forderung ist bei dem vorliegenden Material erfüllt.

Weiterhin hat Gl. ( 6.26 ) zur Folge, daß eine Aufspaltung der freien Enthalpie

$$\psi = \psi^* ( \underline{S}, T ) + \psi^{**} ( A, \mu, l, T ) \quad ( 6.36 )$$

in diesem Modell nicht möglich ist, da der plastische Anteil  $\psi^{**}$  entsprechend Gl. ( 6.36 ) nicht von der Spannung abhängen darf, wie dies aber Gl. ( 6.26 ) erfordern würde. Das bedeutet, daß das thermoelastische Verhalten nach Gl. ( 6.12, 6.13 ) nicht unabhängig vom inelastischen Prozeß ist und eine wichtige Voraussetzung, nämlich die Fortdauer der elastischen Isotropie, nicht aufrecht erhalten werden kann. Auch spricht dagegen die physikalische Interpretation der plastischen Deformation, nach der die charakteristische Atomanordnung innerhalb der Kristallstruktur durch das Hindurchgleiten von Versetzungen nicht dauerhaft gestört wird. Jedoch ist zu bemerken, daß der gemachte Ansatz in angenäherter Form Gültigkeit hat, da ohnehin die thermische Zustandsgleichung ( 6.13 ) durch ein hypo-elastisches Stoffgesetz nach Gl. ( 5.23 ) approximiert wird. Auf diese Problematik, die speziell mit dem Mrózschen Verfestigungsgesetz zusammenhängt wird von Lehmann in [ 86 ] hingewiesen. Als weiterer Nachteil im Hinblick auf eine geschlossene thermodynamische Behandlung muß erwähnt werden, daß die aus Gl. ( 6.26 ) ableitbaren Integrabilitätsbedingungen [ 12 ] nicht in der gewünschten Weise zur Bestimmung und Eingrenzung der Materialparameter herangezogen werden können, da sich aufgrund der heuristisch angesetzten Entwicklungsgleichungen schwer lösbare Abhängigkeiten der Materialkoeffizienten  $\underline{\Lambda}$ ,  $\underline{\Gamma}$  und  $\Delta$  ergeben [ 85 ].

## 7. Bestimmung der Materialparameter für die isotrope und kinematische Verfestigung

### 7.1 Allgemeines

Grundlage der Parameterbestimmung bilden die Kennlinien der isotropen und kinematischen Verfestigung im stationären Zustand ( Abb. 3.13 und Tab. 3.3 ). Die Anpassung erfolgt auf der Basis zyklischer Zug/Druckversuche im Amplitudenbereich  $0.3 \leq \Delta \epsilon_p / 2 \leq 1.5\%$ . In diesem Bereich sind lineare Ansätze für die Materialfunktionen  $\Phi(\ell)$  und  $\hat{k}_{stat}(\ell)$ , die die Sättigungswerte der kinematischen bzw. isotropen Verfestigung beeinflussen, ausreichend. Die Materialparameter werden für ein Temperaturniveau ( $T=25^\circ\text{C}$ ) bestimmt, die Temperaturabhängigkeit wird hier nicht betrachtet. Es soll noch bemerkt werden, daß nicht alle benötigten Konstanten exakt ermittelt werden können. Das liegt zum einen daran, daß umfassende Identifikationsroutinen erheblich mehr Aufwand erfordern, und zum anderen nur spezielle Belastungsfälle abgedeckt werden können. Daher sind einige Parameter, deren Einfluß auf die Gesamtcharakteristik offensichtlich ist (z.B. die Konvergenzparameter  $b$ ,  $d$  und der Anfangswert  $k_0$ ), empirisch festgelegt, so daß man einen gewissen Ausgleich vornehmen kann, falls Abweichungen in dem einen oder anderen Belastungsfall zu groß sind. In den beiden folgenden Abschnitten werden die Grenzfunktionen für die kinematische Verfestigung  $\Phi$  und die isotrope Verfestigung  $\hat{k}_{stat}$  unter Zuhilfenahme von Abschätzungen ermittelt. Das Ergebnis ist nicht exakt, sondern stellt eine mögliche Parameterkombination unter Benutzung von Näherungslösungen dar.

### 7.2 Kinematische Verfestigung

Die Entwicklungsgleichung für die kinematische Verfestigung lautet bei Zugbelastung

$$\frac{d\alpha}{d\epsilon_p} = \alpha' = \frac{3}{2} \frac{k(1-\xi)a}{\sqrt{\frac{2}{3}}(\alpha - \alpha_0)} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha}{\Phi}\right) (k^* - k - \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha) \quad (7.1)$$

Die Materialfunktion  $\Phi(\ell)$  und die Konstante  $a$  sind zu bestimmen. Zunächst werden die Tangenten  $T_1, \dots, T_4$  mit den Neigungen  $\varphi_1, \dots, \varphi_4$  von vier verschiedenen stationären Zuständen ( $\Delta \epsilon_p / 2 = 0.3, 0.6, 0.9, 1.2\%$ ) in den Punkten maximaler plastischer Dehnung zeichnerisch, wie in Abbildung 7.1 dargestellt, ermittelt.

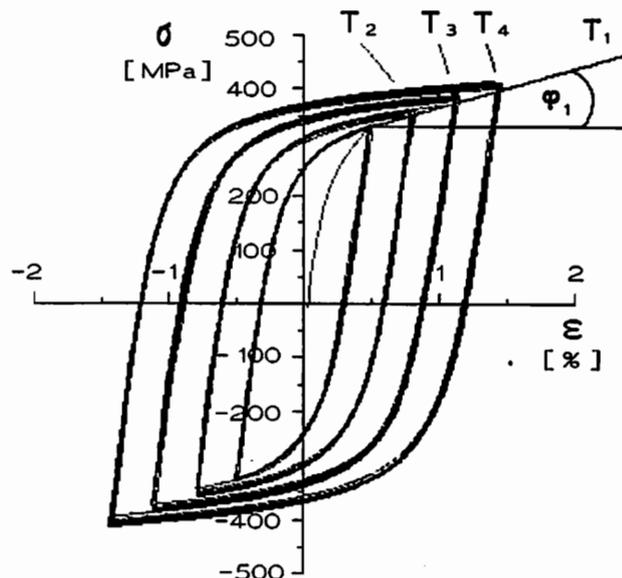


Abb. 7.1

Bestimmung des kinematischen Moduls im stationären Zustand bei vier verschiedenen Amplituden

Sie stimmen näherungsweise mit dem kinematischen Modul  $M_k$

$$M_k = \frac{d\alpha}{d\varepsilon_p} = \alpha' \approx \tan\varphi \quad (7.2)$$

überein, da die isotrope Verfestigung im stationären Zustand konstant ist. Außerdem wird die Differenz zwischen Gesamtdehnung und plastischer Dehnung vernachlässigt. Es ergeben sich vier experimentell bestimmte Interpolationspunkte, die in der folgenden Tabelle 7.1 dargestellt sind.

**Tabelle 7.1 Experimentell bestimmte Interpolationspunkte für den stationären Zustand im Zug/Druckversuch**

Amplitude. $\Delta\varepsilon_p/2$	$\varphi$ [ ° ]	$M_k$ [ MPa ]	$\alpha_{stat}$ [ MPa ]	$\sqrt{\frac{3}{2}} k_{stat}$ [ MPa ]
0.3 %	21.5	9847	70	200
0.6 %	8	3514	93	214
0.9 %	5	2187	107	229
1.2 %	3	1310	118	243

Der Radius der Grenzfläche wird mit  $k^* = 380$  MPa als obere Grenze aller in den Versuchen beobachteten Spannungen angenommen. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{stat} \\ \alpha - \bar{\alpha} &= 2 \alpha_{stat} \\ k &= k_{stat} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Der Quotient  $\frac{\alpha}{\Phi}$  muß abgeschätzt werden, um die Konstante  $a$  festlegen zu können. Im Grenzzustand ist

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \left( \frac{\alpha}{\Phi} \right)_{\varepsilon \rightarrow \infty} = 1 \quad (7.4)$$

Mit der Annahme

$$1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha_{stat}}{\Phi} \approx 0.2 \quad (7.5)$$

ergibt sich für  $\Delta\varepsilon_p/2 = 0.3\%$  aus Gl.(7.1)

$$a = \alpha' \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2 \alpha_{stat}}{0.2 k_{stat} (1 - \xi) (k^* - k - \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_{stat})} = 360. \quad (7.6)$$

Nun können mit der nach  $\Phi_{stat}$  aufgelösten Gl.( 7.1 )

$$\Phi_{stat} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_{stat}}{1 - \frac{\alpha l}{a} \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} 2 \alpha_{stat}}{k(1-\xi)(k^* - k - \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_{stat})}} \quad (7.7)$$

die stationären Werte der kinematischen Grenzfunktion  $\Phi$  in vier Punkten ermittelt werden . Diese sind in Abbildung 7.2 dargestellt . Für den Radius der Mikrofläche  $l$  gilt (wegen  $M = 0$  )  $l = \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha$  und es ist zu erkennen , daß eine annähernd lineare Abhängigkeit vorliegt

$$\Phi = c l + \Phi_0 \quad (7.8)$$

Die beiden Konstanten sind

$$c = 1$$

$$\Phi_0 = 10$$

Der lineare Ansatz stellt die einfachste Möglichkeit dar , die experimentell beobachtete Dehnungsamplitudenabhängigkeit der kinematischen Verfestigung zu realisieren . Denkbar sind auch andere Ansätze , etwa ein exponentieller Ansatz für  $\Phi$  , bei dem der stationäre Wert erst nach einigen Zyklen erreicht wird . Jedoch gestaltet sich dann die Parameteranpassung schwieriger.

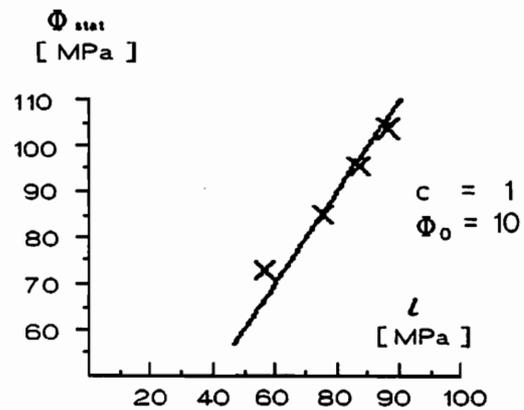


Abb. 7.2

Anpassung der Grenzfunktion im stationären Zustand  $\Phi_{stat}$

### 7.3 Isotrope Verfestigung

Die Entwicklungsgleichung der isotropen Verfestigung lautet bei isothermen Prozessen

$$\dot{k} = \Gamma \dot{\mu} = \frac{d}{k_0} (\hat{k}_{stat} - k) (1-\xi) (t_{\beta}^{\alpha} - a_{\beta}^{\alpha}) d_{(p)}^{\beta} \quad (7.9)$$

und für Zug/Druck

$$\frac{dk}{d\varepsilon_p} = k' = \frac{d}{k_0} (\hat{k}_{stat} - k) (1-\xi) \sqrt{\frac{3}{2}} k \operatorname{sgn}(\dot{\varepsilon}_p) \quad (7.10)$$

Für den Fall  $\hat{k}_{\dots} = \text{const.}$  führt Gl. ( 7.10 ) auf ein asymptotisches Entwicklungsgesetz mit exponentiellem Verlauf . Die experimentellen Ergebnisse lassen jedoch den Schluß zu, daß der stationäre Wert der isotropen Verfestigung  $k_{\dots}$  selbst eine Funktion der internen und externen Zustandsvariablen und ihrer Geschichte ist , d.h. vom aktuellen und zurückliegenden Deformationszustand beeinflusst ist . Zudem bedingt das variable Verfestigungsverhalten auch die Eigenschaft , daß in bestimmten Fällen , z.B. bei kaltverfestigten Materialien , bei Verkleinerung der Lastamplitude oder beim Übergang von nicht-proportionaler auf proportionale Belastung , der Grenzwert  $\hat{k}_{\dots}$  abnimmt . Da die Größe der Mikrofläche  $M$  ein Maß für die vorausgegangene Verfestigung ist , erscheint ein Ansatz der Form

$$\hat{k}_{\dots} = \hat{d}_1 l + \hat{d}_2 \quad ( 7.11 )$$

im Hinblick auf die genannten Erwägungen geeignet . Da  $l$  keine monoton verlaufende Funktion ist , sondern je nach Belastung größer oder kleiner werden kann , ist  $\hat{k}_{\dots}$  nicht mit dem Sättigungswert von  $k$  im stationären Zustand  $k_{\dots}$  identisch , vielmehr ist der stationäre Zustand durch

$$\int_{-\varepsilon_p^*}^{\varepsilon_p^*} \Gamma d\varepsilon_p = 0 \quad ( 7.12 )$$

gekennzeichnet . Dies soll am Beispiel des zyklischen Zug/Druckversuchs erläutert werden . Nach jeder Belastungsumkehr ist zunächst  $M < 0$  ( Abb. 7.3). Für diesen Fall nimmt der Radius  $l$  ab

$$\dot{l} = b \left( \frac{a_\beta^\alpha a_\alpha^\beta}{l^2} - 1 \right) \dot{\varepsilon} < 0$$

(vgl. Gl. 5.12 ) , so lange , bis wieder das Kriterium  $M = 0$  erfüllt ist . Befindet sich der isotrope Modul  $\Gamma$  nahe dem stationären Zustand , so wird für  $M < 0$  auch  $\Gamma < 0$  . Abbildung 7.4 zeigt den Verlauf des isotropen Moduls  $\Gamma$  längs des Belastungsweges als Ergebnis der numerischen Integration . Im stationären Zustand sind die Flächen oberhalb und unterhalb der Abszisse gleich groß und Gl.(7.12) ist erfüllt . Der dargestellte Verlauf von  $\Gamma$  korrespondiert direkt mit der von Hasegawa [52] gemessenen Abnahme der Versetzungsdichte nach Belastungsumkehr .

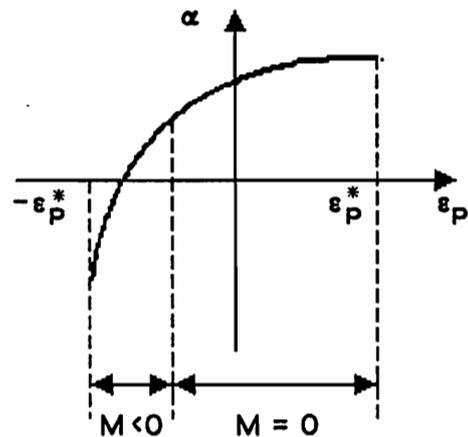


Abb. 7.3 Vorübergehende Entfestigung bei Belastungsumkehr

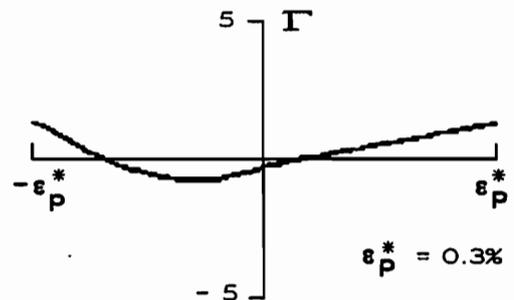


Abb. 7.4 Stationärer isotroper Modul  $\Gamma$  als Ergebnis der numerischen Integration

Der stationäre Zustand ist somit nicht durch ein absolutes Maximum in der Versetzungsdichte gegeben, sondern durch ein "dynamisches Gleichgewicht" zwischen ausheilenden und neu erzeugten Versetzungen.

Zur einfacheren Ermittlung von  $\hat{k}_{\text{stat}}$  wird anstelle von Gl. (7.11)

$$\hat{k}_{\text{stat}} = l + \hat{d} \quad (7.13)$$

gesetzt, da aus Gl.(7.12) zunächst nur eine Konstante bestimmbar ist. Die Konstanten  $b$  und  $d$  sind als bekannt vorausgesetzt,  $b$  beeinflusst die Entfestigungstendenz und  $d$  die Geschwindigkeit, mit der der stationäre Zustand erreicht wird. Beide Größen lassen sich ohne großen Aufwand empirisch ermitteln. Weiterhin wird das Integral in Gl. (7.12) näherungsweise durch eine endliche Summe ersetzt

$$\int_{-\varepsilon_p^*}^{+\varepsilon_p^*} \Gamma d\varepsilon_p = \int_{-\varepsilon_p^*}^{+\varepsilon_p^*} \frac{d}{k_0} (l + \hat{d} - k) d\varepsilon_p \approx \sum_i \Gamma_i \Delta\varepsilon_{p_i} \quad (7.14)$$

Diese Summe kann für jeden Belastungsschritt  $\Delta\varepsilon_{p_i}$  aus der Lösung der beiden Differentialgleichungen

$$\alpha' = \frac{3}{2} \frac{a(1-\xi)k}{\sqrt{\frac{2}{3}}(\alpha - \alpha_0)} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha}{l + \Phi_0}\right) (k^* - k - \sqrt{\frac{2}{3}}\alpha) \quad (7.15 a)$$

$$l' = b \left(\frac{2\alpha^2}{3l^2} - 1\right) \sqrt{\frac{3}{2}} k \quad (7.15 b)$$

berechnet werden. Durch Taylorreihenentwicklung erhält man in erster Näherung

$$\alpha = \alpha_0 + \left. \frac{\partial \alpha}{\partial \varepsilon_p} \right|_0 \Delta\varepsilon_p = \alpha_0 + \alpha' \Big|_0 \Delta\varepsilon_p \quad (7.16 a)$$

$$l = \hat{l} + \left. \frac{\partial l}{\partial \varepsilon_p} \right|_0 \Delta\varepsilon_p = \hat{l} + l' \Big|_0 \Delta\varepsilon_p \quad (7.16 b)$$

Bevor jedoch die Konstante  $\hat{d}$  geeignet gewählt werden kann, so daß

$$\sum \Gamma_i \Delta\varepsilon_{p_i} \approx 0, \quad (7.17)$$

ist der Anfangswert  $\alpha_0$  zu ermitteln. Dazu kann Gl.(7.15 a) unter Vernachlässigung der Entfestigung integriert werden.

Mit

$$l = \sqrt{\frac{2}{3}} |\alpha|$$

$$k = k_{stat}$$

$$\alpha = \hat{\alpha}_{stat}$$

$$\overset{\circ}{\alpha} = -\hat{\alpha}_{stat}$$

ergibt sich für den linken Halbzyklus  $\overset{\circ}{\varepsilon}_P > 0$  als Lösung von

$$\int_{\overset{\circ}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \alpha^2 + \alpha (\Phi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}} \overset{\circ}{\alpha}) - \overset{\circ}{\alpha} \Phi_0}{\frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} a (1-\xi) k_{stat} \Phi_0 (k^* - \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha - k_{stat})} d\alpha = \int_{\overset{\circ}{\varepsilon}_P}^{\varepsilon_P} d\varepsilon_P \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_P - \overset{\circ}{\varepsilon}_P = (\alpha - \overset{\circ}{\alpha}) & \left[ \frac{c_3}{c_2} - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{c_1}{c_2^2} \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\alpha^2 - \overset{\circ}{\alpha}^2}{c_2} + \\ & + \ln \left( \frac{c_1 + c_2 \alpha}{c_1 + c_2 \overset{\circ}{\alpha}} \right) \left[ \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{c_1^2}{c_2^3} - \frac{c_3 c_1}{c_2^2} + \frac{c_4}{c_2} \right] \end{aligned} \quad (7.19)$$

mit

$$c_1 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} a (1-\xi) k_{stat} \Phi_0 (k^* - k_{stat})$$

$$c_2 = -\frac{3}{2} a (1-\xi) k_{stat} \Phi_0$$

$$c_3 = \Phi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}} \overset{\circ}{\alpha}$$

$$c_4 = -\overset{\circ}{\alpha} \Phi_0$$

woraus  $\hat{\alpha}_{stat}$  durch Iteration bestimmt werden kann. Ein Beispiel der Näherungslösung durch Taylorreihenentwicklung für  $\Delta \varepsilon_P / 2 = 0.3\%$  ist in Abb. 7.5 dargestellt. Wie durch numerische Integration nachprüfbar ist, beträgt der Fehler aufgrund der Vernachlässigung der Entfestigung ( $l = \sqrt{\frac{2}{3}} |\alpha|$ ) etwa 2% (vgl. auch Abb. 7.1).

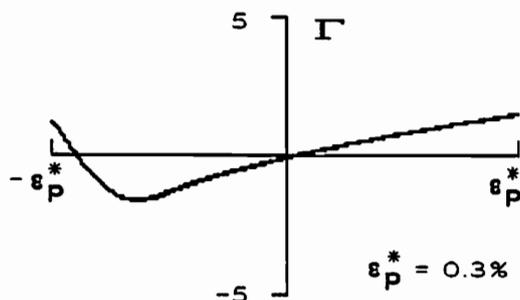


Abb. 7.5  
Näherungslösung für  $\Gamma$  durch  
Taylorreihenentwicklung

Das beschriebene Verfahren wird für die Amplituden  $\Delta \varepsilon_p/2 = 0.6, 0.9, 1.2 \%$  in der gleichen Weise durchgeführt. Damit erhält man vier Interpolationspunkte, die in Abbildung 7.6 eingetragen sind. Nun kann die lineare Funktion

$$\hat{k}_{stat} = \hat{d}_1 l + \hat{d}_2 \quad (7.20)$$

angepaßt werden. Das Ergebnis ist

$$\hat{d}_1 = 1.5$$

$$\hat{d}_2 = 75 \text{ MPa}$$

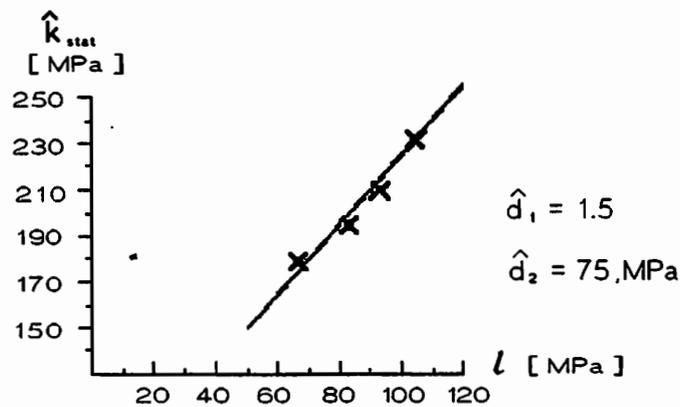


Abb. 7.6 Anpassung der isotropen Grenzfunktion  $\hat{k}_{stat}$  im stationären Zustand

Eine verfeinerte Abstimmung des Konvergenzparameters  $d$  und des Entfestigungsparameters  $b$  kann in Abstimmung eines monotonen Zugversuchs - in dem  $b$  keinen Einfluß hat - und eines zyklischen Versuchs erfolgen. Die endgültigen Parameter lauten

$a = 360$	$d = 11$	$\xi = 0.6$	$k_o = 150 \text{ MPa}$
$b = 195$	$\hat{d}_1 = 1.5$	$\Phi_o = 10 \text{ MPa}$	$k^* = 380 \text{ MPa}$
$c = 1$	$\hat{d}_2 = 75 \text{ MPa}$		

## 8. Vergleich zwischen Rechnung und Experiment

### 8.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt wird die numerische Lösung der elasto-plastischen Deformation dünnwandiger Kreiszyylinder erläutert. Nach der Zusammenstellung des Gleichungssystems für große Formänderungen erfolgt in den Abschnitten 8.3 und 8.4 die Gegenüberstellung von Rechnung und Experiment. Dabei wird der Einfachheit halber die Normalregel ohne Korrektur durch das Spannungsinkrement benutzt. Anschließend wird in Abschnitt 8.5 der Übergang auf kleine Formänderungen durchgeführt und der Einfluß des  $\chi$ -Terms dargestellt. Da die Versuche - mit Ausnahme des monotonen Zugversuchs, in dem  $\chi$  aber keine Rolle spielt - innerhalb eines kleinen Amplitudenbereichs ( $< 3\%$ ) bleiben, ist die numerische Lösung für kleine und große Formänderungen nahezu identisch. Andererseits ist der Mehraufwand, der sich durch Berücksichtigung des  $\chi$ -Terms ergibt, bei der allgemeinen Behandlung größer. Dies gilt vor allem für die Elimination von Radius oder Wandstärke, die in der Theorie kleiner Formänderungen nicht auftreten. Daher scheint es angebracht, den Einfluß des  $\chi$ -Terms im Rahmen kleiner Formänderungen zu untersuchen.

### 8.2 Differentialgleichungssystem für Axial- und Torsionsbeanspruchung

Die Entwicklungsgleichungen für elasto-plastische Formänderungen führen auf ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung für  $s_z, s_{\varphi z}, a_z, a_{\varphi}, a_{z\varphi}, l$  und  $k$ , das mit vorgegebenen Anfangswerten numerisch mit dem Runge - Kutta Verfahren gelöst wird. Unter Vernachlässigung der elastischen Volumendehnung ( $\nu = 0.5$ ) und unter Beschränkung auf isotherme Prozesse gilt

$$\underline{\dot{s}} = \underline{\sigma}, \quad \underline{\dot{a}} = \underline{\tau}, \quad \text{Sp } \underline{\dot{D}} = \frac{\dot{t}}{t} + \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{L}}{L} = 0, \quad \dot{T} = 0. \quad (8.1)$$

Setzt man den Spannungsdeviator nach Gl. (2.56) in die Fließbedingung Gl. (5.16) ein, so erhält man ( $s_z = \sigma, s_{\varphi z} = \tau$ )

$$F = \frac{\left(s_z - \frac{3}{2}a_z\right)^2}{\frac{3}{2}\left(k^2 - \frac{1}{2}(2a_{\varphi} + a_z)^2\right)} + \frac{\left(s_{\varphi z} - a_{\varphi z}\right)^2}{\frac{1}{2}\left(k^2 - \frac{1}{2}(2a_{\varphi} + a_z)^2\right)} - 1 = 0. \quad (8.2)$$

Für die Mikrofläche ergibt sich

$$M = \frac{\left(a_z + a_{\varphi}\right)^2}{\frac{1}{2}\left(l^2 + 2a_{\varphi}a_z\right)} + \frac{a_{\varphi z}^2}{\frac{1}{2}\left(l^2 + 2a_{\varphi}a_z\right)} - 1 = 0. \quad (8.3)$$

Gl. ( 8.2 ) beschreibt eine Ellipse in der Normal-Schubspannungsebene und Gl. ( 8.3 ) einen Kreis in der  $a_r = -( a_\varphi + a_z )$ ,  $a_{\varphi z}$  - Ebene . Die Belastungsbedingung lautet nach Gl. ( 5.21 )

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{t}} - \underline{\underline{\alpha}}) : \underline{\underline{t}} &= \dot{s}_z \left( \frac{2}{3} s_z - a_z \right) + s_{\varphi z} ( a_\varphi - a_z ) \frac{R \dot{\psi}}{L} + \\ &+ a_{\varphi z} s_z \frac{R \dot{\psi}}{L} + 2 ( s_{\varphi z} - a_{\varphi z} ) \dot{s}_{\varphi z} > 0. \end{aligned} \quad ( 8.4 )$$

Sind Belastungs - und Fließbedingung erfüllt , gilt mit Gl. ( 5.46 )

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}}_{(p)} &= 2\lambda (\underline{\underline{t}} - \underline{\underline{\alpha}}) = 2G \frac{(\underline{\underline{t}} - \underline{\underline{\alpha}}) : \underline{\underline{D}}}{k^2 [(1-\xi)h_m + 2G]} (\underline{\underline{t}} - \underline{\underline{\alpha}}) \\ &= p (\underline{\underline{t}} - \underline{\underline{\alpha}}) . \end{aligned} \quad ( 8.5 )$$

In der letzten Gleichung steht  $p$  als Abkürzung für

$$p = 2G \frac{\frac{L}{L} (s_z - 2a_z - a_\varphi) - \frac{R}{R} (2a_\varphi + a_z) + \frac{R \dot{\psi}}{L} (s_{\varphi z} - a_{\varphi z})}{k^2 [(1-\xi)h_m + 2G]} , \quad ( 8.6 )$$

mit  $h_m$  gemäß Gl. ( 5.47 )

$$h_m = \Lambda \left[ k k^* - s_z \left( \frac{2}{3} s_z - a_z \right) + 2 s_{\varphi z} ( s_{\varphi z} - a_{\varphi z} ) \right] + k \Gamma ,$$

mit  $\Lambda$  gemäß Gl. ( 5.36 )

$$\Lambda = \frac{a}{\delta} \left[ 1 - \frac{a_z (s_z - 2a_z - a_\varphi) - a_\varphi (2a_\varphi + a_z) + 2a_{\varphi z} (s_{\varphi z} - a_{\varphi z})}{k [cl + \Phi_0]} \right]$$

und  $\delta$  gemäß Gl. ( 5.37 )

$$\delta = \sqrt{2} \left[ (a_z - \overset{\circ}{a}_z)^2 + (a_\varphi - \overset{\circ}{a}_\varphi)^2 + (a_{\varphi z} - \overset{\circ}{a}_{\varphi z})^2 + (a_z - \overset{\circ}{a}_z)(a_\varphi - \overset{\circ}{a}_\varphi) \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Damit lassen sich die Spannungsinkremente  $\dot{s}_z$  und  $\dot{s}_\varphi$  berechnen . Aus Gl. ( 5.51 )

folgen mit Gl. ( 2.63 ) drei linear unabhängige Gleichungen

$$-\frac{\dot{s}_z}{3} - \frac{R\dot{\psi}}{L} s_{\varphi z} = 2G \left\{ \frac{\dot{R}}{R} + p \left( \frac{1}{3} s_z + a_\varphi \right) \right\} \quad ( 8.7 )$$

$$\frac{2}{3} \dot{s}_z + \frac{R\dot{\psi}}{L} s_{\varphi z} = 2G \left\{ \frac{\dot{L}}{L} - p \left( \frac{2}{3} s_z - a_z \right) \right\} \quad ( 8.8 )$$

$$\frac{\dot{s}_{\varphi z}}{R} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{L} s_z = 2G \left\{ \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{L} - p \frac{s_{\varphi z} - a_{\varphi z}}{R} \right\} \quad ( 8.9 )$$

Multipliziert man Gl. ( 8.7 ) mit 2 und addiert zu Gl. ( 8.8 ) , läßt sich  $\frac{\dot{R}}{R}$  eliminieren

$$\begin{aligned} \frac{\dot{R}}{R} = - \left\{ \frac{\dot{L}}{L} + \frac{s_{\varphi z}}{2G} \frac{R\dot{\psi}}{L} + 2G \frac{\frac{\dot{L}}{L} (s_z - 2a_z - a_\varphi) + \frac{R\dot{\psi}}{L} (s_{\varphi z} - a_{\varphi z})}{k^2 [(1-\xi)h_m + 2G]} (2a_\varphi + a_z) \right\} * \\ * \frac{k^2 [(1-\xi)h_m + 2G]}{2k^2 [(1-\xi)h_m + 2G] - 2G (2a_\varphi + a_z)^2} \quad ( 8.10 ) \end{aligned}$$

Die rechten Seiten der Gl. ( 8.7 - 8.9 ) enthalten jetzt nur noch die aufgrund der Wegsteuerung bekannte Ziehgeschwindigkeit  $\dot{L}$  und die Verdrehgeschwindigkeit  $\dot{\psi}$  als Inkremente . Mithilfe von Gl. ( 2.65 ) und ( 5.30 ) ergibt sich für die kinematische Verfestigung

$$\dot{a}_\varphi = \Lambda \dot{\mu} \left[ -\frac{k^*}{k} \left( \frac{1}{3} s_z + a_\varphi \right) + \frac{1}{3} s_z \right] + \frac{R\dot{\psi}}{L} a_{\varphi z} \quad ( 8.11 )$$

$$\dot{a}_z = \Lambda \dot{\mu} \left[ \frac{k^*}{k} \left( \frac{2}{3} s_z - a_z \right) - \frac{2}{3} s_z \right] - \frac{R\dot{\psi}}{L} a_{\varphi z} \quad ( 8.12 )$$

$$\dot{a}_{\varphi z} = \Lambda \dot{\mu} \left[ \frac{k^*}{k} (s_{\varphi z} - a_{\varphi z}) - a_{\varphi z} \right] + \frac{1}{2} \frac{R\dot{\psi}}{L} (a_z - a_\varphi) , \quad ( 8.13 )$$

wobei die Verfestigungsarbeitsrate nach Gl. ( 5.19 ) durch

$$\dot{\mu} = (1-\xi) p k^2 \quad ( 8.14 )$$

gegeben ist . Die Differentialgleichungen der isotropen Verfestigungsanteile  $l$  und  $k$  lauten unter Berücksichtigung der in den Gl. ( 5.25 - 5.27 ) vorgenommenen Fallunterscheidungen :

Fall 1 Verfestigung  $M=0$

$$\dot{l} = \left[ (a_\varphi + a_z)(\dot{a}_\varphi + \dot{a}_z) + a_\varphi \left( \dot{a}_\varphi - \frac{R\dot{\psi}}{L} a_{\varphi z} \right) + a_z \left( \dot{a}_z + \frac{R\dot{\psi}}{L} a_{\varphi z} \right) + 2 a_{\varphi z} \left( \dot{a}_{\varphi z} - \frac{1}{2} \frac{R\dot{\psi}}{L} (a_z - a_\varphi) \right) \right] \frac{1}{l} \quad (8.15)$$

Fall 2 Entfestigung  $M < 0$

$$\dot{l} = b \left[ \frac{2(a_z^2 + a_\varphi^2 + a_{\varphi z}^2 + a_\varphi a_z)}{l^2} - 1 \right] (1-\xi) p k^2 \quad (8.16)$$

(mit  $p$  nach Gl. (8.6) ) .

Die Entwicklungsgleichung für den Radius der Fließfläche Gl. (5.41) führt auf

$$\dot{k} = \frac{\hat{d}}{k_0} \left[ \hat{d}_1 l + \hat{d}_2 - k \right] (1-\xi) p k^2 \quad (8.17)$$

Mit den Anfangswerten

$$\begin{aligned} s_z(0) &= 0 & s_{\varphi z}(0) &= 0 \\ a_z(0) &= 0 & a_\varphi(0) &= 0 & a_{\varphi z}(0) &= 0 \\ l(0) &= 0 & k(0) &= k_0 \end{aligned}$$

werden die Gleichungen (8.7 - 8.17) numerisch mittels Runge - Kutta Verfahren 4. Ordnung mit Schrittweitenanpassung integriert .

Die Inkremente sind aufgrund der Wegsteuerung  $\dot{L} = \text{const.}$  und  $\dot{\psi} = \text{const.}$  vorgegeben. Dabei wird näherungsweise während eines Zeitschritts  $\Delta t$  gesetzt

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &\approx \frac{\dot{L}}{L_0} = \text{const.} && \text{( axiale Dehngeschwindigkeit )} \\ \dot{\gamma} &\approx \frac{\dot{\psi} L_0}{R_0} = \text{const.} && \text{( Schergeschwindigkeit )} \end{aligned} \quad (8.18)$$

so daß

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \varepsilon_{i-1} + \dot{\varepsilon} \Delta t \\ \gamma_i &= \gamma_{i-1} + \dot{\gamma} \Delta t \end{aligned} \quad (8.19)$$

Im Falle kombinierter Belastung wird entweder die effektive Dehngeschwindigkeit  $\dot{\tilde{\epsilon}}$  als konstant betrachtet ( Rechteck , Dreieck )

$$\dot{\tilde{\epsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3} \text{Sp } \underline{D}^2} = \sqrt{\dot{\epsilon}^2 + \dot{\gamma}^2/3} \quad ( 8.20 )$$

oder numerisch integriert ( Kreis )

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= - \tilde{\epsilon} \sin \varphi \dot{\varphi} \\ \dot{\gamma} &= \sqrt{3} \tilde{\epsilon} \cos \varphi \dot{\varphi} \end{aligned} \quad ( 8.21 )$$

mit  $\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} = \text{const.}$  ( T Umlaufzeit )

Zum Auffinden der Fließgrenze  $F = 0$  wird ein Suchalgorithmus verwendet , der die Schrittweite solange halbiert , bis  $F \leq F_{\text{max}}$  , wobei  $F_{\text{max}}$  eine vorgegebene Schranke ist . Ähnlich wird bei der Mikrofläche verfahren , um die Fälle  $M=0$  und  $M < 0$  zu unterscheiden .

Bei Rechteckbelastung ist bei der ersten Spannungsumlagerung die Belastungsbedingung nicht erfüllt ( neutrale Belastung )

$$\tilde{L} = ( \underline{t} - \underline{\alpha} ) : \underline{D} = 0 \quad ( 8.22 )$$

In diesem Fall wird der Spannungspunkt mithilfe des "radial return" Algorithmus auf die Fließfläche projiziert [ 89 ] .

### 8.3 Zug/Druckversuche

Grundlage der Parameterbestimmung ist das Verfestigungsdiagramm Abb. 3.13 , das die stationären Spannungsamplituden aller zyklischen Zug/Druckversuche im Bereich  $0.6 \leq \Delta \epsilon_p \leq 3.0\%$  enthält ( vgl. Kap.7 ) . Abb. 8.1 zeigt den Vergleich zwischen gerechnetem und gemessenen Verlauf der isotropen und kinematischen Verfestigung . Die Übereinstimmung der kinematischen Verfestigung ist im unteren Bereich nicht so gut wie bei der isotropen Verfestigung . Das liegt daran , daß die Anpassung des kinematischen Anteils mithilfe der Tangentensteigungen im stationären Zustand vorgenommen wurde . In Abb. 8.2 sind drei zyklische Zug/Druckversuche  $\Delta \epsilon_p / 2 = 0.3$  ,  $0.9$  ,  $1.5\%$  als Ergebnis der numerischen Integration dargestellt . Die experimentell ermittelten Meßpunkte , die mit einem Stern gekennzeichnet sind , stammen aus den Versuchen A2 und A3 . Es wird ein realistisches Modellverhalten erzielt , insbesondere die

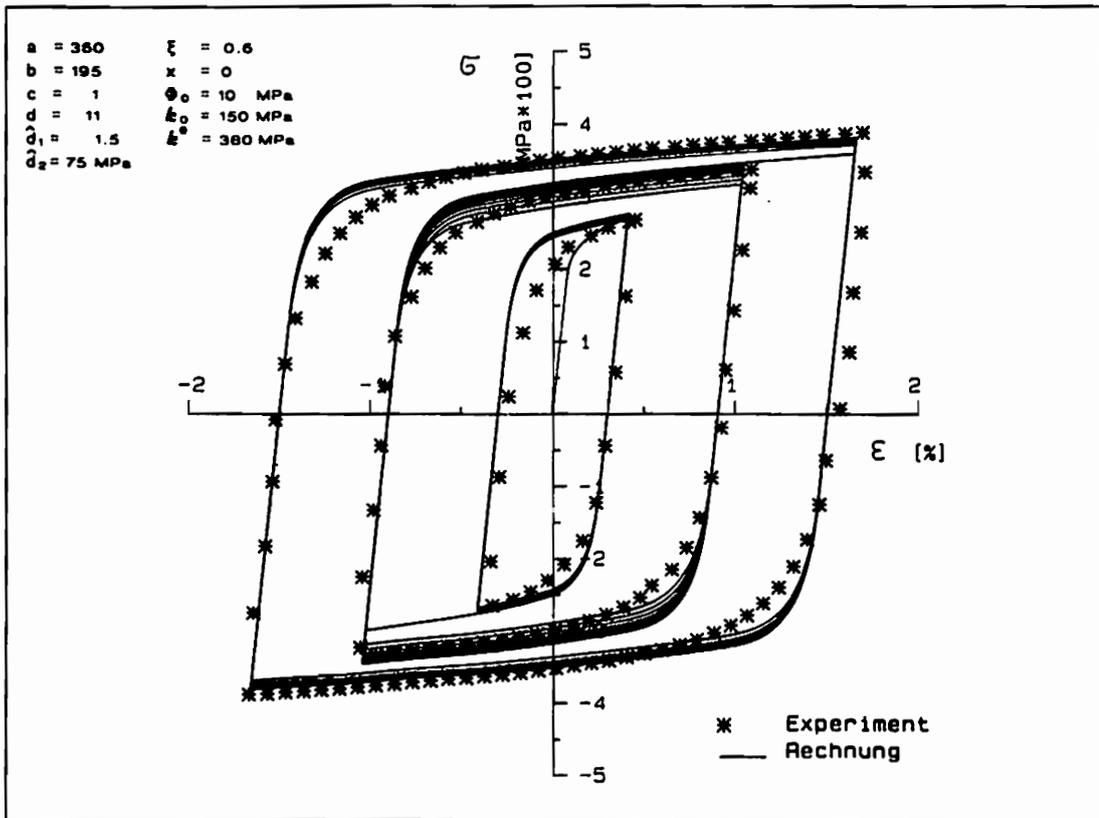
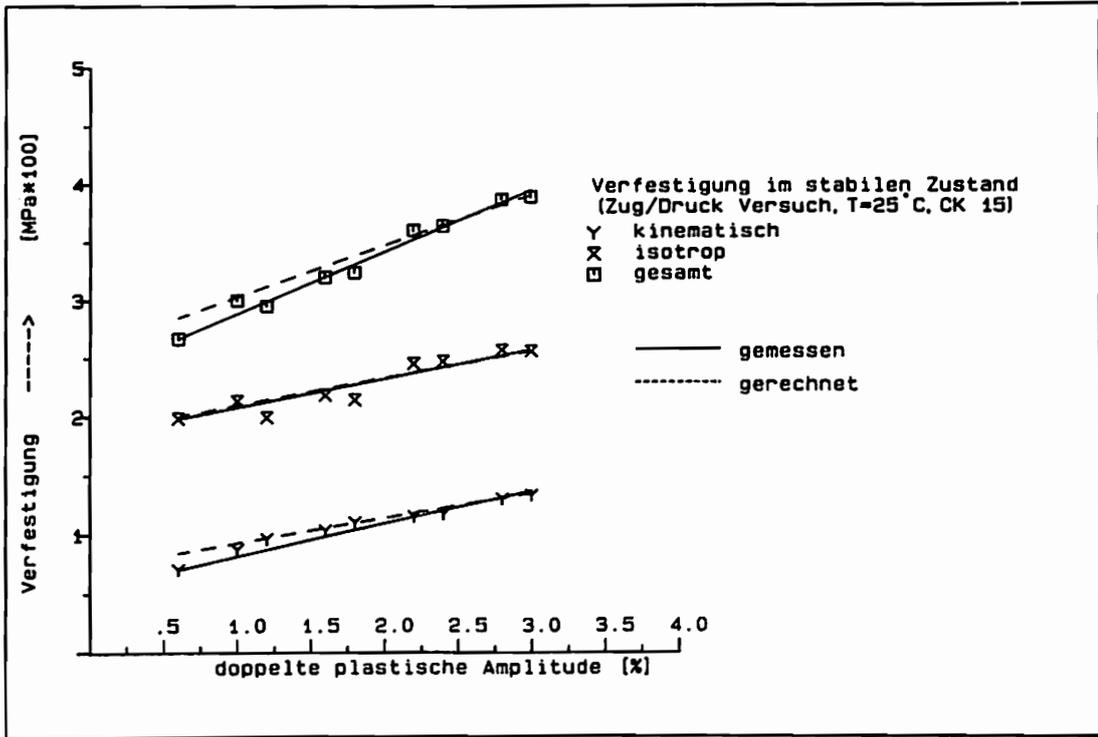


Abb. 8.1 ( oben )

Vergleich der stationären Spannungsamplituden Rechnung mit Experiment

Abb. 8.2 ( unten )

Vergleich dreier Dehnungsamplituden  $\Delta\epsilon_p/2 = 0.3, 0.9, 1.5\%$  Rechnung mit Experiment .

Übereinstimmung im stationären Zustand ist zufriedenstellend . Abweichungen ergeben sich jedoch im elasto-plastischen Übergangsbereich , in dem die tatsächliche Spannung flacher verläuft . Testrechnungen mit einem exponentiellen Ansatz für  $\Phi$  erbrachten Verbesserungen , jedoch ist die dann aufwendigere Parameterbestimmung als ausschlaggebender Nachteil anzusehen .

Die Abb. 8.3 - 8.5 illustrieren beispielhaft das Modellverhalten bei Amplitudenverkleinerung und Vordehnung . Ein quantitativer Vergleich mit dem Experiment wird hier nicht vorgenommen , da das Modell die bleibende Verfestigung nicht simulieren kann . Die Beispiele zeigen jedoch , daß im Vergleich zu den Abb. 3.17 und 3.19 eine qualitative Übereinstimmung , die sich in der richtigen Einspieltendenz , nämlich Verfestigung nach Amplitudenvergrößerung und Entfestigung nach Amplitudenverkleinerung oder Vordehnung , dokumentiert , erreicht wird .

Abb. 8.6 zeigt eine Zufallsbelastung . Für sie kann hier keine experimentelle Vergleichsmöglichkeit gegeben werden und dient daher lediglich zur Illustration des Modellverhaltens bei beliebiger Amplitudenvariation .

Abschließend ist in Abb. 8.7 Rechnung und Versuch bei monotoner Zugbelastung dargestellt . Vor allem im unteren Dehnungsbereich lassen sich Abweichungen aufgrund des instabilen Materialverhaltens nicht vermeiden .

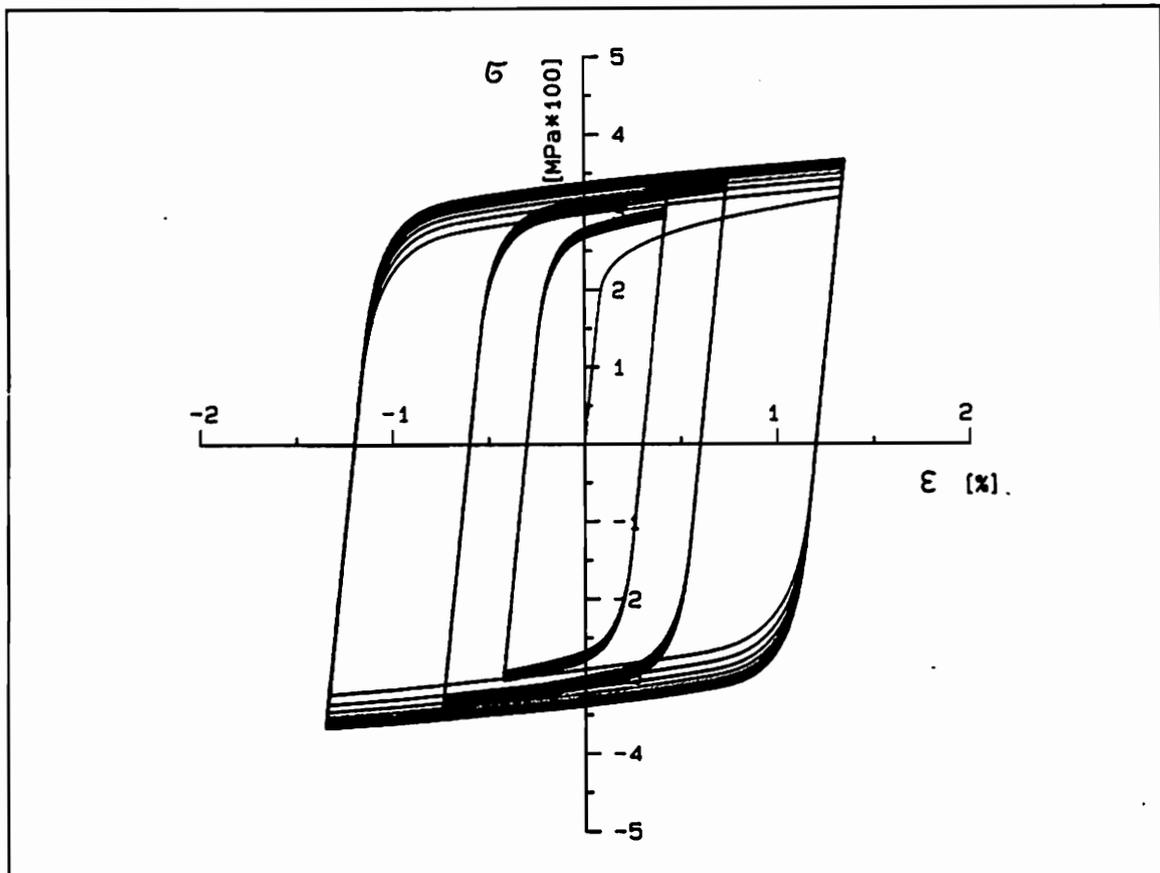


Abb. 8.3 Modellvorhersage bei Amplitudenverringernung  $\Delta\epsilon_p/2 = 1.5, 0.6, 0.3\%$

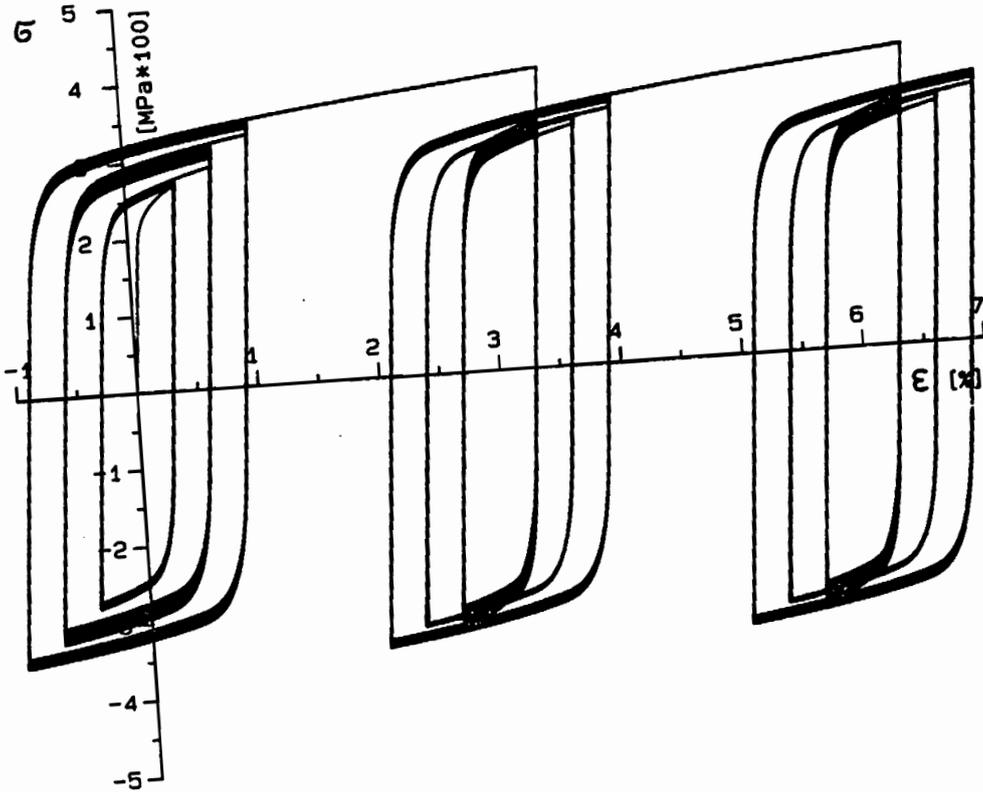


Abb. 8.4 ( oben )

Modellvorhersage bei Vordehnung und ansteigender Amplitude  $\Delta\epsilon_p/2 = 0.3, 0.6, 0.9\%$  ( vgl. Abb. 3.17 ).

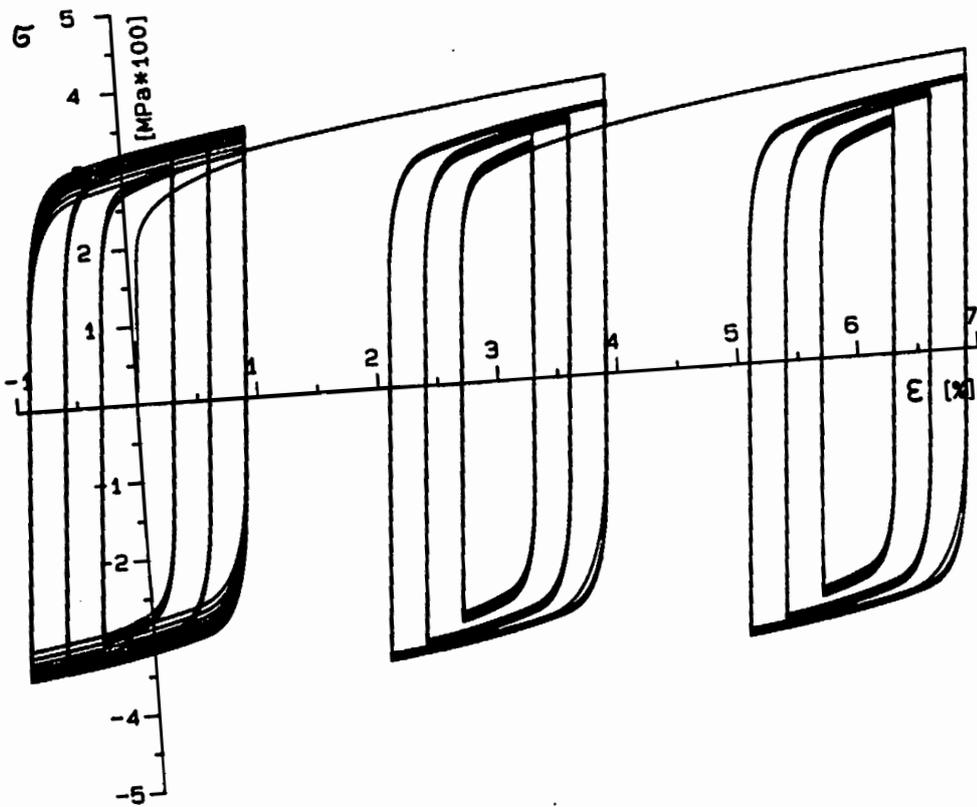


Abb. 8.5 ( unten )

Modellvorhersage bei Vordehnung und abnehmender Amplitude  $\Delta\epsilon_p/2 = 0.9, 0.6, 0.3\%$  ( vgl. Abb. 3.19 ).

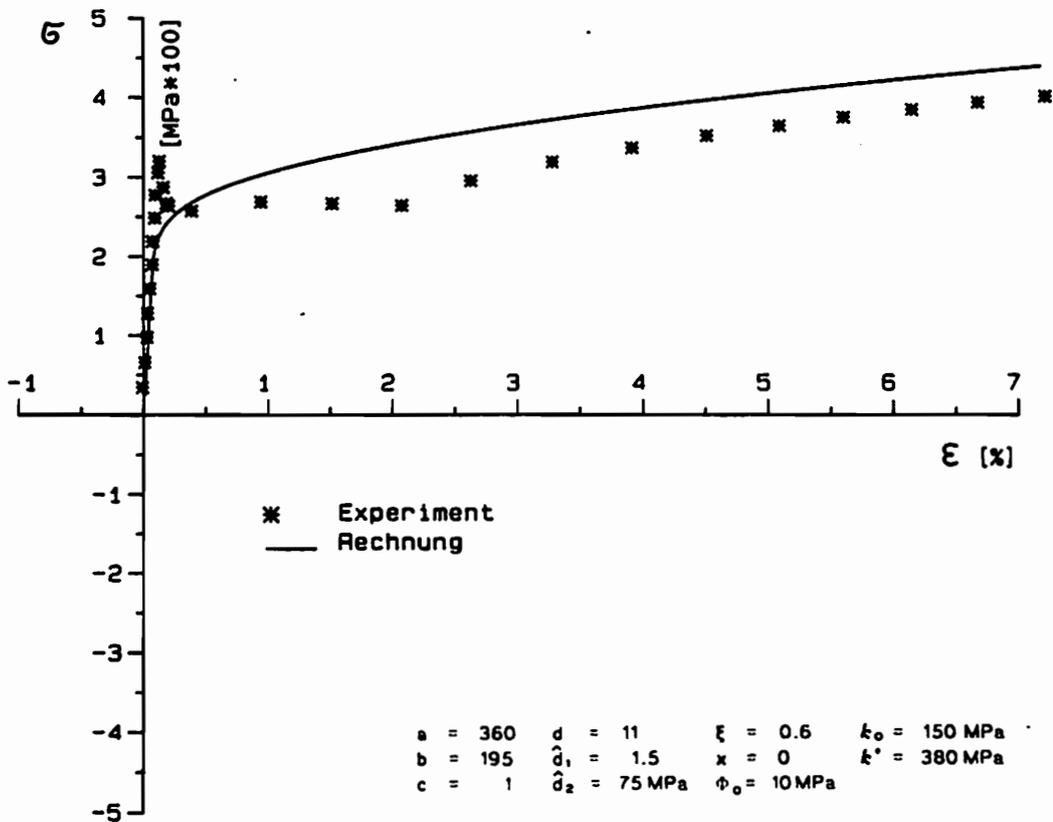
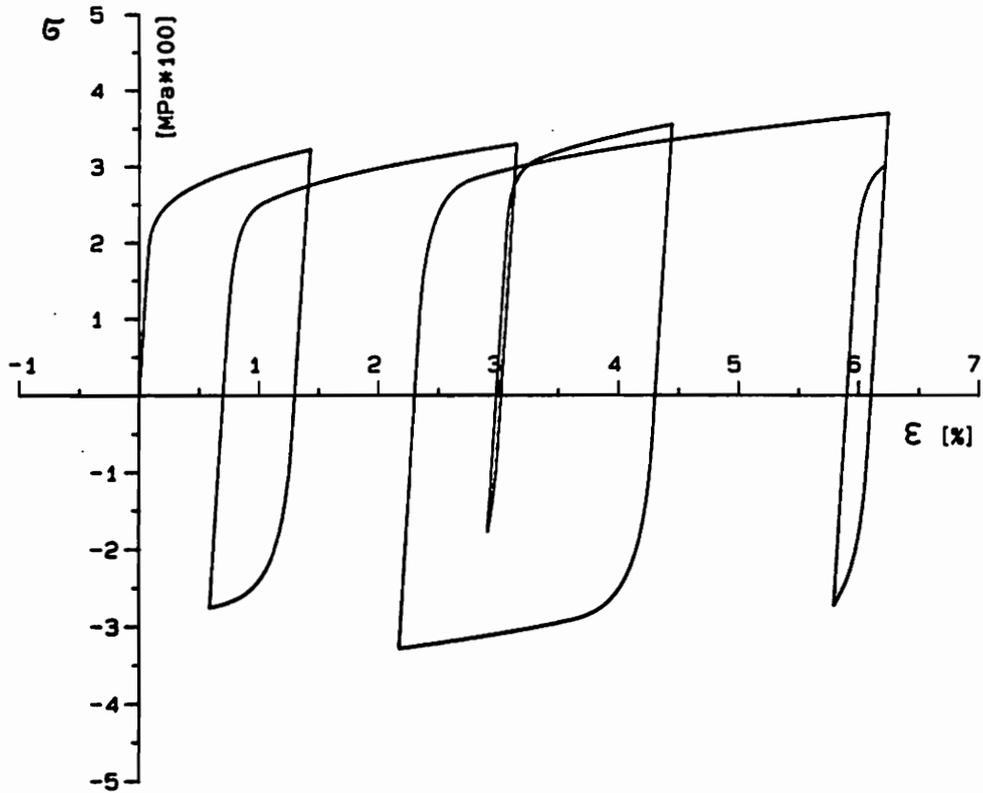


Abb. 8.6 ( oben )  
 Modellvorhersage bei Zufallsbelastung

Abb. 8.7 ( unten )  
 Vergleich monotoner Zugversuch  
 Rechnung mit Experiment

### 8.4 Zweiaxiale Versuche

Wie bereits erwähnt, basieren die in diesem Abschnitt dargestellten Rechnungen auf der Normalenregel ohne Korrekturterm ( $\chi = 0$ ). Versuch B1, den man aufgrund der Isotropie als „quasi - axialen“ Prozeß ansehen kann, wird hier nicht behandelt.

Die Abb. 8.8 - 8.10 zeigen die Rechnungen für Rechteck-, Kreis-, bzw. Dreieckbelastung (vgl. Abb. 3.26 -3.28) aufgrund der in Kap.7 vorgenommenen Parameterbestimmung. Dehnungsweg und Amplitude sind den Abbildungen zu entnehmen. Der direkte Vergleich zwischen Rechnung und Experiment erfolgt in den Abb. 8.11 - 8.13 getrennt nach Axial- und Schubspannung, die entlang eines charakteristischen Teils des Deformationspfades aufgetragen sind.

Eine gute Übereinstimmung ergibt sich bei kreisförmiger Belastung, während beim Rechteck und Dreieck bereichsweise Abweichungen auftreten. Insgesamt jedoch erscheint die qualitative Übereinstimmung bei allen drei Deformationspfaden als ausreichend.

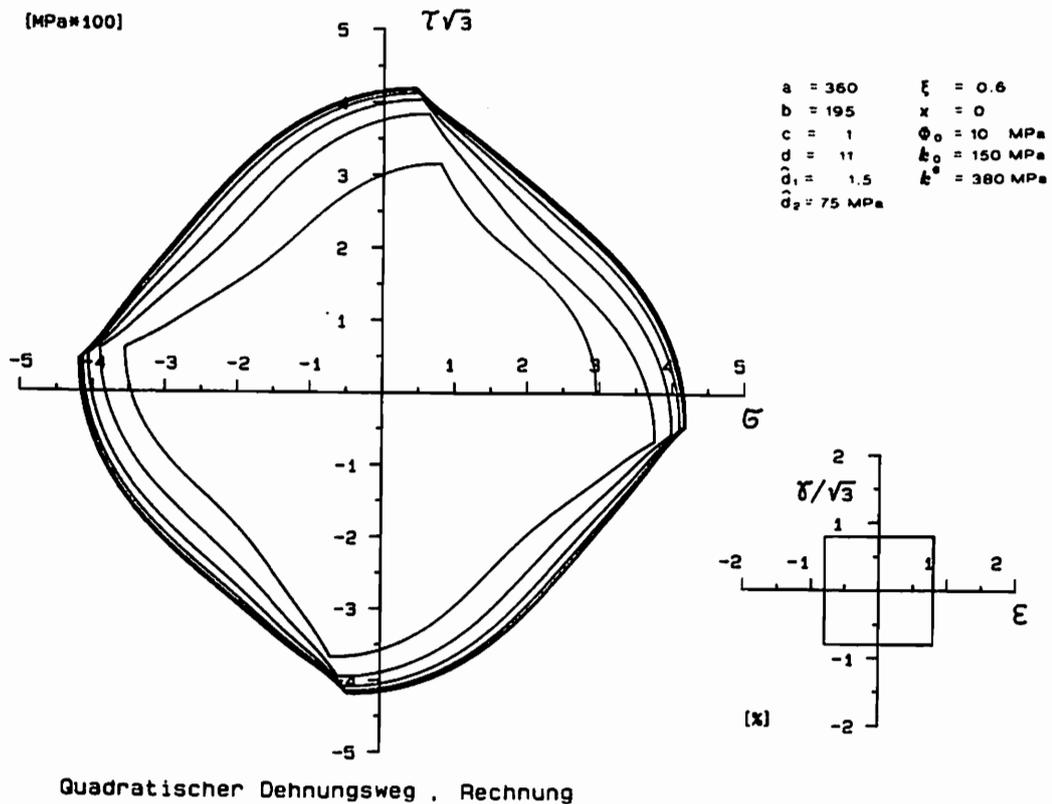


Abb. 8.8 Modellvorhersage bei Rechteckbelastung (vgl. Abb. 3.26)

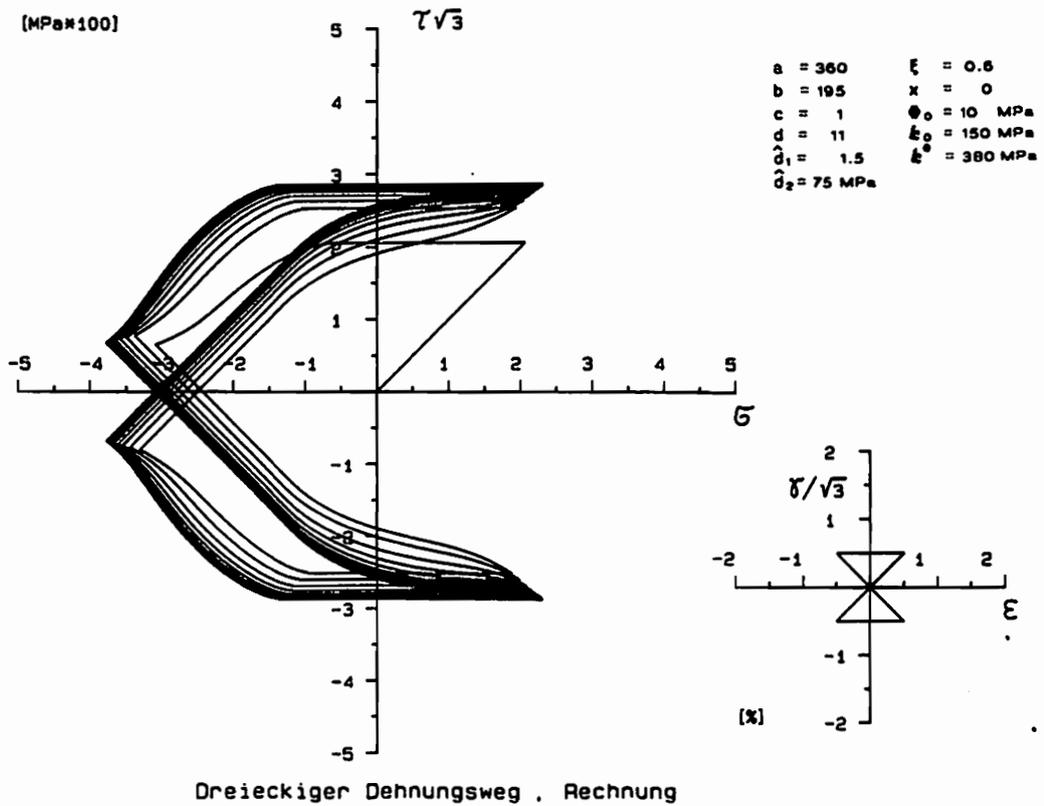
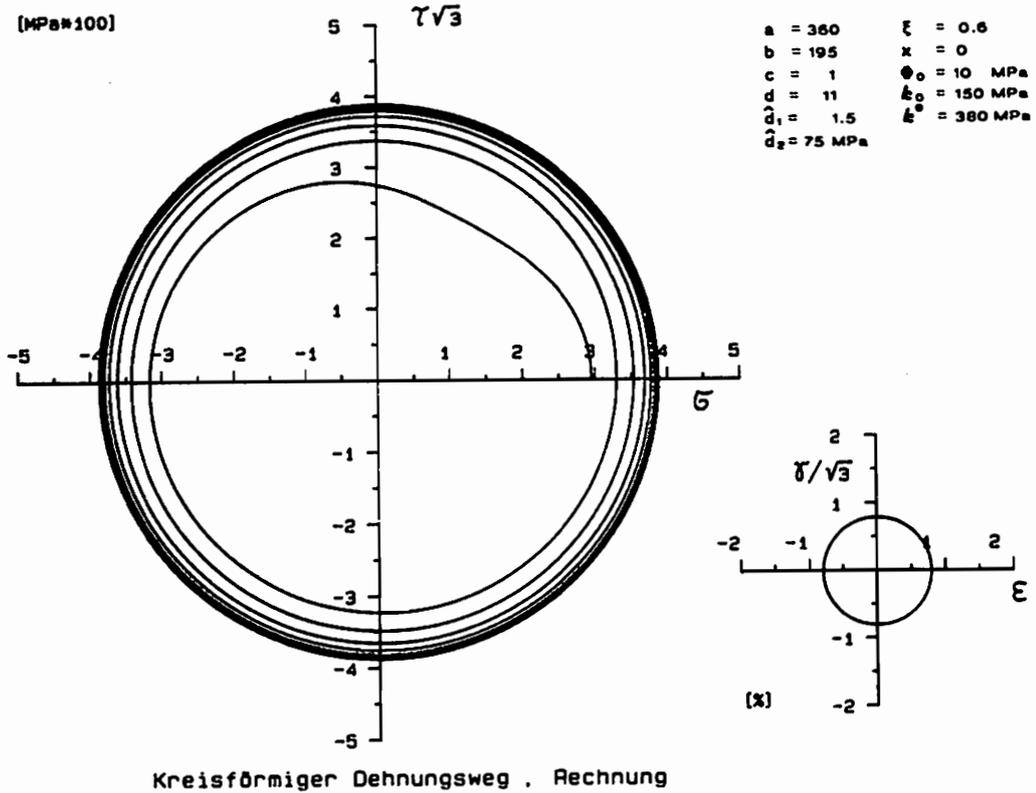


Abb. 8.9 ( oben )  
Modellvorhersage bei Kreisbelastung  
( vgl. Abb. 3.27 )

Abb. 8.10 ( unten )  
Modellvorhersage bei Dreieckbelastung  
( vgl. Abb. 3.28 )

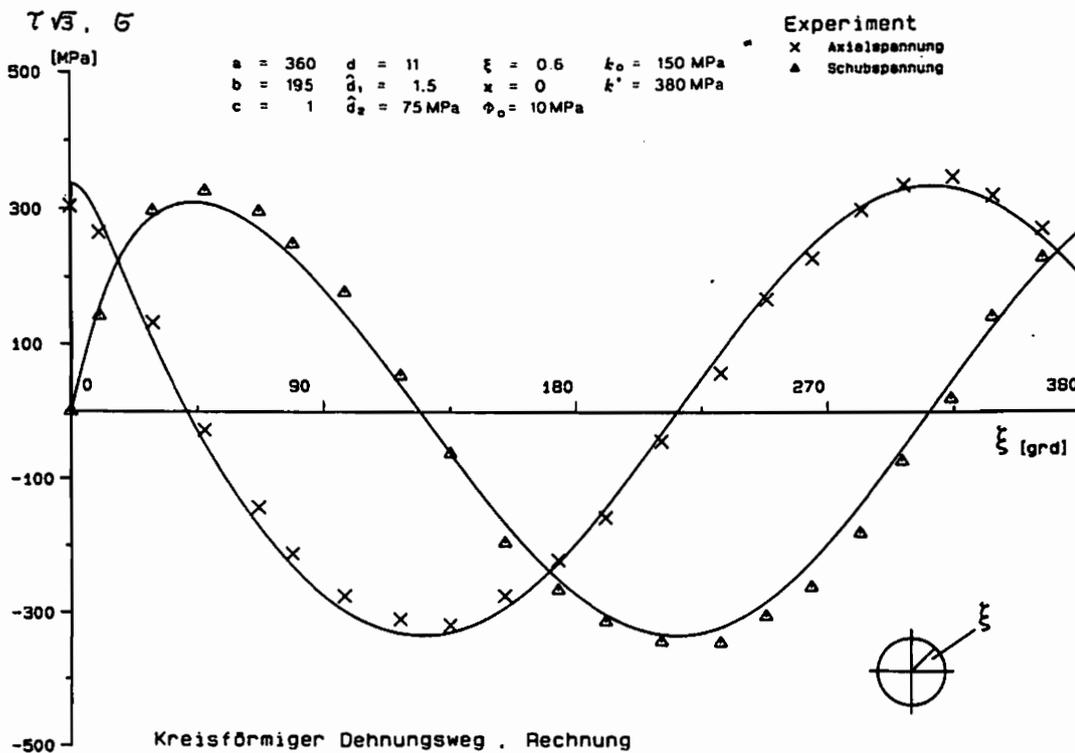
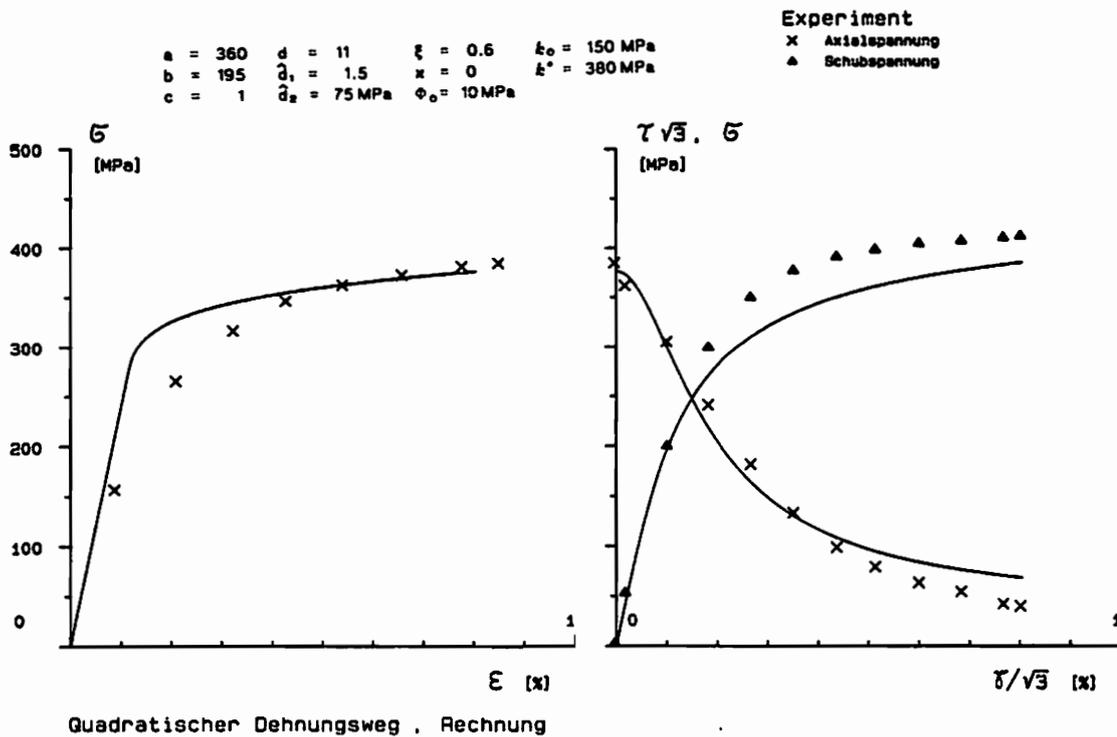


Abb. 8.11 ( oben )  
 Vergleich Rechnung-Experiment,  
 Rechteckbelastung

Abb. 8.12 ( unten )  
 Vergleich Rechnung-Experiment,  
 Kreisbelastung

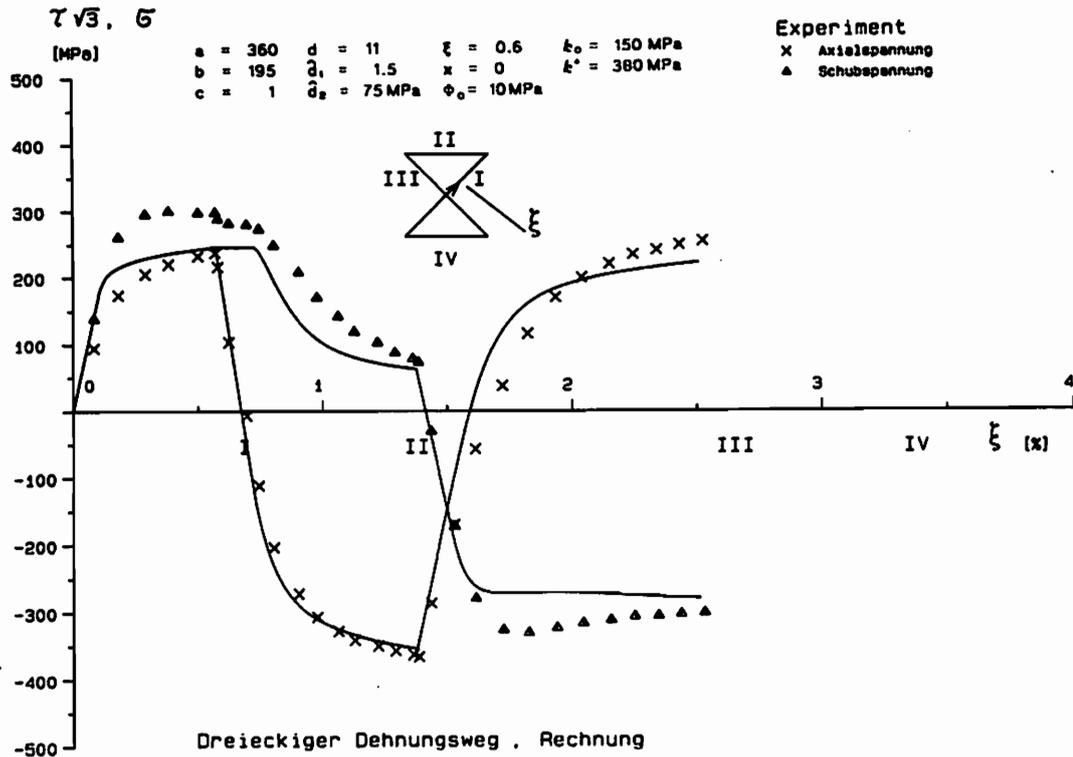


Abb. 8.13 Vergleich Rechnung-Experiment, Dreieckbelastung

Mit Abb. 3.37 wurde gezeigt, daß Entfestigung auch beim Übergang von zweiachialer auf einaxiale Belastung auftritt. Dieses Verhalten läßt sich mit Hilfe des transienten Entfestigungsmechanismus modellieren. In Abb. 8.14 ist die Rechnung für den Übergang von Rechteckbelastung auf Zug/Druck dargestellt. Allerdings kann das Materialverhalten nur qualitativ erfaßt werden, da der bleibende Verfestigungsanteil nicht im Modell enthalten ist.

Abb. 8.15 zeigt die effektive stationäre Spannungsamplitude aller gerechneten Belastungen bei verschiedenen Amplituden. Eine gute Übereinstimmung liegt vor beim Rechteck und Kreis, während die erhöhte Verfestigung bei Dreieckbelastung nicht erfaßt werden kann, da die plastische Arbeit, oder eine damit verwandte Größe wie z.B.  $\mu$ , bei Dreieckbelastung geringer ist. Dies führt dazu, daß die errechneten stationären Spannungen noch unter denen für Kreis und Rechteck liegen.

Auch mit der Einführung eines Parameters, der die Nichtproportionalität der Beanspruchung angibt, etwa die Nichtproportionalität zwischen Spannungsincrement und plastischer Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\Theta = 1 - \frac{\tilde{n} : \tilde{t}}{|\tilde{t}|} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ falls } \tilde{n} \perp \tilde{t} \\ 0, \text{ falls } \tilde{n} \parallel \tilde{t} \end{array} \right. \quad (8.23)$$

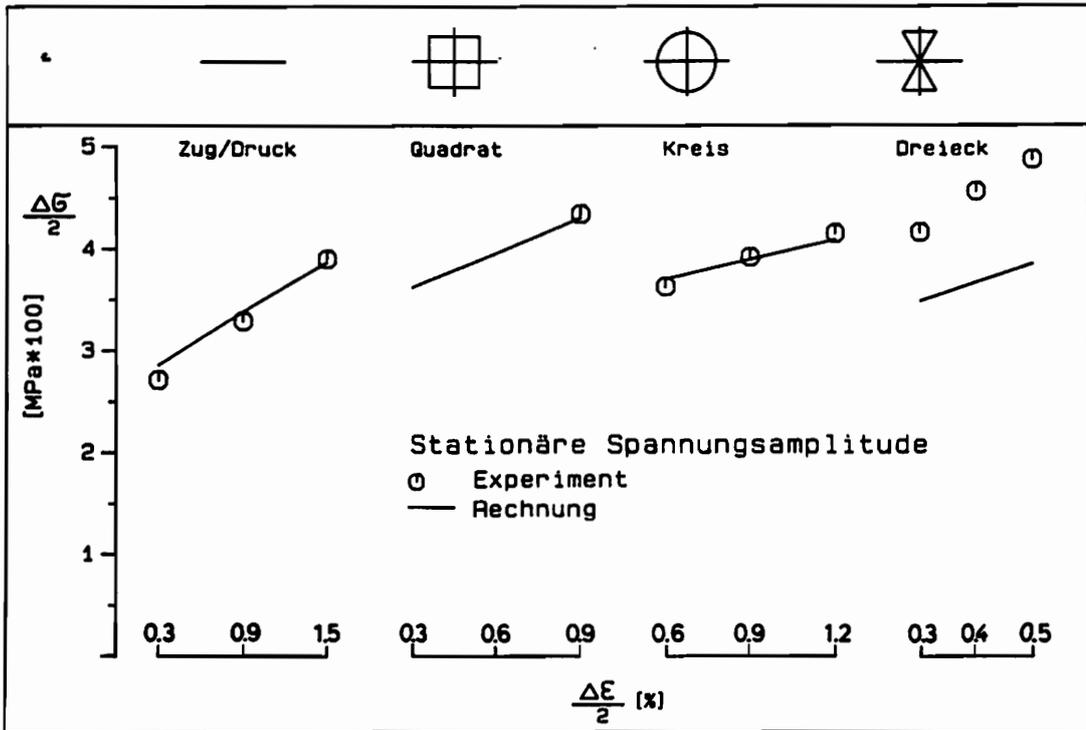
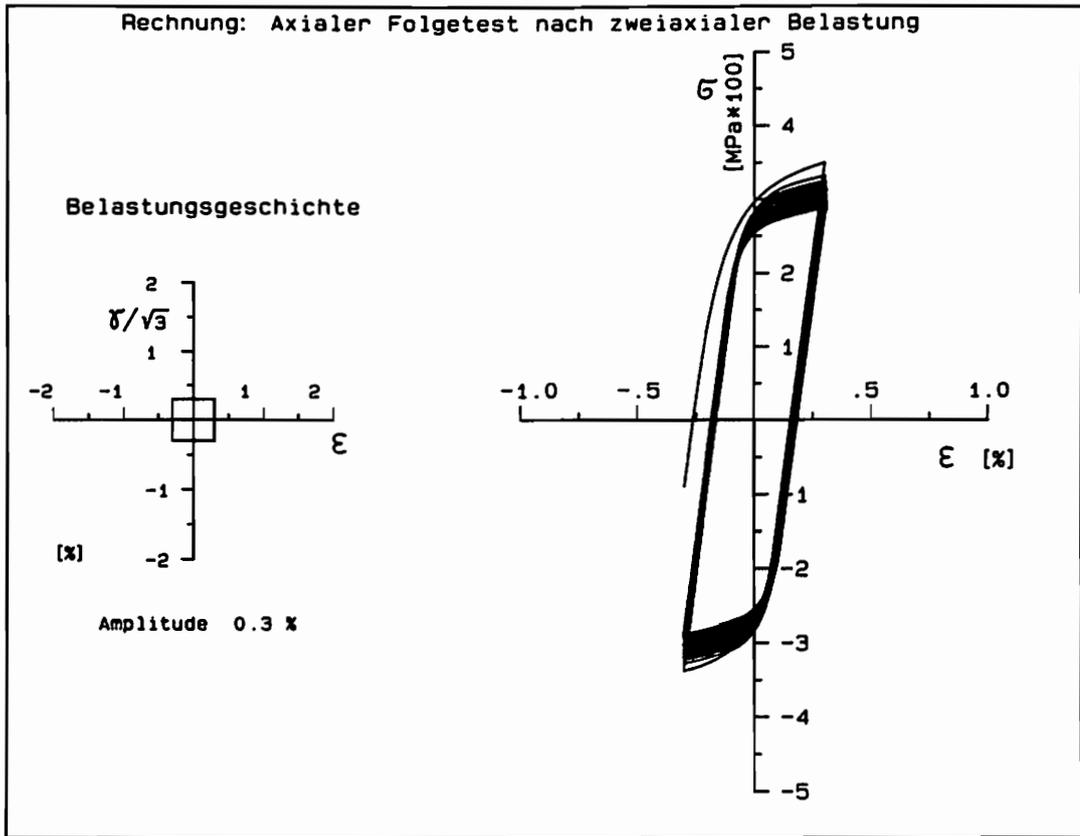


Abb. 8.14 ( oben )

Modellierung der transienten Entfestigung beim Übergang von Rechtecklast auf Zug/Druck

Abb. 8.15 ( unten )

Vergleich der errechneten Spannungsamplituden mit dem Experiment bei verschiedenen Deformationswegen und -amplituden

läßt sich keine bessere Übereinstimmung erzielen . In Abb. 8.16 ist der Verlauf von  $\Theta$  über einigen Zyklen als Ergebnis der Modellrechnung dargestellt . Rechteck- und Dreieckbelastung führen zu starken Schwankungen , während  $\Theta$  beim Kreis nahezu konstant ist . Da  $\Theta$  für die Dreiecklast deutlich niedriger liegt , scheidet es hier als Verfestigungsparameter aus .

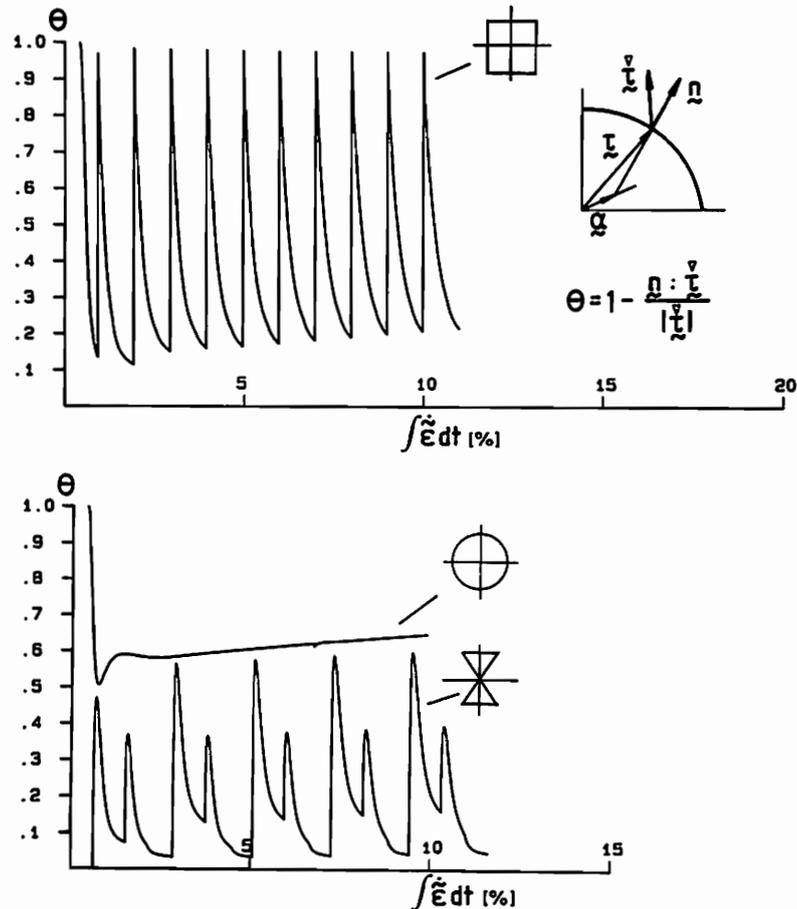


Abb. 8.16 Nicht-Proportionalität des Deformationspfades  $\Theta$  bei Rechteck-, Kreis- und Dreiecklast

Untersuchungen an anderen Werkstoffen , vorwiegend an austenitischen Stählen , haben gezeigt , daß sinusförmig phasenversetzte Belastungen ein Maximum an Verfestigung erzeugen [ 33 , 28 ] . Ein ähnlicher Belastungsweg wie B4 oder C3 wurde in [ 35 ] gefunden , jedoch ist dort eine außergewöhnliche Verfestigung nicht vermerkt . Hier liegt ein Ansatzpunkt für weitere experimentelle Arbeiten , um zu klären , in wie weit die außerordentlich hohe Verfestigung bei Dreiecklast eine für metallische Werkstoffe typische Erscheinung ist . Weiterhin müßte versucht werden , durch Variation der Deformationsprogramme und durch geeignete werkstoffphysikalische Untersuchungen ( wie z.B. Mikrohärtmessungen ) Einsicht in die Ursachen für die erhöhte Verfestigung zu erlangen , um einen für beliebige zweiachiale Belastungen gültigen Verfestigungsparameter zu ermitteln .

### 8.5 Einfluß des Korrekturterms der Normalenregel

Vielfach wird anstelle der in Kapitel 2 erläuterten Kinematik die einfache, ebene Scherung zur Berechnung dünnwandiger Rohre, die unter Axial- und Torsionsbeanspruchung stehen, herangezogen. Diese läßt sich in kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  durchführen und enthält nur zwei geometrische Größen  $L, \psi$ . Setzt man kleine Formänderungen voraus, darf aufgrund der Symmetrie ( $\nu = 0.5$ )

$$a_x = a_y = -\frac{1}{2} a_z = -\frac{1}{3} \alpha$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{1}{2} \varepsilon_z = -\frac{1}{2} \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\gamma = \frac{\psi_{R_0}}{L_0}$$

( 8.24 )

angesetzt werden. Dadurch vereinfacht sich die Bildung der Invarianten. Die Fließbedingung nimmt dann z.B. die in der Anmerkung zu Gl. ( 3.10 ) angegebene Form an. Wie bereits erwähnt, ist im vorliegenden Anwendungsfall die Abweichung so gering, daß der Einfluß des  $\alpha$ -Terms der Einfachheit halber für die einfache Scherung und Dehnung einer dünnen Rechteckplatte untersucht wurde.

Die Einführung einer Korrektur der Normalenregel wird von Lehmann in [ 77 ] vorgeschlagen. Es gibt vielfältige experimentelle Indizien dafür, daß in unmittelbarer Umgebung einer abrupten Änderung im Belastungspfad die plastische Verzerrungsgeschwindigkeit nicht mehr senkrecht auf der Fließfläche steht. Zur besseren Übereinstimmung kann dann z.B. eine Korrektur durch das Spannungsinkrement gemäß Gl. ( 5.7 ) erfolgen. Eine andere Möglichkeit besteht auch darin, Verzerrungen und Rotationen der Fließfläche zuzulassen [ 92 ] .

Die Einführung des  $\alpha$ -Terms hat in einigen Fällen, insbesondere bei Verwendung einfacher Evolutionsgleichungen für die kinematische Verfestigung in Verbindung mit dem klassischen Einflächenmodell Verbesserungen erbracht [ 20 , 90 ] . In diesem Abschnitt wird überprüft, ob dies auch beim Zwei-Flächenmodell zutrifft. Die Berechnung ist mit verschiedenen konstanten  $\alpha$ -Werten durchgeführt worden. Im folgenden wird ein typisches Beispiel mit

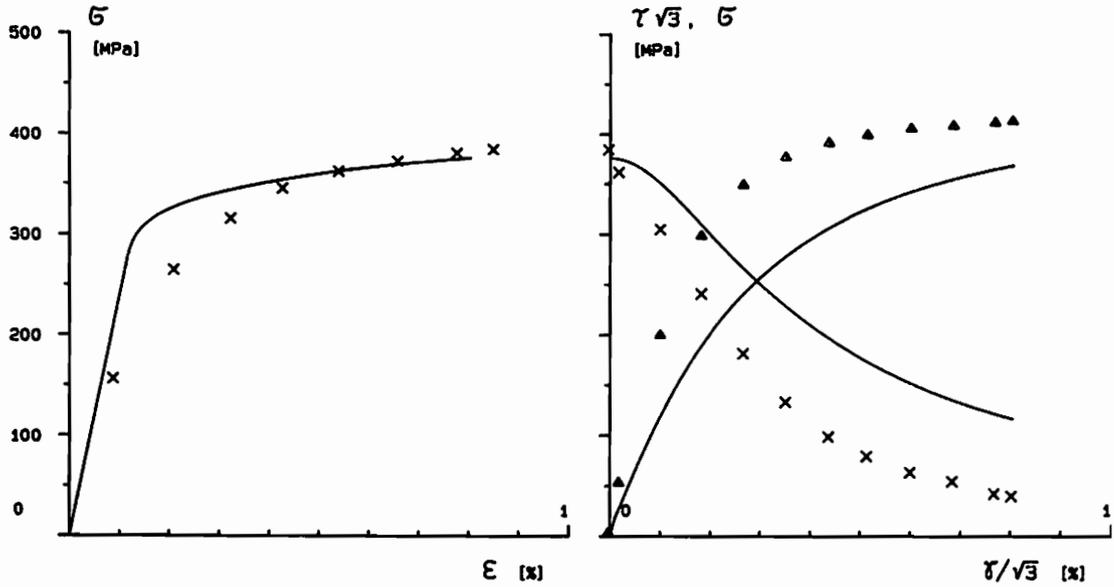
$$\bar{\alpha} = 2 G \alpha = 1$$

( 8.25 )

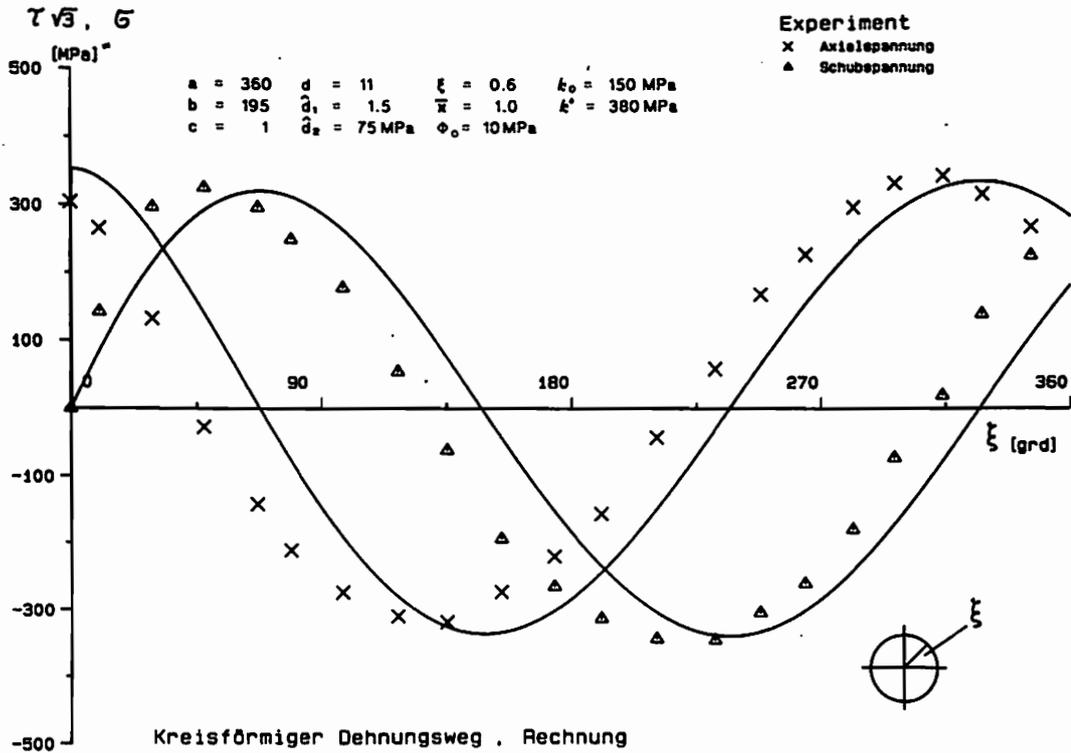
dargestellt. Die Abb. 8.17 - 8.19 zeigen den Verlauf der Axial- und Schubspannung bei den drei nichtradialen Prozessen. Der Vergleich mit den Abb. 8.11 - 8.13 läßt erkennen, daß keine Verbesserung durch Einführung des  $\alpha$ -Terms erreicht werden kann, vielmehr verschlechtern sich die Ergebnisse um so mehr, je größer  $\alpha$  wird.

$a = 360$     $d = 11$     $\xi = 0.6$     $k_0 = 150 \text{ MPa}$   
 $b = 195$     $\hat{d}_1 = 1.5$     $\bar{x} = 1.0$     $k^* = 380 \text{ MPa}$   
 $c = 1$     $\hat{d}_2 = 75 \text{ MPa}$     $\phi_0 = 10 \text{ MPa}$

**Experiment**  
 $\times$  Axialspannung  
 $\blacktriangle$  Schubspannung



Quadratischer Dehnungsweg . Rechnung



Kreisförmiger Dehnungsweg . Rechnung

Abb. 8.17 ( oben )

Vergleich Rechnung Experiment: Rechteckbelastung bei Korrektur der Normalenregel  $2Gx = 1$ , ( vgl. Abb. 8.11 )

Abb. 8.18 ( unten )

Vergleich Rechnung Experiment: Kreisbelastung bei Korrektur der Normalenregel  $2Gx = 1$  ( vgl. Abb. 8.12 )

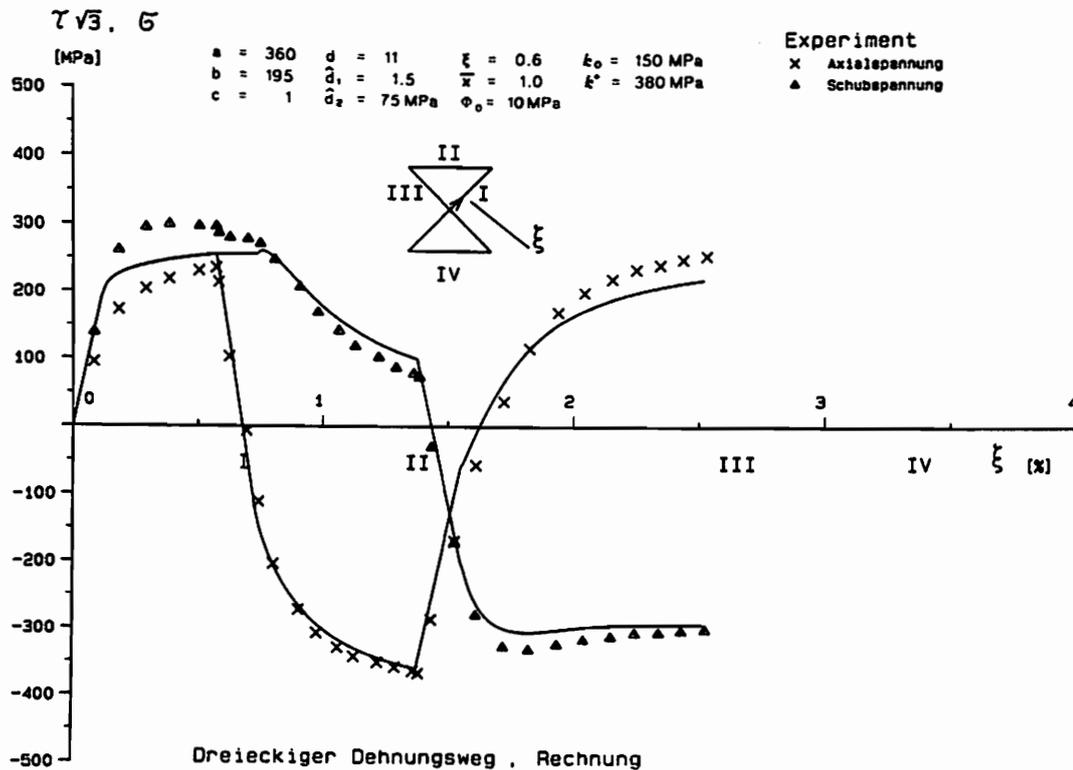


Abb. 8.19

Vergleich Rechnung Experiment: Dreieckbelastung bei Korrektur der Normalenregel  $2Gx = 1$ , ( vgl. Abb. 8.13 )

Obwohl aufgrund der hier untersuchten Prozesse keine abschließende Beurteilung vornehmbar ist, kann doch vermutet werden, daß die Korrektur der Normalenregel mit Hilfe des  $x$  - Terms bei Verwendung eines Zwei-Flächenmodells nicht in dem Maß notwendig ist, wie etwa bei Einflächenmodellen mit Pragerschem oder Zieglerschem Verfestigungsgesetz. Entscheidet man sich dagegen für eine erweiterte Fließregel, stellt sich die Frage nach einem geeigneten Entwicklungsgesetz für  $x$  und seiner experimentellen Verifizierbarkeit. Ansätze hierzu finden sich in [ 90 ], jedoch erscheint fraglich, ob der gemachte überlineare Ansatz bei allgemeinen Belastungen anwendbar ist.

Da es vielfältige experimentelle Hinweise auf einen Einfluß des Spannungsinkrementes auf die plastische Verzerrungsgeschwindigkeit gibt, muß letztlich im Einzelfall anhand des Werkstoffs und der Belastungsart beurteilt werden, ob eine derartige Korrektur angebracht ist.

## 9. Zusammenfassung

Im ersten Teil der Arbeit wird das Verfestigungsverhalten von Stahl Ck 15 bei verschiedenen ein- und zwei axialen Beanspruchungen untersucht. Das bei zyklischen Verformungen auftretende Stabilisierungsverhalten kann als Adaptionsvorgang der internen Struktur gedeutet werden. Ein stationärer Zustand stellt sich ein, wenn, wie im Fall zyklischer einaxialer Verformung, die Neuproduktion von Versetzungen im Gleichgewicht mit den während der Belastungsumkehr aufgelösten Versetzungen ist. Vordehnungen und Amplitudenwechsel bedeuten eine Störung des stationären Zustandes und bewirken ein langsam abklingendes, transientes Einspielen auf einem Niveau, das im Fall der Verfestigung höher oder im Fall der Entfestigung niedriger sein kann.

Mit Hilfe eines Spline-Interpolationsverfahrens wurde die Gesamtverfestigung aufgespalten in einen isotropen und einen kinematischen Anteil und in Kennlinienform dargestellt. Es zeigte sich, daß beide Verfestigungsanteile von der aktuellen und auch von der unmittelbar vorhergehenden Deformationsamplitude beeinflusst sind. Die Auswirkung von Vordehnung in Kombination mit zyklischer Deformation bei zu- und abnehmender Amplitude wurde erläutert.

Bei der Untersuchung zweier nichtproportionaler Deformationspfade (Kreis und Rechteck) wurde in Übereinstimmung mit anderen Arbeiten [ 32, 33, 35-38 ] festgestellt, daß dort eine höhere Verfestigung induziert wird als bei vergleichbaren einaxialen Versuchen. Für das vorliegende Material läßt sich dieser Effekt jedoch durch die Zunahme der plastischen Arbeit erklären. Das ist dagegen bei dem dritten Deformationspfad, der Dreieckbelastung, nicht möglich, da die Verfestigung bei diesem Typ trotz der geringeren Bogenlänge größer ist als bei Kreis- und Rechteckbelastung. Hier liegt eine Notwendigkeit für weitere experimentelle Arbeiten, um einen allgemein gültigen Verfestigungsparameter abzuleiten.

Um das transiente und stationäre Verfestigungsverhalten erfassen zu können, wird im zweiten Teil der Arbeit vorgeschlagen, ein zusätzliches Verfestigungsgebiet im Raum der Mikrospannung einzuführen (Mikrofläche). Dieses Vorgehen hat den Vorteil, daß nur eine zusätzliche Variable, die die Größe des Bereiches festlegt, benötigt wird. Einen ähnlichen Weg gehen Nouailhas u.a. in [ 73 ], jedoch benutzen sie dazu eine ursprünglich von Chaboche eingeführte Fläche im Raum der plastischen Dehnung [ 26 ].

Eine mikromechanische Deutung der benutzten internen Variable wurde auf der Basis eines Modells mit heterogener Versetzungsstruktur [ 46 ] gegeben. Demnach bewirkt andauernde plastische Deformation die Formierung von Versetzungszellstrukturen, die aufgrund ihres dipolaren Charakters empfindlich gegenüber Spannungsumlagerungen reagieren und sich bei Belastungsumkehr abrupt auflösen. Dadurch bedingt ist eine Abnahme der Versetzungsdichte, so daß der stationäre Zustand durch ein dynamisches Gleichgewicht zwischen Ver- und Entfestigung gegeben ist. Diesem Effekt entspricht im Modell die vorübergehende Abnahme der isotropen Verfestigungsvariablen bei Belastungsumkehr.

Aufgrund des durchgeführten Vergleichs zwischen Rechnung und Experiment kann fest-

gehalten werden , daß das vorgeschlagene Grenzflächenmodell in einem relativ breiten Bereich einaxialer und zweiaxialer Beanspruchungen anwendbar ist , und auch transiente Vorgänge , die durch einen Wechsel der Beanspruchungsart verursacht sind , beschrieben werden können . Trotz der vereinfachenden Annahme einer idealplastischen Grenzfläche ist die Übereinstimmung sowohl bei Zug/Druck- als auch bei kombinierter Kreis- und Rechteckbelastung zufriedenstellend . Zu ähnlichen Ergebnissen mit vereinfachten Zwei-Flächenmodellen kommen auch Lu und Mohamed in [ 75 ] und Chang und Lee in [ 70 ] .

Abschließend soll noch auf zwei weitere Aspekte hingewiesen werden , die die Bedeutung praktikabler Zwei-Flächenmodelle unterstreicht . Zum einen zeigen Berechnungen bei " shake - down " Problemen , daß die Annahme unbegrenzt anwachsender Verfestigung , z.B. einer linearen kinematischen Verfestigung , zu unrealistischen Aussagen bezüglich des Versagens elasto-plastischer Strukturen führen kann [ 88 ] . Zum anderen ist auch die richtige Erfassung zweiaxialer Beanspruchungen für die Auslegung und Lebensdauerberechnung von Bauteilen von Bedeutung . Socie zeigt in [ 87 ] , daß die zusätzliche zyklische Verfestigung aufgrund nichtproportionaler Beanspruchungen bei Bruch- und Ermüdungsproblemen nicht außer Acht gelassen werden darf . Da vielen Schädigungsmodellen nur das Materialverhalten bei Zug/Druckbeanspruchung zugrunde liegt , und somit teilweise von zu niedrigen Belastungskenngrößen ausgegangen wird , eröffnen sich hier erstens ein Bedarf an weiterer experimenteller Arbeit und zweitens die Forderung zur Weiterentwicklung von konstitutiven Modellen , die einerseits für die numerische Anwendung geeignet sind und andererseits eine realistische Vorhersage des Materialverhaltens möglich machen .

## Literaturverzeichnis

- [ 1 ] ERINGEN , A.C.  
Nonlinear Theory of Continuous Media , McGraw-Hill Book Company,  
1962
- [ 2 ] MASE , G.E.  
Theory and Problems of Continuum Mechanics , Schaum's Outline Series , McGraw-Hill Book Company , 1970
- [ 3 ] NEMAT - NASSER , S.  
Decomposition of Strain Measures and their Rates in Finite Deformation Elastoplasticity , *Int. J. Solids Structures* , Vol. 15 , pp.155-166,  
1979
- [ 4 ] LEE , E.H.  
Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains , *ASME J. Appl.Mech.* ,  
Vol. 36 , pp. 1-6 , 1969
- [ 5 ] LEHMANN , Th.  
Große elasto-plastische Formänderungen , *Mit.Inst.Mech.* , Nr.1 , RUB  
1979
- [ 6 ] LEHMANN , Th.  
Einige Betrachtungen zur Beschreibung von Vorgängen in der klassischen  
Kontinuumsmechanik , *Ing. Archiv* , 29 , pp. 316-330 , 1960
- [ 7 ] LEHMANN , Th.  
Einige ergänzende Bemerkungen zur Beschreibung von Vorgängen in der  
klassischen Kontinuumsmechanik , *Ing. Archiv* , 31 , pp. 371-384, 1962
- [ 8 ] LEE , E.H.  
Some Comments on Elastic-Plastic Analysis , *Int.J. Solids Structures*,  
Vol.17 , pp. 859-872 , 1981
- [ 9 ] LUBARDA , V.A. / LEE , E.H.  
A Correct Definition of Elastic and Plastic Deformation and Its Computational Significance , *ASME J. Appl. Mech.* , Vol. 48 , pp. 35 - 40,  
1981
- [ 10 ] AGAH-TEHRANI , A. / LEE , E.H. / MALLET , R.L. / ONAT , E.T.  
The Theory of Elastic-Plastic Deformation at Finite Strain with Induced Anisotropy modeled as Combined Isotropic - Kinematic Hardening , *J. Mech. Phys. Solids* , Vol. 35 , No.5 , pp. 519 - 539 , 1987

- [ 11 ] DAFALIAS , Y.F.  
The Plastic Spin , **ASME J. Appl. Mech.** , Vol. 52 , pp. 865 - 871 , 1985
- [ 12 ] LEHMANN , Th.  
On a Generalized Constitutive Law for Finite Deformations in Thermoplasticity and Thermoviscoplasticity , Proc. 2. Int. Conf. on Const. Laws for Engng. Mat. , Jan. 87 , Tucson , USA , ( C.S. Desai , E. Krempl , P.D. Kiousis , T. Kundu eds. ) , Vol. 1 , pp. 173 - 184 , Elsevier , 1987
- [ 13 ] LEHMANN , Th.  
Some Remarks on the Decomposition of Deformations and Mechanical Work , **Int. J. Engng. Science** , Vol. 20 , pp. 281 - 288 , 1982
- [ 14 ] LEHMANN , Th.  
Some Aspects of Non-Isothermic Large Inelastic Deformations , **SM Archives** , Vol. 3/3 , pp. 261 - 317 , 1978
- [ 15 ] RANIECKI , B. / THERMANN , K.  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic - Plastic Deformations , Mit. Inst. Mech , Nr. 2 , Ruhr - Univ. Bochum , 1978
- [ 16 ] BETTEN , J.  
Elastizitäts - und Plastizitätslehre , Vieweg 1985
- [ 17 ] MACVEAN , D.B.  
Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensor , **ZAMP** , Vol. 19 , pp. 157 - 185 , 1968
- [ 18 ] THERMANN , K.  
Foundations of Large Deformations , in "The Constitutive Law in Thermoplasticity " ( Th. Lehmann ed. ) , CISM, N<sup>o</sup> 281 , pp. 323 - 351 , Springer-Verl. , 1984
- [ 19 ] THERMANN , K.  
Zur elasto - plastischen Torsion kreiszylindrischer Körper bei endlichen Verzerrungen , Diss. , Univ. Hannover , 1969
- [ 20 ] ZANDER , G.  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast , Diss. , Mit. Inst. Mech. Nr. 27 , Ruhr - Univ. Bochum , 1981

- [ 21 ] IKEGAMI , K.  
Experimental Plasticity on the Anisotropy of Metals , Proc. Euromech Coll.115 ( J.-P. Boehler ed. ) , The Hague and CNRS , pp.201-242, 1982
- [ 22 ] KLINGBEIL , E.  
Tensorrechnung für Ingenieure , BI- Hochschultaschenbuch , Bd. 197
- [ 23 ] ENGELN-MÜLLGES , G. / REUTTER , F.  
Numerische Mathematik für Ingenieure , BI - Hochschult. , 1985
- [ 24 ] LEHMANN , Th. / RANIECKI , B. / TRAMPCZYNSKI , W.  
The Bauschinger - Effect in Cyclic Plasticity , Arch. Mech. , Vol. 37, pp. 643 - 659 , 1985
- [ 25 ] TRAMPCZYNSKI , W.  
Strain History Effect in Cyclic Plasticity , Mit.Inst.Mech. , Nr.52 , Ruhr - Universität Bochum , 1987
- [ 26 ] CHABOCHE , J.L. / DANG VAN , K. / CORDIER , G.  
Modelization of the Strain Memory Effect on the Cyclic Hardening of 316 Stainless Steel , SMIRT- 5 , L 11/3 , North - Holland , 1979
- [ 27 ] KREMPL , E.  
Cyclic Plasticity : Some Properties of the Hysteresis Curve of Structural Metals at Room Temperature , ASME J. of Basic Eng. , pp.317-323 , 1971
- [ 28 ] FUJITA , H. / MIYAZAKI , S.  
Lüders Deformation in Polycrystalline Iron , Acta. Met. , Vol. 26 , pp. 1273 - 1281 , 1978
- [ 29 ] CHABOCHE , J. L.  
On the Constitutive Equations of Materials under Monotonic or Cyclic Loadings , Rech. Aerosp. 1983-5
- [ 30 ] OHASHI , Y. / TANAKA , E. / ŌOKA , M.  
Plastic Deformation Behavior of Type 316 Stainless Steel Subject to Out-Of-Phase Strain Cycles , ASME J. of Eng. Mat. Techn. , Vol.107, pp. 287 - 292 , 1985
- [ 31 ] OHASHI , Y. / KAWAI , M. / KAITO , T.  
Inelastic Behavior of Type 316 Stainless Steel Under Multiaxial Non-proportional Cyclic Stressings at Elevated Temperature , ASME J. of Eng. Mat. Techn. , Vol 107 , pp. 101 - 109 , 1985

- [ 32 ] LAMBA , H.S. / SIDEBOTTOM , O. M.  
 Cyclic Plasticity for Nonproportional Paths : Part 1 – Cyclic Hardening, Erasure of Memory , and Subsequent Strain Hardening Experiments , Part 2 - Comparison With Predictions of Three Incremental Plasticity Models , **ASME J. of Eng. Mat. Techn.** , Vol. 100 , pp. 96 - 103 , and pp. 104 - 111 , 1978
- [ 33 ] KREMPL , E. / LU , H.  
 The Hardening and Rate-Dependent Behavior of Fully Annealed AISI Type 304 Stainless Steel Under Biaxial In-Phase and Out-Of-Phase Strain Cycling at Room Temperature , **ASME J. of Eng. Mat. Tech.** , Vol. 106 , pp. 376 - 382 , 1984
- [ 34 ] MCDOWELL , D.L.  
 An Experimental Study of the Structure of Constitutive Equations for Nonproportional Cyclic Plasticity , **ASME J. of Eng. Mat. Techn.** , Vol. 107 , pp. 307 - 315 , 1985
- [ 35 ] NOUILHAS , D. / CHABOCHE J.L. / SAVALLE , S. / CAILLETAUD , G.  
 On the Constitutive Equations for Cyclic Plasticity Under Non-Proportional Loading , ONERA report , 1984-66
- [ 36 ] CAILLETAUD , G. / KACZMAREK , H. / POLICELLA , H.  
 Some Elements on Multiaxial Behaviour of 316 L Stainless Steel at Room Temperature , **Mech. of Materials** , Vol. 3 , pp. 333 - 347 , North-Holland , 1984
- [ 37 ] TANAKA , E. / MURAKAMI , S. / ŌOKA , M.  
 Effects of Strain Path Shapes on Non-Proportional Cyclic Plasticity, **J. Mech. Phys. Solids** , Vol. 33/6 , pp. 559 - 575 , 1985
- [ 38 ] TANAKA , E. / MURAKAMI , S. / ŌOKA , M.  
 Effects of Plastic Strain Amplitudes on Non-Proportional Cyclic Plasticity, **Acta Mech.** , 57 , pp. 167 - 182 , 1985
- [ 39 ] IMATANI , S.  
 Experimental Investigations on Cyclic Plasticity , Inst. f. Mech. , RUB, Internal report 1986.7
- [ 40 ] MCDOWELL , D.L.  
 A Two Surface Model for Transient Nonproportional Cyclic Plasticity, Part 2 Comparison of Theory with Experiments , **ASME J. of Appl. Mech.** , Vol. 52 , pp. 303 - 308 , 1985

- [ 41 ] HORNBOGEN , E.  
Werkstoffe - Aufbau und Eigenschaften , Springer-Verlag , Berlin · Heidelberg · New York , 1973
- [ 42 ] HONEYCOMBE , R.W.K.  
The Plastic Deformation of Metals , Gresham Press Great Britain , 1977
- [ 43 ] GEROLD , V.  
Physical Theory of Plasticity in Crystalline Solids , in " The Constitutive Law in Thermoplasticity " ( Th. Lehmann ed. ) , CISM , N<sup>o</sup> 282 , Springer - Verlag , 1984
- [ 44 ] ZARKA , J.  
Physical Basis for Plasticity and Viscoplasticity , in "Modelling Small Deformations of Polycrystals " ( J. Gittus and J.Zarka eds. ) , Elsevier Applied Science Publishers , 1986
- [ 45 ] AIFANTES , E.C.  
The Physics of Plastic Deformation , **Int. J. of Plasticity** , Vol. 3 , pp. 211 - 247 , 1987
- [ 46 ] HASEGAWA , T. / YAKOU , T. / KOCKS , U.F.  
Forward and Reverse Rearrangements of Dislocations in Tangled Walls, **Materials Science and Eng.** , 81 , pp. 189-199 , 1986
- [ 47 ] KOCKS , U.F. / HASEGAWA , T. / SCATTERGOOD , R.O.  
On the Origin of Cell Walls and of Lattice Misorientations during Deformation , **Scripta Met.** , Vol. 14 , pp. 449 - 454 , 1980
- [ 48 ] MUGHRABI , H.  
Dislocation Wall and Cell Structures and Long-Range Internal Stresses in Deformed Metal Crystals , **Acta Met.** , Vol 31/9 , pp. 1367 - 1379 , 1983
- [ 49 ] SLEESWYK , A.W. / KASSNER , M.E. / KEMERINK , G.J.  
The Effect of Partial Reversibility of Dislocation Motion , in "Modeling Small Deformations of Polycrystals" ( J. Gittus and J. Zarka eds. ) , Elsevier Applied Science Publishers , 1986
- [ 50 ] NIX , W.D. / ILSCHNER , B.  
Mechanisms Controlling Creep of Single Phase Metals and Alloys, Proc. 5 th. Int. Conf. Strength of Metals and Alloys , Aachen, 1979 ( V. Gerold and P.Haasen eds. ) Vol.3 , pp. 1503 - 1530 , Pergamon , 1979

- [ 51 ] ČADEK , J.  
The Backstress Concept in Power Law Creep of Metals : A Review ,  
**Mat. Science and Eng.** , 94 , pp. 79 - 92 , 1987
- [ 52 ] HASEGAWA , T. / YAKOU , T. / KARASHIMA , S.  
Deformation Behaviour and Dislocation Structures upon Stress Reversal in Polycrystalline Aluminium , **Mat. Science and Eng.** , 20 , pp. 267 - 276 , 1975
- [ 53 ] ONO , N. / TSUCHIKAWA , T. / NISHIMURA , S. / KARASHIMA , S.  
Intergranular Constraint and the Bauschinger Effect , **Mat. Science and Eng.** , 59 , pp. 223 - 233 , 1983
- [ 54 ] SLEESWYK , A.W. / JAMES , M.R. / PLANTINGA , D.H. / MAATHUIS , W.S.T.  
Reversible Strain in Cyclic Plastic Deformation , **Acta. Met** , Vol.26 , pp. 1265 - 1271 , 1978
- [ 55 ] PEDERSEN , O.B. / BROWN , L.M. / STOBBS , W.M.  
The Bauschinger Effect in Copper , **Acta Met.** , Vol. 29 , pp. 1843 - 1850 , 1981
- [ 56 ] SNOWDEN , K.U.  
Dislocation Arrangements During Cyclic Hardening and Softening in Al Crystals , **Acta Met.** , Vol.11 , pp. 675 - 684 , 1963
- [ 57 ] HILL , R.  
The Mathematical Theory of Plasticity , Oxford Univ. Press , 1952
- [ 58 ] MRÓZ , Z.  
An Attempt to Describe the Behavior of Metals under Cyclic Loads Using a More General Workhardening Modell , **Acta Mech.** , Vol.7 , pp. 199 - 212 ( 1969 )
- [ 59 ] EISENBERG , M.A. / PHILLIPS , A.  
A Theory of Plasticity with Non-Coincident Yield and Loading Surfaces , **Acta Mech.** , Vol.11 , pp. 247 - 260 , 1971
- [ 60 ] KRIEG , R.D.  
A Practical Two Surface Plasticity Theory , **ASME J. of Appl. Mech.** , Vol. 42 , pp. 641 - 646 , 1975
- [ 61 ] DAFALIAS , Y.F. / POPOV , E.P.  
A Model of Nonlinearly Hardening Materials for Complex Loading , **Acta Mech.** , Vol.21 , pp. 173 - 192 , 1975

- [ 62 ] DAFALIAS , Y.F. / POPOV , E.P.  
Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity , **ASME J. of Appl. Mech.** , Vol. 43 , pp. 645 - 651 , 1976
- [ 63 ] CHABOCHE , J.L.  
Time-Independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity , **Int. J. of Plasticity** , Vol.2 , pp. 149 - 188 , 1986
- [ 64 ] CHABOCHE , J.L. / ROUSSELIER , G.  
On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations - Part 1 : Rules Developed with Internal Variable Concept , Part 2 : Application of Internal Variable Concepts to th 316 Stainless Steel , **ASME J. of Pressure Vessel Techn.** , Vol. 105 , pp. 153-158 and 159-164 , 1983
- [ 65 ] BRUHNS , O.T / MÜLLER , R.  
Some Remarks on the Application of a Two-Surface Model in Plasticity , **Acta Mech.** , Vol. 53 , pp. 81 - 100 , 1984
- [ 66 ] OHNO , N. / KACHI , Y.  
A Constitutive Model of Cyclic Plasticity for Nonlinear Hardening Materials , **ASME J. of Appl. Mech.** , Vol.53 , pp. 395 - 403 , 1986
- [ 67 ] MCDOWELL , D.L.  
A Two Surface Model for Transient Nonproportional Cyclic Plasticity , **ASME J. of Appl. Mech.** , Vol. 52 , pp. 298 - 308 , 1985
- [ 68 ] SOTOLONGO , W. / MCDOWELL , D.L.  
An Evaluation of Several Constitutive Model Structures for Transient Nonproportional Cyclic Plasticity , **ASME J. of Pressure Vessel Tech.** , Vol. 108 , pp. 273 - 279 , 1986
- [ 69 ] MCDOWELL , D. L.  
An Evaluation of Recent Developments in Hardening and Flow Rules for Rate-Independent Nonproportional Cyclic Plasticity , **ASME J. of Appl. Mech.** , Vol.54 , pp. 323 - 334 , 1987
- [ 70 ] TSENG , N.T. / LEE , G.C.  
Simple Plasticity Model of Two-Surface Type , **J. of Engng. Mech.** , Vol.109/3 , pp. 795 - 810 , 1983
- [ 71 ] CHANG , K.C. / LEE , G.C.  
Biaxial Properties of Structural Steel under Nonproportional Loading , **J. of Engng. Mech.** , Vol. 112/8 , pp. 792 - 820 , 1986

- [ 72 ] BENALLAL , A. / MARQUIS , D.  
Constitutive Equations for Nonproportional Cyclic Elasto-Viscoplasti-  
city , **ASME J. of Eng. Mat. Techn.** , Vol. 109 , pp. 326 - 336 , 1987
- [ 73 ] NOUAILHAS , D. / CAILLETAUD , G. / POLICELLA , H. / MARQUIS , D.  
DUFAILLY , J. / LIEURADE , H.P. / RIBES , A.  
On the Description of Cyclic Hardening and Initial Cold Working ,  
**Engng. Fracture Mech.** , Vol.21/4 , pp. 887 - 895 , 1985
- [ 74 ] NAGHDI , P.M. / NIKKEL , D.J. , Jr.  
Two-Dimensional Strain Cycling in Plasticity , **ASME J. of Appl. Mech.** ,  
Vol.53 , pp. 821 - 829 , 1986
- [ 75 ] LU , W.Y. / MOHAMED , Z.M.  
A Two-Surface Plasticity Theory and its Application to Multiaxial  
Loading , **Acta Mech.** , Vol.69 , pp. 43 - 57 , 1987
- [ 76 ] TANAKA , E. / MURAKAMI , S. / ŌOKA , M.  
Constitutive Modelling of Cyclic Plasticity in Non-Proportional Loading  
Conditions , Proc. 2. Int. Conf. on Const. Laws for Engng. Mat., Jan.  
1987 , Tucson , USA , ( C.S. Desai , E.Krempl , P.D.Kiousis , T. Kundu  
eds. ) , Vol.1 , pp. 639 - 646 , Elsevier 1987
- [ 77 ] LEHMANN , Th.  
Zur Beschreibung großer plastischer Formänderungen unter Berück-  
sichtigung der Werkstoffverfestigung , **Acta Rheol.** , Band 2/3 , pp.  
247 - 254 , 1962
- [ 78 ] LEHMANN , Th.  
The Constitutive Law in Thermoplasticity , CISM Courses and Lectures  
N<sup>o</sup> 289 , ( Th. Lehmann ed. ) , pp.379-463 , Springer-Verlag , 1984
- [ 79 ] ZIEGLER , H.  
Thermodynamik der Deformationen , Proc. XI. Int. Congr. Appl. Mech.,  
München , 1964 , S.99-108 , Springer-Verlag , 1966
- [ 80 ] GREEN , A.E. / NAGHDI , P.M.  
A General Theory of an Elastic-Plastic Continuum , **Arch. Rat. Mech.**  
**Anal.** , Vol.18 , pp. 251 - 281 , 1965
- [ 81 ] LEHMANN , Th.  
Thermo-Mechanical Coupling in Large Deformations particularly in  
Bifurcation Problems , in " Thermomechanical Coupling in Solids "  
( H.D.Bui and Q.S. Nguyen eds. ) , IUATAM 1987 , Elsevier

- [ 82 ] LUBLINER , J.  
On the Structure of Rate Equations of Materials with Internal Variables , **Acta Mech.** , 17 , pp. 109 - 119 , 1973
- [ 83 ] LEHMANN , Th. / BLIX , U.  
On the Coupled Thermo-Mechanical Process in the Necking Problem , **Int. J. of Plasticity** , Vol. 1 , pp. 175 - 188 , 1985
- [ 84 ] SCHMID , U.  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern , Diss. , Mit. Inst. Mech. Nr. 50 , Ruhr-Univ. Bochum , 1987
- [ 85 ] PAPE , A.  
Einfluß von Dehnungsamplitude und Dehnungspfad auf das Verfestigungsverhalten von Stahl Ck15 bei weggesteuerten einaxialen und zwei axialen Zug/Druck- und Torsionsversuchen , Arbeitsbericht zum DFG-Projekt Le 161/16-1 , 1987
- [ 86 ] LEHMANN , Th.  
On Thermodynamically Consistent Constitutive Laws in Plasticity and Viscoplasticity , to be published in **Arch. Mech.**
- [ 87 ] SOCIE , D.  
Multiaxial Fatigue Damage Models , **ASME J. of Eng. Mat. Tech.** , Vol. 109 , pp. 293 - 298 , 1987
- [ 88 ] WEICHERT , D. / GROB-WEEGE , J.  
The Numerical Assessment of Elastic-Plastic Disks under Variable Mechanical and Thermal Loads using a Simplified Two-Surface Yield Condition , to be published in **Int. J. of Mech. Science**
- [ 89 ] KRIEG , R.D / KRIEG , D.B.  
Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-Perfectly Plastic Model , **ASME J. of Pressure Vessel Tech.** , pp.510-515 , 1977
- [ 90 ] ZDEBEL , U. / LEHMANN , Th.  
Some Theoretical Considerations and Experimental Investigations on a Constitutive Law in Thermoplasticity , **Int. J. of Plasticity** , Vol. 3 , pp. 369 - 389 , 1987
- [ 91 ] BECKER , E. / BÜRGER , W.  
Kontinuumsmechanik , Teubner Studienbücher , Band 20 , 1975
- [ 92 ] BALTOV , A. / SAWCZUK , A.  
A Rule of Anisotropic Hardening , **Acta Mech.** , Vol. 1 , pp. 81-92 , 1965

[ 93 ] LEHMANN , Th.

Elemente der Mechanik , Bd. II , Vieweg , 1975

[ 94 ] WUNDERLICH , W. / GOEBEL , W. / SPRINGER , H.

Einfluß des nichtlinearen Materialverhaltens bei dynamisch beanspruchten Rotationsschalen , SFB 151-Berichte Nr. 6 , März 1987

[ 95 ] MEGAHED , M.M.

A Critical Examination of Nesting , Bounding and Memory Surfaces Plasticity Theories under Nonproportional Loading Conditions , *Int. Journal Mech. Sci.* , Vol. 30 , No.2 , pp.101-118 , 1988

## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:  
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung

- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode

- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei Darstellung  
der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische  
Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems  
in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear  
Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder  
unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic  
Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger  
Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontakt-  
problem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter  
Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität I. Wärmeausbreitung und  
Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and  
Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells

- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme

- Nr. 46 J. Makowski/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into  
nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz. K. Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer  
Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von  
Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik  
und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter in-  
stationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experi-  
mentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten  
CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Trampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitäts-  
theorie
- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe:  
Wellenausbreitung in akustischen Medien, Randelement-Prozeduren  
im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 J. Makowski/H. Stumpf:  
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape:  
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungs-  
verhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächen-  
modells



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 57**