



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Dieter Weichert

Zum Problem geometrischer  
Nichtlinearitäten in der  
Plastizitätstheorie

Heft Nr. 53



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Dieter Weichert

Zum Problem  
geometrischer Nichtlinearitäten  
in der Plastizitätstheorie

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 53

Dezember 1987

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl für Mechanik II der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Habilitationsschrift zur Erlangung der *venia legendi* im Fach "Mechanik" angenommen.

Mein besonderer Dank gebührt Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf für seine Anregung zu dieser Arbeit und seiner Unterstützung bei ihrer Anfertigung. Den Herren Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann und Prof. Dr.-Ing. E. Stein gilt mein herzlicher Dank für die Übernahme der Koreferate sowie viele wertvolle und lehrreiche Hinweise zum Inhalt der Schrift.

Gutachter:           Prof. Dr.-Ing. Helmut Stumpf  
                          Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann  
                          Prof. Dr.-Ing. Erwin Stein

Tag der Habilitation:   17.12.1986

© 1987 Priv. Doz. Dr.-Ing. Dieter Weichert  
          Herner Str. 308, 4630 Bochum 1

Alle Rechte vorbehalten.

## **Zusammenfassung**

Die Vernachlässigung des Einflusses geometrischer Nichtlinearitäten in der klassischen Plastizitätstheorie kann bei der Berechnung des Verhaltens elasto-plastischer Strukturen zu erheblichen Abweichungen von ihrem tatsächlichen Verhalten führen. In der vorliegenden Arbeit wird dieser Einfluß geometrischer Nichtlinearitäten untersucht. Es wird dabei im Besonderen auf die Formulierung von Stoffgesetzen, das Anfangs-Randproblem, das Einspielproblem und das Stabilitätsproblem eingegangen. Flächentragwerke als wichtiger Anwendungsbereich geometrisch nichtlinearer Theorien bei Annahme kleiner Dehnungen dienen zur Veranschaulichung der dargestellten Verfahren.

## **Summary**

The neglect of the influence of geometrical non-linearities in classical plasticity may lead to significant deviations of numerical predictions of the behaviour of elastic-plastic structures from their real behaviour. In the presented work this influence of geometrical non-linearities is investigated. Particular attention is paid to the formulation of constitutive laws, the initial-boundary value problem, the shakedown-problem and the stability-problem. Plates and shells as important field of application for geometrically non-linear theories under the assumption of small strains serve as demonstration of the presented methods.

## INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
I. EINLEITUNG	1
II. DAS VERHALTEN INELASTISCHER KÖRPER BEI QUASI- STATISCHEN VERFORMUNGSPROZESSEN	7
1. Zur Beschreibung eines thermomechanischen Prozesses	7
- Geometrie	8
- Die äußeren Wirkungen	9
- Der innere Zustand	12
- Die Deformationen eines Kontinuums	12
2. Erhaltungssätze der Thermomechanik	17
- Massenerhaltungsgesetz	17
- Der Impulssatz	18
- Der Drallsatz	22
- Erster und zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	23
3. Stoffgesetze inelastischer Körper	29
- Zerlegung der Deformationen in reversiblen und irreversiblen Anteil	29
- Energiekonsistente Zerlegung der Elementarleistung	36
- Normalitätsregel und Materialstabilität	39
- Das Modell des "generalisierten Standard Materials"	44
- Viskoplastische Effekte und Stoffgesetzformulierung im Dehnungsraum	49
III. DAS ANFANGS-RANDWERTPROBLEM FÜR SPANNUNGEN	52
1. Definitionen und Formulierung des Problems	52

2. Lösung des Problems	56
IV. KINEMATISCHE FORMULIERUNG DES ZUWACHSRANDWERTPROBLEMS	65
1. Problemstellung und Grundgleichungen	60
2. Schwache Form der Gleichgewichtsbedingungen	70
3. Stoffgesetze elasto-plastischer Materialien	73
4. Variationelle Formulierung des Zuwachsrandwertproblems	75
V. DAS EINSPIELEN ELASTO-PLASTISCHER KÖRPER	79
1. Eine Erweiterung des Melan'schen Theorems	81
2. Praktische Sonderfälle	86
3. Eine Erweiterung des Koiter'schen Theorems	92
VI. ZUR STABILITÄT ELASTOPLASTISCHER ZUSTÄNDE	100
1. Definitionen und Annahmen	100
2. Herleitung eines Stabilitätskriteriums aus dem Vergleich von Nachbarzuständen	106
VII. ELASTOPLASTISCHE FLÄCHENTRAGWERKE	115
1. Geometrie	115
- Grundlagen und Definitionen	115
- Vereinfachende Annahmen	121
2. Der Spannungszustand	124
3. Stoffgesetze für inelastische Flächentragwerke	129
4. Der Spannungszustand von Flächentragwerken	133
5. Das Einspielen von Flächentragwerken	137
6. Das Einspielverhalten einer Sandwich-Platte	143
VIII. LITERATUR	148

## I. EINLEITUNG

Mechanische Bauteile und Strukturen, die derart belastet werden, daß in ihnen plastische Verformungen auftreten, erfahren dabei häufig so große Deformationen, daß sich ihr Verhalten nicht mehr mit den klassischen, geometrisch linearen Theorien für elasto-plastische Prozesse beschreiben läßt. Dieser Umstand begrenzt den Anwendungsbereich von Methoden zur Vorherberechnung des Verhaltens von Bauteilen ganz erheblich oder führt bei Nichtbeachtung der entsprechenden Einschränkungen zu falschen Ergebnissen. Der zulässige Anwendungsbereich kann dabei unter Umständen sehr eng sein: Bei der Berechnung von Platten und Schalen zum Beispiel müssen bekanntlich selbst bei langwelligen Deformationsmustern die im Rahmen geometrisch linearer Theorien erlaubten Verschiebungen der Tragwerksmittelfläche in zu ihr senkrechter Richtung wesentlich kleiner als die Tragwerksdicke sein. In dieser Arbeit wird untersucht, wie der Einfluß der Geometrieänderung während des Deformationsprozesses auf die Beschreibung und Lösung von Randwertproblemen in der Plastizitätstheorie erfaßt werden kann.

Im allgemeinen ist die Lösung von Randwertproblemen in der Strukturmechanik nur näherungsweise möglich; je nachdem ob diese Lösung im Zustandsraum geometrischer oder statischer Größen gesucht wird, spricht man von geometrischen beziehungsweise statischen, gegebenenfalls auch von gemischten Methoden [159]. Für Probleme der linearen Elastizitätstheorie sind auf der Grundlage der Dualität dieser Zustandsräume Schrankenverfahren entwickelt worden, die sowohl die globale energetische als auch die punktweise Eingrenzung von Feldgrößen ermöglichen [1,40,148,160]. Vergleichbare energetische Methoden existieren auch in der klassischen geometrisch linearen Plastizitätstheorie [69,78,113,168], sind dort jedoch auf die Eingrenzung von Grenz- und Einspiellasten sowie globale Extremalaussagen beschränkt [78]. Ihre Erweiterung auf geometrisch nichtlineare Probleme, deren Notwendigkeit aus praktischer Sicht aus den Eingangsbemerkungen ersichtlich wird,

verursacht wegen der Kopplung der kinematischen und statischen Größen erhebliche Schwierigkeiten. Ganz besonders sind davon statische Methoden betroffen, deren numerische Verfahren auf der Benutzung von Ansatzfunktionen für den Spannungszustand beruhen, die die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen von vornherein erfüllen: Geometrisch nichtlineare Theorien unterscheiden sich von geometrisch linearen Theorien gerade dadurch, daß in ihren Gleichgewichtsbedingungen die Systemdeformationen enthalten sind, die in der Regel unbekannte Größen sind [41,159]. Diese prinzipielle Erschwernis führt dazu, daß diese statischen Methoden in ihrer herkömmlichen Form bei größeren Deformationen unbrauchbar sind und für die Lösung geometrisch nichtlinearer Probleme zumeist kinematische Methoden verwendet werden, die von Ansatzfunktionen für den Verschiebungszustand oder den inkrementellen Verschiebungszustand ausgehen, welche die kinematischen Randbedingungen von vornherein erfüllen.

Wären nun statische und kinematische Methoden in ihren Aussagen völlig äquivalent, so wäre dieser Vorgang nur der Ausdruck einer natürlichen Konkurrenz von Berechnungsverfahren mit Vorteilen für die kinematischen Methoden. Dies ist jedoch nicht der Fall: So gibt es im Bereich geometrisch linearer Theorien statische Methoden zur Lösung des Anfangsrandwertproblems mittels globaler Minimalprinzipie, mit deren Hilfe der tatsächliche Spannungszustand im betrachteten elasto-plastischen Körper auch bei nichtproportionalen Belastungsvorgängen durch einen einzigen Minimierungsvorgang angenähert und im Grenzfall bestimmt werden kann. Diese Methoden gehen auf die Arbeiten von MOREAU [103-105], NAYROLES [110,111], HALPHEN & NGUYEN [49] und RAFALSKI [129,130] zurück, durch die eine schwache Formulierung des plastischen Werkstoffverhaltens möglich ist, die dann zur Konstruktion eben dieser Minimalprinzipie angewendet wird. Entsprechende kinematische Methoden sind nicht bekannt.

Gleiches gilt für das MELAN'sche Theorem [101,78], welches im Bereich

geometrisch linearer Probleme ein hinreichendes Kriterium für das elasto-plastische Einspielen von Bauteilen liefert und somit erlaubt vorherzusagen, daß kein inkrementeller Kollaps aufgrund unbegrenzt akkumulierter plastischer Dehnungen erfolgt. Besonders wichtig daran ist, daß für das Rechenverfahren keinerlei Beschränkung der Anzahl von Lastwechseln erforderlich ist. Ein entsprechendes kinematisches Theorem ist nicht bekannt; das KOITER'sche Einspiel-Theorem [78], welches von einem kinematischen Ansatz ausgeht, liefert ein hinreichendes Kriterium für den Kollaps des betrachteten elasto-plastischen Systems.

Einen Überblick über die oben genannten klassischen Verfahren und ihre Anwendung bieten die Monographien von KACHANOV [69], HILL [56], SLATER [141] und, mehr mathematisch orientiert, NECAS & HLAVACEK [113] und DUVAUT & LIONS [37]; die Übersichtsartikel [17,18] zeigen die Anwendungsbreite in den Ingenieurwissenschaften.

In dieser Arbeit werden Erweiterungen der genannten statischen Methoden zur Lösung des Anfangsrandwertproblems für den Spannungszustand und zur Bestimmung des Einspielverhaltens zur Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearitäten angegeben und den kinematischen Methoden gegenübergestellt.

Dazu werden in Kapitel II zunächst die allgemeinen Grundgleichungen zur Beschreibung thermo-mechanischer Prozesse in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts ohne Beschränkungen für die Verformungen einzuführen. In der daran anschließenden Diskussion verschiedener Stoffgesetze für inelastische Materialien stehen diejenigen Ansätze im Vordergrund, die bei Annahme der Existenz eines thermo-mechanischen Potentials eine möglichst breite Palette verschiedenartiger physikalischer Phänomene wiedergeben können. Dabei wird besonderer Augenmerk auf die thermodynamische Konsistenz [19,46,54,70,119] der gewählten Materialbeschreibung gelegt, da in dieser Arbeit energetische Betrachtungsweisen im Vordergrund stehen, die die Frage nach der Aufspaltung der Gesamtenergie in die den verschiedenen physikalischen Vorgängen entsprechenden Anteile aufwer-

fen. In den Kapiteln III bis VII, die der Lösung von Randwertproblemen gewidmet sind, werden deswegen Stoffgesetze verwendet, die auf der Existenz eines plastischen Potentials aufbauen und somit eine klare Trennung verschiedener physikalischer Effekte unter energetischem Aspekt erlauben. Grundlagen für die Einführung eines plastischen Potentials bilden die Arbeiten von ZIEGLER [168-170]; wichtige Beiträge zur Konkretisierung stammen u. a. von GREEN und NAGHDI [44,46], MANDEL [97-99], KLEIBER und RANIECKI [71] und LEHMANN [85,86,88,89], die den Rahmen für die vorliegende Arbeit bezüglich der behandelten Stoffgesetze abstecken. Am Schluß dieses Kapitels wird ein für die weiteren Betrachtungen in besonderem Maße geeignetes Werkstoffmodell von HALPHEN und NGUYEN [49], NGUYEN Q.S. [115] vorgestellt, welches sich als Sonderfall in den zuvor dargestellten Rahmen eingliedert.

In Kapitel III wird gezeigt, wie für eine bestimmte Klasse geometrisch nichtlinearer Anfangsrandwertprobleme der Spannungszustand für variable Lasten mit Hilfe eines globalen Minimalprinzips ermittelt werden kann. Dazu wird analog zum geometrisch linearen Fall von einer schwachen Formulierung des Stoffgesetzes ausgegangen und über die Beschränkung der Vergleichsspannungszustände auf statisch und plastisch zulässige Zustände ein konvexes Funktional hergeleitet, dessen Minimum den gesuchten Zustand angibt. In Erweiterung zu den Ergebnissen aus [164] ist hier die Berücksichtigung von Wärmespannungen unter der Annahme, daß die Temperatur keinen Einfluß auf die Materialkonstanten hat und keine thermomechanische Koppelung vorliegt, in die Betrachtungen eingeschlossen.

Im vierten Kapitel wird dann die allgemeine Vorgehensweise zur Formulierung und Lösung des Zuwachs-Randwertproblems mittels kinematischer Verfahren dargestellt. Dabei wird besonderer Wert darauf gelegt, den Zusammenhang der Formulierung in den Geschwindigkeiten derjenigen in endlichen Inkrementen deutlich herauszustellen. Am Schluß des Kapitels wird aufgezeigt, wie thermische Einflüsse in eine variationelle Formulierung eingebracht werden können.

In vielen praktischen Fällen ist es für die Bemessung eines Bauteils ausreichend zu wissen, ob es unter gegebenen variablen Lasten aufgrund akkumulierter plastischer Dehnungen versagt, oder ob es einen Grenzzustand gibt, jenseits dessen die veränderlichen Lasten keine zusätzlichen plastischen Verformungen erzeugen. Dieser Frage, der im Bereich geometrisch linearer und  $\dot{\lambda}$  priori diskretisierter Systeme, insbesondere Stab- und Rahmentragwerke, erhebliche Beachtung zugekommen ist [42,43,74-76,95], widmet sich das Kapitel V aus kontinuumsmechanischer Sicht durch die Erweiterung des MELAN'schen Theorems auf geometrisch nichtlineare Probleme bei Verwendung des Stoffgesetzes nach [49,52]. Im letzten Abschnitt des fünften Kapitels wird dann eine Erweiterung des KOITER'schen Theorems [78], welches auf der Grundlage kinematischer Vergleichszustände ein hinreichendes Kriterium für Nichteinspielen liefert, auf eine Klasse geometrisch nichtlinearer Probleme hergeleitet, wobei diese Klasse enger ist als bei den entsprechenden Herleitungen zum MELAN'schen Theorem in den ersten Abschnitten des Kapitels.

Immer, wenn geometrische Nichtlinearitäten das Verhalten von Strukturen wesentlich beeinflussen, ist die Frage nach dem Versagen aufgrund des Stabilitätsverlustes zu stellen. Unter Benutzung von energetischen Methoden, die mit den allgemeinen Erhaltungssätzen aus Kapitel II verträglich sind, werden in Kapitel VI notwendige Kriterien für die Stabilität gegebener elasto-plastischer Gleichgewichtszustände hergeleitet.

In Kapitel VII wird gezeigt, wie die in den Kapiteln III und V hergeleiteten Methoden auf Flächentragwerke angewendet werden können. Dazu werden zunächst die Feldgleichungen sowie konstitutive Beziehungen für geometrisch nichtlineare elasto-plastische Flächentragwerke hergeleitet. Grundlage dazu bilden die Arbeiten von HODGE [61,62], PIETRASZKIEWICZ [122], DUSZEK [29,33,35] und SAWCZUK [137]. Danach werden die Methoden aus den Kapiteln III und V für bestimmte Schalentypen konkretisiert. Dabei folgen wir der Klassifikation von DUSZEK

[33,35], die durch Abwesenheit einer nur durch den Verformungszustand bestimmten elastischen Energiedichte von den üblichen Klassifikationen der elastischen Schalentheorien ([122,138,150]) abweicht.

Die Berechnung des Einspielverhaltens einer elasto-plastischen dünnen Platte im Rahmen der VON KARMAN-Theorie unter zyklischen Lasten schließt als Illustration des in Kapitel V vorgestellten Verfahrens die Arbeit ab.

## II. DAS VERHALTEN INELASTISCHER KÖRPER BEI QUASISTATISCHEN VERFORMUNGSPROZESSEN

### II.1 ZUR BESCHREIBUNG EINES THERMOMECHANISCHEN PROZESSES

Wir gehen davon aus, daß ein thermomechanischer Prozeß, dem ein fester Körper unterworfen ist, bestimmt ist durch:

- 1) Die Geometrie des Körpers **B** zu Beginn des Prozesses.
- 2) Die Materialeigenschaften von **B**, die im allgemeinen von der Belastungsgeschichte abhängen.
- 3) Die äußeren Wirkungen, die die Umgebung auf **B** ausübt und die als unabhängige Prozeßvariable den Prozeß steuern.

Die Beschreibung des Prozesses erfordert dann:

- 1) Die Bestimmung der Geometrie von **B** im Verlauf des Prozesses.
- 2) Die Bestimmung von Zustandsgrößen, die unabhängig von der Position des Körpers **B** seinen inneren Zustand definieren.

Dazu ist neben der Definition der beteiligten Größen die Formulierung ihrer funktionalen Zusammenhänge notwendig derart, daß die Lösung von konkreten Rand- und Anfangs-Randwertproblemen möglich ist. Ausgangspunkt ist dabei die gegebene Geschichte der unabhängigen Prozeßvariablen, bestehend aus den thermomechanischen Randbedingungen und den volumenbezogenen Kräften und Energiequellen. Die Prozeßbeschreibung bezweckt dann die Bestimmung der abhängigen Prozeßvariablen zu jedem Zeitpunkt des Prozesses. Im einzelnen können dies nicht vorgeschriebene thermomechanische Randbedingungen, Verschiebungen, Spannungen, Dehnungen, Temperaturen sowie nicht spezifizierte Volumenkräfte und volumenbezogene Energiequellen sein.

Neben diesen direkt beobachtbaren Zustandsgrößen ist die Evolution der internen, nicht direkt beobachtbaren Parameter zur Bestimmung des jeweiligen aktuellen Materialzustands von besonderer Bedeutung. Bindeglied zwischen der Geschichte der unabhängigen Prozeßvariablen und dem jeweiligen Zustand des betrachteten Körpers sind:

- a) Die allgemeinen materialunabhängigen Feldgleichungen, bestehend

aus Massenbilanzgleichung, Gleichgewichtsbedingungen und dem ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Werden die Gesamtdehnungen nicht aus Verschiebungsfunktionen abgeleitet, so sind zusätzlich die Kompatibilitätsbedingungen zu erfüllen.

- b) Das Materialgesetz, das Spannungen und Dehnungen miteinander verknüpft einschließlich der Beschreibung der eigenen Evolution in Abhängigkeit von den gewählten beobachtbaren und internen Zustandsgrößen.

Es werden im folgenden nur Prozesse betrachtet, die in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichtes verlaufen, so daß der Gesamtprozeß als eine Folge von Gleichgewichtszuständen aufgefaßt werden kann. Durch diese Annahme ist es möglich, die Methoden der klassischen Thermodynamik auf die hier zur Beschreibung kommenden Prozesse anzuwenden.

### II.1.1 Geometrie

Gestalt und Bewegung eines Körpers  $B$  werden in einem raumfixierten euklidischen Koordinatensystem mit der Basis  $[0, e_1, e_2, e_3]$ , die den Anschauungsraum  $E^3$  aufspannt, als Funktion der Zeit  $\tau$  beschrieben. Zu Beginn des Prozesses zur Zeit  $\tau=0$  hat  $B$  die Ausgangskonfiguration  $\Omega^0$  und seine materiellen Punkte sind durch die materiellen Ortsvektoren  $X$  mit den Koordinaten  $[X^1, X^2, X^3]$  markiert. Die Bewegung von  $B$  wird dann durch die Kurvenschar beschrieben, die die materiellen Punkte von  $B$  durchlaufen. Sie ist durch die räumlichen und zeitabhängigen Koordinaten  $[x^1, x^2, x^3]$  der räumlichen Ortsvektoren  $x$  aller Punkte  $X$  bestimmt und definiert die jeweilige aktuelle Konfiguration  $\Omega$  von  $B$ . Um die speziellen Geometrien der zu untersuchenden Körper wie Schalen, Platten, Scheiben etc. sinnvoll zu nutzen, werden in der Regel körperbezogene Koordinatensysteme eingeführt, so daß die Koordinaten  $x^A$  auf eine Basis  $[0, G_1, G_2, G_3]$  mit der Metrik  $G_{AB}$  und die Koordinaten  $x^a$  auf die Basis  $[0, g_1, g_2, g_3]$  mit der Metrik  $g_{ab}$  bezogen werden.

Die Konfiguration  $\Omega$  kann als zeitabhängige Abbildung [100,113] interpretiert werden, die die Ausgangskonfiguration  $\Omega^0$  von  $B$  in die jeweils aktuelle Konfiguration überführt. Diese Abbildung kann definiert sein durch die Verschiebungsvektoren  $u$  aller materiellen Punkte von  $B$  mit den auf das raumfeste Koordinatensystem  $[0, e_1, e_2, e_3]$  bezogenen Komponenten

$$u^i = x^i(X, \tau) - X^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1.1)$$

Nur reguläre Abbildungen  $\Omega(X, \tau)$  werden hier betrachtet, für die es eine eindeutige Umkehrabbildung  $\Omega^{-1}(X, \tau)$  gibt, die den abgebildeten Körper in seine ursprüngliche Gestalt zurücktransformiert. Dadurch werden Effekte wie Rißbildung, Durchdringung und Faltung von der Betrachtung ausgeschlossen [100]. Bei den hier behandelten Randwertproblemen ist die Abbildung  $\Omega(X, \tau)$  bis auf den Anteil, der in den kinematischen Randbedingungen enthalten ist, unbekannt.

### II.1.2 Äußere Wirkungen

Wir unterscheiden statische, kinematische und thermische äußere Wirkungen.

**Statische äußere Wirkungen** sind die massenbezogenen Kräfte  $p(X, \tau)$  sowie die auf dem Oberflächenteil  $S_F$  von  $B$  wirkenden flächenbezogenen Kräfte  $f(X, \tau)$ . Man unterscheidet zwischen Potentialkräften, die sich aus einem Potential herleiten lassen und Nichtpotentialkräften. Beispiel für die erste Kategorie sind Totlasten ("dead loads"), zu denen als Beispiel die Gewichtskräfte zählen. Folgekräfte ("follower loads") gehören im allgemeinen zur Kategorie der Nichtpotentialkräfte. Dabei hängt es allerdings von den gewählten Systemgrenzen ab, ob das befreite System unter der Wirkung der einen oder anderen Kategorie von Kräften steht. So kann die Vergrößerung des Kontrollraums unter Umständen ein Nichtpotentialsystem in ein Potentialsystem überführen. Bei den hier behandelten Problemen beschränken wir uns im wesentlichen auf Potential-

systeme.

Wegen der geringen technischen Bedeutung wird hier beim dreidimensionalen Kontinuum auf die systematische Berücksichtigung von massen- oder flächenbezogenen Momenten verzichtet. Bei Flächentragwerken hingegen spielen äußere Momente insbesondere an den Rändern eine wichtige Rolle und werden dementsprechend berücksichtigt.

Kinematische äußere Wirkungen sind die auf dem Oberflächenteil  $S_K$  von  $B$  vorgeschriebenen Verschiebungen  $u(X, \tau)$  und, bei Flächentragwerken, Rotationen des Randes. Auf die Behandlung äußerer kinematischer Wirkungen im Innern von  $B$  wird hier verzichtet. Als Beispiele hierfür seien Preßverbände [136] und VOLTERRA'sche Distorsionszustände [158] genannt.

Es sei bemerkt, daß sich die Oberflächenanteile  $S_F$  und  $S_K$  gegenseitig überlappen können. Dabei führt aber die Bedingung, daß die Elementararbeit bzw. -leistung nicht durch die vorgegebenen Feldgrößen allein bestimmt sein darf, da sie ja sonst von der Lösung des Problems unabhängig wäre, zur Forderung komplementärer Randbedingungen.

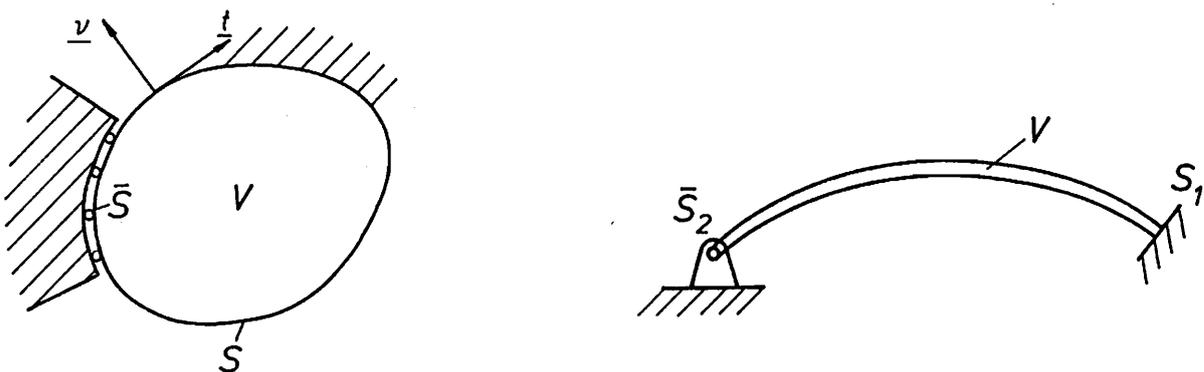


BILD 1: BEISPIELE FÜR KOMPLEMENTÄRE RANDBEDINGUNGEN

AUF  $\bar{S}$ :  $\sigma_t = 0$ ,  $u_t \neq 0$ ,  $\sigma_y \neq 0$ ,  $u_y = 0$ . In  $\bar{S}_2$ :  $M = 0$ ,  $w' \neq 0$

$\sigma_t$  : SCHUBSPANNUNG,  $\sigma_y$  : NORMALSPANNUNG,  $u_t$  : TANGENTIALVERSCHIEBUNG  
 $u_y$  : NORMALVERSCHIEBUNG,  $M$  : MOMENT,  $w'$  : NEIGUNGSÄNDERUNG

Im einfachsten Fall bedeutet dies, daß sich  $S_F$  und  $S_K$  nicht überschneiden ( $S_F \cap S_K = \emptyset$ ). Es ist aber auch möglich, daß an einem Oberflächen-  
 teil durch entsprechende Lagerung nur die Bewegung in einer Richtung  
 behindert ist (z.B. durch ein reibungsfreies Rollenlager) oder, bei  
 Flächentragwerken, an einem Randgebiet die Verschiebung behindert, die  
 Verdrehung jedoch frei ist. In diesen Fällen überlappen sich  $S_K$  und  $S_F$   
 und die zueinander zugeordneten Kraft- und Verschiebungsgrößen müssen  
 im obigen Sinn auf ihre Komplementarität überprüft werden.

**Thermische äußere Wirkungen** sind vorgeschriebene Temperaturen  $\theta(X, \tau)$ ,  
 Temperaturgradienten  $\nabla\theta(X, \tau)$  sowie massenbezogene Wärmequellen  $r(X, \tau)$ .  
 Die im energetischen Sinn zur Temperatur komplementäre Größe ist die  
 Entropie  $s$ .

Zusammengefaßt ergibt sich der Vektor  $a$  der äußeren Wirkungen zu

$$a = \begin{pmatrix} p \\ f \\ u^* \\ r \\ \theta \\ \nabla\theta \\ \theta \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{in } V \\ \text{auf } S_F \\ \text{auf } S_K \\ \text{in } V_r \\ \text{in } V_\theta \\ \text{auf } S_q \\ \text{auf } S_\theta \end{matrix} \quad (2.1.2)$$

$V$  bezeichnet hier das gesamte Volumen von  $B$  und  $V_r$  sowie  $V_\theta$  die Teile  
 des Volumens, in denen die Wärmeproduktion bzw. die Temperatur  
 vorgeschrieben ist. Entsprechend sind  $S_q$  und  $S_\theta$  die Teile des Randes,  
 auf denen der Temperaturgradient bzw. die Temperatur selbst  
 vorgeschrieben sind. Abweichend von der hier gewählten  
 Darstellungsweise können die äußeren Wirkungen auch auf die aktuelle  
 oder eine beliebige andere Konfiguration bezogen werden.

### II.1.3 Der innere Zustand

Nur wenn der innere Zustand des betrachteten Körpers durch geeignet gewählte Zustandsvariable in seiner Evolution ausreichend erfaßt wird, kann der beobachtete Prozeß beschrieben werden. Dazu gehört die Definition von koordinatenunabhängigen konjugierten Dehnungs- und Spannungsmaßen, inneren Zustandsvariablen, die den inneren Materialzustand beschreiben (interne Parameter) und konjugierte thermische Variable. An die Gesamtheit dieser Variablen ist die Bedingung gestellt, daß sie und ihre zeitlichen Ableitungen objektiv, d.h. unberührt von Starrkörperrotationen sind. Konjugiert zueinander sind Spannungen und Dehnungen dann, wenn ihr Produkt die tatsächliche mechanische Elementararbeit bzw. -leistung darstellt, die im betreffenden Körperelement geleistet wird [91]. Ebenso müssen konjugierte thermische Variable den ihnen entsprechenden Anteil nichtmechanischer Elementararbeit bzw. -leistung darstellen (siehe auch Abschnitt II.2.4). An die internen Parameter hingegen wird hier zunächst nur die Forderung der energetischen Konsistenz und Widerspruchsfreiheit bezüglich der thermodynamischen Bilanzgleichungen (siehe Abschnitt II.2.4) gestellt. In Abschnitt II.3.4 wird die Definition konjugierter interner Parameter dahingehend verschärft, daß ihr Produkt keinen Beitrag zur beobachtbaren Elementararbeit leistet.

### II.1.4 Die Deformation eines Kontinuums

Die Deformationen verknüpfen die raumbezogene Geometrie des betrachteten Körpers über das koordinatensystemunabhängige Materialgesetz mit den lokalen Kraftgrößen, den Spannungen. Bei der hier vorausgesetzten regulären Bewegung ist der Deformations- oder Verzerrungszustand durch den Deformationsgradienten  $F$  mit

$$F = \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \quad (2.1.3)$$

definiert. In Komponentenschreibweise erhält man

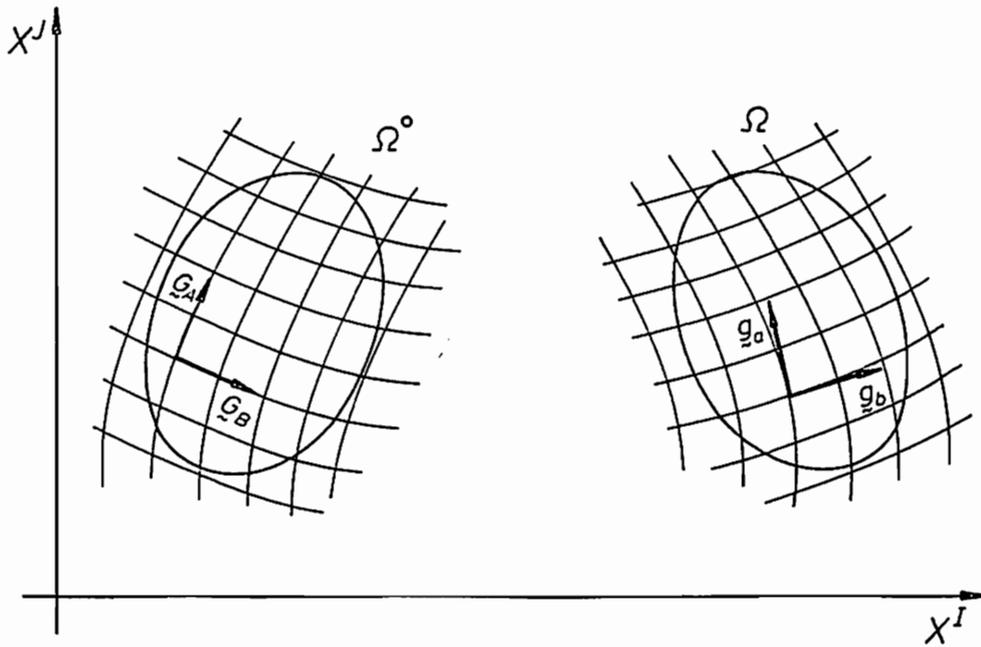


BILD 2: RAUMFESTE BEZUGSSYSTEME

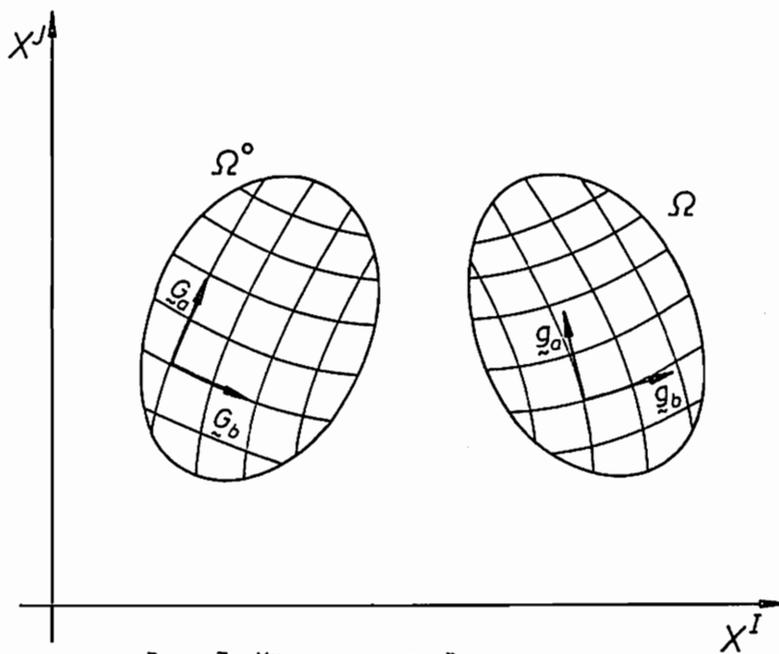


BILD 3: KÖRPERFESTES BEZUGSSYSTEM

$$\mathbf{F} = (\partial x^a / \partial X^A) \mathbf{g}_a \mathbf{G}^A = (\partial x_a / \partial X^A) \mathbf{g}^a \mathbf{G}^A \quad (2.1.4)$$

mit den entsprechenden Permutationen für die restlichen Kombinationen aus ko- und kontravarianten Basisvektoren. Dabei bezeichnen  $\mathbf{g}_a$  und  $\mathbf{G}_A$  die kovarianten Basisvektoren in der verformten bzw. unverformten Konfiguration, während  $\mathbf{g}^a$  und  $\mathbf{G}^A$  die entsprechenden kontravarianten Basisvektoren sind.

Im folgenden werden häufig nur die Komponenten des jeweiligen Tensors ausgeschrieben, so daß (2.1.4) ersetzt wird durch

$$F^a_A = (\partial x^a / \partial X^A) \quad , \quad F_{aA} = (\partial x_a / \partial X^A) \quad . \quad (2.1.5)$$

Zu einer direkten Benutzung in einem Stoffgesetz ist der Deformationsgradient allerdings ungeeignet, da er die Rotationen der Volumenelemente relativ zum Bezugssystem enthält und daher dem Anspruch auf Objektivität nicht gerecht wird. Durch die Einführung der CAUCHY-GREEN-Verzerrungstensoren erhält man Dehnungsmaße, aus denen die koordinatensystembezogenen Rotationen eliminiert sind: Der rechte CAUCHY-GREEN Verzerrungstensor  $\mathbf{C}$  ist definiert durch

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (2.1.6)$$

mit den Komponenten

$$C_{AB} = F^a_A \cdot F_{aB} \quad . \quad (2.1.7)$$

Der linke CAUCHY-GREEN Verzerrungstensor  $\mathbf{b}$  ist definiert durch

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.1.8)$$

mit den Komponenten

$$b^{ab} = F^{aA} F_{A b} \quad . \quad (2.1.9)$$

Während  $C$  auf die Ausgangskonfiguration mit der Basis  $G_A$  und der Metrik  $G_{AB}$  bezogen ist, ist  $b$  auf die aktuelle Konfiguration mit der Basis  $g_a$  und der Metrik  $g_{ab}$  bezogen. Aus ihnen ergeben sich direkt der GREEN'sche Dehnungstensor  $E$  und der ALMANZI'sche Dehnungstensor  $e$  mit den Komponenten

$$E_{AB} = (1/2)(C_{AB} - G_{AB}) \quad \text{bzw.} \quad E^A_B = (1/2)(C^A_B - \delta^A_B) \quad (2.1.10)$$

und

$$e^{ab} = (1/2)(g^{ab} - b^{ab}) \quad \text{bzw.} \quad e^a_b = (1/2)(\delta^a_b - b^a_b). \quad (2.1.11)$$

Dabei ist  $E$  auf die Ausgangskonfiguration und  $e$  auf die aktuelle Konfiguration bezogen. ( $E$  ist auch unter der Bezeichnung "materieller Verzerrungstensor" oder "LAGRANGE'scher Dehnungstensor" bekannt, während für  $e$  auch die Bezeichnungen "räumlicher Verzerrungstensor" oder "EULER'scher Dehnungstensor" üblich sind). Ein Überblick über die Definition verschiedener Verzerrungsmaße findet sich in [91].

Die gebräuchlichsten objektiven Dehnungsmaße sind für reelle Parameter  $m$  in der Ein-Parameter-Familie

$$\epsilon^i = \begin{cases} (1/2m)(\lambda_i^{2m} - 1) & \text{für } m \neq 0, i=1,2,3 \\ \ln \lambda_i & \text{für } m = 0 \end{cases} \quad (2.1.12)$$

enthalten [34,59,60]. Dabei sind  $\lambda_i$  die Streckungen ("stretches") in den Hauptdehnungsrichtungen und  $\epsilon_i$  die entsprechenden Hauptdehnungen der durch beliebig wählbare Werte  $m$  definierten Dehnungsmaße. So erhält man z.B. für  $m=1$  die Hauptdehnungen des GREEN'schen, für  $m=-1$  die des ALMANZI'schen und für  $m=0$  die des HENCKY'schen Dehnungstensors [34].

Eine alternative Methode zur Herleitung von Dehnungsmaßen geht auf LEHMANN [84 - 89] zurück: Beschreibt man die Bewegung mittels eines Koordinatensystems, das an  $B$  fixiert ist, so daß es die gleiche Verzerrung erfährt wie der betrachtete Körper (konvektives Koordinaten-

system), so läßt sich die Änderung der Metrik durch die Matrizen

$$q^a_b = G^{ac} g_{cb} \quad , \quad (q^{-1})^a_b = g^{ac} G_{cb} \quad (2.1.13)$$

darstellen. Dabei sind  $G^{ac}$  und  $g^{ac}$  die Metriken ein und desselben Koordinatensystems im unverzerrten und verzerrten Zustand. Durch Bezug auf die Basisvektoren in der unverformten Konfiguration erhält man den Dehnungstensor  $\overset{0}{q}$ , definiert durch

$$\overset{0}{q} = q^a_b G_a G^b \quad \text{bzw.} \quad (\overset{0}{q})^{-1} = (q^{-1})^a_b G_a G^b \quad (2.1.14)$$

Durch Bezug auf die verformte Konfiguration erhält man analog zu (2.1.14)

$$q = q^a_b g_a g^b \quad \text{bzw.} \quad (q^{-1})^a_b g_a g^b \quad (2.1.15)$$

Mittels isotroper Tensorfunktionen lassen sich diese Dehnungstensoren in eine unbegrenzte Anzahl äquivalenter Dehnungsmaße (u.a. auch in den GREEN'schen-, ALMANSI'schen-, HENCKY'schen Dehnungstensor) überführen [88].

Für die Formulierung von Stoffgesetzen ist es vorteilhaft, daß bei der Verwendung eines mitbewegten Koordinatensystems die störenden Starrkörperrotationen à priori eliminiert sind. Daher ist diese Darstellungsweise in besonderem Maße bei der Formulierung von Modellen zum Stoffverhalten geeignet.

Allgemein hängt die Wahl des geeigneten Deformationsmaßes von der Problemstellung ab: Ist das Interesse hauptsächlich auf das Materialverhalten ausgerichtet, so ist in der Regel eine Darstellung in Bezug auf die verformte Konfiguration zu empfehlen, da diese einen natürlichen Rahmen für das Stoffgesetz bildet. Allerdings muß hierbei in Kauf genommen werden, daß die verformte Konfiguration bei Randwertproblemen meistens unbekannt ist und somit als Teil der unbekanntem Lösung in die Problemformulierung mit eingeht. Da zur Erstellung von Materialgesetzen jedoch üblicherweise homogene Deh-

nungs- und Spannungszustände experimentell erzeugt werden, stellt die unbekannte Verformung in diesem Fall kein wesentliches Problem dar.

Im Gegensatz dazu ist man bei der Lösung allgemeiner inhomogener Randwertprobleme auf die möglichst genaue Kenntnis der Bezugskonfiguration angewiesen. In diesem Falle bietet sich demzufolge die Ausgangskonfiguration als Bezugskonfiguration an. Dieser Standpunkt wird hier in den Kapiteln, die die Lösung von Randwertproblemen betreffen, auch eingenommen. Weitere Kriterien für die geeignete Darstellungsweise ist die Zerlegbarkeit des gewählten Dehnungsmaßes in reversiblen und irreversiblen Anteil (siehe auch Abschnitt II.3) sowie die Frage, ob das gewählte Dehnungsmaß eine auf die Strukturgeometrie bezogene Darstellung im Bedarfsfall fördert (siehe Kapitel VII).

## II.2 DIE ERHALTUNGSSÄTZE DER THERMOMECHANIK

### II.2.1 Das Massenerhaltungsgesetz

Beschränkt man sich auf die Beschreibung von Vorgängen, bei denen Wachstums- und Schrumpfungsprozesse, etwa durch Diffusion, keine Rolle spielen ("locally mass closed systems" [38]), so folgt aus der Massenerhaltung für den Gesamtkörper in raumbezogener Darstellung

$$\left(\frac{d}{d\tau}\right) \int_{(V)} \rho dV(\mathbf{x}) = \int_{(V)} (\partial/\partial\tau)(\rho J) dV(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.2.1)$$

die lokale Forderung

$$(\partial/\partial\tau)(\rho J) = 0 \quad (2.2.2)$$

beziehungsweise

$$\rho_{,0} J_{,0} = \rho J. \quad (2.2.3)$$

Dabei ist  $J$  die JAKOBI'sche Determinante [100], für den Fall allgemeiner Koordinatensysteme definiert durch

$$J = \text{Det} [\partial x^a(\mathbf{X})/\partial X^A] [(\text{Det } g_{ab})/(\text{Det } G_{AB})]^{1/2} \quad (2.2.4)$$

und  $\rho$  bzw.  $\rho_0$  bezeichnen die Dichte im verformten bzw. unverformten Zustand. Für kartesische Koordinaten vereinfacht sich  $J$  zu

$$J = \text{Det} [\partial x^a(\mathbf{X})/\partial X^A]. \quad (2.2.5)$$

Für reguläre Bewegungen ist  $J(\mathbf{X}, \tau)$  immer größer als null. Dies folgt sofort daraus, daß für die Ausgangskonfiguration zur Zeit  $\tau = 0$  die JAKOBI'sche Determinante  $J_0 = J(\mathbf{X}, 0)$  den Wert eins hat und für alle Zeiten  $\tau$  gilt, daß  $J(\mathbf{X}, \tau)$  von null verschieden ist.

### II.2.2. Der Impulssatz

Die globale Impulsbilanz bezogen auf die aktuelle Konfiguration in räumlichen Koordinaten mit  $\mathbf{v}$  als Geschwindigkeit eines Volumenelementes lautet:

$$\left(\frac{d}{d\tau}\right) \int_{(V)} \rho v^a dV = \int_{(V)} p^a dV + \int_{(S)} f^a dS; \quad (2.2.6)$$

d.h. die zeitliche Änderung des Integrals der Bewegungsgröße  $\rho \mathbf{v}$  über den gesamten Körper  $B$  ist gleich der resultierenden Kraftwirkung auf  $B$ . Dabei bezeichnet  $f$  hier die Oberflächenkraftdichte auf der gesamten Oberfläche  $S$ , bestehend aus  $S_F$ , wo  $f$  vorgegeben ist und  $S_K$ , wo  $f$  unbekannt ist.

Es ist möglich, das Oberflächenintegral in Gleichung (2.2.6) in ein Volumenintegral umzuwandeln. Dazu wird zunächst die Oberflächenkraftdichte  $f$  als Projektion eines Tensors  ${}^C\sigma$  in die Oberflächennormalenrichtung  $\bar{\mathbf{n}}$  der verformten Konfiguration von  $B$  interpretiert:

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{n}} \cdot {}^C\sigma \quad (2.2.7)$$

oder, in Komponentenschreibweise

$$f^a = \bar{n}_b \, {}^C\sigma^{ab}. \quad (2.2.8)$$

Wendet man jetzt das Divergenztheorem an, so läßt sich das Oberflächenintegral in Gleichung (2.2.6) umformen

$$\int_{(S)} \bar{n}_b c_{\sigma}^{ab} ds = \int_{(V)} c_{\sigma}^{ab} |_{,b} dv \quad , \quad (2.2.9)$$

wobei der vertikale Strich die kovariante Ableitung nach der dem Strich folgende Koordinate bedeutet. Gleichung (2.2.6) geht über in

$$\left(\frac{d}{d\tau}\right) \int_{(V)} \rho v^a dv = \int_{(V)} (\rho p^a + c_{\sigma}^{ab} |_{,b}) dv \quad . \quad (2.2.10)$$

$c_{\sigma}$  wird CAUCHY'scher oder EULER'scher Spannungstensor genannt. Er ist vollständig auf die Basis der verformten Konfiguration von B bezogen:

$$c_{\sigma} = c_{\sigma}^{ab} g_a g_b \quad . \quad (2.2.11)$$

Wird bei der Zerlegung von  $f$  anstelle des Normalenvektors  $\bar{n}$  der verformten Konfiguration der Normalenvektor  $n$  der Ausgangskonfiguration benutzt, so ergibt sich die Zerlegung

$$f = n \cdot t \quad (2.2.12)$$

oder, in Komponentenschreibweise

$$f^a = n_B t^{aB} \quad . \quad (2.2.13)$$

Die Anwendung des Divergenztheorems liefert jetzt:

$$\int_{(S_o)} n_B t^{aB} ds = \int_{(V_o)} t^{aB} |_{,B} dv \quad (2.2.14)$$

und die Gleichung (2.2.6) geht über in

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right) \int_{(V_o)} \rho_o v^a dv = \int_{(V_o)} (\rho_o p^a + t^{aB} |_{,B}) dv \quad . \quad (2.2.15)$$

Der Tensor  $t$  ist als "erster PIOLA-KIRCHHOFF'scher Spannungstensor" bekannt. Andere übliche Bezeichnungen sind "LAGRANGE'scher" oder "Nomineller" Spannungstensor.

Es ist zu bemerken, daß  $t$  auf die Basen der unverformten und der verformten Konfigurationen gleichzeitig bezogen ist mit

$$t = t^{aB} g_a G_B . \quad (2.2.16)$$

Durch Multiplikation mit der Inversen des Deformationsgradiententensors  $F$  kann dann der zweite PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor  $\sigma$  (auch als "KIRCHHOFF'scher Spannungstensor bezeichnet) erzeugt werden. Er ist definiert durch

$$\sigma = (F^{-1}) \cdot t = (F^{-1})^A_{.a} t^{aB} G_A G_B . \quad (2.2.17)$$

Für ihn ist charakteristisch, daß er ausschließlich auf die Basis der unverformten Konfiguration von  $B$  bezogen ist.

Benutzt man ihn in Gleichung (2.2.15), so erhält man:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right) \int_{(V_0)} \rho_0 v^a dv = \int_{(V_0)} [\rho_0 p^a + (F^a_{.A} \sigma^{AB})|_B] dv . \quad (2.2.18)$$

Entsprechend läßt sich der Zusammenhang zwischen dem ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen und dem CAUCHY'schen Spannungstensor herleiten. Man erhält:

$$t = (\rho_0/\rho)(F^{-1}) \cdot c_\sigma \quad \text{bzw.} \quad t^{aB} = (\rho_0/\rho)(F^{-1})^B_{.b} c_\sigma^{ab} . \quad (2.2.19)$$

Für den Fall quasistatischer Prozesse sind die linken Seiten von (2.2.10, 2.2.15, 2.2.18) jeweils null und man erhält die drei äquivalenten Formen der globalen Gleichgewichtsbedingungen

$$\int_{(V)} (\rho p^a + c_\sigma^{ab}|_b) dv = 0 \quad (2.2.20)$$

$$\int_{(V_o)} (\rho_o p^a + t^{aB}|_B) dV = 0 \quad (2.2.21)$$

$$\int_{(V_o)} (\rho_o p^a + (F^a{}_{.A} \sigma^{AB})|_B] dV = 0 \quad (2.2.22)$$

Über die Annahme, daß diese Gleichungen nicht nur für das Gesamtsystem sondern auch für jedes beliebige Subvolumen gültig sind, erhält man die lokale Form der Gleichgewichtsbedingungen zu

$$\rho p^a + c_{\sigma}^{ab}|_b = 0 \quad \text{in } V \quad (2.2.23)$$

$$\rho_o p^a + t^{aB}|_B = 0 \quad \text{in } V_o \quad (2.2.24)$$

$$\rho_o p^a + (F^a{}_{.A} \sigma^{AB})|_B = 0 \quad \text{in } V_o \quad (2.2.25)$$

Als statische Randbedingungen auf dem Teil  $S_F$  der Oberfläche von B, auf dem die Kräfteverteilung vorgeschrieben ist, sind dann die Gleichungen (2.2.7) bzw. (2.2.8), (2.2.12) bzw. (2.2.13) oder, ausgedrückt mittels des zweiten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors

$$f = n \cdot (F \cdot \sigma) \quad \text{bzw.} \quad f^a = n_B F^a{}_{.A} \sigma^{AB} \quad (2.2.26)$$

zu erfüllen.

Der Übergang von der globalen zur lokalen Form der Gleichgewichtsbedingung ist allerdings nur unter der Voraussetzung gerechtfertigt, daß die Fernwirkungen der Massenelemente von B aufeinander (zum Beispiel Gravitationswechselwirkungen oder molekulare Kohäsion [6,38]) vernachlässigt werden. Diese Effekte spielen bei den hier behandelten technischen Prozessen jedoch keine Rolle, so daß fortan die lokalen Gleichgewichtsbedingungen in der obigen Form benutzt werden.

### II.2.3 Der Drallsatz

Die globale Drehimpulsbilanz für eine volumenbezogene Momentenverteilung  $m$  ergibt sich bei Bezug auf die aktuelle Konfiguration in räumlichen Koordinaten analog zu Gleichung (2.2.6) zu:

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \frac{d}{d\tau} \epsilon_{ab}^k x^a \rho v^b dV &= \int_{(V)} (\epsilon_{ab}^k x^a p^b + m^k) dV + \\ &\int_{(S)} \epsilon_{ab}^k x^a f^b dS, \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

wobei  $\epsilon_{ab}^k$  das Permutationssymbol ist.  $\epsilon_{ab}^k$  nimmt für die Permutationen (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) der Indizes den Wert eins an. Für sich wiederholende Werte der Indizes hat  $\epsilon$  den Wert null und für alle anderen Fälle den Wert minus eins.

Unter der Benutzung des CAUCHY'schen Spannungstensors erhält man hieraus:

$$\int_{(V)} \epsilon_{ab}^k x^a \rho (dv^b/d\tau) dV = \int_{(V)} \{ \epsilon_{ab}^k [c_{\sigma}^{ab} + x^a (c_{\sigma}^{bc} |_{c+p^b})] + m^k \} dV. \quad (2.2.28)$$

Dabei ist berücksichtigt worden, daß wegen der Symmetrie von  $(v^a v^b)$  in den Indizes  $a$  und  $b$  und der Antimetrie von  $\epsilon_{ab}^k$  in  $a$  und  $b$  der Ausdruck  $\epsilon_{ab}^k v^a v^b = \epsilon_{ab}^k (\partial x^a / \partial \tau) v^b$  identisch null ist.

Setzt man Gleichung (2.2.10) in (2.2.28) ein, so ergibt sich

$$\int_{(V)} (\epsilon_{ab}^k c_{\sigma}^{ab} + m^k) dV = 0 \quad (2.2.29)$$

als Forderung. Schließt man ähnlich wie bei Betrachtung des Impulssatzes Wechselwirkungseffekte aus, die den Übergang von der integralen Form zur lokalen Form stören, so folgt aus Gleichung (2.2.29) schließlich die lokale Bedingung

$$\epsilon_{ab}^k c_{\sigma}^{ab} = -m^k. \quad (2.2.30)$$

Für verschwindende Momentenverteilungen  $m$  ist dies gleichbedeutend mit der Forderung nach der Symmetrie des CAUCHY'schen Spannungstensors  ${}^c\sigma$ :

$$({}^c\sigma)^T = {}^c\sigma \quad \text{bzw.} \quad c_{\sigma}^{ab} = c_{\sigma}^{ba}. \quad (2.2.31)$$

Unter der Benutzung des Zusammenhangs zwischen  ${}^c\sigma$ ,  $t$  und  $\sigma$  nach (2.2.17) und (2.2.19) erhält man die der Gleichung (2.2.31) entsprechenden Forderungen

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \quad \text{bzw.} \quad F_{.A}^i t^{jA} = F_{.A}^j t^{iA} \quad (2.2.32)$$

und

$$[\mathbf{F} \cdot (\mathbf{F} \cdot \sigma)]^T = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F} \cdot \sigma) \quad \text{bzw.} \quad F_{.A}^i F_{.B}^j \sigma^{AB} = F_{.A}^j F_{.B}^i \sigma^{AB}. \quad (2.2.33)$$

Durch zweifache Multiplikation beider Seiten von (2.2.33) mit der Inversen des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  erhält man sofort die Bedingung

$$\sigma^T = \sigma \quad \text{bzw.} \quad \sigma^{AB} = \sigma^{BA}, \quad (2.2.34)$$

d.h. die Forderung nach der Symmetrie des zweiten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors.

#### II.2.4 Erster und zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Der erste Hauptsatz (Energieerhaltungssatz) besagt allgemein, daß für einen Körper  $B$  bei Vernachlässigung der potentiellen Energie die zeitliche Änderung der Summe aus kinetischer und innerer Energie gleich der zugeführten (mechanischen und nichtmechanischen) Energie ist:

$$(d/d\tau)(K + E) = \dot{W} + \dot{Q}. \quad (2.2.35)$$

Dabei gelten die folgenden Definitionen:

Kinetische Energie  $K$ :

$$K = (1/2) \int_{(V)} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dV \quad (2.2.36)$$

Innere Energie E:

$$E = \int_{(V)} \rho e dV \quad (2.2.37)$$

mit e als spezifischer innerer Energie, die neben der direkt wiedergewinnbaren mechanischen Energie noch thermische, chemische und andere Energieanteile enthalten kann.

Zugeführte mechanische Leistung  $\dot{W}$  :

$$\dot{W} = \int_{(V)} \dot{w} dV = \int_{(V)} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{(S)} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dS \quad (2.2.38)$$

mit  $\dot{w}$  als spezifischer mechanischer Leistung.

Zugeführte nichtmechanische Leistung  $\dot{Q}$  :

$$\dot{Q} = \int_{(V)} \rho r dV - \int_{(S)} \mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{n}} dS. \quad (2.2.39)$$

Hier bezeichnet r die volumenhaft verteilten Wärmequellen bzw. -senken und q den Energiestromvektor.

Setzt man die Definitionen (2.2.36-39) in die Gleichung (2.2.35) ein, so erhält man in Indexschreibweise:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \right) \int_{(V)} [\rho e + (1/2)(g_{ab} v^a v^b)] dV &= \int_{(V)} \rho (g_{ab} p^a v^b + r) dV \\ &+ \int_{(S)} g_{ab} (v^a f^b - q^a n^b) dS \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

bei Bezug auf die aktuelle Konfiguration und

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \right) \int_{(V_o)} [\rho_o e_o + (1/2)(g_{ab} v_o^a v_o^b)] dV &= \int_{(V_o)} \rho_o (g_{ab} p_o^a v_o^b + r_o) dV + \\ &\int_{(S_o)} G_{AB} (n^A t^{AB} v_o^b g_{ab} - q_o^A n^B) dS \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

bezogen auf die Ausgangskonfiguration, auf die der tiefgestellte Index "o" hinweist. Bei Gültigkeit der Massenerhaltung, des Impulssatzes und des Drallsatzes erhält man aus (2.2.40-41) die lokale Form des ersten Hauptsatzes:

Bezogen auf die aktuelle Konfiguration ergibt sich mit  $\dot{\mathbf{d}}$  als Zeitableitung des ALMANSI'schen Dehnungstensors

$$\rho \dot{e} + \mathbf{V}_x \cdot \mathbf{q} = {}^c \sigma : \dot{\mathbf{d}} + \rho r \quad (2.2.42)$$

beziehungsweise in Indeschreibweise

$$\rho [(\partial e / \partial \tau) + (\partial e / \partial x^a) v^a] + q^a|_a = (1/2) {}^c \sigma^{ab} (v_a|_b + v_b|_a) + \rho r \quad (2.2.43)$$

Bezogen auf die Ausgangskonfiguration erhält man:

$$\rho_o \dot{e}_o + \mathbf{V}_x \cdot \mathbf{q}_o = \sigma : \mathbf{D} + \rho_o r_o \quad (2.2.44)$$

bzw. in Indeschreibweise

$$\rho_o (\partial e_o / \partial \tau) + q_o^A|_A = t_a^A (\partial F_{\cdot A}^a / \partial \tau) + \rho_o r_o = \sigma^{AB} D_{AB} + \rho_o r_o \quad (2.2.45)$$

mit

$$D_{AB} = (1/2) [F_{\cdot B}^b (v_o)_b|_A + F_{\cdot A}^b (v_o)_b|_B] \quad (2.2.46)$$

und

$$q_o^A = J(F^{-1})_{\cdot a}^A q^a \quad (2.2.47)$$

Geht man davon aus, daß die Änderungsgeschwindigkeit  $\dot{w}$  der spezifischen mechanischen Energiedichte  $w$  aus einem direkt rückgewinnbaren Anteil

$\dot{w}_r$  und einem nicht direkt rückgewinnbaren Anteil  $\dot{w}_i$  besteht, so gilt bei Zugrundelegung des MAXWELL'schen Materialmodells (z.B. [41]), bei welchem vorausgesetzt wird, daß ein materielles Element als Hintereinanderschaltung verschiedener Feder- bzw. Feder-Dämpfer-Reibelemente interpretiert werden kann (siehe auch Bild 9):

$$\dot{w} = \dot{w}_r + \dot{w}_i = (1/\rho_0)\sigma : (\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_i) \quad (2.2.48)$$

Hierbei ist das auf die Ausgangskonfiguration bezogene adjungierte Paar  $\sigma, \epsilon$  zunächst beliebig und muß erst bei der weiteren Konkretisierung des Problems spezifiziert werden. Die Dehnungsgeschwindigkeitstensoren  $\dot{\epsilon}_r$  und  $\dot{\epsilon}_i$  sind dabei nicht notwendigerweise symmetrisch [88].

Mittels der LEGENDRE-Transformation kann über die innere Energie  $e$  (2.2.37) die spezifische freie Energie (HELMHOLTZ'sche Energie)  $\xi$  und die spezifische freie Enthalpie  $\zeta$  definiert werden; die den inneren Zustand des Materials beschreibenden Parameter werden hier und im folgenden mit  $\kappa$  bezeichnet:

$$\xi = \xi(\epsilon_r, \theta, \kappa) = e - \theta s \quad (2.2.49)$$

$$\zeta = \zeta(\sigma, \theta, \kappa) = \xi - (1/\rho_0)\sigma : \epsilon_r \quad (2.2.50)$$

wobei  $\zeta$  auch direkt mit  $e$  über die doppelte LEGENDRE-Transformation verbunden werden kann

$$\zeta = e - \theta s - (1/\rho_0)\sigma : \epsilon_r \quad (2.2.51)$$

Die spezifische Entropie als zur Temperatur konjugierte Variable ist hier mit  $s$  bezeichnet. Gleichung (2.2.49) ist äquivalent zu

$$\sigma = \rho_0 (\partial \xi / \partial \epsilon_r) \quad , \quad s = -\partial \xi / \partial \theta \quad (2.2.52)$$

und (2.2.50) bzw. (2.2.51) ist äquivalent zu

$$\epsilon_r = -\rho_0 (\partial \zeta / \partial \sigma) \quad , \quad s = -\partial \zeta / \partial \theta \quad (2.2.53)$$

Zur Herleitung der Evolutionsgleichungen für die Entropie sowie den reversiblen und den irreversiblen Anteil der mechanischen Leistung wird die zeitliche Ableitung von (2.2.44,48-49) gebildet. Man erhält mit (2.2.27) und (2.2.48)

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (\partial\xi/\partial\epsilon_r) : \dot{\epsilon}_r + (\partial\xi/\partial\theta)\dot{\theta} + (\partial\xi/\partial\kappa) \cdot \dot{\kappa} = \\ &\dot{w}_r + \dot{w}_i + r - (1/\rho_0) \operatorname{div} \mathbf{q} - \dot{\theta} s - \theta \dot{s} . \end{aligned} \quad (2.2.54)$$

Aus (2.2.48) und (2.2.52) folgt dann

$$\dot{\theta} \dot{s} = \dot{w}_i + r - (1/\rho_0) \operatorname{div} \mathbf{q} - (\partial\xi/\partial\kappa) \cdot \dot{\kappa} . \quad (2.2.55)$$

Benutzt man dann weiter (2.2.53)<sub>2</sub> mit

$$\dot{s} = -[(\partial^2\xi/\partial\theta^2)\dot{\theta} + (\partial^2\xi/\partial\theta\partial\epsilon_r) : \dot{\epsilon}_r + (\partial^2\xi/\partial\theta\partial\kappa) \cdot \dot{\kappa}] , \quad (2.2.56)$$

so erhält man als Evolutionsgleichung für den irreversiblen Anteil der mechanischen Arbeit

$$\begin{aligned} \dot{w}_i &= -\theta [(\partial^2\xi/\partial\theta^2)\dot{\theta} + (\partial^2\xi/\partial\theta\partial\epsilon_r) : \dot{\epsilon}_r] - \\ &[(\partial^2\xi/\partial\theta\partial\kappa) - (1/\theta)(\partial\xi/\partial\kappa)] \cdot \dot{\kappa} + (1/\rho_0) \operatorname{div} \mathbf{q} - r . \end{aligned} \quad (2.2.57)$$

Eine äquivalente Gleichung erhält man bei Benutzung der freien Enthalpie  $\zeta$  unter Verwendung der Gleichungen (2.2.42,48,51,53) mit

$$\begin{aligned} \dot{w}_i &= -\theta [(\partial^2\zeta/\partial\theta^2)\dot{\theta} + (\partial^2\zeta/\partial\theta\partial\sigma) : \dot{\sigma}] - \\ &[(\partial^2\zeta/\partial\theta\partial\kappa) - (1/\theta)(\partial\zeta/\partial\kappa)] \cdot \dot{\kappa} + (1/\rho_0) \operatorname{div} \mathbf{q} - r . \end{aligned} \quad (2.2.58)$$

Die Evolution des reversiblen Anteils  $\dot{w}_r$  der mechanischen Elementarleistung ist einfach gegeben durch

$$\dot{w}_r = (\partial\xi/\partial\epsilon_r) : \dot{\epsilon}_r . \quad (2.2.59)$$

Bei Verwendung der spezifischen freien Enthalpie  $\zeta$  ergibt sich unter Benutzung der zeitlichen Ableitung von (2.2.53)<sub>1</sub> und (2.2.48)

$$\dot{w}_r = -\sigma : [(\partial^2\zeta/\partial\sigma^2) : \dot{\sigma} + (\partial^2\zeta/\partial\sigma\partial\theta)\dot{\theta} + (\partial^2\zeta/\partial\sigma\partial\kappa) \cdot \dot{\kappa}] . \quad (2.2.60)$$

Die Evolutionsgleichungen (2.2.56,57,60) bzw. (2.2.40,58,44) für  $s$ ,  $w_r$  und  $w_i$  resultieren aus der Anwendung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik. Temperatur und Entropie sind hier zunächst nur Transformationsvariable, deren physikalischer Inhalt erst durch die Forderung des zweiten Hauptsatzes erhellt wird: Die Entropie eines abgeschlossenen Systems nimmt nicht ab; nur in einem idealen Prozeß kann sie konstant bleiben. Die Entropie wird somit zu einem Evolutionsindikator [128], der die Richtung von Prozessen anzeigt. Für aufeinanderfolgende benachbarte Gleichgewichtszustände wird dies ausgedrückt durch

$$\int_{(V_0)} \theta \Delta s \, dV > \Delta E - \Delta W \quad , \quad (2.2.61)$$

wobei  $W$  die gesamte mechanische Energie des Systems ist. Betrachtet man jedes materielle Element als thermodynamisches System und geht man zur Beschreibung von Zustandsänderungen durch Geschwindigkeiten über (was nur unter der in II.1 getroffenen Annahme zur Prozeßführung in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts möglich ist), so erhält man mit (2.2.42) aus (2.2.61) die CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung

$$\theta \dot{s} > -(1/\rho_0) \operatorname{div} \mathbf{q} + r \quad (2.2.62)$$

als lokale Formulierung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. Nach LEHMANN [88] kann weiter zwischen reversiblen und irreversiblen Anteil der Entropieänderung  $\dot{s}_r$  und  $\dot{s}_d$  unterschieden werden. Danach sind die folgenden spezifischen Leistungen die physikalische Ursache für den irreversiblen Anteil  $\dot{s}_d$ :

- a) Die unmittelbar dissipierte Leistung  $\dot{w}_d$ , definiert durch  $\dot{w}_d = \dot{w}_i - \dot{w}_h$ , wobei  $\dot{w}_h$  der Leistungsanteil ist, der für den Anteil der Strukturänderung aufgebracht wird, der bei entsprechender physikalischer Behandlung des Materials wiedergewonnen werden kann.
- b) Der irreversible Anteil des Energieflusses  $\mathbf{q}_d$  mit  $\mathbf{q}_d = \mathbf{q} - \mathbf{q}_h$ , wobei  $\mathbf{q}_h$  den Nicht-Wärmeanteil des Energieflusses darstellt.

c) Die Entropieproduktion  $\dot{\eta}$ , hervorgerufen durch den Nicht-Wärmeanteil  $q_h$  des Energieflusses sowie durch die spezifischen Energiequellen  $r$  und andere denkbare interne dissipative Vorgänge.

Damit ergibt sich eine gegenüber (2.2.62) verschärfte Forderung des zweiten Hauptsatzes:

$$\theta \dot{s}_d = \dot{w}_d - (1/\rho\theta) \nabla\theta + \theta \dot{\eta} > 0 \quad . \quad (2.2.63)$$

## II.3 STOFFGESETZE INELASTISCHER KÖRPER

### II.3.1 Zerlegung der Deformationen in reversiblen und irreversiblen Anteil.

Die in Abschnitt II.2 hergeleiteten Erhaltungssätze der Thermomechanik erlauben noch keine Lösung von Randwertproblemen. Dazu ist die Verknüpfung der adjungierten Spannungs- und Dehnungsmaße sowie der adjungierten internen Parameter und der kalorischen Variablen miteinander über das Materialgesetz erforderlich. Da dieses aber ganz verschiedene physikalische Effekte wiedergeben muß, ist eine Aufspaltung der gesamten Deformationen beziehungsweise Deformationsgeschwindigkeiten entsprechend der Gleichung (2.2.48) angebracht.

Während im Rahmen der geometrisch linearen Theorie die additive Zerlegung des linearen Dehnungstensors  $\epsilon_L = (1/2)[\nabla u + (\nabla u)^T]$  in rein elastischen Anteil  $\epsilon_L^e$  und inelastischen Anteil  $\epsilon_L^i$  gültig ist mit

$$\epsilon_L = \epsilon_L^e + \epsilon_L^i \quad , \quad (2.3.1)$$

haben sich im Bereich der geometrisch nichtlinearen Theorien nebeneinander verschiedene Konzepte entwickelt.

#### a) Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

Der Deformationsgradient  $F$  wird multiplikativ in Anteile  $F^e$  und  $F^i$  zerlegt mit

$$F = F^e \cdot F^i \quad \text{bzw.} \quad F_{\cdot K}^j = (F^e)_{\cdot M}^j (F^i)_{\cdot K}^M \quad . \quad (2.3.2)$$

Dabei bildet  $F^i$  die Ausgangskonfiguration in einen fiktiven und spannungsfreien Zwischenzustand  $\Omega^*$  ab, der einen im allgemeinen Fall inkompatiblen Verformungszustand darstellt. Die Konfiguration  $\Omega^*$  wird dann wieder als Ausgangskonfiguration für den reversiblen Deformationsanteil  $F^e$  benutzt.

Die Basis von  $F^i$  setzt sich aus einem Basisvektor  $g_M^*$  des fiktiven spannungsfreien Zustands zusammen, während die Komponenten von  $F^e$  auf einen Basisvektor  $g_j$  der verformten Konfiguration und einen Basisvektor  $g^{*M}$  der spannungsfreien Konfiguration  $\Omega^*$  bezogen sind.

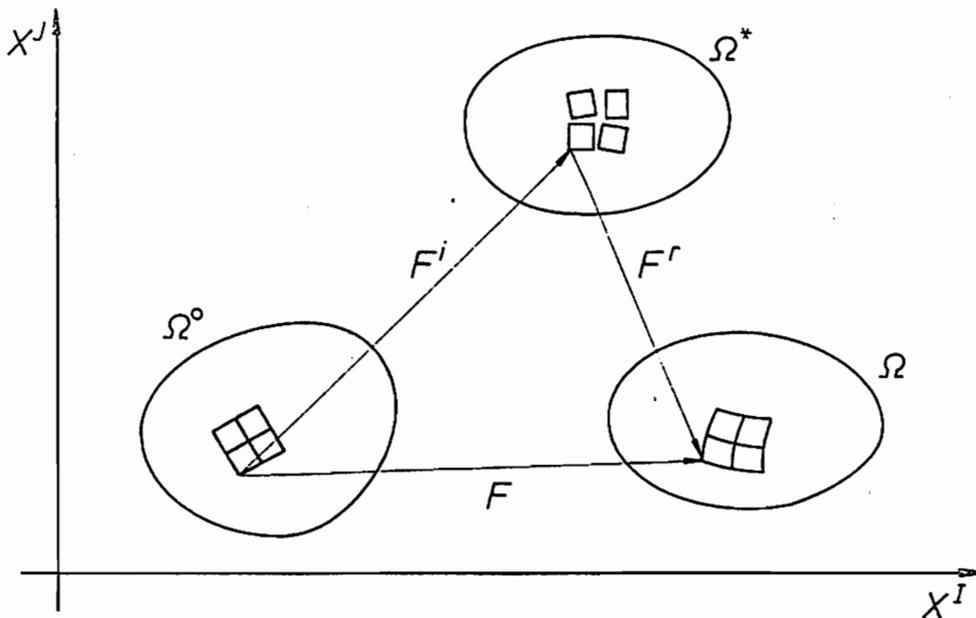


BILD 4: MULTIPLIKATIVE ZERLEGUNG DES DEFORMATIONSGRAIDENTEN

Die Zerlegung (2.3.2) wurde von BACKMAN [3] erstmals eingeführt und insbesondere durch LEE und LIU [81], LEE [82] und MANDEL [97 - 99] weiterentwickelt und auf Probleme der Plastizitätstheorie angewandt. Dieses Konzept findet heute insbesondere in theoretisch orientierten Arbeiten, in denen keine Einschränkungen der Deformation postuliert werden, breite Anwendung.

**b) Additive Zerlegung des GREEN'schen Dehnungstensors**

Hierbei wird der GREEN'sche Dehnungstensor  $E$  durch

$$E = E' + E^i \quad (2.3.3)$$

in einen rein irreversiblen Anteil  $E^i$  und den Differenzdehnungszustand  $E'$  zerlegt. Dieses Vorgehen entspricht der Zerlegung im Fall der geometrisch linearen Theorie; in  $E^i$  sind hier die plastischen und viskoplastischen Dehnungsanteile zusammengefaßt, die mit einem gegebenen Stoffgesetz beschrieben sind. Erstmals in einen weiteren thermomechanischen Rahmen wurde es von GREEN und NAGHDI [44] gestellt, wobei schon dort das Problem angesprochen wird, daß  $E'$  im allgemeinen nicht unabhängig von den inelastischen Deformationen ist. Von besonderem Interesse wird es für uns sein, unter welchen Umständen  $E'$  rein reversibel und somit über einfache konstitutive Gesetze zugänglich ist (Kommentare zur Verwendung von (2.3.3) siehe auch in [53], [88]).

**c) Metriktransformation eines konvektiven Koordinatensystems**

Wie in Abschnitt II.1.4 dargestellt wurde, läßt sich die Deformation eines Körpers durch eine Transformationsmatrix  $q$  beschreiben, die das Produkt der Metriken eines mitbewegten Koordinatensystems im unverformten und verformten Zustand ist [Gleichung (2.1.13)]. Durch Bezug auf die verschiedenen Basissysteme ließen sich dann verschiedene Dehnungstensoren definieren [Gleichungen (2.1.14-15)]. Diese Metriktransformation läßt sich auf natürliche Weise zur Zerlegung der Gesamtdeformation in reversiblen und irreversiblen Anteil nutzen. Dazu wird die Metrik  $q^*$  der fiktiven spannungsfreien Zwischenkonfiguration  $\Omega^*$  eingeführt, mit deren Hilfe die Transformationsmatrix  $q_b^a$  zerlegt wird:

$$q_b^a = G^{ab} g_{cb} = G^{am*} g_{mr}^* g_{sb} = (q^i)^a_{.r} (q^r)^r_{.b} \quad (2.3.4)$$

Hierbei bezeichnet  $q^i$  den irreversiblen und  $q^r$  den reversiblen Anteil

der Gesamtdeformation. Im Unterschied zur Zerlegung (2.3.2) werden durch die Verwendung konvektiver Koordinaten die Rotationen der materiellen Elemente von vornherein von der Betrachtung ausgeschlossen.

Alle drei Konzepte wählen die fiktive spannungsfreie Konfiguration  $\Omega^*$  als Grundkonfiguration für den reversiblen Dehnungsanteil.

Diese Vorgehensweise ist jedoch nicht zwingend. So entwickelt z. B. BELL [7 - 10] auf der Grundlage des rotierten ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors  $t^R$  ein inkrementelles Stoffgesetz, das sich auch bei komplizierteren nicht proportionalen Belastungsgeschichten bewährt hat. Es gelten dabei die Definitionen  $t^R = R \cdot t$  mit  $F = R \cdot V$ . Hier ist  $V$  der rechte Strecktensor und  $R$  der Rotationstensor aus der polaren Zerlegung von  $F$ .

Es ist nicht möglich, dem einen oder anderen Zerlegungstyp von vornherein den Vorzug zu geben, da jeder gewisse Vor- und Nachteile gegenüber dem anderen aufweist. So beinhaltet der Deformationsgradient  $F$  in der Zerlegung (2.3.2) nicht nur die für die Formulierung des Stoffgesetzes störenden Starrkörperrotationen, die nachträglich eliminiert werden müssen. Darüberhinaus ist die Zwischenkonfiguration  $\Omega^*$  nur bis auf eine beliebige Starrkörperrotation bestimmt (siehe auch [53,82,88,98,99]).

Zur Beseitigung dieser Vieldeutigkeit besteht bei polykristallinen Werkstoffen die Möglichkeit, die Rotation der Kristalle bzw. Körner des Materials zur Beschreibung der spannungsfreien Zwischenkonfiguration heranzuziehen. Dazu werden zusätzliche Materialgleichungen benötigt, mit deren Hilfe die Dehnungs- und Spannungsgeschichte mit diesem mikroskopischen Effekt der Rotation zu verknüpfen sind. (siehe z. B. [25,27,97,114] aber auch [9] und [71]). Ebenso wie BELL benutzt HAUPT [53] die polare Zerlegung des Deformationsgradienten, um dann die Zwischenkonfiguration allgemein als Funktional der gesamten Dehnungs- und Spannungsgeschichte zu definieren. In Bezug auf die Erstellung ent-

sprechender Materialgleichungen kann jedoch bisher nicht von einer abgeschlossenen Theoriebildung gesprochen werden.

Der besondere Nachteil der Zerlegung (2.3.3) liegt in der physikalisch unklaren Definition des Differenzzustands  $E'$ . Da jedoch diese Zerlegung wegen ihrer einfachen Handhabung bei der Formulierung und Lösung von Randwertproblemen in den Kapiteln III und folgenden benutzt wird, ist es notwendig zu prüfen, wann dieser Anteil  $E'$  der Gesamtdehnungen eine physikalische Deutung erlaubt. Insbesondere interessiert die Frage, in welchen Fällen  $E'$  als vom irreversiblen Anteil  $E^i$  unabhängiger, rein elastischer Dehnungsanteil behandelt werden kann.

Diese Frage wird von CASEY [21] auf der Grundlage von [22] ausführlich untersucht. Er kommt dabei zu dem Ergebnis, daß für die folgenden Kombinationen die Zerlegung (2.3.3) mit der Interpretation von  $E'$  als rein elastischem und von  $E^i$  unabhängigen Deformationsteil im approximativen Sinn gerechtfertigt ist:

- (i) Kleine plastische Deformationen werden von moderaten elastischen Deformationen begleitet.
- (ii) Kleine elastische Deformationen werden von moderaten plastischen Deformationen begleitet.
- (iii) Kleine Gesamtdehnungen werden von moderaten Gesamtrotationen begleitet.

Besondere Wichtigkeit kommt hierbei den Maßen für die Abschätzungen der Größenordnungen einzelner tensorieller Terme zu. In Analogie zum Vorgehen in [22] führt CASEY [21] die Skalare

$$\bar{\epsilon} = \sup_{\Omega} ||H_p||, \quad \bar{\epsilon} = \sup_{\Omega} ||H_e||, \quad \epsilon = \max [\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}] \quad (2.3.5)$$

ein.  $H_e$  und  $H_p$  sind dabei definiert durch

$$H_e = F^r - 1, \quad H_p = F^i - 1, \quad (2.3.6)$$

mit  $F^r$  und  $F^i$  entsprechend der Zerlegung (2.3.2). Die Norm  $||\cdot||$  ist

die durch das doppelte innere Produkt von Tensoren zweiter Stufe induzierte Norm, definiert durch  $||\mathbf{a}|| = (\mathbf{a}_{\cdot n}^m \mathbf{a}_{\cdot m}^n)^{1/2}$ , wobei  $\mathbf{a}$  einen beliebigen Tensor zweiter Stufe repräsentiert. Die Ausgangskonfiguration wird hier mit  $\Omega^0$  und die spannungsfreie Zwischenkonfiguration mit  $\Omega^*$  bezeichnet. Werden die Ausdrücke der Ordnung  $\bar{\epsilon}^{-3/2}$  in der umgeformten Zerlegung (2.3.3) vernachlässigt und definiert man den Begriff "moderate elastische Deformationen" durch

$$\mathbf{H}_e = O(\bar{\epsilon}^{-1/2}), \quad (2.3.7)$$

so ist die additive Zerlegung "genau" der Ordnung  $\bar{\epsilon}^{-1/2}$ . Für den Fall (ii) wird entsprechend gefordert, daß "moderate plastische Deformationen" definiert sind durch

$$\mathbf{H}_p = O(\bar{\epsilon}^{-1/2}), \quad (2.3.8)$$

wobei jetzt gilt  $\bar{\epsilon} = \sup ||\mathbf{H}_e||$  über dem Bereich  $\Omega^*$ . Analog zum vorherigen Fall ist die Zerlegung (2.3.3) "genau" der Ordnung  $\bar{\epsilon}^{-1/2}$ , wobei wieder alle Terme der Ordnung  $\bar{\epsilon}^{-3/2}$  vernachlässigt werden. Es ist dabei bemerkenswert, daß es sich hier nicht um absolute sondern um relative Abschätzungen bezüglich der Maximumnorm der elastischen Deformationen (Fall (i)) beziehungsweise der plastischen Deformationen (Fall (ii)) handelt. Abweichend vom Schema bei den Fällen (i) und (ii) wird für den Fall kleiner Gesamtdehnungen und moderater Gesamtrotationen nur der symmetrische Anteil der Tensoren  $\mathbf{H}_e$  und  $\mathbf{H}_p$  zur Definition der Größenordnungsmaße herangezogen. Es werden nun die Maße

$$\epsilon^* = \sup_{\Omega^*} ||\mathbf{e}_e||, \quad \epsilon^{**} = \sup_{\Omega^*} ||\mathbf{e}_p||, \quad \epsilon = \max[\epsilon^*, \epsilon^{**}] \quad (2.3.9)$$

definiert mit

$$2\mathbf{e}_e = \mathbf{H}_e + (\mathbf{H}_e)^T, \quad 2\mathbf{e}_p = \mathbf{H}_p + (\mathbf{H}_p)^T. \quad (2.3.10)$$

Moderate elastische und plastische Rotationen  $W_e$  und  $W_p$  sind dann durch

$$W_e = O(\epsilon^{(1/2)}), \quad (2.3.11)$$

und

$$W_p = O(\epsilon^{1/2}), \quad (2.3.12)$$

mit

$$2W_e = H_e - (H_e)^T, \quad 2W_p = H_p - (H_p)^T \quad (2.3.13)$$

definiert. Werden nun wieder alle Terme der Ordnung  $\epsilon^{3/2}$  vernachlässigt, so ist die Zerlegung (2.3.3) im Rahmen einer (relativen) Genauigkeit  $\epsilon$  gerechtfertigt. Eine entsprechende Abschätzung für den Fall kleiner Rotationen bei moderaten Dehnungen führt zu dem Ergebnis, daß im gesetzten Genauigkeitsrahmen die Vernachlässigung der Glieder der Ordnung  $\epsilon^{3/2}$  nicht zu einer Rechtfertigung der Zerlegung (2.3.3) führt.

Es bliebe zu untersuchen, welchen Einfluß die zunächst beliebige Wahl der Norm  $|| \cdot ||$  und die damit verbundene Wahl der Größenordnungsmaße  $\epsilon$ ,  $\bar{\epsilon}$ ,  $\epsilon^*$  und  $\epsilon^{**}$  auf das Ergebnis der Abschätzung hat. Die Anwendung der Resultate wird außerdem dadurch erschwert, daß die Abschätzungen in allen Fällen relativ zu unbekanntem Teilverformungszuständen erfolgt. Trotzdem erlaubt die vorgestellte Kategorisierung eine bisher nicht mögliche systematische Quantifizierung des Approximationsfehlers bei der Benutzung von  $E'$  aus (2.3.3) als "rein elastischem" Anteil der Gesamtdehnung  $E$ .

Die Zerlegung (2.3.4) schließlich ist durch die à priori Elimination der Starrkörperrotationen für eine Beschreibung des Materialverhaltens besonders gut geeignet und bietet dadurch gegenüber den anderen Zerlegungen bei bestimmten Prozessen, wie z. B. rein homogenen Verformungszuständen, wie sie bei Materialtests erzeugt werden,

Vorteile. In der vorliegenden Arbeit liegt der Schwerpunkt jedoch auf der Beschreibung und Lösung von Randwertproblemen als Prozeß in Abhängigkeit der Lastgeschichte mit den speziellen Problemen, die aus den geometrischen Nichtlinearitäten resultieren. Für diese Zwecke begünstigen wir die Zerlegung (2.3.3) gegenüber den anderen hier beschriebenen Aufspaltungen des Dehnungsmaßes die allerdings mit den oben erläuterten Einschränkungen verbunden ist.

Die Gegenüberstellung der Zerlegungen (2.3.2-4) in [71] zeigt als ihre Gemeinsamkeit, daß sie alle auf die Form

$$E^r = \psi(E, E^i) \quad (2.3.14)$$

gebracht werden können, wobei  $\psi$  an dieser Stelle eine von Fall zu Fall zu bestimmende Funktion mit der Eigenschaft

$$\psi(E^i, E^i) = 0 \quad (2.3.15)$$

darstellt.

### II.3.2 Energiekonsistente Zerlegung der Elementarleistung

Ausgangspunkt ist die Zerlegung (2.2.33) der gesamten Elementarleistung  $\dot{w}$  in reversiblen und irreversiblen Anteil  $\dot{w}_r$  und  $\dot{w}_i$ . Entsprechend den verschiedenen physikalischen Effekten, aus denen sich das Gesamtstoffverhalten zusammensetzt und die für das jeweilige Material charakteristisch sind, kann der irreversible Anteil  $\dot{w}_i$  weiter zerlegt werden

$$\dot{w}_i = \dot{w}_s + \dot{w}_p + \dot{w}_c \quad (2.3.16)$$

Dabei beschreibt  $\dot{w}_s$  den Anteil, der für die unmittelbare Strukturveränderung des Materials (Verfestigung oder Erweichung) verantwortlich ist,  $\dot{w}_p$  ist der viskoplastische Anteil und  $\dot{w}_c$  der Leistungsanteil, der mit Relaxation und Langzeitkriechen verknüpft ist (LEHMANN [89]). Bei Zugrundelegung des MAXWELL'schen Materialmodells erhält man mit (2.2.48) direkt

$$\dot{\mathbf{w}}_r = (1/\rho_0) \sigma : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^r, \quad (2.3.17)$$

$$\dot{\mathbf{w}}_i = (1/\rho_0) \sigma : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c). \quad (2.3.18)$$

Die Gesamtdehnungsgeschwindigkeit  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  ist dann die Summe der Anteile  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^r$ ,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s$ ,  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  und  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^c$ .

Mit (2.2.60) erhält man dann sofort

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^r = -\{[\partial^2 \zeta / (\partial \sigma \partial \sigma)] : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + [\partial^2 \zeta / \partial \sigma \partial \theta] \dot{\theta} + [\partial^2 \zeta / (\partial \sigma \partial \boldsymbol{\kappa})] \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}\}. \quad (2.3.19)$$

Führt man die Abkürzungen

$$\begin{aligned} D_1 &= -\partial^2 \zeta / (\partial \sigma \partial \sigma) \\ D_2 &= -\partial^2 \zeta / (\partial \sigma \partial \theta) \\ D_3 &= -\partial^2 \zeta / (\partial \sigma \partial \boldsymbol{\kappa}) \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

ein, so ergibt sich das inkrementelle Stoffgesetz für die reversiblen Dehnungsgeschwindigkeiten zu

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^r = D_1 : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + D_2 \dot{\theta} + D_3 \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}. \quad (2.3.21)$$

Die Elemente der Tensoren  $D_1$ ,  $D_2$  und  $D_3$  sind dabei Stoffkenngrößen, die experimentell ermittelt werden müssen. Interpretiert man  $\sigma$  als zweiten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor ( $\sigma$  könnte hier für ein beliebiges anderes Spannungsmaß stehen), so ist  $D_1$  der Tensor der elastischen Konstanten, der den elastischen Anteil des GREEN'schen Dehnungstensors mit  $\sigma$  verknüpft. Durch  $D_2$  und  $D_3$  wird die Abhängigkeit des reversiblen Deformationsanteils von der Temperatur  $\theta$  und dem Vektor  $\boldsymbol{\kappa}$  der internen Parameter, die hier noch nicht näher spezifiziert sind, dargestellt.

Im einfachsten Fall der thermomechanischen Entkopplung sind  $D_2$  und  $D_3$  identisch null.

Nimmt man nun an, daß der nicht-dissipative (und somit mittelbar wiedergewinnbare) Anteil  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^s$  der irreversiblen Dehnungsgeschwindigkeiten

denselben physikalischen Mechanismen gehorcht wie  $\dot{\epsilon}^r$ , so erhält man hierfür analog zu (2.3.21) den Ausdruck

$$\dot{\epsilon}^s = \mathbf{d}_1 : \dot{\sigma} + \mathbf{d}_2 \dot{\theta} + \mathbf{d}_3 \cdot \dot{\kappa} . \quad (2.3.22)$$

Die Tensoren  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$  und  $\mathbf{d}_3$  enthalten hier wieder, entsprechend zu (2.3.21), Stoffkenngrößen, die den Anteil des elastischen Verhaltens charakterisieren, der nur durch zusätzliche physikalische Behandlung wieder freigesetzt werden kann (in Bild 9 durch die Feder  $Z$  symbolisiert).

Wählt man, so wie hier, die Aufteilung der Elementarleistung als Ausgangspunkt für die Formulierung von Stoffgesetzen, so müssen zur Gewährleistung der Existenz eines thermo-mechanischen Potentials für die reversiblen und nicht-dissipativen irreversiblen Deformationen die folgenden Reziprozitätsbedingungen erfüllt sein [88]:

$$\begin{aligned} \partial D_1 / \partial \theta &= \partial D_2 / \partial \sigma ; \quad \partial \mathbf{d}_1 / \partial \theta = \partial \mathbf{d}_2 / \partial \sigma \\ \partial D_1 / \partial \kappa &= \partial D_3 / \partial \sigma ; \quad \partial \mathbf{d}_1 / \partial \kappa = \partial \mathbf{d}_3 / \partial \sigma \\ \partial D_2 / \partial \kappa &= \partial D_3 / \partial \theta ; \quad \partial \mathbf{d}_2 / \partial \kappa = \partial \mathbf{d}_3 / \partial \theta . \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

Für den plastischen Anteil der Deformationen wird desweiteren die Existenz einer ausgeprägten Fließgrenze angenommen, dargestellt durch die Fließfunktion (Fließfläche)  $F(\sigma, \theta, \kappa)$ , die den Bereich  $C$  rein reversibler Zustände begrenzt. Danach verhält sich das Material für alle Zustände  $[\sigma, \theta, \kappa]$ , für die  $F < 0$  ist, rein elastisch und nur für  $F = 0$  können irreversible Deformationen auftreten; Zustände mit  $F > 0$  sind physikalisch unmöglich.

Obwohl die Berücksichtigung viskoplastischer Effekte ohne wesentliche Schwierigkeiten mit den hier dargestellten Methoden möglich ist [48,50, 51,97,107], beschränken wir uns auf elasto-plastische Werkstoffe. Es muß dabei allerdings beachtet werden, daß eine Reihe von Effekten, wie z. B. Dehnungsgeschwindigkeitsabhängigkeit und die Verschiebung des Stoffverhaltens bei Erhöhung der Temperatur in Richtung viskosen

Verhaltens, nicht mehr mitbetrachtet werden können.

Die Annahme der Existenz einer ausgeprägten Fließfunktion  $F$ , die auf Arbeiten von TRESCA[152,153] und COULOMB [24] zurückgeht, ist keineswegs zwingend erforderlich, um plastisches Verhalten von Stoffen zu beschreiben. Sie steht im Kontrast zur "endochronen" Plastizitätstheorie, die durch die Arbeiten von VALANIS[154,155] begründet worden ist. In den Stoffgesetzen dieser Theorie wird von einem stetigen Übergang von überwiegend reversiblen zu überwiegend irreversiblen Deformationen im Laufe des Verformungsprozesses ausgegangen, ohne daß eine scharfe Grenze diese beiden Bereiche trennt.

Die Leistungsfähigkeit dieser Theorie ist auch schon an einer Reihe von Beispielen für komplexe Lastgeschichten einfacher Körper, aber auch komplexer Strukturen nachgewiesen worden[156,157]. In dieser Arbeit wird jedoch die Existenz einer ausgeprägten Fließfunktion  $F$  angenommen, da wir der Ansicht sind, daß dieses Konzept der Existenz der völlig unterschiedlichen physikalischen Prozesse für reversible und irreversible Deformationen auf mikroskopischer Ebene besser gerecht wird.

### II.3.3 Normalitätsregel und Materialstabilität

Es wird nun angenommen, daß für die plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten die Normalitätsregel gilt, die besagt, daß  $\dot{\epsilon}^p$  entweder null ist oder in die Richtung des Gradienten der Fließfunktion  $F$  zeigt:

$$\dot{\epsilon}^p = \lambda (\partial F / \partial \sigma) \quad (2.3.24)$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 \text{ für } F < 0 \text{ oder } F = 0 \text{ und } \dot{F} < 0 \\ \lambda &> 0 \text{ für } F = \dot{F} = 0. \end{aligned}$$

Für Fließbedingungen mit Ecken, wie zum Beispiel bei Verwendung des TRESCA'schen Fließkriteriums, ist diese Form durch PRAGER [127] und KOITER [78] erweitert worden.

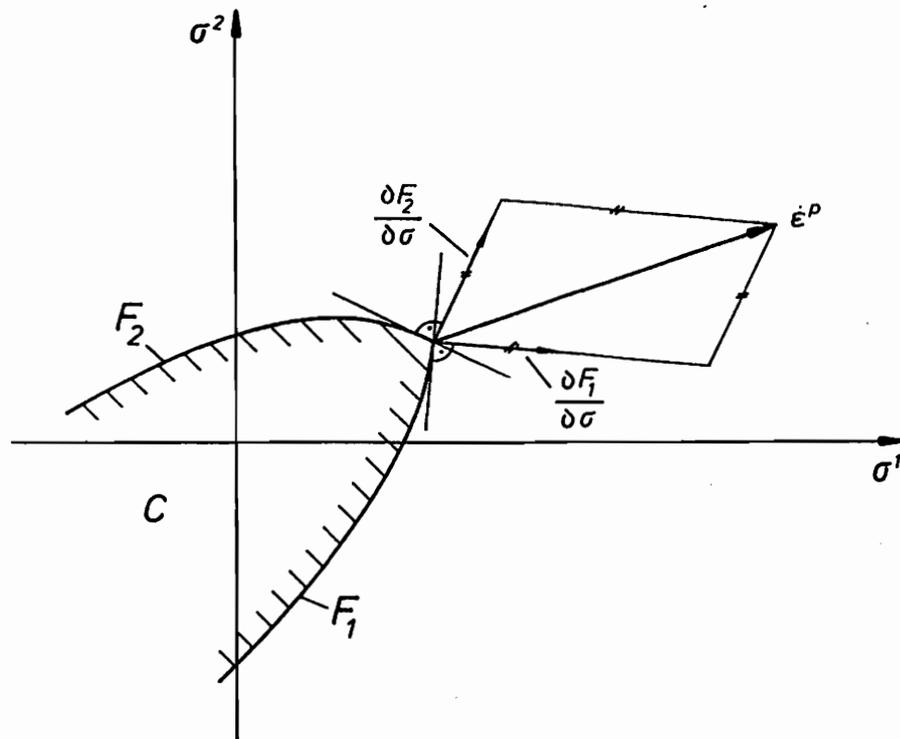


BILD 6: FLIESSBEDINGUNGEN MIT ECKEN

An die Stelle des Produktes aus  $\lambda$  und dem Gradienten der Fließfunktion tritt jetzt eine Linearkombination aus  $n$  Produkten mit

$$\dot{\epsilon}^P = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\partial F_j / \partial \sigma) \quad (2.3.25)$$

mit

$$\lambda_i = 0 \text{ für } F_i < 0 \text{ oder } F_i = 0 \text{ und } \dot{F}_i < 0$$

$$\lambda_j > 0 \text{ für } F_j = \dot{F}_j = 0.$$

Hier bezeichnet der Index  $j$  die aktiven Fließmechanismen. "Aktiv" ist eine Fließfläche dann, wenn für sie die Beziehung (2.3.24) mit  $\lambda > 0$  erfüllt ist. Der Index  $i$  bezeichnet die nichtaktiven Fließflächen und  $n$  ist die Gesamtanzahl der gerade aktiven Fließflächen.

Im Rahmen der geometrisch linearen Theorie folgt die Forderung nach der Gültigkeit von (2.3.24) bzw. (2.3.25) für verfestigendes Materialverhalten unmittelbar aus dem DRUCKER'schen Postulat [26]. Es besteht aus zwei Teilen:

- (1) Während eines Belastungsvorgangs produzieren zusätzliche Spannungen  $d\sigma$  positive Arbeit (Bedingung für materielle Stabilität)

$$d\sigma : d\epsilon > 0. \quad (2.3.26)$$

- (2) Für einen Zyklus von zusätzlichen Spannungen ist die dazugehörige Arbeit positiv, wenn plastische Deformationen auftreten und null, wenn die Deformationen rein elastisch sind

$$\oint (\sigma - \sigma^*) : d\epsilon \geq 0. \quad (2.3.27)$$

Hier bedeutet  $\sigma^*$  einen beliebigen Ausgangszustand im Spannungsraum und  $\sigma$  eine Spannung, die einen geschlossenen Zyklus durchläuft.

In beiden Fällen kann der elastische Anteil der Deformation abgespalten werden, da er für (1) nur einen positiven und für (2) keinen Beitrag zusteuert. Mit  $d\epsilon^P$  als plastischen Dehnungszuwachs erhält man dann:

$$d\sigma : d\epsilon^P > 0 \quad (2.3.28)$$

und

$$\oint (\sigma - \sigma^*) : d\epsilon^P > 0. \quad (2.3.29)$$

Da die plastischen Zusatzdeformationen nur auf dem infinitesimalen Weg BC (siehe Bild 5) auftreten, wird (2.3.28) auch in der Form

$$(\sigma - \sigma^*) : d\epsilon^P \geq 0 \quad (2.3.30)$$

angegeben und ist als "lokales Maximumprinzip" bekannt [141]. Die Forderung der Erfüllung von (2.3.30) ist äquivalent zur Forderung nach einer konvexen Fließfläche, da im Fall der Nichtkonvexität immer ein Spannungszustand  $\sigma^*$  gefunden werden kann, der die linke Seite bei festgehaltenen  $d\epsilon^P$  negativ macht. Somit folgt aus der Gültigkeit des DRUCKER'schen Postulats direkt die Gültigkeit von Normalitätsregel und die Konvexität der Fließfläche. Im Fall elastisch-idealplastischen Verhaltens gilt in (2.3.28) das Gleichheitszeichen.

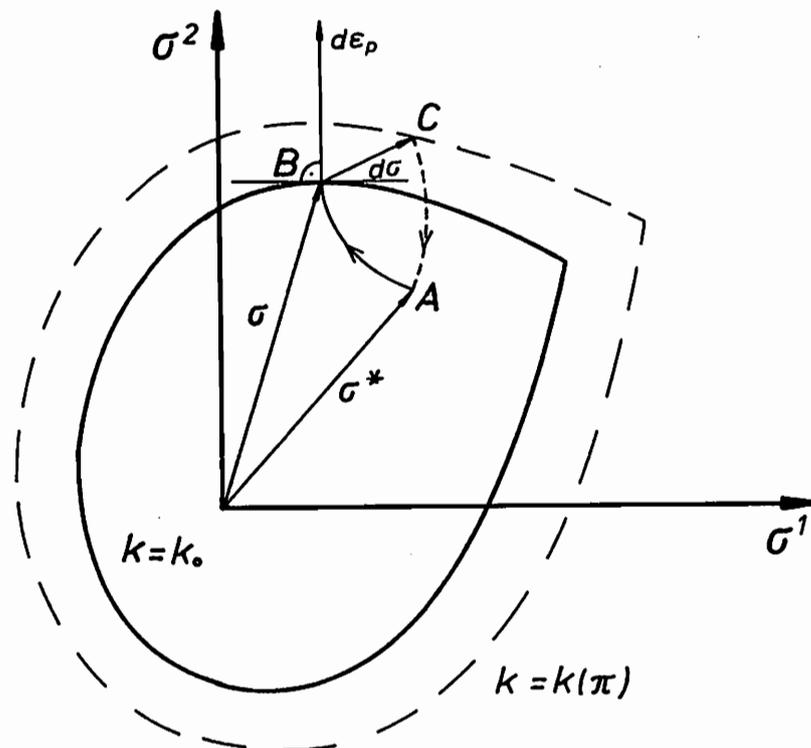


BILD 5: NORMALITÄTSREGEL UND MATERIALSTABILITÄT

Bei der Erweiterung auf geometrisch nichtlineare Probleme fällt der Wahl der adjungierten Spannungs- und Dehnungsmaße in Ungleichung (2.3.26) eine entscheidende Bedeutung zu und man erhält voneinander abweichende Ergebnisse für verschiedene Paarungen adjungierter Maße. Dies ist sofort einsichtig, wenn man die Bedingung für materielle Stabilität (2.3.26) durch Einsetzen von Spannungs- und Dehnungsmaßen modifiziert, mit denen geometrisch nichtlineare Zustände beschrieben werden können. Unter Verwendung des ersten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors  $t$  und des Deformationsgradienten  $F$  erhalten wir formal

$$dt : dF > 0 \quad , \quad (2.3.31)$$

während bei Benutzung des zweiten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors  $\sigma$  und des GREEN'schen Dehnungstensors  $E$

$$d\sigma : dE > 0 \quad (2.3.32)$$

erhalten wird. Unter Verwendung des Zusammenhangs zwischen  $t$  und  $\sigma$  durch  $t = F \cdot \sigma$  läßt sich (2.3.31) umformen und man erhält in Indeschreibweise

$$dt^{iA} dF_{iA} = d(F^i \cdot_B \sigma^{BA}) dF_{iA} = dF^i \cdot_B dF_{iA} \sigma^{BA} + F^i \cdot_B dF_{iA} d\sigma^{BA} \quad (2.3.33)$$

Wegen der Symmetrie von  $\sigma$  ergibt sich für den zweiten Summanden in (2.3.33)  $dE : d\sigma$ , so daß sich die Bedingungen (2.3.31) und (2.3.32) um den Term  $\sigma^{BA} dF^i \cdot_B dF_{iA}$  unterscheiden.

Dadurch, daß in (2.3.31) Maße verwendet werden, die von Starrkörperdrehungen abhängig sind, beinhaltet diese Formulierung neben dem Materialverhalten auch das strukturelle Verhalten des betrachteten Körpers, auch wenn es in lokaler Form angegeben wird. Deswegen ist die Ungleichung (2.3.31) als Bedingung für "Materialstabilität" unbrauchbar. Sie eignet sich grundsätzlich für die Betrachtung der "Strukturstabilität", die in Kapitel V dieser Arbeit behandelt wird.

Untersuchungen zur Abhängigkeit der "Materialstabilität" von der gewählten Darstellungsweise finden sich auch in [16,31,36].

Hier wird Konvexität der Fließfläche und Normalität der plastischen Dehnungsgeschwindigkeit im Sinne des zweiten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors und des plastischen Anteils des GREEN'schen Dehnungstensors verstanden, wenn nicht anders ausdrücklich festgelegt. Für verfestigendes Materialverhalten kann bei eindeutigem Gradienten  $\partial F/\partial \sigma$  der plastische Multiplikator  $\lambda$  über die Konsistenzbedingung

$$\dot{F}(\sigma, \theta, \kappa) = (\partial F/\partial \sigma) : \dot{\sigma} + (\partial F/\partial \theta) \dot{\theta} + (\partial F/\partial \kappa) \cdot \dot{\kappa} = 0 \quad (2.3.34)$$

bestimmt werden: Der Parameter  $\lambda$  geht über das Verfestigungsgesetz (z.B. Arbeitsverfestigung oder Dehnungsverfestigung [69]) in die Definition von  $F$  ein und (2.3.34) ist dann eine skalare Bedingung zur Bestimmung von  $\lambda$ . Bei Fließbedingungen mit Ecken kann  $\lambda$  dann aus (2.3.34) ermittelt werden, wenn bekannt ist, daß nur ein Fließmechanismus aktiv ist. Im Fall mehrerer aktiver Mechanismen oder im Fall ideal-plastischen Verhaltens ohne Verfestigung kann  $\lambda$  auf diese Weise nicht ermittelt werden, sondern ist nur über die Lösung des gesamten Randwertproblems zugänglich.

#### II.3.4 Das Modell des "generalisierten Standard Materials"

Von besonderem Interesse für die vorliegende Arbeit, speziell für die Kapitel III, IV und V, ist das Modell des "generalisierten Standard Materials", welches von HALPHEN und NGUYEN [49] auf der Grundlage der Arbeiten von MOREAU [103,104] und des Konzepts des verallgemeinerten thermomechanischen Potentials (ZIEGLER [168,170]) eingeführt worden ist. Dabei wird ein Potential  $\varphi$  als Indikatorfunktion des konvexen Bereichs  $C$  eingeführt mit

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{für } s \in C \\ +\infty & \text{für } s \notin C \end{cases} \quad (2.3.35)$$

Der generalisierte Spannungszustand  $s = [\sigma, \kappa]$  setzt sich dabei aus den Komponenten des KIRCHHOFF'schen Spannungstensors  $\sigma$  und denen des Vektors der internen Parameter  $\kappa$  zusammen. Deren Dimension  $R > 0$  richtet sich nach der Genauigkeit, mit der das Verfestigungsverhalten des Materials modelliert wird. Die Dimension von  $s$  ist somit  $6+R$ . Nur im Fall elastisch-ideal plastischen Materials ist  $R = 0$ . Der elastische Bereich  $C$  ist in diesem Fall im Unterschied zu den bisherigen Betrachtungen ein Bereich im Raum  $S$  der generalisierten Spannungen  $s$ , der gegenüber dem Raum der KIRCHHOFF'schen Spannungen  $\sigma$  um die Dimension  $R$  der internen Parameter  $\kappa$  erweitert ist. Man erkennt leicht, daß auch für kinematische Verfestigung der Nullpunkt des Raumes  $S$  immer in  $C$  liegt.

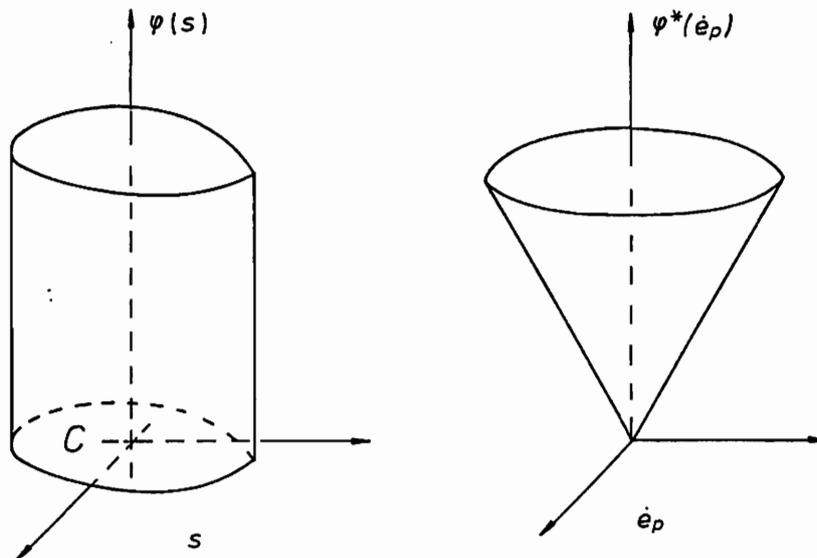


BILD 7: DAS PLASTISCHE POTENTIAL  $\varphi$  UND DAS POLARE POTENTIAL  $\varphi^*$

Es ist in [105,109,110] gezeigt worden, daß die generalisierten plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten  $\dot{e}^p = [\dot{E}^p, \kappa]$  bei Gültigkeit der

verallgemeinerten Normalitätsregel als Elemente des Subgradienten  $\partial\varphi(\mathbf{s})$  des plastischen Potentials  $\varphi$  an der Stelle  $\mathbf{s}$  dargestellt werden kann:

$$\dot{\mathbf{e}}^p \in \partial\varphi(\mathbf{s}) \quad . \quad (2.3.36)$$

Die internen plastischen Parameter  $\boldsymbol{\kappa}$  sind dabei kodimensional zu  $\boldsymbol{\kappa}$ . Damit ist es möglich, eine schwache Form für das plastische Materialverhalten analog zum Vorgehen in der Elastizitätstheorie zu finden: Die dort zur Konstruktion von globalen Energiefunktionalen benutzte LEGENDRE-Transformation wird hier durch die allgemeinere FENCHEL-Transformation ersetzt um eine globale Form für das Materialgesetz zu finden ([105,109,111,129-131,162]). Auf dieses Verfahren wird bei der Behandlung des Anfangsrandwertproblem in Kapitel III ausführlich eingegangen. Führt man die generalisierten elastischen Dehnungen  $\mathbf{e}^e$  mit  $\mathbf{e}^e = [\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\omega}]$  und die generalisierten Temperaturdehnungen  $\mathbf{e}^\theta = [\mathbf{E}^\theta, 0]$  ein, wobei  $\boldsymbol{\omega}$  der zu  $\boldsymbol{\kappa}$  und  $\boldsymbol{\kappa}$  kodimensionale Vektor der internen elastischen Parameter ist, so ergibt sich der Gesamtdehnungszustand  $\mathbf{e}$  zu

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p + \mathbf{e}^\theta \quad . \quad (2.3.37)$$

Hier und im folgenden wird angenommen, daß keine thermodynamische Kopplung (siehe auch Abschnitt II.3.2 (2.3.20-23)) vorliegt, so daß Temperaturänderungen weder das elastische noch das plastische Verhalten beeinflussen. Durch diese Einschränkung muß auf die Berücksichtigung größerer Temperaturänderungen verzichtet werden, was aber konsistent mit der Vernachlässigung viskoser Anteile im Stoffverhalten ist (siehe Abschnitt II.3.2).

Ein Vergleich zeigt, daß das "generalisierte Standard Modell" ein Spezialfall des allgemeinen Stoffgesetzes nach Abschnitt II.3.2-3 ist. Seine mathematische Formulierung durch Erweiterung des Spannungsraums um die Dimension der internen Parameter und die Einführung des Subgradienten (2.3.36) macht dieses Modell jedoch dadurch besonders attraktiv, daß zum einen eine schwache Formulierung des Stoffgesetzes und zum anderen eine analoge Behandlung elastisch-idealplastischen und

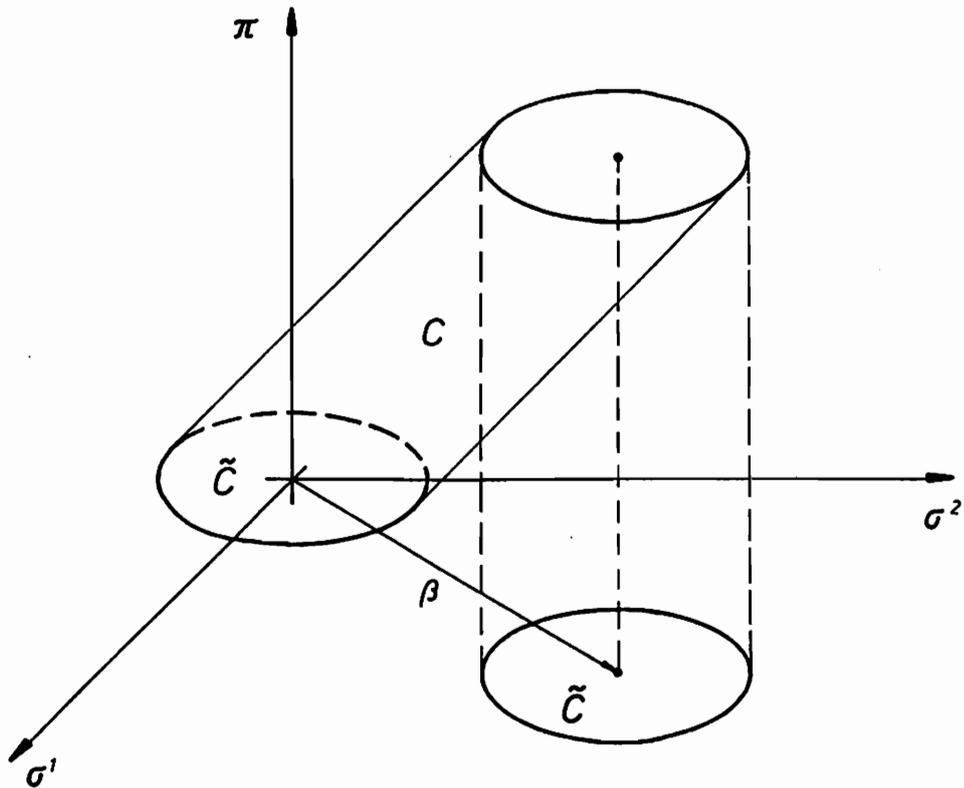


BILD 8: ZUR VERANSCHAULICHUNG DES UM DIE DIMENSION VON  $\pi$  ERWEITERTEN SPANNUNGSRAUMES AM BEISPIEL DER KINEMATISCHEN VERFESTIGUNG

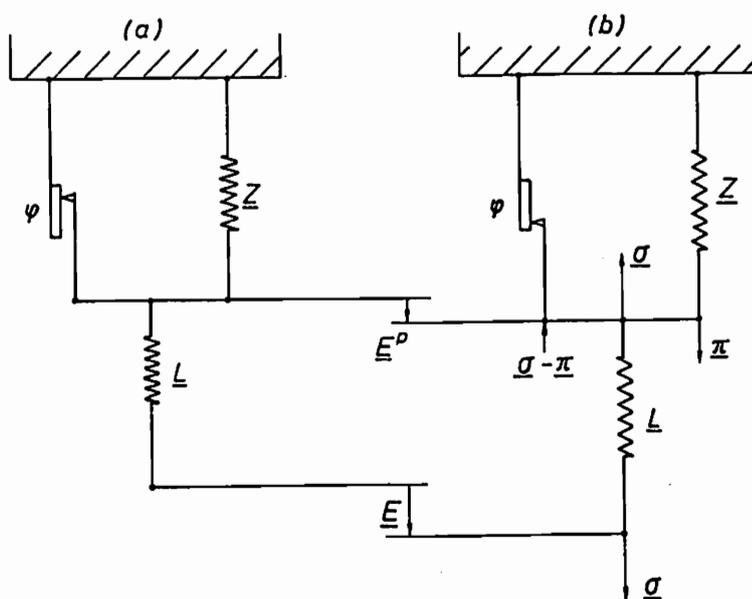


BILD 9: EINDIMENSIONALE VERANSCHAULICHUNG DES KONZEPTS DER INNEREN PARAMETER  
 (A) UNVERFORMTES MATERIALELEMENT  
 (B) VERFORMTES MATERIALELEMENT

elastisch-verfestigenden Verhaltens möglich ist. Nimmt man ferner an, daß die generalisierten elastischen Dehnungen  $e^e$  über die konstante Matrix  $L$  mit den generalisierten Spannungen  $s$  verknüpft ist, so ergibt sich die einfache Form

$$e^e = \underline{L} : s , \quad (2.3.38)$$

mit

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} L & C \\ C & Z \end{pmatrix} \quad (2.3.39)$$

so daß gilt

$$E^e = (L : \sigma + C \cdot \kappa) , \quad \omega = (C^T : \sigma + Z^T \cdot \kappa) . \quad (2.3.40)$$

Darin sind  $Z$  und  $C$  konstante Tensoren von Materialkonstanten. In den folgenden Kapiteln wird angenommen werden, daß die Kopplungsmatrix  $C$  null ist, so daß reversibel elastischer und irreversibel elastischer Anteil der Deformation unabhängig voneinander sind. Dann gilt

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} \quad (2.3.41)$$

$L$  und  $Z$  sind dabei positiv definite Tensoren mit den Symmetrien

$$L_{ABCD} = L_{ABDC} = L_{CDAB} = L_{BACD} \quad A, B, C, D = 1, 2, 3 \quad (2.3.42)$$

$$Z_{MN} = Z_{NM} \quad M, N = 1, 2, \dots, R . \quad (2.3.43)$$

### II.3.5 Viskoplastische Effekte und Stoffgesetzformulierung im Dehnungsraum

STICKFORTH entwickelt in einer Serie von Veröffentlichungen [145-147] ein von dem hier in den Gleichungen (2.2.47) und folgenden abweichendes Konzept in dem er sich im besonderen Maße um eine Beschreibung plastischer und visko-plastischer Prozesse durch ein einheitliches Stoffgesetz ohne qualitative Unterscheidung von zeitabhängigen und zeitunabhängigen Prozessen bemüht. Ausgehend vom ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik bei der üblichen Beschränkung auf irreversible Prozesse, die als Folge von Gleichgewichtszuständen behandelt werden können, zerlegt STICKFORTH die spezifische freie Energiedichte  $\xi$  nach (2.2.49) additiv in die elastische Dehnungsenergiedichte  $\xi_{(e)}$  und einen vom Spannungszustand unabhängigen Anteil  $\xi_{(q)}$  mit

$$\xi = \xi_{(e)}(\theta, C_{(e)}, a_i) + \xi_{(q)}(\theta, q_k) \quad (2.3.44)$$

Dabei sind  $a_i$  beobachtbare und  $q_k$  nicht beobachtbare (interne) Parameter zur lokalen Materialbeschreibung, während  $C_{(e)}$  den Teil des rechten Cauchy-Green'schen Dehnungstensors  $C$  nach (2.1.6-7) darstellt, der mit dem rein elastischen Teil des Deformationsprozesses durch

$$C_{(e)} = (F^e)^T \cdot (F^e) \quad (2.3.45)$$

verbunden ist.  $F^e$  bezeichnet den rein elastischen Anteil des Deformationsgradienten  $F$  nach (2.1.3-5) (siehe auch Abschnitt II.3.1).

Ausgangspunkt zur Entwicklung der Evolutionsgleichungen für Entropie  $s$  und interne Parameter  $q_k$  ist die abgewandelte Form des Energiesatzes (2.2.59). Dazu wird nach der Zerlegung von  $s$  in einen lokal erzeugten Anteil  $s_{loc}$ , der die Dissipation enthält und einen durch Wärmeleitung erzeugten Anteil  $s_{con}$  sowie der Vernachlässigung innerer Reibungsprozesse, inelastischer Dehnung (z. B. durch Porenbildung) und anelastische Effekte (z. B. Phasenänderungsvorgänge) über  $s_{loc}$  eine "Dissipationsfunktion des plastischen Fließens  $\delta_p$ " eingeführt:

$$\delta_p = \Phi \cdot \tau + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{q}_k (-\rho \delta \xi_{(q)} / \delta q_k) \quad (2.3.46)$$

mit  $\Phi$  als rein gestaltsänderndem (deviatorischem) Anteil des Tensors

des plastischen Flusses, additiv zusammengesetzt aus den Fließanteilen von  $n$  plastischen Subelementen  $\Phi_{(i)}$  mit

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_{(i)} \quad , \quad (2.3.47)$$

während  $\tau$  der deviatorische Anteil des um die durch innere Reibung verursachten Spannungen  $\sigma_{(r)}$  verminderten Spannungstensors ist. Die Kopplung von  $\Phi_i$  mit den Änderungen der internen Parameter  $\dot{q}_k$  führt mit der Einführung interner "backstress"-Tensoren  $\alpha$  zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens schließlich zu einer dem Onsager'schen Prinzip und der Aussage des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik genügenden Darstellung des Werkstoffverhaltens. Die implizierte Zeitabhängigkeit des Werkstoffgesetzes findet seinen Ausdruck in der Bestimmung der Raten von  $\alpha$  mit

$$\dot{\alpha}_{(j)} = K_{(j)} \Phi_{(j)} - \gamma_{(j)} [\exp(-Q_{(j)}/R\theta_A)] \alpha_{(j)} \quad . \quad (2.3.48)$$

Dabei ist  $\dot{\alpha}_{(j)}$  die mitrotierte (Jaumann'sche) Zeitableitung von  $\alpha_{(j)}$ , wobei der Index  $j$  auf den  $j$ -ten Fließmechanismus (bzw. das  $j$ -te plastische Subelement) hinweist.  $K_{(j)}$  sind die entsprechenden Verfestigungsmoduli, während  $\gamma_{(j)}$ ,  $Q_{(j)}$ ,  $R$  und  $\theta_A$  der Reihe nach die Relaxationskoeffizienten, Relaxationsaktivierungsenergien, universelle Gaskonstante und absolute Temperatur bezeichnen. Die Einführung expliziter Fließbedingungen für die einzelnen plastischen Subelemente erlaubt dann die explizite Formulierung der Evolutionsgleichungen der interessierenden Feldgrößen, wenn die das Werkstoffverhalten charakterisierenden Parameter bekannt sind. Die theoretische Leistungsfähigkeit des Konzepts wird anhand von Beispielen (Niedertemperaturrelaxation, Hochtemperaturanfangskriechen und steady-state-Kriechen) in [146] untermauert.

Während die bisher behandelten Vorgehensweisen von einer Beschreibung der Fließbedingung im Spannungsraum ausgehen, beschreitet BESDO [11,12] den von ILYUSHIN [65] vorgeschlagenen Weg einer Formulierung des Stoffgesetzes im Dehnungsraum. Dabei ersetzt die "Konsistenzbedingung"

$$g(C, C_p^{-1}, \kappa, Y_\beta, \theta) \leq 0 \quad (2.3.49)$$

mit

$$C_p = (F^D)^T \cdot (F^D) \quad (2.3.50)$$

die den Spannungstensor nicht enthält, die sonst übliche Fließbedingung. Wie in [65, 145-147] wird die Existenz eines elastischen Potentials  $\xi_{(e)}$  vorausgesetzt, welches als Funktion von  $C$ ,  $C_p^{-1}$ ,  $\theta$  sowie der internen Parameter  $\kappa$  und  $Y_\beta$  dargestellt werden kann und den Spannungszustand eindeutig definiert.

Die Anwendung des ILYUSHIN'schen Postulats auf einen fiktiven Kreisprozeß im Dehnungsraum und die Voraussetzung kleiner elastischer Formänderungen (was bei metallischen Werkstoffen keine wesentliche Einschränkung bedeutet), erlaubt dann die Formulierung einer Fließregel

$$(\partial/\partial C) [(\partial \xi_{(e)}/\partial C_p^{-1}) : d(C_p^{-1})] = -d\chi(\partial g/\partial C), \quad (2.3.51)$$

in der  $d\chi$  ein unbestimmter skalarer Faktor ist. Weitere Größenordnungsabschätzungen [12] erlauben die Vereinfachung von (2.3.51) zu

$$d(C_p) = -d\chi(\partial g/\partial C), \quad d\chi \geq 0. \quad (2.3.52)$$

Am Beispiel des Hencky'schen Fließgesetzes [12] und der Beschreibung des Bauschinger-Effektes im Dehnungsraum [13] wird die praktische Anwendung des Konzeptes auch anhand von Testrechnungen [13] demonstriert.

### III. DAS RANDWERTPROBLEM FÜR SPANNUNGEN

#### III.1 DEFINITIONEN UND FORMULIERUNG DES PROBLEMS

Ein Körper B werde durch eine gegebene Geschichte äußerer Wirkungen  $\{a\}$  entsprechend (2.1.2) so belastet, daß B plastische Deformationen bei endlichen Verschiebungen erfährt. Man bestimme den Spannungszustand in B am Ende der Belastungsgeschichte.

Es wird angenommen, daß sich der Werkstoff der Kategorie des "generalisierten Standard Materials" nach Abschnitt II.3 zuordnen läßt. Außerdem wird vorausgesetzt, daß Temperaturveränderungen keinen Einfluß auf das plastische Verhalten (Fließbedingung, Evolution der internen Parameter) und die elastischen Eigenschaften hat. Diese Annahmen sind eine starke Einengung für die Beschreibung des Materialverhaltens: Insbesondere bei endlichen plastischen, nichtproportionalen Deformationsprozessen treten die in II.3 näher beschriebenen Effekte der thermomechanischen Kopplung auf, die in dem hier benutzten Modell ebensowenig Eingang finden wie die Herausbildung von Anisotropien im plastischen wie elastischen Bereich. Eine Erweiterung der hier vorgestellten Methoden auf allgemeine und realitätsnähere Werkstoffgesetze ist jedoch solange als grundsätzlich möglich anzusehen, wie ein thermodynamisches Potential für den zu betrachteten Werkstoff angenommen werden kann.

Unter Benutzung der Gleichungen (2.1.1), (2.2.12), (2.2.24), (2.2.34), (2.3.3), (2.3.36-38), (2.3.41) erhält man den folgenden Satz von Beziehungen zur Beschreibung des Randwertproblems:

#### (1) Kinematische Bedingungen

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u} \quad \text{in } V \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{E} = 1/2 (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad \text{in } V \quad (3.1.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad \text{auf } S_k \quad (3.1.3)$$

#### (2) Statische Bedingungen

$$\text{Div } \mathbf{t} = -\mathbf{p}^* \quad \text{in } V \quad (3.1.4)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{f}^* \quad \text{auf } S_F \quad (3.1.5)$$

$$\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t} \quad \text{in } V \quad (3.1.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \text{in } V \quad (3.1.7)$$

(3) Materialgesetz

(a) Generalisierte Variable

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^\theta + \mathbf{e}^p \quad (3.1.8)$$

$$\mathbf{e}^e = [\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\omega}] \quad (3.1.9)$$

$$\mathbf{e}^\theta = [\mathbf{E}^\theta, 0] \quad (3.1.10)$$

$$\mathbf{e}^p = [\mathbf{E}^p, \boldsymbol{\kappa}] \quad (3.1.11)$$

$$\mathbf{s} = [\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}] \quad (3.1.12)$$

(b) Konstitutive Bedingungen

$$\mathbf{E}^e = \mathbf{L} : \boldsymbol{\sigma} \quad (3.1.13)$$

$$\mathbf{E}^\theta = \mathbf{A} \theta \quad (3.1.14)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\kappa} \quad (3.1.15)$$

$$\mathbf{e}^p \in \partial\varphi(\mathbf{s}) \quad (3.1.16)$$

Dabei sind  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{Z}$  die konstanten und positiv definiten Elastizitätstensoren des reversiblen und des irreversiblen elastischen Deformationsanteils;  $\mathbf{A}$  ist der Tensor der Temperaturdehnungskoeffizienten entsprechend  $\mathbf{D}_2$  in (2.3.20)<sub>2</sub>.

Zur Lösung des Problems wird ein rein elastischer Vergleichskörper  $\mathbf{B}^\circ$  betrachtet, der sich vom Realkörper  $\mathbf{B}$  nur dadurch unterscheidet, daß sein Material rein elastisch (mit den gleichen elastischen Koeffizienten wie  $\mathbf{B}$ ) ist. Gestalt im unverformten Zustand und Belastungsgeschichte  $\{a\}$  sowie Randbedingungen sind für  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{B}^\circ$  dieselben.

Dieses Vergleichsproblem ist dann durch die folgenden Bedingungen beschrieben:

(a) Kinematische Bedingungen

$$\mathbf{F}^0 = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}^0 \quad \text{in } V \quad (3.1.17)$$

$$\mathbf{E}^0 = 1/2 [(\mathbf{F}^0)^T \cdot (\mathbf{F}^0) - \mathbf{1}] \quad \text{in } V \quad (3.1.18)$$

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^* \quad \text{auf } S_K \quad (3.1.19)$$

b) Statische Bedingungen

$$\text{Div } \mathbf{t}^0 = -\mathbf{p}^* \quad \text{in } V \quad (3.1.20)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^0 = \mathbf{f}^* \quad \text{auf } S_F \quad (3.1.21)$$

$$\mathbf{F}^0 \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{t}^0 \quad \text{in } V \quad (3.1.22)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^0 = (\boldsymbol{\sigma}^0)^T \quad \text{in } V \quad (3.1.23)$$

c) Materialgesetz

$$\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}^{0e} + \mathbf{E}^{0\theta} \quad (3.1.24)$$

$$\mathbf{E}^{0e} = \mathbf{L} : \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (3.1.25)$$

$$\mathbf{E}^{0\theta} = \mathbf{A} \theta \quad (3.1.26)$$

Die Differenz der Zustände von  $\mathbf{B}^0$  und  $\mathbf{B}$  sei beschrieben durch die Differenzfelder

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^0 \quad (3.1.27)$$

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{F} - \mathbf{F}^0 \quad (3.1.28)$$

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^0 \quad (3.1.29)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^0 \quad (3.1.30)$$

$$\Delta \mathbf{t} = \mathbf{t} - \mathbf{t}^0 \quad (3.1.31)$$

Durch Substitution der Gleichungen (3.1.17-23) und (3.1.27-31) in die Feldgleichungen (3.1.1-7) für den Realkörper  $\mathbf{B}$  erhält man folgende

Bedingungen für die Differenzfelder:

$$\Delta \mathbf{F} = \nabla(\Delta u) \quad (3.1.32)$$

$$\Delta \mathbf{E} = (1/2) [(\mathbf{F}^0)^T \cdot (\Delta \mathbf{F}) + (\Delta \mathbf{F})^T \cdot (\mathbf{F}^0) + (\Delta \mathbf{F})^T \cdot (\Delta \mathbf{F})] \quad (3.1.33)$$

$$\text{Div} (\Delta \mathbf{t}) = 0 \quad (3.1.34)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\Delta \mathbf{t}) = 0 \quad \text{auf } S_F \quad (3.1.35)$$

$$(\Delta \mathbf{F}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^0) + (\mathbf{F}^0) \cdot (\Delta \boldsymbol{\sigma}) + (\Delta \mathbf{F}) \cdot (\Delta \boldsymbol{\sigma}) = \Delta \mathbf{t} \quad (3.1.36)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = (\Delta \boldsymbol{\sigma})^T \quad (3.1.37)$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{auf } S_K \quad (3.1.38)$$

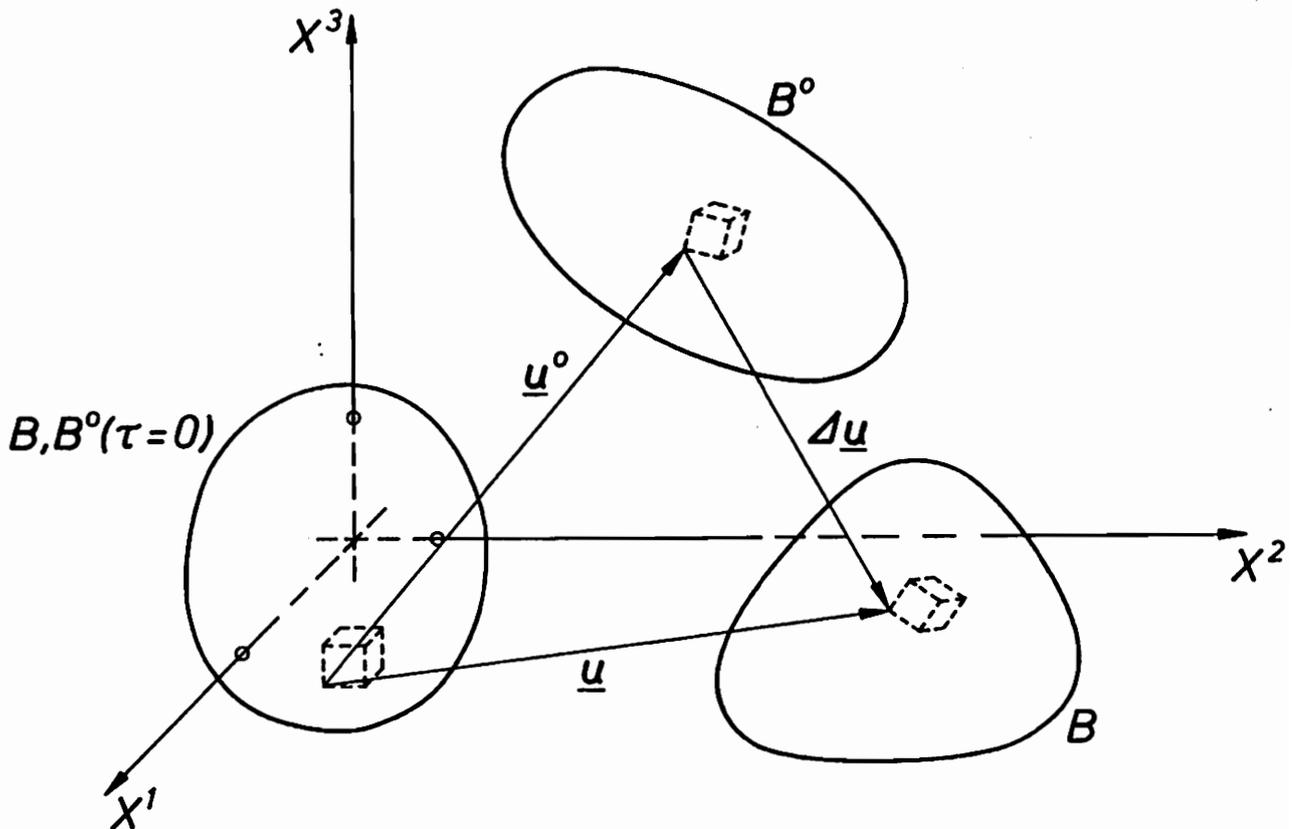


BILD 10: ZUM KONZEPT DES REIN ELASTISCHEN VERGLEICHSKÖRPERS  $B^0$

Es sei hervorgehoben, daß an dieser Stelle noch keine einschränkenden

Annahmen bezüglich der Größenordnung der Differenzfelder (3.27-31) gemacht worden sind. Von daher ist auch keine Vernachlässigung der nichtlinearen Terme in (3.1.33) und (3.1.36) zulässig. Auch ist bis hier die Möglichkeit mehrdeutiger Lösungen des Systems (3.1.17-25) nicht ausgeschlossen worden, deren Berücksichtigung für Stabilitäts- und Eindeutigkeitsuntersuchungen erforderlich ist.

### III.2 LÖSUNG DES PROBLEMS

Zunächst werden die Bilinearformen  $(\cdot, \cdot)$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $\ll \cdot, \cdot \gg$  eingeführt, definiert durch

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a^{ij\dots lm} b_{ij\dots lm} \quad (\text{a})$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_{(V_0)} a^{ij\dots lm} b_{ij\dots lm} dV \quad (\text{b}) \quad (3.2.1)$$

$$\ll \mathbf{a}, \mathbf{b} \gg = \int_{(V_0 \times T)} a^{ij\dots lm} b_{ij\dots lm} f(\tau) dV d\tau \quad (\text{c})$$

Darin bezeichnen  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  beliebige Tensoren der Stufe  $m$  und Tensorfelder als Funktionen von Ort und Zeit mit endlicher Norm  $\|\cdot\|$ , wobei als Norm jeweils die durch die verwendete Bilinearform induzierte Norm dienen soll. Die Funktion  $f(\tau)$  ist nach MOREAU [106] und RAFALSKI [131] eine beliebige monoton abnehmende positive Funktion.

Damit lassen sich die zur Indikatorfunktion des elastischen Bereichs  $C$  polaren Funktionale mittels der Fenchel-Transformation konstruieren:

$$\varphi^*(\mathbf{e}^p) = \sup_{\mathbf{s}^* \in \hat{S}} [(\mathbf{s}^*, \mathbf{e}^p) - \varphi(\mathbf{s}^*)] \quad (\text{a})$$

$$\tilde{\varphi}^*(\mathbf{e}^p) = \sup_{\mathbf{s}^* \in \tilde{S}} [\langle \mathbf{s}^*, \mathbf{e}^p \rangle - \tilde{\varphi}(\mathbf{s}^*)] \quad (\text{b}) \quad (3.2.2)$$

$$\Phi^*(\mathbf{e}^p) = \sup_{\mathbf{s}^* \in S} [\ll \mathbf{s}^*, \mathbf{e}^p \gg - \Phi(\mathbf{s}^*)] \quad (\text{c})$$

Hochgestellter Index "\*" bezeichnet dabei das jeweilige polare

Funktional. Die Mengen  $\hat{S}$ ,  $\tilde{S}$  und  $S$  der zulässigen Spannungstensoren  $s^*$  sind jeweils dadurch bestimmt, daß die durch die entsprechende Bilinearform induzierte Norm des betrachteten Spannungszustands endlich ist. Dabei sind die folgenden Definitionen benutzt worden:

$$\tilde{\varphi}(s) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{(V_0)} \varphi_{\alpha}(X) dV \quad (a) \quad (3.2.3)$$

$$\Phi(s) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{(V_0 \times T)} \varphi_{\alpha}(X, \tau) f(\tau) d\tau \quad (b)$$

$$\varphi_{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{für } s \in C \\ \alpha & \text{für } s \notin C; \alpha \in [a, \infty); a > 0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Aus der Anwendung der Theorie konvexer Funktionale [102,106,109,111, 129-133] folgt, daß die Formulierung des plastischen Anteils des Stoffgesetzes nach (3.1.8-12) und (3.1.15-16) in schwacher Form mittels der konvexen Funktion

$$g(s, \dot{e}^p) = \varphi(s) + \varphi^*(\dot{e}^p) - (s, \dot{e}^p) \geq 0 \quad (3.2.5)$$

bzw. der konvexen Funktionale

$$\tilde{g}(s, \dot{e}^p) = \tilde{\varphi}(s) + \tilde{\varphi}^*(\dot{e}^p) - \langle s, \dot{e}^p \rangle \geq 0 \quad (3.2.6)$$

$$G(s, \dot{e}^p) = \Phi(s) + \Phi^*(\dot{e}^p) - \langle s, \dot{e}^p \rangle \geq 0 \quad (3.2.7)$$

möglich ist.

Der plastische Teil des Stoffgesetzes ist immer dann erfüllt, wenn  $g$  (bzw.  $\tilde{g}$  oder  $G$ ) den Wert null annehmen. In allen anderen Fällen ist  $g$  (bzw.  $\tilde{g}$  oder  $G$ ) größer als null.

Die Fenchel-Transformation (3.2.2) ist eine Verallgemeinerung der Legendre-Transformation, mit der auch eine schwache Formulierung des elastischen Teils des Stoffgesetzes möglich ist (siehe z. B.

[132,133,149]). Die Wahl der entsprechenden Dualform und der konjugierten Dehnungs- und Spannungsmaße ist dabei von wesentlichem Einfluß auf die Formulierung und Lösung des entsprechenden Randwertproblems. Hier beschränken wir uns jedoch auf die Verwendung der in den Gleichungen (3.1.8 -12) definierten Variablen. Für den elastischen Anteil des Materialgesetzes ist dann eine analoge Darstellung wie für den plastischen Anteil möglich:

Sei  $\psi(e^e)$  die elastische Dehnungsenergiedichte, so ist die dazu duale Spannungsenergiedichte definiert durch

$$\psi^*(s) = (s, e^e) - \psi(e^e) \quad (3.2.8)$$

bzw.

$$\tilde{\psi}^*(s) = \langle s, e^e \rangle - \tilde{\psi}(e^e) \quad (3.2.9)$$

oder

$$\hat{\psi}^*(s) = \langle\langle s, e^e \rangle\rangle - \hat{\psi}(e^e) \quad (3.2.10)$$

mit

$$\tilde{\psi} = \int_{(V_o)} \psi(e^e) dV \quad (3.2.11)$$

und

$$\hat{\psi} = \int_{(V_o \times T)} \psi(e^e) f(\tau) dV d\tau \quad (3.2.12)$$

Das Stoffgesetz ist dann erfüllt, wenn die strikt konvexe Funktion  $h(s)$  (bzw. die strikt konvexen Funktionale  $\tilde{h}(s)$  oder  $H(s)$ ) den Wert null als absolutes Minimum annehmen mit:

$$h(s, e^e) = (s, e^e) - \psi(e^e) \geq 0 \quad (3.2.13)$$

$$\tilde{h}(s, e^e) = \langle s, e^e \rangle - \tilde{\psi}(e^e) \geq 0 \quad (3.2.14)$$

$$H(s, e^e) = \langle\langle s, e^e \rangle\rangle - \hat{\psi}(e^e) \geq 0 \quad (3.2.15)$$

Wegen der Konvexität der Funktionale  $g, \tilde{g}, G, h, \tilde{h}, H$  ist die Forderung nach dem Nullwerden der linken Seiten von (3.2.5-7) und (3.2.13-15) gleichbedeutend mit der Forderung nach dem Verschwinden ihrer Summen

$$g + h = 0, \quad \tilde{g} + \tilde{h} = 0, \quad G + H = 0 \quad . \quad (3.2.16)$$

Diese Form der schwachen Darstellung des Stoffgesetzes wurde in [132,133] verwendet.

Zur weiteren Lösung des Anfangsrandwertproblems wird zunächst die Menge der zulässigen Spannungszustände  $s$  auf die plastisch zulässigen ( $s \in C$ ) beschränkt, so daß (3.2.7) übergeht in

$$G(s, \dot{e}^p) = -\langle\langle s, \dot{e}^p \rangle\rangle + \sup_{s^*} \langle\langle s^*, \dot{e}^p \rangle\rangle; \quad s, s^* \in C, \quad (3.2.17)$$

da die Indikatorfunktion  $\varphi_\alpha$  identisch null ist.

Plastisch zulässig wird hier ein Spannungszustand  $s$  dann genannt, wenn er im "strikten Innern" von  $C$  liegt, d. h. wenn gilt

$$\|s - s^C\|_C > \delta \quad , \quad (3.2.18)$$

wobei  $\|\cdot\|_C$  ein Maß für den Abstand eines Spannungszustands  $s$  von einem beliebigen Spannungszustand  $s^C$  auf der äußeren Begrenzung  $C$  des elastischen Bereiches  $C$  ist. Die Zahl  $\delta$  ist eine beliebig kleine positive Konstante (siehe auch JOHNSON [68]). Diese Bedingung läßt sich sehr leicht dadurch erfüllen, daß die tatsächliche experimentell ermittelte Fließbedingung durch eine fiktive Fließbedingung mit verminderter Fließgrenze ersetzt wird.

Durch Ersetzen von  $\dot{e}^p$  durch  $\dot{e} - \dot{e}^e$  nach (3.1.8) erhält man

$$G(\dot{e} - \dot{e}^p, s) = \sup_{s^*} \langle\langle \dot{e} - \dot{e}^e, s^* - s \rangle\rangle; \quad s, s^* \in C \quad . \quad (3.2.19)$$

Dabei ist schon berücksichtigt, daß der sup-Operator nicht auf das Spannungsfeld  $s$  wirkt, sondern nur auf  $s^*$ . Ausgeschrieben erhält man mit (2.3.50a)

$$G(\dot{e} - \dot{e}^p, s) = \sup_s [ \langle \dot{E}, s^* - s \rangle - \langle \dot{e}^e, s^* - s \rangle ]$$

$$s, s^* \in C. \quad (3.2.20)$$

Als weitere Restriktion werden nur Felder  $s$  und  $s^*$  zugelassen, die die Gleichgewichtsbedingungen (3.1.4-7) bzw. für die Differenzfelder  $\Delta s^*$  und  $\Delta s$  nach (3.1.30) die Bedingungen (3.1.34-37) erfüllen. Unter Benutzung von (3.1.2) sowie der Symmetrie von  $s$  nach (3.1.7) folgt dann für homogene kinematische Randbedingungen

$$\langle \dot{E}, s^* - s \rangle = 0 \quad (3.2.21)$$

Zum Beweis benutzt man die Definition der Zeitableitung des Green'schen Dehnungstensors

$$\dot{E} = (1/2) (F^T \cdot \dot{F} + \dot{F}^T \cdot F) \quad (3.2.22)$$

und setzt sie in (3.2.21) ein. Man erhält mit (3.1.7)

$$\begin{aligned} \langle \dot{E}, s^* - s \rangle &= \langle \dot{F}^T \cdot F, s^* - s \rangle = \\ &= \langle F \cdot (s^* - s), \dot{F} \rangle = \langle F \cdot s^* - F \cdot s, \dot{v}_i \rangle. \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Die partielle Integration über das Volumen von  $B$  und die Anwendung der Definition (3.1.6) ergibt dann für die rechte Seite von (3.2.23)

$$\begin{aligned} \langle t^* - t, \dot{v}_i \rangle &= -\langle \text{Div } t^* - \text{Div } t, \dot{u} \rangle \\ &+ \langle n \cdot t^* - n \cdot t, \dot{u} \rangle_s, \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

wobei  $\langle \dots \rangle_s$  das Oberflächenintegral über  $S_0 \times T$  darstellt. Der tatsächliche Spannungszustand  $t$  und die statisch zulässigen Spannungstensoren  $t^*$  erfüllen per Definition die Gleichgewichtsbedingungen (3.1.4-5), so daß auch die rechte Seite von (3.2.24) null ist und die Gültigkeit von (3.2.21) nachgewiesen ist.

Somit geht das Funktional  $G$  über in

$$G = -\sup_s \langle s^* - s, \dot{e}^e \rangle > 0; \quad s, s^* \in C \cap S, \quad (3.2.25)$$

wobei  $S$  die Menge der im Sinn der Gleichungen (3.1.4-5) bzw. (3.1.34-37) statisch zulässigen verallgemeinerten Spannungen  $s, s^*$  ist.

Mit

$$\dot{e}^e = L : (\dot{s}^0 + \Delta \dot{s}) \quad (3.2.26)$$

sowie der Definition (3.1.30) kann dann (3.2.25) unter Benutzung der Abkürzung des Skalarproduktes (3.2.1c)  $\ll a, b \gg_L = \ll a, L : b \gg$  in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\begin{aligned} G &= -\sup_{s^*} \ll s^0 + \Delta s^* - s^0 - \Delta s, \dot{s}^0 + \Delta \dot{s} \gg_L \\ &= -\sup_{s^*} [\ll \Delta s^*, \dot{s}^0 \gg_L + \ll \Delta s^*, \Delta \dot{s} \gg_L] \\ &\quad + \ll \Delta s, \dot{s}^0 \gg_L + \ll \Delta s, \Delta \dot{s} \gg_L \geq 0 . \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Die Spannungsdifferenz  $\Delta s$  ist dann eindeutig bestimmbar, wenn  $G$  strikt konvex ist. In (3.2.27) enthält nur der Ausdruck

$$\ll \Delta s, \Delta \dot{s} \gg_L \quad (3.2.28)$$

die Variable  $\Delta s$  in nichtlinearer Form, so daß nur dieser Term für die Beantwortung der Frage nach der strikten Konvexität von  $G$  relevant ist; alle anderen Terme sind entweder unabhängig oder linear abhängig von  $\Delta s$ . Die strikte Konvexität von  $G$  läßt sich nun durch Umformung von (3.2.28) beweisen: Benutzt man als monoton fallende Funktion  $f(\tau)$  die Exponentialfunktion  $e^{-\tau}$ , so ergibt sich für den Ausdruck (3.2.26) ausführlich in Indexschreibweise die Umformung

$$\ll \Delta s, \Delta \dot{s} \gg_L = \int_0^{\bar{\tau}} \langle \Delta s, \dot{s} \rangle e^{-\tau} d\tau =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\bar{\tau}} \int_{o(V_0)} (\Delta\sigma^{AB} L_{ABCD} \Delta s^{CD} + \kappa^M Z_{MN} \kappa^N) dV e^{-\tau} d\tau = \\
 &= (1/2) \int_0^{\bar{\tau}} \int_{o(V_0)} (\partial/\partial\tau) [\Delta\sigma^{AB} L_{ABCD} \Delta\sigma^{CD} + \kappa^M Z_{MN} \kappa^N] e^{-\tau} dV d\tau = \\
 &= (1/2) \int_0^{\bar{\tau}} (\partial/\partial\tau) \int_{(V_0)} [\Delta\sigma^{AB} L_{ABCD} \Delta\sigma^{CD} + \kappa^M Z_{MN} \kappa^N] e^{-\tau} dV d\tau = \\
 &= (1/2) \int_{(V_0)} [\Delta\sigma^{AB} L_{ABCD} \Delta\sigma^{CD} + \kappa^M Z_{MN} \kappa^N] e^{-\tau} dV \Big|_0^{\bar{\tau}} \\
 &+ (1/2) \int_0^{\bar{\tau}} \int_{o(V_0)} [\Delta\sigma^{AB} L_{ABCD} \Delta\sigma^{CD} + \kappa^M Z_{MN} \kappa^N] e^{-\tau} dV d\tau . \quad (3.2.29)
 \end{aligned}$$

Für  $\bar{\tau} \rightarrow \infty$  und einen unbelasteten Anfangszustand z. Zt.  $\tau = 0$  mit verschwindenden internen Parametern ist der erste Term in der rechten Seite von (3.2.29) null. Man erhält somit

$$\langle\langle \Delta s, \Delta \dot{s} \rangle\rangle_{\underline{L}} = (1/2) \langle\langle \Delta s, \Delta s \rangle\rangle_{\underline{L}} \quad (3.2.30)$$

Das aber bedeutet, daß das Funktional G quadratisch in  $\Delta s$  ist und somit die Lösung des Minimalproblems

$$\inf_s G = \inf_s \{ \sup_s \langle\langle s^* - s, \dot{e}^e \rangle\rangle \} \geq 0 \quad \text{für } s, s^* \in C \quad (3.2.31)$$

eindeutig, wenn sie existiert. Ein Existenzbeweis für die Lösung des Problems (3.2.31) soll hier nicht erbracht werden. Für geometrisch lineare Probleme hat RAFALSKI [129] durch die Konstruktion von Hilberträumen für Spannungen und Dehnungen sowie deren orthogonale Zerlegung in Eigenspannungs- und Eigendehnungs-Unterräume einen solchen Beweis geliefert. JOHNSON [66-68] erzielte ähnliche Ergebnisse für die gleiche Problemklasse bei Verwendung eines weitergefaßten funktionalanalytischen Rahmens, da er im Gegensatz zu RAFALSKI auch Aussagen über die Verschiebungszustände im betrachteten Körper macht.

Die Übertragbarkeit dieser Ergebnisse auf das vorliegende Problem ist

jedoch nicht ohne weiteres gewährleistet. Sofort einsichtig ist jedoch, daß eine Lösung des Problems (3.2.31) dann nicht existiert, wenn die Menge

$$M(\Delta s) = S \cap C - s^0 \quad (3.2.32)$$

leer ist, d. h. wenn kein Spannungsfeld  $\Delta s$  gefunden werden kann, das für alle Zeiten statisch und plastisch zulässig ist.

Die numerische Anwendung, die am Beispiel der Flächentragwerke in Abschnitt VII.4 im einzelnen diskutiert wird, besteht aus folgenden Einzelschritten

- (1) Diskretisierung von  $\Delta s$  in Raum und Zeit
- (2) Beschränkung von  $\Delta s$  auf statisch zulässige Felder
- (3) Numerische Lösung des Min-Max Problems auf dem Bereich  $C$  plastisch zulässiger Felder.

Neben den numerischen Schwierigkeiten, die bei der Problemlösung bei den Punkten (1) und (3) auftreten, existiert das prinzipielle Problem, daß die Verformungen des betrachteten Körpers in Gestalt des Verschiebungsgradienten in die Gleichgewichtsbedingungen (3.1.4-7) bzw. (3.1.34-37), die die statische Zulässigkeit von Spannungen definieren, eingehen. Diese Verformungen sind jedoch unbekannt. Das aber heißt, daß bei der Lösung praktischer Probleme zusätzliche Annahmen bezüglich der Systemverformung getroffen werden müssen. So wird in vielen praktischen Fällen, wenn zum Beispiel eine Struktur erhebliche elastische Vorverformungen erleidet bevor Plastifizierung eintritt, die Konfiguration des verformten, rein elastischen Vergleichskörpers eine brauchbare Bezugskonfiguration sein. Dieses Vorgehen ist in WEICHERT[164] an einem numerischen Beispiel demonstriert worden. Eine andere Möglichkeit besteht darin, durch Vorversuche eine geeignete Referenzkonfiguration zu ermitteln, die dann als Grundlage für die numerischen Berechnungen dienen kann.

Anwendungen auf geometrisch lineare Probleme mit proportionaler Last-

aufbringung finden sich in der Arbeit von GROSS-WEEGE [47]. In diesem Sonderfall des hier behandelten geometrisch nichtlinearen Strukturverhaltens vereinfacht sich der numerische Aufwand erheblich, da nur der Spannungszustand des rein elastischen Vergleichskörpers  $B^0$  berücksichtigt werden muß.

#### IV. KINEMATISCHE FORMULIERUNG DES ZUWACHSRANDWERTPROBLEMS

Die Form der Stoffgesetze (2.3.19-22) als lineare Tensorfunktionen in den Geschwindigkeiten der adjungierten Spannungs- und Dehnungsgrößen legt es nahe zu versuchen, den mathematischen Apparat der linearen Elastizitätstheorie zur Konstruktion von Lösungen für physikalisch nichtlineare Probleme heranzuziehen. Es ist dabei allerdings nicht zu erwarten, daß Anfangs- und Endzustand des gesamten Prozesses im allgemeinen direkt miteinander verknüpft werden können, da die Linearität des Stoffgesetzes nur in den Geschwindigkeiten der Feldgrößen, nicht aber in den Feldgrößen selbst, besteht. Diese Überlegungen haben zur Formulierung des Zuwachs-Randwertproblems geführt, das im folgenden unter Berücksichtigung geometrischer und physikalischer Nichtlinearitäten sowie bestimmter thermischer Wirkungen diskutiert werden soll. Dabei beschränken wir uns wie schon in Kapitel III auf kleine Dehnungen, quasistatische Prozesse und beschreiben alle Größen bezogen auf die Ausgangskonfiguration des betrachteten Körpers. Erste Arbeiten über das Zuwachs-Randwertproblem ("rate-problem") stammen von ONAT [117], ONAT & SHU [118], NEALE [112] und WUNDERLICH [167], wobei frühzeitig eine fruchtbare Kombination der Finiten Elemente Methode mit der variationellen Formulierung des Zuwachs-Randwertproblems, insbesondere in der Verschiebungsformulierung und, bedingt, in der gemischten Formulierung, eingesetzt hat ([4,28,55,63,92,142]). Als Stoffgesetze werden dabei entweder das lineare HOOKE'sche Gesetz oder die PRANDTL-REUSS Gleichungen, die unter Benutzung der VON MISES-Fließbedingung und bei isotroper Verfestigung und Gültigkeit der Normalitätsregel in Form des Tangentenmoduls auf eine lineare Beziehung zwischen Spannungs- und Dehnungsincrementen führt, benutzt. Der Wert der Komponenten des Tangentenmodulentensors hängt dabei nur vom aktuellen Spannungszustand und Spannungsänderungszustand ab.

Während die theoretischen Grundlagen seit etwa 10 Jahren als gefestigt

angesehen werden können (siehe auch [20,140]), konzentrieren sich die Bemühungen jetzt auf die Entwicklung zuverlässiger und ökonomischer Algorithmen zur numerischen Lösung der aus der Formulierung des Zuwachs-Randwertproblems resultierenden Folge linearer Gleichungssysteme mit großen Anzahlen von Unbekannten ([5,134,143,144]).

Erfolgreiche Ansätze die in den Stoffgesetzen nach [86],[88],[89],[71] enthaltene, besonders für Umformprozesse wichtige thermomechanische Kopplung bei der Lösung des Zuwachs-Randwertproblems zu erfassen, finden sich erst seit neuerem in der Literatur ([2],[90]). Dabei wird eine schwache Form der mechanischen und der thermischen Gleichgewichtsbedingungen dazu benutzt, ein Finite Element Verfahren aufzubauen, bei dem sowohl Verschiebungen als auch Temperaturen als Knotenfreiwerte in die Rechnung eingehen.

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der kinematischen inkrementellen Verfahren erläutert und ihre Anwendung auf Probleme der Thermoplastizitätstheorie dargestellt.

#### 4.1 Problemstellung und Grundgleichungen

Wir betrachten hier einen Körper  $B$  vom Volumen  $V$ , der sich in einer Referenzkonfiguration  $\Omega^R$  unter der Wirkung der Volumenkräfte  $p^R$ , der Oberflächenkräfte  $f^R$  und der Oberflächenverschiebung  $u^{*R}$  bei der Temperaturverteilung  $\theta^R$  im Gleichgewicht befindet. Die äußeren Wirkungen  $p^R$ ,  $f^R$ ,  $u^{*R}$  und  $\theta^R$  sind zusammengefaßt im Supervektor  $a^R$ , definiert durch

$$a^R = \{p^R \text{ in } V, f^R \text{ auf } S_F, u^{*R} \text{ auf } S_K, \theta^R \text{ in } V\}, \quad (4.1.1)$$

die Oberflächenanteile  $S_F$  und  $S_K$  sind dabei entsprechend (2.1.2) die Anteile, auf denen Kräfte bzw. Verschiebungen vorgeschrieben sind. Aufgabe ist die Bestimmung der Zustandsänderung von  $B$ , verursacht durch die zusätzlichen äußeren Wirkungen  $\Delta a$ , die durch

$$\Delta a = \{\Delta p \text{ in } V, \Delta f \text{ auf } S_F, \Delta u^* \text{ auf } S_K, \Delta \theta \text{ in } V\} \quad (4.1.2)$$

definiert sind.

Es sei angenommen, daß der Referenzzustand durch die Verschiebungen  $u^R$ , den elastischen Dehnungsanteil  $E^{eR}$  und die internen Parameter  $\kappa^R$ , die den inneren Zustand des Materials beschreiben, bekannt ist. Die internen Parameter  $\kappa^R$  beschreiben dabei entsprechend der Definition in Abschnitt II.1.3 die Veränderung des Materialverhaltens vom Beginn des Prozesses bis zum Referenzzustand. In Abschnitt VI.2, (6.2.41-44) ist ein Beispiel für die explizite Formulierung interner Parameter angegeben.

Unter diesen Voraussetzungen gelten die folgenden Beziehungen für den Referenzzustand

$$\text{Div } t^R = -p^R \quad \text{in } V \quad (4.1.3)$$

$$n \cdot t^R = f^R \quad \text{auf } S_F \quad (4.1.4)$$

$$E^R = (1/2)[(F^R)^T \cdot (F^R) - 1] \quad \text{in } V \quad (4.1.5)$$

$$F^R = 1 + \nabla u^R \quad \text{in } V \quad (4.1.6)$$

$$u^R = u^{*R} \quad \text{auf } S_K \quad (4.1.7)$$

$$E^R = E^{eR} + E^{iR} + E^{\theta R} \quad \text{in } V \quad (4.1.8)$$

$$E^{eR} = \sigma^R : L \quad \text{in } V \quad (4.1.9)$$

$$E^{\theta R} = A \theta^R \quad \text{in } V \quad (4.1.10)$$

$$E^{iR} = E^{iR}(\sigma(\tau), \kappa(\tau)) \quad \text{in } V \quad (4.1.11)$$

$$\mathbf{F}^R \cdot \boldsymbol{\sigma}^R = \mathbf{t}^R \quad \text{in } V ; \quad (4.1.12)$$

Dabei ist  $\boldsymbol{\sigma}^R$  der symmetrische zweite PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor des Referenzzustands mit  $\boldsymbol{\sigma}^R = \boldsymbol{\sigma}^{RT}$ . Entsprechend den Definitionen (2.2.17, 2.1.10, 2.1.3) sind der Reihe nach außerdem  $\mathbf{t}$  der erste PIOLA-KIRCHHOFF'sche Spannungstensor,  $\mathbf{E}$  der GREEN'sche Dehnungstensor,  $\mathbf{F}$  der Deformationsgradient,  $\mathbf{E}^e$  bezeichnet die direkt reversiblen elastischen Dehnungen,  $\mathbf{E}^\theta$  die durch die Temperaturänderung  $\theta$  verursachten Extradehnungen,  $\mathbf{E}^{iR}$  sind die inelastischen Dehnungen, die ein Funktional des gesamten Prozesses sind, die Tensoren  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{A}$  beinhalten die elastischen Koeffizienten und die Temperatúrausdehnungskoeffizienten. Der Einfachheit halber wird im folgenden die zeitliche Konstanz von  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{A}$  vorausgesetzt.

Die Änderung  $\Delta \mathbf{a}$  der äußeren Wirkungen  $\mathbf{a}$ , definiert durch

$$\Delta \mathbf{a} = \{\Delta p, \Delta \mathbf{f}, \Delta u^*, \Delta \theta\}, \quad (4.1.13)$$

verursacht Zusatzverschiebungen  $\Delta u$ , Zusatzspannungen  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ , inelastische Zusatzdehnungen  $\Delta \mathbf{E}^i$  sowie die Änderung  $\Delta \boldsymbol{\alpha}$  der internen Parameter  $\boldsymbol{\alpha}$  in  $\mathbf{B}$ , dessen Konfiguration unter der Wirkung von  $\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}$  als "aktuelle Konfiguration  $\Omega$ " bezeichnet werden soll. Es wird angenommen, daß  $\Omega$  eine Gleichgewichtskonfiguration ist, so daß die folgenden Gleichungen gelten

$$\text{Div} (\mathbf{t}^R + \Delta \mathbf{t}) = -\mathbf{p}^R - \Delta p \quad \text{in } V \quad (4.1.14)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{t}^R + \Delta \mathbf{t}) = \mathbf{f}^R + \Delta \mathbf{f} \quad \text{auf } S_F \quad (4.1.15)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^R + \Delta \mathbf{E} = (1/2) [(\mathbf{F}^R + \Delta \mathbf{F})^T \cdot (\mathbf{F}^R + \Delta \mathbf{F}) - \mathbf{1}] \quad \text{in } V \quad (4.1.16)$$

$$\Delta \mathbf{E} = (1/2) [(\mathbf{F}^R)^T \cdot (\Delta \mathbf{F}) + (\Delta \mathbf{F})^T \cdot (\mathbf{F}^R) + (\Delta \mathbf{F})^T \cdot (\Delta \mathbf{F})] \quad \text{in } V \quad (4.1.17)$$

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{V}(\Delta \mathbf{u}) \quad \text{in } V \quad (4.1.18)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^* \quad \text{auf } S_K \quad (4.1.19)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^R + \Delta \mathbf{E} \quad \text{in } V \quad (4.1.20)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^\theta \quad \text{in } V \quad (4.1.21)$$

$$\mathbf{E}^e = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L} = \boldsymbol{\sigma}^R : \mathbf{L} + \Delta \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L} \quad \text{in } V \quad (4.1.22)$$

$$\mathbf{E}^\theta = \mathbf{A} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{A} \boldsymbol{\theta}^R + \mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\theta} \quad \text{in } V \quad (4.1.23)$$

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{E}^{iR} + \Delta \mathbf{E}^i = \mathbf{E}^{iR} + \Delta \mathbf{E}^i(\boldsymbol{\sigma}, \Delta \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}, \Delta \boldsymbol{\kappa}) \quad \text{in } V \quad (4.1.24)$$

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{L} : \Delta \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{A} \Delta \boldsymbol{\theta} + \Delta \mathbf{E}^i \quad \text{in } V \quad (4.1.25)$$

$$\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{F}^R + \Delta \mathbf{F}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^R + \Delta \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{t} = \mathbf{t}^R + \Delta \mathbf{t} \quad \text{in } V \quad (4.1.26)$$

$$\Delta \mathbf{t} = \Delta \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}^R + \mathbf{F}^R \cdot \Delta \boldsymbol{\sigma}^R + \Delta \mathbf{F} \cdot \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad \text{in } V. \quad (4.1.27)$$

Dabei ist  $\Delta \mathbf{E}^i$  in den Gleichungen (4.1.24) und (4.1.25) von dem Teil des Prozesses abhängig, der  $B$  von der Konfiguration  $\Omega^R$  in die aktuelle Konfiguration  $\Omega$  überführt.

Bei gegebenen äußeren Wirkungen  $\Delta \mathbf{a}$  gibt es für das Gleichungssystem (4.1.14) - (4.1.27) im allgemeinen keine geschlossene Lösung. Darüberhinaus kann zunächst weder die Existenz noch die Eindeutigkeit einer eventuellen Lösung à priori angenommen werden. Der qualitative Unterschied zu verwandten Problemen mit rein elastischem Materialverhalten liegt in der Prozessabhängigkeit von  $\Delta \mathbf{E}^i$ , die prinzipiell kein finites Stoffgesetz erlaubt.

#### 4.2 Schwache Form der Gleichgewichtsbedingungen in der aktuellen Konfiguration

Zur schwachen Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen wird das Prinzip der virtuellen Arbeit für den Körper  $B$  in der aktuellen Konfiguration  $\Omega$  angewandt. Mit den schon in (3.2.1a) eingeführten Bilinearformen

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_{(V)} (\mathbf{a} : \mathbf{b}) dV = \int_{(V)} a_{ij} b_{ij} dV \quad (4.2.1)$$

$$[\mathbf{c}, \mathbf{d}]_{S_F} = \int_{(S_F)} \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{d} dS = \int_{(S_F)} c_i d_i dS, \quad (4.2.2)$$

definiert für beliebige zweistufige Tensoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  bzw. Vektoren  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{d}$ , gilt

$$\langle \mathbf{t}^R + \Delta \mathbf{t}, \mathbf{V}(\delta \mathbf{u}) \rangle = \langle \mathbf{p}^R + \Delta \mathbf{p}, \delta \mathbf{u} \rangle + [\mathbf{f}^R + \Delta \mathbf{f}, \delta \mathbf{u}]_{S_F}. \quad (4.2.3)$$

Hierbei ist  $\delta \mathbf{u}$  ein beliebiger Verschiebungszustand für  $B$ , der auf dem Rand  $S_K$  überall den Wert null annimmt. Derartige Verschiebungszustände werden "kinematisch zulässig" genannt. Durch Einsetzen von (4.1.26) in (4.2.3) erhält man sofort

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}^R \cdot \boldsymbol{\sigma}^R, \mathbf{V}(\delta \mathbf{u}) \rangle + \langle (\mathbf{F}^R + \Delta \mathbf{F}) \cdot \Delta \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{V}(\delta \mathbf{u}) \rangle + \langle \Delta \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}^R, \mathbf{V}(\delta \mathbf{u}) \rangle = \\ \langle \mathbf{p}^R + \Delta \mathbf{p}, \delta \mathbf{u} \rangle + [\mathbf{f}^R + \Delta \mathbf{f}, \delta \mathbf{u}]_{S_F}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Setzt man voraus, daß die Referenzkonfiguration  $\Omega^R$  eine Gleichgewichtskonfiguration ist, so folgt aus (4.2.4)

$$\langle (\mathbf{F}^R + \Delta \mathbf{F}) \cdot \Delta \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{V}(\delta \mathbf{u}) \rangle + \langle \Delta \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}^R, \mathbf{V}(\delta \mathbf{u}) \rangle = \langle \Delta \mathbf{p}, \delta \mathbf{u} \rangle + [\Delta \mathbf{f}, \delta \mathbf{u}]_{S_F} \quad (4.2.5)$$

Die Umformung von (4.2.5) unter Berücksichtigung der Symmetrie von  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$  liefert dann

$$(1/2)\langle \Delta\sigma, [(F^R + \Delta F)^T \cdot (\nabla(\delta u)) + (\nabla(\delta u))^T \cdot (F^R + \Delta F)] \rangle + \langle \sigma^R, \nabla(\delta u)^T \cdot \Delta F \rangle = \\ \langle \Delta p, \delta u \rangle + [\Delta f, \delta u]_{S_F} \quad (4.2.6)$$

Entwickelt man  $\Delta\sigma$  und  $\Delta F$  in Taylorreihen mit

$$\Delta g = (\partial g / \partial \tau) \Big|_R \Delta \tau + (\partial^2 g / (\partial \tau)^2) \Big|_R (\Delta \tau)^2 / 2 + \dots, \quad (4.2.7)$$

wobei  $g$  eine beliebige tensorielle Funktion ist, so erhält man mit den Abkürzungen

$$(\partial g / \partial \tau) = \dot{g}, \quad (\partial^2 g / (\partial \tau)^2) = \ddot{g}, \quad \hat{g} = \dot{g} \Delta \tau \quad (4.2.8)$$

unter Vernachlässigung aller Terme zweiter und höherer Ordnung in  $\Delta \tau$  aus Gleichung (4.2.6)

$$(1/2)\langle \hat{\sigma}, [(F^R + \nabla \hat{u})^T \cdot (\nabla(\delta u)) + (\nabla(\delta u))^T \cdot (F^R + \nabla \hat{u})] \rangle + \langle \sigma^R, \nabla(\delta u)^T \cdot (\nabla \hat{u}) \rangle \\ = \langle \hat{p}, \delta u \rangle + [\hat{f}, \delta u]_{S_F} \quad (4.2.9)$$

Dabei sind  $\hat{p}$  und  $\hat{f}$  entsprechend (4.2.8) definiert.

Zu beachten ist, daß  $\delta u$  und  $\hat{u}$  voneinander verschiedene physikalische Bedeutungsinhalte haben: Während  $\hat{u}$  die linearisierten tatsächlichen d.h. dem Zuwachs  $\Delta a$  der äußeren Wirkungen entsprechenden Verschiebungsänderungen sind, bezeichnet  $\delta u$  beliebige, von  $\Delta a$  völlig unabhängige, kinematisch zulässige Verschiebungszustände. Dabei gehört allerdings  $\hat{u}$  zur Klasse der durch  $\delta u$  bezeichneten zulässigen Verschiebungszustände. Zur Herleitung inkrementeller Variationsverfahren kann zunächst durch Einschränkung der möglichen  $\delta u$  auf  $\hat{u}$  Gleichung (4.2.9) in die Form

$$(1/2)\langle \hat{\sigma}, [(F^R + \nabla \hat{u})^T \cdot (\nabla \hat{u}) + (\nabla \hat{u})^T \cdot (F^R + \nabla \hat{u})] \rangle + \langle \sigma^R, (\nabla \hat{u})^T \cdot (\nabla \hat{u}) \rangle = \\ \langle \hat{p}, \hat{u} \rangle + [\hat{f}, \hat{u}]_{S_F} \quad (4.2.10)$$

überführt werden. Umgeformt ergibt sich

$$(1/2)\langle \hat{\sigma}, \hat{E} \rangle + \langle \sigma^R, (\nabla \hat{u})^T \cdot (\nabla \hat{u}) \rangle + \langle \hat{\sigma}, (\nabla \hat{u})^T \cdot (\nabla \hat{u}) \rangle =$$

$$\langle \hat{\phi}, \hat{u} \rangle + [\hat{f}, \hat{u}]_{S_F} \quad (4.2.11)$$

Vernachlässigt man Terme dritter Ordnung in  $\Delta\tau$ , so erhält man aus (4.2.11)

$$\begin{aligned} (1/2) \langle \hat{\sigma}, \hat{E} \rangle + \langle \sigma^R, (\hat{v}\hat{u})^T \cdot (\hat{v}\hat{u}) \rangle = \\ \langle \hat{\phi}, \hat{u} \rangle + [\hat{f}, \hat{u}]_{S_F}, \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

wobei in (4.2.11) und (4.2.12) die Definition

$$\hat{E} = (1/2) [(\mathbf{F}^R)^T \cdot (\hat{v}\hat{u}) + (\hat{v}\hat{u})^T \cdot (\mathbf{F}^R)] \quad (4.2.13)$$

als Linearisierung des Ausdrucks

$$(1/2) [(\mathbf{F}^R + \hat{v}\hat{u})^T \cdot (\hat{v}\hat{u}) + (\hat{v}\hat{u})^T \cdot (\mathbf{F}^R + \hat{v}\hat{u})] \quad (4.2.14)$$

durch Vernachlässigung der Terme  $(\hat{v}\hat{u})^T \cdot (\hat{v}\hat{u})$  benutzt worden ist. Dividiert man die Gleichung (4.2.12) durch  $(\Delta\tau)^2$ , so erhält man den Gleichung (4.2.11) entsprechenden Ausdruck in Geschwindigkeiten entsprechend den Definitionen (4.2.8) zu

$$(1/2) \langle \dot{\hat{\sigma}}, \dot{\hat{E}} \rangle + \langle \sigma^R, (\hat{v}\dot{\hat{u}})^T \cdot (\hat{v}\dot{\hat{u}}) \rangle = \langle \dot{\hat{\phi}}, \dot{\hat{u}} \rangle + [\dot{\hat{f}}, \dot{\hat{u}}]_{S_F} \quad (4.2.15)$$

Linearisiert man die Gleichung (4.1.27) dadurch, daß nur Terme berücksichtigt werden, die die Änderungen  $\hat{F} = \hat{v}\hat{u}$  und  $\hat{\sigma}$  entsprechend den Definitionen (4.2.8) linear enthalten, so daß gilt

$$\hat{t} = \hat{F} \cdot \sigma^R + \mathbf{F}^R \cdot \hat{\sigma} \quad (4.2.16)$$

beziehungsweise

$$\dot{\hat{t}} = \dot{\hat{F}} \cdot \sigma^R + \mathbf{F}^R \cdot \dot{\hat{\sigma}}, \quad (4.2.17)$$

so lassen sich die Gleichungen (4.2.12) und (4.2.15) sofort umformen zu

$$\langle \hat{t}, \nabla \hat{u} \rangle = \langle \hat{p}, \hat{u} \rangle + [f, \hat{u}]_{S_F} \quad (4.2.18)$$

beziehungsweise

$$\langle \dot{t}, \nabla \dot{u} \rangle = \langle \dot{p}, \dot{u} \rangle + [f, \dot{u}]_{S_F} . \quad (4.2.19)$$

Trotz des grundsätzlichen Unterschieds zwischen den mit  $(\dot{\phantom{x}})$  gekennzeichneten Geschwindigkeiten und den mit  $(\hat{\phantom{x}})$  gekennzeichneten linearisierten Änderungen von Feldgrößen haben die mit ihnen hergeleiteten Gleichungen dieselbe Struktur. Im folgenden wird daher nur mit den Geschwindigkeiten gearbeitet in der Kenntnis, daß die entsprechenden Gleichungen in den Änderungen der betrachteten Größen dieselbe Form haben.

#### 4.3 Stoffgesetze elasto-plastischer Materialien

Wir beschränken uns hier auf Stoffgesetze, bei denen ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungsgeschwindigkeiten  $\dot{\sigma}$  und Dehnungsgeschwindigkeiten  $\dot{E}$  postuliert werden kann mit

$$\dot{\sigma} = M : \dot{E}. \quad (4.3.1)$$

Dabei gelten entsprechend Gleichungen (4.1.17), (4.1.18), (4.1.25) unter Zuhilfenahme von (4.2.7-8, 4.2.13) die Definitionen

$$\dot{E} = (1/2)[\dot{F}^T \cdot F^R + (F^R)^T \cdot \dot{F}] \quad (4.3.2)$$

$$\dot{F} = \nabla \dot{u} \quad (4.3.3)$$

$$\dot{E} = \dot{E}^e + \dot{E}^\theta + \dot{E}^i \quad (4.3.4)$$

$$\dot{E}^e = L : \dot{\sigma} \quad (4.3.5)$$

$$\dot{E}^\theta = A \dot{\theta} \quad (4.3.6)$$

$$\dot{E}^i = \dot{E}^i(\sigma, \kappa, \dot{\sigma}) \quad (4.3.7)$$

Beschränkt man sich auf elasto-plastisches Stoffverhalten mit

Verfestigung bei Existenz einer Fließbedingung mit Potential und der Gültigkeit der Normalitätsregel, so gilt entsprechend (2.3.24)

$$\dot{E}^i = \lambda [\partial f(\sigma, \kappa) / \partial \sigma] . \quad (4.3.8)$$

Die Belastungsbedingung (2.3.34), hier vereinfacht zu

$$\dot{f} = 0 = (\partial f / \partial \sigma) : \dot{\sigma} + (\partial f / \partial \kappa) \cdot \dot{\kappa} , \quad (4.3.9)$$

erlaubt dann bei vorgegebener expliziter Form für  $f$  und des Verfestigungsgesetzes die Bestimmung des skalarwertigen Multiplikators  $\lambda$ . So erhält man bei Verwendung der von Mises Fließbedingung und isotroper Verfestigung die Tangentensteifigkeitsmatrix

$$C_{KLMN} = \{ [3\tilde{\sigma}_{KL} \tilde{\sigma}_{MN} [(1/E_T) + (1/E)]] / (2J_2) \} . \quad (4.3.10)$$

mit  $\tilde{\sigma}$  als Spannungsdeviator,  $E_T$  als Tangentenmodul des einachsigen Zugversuchs,  $E$  als elastischem Modul und  $J_2$  als zweiter Invariante des Spannungsdeviators, definiert durch

$$J_2 = (\tilde{\sigma}^{KL} G_{KM} G_{LN} \tilde{\sigma}^{MN}) \quad (4.3.11)$$

mit der Metrik  $G$  des Bezugskordinatensystems und der Definition des Deviators  $\tilde{\sigma}$  durch

$$\tilde{\sigma}^{KL} = \sigma^{KL} - (1/3)(G_{MK} G^M_L \sigma^{KL}) , \quad (4.3.12)$$

so daß gilt

$$E_{KL}^p = \gamma C_{KLMN} \sigma^{MN} . \quad (4.3.13)$$

Dabei nimmt  $\gamma$  den Wert 0 oder 1 an, je nachdem, ob Entlastung bzw. Belastung im rein elastischen Bereich ( $\gamma=0$ ) oder Belastung im plastischen Bereich ( $\gamma=1$ ) vorliegt.

Faßt man nun Gleichungen (4.3.5-6, 4.3.13) zusammen, so ergibt sich

$$\dot{E} = (L + \gamma C) : \dot{\sigma} + A \dot{\theta} , \quad (4.3.14)$$

oder, in Indexschreibweise

$$\dot{E}_{MN} = (L_{KLMN} + \gamma C_{KLMN}) \dot{\sigma}^{KL} + A_{MN} \dot{\theta} \quad (4.3.15)$$

Faßt man L und  $\gamma C$  zum Tensor K zusammen, so ergibt sich

$$\dot{E}_{MN} = K_{KLMN} \dot{\sigma}^{KL} + A_{MN} \dot{\theta} \quad (4.3.16)$$

mit der Umkehrung

$$\dot{\sigma}^{KL} = (\dot{E}_{MN} - A_{MN} \dot{\theta}) (K^{-1})^{KLMN} \quad (4.3.17)$$

#### 4.4 Variationelle Formulierung des Zuwachsrandwertproblems

Setzt man Gleichung (4.3.17) in (4.2.15) ein, so ergibt sich in Indexschreibweise

$$\begin{aligned} (1/2) \int_{(V)} [\dot{E}_{MN} - A_{MN} \dot{\theta}] (K^{-1})^{KLMN} \dot{E}_{KL} + (\sigma^R)^{KL} \dot{u}^i |_{K^i i} |_{L} ] dv = \\ \int_{(V)} \dot{p}^K \dot{u}_K dv + \int_{(S_F)} \dot{f}^K \dot{u}_K ds = 0 \quad (4.4.1) \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (4.2.13) und unter Berücksichtigung der Symmetrie von K (und somit  $K^{-1}$ ), erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} (1/2) \int_{(V)} [ (F^R)^j_{.M} \dot{u}_j |_{N} (K^{-1})^{KLMN} (F^R)^i_{.K} \dot{u}_i |_{L} + (\sigma^R)^{LN} \dot{u}_j |_{N^i i} |_{L} \delta^{ij} \\ - 2 \dot{\theta} A_{MN} (K^{-1})^{KLMN} (F^R)^j_{.K} \dot{u}_j |_{L} ] dv + \int_{(V)} \dot{p}^K \dot{u}_K dv + \int_{(S_F)} \dot{f}^K \dot{u}_K ds \\ = (1/2) \int_{(V)} \{ \dot{u}_j |_{N} [ (K^{-1})^{KLMN} (F^R)^j_{.M} (F^R)^i_{.K} + (\sigma^R)^{LN} \delta^{ij} ] \dot{u}_i |_{L} \end{aligned}$$

$$-2\dot{\theta}[(K^{-1})^{KLMN}(F^R)_{.K}^i A_{MN}] \dot{u}_i|_L \} dv + \int_{(V)} \dot{p}^K \dot{u}_K dv + \int_{(S_K)} \dot{f}^K \dot{u}_K ds = 0 . \quad (4.4.2)$$

Mit den Definitionen

$$M^{iLjN} = (F^R)_{.K}^i (K^{-1})^{KLMN} (F^R)_{.M}^j + (\sigma^R)^{LN} \delta^{ij}$$

$$\bar{B}^{iL} = (F^R)_{.K}^i (K^{-1})^{KLMN} A_{MN} \quad (4.4.3)$$

erhalten wir die Form

$$(1/2) \int_{(V)} [\dot{u}_j|_N M^{iLjN} \dot{u}_i|_L - 2\dot{\theta} \bar{B}^{iL} \dot{u}_i|_L] dv + \int_{(V)} \dot{p}^K \dot{u}_K dv$$

$$+ \int_{(S_F)} \dot{f}^K \dot{u}_K ds = 0 . \quad (4.4.4)$$

In Matrizenform dargestellt ergibt sich hieraus

$$(1/2) \int_{(V)} (\dot{u}_j|_N, \dot{\theta} \delta_{jN}) \begin{pmatrix} M^{iLjN} & -B^{iLjN} \\ -B^{iLjN} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_i|_L \\ \dot{\theta} \delta_{iL} \end{pmatrix} dv +$$

$$\int_{(V)} \dot{p}^K \dot{u}_K dv + \int_{(S_F)} \dot{f}^K \dot{u}_K ds = 0 , \quad (4.4.5)$$

wobei formal der Tensor  $\bar{B}$  zweiter Stufe durch den Tensor  $B$ , definiert durch  $B^{iLjN} \delta_{jN} = \bar{B}^{iL}$  zur Erzeugung kodimensionaler Elemente in der Matrix in Gleichung (4.4.5) ersetzt worden ist. In abgekürzter Form

kann sie dann ausgedrückt werden durch

$$(1/2)\langle \dot{\alpha}, Q : \dot{x} \rangle + \langle \dot{\phi}, \dot{u} \rangle + [\dot{f}, \dot{u}] = 0, \quad (4.4.6)$$

wobei  $Q$  die Supermatrix aus (4.4.5) und  $\dot{x}$  den Vektor aus den Variablen  $\dot{v}_i$  und  $\dot{\theta}$  darstellt.

Dabei ist zu berücksichtigen, daß  $\dot{\theta}$  in allen Beziehungen dieses Abschnitts entsprechend der Aufgabenstellung eine vorgegebene Größe ist.

Eine Erweiterung auf Prozesse mit vorgegebener Oberflächentemperatur und Wärmeproduktion im Innern ist dadurch möglich, daß man die Bedingung des thermischen Gleichgewichts berücksichtigt. Dazu gehen wir von der thermischen Gleichgewichtsbedingung in der Form

$$\rho c \dot{\theta} - \lambda (\nabla)^2 \theta - q = 0 \quad (4.4.7)$$

aus, wobei  $\rho$  die spezifische Dichte,  $c$  die spezifische Wärmekapazität,  $\lambda$  der Wärmeleitkoeffizient und  $q$  die gegebene, im Innern von  $B$  produzierte spezifische Wärme ist. Alle Größen sind hier auf die Referenzkonfiguration  $\Omega^R$  bezogen und  $\nabla^2$  steht für  $\nabla \cdot \nabla$  bzw. in Indexschreibweise  $(d^2/(dx_A)^2)$ ,  $A=1,2,3$ . Dann läßt sich eine schwache Form der thermischen Energieerhaltung durch die Multiplikation von (4.4.7) mit einer beliebigen Variation  $\delta\theta$  der Temperatur  $\theta$  und Integration über das Volumen von  $B$  durch

$$\int_{(V)} (\rho c \dot{\theta} - \lambda (\nabla)^2 \theta - q) \delta\theta \, dV = 0 \quad (4.4.8)$$

erzeugen. Selektiert man aus der Menge der zulässigen Funktionen  $\delta\theta$  diejenigen, die die Randbedingungen für die Temperaturänderungen  $\dot{\theta}$  erfüllen und identifiziert man  $\delta\theta$  entsprechend der Vorgehensweise beim Übergang von (4.2.9) nach (4.2.11) mit dem tatsächlichen Temperaturänderungsfeld  $\dot{\theta}$ , so ergibt sich für (4.4.8)

$$\int_{(V)} \rho c \dot{\theta}^2 dV - \int_{(V)} [\lambda(\nabla)^2 \theta \dot{\theta} + q \dot{\theta}] dV = 0 \quad (4.4.9)$$

Da  $\rho c$  immer positiv ist und die Faktoren  $\lambda(\nabla)^2 \theta$  sowie  $q$  bekannt sind, stellt (4.4.9) ein in  $\dot{\theta}$  positiv definites Funktional dar, welches für die Lösung  $\dot{\theta}^*$  ein absolutes Minimum annimmt. Dieses kann mit der quadratischen Form (4.4.5) bzw. (4.4.6) zusammengefaßt werden

$$(1/2) \langle \dot{x}, \bar{Q} : \dot{x} \rangle + \langle a, \dot{y} \rangle + [\dot{f}, \dot{u}]_{S_F} = 0 \quad (4.4.10)$$

mit den Abkürzungen

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} M^{iLjN} & -B^{iLjN} \\ -B^{iLjN} & (2/9) \rho c \delta^{iL} \delta^{jN} \end{pmatrix}$$

und

$$\dot{y} = (\dot{u}_K, \dot{\theta})^T, \quad a = [p^K, q - \lambda(\nabla^2 \theta)]^T \quad (4.4.11)$$

Soll die thermomechanische Kopplung zwischen plastischer Arbeit, Dissipation und Temperaturänderung erfaßt werden, so kann dies in erster Näherung unter Vernachlässigung der in Abschnitt II.2.4 beschriebenen Effekte dadurch geschehen, daß die gesamte plastische Leistung  $\sigma^R : \dot{E}^P$  als dissipierte Wärme  $q$  angesetzt wird. Die plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten  $\dot{E}^P$  sind jedoch durch  $\dot{E}$ ,  $\dot{E}^\theta$  und die gegebenen Materialparameter darstellbar.

## V. DAS EINSPIELEN ELASTO-PLASTISCHER KÖRPER

In sehr vielen praktischen Problemen der Strukturmechanik ist die Kenntnis des tatsächlichen Spannungszustands am Ende eines Belastungsprozesses, der mit den im vorigen Abschnitt hergeleiteten Methoden ermittelt werden kann, von untergeordneter Bedeutung. Vielmehr interessiert, ob die betrachtete Struktur, gemessen an den an sie gestellten funktionalen Anforderungen, versagt oder nicht.

Eine spezielle Form des Versagens bei veränderlichen Lasten ist der inkrementelle Zusammenbruch einer elasto-plastischen Struktur: Er ist dadurch gekennzeichnet, daß man keinen Zeitpunkt  $\tau$  im Verlauf des Prozesses angeben kann, jenseits dessen keine zusätzlichen plastischen Verformungen auftreten; die plastischen Deformationen wachsen unbegrenzt. Wenn hingegen ein solcher Zeitpunkt existiert, so bleiben die plastischen Deformationen begrenzt und man sagt, daß sich der betreffende Körper jenseits dieses Zeitpunkts "eingespielt" hat. Es sei bemerkt, daß mit den herkömmlichen inkrementellen Verfahren die Frage, ob sich bei einer beliebigen Anzahl von Lastzyklen ein Bauteil einspielt oder nicht, prinzipiell nicht zufriedenstellend beantwortet werden kann, da nur für eine sehr begrenzte Anzahl von Berechnungsschritten zuverlässige Ergebnisse erwartet werden können, während bei dem genannten Problem eine sehr große Anzahl von Lastveränderungen berücksichtigt werden müßte.

MELAN [101] hat für geometrisch lineare Probleme über einen statischen Ansatz ein hinreichendes Kriterium für das Einspielen eines elasto-plastischen Körpers hergeleitet. Er zeigte, unter welchen Bedingungen die plastischen Deformationen in einem globalen Sinne begrenzt bleiben. Wenn dies für einen bestimmten Körper gezeigt werden kann, so sagen wir, daß sich der Körper "einspielt". Komplementär hierzu hat KOITER [78] ein hinreichendes Kriterium für "Nicht-Einspielen" mittels eines kinematischen Ansatzes angegeben. Erweiterungen dieser beiden Grundkonzepte auf andere Problemklassen unter Berücksichtigung von

Temperaturveränderungen, Verfestigung, Kriechen und dynamischer Effekte sind gemacht worden [23,42,43,72,73,77,80,124,125] und die numerische Anwendung, basierend auf der Formulierung von MAIER [93,94], bei der das Kontinuum *à priori* durch eine endliche Anzahl diskreter Freiwerte ersetzt wird, gehört inzwischen zum Instrumentarium der Strukturanalyse; Literaturübersichten finden sich in KÖNIG & MAIER [75] und MAIER & MUNRO [95], sowie in GOKHFELD & CHERNIAVSKY [43].

Die überwiegende Mehrzahl dieser Arbeiten basiert auf der Theorie infinitesimaler Verformungen, bei der der Einfluß der Geometrieänderung auf die Gleichgewichtsbedingungen vernachlässigt wird. Bei Problemen der Strukturmechanik im Bauwesen stellt dies keine wesentliche Einschränkung dar, da ein Bauwerk gewöhnlich schon dann unbrauchbar wird, wenn die in ihm auftretenden Verschiebungen klein sind, d.h. im Gültigkeitsbereich der geometrisch linearen Theorien. Die Beurteilung des Einspielverhaltens von Bauwerken, speziell von Rahmen und Stabwerken, ist demzufolge ein wichtiges Anwendungsgebiet für das MELAN'sche Theorem (siehe auch Literatursammlungen [75,95]).

Betrachtet man jedoch Strukturen aus metallischem Material, wie Behälter, Rohre, allgemein tragende Teile bei Fahrzeugen und Flugzeugen, so stellt man fest; daß Versagen unter Umständen erst bei erheblichen Verformungen der Struktur auftritt, die den Gültigkeitsbereich linearer Theorien weit überschritten haben, so daß eine Erweiterung der herkömmlichen Verfahren zur Erfassung geometrisch nichtlinearer Effekte erforderlich ist.

Geometrische Nichtlinearitäten ("Effekte zweiter Ordnung") wurden zum erstenmal von MAIER [93,94] bei Anwendung auf von vornherein diskretisierte Systeme berücksichtigt. Er benutzte dazu ein vereinfachtes lineares Dehnungsmaß sowie eine linearisierte Fließbedingung. KÖNIG [74,76] behandelte in mehreren Arbeiten das Problem stabilisierender bzw. destabilisierender Effekte geometrischer Änderungen auf den inkrementellen Kollaps und erhielt ein Kriterium für stabile und instabile Prozesse, unter der Voraussetzung, daß entweder die

Formfunktion, die die Gestaltsänderung des betrachteten Körpers bei der sukzessiven Deformationen beschreibt, invariant ist, oder aber daß nur der Beginn des Prozesses betrachtet wird.

Ganz ähnlich hierzu untersuchten NGUYEN & GARY [116] das Problem von Instabilitäten, hervorgerufen durch akkumulierte plastische Dehnungen und unterstreichen das Risiko des Beulens von Strukturen infolge dieser plastischen Deformationen. Sie linearisieren die Gleichgewichtsbedingungen bezüglich einer fixierten Vorspannung des Systems.

In diesem Abschnitt wird der Einfluß von Geometrieänderungen auf das Einspielverhalten im Rahmen der Kontinuumsmechanik betrachtet, ohne daß à priori Linearisierungen vorgenommen werden. Die hergeleiteten Aussagen sind Erweiterungen der Resultate der Arbeiten von WEICHERT [163,165].

#### V.1 EINE ERWEITERUNG DES MELAN'SCHEN THEOREMS

Es wird dieselbe Notation wie in Kapitel III verwandt. Insbesondere wird vorausgesetzt, daß die Lösung eines rein elastischen Referenzproblems (Index "0") entsprechend den Gleichungen (3.1.17-26) gegeben ist. Die Differenzfelder zwischen allen Feldgrößen des Realkörpers  $B$  und des Referenzkörpers  $B^0$  sind dann durch (3.1.27-31) definiert.

Sei  $s^+$  ein "sicheres" generalisiertes Spannungsfeld entsprechend (3.1.12), welches für alle Zeiten  $\tau$  die Fließbedingung so erfüllt, daß es im strikten Innern des elastischen Bereichs  $C$  liegt:

$$s^+ \in C(s) \tag{5.1.1}$$

Mit

$$s^+ = s^0 + \Delta s^+, \tag{5.1.2}$$

wobei  $\Delta s^+$  zeitunabhängig ist. Es wird gezeigt werden, unter welchen Bedingungen der Realkörper  $B$  einspielt, wenn ein solches Feld  $\Delta s^+$

existiert.

Unter der Annahme der Existenz eines Differenzfeldes  $\Delta s^+$  kann die positive quadratische Form  $W$  definiert werden mit

$$W = (1/2) (\Delta s - \Delta s^+, \Delta s - \Delta s^+)_{\tilde{L}} =$$

$$(1/2) \int_{V_0} [(\Delta \sigma - \Delta \sigma^+) : L : (\Delta \sigma - \Delta \sigma^+) + (\omega - \omega^+) \cdot Z \cdot (\omega - \omega^+)] dV. \quad (5.1.3)$$

Die Stofftensoren  $L$  und  $Z$  sind positiv definit und konstant entsprechend (3.1.13-15). Der zeitliche Zuwachs  $\dot{W}$  ist dann gegeben durch

$$\dot{W} = (\Delta s - \Delta s^+, \dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^+) \quad , \quad (5.1.4)$$

wobei  $\epsilon$  und  $\epsilon^+$  definiert sind durch

$$\epsilon = \tilde{L} : \Delta s \quad , \quad \epsilon^+ = \tilde{L} : \Delta s^+ \quad . \quad (5.1.5)$$

Der Dehnungsdifferenztensor  $\Delta e$  setzt sich zusammen aus einem Anteil, der die Spannungsdifferenz  $\Delta s$  erzeugt und dem rein plastischen Deformationsanteil  $e^P$ , so daß mit (5.1.5a) gilt:

$$\Delta e = e^P + \epsilon \quad . \quad (5.1.6)$$

Mit (3.1.29) ergibt sich dann

$$e = e^0 + \epsilon + e^P \quad . \quad (5.1.7)$$

Aus der Annahme, daß  $\Delta s^+$  zeitunabhängig ist, folgt mit (5.1.5)<sub>b</sub>, daß  $\dot{\epsilon}^+$  gleich null ist. Setzt man (5.1.7) in (5.1.4) ein, so erhält man

$$\dot{W} = (\Delta s - \Delta s^+, \dot{e} - \dot{e}^0 - \dot{e}^P) \quad . \quad (5.1.8)$$

Unter Benutzung der Definitionen

$$e = [E, 0], \quad e^0 = [E^0, 0], \quad e^P = [E^P, \kappa], \quad (5.1.9)$$

die aus (3.1.9), (3.1.11) und dem Umstand folgen, daß die rein

elastische Lösung des Referenzproblems keine internen Parameter haben kann, und der Definition (3.1.2) bzw. (3.1.18) der Zeitableitung des Green'schen Dehnungstensors erhält man:

$$\dot{W} = \dot{W}_p + \dot{W}_h \quad (5.1.10)$$

$$\dot{W}_p = (1/2) \langle \Delta s - \Delta s^+, \dot{F}^T \cdot F + F^T \cdot \dot{F} - (\dot{F}^0)^T \cdot F^0 - (F^0)^T \cdot \dot{F}^0 - 2\dot{E}^p \rangle \quad (5.1.11)$$

$$\dot{W}_h = (1/2) \langle \kappa - \kappa^+, 2\dot{\kappa} \rangle . \quad (5.1.12)$$

Es sei bemerkt, daß wegen der Entkopplung der Temperaturdehnungen  $e^\theta$  von elastischem und plastischem Deformationsanteil die Temperaturdehnungen  $e^\theta$  in dieser Herleitung nicht explizit auftreten. Sie gehen nur über die Bedingung, daß  $s = s^0 + \Delta s$  bzw.  $s^+ = s^0 + \Delta s^+$  im elastischen Bereich C liegen müssen, in die Problemlösung ein, da sie den Spannungszustand  $s^0$  beeinflussen.

Durch die Symmetrie von  $\Delta e$  und  $\Delta s^+$  kann  $\dot{W}_p$  umgeformt werden. Es gilt dann:

$$\dot{W}_p = \langle \Delta s - \Delta s^+, F^T \cdot \dot{F} - (F^0)^T \cdot (\dot{F}^0) - \dot{E}^p \rangle, \quad (5.1.13)$$

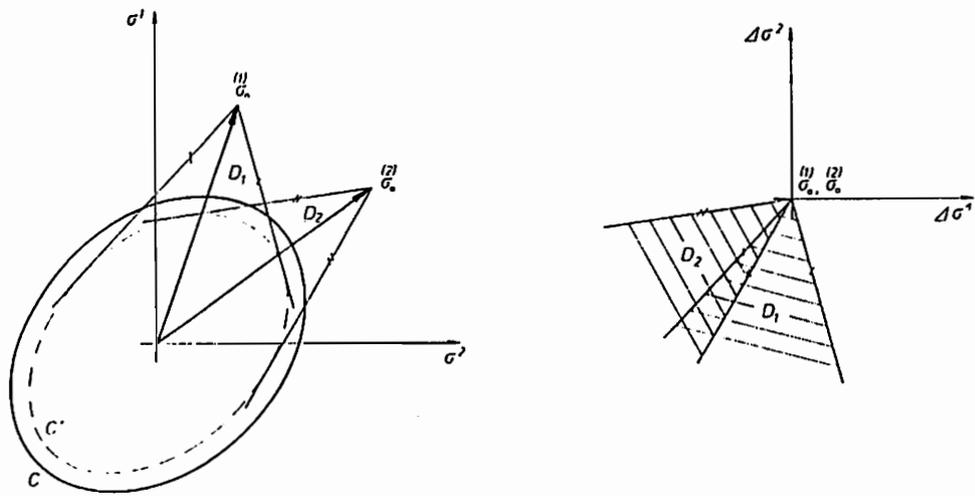
oder, unter Benutzung von (3.1.28) und (3.1.17)

$$\dot{W}_p = \langle \Delta s - \Delta s^+, F^T \cdot (\dot{F} - \dot{F}^0) + V(\Delta u)^T \cdot \dot{F}^0 \rangle - \langle \Delta s - \Delta s^+, \dot{E}^p \rangle . \quad (5.1.14)$$

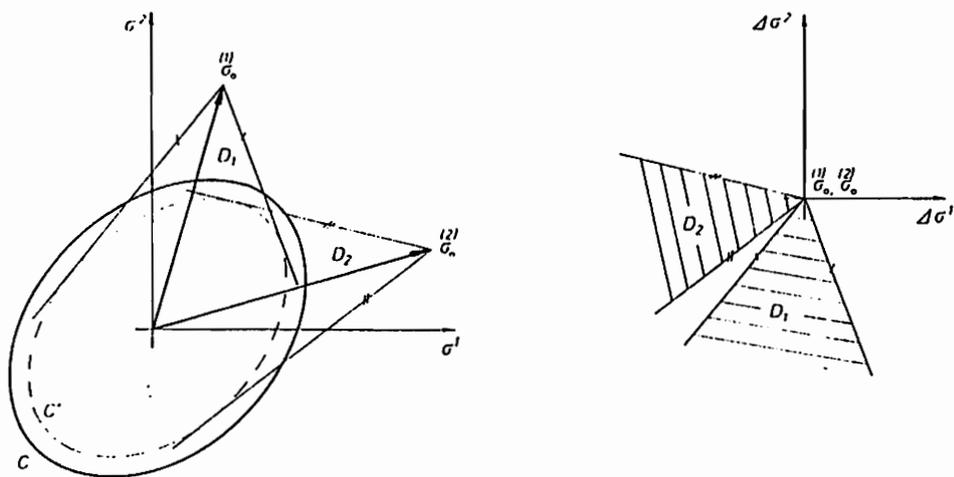
Unter Berücksichtigung von (5.1.2) und (3.1.30) sowie des Umstands, daß  $s^0 = [\sigma^0, 0]$  gilt, da für den rein elastischen Referenzkörper keine internen Parameter definiert sind, erhält man:

$$\dot{W} = \langle \sigma - \sigma^+, F^T \cdot (\dot{F} - \dot{F}^0) + V(\Delta u)^T \cdot \dot{F}^0 \rangle - \langle s - s^+, \dot{e}^p \rangle . \quad (5.1.15)$$

Benutzt man die Verknüpfung von erstem und zweitem



Fall (a)



Fall (b)

BILD 11: ZUR VERANSCHAULICHUNG DES KONZEPTS DES ZEITLICH KONSTANTEN EIGENSPANNUNGSZUSTANDS  $\Delta\vec{\sigma}$ : EINSPIELEN KANN NUR ERFOLGEN, WENN FÜR JEDEN ELASTISCHEN VERGLEICHZUSTAND  $\overset{11}{\sigma}_0, \overset{12}{\sigma}_0$  EIN ZEITLICH KONSTANTER EIGENSPANNUNGSZUSTAND  $\Delta\vec{\sigma}$  GEFUNDEN WERDEN KANN, DER DEN GESAMTSPANNUNGSZUSTAND IN DEN "SICHEREN" BEREICH  $C'$  ZURÜCKFÜHRT. FALL (A): EINSPIELEN KANN ERFOLGEN. FALL (B): EINSPIELEN KANN NICHT ERFOLGEN.

Piola-Kirchhoff-Spannungstensor nach Gleichung (3.1.6) so erhält man

$$\mathbf{t} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{t}^+ = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}^+ . \quad (5.1.16)$$

Man kann dann zeigen, daß bei Beschränkung von  $\mathbf{t}^+$  auf statisch zulässige Felder ein Teil der rechten Seite in (5.1.15) gleich null ist: Es gilt mit (5.1.16) die Umformung

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^+, \mathbf{F}^T \cdot (\dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{F}}^0) \rangle &= \langle \mathbf{F} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^+), \dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{F}}^0 \rangle \\ &= \langle \mathbf{t} - \mathbf{t}^+, \dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{F}}^0 \rangle = - \langle \text{Div } \mathbf{t} - \text{Div } \mathbf{t}^+, \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^0 \rangle \\ &\quad + \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^+, \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^0 \rangle_S . \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

Dies ist jedoch die Differenz der schwachen Formen der Gleichgewichtsbedingung für das tatsächliche Spannungsfeld  $\mathbf{t}$  und das fiktive Spannungsfeld  $\mathbf{t}^+$ . Während  $\mathbf{t}$  per Definition die Gleichgewichtsbedingung erfüllt, wird sie durch  $\mathbf{t}^+$  durch die obige Einschränkung auf statisch zulässige Felder erfüllt. Dieser Beweis entspricht der Begründung der Gleichung (3.2.21) in Abschnitt III.

Der verbleibende Teil von  $\dot{W}$  nach Gleichung (5.1.15) wird aufgespalten:

$$\dot{W} = \dot{W}_G + \dot{W}_I \quad (5.1.18)$$

$$\dot{W}_G = \langle \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^+, \Delta(\nabla \mathbf{u})^T \cdot \dot{\mathbf{F}}^0 \rangle \quad (5.1.19)$$

$$\dot{W}_I = - \langle \mathbf{s} - \mathbf{s}^+, \dot{\mathbf{e}}^p \rangle . \quad (5.1.20)$$

Aus der Definition des generalisierten Standard Materials nach (2.3.35-43) folgt aber sofort, daß  $\dot{W}_I$  immer nicht-positiv ist, selbst im Falle nur konvexer und nicht streng konvexer Fließbedingungen. Aus der Definition (5.1.3) folgte, daß  $W$  nicht negativ werden kann. Die rechte Seite von (5.1.18) besteht aus dem nicht-positivem Anteil  $\dot{W}_I$  (gleich null für  $\dot{\mathbf{e}}^p = 0$  und kleiner als null für  $\dot{\mathbf{e}}^p > 0$ ). Kann nun gezeigt werden, daß  $\dot{W}_G$  beschränkt nach oben ist, so folgt, daß es einen Zeitpunkt geben muß jenseits dessen keine zusätzlichen plastischen Ver-

formungen auftreten. Man erkennt dies sofort, wenn man die Zeitintegration von (5.1.18) ausführt:

$$W - W_G = \int_{(T)} \dot{W}_I d\tau \quad (5.1.21)$$

Ist  $W_G$  nach oben beschränkt, so ist die linke Seite von (5.1.21) nach unten beschränkt ( $W$  ist für endliche Differenzen  $\Delta s - \Delta s^+$  und endliche Gebiete  $V$  immer beschränkt. Nur dieser Fall ist jedoch physikalisch sinnvoll). Daraus folgt sofort, daß die rechte Seite von (5.1.21) ebenfalls beschränkt sein muß. Das aber bedeutet, daß in diesem Sinn  $e^P$  jenseits eines bestimmten Zeitpunktes  $\tau_0$  zu null werden muß. Die grundsätzliche Annahme kleiner bzw. endlicher Dehnungen und differenzierbarer Felder schließt aber den Fall aus, daß auf einem Gebiet der Mächtigkeit null (dieses sind Flächen bei der Betrachtung volumenhafter Körper, Linien bei der Betrachtung flächenhafter Körper und Punkte bei der Betrachtung linienhafter Körper) die plastischen Dehnungen über alle Maße anwachsen können. Damit ist gezeigt, daß unter der Bedingung

$$W_G = \int_{(T)} \langle \sigma - \sigma^+, \Delta(\nabla u)^T \cdot \dot{F}^0 \rangle d\tau < A, \quad (5.1.22)$$

wobei  $A$  eine feste Zahl kleiner  $\infty$  ist, im Sinne der gewählten Definition der betrachtete Körper einspielt.

## V. 2. Praktische Sonderfälle

Der allgemeine Beweis, daß  $\dot{W}_G$  nach (5.1.22) beschränkt ist, ist deswegen nicht möglich, weil die unbekannte Verformung  $u$  als Differenzfeld  $\Delta(\nabla u)$  auftritt. Dieses Problem hat seine Entsprechung in dem am Schluß von Abschnitt III erläuterten Problem bei der Lösung des Anfangs-Randwertproblems für die Spannungen. Deswegen werden im folgenden zwei technisch wichtige Sonderfälle betrachtet:

**Problem (A):**

Die gegebenen Daten erlauben es, das Deformationsmuster von B im Rahmen eines gegebenen Ungenauigkeitsbereichs vorherzusagen. Insbesondere wird angenommen, daß ein Bereich  $U^a$  von Verschiebungsfeldern  $u^a$  bekannt ist, durch den sich die Struktur im Fall des inkrementellen Kollapses quasistatisch hindurchbewegen würde (siehe Bild 12). Unter welchen Bedingungen spielt B ein?

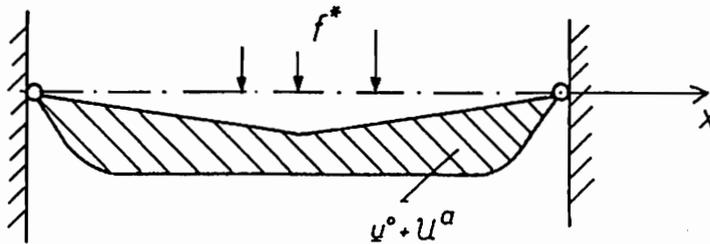


BILD 12: VERANSCHAULICHUNG VON PROBLEM (A)

**Problem (B):**

Die äußeren Lasten  $\{a\}$  sind spezieller Art: Bis zu einem Zeitpunkt  $\tau^R$  erfährt B endliche, als bekannt vorausgesetzte Verschiebungen  $u^R$  unter der Last  $\{a^R\}$  derart, daß B zur Zeit  $\tau^R$  in der bekannten Konfiguration  $V^R$  im Gleichgewicht ist. Für Zeiten  $\tau > \tau^R$  ist B zyklischen Lasten  $\{a\}$  unterworfen mit

$$\{a\}(X, \tau) = \{a^R\}(X) + r(X, \tau), \quad \tau > \tau^R. \quad (5.2.1)$$

Dabei wird angenommen, daß ein Vergleichskörper  $B^C$ , der z. Zt.  $\tau^R$  die Konfigurationen  $V^R$  hat und rein elastisch auf die zyklischen Lasten  $r$  reagiert, Bewegungen mit  $Vu^r \ll F^R$  ausführt, wobei  $u^r$  die Amplituden dieser überlagerten Bewegung sind. Für langwellige Deformationsmuster der überlagerten Bewegung (siehe Bild 13) entspricht dies der Forderung  $u^r \ll u^R$ . Unter welchen Bedingungen spielt B ein?

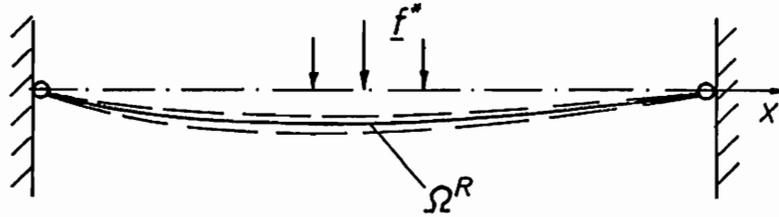


BILD 13: VERANSCHAULICHUNG VON PROBLEM (B)

#### Lösung von Problem (A)

Es sei eine Klasse  $U^a$  ausreichend glatter und zeitunabhängiger Verschiebungsfelder  $u^a$ , dicht in  $U^a$ , gegeben, die die homogenen Randbedingungen auf  $S_K$  erfüllt. Der Einfachheit wegen sei angenommen, daß  $U^a$  von Funktionen  $u^+$  und  $u^-$  eingeschlossen ist und daß  $U^a$  konvex ist, so daß ein beliebiges Feld  $u^a \in U^a$  gegeben ist durch

$$u^a(x) = [1 - \alpha(x)] u^-(x) + \alpha(x) u^+(x), \quad \alpha(x) \in [0, 1]. \quad (5.2.2)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für  $B$  sind dann gegeben durch:

$$\text{Div}[(1 + \mathbf{v}u^0 + \mathbf{v}u^a) \cdot \boldsymbol{\sigma}] = -p^* \quad (5.2.3)$$

$$\mathbf{n} \cdot [(1 + \mathbf{v}u^0 + \mathbf{v}u^a) \cdot \boldsymbol{\sigma}] = f^* \quad (5.2.4)$$

mit  $u^a \in U^a$ . Die entsprechende Menge  $F^a$  von Deformationsgradienten  $F^a(u^a)$ , erzeugt durch die Menge  $U^a$ , ist dann definiert durch:

$$F^a = 1 + \mathbf{v}u^0 + \mathbf{v}u^a \quad (5.2.5)$$

Man kann dann bezüglich  $F^a$  statisch zulässige Spannungen  $\sigma^{as}$  und  $t^{as}$  als diejenigen Spannungsfelder  $\sigma^+$  definieren, die die Bedingungen

$$\text{Div} (\mathbf{F}^a \cdot \boldsymbol{\sigma}^+) = -\mathbf{p}^* \quad (5.2.6)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}^a \cdot \boldsymbol{\sigma}^+) = \mathbf{f}^* \quad (5.2.7)$$

erfüllen. Dabei kann  $\mathbf{F}^a \cdot \boldsymbol{\sigma}^+$  entsprechend (3.1.6) ersetzt werden durch  $\mathbf{t}^{a+}$ . Aus der Formulierung von Problem (A) folgt, daß wenigstens in einem Moment des Deformationsprozesses eines der Felder  $\mathbf{u}^a \in U^a$  mit dem tatsächlichen Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  übereinstimmt. Demzufolge aber erfüllt das tatsächliche Spannungsfeld  $\boldsymbol{\sigma}$  zu diesem Zeitpunkt die Bedingungen

$$\text{Div} (\mathbf{F}^a \cdot \boldsymbol{\sigma}) = -\mathbf{p}^* \quad (5.2.8)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}^a \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{f}^* \quad (5.2.9)$$

bzw.

$$\text{Div} \mathbf{t}^a = -\mathbf{p}^* \quad (5.2.10)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^a = \mathbf{f}^* \quad (5.2.11)$$

mit  $\mathbf{t}^a = \mathbf{F}^a \cdot \boldsymbol{\sigma}$ . Mit derselben Begründung wie im allgemeinen Fall folgt dann direkt, daß gilt

$$\langle \mathbf{t}^a - \mathbf{t}^{as}, \dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{F}}^o \rangle = 0 \quad (5.2.12)$$

und die Gleichung (5.1.15) geht mit  $\mathbf{s}^{as} = [\boldsymbol{\sigma}^{as}, \boldsymbol{\kappa}]$  über in:

$$\dot{W}^a = \langle \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{as}, (\mathbf{V}\mathbf{u}^a)^T \cdot \mathbf{V}\dot{\mathbf{u}}^o \rangle - \langle \mathbf{s} - \mathbf{s}^{as}, \dot{\mathbf{e}}^p \rangle. \quad (5.2.13)$$

Analog zum allgemeinen Fall gilt der Schluß, daß bei Existenz eines statisch und plastisch zulässigen Feldes  $\mathbf{s}^{as}$  und der nach oben Beschränktheit von  $W_G^a$  mit

$$W_G^a = \int_0^\infty \langle \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{as}, (\mathbf{V}\mathbf{u}^a)^T \cdot \mathbf{V}\dot{\mathbf{u}}^o \rangle dt \quad (5.2.14)$$

ein Zeitpunkt erreicht wird, jenseits dessen keine zusätzlichen plastischen Dehnungen mehr auftreten, so daß der betrachtete Körper einspielt. Die Konstruktion statisch zulässiger Funktionen  $\mathbf{s}^{as}$

bezüglich eines gegebenen geometrischen Bereichs  $U^a$  nenne ich "LINEARISIERUNG BEZÜGLICH EINES BEREICHS VON VERSCHIEBUNGSZUSTÄNDEN" oder "KONSTRUKTION STATISCH ZULÄSSIGER FELDER BEZÜGLICH EINER UNGENAUEN GEOMETRIE".

### Lösung von Problem (B)

Dieses Problem ist ein Spezialfall von Problem (A): Die Menge  $U^a + u^o$  reduziert sich auf das Verschiebungsfeld  $u^R$ , welches die Referenzkonfiguration  $V^R$  beschreibt. Die Gleichungen (5.1.10 - 12) reduzieren sich dann unter Benutzung von

$$s = s^R + \Delta s \quad , \quad s^+ = s^R + \Delta s^+ \quad (5.2.15)$$

mit

$$s^R = [\sigma^R, \kappa^R] \quad (5.2.16)$$

auf

$$\dot{W} = \langle \sigma - \sigma^+, (F^R + \partial F)^T \cdot \partial \dot{F} - (F^R + \partial F^C)^T \cdot \partial \dot{F}^C \rangle - \langle s - s^+, \dot{e}^P \rangle . \quad (5.2.17)$$

Dabei bezeichnet  $\partial F$  die Änderung des tatsächlichen Deformationsgradienten und  $\partial F^C$  den zu  $B^C$  gehörenden Deformationsgradienten. Der Einfluß von  $\partial F$  und  $\partial F^C$  wird als vernachlässigbar in den Gleichgewichtsbedingungen angesehen. Während dies für  $\partial F^C$  durch die Formulierung von Problem (B) gerechtfertigt ist, ist die Vernachlässigung von  $\partial F$  als Linearisierung der Gleichgewichtsbedingungen für den Körper  $B$  in der geometrischen Umgebung der Referenzkonfiguration  $V^R$  anzusehen. Dann aber folgt aus (5.2.17):

$$\dot{W} = \langle F^R \cdot (\sigma - \sigma^+), \partial \dot{F} - \partial \dot{F}^C \rangle - \langle s - s^+, \dot{e}^P \rangle . \quad (5.2.18)$$

Der tatsächliche linearisierte Spannungszustand  $t^R$ , definiert durch

$$t^R = F^R \cdot \sigma, \quad (5.2.19)$$

erfüllt die linearisierten Gleichgewichtsbedingungen

$$\text{Div } t^R = -p^R - p^r \quad (5.2.20)$$

$$n \cdot t^R = f^R + f^r, \quad (5.2.21)$$

wobei der Index "r" die betreffende Größe als Teil der allgemeinen Zusatzlast  $r(X, \tau)$  kennzeichnet. Werden nun nur solche Spannungsfelder  $\sigma^{Rs}$  und  $t^{Rs}$ , definiert durch

$$t^{Rs} = F^R \cdot \sigma^{Rs}, \quad (5.2.22)$$

zugelassen, die die Gleichgewichtsbedingungen (5.2.20 - 21) erfüllen, so verschwindet der erste Term der rechten Seite von (5.2.18) und man erhält:

$$\dot{W} = -\langle s - s^{Rs}, \dot{e}^p \rangle \quad (5.2.23)$$

mit

$$s^{Rs} = [\sigma^{Rs}, \kappa^R] . \quad (5.2.24)$$

Hier nun gilt wieder MELAN's Argument: Da  $W$  im nichttrivialen Fall immer positiv ist und  $\dot{W}$  immer nicht-positiv, muß ein Zeitpunkt erreicht werden, von dem ab keine zusätzlichen plastischen Deformationen auftreten können. Die Konstruktion statisch zulässiger Funktionen  $s^{Rs}$  identifizieren wir als "LINEARISIERUNG BEZÜGLICH EINER GEGEBENEN REFERENZDEFORMATION".

### V.3 EINE ERWEITERUNG DES KOITER'SCHEN THEOREMS

Während wir in den Abschnitten 1 und 2 dieses Kapitels das Melan'sche Theorem zum Ausgangspunkt der Betrachtung gemacht hatten und hinreichende Kriterien für das Einspielen von Strukturen gefunden hatten, werden wir hier auf der Grundlage des Koiter'schen Theorems ein hinreichendes Kriterium für das Nichteinspielen von elastoplastischen Körpern unter Berücksichtigung bestimmter geometrischer Effekte herleiten. Ganz analog zur klassischen Vorgehensweise Koiters [78] werden wir dazu die Aussage des erweiterten Melan'schen Theorems mit heranziehen.

#### Problemstellung:

Ein elastisch-idealplastischer Körper  $B$  steht unter der Wirkung der zyklischen Lasten  $f^r$  und  $p^r$ , nachdem er durch die zeitlich konstanten Lasten  $f^R$  und  $p^R$  so vorverformt worden ist, daß er in der Referenzkonfiguration  $\Omega^R$  unter der alleinigen Wirkung von  $f^R$  und  $p^R$  im Gleichgewicht war. Wird  $B$  unter der Wirkung der zusätzlichen Lasten  $f^r$  und  $p^r$  einspielen?

Diese Fragestellung entspricht dem Problem (B) in Abschnitt V.2 und ist somit wesentlich eingeschränkter als die Fragestellung bei der Erweiterung des Melan'schen Theorems.

**Behauptung:** Immer dann, wenn für einen beliebigen kinematisch zulässigen Zyklus plastischer Extradehnungsgeschwindigkeiten  $\dot{E}^{*p}$  die Ungleichung

$$\langle\langle p, \dot{u}^* \rangle\rangle + \langle\langle [f, \dot{u}^*] \rangle\rangle > \langle\langle \sigma^*, \dot{E}^{*p} \rangle\rangle \quad (5.3.1)$$

gilt, dann tritt kein Einspielen ein.

Dabei gelten die folgenden Definitionen:

$$\langle\langle a, b \rangle\rangle = \int\int\int_{o(V)}^T a_{ij} b_{ij} dV d\tau, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.3.2)$$

mit  $T$  als Zeit für einen Lastzyklus und  $a, b$  als beliebigen symmetrischen, zeitabhängigen Tensoren zweiter Stufe,

$$[[c, d]] = \int\int_{o(S_F)}^T c_i d_i dS d\tau, \quad (5.3.3)$$

mit  $c$  und  $d$  als beliebigen zeitabhängigen Vektoren und  $S_F$  als dem Teil der Oberfläche von  $B$ , auf der Kräfte vorgegeben sind. Der Teil der Oberfläche, auf dem Verschiebungen vorgeschrieben sind, ist mit  $S_K$  bezeichnet. Wir nehmen an, daß nur Verschiebungen gleich null auf  $S_K$  vorgeschrieben sind.

Der Dehnungszustand wird durch den Green'schen Dehnungstensor  $E$  entsprechend (2.1.10) beschrieben mit

$$E_{AB} = (1/2)(F_{\cdot A}^k F_{kB} - \delta_{AB}) \quad (5.3.4)$$

wobei  $F$  entsprechend (2.1.3-5) den Deformationsgradienten darstellt mit

$$F_{\cdot A}^i = (\partial x^i) / (\partial X^A) \quad (5.3.5)$$

Der Verschiebungsvektor sei  $u$  und  $\delta$  das Kronecker-Symbol. Komma mit nachfolgendem Index zeigt die Differentiation nach der durch den Index bezeichneten Koordinate an. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf kartesische Koordinaten mit tiefgestellten kleinen Indizes für verformte und unverformte Konfiguration. Wie bisher wird die Ableitung nach der Zeit durch übergestellten Punkt gekennzeichnet:  $\dot{(\ )} = (\partial/\partial\tau)(\ )$ .

Wir erhalten dann die Zeitableitungen des Green'schen Dehnungstensors und des Deformationsgradienten zu

$$\dot{E}_{ij} = (1/2)(\dot{F}_{ki} F_{kj} + F_{ki} \dot{F}_{kj}) \quad (5.3.6)$$

$$\dot{F}_{ij} = \dot{u}_{i,j} \quad (5.3.7)$$

Im folgenden wird der Sonderfall betrachtet, daß Bewegungen mit kleiner Amplitude einer endlichen Vorverformung überlagert werden. Die endliche Vorverformung wird dabei durch den hochgestellten Index "R" gekennzeichnet, während vorgestelltes  $\delta$  auf die superponierte Bewegung hinweist:

$$F_{ij} = F_{ij}^R + \delta F_{ij} \quad (5.3.8)$$

$$\begin{aligned} E_{ij} &= (1/2) [(F_{ki}^R + \delta F_{ki})(F_{kj}^R + \delta F_{kj}) - \delta_{ij}] = \\ &= (1/2) [(F_{ki}^R F_{kj}^R - \delta_{ij}) + (F_{ki}^R \delta F_{kj} + \delta F_{ki} F_{kj}^R) + (\delta F_{ki} \delta F_{kj})] \\ &= E_{ij}^R + \tilde{E}_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} \ll \tilde{E}_{ij} \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

mit

$$E_{ij}^R = (1/2)(F_{ki}^R F_{kj}^R - \delta_{ij})$$

$$\tilde{E}_{ij} = (1/2)(F_{ki}^R \delta F_{kj} + \delta F_{ki} F_{kj}^R)$$

$$\epsilon_{ij} = (1/2)(\delta F_{ki} \delta F_{kj})$$

Die Vernachlässigung von  $\epsilon_{ij}$  bezeichnen wir als "Linearisierung bezüglich der Referenzkonfiguration  $\Omega^R$ ".

Für konstantes  $F^R$  gilt dann:

$$\dot{E}_{ij} = \dot{\bar{E}}_{ij} = (1/2)(F_{ki}^R \delta \dot{F}_{kj} + \delta \dot{F}_{ki} F_{kj}^R) \quad (5.3.10)$$

Ein kinematisch zulässiger Zyklus plastischer Dehnungsgeschwindigkeiten ist definiert durch

$$\dot{E}^{*p} = (1/2)(F_{ki}^R \delta \dot{F}_{kj}^{*p} + F_{kj}^R \delta \dot{F}_{ki}^{*p}) \quad (5.3.11)$$

Dabei ist für die Beweisführung entscheidend, daß das Zeitintegral von  $\delta \dot{F}^{*p}$  über einen Lastzyklus mit

$$\int_0^T \delta \dot{F}_{ij}^{*p} d\tau = \Delta u_{i,j}^{*p} \quad ; \quad \Delta u_i^{*p} = 0 \quad \text{auf } S_K \quad (5.3.12)$$

als Gradient eines zugehörigen Verschiebungsfeldes  $\Delta u^{*p}$  darstellbar ist.

Der Beweis der Behauptung erfolgt durch indirekten Beweis.

**Annahme:** Einspielen erfolgt. Dann existiert ein Spannungsfeld  $\sigma^a$  mit

$$\sigma^a = \sigma^R + \sigma^r + \sigma^o + \bar{p} \quad (5.3.13)$$

so daß  $\sigma^a$  im Innern des rein elastischen Bereichs C liegt:  $\sigma^a \in C$ . Dabei ist  $\sigma^R$  der Spannungszustand im Referenzzustand  $\Omega^R$ ,  $\sigma^r$  ist das zeitlich variable Spannungsfeld, welches durch die superponierten Lasten  $f^r$  und  $p^r$  in einem auf  $f^r$  und  $p^r$  rein elastisch reagierenden Vergleichskörper  $B^o$  hervorgerufen wird und  $\sigma^o$  sind die durch die Extrudehnungen  $E^{*p}$  hervorgerufenen Eigenspannungen in demselben auch auf  $E^{*p}$  rein elastisch reagierenden Vergleichskörper  $\tilde{B}$ ;  $\bar{p}$  ist ein zeitlich konstantes Eigenspannungsfeld. Das Spannungsfeld  $\sigma^a$  ist dabei statisch

zulässig, d. h. es erfüllt die Bedingungen

$$(F_{ki}^R \sigma_{ij}^a)_{,j} = -p_k \quad \text{in } V \quad (5.3.14)$$

$$n_j (F_{ki}^R \sigma_{ij}^a) = f_k \quad \text{auf } S_F \quad (5.3.15)$$

oder, äquivalent hierzu:

$$\langle\langle p, \dot{u}^* \rangle\rangle + [[f, \dot{u}^*]] = \langle\langle \sigma^a, \dot{E}^* \rangle\rangle \quad (5.3.16)$$

wobei  $\dot{E}^*$  ein beliebiger, kinematisch zulässiger Dehnungsgeschwindigkeitstensor ist mit

$$\dot{E}_{ij}^* = (1/2) (F_{ki}^R \dot{u}_{k,j}^* + F_{kj}^R \dot{u}_{k,i}^*) \quad (5.3.17)$$

$$\dot{u}_k^* = 0 \quad \text{auf } S_K. \quad (5.3.18)$$

Umformung der rechten Seite von (5.3.16) liefert dann:

$$\begin{aligned} \langle\langle \sigma^R + \sigma^r + \sigma^o + \bar{p}, \dot{E}^* \rangle\rangle &= \langle\langle \sigma^R, \dot{E}^{*e} \rangle\rangle + \langle\langle \sigma^r + \sigma^o, \dot{E}^{*e} \rangle\rangle \\ &+ \langle\langle \bar{p}, \dot{E}^{*e} \rangle\rangle + \langle\langle \sigma^a, \dot{E}^{*p} \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

**Untersuchung der Terme der rechten Seite von Gleichung (5.3.19)**

a) Es gilt die Umformung:

$$\langle\langle \sigma^r + \sigma^o, \dot{E}^{*e} \rangle\rangle = \langle\langle L : E^e, L^{-1} : \dot{\rho}^* \rangle\rangle = \langle\langle E^e, \dot{\rho}^* \rangle\rangle, \quad (5.3.20)$$

wobei  $E^e$  definiert ist durch

$$E_{ij}^e = (\sigma_{kl}^r + \sigma_{kl}^o) L_{ijkl} = (1/2)(F_{ki}^R \delta u_{k,j}^e + F_{kj}^R \delta u_{k,i}^e). \quad (5.3.21)$$

Dabei ist  $\delta u^e$  die Verschiebung, die durch die Wirkung von  $p^r, f^r$  und  $E^{*p}$  in einem auf diese Lasten bzw. Extradehnungen rein elastisch wirkenden Vergleichskörper  $\tilde{B}$  auftritt. Für verschwindendes  $p^r, f^r$  und  $E^{*p}$  hat  $\tilde{B}$  die Referenzkonfiguration  $\Omega^R$  und den Spannungszustand  $\sigma^R$ , ist für diese Situation also identisch mit  $B$ . Der Eigenspannungsgeschwindigkeitstensor  $\dot{\rho}^*$  ist mit dem elastischen Dehnungsgeschwindigkeitstensor  $\dot{E}^{*e}$  verbunden durch

$$\dot{\rho}_{ij}^* = L_{ijkl}^{-1} \dot{E}_{kl}^{*e} \quad (5.3.22)$$

mit  $\dot{E}^{*e}$  als dem durch die zyklischen Extradehnungsgeschwindigkeiten  $\dot{E}^{*p}$  induzierten elastischen Dehnungsanteil. Da  $E^e$  kinematisch zulässig ist, d. h. durch einen Verschiebungsvektor  $\delta u^e$  definiert ist, der die kinematischen Randbedingungen erfüllt, und  $\dot{\rho}^*$  ein Eigenspannungszustand ist, gilt

$$\langle\langle E^e, \dot{\rho}^* \rangle\rangle = \iint_{o(V)} (F_{ki}^R \dot{\rho}_{ij}^*)_{,j} \delta u_k^e dv + \iint_{o(S_F)} (F_{ki}^R \dot{\rho}_{ij}^*) n_j \delta u_k^e dS = 0. \quad (5.3.23)$$

b) Da angenommen wurde, daß  $B$  einspielt, ist der tatsächliche Eigenspannungszustand  $\dot{\rho}^*$  aufgrund von  $\dot{E}^{*p}$  zyklisch, so daß gilt  $\dot{\rho}^*(nT) - \dot{\rho}^*(nT-T) = 0$ . Dabei bezeichnet  $n$  eine beliebige natürliche Zahl. Das aber heißt, daß die mit einem Zyklus verbundene elastische Dehnungsänderung  $\Delta E^{*e}$ , definiert durch

$$\Delta E_{ij}^{*e} = \int_0^T \dot{E}_{ij}^{*e} d\tau = (1/2)(F_{ki}^R \Delta u_{k,j}^{*e} + F_{kj}^R \Delta u_{k,i}^{*e}) \quad (5.3.24)$$

ebenfalls null sein muß. Da  $\sigma^R$  und  $\bar{\rho}$  zeitlich konstante Spannungsfelder sind, muß demnach gelten:

$$\begin{aligned} \langle\langle \sigma^R + \bar{\rho}, \dot{E}^{*e} \rangle\rangle &= \int_{(V)} [(\sigma_{ij}^R + \bar{\rho}_{ij}) \int_0^T \dot{E}_{ij}^{*e} d\tau] dV \\ &= \int_{(V)} [(\sigma_{ij}^R + \bar{\rho}_{ij}) \Delta E_{ij}^{*e}] dV = 0. \end{aligned} \quad (5.3.25)$$

Der einzige nichtverschwindende Term der rechten Seite von Gleichung (5.3.19) ist also der Ausdruck  $\langle\langle \sigma^a, \dot{E}^{*p} \rangle\rangle$ . Demnach gilt:

$$\langle\langle \sigma^a, \dot{E}^* \rangle\rangle = \langle\langle \sigma^a, \dot{E}^{*p} \rangle\rangle, \quad (5.3.26)$$

bzw. unter Zuhilfenahme von Gleichung (5.3.16)

$$\langle\langle p, \dot{u}^* \rangle\rangle + [[f, \dot{u}^*]] = \langle\langle \sigma^a, \dot{E}^{*p} \rangle\rangle. \quad (5.3.27)$$

Aus der Konvexität des elastischen Bereichs C folgt aber

$$\langle\langle \sigma^a, \dot{E}^{*p} \rangle\rangle < \langle\langle \sigma^*, \dot{E}^{*p} \rangle\rangle, \quad (5.3.28)$$

wobei  $\sigma^*$  der tatsächliche, zu  $\dot{E}^{*p}$  gehörende Spannungszustand ist. Eingesetzt in Gleichung (5.3.27) ergibt sich also die Ungleichung

$$\langle\langle p, \dot{u}^* \rangle\rangle + [[f, \dot{u}^*]] < \langle\langle \sigma^*, \dot{E}^{*p} \rangle\rangle, \quad (5.3.29)$$

die im Widerspruch zur getroffenen Annahme steht.

Die hier gegebene Erweiterung des KOITER'schen Einspieltheorems (erster Teil) geht direkt in das ursprüngliche Theorem über, wenn  $F^R$  gleich  $\delta$  und  $\sigma^R$  gleich null gesetzt wird.

Die Anwendung des Koiter'schen Theorems zur Bestimmung sicherer Einspielbereiche für äußere Lasten ist auch bei geometrisch linearen Problemen unter der Voraussetzung möglich, daß die zum betrachteten

Lastfall dazugehörenden Deformationsmuster gegeben sind. Dies ist im allgemeinen problematisch, in Sonderfällen [83] jedoch möglich, wenn Gestalt und Belastungsgeschichte eine klare Aussage über die zu erwartenden Deformationsmuster zulassen.

## VI. ZUR STABILITÄT ELASTOPLASTISCHER ZUSTÄNDE

### VI.1 DEFINITION UND ANNAHMEN

Die Betrachtungen in Abschnitt V bezogen sich ausschließlich auf die Versagensmöglichkeit von Strukturen aufgrund der unbegrenzten Akkumulation plastischer Deformationen. Außer Acht gelassen wird dabei die Möglichkeit des Versagens hervorgerufen durch den Stabilitätsverlust der betrachteten Struktur. Die Frage, ob eine elastoplastische Struktur unter einer gegebenen Lastgeschichte instabil wird, hat in den letzten Jahrzehnten sehr große Beachtung gefunden und soll hier keinesfalls umfassend diskutiert werden. Übersichten über die existierende Literatur auf diesem Gebiet finden sich in [57,58,64,120,121,139]. Ausgangspunkt ist dabei die Theorie von HILL [57,121], in der ein Potential  $U$  als Funktion des Geschwindigkeitsgradienten  $\dot{\mathbf{F}}$  postuliert wird, mit dessen Hilfe die adjungierten (nichtsynchronen "Nominal"- oder 1. PIOLA-KIRCHHOFF-) Spannungsgeschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{t}}$  bestimmt werden können:

$$\dot{\mathbf{t}} = \partial U(\dot{\mathbf{F}}) / \partial \dot{\mathbf{F}} \quad (6.1.1)$$

HILL hat damit allgemein für Körper unter Totlasten, bestehend aus Materialien ohne "natürliche" Zeit, also Materialien deren Verhalten entweder zeitunabhängig ist oder aber von einem Zeitparameter mit beliebigem Maßstab abhängt, eine notwendige Bedingung für stabile Gleichgewichtszustände hergeleitet. Danach muß gelten [57,58]

$$\int_{(V)} U(\dot{\mathbf{F}}^*) \, dV > 0, \quad (6.1.2)$$

wobei  $\dot{\mathbf{F}}^*$  ein beliebiges Element der Klasse geometrisch zulässiger Deformationsgradientengeschwindigkeiten ist. Diese Klasse ist dadurch gekennzeichnet, daß ihre Elemente aus stetigen und differenzierbaren Geschwindigkeitsfeldern herleitbar sind, die die geometrischen Randbedingungen des betreffenden Problems erfüllen. Die Potentialdichte  $U$

ist dann mit dem Steifigkeitstensor  $C$  durch

$$\partial^2 U(\dot{F}) / (\partial \dot{F}_{ij} \partial \dot{F}_{kl}) = C_{ijkl}(\dot{F}) \quad (6.1.3)$$

verknüpft, wobei im Fall des elasto-plastischen Werkstoffverhaltens bei Gültigkeit der Normalitätsregel gilt:

$$C_{ijkl} = \begin{cases} C_{ijkl}^p = L_{ijkl} + \sigma_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{g} \lambda_{ij} \lambda_{kl} & \text{für } \lambda_{ij} \dot{F}_{ji} \geq 0 \\ C_{ijkl}^e = L_{ijkl} + \sigma_{ik} \delta_{jl} & \text{für } \lambda_{ij} \dot{F}_{ji} < 0 \end{cases} \quad (6.1.4)$$

$\lambda$  ist der Normalentensor zur Fließfläche, als eindeutig angenommen und  $g$  ist ein skalarwertiger Faktor größer als null.

Dieses Stabilitätskriterium eignet sich sehr gut für die numerische Anwendung bei der Benutzung von inkrementellen Lösungsverfahren, die, sofern sie auf Variationsverfahren basieren, grundsätzlich die Existenz eines Potentials für die Inkremente der gewählten Zustandsvariablen voraussetzen. Ein gewisser Nachteil besteht jedoch darin, daß kein direkter Bezug zum Gesamtprozeß besteht: Unter der Voraussetzung der exakten Bestimmtheit eines Gleichgewichtszustandes, dessen Existenz angenommen wird, dient die Positivität des Zuwachspotentials für beliebige zulässige Deformationsgradientengeschwindigkeiten (gleichbedeutend mit der strikten Konvexität des Integrals (6.1.2) oder der positiven Definitheit von  $C$ ) zur Beurteilung, ob der betrachtete Gleichgewichtszustand stabil ist. Da der Zustand selbst nicht in die Formulierung des Kriteriums eingeht, ist keine Aussage über das Verhalten des Körpers in einer weiter gefaßten Umgebung des Gleichgewichtszustands möglich; nur seine infinitesimale Umgebung wird berücksichtigt.

Hier wird das Stabilitätsverhalten elastoplastischer Körper ausgehend von der Stabilitätsdefinition der klassischen Thermodynamik [6] untersucht: Das betrachtete System sei in einem Zustand  $f$  im Gleichgewicht

und werde durch Änderungen der Zustandsvariablen in einen benachbarten Zustand  $f^*$  des Zwangsgleichgewichts ("constrained equilibrium") überführt. Das System heißt dann "stabil", wenn es nach Entfernung der äußeren Zwänge, die den Zustand  $f^*$  erzeugt haben, in den Zustand  $f$  zurückkehrt. Das Kriterium hierfür ist, daß der Zuwachs  $\Delta E$  der gesamten inneren Energie  $E$  des Systems bei einer Störung des Gleichgewichtszustandes vermindert um das Produkt aus Entropieänderung und Temperatur größer ist als der Zuwachs  $\Delta A$  der durch die Störung verursachten Arbeit der äußeren Kräfte. Bezeichnet man den Vektor der Zustandsvariablen allgemein mit  $\Delta\chi$ , so schreibt sich obiges Kriterium [6] als

$$-\theta\Delta s + \Delta E(\chi, \Delta\chi) > \Delta A(\chi, \Delta\chi) \quad (6.1.5)$$

Es sei im folgenden angenommen, daß:

- 1) Die gesamte plastische Leistung  $\dot{W}_p$  mit

$$\dot{W}_p = \int_{(V_0)} \mathbf{s} : \dot{\mathbf{e}}^p \, dV \quad (6.1.6)$$

dissipiert und so zur Erhöhung der inneren Energie beiträgt.

- 2) Der Prozeß adiabatisch geführt wird.
- 3) Der Einfluß der Entropieänderung  $\Delta s$ , hervorgerufen allein durch die Dissipation der plastischen Leistung, vernachlässigbar für die Ungleichung (6.1.5) ist.

Ungleichung (6.1.5) geht dann über in

$$\Delta E(\chi, \Delta\chi) > \Delta A(\chi, \Delta\chi) . \quad (6.1.7)$$

Treten bei der beliebigen Störung  $\Delta\chi$  plastische Zusatzdeformationen auf, wie es zu erwarten ist, wenn  $B$  oder Teile von  $B$  in der betrachteten Gleichgewichtslage einen Spannungszustand aufweisen, der auf der aktuellen Fließfläche liegt, so kehrt definitionsgemäß  $B$  bei Wegnahme der Störung nicht in den ursprünglichen Zustand zurück.

Demnach wäre grundsätzlich jeder derartige Zustand entsprechend der obigen Definition stabiler Zustände auch bei Gültigkeit von (6.1.7) nicht als stabil zu bezeichnen. Diese Aussage ist jedoch ohne weiteren Erkenntniswert für das Verhalten der Struktur und reflektiert nicht die technischen Erfordernisse einer Stabilitätsuntersuchung. Viel wichtiger ist es zu wissen, ob die Störungen  $\Delta\chi$  die betrachtete Struktur in einen dynamischen Zustand überleitet, der vom Gleichgewichtszustand wegführt. Der Vergleich der Zustände  $f$  und  $f^*$  nach dem ersten Hauptsatz (2.2.25) für verschwindende von außen zugeführte nichtmechanische Energien liefert dann sofort

$$K^* - K + E^* - E = \Delta A . \quad (6.1.8)$$

Im Zustand  $f$  ist die kinetische Energie  $K$  null. Durch Umformung von (6.1.8) erhält man

$$K^* = \Delta A - \Delta E . \quad (6.1.9)$$

Es folgt unmittelbar, daß der Zustand  $f^*$  kein dynamischer sein kann wenn (6.1.7) gilt, da in diesem Fall die dazugehörige kinetische Energie  $K^*$  negativ sein müßte, was definitionsgemäß (2.2.36) ausgeschlossen ist.

Die Ungleichung (6.1.7) mit der gegebenen physikalischen Interpretation wird Ausgangspunkt für die folgenden Stabilitätsuntersuchungen sein.

Es sei angenommen, daß sich der Körper  $B$  zum Zeitpunkt  $\tau$  in der Konfiguration  $\Omega(\tau)$  unter den gegebenen konservativen äußeren Wirkungen  $a(\chi, \tau)$  im Gleichgewicht befindet. Der aktuelle Zustand  $f(\tau)$  sei durch den Vektor der generalisierten Zustandsvariablen  $\chi(\tau)$  beschrieben mit:

$$\chi(\tau) = [F(u), E^p, \kappa] \quad (6.1.10)$$

wobei der Deformationsgradient  $F$ , der plastische Anteil des Green'schen

Dehnungstensors  $E^P$  und der Vektor der internen Parameter  $\kappa$  der Reihe nach in (2.1.3-4), (2.3.46a) und (2.3.46b) bzw. (2.3.50) definiert sind. Die innere Energie  $E(\chi(\tau))$  setzt sich dann zusammen aus dem Volumenintegral der direkt wiedergewinnbaren elastischen Energiedichte  $\psi_1$  und der durch den Verfestigungsprozeß auf mikroskopischer Ebene gespeicherten elastischen Energiedichte  $\psi_2$ , sowie der dissipierten plastischen Energiedichte  $\varphi$ , die sich ihrerseits zusammensetzt aus dem Anteil  $\varphi_1$ , der auf der Wirkung von  $E^P$  beruht und dem Anteil, der auf die Verfestigung des Materials zurückzuführen ist. Im einzelnen gelten die folgenden Definitionen:

- (a) Direkt rückgewinnbare elastische Energiedichte  $\psi_1$ :

$$\psi_1 = \frac{1}{2} (E^e, E^e)_L = \frac{1}{2} E^e : L : E^e = \frac{1}{2} E_{AB}^e L^{ABCD} E_{CD}^e \quad (6.1.11)$$

- (b) Gespeicherte elastische Energiedichte  $\psi_2$ :

$$\psi_2 = \frac{1}{2} (\omega, \omega)_Z = \frac{1}{2} \omega^T \cdot Z \cdot \omega = \frac{1}{2} \omega_M Z^{MN} \omega_N \quad (6.1.12)$$

- (c) Spezifische plastische Arbeit  $\varphi_1$  aufgrund der beobachtbaren plastischen Dehnungen  $\dot{E}^P$ :

$$\varphi_1 = \int_0^\tau (\sigma, \dot{E}^P) d\tau = \int_0^\tau \sigma : \dot{E}^P d\tau = \int_0^\tau \sigma^{AB} \dot{E}_{AB}^P d\tau \quad (6.1.13)$$

- (d) Spezifische plastische Arbeit  $\varphi_2$  aufgrund der internen plastischen Parameter  $\kappa$ :

$$\varphi_2 = \int_0^\tau (\kappa, \dot{\kappa}) d\tau = \int_0^\tau \kappa^T \cdot \dot{\kappa} d\tau = \int_0^\tau \kappa_M^M \dot{\kappa}_M d\tau. \quad (6.1.14)$$

Damit gilt

$$E(\chi(\tau)) = \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_2 + \hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2 \quad (6.1.15)$$

mit

$$\hat{\psi}_1 = \int_{(V_0)} \psi_1 dV, \quad \hat{\psi}_2 = \int_{(V_0)} \psi_2 dV, \quad \hat{\phi}_1 = \int_{(V_0)} \varphi_1 dV, \quad \hat{\phi}_2 = \int_{(V_0)} \varphi_2 dV .$$

(6.1.16)

Wir nehmen an, daß zu Beginn des Prozesses der Wert aller interner Parameter null ist. Dann folgt aus dem Umstand, daß definitionsgemäß interne Parameter keinen Beitrag zur Arbeit leisten mit  $\boldsymbol{\kappa}^T \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\kappa}}) = 0$  die betragsmäßige Gleichheit der Komponenten von  $\boldsymbol{\kappa}$  und  $\boldsymbol{\omega}$  mit  $\boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\kappa}$ .

Die bis zum Zeitpunkt  $\tau$  geleistete äußere Arbeit  $A(\tau)$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} A(\chi(\tau)) &= \int_0^\tau \langle \overset{*}{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{u}} \rangle d\hat{\tau} + \int_0^\tau [ \overset{*}{\mathbf{f}}, \dot{\mathbf{u}} ] d\hat{\tau} \\ &= \int_0^\tau \int_{(V_0)} (\overset{*}{\mathbf{p}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) dV d\hat{\tau} + \int_0^\tau \int_{(S_F)} (\overset{*}{\mathbf{f}} \cdot \dot{\mathbf{u}}) dS d\hat{\tau} + \\ &\quad \int_0^\tau \int_{(S_K)} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}) \cdot \dot{\mathbf{u}}^*] dS d\hat{\tau} . \end{aligned}$$

oder, in Indexschreibweise

$$\begin{aligned} A(\chi, \tau) &= \int_0^\tau \int_{(V_0)} \overset{*}{p}^i \dot{u}_i dV d\hat{\tau} + \int_0^\tau \int_{(S_F)} \overset{*}{f}^i \dot{u}_i dS d\hat{\tau} + \\ &\quad \int_0^\tau \int_{(S_K)} n_A t^{iA} \dot{u}_i^* dS d\hat{\tau} . \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

$\overset{*}{\mathbf{p}}$ ,  $\overset{*}{\mathbf{f}}$  und  $\dot{\mathbf{u}}^*$  sind dabei durch (2.1.2) definierte äußere Wirkungen. Zu beachten ist hier die schon in Abschnitt II angesprochene Orthogonalität einander zugeordneter Kraft- und Verschiebungsgrößen auf den Rändern  $S_F$  und  $S_K$ .

Beschränkt man sich auf konservative äußere Wirkungen, so ist die äußere Leistung auf  $S_F$ , also dort wo Kraftgrößen vorgegeben sind, definitionsgemäß geschwindigkeits- aber nicht deformationsabhängig. Da

aber der Spannungstensor  $t$  auf dem Rand vom Deformationszustand abhängt, ist die Wegunabhängigkeit der äußeren Leistung auf  $S_K$  nicht in der gleichen Weise gegeben. Deswegen beschränken wir uns hier auf kinematische Randbedingungen mit zu allen Zeiten verschwindenden vorgegebenen Verschiebungen und Verschiebungsgeschwindigkeiten. Dann aber geht (6.1.17) unter Berücksichtigung der angenommenen Potentialität von  $A$  über in:

$$A = \langle \overset{*}{p}, u \rangle + [\overset{*}{f}, u]_{S_F} = \int_{(V_0)} \overset{*}{p}^i u_i dV + \int_{(S_F)} \overset{*}{f}^i u_i dS. \quad (6.1.18)$$

## VI.2 HERLEITUNG EINES STABILITÄTSKRITERIUMS AUS DEM VERGLEICH VON NACHBARZUSTÄNDEN

Zur Definition eines energetischen Nachbarzustands  $\tilde{f}(\tilde{\chi})$  wird zunächst der Differenzvektor  $\Delta\chi$  durch

$$\Delta\chi = \tilde{\chi} - \chi \quad (6.2.1)$$

oder ausgeschrieben

$$[\Delta F(\Delta u), \Delta E^P, \Delta \kappa] = [\tilde{F} - F, \tilde{E}^P - E^P, \tilde{\kappa} - \kappa] \quad (6.2.2)$$

definiert. Der Zustandsvektor  $\tilde{\chi}$  wird dann zulässig genannt, wenn  $\tilde{u}$  die geometrischen Randbedingungen erfüllt und  $[\tilde{E}^P, \tilde{\kappa}]$  in Einklang mit der Fließbedingung und der Fließregel stehen. Auf die Bedingungen für  $[\tilde{E}^P, \tilde{\kappa}]$  wird später näher eingegangen. Die Differenz der inneren Energie  $\Delta E$ , verursacht durch  $\Delta\chi$ , ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} \Delta E = & \hat{\psi}_1(E(\tilde{u}^P) - \tilde{E}^P) - \hat{\psi}_1(E(u) - E^P) + \hat{\psi}_2(\tilde{\omega}) - \hat{\psi}_2(\omega) + \\ & \Phi_1(\tilde{E}^P, \sigma(E(\tilde{u}) - \tilde{E}^P), \tau) + \Phi_2(\kappa, \kappa(\tilde{\omega}), \tau). \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Die entsprechende Änderung  $\Delta A$  der äußeren Arbeit  $A$  ist dann:

$$\Delta A = A(u + \Delta u, \overset{*}{p}, \overset{*}{f}) - A(u, \overset{*}{p}, \overset{*}{f}). \quad (6.2.4)$$

Für die weiteren Betrachtungen wird vorausgesetzt, daß  $\Delta E$  und  $\Delta A$  in der Umgebung von  $\chi$  in Taylorreihen entwickelbar sind. Notwendige Bedingung dafür ist die Existenz der GATEAUX-Differentiale, die für eine beliebige Funktion  $g(\chi)$  definiert sind durch [15] :

$$g^{(n)}(\chi; \hat{\chi}^1, \hat{\chi}^2, \dots, \hat{\chi}^{n-1}, \hat{\chi}^n) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [g^{(n-1)}(\chi + \alpha \hat{\chi}^n, \hat{\chi}^1, \dots, \hat{\chi}^{n-1}) - g^{(n-1)}(\chi, \hat{\chi}^1, \hat{\chi}^2, \dots, \hat{\chi}^{n-1})] . \quad (6.2.5)$$

$g^{(n)}$  ist dabei das n-te GATEAUX-Differential und  $\hat{\chi}^k$  die Koordinate der k-ten Änderungsrichtung der Zustandsvariablen  $\chi$ .

Mit dieser Definition erhält man explizit für  $\hat{\psi}_1$  und  $\hat{\psi}_2$  sämtliche GATEAUX-Ableitungen:

$$\hat{\psi}_1^{(1)}(\chi; \hat{\chi}) = \langle F^T \cdot \hat{F} - \hat{E}^D, (1/2)(F^T \cdot F - 1) - E^D \rangle_L \quad (6.2.6)$$

$$\hat{\psi}_1^{(2)}(\chi; \hat{\chi}, \tilde{\chi}) = \langle F^T \cdot \hat{F} - \hat{E}^D, F^T \cdot \tilde{F} - \tilde{E}^D \rangle_L + \langle \tilde{F}^T \cdot \hat{F}, (1/2)(F^T \cdot F - 1) - E^D \rangle_L \quad (6.2.7)$$

$$\hat{\psi}_1^{(3)}(\chi; \hat{\chi}, \tilde{\chi}, \bar{\chi}) = \langle \bar{F}^T \cdot \hat{F}, F^T \cdot \tilde{F} - \tilde{E}^D \rangle_L + \langle \bar{F}^T \cdot \hat{F}, F^T \cdot \bar{F} - \bar{E}^D \rangle_L + \langle \bar{F}^T \cdot \tilde{F} - \tilde{E}^D, \bar{F}^T \cdot \tilde{F} \rangle_L \quad (6.2.8)$$

$$\hat{\psi}_1^{(4)}(\chi; \hat{\chi}, \tilde{\chi}, \bar{\chi}, \tilde{\tilde{\chi}}) = \langle \bar{F}^T \cdot \hat{F}, \tilde{\tilde{F}}^T \cdot \tilde{F} \rangle_L + \langle \tilde{\tilde{F}}^T \cdot \hat{F}, \bar{F}^T \cdot \tilde{F} \rangle_L + \langle \tilde{\tilde{F}}^T \cdot \tilde{F}, \bar{F}^T \cdot \tilde{F} \rangle_L \quad (6.2.9)$$

$$\hat{\psi}_1^{(k)} \equiv 0 \quad \text{für } k > 4 \quad (6.2.10)$$

$$\hat{\psi}_2^{(1)}(\chi; \hat{\chi}) = \langle \hat{\omega}, \omega \rangle_Z \quad (6.2.11)$$

$$\hat{\psi}_2^{(2)}(\chi; \hat{\chi}, \tilde{\chi}) = \langle \hat{\omega}, \tilde{\omega} \rangle_Z \quad (6.2.12)$$

$$\hat{\psi}_2^{(m)} \equiv 0 \quad \text{für } m > 2 . \quad (6.2.13)$$

Dabei sind die Bilinearformen  $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Z$  definiert durch

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle_L = \int_{(V_0)} a_{AB}^L{}^{ABCD} b_{CD} dv \quad (6.2.14)$$

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle_Z = \int_{(V_0)} c_M^Z{}^{MN} d_N dv . \quad (6.2.15)$$

Die direkte Anwendung der Definition (6.2.5) des GATEAUX-Differentials auf die Dissipationsarbeit ist nicht möglich, da in ihr  $\mathbf{E}^P$  und  $\boldsymbol{\kappa}$  explizit nur in den Zeitableitungen auftreten, wobei allerdings die Zeit entsprechend der allgemeinen Definition plastischen Verhaltens als Parameter mit beliebigem Maßstab auftritt. Aus der Konvexität der Fließfläche  $C$  und der Gültigkeit der Normalenregel folgt jedoch die Gültigkeit der Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbf{s} : \dot{\mathbf{e}}^P d\tau &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\boldsymbol{\sigma} : \dot{\mathbf{E}}^P + \boldsymbol{\kappa}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}) d\tau > \\ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathbf{s}(\tau_1) : \dot{\mathbf{e}}^P d\tau &= \mathbf{s}(\tau_1) : [\mathbf{e}^P(\tau_2) - \mathbf{e}^P(\tau_1)] . \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

Wird der Zeitparameter  $\tau$  mit der Störung  $\Delta \chi$  durch  $\Delta \chi = \dot{\chi}(\tau_2 - \tau_1)$  assoziiert, so gilt:

$$\mathbf{e}^P(\tau_2) - \mathbf{e}^P(\tau_1) = \Delta \mathbf{e}^P = [\Delta \mathbf{E}^P, \Delta \boldsymbol{\kappa}] . \quad (6.2.17)$$

Ersetzt man nun die tatsächliche Dissipationsarbeit  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$  durch  $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_1 + \hat{\Phi}_2$  mit

$$\hat{\Phi} = \int_{(V_0)} \mathbf{s} : \Delta \mathbf{e}^P dv , \quad \hat{\Phi}_1 = \int_{(V_0)} \boldsymbol{\sigma} : \Delta \mathbf{E}^P dv , \quad \hat{\Phi}_2 = \int_{(V_0)} \boldsymbol{\kappa}^T \cdot \Delta \boldsymbol{\kappa} dv , \quad (6.2.18)$$

so erhält man mit der Bedingung

$$\Delta \hat{\mathbf{E}} = \Delta \hat{\boldsymbol{\psi}} + \Delta \hat{\Phi} > \Delta A \quad (6.2.19)$$

ein gegenüber (6.1.7) verschärftes Kriterium für Stabilität. Für die

infinitesimale Umgebung von  $f(\chi)$  geht das (schärfere) Näherungskriterium (6.2.19) in das ursprüngliche Kriterium (6.1.7) über, da

$$\Delta e^P \rightarrow \dot{e}^P dt \quad \text{für } \Delta \chi \rightarrow 0 \quad (6.2.20)$$

gilt.

Eine entsprechende Ableitung der äußeren Arbeit liefert dann:

$$A(\chi) = \langle \overset{*}{p}, u \rangle + [f^*, u]_{S_F} \quad (6.2.21)$$

$$A^{(1)}(\chi, \hat{\chi}) = \langle \overset{*}{p}, \hat{u} \rangle + [\overset{*}{f}, \hat{u}]_{S_F} \quad (6.2.22)$$

$$A^{(k)} \equiv 0 \quad \text{für } k > 1 \quad (6.2.23)$$

Gleichungen (6.2.21) - (6.2.23) gelten unter der Voraussetzung konservativer Lasten  $\overset{*}{p}$  und  $\overset{*}{f}$ . Wenn für den allgemeinen Fall nichtkonservativer Lasten jedoch die Abhängigkeit der Lasten von  $\chi$  bekannt ist, können die höheren GATEAUX-Ableitungen entsprechend gebildet werden.

**Repräsentation eines beliebigen Zustands  $f$  in der Umgebung von  $\chi$  mittels der Taylorreihenentwicklung**

Für einen beliebigen Zustand  $\tilde{f}(\chi + \Delta\chi)$  in der Umgebung von  $f(\chi)$  kann jetzt durch Taylorreihenentwicklung der äußeren Arbeitsdifferenz  $\Delta A$  und der Näherung der Änderung der inneren Energie  $\Delta \hat{E}$  die Ungleichung (6.2.19) ausgedrückt werden durch:

$$\begin{aligned} & \langle \overset{*}{p}, \hat{u} \rangle + [f^*, \hat{u}]_{S_F} < \langle F^T \cdot \hat{F} - \hat{E}^D, \sigma(\chi) \rangle + \\ & \langle \omega, -\hat{\kappa} \rangle_Z + (1/2) \langle \hat{\kappa}, \hat{\kappa} \rangle_Z + (1/2) \langle F^T \cdot \hat{F} - \hat{E}^D, F^T \cdot \hat{F} - \hat{E}^D \rangle_L + \\ & (1/2) \langle \hat{F}^T \cdot \hat{F}, \sigma(\chi) \rangle + (1/2) \langle \hat{F}^T \cdot \hat{F}, F^T \cdot \hat{F} - \hat{E}^D \rangle_L \\ & (1/8) \langle \hat{F}^T \cdot \hat{F}, \hat{F}^T \cdot \hat{F} \rangle_L + \langle \sigma(\chi), \hat{E}^D \rangle + \langle \kappa(\chi), \hat{\kappa} \rangle . \quad (6.2.24) \end{aligned}$$

Dabei sind  $\sigma(\chi)$  und  $\kappa(\chi)$  entsprechend (2.3.40-43) definiert als:

$$\sigma(\chi) = [(1/2)(F^T \cdot F - 1) - E^D] : L \quad (6.2.25)$$

$$\pi(\chi) = \omega^T \cdot Z = -\kappa^T \cdot Z \quad (6.2.26)$$

Durch Anwendung des GAUSS'schen Theorems läßt sich der erste Term der rechten Seite der Ungleichung (6.2.24) umformen. Es gilt, entsprechend den Umformungen (3.2.21-24) bzw. (5.1.17) für den Gleichgewichtszustand  $f(\chi)$ :

$$\langle F^T \cdot F - E^D, \sigma(\chi) \rangle = \langle F^T \cdot F, \sigma(\chi) \rangle - \langle E^D, \sigma(\chi) \rangle \quad (6.2.27)$$

und

$$\langle F^T \cdot F, \sigma(\chi) \rangle = \langle t(\chi), \hat{F} \rangle = -\langle \hat{p}, \hat{u} \rangle + [f^*, \hat{u}]_{S_F} + [n \cdot t, \hat{u}^*]_{S_K} \quad (6.2.28)$$

Unter Berücksichtigung der Voraussetzung  $\hat{u}^* = 0$  erhält man damit aus (6.2.24)

$$0 < \langle F^T \cdot F - E^D, F^T \cdot F - E^D \rangle_L + \langle \sigma(\chi), F^T \cdot F \rangle + \langle \hat{\kappa}, \hat{\kappa} \rangle_Z + \langle F^T \cdot F, F^T \cdot F - E^D \rangle_L + (1/4) \langle \hat{F}^T \cdot \hat{F}, \hat{F}^T \cdot \hat{F} \rangle_L \quad (6.2.29)$$

als notwendiges Kriterium für die Stabilität des betrachteten Gleichgewichtszustands. Betrachtet man zunächst nur die Terme zweiter Ordnung in der Variablen  $\hat{\chi}^1$  der Taylorreihenentwicklung, so ergibt sich in Indexschreibweise als Stabilitätskriterium

$$\int_{V_0} \{ F^i \cdot A \cdot F^j \cdot B \cdot L^{ABCD} \hat{F}_{iC} \hat{F}_{jD} + \sigma^{CD} \hat{F}_{iC} \hat{F}_{jD} - 2F^j \cdot B \cdot L^{ABCD} E_{AC}^D \hat{F}_{jD} + E_{AC}^D E_{BD}^D L^{ABCD} + \hat{\kappa}_R^{RS} \hat{\kappa}_S \} dV > 0 \quad (6.2.30)$$

Die quadratische Form des Kriteriums (6.2.27) wird klar erkennbar, wenn die folgenden Definitionen benutzt werden:

$$C^{iCjD} = L^{ABCD} F_{\cdot A}^i F_{\cdot B}^j + \sigma^{CD} \delta_{\cdot L}^i \delta^{Lj} \quad (6.2.31)$$

$$D^{iCjD} = -L^{ABCD} \delta_A^i F_{\cdot B}^j \quad (6.2.32)$$

$$E^{iCjD} = L^{ABCD} \delta_A^i \delta_B^j \quad (6.2.33)$$

Man erhält dann anstelle (6.2.27) die Bedingung

$$\int_{(V_0)} (\hat{\chi}^T : M : \hat{\chi}) dV > 0 \quad (6.2.34)$$

mit den Abkürzungen

$$\hat{\chi} = (\hat{F}, \hat{E}^D, \hat{\kappa}) \quad (6.2.35)$$

und

$$M = \begin{pmatrix} C^{iCjD} & D^{iCjD} & 0 \\ D^{iCjD} & E^{iCjD} & 0 \\ 0 & 0 & Z^{RS} \end{pmatrix} \quad (6.2.36)$$

#### Kinematische Kopplung der Elemente des Variablenvektors $\chi$

Hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Ungleichung (6.2.27) ist dann die positive Definitheit der Supermatrix  $M$ . Bei kritischen Zuständen, wenn in (6.2.27) anstelle des Ungleichheitszeichens das Gleichheitszeichen gilt, d. h. daß  $M$  an irgendeiner Stelle  $X$  indefinit ist, entscheidet an dieser Stelle der Term dritter Ordnung, ob das Kriterium (6.2.26) erfüllt ist. Ist für jede zulässige Änderung  $\hat{\chi}$  auch dieser Term identisch null, so ist der Term vierter Ordnung zuständig für die Frage nach der Stabilität im Sinn von Ungleichung (6.2.24). Dieser Term ist für positiv definite Elastizitätstensoren  $L$  jedoch für nichtverschwindende Störungen  $\hat{\chi}$  immer positiv.

Die obigen Betrachtungen erlauben zunächst nur Aussagen über die Art des jeweils untersuchten Gleichgewichtszustands, bieten jedoch keine Möglichkeit, die Verformungen des Systems nach dem Verzweigungspunkt,

charakterisiert durch die Indefinitheit von  $M$  zu bestimmen. Die Frage, inwieweit das in [151] vorgestellte Konzept zur Bestimmung von Verzweigungspfaden elastischer Schalen mit unbegrenzten Rotationen unter einparametrischen äußeren Lasten zur Behandlung inelastischer Systeme erweitert werden kann, ist noch ungeklärt. Besondere Beachtung bedarf die Frage nach der Zulässigkeit von  $\hat{\chi}$ : Während es die Anwendung des Gauß'schen Theorems erforderlich macht, daß  $\hat{F}$  aus einem differenzierbaren Verschiebungsfeld herleitbar ist, ist  $\hat{e}^P$  an die Erfüllung der Bedingungen aus dem plastischen Anteil des Stoffgesetzes für das "Generalisierte-Standard-Material" nach (2.3.35-2.3.43) gebunden. Setzt man die Orthogonalitätsbedingung

$$\langle \hat{s}, \hat{e}^P \rangle = 0 \quad (6.2.37)$$

in (6.2.30) ein, so ergibt sich

$$\int_{(V_0)} [F_{\cdot A}^i F_{\cdot B}^j L^{ABCD} F_{iC} F_{jD} + \sigma^{CD} F_{iC} F_D^i - E_{AC}^P E_{BD}^P L^{ABCD} - \hat{\kappa}_R Z^{RS} \hat{\kappa}_S] dV > 0 \quad (6.2.38)$$

als Stabilitätsbedingung. Die Matrix  $M$  geht dann über in

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} F_{\cdot A}^i F_{\cdot B}^j L^{ABCD} + \sigma^{CD} \delta^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & -L^{ABCD} \delta_A^i \delta_B^j & 0 \\ 0 & 0 & -Z^{RS} \end{pmatrix} \quad (6.2.39)$$

Für Störungen, die sich vollständig im elastischen Bereich befinden, ist nur das Element  $M_{11}$  der Matrix  $M$  ungleich null. Berücksichtigt man ferner, daß sich die Änderung des plastischen Deformationsanteils als Projektion der Gesamtdehnungen auf die Außennormale an die Fließfläche ergibt mit  $\gamma = \frac{\partial F}{\partial s}$ , erhält man die plastischen Dehnungsänderungen zu

$$\hat{E}^P = \alpha \gamma; \quad \alpha = \lambda : \hat{E} = (1/2) \gamma^{AB} (F_{\cdot A}^i F_{iB} + F_{\cdot B}^i F_{iA}) \quad (6.2.40)$$

Der Außennormalentensor an die Fließfläche ist dabei als  $\gamma$  bezeichnet. Es kann dann gezeigt werden, daß (6.2.34) dem zitierten Kriterium von HILL, bezogen allerdings auf die Ausgangskonfiguration, entspricht. Dazu soll zunächst auf die physikalische Bedeutung interner Parameter eingegangen werden.

In [131] ist gezeigt worden, wie sich bestimmte Verfestigungsgesetze mittels des Konzepts des generalisierten Standard Materials darstellen lassen. Für die Mises-Arbeitsverfertigung ergibt sich dabei:

$$\{s = [\sigma, \kappa] : |\sigma' - \beta| < \pi_1; \beta_{11} = \pi_2, \beta_{21} = \pi_3 \\ \beta_{31} = \pi_4, \beta_{22} = \pi_5, \beta_{23} = \pi_6, \beta_{33} = \pi_7\} . \quad (6.2.41)$$

$\sigma'$  ist dabei der Deviator des Spannungstensors  $\sigma$  mit den Komponenten

$$(\sigma^{AB})' = \sigma^{AB} - (\sigma^{KK}/3) \delta^{AB} \quad (6.2.42)$$

und  $\pi_1$  bezeichnet die Fließgrenze und die internen Parameter  $\kappa$  sind definiert durch:

$$\kappa_1 = \int_0^{\tau} [\dot{E}^P : \dot{E}^P]^{1/2} d\tau, \kappa_2 = E_{11}^P, \kappa_3 = E_{21}^P, \kappa_4 = E_{31}^P \\ \kappa_5 = E_{22}^P, \kappa_6 = E_{32}^P, \kappa_7 = E_{33}^P . \quad (6.2.43)$$

Die Matrix  $Z$  ist definiert durch

$$Z_{11} = k, \quad Z_{1i} = Z_{i1} = 0, \quad i = 1, \dots, 7 . \quad (6.2.44)$$

Die anderen Elemente der symmetrischen, konstanten und positiv definiten Matrix  $Z$  sind durch Messung zu bestimmende Materialparameter. Der letzte Term der linken Seite von Ungleichung (6.2.38) kann somit als Funktion von  $\hat{e}^P$  und damit über die Beziehung (6.2.40) als Funktion von  $\hat{F}$  ermittelt werden.

Damit ist die kinematische Kopplung der Elemente des Variablenvektors  $\Delta x$  abgeschlossen, die es für das vorliegende Werkstoffmodell er-

möglichst, das Kriterium (6.2.34) darzustellen als

$$\int_{(V_0)} \{ F_{\cdot A}^i F_{\cdot B}^j L^{ABCD} \hat{F}_{iC} \hat{F}_{jD} + \sigma^{CD} \delta^{ij} \hat{F}_{iC} \hat{F}_{jD} - P^{iCjD} \hat{F}_{iC} \hat{F}_{jD} + g[\alpha(\hat{F}), Z] \} dV > 0 . \quad (6.2.45)$$

Das Verfestigungsverhalten wird hier durch die skalare Funktion  $g$  beschrieben. Der Tensor  $P$  ergibt sich aus (6.2.38-40): Wegen der Symmetrie von  $\lambda$  gilt

$$(1/2) \lambda^{AB} (F_{\cdot A}^i F_{iB} + F_{\cdot B}^i F_{iA}) = \lambda^{AB} F_{\cdot A}^i F_{iB} . \quad (6.2.46)$$

Damit gilt

$$E_{MN}^P = \lambda_{MN} \lambda^{AB} F_{\cdot A}^i F_{iB} \quad (6.2.47)$$

und man erhält

$$E_{MN}^P L^{MNOP} E_{OP}^P = \lambda_{MN} \lambda^{AC} F_{\cdot A}^i F_{iC} L^{MNOP} \lambda_{OP} \lambda^{BD} F_{\cdot B}^j F_{jD} . \quad (6.2.48)$$

Faßt man die konstanten Terme zusammen, so erhält man

$$P^{iCjD} = \lambda_{MN} \lambda_{OP} L^{MNOP} \lambda^{AC} F_{\cdot A}^i \lambda^{BD} F_{\cdot B}^j . \quad (6.2.49)$$

Mit

$$T^{iCjD} = \sigma^{CD} \delta^{ij} \quad (6.2.50)$$

ist also für Störungen, die sich ausschließlich im elastischen Bereich befinden, die Bedingung

$$(E^{iCjD} + T^{iCjD}) \hat{F}_{iC} \hat{F}_{jD} > 0 \quad (6.2.51)$$

notwendiges Kriterium für Stabilität, während für alle anderen Störungen

$$(E^{iCjD} + T^{iCjD} - P^{iCjD}) \hat{F}_{iC} \hat{F}_{jD} > 0 \quad (6.2.52)$$

gelten muß. Dies aber entspricht den Bedingungen (6.1.4).

## VII. ELASTOPLASTISCHE FLÄCHENTRAGWERKE

### VII.1 GEOMETRIE

#### VII.1.1 Grundlagen und Definitionen

Ein Körper  $B$  wird dann als Flächentragwerk bezeichnet, wenn sich seine Gestalt in allen Konfigurationen, die er während des Deformationsprozesses einnimmt, mittels einer Fläche  $\Gamma$  (Mittelfläche) und der zu dieser Fläche orthogonalen Abmessung, der Dicke  $2H$ , beschreiben läßt, wobei  $2H$  wesentlich kleiner ist als die charakteristischen Maße der Mittelfläche  $\Gamma$ . Es wird nun vorausgesetzt, daß  $\Gamma$  eine hinreichend glatte Funktion der räumlichen Koordinaten des euklidischen Bezugssystemes  $[0, e_1, e_2, e_3]$  ist. Die Punkte  $A$  auf  $\Gamma$  werden dann aufgefaßt als Funktion der GAUSS'schen Flächenkoordinaten  $[x^1, x^2]$ . Die Parameterlinien  $x^\Delta = \text{konst.}$  formen somit ein Netz auf  $\Gamma$ . Die zu  $\Gamma$  orthogonale Richtung wird durch die Koordinate  $x^3$  charakterisiert.

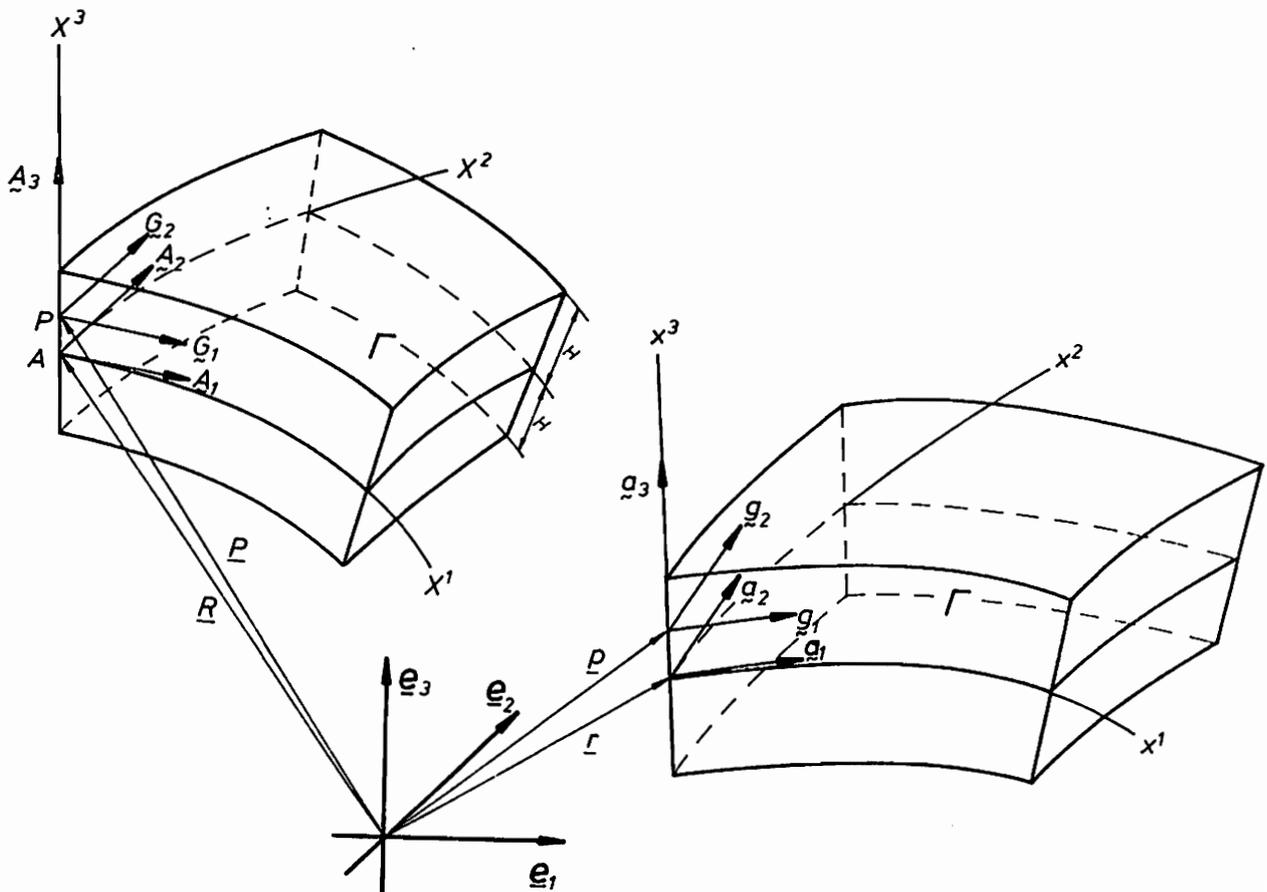


BILD 14: DEFINITIONEN ZUR SCHALENGEOMETRIE

Mittels der Flächenkoordinaten läßt sich in jedem Punkt A von  $\Gamma$  ein orthonormiertes Koordinatensystem definieren. Der Ortsvektor des Schalenmittelflächenpunktes A sei in der unverformten Konfiguration  $\mathbf{r}$ . Bezeichnet man die partielle Differentiation durch ein nachgestelltes Komma, gefolgt vom Index der betreffenden Koordinatenrichtung, so ergibt sich für die kovarianten Basisvektoren  $\mathbf{A}_\Delta$  (unverformte Konfigurationen) und  $\mathbf{a}_\alpha$  (verformte Konfigurationen)

$$\mathbf{A}_\Delta = \mathbf{R},_\Delta \quad , \quad \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r},_\alpha \quad (7.1.1)$$

Griechische Indizes nehmen die Werte 1 und 2 an, während lateinische Indizes von 1 bis 3 laufen, Großbuchstaben beziehen sich auf die unverformte, Kleinbuchstaben auf die verformte Konfiguration. Der Normalenvektor auf  $\Gamma$  sei  $\mathbf{A}_3$  im unverformten und  $\mathbf{a}_3$  im verformten Zustand. Durch die Orthonormiertheit der Basisvektoren ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\Delta \cdot \mathbf{A}_3 &= 0 \quad , \quad \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_3 = 1 \\ \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3 &= 0 \quad , \quad \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 = 1 \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Die Metriktensoren (erste Fundamentalform) erhält man durch

$$\mathbf{A}_{\Delta\Gamma} = \mathbf{A}_\Delta \cdot \mathbf{A}_\Gamma \quad , \quad \mathbf{a}_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta \quad (7.1.3)$$

mit den dazugehörigen Determinanten

$$A = | \mathbf{A}_{\Delta\Gamma} | \quad , \quad a = | \mathbf{a}_{\alpha\beta} | \quad (7.1.4)$$

Die kontravarianten Basisvektoren  $\mathbf{A}^\Delta$  und  $\mathbf{a}^\alpha$  sind dann definiert durch die Orthogonalitätsbedingungen

$$\mathbf{A}^\Delta \cdot \mathbf{A}_\Gamma = \delta_\Gamma^\Delta \quad \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (7.1.5)$$

mit den entsprechenden Metriken

$$\mathbf{A}^{\Delta\Gamma} = \mathbf{A}^\Delta \cdot \mathbf{A}^\Gamma \quad , \quad \mathbf{a}^{\alpha\beta} = \mathbf{a}^\alpha \cdot \mathbf{a}^\beta \quad (7.1.6)$$

Die Krümmungstensoren (zweite Fundamentalform) sind definiert durch

$$\begin{aligned} B_{\Delta\Gamma} &= B_{\Gamma\Delta} = A_3 \cdot A_{\Delta,\Gamma} = -A_{3,\Delta} \cdot A_\Gamma = -A_{3,\Gamma} \cdot A_\Delta \\ b_{\alpha\beta} &= b_{\beta\alpha} = a_3 \cdot a_{\alpha,\beta} = -a_{3,\alpha} \cdot a_\beta = -a_{3,\beta} \cdot a_\alpha \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

und die dritte Fundamentalform ist schließlich definiert durch das Produkt der Krümmungstensoren

$$C_{\Delta\Gamma} = B_{\Delta}^{\Phi} B_{\Phi\Gamma} \quad , \quad c_{\alpha\beta} = b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} \quad . \quad (7.1.8)$$

Ein beliebiger Punkt P des unverformten Schalenraums  $\Gamma \times X^3$ ,  $|X^3| < H$  hat dann den Ortsvektor

$$P(X^K) = R(X^\Delta) + X^3 A_3 (X^\Delta) \quad . \quad (7.1.9)$$

Damit kann aber jeder Punkt des Schalenraums in analoger Weise zur Beschreibung der Mittelflächengeometrie mit einem System von Basisvektoren ausgestattet werden: Man erhält die kovarianten Basisvektoren  $G_\Delta$ ,  $G_3$  der unverformten Konfiguration zu

$$G_\Delta = P_{,\Delta} = A_\Delta + X^3 A_{3,\Delta} \quad , \quad G_3 = A_3 \quad (7.1.10)$$

mit der Metrik

$$G_{\Delta\Gamma} = G_\Delta \cdot G_\Gamma \quad , \quad G_{\Delta 3} = 0 \quad , \quad G_{33} = 1 \quad . \quad (7.1.11)$$

Will man alle benötigten Größen auf die Koordinaten der Mittelfläche  $\Gamma$  beziehen, so kann mit (7.1.9) der "Shifter"-Tensor  $\mu$  eingeführt werden mit

$$\mu_{\Delta}^{\Gamma} = \delta_{\Delta}^{\Gamma} - X^3 B_{\Delta}^{\Gamma} \quad . \quad (7.1.12)$$

Damit kann ein beliebiger Vektor U entweder auf die Basis  $G_\Delta$  oder die Basis  $A_\Delta$  bezogen werden mit

$$U = U^\Delta G_\Delta + U^3 G_3 = U_\Delta G^\Delta + U_3 G^3 =$$

$$= \bar{U}^\Delta A_\Delta + \bar{U}^3 A_3 = \bar{U}_\Delta A^\Delta + \bar{U}_3 A^3, \quad (7.1.13)$$

wobei Vektorkomponenten  $U^\Delta$  bzw.  $U_\Delta$  der schalenraumbezogenen Darstellung und die Komponenten  $\bar{U}^\Delta$  bzw.  $\bar{U}_\Delta$  der mittelflächenbezogenen Darstellung mit dem Shifter-Tensor ineinander überführt werden können:

$$U_\Delta = \mu_\Delta^\Gamma \bar{U}_\Gamma, \quad \bar{U}^\Delta = (\mu^{-1})_\Gamma^\Delta U^\Gamma, \quad (7.1.14)$$

wobei  $\mu^{-1}$  definiert ist durch [35]

$$(\mu^{-1})_\Phi^\Delta \mu_\Gamma^\Phi = \delta_\Gamma^\Delta. \quad (7.1.15)$$

Zur Definition der Ableitungen sowohl in der schalenraum- als auch mittelflächenbezogenen Darstellung werden die Christoffel-Symbole benötigt. Sie sind gegeben durch

$$\Gamma_{DAB} = (1/2)(G_{DA,B} + G_{BD,A} - G_{AB,D}) = G_D \cdot G_{A,B} \quad (7.1.16)$$

und

$$\Gamma_{AB}^C = G^{CD} \Gamma_{DAB} = G^C \cdot G_{A,B} \quad (7.1.17)$$

bei Bezug auf die Basis  $G_\Delta$ . Man erhält somit

$$G_{A,B} = \Gamma_{DAB} G^D = \Gamma_{AB}^D G_D \quad (7.1.18)$$

als Ableitung der Basisvektoren. Die Christoffel-Symbole bezogen auf die Mittelfläche ergeben sich als Sonderfall von (7.1.16-17) für  $X_3 = 0$  zu

$$\Gamma_{DAB} = \Gamma_{DAB} \Big|_{X^3=0}, \quad \Gamma_{AB}^D = \Gamma_{AB}^D \Big|_{X^3=0} \quad (7.1.19)$$

Die Differentiation des beliebigen Vektors  $U$  kann nun dargestellt werden als

$$\begin{aligned} U_{,B} &= (U^A G_A)_{,B} = U_{,B}^A G_A + U^A G_{A,B} \\ &= (U_{,B}^A + U^D \Gamma_{DB}^A) G_A = U^A \Big|_{,B} G_A \end{aligned} \quad (7.1.20)$$

wobei der Doppelstrich die kovariante schalenraumbezogene Ableitung definiert:

$$U^A ||_B = U^A_{,B} + U^D \Gamma_{DB}^A \quad (7.1.21)$$

bzw.

$$U_A ||_B = U_{A,B} - U_D \Gamma_{AB}^D \quad (7.1.22)$$

Berücksichtigt man ferner, daß durch die Orthogonalität des Normalenvektors  $A_3$  zur Mittelfläche  $\Gamma$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Delta\Gamma}^3 &= \Gamma_{3\Delta\Gamma} = -\Gamma_{\Delta\Gamma 3} = -\Gamma_{\Delta 3\Gamma} = B_{\Delta\Gamma} \\ \Gamma_{3\Gamma}^\Delta &= \Gamma_{\Gamma 3}^\Delta = -B_\Gamma^\Delta \end{aligned} \quad (7.1.23)$$

gelten und Christoffel-Symbole mit sich wiederholendem Index "3" gleich null sind, so erhält man die Komponenten der schalenraumbezogenen Ableitungen eines Vektors  $U$  zu

$$U^\Delta ||_\Gamma = (\mu^{-1})_\Phi^\Delta (\bar{U}^\Phi |_\Gamma - B_\Gamma^\Phi U^3) \quad (7.1.24)$$

$$U^\Delta ||_3 = (\mu^{-1})_\Phi^\Delta \bar{U}^\Phi_{,3} \quad (7.1.25)$$

$$U^3 ||_\Delta = U^3 |_\Delta + B_{\Delta\Gamma}^\Phi \bar{U}^\Gamma \quad (7.1.26)$$

$$U_\Delta ||_\Gamma = \mu_\Delta^\Phi (\bar{U}_\Phi |_\Gamma - B_{\Phi\Gamma} U_3) \quad (7.1.27)$$

$$U_\Delta ||_3 = \mu_\Delta^\Phi \bar{U}_{\Phi,3} \quad (7.1.28)$$

$$U_3 ||_\Delta = U_3 |_\Delta + B_\Delta^\Phi \bar{U}_\Phi \quad (7.1.29)$$

$$U^3 ||_3 = U_3 ||_3 = U^3 |_3 = U_3 |_3 = U^3_{,3} \quad (7.1.30)$$

Dabei bedeutet der einfache Vertikalstrich die kovariante mittelflächenbezogene Differentiation. Sie ist definiert durch:

$$\bar{U}^K |_L = \bar{U}^K_{,L} + \bar{\Gamma}_{KL}^\Phi \bar{U}_\Phi \quad (7.1.31)$$

$$\bar{U}_{K|L} = \bar{U}_{K,L} + \bar{\Gamma}_{KL}^{\Phi} \bar{U}_{\Phi} \quad (7.1.32)$$

$$\bar{T}_{L|M}^K = \bar{T}_{L,M}^K + \Gamma_{\Phi M}^K \bar{T}_{L}^{\Phi} - \Gamma_{LM}^{\Phi} \bar{T}^K_{\Phi} \quad (7.1.33)$$

Hier bezeichnet  $\bar{T}$  einen beliebigen mittelflächenbezogenen Tensor zweiter Stufe.

Unter Benutzung der allgemeinen Definition des GREEN'schen Dehnungstensors (2.1.10) erhält man seine schalenraumbezogenen Komponenten zu:

$$2E_{AB} = U_A|_B + U_B|_A + U_M|_A U^M|_B \quad (7.1.34)$$

Ausgeschrieben ergibt sich mit (7.1.24-32)

$$\begin{aligned} 2E_{\Delta\Gamma} &= \mu_{\Delta}^{\Phi} (\bar{U}_{\Phi|\Gamma} - B_{\Phi\Gamma} U_3) + \mu_{\Gamma}^{\Phi} (\bar{U}_{\Phi|\Delta} - B_{\Phi\Delta} U_3) \\ &+ (\bar{U}_{\Delta}^{\Phi} - B_{\Delta}^{\Phi} U_3) (\bar{U}_{\Phi|\Gamma} - B_{\Phi\Gamma} U_3) + \\ &+ (U_3|_{\Delta} + B_{\Delta}^{\Phi} \bar{U}_{\Phi}) (U_3|_{\Gamma} + B_{\Gamma}^{\Phi} \bar{U}_{\Phi}), \end{aligned} \quad (7.1.35)$$

$$\begin{aligned} 2E_{\Delta 3} &= \mu_{\Delta}^{\Phi} \bar{U}_{\Phi,3} + U_3|_{\Delta} + B_{\Delta}^{\Phi} \bar{U}_{\Phi} + (\bar{U}_{\Delta}^{\Phi} - B_{\Delta}^{\Phi} U_3) \bar{U}_{\Phi,3} \\ &+ (U_3|_{\Delta} + B_{\Delta}^{\Phi} \bar{U}_{\Phi}) U_{3,3} \end{aligned} \quad (7.1.36)$$

$$2E_{33} = 2U_{3,3} + \bar{U}_{,3}^{\Delta} \bar{U}_{\Delta,3} + U_{3,3}^2 \quad (7.1.37)$$

Setzt man voraus, daß der Verschiebungsvektor  $U$  analytisch ist, so können seine Komponenten in Taylorreihen entwickelt werden mit

$$U_A = \sum_{n=0}^k U_A^{(n)} (X^3)^n + R^k. \quad (7.1.38)$$

Dabei ist  $k$  eine natürliche Zahl, die den Grad der Taylorreihenentwicklung angibt und  $R^k$  das dazugehörige Restglied.  $U_A^{(n)}$  ist definiert als

$$U_A^{(n)} = \frac{1}{n!} [\partial^n / (\partial X^3)^n] U_A \quad \text{für } X^3 = 0. \quad (7.1.39)$$

Die Gleichungen (7.1.38-39) sind uneingeschränkt gültig. Theorien für Flächentragwerke werden allerdings in der Regel dadurch gebildet, daß die Koeffizienten  $\binom{n}{A}$  als Repräsentanten des dreidimensionalen Verschiebungsfeldes benutzt werden, um über die Weglassung des Restgliedes  $R^k$  in (7.1.38) das tatsächliche Feld  $U_A$  anzunähern mit

$$U_A = \sum_{n=0}^k U_A^{(n)} (X^3)^n . \quad (7.1.40)$$

Die Unterdrückung des Restgliedes kann im Sinne von WOZNIAK [166] als geometrische Zwangsbedingung ("geometrical constraint") interpretiert werden.

#### VII.1.2 Vereinfachende Annahmen

Außer der Voraussetzung, daß  $U$  analytisch sein muß, sind keine Annahmen über die Gestalt oder das Verformungsverhalten des betrachteten Flächentragwerkes gemacht worden. Die hergeleiteten Beziehungen gelten somit noch für Platten und Schalen von beliebiger, auch veränderlicher Dicke als Funktion von  $X^A$ . Zur Vereinfachung der weiteren Betrachtungen werden nun folgende zusätzliche Annahmen getroffen:

- (1) Das Flächentragwerk ist so dünn, daß der Shiftertensor  $\mu$  durch den Einheitstensor ersetzt werden kann:

$$\mu_{\Delta}^{\Gamma} = \delta_{\Delta}^{\Gamma} . \quad (7.1.41)$$

- (2) Die Taylorreihen (7.1.40) der Komponenten  $U_{\Gamma}$  des Verschiebungsvektors werden nach dem ersten Glied ( $k = 1$ ) abgebrochen.
- (3) Die Taylorreihe (7.1.40) der Komponente  $U_3$  wird nach dem nullten Glied ( $k=0$ ) abgebrochen.
- (4) Die Schubverzerrungen  $E_{\Delta 3}$  sind sehr klein im Vergleich zu den Komponenten  $E_{\Delta \Gamma}$  und werden vernachlässigt.

Diese Einschränkungen führen auf die bekannte KIRCHHOFF-LOVE-Theorie

für dünne Schalen [122]. Annahme (3) impliziert dabei insbesondere, daß die Dicke des betrachteten Flächentragwerks an jeder Stelle während des Deformationsprozesses unverändert bleibt. Für elastische Bereiche ist es jedoch möglich, die Dickenänderung des betrachteten Querschnitts in erster Näherung mittels der elastischen Querkontraktion zu ermitteln. Bei plastischen Schalenbereichen kann die sehr weitgehend gültige Inkompessibilitätsannahme zum gleichen Zweck benutzt werden. Es gilt dann in erster Näherung [35]

$$E_{33} = -E_{\Delta\Gamma} G^{\Delta\Gamma} = -E_{\Delta\Gamma} A^{\Delta\Gamma} . \quad (7.1.42)$$

Die Komponenten des Dehnungstensors  $E$  können jetzt in einen von  $X^3$  unabhängigen und einen von  $X^3$  linear abhängigen Teil aufgespalten werden:

$$E_{\Delta\Gamma} = \lambda_{\Delta\Gamma} + X^3 \kappa_{\Delta\Gamma} \quad (7.1.43)$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda_{\Delta\Gamma} = & (1/2)(v_{\Delta|\Gamma} + v_{\Gamma|\Delta}) - B_{\Delta\Gamma}W + (1/2)[w|_{\Delta}w|_{\Gamma} + B_{\Delta}^{\Phi} B_{\Phi\Gamma}W^2 \\ & + (1/2)(v_{\Delta}^{\Phi}|_{\Gamma} v_{\Phi|\Gamma} + v_{\Gamma}^{\Phi}|_{\Delta} v_{\Phi|\Delta}) + B_{\Delta}^{\Theta} B_{\Gamma}^{\Phi} v_{\Theta} v_{\Phi}] \\ & + (1/2)(B_{\Delta}^{\Phi} v_{\Phi} w|_{\Gamma} + B_{\Gamma}^{\Phi} v_{\Phi} w|_{\Delta} - B_{\Delta}^{\Phi} v_{\Phi|\Gamma} w - B_{\Gamma}^{\Phi} v_{\Phi|\Delta} w) \end{aligned} \quad (7.1.44)$$

$$\begin{aligned} 2\kappa_{\Delta\Gamma} = & \varphi_{\Delta|\Gamma} + \varphi_{\Gamma|\Delta} + v_{\Delta}^{\Phi}|_{\Gamma} \varphi_{\Phi|\Gamma} + v_{\Gamma}^{\Phi}|_{\Delta} \varphi_{\Phi|\Delta} \\ & - (B_{\Delta}^{\Phi} \varphi_{\Phi|\Gamma} + B_{\Gamma}^{\Phi} \varphi_{\Phi|\Delta}) w + (B_{\Gamma}^{\Phi} w|_{\Delta} + B_{\Delta}^{\Phi} w|_{\Gamma}) \varphi_{\Phi} \\ & + (B_{\Delta}^{\Phi} B_{\Gamma}^{\Theta} + B_{\Gamma}^{\Phi} B_{\Delta}^{\Theta}) v_{\Theta} \varphi_{\Phi} . \end{aligned} \quad (7.1.45)$$

Hier bezeichnen  $v_{\Delta}$  die Komponenten des Verschiebungsvektors parallel zur Mittelfläche  $\Gamma$  und  $w$  die Komponente senkrecht zur Mittelfläche und

$\varphi_\phi$  ist der Koeffizient des linearen Terms der Taylorreihenentwicklung (7.1.40) für  $U_\phi$ . Die Tensoren  $\lambda$  und  $\kappa$  sind hier die zweidimensionalen Repräsentanten des dreidimensionalen Dehnungszustands im Schalenraum. Sie sind bezogen auf die Basis der unverformten Schalenmittelfläche  $\Gamma$ . Im Sonderfall der geometrisch nichtlinearen Platte nach VON KARMAN ist der Krümmungstensor  $B$  identisch null. Die Komponenten des Dehnungstensors ergeben sich dann aus (7.1.44-45), indem zusätzlich die Produkte der Deformationen der Schalenmittelfläche miteinander und mit den Ableitungen der Schalenmittelflächenneigungen vernachlässigt werden, zu:

$$\lambda_{\Delta\Gamma} = (1/2)(v_{\Delta,\Gamma} + v_{\Gamma,\Delta} + w_{,\Gamma} w_{,\Delta}) \quad (7.1.46)$$

$$\kappa_{\Delta\Gamma} = (1/2)(\varphi_{\Delta,\Gamma} + \varphi_{\Gamma,\Delta}) = -w_{,\Delta\Gamma} \quad (7.1.47)$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß ko- und kontravariante Komponenten der Tensoren sowie kontravariante und partielle Ableitungen in diesem Fall übereinstimmen. Darüberhinaus ist die Ableitung der Neigung der Mittelfläche gleich der zweiten Ableitung ihrer Verschiebung in die zu  $\Gamma$  orthogonale Richtung.

Ein Vergleich mit den entsprechenden Ausdrücken der Schalentheorie von PIETRASZKIEWICZ [123] ergibt, daß die Tensoren zur Beschreibung der Mittelflächenverzerrung beider Theorien ineinander überführbar sind. Entsprechendes gilt jedoch nicht für die Tensoren der Krümmungsänderungen. Ursache ist, daß beiden Theorien verschiedene Konzepte zur Beschreibung der Verschiebung der materiellen Punkte des Schalenkörpers zugrunde liegen. Während DUSZEK die Koeffizienten der Taylorreihenentwicklungen der einzelnen dreidimensionalen Feldgrößen zur Definition von Dehnungs- und Krümmungsänderungsmaßen benutzt, führt PIETRASZKIEWICZ die aus der zweidimensionalen Flächentheorie abgeleiteten Rotationen der einzelnen Schalenelemente als maßgebliche Größen zur Definition der Krümmungsänderungen ein. Letztere Vorgehensweise erlaubt bei elastischen dünnen Schalen eine energetisch

konsistente Klassifikation von Schalentheorien, die breite Akzeptanz gefunden hat; Literaturübersichten findet man in [122,138,151]. Bei elasto-plastischen Schalen verliert dieses Klassifikationskonzept jedoch seinen Sinn: Die elastische Dehnungsenergiedichte, die in ihm als Abschätzungsmaß benutzt wird, existiert zwar auch in diesem Fall, tritt aber in der Bedeutung hinter der plastischen Dissipationsleistungsdichte zurück, die in diesem Konzept nicht erfaßt wird.

## VII. 2 DER SPANNUNGSZUSTAND

Während bei elastischem Werkstoffverhalten die Form der Spannungsverteilung über die Dicke des betrachteten Tragwerks durch den angenommenen Dehnungszustand eindeutig über das Hooke'sche Gesetz definiert ist, sind im Fall elastoplastischer Verformungen Spannungs- und Dehnungsverlauf voneinander entkoppelt. Die kinematischen Annahmen legen nur noch den Dehnungszustand fest, wo hingegen der Spannungsverlauf geschichtsabhängig ist. Analog zum Vorgehen im dreidimensionalen Kontinuum können die zu den Dehnungsrepräsentanten  $\lambda$  und  $\kappa$  adjungierten Spannungsgrößen über das Prinzip der virtuellen Arbeit definiert werden. Dazu sei der Spannungszustand dargestellt durch die Potenzreihe

$$\sigma^{AB} = \sum_{k=0}^n (1/k!) \sigma_k^{AB} (X^3)^k, \quad 1 < n < \infty, \quad (7.2.1)$$

wobei die Koeffizientenmatrizen  $\sigma_k^{AB}$  die Koeffizienten der Taylorreihenentwicklung des als analytische Funktion von  $X^3$  angenommenen tatsächlichen Spannungszustands sind mit

$$\sigma_k^{AB}(X^1, X^2) = (\partial^k \sigma^{AB}) / (\partial X^3)^k \Big|_{X^3=0}. \quad (7.2.2)$$

Es wird angenommen, daß die Spannungskomponenten  $\sigma^{33}$ ,  $\sigma^{3\Gamma}$  so klein sind, daß sie vernachlässigt werden können.

Setzt man die Zeitableitungen  $\dot{\lambda}$  und  $\dot{\kappa}$  in das Prinzip der virtuellen Arbeit ein, so ergibt sich mit  $\partial A$  als virtueller Arbeit

$$\partial A = \int_{-H(\Gamma)}^{+H} \int \left[ (\dot{\lambda}_{\Delta\Gamma} + X^3 \dot{\kappa}_{\Delta\Gamma}) \sum_{k=0}^n (1/k!) \sigma_k^{\Delta\Gamma} (X^3)^k \right] d\Gamma dX^3 \quad (7.2.3)$$

Da  $\sigma_k^{\Delta\Gamma}$  und  $\lambda_{\Delta\Gamma}$  von  $X^3$  unabhängig sind, kann die Integration über  $X^3$  vorgezogen werden und man erhält:

$$\partial A = \int_{(\Gamma)} [N^{\Delta\Gamma} \dot{\lambda}_{\Delta\Gamma} + M^{\Delta\Gamma} \dot{\kappa}_{\Delta\Gamma}] d\Gamma \quad (7.2.4)$$

mit

$$N^{\Delta\Gamma}(X^1, X^2) = \int_{-H}^{+H} \sum_{k=0}^n (1/k!) \sigma_k^{\Delta\Gamma} (X^3)^k dX^3 \quad (7.2.5)$$

$$M^{\Delta\Gamma}(X^1, X^2) = \int_{-H}^{+H} \sum_{k=0}^n (1/k!) \sigma_k^{\Delta\Gamma} (X^3)^{k+1} dX^3 \quad (7.2.6)$$

Bricht man die Reihe (7.2.1) nach dem Glied  $k=1$  ab, so erhält man die für dünne elastische Schalen übliche Darstellung des Spannungszustands. Es ist offensichtlich, daß zwar der Übergang vom Spannungszustand auf die Schnittgrößen  $N$  und  $M$  eindeutig ist, während eine bestimmte Paarung  $[N, M]$  mehrere verschiedene Spannungsverteilungen als Ursache haben kann. Mit (7.2.4) ist es nun möglich, die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen (2.2.25) auf die spezielle geometrische Situation von Flächentragwerken umzuschreiben: Setzt man in (7.2.4) die Ausdrücke für  $\dot{\lambda}$  und  $\dot{\kappa}$  nach (7.1.44-45) explizit ein und führt man die doppelte partielle Integration durch, so folgen die allgemeinen statischen Gleichgewichtsbedingungen für Flächentragwerke im Innern  $\Gamma$  und auf dem Rand  $S_F$  unter den in VII.1.2 angegebenen Annahmen.

In Hinblick auf die geschilderte Unbrauchbarkeit der energetisch begründeten Klassifikation von Schalentypen im Fall plastischer

Verformungen bezieht sich DUSZEK [35] von vornherein auf die Größenordnungen der einzelnen Terme in den definierten Dehnungs- und Krümmungsänderungsmaßen und schätzt sie dem Verhältnis von Schalendicke  $2H$  und Schalenmindestradius  $R_{\min}$ , erfaßt durch den Schalenparameter  $\epsilon^2 = O(2H/R_{\min}) \approx 0,1$ , gegenüber ab. "O" bedeutet dabei "der Größenordnung". Außerdem wird angenommen, daß die Wellenlänge des Schalen-deformationsmusters derselben Größenordnung ist wie die charakteristische Länge  $L$  der Schale, so daß auch die kovarianten Verschiebungsableitungen mit  $|W|_{\Gamma} = O(W/L)$  und  $|v_{\Delta}|_{\Gamma} = O(v_{\Delta}/L)$  abgeschätzt werden können.

Dieser Klassifikation folgend erhält man zum Beispiel die Bedingungen

$$N^{\Delta\Gamma}|_{\Gamma} = -p^{\Delta} \quad \text{in } \Gamma \quad (7.2.7)$$

$$N^{\Delta\Gamma} B_{\Delta\Gamma} + (N^{\Delta\Gamma} W|_{\Delta})|_{\Gamma} + M^{\Delta\Gamma}|_{\Delta\Gamma} = -p^3 \quad \text{in } \Gamma \quad (7.2.8)$$

$$(N^{\Delta\Gamma})^* v_{\Gamma} = N^{\Delta\Gamma} v_{\Gamma} \quad \text{auf } S_F \quad (7.2.9)$$

$$(M^{\Delta\Gamma})^* v_{\Gamma} = M^{\Delta\Gamma} v_{\Gamma} \quad \text{auf } S_F \quad (7.2.10)$$

$$(Q^{\Gamma})^* v_{\Gamma} = (N^{\Delta\Gamma} W|_{\Delta} + M^{\Delta\Gamma}|_{\Delta}) v_{\Gamma} \quad \text{auf } S_F \quad (7.2.11)$$

als Gleichgewichtsbedingungen für die flache Schale bei Verschiebungen der Mittelfläche, die senkrecht zu ihr moderat und parallel zu ihr klein sind. Dieser Schalen/Deformationstypus ist charakterisiert durch die Größenordnungen der Schalenparameter

$$L/R_{\min} < 0(\epsilon) \text{ oder } L < 0,1 R_{\min}$$

$$\max (W/2H) = 0(1) \text{ und } \max (v_{\Delta}/2H) < 0(\epsilon) \quad (7.2.12)$$

Der Vergleich zeigt, daß die Gleichgewichtsbedingungen (7.2.7-11) denen der Donnell-Mushtari-Vlasov-Schalentheorie entsprechen und somit im

Klassifikationsschema von PIETRASZKIEWICZ einer Schalentheorie für Rotationen mittlerer Größenordnung nur um Tangenten an die Schalenmittelfläche anzusehen wäre, wenn es sich um rein elastische Schalen handeln würde.

Für die quasiflatte Schale, definiert durch  $L/R_{\min} = O(1)$ , mit Verschiebungen, die senkrecht zur Mittelfläche groß und parallel zu ihr klein mit  $\max(W/2H) = O(\epsilon^{-1})$  und  $\max(V_{\Delta}/2H) = O(\epsilon)$  sind, erhält man entsprechend

$$N^{\Delta\Gamma}|_{\Gamma} = -p^{\Delta} \quad \text{in } \Gamma \quad (7.2.13)$$

$$N^{\Delta\Gamma} B_{\Delta\Gamma} + (N^{\Delta\Gamma} w|_{\Delta})|_{\Gamma} - N^{\Delta\Gamma} B_{\Delta}^{\Phi} B_{\Phi\Gamma} w + M^{\Delta\Gamma}|_{\Delta\Gamma} + M^{\Delta\Gamma} B_{\Delta\Gamma} B_{\Phi}^{\Phi} = -p^3$$

in  $\Gamma$  (7.2.14)

$$*N^{\Delta\Gamma} v_{\Gamma} = N^{\Delta\Gamma} v_{\Gamma} \quad \text{auf } S_F \quad (7.2.15)$$

$$*M^{\Delta\Gamma} v_{\Gamma} = M^{\Delta\Gamma} v_{\Gamma} \quad \text{auf } S_F \quad (7.2.16)$$

$$*Q^{\Gamma} v_{\Gamma} = (N^{\Delta\Gamma} w|_{\Delta} + M^{\Delta\Gamma}|_{\Delta}) v_{\Gamma} \quad \text{auf } S_F \quad (7.2.17)$$

Bei der Einbeziehung von Dehnungen, die nicht als klein angenommen werden können, wäre nun im Einzelfall zu prüfen, inwieweit neben den durch die gewählte Schalentheorie festgelegten Forderung an die Größenordnungen der Schalenparameter (hier als Beispiel (7.2.12),(7.2.18)) die Bedingung moderater Rotationen nach (2.3.6-13) als Voraussetzung für die Gültigkeit der additiven Zerlegung des Gesamtdehnungstensors  $E$  in rein reversiblen und rein irreversiblen Anteil im gegebenen Genauigkeitsmaß erfüllt ist. Da wir uns hier auf den Fall kleiner Dehnungen beschränken, ist dies an dieser Stelle nicht erforderlich.

Die Randterme (7.2.9-11) bzw. (7.2.15-17) lassen sich durch Projektion auf ein orthonormiertes begleitendes Dreibein  $[v, t, n]$  auf dem Rand  $S$  durch die Randmomente  $M_{vv}, M_{vt}, M_{nv}$  und die Randspannungsergebnisse

$N_{vv}$ ,  $N_{vt}$ ,  $N_{nv}$  überführen ([122],[138],[150]).

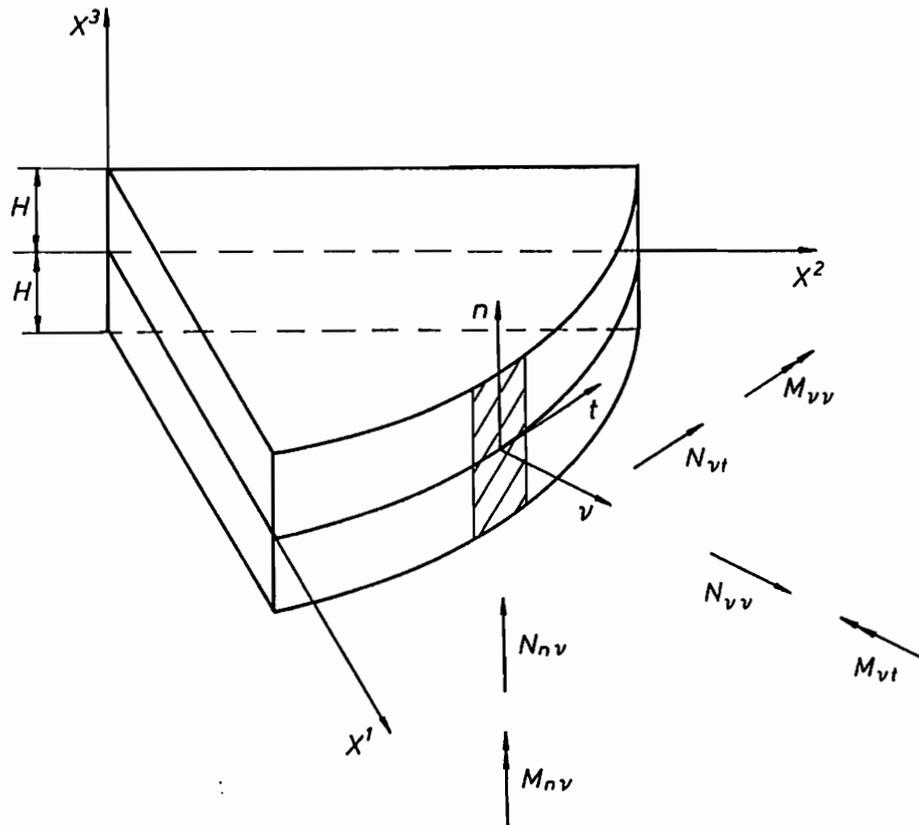


BILD 15: DEFINITIONEN DER SCHALENRANDGRÖSSEN

### VII.3 STOFFGESETZE FÜR INELASTISCHE FLÄCHENTRAGWERKE

In den Abschnitten 1 und 2 dieses Kapitels wurden Möglichkeiten aufgezeigt, die allgemeinen dreidimensionalen Verteilungen von Gesamtdehnungen und Spannungen durch eine endliche Anzahl zweidimensionaler Repräsentanten, bezogen auf die Mittelfläche der Schale, unter bestimmten Voraussetzungen wiederzugeben. Bei dem Versuch, auch das Stoffgesetz in über die Dicke des Tragwerkes integrierter Form, d. h. als Beziehung zwischen den Spannungs- und Dehnungsrepräsentanten anzugeben, stößt man auf das Problem, daß (siehe auch Abschnitt VII.2) der Spannungszustand in einem beliebigen Punkt des Schalenkörpers keine eindeutige Funktion der Schnittgrößen  $N$  und  $M$  ist. Da das Materialverhalten aber aus physikalischen Gründen rein lokalen Charakter hat, kann eine derartige zweidimensionale Darstellung des Stoffgesetzes nur eine Näherung für das tatsächliche Verhalten sein. Diese kann allerdings, insbesondere in Sonderfällen der Belastung oder der Geometrie des Tragwerkes, recht gut den wirklichen Verhältnissen entsprechen, zum Beispiel wenn ein Tragwerk einer proportional anwachsenden Last ohne Lastumlagerung ausgesetzt ist oder wenn nur eine reine eindimensionale Biegung betrachtet wird. Da hier jedoch ganz allgemeine Lastgeschichten in die Betrachtung eingeschlossen sind, wird hier zunächst von einer allgemeinen dreidimensionalen Betrachtungsweise ausgegangen.

Wie im Kapitel II festgelegt sei angenommen, daß das Stoffgesetz mittels des zweiten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensors  $\sigma$  und den dazu adjungierten elastischen und inelastischen Anteilen des Green'schen Dehnungstensors formuliert ist, so daß gilt

$$F = F(\sigma, \boldsymbol{\kappa}) \quad , \quad (7.3.1)$$

wobei  $F$  die Fließfläche und  $\boldsymbol{\kappa}$  der Vektor der internen Parameter ist. Dabei wird angenommen, daß die thermomechanische Kopplung über die Matrizen  $D_2$  und  $D_3$  in (2.3.20b) bzw. (2.3.22) die Fließbedingung und

die Fließregel unbeeinflusst lassen. Zur konkreten Umsetzung der allgemeinen dreidimensionalen Theorie betrachten wir das Beispiel der HUBER-MISES-Fließbedingung, die schon im Abschnitt VI.2 zur Erläuterung der physikalischen Bedeutung der internen Parameter herangezogen worden ist. Bezogen auf die unverformte Schalen geometrie ergibt sich

$$F(\sigma, \mathbf{x}) = (\sigma^{AB} - \beta^{AB})' (\sigma_{AB} - \beta_{AB})' - k^2(\beta) < 0 \quad (7.3.2)$$

$\beta_{AB}(\mathbf{x})$  bezeichnet dabei die Translation der Fließfläche durch die kinematische Verfestigung und  $k^2(\beta)$  die Änderung des elastischen Bereichs als affine Abbildung der ursprünglichen Fließfläche auf die neue, vergrößerte. Der hochgestellte Strich bezeichnet den Deviator des betreffenden Tensors mit

$$(T^{KL})' = T^{KL} - (1/3) T_M^M G^{KL} \quad (7.3.3)$$

wobei  $T^{KL}$  die Komponenten eines beliebigen symmetrischen Tensors zweiter Stufe sind. Unter Benutzung der Annahme (7.1.41) ergibt sich dann

$$F = (\sigma^{\Delta\Gamma} - \beta^{\Delta\Gamma})' (\sigma^{\Theta\Phi} - \beta^{\Theta\Phi})' A_{\Gamma\Phi} A_{\Delta\Theta} - k^2 < 0 \quad (7.3.4)$$

wobei berücksichtigt wurde, daß der Spannungszustand im Flächentragwerk als eben angenommen wurde. Umformung von (7.3.4) ergibt

$$F = 3A_{\Delta\Phi} A_{\Gamma\Theta} \bar{\sigma}^{\Delta\Gamma} \bar{\sigma}^{\Theta\Phi} - (A_{\Delta\Gamma} \bar{\sigma}^{\Delta\Gamma})^2 - 6k^2 < 0, \quad (7.3.4)$$

dabei ist die Abkürzung

$$\bar{\sigma}^{\Delta\Gamma} = \sigma^{\Delta\Gamma} - \beta^{\Delta\Gamma} \quad (7.3.5)$$

benutzt worden. In analoger Weise kann die TRESCA-Fließbedingung benutzt werden, für die sich anstelle (7.3.4) die Bedingung

$$F = \text{Max} \{ |\bar{\sigma}^1|, |\bar{\sigma}^2|, |\bar{\sigma}^1 - \bar{\sigma}^2| \} < \sigma_F \quad (7.3.6)$$

ergibt.  $\bar{\sigma}^1$  und  $\bar{\sigma}^2$  sind dabei die Hauptwerte der durch (7.3.5) definier-

ten Spannungstensoren  $\bar{\sigma}$  im ebenen Spannungszustand und  $\sigma_F$  ist die Fließgrenze im einachsigen Zugversuch mit  $\sigma_F^2 = 3k^2$ .

#### **Zur praktischen Handhabung der Fließbedingung**

Das Stoffgesetz ist eine im dreidimensionalen Schalenkörper lokal gültige Beziehung. Bei praktischen Berechnungen ist jedoch eine Diskretisierung der Bedingung (7.3.5) bzw. (7.3.6) erforderlich. Zwei Methoden sind dabei üblich:

- (1) Die Fließbedingung wird in mehreren, zur Mittelfläche parallelen Flächen kontrolliert ("Schichtenmodell" der Schale).
- (2) Die dreidimensionale Fließbedingung wird durch eine zweidimensionale Beziehung, ausgedrückt in  $M$  und  $N$ , approximiert, wobei in der Regel auch die Gültigkeit der Normalenregel für die "plastischen Anteile" von  $\dot{\kappa}$  und  $\dot{\lambda}$  angenommen wird. Es ist dann nur noch zu kontrollieren, ob die so modifizierte Fließbedingung in der Schalenmittelfläche erfüllt ist.

Methode (1) ist numerisch aufwendig, wird aber den physikalischen Gegebenheiten besser gerecht als Methode (2) und ist somit bei komplexeren Lastgeschichten vorzuziehen. Die zweite Methode bietet den Vorteil geringeren Rechenaufwands und ist daher bei einfachen Belastungsarten angebracht ([39],[30],[161]).

#### **Sonderfälle**

- (a) **Die elastischen Deformationen sind vernachlässigbar gegenüber den plastischen Deformationen**

Dieser Fall liegt in der Regel bei Umformvorgängen vor. Die plastischen Dehnungsgeschwindigkeiten sind dann gleich den gesamten Dehnungsgeschwindigkeiten, und lassen sich bei Benutzung einer glatten, strikt konvexen Fließfläche (z. B. HUBER-MISES-Fließbedingung) in einen eindeutigen Zusammenhang mit dem Spannungszustand stellen: Entweder das Tragwerk verformt sich, dann ist der dazu-

gehörige Spannungszustand rein plastisch, oder es treten gar keine Deformationen auf und der Spannungszustand liegt innerhalb der Fließfläche ([30],[126],[137]).

- (b) Die Schale besteht aus zwei dünnen, tragenden Schichten, die durch einen Kern geringer Festigkeit getrennt sind ("Sandwich" - Schale).

Dieses Material findet häufig in Leichtkonstruktionen (z. B. bei Luft- oder Raumfahrzeugen) Anwendung, insbesondere dort, wo keine konzentrierten Lasten orthogonal zur Tragwerkmittelfläche auftreten können, die die verhältnismäßig dünnen tragenden Schichten durchstoßen könnten. Die allgemeine dreidimensionale Fließbedingung reduziert sich dabei auf zweidimensionale Bedingungen für die beiden tragenden Schichten. Für eine Schale der Dicke  $2H$  und der Dicke  $T \ll H$  der tragenden Schichten mit den dimensionslosen Biegemomenten  $m$  und Membrankräften  $n$ , definiert durch die Tensorkomponenten

$$n^{\Delta\Gamma} = N^{\Delta\Gamma}/N_0, \quad m^{\Delta\Gamma} = M^{\Delta\Gamma}/M_0,$$

$$M_0 = 2\sigma_F TH, \quad N_0 = 2\sigma_F T \quad (7.3.7)$$

erhält man als HUBER-MISES-Fließbedingung:

$$F^+ = (n^1 + m^1)^2 - (n^1 + m^1)(n^2 + m^2) + (n^2 + m^2)^2 \leq 1$$

$$F^- = (n^1 - m^1)^2 - (n^1 - m^1)(n^2 - m^2) + (n^2 - m^2)^2 \leq 1 \quad (7.3.8)$$

beziehungsweise die TRESKA-Fließbedingung

$$F^+ = \text{Max} \{ |n^1 + m^1|, |n^2 + m^2|, |n^1 - n^2 + m^1 - m^2| \} \leq 1$$

$$F^- = \text{Max} \{ |n^1 - m^1|, |n^2 - m^2|, |n^1 - n^2 - m^1 + m^2| \} \leq 1 \quad (7.3.9)$$

$n^i$  und  $m^i$ ,  $i = 1, 2$  sind dabei die Hauptwerte der Tensoren  $n$  und  $m$ , wobei vorausgesetzt wird, daß die Hauptrichtungen von  $n$  und  $m$  übereinstimmen.

Für ideal plastische Sandwich-Schalen können äquivalente massive Vergleichsschalen definiert werden. Seien  $\sigma_s, H_s, T$  der Reihe nach die Fließkonstante, Gesamtschalendicke und Dicke der tragenden Schichten der Sandwich-Schale und  $\sigma_v, H_v$  die Fließkonstante und die Gesamtdicke der Vergleichsschale, so ist die Äquivalenz beider Schalen definiert durch die Gleichheit der Grenzmomente und Grenzmembrankräfte  $(M_o)_s$  und  $(M_o)_v$  bzw.  $(N_o)_s$  und  $(N_o)_v$  von Sandwich-Schale und massiver Vergleichsschale. Es gilt dann [35]

$$\begin{aligned}(N_o)_s &= 2\sigma_s T = (N_o)_v = 2\sigma_v H_v \\(M_o)_s &= 2\sigma_s H_s T = (M_o)_v = \sigma_v H_v^2 .\end{aligned}\quad (7.3.10)$$

Daraus folgt als Forderung für die Äquivalenz beider Schalen

$$\sigma_s / \sigma_v = H/T \quad , \quad 2H_s = H_v \quad (7.3.11)$$

Es ist sofort einsichtig, daß die Äquivalenz nur für den plastischen Grenzzustand gilt, wenn der gesamte Querschnitt plastifiziert ist, jedoch nicht für allgemeine, elasto-plastische Zustände.

#### VII.4 DER SPANNUNGSZUSTAND IN ELASTO-PLASTISCHEN FLÄCHENTRAGWERKEN

Mit den in Abschnitt 1-3 dieses Kapitels hergeleiteten zweidimensionalen Beziehungen für Flächentragwerke ist die Anwendung der in Kapitel III entwickelten Methode zur Bestimmung des Spannungszustands in Flächentragwerken möglich. Ausgangspunkt ist dabei das Funktional (3.2.31), welches definitionsgemäß für die Erfüllung des plastischen Anteils des Stoffgesetzes den Wert null annimmt und sich wegen seiner strikten Konvexität in den Spannungsdifferenzfeldern  $\Delta s$  besonders gut für die numerische Anwendung eignet. Exemplarisch werden die flache Schale mit moderaten Verschiebungen senkrecht und kleinen Verschiebungen parallel zur Mittelfläche (7.2.7-12) und die quasi-flache Schale mit großen Verschiebungen senkrecht und kleinen Verschiebungen

parallel zur Mittelfläche (7.2.13-18) entsprechend den Definitionen in Abschnitt VII.2 behandelt.

### Lösungsmethode

Generell wird angenommen, daß eine Referenzlösung  $\overset{\circ}{\chi} = [\overset{\circ}{M}, \overset{\circ}{N}, \overset{\circ}{W}, \overset{\circ}{V}]$  einer rein elastischen Vergleichsschale entsprechend der Betrachtungsweise in Kapitel III für jeden Zeitpunkt  $\tau$  der Belastungsgeschichte gegeben ist. Analog zu (3.1.27-31) werden dann Differenzfelder  $\Delta\chi$  eingeführt, die die tatsächlichen, in der realen Schale auftretenden Feldgrößen mit denen der fiktiven, rein elastischen Schale verbinden mit:

$$\begin{aligned} \Delta W &= W - \overset{\circ}{W} \\ \Delta V_{\Gamma} &= V_{\Gamma} - \overset{\circ}{V}_{\Gamma} \\ \Delta M^{\Delta\Gamma} &= M^{\Delta\Gamma} - \overset{\circ}{M}^{\Delta\Gamma} \\ \Delta N^{\Delta\Gamma} &= N^{\Delta\Gamma} - \overset{\circ}{N}^{\Delta\Gamma} \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

Alle Vektor- oder Tensorkomponenten sind dabei auf die Basis der unverformten Konfiguration bezogen; die Vergleichsgrößen der rein elastischen Schale sind mit übergesetztem "o" gekennzeichnet. Im dreidimensionalen Fall war gezeigt worden, daß die notwendige Beschränkung auf statisch zulässige Differenzfelder durch die Erfüllung der Bedingungen (3.1.34-37) charakterisiert war. Hier erhalten wir durch Einsetzen der Differenzfelder in die den jeweiligen Schalentyp kennzeichnenden Gleichgewichtsbedingungen die folgenden Bedingungen für die Differenzfelder:

- a) Flache Schale mit moderaten Verschiebungen senkrecht und kleinen Verschiebungen parallel zur Schalenmittelfläche:

$$\Delta N^{\Delta\Gamma} |_{\Gamma} = 0 \quad \text{in } \Gamma \quad (7.4.2)$$

$$\Delta M^{\Delta\Gamma} |_{\Delta\Gamma} + (\Delta N^{\Delta\Gamma} \overset{\circ}{W} |_{\Delta}) |_{\Gamma} + (\overset{\circ}{N}^{\Delta\Gamma} \Delta W |_{\Delta}) |_{\Gamma^+}$$

$$(\Delta N^{\Delta\Gamma} \Delta w|_{\Delta})|_{\Gamma} + \Delta M^{\Delta\Gamma}|_{\Delta\Gamma} = 0 \quad \text{in } \Gamma \quad (7.4.3)$$

$$\Delta N^{\Delta\Gamma} \nu_{\Gamma} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_s \quad (7.4.4)$$

$$\Delta M^{\Delta\Gamma} \nu_{\Gamma} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_s \quad (7.4.5)$$

$$(\Delta N^{\Delta\Gamma} \overset{\circ}{W}|_{\Delta} + \overset{\circ}{N}^{\Delta\Gamma} \Delta w|_{\Delta} + \Delta N^{\Delta\Gamma} \Delta w|_{\Delta} + \Delta M^{\Delta\Gamma}|_{\Delta}) \nu_{\Gamma} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_s \quad (7.4.6)$$

b) Quasi-flache Schale mit großen Verschiebungen senkrecht und kleinen Verschiebungen parallel zur Schalenmittelfläche:

$$\Delta N^{\Delta\Gamma}|_{\Gamma} = 0 \quad \text{in } \Gamma \quad (7.4.7)$$

$$\Delta N^{\Delta\Gamma} B_{\Delta\Gamma} + (\overset{\circ}{N}^{\Delta\Gamma} \Delta w|_{\Delta} + \Delta N^{\Delta\Gamma} \overset{\circ}{W}|_{\Delta} + \Delta N^{\Delta\Gamma} \Delta w|_{\Delta})|_{\Gamma} -$$

$$B_{\Delta}^{\Phi} B_{\Phi\Gamma} (\overset{\circ}{N}^{\Delta\Gamma} \Delta w + \Delta N^{\Delta\Gamma} \overset{\circ}{W} + \Delta N^{\Delta\Gamma} \Delta w) +$$

$$\Delta M^{\Delta\Gamma}|_{\Delta\Gamma} + \Delta M^{\Delta\Gamma} B_{\Delta\Gamma} B_{\Phi}^{\Phi} = 0 \quad \text{in } \Gamma \quad (7.4.8)$$

$$\Delta N^{\Delta\Gamma} \nu_{\Gamma} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_s \quad (7.4.9)$$

$$\Delta M^{\Delta\Gamma} \nu_{\Gamma} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_s \quad (7.4.10)$$

$$(\overset{\circ}{N}^{\Delta\Gamma} \Delta w|_{\Delta} + \Delta N^{\Delta\Gamma} \overset{\circ}{W}|_{\Delta} + \Delta N^{\Delta\Gamma} \Delta w|_{\Delta} + \Delta M^{\Delta\Gamma}|_{\Delta}) \nu_{\Gamma} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_s \quad (7.4.11)$$

Mit den zweidimensionalen Repräsentanten  $[M, N]$  des dreidimensionalen Spannungszustands kann auch das Minimierungsproblem (3.2.31) mit seinen Nebenbedingungen in ein zweidimensionales Problem umgewandelt werden. Dazu werden zunächst die zweidimensionalen Repräsentanten des elastischen Flexibilitätstensors  $L$  und des Flexibilitätstensors  $Z$  der elastischen internen Parameter definiert. Man erhält:

$$L \rightarrow [L^0, L^1], \quad z \rightarrow [Z^0, Z^1] \quad (7.4.12)$$

$$L_{\Delta\Gamma\Phi\Theta}^0 = [1/(2H)] L_{\Delta\Gamma\Phi\Theta}$$

$$L_{\Delta\Gamma\Phi\Theta}^1 = [3/(2H)^3] L_{\Delta\Gamma\Phi\Theta} \quad (7.4.13)$$

$$L_{\Delta\Gamma\Phi\Theta} = [(1+\nu)/(2E)] [A_{\Delta\Phi} A_{\Gamma\Theta} + A_{\Delta\Theta} A_{\Gamma\Phi} - (2\nu/1+\nu) A_{\Delta\Gamma} A_{\Phi\Theta}] \quad (7.4.14)$$

$$Z_{\Delta\Gamma} = [1/(2H)] z_{\Delta\Gamma}$$

$$Z_{\Delta\Gamma}^1 = [3/(2H^3)] z_{\Delta\Gamma}^1 \quad (7.4.15)$$

E und  $\nu$  sind dabei der Elastizitätsmodul und die Poisson'sche Querkontraktionszahl. Die zweidimensionalen Repräsentanten der internen Parameter sind analog zu denen der Spannungen nach (7.2.1-2) definiert. Beschränkt man sich auf die Repräsentanten der plastischen internen Parameter nullter und erster Ordnung, hier, abweichend von der Notation in Kapiteln II, III und IV mit  $K$  bezeichnet, so ergibt sich

$$K^{\Gamma} = \int_{-H}^{+H} K^{\Gamma}_d x^3, \quad K^{\Gamma} = \int_{-H}^{+H} K^{\Gamma} x^3 dx^3 \quad (7.4.16)$$

Eingesetzt in (3.2.29) erhält man das zweidimensionale Funktional  $G_2$  in Indexschreibweise zu

$$G_2 = \sup_{[\overset{*}{N}, \overset{*}{M}, \overset{*}{K}]} \int_{(\Gamma \times T)} \{ (\overset{*}{\Delta N}_s^{\Delta\Gamma} - \overset{\Delta}{\Delta N}_s^{\Delta\Gamma} ) L_{\Delta\Gamma\Phi\Theta} ( \overset{\circ}{N}^{\Phi\Theta} - \overset{\Delta}{\Delta N}_s^{\Phi\Theta} ) + ( \overset{*}{\Delta M}_s^{\Delta\Gamma} - \overset{\Delta}{\Delta M}_s^{\Delta\Gamma} ) J_{\Delta\Gamma\Phi\Theta} ( \overset{\circ}{M}^{\Phi\Theta} - \overset{\Delta}{\Delta M}_s^{\Phi\Theta} ) + ( \overset{\circ}{K}^{\Gamma} - \overset{\Delta}{\Delta K}^{\Gamma} ) Z_{\Gamma\Phi} \overset{\circ}{K}^{\Phi} + ( \overset{1}{K}^{\Gamma} - \overset{1}{K}^{\Gamma} ) Z_{\Gamma\Phi}^1 \overset{1}{K}^{\Phi} \} e^{-\tau} d\Gamma d\tau \quad (7.4.17)$$

für  $[\overset{*}{N}, \overset{*}{M}, \overset{*}{K}]$ , die plastisch zulässig nach den in Abschnitt 3 dieses Kapitels entwickelten Kriterien sind.  $\overset{\circ}{N}$  und  $\overset{\circ}{M}$  sind die zeitlichen Änderungen der elastischen Vergleichsmembrankräfte und -momente, der tiefgestellte Index "s" weist darauf hin, daß die indizierte Größe die homogenen Gleichgewichtsbedingungen (7.4.2-6) bzw. (7.4.7-11) erfüllt. Die internen Parameter  $K$  sind hier durch zweidimensionale Repräsen-

tanten nullter und erster Ordnung entsprechend (7.4.16) mit  ${}^0K$  und  ${}^1K$  erfaßt.

Die Lösung des Problems ergibt sich aus der Minimierung des Funktionals  $G_2$  über der Menge der statisch und plastisch zulässigen Spannungsdifferenzrepräsentanten  $[\Delta N_s, \Delta M_s]$ .

#### VII. 5 DAS EINSPIELEN VON FLÄCHENTRAGWERKEN UNTER BERÜCKSICHTIGUNG GEOMETRISCHER ÄNDERUNGEN

Bei bestimmten praktischen Problemen ist die Frage, ob ein Flächentragwerk aufgrund der Akkumulation von plastischen Deformationen versagt ("incremental collapse") von übergeordneter Bedeutung gegenüber der Bestimmung des tatsächlichen Spannungszustands, der z. B. nach dem in Kapitel III und VII.4 vorgestellten Verfahren bestimmt werden kann. In einem solchen Fall wäre die Anwendung der in Kapitel IV hergeleiteten Methoden denen des Kapitels III bzw. VII.4 aufgrund des deutlich geringeren Rechenaufwands vorzuziehen.

In Anlehnung an das Kapitel III seien auch hier die zwei technischen Fragestellungen nach Abschnitt 2 des Kapitels IV als Anwendung des MELAN'schen erweiterten Problems herangezogen.

##### Problem (A):

Das Deformationsmuster eines Flächentragwerks unter den gegebenen veränderlichen (der Einfachheit halber als zyklisch angenommenen) Lasten ist innerhalb eines bestimmten Ungenauigkeitsbereichs bekannt. Konkret wird angenommen, daß ein Bereich  $U^a$  von Verschiebungsfeldern  $u^a$  bekannt ist, durch den sich das Flächentragwerk während des Deformationsprozesses quasistatisch hindurchbewegt, wenn inkrementeller Kollaps vorliegt (siehe Bild 12). Unter welchen Bedingungen spielt sich das Flächentragwerk ein?

**Problem (B):**

Das betrachtete Flächentragwerk  $T$  erfährt bis zu einem Zeitpunkt  $\tau^R$  endliche und als bekannt vorausgesetzte Deformationen unter der Last  $a^R$  derart, daß es zur Zeit  $\tau^R$  in der bekannten Mittelflächenkonfiguration  $\Gamma^R$  mit  $a^R$  im Gleichgewicht ist. Für jedes  $\tau > \tau^R$  ist  $T$  zyklischen Lasten unterworfen, die gegeben sind mit

$$a^*(X, \tau) = a^R(X) + r(X, \tau), \quad \tau > \tau^R. \quad (7.5.1)$$

Es wird dabei angenommen, daß die quasistatische Bewegung eines Vergleichstragwerks  $T^C$ , welches zur Zeit  $\tau^R$  ebenfalls die Konfiguration  $\Gamma^R$  einnimmt, jedoch rein elastisch auf die Zusatzlasten  $r$  reagiert, kleine Amplituden  $u^r \ll 1 + u^R$  hat. Unter welchen Bedingungen spielt das reale Flächentragwerk  $T$  ein?

**Lösung des Problems (A)**

In Kapitel III sind die Bedingungen hergeleitet worden, unter denen ein dreidimensionaler Körper für das entsprechende Problem einspielt. Danach findet Einspielen statt, wenn ein "sicherer" statisch zulässiger Spannungszustand  $s^+$  gefunden werden kann, für den außerdem das Integral (4.2.19) beschränkt ist.

Fall (a) (Entsprechend Abschnitt VII.4, (7.4.2-6))

Die Bedingungen für die statische Zulässigkeit lauten dann

$$\Delta N^{\dagger \Delta \Gamma} |_{\Gamma} = 0 \quad \text{in } \Gamma$$

$$\Delta N^{\dagger \Delta \Gamma} B_{\Delta \Gamma} + [\Delta N^{\dagger \Delta \Gamma} (\overset{0}{w} + \overset{a}{w}) |_{\Delta}] |_{\Gamma} +$$

$$(\overset{0}{N} \Delta \Gamma \overset{a}{w} |_{\Delta}) |_{\Gamma} + \Delta M^{\dagger \Delta \Gamma} |_{\Delta \Gamma} = 0 \quad \text{in } \Gamma$$

$$\Delta N^{\dagger \Delta \Gamma} v_{\Gamma} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_s$$

$$\Delta M^{\dagger \Delta \Gamma} v_{\Gamma} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_s$$

$$[\Delta \overset{\dagger}{N} \Delta \Gamma (\overset{\circ}{w} + \overset{a}{\bar{w}}) |_{\Delta} + \Delta \overset{\dagger}{M} \Delta \Gamma |_{\Delta} + \overset{\circ}{N} \Delta \Gamma \overset{a}{\bar{w}} |_{\Delta}] \nu_{\Gamma} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_s \quad (7.5.2)$$

wobei  $[\Delta \overset{\dagger}{N}, \Delta \overset{\dagger}{M}]$  die "sicheren" Spannungsdifferenzrepräsentanten darstellen, d. h. die durch sie repräsentierten Spannungszustände, addiert zu der rein elastischen Lösung, liegen im strikten Innern der Fließfläche. Besondere Beachtung verlangt der Umstand, daß der geometrische Unschärfenbereich  $U^a$  hier allein durch die Verschiebungskomponente  $\overset{a}{\bar{w}}$  ( $X^1, X^2$ ) bestimmt ist und daß  $\overset{\circ}{w} + \overset{a}{\bar{w}}$  einem vorgegebenen Bereich  $W = [\overset{\dagger}{\bar{w}}, \bar{w}]$  zugeordnet ist.  $\Delta \overset{\dagger}{M}$  und  $\Delta \overset{\dagger}{N}$  müssen jetzt bezüglich aller Zustände  $\overset{\circ}{w} + \overset{a}{\bar{w}}$  aus dem Bereich  $W$  die homogenen Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.

Die Fließbedingung ist nach einer der in Abschnitt 3 angegebenen Methode zu überprüfen. Während dies im Fall des elastisch-idealplastischen Werkstoffverhaltens keine besonderen Probleme darstellt, ist bei verfestigendem Verhalten darauf zu achten, daß sich die internen Parameter nur innerhalb zu definierender Grenzen verändern können. So ist zum Beispiel die Annahme, die isotrope Arbeitsverfestigung sei unbegrenzt, aus physikalischer Sicht ebenso sinnlos wie die, daß die Fließfläche im Fall kinematischer Verfestigung eine beliebig große Translation im Raum der Spannungen ausführen könne.

Entsprechend der Herleitung im dreidimensionalen Fall muß zusätzlich nachgewiesen werden, daß das Integral  $W_G$ , definiert durch

$$W_G = \int_{\circ(V_0)}^{\infty} \int (\sigma^{AB} - \overset{\dagger}{\sigma}^{AB}) \overset{\circ}{u}^K | |_{\Delta} \overset{a}{\bar{u}}_K | |_{\Gamma} dV d\tau \quad (7.5.3)$$

nach oben beschränkt sein muß. Unter Berücksichtigung des angenommenen ebenen Spannungszustands ergibt sich

$$W_G = \int_{\circ(V_0)}^{\infty} \int (\sigma^{\Delta\Gamma} - \overset{\dagger}{\sigma}^{\Delta\Gamma}) \overset{\circ}{u}^K | |_{\Delta} \overset{a}{\bar{u}}_K | |_{\Gamma} dV d\tau \quad (7.5.4)$$

wobei die Approximation (7.1.41) verwendet wurde.

Fall (b) (Entsprechend Abschnitt VII.4, (7.4.7-11))

Die zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingungen sind jetzt gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 \Delta \ddot{N}^{\Delta \Gamma} |_{\Gamma} &= 0 && \text{in } \Gamma \\
 \Delta \ddot{N}^{\Delta \Gamma} B_{\Delta \Gamma} + \overset{0}{N}^{\Delta \Gamma a} |_{\Delta} + [\Delta \ddot{N}^{\Delta \Gamma} (\overset{0}{w} + \overset{a}{w}) |_{\Delta}] |_{\Gamma} \\
 - B_{\Delta}^{\Phi} B_{\Phi \Gamma} [\overset{0}{N}^{\Delta \Gamma a} + \Delta \ddot{N}^{\Delta \Gamma} (\overset{0}{w} + \overset{a}{w})] + \\
 \Delta \ddot{M}^{\Delta \Gamma} |_{\Delta \Gamma} + B_{\Delta \Gamma} B_{\Phi}^{\Delta \Gamma} \Delta \ddot{M}^{\Delta \Gamma} &= 0 && \text{in } \Gamma \\
 \Delta \ddot{N}^{\Delta \Gamma} \nu_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s \\
 \Delta \ddot{M}^{\Delta \Gamma} \nu_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s \\
 [\overset{0}{N}^{\Delta \Gamma a} |_{\Delta} + \Delta \ddot{M}^{\Delta \Gamma} |_{\Delta} + \Delta \ddot{N}^{\Delta \Gamma} (\overset{0}{w} + \overset{a}{w}) |_{\Delta}] \nu_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s \quad (7.5.5)
 \end{aligned}$$

Bezüglich der Erfüllung der Fließbedingung und der Bedingung (7.5.4) der Beschränktheit des Integrals  $w_G$  ändert sich nichts gegenüber dem Fall (a).

Fall (c)

Für die Platte nach der VON - KARMAN'schen Theorie ergeben sich als Sonderfall der vorhergehenden Schalentypen die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}
 \Delta \ddot{N}_{\Delta \Gamma, \Gamma} &= 0 && \text{in } \Gamma \\
 [\Delta \ddot{N}_{\Delta \Gamma} (\overset{0}{w} + \overset{a}{w}) ,_{\Gamma} ]_{,\Delta} + (\overset{0}{N}_{\Delta \Gamma} \overset{a}{w} ,_{\Delta} ) ,_{\Gamma} + \Delta \ddot{M}_{\Delta \Gamma, \Delta \Gamma} &= 0 && \text{in } \Gamma \\
 \Delta \ddot{N}_{\Delta \Gamma} \nu_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s \\
 \Delta \ddot{M}_{\Delta \Gamma} \nu_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s \quad (7.5.6) \\
 [\Delta \ddot{N}_{\Delta \Gamma} (\overset{0}{w} + \overset{a}{w}) ,_{\Delta} + \Delta \ddot{M}_{\Delta \Gamma, \Delta} + \overset{0}{N}_{\Delta \Gamma} \overset{a}{w} ,_{\Delta} ] \nu_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s
 \end{aligned}$$

Wegen der Orthonormiertheit des Bezugssystems sind partielle, kova-

riante und kontravariante Ableitung identisch. Während die Fließbedingung gegenüber Fall (a) und Fall (b) unverändert bleibt, nimmt das Integral (7.5.4) jetzt die einfache Form

$$w_G = \int_{o(\Gamma)}^{\infty} \int (N_{\Delta\Gamma} - \dot{N}_{\Delta\Gamma}) \overset{o}{w}_{,\Delta} \overset{a}{w}_{,\Delta} d\Gamma d\tau \quad (7.5.7)$$

an, wenn die Beiträge der Terme parallel zu  $\Gamma$  als vernachlässigbar klein angenommen werden.

Lösung des Problems (B)

Hier wird die Kenntnis eines Referenzzustandes (Index "R") und einer Lösung eines fiktiven rein elastischen geometrisch linearen Problems (Index "c") in der Umgebung der Referenzlösung vorausgesetzt. Der Gesamtspannungszustand setzt sich dabei aus Referenzspannung  $s^R$ , Spannungsdifferenz  $\Delta s^C$  des fiktiven rein elastischen Problems und Spannungsdifferenz  $\Delta s^+$  mit den zweidimensionalen Repräsentanten  $[N^R, M^R]$ ,  $[\Delta N^C, \Delta M^C]$  und  $[\Delta N^+, \Delta M^+]$ .

Da alle Größen auf die unverformte Konfiguration der Struktur bezogen sind, gilt

$$[N, M] = [N^R + \Delta N^C + \Delta N^+, M^R + \Delta M^C + \Delta M^+]$$

und die Forderung nach Erfüllung der Fließbedingung durch den Gesamtspannungszustand ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß  $[N, M]$  die Fließbedingung nach (7.3.7-11) erfüllen müssen. Dies gilt für alle drei exemplarisch behandelten Flächentragwerkstypen, die sich nur durch die von  $[\Delta N^+, \Delta M^+]$  zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingungen voneinander unterscheiden.

Fall (a) (Entsprechend Gleichungen (7.5.2))

Die Bedingungen für die statische Zulässigkeit für  $\Delta N^+$  und  $\Delta M^+$  sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 \Delta \overset{\pm}{N}^{\Delta \Gamma} |_{\Gamma} &= 0 && \text{in } \Gamma \\
 \Delta \overset{\pm}{N}^{\Delta \Gamma} B_{\Delta \Gamma} + (\Delta \overset{\pm}{N}^{\Delta \Gamma} \overset{R}{w} |_{\Delta}) |_{\Gamma} + \Delta \overset{\pm}{M}^{\Delta \Gamma} |_{\Delta \Gamma} &= 0 && \text{in } \Gamma \\
 \Delta \overset{\pm}{N}^{\Delta \Gamma} v_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s \\
 \Delta \overset{\pm}{M}^{\Delta \Gamma} v_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s \\
 (\Delta \overset{\pm}{N}^{\Delta \Gamma} \overset{R}{w} |_{\Delta} + \Delta \overset{\pm}{M}^{\Delta \Gamma} |_{\Delta}) v_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s \quad (7.5.8)
 \end{aligned}$$

Dabei ist  $\overset{R}{w}$  die entsprechend (7.2.12) als moderat angenommene Verschiebung der Schale senkrecht zur Mittelfläche. Sowohl die gesamten Verschiebungen parallel zu  $\Gamma$  als auch die rein elastischen Zusatzverschiebungen  $\overset{C}{w}$  aus der Lösung des fiktiven rein elastischen Vergleichsproblems in der Umgebung der Referenzkonfiguration sind dabei als vernachlässigbar klein angenommen worden.

Fall (b) (Entsprechend Gleichungen (7.5.5))

Für diesen Schalentyp erhält man als Gleichgewichtsbedingungen für  $\Delta \overset{\pm}{N}^{\Delta \Gamma}$  und  $\Delta \overset{\pm}{M}^{\Delta \Gamma}$

$$\begin{aligned}
 \Delta \overset{\pm}{N}^{\Delta \Gamma} |_{\Delta} &= 0 && \text{in } \Gamma \\
 \Delta \overset{\pm}{N}^{\Delta \Gamma} B_{\Delta \Gamma} + (\Delta \overset{\pm}{N}^{\Delta \Gamma} \overset{R}{w} |_{\Delta}) |_{\Gamma} - B_{\Delta}^{\Phi} B_{\Phi \Gamma} \Delta \overset{\pm}{N}^{\Delta \Gamma} \overset{R}{w} + \\
 \Delta \overset{\pm}{M}^{\Delta \Gamma} |_{\Delta \Gamma} + B_{\Delta \Gamma} B_{\Phi}^{\Phi} \Delta \overset{\pm}{M}^{\Delta \Gamma} &= 0 && \text{in } \Gamma \\
 \Delta \overset{\pm}{N}^{\Delta \Gamma} v_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s \\
 \Delta \overset{\pm}{M}^{\Delta \Gamma} n_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s \\
 \Delta \overset{\pm}{M}^{\Delta \Gamma} |_{\Delta} + (\Delta \overset{\pm}{N}^{\Delta \Gamma} \overset{R}{w} |_{\Delta}) |_{\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s \quad (7.5.9)
 \end{aligned}$$

Auch hier wurden alle Verschiebungsanteile außer dem Anteil  $\overset{R}{w}$ , der Verschiebungskomponente senkrecht zur Mittelfläche der Schale von der ursprünglichen in die Referenzlage, vernachlässigt.

Fall (c)

Für die Platte nach der VON-KARMAN'schen Theorie erhält man schließlich den Sonderfall

$$\begin{aligned}
 \Delta \ddot{N}_{\Delta\Gamma, \Gamma} &= 0 && \text{in } \Gamma \\
 (\Delta \ddot{N}_{\Delta\Gamma, \Delta} \overset{R}{W}, \Delta)_{,\Gamma} + \Delta \ddot{M}_{\Delta\Gamma, \Delta\Gamma} &= 0 && \text{in } \Gamma \\
 \Delta \ddot{N}_{\Delta\Gamma, \nu\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s \\
 \Delta \ddot{M}_{\Delta\Gamma, \nu\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s \\
 (\Delta \ddot{M}_{\Delta\Gamma, \Delta} + \Delta \ddot{N}_{\Delta\Gamma, \Delta} \overset{R}{W}, \Delta)_{,\nu\Gamma} &= 0 && \text{auf } \Gamma_s \quad (7.5.10)
 \end{aligned}$$

Wegen der Identität der kovarianten, kontravarianten und partiellen Ableitung wird hier wie im vorherigen Teilabschnitt die partielle Ableitung benutzt. Alle Verschiebungskomponenten außer  $\overset{R}{W}$  sind als vernachlässigbar klein angenommen worden.

#### VII.6 DAS EINSPIELVERHALTEN EINER SANDWICH-PLATTE BEI BERÜCKSICHTIGUNG DER VERFORMUNG

Als Beispiel zur in IV.2 bzw. VII.5 (Problem (B)) vorgestellten Methode wird eine quadratische Sandwich-Platte (siehe Bild 16) der Dicke  $2H$  und der Kantenlänge  $2A$  betrachtet. Die Platte sei an allen Rändern verschieblich und gelenkig gelagert und zwei Kraftgruppen  $\overset{*}{P}$  und  $\overset{*}{N}$  ausgesetzt, die sich gleichphasig in den gegebenen Bereichen  $[P^+, P^-]$  und  $[N^+, N^-]$  so verändern, daß der Prozeß als quasistatisch behandelt werden kann. Das Materialverhalten sei elastisch-idealplastisch mit dem Elastizitätsmodul  $E$ , der Poisson'schen Querkontraktionszahl  $\nu=0.3$  für das elastische Verhalten und habe die Fließgrenze  $\sigma_0$ , die aus dem einachsigen Zugversuch ermittelt ist. Es wird angenommen, daß das Material isotrop ist und der MISES-Fließbedingung sowie der Normalitätsregel gehorcht.

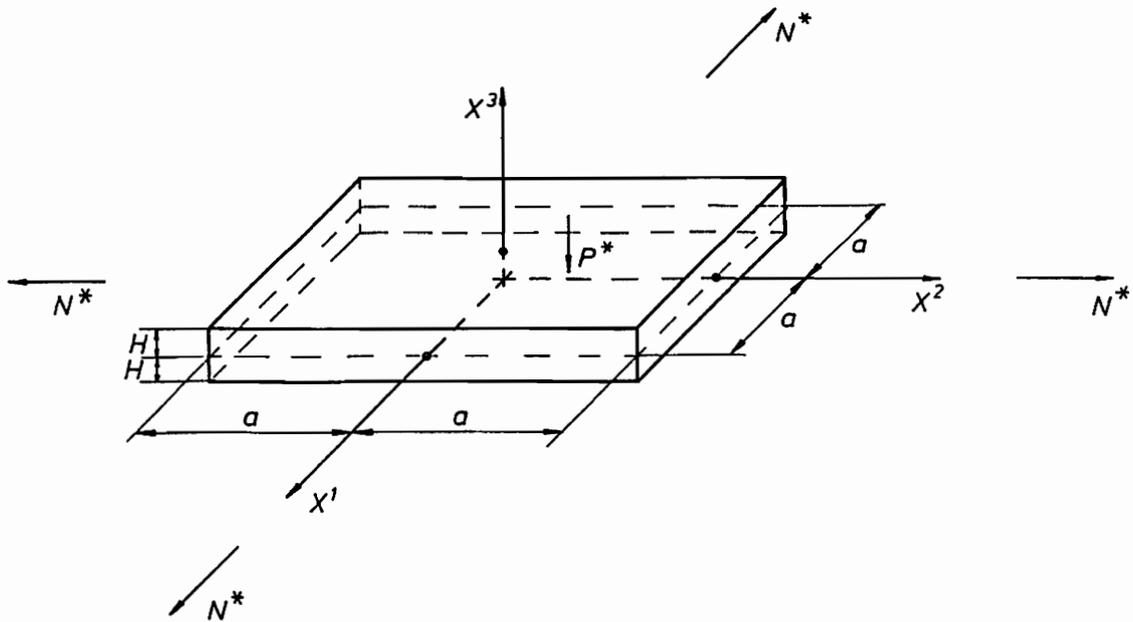


BILD 16: PLATTE UNTER WECHSELNDEN LASTEN.

Die Last  $P^*$  ist eine gleichmäßig verteilte, senkrecht zur unverformten Plattenmittelfläche  $\Gamma$  wirkende Kraft, während  $N^*$  eine parallel zu den Kanten der Platte wirkende, ebenfalls gleichmäßig verteilte Zugkraft ist.

Die Lösung einer rein elastischen Vergleichsplatte mit den Materialkonstanten  $E$  und  $\nu$  unter dieser Last sei gegeben mit  $[M^0, N^0, w^0]$  als lastabhängiger Momenten- und Membrankraftverteilung sowie Durchbiegung der Plattenmittelfläche. Es werden die folgenden dimensionslosen Kenngrößen verwendet:

$$n_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta} [A^2/E(2H)^3] \quad , \quad m_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} [A^2/E(2H)^4] \quad , \quad w = W/2H \quad ,$$

$$x_\alpha = X_\alpha/A \quad , \quad n = (N^*/E)(A/2H)^3 \quad , \quad p = (P^*)(A/2H)^4 \quad . \quad (7.6.1)$$

Dabei sind  $M$  und  $N$  die Schnittmomente und -Membrankräfte in der realen Platte. Es wird entsprechend der Darstellung des Problems (B) angenommen, daß sich die Platte in einer Referenzkonfiguration  $\Gamma^R$ , gegeben durch die Mittelflächenverschiebung  $w^R$ , mit den konstanten äußeren Kräften  $p^R$  und  $n^R$  im Gleichgewicht befindet. Der Zustand in  $\Gamma^R$  ist rein

elastisch. Es wird nun geprüft, ob die Platte einen inkrementellen Kollaps erleidet, wenn die Lasten  $n$  und  $p$  beginnen, um die Werte  $p^R$  und  $n^R$  in den Grenzen  $p^+=5.0$ ,  $p^-=7.0$  und  $n^+=0.64$ ,  $n^-=1.83$  zu schwanken. Es wird zunächst die Lösung des elastischen Vergleichsproblems bestimmt, die hier auf der Grundlage von [79] durch einfache Polynome angenähert wird. Insbesondere wird der Verschiebungszustand  $w^R$  durch

$$w^R = (G/2)(1-x_1^2)(1-x_2^2) \quad (7.6.2)$$

approximiert.

Führt man den dimensionslosen Faktor  $\kappa = [E(2H)^2/(\sigma_0 A^2)]$  ein, so gilt

$$\bar{m}_{\alpha\beta} = 4m_{\alpha\beta} \kappa \quad , \quad \bar{n}_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta} \kappa \quad , \quad (7.6.3)$$

wobei  $\bar{m}$  und  $\bar{n}$  definiert sind durch

$$\bar{n}_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}/(2\sigma_0 T) \quad , \quad \bar{m}_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}/(2\sigma_0 HT) \quad , \quad (7.6.4)$$

mit  $T$  als Dicke der tragenden Sandwich-Schichten. Diese dimensionslosen Schnittgrößen werden in die Fließbedingung nach (7.3.4) eingesetzt. Entsprechend den Gleichungen (7.5.8) werden Ansatzfunktionen für den Eigenspannungszustand  $\Delta\sigma^+$  eingeführt mit:

$$\begin{aligned} \Delta n_{11} &= -(1/2G)(2c_1-c_2)(1-x_1^2) \\ \Delta n_{22} &= -(1/2G)(2c_1-c_2)(1-x_2^2) \\ \Delta n_{12} &= \Delta n_{21} = -(1/G)(2c_1-c_2)(x_1 x_2) \\ \Delta m_{11} &= \Delta m_{22} = (c_1/2)(1-x_1^2)(1-x_2^2) \\ \Delta m_{12} &= \Delta m_{21} = (1/2)([c_2 x_1 x_2 + (1/3)(c_1-c_2)(x_1 x_2^3 + x_1^3 x_2) \\ &\quad + (1/3)(2c_1^1 - c_2)x_1^3 x_2^3] \quad , \quad G \neq 0 \quad . \quad (7.6.5) \end{aligned}$$

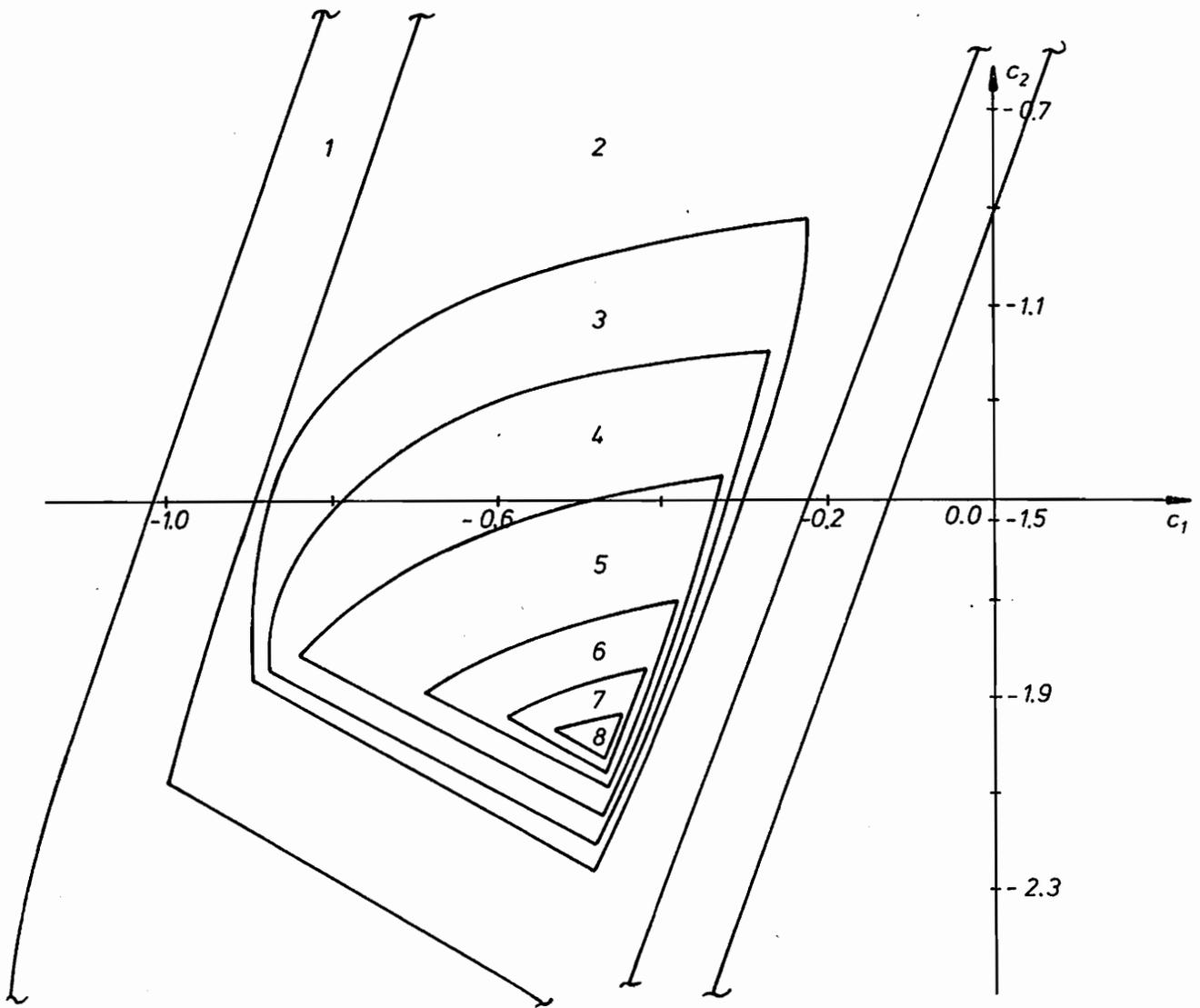


BILD 17: DER BEREICH ZULÄSSIGER PARAMETER  $c_1$  UND  $c_2$  ALS FUNKTION DES MATERIALPARAMETERS  $\kappa$

Bereichsnummer	1	2	3	4	5	6	7	8
Materialwert $\kappa$	0.158	0.182	0.200	0.204	0.208	0.213	0.216	0.217

In dem hier gewählten Beispiel hat  $G$  den Wert 2.0. Die Parameter  $c_1$  und  $c_2$  sind hier freie Parameter, für die sich in Abhängigkeit vom dimensionslosen Materialparameter  $\kappa$  der plastisch zulässige Bereich aufzeichnen läßt. Man erkennt in Bild 17, wie sich dieser Bereich für wachsendes  $\kappa$  verkleinert. Jenseits eines kritischen Wertes  $\tilde{\kappa}$  verschwindet dieser Bereich vollständig, was bedeutet, daß das mathematische Modell der betrachteten Platte jenseits von  $\tilde{\kappa}$  inkrementellen Kollaps erleidet. Da es sich bei dem verwendeten MELAN'schen Kriterium um ein hinreichendes Kriterium für Einspielen, d.h. Nicht-Kollaps, handelt, garantiert die Existenz eines Bereichs für zulässige Werte  $c_1$  und  $c_2$ , daß kein Kollaps eintritt. Dadurch, daß die gewählten Ansatzfunktionen (7.5.5) sehr einfach sind, ist zu erwarten, daß die betrachtete physikalische Platte auch für  $\kappa$ -Werte größer als  $\tilde{\kappa}$  noch einspielen kann.

LITERATUR

- [1] H. ANTES: Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken, IfM-Bericht 19, Ruhr-Universität Bochum (1980).
- [2] J.H. ARGYRIS, J.ST. DOLTSINIS: On the natural formulation and analysis of large deformation coupled thermomechanical problems, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 25, 195 (1981).
- [3] M.E. BACKMAN: Form of the relation between stress and finite elastic and plastic strains under impulsive loading, J. Appl. Phys., 35, 2524 (1964).
- [4] K.-J. BATHE, E. RAMM, E.L. WILSON: Finite elements formulations for large deformation analysis, Int. J. Num. Engng. 9, 353 (1975).
- [5] K.-J. BATHE, E.L. WILSON: Numerical methods in finite element analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1976).
- [6] E. BECKER, W. BÜRGER: Kontinuumsmechanik, Teubner Studienbücher Mechanik, LAMM Bd. 20, Stuttgart (1975).
- [7] J.F. BELL: A Physical Basis for Continuum Theories of Finite Strain Plasticity, Part I, Arch. Rat. Mech. Anal., 70, 319-337 (1979).
- [8] J.F. BELL: A Physical Basis for Continuum Theories of Finite Strain Plasticity, Part II, Arch. Rat. Mech. Anal., 75, 104-126 (1981).
- [9] J.F. BELL: Contemporary Perspectives in Finite Strain Plasticity, Int. J. of Plasticity, 1, 3-27 (1985).
- [10] J.F. BELL: On the evolution, from Experiment, of General Constitutive Equations in a Continuum Theory for Finite Plastic

- Strain, in: Plasticity Today (Ed. A. SAWCZUK, G. BIANCHI), 203-220, Elsevier, London (1985).
- [11] D. BESDO: Zur Formulierung von Stoffgesetzen für plastisch anisotrope/elastisch isotrope Medien im Dehnungsraum, ZAMM 60, T101-T103 (1980).
- [12] D. BESDO: Zur Formulierung von Stoffgesetzen der Plastomechanik im Dehnungsraum nach Ilyushins Postulat, Ing. Arch., 51, 1-8 (1981).
- [13] D. BESDO: Zur Beschreibung des Bauschinger-Effektes im Dehnungsraum, ZAMM 63, T144-T147 (1983).
- [14] J.F. BESSELING: Models of Metal Plasticity: Theory and Experiment, in: Plasticity Today (Ed. A. SAWCZUK, G. BIANCHI) Elsevier, London (1985).
- [15] K. BÖGEL, M. TASCHE: Analysis in normierten Räumen, Akademie Verlag, Berlin (1974).
- [16] W. BROCKS: Zum Tragverhalten statischer Systeme mit geometrischen und physikalischen Nichtlinearitäten (Habilitationsschrift), FB 9 der TU Berlin (1978).
- [17] O. BRUHNS, B. LÜCKE: Grundlagen der Plastizitätstheorie und ihrer Anwendung, VDI-Z 116 Nr. 15, 1233-1243 (1974).
- [18] O. BRUHNS, K. THERMANN: Anwendungen der Plastizitätstheorie im Bauwesen, VDI-Z 117 Nr. 22 (1975).
- [19] O. BRUHNS, Th. LEHMANN: Optimum deformation rate in large inelastic deformation, in: Metal forming plasticity (Ed. H. LIPPMANN), Springer Verlag, 120-138 (1979).
- [20] H. BUFLER: Inkrementelle Variationsformulierung gewisser nichtlinearer Randwertprobleme, insbesondere in der Elastizitätstheorie, Ing. Arch. 45, 229 (1976).

- [21] J. CASEY: Approximate kinematical relations in plasticity, *Int. J. Solids Structures*, 21, 7, 671-682 (1985).
- [22] J. CASEY, P.M. NAGHDI: Physically nonlinear and related approximate theories of elasticity and their invariance properties, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, in Druck
- [23] L. CORRADI, G. MAIER: Inadaptation theorems in the dynamics of elastic-workhardening structures, *Ing.-Arch.* 43, 44-57 (1973).
- [24] C.A. COULOMB: *Mem. Math. et Phys.*, 7, 343 (1773).
- [25] Y.F. DAFALIAS: A missing link in the macroscopic Constitutive Formulation of large plastic Deformations, in: *Plasticity Today* (Ed. A. SAWCZUK, G. BIANCHI), 135-151, Elsevier, London (1985).
- [26] D.C. DRUCKER: Some implications of work hardening and ideal plasticity, *Q. Jl. appl. Math.*, 7, 411-418 (1952).
- [27] D.C. DRUCKER: Appropriate simple idealizations for finite Plasticity, in: *Plasticity Today* (Ed. A. SAWCZUK, G. BIANCHI), 47-59 Elsevier, London (1985).
- [28] G.A. DUPUIS, H.D. HIBBITT, S.F. Mc NAMARA, P.V. MARCAL: Nonlinear material and geometric behavior of shell structures, *Comp. & Struct.* 1, 223 (1971).
- [29] M. DUSZEK: Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections, *Arch. Mech. Stos.*, 5, 18, 599-614 (1966).
- [30] M.K. DUSZEK, A. SAWCZUK: Load-deflection relations for rigid-plastic cylindrical shells beyond the incipient collapse load, *Int. J. Mech. Sci.*, 12, 839-848 (1970).
- [31] M.K. DUSZEK: Stability analysis of rigid plastic structures at the yield-point load. In: *Buckling of Structures* (Ed. B. BUDIANSKI), Springer, Berlin (1976).

- [32] M.K. DUSZEK, A. SAWCZUK: Stable and unstable states of rigid-plastic frames at the yield-point load, *J. Struct. Mech.*, **4**, 33-47 (1976).
- [33] M. DUSZEK: A systematic study of kinematics of shells at large strains and displacements, *Bull. of Polish Acad. of Science* **26**, 1, 39-47 (1978).
- [34] M.K. DUSZEK: Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity, *Mitt. Inst. f. Mechanik*, **21**, Ruhr-Universität Bochum (1980).
- [35] M.K. DUSZEK: Foundations of the non-linear plastic shell theory, *Mitt. Inst. f. Mechanik*, **31**, Ruhr-Universität Bochum (1982).
- [36] M.K. DUSZEK, T. LODYGOWSKI: Second order effects and the post-yield behaviour of plastic structures, in: *Plasticity Today* (Ed. A. SAWCZUK, G. BIANCHI), Elsevier, London (1985).
- [37] G. DUVAUT, J.L. LIONS: *Les inequations en mecanique et en physique*, Dunod, Paris (1972).
- [38] D.G.B. EDELEN: A Global Formulation of Continuum Physics and the resulting Equivalence Classes of Nonlocal Field Equations, in: *Nonlocal Theories of Material Systems*, Polskiej Akademii Nauk, Warszawa (1976).
- [39] H. EGGERS, B. KRÖPLIN: Yielding of plates with hardening and large deformations, *Int. J. for num. Meth. in Engng.*, **12**, 739-750 (1978).
- [40] K.O. FRIEDRICHS: Ein Verfahren der Variationsrechnung, das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdrucks darzustellen, *Nach. Ges. Wiss. Göttingen*, 13-20 (1929).
- [41] Y.C. FUNG: *Foundations of solid mechanics*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1965).

- [42] D.A. GOKHFELD, O.F. CHERNIAVSKY: Methods of solving problems in the shakedown theory of continua, in: Foundations of Plasticity Noordhoff, Leyden (1973).
- [43] D.A. GOKHFELD, O.F. CHERNIAVSKY: Limit analysis of structures at thermal cycling, Noordhoff, Leyden (1980).
- [44] A.E. GREEN, P.M. NAGHDI: A General theory of an Elastic-Plastic Continuum, Arch. Rat. Mech. Anal., 18, 4, 251-280 (1965).
- [45] A.E. GREEN, P.M. NAGHDI: Some remarks on elastic-plastic deformations at finite strains, Int. J. Engng. Sci., 9, 1219-1229 (1971).
- [46] A.E. GREEN, P.M. NAGHDI: Note on thermodynamic restrictions in the theory of elastic plastic materials, Acta Mechanica 30, 157-162 (1978).
- [47] J. GROSS-WEEGE: Diskrete statische Methoden zur Bestimmung ebener Spannungszustände in elastischen und elastoplastischen Körpern, Diplomarbeit, Inst. für Mechanik, Ruhr-Univ. Bochum (1984).
- [48] B. HALPHEN: Sur le champ des vitesses en thermoplasticité finie, Int. J. Sol. Struct., 11, 947-960 (1975).
- [49] B. HALPHEN, Q.S. NGUYEN: Sur les matériaux standards généralisés, J. de Méc. 14, 1, 39-63 (1975).
- [50] B. HALPHEN: Unicité et principe d'extremum en thermoviscoplasticité finie couplée, Arch. of Mech. 27, 5-6 (1975).
- [51] B. HALPHEN: L'adaptation partielle des structures élastoplastiques ou viscoplastiques, C.R. Acad. Sc. Paris, t.290, Série B-269 (1980).
- [52] B. HALPHEN: Total partial shakedown of elastic viscoplastic and plastic structures, Proceedings SMIRT (6), L10/1 (1981).

- [53] P. HAUPT: On the concept of an intermediate configuration and its application to a representation of viscoelastic-plastic material behaviour, *Int. J. of Plasticity*, 1, 4, 303-316 (1985).
- [54] P. HAUPT: *Viskoelastizität and Plastizität, thermomechanisch konsistente Materialgleichungen*, Springer, Berlin (1977).
- [55] H.D. HIBBITT, P.V. MARCAL, J.R. RICE: A finite element formulation for problems of large strains and large displacements, *Int. J. Solids Struct.* 6, 1069 (1970).
- [56] R. HILL: *The mathematical theory of plasticity*, Oxford University Press, London (1950).
- [57] R. HILL: A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 6, 236-249 (1958).
- [58] R. HILL: Some basic principles in mechanics of solids without a natural time, *J. Mech. Phys. Solids*, 7, 209-225 (1959).
- [59] R. HILL: On constitutive inequalities for simple materials I, *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 229-242 (1968).
- [60] R. HILL: On constitutive inequalities for simple materials II, *Mech. Phys. Solids*, 16, 315-322 (1968).
- [61] P.G. HODGE, Jr.: *Plastic Analysis of Structures*, Mc Graw-Hill Book Comp., New York (1959).
- [62] P.G. HODGE, Jr.: *Limit Analysis of Rotationally Symmetric Plates and Shells*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1963).
- [63] L.D. HOFMEISTER, G.A. GREENBAUM, D.A. EVENSEN: Large strain elasto-plastic finite element analysis, *AIAA Journal* 9, 7, 1248 (1971).
- [64] J. HUTCHINSON: Plastic buckling, in: *Advances in Appl. Mechanics*.

- (Ed. C.-S. YIN) 14, Academic Press, New York, 67-144 (1974).
- [65] A.A. ILYUSHIN: On the postulate of plasticity, J. Appl. Math. Mech. (PMM) 25, 746 (1961).
- [66] C. JOHNSON: Existence theorems for plasticity problems, J. Math. pures et appl., 55, 431-444 (1976).
- [67] C. JOHNSON: On plasticity with hardening, J. Math. anal. and appl., 62, 325-336 (1978).
- [68] C. JOHNSON: Mathematical and numerical analysis of some problems in plasticity, Rep. of Dept. of Computer Sciences, Chalmers Univ. of Technology and Univ. of Göteborg, Göteborg (1979).
- [69] L.M. KACHANOV: Foundations of the theory of Plasticity, North-Holland, Amsterdam (1971).
- [70] J. KESTIN: On the application of the principles of thermodynamics to strained solid materials, in: Irreversible aspects in continuum media, 177-212, Wien (1966).
- [71] M. KLEIBER, B. RANIECKI: Elastic-plastic Material at Finite Strain, in: Plasticity Today (Ed. A. SAWCZUK, G. BIANCHI) 3-46, Elsevier, London (1975).
- [72] J.A. KÖNIG: Shakedown for strainhardening structures, 1<sup>st</sup> Canadian Congr. Appl. Mech., Quebec (1967).
- [73] J.A. KÖNIG: On the incremental collapse criterion accounting for temperature dependence of the yield-point stress, Arch. Mech. Stos. 31, 317-325 (1979).
- [74] J.A. KÖNIG: On stability of the incremental collapse process, Arch. Inz. Lad., XXVI, Z. 1, 219 (1980).
- [75] J.A. KÖNIG, G. MAIER: Shakedown analysis of elastic

- plastic structures: A review of recent developments, Nucl. Engng. and Design, 6, 81 (1981).
- [76] J.A. KÖNIG: On some recent developments in the shakedown theory, Advances in Mechanics, 5, 1/2, 237 (1982).
- [77] J.A. KÖNIG: Shakedown criteria in the case of loading and temperature variations, J. Mech. Theor. Appl. 21, 99-108 (1982).
- [78] W.T. KOITER: General Theorems for elastic-plastic solids, in: Progress in Solid Mechanics 1 (Ed. I.N. SNEDDON, R. HILL), North-Holland, Amsterdam (1960).
- [79] F. LABISCH: Approximation of non-unique solutions of a homogeneous plate, ZAMM 63, 607-613 (1983).
- [80] F.A. LECKIE: Limit and shakedown loads in the creep range, In: Thermal Stress and Thermal Fatigue, London, 368-373 (1971).
- [81] E.H. LEE, D.T. LIU: Finite strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis, J. Appl. Phys., 38, 19-27 (1967).
- [82] E.H. LEE: Elastic-plastic deformations at finite strains, J. appl. Mech., 36, 1-6 (1969).
- [83] K. LEERS, W. KLIE, J.A. KÖNIG, O. MAHRENHOLTZ: Experimental Investigations on shakedown of tubes, in: Plasticity Today (Ed. A. SAWCZUK, G. BIANCHI) 259-275, Elsevier, London (1985).
- [84] Th. LEHMANN: On large elastic-plastic deformations, in: Foundations of Plasticity (Ed. A. SAWCZUK), 571-585, Leyden (1972).
- [85] T. LEHMANN: On the theory of large, non-isothermic, elastic plastic and elasto-visco-plastic deformations, Arch. Mech. Stos., 29, 3, 393-409 (1977).

- [86] T. LEHMANN: Some remarks on kinematics and constitutive equations of inelastic solids, in: Mechanics of Inelastic Media and Structures (Ed. O. MAHRENHOLTZ and A. SAWCZUK), 161-178, Pol. Sci. Publ., Warszawa (1982).
- [87] Th. LEHMANN: Some remarks on the decomposition of deformations and mechanical work, Int. J. Engng. Sci., 20, 281-288 (1982).
- [88] T. LEHMANN: General frame for the definition of constitutive laws for large non-isothermic elastic-plastic and elastic-viscoplastic deformations. In: The Constitutive law in Thermoplasticity (Ed. T. LEHMANN), CISM Courses and Lecture No. 281, Springer, Wien (1984).
- [89] Th. LEHMANN: On a Generalized Constitutive law in Thermoplasticity, in: Plasticity Today (Ed. A. SAWCZUK, G. BIANCHI), 115-134, Elsevier, London (1985).
- [90] J. van der LUGT, J. HUETINK: Thermal mechanically coupled finite element analysis in metal-forming processes, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 54, 145 (1986).
- [91] D. MACVEAN: Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren, ZAMP 19, 157-185 (1968).
- [92] G. MAIER: Incremental plastic analysis in the presence of large displacements and physical instabilizing effects, Int. J. Solids Struct. 7, 345 (1971).
- [93] G. MAIER: A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects, in: Foundations in Plasticity (Ed. A. SAWCZUK), North-Holland, Amsterdam (1973).
- [94] G. MAIER: Shakedown analysis, in: Structural Plasticity and Mathematical Programming (Ed. M.Z. COHN, G. MAIER), Pergamon Press, Oxford (1979).

- [95] G. MAIER, J. MUNRO: Mathematical programming applications to engineering plastic analysis, *Appl. Mec. Rev.*, 35, 12, 1634 (1982).
- [96] J. MANDEL: Généralisation de la théorie de plasticité de W.I. KOITER, *Int. J. Solids Struct.*, 1, 273-296 (1965).
- [97] J. MANDEL: Plasticité et viscoplasticité, CISM Lecture Notes No. 97, Udine, Springer, Berlin (1971).
- [98] J. MANDEL: Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques, *Int. J. Sol. Struct.*, 9, 725-740 (1973).
- [99] J. MANDEL: Director vectors and constitutive equations for plastic and viscoplastic media, in: *Problems of Plasticity* (Ed. A. SAWCZUK) 135-193, Noordhoff, Leyden (1974).
- [100] J.E. MARSDEN, T.J.R. HUGHES: *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1983).
- [101] E. MELAN: Theorie statisch unbestimmter Systeme aus idealplastischem Baustoff, *Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften (Wien) Abt. IIa*, 145, 195-218 (1936).
- [102] J.J. MOREAU: Fonctions convexes, Séminaire sur les Equations aux Derivées partielles, Collège de France, Paris (1966-1967).
- [103] J.J. MOREAU: Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité, *CC.R. Acad. Scie.*, T. 271, série A, 608-611 (1970).
- [104] J.J. MOREAU: Fonctions de résistance et fonctions de dissipation (exposé No. 6), Raflé par un convexe variable (exposé No. 15) Séminaire d'Analyse convexe, Montpellier (1971).
- [105] J.J. MOREAU: On unilateral constraints, *Lecture NOTES, CIME, Bressanone* (1973).

- [106] J.J. MOREAU: Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problèmes d'évolution, C.R. Acad. Sc., Paris, 282, 837-840 (1976).
- [107] Z. MROZ, B. RANIECKI: Variational principles in uncoupled thermo-plasticity, Int. J. of Engng. Sci. 11, 1133 (1973).
- [108] P.M. NAGHDI: Recent Developements in Finite Deformation Plasticity, in: Plasticity Today (Ed. A. SAWCZUK, G. BIANCHI), 75-83, Elsevier, London (1985).
- [109] B. NAYROLES: Quelques applications variationnelles de la théorie des fonctions duales à la mécanique des solides, J. de Mécanique, 10, 2 (1971).
- [110] B. NAYROLES: Structure algébrique des théories classique de plasticité, Seminaire "plasticité et viscoplasticité", Theme 3, Ecole Polytechnique, Paris (1972).
- [111] B. NAYROLES: J.J. Moreau's approach to a fundamental problem: The quasi-static evolution of a perfectly elasto-plastic body, Arch. of Mech., 28, 1, 115-132 (1976).
- [112] K.W. NEALE: A general variational theorem for the rate problem in elasto-plasticity, Int. J. Sol. Struct. 8, 865 (1972).
- [113] J. NECAS, I. HLAVACEK: Mathematical theory of elastic and elastico-plastic bodies, an introduction, Studies in Appl. Mech. 3, Elsevier, Amsterdam (1981).
- [114] S. NEMAT-NASSER: Micromechanically Based Finite Plasticity, in: Plasticity Today (Ed. A. SAWCZUK, G. BIANCHI), 97-113, Elsevier, London (1985).
- [115] Q.S. NGUYEN: Contribution à la théorie macroscopique de l'elastoplasticité avec écrouissage, (Thèse), Paris (1972).

- [116] Q.S. NGUYEN, G. GARY: Flambage par déformations plastiques accumulées sous charge cyclique additionnelle, *J. de Mec. Theor. et Appl.* 2, 3, 351 (1983).
- [117] E.T. ONAT: The influence of geometry on the load-deformation behavior of plastic solids, in: *Plasticity*, ed. E.H. LEE & P.S. SYMONDS, 225, Pergamon Press (1960).
- [118] E.T. ONAT & L.S. SHU: Finite deformations of a rigid-perfectly plastic arch, *J. appl. Mech.* 29, 549 (1962).
- [119] P. PERZYNA: Fundamental problems in viscoplasticity, *Advan. Appl. Mech.* 9, 243-377 (1966).
- [120] H. PETRYK: A consistent energy approach to defining stability of plastic deformation processes, in: *Stability in the Mechanics of Continua* (Ed. F.H. SCHROEDER), 262-272, Springer, Berlin (1982).
- [121] H. PETRYK: On the onset of instability in elastic-plastic solids, in: *Plasticity Today*, (Ed. A. SAWCZUK and G. BIANCHI), 429-447, Elsevier, London (1985).
- [122] W. PIETRASZKIEWICZ: Introduction to the non-linear theory of shells, *Mitt. Inst. f. Mech.*, 10, Ruhr-Universität Bochum (1977).
- [123] W. PIETRASZKIEWICZ: Finite rotations and Lagrangean description in the non-linear theory of shells, Polish Scientific Publishers, Warszawa-Poznan (1979).
- [124] C. POLIZOTTO: On workhardening adaptation of discrete structures under dynamic loadings, *Arch. Mech. Stos.* 32, 81-99 (1980).
- [125] A.R.S. PONTER: Deformation, displacement and work bounds for structures in a state of creep and subject to variable loading, *J. Appl. Mech.* 39, 953-963 (1972).

- [126] W. PRAGER, P.G. HODGE: Theory of perfectly plastic solids, John Wiley & Sons, New York (1951).
- [127] W. PRAGER: Introduction to plasticity, Addison Wesley (1955).
- [128] I. PRIGOGINE, I. STENGERS: La Nouvelle Alliance, Métamorphose de la Science, Edition Gallimard, Paris (1979).
- [129] P. RAFALSKI: Minimum principles for the stress field in an elastic-perfectly plastic body, Int. J. Engng. Sci., 14, 1005 (1976).
- [130] P. RAFALSKI: Solution of the elastic-viscoplastic boundary value problem, Int. J. Engng. Sci., 15, 193 (1977).
- [131] P. RAFALSKI: Minimum Principles in Plasticity, Mitt. Inst. f. Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 13 (1978).
- [132] P. RAFALSKI: Espaces duals pour le problème d'élasto-viscoplasticité, IV Symposium Franco-Polonais, Marseille, 23.-28. Juni 1980.
- [133] P. RAFALSKI: An alternative approach to the elastic-viscoplastic initial boundary value problem, Mitt. Inst. für Mechanik, 28, Ruhr-Universität Bochum (1981).
- [134] E. RAMM: Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente, Habilitationsschrift, Stuttgart (1975).
- [135] J.N. REDDY: Finite-element modelling of layered anisotropic composite plates and shells, a review of recent research. The Shock and Vibration Digest 13, 12 (1981).
- [136] G. RIEDER: Iterationsverfahren und Operatorgleichungen in der Elastizitätstheorie, Abh. der Braunschweigischen Wiss. Gesellschaft, XIV. 109-343 (1962).

- [137] A. SAWCZUK: On plastic analysis of shells, in: Theory of Thin Shells (Ed. W.T. Koiter, G.K. Mikhailov), 27-63, North-Holland, Amsterdam (1980).
- [138] R. SCHMIDT: On geometrically non-linear theories for thin elastic shells, in: Flexible Shells (Ed. E.L. Axelrad, F.A. Emmerling), Springer, Berlin (1984).
- [139] M.J. SEWELL: A survey of plastic buckling, in: Stability (Ed. H. Leipholz), University of Waterloo Press, 85-197 (1972).
- [140] M.J. SEWELL: The governing equations and extremum principles of elasticity and plasticity generated from a single functional, part I and part II, J. Struct. Mech., 2/1 und 2/2 135 (1973).
- [141] R.A.C. SLATER: Engineering Plasticity, Kap. 5.7, The Macmillan Press Ltd. (1977).
- [142] E. STEIN, R. AHMAD: On the stress computation in finite element models based upon displacement approximations, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 4, 81 (1971).
- [143] E. STEIN, D. BISCHOFF (Herausgeber): Geometrisch/Physikalisch nichtlineare Probleme, Struktur und Algorithmen, GAMM-Seminar, Bericht S85/3, Universität Hannover (1985).
- [144] E. STEIN, K.-H. LAMBERTZ, L. PLANK: Traglastberechnung dünnwandiger Strukturen bei großen elastoplastischen Deformationen, Stahlbau 1/1985 (1985).
- [145] J. STICKFORTH: On stress relaxation, creep and plastic flow, zum Druck in: Int. J. Plasticity.
- [146] J. STICKFORTH: A remark on kinematic hardening, zum Druck in: Arch. of Mech.
- [147] J. STICKFORTH: A remark on kinematic hardening (II); the

- consequences of introducing yield conditions, zum Druck in: Arch. of Mech.
- [148] H. STUMPF: Eingrenzungsverfahren in der Elastomechanik, Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen Nr. 2116, Köln (1970).
- [149] H. STUMPF: Generating functionals and extremum principles in non-linear elasticity with applications to nonlinear plate and shallow shell theory, Proceedings of joint IUTAM/IMU Symposium on Application of Methods of Functional Analysis to Problems of Mechanics, 1975, in: Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin (1976).
- [150] H. STUMPF: On the non-linear buckling and post-buckling analysis of thin elastic shells, Int. J. Non-Linear Mech., 19, 3, 195-215 (1984).
- [151] H. STUMPF: General concept of the analysis of thin elastic shells, ZAMM 66, 8, 337-350 (1986).
- [152] H. TRESCA: Sur l'écoulement de corps solides soumis à des fortes pressions, C.R. Acad. Sci., Paris, 59, 754 (1864).
- [153] H. TRESCA: C.R. Acad. Sci. Paris, 64, 809 (1867).
- [154] K.C. VALANIS: A theory of viscoplasticity without a yield surface, Arch. of Mech. 23, 517-551 (1971).
- [155] K.C. VALANIS, C.F. LEE: Some recent developments in the endochronic theory with applications, Nucl. Engng. Design, 69, 327 (1982).
- [156] K.C. VALANIS, JINGHON FAN: Experimental verification of Endochronic plasticity in spatially varying strain fields, in: Plasticity Today (Ed. A. SAWCZUK, G. BIANCHI), 153-179, Elsevier, London (1985).

- [157] K.C. VALANIS, JINGHON FAN: Endochronic analysis of cyclic elastoplastic strain fields in a notched plate, J. Appl. Mech., in Druck.
- [158] V. VOLTERRA: Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes, Ann. Ecole Normale Supérieure, **24**, 401 (1907).
- [159] K. WASHIZU: Variational methods in elasticity and plasticity, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford (1975).
- [160] C. WEBER: Eingrenzung von Verschiebungen mit Hilfe der Minimal-sätze, ZAMM **22**, 126-130 (1942).
- [161] A.W. WEGMULLER: Elastic-plastic finite element analysis of plates, Ing. Arch. **44**, 63-77 (1975).
- [162] D. WEICHERT: Variational Formulation and Solution of boundary value problems in the theory of plasticity and application to plate problems, Mitt. Inst. f. Mechanik Ruhr-Universität Bochum, **25** (1981).
- [163] D. WEICHERT: Shakedown at finite displacements, a note on Melan's theorem, Mech. Res. Com., **11**, 2/3, 121-127 (1984).
- [164] D. WEICHERT: The initial boundary value problem for geometrically nonlinear elastic plastic shells, Engng. Fract. Mech., **21**, 4, 799-806 (1985).
- [165] D. WEICHERT: On the influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of elastic-plastic structures, Int. J. of Plasticity, **2**, 2, 135-148 (1986).
- [166] Cz. WOZNIAK: Constrained continuous media (Teile I, II, III), Bull. Acad. Polon. Sci., Sci. Techn. **21**, 109-116; **2**, 167-173; **3**, 175-182 (1973).
- [167] W. WUNDERLICH: Incremental formulation of the generalized varia-

tional approach in structural mechanics, in: Variational methods in Engng., Proceedings (II), Southampton (1972).

[168] H. ZIEGLER: Some extremum principles in irreversible thermodynamics with application to continuum mechanics, Progress in Solid Mechanics, IV, North-Holland, Amsterdam (1963).

[169] H. ZIEGLER: Systems with internal parameters obeying the orthogonality condition, ZAMP 23, 553-556 (1972).

[170] H. ZIEGLER: An introduction to thermomechanics, Series in Applied Mathematics and Mechanics, 21, North-Holland Publ. Comp. (1983).

## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:  
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung

- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode

- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells

- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp:  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme

- Nr. 46 J. Makowski/L.-P. Nolte/H. Stumpf:  
Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into  
nonlinear shell problems
- Nr. 47 Franz. K. Labisch:  
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer  
Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von  
Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte:  
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik  
und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger:  
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter in-  
stationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid:  
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier:  
Theorie der Stoßbelastung orthotroper Platten und ihre experi-  
mentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten  
CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Trampczynski:  
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert:  
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitäts-  
theorie



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 53**