

**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Karl-Heinz Bürger

Gewichtsoptimierung  
rotationssymmetrischer Platten  
unter instationärer Erregung

Heft Nr. 49



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Karl-Heinz Bürger

Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten  
unter instationärer Erregung

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr.49

Dezember 1985

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhruniversität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhruniversität Bochum und wurde von der dortigen Fakultät für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann danke ich für die Unterstützung der Arbeit durch viele hilfreiche Anregungen und Fachgespräche und für die Übernahme des Referats.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller bin ich für das Interesse an dieser Arbeit und für die Übernahme des Korreferats zu Dank verpflichtet.

Ferner danke ich allen Mitarbeitern des Instituts, die zum Entstehen der Arbeit beigetragen haben. Hierbei sind besonders Frau Schmidt-Balve, Herr Grundmann und Herr Böhme zu erwähnen, die mich bei der Erstellung der Zeichnungen und bei der Vorbereitung der experimentellen Untersuchungen unterstützt haben.

Dezember 1985

Karl-Heinz Bürger

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

Tag der Einreichung: 22.10.1985

Tag der mündlichen Prüfung: 12.12.1985

© 1985 Dr.-Ing. Karl-Heinz Bürger  
Rosenring 72, 4690 Herne 2

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das Gewicht instationär belasteter, rotationssymmetrischer Platten unter Beachtung von Restriktionen bezüglich einer minimalen Wanddicke und einer nicht zu überschreitenden maximalen Vergleichsspannung minimiert.

Dabei stellt die Platte gleicher dynamischer Festigkeit eine recht gute Näherungslösung dar, die sich in den betrachteten Fällen nur geringfügig von der gewichtsoptimalen Lösung unterscheidet.

Für die hierzu häufig durchzuführende Schwingungsanalyse wird ein effizientes Verfahren mit Finiten Elementen, orthogonalen Ritzvektoren und der Zeitintegration nach NEWMARK verwendet.

Die Güte der erhaltenen Ergebnisse wird anhand von Vergleichen mit experimentellen Untersuchungen für einen Belastungsfall aufgezeigt.

## Summary

The present work deals with the weight minimization of rotationally symmetric plates subjected to dynamic loads of short duration. Constraints concerning plate thickness and occurring stresses are taken into account.

It was found that the plate of dynamic fully stressed design is a good approximation to the optimum solution.

The maximum stress values in time are evaluated by an effective method using finite elements, orthogonal Ritz-vectors and Newmark-integration.

For one particular dynamic load condition the theoretical and experimental results are compared. The measurements are in good agreement with the results of calculation.

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
<u>Bezeichnungen</u>	4
1. <u>Einleitung</u>	7
1.1 Problemstellung	8
1.2 Ein beschränktes, nichtlineares Parameter- optimierungsproblem	10
1.3 Aufbau und Schwerpunkte	11
2. <u>Die Plattentheorie nach MINDLIN</u>	12
2.1 Allgemeines	12
2.2 Herleitung der Bewegungsgleichungen	14
2.3 Die eingespannte Kreisplatte gleicher Dicke	21
2.3.1 Frequenzspektrum	23
2.3.2 Einfluß von Impulsform und -dauer auf die Systemantwort	27
2.3.2.1 Unterschiedliche Impulsformen	27
2.3.2.2 Variation der Impulsdauer	29
3. <u>Ortsdiskretisierung mit der Finite-Element-Methode</u>	32
3.1 Allgemeines	32
3.2 Aufstellen der Elementmatrizen mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit	33
3.2.1 Elementsteifigkeitsmatrix	36
3.2.2 Elementmassenmatrix	37
3.2.3 Elementlastvektoren	38
3.3 Differentialgleichungssystem der Gesamtstruktur	39
3.4 Konvergenzbetrachtungen	39
3.4.1 Statische Belastung	39
3.4.2 Eigenfrequenzen, Eigenformen	42
3.5 Zur Abspeicherung der Matrizen	45

	Seite
4. <u>Lösung der Matrizendifferentialgleichung</u>	46
4.1 Allgemeines	46
4.2 Das Verfahren mit Ritzvektoren	48
4.2.1 Bestimmung der Ritzmatrix	49
4.2.2 Reduktion des DGL-Systems	49
4.3 Die Zeitintegration nach NEWMARK	52
4.4 Bestimmung der Zustandsgrößen	53
4.5 Vergleich mit der analytischen Lösung	54
5. <u>Optimierung</u>	56
5.1 Allgemeines	56
5.2 Die KUHN-TUCKER-Bedingungen	59
5.3 Die Platte gleicher dynamischer Festigkeit	61
5.4 Optimierungsverfahren	64
5.4.1 Die Methode der zulässigen Richtungen (feasible directions)	64
5.4.2 Die Methode der linearen Approximation	68
5.5 Gradientenberechnung	70
6. <u>Ergebnisse der Optimierung</u>	71
6.1 Allgemeine Untersuchungen	71
6.1.1 Impulsform, Impulsdauer	71
6.1.2 Dimensionslose Kenngrößen	73
6.1.3 Einfluß der Anzahl der Querschnittssprünge	74
6.1.4 Einfluß der minimalen Wanddicke	74

	Seite
6.2 Einige optimale Querschnittsverläufe	76
6.2.1 Kreisplatten	76
6.2.2 Kreisringplatten	79
7. <u>Experimentelle Untersuchungen</u>	81
7.1 Versuchsanordnung	81
7.2 Versuchsergebnisse	84
8. <u>Zusammenfassung und Ausblick</u>	91
<u>Literaturverzeichnis</u>	93

Bezeichnungen

<u>Symbol</u>	<u>Name</u>
V	Plattenvolumen
h	Plattendicke
$h_{\min}$	minimale Wanddicke
$\lambda$	Wellenlänge
$r, \varphi, z$	Polarkoordinaten
t	Zeit
$u_r, u_\varphi, u_z$	Verschiebungen
$\psi_r, \psi_\varphi$	Rotationen
w	Verschiebung in z-Richtung
$\epsilon_{rr}, \epsilon_{\varphi\varphi}, \epsilon_{zz}$ $\epsilon_{r\varphi}, \epsilon_{rz}, \epsilon_{\varphi z}$	Dehnungen
$\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$	Spannungen
$\sigma_v$	Vergleichsspannung
$M_{rr}, M_{\varphi\varphi}, M_{r\varphi}$	Momente
$Q_r, Q_\varphi$	Querkräfte
E	Elastizitätsmodul
G	Gleitmodul
$\nu$	Querkontraktionszahl

Symbol	Name
$\kappa^2$	Schubkorrekturfaktor
$\rho$	Dichte
$R$	Plattenaußenradius
$\omega$	Frequenz
$\underline{\underline{K}}$	Steifigkeitsmatrix
$\underline{\underline{K}}^e$	Elementsteifigkeitsmatrix
$\underline{\underline{M}}$	Massenmatrix
$\underline{\underline{M}}^e$	Elementmassenmatrix
$\underline{F}$	Lastvektor
$\underline{F}^e$	Elementlastvektor
$\underline{x}$	Verschiebungsvektor
$\underline{x}^e$	Elementverschiebungsvektor
$N_i, \bar{N}_i$	Ansatzfunktionen
$\underline{\underline{R}}$	Ritzmatrix
$q_i$	Ritzkoordinaten
$a$	Beschleunigung
$K_p, K_F, K_a$	Dimensionslose Kenngrößen

<u>Symbol</u>	<u>Name</u>
$\frac{d}{dt}$	Ableitung
$\frac{\partial}{\partial x}$	partielle Ableitung
$( \dot{\phantom{x}} )$	Ableitung nach der Zeit
$\nabla$	Gradient
$\delta$	Variation
$\Delta$	LAPLACE-Operator

## 1. Einleitung

Mit der rasch fortschreitenden Entwicklung von immer schneller und bezüglich der Speichermöglichkeiten immer größer werdender Computeranlagen nimmt gleichzeitig auch die Zahl der Anwendungsmöglichkeiten der Optimierung auf den Gebieten der Ingenieurwissenschaften schnell zu.

Aus der Vielzahl der möglichen Anwendungsfälle sind beispielhaft folgende angeführt:

- Optimale Standortwahl von Industrieanlagen
- Optimierung von Prozeßabläufen
- Optimale Auslegung von Fertigungsstraßen
- Kostengünstiger Entwurf von Bauwerken
- Optimale Flugbahnen von Raumfahrzeugen
- Gewichtsoptimale Konstruktion von Flugzeugteilen
- Gewichtsoptimaler Entwurf von Strukturen unter dynamischer Belastung (Erdbeben, Wind, Explosion, u. a.)

Bei der Lösung eines Optimierungsproblems ist dabei im ersten Schritt eine dem Problem angepaßte, von zu wählenden Entwurfsvariablen linear bzw. nichtlinear abhängige Zielfunktion aufzustellen, deren Wert minimiert (maximiert) werden soll. Beispiele für mögliche Zielfunktionen sind Herstellungskosten, Ertrag, Materialaufwand, Gewicht, u.s.w.

Aus der jeweiligen Aufgabenstellung ergibt sich ferner, ob das vorliegende Problem beschränkt oder unbeschränkt ist. Dabei kann es sich bei den entsprechend formulierten Beschränkungen um Restriktionen im Entwurfs- oder im Zustandsraum handeln, die entweder implizit/explicit und linear/nichtlinear von den Entwurfsvariablen abhängen.

## 1.1 Problemstellung

Im Rahmen dieser Arbeit sollen Kreis- bzw. Kreisringplatten unter impulsartiger Belastung gewichtsoptimal dimensioniert werden.

Dabei sollen folgende Nebenbedingungen eingehalten werden:

- Die Plattendicke soll an keiner Stelle den Minimalwert  $h_{\min}$  unterschreiten.
- An keinem Ort und zu keinem Zeitpunkt darf die vorgegebene, maximale Vergleichsspannung  $\sigma_{zul}$  überschritten werden.

Betrachtet werden sollen zeitlich verschiedenartige Impulsverläufe, wie sie z. B. bei Druckstößen, Explosionen, Anfahr- und Bremsvorgängen auftreten. Als Belastungsformen sollen Flächenlasten und Belastungen infolge von Auflagerbeschleunigungen untersucht werden.

Diese Arbeit befaßt sich demzufolge mit der gewichtsoptimalen Dimensionierung von Flächentragwerken unter instationärer Belastung, d. h. mit einem Problem der Strukturoptimierung.

Auf diesem Gebiet ist in den letzten zwei Jahrzehnten eine Vielzahl von Untersuchungen durchgeführt worden. VENKAYYA [1], VANDERPLAATS [2], BANICHUK [3] und OLHOFF/TAYLOR [4] liefern über den Stand der Forschung bezüglich der Strukturoptimierung einen guten Überblick und eine große Anzahl von Literaturstellen.

Spezielle Zusammenfassungen über die Optimierung von schwingenden Bauteilen stellen die Übersichten von OLHOFF [5] und RAO [6] dar. Über Arbeiten bezüglich der Optimierung von Plattenstrukturen berichten HAFTKA/PRASAD [7].

Die Arbeiten zur Gewichtsminimierung von Platten befassen sich dabei zum größten Teil mit statisch belasteten Systemen.

Für den Fall der dynamisch belasteten Platte sucht OLHOFF [8, 9] nach dem Querschnittsverlauf, der bei vorgegebenem Volumen den Maximalwert für die 1. Eigenfrequenz ergibt. CHENG/OLHOFF [10, 11] und NIORDSON [12] bestimmen in weiteren interessanten Arbeiten die Platte minimaler Nachgiebigkeit bei vorgegebenem Volumen.

NIORDSON führt dabei eine Beschränkung bezüglich des Gradienten des Dickenverlaufs in radialer Richtung ein und erreicht so, daß Lösungen, die auf einen Querschnittsverlauf mit einer großen Anzahl von Rippen führen [10] und somit aus der Sicht des Ingenieurs unsinnig sind, unterdrückt werden.

Untersuchungen zur Optimierung bei instationärer Belastung unter Beachtung von Restriktionen bezüglich auftretender Spannungen sind bisher nur für Stäbe von ULLENBOOM [13] und für Rahmen von FENG/ARORA/HAUG [14] und VENKYIA/KHOT [15] durchgeführt worden. Hierbei treten Beschränkungen im Zustandsraum auf, die im allgemeinen nichtlinear sind und implizit von den jeweiligen Entwurfsvariablen abhängen.

## 1.2 Ein beschränktes, nichtlineares Parameteroptimierungsproblem

Durch Unterteilung der homogenen, isotropen Platte in  $N$  ringförmige Streifen mit jeweils konstanter Dicke  $h$  läßt sich die in 1.1 angeführte Problemstellung in folgendes Parameteroptimierungsproblem mit dem Volumen der Platte als zu minimierende Zielfunktion überführen:

$$\text{Minimiere} \quad V = \underline{c}^T \underline{h} \quad (1.2.1)$$

unter Beachtung der Restriktionen

$$h_i \geq h_{\min} \quad i = 1 (1) N \quad (1.2.2)$$

$$\text{und} \quad \sigma_i \leq \sigma_{\text{zul}} \quad i = 1 (1) N \quad (1.2.3)$$

Die Konstanten im Vektor  $\underline{c}$  ergeben sich hierbei aus der Wahl der Unterteilung.

Bei Betrachtung dieses Parameteroptimierungsproblems fällt folgendes auf:

- Die Zielfunktion  $V$  ist linear von den Entwurfsvariablen  $h_i$  abhängig. Das bedeutet, daß der Gradient bezüglich der Entwurfsvariablen unabhängig von der jeweils betrachteten Stelle im  $N$ -dimensionalen Entwurfsraum ist.
- Die Restriktionen (1.2.2) hängen explizit von den Waddicken  $h_i$  ab. Demgegenüber handelt es sich bei den Ungleichungen (1.2.3) um Beschränkungen für Zustandsgrößen, deren Abhängigkeit von den Entwurfsvariablen implizit und wie sich nachfolgend zeigt nicht-linear ist.

Daraus folgt, daß hier ein nichtlineares, beschränktes Parameteroptimierungsproblem zu lösen ist.

### 1.3 Aufbau und Schwerpunkte

Der erste von zwei Schwerpunkten dieser Arbeit ergibt sich aus der Abbildung 1.1.

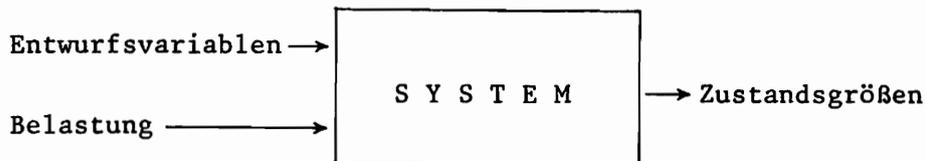


Abb. 1.1 Zur Bestimmung der Zustandsgrößen

Dieser Schwerpunkt befaßt sich mit der möglichst schnellen und genauen Bestimmung der Zustandsgrößen  $\sigma_i$  bei Vorgabe der Entwurfsvariablen  $h_i$  und der Belastung.

Man kann ihn in folgende Unterabschnitte unterteilen:

- Wahl eines geeigneten Plattenmodells und Herleitung der wichtigsten Beziehungen. (Kapitel 2)
- Numerische Lösung des erhaltenen partiellen Differentialgleichungssystems:
  - Ortsdiskretisierung mittels Finiter Elemente (Kapitel 3)
  - Lösung der sich ergebenden Schwingungsdifferentialgleichungen (Kapitel 4)

Anschließend behandelt der zweite Schwerpunkt die Suche nach einem den Besonderheiten der vorliegenden Aufgabenstellung angepaßten Lösungsverfahren für das Parameteroptimierungsproblem. Hierbei ist besonders zu beachten, daß die Bestimmung der Zustandsgrößen aufgrund der jeweils durchzuführenden Schwingungsanalyse rechenzeitintensiv ist.

Den vorgenannten Schwerpunkten folgen die Darstellung einiger Ergebnisse und die experimentelle Überprüfung anhand eines Belastungsfalles. Den Abschluß bilden eine Zusammenfassung der erhaltenen Erkenntnisse und ein Ausblick auf weitere mögliche Arbeiten.

## 2. Die Plattentheorie nach M I N D L I N

### 2.1 Allgemeines

Im Rahmen dieser Arbeit sollen transiente Schwingungsvorgänge untersucht werden, bei denen nicht nur die unteren, sondern auch die oberen Frequenzbereiche von Bedeutung sind. Dieses ist bei der Auswahl eines geeigneten Plattenmodells zu beachten.

Anhand eines Vergleiches der bei den unterschiedlichen Theorien auftretenden Dispersion (Abhängigkeit der Transversalwellengeschwindigkeit von der Wellenlänge) wird deutlich, aus welchem Grunde die Plattentheorie nach MINDLIN [16] angewendet wird, die ähnlich der Balkentheorie von TIMOSHENKO [17] die Einflüsse der Schubverformung und der Rotationsträgheit berücksichtigt. Zur Gegenüberstellung werden die Dispersionsbeziehungen der elementaren Theorie nach KIRCHHOFF [18] und der exakten Theorie für die unendliche Platte nach LAMB [19] und LORD RAYLEIGH [20] herangezogen.

Bei der Betrachtung der Darstellung der unterschiedlichen Dispersion in Abbildung 2.1 fällt auf, daß das Plattenmodell gemäß der elementaren Theorie für lange Wellen, d. h. wenn die Platte zu Schwingungen in ihren niedrigen Frequenzen angeregt wird, eine gute Übereinstimmung mit der exakten Theorie zeigt. Unter den Voraussetzungen der Theorie nach KIRCHHOFF ergibt sich jedoch eine lineare Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  vom Faktor  $(h/\lambda)$ . Diese Tatsache bewirkt, daß sich sehr kurze Wellen unendlich schnell in der Platte ausbreiten, was physikalisch unsinnig ist.

Demgegenüber ist im Rahmen der Zeichengenauigkeit kein Unterschied zwischen den Ergebnissen der Theorie nach MINDLIN und der exakten Theorie für den hier betrachteten Wellenlängenbereich zu erkennen.

Aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit ist für die exakte Theorie nur die niedrigste der unendlich vielen, durch Reflektion an den Grenzflächen entstehenden Lösungen dargestellt. Aus gleichem Grunde ist die sich aus der Theorie nach MINDLIN ergebende zweite Lösung nicht eingezeichnet.

Als ein weiterer interessanter Aspekt wird anhand Abbildung 2.1 noch deutlich, daß dem Einfluß der Schubdeformation weitaus größere Bedeutung als dem Einfluß der Rotationsträgheiten zukommt.

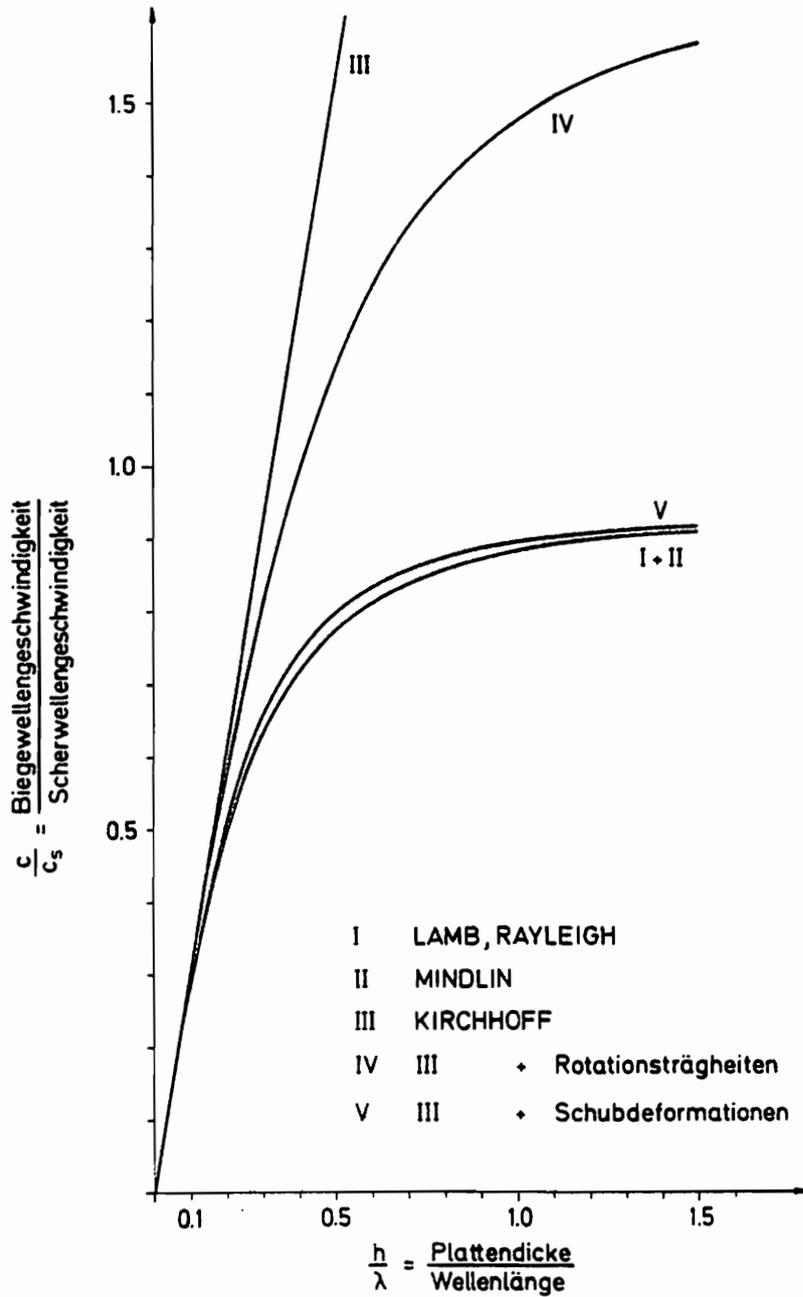


Abb. 2.1 Dispersion bei unterschiedlichen Theorien

## 2.2 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Den weiteren Betrachtungen liegen folgende Annahmen zugrunde:

- Der verwendete Werkstoff ist homogen und isotrop.  
Sein Verhalten gehorcht dem HOOKEschen Gesetz.
- Die betrachteten Formänderungen verlaufen isotherm.
- Die auftretenden Belastungen wirken senkrecht zur  
Plattenmittelebene.

Zusätzlich wird angenommen, daß bei den zu untersuchenden Problemen Auslenkungen auftreten, deren Größenordnung klein im Verhältnis zu den Plattenabmessungen ist. Aus diesem Grunde wird zur Beschreibung eine lineare Theorie verwendet, die bei der Berechnung der Verzerrungen nur lineare Verschiebungsanteile berücksichtigt.

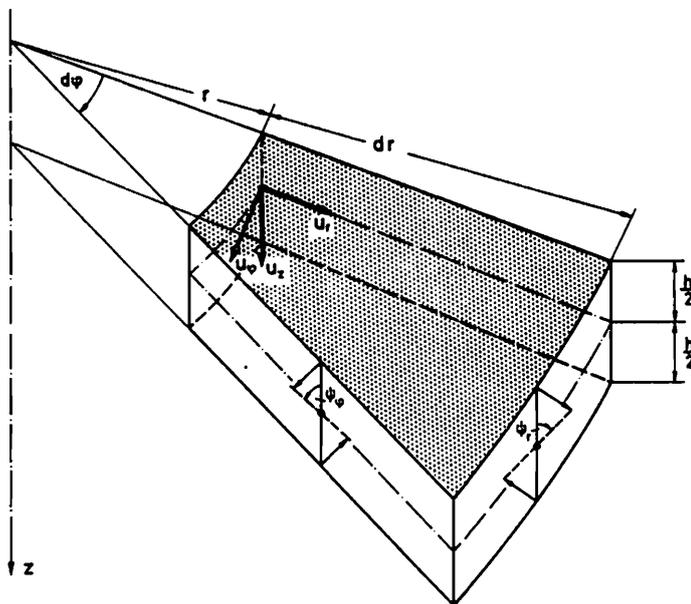


Abb. 2.2 Plattensegment

Die bisher gemachten Annahmen führen auf folgenden Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen, wobei zur Beschreibung der zu behandelnden axialsymmetrischen Probleme ein polares Koordinatensystem  $(r, \varphi, z)$  eingeführt wird. (Abb. 2.2)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{r\dot{r}} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} & \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} & \varepsilon_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right)\end{aligned}$$

(2.2.1)

MINDLIN [16] macht bei der Herleitung seiner Plattentheorie folgende zusätzliche Annahmen:

- Normalspannungen senkrecht zur Plattenmittelebene werden vernachlässigt.
- Die Plattenmittelebene bleibt in ihrer Ebene unverzerrt.
- Normalen zur Mittelebene vor der Deformation bleiben gerade, aber nicht unbedingt normal zur Mittelebene nach der Deformation.

KIRCHHOFF [18] verlangt dagegen in der elementaren Theorie, daß die Querschnitte eben und senkrecht zur Plattenmittelebene bleiben. Die Theorie nach REISSNER [21] unterscheidet sich von der MINDLINSchen Theorie dadurch, daß sie die Normalspannungen senkrecht zur Plattenmittelebene nicht vernachlässigt.

Aus den getroffenen Annahmen lassen sich folgende Ansätze für das Verschiebungsfeld ableiten:

M I N D L I N	K I R C H H O F F
$u_r = -z \psi_r (r, \varphi, t)$	$u_r = -z \frac{\partial w (r, \varphi, t)}{\partial r}$
$u_\varphi = -z \psi_\varphi (r, \varphi, t)$	$u_\varphi = -z \frac{1}{r} \frac{\partial w (r, \varphi, t)}{\partial \varphi}$
$u_z = w (r, \varphi, t)$	$u_z = w (r, \varphi, t)$
	(2.2.2)

$\psi_r$  bzw.  $\psi_\varphi$  ist dabei eine Rotation um die im betrachteten Punkt senkrecht zur rz- bzw.  $\varphi z$ -Ebene stehende Achse. (Abb. 2.2)

Aus den Ansätzen für das Verschiebungsfeld ergibt sich somit für die Verzerrungen:

M I N D L I N	K I R C H H O F F
$\epsilon_{rr} = -z \frac{\partial \psi_r}{\partial r}$	$\epsilon_{rr} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$
$\epsilon_{\varphi\varphi} = -z \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\psi_r}{r} \right\}$	$\epsilon_{\varphi\varphi} = -z \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \right\}$
$\epsilon_{zz} = 0$	$\epsilon_{zz} = 0$
$\epsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} z \left\{ -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \varphi} - \frac{\psi_\varphi}{\partial r} + \frac{\psi_\varphi}{r} \right\}$	$\epsilon_{r\varphi} = z \left\{ -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right\}$
$\epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left\{ -\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right\}$	$\epsilon_{rz} = 0$
$\epsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left\{ -\psi_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right\}$	$\epsilon_{\varphi z} = 0$ (2.2.3)

Mit Hilfe der über das HOOKEsche Gesetz zu bestimmenden Spannungen erhält man durch Aufintegration über die Plattendicke den Zusammenhang zwischen Schnittgrößen und Verschiebungen. (2.2.4)

M I N D L I N

$$M_{rr} = D \left\{ - \frac{\partial \psi_r}{\partial r} - \frac{\nu}{r} \left\{ \psi_r + \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \varphi} \right\} \right\}$$

$$M_{\varphi\varphi} = D \left\{ - \frac{1}{r} \left\{ \psi_r + \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \varphi} \right\} - \nu \frac{\partial \psi_r}{\partial r} \right\}$$

$$M_{r\varphi} = \frac{D}{2} (1-\nu) \left\{ - \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \psi_r}{\partial \varphi} - \psi_\varphi \right\} - \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial r} \right\}$$

$$Q_r = \kappa^2 G h \left\{ - \psi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right\}$$

$$Q_\varphi = \kappa^2 G h \left\{ - \psi_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right\}$$

mit  $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$

K I R C H H O F F

$$M_{rr} = D \left\{ - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r} \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right\} \right\}$$

$$M_{\varphi\varphi} = D \left\{ - \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right\} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\}$$

$$M_{r\varphi} = D (1-\nu) \left\{ - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right\}$$

$$Q_r = G h (0)$$

$$Q_\varphi = G h (0)$$

Plattensteifigkeit (2.2.4)

$\kappa^2$  ist hierbei ein Faktor zur Korrektur der aus der Annahme über das Verschiebungsfeld (2.2.2) folgenden Konstanzheit der Schubspannungen über der Plattendicke. Um die Ausbreitungsgeschwindigkeit von sehr kurzen Wellen mit den RAYLEIGH-Oberflächenwellen in Einklang zu bringen, berechnet MINDLIN [16]  $\kappa^2$  zu  $\pi^2/12$ . Dieser Wert liegt nahe an dem von REISSNER [21] verwendeten Wert 5/6.

Bei der Betrachtung der Schnittgrößen nach KIRCHHOFF erkennt man, daß die aus den Gleichgewichtsbedingungen zwingend erforderlichen, endlichen Werte für die Querkräfte  $Q_r$  und  $Q_\varphi$  nur zu erhalten sind, wenn Schubstarrheit (d.h.  $G \rightarrow \infty$ ) gefordert wird. Es zeigt sich also, daß die Querkräfte nach KIRCHHOFF nicht über das HOOKEsche Gesetz, sondern nur über Gleichgewichtsbetrachtungen als geometrische Reaktionskräfte des Modells auf die geometrischen Zwangsbedingungen ( $\frac{\partial w}{\partial r} = \psi_r$ ;  $\frac{\partial w}{r \partial \varphi} = \psi_\varphi$ ) berechnet werden können. (MARGUERRE [22])

An dieser Stelle sei ferner noch darauf hingewiesen, daß die Plattentheorie nach MINDLIN im Gegensatz zur elementaren Theorie drei ideale Randbedingungen liefert.

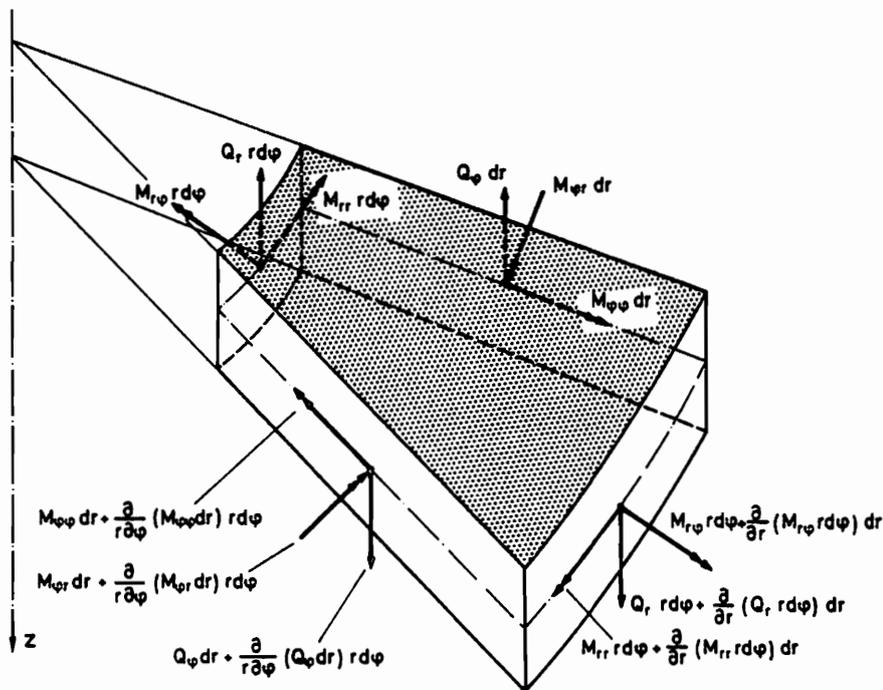


Abb. 2.3 Schnittgrößen am Plattensegment

Gleichgewichtsbetrachtungen am Plattensegment (Abb. 2.3) führen unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte und -momente nach dem Prinzip von D'ALEMBERT und unter Vernachlässigung der Dämpfung zu folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial M_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{M_{rr} - M_{\varphi\varphi}}{r} - Q_r = - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} M_{r\varphi} - Q_\varphi = - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_\varphi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{Q_r}{r} + p(r, \varphi, t) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(2.2.5)

$p$  ist dabei eine senkrecht zur Plattenmittelebene wirkende Flächenbelastung.

Bis zu dieser Stelle sind noch keine Annahmen über die hier vorliegende Rotationssymmetrie getroffen worden. Betrachtet man diesen Sonderfall, so entfällt die Abhängigkeit vom Umfangswinkel  $\varphi$  und die Verdrehung  $\psi_\varphi$  ist identisch Null. Aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit wird in nachfolgenden Gleichungen  $\psi_r = \psi$  gesetzt.

Setzt man die Gleichungen (2.2.4) in die Bewegungsgleichungen (2.2.5) ein, so erhält man partielle, hyperbolische Differentialgleichungen, deren geschlossene Lösung unter Berücksichtigung der Rand- und Anfangsbedingungen und eines beliebig veränderlichen Querschnittsverlaufes im allgemeinen nicht möglich ist.

Bevor in den Kapiteln 3 und 4 ein Weg zur numerischen Lösung für beliebig veränderlichen Dickenverlauf beschrieben wird, schließen sich im nachfolgenden Teil dieses Kapitels Betrachtungen zum Unterschied der Theorien nach MINDLIN und KIRCHHOFF und zum Einfluß des zeitlichen Verlaufes des Impulses anhand der analytischen Lösung für die Kreisplatte gleicher Dicke an.

Hierfür erhält man nach einigen Umformungen folgende partielle Differentialgleichung, die sich von der Theorie nach KIRCHHOFF durch die Terme infolge der Berücksichtigung von Schubdeformation und Rotationsträgheit unterscheidet:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\Delta \Delta w(r,t) + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial t^2} - \frac{p(r,t)}{D}}_{\text{elementare Theorie}} \quad - \quad \underbrace{\frac{\rho}{\kappa^2 G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w(r,t)}_{\text{Einfluß der Schubdeformation}} \\
 & - \underbrace{\frac{\rho h}{12D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta w(r,t)}_{\text{Einfluß der Rotationsträgheit}} \quad + \quad \underbrace{\frac{\rho}{\kappa^2 G} \frac{\rho h^3}{12D} \frac{\partial^4 w(r,t)}{\partial t^4}}_{\text{Kombinierter Einfluß aus Schubdeformation und Rotationsträgheit}} = 0
 \end{aligned}$$

(2.2.6)

### 2.3 Die eingespannte Kreisplatte gleicher Dicke

Anhand der am Außenrand eingespannten Kreisplatte mit dem Außenradius  $R$  und der Plattendicke  $h$  werden weitere Betrachtungen zum dynamischen Lösungsverhalten der Theorien nach MINDLIN und KIRCHHOFF angestellt.

Hierzu werden folgende dimensionslose Größen eingeführt:

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{r}{R} && \text{Ortskoordinate} \\
 \tau &= \frac{t}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho (1 - \nu^2)}} && \text{Zeit} \\
 \Omega &= \omega \cdot R \sqrt{\frac{\rho (1 - \nu^2)}{E}} && \text{Frequenz} \\
 W &= \frac{w}{R} && \text{Durchbiegung} \\
 k^2 &= \frac{(1 - \nu)}{2} \cdot \kappa^2 && \text{Faktor zur Schubsteifigkeit} \\
 \alpha^2 &= \frac{1}{12} \cdot \left( \frac{h}{R} \right)^2 && \text{Faktor zur Rotationsträgheit}
 \end{aligned}$$

(2.3.1)

Als Lösungsansatz für die Bewegungsgleichungen wird entsprechend REISSMANN [23]

$$\begin{aligned}
 W(\xi, \tau) &= W_s(\xi, \tau) + \sum_i W_i(\xi) \cdot q_i(\tau) \\
 \psi(\xi, \tau) &= \psi_s(\xi, \tau) + \sum_i \psi_i(\xi) \cdot q_i(\tau)
 \end{aligned}$$

gewählt.

(2.3.2)

Hierbei sind  $W_i$  und  $\psi_i$  die zu dem Problem gehörenden Eigenfunktionen,  $q_i$  die generalisierten Koordinaten und  $W_s$  und  $\psi_s$  die "statischen" Lösungen der Bewegungsgleichungen unter Vernachlässigung der Trägheitsterme. Die exakte analytische Lösung verlangt die Berücksichtigung von unendlich vielen Eigenfunktionen. Bei der folgenden numerischen Behandlung ist es natürlich nur möglich, eine endliche Anzahl von Eigenfunktionen zu bestimmen.

Die zu den Bewegungsgleichungen (2.2.5) gehörenden Eigenfunktionen haben bei Betrachtung des rotationssymmetrischen Falles für die Eigenfrequenzen  $\Omega_i$  folgende Form:

$$W_i(\xi) = A_{1i} J_0(D_{1i} \cdot \xi) + A_{2i} J_0(D_{2i} \cdot \xi) + A_{3i} Y_0(D_{1i} \cdot \xi) + A_{4i} Y_0(D_{2i} \cdot \xi)$$

$$\begin{aligned} \psi_i(\xi) = & D_{1i}(C_{1i} - 1) \left[ A_{1i} J_1(D_{1i} \cdot \xi) + A_{3i} Y_1(D_{1i} \cdot \xi) \right] \\ & + D_{2i}(C_{2i} - 1) \left[ A_{2i} J_1(D_{2i} \cdot \xi) + A_{4i} Y_1(D_{2i} \cdot \xi) \right] \end{aligned}$$

mit	$J_0, J_1$	Besselfunktion der 1. Art
	$Y_0, Y_1$	Besselfunktion der 2. Art
	$A_{ki} \ (k = 1,4)$	aus den jeweiligen Randbedingungen zu bestimmende Konstanten

$$C_{1i}, C_{2i} = (D_{2i}^2, D_{1i}^2) \cdot \left( \Omega_i^2 - \frac{k^2}{\alpha^2} \right)^{-1}$$

$$D_{1i}^2, D_{2i}^2 = -\frac{\Omega_i^2}{2} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{k^2} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^2 + \frac{4}{\alpha^2 \Omega_i^2}} \right]$$

(2.3.3)

Außerdem erfüllen die Eigenfunktionen die Orthogonalitäts- und Normalitätsbedingungen:

$$\int_0^1 (W_i \cdot W_k + \alpha^2 \psi_i \cdot \psi_k) \xi d\xi = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} \quad (2.3.4)$$

### 2.3.1 Frequenzspektrum

Für den Fall der eingespannten Kreisplatte erhält man zur Bestimmung der Eigenfrequenzen  $\Omega_i$  aus den zu erfüllenden Randbedingungen folgende Koeffizientendeterminante, deren Wert für die jeweiligen Eigenfrequenzen verschwindet:

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} J_0(D_{1i}) & J_0(D_{2i}) \\ D_{1i} (C_{1i} - 1) J_1(D_{1i}) & D_{2i} (C_{2i} - 1) J_1(D_{2i}) \end{vmatrix} \quad (2.3.5)$$

Die hierzu erforderliche Berechnung der Besselfunktionen erfolgt mit Hilfe von Polynomapproximationen nach ABRAMOWITZ/STEGUN [24].

Das so erhaltene Frequenzspektrum ist in Abbildung 2.4 dargestellt und wird dort den Ergebnissen der klassischen Theorie nach KIRCHHOFF gegenübergestellt.

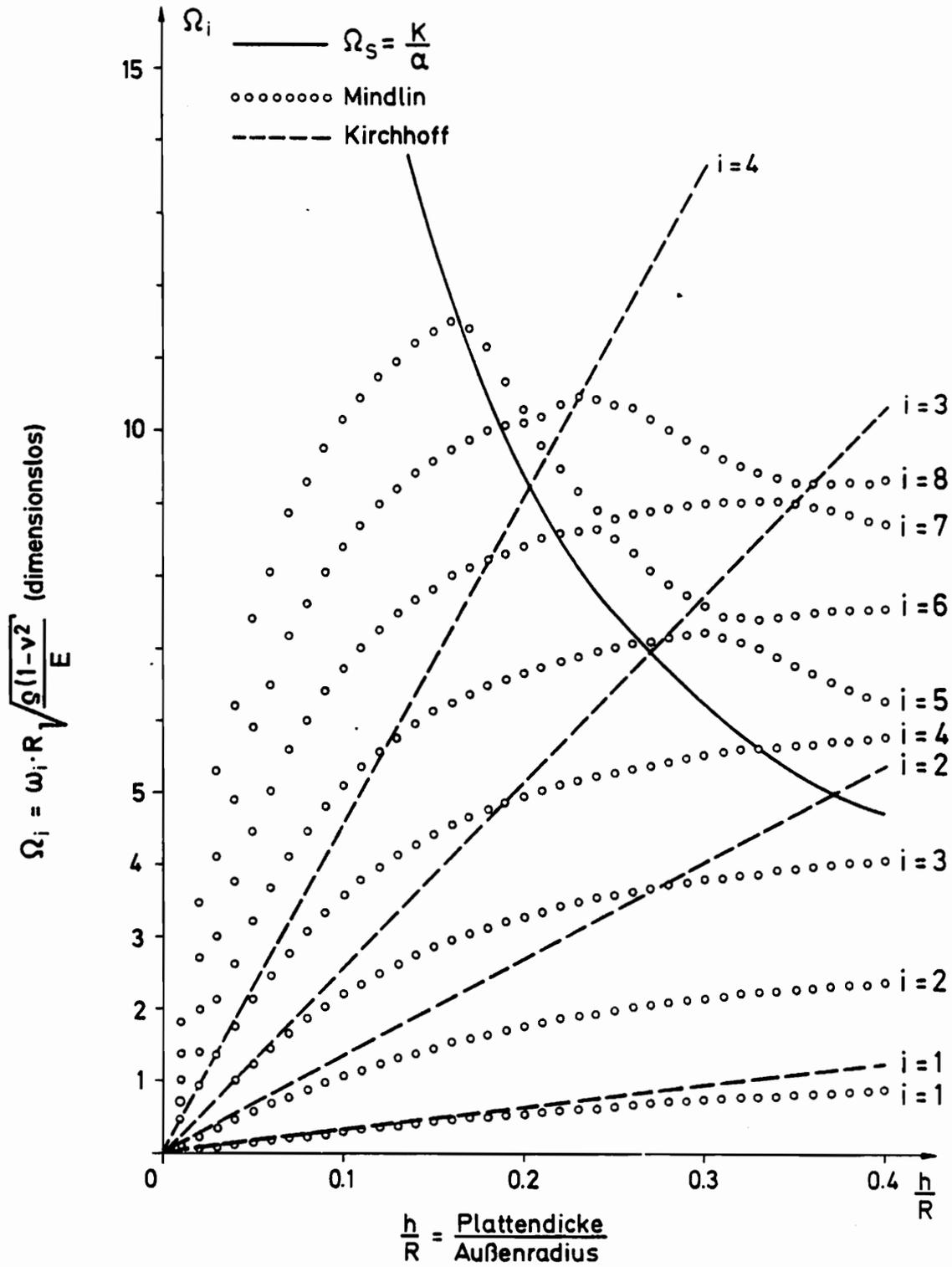


Abb. 2.4 Frequenzspektrum

Folgendes fällt beim Vergleich der Ergebnisse auf:

- Im Gegensatz zur Theorie nach MINDLIN sind die Eigenfrequenzen gemäß der KIRCHHOFF-Theorie linear von der Plattendicke abhängig.
- Die entsprechenden Eigenfrequenzen nach MINDLIN sind immer niedriger als die nach der klassischen Theorie. Die Abweichungen nehmen mit größer werdender Plattendicke und steigender Frequenz schnell zu.
- Die Eigenfrequenzen liegen bei der Beschreibung mit Hilfe der MINDLINSchen Theorie enger zusammen.
- Oberhalb der Frequenz  $\Omega_s$ , die zur 1. Eigenform der Scherwellen für die unendliche Platte gehört, ändern sich die Kurvenverläufe für die MINDLIN-Theorie. So ist hier stellenweise ein Abfall der Eigenfrequenz mit zunehmender Plattendicke zu beobachten.

In Abbildung 2.5 wird anhand der 5. Eigenform (W) der Anteil der Biegeverformung ( $\psi$ ) und der Schubdeformation ( $\frac{dw}{dr} - \psi$ ) qualitativ dargestellt. Dabei ist zu erkennen, daß mit zunehmender Plattendicke der Anteil der Schubdeformation größer als der der Biegeverformung wird.

Bei noch größer werdender Plattendicke ist eine die Eigenformen (z. B. Knotenzahl) beeinflussende Veränderung der Phasenlage der Anteile aus Schub- und Biegeverformung zu beobachten.

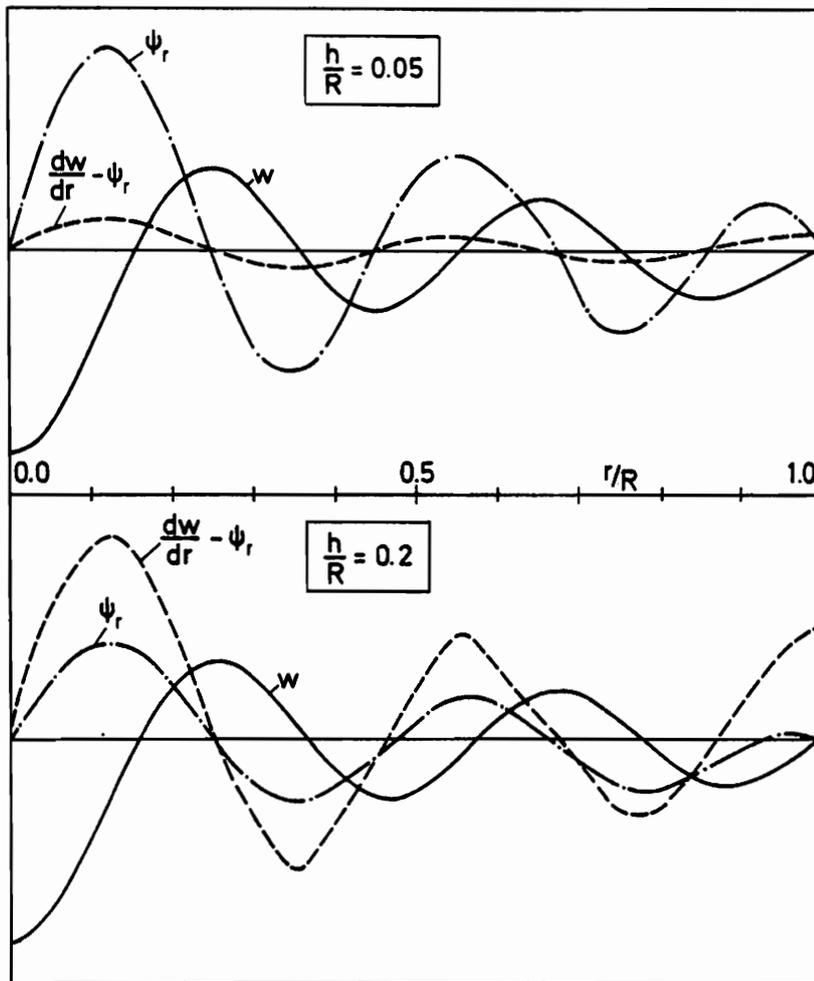


Abb. 2.5 Anteil von Schub- und Biegeverformung

### 2.3.2 Einfluß von Impulsform und -dauer auf die Systemantwort

Dieser Abschnitt versucht am Beispiel der eingespannten Kreisplatte gleicher Dicke unter über den Radius konstanter, zeitlich veränderlicher Flächenbelastung  $p(t)$  den Einfluß von Impulsform und -dauer deutlich zu machen. Die nötigen Berechnungen erfolgen mit Hilfe des Modalansatzes (2.3.2), wobei die 25 unteren Eigenfrequenzen berücksichtigt werden. Bei den in den Diagrammen dargestellten Verläufen handelt es sich jeweils um die Systemantwort in der Plattenmitte.

#### 2.3.2.1 Unterschiedliche Impulsformen

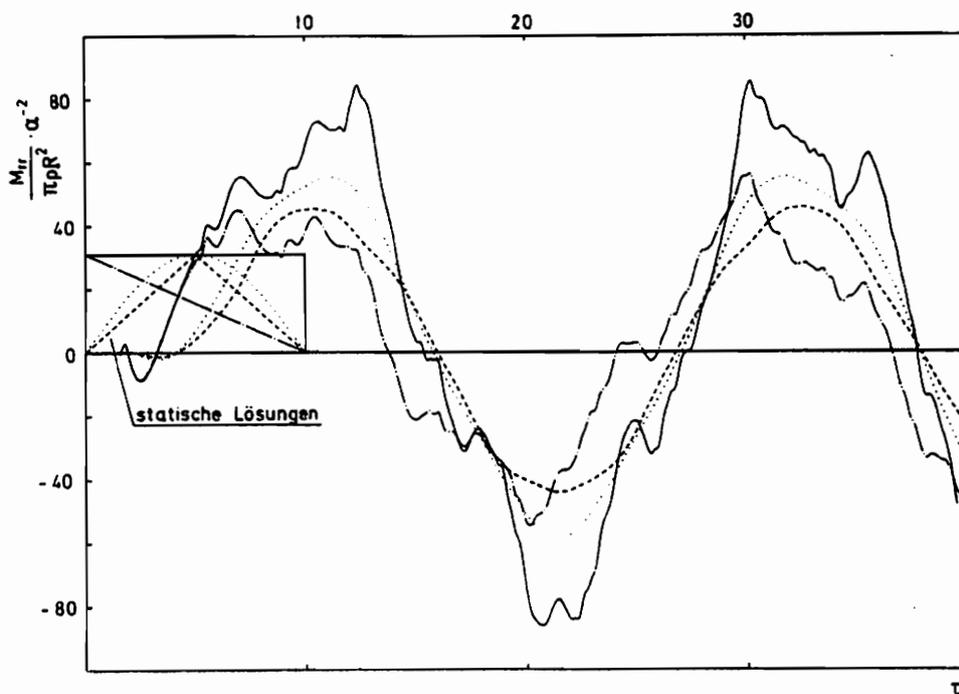


Abb. 2.6 Systemantwort auf unterschiedliche Impulse

Anhand der in Abbildung 2.6 dargestellten Abhängigkeit des Biegemomentenverlaufes von der Impulsform fallen folgende Aspekte auf:

- Bei sprungförmigen Belastungen treten in der Systemantwort höherfrequente Anteile auf als z. B. bei der Halbsinusbelastung.

- Der symmetrische Dreiecksimpuls liefert eine recht gutartige Lösung. Hierzu ist anzumerken, daß bei dieser Impulsform die Bedeutung höherer Frequenzen zunimmt, wenn man die Flankensteigung erhöht.
- Der Rechteckimpuls liefert bei gleichem Impulsmaximum und gleicher Impulsdauer im Vergleich zu den anderen Impulsformen die Höchstwerte und stellt somit die härteste Erregung dar. Er kann als Extremfall für reale Belastungen angesehen werden, deren Zeitverläufe geneigte Flanken haben.
- Für das betrachtete Plattenmodell kann man nicht wie für den Einmassenschwinger (CLOUGH/PENZIEN [ 25 ]) sagen, daß die dynamische Systemantwort bei impulsförmiger Belastung höchstens doppelt so groß wie die bei gleichgroßer statischer Belastung ist.

Zu dem zuletzt angeführten Punkt ist zu sagen, daß sich die gesamte Schwingungsantwort der Platte aus der Überlagerung der Anteile der angeregten Eigenformen ergibt. Dabei erhält man für jede Eigenform bei plötzlicher Belastung höchstens eine Verdoppelung des infolge einer gleichgroßen statischen Belastung erhaltenen Anteils. Die Maximalwerte der einzelnen Eigenformen werden jedoch aufgrund der transzendenten Werte der Eigenfrequenzen  $\omega_1$  im allgemeinen nicht gleichzeitig erreicht. Aus diesem Grunde kann für die Platte (Vielmassenschwinger) kein einfacher Zusammenhang zwischen maximalen dynamischen Beanspruchungen und den statischen Beanspruchungen eines scheinbar vergleichbaren Belastungsfalles aufgezeigt werden.

### 2.3.2.2 Variation der Impulsdauer

Anhand der Fouriertransformation für den Rechteckimpuls verschiedener Länge (Abbildung 2.7) wird deutlich, wie der Anteil höherer Frequenzen bei abnehmender Impulsdauer zunimmt. Mit kleiner werdender Impulsdauer wächst somit auch der Anteil der höheren Eigenformen innerhalb der Systemantwort der Platte.

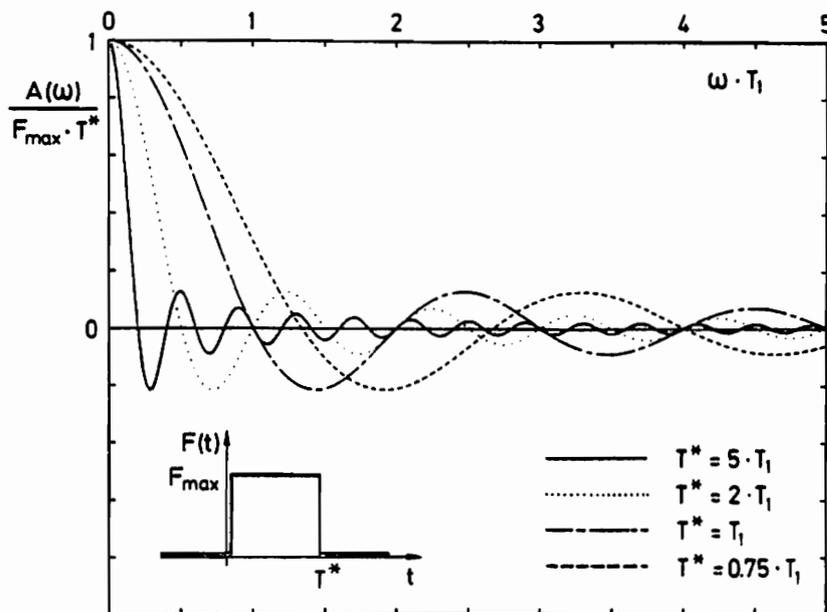


Abb. 2.7 Fouriertransformation für den Rechteckimpuls

Dieser Aspekt wird anhand des zeitlichen Verlaufes der Durchbiegung und des Biegemomentes in der Plattenmitte für eine Sprungbelastung bzw. einen Rechteckimpuls mit geringer Impulsdauer in den Abbildungen 2.8 und 2.9 aufgezeigt. Der Deutlichkeit halber sind für die 3 ersten Eigenformen die Anteile an der jeweiligen Systemantwort dargestellt.

Zusammenfassend ist folgendes zu sagen:

- Je kürzer die Impulse sind, desto größer ist die Bedeutung der höherfrequenten Anteile.
- Der Einfluß der höheren Eigenformen ist bei der Darstellung der Kräfte und Momente größer als bei der Verschiebungsgrößen-darstellung. Dieses ergibt sich zwangsläufig aus dem Zusammenhang zwischen Kraft- und Beschleunigungsgrößen.

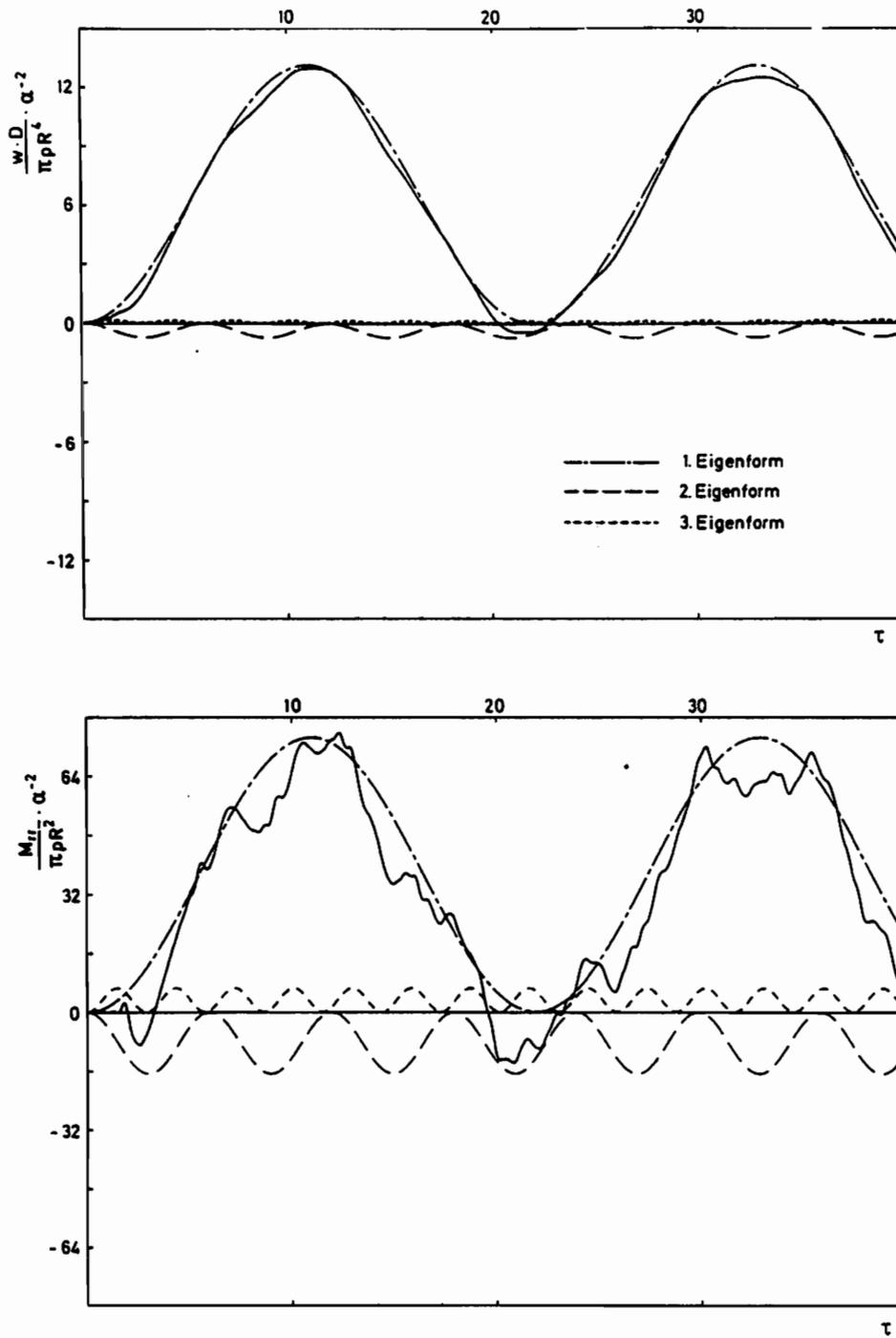


Abb. 2.8 Systemantwort bei einer sprungförmig ansteigenden Flächenlast

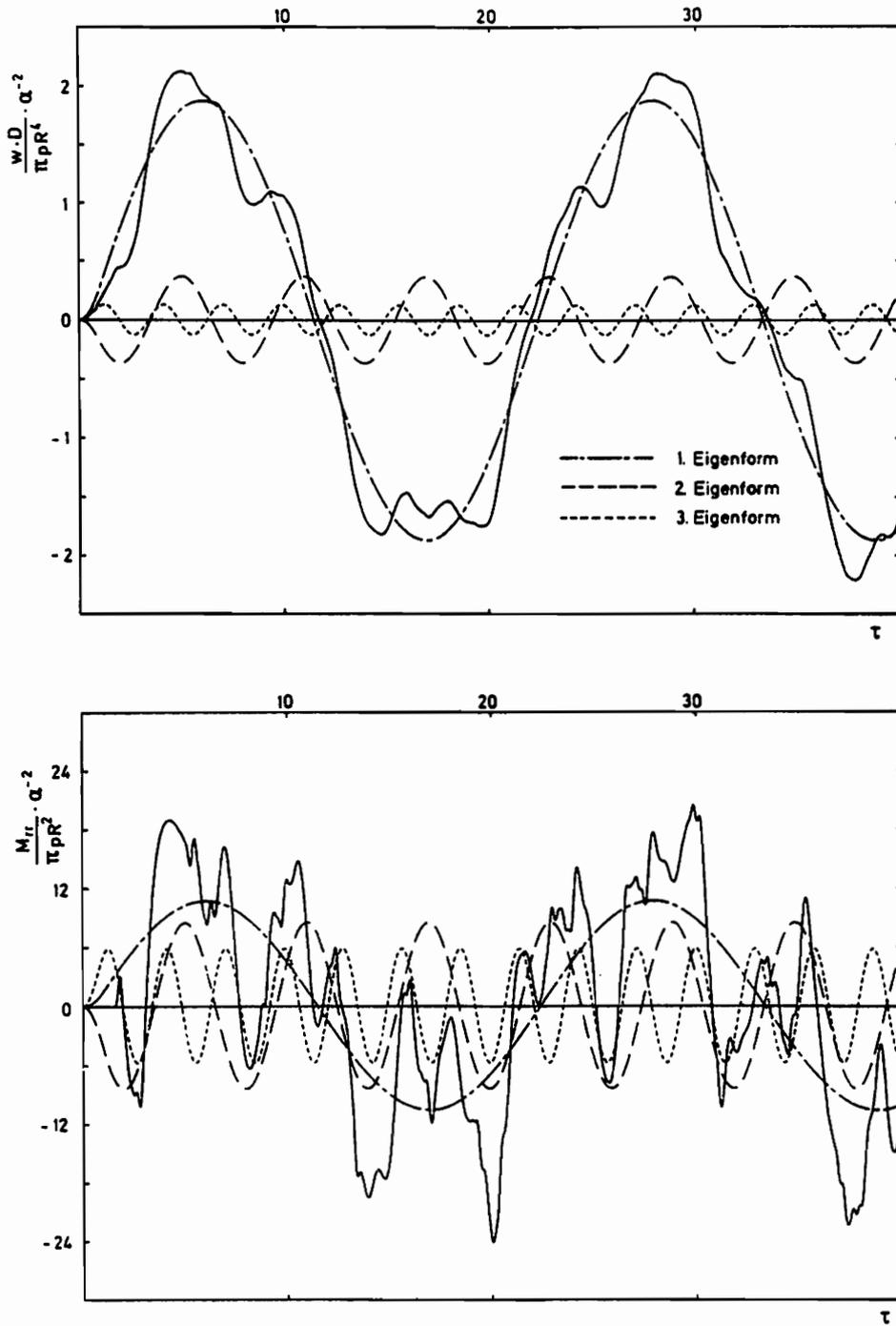


Abb. 2.9 Systemantwort bei Rechteckimpuls ( $\tau = 1$ )

### 3. Ortsdiskretisierung mit der Finite-Element-Methode

#### 3.1 Allgemeines

Die analytischen Betrachtungen im vorangegangenen Abschnitt führen auf partielle hyperbolische Differentialgleichungen, die für einen beliebigen Querschnittsverlauf der Platte nicht mehr geschlossen lösbar sind. Aus diesem Grunde wird die Lösung dieser Differentialgleichungen numerisch angegangen.

Mit dem ersten Schritt der numerischen Lösung, der Ortsdiskretisierung, befaßt sich dieser Abschnitt. Als Verfahren bietet sich hierfür die Finite-Element-Methode an, die in den letzten zwei Jahrzehnten mit der fortschreitenden Entwicklung der Rechanlagen an Bedeutung gewonnen hat und deren Anwendungsmöglichkeiten im Bereich der Ingenieurwissenschaften immer mehr zunehmen. Weitere mögliche Verfahren sind u. a. das Differenzenverfahren und das Übertragungsmatrizenverfahren (PESTEL/LECKIE [26]).

Über die Grundlagen der Finite-Element-Methode ist ein reichhaltiges Literaturangebot vorhanden. Hier sei unter vielen anderen auf die Standardwerke von ZIENKIEWICZ [27] und GALLAGHER [28] verwiesen. Ferner sind die Bücher von DANKERT [29], BATHE/WILSON [30] und WALLER/KRINGS [31] zu erwähnen, die sich in erster Linie mit den numerischen Problemen befassen, die bei Anwendung der Finite-Element-Methode auf mechanische Systeme auftreten.

In diesem Kapitel wird ein Finites Element aufgestellt, das mit möglichst geringem Aufwand bezüglich Speicherplatzbedarf und Freiheitsgraden die zu behandelnden Probleme hinreichend genau beschreiben kann.

### 3.2 Aufstellen der Elementmatrizen mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit

Zur Diskretisierung bezüglich der Ortskoordinate wird die Platte in ringförmige Streifen mit jeweils konstanter Dicke aufgeteilt. Abbildung 3.1 zeigt einen solchen Plattenstreifen unter einer Flächenbelastung  $p$  mit den dazugehörigen Randschnittgrößen.

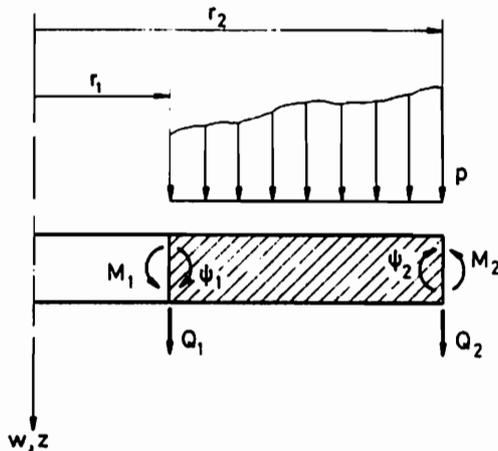


Abb. 3.1 Plattenstreifen unter Flächenbelastung

Für diesen Plattenstreifen setzt sich die Formänderungsarbeit unter den Annahmen der MINDLIN-Theorie aus den Anteilen infolge Biege- und Schubverformung wie folgt zusammen:

$$\Phi = \frac{1}{2} 2\pi \int_{r_2}^{r_1} D \left\{ \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \right]^2 + 2 \nu \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\psi}{r} + \left[ \frac{\psi}{r} \right]^2 \right\} r \, dr$$

Anteil der Biegeverformung

$$+ \frac{1}{2} 2\pi \int_{r_2}^{r_1} \kappa^2 G h \left\{ \psi^2 - 2 \cdot \psi \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \right]^2 \right\} r \, dr$$

Anteil der Schubverformung

(3.2.1)

Die Arbeit der äußeren Kräfte ergibt sich zu

$$A^a = 2\pi \int_{r_2}^{r_1} p \cdot w \, r \, dr + 2\pi \cdot ( Q_1 r_1 w_1 + Q_2 r_2 w_2 - M_1 r_1 \psi_1 - M_2 r_2 \psi_2 )$$

Flächenbelastung Randkräfte

(3.2.2)

Nach diesen Vorüberlegungen wird das Prinzip der virtuellen Arbeit [32] angewandt. Dieses Prinzip besagt, daß bei einem Körper im Gleichgewichtszustand die Arbeit der eingepprägten Kräfte für jede infinitesimale Variation der Systemkonfiguration verschwindet, die mit den gegebenen kinematischen Restriktionen verträglich ist. Das in dieser Form für einen statischen Gleichgewichtszustand definierte Prinzip läßt sich auf ein dynamisches Gleichgewicht erweitern, indem man nach dem Prinzip von D'ALEMBERT die Arbeit der Trägheitskräfte und -momente berücksichtigt.

$$\begin{aligned}
 & 2\pi \int_{r_1}^r \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} \delta \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} \right\} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial r} \delta \left\{ \frac{\psi}{r} \right\} + \nu \frac{\psi}{r} \delta \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial r} \right\} + \frac{\psi}{r} \delta \left\{ \frac{\psi}{r} \right\} \right\} r \, dr \\
 & + 2\pi \int_{r_1}^r \kappa^2 G h \left\{ \psi \delta \psi - \psi \delta \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} \right\} - \frac{\partial w}{\partial r} \delta \psi + \frac{\partial w}{\partial r} \delta \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} \right\} \right\} r \, dr \\
 & = 2\pi \int_{r_1}^r p \delta w \, r \, dr + 2\pi (Q_1 r_1 \delta w_1 + Q_2 r_2 \delta w_2 - M_1 r_1 \delta \psi_1 - M_2 r_2 \delta \psi_2) \\
 & + 2\pi \int_{r_1}^r \left\{ -\frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right\} \delta \psi \, r \, dr + 2\pi \int_{r_1}^r \left\{ -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right\} \delta w \, r \, dr
 \end{aligned}$$

(3.2.3)

In den zugrunde liegenden Funktionalen treten die Verschiebungen  $w$ , die Verdrehungen  $\psi$  und deren 1. partielle Ableitungen bezüglich des Ortes auf. Daher reicht es aus, daß bei der Wahl eines Elementtyps nur Stetigkeit für die Verschiebungen und Verdrehungen beim Übergang zu angrenzenden Elementen verlangt wird ( $C^0$ -Kontinuität). Fordert man Stetigkeit bis zur 1. Ortsableitung so macht man damit nicht nur eine Aussage über die Kontinuität von Verschiebungsgrößen, sondern auch von Kraftgrößen. Dieses führt zu Widersprüchen, wenn man z. B. Kräfte oder Momente an den Elementgrenzen einleitet.

An dieser Stelle ist zu erwähnen, daß bei Verwendung des Plattenmodells nach KIRCHHOFF die Durchbiegung  $w$  wegen der Zwangsbedingung ( $\psi = \frac{\partial w}{\partial r}$ ) bis zur 2. Ortsableitung im Ausdruck für die Formänderungsarbeit auftritt. Daher ist für diesen Fall von den zu wählenden Elementen  $C^1$ -Kontinuität, d. h. Stetigkeit für die Verschiebung  $w$  und deren 1. Ortsableitung beim Übergang zu angrenzenden Elementen, zu verlangen. Bei diesen Elementen läßt sich jedoch der Querkraftverlauf nicht aus den Ansatzfunktionen berechnen, da die Querkraft in diesem Falle von der 3. Ortsableitung abhängt.

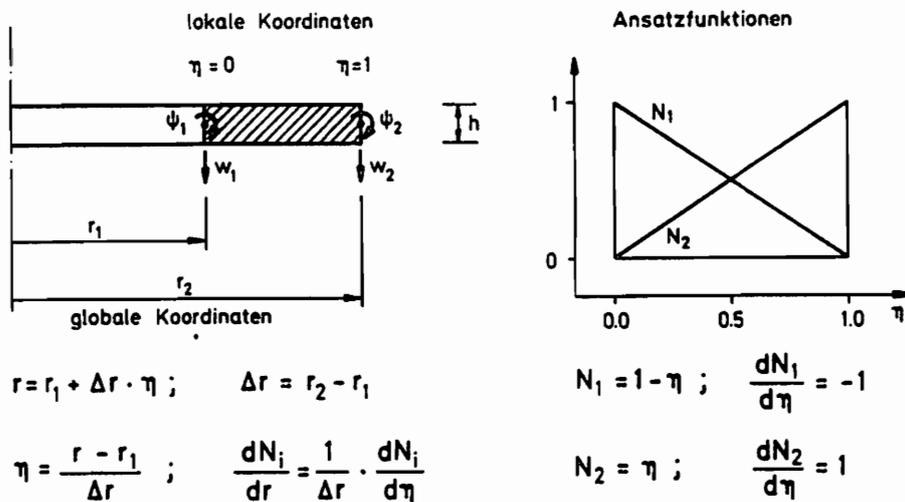


Abb. 3.2 2-Knotenringelement

Vorangegangene Forderungen bei Verwendung des Plattenmodells nach MINDLIN werden von dem in Abbildung 3.2 dargestellten Element mit linearen Ansatzfunktionen erfüllt. Für die Verschiebungsgrößen  $w$  und  $\psi$  werden hierbei über das Element folgende Ansätze in Abhängigkeit von den Knotenfreiheitsgraden gemacht

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} W(r,t) \\ \psi(r,t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_1(r) & 0 & N_2(r) & 0 \\ 0 & N_1(r) & 0 & N_2(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ \psi_1(t) \\ w_2(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} \\
 &= \underline{\underline{N}} \underline{\underline{x}}^e
 \end{aligned}
 \tag{3.2.4}$$

Setzt man diese Ansätze für  $w$  und  $\psi$  in Gleichung (3.2.3) ein, so erhält man aus der Bedingung, daß diese Gleichung für jede beliebige virtuelle, mit den kinematischen Restriktionen verträgliche Veränderung der Knotenfreiheitsgrade erfüllt sein muß, für das Element das folgende gewöhnliche Differentialgleichungssystem:

$$\underline{\underline{M}}^e \underline{\underline{\ddot{x}}}^e + \underline{\underline{K}}^e \underline{x}^e = \underline{F}^e + \underline{R}^e \quad (3.2.5)$$

mit den Vektoren  $\underline{x}^e$  und  $\underline{\underline{\ddot{x}}}^e$  für die Verschiebungen und Beschleunigungen in den einzelnen Elementfreiheitsgraden, der Elementmassenmatrix  $\underline{\underline{M}}^e$ , der Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{K}}^e$ , dem Elementbelastungsvektor  $\underline{F}^e$  und dem Vektor  $\underline{R}^e$  mit den unbekanntem Randschnittgrößen.

### 3.2.1 Elementsteifigkeitsmatrix

Für die Elementsteifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{K}}^e$  ergibt sich folgende Berechnungsvorschrift:

$$\underline{\underline{K}}^e = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} r dr$$

mit

$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{dN_1}{dr} & 0 & -\frac{dN_2}{dr} \\ 0 & -\frac{N_1}{r} & 0 & -\frac{N_2}{r} \\ \frac{dN_1}{dr} & -N_2 & \frac{dN_2}{dr} & -N_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\ S &= \kappa^2 G h \end{aligned}$$

(3.2.6)

### 3.2.2 Elementmassenmatrix

Die konsistente Massenmatrix  $\underline{\underline{M}}_k^e$  des verwendeten Elementes berechnet sich zu:

$$\underline{\underline{M}}_k^e = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \underline{\underline{N}}^T \underline{\underline{m}} \underline{\underline{N}} r dr$$

mit

$$\underline{\underline{m}} = \begin{bmatrix} \rho h & 0 \\ 0 & \frac{\rho h^3}{12} \end{bmatrix}$$

(3.2.7)

Die so aufgestellte Massenmatrix ist auch außerhalb der Hauptdiagonalen besetzt. Bei den weiteren numerischen Berechnungen, z. B. bei Matrizeninversionen, erweist es sich als vorteilhaft, mit einer nur auf der Hauptdiagonalen besetzten Massenmatrix, einer "lumped-mass" Matrix, zu rechnen.

Zur Berechnung der lumped-mass Matrix werden andere Ansatzfunktionen  $\bar{N}_1$  und  $\bar{N}_2$  eingeführt (Abbildung 3.3) [33].

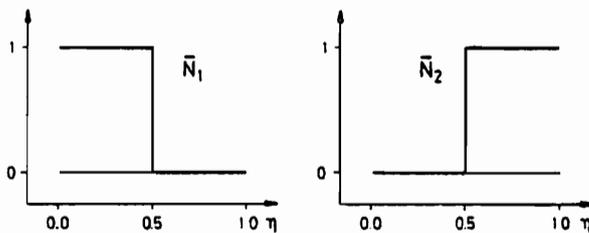


Abb. 3.3 Ansatzfunktionen zur Bestimmung der lumped-mass Matrix

Mit Hilfe dieser Ansatzfunktionen erhält man die lumped-mass Matrix aus folgender Formel:

$$\underline{\underline{M}}_L^e = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \underline{\underline{\bar{N}}}^T \underline{\underline{m}} \underline{\underline{\bar{N}}} r dr$$

(3.2.8)

$$\text{mit } \underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & 0 & \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 & 0 & \bar{N}_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{und } M_{ij}^e = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

Die Verwendung dieser lumped-mass Matrix anstelle der konsistenten Massenmatrix wird in Abschnitt 3.4.2 durch die dort angeführten Ergebnisse über das Konvergenzverhalten bei der Darstellung von Eigenfrequenzen und -formen gerechtfertigt.

### 3.2.3 Elementlastvektoren

- Vektor der äußeren Belastung:

$$\underline{F}^e = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \underline{\underline{N}}^T p r dr$$

$$\text{mit } \underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.2.9)

- Vektor der Randschnittgrößen:

$$\underline{R}^e = 2\pi \cdot \begin{bmatrix} Q_1 r_1 \\ -M_1 r_1 \\ Q_2 r_2 \\ -M_2 r_2 \end{bmatrix}$$

(3.2.10)

### 3.3 Differentialgleichungssystem der Gesamtstruktur

Der Zusammenbau der Elementmatrizen zu den Matrizen des Gesamtsystems erfolgt durch Einarbeiten der Übergangs- und Gleichgewichtsbedingungen zwischen den einzelnen Elementen und durch Berücksichtigung der Randbedingungen. Dabei fallen die unbekanntes Randschnittgrößen aus den Gleichungen heraus und als Unbekannte bleiben die Knotenfreiheitsgrade übrig. Als Ergebnis erhält man schließlich das gekoppelte Differentialgleichungssystem

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{K}} \underline{x} = \underline{F} , \quad (3.2.11)$$

auf dessen Lösung unter Beachtung der Anfangsbedingungen  $\underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0$  in Kapitel 4 eingegangen wird.

### 3.4 Konvergenzbetrachtungen

Um Aussagen über die Zuverlässigkeit des hergeleiteten Elementes machen zu können, wird das Konvergenzverhalten bei steigender Elementzahl, d. h. feiner werdender Diskretisierung, für einen statischen Belastungsfall und anhand der Berechnung von Eigenfrequenzen untersucht. Weitere Vergleiche der Elementrechnung mit analytischen Lösungen schließen sich in Kapitel 4 an. Dort wird die Lösung der Matrizendifferentialgleichung und die Suche nach den Maximalwerten der Zustandsgrößen (d. h. der Spannungen) beschrieben.

#### 3.4.1 Statische Belastung

Am Beispiel einer am Außenrand eingespannten und am Innenrand freien Kreisringplatte mit linear veränderlicher Dicke (Abb. 3.4.a) unter Flächenbelastung  $p$  wird das gegen die analytische Lösung [34] konvergierende Verhalten des hier verwendeten Elementes dargestellt.

An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, daß die Berechnung der Steifigkeitsmatrizen (Gl. 3.2.6) mit numerischer Integration nach GAUSS bei Berücksichtigung einer Stützstelle (Elementmitte) erfolgt. Diese numerische Integration bewirkt eine "Aufweichung" des durch die Finiten Elemente zu steif dargestellten Systems.

Abbildung 3.4.b zeigt den Lösungsverlauf für Durchbiegung, Biegemoment und Querkraft bei steigender Elementzahl im Vergleich zur analytischen Lösung. Bei den Ergebnissen für das Biegemoment und die Querkraft sind dabei die an den Stützstellen der Integration berechneten Werte eingezeichnet. Beim Übergang zwischen den Elementen erhält man Sprünge in den Kraftgrößen, die in der Wahl der hier verwendeten Ansatzfunktionen begründet sind. Beim Lösungsverlauf des Biegemomentes führt dabei die Mittelung der berechneten Werte aneinander grenzender Elemente zu guten Ergebnissen. Die Sprünge im Querkraftverlauf sind sinnvoll, da an den Elementgrenzen Kräfte eingeleitet werden.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß für Verschiebungs- und Kraftgrößen ein gutes Konvergenzverhalten gegen die analytische Lösung bei steigender Elementzahl zu erkennen ist.

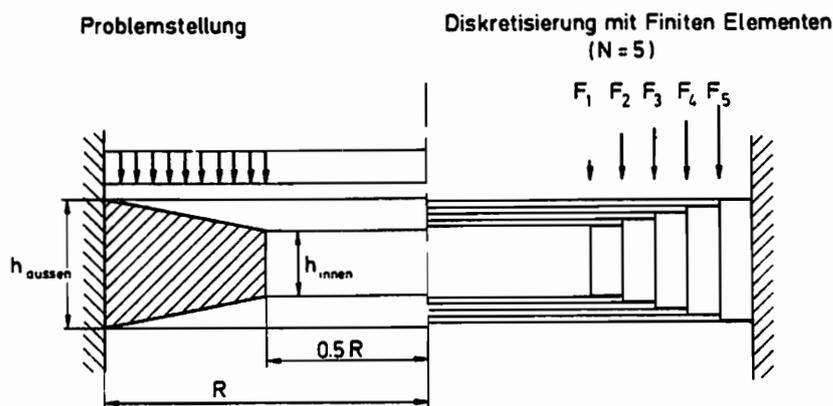


Abb. 3.4a Statischer Belastungsfall

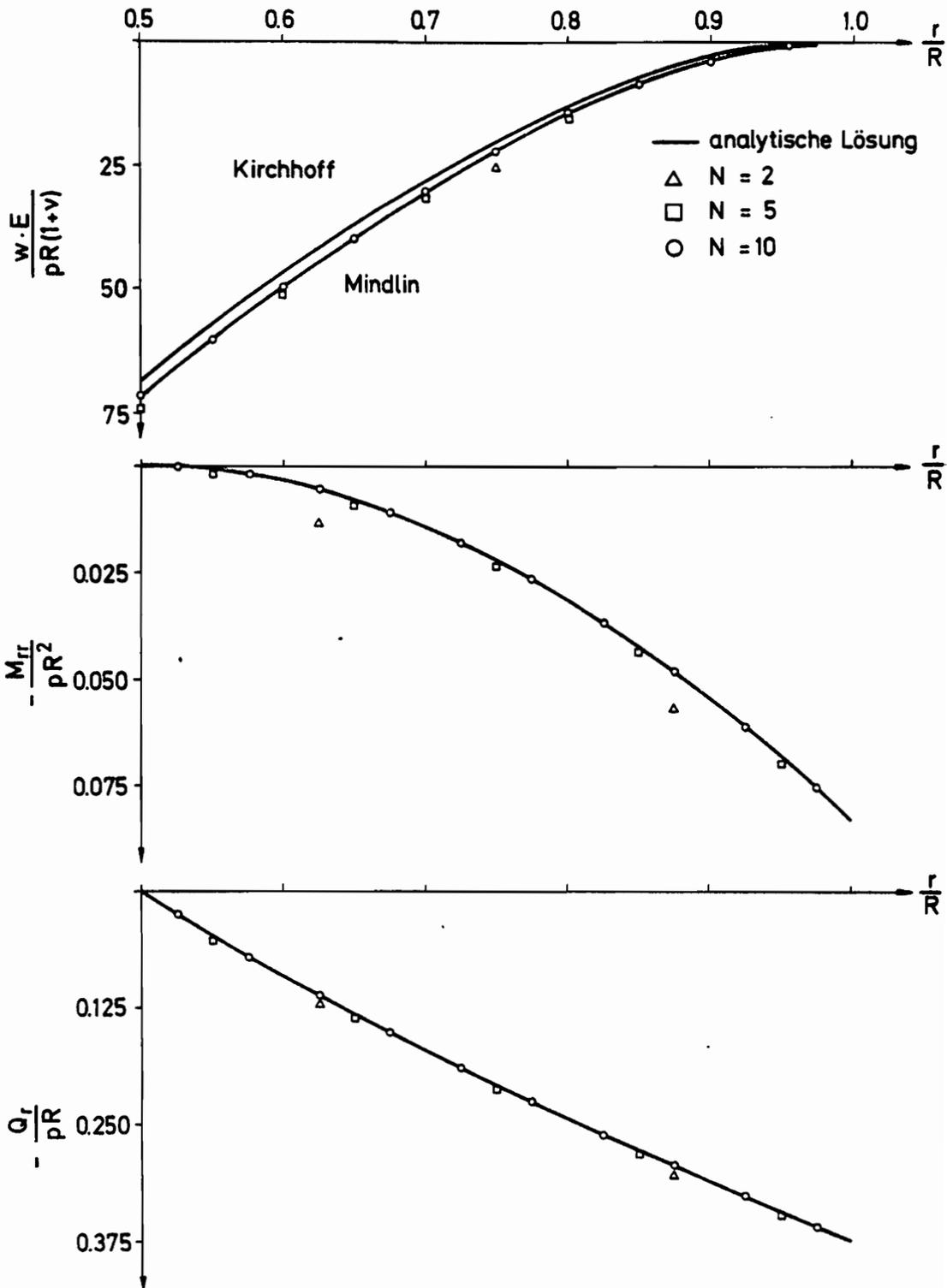


Abb. 3.4b Konvergenzverhalten

### 3.4.2 Eigenfrequenzen, Eigenformen

Das Konvergenzverhalten des hier verwendeten Elementes bei der Darstellung der Eigenfrequenzen des Plattenmodells zeigt Abbildung 3.5. Hierbei werden beispielhaft für die 1. und 5. Eigenfrequenz die Fehler gegenüber der analytischen Lösung (Kapitel 2) bei steigender Zahl der Elementfreiheitsgrade aufgetragen.

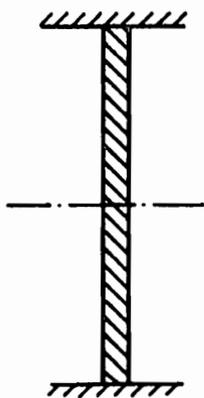
Zum Vergleich werden Ergebnisse herangezogen, die man bei der Verwendung eines 3-Knoten-Ringelementes mit quadratischen Ansatzfunktionen [35] erhält.

Die Berechnung der Eigenfrequenzen erfolgt mit Hilfe des Computerprogrammes "SSPACE", das die Methode der sogenannten simultanen Vektoriteration ("subspace iteration") verwendet. [30]

Bei der Betrachtung der erhaltenen Ergebnisse fällt folgendes auf:

- Zur Darstellung höherer Eigenfrequenzen ist wie erwartet eine höhere Anzahl von Freiheitsgraden im Elementmodell notwendig.
- Das hergeleitete 2-Knoten-Ringelement liefert bessere Ergebnisse als das 3-Knoten-Ringelement mit den komplizierteren quadratischen Ansatzfunktionen.
- Die Verwendung von lumped-mass Matrizen erhöht die Konvergenz bei den hier betrachteten Elementen.

Diese Aspekte führen dazu, daß bei den nachfolgenden Berechnungen das 2-Knoten-Ringelement mit lumped-mass Matrix verwendet wird.



- 2-Knotenelement mit "lumped-mass" Matrix
- △ 3-Knotenelement mit "lumped-mass" Matrix
- 2-Knotenelement mit konsistenter Massenmatrix
- x 3-Knotenelement mit konsistenter Massenmatrix

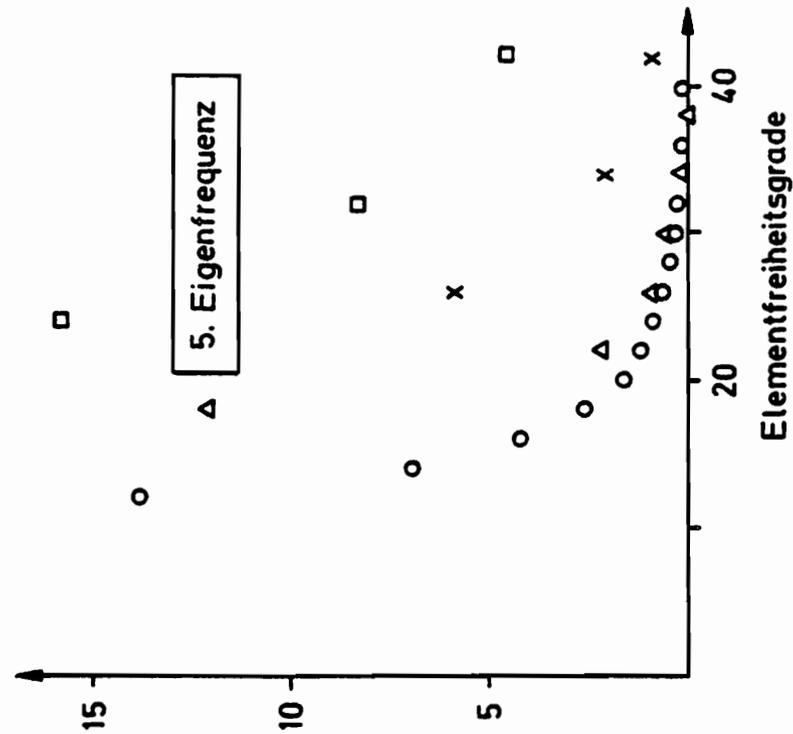
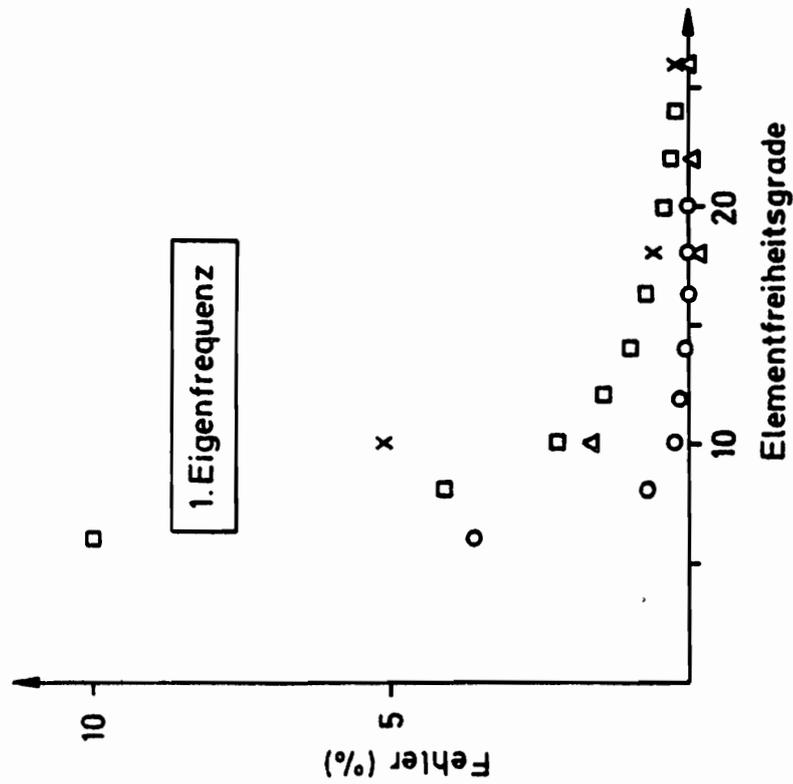


Abb. 3.5 Konvergenzverhalten bei der Darstellung von Eigenfrequenzen

Zweifel an der Güte von Elementmodellen mit lumped-mass Matrizen bei der Darstellung von Eigenformen [36] werden für das hier verwendete Element anhand von Abbildung 3.6 entkräftet. Auf dieser Abbildung werden für die 1. und 5. Eigenform den Ergebnissen bei Verwendung des Elementmodells die analytischen Lösungen aus Kapitel 2 gegenübergestellt.

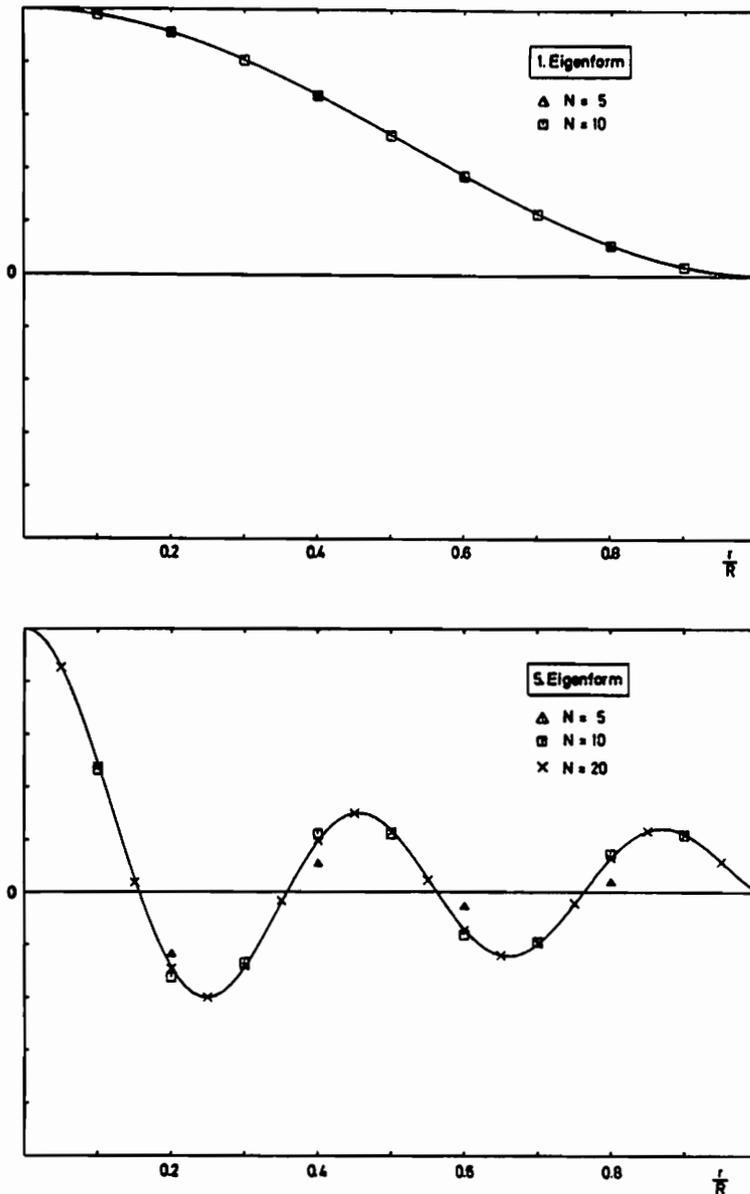


Abb. 3.6 Darstellung von Eigenformen

### 3.5 Zur Abspeicherung der Matrizen

Die Abspeicherung der Matrizen des Gesamtsystems wird möglichst speicherplatzsparend mit dem "Skyline-Verfahren" nach BATHE/WILSON [30] durchgeführt. Dieses Verfahren nutzt die Bandstruktur und Symmetrie der hier vorliegenden Matrizen aus und speichert nur die Matrizenelemente auf einem Vektor ab, die zwischen Hauptdiagonalen und "Skyline" der Matrix liegen. Die Adressen der Hauptdiagonalelemente werden auf einem Zusatzvektor ausgewiesen.

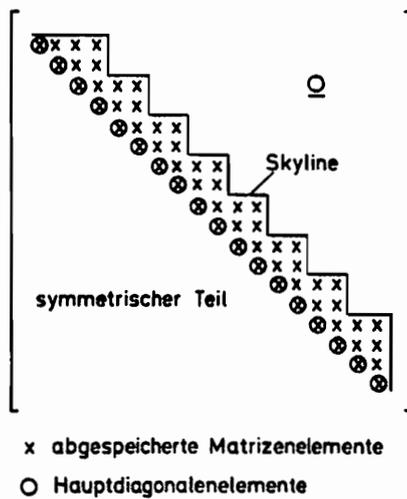


Abb. 3.7 Bandstruktur und Symmetrie der Matrizen

## 4. Lösung der Matrizendifferentialgleichung

### 4.1 Allgemeines

Bei der in Abschnitt 3.3 hergeleiteten Gleichung

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{K}} \underline{x} = \underline{F} \quad \text{mit } \underline{x}_0, \dot{\underline{x}}_0 \quad (3.2.11)$$

handelt es sich um eine lineare gewöhnliche Matrizendifferentialgleichung mit konstanten Koeffizientenmatrizen. Zur numerischen Behandlung dieses Anfangswertproblems in der Zeitkoordinate bieten sich folgende Vorgehensweisen an:

- Direkte Integration der gekoppelten Differentialgleichungen im Zeitbereich.
- Entkopplung des Differentialgleichungssystems nach der Eigenwertbestimmung mit der erhaltenen Modalmatrix; Lösung der entkoppelten Differentialgleichungen in den Modalkoordinaten und Rücktransformation in die ursprünglichen Koordinaten. (Modale Analyse)
- Lösung der durch Integraltransformation (LAPLACE, FOURIER) in den Frequenzbereich überführten Gleichungen und nachfolgende Rücktransformation in den Zeitbereich.

Bei der Auswahl eines für die hier vorliegende Problemstellung geeigneten Verfahrens sind u. a. folgende Aspekte zu beachten:

- Die vollständige Schwingungsanalyse soll mit einem möglichst geringen Zeitaufwand bewältigt werden können, da für jede im Optimierungsverfahren auftretende Konfiguration der Entwurfsvariablen (Querschnittsverlauf der Platte) eine vollständige Analyse zur Bestimmung der auftretenden Maximalwerte der Zustandsgrößen (d. h. Spannungen) notwendig ist.

- Dem zu lösenden Differentialgleichungssystem liegt ein Finite-Element-Modell zugrunde, das nur in einem gewissen Rahmen die physikalischen Eigenwerte und -formen des darzustellenden mechanischen Systems wiedergeben kann. Aus diesem Grunde kann davon ausgegangen werden, daß die höchsten Eigenwerte nicht mehr verlässlich sind. Bei den numerischen Berechnungen ist deshalb darauf zu achten, daß diese physikalisch unsinnigen Eigenwerte die Ergebnisse nicht verfälschen.

Betrachtet man die vorher angeführten Verfahren unter diesen Gesichtspunkten, so spricht der erste Aspekt eindeutig gegen die Modale Analyse bzw. die Vorgehensweisen mit Integraltransformationen, da diese aufgrund der Lösung des Eigenwertproblems bzw. der Bestimmung der Übertragungsfunktionen sehr rechenzeitintensiv sind.

Der zweite Punkt schließt dagegen z. B. die Verwendung des direkten expliziten Integrationsverfahrens mit zentralen Differenzen aus, bei dem die zu wählende Zeitschrittweite vom höchsten Eigenwert des Differentialgleichungssystems abhängt. Somit können die höheren, physikalisch nicht verlässlichen Eigenwerte des Finite-Element-Modells nicht ausgefiltert werden. Eine Vergrößerung der Schrittweite führt bei diesem Verfahren zu Stabilitätsproblemen im Lösungsverhalten ("blowing up").

Aufgrund dieser Überlegungen wird ein Verfahren gewählt, das mit Hilfe orthogonaler Ritzvektoren [37] das Differentialgleichungssystem auf ein System niedrigerer Ordnung reduziert und das so erhaltene Anfangswertproblem unter Anwendung einer impliziten, unbedingt stabilen Zeitintegration nach NEWMARK [38] löst.

#### 4.2 Das Verfahren mit Ritzvektoren

Die hier benutzte Vorgehensweise macht sich ähnlich der modal-analytischen Verfahren die Tatsache zunutze, daß in vielen Fällen die dynamische Antwort eines Systems mit  $n$  Freiheitsgraden durch eine relativ kleine Anzahl von  $m$  (untereinander orthogonalen) Ritzvektoren ausreichend genau beschrieben werden kann. Dieses ist genau dann der Fall, wenn die verwendeten Ritzvektoren die Systembelastung sowohl räumlich als auch ihrem Frequenzinhalt nach zutreffend wiedergeben können.

Wie bei der Modalen Analyse wird zur Reduktion des Differentialgleichungssystems (3.2.11) ein Näherungsansatz für den Vektor  $\underline{x}$  gemacht. In der Transformationsmatrix  $\underline{R}$ , der sogenannten Ritzmatrix, stehen dabei nicht die Eigenvektoren des Systems, sondern noch zu bestimmende orthogonale Ritzvektoren (WILSON/YUAN/DICKENS [37]).

$$\underline{x} = \underline{R} \underline{q} \quad n \text{ Anzahl der Freiheitsgrade}$$

$m$  Anzahl der Ritzvektoren

$q_i$  Ritzkoordinaten

$$\text{mit } \underline{R} = \left\{ \underline{r}_1 \quad \underline{r}_2 \quad \dots \quad \underline{r}_m \right\} \quad \text{Ritzmatrix}$$

$\underline{r}_i$  Ritzvektoren

(4.2.1)

#### 4.2.1 Bestimmung der Ritzmatrix

Die Bestimmung der untereinander bezüglich der Massenmatrix  $\underline{\underline{M}}$  orthogonalen Ritzvektoren  $\underline{r}_i$  erfolgt nach einem leicht programmierbaren Rechenschema (Tabelle 1).

Nachdem die Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{K}}$  auf Dreiecksform gebracht worden ist, wird der erste Ritzvektor proportional zur Antwort des Systems bei statischer Belastung durch den Lastvektor  $\underline{F}$  bestimmt. Mit Hilfe dieses Vektors werden die weiteren Ritzvektoren mit einer bei Vektoriterationen häufig verwendeten Rechenvorschrift berechnet. Außerdem werden die Ritzvektoren einem Orthogonalisierungsverfahren unterzogen.

#### 4.2.2 Reduktion des DGL-Systems

Setzt man den Ansatz (4.2.1) für den Vektor  $\underline{x}$  in das Differentialgleichungssystem (3.2.11) ein, so erhält man:

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{R}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{R}} \underline{q} = \underline{F} \quad (4.2.2)$$

Die Multiplikation der Gleichung (4.2.2) von links mit der Transponierten der Ritzmatrix  $\underline{\underline{R}}$  führt auf

$$\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{R}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{R}} \underline{q} = \underline{\underline{R}}^T \underline{F} \quad (4.2.3)$$

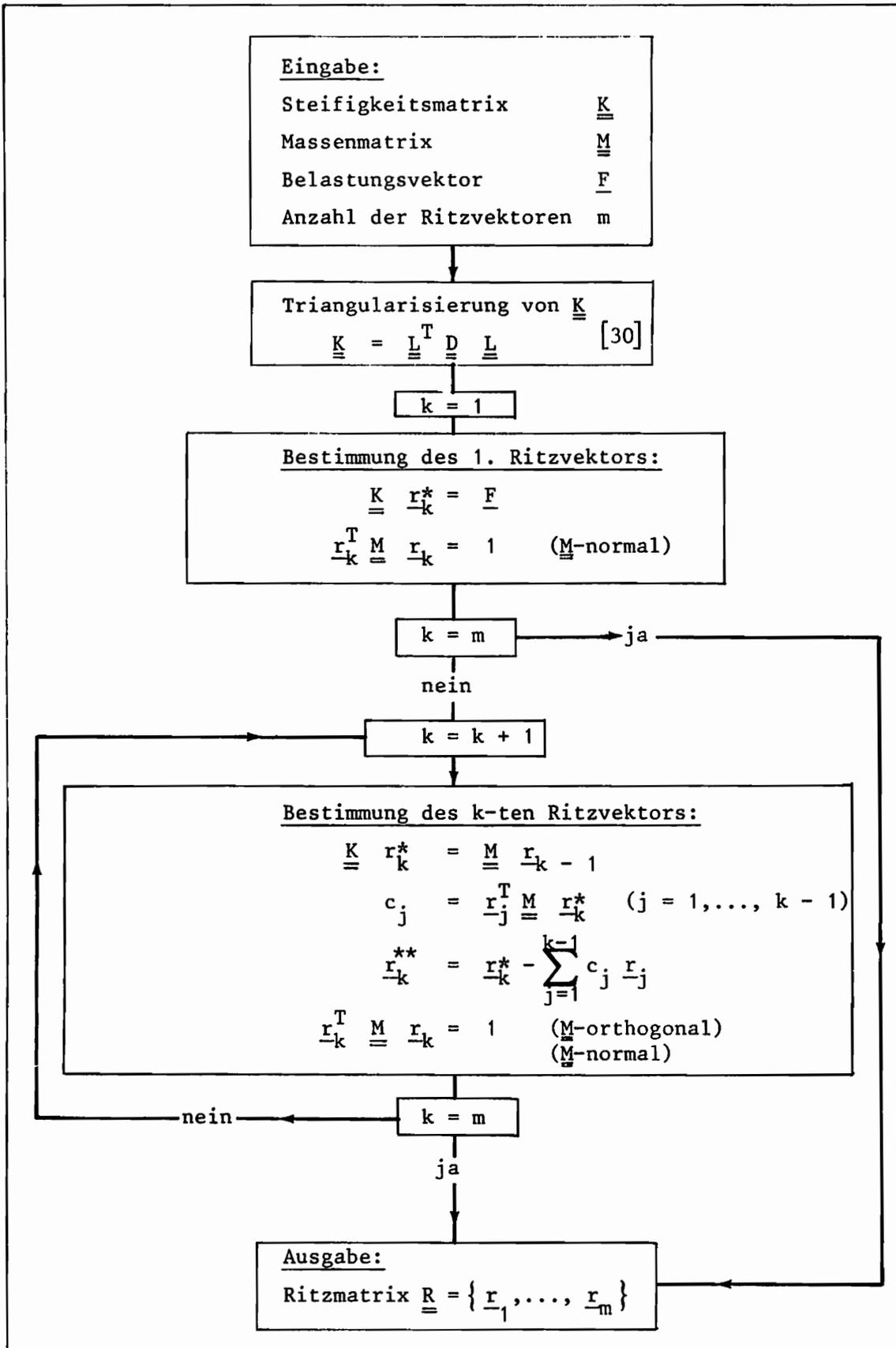


Tabelle 1: Berechnung der Ritzvektoren

Man erhält also schließlich ein DGL-System m-ter Ordnung:

$$\underline{\underline{M}}^* \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}^* \underline{q} = \underline{F}^*$$

$$\text{mit } \underline{q}_0 = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{M}} \underline{x}_0 \quad \text{und} \quad \dot{\underline{q}}_0 = \underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{M}} \dot{\underline{x}}_0$$

(4.2.4)

Dabei ist  $\underline{\underline{M}}^*$  wie nach der Transformation mit der Modalmatrix eine Einheitsmatrix.  $\underline{\underline{K}}^*$  ist im Gegensatz zur reduzierten Steifigkeitsmatrix bei der Modalen Analyse, die nur auf der Hauptdiagonalen mit den Quadraten der Eigenwerte besetzt ist, im allgemeinen nicht diagonal.

Als Vorteil gegenüber der Modalen Analyse erweist es sich bei dem hier verwendeten Verfahren, daß die benötigte Rechenzeit für das Aufstellen der Ritzmatrix erheblich niedriger ist als die zur Bestimmung der Modalmatrix. Dieser Unterschied nimmt mit Zunahme der Freiheitsgrade des Gesamtsystems schnell zu.

Nachteilig ist dagegen die Tatsache, daß das entstehende DGL-System nicht entkoppelt ist.

Die Beantwortung der Frage nach der Anzahl der zu berücksichtigenden Ritzvektoren richtet sich wie bei der Modalen Analyse nach der Darstellbarkeit der räumlichen Verteilung und des Frequenzinhaltes der Belastung.

Eine weitere Besonderheit dieses Verfahrens liegt darin, daß es die Vorteile der bewährten numerischen Techniken der statischen Kondensation und der GUYAN-Reduktion [39] beinhaltet. Dieses kann z. B. bei der Behandlung von singulären Massenmatrizen (z. B. bei Vernachlässigung von Rotationsträgheiten) von Vorteil sein.

### 4.3 Die Zeitintegration nach NEWMARK

Das im letzten Teilabschnitt erhaltene reduzierte Anfangswertproblem (Gl. 4.2.4) wird mit Hilfe des direkten Integrationsverfahrens nach NEWMARK [38] gelöst. Dieses Verfahren gehört zu den Einschrittverfahren, die gegenüber den Mehrschrittverfahren den Vorteil der größeren Wirtschaftlichkeit in Bezug auf Speicherplatzbedarf und Rechenzeit haben.

Bei diesem impliziten Verfahren werden folgende Ansätze gemacht, wobei die Größen zum Zeitpunkt  $t$  als bekannt vorausgesetzt werden:

$$\begin{aligned} \dot{q}_{t+\Delta t} &= \dot{q}_t + (1 - \gamma) \cdot \ddot{q}_t \cdot \Delta t + \ddot{q}_{t+\Delta t} \cdot \Delta t \\ q_{t+\Delta t} &= q_t + \dot{q}_t \cdot \Delta t + (1 - 2\beta) \cdot \ddot{q}_t \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + 2\beta \cdot \ddot{q}_{t+\Delta t} \cdot \frac{\Delta t^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{mit } (0 \leq \gamma \leq 1) \quad \text{und } (0 \leq 2\beta \leq 1) \quad (4.3.1)$$

$$(4.3.1)$$

Setzt man diese Ansätze in das reduzierte Differentialgleichungssystem für den Zeitpunkt  $(t + \Delta t)$  ein, so führt dieses auf das folgende, für jeden Zeitschritt zu lösende, lineare Gleichungssystem mit dem unbekanntem Vektor  $q_{t+\Delta t}$ :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \cdot \underline{M}^* + \underline{K}^* \right] \cdot q_{t+\Delta t} = \\ \underline{F}_{t+\Delta t} + \underline{M}^* \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} q_t + \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{q}_t + \left[ \frac{1}{2\beta} - 1 \right] \ddot{q}_t \right] \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Bei den nachfolgenden Berechnungen wird der Parametersatz ( $\gamma = 1/2$ ;  $\beta = 1/4$ ) benutzt, der zu einer der Trapezregel entsprechenden Integrationsvorschrift führt. Durch Wahl dieses Parametersatzes erhält man ein unbedingt stabiles Integrationsverfahren [40] für die hier vorliegende Problemstellung. Das bedeutet, daß die Größe der benutzten Zeitschrittweite nur von den an die Genauigkeit der Ergebnisse gestellten Ansprüchen abhängt.

#### 4.4 Bestimmung der Zustandsgrößen

Für den gesamten Schwingungsvorgang sind die über der Platte auftretenden maximalen Spannungen zu bestimmen. Diese treten an der Plattenober- bzw. Plattenunterseite auf, wo nach den zu Anfang getroffenen Annahmen ein ebener Spannungszustand herrscht. Aus den dort berechneten Hauptspannungen in radialer und tangentialer Richtung wird mit Hilfe der Gestaltänderungsarbeitshypothese eine Vergleichsspannung berechnet, die die zu bestimmende Zustandsgröße in den Restriktionen des Optimierungsproblems darstellt.

Ausgehend von dem bei der Zeitintegration nach jedem Zeitschritt bestimmten Vektor  $\underline{q}_t$  lassen sich die Zustandsgrößen für die einzelnen Plattenpunkte in einer Nachlaufrechnung folgendermaßen berechnen:

-- Rücktransformation der Ritzkoordinaten:

$$\underline{x}_t = \underline{R} \underline{q}_t \quad (4.2.1)$$

-- k-tes Element (k = 1, ..., N)

- Dehnungen:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}_{(z=\frac{h}{2})} = \frac{h}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_1}{dr} & 0 & \frac{dN_2}{dr} \\ 0 & \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \psi_1 \\ w_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

- Spannungen:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{rr} + \nu \epsilon_{\varphi\varphi})$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{\varphi\varphi} + \nu \epsilon_{rr})$$

- Zustandsgröße:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 - \sigma_{rr} \sigma_{\varphi\varphi}} \quad (4.4.1)$$

#### 4.5 Vergleich mit der analytischen Lösung

Die hier beschriebene Vorgehensweise zur Schwingungsanalyse bis zu den Maximalwerten der Zustandsgrößen birgt eine Reihe von möglichen Fehlerquellen in sich:

- Ortsdiskretisierung mit Finiten Elementen
- Berücksichtigung einer geringen Anzahl von Ritzvektoren
- Näherungsweise Lösung des reduzierten DGL-Systems mit dem NEWMARK-Verfahren

Ein Vergleich mit der analytischen Lösung (Kapitel 2) bei Berücksichtigung von 25 Eigenfrequenzen zeigt jedoch befriedigende Ergebnisse.

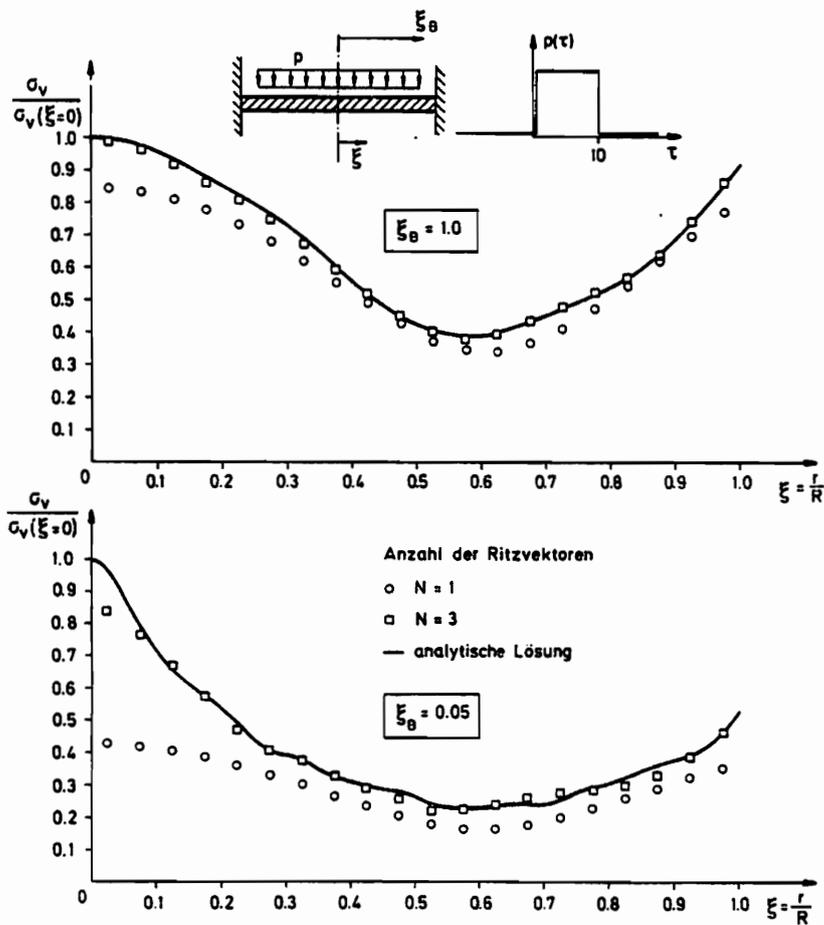


Abb. 4.1 Vergleich mit der analytischen Lösung

In Abbildung 4.1 sind die Maximalwerte der Vergleichsspannung für eine Flächenbelastung und eine zentrale Belastung in der Plattenmitte für unterschiedliche Anzahl von Ritzvektoren gegenübergestellt. Der zeitliche Verlauf stellt dabei einen Rechteckimpuls dar.

Bei Betrachtung dieser Abbildung fällt folgendes auf:

- bei der Flächenbelastung ( $\xi_B = 1$ ) zeigt das Verfahren bei Berücksichtigung nur eines Ritzvektors schon eine überraschend gute Näherung. Für  $N = 3$  fallen die Ergebnisse im Rahmen der Zeichengenauigkeit mit der analytischen Lösung zusammen.
- bei der zentralen Belastung ( $\xi_B = 0.05$ ) sind wie erwartet wegen der Singularität in der Plattenmitte mehr Ritzvektoren zur Darstellung der Belastung notwendig. Man erkennt jedoch auch bei diesem Fall, daß man sich mit steigender Zahl der Ritzvektoren der analytischen Lösung nähert.

Ein weiterer interessanter Aspekt für die Belastung in der Plattenmitte zeigt sich in Abbildung 4.2 beim Vergleich mit der Modalen Analyse. Hierbei liegt bei Berücksichtigung von 5 Ritzvektoren bzw. Eigenvektoren die Lösung mit Ritzvektoren näher an der analytischen Lösung als die mit der Modalen Analyse erhaltenen Werte.

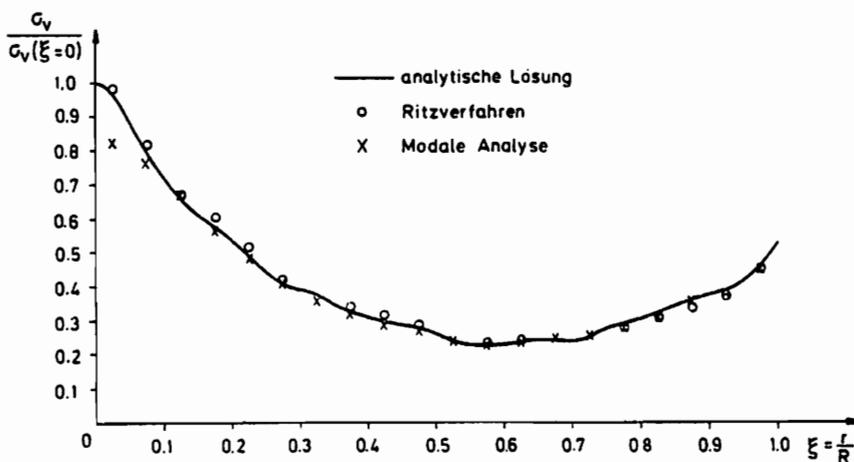


Abb. 4.2 Vergleich mit der Modalen Analyse

## 5. Optimierung

### 5.1 Allgemeines

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten eine möglichst effektive Berechnung der in den Restriktionen des Optimierungsproblems auftretenden Zustandsgrößen beschrieben wurde, kann nun die Suche nach einem effizienten Optimierungsverfahren aufgenommen werden.

Aus der Vielzahl der über das Gebiet der Optimierung und deren Anwendungsmöglichkeiten im Ingenieurbereich erschienenen Literatur sei an dieser Stelle auf die Bücher von FOX [41], HIMMELBLAU [42], KIRSCH [43] und RAO [44] verwiesen. Diese beschäftigen sich eingehend mit der Darstellung der wichtigsten Verfahren und gehen auf deren Vor- und Nachteile bei unterschiedlichen Problemstellungen ein. Dabei stellen die obengenannten Autoren einhellig fest, daß es kein herausragendes Verfahren zur Lösung aller erdenklichen Optimierungsprobleme gibt. Je nach Problemstellung ist daher nach einer Vorgehensweise zu suchen, die sich möglichst gut den problemspezifischen Gegebenheiten anpaßt.

Das vorliegende nichtlineare Parameteroptimierungsproblem (1.2.1 - 1.2.3) läßt sich in folgende allgemeine Form bringen:

$$\begin{array}{l} \text{Gesucht ist } \underline{H} \text{ , so daß } V(\underline{H}) \rightarrow \text{min. ,} \\ \text{unter Beachtung von } g_j(\underline{H}) \leq 0 \quad j = 1 (1) m \end{array}$$

(5.1.1)

$\underline{H}$  ist hierbei der Vektor mit den Entwurfsvariablen,  $V$  ist die Zielfunktion und die  $g_j$  stellen die  $m$  zu erfüllenden Restriktionen dar.

Zur Lösung dieses allgemeinen nichtlinearen, beschränkten Problems bietet die Mathematik eine Reihe von numerischen Lösungsmöglichkeiten an. Hierbei kann zwischen direkten und indirekten Vorgehensweisen unterschieden werden.

Zu den indirekten Verfahren gehören z. B. die Methoden mit Straffunktionen (penalty functions). Diese können wiederum nach dem Typ der verwendeten Straffunktionen (innere bzw. äußere Straffunktion) unterschieden werden. Bei beiden Arten wird das beschränkte Optimierungsproblem in eine Reihe von unbeschränkten Problemen transformiert. Beim Vorgehen mit inneren Straffunktionen liegt dabei die Reihe der berechneten Minima der unbeschränkten Probleme innerhalb des zulässigen Bereiches des Entwurfsraumes und nähert sich so dem Minimum des beschränkten Ausgangsproblems. Demgegenüber konvergiert das Verfahren bei Anwendung von äußeren Straffunktionen vom äußeren, d. h. unzulässigen Bereich aus gegen die gesuchte Lösung.

Der Vorteil der Verfahren mit Straffunktionen liegt darin, daß zur Lösung der unbeschränkten Optimierungsprobleme auf vorhandene Programmpakete zurückgegriffen werden kann. Nachteilig ist dagegen die Tatsache, daß zur Bestimmung der Lösung eine große Anzahl von Berechnungen der Zielfunktion und der Restriktionen notwendig ist.

Aufgrund der rechenzeitintensiven Bestimmung der Zustandsgrößen im vorliegenden Fall spricht der letzte Punkt eindeutig gegen die Verwendung von Verfahren mit Straffunktionen.

Zur Anwendung kommen die Methode der zulässigen Richtungen (feasible directions) [45] und die Methode der linearen Approximation [46], die beide zu den direkten Optimierungsverfahren gehören. Diese Verfahren beziehen ohne vorherige Transformation des Problems die Restriktionen in ihren Lösungsalgorithmus ein.

Als Ausgangspunkt der nichtlinearen Optimierung wird die Platte gleicher dynamischer Festigkeit (fully stressed design) benutzt, die in einem geringen Bruchteil der zur nachfolgenden Optimierung benötigten Rechenzeit bestimmt wird.

Die Überprüfung der Optimalität der Lösungen wird abschließend durch die Anwendung der KUHN-TUCKER-Bedingungen [ 47 ] durchgeführt.

An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, daß bei einem allgemeinen nichtlinearen Problem keine Aussage darüber gemacht werden kann, ob es sich bei einem berechneten Extremum um ein relatives oder um das globale Minimum handelt. Nur für den Sonderfall einer konvexen Problemstellung sind die KUHN-TUCKER-Bedingungen hinreichend für den Nachweis eines globalen Minimums.

## 5.2 Die KUHN-TUCKER-Bedingungen

Ausgehend vom allgemeinen Optimierungsproblem (5.1.1) werden nicht-negative Schlupfvariablen  $y_j^2$  eingeführt, um die in Form von Ungleichungen angegebenen Restriktionen in Gleichungen zu überführen.

Als Ergebnis erhält man das Problem:

Minimiere  $V(\underline{H})$  unter Beachtung der Nebenbedingungen

$$g_j^*(\underline{H}, \underline{Y}) = g_j(\underline{H}) + y_j^2 = 0 \quad j = 1(1)m \quad (5.2.1)$$

Die LAGRANGE-Funktion  $L$  für dieses Problem lautet:

$$L(\underline{H}, \underline{Y}, \underline{\lambda}) = V(\underline{H}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j^*(\underline{H}, \underline{Y})$$

mit

$\underline{H}$	$=$	$\{ h_1, h_2, \dots, h_N \}$	Entwurfsvariablen
$\underline{Y}$	$=$	$\{ y_1, y_2, \dots, y_m \}$	Schlupfvariablen
$\underline{\lambda}$	$=$	$\{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \}$	LAGRANGE-Multiplikatoren

(5.2.2)

Notwendige Bedingungen für stationäre Punkte dieser LAGRANGE-Funktion sind:

$$\frac{\partial L}{\partial h_i} = \frac{\partial V}{\partial h_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial h_i} = 0 \quad i = 1(1)N \quad (5.2.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = g_j + y_j^2 = 0 \quad j = 1(1)m \quad (5.2.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_j} = 2 \lambda_j y_j = 0 \quad j = 1(1)m \quad (5.2.5)$$

Hierbei stellen die Gleichungen (5.2.4) sicher, daß die Restriktionen des Optimierungsproblems erfüllt sind. Mögliche Lösungen für die Gleichungen (5.2.5) sind  $\lambda_j = 0$  bzw.  $y_j = 0$ . Der erste Fall tritt ein, wenn die betreffende Restriktion im betrachteten Punkt nicht aktiv ist und damit in (5.2.3) ignoriert werden kann. Demgegenüber ist für den Fall ( $y_j = 0$ ) die Restriktion  $j$  aktiv.

Die KUHN-TUCKER-Bedingungen (notwendige Bedingungen für ein relatives Minimum) lauten demzufolge:

$$\begin{aligned} g_j &\leq 0 & j = 1 \text{ (1) m} \\ \nabla V + \sum_k \lambda_k \cdot \nabla g_k &= 0; & g_k: \text{ aktive Restriktionen} \\ \text{mit } \lambda_k &> 0 \end{aligned}$$

(5.2.6)

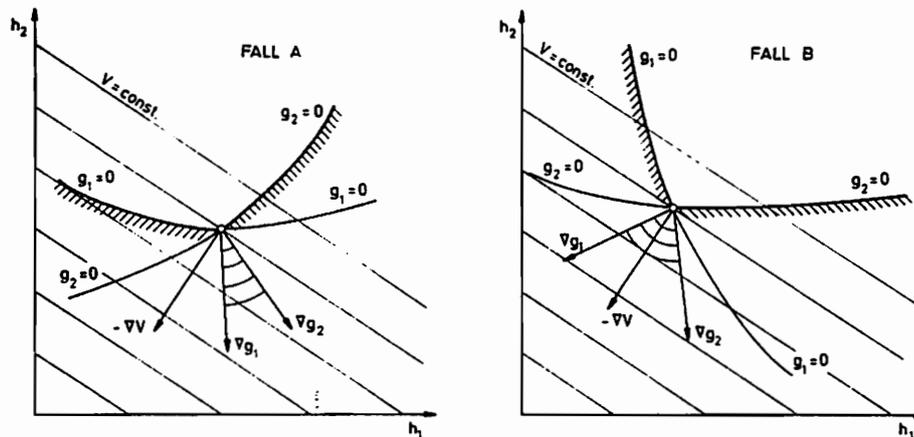


Abb. 5.1 Zu den KUHN-TUCKER-Bedingungen

Die geometrische Interpretation dieser Bedingungen ist Abbildung 5.1 zu entnehmen. Im Fall A liegt der negative Gradient der Zielfunktion  $V$  außerhalb des von den Gradienten der aktiven Restriktionen aufgespannten Bereiches. Daraus folgt, daß  $V$  ohne Verletzung der Restriktionen verringert werden kann. Bei dem betrachteten Punkt handelt es sich deswegen nicht um ein Minimum.

Im Fall B liegt  $(-\nabla V)$  innerhalb des von den aktiven Restriktionen aufgespannten Kegels, d. h. es existieren positive  $\lambda_k$  um den negativen Gradienten der Zielfunktion als Linearkombination der Gradienten  $\nabla g_1$  und  $\nabla g_2$  darzustellen. Demzufolge kann die Zielfunktion ohne Verletzung der Restriktionen vom betrachteten Punkt aus nicht verkleinert werden, d. h. an dieser Stelle sind die KUHN-TUCKER-Bedingungen erfüllt.

Numerisch können die  $\lambda_k$  durch Lösung des Gleichungssystems (5.2.7) bestimmt werden. (FOX [41])

$$\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} \underline{\underline{\lambda}}^* = - \underline{\underline{G}}^T \nabla V \quad (5.2.7)$$

mit  $N \begin{matrix} P \\ \underline{\underline{G}} \end{matrix} = \{\nabla g_1, \dots, \nabla g_p\}$  Gradienten der aktiven Restriktionen

N: Anzahl der Entwurfparameter

p: Anzahl der aktiven Restriktionen

Im Lösungsvektor  $\underline{\underline{\lambda}}^*$  stehen danach die gesuchten LAGRANGE-Multiplikatoren. Falls alle  $\lambda_i$  positiv sind, so sind die KUHN-TUCKER-Bedingungen erfüllt.

### 5.3 Die Platte gleicher dynamischer Festigkeit

Als 1. Näherung des Optimierungsproblems (1.2.1 - 1.2.3) und damit als Ausgangspunkt für die nachfolgend beschriebenen Optimierungsverfahren wird die Platte gleicher dynamischer Festigkeit (fully stressed design) berechnet. Hierunter versteht man die Platte, deren Querschnittsverlauf für die betrachtete Belastung bewirkt, daß in der Schwingungsantwort an jeder Stelle die zulässige Spannung  $\sigma_{zul}$  erreicht, aber nicht überschritten wird. Der entsprechende Querschnittsverlauf wird durch vergleichende Beobachtung des dynamischen Tragverhaltens bei unterschiedlichen Entwurfparametern iterativ bestimmt.

Zwischen den in Abschnitt 4.4 berechneten Zustandsgrößen, den dazugehörigen Schnittgrößen und den Entwurfparametern (d. h. den Plattendicken) besteht folgender Zusammenhang:

$$\sigma_V = \frac{6}{h^2} \cdot M_V \quad ; \quad M_V = \sqrt{M_{rr}^2 + M_{\varphi\varphi}^2 - M_{rr} M_{\varphi\varphi}} \quad (5.3.1)$$

Im k-ten Iterationsschritt erhält man nach der Schwingungsanalyse folgende zu den N Plattenabschnitten gehörende Maximalwerte für die Zustandsgrößen:

$$\sigma_{k \ v_{\max}}^i = \frac{6}{i_h^2} \cdot \frac{i_M}{k} v_{\max}^i \quad i = 1 (1) N \quad (5.3.2)$$

Die neuen zu bestimmenden Entwurfparameter  $i_{h \ k+1}^i$  sollen so berechnet werden, daß im nächsten Schritt die zulässige Spannung  $\sigma_{zul}$  erreicht wird.

$$\sigma_{k+1 \ v_{\max}}^i = \sigma_{zul} = \frac{6}{i_{h \ k+1}^2} \cdot \frac{i_M}{k+1} v_{\max}^i \quad i = 1 (1) N \quad (5.3.3)$$

Die Division der Gleichungen (5.3.2) und (5.3.3) führt auf folgende Bestimmungsgleichungen für die neuen Entwurfparameter:

$$i_{h \ k+1}^i = i_{h \ k}^i \left[ \frac{\frac{i_M}{k} v_{\max}^i}{\sigma_{zul}} \cdot \frac{i_M}{k+1} v_{\max}^i}{\frac{i_M}{k} v_{\max}^i} \right]^{\frac{1}{2}} \quad i = 1 (1) N \quad (5.3.4)$$

In diesen Gleichungen ist die Größe  $i_{M \ k+1}^i v_{\max}^i$  jeweils unbekannt.

Da der Schnittgrößenverlauf nur unwesentlich von der Variation der Entwurfparameter beeinflusst wird, kann der Faktor

$$\frac{i_{M \ k+1}^i v_{\max}^i}{i_{M \ k}^i v_{\max}^i} = 1 \quad \text{gesetzt werden.} \quad (5.3.5)$$

Unter Berücksichtigung der Restriktionen bezüglich der minimalen Wanddicke werden die neuen Entwurfparameter demzufolge durch die Rechenvorschrift (5.3.6) bestimmt.

$$i_{k+1}^h = i_k^h \sqrt{\frac{i_k^{\sigma_v \max}}{\sigma_{zul}}} \quad i = 1 (1) N$$

$$\text{wenn } i_{k+1}^h < h_{\min} \rightarrow i_{k+1}^h = h_{\min}$$

(5.3.6)

Die Iterationsvorschrift (5.3.6) wird solange angewendet, bis in jedem Plattenabschnitt die zulässige Spannung in einem vorgegebenen Genauigkeitsrahmen erreicht wird.

Die recht gute Konvergenz dieses Iterationsverfahrens kann durch Anwendung eines verbesserten AITKEN-Verfahrens (5.3.7) (MEYERS [48]) noch beschleunigt werden.

$$i_{k+1}^{h*} = i_k^h + (i_{k+1}^h - i_k^h) \cdot \prod_{j=1}^k a_{ij} \quad i = 1 (1) N$$

$$\text{mit } a_{ij} = \frac{i_{j-1}^{\sigma_v \max}}{i_j^{\sigma_v \max} - i_{j-1}^{\sigma_v \max}}$$

(5.3.7)

## 5.4 Optimierungsverfahren

### 5.4.1 Die Methode der zulässigen Richtungen (feasible directions)

Zur Lösung des allgemeinen Parameteroptimierungsproblems (5.1.1) wird ausgehend von einem zulässigen Punkt  $\underline{H}_q$  im N-dimensionalen Entwurfsraum der nächste zulässige Punkt  $\underline{H}_{q+1}$  nach folgender Formel bestimmt:

$$\underline{H}_{q+1} = \underline{H}_q + \alpha^* \cdot \underline{S}_q$$

$$\text{mit } \underline{S}_q^T = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$$

(5.4.1.1)

Bei jedem Iterationsschritt sind die Suchrichtungen  $\underline{S}_q$  und der die Schrittweite bestimmende Faktor  $\alpha^*$  jeweils neu zu bestimmen.

Dabei ist zu beachten, daß die Suchrichtung  $\underline{S}_q$  folgende Bedingungen erfüllt:

- $\underline{S}_q$  muß zulässig sein.

Ausgehend vom betrachteten Punkt  $\underline{H}_q$  darf eine kleine Veränderung der Entwurfsvariablen in Richtung von  $\underline{S}_q$  zu keiner Verletzung der Restriktionen führen.

$$\longrightarrow \underline{S}_q^T \cdot \nabla g_j(\underline{H}_q) \leq 0$$

mit  $g_j$  ;  $j = 1(1)J$  aktive Restriktionen

(5.4.1.2)

Eine Restriktion ist aktiv, wenn gilt:

$$\left| g_j(\underline{H}_q) \right| \leq \epsilon_R$$

(5.4.1.3)

$\epsilon_R$  ist hierbei eine dem Problem angepaßte Toleranzgröße.

-  $\underline{S}_q$  muß brauchbar sein.

Eine Variation in  $\underline{S}_q$  - Richtung ergibt eine Verringerung der Zielfunktion V.

$$\longrightarrow \underline{S}_q^T \cdot \nabla V(\underline{H}_q) \leq 0$$

(5.4.1.4)

Der Vektor  $\underline{S}_q$ , der diese beiden Forderungen erfüllt, weist in den zulässigen und brauchbaren Bereich im Punkte  $\underline{H}_q$  (Abbildung 5.2)

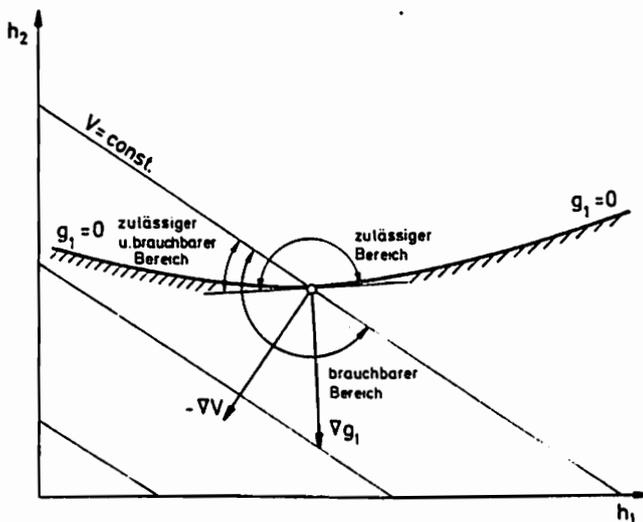


Abb. 5.2 Zur Bestimmung von  $\underline{S}_q$

Bestimmung der Suchrichtung  $\underline{s}_q$  :

Sind in dem betrachteten Punkt keine Restriktionen aktiv, so gibt man  $\underline{s}_q$  die Richtung des negativen Gradientens der Zielfunktion (d. h. die Richtung des steilsten Abstiegs). ZOUTENDIJK [45] folgend wird im anderen Fall zur Bestimmung der Suchrichtung das lineare Programmierungsproblem (5.4.1.5 - 5.4.1.8) mit Hilfe eines auf dem Simplexalgorithmus basierenden Computerprogramms (KÜNZI/TZSCHACH/ZEHNDER [49]) gelöst.

$$\beta \rightarrow \max \tag{5.4.1.5}$$

$$\underline{s}_q^T \nabla g_j + \theta_j \beta \leq 0 \quad j = 1 (1) J \tag{5.4.1.6}$$

$$\underline{s}_q^T \nabla V + \beta \leq 0 \tag{5.4.1.7}$$

$$-1 \leq s_i \leq 1 \quad i = 1 (1) N \tag{5.4.1.8}$$

Der positive skalare Faktor  $\beta$  bewirkt, daß der sich ergebende Vektor  $\underline{s}_q$  die Forderungen (5.4.1.2) und (5.4.1.4) erfüllt. Durch die Maximierung von  $\beta$  nimmt die Projektion der Suchrichtung auf den negativen Gradienten der Zielfunktion den größtmöglichen Wert an.

Die nichtnegativen Faktoren  $\theta_j$  in (5.4.1.6) sorgen dafür, daß die Suchrichtung von den nichtlinearen Restriktionen abgelenkt wird. (Abb. 5.3) Hierbei erweist es sich als günstig  $\theta_j$  gleich 1 zu wählen. Bei linearen Nebenbedingungen (z. B. bezüglich der minimalen Plattendicke) erhält  $\theta_j$  den Wert Null.

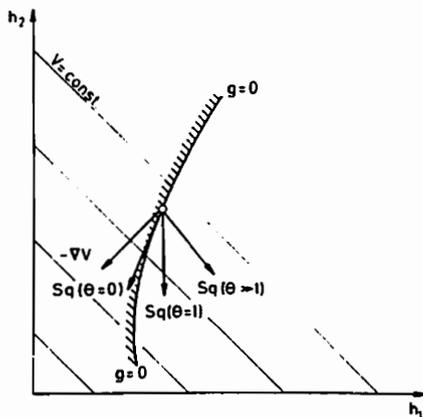


Abb. 5.3 Einfluß des Faktors  $\theta$

Die Komponenten  $s_i$  der zu bestimmenden Suchrichtung  $\underline{S}_q$  werden durch die Forderungen in (5.4.1.8) beschränkt, damit das lineare Programmierungsproblem auf eine endliche Lösung für den Faktor  $\beta$  führt.

#### Bestimmung der Schrittweite:

Da der Gradient der Zielfunktion im vorliegenden Fall ortsunabhängig ist, entfällt die sonst übliche Suche des Minimums der Zielfunktion in Richtung von  $\underline{S}_q$ .

Die Schrittweite und damit die Größe von  $\alpha^*$  hängt in dem hier zu betrachtenden Anwendungsfall nur von den Restriktionen ab. Dabei ist  $\alpha^*$  so zu bemessen, daß der neue Punkt  $\underline{H}_{q+1}$  im zulässigen Bereich des Entwurfsraums liegt.

#### Konvergenzkriterium

Für  $\beta = 0$  sind die KUHN-TUCKER-Bedingungen im betrachteten Punkt erfüllt. Da dieser Wert  $\beta = 0$  nur im theoretischen Fall erreicht werden kann, ist für die numerischen Berechnungen eine Toleranzgröße  $\epsilon_k$  einzuführen. (z. B.  $\epsilon_k = 10^{-6}$ )

### 5.4.2 Die Methode der linearen Approximation

Bei der Methode der linearen Approximation werden die Zielfunktion  $V$  und die Restriktionen  $g_i$  des allgemeinen Parameteroptimierungsproblems im Ausgangspunkt  $\underline{H}_q$  in eine Taylorreihe entwickelt, wobei die Entwicklung nach dem linearen Glied abgebrochen wird.

$$V(\underline{H}) = V(\underline{H}_q) + \nabla V^T(\underline{H}_q) \cdot \underline{\Delta H}_q \quad (5.4.2.1)$$

$$\tilde{g}_i(\underline{H}) = g_i(\underline{H}_q) + \nabla g_i^T(\underline{H}_q) \cdot \underline{\Delta H}_q \quad (5.4.2.2)$$

Da  $V$  linear von den Entwurfsvariablen  $h_i$  abhängt, ist die vorgenommene Reihenentwicklung für die Zielfunktion exakt. Die Reihenentwicklung der nichtlinearen Restriktionen bezüglich der Zustandsgrößen ist demgegenüber eine Näherung und nur in einem begrenzten Bereich verlässlich.

Ausgehend von  $\underline{H}_q$  erhält man den nächsten Iterationspunkt  $\underline{H}_{q+1}$  über die Formel

$$\underline{H}_{q+1} = \underline{H}_q + \underline{\Delta H}_q \quad (5.4.2.3)$$

Den Vektor  $\underline{\Delta H}_q$  erhält man als Lösung des linearen Programmierungsproblems (LP) (5.4.2.4) - (5.4.2.6), die man mit Hilfe des in 5.4.1 erwähnten Programms basierend auf der Simplexmethode erhält. (Abb. 5.4)

$$V(\underline{H}_q) + \nabla V^T(\underline{H}_q) \underline{\Delta H}_q \longrightarrow \min \quad (5.4.2.4)$$

$$g_j(\underline{H}_q) + \nabla g_j^T(\underline{H}_q) \underline{\Delta H}_q \geq 0 ; \quad j = 1 \text{ (1) } m$$

$$\text{mit } \underline{\Delta H}_q^T = \{ \Delta h_1 \Delta h_2, \dots, \Delta h_N \} \quad (5.4.2.5)$$

$$-\delta \leq \Delta h_i \leq \delta \quad ; \quad i = 1 (1) N \quad (5.4.2.6)$$

Dabei ist zu beachten, daß die Lösung bei zu kleinem  $\delta$  nur schlecht konvergiert. Bei zu groß gewähltem  $\delta$  oszillieren die Lösungen zwischen den Beschränkungen im Entwurfsraum.

Die Berechnungen werden bei dieser Methode abgebrochen, wenn die Veränderung in der Zielfunktion in zwei aufeinanderfolgenden Schritten kleiner als eine vorgegebene Größe  $\epsilon$  wird und die nichtlinearen Restriktionen des Ausgangsproblems innerhalb eines vorgegebenen Toleranzbereiches erfüllt sind.

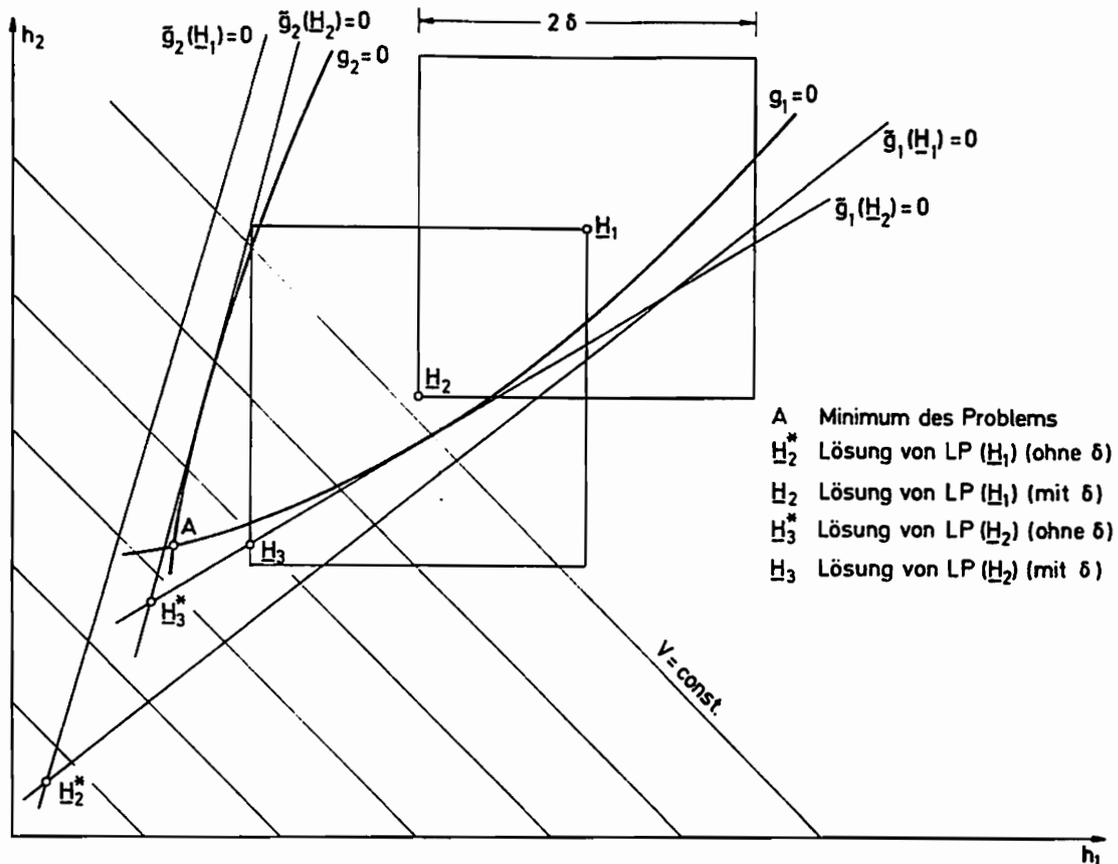


Abb. 5.4 Vorgehensweise bei dem Verfahren mit linearer Approximation (LP Lineares Programmierungsproblem)

### 5.5 Gradientenberechnung:

Zur Überprüfung der KUHN-TUCKER-Bedingungen und für die vorgestellten Optimierungsverfahren werden die Gradienten der Restriktionen an den jeweils betrachteten Stellen im Entwurfsraum benötigt. Für die implizit von den Entwurfsvariablen abhängenden Restriktionen wird die Gradientenberechnung dabei mit Hilfe von Differenzenquotienten durchgeführt.

$$\nabla g_i^T(\underline{H}) = \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial h_1}, \frac{\partial g_i}{\partial h_2}, \dots, \frac{\partial g_i}{\partial h_N} \right\} \quad (5.5.1)$$

$$\text{mit } \frac{\partial g_i}{\partial h_k} \cong \frac{g_i(\underline{H})^k - g_i(\underline{H})}{\Delta h^k}$$

$$\text{und } \underline{H}^k = \{ h_1, h_2, \dots, h_k + \Delta h_k, \dots, h_N \} \quad (5.5.2)$$

Hierbei ist anzumerken, daß die Größen des so berechneten Gradientens aufgrund des Näherungscharakters des Differenzenquotientens nur in einer kleinen Umgebung des betrachteten Punktes verläßlich sind. Ferner fällt auf, daß die Zustandsgrößen zur Berechnung des Gradientens N-mal bestimmt werden müssen.

## 6. Ergebnisse der Optimierung

In diesem Kapitel wird auf die Darstellung und Diskussion der mit vorgenannten Optimierungsstrategien erhaltenen Ergebnisse eingegangen. Das dazu erstellte Computerprogramm ermöglicht die Berechnung und Darstellung der optimierten Querschnittsverläufe in Abhängigkeit von den verschiedenen Auflagerbedingungen und der Art der aufgegebenen Belastung. Nachfolgend werden aus der Vielzahl der Kombinationsmöglichkeiten beispielhaft einige aufgeführt.

### 6.1 Allgemeine Untersuchungen

Am Beispiel der eingespannten Kreisplatte unter plötzlicher Druckbelastung (Abb. 6.1) werden einige allgemeine Betrachtungen angestellt.

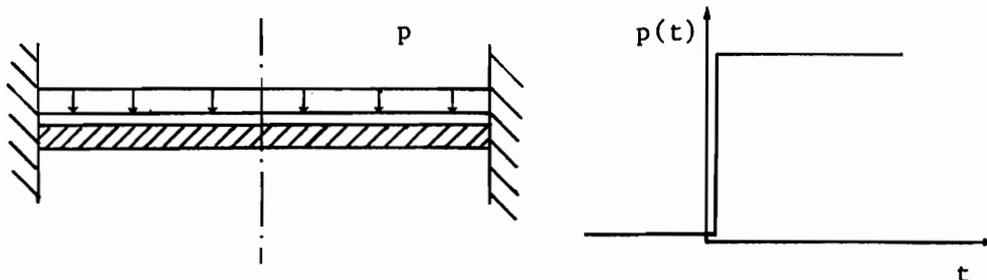


Abb. 6.1

#### 6.1.1 Impulsform, Impulsdauer

Für die Platte gleicher Dicke werden in Abb. 6.2 die erhaltenen, normierten Maximalwerte der Vergleichsspannung in Abhängigkeit von der Impulsform dargestellt. Die dabei für den Rechteckimpuls erhaltenen Maximalwerte stellen eine obere Schranke für die anderen Impulsformen mit gleichgroßem Impulsmaximum dar.

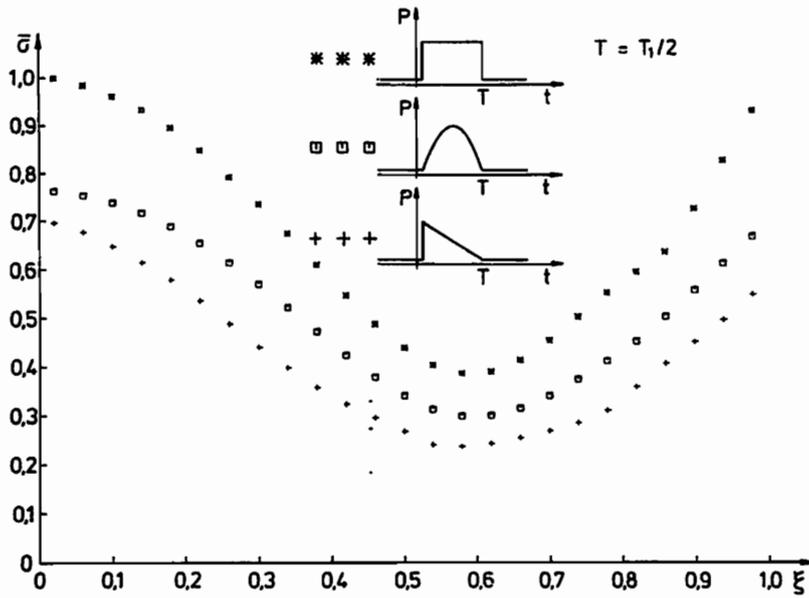


Abb. 6.2 Einfluß der Impulsform

Beim Vergleich der Systemantwort für Rechteckimpulse verschiedener Länge (Abb. 6.3) fällt auf, daß die größten Vergleichsspannungen für den Impuls mit  $T = T_1/2$  auftreten.  $T_1$  ist dabei die Schwingungsdauer der 1. Eigenform.

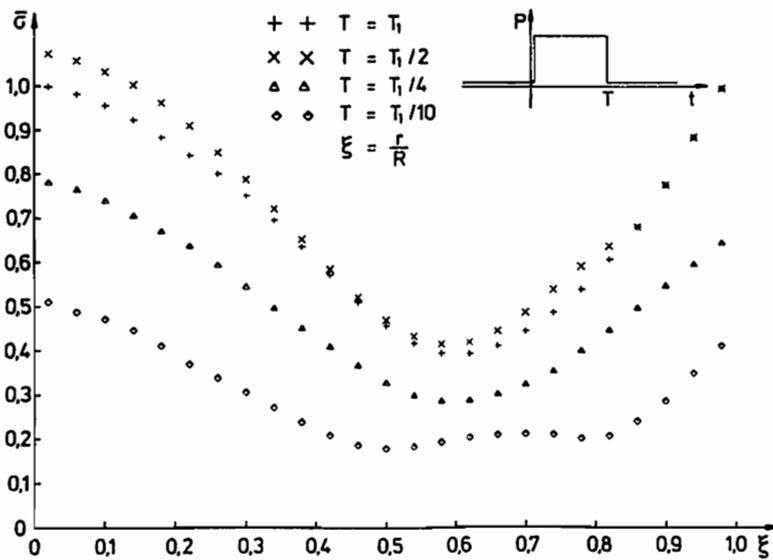


Abb. 6.3 Einfluß der Impulsdauer

Die beiden vorgenannten Aspekte werden bei den nachfolgenden Berechnungen berücksichtigt, indem für den Fall der plötzlichen Belastung der Rechteckimpuls als Impulsform verwendet wird. Die Impulsdauer wird programmintern so variiert, daß sie halb so groß wie die Schwingungsdauer der 1. Eigenform der aktuellen Querschnittskonfiguration ist. Durch diese Vorgehensweise wird erreicht, daß für die berechneten Querschnittsverläufe unter Einwirkung eines in Form und Dauer beliebigen Impulses mit gleichem oder niedrigerem Maximum kein Überschreiten der zulässigen Spannung auftritt.

### 6.1.2 Dimensionslose Kenngrößen

Für die betrachteten Belastungsarten zeigt sich, daß die sich einstellenden optimalen Querschnittsverläufe in erster Linie von der Wahl der folgenden dimensionslosen Kenngrößen abhängen:

Flächenbelastung p

$$K_p = \frac{P}{\sigma_{zul}}$$

Einzelkraft F

$$K_F = \frac{F/R^2}{\sigma_{zul}}$$

Auflagerbeschleunigung a

$$K_a = \frac{a \rho R}{\sigma_{zul}}$$

(6.1.2.1)

Die zusätzlich die Ergebnisse beeinflussende Querkontraktionszahl  $\nu$  erhält in nachfolgenden Berechnungen den Wert 0,3.

Der Einfluß des Elastizitätsmoduls E und der Dichte  $\rho$  wird durch die programminterne Anpassung der Impuls- und Berechnungsdauer an die sich aus den aktuellen Parametern ergebende Grundperiode berücksichtigt.

### 6.1.3 Einfluß der Anzahl der Querschnittssprünge

In Abbildung 6.4 wird die Volumenersparnis in Abhängigkeit von der Anzahl der Querschnittssprünge aufgezeigt. Dabei wird deutlich, daß z. B. die Erhöhung von 20 auf 75 Abschnitte gleicher Dicke die Volumenersparnis nur um 2,5 % vergrößert. Aus diesem Grunde wird bei den nachfolgenden Berechnungen eine Unterteilung in 20 Abschnitte jeweils konstanter Dicke gewählt.

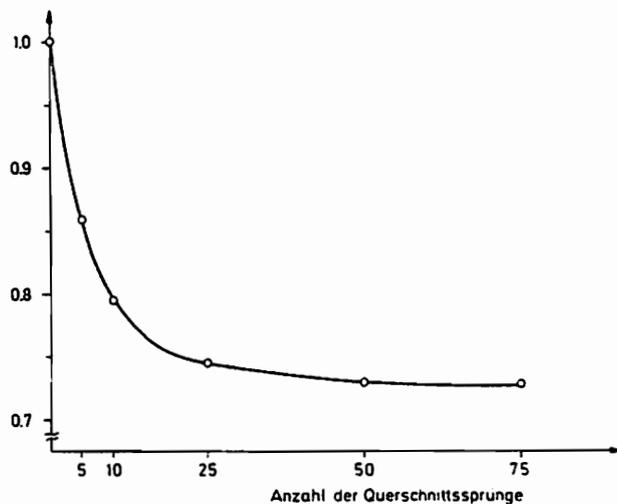


Abb. 6.4 Einfluß der Querschnittssprungzahl ( $K_p = 1/125$ )

### 6.1.4 Einfluß der minimalen Wanddicke

Der Einfluß der minimalen Wanddicke auf das Aussehen der optimalen Lösung wird in Abbildung 6.5 dargestellt. Dabei ist mit kleiner werden der Minimaldicke eine Erhöhung der Volumenersparnis von 15,5 % auf 30,2 % zu beobachten. An dieser Stelle ist jedoch anzumerken, daß die Wahl eines größeren Wertes für  $h_{\min}$  z. B. zu leichter herzustellenden Querschnittsverläufen führen kann.

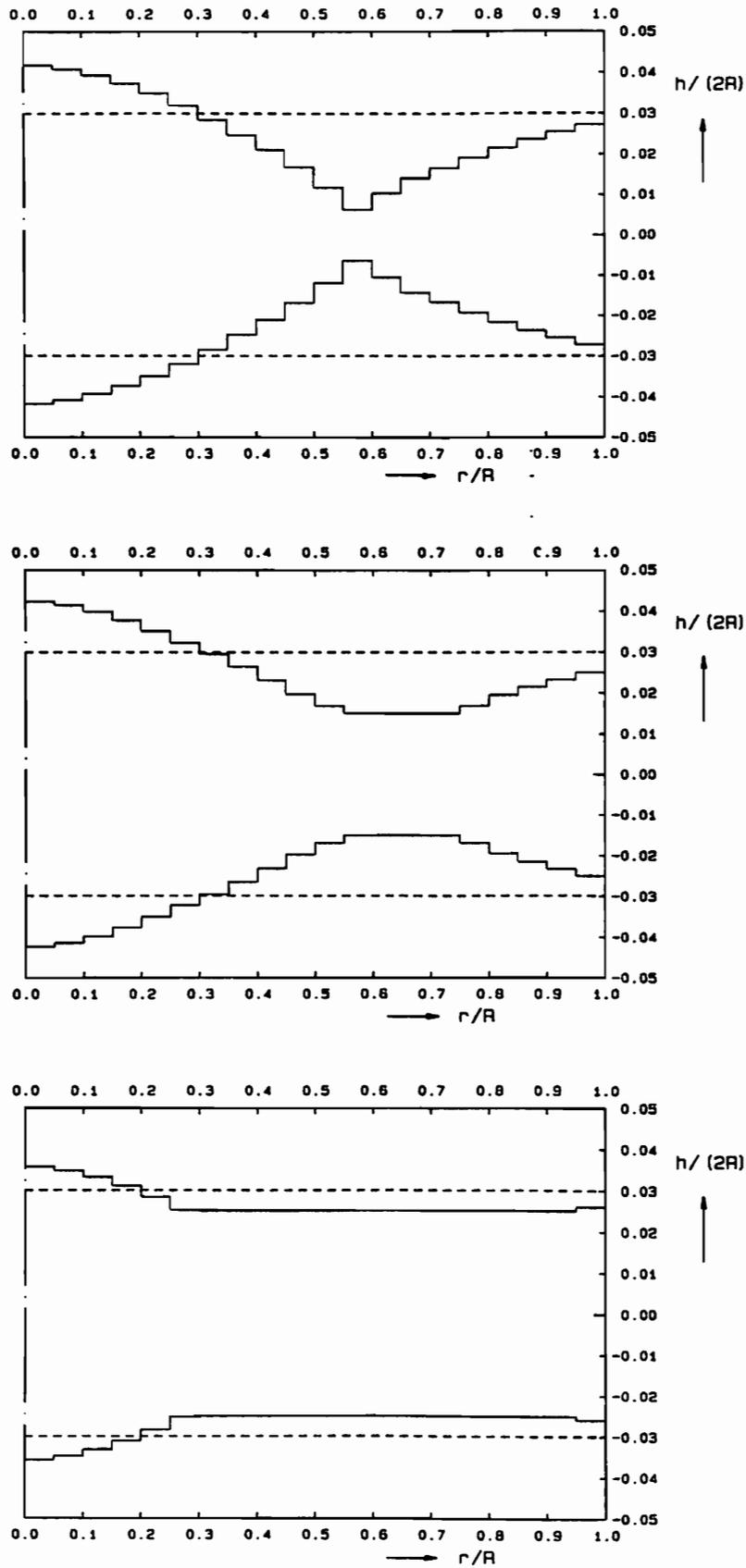


Abb. 6.5 Einfluß der minimalen Wanddicke ( $K_p = 1/400$ )

## 6.2 Einige optimale Querschnittsverläufe

### 6.2.1 Kreisplatten

Für die in Abb. 6.1 dargestellte Problemstellung ergeben sich bei unterschiedlich gewählten Anfangskonfigurationen zwei verschiedene Ergebnisse für die Platte gleicher dynamischer Festigkeit (Abb. 6.6). Für den punktiert dargestellten Verlauf, der gegenüber der Platte gleicher Dicke (-----) eine Volumensparnis von 29,4 % ergibt, sind die KUHN-TUCKER-Bedingungen nicht erfüllt. Mit der Methode der linearen Approximation läßt sich diese Lösung in drei Iterationsschritten in den volumenoptimalen Lösungsverlauf (——) überführen. Hierfür beträgt die Volumensparnis 30,4 %.

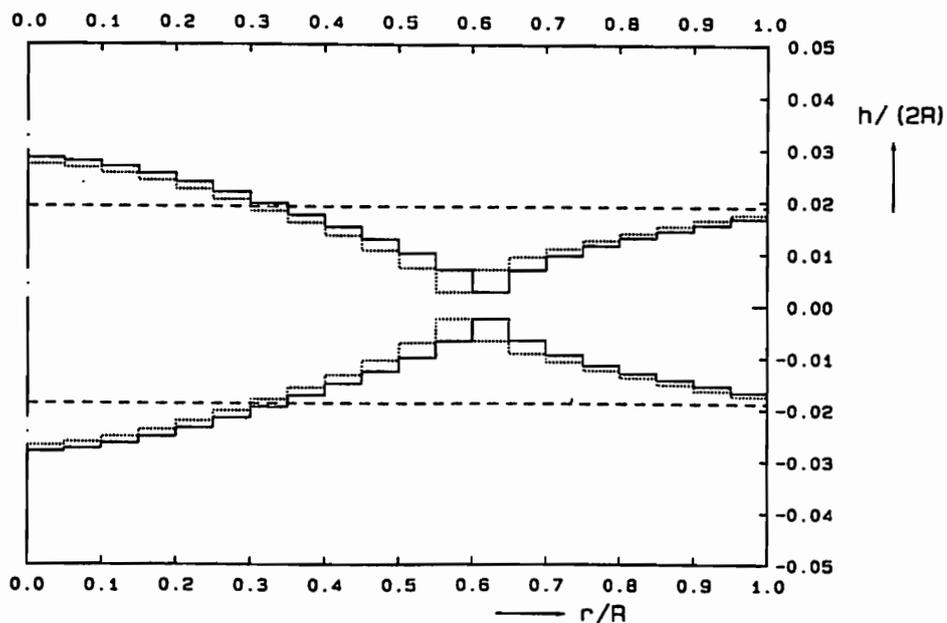
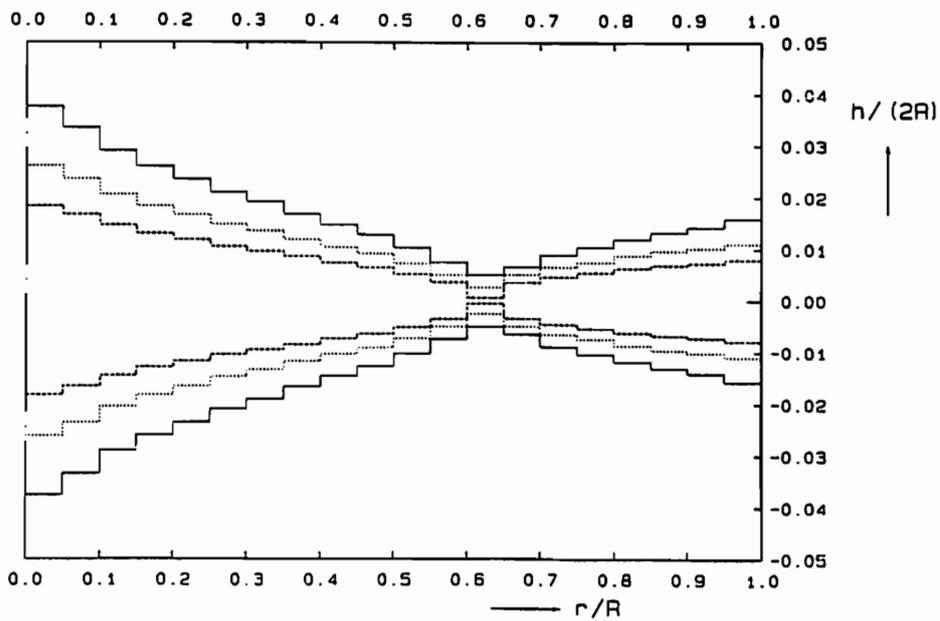
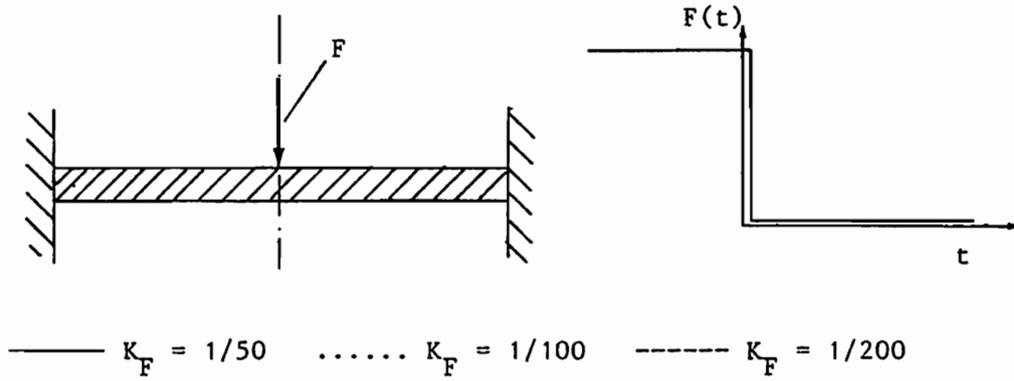


Abb. 6.6 Lösungsverläufe für den Fall  $K_p = 1/1000$

In Abb. 6.7 wird der Einfluß der Kenngröße  $K_F$  auf die optimalen Lösungsverläufe für die durch eine Einzellast  $F$  belastete, eingespannte Kreisplatte dargestellt. Die Volumensparnis gegenüber der Platte gleicher Dicke beträgt hierbei 56,5 - 57,7 %.



• Abb. 6.7 Einfluß der Kenngröße  $K_F$

Für die am Außenrand gelagerte und durch Auflagerbeschleunigungen belastete Kreisplatte erfüllen die sich ergebenden Querschnittsverläufe für die Platte gleicher dynamischer Festigkeit die KUHN-TUCKER-Bedingungen. Für den Fall der sprungartigen Belastung beträgt die Volumensparnis 42 %, für den Fall der plötzlichen Entlastung 44,5 % gegenüber der Platte gleicher Dicke (-----). (Abb. 6.8)

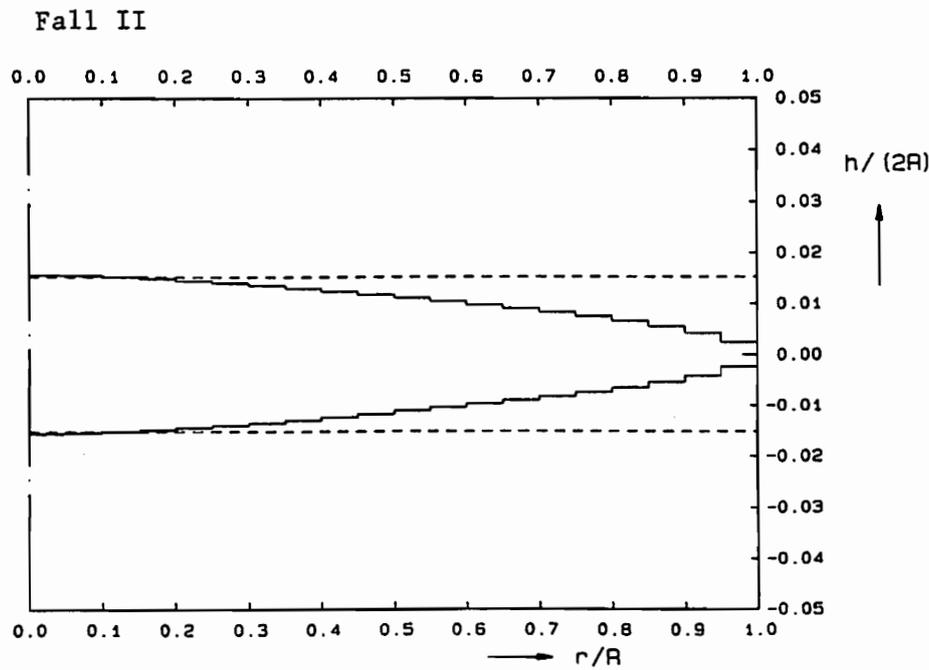
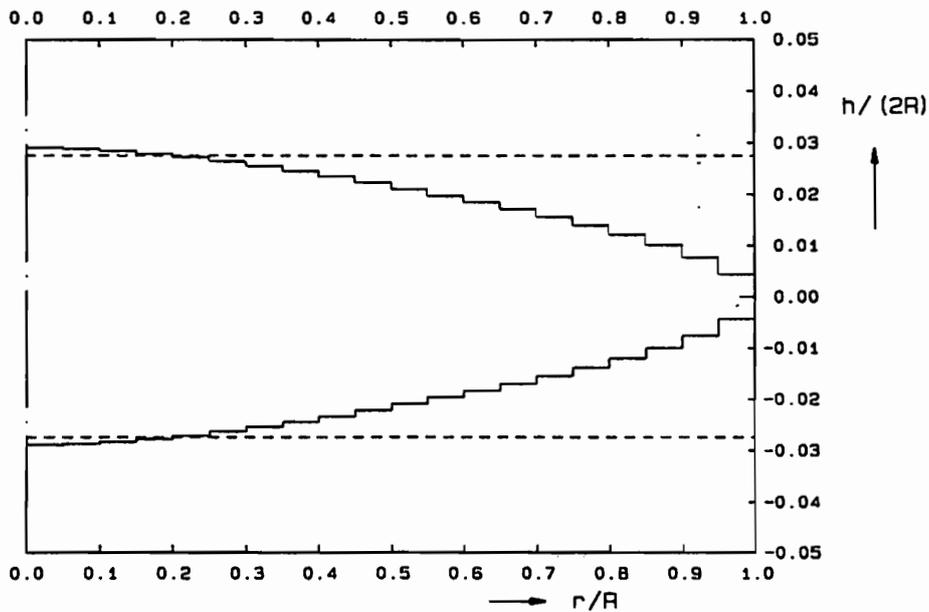
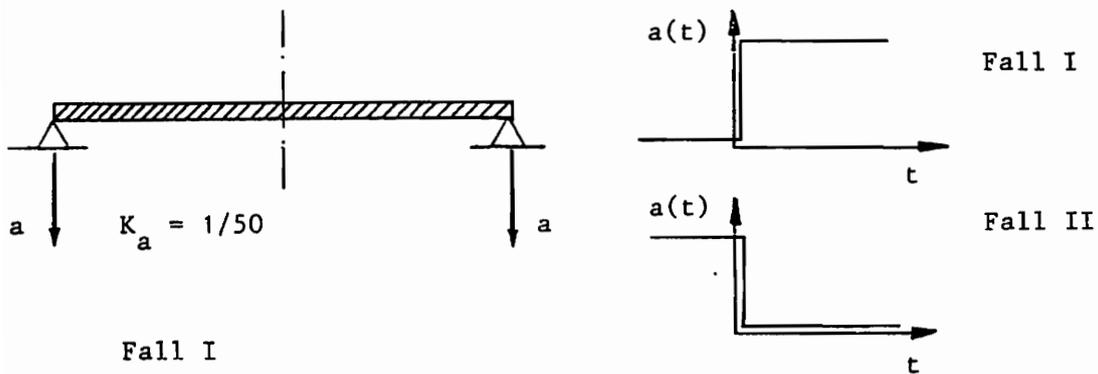


Abb. 6.8

### 6.2.2 Kreisringplatten

Für die am Innenrand eingespannte und am Außenrand freie Kreisringplatte führen die Berechnungen für den Belastungsfall der plötzlichen Auflagerbeschleunigung auf den in Abb. 6.9 dargestellten volumenoptimalen Lösungsverlauf (Volumenersparnis 94,6 %). Dieser unterscheidet sich im Rahmen der Zeichengenauigkeit nicht von dem Verlauf für die Platte gleicher dynamischer Festigkeit (Volumenersparnis 94,3 %).

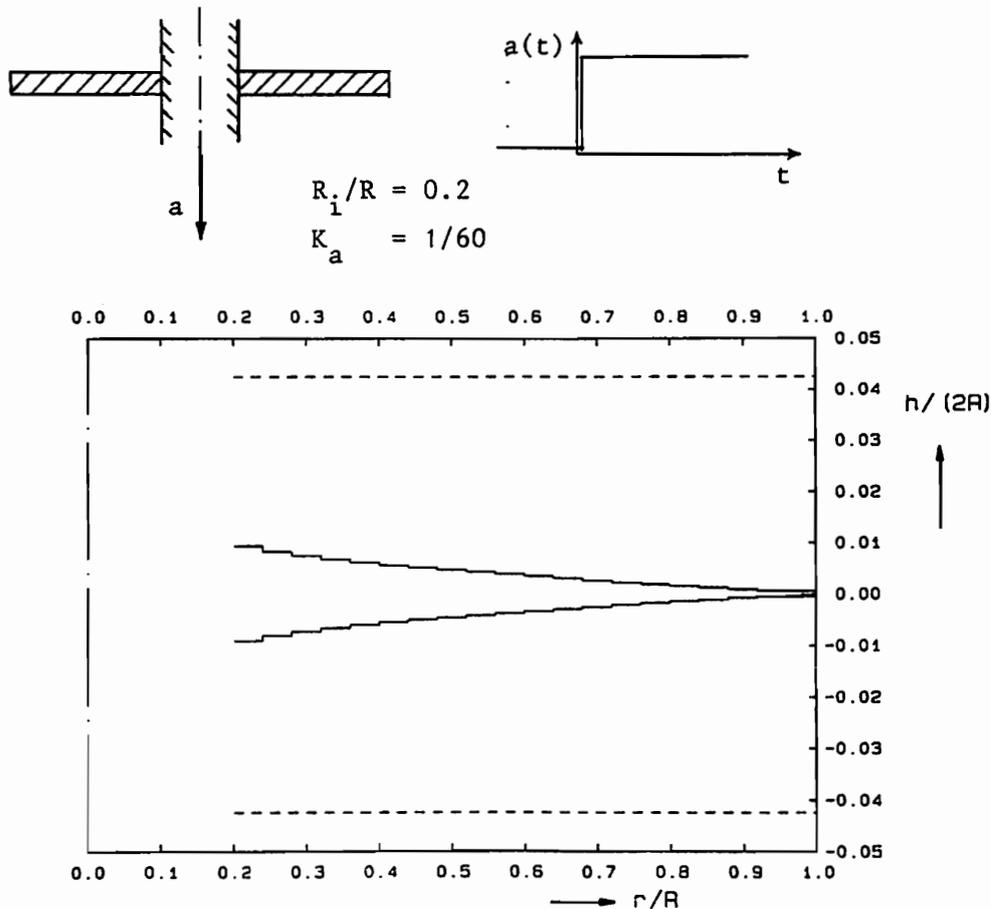
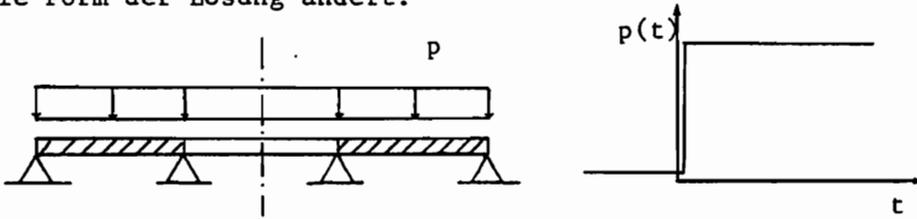


Abb. 6.9

Für die innen und außen gelagerte Kreisringplatte unter einer Flächenlast  $p$  sind in Abb. 6.10 für verschiedene Verhältnisse  $R_i/R$  die optimalen Querschnittsverläufe dargestellt. In beiden Fällen sind die Lösungen für die Platte gleicher dynamischer Festigkeit volumenoptimal. Im Fall A beträgt die Volumenersparnis 20,1 %, im Fall B 33,6 %, gegenüber der Platte gleicher Dicke (-----).

Hierbei ist interessant, daß sich bei unterschiedlichen Verhältnissen die Form der Lösung ändert.



Fall A:  $R_i/R = 0.75$  ;  $K_p = 1/50$

Fall B:  $R_i/R = 0.25$  ;  $K_p = 1/2000$

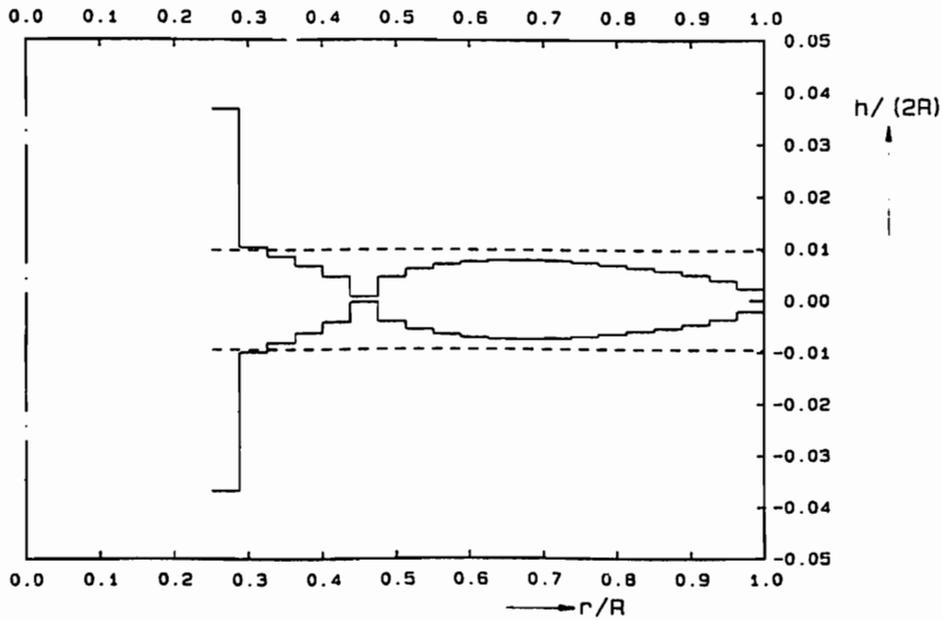
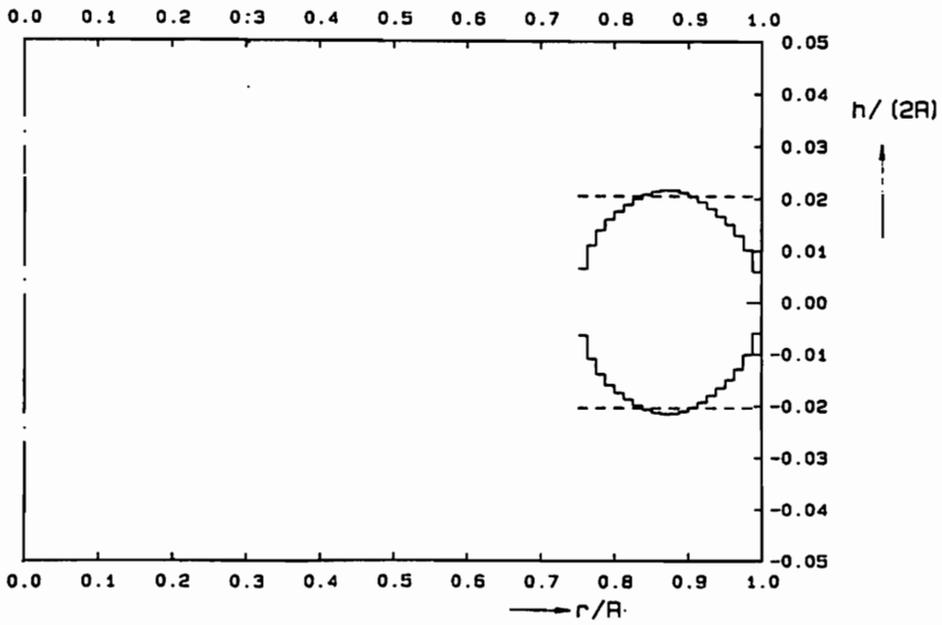
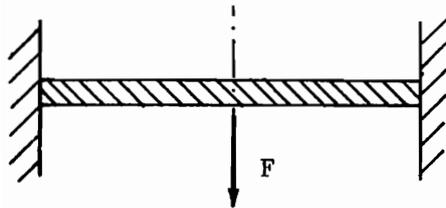


Abb. 6.10

## 7. Experimentelle Untersuchungen

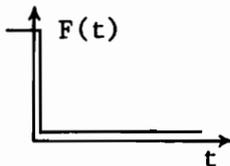
Zur Überprüfung der numerischen Berechnungsverfahren werden für den in Abb. 7.1 dargestellten Belastungsfall experimentelle Untersuchungen an einer Platte gleicher Dicke und an einer Platte mit optimiertem, d. h. veränderlichem Querschnittsverlauf angestellt.



Material: Al Cu Mg 1 (DIN 1725)

$E = 74 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$

$\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$



Plattenaußenradius:  $R = 0.25 \text{ m}$

Einzelkraft:  $F = 582 \text{ N}$

Abb. 7.1

### 7.1 Versuchsanordnung

Aus Abb. 7.2 ist die Versuchsanordnung in ihrer Gesamtheit zu ersehen.

Die dabei für den Belastungsfall benötigte Einzelkraft  $F$  wird mit Hilfe eines an einem Federstahldraht unterhalb der Platte hängendem Gewicht bereitgestellt. Eingeleitet wird diese Kraft durch einen oberhalb der Platte befindlichen Stempel ( $\varnothing 10 \text{ mm}$ ), der über den durch eine Bohrung ( $\varnothing 2 \text{ mm}$ ) in Plattenmitte geführten Draht mit dem Gewicht verbunden ist.

Die plötzliche Entlastung ergibt sich durch Durchtrennen des Drahtes mit Hilfe einer Zange.

Die auftretenden Dehnungen werden mit Dehnungsmeßstreifen aufgenommen, die sich wegen ihrer geringen Trägheit für die Erfassung dynamischer Vorgänge mit hohen Frequenzanteilen eignen. Hierzu werden an den jeweiligen Meßpunkten Rosetten des Typs RY 11 ( $K = 2.01 \pm 1 \%$ ;  $R = 120 \Omega$ ) der Firma Hottinger/Baldwin mit dem Spezialkleber Z 70 aufgebracht.

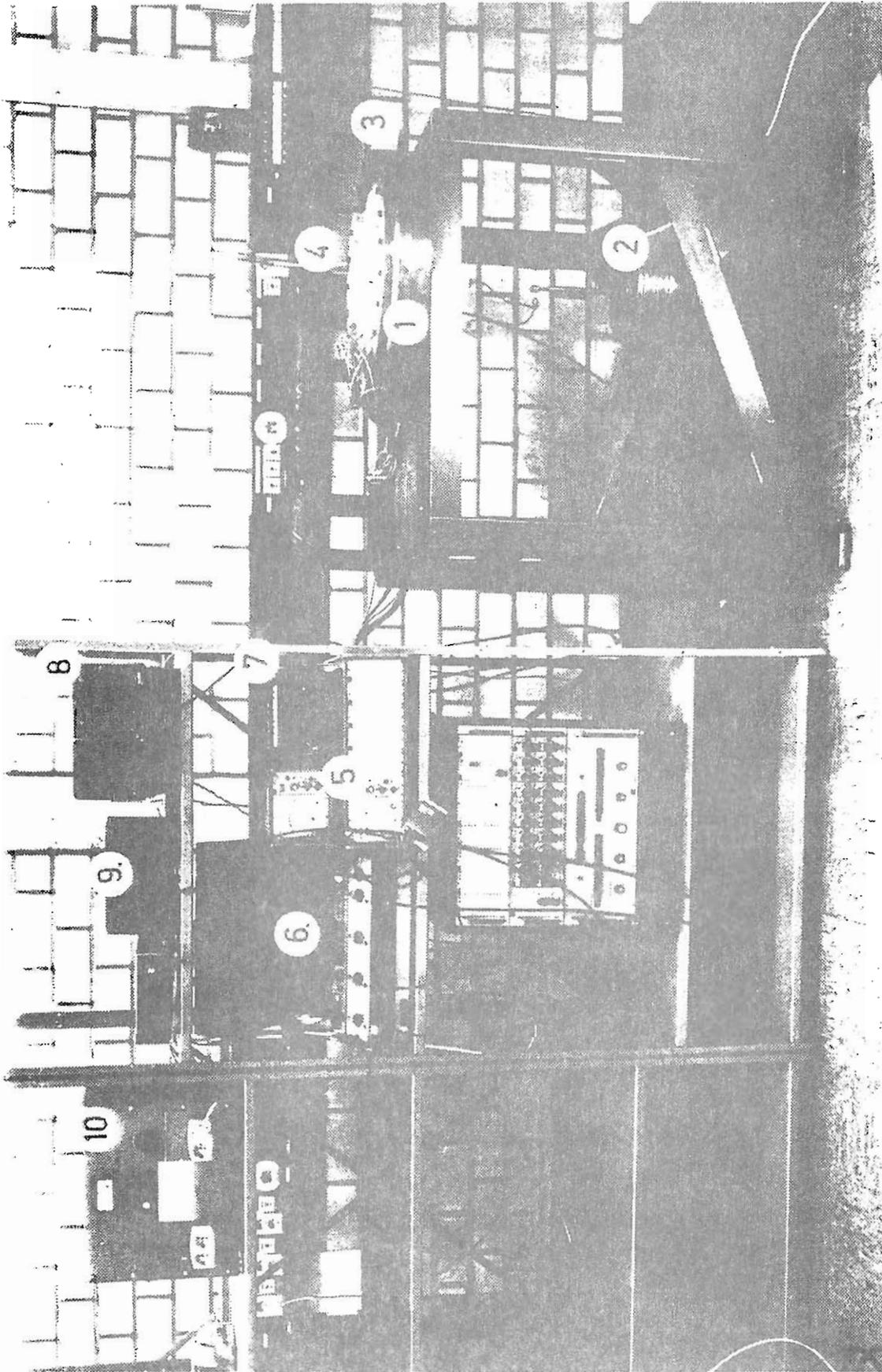


Abb. 7.2 Versuchsanordnung

Zu Abb. 7.2

- |   |                             |    |                         |
|---|-----------------------------|----|-------------------------|
| 1 | Eingespannte Versuchsplatte | 6  | Magnetbandgerät         |
| 2 | Gewicht                     | 7  | Frequenzgenerator       |
| 3 | Zange                       | 8  | Zweistrahloszilloskop   |
| 4 | Rückholfeder                | 9  | Voltmeter               |
| 5 | Gleichspannungsverstärker   | 10 | Netzspannungskonstanter |

Die jeweils entsprechenden DMS an der Plattenober- und Plattenunterseite werden zu einer Halbbrücke geschaltet, wodurch der Einfluß der Wärme-  
dehnung kompensiert und der zu messende Effekt der Biegedehnung verdoppelt wird. Näheres zur Anordnung der Dehnungsmeßstreifen geht aus Abb. 7.3 hervor.

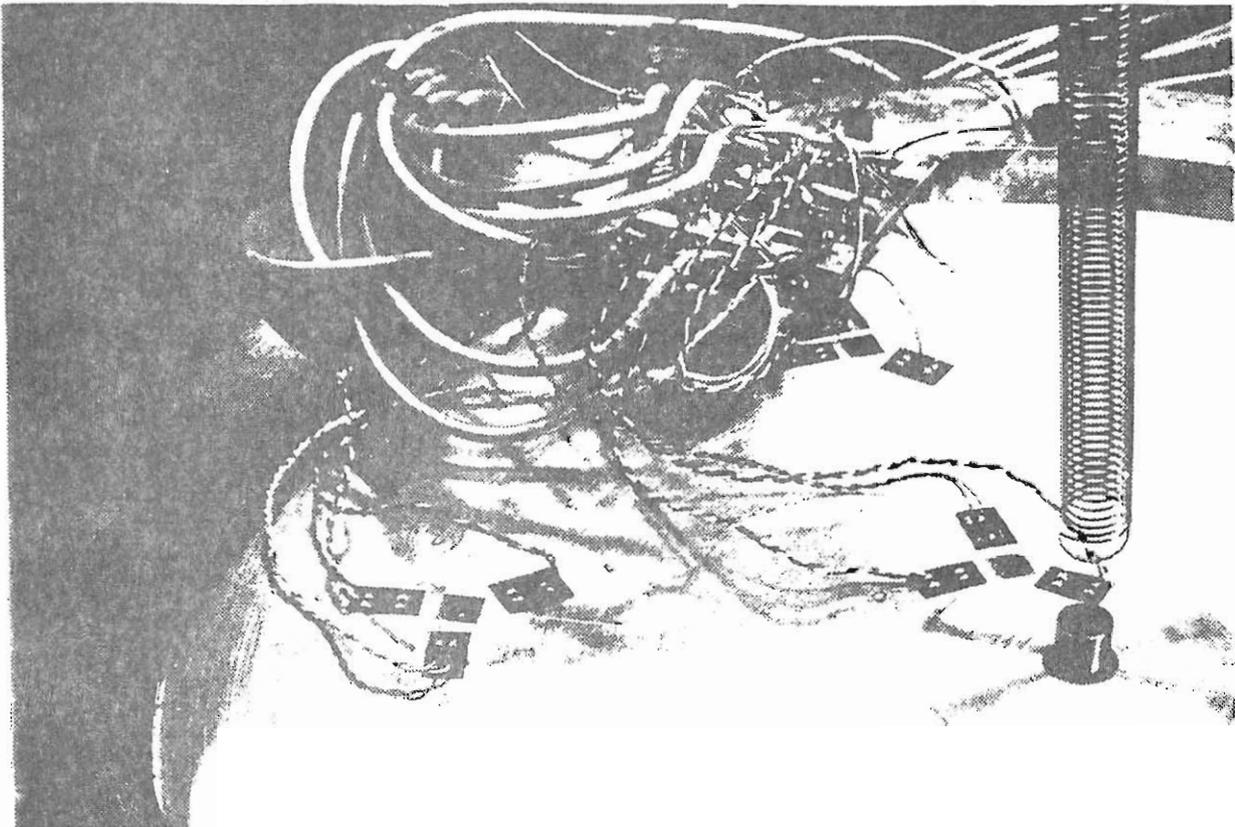


Abb. 7.3 Anordnung der DMS

Abbildung 7.4 zeigt die weitere Anordnung der Meßkette.

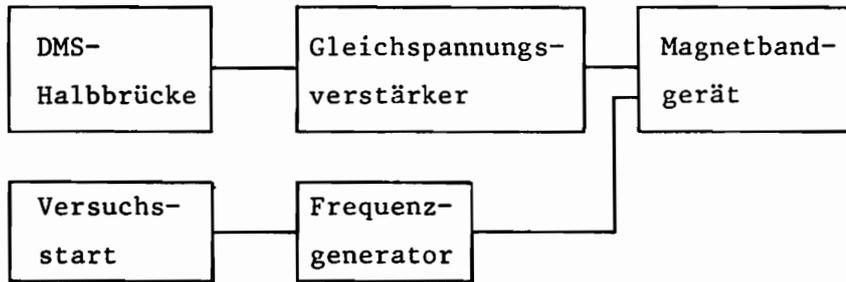


Abb. 7.4 Datenaufnahme

Zur Verstärkung der an den geschalteten Brücken auftretenden Spannungsänderungen werden Gleichspannungsverstärker vom Typ KWS 3020 A bzw. KWS 3020 C der Firma Hottinger/Baldwin benutzt. Die Ausgangssignale der Verstärker werden auf den frequenzmodulierten Kanälen des Transientenrecorders vom Typ "STORE 4 DS" der Firma Racal aufgezeichnet. Die Datenaufnahme erfolgt hierbei mit größtmöglicher Bandgeschwindigkeit (60 inch/s). Gleichzeitig zu den Dehnungssignalen werden als Zeitbasis 1 kHz-Rechteckimpulse vom Frequenzgenerator aufgenommen, wobei dieser gestartet wird, sobald der Draht durchtrennt ist.

Zur weiteren Datenverarbeitung werden die aufgezeichneten Größen über einen Analog-Digital-Wandler bei 64-fach verlangsamter Bandgeschwindigkeit in die Rechereinheit (HP 1000) eingelesen. Um eventuelle Schwankungen der Bandgeschwindigkeit berücksichtigen zu können, werden parallel die 1 kHz-Rechteckimpulse ebenfalls eingelesen.

## 7.2 Versuchsergebnisse

In Abb. 7.5 und 7.6 sind die Ergebnisse für die Platte gleicher Dicke (5 mm) dargestellt. Dabei sind jeweils die Verläufe für die Dehnungen in radialer und tangentialer Richtung und für die Vergleichsspannung im Vergleich zur Finite-Element-Rechnung aufgetragen.

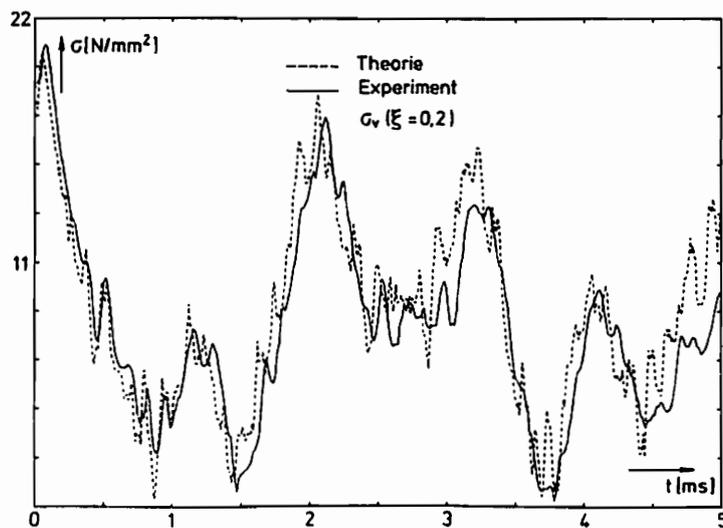
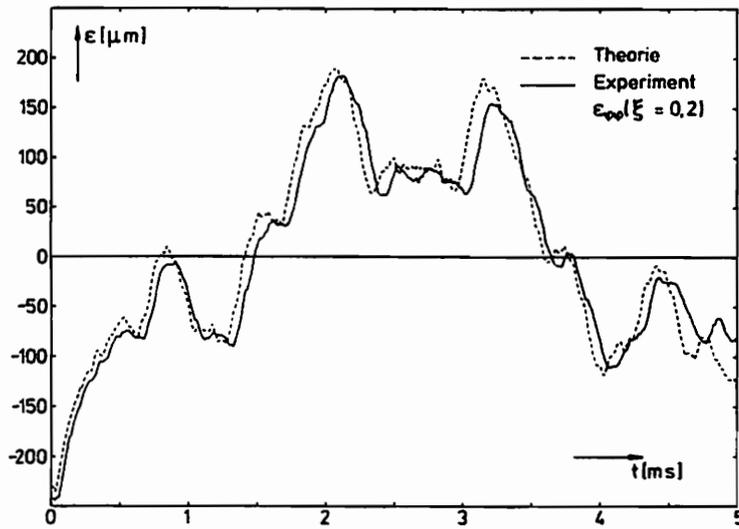
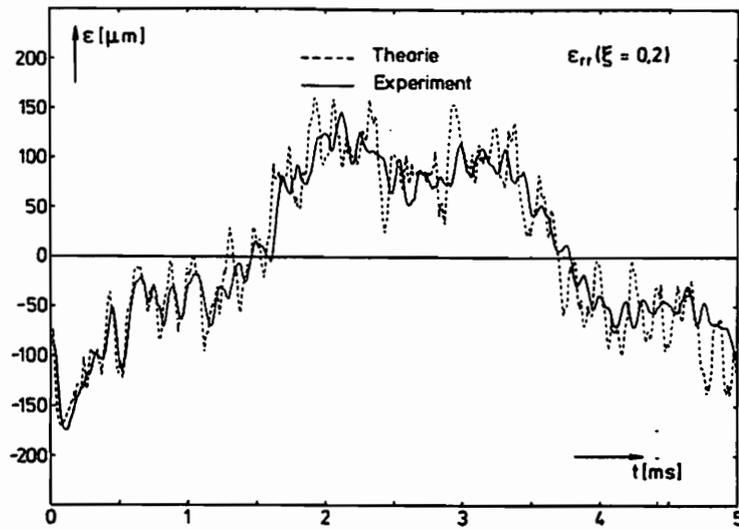


Abb. 7.5 Ergebnisse für  $\xi = 0.2$

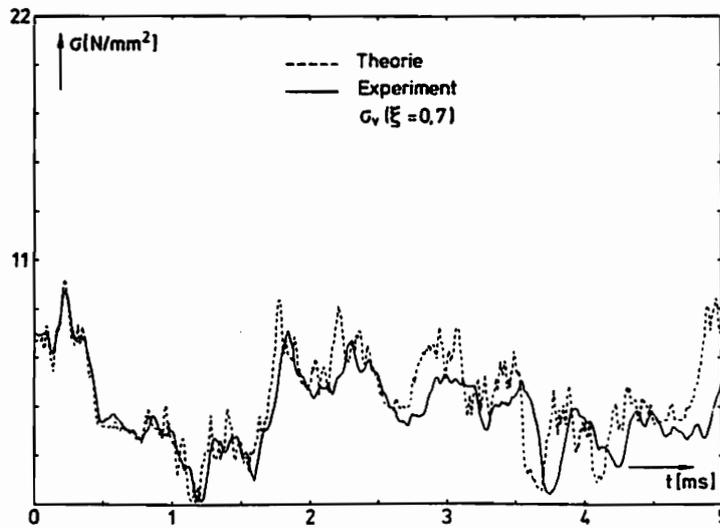
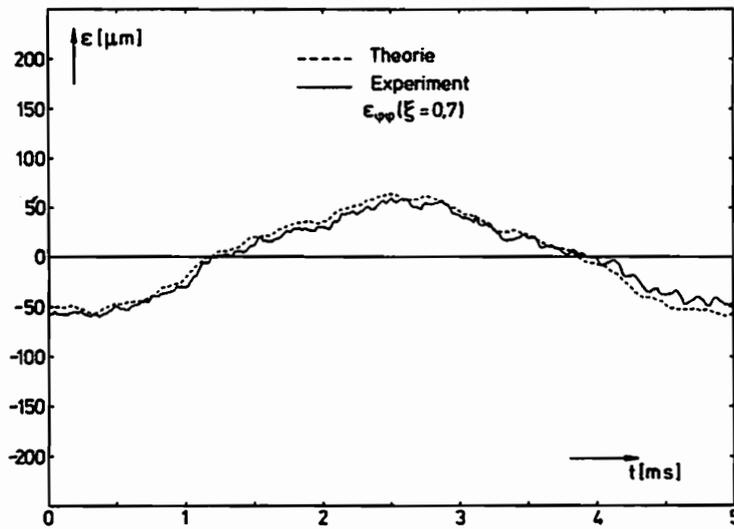
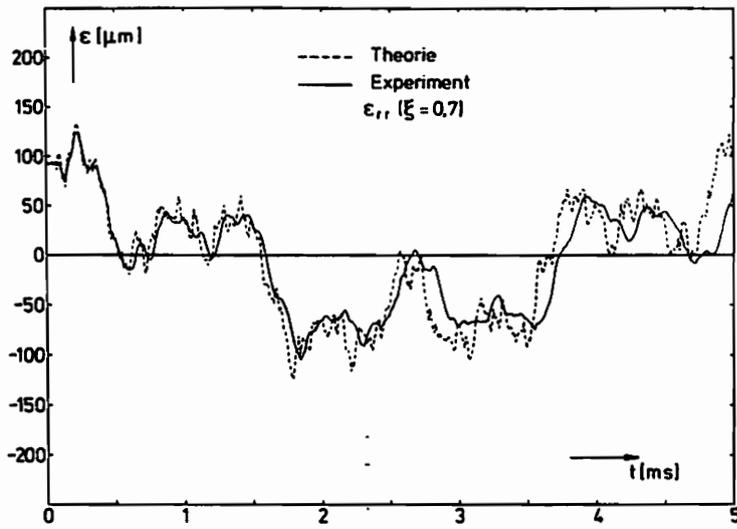


Abb. 7.6 Ergebnisse für  $\xi = 0.7$

Für die hierzu benötigte numerische Kontrollrechnung wird die Platte in 25 der in Kapitel 3 beschriebenen Elemente gleicher Dicke unterteilt.

Beim Vergleich der Ergebnisverläufe ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Die experimentell bestimmten Maximalwerte der Vergleichsspannungen weichen dabei um 3,1 bzw. 5,2 % von den Werten aus der numerischen Rechnung ab. Durch die Tatsache, daß diese Maximalwerte sehr kurz nach der Entlastung erreicht werden, wird die Vernachlässigung der Dämpfungseinflüsse bei der numerischen Behandlung der vorliegenden Problemstellung nachträglich gerechtfertigt.

Außerdem ist festzustellen, daß die Grundswingungsdauer der dem Experiment zugrunde liegenden Struktur größer als die des Plattenmodells ist, auf dem die numerischen Berechnungen basieren. Dieses kann auf eine Steifigkeitsverringering durch nicht exakte Realisierung der idealen Einspannung im Versuch zurückgeführt werden.

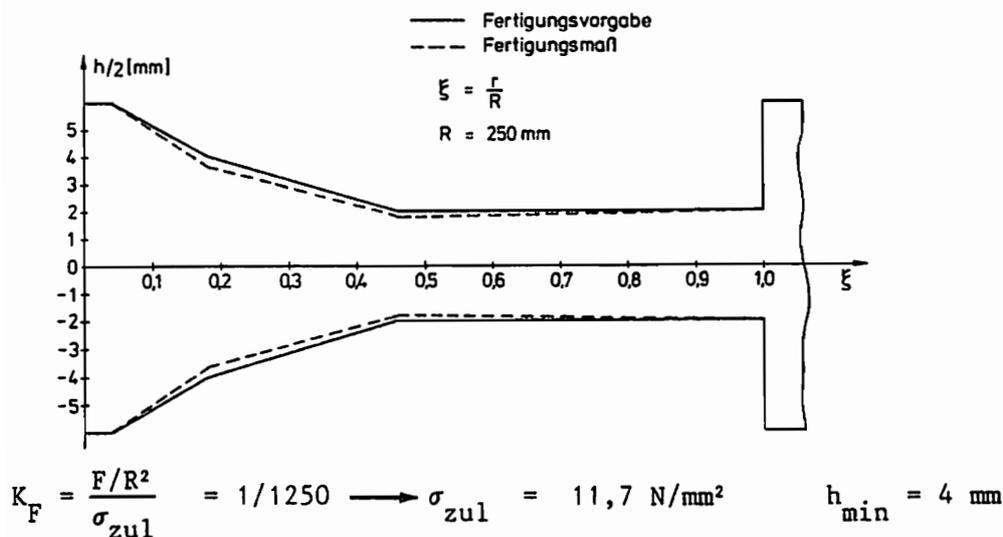


Abb. 7.7 Querschnittsverlauf der optimierten Kreisplatte

In Abb. 7.7 ist die Fertigungsvorgabe und das tatsächliche Fertigungsmaß der zweiten Versuchsplatte mit optimiertem Querschnittsverlauf dargestellt.

Zur numerischen Berechnung wird in diesem Fall die Platte wiederum in 25 Elemente unterteilt, wobei die Elementdicken dem Fertigungsmaß (Abb. 7.7) angepaßt werden. Die so erhaltenen Ergebnisse werden den gemessenen Verläufen in den Abbildungen 7.8 und 7.9 gegenübergestellt.

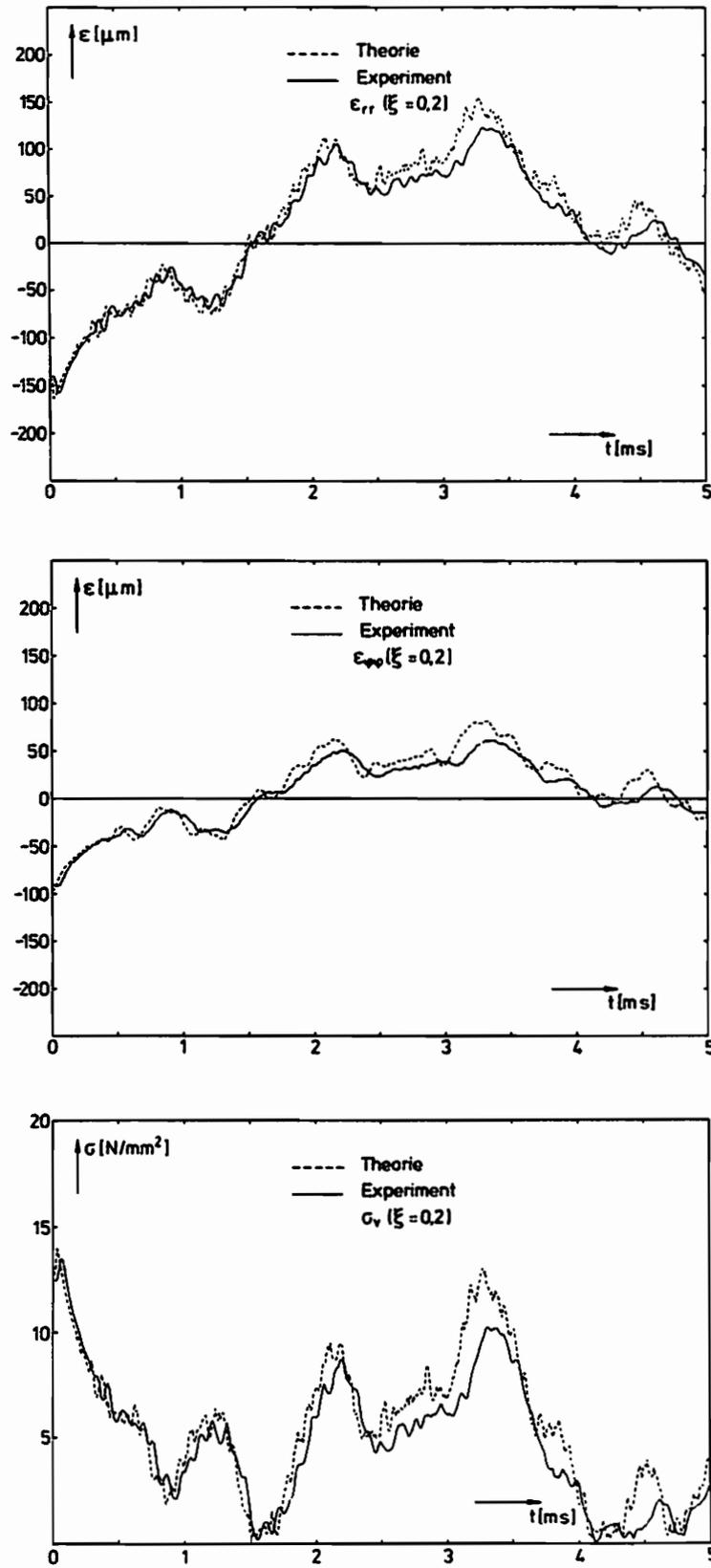


Abb. 7.8 Ergebnisse für  $\xi = 0.2$

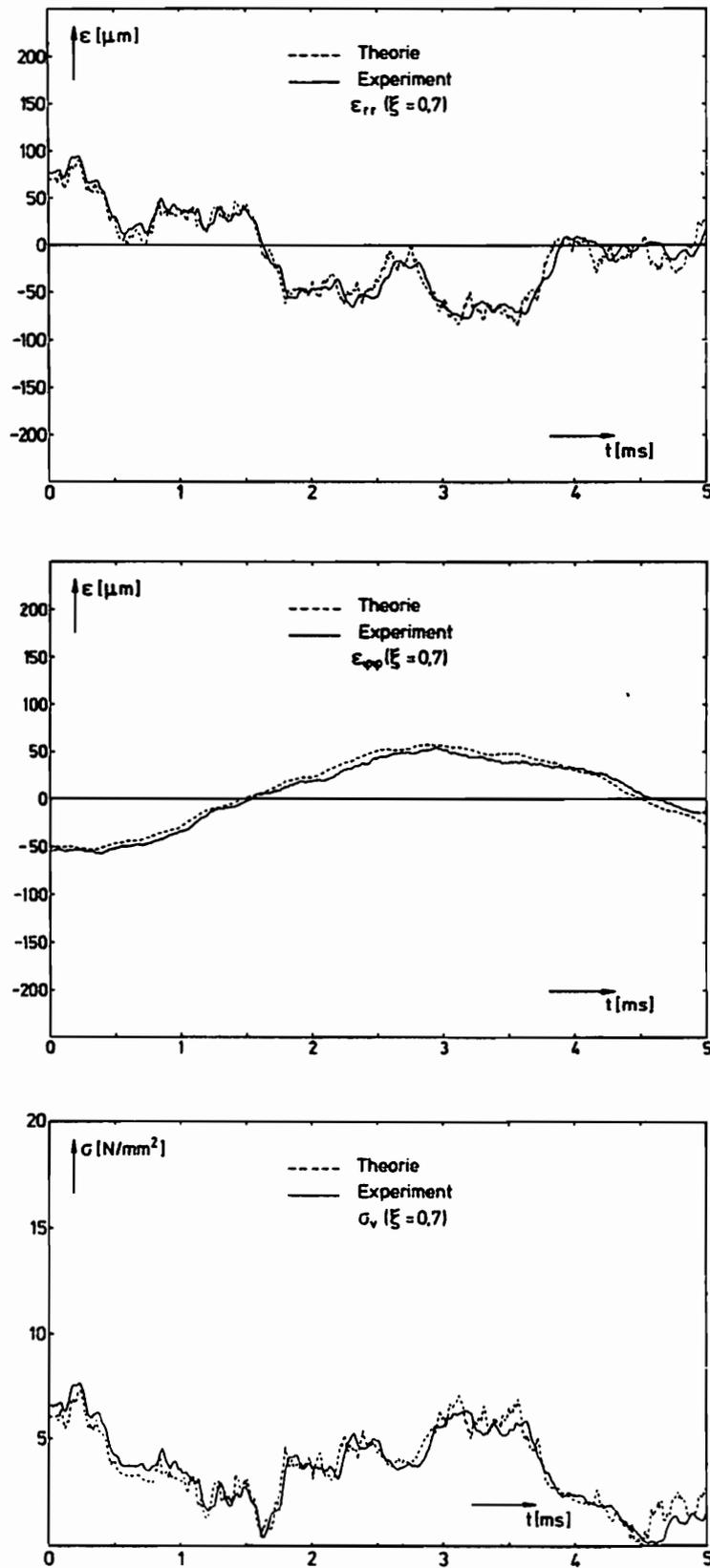


Abb. 7.9 Ergebnisse für  $\xi = 0.7$

Auch für den Fall der Platte mit veränderlichem Querschnittsverlauf zeigt sich hierbei eine gute Übereinstimmung zwischen den numerisch und experimentell bestimmten Dehnungs- und Spannungsverläufen. Die Abweichung zwischen den Maximalwerten für die Vergleichsspannung beträgt hierbei 4,7 bzw. 3,5 %.

Ein Vergleich mit der vorgegebenen zulässigen Spannung  $\sigma_{zul}$  zeigt, daß an der Stelle  $\xi = 0.2$  eine Spannungsüberschreitung von 18,1 % auftritt. Dieses ist in der Tatsache begründet, daß die aktuelle Plattendicke an dieser Stelle unterhalb des der Fertigungsvorgabe zugrundeliegenden optimierten Querschnittsverlaufes liegt (Abb. 7.7). Die daraus folgende Verringerung der Plattendicke führt zwangsläufig zu einer Erhöhung der Werte für die Vergleichsspannung.

Da im Optimierungsverfahren an der Stelle  $\xi = 0.7$  die Querschnittsrestriktionen ( $h_{min}$ ) aktiv sind, erreicht die Vergleichsspannung an dieser Stelle den zulässigen Wert nicht.

Abschließend ist noch zu erwähnen, daß Vergleichsmessungen an einer anderen Stelle des Umfangs für  $\xi = 0.7$  die Rotationssymmetrie der Systemantwort bestätigen.

## 8. Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit befaßt sich mit der volumenoptimalen Dimensionierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung, wobei die Randbedingungen und Belastungsformen weitgehend variiert werden. Die bei der Optimierung zu berücksichtigenden, beschränkenden Nebenbedingungen beziehen sich im Entwurfsraum auf eine untere Schranke für die Plattendicke und im Zustandsraum auf eine nicht zu überschreitende zulässige Vergleichsspannung.

Da für die nachfolgend vorgestellten Optimierungsverfahren eine häufige Bestimmung der Zustandsgrößen, d. h. Spannungen, erforderlich ist und hierfür aufgrund der instationären Belastung jeweils eine gesamte Schwingungsanalyse durchgeführt werden muß, wird im ersten Teil der Arbeit schwerpunktmäßig auf die möglichst schnelle und genaue Bestimmung der auftretenden Maximalspannungen eingegangen.

Unter Anwendung der MINDLINSchen Plattentheorie wird zur Ortsdiskretisierung ein möglichst einfaches, speicherplatzsparendes Finites Element aufgestellt, wobei die Masseneinflüsse mit Hilfe einer lumped-mass Matrix beschrieben werden. Die sich ergebenden Matrizendifferentialgleichungen werden mit einem Verfahren gelöst, das aus einer Kombination des Verfahrens mit orthogonalen Ritzvektoren und der Zeitintegration nach NEWMARK besteht. Hierbei stellt sich heraus, daß dieses Verfahren dem Vergleich mit der Modalen Analyse in Bezug auf Genauigkeit standhält, jedoch vergleichsweise beachtliche Rechenzeiterparnisse bringt.

Nach Bereitstellung des Verfahrens zur Bestimmung der Zustandsgrößen wird der zweite Schwerpunkt auf die Lösungsmöglichkeiten für das vorliegende nichtlineare Parameteroptimierungsproblem gelegt.

Dabei erweist es sich als günstig, als erste Näherung die Platte gleicher dynamischer Festigkeit zu bestimmen. Dieses geschieht mit einem recht einfachen, schnell konvergierenden Iterationsverfahren, das aus der vergleichenden Beobachtung des Tragverhaltens für unterschiedliche Parametersätze hergeleitet wird.

In den meisten der betrachteten Fälle erfüllt diese erste Näherung bereits die KUHN-TUCKER-Bedingungen. Ist dies nicht der Fall, so wird ausgehend von diesem Punkt im Entwurfsraum mit Hilfe von Optimierungsverfahren der numerischen Mathematik (Methode der zulässigen Richtungen; Methode der linearen Approximation) die volumenoptimale Lösung gefunden.

Hierbei stellt sich jedoch heraus, daß die dadurch gegenüber der Platte gleicher dynamischer Festigkeit erzielte Volumenersparnis den dafür benötigten, hohen Rechenaufwand nicht rechtfertigt.

Daraus folgt, daß die Platte gleicher dynamischer Festigkeit für die betrachtete Problemstellung eine sehr gute Näherung für den volumenoptimalen Querschnittsverlauf darstellt.

Den Abschluß der Arbeit bildet die experimentelle Überprüfung der numerischen Ergebnisse anhand eines Belastungsfalles. Dabei zeigt sich, daß die verwendeten Modelle und Verfahren die experimentell bestimmten Dehnungs- und Spannungsverläufe recht genau wiedergeben können.

#### Ausblick

Die in dieser Arbeit aufgezeigte Vorgehensweise läßt sich auch auf Rotationsschalen unter instationärer Erregung anwenden. Hierzu sind bereits mit Erfolg erste numerische Berechnungen durchgeführt worden.

Den nächsten wichtigen Schritt, der einen noch weitaus höheren Rechenaufwand erfordert, stellt die Behandlung nichtrotationssymmetrischer Belastungsfälle dar.

Literaturverzeichnis

- 1 Venkayya, V. B.  
Structural Optimization  
A Review and Some Recommendations  
International Journal for Numerical Methods in Engineering  
Vol. 13, (1978), S. 203 - 228
  
- 2 Vanderplaats, G. N.  
Structural Optimization  
Past, Present and Future  
AIAA-Journal, Vol. 20, (1982), S. 992 - 1000
  
- 3 Banichuk, N. V.  
Current Problems in the Optimization of Structures  
Mekhanika Tverdogo Tela (Mechanics of Solids)  
Vol. 17, No. 2, (1982), S. 95 - 107
  
- 4 Olhoff, N. and Taylor, J. D.  
On Structural Optimization  
Journal of Applied Mechanics  
Vol. 50, (1983), S. 1139 - 1151
  
- 5 Olhoff, N.  
A Survey of the Optimal Design of Vibrating Structural Elements  
The Shock and Vibration Digest  
Part I: Theory, Vol. 8, No. 8, (1976), S. 3 - 10  
Part II: Applications, Vol. 8, No. 9, (1976), S. 3 - 10
  
- 6 Rao, S. S.  
Structural Optimization under Shock and Vibration Environment  
The Shock and Vibration Digest  
Vol. 11, (1979), S. 3 - 12

- 7 Haftka, R. T. and Prasad, B.  
Optimum Structural Design with Plate Bending Elements - A Survey  
AIAA-Journal, Vol. 19, (1981), S. 517 - 522
- 8 Olhoff, N.  
Optimal Design Of Vibrating Circular Plates  
International Journal of Solids and Structures  
Vol. 6, (1970), S. 139 - 156
- 9 Olhoff, N.  
Optimal Design of Vibrating Rectangular Plates  
International Journal of Solids and Structures  
Vol. 10, (1974), S. 93 - 109
- 10 Cheng, K.-T. and Olhoff, N.  
An Investigation Concerning Optimal Design of Solid Elastic Plates  
International Journal of Solids and Structures  
Vol. 17, (1981), S. 305 - 323
- 11 Cheng, K.-T. and Olhoff, N.  
Regularized Formulation for Optimal Design of Axisymmetric Plates  
International Journal of Solids and Structures  
Vol. 18, (1982), S. 153 - 169
- 12 Niordson, F.  
Optimal Design of Plates with a Constraint on the Slope of  
the Thickness Function  
International Journal of Solids and Structures  
Vol. 19, (1983), S. 141 - 151
- 13 Ullenboom, W.  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer  
Belastung  
Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
Nr. 11, (1977), Ruhruniversität Bochum

- 14 Feng, T. T., Arora, J. S. and Haug, E. J.  
Optimal Structural Design under Dynamic Loads  
International Journal for Numerical Methods in Engineering  
Vol. 11, (1977), S. 39 - 52
  
- 15 Venkayya, V. B. and Khot, N. S.  
Design of Optimum Structures to Impulse Type Loading  
AIAA-Journal, Vol. 13, (1975), S. 989 - 994
  
- 16 Mindlin, R. D.  
Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions  
of Isotropic, Elastic Plates  
Journal of Applied Mechanics  
Vol. 18, (1951), S. 31 - 38
  
- 17 Timoshenko, S. P.  
On the Correction for Shear of the Differential Equation  
for Transverse Vibrations of Prismatic Bars  
The London, Edinburgh, Dublin Philosophical Magazine and  
Journal of Science, Ser. 6, Bd. 41, (1921), S. 744 - 746
  
- 18 Kirchhoff, G. R.  
Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe  
Journal Mathematik (Crelle), 40, (1850), S. 51
  
- 19 Lamb, H.  
On Waves in Elastic Plates  
Proceedings of the Royal Society of London  
Ser. A, Vol. 93, (1917), S. 114 - 128
  
- 20 Lord Rayleigh  
On the Free Vibrations of an Infinite Plate of Homogeneous  
Isotropic Elastic Matter  
Proceedings of the London Mathematical Society  
Vol. 20, (1889), S. 225 - 234

- 21 Reissner, E.  
The Effect of Transverse Shear Deformation on the  
Bending of Elastic Plates  
Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME  
Vol. 12, (1945), A 69 - A 77
  
- 22 Marguerre, K. und Woernle, H.-Th.  
Elastische Platten  
B. I. - Wissenschaftsverlag  
Mannheim - Wien - Zürich, (1975)
  
- 23 Reismann, H.  
Forced Motions of Elastic Plates  
Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME  
Vol. 35, (1968), S. 510 - 515
  
- 24 Abramowitz, M. and Stegun, I. A.  
Handbook of Mathematical Functions  
Dover Publications, Inc., New-York, (1965)
  
- 25 Clough, R. W. and Penzien, J.  
Dynamics of Structures  
Mc Graw Hill Book Company, (1975)
  
- 26 Pestel, E. C. and Leckie, F. A.  
Matrix Methods in Elastomechanics  
Mc Graw Hill, (1963)
  
- 27 Zienkiewicz, O. C.  
The Finite Element Method in Engineering Science  
Mc Graw Hill, (1971)
  
- 28 Gallagher, R. H.  
Finite Element Analysis  
Prentice Hall, Inc. New Jersey, (1975)

- 29 Dankert, J.  
Numerische Methoden der Mechanik  
Springer, (1977)
- 30 Bathe, K.-J. and Wilson, E. L.  
Numerical Methods in Finite Element Analysis  
Prentice Hall, Inc. New Jersey, (1976)
- 31 Waller, H. und Krings, W.  
Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik  
B. I. - Wissenschaftsverlag  
Mannheim - Wien - Zürich, (1975)
- 32 Lehmann, Th.  
Elemente der Mechanik IV:  
Schwingungen und Variationsprinzipie  
Vieweg, (1979)
- 33 Hinton, E., Rock, T. and Zienkiewicz, O. C.  
A Note on Mass Lumping and Related Processes in  
the Finite Element Method  
Earthquake Engineering and Structural Dynamics  
Vol. 4, (1976), S. 245 - 249
- 34 Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S.  
Theory of Plates and Shells  
Mc Graw Hill, (1959)
- 35 Hinton, E.  
The Dynamic Transient Analysis of Axisymmetric Circular  
Plates by the Finite Element Method  
Journal of Sound and Vibration  
Vol. 46, (1976), S. 465 - 472

- 36 Neumann, A.  
Zur Berechnung der Ausbreitung von Spannungswellen  
in Plattenstrukturen mit einem Finite-Element-Modell  
Mitteilung aus dem Institut für Mechanik  
Bundeswehrhochschule Hamburg, Heft (80/1), (1980)
- 37 Wilson, E. L., Yuan, M.-W. and Dickens, J. M.  
Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors  
Earthquake Engineering and Structural Dynamics  
Vol. 10, (1982), S. 813 - 821
- 38 Newmark, N. M.  
A Method of Computation for Structural Dynamics  
Journal of the Engineering Mechanics Division  
ASCE, Vol. 85, EM 3, (1959), S. 67 - 94
- 39 Guyan, R. J.  
Reduction of Stiffness and Mass Matrices  
AIAA-Journal, Vol. 3, (1965), S. 360
- 40 Zienkiewicz, O. C. and Morgan, K.  
Finite Elements and Approximations  
John Wiley & Sons, (1983)
- 41 Fox, R. L.  
Optimization Methods for Engineering Design  
Addison-Wesley, (1971)
- 42 Himmelblau, D. M.  
Applied Nonlinear Programming  
Mc Graw-Hill, (1972)

- 43 Kirsch, U.  
Optimum Structural Design  
Mc Graw-Hill, (1981)
- 44 Rao, S. S.  
Optimization - Theory and Applications  
Wiley Eastern Limited, 2nd Ed., (1984)
- 45 Zoutendijk, G.  
Methods of Feasible Directions  
Elsevier, Amsterdam, (1960)
- 46 Gallagher, R. H. and Zienkiewicz, O. C.  
Optimum Structural Design - Theory and Applications  
John Wiley & Sons, (1973)
- 47 Kuhn, H. W. and Tucker, A. W.  
Nonlinear Programming  
in "Proceedings of the Second Berkeley Symposium  
on Mathematical Statistics and Probability"  
(Ed. J. Neymann)  
University of California Press., (1951)
- 48 Meyers, A.  
Rotationsschalen gleicher Vergleichsspannung  
Ingenieur-Archiv, 54, S. 161 - 167, (1984)
- 49 Künzi, H. P., Tzschach, H. G. und Zehnder, C. A.  
Numerische Methoden der mathematischen Optimierung  
Teubner, Stuttgart, (1966)

## Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:  
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung

- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode

- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr.32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells

- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme

Nr. 46 J. Makowski/L.-P. Nolte/H. Stumpf

Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems

Nr. 47 Franz. K. Labisch

Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren

Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte

Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY

Nr. 49 Karl-Heinz Bürger

Gewichtsoptimierung rotations-symmetrischer Platten unter instationärer Erregung



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 49**