



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Franz Karl Labisch

Grundlagen einer Analyse  
mehrdeutiger Lösungen  
nichtlinearer Randwertprobleme  
der Elastostatik mit Hilfe von  
Variationsverfahren

Heft Nr. 47



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik  
Ruhr-Universität Bochum

Franz Karl Labisch

Grundlagen  
einer Analyse mehrdeutiger Lösungen  
nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik  
mit Hilfe von  
Variationsverfahren

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 47  
August 1985

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl für Mechanik II der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Bauingenieurwesen als Habilitationsschrift angenommen.

Den Herren Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf, Prof. Dr. Ph.D. G. Schmid, Prof. Dr.rer.nat. G. Rieder und Prof. Dr. K. Kirchgässner gilt mein herzlicher Dank, nicht nur für die Übernahme der Referate, aber auch für die hilfreiche Unterstützung, die sorgfältige Analyse dieser Arbeit und nicht zuletzt für die vielen lehrreichen und oft kritischen Anmerkungen.

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf  
Prof. Dr. Ph. D. G. Schmid

auswärtige Gutachter: Prof. Dr. K. Kirchgässner  
Prof. Dr. rer.nat. G. Rieder

Tag der Habilitation: 4. Februar 1985

© 1985 Priv.-Doz. Dr.-Ing. Franz Karl Labisch  
4630 Bochum 1, Hustadtring 21

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise zu vervielfältigen.

## ZUSAMMENFASSUNG

Für Ingenieurwissenschaften interessante Beispiele, bei denen das Auftreten mehrdeutiger Lösungen wesentlich ist, sind Verzweigung, Durchschlagen, nichtlineares Nachbeulverhalten, Imperfektionssensitivität und Stabilität von Strukturen. Um solche, für gewisse Lastkonfigurationen erscheinende, entartete Phänomene erfassen zu können, muß beim Studium korrekt gestellter Randwertprobleme der nichtlinearen Elastostatik grundsätzlich eine Analyse mehrdeutiger Lösungen durchgeführt werden. Als äußerst schwierig hat sich dabei eine globale Ermittlung der exakten Morphologie, d.h. die Berechnung einer vollständigen Lösung, die Bestimmung der Menge aller entarteten Punkte und deren Projektionen in den Raum der Belastungen, sowie die Erstellung von Stabilitätsaussagen, erwiesen.

Parallel in dualen Vektorräumen durchgeführte Untersuchungen können zur Kontrolle der Morphologie und trotz fehlender Extremaleigenschaften für eine Abschätzung der Approximationsgenauigkeit herangezogen werden.

Eine solche Problemstellung kann nur als anzustrebendes Ziel angesehen werden. Die vorliegende Arbeit soll als kleiner Beitrag zu einer notwendigen Grundlagenforschung eingestuft werden. Die Arbeit besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil werden in drei Kapiteln Methoden der Funktionalanalysis zur Konstruktion von dualen Variationsverfahren und zur Erstellung von Fehlerabschätzungen für nichtlineare Randwertprobleme dreidimensionaler elastischer Körper, für eine KÁRMÁNSche Plattenversion und für eine flache MARGUERRE Schale angewendet. In Kapitel 4 wird eine exakte nichtlokale mehrdeutige Lösung für das Durchschlagsproblem eines flachen Bogens konstruiert und die Morphologie dieser Lösung untersucht.

Der zweite Teil enthält eine breitere Übersicht über die angewendeten Grundlagen und Methoden der Funktionalanalysis.

## SUMMARY

Important examples, where multi-valued solutions play an essential role in engineering sciences are bifurcation, snap-through, nonlinear post-buckling analysis, imperfection sensitivity and stability of structures. In order to embrace such degenerate phenomena appearing for some load configurations, in a study of correctly posed boundary value problems from nonlinear elastostatics an analysis of multi-valued

solutions must always be carried out. It proved to be extremely difficult to determine globally, for a whole domain of applied loads, the exact morphology, i.e. to describe the complete solution, to evaluate the whole set of degenerate solution points and its projections onto the space of applied loads and to assess stability estimates.

Simultaneous considerations in dual vector spaces can provide a control for the deduced morphology and may lead regardless of extremal properties, to error estimates.

A satisfying solution of problems posed in such a way must be viewed as an ultimate goal. The present paper should be seen as a small contribution to a necessary basic research. The paper is divided into two parts. Methods of modern functional analysis are applied in the first three chapters of part one in order to construct dual variational principles and to derive corresponding error estimates for nonlinear threedimensional elastostatic boundary value problems, for a von KÁRMÁN plate version and for a shallow MARGUERRE shell problem, respectively. In chapter 4 a nonlocal exact multi-valued solution for a shallow arch problem is calculated and the corresponding solution morphology is investigated.

The second part contains a broader outline of the applied tools and methods of modern functional analysis.

INHALTSVERZEICHNIS

	<u>SEITE</u>
EINFÜHRUNG	1
TEIL I: AUSGEWÄHLTE KAPITEL DER NICHTLINEAREN ELASTOSTATIK	7
1. ÜBER DIE DUALE FORMULIERUNG VON RANDWERTPROBLEMEN IN DER NICHTLINEAREN ELASTOSTATIK DREIDIMENSIONALER ELASTISCHER KÖRPER	7
1.1 Bemerkungen zur Problemstellung	7
1.2 Das Randwertproblem	8
1.3 Herleitung der Energiefunktionen	12
1.4 Herleitung von Variationsprinzipien	14
1.5 Energienormartige Fehlerabschätzungen	20
1.6 Punktweise Fehlerschranken	27
2. ÜBER DIE DUALE FORMULIERUNG VON RANDWERTPROBLEMEN FÜR DIE KÁRMÁNSCHE PLATTE	31
2.1 Einleitung	31
2.2 Das Randwertproblem für die KÁRMÁNsche Platte	32
2.3 Herleitung der Energiefunktionen für die KÁRMÁNsche Plattentheorie	36
2.4 Herleitung von Variationsprinzipien für das Randwertproblem der KÁRMÁNschen Plattentheorie	41
2.5 Energienormartige Abschätzungen für die KÁRMÁNsche Platte	49
2.6 Numerisches Beispiel	51
3. FLACHE SCHALEN VOM MARGUERRE TYPUS	57
3.1 Vorbemerkung	57
3.2 Das Randwertproblem für eine flache Schale vom MARGUERRE Typus	57
3.3 Herleitung der Energiefunktionen für die flache MARGUERRESche Schale	61
3.4 Duale Variationsprinzipie für die MARGUERRESche flache Schale	66
3.5 Numerisches Beispiel	68

	<u>Seite</u>
4. DER FLACHE BOGEN	74
4.1 Vorbemerkungen	74
4.2 Das Randwertproblem für einen flachen Bogen vom MARGUERRE Typus	75
4.3 Herleitung eines Variationsprinzips in geometrischen Größen	79
4.4 Der flache Sinusbogen	82
4.5 Diskussion der numerischen Ergebnisse	88
4.6 Schlußfolgerungen	93
TEIL II: KURZE ÜBERSICHT ÜBER DIE METHODEN DER FUNKTIONAL-ANALYSIS	96
1. DIE HILFSMITTEL DER FUNKTIONALANALYSIS	96
1.1 Bezeichnungen und Grundbegriffe	96
1.2 Abbildungen	100
1.3 LEBESQUE-Maß und LEBESQUE-Integral	104
1.4 Lineare Vektorräume	108
1.5 Metrische, normierte und Innenprodukträume	113
1.6 Bilinear- und Dualsysteme. Beispiele von BANACH-Räumen	119
1.7 SOBOLEV-Räume	123
1.8 Differentiale, Ableitungen und Integrale in abstrakten Räumen	133
1.9 Nützliche Lemmata und Sätze	138
2. DIREKTE METHODEN DER VARIATIONSRECHNUNG	141
2.1 Endlich-dimensionale Approximation	141
2.2 Katastrophentheorie	144
LITERATURVERZEICHNIS	147

## EINFÜHRUNG

Es ist nur natürlich, daß bei der Untersuchung nichtlinearer Probleme verschiedene unerwartete Phänomene auftauchen, die berücksichtigt werden müssen und die den Gültigkeitsbereich problemadäquater Lösungen stark einschränken. Die Randwertprobleme der nichtlinearen Elastostatik machen hier keine Ausnahme. Sie üben eine starke Faszination aus und haben sich als eine nicht zu unterschätzende Herausforderung sowohl an Mathematiker als auch an Ingenieure erwiesen. Trotz einer sprunghaften Entwicklung in den letzten Jahren und einer großen Anzahl von Veröffentlichungen müssen auf diesem Gebiet viele Probleme weiterhin als ungelöst betrachtet werden.

Die Zielsetzung theoretischer Betrachtungen ist in den Ingenieurwissenschaften und in der angewandten Mathematik recht unterschiedlich. Bau- und Maschinenteile, wie z.B. Bögen, Brücken, Karosserien, Kräne, Kühltürme, Kuppeln, Staudämme, Staumauern, Tragflächen und auch solche Elemente wie z.B. Hüft- und Oberschenkelknochen haben von Natur aus komplizierte Formen und ein differenziertes Materialverhalten. Zur Berechnung von Verschiebungen, Spannungen usw. und zur Fehlerabschätzung werden spezialisierte und in der Anwendung teure numerische Verfahren angewendet. Bei geometrisch und physikalisch nichtlinearen Problemen, wo verschiedene spezifische Dehnungs- und Spannungstensoren angewendet werden können, und bei Stabilitätsuntersuchungen tauchen weitere oft unerwartete Komplikationen auf.

Die teilweise getrennt verlaufende Entwicklung hat zu sprachlichen Eigenarten und zu Wortbildungen geführt, welche unabhängig von sachlich bedingten Schwierigkeiten einer Verständigung zwischen Ingenieuren und Mathematikern im Wege sind. So können erfahrungsgemäß in der Mechanik allgemein bekannte Ausdrücke, wie z.B. nichtlineares Vorbeul- (Nachbeul-) verhalten, energiekonsistente Methode, Lastkorrekturglied, konsistente Massenmatrix, hyperelastisches Material, Schalentheorie unbegrenzter Rotationen, mittragende Breite einer gedrückten Platte einem Mathematiker Verständnisprobleme berei-

ten, während gleichzeitig die in der Mathematik üblichen Ausdrücke, wie z.B. Nullumgebungsbasen lokal konvexer Vektorräume, Linksdualsystem, surjektive, bijektive Abbildung, reflexiver separabler Raum, vollständige Hülle, kompakter Träger, Trace-Theoreme in sogenannten negativen SOBOLEV-Räumen, einem Ingenieur unbekannt sein könnten.

Praxisbedingt müssen in den Ingenieurwissenschaften trotz fehlender mathematischer Beweise große Verformungen von verschiedenartig gelagerten komplizierten Strukturen berücksichtigt, deren Verhalten errechnet und deren Stabilität untersucht werden. Differenzenverfahren, Finite-Element Methoden, Penalty-Methoden, Spline-Funktionen-Verfahren, Randelement-Verfahren, Shooting-Verfahren und viele andere Methoden und Verfahren werden angewendet.

Von einem mathematischen Standpunkt aus gesehen können die Betrachtungen nur in geeigneten topologischen Räumen durchgeführt werden. Zwischen den im Innern des elastischen Körpers und den auf dessen Rand induzierten Räumen muß eine gewisse Relation bestehen. Für SOBOLEV-Räume ist diese Relation durch den in den bekannten Trace-Theoremen auftauchenden Homöomorphismus und Isomorphismus gegeben. Wenn Variationsverfahren angewendet werden sollen, dann müssen die topologischen Räume linear und in einem gewissen Sinne reflexiv sein. Außer den FRÉCHET- und GÂTEAUX-Differentialen entsprechender Ordnung werden wahlweise auch die FRÉCHET- oder GÂTEAUX-Ableitungen benötigt. Damit die zugrundeliegenden EULER - LAGRANGE-Gleichungen deduziert werden können, sollten die in den Differentialen auftretenden Bilinearformen, Dualformen, und die im Innern und auf dem Rand des Körpers definierten dualen Räume vollständig sein.

Bei Stabilitätsuntersuchungen treten mehrdeutige Lösungen auf. Bei einer Approximation sollte die Morphologie der angenäherten Lösung und die der exakten Lösung äquivalent sein. Bei einfachen Problemen kann ein lokales Verhalten durchaus mittels elementarer Katastrophen beschrieben werden. Bei komplizierteren Problemen dürfte dies kaum der Fall sein.

Trotz zahlreicher noch offenen Fragen konnten in den Ingenieurwissenschaften in vielen Fällen bemerkenswert plausible numerische Ergebnisse erzielt werden. Zu beachten ist jedoch, daß die Frage, inwieweit die erhaltenen Ergebnisse eine adäquate Beschreibung der untersuchten Probleme darstellen können, durch die Plausibilität allein nicht geklärt werden kann.

Die mathematische Analyse der zu untersuchenden mechanischen Vorgänge stützt sich auf eine physikalisch fundierte Beschreibung dieser Vorgänge, siehe z.B. NEWTON [1], KOITER [17], ZERNA, GREEN [31], NOVOSHILOV [36], LEHMANN [40,43], TRUESDELL, NOLL [60], ERINGEN [69], LUR'E [77] und erfolgt parallel auf verschiedenen Ebenen unter Zuhilfenahme recht unterschiedlicher mathematischer Hilfsmittel und Methoden. Hierzu zählen u.a. die schon als klassisch anzusehende Methode der Mathematischen Physik, siehe z.B.: COURANT, HILBERT [27], MICHLIN [44, 58, 94] und die Hilfsmittel der Funktionalanalysis, siehe z.B. FRÉCHET [6], GÂTEAUX [7], HADAMARD [9], GAVURIN [13], ROTHE [23], KANTOROVICH, AKILOV [51], NASHED [102, TAPIA [104]. Hilfreich sind Aussagen über Existenz, Lösbarkeit, Eindeutigkeit von Lösungen und Aussagen allgemeinerer Art siehe z.B. BROWDER [46, 56], MINTY [53], KIRCHGÄSSNER [100, 220], KIRCHGÄSSNER, SCHEURLE [192, 213, 214], LIEBERMAN [216], sowie Untersuchungen über allgemein anwendbare Hilfsmittel und Methoden, siehe z.B.: RITZ [4], BABUŠKA [35], FICHERA [50], VAINBERG [54], ROCKAFELLAR [66], OLIVEIRA [80], DUVAUT, LIONS [107, 131], HOLMES [109], PANAGIOTOPOULOS [176], TEMAM [180], BREZZI, RAPPAZ, RAVIART [198].

Umstritten, widersprüchlich und trotz zahlreicher Ankündigungen nicht vollständig geklärt ist das Problem einer streng dualen Variationsbeschreibung nichtlinearer Probleme der Elastostatik. Die hierfür notwendige Umkehrung der sogenannten konstitutiven Beziehungen ist entweder für einfaches z.B. semilineares Material und einfache Sonderfälle bekannt oder wird schlicht als möglich vorausgesetzt. Erwähnt werden müssen in diesem Zusammenhang z.B. die Arbeiten von HELLINGER [8], LEVINSON [57], ORAN [79], ZUBOV [98], CHRISTOFFERSEN [117], KOITER [119, 156], DILL [120], STUMPF [148], OGDEN [175]. Nur

bei OGDEN [175] wird die Bedingung für eine eindeutige Umkehrung erwähnt. In keiner dieser Arbeiten wird verlangt, daß die statischen Größen in einem linearen normierten oder topologischen Raum liegen. Folglich kann in keiner dieser Arbeiten die Existenz einer dualen Energie (Stammfunktion) bewiesen werden. Ebenso wenig wird in keiner dieser Arbeiten die Notwendigkeit entsprechender Trace-Theoreme für die Existenz dualer Variationsfunktionale erkannt. Die hingeschriebenen Formeln für ein duales Variationsfunktional können den Eindruck erwecken, daß eine äquivalente allgemein gültige Variationsformulierung erhalten wurde und dies umsomehr da eine solche Formulierung für Sonderfälle gültig ist. Offen bleibt in diesem Zusammenhang u.a. die Frage nach dem Sinn einer dualen Beschreibung für den Fall einer degenerierten Funktionaldeterminante des unsymmetrischen PIOLA-KIRCHHOFFSchen Spannungstensors bezüglich dem Verschiebungsgradienten.

Eine zufriedenstellende Lösung eines nichtlinearen Randwertproblems der Elastostatik mit Hilfe eines Variationsprinzips ist gewiß dann erreicht, wenn die folgenden vier Punkte berücksichtigt werden:

1. Erstellung der konstitutiven Beziehungen auf der Grundlage eines mathematisch-mechanischen Modells. Bestimmung der zulässigen topologischen Räume für die geometrischen und die statischen Komponenten der elastischen Zustände unter Berücksichtigung von Wachstumsbeschränkungen, welche z.B. aus den konstitutiven Beziehungen deduziert werden. Konstruktion der Energiefunktion.
2. Wahl der zulässigen Klasse von Ansatzfunktionen für ein Variationsfunktional unter Berücksichtigung der Gültigkeit geeigneter Trace-Theoreme. Konstruktion eines Variationsfunktionals in der zulässigen Funktionenklasse.
3. Adäquate numerische Approximation in einem endlich- oder unendlichdimensionalen Raum. Analyse der Morphologie der Lösung für einen interessierenden (beschränkten) Bereich der äußeren Kontrollgrößen. Bestimmung der Entartungs- und der Verzweigungsmengen.

4. Kontrolle der Morphologie der erhaltenen Lösung und Abschätzung der Approximationsgenauigkeit für die verschiedenen Lösungsäste.

Wegen der vielen noch offenen Fragen kann eine solche Verfahrensweise nur als anzustrebendes Ziel angesehen werden. Exakte Lösungen können nur in Sonderfällen erhalten werden. Als äußerst schwierig hat sich die Bestimmung der Morphologie mehrdeutiger Lösungen und die Abschätzung der Approximationsgenauigkeit für die einzelnen Lösungsäste erwiesen. Parallel durchgeführte Untersuchungen in dualen Räumen könnten zur Kontrolle der Morphologie und für eine Abschätzung von Fehlern herangezogen werden. Für diesen Zweck ist es notwendig zu untersuchen unter welchen Bedingungen eine morphologisch äquivalente, duale Beschreibung von Randwertproblemen auch für nichtkonvexe Probleme sinnvoll und möglich ist. Eine Tendenz der wissenschaftlichen Untersuchungen auf dem Gebiet der Elastostatik in diese Richtung ist deutlich erkennbar, wenn die Literaturhinweise dieser Arbeit und auch die aller zitierten Literaturstellen betrachtet werden. Bei der Untersuchung der auftretenden Phänomene spielt neben modernen numerischen Methoden für leistungsstarke Computer und neben der Katastrophentheorie auch die Grundlagenforschung eine nicht zu unterschätzende Rolle. Als Beitrag zu dieser Grundlagenforschung sollte auch die vorliegende Arbeit angesehen werden. Sie besteht im wesentlichen aus zwei Teilen, wobei der erste Teil der Anwendung der Funktionalanalysis für konkrete Probleme der Elastostatik gewidmet ist und der zweite Teil eine breitere Übersicht über die notwendigen mathematischen Grundlagen bringt.

Der erste Teil enthält vier Kapitel. Im ersten Kapitel werden duale Variationsverfahren für nichtlineare Probleme der Elastostatik dreidimensionaler Körper hergeleitet und Fehlerschranken für angenäherte Lösungen konstruiert.

Im zweiten Kapitel werden duale Variationsverfahren und Fehlerschranken für die KÁRMÁNsche Platte hergeleitet. An

einem einfachen numerischen Beispiel wird gezeigt, daß eine duale Beschreibung auch in einem Verzweigungspunkt und in dessen Umgebung gültig bleiben kann.

In Kapitel 3 werden duale Variationsverfahren für eine flache Schale vom MARGUERRE-Typus hergeleitet. Ein einfaches numerisches Beispiel zeigt das lokale Verhalten einer Schale in der Umgebung eines einfachen Verzweigungspunktes.

Im vierten Kapitel wird für einen flachen Bogen eine exakte Lösung konstruiert und gezeigt, wie eine zufriedenstellende Lösung eines nichtlinearen Randwertproblems der Elastostatik aussehen sollte.

Der zweite Teil enthält eine breite, für das Verständnis des ersten Teils hinreichende Übersicht über die angewandten Grundlagen und Methoden der Funktionalanalysis.

## TEIL I

### 1. ÜBER DIE DUALE FORMULIERUNG VON RANDWERTPROBLEMEN IN DER NICHTLINEAREN ELASTOSTATIK DREIDIMENSIONALER KÖRPER

#### 1.1 Bemerkungen zur Problemstellung

In der Literatur wird das Materialverhalten oft mit Hilfe solcher symmetrischer Tensoren beschrieben, für die das Momentengleichgewicht in jedem Punkt des betrachteten dreidimensionalen elastischen Körpers identisch erfüllt ist. Für hyperelastisches Material folgt daraus die Existenz einer Energiefunktion (stored energy function siehe z.B.: BALL [153], S.343). In diesem Artikel wird in Anlehnung an LABISCH [223] für lösungsunabhängige Belastungen und Randbedingungen (dead load) und für eine beschränkte Klasse von konstitutiven Beziehungen die Existenz und Äquivalenz von Randwertaufgaben und dualen Variationsprinzipien bewiesen.

Der Verschiebungsgradient und der nicht-symmetrische PIOLA-KIRCHHOFFSCHE Spannungstensor werden als duale Feldgrößen eingeführt. Das untersuchte Randwertproblem wird beherrscht von einem quasilinearen System partieller Differentialgleichungen in Divergenzform mit den entsprechenden, nicht notwendigerweise homogenen geometrischen und statischen Randbedingungen. Die für die Existenz einer Stammfunktion (Potential) notwendigen Voraussetzungen sind schwächer als die Momentengleichgewichtsbedingungen und können dazu führen, daß die mathematisch errechnete Verschiebungsenergie nicht unbedingt einer bezugsindifferenten (objektiven) Verformungsenergie entspricht. Falls jedoch die sogenannten konstitutiven Beziehungen so gewählt sind, daß sie den Bedürfnissen eines geeigneten symmetrischen Spannungstensors genügen, dann kann die hier erhaltene Verschiebungsenergiedichte mit der sogenannten bezugsindifferenten Deformationsenergiedichte identifiziert werden. Es ist bekannt, daß die Konvexität der Verschiebungsenergie bezüglich dem Verschiebungsgradienten nicht immer gewährleistet ist, siehe OGDEN [175], ZUBOV [168], BERDICHEWSKII,

MISIURA [190]. Jede der bei BALL [153] diskutierten Konvexitätsbedingungen, die sogenannte LEGENDRE-HADAMARDSche Elliptizitätsbedingung, siehe BALL [153] S. 339 und ODEN [193] S. 9 und auch die Koerzivitätsbedingung, siehe ODEN [193] S.7, können versagen.

Für konstitutive Beziehungen, welche geeigneten Wachstumsbeschränkungen genügen und eine reguläre symmetrische FRÉCHETSche Ableitung besitzen, konnte von LABISCH [223] eine Einbettung in einen reflexiven normierten Raum erhalten und die Existenz einer Verschiebungs- und einer dualen Energie bewiesen werden. Mit Hilfe des bekannten bei ADAMS [139] zitierten Trace-Theorems und des in [223] für den dualen Raum erhaltenen Trace-Theorems werden in einem zweiten Schritt äquivalente duale Variationsprinzipie konstruiert.

Unter den betrachteten Bedingungen ist die Umkehrung der konstitutiven Beziehung auch für nichtkonvexe Probleme, also auch für mehrdeutige Lösungen ein-eindeutig. Für eine Fehler-schätzung wird die z.B. von WEBER [16], RIEDER [65], STUMPF [96] für lineare Probleme bekannte Methode der sogenannten komplementären Fehlerschranken auf nichtlineare und auch auf nichteindeutige Lösungen verallgemeinert. Kurz angedeutet wird, daß für nichtkonvexe Probleme die sogenannte Energienorm ihren Sinn verliert.

Die Betrachtungen werden für nichthomogene geometrische und nichthomogene statische Randbedingungen durchgeführt. Um ein semihomogenes Problem mit homogenen Randbedingungen zu erhalten, kann in einem translationsinvarianten Raum eine Verschiebung des Nullpunktes vorgenommen werden. Dabei muß jedoch die Veränderung der nichtlinearen konstitutiven Beziehungen und die Veränderung der Volumenkräfte berücksichtigt werden.

## 1.2 Das Randwertproblem

Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  das beschränkte, vom elastischen Körper in unverformter Konfiguration eingenommene Gebiet und  $\Gamma$  sei dessen

hinreichend glatte Randfläche (z.B.  $\Omega \in C^2$ ). In einem gemeinsamen orthogonalen Koordinatensystem seien

$$\underline{x} = \{x_A, A = 1, 2, 3\}$$

und

$$\underline{y} = \{y_i, i = 1, 2, 3\}; y_i = x_A \delta_{iA} + u_i$$

die materiellen und die räumlichen Koordinaten,

$\underline{u}(\underline{x})$  sei der *Verschiebungsvektor*.

$u_{i,A}$  der *Verschiebungsgradient* und

$Y_{i,A} = \delta_{iA} + u_{i,A}$  der *Deformationsgradient*, wobei  $\delta_{iA}$  das KRONECKER-Symbol ist. Partielle Ableitungen bezüglich der materiellen Koordinaten werden mit dem entsprechenden Index nach einem Komma bezeichnet. Über sich wiederholende Indizes soll summiert werden. Es sei  $t_{Ai}$  der erste, also der unsymmetrische PIOLA-KIRCHHOFFsche Spannungstensor und  $p_i$  die äußere Volumenkraft(dichte).

Das betrachtete Randwertproblem ist beschrieben durch:  
die *Gleichgewichtsbedingungen*

$$-[t_{Ai,A} + p_i] = 0; \forall \underline{x} \in \Omega \quad (1.2.1)$$

die *geometrischen Randbedingungen*

$$u_i = u_i^*; \forall \underline{x} \in \Gamma_{\underline{u}} \quad (1.2.2)$$

und die *statischen Randbedingungen*

$$t_{ni} = t_{ni}^*; \forall \underline{x} \in \Gamma_{\underline{t}} \quad (1.2.3)$$

Mit dem äußeren auf  $\Gamma$  definierten Normaleneinheitsvektor  $n_A$  ist  $t_{ni} = t_{Ai} n_A$ . Die geometrischen und die statischen Randbedingungen können für jedes  $i$  auf verschiedenen Anteilen  $\Gamma_{u_i}$  oder  $\Gamma_{t_i}$  vorgegeben sein. Deshalb sind  $\Gamma_{\underline{u}} := \{\Gamma_{u_1}, \Gamma_{u_2}, \Gamma_{u_3}\}$

und  $\Gamma_{\underline{t}} := \{\Gamma_{t_1}, \Gamma_{t_2}, \Gamma_{t_3}\}$  als Vektoren zu betrachten. Der Einfachheit halber wird vorausgesetzt:  $\Gamma_{u_i} \cap \Gamma_{t_i} = \emptyset$ ,  $\Gamma_{u_i} \cup \Gamma_{t_i} = \Gamma$  und  $\Gamma_{u_i} \neq \emptyset \forall i = 1, 2, 3$ .

Der Zusammenhang zwischen den geometrischen und den statischen Feldgrößen ist gegeben mittels der sogenannten *konstitutiven Beziehungen*

$$t_{Ai} = t_{Ai}(x_C; u_{j,B}). \quad (1.2.4)$$

Deshalb ist die partielle Ableitung in (1.2.1) als totale partielle Ableitung zu verstehen.

$t_{Ai}$  soll die CARATHÉODORY-Stetigkeitsbedingung (siehe Teil II) erfüllen und es sollen Konstanten  $C$  und  $p$

$$0 < C < \infty; \quad 1 < p < \infty$$

existieren, so daß für jede Komponente  $t_{Ai}$  die *Wachstumsbeschränkungen*

$$|t_{Ai}(x_D; \xi_{jB})| \leq C (1 + \sum_{j,B} |\xi_{jB}|^{p-1}) \quad (1.2.5)$$

erfüllt sind. Für  $u_{i,A} \in L_p(\Omega)$  und  $t_{Ai} \in L_q(\Omega)$  mit  $1/p + 1/q = 1$  ist das Integral

$$\int_{\Omega} t_{Ai} u_{i,A} d\Omega$$

sinnvoll.

Wir setzen voraus

$$\begin{aligned} u_i^* &\in W_{-1/p,q}(\Gamma) \\ t_n^* &\in W_{-1/p,q}(\Gamma) \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

und  $p(x) \in L_q(\Omega)$

Damit führen die Gleichgewichtsbedingungen (1.2.1) zu  $t_{Ai,A} \in L_{\tilde{q}}(\Omega)$  und deshalb auch zu  $\tilde{t} \in E_{\tilde{q}}(\Omega)$  (siehe (1.7.14) in Teil II).

Wenn eine Lösung des Randwertproblems (1.2.1 bis 6) existiert, dann existiert zumindestens ein  $\tilde{u} \in \tilde{W}_{1,p}(\Omega)$ , so daß

$$\begin{aligned} t_{\tilde{O}Ai} &:= t_{Ai}(x_C; u_{\tilde{O}j,B}) \in E_{\tilde{q}}(\Omega) \\ \tilde{u}|_{\Gamma_{\tilde{u}}} &= \tilde{u}^* ; \quad t_{\tilde{O}ni}|_{\Gamma_{\tilde{t}}} = \tilde{t}_n^* , \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

wobei  $t_{\tilde{O}ni}|_{\Gamma_{\tilde{t}}} := (t_{\tilde{O}Ai}|_{\Gamma_{\tilde{t}}})$  bezeichnet.

Wir nehmen ein solches  $\tilde{u}$ , gehen über zu den neuen Feldgrößen

$$U_i := u_i - u_{\tilde{O}i} ; \quad T_{Ai} := t_{Ai} - t_{\tilde{O}Ai} \quad (1.2.8)$$

und erhalten für diese das semihomogene Randwertproblem

$$\begin{aligned} -[T_{Ai}(x_C; u_{\tilde{O}j,B} + U_{j,B}), A + q_i] &= 0 \\ U_i|_{\Gamma_{\tilde{u}}} &= 0 ; \quad (T_{Ai}|_{\Gamma_{\tilde{t}}}) n_A = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

mit den assoziierten konstitutiven Beziehungen

$$T_{Ai} = T_{Ai}(x_C; u_{\tilde{O}j,B}; U_{j,B}) \quad (1.2.10)$$

und

$$q_i = p_i + t_{\tilde{O}Ai,A} \quad (1.2.11)$$

Offenbar ist  $\tilde{U} \in \tilde{W}_{1,p}(\Omega, \Gamma_{\tilde{u}})$ , so daß eine "Kurznorm" sinnvoll ist und aus  $\tilde{p} \in L_{\tilde{q}}(\Omega)$  und  $\tilde{t} \in E_{\tilde{q}}(\Omega)$  folgt sofort  $\tilde{T} \in E_{\tilde{q}}(\Omega)$ .

Es wird vorausgesetzt, daß  $\tilde{y}: \Omega \rightarrow R^3$  orientationserhaltend und lokal invertibel d.h.:  $0 < \det(y_{i,A}) < \infty \quad \forall x \in \Omega$  gültig ist.

Die Konstruktion eines Variationsverfahrens für die betrachteten Randwertprobleme erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt wird eine Stammfunktion, auch Potential genannt, konstruiert. Diese Funktion wird hier Verschiebungsenergiedichte genannt und kann unter bestimmten Bedingungen mit der Deformationsenergiedichte identifiziert werden. In einem zweiten Schritt wird dann für die zulässige Klasse von Ansatzfunktionen das eigentliche Variationsfunktional erstellt.

### 1.3 Herleitung der Energiefunktionen

Die Räume  $E_{\tilde{q}}(\Omega)$  und  $\overset{0}{W}_{1,p}(\Omega, \Gamma_u) \subset W_{1,p}(\Omega)$  sind linear und normiert, so daß GÂTEAUXsche und FRÉCHETSche Ableitungen und ein abstraktes Integral, siehe z.B. TAPIA[104] S. 69 sinnvoll sein können. Wir machen die zusätzliche Voraussetzung, daß die konstitutiven Beziehungen

$$t_{Ai} : \begin{cases} L_{\tilde{p}}(\Omega) \rightarrow L_{\tilde{q}}(\Omega) \\ \xi_{jB} \mapsto t_{Ai}(x_C; \xi_{jB}) \end{cases} \quad (1.3.1)$$

mit  $u_{j,B} = \xi_{jB}$  als  $C^1$  Abbildungen von  $\overset{0}{W}_{1,p}(\Omega)$  auf  $L_{\tilde{q}}(\Omega)$  angenommen werden können. Damit existiert die Ableitung

$$\frac{\partial T_{Ai}(x_C; u_{0j,K} + \zeta_{jK})}{\partial \zeta_{jB}} \quad (1.3.2)$$

Für diese Ableitung wird angenommen, daß die Symmetriebedingungen für die Existenz einer Stammfunktion, siehe Satz 1.8.4 in Teil II erfüllt sind und daß

$$\det \left( \frac{\partial T_{Ai}(x_C; u_{0j,K} + \zeta_{jK})}{\partial \zeta_{jB}} \right) \neq 0. \quad (1.3.3)$$

Für die Durchführung des ersten Schrittes betrachten wir eine

Verallgemeinerung der konstitutiven Beziehungen (1.2.4) auf  $\xi_{jB} \in L_p(\Omega)$ :

$$t_{Ai} = t_{Ai}(x_C; \xi_{jB}) \quad (1.3.4)$$

Mit den Voraussetzungen dieses Paragraphen existieren die folgenden Stammfunktionen:

$$f(x_C; \xi_{jR}) := \int_0^1 t_{Ai}(x_C; \mu \xi_{jB}) \xi_{iA} d\mu \quad (1.3.5)$$

und

$$f_1(x_C; u_{k,c}; \xi_{jB} - u_{j,B}) := \int_0^1 [T_{Ai}(x_C; u_{j,B} + \mu(\xi_{jB} - u_{j,B})) (\xi_{jB} - u_{j,B})] d\mu \quad (1.3.6)$$

wobei gilt

$$f_1(x_C; u_{k,c}; \xi_{jB} - u_{j,B}) = f(x_C; \xi_{jB}) - f(x_C; u_{j,B}). \quad (1.3.7)$$

Die Existenz der Energiefunktionen ist eine unmittelbare Konsequenz der Voraussetzungen. Die Beziehung (1.3.6) wird erhalten mittels eines abstrakten Integrals über den Umfang eines Dreiecks mit den Eckpunkten  $0; \xi_{jB}; u_{j,B}$ .

### Definition 1.3.1

Die Funktion  $f(x_C; u_{j,B})$  errechnet mit Hilfe von (1.3.5) für  $\xi_{jB} = u_{j,B}$  wird *Verschiebungsenergiedichte* genannt.  $\square$

Aus der Konstruktion von  $f(x_C; u_{j,B})$  als Stammfunktion von  $t_{Ai}(x_C; u_{j,B})$  folgt sofort

$$\frac{\partial f(x_C; u_{j,B})}{\partial u_{j,B}} = t_{Ai}. \quad (1.3.8)$$

Die Bedingung (1.3.3) ist mit der Voraussetzung des Satzes über die Umkehrabbildung (Satz 1.9.1, Teil II) identisch. Daher existiert in der Umgebung jedes nichtdegenerierten Punktes  $\xi_{jB}$  eine eindeutige Umkehrung der verallgemeinerten konstitutiven Beziehungen (1.3.4)

$$\xi_{jB} = \xi_{jB} (x_C; t_{Ai}). \quad (1.3.9)$$

Für den Verschiebungsgradienten gilt deshalb ein-eindeutig

$$u_{j,B} = u_{j,B} (x_C; t_{Ai}). \quad (1.3.10)$$

Die Bedingung (1.3.3) ist hinreichen für die Gültigkeit einer LEGENDRE-Transformation. Deshalb existiert eine Funktion

$$g(x_C; t_{Ai}) := t_{Ai} \xi_{iA} (x_C; t_{Ai}) - f(x_C; \xi_{jB} (x_C; t_{Ai})) \quad (1.3.11)$$

mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial g (x_C; t_{Bj})}{\partial t_{Ai}} = \xi_{iA}. \quad (1.3.12)$$

#### Definition 1.3.2

Die Funktion  $g(x_C; t_{Ai})$  wird *duale Energiedichte* genannt.  $\square$

### 1.4 Herleitung von Variationsprinzipen

Ein außerordentlich wesentlicher Punkt bei der Durchführung des zweiten Schrittes ist die sorgsame Wahl der Räume oder linearen Mannigfaltigkeiten der Ansatzfunktionen für die zu erstellenden Variationsprinzipen. Eine ein-eindeutige stetige Einschränkung von im Innern des Gebietes  $\Omega$  definierten Funktionenklassen auf den Rand  $\Gamma$  und ebenso eine ein-eindeutige Erweiterung der auf dem Rand  $\Gamma$  erklärten Funktionenklassen auf das Innere des Gebietes  $\Omega$  müssen gewährleistet sein. Dieser Zusammenhang ist für  $\underline{u} \in W_{1,p}(\Omega)$ ;  $1 < p < \infty$  gegeben durch das bei ADAMS [139] zitierte Trace-Theorem und für  $\underline{t} \in E_q(\Omega)$  durch das verallgemeinerte Trace-Theorem von LABISCH [223]. Die durch den Isomorphismus und den Homöomorphismus dieser Trace-Theoreme auf dem Rand  $\Gamma$  erklärten Räume  $W_{1/q,p}(\Gamma)$  und  $W_{-1/q,q}(\Gamma)$  sind auf  $\Gamma$  dual und garantieren in Verbindung mit den Voraussetzungen des vorigen Paragraphen die Existenz dualer Variationsfunktionale.

Die im folgenden definierten Räume und linearen Mannigfaltigkeiten werden zur Bestimmung von Ansatzfunktionen benötigt.

Definition 1.4.1

Die Klasse der Funktionen

$$B_{\tilde{u}} := \{ \tilde{u}; \tilde{u} \in W_{1,p}(\Omega); \tilde{u}_i|_{\Gamma_u} = u_i^* \} \quad (1.4.1)$$

wird *Mannigfaltigkeit der geometrisch zulässigen Verschiebungen* genannt.  $\square$

Definition 1.4.2

Die Klasse der Funktionen

$$B_{\tilde{u}}^0 := \{ \tilde{u}; \tilde{u} \in W_{1,p}(\Omega); \tilde{u}|_{\Gamma_u} = 0 \} \quad (1.4.2)$$

wird *Raum der homogenen geometrisch zulässigen Verschiebungen* genannt.  $\square$

Definition 1.4.3

Die Klasse der Funktionen

$$B_{\tilde{t}} := \{ \tilde{t}; \tilde{t} \in E_q(\Omega); [t_{Ai,A} + p_i] |_{\Omega} = 0; (t_{Ai}|_{\Gamma_t}) n_A = t_{ni}^* \} \quad (1.4.3)$$

wird *Mannigfaltigkeit der statisch zulässigen PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensoren* genannt.  $\square$

Definition 1.4.4

Die Klasse der Funktionen

$$B_{\tilde{t}}^0 := \{ \tilde{t}; \tilde{t} \in E_q(\Omega); [\tilde{T}_{Ai,A} + q_i] |_{\Omega} = 0, (\tilde{T}_{Ai}|_{\Gamma_t}) n_A = 0 \} \quad (1.4.4)$$

wird *Raum der homogenen statisch zulässigen PIOLA-KIRCHHOFFschen Spannungstensoren* genannt.  $\square$

In den Klassen der geometrisch zulässigen Verschiebungen gilt

Satz 1.4.1 (LABISCH [223] Theorem 3.1)

Unter den Voraussetzungen von Paragraf 1.2 und 1.3 ergeben

(i) für  $\tilde{U} \in B_{\tilde{u}}^0, T \in E_{\tilde{q}}(\Omega)$

und das semihomogene Problem (1.2.9 bis 11), das Funktional

$$I(U_i) = \int_{\Omega_0}^1 \{ [T_{Ai}(x_C; u_{j,B} + \mu U_{j,B})] U_{i,A}^{-q_i} U_i \} d\mu d\Omega, \quad (1.4.5)$$

(ii) für  $\tilde{U} \in B_{\tilde{u}}^0, u \in B_{\tilde{u}}^0, t \in E_{\tilde{q}}(\Omega)$ , das Funktional

$$\begin{aligned} \hat{I}(U_i) &= \int_{\Omega_0}^1 \{ [t_{Ai}(x_C; u_{j,B} + \mu U_{j,B})] U_{i,A}^{-p_i} U_i \} d\mu d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_t} t_{in}^* U_i d\Gamma \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

(iii) für  $\tilde{u} \in B_{\tilde{u}}^0$  und das Problem (1.2.1 bis 4) das Funktional

$$\hat{I}(U_i) = \tilde{I}^u(u_i) - \tilde{I}^u(u_{oi}) \quad (1.4.7)$$

mit

$$\tilde{I}^u(u_i) = \int_{\Omega_0}^1 \{ [t_{Ai}(x_C; \mu u_{j,B})] u_{i,A} - p_i u_i \} d\Omega - \int_{\Gamma_t} t_{ni}^* u_i d\Gamma \quad (1.4.8)$$

und

$$\tilde{I}^u(u_{oi}) = \int_{\Omega_0}^1 \{ [t_{Ai}(x_C; \mu u_{j,B})] u_{oi,A} - p_{oi} u_{oi} \} d\Omega - \int_{\Gamma_t} t_{ni}^* u_i d\Gamma \quad (1.4.9)$$

jeweils ein äquivalentes Variationsprinzip.

Beweis:

(i) Die Stammfunktion für  $-(T_{Ai,A} + q_i)$  ist

$$\int_0^1 \{-[T_{Ai}(x_C; u_{j,B} + \mu U_{j,B}), A + q_i] U_i\} d\mu .$$

Diese existiert, denn  $T_{Ai}$  besitzt eine Stammfunktion. Eine partielle Integration über  $\Omega$  führt wegen der homogenen Randbedingung zu (1.4.5). Nun kann angenommen werden  $u \in B_{\tilde{u}}$ . Die homogenen statischen Randbedingungen sind natürlich.

(ii) Die Translation  $\tilde{t} = \tilde{T} + \tilde{t}$  und eine partielle Integration für  $\int_{\Omega} \tilde{t}_{Ai,A} U_i d\Omega$  ergeben mit den homogenen geometrischen Randbedingungen das gewünschte Resultat.

(iii) Die Translation  $\tilde{u} = \tilde{U} + \tilde{u}$  und Formel (1.3.7) ergeben den Übergang von (ii) zu (iii).  $\square$

Der Existenz verallgemeinerter Variationsverfahren gilt.

Satz 1.4.2

Gegeben seien die Funktionale

$$I^u: W_{1,p} \times L_p \times E_q \rightarrow R \quad \text{und} \quad I^C: W_{1,p} \times E_q \rightarrow R$$

mit

$$I^u(u_i, d_{iA}, t_{Ai}) = \int_{\Omega} [f(x_C; d_{iA}) - p_i u_i] d\Omega - \int_{\Gamma_{\tilde{t}}} t_{ni}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} [t_{Ai}(u_i, A - d_{iA})] d\Omega + \int_{\Gamma_{\tilde{u}}} t_{ni}(u_i^* - u_i) d\Gamma \quad (1.4.10)$$

und

$$I^C(u_i, t_{Ai}) = - \int_{\Omega} g(x_C; t_{Ai}) d\Omega + \int_{\Gamma_u} t_{ni} u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} [t_{Ai,A} + p_i] u_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} (t_{ni} - t_{ni}^*) u_i d\Gamma. \quad (1.4.11)$$

Wenn die Bedingung (1.3.3) erfüllt ist, dann gilt für hinreichend glatte Gebiete  $\Omega$  und für  $\underline{u} \in \tilde{W}_{1,p}(\Omega)$ ,  $\underline{d} \in \tilde{L}_p(\Omega)$ ,  $\underline{t} \in \tilde{E}_q(\Omega)$

$$I^u(u_i, \underline{d}_{iA}, \underline{t}_{Ai}) = I^C(u_i, \underline{t}_{Ai}). \quad (1.4.12)$$

Beweis

Partielle Integration ergibt

$$\int_{\Omega} t_{Ai} u_{i,A} d\Omega - \int_{\Gamma_u} t_{ni} u_i d\Gamma = - \int_{\Omega} t_{Ai,A} u_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_{ni} u_i d\Gamma.$$

Der Kürze halber wird diese Formel geschrieben

$$\langle t_{Ai}, u_{i,A} \rangle_{\Omega} - \langle t_{ni}, u_i \rangle_{\Gamma_u} = - \langle t_{Ai,A}, u_i \rangle_{\Omega} + \langle t_{ni}, u_i \rangle_{\Gamma_t}.$$

Mit dem Funktional

$$G(u_i, \underline{d}_{iA}, \underline{t}_{Ai}) := - \int_{\Omega} [f(x_C; \underline{d}_{iA}) - u_i p_i] d\Omega + \int_{\Omega} t_{Ai} \underline{d}_{iA} d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_{ni}^* u_i d\Gamma - \int_{\Gamma_u} t_{ni} u_i^* d\Gamma$$

und der dualen Energiedichte (1.3.11) erhalten wir mit

$$I^u(u_i, \underline{d}_{iA}, \underline{t}_{Ai}) := \langle t_{Ai}, u_{i,A} \rangle_{\Omega} - \langle t_{ni}, u_i \rangle_{\Gamma_u} - G(u_i, \underline{d}_{iA}, \underline{t}_{Ai}) = - \langle t_{Ai,A}, u_i \rangle_{\Omega} + \langle t_{ni}, u_i \rangle_{\Gamma_t} - G(u_i, \underline{d}_{iA}, \underline{t}_{Ai}) =: \hat{I}^C(u_i, \underline{d}_{iA}, \underline{t}_{Ai}) = I^C(u_i, \underline{t}_{Ai})$$

sofort (1.4.12).  $\square$

Eine einfache Folgerung ist

Satz 1.4.3

- (i) Die Einschränkung des Funktionals (1.4.10) auf die lineare Mannigfaltigkeit  $B_{\tilde{u}}$  ergibt das Funktional

$$\tilde{I}^u(\tilde{u}_i) := I^u(\tilde{u}_i, \tilde{u}_{i,A}, t_{Ai}) = \int_{\Omega} [f(x_C; \tilde{u}_{i,A}) - p_i \tilde{u}_i] d\Omega - \int_{\Gamma_t} t_{ni}^* \tilde{u}_i d\Gamma. \quad (1.4.13)$$

- (ii) Die Einschränkung des Funktionals (1.4.11) auf die lineare Mannigfaltigkeit  $B_{\tilde{t}}$  ergibt das Funktional

$$\tilde{I}^C(\tilde{t}_{Ai}) := I^C(u_i, \tilde{t}_{Ai}) = - \int_{\Omega} g(x_C; \tilde{t}_{Ai}) d\Omega + \int_{\Gamma_u} \tilde{t}_{ni} u_i^* d\Gamma. \quad (1.4.14)$$

- (iii) Das Funktional (1.4.13) in der Klasse  $B_{\tilde{u}}$  und das Funktional (1.4.14) in der Klasse  $B_{\tilde{t}}$  ergeben unter der Bedingung (1.3.3) eine äquivalente duale Variationsformulierung für das betrachtete Randwertproblem (1.2.1 bis 4).

Beweis:

- (i) Ein Variationsproblem mit dem Funktional  $(I^u(u_i, d_{Ai}, t_{Ai}))$  und  $u \in W_{1,p}(\Omega)$ ,  $d \in L_p(\Omega)$ ,  $t \in E_q(\Omega)$  führt zu den EULER-LAGRANGE Gleichungen

$$-[t_{Ai,A} + p_i] = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial d_{iA}} = t_{Ai} \quad (1.4.15)$$

$$t_{ni}|_{\Gamma_t} = t_{ni}^*$$

$$u_i|_{\Gamma_u} = u_i^*$$

$$d_{iA} = u_{i,A}$$

Das rein geometrisch formulierte Problem kann in der Klasse  $\tilde{u} \in B_{\tilde{u}}$  interpretiert werden als Teilproblem für das Funktional (1.4.13) wenn (1.4.15)<sub>4</sub> bis 5 identisch erfüllt sind.

- (ii) Ein Variationsverfahren mit dem Funktional  $I^C(u_i, t_{Ai})$  und  $\underline{u} \in W_{1,p}(\Omega)$ ,  $\underline{t} \in E_{\tilde{q}}(\Omega)$  führt zu den EULER-LAGRANGE Gleichungen

$$-[t_{Ai,A} + p_i] = 0$$

$$t_{ni}|_{\tilde{\Gamma}_t} = t_{ni}^* \quad (1.4.16)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t_{Ai}} = u_{i,A}$$

$$u_i|_{\tilde{\Gamma}_u} = u_i^* .$$

Wenn (1.4.16)<sub>1</sub> bis 2 identisch erfüllt werden, erhält man sofort (ii).

- (iii) folgt sofort mit Hilfe von Satz 1.4.2 .  $\square$

Diese äquivalente duale Beschreibung ist nicht auf Extremalprobleme beschränkt. Sie bleibt auch für mehrdeutige Lösungen des betrachteten Randwertproblems gültig. Insbesondere bleibt sie gültig für die durch die Bedingung (1.3.3) zugelassene Klasse von Verzweigungspunkten.

## 1.5 Energienormartige Fehlerabschätzungen

Exakte Lösungen für das gesuchte Randwertproblem können nur für Sonderfälle erwartet werden. Deshalb werden für die Abschätzung der Genauigkeit der approximierten Lösungen Fehlermaße benötigt. Eine Vergleichsmöglichkeit für dual approximierte, nicht notwendigerweise eindeutige Lösungen, kann mit Hilfe der sogenannten elastischen Zustände unter Ausnutzung der sogenannten "Kurznorm" erhalten werden.

### Definition 1.5.1

- (i) Die Klasse der Funktionen  $\underline{\psi} \in B_{\underline{\psi}} \subset L_{\tilde{p}}(\Omega) \times L_p(\Omega)$

$$B_{\underline{\psi}} := \{ \underline{\psi} = (\underline{d}, \underline{t}) ; \underline{d} \in L_p(\Omega), \underline{t} \in E_q(\Omega), \underline{t} = \underline{t}(\underline{x}, \underline{d}) \} \quad (1.5.1)$$

wird *Mannigfaltigkeit der elastischen Zustände*  $\underline{\psi}$  genannt.  $\square$

(ii) Die Klasse der Funktionen  $\tilde{\underline{\psi}} \in B_{\tilde{\underline{\psi}}} \subset B_{\underline{\psi}}$

$$B_{\tilde{\underline{\psi}}} := \{ \tilde{\underline{\psi}} \in B_{\underline{\psi}} ; \tilde{\underline{u}} \in B_{\tilde{\underline{u}}}, \tilde{\underline{t}} = \underline{t}(\underline{x}, \tilde{\underline{d}}) \} \quad (1.5.2)$$

wird *Mannigfaltigkeit der geometrisch zulässigen elastischen Zustände*  $\tilde{\underline{\psi}}$  genannt.  $\square$

(iii) Die Klasse der Funktionen  $\tilde{\tilde{\underline{\psi}}} \in B_{\tilde{\tilde{\underline{\psi}}}} \subset B_{\underline{\psi}}$

$$B_{\tilde{\tilde{\underline{\psi}}}} := \{ \tilde{\tilde{\underline{\psi}}} \in B_{\underline{\psi}} ; \tilde{\tilde{\underline{t}}} \in B_{\tilde{\tilde{\underline{t}}}}, \tilde{\tilde{\underline{d}}} = \underline{d}(\underline{x}, \tilde{\tilde{\underline{t}}}) \} \quad (1.5.3)$$

wird *Mannigfaltigkeit der statisch zulässigen elastischen Zustände*  $\tilde{\tilde{\underline{\psi}}}$  genannt.  $\square$

Hier bedeutet  $\tilde{\underline{d}} = \tilde{\underline{u}}, A$ ;  $\tilde{\underline{t}} = \underline{t}(\underline{x}; \tilde{\underline{d}})$  bezeichnet die konstitutiven Beziehungen im Punkt  $\tilde{\underline{d}}$  und  $\tilde{\underline{d}} = \underline{d}(\underline{x}; \tilde{\underline{t}})$  deren Inversion im Punkt  $\tilde{\underline{t}}$ .

Die Mannigfaltigkeit  $B_{\underline{\psi}}$  ist eingebettet im cartesischen Produktraum mit den Punkten  $(\underline{d}, \underline{t})$ . Für dieses Produktraum wird die Norm

$$\| \underline{\psi} \| := \| \underline{d} \|_p + \| \underline{t} \|_q \quad (1.5.4)$$

oder jede äquivalente Norm eingeführt. Von Interesse ist der Durchschnitt  $B_{\tilde{\underline{\psi}}} \cap B_{\tilde{\tilde{\underline{\psi}}}}$  welcher mit Hilfe von

$$\inf \| \tilde{\underline{\psi}} - \tilde{\tilde{\underline{\psi}}} \| = 0$$

$$\tilde{\underline{\psi}} \in B_{\tilde{\underline{\psi}}} \quad (1.5.5)$$

$$\tilde{\tilde{\underline{\psi}}} \in B_{\tilde{\tilde{\underline{\psi}}}}$$

errechnet wird.

Für Extremalprobleme der linearen Elastostatik werden symmetrische Dehnungstensoren  $\underline{E}$ , symmetrische Spannungstensoren  $\underline{S}$  und eine kommutative bilineare Form

$$\{\underline{h}, \underline{h}\} := \int_{\Omega} \begin{matrix} 1 & 2 \\ \underline{S} & \underline{E} \end{matrix} d\Omega = \int_{\Omega} \begin{matrix} 2 & 1 \\ \underline{S} & \underline{E} \end{matrix} d\Omega \quad (1.5.6)$$

mit  $\underline{h} := (\underline{E}, \underline{S})$  und

$$\{\underline{h}, \underline{h}\} = 2 \int_{\Omega} f(\underline{E}) d\Omega = 2 \int_{\Omega} g(\underline{S}) d\Omega \quad (1.5.7)$$

eingeführt. Die Bilinearform  $\{\underline{h}, \underline{h}\}$  (1.5.6) wird Wechselwirkungsenergie genannt und wird innerhalb der sogenannten Energiemethode zur Berechnung von komplementären Fehlerschranken angewendet, siehe z.B.: RIEDER [65], STUMPF [96], SCHOMBURG [111].

Für nichtlineare Probleme ist jedoch

$\int_{\Omega} f(\underline{x}; \underline{d}) d\Omega \neq \int_{\Omega} g(\underline{x}; \underline{t}) d\Omega$  und für  $\underline{\psi} \neq \underline{\psi}$   
 ist auch  $\int_{\Omega} \begin{matrix} 1 & 2 \\ \underline{d} & \underline{t} \end{matrix} d\Omega \neq \int_{\Omega} \begin{matrix} 2 & 1 \\ \underline{d} & \underline{t} \end{matrix} d\Omega$ . Daher kann diese Methode nicht sogleich für nichtlineare Probleme angewendet werden.

Eine Verallgemeinerung auf nichtlineare und auch auf nichtkonvexe Probleme ist in [173], [203], [223] zu finden.

### Definition 1.5.2

Die kommutative Bilinearform

$$\{\underline{\psi}, \underline{\psi}\} := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \begin{matrix} 1 & 2 \\ \underline{d} & \underline{f} \end{matrix} + \begin{matrix} 2 & 1 \\ \underline{d} & \underline{f} \end{matrix} \right) d\Omega \quad (1.5.8)$$

wird Wechselwirkungsenergie genannt.  $\square$

Es gilt

Satz 1.5.1 (siehe LABISCH [223], Theorem 6.1).

Mit den Bezeichnungen  $\underline{\underline{d}}^v := \underline{\underline{d}} - \underline{\underline{d}}$ ,  $\underline{\underline{t}}^v := \underline{\underline{t}} - \underline{\underline{t}}$ ,  $\underline{\underline{\psi}}^v := \underline{\underline{\psi}} - \underline{\underline{\psi}}$ ,  $S_K := \underline{\underline{I}}^u - \underline{\underline{I}}^c$  gilt die Abschätzung:

$$\{\psi, \psi\} = \int_{\Omega} \overset{v}{d}_{iA} \overset{v}{t}_{Ai} d\Omega = 2 S_k + 0(\overset{v}{d}^3, \overset{v}{t}^3). \quad (1.5.9)$$

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \overset{v}{d} \overset{v}{t} d &= \int_{\Omega} \overset{v}{u}_{i,A} \overset{v}{t}_{Ai} d\Omega = - \int_{\Omega} \overset{v}{t}_{Ai,A} \overset{v}{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \overset{v}{t}_{Ai} n_A \overset{v}{u}_i d\Gamma = \\ & \int_{\Omega} p_i \overset{v}{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} \overset{v}{t}_{in}^* \overset{v}{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma_u} \overset{v}{t}_{Ai} n_A \overset{v}{u}_i^* d\Gamma \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

und daher ist

$$\int_{\Omega} [\tilde{f} + \tilde{g} - \overset{v}{d}_{iA} \overset{v}{t}_{Ai}] d = \tilde{I}^u - \tilde{I}^c. \quad (1.5.11)$$

Die LEGENDRE Transformation angewendet auf  $\tilde{\psi}$  und  $\tilde{\psi}$

$$\begin{aligned} \tilde{f} + \tilde{g} &= \overset{v}{d}_{iA} \overset{v}{t}_{Ai} \\ \tilde{f} + \tilde{g} &= \overset{v}{d}_{iA} \overset{v}{t}_{Ai} \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

und ein verallgemeinerter Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} \tilde{f} - \tilde{f} &= \tilde{f}' \overset{v}{d} + \frac{1}{2} \tilde{f}'' \overset{v}{d}^2 + 0(\overset{v}{d}^3) \\ \tilde{g} - \tilde{g} &= \tilde{g}' \overset{v}{t} + \frac{1}{2} \tilde{g}'' \overset{v}{t}^2 + 0(\overset{v}{t}^3) \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

ergeben

$$2S_k + \int_{\Omega} [\tilde{f} - \tilde{f} + \tilde{g} - \tilde{g} + \overset{v}{d}_{iA} \overset{v}{t}_{Ai} - \overset{v}{t}_{Ai} \overset{v}{d}_{iA}] d\Omega = 0 \quad (1.5.14)$$

und deshalb auch (1.5.9). Dabei wurde  $f'(x; \tilde{d}) = \tilde{t}$  und  $g'(x; \tilde{t}) = \tilde{d}$  eingesetzt.  $\square$

Die Norm (1.5.4) für die elastischen Zustände enthält nur Terme mit  $\tilde{d}$  und  $\tilde{t}$ . Aussagen über  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{t}$ ,  $\text{div } \tilde{t}$  und die geometri-

schen und statischen Randwerte können mit Hilfe der Funktionale (1.4.13), (1.4.14), der Bedingung (1.3.3) und der Abschätzung (1.4.9) erhalten werden. Unabhängig von der Konvexität der Verschiebungsenergie liefert die HÖLDERSche Ungleichung

$$|\{\psi, \psi\}| \leq \| \tilde{d} \|_p \| \tilde{t} \|_q . \quad (1.5.15)$$

Im folgenden sei  $\tilde{\psi}$  der elastische Zustand der gesuchten Lösung  $(\tilde{u}, \tilde{t})$  und  $U(\tilde{\psi})$  eine Umgebung von  $\tilde{\psi}$ . Es sei  $\tilde{\psi}^v = \tilde{\psi} - \tilde{\psi}$ ,  $\tilde{\psi}, \tilde{\psi} \in U(\tilde{\psi})$  und  $\tilde{t}(x_C; \tilde{d})$  sei in  $U(\tilde{\psi})$  eindeutig umkehrbar. Betrachten wir zuerst eine Lösung  $(\tilde{u}, \tilde{t})$  für die in  $U(\tilde{\psi})$  die Wechselwirkungsenergie (1.5.8) positiv definit ist in dem Sinn, daß

$$\forall i, \forall A; \int_{\Omega} \tilde{d}_{(iA)}^v \tilde{t}_{(Ai)}^v d\Omega \geq 0 \text{ (ohne Summe)} \quad (1.5.16)$$

und das Gleichheitszeichen nur für  $\tilde{d}_{iA}^v = 0$  und  $\tilde{t}_{iA}^v = 0$  erreicht wird. Da die Ungleichungen (1.5.16) auch für  $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}$  und  $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}$  gelten, folgt sofort, daß  $f''(x; \tilde{d})$  positiv definit, die Verschiebungsenergie ein konvexes Funktional bezüglich  $\tilde{d}$  und die duale Energie ein konvexes Funktional bezüglich  $\tilde{t}$  ist. In der Klasse  $B_{\tilde{u}}$  definiert das Funktional (1.4.13) ein lokales Minimumprinzip und in der Klasse  $B_{\tilde{t}}$  definiert das Funktional (1.4.14) ein lokales Maximumprinzip. Es gilt daher mit  $\tilde{I}^u(\tilde{u}) = \tilde{I}^c(\tilde{t}) = I_0$ ,

$$\tilde{I}^u(\tilde{u}) - I_0 \leq \tilde{I}^u(\tilde{u}) - \tilde{I}^c(\tilde{t}) \quad (1.5.17)$$

$$I_0 - \tilde{I}^c(\tilde{t}) \leq \tilde{I}^u(\tilde{u}) - \tilde{I}^c(\tilde{t}) .$$

Die Abschätzung (1.5.9) hat hier die Form

$$\{\tilde{\psi}, \tilde{\psi}\} = 2 S_k + 0 (S_k^{1+s}); \quad s \geq 0.5 . \quad (1.5.18)$$

Eine sofortige einfache Folgerung ist

### Satz 1.5.2

Für eine positiv definite Wechselwirkungsenergie im Sinne von (1.5.16) sind die Aussagen

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & S_k = 0 \\
 \text{(ii)} \quad & \int_{\Omega} \psi^v \psi^v = 0 \\
 \text{(iii)} \quad & \|\psi^v\| = 0
 \end{aligned} \tag{1.5.19}$$

äquivalent und nur für die Lösung  $(\bar{u}, \bar{t})$  gültig. Für geometrisch oder statisch angenäherte Lösungen gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
 \text{(iv)} \quad & \int_{\Omega} (\bar{\psi} - \tilde{\psi})^v (\bar{\psi} - \tilde{\psi})^v \leq \int_{\Omega} \psi^v \psi^v \\
 \text{(v)} \quad & \int_{\Omega} (\tilde{\psi} - \bar{\psi})^v (\tilde{\psi} - \bar{\psi})^v \leq \int_{\Omega} \psi^v \psi^v \quad . \quad \square
 \end{aligned} \tag{1.5.20}$$

Die Abschätzungen (iv) und (v) gelten auch in der linearen Theorie, siehe z.B. STUMPF [96], werden dort pauschale oder komplementäre Fehlerschranken genannt und konnten nur über langwierige Betrachtungen erhalten werden. Wegen der positiven Definitheit von  $f''(\underline{x}; \underline{\tilde{d}})$  und von  $g''(\underline{x}; \underline{\tilde{t}})$  generieren  $\int_{\Omega} f(\underline{x}; \underline{\tilde{d}}) d\Omega$  und  $\int_{\Omega} g(\underline{x}; \underline{\tilde{t}}) d\Omega$  jeweils eine Norm für  $\underline{\tilde{d}}$  oder  $\underline{\tilde{t}}$ . Die Methode in der diese Eigenschaft ausgenutzt wird, wird *Energiemethode* genannt.

Betrachten wir nun eine solche Lösung  $(\bar{u}, \bar{t})$  für die in einer Umgebung  $\mathcal{U}(\tilde{\psi})$  zumindestens ein Term mit

$$\int_{\Omega} \underline{\tilde{d}}^v(iA) \underline{\tilde{t}}^v(Ai) d\Omega < 0 \quad (\text{ohne Summe}) \tag{1.5.21}$$

existiert. In diesem Fall ist sowohl  $f(\underline{x}; \underline{\tilde{d}})$ , als auch  $g(\underline{x}; \underline{\tilde{t}})$  nicht konvex und die Funktionale (1.4.13) und (1.4.14) brauchen für die zulässigen Ansatzfunktionen keine lokalen Extremalprinzipie zu konstituieren. Deshalb kann hier die duale Differenz  $S^k = \tilde{I}^u - \tilde{I}^c$  nicht als pauschale oder komplementäre Fehlerschranke angewendet werden. Die Energiemethode verliert ihre Gültigkeit.

Eine Energienormartige Abschätzung liefert

Satz 1.5.3 (siehe LABISCH [223], Theorem 6.4)

Es bezeichnen  $i_o$  und  $A_o$  die Indizes, für welche in der Umgebung  $\cup(\tilde{\psi})$

$$\int_{\Omega} d_{(i_o A_o)}^v t_{(A_o i_o)}^v d\Omega < 0 \quad (\text{ohne Summe}) \quad (1.5.22)$$

ist, dann gilt:

(i) Das Funktional

$$\} \tilde{\psi}, \tilde{\psi} \{ := \} \tilde{\psi}, \tilde{\psi} \{ - 2 \sum_{i_o, A_o} \int_{\Omega} d_{i_o A_o}^v t_{A_o i_o}^v d\Omega \quad (1.5.23)$$

generiert eine lokal zu  $\|\tilde{\psi}\|$  (1.5.4) äquivalente Norm.

Die Gleichungen

$$(ii) \quad \} \tilde{\psi}, \tilde{\psi} \{ = 0 \quad (1.5.24)$$

$$(iii) \quad \|\tilde{\psi}\| = 0$$

sind äquivalent und nur für die möglicherweise nicht eindeutige Lösung  $(\bar{u}, \bar{t})$  gültig.

Für geometrisch oder statisch approximierte Lösungen gelten die Abschätzungen:

$$(iv) \quad \} \tilde{\psi} - \tilde{\tilde{\psi}}, \tilde{\psi} - \tilde{\tilde{\psi}} \{ \leq \} \tilde{\psi}, \tilde{\psi} \{ \quad (1.5.25)$$

$$(v) \quad \} \tilde{\psi} - \tilde{\tilde{\psi}}, \tilde{\psi} - \tilde{\tilde{\psi}} \{ \leq \} \tilde{\psi}, \tilde{\psi} \{ .$$

Beweis:

Für jede Lösung wird mit (1.5.23) eine Norm generiert. Dabei können die Indizes für verschiedene Lösungsäste verschieden sein. Für jede sinnvolle Wahl der Indizes kann jedoch genau so, wie im konvexen Fall verfahren werden. Die Wahl des richtigen Lösungsastes wird dabei durch die Bedingung (1.3.3) ermöglicht.  $\square$

### 1.6 Punktweise Fehlerschranken

Beim Entwurf neuer Konstruktionen kann an gegebenen Stellen gewisser Bauteile eine numerische Abschätzung von bestimmten geometrischen und statischen Feldgrößen notwendig sein. Solche Abschätzungen sind aus der linearen Elastostatik für konvexe Probleme bekannt, siehe z.B.: WEBER [16], PRAGER, SYNGE [19], DIAZ, GREENBERG [20], GREENBERG [21], SYNGE [24], WASHIZU [30], SYNGE [34], RIEDER [65], STUMPF [82, 96], SCHOMBURG [111].

Eine Verallgemeinerung für eine Klasse nichtlinearer und auch nichtkonvexer Probleme ist möglich. Eine wesentliche Einschränkung wird jedoch für nichtlineare Probleme durch  $f(\underline{x}; \bar{d}) \neq g(\underline{x}; \bar{t})$  verursacht.

Für die Berechnung punktweiser Fehlerschranken für verschiedene Feldgrößen des Randwertproblems (1.2.1 bis 4) wird das semihomogene Randwertproblem

$$\begin{aligned} -[t_{Ai,A}^{\circ} + p_i^{\circ}] &= = : \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{u}_i^{\circ} &= 0; & \forall \underline{x} \in \Gamma_{\underline{u}} \\ t_{ni}^{\circ} &= 0; & \forall \underline{x} \in \Gamma_{\underline{t}} \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

mit den konstitutiven Beziehungen

$$\underline{t}^{\circ} = \underline{t}(\underline{x}; \bar{d}) \quad (1.6.2)$$

gemäß (1.2.4) mit  $\bar{d}_{iA}^{\circ} = \underline{u}_{i,A}^{\circ}$  formuliert.

Die Volumenkräfte  $\underline{p}_i^{\circ}(\underline{x}-\underline{\eta})$  sollen an der Stelle  $\underline{x} = \underline{\eta}$  eine bestimmte Singularität haben, die so gewählt ist, daß die Wechselwirkungsenergie

$$2\{\bar{\psi}^{\circ} \underline{\psi}\} =: \int_{\Omega} (\bar{d}^{\circ} \underline{t}^{\circ} + \bar{d}^{\circ} \bar{t}^{\circ}) \, d\Omega \quad (1.6.3)$$

an der Stelle  $\underline{x} = \underline{\eta}$  die abzuschätzende Feldgröße induziert, und soll an allen anderen Stellen von  $\Omega$  Null sein. Gewöhnlich wird  $\overset{\circ}{q}_i(\underline{x}-\underline{\eta}) \notin L_g(\Omega)$ . Dann muß untersucht werden ob über Grenzbe-  
trachtungen eine sinnvolle Problemanalyse überhaupt möglich  
ist.

Es sei  $\bar{\psi}$  der elastische Zustand der exakten Lösung  $(\bar{u}, \bar{t})$  des Randwertproblems (1.2.1 bis 4) und  $\overset{\circ}{\psi}$  der elastische Zu-  
stand der Lösung des Randwertproblems (1.6.1). Wir bezeichnen  
mit  $\Omega_\epsilon$  das Gebiet  $\Omega$  aus dem eine kleine Kugel  $K(\underline{\eta}; \epsilon)$  mit dem  
Radius  $\epsilon$  und dem Mittelpunkt  $\underline{\eta}$  herausgeschnitten wurde.

Ein Grenzübergang  $\lim \epsilon = 0$ , partielle Integration, (1.6.1) und  
(1.2.1 bis 3) ergeben für nichtsinguläre  $\bar{t}$

$$\int_{\Omega} \overset{\circ}{d} \bar{t} \, d\Omega = \lim_{\epsilon=0} \left\{ \int_{K(\underline{\eta}; \epsilon)} \overset{\circ}{d} \bar{t} \, d\Omega + \int_{\Omega_\epsilon} \overset{\circ}{d} \bar{t} \, d\Omega \right\}$$

$$= S(\underline{\eta}) + \lim_{\epsilon=0} \left\{ \int_{\Omega_\epsilon} \overset{\circ}{u}_i q_i \, d\Omega \right\} + \int_{\Gamma_t} \overset{\circ}{u}_i t_n^* \, d\Gamma_t \quad (1.6.4)$$

und

$$\int_{\Omega} \bar{d} \overset{\circ}{t} \, d\Omega = \lim_{\epsilon=0} \left\{ \int_{K(\underline{\eta}; \epsilon)} \bar{u}_i \overset{\circ}{p}_i \, d\Omega \right\} + \int_{\Gamma_u} u_i^* \overset{\circ}{t}_n \, d\Gamma_t =$$

$$= E(\underline{\eta}) + \int_{\Gamma_u} u_i^* \overset{\circ}{t}_n \, d\Gamma_t \quad (1.6.5)$$

Daher ist

$$2\{\bar{\psi}, \overset{\circ}{\psi}\} = \int_{\Omega} \overset{\circ}{u}_i p_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_u} u_i^* \overset{\circ}{t}_{ni} \, d\Gamma_u + \int_{\Gamma_t} \overset{\circ}{u}_i t_{ni}^* \, d\Gamma_t$$

$$+ E(\underline{\eta}) + S(\underline{\eta}) \quad (1.6.6)$$

$E(\underline{\eta})$  bezeichnet eine geometrische und  $S(\underline{\eta})$  eine statische  
durch die Singularität von  $\overset{\circ}{p}_i$  indizierte Feldgröße. Wenn z.B.  
 $\overset{\circ}{q}_i(\underline{x}-\underline{\eta}) = \delta(\underline{x}-\underline{\eta})$  die DIRACsche Deltafunktion bezeichnet, dann ist

$S(\underline{\eta}) = 0$ ,  $E(\underline{\eta}) = \bar{u}_i$  und  $\overset{0}{\underline{u}}$  wird Fundamentallösung genannt. Bei passend gewählten Singularitäten können andere geometrische oder statische Feldgrößen als Beitrag der Singularität erhalten werden.

Der singuläre elastische Zustand wird in der Form

$$\overset{0}{\underline{\psi}} = \overset{\infty}{\underline{\psi}} + \overset{U}{\underline{\psi}} \quad (1.6.7)$$

gesucht. Hier hat  $\overset{\infty}{\underline{\psi}}$  die notwendige Singularität, ist jedoch nicht durch Randbedingungen eingeschränkt.  $\overset{U}{\underline{\psi}}$  bezeichnet eine glatte Funktion die so gewählt wird, daß  $\overset{0}{\underline{\psi}}$  die homogenen geometrischen und statischen Randbedingungen erfüllt. Der exakte singuläre elastische Zustand kann nur für einfache Sonderfälle gefunden werden. Daher wird eine geometrische Approximation

$$\overset{0}{\underline{\psi}}^{\sim} = \overset{\infty}{\underline{\psi}} + \overset{U}{\underline{\psi}}^{\sim} \quad (1.6.8)$$

welche nur die homogenen geometrischen Randbedingungen erfüllt, und eine statische Approximation

$$\overset{0}{\underline{\psi}}^{\approx} = \overset{\infty}{\underline{\psi}} + \overset{U}{\underline{\psi}}^{\approx} \quad (1.6.9)$$

welche nur die homogenen statischen Randbedingungen erfüllt, angewendet. Es ist dann

$$2\{\bar{\underline{\psi}}, \overset{0}{\underline{\psi}}^{\sim}\} = \int_{\Omega} \bar{\underline{d}} \overset{0}{\underline{t}}^{\sim} d\Omega + \int_{\Omega} \overset{0}{\underline{u}}^{\sim} p_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} \overset{0}{\underline{u}}^{\sim} t_{ni}^* d\Gamma_t + S(\underline{\eta}) \quad (1.6.10)$$

und

$$2\{\bar{\underline{\psi}}, \overset{0}{\underline{\psi}}^{\approx}\} = \int_{\Omega} \bar{\underline{d}} \overset{0}{\underline{t}}^{\approx} d\Omega + \int_{\Gamma_u} u_i^* t_{ni}^{\approx} d\Gamma_u + E(\underline{\eta}). \quad (1.6.11)$$

Mit  $F(\underline{\eta}) := E(\underline{\eta}) - S(\underline{\eta})$  erhalten wir

$$F(\underline{\eta}) = \int_{\Omega} p_i \overset{0}{\underline{u}}_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} \overset{0}{\underline{u}}_i t_{ni}^* d\Gamma_t - \int_{\Gamma_u} u_i^* t_{ni}^{\approx} d\Gamma_u + \int_{\Omega} (\bar{\underline{d}} \overset{0}{\underline{t}}^{\approx} - \bar{\underline{d}} \overset{0}{\underline{t}}^{\sim}) d\Omega. \quad (1.6.12)$$

Aus

$$\int_{\Omega} [\bar{d} \bar{t}^{\circ} - \bar{d}^{\circ} \bar{t}] d\Omega = \int_{\Omega} [(\bar{d} - \bar{d}) \bar{t}^{\circ} + (\bar{t} - \bar{t}) \bar{d}^{\circ} + \bar{d} \bar{t}^{\circ} - \bar{t} \bar{d}^{\circ}] d\Omega \quad (1.6.13)$$

und

$$\int_{\Omega} (\bar{t} - \bar{t}) \bar{d}^{\circ} d\Omega = 0 \quad (1.6.14)$$

folgt mit

$$F_A(\eta) = \int_{\Omega} \bar{u}_i^{\circ} p_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\bar{t}}} \bar{u}_i^{\circ} t_{ni}^* d\Gamma_{\bar{t}} - \int_{\Gamma_{\bar{u}}} u_i^* \bar{t}_{ni}^{\circ} d\Gamma_{\bar{u}} + \int_{\Omega} (\bar{d} \bar{t}^{\circ} - \bar{d}^{\circ} \bar{t}) d\Omega \quad (1.6.15)$$

$$F(\eta) = F_A(\eta) \pm \left| \int_{\Omega} (\bar{d} - \bar{d}) \bar{t}^{\circ} d\Omega \right|. \quad (1.6.16)$$

Wenn  $\|\bar{\psi}^{\circ}\|$  existiert, dann liefert die HÖLDERSche Ungleichung (1.5.15)

$$\left| \int_{\Omega} (\bar{d} - \bar{d}) \bar{t}^{\circ} d\Omega \right| \leq \|\bar{d} - \bar{d}\|_p \cdot \|\bar{t}^{\circ}\|_q. \quad (1.6.17)$$

Für komplementäre Extremalprobleme folgt mit Hilfe von (1.5.18) und (1.5.20)

$$\left| \int_{\Omega} (\bar{d} - \bar{d}) \bar{t}^{\circ} d\Omega \right| \leq \{\bar{\psi}, \bar{\psi}\}^{\vee \vee} \|\bar{\psi}^{\circ}\| \approx 2 (S_k)^{1/2} \|\bar{\psi}^{\circ}\|. \quad (1.6.18)$$

Für duale Probleme wird mit Hilfe von (1.5.26)

$$\left| \int_{\Omega} (\bar{d} - \bar{d}) \bar{t}^{\circ} d\Omega \right| \leq \{\bar{\psi}, \bar{\psi}\}^{\vee \vee} \|\bar{\psi}^{\circ}\| \quad (1.6.19)$$

erhalten, siehe auch [203].

## 2. ÜBER EINE DUALE FORMULIERUNG VON RANDWERTPROBLEMEN FÜR DIE KÁRMÁNSCHE PLATTE

### 2.1 Einleitung

Eine für die Berechnung einer endlichen Durchbiegung dünner elastischer Platten geeignete Theorie wurde 1910 von Th. von KÁRMÁN [5] veröffentlicht. Das Verhalten der Platte wird durch zwei gekoppelte semilineare partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung

$$\Delta^2 \theta = E(\bar{u}_{3,12}^2 - \bar{u}_{3,11}\bar{u}_{3,22}) \quad (2.1.1)$$

$$\Delta^2 \bar{u}_3 = \frac{h}{\bar{D}} \left( \frac{\bar{p}}{h} + \theta_{,22}\bar{u}_{3,11} + \theta_{,11}\bar{u}_{3,22} - 2\theta_{,12}\bar{u}_{3,12} \right)$$

und entsprechende Randbedingungen beschrieben. Hier bezeichnen: E das Elastizitätsmodul,  $\nu$  die Querkontraktionszahl,  $\theta$  die AIRYSche Spannungsfunktion, h die konstante Plattendicke,  $\bar{p}$  die Flächenlast,  $\bar{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  und die Indizes nach dem Komma eine partielle Differentiation zweiter Ordnung bezüglich der entsprechenden Komponenten von  $x$ .

Eine mathematisch wesentliche Erschwerung wird durch die auf der rechten Seite auftretenden nichtlinearen Terme verursacht. Viele Veröffentlichungen, siehe z.B.: [5, 15, 42, 55, 61, 74, 92, 124, 133, 135, 136, 144, 146, 148, 149, 158, 159, 163, 164, 173, 184, 199, 201, 203, 233] und die darin zitierte Literatur, beschäftigen sich mit dieser Plattentheorie. In den Untersuchungen werden meistens die AIRYSche Spannungsfunktion und die Gleichungen (2.1.1) benutzt. Oft sind die Veröffentlichungen, durch die auftretenden Schwierigkeiten mathematischer Natur bedingt, auf homogene Randbedingungen beschränkt.

Eine modifizierte, sowohl für theoretische Betrachtungen als auch für numerische Berechnungen geeignetere Version dieser Plattentheorie wurde zuerst von STUMPF [148, 149, 163, 164] veröffentlicht und später von LABISCH [233, 234] mathematisch

begründet. Beliebige nichthomogene geometrische und statische Randbedingungen können auf einfache Weise berücksichtigt werden. Die relative Einfachheit predistiniert diese Version einer nichtlinearen Plattentheorie geradezu als Versuchsfeld für Anwendung und Effizienz verschiedener Hilfsmittel und Methoden der modernen Funktionalanalysis. Die Version ist hinreichend vielseitig um eine informative Einsicht in die Natur einer dualen Darstellung des nichtlinearen Problems zu vermitteln. An einem einfachen numerischen Beispiel konnte gezeigt werden, daß die RIEMANN-HUGONIOT Katastrophe in der Umgebung eines einfachen Verzweigungspunktes äquivalent sowohl über eine geometrische als auch über eine rein statische Approximation als Beschreibung des auftretenden Phänomens erhalten werden konnte.

## 2.2 Das Randwertproblem für die KÁRMÁNsche Platte

In dimensionsloser LAGRANGEScher Formulierung beschreiben die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} -(m_{\alpha\beta, \beta\alpha} + n_{\alpha 3, \alpha} + p) &= 0 \\ -n_{\alpha\beta, \alpha} &= 0 ; \quad \forall \xi \in \Omega, \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

die geometrischen Randbedingungen

$$u_i - u_i^* = 0, \quad u_{3, \underline{n}} - u_{3, \underline{n}}^* = 0, \quad i := \{1, 2, 3\}; \quad \forall \xi \in \Gamma_{\underline{u}} \quad (2.2.2)$$

kurz geschrieben

$$G(\underline{u}) \Big|_{\Gamma_{\underline{u}}} = 0 \quad (2.2.3)$$

und die statischen Randbedingungen

$$n_{\underline{ni}} - n_{\underline{ni}}^* = 0, \quad m_{\alpha \underline{n}} - m_{\alpha \underline{n}}^* = 0, \quad q_{\underline{n}3} - q_{\underline{n}3}^* = 0; \quad \forall \xi \in \Gamma_{\underline{t}} \quad (2.2.4)$$

kurz geschrieben

$$S(\underline{t}) \Big|_{\Gamma_{\underline{t}}} = 0 \quad (2.2.5)$$

das betrachtete Randwertproblem.

Die statischen Randbedingungen sind überbestimmt. Deshalb werden diese oft in der Form

$$\begin{aligned} \tilde{n}_{n\alpha} - n_{n\alpha}^* &= 0; \quad \tilde{m}_{ns,s} + \tilde{q}_{n3} + \tilde{n}_{n3} - (m_{ns}^* + q_{n3}^* + n_{n3}^*) = 0 \\ \tilde{m}_{nn} - m_{nn}^* &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

geschrieben.

Der Zusammenhang zwischen geometrischen und statischen Feldgrößen wird durch die konstitutiven Beziehungen ausgedrückt. Hierzu gehören:

die Momentenschnittkräfte

$$\begin{aligned} m_{11} &:= -D(u_{3,11} + \nu u_{3,22}) \\ m_{22} &:= -D(u_{3,22} + \nu u_{3,11}) \\ m_{12} &:= -D(1-\nu)u_{3,12} =: m_{21}, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

die Membranschnittkräfte

$$\begin{aligned} n_{11} &:= D_1(e_{11}(u) + \nu e_{22}(u)) \\ n_{22} &:= D_1(e_{22}(u) + \nu e_{11}(u)) \\ n_{12} &:= D_1(1-\nu)e_{12}(u) =: n_{21} \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

und die Vertikalkomponenten der Membrankräfte

$$\begin{aligned} n_{13} &:= n_{11}u_{3,1} + n_{12}u_{3,2} \\ n_{23} &:= n_{12}u_{3,1} + n_{22}u_{3,2} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

$\Omega$  bezeichnet ein offenes im Quadrat  $|\xi_\alpha| \leq 1$ ,  $\alpha_i = 1, 2$  enthaltenes Gebiet und  $\Gamma$  dessen Rand, siehe Fig. 1. Es wird vorausgesetzt, daß  $\Omega$  hinreichend glatt ist, so daß das Trace-Theorem für SOBOLEV-Räume, ADAMS [139] und das Trace-Theorem

für die statisch dualen Räume, LABISCH [234], gültig sind. Geometrische und statische Randbedingungen können für verschiedene Komponenten auf verschiedenen Teilen  $\Gamma_{u_k} \subset \Gamma$  oder  $\Gamma_{t_k} \subset \Gamma$  gegeben sein, so daß  $\Gamma_u := \{\Gamma_{u_k}; k = 1, 2, 3, 4\}$  und  $\Gamma_t := \{\Gamma_{t_k}; k = 1, 2, 3, 4\}$  als Vektoren anzusehen sind. Der Einfachheit halber wird  $\Gamma_{u_k} \cap \Gamma_{t_k} = \emptyset$  und  $\Gamma_{u_k} \cup \Gamma_{t_k} = \Gamma, \forall k$  angenommen.  $\underline{n} := (n_1, n_2)$  bezeichnet den äußeren Einheitsnormalenvektor auf  $\Gamma$  und  $\underline{s} := (s_1, s_2)$  den Einheitstangentenvektor auf  $\Gamma$ . Es ist  $u_{3,\underline{n}} := u_{3,\alpha} n_\alpha, n_{\underline{n}i} := n_{\alpha i} n_\alpha, m_{\beta\underline{n}} = m_{\beta\alpha} n_\alpha, q_{\underline{n}3} := m_{\alpha\underline{n},\alpha}, m_{\underline{n}\underline{n}} := m_{\alpha\underline{n}} n_\alpha, m_{\underline{n}\underline{s}} := m_{\beta\underline{n}} s_\beta; D := \frac{1}{12(1-\nu^2)}, D_1 := 12 D.$

Die Verzerrungen der Mittelflächen

$$e_{11}(\underline{u}) := u_{1,1} + \frac{1}{2} u_{3,1}^2, \quad e_{22}(\underline{u}) := u_{2,2} + \frac{1}{2} u_{3,2}^2 \quad (2.2.10)$$

$$2e_{12}(\underline{u}) := u_{1,2} + u_{2,1} + u_{3,1}u_{3,2}$$

werden als Abkürzungen benutzt.  $u_\alpha$  ist die dimensionslose Verschiebung in  $x_\alpha$ -Richtung,  $\alpha = 1, 2$  und  $(\cdot)_{,\alpha}$  oder  $(\cdot)_{,\alpha\beta}$  bezeichnen partielle Ableitungen bezüglich der dimensionslosen Koordinaten  $\xi_\alpha$  oder  $\xi_\alpha$  und  $\xi_\beta$ .

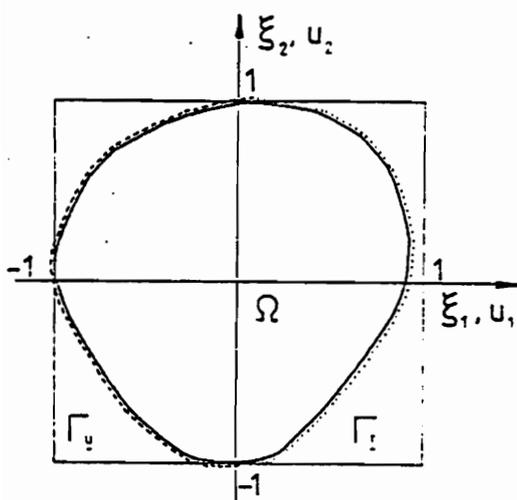


Fig. 1; Gebiet  $\Omega$

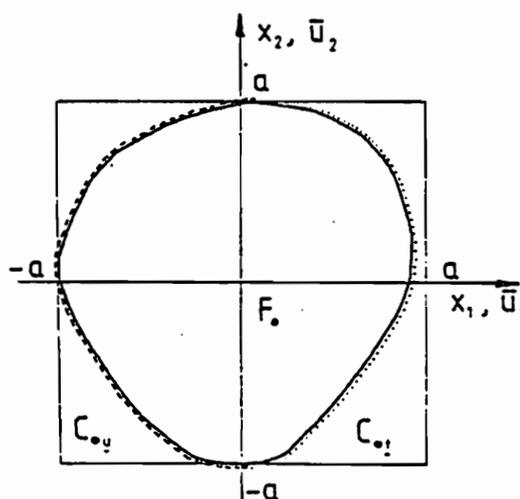


Fig. 2; Gebiet  $F_0$

### Bemerkung 2.2.1

Für das im Quadrat  $|x_\alpha| \leq a$  eingebettete Gebiet  $F_0$  der Mittelfläche der unverformten Platte wird die aus mathematischen Gründen bevorzugte dimensionslose Formulierung über die Einführung

dimensionsloser Koordinaten  $\xi_\alpha := \frac{x_\alpha}{a}$  ;

dimensionsloser Verschiebungen  $u_\alpha := \frac{a}{h^2} \bar{u}_\alpha$ ;  $u_3 := \frac{\bar{u}_3}{h}$  ;

dimensionsloser statischer Feldgrößen

$$n_{\alpha\beta} := \frac{a^2}{Eh^3} \bar{N}_{\alpha\beta}, \quad n_{\alpha 3} := \frac{a^3}{Eh^4} \bar{N}_{\alpha 3}, \quad m_{\alpha\beta} := \frac{a^2}{Eh^4} \bar{M}_{\alpha\beta}$$

und der dimensionslosen Flächenlast  $p := \frac{a^4}{Eh^4} \bar{p}$

erhalten.  $\square$

### Bemerkung 2.2.2

Die Gleichung (2.2.1)<sub>2</sub> ist in der Literatur in der äquivalenten Form

$$m_{\alpha\beta, \beta\alpha} + n_{\alpha\beta} u_{3, \beta\alpha} + p = 0 \quad (2.2.11)$$

bekannt. Einsetzen der Vertikalkomponenten (2.2.9) und Berücksichtigung von (2.2.1)<sub>1</sub> ergibt (2.2.2).  $\square$

Die Einführung der Vertikalkomponenten (2.2.9) in die konstitutiven Beziehungen ist aus folgenden Gründen notwendig:

In den Gleichgewichtsbedingungen (2.2.1) erscheinen geometrische Feldgrößen nicht explizit. Wenn die Gleichungen (2.2.1) in den statischen Größen betrachtet werden, dann sind die geometrischen Feldgrößen automatisch eliminiert. Damit werden für diesen Fall alle Einwände mancher Verfasser, siehe z.B. MASUR, POPELAR [160], S. 204 gegen eine rein statische Formulierung der Randwertaufgabe ausgeräumt. Bezüglich den eingeführten statischen Feldgrößen ist das Gleichungssystem (2.2.1) linear. Linear sind auch die statischen Randbedingungen (2.2.6). Somit liegen die eingeführten statischen Feldgrößen auf einer linearen Mannigfaltigkeit. Dies ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines äquivalenten rein statischen Variationsprinzips.

Das betrachtete Randwertproblem entspricht einer verallgemeinerten KÁRMÁNschen Plattentheorie. Es erleichtert die Berücksichtigung nichthomogener geometrischer und statischer Randwerte. Wenn die Glattheit des Gebietes  $\Omega$ , der Randwerte und der Flächenlast eine hinreichend glatte Lösung zulässt, so daß eine AIRY-sche Spannungsfunktion  $\Theta$  mit

$$\bar{N}_{11} = h^\Theta,_{22}, \bar{N}_{22} = h^\Theta,_{11}, \bar{N}_{12} := -h^\Theta,_{12} \quad (2.2.12)$$

wobei die  $\bar{N}_{\alpha\beta}$  die dimensionsbehafteten Membrankräfte bezeichnen, existiert, dann führt eine Reduktion von  $\bar{u}_\alpha$  aus den dimensionsbehafteten Gleichgewichtsbedingungen und die Einführung von  $\Theta$  zu den bekannten KÁRMÁNschen Gleichungen (2.1.1).

(In (2.2.11) bedeutet ausnahmsweise  $\Theta,_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ ).

Es wird vorausgesetzt, daß  $\Gamma_{u_k} \neq \phi, \forall k = 1, 2, 2, 4$ . Falls  $\Gamma_{u_k} = \phi$  für ein  $k$ , dann wird die Existenz einer äquivalenten Bedingung angenommen. Diese Bedingung ist notwendig für die Existenz einer äquivalenten "Kurznorm" aber auch für die Determiniertheit der Randwertaufgabe. So würde z.B. für  $\Gamma_{u_k} = \phi \forall k$  in den statischen Größen ein unterdeterminiertes partielles Randwertproblem erhalten werden, welches unabhängig von den konstitutiven Beziehungen (2.2.7 bis 9) gelöst werden könnte.

### 2.3 Herleitung der Energiefunktionen für die KÁRMÁNsche Plattentheorie

Die in den konstitutiven Beziehungen (2.2.7 bis 9) auftretenden partiellen Ableitungen der Mittelflächenverschiebungen und die statischen Schnittgrößen können in Vektorform

$$\underline{v}(u) := \{u_{1,1}, u_{2,2}, u_{1,2} + u_{2,1}, u_{3,1}, u_{3,2}, -u_{3,11}, -u_{3,22}, -u_{3,12}\} \quad (2.3.1)$$

und

$$\underline{t}(n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}) := \{n_{11}, n_{22}, n_{12}, n_{13}, n_{23}, m_{11}, m_{22}, m_{12}\} \quad (2.3.2)$$

geschrieben und als Repräsentanten der Vektoren

$$\underline{v} = (v_\ell) ; \ell := (1, 3, \dots, 8) \quad (2.3.3)$$

und

$$\underline{t} = (t_\ell) \quad (2.3.4)$$

betrachtet werden. Die Substitution von (2.3.3 bis 4) in die konstitutiven Beziehungen ergibt die nichtlineare Abbildung

$$\begin{aligned} t_1 &:= D_1(e_{11}(\underline{v}) + v e_{22}(\underline{v})) \\ t_2 &:= D_1(e_{22}(\underline{v}) + v e_{11}(\underline{v})) \\ t_3 &:= D_1(1-v)e_{12}(\underline{v}) \\ t_4 &:= t_1 v_4 + t_3 v_5 \\ t_5 &:= t_3 v_4 + t_2 v_5 \\ t_6 &:= D(v_6 + v v_7) \\ t_7 &:= D(v_7 + v v_6) \\ t_8 &:= D(1-v)v_8 \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Auch hier werden die Verzerrungen

$$\begin{aligned} e_{11}(\underline{v}) &:= v_1 + \frac{v_4^2}{2} \\ e_{22}(\underline{v}) &:= v_2 + \frac{v_5^2}{2} \\ 2e_{12}(\underline{v}) &:= v_3 + v_4 v_5 \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

als Abkürzungen angesehen. Die konstitutiven Beziehungen gelten für ein homogenes Material. Deshalb tritt  $\underline{x}$  nicht explizit auf, so daß die CARATHÉODORY-Stetigkeitsbedingungen gelten. Die spezielle Form der Beziehungen (2.3.5) garantiert, daß die Wachstumsbeschränkungen erfüllt sind und

$$v_1, v_2, v_3 \in L_2(\Omega); v_4, v_5 \in L_4(\Omega), v_6, v_7, v_8 \in L_2(\Omega),$$

also

$$\tilde{v} \in E_{\tilde{v}}(\Omega) := (L_2(\Omega))^3 \times (L_4(\Omega))^2 \times (L_2(\Omega))^3 \quad (2.3.7)$$

angenommen werden kann. Damit ist  $E_{\tilde{v}}(\Omega)$  ein linearer normierter reflexiver Raum in welchem FRÉCHETSche Ableitungen und Stammfunktionen sinnvoll sein können.

Der Existenz der Verschiebungsenergie, der dualen Energie und deren Konstruktion gilt

Satz 2.3.1

Es sei  $A_{\tilde{v}}(\Omega)$  eine Untermenge von  $E_{\tilde{v}}(\Omega)$  für welche

$$\det \begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ t_3 & t_2 \end{pmatrix} \notin (-\varepsilon, \varepsilon) : \varepsilon > 0 \quad (2.3.8)$$

erfüllt ist.

Dann gilt:

- (i) In  $A_{\tilde{v}}(\Omega)$  können die konstitutiven Beziehungen (2.3.5) eindeutig invertiert werden, so daß  $\tilde{v} = \tilde{v}(\underline{t})$  mit

$$\begin{aligned} v_1 &= t_1 - \nu t_2 - \frac{v_4^2(\underline{t})}{2} \\ v_2 &= t_2 - \nu t_1 - \frac{v_5^2(\underline{t})}{2} \\ v_3 &= 2(1 + \nu)t_3 - v_4(\underline{t})v_5(\underline{t}) \\ v_4 &= \frac{t_4 t_2 - t_5 t_3}{t_1 t_2 - t_3^2} \\ v_5 &= \frac{t_5 t_1 - t_4 t_3}{t_1 t_2 - t_3^2} \\ v_6 &= 12(t_6 - \nu t_7) \\ v_7 &= 12(t_7 - \nu t_6) \\ v_8 &= 12(1 + \nu)t_8 \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

und

$$\tilde{t} \in F_{\tilde{t}}(\Omega) := (L_2(\Omega))^3 \times (L_{4/3}(\Omega))^2 \times (L_2(\Omega))^3 \quad (2.3.10)$$

erhalten wird.

(ii)  $\tilde{t}(\tilde{v})$  besitzt eine Stammfunktion

$$\begin{aligned} f(\tilde{v}) := & \frac{D_1}{2} [e_{11}^2(\tilde{v}) + e_{22}^2(\tilde{v}) + 2ve_{11}(\tilde{v})e_{22}(\tilde{v}) + 2(1-v)e_{11}^2(\tilde{v})] \\ & + \frac{D}{2} [v_6^2 + v_7^2 + 2vv_6v_7 + 2(1-v)v_8^2] \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

mit  $\frac{\partial f(\tilde{v})}{\partial v_\ell} = t_\ell(\tilde{v})$ .

(iii)  $\tilde{v}(\tilde{t})$  besitzt eine Stammfunktion

$$\begin{aligned} g(\tilde{t}) := & \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 - 2vt_1t_2 + 2(1+v)t_3^2) \\ & + \frac{1}{2}(t_4v_4(\tilde{t}) + t_5v_5(\tilde{t})) \\ & + 6(t_6^2 + t_7^2 - 2vt_6t_7 + 2(1+v)t_8^2) \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

mit  $\frac{\partial g(\tilde{t})}{\partial t_\ell} = v_\ell(\tilde{t})$ .

Beweis:

(i) Eine formale einfache Rechnung führt zu

$$\frac{d\tilde{t}}{d\tilde{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{A}, 0 \\ 0, \tilde{B} \end{pmatrix} = \tilde{C} \quad (2.3.13)$$

mit

$$\tilde{A} := D_1 \begin{pmatrix} 1, & v, & 0, & v_4, & vv_5 \\ v, & 1, & 0, & vv_4, & v_5 \\ 0, & 0, & \frac{1-v}{2}, & \frac{1-v}{2}v_5, & \frac{1-v}{2}v_4 \\ v_4, & vv_4, & \frac{1-v}{2}v_5, & a_1, & a_2 \\ vv_5, & v_5, & \frac{1-v}{2}v_4, & a_2, & a_3 \end{pmatrix} \quad (2.3.14)$$

$$\begin{aligned} a_1 &:= v_1 + v v_2 + \frac{3}{2} v_4^2 + \frac{1}{2} v_5^2 \\ a_3 &:= v v_1 + v_2 + \frac{1}{2} v_4^2 + \frac{3}{2} v_5^2 \\ a_2 &:= \frac{1-v}{2} v_3 + v_4 v_5 \end{aligned}$$

und

$$\tilde{B} := D \begin{pmatrix} 1, v, 0 \\ v, 1, 0 \\ 0, 0, 2(1-v) \end{pmatrix}. \quad (2.3.15)$$

Außerdem gilt:

$$\det \tilde{C} = C(v, D, D_1) \det \begin{pmatrix} t_1(\tilde{v}), t_3(\tilde{v}) \\ t_3(\tilde{v}), t_2(\tilde{v}) \end{pmatrix} \quad (2.3.16)$$

mit  $C(v, D, D_1) > 0$ . Der Satz über die Umkehrabbildung garantiert nun die eindeutige Umkehrung von (2.3.5) die zu (2.3.6) führt.

- (ii) Die Matrix  $\tilde{C}$  (2.3.13) ist symmetrisch, daher ist im reflexiven Raum  $E_{\tilde{v}}(\Omega)$  die Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion erfüllt. Das Integral

$$f(\tilde{v}) := \int_0^1 t_\ell(\mu \tilde{v}) v_\ell d\mu \quad (2.3.18)$$

führt über eine einfache Rechnung zu (2.3.11).

- (iii) (2.3.16) und (2.3.8) bilden eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Gültigkeit der LEGENDRE-Transformation

$$g(\tilde{t}) := t_\ell v_\ell(\tilde{t}) - f(\tilde{v}(\tilde{t})) \quad (2.3.18)$$

mit der Eigenschaft  $\frac{\partial g(\tilde{t})}{\partial t_\ell} = v_\ell(\tilde{t})$ .  $\square$

### Definition 2.3.1

Der Operator  $f(\tilde{v}(u))$  (2.3.11) errechnet für  $\tilde{v}(u)$  (2.3.1) wird *Verschiebungsenergiedichte* genannt.

Der Operator  $g(\underline{t}(n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}))$  (2.3.12) errechnet für  $\underline{t}(n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta})$  (2.3.2) wird *duale Energiedichte* genannt.  $\square$

### Bemerkung 2.3.1

Die spezielle Form der konstitutiven Beziehungen (2.2.7 bis 9) führt zu der speziellen Form der Verschiebungsenergiedichte in der Verzerrungen (2.2.10) als Abkürzungen auftreten. Daher kann dieser Operator bezüglich der Verzerrungen mit der bekannten Verzerrungsenergiedichte identifiziert werden.  $\square$

## 2.4 Herleitung von Variationsprinzipien für das Randwertproblem der KÁRMÁNschen Plattentheorie

Analog wie im vorigen Kapitel ist für die Konstruktion von Variationsprinzipien für Randwertprobleme der KÁRMÁNschen Plattentheorie die Wahl geeigneter Räume für die zulässigen Ansatzfunktionen wesentlich. Für eine rein geometrische Beschreibung kann für ein hinreichend glattes Gebiet  $\Omega$  in Übereinstimmung mit  $\underline{v} \in E_v(\Omega)$  und für Randwerte in geeigneten Funktionenklassen angenommen werden

$$u_\alpha \in W_{1,2}(\Omega)$$

$$u_3 \in W_{2,2}(\Omega)$$

so daß

$$\underline{u} \in (W_{1,2}(\Omega))^2 \times W_{2,2}(\Omega) =: E_{\underline{u}}(\Omega) . \quad (2.4.1)$$

Für den cartesischen Produktraum  $E_{\underline{u}}(\Omega)$  ist die Übereinstimmung der Randwerte mit den im Innern von  $\Omega$  definierten Funktionenklassen durch das Trace-Theorem für SOBOLEV-Räume geregelt. Komplizierter ist das Problem, die entsprechenden Räume der zulässigen Ansatzfunktionen für ein äquivalentes rein statisches Variationsprinzip zu bestimmen. Der zu  $E_{\underline{u}}(\Omega)$  duale Raum  $E_{\underline{u}}^*(\Omega)$  ist zu umfangreich. Hier kann kein geeignetes Trace-Theorem für die Übereinstimmung der Randwerte mit der im Innern von  $\Omega$  definierten Funktionenklassen hergeleitet werden. Ein zufriedenstellendes Ergebnis kann jedoch für den eingeschränkten Raum

$$E_{\underline{t}}(\Omega) := \{n_{\alpha\beta}, n_{\alpha 3}, m_{\alpha\beta}; n_{\alpha\beta}, n_{\alpha\beta, \alpha}, m_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta, \beta\alpha} + n_{\alpha 3, \alpha} \in L_2(\Omega); \\ n_{\alpha 3} \in L_{4/3}(\Omega); \alpha := (1, 2) =: \beta\} \quad (2.4.2)$$

mit der Norm

$$\| \| n_{\alpha\beta}, n_{\alpha 3}, m_{\alpha\beta} \| \| := \| n_{\alpha\beta} \|_2 + \| n_{\alpha\beta, \alpha} \|_2 + \\ + \| n_{\alpha 3} \|_{4/3} + \| m_{\alpha\beta} \|_2 + \| m_{\alpha\beta, \beta\alpha} + n_{\alpha 3, \alpha} \|_2 \quad (2.4.3)$$

oder mit jeder anderen äquivalenten Norm erhalten werden. Ein verallgemeinertes Trace-Theorem für den Raum  $E_{\underline{t}}(\Omega)$  ist in [234] zu finden. Diese zwei Trace-Theoreme bestimmen die gegenseitig dualen Räume für die zulässigen Randwerte und die zulässige Klasse der Funktionen für die Flächenlast  $p(\xi)$ . In Übereinstimmung mit diesen Sätzen wird angenommen:

$$(i) \ u_{\alpha}^* \in W_{1/2, 2}(\Gamma_{\underline{u}}) \quad (ii) \ n_{\underline{n}\alpha}^* \in W_{-1/2, 2}(\Gamma_{\underline{t}}) \quad (iii) \ p(\xi) \in L_2(\Omega) \\ u_3^* \in W_{3/2, 2}(\Gamma_{\underline{u}}) \quad n_{\underline{n}3}^* \in W_{-1/2, 2}(\Gamma_{\underline{t}}) \quad (2.4.4) \\ u_{3, \underline{n}}^* \in W_{1/2, 2}(\Gamma_{\underline{u}}) \quad m_{\underline{n}\alpha}^* \in W_{-1/2, 2}(\Gamma_{\underline{t}}) \\ q_{\underline{n}3}^* \in W_{-3/2, 2}(\Gamma_{\underline{t}}).$$

Dem betrachteten nichthomogenem Randwertproblem kann ein äquivalentes Randwertproblem mit homogenen geometrischen und statischen Randbedingungen zugeordnet werden. Für diesen Zweck wählen wir im translationsinvarianten Raum  $E_{\underline{u}}(\Omega)$  ein hinreichend glattes Element  $\underline{u} \in E_{\underline{u}}(\Omega)$  und konstruieren mit Hilfe von (2.3.1) das Element  $\underline{v} := \underline{v}(\underline{u}) \in E_{\underline{v}}(\Omega)$ . Es sei  $\underline{t} := (n_{\alpha j}(\underline{v}), m_{\alpha\beta}(\underline{v})) \in E_{\underline{t}}(\Omega)$  das mit Hilfe von (2.3.2) und der konstitutiven Beziehungen (2.2.7 bis 9) erhaltene Element. Wenn eine Lösung des betrachteten Randwertproblems existiert, dann existiert zumindestens ein hinreichend glattes Element  $\underline{u}$  welches sowohl die geometrischen als auch die statischen Randbedingungen erfüllt. Wir nehmen ein solches Element  $\underline{u}$  und führen über eine in  $E_{\underline{u}}(\Omega)$  zulässige Translation die neuen Feldgrößen

$$\tilde{U} := \tilde{u} - \tilde{u}_{\tilde{O}} ; \quad \tilde{V} := \tilde{v} - \tilde{v}_{\tilde{O}} \quad (2.4.5)$$

und

$$N_{\alpha i} := n_{\alpha i} - n_{\tilde{O}\alpha i} \quad (2.4.6)$$

$$M_{\alpha\beta} := m_{\alpha\beta} - m_{\tilde{O}\alpha\beta}$$

ein. Dadurch wird das semihomogene Randwertproblem mit den Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} -[M_{\alpha\beta, \beta\alpha} + N_{\alpha\beta, \alpha} + q_3] &= 0 \\ -[N_{\alpha\beta, \alpha} + q_\beta] &= 0, \quad \forall \tilde{\xi} \in \Omega \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

den homogenen geometrischen Randbedingungen

$$U_{\tilde{i}}^* := 0, \quad U_{\tilde{3}, \tilde{n}}^* = 0; \quad \forall \tilde{\xi} \in \Gamma_{\tilde{u}}. \quad (2.4.8)$$

den homogenen statischen Randbedingungen

$$N_{\tilde{n}i}^* = 0, \quad Q_{\tilde{n}3}^* = 0, \quad M_{\tilde{\alpha}\tilde{n}}^* = 0; \quad \forall \tilde{\xi} \in \Gamma_{\tilde{t}} \quad (2.4.9)$$

und den assoziierten konstitutiven Beziehungen

$$\begin{aligned} N_{\alpha i} &:= n_{\alpha i} (\tilde{v}_{\tilde{O}} + \tilde{V}) - n_{\tilde{O}\alpha i} \\ M_{\alpha\beta} &:= m_{\alpha\beta} (\tilde{v}_{\tilde{O}} + \tilde{V}) - m_{\tilde{O}\alpha\beta}, \quad \forall \tilde{\xi} \in \Omega \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

mit  $q_\beta := n_{\tilde{O}\alpha\beta, \alpha}$  und  $q_3 := p + m_{\tilde{O}\alpha\beta, \beta\alpha} + n_{\tilde{O}\alpha 3, \alpha}$  erhalten.

Obwohl einige Aussagen eine allgemeinere Gültigkeit haben, wird für die folgenden Ausführungen vorausgesetzt, daß die geometrischen und statischen Randbedingungen, die Flächenlast und die geometrischen Eigenschaften des Gebietes  $\Omega$  so gewählt sind, daß die Bedingung (2.3.8) erfüllt ist. Diese Einschränkung ist eine notwendige Bedingung für die Existenz äquivalenter Variationsprinzipie in rein dualen Feldgrößen. Die Lösung des nichthomogenen oder äquivalent des assoziierten semihomogenen Randwertproblems braucht nicht eindeutig zu sein. Die Morphologie der Lösung wird durch die Randbedingungen,

die Flächenlast, das Gebiet  $\Omega$  und die Anteile  $\Gamma_u$  und  $\Gamma_t$  des Randes  $\Gamma$  bestimmt und muß aus diesen Daten deduziert werden. Ein lokales Verhalten für einen beschränkten Bereich der äußeren Kontrollparameter kann mit Hilfe elementarer Katastrophen analysiert werden.

Die Betrachtungen werden für bestimmte Funktionenklassen von zulässigen Ansatzfunktionen durchgeführt. Diese werden in den folgenden Definitionen erklärt.

Definition 2.4.1

Die Klasse der Funktionen

$$B_{\tilde{u}} := \{ \tilde{u} \in E_u(\Omega); G(\tilde{u})|_{\Gamma_u} = 0 \} \quad (2.4.11)$$

wird *Mannigfaltigkeit der geometrisch zulässigen Verschiebungen* genannt.  $\square$

Definition 2.4.2

Die Klasse der Funktionen

$$B_{\tilde{u}}^0 := \{ \tilde{U} \in E_u(\Omega); G_1(\tilde{U})|_{\Gamma_u} = 0 \} \quad (2.4.12)$$

wobei  $G_1(\tilde{U})|_{\Gamma_u}$  für (2.4.8) eingesetzt ist, wird *Raum der homogenen geometrisch zulässigen Verschiebungen* genannt.  $\square$

Definition 2.4.3

Die Klasse der Funktionen

$$B_{\tilde{t}}^{\approx} := \{ (\tilde{n}_{\alpha i}, \tilde{m}_{\alpha\beta}) \in E_t(\Omega); \tilde{m}_{\alpha\beta, \beta\alpha} + \tilde{n}_{\alpha 3, \alpha} + p = 0; \tilde{n}_{\alpha\beta, \alpha} = 0; S(\tilde{t}(\tilde{n}_{\alpha i}, \tilde{m}_{\alpha\beta}))|_{\Gamma_t} = 0 \} \quad (2.4.13)$$

wird *Mannigfaltigkeit der statisch zulässigen PIOLA-KIRCHHOFF-schen Schnittgrößen* genannt.  $\square$

Es gilt

Satz 2.4.1

- (i) Dem semihomogenen Randwertproblem (2.4.7 bis 9) entspricht im Raum  $B_{\tilde{u}}^0$  ein äquivalentes Variationsprinzip mit dem Funktional

$$I(\tilde{U}) := \int_{\Omega_0}^1 \{ -M_{\alpha\beta}(\tilde{v} + \mu\tilde{V}) \tilde{U}_{3,\beta\alpha} + N_{\alpha 3}(\tilde{v} + \mu\tilde{V}) \tilde{U}_{3,\alpha} + N_{\alpha\beta}(\tilde{v} + \mu\tilde{V}) \tilde{U}_{\beta,\alpha} - q_{\alpha} \tilde{U}_{\alpha} - q_3 \tilde{U}_3 \} d\mu d\Omega. \quad (2.4.14)$$

- (ii) Dem Randwertproblem (2.2.1 bis 2), (2.2.6) entspricht auf der Mannigfaltigkeit  $B_{\tilde{u}}$  ein äquivalentes Variationsprinzip mit dem Funktional

$$I(\tilde{U}) := \tilde{I}_{\tilde{u}}(\tilde{u}) - \tilde{I}_{\tilde{u}}(\tilde{u}) \quad (2.4.15)$$

mit

$$\tilde{I}_{\tilde{u}}(\tilde{u}) := \int_{\Omega} [f(\tilde{v}(\tilde{u})) - p\tilde{u}_3] d\Omega - \langle \delta(n_{\alpha i}^*, m_{\alpha\beta}^*), \tilde{\gamma}\tilde{u} \rangle_{\Gamma_{\tilde{t}}} \quad (2.4.16)$$

und

$$\tilde{I}_{\tilde{u}}(\tilde{u}) := \int_{\Omega} [f(\tilde{v}(\tilde{u})) - p\tilde{u}_3] d\Omega - \langle \delta(n_{\alpha i}^*, m_{\alpha\beta}^*), \tilde{\gamma}\tilde{u} \rangle_{\Gamma_{\tilde{t}}} \quad (2.4.17)$$

wobei  $\langle \dots \rangle_{\Gamma_{\tilde{t}}}$  s. auch Seite 129 unten, eine Erweiterung von

$$\int_{\Gamma_{\tilde{t}}} [n_{n\alpha} u_{\alpha} + (q_{n3} + n_{n3}) u_3 - m_{n\alpha} u_{3,\alpha}] d\Gamma \quad (2.4.18)$$

bezeichnet. Es genügt in (2.4.14) und (2.4.17) ein hinreichend glattes Element  $u \in B_{\tilde{u}}^0$  zu wählen, denn die statischen Randbedingungen sind natürlich.

Beweis:

- (i) Für  $\tilde{U}$  (2.4.5) so gewählt, daß auch die homogenen statischen Randbedingungen erfüllt werden, ergibt eine partielle Integration

$$\begin{aligned}
 I(\tilde{U}) &= \iint_{\Omega} \{ -[M_{\alpha\beta, \beta\alpha} + N_{\alpha 3, \alpha} + q_3] \tilde{U}_3 - [N_{\alpha\beta, \alpha} + q_\beta] \tilde{U}_\beta \} d\mu d\Omega \\
 &= \iint_{\Omega} \{ -M_{\alpha\beta} \left( \frac{v}{\tilde{O}} + \mu V \right) \tilde{U}_{3, \beta\alpha} + N_{\alpha 3} \left( \frac{v}{\tilde{O}} + \mu V \right) \tilde{U}_{3, \alpha} \\
 &\quad + N_{\alpha\beta} \left( \frac{v}{\tilde{O}} + \mu V \right) \tilde{U}_{\beta, \alpha} - q_\beta \tilde{U}_\beta - q_3 \tilde{U}_3 \} d\mu d\Omega . \quad (2.4.19)
 \end{aligned}$$

Das Funktional  $I(\tilde{U})$  mit den gewünschten Eigenschaften existiert, denn für die konstitutiven Beziehungen existiert eine Stammfunktion.

(ii) Die Transformation

$$\tilde{u} = \tilde{U} + \tilde{u}, \quad n_{\alpha j} = N_{\alpha j} + n_{\tilde{O}\alpha j}, \quad m_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} + m_{\tilde{O}\alpha\beta}$$

und eine Integration über den Umfang eines Dreiecks mit den Eckpunkten  $\tilde{O}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{u}$  liefert das gewünschte Resultat, siehe auch [233], Theorem 5.1.  $\square$

Verallgemeinerten Variationsprinzipien gilt der folgende Satz.

#### Satz 2.4.2

Gegeben sei:

$$I_u : E_{\tilde{u}}(\Omega) \times E_{\tilde{v}}(\Omega) \times E_{\tilde{t}}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad I_c : E_{\tilde{u}}(\Omega) \times E_{\tilde{t}}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\begin{aligned}
 I_u(u_i, v_\ell, n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}) &:= \\
 &\int [f(\tilde{v}) - p u_3] d\Omega - \langle \delta(n_{\alpha i}^*, m_{\alpha\beta}^*), \gamma \tilde{u} \rangle_{\Gamma_{\tilde{t}}} \\
 &+ \int_{\Omega} [n_{\alpha\beta} (u_{\beta, \alpha} - v_{\beta\alpha}) + n_{\alpha 3} (u_{3, \alpha} - v_{3\alpha}) - m_{\alpha\beta} (u_{3, \beta\alpha} - v_{3\beta\alpha})] d\Omega \\
 &- \langle \delta(n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}), \gamma (u - u^*) \rangle_{\Gamma_{\tilde{u}}} \quad (2.4.20)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 I_C(u_i, n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}) &:= \\
 &- \int_{\Omega} g(\tilde{t}(n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta})) d\Omega + \langle \delta(n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}), \tilde{\gamma}u^* \rangle_{\Gamma_{\tilde{u}}} \\
 &- \int_{\Omega} [(m_{\alpha\beta, \beta\alpha} + n_{\alpha 3, \alpha} + p)u_3 + n_{\alpha\beta, \alpha}u_\beta] d\Omega \\
 &+ \langle \delta(n_{\alpha i} - n_{\alpha i}^*, m_{\alpha\beta} - m_{\alpha\beta}^*), \tilde{\gamma}u \rangle_{\Gamma_{\tilde{t}}} .
 \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

Dann gilt mit  $\det(n_{\alpha\beta}) \neq 0$

$$I_U(u_i, v_\ell, n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}) = I_C(u_i, n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}) . \tag{2.4.22}$$

Hier bezeichnen  $\langle \dots \rangle_{\Gamma_{\tilde{u}}}$  analog zu (2.4.18) eine Erweiterung des Linienintegrals über  $\Gamma_{\tilde{u}}$  und  $v_{3\alpha}, v_{3\beta\alpha} \in E_{\tilde{v}}(\Omega)$  die zu  $\tilde{u}_{3, \alpha}$  und  $u_{3, \beta\alpha}$  korrespondierenden Elemente.

Beweis:

Es sei

$$H : E_{\tilde{u}}(\Omega) \times E_{\tilde{v}}(\Omega) \times E_{\tilde{t}}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\begin{aligned}
 H(u_i, v_\ell, n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}) &:= - \int_{\Omega} [f(\tilde{v}) - pu_3] d\Omega + \\
 &+ \int_{\Omega} [n_{\alpha\beta}v_{\beta\alpha} + n_{\alpha 3}v_{3\alpha} - m_{\alpha\beta}v_{3\beta\alpha}] d\Omega + \\
 &+ \langle \delta(n_{\alpha i}^*, m_{\alpha\beta}^*), \tilde{\gamma}u \rangle_{\Gamma_{\tilde{t}}} - \langle \delta(n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}), \tilde{\gamma}u^* \rangle_{\Gamma_{\tilde{u}}} .
 \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

Partielle Integration führt über

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} [n_{\alpha\beta}u_{\beta, \alpha} + n_{\alpha 3}u_{3, \alpha} - m_{\alpha\beta}u_{3, \beta\alpha}] d\Omega - \langle \delta(n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}), \tilde{\gamma}u \rangle_{\Gamma_{\tilde{u}}} = \\
 &= - \int_{\Omega} [(m_{\alpha\beta, \beta\alpha} + n_{\alpha 3, \alpha})u_3 + n_{\alpha\beta, \alpha}u_\beta] d\Omega + \langle \delta(n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}), \tilde{\gamma}u \rangle_{\Gamma_{\tilde{t}}} .
 \end{aligned} \tag{2.4.24}$$

zu

$$\begin{aligned}
 I_{\tilde{u}}(u_i, v_\ell, n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}) &:= \\
 &:= \int_{\Omega} [n_{\alpha\beta} u_{\beta, \alpha} + n_{\alpha 3} u_{3, \alpha} - m_{\alpha\beta} u_{3, \beta\alpha}] d\Omega - \langle \delta(n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}), \tilde{\gamma}u \rangle_{\Gamma_{\tilde{u}}} - \\
 &\quad - H(u_i, v_\ell, n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}) = \\
 &= - \int_{\Omega} [(m_{\alpha\beta, \beta\alpha} + n_{\alpha 3, \alpha}) u_3 + n_{\alpha\beta, \alpha} u_\beta] d\Omega + \langle \delta(n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}), \tilde{\gamma}u \rangle_{\Gamma_{\tilde{t}}} - \\
 &\quad - H(u_i, v_\ell, n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}) = I_C(u_i, v_\ell, n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}) =: \\
 &=: I_C(u_i, n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}) . \tag{2.4.25}
 \end{aligned}$$

Mit  $\det(n_{\alpha\beta}) \neq 0$  ist eine LEGENDRE-Transformation gültig, so daß (2.4.22) erhalten wird.  $\square$

Für den folgenden Satz kann der Beweis völlig analog zum Beweis des Satzes 1.4.3 durchgeführt werden.

Satz 2.4.3

- (i) Die Einschränkung des Funktionals (2.4.20) auf die lineare Mannigfaltigkeit der geometrisch zulässigen Verschiebungen  $\tilde{u} \in B_{\tilde{u}}$  ergibt das Funktional

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_{\tilde{u}}(\tilde{u}) &:= I_u(\tilde{u}_i, v_\ell(\tilde{u}), n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}) : \\
 &= \int [f(v(\tilde{u})) - p\tilde{u}_3] d\Omega - \langle \delta(n_{\alpha i}^*, m_{\alpha\beta}^*), \tilde{\gamma}\tilde{u} \rangle_{\Gamma_{\tilde{t}}} . \tag{2.4.26}
 \end{aligned}$$

- (ii) Die Einschränkung des Funktionals (2.4.21) auf die lineare Mannigfaltigkeit der statisch zulässigen PIOLA-KIRCHHOFFSchen Schrittgrößen  $\tilde{t} \in B_{\tilde{t}}$  ergibt das Funktional

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_C(\tilde{t}) &:= I_C(u_i, \tilde{n}_{\alpha i}, \tilde{m}_{\alpha\beta}) = \\
 &= - \int_{\Omega} g(\tilde{t}) d\Omega + \langle \delta(\tilde{n}_{\alpha i}, \tilde{m}_{\alpha\beta}), \tilde{\gamma}u^* \rangle_{\Gamma_{\tilde{u}}} \tag{2.4.27}
 \end{aligned}$$

mit  $\tilde{t} := t(\tilde{n}_{\alpha i}, \tilde{m}_{\alpha\beta})$ .

- (iii) Die Funktionale (2.4.26) und (2.4.27) definieren unter der Bedingung  $\det(n_{\alpha\beta}) \neq 0$  in der Klasse  $\tilde{u} \in B_{\tilde{u}}$  und  $\tilde{t} \in B_{\tilde{t}}$  zwei äquivalente vollständig duale Variationsprinzipie.

## 2.5 Energienormartige Fehlerabschätzungen für die KÁRMÁNsche Platte

Es sei  $\psi := (\tilde{v}, \tilde{t})$  wobei  $\tilde{v}$  mittels (2.3.1) und (2.3.7) und  $\tilde{t}$  mittels (2.3.2) und (2.3.10) gegeben ist. Dann können für das Randwertproblem der KÁRMÁNschen Platte (2.2.1 bis 2), (2.2.6 bis 9) formal übernommen werden:

- (i) die Definition (1.5.1) für die Mannigfaltigkeiten der elastischen Zustände,  
 (ii) mit der Norm

$$\|\psi\| := \|\tilde{v}_{\alpha\beta}\|_2 + \|\tilde{v}_{\alpha 3}\|_4 + \|\tilde{v}_{3\alpha\beta}\|_2 + \|n_{\alpha\beta}, n_{\alpha 3}, m_{\alpha\beta}\| \quad (2.5.1),$$

siehe (2.4.3), oder auch mit jeder anderen äquivalenten Norm, die Formel (1.5.5) und

- (iii) mit der Wechselwirkungsenergie

$$\{\psi, \psi\} := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\tilde{v}_{\ell} \tilde{t}_{\ell} + \tilde{v}_{\ell} \tilde{t}_{\ell}) d\Omega \quad (2.5.2)$$

die Sätze 1.5.1, 1.5.2 und 1.5.3.

Die Formel (1.5.9) aus Satz 1.5.1 hat hier z.B. die Form

$$\begin{aligned} \{\tilde{\psi} - \tilde{\psi}, \tilde{\psi} - \tilde{\psi}\} &:= \int_{\Omega} [-\tilde{m}_{\alpha\beta} \tilde{v}_{3\beta\alpha} + \tilde{n}_{\alpha 3} \tilde{v}_{3\alpha} + \tilde{n}_{\alpha\beta} \tilde{v}_{\beta\alpha}] d\Omega = \\ &= 2S_k(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}) + 0(\tilde{v}^3, \tilde{t}^3) \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

wobei  $S_k(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}) := \tilde{I}_u(\tilde{u}) - \tilde{I}_c(\tilde{t})$  ;  $\tilde{t} := \tilde{t} - \tilde{t}$ ,  $\tilde{v} := \tilde{v} - \tilde{v}$ .

Schematisch ist für eine konvexe Verschiebungsenergiedichte die Situation nach Formel (2.5.3) in Fig. 3 dargestellt. Der Fehlerterm in (2.5.3) resultiert aus der Tatsache, daß das kleine, durch die zwei Bögen begrenzte Gebiet, zwischen  $\tilde{\psi}$  und  $\tilde{\psi}$  überhaupt nicht oder doppelt überdeckt wird.

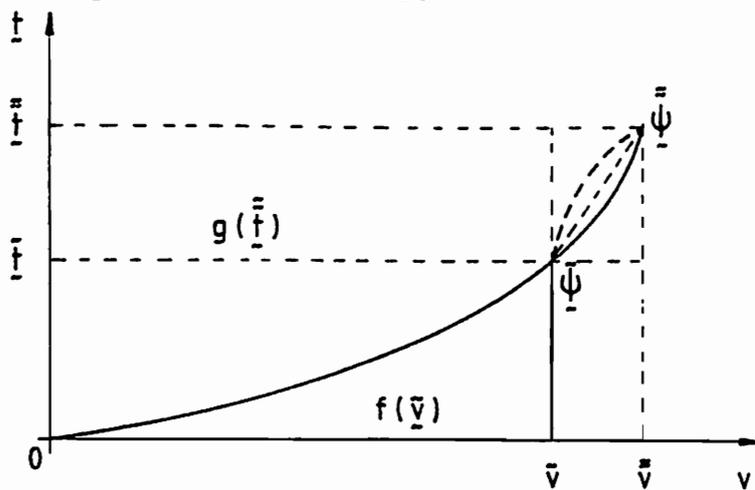


Fig. 3; Schematische Darstellung von Formel (2.5.3).

Das betrachtete Randwertproblem (2.2.1 bis 2), (2.2.6 bis 9) besitzt einige auffallende Eigenschaften:

- (i) Die geometrischen Komponenten der elastischen Zustände (2.3.1) enthalten partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Verschiebungen.
- (ii) Die Dualität der Variationsprinzipie basiert auf der Dualität der Räume der geometrischen und der zugeordneten statischen Komponenten der elastischen Zustände.
- (iii) Unter der Bedingung  $\det(n_{\alpha\beta}) \neq 0$  existieren FRÉCHETSche Ableitungen beliebiger Ordnung sowohl für die Verschiebungsenergie als auch für die duale Energie.
- (iv) Für eine positiv definite Matrix  $\tilde{C}$  (2.3.13) ist das Funktional (2.4.26) in der Klasse der geometrisch zulässigen Verschiebungen ein Minimalprinzip und das Funktional (2.4.27) in der Klasse der statisch zulässigen Feldgrößen ein Maximumprinzip.

- (v) Für eine nicht positiv definite Matrix  $\tilde{C}$  existiert bis zum Überschreiten der ersten Katastrophenfläche ein Bereich der äußeren Kontrollgrößen in welchem das Funktional (2.4.26) bezüglich der Verschiebungen ein Minimalprinzip definiert. Das Funktional (2.4.27) definiert für diesen Bereich der äußeren Kontrollgrößen jedoch kein Maximalprinzip. Die sogenannte Energienorm verliert hier ihre Gültigkeit und die Differenz der dual approximierten Funktionale bildet keine komplementäre Fehlerschranke.
- (vi) Die Matrix  $\tilde{B}$  (2.3.15) ist immer positiv definiert und damit verbunden sind die zu den Momenten  $m_{\alpha\beta}$  korrespondierenden Anteile in (2.5.3) immer positiv.

## 2.6 Numerisches Beispiel

Randwertprobleme für die KÁRMÁNsche Platte mit äußeren Kontrollparametern in Bereichen, für welche die Matrix  $\tilde{C}$  (2.3.13) positiv definit ist, haben eine triviale Morphologie. Hier ist die Lösung eindeutig und kann dual approximiert werden. Komplementäre und punktweise Fehlerschranken einiger Feldgrößen können errechnet werden, siehe z.B.: [146, 148, 158, 159, 164, 203]. Die Kontrolle der Morphologie beschränkt sich auf den Bereich der Eindeutigkeit der Lösung.

Topologisch interessanter und wesentlich schwieriger gestaltet sich der Fall, wenn mehrdeutige Lösungen auftreten können und die Morphologie der mehrdeutigen Lösung bestimmt werden muß. Wenn die Bedingung  $\det (n_{\alpha\beta}) \neq 0$  erfüllt ist, dann müßte sowohl mit Hilfe einer geometrischen, als auch mit Hilfe einer statischen Beschreibung die Morphologie der mehrdeutigen Lösung äquivalent bestimmt werden können. Dies kann am einfachen Beispiel einer quadratischen Platte für

$$\Omega := \{ \xi_{\alpha} ; |\xi_{\alpha}| \leq 1, \alpha := (1,2) \} \quad (2.6.1)$$

siehe Fig. 4 mit beweglich gelagertem Rand und den Randbedingungen

$$\begin{aligned}
 u_3^* &= 3 & \Gamma_{\tilde{u}} &= \Gamma \\
 m_{\tilde{nn}}^* &= 0 & \left. \vphantom{m_{\tilde{nn}}^*} \right\} & \Gamma_{\tilde{t}} = \Gamma \\
 n_{\tilde{nn}}^* &= -N, \quad N \geq 0 \\
 u_\alpha(0,0) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

untersucht werden.

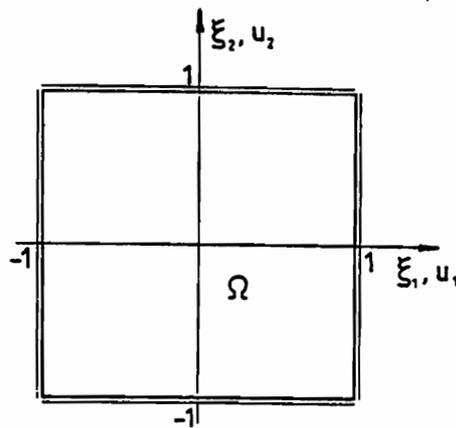


Fig. 4. Quadratische gelenkig gelagerte Platte

Die vier bei der partiellen Integration auftretenden Eckbedingungen werden wegen  $u_3^* = 0$  identisch erfüllt. Die Randteile auf denen  $u_1, u_2$  und  $u_{3,n}$  vorgegeben werden sind leere Mengen. Gleichwertige Bedingungen folgen aus  $u_\alpha(0,0) = 0$  und für die Eckpunkte in denen  $u_{3,1} = u_{3,2} = 0$  gilt.

Die geometrisch zulässigen Verschiebungen

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_1 &= \alpha \xi_1 + \beta \xi_1^3 \\
 \tilde{u}_2 &= \alpha \xi_2 + \beta \xi_2^3 \\
 \tilde{u}_3 &= \gamma \cos \frac{\pi}{2} \xi_1 \cos \frac{\pi}{2} \xi_2
 \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

führen eingesetzt in das Funktional (2.4.26) für  $p = \text{const}$  über  $\Omega$  zu

$$\tilde{I}_{\tilde{u}}(\alpha, \beta, \gamma) = A\gamma^4 + \gamma^2(B + C\alpha + D\beta) + E\alpha^2 + 2E\alpha\beta + G\beta^2 + 8N(\alpha + \beta) - Fp\gamma \tag{2.6.4}$$

mit

$$\begin{aligned}
 A &= 1.045341379 \\
 B &= 1.115030804 \\
 C &= 3.524858715 \\
 D &= 4.678704868 \\
 E &= 5.714285714 \\
 F &= 1.621138938 \\
 G &= 9.230769231 \quad .
 \end{aligned}$$

Die Größen  $\alpha$  und  $\beta$  sind passiv und können mit Hilfe von

$$\frac{\partial \tilde{I}_u}{\partial \alpha} = \frac{\partial \tilde{I}_u}{\partial \beta} = \frac{\partial \tilde{I}_u}{\partial \gamma} = 0 \quad (2.6.5)$$

eliminiert werden. Erhalten wird

$$\gamma^3 + (K - L \cdot N) \gamma - p \cdot M = 0 \quad (2.6.6)$$

$$\begin{aligned}
 K &= 1.369438452 \\
 L &= 3.030368248 \\
 M &= 0.995510613 \quad .
 \end{aligned}$$

Mit  $p$  und  $N$  als äußere Kontrollparameter wird die sogenannte Cusp-Katastrophe erhalten. Bei  $p = 0$  wird  $N = \lambda_1 = 0.4519049633$  als exakter Eigenwert für den eine Verzweigung stattfindet erhalten. ( $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{24(1-\nu^2)}$ )

Die statisch zulässigen Größen

$$\begin{aligned}
 \tilde{m}_{11} &= \tilde{m}_{22} = q_1 \cos \frac{\pi}{2} \xi_1 \cos \frac{\pi}{2} \xi_2 \\
 \tilde{m}_{12} &= (q_1 - q_2) \sin \frac{\pi}{2} \xi_1 \sin \frac{\pi}{2} \xi_2 - \frac{\beta q_2}{16} (\sin 2\pi \xi_1 \sin \pi \xi_2 + \sin \pi \xi_1 \sin 2\pi \xi_2) - \frac{p}{2} \xi_1 \xi_2 \\
 \tilde{n}_{11} &= \tilde{n}_{22} = -N(1 + \beta \cos \frac{3}{2} \pi \xi_1 \cos \frac{3}{2} \pi \xi_2) \\
 \tilde{n}_{12} &= \tilde{n}_{21} = -N\beta \sin \frac{3}{2} \pi \xi_1 \sin \frac{3}{2} \pi \xi_2 \\
 \tilde{n}_{13} &= q_2 \frac{\pi}{2} [\sin \frac{\pi}{2} \xi_1 \cos \frac{\pi}{2} \xi_2 + \frac{\beta}{2} (\sin 2\pi \xi_1 \cos \pi \xi_2 - \sin \pi \xi_1 \cos 2\pi \xi_2)] \\
 \tilde{n}_{23} &= q_2 \frac{\pi}{2} [\cos \frac{\pi}{2} \xi_1 \sin \frac{\pi}{2} \xi_2 + \frac{\beta}{2} (\cos \pi \xi_1 \sin 2\pi \xi_2 - \cos 2\pi \xi_1 \sin \pi \xi_2)]
 \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

führen eingesetzt in das Funktional (2.4.27) zu

$$\begin{aligned}
 -\tilde{I}_C(q_1, q_2, \beta) = & N^2(2.8 + 2\beta^2 + \frac{24.4}{9\pi^2} \beta) + 8.4 q_1^2 + \\
 & + 15.6 [(q_1 - q_2)^2 + \frac{\beta^2 q_2^2}{128} + \beta(q_1 - q_2)q_2 \frac{32}{45\pi^2} + \frac{p^2}{9} - p(q_1 - q_2) \frac{64}{\pi^4} - \frac{pq_2\beta}{4\pi^2}] \\
 & - \frac{q_2^2}{N} \frac{\pi^2}{4} - \beta \frac{4}{45}. \tag{2.6.8}
 \end{aligned}$$

Die Vertikalkomponenten  $\tilde{n}_{\alpha\beta}$  sind dabei so gewählt, daß  $\frac{q_2}{N}$  der Größe  $\gamma$  entspricht. Berechnung von

$$\frac{\partial \tilde{I}_C}{\partial p_1} = \frac{\partial \tilde{I}_C}{\partial p_2} = \frac{\partial \tilde{I}_C}{\partial \beta} = 0 \tag{2.6.9}$$

und Eliminierung von  $q_1$  führt zu

$$\begin{aligned}
 (A + A_1\beta + A_2\beta^2)q_2 + (A_3 - A_4\beta)p &= 0 \\
 (\frac{A_1}{2} + A_2\beta)q_2^2 - A_4pq_2 + N^2(4\beta + A_5) &= 0 \tag{2.6.10}
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 A &= 10.92 - \frac{\pi^2}{2N} \\
 A_1 &= \frac{8}{45N} - .7867927648 \\
 A_2 &= .2174301507 \\
 A_3 &= 3.587344839 \\
 A_4 &= .155144371 \\
 A_5 &= \frac{22.4}{9\pi^2} . \tag{2.6.11}
 \end{aligned}$$

Eliminieren der passiven Größen  $\beta$  führt zu

$$a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + a_3\gamma^3 + a_4\gamma^4 + a_5\gamma^5 = 0 \tag{2.6.12}$$

mit

$$\begin{aligned}
 a_0 &= (16A_3 + 4A_4A_5)\bar{p} \\
 a_1 &= 16A - 4A_1A_5 + A_5^2A_2 - 4A_4^2\bar{p}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_2 &= (6A_1A_4 + 8A_2A_3 - A_5A_2A_4)\bar{p} \\
 a_3 &= 8AA_2 - 2A_1^2 \\
 a_4 &= \left(\frac{A_1}{2}A_4 + A_3A_2\right)A_2\bar{p} \\
 a_5 &= 8a_3A_2 ; \bar{p} = \frac{p}{N}, \gamma = \frac{q_2}{N} .
 \end{aligned}
 \tag{2.6.13}$$

In einer kleinen Umgebung von  $\gamma = 0, p = 0, N = .4508477243$  beschreibt (2.6.12) lokal eine Cusp Katastrophe, siehe Fig. 7.

Lösungsäste in der  $(\gamma, N)$  Ebene für (2.6.6) und einige Werte  $p$  sowie das zugehörige Verzweigungsdiagramm sind in Fig. 5 wiedergegeben. Lokale Variationsfunktionale für  $N = \text{const}$  sind in Fig. 6 gezeichnet.

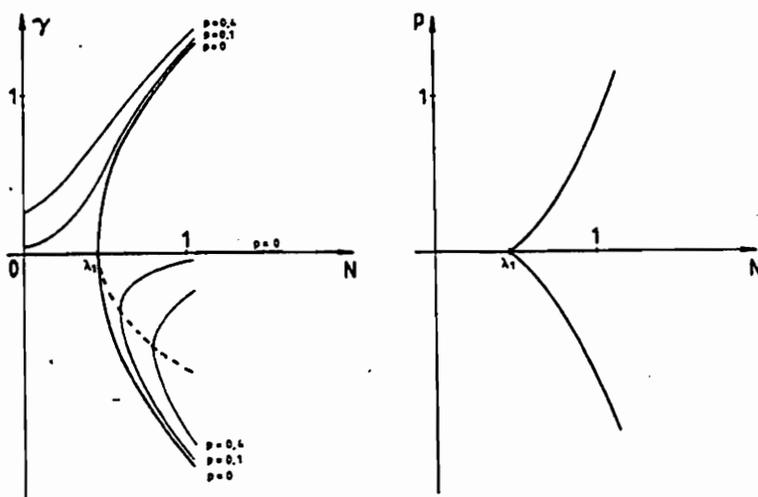


Fig. 5. Geometrisch approximierte Cusp Katastrophe

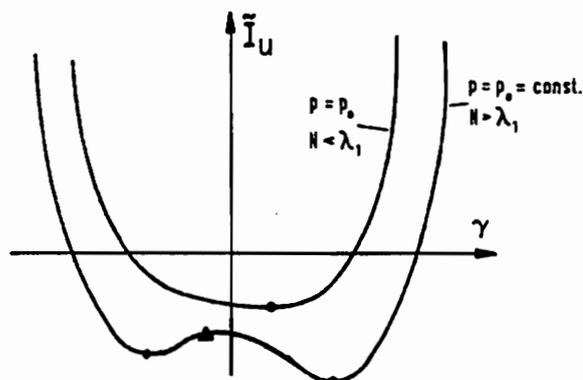


Fig. 6. Lokales Verhalten des Funktionals für  $N = \text{const}$ .

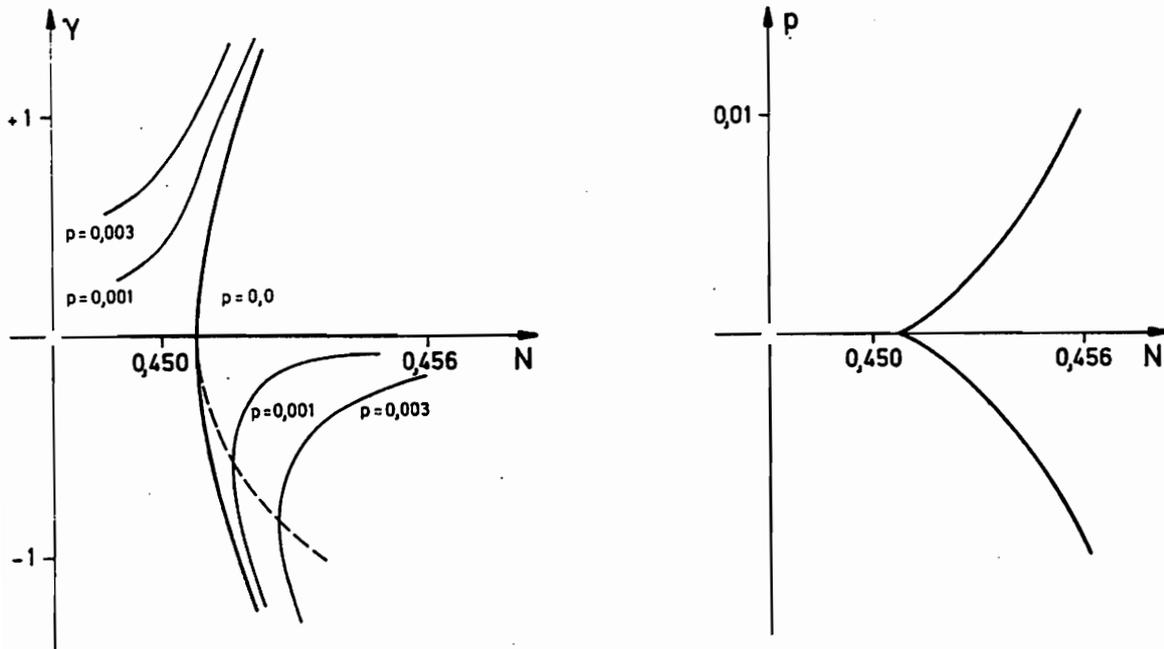


Fig. 7. Statisch approximierte Cusp Katastrophe

Dieses einfache Beispiel bestätigt, daß eine äquivalente duale Darstellung mehrdeutiger Lösungen möglich ist.

### 3. FLACHE SCHALEN VOM MARGUERRE-TYPUS

#### 3.1 Vorbemerkung

Die im vorigen Kapitel für eine Analyse der KÁRMÁNSchen Plattentheorie angewendeten mathematischen Methoden können nicht für eine Analyse beliebiger nichtlinearer Schalentheorien, solcher wie sie z.B. in [132, 177, 217, 218, 221, 228, 229, 235, 237] benutzt werden, übertragen werden. Für solche Schalentheorien ist die Frage nach der Einbettung in einem problemgerechten kompletten topologischen Raum, den Trace-Eigenschaften komplizierterer Räume und nach der Existenz der notwendigen abstrakten Ableitungen und Integrale nach dem augenblicklichen Wissensstand der Mathematik noch offen. Ohne größere Schwierigkeiten gelingt jedoch die Verallgemeinerung für den Fall der MARGUERRESchen flachen Schale, siehe MARGUERRE [14], SANDERS [47], STUMPF [163, 165], WASHIZU [207].

#### 3.2 Das Randwertproblem für eine flache Schale vom MARGUERRE-Typus

In dimensionsloser LAGRANGEScher Schreibweise ist das Randwertproblem für die flache MARGUERRESche Schale definiert mit Hilfe

der Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} -(n_{\alpha\beta,\alpha} + p_\beta) &= 0 \\ -(m_{\alpha\beta,\beta\alpha} + n_{\alpha 3,\alpha} + p_3) &= 0 \text{ in } \Omega \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

der geometrischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_1 - u_1^* &= 0 & \text{auf } \Gamma_{u_1} \\ u_2 - u_2^* &= 0 & \text{auf } \Gamma_{u_2} \\ u_3 - u_3^* &= 0 & \text{auf } \Gamma_{u_3} \\ u_{3,\tilde{n}}^* - u_{3,\tilde{n}}^* & & \text{auf } \Gamma_{u_4} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

kurz mit

$$G(\tilde{u}) \Big|_{\Gamma_{\tilde{u}}} = 0 \quad (3.2.3)$$

bezeichnet und

der statischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} n_{\tilde{n}1} - n_{\tilde{n}1}^* &= 0 && \text{auf } \Gamma_{t_1} \\ n_{\tilde{n}2} - n_{\tilde{n}2}^* &= 0 && \text{auf } \Gamma_{t_2} \\ q_{\tilde{n}3} + m_{\tilde{n}s,s} + n_{\tilde{n}3} - (q_{\tilde{n}3}^* + m_{\tilde{n}s,s}^* + n_{\tilde{n}3}^*) &= 0 && \text{auf } \Gamma_{t_3} \\ m_{\tilde{nn}} - m_{\tilde{nn}}^* &= 0 && \text{auf } \Gamma_{t_4} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

kurz mit

$$S(\tilde{t}) \Big|_{\Gamma_{\tilde{t}}} = 0 \quad (3.2.5)$$

bezeichnet.

Die geometrischen und die statischen Feldgrößen sind verbunden mittels der konstitutiven Beziehungen welche aufgeteilt sind in

*Momentenschnittkräfte*

$$\begin{aligned} m_{11} &:= -D(u_{3,11} + \nu u_{3,22}) \\ m_{22} &:= -D(u_{3,22} + \nu u_{3,11}) \\ m_{12} &:= -D(1 - \nu)u_{3,12} =: m_{21} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

*Membrankräfte*

$$\begin{aligned} n_{11} &:= D_1(e_{11}(u; z) + \nu e_{22}(u; z)) \\ n_{22} &:= D_1(e_{22}(u; z) + \nu e_{11}(u; z)) \\ n_{12} &:= D_1(1 - \nu)e_{12}(u; z) =: n_{21} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

und die Vertikalkomponenten

$$\begin{aligned} n_{13} &:= n_{11}(z_{,1} + u_{3,1}) + n_{12}(z_{,2} + u_{3,2}) \\ n_{23} &:= n_{12}(z_{,1} + u_{3,1}) + n_{22}(z_{,2} + u_{3,2}) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$z(\xi)$  beschreibt in dimensionsloser Gestalt die Form der unverformten Schalenmittelfläche.

Die *Dehnungen*

$$\begin{aligned} e_{11}(\underline{u}; z) &:= u_{1,1} + z_{,1}u_{3,1} + \frac{1}{2}u_{3,1}^2 \\ e_{22}(\underline{u}; z) &:= u_{2,2} + z_{,2}u_{3,2} + \frac{1}{2}u_{3,2}^2 \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$2e_{12}(\underline{u}; z) := u_{1,2} + u_{2,1} + z_{,1}u_{3,2} + z_{,2}u_{3,1} + u_{3,1}u_{3,2} =: 2e_{21}(\underline{u}; z)$$

werden als Abkürzungen benutzt.

Das Gebiet  $\Omega$  der Mittelflächenprojektion auf die  $(\xi_1, \xi_2)$  Ebene liegt im Quadrat  $|\xi_\alpha| \leq 1$  und wird hinreichend glatt vorausgesetzt. Der Einfachheit halber werden nur solche Fälle betrachtet für welche die Eckbedingungen und die Übergangsbedingungen zwischen  $\Gamma_{u_4}$  und  $\Gamma_{t_4}$  identisch erfüllt sind.  $\Gamma$  bezeichnet den Rand von  $\Omega$  und

$$\Gamma_{\underline{u}} := (\Gamma_{u_k}) \quad (3.2.10)$$

sowie

$$\Gamma_{\underline{t}} := (\Gamma_{t_k}) ; \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (3.2.11)$$

werden als Vektoren angesehen. Genauso wie für die KÄRMÄNSche Platte ist  $\Gamma_{u_k} \cup \Gamma_{t_k} = \Gamma$ ,  $\Gamma_{u_k} \cap \Gamma_{t_k} = \emptyset$  und  $\Gamma_{u_k} \neq \emptyset$ ;  $\forall k$ .  $\alpha := 1, 2 := \beta$ ;  $\underline{n} := (n_1, n_2)$  bezeichnet in der  $(\xi_1, \xi_2)$ -Ebene den auf  $\Gamma$  definierten äußeren Normaleneinheitsvektor und  $\underline{s} := (s_1, s_2)$  den Einheitstangentenvektor auf  $\Gamma$ . Es ist

$$\begin{aligned} u_{3,\underline{n}} &:= u_{3,\alpha} n_\alpha, \quad n_{\underline{n}i} := n_{\alpha i} n_\alpha ; \quad i := 1, 2, 3; \\ m_{\beta\underline{n}} &:= m_{\beta\alpha} n_\alpha, \quad q_{\underline{n}3} := m_{\alpha\underline{n},\alpha}, \quad m_{\underline{n}\underline{n}} := m_{\alpha\underline{n}} n_\alpha, \end{aligned}$$

$$\tilde{m}_{ns} := m_{n\beta} s_{\beta} ; \quad D = \frac{1}{12(1-\nu^2)} , \quad D_1 = 12 D$$

und  $\nu$  bezeichnet die Kontraktionszahl. Über sich wiederholende Indizes wird summiert und  $(.)_{,\alpha}$  oder  $(.)_{,\alpha\beta}$  bezeichnet partielle Ableitungen erster Ordnung bezüglich  $\xi_{\alpha}$  oder zweiter Ordnung bezüglich  $\xi_{\alpha}$  und  $\xi_{\beta}$ .

Es sei  $F_0$  der Projektionsbereich der unverformten dimensionsbehafteten Schalenmittelfläche und  $F_0$  liege im Quadrat  $|x_{\alpha}| \leq a$ . Die hier benutzte dimensionslose Form der Randwertaufgabe wird erhalten wenn die dimensionslosen

Koordinaten  $\xi_{\alpha} := \frac{x_{\alpha}}{a} ,$

Verschiebungen  $u_{\alpha} := \frac{a}{h^2} \bar{u}_{\alpha} ,$

$$u_3 := \frac{\bar{u}_3}{h} ,$$

Mittelflächendarstellung  $z := \frac{\bar{z}}{h} ,$

statischen Feldgrößen

$$n_{\alpha\beta} := \frac{a^2}{Eh^3} \bar{N}_{\alpha\beta} ; \quad n_{\alpha 3} := \frac{a^3}{Eh^4} \bar{N}_{\alpha 3} ; \quad m_{\alpha\beta} := \frac{a^2}{Eh^4} \bar{M}_{\alpha\beta} ,$$

und Flächenkräfte

$$p_{\alpha} := \frac{a^3}{Eh^3} \bar{p}_{\alpha} ; \quad p_3 = \frac{a^4}{Eh^4} \bar{p}_3$$

eingeführt werden.

$E$  bezeichnet den Elastizitätsmodul,  $\bar{u}_{\alpha}$ ,  $\bar{u}_3$  die Verschiebungen in  $x_{\alpha}$  oder  $x_3$  Richtung,  $\bar{p}_{\alpha}$  oder  $\bar{p}_3$  die Flächenlasten in der gegebenen Richtung,  $h$  die konstante Schalendicke und  $\bar{N}_{\alpha\beta}$ ,  $\bar{N}_{\alpha 3}$ ,  $\bar{M}_{\alpha\beta}$  die dimensionsbehafteten statischen Schnittgrößen.

### 3.3 Herleitung der Energiefunktionen für die flache MARGUERREsche Schale

Die Konstruktion von Variationsprinzipen für die flache MARGUERREsche Schale erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt werden die benötigten Energiefunktionen hergeleitet. Dafür werden die in den konstitutiven Beziehungen (3.2.6 bis 9) vorkommenden geometrischen und statischen Größen in Vektorform

$$\underline{\underline{v}}(u) := (u_{1,1}, u_{2,2}, u_{1,2} + u_{2,1}, u_{3,1}, u_{3,2}, -u_{3,11}, -u_{3,22}, -u_{3,12}) \quad (3.3.1)$$

sowie

$$\underline{\underline{t}}(n_{\alpha i}, m_{\alpha \beta}; z) := (n_{11}, n_{22}, n_{12}, n_{13}, n_{23}, m_{11}, m_{22}, m_{12}) \quad (3.3.2)$$

geschrieben und in der auftretenden Reihenfolge als Element

$$\underline{\underline{v}} = (v_{\ell}) : \ell := 1, 2, \dots, 8 \quad (3.3.3)$$

sowie

$$\underline{\underline{t}} = (t_{\ell}) \quad (3.3.4)$$

angesehen. Die konstitutiven Beziehungen können in diesen Größen als

$$\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{t}}(\underline{\underline{v}}; z) \quad (3.3.5)$$

mit

$$t_1 = D_1(e_{11}(\underline{\underline{v}}; z) + \nu e_{22}(\underline{\underline{v}}; z))$$

$$t_2 = D_1(e_{22}(\underline{\underline{v}}; z) + \nu e_{11}(\underline{\underline{v}}; z))$$

$$t_3 = D_1(1 - \nu)e_{12}(\underline{\underline{v}}; z)$$

$$t_4 = t_1 a_4 + t_3 a_5$$

$$t_5 = t_3 a_4 + t_2 a_5$$

$$t_6 = D(\nu_6 + \nu \nu_7)$$

$$\begin{aligned} t_7 &= D(v_7 + \nu v_6) \\ t_8 &= D(1 - \nu) v_8 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

geschrieben werden, wobei  $a_4 = z_{,1} + v_4$ ,  $a_5 = z_{,2} + v_5$  bedeuten und die Verzerrungen

$$\begin{aligned} e_{11}(\underline{v}; z) &:= v_1 + z_{,1} v_4 + \frac{1}{2} v_4^2 \\ e_{22}(\underline{v}; z) &:= v_2 + z_{,2} v_5 + \frac{1}{2} v_5^2 \\ 2e_{12}(\underline{v}; z) &:= v_3 + z_{,1} v_5 + z_{,2} v_4 + v_4 v_5 \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

als Abkürzung benutzt werden. Für ein homogenes Material und für hinreichend glatte  $z(\xi)$ , genauer gesagt für

$$z(\xi) \in W_{1,q}(\Omega); \quad 2 \leq q \leq \infty \quad (3.3.8)$$

sind die CARATHÉODORY-Stetigkeitsbedingungen erfüllt und es kann genau wie für den Fall der KÁRMÁNSchen Platte aus der Form von (3.3.6) deduziert werden

$$v_1, v_2, v_3 \in L_2(\Omega) ; \quad v_4, v_5 \in L_4(\Omega) ; \quad v_6, v_7, v_8 \in L_2(\Omega)$$

so daß

$$\underline{v} \in E_{\underline{v}}(\Omega) := (L_2(\Omega))^3 \times (L_4(\Omega))^2 \times (L_2(\Omega))^3. \quad (3.3.8)$$

Eine einfache formale Rechnung führt zu der FRÉCHETSchen Ableitung

$$\frac{d \underline{t}(\underline{v}; z)}{d \underline{v}} = \underline{C} \quad (3.3.9)$$

mit

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} \underline{A}, 0 \\ 0, \underline{B} \end{pmatrix} \quad (3.3.10)$$

sowie

$$\tilde{A} := D_1 \begin{pmatrix} 1, & \nu, & 0, & a_4, & \nu a_5 \\ \nu, & 1, & 0, & \nu a_4, & a_5 \\ 0, & 0, & \frac{1-\nu}{2}, & \frac{1-\nu}{2} a_5, & \frac{1-\nu}{2} a_4 \\ a_4, & \nu a_4, & \frac{1-\nu}{2} a_5, & a_1, & a_3 \\ \nu a_5, & a_5, & \frac{1-\nu}{2} a_4, & a_3, & a_2 \end{pmatrix} \quad (3.3.11)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{t_1}{D_1} + a_4^2 + \frac{1-\nu}{2} a_5^2 \\ a_2 &= \frac{t_2}{D_1} + \frac{1-\nu}{2} a_4^2 + a_5^2 \\ a_3 &= \frac{t_3}{D_1} + \frac{1-\nu}{2} a_4 a_5 \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

und

$$\tilde{B} := \begin{pmatrix} 1, & \nu, & 0 \\ \nu, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 2(1-\nu) \end{pmatrix} . \quad (3.3.13)$$

Somit ist  $\tilde{C}$  symmetrisch und genau wie für die KÁRMÁNsche Platte gilt

$$\det \tilde{C} = C(\nu, D, D_1) \det \begin{pmatrix} t_1(\tilde{\nu}; z), t_3(\tilde{\nu}; z) \\ t_3(\tilde{\nu}; z), t_2(\tilde{\nu}; z) \end{pmatrix} \quad (3.3.14)$$

mit  $C(\nu, D, D_1) > 0$ .

Mit  $A_{\tilde{\nu}}(\Omega)$  wird die Untermenge von  $E_{\tilde{\nu}}(\Omega)$  bezeichnet für welche  $\det (n_{\beta\alpha}) \neq 0$  gilt. Mit diesen Vorbereitungen können in  $A_{\tilde{\nu}}(\Omega)$  duale Energiefunktionen hergeleitet werden. Alle Beweise und Berechnungen verlaufen völlig analog zum Fall der KÁRMÁNschen Platte. Daher werden die folgenden Sätze ohne Beweis angegeben.

Satz 3.3.1

Die konstitutiven Beziehungen (3.3.6) besitzen eine Stamm-

funktion

$f(\underline{v}; z) :=$

$$\begin{aligned} & \frac{D_1}{2} [e_{11}^2(\underline{v}; z) + e_{22}^2(\underline{v}; z) + 2ve_{11}(\underline{v}; z) e_{22}(\underline{v}; z) + \\ & \quad + 2(1-v) e_{12}^2(\underline{v}; z)] \\ & + \frac{D}{2} [v_6^2 + v_7^2 + 2vv_6v_7 + 2(1-v)v_8^2]. \quad \square \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Satz 3.3.2

Auf  $A_{\underline{v}}(\Omega)$  definieren die konstitutiven Beziehungen eine bijektive Abbildung. Eine explizite Umkehrung existiert und es ist

$$\begin{aligned} v_1 &= t_1 - vt_2 - \frac{v_4^2}{2} - z_{,1}v_4 \\ v_2 &= t_2 - vt_1 - \frac{v_5^2}{2} - z_{,2}v_5 \\ v_3 &= 2(1+v)t_3 - v_4v_5 - z_{,1}v_5 - z_{,2}v_4 \\ v_4 &= \frac{t_4t_2 - t_5t_3}{t_1t_2 - t_3^2} - z_{,1} \\ v_5 &= \frac{t_5t_1 - t_4t_3}{t_1t_2 - t_3^2} - z_{,2} \\ v_6 &= 12(t_6 - vt_7) \\ v_7 &= 12(t_7 - vt_6) \\ v_8 &= 12(1+v) t_8 \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

mit  $\underline{t} \in F_{\underline{t}}(\Omega) := (L_2(\Omega))^3 \times (L_{\frac{4}{3}}(\Omega))^2 \times (L_2(\Omega))^3. \quad \square$

Satz 3.3.3

Unter der Bedingung  $\det \begin{pmatrix} t_1, t_3 \\ t_3, t_2 \end{pmatrix} \neq 0$  ist die LEGENDRE-Transformation

$$g(\underline{t}; z) := t_{\ell} v_{\ell} (t_k; z) - f(v(t_k; z); z) \quad (3.3.17)$$

gültig und

$$\begin{aligned} g(\underline{t}; z) &= \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 - 2vt_1t_2 + 2(1+v)t_3^2) \\ &+ \frac{1}{2} [s_4v_4 + s_5v_5] \\ &+ 6(t_6^2 + t_7^2 - 2vt_6t_7 + 2(1+v)t_8^2) \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

mit

$$\begin{aligned} s_4 &= t_4 - (t_1z_{,1} + t_3z_{,2}) \\ s_5 &= t_5 - (t_3z_{,1} + t_2z_{,2}) \end{aligned}$$

ist eine Stammfunktion für  $v(\underline{t}; z)$ .  $\square$

Definition 3.3.1

Der Operator (3.3.15) errechnet für  $\underline{v}$  aus (3.3.1)

$$\begin{aligned} f(\underline{v}(u); z) &:= \\ &\frac{D_1}{2} [e_{11}^2(u; z) + e_{22}^2(u; z) + 2ve_{11}(u; z)e_{22}(u; z) + 2(1-v)e_{12}^2(u; z)] \\ &+ \frac{D}{2} (u_{3,11}^2 + u_{3,22}^2 + 2vu_{3,11}u_{3,22} + 2(1-v)u_{3,12}^2) \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

wird *Verschiebungsenergiedichte* genannt.  $\square$

Definition 3.3.2

Der Operator (3.3.18) errechnet für (3.3.2)

$$\begin{aligned} \underline{g}(t(n_{\alpha i}, m_{\alpha \beta}; z) &:= \frac{1}{2}(n_{11}^2 + n_{22}^2 - 2vn_{11}n_{22} + 2(1+v)n_{12}^2) \\ &+ \frac{1}{2}(s_4v_4 + s_5v_5) \\ &+ 6(m_{11}^2 + m_{22}^2 - 2vm_{11}m_{22} + 2(1+v)m_{12}^2) \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

mit

$$\begin{aligned}
 s_4 &= n_{13} - (n_{11}z_{,1} + n_{12}z_{,2}) \\
 s_5 &= n_{23} - (n_{12}z_{,1} + n_{22}z_{,2}) \\
 v_4 &= \frac{n_{13}n_{22} - n_{23}n_{12}}{n_{11}n_{22} - n_{12}^2} - z_{,1} \\
 v_5 &= \frac{n_{23}n_{11} - n_{13}n_{12}}{n_{11}n_{22} - n_{12}^2} - z_{,2}
 \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

wird *duale Energiedichte* genannt.  $\square$

Die Verschiebungsenergiedichte (3.3.19) kann mit der üblichen Verzerrungsenergiedichte identifiziert werden.

### 3.4 Duale Variationsprinzipie für die MARGUERREsche flache Schale

In einem zweiten Schritt können mit Hilfe der Verschiebungsenergiedichte (3.3.19) ein Variationsfunktional in der Klasse der geometrisch zulässigen Verschiebungen und mit Hilfe der dualen Energiedichte (3.3.21) ein äquivalentes Variationsfunktional in der Klasse der statisch zulässigen PIOLA-KIRCHHOFFschen Schnittgrößen hergeleitet werden.

#### Definition 3.4.1

Die Klasse der Funktionen

$$B_{\tilde{u}} := \{ \tilde{u} \in E_{\tilde{u}}(\Omega) ; G(\tilde{u})|_{\Gamma_{\tilde{u}}} = 0 \} \tag{3.4.1}$$

wird *Mannigfaltigkeit der geometrisch zulässigen Verschiebungen* genannt.  $\square$

#### Definition 3.4.2

Die Klasse der Funktionen

$$\begin{aligned}
 B_{\tilde{t}} := & \{ (\tilde{n}_{\alpha\beta}, \tilde{n}_{\alpha 3}, \tilde{m}_{\alpha\beta}) \in E_{\tilde{t}}(\Omega) ; m_{\alpha\beta, \beta\alpha} + n_{\alpha 3, \alpha} + p_3 = 0 ; \\
 & \tilde{n}_{\alpha\beta, \alpha} + p_\alpha = 0 ; s(\tilde{t}(\tilde{n}_{\alpha\beta}, \tilde{n}_{\alpha 3}, \tilde{m}_{\alpha\beta}))|_{\Gamma_{\tilde{t}}} = 0 \}
 \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

mit  $E_t(\Omega)$  nach (2.4.2) wird *Mannigfaltigkeit der statisch zulässigen PIOLA-KIRCHHOFFschen Schnittgrößen* genannt.  $\square$

Mit den geometrischen und statischen Randwerten in den in Formel (2.4.4) gegebenen Funktionenklassen und den Flächenlasten  $p_\alpha(\xi), p_3(\xi) \in L_2(\Omega)$  bleiben die für die KÁRMÁNsche Plattentheorie angewendeten Trace-Theoreme gültig. Ein assoziiertes semihomogenes Randwertproblem kann erhalten und die Sätze 2.4.1, 2.4.2 und 2.4.3 können formal übernommen werden. Dabei wird für geometrisch zulässige Verschiebungen  $\tilde{u} \in B_{\tilde{u}}$  das Funktional

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\tilde{u}}(\tilde{u}) &:= \int_{\Omega} [f(\tilde{v}(\tilde{u}); z) - p_i \tilde{u}_i] d\Omega \\ &- \int_{\Gamma_{\tilde{t}}} [n_{\tilde{n}\alpha}^* \tilde{u}_\alpha + (q_{\tilde{n}3}^* + n_{\tilde{n}3}^*) \tilde{u}_3 - m_{\tilde{n}\alpha}^* \tilde{u}_{3,\alpha}] d\Gamma \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

erhalten. Das Randintegral ist eine Abkürzung für

$$\int_{\Gamma_{\tilde{t}_1}} (n_{\tilde{n}1}^* \tilde{u}_1) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\tilde{t}_2}} (n_{\tilde{n}2}^* \tilde{u}_2) d\Gamma + \int_{\Gamma_{\tilde{t}_3}} [(q_{\tilde{n}3}^* + n_{\tilde{n}3}^*) \tilde{u}_3] d\Gamma - \int_{\Gamma_{\tilde{t}_4}} (m_{\tilde{n}\alpha}^* \tilde{u}_{3,\alpha}) d\Gamma. \quad (3.4.4)$$

Es ist üblich die zwei letzten Integrale durch

$$\int_{\Gamma_{\tilde{t}_3}} [(m_{\tilde{n}s,s}^* + q_{\tilde{n}3}^* + n_{\tilde{n}3}^*) \tilde{u}_3] d\Gamma - \int_{\Gamma_{\tilde{t}_4}} (m_{\tilde{n}n}^* \tilde{u}_{3,n}) d\Gamma \quad (3.4.5)$$

zu ersetzen.

Für  $n_{11} - n_{12}^2 \neq 0$  wird das äquivalente duale Variationsfunktional

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\tilde{c}}(\tilde{t}; z) &:= - \int_{\Omega} g(\tilde{t}(\tilde{n}_{\alpha i}, \tilde{m}_{\alpha\beta}; z)) d\Omega + \\ &\int_{\Gamma_{\tilde{u}}} [\tilde{n}_{\tilde{n}\alpha} u_\alpha^* + (\tilde{m}_{\tilde{n}s,s} + \tilde{q}_{\tilde{n}2} + \tilde{n}_{\tilde{n}3}) u_3^* - \tilde{m}_{\tilde{n}n} u_{3,n}^*] d\Gamma \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

in einer rein statischen Formulierung für  $\tilde{t} \in B_{\tilde{t}}$  erhalten. Dabei ist das Randintegral wieder als Abkürzung, analog zu (3.4.4 bis 5), über die Komponenten von  $\Gamma_{\tilde{u}}$  zu verstehen.

Bedingt durch das zusätzliche Auftreten der Funktion  $z(\xi)$  ist die Morphologie der Lösungen der Randwertaufgabe für die MARGUERRESche flache Schale topologisch komplizierter als die für die KÁRMÁNsche Platte. Die Abschätzungen mit Hilfe der elastischen Zustände bleiben jedoch gültig und brauchen hier nicht wiederholt zu werden. Die in 2.5 für das Randwertproblem der KÁRMÁNschen Platte aufgezählten Eigenschaften (i) bis (vi) bleiben gültig. So ist z.B. aus der Eigenschaft (v) sofort zu ersehen, daß für ein nach oben gewölbtes Tonnendach unter Eigenlast die sogenannte Energienorm nicht anwendbar ist und eine komplementäre Fehlerschranke nicht existieren kann. Wenn  $z(\xi) = 0$  wird als Sonderfall die KÁRMÁNsche Plattentheorie erhalten.

### 3.5 Numerisches Beispiel

Zur Illustration wird eine flache Schale mit der Mittelflächenfunktion

$$z(\xi_{\alpha}) := \gamma_1 \cos \frac{\pi}{2} \xi_1 \cos \frac{\pi}{2} \gamma_2 \quad (3.5.1)$$

und dem Projektionsbereich

$$\Omega := \{ \xi_{\alpha} ; |\xi_{\alpha}| \leq 1, \alpha := (1, 2) \} \quad (3.5.2)$$

unter konstanter Flächenlast

$$p_1 = p_2 = 0, p_3 = p = \text{const.} \quad (3.5.3)$$

und konstant verteilten Druckbelastungen an allen gelenkig gelagerten beweglichen Rändern

$$\begin{aligned}
 \tilde{n}_1^* &= \left( \begin{array}{l} -N \text{ auf } (\pm 1, \xi_2) \\ 0 \text{ auf } (\xi_1, \pm 1) \end{array} \right) \Gamma_{t_1} \\
 \tilde{n}_2^* &= \left( \begin{array}{l} 0 \text{ auf } (\pm 1, \xi_2) \\ -N \text{ auf } (\xi_1, \pm 1) \end{array} \right) \Gamma_{t_2} \\
 u_3^* &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_{u_3} = \Gamma \\
 \tilde{m}_{nn}^* &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_{t_4} = \Gamma
 \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

betrachtet.  $\Gamma_{t_3} = \emptyset$  und die durch  $\Gamma_{u_1} = \Gamma_{u_2} = \Gamma_{u_4} = \emptyset$  verursachte undefinierte Wertigkeit wird behoben mit

$$u_\alpha(0,0) = 0 \tag{3.5.5}$$

und

$$u_3(\pm 1, \pm 1) = 0 . \tag{3.5.6}$$

Die geometrisch zulässigen Verschiebungen

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_1 &= \alpha \xi_1 + \beta \xi_1^3 \\
 \tilde{u}_2 &= \alpha \xi_2 + \beta \xi_2^3 \\
 \tilde{u}_3 &= \gamma \cos \frac{\pi}{2} \xi_1 \cos \frac{\pi}{2} \xi_2
 \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

führen, eingesetzt in das Funktional (3.4.3), mit  $\nu = 0.3$  zu der endlich-dimensionalen Darstellung

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_u(\alpha, \beta, \gamma; \gamma_1, p, N) &:= \\
 A\eta^2 + \eta(C\alpha + D\beta) + E\alpha^2 + 2E\alpha\beta + G\beta^2 + B\gamma^2 + 8N(\alpha + \beta) - Fp\gamma &\tag{3.5.8}
 \end{aligned}$$

mit

$$\eta := \gamma(2\gamma_1 + \gamma)$$

und

$$\begin{aligned} A &= 1.045341379 \\ B &= 1.115030804 \\ C &= 3.524858715 \\ D &= 4.678704868 \\ E &= 5.714285714 \\ F &= 1.621138938 \\ G &= 9.230769231 . \end{aligned}$$

Die Größen  $\alpha$  und  $\beta$  sind passiv und können mittels

$$\frac{\partial \tilde{I}_u}{\partial \alpha} = \frac{\partial \tilde{I}_u}{\partial \beta} = \frac{\partial \tilde{I}_u}{\partial \gamma} = 0$$

eliminiert werden. Erhalten wird die Gleichung

$$\gamma^3 + 3\gamma_1\gamma^2 + (K - LN + 2\gamma_1^2)\gamma - (Mp + LN\gamma_1) = 0 \quad (3.5.9)$$

mit

$$\begin{aligned} K &= 1.369438452 \\ L &= 3.030368248 \\ M &= 0.995510613. \end{aligned}$$

Der Übergang zu der neuen Verhaltensvariabel  $\theta$

$$\gamma = \theta - \gamma_1 \quad (3.5.10)$$

eliminiert den quadratischen Term  $3\gamma_1\gamma^2$ . Erhalten wird die Gleichung

$$\theta^3 + [K - LN - \gamma_1^2]\theta - [K\gamma_1 + Mp] = 0 \quad (3.5.11)$$

welche der Kürze halber mit

$$H(\theta; N, p, \gamma_1) = 0$$

bezeichnet wird. Die Verzweigungsflächen von (3.5.11) können aus

$$H(\theta; N, p, \gamma_1) = 0 \tag{3.5.12}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta}(\theta; N, p, \gamma_1) = 0$$

bestimmt werden. Erhalten wird eine Cusp-Familie

$$(LN - K + \gamma_1^2)^3 = \frac{27}{4} (K\gamma_1 + Mp)^2 \tag{2.5.13}$$

deren Spitzen auf einer Parabel

$$L\lambda = K - \lambda_1^2 ; \quad K\gamma_1 + Mp = 0 \tag{3.5.14}$$

siehe Fig. 8, liegen.

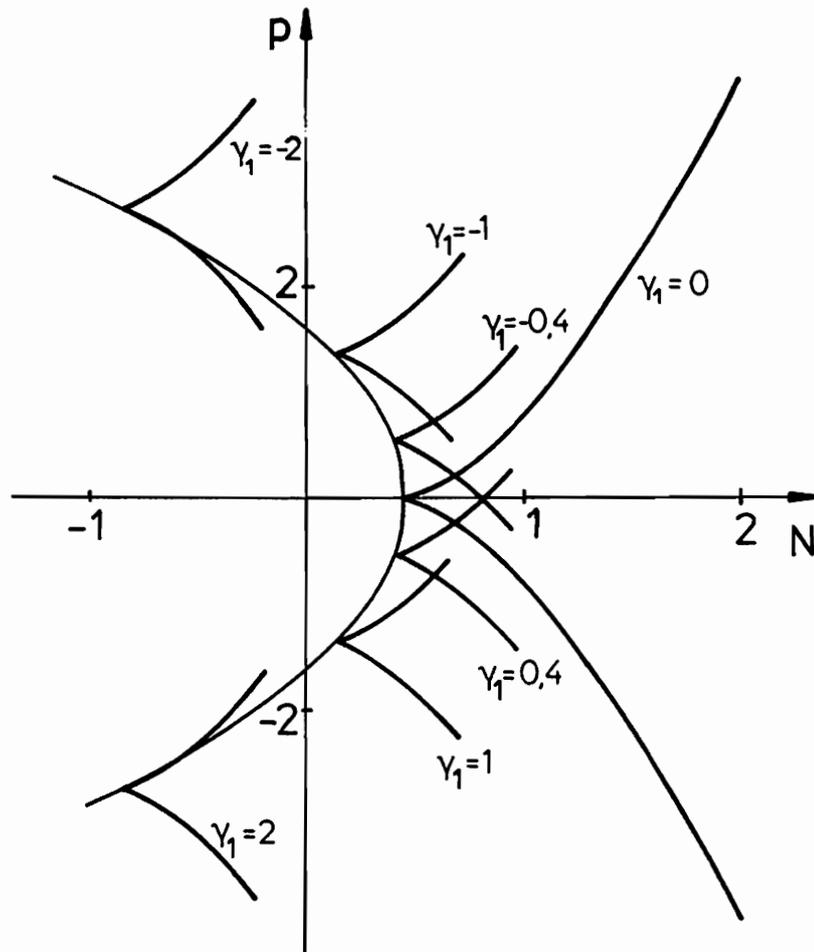


Fig. 8; Verzweigungsdiagramm für Gleichung (3.5.11)

Für  $\gamma_1 = \text{const.}$  kann der kleinste Eigenwert  $\lambda(\gamma_1)$  mit Hilfe von (3.5.12) bestimmt werden. Dessen Maximalwert  $\gamma(0) = .4519049634$  wird für  $\gamma_1 = 0$ , also für eine Platte erreicht.

$\lambda(\gamma_1)$  bezeichnet hier den Wert von  $N$  für welchen eine Verzweigung stattfindet. Für einige Werte von  $\gamma_1$  sind die für  $K\gamma_1 + Mp = 0$  vorkommenden Lösungen von (3.5.11) in Fig. 9 aufgezeichnet.

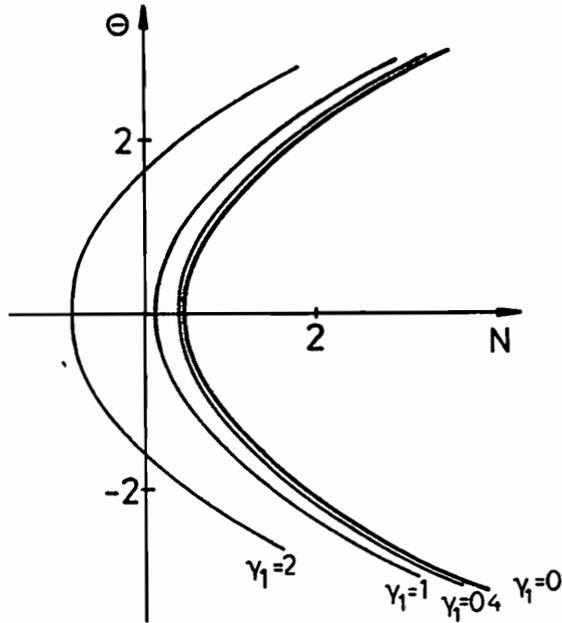


Fig. 9; Lösungen von Gleichung (3.5.11) für  $K\gamma_1 + Mp = 0$

Bei  $K\gamma_1 + Mp \neq 0$  wird die Lösung von (3.5.11) komplizierter. In Fig. 10 sind für  $\gamma_1 = 0,4$  einige Lösungen aufgezeichnet. Kontinuierliche Linien bezeichnen stabile lokale Minima, gestrichelte Linien bezeichnen instabile lokale Minima.

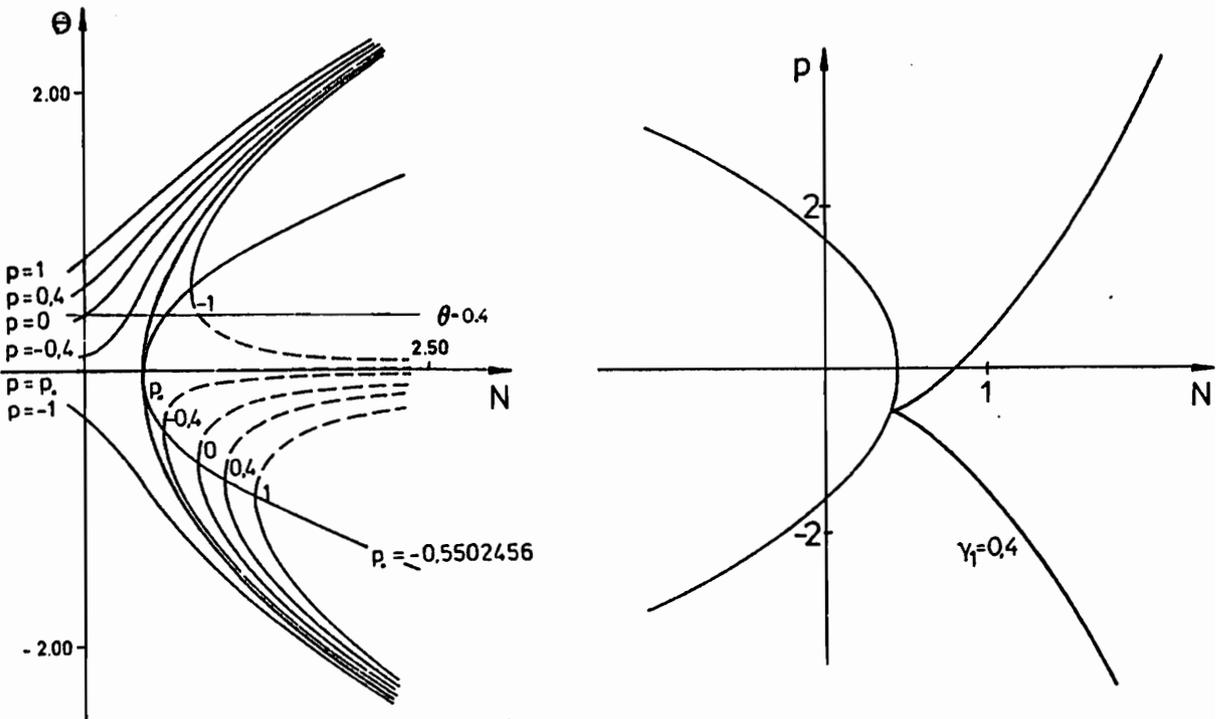


Fig. 10; Lösungen von Gleichung (3.5.11) für  $K\gamma_1 + Mp \neq 0$  und  $\gamma_1 = 0,4$

te Linien instabile lokale Maxima. Für ein fixiertes  $\gamma_1$ , also für eine gegebene flache Schale, bestimmt der Schnittpunkt einer angewendeten Belastungsfunktion  $f(p, N; \gamma_1) = 0$  mit dem Verzweigungsdiagramm in der  $(p, N)$  Kontrollparameterenebene ob eine Verzweigung oder ein Durchschlagen stattfindet.

Die lokalen Funktionale  $\tilde{I}_u(\alpha(\theta), \beta(\theta), \gamma(\theta); \gamma_1)$  besitzen für  $\lambda(\gamma_1) < N = \text{const.}$  zwei stabile lokale Minima und ein instabiles lokales Maximum, siehe Fig. 11.

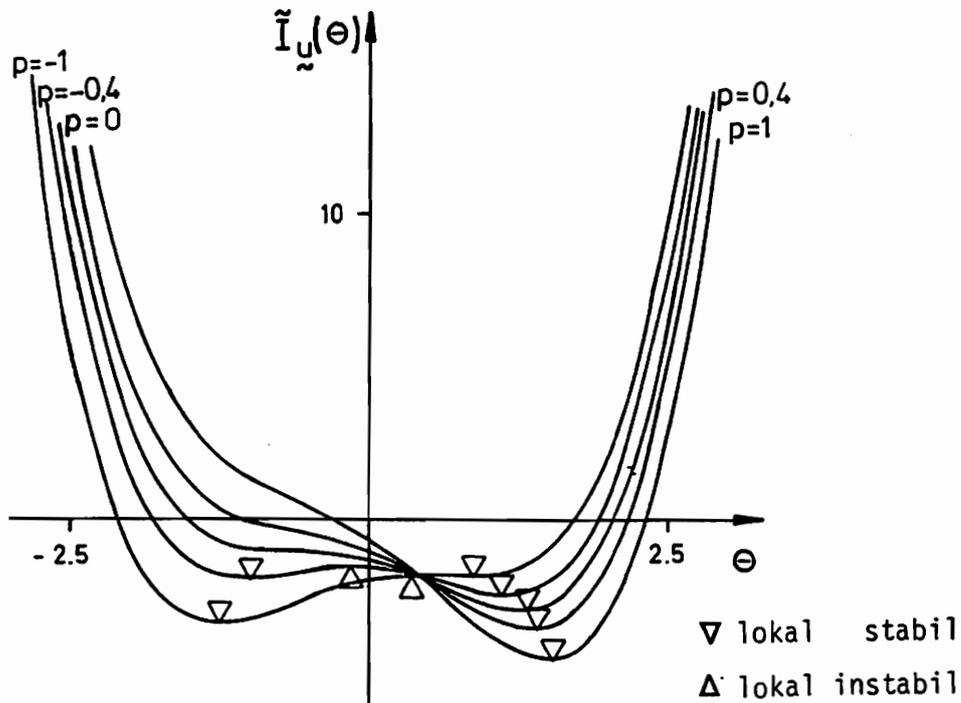


Fig. 11; Lokale Funktionale  $\tilde{I}_u(\alpha(\theta), \beta(\theta), \gamma(\theta); \gamma_1)$

Ähnliche Berechnungen für eine kreiszylindrische flache Schale unter Einzellast und konstanter Druckbelastung an zwei freien Rändern sind unter Verwendung einer allgemeineren Theorie flacher Schalen auch bei STUMPF [241] zu finden.

## 4. DER FLACHE BOGEN

### 4.1 Vorbemerkungen

Randwertprobleme für KÁRMÁNsche Platten, flache Schalen oder dreidimensionale elastische Körper sind zu kompliziert und zu rechenaufwendig um die Morphologie der Lösung für einen vorgegebenen Bereich der äußeren Kontrollgrößen exakt oder auch nur zufriedenstellend zu analysieren. Bei Untersuchungen, welche von einem endlich dimensional Element zulässiger Ansatzfunktionen ausgehen kann z.B. mit Hilfe der Katastrophentheorie eine approximierete Morphologie erhalten werden, siehe z.B. HUI, HANSEN [212], CHILLINGWORTH, MARSDEN, WAN [219], STUMPF [241]. Aussagen über die Exaktheit der erhaltenen Morphologie sind verhältnismäßig unbekannt. Auch eine übereinstimmende dual approximierete Morphologie, wie sie z.B. von LABISCH [233] für ein Randwertproblem einer KÁRMÁNschen Platte erhalten wurde, kann nicht als Beweis für deren Exaktheit gewertet werden.

Wesentlich einfacher und übersichtlicher kann das torsionsfreie eindimensionale Problem eines gelenkig gelagerten Bogens untersucht werden. Die Anzahl der Veröffentlichungen für diesen Themenkreis ist beträchtlich. HUSEYIN [90], ROORDA [59] und THOMPSON [227] gehen von einer endlich dimensional darstellbaren Energie aus. Durch Elimination passiver Koordinaten und Selektion führender Terme wird die elementare eventuell verformte Cusp-Katastrophe erhalten. Eine unendlich dimensionale Approximation ist zu finden bei FUNG, KAPLAN [25] und bei ASHWELL [41], jedoch ist hier die benutzte Bogentheorie zu einfach. Interessante Ergebnisse erhielten SCHREYER, MASUR [67]. ZEEMAN [181] geht von den ersten zwei Eigenformen aus und erhält die sogenannte duale Cusp-Katastrophe. Eine Anzahl von Veröffentlichungen beschäftigt sich mit rein numerischen Methoden und numerisch erhaltenen Ergebnissen, wie z.B. CRISFIELD [209], SABIR, LOCK [122] und HUDDLESTON [76]. Unzweifelhaft hat die Anwendung leistungsstarker Rechenautomaten zu neuen Ergebnissen und neuen Erkenntnissen geführt. Bei einer genaueren kritischen Betrachtung wird man jedoch feststellen

müssen, daß auch in solchen Veröffentlichungen in denen Variationsverfahren angewendet werden, keine Einbettung der Randwertprobleme in problemgerechte lineare topologische Räume durchgeführt wird. Für solche Fälle bleibt die Frage, inwieweit die Anwendung verschiedener auf lineare topologische Räume beschränkter Hilfsmittel der Funktionalanalysis, solcher wie FRÉCHETSche oder GÂTEAUXSche Ableitungen und abstrakte Integrale, sinnvoll oder überhaupt möglich ist, offen. Offen bleibt auch die Frage nach dem Sinn der "deduzierten" EULER-LAGRANGE Gleichungen. Gelten diese absolut, oder nur in einem bestimmten Quotientenraum; in dem Sinn, daß nur Äquivalenzrelationen vorliegen und beliebige Funktionen aus bestimmten Untermengen addiert werden können, etwa sogenannte Null-Lagrangeane, siehe z.B. EDELEN [210]. Oft werden Reihenentwicklungen den Bedürfnissen der Katastrophentheorie entsprechend abgeschnitten oder/und Lösungsäste übergangen. Bei numerisch orientierten Arbeiten können verhältnismäßig kleine Einzugsgebiete bestimmter Lösungsäste unentdeckt bleiben.

Ein qualitativer Durchbruch könnte erreicht werden, wenn es gelingen würde mit Hilfe eines hinreichend variablen Bogenmodells für einen bestimmten Bereich der äußeren Kontrollparameter eine mathematisch exakte Lösung des betrachteten Randwertproblems zu finden und daraus die exakte Morphologie zu deduzieren. Ein solches Bogenmodell mit einer exakten Lösung und exakt bestimmter Morphologie für ein numerisches Beispiel ist von LABISCH [239, 240] bekannt.

#### 4.2 Das Randwertproblem für einen flachen Bogen von MARGUERRE-Typus

Die hier angewendete Theorie für einen flachen Bogen ist völlig analog zur Theorie flacher Schalen, nach MARGUERRE aufgebaut.

Es sei  $\Omega_x := \{x; -\ell < x < \ell\}$  das Intervall für die Projektion des Bogens auf die x-Achse. In LAGRANGEScher Betrachtungsweise wird das folgende Randwertproblem mit

den Gleichgewichtsbedingungen in  $\Omega_x$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{dN_1}{dx} + \bar{q}_1\right) &= 0 \\ -\left(\frac{d^2M_1}{dx^2} + \frac{dN_{13}}{dx} + \bar{q}_3\right) &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

den geometrischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(\pm l) &= 0 \\ \bar{u}_3(\pm l) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

und der statischen Randbedingung

$$M_1(\pm l) = 0 \quad (4.2.3)$$

betrachtet. Die Verbindung zwischen geometrischen und statischen Feldgrößen ist spezifiziert durch die konstitutiven Beziehungen mittels

der Momentenschnittgröße

$$M_1 = -EI \frac{d^2\bar{u}_3}{dx^2}, \quad (4.2.4)$$

der Membrankraft

$$N_1 = E F \bar{e}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_3; \bar{z}) \quad (4.2.5)$$

und der Vertikalkomponente der Membrankraft

$$N_{13} = N_1 \cdot \frac{d(\bar{u}_3 + \bar{z})}{dx}. \quad (4.2.6)$$

Die Verzerrung

$$\bar{e}_1(\bar{u}_1, \bar{u}_3; \bar{z}) = \frac{d\bar{u}_1}{dx} + \frac{d\bar{z}}{dx} \frac{d\bar{u}_3}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{u}_3}{dx}\right)^2 \quad (4.2.7)$$

dient als Abkürzung. Wie üblich bezeichnet E den Elastizitätsmodul,  $\bar{u}_1$  die Verschiebung in x-Richtung,  $\bar{u}_3$  die Verschiebung in  $x_3$ -Richtung,  $\bar{q}_1$ ,  $\bar{q}_3$  die Linienlasten in diesen Richtungen.

$2\ell$  ist die Länge des Intervalls  $\Omega_x$ ,  $\bar{z}(x)$  bezeichnet die Mittellinie des unverformten Bogens,  $I$  das Trägheitsmoment,  $F$  den Querschnitt und  $h$  die konstante Dicke des Bogens, siehe Fig.12.

Die mathematisch handlichere dimensionslose Formulierung ist in  $\Omega := \{\xi; -1 < \xi < 1\}$  gegeben durch

die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned} -\left(\frac{dn_1}{d\xi} + q_1\right) &= 0 \\ -\left(\frac{d^2 m_1}{d\xi^2} + \frac{dn_{13}}{d\xi} + q_3\right) &= 0, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

die geometrischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_1(\pm 1) &= 0 \\ u_3(\pm 1) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

und die statische Randbedingung

$$m_1(\pm 1) = 0. \quad (4.2.10)$$

Die dimensionslosen konstitutiven Beziehungen sind gegeben über

die Momentenschnittgröße

$$m_1 = -D \frac{d^2 u_3}{d\xi^2} \quad (4.2.11)$$

mit

$$D = \frac{I}{Fh^2},$$

die Membrankraft

$$n_1 = e_1(u_1, u_3; z) \quad (4.2.12)$$

und die Vertikalkomponente der Membrankraft

$$n_{13} = n_1 \frac{d(u_3 + z)}{d\xi}. \quad (4.2.13)$$

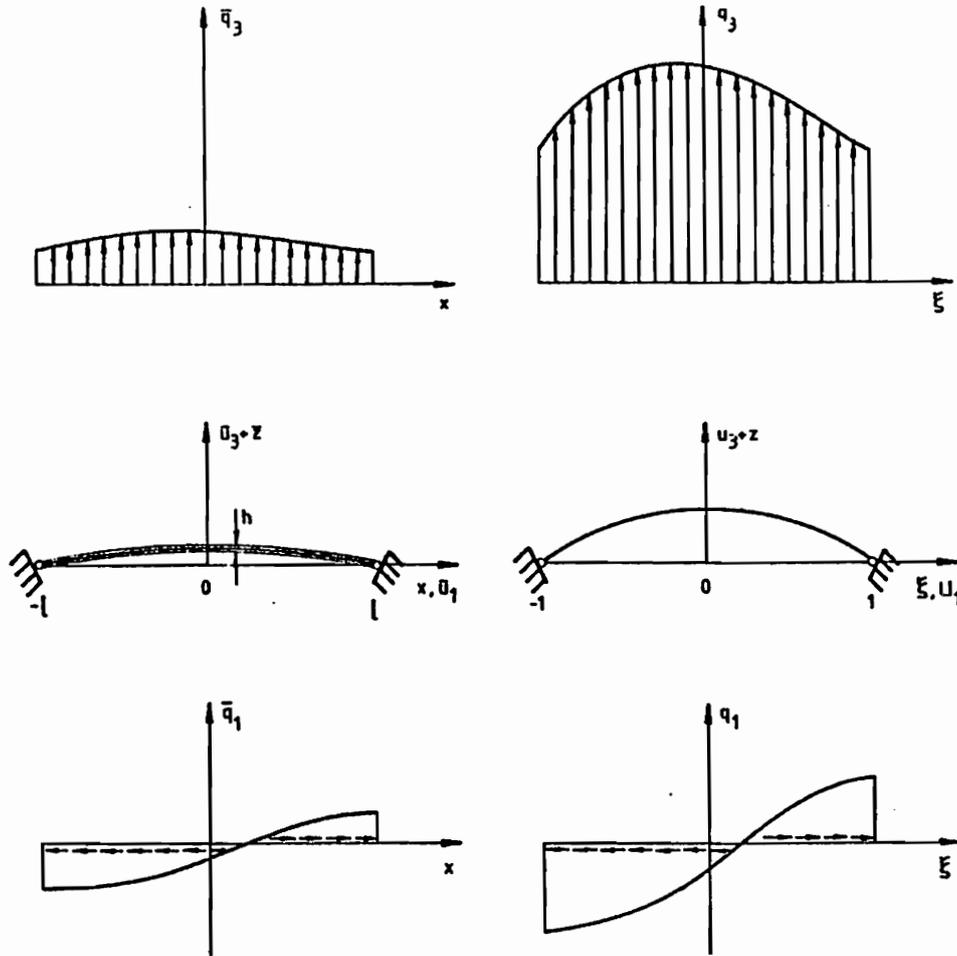


Fig. 12; Das Randwertproblem für den flachen Bogen und dessen dimensionslose Übertragung

Die dimensionslose Verzerrung ist

$$e_1(u_1, u_3; z) = \frac{du_1}{d\xi} + \frac{dz}{d\xi} \frac{du_3}{d\xi} + \frac{1}{2} \left( \frac{du_3}{d\xi} \right)^2 . \quad (4.2.14)$$

Diese dimensionslose Formulierung wird erreicht mittels Einführung der dimensionslosen

Koordinate

$$\xi = \frac{x}{l}$$

Verschiebungen

$$u_1 = \frac{l}{h^2} \bar{u}_1$$

$$u_3 = \frac{\bar{u}_3}{h}$$

Mittellinie

$$z = \frac{\bar{z}}{h}$$

$$\begin{aligned} \text{statischer Feldgrößen} \quad n_1 &= \frac{\ell^2}{EFh^2} N_1 \\ n_{13} &= \frac{\ell^3}{EFh^3} N_{13} \\ m_1 &= \frac{\ell^2}{EIh} M_1 \\ \text{und Linienlasten} \quad q_1 &= \frac{\ell^2}{EFh^2} \bar{q}_1 \\ q_3 &= \frac{\ell^4}{EFh^3} \bar{q}_3 . \end{aligned}$$

#### 4.3 Herleitung eines äquivalenten Variationsprinzips in geometrischen Größen

Auch hier erfolgt die Herleitung eines Variationsprinzips in der Klasse der geometrisch zulässigen Verschiebungen in zwei Schritten. Im ersten Schritt wird die Verschiebungsenergie konstruiert. Für diesen Zweck werden die in den konstitutiven Beziehungen auftretenden geometrischen und statischen Größen in Vektorform

$$\underline{v}(\underline{u}) = \left( \frac{du_1}{d\xi}, \frac{du_3}{d\xi}, -\frac{d^2u_3}{d\xi^2} \right) \quad (4.3.1)$$

und

$$\underline{t}(\underline{v}(\underline{u}); z) = (n_1(\underline{v}(\underline{u}); z), n_{13}(\underline{v}(\underline{u}); z), m_1(\underline{v}(\underline{u}); z)) \quad (4.3.2)$$

arrangiert. Die geometrischen Komponenten

$$\underline{v} = v_j \quad (4.3.3)$$

und die statischen Komponenten

$$\underline{t} = t_j ; j = 1, 2, 3 \quad (4.3.4)$$

der elastischen Zustände sind verbunden über die verallgemeinerten konstitutiven Beziehungen

$$t_1(\underline{v}; z) = e_1(\underline{v}; z)$$

$$t_2(\underline{v}; z) = t_1(\underline{v}; z) \left( v_2 + \frac{dz}{d\xi} \right) \quad (4.3.5)$$

$$t_3(\underline{v}; z) = D v_3$$

mit

$$e_1(\underline{v}; z) = v_1 + \frac{dz}{d\xi} v_2 + \frac{1}{2} v_2^2 . \quad (4.3.6)$$

Für eine hinreichend glatte Mittellinienfunktion  $z(\xi)$  sind die CARATHÉODORY Stetigkeitsbedingungen automatisch erfüllt. Die konstitutiven Beziehungen (4.3.5) führen unter Zuhilfenahme geeigneter Wachstumsbeschränkungen zu

$$v_1 \in L_2(\Omega), \quad v_2 \in L_4(\Omega), \quad v_3 \in L_2(\Omega)$$

und damit zu

$$\underline{v} \in E_V(\Omega) := L_2(\Omega) \times L_4(\Omega) \times L_2(\Omega) . \quad (4.3.7)$$

Dieser cartesische Produktraum ist ein normierter reflexiver Raum. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die FRÉCHETSche Ableitung der konstitutiven Beziehungen (4.3.5) existiert und mit

$$\frac{dt(\underline{v}; z)}{d\underline{v}} = \begin{pmatrix} 1 & r & 0 \\ r & s & 0 \\ 0 & 0 & D \end{pmatrix} \quad (4.3.8)$$

und  $r = \frac{dz}{d\xi} + v_2$ ,  $s = t_1(\underline{v}; z) + r^2$  symmetrisch ist. Deshalb existiert für  $\underline{t}(\underline{v}; z)$  eine Stammfunktion

$$f(\underline{v}; z) = \int_0^1 (\underline{t}(\mu \underline{v}; z) \cdot \underline{v}) d\mu .$$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$f(\underline{v}; z) = \frac{1}{2} (e_1^2(\underline{v}; z) + D v_3^2) . \quad (4.3.9)$$

Die Funktion

$$f(\underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{u}); z) = \frac{1}{2}(e_1^2(u_1, u_3; z) + D(\frac{d^2 u_3}{d\xi^2})^2) \quad (4.3.10)$$

wird *Verschiebungsenergiedichte* genannt.

Der cartesische Produktraum

$$B_{\underset{\sim}{u}}(\Omega) = \{ \underset{\sim}{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_3); \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{u}) \in E_V(\Omega), \tilde{u}_1(\pm 1) = 0, \tilde{u}_3(\pm 1) = 0 \} \quad (4.3.11)$$

wird Raum der *geometrisch zulässigen Verschiebungen* genannt. Mit Hilfe der homogenen Randbedingungen folgt sofort

$$\tilde{u}_1 \in \overset{\circ}{W}_{1,2}(\Omega); \tilde{u}_3 \in W_{2,2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_{1,2}(\Omega)$$

und damit

$$B_{\underset{\sim}{u}}(\Omega) = \overset{\circ}{W}_{1,2}(\Omega) \times W_{2,2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_{1,2}(\Omega). \quad (4.3.12)$$

$\overset{\circ}{W}_{1,2}(\Omega)$  und  $W_{2,2}(\Omega)$  bezeichnen die üblichen SOBOLEV-Räume und  $\overset{\circ}{W}_{1,2}(\Omega)$  entspricht  $W_{1,2}(\Omega)$ , ist jedoch auf homogene Randwerte beschränkt, siehe ADAMS [139], S. 45. In  $B_{\underset{\sim}{u}}(\Omega)$  ist eine partielle Integration möglich.

Mit  $B_{\underset{\circ}{u}}(\Omega) \subset B_{\underset{\sim}{u}}(\Omega)$  wird die Klasse hinreichend glatter Funktionen  $\underset{\circ}{u} \in B_{\underset{\circ}{u}}(\Omega)$  bezeichnet, für welche auch die statische Randbedingung (4.2.3) erfüllt wird. Der Satz von FUBINI und eine partielle Integration liefern für  $\forall \underset{\circ}{u} \in B_{\underset{\circ}{u}}(\Omega)$  und für  $\underset{\sim}{t}(\underset{\sim}{\mu v}(\underset{\circ}{u}); z)$  errechnet für  $\underset{\circ}{u}$  nach (4.3.2) und  $\underset{\sim}{\mu v}(\underset{\circ}{u})$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-1}^1 [ -(\frac{dn_1}{d\xi} + q_1) \underset{\circ}{u}_{01} - (\frac{d^2 m_1}{d\xi^2} + \frac{dn_{13}}{d\xi} + q_3) \underset{\circ}{u}_{03} ] d\xi d\mu = \\ & = \int_{-1}^1 \{ \int_0^1 [ n_1 \frac{d\underset{\circ}{u}_{01}}{d\xi} + n_{13} \frac{d\underset{\circ}{u}_{03}}{d\xi} - m_1 \frac{d^2 \underset{\circ}{u}_{03}}{d\xi^2} ] d\mu - q_1 \underset{\circ}{u}_{01} - q_3 \underset{\circ}{u}_{03} \} d\xi = \\ & = \int_{-1}^1 [ f(\underset{\sim}{v}(\underset{\circ}{u}); z) - q_1 \underset{\circ}{u}_{01} - q_3 \underset{\circ}{u}_{03} ] d\xi = I(\underset{\circ}{u}; z; q_1, q_3). \quad (4.3.13) \end{aligned}$$

Im letzten Integral kommt die statische Randbedingung nicht mehr vor. Sie ist natürlich.

Das Funktional kann auf  $\tilde{u} \in B_{\tilde{u}}(\Omega)$  erweitert werden. Dem Randwertproblem (4.2.8 bis 14) entspricht im Raum der geometrischen zulässigen Verschiebungen  $B_{\tilde{u}}(\Omega)$  ein Variationsprinzip mit dem Variationsfunktional

$$I(\tilde{u}; z; q_1, q_3) = \int_{-1}^1 [f(\tilde{v}(\tilde{u}); z) - q_1 \tilde{u}_1 - q_3 \tilde{u}_3] d\xi . \quad (4.3.14)$$

Die folgenden Fragen bleiben interessant:

- (i) Eignet sich eine mit Hilfe von (4.3.14) erhaltene Approximation immer für eine qualitative Analyse der Lösung des primären Randwertproblems?
- (ii) Wann ist die Morphologie der so approximierten Lösung äquivalent zu der der exakten Lösung des Randwertproblems?

#### 4.4 Der flache Sinusbogen

Der vollständige Formalismus einer mathematischen Analyse kann anschaulich am Beispiel eines flachen Sinusbogens mit  $D = \frac{1}{12}$ ,  $a = \frac{\pi}{2}$  und der Mittellinie

$$z = \gamma_0 \cos a \xi \quad (4.4.1)$$

unter der Belastung

$$\begin{aligned} q_1 &= 0 \\ q_3 &= p_1 \cos a \xi + p_2 \sin 2 a \xi \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

siehe Fig. 13 demonstriert werden.

Die Räume  $\overset{\circ}{W}_{1,2}(\Omega)$  und  $W_{2,2}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_{1,2}(\Omega)$  sind separabel. Als Basis für beide Räume wird die Menge

$$M = \{\cos(2k-1)a \xi, \sin 2ka \xi; k = 1, 2, 3, \dots\} \quad (4.4.3)$$

angenommen. Der Einfachheit halber wird die Untersuchung auf die Wechselwirkung der ersten zwei Eigenformen für  $\tilde{u}_3$  begrenzt.

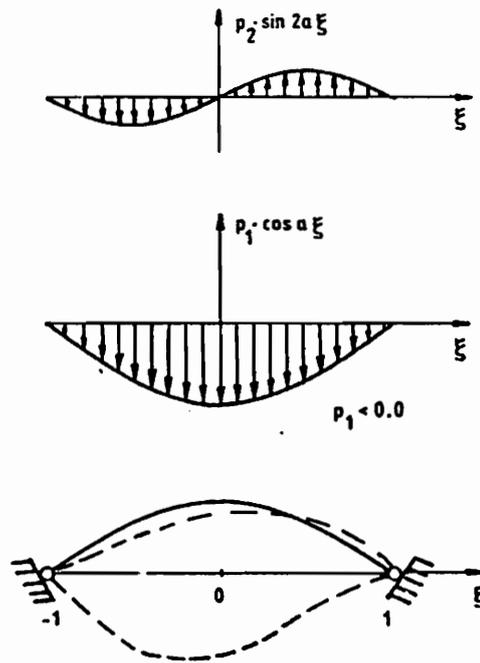


Fig. 13; Dimensionslose Übertragung für den flachen Sinusbogen. Schematische Darstellung von zwei stabilen Gleichgewichtslagen

Daher wird

$$\tilde{u}_1 = \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos(2k-1)a\xi + \beta_k \sin 2ka\xi] \quad (4.4.4)$$

$$\tilde{u}_3 = \gamma_1 \cos a\xi + \gamma_2 \sin 2a\xi$$

in das Funktional (4.3.13) eingesetzt. Stationaritätsbedingungen führen zu

$$\alpha_k = 0 = \beta_k, \quad \forall k > 2 \quad (4.4.5)$$

und damit zur endlich-dimensionalen Darstellung

$$\begin{aligned} I_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_i; \gamma_0, p_i) = & \\ & \frac{1}{2} \{ a^2 [\alpha_1^2 + 4\beta_1^2 + 9\alpha_2^2 + 16\beta_2^2] + \\ & + a^3 [-2\alpha_1\gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1) - \beta_1(2\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1^2) + 6\alpha_2\gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1) + 8\beta_2\gamma_2^2] + \\ & + a^4 [\frac{3}{16}(2\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1^2)^2 + 3\gamma_2^4 + 2\gamma_2^2(\gamma_0 + \gamma_1)^2 + \gamma_2^2(2\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1^2) + \frac{1}{12}(\gamma_1^2 + 16\gamma_2^2)] \} - \\ & - p_1\gamma_1 - p_2\gamma_2, \quad i = 1, 2 \quad (4.4.6) \end{aligned}$$

für das Funktional (4.3.13). Die Koordinaten  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  und  $\beta_2$  sind passiv, denn sie können über die Stationaritätsbedingungen

$$\frac{\partial I_1}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial I_1}{\partial \beta_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.4.7)$$

eliminiert werden. Das Einsetzen der resultierenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a\gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1) \\ 8\beta_1 &= a(2\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1^2) \\ 3\alpha_2 &= -a\gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1) \\ 4\beta_2 &= -a\gamma_2^2 \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

und die Einführung der neuen Verhaltensvariablen

$$\begin{aligned} \phi &= \gamma_0 + \gamma_1 \\ \psi &= 2\gamma_2 \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

und Kontrollparameter

$$\begin{aligned} C_1 &= 2\left(\frac{p_1}{b} + \frac{\gamma_0}{6}\right) \\ C_2 &= \frac{p_2}{b} \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

mit  $b = \frac{1}{2} a^4$  führen zu

$$\begin{aligned} I(\phi, \psi; \gamma_0, C_1, C_2) &= \\ &= b\left\{\frac{\phi^4}{8} + \frac{\psi^4}{8} + \frac{\phi^2\psi^2}{4} + \frac{\phi^2}{4} \left(\frac{1}{3} - \gamma_0^2\right) + \frac{\psi^2}{4} \left(\frac{4}{3} - \gamma_0^2\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_1\phi}{2} - \frac{C_2}{2} \psi + \frac{\gamma_0^4}{8} + \frac{\gamma_0^2}{12} + \frac{C_1}{2} \gamma_0\right\}. \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

Das Randwertproblem für den Sinusbogen (4.4.1 bis 2) ist auf eine mathematisch strenge Art und Weise von einem unendlich dimensionalen Problem mit den Parametern aus (4.4.4) auf ein zweidimensionales Problem reduziert worden. Das Funktional (2.4.11) kann wie eine Funktion von zwei Variablen behandelt

werden. Die Analyse des Randwertproblems ist damit auf die Analyse einer reellen Funktion in den zwei Verhaltensvariablen  $\phi, \psi$  und eine Diskussion des Verhaltens dieser Funktion in Abhängigkeit von den äußeren Kontrollparametern  $\gamma_0, C_1, C_2$  zurückgeführt worden.

Eine wesentliche Rolle bei der Analyse spielen die Stationaritätsbedingungen

$$\frac{\partial I}{\partial \phi} = \frac{\partial I}{\partial \psi} = 0 \quad (4.4.12)$$

welche

$$\begin{aligned} f_1(\phi, \psi; \gamma_0, C_1) &= (\phi^2 + \psi^2 + \frac{1}{3} - \gamma_0^2)\phi - C_1 = 0 \\ f_2(\phi, \psi; \gamma_0, C_2) &= (\phi^2 + \psi^2 + \frac{4}{3} - \gamma_0^2)\psi - C_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

ergeben und der *Hessian* von (4.4.11)

$$\tilde{H}(I) = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \phi} & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \phi} & \frac{\partial f_2}{\partial \psi} \end{pmatrix} \quad (4.4.14)$$

mit der Determinante

$$\begin{aligned} H(\phi, \psi; \gamma_0) &= \det \tilde{H}(I) = \\ &= \det \begin{pmatrix} 3\phi^2 + \psi^2 + \frac{1}{3} - \gamma_0^2 & 2\phi\psi \\ 2\phi\psi & 3\psi^2 + \phi^2 + \frac{4}{3} - \gamma_0^2 \end{pmatrix} \cong \\ &= 3(\phi^2 + \psi^2)^2 + (\phi^2 + \psi^2) \left( \frac{13}{3} - 4\gamma_0^2 \right) - 2\psi^2 + \left( \frac{1}{3} - \gamma_0^2 \right) \left( \frac{4}{3} - \gamma_0^2 \right). \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Ein zu (4.4.13) ähnlich erscheinendes zweidimensionales algebraisches System ist von CHOW, HALE, MALLET-PARET [152] untersucht worden. Das hier untersuchte Problem, die hier angewendete Methode und die erhaltenen Ergebnisse sind jedoch völlig verschieden.

Der geometrische Ort der degenerierten stationären Punkte genügt dem System

$$\begin{aligned} f_1(\phi, \psi; \gamma_0, C_1) &= 0 \\ f_2(\phi, \psi; \gamma_0, C_2) &= 0 \\ H(\phi, \psi; \gamma_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Eliminierung der Verhaltensgrößen  $\phi$  und  $\psi$  aus (4.4.16) führt zu einer endlichen Anzahl von Kurven

$$g_k(C_1, C_2, \gamma_0) = 0 \quad (4.4.17)$$

die das *Verzweigungsdiagramm* bilden.

Die Anzahl der Lösungen von (4.4.13) ist in jedem durch Kurven von (4.4.17) begrenzten Gebiet konstant. Wenn eine Kurve von (4.4.17) erreicht wird, dann erscheinen entweder zwei neue Lösungsäste oder aber zwei vorhandene Lösungsäste von (4.4.13) gegen ineinander über.

Für unser Beispiel ist (4.4.17) in einer Parameterdarstellung mit  $\psi$  als Parameter gegeben durch reelle Lösungen von

$$\begin{aligned} \Delta &= 24 \psi^2 + \frac{121}{9} - \frac{44}{3} \gamma_0^2 + 4\gamma_0^4 \\ 6(\phi^2 + \psi^2) &= 4\gamma_0^2 - \frac{13}{3} \pm \Delta^{1/2} \\ \left(\frac{11}{8} - \frac{1}{3} \gamma_0^2 \pm \frac{\Delta^{1/2}}{6}\right) \psi &= C_2 \\ \left(-\frac{7}{18} - \frac{1}{3} \gamma_0^2 \pm \frac{\Delta^{1/2}}{6}\right) \phi &= C_1 \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

Die Lösung von (4.4.13) ist in einem Punkt  $(\phi, \psi)$  regulär oder nichtdegeneriert, wenn

$$H(\phi, \psi; \gamma_0) \neq 0 \quad (4.4.19)$$

Hier schneiden sich die Mannigfaltigkeiten  $f_1 = 0$  und  $f_2 = 0$  transversal. Das MORSE Lemma, siehe z.B. POSTON, STEWART [186],

S. 97 gilt und eine Verzweigung kann nicht stattfinden.

Um zu untersuchen, in welchem Sinn die mit Hilfe des Variationsfunktionals (4.3.13) erhaltene Lösung der Randwertaufgabe (4.2.8 bis 14) genügt, wird  $\tilde{u}_1$  und  $\tilde{u}_3$  aus (4.4.4) unter Berücksichtigung von (4.4.5) für  $D = \frac{1}{12}$  und  $z(\xi)$  gegeben durch (4.4.1) sowie  $q_1$  und  $q_3$  nach (4.4.2) in (4.2.8 bis 14) eingesetzt. Die natürliche statische Randbedingung (4.2.11) wird identisch erfüllt. (4.4.8 bis 10) und einige triviale trigonometrische Bedingungen zeigen, daß (4.2.8)<sub>1</sub> identisch erfüllt wird und (4.2.8)<sub>2</sub> der Gleichung

$$\begin{aligned} & [\phi(\phi^2 + \psi^2 + \frac{1}{3} - \gamma_0^2) - C_1] \cos a\xi + \\ & + 2[\phi(\phi^2 + \psi^2 + \frac{4}{3} - \gamma_0^2) - C_2] \sin 2 a\xi = 0 \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

äquivalent ist. Da  $\cos a\xi$  und  $\sin 2 a\xi$  in  $\Omega$  linear unabhängig sind, folgt aus (4.4.20) sofort, daß sowohl die Lösung des Variationsproblems als auch die Lösung des Randwertproblems (4.2.8 bis 14) für den betrachteten Sinusbogen der Lösung der gekoppelten algebraischen Gleichungen (4.4.13) äquivalent sind.

Die Verschiebungen  $\tilde{u}_1$  und  $\tilde{u}_3$  können erhalten werden indem (4.4.8) in (4.4.4) eingesetzt wird.

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= a[\frac{\phi\psi}{2} \cos a\xi + \frac{1}{8} (\phi^2 - \gamma_0^2) \sin 2 a\xi - \\ & - \frac{\phi\psi}{6} \cos 3 a\xi - \frac{\psi^2}{16} \sin 4 a\xi] \\ \tilde{u}_3 &= (\phi - \gamma_0) \cos a\xi + \frac{\psi}{2} \sin 2 a\xi . \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

In der Literatur sind strenge Stabilitätsaussagen für kompliziertere Probleme schwierig zu erhalten. Bei mit Hilfe elementarer Katastrophen erhaltener Näherungen kann die Stabilität aufgrund der angenäherten Morphologie abgeschätzt werden. Bei rein numerisch erhaltenen Lösungen wo meistens in sogenannten Last-Verschiebungsdiagrammen der Mittelpunkt eines Bogens aufgezeichnet wird, ist man oft auf Vermutungen angewiesen.

THOMPSON [195] versucht z.B. Stabilitätsaussagen über eine Folge von Fold-Katastrophen zu erhalten. Damit kann jedoch keine Stabilitätsaussage für geschlossene Kurven erhalten werden.

Unter der Annahme, daß ein Minimum des Funktionals (4.4.11) einer stabilen Lösung entspricht, genügt es für den vorliegenden Fall die Definitheit des Hessians (4.4.14) zu untersuchen, um exakte Stabilitätsaussagen, auch für geschlossene Kurven, zu erhalten.

Wenn der Hessian (4.4.14) positiv definit ist dann liegt für den gegebenen Lösungspunkt ein Minimum vor und die Lösung ist stabil.

Bei einem negativ definiten Hessian liegt ein Maximum vor und die Lösung ist instabil.

Wenn die Determinante (4.4.15) negativ ist dann ist ein Sattelpunkt vorhanden und die Lösung ist auch instabil.

Die angewendete Bogentheorie setzt einen flachen Bogen voraus. Dies muß berücksichtigt werden. Ab gewissen Werten von  $\gamma_0^2$  würden nichttriviale Lösungsäste für höhere Eigenformen erscheinen. Diese werden hier nicht berücksichtigt.

#### 4.5 Diskussion der numerischen Ergebnisse

Bei den numerischen Berechnungen entstehen keine Schwierigkeiten. Alle interessierenden Ergebnisse konnten mit Hilfe eines einfachen Taschenrechners TEXAS SR52 errechnet werden.

Das in der  $(\phi, \psi)$  Ebene durch  $H(\phi, \psi; \gamma_0) = 0$  (4.4.15) gegebene Entartungsdiagramm ist eine Kurve vierter Ordnung. Für einige Werte von  $\gamma_0^2$  sind Entartungsdiagramme und die entsprechenden nach (4.4.18) errechneten in der  $(C_1, C_2)$  Ebene liegenden Verzweigungsdiagramme in Fig. 14 gezeichnet.

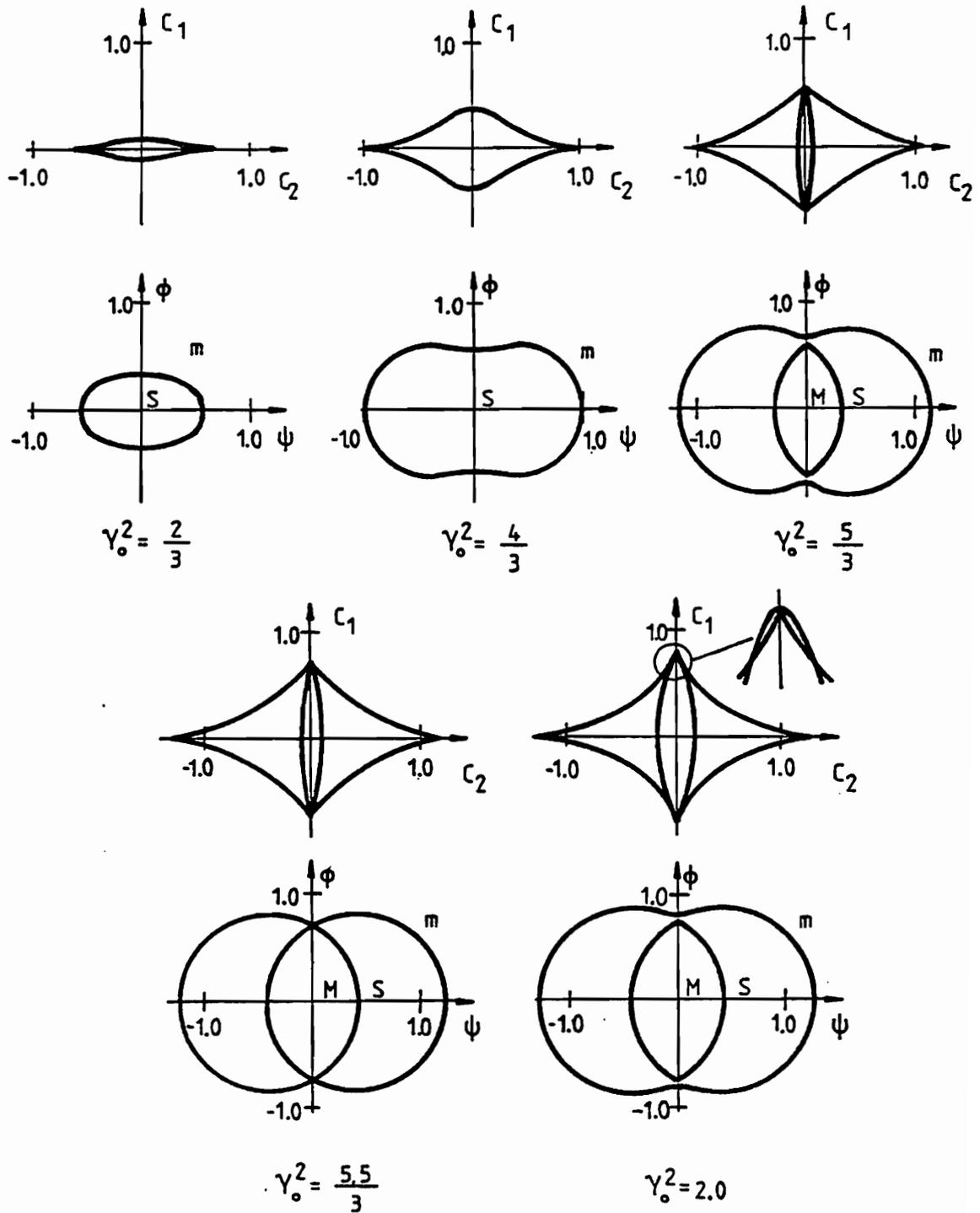


Fig. 14; Entartungsdiagramme  $H(\phi, \psi; \gamma_0) = 0$  und Verzweigungsdiagramme  $g_k(C_1, C_2; \gamma_0) = 0 : \gamma_0^2 = \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5.5}{3}, 2$ .  
 m = Minimum, S = Sattelpunkt, M = Maximum

Die durch die Kurven des Entartungsdiagramms in der  $(\phi, \psi)$  Ebene begrenzten Bereiche bestehen von außen ausgehend aus Minima, Sattelpunkten und wenn  $\gamma_0^2 \geq \frac{4}{3}$  auch aus Maxima. Die mit Hilfe von (4.4.18) für die äußeren Kurven des Entartungsdiagramms errechneten Kurven des Verzweigungsdiagramms ergeben die Traglastkurven des gegebenen Bogens.

Für  $\gamma_0^2 < \frac{1}{3}$  ist  $H(\phi, \psi; \gamma_0) > 0$ . Alle stationären Punkte sind reguläre Punkte. Die Lösung ist eindeutig für jeden Wert von  $C_1$  und  $C_2$ .

Für  $\frac{1}{3} < \gamma_0^2 < \frac{4}{3}$  definiert  $H(\phi, \psi; \gamma_0) = 0$  eine Entartungskurve vierter Ordnung. Die entsprechenden Kurven des Verzweigungsdiagramms sind stetig und glatt bezüglich  $C_2$ .

Ab  $\frac{4}{3} < \gamma_0^2$  erscheint in der  $(\phi, \psi)$  Ebene eine zweite Entartungskurve. Auch im Verzweigungsdiagramm erscheinen zwei neue Äste. Diese zeigen eine glatte Abhängigkeit bezüglich  $C_1$ . Für wachsende Werte von  $\gamma_0^2$  formen sich auf den primären Ästen des Verzweigungsdiagramms zwei Spitzen aus. Damit scheinen diese Äste denen der Cusp Katastrophe ähnlich. Es sind jedoch nicht wie erwartet Kurven mit einer  $2/3$  Potenz.

Die Einführung der neuen Größen  $\phi, \psi, C_1$  und  $C_2$  führt zu einer gewissen Symmetrisierung des Funktionalis und damit auch der Entartungs und Verzweigungsdiagramme und auch der Lastparameter-Verhaltensgrößen-Linien. Bei einer physikalischen Interpretation muß dies berücksichtigt werden. So entspricht z.B. dem Wert  $p_1 = 0$  in (4.4.2)<sub>2</sub> der Wert  $C_1 = \frac{\gamma_0}{3}$ .

Die Projektionen einiger Lastparameter-Verhaltensvariable-Kurven sind in Fig. 15 bis 18 wiedergegeben. Stetige Linien bezeichnen Minima, gestrichelte Linien Sattelpunkte und punktierte Linien Maxima.

Für  $\gamma_0^2 = \frac{2}{3}$  ähnelt das Verzweigungsdiagramm einer Lippensingularität. In der  $(\phi, \psi)$  Ebene treten Minima und Sattelpunkte auf. Für steigende oder fallende Werte von  $C_1$  findet in A oder B ein erwarteter dynamischer Sprung sowohl für  $C_2 = 0.0$  als auch für  $C_2 = 0.1$  statt.

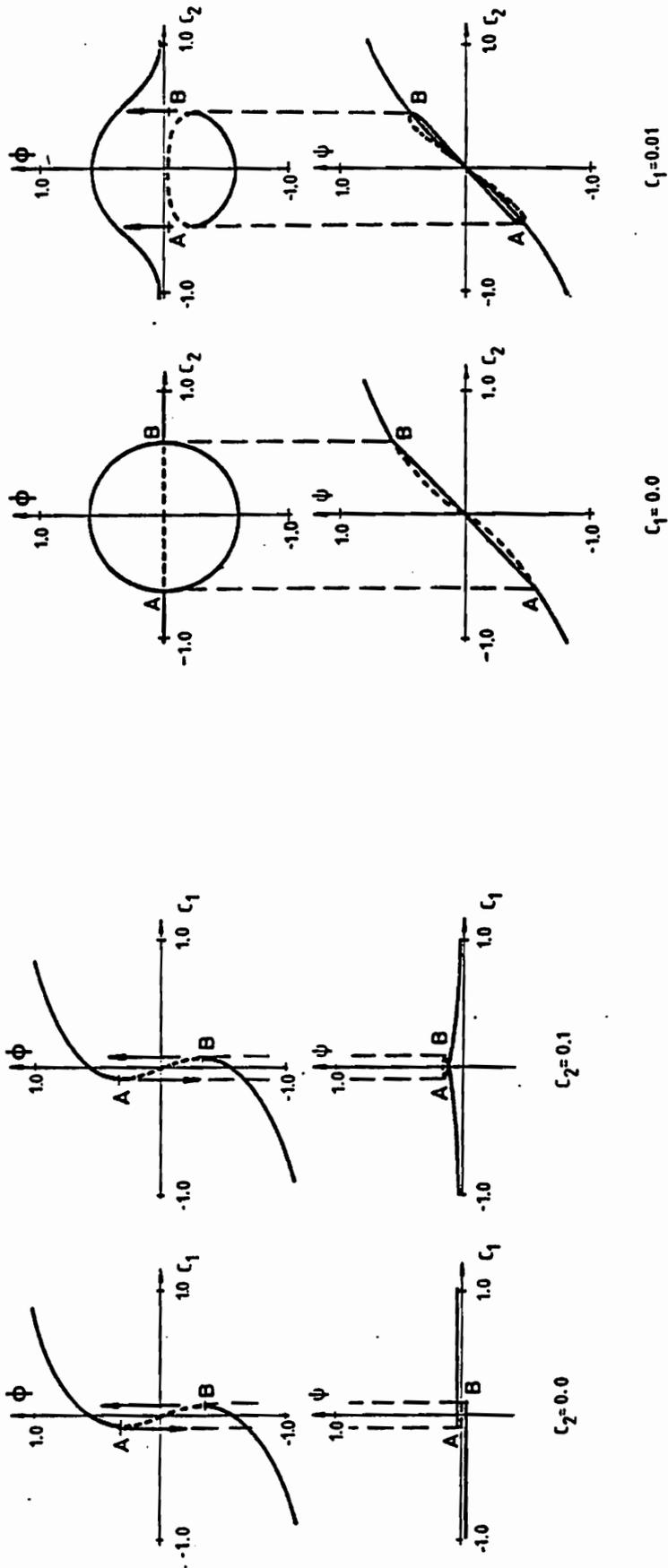


Fig 15;

Fig 16;

Projektionen von Lastparameter-Verhaltensvariable Kurven für  $\gamma_0^2 = \frac{2}{3}$

$C_2 = 0.0$  und  $C_2 = 0.1$

$C_1 = 0.0$  und  $C_1 = 0.01$

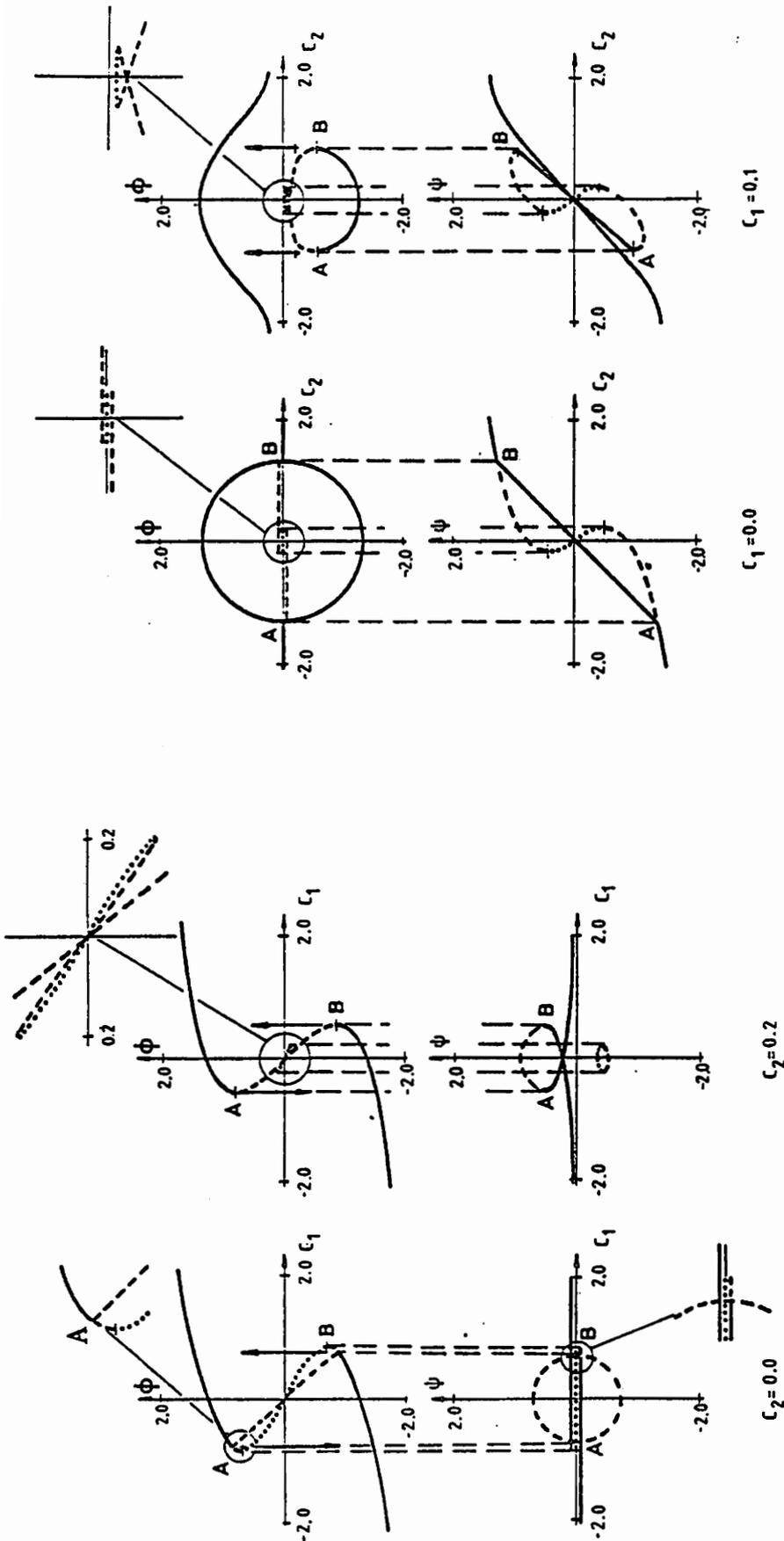


Fig. 17

Fig. 18;

Projektionen von Lastparameter-Verhaltensvariable-Kurven für  $\gamma_O^2 = 2$

$C_2 = 0,0$  und  $C_2 = 0,2$

$C_1 = 0,0$  und  $C_1 = 0,1$

Topologisch verschieden und unerwartet ist die Situation in Fig. 16. Für  $C_1 = 0.0$  findet in den Punkten A und B eine Verzweigung statt. Für  $C_1 = 0.01$  erscheint eine geschlossene Kurve. In den Punkten A und B findet ein dynamischer Sprung von der Linie mit kleineren Werten  $\phi$  zur Linie mit größeren Werten  $\phi$  statt. Diese Linie mit größeren Werten von  $\phi$  bleibt stabil für jeden Wert von  $C_2$ .

Komplizierter ist das Bild für  $\gamma_0^2 = 2$ . Minima, Sattelpunkte und Maxima treten auf. In Fig. 17 findet in den Punkten A und B eine Verzweigung statt. Die für  $C_2 = 0.2$  auftretende geschlossene Kurve ist nicht stabil. Ein dynamischer Sprung findet für die lokal extremalen Werte für  $C_1$  in den Punkten A oder B statt. In Fig. 18 entsprechen die Punkte A und B bei  $C_1 = 0.0$  einer Verzweigung, bei  $C_1 = 0.1$  einem dynamischen Sprung auf die für jeden Wert von  $C_2$  stabile Linie.

#### 4.6 Schlußfolgerungen

Die einfache exakte Lösung des untersuchten Randwertproblems für den flachen Sinusbogen basiert wesentlich auf der einfachen Form des unverformten Bogens und der einfachen Form der berücksichtigten Belastung. Sowohl die Mittellinie des unverformten Bogens als auch die Belastung können genau wie die Vertikalverschiebung  $\tilde{u}_3$  exakt mit den zwei ersten Koordinatenfunktionen der Basismenge  $M(4.4.2)$  ausgedrückt werden. Die erhaltene Lösung ermöglicht es, die Wechselwirkung zwischen den Verhaltensvariablen  $\phi$  und  $\psi$  zu untersuchen und damit auch Aussagen über die Approximationsmöglichkeiten mit Hilfe einfacher Katastrophen, z.B. mit Hilfe der Cusp-Katastrophe, zu erhalten.

Wenn z.B. im Funktional (4.4.11)  $\psi = 0$  eingesetzt wird, dann folgt

$$f_1(\psi, 0; \gamma_0, C_1) = \phi^3 + \left(\frac{1}{3} - \gamma_0^2\right)\phi - C_1 = 0 \quad (4.6.1)$$

mit der Entartungsfunktion

$$3\phi^2 + \frac{1}{3} - \gamma_0^2 = 0 \quad (4.6.2)$$

während aus (4.4.15) für  $\psi = 0$

$$3\phi^4 + \phi^2 \left( \frac{13}{3} - 4\gamma_0^2 \right) + \left( \frac{1}{3} - \gamma_0^2 \right) \left( \frac{4}{3} - \gamma_0^2 \right) = 0 \quad (4.6.3)$$

erhalten wird Ähnlich wird für  $\phi = 0$

$$f_2(0, \psi; \gamma_0, C_2) = \psi^3 + \left( \frac{4}{3} - \gamma_0^2 \right) \psi - C_2 = 0 \quad (4.6.4)$$

mit der Entartungsfunktion

$$3\psi^2 + \frac{4}{3} - \gamma_0^2 = 0 \quad (4.6.5)$$

und nicht

$$3\psi^4 + \psi^2 \left( \frac{13}{3} - 4\gamma_0^2 \right) + \left( \frac{1}{3} - \gamma_0^2 \right) \left( \frac{4}{3} - \gamma_0^2 \right) = 0 \quad (4.6.6)$$

erhalten. Eine völlig falsche Stabilitätsaussage kann für Sattelpunkte erhalten werden, wenn diese in einer Cusp-Katastrophe als lokale Minima erhalten und als stabile Lösungsäste interpretiert werden.

Zumindestens ebenso vorsichtig muß vorgegangen werden, wenn versucht wird  $\phi$  oder  $\psi$  als passive Koordinaten zu eliminieren und das Verhalten der Lösung mit Hilfe einer elementaren Katastrophe höherer Ordnung zu beschreiben. Einige Lösungsäste können übergangen werden und die erhaltenen Stabilitätsaussagen können falsch interpretiert werden.

THOMPSON [227] vermutet, daß die, hier in Fig. 14 für  $\gamma_0^2 = \frac{4}{3}$  und für  $\gamma_0^2 = 2$  erhaltenen, Verzweigungsdiagramme durch die Theorie elementarer Katastrophen ausgeschlossen werden. Da diese Verzweigungsdiagramme hier jedoch für eine exakte Lösung vorliegen, muß als richtige Schlußfolgerung angenommen werden, daß die elementare Katastrophentheorie nicht in der Lage ist, diese Lösungen exakt wiederzugeben.

Entartungsflächen bezeichnen den geometrischen Ort, an dem

die Determinante des Hessians eines zugrundeliegenden Funktionals, das Vorzeichen wechseln kann. Damit verbunden ist eine mögliche Änderung des Stabilitätsverhaltens der stationären Punkte auf verschiedenen Seiten der Entartungsfläche. So besteht beispielsweise in Fig. 14 für  $\gamma_0^2 > \frac{4}{3}$  der äußere Bereich aus stabilen lokalen Minima, der innerste Bereich aus instabilen lokalen Maxima und der Bereich zwischen den beiden Kurven des Entartungsdiagramms aus instabilen Sattelpunkten. Im betrachteten Fall des flachen Sinusbogens kann somit die äußere Kurve als Stabilitätsgrenze angesehen werden. Die topologische Vielfalt der möglichen degenerierten stationären Punkte mit einer verschwindenden Determinante ist jedoch, wie z.B. in POSTON, STEWART [186] in Kapitel 4 angedeutet, erheblich. Eine unkritische Anwendung einer erscheinenden Entartungsfläche zur Bestimmung der Stabilitätsgrenzen kann daher zu falschen Stabilitätsaussagen führen.

Die im Ingenieurwesen gebräuchlichen Lastparameter-Verschiebungsdiagramme für einen bestimmten Punkt eines Bogens oder einer Schale können nur unter Vorbehalt zur Stabilitätsbestimmung angewendet werden. Die Verschiebungen sind im allgemeinen, wenn nicht anders bewiesen, Elemente eines Raumes mit unbekannter Mächtigkeit. Projektionen auf Ebenen verschiedener aktiver Verhaltensvariablen sind informativer. Im betrachteten Fall des flachen Sinusbogens genügt es Lastparameter-Verhaltensvariable-Kurven auf zwei Ebenen zu projizieren, siehe z.B. Fig. 15 bis 18.

TEIL II: KURZE ÜBERSICHT ÜBER DIE METHODEN DER FUNKTIONALANALYSIS

1. DIE HILFSMITTEL DER FUNKTIONALANALYSIS

1.1 Bezeichnungen und Grundbegriffe

Die nachstehenden Symbole werden gelesen:

$\exists$  es existiert,

$\forall$  für jedes,

$:=$  die linke Seite wird definiert,

$=:$  die rechte Seite wird definiert.

Mengen werden mit großen lateinischen Buchstaben  $A, B, C$ , Elemente dieser Mengen mit kleinen lateinischen Buchstaben  $a, b, c$  bezeichnet.

Es bedeutet:

$\underline{a} \in A$  ; das Element  $\underline{a}$  ist in der Menge  $A$  enthalten,

$\underline{a} \notin A$  ;  $\underline{a}$  ist nicht in  $A$  enthalten,

$A \subset B$  ; die Menge  $A$  ist in der Menge  $B$  enthalten,

$A \subseteq B$  ;  $A$  ist in  $B$  enthalten oder  $A = B$ .

Besteht eine Menge  $M$  aus allen Elementen  $\underline{x}$  einer Menge  $E$ , die eine gewisse Eigenschaft  $P$  besitzen, so schreiben wir

$$M := \{\underline{x} \in E, \underline{x} \text{ besitzt die Eigenschaft } P\} .$$

Wir bezeichnen mit:

$$A \cup B := \{\underline{a}; \underline{a} \in A \text{ oder } \underline{a} \in B\}$$

die *Vereinigung* der Mengen  $A$  und  $B$ ,

$$A \cap B := \{\underline{a}; \underline{a} \in A \text{ und } \underline{a} \in B\}$$

den *Durchschnitt* der Mengen  $A$  und  $B$ ,

$$A \setminus B := \{ \underline{a}; a \in A \text{ und } a \notin B \}$$

die Komplementärmenge von B bezüglich A

$$A \times B := \{ (\underline{a}, \underline{b}); a \in A, b \in B \}$$

die Menge aller Paare (a,b);

das *cartesische Produkt*,

$$\emptyset := \{ \underline{x}; \underline{x} \neq \underline{x} \} \text{ die leere Menge}$$

$$\mathbb{R} := \{ x; -\infty < x < \infty \} \text{ die Menge der reellen Zahlen}$$

$$[a, b] := \{ x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b \} \text{ das abgeschlossene Intervall}$$

$$(a; b) := \{ x \in \mathbb{R}; a < x < b \} \text{ das offene Intervall}$$

definieren iterativ

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} := \{ (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}; i=1, 2, \dots, n \}$$

und schreiben kurz

$$\underline{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sowie

$$\underline{0} := (0, 0, \dots, 0).$$

Für  $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  definieren wir die *Addition*

$$\underline{x} + \underline{y} := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

und die *Multiplikation mit  $\lambda$*

$$\lambda \underline{x} := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Damit hat  $\mathbb{R}^n$  die Struktur eines linearen Vektorraumes.

Die Elemente  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_r \in \mathbb{R}^n$  werden *linear abhängig* genannt, wenn

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r; \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_r^2 \neq 0$$

und

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_r \underline{v}_r = \underline{0}. \quad (1.1.1)$$

Wenn (1.1.1) nur möglich ist für  $\lambda_i = 0, i=1,2,\dots,r$  dann sind die  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_r$  *linear unabhängig*.

Die Elemente  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_r$  aus  $\mathbb{R}^n$  spannen einen *Unterraum*  $W \subset \mathbb{R}^n$  auf, wenn:

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}; \quad \forall \underline{u} \in W$$

eine Darstellung

$$\underline{u} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_r \underline{v}_r$$

möglich ist.

Die Dimension von  $W$ , kurz  $\dim W$  geschrieben ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Elementen  $\underline{v}_i \in W$ . Diese  $\underline{v}_i$  bilden eine *Basis* von  $W$ .

Neben diesen Eigenschaften, welche die algebraische Struktur des linearen Raumes  $\mathbb{R}^n$  bilden, wird auch die topologische Struktur von  $\mathbb{R}^n$  angewendet. Eine Topologie kann z.B. über das *Skalarprodukt*

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{x}, \underline{y}) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i =: \langle \underline{x} | \underline{y} \rangle \end{cases} \quad (1.1.2)$$

und die induzierte *euklidische Norm*

$$\| \cdot \| : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\} \\ \underline{v} \mapsto \langle \underline{v} | \underline{v} \rangle^{1/2} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

eingeführt werden. Die Norm  $\| \underline{x} \|$  gibt den Abstand des Element-

tes  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  von  $\underline{0}$  und  $\|\underline{u}-\underline{v}\|$  den Abstand zwischen  $\underline{u}$  und  $\underline{v}$  wieder.

Die *offene Kugel* mit dem Mittelpunkt in  $\underline{x}$  und dem Radius  $b > 0$

$$K(\underline{x}, b) := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n; \|\underline{x}-\underline{x}\| < b \} \quad (1.1.4)$$

und die zugehörige *Sphäre*

$$S(\underline{x}, b) := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n; \|\underline{x}-\underline{x}\| = b \} \quad (1.1.5)$$

entsprechen in dieser Topologie einer Kugel und einer Sphäre im üblichen Sinn.

Die Menge

$$\{ \underline{x}_n \} := \{ \underline{x}_n \in \mathbb{R}^k; n=1, 2, \dots, \} \quad (1.1.6)$$

wird eine Folge genannt.

Die Folge  $\{ \underline{x}_n \}$  konvergiert gegen den Punkt  $\underline{x}$ ,  $\underline{x}_n \rightarrow \underline{x}$ , wenn  $\|\underline{x}_n - \underline{x}\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .  $\{ \underline{x}_n \}$  bildet eine CAUCHY-Folge wenn

$$\|\underline{x}_n - \underline{x}_m\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty. \quad (1.1.7)$$

Der Raum  $E$  mit der Norm  $\|\cdot\|$  wird *vollständig* genannt, wenn jede CAUCHY-Folge aus  $E$  einen Grenzwert in  $E$  besitzt.

Die Menge  $A$  ist *beschränkt*, wenn

$$EK(\underline{0}, b) \supset A; \quad 0 < b < \infty.$$

$\underline{x}$  wird *innerer Punkt* von  $A$  genannt, wenn

$$EK(\underline{x}, \varepsilon) \subset A; \quad \varepsilon > 0.$$

$A$  ist *offen* wenn

$$\forall \underline{a} \in A; EK(\underline{a}, \varepsilon) \subset A.$$

Eine Menge  $A$  wird *zusammenhängend* genannt, wenn  $\forall \underline{a}, \underline{b} \in A$  ein Streckenzug existiert, der  $\underline{a}$  mit  $\underline{b}$  verbindet und ganz in  $A$  verläuft.

Eine zusammenhängende offene Menge wird Gebiet genannt.

$\tilde{x}$  wird Grenzwert der Menge  $A$  genannt, wenn

$$\exists \{ \tilde{x}_n \} \in A, \quad \| \tilde{x}_n - \tilde{x} \| \rightarrow 0, \quad \forall n \rightarrow \infty.$$

Wenn zu  $A$  alle Grenzwerte von  $A$  addiert werden, wird das *abgeschlossene Gebiet*  $A$  erhalten.

Eine abgeschlossene, beschränkte Menge wird eine *kompakte Menge* genannt.

Jede Folge aus der kompakten Menge  $A$  enthält eine konvergente Teilfolge und deren Grenzwert liegt in  $A$ .

Die Menge

$$M := \{ \tilde{x} \in \bar{A}; \tilde{x} \notin A \} \quad (1.1.8)$$

wird *Rand* von  $A$  genannt.

## 1.2 Abbildungen

$E$  und  $F$  seien nichtleere Mengen. Eine *Abbildung*  $\tilde{f}$  von  $E$  in  $F$  ordnet jedem  $\tilde{x} \in E$  ein und nur ein  $\tilde{y} \in F$  zu, das auch mit  $\tilde{f}(\tilde{x})$  bezeichnet und das Bild von  $\tilde{x}$  genannt wird. Es ist

$E$  die *Definitionsmenge*  
 $F$  die *Zielmenge*  
 $\tilde{f}$  die *Zuordnungsvorschrift* .

Wir benutzen die Schreibweise

$$\tilde{f} : \begin{cases} E \rightarrow F \\ \tilde{x} \mapsto \tilde{f}(\tilde{x}). \end{cases} \quad (1.2.1)$$

$E \rightarrow F$  bedeutet  $\tilde{f}(E) \subset F$ , nicht unbedingt  $\tilde{f}(E) = F$ ,  $\tilde{x} \mapsto \tilde{f}(\tilde{x})$  bedeutet, daß dem Element  $\tilde{x}$  das Element  $\tilde{f}(\tilde{x}) \in F$  zugeordnet wird.

Wenn die Zielmenge  $F = \mathbb{R}$  ist, sprechen wir von einer *Funktion* oder einem *Funktional*.

Wenn  $E$  und  $F$  bekannt sind, benutzen wir nur einen Teil der Bezeichnung z.B.  $\sin x$ ,  $x^2$  usw.

Zwei Abbildungen

$$\tilde{f}_1 : E_1 \rightarrow F_1$$

$$\tilde{f}_2 : E_2 \rightarrow F_2$$

sind *gleich*, wenn  $E_1 = E_2$ ,  $F_1 = F_2$  und

$$\tilde{f}_1(\tilde{x}) = \tilde{f}_2(\tilde{x}); \quad \forall \tilde{x} \in E_1 = E_2.$$

Es sei

$$\tilde{f} : E \rightarrow F \text{ gegeben.}$$

Für  $A \subset E$ ,  $B \subset F$  ist

$$\tilde{f}(A) := \{\tilde{f}(\tilde{x}) \in F; \tilde{x} \in A\} \text{ das Bild von } A$$

$$\tilde{f}^{-1}(B) := \{\tilde{x} \in E; \tilde{f}(\tilde{x}) \in B\} \text{ das Urbild von } B.$$

$\tilde{f}$  heißt

*surjektiv* wenn  $\tilde{f}(E) = F$ ,

*injektiv* wenn aus  $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{y})$  folgt  $\tilde{x} = \tilde{y}$ ,

*bijektiv* wenn  $\tilde{f}$  surjektiv und injektiv ist.

Jede injektive Abbildung

$$\tilde{f} : E \rightarrow F$$

besitzt eine *Umkehrabbildung*

$$\tilde{f}^{-1} : \begin{cases} f(E) \rightarrow E \\ f(x) \mapsto x \end{cases} . \quad (1.2.2)$$

Bijektive Abbildungen spielen eine wichtige Rolle bei einer dualen Darstellung von geometrischen und statischen Feldgrößen.

Die Abbildung

$$i_E : \begin{cases} E \rightarrow E \\ \underline{x} \mapsto \underline{x} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

nennen wir *identische* Abbildung.

Für  $\underline{f} : E \rightarrow F$ ;  $\underline{g} : F \rightarrow G$  versteht man unter dem Produkt  $\underline{g} \circ \underline{f}$

$$\underline{g} \circ \underline{f} : \begin{cases} E \rightarrow G \\ \underline{x} \mapsto \underline{g}(\underline{f}(\underline{x})) \end{cases} . \quad (1.2.4)$$

Für  $\underline{g} = \underline{f}$  haben Potenzen einen Sinn. Wir definieren

$$\begin{aligned} \underline{f}^0 &:= i_E \\ \underline{f}^n &:= \underline{f}^{n-1} \circ \underline{f}, \quad n=1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Bemerkung 1.2.1

Manchmal wird eine unterschiedliche Schreibweise benutzt. So bezeichnet allgemein

$$\sin^2(x) = (\sin x)^2 \text{ und nicht } \sin(\sin x). \quad \square$$

Bemerkung 1.2.2

Es sei  $\underline{f}$  bijektiv und  $E \neq F$  mit

$$\underline{f} := \begin{cases} E \rightarrow F \\ \underline{x} \mapsto \underline{f}(\underline{x}) \end{cases} .$$

$$\exists \underline{f}^{-1} : \begin{cases} F \rightarrow E \\ \underline{f}(\underline{x}) \mapsto \underline{x} \end{cases} ,$$

$$\exists i_E := \underline{f}^{-1} \circ \underline{f} : \begin{cases} E \rightarrow E \\ \underline{x} \mapsto \underline{f}^{-1} \circ \underline{f}(\underline{x}) \end{cases} ,$$

$$\exists i_F := \underline{f} \circ \underline{f}^{-1} : \begin{cases} F \rightarrow F \\ \underline{f}(\underline{x}) \mapsto \underline{f} \circ \underline{f}^{-1}(\underline{f}(\underline{x})) \end{cases}$$

und  $i_E \neq i_F$  .  $\square$

Die Abbildung  $\underline{f} : E \rightarrow F$  ist *stetig* im Punkt  $\underline{x}$  wenn aus  $\underline{x}_n \rightarrow \underline{x}$  folgt  $\underline{f}(\underline{x}_n) \rightarrow \underline{f}(\underline{x})$

oder äquivalent

$$\forall K(\underline{x}, \varepsilon) \subset F, \quad \exists K(\underline{x}, \delta) \subset E$$

mit  $\underline{f}(K(\underline{x}, \delta)) \subseteq K(\underline{f}(\underline{x}), \varepsilon)$ .

Die Abbildung  $\underline{f} : E \rightarrow F$  wird *beschränkt* genannt, wenn sie beschränkte Mengen auf beschränkte Mengen abbildet.

Die endliche Folge nichtnegativer ganzer Zahlen

$$\underline{\alpha} := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

wird *Multi-Index* genannt.

Es sei

$$|\underline{\alpha}| := \sum_{j=1}^n \alpha_j$$

$$\underline{\alpha}! := \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n! = \prod_{j=1}^n \alpha_j!$$

für

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\underline{x}^{\underline{\alpha}} := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

und für hinreichen glatte  $\underline{f}(\underline{x})$

$$D^{\underline{\alpha}} \underline{f}(\underline{x}) := \frac{\partial^{|\underline{\alpha}|} \underline{f}(\underline{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} .$$

*Träger* einer Abbildung  $\underline{f}(\underline{x})$  wird die Abschließung der Menge der Punkte genannt, für die  $\underline{f}(\underline{x}) \neq 0$ . Der Träger der Abbildung  $\underline{f}(\underline{x})$  wird  $\text{supp } \underline{f}$  genannt und es ist

$$\text{supp } \underline{f} := \overline{\{\underline{x} \in \Omega; \underline{f}(\underline{x}) \neq 0\}} \quad (1.2.6)$$

Mit  $C_0(\Omega)$  wird die Klasse der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in  $\Omega$  bezeichnet. Diese Funktionen sind in einem Randstreifen von  $\Omega$  identisch Null.

Die Menge aller Funktionen  $f$ , welche zusammen mit allen Ableitungen  $D^\alpha f(\underline{x})$  für  $|\alpha| \leq p$ ;  $0 \leq p < \infty$  stetig sind, wird mit  $C^p(\Omega)$  bezeichnet. Der Kürze halber wird  $C(\Omega) = C^0(\Omega)$  geschrieben. Wir definieren noch

$$C^p_0(\Omega) := C^p(\Omega) \cap C_0(\Omega)$$

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{l=1}^{\infty} C^l(\Omega)$$

$$C^\infty_0(\Omega) := \bigcap_{l=1}^{\infty} C^l_0(\Omega)$$

Für  $f(\underline{x}) \in C^p_0(\Omega)$  wird im Komplement  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$  der Wert Null angenommen, d.h. daß diese Funktionen auf  $\mathbb{R}^n$  erweitert werden können.

Für  $\phi(\underline{x}) \in C^\infty(\Omega)$  hat die TAYLOR-Formel

$$\phi(\underline{x}) := \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha \phi\left(\frac{\underline{x}}{\alpha}\right) (\underline{x}-\frac{\underline{x}}{\alpha})^\alpha \quad (1.2.7)$$

einen Sinn.

Bei Abbildungen  $\underline{f}$  benutzen wir als Kurzbezeichnung für entsprechende cartesische Produkte z.B.

$$C^p(\Omega) := C^p(\Omega) \times \dots \times C^p(\Omega) = (C^p(\Omega))^n .$$

### 1.3 LEBESQUE-Maß und LEBESQUE-Integral

Energiebetrachtungen für kontinuierliche elastische Strukturen können nur dann exakt durchgeführt werden, wenn hinreichend allgemeine Definitionen für den Inhalt, das Volumen, die Fläche oder die Länge und eine hinreichend allgemeine und vielseitige Definition für Integrale zur Verfügung stehen. Als natürliche hinreichend vielseitige Verallgemeinerung für Volumen, Fläche und Länge ist das LEBESQUE-Maß bekannt. Die Vollständigkeit der angewendeten Funktionenräume, Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integral und viele andere nützliche mathematische Eigenschaften können nur dann bewiesen werden, wenn das

sogenannte LEBESQUE-Integral angewendet wird. Hier sollen nur die allernotwendigsten Grundlagen für das LEBESQUE-Maß und das LEBESQUE-Integral skizziert werden. Eine kurze Übersicht über diese Thematik ist bei ADAMS [139], eine gründlichere Theorie z.B. bei BÖGEL, TASCHE [128] oder MUNROE [101] zu finden.

Ein System  $\Sigma$  von Teilmengen aus  $R^n$  welches den Bedingungen

$$(i) \quad R^n \in \Sigma,$$

$$(ii) \quad \text{Aus } A \in \Sigma \text{ folgt } A^C := \{x \in R^n; x \notin A\} \in \Sigma,$$

$$(iii) \quad \text{Aus } A_j \in \Sigma, j=1,2,\dots; \text{ folgt } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma. \quad (1.3.1)$$

genügt, wird eine  $\sigma$ -Algebra genannt.

Als Implikation von (i bis iii) erhalten wir

$$(iv) \quad \emptyset \in \Sigma$$

$$(v) \quad \text{Aus } A_j \in \Sigma; j=1,2,\dots; \text{ folgt } \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma.$$

$$(vi) \quad \text{Aus } A, B \in \Sigma \text{ folgt } A \setminus B \in \Sigma. \quad (1.3.2)$$

Eine reelwertige auf einer  $\sigma$ -Algebra erklärte Funktion  $\mu$ , welche für

$$A_j \in \Sigma; j=1,2,\dots \text{ und } A_j \cap A_k = \emptyset \text{ für } j \neq k$$

abzählbar additiv ist, d.h.

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \quad (1.3.3)$$

erfüllt, wird ein Maß genannt.

Es gilt

Satz 1.3.1 (Theorem 1.3.5 ADAMS [139])

Es existiert eine  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen aus  $R^n$  und ein po-

sitives Maß  $\mu$  mit den folgenden Eigenschaften.

- (i) Jede offene Menge aus  $\mathbb{R}^n$  gehört zu  $\Sigma$ .
- (ii) Aus  $A \subset B$ ,  $B \in \Sigma$  und  $\mu(B) = 0$  folgt  $A \in \Sigma$  und  $\mu(A) = 0$ .
- (iii) Aus  $A := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n; a_j \leq x_j \leq b_j, j=1,2,3,\dots,n\}$  folgt  $A \in \Sigma$  und  $\mu(A) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ .
- (iv)  $\mu$  ist translationsinvariant, d.h. aus  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $A \in \Sigma$  folgt  $\underline{x} + A := \{\underline{x} + \underline{y}; \underline{y} \in A\} \in \Sigma$  und  $\mu(\underline{x} + A) = \mu(A)$ .  $\square$

Die Elemente aus  $\Sigma$  werden *LEBESQUE-messbare Untermengen* aus  $\mathbb{R}^n$  und  $\mu$  das *LEBESQUE-Maß* in  $\mathbb{R}^n$  genannt.

*Charakteristische Funktion* von  $A \subset \mathbb{R}^n$  wird die Funktion

$$\chi_A(\underline{x}) := \begin{cases} 1 & \text{für } \underline{x} \in A \\ 0 & \text{für } \underline{x} \notin A \end{cases} \quad (1.3.4)$$

genannt.

Wir sagen eine Aussage gilt *fast überall* (f.ü) auf der Menge  $A$ , wenn  $\exists B \subset A \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\mu(B) = 0$  und die Aussage  $\forall \underline{x} \in A \setminus B$  gilt.

Eine auf einer messbaren Menge  $A$  definierte Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$  wird *messbar* genannt, wenn  $\forall a \in \mathbb{R}$  die Menge

$$\{\underline{x}; f(\underline{x}) > a\} \quad (1.3.5)$$

messbar ist.

Das *LEBESQUE-Integral* einer reellwertigen, auf einer messbaren Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  erklärten messbaren Funktion  $f$ , kann auf folgende Weise definiert werden:

Für die Treppenfunktion

$$s = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j} \quad \text{mit } A_j \subset A : A_j \text{ messbar}$$

definieren wir

$$\int_A s(\underline{x}) dA := \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j). \quad (1.3.6)$$

Für eine nichtnegative meßbare Funktion  $f$  definieren wir

$$\int_A f(\underline{x}) dA := \sup \int_A s(\underline{x}) dA \quad (1.3.7)$$

wobei das Supremum über meßbare Treppenfunktionen

$$0 \leq s(\underline{x}) \leq f(\underline{x}) \text{ für } \underline{x} \in A \text{ und } s = 0 \text{ für } \underline{x} \notin A \quad (1.3.8)$$

errechnet wird.

Wenn  $f$  meßbar und reelwertig ist, erklären wir

$$f = f^+ - f^- \text{ mit } f^+ := \max(f, 0), f^- := -\min(f, 0)$$

und definieren

$$\int_A f(\underline{x}) dA = \int_A f^+(\underline{x}) dA - \int_A f^-(\underline{x}) dA. \quad (1.3.9)$$

Wenn beide Integrale auf der rechten Seite endlich sind, sagen wir, daß  $f$  auf  $A$  LEBESQUE-*integrierbar* ist. Die Klasse der integrierbaren Funktionen bildet einen linearen Raum und wird mit  $L_1(A)$  bezeichnet.

Die für theoretische Untersuchungen wichtige Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration wird im folgenden Satz betrachtet.

Satz 1.3.2 (ADAMS [139], Theorem 1.4.5)

Es sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  meßbar und  $\{f_n\}$  eine Folge meßbarer Funktionen welche auf  $A$  punktweise gegen eine Grenze konvergieren. Wenn eine Funktion  $g \in L_1(A)$  existiert so daß  $|f_n(\underline{x})| \leq g(\underline{x}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \underline{x} \in A$  dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(\underline{x}) dA = \int_A (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\underline{x})) dA. \quad \square \quad (1.3.10)$$

Anwendung findet auch der

Satz von FUBINI 1.3.2 (ADAMS [139], Theorem 1.49)

Es sei  $f$  eine meßbare Funktion auf  $\mathbb{R}^{n+m}$  und mindestens eines der Integrale

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(\underline{x}, \underline{y})| \, dR^n(\underline{x}) \, dR^m(\underline{y}) \\ I_2 &= \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(\underline{x}, \underline{y})| \, dR^n(\underline{x}) \right) dR^m(\underline{y}) \\ I_3 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |f(\underline{x}, \underline{y})| \, dR^m(\underline{y}) \right) dR^n(\underline{x}) \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

existiert und ist endlich. Dann gilt:

- (i)  $f(\cdot, \underline{y}) \in L_1(\mathbb{R}^n)$  (f.ü.) auf  $\mathbb{R}^m(\underline{y})$
- (ii)  $f(\underline{x}, \cdot) \in L_1(\mathbb{R}^m)$  (f.ü.) auf  $\mathbb{R}^n(\underline{x})$
- (iii)  $\int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}, \cdot) \, dR^n(\underline{x}) \in L_1(\mathbb{R}^m)$
- (iv)  $\int_{\mathbb{R}^m} f(\cdot, \underline{y}) \, dR^m(\underline{y}) \in L_1(\mathbb{R}^n)$  und
- (v)  $I_1 = I_2 = I_3$ .  $\square$

#### 1.4 Lineare Vektorräume

Die im ersten Teil betrachteten nichtlinearen Probleme der Elastostatik werden als Randwertprobleme, oder äquivalent als Variationsprobleme in geometrischen und teilweise auch in statischen Feldgrößen formuliert. Eine mathematisch sinnvolle und exakte Beschreibung und Analyse kann nach dem jetzigen Stand der mathematischen Wissenschaften nur auf einer beschränkten Klasse von Abbildungen mit einer verträglichen algebraischen und topologischen Struktur durchgeführt werden. Die algebraische Struktur dieser Klassen von Abbildungen ist eine Verall-

gemeinerung der bekannten algebraischen Struktur des euklidischen Raumes.

Eine Menge  $V$  von Elementen  $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \dots$  wird *linearer Vektorraum* über  $R$  genannt, wenn  $\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V, \forall \alpha, \beta \in R$  eine Summe

$$\underline{x} + \underline{y} \in V \quad (1.4.1)$$

und ein skalares Produkt

$$\alpha \underline{x} \in V \quad (1.4.2)$$

erklärt sind, so daß die folgenden Regeln gelten:

- (i)  $\underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) = (\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z}$
- (ii)  $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$
- (iii)  $\exists \underline{0} \in V ; \underline{x} + \underline{0} = \underline{x}$
- (iv)  $\exists (-\underline{x}) ; \underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{0}$
- (v)  $\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha \underline{x} + \alpha \underline{y} \quad (1.4.3)$
- (vi)  $(\alpha + \beta) \underline{x} = \alpha \underline{x} + \beta \underline{x}$
- (vii)  $\alpha \beta \underline{x} = \alpha(\beta \underline{x})$
- (xiii)  $\exists \underline{1} ; \underline{1} \underline{x} = \underline{x}$ .

Der abstrakte Charakter der betrachteten Vektorräume ist in den folgenden Beispielen deutlich zu erkennen.

#### Beispiel 1.4.1

Es sei  $E$  eine nichtleere Menge und  $V$  ein reeller Vektorraum. Die Menge  $F$  aller Funktionen  $\underline{f} \in F$

$$\underline{f} : E \rightarrow V$$

wird mit den Definitionen

$$\begin{aligned} (\underline{f} + \underline{g})(\underline{x}) &:= \underline{f}(\underline{x}) + \underline{g}(\underline{x}) \\ (\alpha \underline{f})(\underline{x}) &:= \alpha \underline{f}(\underline{x}) \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

zu einem linearen Vektorraum.  $\square$

Beispiel 1.4.2

Eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen

$$x' \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} := \{x' \in \mathbb{R}; x > 0\}$$

und  $x \in \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$x' = e^x. \tag{1.4.5}$$

Die Linearisierung

$$\begin{aligned} \widehat{x'+y'} &= \widehat{e^x + e^y} := e^{x+y} = e^x e^y = x'y' \\ \widehat{\alpha x'} &= \widehat{\alpha e^x} := e^{\alpha x} = (e^x)^\alpha = (x')^\alpha \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

führt zu einem linearen Raum mit 1 als Nullelement. Diese Linearisierung liefert den beim Rechenschieber realisierten logarithmischen Maßstab. □

In der sogenannten Variationsrechnung werden auch die folgenden linearen Vektorräume angewendet:

- (i) Die Menge  $\mathbb{R}^n$  aller n-Tupel  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$
- (ii) Die Menge  $l^p$ ;  $1 \leq p < \infty$  aller Folgen  $x := (\xi_1, \xi_2, \dots)$  mit  $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$ .
- (iii) Die Menge  $L_p(\Omega)$  der auf dem Gebiet  $\Omega$  definierten Funktionen  $\phi$  mit  $\int_{\Omega} |\phi|^p d\Omega < \infty$ .
- (iv) Die Menge  $C^n(\Omega)$ .
- (v) Die Menge  $C^n_0(\Omega)$ .

Es seien  $E$  und  $F$  reelle Vektorräume.

Die Abbildung  $\underline{A} : E \rightarrow F$  heißt *lineare Abbildung* oder *Homomorphismus* wenn

$$\forall \underline{x}, \underline{y} \in E; \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \underline{A}(\underline{x}+\underline{y}) &= \underline{A}\underline{x} + \underline{A}\underline{y} \\ \underline{A}(\alpha\underline{x}) &= \alpha(\underline{A}\underline{x}). \end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Die Menge aller linearen Abbildungen  $\underline{E} \rightarrow \underline{F}$  wird mit  $L(\underline{E}, \underline{F})$  bezeichnet.  $L(\underline{E}, \underline{F})$  wird ein linearer Vektorraum, wenn

$$\begin{aligned} (\underline{A}+\underline{B})\underline{x} &:= \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{x} \\ (\alpha\underline{A})\underline{x} &:= \alpha(\underline{A}\underline{x}) \end{aligned} \tag{1.4.7}$$

$\forall \underline{x} \in \underline{E}, \forall \underline{A}, \underline{B} \in L(\underline{E}, \underline{F})$  erklärt wird, wobei das Nullelement die Nullabbildung ist. Der Nullraum  $\ker \underline{A} \in L(\underline{E}, \underline{F})$  ist gegeben durch

$$\ker \underline{A} := \{ \underline{x} \in \underline{E}; \underline{A}\underline{x} = \underline{0} \} \tag{1.4.8}$$

Bei linearen Problemen wird gesucht

- (i) für welche  $\underline{y} \in \underline{F}$  die Gleichung  $\underline{A}\underline{x} = \underline{y}$  lösbar ist (Bildbereich) und
- (ii) die Lösungsmenge.

Besitzt die Gleichung  $\underline{A}\underline{x} = \underline{y}$  die beiden Lösungen  $\underline{x}_0$  und  $\underline{x}_1$ , so ist  $\underline{A}(\underline{x}_1 - \underline{x}_0) = \underline{0}$ , also  $\underline{x}_1 - \underline{x}_0 \in \ker \underline{A}$  und damit  $\underline{x}_1 = \underline{x}_0 + \ker \underline{A}$ . Ist  $\underline{x}_1 \in \underline{x}_0 + \ker \underline{A}$ , so ist auch  $\underline{A}\underline{x}_1 = \underline{A}\underline{x}_0 = \underline{y}$ . Daraus folgt

Satz 1.4.1 (HEUSER [141], Satz 5.1)

Die Gesamtheit der Lösungen von  $\underline{A}\underline{x} = \underline{y}$  läßt sich mit irgendeiner Lösung  $\underline{x}_0$  darstellen in der Form  $\underline{x}_0 + \ker \underline{A}$ .  $\underline{A}$  ist genau dann injektiv, wenn  $\ker \underline{A} = \{0\}$ , d.h. wenn aus  $\underline{A}\underline{x} = \underline{0}$  stets  $\underline{x} = \underline{0}$  folgt.  $\square$

Ist  $\underline{A}$  injektiv, dann definieren wir die auf  $\underline{A}(\underline{E})$  definierte Umkehrabbildung mit  $\underline{A}^{-1}$  und nennen sie die zu  $\underline{A}$  inverse Abbildung.

Satz 1.4.2 (HEUSER [141], Satz 5.2)

Die lineare Abbildung  $\underline{A} : \underline{E} \rightarrow \underline{F}$  ist genau dann bijektiv, wenn es lineare Abbildungen  $\underline{B}$  und  $\underline{C}$  von  $\underline{E}$  in  $\underline{F}$  mit

$$\tilde{\tilde{B}}A = i_E \text{ und } A\tilde{\tilde{C}} = i_F$$

gibt. In diesem Falle ist  $\tilde{B} = \tilde{C} = \tilde{A}^{-1}$ .  $\square$

Eine bijektive lineare Abbildung  $\tilde{A} : E \rightarrow F$  wird *Isomorphismus* genannt. Eine bijektive Abbildung  $\tilde{f} : E \rightarrow F$  wird *homöomorph* oder ein *Homöomorphismus* genannt, wenn sowohl  $\tilde{f}$  als auch  $\tilde{f}^{-1}$  stetig ist.

Die Menge  $A \subset V$  heißt linearer Teilraum von  $V$  wenn

$$\alpha_1 \tilde{x}_1 + \alpha_2 \tilde{x}_2 \in A; \forall \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in A, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Somit enthält jeder lineare Teilraum  $0$  und mit  $\tilde{x}$  auch  $(-\tilde{x})$ . Der Durchschnitt beliebig vieler linearer Teilräume von  $V$  ist wieder ein linearer Teilraum. Für jedes  $A \subset V; A \neq \emptyset$  existiert  $L(A)$ , die *lineare Hülle* von  $A$  die gleich dem Durchschnitt aller  $A$  enthaltenen linearen Teilräume ist. Die (unendlich-dimensionale) Menge  $\emptyset \neq A \subset V$  heißt linear unabhängig, wenn für jede endliche Teilmenge  $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n\}$  von  $A$  die Bedingung

$$\alpha_1 \tilde{x}_1 + \alpha_2 \tilde{x}_2 + \dots + \alpha_n \tilde{x}_n = 0$$

nur für  $\alpha_i = 0, i=1,2,\dots,n$  erfüllt werden kann und heißt linear abhängig wenn mindestens ein  $\alpha_i \neq 0$  existiert. Eine linear unabhängige Menge  $B \subset V$  ist genau dann eine *Basis* von  $V$ , wenn

$$L(B) = V \tag{1.4.9}$$

gilt. Ist  $B$  eine Basis von  $V$ , so läßt sich jeder Vektor  $0 \neq \tilde{x} \in V$  in eindeutiger Weise als Linearkombination von Basisvektoren darstellen.

Die Wahl der linearen Vektorräume für die Lösung eines gegebenen Problems ist nicht eindeutig, sie hängt von der Erfahrung und der Intuition ab. Dies kann an einem einfachen Beispiel demonstriert werden.

Beispiel 1.4.3

Gesucht ist die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (1.4.10)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= x_1 \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen ist bekannt, daß

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (1.4.12)$$

eine allgemeine Lösung der Gl. (1.4.10) ist. Die Basisfunktionen  $\cos \omega t$  und  $\sin \omega t$  spannen einen zweidimensionalen Raum auf. Die Bestimmung der exakten Lösung führt über (1.4.11) zu

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{x_1}{\omega} \sin \omega t. \quad (1.4.13)$$

Die Aufgabe (1.4.10 bis 11) kann äquivalent in einem unendlich dimensionalen Raum mit dem Ansatz

$$x(t) = \sum A_k t^k \quad (1.4.14)$$

gelöst werden. Die exakte Lösung ist

$$x(t) = x_0 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} \right] + \frac{x_1}{\omega} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] \quad (1.4.15)$$

Die algebraische Struktur der gewählten linearen Vektorräume reicht aus, wenn eine exakte Lösung des gegebenen Problems gefunden werden kann. Wenn jedoch nur eine Näherungslösung erhalten werden kann und die Frage nach der Güte der Approximation gestellt werden muß, dann ist es notwendig auch eine topologische Struktur zu beachten.

1.5 Metrische, normierte und Innenprodukträume

Für Randwertprobleme der Elastizitätstheorie können exakte Lösungen nur in Sonderfällen erhalten werden. Bei Abschätzungen

von Näherungslösungen spielen solche topologische Phänomene, wie Umgebung, Limes, Stetigkeit eine wichtige Rolle. Topologische und algebraische Strukturen müssen verträglich miteinander verbunden werden. Eine nichtleere Menge  $E$  wird topologischer Raum genannt, wenn  $\forall \underline{x} \in E$  ein Umgebungsfilter  $\underline{U}(\underline{x})$  von Teilmengen  $U \subset E$  so zugeordnet wird, daß die sogenannten Umgebungsaxiome, siehe z.B. HEUSER [141] S. 332, erfüllt werden. Auf einer Menge  $E$  können verschiedene Topologien eingeführt werden. Daher wird der topologische Raum  $E$  mit der Topologie  $\tau$  mit  $(E, \tau)$  bezeichnet. Die Vielfalt der möglichen Topologien wird drastisch eingeengt durch die Voraussetzungen, unter denen gewisse Operatoren, wie z.B. FRÉCHETSche Ableitungen oder das RIEMANNsche Integral, in diesen abstrakten Räumen sinnvoll sind und durch die Bedingungen für die Trace-Theoreme und z.B. der Satz über die Umkehrabbildung ihre Gültigkeit behalten. Die Wahl der für eine qualitative und quantitative Analyse einer gegebenen nichtlinearen Randwertaufgabe geeigneten linearen Vektorräume und der darauf erklärten Topologien muß sehr sorgfältig durchgeführt werden.

Für die im ersten Teil betrachteten Randwertprobleme der nichtlinearen Elastostatik genügte es reflexive BANACHräume einzuführen. Die aus der linearen Theorie bekannten HILBERTräume sind für die Bedürfnisse einer qualitativen Analyse zu arm. Einige Aussagen sind einfacher in metrischen Räumen zu formulieren.

Der lineare Vektorraum  $E$  wird zu einem *metrischen Raum*  $(E, \rho)$ , wenn auf  $E$  eine *Metrik*  $\rho$

$$\rho : \begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\underline{x}, \underline{y}) \mapsto \rho(\underline{x}, \underline{y}) \end{cases} \quad (1.5.1)$$

mit den Eigenschaften

$$(i) \quad \rho(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0; \text{ Aus } \rho(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \text{ folgt } \underline{x} = \underline{y}$$

$$(ii) \quad \rho(\underline{x}, \underline{y}) = \rho(\underline{y}, \underline{x}) \quad (1.5.2)$$

$$(iii) \quad \rho(\underline{x}, \underline{z}) \leq \rho(\underline{x}, \underline{y}) + \rho(\underline{y}, \underline{z})$$

$$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in E$$

erklärt ist.  $\rho(.,.)$  wird auch Entfernung oder Abstand genannt. Auf einem Vektorraum  $E$  können verschiedene Metriken erklärt werden.

Wenn die Metrik  $\rho$  des linearen metrischen Raumes  $(E, \rho)$  die Bedingungen für die *Translationsinvarianz*

$$\rho(\underline{x} + \underline{z}, \underline{y} + \underline{z}) = \rho(\underline{x}, \underline{y}) \quad (1.5.3)$$

und die *Homogenität*

$$\rho(\alpha \underline{x}, \alpha \underline{y}) = |\alpha| \rho(\underline{x}, \underline{y}) \quad (1.5.4)$$

$\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in (E, \rho), \forall \alpha \in \mathbb{R}$  erfüllt kann eine *Norm*

$$\|\cdot\| : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \underline{x} \mapsto \|\underline{x}\| = \rho(\underline{x}, \underline{0}) \end{cases} \quad (1.5.5)$$

mit den Eigenschaften

(i)  $\|\underline{x}\| \geq 0; \|\underline{x}\| = 0$  dann und nur dann wenn  $\underline{x} = \underline{0}$

(ii)  $\|\alpha \underline{x}\| = |\alpha| \|\underline{x}\| \quad (1.5.6)$

(iii)  $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$

eingeführt werden.

Der lineare Vektorraum  $E$  mit der Norm  $\|\cdot\|$  d.h.  $(E, \|\cdot\|)$  wird normierter Raum genannt. Die Norm ist translationsinvariant. Die topologischen Eigenschaften sind in jedem Punkt von  $(E, \|\cdot\|)$  gleich. Daher genügt es, in einem normierten Raum, die Umgebung des Nullpunktes zu untersuchen.

Wenn die Norm  $\|\cdot\|$  des Raumes  $(E, \|\cdot\|)$  die *Parallelogrammgleichung*

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|^2 + \|\underline{x} - \underline{y}\|^2 = 2(\|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2) \quad (1.5.7)$$

erfüllt, kann auf  $(E, \|\cdot\|)$  ein *Innenprodukt*

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{x}, \underline{y}) \mapsto \langle \underline{x} | \underline{y} \rangle \end{cases} \quad (1.5.8)$$

mit den Eigenschaften

- (i)  $\langle \underline{x} | \underline{y} \rangle = \langle \underline{y} | \underline{x} \rangle$
- (ii)  $\langle \alpha \underline{x}_1 + \beta \underline{x}_2 | \underline{y} \rangle = \alpha \langle \underline{x}_1 | \underline{y} \rangle + \beta \langle \underline{x}_2 | \underline{y} \rangle$  (1.5.9)
- (iii)  $\langle \underline{x} | \underline{x} \rangle > 0; \forall \underline{x} \neq 0$

definiert werden.

Mit  $\|\underline{x}\|^2 := \langle \underline{x} | \underline{x} \rangle$  wird jeder Innenproduktraum  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  zu einem normierten Raum  $(E, \|\cdot\|)$ . Mit  $\rho(\underline{x}, \underline{y}) := \|\underline{x} - \underline{y}\|$  wird jeder normierte Raum  $(E, \|\cdot\|)$  zu einem linearen metrischen Raum  $(E, \rho)$ . Somit gilt die Hierarchie:

$$(E, \rho) \supset (E, \|\cdot\|) \supset (E, \langle \cdot | \cdot \rangle). \quad (1.5.10)$$

Die Folge  $\{\underline{x}_k\} \subset (E, \rho)$  konvergiert gegen den Punkt  $\underline{x} \in (E, \rho)$ , kurz geschrieben

$$\underline{x}_n \rightarrow \underline{x} \quad \text{oder} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_k = \underline{x} \quad (1.5.11)$$

wenn  $\rho(\underline{x}_n, \underline{x}) \rightarrow 0$ , d.h.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0(\varepsilon); \rho(\underline{x}_n, \underline{x}) < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0(\varepsilon).$$

$\underline{x}$  ist der eindeutige Grenzwert der Folge  $(\underline{x}_k)$  in der Metrik  $\rho$ .

Die Folge  $\{\underline{x}_k\}$  in  $(E, \rho)$  heißt CAUCHY-Folge wenn  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon); \forall n, m \geq n_0; \rho(\underline{x}_n, \underline{x}_m) < \varepsilon$ . Eine CAUCHY-Folge braucht nicht konvergent zu sein.

Ein metrischer Raum  $(E, \rho)$  ist *vollständig*, wenn jede CAUCHY-Folge in  $(E, \rho)$  gegen ein Element in  $(E, \rho)$  konvergiert.

Ein metrischer Raum  $(E, \rho)$  wird durch die Abschließung (Vereinigung mit den Grenzwerten aller CAUCHY-Folgen aus  $(E, \rho)$  zu

einem vollständigen metrischen Raum. Die Abschließung von  $(E, \rho)$  wird mit  $(\bar{E}, \rho)$  bezeichnet.

Betrachten wir die Teilräume  $(A, \rho), (B, \rho), (C, \rho) \subseteq (E, \rho)$ . Wir sagen  $(A, \rho) \subset (B, \rho)$  ist dicht in  $(B, \rho)$  wenn  $(\bar{A}, \rho) \supseteq (B, \rho)$ . Ist  $(A, \rho)$  dicht in  $(B, \rho)$  und  $(B, \rho)$  dicht in  $(C, \rho)$ , dann ist auch  $(A, \rho)$  dicht in  $(C, \rho)$ .

Der metrische Raum  $(E, \rho)$  wird *separabel* genannt, wenn eine in  $(E, \rho)$  dichte Folge  $\{\tilde{x}_k\}$  existiert.

Alle diese Eigenschaften metrischer Räume gelten sowohl in normierten, als auch in Innenprodukträumen.

Ein vollständiger normierter Raum wird BANACH-Raum genannt.

Die Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  werden auf  $E$  äquivalent genannt, wenn  $m, M \in \mathbb{R}; \forall \tilde{x}$

$$m \leq \frac{\|\tilde{x}\|_1}{\|\tilde{x}\|_2} \leq M. \quad (1.5.12)$$

Auf dem cartesischen Produkt  $(E_1, \|\cdot\|_1) \times (E_2, \|\cdot\|_2)$  können verschiedene äquivalente Normen eingeführt werden. Eine Klasse der möglichen Normen ist z.B.

$$\|\|\cdot\|\| := (\|\cdot\|_1^p + \|\cdot\|_2^p)^{1/p}; \quad 1 \leq p \leq \infty. \quad (1.5.13)$$

Der BANACH-Raum  $(E_1, \|\cdot\|_1)$  ist eingebettet im BANACH-Raum  $(E_2, \|\cdot\|_2)$  in Zeichen  $(E_1, \|\cdot\|_1) \subset (E_2, \|\cdot\|_2)$ , wenn aus  $\tilde{x} \in (E_1, \|\cdot\|_1)$  folgt  $\tilde{x} \in (E_2, \|\cdot\|_2)$  und aus

$$\|\tilde{u}_n - \tilde{u}_0\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{folgt} \quad \|\tilde{u}_n - \tilde{u}_0\|_2 \rightarrow 0.$$

Wenn eine vom Parameter  $p$  abhängige Familie von BANACH-Räumen  $(E_p, \|\cdot\|_p)$  existiert, so daß

$$(E_{p_1}, \|\cdot\|_{p_1}) \subset (E_{p_2}, \|\cdot\|_{p_2}); \quad p_2 < p_1 \quad (1.5.14)$$

dann sprechen wir von einer BANACH-Skala.

Ein vollständiger Innenproduktraum wird HILBERT-Raum genannt.  
Wir sagen  $\underline{x}$  ist *orthogonal* zu  $\underline{y}$ , in Zeichen  $\underline{x} \perp \underline{y}$ , wenn  $\langle \underline{x} | \underline{y} \rangle = 0$ .

Satz 1.5.1 (PHYTAGORAS)

Ist  $\underline{x} \perp \underline{y}$ , dann gilt  $\langle \underline{x} + \underline{y} | \underline{x} + \underline{y} \rangle = \langle \underline{x} | \underline{x} \rangle + \langle \underline{y} | \underline{y} \rangle$ .  $\square$

Für zwei Mengen  $A, B \subset (E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  bedeutet  $A \perp B$  daß

$$\underline{a} \perp \underline{b}; \quad \forall \underline{a} \in A; \quad \forall \underline{b} \in B.$$

Ist  $A \subset (E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ , dann nennt man

$$A^\perp := \{ \underline{x} \in (E, \langle \cdot | \cdot \rangle), \underline{x} \perp A \} \quad (1.5.15)$$

den *Orthogonalraum* zu  $A$ .

Das System der Vektoren  $\{ \underline{e}_n \} \in (E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  wird ein *Orthonormalsystem*, kurz ONS genannt, wenn  $\forall n, m = 1, 2, 3, \dots$  gilt

$$\langle \underline{e}_n | \underline{e}_m \rangle = \delta_{nm} := \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases} \quad (1.5.16)$$

Das ONS  $\{ \underline{e}_n \}$  bildet eine Basis für  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  falls  $\forall \underline{x} \in (E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  gilt  $\underline{x} = \sum_k a_k \underline{e}_k$ .

Es gilt der folgende

Satz 1.5.2

Es sei  $\{ \underline{e}_n \}$  ein ONS für  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ , dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (i) Die endlichen Linearkombinationen von  $\{ \underline{e}_m \}$  liegen dicht in  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ .
- (ii) Das ONS  $\{ \underline{e}_n \}$  ist eine Basis in  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ .
- (iii) Es gilt die PARSEVALSche Identität

$$\langle \underline{x} | \underline{y} \rangle = \sum_k \langle \underline{x} | \underline{e}_k \rangle \langle \underline{y} | \underline{e}_k \rangle, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in (E, \langle \cdot | \cdot \rangle) \quad (1.5.17)$$

(iv) Es gilt die PARSEVALSche Gleichung

$$\sum_k \langle \underline{x} | \underline{e}_k \rangle^2 = \|\underline{x}\|^2; \forall \underline{x} \in (E, \langle \cdot | \cdot \rangle) . \quad (1.5.18)$$

(v) Aus  $\langle \underline{x} | \underline{e}_n \rangle = 0; \forall n=1,2,\dots$  folgt  $\underline{x} = \underline{0}$ .  $\square$  (1.5.19)

### 1.6 Bilinear und Dualsysteme. Beispiele von BANACH-Räumen

Die linearen Vektorräume  $E$  und  $F$  über  $\mathbb{R}$  formen ein *Bilinear-system*  $(E, F)$ , wenn eine *Bilinearform*

$$B(.,.) : \begin{cases} E \times F \rightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{u}, \underline{v}) \mapsto B(\underline{u}, \underline{v}) \end{cases} \quad (1.6.1)$$

existiert, so daß

$$\begin{aligned} B(\lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2, \underline{v}_1) &= \lambda_1 B(\underline{u}_1, \underline{v}_1) + \lambda_2 B(\underline{u}_2, \underline{v}_1) \\ B(\underline{u}_1, \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2) &= \lambda_1 B(\underline{u}_1, \underline{v}_1) + \lambda_2 B(\underline{u}_1, \underline{v}_2) \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

$$\forall \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in E, \forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in F, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

gilt.

Das Bilinearsystem  $(E, F)$  nennen wir ein *Linksdualsystem*, wenn aus

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = 0, \forall \underline{u} \in E \text{ folgt } \underline{v} = \underline{0}, \quad (1.6.3)$$

ein *Rechtsdualsystem* wenn aus

$$B(\underline{u}, \underline{v}) = 0, \forall \underline{v} \in F \text{ folgt } \underline{u} = \underline{0}, \quad (1.6.4)$$

ein *Dualsystem*, wenn es sowohl ein Links- als auch ein Rechts-dualsystem ist.

Dualformen werden üblicherweise mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnet. Der Vektorraum  $L((E, \|\cdot\|), \mathbb{R})$  aller stetigen Linearformen auf  $(E, \|\cdot\|)$  wird mit  $(E^*, \|\cdot\|^*)$  bezeichnet und topologischer

Dualraum oder kurz Dualraum genannt. Mit der Norm

$$\|v\|^* = \sup_{\|\underline{u}\| \leq 1} \frac{|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle|}{\|\underline{u}\|} \quad (1.6.5)$$

wird  $(E^*, \|\cdot\|^*)$  zu einem BANACH-Raum. Der zu  $(E^*, \|\cdot\|^*)$  duale Raum  $(E^{**}, \|\cdot\|^{**})$  wird Bidualraum genannt. Der Raum  $(E, \|\cdot\|)$  wird reflexiv genannt wenn der Raum  $(E, \|\cdot\|)$  mit dem Bidualraum  $(E^{**}, \|\cdot\|^{**})$  identifiziert werden kann.

Die Elemente  $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in F$  werden gleichwertig genannt, wenn  $\underline{v}_2 - \underline{v}_1$  im linearen Unterraum

$$\ker B(\underline{u}, \underline{a}) := \{\underline{a} \in F; B(\underline{u}, \underline{v}) = 0, \forall \underline{u} \in E\} \quad (1.6.6)$$

liegt. Die Mengen der Form  $\underline{v}_1 + \ker B(\underline{u}, \underline{a})$  bilden Restklassen. Die Gesamtheit aller Restklassen bezeichnen wir mit  $F/\ker B$ . Ist  $\ker B(\underline{u}, \underline{a})$  ein linearer Unterraum von  $F$  und  $F/\ker B$  ein linearer Vektorraum, dann kann für  $\hat{\underline{v}} = \underline{v} + \ker B$  mit der Bilinearform

$$[\underline{u}, \hat{\underline{v}}] := B(\underline{u}, \underline{v}) \quad (1.6.7)$$

$\forall \omega \in \hat{\underline{v}}$  eine Linksdualform auf  $(E, F/\ker B)$  erklärt werden. Der Vektorraum  $F/\ker B$  wird *Quotientenraum* von  $F$  nach  $\ker B$  genannt.

### Beispiel 1.6.1

Es sei  $\Omega$  ein Gebiet in  $R^n$  und  $1 < p < \infty$  eine reelle Zahl. Der lineare Vektorraum der auf  $\Omega$  definierten meßbaren Funktionen  $u$  für die

$$\int_{\Omega} |u(\underline{x})|^p d\Omega < \infty \quad (1.6.8)$$

wird mit der Norm

$$\|u\|_p := \left( \int_{\Omega} |u(\underline{x})|^p d\Omega \right)^{1/p} \quad (1.6.9)$$

zu einem BANACH-Raum. Funktion die f. ü. auf  $\Omega$  übereinstimmen,

werden als identisch angenommen. Das Integral ist im Sinne von LEBESQUE zu verstehen. Für vektorwertige Abbildungen  $\underline{u} = u_i, i=1,2,\dots,n$  erklären wir die Norm im cartesichen Produktraum

$$\|\underline{u}\|_p := \left( \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^n |u_i|^p \right) d\Omega \right)^{1/p} \quad (1.6.10)$$

Die Räume werden mit  $L_p(\Omega)$  oder  $\underline{L}_p(\Omega)$  bezeichnet. Die  $L_p(\Omega)$  bilden eine BANACH-Skala, denn

$$L_{p_1}(\Omega) \subset L_{p_2}(\Omega); p_2 < p_1 \cdot \square \quad (1.6.11)$$

Die linearen Vektorräume

$$l_p := \{ \underline{x} = \{ \xi_k \}; \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty \} \quad (1.6.12)$$

und

$$l_{p,n} := \{ \underline{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n); \sum_{k=1}^n |\xi_k|^p < \infty \} \quad (1.6.13)$$

werden mit der Norm

$$\|\underline{x}\|_p := \left( \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \quad (1.6.14)$$

oder

$$\|\underline{x}\|_p := \left( \sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{1/p} \quad (1.6.14)_1$$

für  $1 < p < \infty$  zu BANACH-Räumen. Die Räume  $L_p(\Omega)$  und  $l_p$  sind separabel und es gilt der

Satz 1.6.1 (BÖGEL, TASCHÉ [128], S. 73 u. S. 320)

Es sei  $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Dann gilt für  $L_p(\Omega)$  und für  $l_p$

(i) die MINKOWSKISCHE Ungleichung

$$\|\underline{u} + \underline{v}\|_p \leq \|\underline{u}\|_p + \|\underline{v}\|_p; \quad (1.6.15)$$

$\forall \underline{u}, \underline{v} \in L_p(\Omega)$  oder  $\underline{u}, \underline{v} \in l_p$  und

(ii) die HÖLDERSche Ungleichung

$$\int_{\Omega} |\underline{u}(\underline{x}) \underline{v}(\underline{x})| d\Omega \leq \|\underline{u}\|_p \|\underline{v}\|_q \quad (1.6.16)$$

$$\forall \underline{u} \in L_p(\Omega); \forall \underline{v} \in L_q(\Omega)$$

oder

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \|\underline{x}\|_p \|\underline{y}\|_q \quad (1.6.17)$$

$$\forall \underline{x} = \{\xi_k\} \in l_p; \forall \underline{y} = \{\eta_k\} \in l_q.$$

Mit der Dualform

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle := \int_{\Omega} \underline{u} \underline{v} d\Omega; \quad \underline{u} \in L_p(\Omega), \underline{v} \in L_q(\Omega) \quad (1.6.18)$$

wird  $(L_p(\Omega), L_q(\Omega))$  zu einem Dualsystem.

Mit der Dualform

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k \quad (1.6.19)$$

$$\underline{x} = \{\xi_k\} \in l_p, \underline{y} = \{\eta_k\} \in l_q$$

wird  $(l_p, l_q)$  zu einem Dualsystem.

Die Räume  $L_p(\Omega)$  und  $l_p$  sind reflexiv und es ist

$$(L_p(\Omega))^* = L_q(\Omega); \quad (L_p(\Omega))^{**} = L_p(\Omega)$$

sowie

$$l_p^* = l_q, \quad l_p^{**} = l_p.$$

Wir sagen daß die Abbildung

$$\underline{f} : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

die CARATHÉODORY-Stetigkeitsbedingung erfüllt, wenn

$$\underline{f}(\cdot, \underline{u}) : \underline{x} \mapsto \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$$

$\forall \underline{u} \in \mathbb{R}^n$  meßbar und

$$\underline{f}(\underline{x}, \cdot) : \underline{u} \mapsto \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$$

in  $\mathbb{R}^n$  f.ü. auf  $\Omega$  stetig ist.

Für Energiebetrachtungen nützlich ist

Satz 1.6.2 (BERGER [170] S. 76 u. 77)

Es sei  $1 < p, p_1, p_2, \dots, p_n < \infty$  und

$$\underline{f} : \begin{cases} \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\underline{x}, \underline{u}) \mapsto \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}) \end{cases}$$

ein Operator, der die CARATHÉODORY-Stetigkeitsbedingungen erfüllt. Dann gilt:

Der Operator  $\underline{f}$  bildet  $\prod_1^n L_{p_i}(\Omega)$  kontinuierlich und stetig auf  $L_p(\Omega)$  ab, wenn für jede Komponente  $f_i$  von  $\underline{f}$  die *Wachstumsbeschränkungen*

$$|f_i(\underline{x}, u_1, u_2, \dots, u_n)| \leq \{c_0 + \sum_{i=1}^n c_i |u_i|^{\frac{p_i}{p}}\} \quad (1.6.20)$$

mit Konstanten  $c_0, c_1, \dots, c_n$  erfüllt sind.  $\square$

## 1.7 SOBOLEV-Räume

Der Vektorraum

$$W_{m,p}(\Omega) := \{u, D^\alpha u \in L_p(\Omega); |\alpha| \leq m\} \quad (1.7.1)$$

mit der Norm

$$\|u\|_{m,p} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} \quad (1.7.2)$$

wird SOBOLEV-Raum genannt.

Beispiel 1.7.1

$$\Omega := (0, 1) \subset \mathbb{R}, p = 2 = m$$

$$\|u\|_{2,2} = \left[ \int_0^1 \left( u^2 + \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 \right) d\Omega \right]^{1/2} \quad \square$$

Beispiel 1.7.2

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2, p = 4, m = 2$$

$$\|u\|_{2,4} = \left[ \int_{\Omega} \left( u^4 + (u_{,x})^4 + (u_{,y})^4 + (u_{,xx})^4 + (u_{,xy})^4 + (u_{,yy})^4 \right) d\Omega \right]^{1/4} \quad \square (1.7.3)$$

Oft angewendet wird auch der Raum

$$\overset{\circ}{W}_{m,p}(\Omega) := \{u \in C_0(\Omega); \text{abgeschlossen in der Norm (1.7.2)}\} \quad (1.7.4)$$

SOBOLEV-Räume können auf vektorwertige Abbildungen  $\underline{u}$  verallgemeinert werden. Anwendung finden auch cartesische Produkte

$\overset{\circ}{W}_{m,p}(\Omega)$ .

Informativ ist der

Satz 1.7.1 (ODEN [161], Theorem 3.3)

Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand  $\Gamma$ . Für  $1 \leq p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gilt:

(i)  $\overset{\circ}{W}_{m,p}(\Omega) \subset W_{m,p}(\Omega)$ .

(ii)  $\forall u \in \overset{\circ}{W}_{m,p}(\Omega) \exists v \in W_{m,q}(\Omega)$ , so daß  $\forall |\alpha| \leq m$

$$\int_{\Omega} D^{\alpha} u v d\Omega = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} v d\Omega.$$

(iii) Aus  $u \in W_{m,p}(\Omega)$  folgt  $u \in \overset{\circ}{W}_{m,p}(\Omega)$  dann und nur dann, wenn  $\forall \alpha: |\alpha| \leq m-1 \quad D^{\alpha} u(\underline{x}) = 0 \quad \text{für } \underline{x} \in \Gamma. \quad \square$

Für SOBOLEV-Räume können verschiedene Dualformen eingeführt werden. Dem Raum  $W_{m,p}(\Omega)$  entsprechen dann verschiedene duale Räume. Um Mißverständnissen vorzubeugen, sollte die benutzte Dualform spezifiziert werden. In der mathematischen Literatur wird allgemein die Dualität im Sinne der Distributionen verwendet.

$$\langle u, \cdot \rangle : \begin{cases} W_{m,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto \int_{\Omega} uv d\Omega \end{cases} \quad (1.7.5)$$

Mit Hilfe dieser Dualform wird z.B. dem Raum  $\overset{\circ}{W}_{m,p}(\Omega)$  der "negative" SOBOLEV-Raum

$$W_{-m,q}(\Omega) := \{v; v = D^{\alpha} g_{\alpha}; g_{\alpha} \in L_{\tilde{q}}(\Omega); |\alpha| \leq m\} \quad (1.7.6)$$

mit der Norm

$$\|v\|_{-m,q} := \sup_{u \in \overset{\circ}{W}_{m,p}(\Omega)} |\langle u, v \rangle| \quad (1.7.7)$$

$$\|u\|_{m,p} = 1$$

zugeordnet. Die Elemente  $v \in W_{-m,q}(\Omega)$  können so singular sein, daß eine Integration der Ordnung  $|\alpha|$  notwendig ist, um diese Elemente auch nur schematisch darzustellen.

Eine für  $W_{m,2}(\Omega)$  mögliche andere Dualform ist

$$\langle u, \cdot \rangle : \begin{cases} W_{m,2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \mapsto \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} D^{\alpha} u D^{\alpha} v d\Omega. \end{cases} \quad (1.7.8)$$

Für diese erhalten wir

$$W_{m,2}^*(\Omega) = W_{m,2}(\Omega) \quad (1.7.9)$$

so daß der Dualraum mit dem Raum  $W_{m,2}(\Omega)$  identifiziert werden kann.

Welche Dualform zur Bestimmung des Dualraumes benutzt wird, hängt von der gestellten Aufgabe ab.

Bemerkung 1.7.1

Für die natürlichen Zahlen  $m_1, m_2; 0 \leq m_1 \leq m_2$  und die reellen Zahlen  $p_1, p_2, q_1, q_2; 1 < p_1 < p_2 < \infty$   
 $1 < q_2 < q_1 < \infty$  gelten die Einbettungen:

$$W_{m_1, p_1}(\Omega) \supset W_{m_2, p_2}(\Omega) \tag{1.7.10}$$

$$W_{-m_1, q_1}(\Omega) \subset W_{-m_2, q_2}(\Omega) \quad ,$$

so daß diese Räume BANACH-Skalen bilden.  $\square$

Die bisher definierten SOBOLEV-Räume sind für eine ganzzahlige positive oder negative Ordnung der Differentiation definiert worden. Es ist möglich die Definitionen auf reellzahlige Ordnungen zu erweitern, siehe z.B. ADAMS [139], Kapitel VII. Das Studium nichthomogener Randwertaufgaben verlangt die Betrachtung von Funktionen auf dem Rand  $\Gamma$  des offenen Gebietes  $\Omega$ . Die Werte in  $\Omega$  müssen mit den entsprechenden Randwerten verträglich sein. Bei der Erweiterung der Abbildungen bis auf den Rand  $\Gamma$  geht ein Teil der Glattheit verloren. Die Eigenschaften der auf  $\Omega$  definierten SOBOLEV-Räume sind von der Glattheit des Randes  $\Gamma$  abhängig. ADAMS [139] führt in Kapitel IV fünf Klassen von Regularitätseigenschaften des Randes ein. Der Einfachheit halber wird hier vorausgesetzt, daß für den Rand die gleichmäßige  $C^m$  Regularität erfüllt ist. In jedem Punkt  $\underline{x} \in \Gamma$  muß der äußere Normaleneinheitsvektor  $\underline{n}$  eindeutig definiert sein. Jedoch sind Verallgemeinerungen auf bestimmte Klassen bereichsweise glatter Ränder möglich.

Definition 1.7.1

Die lineare Abbildung

$$\underline{u} \mapsto \underline{\gamma} \underline{u} := (\gamma_0 \underline{u}, \dots, \gamma_{m-1} \underline{u}) \quad ; \quad \gamma_j \underline{u} := \frac{\partial^j \underline{u}}{\partial \underline{n}^j} \Big|_{\Gamma} \tag{1.7.11}$$

Wobei  $\frac{\partial}{\partial \underline{n}} := n_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  die Richtungsableitung in der Richtung der

äußeren Normalen  $\underline{n}$  auf  $\Gamma$  und  $\frac{\partial^j}{\partial \underline{n}^j}$  die Richtungsableitung  $j$ -ter Ordnung bezeichnet wird *Trace-Operator* genannt.  $\square$

Der Nullraum  $\ker \underline{\gamma}$  des Trace-Operators  $\underline{\gamma}$

$$\ker \underline{\gamma} := \{ \underline{u} \in \underline{W}_{m,p}(\Omega) ; \underline{\gamma} \underline{u} = \underline{0} \} \quad (1.7.12)$$

ist genau der Raum  $\overset{\circ}{W}_{m,p}(\Omega)$ , siehe (1.7.4).

Es gilt

Satz 1.7.2 (ADAMS [139], Theorem 7.53)

Für  $1 < p < \infty$  und  $\Omega$  mit einer gleichmäßigen  $C^m$  Regularität kann die lineare Abbildung  $\underline{\gamma}$  stetig zu einem Isomorphismus und Homöomorphismus des Quotientenraumes

$$\underline{W}_{m,p}(\Omega) / \ker \underline{\gamma} \text{ auf } \prod_{k=0}^{m-1} \underline{W}_{m-k-1/p,p}(\Gamma) \quad (1.7.13)$$

erweitert werden.  $\square$

Zu beachten ist, daß der Satz 1.7.2 nur für  $m - k - \frac{1}{p} \geq 0$  gilt. Er kann also nicht für  $L_p(\Omega) = W_{0,p}(\Omega)$  und auch nicht für  $W_{-m,q}(\Omega)$  angewendet werden. Für eine duale Beschreibung von Randwertproblemen der Elastostatik reicht dieses Theorem nicht aus, denn die Klasse der für eine duale Beschreibung zugelassener Probleme müßte auf  $\underline{t} \in W_{m,q}(\Omega)$  beschränkt werden. Die dualen Räume  $W_{1,p}^*(\Omega)$  und  $W_{2,2}^*(\Omega)$  sind jedoch zu umfangreich. Es ist nicht möglich für diese Räume Trace-Theoreme zu erstellen. Die im offenen Gebiet  $\Omega$  definierten Abbildungen (Distributionen) können nicht auf  $\Gamma$  erweitert und mit vorgegebenen Randwerten identifiziert werden.

Für die in Teil 1, Kapitel 1 bis 3 betrachteten Randwertprobleme können jedoch hinreichend umfangreiche Unterräume der dualen Räume definiert werden, für die hinreichend allgemeine Trace-Theoreme bekannt sind.

Für das Randwertproblem (1.2.1 bis 4) ist bekanntlich  $\underline{u} \in W_{1,p}(\Omega)$ . Der duale Raum  $W_{1,p}^*(\Omega)$  ist zu umfangreich. Des-

halb wird der Raum

$$E_q(\Omega) := \{ \tilde{t} \in \tilde{L}_q(\Omega) ; \operatorname{div} \tilde{t} \in \tilde{L}_q(\Omega) \} \quad (1.7.14)$$

mit der Norm

$$\| \tilde{t} \|_q^q := \| \tilde{t} \|_q^q + \| \operatorname{div} \tilde{t} \|_q^q \quad (1.7.15)$$

eingeführt. Hier ist  $\tilde{t} = t_{Ai}$ ,  $\operatorname{div} \tilde{t} = t_{Ai,A} := \sum_A \frac{\partial t_{Ai}}{\partial x_A}$  mit  $i, A = (1, 2, 3)$ .

Es gelten die Einbettungen  $W_{-1,q}(\Omega) \subset E_q(\Omega) \subset \tilde{L}_q(\Omega)$ .

Eingeführt wird auch der Raum

$$E_q^0(\Omega) := \{ \tilde{t} \in C_0(\Omega) ; \text{abgeschlossen in der Norm 1.7.14} \} \quad (1.7.16)$$

und der Trace-Operator

$$\gamma_n \tilde{t} := \tilde{t} \cdot \tilde{n} \Big|_{\Gamma} = t_{Ai} n_A . \quad (1.7.17)$$

Mit diesen Größen gilt für  $\Omega$  mit einer gleichmäßigen  $C^2$  Regularität

Satz 1.7.3 (LABISCH [223], Theorem 1.2)

- (i) Der Nullraum von  $\gamma_n$ ,  $\ker \gamma_n$  ist der Raum  $E_q^0(\Omega)$ .
- (ii) Der Operator  $\gamma_n$  kann stetig zu einem Isomorphismus und Homöomorphismus des Quotientenraumes

$$E_q(\Omega) / \ker \gamma_n \quad \text{auf} \quad W_{-1/q,q}(\Gamma)$$

erweitert werden.

- (iii) Mit  $\operatorname{grad} \underline{u} := u_{i,A}$  gilt  $\forall \tilde{t} \in E_q(\Omega)$ ,  $\forall \underline{u} \in W_{1,p}(\Omega)$  die verallgemeinerte GAUSSsche Integralformel

$$\int_{\Omega} (\tilde{t} \cdot \operatorname{grad} \underline{u}) d\Omega + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \tilde{t} \cdot \underline{u}) d\Omega = \langle \gamma_n \tilde{t}, \gamma_0 \underline{u} \rangle . \quad (1.7.18)$$

$\langle \gamma_{\tilde{n}} t, \gamma_{\tilde{o}} u \rangle$  steht für eine Erweiterung von  $\int_{\Omega} t_{\tilde{n}} u d\Gamma$ .  $\square$

Satz 1.7.2 und Satz 1.7.3 definieren u.a. die Klassen der zulässigen Randwerte.

Eine ähnliche Problematik entsteht beim Versuch einer dualen Beschreibung von Randwertproblemen für die KÁRMÁNSche Plattentheorie. Da bei einer Beschreibung in Verschiebungen

$$\tilde{u} \in (W_{1,2}(\Omega))^2 \times W_{2,2}(\Omega) =: E_{\tilde{u}}(\Omega) ,$$

genügt der Satz 1.7.2 zur Bestimmung der Klasse der zulässigen Randwerte. Der im Sinne der Distributionen duale Raum  $E_{\tilde{u}}^*(\Omega)$  ist zu breit für eine duale Beschreibung des Problems. Für die statischen Feldgrößen wird der Raum

$$E_{\tilde{t}}(\Omega) := \{n_{\alpha\beta}, n_{\alpha 3}, m_{\alpha\beta}; n_{\alpha\beta}, n_{\alpha\beta, \alpha}, m_{\alpha\beta}, m_{\alpha\beta, \beta\alpha} + n_{\alpha 3, \alpha} \in L_2(\Omega); \\ n_{\alpha 3} \in L_{\frac{4}{3}}(\Omega); \alpha := (1,2) =: \beta\} \quad (1.7.19)$$

mit der Norm

$$\| \| n_{\alpha\beta}, n_{\alpha 3}, m_{\alpha\beta} \| \| := \| n_{\alpha\beta} \|_2 + \| n_{\alpha\beta, \alpha} \|_2 + \\ + \| n_{\alpha 3} \|_{\frac{4}{3}} + \| m_{\alpha\beta} \|_2 + \| m_{\alpha\beta, \beta\alpha} + n_{\alpha 3, \alpha} \|_2 \quad (1.7.20)$$

oder jeder anderen äquivalenten Norm eingeführt.

Definiert wird noch der Raum

$$E_{\tilde{t}}^0(\Omega) := \{(n_{\alpha\beta}, n_{\alpha 3}, m_{\alpha\beta}) \in C_{\tilde{o}}^{\infty}(\Omega); \text{abgeschlossen in der Norm (1.7.20)}\} \quad (1.7.21)$$

und der Trace-Operator

$$\delta_{\tilde{n}}(n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}) := \{n_{\tilde{n}\alpha}|_{\Gamma}, n_{\tilde{n}3}|_{\Gamma}, m_{\tilde{n}\alpha}|_{\Gamma}, q_{\tilde{n}3}|_{\Gamma}\} . \quad ((1.7.21))$$

Es gilt der

Satz 1.7.4 (LABISCH [233] Theorem A u. [234], Theorem 4.2)

Für hinreichen glatte  $\Omega$  gilt:

- (i) Der Nullraum von  $\delta(n_{\alpha j}, m_{\alpha\beta})$ :  $\ker \delta$  ist der Raum  $E_{\tilde{t}}^0(\Omega)$  (1.7.19).
- (ii) Der lineare Operator  $\delta$  kann stetig zu einem Isomorphismus und Homöomorphismus des Quotientenraumes

$$E_{\tilde{t}}(\Omega)/\ker \delta \quad \text{auf} \\ (W_{-1/2,2}(\Omega))^2 \times (W_{-1/2,2}(\Omega))^3 \times W_{-3/2,2}(\Omega) \quad (1.7.22)$$

erweitert werden.

- (iii)  $\forall u \in E_u(\Omega), \forall (n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}) \in E_{\tilde{t}}(\Omega)$  gilt die verallgemeinerte Integralformel

$$\int_{\Omega} (-m_{\alpha\beta} u_{3,\beta\alpha} + n_{\alpha 3} u_{3,\alpha} + n_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha}) d\Omega + \\ + \int_{\Omega} [(n_{\alpha\beta,\alpha} u_{\beta} + (m_{\alpha\beta,\beta\alpha} + n_{\alpha 3,\alpha}) u_3] d\Omega = \\ = \langle \delta(n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}), \gamma u \rangle_{\Gamma} \quad (1.7.23)$$

$\langle \delta(n_{\alpha i}, m_{\alpha\beta}), \gamma u \rangle_{\Gamma}$  bezeichnet die Erweiterung des Integrals

$$\int_{\Gamma} [n_{\tilde{n}\alpha} u_{\alpha} + (q_{\tilde{n}3} + n_{\tilde{n}3}) u_3 - m_{\tilde{n}\alpha} u_{3,\alpha}] d\Omega$$

auf die erweiterten, auf dem Rand  $\Gamma$  erklärten dualen Räume.  $\square$

Satz 1.7.2 und Satz 1.7.4 definieren u.a. die Klassen der zulässigen Randwerte und der Flächenlast.

Für das Randwertproblem der flachen MARGUERRE-Schale kann Satz 1.7.4 ohne Veränderungen übernommen werden.

Funktionen aus  $W_{m,p}(\Omega)$  können zugleich Elemente anderer Räume sein. Diese nützliche Eigenschaft ist in den sogenannten *Einbettungssätzen* berücksichtigt. Diese gelten für Gebiete für welche die Kegelbedingung (ADAMS [139], S. 66) erfüllt ist.

Wir sagen daß für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  die *Kegelbedingung* erfüllt ist, wenn  $\forall \tilde{x} \in \Omega$  ein endlicher Kegel mit einem von Null verschiedenen Öffnungswinkel mit Spitze in  $\tilde{x}$  existiert, der ganz in  $\Omega$  liegt. Gebiete für welche eine gleichmäßige  $C^m$  Regularität erfüllt ist, erfüllen automatisch die Kegelbedingung.

Für Fehlerabschätzungen können Einbettungen von  $W_{m,p}(\Omega)$  in  $W_{j,p}(\Omega)$  :  $j \leq m$  und in

$$C_B^j(\Omega) := \{u \in C^j(\Omega); D^\alpha u \text{ auf } \Omega \text{ beschränkt, } \forall |\alpha| \leq j\} \quad (1.7.24)$$

von Interesse sein.  $C_B^j(\Omega)$  ist ein BANACH-Raum mit der Norm

$$\|u; C_B^j(\Omega)\| := \max_{0 \leq |\alpha| \leq j} \sup_{\tilde{x} \in \Omega} |D^\alpha u(x)| \quad (1.7.25)$$

Es gilt der

Satz 1.7.5 [ADAMS [139], Theorem 5.4 Part I)

Für ein  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  welches die Kegelbedingung erfüllt gelten die Einbettungen

(i) für  $mp < n$  und  $n - mp < n$

$$W_{j+m,p}(\Omega) \rightarrow W_{j,q}(\Omega); p \leq q \leq \frac{np}{n-mp} \quad (1.7.26)$$

für  $mp = n$

$$W_{j+m,p}(\Omega) \rightarrow W_{j,q}(\Omega); p \leq q < \infty. \quad (1.7.27)$$

(ii) für  $mp > n$

$$W_{j+m,p}(\Omega) \rightarrow C_B^j(\Omega). \quad \square \quad (1.7.28)$$

Zu beachten ist, daß Elemente aus  $W_{m,p}(\Omega)$  keine Funktionen sondern Äquivalenzklassen von Funktionen sind, welche in  $\Omega$  bis auf eine Menge vom Maß Null übereinstimmen. Die Einbet-

tung von  $W_{j+m,p}(\Omega)$  in  $C_B^j(\Omega)$  bedeutet, daß die Äquivalenzklasse von  $u \in W_{j+m,p}(\Omega)$  eine solche Funktion  $\tilde{u}$  enthält, für welche gilt

$$\|\tilde{u}; C_B^j(\Omega)\| \leq K \|u\|_{m+j,p} \quad (1.7.29)$$

mit  $K$  unabhängig von  $u$ .

Für  $u \in \overset{\circ}{W}_{1,p}(\Omega)$  und hinreichend glatte, beschränkte  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  existiert eine von  $u$  unabhängige Konstante  $k(\Omega)$  so daß  $\forall u \in \overset{\circ}{W}_{1,p}(\Omega); 1 < p < \infty$

$$\|u\|_p^p \leq k(\Omega) \left( \sum_{i=1}^n \|u_{,i}\|_p \right)^p \quad (1.7.30)$$

siehe z.B. BERGER [170], S. 29. Diese Ungleichung wird FRIEDRICHsche Ungleichung genannt. Eine iterative Anwendung dieser Ungleichung führt zur

Bemerkung 1.7.2

Für hinreichend glatte und beschränkte  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und für  $u \in \overset{\circ}{W}_{m,p}(\Omega)$  ist

$$\|u; \overset{\circ}{W}_{m,p}(\Omega)\| := \left( \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.7.31)$$

eine Norm die der Norm (1.7.2) äquivalent ist.  $\square$

In der Elastizitätstheorie werden Räume

$$\overset{\circ}{W}_{1,p}(\Omega, \Gamma_{\tilde{u}}) := \{ \tilde{u} \in W_{1,p}(\Omega); \tilde{u}|_{\Gamma_{\tilde{u}}} = \tilde{0} \} \quad (1.7.32)$$

eingeführt mit  $\Gamma_{\tilde{u}} := \Gamma_{u_1}, \Gamma_{u_2}, \Gamma_{u_3}$  und  $\Gamma_{u_i} \neq \emptyset; i=1,2,3$ .

Auch hier existiert eine Konstante, die nun auch von  $\Gamma_{\tilde{u}}$  abhängt, so daß  $\forall \tilde{u} \in \overset{\circ}{W}_{1,p}(\Omega, \Gamma_{\tilde{u}}), 1 < p < \infty$

$$\|\tilde{u}\|_p^p \leq k(\Omega; \Gamma_{\tilde{u}}) \cdot \left( \sum_{i=1}^3 \|u_{,i}\|_p \right)^p \quad (1.7.33)$$

gilt. Eine iterative Anwendung der Ungleichung (1.7.33) führt für den Raum

$$\overset{0}{W}_{m,p}(\Omega; \Gamma_{\tilde{u}}^{m-1}) := \{ \tilde{u} \in W_{m,p}(\Omega); D^{\alpha} \tilde{u} |_{\Gamma_{\tilde{u}}^{m-1}} = 0, |\alpha| \leq m-1 \} \quad (1.7.34)$$

zu der Kurznorm

$$\| \tilde{u}; W_{m,p}(\Omega; \Gamma_{\tilde{u}}^{m-1}) \| := \left( \sum_{|\alpha|=m} \| D^{\alpha} \tilde{u} \|_P^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.7.35)$$

als äquivalente Norm zur Norm (1.7.2).  $\Gamma_{\tilde{u}}^{m-1}$  bezeichnet die Gesamtheit aller Teile des Randes  $\Gamma$ , die alle von  $\phi$  verschieden sein müssen, auf denen homogene Randbedingungen vorgeschrieben sind.

### 1.8 Differentiale, Ableitungen und Integrale in abstrakten Räumen

Eine wesentliche Rolle bei der Lösung von Randwertproblemen der Elastostatik spielt die sogenannte Variationsrechnung. Diese ist jedoch nur vage definiert. Insbesondere bei der Untersuchung nichtlinearer Probleme muß vorsichtig vorgegangen werden. Um Mißverständnissen vorzubeugen werden hier FRÉCHETSche und GÂTEAUXsche Differentiale und Ableitungen angewendet.

Es seien  $E$  und  $F$  reelle BANACH-Räume und  $A \subseteq E$  eine offene Teilmenge in  $E$ . Gegeben sei die Abbildung

$$\tilde{f} : A \rightarrow F.$$

Wenn im Punkt  $\tilde{a} \in A$ ,  $\forall \tilde{h} \in E$  der Grenzwert

$$\delta \tilde{f}(\tilde{a}, \tilde{h}) := \lim_{t=0} \frac{\tilde{f}(\tilde{a} + t\tilde{h}) - \tilde{f}(\tilde{a})}{t} \quad (1.8.1)$$

existiert, dann wird  $\delta \tilde{f}(\tilde{a}, \tilde{h})$  das GÂTEAUXsche Differential im Punkt  $\tilde{a}$  in Richtung  $\tilde{h}$  genannt.

Es gilt

$$\delta \tilde{f}(\tilde{a}, \lambda \tilde{h}) = \lambda \delta \tilde{f}(\tilde{a}, \tilde{h}) \quad (1.8.2)$$

d.h. das Differential ist homogen. Es ist jedoch nicht unbe-

dingt additiv ( $g$  ist additiv, wenn  $g(\underline{x}+\underline{y}) = g(\underline{x}) + g(\underline{y})$ ).

Ist das GÂTEAUXsche Differential linear und stetig bezüglich  $\underline{h}$  so gilt

$$\delta \underline{f}(\underline{a}, \underline{h}) = \underline{f}^{<1>}(\underline{a})(\underline{h}) \quad (1.8.3)$$

wobei  $\underline{f}^{<1>}(\underline{a}) : \underline{E} \rightarrow \underline{F}$  eine lineare stetige Abbildung ist.  $\underline{f}^{<1>}$

wird die GÂTEAUXsche Ableitung von  $\underline{f}$  im Punkt  $\underline{a}$  genannt.

Eine äquivalente Formulierung für das GÂTEAUXsche Differential ist gegeben durch

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\underline{f}(\underline{a}+t\underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}) - t\delta \underline{f}(\underline{a}, \underline{h})\| = 0 \quad (1.8.4)$$

für  $\underline{a}, \underline{a}+t\underline{h} \in A$ . Manchmal wird die Schreibweise

$$\left. \frac{d}{dt} \underline{f}(\underline{a}+t\underline{h}) \right|_{t=0} = \delta \underline{f}(\underline{a}, \underline{h}) \quad (1.8.5)$$

benutzt.

Existiert eine lineare stetige Abbildung  $\underline{u} : \underline{E} \rightarrow \underline{F}$  so daß

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \frac{\underline{f}(\underline{a}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}) - \underline{u}(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = 0 \quad (1.8.6)$$

oder äquivalent

$$\|\underline{f}(\underline{a}+\underline{h}) - \underline{f}(\underline{a}) - \underline{u}(\underline{h})\| = o(\|\underline{h}\|) \quad (1.8.7)$$

für  $\underline{a} \in A$ , dann wird  $\underline{u}$  mit  $\underline{f}'(\underline{a})$  oder  $\frac{d}{dx} \underline{f}(\underline{a})$  geschrieben und die FRÉCHETSche Ableitung genannt.  $\underline{f}'(\underline{a})(\underline{h})$  wird das FRÉCHETSche Differential genannt. Existiert für  $\underline{f} : A \rightarrow \underline{F}$  die FRÉCHETSche Ableitung, dann sagen wir daß  $\underline{f}$  im Punkt  $\underline{a}$  differenzierbar ist. Ist  $\underline{f}$  differenzierbar  $\forall \underline{a} \in A$  dann sagen wir daß  $\underline{f}$  auf  $A$  differenzierbar ist.

Existiert die FRÉCHETSche Ableitung im Punkt  $\underline{a}$ , dann existiert auch die GÂTEAUXsche Ableitung und beide Ableitungen

sind eindeutig. Aus der Existenz der GÂTEAUXschen Ableitung folgt nicht die Existenz der FRÉCHETSchen Ableitung, aber es gilt der

Satz 1.8.1 (BÖGEL, TASCHE [128], S. 262)

Die Abbildung  $\tilde{f}: A \rightarrow \tilde{F}$  besitze in allen Punkten der Umgebung  $U$  von  $\tilde{a} \in \tilde{E}$  die GÂTEAUXsche Ableitung  $\tilde{f}^{<1>}$  die in  $\tilde{a}$  stetig sei. Dann ist  $\tilde{f}$  in  $\tilde{a}$  differenzierbar und es gilt  $\tilde{f}'(\tilde{a}) = \tilde{f}^{<1>}(\tilde{a})$ .  $\square$

Für Anwendungen in der Elastizitätstheorie ist u.a. die Kettenregel wichtig.

Satz 1.8.2 (BÖGEL, TASCHE [128], S. 266)

Es seien  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{F}$  und  $\tilde{G}$  reelle BANACH-Räume und  $A \subseteq \tilde{E}$ ,  $B \subseteq \tilde{F}$  offene Teilmengen. Die Abbildungen  $\tilde{f}: A \rightarrow \tilde{F}$  und  $\tilde{g}: B \rightarrow \tilde{G}$  seien gegeben. Wenn  $\tilde{f}$  im Punkt  $\tilde{a}$  und  $\tilde{g}$  im Punkt  $\tilde{b} = \tilde{f}(\tilde{a})$  differenzierbar ist, dann ist die Komposition  $\tilde{w} = \tilde{g} \circ \tilde{f}: \tilde{E} \rightarrow \tilde{G}$  differenzierbar in  $\tilde{a}$  und ihre Ableitung lautet:

$$(\tilde{w}'(\tilde{a})) = \tilde{g}'(\tilde{b}) \circ \tilde{f}'(\tilde{a}) \quad \square \quad (1.8.8)$$

Eine differenzierbare Abbildung  $\tilde{f}$  ist zweimal differenzierbar im Punkt  $\tilde{a}$  wenn die Abbildung  $\tilde{f}': \tilde{E} \rightarrow L(\tilde{E}, \tilde{F})$  differenzierbar ist.

$$\tilde{f}''(\tilde{x}) \in L(\tilde{E}, L(\tilde{E}, \tilde{F})) = L_2(\tilde{E}, \tilde{F}). \quad (1.8.9)$$

Wir sagen daß  $\tilde{f} \in C^2(U)$ , wenn:

- (i)  $\tilde{f}$  auf  $U$  zweimal differenzierbar ist und
- (ii)  $\tilde{f}''(\tilde{x}): U \rightarrow L_2(\tilde{E}, \tilde{F})$  stetig ist.

Wenn  $\tilde{f}$  zweimal differenzierbar ist, dann ist

- (i)  $\tilde{f}''(\tilde{x})$  eindeutig und
- (ii)  $\tilde{f}''(\tilde{x})$  ist symmetrisch d.h.

$$\tilde{f}''(\tilde{x})(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) = \tilde{f}''(\tilde{x})(\tilde{h}_2, \tilde{h}_1) \quad (1.8.10)$$

Die multilineare Form

$$f(h_1, h_2, \dots, h_N) \in L_N(E, F)$$

wird symmetrisch genannt, wenn sie unabhängig von der Permutation der Indizes  $1, 2, \dots, N$  ist.

Ableitungen  $N$ -ter Ordnung können induktiv definiert werden.  $f$  ist  $N$ -mal differenzierbar, wenn  $f^{N-1}(x)$  differenzierbar ist. Die Abbildung  $f^N(x)$  ist ein multilinearer Operator der Ordnung  $N$ . Wenn  $f^N(x)$  existiert, dann ist  $f^N(x)$  eindeutig und symmetrisch.

Ähnlich können GÄTEAUXsche Differentiale höherer Ordnung definiert werden.

$$\delta^2 \tilde{f}(x, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2) = \delta(\delta \tilde{f}(x, \tilde{h}_1) \tilde{h}_2) \quad (1.8.11)$$

Analog erhalten wir

$$\delta^N \tilde{f}(x, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_N) = \delta(\delta^{N-1} \tilde{f}(x, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_{N-1}) \tilde{h}_N) \quad (1.8.12)$$

Es seien  $E$  und  $F$  reelle BANACH-Räume und  $A$  eine konvexe Teilmenge aus  $E$ . Mit  $\tilde{a}, \tilde{a} + \tilde{h} \in A$  liegt die Verbindungsstrecke in  $A$ . Es gilt der

Satz 1.8.3 (BÖGEL, TASCHE [128], S. 281)

Die Abbildung  $f : A \rightarrow F$  sei  $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar.

(i) Es gilt:

$$\tilde{f}(\tilde{a} + \tilde{h}) = \tilde{f}(\tilde{a}) + \frac{1}{1!} \tilde{f}'(\tilde{a})(\tilde{h}) + \frac{1}{2!} \tilde{f}''(\tilde{a})(\tilde{h}^2) + \dots + \frac{1}{n!} \tilde{f}^{(n)}(\tilde{a})(\tilde{h}^n) + R_n \quad (1.8.13)$$

mit

$$R_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \tilde{f}^{(n+1)}(\tilde{a} + t\tilde{h})(\tilde{h}^{n+1}) dt.$$

(ii) Es existiert eine Zahl  $\tau \in (0, 1)$  so daß die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \| \underline{f}(\underline{a}+\underline{b}) - \underline{f}(\underline{a}) - \frac{1}{1!} \underline{f}'(\underline{a})(\underline{h}) - \dots - \frac{1}{n!} \underline{f}^{(n)}(\underline{a})(\underline{h}^n) \| \leq \\ & \leq \| \underline{f}^{(n+1)}(\underline{a}+\tau \underline{h}) \| \frac{\|\underline{h}\|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned} \quad (1.4.14)$$

gilt.  $\square$

Eine wichtige Rolle bei der Erstellung von Variationsfunktionalen zur Beschreibung von Randwertproblemen spielen *Stammfunktionen* oft auch *Potentialfunktionen* genannt.

Gegeben sei eine stetige Abbildung  $\underline{g} : A \rightarrow L(E, F)$ . Wir untersuchen unter welchen Bedingungen eine differenzierbare Abbildung  $\underline{f} : A \rightarrow F$  mit der Eigenschaft

$$\underline{f}'(\underline{x}) = \underline{g}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in A$$

existiert. Eine derartige Abbildung wird *Stammfunktion* genannt.

Unter dem Integral, entlang der Strecke von  $\underline{x}_0$  nach  $\underline{x}_1$  in  $A$ , der stetigen Abbildung  $\underline{g} : A \rightarrow L(E, F)$  verstehen wir das Integral

$$\int_0^1 \underline{g}((1-t)\underline{x}_0 + t\underline{x}_1) (\underline{x}_1 - \underline{x}_0) dt \quad (1.8.15)$$

welches wir kurz mit

$$\int_{\underline{x}_0}^{\underline{x}_1} \underline{g}(\underline{x}) d\underline{x}$$

bezeichnen. Es gelten:

Satz 1.8.4 (BÖGEL, TASCHE [128], Satz 24.12)

Die Abbildung  $\underline{g} : A \rightarrow L(E, F)$  sei stetig. Genau dann besitzt  $\underline{g}$  eine Stammfunktion, wenn

$$\int_{\Delta} \underline{g}(\underline{x}) d\underline{x} = 0 \quad (1.8.16)$$

für jedes Dreieck  $\Delta \subset A$  gilt. Ist  $\tilde{f}$  eine Stammfunktion von  $g$  so besteht für beliebige Punkte  $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1$  die Gleichung

$$\tilde{f}(\tilde{z}_1) - \tilde{f}(\tilde{z}_0) = \int_{\tilde{z}_0}^{\tilde{z}_1} \tilde{g}(\tilde{x}) d\tilde{x}. \quad \square \quad (1.8.17)$$

und

Satz 1.8.5.(BÖGEL, TASCHÉ [128], Satz 24.13)

Die gegebene Abbildung  $g : A \rightarrow L(E, F)$  sei differenzierbar und ihre Ableitung  $\tilde{g}' : A \rightarrow L_2(E, F)$  besitze die Eigenschaft

$$[g'(\tilde{x})(\tilde{h}_1)](\tilde{h}_2) = [g'(\tilde{x})(\tilde{h}_2)](\tilde{h}_1) \quad (1.8.18)$$

$\forall \tilde{x} \in A, \forall \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in E$ . Dann existiert zu  $g$  eine Stammfunktion.  $\square$

1.9 Nützliche Lemmata und Sätze

Ein Punkt  $\tilde{x}$  mit der Eigenschaft  $P$  wird *isoliert* genannt, wenn eine Umgebung  $U(\tilde{x})$  existiert, in der kein weiterer Punkt mit der Eigenschaft  $P$  existiert.

Satz 1.9.1 über die Umkehrabbildung (BERGER [170] S. 113)

Es seien  $E$  und  $F$  BANACH-RÄUME und  $\tilde{f} \in C^1$  eine in der Umgebung  $U(\tilde{x}_0) \subset E$  definierte Abbildung

$$\tilde{f} : U(\tilde{x}_0) \rightarrow F \quad .$$

Wenn  $\tilde{f}'(\tilde{x}_0)$  ein linearer Homöomorphismus von  $E$  auf  $F$  ist, dann ist  $\tilde{f}$  ein lokaler Homöomorphismus von  $U(\tilde{x}_0)$  auf  $U(\tilde{f}(\tilde{x}_0))$ .  $\square$

Dieser Satz handelt u.a. über die Auflösung des Gleichungssystemes

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= y_1 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= y_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= y_n \quad . \end{aligned} \quad (1.9.1)$$

Wenn

$$\det \left( \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \right) \Big|_{\underline{x}_0} \neq 0 \quad (1.9.2)$$

dann besitzt das Gleichungssystem (1.9.1) in  $U(\underline{x}_0)$  genau eine Lösung, die stetig differenzierbar bezüglich  $\underline{y}$  ist.

Satz 1.9.2 über implizite Abbildungen (BERGER[170], S. 115)

Es seien  $E, F$  und  $G$  BANACH-Räume und  $f$  eine stetige Abbildung einer Umgebung  $U(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \subset E \times F \rightarrow G$ . Es sei  $f(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \underline{0}$ ,  $f'_y(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$  existiere, sei stetig bezüglich  $\underline{x}$  und sei ein linearer Homöomorphismus von  $F$  auf  $G$ . Dann existiert in einer Umgebung  $(U(\underline{x}_0))$  eine eindeutige stetige Abbildung  $g : U(\underline{x}_0) \rightarrow F$ , so daß  $g(\underline{x}_0) = \underline{y}_0$  und  $f(\underline{x}, g(\underline{x})) = \underline{0} \forall \underline{x} \in U(\underline{x}_0)$ .  $\square$

Dieser Satz handelt u.a. über Gleichungssysteme

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_\ell, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{array} \right\} \quad (1.9.3)$$

und über Bedingungen für welche  $f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}, \forall \underline{x} \in U(\underline{x}_0)$  genau eine Lösung  $\underline{y} = g(\underline{x}_0)$  besitzt.

Theorem 1.9.3 Splitting Lemma (POSTON, STEWART [186], s. 95)

Das Funktional  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$  sei hinreichen glatt. Es sei  $(\underline{x}, \underline{c}) = (x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$  und der Hessian

$$H = \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right]; \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (1.9.4)$$

besitze den Rang  $n_0 \leq n$  und den Korang  $m := n - n_0$ . Dann ist  $F$  lokal äquivalent zu

$$\hat{F}(y_1(\underline{x}, \underline{c}), \dots, y_m(\underline{x}, \underline{c}), \underline{c}) \pm y_{m+1}^2 \pm \dots \pm y_n^2 \quad \square \quad (1.9.5)$$

Als Sonderfall wird für  $n_0 = n$  d.h. für  $m = 0$  erhalten.

Lemma 1.9.1 MORSE Lemma (POSTON, STEWART [186], S. 97)

Das Funktional  $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$  sei glatt und der Hessian

$$\left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right], 1 \leq i, j \leq n$$

sei nicht degeneriert, d.h. besitze den Rang  $n$ . Dann ist  $F$  lokal äquivalent zu

$$\pm y_1^2 \pm \dots \pm y_n^2 \quad . \quad \square \quad (1.9.6)$$

## 2. DIREKTE METHODEN DER VARIATIONSRECHNUNG

### 2.1 Endlich-dimensionale Approximation

Es wird vorausgesetzt, daß es für die hier betrachteten Randwertprobleme unter Beachtung von Stetigkeitsbedingungen, Wachstumsbeschränkungen, Trace Theoremen und anderen notwendigen Restriktionen möglich ist, zu zeigen daß die exakte Lösung  $\tilde{u}$  in einem cartesischen Produkt separabler SOBOLEV-Räume

$$\tilde{u} \in \prod_i W_{m_i, p_i}(\Omega); \quad 1 < p_i < \infty, \quad i=1,2,3,\dots,r \quad (2.1.1)$$

liegt und daß eine äquivalente Beschreibung mit Hilfe eines Variationsfunktionalis

$$I(\tilde{u}, \tilde{p}) \quad (2.1.2)$$

mit solchen Kontrollgrößen  $\tilde{p}$  wie etwa Flächenlasten, Randbedingungen, Materialkonstanten u.a. konstruiert werden kann.

Wir versuchen durch geeignete Wahl von Koordinatenfunktionen mit Hilfe einer Projektion auf ein cartesisches Produkt

$$\begin{aligned} \tilde{u} &\mapsto \tilde{\xi} \in \prod_j L_{q_j}; \quad 1 < q_j < \infty, \quad j = 1,2,3,\dots,s \\ \tilde{\xi} &= \xi_j; \quad \xi_j = \xi_{jk}, \quad j=1,2,3,\dots,s, \quad k=1,2,3,\dots \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

und eine gleichzeitige geeignete Projektion der Kontrollgrößen  $\tilde{p}$  in den Raum der Kontrollparameter  $\tilde{C}$  eine adäquate Beschreibung des primären Problems mit Hilfe eines hinreichend glatten Funktionalis

$$F(\tilde{\xi}; \tilde{C}) \quad (2.1.4)$$

zu erhalten. Die Wahl der Koordinatenfunktionen ist, wie aus dem Beispiel 1.4.3 ersichtlich, nicht eindeutig. Sie hängt von der Erfahrung und Intuition ab. Auch die Dimension der Räume kann unterschiedlich sein. Die Mannigfaltigkeit der

Gleichgewichtszustände für den betrachteten Bereich der Kontrollparameter  $\tilde{C}$  ist bestimmt als die Menge der stationären Punkte für das Funktional (2.1.4). Diese werden als Lösungen des algebraischen Systems

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_{jk}} = 0 \quad \begin{array}{l} \forall j=1,2,3,\dots,s \\ \forall k=1,2,3,\dots \end{array} \quad (2.1.5)$$

welches kurz

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{\xi}} = 0 \quad (2.1.6)$$

bezeichnet wird, erhalten. Wenn für einen Bereich der Kontrollparameter  $\tilde{C}$  die Gleichung (2.1.6) exakt gelöst werden kann, ist eine exakte Lösung des Randwertproblems gefunden. Im Normalfall wird versucht eine endlich-dimensionale Approximation zu finden.

Eine einfache Umbenennung der Verhaltensvariablen und Indizes

$$\xi_{jk} \mapsto \eta_\ell, \quad (j,k) \rightarrow \ell=1,2,\dots,n,\dots$$

führt zum Funktional

$$F(\eta_\ell, c_j) \quad (2.1.7)$$

Für ein endliches  $\ell$  kann das Problem über die Auflösung des algebraischen Gleichungssystemes

$$\frac{\partial F}{\partial \eta_k} = f_k(\eta_\ell, c_j) = 0, \quad k=1,2,\dots,m \quad (2.1.8)$$

in Abhängigkeit von den Kontrollparametern  $c_j$ ,  $j=1,2,\dots,m$  formuliert werden.

$$\det \left( \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)} \right) \Big|_{\eta_0} = \det(\tilde{H}(F)) \Big|_{\eta_0} \neq 0, \quad (2.1.9)$$

dann besitzt das System (2.1.8) in einer Umgebung von  $\eta_0$  genau eine Lösung  $\eta_\ell = \eta_\ell(c_j)$  (siehe Satz 1.9.2 über implizite Funktionen). Die Stabilität jedes Lösungspunktes kann dann mit

Hilfe der Definitheit des Hessians bestimmt werden. Singularitäten in Form von Verzweigungsmannigfaltigkeiten, Auftreten neuer Lösungsäste, oder Übergang vorhandener Lösungsäste ineinander und Verschwinden kann nur stattfinden wenn

$$\det(\underline{H}(F)) = 0 \quad (2.1.10)$$

Im Raum der Verhaltensvariablen  $\underline{\eta}$  definiert Gleichung (2.1.10) den Ort aller singulären Phänomene. Elimination aller  $\eta_\ell$  aus

$$\left. \begin{array}{l} f_k(\eta_\ell, c_j) = 0, \quad k=1, 2, \dots, m \\ \det(H(F)) = 0, \quad \ell=1, 2, \dots, \ell \end{array} \right\} \quad (2.1.11)$$

führt im Raum der Kontrollparameter  $c_j$  zu den Verzweigungsflächen

$$g_m(c_j) = 0, \quad m=1, 2, \dots, m_0 \quad (2.1.12)$$

welche für einfache Fälle auch Verzweigungsdiagramme genannt werden, siehe CHOW, HALE, MALLET-PARET [152] oder LABISCH [240].

In der Praxis ist der Bereich der Kontrollparameter eingeschränkt. Für diesen beschränkten Bereich spielt ein Teil der Verhaltensparameter z.B.  $\eta_\ell$ ;  $\ell > n_1$  nur eine passive Rolle. Sie können mit Hilfe der Gleichungen

$$f_i(\eta_\ell, c_j) = 0, \quad i=n_1+1, n_1+2, \dots, n \quad (2.1.13)$$

, welche zu

$$\eta_i = \eta_i(\eta_k, c_j) \quad (2.1.14)$$

führen, eliminiert werden. Substitution in das Funktional (2.1.7) ergibt

$$F(\eta_k, \eta_i(\eta_k, c_j), c_j) =: V(\eta_k, c_j) \quad (2.1.15)$$

Die Mannigfaltigkeit der Gleichgewichtszustände ist nun gegeben durch

$$\frac{\partial V}{\partial \eta_k} = \bar{f}_k(\eta_\ell, c_j) = 0, \quad k=1, 2, \dots, n_1 \quad (2.1.16)$$

und

$$\det(\underline{H}(V)) = 0 \quad (2.1.17)$$

bestimmt den Ort der singulären Phänomene. Die Verzweigungsflächen werden nicht beeinflusst. In der Mechanik werden sogenannte Gleichgewichtspfade mit einem variablen Kontrollparameter  $c_k$ ;  $c_j = c_j(c_k)$   $j \neq k$  betrachtet.

## 2.2 Katastrophentheorie

Funktionale  $V(\underline{\eta}, \underline{c})$ , welche zu mehrdeutigen Lösungen führen, treten in vielen Disziplinen auf. Die Lösungsmengen, die Degenerationsflächen  $\det(\underline{H}(V)) = 0$  und die Verzweigungsmengen im Raum der Kontrollparameter können auch für eine endlich-dimensionale Annäherung  $n = n_\ell$ ,  $\ell=1, 2, \dots, n$  sehr kompliziert sein, siehe z.B. HALE [171]. Für einfachere Funktionale  $V(\underline{\eta}, \underline{c})$  ist die Theorie dieser Phänomene als Katastrophentheorie bekannt, siehe z.B. THOM [150], POSTON, STEWART [186], WASSERMANN [167]. Die einfachsten Funktionale sind klassifiziert in THOM's Theorem (POSTON, STEWART [186] S. 121, 122).

Nichtdegenerierte Funktionale haben die Form:

Nichtstationär

$$u_1. \quad (2.2.1)$$

Stationär vom MORSE-Thypus

$$u_1^2 + \dots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \dots - u_n^2, \quad (0 \leq i \leq n). \quad (2.2.2)$$

Degenerierte Funktionale sind unter Kosenamen, die von den Verzweigungsflächen stammen bekannt:

Die Cuspoiden Katastrophen:

Fold

$$u_1^3 + C_1 u_1 + (M); \quad (2.2.3)$$

Cusp

$$\pm (u_1^4 + C_2 u_1^2 + C_1 u_1) + (M); \quad (2.2.4)$$

Swallowtail

$$u_1^5 + C_3 u_1^3 + C_2 u_1^2 + C_1 u_1 + (M) \quad (2.2.5)$$

Butterfly

$$\pm (u_1^6 + C_4 u_1^4 + C_3 u_1^3 + C_2 u_1^2 + C_1 u_1) + (M) \quad (2.2.6)$$

Wigwam

$$u_1^7 + C_5 u_1^5 + C_4 u_1^4 + C_3 u_1^3 + C_2 u_1^2 + C_1 u_1 + (M) \quad (2.2.7)$$

Die Umbilic Katastrophen:

Elliptischer Umbilic

$$u_1^2 u_2 - u_2^3 + C_3 u_1^2 + C_2 u_2 + C_1 u_1 + (N) \quad (2.2.8)$$

Hyperbolischer Umbilic

$$u_1^2 u_2 + u_2^3 + C_3 u_1^2 + C_2 u_2 + C_1 u_1 + (N) \quad (2.2.9)$$

Parabolischer Umbilic

$$\pm (u_1^2 u_2 + u_2^4 + C_4 u_2^2 + C_3 u_1^2 + C_2 u_2 + C_1 u_1) + (N) \quad (2.2.10)$$

Zweiter elliptischer Umbilic

$$u_1^2 u_2 - u_2^5 + C_5 u_2^3 + C_4 u_2^2 + C_3 u_1^2 + C_2 u_2 + C_1 u_1 + (N) \quad (2.2.11)$$

Zweiter hyperbolischer Umbilic

$$u_1^2 u_2 + u_2^5 + C_5 u_2^3 + C_4 u_2^2 + C_3 u_1^2 + C_2 u_2 + C_1 u_1 + (N) \quad (2.2.12)$$

Symbolischer Umbilic

$$\pm (u_1^3 + u_2^4 + C_5 u_1 u_2^2 + C_4 u_2^2 + C_3 u_1 u_2 + C_2 u_2 + C_1 u_1) + (N) \quad (2.2.13)$$

M bezeichnet die nichtdegenerierte Form

$$u_2^2 + \dots + u_i^2 - u_{i+1}^2 - \dots - u_n^2 .$$

N bezeichnet die nichtdegenerierte Form

$$u_3^2 + \dots + u_1^2 - u_{i+1}^2 - \dots - u_n^2 .$$

M und N enthalten nur passive Verhaltensvariablen welche die Geometrie der Katastrophen nicht verändern. Die Vorzeichen  $\pm$  weisen auf sogenannte duale Katastrophen hin.

Die Geometrie dieser Katastrophen ist z.B. in POSTON, STEWART [186], Kapitel 9 untersucht. In der Mechanik wird eine Katastrophentheorie oft angewendet, siehe CHILLINGWORTH [140], HUI, HANSEN [201, 212], HUSEYIN [172], ROORDA [59], STUPMF [241], THOMPSON [226, 227], ZIEGLER [182]. Untersuchungen mathematischer Natur sind z.B. von KIRCHGÄSSNER [100] und von WASSERMANN, siehe z.B. [167] bekannt.

Bei der Untersuchung nichtlinearer Probleme für kontinuierliche elastische Strukturen muß sehr vorsichtig vorgegangen werden. Die Geometrie der approximierenden endlich-dimensionalen Funktionale kann sehr sensibel von der Wahl der Koordinaten abhängen. Dies muß bei TAYLOR-Reihenentwicklungen berücksichtigt werden. Die einzige bekannte exakte Lösung für das Durchschlagsproblem eines flachen Bogens, LABISCH [240] weist darauf hin, daß viele vereinfachende Voraussetzungen revidiert werden müssen. Die passiven Koordinaten beeinflussen sehr stark die Katastrophengeometrie. Das Splitting Lemma POSTON, STEWART [186] S. 95 und die sogenannten elementaren Katastrophen können nur sehr bedingt angewendet werden. Die Katastrophen Fold und Cusp gehören zu den "stabilen" Katastrophen. Bei einer einfachen Approximation treten diese immer auf. Dieses Phänomen muß bei einer Approximation berücksichtigt werden.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] NEWTON, I.: Mathematical principles of natural philosophy, 1686. Translated into english by Andrew Motte in 1729. Reprinted by the University of California Press, Berkeley (1974).
- [2] EULER, L.: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime proprietate gaudentes (Appendix, De curvis elasticis), Marcum Michaellem Bousquet, Lausanne and Geneva, (1744).
- [3] Korn, A.: Über einige Ungleichungen, welche in der Theorie der elastischen und elektrischen Schwingungen eine Rolle spielen, Bull. Int. Cracovie Akad. Umiejen., Classe des sci. math. er nat., (1909).
- [4] RITZ, W.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, J. Reine Angew. Math., Vol. 135 (1909) 1-61.
- [5] KÁRMÁN, Th. von,: Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, Enzyklopädie der Math. Wiss. Vol. 4, Leipzig, (1910) 311-385.
- [6] FRÉCHET, M.: La notion de différentielle totale, Nouv. Ann. Math., 12 (1912) 385-403, 433-449.
- [7] GÂTEAUX, R.: Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques, C.R. Acad. Paris 157 (1913) 325-327.
- [8] HELLINGER, E. Die allgemeinen Ansätze der Mechanik der Kontinua, Enz. Math. Wiss. Vol. 4, (1914) 602-694.
- [9] HADAMARD, J.: La notion de différentielle dans l'enseignement, Scripta Univ. Ab. Hierosdymitananim Jerusalem 1 (1923) 3.
- [10] FRIEDRICHS, K.O.: Die Rand- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten. Math. Ann. 98 (1927) 205-247.
- [11] TREFFTZ, E.: Konvergenz und Fehlerabschätzung beim RITZ'schen Verfahren, Math. Ann. 100 (1928) 503-521.
- [12] FFIEDRICHS, K.O.: Ein Verfahren der Variationsrechnung das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdrucks darzustellen, Ges. Wiss. Göttingen, Nachrichten Math. Phys. (1929) 13-20.
- [13] GAVURIN, M.K.: To the construction of a differential and integral calculus in BANACH-spaces. Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol. 22 (1939) 552-556.
- [14] MARGUERRE, K.: Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung. Proc. 5th Int. Congr. of Appl. Mech. Cambridge/Mass. 1938, Wiley and Sons (1939), 91-101.

- [15] FRIEDRICHS, K.O.; STOKER, J.J.: The nonlinear boundary value problem of the buckled plate, Amer. J. Math. 63 (1941) 839-888.
- [16] WEBER, C.: Eingrenzung von Verschiebungen und Zerrungen mit Hilfe der Minimalssätze, Z. angew. Math. Mech. 22 (1942) 130-136.
- [17] KOITER, W.T.: On the stability of elastic equilibrium, Dissertation, Delft, The Netherlands (1945) NASA Tech. Trans. F. 10 833 (1967)
- [18] FRIEDRICHS, K.O.: On the boundary-value problems of the theory of elasticity and KORN's inequalities, Annals of Math. 48 (1947) 441-471.
- [19] PRAGER, W.; SYNGE, J.L.: Approximations in elasticity based on the concept of function space, Q. Appl. Math. 5 (1947) 241-269.
- [20] DIAZ, J.B.; GREENBERG, H.J.: Upper and lower bounds for the solution of the first boundary value problem of elasticity, Quart. Appl. Math. 6 (1948) 326-331.
- [21] GREENBERG, H.J.: The determination of upper and lower bounds for the solution of the DIRICHLET problem, J. Math. Phys. 27 (1948) 161-182.
- [22] REISSNER, E.: Note on the method of complementary energy, J. Math. Phys. 27 (1948) 421-431.
- [23] ROTHE, E.H.: Gradient mappings and extrema in BANACH spaces, Duke Math. J. 15 (1948) 421-431.
- [24] SYNGE, J.L.: The method of the hypercircle in elasticity when body forces are present, Quart. Appl. Math. 6 (1948) 15-19.
- [25] FUNG, Y.C., KAPLAN, A.: Buckling of low arches or curved beams of small curvature, NACA Tech. Note 2840 (1952).
- [26] WANG, Ch. T.: Principle and application of complementary energy method for thin homogeneous and sandwich plates and shells with finite deflections, NACA Tech. Note 2620 (1952).
- [27] COURANT, R.; HILBERT, D.: Methods of mathematical physics, Vol.I/II (Translated from the German 1937 edition) Interscience, N.Y. (1953).
- [28] KATO, T.: On some approximate methods concerning the operators  $T^*T$ . Math. Ann. 126 (1953) 253-262.
- [29] REISSNER, E.: On a variational theorem for finite deformation, J. Math. Phys. 32 (1953) 129-135.
- [30] WASHIZU, K.: Bounds for solutions of boundary value problems in elasticity. J. Math. Phys. 32 (1953) 117-128.

- [31] ZERNA, W.; GREEN, A.E.: Theoretical elasticity, Oxford (1954).
- [32] HU, HAI-CHANG,: On some variational principles in the theory of elasticity and the theory of plasticity, Scientia Sinica 4 (1955) 33-54.
- [33] Whitney, H.: On singularities of mappings in euclidean spaces, I. Mapping of the plane into the plane. Ann. of Math. 62 (1955) 374-410.
- [34] SYNGE, J.L.: The hypercircle method in mathematical physics, Cambridge University Press, London, (1957)
- [35] BABUŠKA, I.: Die Abhängigkeit der Lösung der Elastizitätsprobleme von kleinen Änderungen des Definitionsgebiets, ZAMM 39 (1959) 411-412.
- [36] NOVOZHILOV, V.V.: The theory of thin shells 1951, english-translations. Noordhoff P. Groningen (1959).
- [37] TIMOSHENKO, S.; WOJNOWSKY-KRIEGER, W.: Theory of plates and shells, Mc-Graw-Hill, N.Y. (1959).
- [38] WEINITSCHKE, H.: On the stability problem for shallow spherical shells, J. Math. Phys. 38 (1959) 209-231.
- [39] JOHN, P.: Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations, Comm. Pure and Appl. Math. 18 (1960) 235-267.
- [40] LEHMANN, Th.: Einige Betrachtungen zur Beschreibung von Vorgängen in der klassischen Kontinuumsmechanik, Ing.-Arch. 29 (1960) 316-330.
- [41] ASHWELL, D.G.: Nonlinear problems, in: Handbook of Engineering Mechanics, ed. W. Flügge, Mc-Graw-Hill New York (1962) 45, 1-19.
- [42] KELLER, H.B.; KELLER, J.B.; REISS, E.: Buckled states of circular plates, Quart. J. Appl. Math. 20 (1962) 55-65.
- [43] LEHMANN, Th.: Einige ergänzende Bemerkungen zur Beschreibung von Vorgängen in der klassischen Kontinuumsmechanik, Ing.-Arch. 31 (1962) 371-384.
- [44] MICHLIN, S.G.: Variationsmethoden der mathematischen Physik, Akademie Verlag, Berlin (1962).
- [45] TEREKULOV, I.G.: On a variational theorem of the nonlinear theory of elasticity, PMM. 26 (62) 169-171.
- [46] BROWDER, F.G.: Nonlinear elliptic boundary value problems, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963) 862-874.
- [47] SANDERS, J.L.: Nonlinear theories for thin shells, Quart. Appl. Math. 21 (1963) 21-36.

- [48] SOBOLEV, S.L.: Applications of functional analysis in mathematical physics, (Translated from the 1950 Russian edition) Amer. Math. Soc. Translation of Math. Monographs, Vol. 7. Providence (1963).
- [49] TRUSDELL, C.; TOUPIN, R.; Static grounds for inequalities in finite strain of elastic materials, Arch. Rat. Mech. Anal. 12 (1963) 1 - 33.
- [50] FICHERA, G.: Problemi elastostatici con vincoli unilaterali; el problema di SIGNORINI con ambigue condizioni al contorno, Atti. Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Fis. Mat. Nat., Vol 8 (1964) 91-140.
- [51] KANTOROVICH, L.V.; AKILOV, G.P.: Funktional analysis in normed spaces, Pergamon Press, N.Y. (1964).
- [52] LANCZOS, C.: The variational principles of mechanics, The University of Toronto Press, Toronto (1964).
- [53] MINTY, G.J.: On the solvability of nonlinear functional equations of "monotonic" type, Pacific J. Math., Vol 14, No. 1, (1964) 243-247.
- [54] VAINBERG, M.M.: Variational methods for the study of nonlinear operators (Translated from the 1956 Russian monograph), Holden-Day, San Francisco (1964)
- [55] BAUER, L.; REISS, E.L.: Nonlinear buckling of rectangular plates, SIAM J. Appl. Math. 13 (1965) 603-626.
- [56] BROWDER, F.E.: Existence and uniqueness theorems for solutions of nonlinear boundary value problems, Proc. Symp. Appl. Math. Vol. 17 (1965).
- [57] LEVINSON, M.: The complementary energy theorem in finite elasticity, J. appl. Mech. 32 (1965) 826-828.
- [58] MIKHLIN, S.G.: The problem of the minimum of a quadratic functional (Translated from the 1952 Russian edition by A. Feinstein), Holden-Day, San Francisco (1965).
- [59] ROORDA, J.: Stability of structures with small imperfections, J. Engng. Mech. Div. ASCE 91 (1965) 87-106.
- [60] TRUESDELL, C.A.; NOLL, W.: The nonlinear field theories of mechanics, in: S. Flügge (ed), Encyclopedia of Physics, Vol. III/3, Springer-Verlag, Berlin (1965)
- [61] BERGER, M.; FIFE, P.: On the von KÁRMÁN equations and the buckling of a thin elastic plate, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966) 1006-1011.
- [62] BROWDER, F.E.: Fixed point theorems for nonlinear semicontractive mappings in BANACH spaces, Arch. Rat. Mech. Anal. 21, No. 4 (1966).

- [63] NOBLE, B.: Complementary variational principles for boundary value problems I, Basic principles, Report 473, Mathematics Research Centre, University of Wisconsin, Madison (1966).
- [64] RALL, L.B.: On complementary variational principles, J. Math. Anal. Appl. 14 (1966) 174-184.
- [65] RIEDER, G.: Über punktweise Eingrenzung in der Elastizitätstheorie, Vortrag EQUADIFF II, Bratislava (1966).
- [66] ROCKAFELLAR, R.T.: An extension of FENCHEL's duality theorem for convex-functions, Duke Math. J. 33 (1966) 81-90
- [67] SCHREYER, H.L.; MASUR, E.F.: Buckling of shallow arches, J. Engng. Mech. Div. ASCE 92 (1966) 1-19.
- [68] SRUBSHCHIK, L.S.; IUDOVICH, V.I.: Note on the stability of membrane solutions in the nonlinear theory of plates and shells, PMM 30 (1966) 137-147.
- [69] ERINGEN, A.C.: Mechanics of continua, John Wiley, N.Y. (1967).
- [70] HUTCHINSON, J.W.: Imperfection sensitivity of externally pressurized spherical shells, Trans., A.S.M.E. J. Appl. Mech. 34 (1967) 49-55.
- [71] KOITER, W.T.: A sufficient condition for the stability of shallow shells, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Ser. B 70 (1967) 367-375.
- [72] TONTI, E.: Variational principles in elastostatics, Meccanica 2 (1967) 201-208.
- [73] WASHIZU, K.: Variational methods in elasticity and plasticity, Pergamon Press, N.Y. (1967).
- [74] KNIGHTLY, G.H.: An existence theorem for the von KÁRMÁN equations, Arch. Rat. Mech. Anal. 27 (1967/68) 233-242.
- [75] BUDIANSKY, B.: Notes on nonlinear shell theory, J. Appl. Mech. 35 (1968) 393-401
- [76] HUDDLESTON, J.V.: Finite deflections and snap-through of high circular arches, Trans. A.S.M.E. J. Appl. Mech. 35 (1968) 763-769.
- [77] LUR'E, A.I.: Theory of elasticity for a semilinear material, PMM 32 (1968) 1053-1069.
- [78] MICHLIN, S.G.: Numerische Realisierung von Variationsmethoden, Akademie Verlag, Berlin (1968).
- [79] Oran, C.: Complementary energy method for buckling of plates, J. Engng. Mech. Div. ASCE 94 (1968) 621-638.

- [80] OLIVEIRA, E.R.A.: Theoretical foundations of the finite-element methods, *Int. J. Solids Struct.* 4 (1968) 929-951.
- [81] SEWELL, M.J.: A general theorie of equilibrium paths through critical points, Part I/II, *Proc. Roy. Soc. A* 306 (1968) 201-223, 225-238.
- [82] STUMPF, H.: Obere und untere Schranken bei inhomogenen Problemen der Elastizitätstheorie, *ZAMM* 48 (1968) T166-T168.
- [83] STUMPF, H.: Über punktweise Eingrenzung in der Elastizitätstheorie I-III. *Bull. Acad. Polon., Ser. sci. techn.* (1968) 329-336, 337-344, 397-406.
- [84] KELLER, J.B.; ANTMAN, St.S.: Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems, W.A. Benjamin, New York, Amsterdam (1969)
- [85] RIEDER, G.: Zur punktweisen Eingrenzung von Eigenfunktionen vollstetiger Operatoren, Vortrag, Jahrestagung. Math. Ges. DDR, Magdeburg 1969.
- [86] SEWELL, M.J.: On dual approximation principles and optimization in continuum mechanics, *Philos. Trans., Roy. Soc. London*, Vol. 265 A (1969) 319-350.
- [87] STAMPACCHIA, G.: Variational inequalities in: Theory and applications of monotone operators, (Proc. NATO Advanced Study Institute, Venice, 1968) Gubbio, Oderisi (1969) 101-192.
- [88] ARTHURS, A.M.: Complementary variational principles, Oxford University Press (1970).
- [89] HLAVÁČEK, I.; NEČAS, J.: On inequalities of KORN's type I, II, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 36 (1970) 305-334.
- [90] HUSEYIN, K.: The stability boundary of systems with one degree of freedom, Part I/II *Meccanica*, 5 (1970) 306-311, 312-316.
- [91] HUTCHINSON, J.W.; KOITER, W.T.: Post-buckling theory, *Appl. Mech. Rev.* 23 (1970) 1353.
- [92] KNIGHTLY, G.H.; SATHER, D.: On nonuniqueness of solutions of the von KÁRMÁN equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 36 (1970) 65-78.
- [93] LEIPHOLZ, H.H.E.: Stability theory: An introduction to the stability of dynamic systems and rigid bodies, Academic Press. N.Y. (1970).
- [94] MIKHLIN, S.G.: An advanced course of mathematical physics, American Elsevier, N.Y. (1970)
- [95] SEWELL, M.J.: On the branching of equilibrium paths, *Proc. Roy. Soc. London*, A 315 (1970) 499-518.

- [96] STUMPF, H.: Eingrenzungsverfahren in der Elastomechnik, Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen Nr. 2116 Köln (1970).
- [97] STUMPF, H.: Über punktweise Eingrenzung der Eigenfunktionen vollstetiger Operatoren und Anwendung auf die Schwingungen dünner Platten, ZAMM 50 (1970) T243-T245.
- [98] ZUBOV, L.M. The stationary principle of complementary work in nonlinear theory of elasticity, PMM 34 (1970) 228-232.
- [99] BABUŠKA, I.: Error-bounds for the finite-element method, Num. Math. 16 (1971) 322-333.
- [100] KIRCHGÄSSNER, K.: Multiple eigenvalue bifurcation for holomorphic mappings, in: Contributions to Nonlinear Functional Analysis, ed. E.H. Zarantonello, Academic Press, N.Y. (1971) 69-99.
- [101] MUNROE, M.E.; Measure and integration, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1971)
- [102] NASHED, M.Z.: Differentiability and related properties of nonlinear operators: Some aspects of the role of differentials in nonlinear functional analysis, in: Nonlinear Functional Analysis and Applications, ed. E.B. Rall, Academic Press, N.Y. (1971) 507-576.
- [104] TAPIA, R.A.: The differentiation and integration of nonlinear operators, in: Nonlinear Functional Analysis and Applications, ed. E.B. Rall, Academic Press, N.Y. (1971) 45-101.
- [105] BABUŠKA, I.; AZIZ, A.K.: Survey lectures on the mathematical foundations of the finite-element method, in: The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, ed. A.K. Aziz, Academic Press, N.Y. (1972) 5-359.
- [106] BASAR, Y.: Eine Schalentheorie endlicher Verformungen und ihre Anwendung zur Herleitung der Stabilitätstheorie, ZAMM 52 (1972) 197-211.
- [107] DUVAUT, G.; LIONS, J.L.: Les inequations en mécanique et en physique, Dunod, Paris (1972)
- [108] FRAEIJIS DE VEUBEKE, B.M.: A new variational theorem for finite elastic displacements, Int. J. Engng. Sci 10 (1972) 745-763.
- [109] HOLMES, R.B.: A course on optimization and best approximation, Lecture Notes in Math. 257, Springer Verlag, Berlin (1972).
- [110] NOBLE, B.; SEWELL, M.J.: On dual extremum principles in applied mathematics, J. Inst. Math. Appl. 6 (1972) 123-193.

- [111] SCHOMBURG, U.: Lokale Eingrenzung bei Randwertproblemen der Elastizitätstheorie mit der Methode der Finiten Elemente, Dissertation, RWTH Aachen 1972.
- [112] STUMPF, H.: Zur numerischen Berechnung zweiseitiger Schranken für beliebige vektorielle und tensorielle Feldgrößen elastischer Eigenschwingungszustände, ZAMM 52, (1972) 37-44.
- [113] STUMPF, H.: Zur Eingrenzung von Feldgrößen bei Eigenschwingungsproblemen der Elastomechanik, Acta Mech. 13 (1972) 225-243
- [114] TONTI, E.: On the mathematical structure of a large class of physical theories. Rend. Accad. Naz. Lincei, Class. Sci. fis. mat. nat. 52 (1972) 48-56.
- [115] YOUNG, R.C.; MOTE, C.D.: Local error bounds in mathematical physics by Finite-Element methods, Variat. Math. Engin. Proc. Int. Conf. Southampton (1972) 2/92-2/104.
- [116] ARTHURS, A.M.: Dual extremum principles and error bounds for a class of boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 41 (1973) 781-795.
- [117] CHRISTOFFERSEN, J.: On ZUBOV's Principle of stationary complementary energy and a related principle, Report no. 44, Danish Centre for Appl. Math. Mech. (1973) 1-11.
- [118] CIARLET, P.G.; RAVIART, P.A.: Maximum principle and uniform convergence for the Finite-Element method, Comp. Meth. in appl. Mech. Engng. 2 (1973) 17-31.
- [119] KOITER, W.T.: On the principle of stationary complementary energy in the non-linear theory of elasticity, SIAM J. Appl. Math. 25 (1973) 424-434.
- [120] NEMAT-NASSER, S.: General variational principles in non-linear and linear elasticity with applications, Mechanics Today Vol 1. Pergamon Press (1973).
- [121] ODEN, J.T.: Approximation and numerical analysis of finite deformations of elastic solids, in: Nonlinear Elasticity, ed. R.W. Dickey, Academic Press, N.Y. (1973) 175-228.
- [122] SABIR, A.B.; LOCK, A.C.: Large deflection, geometrically non-linear Finite-Element analysis of circular arches, Int. J. Mech. Sci. 15 (1973) 37-47.
- [123] SEWELL, M.J.: The governing equations and extremum principles of elasticity and plasticity I,II. J. Struct. Mech. 2 (1973) 1-32, 135-158.
- [124] STROEBEL, G.J. Warner, W.H.: Stability and secondary bifurcation for von KÁRMÁN plates. J.Elasticity 3 (1973) 185-202.

- [125] THOMPSON, J.M.T.; HUNT, G.W.: A general theory of elastic stability, Wiley, London (1973).
- [126] VAINBERG, M.M.: Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations, (Translated from Russian by A. Libin) John Wiley, N.Y. (1973).
- [127] WANG, C.C.; TRUESDELL, C.A.: Introduction to rational elasticity, Noordhoff, Int. Publishing Co., Leyden (1973).
- [128] BÖGEL, K.; TASCHE, M.: Analysis in normierten Räumen, Akademie Verlag, Berlin (1974)
- [129] BUDIANSKY, B.: Theory of buckling and post-buckling behaviour of elastic structures, Advances in Applied Mechanics, Vol. 14 Academic Press. N.Y. (1974).
- [130] DILL, E.H.: The complementary energy principle in nonlinear elasticity, Report no. 74-I, College of Engineering, Univ. of Washington (1974)
- [131] DUVAÛT, G.; LIONS, J.L.: Problèmes unilatéraux dans la théorie de la flexion forte des plaques, J. Mécanique 13 (1974) 51-74.
- [132] HARNACH, R.: Systematische Darstellung der Energie- und Variationsprinzipie und Anwendung auf die Schalentheorie, Tech. Rep. 73-3, Institut KIB Ruhr-Universität Bochum (1974).
- [133] HLAVAČEK, I.; NAUMANN, J.: Inhomogeneous boundary value problems for the von KÁRMÁN equations I, Aplikace Matematiky 19 (1974) 253-269.
- [134] HUSEYIN, K.: Non-linear theory of elastic stability, Noordhoff, Leyden (1974).
- [135] KNIGHTLY, G.H.; SATHER, D.: Nonlinear buckled states of rectangular plates, Arch. Rat. Mech. Anal. 54 (1974) 356-372.
- [136] MATKOWSKY, B.; PUTNIK, L.: Multiple buckled states of rectangular plates, Int. J. Nonlinear Mech. 9 (1974) 89-103.
- [137] ODEN, J.T.; REDDY, J.N.: On dual-complementary variational principles in mathematical physics. Int. J. Engng. Sci 12 (1974) 1-29.
- [138] VAINBERG, M.M.; TRENIGIN, V.A.: Theory of branching of solutions of non-linear equations, (Translated from the Russian 1969 edition) Noordhoff, Leyden (1974)
- [139] ADAMS, R.A.: Sobolev spaces, Academic Press, N.Y. (1975)
- [140] CHILLINGWORTH, D.: The catastrophe of a buckling beam, in: Dynamical Systems, Warwick 1974 (ed. A. Manning), Lecture Notes in Math. no. 468, Springer, Berlin (1975) 88-91.

- [141] HEUSER, H.: Funktionalanalysis, Teubner, Stuttgart (1975)
- [142] HLAVÁČEK, I.; NAUMANN, J.: Inhomogeneous boundary value problems for the von KÁRMÁN equations II, *Aplicace Matematiky* 20 (1975) 280-297.
- [143] HORGAN, C.O.: Inequalities of KORN and FRIEDRICHS in elasticity and potential theory, *J. Appl. Math. Phys.* 26 (1975) 155-164.
- [144] JOHN, O.; NEČAS, J.: On the solvability of von KÁRMÁN equations, *Aplicace Matematiky*, 20 (1975) 48-62.
- [145] KNOWLES, J.K.; STERNBERG, E.: On the ellipticity of the equations of nonlinear elastostatics, *J. Elasticity* 5 (1975) 341-361.
- [146] LABISCH, F.K.; STUMPF, H.: Pauschale Fehlerschranken in der nichtlinearen Plattentheorie, *ZAMM* 55 (1975) 269-271.
- [147] OGDEN, R.W.: A note on variational theorems in non-linear elastostatics, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 77 (1975) 609-615.
- [148] STUMPF, H.: Dual extremum principles and error bounds in the theory of plates with large deflections, *Arch. Mech.* 27 (1975) 485-496.
- [149] STUMPF, H.: Stationaritäts- und Extremalprinzip der geometrisch nichtlinearen Plattentheorie. *Wiss. Z. Hochsch. Arch. Bauw. Weimar* 22 (1975) 236-238.
- [150] THOM, R.: Structural stability and morphogenesis, Translated from the French by D.H. Fowler, Benjamin, Reading (1975).
- [151] TROGER, H.: Ein Beitrag zum Durchschlagen einfacher Strukturen, *Acta Mechanica* 23 (1975) 179-191.
- [152] CHOW, S.; HALE, J.K.; MALLETT-PARET, J.: Applications of generic bifurcation I/II, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 59 (1975) 159-188, 62 (1976) 209-235.
- [153] BALL, J.M.: Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 63 (1976/77) 321-336.
- [154] BUFLER, H.: Zur Variationsformulierung nichtlinearer Randwertprobleme, *Ing. Arch.* 45 (1976) 17-39.
- [155] KNOWLES, J.K.; STERNBERG, E.: On the failure of ellipticity of the equations for finite elastic plane strain, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 63 (1976/77) 321-336.
- [156] KOITER, W.T.: On the complementary energy theorem in non-linear elasticity theory, *Trends in Appl. of Pure Math. to Mech.* Ed. Fichera (1976) 207-232.
- [157] KOITER, W.T.: Complementary energy, neutral equilibrium and buckling, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch.* 79 (1976) 183-200.

- [158] LABISCH, F.K.: Some applications and methods of nonlinear functional analysis in finite displacement plate theory, in: Lecture Notes in Math. Vol. 503. Springer Verlag, Berlin (1976) 374-383.
- [159] LABISCH, F.K.: Zur Fehlerabschätzung in der nichtlinearen KÄRMÄNSchen Plattentheorie, ZAMM 56 (1976) T128-T130.
- [160] MASUR, E.F.; POPELAR, C.H.: On the use of the complementary energy in the solution of buckling problems, Int. J. Solids Struct. 12 (1976) 203-216
- [161] ODEN, J.T.; Reddy, J.N.: An introduction to the mathematical theory of finite elements, John Wiley & Sons, New York (1976).
- [162] RIEDER, G.: On the physical interpretation of certain inner products as a guide to the application of functional analysis, in: Lecture Notes in Math. Vol. 503. Springer Verlag, Berlin (1976) 450-461.
- [163] STUMPF, H.: Generating functionals and extremum principles of the nonlinear plate and shallow shell theory, in: Lecture Notes in Math. Vol. 503, Springer Verlag, Berlin (1976) 500-510.
- [164] STUMPF, H.: The principle of complementary energy in the nonlinear plate theory, J.Elasticity 6 (1976) 95-104.
- [165] STUMPF, H.: Die dualen Variationsprinzipien mit Extremaleigenschaft in der nichtlinearen Theorie flacher Schalen, ZAMM 56 (1976) T153-T156.
- [166] VELTE, W.: Direkte Methoden der Variationsrechnung, Teubner Verlag, Stuttgart (1976).
- [167] WASSERMANN, G.:  $(r, s)$  stable unfoldings and catastrophe theory, in: Lecture Notes in Math. Vol. 525, Springer, Berlin (1976) 253-263.
- [168] ZUBOV, L.M.: The representation of the displacement gradient of isotropic elastic body in terms of the PIOLA-KIRCHHOFF stress tensor, PMM 40 (1976) 1070-1077.
- [169] ANTMAN, St. S.: Buckled states of nonlinearly elastic plates, Arch. Rat. Mech. Anal. 67 (1977/78) 111-149.
- [170] BERGER, M.S.: Nonlinearity and functional analysis, Academic Press, N.Y. (1977).
- [171] HALE, J.K.: Generic bifurcation with applications, in: Heriot-Watt Lecture Vol. 1. Pitman, London (1977) 59-157.
- [172] HUSEYIN, K.: The multiple-parameter stability theory and its relation to catastrophe theory, in: Problem Analysis in Science and Engineering, Academic Press, N.Y. (1977)

- [173] LABISCH, F.K.: Elastischer Zustand, Hilbertraum und Fehlernorm für das geometrisch nichtlineare Problem der KÄRMÄNSchen Platte, ZAMM 57 (1977) T123-T126.
- [174] LEIPHOLZ, H.H.E.: Direct variational methods and eigenvalue problems in engineering, Noordhoff, Leyden (1977).
- [175] OGDEN, R.W.: Inequalities associated with the inversion of elastic stress deformation relations and their implications, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 87 (1977) 313-324.
- [176] PANAGIOTOPOULOS, P.: Ungleichungsprobleme in der Mechanik, Habilitationsschrift, RWTH Aachen (1977).
- [177] PIETRASZKIEWICZ, W.: Introduction to the non-linear theory of shells, Mitt. Inst. für Mech. 10, Ruhr-Universität Bochum (1977)
- [178] SEWELL, M.J.: On LEGENDRE transformations and elementary catastrophes. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 82 (1977) 147-163.
- [179] STUMPF, H.: Zur Dualität in der nichtlinearen Elastizitätstheorie, ZAMM 57 (1977) T157-T159.
- [180] TEMAM, R.: NAVIER-STOKES equations, North-Holland Publishing Co. Amsterdam (1977)
- [181] ZEEMAN, E.C.: Catastrophe theory: Selected papers, Addison Westey, London (1977)
- [182] ZIEGLER, H.: Principles of structural stability, Birkhäuser Verlag, Basel (1977).
- [183] BREZZI, F.: Finite element approximations of the von KÄRMÁN equations, RAIRO Analyse Numerique 12 (1978) 303-312.
- [184] LABISCH, F.K.: Lokale Fehlerschranken für Randwertprobleme der nichtlinearen Elastizitätstheorie, ZAMM 58 (1978) T212-T215.
- [185] MATSUI, T.; MATSUOKO, O.: The fundamental solution in the theory of shallow shells. Int. J. Solids, Structures 14 (1978) 971-986.
- [186] POSTON, T.; STEWART, I.: Catastrophe theory and its applications, Pitman, London (1978)
- [187] SEWELL, M.J.: On LEGENDRE transformations and umbilic catastrophes, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 83 (1978) 273-288.
- [188] STUMPF, H.: Dual extremal principles and error bounds in non-linear elasticity theory, J. Elasticity 8 (1978) 425-438.
- [189] ANTES, H.: Duale komplementäre Variationsprinzipie in der linearen Schalentheorie, Acta. Mechanica 33 (1979) 55-67.

- [190] BERDICHEVSKII, V.I.; MISIURA, V.A.: On a variational principle in geometrically nonlinear elasticity theory, *PMM* 43 (1979) 321-329.
- [191] BUFLER, H.: Generalized variational principles with relaxed continuity requirements for certain nonlinear problems, with an application to nonlinear elasticity, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.* 19 (1979) 235-255.
- [192] KIRCHGÄSSNER, K.; SCHEURLE, J.: On the bounded solutions of a semilinear equation in a strip, *J. Differential Equations* 22 (1979) 119-148.
- [193] Oden, J.T.: Finite element approximation of a class of highly nonlinear boundary-value problems in finite elasticity, *Num. Funct. Anal. and Optim.* 1 (1979) 1-35.
- [194] STUMPF, H.: The derivation of dual extremal and complementary stationary principles in geometrical non-linear shell theory, *Ing. Arch.* 50 (1979) 221-237.
- [195] THOMPSON, J.M.T.: Stability prediction through a succession of folds, *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A*, (1979) 1-23.
- [196] ANTES, H.: Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragerwerken, *Mitt. Inst. für Mech.* 19, Ruhr-Universität Bochum (1980).
- [197] ANTMAN, St. S.; DUNN, J.E.: Qualitative behavior of buckled nonlinearly elastic arches, *J.Elasticity* 10 (1980) 225-239.
- [198] BREZZI, F.; RAPPAZ, J.; RAVIART, P.A.: Finite dimensional approximation of nonlinear problems. Part I, *Num. Math.* 36 (1980) 1-25.
- [199] CIARLEF, P.G.; RABIER, P.: Les equations de von KÁRMÁN, *Lecture Notes in Math.* Vol. 826 Springer, Berlin, (1980).
- [200] GUO, ZHONG-HENG,: The unified theory of variational principles in nonlinear elasticity, *Arch. Mech.* 34 (1980) 577-596.
- [201] HUI, D.; HANSEN, J.S.: Two-mode buckling of an elastically supported plate and its relation to catastrophe theory, *J. Appl. Mech.* 47 (1980), 607-612.
- [202] HUSEYIN , K.; MANDADI, V.: On the instability of multi-parameter systems, XV. IUTAM Congress, eds. F.P.J. Rimmrott and B. Tabarrok, North-Holland Publishing Co. (1980) 281-294.
- [203] LABISCH, F.K.: Error bounds in nonlinear elastostatics, *Int. J. Engng. Sci.* 18 (1980) 389-407.
- [204] LEE, S.J.; Shield, R.T.: Variational principles in finite elastostatics. *ZAMP* 31 (1980) 437-471.

- [205] SEWELL, M.J.: Complementary energy and catastrophes. IUTAM Symposium "Variational Methods in the Mechanics of Solids", ed. S. Nemat-Nasser, Pergamon Press (1980) 163-168.
- [206] TVERGARD, V.; NEEDLEMAN, A.: On the localization of buckling patterns, Trans. A.S.M.E. J. Appl. Mech. 47 (1980) 613-619.
- [207] WASHIZU, K.: A note on the principle of stationary complementary energy in nonlinear elasticity, in: Mechanics Today Vol. 5. ed. S. Nemat-Nasser, Pergamon Press (1980) 509-522.
- [208] ANTMAN, St.S.: Global analysis of problems from nonlinear elastostatics, in: Application of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences, eds. H. Amann, N. Bazley, K. Kirchgässner, Pitman (1981) 245-270.
- [209] CRISFIELD, M.A.: A fast incremental/iterative Solution procedure that handles "Snap-Through", Computers & Structures 13 (1981) 55-62.
- [210] EDELEN, D.G.B.: Aspects of variational arguments in the theory of elasticity: Fact and folklore, Int. J. Solids Struct. 17 (1981) 729-740.
- [211] GUO, ZHONG-HENG: Variational principles in nonlinear elastostatics of closely interacting solid continua, in: Continuum Models of Discrete Systems 4, eds. O. Brulin; R.K.T. Hsieh, North-Holland Publishing Co. (1981) 109-116.
- [212] HUI, D.; HANSEN, J.S.: The parabolic umbilic catastrophe and its application in the theory of elastic stability, Quart. Appl. Math. (1981) 201-220.
- [213] KIRCHGÄSSNER, K.; SCHEURLE, J.: Bifurcation of nonperiodic solutions of some semilinear equations in unbounded domains, in: Applications of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences, Surveys Reference Works. Math. 6. Pitman (1981) 41-49.
- [214] KIRCHGÄSSNER, K.: Periodic and nonperiodic solutions of reversible systems, in: Nonlinear Differential Equations, Proc. Internat. Conf. Trento 1980, Academic Press, N.Y. (1981) 221-242.
- [215] KIRCHGÄSSNER, K.; SCHEURLE, J.: Global branches of periodic solutions of reversible systems, in: Recent Contributions to Nonlinear Partial Differential Equations, Res. Notes in Math. 50 Pitman (1981) 103-130.
- [216] LIEBERMANN, G.M.: The quasilinear DIRICHLET problem with decreased regularity at the boundary Comm. in Partial Differential Equations 6 (1981) 437-497.
- [217] SCHMIDT, R.; PIETRASZKIEWICZ, W.: Variational principles in the geometrically non-linear theory of shells undergoing moderate rotations, Ing. Arch. 50 (1981) 187-201.

- [218] STUMPF, H.: On the linear and nonlinear stability analysis in the theory of thin elastic shells, *Ing. Arch.* 51 (1981) 196-213.
- [219] CHILLINGWORTH, D.R.J.; MARSDEN, J.E.; WAN, Y.H.: Symmetry and bifurcation in three-dimensional elasticity, Part I, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 80 (1982) 93-99.
- [220] KIRCHGÄSSNER, K.: Wave-solutions of reversible systems and application, *J. Differential Equations* 45 (1982) 113-127.
- [221] KRÄTZIG, W.B.; BASAR, Y.; WITTEK, U.: Nonlinear behavior and elastic stability of shells - theoretical concepts - numerical computations- results, in: *Buckling of Shells*, Springer Verlag (1982) 19-56.
- [222] KUBRUSLY, R.S.: On the existence of post-buckling solutions of shallow shells under a certain unilateral constraint, *Int. J. Engng. Sci.* 20 (1982) 93-99.
- [223] LABISCH, F.K.: On the dual formulation of boundary value problems in non-linear elastostatics, *Int. J. Engng. Sci.* 20 (1982) 413-431.
- [224] LEHMANN, Th.: Some remarks on the decomposition of deformation and mechanical work, *Int. J. Engng. Sci.* 20 (1982) 281-288.
- [225] SPECTOR, S.J.: On uniqueness for the traction problem in finite elasticity, *J. Elasticity* 12 (1982) 367-383.
- [226] THOMPSON, J.M.T.: *Instabilities and catastrophes in science and engineering*, Wiley, Chichester (1982).
- [227] THOMPSON, J.M.T.: *Catastrophe theory in mechanics. Progress or digression*, *J. Struct. Mech.* 10 (1982) 167-175.
- [228] WUNDERLICH, W.; RENSCH, H.J.; OBRECHT, H.: Analysis of elastic-plastic buckling and imperfection sensitivity of shells of revolution, in: *Buckling of Shells*, Springer Verlag (1982) 137-174.
- [229] WUNDERLICH, W.: Mixed models for plates and shells, *Proc. Intern. Symp. on "Hybrid and Mixed Finite Element Methods"*, Atlanta 1981, eds. S.N. Atluri; R.H. Gallagher; O.C. Zienkiewicz, J. Wiley, N.Y. (1982).
- [230] ANTMAN, St. S.: Regular and singular problems for large elastic deformations of tubes, wedges and cylinders, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 83 (1983) 1-52.
- [231] CHILLINGWORTH, D.R.J.; MARSDEN, J.E.; WAN, Y.H.: Symmetry and bifurcation in three-dimensional elasticity, Part II, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 83 (1983) 363-395.
- [232] WAN, Y.H.; MARSDEN, J.E.: Symmetry and bifurcation in three-dimensional elasticity, Part III, Stressed reference configuration, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 84 (1983) 203-233.

- [233] LABISCH, F.K.: Approximation of non-unique solutions of a homogeneous elastic plate, ZAMM 63 (1983) 607-619.
- [234] LABISCH, F.K.: Duality, variational principles and error bounds in the von KÄRMAN plate theory, in: Trends in Appl. of Pure Math. to Mech., ed. J. Brilla, Pitmann, London (1983).
- [235] NOLTE, L.P.; Stumpf, H.: Energy consistent large rotation shell theories in LAGRANGEAN description, Mech. Res. Comm. 10 (1983) 213-221.
- [236] STUMPF, H.: On the post-buckling analysis of thin elastic shells, ZAMM 63 (1983) T101-T103.
- [237] SUCHY, H.; TROGER, H.; WEISS, R.: Ein Beitrag zum "Mode-Jumping" Problem von Rechteckplatten, ZAMM 63 (1983) T104-T105.
- [238] TROGER, H.: Zur Anwendung der Verfahren von RITZ und GALERKIN bei Verzweigungsproblemen, ZAMM 63 (1983) T115-T116.
- [239] LABISCH, F.K.: The shallow arch problem for non-symmetric vertical loads, ZAMM 64 (1984) T61-T63.
- [240] LABISCH, F.K.: Some remarks on the snap-through problem for a shallow arch, Q. J. Mech. Appl. Math. 37 (1984) 497-513.
- [241] STUMPF, H.: On the stability analysis of thin elastic shells and catastrophe theory, ZAMM 64 (1984) T90-T93.

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik**

- Nr. 1 Theodor Lehmann:  
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:  
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:  
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen elasto-plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:  
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:  
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:  
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:  
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung

- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode

Nr. 24 Ekkehard Goßmann:

Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen

Nr. 25 Dieter Weichert:

Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems

Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:

On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells

Nr. 27 Georg Zander:

Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast

Nr. 28 Pawel Rafalski:

An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem

Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:

Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft

Nr. 30 Franz-Josef Biehl:

Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem

Nr. 31 Maria K. Duszek:

Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory

Nr. 32 Reinhard Piltner:

Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen

Nr. 33 Petrisor Mazilu:

Variationsprinzip der Thermoplastizität I. Wärmeausbreitung und Plastizität

Nr. 34 Helmut Stumpf:

Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells

- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix:  
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:  
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:  
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:  
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik:  
Thermodiffusion flows in a solid with a dominant constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp  
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme

Nr. 46 J. Makowski/L.-P. Nolte/H. Stumpf

Finite in-plane deformations of flexible rods - insight into nonlinear shell problems

Nr. 47 F.K. Labisch

Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 47**