



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Uwe Zdebel

Theoretische und experimentelle
Untersuchungen zu einem
thero-plastischen Stoffgesetz

Heft Nr. 43



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Uwe Zdebel

**Theoretische und experimentelle Untersuchungen
zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 43

Dezember 1984

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann danke ich für die Unterstützung der Arbeit durch viele hilfreiche Anregungen und Fachgespräche sowie für die Übernahme des 1. Referates.

Herrn Prof. Dr. rer. nat. H. Antes bin ich für das Interesse an dieser Arbeit und für die Übernahme des 2. Referates zu Dank verpflichtet.

Ferner haben auch andere Mitarbeiter des Instituts zum Entstehen der Arbeit mit beigetragen. Neben Frau Schmid-Balve, die die Zeichnungen mit großer Sorgfalt ausgeführt hat, gilt mein Dank auch Herrn Dr.-Ing. Lauert, sowie Herrn Grundmann und Herrn Böhme, die mich bei der Durchführung der experimentellen Arbeiten unterstützt haben.

Eingereicht am: 17. 10. 84

Referent: Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Koreferent: Prof. Dr. rer. nat. Heinz Antes

Tag der Promotion: 7. 12. 84

© 1984 Dr.-Ing. Uwe Zdebel

Emscherstr. 208, 4690 Herne 2

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein thermo-plastisches Stoffgesetz untersucht, das Kombinationen von isotroper und kinematischer Verfestigung, sowie Abweichungen von der Normalenregel zuläßt. Dabei ist durch Berücksichtigung der Energiebilanz für thermomechanische Prozesse ein consistenter Zusammenhang zur Thermodynamik gewährleistet. Die experimentelle Verifikation der Stoffparameter wird ausführlich behandelt und über isotherme Versuchsreihen an dünnwandigen Rohren unter Längs- und Torsionslast auf unterschiedlichen Temperaturniveaus durchgeführt. Mit Hilfe dieser Stoff-Funktionen gelingt die Ausweitung auf nicht-isotherme (adiabate) Prozesse. Die Arbeit enthält außerdem einen detaillierten Vergleich zwischen experimentellen und theoretischen Ergebnissen und zeigt neben den verbliebenen Schwachstellen einige Ansatzpunkte auf, die zu weiteren Verbesserungen bei der Beschreibung des Verhaltens elasto-plastischer Materialien führen können.

Summary

The present paper deals with an examination of a thermo-plastic constitutive law, which admits combinations of isotropic and kinematic hardening and likewise deviations from normality-rule. Since the energy-balance for thermomechanical processes is taken into account, the consistent connection to thermodynamical laws is guaranteed. The experimental verification of the material-parameters is described in detail, the investigations are lead through isothermic tension-torsion tests on thin-walled tubes at different temperatures. With the help of this material-functions the extension to non-isothermic (adiabatic) processes can be made. Moreover the paper includes a detailed comparison of experimental and theoretical results and demonstrates the remaining inconsistencies. Finally some suggestions are made, which would lead to a better description of the behaviour of elastic-plastic materials.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
<u>Bezeichnungen</u>	1
<u>1. Einleitung</u>	6
<u>2. Theoretische Grundlagen zur Formulierung von Stoffgesetzen</u>	10
<u>2.1 Beschreibung der Deformation</u>	10
2.1.1 Koordinatensystem	10
2.1.2 Verzerrungsgeschwindigkeit	11
2.1.3 Deformationsgradient	12
<u>2.2 Spannungstensoren</u>	14
<u>2.3 Thermodynamik</u>	16
<u>2.4 Konstitutives Gesetz</u>	20
2.4.1 Vorbemerkungen	20
2.4.2 Evolutionsgesetze für elastische und plastische Deformationen	21
2.4.3 Fließbedingung	24
2.4.4 Spezifische Formänderungsleistung	27
2.4.5 Energiebilanz und Evolutionsgesetze für die internen Variablen	28
2.4.6 Kontinuitätsbedingung und konstitutives Gesetz	29
2.4.7 Belastungsbedingung	31
2.4.8 Vereinfachungen und endgültige Form der konstitutiven Gleichungen	31
2.4.9 Isotherme und adiabate Prozesse	34
2.4.10 Prozesse mit äußerer thermischer Belastung	37
<u>3. Verifikation der Parameter</u>	38
<u>3.1 Vorbemerkungen</u>	38

	Seite
<u>3.2 Beschreibung der Deformation dünnwandiger Kreiszyylinder</u>	39
3.2.1 Zylinderkoordinatensystem	39
3.2.2 Geometrie dünnwandiger Kreiszyylinder	41
<u>3.3 Spannungszustand</u>	42
<u>3.4 Fließbedingung und Belastungsbedingung</u>	43
<u>3.5 Vollständiges Differentialgleichungssystem</u>	44
3.5.1 elastische Deformationen	45
3.5.2 elasto-plastische Deformationen	46
<u>3.6 Numerische Lösung</u>	49
<u>3.7 Experimentelle Bestimmung des Verfestigungsverhaltens</u>	50
3.7.1 Grundsätzliches	50
3.7.2 Ermittlung der Verfestigungsfunktionen aus den Versuchsdaten	53
<u>3.8 Ermittlung von $\kappa(b^*, T)$</u>	59
3.8.1 Reine Torsionsversuche	59
3.8.2 Versuche mit abrupten Änderungen der Belastungsrichtung	59
<u>3.9 Nicht- isotherme Experimente</u>	60
<u>4. Versuchsplanung und Versuchsdurchführung</u>	62
<u>4.1 Proben</u>	62
<u>4.2 Prüfmaschine</u>	63
<u>4.3 Versuchsprogramm</u>	64
<u>4.4 Erzeugung und Messung der Temperaturen</u>	64

	Seite
<u>4.5 Auswertung der Versuchsdaten</u>	65
4.5.1 Einachsige Zugversuche	65
4.5.2 Torsionsversuche	67
<u>5. Versuchsergebnisse und Vergleich zwischen Theorie und Experiment</u>	68
<u>5.1 Reproduzierbarkeit der Experimente</u>	68
<u>5.2 Versuchsergebnisse</u>	68
<u>5.3 Vergleich zwischen Theorie und Experiment bei isothermen Prozessen</u>	80
5.3.1 Einachsige Zugversuche	80
5.3.2 Torsionsversuche ohne Belastungsumkehr	80
5.3.3 Prozesse mit Belastungsumkehr	81
5.3.4 Komplexe Belastungsprozesse	82
5.3.4.1 Kombinierte Versuche: Zug - Torsion	82
5.3.4.2 Kombinierte Versuche: Torsion - Zug	84
<u>5.4 Darstellung der aus den isothermen Versuchsserien ermittelten Parameter</u>	102
5.4.1 Isotrope Verfestigungsfunktion	102
5.4.2 Kinematische Verfestigungsfunktion	103
5.4.3 Abweichungen von der Normalenregel	105
5.4.4 Elastische und thermische Materialkenngrößen	105
<u>5.5 Vergleich zwischen Theorie und Experiment bei adiabaten Prozessen</u>	110
<u>5.6 Berechnung von Prozessen mit äußerer thermischer Belastung</u>	114
<u>5.7 Zusammenfassende Kritik am konstitutiven Gesetz</u>	118

	Seite
<u>6. Erweiterter Ansatz zur Beschreibung des kinematischen Verfestigungsverhaltens</u>	123
<u>6.1 Vorbemerkungen</u>	123
<u>6.2 Konstitutive Gleichungen und Energiebilanz</u>	123
<u>6.3 Vollständiges Differentialgleichungssystem für Zug und Torsion an dünnwandigen Rohren</u>	124
<u>6.4 Einachsige Prozesse und Ermittlung der Parameterfunktionen</u>	127
<u>6.5 Vergleich zwischen Theorie und Experiment</u>	130
6.5.1 Zyklische Prozesse	130
6.5.2 Kombinierte Prozesse	130
<u>7. Zusammenfassung und Ausblick</u>	139
<u>Literaturverzeichnis</u>	142

Bezeichnungen

$$\left(\underset{\sim}{} \right)$$

Vektor

$$\left(\underset{\approx}{} \right)$$

Tensor 2. Stufe

$$\left(\underset{\approx}{} \right)^{-1}$$

Inverse eines Tensors

$$\left(\underset{\approx}{} \right)^T$$

Transponierte eines Tensors

$$Sp \left(\underset{\approx}{} \right)$$

Spur eines Tensors

$$\underset{\approx}{\overset{1}{}}$$

Einstensor

$$\left(\underset{\approx}{\overset{\cdot}{}} \right)_j ; \left(\overset{\cdot}{} \right)_k^i$$

Materielle Zeitableitung

$$\left(\underset{\approx}{\overset{\nabla}{}} \right)_j ; \left(\overset{\nabla}{} \right)_k^i$$

Objektive Zeitableitung nach JAUMANN

Sofern an entsprechender Stelle nicht ausdrücklich vereinbart, gilt die EINSTEIN'sche Summationskonvention.

$\overset{\circ}{B}, B$	Ausgangs - bzw. aktuelle Konfiguration
x^x	krummliniges Koordinatensystem
g_{α}, g^{α}	kovariante bzw. kontravariante Basis
δ_{β}^{α}	Kronecker - Symbol
$g_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}$	Metrik
\underline{r}	Ortsvektor
\underline{v}	Geschwindigkeitsvektor
Grad \underline{v}	Geschwindigkeitsgradient
$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$	Christoffelsymbole
\underline{D}	Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit
\underline{W}	Tensor der Rotationsgeschwindigkeit
\underline{F}	Deformationsgradient
$d\underline{f}$	infinitesimaler Kraftvektor
$d\underline{A}$	gerichtetes Flächenelement
\underline{S}	CAUCHY - Spannungstensor
\underline{S}_K	gewichteter CAUCHY - Spannungstensor
\mathcal{J}	Funktionaldeterminante
ρ	Dichte
V	Volumen

\underline{T}_k	Spannungsdeviator
$\sigma'_{\alpha\beta}$	physikalische Komponenten des Spannungstensors
u	spez. innere Energie
\dot{w}	spez. Formänderungsenergie
\dot{w}_d	unmittelbar dissipierte Energie
\dot{w}_h	latente Energie
q^i	Energieflüsse
r	Energiequellen
$\overset{(H)}{\underline{E}}_{el}$	logarithmischer elastischer Verzerrungstensor
s	spez. Entropie
b, b^*, \underline{B}	interne Zustandsvariablen
T	Temperatur
ψ	spez. freie Enthalpie
G	Gleitmodul
ν	Querkontraktionszahl
α	linearer Wärmeausdehnungskoeffizient
E	Elastizitätsmodul
$\underline{D}_p, \underline{D}_s$	plastische Verzerrungsinkremente
J_1, J_2, J_3	Invarianten des Spannungsdeviators

ε_{pl}	plastische Dehnung im einachsigen Zugversuch
$k^2, \zeta, \kappa, \xi, \eta^*$	Stoffparameter
r, φ, z	Zylinderkoordinaten
$\dot{R}, \dot{t}, \dot{l}$	Anfangsabmessungen des dünnwandigen Rohres
γ	Gesamtverdrehwinkel
a	große Ellipsenhalbachse
b	kleine Ellipsenhalbachse
δ^*	Mittelpunktverschiebung der Fließellipse im einachsigen Zugversuch
$Q_1 \div Q_{11}, R_1 \div R_4$	Hilfsfunktionen
$Y_1 \div Y_5, K^*, X_T$	Hilfsfunktionen
$\Delta R'_p$	bleibende Entfestigung bei Versuchen mit Belastungsumkehr
k_0^2, a, b, c	Temperaturfunktionen
α, β, η	Temperaturfunktionen
a_T, a_Q	Temperaturfunktionen
S_{probe}	Längenänderung der Probe
S_{gesamt}	gesamte Längenänderung
F	Maschinenkraft
C_{Mo}	Maschinen - Federkonstante

σ_L	LAGRANGE'sches Spannungsmaß
M_T	Maschinen - Torsionsmoment
γ	Scherwinkel
W_T	Widerstandsmoment gegen Torsion

1. Einleitung

Die Bedeutung der Plastizitätstheorie hat in neuerer Zeit ständig zugenommen. Dies hat verschiedene Ursachen, von denen hier nur einige beispielhaft aufgeführt werden sollen:

- Aus Kostengründen wird eine möglichst optimale Materialausnutzung angestrebt, die auch die Belastbarkeit im plastischen Bereich in die Überlegungen einbezieht.
- Im Bereich der Umformtechnik verzeichnen wir neben der Forderung nach möglichst wenig Abfall bei der Fertigung ständig steigende Anforderungen an die Qualität der Produkte (z.B. Oberflächenbeschaffenheit, Maßtoleranzen etc.).
- Bei Kernkraftwerken oder in der chemischen Industrie kann ein Materialversagen an bestimmten Bauteilen (z.B. Rohrleitungen, Druckbehälter) katastrophale Folgen haben. Deshalb ist die genaue Kenntnis der Tragsicherheitsfaktoren bei etwaigen Störfällen von großer Wichtigkeit.

Diese oder ähnliche Fragestellungen aus den entsprechenden Problemkreisen verdeutlichen die Notwendigkeit einer theoretisch fundierten; allgemein anwendbaren und dabei möglichst einfachen Plastizitätstheorie.

Dabei können die Ansätze für den Aufbau einer solchen Theorie recht verschieden sein. Eine spezielle Möglichkeit besteht darin, aus dem physikalischen Verhalten mikroskopisch kleiner Materialteilchen über statistische Berechnungsmethoden auf das makroskopische Materialverhalten zu schließen. Es ist allerdings fraglich, ob diese Vorgehensweise erfolgversprechend ist, da die Verhältnisse im polykristallinen Werkstoff durch Einschlüsse von Fremdatomen, Gitterfehler, Korngrenzen, Poren etc. außerordentlich kompliziert sind. Doch selbst wenn es gelingen sollte, einfache makroskopische Anwendungsfälle anzunähern, bleiben der Anwendbarkeit auf technische Probleme enge Grenzen gesetzt.

Im Gegensatz dazu steht die phänomenologische Theorie, die die Vorgänge im mikroskopischen Bereich nur insoweit erfaßt, wie sie die

makroskopisch meßbaren Phänomene bestimmen. Eine solche Theorie setzt im allgemeinen voraus, daß die Körper als klassische Kontinua betrachtet werden können. Die Änderungen, die in einem solchen Körper stattfinden, sind dann ausschließlich bestimmt durch seinen Anfangszustand und durch die Geschichte der unabhängigen mechanischen und thermischen Prozeßvariablen.

Die klassische Plastizitätstheorie ist eine phänomenologische Theorie. Sie vernachlässigt neben den Einflüssen der Belastungsgeschwindigkeit auch die Temperaturabhängigkeit des Materialverhaltens. Abgesehen davon führt die klassische Theorie auch bei isothermen Prozessen im Vergleich mit experimentellen Untersuchungen zu teilweise unbefriedigenden Ergebnissen. Die Abweichungen zwischen Versuch und Theorie sind immer dann besonders groß, wenn nicht- proportionale Belastungen bzw. nicht- koaxiale Formänderungen auftreten. Deshalb sucht man nach neuen Ansätzen, mit dem Ziel, die klassische Plastizitätstheorie in den entsprechenden Punkten zu verbessern.

Auch dabei gibt es wieder mehrere prinzipiell unterschiedliche Möglichkeiten. Einen gangbaren Weg, das Materialverhalten besser zu beschreiben, zeigen die sogenannten Fraktionsmodelle oder "overlay"-Modelle auf, z.B. bei BESSELI NG in [33] und MEIJERS in [34] und [35]. Man nimmt dabei an, daß das Volumen eines Körpers in eine Anzahl einander parallel- geschalteter Volumenteile (Fraktionen) mit jeweils unterschiedlichen Plastizitätseigenschaften aufgeteilt werden kann. Da die Zahl der Fraktionen beliebig ist, erhält man bei geeigneter Kombination der einzelnen Elemente genügend Freiheitsgrade, um in vielen Fällen eine gute Anpassung an das reale Werkstoffverhalten zu erreichen. Dieses Modell hat allerdings den Nachteil, daß der physikalische Hintergrund weitgehend verloren geht.

Deshalb gehen viele Autoren methodisch völlig anders vor, indem sie versuchen, die bekannten konstitutiven Gleichungen der klassischen Plastizitätstheorie, ausgehend von den beobachtbaren Phänomenen, durch Variation der Ansätze (z.B. Einführung von Korrekturtermen) in den entsprechenden Punkten gezielt zu verbessern. Es existieren zahlreiche unterschiedliche theoretische Ansätze, die aber oft den Nachteil aufweisen, daß sie nur auf ganz spezielle Probleme (z.B.

zyklische Verformungen) zugeschnitten sind (siehe z.B. BACKHAUS in [23]).

Der entscheidende Mangel der meisten Theorien ist aber die Vernachlässigung der Temperatureinflüsse. Über kalorimetrische Messungen läßt sich nachweisen, daß bei plastischen Formänderungen der größte Teil der Verzerrungsarbeit dissipiert, d.h. in Wärme umgewandelt wird. Deshalb spielen bei solchen Prozessen thermodynamische Gesichtspunkte eine ganz wesentliche Rolle. Eine isotherme Prozeßführung ist dann nur als Sonderfall zu betrachten und keinesfalls immer gewährleistet.

Technisch bedeutsam werden solche Überlegungen, wenn wir etwa an die Verhältnisse beim Anfahren bzw. Abschalten von Kraftwerken denken. Bei solchen Prozessen spielen zyklische Temperaturbelastungen eine Rolle, die das Materialverhalten entscheidend beeinflussen können.

Die Grundlage des in dieser Arbeit verwendeten Stoffgesetzes bildet die Theorie, die von LEHMANN im Juli 1982 auf der CISM- Tagung " Constitutive law in thermoplasticity " in Udine vorgestellt wurde [1] .

Der Grundgedanke dieser Theorie besteht in der Einführung der Energiebilanz für thermomechanische Prozesse, wodurch ein consistenter Zusammenhang zwischen einer erweiterten klassischen Plastizitätstheorie und der Thermodynamik hergestellt wird.

Diese Energiebilanz hat sich bereits bewährt, wie die Dissertation von BLIX [29] beweist, der die Kopplung von thermischen und mechanischen Einflüssen beim Einschnürproblem an Zugproben untersucht hat. Grundlage seines " Finite- Element "- Programmes war dabei ein relativ einfaches konstitutives Gesetz, das nur rein isotrope Verfestigung berücksichtigt. Die Übereinstimmungen zwischen Versuch und Theorie waren trotzdem recht zufriedenstellend.

In dieser Arbeit wird nun ein erweitertes thermoplastisches Stoffgesetz vorgestellt, das beliebige Kombinationen von isotroper und kinematischer Verfestigung zuläßt. Die experimentelle Verifikation der Stoffparameter wird ausführlich behandelt, wobei besonderer Wert auf die Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der jeweiligen Größen gelegt wird.

Die Arbeit enthält außerdem einen detaillierten Vergleich zwischen experimentellen und theoretischen Ergebnissen und verdeutlicht zum einen die Verbesserungen gegenüber der klassischen Theorie, zum anderen aber auch die verbliebenen Schwachstellen der neuen Ansätze.

Im letzten Abschnitt wird dann der Versuch unternommen, neue Ansatzpunkte aufzuzeigen, die zu einer weiteren Verbesserung bei der Beschreibung des plastischen Verhaltens von polykristallinen Werkstoffen führen.

2. Theoretische Grundlagen zur Formulierung von Stoffgesetzen

2.1 Beschreibung der Deformation

2.1.1 Koordinatensystem

Zur Beschreibung der Deformation fester Körper können zwei prinzipiell unterschiedliche Koordinatensysteme definiert werden.

1. Man führt körperfeste Koordinatensysteme ξ^i ein, die bei der Deformation des Körpers mitverformt werden. Die lokale Basis und die Metrik werden dadurch explizit zeitabhängig. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß die materielle Zeitableitung eines in diesen Koordinaten definierten Tensors keine Starrkörperrotationen enthält.
2. Wir definieren ein raumfestes, krummliniges Koordinatensystem X^α , das während einer Deformation unverformt bleibt.

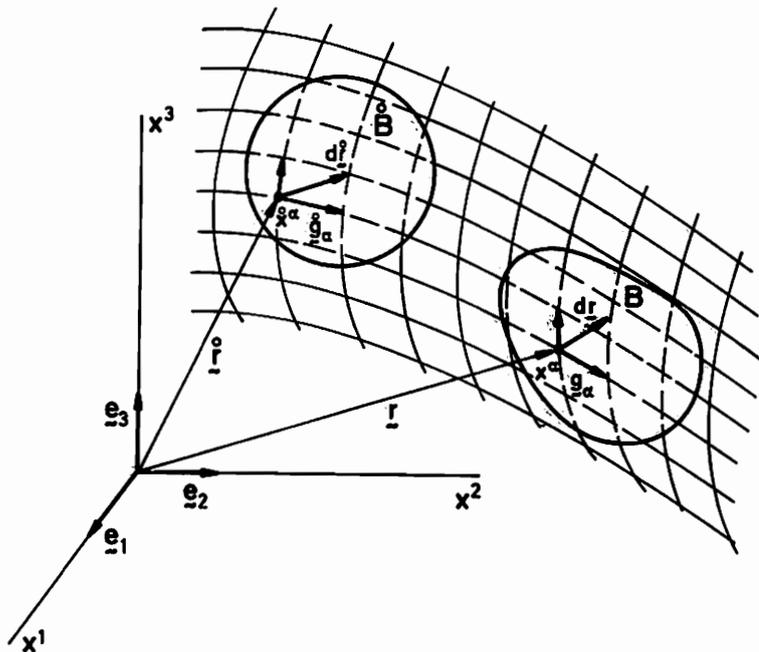


Bild 1: Deformationszustand

In jedem Punkt des Raumes mit dem dazugehörigen Ortsvektor \underline{r} ist dann die ortsabhängige Basis

$$\underline{g}_\alpha(x^s) = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x^\alpha} \quad (2.1.1)$$

eingeführt. Die reziproke Basis \underline{g}^α läßt sich definieren über die Beziehung:

$$\underline{g}^\beta \cdot \underline{g}_\alpha = \delta_\alpha^\beta \quad (2.1.2)$$

Dabei ist δ_α^β das Kronecker-Symbol, das für $\alpha = \beta$ den Wert 1 und sonst den Wert 0 annimmt.

Die Metrik ergibt sich durch skalare Multiplikation der Basisvektoren. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta}(x^s) = \underline{g}_\alpha \cdot \underline{g}_\beta \\ g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\beta}(x^s) = \underline{g}^\alpha \cdot \underline{g}^\beta \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

2.1.2 Verzerrungsgeschwindigkeit

Die Bewegung eines Körperpunktes im Raum läßt sich nun beschreiben, wenn seine Koordinaten x^α zum Zeitpunkt t in Abhängigkeit von den Ausgangskordinaten bekannt sind.

$$x^\alpha = x^\alpha(\overset{\circ}{x}^s, t) ; \overset{\circ}{x}^s = x^s(\overset{\circ}{t}) \quad (2.1.4)$$

Die Geschwindigkeit eines Körperpunktes ergibt sich dann aus der substantiellen Zeitableitung bei festgehaltenen $\overset{\circ}{x}^s$:

$$\underline{v} = \frac{D\underline{r}}{dt} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \underline{g}_\alpha = \dot{x}^\alpha \underline{g}_\alpha \quad (2.1.5)$$

Durch Ableitung des Geschwindigkeitsvektors nach den Koordinaten erhält man den Geschwindigkeitsgradienten.

$$\text{Grad } \underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial x^\beta} \underline{g}^\beta = v^\alpha|_\beta \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta \quad (2.1.6)$$

$v^\alpha|_\beta$ stellt dabei die kovariante Ableitung des Geschwindigkeitsvektors dar,

$$v^\alpha|_\beta = v^\alpha{}_{,\beta} + T_{\beta\gamma}^\alpha v^\gamma \quad (2.1.7)$$

und $T_{\beta\gamma}^\alpha$ sind die Christoffelsymbole, die man durch Ableitung der Metrik nach den Koordinaten erhält.

$$T_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (g_{\delta\beta,\gamma} + g_{\delta\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\delta}) \quad (2.1.8)$$

Der Geschwindigkeitsgradient ist ein unsymmetrischer Tensor und läßt sich in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegen,

$$\begin{aligned} \text{Grad } \underline{v} &= \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}} = \frac{1}{2} (v^\alpha|_\beta + v_\beta|^\alpha) \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta \\ &\quad + \frac{1}{2} (v^\alpha|_\beta - v_\beta|^\alpha) \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta \quad (2.1.9) \\ &= d_\beta^x \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta + \omega_{\cdot\beta}^\alpha \underline{g}_\alpha \underline{g}^\beta \end{aligned}$$

wobei sich $v_\beta|^\alpha$ über

$$v_\beta|^\alpha = g_{\beta\gamma} v^\gamma|_\delta g^{\delta\alpha} \quad (2.1.10)$$

ergibt.

$\underline{\underline{D}}$ ist dabei der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit und $\underline{\underline{W}}$ der Tensor der Rotationsgeschwindigkeit, der die Starrkörperrotationen beschreibt.

2.1.3 Deformationsgradient

Neben der in Abschnitt 2.1.2 beschriebenen Vorgehensweise existiert noch eine zweite Möglichkeit, die Deformation eines Körpers zu beschreiben, denn der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit läßt sich auch aus dem Deformationsgradienten ableiten.

Der Vektor $d\dot{\underline{r}}$, der zum Zeitpunkt \dot{t} zwei infinitesimal benachbarte Körperpunkte verbindet,

$$d\dot{\underline{r}} = d\dot{x}^\alpha \dot{\underline{g}}_\alpha \quad (2.1.11)$$

geht durch Deformation des Körpers über in :

$$d\underline{r} = dx^\alpha \underline{g}_\alpha \quad (2.1.12)$$

Die Abbildung von $d\dot{\underline{r}}$ auf $d\underline{r}$ erfolgt durch den Deformationsgradienten.

$$d\underline{r} = \underline{\underline{F}} \cdot d\dot{\underline{r}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \dot{x}^\beta} \underline{g}_\alpha \dot{\underline{g}}^\beta \cdot d\dot{\underline{r}} \quad (2.1.13)$$

Dabei ist $\underline{\underline{F}}$ ein sogenannter Doppelfeld-Tensor, da er den Ausgangs- mit dem aktuellen Zustand verbindet. Der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit läßt sich nun aus dem Deformationsgradienten ableiten über:

$$\underline{\underline{D}} = \text{sym} (\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}) = d_\beta^\alpha \underline{g}_\alpha \dot{\underline{g}}^\beta \quad (2.1.14)$$

wobei gilt:

$$\underline{\underline{F}}^{-1} = \frac{\partial \dot{x}^\alpha}{\partial x^\beta} \dot{\underline{g}}_\alpha \underline{g}^\beta \quad (2.1.15)$$

und

$$\dot{\underline{\underline{F}}} = v^\alpha |_\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial \dot{x}^\alpha} \underline{g}_\alpha \dot{\underline{g}}^\alpha \quad (2.1.16)$$

2.2 Spannungstensoren

Die wahren Spannungen werden beschrieben durch den CAUCHY- Spannungstensor, der im aktuellen Zustand zum Zeitpunkt t das gerichtete Flächenelement $d\underline{A}$ mit dem Kraftvektor $d\underline{f}$ verknüpft.

$$d\underline{f} = \underline{\underline{s}} \cdot d\underline{A} \quad (2.2.1)$$

$$\underline{\underline{s}} = \sigma_{\beta}^{\alpha} \underline{\underline{g}}_{\alpha} \underline{\underline{g}}^{\beta} \quad (2.2.2)$$

Der gewichtete CAUCHY- Tensor ist über die Beziehung

$$\underline{\underline{s}}_K = \mathcal{J} \cdot \underline{\underline{s}} = s_{\beta}^{\alpha} \underline{\underline{g}}_{\alpha} \underline{\underline{g}}^{\beta} \quad (2.2.3)$$

definiert.

Dabei ist \mathcal{J} eine Funktionaldeterminante, die die Volumenänderung während des Prozesses beschreibt.

$$\mathcal{J} = \frac{dV}{d\dot{V}} = \frac{\sqrt{|g_{\alpha\beta}|}}{\sqrt{|\dot{g}_{\alpha\beta}|}} |F^{\alpha}_{\beta}| = \frac{\dot{s}}{s} \quad (2.2.4)$$

Bei inkompressiblem Materialverhalten bleibt die Dichte konstant und man erhält:

$$\dot{s} = s \quad ; \quad \mathcal{J} = 1 \quad ; \quad \underline{\underline{s}}_K = \underline{\underline{s}} \quad (2.2.5)$$

Aus dem Spannungstensor $\underline{\underline{s}}_K$ ergibt sich durch Aufspaltung der Deviator $\underline{\underline{T}}_K$ und der Kugeltensor, der den hydrostatischen Druck bestimmt.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}_K &= \underline{\underline{s}}_K - \frac{1}{3} \text{Sp}(\underline{\underline{s}}_K) \cdot \underline{\underline{1}} \\ &= (s_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{3} s_{\gamma}^{\gamma} \delta_{\beta}^{\alpha}) \underline{\underline{g}}_{\alpha} \underline{\underline{g}}^{\beta} = t_{\beta}^{\alpha} \underline{\underline{g}}_{\alpha} \underline{\underline{g}}^{\beta} \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Neben dem Spannungstensor selber benötigen wir noch dessen Zeitableitung. Dabei muß berücksichtigt werden, daß bei raumfesten Koor-

dinaten - im Gegensatz zur körperfesten Beschreibungsweise - die substantielle Zeitableitung noch die Anteile der Starrkörperrotationen enthält. Man kann diese allerdings eliminieren, wenn man die objektive Zeitableitung nach JAUMANN einführt

$$\overset{\nabla}{\underset{\approx K}{T}} = \underset{\approx K}{\dot{T}} - \underset{\approx K}{W} \cdot \underset{\approx K}{T} + \underset{\approx K}{T} \cdot \underset{\approx K}{W} = t_{\beta}^{\alpha} \underline{g}_{\alpha} \underline{g}^{\beta} \quad (2.2.7)$$

Dabei gilt für die substantielle Zeitableitung:

$$\underset{\approx K}{\dot{T}} = t_{\beta}^{\alpha} \underline{g}_{\alpha} \underline{g}^{\beta} + t_{\beta}^{\alpha} \dot{\underline{g}}_{\alpha} \underline{g}^{\beta} + t_{\beta}^{\alpha} \underline{g}_{\alpha} \dot{\underline{g}}^{\beta} \quad (2.2.8)$$

Nach kurzer Rechnung erhält man für die Maßzahlen der JAUMANN- Ableitung:

$$t_{\beta}^{\alpha} = \dot{t}_{\beta}^{\alpha} + t_{\beta}^{\gamma} d_{\gamma}^{\alpha} - t_{\gamma}^{\alpha} d_{\beta}^{\gamma} + t_{\gamma}^{\alpha} V_{,\beta}^{\gamma} - t_{\beta}^{\gamma} V_{,\gamma}^{\alpha} \quad (2.2.9)$$

Die physikalischen Komponenten σ_{β}^{α} stimmen mit den Maßzahlen von $\underset{\approx K}{S}$ nur dann überein, wenn ein Hauptachsen- System vorliegt.

Im allgemeinen Fall erhält man die σ_{β}^{α} aus den Maßzahlen σ'_{β}^{α} über die Gleichung:

$$\sigma'_{\beta}^{\alpha} = \frac{\sqrt{g^{\beta\beta}}}{\sqrt{g^{\alpha\alpha}}} \sigma_{\beta}^{\alpha} \quad (2.2.10)$$

wobei in (2.2.10) die EINSTEIN'sche Summationskonvention nicht gilt.

2.3 Thermodynamik

Der allgemeine Rahmen für die Definition von thermoplastischen Stoffgesetzen wurde von LEHMANN in [1] , [2] und [22] ausführlich behandelt. Die theoretischen Überlegungen bezüglich der Thermodynamik solcher Prozesse sollen hier nur insoweit stichpunktartig aufgegriffen werden, wie sie zum weiteren Verständnis dieser Arbeit notwendig sind.

Im Rahmen seiner phänomenologischen Theorie geht LEHMANN davon aus, daß

1. die Körper klassische Kontinua sind
2. auch wenn der Körper als Ganzes nicht im thermodynamischen Gleichgewicht ist, die einzelnen Körperelemente dennoch als thermodynamische Systeme betrachtet werden können, beschreibbar durch einen geeignet definierten Satz von externen und internen Zustandsvariablen.

Dabei sind die externen Zustandsvariablen die Spannungen und die Temperatur, die durch die konjugierten Zustandsvariablen reversible Dehnung und Entropie ersetzt werden können.

Ein thermodynamischer Prozeß ist dann bestimmt durch:

1. den Ausgangszustand jedes Körperelementes
2. die Geschichte der unabhängigen Prozeßvariablen
 - a.) thermomechanische Randbedingungen
 - b.) Energiequellen

Das Ziel der Prozeßbeschreibung besteht darin, die Geschichte der abhängigen Prozeßvariablen zu liefern:

1. thermomechanische Größen auf dem Rande und im Inneren
2. interne Zustandsvariable
3. alle anderen interessierenden Größen (z.B. Energieaustausch).

Das Verbindungsglied zwischen der Geschichte der unabhängigen und der abhängigen Prozeßvariablen wird gebildet durch:

1. die allgemeinen Feldgleichungen
 - a.) Bilanzgleichung für die Masse

- b.) Kompatibilitätsbedingungen für die Formänderungsgeschwindigkeiten
 - c.) Bilanzgleichung für Impuls und Drall
 - d.) Bilanzgleichung für Energie (1. Hauptsatz)
 - e.) 2. Hauptsatz
2. das konstitutive Gesetz bestehend aus:
- a.) Zustandsgleichung für freie innere Energie oder Enthalpie
 - b.) Evolutionsgesetze für inelastische Formänderungen
 - c.) Evolutionsgesetze für interne Variable
 - d.) Gesetze für Energieflüsse
 - e.) Gesetze für Entropieproduktion

Nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik gilt:

$$\dot{u} = \dot{w} - \frac{1}{\rho} q^i |_{,i} + \tau \quad (2.3.1)$$

Dabei sind: u spezifische innere Energie
 q^i Energieflüsse
 τ Energiequellen
 w spezifische Formänderungsarbeit

Für die substantielle Änderung der spez. Formänderungsarbeit gilt:

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho} \text{Sp} (\underline{s}_k \cdot \underline{D}) \quad (2.3.2)$$

Dabei läßt sich die Gesamtenergie aufteilen in:

$$\dot{w} = \dot{w}_{el} + \dot{w}_{pl} \quad (2.3.3)$$

wobei der elastische Anteil w_{el} wegunabhängig und streng reversibel im Sinne der Thermodynamik ist.

Der verbliebene Anteil \dot{w}_{pl} , das Inkrement der spez. plastischen Arbeit, muß nochmals aufgespalten werden in:

$$\dot{w}_{pl} = \dot{w}_d + \dot{w}_h \quad (2.3.4)$$

Der Anteil w_d ist streng irreversibel und wird vollständig in Wär-

me dissipiert. \dot{w}_h ist die Energie, die durch interne Strukturänderungen im Material gespeichert wird. Inwieweit sie reversibel ist, ergibt sich erst aus dem weiteren Prozeßablauf.

Unter unseren Voraussetzungen muß nun die spez. innere Energie u als Funktion der externen und internen Zustandsvariablen darstellbar sein,

$$u = u(\underline{\underline{\xi}}_{el}, S, b, \underline{\underline{B}}) \quad (2.3.5)$$

wobei die internen Zustandsvariablen auf eine skalare Variable b und eine tensorielle Variable $\underline{\underline{B}}$ beschränkt werden. S ist die spezifische Entropie.

Der elastische Verzerrungstensor muß nun so definiert werden, daß $\underline{\underline{\xi}}_{el}$ und der in 2.2 eingeführte Spannungstensor $\underline{\underline{S}}_k$ ein adjungiertes Paar bilden. Diese Forderung wird bei elastisch isotropem Materialverhalten durch den nach HENCKY benannten Verzerrungstensor $\underline{\underline{\xi}}_{el}^{(H)}$ erfüllt. Die Definition eines Verzerrungstensors, der die plastischen Formänderungen repräsentiert ist nicht erforderlich, da diese keine thermodynamischen Zustandsgrößen darstellen. Es genügt dabei die Einführung der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeit $\underline{\underline{D}}_{pl}$ entsprechend den Gleichungen (2.1.9) bzw. (2.1.14) sowie (2.3.3).

Aus (2.3.5) läßt sich nach zweifacher LEGENDRE-Transformation ein Ausdruck für die spez. freie Enthalpie in der Form

$$\psi(\underline{\underline{S}}_k, T, b, \underline{\underline{B}}) = u - \frac{1}{\vartheta} \text{Sp}(\underline{\underline{S}}_k \cdot \underline{\underline{\xi}}_{el}^{(H)}) - TS \quad (2.3.6)$$

finden, von dem wir annehmen, daß er sich folgendermaßen darstellen läßt (u.a. bedeutet das die Unabhängigkeit des reversiblen Verhaltens von den internen Variablen):

$$\psi(\underline{\underline{S}}_k, T, b, \underline{\underline{B}}) = \psi^*(\underline{\underline{S}}_k, T) + \psi^{**}(T, b) + \psi^{***}(T, \underline{\underline{B}}) \quad (2.3.7)$$

Über die zeitliche Änderung von ψ erhält man schließlich mit Hilfe der thermischen Zustandsgleichung

$$\underline{\underline{\xi}}_{el}^{(H)} = -\vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{S}}_k} \quad (2.3.8)$$

und der kalorischen Zustandsgleichung

$$S = - \frac{\partial \psi}{\partial T} \quad (2.3.9)$$

die Bilanzgleichungen für die Energiezufuhr.

Es gilt dann für das Inkrement der spez. plastischen Arbeit und die übrige Energiezufuhr:

$$\dot{W}_{pl} - \frac{1}{g} q^i l_i + r = c_p \dot{T} + S_p (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{S}}_{\kappa}^{\nabla}) + h \dot{b} + 2g S_p (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}}^{\nabla}) \quad (2.3.10)$$

wobei die Koeffizienten der rechten Seite gegeben sind über:

$$c_p = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \quad (2.3.11)$$

$$\underline{\underline{L}} = -T \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \underline{\underline{S}}_{\kappa} \partial T} \quad (2.3.12)$$

h und g ergeben sich aus den partiellen Ableitungen der spezifischen Enthalpie nach den internen Variablen.

$$h(b, T) = \frac{\partial}{\partial b} \left(\psi^{**} - T \frac{\partial \psi^{**}}{\partial T} \right) \quad (2.3.13)$$

$$g(B, T) = \frac{\partial}{\partial B} \left(\psi^{***} - T \frac{\partial \psi^{***}}{\partial T} \right); \quad B = S_p(\underline{\underline{B}}^2) \quad (2.3.14)$$

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik ist im Prinzip eine Ungleichung, die die Richtung angibt, in der thermomechanische Prozesse ablaufen können. Man geht dabei aus von der Existenz einer Zustandsfunktion S (Entropie), deren Gesamtänderung in den reversiblen Anteil \dot{S}_{re} und die irreversible Entropieproduktion \dot{S}_{itr} aufgespalten werden kann. Für die irreversible Entropieproduktion, die nach dem 2. Hauptsatz nicht negativ werden kann, gilt nach LEHMANN:

$$T \dot{S}_{itr} = \dot{W}_d - \frac{1}{gT} q^i l_i + T \dot{\eta} \geq 0 \quad (2.3.15)$$

Dabei sind:

\dot{W}_d unmittelbar dissipierte Energie
 $\frac{1}{T} q^i l_i$ irreversibler Wärmefluß
 $\dot{\eta}$ von den übrigen Energieflüssen, den Energiequellen r und den inneren Prozessen produzierte Entropie.

2.4 Konstitutives Gesetz

2.4.1 Vorbemerkungen

Ein im Rahmen der phänomenologischen Theorie definiertes Stoffgesetz muß die folgenden Forderungen erfüllen:

1. Es soll nicht nur bei einfachen, sondern auch bei komplexen Belastungsvorgängen befriedigende Übereinstimmungen zwischen Versuch und Theorie liefern.
2. Die saubere Einbettung des konstitutiven Gesetzes in den allgemeinen, weitergefaßten Rahmen für nicht- isotherme Formänderungen muß gewährleistet sein.
3. Es soll dabei möglichst so einfach sein, daß praktisch technische Anwendungsmöglichkeiten gegeben sind.

Das in dieser Arbeit behandelte Stoffgesetz ist dabei an folgende Voraussetzungen gebunden:

1. Die Beschreibung beschränkt sich auf elasto- plastische Formänderungen; viskose (geschwindigkeitsabhängige) Effekte werden nicht berücksichtigt.
Allerdings stellt die Ausweitung auf elasto- viscoplastische Deformationen theoretisch kein Problem dar. Wie LEHMANN in [1] nachgewiesen hat, gestaltet sich deren Beschreibung in manchen Punkten sogar einfacher.
2. Das Material sei elastisch kompressibel und plastisch inkompressibel.
3. Die elastischen Deformationen sollen klein sein. Diese Forderung ist bei allen Metallen erfüllt.
4. Der Werkstoff sei vor der Deformation isotrop.
5. Bezüglich der Energieflüsse wird nur die Wärmeleitung berücksichtigt. Alle übrigen Energieflüsse (z.B. Diffusionsprozesse) werden vernachlässigt.
6. Der Temperaturbereich wird so gewählt, daß Phasentransformationen ausgeschlossen sind.

Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir dann für die konstitutiven Gleichungen folgendes Schema:

1. Zustandsgleichung für die spez. freie Enthalpie. Diese bestimmt auch die elastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten als externe Zustandsvariable.
2. Evolutionsgesetze für die plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten
3. Entwicklungsgesetze für die internen Variablen
4. Wärmeleitungsgleichung
5. Gesetz für die Entropieproduktion.

Vernachlässigt man zusätzlich die Wärmeleitung (adiabate Prozeßführung) so erhält man letztendlich ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung, wobei die Zeit t nur die Rolle eines Parameters spielt, der das Fortschreiten des Prozesses beschreibt.

2.4.2 Evolutionsgesetze für elastische und plastische Deformationen

Analog zu der in Abschnitt 2.3 beschriebenen Aufteilung der spez. Verzerrungsleistung läßt sich auch der Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit $\underline{\underline{D}}$ additiv aufspalten in einen elastischen und einen plastischen Anteil.

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_{el} + \underline{\underline{D}}_{pl} \quad (2.4.1)$$

Auf die elastischen Deformationen wird das HOOKE'sche Gesetz angewendet. Da bei allen Metallen die elastischen Verzerrungen stets klein sind (Voraussetzung 3) bietet ihre Beschreibung durch das sogenannte " hypoelastische Stoffgesetz " eine gute Approximation:

$$\underline{\underline{D}}_{el} = \frac{1}{2G} \left[\underline{\underline{T}}_k + \frac{1-2\nu}{3(1+\nu)} \text{Sp}(\underline{\underline{S}}_k) \underline{\underline{1}} \right] + \alpha \dot{T} \underline{\underline{1}} \quad (2.4.2)$$

Die elastischen Eigenschaften werden bestimmt durch die Materialkonstanten G (Gleitmodul) und ν (Querkontraktionszahl), die mit dem Elastizitätsmodul über die Gleichung

$$E = 2G(1+\nu) \quad (2.4.3)$$

verknüpft sind.

Vorausgegangene plastische Deformationen heben zwar die Grenzen des elastischen Bereiches an, das elastische Verhalten selber bleibt nahezu unverändert.

Während die elastischen Deformationen sich mikroskopisch als reversible Verzerrungen innerhalb der Kristall- Gitterstrukturen deuten lassen, sind plastische Deformationen immer mit den Gitterdefekten z.B. Einschlüssen von Fremdatomen, Fehlstellen, Versetzungen usw. verknüpft.

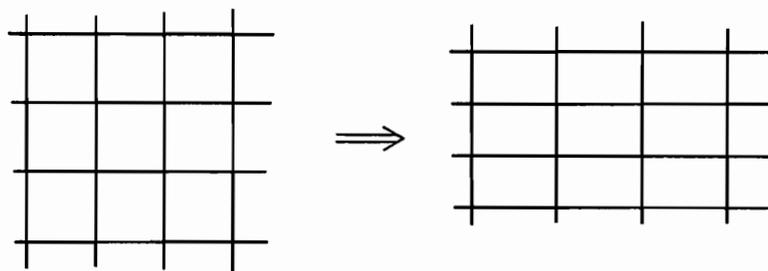


Bild 2: Gitterverzerrungen bei elastischen Deformationen

Man kann dabei zwei grundsätzlich verschiedene Mechanismen unterscheiden:

1. Wanderung von bereits vorhandenen Gitterdefekten hervorgerufen durch die aktuellen Spannungen (Bild 3 zeigt das am Beispiel einer Stufenversetzung),
2. Produktion von neuen Gitterfehlern, die sich im Kristallgitter ansammeln.

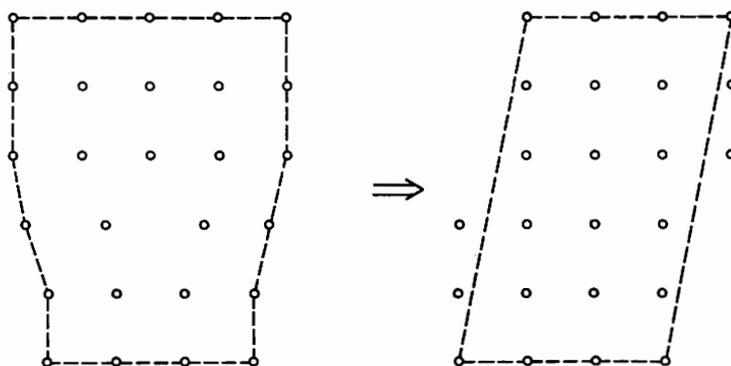


Bild 3: Wanderung einer Stufenversetzung durch plastische Deformation

Diese Unterscheidung führt über Energiebetrachtungen gedanklich zu einer erneuten Aufspaltung des plastischen Verzerrungsgeschwindigkeits-tensors,

$$\underline{\underline{D}}_{PL} = \underline{\underline{D}}_P + \underline{\underline{D}}_S \quad (2.4.4)$$

wobei der Anteil $\underline{\underline{D}}_P$ mit der Wanderung und $\underline{\underline{D}}_S$ mit der Neuproduktion bzw. Umlagerung und Ausheilung der Gitterdefekte korrespondiert.

Die Versetzungsbewegungen werden im polykristallinen Werkstoff durch Fremdeinschlüsse oder Korngrenzen behindert. Dort findet dann ein Anstieg der Gitterfehler- Konzentrationen statt, der zu einer globalen Anhebung der Elastizitätsgrenze (Verfestigung) führt. Auch die Anisotropie bei Wiederbelastung in gleicher bzw. entgegengesetzter Richtung (BAUSCHINGER- Effekt) läßt sich über dieses Gedankenmodell erklären.

Im Rahmen unserer Theorie wird $\underline{\underline{D}}_P$ beschrieben durch:

$$\underline{\underline{D}}_P = \frac{\lambda}{\sqrt{k^2}} \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{S}}_k} \quad (2.4.5)$$

Man nennt diese Gleichung, die sich auch aus der Theorie des " plastischen Potentials " ableiten läßt " Normalenregel " , weil sie bewirkt, daß die Richtung der Verzerrungszinkremente $\underline{\underline{D}}_P$ im Spannungsraum stets mit der äußeren Normalen der Fließfläche $\partial F / \partial \underline{\underline{S}}_k$ zusammenfällt.

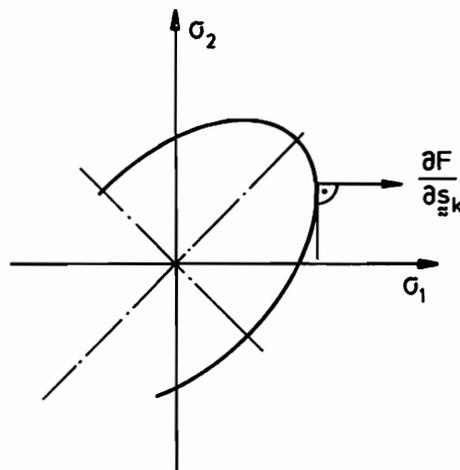


Bild 4: Fließfläche im Hauptspannungsraum

Die Fließfläche F spielt dabei formal die Rolle eines Potentials für die Spannungen.

Der Ansatz (2.4.5) allein führt im Vergleich mit experimentellen Untersuchungen zu unbefriedigenden Übereinstimmungen. Die auftretenden Abweichungen sind immer dann besonders groß, wenn nicht- proportionale Belastungen auftreten.

Beispiele hierzu sind: Scherung
komplexe Belastungsprozesse usw.

Deshalb benötigt man im allgemeinen Fall das zusätzliche Verzerrungsincrement $\underline{\underline{D}}_S$. Für die Evolution von $\underline{\underline{D}}_S$ treffen wir die Annahme:

$$\underline{\underline{D}}_S = \kappa \left(\overset{\nabla}{\underline{\underline{I}}}_K - \overset{\nabla}{\underline{\underline{B}}} \right) \quad (2.4.6)$$

Diesem Ansatz liegt - anschaulich formuliert - die Annahme zugrunde, daß zumindest ein Teil der ausgelösten Verzerrungsincremente in die Richtung der auslösenden Spannungsincremente $(\overset{\nabla}{\underline{\underline{I}}}_K - \overset{\nabla}{\underline{\underline{B}}})$ fallen wird. Dabei ist $\underline{\underline{B}}$ die tensorielle Zustandsvariable, die in Abhängigkeit von der Deformations- Vorgeschichte die Anisotropie der Verformung (BAUSCHINGER- Effekt) beschreibt.

An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die Gleichungen des Stoffgesetzes nicht aus etwaigen mikroskopischen Untersuchungen abgeleitet sind, sondern im Rahmen der phänomenologischen Theorie anschaulich begründbare Annahmen darstellen, die ihre Tauglichkeit beim Vergleich zwischen Experiment und Theorie beweisen müssen.

2.4.3 Fließbedingung

Die Fließbedingung begrenzt den Bereich der elastischen Deformationen und ist für isotrope Materialien eine Funktion der Invarianten des Spannungstensors, der Temperatur und eines Satzes skalarwertiger interner Variabler. Plastische Formänderungsprozesse verlaufen nahezu isochor (Voraussetzung 2), d.h., der hydrostatische Anteil des Spannungszustandes hat praktisch keinen Einfluß auf den Fließprozeß. Deshalb hängt die Fließbedingung nur vom Deviator, bzw. seinen Invarianten, der Temperatur und den internen Zustandsvariablen ab.

$$F = F (J_2, J_3, b, T) \quad (2.4.7)$$

Dabei gilt für die Invarianten:

$$J_2 = Sp (\underline{I}_k^2) = t_\beta^\alpha t_\alpha^\beta \quad (2.4.8)$$

$$J_3 = Sp (\underline{I}_k^3) = t_\beta^\alpha t_\gamma^\beta t_\alpha^\gamma$$

Die am häufigsten verwendeten Fließbedingungen vernachlässigen den Einfluß der 3. Invarianten. Die mathematisch einfachste Form von (2.4.7) bildet dann die Fließbedingung nach v. MISES, die sich auch aus der " Gestaltänderungsenergie- Hypothese " ableiten läßt.

$$F (J_2, b, T) = Sp (\underline{I}_k^2) - k^2 (b, T) = 0 \quad (2.4.9)$$

Dabei bleibt sowohl der Einfluß der 3. Invarianten, als auch die Anisotropie der Verfestigung durch entsprechende Vordeformationen unberücksichtigt.

Für ebene Spannungszustände erhält man eine Ellipse im Raum der Hauptspannungen, deren Halbachsen durch plastische Verformungen aufgeweitet werden (Verfestigung), wobei als Grenzfall für $k^2 = \dot{k}^2 = \text{konst.}$ das elastisch- idealplastische Fließen beschrieben werden kann. Das Verhältnis von großer zu kleiner Halbachse (Fließspannung bei einachsigen Zug bzw. Druck und reinem Schub) bleibt stets unverändert und hat den Wert $\sqrt{3}$.

Eine sinnvolle Erweiterung bildet das Fließkriterium nach MELAN, PRAGER, ZIEGLER, SHIELD:

$$F = Sp [(\underline{I}_k - \underline{B})^2] - k^2 (b, T) = 0 \quad (2.4.10)$$

Diese anfänglich isotrope Fließbedingung ($\underline{B}(0) = \underline{0}$) wird durch plastische Formänderungen anisotrop. In Abhängigkeit von der Verformungsgeschichte ändern sich sowohl Größe der Halbachsen (isotrope Verfestigung) als auch die Lage des Ellipsenmittelpunktes (kinematische

Verfestigung).

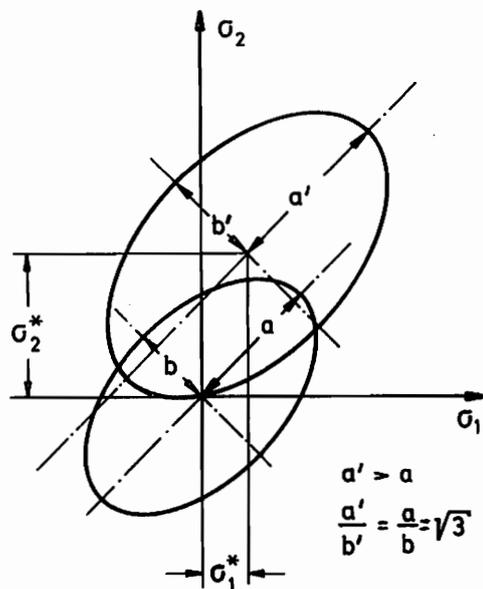


Bild 5: Fließbedingung mit isotroper und kinematischer Verfestigung

Auf diese Weise erhält man einen zusätzlichen Freiheitsgrad, der es erlaubt, auch Prozesse mit Belastungsumkehr (BAUSCHINGER - Effekt) zu beschreiben. Allerdings sind die Änderungen der Fließellipse im Spannungsraum bestimmten Einschränkungen unterworfen:

- 1.. Das Verhältnis von großer zu kleiner Halbachse bleibt stets unverändert.
- 2.. Die Verschiebung des Ellipsenmittelpunktes erfolgt rein translato-
risch. Rotationen der Achsen sind ausgeschlossen.

Als Grenzfälle dieses Fließkriteriums erhält man für $\underline{B} = 0$ die Fließbedingung nach v. MISES (rein isotrope Verfestigung) sowie für $k^2 = \underline{k}^2 = \text{konst.}$ die rein kinematische Verfestigung.

Neuere experimentelle Untersuchungen mit dem Ziel, die Fließkurve nach genau definierter Vordeformation unmittelbar zu messen (z.B. LAUERT-GUPTA [20] , Ikegami [19] , Phillips [18] , usw.) lassen vermuten, daß bei genauerer Betrachtung der Einfluß der 3. Invarianten nicht vernachlässigt werden darf. In diesem Zusammenhang sind aber noch viele Fragen völlig offen, so z.B.: Ist die Fließfläche konvex oder nicht?

Eine nicht konvexe Fließkurve widerspräche dem DRUCKER- Postulat ([49] , [50]). das allerdings bei nicht- isothermen Prozessen seine physikalische Bedeutung verliert (LEHMANN in [12]).

Auch kommen LAUERT - GUPTA bzw. IKEGAMI und PHILLIPS bedingt durch Abweichungen in der Versuchsdurchführung zu völlig unterschiedlichen Ergebnissen. Während LAUERT - GUPTA die Proben nach genau definierter plastischer Vordeformation zunächst wieder vollständig entlasten und danach die Fließkurve aufnehmen, geschieht dies bei IKEGAMI nach nur teilweiser (partieller) Entlastung. LAUERT - GUPTA erhalten nach Vorbelastung durch einachsigen Zug Fließkurven, die zwar in erster Näherung Ellipsenform haben, die aber bei genauerer Messung eine Einkerbung im Druckbereich aufweisen. Bei den von IKEGAMI gemessenen Fließkurven fehlt diese Einkerbung, allerdings weisen sie auch ange-nähert keine Ellipsenform mehr auf. Da sie den Spannungsursprung nicht umschließen, erhält man zusätzlich Schwierigkeiten im Hinblick auf thermodynamische Gesichtspunkte. Es können sich Widersprüche zum 2. Hauptsatz ergeben.

Es bedarf sicherlich noch vieler experimenteller Arbeiten, bis diese Zusammenhänge etwas klarer werden.

Allerdings haben Berechnungen von MEYERS - MAZILU [42] gezeigt, daß eine wesentlich bessere Anpassung an die von LAUERT - GUPTA gemessenen Fließkurven möglich ist, wenn man die 3. Invariante zu Hilfe nimmt. Dies geschieht aber um den Preis erheblich größerer mathematischer Schwierigkeiten.

Deshalb beschränken sich die Ausführungen in dieser Arbeit unter Abwägung aller dieser Aspekte auf eine Theorie mit der Fließbedingung (2.4.10).

2.4.4 spezifische Formänderungsleistung

In Anlehnung an die in Abschnitt 2.4.2 (Ansatz 2.4.4) gewählte Aufspaltung des plastischen Verzerrungsgeschwindigkeitstensors können nun auch bezüglich der Verzerrungsleistung zwei Anteile unterschieden werden, die mit den jeweiligen Mechanismen korrespondieren.

$$\dot{b} = \frac{\delta}{g} \text{Sp}[(\underline{I}_k - \underline{B}) \cdot \underline{D}_s] + \frac{\mu}{g} \text{Sp}[(\underline{I}_k - \underline{B}) \cdot \underline{D}_p] \quad (2.4.15)$$

und

$$\underline{B} = \zeta \underline{D}_s + \nu \underline{D}_p \quad (2.4.16)$$

mit den Anfangsbedingungen für " jungfräulich isotropes " Material

$$b(0) = 0 \quad ; \quad \underline{B}(0) = \underline{0}$$

so ergibt sich durch Einsetzen in die Bilanzgleichung (2.4.14):

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{g} \text{Sp}(\underline{I}_k \cdot \underline{D}_s) + \frac{\xi}{g} \text{Sp}(\underline{I}_k \cdot \underline{D}_p) \\ = \frac{1}{g} \text{Sp} \{ [h\delta \underline{I}_k - (h\delta - 2g\dot{\zeta}) \underline{B}] \cdot \underline{D}_s \} \\ + \frac{1}{g} \text{Sp} \{ [h\mu \underline{I}_k - (h\mu - 2g\dot{\nu}) \underline{B}] \cdot \underline{D}_p \} \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man:

$$\begin{aligned} h\delta = \theta \quad ; \quad h\mu = \xi \\ \left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{h\delta}{2g\dot{\zeta}} \\ \nu &= \frac{h\mu}{2g\dot{\nu}} \end{aligned} \right\} \frac{\zeta}{\delta} = \frac{\nu}{\mu} \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

2.4.6 Kontinuitätsbedingung und konstitutives Gesetz

Elastische Deformationen werden begrenzt durch das Fließkriterium (2.4.10). Da im Verlaufe plastischer Formänderungen die Fließbedingung ständig erfüllt bleiben muß, gilt neben

$$F(\underline{I}_k, T, b, \underline{B}) = 0$$

auch:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{B}}} &= \dot{\underline{\underline{B}}} \\ &= S_p \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{T}}_k} \cdot \underline{\underline{T}}_k^\nabla \right) + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial F}{\partial b} \dot{b} + S_p \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{B}}} \cdot \underline{\underline{B}}^\nabla \right) \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Für die gewählte Fließbedingung erhält man daraus:

$$2 S_p \left[(\underline{\underline{T}}_k - \underline{\underline{B}}) (\underline{\underline{T}}_k^\nabla - \underline{\underline{B}}^\nabla) \right] - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T} - \frac{\partial k^2}{\partial b} \dot{b} = 0 \quad (2.4.20)$$

Gleichung (2.4.20) ist nun die Bedingungsgleichung zur Bestimmung von λ .

Wir erhalten zusammen mit (2.4.15), (2.4.16), (2.4.5) und (2.4.6):

$$\lambda = \frac{\left(2 - \frac{\delta \kappa}{\delta} \frac{\partial k^2}{\partial b} \right) S_p \left[(\underline{\underline{T}}_k - \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{T}}_k^\nabla \right] - (1 + \kappa \zeta) \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{2 \mu \sqrt{k^2} \left(2 \frac{\zeta}{\delta} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial k^2}{\partial b} \right)} \quad (2.4.21)$$

Damit ergeben sich nach einigen Zwischenrechnungen die Evolutionsgesetze für die internen Variablen:

$$\dot{b} = \frac{1}{\delta} \frac{2 S_p \left[(\underline{\underline{T}}_k - \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{T}}_k^\nabla \right] - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{2 \frac{\zeta}{\delta} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial k^2}{\partial b}} \quad (2.4.22)$$

und

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}^\nabla &= \frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ \kappa \zeta \underline{\underline{T}}_k^\nabla \right. \\ &\quad \left. + \frac{\zeta}{\delta} \frac{\left(2 - \frac{\delta \kappa}{\delta} \frac{\partial k^2}{\partial b} \right) S_p \left[(\underline{\underline{T}}_k - \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{T}}_k^\nabla \right] - (1 + \kappa \zeta) \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{k^2 \left(2 \frac{\zeta}{\delta} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial k^2}{\partial b} \right)} (\underline{\underline{T}}_k - \underline{\underline{B}}) \right\} \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Für den plastischen Anteil des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors erhält man:

$$\underline{\underline{D}}_{Pl} = \frac{1}{1+\kappa\zeta} \left\{ \kappa \underline{\underline{I}}_k + (1+\kappa\zeta - \kappa \frac{\mu}{\sigma} \zeta) (\underline{\underline{I}}_k - \underline{\underline{B}}) \right. \\ \left. \frac{(2 - \frac{\delta\kappa}{\sigma} \frac{\partial k^2}{\partial b}) Sp[(\underline{\underline{I}}_k - \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{I}}_k] - (1+\kappa\zeta) \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{\mu k^2 (2 \frac{\zeta}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial k^2}{\partial b})} \right\} \quad (2.4.24)$$

2.4.7 Belastungsbedingung

Die Fließbedingung bildet die notwendige Bedingung für das Auftreten von plastischen Deformationen. Gleichung (2.4.22) bis (2.4.24) gelten nur, wenn Gleichung (2.4.10) erfüllt ist.

Wir müssen nun noch sicherstellen, daß eine Belastung und keine Entlastung erfolgt. Dies führt auf die Bedingung:

$$\lambda > 0$$

bzw.

$$(2 - \frac{\delta\kappa}{\sigma} \frac{\partial k^2}{\partial b}) Sp[(\underline{\underline{I}}_k - \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{I}}_k] - (1+\kappa\zeta) \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T} > 0 \quad (2.4.25)$$

Gleichung (2.4.10) bildet dann zusammen mit (2.4.25) die notwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten von plastischen Formänderungen.

2.4.8 Vereinfachungen und endgültige Form der konstitutiven Gleichungen

Bei experimentellen Untersuchungen im Zusammenhang mit konstitutiven Gesetzen stellt der einachsige Zugversuch den einfachst möglichen Belastungsfall dar. Er ist zudem der einzige Prozeß, der im Rahmen der inkrementellen Theorie problemlos analytisch nachvollzogen werden kann. Alle Tensoren sind nur auf der Hauptdiagonalen besetzt, deshalb lassen sich die einzelnen Terme des Stoffgesetzes besonders einfach darstellen.

$$\underline{\underline{D}}_{Pl} \hat{=} \dot{\underline{\underline{E}}}_{Pl} ; \underline{\underline{I}}_k \hat{=} \frac{2}{3} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} ; \underline{\underline{B}} \hat{=} \beta_3^3 = -2 \beta_1^1 \quad (2.4.26)$$

$$k^2 = \frac{2}{3} (\sigma + 3\beta_1^1)^2 \quad (\text{Fließbedingung}) \quad (2.4.27)$$

$$S_p[(\underline{I}_k - \underline{B}) \cdot \underline{I}_k] = \frac{2}{3} \dot{\sigma} (\sigma + 3\beta_1^1) \quad (2.4.28)$$

Mit (2.4.26), (2.4.27) und (2.4.28) erhält man aus (2.4.22) und (2.4.23):

$$\dot{\sigma} \zeta \dot{b} = -2 \dot{\sigma} (\sigma + 3\beta_1^1) \dot{\beta}_1^1 \quad (2.4.29)$$

Aus (2.4.24) ergibt sich nach kurzer Rechnung:

$$\zeta \dot{\epsilon}_{pl} = -2 \frac{\dot{\sigma}}{\mu} \dot{\beta}_1^1 + \frac{2}{\epsilon} (\kappa \zeta - \kappa \zeta \frac{\dot{\sigma}}{\mu}) (\sigma + 3\beta_1^1) \quad (2.4.30)$$

Wir treffen nun im Folgenden die Annahme:

$$\dot{\sigma} = \mu \quad (2.4.31)$$

Physikalisch bedeutet dies, daß jeweils gleiche Anteile von \dot{w}_p und \dot{w}_s gespeichert bzw. dissipiert werden (siehe 2.4.4). Diese Annahme erscheint im Rahmen unserer Theorie recht willkürlich, sie ist aber nicht so einschränkend, wie es vielleicht auf den ersten Blick erscheinen mag, da der Anteil \dot{w}_s ohnehin klein gegenüber \dot{w}_p ist. Wir gewinnen aber dadurch den großen Vorteil, daß die Einflüsse der einzelnen Parameter versuchstechnisch separiert werden können, weil χ bei einachsigen Versuchen kein Inkrement in Normalenrichtung erzeugt. Mit dieser Annahme wird aus (2.4.30) die höchst einfache Beziehung:

$$\zeta \dot{\epsilon}_{pl} = -2 \dot{\beta}_1^1 \quad (2.4.31)$$

Aus (2.4.29) und (2.4.31) erhält man schließlich eine einfache Gleichung für die interne Zustandsvariable b:

$$\dot{\sigma} \dot{b} = \mu (\sigma + 3\beta_1^1) \dot{\epsilon}_{pl} \quad (2.4.32)$$

Zur weiteren Vereinfachung der Parameterverifikation führen wir nun

eine leicht modifizierte skalare Zustandsvariable b^* ein, die über folgende Beziehung definiert wird.

$$\dot{b}^* = \frac{\dot{\sigma}}{\mu} b \quad (2.4.33)$$

wobei μ konstant oder eine Funktion von b sein kann. Damit wird aus (2.4.32):

$$\dot{b}^* = (\sigma + 3\beta_1^*) \dot{\epsilon}_{pl} \quad (2.4.34)$$

Für rein isotrope Verfestigung entspricht dann b der plastischen Arbeit:

$$W_{pl} = \int_0^{\epsilon_{pl}} \sigma(\epsilon_{pl}) d\epsilon_{pl} \quad (2.4.35)$$

Der Vorteil dieser Vorgehensweise wird sofort ersichtlich. Es ist nunmehr möglich, ohne Kenntnis des Parameters μ einen einfachen Zusammenhang zwischen der skalaren Zustandsvariablen b^* und der plastischen Dehnung herzustellen. Dies ist deshalb wichtig, weil alle aus isothermen einachsigen Versuchen ermittelten Daten sich leicht als Funktionen von ϵ_{pl} darstellen lassen, und über Gleichung (2.4.34) sofort auf b^* umgerechnet werden können.

Die Erweiterung auf allgemeinere Fälle bereitet keinerlei Schwierigkeiten, allerdings ist darauf zu achten, daß b^* eine Zustandsvariable bleibt, d.h. daß b^* in der Form

$$b^* = b^*(b, T)$$

dargestellt werden kann.

Aus Gleichung (2.4.31) folgt nun für die übrigen Parameter des Stoffgesetzes:

$$\theta = \xi \quad ; \quad \zeta = \nu \quad (2.4.36)$$

Auch die Evolutionsgesetze für die internen Variablen nehmen nun eine einfachere Form an.

$$\begin{aligned} \dot{b}^* &= Sp[(\underline{I}_k - \underline{B}) \cdot \underline{D}_{PL}] \\ &= \frac{2 Sp[(\underline{I}_k - \underline{B}) \cdot \underline{I}_k^{\nabla}] - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{2 \zeta + \frac{\partial k^2}{\partial b^*}} \end{aligned} \quad (2.4.37)$$

$$\begin{aligned} \underline{B}^{\nabla} &= \zeta \underline{D}_{PL} = \zeta (\underline{D} - \underline{D}_{el}) \\ &= \frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ \kappa \zeta \underline{I}_k^{\nabla} + \zeta \frac{(2 - \kappa \frac{\partial k^2}{\partial b^*}) Sp[(\underline{I}_k - \underline{B}) \underline{I}_k^{\nabla}] - (1 + \kappa \zeta) \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{k^2 (2 \zeta + \frac{\partial k^2}{\partial b^*})} (\underline{I}_k - \underline{B}) \right\} \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

plastischer Verzerrungsgeschwindigkeitstensor:

$$\underline{D}_{PL} = \frac{1}{1 + \kappa \zeta} \left\{ \kappa \underline{I}_k^{\nabla} + \frac{(2 - \kappa \frac{\partial k^2}{\partial b^*}) Sp[(\underline{I}_k - \underline{B}) \underline{I}_k^{\nabla}] - (1 + \kappa \zeta) \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{k^2 (2 \zeta + \frac{\partial k^2}{\partial b^*})} (\underline{I}_k - \underline{B}) \right\} \quad (2.4.39)$$

Belastungsbedingung:

$$(2 - \kappa \frac{\partial k^2}{\partial b^*}) Sp[(\underline{I}_k - \underline{B}) \underline{I}_k^{\nabla}] - (1 + \kappa \zeta) \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T} > 0 \quad (2.4.40)$$

2.4.9 isotherme und adiabate Prozesse

Bei allgemeinen, nichtisothermen Formänderungsvorgängen erfolgt eine Temperaturerhöhung aufgrund der in Wärme dissipierten Arbeitsanteile. Diese wird beschrieben durch folgende Bilanzgleichung, die man aus (2.3.9) mit Hilfe von (2.4.12) und (2.4.36) gewinnt.

$$\begin{aligned} \dot{W}_d &= (1 - \xi) \dot{W}_{PL} \\ &= c_p \dot{T} + Sp(\underline{L} \cdot \underline{S}_k^{\nabla}) + \frac{1}{\vartheta} q^i |_{,i} - \tau \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

Der Anteil

$$Sp(\underline{L} \cdot \underline{S}_k^{\nabla}) \quad ; \quad \underline{L} = -T \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \underline{S}_k \partial T}$$

beschreibt das thermoelastische Materialverhalten und ist im Bereich plastischer Deformationen vernachlässigbar klein, wie Untersuchungen von LAUERT [31], MAZILU - SCHREIBER und KAEMPF [32] bewiesen haben.

Die Größe r bezeichnet durch Strahlung zugeführte Energie und bleibt hier ebenfalls unberücksichtigt.

Wir erhalten dann:

$$\dot{W}_d = (1 - \xi) \dot{W}_{Pl} = c_p \dot{T} - \frac{1}{\rho} q^i |_{,i} \quad (2.4.42)$$

Dabei wird die Wärmeleitung beschrieben durch:

$$\frac{1}{\rho} q^i |_{,i} = \frac{1}{\rho} \text{Div } \underline{q} \quad (2.4.43)$$

Berücksichtigt man nun noch das FOURIER'sche Wärmeleitungsgesetz:

$$\underline{q} = -\lambda \text{ Grad } T \quad (2.4.44)$$

so erhält man schließlich:

$$\frac{1}{\rho} q^i |_{,i} = -\frac{1}{\rho} \lambda \text{ Div Grad } T \quad (2.4.45)$$

Es handelt sich hier um eine partielle Differentialgleichung vom parabolischen Typ, für die eine geschlossene Lösung nur in wenigen Sonderfällen und unter stark vereinfachenden Annahmen angegeben werden kann. Im allgemeinen kommt man nur mit erheblichem numerischem Aufwand zum Ziel (z.B. Finite-Element-Methode; siehe BLIX in [29]).

Da solche Berechnungsverfahren im Zusammenhang mit der Bestimmung von Parametern äußerst unpraktisch sind, beschränkt sich diese Arbeit auf isotherme bzw. adiabate Prozesse. Bei adiabaten Formänderungen möge die Belastung so schnell erfolgen, daß der Einfluß der Wärmeleitung vernachlässigbar klein bleibt.

$$\frac{1}{\rho} q^i |_{,i} \approx 0 \quad (2.4.46)$$

Es erfolgt dann ein globaler Temperaturanstieg, gesteuert über den Parameter ξ .

ξ wird in der Literatur als konstant angenommen und zwar im Bereich von 0.1 .

Diese Annahme führt im Rahmen unserer Theorie auf Widersprüche bezüglich der Energiebilanz, wenn man den Parameter ξ als Funktion von b^* darstellen will.

Nach Gleichung (2.4.18) gilt nämlich:

$$\xi(b^*, T) = \frac{1}{2 g \dot{\xi}} \xi \quad (2.4.47)$$

Da die Funktion g aufgrund der thermodynamischen Voraussetzungen nur von B und T abhängen kann, läßt sich (2.4.47) nur erfüllen, wenn ξ ebenfalls eine Funktion von b^* und T ist.

Nimmt man g als konstant an, so erhält man aus (2.4.47)

$$\xi(b^*, T) = \text{konst.} \cdot \xi(b^*, T) \quad (2.4.48)$$

Schließlich folgt aus (2.4.42):

$$\dot{T} = \frac{1}{c_p} \dot{W}_d = \frac{1}{c_p} (1 - \xi) \dot{W}_R \quad (2.4.49)$$

Der Begriff " isotherm " stellt eine weitere Idealisierung im Rahmen der Thermodynamik dar, weil in der Realität keine wirklich isothermen plastischen Formänderungen existieren. Man kann aber die Forderung

$$T = \text{konst.} \quad ; \quad \dot{T} = 0 \quad (2.4.50)$$

durch außerordentlich langsame Prozeßführung (geringe Formänderungsgeschwindigkeit) näherungsweise realisieren. Der Einfluß der Wärmeleitung (Wärmeabfuhr in die wassergekühlten Spannköpfe) ist dann so groß, daß die Temperaturerhöhungen vernachlässigbar klein bleiben.

2.4.10 Prozesse mit äußerer thermischer Belastung

Bei theoretischen und experimentellen Untersuchungen zu einem Materialgesetz sind auch solche Prozesse von besonderem Interesse, bei denen der Beanspruchung durch Kräfte bzw. Momente eine von außen vorgegebene thermische Belastung überlagert ist. Es existiert da eine Vielzahl möglicher Anwendungsfälle, die mit Hilfe der konstitutiven Gleichungen und der Energiebilanz simuliert werden können. An dieser Stelle ist dabei speziell an die Berechnung von zyklischen Temperaturänderungen bei konstanter mechanischer Belastung gedacht. Man erhält dabei zunächst formale Widersprüche mit den in 2.4.9 getroffenen Idealisierungen bezüglich der Thermodynamik, da diese naturgemäß weder isotherm ($\dot{T} = 0$) noch adiabat (kein Wärmeaustausch mit der Umgebung) sein können. Allerdings läßt sich dieses Problem umgehen, wenn man den Wärmeleitungsterm in der Energiebilanz formal durch eine von außen vorgegebene Temperaturänderung \dot{T}_A ersetzt. Im Rahmen des konstitutiven Gesetzes ist diese Vorgehensweise durchaus äquivalent, allerdings darf nicht vergessen werden, daß \dot{T}_A durch die in der Realität über Wärmeleitung zu - oder abgeführte Energie bedingt ist.

Wir erhalten dann folgende Bilanzgleichung.

$$\dot{T} = \frac{1-\xi}{c_p} \dot{W}_{Pl} + \dot{T}_A \quad (2.4.51)$$

wobei \dot{T} die aus Wärmeleitung und Wärmequellen resultierende Temperaturänderung darstellt.

$$\dot{T}_A = \frac{1}{c_p} \left(-\frac{1}{S} \dot{q}'_i + r \right) \quad (2.4.52)$$

3. Verifikation der Parameter

3.1 Vorbemerkungen

Das Formänderungsgesetz wird gesteuert über eine Reihe von Parametern, die im allgemeinen Fall Funktionen aller Zustandsvariablen sein können. Der Einfachheit halber wollen wir uns hier auf die skalare Zustandsvariable b bzw. b^* und die Temperatur T beschränken.

Die Funktion $k^2(b^*, T)$ beschreibt den isotropen Verfestigungsanteil, d.h. sie steuert die Aufweitung der Ellipsenhalbachsen in Abhängigkeit von der Deformationvorgeschichte.

Die Funktion $\xi(b^*, T)$ ist über Gleichung (2.4.38) definiert und ist für die Bewegungen des Ellipsenmittelpunktes im Spannungsraum verantwortlich.

$\alpha(b^*, T)$ steuert die Abweichungen von der Normalenregel bei nicht-proportionaler Belastung. Der Einfluß verschwindet bei ko-axialen Formänderungen.

Der Parameter β legt fest, welcher Anteil der plastischen Arbeit gespeichert bzw. dissipiert wird und beeinflusst damit den Temperaturverlauf bei nicht-isothermen Prozessen.

Die experimentelle Bestimmung dieser Stoffparameter kann auf unterschiedliche Art und Weise erfolgen. Man benötigt dazu eine Reihe geeigneter isothermer und adiabater Versuche, die im Idealfall so konzipiert sein sollten, daß die Einflüsse der einzelnen Parameter separiert werden können. Die Ermittlung von k^2 , ξ und α kann dabei über eine Anzahl geschickt kombinierter, isothermer Versuche erfolgen, wobei sich die Temperaturabhängigkeit durch Wiederholung dieser Versuchsserien auf unterschiedlichen Temperaturniveaus ergibt.

Entscheidend für ein solches experimentelles Konzept ist die Wahl der Probengeometrie. Dabei muß vermieden werden, daß die Berechnung der komplexen Belastungsvorgänge durch ungeeignete Probenformen unnötig kompliziert wird. Man verwendet üblicherweise dünnwandige Rohre, weil bei diesen sowohl der Spannungszustand als auch die Verzerrungen als homogen über der Querschnittsfläche angesehen werden können und somit

die Gleichgewichtsbedingungen immer erfüllt sind. Da auch wir diese Probengeometrie gewählt haben und eine Belastung durch Innendruck mit den am Institut vorhandenen versuchstechnischen Mittel nicht möglich war, beschränkt sich die in den folgenden Kapiteln behandelte Theorie auf die Berechnung elasto- plastisch deformierter Kreiszyylinder unter Längs- und Torsionslast.

3.2 Beschreibung der Deformation dünnwandiger Kreiszyylinder

3.2.1 Zylinderkoordinatensystem

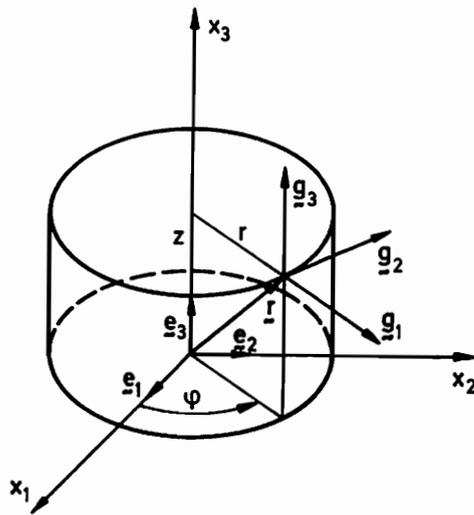


Bild 6: Zylinderkoordinaten

In der kartesischen Basis \underline{e}_α definieren wir raumfeste, krummlinige Zylinderkoordinaten x^α :

$$x^1 = r \quad ; \quad x^2 = \varphi \quad ; \quad x^3 = Z \quad (3.2.1)$$

Die kovariante Basis $\underline{g}_\alpha(x^\alpha)$ ergibt sich dann über Gleichung (2.1.1):

$$\begin{aligned} \underline{g}_1 &= \cos \varphi \underline{e}_1 + \sin \varphi \underline{e}_2 \\ \underline{g}_2 &= -r \sin \varphi \underline{e}_1 + r \cos \varphi \underline{e}_2 \\ \underline{g}_3 &= \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Mit der über (2.1.2) definierten kontravarianten Basis \underline{g}^β erhält man die Metrik:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

Da die Matrix der kontravarianten Metrikkoeffizienten nur Diagonalelemente enthält, vereinfacht sich Gleichung (2.1.8) für die Christoffelsymbole zu:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} (g_{\gamma\alpha,\beta} + g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\beta\gamma,\alpha})$$

Wir erhalten damit:

$$\Gamma_{22}^1 = -r \quad ; \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \quad (3.2.4)$$

Über den Geschwindigkeitsvektor

$$\underline{v} = \dot{r} \underline{g}_1 + \dot{\varphi} \underline{g}_2 + \dot{z} \underline{g}_3 \quad (3.2.5)$$

erhält man mit Hilfe von (2.1.6) bis (2.1.9) die Maßzahlen des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeit \underline{D}

$$d_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} \right) & \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\dot{r}}{r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial r} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} \right) & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

und des Tensors der Rotationsgeschwindigkeit \underline{W} .

$$\omega_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} - r \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} - 2\dot{\varphi} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{r}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{z}}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{r}}{\partial \varphi} + 2 \frac{\dot{\varphi}}{r} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial r} - \frac{\partial \dot{r}}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{z}}{\partial \varphi} - r \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.7)$$

3.2.2 Geometrie dünnwandiger Kreiszyylinder:

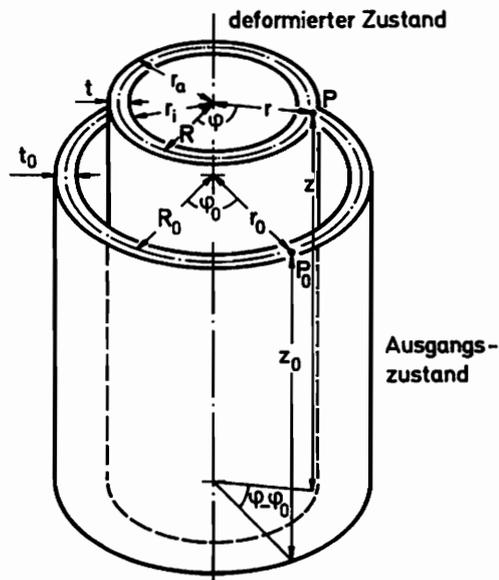


Bild 7: Deformation

Wir betrachten ein dünnwandiges Rohr mit den Anfangsabmessungen $\overset{\circ}{R}$, $\overset{\circ}{t}$ und $\overset{\circ}{l}$. Da der Verzerrungszustand als homogen angesehen wird, kann man sich auf die Beschreibung der Deformationen der Mittelfläche beschränken. Es gelten die geometrischen Beziehungen:

$$\frac{\overset{\circ}{r} - \overset{\circ}{R}}{\overset{\circ}{r} - \overset{\circ}{R}} = \frac{\overset{\circ}{t}}{\overset{\circ}{t}} ; \quad \varphi - \overset{\circ}{\varphi} = \psi \frac{z}{l} ; \quad \frac{z}{z} = \frac{l}{l} \quad (3.2.8)$$

mit dem Gesamtverdrehwinkel ψ .

Daraus erhält man für die Maßzahlen des Geschwindigkeitsvektors:

$$\dot{r} = \frac{\dot{t}}{t} (r - R) + \dot{R} ; \quad \dot{\varphi} = \dot{\psi} \frac{z}{l} ; \quad \dot{z} = z \frac{\dot{l}}{l} \quad (3.2.9)$$

Damit ergibt sich für die Maßzahlen von $\underline{\underline{D}}$ und $\underline{\underline{W}}$ mit $R \approx r$:

$$d_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{t}}{t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{R}}{R} & \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{l} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{l} R^2 & \frac{\dot{l}}{l} \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

$$\omega_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -R\dot{\psi}\frac{z}{l} & 0 \\ \frac{\dot{\psi}}{R}\frac{z}{l} & 0 & \frac{1}{2}\frac{\dot{\psi}}{l} \\ 0 & -\frac{1}{2}\frac{\dot{\psi}}{l}R^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

3.3: Spannungszustand

Bei dünnwandigen Rohren ist es üblich, die Radialspannungen σ_{rr} zu vernachlässigen. Man erhält dann einen homogenen, ebenen Spannungszustand mit den physikalischen Komponenten σ und τ in den Schnittflächen senkrecht zur z- Achse.

Mit Gleichung (2.2.10) folgt für die Maßzahlen des CAUCHY- Tensors:

$$\sigma_{\rho}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tau}{R} \\ 0 & \tau R & \sigma \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

Wir führen nun die tensorielle Zustandsvariable $\underline{\underline{B}}$ ein und erhalten für die " aktiven Deviatorspannungen ":

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{T}}_{\kappa} - \underline{\underline{B}}) &= (t_{\rho}^{\alpha} - \beta_{\rho}^{\alpha}) \underline{\underline{g}}_{\alpha} \underline{\underline{g}}^{\rho} \\ t_{\rho}^{\alpha} - \beta_{\rho}^{\alpha} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\sigma - \beta_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma - \beta_2^2 & \frac{\tau}{R} - \beta_3^2 \\ 0 & \tau R - R^2\beta_3^2 & \frac{2}{3}\sigma - \beta_3^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Die Maßzahlen der JAUMANN- Ableitung des Deviators $\underline{\underline{T}}_{\kappa}$ ergeben sich unter Anwendung von Gleichung (2.2.9)

$$t_s^\alpha = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\dot{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\dot{\sigma} - \tau R \frac{\dot{\psi}}{L} & \frac{\dot{\tau}}{R} - \frac{1}{2}\dot{\sigma} \frac{\dot{\psi}}{L} \\ 0 & \dot{\tau} R - \frac{1}{2}\dot{\sigma} R^2 \frac{\dot{\psi}}{L} & \frac{2}{3}\dot{\sigma} + \tau R \frac{\dot{\psi}}{L} \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

Wir benötigen nun noch den skalarwertigen Term:

$$Sp[(\underline{\mathbb{I}}_k - \underline{\mathbb{B}}) \cdot \underline{\mathbb{I}}_k] = (t_s^\alpha - \beta_s^\alpha) t_\alpha^s$$

Dieser folgt aus (3.3.2) und (3.3.3) unter Berücksichtigung von:

$$Sp(\underline{\mathbb{B}}) = 0 \quad (3.3.4)$$

$$Sp[(\underline{\mathbb{I}}_k - \underline{\mathbb{B}}) \cdot \underline{\mathbb{I}}_k] = \left(\frac{2}{3}\dot{\sigma} + \beta_1^1 + \beta_2^2\right)\dot{\sigma} + 2(\tau - R\beta_3^3)\dot{\tau} \\ + \tau R \frac{\dot{\psi}}{L}(\beta_1^1 + 2\beta_2^2) + \dot{\sigma} R^2 \frac{\dot{\psi}}{L} \beta_3^3 \quad (3.3.5)$$

3.4 Fließbedingung und Belastungsbedingung

In Abschnitt 2.4.3 wurde eine Fließbedingung der Form

$$F = Sp[(\underline{\mathbb{I}}_k - \underline{\mathbb{B}})^2] - k^2(b^*, T) = 0 \\ = (t_s^\alpha - \beta_s^\alpha)(t_\alpha^s - \beta_\alpha^s) - k^2(b^*, T)$$

gewählt.

Mit den entsprechenden Komponenten für Zug und Torsion an dünnwandigen Rohren ergibt sich:

$$F = \frac{2}{3}\dot{\sigma}^2 + 2\tau^2 + 2\dot{\sigma}(\beta_1^1 + \beta_2^2) + (\beta_1^1 + \beta_2^2)^2 + (\beta_1^1)^2 \\ + (\beta_2^2)^2 - 4\tau R\beta_3^3 + 2R^2(\beta_2^2)^2 \quad (3.4.1)$$

Diese Gleichung läßt sich nun auf eine Form bringen, die der allgemei-

nen Ellipsengleichung mit gegenüber dem Ursprung verschobenem Mittelpunkt entspricht.

$$\frac{[\sigma + \frac{3}{2}(\beta_1^1 + \beta_2^2)]^2}{\frac{3}{2}[k^2 - \frac{1}{2}(\beta_1^1 - \beta_2^2)^2]} + \frac{[\tau - R\beta_3^2]^2}{\frac{1}{2}[k^2 - \frac{1}{2}(\beta_1^1 - \beta_2^2)^2]} = 1 \quad (3.4.2)$$

Daraus folgt für die charakteristischen Größen der Ellipse:

$$\sigma^* = -\frac{3}{2}(\beta_1^1 + \beta_2^2) \quad (3.4.3)$$

$$\tau^* = R\beta_3^2 \quad (3.4.4)$$

$$a = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{k^2 - \frac{1}{2}(\beta_1^1 - \beta_2^2)^2} = \sqrt{3} b \quad (3.4.5)$$

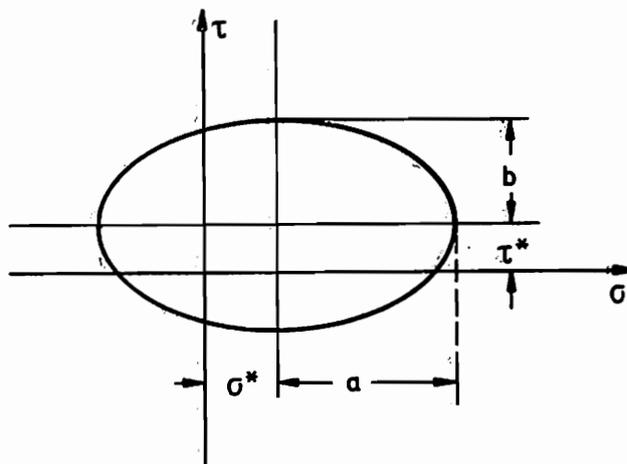


Bild 8: Fließellipse in der $\sigma - \tau$ - Ebene

Die Belastungsbedingung ergibt sich mit (3.3.5) aus (2.4.40).

3.5 vollständiges Differentialgleichungssystem

Man erhält die Differentialgleichungssysteme für die elastischen und plastischen Deformationsanteile, indem man die konstitutiven Gleichungen komponentenweise aufspaltet. Die entsprechenden Terme müssen dann im Hinblick auf die numerische Lösung aufbereitet werden. Da wir uns aus versuchstechnischen Gründen für weg- bzw. winkelseuerte Experimente entschieden haben, sind auch die Dgl- Systeme entsprechend

behandelt worden.

3.5.1 elastische Deformationen

Unter den in Abschnitt 2.4.1 postulierten Voraussetzungen werden die elastischen Formänderungen durch das hypo- elastische Stoffgesetz beschrieben. Da wir den thermoelastischen Kopplungsterm in der Energiebilanz vernachlässigt haben, können Temperaturänderungen nur durch äußere Einflüsse bedingt sein.

$$\dot{T} = \dot{T}_A \quad (3.5.1)$$

Neben \dot{T}_A geben wir auch \dot{l} (Ziehgeschwindigkeit) und $\dot{\psi}$ (Verdrehgeschwindigkeit) als Prozeßparameter vor. Wir erhalten dann das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \dot{l} &= \text{konst.} \\ \dot{\psi} &= \text{konst.} \\ \dot{T}_A &= \text{konst.} \\ \dot{\sigma} &= (1+\nu) \left[2G \left(\frac{\dot{l}}{l} - \alpha \dot{T}_A \right) - \tau R \frac{\dot{\psi}}{l} \right] \\ \dot{\tau} &= \frac{1}{2} R \frac{\dot{\psi}}{l} (2G + \sigma) \\ \dot{t} &= \left(\alpha \dot{T}_A - \frac{1}{2G} \frac{\nu}{1+\nu} \dot{\sigma} \right) t \\ \dot{R} &= \left(\frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \dot{\sigma} + 3\alpha \dot{T}_A - \frac{\dot{t}}{t} - \frac{\dot{l}}{l} \right) R \\ \dot{b}^* &= 0 \\ \dot{b} &= 0 \\ \dot{\beta}_1^1 &= 0 \\ \dot{\beta}_2^2 &= 0 \\ \dot{\beta}_3^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

3.5.2 elasto-plastische Deformationen

Bei plastischen Formänderungen wird das Differentialgleichungssystem wesentlich komplizierter. Neben den Entwicklungsgesetzen für Spannungen und Verzerrungen müssen nun auch die Temperaturänderungen durch Energiedissipation und die Evolutionsgesetze für die internen Variablen berücksichtigt werden. Die einzelnen Gleichungen sind untereinander gekoppelt und müssen in entsprechender Reihenfolge rekursiv numerisch aufintegriert werden.

Für adiabate Prozesse gilt nach (2.4.47):

$$c_p \dot{T} = (1 - \xi) \frac{1}{\rho} \text{Sp}(\underline{I}_K \underline{D}_{Pl})$$

Mit den entsprechenden Ausdrücken für das Inkrement der plastischen Arbeit:

$$\rho \dot{W}_{Pl} = \tau R \dot{\psi} - \frac{1}{G} \tau \dot{\tau} + \sigma \dot{l} - \frac{1}{E} \sigma \dot{\sigma} - \sigma \alpha \dot{T} \quad (3.5.3)$$

erhält man folgende Gleichung für den zeitlichen Temperaturverlauf:

$$\dot{T} = \frac{1 - \xi}{\rho c_p + \alpha(1 - \xi)\sigma} \left(\tau R \dot{\psi} + \sigma \dot{l} - \frac{1}{G} \tau \dot{\tau} - \frac{1}{E} \sigma \dot{\sigma} \right) + \dot{T}_A \quad (3.5.4)$$

Berücksichtigt man nun noch, daß für plastische Deformationen die Inkompressibilitätsbedingung

$$\text{Sp}(\underline{D}_{Pl}) = d_{\alpha}^{\alpha} = 0 \quad (3.5.5)$$

gilt, so erhält man über Gleichung (2.4.2) sowie (2.4.39) schließlich ein Dgl- System der Form:

$$\dot{l} = \text{konst}$$

$$\dot{\psi} = \text{konst}$$

$$\dot{\sigma} = \frac{R_2(a_8 - a_9 a_{11}) + R_3(a_6 a_{11} - 2a_5) + R_4(2a_5 a_9 - a_6 a_8)}{a_4(a_8 - a_9 a_{11}) + a_7(a_6 a_{11} - 2a_5) + a_{10}(2a_5 a_9 - a_6 a_8)}$$

$$\dot{\tau} = \frac{R_2 - a_6 R_4 - (a_4 - a_6 a_{10}) \dot{\sigma}}{2a_5 - a_6 a_{11}}$$

$$\begin{aligned} \dot{T} &= R_4 - a_{10} \dot{\sigma} - a_{11} \dot{\tau} \\ \dot{t} &= -R_1 - a_1 \dot{\sigma} - a_2 \dot{\tau} - a_3 \dot{T} \\ \dot{R} &= \left[3K^* \dot{\sigma} + 3\alpha \dot{\tau} - \frac{\dot{t}}{t} - \frac{\dot{I}}{I} \right] R \end{aligned} \quad (3.5.6a)$$

Die Koeffizienten a_1 bis a_{11} und R_1 bis R_4 sind Hilfsgrößen und enthalten keine unbekanntes Inkremente.

$$\begin{aligned} a_1 &= t \left[\frac{1}{3} X_1 + \left(\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2 \right) \left(\frac{1}{3} \sigma + \beta_1^1 \right) X_2 - K^* \right] \\ a_2 &= 2t (\tau - R \beta_3^2) \left(\frac{1}{3} \sigma + \beta_1^1 \right) X_2 \\ a_3 &= t \left[\left(\frac{1}{3} \sigma + \beta_1^1 \right) X_3 - \alpha \right] \\ a_4 &= \frac{2}{3} X_1 + \left(\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2 \right)^2 X_2 + K^* \\ a_5 &= \left(\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2 \right) (\tau - R \beta_3^2) X_2 = a_7 \\ a_6 &= \left(\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2 \right) X_3 + \alpha \\ a_8 &= X_1 + 2 (\tau - R \beta_3^2)^2 X_2 \\ a_9 &= (\tau - R \beta_3^2) X_3 \\ a_{10} &= \frac{\sigma}{E} X_T \\ a_{11} &= \frac{\tau}{G} X_T \end{aligned}$$

X_1, X_2, X_3, X_T sowie K^* sind dabei Funktionen der Stoffparameter:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2G} + \frac{\kappa}{1 + \kappa \zeta} & ; & X_T = \frac{1 - \xi}{\varrho c_p + \alpha(1 - \xi)\sigma} \\ X_2 &= \frac{2 - \kappa \frac{\partial K^2}{\partial b^*}}{(1 + \kappa \zeta) K^2 \left(2\zeta + \frac{\partial K^2}{\partial b^*} \right)} & ; & K^* = \frac{1}{2G} \frac{1 - 2\nu}{3(1 + \nu)} \\ X_3 &= \frac{-\frac{\partial K^2}{\partial T}}{K^2 \left(2\zeta + \frac{\partial K^2}{\partial b^*} \right)} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten R_i bilden die rechten Seiten des inhomogenen Dgl-Systems. Mit der Hilfsgröße

$$C_1 = \tau R \frac{\dot{\psi}}{L} (\beta_1^1 + 2\beta_2^2) + R \beta_3^2 \sigma R \frac{\dot{\psi}}{L}$$

erhält man:

$$R_1 = t C_1 \left(\frac{1}{3} \sigma + \beta_1^1 \right) X_2$$

$$R_2 = \frac{\dot{L}}{L} - \tau R \frac{\dot{\psi}}{L} X_1 - C_1 \left(\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2 \right) X_2$$

$$R_3 = \frac{1}{2} R \frac{\dot{\psi}}{L} (1 + \sigma X_1) - C_1 (\tau - R \beta_3^2) X_2$$

$$R_4 = X_T \left(\sigma \frac{\dot{L}}{L} + \tau R \frac{\dot{\psi}}{L} \right) + \frac{\dot{c}_p}{1 - \xi} \dot{T}_A$$

Die Evolutionsgesetze für die internen Variablen b^* und \underline{B} müssen ebenfalls mit aufintegriert werden, da der aktuelle Wert der Zustandsvariablen zu jedem Zeitpunkt des Prozesses bekannt sein muß. Für die Entwicklung von b^* folgt nach Gleichung (2.4.37) mit Hilfe von (3.3.5)

$$\dot{b}^* = 2 X_4 \left[\left(\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2 \right) \dot{\sigma} + 2 (\tau - R \beta_3^2) \dot{\tau} + \tau R \frac{\dot{\psi}}{L} (\beta_1^1 + 2\beta_2^2) + \sigma R^2 \frac{\dot{\psi}}{L} \beta_3^2 \right] - X_5 \dot{T} \quad (3.5.6b)$$

mit

$$X_4 = \frac{1}{2 \xi + \frac{\partial k^2}{\partial b^*}} \quad ; \quad X_5 = \frac{\partial k^2}{\partial T} X_4$$

Für die tensorielle Variable \underline{B} galt das Evolutionsgesetz (2.4.38).

$$\underline{\underline{B}} = \beta_g^\alpha \underline{g}_\alpha \underline{g}^g = \xi (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}}_{el})$$

Die Maßzahlen der objektiven Zeitableitung lassen sich analog zu (2.2.9) berechnen. Es gilt dann für die substantielle Zeitableitung:

$$\dot{\beta}_g^\alpha = \xi d_{(PI)g}^\alpha - \beta_g^\delta (d_g^\alpha - v_{,g}^\alpha) + \beta_\delta^\alpha (d_g^\delta - v_{,g}^\delta) \quad (3.5.7)$$

Daraus erhält man für unseren Belastungsfall:

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_1^1 &= \mathcal{L} \left(\frac{\dot{t}}{t} + \frac{1}{2G} \frac{\nu}{1+\nu} \dot{\sigma} - \alpha \dot{T} \right) \\ \dot{\beta}_2^2 &= \mathcal{L} \left[\frac{\dot{R}}{R} - \alpha \dot{T} + \frac{1}{2G} \left(\tau R \frac{\dot{\psi}}{l} + \frac{\nu}{1+\nu} \dot{\sigma} \right) \right] + \frac{\dot{\psi}}{l} R^2 \beta_3^2 \\ \dot{\beta}_3^2 &= \mathcal{L} \left[\frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{l} + \frac{1}{2G} \left(\frac{1}{2} \sigma \frac{\dot{\psi}}{l} - \frac{\dot{T}}{R} \right) \right] - \frac{\dot{R}}{R} \beta_3^2 \\ &\quad - \frac{\dot{\psi}}{l} \left(\frac{1}{2} \beta_1^1 + \beta_2^2 \right)\end{aligned}$$

(3.5.6c)

mit der Anfangsbedingung:

$$\beta_3^\alpha(0) = 0$$

3.6 Numerische Lösung

Die Integration der linearen Gleichungssysteme mit nicht konstanten Koeffizienten für die elastischen und die plastischen Deformationen erfolgt numerisch über das RUNGE- KUTTA- Verfahren 4. Ordnung, wobei die geforderte Genauigkeit durch automatische Steuerung der Integrationsschrittweite erreicht wird. Fließbedingung, Belastungsbedingung und die entsprechenden Hilfsgrößen sind in Form von Unterprogrammen abgearbeitet und werden mit den jeweils aktuellen Werten vom Integrationsprogramm abgerufen.

Die numerische Berechnung der komplexen Belastungsprozesse wurde über FORTRAN-IV Programme auf dem MODCOMP- Rechner des Instituts durchgeführt.

3.7 Experimentelle Bestimmung des Verfestigungsverhaltens

3.7.1 Grundsätzliches

Als Grundversuch zur Ermittlung des Verfestigungsverhaltens dient der einachsige Zugversuch ohne Richtungsumkehr der Belastung. Man erhält als Ergebnis die CAUCHY- Spannung σ als Funktion der plastischen Dehnung ϵ_{pl} .

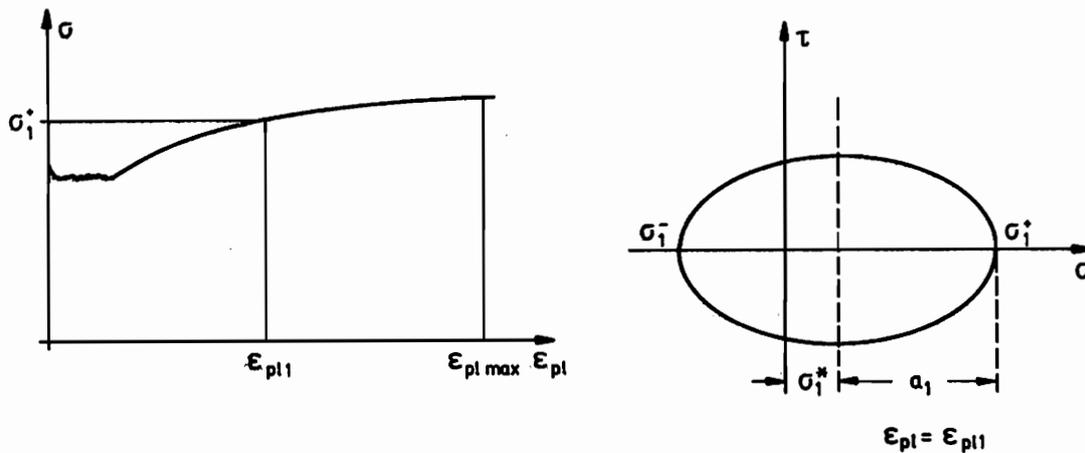


Bild 9: einachsiger Zugversuch

Übertragen auf unser Modell mit der v. MISES- Ellipse bedeutet das: Wir messen in Abhängigkeit zur plastischen Dehnung (ϵ_{pl} als Parameter) stets den rechten Schnittpunkt der Fließkurve mit der Abszisse,

$$\sigma(\epsilon_{pl}) = \sigma^*(\epsilon_{pl}) + a(\epsilon_{pl}) \quad (3.7.1)$$

erhalten aber keinerlei Information über Größe der Halbachsen bzw. Lage des Ellipsenschwerpunktes. Deshalb sind zusätzliche Experimente erforderlich, die eine Separation der isotropen und kinematischen Verfestigungsanteile ermöglichen.

Das Prinzip dieser Zusatzexperimente wird schon in Bild 9 ersichtlich. Kehrt man nämlich an einem beliebigen Punkt ($\epsilon_{pl1}; \sigma_1^*$) die Belastung um, so müßte nach Durchfahren des elastischen Bereiches der linke Rand der Ellipse σ_1^- als erneute Fließspannung im Druckbereich gemessen werden. Nach Durchführung mehrerer derartiger Versuche mit unterschied-

lichen plastischen Vordehnungen wäre dann eine zuverlässige Aussage über die Translation des Ellipsenmittelpunktes möglich.

Prinzipiell bieten sich aber mehrere Möglichkeiten zur experimentellen Bestimmung des kinematischen Verfestigungsanteils an:

1. zyklische Zug- Druck- Versuche mit unterschiedlicher Amplitude
2. zyklische Torsionsversuche an dünnwandigen Rohren
3. experimentelle Aufnahme der Fließkurve nach unterschiedlichen Vorverformungen.

Zyklische Zug- Druck- Versuche haben den Nachteil, daß betragsmäßig größere negative Dehnungsamplituden schwer zu realisieren sind, da die Proben im Druckbereich knicken. Man kann das verhindern, indem man kürzere Proben verwendet, muß dann allerdings höhere Meßgenauigkeiten in Kauf nehmen (Längenmessung). Auch etwaige Maschinenfehler - z.B. geringe parallele Versetzungen der Mittelachsen der Spannköpfe - haben großen Einfluß auf die Zuverlässigkeit der Meßwerte. Aus diesen Gründen erscheinen zyklische Torsionsversuche an dünnwandigen Rohrproben im Rahmen des konstitutiven Gesetzes sinnvoller.

Allerdings lassen sich derartige Experimente nicht mehr geschlossen analytisch nachvollziehen, da zum einen die materiellen Achsen gegeneinander rotieren, zum anderen aber auch Effekte 2. Ordnung, speziell der POYNTING- Effekt eine Rolle spielen. Deshalb muß die Auswertung über die in Abschnitt 3.2 bis 3.5 behandelte Theorie numerisch erfolgen.

Versuche vom 3. Typ sind, wie bereits erwähnt, von LAUERT- GUPTA durchgeführt worden. Dabei wurden vollständige Fließkurven bei unterschiedlich vorbelasteten Proben automatisch über rechner- gesteuerte Be- und Entlastungsprozesse mit unterschiedlichen Kombinationen von Torsion und Zug bzw. Druck aufgenommen. Die Ergebnisse zeigen deutlich den kinematischen Verfestigungseinfluß, allerdings weisen die gemessenen Fließkurven erhebliche Abhängigkeit vom versuchstechnischen Parameter ϵ_{offset} auf (ϵ_{offset} ist dabei der von außen vorgegebene plastische Dehnungsgrenzwert, der für den Rechner das Entscheidungskriterium zur Belastungsumkehr bildet).

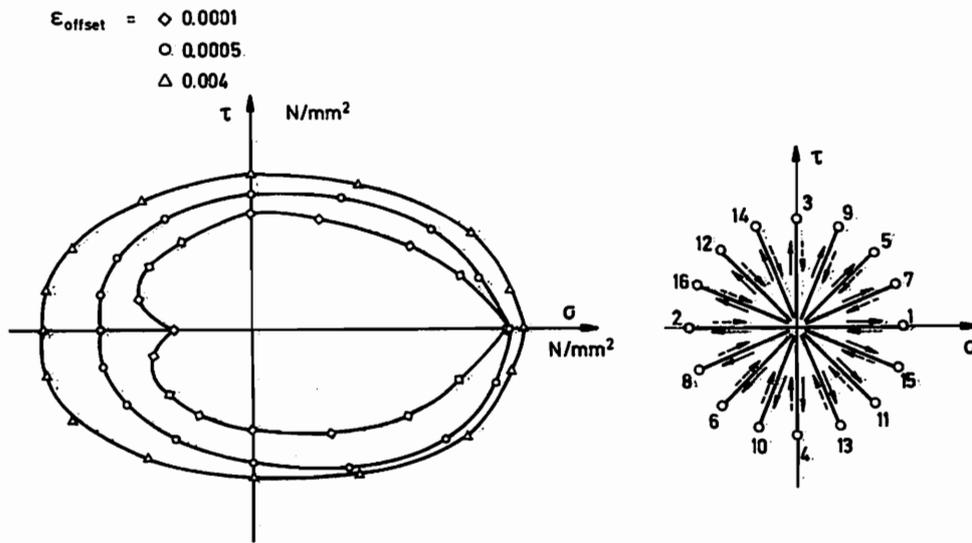


Bild 10: Versuche LAUERT - GUPTA

Dies führt uns auf die bei allen 3 Versuchstypen auftretende Problematik bei der Auswertung. Die Auswirkungen des BAUSCHINGER- Effektes auf das Verformungsverhalten werden nämlich nur teilweise erfaßt, wenn man mit nur einer Fließbedingung arbeitet.

Eine sehr umfassende und detaillierte experimentelle Untersuchung über die Auswirkungen des BAUSCHINGER- Effektes bietet SCHOLTES in [7] . Die durch die gewählte Fließbedingung (2.4.10) erfaßten Anteile des BAUSCHINGER- Effektes werden von SCHOLTES " $\Delta R'_p$ " genannt. Man erhält $\Delta R'_p$ aus zyklischen Zug- Druck- Versuchen durch Punktspiegelung der nach einer Vorverformung auftretenden Rückverformungskurve am Schnittpunkt der Entlastungsgeraden mit der Abszisse. Für größere Rückverformungen sind beide Verfestigungskurven nahezu parallel (Bild 11). Für zyklische Torsionsversuche gelten ähnliche Überlegungen. Sie müssen allerdings zunächst über die Faustformel

$$\Delta R'_{p \text{ Zug}} = K_1 \cdot \Delta R'_{p \text{ Torsion}} \quad ; \quad K_1 = \text{konst.}$$

ausgewertet werden, wobei der Umrechnungsfaktor K_1 iterativ über Vergleiche zwischen Versuch und Theorie bestimmt werden kann.

Bild 11 erklärt auch anschaulich die Abhängigkeit der von LAUERT - GUPTA gemessenen Fließkurven vom Parameter ϵ_{offset} . Ein sehr klein

vorgegebenes ϵ_{offset} kann dazu führen, daß bereits beim Entlastungsvorgang erneutes plastisches Fließen registriert werden kann.

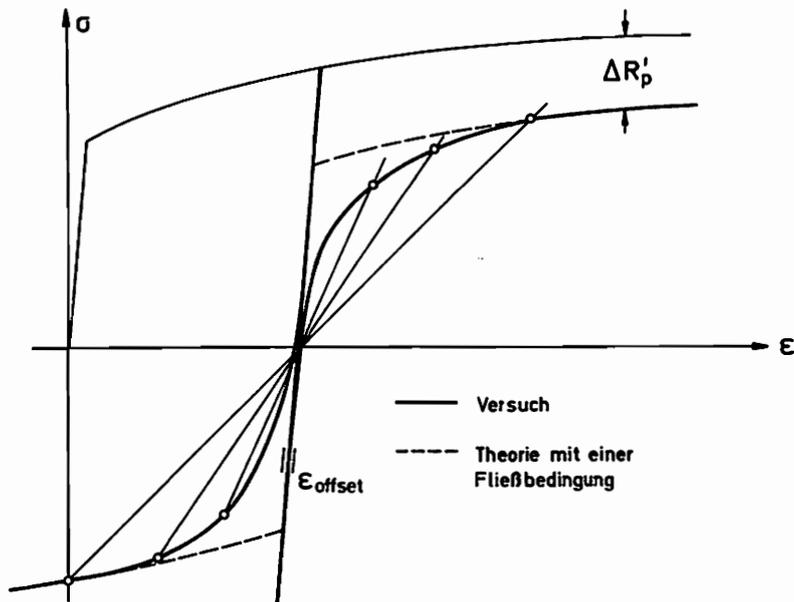


Bild 11: Ermittlung von $\Delta R'_p$ nach SCHOLTES

3.7.2 Ermittlung der Verfestigungsfunktionen aus den Versuchsdaten

Nach Gleichung (2.4.27) galt für einachsige Versuche:

$$k^2 = \frac{2}{3} (\sigma + 3\beta_1')^2 = k^2 (b^*, T)$$

mit T als Parameter bei isothermen Versuchen.

Die Funktion $\sigma(\epsilon_{pl})$ wird aus den experimentellen Daten ermittelt und liege in Form von diskreten Punkten $(\epsilon_{pl_i}, \sigma_i)$ im Rechner vor (siehe Bild 9).

Der Bereich der LÜDERS- Bänder zu Beginn der plastischen Formänderung stellt eine inhomogene Deformationsphase dar und wird durch die in Bild 9 gestrichelte Linie ersetzt, da dieser Effekt im Rahmen unseres Stoffgesetzes nicht erfaßt werden kann. Er tritt ohnehin nur bei völlig "jungfräulichen" Proben und bei einigen Stahlsorten auf. Die Grenze der globalen Auswertung im Bereich der Gleichmaßdehnung bildet der Beginn der Einschnürung, weil von da an die Deformation wiederum inhomogen wird. Außerdem ist dann auch die Forderung "isotherm" nicht mehr erfüllt, da im Bereich der Einschnürung lokal wesentlich

höhere Dehnungsgeschwindigkeiten auftreten, als global vorgegeben werden.

Für die Funktion β_1^1 gilt die Beziehung:

$$-\beta_1^1 = \frac{1}{3} \sigma^r = \frac{1}{6} \Delta R_p^1 \quad (3.7.2)$$

Man ermittelt $-\beta_1^1(\epsilon_{pl})$ über 3 oder 4 zyklische Versuche mit unterschiedlicher Dehnungsamplitude, wobei man pro Versuch nur einen verlässlichen Punkt erhält.

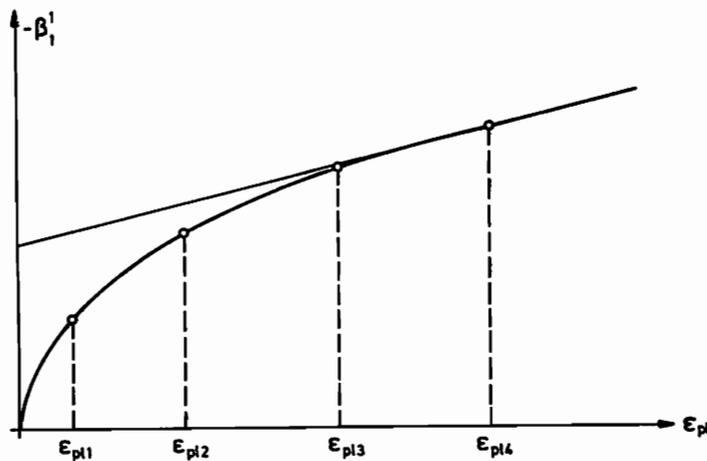


Bild 12: Evolution der kinematischen Verfestigung

Die Funktion $-\beta_1^1(\epsilon_{pl})$ wird graphisch interpoliert und durch einen geeigneten Ansatz approximiert. Wir wählen eine Gleichung der Form:

$$-\beta_1^1 = \alpha_1 (1 + \beta_1 \epsilon_{pl} - e^{-\beta_1 \epsilon_{pl}}) \quad (3.7.3)$$

die für $\epsilon_{pl} \rightarrow \infty$ die Asymptote

$$-\beta_1^1 = \alpha_1 (1 + \beta_1 \epsilon_{pl}) \quad (3.7.3a)$$

aufweist.

Danach wird über numerische Integration der Zusammenhang zwischen der skalaren Zustandsvariablen b^* und ϵ_{pl} hergestellt.

$$b^*(\varepsilon_{pl}) = \int_0^{\varepsilon_{pl}} (\sigma + 3\beta_1') d\varepsilon_{pl} \quad (3.7.4)$$

Gleichung (3.7.4) stellt die integrierte Form von (2.4.34) dar.

Nunmehr liegen sowohl $k^2(b^*)$ als auch $-\beta_1'(b^*)$ in diskreter Form im Rechner vor. Beide werden approximiert durch analytische Funktionen der Form:

$$k^2(b^*, T) = k_0^2 + a(1 + bb^* - e^{-cb^*}) \quad (3.7.5)$$

$$-\beta_1'(b^*, T) = \alpha(1 + \beta b^* - e^{-\gamma b^*}) \quad (3.7.6)$$

Die optimalen Approximationsparameter werden zweckmäßigerweise numerisch über die GAUß'sche Methode der kleinsten Fehlerquadrate ermittelt.

Die Temperatur T hat bei isothermen Prozessen auf unterschiedlichen Temperaturniveaus die Bedeutung eines Parameters. Im allgemeinen, nicht- isothermen Fall sind k_0^2 , a, b, c, α, β und γ Funktionen von T , deren Abhängigkeit z.B. über Polynomansätze beschrieben werden kann. Die Funktionen $\partial k^2 / \partial b^*$ und $\partial k^2 / \partial T$, die ebenfalls im Rahmen des Stoffgesetzes benötigt werden, bildet man durch partielle Ableitung der Funktion $k^2(b^*, T)$ nach den unabhängigen Variablen.

$$\frac{\partial k^2}{\partial b^*} = a(b + c e^{-cb^*}) \quad (3.7.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k^2}{\partial T} = & \frac{dk_0^2}{dT} + \frac{da}{dT} (1 + bb^* - e^{-cb^*}) \\ & + ab^* \left(\frac{db}{dT} + \frac{dc}{dT} e^{-cb^*} \right) \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

Die Funktion $\zeta(b^*, T)$ ist für einachsige Belastung definiert über Gleichung (2.4.31):

$$\begin{aligned} \zeta &= 2 \frac{d(-\beta_1')}{d\varepsilon_{pl}} = 2 \frac{d(-\beta_1')}{db^*} \frac{db^*}{d\varepsilon_{pl}} \\ &= 2 \alpha (\beta + \gamma e^{-\gamma b^*}) \sqrt{\frac{3}{2} k^2(b^*, T)} \end{aligned} \quad (3.7.9)$$

Das Verhalten dieser Funktionen bei sehr großen plastischen Formänderungen, wie sie etwa im Bereich der Einschnürung bei Zugproben oder im Grenzyklus bei zyklischen Prozessen auftreten, läßt sich nicht unmittelbar aus den Versuchsdaten bestimmen. Man kann nur gewisse Annahmen treffen und muß hinterher prüfen, welche Konsequenzen sich daraus für die Funktionsverläufe ergeben. Eine gebräuchliche Annahme - auch wir wollen sie im Folgenden treffen - ist die, daß mit zunehmendem Prozeß ein allmählicher Übergang von zunächst rein isotropem hin zu rein kinematischem Verfestigungsverhalten stattfindet, d.h.:

$$k^2(b^*, T) \Big|_{b^* \rightarrow \infty} = k_\infty^2 = \text{Konst} \quad ; \quad \frac{\partial k^2}{\partial b^*} \Big|_{b^* \rightarrow \infty} = 0 \quad (3.7.10)$$

Diese Bedingung kann eine Funktion der Form (3.7.5) nicht erfüllen, da diese für $b^* \rightarrow \infty$ asymptotisch gegen

$$k^2 = k_0^2 + a(1 + b b^*)$$

strebt. Wir umgehen diesen Widerspruch durch Wahl einer Anschlußfunktion in der Form

$$k^2 = k_\infty^2 - (k_\infty^2 - k_1^2) e^{-f(b^* - b_1^*)} \quad ; \quad b^* \geq b_1^* \quad (3.7.11)$$

, wobei k_∞^2 ein weiterer freier Parameter ist und f so bestimmt wird, das ein stetiger Übergang für $b^* = b_1^*$ gewährleistet ist. Das führt auf folgende Bestimmungsgleichung:

$$f = \frac{a(b + c e^{-c b_1^*})}{(k_\infty^2 - k_1^2)} \quad ; \quad k_1^2 = k^2(b^* = b_1^*) \quad (3.7.12)$$

Wir treffen weiterhin die Annahme, daß $\partial k^2 / \partial b^*$ nicht negativ werden kann. Dies würde nämlich bedeuten, daß mit zunehmendem Prozeß die Halbachsen der Fließellipse kleiner würden. Ein solches Verhalten erscheint aber unwahrscheinlich.

Diese Annahme führt zu Konsequenzen bezüglich Gleichung (3.7.3), die ja für $b^* \rightarrow \infty$ in Gleichung (3.7.3a) übergeht.

Für isotherme Prozesse folgt aus

$$\frac{\partial k^2}{\partial b^*} = \frac{4}{3} [\sigma - 3(-\beta_1^1)] \left[\frac{d\sigma}{db^*} - 3 \frac{d(-\beta_1^1)}{db^*} \right] \geq 0$$

die Bedingung

$$\frac{d\sigma}{db^*} \geq 3 \frac{d(-\beta_1)}{db^*} \quad (3.7.13)$$

und damit auch

$$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon_{pl}} \right|_{\varepsilon_{pl} \rightarrow \infty} \geq \left. \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon_{pl}} \right|_{\varepsilon_{pl} \rightarrow \infty} \quad (3.7.14)$$

, da für $b^* \rightarrow \infty$ ε_{pl} proportional zu b^* ist.

$$db^* \Big|_{b^* \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{3}{2} k_\infty^2} d\varepsilon_{pl} \quad (3.7.15)$$

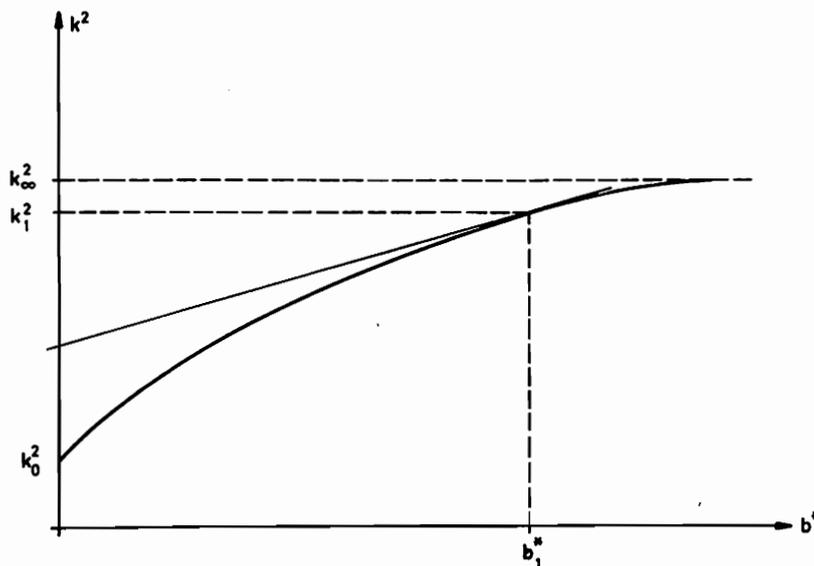


Bild 13: isotrope Verfestigungsfunktion

Die Bestimmung von k_∞^2 kann mit den vorher getroffenen Annahmen über die Analyse der Grenzyklen bei unterschiedlicher Dehnungsamplitude erfolgen (siehe Bild 14).

Wir betrachten zunächst den Grenzyklus mit der größeren Amplitude ε_{pl2} . Über (3.7.10) ist das Verhalten im Grenzyklus nur durch die kinematische Verfestigung bestimmt. Daraus folgt für Gleichung (3.7.9):

$$\zeta \Big|_{b^* \rightarrow \infty} = 2 \alpha \beta \sqrt{\frac{3}{2} k_\infty^2} = \zeta_\infty \quad (3.7.16)$$

und damit:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon_{pl}} = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon_{pl}} = \frac{2}{3} \zeta_{\infty} = \text{konst.} \quad (3.7.17)$$

k_{∞} läßt sich dann aus den Eckpunkten des Grenzyklus ermitteln:

$$k_{\infty}^2 = \frac{1}{6} (\sigma_{1\infty}^+ - \sigma_{1\infty}^-)^2 = \frac{1}{6} (\sigma_{2\infty}^+ - \sigma_{2\infty}^-)^2 \quad (3.7.18)$$

Für die Translation des Ellipsenschwerpunktes erhält man:

$$\sigma_i^* = \sigma_i^* + \frac{4}{3} \zeta_{\infty} \varepsilon_{pl} \quad (3.7.19)$$

wobei der Grenzyklus für $\sigma_1^* = |\sigma_2^*|$ symmetrisch zum Ursprung wird.

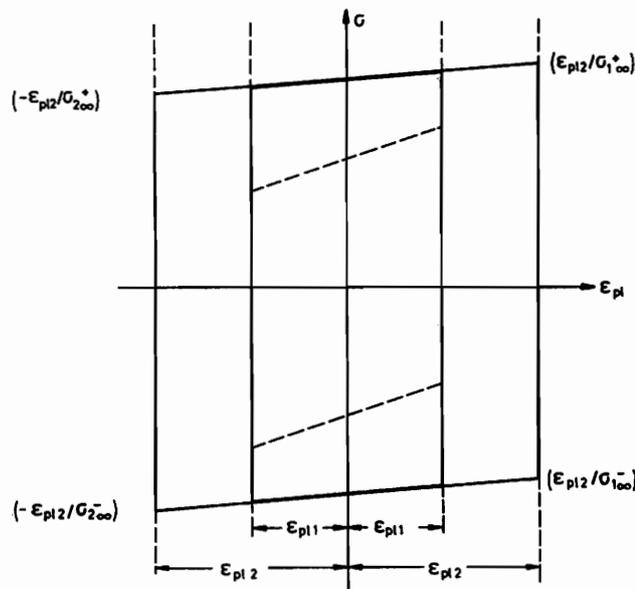


Bild 14: Verhalten im Grenzyklus

Aus dieser Theorie ergeben sich gewisse Einschränkungen bezüglich der Grenzyklen mit anderen Dehnungsamplituden:

1. Eine unterschiedliche Steigung $d\sigma/d\varepsilon_{pl}$ ist ausgeschlossen.
2. Die Ellipsenhalbachsen sind gleich groß.

Ein Verhalten, wie in Bild 14 gestrichelt dargestellt, kann im Rahmen dieser Theorie nicht erfaßt werden.

3.8 Ermittlung von κ (b^* , T)

Zur experimentellen Bestimmung der skalarwertigen Funktion κ , die ja bekanntlich die Abweichungen von der Normalenregel steuert, müssen komplexe Belastungsprozesse durchgeführt werden. Auch hierzu bieten sich wieder mehrere Möglichkeiten an.

3.8.1 reine Torsionsversuche

Bei reinen Torsionsversuchen an dünnwandigen Rohren sind die Auswirkungen von κ auf die Schubspannungen selber sehr gering. Allerdings ist die Wirkung auf die Effekte 2. Ordnung, z.B. auf den POYNTING- Effekt (Auftreten von Druckspannungen bei veränderter Längenausdehnung bzw. axiale Verlängerung der Probe bei freier Längenausdehnung) recht erheblich. Diese Effekte sind aber in den meisten Fällen so klein, daß sie zwar qualitativ nachgewiesen werden können, eine quantitative Messung jedoch außerordentlich empfindliche Meßapparaturen erfordert.

3.8.2 Versuche mit abrupten Änderungen der Belastungsrichtung

Wir beschränken uns hier auf Wechsel der Belastungsrichtung um 90° in der $\sigma - \tau$ - Ebene.

1. Zug + direkt anschließend Torsion
2. Torsion + direkt anschließend Zug

Bei derartigen Versuchen treten Spannungumlagerungen auf, die sehr sensitiv auf Änderungen von κ reagieren.

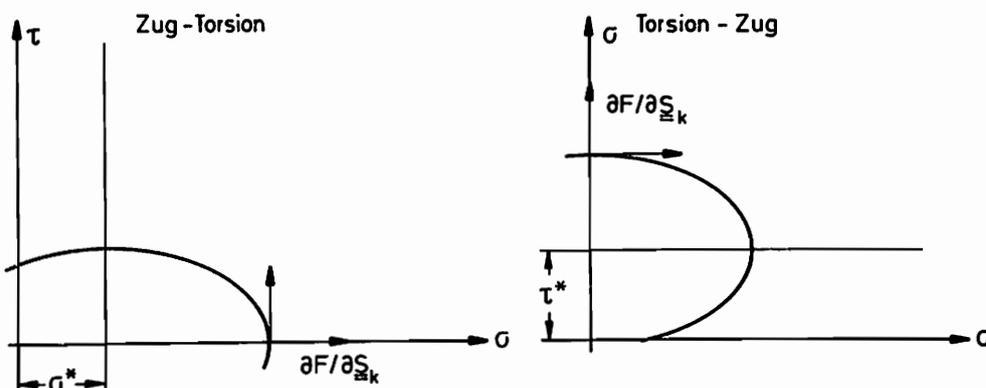


Bild 15: Umschaltpunkte bei kombinierten Prozessen

Vereinfacht läßt sich dieser Zusammenhang so deuten, daß $\dot{\kappa}$ sozusagen die " Geschwindigkeit " steuert, mit der der Spannungszustand auf der Fließkurve entlangläuft. Dabei muß allerdings berücksichtigt werden, daß auch nach dem Belastungswechsel die Deformation plastisch bleibt, d.h. sowohl Ellipsenhalbachse als auch die Mittelpunktsverschiebung ständige Änderungen erfahren. In diesem Zusammenhang wird auch deutlich, daß die gewählte Kombination von isotroper und kinematischer Verfestigung großen Einfluß auf den Prozeßverlauf haben kann.

3.9) nichtisotherme Experimente

Aus den in Abschnitt 2.4.9 erwähnten Gründen beschränkt sich diese Arbeit auf die Berechnung adiabater Formänderungen. Dazu bietet sich wiederum als einfachster Belastungsfall der einachsige Zugversuch an. Allerdings treten im Rahmen unserer Theorie bezüglich der adiabaten Prozeßführung Probleme auf, weil zum einen die Belastung so schnell erfolgen muß, daß der Einfluß der Wärmeleitung vernachlässigbar bleibt, zum anderen aber die Grenze zwischen elasto- plastischem und elasto- viscoplastischem Bereich nicht überschritten werden darf. Man muß dann gegebenenfalls eine Reihe von Vorversuchen mit unterschiedlichen Belastungsgeschwindigkeiten durchführen und, wenn möglich, den Geschwindigkeitsbereich abstecken, der sowohl einen globalen Temperaturanstieg über der Probenlänge bis zum Beginn der Einschnürung als auch vertretbar kleine viskose Effekte garantiert.

Durch die Energiebilanz ist die Temperaturerhöhung bei adiabaten Prozessen mit der Evolution des kinematischen Verfestigungsanteils verknüpft (siehe Abschnitt 2.4.9).

Aus Gleichung (2.4.48) folgt:

$$\dot{T} = \frac{1}{c_p} [1 - a_T \zeta(b^*, T)] \dot{w}_{\kappa} \quad (3.9.1)$$

wobei die Beschränkung

$$0 < a_T \zeta < 1 \quad (3.9.2)$$

gilt.

Mit dem in (3.7.9) postulierten Verlauf von ζ folgt daraus, daß zu

Beginn des Prozesses ein hoher Anteil der Energie in die Strukturänderungen (Verfestigung) geht, während der Anteil der dissipierten Energie für anwachsende plastische Deformationen immer mehr zunimmt. Im Vergleich mit den experimentellen Erfahrungswerten erscheint diese physikalische Interpretation durchaus sinnvoll. Man erhält nach Integration den in Bild 16 skizzierten qualitativen Temperaturverlauf.

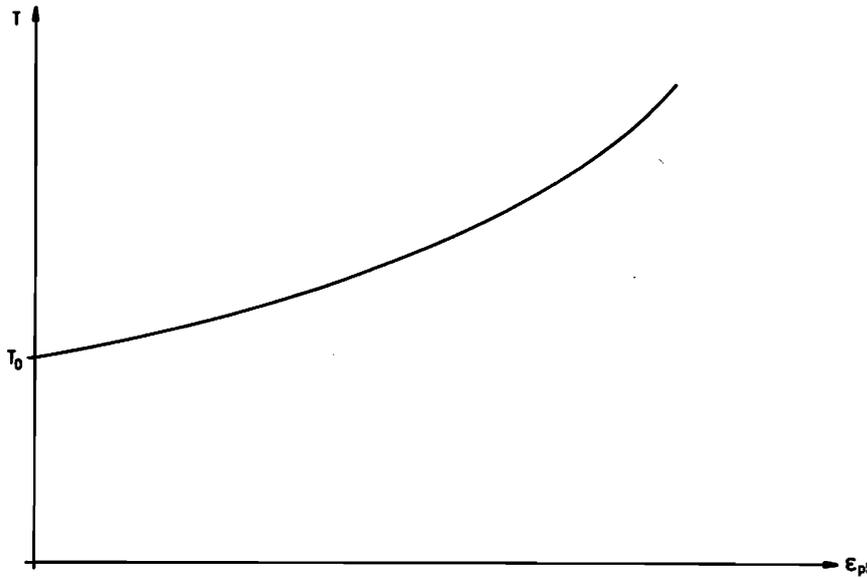


Bild 16: Temperaturverlauf bei adiabaten einachsigen Zugversuchen

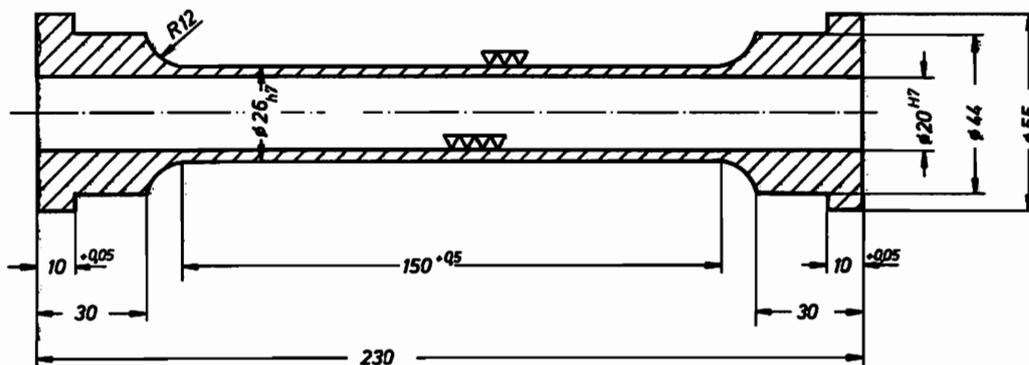
4. Versuchsplanung und Versuchsdurchführung

4.1 Proben

Das bei den experimentellen Untersuchungen verwendete Material ist ein relativ weicher, kohlenstoffarmer Stahl, der besonders zur Einsatzhärtung geeignet ist. Die DIN- Bezeichnung ist Ck 15.

Chemische Zusammensetzung von CK 15 in Gew. %

C	Si	Mn	P	S	Cr	Cu	Al	N ₂
0.15	0.29	0.39	0.012	0.026	0.12	0.215	0.0033	0.0065



CK 15

Bild 17: Probengeometrie

Die Herstellung der Proben aus dem Halbzeug wurde mit äußerster Sorgfalt durchgeführt, wobei besonders großer Wert auf Maßgenauigkeit und Oberflächenqualität gelegt wurde (z.B. wurden die Innenflächen der Proben gehont). Alle Proben sind aus ein- und derselben Charge. Zur Vermeidung etwaiger Anisotropien bedingt durch die Herstellungsverfahren des Halbzeuges (z.B. Texturen durch Strangpressen) wurden die Proben bei ca. 900° C zwei Stunden unter Hochvakuum geglüht und dann langsam abgekühlt.

4.2 Prüfmaschine

Die Versuchsserien zur experimentellen Bestimmung der Parameter, die auch gleichzeitig zur Überprüfung der Brauchbarkeit der entsprechenden Ansätze dienen, wurden auf einer hydraulischen Zug- Torsions- Prüfmaschine - gebaut von der Firma Schenk in Darmstadt und erworben mit Hilfe der Stiftung Volkswagen- Werk - durchgeführt (siehe Bild 18). Dabei wurden die von der Maschine gelieferten Daten mehrfach aufgezeichnet:

1. Speicherung der analogen Maschinensignale über x-y- Schreiber und Magnetband
2. Aufnahme und Speicherung des vollständigen Datensatzes (Weg, Winkel, Kraft, Torsionsmoment) in vorgegebenen Zeitabständen über Analog - Digital - Wandler und Rechneinheit.

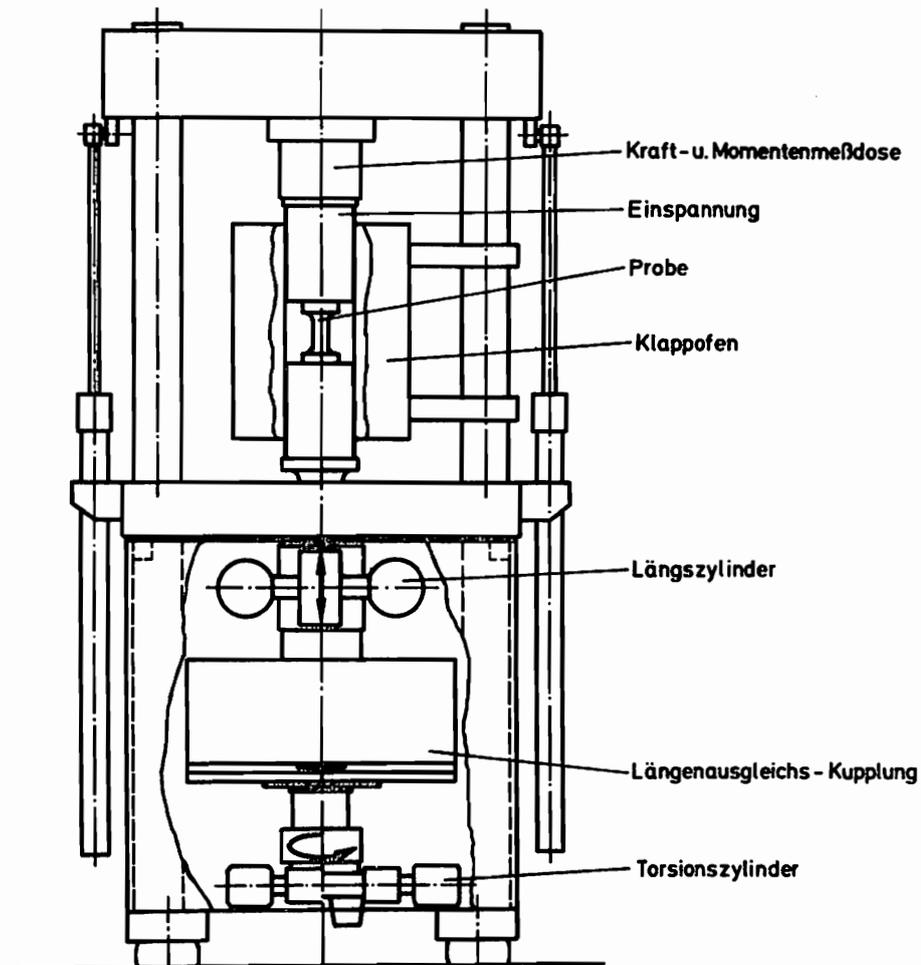


Bild 18: hydraulische Zug- Torsions- Prüfmaschine mit Klapppfeifen für die Warmversuche

4.3: Versuchsprogramm

Das Versuchsprogramm bestand aus einer Reihe geeignet kombinierter isothermer Experimente auf unterschiedlichen Temperaturniveaus und zwei adiabaten Zugversuchen bei Raumtemperatur. Die Temperaturniveaus der isothermen Experimente wurden so gewählt, daß Phasentransformationen ausgeschlossen waren.

- 1.) T = 26°C vollständige Versuchsserie
- 2.) T = 102°C " "
- 3.) T = 183°C " "
- 4.) T = 266°C " "
- 5.) T = 347°C einachsiger Zugversuch
- 6.) T = 405°C vollständige Versuchsserie

Dabei bestand eine vollständige Versuchsreihe aus jeweils 6 einzelnen Experimenten:

- 1.) 1 einachsiger Zugversuch ohne Richtungsumkehr der Belastung
($\dot{\epsilon} \cong 10^{-4} \text{ sek}^{-1}$)
- 2.) 3 zyklische Torsionsversuche mit unterschiedlicher Winkelamplitude ($\dot{\epsilon} \cong 2 \cdot 10^{-4} \text{ sek}^{-1}$)
 $\psi_{1 \max} = 25^\circ$ (bis zum Grenzyklus)
 $\psi_{2 \max} = 50^\circ$ (" " ")
 $\psi_{3 \max} = 100^\circ$ (ein Halbzyklus)
- 3.) 1 Versuch Zug - direkt anschließend Torsion
($\epsilon_{p, \max} = 5\%$; $\psi_{\max} = 50^\circ$)
- 4.) 1 Versuch Torsion - direkt anschließend Zug
($\psi_{\max} = 50^\circ$; $\epsilon_{p, \max} = 10\%$)

Die Belastungsgeschwindigkeit bei den adiabaten Versuchen betrug
 $\dot{\epsilon} \cong 10^{-2} \text{ sek}^{-1}$.

4.4: Erzeugung und Messung der Temperaturen

Die Experimente auf höheren Temperaturniveaus wurden mit Hilfe eines Klapp- Ofens durchgeführt. Da im Rahmen der vorausgesetzten Theorie eine möglichst konstante, über der Probenlänge homogene Temperatur erforderlich ist, wurde eine Aufheizphase von mindestens 24 h eingehalten. Die Messung der Temperaturen erfolgte über 3 direkt auf die Probe aufgebrachte (punktgeschweißte) Eisen- Konstantan- Thermoelemente,

die gleichzeitig die Istwerte für die 3- Zonen Regelung des Klapp-Ofens lieferten.

Der Temperaturverlauf wurde auch während des eigentlichen Versuchszeitraumes ständig überwacht. Die zeitlichen und örtlichen Temperaturschwankungen betragen dabei - bedingt durch die Leistungsfähigkeit der Ofenregelung - maximal $\pm 3^{\circ}\text{C}$.

Bei Raumtemperatur erfolgte die Überwachung des homogenen Temperaturfeldes (isotherme Experimente) bzw. die Aufzeichnung der Temperaturprofile (adiabate Versuche) über eine Thermovisionskamera. Diese arbeitet berührungsfrei über Messung der Infrarot- Strahlung und besitzt bei geschwärzten Oberflächen eine Empfindlichkeit von ca $\pm 1^{\circ}\text{C}$.

Die Verwendung der Thermo- Kamera auf den höheren Temperaturniveaus war bei Benutzung des Klappofens leider ausgeschlossen. Dieser erwies sich auch bei von außen vorgegebenen Temperaturänderungen (z.B. zyklischen Temperaturbelastungen) als unzureichend, da die Erzeugung eines zeitlich veränderlichen, jedoch in etwa homogenen Temperaturfeldes unmöglich war.

4.5 Auswertung der Versuchsdaten

Die von der Prüfmaschine gelieferten Datensätze müssen in eine im Rahmen des Stoffgesetzes brauchbare Form gebracht werden, nachdem alle durch das Meßverfahren bedingte Fehlereinflüsse (z.B. Maschinenelastizität), soweit möglich, herausgefiltert worden sind.

4.5.1 Einachsige Zugversuche

Bei diesem Versuchstyp liefert die Prüfmaschine das $F(s)$ - Diagramm. Die Wegmessung ist dabei durch die elastischen Verformungen von Prüfmaschine und Proben- Spannköpfen verfälscht. Man erhält die wahren Längenänderungen der Probe bei Kenntnis der Maschinenfederkonstanten über:

$$S_{\text{Probe}} = S_{\text{Gesamt}} - \frac{F}{C_{\text{Ma}}} \quad (4.1)$$

C_{Ma} läßt sich mit genügender Genauigkeit ermitteln, wenn man den Elastizitätsmodul der Probe kennt, z.B. aus vorherigen Messungen mit auf-

geklemmten, hochgenauen Wegaufnehmern. Dann gilt im elastischen Bereich:

$$S_{\text{Probe}} = l \left(e^{\frac{\sigma_L}{E}} - 1 \right); \quad \sigma_L = \frac{F}{A} \quad (4.2)$$

wobei der Fehler durch die Verwendung der LAGRANGE- Spannung im elastischen Bereich unterhalb von 1% liegt.

Wir erhalten dann für die Maschinenfederkonstante C_{Ma} :

$$C_{\text{Ma}} = \frac{F}{(S_{\text{Gesamt}} - S_{\text{Probe}})} \quad (4.3)$$

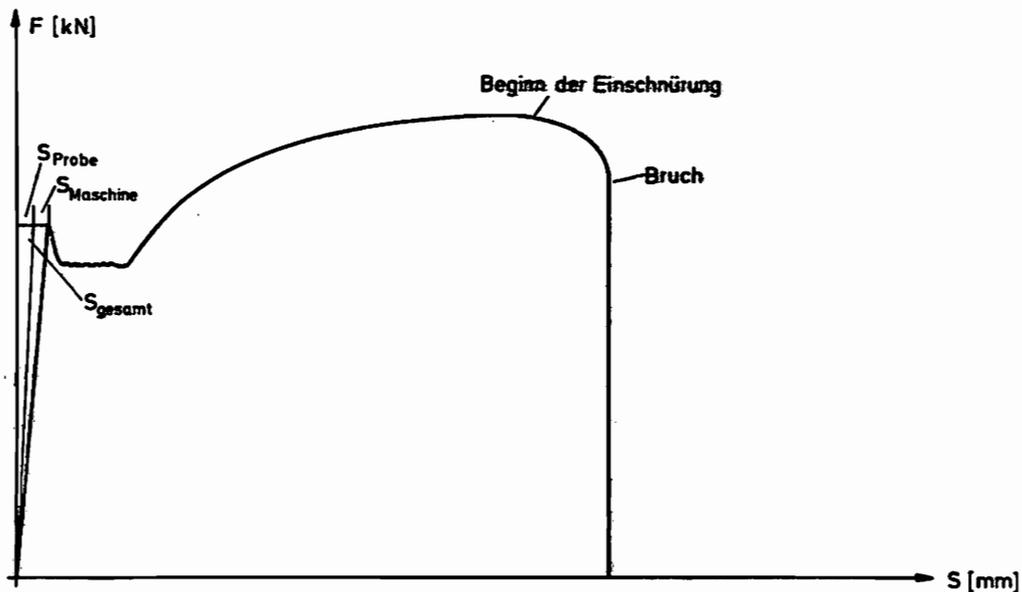


Bild 19: $F(s)$ - Diagramm

Die HENCKY- Dehnung ist definiert über:

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln\left(1 + \frac{S_{\text{Probe}}}{l_0}\right) \quad (4.4)$$

Für die CAUCHY- Spannung gilt bei Vernachlässigung der Kompressibilität, d.h. mit $\rho/\rho_0 \approx 1$ angenähert:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{A} e^{\varepsilon} \quad (4.5)$$

und die plastische Dehnung ergibt sich schließlich aus:

$$\varepsilon_{\text{Pl}} = \varepsilon - \frac{\sigma}{E} \quad (4.6)$$

Als Endergebnis dieser Rechnungen erhält man die Funktion $\sigma(\epsilon_{PI})$.

4.5.2 Torsionsversuche

Die Maschine liefert das $M_T(\psi)$ - Diagramm. Daraus erhält man die Schubspannungen über:

$$\tau = \frac{M_T}{W_T} \quad ; \quad W_T = \frac{\pi}{2} \frac{R_a^4 - R_i^4}{R_a} \quad (4.7)$$

Im elastischen Bereich gilt:

$$\hat{\psi} = \frac{1}{G} \frac{l_0}{R_c} \tau \quad ; \quad \gamma = \frac{\tau}{G} \quad (4.8)$$

Verfälschungen der Meßergebnisse bei Torsionsversuchen treten auf durch:

1. Maschinenelelastizität

Die Korrektur wird analog zu Abschnitt 4.5.1 durchgeführt.

2. plastische Formänderungen außerhalb der Bezugsquerschnitte der Probe (z.B. in den Radien).

Diese kann man abschätzen, indem man am Ende eines Torsionsversuches das Moment der Maschine auf den Wert 0 zurückfährt und den verbleibenden plastischen Winkel mißt über:

1. Maschinenanzeige

2. optische Vermessung anhand von Probenmarkierungen.

Der Fehler ergibt sich dann aus der entsprechenden Differenz.

Als Ergebnis eines Torsionsversuches erhält man schließlich die Funktion:

$$\tau = \tau(\psi) \quad ; \quad \tau = \tau(\gamma) \quad (4.9)$$

5. Versuchsergebnisse und Vergleich zwischen Theorie und Experiment

5.1 Reproduzierbarkeit der Experimente

Bedingt durch die aufwendige Herstellung der Proben war die Reproduzierbarkeit der Experimente erstaunlich hoch (siehe Bild 20). Die Abweichungen lagen bei Raumtemperatur im Bereich von 1% sowohl bei Zug als auch bei Torsionsversuchen. Mit steigender Temperatur wurde die Reproduzierbarkeit zunehmend schlechter, ein Effekt, der in erster Linie auf die Unzulänglichkeiten der Ofenregelung zurückzuführen ist. Die Abweichungen blieben aber mit ca. 4% bei 405°C im erträglichen Rahmen.

5.2 Versuchsergebnisse

Die experimentellen Daten der isothermen Versuchsserien auf den unterschiedlichen Temperaturniveaus sind in den Bildern 21 - 29 enthalten.

Besonders auffällig und interessant ist dabei ein Effekt bezüglich des Verfestigungsverhaltens, der sowohl bei den einachsigen Zugversuchen, als auch bei den Torsionsversuchen auftritt (siehe Bild 20, 21 und 22). Man erkennt, daß die $\sigma - \epsilon_p$ bzw. $\tau - \gamma$ - Kurven bei 102°C deutlich unterhalb der bei 26°C aufgenommenen liegen, d.h. das Material ist infolge der Temperaturerhöhung weicher geworden. Bei weiterem Temperaturanstieg ($T = 183^\circ\text{C}$, $T = 266^\circ\text{C}$) kehrt sich dieses Verhalten um; der Werkstoff wird wieder fester und erreicht dabei sogar die Verfestigungswerte der 26°C - Kurven. Der erwartete steile Abfall der Materialfestigkeit tritt erst bei noch wesentlich höheren Temperaturen ($T = 346^\circ\text{C}$ bzw. $T = 405^\circ\text{C}$) ein.

Ein solches Verhalten, das übrigens qualitativ auch die Messungen von FRITSCH - SIEGEL [14] ergeben haben, erscheint zunächst überraschend. Es existieren dazu jedoch viele experimentelle Untersuchungen unter werkstoffkundlichen Aspekten; STOLTE und HELLER geben in [36] einen Überblick über den Stand der Kenntnisse bezüglich der bei Ausscheidung und Umordnung von gelöstem Kohlenstoff und Stickstoff im α -Eisen ablaufenden Vorgänge, die als Abschreck- und Verformungsalterung bezeichnet werden.

Der im Rahmen dieser Arbeit interessierende Effekt - die Alterung des Werkstoffes durch plastische Verformungen - stellt dabei nur einen Teilaspekt dar und ist unter dem Begriff " dynamische Verformungsalterung bekannt. Diese äußert sich bei Belastungsprozessen in der sogenannten Blauwärme- Zone in erhöhter Verfestigung sowie einer herabgesetzten Verformungsfähigkeit.

Über elektronenmikroskopische Aufnahmen kann man nachweisen, daß nach dynamischer Verformungsalterung in diesem Temperaturbereich die Versetzungsdichte wesentlich größer ist, als nach gleich großer Verformung bei Raumtemperatur. Man führt das darauf zurück, daß durch Ausscheidungen von Kohlenstoff bzw. Karbiden und Stickstoff (Nitriden) an den Korngrenzen die Versetzungsbewegungen behindert werden. Die Versetzungslinien sind dann so fest verankert, daß immer neue Versetzungslinien entstehen müssen, um die Verformung in Gang zu halten. Bei noch höheren Temperaturen wird dieser Effekt durch Erholungserscheinungen überlagert, was letztlich zum erneuten Absinken der Verfestigungskurven führt.

Die Auswertung der zyklischen Torsionsversuche und der kombinierten Versuche kann nur durch Vergleich zwischen Versuch und numerischer Rechnung erfolgen. Auf evtl. auftretende Besonderheiten wird an entsprechender Stelle hingewiesen.

Bei den zyklischen Torsionsversuchen konnte das Einspielen auf den Grenzyklus nach jeweils 2 - 7 vollen Zyklen beobachtet werden (siehe Bild 25 - 29). Der POYNTING- Effekt konnte zwar qualitativ nachgewiesen werden, eine quantitative Aussage war jedoch mit den von der Maschine gelieferten Daten nicht möglich. Die Schwankungen der Meßwerte waren beträchtlich, auch die Reproduzierbarkeit der Daten war außerordentlich schlecht. Dies mag zum einen daran liegen, daß der Effekt selber sehr klein ist, zum anderen aber auch im Arbeitsprinzip der Prüfmaschine begründet sein (Pulsieren der Hydraulik durch die Regelung; leichte Nullpunktsdrift bei langer Versuchsdauer). Bei quantitativer Messung solcher Effekte sollte man die Belastung in anderer Weise, z.B. durch Gewichte oder rein mechanische Einrichtungen aufbringen.

Ein Aufschaukeln des POYNTING- Effektes bei zyklischen Torsionsversuchen konnte nicht nachgewiesen werden. Die Größenordnungen der Druckspannungen lagen zwischen -10 N/mm^2 und -20 N/mm^2 .

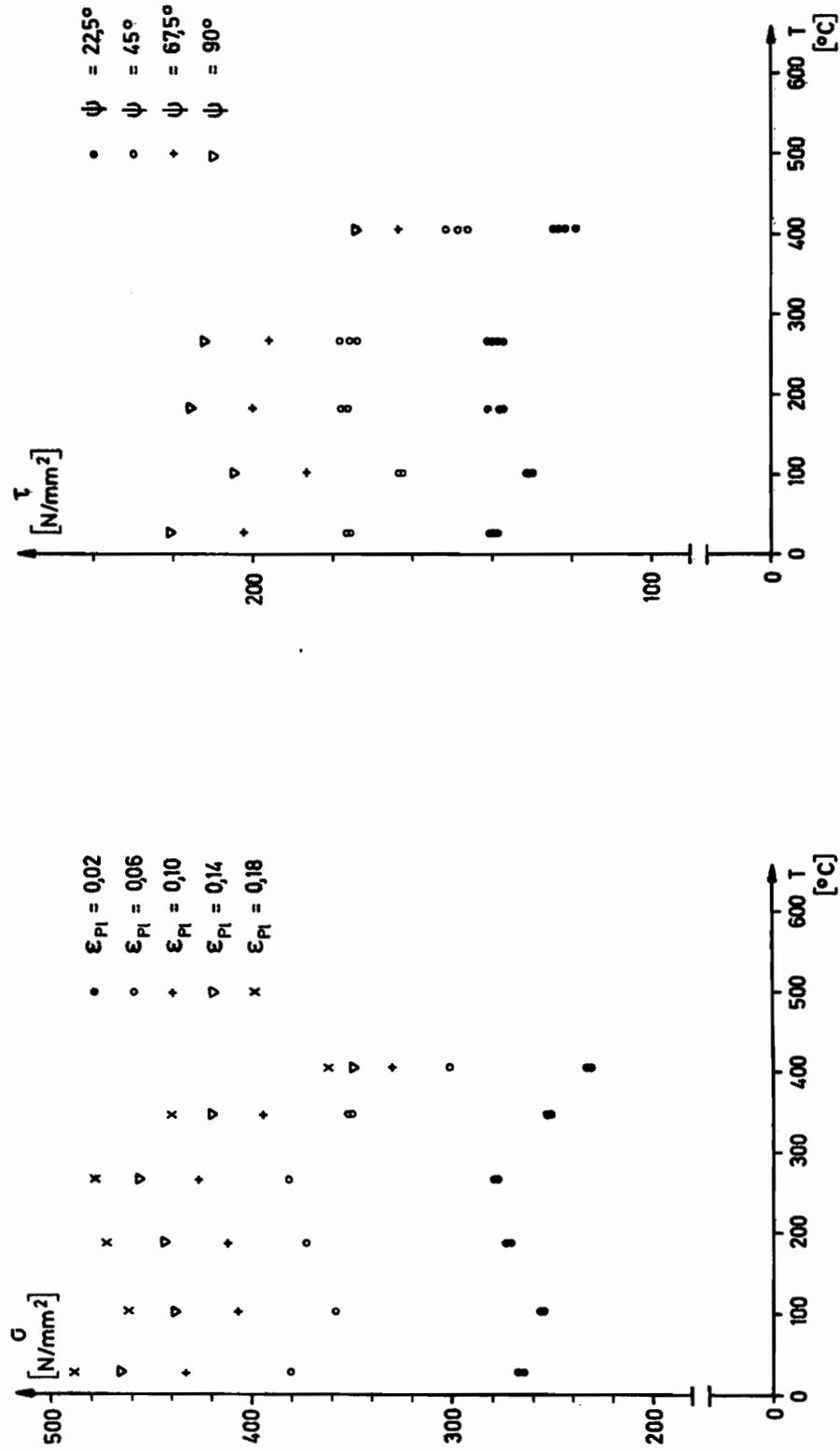


Bild 20: Reproduzierbarkeit der Versuchsergebnisse

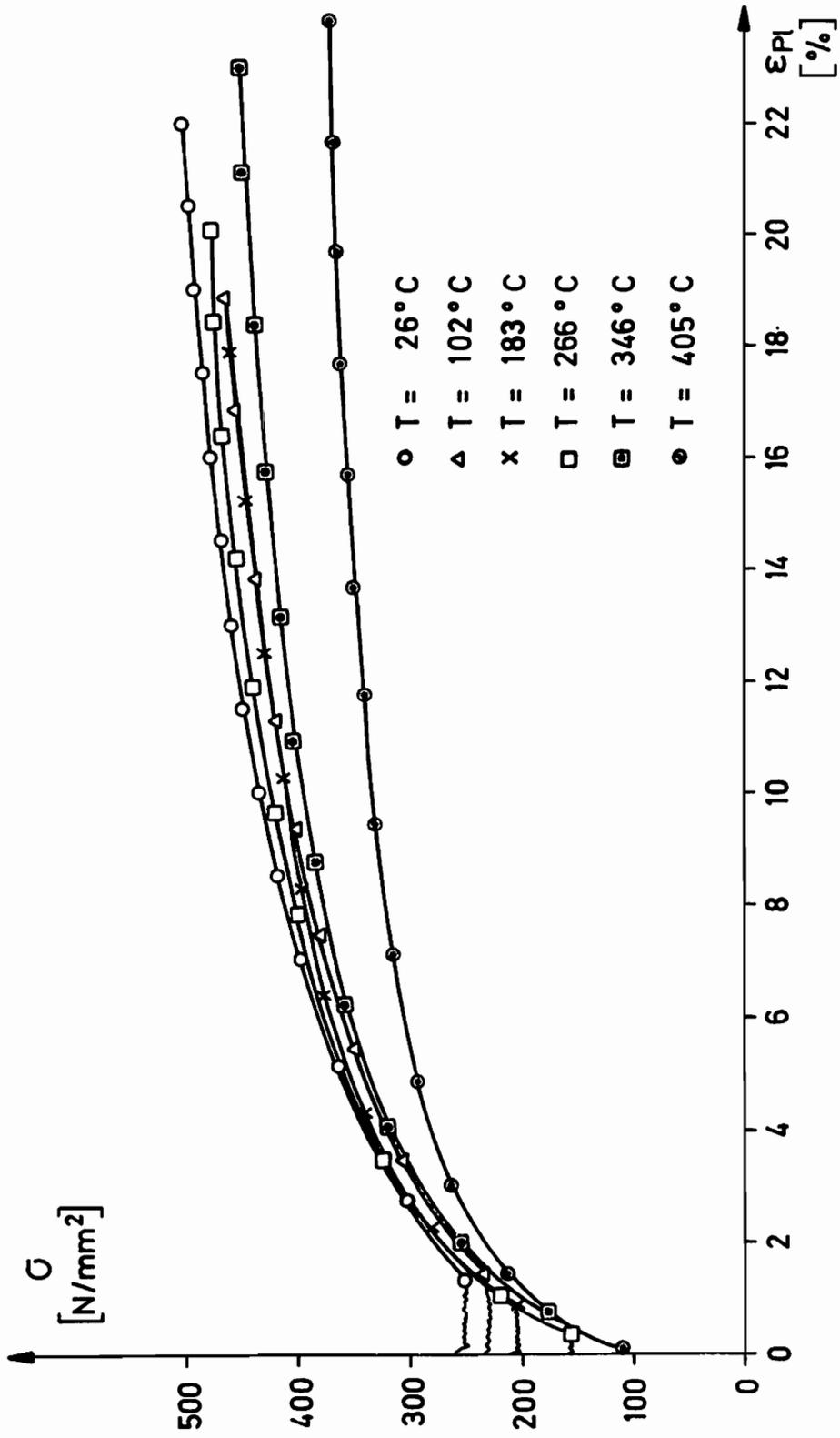


Bild 21: Einachsige Zugversuche auf unterschiedlichen Temperaturniveaus

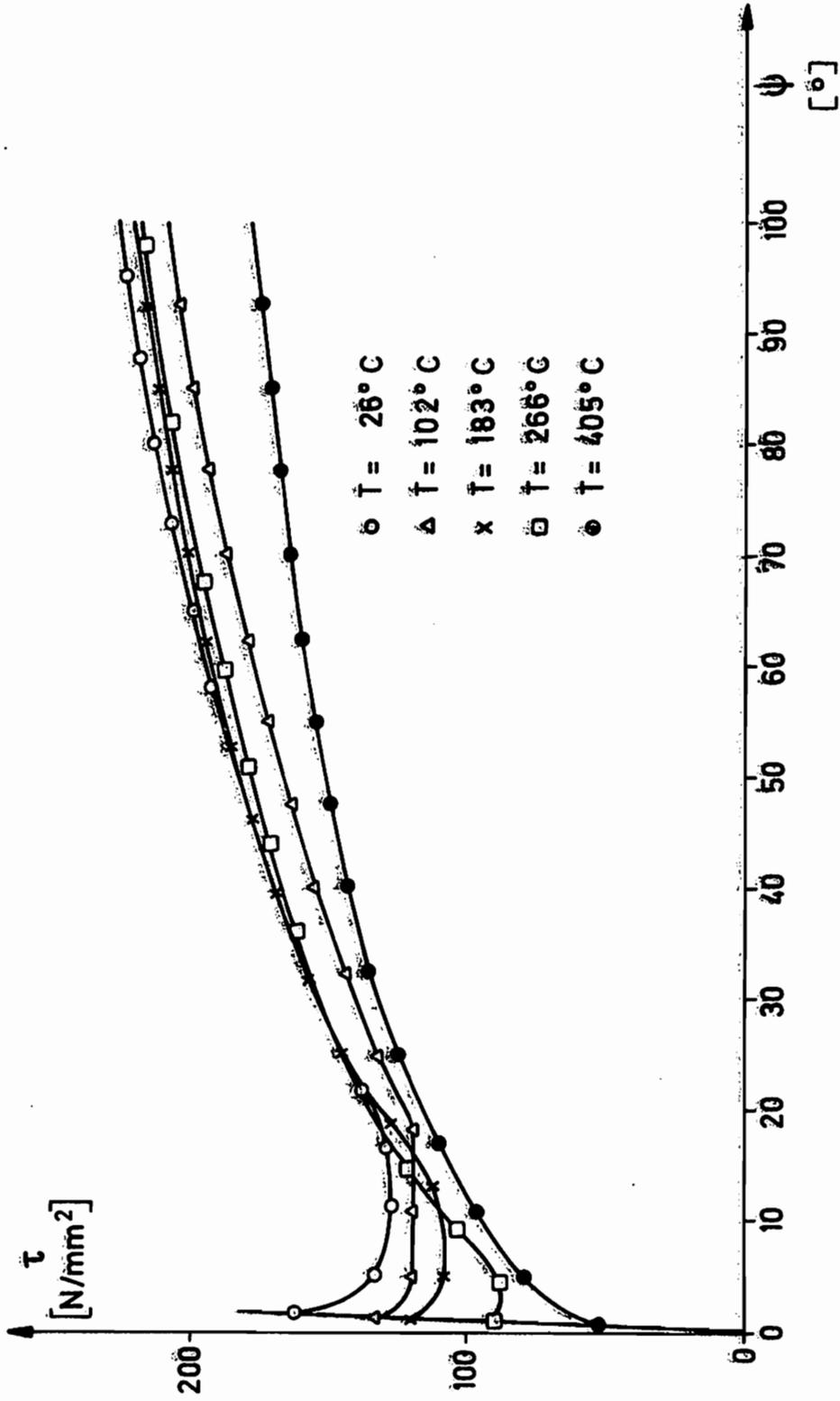


Bild 22: Torsionsversuche auf unterschiedlichen Temperaturniveaus

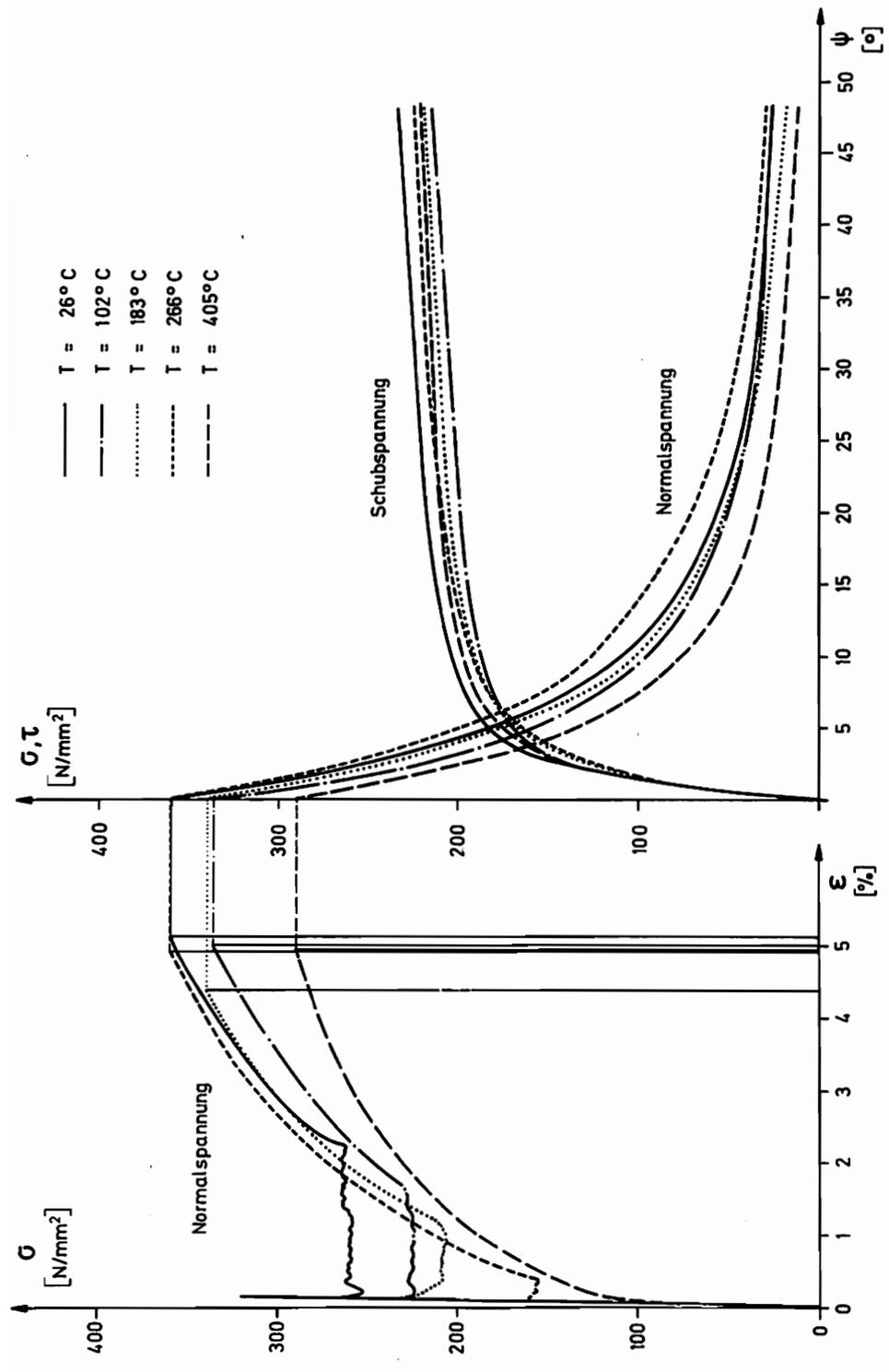


Bild 23: Kombinierte Versuche Zug - Torsion auf unterschiedlichen Temperaturniveaus

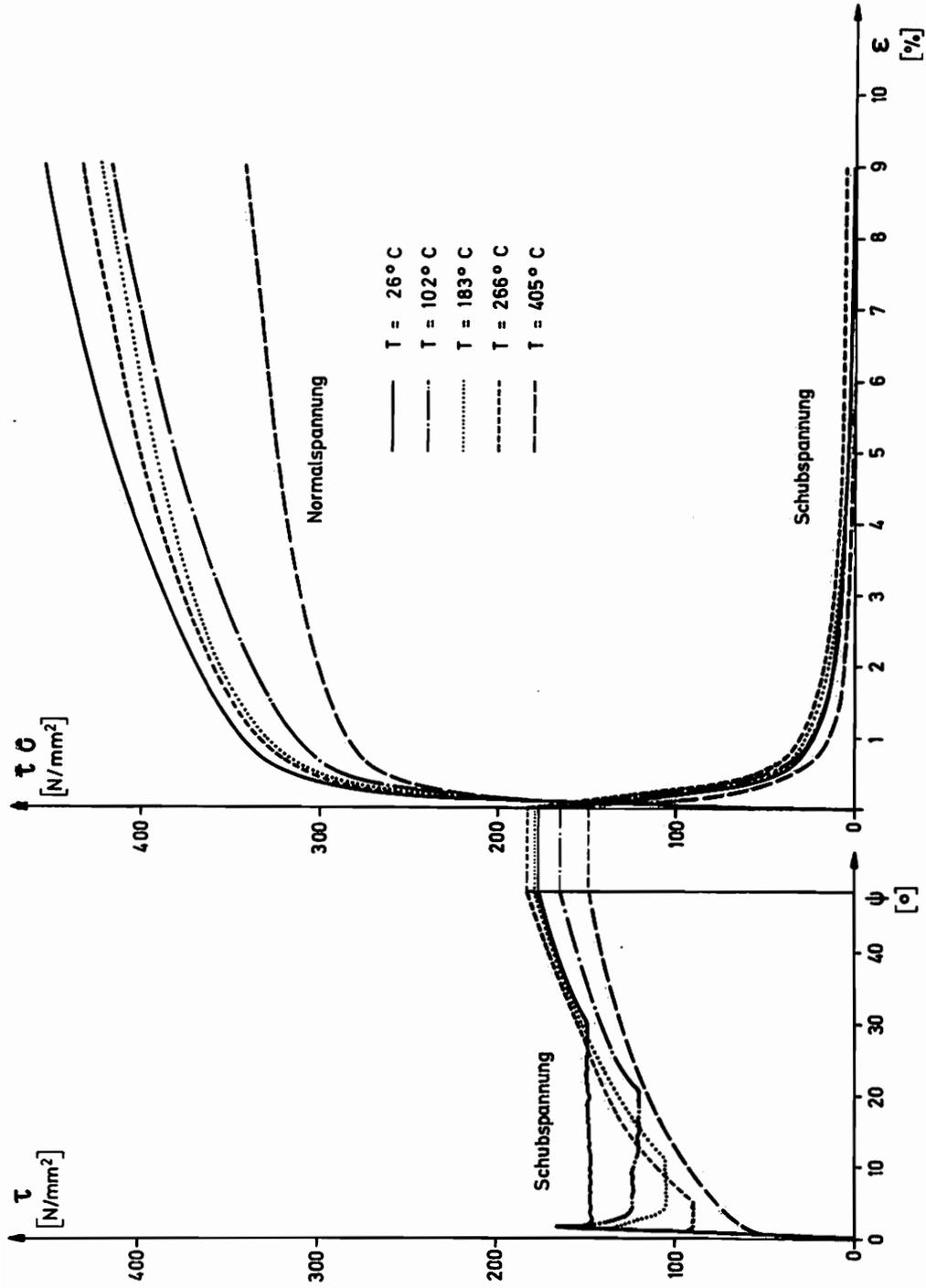


Bild 24: Kombinierte Versuche Torsion - Zug auf unterschiedlichen Temperaturniveaus

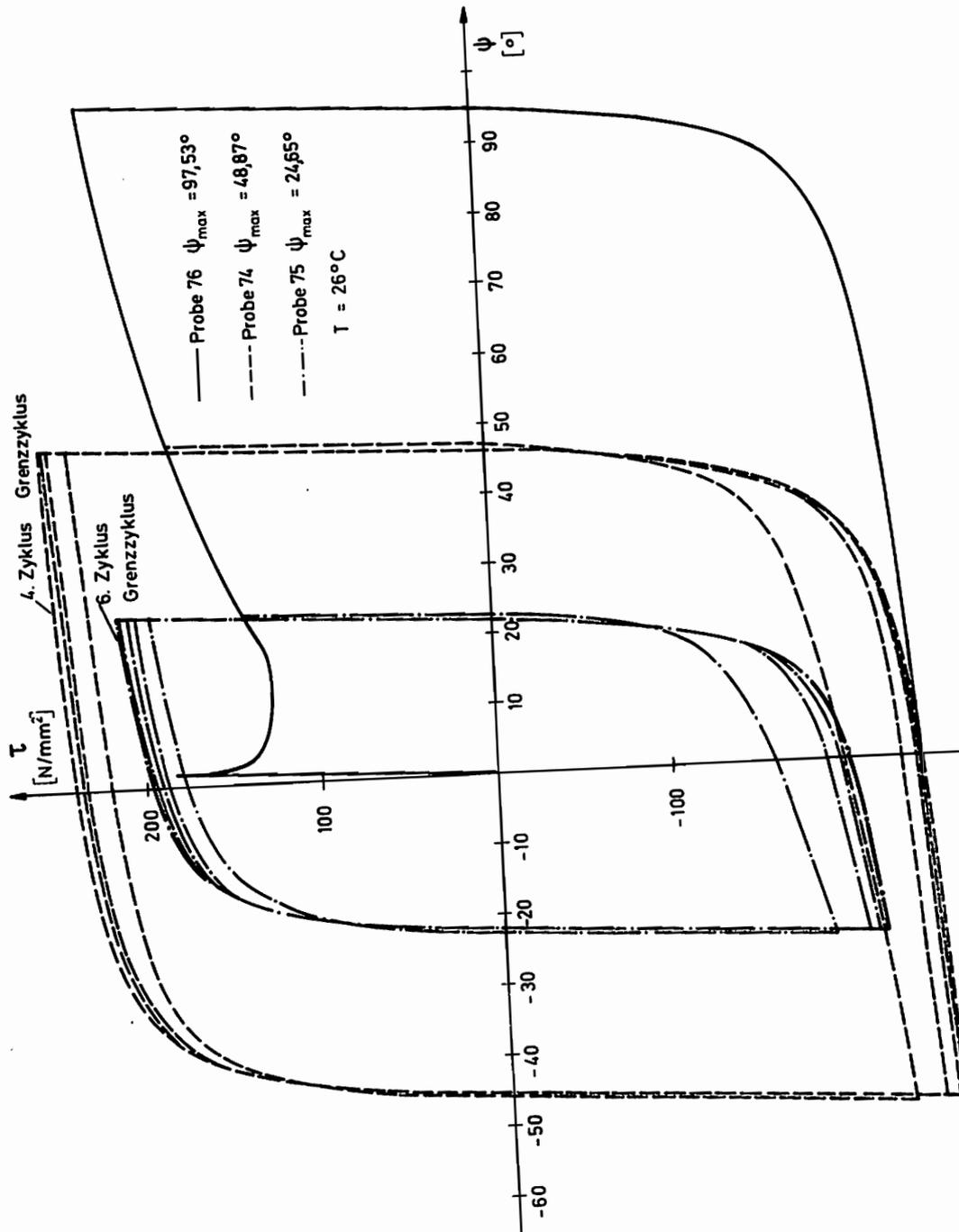


Bild 25: Zyklische Torsionsversuche bei $T = 26^\circ\text{C}$

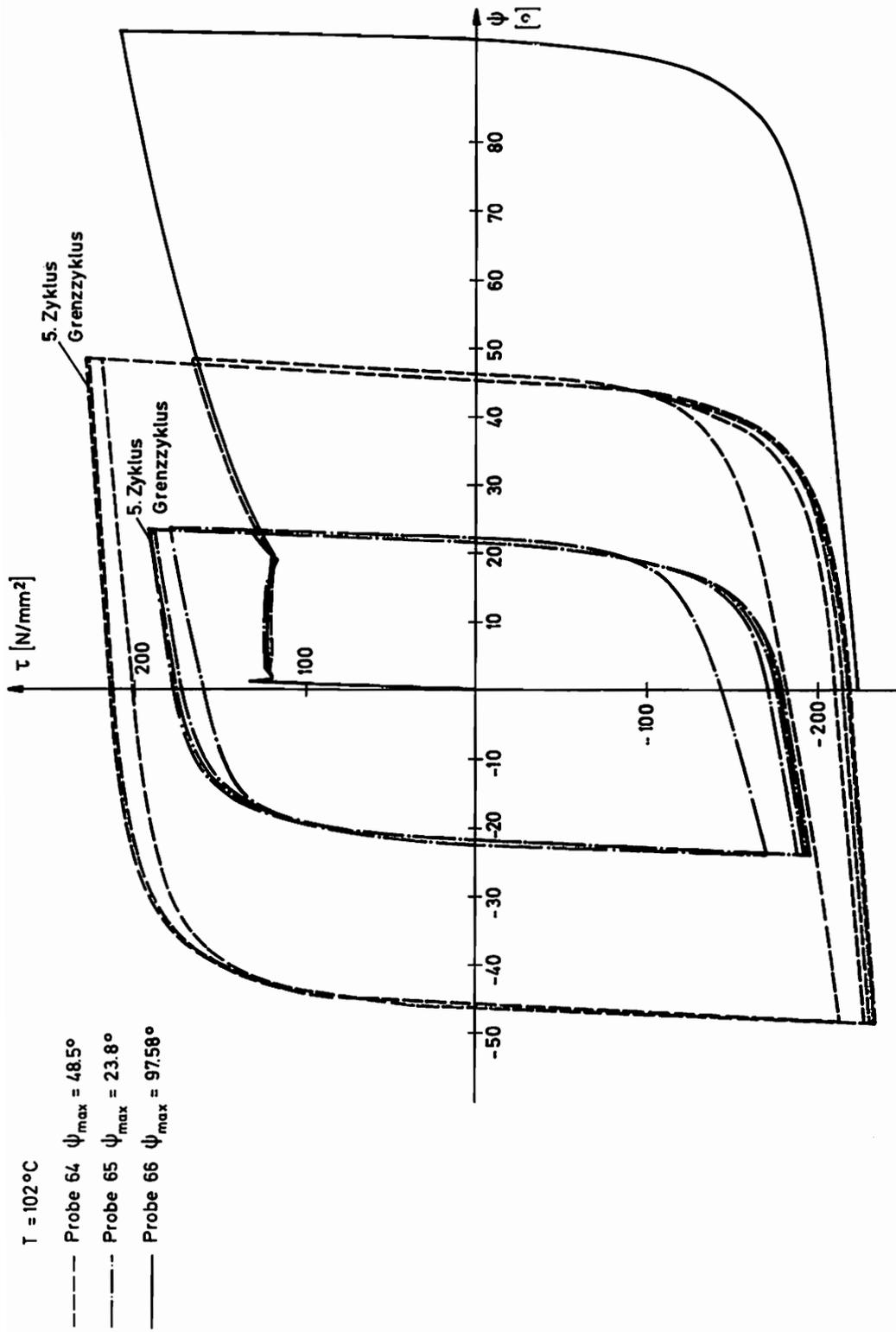


Bild 26: Zyklische Torsionsversuche bei $T = 102^{\circ}\text{C}$

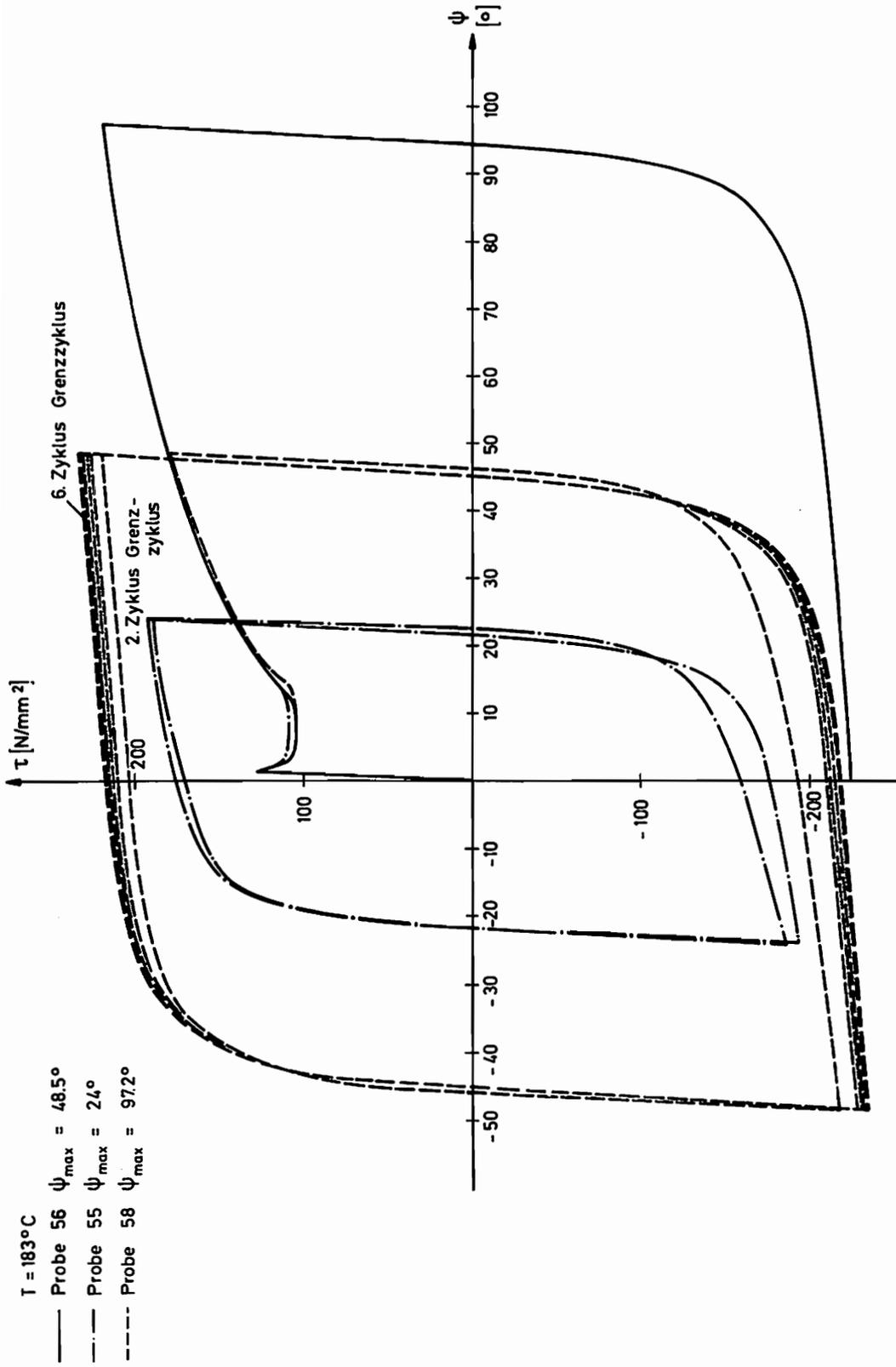


Bild 27: Zyklische Torsionsversuche bei $T = 183^{\circ}\text{C}$

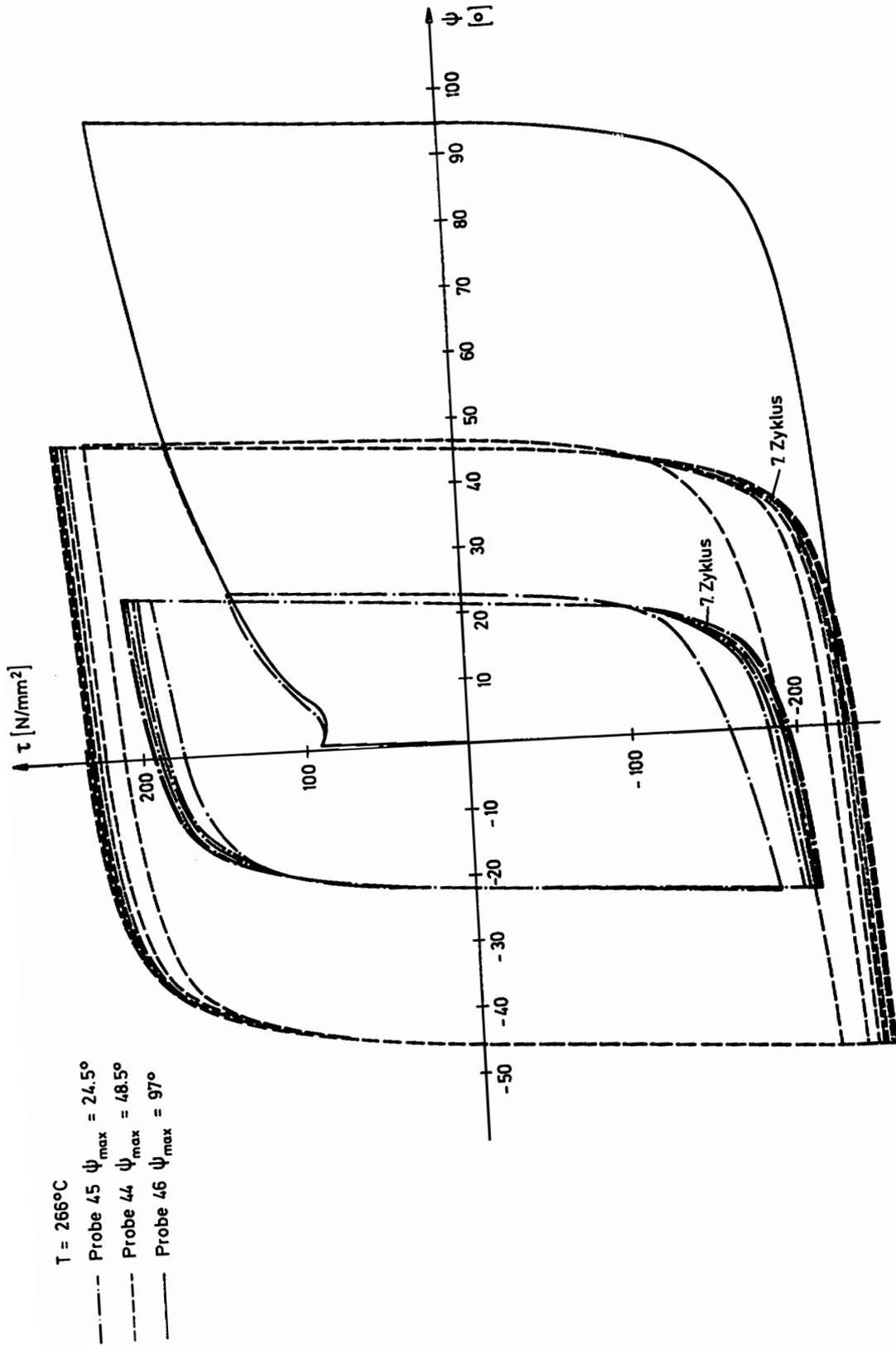


Bild 28: Zyklische Torsionsversuche bei $T = 266^{\circ}\text{C}$

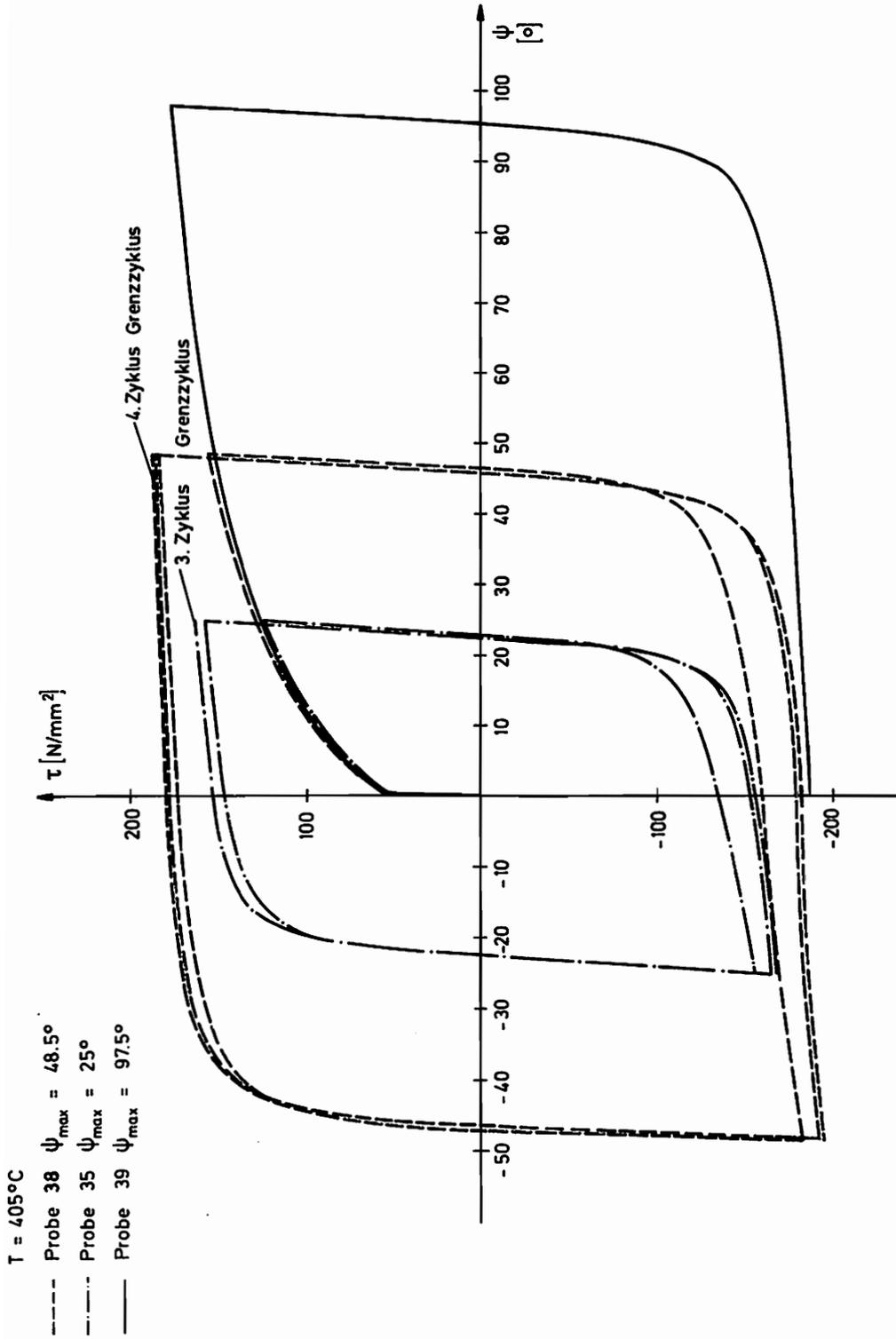


Bild 29: Zyklische Torsionsversuche bei $T = 405^{\circ}\text{C}$

5.3 Vergleich zwischen Theorie und Experiment bei isothermen Prozessen

5.3.1 Einachsige Versuche

Wie in Abschnitt 3.7 ausführlich beschrieben, wird das Verfestigungsverhalten (die Evolution der isotropen und kinematischen Verfestigungsanteile) aus einachsigen Versuchen ermittelt. Bei Eingabe der entsprechenden Verfestigungsfunktionen in das numerische Integrationsprogramm muß sich dann zwangsläufig eine nahezu deckungsgleiche Übereinstimmung zwischen Versuch und Theorie ergeben. Die dennoch auftretenden Abweichungen sind ein Maß für die Güte der Approximationen und die Genauigkeit des Integrationsprogramms.

Die gewählten Funktionen (siehe Abschnitt 3.7.2), insbesondere die Approximation der isotropen Verfestigungsfunktion $k^2(b^*, T)$ durch zwei über b^* abschnittsweise definierte Ansätze, erscheinen zunächst recht aufwendig. Für praktische Anwendungsfälle lassen sich sicherlich einfachere Ansätze finden, wenn man Abweichungen von ca. 5% zulassen will. Im Rahmen dieser Arbeit wurde aber Wert auf möglichst exakte Approximationen gelegt, weil nur dann eine sichere Aussage über die Ursachen der Abweichungen beim Vergleich zwischen Versuch und Theorie möglich ist.

Bei Verwendung der Ansätze (3.7.5) und (3.7.11) für die isotrope Verfestigungsfunktion, sowie (3.7.6) für die Evolution des kinematischen Verfestigungsanteils lag der durch Approximation und numerische Integration bedingte Fehler im Bereich von 1% (siehe Bild 30). Da bei höheren Temperaturen die Krümmungsradien der $\delta - \epsilon_{\text{pl}}$ - Kurven im unteren Dehnungsbereich kleiner werden, mußte bei Einhaltung der geforderten Genauigkeit von 1% die Gültigkeitsgrenze von (3.7.5) in Richtung kleinerer b^* verschoben werden.

5.3.2 Torsionsversuche ohne Belastungsumkehr

Rechnet man mit den aus einachsigen Versuchen ermittelten Verfestigungsdaten Torsionsversuche ohne Belastungsumkehr nach, so ergeben sich Abweichungen im Bereich von ca. 5%, wobei die Rechnung stets höhere Werte liefert als der Versuch (Bild 32, 35, 38, 41, 44).

Dieser Fehler ist bedingt durch die in Abschnitt 2.4.3 gewählte Fließbedingung, die ja ein konstantes Verhältnis der Fließspannungen bei Zug- bzw. Schubbeanspruchung vom Wert $\sqrt{3}$ voraussagt. Im Rahmen unserer Theorie - unter Vernachlässigung der Einflüsse der 3. Invarianten - müssen diese Abweichungen in Kauf genommen werden.

Der POYNTING- Effekt wird größenordnungsmäßig nicht richtig beschrieben, wenn man ausschließlich mit der Normalenregel rechnet. Allerdings kann der Fehler über den Einfluß des Parameters κ (siehe auch Abschnitt 5.3.4) in geeigneter Form korrigiert werden. Ein genauer Vergleich oder eine etwaige Bestimmung von κ über den POYNTING- Effekt war jedoch aus den in 5.2 dargelegten Gründen nicht möglich.

5.3.3 Prozesse mit Belastungsumkehr

Am Beispiel Torsion zeigen die Bilder 32, 35, 38, 41 und 44 deutlich die Einflüsse des BAUSCHINGER- Effektes bei Prozessen mit Belastungsumkehr (Zug- Druck bzw. Torsion- Rücktorsion). Nach dem Wechsel der Belastung treten erneute plastische Deformationen stets wesentlich früher auf, als eine isotrope Theorie vorhersagt. Man sieht auch deutlich, welche Anteile des BAUSCHINGER- Effektes erfaßt werden, wenn man zwar mit einer geeigneten Kombination von isotroper und kinematischer Verfestigung aber mit nur einer Fließbedingung arbeitet. Die zur Berechnung benötigten kinematischen Verfestigungsfunktionen wurden über das von SCHOLTES in [7] vorgeschlagene Verfahren ermittelt. Ein Beispiel dazu zeigt Bild 31. Man erhält dann bei größeren Rückverformungen durchaus befriedigende Übereinstimmungen zwischen Versuch und Theorie. Für zyklische Verformungen mit mehreren Belastungswechseln erweist sich der Ansatz (2.4.16) den wir bezüglich der Evolution des kinematischen Verfestigungsanteils definiert hatten, als ungeeignet. Dabei weisen mehrere Gesichtspunkte auf die Problematik dieses Entwicklungsgesetzes hin, von denen aber an dieser Stelle nur einer stellvertretend aufgegriffen werden soll:

Wenn man, wie in Abschnitt 3.7.2 beschrieben, die Sättigungswerte der isotropen Verfestigung aus den Grenzyklen der zyklischen Prozesse bestimmt, erhält man Werte für k_0 , die im Vergleich mit den nach SCHOLTES ermittelten Anteilen viel zu klein sind. Im Rahmen unserer

Theorie ist das ein Widerspruch, da die Halbachsen der Fließellipse mit zunehmendem Prozeß nicht kleiner werden können.

Deshalb sind die in 5.4.1 angegebenen Werte für k_{∞}^2 nur als zusätzliche freie Approximationsparameter anzusehen, die ihrer physikalischen Bedeutung bezüglich der Grenzyklen enthoben sind.

5.3.4 Komplexe Belastungsprozesse

5.3.4.1 Kombinierte Versuche; Zug - Torsion

Die Ergebnisse dieses Versuchstyps sind in den Bildern 33, 36, 39, 42 und 45 dargestellt.

Nach dem Wechsel der Belastungsrichtung von Zug auf Torsion registriert man Spannungsumlagerungen, die bei ausschließlicher Verwendung des Verzerrungsincrementes \underline{D}_p (Normalenregel) nur ungenügend erfaßt werden können. Man erhält dabei die schlechtesten Ergebnisse, wenn mit rein isotroper Verfestigung gerechnet wird. Die maximalen Abweichungen zwischen Versuch und Theorie können dann bei den Normalspannungen durchaus im Bereich von über 100% liegen. Die Resultate werden etwas besser, wenn man mit der aus den Versuchen mit Belastungsumkehr ermittelten Kombination von isotroper und kinematischer Verfestigung rechnet, allerdings sind sie auch dann noch insgesamt unbefriedigend. Spürbare Verbesserungen erhält man erst dann, wenn man das zusätzliche Verzerrungsincrement \underline{D}_s einführt, das über den Parameter κ die Abweichungen von der Normalenregel steuert. Dabei ist der Einfluß von κ auf Änderungen der Fließkurve selber vernachlässigbar klein. Vielmehr werden die Spannungsumlagerungen, die kurz nach dem Wechsel der Belastungsrichtung auftreten, positiv beeinflusst. Man könnte - bildlich gesprochen - sagen, daß κ die Geschwindigkeit drosselt, mit der der Spannungszustand auf der Fließkurve entlangläuft, und zwar bis ungefähr zu dem Punkt, an dem der Scheitel der Fließellipse $P (\sigma^*; \tau^* + b)$ in der $\sigma - \tau$ - Ebene erreicht ist. Danach werden die Änderungen des Spannungszustandes wieder durch Änderungen der Fließellipse bestimmt. Die mit und ohne κ gerechneten Kurven werden schließlich mit fortschreitendem Prozeß nahezu deckungsgleich.

Die genaue Ermittlung des Parameters κ bzw. seine Abhängigkeit von

den internen Zustandsvariablen ist außerordentlich schwierig. Sie kann nur durch Vergleich zwischen den gemessenen und den mit verschiedenen Ansätzen gerechneten Kurven erfolgen, wobei die Entscheidung für die letztendlich beste Übereinstimmung im Einzelfall subjektiv sein muß. Es wurden sowohl lineare, als auch unter- und überlineare Ansätze für die funktionale Abhängigkeit $\kappa(b^*)$ getestet. Von diesen brachte ein Ansatz mit kleinen Werten zu Beginn des Prozesses und steilem Anstieg bei mittleren Dehnungen (überlinearer Verlauf) die besten Ergebnisse (siehe Abschnitt 5.4) und zwar bei allen untersuchten Temperaturen. Im Übrigen war die erreichbare Übereinstimmung zwischen Versuch und Theorie nicht auf allen Temperaturniveaus gleich gut, ein Effekt, der weniger auf Einflüsse von κ als vielmehr auf die Kombination der Verfestigungsanteile zurückzuführen ist.

Vergleicht man die Verläufe der Schubspannungen nach dem Wechsel der Belastungsrichtung, so stellt man fest, daß die Rechnung mit rein isotroper Verfestigung zu große, die mit kombiniert isotroper und kinematischer Verfestigung etwas zu kleine Werte liefert. Man könnte daraus schließen, daß der kinematische Verfestigungsanteil zu groß gewählt wurde. Wahrscheinlicher ist aber - darauf weisen auch andere Beobachtungen hin (Abschnitt 6) -, daß nach dem Wechsel der Belastungsrichtung die Verschiebung des Ellipsenschwerpunktes in τ -Richtung zu klein ist. Zu dieser Annahme verleitet auch das besonders auffällige Verhalten bei $T = 405^\circ\text{C}$, wo selbst die Rechnung mit rein isotroper Verfestigung bei den Schubspannungen wesentlich zu niedrige Werte liefert. Wir greifen diesen Aspekt später noch einmal auf.

Als letzter Gesichtspunkt soll nun noch der Zusammenhang dieses Versuchstyps mit der in 5.2 beschriebenen Temperaturabhängigkeit des Verfestigungsverhaltens näher durchleuchtet werden.

Die experimentellen Daten aus einachsigen Zugversuchen und Torsionsversuchen bei unterschiedlichen Temperaturen zeigen im Bereich von 200°C bis 300°C ein Verfestigungsmaximum auf, das wir über den Effekt der Verformungsalterung erklären konnten. Nach STOLTE und HELLER werden in diesem Temperaturbereich überproportional viele neue Versetzungen produziert, weil dann die Bewegungen der bereits bestehenden durch Karbid- bzw. Nitrid-Ausscheidungen an den Korngrenzen behindert werden. Nun ist nach unserer Theorie die Neuproduktion von Versetzun-

gen - gesteuert über den Parameter κ - mit dem Verzerrungsinkrement D_{ϵ} verknüpft, wobei κ aus den Spannungsumlagerungen bei kombinierten Versuchen bestimmt wird. Interessanterweise bestätigt die in Bild 50 dargestellte Temperaturabhängigkeit der Funktion κ diesen Zusammenhang, da diese im entsprechenden Temperaturbereich ebenfalls ein relatives Maximum aufweist.

Bild 50 enthält dazu noch einen zweiten Aspekt, der sich aus der Abhängigkeit von der skalaren Zustandsvariablen b^* ergibt. Der überproportionale Verlauf weist darauf hin, daß plastische Formänderungsvorgänge mit zunehmendem Prozeß immer stärker durch die Neuproduktion von Gitterfehlern bestimmt werden.

5.3.4.2 Kombinierte Versuche; Torsion - Zug

Für diese Experimente, dargestellt in den Bildern 34, 37, 40, 43 und 46, gelten prinzipiell dieselben Überlegungen wie für Zug- Torsions-Prozesse. Allerdings sind die Reaktionen auf Änderungen von κ bei Torsion- Zug- Versuchen wesentlich geringer. Experimente dieses Typs erweisen sich demnach zur Ermittlung von κ als ungeeignet, können allerdings zur Überprüfung der aus den Zug- Torsions- Versuchen ermittelten Funktion κ herangezogen werden. Der überlineare Verlauf von κ über b^* bringt auch bei den Torsion- Zug- Prozessen bei allen untersuchten Temperaturen gute Ergebnisse, allerdings werden auch die in 5.4.3.1 beschriebenen Überlegungen bezüglich der Evolution des kinematischen Verfestigungsanteils nach dem Belastungswechsel bestätigt.

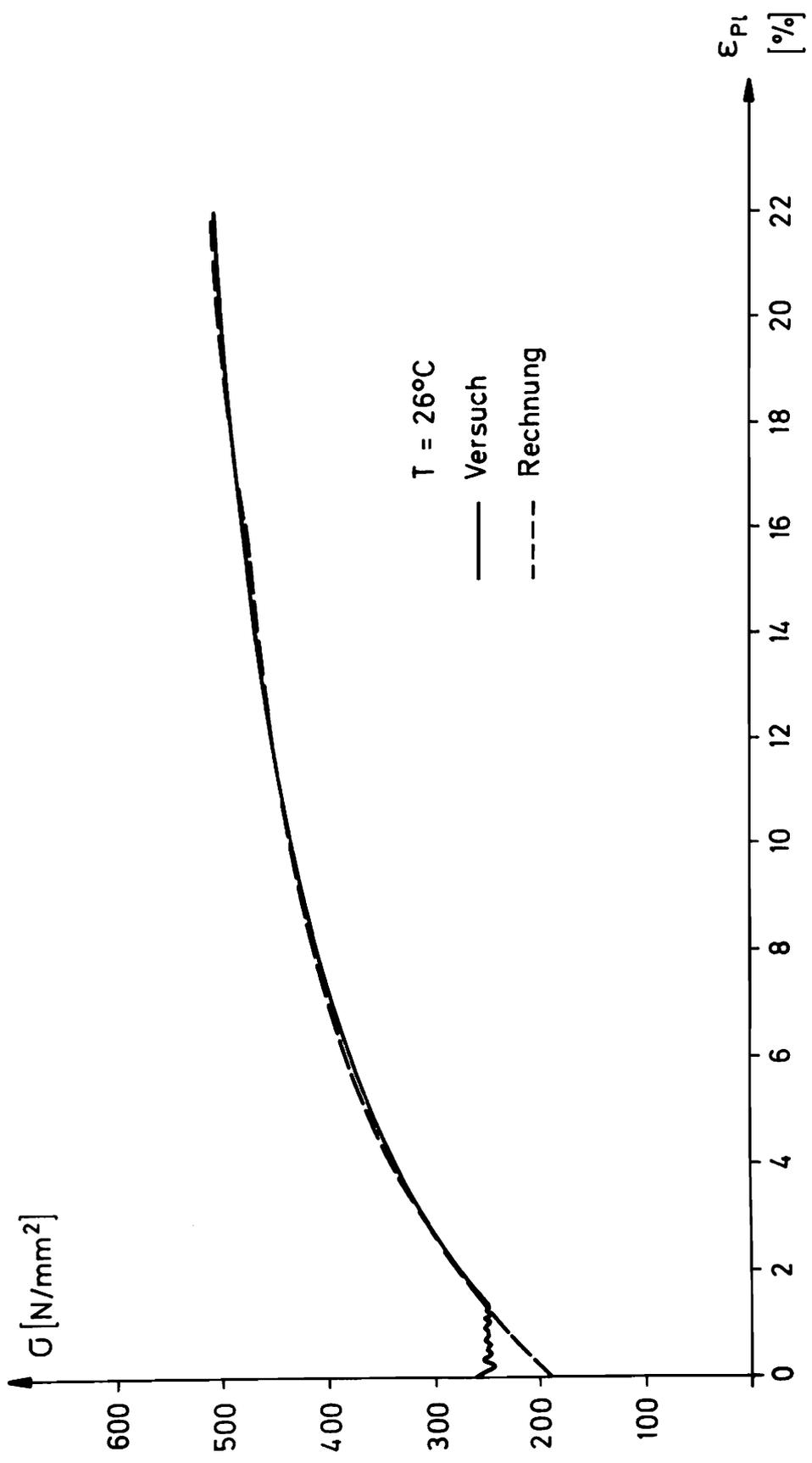


Bild 30: Einachsiger Zugversuch; experimentelle Daten und Approximation

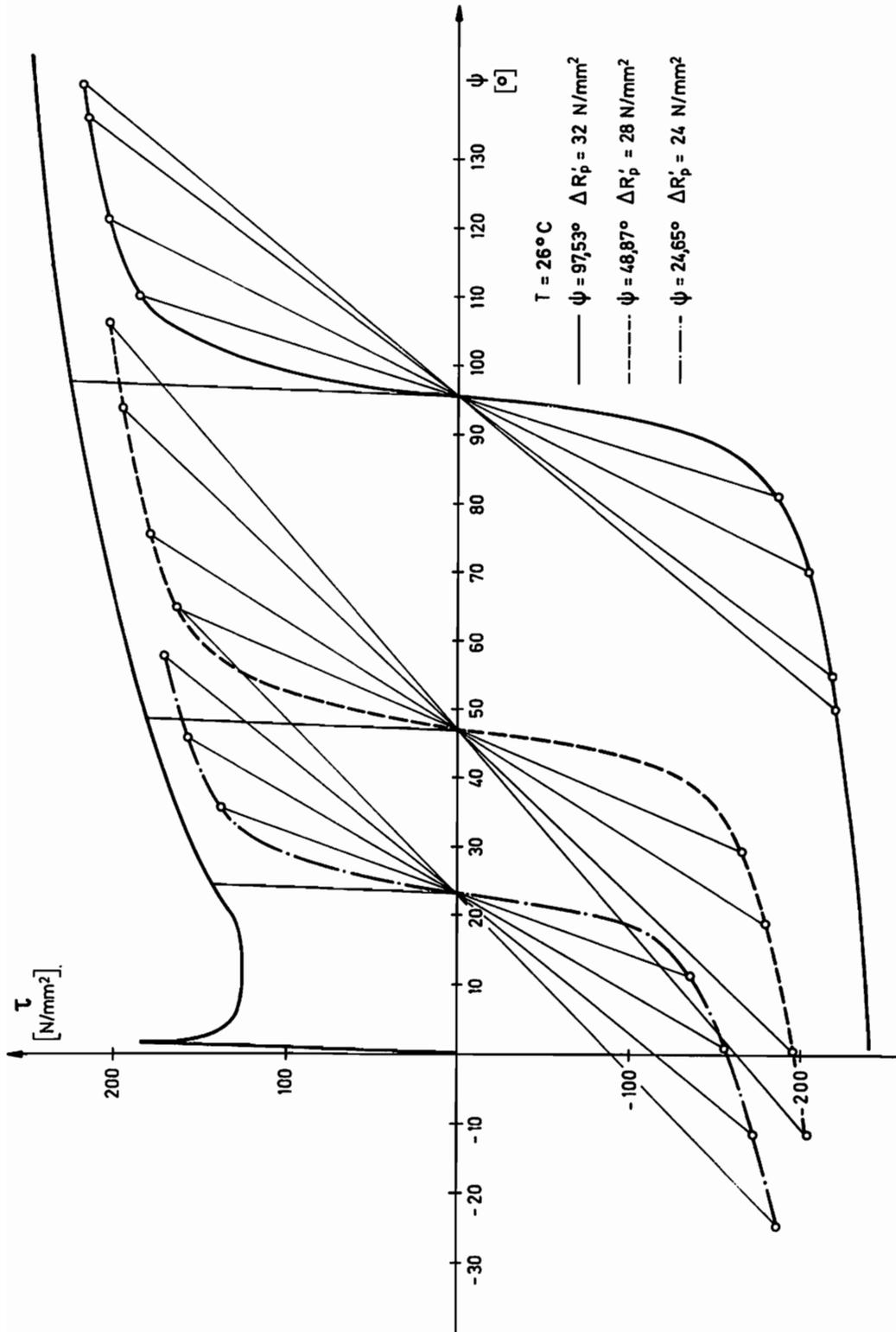


Bild 31: Ermittlung von ΔR_p nach SCHOLTES

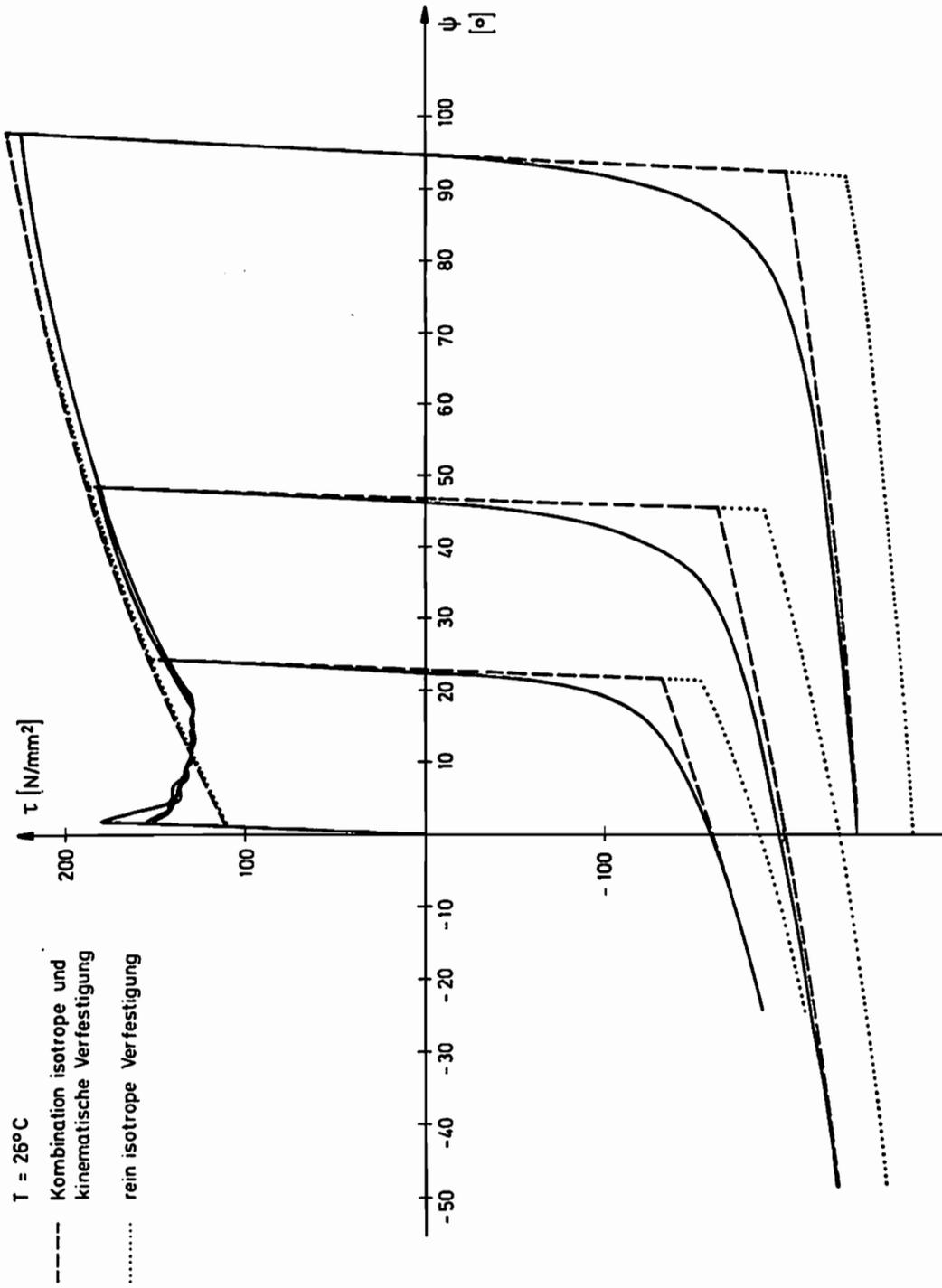


Bild 32: Torsionsversuche mit Belastungsumkehr; Theorie und Experiment

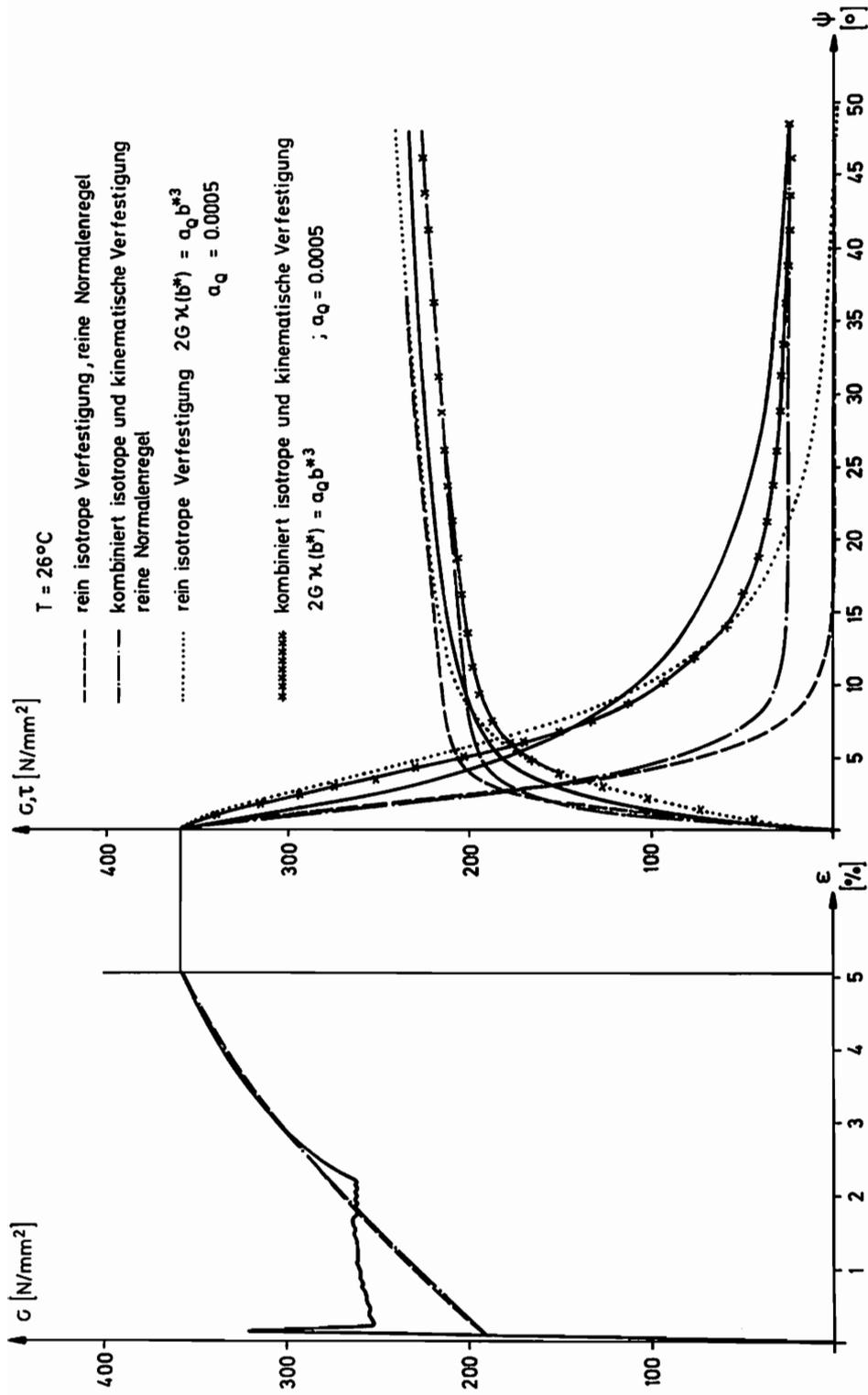


Bild 33: Kombiniertes Zug - Torsion; Theorie und Experiment

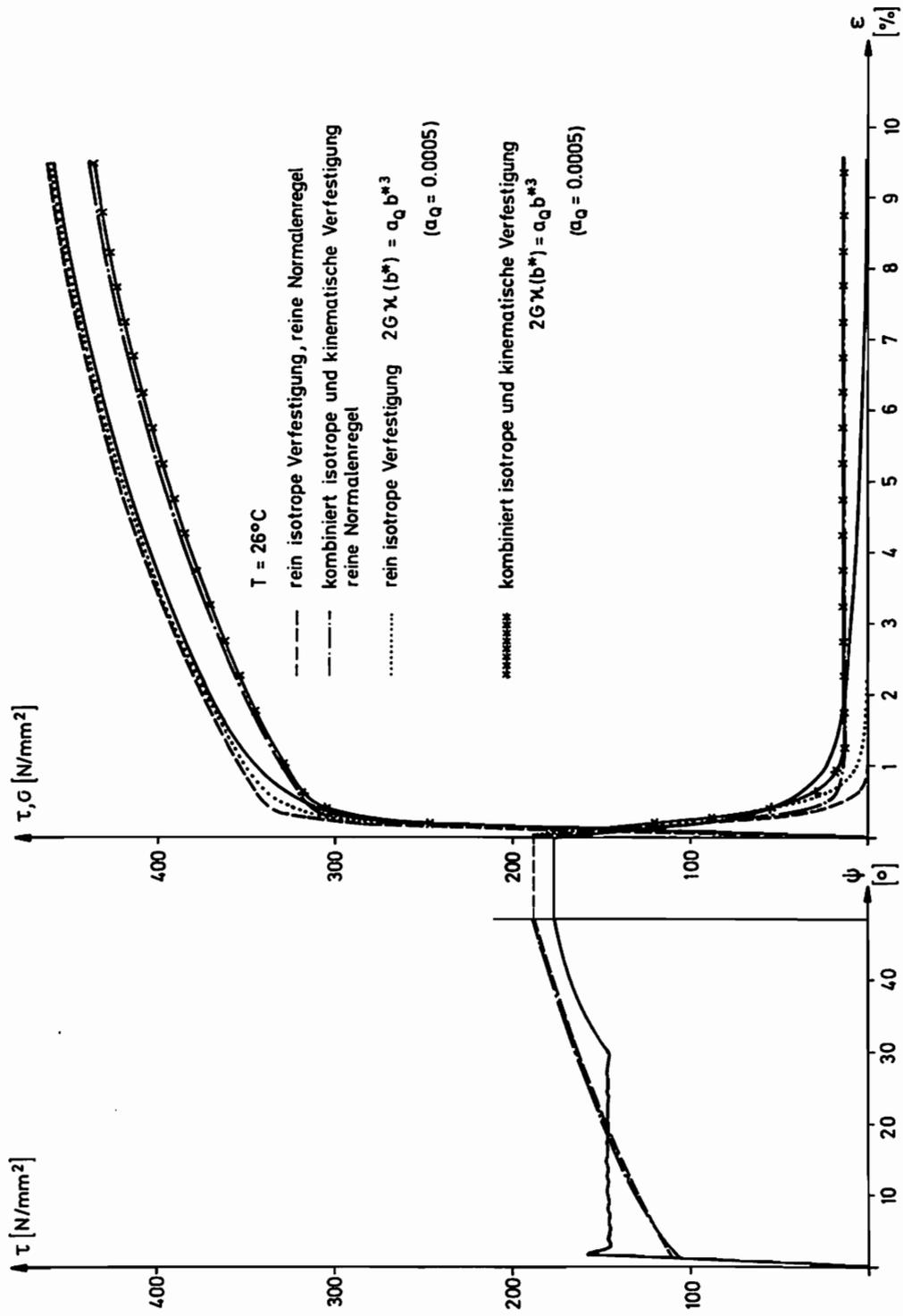


Bild 34: Kombinerter Versuch; Torsion - Zug; Theorie und Experiment

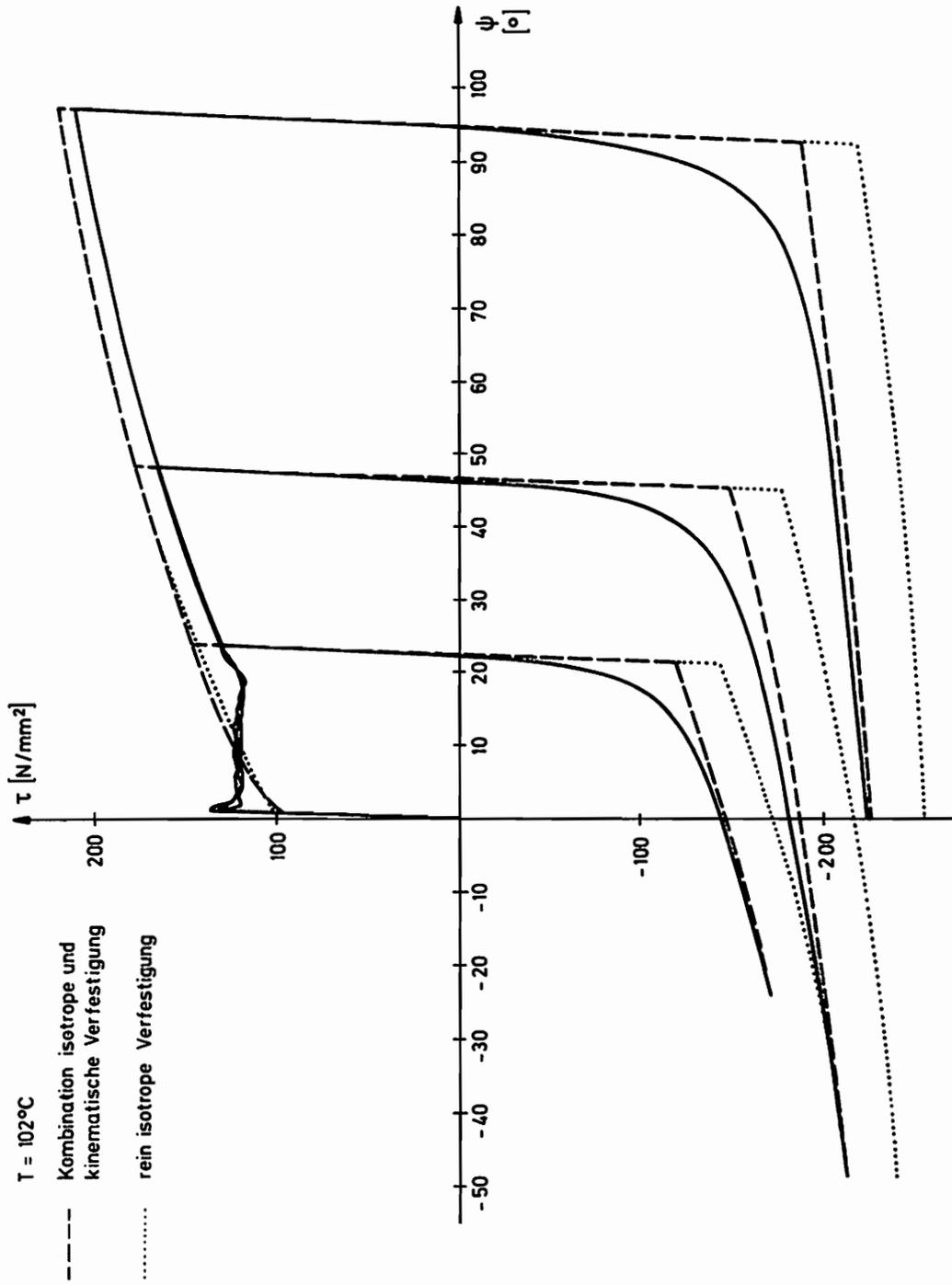


Bild 35: Torsionsversuche mit Belastungsumkehr; Theorie und Experiment

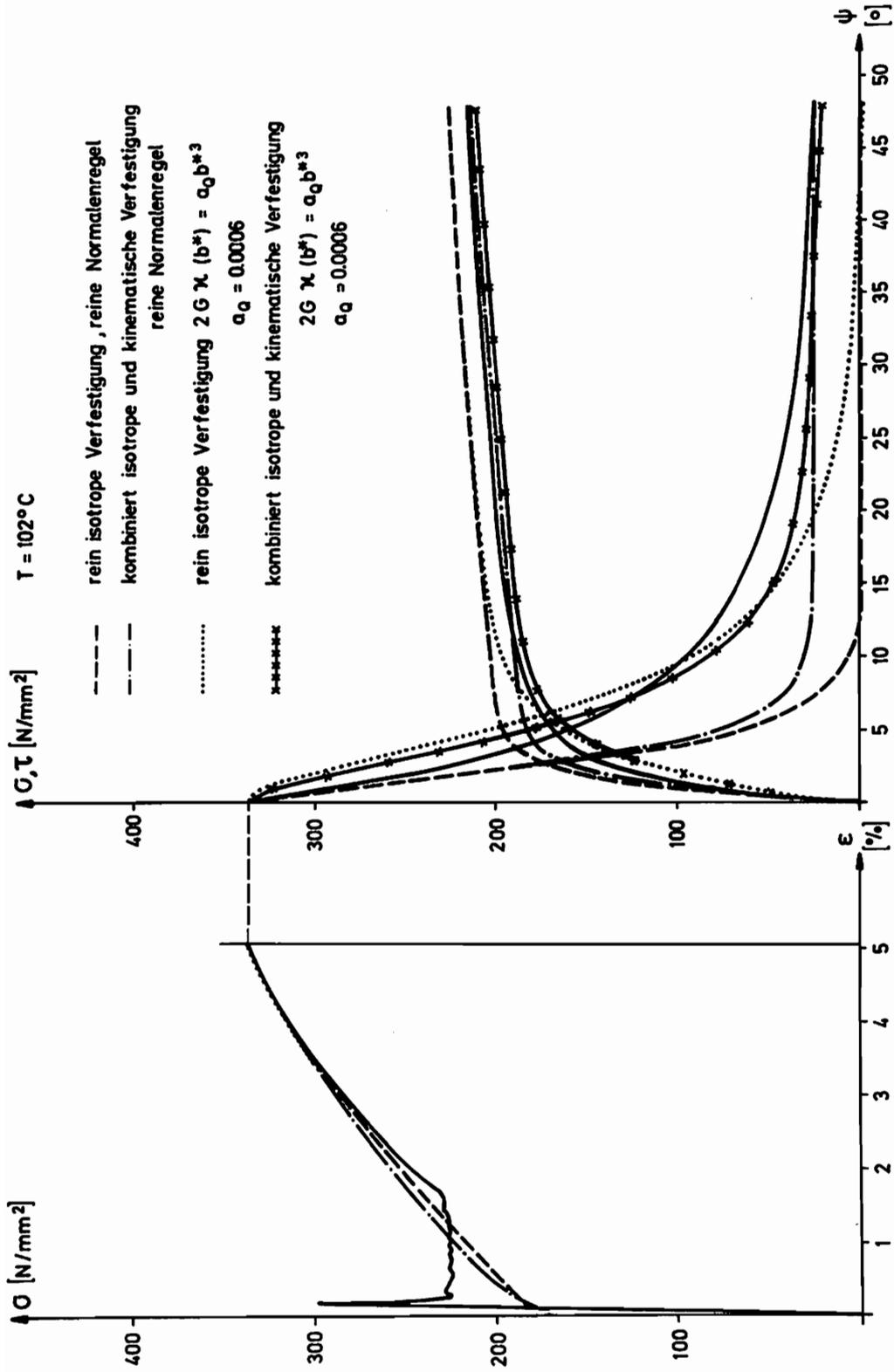


Bild 36: Kombinerter Versuch; Zug - Torsion; Theorie und Experiment

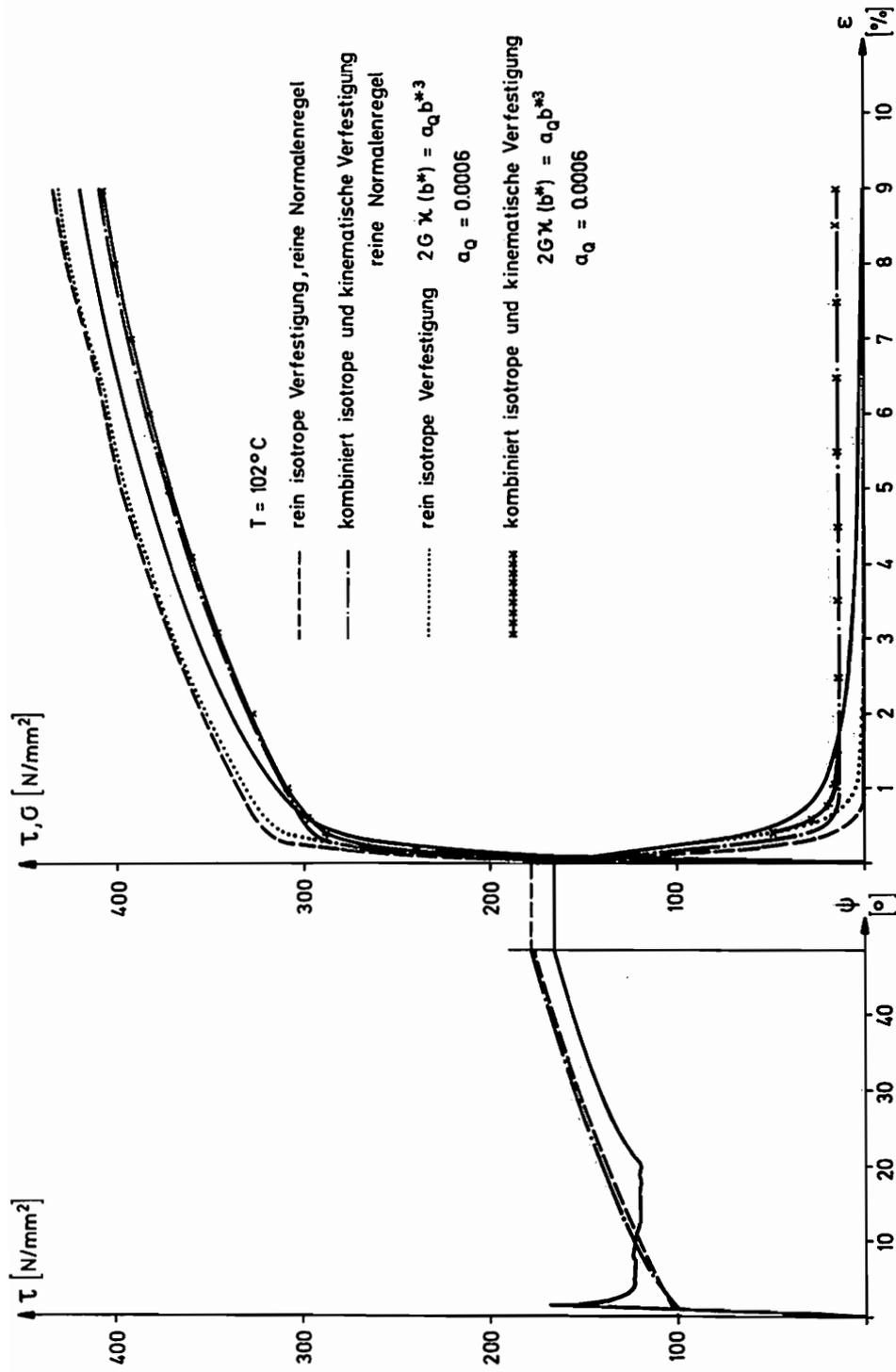


Bild 37: Kombinerter Versuch; Torsion - Zug; Theorie und Experiment

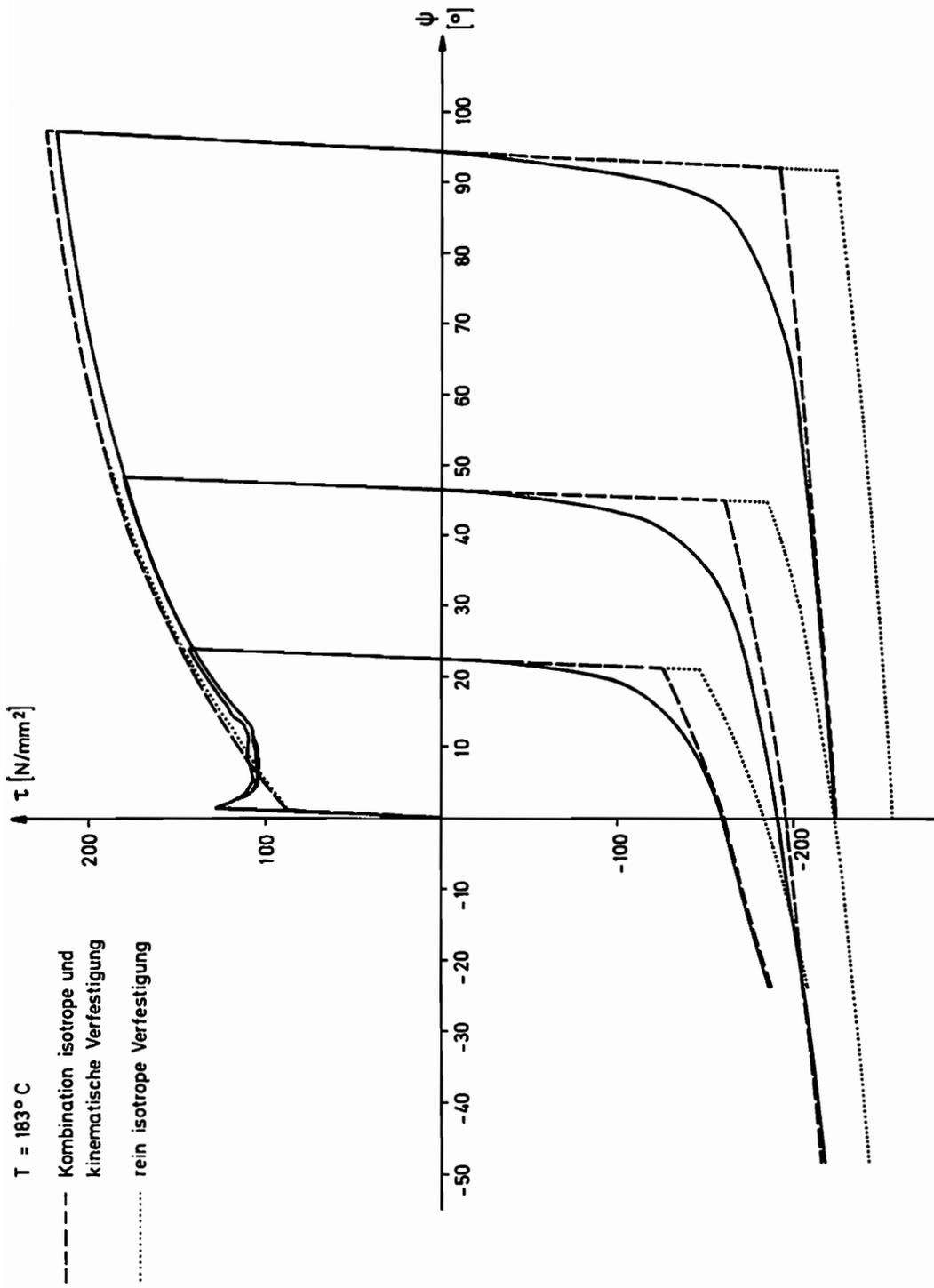


Bild 38: Torsionsversuche mit Belastungsumkehr; Theorie und Experiment

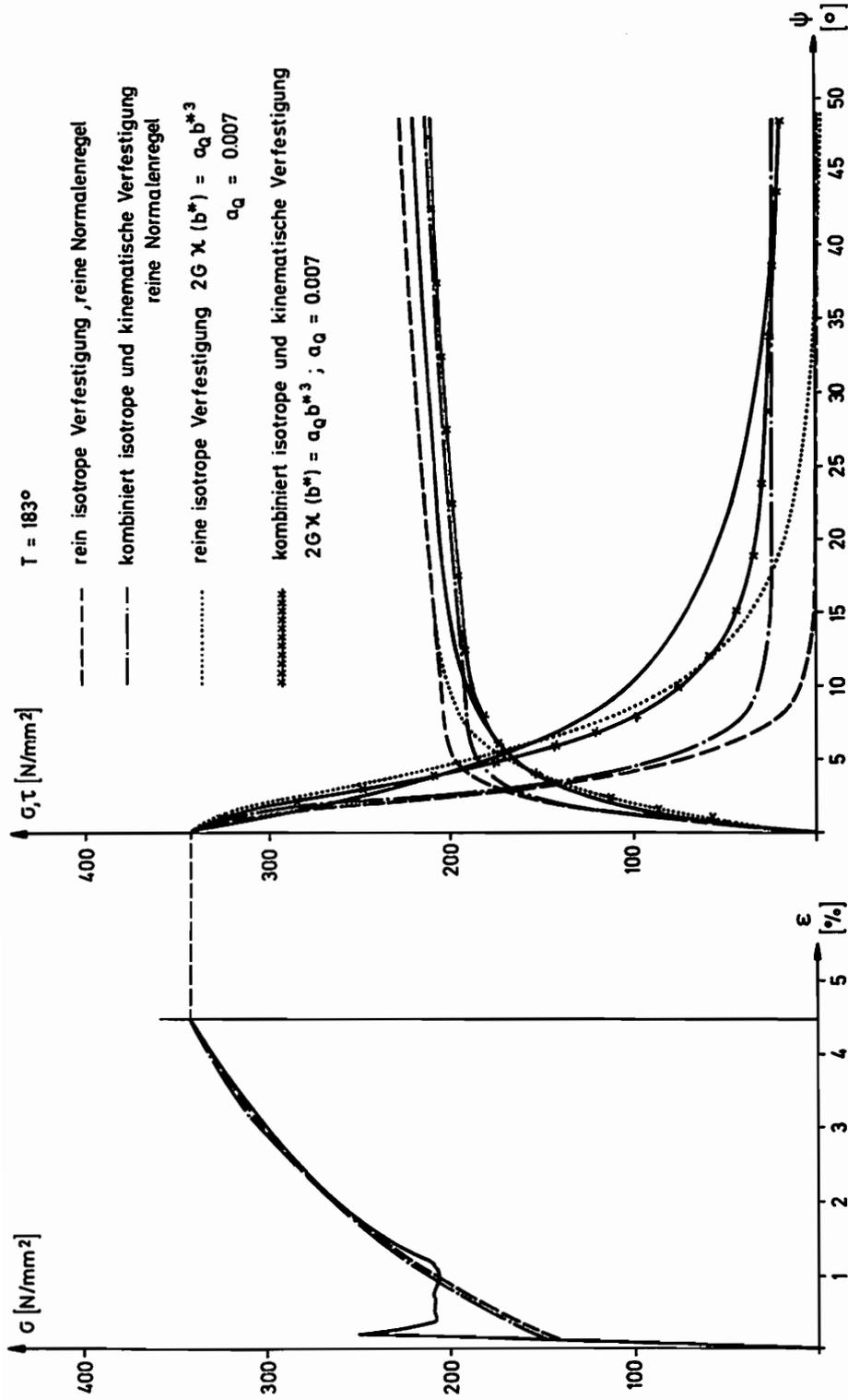


Bild 39: Kombiniertes Zug - Torsionsversuch; Theorie und Experiment

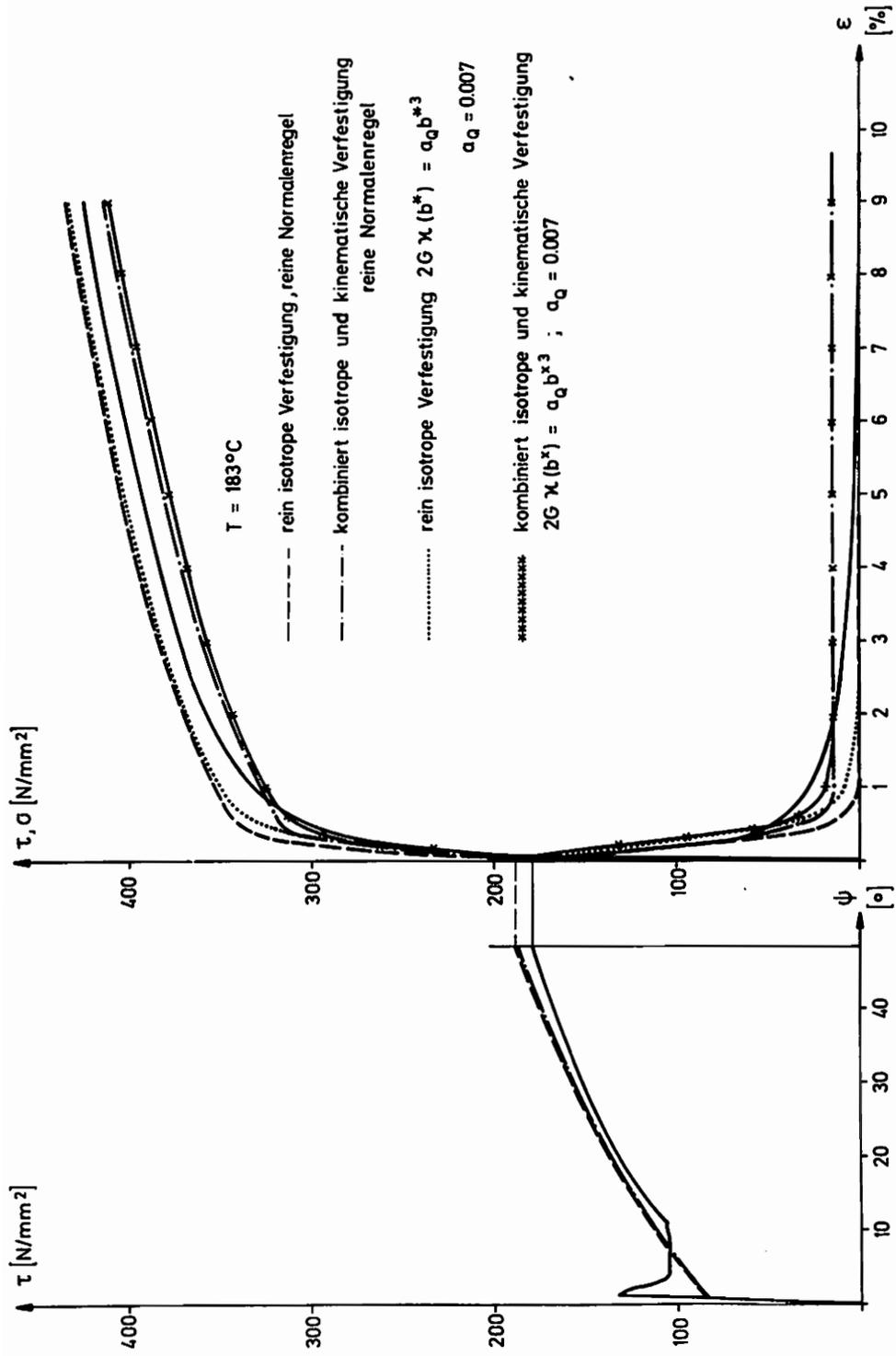


Bild 40: Kombiniertes Versuch; Torsion - Zug; Theorie und Experiment

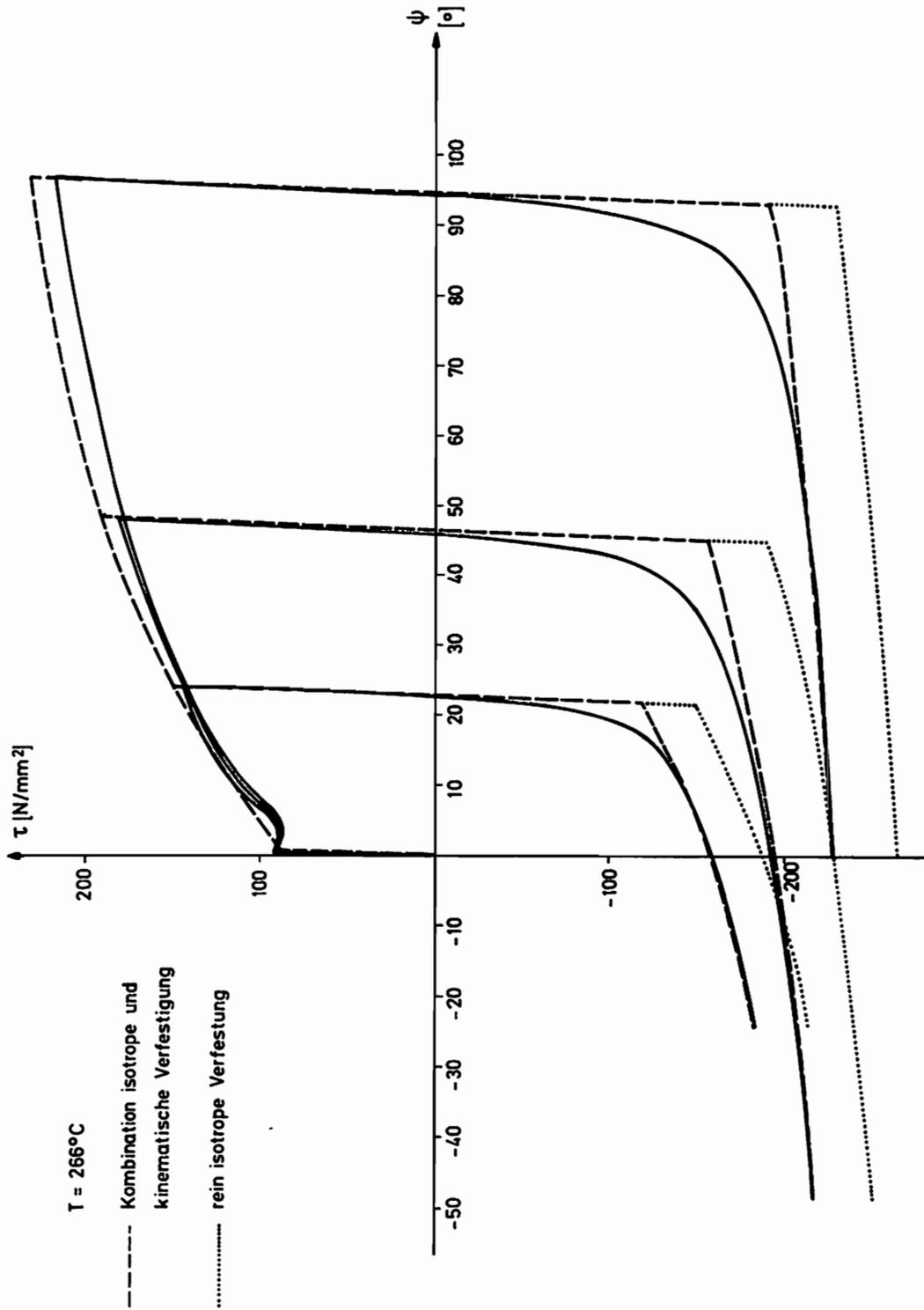


Bild 41: Torsionsversuche mit Belastungsumkehr; Theorie und Experiment

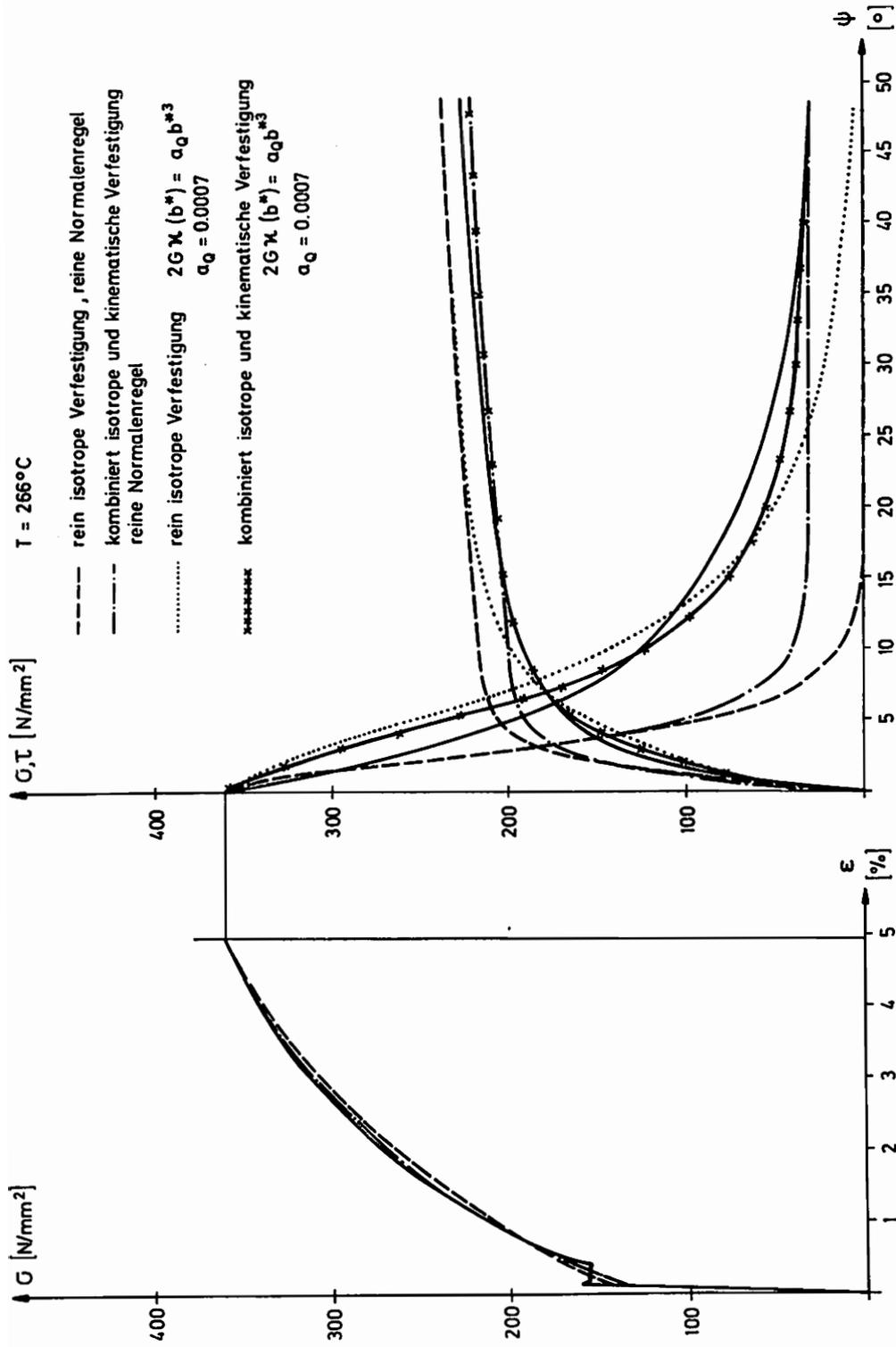


Bild 42: Kombiniertes Zug - Torsion; Theorie und Experiment

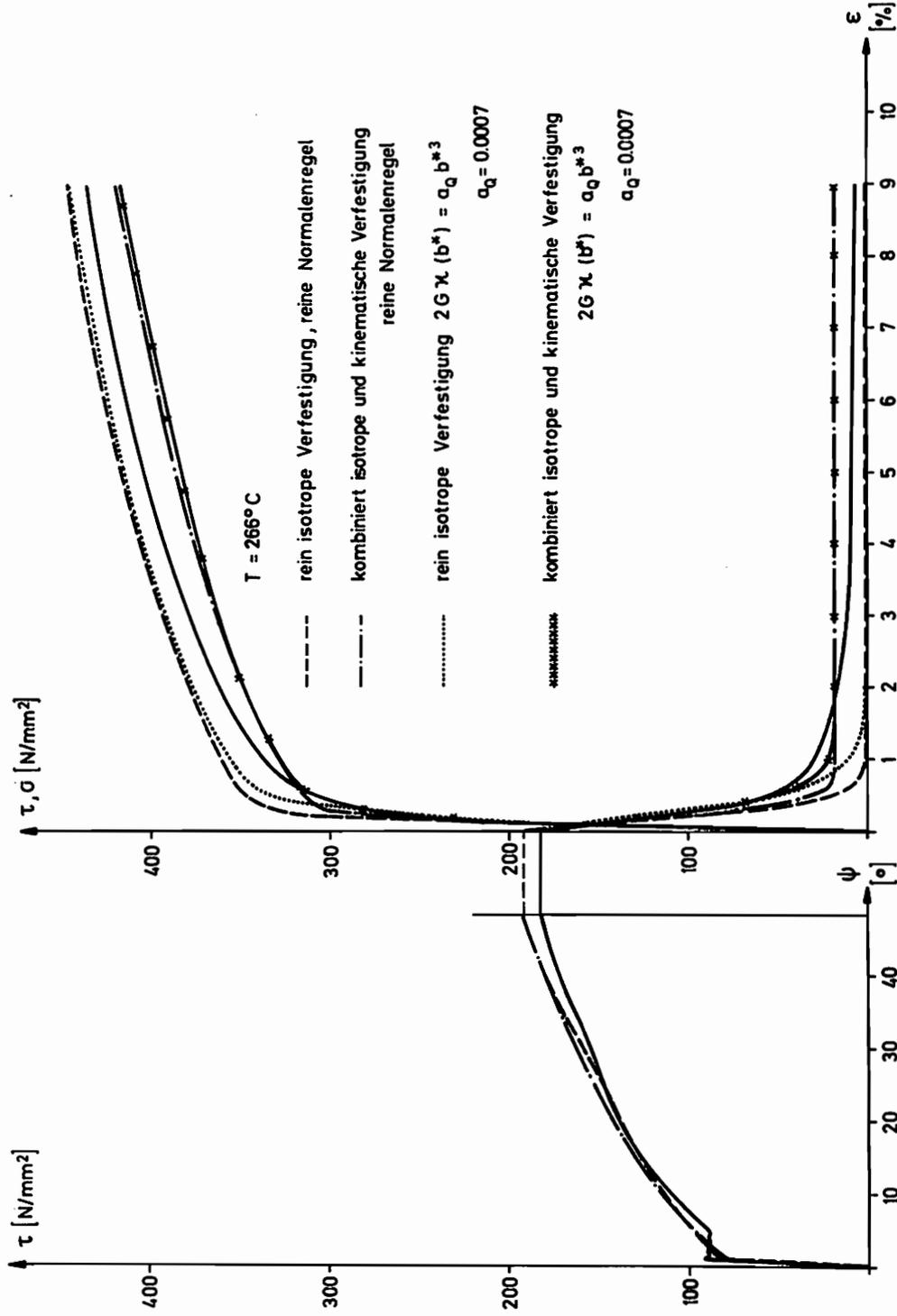


Bild 43: Kombinerter Versuch; Torsion - Zug; Theorie und Experiment

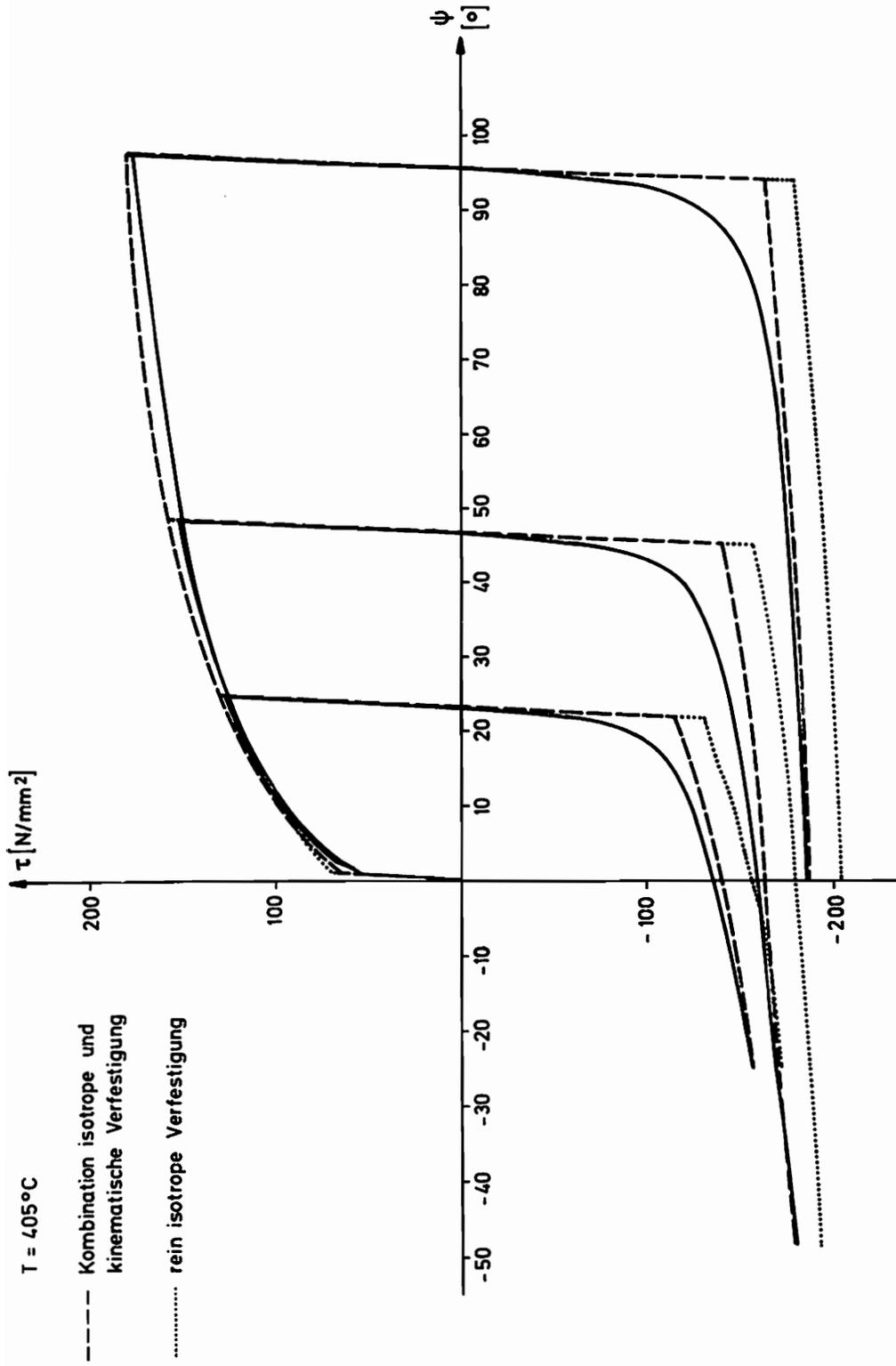


Bild 44: Torsionsversuche mit Belastungsumkehr; Theorie und Experiment

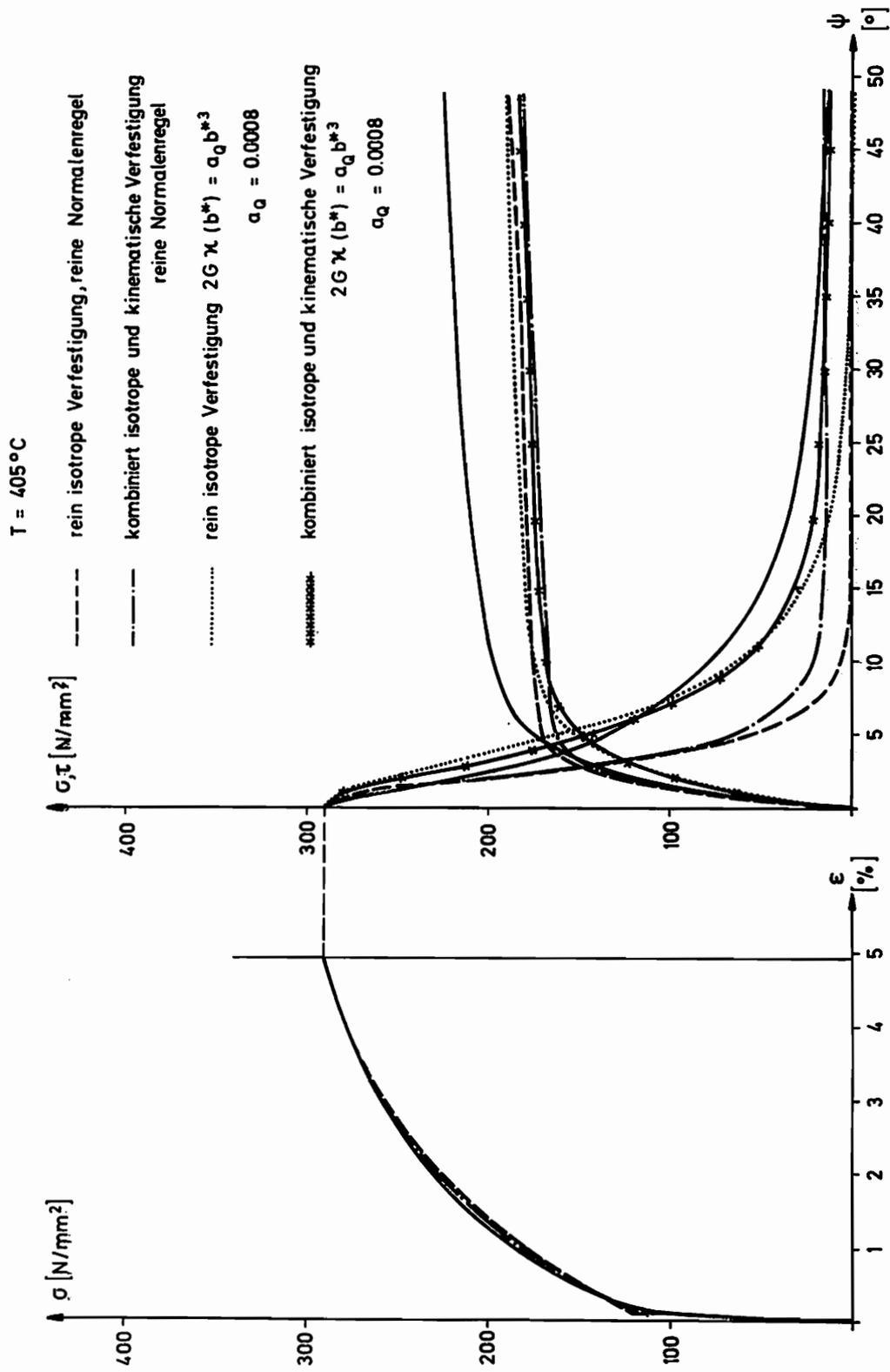


Bild 45: Kombiniertes Zug - Torsionsversuch; Theorie und Experiment

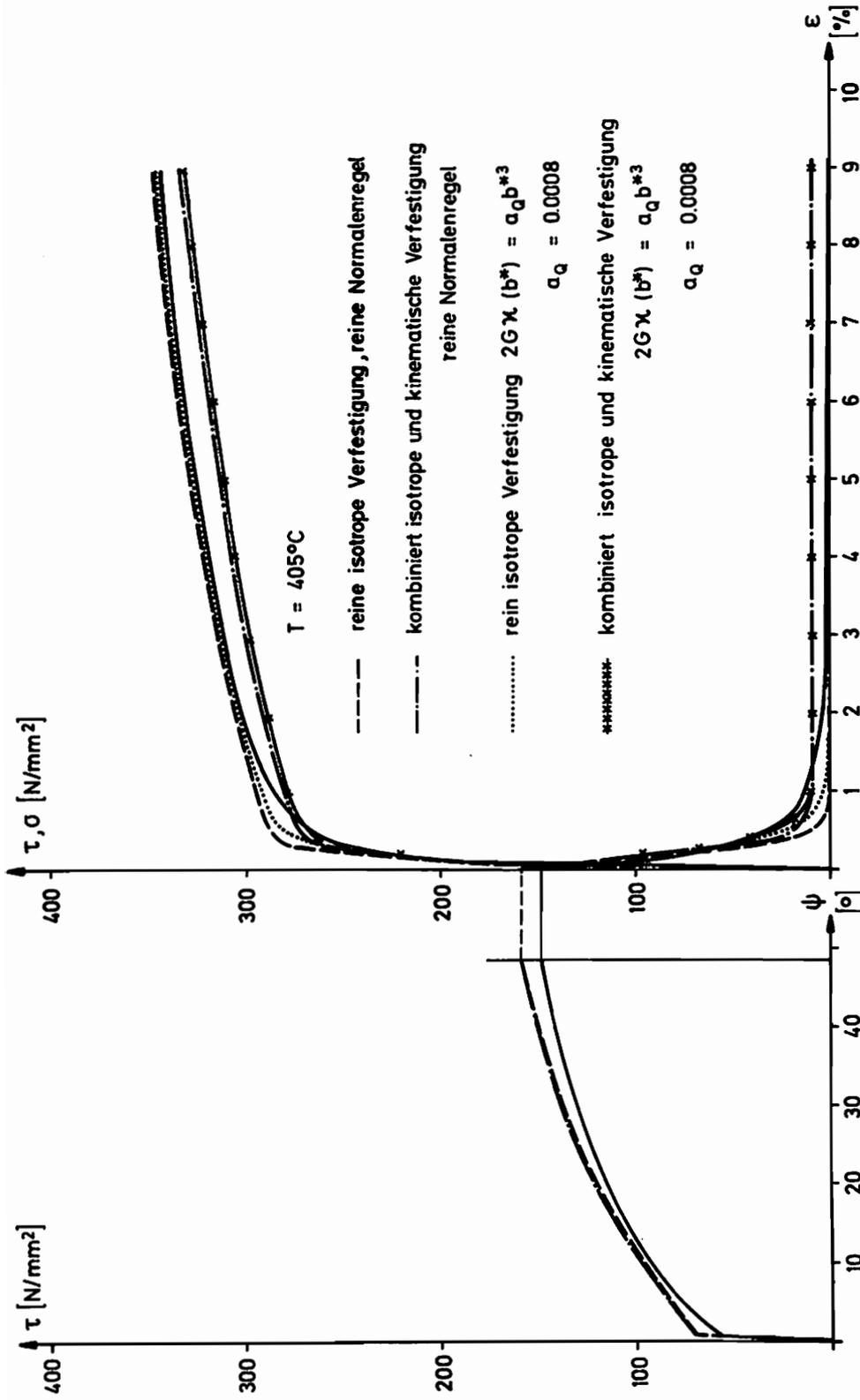


Bild 46: Kombiniertes Versuch; Torsion - Zug; Theorie und Experiment

5.4 Darstellung der aus den isothermen Versuchen ermittelten Parameter

5.4.1 Isotrope Verfestigungsfunktion

Die Ermittlung der Funktion $k^z(b^*, T)$ wurde in Abschnitt 3.7.2 ausführlich beschrieben. Mit den in 5.3.3 getroffenen Voraussetzungen erhält man folgende Werte:

$$k^z = k_0^z + a (1 + b b^* - e^{-c b^*}) ; b^* \leq b_1^*$$

$$k^z = k_\infty^z - (k_\infty^z - k_1^z) e^{-f(b^* - b_1^*)} ; b^* > b_1^*$$

Tabelle 1:

T [°C]	26	102	183	266	405
k_0^z [N ² /mm ⁴]	22480	18653	13197	12548	8880
a [N ² /mm ⁴]	86664	69190	63307	66957	39134
b [mm ² /N]	.0049	.0083	.0111	.0120	.0177
c [mm ² /N]	.0574	.0690	.1280	.1170	.2110
b_1^* [N/mm ²]	80 (22%)	70 (21%)	55 (17%)	55 (16%)	40 (16%)
k_1^z [N ² /mm ⁴]	160000	140000	120000	130000	84000
f [mm ² /N]	.0270	.0490	.1450	.1273	.0838

In Bild 47 ist dieser Funktionsverlauf dargestellt, wobei zwischen den bekannten Kurven graphisch interpoliert wurde. Will man die gesamte Funktion analytisch erfassen, so führt das auf Stetigkeitsprobleme, die durch die abschnittsweise Definition über b^* bedingt sind. Deshalb sind in der Tabelle zu den Gültigkeitsbereichen in Klammern die jeweils entsprechenden plastischen Dehnungen im einachsigen Zugversuch angegeben. Man sieht daran, daß auch bei Verzicht auf die Anschluß-

funktionen ein recht großer Bereich der Zustandsvariablen mit einer Genauigkeit von ca. 1 % abgedeckt werden kann.

Die Temperaturabhängigkeit der Parameter k_0^2 , a, b und c kann hinreichend genau über Polynome 5. Ordnung erfaßt werden, wobei die Koeffizienten numerisch über die Methode der kleinsten Fehlerquadrate optimiert werden können.

$$f(T) = a_0 T^5 + a_1 T^4 + a_2 T^3 + a_3 T^2 + a_4 T + a_5$$

Die optimalen Koeffizienten sind in Tabelle 2 angegeben.

Tabelle 2:

	k_0^2 [N^2/mm^4]	a [N^2/mm^4]	b [mm^2/N]	c [mm^2/N]
a_0	$4.5686 \cdot 10^{-9}$	$6.4125 \cdot 10^{-8}$	$-6.1 \cdot 10^{-15}$	$-4.6922 \cdot 10^{-13}$
a_1	$-8.7801 \cdot 10^{-6}$	$-7.2802 \cdot 10^{-5}$	$8.805 \cdot 10^{-12}$	$6.2075 \cdot 10^{-10}$
a_2	$4.6140 \cdot 10^{-3}$	$2.5768 \cdot 10^{-2}$	$-3.923 \cdot 10^{-9}$	$-2.8635 \cdot 10^{-7}$
a_3	-0.7548	-2.7118	$6.0325 \cdot 10^{-7}$	$5.5091 \cdot 10^{-5}$
a_4	-29.0985	-146.41	$1.146 \cdot 10^{-5}$	$-3.7222 \cdot 10^{-3}$
a_5	24595	91912.4	$4.2424 \cdot 10^{-3}$	0.118

5.4.2 Kinematische Verfestigungsfunktion

Die Evolution des kinematischen Verfestigungsanteils wird über die Funktion $\zeta(b^*, T)$ gesteuert.

$$\zeta(b^*, T) = \alpha (\beta + \gamma e^{-\gamma b^*}) \sqrt{6 k^2}$$

Tabelle 3 enthält die optimierten Koeffizienten.

Tabelle 3:

	α [N/mm ²]	β [mm ² /N]	γ [mm ² /N]
a_0	$2.491 \cdot 10^{-11}$	$1.432 \cdot 10^{-13}$	$1.31 \cdot 10^{-11}$
a_1	$-3.2076 \cdot 10^{-8}$	$1.8152 \cdot 10^{-10}$	$-1.8347 \cdot 10^{-8}$
a_2	$1.4165 \cdot 10^{-5}$	$-8.1807 \cdot 10^{-8}$	$9.2727 \cdot 10^{-6}$
a_3	$-2.5722 \cdot 10^{-3}$	$1.5462 \cdot 10^{-5}$	$-2.0233 \cdot 10^{-3}$
a_4	0.18	$-1.1167 \cdot 10^{-3}$	0.1738
a_5	4.057	$3.3210 \cdot 10^{-2}$	-2.0308

Der Verlauf der Funktion $\zeta(b^*)$ ist bei allen untersuchten Temperaturen prinzipiell gleich (siehe Bild 52). Die Anfangswerte sind recht hoch, fallen aber relativ schnell auf kleine Werte ζ_∞ ab.

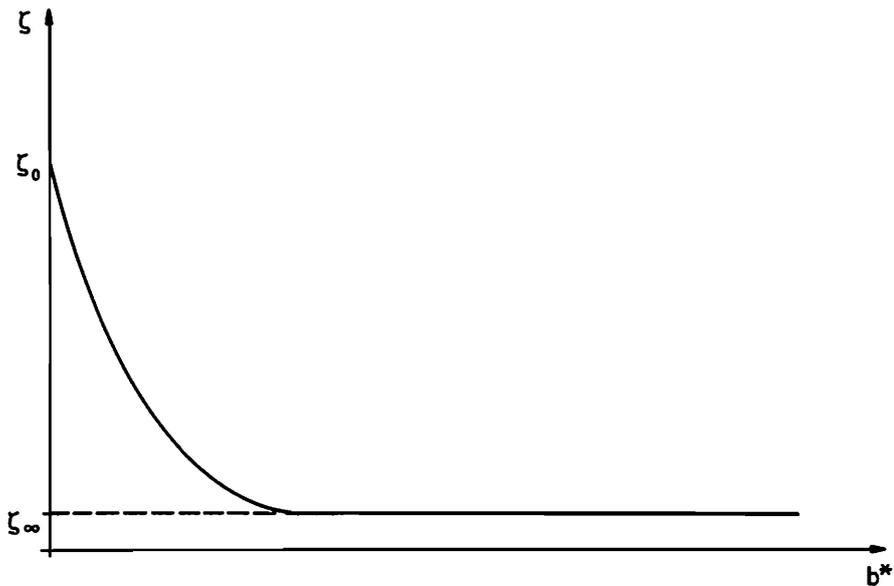


Bild 48: Kinematische Verfestigungsfunktion $\zeta(b^*, T=\text{konst.})$

5.4.3 Abweichungen von der Normalenregel

Von allen für den Parameter $\kappa(b^*)$ getesteten Funktionen brachte der Ansatz

$$\kappa \cdot 2 \cdot G = a_0 \cdot b^{*3}$$

bei allen Temperaturen die besten Ergebnisse. Dabei gilt für die Temperaturfunktion:

$$a_0 = -3.3742 \cdot 10^{-16} T^5 + 4.472 \cdot 10^{-13} T^4 - 1.9763 \cdot 10^{-10} T^3 + 3.2386 \cdot 10^{-8} T^2 - 5.6743 \cdot 10^{-7} T + 4.9341 \cdot 10^{-4} \quad [N/mm^2]^{-3}$$

Die Funktion $\kappa(b^*, T)$ ist in Bild 50 dargestellt.

5.4.4 elastische und thermische Materialkenngrößen

Die Messung der elastischen Materialfunktionen war mit den vorhandenen versuchstechnischen Mitteln nur bei Raumtemperatur möglich. Da die Versuche einen möglichst großen Temperaturbereich abdecken sollten, mußte aber die Temperaturabhängigkeit der elastischen Kenngrößen berücksichtigt werden. Die notwendigen Daten wurden dem MANNESMANN-Forschungsbericht 650/1974 [15] entnommen. Die an unserem Institut vorgenommene E-Modul-Messung bei Raumtemperatur bestätigte recht genau die in [15] angegebenen Werte.

Elastizitätsmodul

$$E = \overset{\circ}{E} \left\{ 1 - c_E \frac{T}{\overset{\circ}{T}} \right\}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{E} &= 216700 \text{ N/mm}^2 \\ c_E &= 8.8 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Gleit-Modul

$$G = \overset{\circ}{G} \left\{ 1 - c_G \frac{T}{\overset{\circ}{T}} \right\}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{G} &= 84000 \text{ N/mm}^2 \\ c_G &= 9.5 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

linearer Wärmeausdehnungskoeffizient

$$\alpha_T = \alpha_T \left\{ 1 + 2.07 \cdot 10^{-2} \frac{T}{T} - 3.33 \cdot 10^{-4} \left(\frac{T}{T} \right)^2 \right\}; \quad T = 11.3 \cdot 10^{-6} \text{ K}$$

Dichte und spezifische Wärmekapazität

$$\rho c_p = \rho \dot{c}_p \left\{ 1 + 2.31 \cdot 10^{-3} \frac{T}{T} + 3 \cdot 10^{-4} \left(\frac{T}{T} \right)^2 \right\}; \quad \rho \dot{c}_p = 3.75 \text{ N/mm}^2 \text{ K}$$

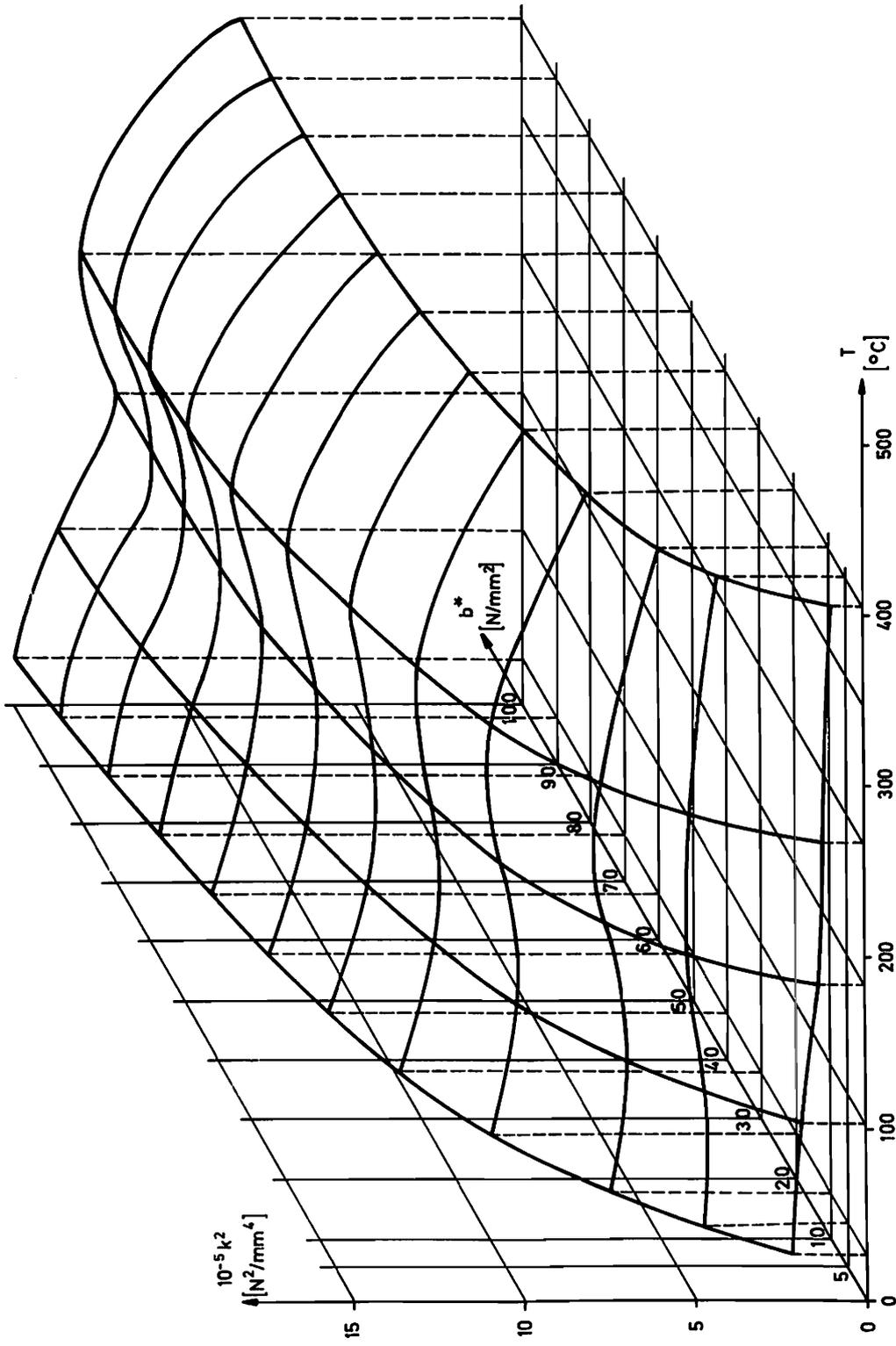


Bild 47: Isotrope Verfestigungsfunktion in Abhängigkeit von den Zustandsvariablen

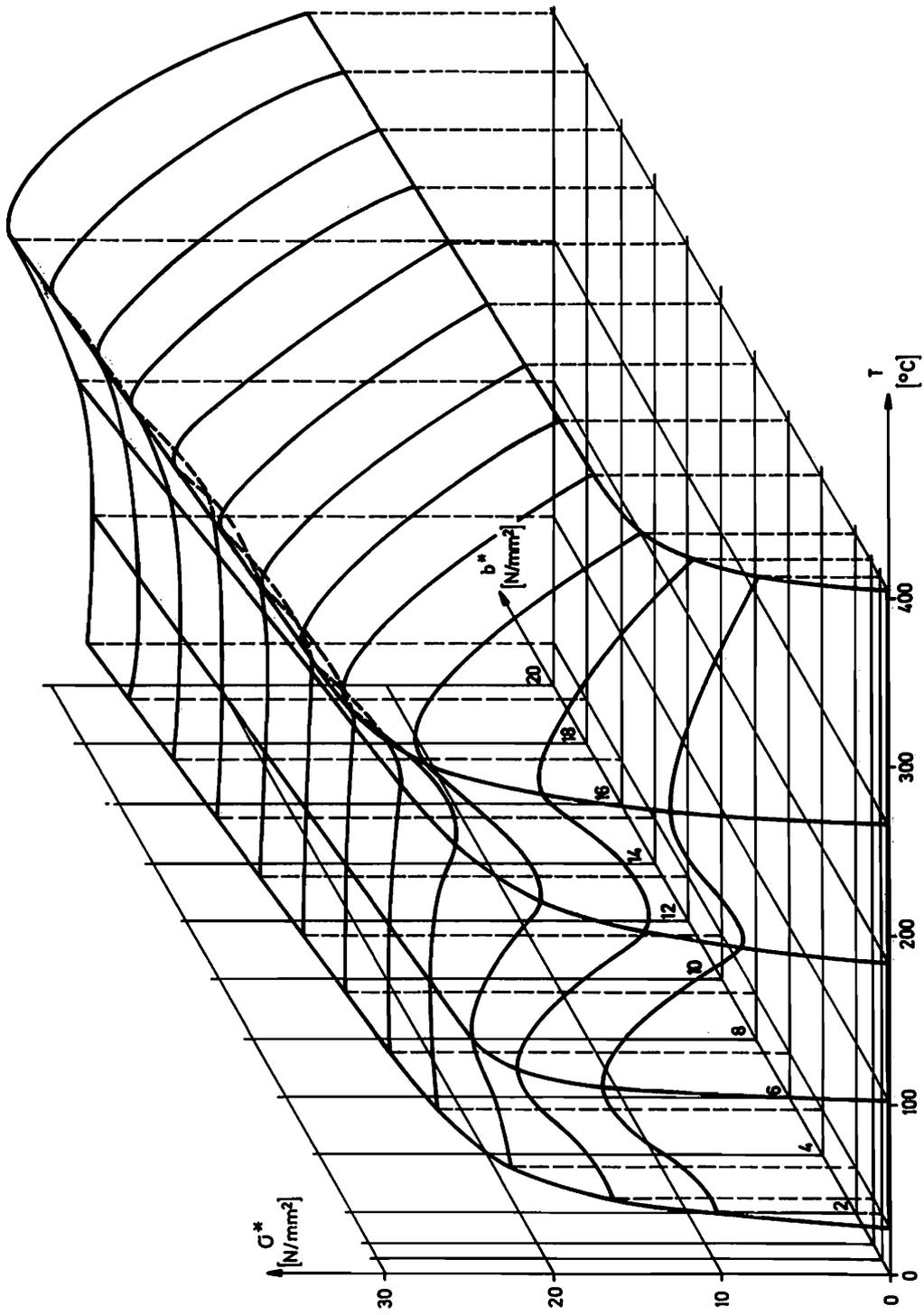


Bild 49: Evolution der kinematischen Verfestigung über den Zustandsvariablen

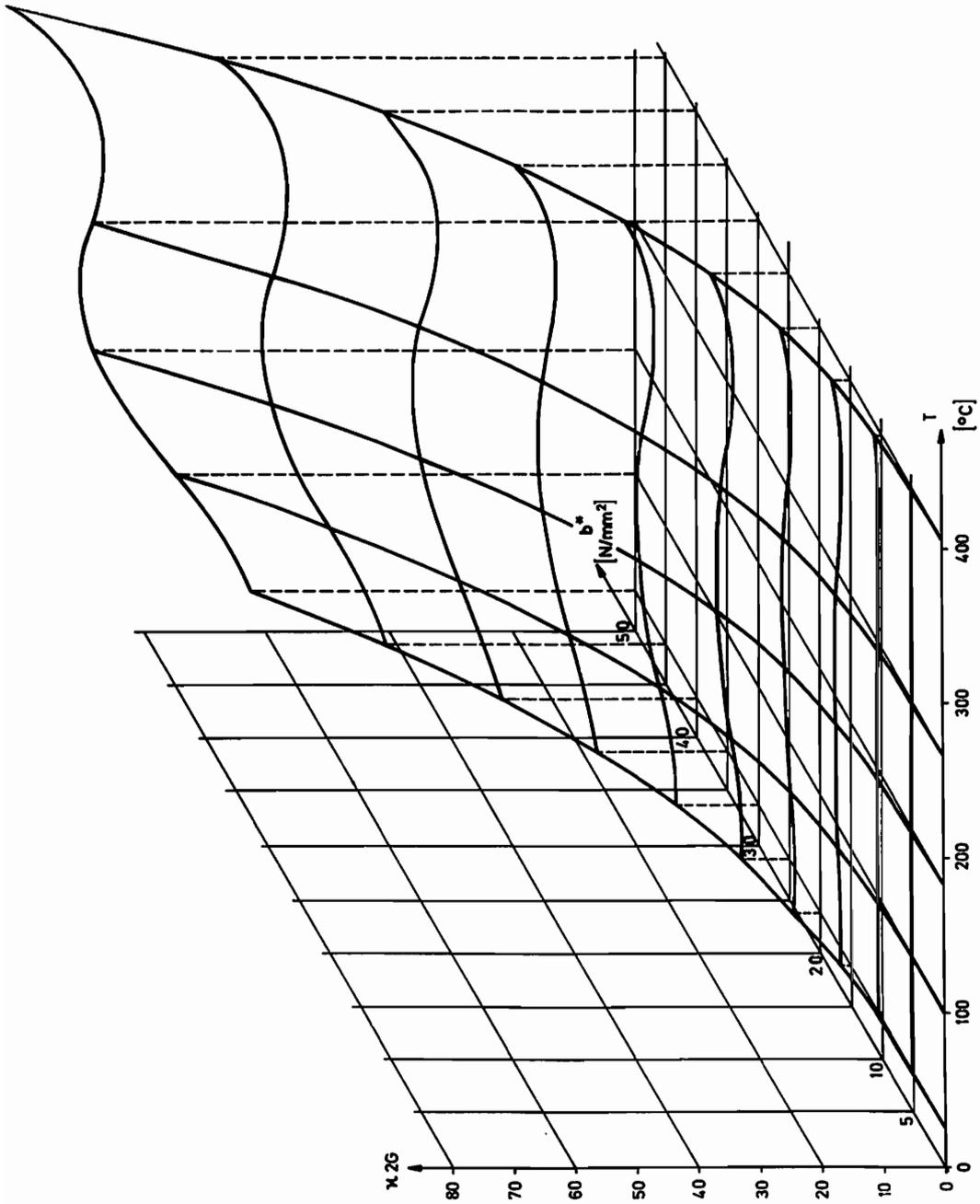


Bild 50: Darstellung der Funktion x in Abhängigkeit von den Zustandsvariablen

5.5 Vergleich zwischen Theorie und Versuch bei adiabaten Prozessen

Mit den aus den isothermen Versuchen ermittelten Materialfunktionen können nun über das Stoffgesetz und die Energiebilanz beliebige Prozesse mit gekoppelten thermischen und mechanischen Einflüssen berechnet werden. Einen Vergleich zwischen Versuch und Rechnung zeigen die Bilder 51 und 52 am Beispiel eines einachsigen adiabaten Zugversuches. Infolge der durch dissipierte Arbeit bedingten Temperaturerhöhung ändern sich die Eigenschaften des Materials. Im Bereich von 26°C bis 100°C wird der Werkstoff bei steigenden Temperaturen weicher, d.h. die gerechnete adiabate Verfestigungskurve liegt zwischen den bei 26°C und bei 102°C gemessenen bzw. gerechneten Zugversuchskurven. Beim Vergleich mit den experimentell ermittelten adiabaten Verfestigungsdaten (Ziehgeschwindigkeit $l = 1.5 \text{ mm/sek}$) stellt man fest, daß diese erheblich höher liegen und zwar ziemlich konstant von Beginn an. Solche Effekte sind typisch für elasto- viscoplastisches Materialverhalten, das wir im Rahmen unserer geschwindigkeitsunabhängigen Theorie nicht erfassen können.

Andererseits erhält man Schwierigkeiten bezüglich der thermischen Voraussetzungen, wenn man niedrigere Verformungsgeschwindigkeiten vorwählt. Bild 52a zeigt die von der Thermovisionskamera aufgezeichneten Temperaturprofile in nicht äquidistanten Zeitabständen. Der Einfluß der Wärmeleitung ist deutlich erkennbar. Da die Einschnürung noch nicht begonnen hat, ist die Deformation nach 23 Sek. theoretisch (unter Vernachlässigung der Wärmeleitung) noch homogen; von gleichmäßiger Temperaturerhöhung kann aber nicht mehr die Rede sein, da der Wärmefluß in die gekühlten Spannköpfe das Temperaturprofil bereits erheblich verfälscht hat. Eine längere Prozeßdauer verstärkt diesen Fehler natürlich und macht eine Berechnung unter Vernachlässigung der Wärmeleitung fragwürdig.

Im Übrigen hängt die Grenze zwischen elastoplastischem und elasto- viscoplastischem Bereich zum einen vom gewählten Material, zum anderen aber auch von der Anfangstemperatur ab. Man muß dann im Einzelfall prüfen, ob beide Forderungen erfüllt werden können. bzw. welchen Fehlereinfluß man tolerieren will.

In Bild 52b ist der Temperaturverlauf über der plastischen Dehnung aufgetragen. Auch hier zeigt sich, daß die adiabate Rechnung im oberen

Dehnungsbereich zu niedrige Werte liefert, wobei der Fehler wiederum auf die viskosen Effekte zurückzuführen ist. Eine analytische Näherungsrechnung mit $\xi = 0$ und der direkt aus den adiabaten Versuchsdaten bestimmten Funktion $w_{p1}(\epsilon_{p1})$ liefert nämlich erheblich bessere Daten, da nunmehr die viskosen Anteile zumindest näherungsweise berücksichtigt werden.

Im unteren Dehnungsbereich ist das Verhalten genau umgekehrt, die gemessenen Temperaturen sind niedriger als die gerechneten. Die Ursachen dafür können verschieden sein:

- Einfluß der Wärmeleitung
- Vernachlässigung des thermoelastischen Kopplungsgliedes in der Energiebilanz.

Auffällig ist auch, daß im Bereich der LÜDERS- Bänder (inhomogene Deformationsphase zu Beginn der plastischen Verformung) keine Temperaturerhöhungen registriert werden können.

Bei der numerischen Rechnung mit dem Integrationsprogramm wurde die Materialkonstante a_T mit:

$$a_T = 3 \cdot 10^{-4} \text{ mm}^2/\text{N}$$

vorgewählt.

Das bedeutet, daß zu Beginn des Prozesses ($\epsilon_{p1} = 0$) zunächst nur ca. 5 % . für $\epsilon_{p1} = 1$ % etwa 88 % und für $\epsilon_{p1} = 2$ % ca. 97 % der plastischen Arbeit in Wärme dissipiert werden.

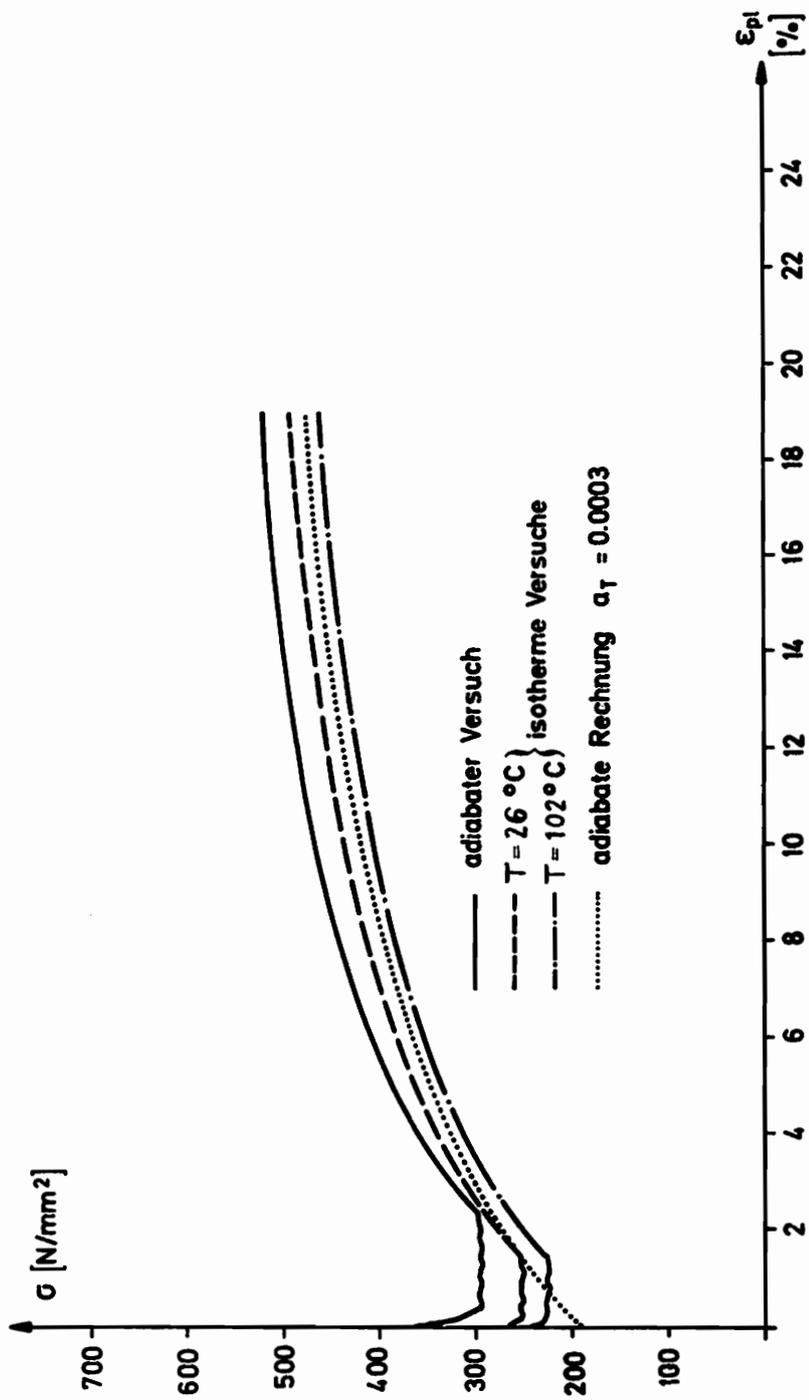


Bild 51: Adiabater Zugversuch im Vergleich mit isothermen Daten und der Theorie

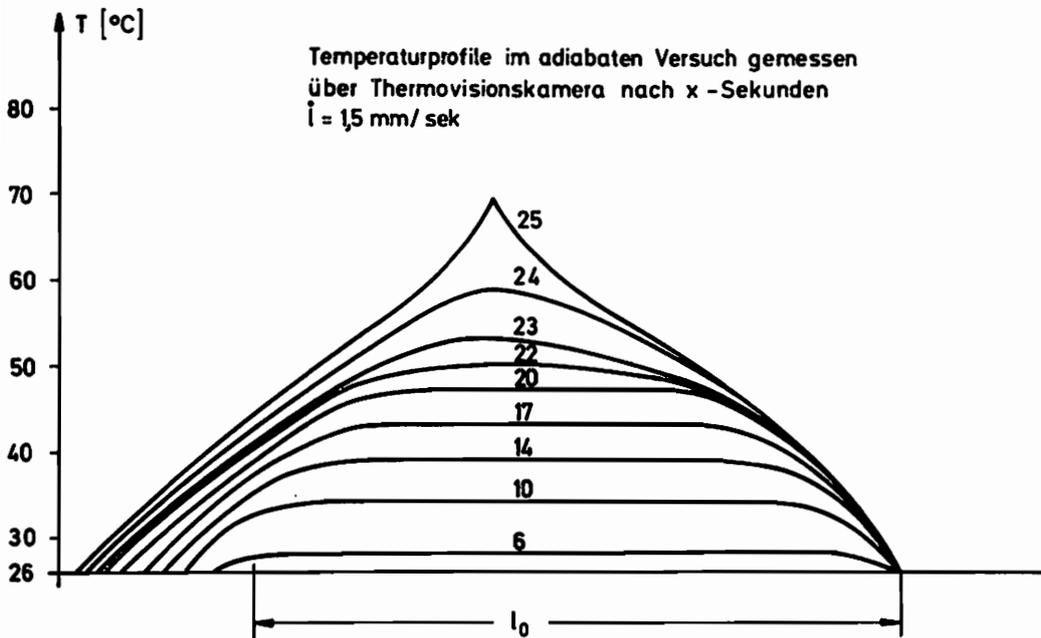


Bild 52a: Adiabater Zugversuch; Temperaturprofile

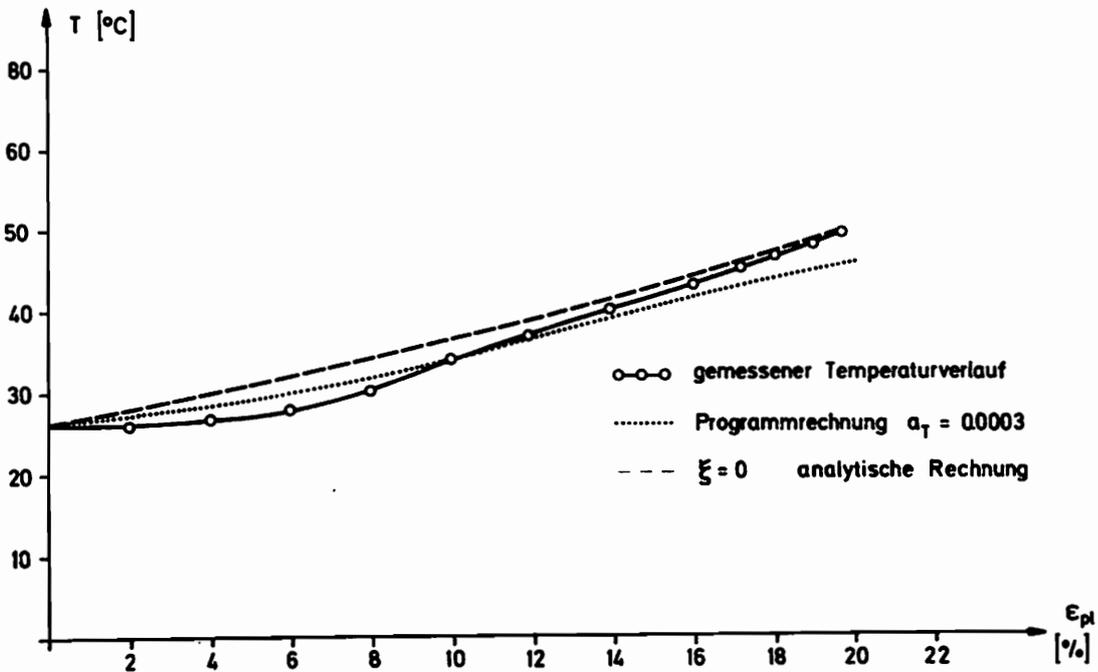


Bild 52b: Adiabater Zugversuch: Temperaturverlauf über ε_{pl}

5.6 Berechnung von Prozessen mit äußerer thermischer Belastung

Versuche dieses Typs sind besonders gut geeignet, die Brauchbarkeit der erarbeiteten Ansätze speziell im Hinblick auf thermodynamische Gesichtspunkte zu überprüfen. Leider war die Durchführung der geplanten Experimente aus mehreren versuchstechnischen Gründen nicht möglich:

- Da in der Energiebilanz die Wärmezufuhr formal durch \dot{T}_A ausgedrückt wurde, muß die von außen erzwungene Temperaturänderung zumindest näherungsweise homogen über der Probenlänge erfolgen. Diese Forderung konnte durch die relativ einfache 3-Zonen Regelung des Klappofens nicht erfüllt werden.
- Bedingt durch die geringe Leistungsfähigkeit des Ofens (unter Vollast waren zeitliche Temperaturänderungen von maximal 0.03°C pro Sekunde möglich) wird bei zyklischen Temperaturbelastungen über den interessierenden Temperaturbereichen die Versuchszeitdauer zu groß. Man muß dann mit Fehlereinflüssen rechnen, die einerseits auf die Unzulänglichkeiten der Maschinenelektronik (Nullpunktsdrift) zurückzuführen sind, andererseits aber auch durch Spannungsrelaxationen bzw. einsetzende Kriechprozesse (Kurzzeit- Kriechen und Langzeit- Kriechen) bedingt sein können.

Trotzdem sollte auf die numerische Berechnung derartiger Prozesse nicht verzichtet werden, weil anhand solcher Belastungsfälle besonders gut die Arbeitsweise des Differentialgleichungssystems unter dem Aspekt der Kopplung der konstitutiven Gleichungen mit der Energiebilanz verdeutlicht werden kann.

Zu diesem Zweck wurden zwei unterschiedliche Prozesse berechnet, dargestellt in den Bildern 53a und 53b.

- 1.) adiabater einachsiger Zugversuch: $\varepsilon_{\max} = 10 \%$
 $\dot{T} = 26^\circ\text{C}$
zyklische Temperaturbelastung bei 4 Zyklen
festgehaltener Dehnung : $\dot{T} = 0.2^\circ\text{C}/\text{sek}$
 $\Delta T = 400^\circ\text{C}$

2.) adiabater einachsiger Zugversuch: $\epsilon_{max} = 10 \%$
 $\dot{T} = 380^\circ\text{C}$
zyklische Temperaturbelastung bei 4 Zyklen
festgehaltener Dehnung : $\dot{T} = -0.2^\circ\text{C}/\text{sek}$
 $\Delta T = 360^\circ\text{C}$

In den entsprechenden Bildern ist neben dem Verhalten der Spannung selber auch das der Zustandsvariablen b^* und T , sowie die daraus resultierenden Änderungen der Ellipsenhalbachsen dargestellt. Dabei ist das elastische Materialverhalten ($b^* = \text{konst.}$ bzw. $\dot{b}^* = 0$) ausschließlich durch die Wärmespannungen im hypoelastischen Stoffgesetz bestimmt, während nach Erreichen der Plastizitätsgrenze eine Überlagerung der Wärmespannungen mit den Einflüssen der Ellipsenhalbachsen stattfindet. Das geringe Anwachsen der Zustandsvariablen b^* bei den plastischen Prozeßanteilen führt zu einer leichten Akkumulation der maximalen Spannungen bei steigender Zyklenzahl.

Allerdings sei noch einmal darauf hingewiesen, daß diese Daten reine Rechenergebnisse darstellen, die die Arbeitsweise des Stoffgesetzes unter thermischer Belastung verdeutlichen sollen. Die Übertragbarkeit dieser Ergebnisse auf reale Prozesse ist demgemäß nur mit der entsprechenden Vorsicht möglich.

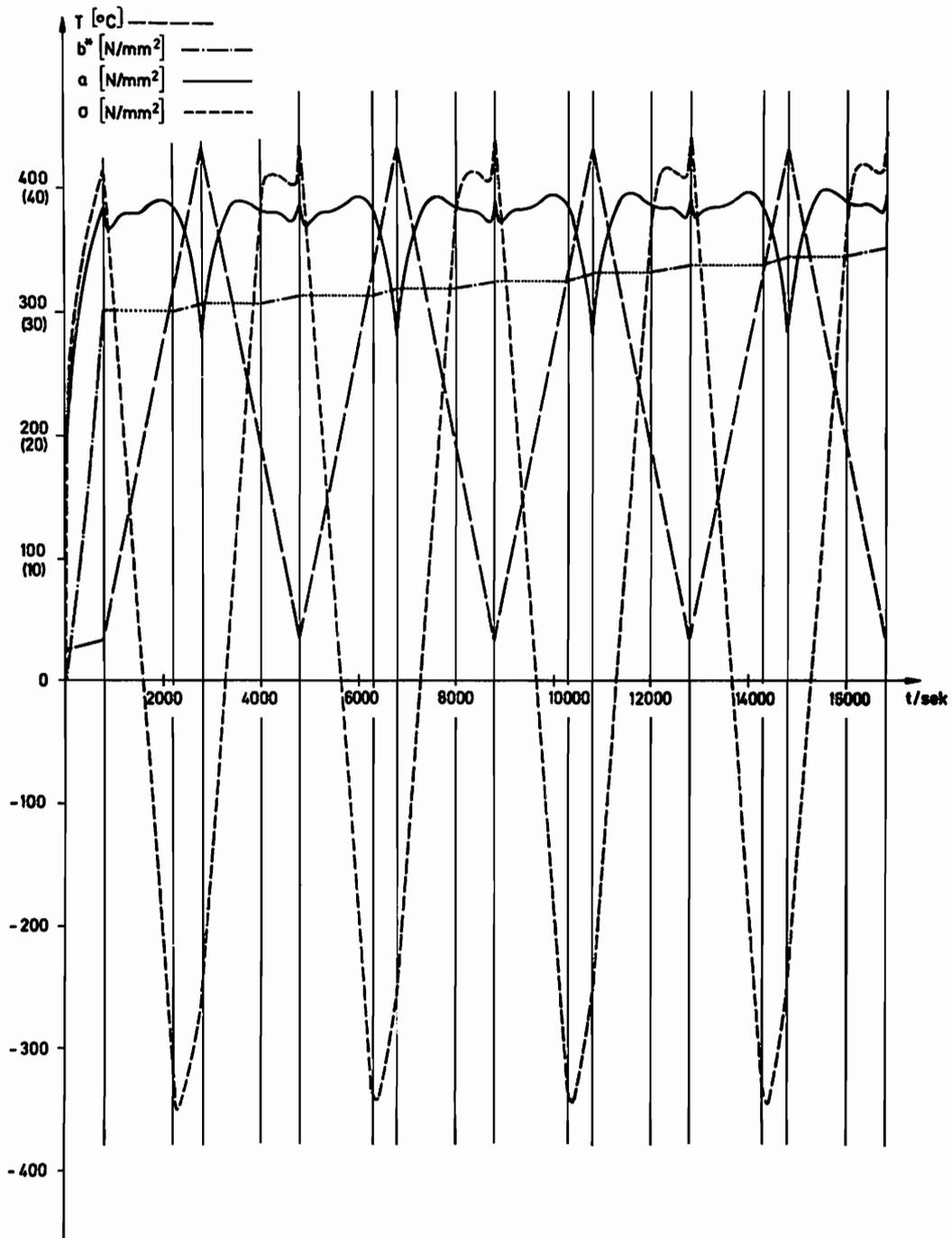


Bild 53a: Einachsiger Zugversuch mit äußerer zyklischer Temperaturbelastung

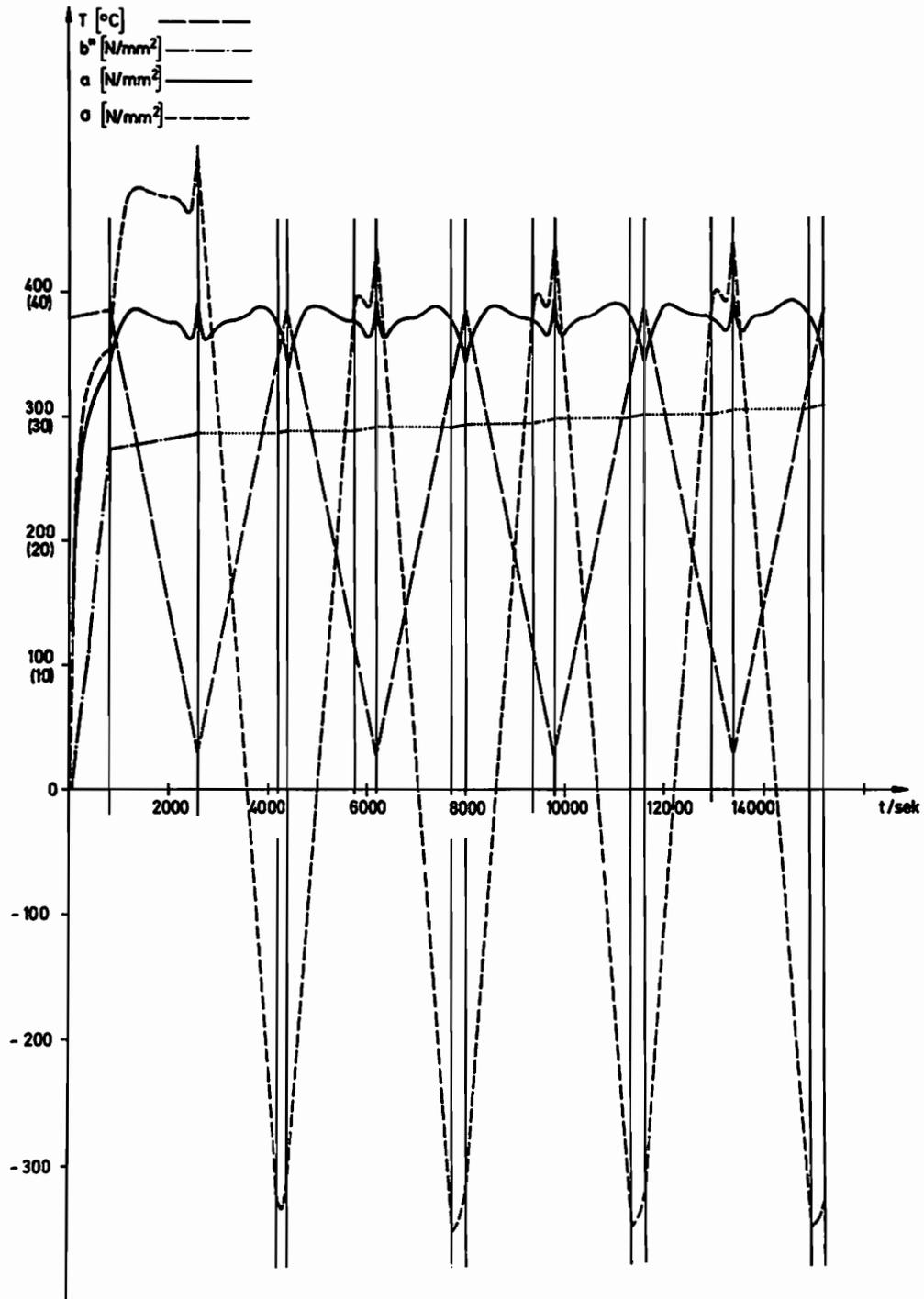


Bild 53b: Einachsiger Zugversuch mit äußerer zyklischer Temperaturbelastung

5.7 Zusammenfassende Kritik am konstitutiven Gesetz

Die Ausführungen in den Kapiteln 5.3 und 5.5 enthalten einen detaillierten Vergleich zwischen den experimentell ermittelten und den über die in den Abschnitten 2 und 3 vorgestellte Theorie berechneten Daten. Es wurde gezeigt, daß die im Rahmen des Stoffgesetzes erweiterte Theorie, die Kombinationen von isotroper und kinematischer Verfestigung und Abweichungen von der Normalenregel zuläßt, erhebliche Verbesserungen gegenüber der klassischen Theorie bringt.

Die experimentelle Ermittlung der für die Steuerung der konstitutiven Gleichungen verantwortlichen Parameter wurde in Kapitel 3 ausführlich behandelt, die entsprechenden Daten für Ck 15 sind in Abschnitt 5.4 angegeben.

Diese Daten bilden mit der dazugehörigen Theorie eine gute Grundlage zur Berechnung allgemeiner, isothermer und nichtisothermer Formänderungsvorgängen, wobei allerdings die Behandlung der nichtisothermen Prozesse die Berücksichtigung der Wärmeleitung durch entsprechende komplexe numerische Berechnungsverfahren (z.B. Finite Elemente) voraussetzt. Die erzielten Übereinstimmungen zwischen Theorie und Experiment sind in den meisten Fällen zufriedenstellend, insbesondere werden die Spannungsumlagerungen bei komplexen Belastungsvorgängen recht gut erfaßt.

Die auch im Rahmen der erweiterten Theorie noch verbliebenen Schwachstellen sind an den entsprechenden Stellen aufgezeigt und auf ihre Ursachen untersucht worden. Die gravierendste Fehlerquelle bildet dabei der Ansatz (2.4.16), der für die Evolution des kinematischen Verfestigungsanteils verantwortlich ist. Dieser erweist sich insbesondere bei der Behandlung von zyklischen Prozessen mit mehreren Belastungswechseln (siehe Kapitel 5.3.3) als unzureichend. Da dieser Aspekt ziemlich wichtig ist und zudem der Ansatz (2.4.16) in der vereinfachten Form (2.4.38) in der Literatur häufig Verwendung findet, soll die Problematik dieses Evolutionsgesetzes noch einmal genauer durchleuchtet werden.

$$\overset{\nabla}{\underset{\approx}{\mathbb{B}}} = \zeta \underset{\approx}{\mathbb{D}}_{pl} \quad (2.4.38)$$

In [16] verwendet LÜCKE diesen Ansatz bei der Berechnung von zykli-

schen elasto- plastischen Blechbiegungsproblemen, allerdings wird die Funktion ξ als konstant angenommen. Wenn man das tut, erhält man im einachsigen Zugversuch einen proportionalen Zusammenhang zwischen der Mittelpunktsverschiebung der Fließellipse und der plastischen Dehnung

$$\sigma^* \sim \varepsilon_{pl} = \frac{3}{2} c \varepsilon_{pl} \quad (5.7.1)$$

und zwar sowohl für positive, als auch für negative Belastungsrichtung. Man kann nun c so bestimmen, daß ein einzelner zyklischer Versuch mit spezieller Dehnungsamplitude recht gut angenähert wird. muß dabei allerdings annehmen, daß mit zunehmendem Prozeß die Ellipsenhalbachsen kleiner werden können. Außerdem muß die Materialkonstante c für jeden Versuch mit anderer Dehnungsamplitude neu angepaßt werden, was im Rahmen einer möglichst allgemeingültigen Theorie nicht zufriedenstellen kann. Versucht man nun, eine von der Vorgeschichte abhängiges ξ - etwa als Funktion der skalaren Variablen b^* - zu definieren, so führt die Ermittlung dieser Abhängigkeit auf das von SCHOLTES vorgeschlagene oder ein im Prinzip ähnliches Verfahren. Man erhält dann den in Bild 48 dargestellten prinzipiellen Verlauf für $\xi(b^*)$.

Die Verwendung dieser Funktion zur Berechnung zyklischer Verformungen führt nun aber auf völlig anders geartete Schwierigkeiten, von denen ein Aspekt bereits in Kapitel 5.3.3 aufgegriffen wurde. Viel gravierender als dieser ist aber, daß die Verschiebungen des Ellipsenmittelpunktes nach dem Belastungswechsel nicht richtig beschrieben werden. Im Rahmen unserer Theorie ist die Zustandsvariable b^* auch nach Umkehr der Belastung eine monoton wachsende Funktion. Da ξ für anwachsendes b^* ziemlich rasch relativ kleine Werte annimmt, treten nach einiger Zeit kaum noch Verschiebungen des Ellipsenmittelpunktes auf, da das Inkrement der tensoriellen Variablen B viel zu klein wird. Die Auswirkungen dieses Effektes sind in den Bildern 54a und 54b deutlich zu erkennen. Wir erhalten zwar nach den ersten Belastungswechseln gute Übereinstimmungen zwischen Versuch und Theorie - die Verfestigungsfunktion wurde ja auch aus den ersten Belastungswechseln bestimmt - bei erneuter Wiederbelastung in gleicher Richtung sind aber die von der Theorie vorhergesagten erneuten Fließspannungen viel zu hoch. Der Grund dafür ist in der falschen Lage des Mittelpunktes der Fließ-

ellipse zu suchen. In Bild 59 ist das Verhalten des kinematischen Verfestigungsanteils bei zyklischen Prozessen dargestellt, wobei der optimale Verlauf derjenige ist, der zu den geringsten Abweichungen zwischen Theorie und Experiment führen würde. Die entsprechenden Annahmen, die zu einem derartigen Verlauf führen, sind in Kapitel 6 näher beschrieben.

Eine weitere Möglichkeit, den Parameter ζ von der Belastungsvorgeschichte abhängig zu machen, besteht darin, ζ als Funktion einer Invarianten der tensoriellen Zustandsvariablen \underline{B} zu definieren, etwa in der Form:

$$\zeta = \zeta(B) \quad ; \quad B = Sp(\underline{P}^2) \quad (5.7.2)$$

Diese Vorgehensweise wäre ebenfalls mit der Energiebilanz consistent, allerdings ergeben sich daraus etwas andere Schlußfolgerungen bezüglich der Materialparameter.

Es ist zudem fraglich, ob dieser Weg erfolgversprechender ist. Schon einfache Überlegungen zeigen, daß der Ansatz (5.7.2) das Verfestigungsverhalten nach einer Belastungsumkehr nicht zutreffend erfaßt.

In den letzten Jahren ist der Ansatz (2.4.38) in einigen Veröffentlichungen unter einem ganz anderen Gesichtspunkt diskutiert worden. Dazu haben u.a. LEE, MALLETT und WERTHEIMER in [43] und [47], sowie DAFALIAS in [46], PAULUN und PECHERSKI in [45] und MOSS in [48] das Problem der einfachen Scherung bei rein kinematischer Verfestigung näher untersucht. Ansatzpunkte dieser Arbeiten bilden dabei die Schlußfolgerungen, die sich aus der Anwendung der objektiven Zeitableitung nach ZAREMBA - JAUMANN ergeben.

Diese Zeitableitung soll bekanntlich die Objektivität (Invarianz gegenüber Starrkörperrotationen) gewährleisten. Sie wird in ihrer konventionellen Form (siehe (2.2.7) bzw. (2.2.9)) über den in (2.1.9) festgelegten Spin- Tensor \underline{W} definiert, wobei \underline{W} der mittleren Drehgeschwindigkeit materieller Linienelemente entspricht. Bei Anwendung auf den Tensor \underline{B} , der den kinematischen Verfestigungsanteil beschreibt, erhält man für monoton wachsende große Scherwinkel $\gamma > 2.5$ sinusförmig oszillierende Schubspannungen. Da ein solches Verhalten

physikalisch wenig sinnvoll erscheint, verwenden die oben genannten Autoren modifizierte objektive Zeitableitungen, die über entsprechend variierte Spin- Tensoren definiert werden. Dadurch wird zwar eine nicht- oszillierende Lösung des einfachen Scherproblems erreicht, allerdings beruhen die entsprechenden numerischen Rechnungen auf stark vereinfachenden Annahmen (starr- plastisches Verhalten und lineare, rein kinematische Verfestigung in [43]. [45] und [46] sowie lineare, rein kinematische Verfestigung in [47]).

Das Problem der oszillierenden Spannungen im einfachen Scherversuch ist zudem nicht prinzipiell durch die Evolution des kinematischen Verfestigungsanteils bedingt. Wie DIENES in [44] gezeigt hat, führt auch die Verwendung eines hypo- elastischen Stoffgesetzes auf sinusförmige Spannungsverläufe, die dann durch die JAUMANN- Ableitung des CAUCHY- Spannungstensors erzeugt werden. Zur Lösung dieses Problems führt auch DIENES eine modifizierte objektive Zeitableitung ein, die auf einer anderen Definition des Spin- Tensors basiert. Allerdings weist er ausdrücklich darauf hin. daß für Scherwinkel $\gamma < 0.4$ die konventionelle Zeitableitung nach ZAREMBA- JAUMANN nahezu exakte Werte liefert, ein Ergebnis, das auch alle anderen Autoren bestätigen.

Deshalb spielen solche Überlegungen im Rahmen dieser Arbeit keine Rolle. da ein Scherwinkel von $\gamma = 0.4$ bei der hier verwendeten Proben- geometrie einen Gesamtverdrehwinkel von $\psi > 360^\circ$ entsprechen würde.

Die Problematik des Ansatzes (2.4.38) ist also bei kleinen und mittleren Verformungen weniger durch die Definition der objektiven Zeitableitung, als vielmehr durch das Verhalten der skalaren Zustandsvariablen b^* bei zyklischen Prozessen bedingt.

Zudem gelten die in dieser Arbeit aufgezeigten unbefriedigenden Aspekte auch für zyklische Zug- Druck- Versuche, bei denen die Deformation a priori frei von Starrkörperrotationen erfolgt.

Deshalb wird im folgenden Kapitel der Versuch unternommen, den Ansatz (2.4.38) direkt in geeigneter Form zu erweitern.

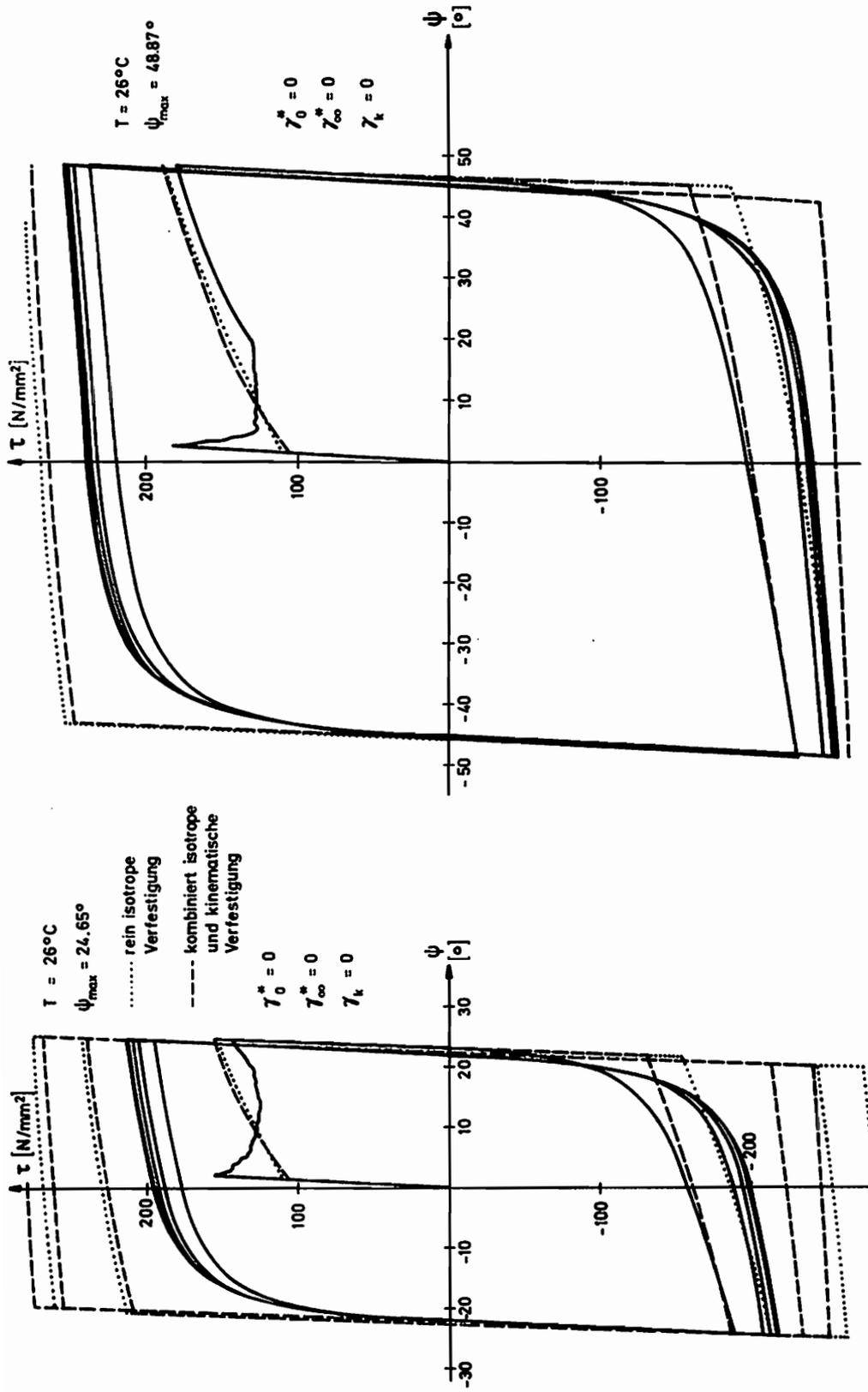


Bild 54: Zyklische Torsionsversuche ; Ansatz (2.4.38)

6. Erweiterter Ansatz zur Beschreibung des kinematischen Verfestigungsverhaltens

6.1 Vorbemerkungen

Beim Vergleich zwischen den experimentellen Daten und den entsprechenden theoretischen Ansätzen weisen viele Anzeichen, sowohl bei zyklischen Prozessen als auch bei kombinierten Belastungsvorgängen, darauf hin, daß der kinematische Verfestigungsanteil überproportional schnelle Änderungen erfährt, wenn die Belastung ihre Richtung ändert, d.h. kurz nach jedem Belastungswechsel finden relativ rasch große Verschiebungen des Ellipsenmittelpunktes statt, die die Änderungen der Halbachsen betragsmäßig überwiegen können. Auf diese Vermutung weisen auch die Ausführungen von MROZ hin, der in [17] das kinematische Verfestigungsverhalten bei zyklischen Prozessen untersucht hat.

Ein Evolutionsgesetz der Form (2.4.16) oder (2.4.38) kann ein solches Verhalten nicht beschreiben. Deshalb wurde unter Mitwirkung von LEHMANN und RANIECKI ein gegenüber (2.4.38) erweiterter Ansatz erarbeitet, der bei Prozessen mit Belastungsumkehr einen zusätzlichen Freiheitsgrad bezüglich der Evolution des kinematischen Verfestigungsanteils enthält. Dieser Ansatz soll im Folgenden unter kritischer Betrachtung der möglichen Verbesserungen vorgestellt werden.

6.2 Konstitutive Gleichungen und Energiebilanz

Wir definieren für die tensorielle Zustandsvariable $\underline{\underline{B}}$ ein erweitertes Evolutionsgesetz der Form:

$$\underline{\underline{\dot{B}}} = \xi \underline{\underline{D}}_P - \gamma^* \underline{\underline{B}} \underline{\underline{B}} \quad (6.2.1)$$

Durch Einsetzen in die Energiebilanz (2.4.14) erhält man mit:

$$\eta = h - 2 g \gamma^* \text{Sp}(\underline{\underline{B}}^2) \quad (6.2.2)$$

$$\begin{aligned} \theta \dot{w}_s + \xi \dot{w}_p &= \text{Sp} \left\{ [\eta \delta \underline{\underline{I}}_k - (\eta \delta - 2g \dot{\gamma} \xi) \underline{\underline{B}}] \cdot \underline{\underline{D}}_s \right\} \\ &+ \text{Sp} \left\{ [\eta \mu \underline{\underline{I}}_k - (\eta \mu - 2g \dot{\gamma} \xi) \underline{\underline{B}}] \cdot \underline{\underline{D}}_p \right\} \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} \eta \delta &= \theta & ; & \eta \mu = \xi \\ \left. \begin{aligned} \eta \delta &= 2 \varrho \dot{\xi} \zeta \\ \eta \mu &= 2 \varrho \dot{\xi} \zeta \end{aligned} \right\} \delta = \mu \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Analog zu Abschnitt 2.4.6 erhält man die konstitutiven Gleichungen nach etwas Rechnung unter Elimination von λ über die Kontinuitätsbedingung. Für die skalare Zustandsvariable b^* ergibt sich dann:

$$\dot{b}^* = \frac{2 \operatorname{Sp}[(\underline{I}_\kappa - \underline{B}) \cdot \underline{I}_\kappa] - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{2 \zeta + \frac{\partial k^2}{\partial b^*} - 2 \eta^* \operatorname{Sp}[(\underline{I}_\kappa - \underline{B}) \cdot \underline{B}]} \quad (6.2.5)$$

und für den plastischen Anteil des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors erhält man:

$$\begin{aligned} \underline{D}_{pl} &= \frac{1}{1 - \zeta} \left\{ \kappa \underline{I}_\kappa \right. \\ &\quad \frac{(2 - \kappa \frac{\partial k^2}{\partial b^*}) \operatorname{Sp}[(\underline{I}_\kappa - \underline{B}) \cdot \underline{I}_\kappa] (\underline{I}_\kappa - \underline{B}) - 2 \kappa k^2 \eta^* \operatorname{Sp}[(\underline{I}_\kappa - \underline{B}) \cdot \underline{I}_\kappa] \underline{B}}{k^2 \left\{ 2 \zeta + \frac{\partial k^2}{\partial b^*} - 2 \eta^* \operatorname{Sp}[(\underline{I}_\kappa - \underline{B}) \cdot \underline{B}] \right\}} \\ &\quad \left. - \frac{\left\{ 1 + \kappa \zeta - \kappa \eta^* \operatorname{Sp}[(\underline{I}_\kappa - \underline{B}) \cdot \underline{B}] \right\} (\underline{I}_\kappa - \underline{B}) + k^2 \eta^* \kappa \underline{B}}{k^2 \left\{ 2 \zeta + \frac{\partial k^2}{\partial b^*} - 2 \eta^* \operatorname{Sp}[(\underline{I}_\kappa - \underline{B}) \cdot \underline{B}] \right\}} \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T} \right\} \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Für die Belastungsbedingung findet man einen Ausdruck der Form:

$$\left(2 - \kappa \frac{\partial k^2}{\partial b^*} \operatorname{Sp}[(\underline{I}_\kappa - \underline{B}) \cdot \underline{I}_\kappa] - \left\{ 1 + \kappa \zeta - \kappa \eta^* \operatorname{Sp}[(\underline{I}_\kappa - \underline{B}) \cdot \underline{B}] \right\} \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T} \right) > 0 \quad (6.2.7)$$

6.3 Vollständiges Dgl- System für Zug und Torsion an dünnwandigen Rohren

Wie in 3.5 näher beschrieben, erhält man das rekursiv numerisch integrierbare Differentialgleichungssystem, wenn man die entsprechenden

konstitutiven Gleichungen komponentenweise aufspaltet und geeignet aufbereitet (siehe 3.5.6a).

Es ergeben sich folgende Koeffizienten:

$$a_1 = t \left[\frac{1}{3} X_1 + \left(\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2 \right) \left(\frac{1}{3} \sigma + \beta_1^1 \right) X_{21} - \left(\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2 \right) \beta_1^1 X_{22} - K^* \right]$$

$$a_2 = 2t (\tau - R\beta_3^2) \left[\left(\frac{1}{3} \sigma + \beta_1^1 \right) X_{21} - \beta_1^1 X_{22} \right]$$

$$a_3 = t \left[\left(\frac{1}{3} \sigma + \beta_1^1 \right) X_{31} - \beta_1^1 X_{32} - \alpha \right]$$

$$a_4 = \frac{2}{3} X_1 + \left(\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2 \right)^2 X_{21} - \left(\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2 \right) (\beta_1^1 + \beta_2^2) X_{22} + K^*$$

$$a_5 = (\tau - R\beta_3^2) \left[\left(\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2 \right) X_{21} - (\beta_1^1 + \beta_2^2) X_{22} \right]$$

$$a_6 = \left(\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2 \right) X_{31} - (\beta_1^1 + \beta_2^2) X_{32} + \alpha$$

$$a_7 = \left(\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2 \right) \left[(\tau - R\beta_3^2) X_{21} + R\beta_3^2 X_{22} \right]$$

$$a_8 = X_1 + 2(\tau - R\beta_3^2) \left[(\tau - R\beta_3^2) X_{21} + R\beta_3^2 X_{22} \right]$$

$$a_9 = (\tau - R\beta_3^2) X_{31} + R\beta_3^2 X_{32}$$

$$a_{10} = X_T \frac{\sigma}{E}$$

$$a_{11} = X_T \frac{\tau}{G}$$

Mit der Hilfsfunktion

$$C_1 = (\beta_1^1 + 2\beta_2^2) \tau R \frac{\dot{\psi}}{l} + R\beta_3^2 \sigma R \frac{\dot{\psi}}{l}$$

folgt für die R_i :

$$R_1 = C_1 t \left[\left(\frac{1}{3} \sigma + \beta_1^1 \right) X_{21} - \beta_1^1 X_{22} \right]$$

$$R_2 = \frac{l}{l} - \tau R \frac{\dot{\psi}}{l} X_1 - C_1 \left[\left(\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2 \right) X_{21} - (\beta_1^1 + \beta_2^2) X_{22} \right]$$

$$R_3 = \frac{1}{2} R \frac{\dot{\psi}}{l} (1 + \sigma X_1) - C_1 \left[(\tau - R\beta_3^2) X_{21} + R\beta_3^2 X_{22} \right]$$

$$R_4 = X_T \left(\sigma \frac{\dot{l}}{l} + \tau R \frac{\dot{\psi}}{l} \right)$$

$X_1, X_{21}, X_{22}, X_{31}, X_{32}$ und K sind dabei wieder Funktionen der Stoffparameter, die sich mit der Hilfsgröße

$$C_2 = k^2 (1 + \kappa \zeta) \left\{ 2 \zeta + \frac{\partial k^2}{\partial b^*} + 2 \eta^* [\beta_1^1 (\sigma + 2\beta_1^1 + \beta_2^2) + \beta_2^2 (\sigma + \beta_1^1 + 2\beta_2^2) - 2\beta_3^2 (\tau R - R^2 \beta_3^2)] \right\}$$

folgendermaßen darstellen lassen:

$$X_{21} = \frac{1}{C_2} \left(2 - \kappa \frac{\partial k^2}{\partial b^*} \right)$$

$$X_{22} = \frac{2}{C_2} \kappa k^2 \eta^*$$

$$X_{31} = -\frac{1}{C_2} \left\{ 1 + \kappa \zeta + \kappa \eta^* [\beta_1^1 (\sigma + 2\beta_1^1 + \beta_2^2) + \beta_2^2 (\sigma + \beta_1^1 + 2\beta_2^2) - 2\beta_3^2 (\tau R - R^2 \beta_3^2)] \right\} \frac{\partial k^2}{\partial T}$$

$$X_{32} = -\frac{1}{C_2} \kappa k^2 \eta^* \frac{\partial k^2}{\partial T}$$

Für die Entwicklung der internen Variablen b^* und B erhält man:

$$\dot{b}^* = 2 X_4 \left\{ [C_1 + (\frac{2}{3} \sigma + \beta_1^1 + \beta_2^2) \dot{\sigma} + 2(\tau - R \beta_3^2) \dot{\tau}] - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T} \right\}$$

mit:

$$X_4 = \frac{k^2 (1 + \kappa \zeta)}{C_2}$$

$$\dot{\beta}_1^1 = \zeta \left(\frac{\dot{t}}{t} + \frac{1}{2G} \frac{\nu}{1+\nu} \dot{\sigma} + \alpha \dot{T} \right) - \eta^* \dot{b}^* \beta_1^1$$

$$\dot{\beta}_2^2 = \zeta \left[\frac{\dot{R}}{R} - \alpha \dot{T} + \frac{1}{2G} \left(\tau R \frac{\dot{\psi}}{l} + \frac{\nu}{1+\nu} \dot{\sigma} \right) \right] - \gamma^* \dot{b}^* \beta_2^2 + \frac{\dot{\psi}}{l} R^2 \beta_3^2$$

$$\dot{\beta}_3^2 = \zeta \left[\frac{1}{2} \frac{\dot{\psi}}{l} + \frac{1}{2G} \left(\frac{1}{2} \dot{\sigma} \frac{l}{l} - \frac{\dot{T}}{R} \right) \right] - \beta_3^2 \left(\frac{\dot{R}}{R} + \gamma^* \dot{b}^* \right) - \frac{\dot{\psi}}{l} \left(\frac{1}{2} \beta_1^1 + \beta_2^2 \right)$$

Für $\gamma^* = 0$ gehen diese Gleichungen über in (3.5.6a), (3.5.6b) und (3.5.6c).

6.4 Einachsige Prozesse und Ermittlung der Parameter- Funktionen

Für einachsige Belastungsvorgänge erhält man mit den in 2.4.8 beschriebenen Vereinfachungen aus (6.2.6) die folgende Gleichung:

$$\dot{\epsilon}_{pl} \left[2\zeta + \frac{\partial k^2}{\partial b^*} + 4\gamma^* \beta_1^1 (\sigma + 3\beta_1^1) \right] = \frac{4}{3} \dot{\sigma} - \frac{1}{\sigma + 3\beta_1^1} \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T} \quad (6.4.1)$$

Auch die Evolutionsgesetze für die internen Variablen nehmen eine entsprechend einfache Form an:

$$-2 \dot{\beta}_1^1 = \zeta \dot{\epsilon}_{pl} + 2 \gamma^* \dot{b}^* \beta_1^1 \quad (6.4.2)$$

$$\dot{b}^* = (\sigma + 3\beta_1^1) \dot{\epsilon}_{pl} \quad (6.4.3)$$

Wir wollen nun im Folgenden den erweiterten Ansatz für den kinematischen Verfestigungsanteil im Hinblick auf die Bestimmung der Parameter näher untersuchen.

Aus (6.4.2) ergibt sich mit (3.7.2):

$$\dot{\sigma}^* = \frac{3}{2} \zeta \dot{\epsilon}_{pl} - \gamma^* \dot{b}^* \sigma^* \quad (6.4.4)$$

Als entscheidenden Nachteil des Ansatzes (2.4.38) hatten wir herausgestellt, daß nach Umkehr der Belastung ($\dot{\epsilon}_{pl} < 0$) das Inkrement von σ^* betragsmäßig zu klein wird, da ζ ziemlich rasch abklingt. Dieses Verhalten kann nun über den erweiterten Ansatz in geeigneter Form korrigiert werden. Dabei ist die Wirkung des 2. Termes je nach Situation

unterschiedlich. Während für $\sigma^* > 0$ das Inkrement $\dot{\sigma}^*$ betragsmäßig verstärkt wird, bewirkt es für $\dot{\sigma}^* < 0$ eine Abschwächung desselben. Das hat zur Folge, daß kurz nach dem Belastungswechsel relativ große Ellipsenverschiebungen erfolgen, die aber für größere Rückverformungen wieder abgemildert werden. In Bild 60 ist dieses Verhalten am Beispiel der zyklischen Torsionsversuche bei Raumtemperatur für 2 unterschiedlich vorgewählte Werte von γ^* dargestellt. Für γ^* wurde dabei eine Funktion der Form

$$\gamma^* = (\gamma_0^* - \gamma_\infty^*) e^{-\gamma_k b^*} + \gamma_\infty^* \quad (6.4.5)$$

verwendet, die unter allen anderen Funktionstypen besonders im Hinblick auf Prozesse mit mehreren Zyklen die besten Ergebnisse brachte.

Zur Definition der Parameterfunktion $\zeta(b^*)$ findet Gleichung (6.4.2) Verwendung. Wir erhalten mit (6.4.3) und (2.4.27) sowie (3.7.6) einen Ausdruck der Form:

$$\begin{aligned} \zeta &= 2 \left[\frac{d(-\beta_1^*)}{db^*} + \gamma^*(-\beta_1^*) \right] \sqrt{\frac{3}{2} K^2} \\ &= \left[\alpha(\beta + \gamma e^{-\gamma b^*}) + \gamma^* \alpha(1 + \beta b^* - e^{-\gamma b^*}) \right] \sqrt{6 K^2} \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

Der Einfluß von γ^* verschwindet bei Prozessen ohne Belastungswechsel; die Evolution der kinematischen Verfestigung wird dann ausschließlich über die Funktion $\beta_1^*(b^*)$ gesteuert.

Bei Ermittlung dieser Funktion über das in Abschnitt 3.7 beschriebene Verfahren stößt man auf Schwierigkeiten, da die Verwendung von ΔR_p viel zu kleine Werte liefert. Interessanterweise erhält man wesentlich bessere Ergebnisse, wenn man Experimente vom 3. Typ (LAUERT - GUPTA) zugrunde legt (siehe Bild 10). Obwohl die Abhängigkeit der gemessenen Fließkurven vom versuchstechnischen Parameter ε_{offset} eine quantitative Analyse des kinematischen Verfestigungsanteils schwierig macht, sind doch qualitative Aussagen über das Verhältnis von isotroper zu kinematischer Verfestigung nach entsprechender Vordeformation möglich. Man kann dann $\beta_1^*(\varepsilon_{p1})$ mit Hilfe der Zugversuchskurve $\sigma(\varepsilon_{p1})$ bei Kenntnis des Verfestigungsverhältnisses für 3 oder 4 unterschiedliche

Vordeformationen zumindest näherungsweise ermitteln.

LAUERT - GUPTA haben unter anderem Fließkurven an Zugproben mit 3 %, 6 %, und 10 % plastischer Vordehnung aufgenommen und dabei festgestellt, daß der isotrope Verfestigungsanteil nach relativ großen Änderungen zu Beginn ziemlich rasch auf einen Sättigungswert zuläuft. So sind z.B. von $\varepsilon_{pl} = 6\%$ bis $\varepsilon_{pl} = 10\%$ kaum noch nennenswerte Aufweitungen der Ellipsenhalbachsen festzustellen. Nimmt man nun an, daß bei $\varepsilon_{pl} = 10\%$ der Sättigungswert a_∞ fast erreicht ist, so ergibt sich folgendes Bild:

$\varepsilon_{pl} [\%]$	0	3	6	10
$\frac{a}{a_\infty} [\%]$	0	80	92	98

Aus diesen Annahmen folgt ein vergleichsweise wesentlich größerer Anteil an kinematischer Verfestigung, der auch erheblich bessere Übereinstimmung zwischen den aus den Grenzyklen bestimmten und den aus

$$k_\infty^2 = \frac{2}{3} a_\infty^2 \quad (6.4.7)$$

ermittelten Werten für k_∞^2 bringt (siehe Abschnitt 5.3.3).

In Bild 55 ist dieser Zusammenhang am Beispiel des einachsigen Zugversuches dargestellt. Für die Berechnung wurden dabei folgende Daten zugrunde gelegt:

$$T = 26^\circ\text{C}$$

isotrope Verfestigung:

$$k_0^2 = 21950 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

$$a = 46903.5 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

$$b = 0.0011 \text{ mm}^2/\text{N}$$

$$c = 0.1045 \text{ mm}^2/\text{N}$$

$$b_1^* = 40 \text{ N}/\text{mm}^2$$

$$k_\infty^2 = 72000 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

$$f = 0.0703 \text{ mm}^2/\text{N}$$

kinematische Verfestigung:

$$\alpha = 25 \text{ N}/\text{mm}^2$$

$$\beta = 0.0226 \text{ mm}^2/\text{N}$$

$$\gamma = 0.12 \text{ mm}^2/\text{N}$$

$$\gamma^* \text{ beliebig}$$

6.5 Vergleich zwischen Theorie und Experiment

6.5.1 Zyklische Prozesse

Die Bilder 56, 57 und 58 stellen die zyklischen Torsionsversuche bei Raumtemperatur im Vergleich zwischen Experiment und Theorie mit zwei unterschiedlich vorgewählten Funktionen γ^* dar. Mit den in 6.4 getroffenen Annahmen wird das Verhalten bei diesen Prozessen nach spätestens zwei vollen Zyklen ausschließlich durch den kinematischen Verfestigungsanteil bestimmt. Man erkennt, daß auch unter Verwendung des erweiterten Ansatzes (6.2.1) deutliche Abweichungen zwischen Versuch und Theorie auftreten, allerdings sind diese nun völlig anders geartet. Der Grund dafür wird sofort aus Bild 59 bzw. 60 ersichtlich. Obwohl das Verhalten des kinematischen Verfestigungsanteils speziell im Hinblick auf die Grenzyklen prinzipiell richtig beschrieben wird, sind dennoch jeweils nach den Belastungswechseln gravierende Abweichungen zum postulierten optimalen Verlauf festzustellen. Deshalb kann die in (6.2.1) gewählte Erweiterung des Evolutionsgesetzes (2.4.38) nur als erster, wenn auch großer Schritt in die richtige Richtung angesehen werden.

6.5.2 Kombinierte Prozesse

Der Ansatz (2.4.38) wurde im Hinblick auf die bei zyklischen Prozessen relevanten Gesichtspunkte konstruiert. Die gewählte Erweiterung wäre aber von geringem Wert, wenn die Beschreibung der komplexen Belastungsprozesse dadurch verschlechtert würde. Interessanterweise ist genau das Gegenteil der Fall. Der in den Bildern 61 und 62 strichpunktiert gezeichnete Verlauf wurde mit dem erweiterten Ansatz nach entsprechender Wahl der Funktion γ^* gerechnet und stellt den im Vergleich zu allen anderen Rechnungen mit Abstand besten Verlauf dar. Dabei bestätigte sich der in 5.4.3 angegebene Verlauf für die Funktion \varkappa über den Zustandsvariablen sowohl für Zug- Torsions- als auch für Torsion-Zug- Prozesse.

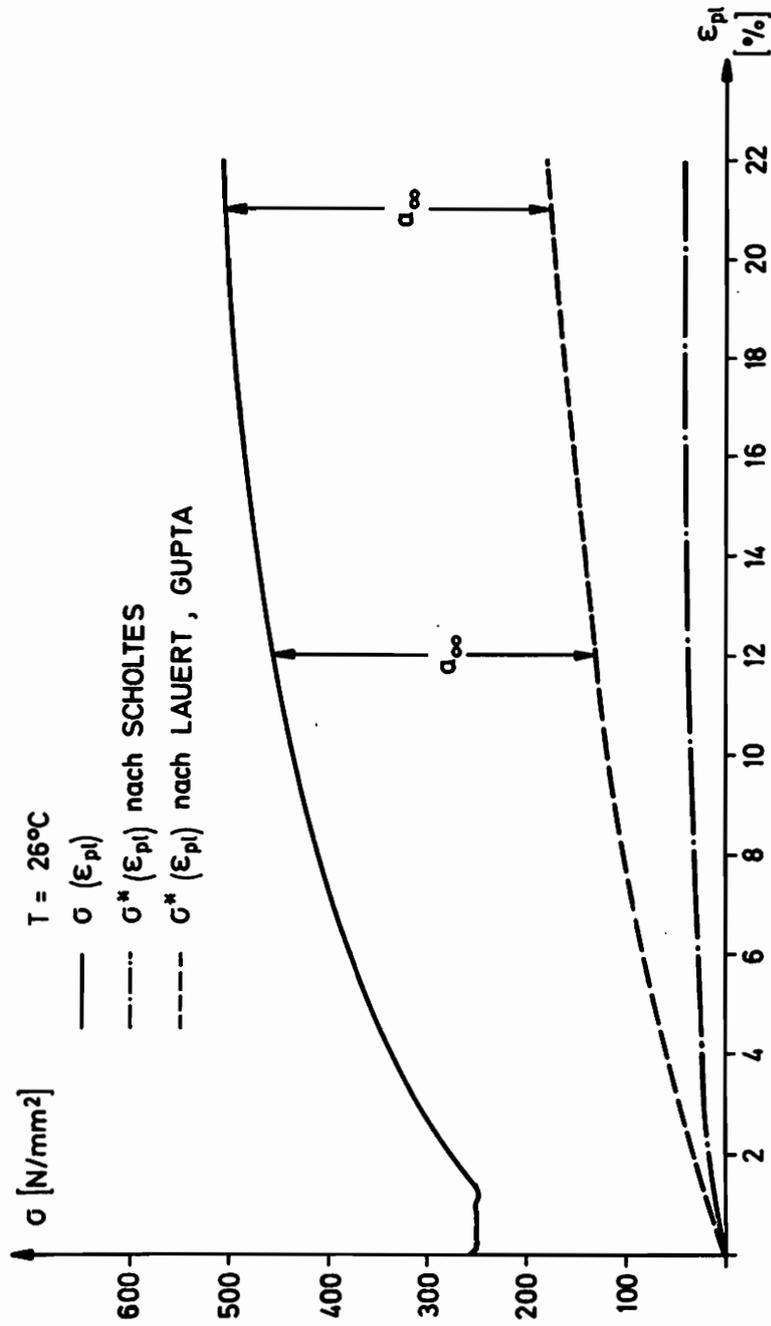


Bild 55: Einachsiger Zugversuch; isotrope und kinematische Verfestigung nach (2.4.38) und (6.2.1)

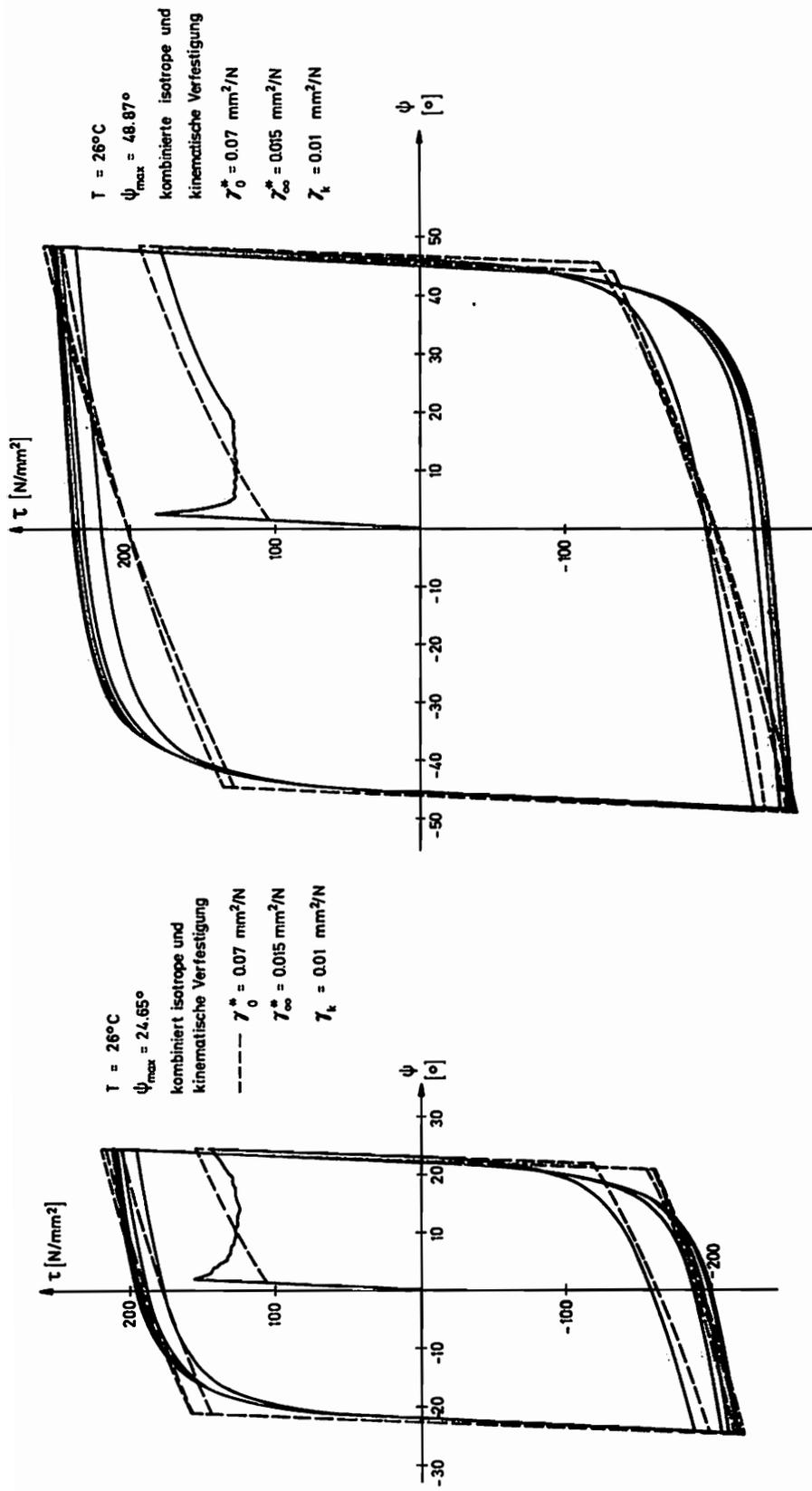


Bild 56: Zyklische Torsionsversuche; Ansatz (6.2.1)

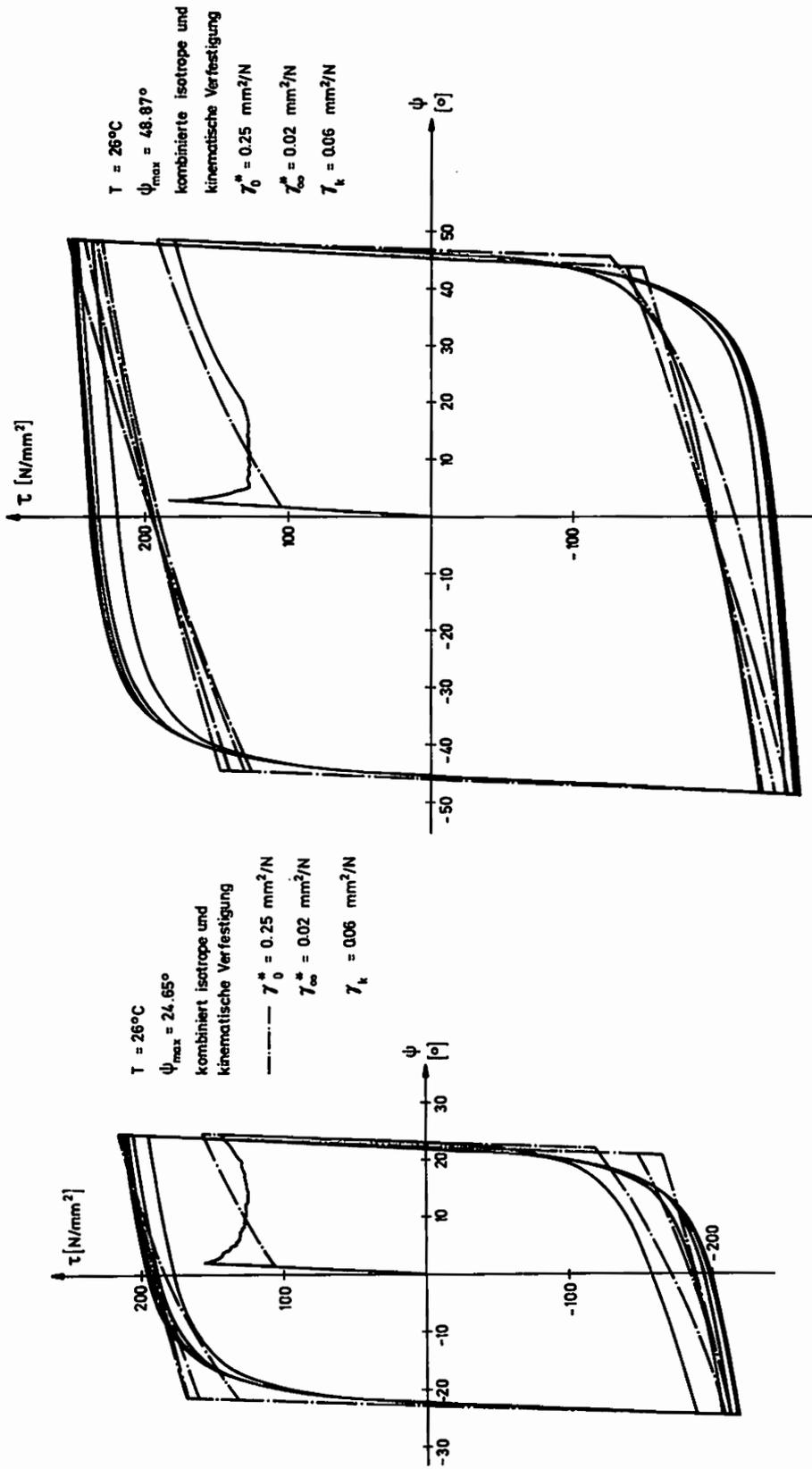


Bild 57: Zyklische Torsionsversuche; Ansatz (6.2.1)

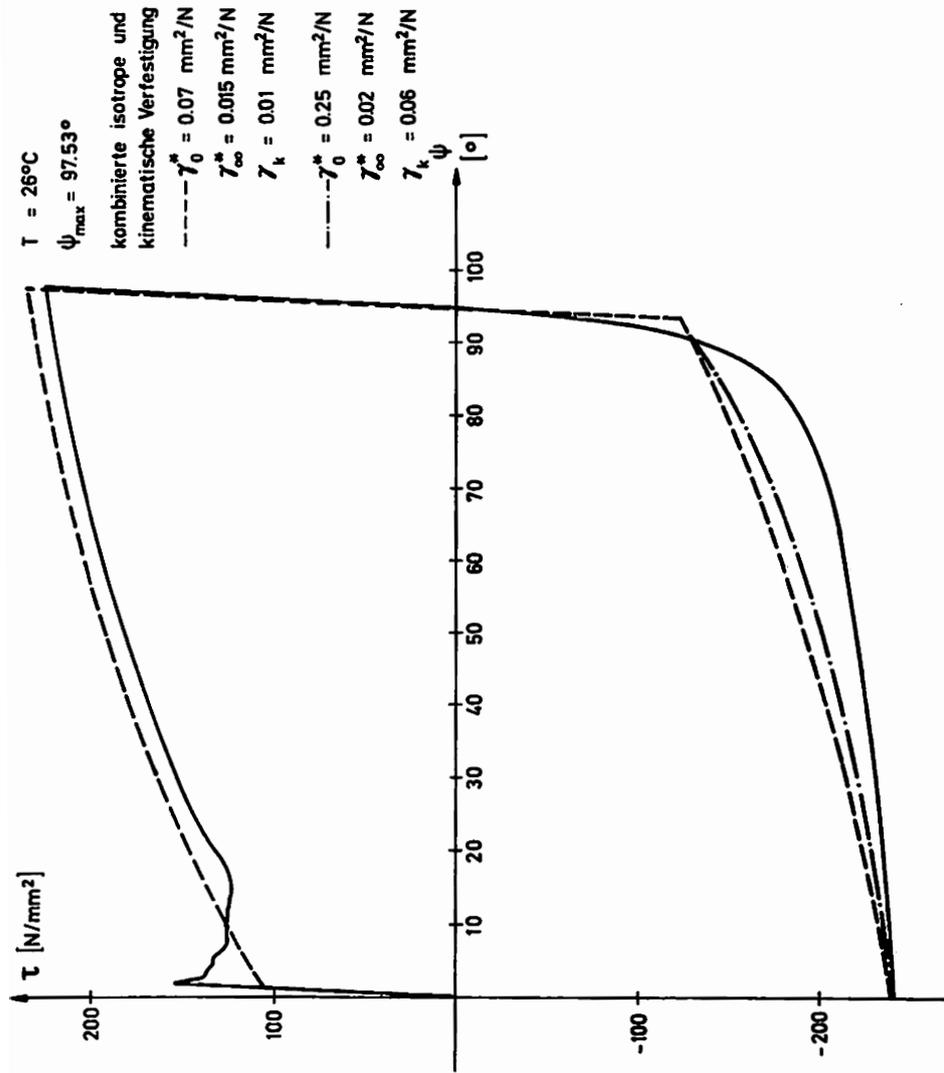


Bild 58: Zyklische Torsionsversuche; Ansatz (6.2.1)

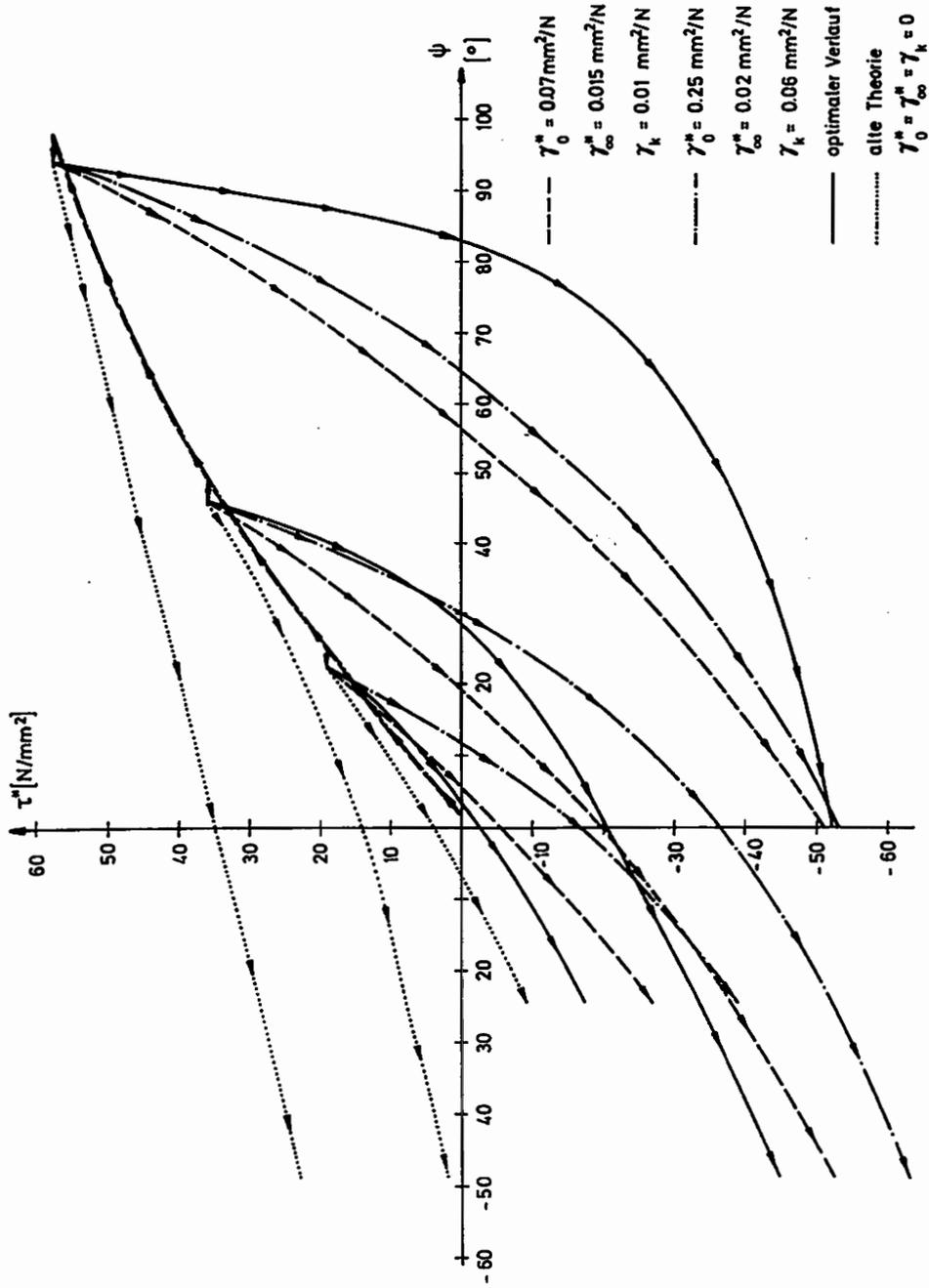


Bild 59: Evolution der kinematischen Verfestigung im zyklischen Torsionsversuch

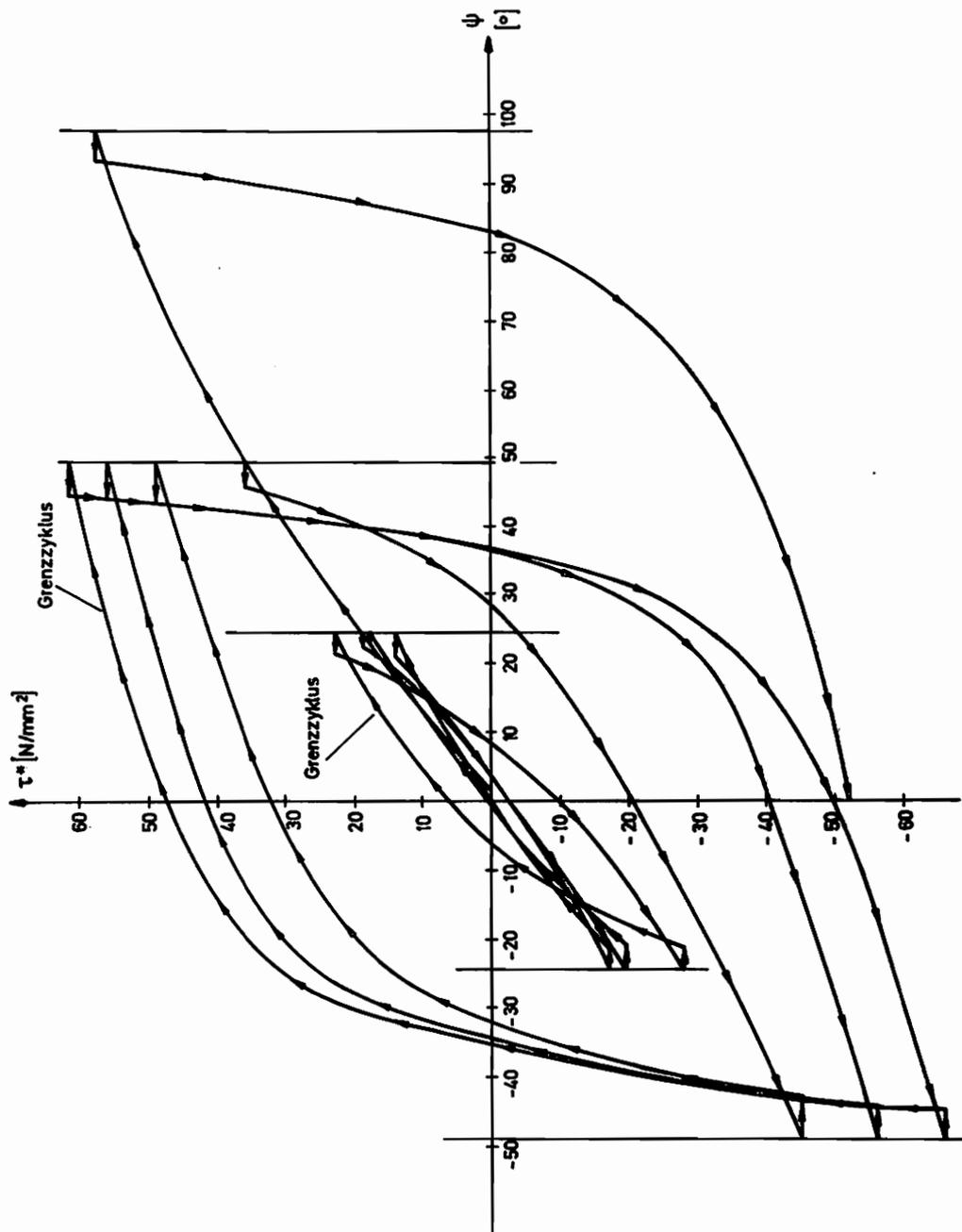


Bild 60: Evolution der kinematischen Verfestigung im zyklischen Torsionsversuch

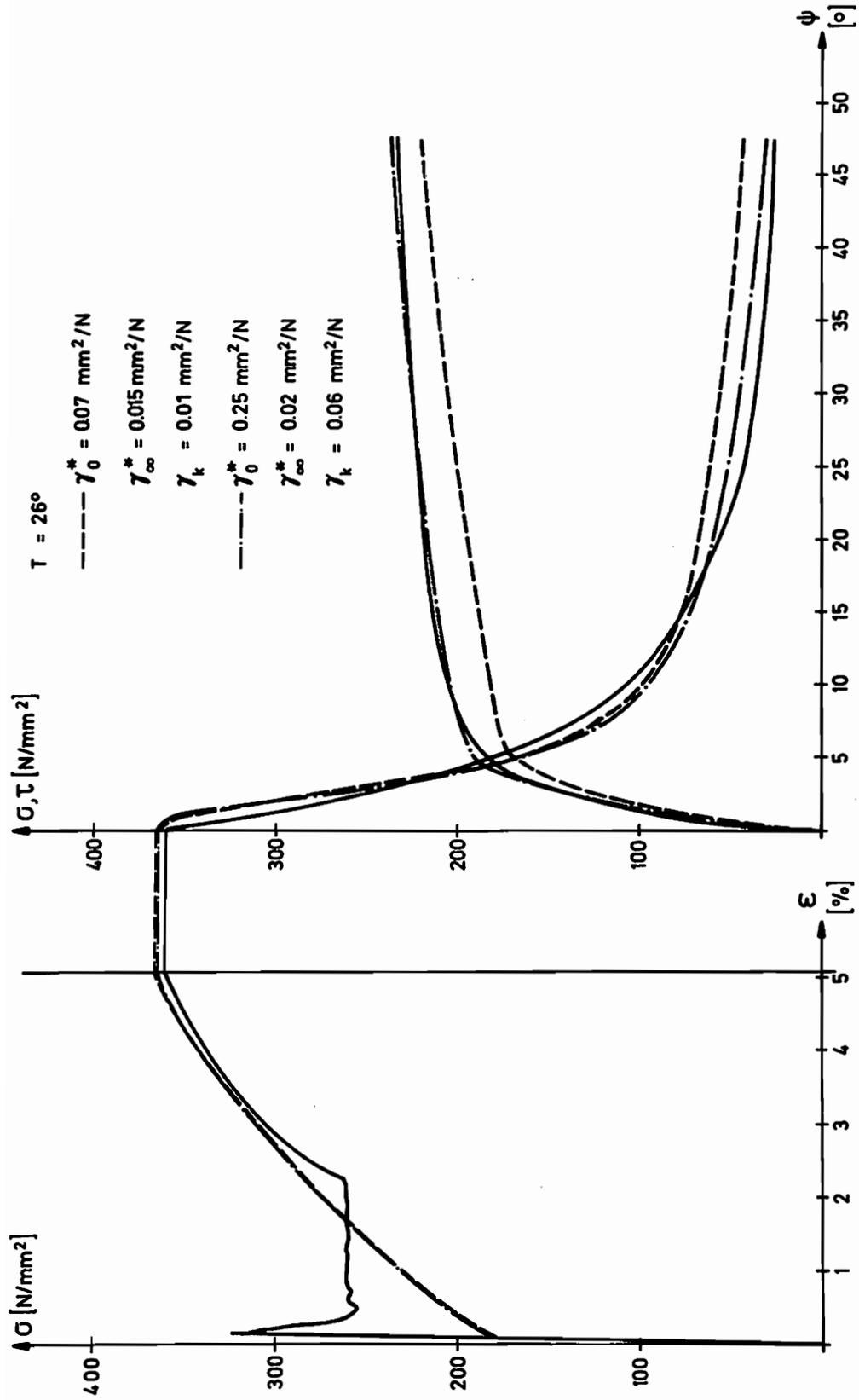


Bild 61: Kombiniertes Zug - Torsion; Ansatz (6.2.1)

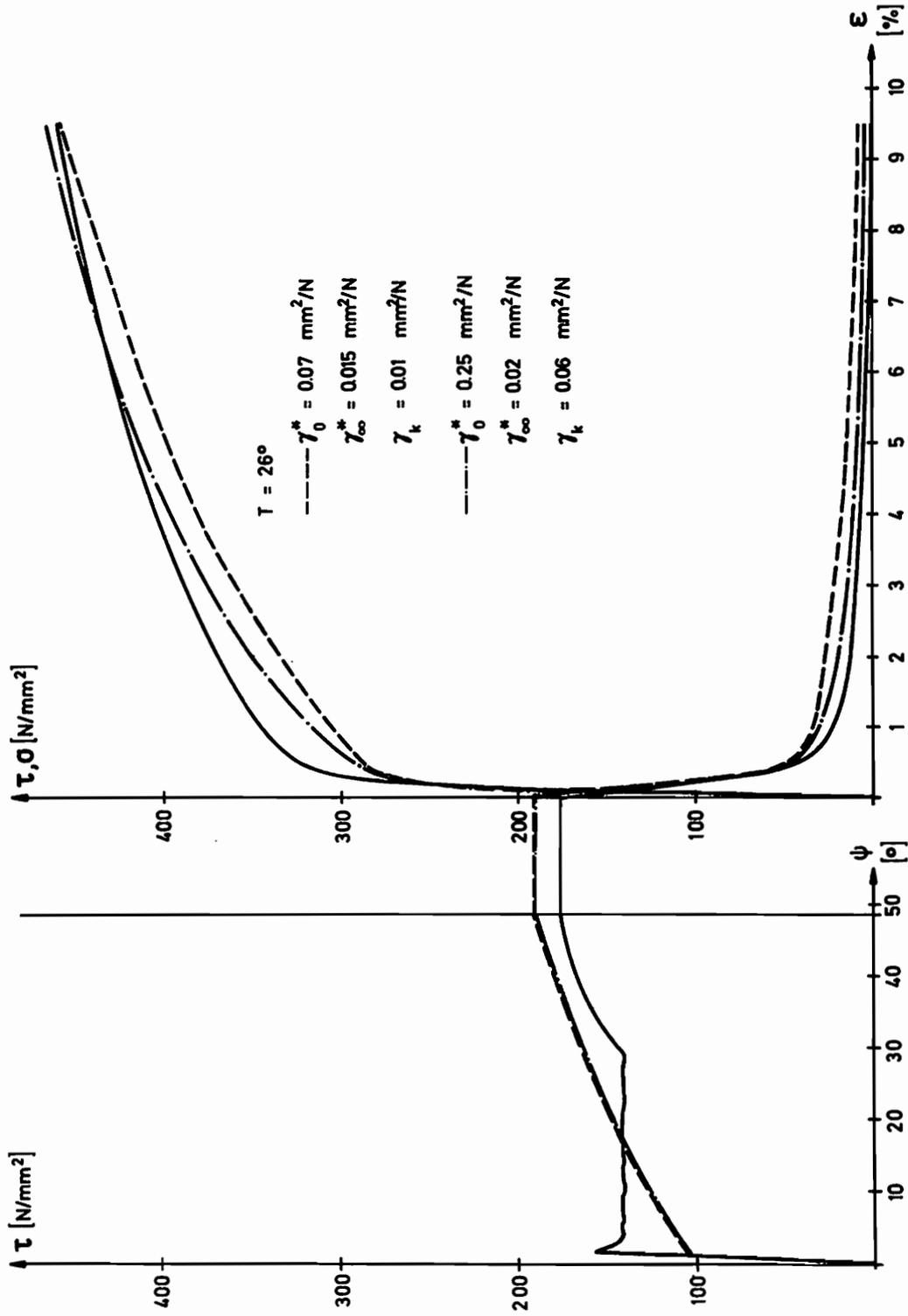


Bild 62: Kombinerter Versuch; Torsion - Zug; Ansatz (6.2.1)

7. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein im Rahmen der phänomenologischen Betrachtungsweise gegenüber den klassischen Ansätzen erweitertes thermoplastisches Materialgesetz vorgestellt und unter folgenden Aspekten näher untersucht:

- Die Einbettung des konstitutiven Gesetzes in den allgemeinen, weitergefaßten Rahmen für große, nicht- isotherme, elasto- plastische Deformationen muß gewährleistet sein, d.h. die Energiebilanz muß einen consistenten Zusammenhang zwischen Plastizitätstheorie und Thermodynamik herstellen.
- Die experimentelle Bestimmung der Stoffparameter muß über einen Satz geeignet kombinierter isothermer und nicht- isothermer Versuche möglich sein.
- Das Materialgesetz soll bei der Berechnung von komplexen Belastungsvorgängen (z.B. beliebige Kombinationen von Zug und Torsion an dünnwandigen Rohren) befriedigende Übereinstimmungen mit den experimentellen Daten liefern.

Außerdem enthält die Arbeit einen kurzen Abriß der theoretischen Grundlagen zur Formulierung von Stoffgesetzen, sowohl im Hinblick auf thermodynamische als auch auf kontinuums- mechanische Gesichtspunkte. Die im Rahmen der phänomenologischen Theorie anschaulich begründeten Ansätze, die dann letztlich zur Definition der konstitutiven Gleichungen führen, werden ausführlich beschrieben und in Kapitel 5 dem kritischen Vergleich mit den experimentell gewonnenen Daten unterzogen. An dieser Stelle sollen nun die wichtigsten Ergebnisse noch einmal kurz zusammengefaßt werden.

Unter Verzicht auf die korrekte Beschreibung zyklischer Prozesse mit mehreren Belastungswechseln bietet das vorgestellte Stoffgesetz eine gute Grundlage zur Berechnung isothermer und nicht- isothermer elasto- plastischer Deformationen. Insbesondere der Parameter κ , der im Rahmen der konstitutiven Gleichungen die Abweichungen von der Normalenregel steuert, bewirkt eine erheblich bessere Erfassung der Spannungsumlagerungen bei kombinierten Prozessen.

Die Energiebilanz hat sich bei der Berechnung adiabater Versuche ebenfalls bewährt.

Als gravierendste Schwachstelle der Theorie ist das Evolutionsgesetz für den kinematischen Verfestigungsanteil anzusehen, das dennoch in der Form (2.4.38) häufig in der Literatur Verwendung findet. Beim Vergleich zwischen Versuch und Theorie weisen viele Anzeichen, sowohl bei zyklischen, als auch bei kombinierten Prozessen darauf hin, daß dieser Ansatz das kinematische Verfestigungsverhalten unzutreffend erfaßt. Deshalb wird in Kapitel 6 der Versuch unternommen, ein in geeigneter Form erweitertes Evolutionsgesetz zu definieren, das einen zusätzlichen Freiheitsgrad für Prozesse mit Belastungswechseln enthält. Aufgrund dieser Erweiterung gelingt nunmehr die prinzipiell richtige Beschreibung des Verfestigungsverhaltens bei zyklischen Prozessen, interessanterweise können aber auch die Spannungsumlagerungen bei kombinierten Prozessen positiv beeinflußt werden. Dennoch kann der Ansatz (6.2.1) bei abschließender Beurteilung nicht recht befriedigen, da einerseits die Optimierung der Funktion η^* außerordentlich mühsam ist, andererseits aber auch die Übereinstimmungen mit den experimentellen Daten im Detail nicht überzeugen kann. Allerdings kann die erweiterte Form des Evolutionsgesetzes als erster Schritt in die richtige Richtung verstanden werden, eine nahezu optimale Erfassung des Verfestigungsverhaltens durch gezielte Variation des Ansatzes (6.2.1) liegt durchaus im Bereich des Möglichen.

Im Folgenden sollen nun noch einmal kurz die Aspekte aufgegriffen werden, die im Rahmen des konstitutiven Gesetzes mögliche Ansatzpunkte für eine bessere Beschreibung des plastischen Materialverhaltens darstellen.

1. Verallgemeinerung der Fließbedingung unter Berücksichtigung des Einflusses der 3. Invarianten.
2. Variation des erweiterten Ansatzes (6.2.1) mit dem Ziel, die Evolution des kinematischen Verfestigungsanteils besser zu beschreiben (Denkbar wäre ein Ansatz, der die in 6.4 beschriebene Wirkung des Korrekturterms verstärkt).
3. Einführung einer 2. Fließbedingung innerhalb der ersten, die bei entsprechend geeigneter Kopplung mit dem äußeren Fließkriterium weitere Freiheitsgrade zur Erfassung des Verfestigungsverhaltens

bietet.

4. Einführung eines erweiterten Ansatzes für die kinematische Verfestigung, wobei ζ als Funktion einer Invarianten der Zustandsvariablen $\underline{\underline{B}}$ definiert wird:

$$\underline{\underline{\dot{B}}} = \zeta(\underline{\underline{B}}) \underline{\underline{D}}_{pl} - \dot{f}(\underline{\underline{B}}) \underline{\underline{B}}$$

5. Verallgemeinerung des konstitutiven Gesetzes im Hinblick auf viskoplastische Deformationsanteile und Kriechprozesse.

Literaturverzeichnis

- [1] Lehmann, Th.
General frame for the definition of constitutive laws for large non- isothermic elastic- plastic and elastic- viscoplastic deformations
in: The constitutive law in thermoplasticity
CISM Courses and Lectures No.
Springer Verlag Wien/New York (1983)

- [2] Lehmann, Th.
Einige Aspekte der Thermoplastizität
ZAMM 63 (1983) , T 3/13

- [3] Zander, G.
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünner Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionsbelastung.
Mitt. Inst. Mech. Nr. 27 Ruhr- Universität Bochum (1981)

- [4] Waller, H. und Krings, W.
Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik
Bibl. Inst. Mannheim, (1975)

- [5] Klingbeil, E.
Tensorrechnung für Ingenieure
BI Hochschultaschenbuch Mannheim, (1966)

- [6] Bruhns, O.
Vergleich einiger elastisch- plastischer Stoffgesetze bei Formänderungsprozessen mit Be- und Entlastung
ZAMM 52. T 40-42 (1972)

- [7] Scholtes, B.
Die Auswirkungen des Bauschingereffektes auf das Verformungsverhalten technisch wichtiger Vielkristalle
Diss. Uni. Karlsruhe (1980)

- [8] Mròz, Z.
On the description of anisotropic workhardening
I. Mech. Phys. Solids, 1967 Vol 15 , S 163/175
- [9] Ziegler, H.
A modification of Pragers hardening rule
Quart. Appl. Math. 17 (1959) S 55ff
- [10] Baltow, A. u. Sawczuk, A.
A rule of anisotropic hardening
Acta Mechanica 1 (1965) S 81ff
- [11] Dugdale, D.S.
Stress- strain cycles of large amplitude
I. Mech. Phys. Solids, 1959 Vol 7 S 135/142
- [12] Lehmann, Th.
Große elasto- plastische Formänderungen
Mitt. Inst. Mech. Nr.1 , Ruhr- Universität Bochum (1976)
- [13] Lehmann, Th.
Elemente der Mechanik
Vieweg Verlag, (1974- 79)
- [14] Fritsch, G. und Siegel, R.
Kalt- und Warmfließkurven von Baustählen
Inst. Forsch. Maschinenbau, Karl Marx- Stadt (1965)
- [15] Richter, F.
Die wichtigsten physikalischen Eigenschaften von 52 Eisenwerk-
stoffen
Mannesmann Forschungsberichte 650/1974
- [16] Lücke, B.
Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen
elasto- plastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
Mitt. Inst. Mech. Nr 4, Ruhr- Universität Bochum

- [17] Mròz, Z.
On generalized kinematic hardening rule with memory of maximal prestress
Journal de Mécanique Appl. Vol.5, No 3 (1981)
- [18] Phillips,A. and Chong- Won Lee
Yield surfaces and loading surfaces; experiments and recommendations
Int. J. Sol. Struct. 15 (1979) 715/29
- [19] Ikegami,K.
Experimental plasticity on the anisotropy of metals;
in: Mechanical behaviour of anisotropic solids
Proc. Euromech. Coll. 115 (J.P. Boehler, ed.)
Ed. CNRS Paris (1982), 201/42
- [20] Gupta,N.K. and Lauert,H.A.
A study of yield surface upon reversal of loading under biaxial stress;
ZAMM 63 (1983)
- [21] Mc Meeking,R.M.
The finite strain tension- torsion- test of a thinwalled tube of elastic- plastic material
Int. J. Solids Struct. Vol.18 No.3, pp 199-204 (1982)
- [22] Lehmann,Th.
Some remarks on the decomposition of deformation and mechanical work
Int. J. Engng. Sci. Vol.20, No.2, pp 281-288 (1982)
- [23] Backhaus,G.
Fließspannungen und Fließbedingung bei zyklischen Verformungen
ZAMM 56, 337-348 (1976)

- [24] Hohenemser,K. und Prager,W.
Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua
ZAMM Band 12 (1932)
- [25] Hohenemser,K.
Fließversuche an Rohren aus Stahl bei kombinierter Zug- und
Torsionsbeanspruchung
ZAMM Band 11 (1931)
- [26] Betten,J.
Bemerkungen zum Versuch von Hohenemser
ZAMM 55, 149-158 (1975)
- [27] Krause,U.
Vergleich verschiedener Verfahren zum Bestimmen der Formände-
rungsfestigkeit bei Raumtemperatur
Mitt. Max- Planck- Inst. f. Eisenforschung, 957
- [28] Bronstein, J.N. und Semendjajew,K.A.
Taschenbuch der Mathematik
Verlag Harri Deutsch 1969
- [29] Blix,U.
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksich-
tigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite- Element-
Methode
Mitt. Inst. Mech. Ruhr- Universität Bochum Nr.40
- [30] Shield,R.T. and Ziegler,H.
On Pragers hardening rule
ZAMP 9a (1958)
- [31] Lauert,H.A.
Thermoelastizität kleiner Formänderungen
unveröffentlicht, Inst. Mech. Ruhr- Universität Bochum

- [32] Kämpf, B.
Ein Extremal- Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
Mitt. Inst. Mech. Nr.35 Ruhr- Universität Bochum
- [33] Besseling, J.F.
A theory of elastic- plastic and creep deformations of an initially isotropic material showing anisotropic strainhardening creep recovery and secondary creep
J. Appl. Mech. 25 529-536 (1958)
- [34] Meijers, P., Janssen, G.T.M. and Booy
Numerical plasticity and creep analysis based on the fraction model and experimental verification for WN 1.4948
4th SMIRT Conf., London, 1975
- [35] Meijers, P.
Experimental verification of constitutive equations for creep and plasticity based on overlay models
3rd Int. Seminar of Inelastic Analysis and Life Prediction in High Temperature Environment, Paris 1981
- [36] Stolte, E., Heller, W.
Stand der Kenntnisse über die Alterung von Stählen 1. Grundlagen
Mitt. aus dem Bereich Qualitätswesen der Fried. Krupp Hüttenwerke A.G. Werk Rheinhausen
Stahl und Eisen 90 (1970) Nr.16, 6. August
- [37] Eisenberg, M.A. and Phillips, H.
On Nonlinear Kinematic Hardening
Acta Mechanica Vol.5 1968, pp. 1-13
- [38] Backhaus, G.
Zur analytischen Erfassung des allgemeinen Bauschinger-effektes
Acta Mechanica 14, 31-42 (1972)

- [39] Rees, D.W.A.
An examination of yield surface distortion and translation
Acta Mechanica 52, 15-40 (1984)
- [40] Phillips, A., Liu, C.S., Justusson, J.W.
An experimental investigation of yield- surfaces at elevated temperatures
Acta Mechanica 14, 119-146 (1972)
- [41] Nicholson, D.W.
On hardening and yield surface motion in plasticity
Acta Mechanica 21, 193-207 (1975)
- [42] Meyers, Mazilu
Yield surface description of isotropic materials after cold prestrain
wird demnächst im Ingenieur Archiv veröffentlicht
- [43] Lee, E.H., Mallet, R.L., Wertheimer, T.B.
Stress analysis for anisotropic hardening in finite- deformation plasticity
J. Appl. Mech. 50, 554-560 (1983)
- [44] Dienes, J.K.
On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies
Acta Mechanica 32, 217-232 (1979)
- [45] Paulun, J., Pecherski, R.B.
A new evolution equation of kinematic hardening in finite deformation plasticity
Submitted for publication in J. of Appl. Mech.
- [46] Dafalias, Y.F.
Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations
J. Appl. Mech. 50, 561-565 (1983)

- [47] Lee.E.H.. Mallet.R.L..Wertheimer.T.B.
Stress analysis for kinematic hardening in finite deformation
plasticity
SUDAM Report No. 81-11 Dec. 1981
- [48] Moss.W.C.
On instabilities in large deformations simple shear loading
Computer methods in applied Mechanics and Engineering 42 (1984)
North Holland
- [49] Drucker.D.C.
Stress Strain Relations for Strain Hardening Materials
Discussions and Proposed Experiments
Proc. 1st. Annual Symposium for Appl. Math..
Am. Math. Soc. 181-187 (1949)
- [50] Drucker.D.C.
A Definition of Stable Inelastic Materials.
J. Appl. Mech. 22 (1955). 101-106

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
 Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
 Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite
 Elastic-Plastic Deformations.
 Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
 Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,
 viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
 Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen
 elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
 Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen
 Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
 Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungs-
 zustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
 Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre
 Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
 Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden
 Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer:
 Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dick-
 wandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
 Introduction to the non-linear theory of shells

- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Paweł Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinemato-graphischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Kármán Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czesław Woźniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods

- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear
Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der
Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei
Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch
stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value
Problems in the Theory of Plasticity and Application to
Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-
Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger
Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsions-
last
- Nr. 28 Paweł Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic
Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger
Kreiszyylinder und Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen
Kontaktproblem

- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und
Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and
Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre
Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische
Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hin-
blick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley:
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik
und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Spline-
funktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte:
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung
geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksich-
tigung großer Rotationen

- Nr. 40 Ulrich Blix:
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker:
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Dietmar Bouchard:
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel:
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermoplastischen Stoffgesetz

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 43**