

**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Lutz-Peter Nolte

Beitrag zur Herleitung und  
vergleichende Untersuchung  
geometrisch nichtlinearer  
Schalentheorien unter  
Berücksichtigung  
großer Rotationen

Heft Nr. 39



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

INSTITUT FÜR MECHANIK  
RÜHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

LUTZ-PETER NOLTE

BEITRAG ZUR HERLEITUNG UND VERGLEICHENDE UNTERSUCHUNG  
GEOMETRISCH NICHTLINEARER SCHALENTHEORIEN UNTER  
BERÜCKSICHTIGUNG GROSSER ROTATIONEN

*In der Wissenschaft gleichen wir alle nur den Kindern,  
die am Rande des Wissens hier und da einen Kiesel  
aufheben, während sich der weite Ozean des Unbekannten  
vor unseren Augen erstreckt.*

*Isaac Newton*

*Herrn Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann mit besten  
Wünschen*

*Januar 1984*

*Lutz-Peter Nolte*

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK NR. 39

DEZEMBER 1983

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

© 1983 Dr.-Ing. Lutz-Peter Nolte

Königsallee 6-8, 4630 Bochum 1

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder aus Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1980 - 1983 am Lehrstuhl für Mechanik II der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, deren Durchführung er jederzeit unterstützte und förderte, sowie für wertvolle Hinweise in wissenschaftlichen Fragestellungen.

Herrn Priv.-Doz. Dr.-Ing. U. Wittek sei gedankt für die Übernahme des zweiten Berichtes.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Helmut Stumpf  
Priv.-Doz. Dr.-Ing. Udo Wittek

Tag der Einreichung: 16. 5.1983

Tag der mündlichen Prüfung: 2.12.1983

Herrn Prof. dr. inż. W. Pietraszkiewicz von der Polnischen Akademie der Wissenschaften in Gdańsk danke ich für sein stetiges Interesse an dieser Arbeit.

## Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die Grundgleichungen des Randwertproblems sowie zugehörige Stabilitätsgleichungen einer allgemeinen geometrisch nichtlinearen Schalentheorie der ersten Approximation in vollständig Lagrangescher Beschreibungsweise hergeleitet. Ein mithilfe des polaren Zerlegungssatzes gewonnenes, wirklichkeitsnahes Klassifikationsschema ermöglicht die Betrachtung verschiedener Approximationsstufen geometrischer Nichtlinearität im Rahmen großer Rotationen. Energiekonsistente Transformationen führen zur Entwicklung einfachster Schalentheorien großer Rotationen mit hoher numerischer Leistungsfähigkeit. Zugehörige eindimensional reduzierte Varianten beschreiben ebene Deformationen dünner elastischer Balken. Auf der Grundlage der klassischen FEM in Form des Weggrößenverfahrens werden Computerprogramme zur Berechnung gekrümmter Balken und Rotationsschalen mit Flexibilität hinsichtlich der Theorievarianten entwickelt. Am Ende stehen umfangreiche vergleichende Untersuchungen ausgewählter Spannungs- und Stabilitätsprobleme aus den Bereichen Balken, Platte und Schale sowie die quantitative Analyse des sogenannten „inneren“ Fehlers verschiedener flächenhafter Modellvarianten.

## Summary

The equations of the boundary value problem and stability equations of a general Lagrangean geometrically nonlinear first-approximation shell theory are derived in tensor notation. Furthermore using a classification scheme based on the polar decomposition theorem different levels of geometrical nonlinearity within the range of large rotations are considered and simplest energy-consistent large rotation shell theories with high numerical efficiency are developed. Corresponding one-dimensional reduction leads to equations describing in-plane deformations of curved bars. Using classical FEM displacement method computer programs for curved bars and shells of revolution are developed including various shell theories. Finally well chosen stress and stability problems of bars, plates and shells are investigated and a quantitative analysis of the so called "intrinsic" error of different shell models is given.

INHALTSVERZEICHNIS

	<u>Seite</u>
1. EINLEITUNG	1
2. ZUR BESCHREIBUNG VON GEOMETRIE UND VERFORMUNG VON SCHALEN	4
2.1. Differentialgeometrie gekrümmter Flächen und Raumkurven	4
2.2. Kinematik der Schalenmittelfläche	11
2.3. Kinematik des Schalenraumes	16
2.4. Kinematik des Schalenrandes	21
3. KONSTITUTIVE BEZIEHUNGEN	25
3.1. Die erste Approximation der Verformungs- energiedichte	25
3.2. Äquivalente Krümmungsänderungsbeziehungen und konstitutive Gesetze	28
3.3. Reduzierte Kinematik für kleine Dehnungen	29
4. DAS DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEM DER ALLGEMEINEN GEOMETRISCH NICHTLINEAREN SCHALENTHEORIE	32
4.1. Einleitende Betrachtungen	32
4.2. Die innere virtuelle Arbeit	34
4.3. Die äußere virtuelle Arbeit	37
4.4. Das Differentialgleichungssystem des Rand- wertproblems und das Funktional des Ge- samtpotentials	40
5. DIE STABILITÄTSGLEICHUNGEN DER ALLGEMEINEN GEOME- TRISCH NICHTLINEAREN SCHALENTHEORIE	43
5.1. Einleitende Betrachtungen	43
5.2. Taylorreihenentwicklung des Gesamtpotentials	45
5.3. Das energetische Kriterium und der vollstän- dige Satz Stabilitätsgleichungen	51

	<u>Seite</u>
6. VERSCHIEDENE APPROXIMATIONSSTUFEN EINER THEORIE	
GROSSER ROTATIONEN	57
6.1. Das Klassifikationsschema	57
6.2. Zweidimensionale Betrachtungen	59
6.2.1. Theorie groß/großer Rotationen	59
6.2.2. Theorie groß/moderater Rotationen	62
6.2.3. Theorie groß/kleiner Rotationen	64
6.2.4. Theorie moderater Rotationen	65
6.3. Eindimensionale Betrachtungen	67
6.4. Vergleichende Betrachtungen	76
7. EINFACHSTE GEOMETRISCH NICHTLINEARE SCHALENTHEORIEN	
GROSSER ROTATIONEN	80
7.1. Kinematische Beziehungen	80
7.2. Das Differentialgleichungssystem des Randwert- problems	83
7.3. Konsistente Stabilitätsgleichungen	86
8. FINITE-ELEMENT-FORMULIERUNG FÜR ROTATIONSSCHALEN UND GEKRÜMMTE BALKEN	89
8.1. Einführende Betrachtungen	89
8.2. Grundlegende Beziehungen in diskretisierter Form	92
8.2.1. Die Geometriebeschreibung	92
8.2.2. Die nichtlinearen Gleichgewichtsbedingungen	94
8.2.3. Die Stabilitätsgleichungen für nicht- axialsymmetrisches Beulen	96
8.3. Programmtechnische Realisierung	98
9. ANWENDUNGSBEISPIELE	100
9.1. Balkenprobleme	100
9.1.1. Elastika	103
9.1.2. Mäßig flacher Bogen unter Einzellast	105
9.1.3. Flacher Bogen unter Einzellast/Konver- genzvergleich	107
9.1.4. Mäßig steiler Bogen unter Einzellast	109

	<u>Seite</u>
9.1.5. Steiler Bogen unter unsymmetrischer Einzellast	114
9.1.6. Halbkreisbogen unter Einzellast	117
9.2. Plattenprobleme	119
9.2.1. Kreisplatte unter Gleichlast	120
9.2.2. Kreisringplatte mit variabler Dicke	121
9.3. Schalenprobleme	123
9.3.1. Kugelkalotte unter radialer Flächenlast	125
9.3.2. Kreiszylinderschale unter axialer Ring- last	128
9.3.3. Halbkugel unter Ringlast	131
9.3.4. Torus unter Ringlast, variabler Radius	135
9.4. Diskussion der Ergebnisse	139
 ANHANG	 141
 LITERATURVERZEICHNIS	 151

## 1. EINLEITUNG

Die unterschiedlichen Trageigenschaften dünner elastischer Schalen spiegeln sich in der Vielfalt möglicher Last-Verformungsbeziehungen wieder.

Zu einer genauen Erfassung dieser komplizierten mechanischen Systemantworten sind komplexe Modelltheorien und leistungsstarke Näherungsverfahren unumgänglich, so daß erst die sprunghafte Entwicklung elektronischer Rechenanlagen und computerorientierter Lösungsverfahren es ermöglichte, Tragwerksberechnungen auf nahezu alle Bereiche auszudehnen.

Vor diesem Hintergrund ist auch die intensive Forschung auf dem Gebiet dünner elastischer Schalen zu sehen, die seit Mitte der fünfziger Jahre zur Formulierung einer Vielzahl geometrisch linearer und nichtlinearer Theorien führte. Vor allem die Arbeiten von Koiter [1.2 - 4] förderten das Verständnis für die bei der Ableitung flächenhafter Modelltheorien unter Annahme der Kirchhoff-Love-Hypothese auftretenden grundlegenden Probleme.

Die Anwendung des polaren Zerlegungssatzes der Kontinuumsmechanik ermöglicht es, die Größe der Dehnungen und Rotationen eines Material-elementes unabhängig voneinander zu behandeln. Den Arbeiten von Pietraszkiewicz [1.6 - 8] folgend, können damit verschiedene geometrisch lineare und nichtlineare Schalentheorien bei Annahme kleiner Dehnungen  $O(\theta^2)$ , ( $\theta$  typischer Schalenparameter,  $\theta^2 \ll 1$ ) durch Beschränkung der auftretenden Rotationswinkel  $\omega$  weiter klassifiziert werden: kleine Rotationen (= lineare Theorie):  $\omega \leq O(\theta^2)$ , moderate Rotationen:  $\omega = O(\theta)$ , große Rotationen:  $\omega = O(\sqrt{\theta})$ , finite Rotationen:  $\omega \geq O(1)$ .

Im Bereich moderater Rotationen liegen in der Literatur eine Vielzahl umfassender theoretischer und numerischer Untersuchungen vor (s. z. B. [1.2, 1.5, 1.7, 1.11, 1.13 - 1.16]). Die Zahl der Arbeiten auf dem Gebiet großer und finiter Rotationen (s. z. B. [1.1, 1.9, 1.12]) ist vergleichsweise gering. Vor allem im Hinblick auf die Ableitung leistungsfähiger Varianten mit hoher Praktikabilität hinsichtlich der numerischen Anwendung, gibt es noch viele offene Fragen.

Bei der Vielzahl der Formen, in denen Schalengleichungen in der Literatur erscheinen, ist es von besonderem Interesse, Abschätzungen für die Unterschiede zwischen Lösungen zu erhalten, die ausgehend von vermeintlich äquivalenten Schalentheorien gewonnen werden. Dieser sogenannte "innere" Fehler [1.3] ist dem Bereich der Modellfehler zuzuordnen. Mathematisch fundierte Ergebnisse liegen jedoch hierfür nur in der linearen Theorie vor [1.3 - 4].

Vergleichende Untersuchungen auf der Basis bereits in der Literatur vorhandener numerischer Berechnungen werden durch Verwendung verschiedener Näherungsverfahren, Lösungsalgorithmen, Elementformulierungen usw. erheblich erschwert. Ein weiteres Problem besteht darin, daß die untersuchten Systeme mit wenigen Ausnahmen keine Indikatoren für Näherungsstufen geometrisch nichtlinearer Schalentheorien sind.

In der vorliegenden Arbeit werden daher im wesentlichen zwei Ziele verfolgt

- die Ableitung konsistenter geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen,
- die Durchführung vergleichender numerischer Untersuchungen an Linien- und Flächentragwerken.

Im 2. Abschnitt werden die grundlegenden Beziehungen zur Bestimmung von Geometrie und Verformung einer Schale zusammengestellt. Nach Einführen der mit der Kirchhoff-Love-Hypothese kompatiblen ersten Approximation der Verformungsenergie dichte definieren wir im 3. Abschnitt unter Verwendung äquivalenter Krümmungsänderungstensoren konstitutive Beziehungen. Modifizierte kinematische Ausdrücke [1.9] ermöglichen die Ableitung der grundlegenden Gleichungen einer allgemeinen geometrisch nichtlinearen Schalentheorie ohne Beschränkung der Rotationen in vollständig Lagrangescher Beschreibungsweise im 4. Abschnitt. Setzt man voraus, daß die äußeren Lasten vom Typ "dead loads" sind, führt die Variation des Funktionals vom Gesamtpotential auf eine schwache Formulierung des Randwertproblems. Zur Bestimmung möglicher Singularitäten der Lösung befassen wir uns im 5. Abschnitt mit der Ableitung zugehöriger Stabilitätsgleichungen unter Verwendung eines energetischen Kriteriums.

Die Komplexität der Beziehungen einer allgemeinen Theorie läßt Vereinfachungen insbesondere im Hinblick auf die Praktikabilität bei der numerischen Anwendung sinnvoll erscheinen. Auf der Basis des in [1.10] eingeführten erweiterten Klassifikationsschemas werden daher im Rahmen der zweidimensionalen Betrachtungen des Abschnitts 6 konsistent approximierete Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen und Randparameterausdrücke einer Familie von neun Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen angegeben. Dem Konzept folgend, Schalentheorien in ihrer eindimensional reduzierten Form an hochgradig nichtlinearen Balkenproblemen einem Vorabtest zu unterziehen, befassen wir uns im Kapitel 6.3 mit der Formulierung allgemeiner Theorien gekrümmter Balken zur Beschreibung des einachsigen, ebenen Biegeproblems. Konsistente Approximationen für Theorien großer und moderater Rotationen werden vorgestellt. Kapitel 6.4 dient der Einordnung und Überprüfung verschiedener in der Literatur angegebener Schalentheorien aus dem Bereich großer und finiter Rotationen. Modifizierte, energetisch äquivalente Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen und Randparameterausdrücke bilden die Grundlage zur Formulierung einfachster Schalentheorien großer Rotationen im 7. Abschnitt.

Mit Hilfe der im 8. Abschnitt beschriebenen Finite-Element-Programme führen wir umfangreiche vergleichende Untersuchungen an Balken-, Platten- und Rotationsschalenproblemen durch. Die numerischen Ergebnisse werden im 9. Abschnitt diskutiert und gewertet.

2. ZUR BESCHREIBUNG VON GEOMETRIE UND VERFORMUNG VON SCHALEN

2.1 Differentialgeometrie gekrümmter Flächen und Raumkurven

Dieses Kapitel soll dazu dienen, die für spätere Betrachtungen notwendigen differentialgeometrischen Beziehungen gekrümmter Flächen und ihrer Randkurven aufzustellen. Hierbei wird auf die ausführlichen Abhandlungen dieses Themas in [2.3, 2.5, 2.6, 2.8, 2.13] Bezug genommen.

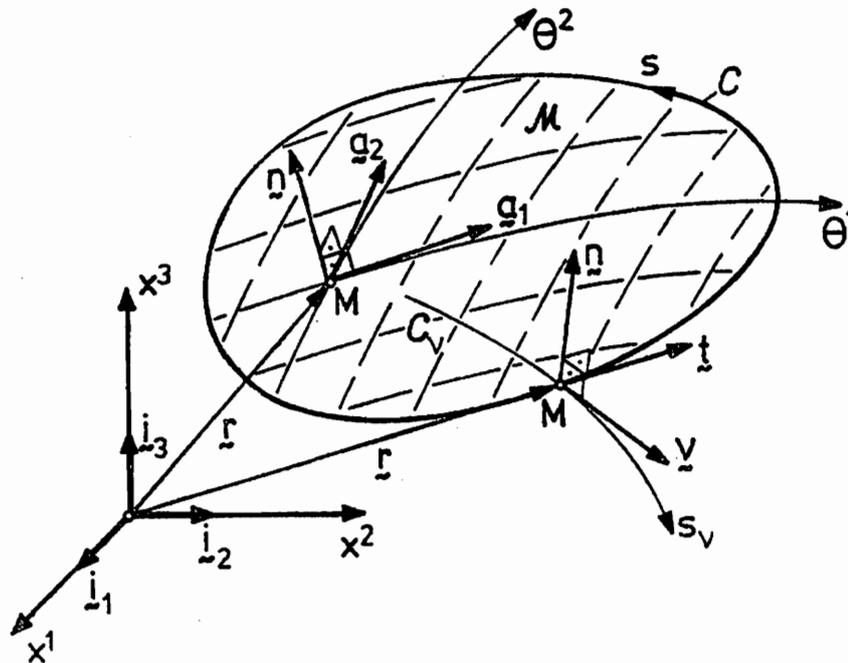


Abb. 2.1

Wir definieren die Mittelfläche einer Schale in der unverformten (Referenz-) Konfiguration  $M$  unter Zuhilfenahme konvektiver Gaußscher Flächenkoordinaten  $\theta^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) durch die Vektorfunktion

$$\underline{r} = \underline{f}(\theta^\alpha) = \sum_{k=1}^3 f^k(\theta^\alpha) \underline{i}_k = x^k \underline{i}_k \quad (2.1.1)$$

$\underline{r}$  bezeichne den Ortsvektor eines Flächenpunktes  $M \in M$  und  $x^k$  dessen Komponenten bezüglich eines feststehenden kartesischen Koordinatensystems im dreidimensionalen Euklidischen Raum (Abb. 2.1). Gemäß Einsteinscher

Summationskonvention wird über gegenständige Indizes summiert, wobei lateinische Indizes die Werte 1,2,3 und griechische Indizes 1 und 2 annehmen.

Wir definieren nun in jedem Punkt  $M \in M$  einen Satz kovarianter und kontravarianter Basisvektoren  $\underline{a}_\alpha$  bzw.  $\underline{a}^\alpha$

$$\underline{a}_\alpha = \underline{r}_{,\alpha} = x^k_{,\alpha} \underline{i}_k, \quad \underline{a}^\alpha \cdot \underline{a}_\beta = \delta^\alpha_\beta, \quad (2.1.2)$$

mit  $\delta^\alpha_\beta$  als Kronecker-Symbol und  $(\dots)_{,\alpha} = \partial(\dots)/\partial\theta^\alpha$ . Die Basisvektoren sind über das Kreuzprodukt mit dem Normaleneinheitsvektor  $\underline{n}$  auf folgende Weise verknüpft

$$\epsilon_{\alpha\beta} = (\underline{a}_\alpha \times \underline{a}_\beta) \cdot \underline{n}, \quad \epsilon^{\alpha\beta} = (\underline{a}^\alpha \times \underline{a}^\beta) \cdot \underline{n}, \quad \underline{n} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \underline{a}_\alpha \times \underline{a}_\beta. \quad (2.1.3)$$

Hierin sind die Komponenten des Permutationstensors der Fläche  $\epsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\epsilon^{\alpha\beta}$  bestimmt durch

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{a} e_{\alpha\beta}, \quad \epsilon^{\alpha\beta} = (\sqrt{a})^{-1} e^{\alpha\beta}, \quad (2.1.4)$$

$$e_{\alpha\beta} = e^{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = 1, \beta = 2 \\ 0 & \text{für } \alpha = \beta \\ -1 & \text{für } \alpha = 2, \beta = 1 \end{cases}.$$

Als Maßgrößen auf  $M$  führen wir den Metriktensor mit seinen kovarianten und kontravarianten Komponenten und zugehörigen Determinanten ein

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= \underline{a}_\alpha \cdot \underline{a}_\beta, & a^{\alpha\beta} &= \underline{a}^\alpha \cdot \underline{a}^\beta, \\ |a_{\alpha\beta}| &= a = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, & |a^{\alpha\beta}| &= \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Einige nützliche Identitäten lassen sich aus (2.1.4) mit (2.1.5) ableiten

$$\epsilon^{\alpha\lambda} \epsilon^{\beta\mu} a_{\alpha\beta} = a^{\lambda\mu}, \quad \epsilon_{\alpha\lambda} \epsilon_{\beta\mu} a^{\alpha\beta} = a_{\lambda\mu}, \quad (2.1.6)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\mu} = \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\mu - \delta_\beta^\lambda \delta_\alpha^\mu$$

und unter Zuhilfenahme von (2.1.3)

$$\begin{aligned} \underline{a}_\alpha \times \underline{a}_\beta &= \epsilon_{\alpha\beta} \underline{n} \quad , \quad \underline{a}^\alpha \times \underline{a}^\beta = \epsilon^{\alpha\beta} \underline{n} \quad , \\ \underline{n} \times \underline{a}_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta} \underline{a}^\beta \quad , \quad \underline{n} \times \underline{a}^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \underline{a}_\beta \quad . \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Jeden Flächentensor n-ter Stufe können wir durch seine Komponenten bezüglich einer kovarianten, kontravarianten oder gemischt varianten Basis darstellen

$$\begin{aligned} \underline{T} &= T^{\alpha\beta\dots\lambda\rho} \underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_\beta \dots \underline{a}_\lambda \otimes \underline{a}_\rho = T_{\alpha\beta\dots\lambda\rho} \underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta \dots \underline{a}^\lambda \otimes \underline{a}^\rho \\ T^{\alpha\beta\dots\lambda\rho} \underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_\beta \dots \underline{a}^\lambda \otimes \underline{a}^\rho &= \dots \quad , \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

wobei  $\underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_\beta$  für das Tensorprodukt von Basisvektoren steht. Die Beziehungen der einzelnen Komponenten des Flächentensors  $\underline{T}$  untereinander lassen sich bestimmen als

$$T^{\alpha\beta\dots\lambda\rho} = a^{\sigma\alpha} a^{\pi\beta} T_{\sigma\pi\dots\lambda\rho} = a^{\sigma\alpha} a^{\pi\beta} a_{\pi\lambda} a_{\mu\rho} T_{\sigma\pi\dots\lambda\rho} \dots \pi\mu \quad , \quad (2.1.9)$$

woraus sich eine Regel vom Heben und Senken von Indizes durch kovariante und kontravariante Komponenten des Metriktensors ableiten läßt.

Die Definition eines Tensors ist bestimmt durch sein Verhalten beim Übergang auf ein neues Koordinatensystem  $\theta'^\alpha = \theta'^\alpha(\theta^1, \theta^2)$ . So erhält man für einen beliebigen Flächentensor n-ter Stufe das Transformationsgesetz

$$\begin{aligned} \underline{T} &= T^{\alpha\beta\dots\lambda\rho} \underline{a}_\alpha \otimes \underline{a}_\beta \dots \underline{a}^\lambda \otimes \underline{a}^\rho \\ &= \frac{\partial \theta'^\sigma}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial \theta'^\pi}{\partial \theta^\beta} \dots \frac{\partial \theta'^\lambda}{\partial \theta^\pi} \frac{\partial \theta'^\rho}{\partial \theta'^\mu} T^{\alpha\beta\dots\lambda\rho} \underline{a}'_\sigma \otimes \underline{a}'_\pi \dots \underline{a}'^\lambda \otimes \underline{a}'^\mu \\ &= \underline{T}' \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

oder in Komponentenschreibweise

$$T^{\sigma\alpha} \dots \pi_{\mu} = \frac{\partial \theta'^{\sigma}}{\partial \theta^{\alpha}} \frac{\partial \theta'^{\alpha}}{\partial \theta^{\beta}} \dots \frac{\partial \theta'^{\lambda}}{\partial \theta'^{\pi}} \frac{\partial \theta^{\rho}}{\partial \theta'^{\mu}} T^{\alpha\beta} \dots \lambda\rho \quad (2.1.11)$$

Mit (2.1.10) läßt sich zeigen, daß  $a_{\alpha\beta}$  und  $a^{\alpha\beta}$  sowie  $\epsilon_{\alpha\beta}$  und  $\epsilon^{\alpha\beta}$  kovariante und kontravariante Komponenten von Flächentensoren 2-ter Stufe sind.

Differentiation des Normaleneinheitsvektors  $\underline{n}$  nach  $\theta^{\alpha}$  erklärt zwei Flächenvektoren  $\underline{n}_{,\alpha}$ , deren Komponenten

$$b_{\alpha\beta} = -\underline{n}_{,\alpha} \cdot \underline{a}_{\beta} = -\underline{n}_{,\beta} \cdot \underline{a}_{\alpha} = \underline{n} \cdot \underline{a}_{\alpha,\beta} \quad (2.1.12)$$

die Komponenten des Krümmungstensors der Mittelfläche darstellen.

Unter Verwendung von (2.1.5)<sub>2</sub> können die mittlere Krümmung  $H$  und das Gaußsche Krümmungsmaß  $K$  angegeben werden zu

$$H = \frac{1}{2} a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\alpha} \quad , \quad (2.1.13)$$

$$K = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\lambda} \epsilon^{\beta\mu} b_{\alpha\beta} b_{\lambda\mu} = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 \quad , \quad b = |b_{\alpha\beta}| \quad .$$

Die partielle Differentiation der Basisvektoren  $\underline{a}_{\alpha}$ ,  $\underline{a}^{\alpha}$  und des Normaleneinheitsvektors  $\underline{n}$  werden durch die Gleichungen von Gauß (2.1.14) und Weingarten (2.1.15) beschrieben

$$\underline{a}_{\alpha,\beta} = \Gamma^{\mu}_{\cdot\alpha\beta} \underline{a}_{\mu} + b_{\alpha\beta} \underline{n} \quad , \quad \underline{a}^{\alpha}_{,\beta} = -\Gamma^{\alpha}_{\cdot\beta\mu} \underline{a}^{\mu} + b_{\beta}^{\alpha} \underline{n} \quad , \quad (2.1.14)$$

$$\underline{n}_{,\beta} = -b_{\beta}^{\alpha} \underline{a}_{\alpha} \quad , \quad (2.1.15)$$

mit  $\Gamma^{\mu}_{\cdot\alpha\beta}$  als Christoffelsymbol 2. Art, das man mit Hilfe von (2.1.2)<sub>1,2</sub> und (2.1.5) erhält zu

$$\Gamma^{\mu}_{\cdot\alpha\beta} = \underline{a}_{\alpha,\beta} \cdot \underline{a}^{\mu} = \frac{1}{2} a^{\mu\lambda} (a_{\lambda\alpha,\beta} + a_{\beta\lambda,\alpha} - a_{\alpha\beta,\lambda}) \quad . \quad (2.1.16)$$

Ebenso führen wir die partielle Ableitung eines beliebigen Vektorfeldes  $\underline{v} = v^{\alpha} \underline{a}_{\alpha} + v_3 \underline{n} = v_{\alpha}^{\alpha} \underline{a}^{\alpha} + v_3 \underline{n}$  ein

$$\begin{aligned} \underline{v}_{,\beta} &= (v^{\alpha}_{|\beta} - b_{\beta}^{\alpha} v_3) \underline{a}_{\alpha} + (v_{3,\beta} + b_{\alpha\beta} v^{\alpha}) \underline{n} \\ &= (v_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} v_3) \underline{a}^{\alpha} + (v_{3,\beta} + b_{\beta}^{\alpha} v_{\alpha}) \underline{n} \quad , \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

wobei die kovariante Ableitung der Komponenten eines Flächentensors n-ter Stufe definiert ist durch

$$T^{\alpha\beta\dots\lambda\rho}|_{\sigma} = T^{\alpha\beta\dots\lambda\rho,\sigma} + T^{\mu\beta\dots\lambda\rho}\Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma} + T^{\alpha\mu\dots\lambda\rho}\Gamma^{\beta}_{\mu\sigma} + \dots$$

$$- T^{\alpha\beta\dots\mu\rho}\Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda} - T^{\alpha\beta\dots\lambda\mu}\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} + \dots \quad (2.1.18)$$

Die kovarianten Ableitungen der Basis- und des Normaleneinheitsvektors ergeben sich unter Beachtung von (2.1.14-15)

$$\underline{a}_{\alpha|\beta} = \underline{a}_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \underline{a}_{\lambda} = b_{\alpha\beta} \underline{\eta} \quad , \quad (2.1.19)$$

$$\underline{\eta}_{|\beta} = \underline{\eta}_{,\beta} = -b^{\alpha}_{\beta} \underline{a}_{\alpha}$$

Im Gegensatz zu den kovarianten Ableitungen von Tensorkomponenten (2.1.18) erfüllen sowohl die Christoffelsymbole 2. Art (2.1.16) als auch die partiellen Ableitungen von Flächentensorkomponenten die in (2.1.11) geforderten Tensoreigenschaften nicht. Die kovariante Ableitung einer Summe oder eines Produktes von Tensorkomponenten folgt den Regeln der ordentlichen Differentiation. Die Reihenfolge kovarianten Differenzierens hingegen ist im allgemeinen nicht vertauschbar. Mit Hilfe der Beziehungen (2.1.16), (2.1.4), (2.1.7) und (2.1.14 - 15) erhält man das Lemma von Ricci

$$a_{\alpha\beta|\lambda} = a^{\alpha\beta}{}_{|\lambda} = \epsilon_{\alpha\beta|\lambda} = \epsilon^{\alpha\beta}{}_{|\lambda} = 0 \quad . \quad (2.1.20)$$

Zusammen mit (2.1.18), (2.1.14) und (2.1.15) lassen sich aus (2.1.12) die Gleichungen von Mainardi und Codazzi ableiten

$$b_{\alpha\beta|\lambda} = b_{\alpha\lambda|\beta} \quad . \quad (2.1.21)$$

Sie beinhalten zusammen mit der Gleichung von Gauß

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu} = b_{\alpha\lambda} b_{\beta\mu} - b_{\alpha\mu} b_{\beta\lambda} \quad (2.1.22)$$

drei Bedingungen, die die sechs Komponenten  $a_{\alpha\beta}$  und  $b_{\alpha\beta}$  einer durch die

drei skalaren Komponenten ihres Ortsvektors  $\underline{r}$  definierten Fläche erfüllen müssen, wobei der Riemann-Christoffel Tensor der Fläche gegeben ist durch

$$R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu,\lambda} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\lambda,\mu} + \Gamma^{\rho}{}_{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\lambda} - \Gamma^{\rho}{}_{\beta\lambda}\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\mu} \quad , \quad (2.1.23)$$

auch ausdrückbar mit Hilfe von (2.1.16) durch die Komponenten des Metriktensors.

Wir werden nun die entsprechenden differentialgeometrischen Beziehungen für gekrümmte auf der Schalenmittelfläche  $M$  verlaufende Kurven zusammenstellen. In anschaulicher Verbindung mit Abb. 2.2 sind die Gleichungen der Randkurve  $C$  und einer ihr in jedem Punkt  $M \in C$  zugeordneten orthogonal verlaufenden Kurve  $C_{\nu}$  gegeben zu

$$C: \theta^{\alpha} = \theta^{\alpha}(s) \quad , \quad C_{\nu}: \theta^{\alpha} = \theta^{\alpha}(s_{\nu}) \quad , \quad (2.1.24)$$

mit  $s$  und  $s_{\nu}$  als zugehörigen Längenparametern. Der Einheitstangentenvektor  $\underline{t} = \underline{r}_{,s}$  und der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor  $\underline{v} = \underline{r}_{,s_{\nu}}$  sind gemäß (2.1.1 - 2) die Basisvektoren der neuen Flächenrandparameter  $\theta'^1 = s$  und  $\theta'^2 = s_{\nu}$  mit den Transformationsbeziehungen

$$\begin{aligned} \underline{t} &= \underline{n} \times \underline{v} = t^{\alpha} \underline{a}_{\alpha} = t_{\alpha} \underline{a}^{\alpha} \quad , \quad \underline{v} = \underline{t} \times \underline{n} = v^{\alpha} \underline{a}_{\alpha} = v_{\alpha} \underline{a}^{\alpha} \quad , \\ \underline{a}_{\alpha} &= v_{\alpha} \underline{v} + t_{\alpha} \underline{t} \quad , \quad \underline{a}^{\alpha} = v^{\alpha} \underline{v} + t^{\alpha} \underline{t} \quad , \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

wobei die Komponenten unter Zuhilfenahme von (2.1.11) und (2.1.7)<sub>2</sub> bestimmt werden

$$\begin{aligned} t^{\alpha} &= \frac{\partial \theta^{\alpha}}{\partial s} = \epsilon^{\beta\alpha} v_{\beta} \quad , \quad t_{\alpha} = \frac{\partial s}{\partial \theta^{\alpha}} = \epsilon_{\beta\alpha} v^{\beta} \quad , \\ v^{\alpha} &= \frac{\partial \theta^{\alpha}}{\partial s_{\nu}} = \epsilon^{\alpha\beta} t_{\beta} \quad , \quad v_{\alpha} = \frac{\partial s_{\nu}}{\partial \theta^{\alpha}} = \epsilon_{\alpha\beta} t^{\beta} \quad . \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

Gemäß (2.1.10) läßt sich jeder Flächentensor auf die Basis der Parameterlinien  $s$  und  $s_{\nu}$  beziehen. Stellvertretend lauten die entsprechenden Beziehungen für einen Tensor 2-ter Stufe

$$\begin{aligned} \underline{T} &= T_{\alpha\beta} \underline{a}^{\alpha} \otimes \underline{a}^{\beta} = T_{\alpha\beta} (t^{\alpha} \underline{t} + v^{\alpha} \underline{v}) \otimes (t^{\beta} \underline{t} + v^{\beta} \underline{v}) \\ &= T_{\nu\nu} \underline{v} \otimes \underline{v} + T_{t\nu} \underline{t} \otimes \underline{v} + T_{\nu t} \underline{v} \otimes \underline{t} + T_{tt} \underline{t} \otimes \underline{t} \quad , \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

mit den physikalischen Komponenten

$$\begin{aligned} T_{\nu\nu} &= T_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta, & T_{t\nu} &= T_{\alpha\beta} t^\alpha v^\beta, \\ T_{\nu t} &= T_{\alpha\beta} v^\alpha t^\beta, & T_{tt} &= T_{\alpha\beta} t^\alpha t^\beta. \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

Abschließend wollen wir die Ableitungen des orthonormierten Dreibeins  $\underline{v}$ ,  $\underline{t}$ ,  $\underline{n}$  in tangentialer und außennormaler Richtung bestimmen. Differenziert man demgemäß die Identitäten

$$\begin{aligned} \underline{v} \cdot \underline{v} &= \underline{t} \cdot \underline{t} = \underline{n} \cdot \underline{n} = 1, \\ \underline{v} \cdot \underline{t} &= \underline{v} \cdot \underline{n} = \underline{t} \cdot \underline{n} = 0, \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

ergibt sich mit (2.1.16), (2.1.25), (2.1.17), (2.1.12), (2.1.28)<sub>1,2</sub> und (2.1.5)<sub>1</sub>

$$\begin{aligned} \underline{v}_{,s} &= \kappa_t \underline{t} - \tau_t \underline{n}, & \underline{v}_{,s_\nu} &= \sigma_\nu \underline{n}, \\ \underline{t}_{,s} &= \sigma_t \underline{n} - \kappa_t \underline{v}, & \underline{t}_{,s_\nu} &= -\tau_\nu \underline{n}, \\ \underline{n}_{,s} &= \tau_t \underline{v} - \sigma_t \underline{t}, & \underline{n}_{,s_\nu} &= \tau_\nu \underline{t} - \sigma_\nu \underline{v}. \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

$\kappa_t$  bzw.  $\kappa_\nu$  sind dabei die geodätischen Krümmungen,  $\sigma_t$  bzw.  $\sigma_\nu$  die Normalkrümmungen und  $\tau_t$  bzw.  $\tau_\nu$  die geodätische Torsion der Parameterlinien  $s$  bzw.  $s_\nu$

$$\begin{aligned} \kappa_t &= t^\alpha t^\beta v_{\alpha|\beta}, & \kappa_\nu &= v^\alpha v^\beta t_{\alpha|\beta}, \\ \sigma_t &= b_{tt}, & \sigma_\nu &= b_{\nu\nu}, \\ \tau_t &= -b_{\nu t}, & \tau_\nu &= -b_{\nu t} = \tau_t. \end{aligned} \quad (2.1.31)$$

## 2.2 Kinematik der Schalenmittelfläche

In vollständig Lagrangescher Beschreibung werden die grundlegenden differentialgeometrischen Beziehungen einer verformten Fläche zusammengestellt. Ausführliche Darstellungen finden sich in [2.13-14, 2.9, 2.6].

Alle Größen der verformten Konfiguration kennzeichnen wir im folgenden durch einen Querstrich, wie z. B.  $\bar{r}_\alpha$ ,  $\bar{a}_\alpha$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{a}_{\alpha\beta}$ , ... . Sie sind durch Größen des bekannten Referenzzustandes und Verformungskomponenten bezüglich der Referenzbasis  $\underline{a}_\alpha$ ,  $\underline{n}$  auszudrücken.

Die Beziehungen des Kapitels (2.1) gelten analog. Es sind jedoch ungestrichelte durch quergestrichelte Größen zu ersetzen.

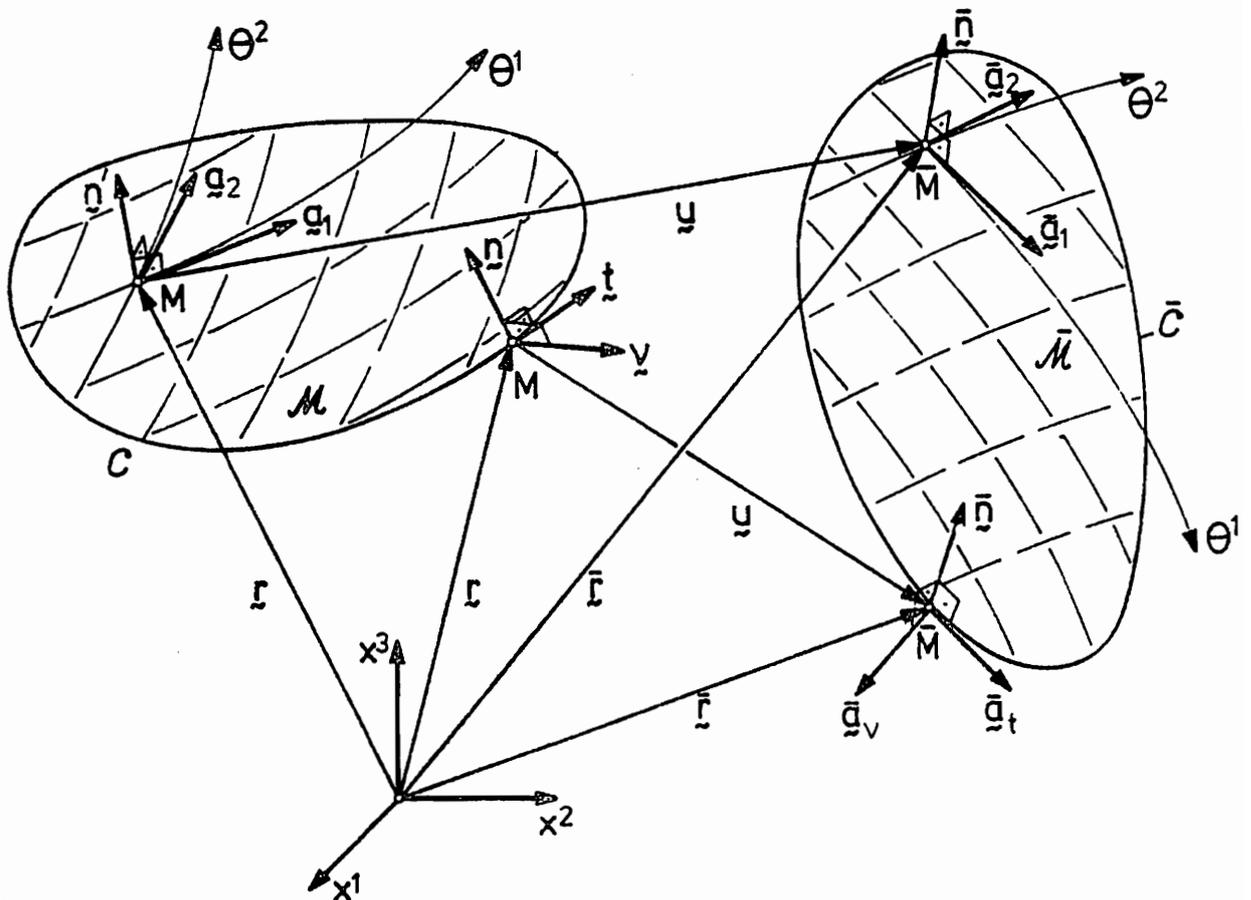


Abb. 2.2

Gemäß Abb. 2.2 wird jeder Punkt  $M \in \bar{M}$  der Schalenmittelfläche mit zugehörigen konvektiven Koordinaten  $\theta^\alpha$  durch den Verschiebungsvektor

$$\underline{u} = \underline{u}(\theta^\alpha) = u^\alpha \underline{a}_\alpha + w \underline{n} = u_\alpha \underline{a}^\alpha + w \underline{n} \quad (2.2.1)$$

in seine verformte Position  $\bar{M}(\theta^\alpha) \in \bar{M}$  überführt. Seine neue Lage auf  $\bar{M}$  läßt sich durch den Ortsvektor

$$\bar{\underline{r}} = \bar{\underline{r}}(\theta^\alpha) = \bar{x}^k(\theta^\alpha) \underline{i}_k = \underline{r}(\theta^\alpha) + \underline{u}(\theta^\alpha) \quad (2.2.2)$$

angeben. Analog zu (2.1.2) definieren wir in jedem Punkt  $\bar{M} \in \bar{M}$  einen Satz kovarianter Basisvektoren

$$\begin{aligned} \bar{\underline{a}}_\alpha &= \bar{\underline{r}}_{,\alpha} = \underline{a}_\alpha + \underline{u}_{,\alpha} \\ &= l^\lambda{}_\alpha \underline{a}_\lambda + \varphi_\alpha \underline{n} \quad , \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} l_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta} \quad , \\ \varphi_{\alpha\beta} &= u_{\alpha|\beta} - b_{\alpha\beta} w = \theta_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\beta} \quad , \\ \varphi_\alpha &= w_{,\alpha} + b_\alpha^\lambda u_\lambda \quad . \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Die Komponenten  $\varphi_\alpha$  werden auch als linearisierte Rotationen der Flächennormalen,  $\omega_{\alpha\beta}$  als linearisierte Rotationen um die Normale und  $\theta_{\alpha\beta}$  als linearisierte Dehnung der Schalenmittelfläche bezeichnet [2.13, 2.18]

$$\begin{aligned} \theta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\alpha}) = \frac{1}{2}(u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} w = \theta_{\beta\alpha} \quad , \\ \omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\varphi_{\beta\alpha} - \varphi_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}(u_{\beta|\alpha} - u_{\alpha|\beta}) = -\omega_{\beta\alpha} \quad , \\ \varphi &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} u_{\beta|\alpha} \quad . \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Insbesondere ist die Geometrie der verformten Schalenmittelfläche durch die Komponenten des Metriktensors  $\bar{a}_{\alpha\beta}$  und des Krümmungstensors  $\bar{b}_{\alpha\beta}$  gegeben, die die Gleichungen von Codazzi-Gauß (2.1.21 - 22) erfüllen müssen. Zur alternativen Beschreibung der Schalenverformung unter Verwendung von Dehnungsmaßen definieren wir zunächst mit ihrer Hilfe einen Dehnungstensor der Mittelfläche

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{a}_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) \quad . \quad (2.2.6)$$

Während diese Beziehung in der Literatur generell Verwendung findet, gibt es für das zweite Dehnungsmaß, den Krümmungsänderungstensor, verschiedene, zueinander äquivalente Definitionen

$$\tilde{\alpha}_{\alpha\beta} = - \left[ \underbrace{-\left(\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}\right)}_{\sim} + \frac{1}{2} \underbrace{b_{\alpha}^{\lambda} \gamma_{\lambda\beta}}_{=} + \frac{1}{2} \underbrace{b_{\beta}^{\lambda} \gamma_{\lambda\alpha}}_{=} + \underbrace{b_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha}_{\alpha}}_{=} \right] , \quad (2.2.7)$$

die wir durch Vernachlässigung entsprechend markierter Terme aus (2.2.7) gewinnen können (s. Tab. 2.1).

	Streichen von Termen gekennzeichnet mit	ergibt den Krümmungsänderungstensor
1.	— <u>~</u> = —	Pietraszkiewicz [2.13], Krätzig [2.8], Basar [2.1], Budiansky [2.2], Sanders [2.17], Leonard [2.9], Green u. Zerna [2.3], Naghdy [2.11];
2.	— <u>~</u> —	Pietraszkiewicz [2.12 - 15], Budiansky [2.2]
3.	— = —	Koiter [2.6]
4.	— —	Koiter [2.6], Koiter u. Simmonds [2.7]
5.	= —	Koiter [2.6]
6.	<u>~</u>	Budiansky [2.2]
7.	<u>~</u> =	Pietraszkiewicz [2.16]

Tab. 2.1

Die Varianten 1 - 4 sind geprägt durch die Terme  $-(\bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})$  und weichen voneinander lediglich durch eine unterschiedliche Vorzeichendefinition des Krümmungstensors  $b_{\alpha\beta}$  ( $\sim$ ) und die Mitnahme einiger Korrekturglieder im Sinne einer "best linear theory" [2.18] ab. Insbesondere enthalten sie nichtrationale Beziehungen in den Verschiebungen und deren Flächenableitungen (s. auch (2.2.15)). Dies führte zur Modifikation durch Multiplikation des Krümmungstensors  $\bar{b}_{\alpha\beta}$  mit der Invarianten  $\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}$ , die den Varianten 5 - 7 zugrunde liegt. Nichtrationale Anteile werden umgangen, und die resultierenden Tensorkomponenten enthalten Polynome bis zur 3. Ordnung. Damit gelang erstmals die Ableitung des vollständigen Gleichungssatzes einschließlich zugehöriger Randbedingungen einer allgemeinen Theorie dünner elastischer Schalen [2.16].

Um die Schalendehnungsmaße (2.2.6) und (2.2.7) vollständig durch Größen des Referenzzustandes auszudrücken, benötigen wir entsprechende Beziehungen für die Komponenten des Metriktensors  $\bar{a}_{\alpha\beta}$  und des Krümmungstensors  $\bar{b}_{\alpha\beta}$ . So erhält man aus (2.1.5)<sub>1</sub> mit Hilfe von (2.2.3 - 4)

$$\bar{a}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\beta\alpha} + \varphi_{\alpha}\varphi_{\beta} + \varphi_{\alpha}^{\lambda}\varphi_{\lambda\beta} \quad (2.2.8)$$

und unter Verwendung von (2.1.4), (2.1.8), (2.1.6) und (2.2.6)

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{\alpha\beta} &= \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \epsilon_{\alpha\beta} \quad , \quad \bar{\epsilon}^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} \epsilon^{\alpha\beta} \quad , \\ \bar{a}^{\alpha\beta} &= \frac{a}{\bar{a}} (a^{\alpha\beta} (1 + 2\gamma_{\lambda}^{\lambda}) - 2\gamma^{\alpha\beta}) \quad , \\ \frac{\bar{a}}{a} &= 1 + 2\gamma_{\lambda}^{\lambda} + 2(\gamma_{\lambda}^{\lambda}\gamma_{\mu}^{\mu} - \gamma_{\mu}^{\lambda}\gamma_{\lambda}^{\mu}) \quad . \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Der Normaleneinheitsvektor  $\bar{n}$  auf  $\bar{M}$  ergibt sich zu

$$\bar{n} = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^{\alpha\beta} \bar{a}_{\alpha} \times \bar{a}_{\beta} = n_{\alpha} \bar{a}^{\alpha} + n \bar{\eta} \quad , \quad (2.2.10)$$

wobei die Komponenten  $n_{\alpha}$  und  $n$  mit (2.2.3), (2.1.7)<sub>1</sub>, (2.2.9)<sub>1</sub>, (2.1.6)<sub>2</sub>, (2.2.4) bestimmt werden

$$n_{\alpha} = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} m_{\alpha} = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} (-(1 + \theta_{\alpha}^{\alpha}) \varphi_{\alpha} + \varphi^{\lambda} (\theta_{\lambda\alpha} - \omega_{\lambda\alpha})) \quad , \quad (2.2.11)$$

$$n = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} m = \sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} \left( 1 + \theta_{\alpha}^{\alpha} + \frac{1}{2} \theta_{\alpha}^{\alpha} \theta_{\rho}^{\rho} - \frac{1}{2} \theta_{\rho}^{\alpha} \theta_{\alpha}^{\rho} + \varphi^2 \right) \quad .$$

Weitere Umformungen ergeben für die kovarianten Komponenten des Krümmungstensors auf  $\bar{M}$  den Ausdruck

$$\begin{aligned} \bar{b}_{\alpha\beta} &= \bar{a}_{\alpha,\beta} \cdot \bar{n} \\ &= n_{\lambda} d^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta} + n d_{\alpha\beta} \quad , \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

mit den Abkürzungen

$$d^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta} = \theta_{\alpha}^{\lambda} |_{\beta} + \theta_{\beta}^{\lambda} |_{\alpha} - \theta_{\alpha\beta} |^{\lambda} - b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \quad , \quad (2.2.13)$$

$$d_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha} |_{\beta} + \varphi_{\beta} |_{\alpha}) + \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda\beta} + \frac{1}{2} b_{\beta}^{\lambda} \varphi_{\lambda\alpha} \quad .$$

Unter Zuhilfenahme der vorstehend abgeleiteten Beziehungen erhalten wir schließlich die Komponenten der Schalendehnungstensoren (2.2.6) und (2.2.7)

$$\gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} + \frac{1}{2} (\theta_{\alpha}^{\lambda} - \omega_{\alpha}^{\lambda}) (\theta_{\lambda\beta} - \omega_{\lambda\beta}) \quad , \quad (2.2.14)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{\alpha\beta} &= -(\bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) \\ &= -(n_{\lambda} d^{\lambda}_{\cdot\alpha\beta} + n d_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) \quad , \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}^* &= -(\sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} \bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2} [ l^{\lambda}_{\cdot\alpha} (m_{\lambda|\beta} - b_{\lambda\beta} m) + l^{\lambda}_{\cdot\beta} (m_{\lambda|\alpha} - b_{\lambda\alpha} m) + \\ &\quad + \varphi_{\alpha} (m_{\cdot\beta} + b_{\beta}^{\lambda} m_{\lambda}) + \varphi_{\beta} (m_{\cdot\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} m_{\lambda}) ] + b_{\alpha\beta} \quad . \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Dabei liegen  $\kappa_{\alpha\beta}$  den Varianten 1 - 4 und  $\rho_{\alpha\beta}^*$  den Varianten 5 - 7 zugrunde und sind gemäß Tab. 2.1 mit Hilfe von (2.2.14) zu modifizieren.

### 2.3 Kinematik des Schalenraumes

In diesem Kapitel wird die Kinematik der Schale als dreidimensionaler dünner Körper in Abhängigkeit zweidimensionaler, auf die Mittelfläche bezogener Zustandsgrößen, dargestellt. Grundlage zur Beschreibung der Dehnungen und Rotationen eines Materialelementes bildet die Kirchhoff-Love-Hypothese. Diese Annahme stellt einen Sonderfall der in [2.12 - 2.15] abgeleiteten exakten Theorie für die in einer Schale auftretenden Rotationen dar.

Der Schalenraum  $\mathcal{P}$  sei durch räumliche konvektive Koordinaten  $\theta^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , markiert, mit  $\theta^3$  als zur Mittelfläche rechtwinkliger Abstandskoordinate,  $-\frac{h}{2} \leq \theta^3 \leq +\frac{h}{2}$  (Abb. 2.3).

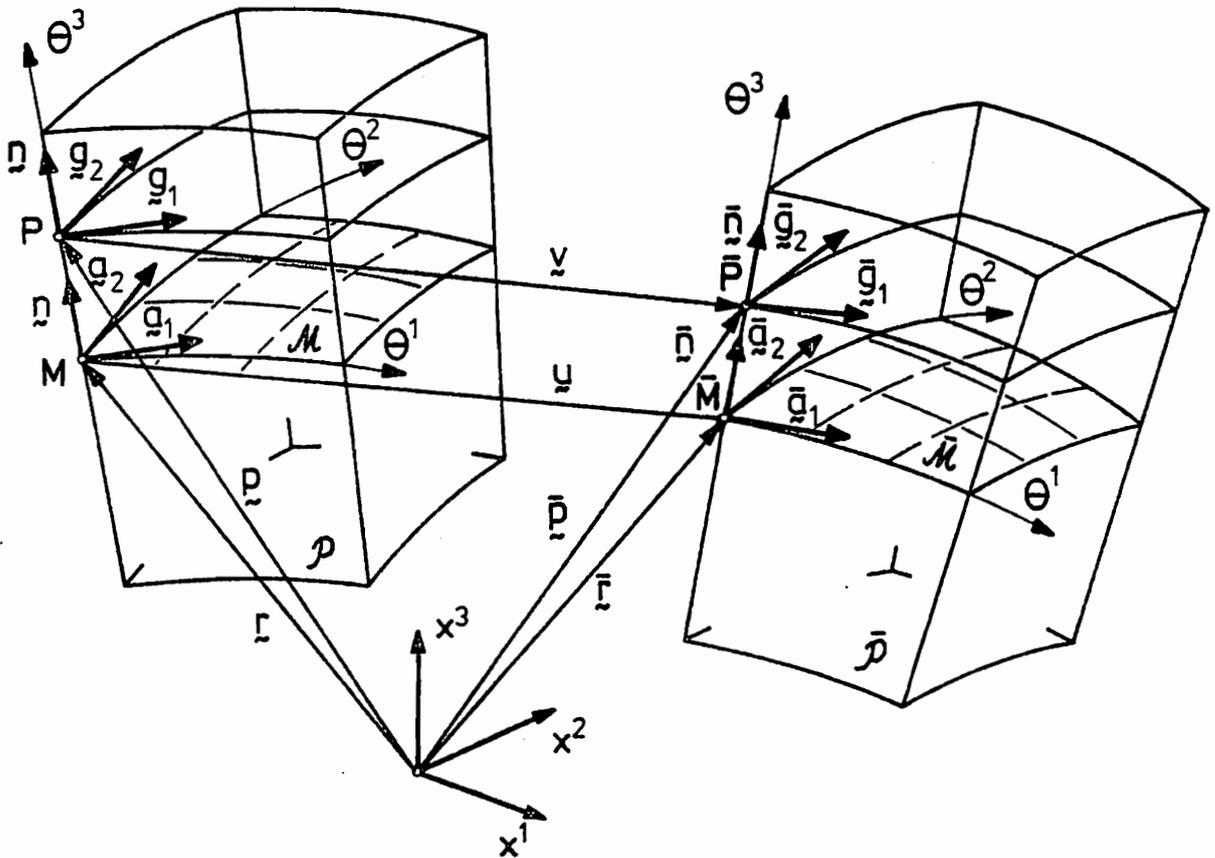


Abb. 2.3

Wie in Abb. 2.3 dargestellt, ergibt sich der Ortsvektor eines beliebigen Schalenpunktes  $P \in \mathcal{P}$  zu

$$\underline{\rho}(\theta^i) = \underline{r}(\theta^\alpha) + \theta^3 \underline{n}(\theta^\alpha) \quad (2.3.1)$$

Analog zu (2.2.3) werden nun kovariante und kontravariante Basisvektoren mit zugehörigen Metrikkomponenten in  $\mathcal{P}$  eingeführt

$$\underline{g}_\alpha = \underline{\rho}_{,\alpha} = \mu_\alpha^\lambda \underline{a}_\lambda, \quad \underline{g}_3 = \underline{\rho}_{,3} = \underline{n}, \quad (2.3.2)$$

$$\underline{g}^\alpha = \lambda_\lambda^\alpha \underline{a}^\lambda, \quad \underline{g}^3 = \underline{n}, \quad \underline{g}^\alpha \cdot \underline{g}_\beta = \delta_\beta^\alpha, \quad \mu_\alpha^\lambda \lambda_\lambda^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad (2.3.3)$$

$$g_{\alpha\beta} = \mu_\alpha^\lambda \mu_\beta^\mu a_{\lambda\mu}, \quad g^{\alpha\beta} = \lambda_\lambda^\alpha \lambda_\mu^\beta a^{\lambda\mu}, \quad g = |g_{\alpha\beta}|, \quad (2.3.4)$$

$$\mu_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - \theta^3 b_\alpha^\beta, \quad \mu = |\mu_\alpha^\beta| = 1 - 2\theta^3 H + (\theta^3)^2 K = \sqrt{\frac{g}{a}}, \quad (2.3.5)$$

sowie entsprechende Beziehungen für die verformte Konfiguration  $\bar{\mathcal{P}}$ . Wir definieren den Einheitstensor  $\underline{1}$ , den Krümmungstensor  $\underline{B}$  und einen Shif-tertensoren  $\underline{H}$  in einem Punkt  $P(\theta^i)$

$$\underline{1} = g_{ij} g^i \otimes g^j, \quad \underline{B} = b_{\alpha\beta} \underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta, \quad (2.3.6)$$

$$\underline{H} = \underline{g}_\alpha \otimes \underline{a}^\alpha + \underline{n} \otimes \underline{n} = \underline{1} - \theta^3 \underline{B}$$

Der Verformungsgradiententensor  $\underline{F}$  ermöglicht eine vollständige Beschreibung der Kinematik eines Materialelementes in der Umgebung des Punktes  $P$

$$d\underline{\bar{p}} = \underline{\bar{p}}_{,i} d\theta^i = \underline{F} d\underline{\rho}, \quad (2.3.7)$$

$$\underline{F} = \underline{F}(P) = \underline{\bar{g}}_i \otimes g^i$$

Unter Zuhilfenahme von (2.3.6) erhält man mit (2.3.7) die bekannte Form des Greenschen Dehnungstensors  $\underline{E}$

$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{F}^T \cdot \underline{F} - \underline{1}) = \frac{1}{2}(\underline{\bar{g}}_{ij} - g_{ij}) \quad (2.3.8)$$

Führen wir nun die Kirchhoff-Love-Hypothese ein, wobei Normalen zur Mittelfläche im Referenzzustand nach der Verformung in Normalen auf  $\bar{M}$  ohne Längenänderung übergehen, liefern weitere Umformungen mit (2.2.10 - 11) bzw. (2.3.6 - 7) den Verschiebungsvektor  $\underline{v}$  und den Verformungsgradiententensor  $\underline{F}$  eines Punktes P, ausgedrückt durch an der Schalenmittelfläche definierte Zustandsfelder

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \underline{u} + \theta^3 \underline{\beta} \quad , \quad \underline{\beta} = \underline{\bar{n}} - \underline{n} \quad , \\ \underline{F} &= (\underline{G} - \theta^3 \underline{\bar{B}} \cdot \underline{G}) \cdot \underline{H}^{-1} \quad , \\ \underline{G} &= \underline{F}(\theta^3 = 0) = \underline{\bar{a}}_\alpha \otimes \underline{a}^\alpha + \underline{\bar{n}} \otimes \underline{n} \quad . \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Das Greensche Dehnungsmaß  $\underline{E}$  kann damit angegeben werden als

$$\underline{E} = \underline{H}^{-1} (\underline{\gamma} + \theta^3 \underline{\kappa} + (\theta^3)^2 \underline{\nu}) \underline{H}^{-1} \quad , \quad (2.3.10)$$

wobei  $\underline{\gamma}$ ,  $\underline{\kappa}$  und  $\underline{\nu}$

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \frac{1}{2} (\underline{\bar{a}}_{\alpha\beta} - \underline{a}_{\alpha\beta}) \underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta \quad , \\ \underline{\kappa} &= -(\underline{\bar{b}}_{\alpha\beta} - \underline{b}_{\alpha\beta}) \underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta \quad , \\ \underline{\nu} &= \frac{1}{2} (\underline{\bar{b}}_\alpha^\lambda \underline{\bar{b}}_{\lambda\beta} - \underline{b}_\alpha^\lambda \underline{b}_{\lambda\beta}) \underline{a}^\alpha \otimes \underline{a}^\beta \quad , \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

die in Kapitel 2.1 abgeleiteten Lagrangeschen Dehnungsmaße der Mittelflächendeformation und  $\underline{\nu}$  eine von ihnen abhängige Dehnungsgröße sind.

Es ist anzumerken, daß die Eulersche Betrachtung der Kinematik eine zu (2.3.10) analoge Beziehung liefert [2.13, 2.10]. Die Komponenten der Lagrangeschen  $(\underline{\gamma}, \underline{\kappa}, \underline{\nu})$  und Eulerschen  $(\underline{\bar{\gamma}}, \underline{\bar{\kappa}}, \underline{\bar{\nu}})$  Verzerrungsmaße sind dann in konvektiven Koordinaten identisch. Erst durch Einführen entsprechender physikalischer Komponenten wird dieses verwirrende Bild entzerrt.

Mit Ausnahme einer möglichen Starrkörperverschiebung beschreibt der Verformungsgradiententensor  $\underline{G}$  den Deformationsprozeß der auf  $\bar{M}$  definierten Basisvektoren  $\underline{\bar{a}}_\alpha$ ,  $\underline{\bar{n}}$

$$\bar{\underline{a}}_\alpha = \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{a}}_\alpha \quad , \quad \bar{\underline{n}} = \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{n}} \quad . \quad (2.3.12)$$

Unter Anwendung des polaren Zerlegungssatzes [2.12 - 13] spalten wir  $\underline{\underline{G}}$  auf in einen sogenannten "right stretch tensor"  $\underline{\underline{U}}$  und einen Starrkörperrotationstensor  $\underline{\underline{R}}$

$$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \quad . \quad (2.3.13)$$

Dies ermöglicht eine Zerlegung der Verformung in eine reine Dehnung entlang der Hauptdehnungsrichtungen sowie eine anschließende Starrkörperrotation. So finden wir nach Änderung der Metrik unter Erhaltung der Normalen den Zwischenzustand

$$\check{\underline{\underline{a}}}_\alpha = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{a}}_\alpha \quad , \quad \check{\underline{\underline{n}}} = \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{n}} \quad , \quad (2.3.14)$$

der mit Hilfe des Rotationstensors  $\underline{\underline{R}}$  ohne weitere Änderung der Metrik in die verformte Konfiguration  $\bar{\underline{\underline{M}}}$  überführt wird.

$$\bar{\underline{\underline{a}}}_\alpha = \underline{\underline{R}} \cdot \check{\underline{\underline{a}}}_\alpha \quad , \quad \bar{\underline{\underline{n}}} = \underline{\underline{R}} \cdot \check{\underline{\underline{n}}} \quad . \quad (2.3.15)$$

Aus (2.3.14 - 15) ergeben sich mit (2.3.9)<sub>3</sub> die Beziehungen für den symmetrischen, positiv definiten Tensor  $\underline{\underline{U}}$  und den orthogonalen Tensor  $\underline{\underline{R}}$  in absoluter Notation

$$\underline{\underline{U}} = \check{\underline{\underline{a}}}_\alpha \otimes \check{\underline{\underline{a}}}^\alpha + \check{\underline{\underline{n}}} \otimes \check{\underline{\underline{n}}} \quad , \quad \underline{\underline{R}} = \bar{\underline{\underline{a}}}_\alpha \otimes \check{\underline{\underline{a}}}^\alpha + \bar{\underline{\underline{n}}} \otimes \check{\underline{\underline{n}}} \quad . \quad (2.3.16)$$

Dies liefert für den ersten Teil des aufgespaltenen Deformationsprozesses die Dehnungsmaße

$$\underline{\underline{\gamma}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{1}}) = \gamma_{\alpha\beta} \check{\underline{\underline{a}}}^\alpha \otimes \check{\underline{\underline{a}}}^\beta \quad , \quad \check{\underline{\underline{\gamma}}} = \underline{\underline{U}} - \underline{\underline{1}} = \check{\gamma}_{\alpha\beta} \check{\underline{\underline{a}}}^\alpha \otimes \check{\underline{\underline{a}}}^\beta \quad , \quad (2.3.17)$$

mit  $\check{\underline{\underline{\gamma}}}$  als sogenannten Tensor der Ingenieurdehnungen.

Die Starrkörperrotation der Basis  $\check{\underline{\underline{a}}}_\alpha$ ,  $\check{\underline{\underline{n}}}$  werden wir im folgenden alternativ durch einen Rotationsvektor  $\underline{\underline{\Omega}}$  beschreiben. Richtung und Betrag sind durch den Einheitsvektor  $\underline{\underline{e}}$  bzw. die Größe  $\sin \omega$  bestimmt, wobei  $\omega$  ( $|\omega| < \pi$ ) den während der Rotation überstrichenen Winkel angibt

$$\underline{\underline{\Omega}} = \sin \omega \underline{\underline{e}} \quad . \quad (2.3.18)$$

Geometrische Betrachtungen der Rotationen eines beliebigen Vektorfeldes gemäß (2.3.18) liefern zu (2.3.15) äquivalente Beziehungen

$$\begin{aligned}\bar{a}_\alpha &= \check{a}_\alpha + \underline{\Omega} \times \check{a}_\alpha + \frac{1}{2\cos^2\frac{\omega}{2}} \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \check{a}_\alpha) \quad , \\ \bar{n} &= \underline{n} + \underline{\Omega} \times \underline{n} + \frac{1}{2\cos^2\frac{\omega}{2}} \underline{\Omega} \times (\underline{\Omega} \times \underline{n}) \quad .\end{aligned}\tag{2.3.19}$$

Anzumerken ist, daß in der Literatur auch ein a priori orthogonal zu  $\underline{n}$  und  $\bar{n}$  stehender, vereinfachter Verdrehungsvektor Verwendung findet [2.1].

Schließlich erhalten wir mit Hilfe einiger zusätzlicher Transformationen [2.13] den Rotationsvektor  $\underline{\Omega}$  bezüglich der Basis des Zwischenzustandes und der Referenzkonfiguration

$$\begin{aligned}\underline{\Omega} &= \frac{1}{2} \bar{\epsilon}^{\alpha\beta} [(\bar{n} \cdot \check{a}_\alpha - \bar{a}_\alpha \cdot \underline{n}) \check{a}_\beta + (\bar{a}_\alpha \cdot \check{a}_\beta) \bar{n}] \quad , \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\lambda\mu} \{ [\bar{n}^\lambda - \bar{a}^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\lambda + \check{\gamma}_\alpha^\lambda) \varphi_\beta] \underline{a}^\mu + \\ &\quad + [\bar{a}^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\lambda + \check{\gamma}_\alpha^\lambda) (\delta_\beta^\mu + \varphi_{\beta}^\mu)] \bar{n} \} \quad .\end{aligned}\tag{2.3.20}$$

Die Aufspaltung des Deformationsprozesses gemäß (2.3.13) ermöglicht eine exakte Beschreibung der Dehnungen und Rotationen in einer Schale. Darauf aufbauend werden wir im Abschnitt 6 unter der Annahme kleiner Dehnungen eine systematische energiekonsistente Klassifizierung von Schalentheorien nach der Größe der auftretenden Rotationen durchführen.

## 2.4 Kinematik des Schalenrandes

Zur vollständigen Erfassung der Schalenkinematik beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit der Verformung des Schalenrandes. Insbesondere wird auf die ausführlichen Abhandlungen in [2.12 - 16] Bezug genommen.

Zur Beschreibung der Randdeformation benötigen wir zunächst die Beziehungen für die Verformung der Schalenrandkurve. Gemäß Abb. 2.2 definieren wir in jedem Punkt  $\bar{M} \in \bar{C}$  Tangenten- und Außennormalenvektoren

$$\bar{\underline{a}}_t = \bar{\underline{r}}_{,s} = t^\alpha \bar{\underline{a}}_\alpha = \underline{\underline{t}} + \underline{\underline{u}}_{,s} \quad , \quad (2.4.1)$$

$$\bar{\underline{a}}_\nu = \bar{\underline{a}}_t \times \bar{\underline{n}} = \bar{\epsilon}_{\lambda\alpha} t^\alpha \bar{\underline{a}}^\lambda = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \nu_\alpha \bar{\underline{a}}^\alpha \quad ,$$

mit dem Randverschiebungsvektor  $\underline{\underline{u}}(s)$  in physikalischen Komponenten

$$\underline{\underline{u}} = u_t \underline{\underline{t}} + u_\nu \underline{\underline{\nu}} + w \underline{\underline{n}} \quad . \quad (2.4.2)$$

Da sie im allgemeinen keine Einheitsvektoren sind, erklärt man analog zu (2.1.25) einen Satz orthonormierter Basisvektoren  $\bar{\underline{t}}, \bar{\underline{\nu}}, \bar{\underline{n}}$  auf  $\bar{C}$

$$\bar{\underline{t}} = \frac{1}{\bar{a}_t} \bar{\underline{a}}_t \quad , \quad \bar{\underline{\nu}} = \frac{1}{\bar{a}_t} \bar{\underline{a}}_t \times \bar{\underline{n}} \quad , \quad (2.4.3)$$

$$\bar{a}_t = |\bar{\underline{a}}_t| = |\bar{\underline{a}}_\nu| = \sqrt{1 + 2\gamma_{tt}} \quad ,$$

wobei wir mit (2.4.3)<sub>2</sub> auch die Beziehung zwischen den Längenparametern der verformten und unverformten Schalenrandkonfiguration erhalten

$$d\bar{s} = \bar{a}_t ds \quad . \quad (2.4.4)$$

Die vollständig Lagrangesche Beschreibungsweise erfordert die Darstellung der orthogonalen Basis  $\bar{\underline{a}}_t, \bar{\underline{n}}$  bezüglich der unverformten orthogonalen Basis  $\underline{\underline{t}}, \underline{\underline{\nu}}, \underline{\underline{n}}$ . Umformungen mit (2.4.1) und (2.1.30) führen schließlich zu

$$\bar{\underline{a}}_t = c_t \underline{\underline{t}} + c_\nu \underline{\underline{\nu}} + c_n \underline{\underline{n}} \quad , \quad (2.4.5)$$

$$\bar{\underline{n}} = n_t \underline{\underline{t}} + n_\nu \underline{\underline{\nu}} + n_n \underline{\underline{n}} \quad ,$$

mit den Abkürzungen

$$C_t = 1 + u_{t,s} + \alpha_t u_v - \sigma_t w, \quad C_v = u_{v,s} + \gamma_t w - \alpha_t u_t, \quad (2.4.6)$$

$$C_n = w_{,s} + \sigma_t u_t - \alpha_t u_v.$$

Die physikalischen Komponenten des verformten Normalenvektors  $\bar{n}$  lassen sich dabei mit Hilfe von (2.1.27-28) aus (2.2.11) bestimmen

$$\begin{aligned} n_v &= \sqrt{\frac{a}{a}} (-\varphi_v - \varphi_v \theta_{tt} + \varphi_t \theta_{tv} + \varphi_t \varphi) \\ n_t &= \sqrt{\frac{a}{a}} (-\varphi_t - \varphi_t \theta_{vv} + \varphi_v \theta_{vt} - \varphi_v \varphi) \\ n &= \sqrt{\frac{a}{a}} (1 + \theta_{vv} + \theta_{tt} + \theta_{vv} \theta_{tt} - \theta_{vt}^2 + \varphi^2) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

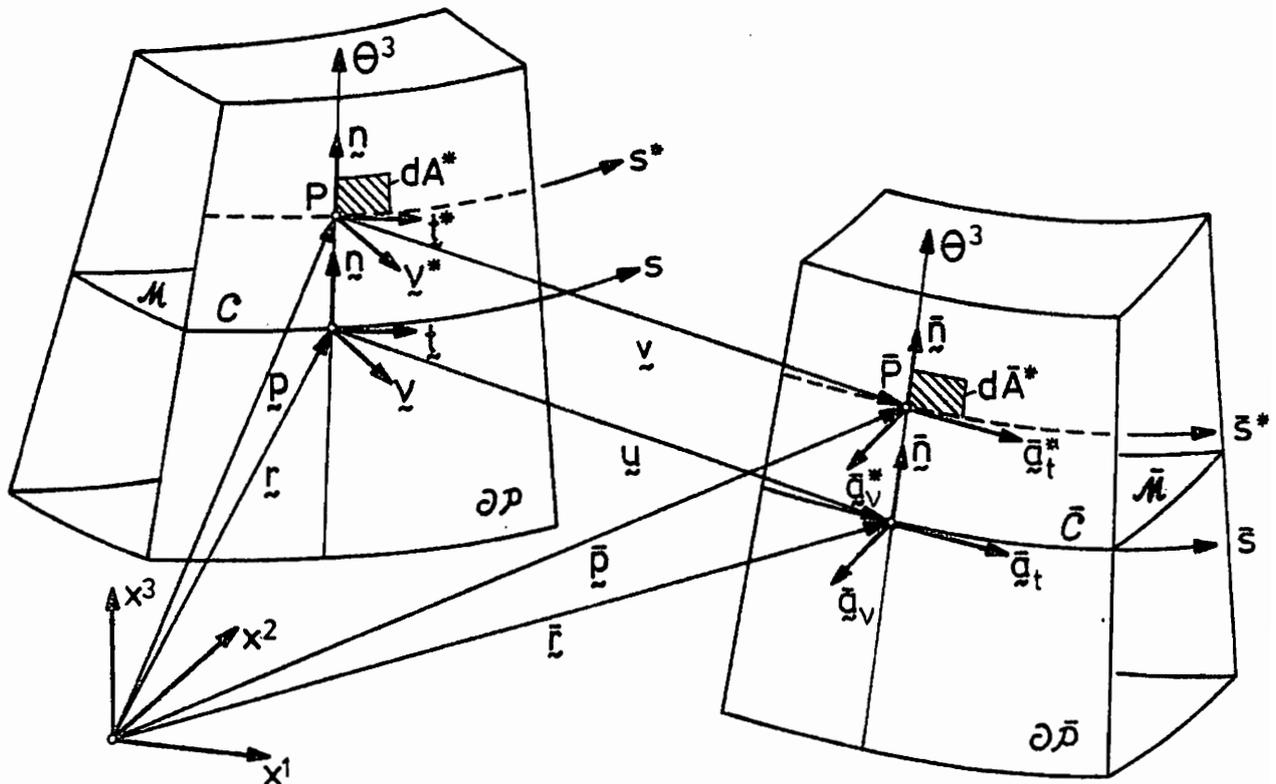


Abb. 2.4

In anschaulicher Verbindung mit Abb. 2.4 beschreiben wir jeden Punkt der Schalenrandfläche vor und nach der Verformung  $P \in \partial P$  bzw.  $\bar{P} \in \partial \bar{P}$  kompatibel mit der Kirchhoff-Love-Hypothese durch die Ortsvektoren

$$\begin{aligned} \underline{\underline{p}}(s, \theta^3) &= \underline{\underline{r}}(s) + \theta^3 \underline{\underline{n}}(s) \quad , \\ \underline{\underline{\bar{p}}}(s, \theta^3) &= \underline{\underline{\bar{r}}}(s) + \theta^3 \underline{\underline{\bar{n}}}(s) \quad . \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Das Randverschiebungsfeld erhält man analog zu (2.3.9)<sub>1</sub>

$$\underline{\underline{v}}(s, \theta^3) = \underline{\underline{\bar{p}}} - \underline{\underline{p}} = \underline{\underline{u}}(s) + \theta^3 (\underline{\underline{\bar{n}}}(s) - \underline{\underline{n}}(s)) = \underline{\underline{u}}(s) + \theta^3 \underline{\underline{\beta}}(s) \quad . \quad (2.4.9)$$

Die Kinematik des Schalenrandes läßt sich nun mit (2.4.9), (2.4.2) sowie (2.4.5) durch die drei Verschiebungskomponenten  $u_t$ ,  $u_v$ ,  $w$  und die drei Komponenten  $n_t$ ,  $n_v$ ,  $n$  des Vektors  $\underline{\underline{n}}$  als Rotationsgrößen beschreiben. Im Rahmen einer Verschiebungsmethode unter gleichzeitiger Annahme der Kirchhoff-Love-Hypothese können jedoch nur vier von ihnen unabhängig sein, so daß zwei Randparameter offensichtlich durch die restlichen auszudrücken sind. Die Identitäten  $\underline{\underline{a}}_t \cdot \underline{\underline{n}} = 0$  und  $\underline{\underline{n}} \cdot \underline{\underline{n}} = 1$  liefern schließlich unter Beachtung von (2.4.5), und (2.4.3)<sub>2</sub> die Beziehungen für die abhängigen Größen  $n_t$ ,  $n$

$$\begin{bmatrix} n_t(\underline{\underline{u}}, n_v) \\ n(\underline{\underline{u}}, n_v) \end{bmatrix} = \frac{1}{c_v^2 - \bar{a}_t^2} \left\{ c_v n_v \begin{bmatrix} c_t \\ c_n \end{bmatrix} + \sqrt{\bar{a}_t^2 (1 - n_v^2) - c_v^2} \begin{bmatrix} c_n \\ -c_t \end{bmatrix} \right\} ; \quad (2.4.10)$$

d. h. drei Verschiebungskomponenten  $u_v$ ,  $u_t$ ,  $w$  und  $n_v$  als Verdrehungsmaß erlauben eine vollständige Beschreibung der Deformation des Schalenrandes.

Abschließend wollen wir die später benötigten Ausdrücke für ein beliebiges Flächenelement  $dA^*$ ,  $d\bar{A}^*$  in der unverformten bzw. verformten Konfiguration bestimmen. Geometrische Betrachtungen gemäß Abb. 2.4 ergeben

$$dA^* = \sqrt{(1 - \underline{\sigma}_t \theta^3)^2 + (\underline{\tau}_t \theta^3)^2} dA, \quad dA = ds \cdot d\theta^3,$$
$$d\bar{A}^* = \sqrt{(1 - \bar{\sigma}_t \theta^3)^2 + (\bar{\tau}_t \theta^3)^2} d\bar{A}, \quad d\bar{A} = d\bar{s} \cdot d\theta^3, \quad (2.4.11)$$

$$g = \frac{d\bar{A}^*}{dA^*},$$

mit  $g$  als Funktion zur Beschreibung der Änderung des Flächenelementes  $dA^*$  infolge einer Randverschiebung (2.4.8).

Es ist anzumerken, daß bei der Aufspaltung des Deformationsprozesses gemäß (2.3.13) auf dem Schalenrand auch Rotationen der Basisvektoren  $\underline{t}$  und  $\underline{v}$  infolge reiner Dehnung auftreten. Im Zusammenhang mit der Ableitung zugehöriger Rotationsvektoren verweisen wir auf [2.12 - 13].

### 3. KONSTITUTIVE BEZIEHUNGEN

Unter Verwendung der ersten Approximation der Verformungsenergiedichte wird im folgenden die Konsistenz der Krümmungsänderungsbeziehungen (2.2.7) nachgewiesen. Zugehörige konstitutive Gleichungen werden abgeleitet und einige Ausdrücke der Schalenkinematik des zweiten Abschnitts unter der Annahme kleiner Dehnungen vereinfacht.

#### 3.1 Die erste Approximation der Verformungsenergiedichte

Das elastische Potential oder auch die Verformungsenergiedichte eines nichtlinearen elastischen Körpers pro Volumeneinheit kann näherungsweise angegeben werden als [3.2, 3.8]

$$W = \frac{1}{2} L^{ijkl} E_{ij} E_{kl} \quad , \quad (3.1.1)$$

wobei im Fall homogenen und isotropen Werkstoffes die Komponenten des Elastizitätstensors  $\underline{L}$  bestimmt sind durch

$$L^{ijkl} = \frac{E}{2(1+\nu)} (g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk} + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{ij}g^{kl}) \quad , \quad (3.1.2)$$

mit  $\nu$  als Poissonscher Querkontraktionszahl und  $E$  als Youngschem Elastizitätsmodul.

Abweichend von Kapitel 2.3 gehen wir nun von einer bezüglich der Orts- und Basisvektoren auf  $M$  und in  $P$  verfeinerten Schalenkinematik aus [3.7, 3.10]

$$\bar{\underline{p}} = \bar{\underline{r}} + \theta^3 \bar{\underline{a}}_3 \quad , \quad \bar{\underline{a}}_3 \cdot \bar{\underline{a}}_\alpha \neq 0 \quad , \quad \bar{\underline{a}}_3 \cdot \bar{\underline{a}}_3 \neq 1 \quad , \quad (3.1.3)$$

$$\bar{\underline{g}}_\alpha = \bar{\underline{p}}_{,\alpha} = \bar{\underline{a}}_\alpha + \theta^3 \bar{\underline{a}}_{3,\alpha} \quad , \quad \bar{\underline{g}}_3 = \bar{\underline{p}}_{,3} = \bar{\underline{a}}_3 \quad .$$

Entwicklung des zugehörigen Deformationsvektors, des Greenschen Dehnungstensors (2.3.8) sowie der Elastizitätskoeffizienten (3.1.2) bezüglich  $\theta^3$  führt auf eine Reihendarstellung der dreidimensionalen Verformungsenergiedichte (3.1.1)

$$W = W_0 + \theta^3 W_1 + (\theta^3)^2 W_2 + \dots \quad (3.1.4)$$

Die Koeffizienten  $W_1, W_2, \dots$  sind dabei durch an der Mittelfläche  $M$  definierte Zustandsfelder ausdrückbar. Nach Integration über die Schalendicke kann die Verformungsenergiedichte als ein auf die Flächeneinheit der unverformten Schalenmittelfläche bezogenes Potential angegeben werden

$$\Sigma = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \mu W d\theta^3 = h \left[ W_0 + \frac{h^2}{12} (W_2 - 2HW_1 + KW_0) + \right. \\ \left. + \frac{h^4}{80} (W_4 - 2HW_3 - KW_2) + \dots \right] \quad (3.1.5)$$

Zur Abschätzung der Reihenglieder in (3.1.5) treffen wir die folgenden einschränkenden Annahmen:

- a) Die Schale sei dünn,  $h/R \ll 1$ , mit  $h$  als (konstanter) Schalendicke und  $R$  dem in [3.3] definierten kleinsten Hauptkrümmungsradius

$$b_{\alpha\beta} = O(R^{-1}) \quad , \quad b_{\alpha\beta/\lambda_1 \dots \lambda_n} = O(R^{-1-n}) \quad , \quad (3.1.6)$$

wobei  $O(\dots)$  "von der Ordnung von" bedeutet.

- b) Die in jedem Schalenpunkt auftretenden Dehnungen seien klein, so daß der größte Eigenwert des Greenschen Dehnungstensors  $\underline{\underline{E}}$  (2.3.8)  $\eta \ll 1$  ist.

- c) Die Verformung der Schalenmittelfläche folge der Bedingung  $\frac{h^2}{L^2} \ll 1$ , mit  $L$  als "kleinster Wellenlänge des Deformationsmusters" auf  $M$ , definiert durch [3.4 -5]

$$\frac{d\gamma_{\alpha\beta}}{ds} = O\left(\frac{\eta}{L}\right) \quad . \quad (3.1.7)$$

$s$  bezeichnet dabei den Längenparameter einer beliebigen Kurve auf  $M$ .

Um nun die verschiedenen in den Annahmen a) - c) definierten Größen miteinander verknüpfen zu können, führen wir ein gemeinsames Maß für ihre Kleinheit ein.

$$\theta = \max \left( \frac{h}{L}, \sqrt{\eta}, \frac{h}{d}, \sqrt{\frac{h}{R}} \right), \quad (3.1.8)$$

dem wir zur Abschätzung der Größe kovarianter Ableitungen den Parameter

$$\lambda = \frac{h}{\theta} = \min \left( L, d, \sqrt{hR}, \sqrt{\frac{h}{\eta}} \right) \quad (3.1.9)$$

hinzufügen,  $(\dots)|_{\alpha} = O((\dots)/\lambda)$  [3.6].  $d$  ist dabei der Abstand eines betrachteten Punktes  $P$  vom Schalenrand. Darüberhinaus wählen wir die Flächenkoordinaten  $\theta^{\alpha}$  so, daß die folgenden Größenordnungen eingehalten werden

$$a_{\alpha\beta} \sim a^{\alpha\beta} = O(1), \quad b_{\alpha\beta} \sim b^{\alpha\beta} \sim b_{\alpha}^{\beta} = O\left(\frac{1}{R}\right) \quad (3.1.10)$$

Unter Verwendung der dimensionslosen Größe  $\theta = \max \left( \frac{h}{d}, \sqrt{\frac{h}{R}}, \eta \right)$ , abweichend von (3.1.8), gelang in [3.3] ausgehend von einer dreidimensionalen Theorie die punktweise Abschätzung für die Komponenten des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors einer nur durch Randkräfte belasteten Schale

$$S^{\alpha\beta} = O(E\eta), \quad S^{\alpha 3} = O(E\eta\theta), \quad S^{33} = O(E\eta\theta^2). \quad (3.1.11)$$

Dieses Ergebnis läßt sich mit qualitativen physikalischen Argumenten [3.6] auf Schalen mit hinreichend glatt verteilter Flächenlast  $\underline{p}$  übertragen, wenn die Parameter (3.1.8-9) verwendet werden. Abschätzungen der (3.1.11) zugeordneten Dehnungsgrößen führen im Rahmen eines relativen Fehlers  $O(\theta^4)$  auf die zweite Approximation der Verformungsenergiedichte [3.7, 3.10]. Unter Annahme einer größeren relativen Fehlermarge  $O(\theta^2)$  erhalten wir nach detaillierter Abschätzung aller Terme die bekannte Form der ersten Approximation der Verformungsenergiedichte

$$\Sigma = \frac{h}{2} \left( H^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12} \partial_{\alpha\beta} \partial_{\lambda\mu} \right) [1 + O(\theta^2)]. \quad (3.1.12)$$

Die Komponenten des modifizierten Elastizitätstensors  $H^{\alpha\beta\lambda\mu}$  berücksichtigen dabei den Einfluß der Querdehnungen

$$H^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( a^{\alpha\lambda} a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu} a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\lambda\mu} \right). \quad (3.1.13)$$

Diese Form des elastischen Potentials stimmt mit dem in [3.4 - 5] erhaltenen Ausdruck unter Annahme eines ebenen Spannungszustandes überein. (3.1.12) ist mit der Kirchhoff-Love-Hypothese kompatibel; sie stellt keine weitere Annahme, sondern lediglich eine Einschränkung im Hinblick auf die zulässige Kinematik dar.

### 3.2 Äquivalente Krümmungsänderungsbeziehungen und konstitutive Gesetze

Bereits in [3.4 - 5] war nachgewiesen worden, daß die Addition bzw. Subtraktion von Termen der Größenordnung  $O(\frac{\eta}{R})$  zum Tensor der Krümmungsänderungen im Rahmen einer mit dem relativen Fehler  $O(\theta^2)$  behafteten ersten Approximation der Verformungsenergiedichte (3.1.12) zulässig ist. Im Hinblick darauf wird im folgenden die allgemeinere Form der Krümmungsänderungsbeziehungen (2.2.7) untersucht.

Mit Hilfe der Größenordnungsbetrachtungen des Kapitels 3.1 zeigen wir, daß die möglichen auftretenden Differenzen zwischen  $\kappa_{\alpha\beta}$  (2.2.15) und den modifizierten Komponenten  $\tilde{\kappa}_{\alpha\beta}$  (2.2.7)  $O(\frac{\eta}{R})$  sind

$$\varkappa_{\alpha\beta} - \tilde{\varkappa}_{\alpha\beta} = O\left(\frac{\eta}{R}\right) \quad , \quad (3.2.1)$$

die nach Substitution in (3.1.12) vernachlässigbare Beiträge  $O(Eh\theta^6)$  liefern. Unter Zuhilfenahme einer konsistenten Approximation der Invarianten  $\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}$  (3.3.3)<sub>1</sub> erhält man zunächst für die Differenz der Komponenten  $\kappa_{\alpha\beta}$  und  $\rho_{\alpha\beta}^*$  (2.2.16) die Beziehung

$$\varkappa_{\alpha\beta} - \rho_{\alpha\beta}^* = \bar{b}_{\alpha\beta} (1 + \gamma_{\alpha\beta}^{\varkappa} + O(\theta^4) - 1) \quad . \quad (3.2.2)$$

Umformungen mit (2.2.15) und (3.1.9) führen schließlich auf

$$\begin{aligned} \varkappa_{\alpha\beta} - \rho_{\alpha\beta}^* &= b_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^{\varkappa} - \varkappa_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^{\varkappa} + O\left(\frac{\theta^4}{R}\right) \\ &= O\left(\frac{\eta}{R}\right) \quad . \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Ebenso lassen sich die in (2.2.7) mit einer doppelten und einer gestrichelten Linie markierten Terme abschätzen zu

$$b_{\alpha}^{\lambda} \gamma_{\lambda\beta} \sim b_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^{\varkappa} = O\left(\frac{\eta}{R}\right) \quad . \quad (3.2.4)$$

Die abgeleiteten Approximationen (3.2.3 - 4) ermöglichen nun den Nachweis von (3.2.1) für alle auftretenden Modifikationen der Krümmungsänderungsbeziehungen in (2.2.7) und damit eine zu (3.1.12) äquivalente Darstellung der Verformungsenergiedichte

$$\Sigma = \frac{h}{2} (H^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12} \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} \tilde{\epsilon}_{\lambda\mu}) [1 + O(\theta^2)] \quad (3.2.5)$$

Die zugehörigen konstitutiven Beziehungen einer isotropen elastischen Schale im Rahmen kleiner Dehnungen folgen aus (3.2.5)

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= \frac{\partial \Sigma}{\partial \gamma_{\alpha\beta}} = h H^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma_{\lambda\mu} + O(Eh\theta^4) \\ &= C [(1-\nu) \gamma^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta} \gamma^{\alpha}_{\alpha}] + O(Eh\theta^4) \quad , \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} M^{\alpha\beta} &= \frac{\partial \Sigma}{\partial \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta}} = \frac{h^3}{12} H^{\alpha\beta\lambda\mu} \tilde{\epsilon}_{\lambda\mu} + O(Eh^2\theta^4) \\ &= D [(1-\nu) \tilde{\epsilon}^{\alpha\beta} + \nu a^{\alpha\beta} \tilde{\epsilon}^{\alpha}_{\alpha}] + O(Eh^2\theta^4) \quad , \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

womit nun symmetrische Schalenschnittgrößen in Lagrangescher Beschreibungsweise definiert sind.  $C$  und  $D$  bezeichnen dabei die bekannte Dehn- bzw. Biegesteifigkeit einer Schale.

$$C = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad , \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad . \quad (3.2.8)$$

Bezüglich des Zusammenhangs der Schnittgrößen (3.2.6) und (3.2.7) mit dem dreidimensionalen Spannungszustand einer Schale sei auf die Darstellungen in [3.1] und [3.8] verwiesen.

### 3.3 Reduzierte Kinematik für kleine Dehnungen

Mit Hilfe der Größenordnungsbetrachtungen in Kapitel 3.1, insbesondere der Annahme kleiner Schalendehnungen können einige kinematische Beziehungen der Kapitel 2.2 -2.4 durch energiekonsistente Approximation im Rahmen der relativen Fehlermarge  $O(\theta^2)$  vereinfacht werden [3.7 - 9].

Die Voraussetzung c) ergibt mit (3.1.8)

$$\gamma_{\alpha\beta} = O(\theta^2) \quad , \quad (3.3.1)$$

womit (2.2.9)<sub>3</sub> abgeschätzt werden kann zu

$$\frac{\bar{a}}{a} = 1 + 2\gamma_{\lambda}^{\lambda} + O(\theta^4) = 1 + O(\theta^2) \quad (3.3.2)$$

und damit die Beziehungen

$$\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} = 1 + \gamma_{\lambda}^{\lambda} + O(\theta^4) = 1 + O(\theta^2) \quad , \quad (3.3.3)$$

$$\sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} = 1 - \gamma_{\lambda}^{\lambda} + O(\theta^4) = 1 + O(\theta^2)$$

liefert. Die kovarianten und kontravarianten Metrikkoeffizienten erhalten wir damit zu

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta} + 2\gamma_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + O(\theta^2) \quad , \\ \bar{a}^{\alpha\beta} &= a^{\alpha\beta} - 2\gamma^{\alpha\beta} + O(\theta^4) = a^{\alpha\beta} + O(\theta^2) \quad . \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Aus der Approximation der Komponenten des verformten Normaleneinheitsvektors  $\bar{n}$  (2.2.10)

$$n_{\alpha} = [-(1 + \theta_{\lambda}^{\lambda})\varphi_{\alpha} + \varphi^{\lambda}(\theta_{\lambda\alpha} - \omega_{\lambda\alpha})][1 + O(\theta^2)] \quad , \quad (3.3.5)$$

$$n = (1 + \theta_{\lambda}^{\lambda} + \frac{1}{2}\theta_{\lambda}^{\lambda}\theta_{\mu}^{\mu} - \frac{1}{2}\theta_{\mu}^{\lambda}\theta_{\lambda}^{\mu} + \varphi^2)[1 - \gamma_{\lambda}^{\lambda} + O(\theta^4)] \quad .$$

lassen sich mit (2.1.28) Abschätzungen für die Rotationsparameter des Schalenrandes (2.4.7) gewinnen

$$n_{\nu} = (-\varphi_{\nu} - \varphi_{\nu}\theta_{tt} + \varphi_t\theta_{t\nu} + \varphi_t\varphi)[1 + O(\theta^2)] \quad ,$$

$$n_t = (-\varphi_t - \varphi_t\theta_{\nu\nu} + \varphi_{\nu}\theta_{\nu t} - \varphi_{\nu}\varphi)[1 + O(\theta^2)] \quad , \quad (3.3.6)$$

$$n = (1 + \theta_{\nu\nu} + \theta_{tt} + \theta_{\nu\nu}\theta_{tt} - \theta_{\nu t}^2 + \varphi^2)[1 - \gamma_{\nu\nu} - \gamma_{tt} + O(\theta^4)] \quad .$$

Schließlich finden wir mit Hilfe der Approximation für den Tensor der Ingenieurdehnungen (2.3.17)<sub>2</sub>

$$\overset{v}{\gamma}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + O(\theta^4) = O(\theta^2) \quad , \quad (3.3.7)$$

die vereinfachte Beziehung für den Rotationsvektor einer Schale (2.3.20)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2} [ \epsilon^{\beta\alpha} ( (2 + \theta^\lambda) \varphi_\alpha - \varphi^\lambda (\theta_{\lambda\alpha} - \omega_{\lambda\alpha}) ) \underline{\underline{a}}_\beta + \\ + 2\varphi \underline{\underline{\eta}} ] [ 1 + O(\theta^2) ] \quad . \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

#### 4. DAS DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEM DER ALLGEMEINEN GEOMETRISCH NICHTLINEAREN SCHALENTHEORIE

##### 4.1. Einleitende Betrachtungen

Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen leiten wir in diesem Abschnitt die statischen Gleichungen einer allgemeinen geometrisch nichtlinearen Schalentheorie vom Typ Kirchhoff-Love ab, die bezüglich der Rotationen der Materialelemente keinen Einschränkungen unterliegt. Als Basis dazu dienen die verallgemeinerten Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen (2.2.6) und (2.2.7) sowie die jeweils zugehörigen Ausdrücke für die erste Approximation der Verformungsenergiedichte (3.2.5).

Zunächst gilt es, aus der Vielzahl möglicher Krümmungsänderungstensoren eine für spätere theoretische und numerische Aufgaben geeignete Version auszuwählen. Dabei läßt sich feststellen, daß insbesondere die Varianten 1 - 4 nichtrationale Terme in Verschiebungskomponenten und deren Flächenableitungen enthalten. Für kleine Dehnungen können sie zu Polynomen fünften Grades vereinfacht werden. Jedoch erweisen sich beide Darstellungen bei Verwendung eines leistungsstarken Näherungsverfahrens wie z. B. der Finite-Element-Methode als sehr aufwendig. Zudem bereitet die Ableitung konsistenter statischer Randbedingungen Schwierigkeiten, da bei Transformationen mit Hilfe partieller Integration und Anwendung des Gaußschen Divergenztheorems am Rand Verschiebungsableitungen in Richtung der Außennormalen  $\underline{v}$  auftreten, die nicht durch die vier unabhängigen virtuellen geometrischen Randgrößen  $\delta u_{\underline{v}}$ ,  $\delta u_{\underline{t}}$ ,  $\delta w$ ,  $\delta n_{\underline{v}}$  auszudrücken sind.

Demgegenüber stehen die Varianten 5 - 7, die durch Modifikation mit Hilfe der Invarianten  $\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}$  nur noch Polynome dritten Grades in Verschiebungen und Verschiebungsableitungen enthalten und gleichzeitig von äußerst kompakter Form sind. Die zusätzliche Forderung, daß ihr linearer Anteil mit dem der im Sinne einer dreidimensionalen Betrachtung "ursprünglichen" Krümmungsänderung  $\underline{\kappa}$  (2.3.11)<sub>2</sub> übereinstimmen soll, führt schließlich auf den in [4.6] erstmals eingeführten Krümmungsänderungstensor  $\chi_{\alpha\beta}$

$$\chi_{\alpha\beta} = -\left(\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} \bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}\right) + b_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}^x \quad (4.1.1)$$

oder unter Verwendung der Identität  $\bar{a}_{\alpha} \cdot \bar{n} \equiv 0$  mit (2.2.3) und (2.2.10)

auf die Form

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[ (m^\lambda|_\beta - b_\beta^\lambda m) l_{\lambda\alpha} + (b_{\lambda\beta} m^\lambda + m|_\beta) \varphi_\alpha + \right. \\ \left. + (m^\lambda|_\alpha - b_\alpha^\lambda m) l_{\lambda\beta} + (b_{\lambda\alpha} m^\lambda + m|_\alpha) \varphi_\beta \right] + b_{\alpha\beta} (1 + \gamma_{\alpha\beta}^{\mathcal{R}}) \quad (4.1.2)$$

Die Leistungsfähigkeit des gewählten Dehnungsmaßes (4.4.1 - 2) zur Beschreibung hochgradig geometrisch nichtlinearer Probleme, insbesondere im Rahmen einer Theorie großer Rotationen, wird in den folgenden Abschnitten aufgezeigt. Abschließend sei angemerkt, daß im Fall der Theorie dehnungsloser Verbiegungen ( $\gamma_{\alpha\beta} = 0$ ) alle Krümmungsänderungsvarianten 1 - 7 identisch sind.

Wir betrachten nun einen Körper im Gleichgewichtszustand. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen fordert für eine zusätzliche, geometrisch zulässige, virtuelle Deformation  $\delta \underline{u} = \delta u_\alpha \underline{a}^\alpha + \delta w \underline{n}$  die Gleichheit des inneren virtuellen elastischen Potentials  $\delta \pi_i$  mit der äußeren virtuellen Arbeit aller an der Schale angreifenden Lasten  $\delta \pi_a$

$$\delta \pi_i = \delta \pi_a \quad (4.1.3)$$

Geometrisch zulässig sind solche virtuellen Verschiebungsfelder, die als Nebenbedingung in  $M$  die Kompatibilität

$$\delta \gamma_{\alpha\beta} = \delta \left[ \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_\alpha \varphi_\beta + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \varphi^2 - \frac{1}{2} (\theta_\alpha^\lambda \omega_{\lambda\beta} + \theta_\beta^\lambda \omega_{\lambda\alpha}) + \frac{1}{2} \theta_\alpha^\lambda \theta_{\lambda\beta} \right] \quad , \quad (4.1.4)$$

$$\delta \chi_{\alpha\beta} = \delta \left[ \frac{1}{2} \left\{ (m^\lambda|_\beta - b_\beta^\lambda m) l_{\lambda\alpha} + (b_{\lambda\beta} m^\lambda + m|_\beta) \varphi_\alpha + \right. \right. \\ \left. \left. + (m^\lambda|_\alpha - b_\alpha^\lambda m) l_{\lambda\beta} + (b_{\lambda\alpha} m^\lambda + m|_\alpha) \varphi_\beta \right\} + b_{\alpha\beta} (1 + \gamma_{\alpha\beta}^{\mathcal{R}}) \right]$$

und auf  $C_u$  die geometrischen Randbedingungen

$$\delta u_\nu = \delta u_t = \delta w = \delta n_\nu = 0 \quad , \quad (4.1.5)$$

$$\delta u_\nu(s_{ui}) = \delta u_t(s_{ui}) = \delta w(s_{ui}) = 0 \quad \text{für alle } M_{ui} \in C_u$$

erfüllen. Dabei bezeichnet  $C_u$  den Teil des Randes  $C$  auf dem zumindest eine Komponente der vier unabhängigen geometrischen Größen  $u_v, u_t, w, n_v$  zu  $u_v^*, u_t^*, w^*$  bzw.  $n_v^*$  vorgeschrieben wird. Längs des Berandungsteils  $C_u$  können  $m$  Ecken  $M_{ui}$  an den Punkten  $s = s_{ui}$  ( $i = 1, \dots, m$ ) auftreten.

#### 4.2. Die innere virtuelle Arbeit

Ausgehend von der ersten Approximation der Verformungsenergie-dichte (3.2.5) erhalten wir die innere virtuelle Arbeit  $\delta\pi_i$ , als deren erste Variation

$$\delta\pi_i = \iint_M \delta\Sigma dA = \iint_M (N^{\alpha\beta} \delta\gamma_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \delta\chi_{\alpha\beta}) dA \quad (4.2.1)$$

Der Integrand  $\delta\Sigma$  kann unter Beachtung der geometrischen Nebenbedingungen (4.1.4) transformiert werden

$$\delta\Sigma = [M^{\alpha\beta} (l_{\lambda\alpha} \delta m^\lambda + \varphi_\alpha \delta m)]|_\beta + T^{\lambda\beta} \delta l_{\lambda\beta} + T^\beta \delta \varphi_\beta, \quad (4.2.2)$$

mit

$$\begin{aligned} T^{\lambda\beta} = & l_\alpha^\lambda (N^{\alpha\beta} + a^{\alpha\beta} b_{\alpha\rho} M^{\alpha\rho}) + (m^\lambda|_\alpha - b_\alpha^\lambda m) M^{\alpha\beta} + \\ & + \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\mu} \{ l_{\mu\alpha} [(\varphi_\alpha M^{\alpha\rho})|_\rho + l_{\gamma\alpha} b_{\gamma\rho}^\delta M^{\alpha\rho}] - \varphi_\alpha [(l_{\mu\alpha} M^{\alpha\rho})|_\rho - \varphi_\alpha b_{\mu\rho} M^{\alpha\rho}] \}, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

$$\begin{aligned} T^\beta = & \varphi_\alpha (N^{\alpha\beta} + a^{\alpha\beta} b_{\alpha\rho} M^{\alpha\rho}) + (m|_\alpha + b_\alpha^\lambda m_\lambda) M^{\alpha\beta} + \\ & + \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\mu} l_{\lambda\alpha} [(l_{\mu\alpha} M^{\alpha\rho})|_\rho - \varphi_\alpha b_{\mu\rho} M^{\alpha\rho}] \end{aligned}$$

Nach partieller Integration und Anwendung des Gaußschen Divergenz-theorems liefert der erste Term in (4.2.2) solche Randintegralgrößen, die mit Hilfe weiterer Umformungen nicht durch die vier unabhängigen virtuellen Kirchhoffschen Randparameter  $\delta u_v, \delta u_t, \delta w, \delta n_v$  auszudrücken sind. Führen wir den später häufig benötigten Satz Identitäten [4.6]

$$\tilde{a}_\alpha \cdot \tilde{n} = 0, \quad \tilde{n} \cdot \tilde{n} = 1 \quad (4.2.4)$$

ein, so ergibt sich mit deren erster Variation eine hilfreiche Beziehung

$$M^{\alpha\beta}(l_{\lambda\alpha} \delta m^\lambda + \rho_\alpha \delta m) = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} M^{\alpha\beta}(l_{\lambda\alpha} \delta n^\lambda + \rho_\alpha \delta n) \quad , \quad (4.2.5)$$

die schließlich die Randintegraltransformation ermöglicht und den Ausdruck für die innere virtuelle Arbeit in Vektorschreibweise liefert

$$\delta \pi_i = - \iint_{\mathcal{M}} \frac{T^\beta}{\beta} \cdot \delta \underline{u} \, dA + \int_C [T^\beta \nu_\beta \cdot \delta \underline{u} + R_\nu \cdot \delta \bar{n}] \, ds \quad , \quad (4.2.6)$$

In (4.2.6) wurden zusätzlich als Abkürzungen nachstehende Größen vereinbart

$$\begin{aligned} T_{\beta} &= T^{\alpha\beta} \underline{a}_\alpha + T^\beta \bar{n} \quad , \quad R_\nu = R_{\nu\gamma} \underline{\nu}_\gamma + R_{t\nu} \underline{t} + R_{n\nu} \bar{n} \quad , \\ R_{\nu\gamma} &= \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} l_{\cdot\alpha}^\lambda M^{\alpha\beta} \nu_\lambda \nu_\beta \quad , \quad R_{t\nu} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} l_{\cdot\alpha}^\lambda M^{\alpha\beta} t_\lambda \nu_\beta \quad , \quad (4.2.7) \\ R_{n\nu} &= \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} M^{\alpha\beta} \rho_\alpha \nu_\beta \quad , \quad \delta \bar{n} = \delta n_\nu \underline{\nu}_\nu + \delta n_t \underline{t} + \delta n_n \bar{n} \quad . \end{aligned}$$

Eine weitere Schwierigkeit bei der Herleitung der statischen Randbedingungen besteht darin, die virtuellen Änderungen der sechs Parameter  $\delta \underline{u}$ ,  $\delta \bar{n}$  durch die unabhängigen geometrischen Randvariablen  $\delta \underline{u}$  und  $\delta n_\nu$  auszudrücken. Zunächst erhalten wir ausgehend von der Identität [4.16]

$$\underline{\nu} \times (\delta \bar{n} \times \bar{\underline{a}}_\nu) = (\underline{\nu} \cdot \bar{\underline{a}}_\nu) \cdot \delta \bar{n} - (\underline{\nu} \cdot \delta \bar{n}) \cdot \bar{\underline{a}}_\nu \quad (4.2.8)$$

unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \delta \bar{n} \times \bar{\underline{a}}_\nu &= \underline{a}_t \cdot (\delta \bar{n} \cdot \bar{n}) - \bar{n} \cdot (\delta \bar{n} \cdot \underline{a}_t) \\ &= - \bar{n} \cdot (\delta \bar{n} \cdot \underline{a}_t) \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

die Transformationsbeziehung

$$\underline{\nu} \times [- \bar{n} \cdot (\delta \bar{n} \cdot \underline{a}_t)] = (\underline{\nu} \cdot \underline{a}_\nu) \cdot \delta \bar{n} - (\underline{\nu} \cdot \delta \bar{n}) \cdot \bar{\underline{a}}_\nu \quad (4.2.10)$$

Umformungen mit (4.2.4) führen zu den gesuchten Abhängigkeiten

$$\delta \bar{n} = \frac{1}{\underline{\nu} \cdot \bar{\underline{a}}_\nu} \left[ \underline{\nu} \times \bar{n} (\bar{n} \cdot \frac{d}{ds} \delta \underline{u}) + \bar{\underline{a}}_\nu \delta n_\nu \right] \quad (4.2.11)$$

Mit (4.2.6) und (4.2.11) erhält man schließlich die Lagrangesche innere virtuelle Arbeit der allgemeinen geometrisch nichtlinearen Schalentheorie unter Annahme der ersten Approximation der Verformungsenergiedichte in Vektorschreibweise

$$\delta \pi_i = - \iint_{\mathcal{M}} \tilde{T}^{\alpha\beta} \cdot \delta \underline{u} + \int_C [ \tilde{P} \cdot \delta \underline{u} + M \delta n_\nu ] ds + \sum_i \tilde{F}_i \cdot \delta u_i \quad (4.2.12)$$

$\tilde{P}$  und  $M$  werden als effektive innere Randkraft- und Randmomentengrößen und  $\tilde{F}_i$  als konzentrierte Eckkräfte bezeichnet, die an den zugehörigen geometrischen Randgrößen  $\delta \underline{u}$ ,  $\delta n_\nu$  bzw.  $\delta u_i$  Arbeit leisten

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \tilde{T}^{\beta\nu} \nu_\beta - \frac{d}{ds} \tilde{F} \quad , \quad M = \frac{1}{\underline{\nu} \cdot \underline{\bar{a}}_\nu} \tilde{R}_{\nu\nu} \cdot \underline{\bar{a}}_\nu \quad , \\ \tilde{F} &= \left[ \frac{(\underline{\nu} \times \underline{\bar{n}})}{\underline{\nu} \cdot \underline{\bar{a}}_\nu} \cdot \tilde{R}_{\nu\nu} \right] \underline{\bar{n}} \quad , \quad \tilde{F}_i = \tilde{F}(s_i+0) - \tilde{F}(s_i-0) \quad . \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Weitere für eine vollständige Komponentendarstellung der inneren virtuellen Arbeit erforderliche Transformationen werden im folgenden zusammengestellt:

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P_\nu \\ P_t \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{\nu\nu} \\ T_{t\nu} \\ T_{n\nu} \end{bmatrix} - C \begin{bmatrix} k_\nu \\ k_t \\ k_n \end{bmatrix} + \frac{d}{ds} \left\{ C \begin{bmatrix} n_\nu \\ n_t \\ n \end{bmatrix} \right\} \quad , \quad (4.2.14)$$

$$T_{\nu\nu} = T^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta \quad , \quad T_{t\nu} = T^{\alpha\beta} t_\alpha \nu_\beta \quad , \quad T_{n\nu} = T^{\beta\nu} \nu_\beta \quad , \quad (4.2.15)$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F_\nu \\ F_t \\ F_n \end{bmatrix} = -C \begin{bmatrix} n_\nu \\ n_t \\ n \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{aligned} C &= \frac{1}{D} (R_{t\nu} n - R_{n\nu} n_t) \quad , \\ M &= R_{\nu\nu} + f R_{t\nu} + k R_{n\nu} \quad , \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

$$k_\nu = \varkappa_t n_t - \tau_t n \quad , \quad k_t = \sigma_t n - \varkappa_t n_\nu \quad , \quad k_n = \tau_t n_\nu - \sigma_t n_t \quad , \quad (4.2.17)$$

$$D = c_n n_t - c_t n \quad , \quad f = \frac{1}{D} (c_\nu n - c_n n_\nu) \quad , \quad k = \frac{1}{D} (c_t n_\nu - c_\nu n_t) \quad . \quad (4.2.18)$$

#### 4.3. Die äußere virtuelle Arbeit

Bei der Bestimmung der äußeren virtuellen Arbeit sind Beiträge aus Flächen- und Randlasten, bezeichnet nach der Lage ihrer Angriffspunkte, getrennt zu betrachten. Zudem unterscheiden wir generell zwischen konservativen und nichtkonservativen Belastungen [4.4], wobei im ersten Fall ein Potential angegeben werden kann, dessen Variation die entsprechenden Anteile an der äußeren virtuellen Arbeit liefert. Im Gegensatz dazu existiert für nichtkonservative Lasten kein zugehöriges Potential. Hier führt oftmals die quasi-statische Betrachtungsweise bei Auftreten nichtreeller Eigenwerte der unsymmetrischen Steifigkeitsmatrix nicht zum Ziel [4.1, 4.4, 4.7, 4.12]. Zur Gruppe der konservativen Lasten gehören die sogenannten "dead loads", die während des Deformationsprozesses weder ihre Richtung noch den Betrag ändern. Drucklasten hingegen wirken stets mit konstanter Intensität in negative Richtung des verformten Normaleneinheitsvektors  $\underline{\bar{n}}$ . Abhängig vom Grad der gewählten Schalenichtlinearität lassen sich für einige Spezialfälle [4.2] zugehörige Potentiale angeben. Folgelasten sind gekennzeichnet durch konstante Komponenten bezüglich der Basis in der verformten Konfiguration. Sie fallen generell in die Gruppe der nichtkonservativen Lasten. Abschließend sei angemerkt, daß in der hier verwendeten quasi-statischen Betrachtungsweise eine Zeitabhängigkeit der Belastungen ausgeschlossen wird.

Wir führen nun die Flächenlast einer Schale, bezogen auf die Flächeneinheit der unverformten Mittelfäche  $\bar{M}$ , unter Berücksichtigung einer Verformungsabhängigkeit ein

$$\underline{\bar{p}} = \underline{\bar{p}}(\theta^\alpha, \underline{u}) = \underline{\bar{p}}^\alpha(\theta^\alpha, \underline{u}) \underline{\bar{a}}_\alpha + \underline{\bar{p}}(\theta^\alpha, \underline{u}) \underline{\bar{n}} \quad . \quad (4.3.1)$$

Sie ist über die Transformationsbeziehungen

$$\begin{aligned} \underline{\bar{p}} dA &= \underline{\bar{p}} \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} d\bar{A} = \underline{\bar{p}} d\bar{A} \quad , \\ \underline{\bar{p}}^\alpha &= \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} (l^\alpha_\beta \bar{p}^\beta + n^\alpha \bar{p}) \quad , \quad \underline{\bar{p}} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{a}} (\varphi_\beta \bar{p}^\beta + n \bar{p}) \quad , \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

mit einer bezüglich der verformten Konfiguration  $\bar{M}$  definierten Flächenlast gekoppelt

$$\bar{p} = \bar{p}(\theta^\alpha; \underline{u}) = \bar{p}^\alpha(\theta^\alpha; \underline{u}) \bar{a}_\alpha + \bar{p}(\theta^\alpha; \underline{u}) \bar{n} \quad (4.3.3)$$

Ebenso definieren wir auf dem Schalenrand Lastvektoren, bezogen auf die Flächeneinheit der unverformten und verformten Randfläche  $\partial P$  bzw.  $\partial \bar{P}$

$$\begin{aligned} \underline{t}^* &= \underline{t}^*(s; \underline{u}) = t_v^*(s; \underline{u}) \underline{v} + t_t^*(s; \underline{u}) \underline{t} + t_n^*(s; \underline{u}) \underline{n} \quad , \\ \bar{\underline{t}}^* &= \bar{\underline{t}}^*(\bar{s}; \underline{u}) = \bar{t}_v^*(\bar{s}; \underline{u}) \bar{\underline{v}} + \bar{t}_t^*(\bar{s}; \underline{u}) \bar{\underline{t}} + \bar{t}_n^*(\bar{s}; \underline{u}) \bar{\underline{n}} \quad . \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Mit Hilfe von (2.4.3), (2.4.5), (2.4.10)<sub>3</sub>, (4.3.4)<sub>1</sub> sowie der Beziehung für den verformten Außennormaleneinheitsvektor

$$\bar{\underline{v}} = \frac{1}{\bar{a}_t} (e_v \underline{v} + e_t \underline{t} + e_n \underline{n}) \quad , \quad (4.3.5)$$

$$e_v = c_t n - c_n n_t \quad , \quad e_t = c_n n_v - c_t n \quad , \quad e_n = c_v n_t - c_t n_v \quad , \quad (4.3.6)$$

erhalten wir zu (4.3.2) analoge Transformationen

$$\begin{aligned} \underline{t}^* dA^* &= \underline{t}^* g d\bar{A}^* = \bar{\underline{t}}^* dA^* \quad , \\ \underline{t}_\square^* &= \frac{1}{\bar{a}_t g} (\bar{t}_v^* e_\square + \bar{t}_t^* c_\square + \bar{t}_n^* \bar{a}_t n_\square) \underline{\square} \quad , \quad \square = v, t, n \quad . \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Zusammen mit (4.3.1), (4.3.4)<sub>1</sub> und (4.3.7)<sub>1</sub> läßt sich die virtuelle Arbeit einer Flächenlast  $\underline{p}$  an einer virtuellen Flächenverschiebung  $\delta \underline{u} = \delta u^\alpha \bar{a}_\alpha + \delta w \bar{n}$  sowie einer Randlast  $\underline{t}^*$  an einer virtuellen Randverschiebung  $\delta \underline{v} = \delta \underline{u} + \vartheta^3 \delta \bar{\underline{n}}$  bestimmen als

$$\begin{aligned} \delta \pi_a &= \iint_{\mathcal{M}} \underline{p} \cdot \delta \underline{u} dA + \iint_{\partial P} \underline{t}^* \cdot \delta \underline{v} dA^* \\ &= \iint_{\mathcal{M}} \underline{p} \cdot \delta \underline{u} dA + \int_{C_f} (\underline{T}_v^* \cdot \delta \underline{u} + \underline{H}_v^* \cdot \delta \bar{\underline{n}}) ds \quad , \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

wobei die äußere Randkraft  $\underline{T}_v^*$  und das äußere statische Randmoment  $\underline{H}_v^*$  als Integralrepräsentanten der verteilten Randlast  $\underline{t}^*$  definiert sind

$$\begin{aligned} \underline{T}_v^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \underline{t}^* B d\theta^3, & \underline{H}_v^* &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \underline{t}^* \theta^3 B d\theta^3, \\ B &= B(\theta^i) = \sqrt{(1 - \sigma_t \theta^3)^2 + (\tau_t \theta^3)^2}, \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

$$\underline{T}_v^* = T_{vv}^* \underline{v} + T_{tv}^* \underline{t} + T_{nv}^* \underline{n}, \quad \underline{H}_v^* = H_{vv}^* \underline{v} + H_{tv}^* \underline{t} + H_{nv}^* \underline{n}.$$

Umformungen mit Hilfe der Beziehungen (4.2.11) ergeben schließlich die Lagrangesche äußere virtuelle Arbeit in einer zu (4.2.12) analogen Form

$$\delta \pi_a = \iint_{\mathcal{M}} \underline{\rho} \cdot \delta \underline{u} dA + \int_{C_f} (\underline{P}^* \cdot \delta \underline{u} + M^* \delta n_v) ds + \sum_j \underline{F}_j^* \cdot \delta \underline{u}_j, \quad (4.3.10)$$

mit  $\underline{P}^*$ ,  $M^*$  und  $\underline{F}_j^*$  als effektiven äußeren Randkraft- und Randmomenten-  
größen bzw. konzentrierten Eckkräften definiert durch

$$\underline{P}^* = \underline{T}_v^* - \frac{d}{ds} \underline{F}^*, \quad M^* = \frac{1}{\underline{v} \cdot \underline{\bar{a}}_v} \underline{H}_v^* \cdot \underline{\bar{a}}_v, \quad (4.3.11)$$

$$\underline{F}^* = \left[ \frac{(\underline{v} \times \underline{\bar{n}})}{\underline{v} \cdot \underline{\bar{a}}_v} \cdot \underline{H}_v^* \right] \underline{\bar{n}}, \quad \underline{F}_j^* = \underline{F}^*(s_j + 0) - \underline{F}^*(s_j - 0),$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} \underline{P}^* &= \begin{bmatrix} P_v^* \\ P_t^* \\ P_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{vv}^* \\ T_{tv}^* \\ T_{nv}^* \end{bmatrix} - C^* \begin{bmatrix} k_v \\ k_t \\ k_n \end{bmatrix} + \frac{d}{ds} \left\{ C^* \begin{bmatrix} n_v \\ n_t \\ n \end{bmatrix} \right\} \quad \underline{F}^* = \begin{bmatrix} F_v^* \\ F_t^* \\ F_n^* \end{bmatrix} = -C^* \begin{bmatrix} n_v \\ n_t \\ n \end{bmatrix}, \\ C^* &= \frac{1}{D} (H_{tv}^* n - H_{nv}^* n_t), \quad M^* = H_{vv}^* + f H_{tv}^* + k H_{nv}^*. \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

$C_f$  bezeichnet in den vorstehenden Ausdrücken denjenigen Teil des Randes, auf dem zumindest eine Komponente der äußeren Randkraft  $\underline{T}_v^*$  oder eine

Komponente des äußeren statischen Randmomentes  $\underline{H}_v^*$  vorgegeben ist. Der Berandungsteil  $C_f$  kann an den Stellen  $s_{fj} = (j = 1, \dots, n)$  mit  $M_{fj}$  bezeichnete Eck- oder Diskontinuitätspunkte der Komponenten des statischen Randmomentes  $\underline{H}_v^*$  aufweisen. Im allgemeinen Fall gemischter Randbedingungen müssen die möglicherweise auf demselben Teil der Berandung  $C$  vorgeschriebenen geometrischen und statischen Größen wechselseitig komplementär sein [4.5, 4.11].

#### 4.4. Das Differentialgleichungssystem des Randwertproblems und das Funktional des Gesamtpotentials

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen liefert unter Berücksichtigung der Beziehungen (4.2.12) und (4.3.10) die statischen Gleichungen einer allgemeinen Theorie dünner elastischer Schalen, konsistent im Rahmen der ersten Approximation der Verformungsenergiedichte. Das vollständige Differentialgleichungssystem des nichtlinearen Randwertproblems kann damit angegeben werden:

Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen in  $M$ :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\underline{u}) \quad , \quad \chi_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta}(\underline{u}) \quad ; \text{ gemäß (2.2.14) (4.1.2) } \quad (4.4.1)$$

geometrische Randbedingungen auf  $C_u$ :

$$\underline{u} = \underline{u}^* \quad , \quad n_v = n_v^* \quad ; \quad (4.4.2)$$

geometrische Randbedingungen für alle Eckpunkte  $M_{ui} \in C_u$ :

$$\underline{u}(s_{ui}) = \underline{u}^*(s_{ui}) \quad ; \quad (4.4.3)$$

Gleichgewichtsbedingungen in  $M$ :

$$\underline{T}^\beta|_\beta + \underline{p} = 0 \quad ; \quad (4.4.4)$$

statische Randbedingungen auf  $C_f$ :

$$\underline{P} = \underline{P}^* \quad , \quad M = M^* \quad ; \quad (4.4.5)$$

statische Randbedingungen für alle Eck- bzw. Diskontinuitätspunkte

$M_{fj} \in C_f$ :

$$\tilde{F}_j = F_j^* \quad ; \quad (4.4.6)$$

konstitutive Beziehungen :

$$N^{\alpha\beta} = \frac{Eh}{1+\nu} \left( \gamma^{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} \gamma_\lambda^\lambda \right), \quad M^{\alpha\beta} = \frac{Eh}{12(1+\nu)} \left( \chi^{\alpha\beta} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} \chi_\lambda^\lambda \right). \quad (4.4.7)$$

Verwenden wir die in den Kapiteln 4.2 und 4.3 angegebenen Beziehungen (4.2.14-18), (4.3.12), so läßt sich daraus die zugehörige Komponentenform des Gleichungssatzes bestimmen. Im Zusammenhang mit möglichen Vereinfachungen entsprechender Ausdrücke infolge Approximation der Invarianten  $\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}$  gemäß (3.3.3)<sub>1</sub> verweisen wir auf die Darstellungen in [4.6, 4.16].

Ausgehend vom Prinzip der virtuellen Arbeiten wollen wir nun das Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials ableiten [4.3, 4.11, 4.18]. Beschränken wir unsere Betrachtungen auf Lasten vom Typ "dead loads", dann existieren Potentiale [4.16-4.17]

$$\phi(\underline{u}) = -\underline{p} \cdot \underline{u} \quad , \quad \psi(\underline{u}, n_\nu) = -\underline{T}_\nu^* \cdot \underline{u} - \underline{H}_\nu^* \cdot (\bar{n} - \underline{n}) \quad , \quad (4.4.8)$$

deren erste Variation mit der äußeren virtuellen Arbeit entsprechender Lasten übereinstimmt

$$\delta \pi_a = - \iint_{\mathcal{M}} \delta \phi(\underline{u}) dA - \int_{C_f} \delta \psi(\underline{u}, n_\nu) ds \quad . \quad (4.4.9)$$

Mit der Existenz des elastischen Potentials gemäß (3.1.12)

kann das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in ein Variationsprinzip  $\delta I_p = 0$  transformiert werden mit  $J_p$  als Gesamtpotential der Schale

$$J_p = \iint_{\mathcal{M}} [ \Sigma(\gamma_{\alpha\beta}(\underline{u}), \chi_{\alpha\beta}(\underline{u})) - \underline{p} \cdot \underline{u} ] dA - \int_{C_f} [ \underline{T}_\nu^* \cdot \underline{u} + \underline{H}_\nu^* \cdot (\bar{n} - \underline{n}) ] ds \quad . \quad (4.4.10)$$

Unter allen geometrisch zulässigen Verschiebungsfeldern  $\underline{u}$  auf  $M$  und  $\underline{u}, \bar{\underline{u}}$  auf  $C$ , d. h. solchen, die die Nebenbedingungen (4.4.1 - 3) und (2.4.10) erfüllen, erteilt gerade die Lösung des Randwertproblems (4.4.1 - 7) dem Funktional einen stationären Wert und der Variation des Funktionals den Wert Null.

Ausgehend vom Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials lassen sich für diese allgemeine geometrisch nichtlineare Schalentheorie eine Vielzahl unterschiedlicher Stationaritätsprinzipie formulieren [4.8-9, 4.16]. Untersuchungen über mögliche Extremaleigenschaft dieser Prinzipie für eine bestimmte Klasse eindeutiger Gleichgewichtszustände, in [4.11, 4.13-15] für Schalentheorien moderater Rotationen dargestellt, liegen nicht vor.

## 5. DIE STABILITÄTSGLEICHUNGEN DER ALLGEMEINEN GEOMETRISCH NICHTLINEAREN SCHALENTHEORIE

### 5.1 Einleitende Betrachtungen

Die Lösung des Randwertproblems (4.4.1 - 7) liefert Verschiebungsfelder  $\underline{u}$ , die als Funktion möglicher Lastparameter  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , nicht-lineare Last-Verschiebungsbeziehungen, sogenannte Gleichgewichts-Hyperflächen bilden. Beschränken wir unsere Betrachtungen auf ein Ein-Parameter-Lastsystem, d.h. alle äußeren Lasten hängen linear von einem Parameter  $\lambda$  ab, können gemäß Abb. 5.1 Singularitäten in Form von Schnittpunkten zweier oder mehrerer Gleichgewichtspfade (Nr. 2) und relativen Extrema (Nr. 3a-b) auftreten. Besondere Bedeutung kommt dabei Schnittpunkten von stabilen und instabilen Ästen zu, in denen das Verzweigungsbeulen auftritt. Dabei können die Nachbeulkurven sowohl durch einen Lastanstieg (Nr. 2b) als auch durch einen kritischen Lastabfall (Nr. 2a) gekennzeichnet sein. Das Durchschlagsproblem (Nr. 3a) nach Erreichen relativer Maxima ist mit einem durch einen dynamischen Vorgang eingeleiteten Stabilitätsverlust bis zum Erreichen einer stabilen Gleichgewichtslage (Nr. 4) im Nachbeulbereich verbunden. Abb. 5.1 ist weiter zu entnehmen, daß Stabilitätsuntersuchungen, die sich ausschließlich mit der Erfassung eines der beiden Instabilitätsphänomene beschäftigen, im allgemeinen nicht als ausreichend bezeichnet werden können. Im Hinblick auf die Untersuchung von Mehr-Parameter-Lastsystemen insbesondere  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2$  sei neben anderen auf die Arbeiten [5.10, 5.16] verwiesen.

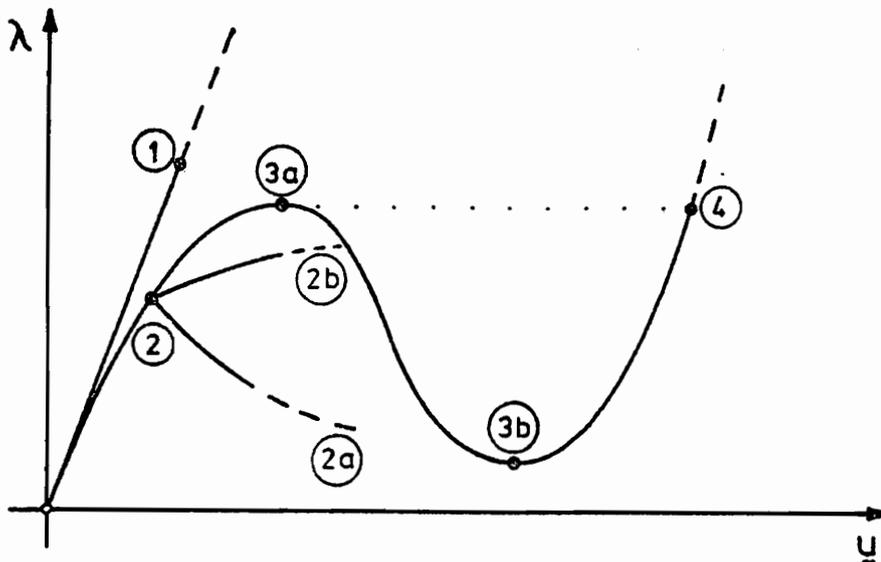


Abb. 5.1

Wesentlicher Bestandteil jeder Stabilitätsanalyse ist somit einerseits die Angabe des zum Auffinden kritischer Lasten notwendigen Gleichungssatzes, den sogenannten Stabilitätsgleichungen, andererseits die Formulierung des zugehörigen Arbeitsprinzips als Grundlage variationeller Näherungsverfahren.

In der Literatur finden sich eine Vielzahl von Arbeiten über Stabilitätsprobleme dünner elastischer Schalen mit unterschiedlichen Näherungsstufen der geometrischen Nichtlinearität, von denen im folgenden nur einige genannt werden. Der Gleichungssatz wird dabei in der Regel ausgehend von einem Energiekriterium [5.2-3, 5.5, 5.7-9, 5.12-15] oder mit Hilfe der Methode des benachbarten Gleichgewichts [5.1, 5.4, 5.6, 5.18] formuliert, wobei alle auftretenden Zustandsgrößen entweder auf die unverformte Referenzkonfiguration  $M$  oder auf die verformte Lage  $\bar{M}$  bezogen sind. Häufig führt man Stabilitätsbetrachtungen ohne Berücksichtigung entsprechender Randbedingungen durch, was nur in wenigen Sonderfällen zu Lösungen führen kann.

Die Mehrzahl der Arbeiten befaßt sich außerdem mit dem Spezialfall einer linearen Beulanalyse (Nr. 1) [5.1, 5.5, 5.7-8, 5.18]. Dabei wird angenommen, daß die Spannungen im Fundamentalzustand näherungsweise aus einer Membran- bzw. linearen Biegelösung berechenbar sind, und der Einfluß linearisierter Vorbeulrotationen und -dehnungen in den Stabilitätsgleichungen vernachlässigt werden kann. Dieses Vorgehen führt tatsächlich bei vielen Problemen (Kreiszyinderschalen, Platten, Kreisringen) abhängig von bestimmten Geometrie- und Lagerungsparametern zu befriedigenden Ergebnissen.

Im Hinblick auf ein ingenieurorientiertes Konzept zur Bestimmung wirklichkeitsnaher Grenzbeullasten dünner Schalenstrukturen verweisen wir auf [5.6, 5.18, 5.19].

In [5.12-15] finden sich grundlegende Stabilitäts- und Nachbeuluntersuchungen für eine Theorie kleiner Dehnungen bei Auftreten moderater Rotationen. Eine vereinfachende Operatorschreibweise ermöglicht dort die kompakte Ableitung aller erforderlichen Gleichungen für kritisches Gleichgewicht und die Nachbeulanalyse mit einfachen und mehrfachen Beulformen. Darauf aufbauend werden in diesem Abschnitt die Stabilitätsgleichungen der allgemeinen geometrisch nichtlinearen Schalentheorie vom Typ Kirchhoff-Love ohne Einschränkung der Rotationen unter Ver-

wendung des modifizierten Krümmungsänderungstensors  $\chi_{\alpha\beta}$  (4.1.2) abgeleitet [5.11]. Ausgehend vom Funktional des Gesamtpotentials erhalten wir in vollständig Lagrangescher Beschreibungsweise eine Variationsformulierung des Problems. Die Stationaritätsbedingungen liefern dann als Euler-Lagrange-Gleichungen Beziehungen für kritisches Gleichgewicht.

5.2. Taylorreihenentwicklung des Gesamtpotentials

Gemäß Abb. 5.2 bezeichnen wir mit  $\bar{u}$  die Verformung eines Material-elementes infolge äußerer Lasten (4.3.1),(4.3.4)<sub>1</sub> aus dem Referenzzustand in die hinsichtlich ihres Stabilitätsverhaltens zu untersuchende Fundamentallage. Ohne Änderung der Belastung werde die Schale durch das Verschiebungsfeld  $\hat{u}$ , von dem wir fordern, daß es die homogenen geometrischen Randbedingungen

$$\hat{u}_\nu = \hat{u}_t = \hat{w} = n'_\nu(\bar{u}; \hat{u}) = 0 \quad \text{auf } C_u \quad (5.2.1)$$

erfüllt, in eine Nachbarlage überführt.

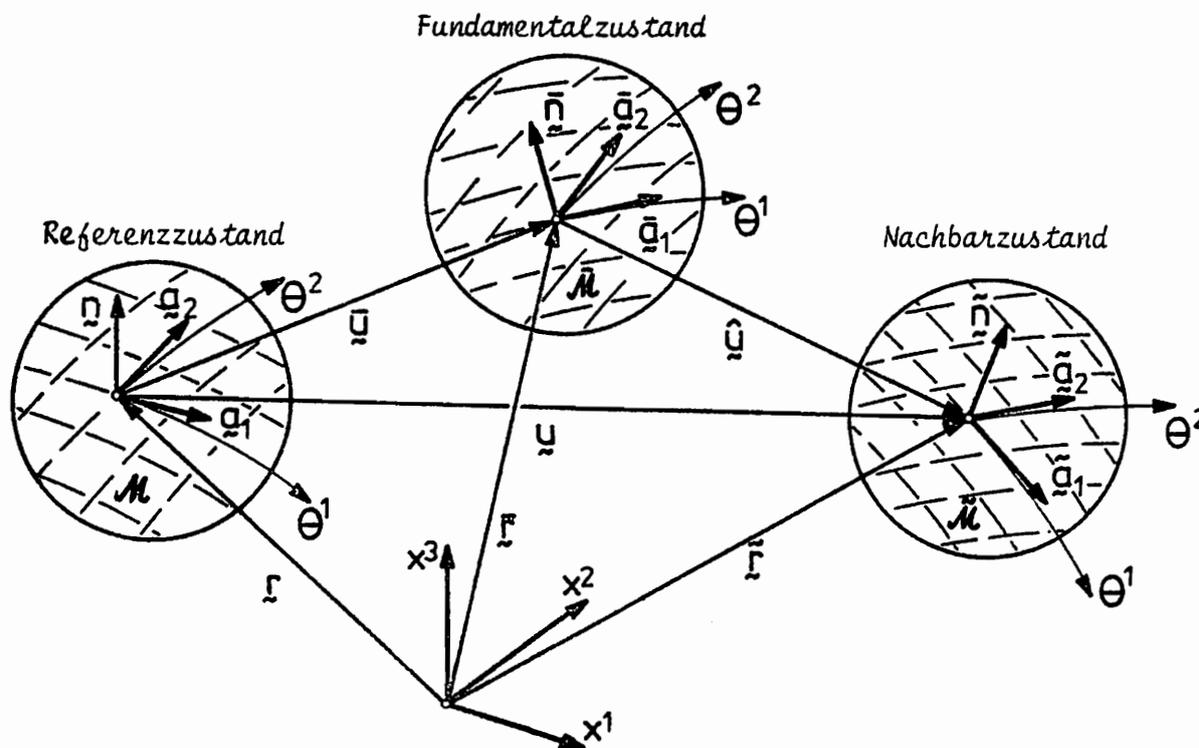


Abb. 5.2

Spaltet man das Gesamtverschiebungsfeld  $\underline{u}$  in die Fundamentalverschiebung  $\underline{\bar{u}}$  und den Verschiebungszuwachs  $\underline{\hat{u}}$  auf, ergeben sich entsprechende lineare Superpositionen für die linearisierten Dehnungs- und Rotationskomponenten

$$\theta_{\alpha\beta} = \bar{\theta}_{\alpha\beta} + \hat{\theta}_{\alpha\beta}, \quad \varphi_{\alpha} = \bar{\varphi}_{\alpha} + \hat{\varphi}_{\alpha}, \quad \varphi = \bar{\varphi} + \hat{\varphi}, \quad l_{\alpha\beta} = \bar{l}_{\alpha\beta} + \hat{l}_{\alpha\beta}, \quad (5.2.2)$$

wobei unter Verwendung von (2.2.4 - 5) folgende Größen definiert werden

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{u}_{\alpha|\beta} + \bar{u}_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} \bar{w}, & \hat{\theta}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\hat{u}_{\alpha|\beta} + \hat{u}_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta} \hat{w}, \\ \bar{\varphi}_{\alpha} &= \bar{w}_{,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} \bar{u}_{\lambda}, & \hat{\varphi}_{\alpha} &= \hat{w}_{,\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} \hat{u}_{\lambda}, \\ \bar{\varphi} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \bar{u}_{\beta|\alpha} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \bar{\omega}_{\alpha\beta}, & \hat{\varphi} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \hat{u}_{\beta|\alpha} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \hat{\omega}_{\alpha\beta}, \\ \bar{l}_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta} + \bar{\theta}_{\alpha\beta} - \bar{\omega}_{\alpha\beta}, & \hat{l}_{\alpha\beta} &= \hat{\theta}_{\alpha\beta} - \hat{\omega}_{\alpha\beta} = \hat{\varphi}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Die Komponenten des Mittelflächendehnungstensors  $\gamma_{\alpha\beta}$  und des Krümmungsänderungstensors  $\chi_{\alpha\beta}$  im Nachbarzustand lassen sich als Taylorreihenentwicklung in der Umgebung von  $\underline{\bar{u}}$  bestimmen

$$\gamma_{\alpha\beta}(\underline{\bar{u}} + \underline{\hat{u}}) = \bar{\gamma}_{\alpha\beta} + \Delta \gamma_{\alpha\beta} = \bar{\gamma}_{\alpha\beta} + \gamma'_{\alpha\beta}(\underline{\bar{u}}; \underline{\hat{u}}) + \frac{1}{2} \gamma''_{\alpha\beta}(\underline{\bar{u}}; \underline{\hat{u}}^2), \quad (5.2.4)$$

$$\chi_{\alpha\beta}(\underline{\bar{u}} + \underline{\hat{u}}) = \bar{\chi}_{\alpha\beta} + \Delta \chi_{\alpha\beta} = \bar{\chi}_{\alpha\beta} + \chi'_{\alpha\beta}(\underline{\bar{u}}; \underline{\hat{u}}) + \frac{1}{2} \chi''_{\alpha\beta}(\underline{\bar{u}}; \underline{\hat{u}}^2) + \frac{1}{6} \chi'''_{\alpha\beta}(\underline{\bar{u}}; \underline{\hat{u}}^3).$$

Zugehörige Glieder der Potenzreihen erhält man nach Substitution von (5.2.2 - 3) in (2.2.14) bzw. (4.1.2) in der Form

$$\bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{l}_{\cdot\alpha}^{\lambda} \bar{l}_{\lambda\beta} + \bar{\varphi}_{\alpha} \bar{\varphi}_{\beta} - a_{\alpha\beta}),$$

$$\gamma'_{\alpha\beta}(\underline{\bar{u}}; \underline{\hat{u}}) = \frac{1}{2} (\bar{l}_{\cdot\alpha}^{\lambda} \hat{\varphi}_{\lambda\beta} + \hat{\varphi}_{\cdot\alpha}^{\lambda} \bar{l}_{\lambda\beta} + \bar{\varphi}_{\alpha} \hat{\varphi}_{\beta} + \hat{\varphi}_{\alpha} \bar{\varphi}_{\beta}), \quad (5.2.5)$$

$$\gamma''_{\alpha\beta}(\underline{\bar{u}}; \underline{\hat{u}}^2) = \hat{\varphi}_{\cdot\alpha}^{\lambda} \hat{\varphi}_{\lambda\beta} + \hat{\varphi}_{\alpha} \hat{\varphi}_{\beta},$$

$$\bar{\chi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[ \bar{l}_{\lambda\alpha} (\bar{m}^\lambda|_\beta - b_\beta^\lambda \bar{m}) + \bar{l}_{\lambda\beta} (\bar{m}^\lambda|_\alpha - b_\alpha^\lambda \bar{m}) + \right. \\ \left. + \bar{p}_\alpha (\bar{m}|_\beta + b_\beta^\lambda \bar{m}_\lambda) + \bar{p}_\beta (\bar{m}|_\alpha + b_\alpha^\lambda \bar{m}_\lambda) \right] + b_{\alpha\beta} (1 + \bar{\gamma}_x^\alpha) ,$$

$$\chi'_{\alpha\beta} (\underline{u}; \underline{\hat{u}}) = \frac{1}{2} \left[ \hat{p}_{\lambda\alpha} (\bar{m}^\lambda|_\beta - b_\beta^\lambda \bar{m}) + \hat{p}_{\lambda\beta} (\bar{m}^\lambda|_\alpha - b_\alpha^\lambda \bar{m}) + \right. \\ \left. + \hat{p}_\alpha (\bar{m}|_\beta + b_\beta^\lambda \bar{m}_\lambda) + \hat{p}_\beta (\bar{m}|_\alpha + b_\alpha^\lambda \bar{m}_\lambda) + \right. \\ \left. + \bar{l}_{\lambda\alpha} (m^\lambda(\underline{u}; \underline{\hat{u}})|_\beta - b_\beta^\lambda m'(\underline{u}; \underline{\hat{u}})) + \bar{l}_{\lambda\beta} (m^\lambda(\underline{u}; \underline{\hat{u}})|_\alpha - b_\alpha^\lambda m'(\underline{u}; \underline{\hat{u}})) + \right. \\ \left. + \bar{p}_\alpha (m'(\underline{u}; \underline{\hat{u}})|_\beta + b_\beta^\lambda m'_\lambda(\underline{u}; \underline{\hat{u}})) + \bar{p}_\beta (m'(\underline{u}; \underline{\hat{u}})|_\alpha + b_\alpha^\lambda m'_\lambda(\underline{u}; \underline{\hat{u}})) \right] + \\ + b_{\alpha\beta} \gamma_x^{\alpha\prime}(\underline{u}; \underline{\hat{u}}) ,$$

(5.2.6)

$$\chi''_{\alpha\beta} (\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2) = \frac{1}{2} \left[ 2\hat{p}_{\lambda\alpha} (m^\lambda(\underline{u}; \underline{\hat{u}})|_\beta - b_\beta^\lambda m'(\underline{u}; \underline{\hat{u}})) + 2\hat{p}_{\lambda\beta} (m^\lambda(\underline{u}; \underline{\hat{u}})|_\alpha - b_\alpha^\lambda m'(\underline{u}; \underline{\hat{u}})) + \right. \\ \left. + 2\hat{p}_\alpha (m'(\underline{u}; \underline{\hat{u}})|_\beta + b_\beta^\lambda m'_\lambda(\underline{u}; \underline{\hat{u}})) + 2\hat{p}_\beta (m'(\underline{u}; \underline{\hat{u}})|_\alpha + b_\alpha^\lambda m'_\lambda(\underline{u}; \underline{\hat{u}})) + \right. \\ \left. + \bar{l}_{\lambda\alpha} (m^{\lambda\prime\prime}(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2)|_\beta - b_\beta^\lambda m''(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2)) + \bar{l}_{\lambda\beta} (m^{\lambda\prime\prime}(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2)|_\alpha - b_\alpha^\lambda m''(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2)) + \right. \\ \left. + \bar{p}_\alpha (m''(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2)|_\beta + b_\beta^\lambda m''_\lambda(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2)) + \bar{p}_\beta (m''(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2)|_\alpha + b_\alpha^\lambda m''_\lambda(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2)) \right] + \\ + b_{\alpha\beta} \gamma_x^{\alpha\prime\prime}(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2) ,$$

$$\chi'''_{\alpha\beta} (\underline{u}; \underline{\hat{u}}^3) = \frac{3}{2} \left[ \hat{p}_{\lambda\alpha} (m^{\lambda\prime\prime\prime}(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^3)|_\beta - b_\beta^\lambda m''(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2)) + \hat{p}_{\lambda\beta} (m^{\lambda\prime\prime\prime}(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^3)|_\alpha - b_\alpha^\lambda m''(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2)) + \right. \\ \left. + \hat{p}_\alpha (m''(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2)|_\beta + b_\beta^\lambda m''_\lambda(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2)) + \hat{p}_\beta (m''(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2)|_\alpha + b_\alpha^\lambda m''_\lambda(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2)) \right] ,$$

wobei wir zusätzlich die folgenden Abkürzungen einführen

$$\bar{m}_\mu = \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\mu} \bar{p}_\alpha \bar{l}^\lambda_{\cdot\beta} ,$$

$$m'_\mu(\underline{u}; \underline{\hat{u}}) = \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\mu} (\hat{p}_\alpha \bar{l}^\lambda_{\cdot\beta} + \bar{p}_\alpha \hat{p}^\lambda_{\cdot\beta}) ,$$

$$m''_\mu(\underline{u}; \underline{\hat{u}}^2) = 2 \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\mu} \hat{p}_\alpha \hat{p}^\lambda_{\cdot\beta} ,$$

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\mu} \bar{l}^{\lambda}_{\cdot\alpha} \bar{l}^{\mu}_{\cdot\beta} \quad , \\ m'(\bar{u}; \hat{u}) &= \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\mu} (\hat{\varphi}^{\lambda}_{\cdot\alpha} \bar{l}^{\mu}_{\cdot\beta} + \bar{l}^{\lambda}_{\cdot\alpha} \hat{\varphi}^{\mu}_{\cdot\beta}) = \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\mu} \hat{\varphi}^{\lambda}_{\cdot\alpha} \bar{l}^{\mu}_{\cdot\beta} \quad , \\ m''(\bar{u}; \hat{u}^2) &= \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\lambda\mu} \hat{\varphi}^{\lambda}_{\cdot\alpha} \hat{\varphi}^{\mu}_{\cdot\beta} \quad . \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Die in (5.2.4 - 7) auftretenden n-fach quergestrichenen Größen (...) <sup>(n)</sup> können mit Hilfe der Definition des Gâteaux Differential eines nicht-linearen Operators F( $\bar{u}$ ) [5.17]

$$F'(\bar{u}; \hat{u}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(\bar{u} + t\hat{u}) - F(\bar{u})}{t} = \left[ \frac{d}{dt} (F(\bar{u} + t\hat{u})) \right] \Big|_{t=0} \quad (5.2.8)$$

als n-te Gâteaux Differentiale entsprechender Größen im Punkt  $\bar{u}$  in Richtung von  $\hat{u}$  bestimmt werden.

Ausgehend von den nichtrationalen Beziehungen (2.4.7) lassen sich die Zuwächse der Rotationsparameter des Schalenrandes infolge einer Zusatzdeformation  $\hat{u}$  formal als unendliche Taylorreihe um die Fundamentallage schreiben

$$\begin{aligned} \Delta n_v &= n'_v(\bar{u}; \hat{u}) + \frac{1}{2} n''_v(\bar{u}; \hat{u}^2) + \dots \quad , \\ \Delta n_t &= n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + \frac{1}{2} n''_t(\bar{u}; \hat{u}^2) + \dots \quad , \\ \Delta n &= n'(\bar{u}; \hat{u}) + \frac{1}{2} n''(\bar{u}; \hat{u}^2) + \dots \quad . \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Die Berechnung der in (5.2.9) auftretenden Gâteaux Differentiale  $n_v^{(n)}(\bar{u}; \hat{u}^n)$ ,  $n_t^{(n)}(\bar{u}; \hat{u}^n)$  und  $n^{(n)}(\bar{u}; \hat{u}^n)$  ist infolge der dabei erforderlichen Transformationen der Invarianten  $\sqrt{\frac{a}{\bar{a}}}$  mit einigen Schwierigkeiten verbunden. Zudem war schon in Kapitel 2.4 nachgewiesen worden, daß bei Annahme der Kirchhoff-Love-Hypothese drei Verschiebungskomponenten  $u_v$ ,  $u_t$ ,  $w$  und  $n_v$  als Rotationsparameter eine Deformation der Schalenrandfläche vollständig beschreiben. Es ist daher erforderlich die Gâteaux Differentiale der abhängigen Rotationsparameter  $n_t^{(n)}(\bar{u}; \hat{u}^n)$  und  $n^{(n)}(\bar{u}; \hat{u}^n)$  durch Differentiale der vier unabhängigen Randgrößen auszudrücken.

In einer Theorie moderater Rotationen (6.2.23 - 25) nimmt  $n_v$  den konsistent approximierten linearen Ausdruck  $n_v = -\varphi_v$  an, womit Gâteaux Differentiale  $n_v^{(n)}(\bar{u}; \hat{u}^n)$ ,  $n > 1$  verschwinden und der vierte Randparameter linear superponiert werden kann. Die in der allgemeinen Theorie dünner elastischer Schalen auftretenden Differentiale höherer Ordnung werden im folgenden zunächst als zusätzliche unabhängige Randgrößen betrachtet, wobei wir uns im Rahmen der Untersuchung kritischen Gleichgewichts auf Differentiale bis zur zweiten Ordnung beschränken werden.

Das erste und zweite Gâteaux Differential der hilfreichen Identitäten (4.2.4) liefert dann zwei Gleichungssysteme, deren Lösungen nach umfangreichen Transformationen auf die gesuchten Abhängigkeiten führen

$$n'_t(\bar{u}; \hat{u}) = d_v \hat{u}_v + d_t \hat{u}_t + d_n \hat{w} + f n'_v(\bar{u}; \hat{u}) + g_v \hat{u}_{v,s} + g_t \hat{u}_{t,s} + g_n \hat{w}_{,s} \quad , \quad (5.2.10)$$

$$n'(\bar{u}; \hat{u}) = h_v \hat{u}_v + h_t \hat{u}_t + h_n \hat{w} + k n'_v(\bar{u}; \hat{u}) + r_v \hat{u}_{v,s} + r_t \hat{u}_{t,s} + r_n \hat{w}_{,s} \quad , \quad (5.2.11)$$

$$n''_t(\bar{u}; \hat{u}^2) = d'_v(\bar{u}; \hat{u}) \hat{u}_v + d'_t(\bar{u}; \hat{u}) \hat{u}_t + d'_n(\bar{u}; \hat{u}) \hat{w} + f'(\bar{u}; \hat{u}) n'_v(\bar{u}; \hat{u}) + g'_v(\bar{u}; \hat{u}) \hat{u}_{v,s} + g'_t(\bar{u}; \hat{u}) \hat{u}_{t,s} + g'_n(\bar{u}; \hat{u}) \hat{w}_{,s} + f n''_v(\bar{u}; \hat{u}^2) \quad , \quad (5.2.12)$$

$$n''(\bar{u}; \hat{u}^2) = h'_v(\bar{u}; \hat{u}) \hat{u}_v + h'_t(\bar{u}; \hat{u}) \hat{u}_t + h'_n(\bar{u}; \hat{u}) \hat{w} + k'(\bar{u}; \hat{u}) n'_v(\bar{u}; \hat{u}) + r'_v(\bar{u}; \hat{u}) \hat{u}_{v,s} + r'_t(\bar{u}; \hat{u}) \hat{u}_{t,s} + r'_n(\bar{u}; \hat{u}) \hat{w}_{,s} + k n''_v(\bar{u}; \hat{u}^2) \quad , \quad (5.2.13)$$

wobei sich in (5.2.10 - 13)  $\bar{n}_t$ ,  $\bar{n}_v$ ,  $\bar{n}$  und  $\bar{c}_t$ ,  $\bar{c}_v$ ,  $\bar{c}_n$  unter Verwendung von (2.4.7) bzw. (2.4.6) mit entsprechenden Kopfzeigern bestimmen lassen und folgende Definitionen eingeführt wurden

$$\begin{aligned} \hat{c}_v &= \hat{u}_{v,s} + \tau_t \hat{w} - \varkappa_t \hat{u}_t \quad , \quad \hat{c}_t = \hat{u}_{t,s} + \varkappa_t \hat{u}_v - \sigma_t \hat{w} \quad , \\ \hat{c}_n &= \hat{w}_{,s} + \sigma_t \hat{u}_t - \varkappa_t \hat{u}_v \quad , \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

$$\begin{aligned} d_v &= \frac{\bar{n}}{D} (\bar{n}_t \varkappa_t - \bar{n} \tau_t) \quad , \quad d_t = \frac{\bar{n}}{D} (\bar{n} \sigma_t - \bar{n}_v \varkappa_t) \quad , \quad d_n = \frac{\bar{n}}{D} (\bar{n}_v \tau_t - \bar{n}_t \sigma_t) \quad , \\ g_v &= \frac{\bar{n}_v \bar{n}}{D} \quad , \quad g_t = \frac{\bar{n}_t \bar{n}}{D} \quad , \quad g_n = \frac{\bar{n}^2}{D} \quad , \\ h_v &= \frac{\bar{n}_t}{D} (\bar{n} \tau_t - \bar{n}_t \varkappa_t) \quad , \quad h_t = \frac{\bar{n}_t}{D} (\bar{n}_v \varkappa_t - \bar{n} \sigma_t) \quad , \quad h_n = \frac{\bar{n}_t}{D} (\bar{n}_t \sigma_t - \bar{n}_v \tau_t) \quad , \\ r_v &= -\frac{\bar{n}_t \bar{n}_v}{D} \quad , \quad r_t = -\frac{\bar{n}_t^2}{D} \quad , \quad r_n = -\frac{\bar{n}_t \bar{n}}{D} \quad , \\ f &= \frac{1}{D} (\bar{n} \bar{c}_v - \bar{c} \bar{n}_v) \quad , \quad k = \frac{1}{D} (\bar{n}_v \bar{c}_t - \bar{n}_t \bar{c}_v) \quad , \quad D = \bar{c}_n \bar{n}_t - \bar{c}_t \bar{n} \quad , \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

$$\begin{aligned}
 d'_v(\bar{u}; \hat{u}) &= -\frac{\bar{c}}{D} [d_v n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + h_v n'(\bar{u}; \hat{u})] + \frac{\bar{n}}{D} [d_v \hat{c}_t + \alpha_t n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + h_v \hat{c} - \tau_t n'(\bar{u}; \hat{u})], \\
 d'_t(\bar{u}; \hat{u}) &= -\frac{\bar{c}}{D} [d_t n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + h_t n'(\bar{u}; \hat{u})] + \frac{\bar{n}}{D} [d_t \hat{c}_t + \sigma_t n'(\bar{u}; \hat{u}) + h_t \hat{c} - \alpha_t n'_v(\bar{u}; \hat{u})], \\
 d'_n(\bar{u}; \hat{u}) &= -\frac{\bar{c}}{D} [d_n n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + h_n n'(\bar{u}; \hat{u})] + \frac{\bar{n}}{D} [d_n \hat{c}_t + \tau_t n'_v(\bar{u}; \hat{u}) + h_n \hat{c} - \sigma_t n'_t(\bar{u}; \hat{u})], \\
 h'_v(\bar{u}; \hat{u}) &= \frac{\bar{c}_t}{D} [d_v n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + h_v n'(\bar{u}; \hat{u})] - \frac{\bar{n}_t}{D} [d_v \hat{c}_t + \alpha_t n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + h_v \hat{c} - \tau_t n'(\bar{u}; \hat{u})], \\
 h'_t(\bar{u}; \hat{u}) &= \frac{\bar{c}_t}{D} [d_t n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + h_t n'(\bar{u}; \hat{u})] - \frac{\bar{n}_t}{D} [d_t \hat{c}_t + \sigma_t n'(\bar{u}; \hat{u}) + h_t \hat{c} - \alpha_t n'_v(\bar{u}; \hat{u})], \\
 h'_n(\bar{u}; \hat{u}) &= \frac{\bar{c}_t}{D} [d_n n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + h_n n'(\bar{u}; \hat{u})] - \frac{\bar{n}_t}{D} [d_n \hat{c}_t + \tau_t n'_v(\bar{u}; \hat{u}) + h_n \hat{c} - \sigma_t n'_t(\bar{u}; \hat{u})], \\
 g'_v(\bar{u}; \hat{u}) &= -\frac{\bar{c}}{D} [g_v n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + r_v n'(\bar{u}; \hat{u})] + \frac{\bar{n}}{D} [g_v \hat{c}_t + n'_v(\bar{u}; \hat{u}) + r_v \hat{c}], \\
 g'_t(\bar{u}; \hat{u}) &= -\frac{\bar{c}}{D} [g_t n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + r_t n'(\bar{u}; \hat{u})] + \frac{\bar{n}}{D} [g_t \hat{c}_t + n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + r_t \hat{c}], \quad (5.2.16) \\
 g'_n(\bar{u}; \hat{u}) &= -\frac{\bar{c}}{D} [g_n n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + r_n n'(\bar{u}; \hat{u})] + \frac{\bar{n}}{D} [g_n \hat{c}_t + n'(\bar{u}; \hat{u}) + r_n \hat{c}], \\
 r'_v(\bar{u}; \hat{u}) &= \frac{\bar{c}_t}{D} [g_v n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + r_v n'(\bar{u}; \hat{u})] - \frac{\bar{n}_t}{D} [g_v \hat{c}_t + n'_v(\bar{u}; \hat{u}) + r_v \hat{c}], \\
 r'_t(\bar{u}; \hat{u}) &= \frac{\bar{c}_t}{D} [g_t n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + r_t n'(\bar{u}; \hat{u})] - \frac{\bar{n}_t}{D} [g_t \hat{c}_t + n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + r_t \hat{c}], \\
 r'_n(\bar{u}; \hat{u}) &= \frac{\bar{c}_t}{D} [g_n n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + r_n n'(\bar{u}; \hat{u})] - \frac{\bar{n}_t}{D} [g_n \hat{c}_t + n'(\bar{u}; \hat{u}) + r_n \hat{c}], \\
 f'(\bar{u}; \hat{u}) &= -\frac{\bar{c}}{D} [n'_v(\bar{u}; \hat{u}) + f n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + k n'(\bar{u}; \hat{u})] + \frac{\bar{n}}{D} [\hat{c}_v + f \hat{c}_t + k \hat{c}], \\
 k'(\bar{u}; \hat{u}) &= \frac{\bar{c}_t}{D} [n'_v(\bar{u}; \hat{u}) + f n'_t(\bar{u}; \hat{u}) + k n'(\bar{u}; \hat{u})] - \frac{\bar{n}_t}{D} [\hat{c}_v + f \hat{c}_t + k \hat{c}].
 \end{aligned}$$

Substitution der vorstehend abgeleiteten Beziehungen in (4.4.10) liefert schließlich das Gesamtpotential der Schale in der Nachbarlage als Taylorreihenentwicklung in einer Umgebung des Fundamentalzustandes

$$J_\rho(\underline{u}) = J_\rho(\bar{\underline{u}}) + J'_\rho(\bar{\underline{u}}; \hat{\underline{u}}) + \frac{1}{2} J''_\rho(\bar{\underline{u}}; \hat{\underline{u}}^2) + \dots, \quad (5.2.17)$$

mit  $J_p^{(n)}(\bar{\underline{u}}; \hat{\underline{u}}^n)$  als n-te Gâteaux Differentiale des Gesamtpotentials in  $\bar{\underline{u}}$  in Richtung von  $\hat{\underline{u}}$  gemäß (5.2.8)

$$J_{\rho}(\bar{u}) = \iint_{\mathcal{M}} [\Sigma(\bar{u}) - \rho \cdot \bar{u}] dA - \int_{C_f} [T_v^* \cdot \bar{u} + H_v^* \cdot (\bar{\eta} - \eta)] ds, \quad (5.2.18)$$

$$J'_{\rho}(\bar{u}; \hat{u}) = \iint_{\mathcal{M}} [\Sigma'(\bar{u}; \hat{u}) - \rho \cdot \hat{u}] dA - \int_{C_f} [T_v^* \cdot \hat{u} + H_v^* \cdot \bar{\eta}'(\bar{u}; \hat{u})] ds, \quad (5.2.19)$$

$$J''_{\rho}(\bar{u}; \hat{u}^2) = \iint_{\mathcal{M}} [\Sigma''(\bar{u}; \hat{u}^2)] dA - \int_{C_f} [H_v^* \cdot \bar{\eta}''(\bar{u}; \hat{u}^2)] ds$$

$$\vdots$$

und entsprechenden Differentialen der Verformungsenergiedichte

$$\Sigma(\bar{u}) = \frac{h}{2} H^{\alpha\beta\lambda\mu} (\bar{\gamma}_{\alpha\beta} \bar{\gamma}_{\lambda\mu} + \frac{h^2}{12} \bar{\chi}_{\alpha\beta} \bar{\chi}_{\lambda\mu}) \quad (5.2.21)$$

$$\Sigma'(\bar{u}; \hat{u}) = h H^{\alpha\beta\lambda\mu} [\bar{\gamma}_{\alpha\beta} \gamma'_{\lambda\mu}(\bar{u}; \hat{u}) + \frac{h^2}{12} \bar{\chi}_{\alpha\beta} \chi'_{\lambda\mu}(\bar{u}; \hat{u})] \quad (5.2.22)$$

$$\Sigma''(\bar{u}; \hat{u}^2) = h H^{\alpha\beta\lambda\mu} [\gamma'_{\alpha\beta}(\bar{u}; \hat{u}) \gamma'_{\lambda\mu}(\bar{u}; \hat{u}) + \frac{h^2}{12} \chi'_{\alpha\beta}(\bar{u}; \hat{u}) \chi'_{\lambda\mu}(\bar{u}; \hat{u}) +$$

$$\vdots$$

$$+ \bar{\gamma}_{\alpha\beta} \gamma''_{\lambda\mu}(\bar{u}; \hat{u}^2) + \frac{h^2}{12} \bar{\chi}_{\alpha\beta} \chi''_{\lambda\mu}(\bar{u}; \hat{u}^2)] \quad (5.2.23)$$

### 5.3. Das energetische Kriterium und der vollständige Satz Stabilitätsgleichungen

Um das Verhalten der Schale im Fundamentalzustand und insbesondere die Grenzen stabilen Tragverhaltens bestimmen zu können, benutzen wir als Maß den Zuwachs des Gesamtpotentials  $\Delta J_{\rho}$  beim Übergang in eine Nachbarlage

$$\Delta J_{\rho} = J_{\rho}(\bar{u} + \hat{u}) - J_{\rho}(\bar{u}) \quad (5.3.1)$$

Führt man die Reihenentwicklung (5.2.18) in (5.3.1) ein und berücksichtigt, daß das erste Gâteaux Differential für Gleichgewichtslagen  $\bar{u}$  verschwindet, ergibt sich die Beziehung

$$\Delta J_{\rho} = \frac{1}{2!} J''_{\rho}(\bar{u}; \hat{u}^2) + \dots \quad (5.3.2)$$

Der wesentliche Beitrag zum Energiezuwachs, das zweite Gâteaux Differential, wird im folgenden zur Bestimmung der Stabilitätsgleichungen herangezogen. Substitution von (5.2.23) und (5.2.5 - 7) in (5.2.20, n = 2) ermöglicht die zu (4.2.2) analoge Transformation des Integranden

$$\begin{aligned}
 J_p''(\bar{u}; \hat{u}^2) = & \iint_M \left\{ T^{\lambda\beta'}(\bar{u}; \hat{u}) \hat{\varphi}_{\lambda\beta} + T^{\beta'}(\bar{u}; \hat{u}) \hat{\varphi}_\beta + [ M^{\alpha\beta'}(\bar{u}; \hat{u}) (\bar{l}_{\lambda\alpha} m^{\lambda'}(\bar{u}; \hat{u}) + \right. \\
 & + \bar{\varphi}_\alpha m'(\bar{u}; \hat{u})) + \bar{M}^{\alpha\beta} (\hat{\varphi}_{\lambda\alpha} m^{\lambda'}(\bar{u}; \hat{u}) + \hat{\varphi}_\alpha m'(\bar{u}; \hat{u}) + \\
 & \left. + \bar{l}_{\lambda\alpha} m^{\lambda''}(\bar{u}; \hat{u}^2) + \bar{\varphi}_\alpha m''(\bar{u}; \hat{u}^2)) \right] |_\beta \} dA - \\
 & - \int_{C_f} \left\{ H_{\nu\nu}^* n_\nu''(\bar{u}; \hat{u}^2) + H_{tv}^* n_t''(\bar{u}; \hat{u}^2) + H_{nv}^* n''(\bar{u}; \hat{u}^2) \right\} ds, \quad (5.3.3)
 \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 T^{\lambda\beta'}(\bar{u}; \hat{u}) = & \hat{\varphi}_\alpha^\lambda (\bar{N}^{\alpha\beta} + a^{\alpha\beta} b_{\alpha\rho} \bar{M}^{\alpha\rho}) + \bar{l}_\alpha^\lambda (N^{\alpha\beta'}(\bar{u}; \hat{u}) + a^{\alpha\beta} b_{\alpha\rho} M^{\alpha\rho'}(\bar{u}; \hat{u})) + \\
 & + M^{\alpha\beta} (m^{\lambda'}(\bar{u}; \hat{u})|_\alpha - b_\alpha^\lambda m'(\bar{u}; \hat{u})) + M^{\alpha\beta'}(\bar{u}; \hat{u}) (\bar{m}^\lambda|_\alpha - b_\alpha^\lambda \bar{m}) + \\
 & + \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\mu} \{ \bar{l}_{\mu\alpha} [(\bar{\varphi}_\alpha M^{\alpha\rho'})|_\rho + b_\alpha^\rho \bar{l}_{\rho\sigma} M^{\alpha\rho'}(\bar{u}; \hat{u}) + \\
 & + (\hat{\varphi}_\alpha \bar{M}^{\alpha\rho})|_\rho + b_\alpha^\rho \hat{\varphi}_{\lambda\rho} \bar{M}^{\alpha\rho}] + \hat{\varphi}_{\mu\alpha} [(\bar{\varphi}_\alpha \bar{M}^{\alpha\rho})|_\rho + b_\alpha^\rho \bar{l}_{\rho\sigma} \bar{M}^{\alpha\rho}] - \\
 & - \bar{\varphi}_\alpha [(\bar{l}_{\mu\alpha} M^{\alpha\rho'})|_\rho - b_{\mu\alpha} \bar{\varphi}_\rho M^{\alpha\rho'}(\bar{u}; \hat{u}) + (\hat{\varphi}_{\mu\alpha} \bar{M}^{\alpha\rho})|_\rho - \\
 & - b_{\mu\alpha} \hat{\varphi}_\rho \bar{M}^{\alpha\rho}] - \hat{\varphi}_\alpha [(\bar{l}_{\mu\alpha} \bar{M}^{\alpha\rho})|_\rho - b_{\mu\alpha} \bar{\varphi}_\rho \bar{M}^{\alpha\rho}] \} \quad , \quad (5.3.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{\beta'}(\bar{u}; \hat{u}) = & \hat{\varphi}_\alpha (\bar{N}^{\alpha\beta} + a^{\alpha\beta} b_{\alpha\rho} \bar{M}^{\alpha\rho}) + \bar{\varphi}_\alpha (N^{\alpha\beta'}(\bar{u}; \hat{u}) + a^{\alpha\beta} b_{\alpha\rho} M^{\alpha\rho'}(\bar{u}; \hat{u})) + \\
 & + \bar{M}^{\alpha\beta} (m'(\bar{u}; \hat{u})|_\alpha + b_\alpha^\lambda m'_\lambda(\bar{u}; \hat{u})) + M^{\alpha\beta'}(\bar{u}; \hat{u}) (\bar{m}|_\alpha + b_\alpha^\lambda \bar{m}_\lambda) + \\
 & + \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\lambda\mu} \{ \bar{l}_{\lambda\alpha} [(\bar{l}_{\mu\alpha} M^{\alpha\rho'})|_\rho - b_{\mu\alpha} \bar{\varphi}_\rho M^{\alpha\rho'}(\bar{u}; \hat{u}) + \\
 & + (\hat{\varphi}_{\mu\alpha} \bar{M}^{\alpha\rho})|_\rho - b_{\mu\alpha} \hat{\varphi}_\rho \bar{M}^{\alpha\rho}] + \hat{\varphi}_{\lambda\alpha} [(\bar{l}_{\mu\alpha} \bar{M}^{\alpha\rho})|_\rho - b_{\mu\alpha} \bar{\varphi}_\rho \bar{M}^{\alpha\rho}] \}
 \end{aligned}$$

und den zugehörigen konstitutiven Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \bar{N}^{\alpha\beta} = h H^{\alpha\beta\lambda\mu} \bar{\gamma}_{\lambda\mu}, \quad \bar{M}^{\alpha\beta} = \frac{h^3}{12} H^{\alpha\beta\lambda\mu} \bar{\chi}_{\lambda\mu}, \quad (5.3.5) \\
 N^{\alpha\beta'}(\bar{u}; \hat{u}) = h H^{\alpha\beta\lambda\mu} \gamma'_{\lambda\mu}(\bar{u}; \hat{u}), \quad M^{\alpha\beta'}(\bar{u}; \hat{u}) = \frac{h^3}{12} H^{\alpha\beta\lambda\mu} \chi'_{\lambda\mu}(\bar{u}; \hat{u}).
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Identität (4.2.5) und deren ersten Gâteaux Differential läßt sich die nützliche Beziehung

$$\begin{aligned}
 & M^{\alpha\beta'}(\bar{u}, \hat{u})(\bar{l}_{\lambda\alpha} m^{\lambda'}(\bar{u}, \hat{u}) + \bar{\varphi}_\alpha m'(\bar{u}, \hat{u})) + \bar{M}^{\alpha\beta}(\hat{\varphi}_{\lambda\alpha} m^{\lambda'}(\bar{u}, \hat{u}) + \\
 & + \hat{\varphi}_\alpha m'(\bar{u}, \hat{u}) + \bar{l}_{\lambda\alpha} m^{\lambda''}(\bar{u}, \hat{u}^2) + \bar{\varphi}_\alpha m''(\bar{u}, \hat{u}^2)) = \\
 & = R'_{\nu\nu}(\bar{u}, \hat{u}) n'_\nu(\bar{u}, \hat{u}) + R'_{t\nu}(\bar{u}, \hat{u}) n'_t(\bar{u}, \hat{u}) + R'_{n\nu}(\bar{u}, \hat{u}) n'_n(\bar{u}, \hat{u}) + \\
 & + R_{\nu\nu}''(\bar{u}, \hat{u}^2) + R_{t\nu}'' n''_t(\bar{u}, \hat{u}^2) + R_{n\nu}'' n''_n(\bar{u}, \hat{u}^2) \quad (5.3.6)
 \end{aligned}$$

herleiten, womit die schon in Kapitel 4 erwähnten Schwierigkeiten bei der Randintegraltransformation umgangen werden können. Weitere Umformungen mit Hilfe partieller Integration und Anwendung des Gaußschen Divergenztheorems liefern schließlich das zweite Gâteaux Differential in der Form

$$\begin{aligned}
 J''_\rho(\bar{u}, \hat{u}^2) = & - \iint_{\mathcal{M}} \left\{ [T^{\lambda\beta'}(\bar{u}, \hat{u})]_{/\beta} - b_\beta^\lambda T^{\beta'}(\bar{u}, \hat{u}) \right\} \hat{u}_\lambda + \\
 & + [T^{\beta'}(\bar{u}, \hat{u})]_{/\beta} + b_{\lambda\beta} T^{\lambda\beta'}(\bar{u}, \hat{u}) \hat{w} \Big\} dA + \\
 & + \int_{C_f} \left\{ [P'_\nu(\bar{u}, \hat{u}) - P^{*\prime}_\nu(\bar{u}, \hat{u})] \hat{u}_\nu + [P'_t(\bar{u}, \hat{u}) - P^{*\prime}_t(\bar{u}, \hat{u})] \hat{u}_t + \right. \\
 & + [P'_n(\bar{u}, \hat{u}) - P^{*\prime}_n(\bar{u}, \hat{u})] \hat{w} + [M'(\bar{u}, \hat{u}) - M^{*\prime}(\bar{u}, \hat{u})] n'_\nu(\bar{u}, \hat{u}) + \\
 & \left. + \underbrace{[M - M^*]}_{=0} n''_\nu(\bar{u}, \hat{u}^2) \right\} ds - \\
 & - \sum_j \left\{ [F'_{\nu j}(\bar{u}, \hat{u}) - F^{*\prime}_{\nu j}(\bar{u}, \hat{u})] \hat{u}_{\nu j} + [F'_{t j}(\bar{u}, \hat{u}) - F^{*\prime}_{t j}(\bar{u}, \hat{u})] \hat{u}_{t j} + \right. \\
 & \left. + [F'_{\eta j}(\bar{u}, \hat{u}) - F^{*\prime}_{\eta j}(\bar{u}, \hat{u})] \hat{w}_j \right\} \quad (5.3.7)
 \end{aligned}$$

In (5.3.7) wurden zusätzlich als Abkürzungen nachstehende Größen vereinbart

$$\begin{aligned}
 P'_\nu(\bar{u}, \hat{u}) &= T^{\lambda\beta'}(\bar{u}, \hat{u}) \nu_\lambda \nu_\beta + Q'_\nu(\bar{u}, \hat{u}) \quad , \\
 P'_t(\bar{u}, \hat{u}) &= T^{\lambda\beta'}(\bar{u}, \hat{u}) t_\lambda \nu_\beta + Q'_t(\bar{u}, \hat{u}) \quad , \\
 P'_n(\bar{u}, \hat{u}) &= T^{\beta'}(\bar{u}, \hat{u}) \nu_\beta + Q'_n(\bar{u}, \hat{u}) \quad ,
 \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

$$R_v^{*'}(\underline{u}; \hat{u}) = Q_v^{*'}(\underline{u}; \hat{u}) \quad , \quad P_t^{*'}(\underline{u}; \hat{u}) = Q_t^{*'}(\underline{u}; \hat{u}) \quad , \quad P_n^{*'}(\underline{u}; \hat{u}) = Q_n^{*'}(\underline{u}; \hat{u}) \quad , \quad (5.3.9)$$

$$Q'_\square(\underline{u}; \hat{u}) = R'_{tv}(\underline{u}; \hat{u}) d'_\square + R'_{nv}(\underline{u}; \hat{u}) h'_\square + R'_{tv} d'_{-\square}(\underline{u}; \hat{u}) + R'_{nv} h'_{-\square}(\underline{u}; \hat{u}) - (F'_\square(\underline{u}; \hat{u}))_{,s} \quad , \quad (\square = v, t, n) \quad ,$$

$$Q^*_{\square}(\underline{u}; \hat{u}) = H^*_{tv} d'_{\square}(\underline{u}; \hat{u}) + H^*_{nv} h'_{\square}(\underline{u}; \hat{u}) - (F^*_{\square}(\underline{u}; \hat{u}))_{,s} \quad , \quad (5.3.10)$$

$$F'_{\square j}(\underline{u}; \hat{u}) = F'_{\square}(\underline{u}; \hat{u})_{s_{fj}+0} - F'_{\square}(\underline{u}; \hat{u})_{s_{fj}-0} \quad , \quad F^*_{\square j}(\underline{u}; \hat{u}) = F^*_{\square}(\underline{u}; \hat{u})_{s_{fj}+0} - F^*_{\square}(\underline{u}; \hat{u})_{s_{fj}-0} \quad ,$$

$$F'_{\square}(\underline{u}; \hat{u}) = R'_{tv}(\underline{u}; \hat{u}) g'_\square + R'_{nv}(\underline{u}; \hat{u}) r'_\square + R'_{tv} g'_{\square}(\underline{u}; \hat{u}) + R'_{nv} r'_{\square}(\underline{u}; \hat{u}) \quad ,$$

$$F^*_{\square}(\underline{u}; \hat{u}) = H^*_{tv} g'_{\square}(\underline{u}; \hat{u}) + H^*_{nv} r'_{\square}(\underline{u}; \hat{u}) \quad , \quad (5.3.11)$$

$$R_{vv} = I \bar{M}^{\alpha\beta} \bar{l}_{\cdot\alpha} v_{\lambda} v_{\beta} \quad , \quad R_{tv} = I \bar{M}^{\alpha\beta} \bar{l}_{\cdot\alpha} t_{\lambda} v_{\beta} \quad , \quad R_{nv} = I \bar{M}^{\alpha\beta} \bar{p}_{\alpha} v_{\beta} \quad ,$$

$$R'_{vv}(\underline{u}; \hat{u}) = (M^{\alpha\beta'}(\underline{u}; \hat{u}) I \bar{l}_{\cdot\alpha} + \bar{M}^{\alpha\beta} I \hat{p}_{\cdot\alpha} + \bar{M}^{\alpha\beta} I'(\underline{u}; \hat{u}) \bar{l}_{\cdot\alpha}) v_{\lambda} v_{\beta} \quad ,$$

$$R'_{tv}(\underline{u}; \hat{u}) = (M^{\alpha\beta'}(\underline{u}; \hat{u}) I \bar{l}_{\cdot\alpha} + \bar{M}^{\alpha\beta} I \hat{p}_{\cdot\alpha} + \bar{M}^{\alpha\beta} I'(\underline{u}; \hat{u}) \bar{l}_{\cdot\alpha}) t_{\lambda} v_{\beta} \quad ,$$

$$R'_{nv}(\underline{u}; \hat{u}) = (M^{\alpha\beta'}(\underline{u}; \hat{u}) I \bar{p}_{\alpha} + \bar{M}^{\alpha\beta} I \hat{p}_{\alpha} + \bar{M}^{\alpha\beta} I'(\underline{u}; \hat{u}) \bar{p}_{\alpha}) v_{\beta} \quad ,$$

$$I = \sqrt{\frac{a}{a}} \quad , \quad I'(\underline{u}; \hat{u}) = \left( \sqrt{\frac{a}{a}} \right)'(\underline{u}; \hat{u}) \quad ,$$

$$M'(\underline{u}; \hat{u}) = R'_{vv}(\underline{u}; \hat{u}) + R'_{tv}(\underline{u}; \hat{u}) f + R'_{nv}(\underline{u}; \hat{u}) k + R_{tv} f'(\underline{u}; \hat{u}) + R_{nv} k'(\underline{u}; \hat{u}) \quad ,$$

$$M^*_{\square}(\underline{u}; \hat{u}) = H^*_{tv} f'(\underline{u}; \hat{u}) + H^*_{nv} k'(\underline{u}; \hat{u}) \quad . \quad (5.3.12)$$

Es sei angemerkt, daß die mit dem zweiten Gâteaux Differential des unabhängigen Rotationsparameters  $n''_v(\underline{u}; \hat{u}^2)$  behafteten Terme im Randintegral von (5.3.7) die vierte statische Randbedingung des nichtlinearen Randwertproblems (4.4.5)<sub>2</sub> bilden. Mit dem Fundamentalzustand als Gleichgewichtslage ( $M - M^* = 0$ ) können diese Beiträge jedoch vernachlässigt werden.

Folgen wir nun dem energetischen Stabilitätskriterium, werden Zustände kritischen Gleichgewichts durch die nichttrivialen Lösungen des verschwindenden zweiten Gâteaux Differentials definiert

$$J''_p(\underline{u}; \hat{u}^2) = 0 \quad , \quad \hat{u} \neq 0 \quad . \quad (5.3.13)$$

Der vollständige Satz konsistenter Stabilitätsgleichungen einer allgemeinen geometrisch nichtlinearen Theorie dünner elastischer Schalen ergibt sich dann aus (5.3.13) unter Beachtung von (5.3.7):

$$\left. \begin{aligned} T^{\lambda\beta'}(\bar{u}; \hat{u})|_{\beta} - b_{\beta}^{\lambda} T^{\beta'}(\bar{u}; \hat{u}) &= 0 \\ T^{\beta'}(\bar{u}; \hat{u})|_{\beta} + b_{\lambda\beta} T^{\lambda\beta'}(\bar{u}; \hat{u}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ auf } M, \quad (5.3.14)$$

$$\left. \begin{aligned} P'_{\nu}(\bar{u}; \hat{u}) - P^{*'}_{\nu}(\bar{u}; \hat{u}) &= 0 \\ P'_t(\bar{u}; \hat{u}) - P^{*'}_t(\bar{u}; \hat{u}) &= 0 \\ P'_n(\bar{u}; \hat{u}) - P^{*'}_n(\bar{u}; \hat{u}) &= 0 \\ M'(\bar{u}; \hat{u}) - M^{*'}(\bar{u}; \hat{u}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ auf } C_f, \quad (5.3.15)$$

$$\left. \begin{aligned} F'_{\nu j}(\bar{u}; \hat{u}) - F^{*'}_{\nu j}(\bar{u}; \hat{u}) &= 0 \\ F'_{t j}(\bar{u}; \hat{u}) - F^{*'}_{t j}(\bar{u}; \hat{u}) &= 0 \\ F'_{n j}(\bar{u}; \hat{u}) - F^{*'}_{n j}(\bar{u}; \hat{u}) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{in allen Punkten} \\ M_{fj} \in C_f \end{array} \quad (5.3.16)$$

Diese Ergebnisse vervollständigen die Stabilitätsbetrachtungen in [5.2], wo mit Hilfe des modifizierten Krümmungsänderungsmaßes  $K_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(b_{\alpha}^{\lambda} \gamma_{\lambda\beta} + b_{\beta}^{\lambda} \gamma_{\lambda\alpha})$  entsprechende Gleichungen einer linearen Stabilitätsanalyse unter Annahme eines Membran-Vorbeulzustandes abgeleitet wurden.

Aus (5.3.9), (5.3.11 - 12) ist zu ersehen, daß die resultierenden äußeren Kirchhoffschen Randgrößen  $P^{*'}(\bar{u}; \hat{u})$ ,  $M^{*'}(\bar{u}; \hat{u})$  und  $F^{*'}(\bar{u}; \hat{u})$ , die multiplikativ mit den zugehörigen Randverschiebungs- bzw. Rotationsparametern  $\hat{u}_{\nu}$ ,  $\hat{u}_t$ ,  $\hat{w}$ ,  $n'_{\nu}(\bar{u}; \hat{u})$ ,  $\hat{u}_{\nu}(s_{fj})$ ,  $\hat{u}_t(s_{fj})$ ,  $\hat{w}(s_{fj})$  verbunden sind, im Rahmen dieser hochgradig geometrisch nichtlinearen Schalentheorie explizit von den Verschiebungen abhängen. Im Gegensatz dazu können bei Theorien mit maximal moderaten Rotationen die Beziehungen für kritisches Gleichgewicht aus dem lastunabhängigen zweiten Gâteaux Differential des inneren Potentials hergeleitet werden.

Zudem enthalten die statischen Randbedingungen (5.3.15 - 16) nicht-rationale Beiträge in Verschiebungskomponenten und deren Flächenableitungen. Auf eine Darstellung der approximativen Transformationen im Sinne

kleiner Dehnungen ( $\gamma_{\alpha\beta} = O(\theta^2)$ ) wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Vergleicht man die Stabilitätsgleichungen (5.3.14 - 16) mit den Grundgleichungen des nichtlinearen Randwertproblems (4.4.1 - 7), dann sind (5.3.14 - 16) offensichtlich die Gâteaux Differentiale von (4.4.1 - 7), was nach umfangreichen Transformationen ausgehend von (4.4.1 - 7) nachgewiesen werden kann. Damit erhalten wir eine allgemeine Form der in der ingenieurorientierten Literatur häufig verwendeten Methode des benachbarten Gleichgewichts.

Die Lösung des nichtlinearen Stabilitätsproblems (5.3.13), (5.3.14 - 16) führt auf ein nichtlineares Eigenwertproblem, welches näherungsweise durch eine Sequenz linearer Eigenwertabfragen auf der Basis bereits berechneter Fundamentalzustände erfolgt [5.12 - 13] (s. auch Kapitel 8.2).

Die Komplexität des Differentialgleichungssystems (5.3.14 - 16) und der zugehörigen variationellen Formulierung (5.3.13) läßt weitere Vereinfachungen zweckmäßig erscheinen.

Durch Vernachlässigung linearisierter Dehnungs- und Rotationskomponenten  $\bar{\varphi}_\alpha$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\theta}_{\alpha\beta}$  und der Annahme, daß die Vorbeul-Schnittgrößen  $\bar{N}^{\alpha\beta}$  bzw.  $\bar{M}^{\alpha\beta}$  aus einer Membran- oder linearen Biegelösung bestimmt werden, ergeben sich die Beziehungen einer linearen Verzweigungsanalyse, die jedoch als klassische Näherung bei vielen Stabilitätsproblemen zu untauglichen Ergebnissen führt (s. auch Kapitel 9.3).

Wesentlicher erscheint daher die Ableitung konsistent approximierter Schalentheorien durch sinnvolle Einschränkungen des Grads der Nichtlinearität insbesondere im Hinblick auf die Praktikabilität bei der numerischen Anwendung.

## 6. VERSCHIEDENE APPROXIMATIONSSTUFEN EINER THEORIE GROSSER ROTATIONEN

### 6.1. Das Klassifikationsschema

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir die grundlegenden geometrischen und statischen Beziehungen einer allgemeinen Theorie dünner elastischer Schalen, gültig für kleine Dehnungen ohne Beschränkung der Rotationen unter Verwendung der modifizierten Krümmungsänderungsbeziehung  $\chi_{\alpha\beta}$  (4.1.1) abgeleitet. Mit Hilfe der in Kapitel 2.3 dargestellten Aufspaltung des Deformationsprozesses in eine reine Dehnung und eine anschließende Starrkörperrotation ist es möglich, unabhängig von den Materialdehnungen die Größe der Rotationen einzuschränken. Dies führt zu einem Klassifikationsschema für geometrisch lineare und nichtlineare Schalentheorien mit jeweils entsprechend begrenztem Gültigkeitsbereich bezüglich der Größenordnung der Rotationen. Unter Verwendung des Abschätzungsparameters  $\theta$  (3.1.8) wurde in [6.22 - 6.24] die folgende Klassifikation der Rotationswinkel  $\omega$  eines Schalenelementes vorgeschlagen:

$$\begin{aligned} \omega \leq O(\theta^2) &- \text{kleine Rotationen, } \omega = O(\theta) &- \text{moderate Rotationen} \\ \omega = O(\sqrt{\theta}) &- \text{große Rotationen, } \omega \geq O(1) &- \text{finite Rotationen} \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Mit Hilfe der für Drehwinkel  $|\omega| < \pi/2$  gültigen Beziehungen [6.25]

$$O(|\underline{\Omega}|) = O(\sin \omega) = O(\omega) \quad (6.1.2)$$

läßt sich die Größe des Rotationsvektors  $\underline{\Omega}$ , aber nicht die Größe seiner Komponenten in vorgebenen Richtungen einschränken. Viele Schalenstrukturen besitzen jedoch eine hohe In-Flächen-Stei'figkeit bei gleichzeitiger Flexibilität aus der Fläche heraus. Die Rotationsanteile können ausgehend von den zugehörigen Komponenten des Drehvektors  $\underline{\Omega}$ ,  $\Omega_\alpha = \underline{\Omega} \cdot \underline{a}_\alpha$  und  $\Omega = \underline{\Omega} \cdot \underline{n}$ , mit (6.1.1 - 2) abgeschätzt werden.

Den Geltungsbereich einer geometrisch nichtlinearen Theorie großer Rotationen definieren wir gemäß Tabelle 6.1 durch entsprechende Vorgaben der Größenordnungen für  $\Omega_\alpha$  und  $\Omega$ . Approximationen für die linearisierten Rotations- und Dehnungskomponenten  $\varphi_\alpha$ ,  $\varphi$  bzw.  $\theta_{\alpha\beta}$  folgen aus (3.3.8) und (2.2.14).

Zusätzlich finden sich in Tab. 6.1 Abschätzungen für eine Theorie moderater Rotationen, die später bei theoretischen und numerischen Betrachtungen vergleichend herangezogen wird.

Größenordnung der Rotationskomponenten		Abschätzung für die linearisierten Größen		
$\Omega_\alpha$	$\Omega$	$\varphi_\alpha$	$\varphi$	$\theta_{\alpha\beta}$
groß	groß	$\sqrt{\theta}$	$\sqrt{\theta}$	$\theta$
groß	moderat	$\sqrt{\theta}$	$\theta$	$\theta$
groß	klein	$\sqrt{\theta}$	$\theta^2$	$\theta$
moderat	moderat	$\theta$	$\theta$	$\theta^2$

Tab. 6.1

Ingenieurorientierte Überlegungen [6.25] führen zu einer Erweiterung des Klassifikationsschemas durch Einführung verschiedener relativer Fehler bezüglich der Verformungsenergiedichte. Die Größenordnungen der vernachlässigbaren Anteile an den Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen (2.2.14) und (4.1.2) sowie an den Rotationskomponenten des Schalenrandes (2.4.7) sind in Tab. 6.2 zusammengestellt. Sie würden nach Substitution in (4.4.10)

Relativer Fehler der Verformungsenergiedichte	ermöglicht Vernachlässigung von Termen der Größenordnung in				
	$\gamma_{\alpha\beta}$	$\chi_{\alpha\beta}$	$n_v$	$n_t$	$n$
$E_0 \sim O(\theta^2)$	$\theta^4$	$\theta^3/\lambda$	$\theta^2\sqrt{\theta}$	$\theta^2\sqrt{\theta}$	$\theta^3$
$E_1 \sim O(\theta\sqrt{\theta})$	$\theta^3\sqrt{\theta}$	$\theta^2\sqrt{\theta}/\lambda$	$\theta^2$	$\theta^2$	$\theta^2\sqrt{\theta}$
$E_2 \sim O(\theta)$	$\theta^3$	$\theta^2/\lambda$	$\theta\sqrt{\theta}$	$\theta\sqrt{\theta}$	$\theta^2$

Tab. 6.2

Beiträge liefern, die im Rahmen der relativen Fehler  $E_0$ ,  $E_1$  bzw.  $E_2$  im Energieausdruck bereits vernachlässigt wurden.

Das auf der Basis qualitativer physikalischer Argumente und energetischer Abschätzungen entwickelte Klassifikationsschema wird den ein- und zweidimensionalen Betrachtungen der Kapitel 6.2 und 6.3 zugrunde gelegt. Ergebnisse alternativer Vorgehensweisen werden mit seiner Hilfe im Kapitel 6.4 untersucht.

## 6.2. Zweidimensionale Betrachtungen

Unter Verwendung des modifizierten Krümmungsänderungsmaßes  $\chi_{\alpha\beta}$  (4.1.2) werden in diesem Kapitel konsistent approximiert Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen und Randparameter einer Familie von neun Theorien dünner elastischer Schalen bei Auftreten großer Rotationen vorgestellt. Die bei der Formulierung zugehöriger statischer Beziehungen auftretenden Probleme werden jeweils angesprochen. Das Klassifikationsschema (s. Kapitel 6.1) ermöglicht dann dem Anwender aufgrund einfacher physikalischer Überlegungen eine optimale Auswahl zur Lösung anstehender Problemstellungen.

Einfachste konsistente Beziehungen erfüllen die Forderung nach einer Schalentheorie großer Rotationen bei gleichzeitig minimalem numerischen Aufwand durch

1. linear approximierten vierten Randparameter  $n_v$ ,
2. einfachste quadratisch approximiert Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen.

Dieses theoretische Konzept und seine numerische Realisierung ermöglichen schließlich die Einordnung, Überprüfung und Bewertung verschiedenster in der Literatur vorgeschlagener Schalentheorien großer und moderater Rotationen.

### 6.2.1. Theorie groß/großer Rotationen

Wir definieren eine Theorie groß/großer Rotationen (g/g) durch Annahme großer Rotationen sowohl um die Tangenten als auch um die Normalen zur Mittelfläche  $M$ . Die Größenordnungsabschätzungen für die linearisierten Dehnungs- und Rotationskomponenten (Tab. 6.1, Zeile 1) erlauben keine Vereinfachung des Mittelflächendehnungstensors  $\gamma_{\alpha\beta}$  (2.2.14), liefern jedoch unter Berücksichtigung der relativen Fehler  $E_0 \div E_2$  approximiert Beziehungen für die Komponenten des Krümmungsänderungstensors  $\chi_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{E0:}} \quad \chi_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \left\{ (l_{\alpha}^{\lambda} m_{\lambda|\beta} + l_{\beta}^{\lambda} m_{\lambda|\alpha}) + (\varphi_{\alpha} m_{|\beta} + \varphi_{\beta} m_{|\alpha}) - \right. \\
 & - (\theta_{\alpha}^{\lambda} \dot{a}_{\lambda\beta} + \theta_{\beta}^{\lambda} \dot{a}_{\lambda\alpha}) \hat{m} + (\omega_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} + \omega_{\beta}^{\lambda} b_{\lambda\alpha}) \check{m} + \\
 & \left. + (\varphi_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + \varphi_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda}) \check{m}_{\lambda} + b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} \right\} + O(\theta^3/\lambda) \quad , \quad (6.2.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{E1:}} \quad \chi_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \left\{ (\delta_{\alpha}^{\lambda} - \omega_{\alpha}^{\lambda}) m_{\lambda|\beta} + (\delta_{\beta}^{\lambda} - \omega_{\beta}^{\lambda}) m_{\lambda|\alpha} + (\theta_{\alpha}^{\lambda} \check{m}_{\lambda|\beta} + \theta_{\beta}^{\lambda} \check{m}_{\lambda|\alpha}) + \right. \\
 & + (\varphi_{\alpha} \check{m}_{|\beta} + \varphi_{\beta} \check{m}_{|\alpha}) - [(\theta_{\alpha}^{\lambda} - \omega_{\alpha}^{\lambda}) b_{\lambda\beta} + (\theta_{\beta}^{\lambda} - \omega_{\beta}^{\lambda}) b_{\lambda\alpha}] \hat{m} + \\
 & \left. + (\varphi_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + \varphi_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda}) \check{m}_{\lambda} + b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} \right\} + O(\theta^2 \sqrt{\theta}/\lambda) \quad , \quad (6.2.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\text{E2:}} \quad \chi_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \left\{ (\delta_{\alpha}^{\lambda} m_{\lambda|\beta} + \delta_{\beta}^{\lambda} m_{\lambda|\alpha}) + (\theta_{\alpha}^{\lambda} \check{m}_{\lambda|\beta} + \theta_{\beta}^{\lambda} \check{m}_{\lambda|\alpha}) - \right. \\
 & - (\omega_{\alpha}^{\lambda} \check{m}_{\lambda|\beta} + \omega_{\beta}^{\lambda} \check{m}_{\lambda|\alpha}) + (\varphi_{\alpha} \check{m}_{|\beta} + \varphi_{\beta} \check{m}_{|\alpha}) + \\
 & \left. + (\omega_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} + \omega_{\beta}^{\lambda} b_{\lambda\alpha}) \hat{m} \right\} + O(\theta^2/\lambda) \quad , \quad (6.2.3)
 \end{aligned}$$

mit den approximierten Beziehungen für  $m_{\lambda}$  und  $m$  (2.2.11)

$$\begin{aligned}
 \check{m}_{\lambda} = & -\varphi_{\lambda} - \varphi^{\mu} \omega_{\mu\lambda} \quad , \quad \check{m}_{\lambda} = -\varphi_{\lambda} \quad , \\
 \check{m} = & 1 + \theta_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}} + \varphi^2 \quad , \quad \check{m} = 1 + \theta_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}} \quad , \quad \hat{m} = 1 \quad . \quad (6.2.4)
 \end{aligned}$$

Die Abschätzungen (6.2.1-3) sind mit denen in [6.25] identisch.

Zur weiteren Vereinfachung der kinematischen Ausdrücke in allen neun Schalentheorien werden wir einige konsistent approximierte Transformationen ableiten. Zunächst findet man mit (2.2.14) und den Größenordnungsabschätzungen (Tab. 6.2, Zeile 1) die reduzierte Beziehung für eine Theorie g/g Rotationen

$$\theta_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} - \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \varphi^2 + O(\theta \sqrt{\theta}) \quad (6.2.5)$$

oder unter Verwendung von (2.1.9) in der Form

$$\theta_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{Z}} = -\frac{1}{2} \varphi^{\mathbb{Z}} \varphi_{\mathbb{Z}} - \varphi^2 + O(\theta \sqrt{\theta}) \quad . \quad (6.2.6)$$

Weitere Umformungen mit Hilfe von (6.2.5 - 6) führen schließlich nach detaillierter Abschätzung aller Beiträge auf die Transformation

$$\varphi_{\lambda} \theta_{\alpha}^{\alpha} - \varphi^{\mu} \theta_{\mu\lambda} = -\frac{1}{2} \varphi_{\lambda} \varphi^2 + O(\theta^2) \quad (6.2.7)$$

Substitution von (6.2.6 - 7) ermöglicht nun die Vernachlässigung von vier Termen in (6.2.1) sowie von jeweils zwei Termen in (6.2.2) und (6.2.3). Die bei der Transformation entstehenden Polynome 4. Grades in Verschiebungsgradienten und damit verbundenen Nachteile bei Anwendung eines Näherungsverfahrens wie z. B. der Finite-Element-Methode, lassen uns auf eine Einarbeitung der Beziehungen im Rahmen einer Theorie g/g Rotationen verzichten.

Schließlich erhält man zugehörige approximierete Ausdrücke für Rotationsparameter des Schalenrandes

EO + E2:

$$\begin{aligned} n_{\nu} &= -\varphi_{\nu} - \underbrace{\varphi_{\nu} \theta_{tt}} + \underbrace{\varphi_t \theta_{t\nu}} + \varphi_t \varphi + O(\theta^2 \sqrt{\theta}) \quad , \\ n_t &= -\varphi_t - \underbrace{\varphi_t \theta_{\nu\nu}} + \underbrace{\varphi_{\nu} \theta_{\nu t}} - \varphi_{\nu} \varphi + O(\theta^2 \sqrt{\theta}) \quad , \\ n &= 1 - \frac{1}{2} \varphi_{\nu}^2 - \frac{1}{2} \varphi_t^2 - \frac{1}{2} \theta_{\nu\nu}^2 - \frac{1}{2} \theta_{tt}^2 + \underbrace{\theta_{\nu\nu} \theta_{tt}} - \underbrace{2 \theta_{\nu t}^2} + O(\theta^3) \quad , \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

wobei im Rahmen des relativen Fehlers E2 die mit einer Wellenlinie markierten Terme vernachlässigt werden können.

Sollen die zugehörigen statischen Beziehungen einer Theorie g/g Rotationen bestimmt werden, so ist den Termen mit kovarianten Flächenableitungen besondere Aufmerksamkeit zu schenken. In der relativen Fehlermarge EO können wir die in  $\delta\pi_i$  (4.2.1) entstehenden Randintegrale unter Zuhilfenahme von (4.2.5) wie in der allgemeinen Theorie transformieren. Kovariante Ableitungen approximierter Ausdrücke  $m_{\lambda}$ ,  $m$  (6.2.4) und  $n_{\nu}$ ,  $n_t$ ,  $n$  (6.2.8) generieren in der Regel Randintegrale mit Beiträgen, deren Variationen Verschiebungsableitungen  $\delta u_{,\nu}$  enthalten, die weder durch die vier unabhängigen virtuellen Randparameter  $\delta u$  und  $\delta n_{\nu}$  auszudrücken sind, noch durch partielle Integration entlang der Randkurve  $s$  eliminiert werden können. Zur Formulierung entsprechender statischer Randbedingungen ist es dann erforderlich, bereits vernachlässigte

kleine Terme zu berücksichtigen und die so erhaltenen transformierten Beziehungen erneut abzuschätzen [6.25 - 6.27]. Ein Nachweis, daß die Gleichgewichtsbedingungen und statischen Randbedingungen die Euler-Lagrange Gleichungen eines zugehörigen Variationsprinzips sind, ist dann nicht mehr möglich.

### 6.2.2. Theorie groß/moderater Rotationen

Die Theorie groß/moderater Rotationen (g/m) entsteht in diesem Klassifikationsschema, wenn angenommen wird, daß Schalenelemente große Rotationen um Tangenten der Mittelfläche  $M$  ausführen, während die Rotationen um Normalen  $\underline{n}$  moderat bleiben. Die Größenordnungsabschätzungen (Tab. 6.1, Zeile 2) ergeben entsprechend reduzierte Ausdrücke für die Krümmungsänderungsbeziehungen

EO:

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{ & (l_{\cdot\alpha}^{\lambda} m_{\lambda/\beta} + l_{\cdot\beta}^{\lambda} m_{\lambda/\alpha}) + (\varphi_{\alpha} m_{/\beta} + \varphi_{\beta} m_{/\alpha}) - \\ & - (\varphi_{\cdot\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} + \varphi_{\cdot\beta}^{\lambda} b_{\lambda\alpha}) \hat{m} + (\varphi_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + \varphi_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda}) \tilde{m}_{\lambda} + \\ & + b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} \} + O(\theta_{/\lambda}^3) \quad , \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

E1:

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{ & (\delta_{\alpha}^{\lambda} m_{\lambda/\beta} + \delta_{\beta}^{\lambda} m_{\lambda/\alpha}) + (\varphi_{\cdot\alpha}^{\lambda} \tilde{m}_{\lambda/\beta} + \varphi_{\cdot\beta}^{\lambda} \tilde{m}_{\lambda/\alpha}) + \\ & + (\varphi_{\alpha} \tilde{m}_{/\beta} + \varphi_{\beta} \tilde{m}_{/\alpha}) - (\varphi_{\cdot\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} + \varphi_{\cdot\beta}^{\lambda} b_{\lambda\alpha}) \hat{m} + \\ & + (\varphi_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + \varphi_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda}) \tilde{m}_{\lambda} + b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} \} + O(\theta^2 \sqrt{\theta}_{/\lambda}) \quad , \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

E2:

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{ & (\delta_{\alpha}^{\lambda} m_{\lambda/\beta} + \delta_{\beta}^{\lambda} m_{\lambda/\alpha}) + (\varphi_{\cdot\alpha}^{\lambda} \tilde{m}_{\lambda/\beta} + \varphi_{\cdot\beta}^{\lambda} \tilde{m}_{\lambda/\alpha}) + \\ & + (\varphi_{\alpha} \tilde{m}_{/\beta} + \varphi_{\beta} \tilde{m}_{/\alpha}) \} + O(\theta_{/\lambda}^2) \quad , \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

Die hilfreichen Transformationen (6.2.6 - 7) lassen sich für g/m Rotationen vereinfachen zu

$$\theta_{\alpha}^{\alpha} = -\frac{1}{2} \varphi^{\alpha} \varphi_{\alpha} + O(\theta^2) , \quad \varphi_{\lambda} \theta_{\alpha}^{\alpha} - \varphi^{\mu} \theta_{\mu\lambda} = O(\theta^2 \sqrt{\theta}) . \quad (6.2.12)$$

Ihre Anwendung in (6.2.9 - 11) führt zu erheblichen Vereinfachungen, insbesondere können in allen drei Fehlermargen vier kubische bzw. quadratische Terme vernachlässigt werden

$$\begin{aligned} \underline{\text{EO:}} \quad \chi_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \left\{ (\delta_{\alpha}^{\lambda} m_{\lambda|\beta} + \delta_{\beta}^{\lambda} m_{\lambda|\alpha}) + (\varphi^{\lambda}_{\cdot\alpha} \tilde{m}_{\lambda|\beta} + \varphi^{\lambda}_{\cdot\beta} \tilde{m}_{\lambda|\alpha}) + \right. \\ & + (\varphi_{\alpha} m_{|\beta} + \varphi_{\beta} m_{|\alpha}) - (\varphi^{\lambda}_{\cdot\alpha} b_{\lambda\beta} + \varphi^{\lambda}_{\cdot\beta} b_{\lambda\alpha}) \tilde{m} + \\ & \left. + (\varphi_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + \varphi_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda}) \tilde{m}_{\lambda} + b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} \right\} + O(\theta^3/\lambda) , \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{E1:}} \quad \chi_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \left\{ (\delta_{\alpha}^{\lambda} \check{m}_{\lambda|\beta} + \delta_{\beta}^{\lambda} \check{m}_{\lambda|\alpha}) + (\varphi^{\lambda}_{\cdot\alpha} \tilde{m}_{\lambda|\beta} + \varphi^{\lambda}_{\cdot\beta} \tilde{m}_{\lambda|\alpha}) + \right. \\ & + (\varphi_{\alpha} \tilde{m}_{|\beta} + \varphi_{\beta} \tilde{m}_{|\alpha}) - (\varphi^{\lambda}_{\cdot\alpha} b_{\lambda\beta} + \varphi^{\lambda}_{\cdot\beta} b_{\lambda\alpha}) \tilde{m} + \\ & \left. + (\varphi_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + \varphi_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda}) \tilde{m}_{\lambda} + b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} \right\} + O(\theta^2 \sqrt{\theta}/\lambda) , \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{E2:}} \quad \chi_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \left\{ (\delta_{\alpha}^{\lambda} \check{m}_{\lambda|\beta} + \delta_{\beta}^{\lambda} \check{m}_{\lambda|\alpha}) + (\varphi^{\lambda}_{\cdot\alpha} \tilde{m}_{\lambda|\beta} + \varphi^{\lambda}_{\cdot\beta} \tilde{m}_{\lambda|\alpha}) + \right. \\ & \left. + (\varphi_{\alpha} \tilde{m}_{|\beta} + \varphi_{\beta} \tilde{m}_{|\alpha}) \right\} + O(\theta^2/\lambda) . \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

Wie schon die Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen unterscheiden sich auch die entsprechend reduzierten Randparameter infolge Substitution von (6.2.12) von den Ergebnissen in [6.25]

EO ÷ E2:

$$\begin{aligned} n_{\nu} &= -\varphi_{\nu} + \varphi_{\underline{t}} \varphi + O(\theta^2 \sqrt{\theta}) , \\ n_{\underline{t}} &= -\varphi_{\underline{t}} - \varphi_{\nu} \varphi + O(\theta^2 \sqrt{\theta}) , \\ n &= 1 - \frac{1}{2} \varphi_{\nu}^2 - \frac{1}{2} \varphi_{\underline{t}}^2 - \frac{1}{2} \theta_{\nu\nu}^2 - \frac{1}{2} \theta_{\underline{t}\underline{t}}^2 + \theta_{\nu\underline{t}} \theta_{\underline{t}\nu} - 2 \theta_{\nu\underline{t}}^2 + O(\theta^3) . \end{aligned} \quad (6.2.16)$$

In allen aus (2.2.14), (6.2.9 - 11) oder (6.2.13 - 15) und (6.2.16) erhaltenen Sätzen geometrischer Gleichungen einer Theorie g/m Rotationen

treten bei Transformationen in  $\delta\pi_i$  und  $\delta\pi_a$  zur Bestimmung zugehöriger statischer Beziehungen die erwähnten kritischen Randterme auf. Lediglich (2.2.14), (6.2.9) führen bei gleichzeitiger Annahme eines größeren Fehlers E2 auf dem Rande in (6.2.16) und zusätzlichen Transformationen zur Bestimmung der approximierten Abhängigkeiten  $n_t = n_t(\underline{u}, n_v)$  und  $n = n(\underline{u}, n_v)$  zu entsprechenden statischen Gleichungen [6.31].

### 6.2.3. Theorie groß/kleiner Rotationen

Die einfachste Theorie großer Rotationen entsteht durch Beschränkung auf kleine Rotationen um die Normalen bei gleichzeitig großen Rotationen um die Tangenten zur Mittelfläche (g/k). Die Tatsache, daß viele Schalenstrukturen eine hohe In-Flächen-Steifigkeit besitzen, kann über die zugehörigen Größenordnungsabschätzungen (Tab. 6.1, Zeile 3) bei der Ableitung kinematischer Beziehungen direkt berücksichtigt werden. Unter Zuhilfenahme der auch im Rahmen einer g/k Theorie gültigen Transformationsbeziehungen (6.2.12) erhalten wir nach detaillierter Abschätzung aller Beiträge reduzierte Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen

EO ÷ E2:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} - \frac{1}{2} (\theta_{\alpha}^{\lambda} \omega_{\lambda\beta} + \theta_{\beta}^{\lambda} \omega_{\lambda\alpha}) + \frac{1}{2} \theta_{\alpha}^{\lambda} \theta_{\lambda\beta} + O(\theta^4), \quad (6.2.17)$$

EO:

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{ & (\delta_{\alpha}^{\lambda} m_{\lambda/\beta} + \delta_{\beta}^{\lambda} m_{\lambda/\alpha}) + (\varphi_{\alpha}^{\lambda} \tilde{m}_{\lambda/\beta} + \varphi_{\beta}^{\lambda} \tilde{m}_{\lambda/\alpha}) + \\ & + (\varphi_{\alpha} \check{m}_{/\beta} + \varphi_{\beta} \check{m}_{/\alpha}) - (\theta_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} + \theta_{\beta}^{\lambda} b_{\lambda\alpha}) \hat{m} + \\ & + (\varphi_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + \varphi_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda}) \tilde{m}_{\lambda} + b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} \} + O(\theta^3/\lambda), \end{aligned} \quad (6.2.18)$$

E1 ÷ E2

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \{ & (l_{\alpha}^{\lambda} \tilde{m}_{\lambda/\beta} + l_{\beta}^{\lambda} \tilde{m}_{\lambda/\alpha}) + (\varphi_{\alpha} \tilde{m}_{/\beta} + \varphi_{\beta} \tilde{m}_{/\alpha}) - \\ & - (\theta_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} + \theta_{\beta}^{\lambda} b_{\lambda\alpha}) \hat{m} + (\varphi_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + \varphi_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda}) \tilde{m}_{\lambda} + \\ & + b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} \} + O(\theta^2 \sqrt{\theta}) \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

sowie reduzierte Randparameter

EO ÷ E2:

$$\begin{aligned} n_v &= -\varphi_v + O(\theta^2\sqrt{\theta}) \quad , \\ n_t &= -\varphi_t + O(\theta^2\sqrt{\theta}) \quad , \\ n &= 1 - \frac{1}{2}\varphi_v^2 - \frac{1}{2}\varphi_t^2 - \frac{1}{2}\theta_{vv}^2 - \frac{1}{2}\theta_{tt}^2 + \theta_{vv}\theta_{tt} - 2\theta_{vt}^2 + O(\theta^3) \quad , \end{aligned} \quad (6.2.20)$$

mit

$$l_\alpha^\lambda = \delta_\alpha^\lambda + \theta_\alpha^\lambda \quad , \quad \check{m} = 1 + \theta_x^x + \frac{1}{2}\theta_x^x\theta_\rho^\rho - \frac{1}{2}\theta_x^\rho\theta_\rho^x \quad . \quad (6.2.21)$$

Die Transformation (6.2.12) als Ergebnis konsequenter energetisch konsistenter Abschätzungen liefert mit (6.2.17), (6.2.19 - 20) quadratisch approximierten Dehnungsmaße sowie einen linear approximierten Schalenrandparameter  $n_v$  und damit die Voraussetzungen für einfachste Theorien großer Rotationen [6.20]. Insbesondere konnte in den Arbeiten [6.25 - 6.27] ohne Transformation der reduzierten Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen und Randparameter mit (6.2.12) nicht nachgewiesen werden, daß die erhaltenen Gleichgewichtsbedingungen und statischen Randbedingungen die Euler-Lagrange Gleichungen des zugehörigen Variationsprinzips sind, eine grundlegende Voraussetzung zur Anwendung variationeller Näherungsverfahren. Die restriktive Annahme größerer relativer Fehler E1 und E2 erscheint im Hinblick auf Diskretisierungs- und Rundungsfehler bei der numerischen Anwendung vertretbar. Interessant ist zudem die Tatsache, daß für eine Theorie g/k Rotationen mit relativen Fehlern E1, E2 die Beziehungen für a priori unterschiedlich abgeschätzte Krümmungsänderungstensoren  $\chi_{\alpha\beta}$  und  $\kappa_{\alpha\beta}$  ineinander überführt werden können (s. Anhang A1), was für Theorien g/g und g/m Rotationen bisher nicht gezeigt werden kann.

#### 6.2.4. Theorie moderater Rotationen

Abschließend werden die kinematischen Beziehungen einer Schalentheorie moderater Rotationen ohne detaillierte Ableitung zusammengestellt. Wir beziehen uns dabei auf die Darstellungen in [6.22, 6.32, 6.36], wo ausgehend vom relativen Fehler EO unter Anwendung des auf moderate Rotationen erweiterten Klassifikationsschemas entsprechende Dehnungs-Verschie-

bungsbeziehungen abgeleitet werden

$$\gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \underline{\varphi_{\alpha} \varphi_{\beta}} + \frac{1}{2} \underline{a_{\alpha\beta} \varphi^2} - \frac{1}{2} (\theta_{\alpha}^{\lambda} \omega_{\lambda\beta} + \theta_{\beta}^{\lambda} \omega_{\lambda\alpha}) + O(\theta^4) \quad , \quad (6.2.22)$$

$$\chi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \{ \varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} + \underline{b_{\alpha}^{\lambda} (\theta_{\lambda\beta} - \omega_{\lambda\beta})} + \underline{b_{\beta}^{\lambda} (\theta_{\lambda\alpha} - \omega_{\lambda\alpha})} \} + O(\theta^3/\lambda) \quad . \quad (6.2.23)$$

Auf dem Schalenrand führt dort die restriktive Annahme eines großen Fehlers E2 zu den approximierten Ausdrücken

$$\begin{aligned} n_{\nu} &= -\varphi_{\nu} + O(\theta\sqrt{\theta}) \quad , \\ n_t &= -\varphi_t + O(\theta\sqrt{\theta}) \quad , \\ n &= 1 + O(\theta^2) \quad . \end{aligned} \quad (6.2.24)$$

Die Beziehungen der Theorie moderater Rotationen (6.2.22 - 24) enthalten als Spezialfälle die Gleichungen vieler bekannter linearer und nichtlinearer Theorien, die aus (6.2.22 - 23) durch Vernachlässigung entsprechend markierter Terme (s. Tab. 6.3) ableitbar sind:

Vernachlässigung der mit (s.u.) gekennzeichneten Terme	ergibt die Theorie
=====	Leonard [6.13] (6.2.25)
===== .....	Sanders [6.30]: "moderately small rotations" (6.2.26) Koiter [6.11]: "small finite deflections"
===== ..... — . — . —	Pietraszkiewicz [6.22] (6.2.27)
===== — ..... — . — . —	Sanders [6.30]: "moderately small rotations about tangents and small rotations about normals to the middle surface" (6.2.28) Koiter [6.11]

=====	Donnell-Marguerre-Vlasov [6.6, 6.16, 6.40]: "quasi-shallow shells"
	$\gamma_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} u_{3,\alpha} u_{3,\beta}$
	$\kappa_{\alpha\beta} = -u_3 _{\alpha\beta}$ (6.2.29)
=====	von Kármán [6.10]: "nichtlineare Plattentheorie" (6.2.30)
( $b_{\alpha\beta} = 0$ )	
=====	Naghdi [6.19]: "lineare Schalentheorie" (6.2.31)
-----	
=====	Budiansky und Sanders [6.4]: "lineare Schalentheorie" (6.2.32)
-----	

Tab. 6.3

Neun in entsprechender Weise abgeleitete Approximationen des Krümmungsänderungstensors  $\kappa_{\alpha\beta}$ , als Repräsentant der Varianten 1 - 4 (2.2.7), werden im Anhang A1 angegeben.

### 6.3. Eindimensionale Betrachtungen

Ausgehend von den kinematischen Betrachtungen des 2. Abschnitts leiten wir im folgenden eine allgemeine Theorie gekrümmter, dünner elastischer Balken her. Sie beschreibt die ebene, einachsige Biegung, jedoch nicht das räumliche Biegetorsionsproblem [6.28, 6.14, 6.41]. Mit Hilfe des Klassifikationsschemas (s. Kapitel 6.1) können approximierte Beziehungen für Theorien eingeschränkter Rotationen angegeben werden, die schließlich über vergleichende Betrachtungen auf eine einfachste Balkentheorie bei Auftreten großer Rotationen führt. Insbesondere lag bisher eine Gegenüberstellung äquivalenter Krümmungsänderungsmaße und somit ein Beitrag zur Klärung der bei willkürlicher und oftmals mißbräuchlicher Verwendung von Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen auftretenden Probleme nicht vor. Das hochgradig geometrisch nichtlineare Verhalten dünner elastischer Balken-tragwerke ermöglicht nun einen theoretischen und numerischen Vorabtest unterschiedlicher Schalentheorien in ihrer eindimensional reduzierten Form durch den Vergleich mit Balkentheorien, die hinsichtlich ihrer Dehnungs-

Verschiebungsbeziehungen als exakt bezeichnet werden können. Infolge der Komplexität allgemeiner zweidimensionaler Grundgleichungen sind entsprechende Betrachtungen bei Schalen auch im Hinblick auf eine sinnvolle Interpretation der Ergebnisse nicht ohne weiteres möglich.

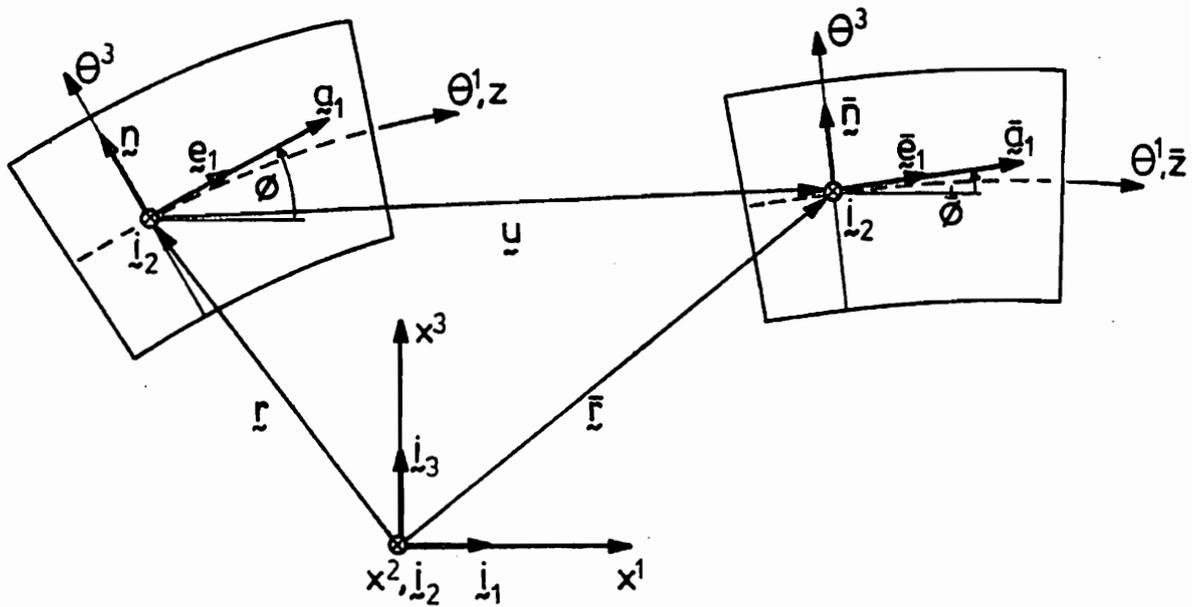


Abb. 6.1

Unter Verwendung der krummlinigen konvexiven Koordinate  $\theta^1$  beschreiben wir die Mittellinie eines Balkens in der unverformten Referenzkonfiguration durch die Vektorgleichung

$$\underline{r} = \underline{r}(\theta^1) = x^1(\theta^1) \underline{i}_1 + x^3(\theta^1) \underline{i}_3 \quad , \quad (6.3.1)$$

woraus der zugehörige Satz kovarianter und kontravarianter Basisvektoren bestimmt wird

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 = \underline{r}_{,1} &= x^1_{,1} \underline{i}_1 + x^3_{,1} \underline{i}_3 \quad , \quad \underline{a}^1 \cdot \underline{a}_1 = 1 \quad , \\ \underline{a}_2 &= \underline{i}_2 \quad , \quad \underline{a}^2 \cdot \underline{a}_2 = 1 \quad . \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

Die Definition des Normaleneinheitsvektors  $\underline{n}$  erfolgt mit Hilfe des Ein-

heitsvektors  $e_1$  in Richtung  $\underline{a}_1$  und des Längen- oder Lamé-Parameters  $A_1$  der Koordinate  $\theta^1$ ,  $A_1 = |\underline{a}_1|$  [6.22]

$$\underline{\eta} = \underline{e}_1 \times \underline{i}_2 = \frac{1}{A_1} (\underline{a}_1 \times \underline{i}_2) = -\frac{1}{A_1} (x_{,1}^3 \underline{i}_1 - x_{,1}^1 \underline{i}_3) \quad (6.3.3)$$

Als Maßgrößen der Balkenachse führen wir die kovariante und kontravariante Metrik, ihre Determinante sowie die Beziehung für Linienelemente ein

$$\begin{aligned} a_{11} &= \underline{a}_1 \cdot \underline{a}_1 = A_1^2 = (x_{,1}^1)^2 + (x_{,1}^3)^2, \quad a^{11} = (A_1)^{-2}, \\ a &= a_{11} = A_1^2, \quad dz = A_1 d\theta^1. \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

Kovariante Komponenten des Krümmungstensors werden definiert

$$b_{11} = \underline{a}_{1,1} \cdot \underline{\eta} = \frac{1}{A_1} (x_{,1}^1 x_{,11}^3 - x_{,1}^3 x_{,11}^1) = A_1^2 \sigma, \quad (6.3.5)$$

mit  $\sigma$  als physikalischer Krümmung

$$\sigma = b_{\langle 11 \rangle} = b_1^1 = \frac{1}{A_1^2} b_{11} = \frac{1}{A_1} \phi_{,1} = \phi_{,z}, \quad (6.3.6)$$

wobei  $\sigma$  unter Zuhilfenahme des Parameters  $\phi$  (s. Abb. 6.1) in die Form der mathematischen Krümmung einer ebenen Kurve überführt wurde. Im folgenden sollen in eckigen Klammern indizierte Größen zugehörige physikalische Komponenten bezeichnen [6.22]. Schließlich erhalten wir die Ableitungsgleichungen von Gauß und Weingarten (2.1.14 - 15) in ihrer eindimensionalen reduzierten Form

$$\begin{aligned} \underline{a}_{1,1} &= \frac{A_{1,1}}{A_1} \underline{a}_1 + A_1^2 \sigma \underline{\eta} = A_{1,1} \underline{e}_1 + A_1^2 \sigma \underline{\eta}, \\ \underline{\eta}_{,1} &= -b_1^1 \underline{a}_1 = -\sigma \underline{a}_1 = -A_1 \sigma \underline{e}_1. \end{aligned} \quad (6.3.7)$$

In Anlehnung an die Ableitungen (2.1.24 - 31) wird die Randgeometrie durch nachstehende Beziehungen erfaßt

$$\begin{aligned} \underline{t} &= \underline{i}_2, \quad \underline{v} = \underline{t} \times \underline{\eta} = \underline{e}_1 = \frac{1}{A_1} \underline{a}_1, \\ \sigma_t &= \tau_t = \kappa_t = \kappa_v = 0, \quad \sigma_v = \sigma. \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

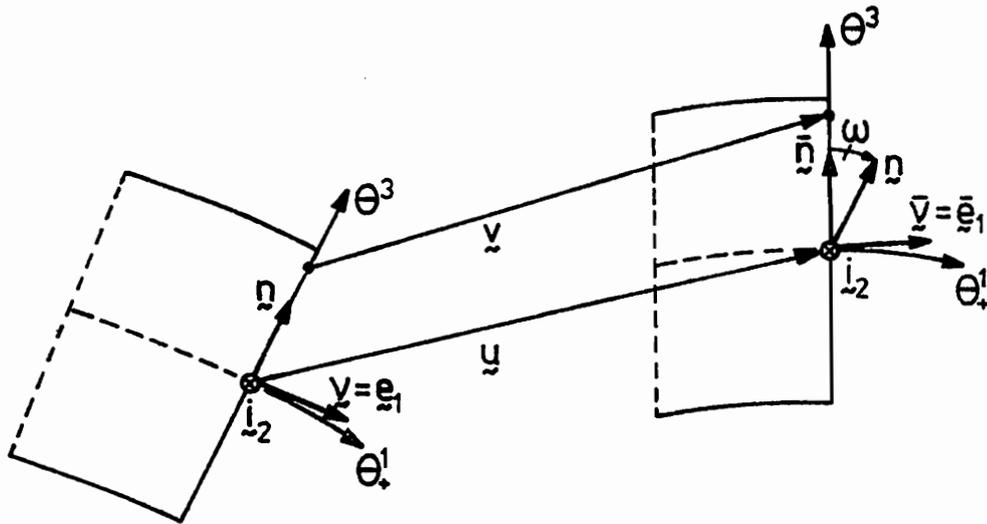


Abb. 6.2

Bei der Behandlung der Balkenkinematik wollen wir uns auf Deformationen der Balkenachse und des zugehörigen Randes beschränken. In anschaulicher Verbindung mit Abb. 6.1 erhält man den Tangentenvektor, den Normaleneinheitsvektor, die Metrik sowie das Linienelement in der verformten Konfiguration zu

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_1 = \bar{r}_{,1} &= a_1 + u_{,1} = a_1 + (u e_1 + w n)_{,1} \\
 &= A_1 [(1 + \theta_{\langle 11 \rangle}) e_1 + \varphi_{\langle 12 \rangle} n] \quad , \quad \bar{a}_2 = \bar{i}_2 = a_2 \quad , \\
 \bar{n} &= \bar{e}_1 \times \bar{i}_2 = \frac{A_1}{A_1} [-\varphi_{\langle 12 \rangle} e_1 + (1 + \theta_{\langle 11 \rangle}) n] \quad , \\
 \bar{a}_{11} = \bar{A}_1^2 &= A_1^2 [(1 + \theta_{\langle 11 \rangle})^2 + \varphi_{\langle 12 \rangle}^2] = \bar{a} \quad , \quad d\bar{z} = \bar{A}_1 d\theta^1 \quad , \\
 \theta_{\langle 11 \rangle} &= \frac{1}{A_1} u_{,1} - \sigma w \quad , \quad \varphi_{\langle 12 \rangle} = \frac{1}{A_1} w_{,1} + \sigma u \quad .
 \end{aligned}
 \tag{6.3.9}$$

Aus (6.3.8) lassen sich mit (6.3.9 - 10) entsprechende Beziehungen für den deformierten Balkenrand bestimmen (s. Abb. 6.2)

$$\begin{aligned}
 \bar{t} = \bar{i}_2 = \bar{t} \quad , \quad \bar{v} = \bar{t} \times \bar{n} = \bar{e}_1 = \frac{1}{A_1} \bar{a}_1 \quad , \quad \bar{\sigma}_v = \bar{\sigma} \quad , \\
 n_v = \frac{A_1}{A_1} \varphi_{\langle 12 \rangle} = \sin \omega \quad , \quad n = \frac{A_1}{A_1} (1 + \theta_{\langle 11 \rangle}) = \cos \omega \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{6.3.10}$$

mit  $\omega$  als Rotationswinkel des Randes.

Wir definieren unter Zuhilfenahme von (6.3.4)<sub>1</sub> und (6.3.9)<sub>3</sub> den Dehnungstensor der Balkenachse

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{2}(\bar{\alpha}_{11} - \alpha_{11}) = \frac{1}{2}(\bar{A}_1^2 - A_1^2) \quad , \\ \gamma_{\langle 11 \rangle} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{A}_1^2}{A_1^2} - 1 \right) \quad , \end{aligned} \quad (6.3.11)$$

woraus sich eine hilfreiche Beziehung für das Verhältnis der Lamé-Parameter  $\bar{A}_1$  und  $A_1$  ableiten läßt

$$\frac{\bar{A}_1}{A_1} = (1 + 2\gamma_{\langle 11 \rangle})^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (6.3.12)$$

Der Krümmungstensor  $\bar{b}_{11}$  ergibt sich nach umfangreichen Transformationen mit (6.3.9)<sub>1</sub>, (6.3.9)<sub>2</sub> und (6.3.12) zu

$$\begin{aligned} \bar{b}_{11} &= (1 + 2\gamma_{\langle 11 \rangle})^{\frac{1}{2}} \{ A_1^2 \sigma + A_1 \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} + 2 A_1^2 \sigma \gamma_{\langle 11 \rangle} - \\ &\quad - A_1 (\varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle, 1} - \theta_{\langle 11 \rangle} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1}) \} \\ &= \bar{A}_1^2 \bar{\sigma} \quad , \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

wobei

$$\bar{\sigma} = \bar{b}_{\langle 11 \rangle} = \bar{b}'_1 = \frac{1}{A_1^2} \bar{b}_{11} = \frac{1}{A_1} \bar{\varphi}_{, 1} = \bar{\varphi}_{, \bar{z}} \quad (6.3.14)$$

die physikalische Krümmung in der verformten Konfiguration ist, auch bekannt im Rahmen einer Theorie gerader Balken ( $\sigma = 0$ ) als Eulersches Krümmungsmaß [6.37 - 38]

$$\bar{\varphi}_{, \bar{z}} = - \frac{w_{, \bar{z}\bar{z}}}{(1 + w_{, \bar{z}}^2)^{3/2}} \quad . \quad (6.3.15)$$

Die Verwendung von (6.3.15) als Lagrangesche Krümmungsänderungsgröße erfordert eine Koordinatentransformation der verformten Koordinate  $\bar{z}$  in die unverformte  $z$  unter Zuhilfenahme des tangentialen Verschiebungsfeldes. Eine teilweise oder vollständige Vernachlässigung der erforderlichen Nachdifferentiation  $\frac{dz}{d\bar{z}}$  ist im Sinne eines energetisch orientierten Kon-

zepts nicht zulässig. Die Bearbeitung hochgradig geometrisch nicht-linearer Problemstellungen, z.B. der Eulerschen Elastika [ 6.37, 6.18], mit inkonsistenten Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen infolge unkorrekter Koordinatentransformation führt zwangsläufig bei Auftreten großer Rotationen zu Fehlern, wie die Bestimmung von Verzweigungspunkten des reinen Spannungsproblems in [6.18].

Mit Hilfe von (6.3.13), (6.3.5) sowie (6.3.12) können die eindimensional reduzierten Krümmungsänderungstensoren in (2.2.7) bestimmt werden. Wählen wir aus Tabelle 2.1 die Varianten 1, 2, 6, 7 bzw. 5 mit geänderten Vorzeichen und benennen sie gemäß ihren Bezeichnungen in der Literatur mit  $\underline{\rho}$ ,  $\underline{\rho}$ ,  $\underline{K}$ ,  $\underline{\chi}$  bzw.  $\underline{\rho}^*$ , lassen sich die Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen und Randparameter einer Theorie dünner elastischer Balken ohne Einschränkung der Rotationen in tabellarischer Form zusammenfassen:

Balkentheorien	finiter	Rotationen
<u>Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen:</u>		
$\gamma_{11} = \frac{1}{2}(\bar{a}_{11} - a_{11})$	$\gamma_{\langle 11 \rangle} = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{A}_1^2}{A_1^2} - 1\right)$	(6.3.16)
$\varkappa_{11} = -(\bar{b}_{11} - b_{11})$	$\varkappa_{\langle 11 \rangle} = -(1 + 2\gamma_{\langle 11 \rangle})\bar{\sigma} + \sigma$	(6.3.17)
$\rho_{11} = \varkappa_{11} + b_{11}'\gamma_{11}$	$\rho_{\langle 11 \rangle} = -(1 + 2\gamma_{\langle 11 \rangle})\bar{\sigma} + (1 + \gamma_{\langle 11 \rangle})\sigma$	(6.3.18)
$\rho_{11}^* = -(\sqrt{\frac{\bar{a}}{a}}\bar{b}_{11} - b_{11})$	$\rho_{\langle 11 \rangle}^* = -(1 + 2\gamma_{\langle 11 \rangle})^{3/2}\bar{\sigma} + \sigma$	(6.3.19)
$\chi_{11} = \rho_{11}^* + b_{11}'\gamma_{11}'$	$\chi_{\langle 11 \rangle} = -(1 + 2\gamma_{\langle 11 \rangle})^{3/2}\bar{\sigma} + (1 + \gamma_{\langle 11 \rangle})\sigma$	(6.3.20)
$K_{11} = \chi_{11} + b_{11}'\gamma_{11}'$	$K_{\langle 11 \rangle} = -(1 + 2\gamma_{\langle 11 \rangle})^{3/2}\bar{\sigma} + (1 + 2\gamma_{\langle 11 \rangle})\sigma$	(6.3.21)
<u>Sonderfall: Dehnungslose Verbiegungen (<math>\gamma_{\langle 11 \rangle} = 0</math>)</u>		
	$\varkappa_{\langle 11 \rangle} = \rho_{\langle 11 \rangle} = \rho_{\langle 11 \rangle}^* = \chi_{\langle 11 \rangle} = K_{\langle 11 \rangle} = -\bar{\sigma} + \sigma$	(6.3.22)
<u>Randparameter:</u>		
	$n_{\nu} = (1 + 2\gamma_{\langle 11 \rangle})^{1/2}(-\rho_{\langle 11 \rangle})$	(6.3.23)
	$n = (1 + 2\gamma_{\langle 11 \rangle})^{1/2}(1 + \theta_{\langle 11 \rangle})$	(6.3.24)

Tab. 6.3

Führen wir eine Gleichlast, bezogen auf die Längeneinheit der unverformten Balkenachse

$$\underline{\rho} = \rho_{\langle 1 \rangle} \underline{e}_1 + \rho \underline{n} \quad (6.3.25)$$

und eine Randlast mit zugehörigen Repräsentanten

$$\underline{t}^* = t_{\langle 1 \rangle}^* \underline{e}_1 + t^* \underline{n} \quad , \quad \underline{T}_v^* = T_{\langle 1 \rangle}^* \underline{e}_1 + T^* \underline{n} \quad , \quad \underline{H}_v^* = H_{\langle 1 \rangle}^* \underline{e}_1 + H^* \underline{n} \quad (6.3.26)$$

ein, für die gemäß (4.4.8) Potentiale existieren, ergibt sich kompatibel mit der ersten Approximation der Verformungsenergiedichte das Gesamtpotential eines Balkens zu

$$J_\rho = \frac{1}{2} \int_0^l (EA \chi_{\langle 1 \rangle}^2 + EJ \varphi_{\langle 1 \rangle}^2 - 2 \underline{\rho} \cdot \underline{u}) dz - \left[ \underline{T}_v^* \cdot \underline{u} + \underline{H}_v^* \cdot (\bar{\underline{n}} - \underline{n}) \right]_{\theta_+^1}^{\theta_-^1} \quad , \quad (6.3.27)$$

mit EA, EI, l als Dehn- bzw. Biegesteifigkeit und Länge des Balkens sowie  $\theta_+^1$  bzw.  $\theta_-^1$  als Rand mit Außennormalenvektor in Richtung bzw. entgegen der Richtung von  $\theta^1$ . Mit Hilfe der in Abschnitt 4 vorgestellten Transformationen liefert die erste Variation von (6.3.27) unter Berücksichtigung zugehöriger Nebenbedingungen (6.3.16 - 24) die Gleichgewichtsbedingungen und statischen Randbedingungen einer allgemeinen Theorie dünner elastischer Balken. Diese werden für die Krümmungsänderungsbeziehungen  $\kappa_{\alpha\beta}$  (6.3.17) und  $\chi_{\alpha\beta}$  (6.3.20) als Repräsentanten der Varianten 1 - 4 bzw. 5 - 7 im Anhang A2 angegeben.

Systematische Beschränkung der Rotationen eines Balkenelementes bei gleichzeitiger Berücksichtigung unterschiedlicher relativer Fehlermargen E0, E1 und E2 führen auf eine Familie von Theorien großer und moderater Rotationen. Dabei ergeben sich die Theorien großer Rotationen mit den relativen Fehlern E1 und E2 gemäß Kapitel 6.2 durch Vernachlässigung der mit einer gestrichelten bzw. gestrichelten und Wellenlinie markierten Terme in Tab. 6.4. Werden alle mit einer durchgezogenen Linie gekennzeichneten Terme weggelassen, führt dies zu den reduzierten Beziehungen einer Theorie moderater Rotationen. Schließlich

erhält man als Spezialfälle Theorien gerader Balken ( $\sigma = 0$ ) durch Streichen solcher Beiträge in Tabelle 6.3 und 6.4, die die Krümmung der unverformten Balkenkonfiguration  $\sigma$  enthalten.

Balkentheorien großer und moderater Rotationen

Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen:

$$\gamma_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2 + \frac{1}{2} \theta_{\langle 11 \rangle}^2 \quad (6.3.28)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{\langle 11 \rangle} = & -\frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} - \underbrace{\sigma \theta_{\langle 11 \rangle}} + \frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle, 1} - \frac{1}{2} \underbrace{\sigma \varphi_{\langle 11 \rangle}^2} + \\ & + \frac{1}{2A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} (\varphi_{\langle 11 \rangle}^2 + 3\theta_{\langle 11 \rangle}^2) - \frac{1}{A_1} \theta_{\langle 11 \rangle, 1} \varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle} + \\ & + \frac{1}{2A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2 (\varphi_{\langle 11 \rangle, 1} \theta_{\langle 11 \rangle} - \theta_{\langle 11 \rangle, 1} \varphi_{\langle 11 \rangle}) + O(\theta^3/\lambda) \end{aligned} \quad (6.3.29)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\langle 11 \rangle} = & -\frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} + \frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle, 1} + \frac{1}{2A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} (\varphi_{\langle 11 \rangle}^2 + 3\theta_{\langle 11 \rangle}^2) - \\ & - \frac{1}{A_1} \theta_{\langle 11 \rangle, 1} \varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2 (\varphi_{\langle 11 \rangle, 1} \theta_{\langle 11 \rangle} - \theta_{\langle 11 \rangle, 1} \varphi_{\langle 11 \rangle}) + O(\theta^3/\lambda) \end{aligned} \quad (6.3.30)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\langle 11 \rangle}^* = & -\frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} - \underbrace{2\sigma \theta_{\langle 11 \rangle}} + \frac{1}{A_1} (\varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle, 1} - \theta_{\langle 11 \rangle} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1}) - \\ & - \underbrace{\sigma \varphi_{\langle 11 \rangle}^2} + O(\theta^3/\lambda) \end{aligned} \quad (6.3.31)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\langle 11 \rangle} = & -\frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} - \underbrace{\sigma \theta_{\langle 11 \rangle}} + \frac{1}{A_1} (\varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle, 1} - \theta_{\langle 11 \rangle} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1}) - \\ & - \frac{1}{2} \underbrace{\sigma \varphi_{\langle 11 \rangle}^2} + O(\theta^3/\lambda) \end{aligned} \quad (6.3.32)$$

$$K_{\langle 11 \rangle} = -\frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} + \frac{1}{A_1} (\varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle, 1} - \theta_{\langle 11 \rangle} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1}) + O(\theta^3/\lambda) \quad (6.3.33)$$

Sonderfall: Donnell-Vlasov Theorie moderater Rotationen

$$\gamma_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2A_7^2} w_{,1}^2 \quad (6.3.34)$$

$$\varrho_{\langle 11 \rangle} = \rho_{\langle 11 \rangle} = \rho_{\langle 11 \rangle}^* = \chi_{\langle 11 \rangle} = K_{\langle 11 \rangle} = -\frac{1}{A_7^2} w_{,11} \quad (6.3.35)$$

Randparameter:

$$n_{\nu} = -\varphi_{\langle 1 \rangle} + O(\theta^2 \sqrt{\theta}) \quad (6.3.36)$$

$$n = 1 - \frac{1}{2} \varphi_{\langle 1 \rangle}^2 - \frac{1}{2} \theta_{\langle 11 \rangle}^2 + O(\theta^3) \quad (6.3.37)$$

Tab. 6.4

Wie schon bei den zweidimensionalen Betrachtungen sind auch im Rahmen einer Balkentheorie die  $\underline{\kappa}$ - und  $\underline{\rho}$ -Approximationen Polynome höherer Ordnung und von weitaus komplizierterer Form als die reduzierten Beziehungen der modifizierten Varianten  $\underline{\rho}^*$ ,  $\underline{\chi}$ ,  $\underline{K}$ . Der Krümmungsänderungstensor  $K$  läßt sich im Rahmen aller relativen Fehler nicht vereinfachen; er behält die exakte Form (5.3.21) bei. Andererseits ist diese mit der E2-Approximation von  $\underline{\rho}^*$  und  $\underline{\kappa}$  sowie den zusätzlich transformierten E2-Approximationen (s. Anhang A1) von  $\underline{\rho}$  und  $\underline{\kappa}$  identisch. Dies läßt von theoretischer Seite die Leistungsfähigkeit der mit dem relativen Fehler E2 behafteten Balkengleichungen sogar über den Bereich großer Rotationen hinaus erwarten. Es ist jedoch anzumerken, daß im Rahmen dieser Approximationsstufe auf dem Rand bei nichtklassischen Bedingungen, d. h. eingprägtem statischen Moment  $\underline{H}_{\nu}^*$  oder vorgeschriebener Randverdrehung  $n_{\nu} = n_{\nu}^*$ , sich der größere Fehler kritisch auf das rechnerische Tragverhalten auswirken kann.

Dem Konzept einer reinen Verschiebungsmethode folgend, haben wir in diesem Kapitel auf der Basis äquivalenter Krümmungsänderungsbeziehungen eine Balkentheorie mit Verschiebungen als unabhängigen Variablen abgeleitet.

Da im Fall einachsiger Biegung die Rotationsachse (s. Kapitel 2) während des Deformationsprozesses unverändert bleibt, ist es möglich, den Rotationswinkel  $\omega$  als Variable zu verwenden [6.2, 6.3, 6.5] und das insbesondere auch im Rahmen gemischter Formulierungen [6.17, 6.21, 6.41].

Eine interessante Alternative wird in [6.33] beschrieben. Mitgehende Elementkonfigurationen mit einfachsten, in der Regel linearen kinematischen Beziehungen, die über eine Relativkinematik in den Systemkonfigurationsraum eingebettet werden, ermöglichen die exakte Erfassung von Starrkörperbewegungen. Die approximierte Elementkinematik erzeugt jedoch dabei einen starrkörperbewegungsunabhängigen Fehler in den Steifigkeitsbeziehungen. Ein theoretischer Vergleich mit diesen grundsätzlich verschiedenen Vorgehensweisen, speziell im Rahmen unterschiedlicher Näherungsstufen der geometrischen Nichtlinearität, ist äußerst schwierig. Wir beschränken uns daher auf vergleichende numerische Untersuchungen im Kapitel 9.1.

#### 6.4. Vergleichende Betrachtungen

Auf der Basis des polaren Zerlegungssatzes wurden in den vorangegangenen Kapiteln konsistent approximierte kinematische Beziehungen von Schalen und Balkentheorien großer und moderater Rotationen abgeleitet. Eine theoretische Einordnung und Bewertung verschiedener Varianten der Theorie moderater Rotationen (6.2.23 - 29) erfolgte in [6.32]. Im Zusammenhang mit ihrer numerischen Realisierung werden aus der Vielzahl von Arbeiten nur einige genannt [6.7, 6.8, 6.9, 6.12, 6.15, 6.29, 6.34, 6.35], die sich mit wenigen Ausnahmen [6.9, 6.12, 6.15, 6.35] auf die einfachsten Theorien flacher Schalen beschränken.

Dagegen ist die Anzahl der Arbeiten auf dem Gebiet großer und finiter Rotationen gering, insbesondere für den Fall kombinierter, d. h. theoretischer und numerischer Betrachtungen [6.9, 6.39, 6.42 - 43]. Im folgenden werden wir die dort verwendeten Schalengleichungen in das Klassifikationsschema (s. Kapitel 6.1) einordnen und mit dessen Hilfe überprüfen.

Ausgehend vom Greenschen Dehnungsmaß dreidimensionaler Kontinua werden in [6.42] die kinematischen Beziehungen einer Schalentheorie zur elasto-plastischen, axialsymmetrischen Berechnung von Rotationschalen hergeleitet. Reihenentwicklung bezüglich der Dickenkoordinate  $\theta^3$  führt mit Hilfe der Kirchhoff-Love-Hypothese und Vernachlässigung aller quadratischen Anteile in  $\theta^3$  auf Gleichungen, die schließlich mit den Annahmen "infinitesimal deformations" und "large rotations"

$$\theta_{\langle 11 \rangle}^2 \ll \theta_{\langle 11 \rangle} \quad , \quad \theta_{\langle 22 \rangle}^2 \ll \theta_{\langle 22 \rangle} \quad ; \quad \varphi_{\langle 11 \rangle}^n \ll \varphi_{\langle 11 \rangle} \quad , \quad n > 2 \quad (6.4.1)$$

approximierte kinematische Ausdrücke einer Theorie großer Verformungen und Rotationen ergeben (A3-21). Es ist anzumerken, daß die in [6.39, 6.42 - 43] verwendete physikalische Schreibweise unter Zuhilfenahme spezieller Geometrieparameter den direkten Vergleich mit einer eigenen Variante großer Rotationen des Kapitels 6.2 nicht zuläßt. Daher werden im Anhang A3 die in [6.39, 6.42 - 43] abgeleiteten Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen in einer dieser Arbeit zugrunde liegenden tensoriellen Schreibweise verallgemeinert angegeben.

Demgemäß wären (A3-21) mit den kinematischen Ausdrücken einer Theorie g/k Rotationen bei relativem Fehler E1 zu vergleichen, jedoch impliziert die Vernachlässigung der Beiträge in (A3-21)

$$\tilde{\delta}_{\alpha\beta} : \frac{1}{2} \theta_{\alpha}^{\lambda} \theta_{\lambda\beta} = O(\theta^2) \quad , \quad (6.4.2)$$

$$\tilde{\delta}_{\alpha\beta}^{\times} : -\frac{1}{2} (\theta_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda|\beta} + \theta_{\beta}^{\lambda} \varphi_{\lambda|\alpha}) = O(\theta\sqrt{\theta}_{,\lambda}) \quad (6.4.3)$$

relative Fehler  $O(1)$  bzw.  $O(\sqrt{\theta})$  an der Verformungsenergiedichte, die selbst die Fehlermarge E2 erheblich übersteigen und damit große Fehler bezüglich der Lösung  $\underline{u}$  erwarten lassen. Eindimensionale Betrachtungen haben gezeigt, daß insbesondere Produkte zweiter Ableitungen der Normalverschiebung mit ersten Ableitungen der Tangentialverschiebungen in der Biegeenergie (6.4.3) und Quadrate erster Ableitungen der Tangentialverschiebungen in der Membranenergie (6.4.2) solche Fehler erzeugen können (s. auch Kapitel 9.1). Bei der numerischen Realisierung wird in [6.42 - 43] zudem der Term

$$\tilde{\delta}_{\alpha\beta}^{\times} : \frac{1}{2} (\varphi_{\alpha} \theta_{\alpha|\beta}^{\times} + \varphi_{\beta} \theta_{\alpha|\alpha}^{\times}) = O(\theta\sqrt{\theta}_{,\lambda}) \quad (6.4.4)$$

gestrichen, womit der Einfluß zweiter Ableitungen der Tangentialverschiebungen auf das rechnerische Tragverhalten bei gleichzeitigem Auftreten eines Fehlers  $O(\sqrt{\theta})$  verloren geht. Diese Vernachlässigung hängt mit der Forderung nach Konformität der Elementansätze zusammen. Die dann verbleibenden einfachen kinematischen Beziehungen sind zur Beschreibung hochgradig nichtlinearer Probleme über den Bereich moderater Rotationen hinaus nicht tauglich.

In [6.39] werden drei Schalentheorien zur elastischen, axial-symmetrischen Berechnung von Rotationsschalen abgeleitet. Neben zwei einfacheren Varianten, die dem Bereich moderater Rotationen zuzuordnen sind,

findet sich dort auch eine Theorie großer Rotationen (A3 - 25). In dieser höchsten Approximationsstufe führen jedoch die inkonsistent vernachlässigten Beiträge (6.4.4) und

$$\tilde{\delta}e_{\alpha\beta} : \frac{1}{2}(b_{\alpha}^{\lambda}\theta_{\lambda\beta} + b_{\beta}^{\lambda}\theta_{\lambda\alpha}) = O(\theta^2) \quad (6.4.5)$$

zu relativen Fehlern  $O(\sqrt{\theta})$  und  $O(\theta)$  am Biegepotential und damit im Sinne des energetischen Konzepts zu inkonsistenten Approximationen.

Eigene Vergleichsrechnungen haben zudem gezeigt, daß die Testbeispiele in [6.42 - 43, 6.39] keine Indikatoren für Näherungsstufen geometrisch nichtlinearer Schalentheorien sind. Auftretende Unterschiede [6.39] können daher nur Folge von Diskretisierungsfehlern sein.

Ausgehend von einer geometrisch nichtlinearen Schalentheorie finiter Rotationen werden in [6.9] verschiedene Abbruchvarianten systematisch hergeleitet. Reihenentwicklungen der Invarianten  $\sqrt{\frac{a}{a}}$  und der Komponenten des verformten Normaleneinheitsvektors bezüglich der Deformationsgradienten  $\varphi_{\alpha}$ ,  $\varphi$  und  $\theta_{\alpha\beta}$  liefern Approximationen des Krümmungsänderungsmaßes  $\kappa_{\alpha\beta}$ . Der Grad der Nichtlinearität wird dann in einem mathematischen Sinne über die Ordnung berücksichtigter Reihenglieder definiert. Die Theorien finiter und moderater Rotationen (s. auch [6.1]) als kubische bzw. quadratische Approximationen sowie Donnell-Marguerresche Näherungen für flache und steile Schalen mit linearen Krümmungsänderungsbeziehungen liegen den nichtlinearen Testbeispielen zugrunde. Die Gültigkeitsbereiche der verschiedenen Näherungen werden anhand des hochgradig geometrisch nichtlinearen Problems eines Kreiszyllinders unter diametralen Einzellasten aufgezeigt.

Davon abweichend liefert das in Kapitel 6.1 vorgestellte energetische Konzept im Rahmen einer Theorie finiter Rotationen mit den Größenordnungsabschätzungen

$$\theta_{\alpha\beta} \sim \varphi_{\alpha} \sim \varphi = O(1) \quad (6.4.6)$$

$\kappa_{\alpha\beta}$  als Polynom 5. Grades in Deformationsgradienten [6.22]. Im Gegensatz zur Theorie moderater Rotationen (6.2.22 - 23) mit einem linear approximiertem Krümmungsänderungstensor werden bei der entsprechenden Theorie nach [6.1,6.9] gemäß (A3-20) fünf zusätzliche quadratische Terme berücksichtigt, die die numerische Praktikabilität erheblich einschränken. Würde man solche Beiträge im Sinne einer Verallgemeinerung auf Pro-

blemstellungen mit großen Rotationen betrachten, wäre diese Variante infolge der Vernachlässigung von (6.4.3) mit einem relativen Fehler  $O(\sqrt{\theta})$  behaftet. Damit kann aber eine Lösungsstabilität über den Bereich moderater Rotationen hinaus nicht grundsätzlich erwartet werden. Die Donnell-Marquerresche Theorie steiler Schalen [6.9] entsteht aus der klassischen Näherung (6.2.29) durch Einführen der verbesserten linearen Krümmungsänderungsbeziehung (6.2.23). Da jedoch der Mittelflächen-  
dehnungstensor  $\gamma_{\alpha\beta}$  (6.2.29) unverändert bleibt, ist diese Theorie im Sinne der restriktiven Annahmen flacher Schalen in ihrem Gültigkeitsbereich beschränkt und kann nur bei typischen Biegeproblemen zu verbesserten Ergebnissen führen.

Der Einfluß vorstehend aufgezeigter relativer Fehler  $O(1)$  und  $O(\sqrt{\theta})$  auf die Lösung geometrisch nichtlinearer Problemstellung ist Gegenstand der numerischen Untersuchungen des Abschnitts 9. Zur Bestätigung des energetischen Konzepts soll dort gezeigt werden, daß tatsächlich kleine bzw. große Fehler bezüglich der Energie zu kleinen bzw. großen Fehlern in der Lösung führen. Dabei ist jedoch zu beachten, daß in Sonderfällen, wie z. B. reinen Membran- und Biegeproblemen sowie bei bestimmten Strukturgeometrien, der erwartete Fehler nicht aufzutreten braucht.

7. EINFACHSTE GEOMETRISCH NICHTLINEARE SCHALENTHEORIEN  
GROSSER ROTATIONEN

Mit Hilfe des Prinzips vom stationären Wert des Gesamtpotentials werden in diesem Abschnitt unter Verwendung der in Kapitel 6.2.3 vorgeschlagenen Dehnungs-Verschiebungs- und Randparameterapproximationen die statischen Gleichungen einfachster geometrisch nichtlinearer Theorien dünner elastischer Schalen bei Auftreten großer Rotationen abgeleitet. Insbesondere konnten für diese Varianten keine auf variationellem Wege hergeleiteten statischen Randbedingungen angegeben werden [7.5 - 7]. Das Problem wird hier mit Hilfe modifizierter, energetisch äquivalenter kinematischer Ausdrücke und einer zusätzlichen konsistenten Randintegraltransformation gelöst [7.4]. Damit kann das vollständige Differentialgleichungssystem des nichtlinearen Randwertproblems angegeben werden. Taylorreihenentwicklung des Gesamtpotentials und Anwendung des energetischen Stabilitätskriteriums führen schließlich auf die zugehörigen Beziehungen für kritisches Gleichgewicht.

7.1. Kinematische Beziehungen

Schon in Kapitel 6.2.3 war gezeigt worden, daß energiekonsistente Transformationen in einer Theorie g/k Rotationen erhebliche Vereinfachungen der kinematischen Ausdrücke ermöglichen und bei Annahme größerer relativer Fehler E1 bzw. E2 auf einfachste, quadratisch approximierte Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen führen

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} - \frac{1}{2} (\underbrace{\theta_{\alpha}^{\lambda} \omega_{\lambda\beta} + \theta_{\beta}^{\lambda} \omega_{\lambda\alpha}}) + \frac{1}{2} \theta_{\alpha}^{\lambda} \theta_{\lambda\beta} + O(\theta^3 \sqrt{\theta}), \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left\{ -l_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda/\beta} - l_{\beta}^{\lambda} \varphi_{\lambda/\alpha} + \varphi_{\alpha} \theta_{\alpha|\beta}^{\alpha} + \varphi_{\beta} \theta_{\alpha|\alpha}^{\beta} - \underbrace{\theta_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta}} - \underbrace{\theta_{\beta}^{\lambda} b_{\lambda\alpha}} - \right. \\ &\quad \left. - \varphi_{\lambda} (b_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\beta} + b_{\beta}^{\lambda} \varphi_{\alpha}) + b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} \right\} + O(\theta^2 \sqrt{\theta_{\lambda}^{\lambda}}), \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

wobei im Rahmen der Fehlermarge E2 die mit einer Wellenlinie markierten Beiträge vernachlässigbar sind. Formt man den zweiten und dritten Term in (7.1.1) unter Zuhilfenahme von (6.2.12)<sub>1</sub> weiter um, ergibt sich ein energetisch äquivalenter Ausdruck

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ -l_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda/\beta} - l_{\beta}^{\lambda} \varphi_{\lambda/\alpha} - \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} (\varphi^{\alpha} \varphi_{\alpha})_{/\beta} - \frac{1}{2} \varphi_{\beta} (\varphi^{\alpha} \varphi_{\alpha})_{/\alpha} - \theta_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda/\beta} - \theta_{\beta}^{\lambda} b_{\lambda/\alpha} - \varphi_{\lambda} (b_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\beta} + b_{\beta}^{\lambda} \varphi_{\alpha}) + b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} \right\} + O(\theta^2 \sqrt{\vartheta}_{/\lambda}) \quad (7.1.2)$$

der durch vollständige Substitution von (6.2.12)<sub>1</sub> in (7.1.2) nach detaillierter Abschätzung aller Beiträge in eine modifizierte Darstellung, ausschließlich in Größen linearisierter Rotationen um Tangenten zur Mittelfläche  $M$  überführt werden kann

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left\{ -(\delta_{\alpha}^{\lambda} + \frac{1}{2} \varphi^{\lambda} \varphi_{\alpha}) \varphi_{\lambda/\beta} - (\delta_{\beta}^{\lambda} + \frac{1}{2} \varphi^{\lambda} \varphi_{\beta}) \varphi_{\lambda/\alpha} - \frac{1}{2} (b_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\beta} + b_{\beta}^{\lambda} \varphi_{\alpha}) \varphi_{\lambda} + b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} \right\} + O(\theta^2 \sqrt{\vartheta}_{/\lambda}) \quad (7.1.3)$$

Es ist anzumerken, daß bei Verwendung der Varianten (7.1.2 - 3) als Folge der zusätzlichen Transformation mit (6.2.12)<sub>1</sub> keine zweiten Ableitungen der Tangentialverschiebungen im Gesamtpotential einer Schale (4.4.10) auftreten. Ihr Einfluß wird durch energetisch äquivalente Produkte von Normalverschiebungsgradienten ersetzt, was im Hinblick auf hochgradig geometrisch nichtlineare Biegeprobleme nicht unproblematisch erscheint. Es sollte auch berücksichtigt werden, daß die vereinfachenden Modifikationen der Krümmungsänderungsbeziehungen nur bei Annahme größerer relativer Fehler  $E_1, E_2$  möglich sind, dann aber auch solche implizieren können. Zudem enthalten die Varianten (7.1.2 - 3) kubische Terme in Verschiebungen und deren Flächenableitungen, die beim Aufstellen der Elementmatrizen im Rahmen eines Finite-Element-Verfahrens erhöhten rechnerischen Aufwand erfordern. Lediglich im Fall rein theoretischer Betrachtungen sollte dem kompakten Krümmungsänderungsausdruck (7.1.3) der Vorzug gegeben werden. Bei den in dieser Arbeit durchzuführenden kombinierten, d. h. theoretischen und numerischen Untersuchungen verwenden wir daher die Variante (7.1.1).

Läßt man bei der Ableitung der Rotationsparameter des Schalenrandes in solchen Randausdrücken, die die dritte Komponente des verformten Normaleneinheitsvektors  $n$  enthalten, einen größeren Fehler  $O(\theta)$  zu, dann können für beide Fehlermargen  $E_1, E_2$  die folgenden konsistenten Approximationen angegeben werden.

$$\begin{aligned} n_\nu &= -\rho_\nu + O(\theta^2\sqrt{\theta}) & n_t &= -\rho_t + O(\theta^2\sqrt{\theta}) \\ n &\cong 1 - \frac{1}{2}\rho_\nu^2 - \frac{1}{2}\rho_t^2 + O(\theta^2\sqrt{\theta}) \end{aligned} \quad (7.1.4)$$

Mit Hilfe der Beziehung

$$\rho_t = -\tau_t u_\nu + \sigma_t u_t + w_{,s} \quad (7.1.5)$$

erhalten wir zu (2.4.10) analoge Ausdrücke für die abhängigen Größen  $n_t, n$

$$\begin{aligned} n_t &= n_t(\underline{u}, n_\nu) = \tau_t u_\nu - \sigma_t u_t - w_{,s} \quad , \\ n &= n(\underline{u}, n_\nu) = 1 - \frac{1}{2}n_\nu^2 - \frac{1}{2}(-\tau_t u_\nu + \sigma_t u_t + w_{,s})^2 \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

Den kinematischen Betrachtungen des Kapitels 5.2 folgend, spalten wir das Gesamtverschiebungsfeld  $\underline{u}$  der Schale auf in eine Fundamentalverschiebung  $\bar{\underline{u}}$  und eine Zusatzverschiebung  $\hat{\underline{u}}$  (s. auch Abb. 5.2). Dann können mit Hilfe von (5.2.2 - 3), (7.1.1) sowie (7.1.6) zu (5.2.4) und (5.2.9) analoge approximierte Dehnungs-Verschiebungs- und Randparameterbeziehungen angegeben werden

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}(\underline{u}) &= \bar{\gamma}_{\alpha\beta}(\bar{\underline{u}}) + \gamma'_{\alpha\beta}(\bar{\underline{u}}; \hat{\underline{u}}) + \frac{1}{2}\gamma''_{\alpha\beta}(\bar{\underline{u}}; \hat{\underline{u}}^2) \quad , \\ \chi_{\alpha\beta}(\underline{u}) &= \bar{\chi}_{\alpha\beta}(\bar{\underline{u}}) + \chi'_{\alpha\beta}(\bar{\underline{u}}; \hat{\underline{u}}) + \frac{1}{2}\chi''_{\alpha\beta}(\bar{\underline{u}}; \hat{\underline{u}}^2) \quad , \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

$$n_\nu(\underline{u}) = \bar{n}_\nu(\bar{\underline{u}}) + \hat{n}_\nu(\hat{\underline{u}}) \quad , \quad (7.1.8)$$

$$n_t(\underline{u}) = \bar{n}_t(\bar{\underline{u}}) + \hat{n}_t(\hat{\underline{u}}) \quad ,$$

$$n(\underline{u}) = \bar{n}(\bar{\underline{u}}) + n'(\bar{\underline{u}}; \hat{\underline{u}}) + \frac{1}{2}n''(\bar{\underline{u}}; \hat{\underline{u}}^2) \quad ,$$

wobei sich  $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}, \bar{\chi}_{\alpha\beta}, \bar{n}_\nu, \bar{n}_t, \bar{n}$  aus (7.1.1), (7.1.6) unter Verwendung entsprechender Kopfzeiger bestimmen lassen und folgende Gâteaux Differentiale eingeführt werden

$$\chi'_{\alpha\beta}(\bar{u}; \hat{u}) = \hat{\theta}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\bar{\varphi}_{\alpha}\hat{\varphi}_{\beta} + \hat{\varphi}_{\alpha}\bar{\varphi}_{\beta}) - \frac{1}{2}(\underbrace{\bar{\theta}_{\alpha}^{\lambda}\hat{\omega}_{\lambda\beta}} + \underbrace{\bar{\theta}_{\beta}^{\lambda}\hat{\omega}_{\lambda\alpha}} + \underbrace{\hat{\theta}_{\alpha}^{\lambda}\bar{\omega}_{\lambda\beta}} + \underbrace{\hat{\theta}_{\beta}^{\lambda}\bar{\omega}_{\lambda\alpha}}) + \frac{1}{2}(\bar{\theta}_{\alpha}^{\lambda}\hat{\theta}_{\lambda\beta} + \hat{\theta}_{\alpha}^{\lambda}\bar{\theta}_{\lambda\beta}) \quad , \quad (7.1.9)$$

$$\chi''_{\alpha\beta}(\bar{u}; \hat{u}^2) = \hat{\varphi}_{\alpha}\hat{\varphi}_{\beta} - \hat{\theta}_{\alpha}^{\lambda}\hat{\omega}_{\lambda\beta} - \hat{\theta}_{\beta}^{\lambda}\hat{\omega}_{\lambda\alpha} + \hat{\theta}_{\alpha}^{\lambda}\hat{\theta}_{\lambda\beta} \quad ,$$

$$\begin{aligned} \chi'_{\alpha\beta}(\bar{u}; \hat{u}) = \frac{1}{2} \{ & -\hat{\theta}_{\alpha}^{\lambda}\bar{\varphi}_{\lambda|\beta} - \hat{\theta}_{\beta}^{\lambda}\bar{\varphi}_{\lambda|\alpha} - \bar{\varphi}_{\alpha}\hat{\theta}_{\lambda|\beta} - \bar{\varphi}_{\beta}\hat{\theta}_{\lambda|\alpha} + \\ & + \hat{\varphi}_{\alpha}\bar{\theta}_{\alpha|\beta} + \hat{\varphi}_{\beta}\bar{\theta}_{\alpha|\alpha} + \bar{\varphi}_{\alpha}\hat{\theta}_{\alpha|\beta} + \bar{\varphi}_{\beta}\hat{\theta}_{\alpha|\alpha} - \\ & - \underbrace{\hat{\theta}_{\alpha}^{\lambda}b_{\lambda\beta}} - \underbrace{\hat{\theta}_{\beta}^{\lambda}b_{\lambda\alpha}} - \underbrace{\hat{\varphi}_{\lambda}(b_{\alpha}^{\lambda}\bar{\varphi}_{\beta} + b_{\beta}^{\lambda}\bar{\varphi}_{\alpha})} - \\ & - \underbrace{\bar{\varphi}_{\lambda}(b_{\alpha}^{\lambda}\hat{\varphi}_{\beta} + b_{\beta}^{\lambda}\hat{\varphi}_{\alpha})} + \underbrace{2b_{\alpha\beta}\bar{\varphi}^{\lambda}\hat{\varphi}_{\lambda}} \} \quad , \quad (7.1.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi''_{\alpha\beta}(\bar{u}; \hat{u}^2) = & -\hat{\theta}_{\alpha}^{\lambda}\hat{\varphi}_{\lambda|\beta} - \hat{\theta}_{\beta}^{\lambda}\hat{\varphi}_{\lambda|\alpha} + \hat{\varphi}_{\alpha}\hat{\theta}_{\alpha|\beta} + \hat{\varphi}_{\beta}\hat{\theta}_{\alpha|\alpha} - \\ & - \underbrace{\hat{\varphi}_{\lambda}(b_{\alpha}^{\lambda}\hat{\varphi}_{\beta} + b_{\beta}^{\lambda}\hat{\varphi}_{\alpha})} + \underbrace{b_{\alpha\beta}\hat{\varphi}^{\lambda}\hat{\varphi}_{\lambda}} \quad , \end{aligned}$$

$$\hat{n}_v = -\hat{\varphi}_v \quad , \quad \hat{n}_t = -\hat{\varphi}_t \quad ,$$

$$n'(\bar{u}; \hat{u}) = -\bar{n}_v \hat{n}_v - (-\tau_t \bar{u}_v + \sigma_t \bar{u}_t + \bar{w}_s) (-\tau_t \hat{u}_v + \sigma_t \hat{u}_t + \hat{w}_s) \quad , \quad (7.1.11)$$

$$n''(\bar{u}; \hat{u}^2) = -\hat{n}_v^2 - (-\tau_t \hat{u}_v + \sigma_t \hat{u}_t + \hat{w}_s)^2 \quad .$$

## 7.2. Das Differentialgleichungssystem des Randwertproblems

Folgen wir dem Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials, dann erteilt unter allen geometrisch zulässigen Verschiebungsfeldern  $\underline{u}$  gerade die Lösung  $\bar{\underline{u}}$  dem Gesamtpotential (4.4.10) einen stationären Wert und dessen erstem Gâteaux Differential den Wert Null

$$J'_\rho(\bar{\underline{u}}; \hat{\underline{u}}) = 0 \quad . \quad (7.2.1)$$

Geometrisch zulässig sind solche Verschiebungsfelder  $\underline{u}$  in  $M$  und  $\underline{u}, n_\nu, n_t(\underline{u}, n_\nu), n(\underline{u}, n_\nu)$  gemäß (7.1.6) auf  $C$ , die als Nebenbedingungen die Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen in  $M$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(\underline{u}), \quad \chi_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta}(\underline{u}), \quad \text{gemäß (7.1.1)} \quad (7.2.2)$$

die geometrischen Randbedingungen auf  $C_u$

$$\underline{u} = \underline{u}^*, \quad n_\nu = n_\nu^* \quad (7.2.3)$$

und in allen Eckpunkten  $M_{ui} \in C_u$

$$w(s_{ui}) = w^*(s_{ui}) \quad (7.2.4)$$

erfüllen.

Substitution der kinematischen Beziehungen einfachster Theorien großer Rotationen (5.2.22), (7.1.1), (2.4.5)<sub>2</sub>, (7.1.11)<sub>1,3</sub> sowie (5.2.3) in (5.2.19) liefern nach weiteren Umformungen mit Hilfe partieller Integration und Anwendung des Gaußschen Divergenztheorems einen zu (5.2.19) äquivalenten Ausdruck für das erste Gâteaux Differential

$$\begin{aligned} J'_p(\underline{\hat{u}}; \underline{\hat{u}}) = & - \iint_M [(T^{\lambda\beta}|_\beta - b_\beta^\lambda T^\beta) \hat{u}_\lambda + (T^\beta|_\beta + b_{\lambda\beta} T^{\lambda\beta}) \hat{w}] dA + \\ & + \int_{C_f} [(P - P^*) \cdot \hat{u} + (M - M^*) \hat{n}_\nu] ds + \\ & + \sum_j (F_j - F_j^*) \hat{w}_j, \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

wobei zusätzlich die hilfreiche Transformation (6.2.12)<sub>1</sub> verwendet und folgende Abkürzungen eingeführt wurden

$$\begin{aligned} T^{\lambda\beta} = & N^{\lambda\beta} + \frac{1}{2} [(\theta^{\lambda\alpha} + \varphi^{\lambda\alpha}) N_\alpha^\beta + (\theta^{\alpha\beta} - \varphi^{\alpha\beta}) N_\alpha^\lambda] - \\ & - \frac{1}{2} [(\varphi^\lambda|_\alpha + b_\alpha^\lambda) M^{\alpha\beta} + (\varphi^\beta|_\alpha + b_\alpha^\beta) M^{\alpha\lambda}] - a^{\lambda\beta} (M^{\alpha\beta} \varphi_\alpha)|_\beta, \quad (7.2.6) \\ T^\beta = & \varphi_\alpha N^{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta}|_\alpha + (\theta_\alpha^\beta M^{\alpha\beta})|_\beta + M^{\alpha\beta} (1 + \epsilon_\alpha^\alpha)|_\alpha - \\ & - (M^{\beta\rho} b_\rho^\lambda + M^{\lambda\rho} b_\rho^\beta) \varphi_\lambda + b_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} \varphi^\beta, \end{aligned}$$

$$\underline{P} = P_{\nu} \underline{\nu} + P_t \underline{t} + P_n \underline{n} \quad , \quad \underline{P}^* = P_{\nu}^* \underline{\nu} + P_t^* \underline{t} + P_n^* \underline{n} \quad ,$$

$$\begin{bmatrix} P_{\nu} \\ P_{\nu}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{\nu\nu} \\ T_{\nu\nu}^* \end{bmatrix} - \zeta_t \begin{bmatrix} F \\ F^* \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} P_t \\ P_t^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{t\nu} \\ T_{t\nu}^* \end{bmatrix} + \sigma_t \begin{bmatrix} F \\ F^* \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\begin{bmatrix} P_n \\ P_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{n\nu} \\ T_{n\nu}^* \end{bmatrix} - \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} F \\ F^* \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} F \\ F^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_{t\nu} - \varphi_t R_{n\nu} \\ -H_{t\nu}^* - \varphi_t H_{n\nu}^* \end{bmatrix} \quad ,$$

$$T_{\nu\nu} = T^{\lambda\beta} \nu_{\lambda} \nu_{\beta} \quad , \quad T_{t\nu} = T^{\lambda\beta} t_{\lambda} \nu_{\beta} \quad , \quad T_{n\nu} = T^{\beta} \nu_{\beta}$$

$$R_{\nu\nu} = M^{\alpha\beta} l_{\alpha}^{\lambda} \nu_{\lambda} \nu_{\beta} \quad , \quad R_{t\nu} = M^{\alpha\beta} l_{\alpha}^{\lambda} t_{\lambda} \nu_{\beta} \quad , \quad R_{n\nu} = M^{\alpha\beta} \varphi_{\alpha} \nu_{\beta} \quad ,$$

$$M = R_{\nu\nu} + \varphi_{\nu} R_{n\nu} \quad , \quad M^* = H_{\nu\nu}^* + \varphi_{\nu} H_{n\nu}^* \quad ,$$

$$F_j = F(s_j+0) - F(s_j-0) \quad , \quad F_j^* = F^*(s_j+0) - F^*(s_j-0) \quad .$$

Führen wir (7.2.5) in die Stationaritätsbedingung (7.2.1) ein, erhält man die nichtlinearen Gleichgewichtsbedingungen in M

$$T^{\lambda\beta} |_{\beta} - b_{\beta}^{\lambda} T^{\beta} + \rho^{\lambda} = 0 \quad , \tag{7.2.7}$$

$$T^{\beta} |_{\beta} + b_{\lambda\beta} T^{\lambda\beta} + \rho = 0$$

sowie die nichtlinearen statischen Randbedingungen auf  $C_f$

$$\underline{P} = \underline{P}^* \quad , \quad M = M^* \tag{7.2.8}$$

und in allen Eck- und Diskontinuitätspunkten  $M_{fj} \in C_f$

$$F_j = F_j^* \tag{7.2.9}$$

als Euler-Lagrange-Gleichungen des Variationsproblems.

Zusammen mit den konstitutiven Beziehungen

$$N^{\alpha\beta} = h H^{\alpha\beta\lambda\mu} \chi_{\lambda\mu} \quad , \quad M^{\alpha\beta} = \frac{h^3}{12} H^{\alpha\beta\lambda\mu} \chi_{\lambda\mu} \tag{7.2.10}$$

bilden (7.2.2 - 4) und (7.2.7 - 9) das Differentialgleichungssystem für einfachste geometrisch nichtlineare Schalentheorien bei Auftreten großer Rotationen. Es enthält als Sonderfälle die Gleichungen bekannter Theorien, wie der Theorie flacher Schalen (6.2.29) [7.1., 7.3., 7.12] und vereinfachter Theorien moderater Rotationen (6.2.28) [7.2., 7.8].

Die Energiekonsistenz der abgeleiteten Beziehungen ermöglicht unter anderem die Anwendung numerischer Näherungsverfahren, wie z. B. der Finite-Element-Methode in Form des Weggrößenverfahrens. Dabei läßt die Kompaktheit der Gleichungen des Randwertproblems und seiner schwachen Formulierung insbesondere bei der einfachst möglichen Variante g/k Rotationen mit relativem Fehler E2 eine hohe Praktikabilität bei der Berechnung hochgradig geometrisch nichtlinearen Tragverhaltens von Schalen erwarten.

### 7.3. Konsistente Stabilitätsgleichungen

Die Ableitung konsistenter Stabilitätsgleichungen erfolgt in Anlehnung an entsprechende Betrachtungen für die allgemeine Theorie dünner elastischer Schalen im Abschnitt 5.

Den Zuwachs des Gesamtpotentials  $\Delta J_p$  beim Übergang in einen Nachbarzustand erhält man für die Theorien g/k Rotationen mit einfachsten kinematischen Beziehungen (7.1.1), (7.1.6 - 11) als abbrechende Taylorreihenentwicklung in der Umgebung der Fundamentallage (s. Abb. 5.2)

$$\Delta J_p = J'_p(\bar{u}; \hat{u}) + \frac{1}{2} J''_p(\bar{u}; \hat{u}^2) + \frac{1}{6} J'''_p(\bar{u}; \hat{u}^3) + \frac{1}{24} J''''_p(\bar{u}; \hat{u}^4) \quad , \quad (7.3.1)$$

wobei infolge quadratisch approximierter Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen (7.1.1) wie bei Theorien moderater Rotationen [7.9 - 11] Gâteaux Differentiale des inneren Potentials bis zur vierten Ordnung auftreten. Mit der Lastabhängigkeit des zweiten Gâteaux Differentials bleibt jedoch ein typisches Merkmal der allgemeinen Theorie erhalten.

Wir transformieren nun den wesentlichen Beitrag zum Energiezuwachs, das zweite Gâteaux Differential  $J''_p(\bar{u}; \hat{u}^2)$ , nach Substitution von (5.2.23), (7.1.1), (7.1.9 - 11), (2.4.5)<sub>2</sub> sowie (5.2.3) in (5.2.20) mit Hilfe partieller Integration und Anwendung des Gaußschen Divergenztheorems und erhalten unter Berücksichtigung von (6.2.12)<sub>1</sub>

$$\begin{aligned}
 J_{\rho}''(\underline{u}, \underline{\hat{u}}^2) = & - \iint_{\mathcal{M}} [ (T^{\lambda\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}})|_{\rho} - b_{\rho}^{\lambda} T^{\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}})) \hat{u}_{\lambda} + \\
 & + T^{\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}})|_{\rho} + b_{\lambda\beta} T^{\lambda\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \hat{w} ] dA + \\
 & + \int_{\mathcal{C}_f} [ (P'(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) - P^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}})) \cdot \underline{\hat{u}} + (M'(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) - M^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}})) \hat{n}_{\nu} ] ds + \\
 & + \sum_j (F_j'(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) - F_j^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}})) \hat{w}_j, \quad (7.3.2)
 \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 T^{\lambda\beta'}(\underline{u}, \underline{\hat{u}}) = & N^{\lambda\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) + \frac{1}{2} [ (\hat{\theta}^{\lambda\alpha} + \hat{\phi}^{\lambda\alpha}) \bar{N}_{\alpha}^{\beta} + (\hat{\theta}^{\alpha\beta} - \hat{\phi}^{\alpha\beta}) \bar{N}_{\alpha}^{\lambda} + \\
 & - (\bar{\theta}^{\lambda\alpha} + \bar{\varphi}^{\lambda\alpha}) N_{\alpha}^{\beta'}(\underline{u}, \underline{\hat{u}}) + (\bar{\theta}^{\alpha\beta} - \bar{\varphi}^{\alpha\beta}) N_{\alpha}^{\lambda'}(\underline{u}, \underline{\hat{u}}) ] - \\
 & - \frac{1}{2} [ \hat{\phi}^{\lambda}_{\alpha} \bar{M}^{\alpha\beta} + \hat{\phi}^{\beta}_{\alpha} \bar{M}^{\alpha\lambda} + (\bar{\phi}^{\lambda}_{\alpha} + b_{\alpha}^{\lambda}) M^{\alpha\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) + \\
 & + (\bar{\phi}^{\beta}_{\alpha} + b_{\alpha}^{\beta}) M^{\alpha\lambda'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) ] - a^{\lambda\beta} (M^{\alpha\beta\rho'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \bar{\phi}_{\alpha} + \bar{M}^{\alpha\beta\rho} \hat{\phi}_{\alpha})|_{\rho}, \quad (7.3.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{\beta'}(\underline{u}, \underline{\hat{u}}) = & \hat{\varphi}_{\alpha} \bar{N}^{\alpha\beta} + \bar{\varphi}_{\alpha} N^{\alpha\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) + M^{\alpha\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}})|_{\alpha} + (\hat{\theta}_{\alpha}^{\beta} \bar{M}^{\alpha\rho} + \bar{\theta}_{\alpha}^{\beta} M^{\rho\alpha'})|_{\rho} + \\
 & + M^{\alpha\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) (1 + \bar{\theta}_{\alpha}^{\alpha}) + \bar{M}^{\alpha\beta} \hat{\theta}_{\alpha}^{\alpha} + b_{\alpha\beta} (M^{\alpha\rho'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \varphi^{\beta} + \bar{M}^{\alpha\rho} \hat{\phi}^{\beta}) - \\
 & - (M^{\beta\rho'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) b_{\rho}^{\lambda} + M^{\lambda\rho'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) b_{\rho}^{\beta}) \bar{\varphi}_{\lambda} - (\bar{M}^{\beta\rho} b_{\rho}^{\lambda} + \bar{M}^{\lambda\rho} b_{\rho}^{\beta}) \hat{\varphi}_{\lambda},
 \end{aligned}$$

$$P'(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) = P'_v(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \underline{v} + P'_t(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \underline{t} + P'_n(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \underline{n},$$

$$P^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) = P^{*'}_v(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \underline{v} + P^{*'}_t(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \underline{t} + P^{*'}_n(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \underline{n},$$

$$\begin{bmatrix} P'_v(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \\ P^{*'}_v(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{vv}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \\ 0 \end{bmatrix} - \underline{\tau}_t \begin{bmatrix} F'(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \\ F^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} P'_t(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \\ P^{*'}_t(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{tv}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{\sigma}_t \begin{bmatrix} F'(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \\ F^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} P'_n(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \\ P^{*'}_n(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{nv}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \\ T^{*'}_{nv}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \end{bmatrix} - \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} F'(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \\ F^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} F'(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \\ F^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R'_{\nu}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) - \hat{\phi}_{\nu} R_{nv} - \bar{\phi}_{\nu} R'_{nv}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \\ -\hat{\varphi}_t H_{nv}^{*'} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 T'_{\nu\nu}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) &= T^{\lambda\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \nu_\lambda \nu_\beta, \quad T'_{t\nu}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) = T^{\lambda\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) t_{\lambda\nu} \nu_\beta, \quad T'_{n\nu}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) = T^{\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \nu_\beta, \\
 R'_{\nu\nu}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) &= (M^{\alpha\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \bar{l}_\alpha^\lambda + \bar{M}^{\alpha\beta} \hat{\theta}_\alpha^\lambda) \nu_\lambda \nu_\beta, \quad R'_{t\nu}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) = (M^{\alpha\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \bar{l}_\alpha^\lambda + \bar{M}^{\alpha\beta} \hat{\theta}_\alpha^\lambda) t_{\lambda\nu} \nu_\beta, \\
 R'_{n\nu}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) &= (M^{\alpha\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) \bar{\varphi}_\alpha + \bar{M}^{\alpha\beta} \hat{\varphi}_\alpha) \nu_\beta, \quad (7.3.4) \\
 M'(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) &= R'_{\nu\nu}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) + \hat{\rho}_\nu R_{n\nu} + \bar{\varphi}_\nu R'_{n\nu}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}), \quad M^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) = \hat{\rho}_\nu H_{n\nu}^*, \\
 F'_j(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) &= F'(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) s_{j+0} - F'(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) s_{j-0}, \quad F_j^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) = F^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) s_{j+0} - F^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) s_{j-0}.
 \end{aligned}$$

Gemäß dem energetischen Stabilitätskriterium werden Zustände kritischen Gleichgewichts durch die nichttrivialen Lösungen des verschwindenden zweiten Gâteaux Differentials definiert (5.3.13), woraus sich der vollständige, energetisch konsistente Satz Stabilitätsgleichungen einfachster geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Zuhilfenahme von (7.3.2) ergibt

$$\left. \begin{aligned}
 T^{\lambda\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}})|_\beta - b_\beta^\lambda T^{\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) &= 0 \\
 T^{\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}})|_\beta + b_{\lambda\beta} T^{\lambda\beta'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{ auf } M, \quad (7.3.5)$$

$$\left. \begin{aligned}
 P'_\nu(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) - P_\nu^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) &= 0 \\
 P'_t(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) - P_t^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) &= 0 \\
 P'_n(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) - P_n^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) &= 0 \\
 M'(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) - M^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{ auf } C_f, \quad (7.3.6)$$

$$\left. \begin{aligned}
 F'_j(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) - F_j^{*'}(\underline{\bar{u}}, \underline{\hat{u}}) &= 0
 \end{aligned} \right\} \text{ in allen Punkten } (7.3.7) \\
 M_{fj} \in C_f.$$

## 8. FINITE-ELEMENT-FORMULIERUNG FÜR ROTATIONSSCHALEN UND GEKRÜMMTE BALKEN

### 8.1. Einführende Betrachtungen

Auf der Basis der in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Näherungsstufen geometrisch nichtlinearer Schalen- und Balkentheorien werden im folgenden die Finite-Element-Algorithmen zur Berechnung axialsymmetrisch belasteter Rotationsschalen und gekrümmter Balken erstellt. Das allgemeine Konzept der Finite-Element-Methode in Form des Weggrößenverfahrens ist hinreichend bekannt (siehe z. B. die Lehrbücher [8.31, 8.16, 8.2]). Wir beschränken daher unsere Betrachtungen im wesentlichen auf solche Teilaspekte, die sich aus der Forderung ergeben, verschiedene geometrisch nichtlineare Schalen- und Balkentheorien untersuchen und vergleichen zu können. Dabei wird auf die explizite Angabe der Algorithmen für gekrümmte Balken verzichtet, da sie durch Reduktion entsprechender Rotationsschalenbeziehungen zu ermitteln sind (s. auch Kapitel 6.3).

Die Mehrzahl der geometrisch nichtlinearen Finite-Element-Berechnungen axialsymmetrisch belasteter Rotationsschalen mit Hilfe von Ringelementen werden ausgehend von einfachsten Theorien flacher Schalen oder Theorien moderater Rotationen durchgeführt [8.9, 8.14, 8.15, 8.24, 8.27, 8.1]. In nur wenigen Arbeiten finden Theorien Verwendung, die dem Bereich großer Rotationen zuzuordnen wären [8.26, 8.29, 8.30]. Unterschiedliche Elementtypen und Lösungsalgorithmen erschweren vergleichende Untersuchungen ebenso, wie die Vielzahl der gerechneten Anwendungsbeispiele, die zudem in der Regel keine Indikatoren für Näherungsstufen geometrisch nichtlinearer Schalentheorien sind.

Numerisches Ziel der vorliegenden Arbeit ist daher die Entwicklung eines hinsichtlich der verwendeten Theorie flexiblen Schalen- bzw. Balkenprogramms und die Anwendung auf solche Strukturen, die als Indikatoren für Näherungsstufen geometrisch nichtlinearer Theorien vergleichende Untersuchungen ermöglichen.

Bei der Anwendung der Finite-Element-Methode auf Probleme der Strukturmechanik sind grundsätzlich drei wesentliche Aspekte zu beachten:

- die Repräsentation der Struktur durch finite Elemente und damit eine Geometriebeschreibung auf Elementebene,

- die Wahl geeigneter bereichsweiser Verschiebungsansätze,
- die Wahl geeigneter Verfahren zur Lösung des nichtlinearen algebraischen Gleichungssystems.

Sowohl bei geometrisch linearen als auch nichtlinearen Problemen ist auf eine möglichst genaue Beschreibung der Tragwerksgeometrie zu achten. Erste Berechnungen von axialsymmetrisch belasteten Rotationsschalen wurden mit Hilfe von Kegelstumpfelementen durchgeführt [8.10, 8.17]. Diese haben jedoch den Nachteil, daß durch Diskontinuitäten der Neigung zwischen benachbarten Elementen Pseudo-Biegemomente selbst bei Problemen erzeugt werden, die durch reines Membranverhalten gekennzeichnet sind. Eine Verbesserung der Ergebnisse konnte durch die Entwicklung sogenannter "doubly curved" Ringelemente mit approximativer Beschreibung der Meridiangeometrie, in der Regel über Polynomansätze, erzielt werden [8.24, 8.30, 8.2]. Zu dieser Gruppe zählen vor allem die isoparametrischen Elemente [8.5, 8.27]. Jedoch können solche Näherungen insbesondere bei imperfektionsempfindlichen Schalenträgwerken zu unangenehmen Nebeneffekten führen.

Um unerwünschte Einflüsse approximativer Geometriebeschreibung und ihre Auswirkungen auf die Lösung konkreter Probleme auszuschalten, werden wir geometrisch exakte Schalenring- und Balkenelemente entwickeln.

Eine weitere Schwierigkeit liegt in der Wahl geeigneter bereichsweiser Verschiebungsansätze, die, um Konvergenz gegen die exakte Lösung sicherzustellen, gewisse Bedingungen bezüglich Vollständigkeit und Verträglichkeit an den Elementrändern erfüllen müssen [8.31, 8.16]. Bei den in der vorliegenden Arbeit betrachteten eindimensionalen Problemen gekrümmter Balken und axialsymmetrisch belasteter Rotationsschalen bereitet die Erfüllung der Verträglichkeitsbedingungen zwischen den Elementen keine Probleme. Im Rahmen konsistent approximierter Schalentheorien moderater Rotationen (s. Kapitel 6.2.4) gilt die Stetigkeit der Tangentialverschiebungen ( $C_0$ -Kontinuität [8.31]) als ausreichend, während die Ansatzfunktion für die Normalverschiebung nicht nur stetig, sondern auch stetig differenzierbar sein muß ( $C_1$ -Kontinuität). Sollen jedoch Theorien großer Rotationen (s. Kapitel 6.2.1 -3) zur Berechnung herangezogen werden, ist es notwendig  $C_1$ -Kontinuität sowohl für Tangential- als auch Normalverschiebung zu fordern, da im zugehörigen Variationsfunktional (4.4.10) zweite partielle Ableitungen aller Verschiebungskomponenten auftreten.

Die Forderung nach Vollständigkeit der Ansatzfunktionen hängt stark mit den Kriterien der Repräsentation konstanter Dehnungszustände und der Invarianz gegen Starrkörperbewegungen zusammen [8.31, 8.2, 8.1]. Im Gegensatz zum isoparametrischen Elementkonzept mit gleichen Ansatzfunktionen für Geometrie und Verschiebungsfelder werden sie bei exakter Geometriebeschreibung mit Hilfe konvektiver krummliniger Koordinaten nicht a priori sondern nur näherungsweise erfüllt. Folgt man [8.31], müssen die Formfunktionen so gewählt werden, daß die Knotengrößen oder die im Funktional auftretenden Ableitungen bei gegen Null gehender Elementdimension konstante Grenzwerte annehmen. Dies kann automatisch befriedigt werden, wenn die verwendete Polynomfolge bis zur n-ten Ordnung vollständig ist, d. h. bei Auftreten n-ter Ableitungen im Variationsfunktional alle Folgenglieder n-ter Ordnung und darunter vorhanden sind. Untersuchungen, inwieweit spezielle Starrkörperansätze das Konvergenzverhalten beeinflussen [8.7, 8.23, 8.3 ], haben nur in Einzelfällen zu signifikanten Verbesserungen geführt.

Bei Polynomansätzen stellt sich zudem die Frage, ob für Tangential- und Normalverschiebungen gleiche oder ungleiche Ansatzordnungen gewählt werden sollen. Qualitative Untersuchungen und numerische Vergleichsrechnungen haben gezeigt, daß optimale Effizienz bei Wahl gleicher Polynomordnungen erzielt wird [8.8, 8.12, 8.7 ]. Dies erscheint auch sinnvoll im Hinblick darauf, daß bei geometrisch nichtlinearen Problemen mit Auftreten großer Rotationen beide Verschiebungskomponenten von gleicher Bedeutung für die Beschreibung des Tragverhaltens sind.

Unter Beachtung vorstehend genannter Konvergenzkriterien wird daher sowohl für das Schalenringelement als auch das Balkenelement ein gleichmäßig kubischer Polynomansatz gewählt.

Die Diskretisierung im Sinne der Finite-Element-Methode führt über die Wahl geeigneter Verschiebungsansätze zu einem System algebraischer Gleichungen für die unbekanntenen Knotenparameter. Im Gegensatz zu entsprechenden linearen Problemstellungen entzieht sich das nichtlineare Gleichungssystem einer direkten Lösung, was die Anwendung eines numerischen Näherungsverfahrens erforderlich macht. Einen ausführlichen Überblick über die Vielfalt möglicher Algorithmen gibt das mathematisch und ingenieurmäßig orientierte Schrifttum [8.4, 8.11, 8.18 - 22, 8.25]

Insbesondere inkrementelle und iterative sowie aus ihnen kombinierte Verfahren haben die weiteste Verbreitung gefunden. Die Frage nach einer für das zur Lösung anstehende Problem optimalen Methode hängt von vielen Faktoren wie Problemgröße, Speicherplatz, Grad der Nichtlinearität, erforderliche Genauigkeit usw. ab. Für die Berechnung hochgradig nicht-linearer Probleme dünner elastischer Balken und Rotationsschalen und den dabei angestrebten vergleichenden Untersuchungen spielt die Genauigkeit eine besondere Rolle. Werden zudem gute Konvergenzeigenschaften gefordert, bietet sich das Newton-Raphson-Verfahren zur Lösung des nicht-linearen Gleichungssystems in jedem Lastschritt an.

## 8.2. Grundlegende Beziehungen in diskretisierter Form

### 8.2.1. Die Geometriebeschreibung

Gemäß Abb. 8.1 definieren wir die Meridiankurve einer beliebigen Rotationsschale durch zwei Funktionen

$$r = r(\theta^1) \quad , \quad z = z(\theta^1) \quad (8.2.1)$$

Dabei sind  $r$  und  $z$  die Achsen eines globalen kartesischen Koordinatensystems und  $\theta^1$  ein beliebiger Parameter der Meridiankurve. Teilt man die Meridiankurve durch Wahl von  $N + 1$  Knotenpunkten in  $N$  Elemente auf, dann ist ein typisches Element durch zwei aufeinanderfolgende Werte  $\theta_i^1$  und  $\theta_{i+1}^1$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  von  $\theta^1$  gekennzeichnet.

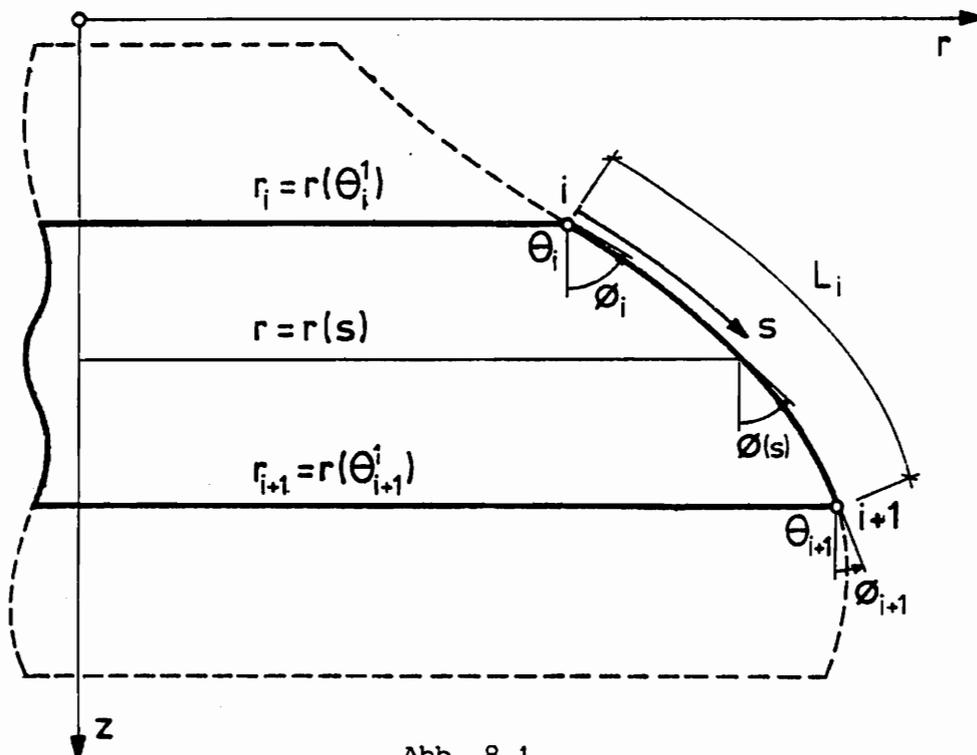


Abb. 8.1

Auf Elementebene wird zusätzlich der Längenparameter  $s$  eingeführt.

$$s = s(\theta^1) = \int_{\theta_i^1}^{\theta^1} A_1 d\theta^1, \quad \theta^1 \in [\theta_i^1, \theta_{i+1}^1], \quad (8.2.2)$$

$$A_1^2 = \left(\frac{dr}{d\theta^1}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta^1}\right)^2.$$

In anschaulicher Verbindung mit Abb. 8.1 läßt sich der Winkel  $\phi$  zwischen z-Achse und der Tangenten zur Meridiankurve in Abhängigkeit von  $\theta^1$  bestimmen

$$\phi = \phi(\theta^1) = \text{arctg} \left( \frac{dr}{d\theta^1} / \frac{dz}{d\theta^1} \right), \quad \frac{dz}{d\theta^1} \neq 0 \quad (8.2.3)$$

oder unter Verwendung von (8.2.2) auch als Funktion des Längenparameters  $s$ ,  $\phi = \phi(s)$ ,  $s \in [0, L]$ .

Ausgehend von den vorstehend abgeleiteten Ausdrücken (8.2.1 - 3) erhält man mit Hilfe der in Kapitel 2.1 zusammengestellten differentialgeometrischen Beziehungen die kovarianten Komponenten des Metrik- und Krümmungstensors

$$a_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A_1^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}, \quad b_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A_1 \phi_{,1} & 0 \\ 0 & -r \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (8.2.4)$$

Im Verschiebungsfunktional für die Rotationsschale treten nur folgende geometrische Größen auf

$$r, \sin \phi, \cos \phi, \frac{d\phi}{ds}, \frac{d^2\phi}{ds^2}; \quad (8.2.5)$$

die aus (8.2.1 - 3) zu bestimmen sind und damit eine exakte Erfassung der Geometrie ermöglichen. Bei Elementen mit konstanter Meridiankrümmung  $R$  zur Berechnung von Kugelkalotten, Tori, Kreiszyinderschalen usw. erhält man die vereinfachten Beziehungen (s. Abb. 8.1)

$$r(s) = r_i + R (\cos \phi(s) - \cos \phi_i),$$

$$\phi(s) = \phi_i - \frac{s}{R}, \quad \frac{d\phi}{ds} = -\frac{1}{R}, \quad \frac{d^2\phi}{ds^2} = 0. \quad (8.2.6)$$

### 8.2.2. Die nichtlinearen Gleichgewichtsbedingungen

Das Verschiebungsfeld  $\underline{u}$  einer axialsymmetrisch belasteten Rotationschale mit seiner Tangential-  $u$  und Normalkomponente  $w$  hängt nur von einem Meridiankurvenparameter ab, d. h. auf Elementebene  $\underline{u} = \underline{u}(s)$ ,  $s \in [0, L]$ . Dies ermöglicht die verschiebungsunabhängige Integration des Verschiebungsfunktional (4.4.10) in Umfangsrichtung und führt zur Reduzierung des betrachteten Problems auf ein eindimensionales.

Unter Verwendung kubischer Polynomansätze für beide Verschiebungskomponenten

$$u(s) = \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s^3, \quad w(s) = \alpha_5 + \alpha_6 s + \alpha_7 s^2 + \alpha_8 s^3 \quad (8.2.7)$$

erhält man mit den Knotenfreiheitsgraden

$$\{q_i\}^T = \left[ u_i, \left(\frac{du}{ds}\right)_i, w_i, \varphi_{si} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N+1 \quad (8.2.8)$$

die Darstellung des Verschiebungsfeldes  $\underline{u}$  in Abhängigkeit diskreter Knotenverschiebungen  $\{q_e\}$  auf Elementebene

$$\underline{u}(s) = \begin{Bmatrix} u(s) \\ w(s) \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} \{q_i\} \\ \{q_{i+1}\} \end{Bmatrix} = [N] \{q_e\}, \quad (8.2.9)$$

mit  $\varphi_s = \varphi_{<1>}$  als linearisierter Rotationskomponente und  $[N]$  als Matrix der zugehörigen Formfunktionen.

Einsetzen von (8.2.9) in (2.2.4 - 5) führt auf entsprechende Formfunktionen für die linearisierten Dehnungs- und Rotationskomponenten  $\theta_{<11>}$ ,  $\theta_{<22>}$ ,  $\varphi_{<1>}$ , womit die Elementdehnungen durch Knotenverschiebungen ausgedrückt sind

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \tilde{\gamma}_{<11>} \\ \tilde{\gamma}_{<22>} \\ \tilde{\varphi}_{<1>} \\ \tilde{\varphi}_{<22>} \end{Bmatrix} = ([\tilde{B}^L] + [\tilde{B}^{NL}(\{q_e\})]) \{q_e\} \quad (8.2.10)$$

Im Gegensatz zum linearen  $[\tilde{B}^L]$  ist der nichtlineare Beitrag  $[\tilde{B}^{NL}]$  zur

Dehnungsmatrix  $[\tilde{B}]$  nicht nur Funktion des Längenparameters  $s$ , sondern auch der Knotenverschiebungen  $\{q_e\}$ . Die explizite Form dieser Matrix hängt zudem von den Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen der verwendeten Schalentheorie ( $\sim$ ) ab (s. auch Kapitel 8.3).

Setzen wir voraus, daß die äußeren Belastungen  $p$ ,  $T_v^*$  und  $H_v^*$  gemäß (4.3.1), (4.3.9) vom Typ "dead loads" sind, dann ergibt sich das Gesamtpotential (4.4.10) eines Rotationsschalenelementes in diskretisierter Form

$$J_{pe} = \frac{1}{2} \{q_e\}^T [\tilde{K}] \{q_e\} + \tilde{u}_e^{NL}(\{q_e\}) - \{q_e\} \{Q_e\} \quad , \quad (8.2.11)$$

mit

$$[\tilde{K}] = 2\pi \int_0^L [\tilde{B}^L]^T [C] [\tilde{B}^L] r ds \quad (8.2.12)$$

als linear elastische Matrix und  $[\tilde{u}_e^{NL}]$  als Beitrag zur Verformungsenergiedichte mit kubischen und Funktionen höherer Ordnung der Knotenverschiebungen

$$\begin{aligned} [\tilde{u}_e^{NL}] = 2\pi \int_0^L & \left( [\tilde{B}^L]^T [C] [\tilde{B}^{NL}] + [\tilde{B}^{NL}]^T [C] [\tilde{B}^L] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} [\tilde{B}^{NL}]^T [C] [\tilde{B}^{NL}] \right) r ds \quad . \end{aligned} \quad (8.2.13)$$

Der Elementvektor der äußeren Knotenkräfte  $\{Q_e\}$  wird unter Zuhilfenahme von (4.3.1), (4.3.9) und den Formfunktionen für die Verschiebungskomponenten und linearisierten Größen ermittelt.

Folgen wir dem Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials

$$\frac{\partial J_{pe}}{\partial \{q_e\}} = 0 \quad , \quad (8.2.14)$$

ergeben sich mit (8.2.11 - 13) die nichtlinearen Gleichgewichtsbedingungen in diskretisierter Form

$$[\tilde{K}] \{q_e\} + \{\tilde{Q}_e^*(\{q_e\})\} = \{Q_e\} \quad , \quad (8.2.15)$$

wobei der sogenannte Vektor der Pseudo-Kräfte definiert wird durch

$$\{\tilde{Q}_e^*\} = \frac{\partial \tilde{U}_e^{NR}}{\partial \{q_e\}} \quad (8.2.16)$$

Der Zusammenbau des algebraischen Gleichungssystems erfolgt unter Berücksichtigung der Übergangs- und Randbedingungen und liefert die zugehörigen globalen Beziehungen

$$[\tilde{K}]\{q\} + \{\tilde{Q}^*(\{q\})\} = \{Q\} \quad (8.2.17)$$

### 8.2.3. Die Stabilitätsgleichungen für nichtaxialsymmetrisches Beulen

Längs des symmetrischen Pfads der Last-Verformungsbeziehungen einer axialsymmetrischen belasteten Rotationsschale können Schnittpunkte mit unsymmetrischen Gleichgewichtspfaden auftreten. Solche Verzweigungspunkte lassen sich mit Hilfe der in Kapitel 5.3 bzw. 7.3 für Theorien finiter und g/k Rotationen abgeleiteten Stabilitätsgleichungen bestimmen.

Um die diskretisierte Form dieser Beziehungen ermitteln zu können, teilen wir die Schale gemäß Kapitel 8.2.1 in finite Elemente auf und setzen die Lösung des axialsymmetrischen Fundamentalpfads  $\bar{u}$  gemäß (8.2.17) als bekannt voraus. Das Zusatzverschiebungsfeld  $\hat{u}$  mit seinen Tangentialkomponenten  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  und der Normalkomponente  $\hat{w}$  überführt die Schale in eine Nachbarlage.  $\hat{u}$  ist Funktion zweier Variablen  $\hat{u} = \hat{u}(s, \theta)$ , mit  $\theta$  als Umfangswinkel der Schale. Das Problem läßt sich jedoch durch Fourierreihenentwicklung in Umfangsrichtung formal auf eine Sequenz eindimensionaler Probleme für jede Umfangswellenzahl zurückführen

$$\hat{u}(s, \theta) = \begin{Bmatrix} \hat{u}(s, \theta) \\ \hat{v}(s, \theta) \\ \hat{w}(s, \theta) \end{Bmatrix} = \sum_k \begin{Bmatrix} \hat{u}^k(s) \cos k\theta \\ \hat{v}^k(s) \sin k\theta \\ \hat{w}^k(s) \cos k\theta \end{Bmatrix} \quad (8.2.18)$$

Approximation von  $\hat{u}^k$ ,  $\hat{v}^k$ ,  $\hat{w}^k$  mittels kubischer Polynome auf Elementebene

$$\begin{aligned} \hat{u}^k(s) &= \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s^3 \\ \hat{v}^k(s) &= \alpha_5 + \alpha_6 s + \alpha_7 s^2 + \alpha_8 s^3 \\ \hat{w}^k(s) &= \alpha_9 + \alpha_{10} s + \alpha_{11} s^2 + \alpha_{12} s^3 \end{aligned} \quad (8.2.19)$$

und Definition zu (8.2.8) analoger Knotenfreiheitsgrade

$$\{\hat{q}_i^k\}^T = \left[ \hat{u}_i^k \left( \frac{d\hat{u}^k}{ds} \right)_i \quad \hat{v}_i^k \left( \frac{d\hat{v}^k}{ds} \right)_i \quad \hat{w}_i^k \quad \varphi_{Si}^k \right] \quad (8.2.20)$$

führt auf die Formfunktionen für das Verschiebungsfeld  $\tilde{u}^k(s)$

$$\tilde{u}^k(s) = \begin{Bmatrix} \hat{u}^k(s) \\ \hat{v}^k(s) \\ \hat{w}^k(s) \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} \{\hat{q}_i^k\} \\ \vdots \\ \{\hat{q}_{i+1}^k\} \end{Bmatrix} = [N] \{\hat{q}_e^k\} \quad (8.2.21)$$

Die Gâteaux Differentiale der Elementdehnungen (8.2.10) können nach Substitution von (8.2.21), (8.2.18) in die Beziehungen für die linearisierten Dehnungs- und Rotationskomponenten  $\hat{\theta}_{\langle\alpha\beta\rangle}$ ,  $\hat{\varphi}_{\langle\alpha\rangle}$ ,  $\hat{\varphi}$  bestimmt werden. Das zweite Gâteaux Differential des Gesamtpotentials einer Rotationsschale ergibt sich dann nach Integration in Umfangrichtung unter Berücksichtigung der Orthogonalität trigonometrischer Funktionen

$$J_p''^k(\bar{u}; \bar{u}^k)^2 = \{\hat{q}^k\}^T \left( \overbrace{[\tilde{K}^k] + [\tilde{K}_V^k(\{\bar{q}\})] + [\tilde{K}_q^k(\{\bar{q}\})]}^{[\tilde{K}_T]} \right) \{\hat{q}^k\} \quad (8.2.22)$$

für jede Umfangswellenzahl. Im Gegensatz zur klassischen linear elastischen Matrix  $[\tilde{K}^k]$  hängt sowohl die Anfangsspannungsmatrix  $[\tilde{K}_g^k]$  als auch die Anfangsverformungsmatrix  $[\tilde{K}_V^k]$  explizit von den Fundamentalverschiebungen  $\{\bar{q}\}$  ab. Auf die Angabe dieser umfangreichen matriziellen Ausdrücke wird aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Folgen wir dem energetischen Stabilitätskriterium, sind axialsymmetrische Gleichgewichtslagen  $\bar{u}$  stabile Zustände, wenn  $J_p''^k(\bar{u}; \bar{u}^k)^2 > 0$  für beliebige Zusatzknotenverschiebungen  $\{\bar{q}^k\}$ , d. h. die Matrix  $[\tilde{K}_T^k]$  positiv definit ist. Kritisches Gleichgewicht tritt dann auf, wenn wenigstens ein Eigenwert der Matrix  $[\tilde{K}_T^k]$  Null wird. Das nichtaxialsymmetrische Beulproblem kann somit durch eine Reihe von linearen Eigenwertabfragen auf der Basis bereits berechneter Fundamentalpfade  $\bar{u}$  gelöst werden.

Vernachlässigt man den Einfluß der linearisierten Dehnungs- und Rotationskomponenten  $\bar{\theta}_{\langle 11 \rangle}$ ,  $\bar{\theta}_{\langle 22 \rangle}$ ,  $\bar{\varphi}_{\langle 1 \rangle}$  in (8.2.22) und nimmt an, daß die Schnittgrößen des Fundamentalzustandes aus einer Membran- oder linearen Biegelösung bestimmt werden können, ergibt sich die diskretisierte Form der klassischen linearen Verzweigungsanalyse

$$([\tilde{K}^k] + \lambda [\tilde{K}_g^{Lk}]) \{\hat{q}^k\} = 0 \quad , \quad (8.2.23)$$

bei der die kritische Last für jede Umfangswellenzahl durch Lösung nur eines Eigenwertproblems berechenbar ist.

### 8.3. Programmtechnische Realisierung

Auf Programmebene wird die in den vorangegangenen Kapiteln verwendete matrizielle Darstellung zur Vermeidung unnötiger Nulloperationen durch eine Vorgehensweise ersetzt, die mit den Formfunktionen der linearisierten Dehnungs- und Rotationskomponenten und deren Ableitungen über entsprechende Produkte in den Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen zu den Element-Matrizen führt.

Diese Berechnung ist jedoch abhängig von der Wahl einer geometrisch linearen oder nichtlinearen Schalentheorie. Mit der Angabe einer Kontrollparameterfolge werden dazu aus der Vielzahl implementierter linearer, quadratischer und kubischer Dehnungs-Verschiebungsbeiträge die entsprechenden beim Aufbau der Element-Matrizen berücksichtigt. Durch Kombination vorhandener oder Hinzufügen neuer Terme lassen sich auf einfache Weise neue Schalentheorien generieren.

Die zur Berechnung der Steifigkeitsmatrizen erforderliche Integration wird in Umfangsrichtung analytisch und für die Meridianrichtung numerisch durchgeführt. Dabei hat sich insbesondere das Verfahren nach Gauß mit drei Stützstellen pro Element bewährt [8.14, 8.6].

Das nichtlineare algebraische Differentialgleichungssystem

$$\tilde{f}(\tilde{q}, \lambda) = \tilde{K} \tilde{q} + \tilde{Q}^*(\tilde{q}) - \lambda \tilde{Q} = 0 \quad (8.3.1)$$

wird mit Hilfe des Newton-Raphson Verfahrens auf inkrementell iterative Weise gelöst. Bezeichnet  $\tilde{q}^i$  die i-te Approximation der Lösung  $\tilde{q}$  für einen gegebenen Wert des Lastparameters  $\lambda$ , dann liefert die Taylorreihenentwicklung erster Ordnung von (8.3.1) das folgende lineare Gleichungssystem für die Korrektur  $\Delta \tilde{q}^{i+1}$

$$\tilde{K}_T(\tilde{q}^i) \Delta \tilde{q}^{i+1} = \lambda \tilde{Q} - \tilde{f}(\tilde{q}^i, \lambda) \quad (8.3.2)$$

Die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_{\sim T}$  läßt sich als Summe der linear elastischen  $\underline{K}_{\sim}$  und der geometrischen Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_{\sim G}$  schreiben

$$\underline{K}_{\sim T}(\underline{q}) = \underline{K}_{\sim} + \underline{K}_{\sim G}(\underline{q}) \quad , \quad (8.3.3)$$

mit

$$\underline{K}_{\sim G}(\underline{q}) = \frac{\partial \underline{Q}^*(\underline{q})}{\partial (\underline{q})} \quad , \quad (8.3.4)$$

wobei sich letzere analog zu (8.2.22) aus der Anfangsspannungs -  $\underline{K}_{\sim g}$  und Anfangsverformungsmatrix  $\underline{K}_{\sim v}$  zusammensetzt.

Das Auffinden von Zuständen kritischen Gleichgewichts längs der Last-Verschiebungskurven kann mit Hilfe von begleitenden Eigenwertuntersuchungen der tangentialen Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_{\sim T}$  erfolgen. Verzweigungspunkte des Fundamentalpfads axialsymmetrisch belasteter Rotationsschalen mit unsymmetrischen Pfaden müssen jedoch gemäß Kapitel (8.2.3) zusätzlich berechnet werden.

Die im Bereich relativer Extrema auftretenden numerischen Probleme werden durch Kombination des Newton-Raphson Verfahrens mit einer Verformungssteuerung ("displacement control method") gelöst [8.11,8.19]. Dabei wird als Parameter des Gleichungssystems der Wert einer charakteristischen Knotenverschiebung  $q_p$  vorgegeben und die zugehörige Last  $\lambda$  iterativ berechnet.

Die Restart-Fähigkeit der Programme erlauben dann in Verbindung mit der Möglichkeit einer interaktiven, halbautomatischen oder vollautomatischen Steuerung die effiziente Bearbeitung geometrisch nichtlinearer Probleme.

Die Eingabe der Strukturgeometrie, Materialkonstanten und Lasten sowie die Ausgabe der Verschiebungen und Schnittgrößen erfolgt in physikalischen Komponenten.

Von den der ersten Approximation der Verformungsenergiedichte zugrundeliegenden Annahmen konstanter Schalendicke  $h$  und isotropen Materialverhaltens abweichend [8.13], können in beiden Programmen zusätzlich eine linear veränderliche Dicke  $h$  und im Rotationsschalenprogramm orthotropes Materialverhalten [8.23] berücksichtigt werden.

## 9. ANWENDUNGSBEISPIELE

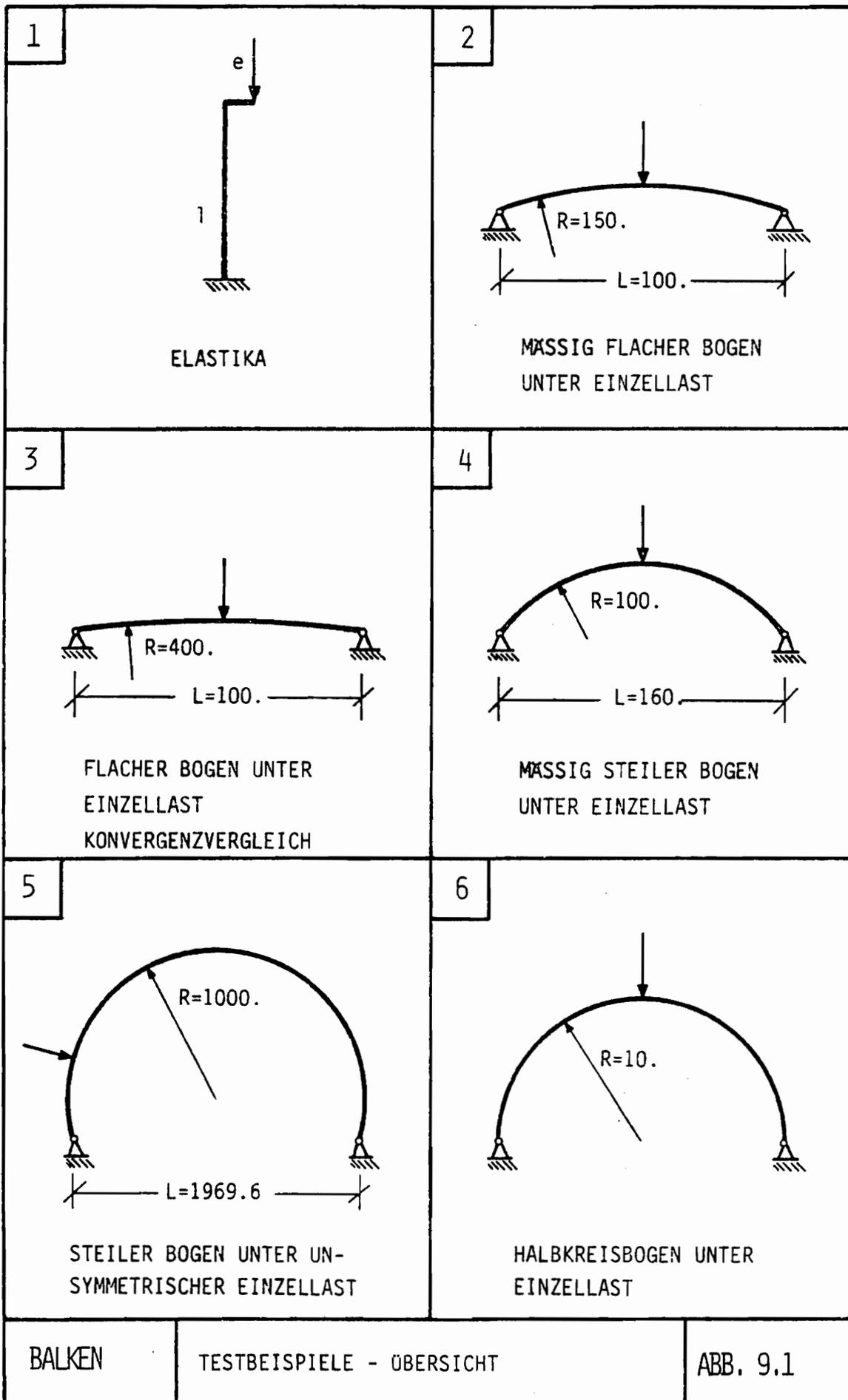
### 9.1. Balkenprobleme

Wir beginnen unsere numerischen Betrachtungen mit einer Reihe von Balkenproblemen, deren umfassende Bearbeitung einen ersten Einblick in die Vielfalt geometrisch nichtlinearen Tragverhaltens insbesondere auch im Hinblick auf die spätere Lösung weitaus komplexerer Schalenprobleme geben soll. Eine Zusammenstellung der Berechnungsbeispiele zeigt Abb. 9.1. Sie schließen eine Vielzahl repräsentativer Balkenprobleme, wie z. B. Eulersche Elastika, flache und steile Bögen mit typischen Phänomenen geometrisch nichtlinearen Tragwerkverhaltens, d. h. Spannungs- und Stabilitätsproblemen mit Durchschlags- oder Verzweigungsbeulen, ein. Die Ziele der Untersuchungen lassen sich wie folgt umschreiben:

- Nachweis der Leistungsfähigkeit einer einfachsten konsistent approximierten Balkentheorie großer Rotationen durch Vergleich mit eigenen Theorien finiter Rotationen und exakten unterschiedlichen Formulierungen in der Literatur,
- Angabe des Gültigkeitsbereichs konsistent approximierter, vereinfachter Varianten mit Beschränkungen bezüglich der Rotationen,
- Untersuchung des Einflusses inkonsistenter Vereinfachungen der Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen auf das rechnerische Tragverhalten der Strukturen,
- Überprüfung der Leistungsfähigkeit des verwendeten Elementtyps.

Die Ergebnisse umfangreicher quantitativer Betrachtungen der benannten Teilaspekte sollen in ihrer Summe schließlich zu entsprechenden grundlegenden qualitativen Aussagen führen.

Eine Liste der verschiedenen zur numerischen Berechnung herangezogenen eindimensional reduzierten Schalentheorien und Balkentheorien mit Literaturangaben und Bezug zu den theoretischen Ableitungen vorangegangener Kapitel findet sich in Tab. 9.1. Die zugehörigen Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen werden im Anhang A3 zusammengestellt.



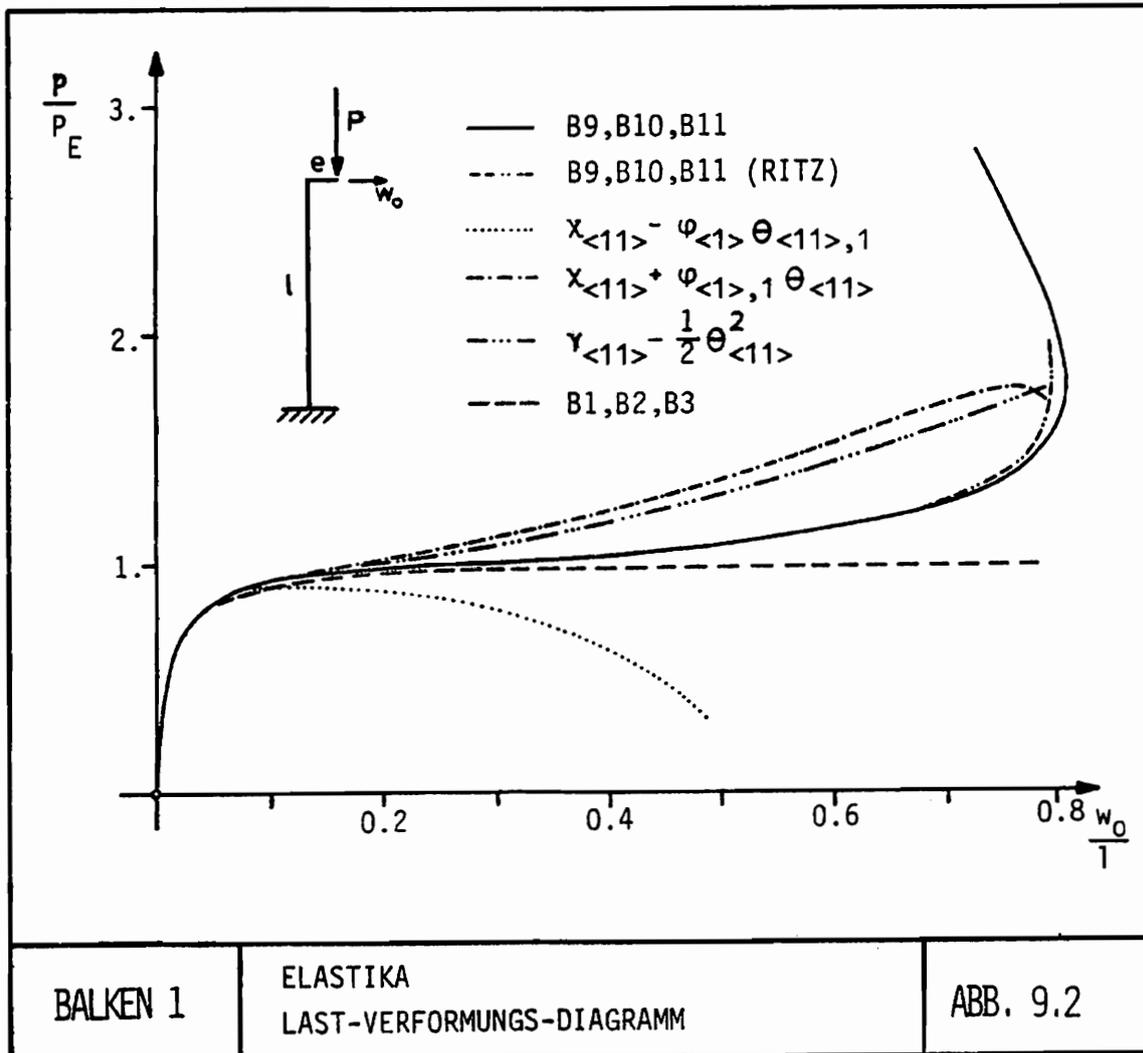
Nr.	Zusammenstellung der zur Berechnung herangezogenen Balkentheorien
B1	Theorie flacher Schalen (Donnell-Mushtari-Vlasov [9.12, 9.26, 9.45])
B2	Schalentheorie "small finite deflections, medium bending, small rotations about normals" (Koiter-Sanders-Mushtari u. Galimov [9.36, 9.20, 9.26])
B3	Schalentheorie moderater Rotationen (Pietraszkiewicz [9.31])
B4	Donnell-Marguerre'sche Näherung steiler Schalen (Harte [9.16])
B5	Theorie mäßig flacher Balken (Sabir u. Lock [9.35])
B6	Modifizierte Theorie flacher Balken (A3-6)
B7	Schalentheorie mäßig großer Rotationen (Basar-Harte [9.3, 9.16])
B8	Schalentheorie "Large deformations and rotations" (Yaghmai [9.46])
B9	Schalentheorie groß/kleiner Rotationen, Fehler E1 (Nolte u. Stumpf [9.28])
B10	Schalentheorie groß/kleiner Rotationen, Fehler E2 (Nolte u. Stumpf, Nolte [9.28, 9.29])
B11	Schalentheorie uneingeschränkter Rotationen (Pietraszkiewicz u. Szwabowicz [9.32])
B12	Modifizierte Balkentheorie großer Rotationen, Fehler E1 (A3-12)
B13	Balkentheorie großer Rotationen, Fehler E2 (A3-13)
B14	Balkentheorie großer Rotationen, Fehler E1 (A3-14)
B15	Schalentheorie "large displacement" (Varpasuo [9.44])

Tab. 9.1

9.1.1. Elastika

Die Eulersche Elastika gilt als repräsentative Problemstellung zur Demonstration hochgradig geometrisch nichtlinearen Tragverhaltens. Anhand dieses Einführungsbeispiels werden wir die Leistungsfähigkeit des Klassifikationsschemas (s. Kapitel 6.1) und der daraus resultierenden konsistenten Approximationen sowie die Folgen verschiedener inkonsistenter Abschätzungen aufzeigen.

Für den Fall des geraden Balkens sind die Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen der Theorien B9, B10 und B11 identisch. Die mit ihrer Hilfe gewonnenen Ergebnisse zeigen gute Übereinstimmung mit den Finite-Element-Berechnungen von Epstein u. Murray [ 9.14 ] und Murakawa et al [ 9.25 ] sowie der analytischen Lösung einer Theorie dehnungsloser Verbiegungen von Timoshenko u. Gere [ 9.40 ]. Eine eigene Vergleichsrechnung auf der Basis des klassischen Ritz-Verfahrens liefert bei nur acht Freiheitsgraden bis in den Nachbeulbereich hinein ähnlich gute Ergebnisse.



Einfachste geometrisch nichtlineare Balkentheorien B1, B2, B3, gültig im Bereich moderater Rotationen, können die anwachsende Tragwerkssteifigkeit nach Überschreiten der Eulerlast nicht wiedergeben. Die Last-Verformungsbeziehung ist durch ein asymptotisches Verhalten charakterisiert [ 9.38 ].

Der Biegeanteil am Gesamtpotential eines Balkens gemäß einer allgemeinen Theorie B9, B10, B11 enthält Beiträge zweiter Ableitungen der Tangentialverschiebung. Eine Vernachlässigung dieser Terme führt zu einem starken Steifigkeitsabfall des Tragwerks nach Erreichen eines relativen Extremums unterhalb der Eulerlast (.....). Schon in [ 9.14 ] war auf der Basis qualitativer, geometrischer Überlegungen gezeigt worden, daß der zugehörige relative Fehler des Krümmungsänderungstensors  $O(\sin^2 \omega)$  ist, mit  $\omega$  als Rotationswinkel des Balkens.

Weniger deutlich, aber immer noch erheblich, ist der Einfluß auf das Tragverhalten infolge Vernachlässigung von Produkten zweiter Ableitungen der Normal- und ersten Ableitungen der Tangentialverschiebung in der Biegeenergie (-----) sowie das Streichen von Quadraten erster Ableitungen der Tangentialverschiebung in der Membranenergie (-----).

Eigene Testrechnungen auf der Basis eines Lagrangeschen Dehnungs- und approximierten Eulerschen Krümmungsmaßes [ 9.27 ] führten zu ähnlich irreführenden Ergebnissen.

Die Unzulässigkeit solcher inkonsistenten Transformationen der Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen werden wir auch bei der Behandlung geometrisch nichtlinearer Probleme gekrümmter Balken und Rotationsschalen aufzeigen.

### 9.1.2. Mäßig flacher Bogen unter Einzellast

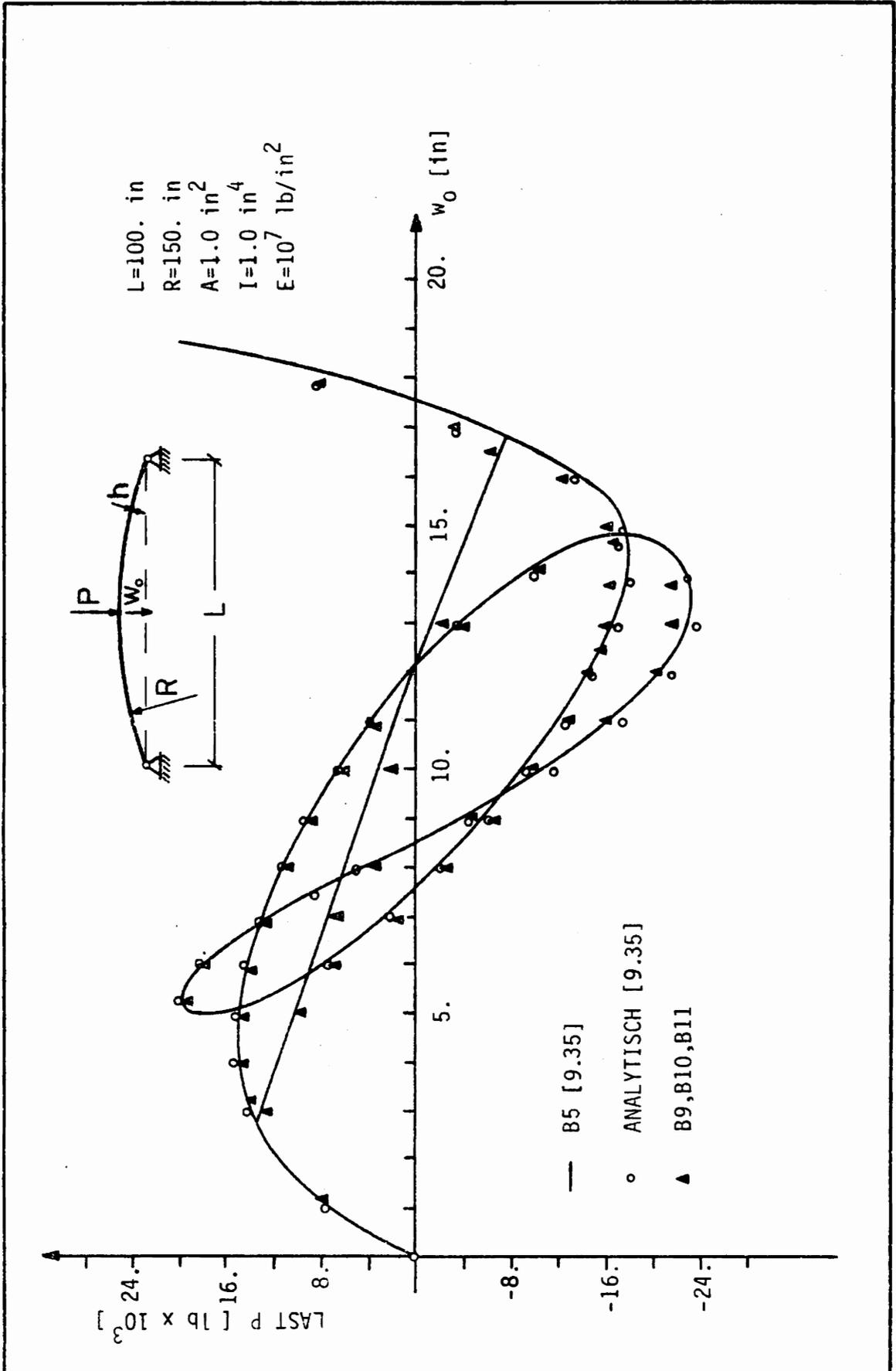
In diesem Beispiel wird das nichtlineare Tragverhalten eines mäßig flachen Bogens unter Einzellast untersucht. Geometrie und Materialkonstanten sind in Abb. 9.3 beschrieben. Berechnungen mit Hilfe eines Finite-Element-Verfahrens auf der Basis einer Theorie flacher Balken B5 von Sabir u. Lock [9.35] sowie eine analytische Lösung von Ashwell u. Sabir [9.35] werden mit eigenen Berechnungen unter Verwendung von Balkentheorien großer und finiter Rotationen B10, B11 verglichen.

Ein charakteristisches Merkmal der Last-Verschiebungsbeziehungen dieses mäßig flachen Bogens ist das sogenannte "looping" des symmetrischen Pfads, das erstmals in [9.35] beobachtet wurde. Eigene Untersuchungen an steileren Bögen (s. Balken 4) zeigen, daß mit zunehmender Steilheit und abnehmender Biegesteifigkeit die Anzahl der "loops" wächst. Eine mögliche physikalische Interpretation dieses Phänomens wird dort vorgestellt.

Die in Kapitel 8.3 beschriebene automatische Steuerung der Last- und Verformungsinkrementierung liefert die vollständige symmetrische Lösung in 116 Schritten. Nach manuellem Einprägen einer Störverformung wird der antimetrische Verzweigungspfad in 30 Schritten berechnet. Begleitende Stabilitätsuntersuchungen ergeben, daß alle Gleichgewichtslagen zwischen den Verzweigungspunkten instabiler Natur sind.

Abb. 9.3 ist zu entnehmen, daß erkennbare Unterschiede zwischen Theorien großer und finiter Rotationen und der Theorie flacher Balken nur im Nachbeulbereich auftreten. Überprüfung der zugehörigen Verschiebungen und Verschiebungsgradienten zeigt, daß die restriktiven Annahmen einer Theorie flacher Balken ( $u = O(w \cdot \theta)$ ) erfüllt werden.

Die eigenen Ergebnisse dieses und anderer Beispiele verdeutlichen, daß zur Berechnung flacher bis mäßig flacher Balken Theorien moderater Rotationen B2, B3 und sogar einfachste Theorien B1, B4, B5, B6 ausreichend sind. Zu ähnlichen Ergebnissen gelangt Brink in [9.5].



BALKEN 2

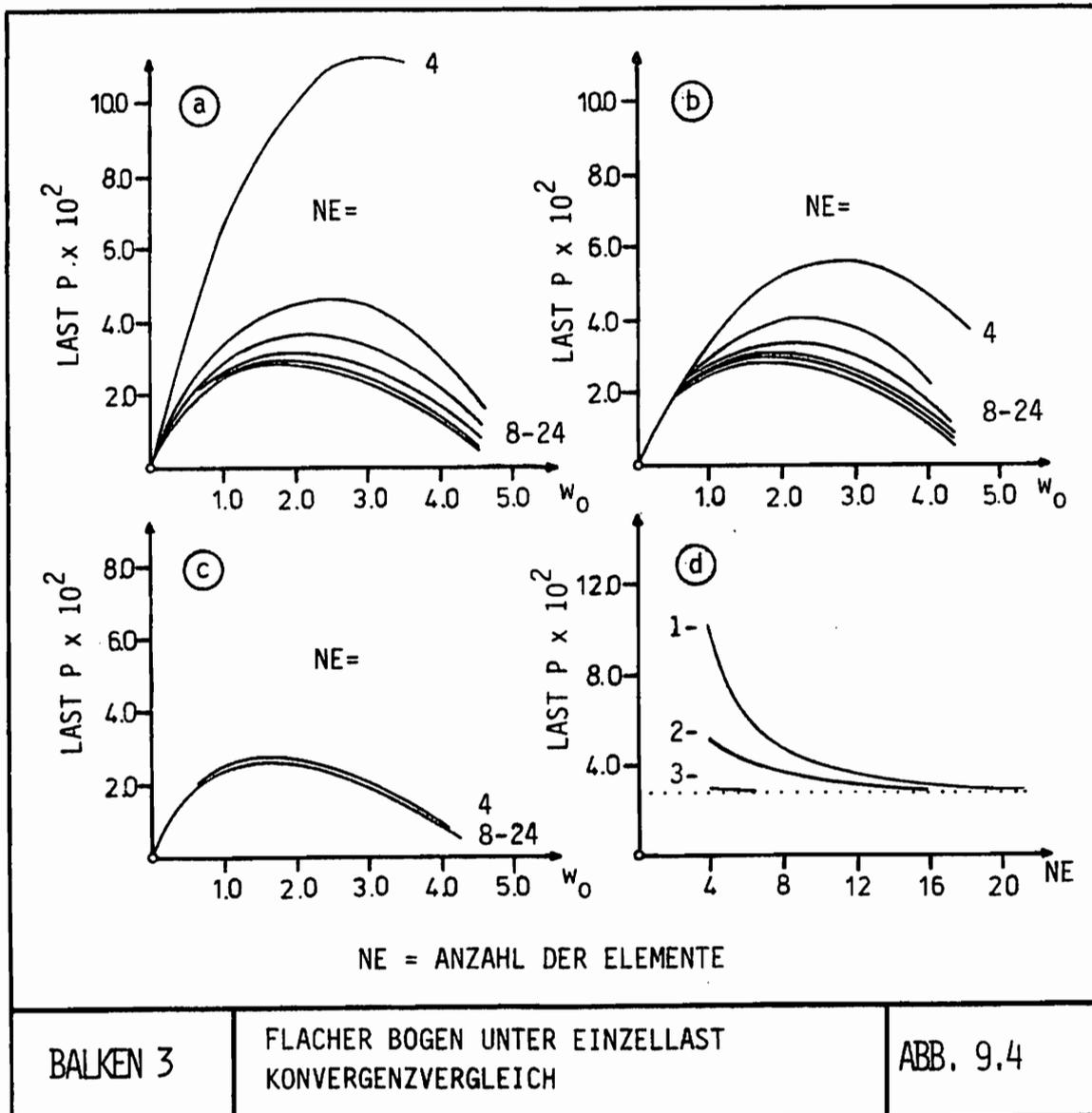
MÄSSIG FLACHER BOGEN UNTER EINZELLAST  
 LAST-VERFORMUNGS-DIAGRAMM

ABB. 9.3

9.1.3. Flacher Bogen unter Einzellast/Konvergenzvergleich

Eine Vielzahl von Arbeiten beschäftigt sich mit dem Problem der Konvergenz der Finiten-Element-Methode bei Verwendung unterschiedlicher Elemente zur Berechnung linear elastischer Probleme [ 9.1 ]. Seltener dagegen sind entsprechende Untersuchungen bei nichtlinearen Problemen, in denen das Konvergenzverhalten nicht mehr lastunabhängig betrachtet werden kann [9.5, 9.35].

Um die Leistungsfähigkeit des in Abschnitt 8.2 beschriebenen Element-typs aufzuzeigen, werden Testrechnungen an einem flachen Bogen unter Einzellast, mit Radius  $R = 400. \text{ in}$ , Basislänge  $L = 100. \text{ in}$ , Querschnittsbreite  $b = 0.8 \text{ in}$ , -höhe  $h = 1. \text{ in}$  und Elastizitätsmodul  $E = 1. \times 10^7 \text{ lbf/in}^2$  vorgenommen.



Dieses Beispiel diente als Basis für Konvergenzuntersuchungen von Sabir u. Lock [9.35] an zwei Elementtypen, einem einfachen Element mit Polynomansätzen, linear für die Tangentialverschiebung und kubisch für die Normalverschiebung, sowie einem verbesserten Element mit Starrkörperansätzen, die sich aus den Annahmen konstanter Membran- und linear veränderlicher Biegedehnungen ergeben. Zugehörige nichtlineare Last-Verschiebungsbeziehungen für unterschiedliche Elementanzahlen (NE) zur Diskretisierung des gesamten Bogens sind in Abb. 9.4 a,b aufgetragen. Abb. 9.4 c zeigt die Ergebnisse eigener Rechnungen und Abb. 9.4 d einen Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeiten durch Auftragen der jeweiligen Durchschlagslast als Funktion der Elementanzahl (1 : einfacher Polynomansatz, 2 : Starrkörperansatz, 3 : eigenes Element). Die gleichmäßig kubische Elementvariante (3) zeigt ein weitaus besseres Konvergenzverhalten und bringt selbst gegenüber dem Element mit Starrkörperansätzen erhebliche Verbesserungen. Dies konnte auch in vielen anderen, insbesondere hochgradig nichtlinearen Testbeispielen beobachtet werden. Im Sinne eines objektiven Vergleichs wird den eigenen Rechnungen die in [9.35] verwendete Theorie flacher Balken B5 zugrunde gelegt.

#### 9.1.4. Mäßig steiler Bogen unter Einzellast

Das nichtlineare Tragverhalten des mäßig steilen Kreisbogens mit symmetrischer Einzellast im Scheitel ist von Huddleston [9.19] unter Verwendung des Tensors der Ingenieurdehnungen (2.3.17) analytisch untersucht worden. Teillösungen des Problems werden von DaDeppo u. Schmidt [ 9.8 ], Ramm [9.33 ], Brink [ 9.5 ], Diekkämper u. Schrader [9.10 ] sowie Reuter [9.34 ] angegeben. Ausgewählte Ergebnisse der eigenen umfassenden Untersuchungen sind in den Abb. 9.5 - 7 dargestellt.

Bemerkenswert ist, daß die relativ einfache Struktur des mäßig steilen Kreisbogens ein äußerst kompliziertes Tragverhalten aufweist. Die in Abb. 9.6 - 7 gezeigte Bezugslösung B10, B11 stellt in Wirklichkeit nur einen Teil des vollständigen Gleichgewichtspfads dar. Neben dem unsymmetrischen Verzweigungsast bilden die beiden dargestellten Teile der symmetrischen Lösung zusammen mit einer Vielzahl sogenannter "loops", auf deren Darstellung aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet wird, einen stetigen Gleichgewichtspfad. Begleitende Stabilitätsbetrachtungen zeigen, daß nur die Schnittpunkte  $h, i$  mit der unsymmetrischen Lösung Verzweigungspunkte des Problems sind. Detaillierte Untersuchung des Phänomens "looping" ergibt, daß die Anzahl der Halbwellen des Deformationsmusters jeweils um vier pro "loop" ansteigt. In Abb. 9.5 Mitte sind neben den möglichen dreihalbwelligen Beulmustern a, b, c, d, e die instabilen Halbwellenmuster f und g des ersten "loops" für eine Belastung  $\bar{P} = 9$ . dargestellt. Diese Erscheinung läßt sich physikalisch anschaulich deuten. Längs der Last-Verformungskurve gibt es Konfigurationen mit hoher globaler Steifigkeit der Struktur. Lastzuwächse führen zu einer lokalen Störung, die ab einer gewissen Größenordnung in zwei symmetrische Halbwellen übergeht. Nun tritt das "looping" nicht generell auf, sondern ist über die Geometrie und Biegesteifigkeit der Struktur parametrisiert. Insbesondere tiefe und biegeeweiche Bögen zeigen unter der Wirkung von Einzellasten höherwellige Beulmuster.

Abb. 9.6 ist zu entnehmen, daß im Gegensatz zu den Bezugslösungen B10, B11 die konsistent vereinfachten Theorien moderater Rotationen B2, B3 die komplizierten Last-Verformungsbeziehungen nicht beschreiben können. Es stellt sich die "herkömmliche" Lösungsform mit ausschließlich dreihalbwelligem Deformationsmuster ein. Bemerkenswert ist die ausgezeichnete Lösungsstabilität der Donnell-Vlasovschen Näherung B1, wobei

jedoch aus dieser eher zufälligen Übereinstimmung mit B10, B11 eine Erweiterung ihres Gültigkeitsbereichs über maximal moderate Rotationen hinaus nicht möglich ist.

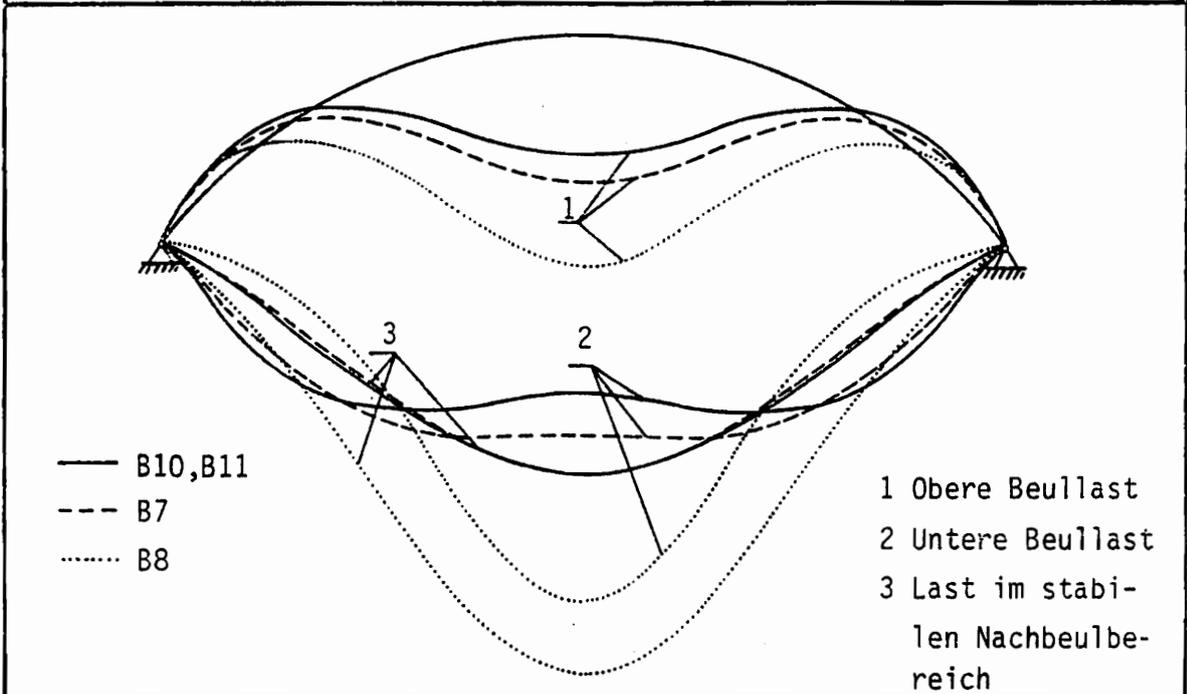
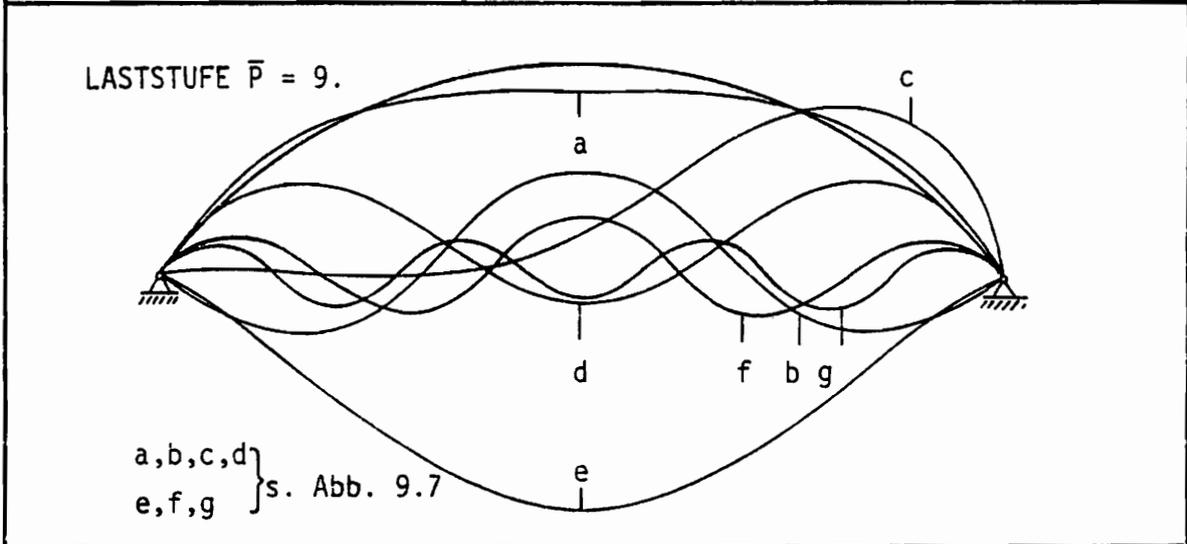
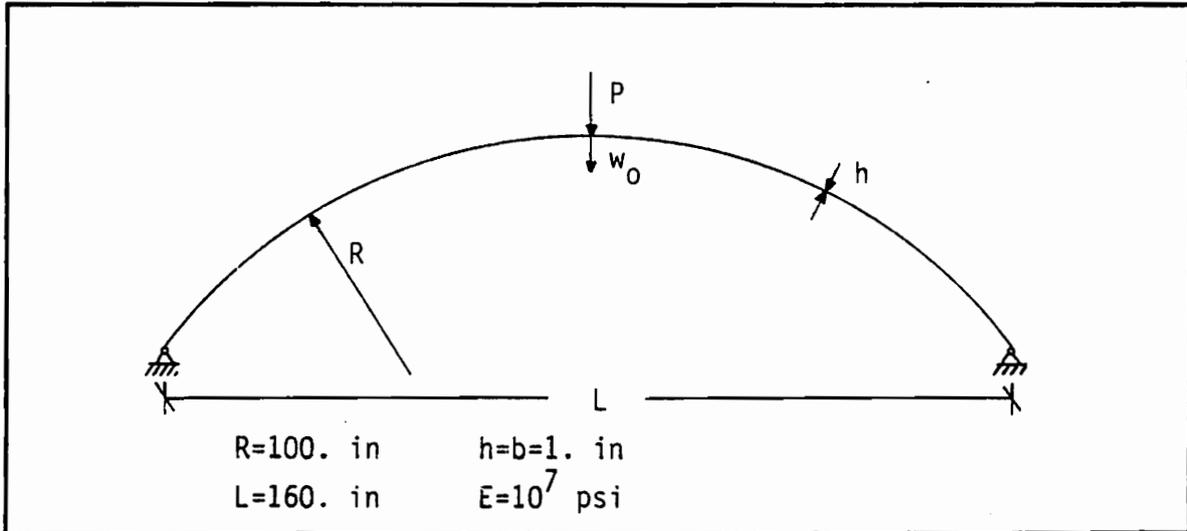
Andererseits zeigen die Vergleichsrechnungen in Abb. 9.7, daß infolge der Interaktion inkonsistent vernachlässigter Beiträge die Theorie großer Rotationen von Yaghai B8 das Problem des mäßig steilen Bogens nicht beschreiben kann. Die Theorie mäßig großer Rotationen von Basar und Harte B7 liefert mit Ausnahme der Bereiche relativer Extrema weitaus bessere Lösungen als die entsprechenden Theorien moderater Rotationen B2 und B3. Einen Vergleich der Verformungszustände bei der jeweils oberen und unteren Beullast sowie einer Laststufe im stabilen Nachbeulbereich für die Theorien B7, B8, B9, B10 zeigt Abb. 9.5 unten.

In Tab. 9.2 sind die bezogenen Verzweigungs- und Durchschlagslasten aller verwendeten Varianten angegeben. Größere Abweichungen von der Bezugslösung finden sich insbesondere bei den inkonsistent approximierten Theorien B7 und B8.

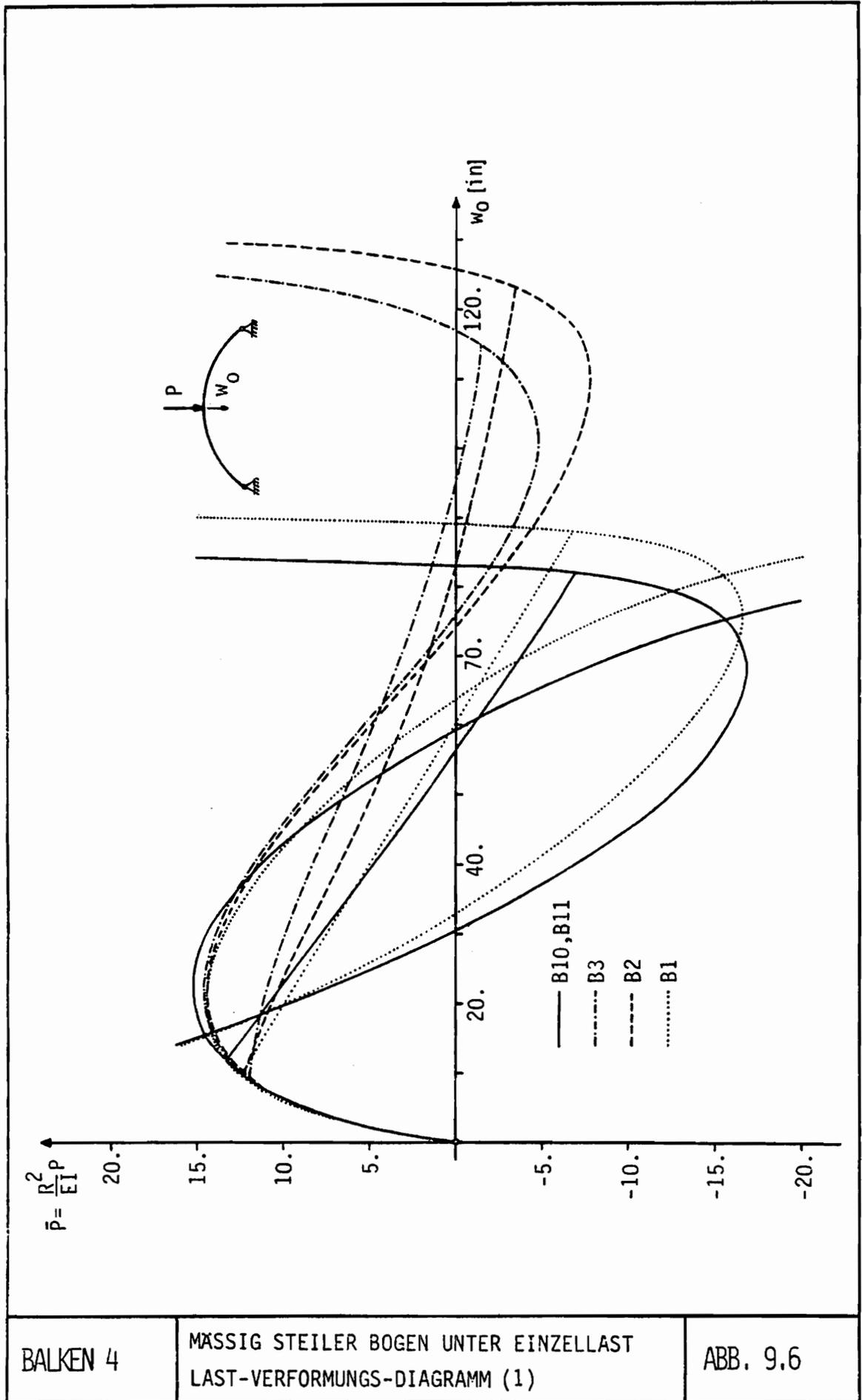
Theorie	Verzweigungslast	Durchschlagslast
B1	12.4	14.4
B2	12.3	14.4
B3	12.0	14.6
B7	14.5	17.7
B8	15.4	22.3
B10, B11	13.3	15.2

Tab. 9.2

Dieses relativ einfache Beispiel zeigt, daß die auftretenden Fehler bei Verwendung konsistent approximierter, einfachster Theorien B2, B3 und inkonsistenter Varianten B8 nicht nur von quantitativer sondern auch qualitativer Natur sein können.



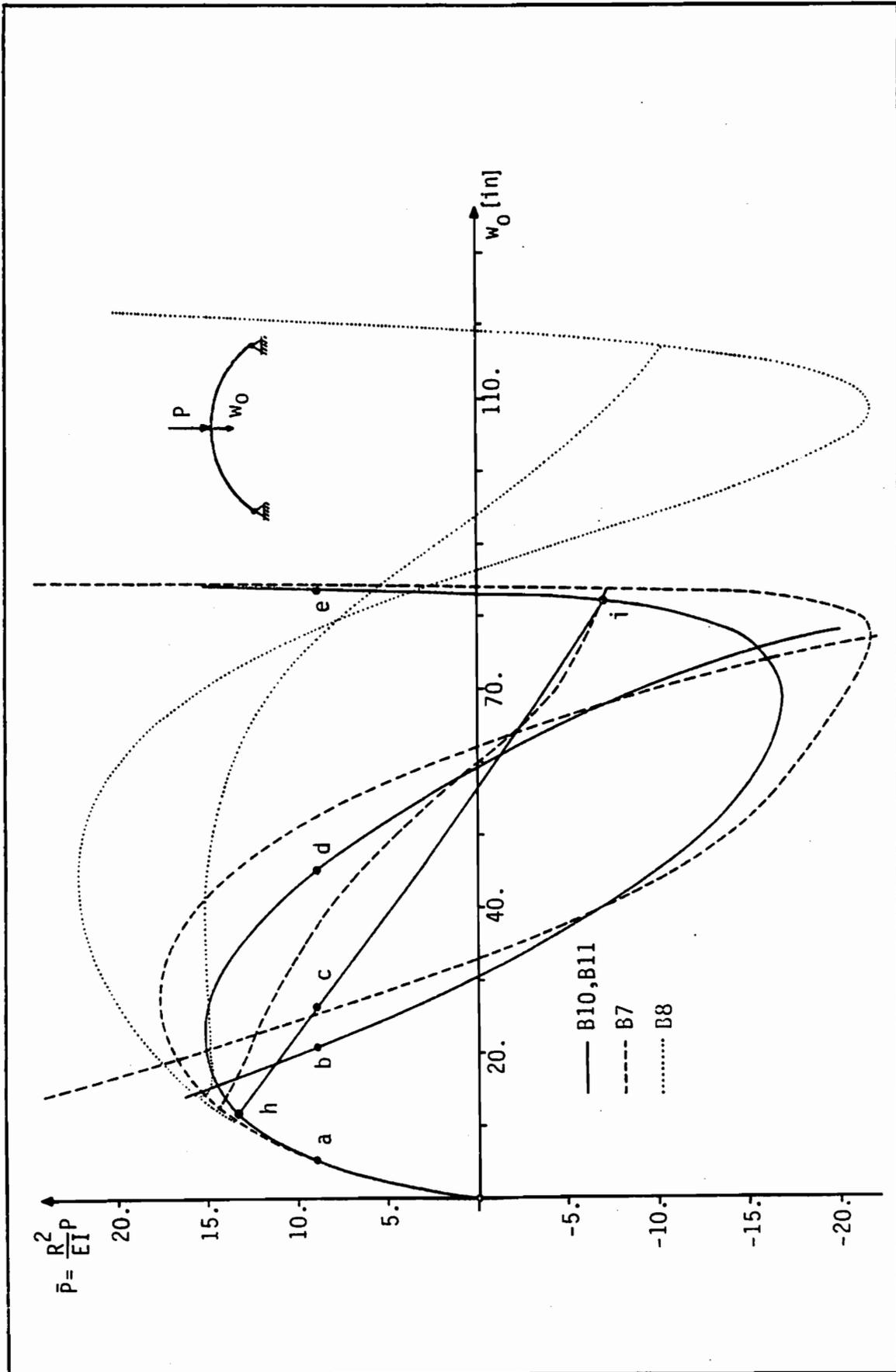
BALKEN 4	MÄSSIG STEILER BOGEN UNTER EINZELLAST VERFORMUNGSZUSTÄNDE	ABB. 9.5
----------	--	----------



BALKEN 4

MASSIG STEILER BOGEN UNTER EINZELLAST  
LAST-VERFORMUNGS-DIAGRAMM (1)

ABB. 9.6



BALKEN 4

MÄSSIG STEILER BOGEN UNTER EINZELLAST  
LAST-VERFORMUNGS-DIAGRAMM (2)

ABB. 9.7

### 9.1.5. Steiler Bogen unter unsymmetrischer Einzellast

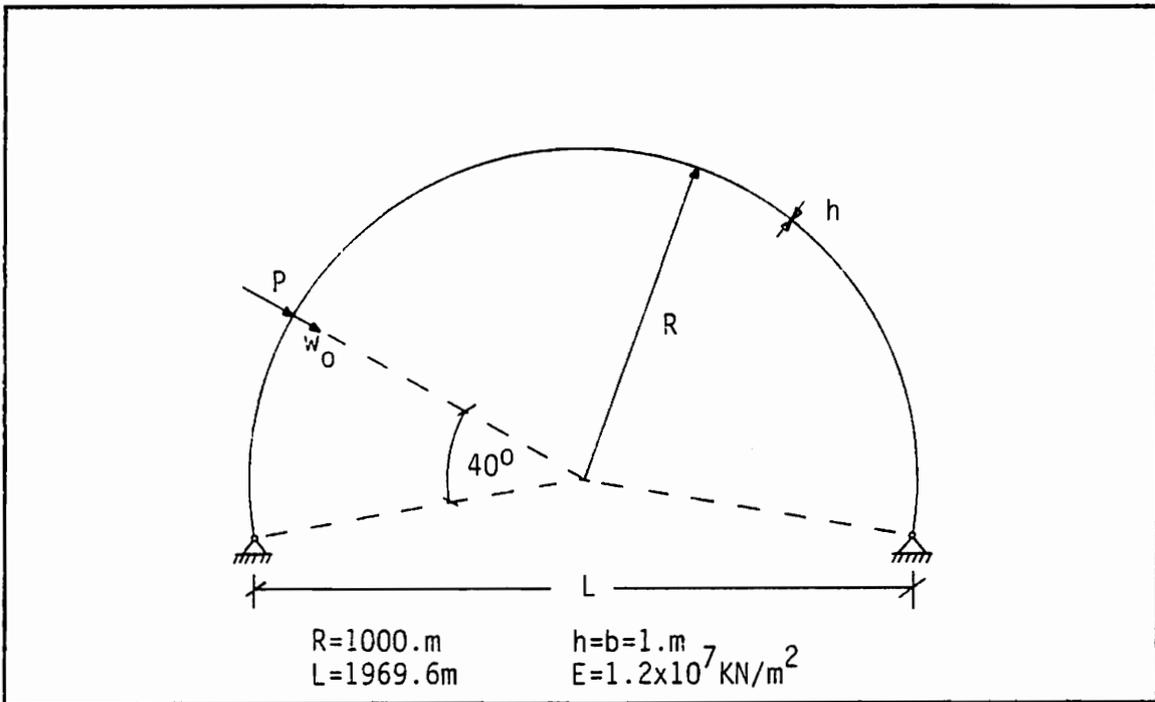
Zum Vergleich aller fünfzehn im Anhang A3 zusammengestellten Balkentheorien wird das hochgradig nichtlineare Spannungsproblem eines sehr schlanken, tiefen Bogens (Abb. 9.8) unter unsymmetrischer Einzellast mit Verformungen von der Größenordnung der tausendfachen Querschnittsdicke ausgewählt. Abb. 9.9 zeigt die zugehörigen Last-Verformungskurven ( $P(w_0)$ ), deren schalen- bzw. balkentheoretischer Hintergrund mit Hilfe der Zeichenerklärung und Anhang A3 bestimmt werden kann.

Wie zu erwarten ist, können weder die klassische Theorie flacher Balken B1 noch deren Varianten B4, B5, B6 ebenso wie die Theorien moderater Rotationen B2, B3 das vollständige Tragverhalten des Bogens beschreiben. Zudem beginnen die Varianten B1 und B6, denen die einfachste Form des Krümmungsänderungstensors  $-w_{,11}$  zugrunde liegt, die Berechnung bereits mit einer falschen Anfangstangente und liefern daher fehlerhafte lineare Lösungen. Bemerkenswert ist, daß bei Auftreten großer Rotationen (Last  $P \sim 4$  KN) Koiters Theorie "small finite deflections" B2 sogar qualitativ unterschiedliche Ergebnisse zur Theorie moderater Rotationen von Pietraszkiewicz B3 ergibt.

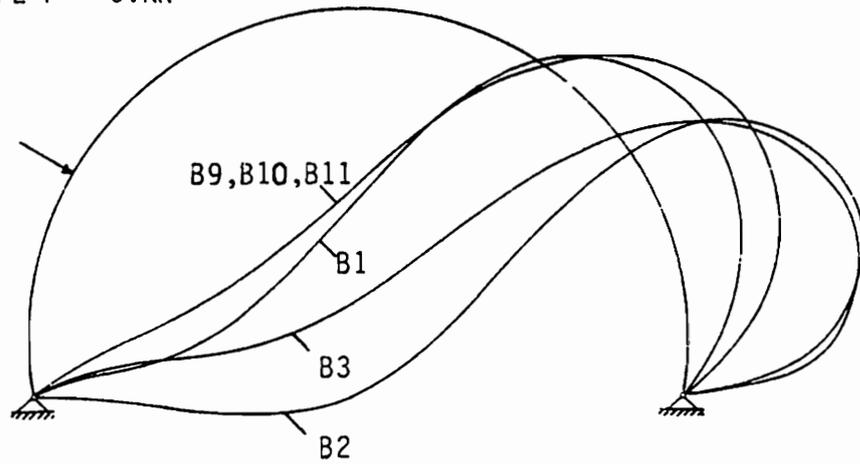
Alle konsistent approximierten Theorien finiter und großer Rotationen B9, B10, B11, B12, B13, B14 können gemäß Abb. 9.9 als hinreichend genaue Bezugslösungen bezeichnet werden. Koiters grundlegendes Ergebnis, daß sich äquivalente Krümmungsänderungstensoren um Größen  $O(\gamma/R)$  unterscheiden dürfen (s. Kapitel 3.2) wird durch die Lösungsstabilität der  $\kappa_{\alpha\beta}$ -Varianten B12 und B13 wiedergegeben.

Wie schon in den vorangegangenen Beispielen ist auch beim schlanken Bogen die inkonsistente Vernachlässigung des Terms  $\frac{1}{2} \theta^2_{<11>}$  in  $\gamma_{<11>}$  nicht erlaubt (s. B8). Auf der anderen Seite kann im Einzelfall (s. B4) die Interaktion von Fehlern infolge gleichzeitiger inkonsistenter Vernachlässigung von Beiträgen in der Membran- und Biegeenergie eine Verbesserung der Lösung liefern. Die Inkonsistenz der Theorie B15 führt zur Divergenz während des Iterationsprozesses. Lösungen für Lasten  $P \sim 2$  KN können nicht angegeben werden.

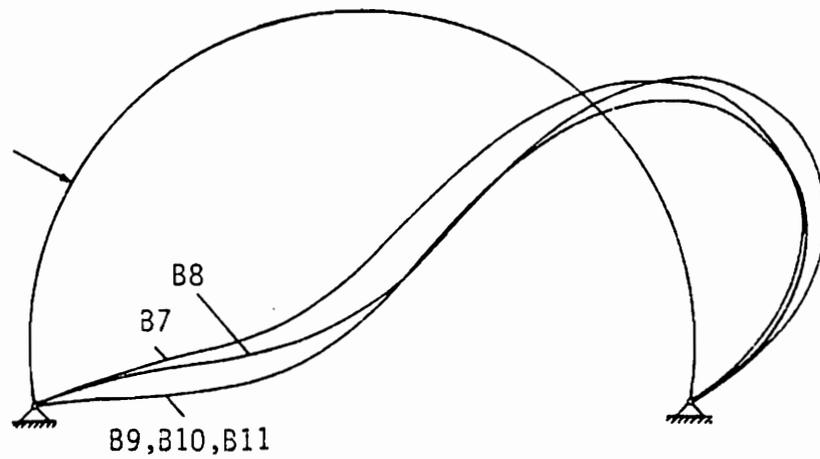
Abschließend sei angemerkt, daß als Folge inkonsistenter Vereinfachungen in den Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen im allgemeinen schlechte Konvergenzgeschwindigkeiten beobachtet wurden.



LASTSTUFE  $P = 5.KN$



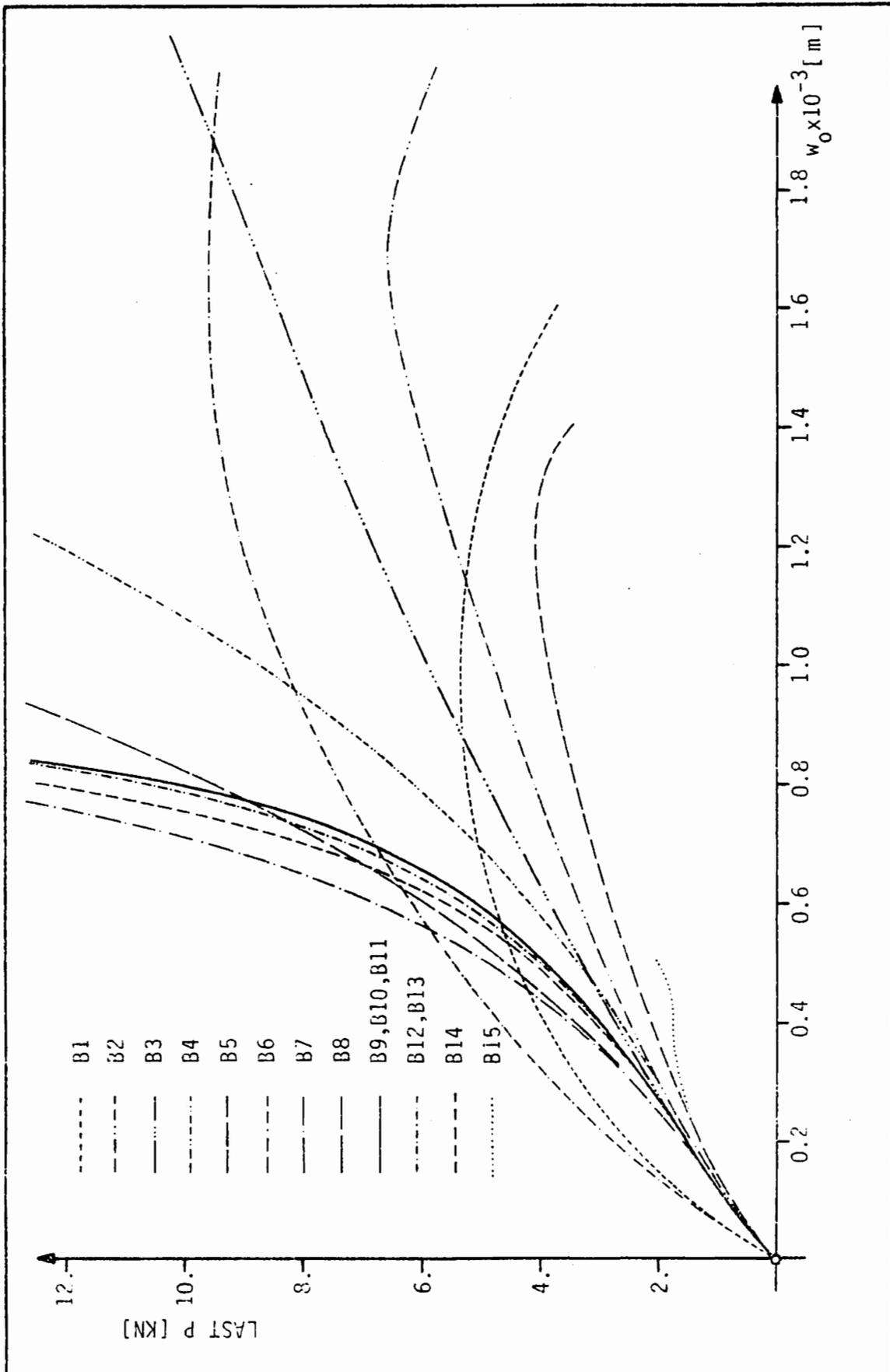
LASTSTUFE  $P = 10.KN$



BALKEN 5

STEILER BOGEN UNTER EINZELLAST  
VERFORMUNGSZUSTÄNDE

ABB. 9.8



BALKEN 5

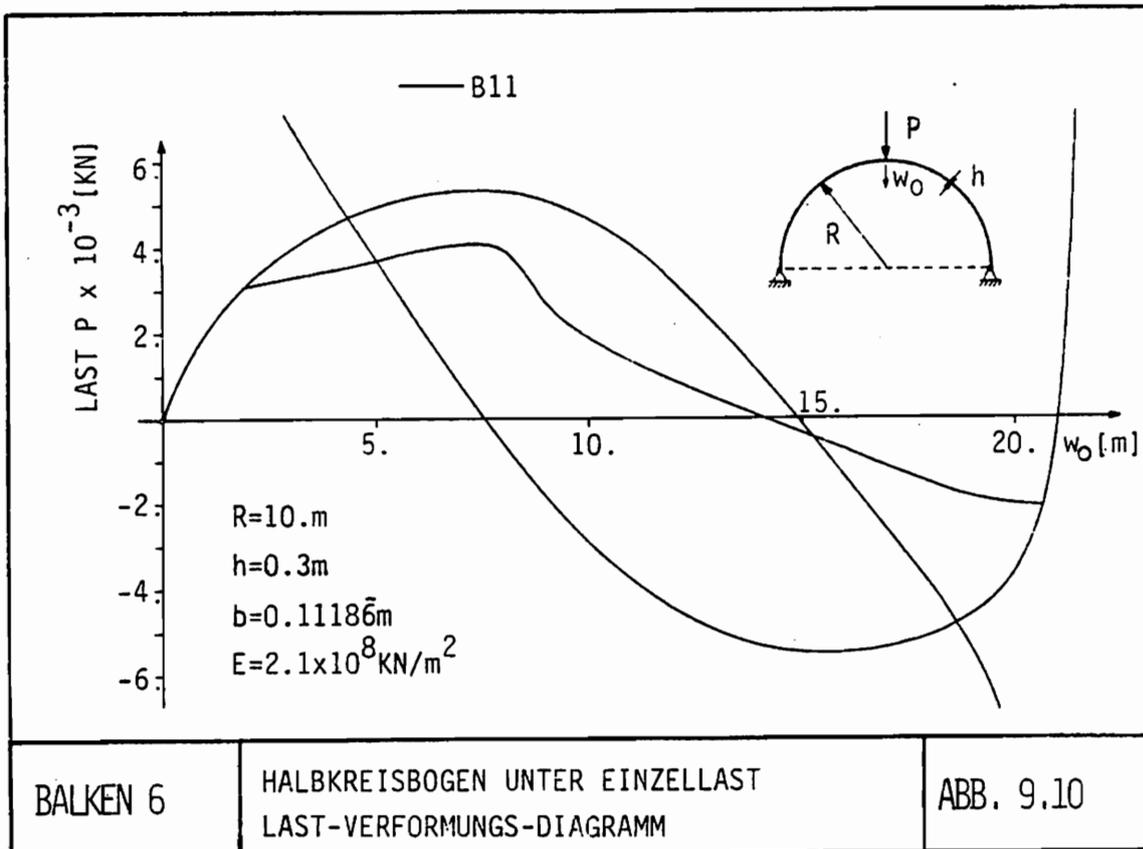
STEILER BOGEN UNTER EINZELLAST  
LAST-VERFORMUNGS-DIAGRAMM

ABB. 9.9

9.1.6. Halbkreisbogen unter Einzellast

Der durch eine symmetrische Einzellast belastete Bogen weist als charakteristisches Merkmal der Last-Verformungsbeziehungen einen zu Beginn stabilen Nachbeulast auf. Teile der bis auf mögliche "loops" des symmetrischen Pfads vollständigen Lösung in Abb. 9.10 wurden unter der Annahme dehnungsloser Verbiegungen von DaDeppo u. Schmidt [9.7, 9.8] analytisch und von Langhaar et al [9.22] sowohl analytisch als auch experimentell untersucht. Finite-Element-Lösungen auf der Basis von Verschiebungsmethoden geben Brink [9.5], Diekkämper u. Schrader [9.11] sowie Reuter [9.34] an, während Beverungen [9.4] ein gemischtes Verfahren verwendet.

Die Ergebnisse in Abb. 9.10 einer Theorie finiter Rotationen B11 stellen eine Verallgemeinerung vorgenannter Arbeiten dar. Insbesondere konnte die Traglast des Systems als Durchschlagslast auf dem stabilen Nachbeulast gemäß Tab. 9.3 mit Hilfe eines verformungsgesteuerten Algorithmus (s. Kapitel 8.3) genau berechnet werden.



Kritischer Punkt	P [KN]	$\bar{p} = \frac{P \cdot R^2}{EI}$
Verzweigungslast	3091.2	5.85
Durchschlagslast des stabilen Nachbeulpfads (Traglast)	4090.6	7.74
Durchschlagslast des Fundamentalpfads	5.335.2	10.09

Tab. 9.3

Auch die Bestimmung des Durchschlagspunktes auf dem Fundamentalpfad bereitet ohne ein solches Verfahren Schwierigkeiten, und die zufällige Berechnung eines Punktes des stabilen Nachbeulbereichs kann dann zu einer irreführenden Interpretation der Last-Verschiebungsbeziehungen [9.34] führen. Während die in [9.4, 9.5, 9.7, 9.8, 9.11, 9.22, 9.34] berechneten Verzweigungslasten nur geringe Unterschiede aufweisen und gut mit der eigenen Lösung übereinstimmen, weicht die Traglast in Tab. 9.3 bis zu 13 % von den Ergebnissen in [9.5, 9.4] ab.

Da der Einfluß konsistent und inkonsistent vereinfachter Balkentheorien auf die Systemantwort ausführlich in den vorangegangenen Beispielen analysiert wurde, beschränken wir uns bei der Berechnung des Halbkreisbogens auf die Theorie finiter Rotationen B11.

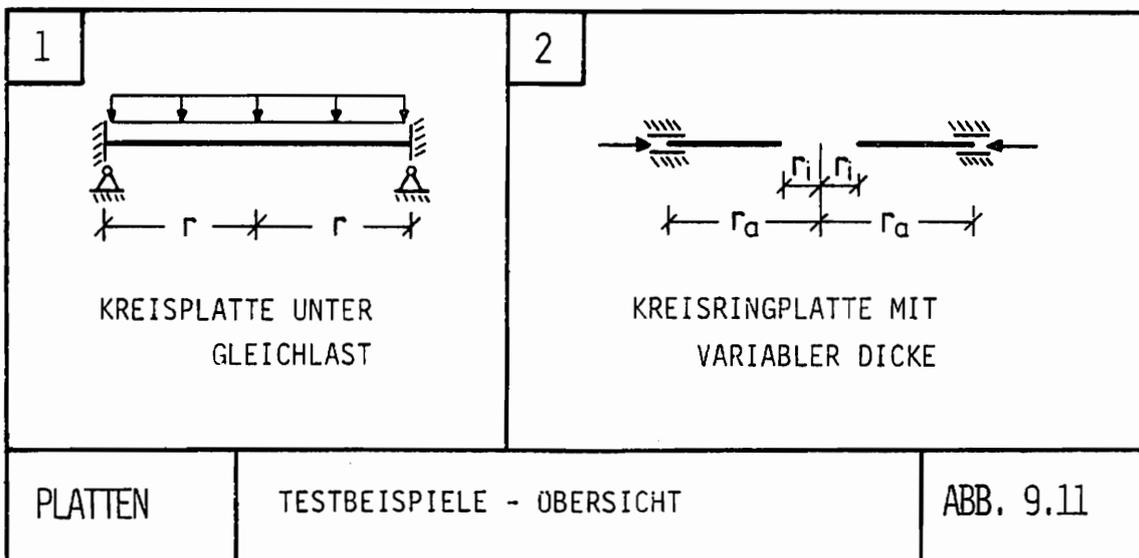
## 9.2. Plattenprobleme

Dünne elastische Platten verschiedenster Geometrien werden als Bauteile in vielen Ingenieurkonstruktionen verwendet. Eine Vielzahl von Arbeiten befaßt sich daher seit etwa Beginn dieses Jahrhunderts mit der theoretischen, numerischen und experimentellen Analyse geometrisch linearer und nichtlinearer Plattenprobleme.

Platten können als Sonderfälle gekrümmter Schalen behandelt werden. Die Gleichungen des Randwertproblems ergeben sich aus zugehörigen Schalenbeziehungen, indem man die Komponenten des Krümmungsänderungstensors der unverformten Referenzkonfiguration  $b_{\alpha\beta} = 0$  setzt.

Dies eröffnet uns nun die Möglichkeit der Berechnung geometrisch linearer und nichtlinearer Kreisplattenprobleme mit Hilfe des in Abschnitt 8 beschriebenen Rotationsschalenprogramms. Eine Übersicht entsprechender Schalentheorien wird in Kapitel 9.3 und Anhang A3 gegeben.

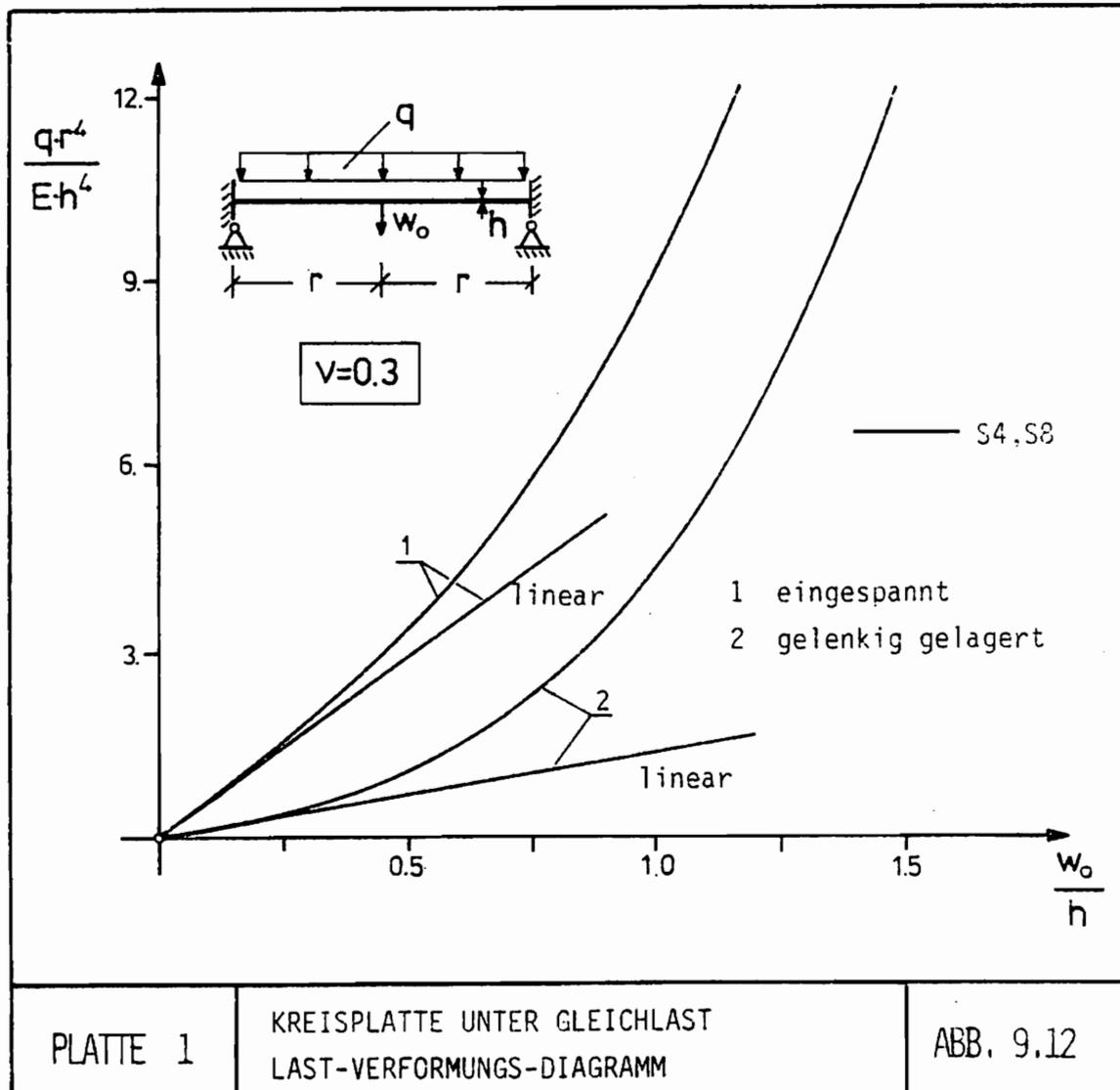
Mit der Kreisplatte unter Gleichlast und der Kreisringplatte unter radialer Drucklast behandeln wir im folgenden zwei charakteristische Plattenprobleme (s. Abb. 9.11).



### 9.2.1. Kreisplatte unter Gleichlast

Für das geometrisch nichtlineare Spannungsproblem der eingespannten und gelenkig gelagerten Kreisplatte konstanter Dicke unter Gleichlast liegen analytische Lösungen von Timoshenko u. Woinowsky-Krieger [ 9.41 ] und Banerjee [ 9.2 ] vor. Die Platte mit eingespannten Rändern wird von Yaghmai [ 9.46 ] und Varpasuc [ 9.44 ] mit Hilfe Finiter Elemente berechnet.

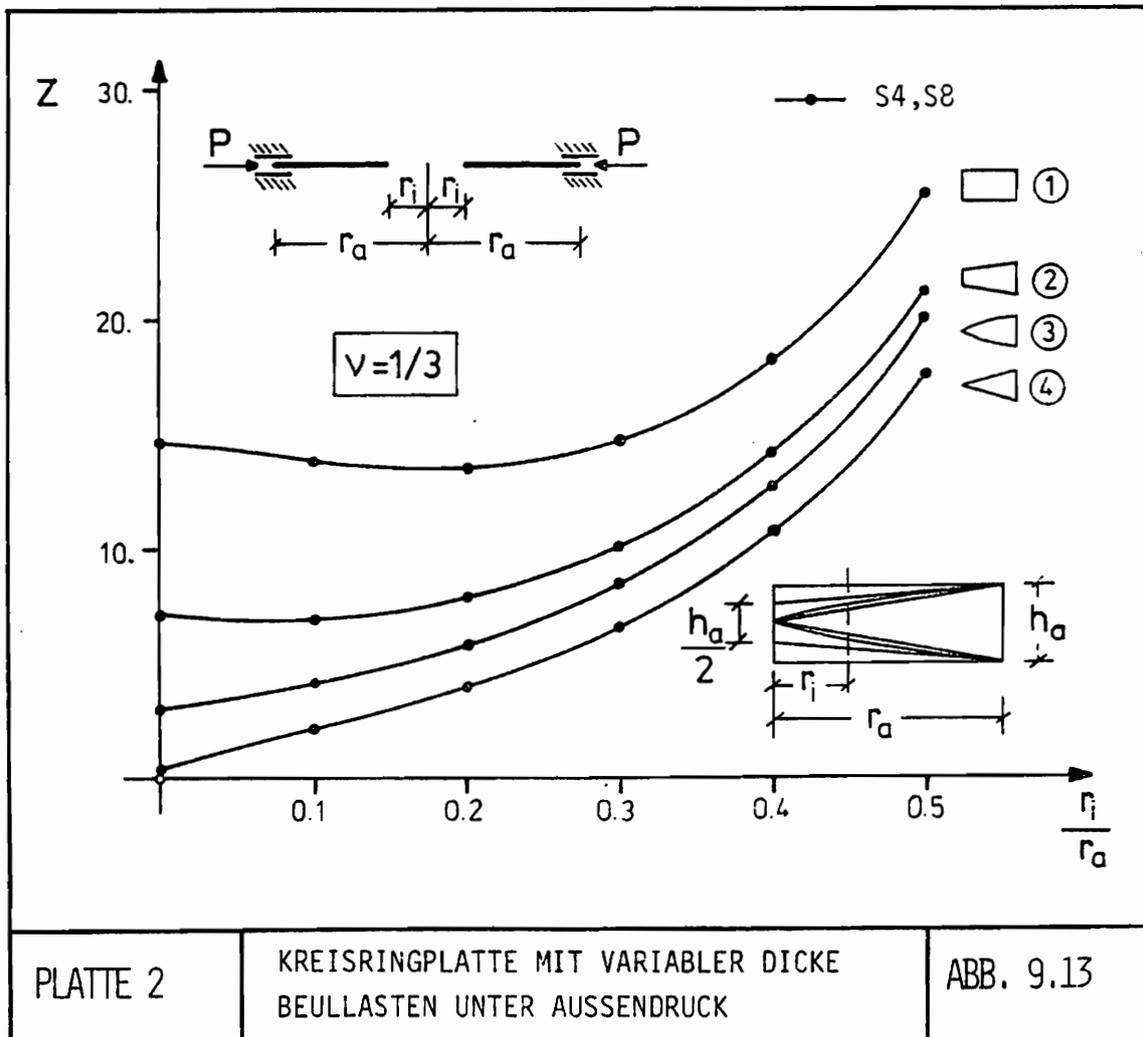
Abb. 9.12 zeigt die linearen und nichtlinearen Last-Verformungsbeziehungen mit der für dieses Problem charakteristischen Steifigkeitszunahme im nichtlinearen Bereich. Eigene Testrechnungen auf der Basis konsistent approximierter Theorien großer S8 und moderater Rotationen S4 sind in voller Übereinstimmung mit den analytischen Lösungen in [ 9.41 ]. Selbst die inkonsistent approximierter Variante von Varpasuc S10 sowie eine reduzierte Form der Yaghmaischen Näherung S6 (s. auch Kapitel 6.4) liefern keine abweichenden Ergebnisse.



9.2.2. Kreisringplatte mit variabler Dicke

Die programmtechnische Möglichkeit, auf Elementebene eine linear veränderliche Schalendicke berücksichtigen zu können, wird in diesem Beispiel zur linearen Beulanalyse einer Kreisringplatte mit variabler Dicke unter Außendruck genutzt. Neben der konstanten und zwei linear veränderlichen wird auch eine nach dem Potenzgesetz ( $h = h_a \cdot \xi^n$ ,  $n = 2/3$  [9.13]) gebildete Dickenvariante berücksichtigt. Dimensionslose Beullasten, die sogenannten Knickzahlen, werden als Funktion verschiedener Lochdurchmesser aufgetragen. Entsprechende kritische Lasten erhält man aus der Beziehung

$$P_{cr} = Z \cdot \frac{E \cdot h^3}{12r_a^2(1-\nu^2)}$$

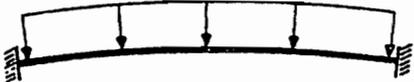
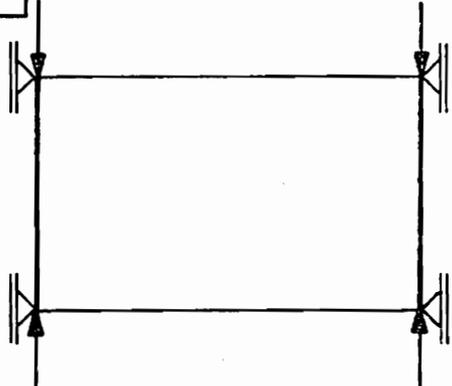
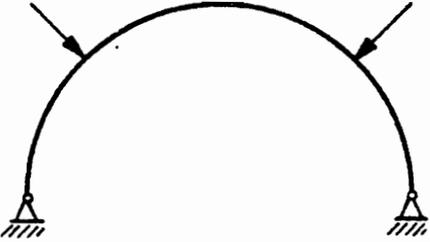
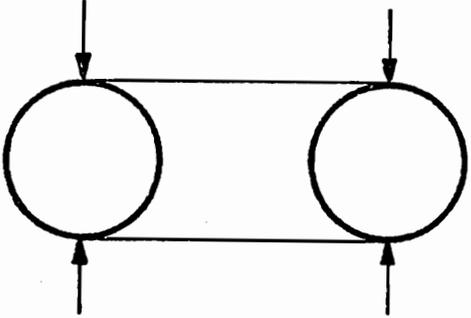


Analytische Lösungen des Problems für die Dickenvarianten ① , ③ und ④ werden in den Arbeiten von Federhofer [ 9.15 ], Egger [ 9.13 ] und Timoshenko u. Gere [ 9.40 ] angegeben. Diese stimmen mit den Ergebnissen eigener Testrechnungen unter Verwendung der Schalentheorien moderater und großer Rotationen S4 bzw. S8 gut überein. Vergleiche mit den Lösungen in [ 9.13, 9.15 ] haben gezeigt, daß man mit Hilfe des in Abb. 9.13 dargestellten Diagramms auch die kritischen Lasten ähnlicher Dickenvarianten durch Extrapolation erhalten kann.

Abschließend sei angemerkt, daß im Sinne einer vollständigen Beulanalyse die stark ansteigenden Knickzahlen großer Lochdurchmesser insbesondere für  $r_i > r_a/2$  durch eine nicht a priori symmetrische Stabilitätsberechnung überprüft werden müssen.

### 9.3. Schalenprobleme

Dieses Kapitel stellt die numerische Ergänzung der schalentheoretischen Betrachtungen vorangegangener Abschnitte dar. Anhand ausgewählter Beispiele aus dem Bereich der Rotationsschalen (s. Abb. 9.14) wird der Einfluß konsistenter und inkonsistenter Vereinfachungen der Schalengleichungen auf die Lösung geometrisch nichtlinearer Probleme untersucht. Unter anderem kann gezeigt werden, daß entgegen einer weit verbreiteten Meinung weder die Donnell-Vlasovsche Näherung noch Theorien moderater Rotationen in allen Fällen eine korrekte Beschreibung des Tragverhaltens liefern. Selbst wenn diese Beispiele von geringerem praktischen

<p>1</p>  <p>KUGELKALOTTE UNTER RADIALER FLÄCHENLAST</p>	<p>2</p>  <p>ZYLINDERSCHALE UNTER AXIALER RINGLAST</p>	
<p>3</p>  <p>HALBKUGEL UNTER RINGLAST</p>	<p>4</p>  <p>TORUS UNTER RINGLAST, VARIABLER RADIUS</p>	
<p>SCHALEN</p>	<p>TESTBEISPIELE - ÜBERSICHT</p>	<p>ABB. 9.14</p>

Interesse sind, bestätigen sie die theoretischen Ergebnisse des energetischen Konzepts, das zu einer präzisen Formulierung der Schalengleichungen führt.

Die folgenden Betrachtungen sollen stets im Zusammenhang mit den vorangegangenen numerischen Untersuchungen von Balkenproblemen gesehen werden. Dies gilt insbesondere für die dort erarbeiteten Teilaspekte.

Eine Zusammenstellung der verschiedenen zur numerischen Berechnung herangezogenen Schalentheorien mit Literaturangaben und Bezug zu den theoretischen Ableitungen vorangegangener Kapitel findet sich in Tab. 9.4. Die zugehörigen Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen sind im Anhang A3 angegeben.

Nr.	Zusammenstellung der zur Berechnung herangezogenen Schalentheorien
S1	Theorie flacher Schalen (Donnell-Mushtari-Vlasov [9.12, 9.26, 9.45])
S2	Schalentheorie "medium bending, small rotation about normals" (Mushtari u. Galimov-Sanders-Koiter [9.26, 9.36, 9.20])
S3	Schalentheorie "small finite deflections" (Koiter [9.20])
S4	Schalentheorie moderater Rotationen (Pietraszkiewicz [9.31])
S5	Schalentheorie mäßig großer Rotationen (Basar-Harte [9.3,9.16])
S6	Schalentheorie "large deformations and rotations" (Yaghmai [9.46])
S7	Schalentheorie groß/kleiner Rotationen, Fehler E1 (Nolte u. Stumpf [9.28])
S8	Schalentheorie groß/kleiner Rotationen, Fehler E2 (Nolte u. Stumpf [9.28])
S9	Schalentheorie groß/großer Rotationen, Fehler E0 (A3 - 24)
S10	Schalentheorie "large displacement" (Varpasuo [9.44])

Tab. 9.4

### 9.3.1. Kugelkalotte unter radialer Flächenlast

Eine Vielzahl numerischer und experimenteller Arbeiten haben sich mit dem Tragverhalten von Kugelkalotten unter konstanter radialer Flächenlast beschäftigt, von denen im folgenden nur einige genannt werden [9.6, 9.18, 9.30, 9.39, 9.42, 9.43, 9.48]. Diese Untersuchungen beschränkten sich in der Regel auf die Bestimmung kritischer Lasten, d. h. Durchschlags- oder Verzweigungslasten. Ausschließlich einfachste Schalentheorien wie die Marguerresche oder Donnell-Vlasovsche Näherung wurden verwendet.

Eine vollständige Lösung des axialsymmetrischen Problems der in Abb. 9.15 dargestellten eingespannten Kugelkalotte mit Kennparameter  $\lambda = 2 [3(1 - \nu^2)]^{1/4} \left(\frac{H}{h}\right)^{1/2} = 8$  gibt Mescall in [9.24]. Dort werden die Gleichungen einer Rotationsschalentheorie finiter Deformationen nach Reissner mit Hilfe eines Differenzenverfahrens direkt gelöst. Uemura [9.43] und Uchiyama u. Yamada [9.42] führen umfangreiche Untersuchungen an Kugelkalotten verschiedenster Geometrien unter a priori Annahme spezieller Deformationsmuster durch. Peer-Kasperska et al [9.30] geben Finite-Element-Lösungen auf der Basis einer Theorie moderater Rotationen von Pietraszkiewicz an. Abb. 9.15 zeigt, daß die Ergebnisse eigener Rechnungen unter Verwendung der Donnell-Vlasovschen Näherung S1 sowie je einer Theorie moderater S4 und großer Rotationen S8 gut mit denen in [9.24, 9.30] übereinstimmen. Abweichungen zur Lösung von Mescall [9.24] im Nachbeulbereich sind schwierig zu analysieren, da weder die dort verwendete Schalentheorie noch das Näherungsverfahren vergleichbar sind. Die von Uemura [9.43] und Uchiyama u. Yamada [9.42] angegebenen in Abb. 9.15 nicht dargestellten Last-Verformungsbeziehungen weisen neben erheblichen quantitativen insbesondere auch qualitative Unterschiede auf.

Zur Frage der Art des Gleichgewichts längs des axialsymmetrischen Pfads war in [9.43] festgestellt worden, daß alle ansteigenden Bereiche im Last-Verformungsdiagramm stabil und alle abfallenden instabil sind. Eigene Untersuchungen ergaben jedoch für alle Lösungen zwischen der oberen und unteren Beullast instabiles Gleichgewicht.

Bei eingespannten Kugelkalotten unter radialer Flächenlast mit  $\lambda \geq 5.5$  sind außerdem nichtaxialsymmetrische Verformungszustände

möglich [9.18]. Zum Auffinden zugehöriger Verzweigungspunkte wurde daher eine lineare und nichtlineare Verzweigungsanalyse vorgenommen. Die berechneten kleinsten kritischen Lasten sowie die obere und untere Beullast sind in Tab. 9.5 angegeben.

Kritische Lasten	$q_{cr}/q_{k1}$
Verzweigungslast (4) (linear)	1.105 (k=4)
Verzweigungslast (1) (nichtlinear)	0.776 (k=4)
Obere Beullast (2)	1.125
Untere Beullast (3)	0.1554

$q_{k1}$ : klassische kritische Last

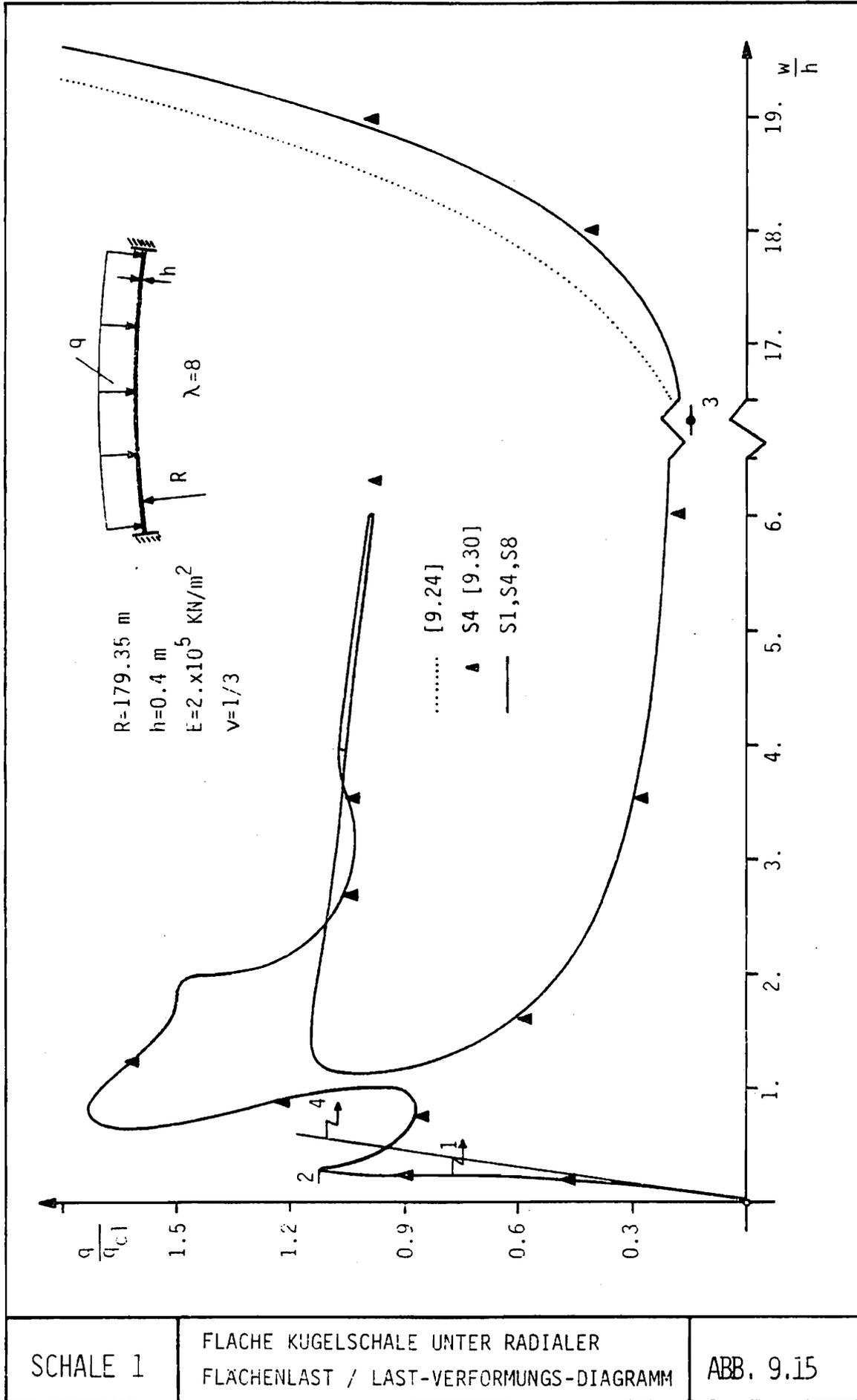
$$q_{k1} = \frac{2}{[3(1-\nu^2)]^{1/2}} \frac{Eh^2}{R^2} = 1.2184 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

k: Anzahl der Vollwellen in Umfangsrichtung

Tab. 9.5

Interessanterweise liegt das Ergebnis der vereinfachten Verzweigungsanalyse (4) oberhalb der klassischen Näherung ( $q_{k1}$ ) und weicht um mehr als 40 % von der nichtlinearen Berechnung (1) ab.

In diesem Beispiel wird deutlich, daß zur Berechnung flacher Schalen einfachste Theorien, wie die Marguerresche oder Donnell-Vlasovsche Näherung, in den meisten Fällen ausreichend sind. Jedoch erfordert die Komplexität der Last-Verformungsbeziehungen ein leistungsstarkes und genaues Näherungsverfahren. Restriktive Annahmen bezüglich der Deformationsmuster bei Verwendung einfachster klassischer Methoden können zu qualitativ falschen Aussagen führen.

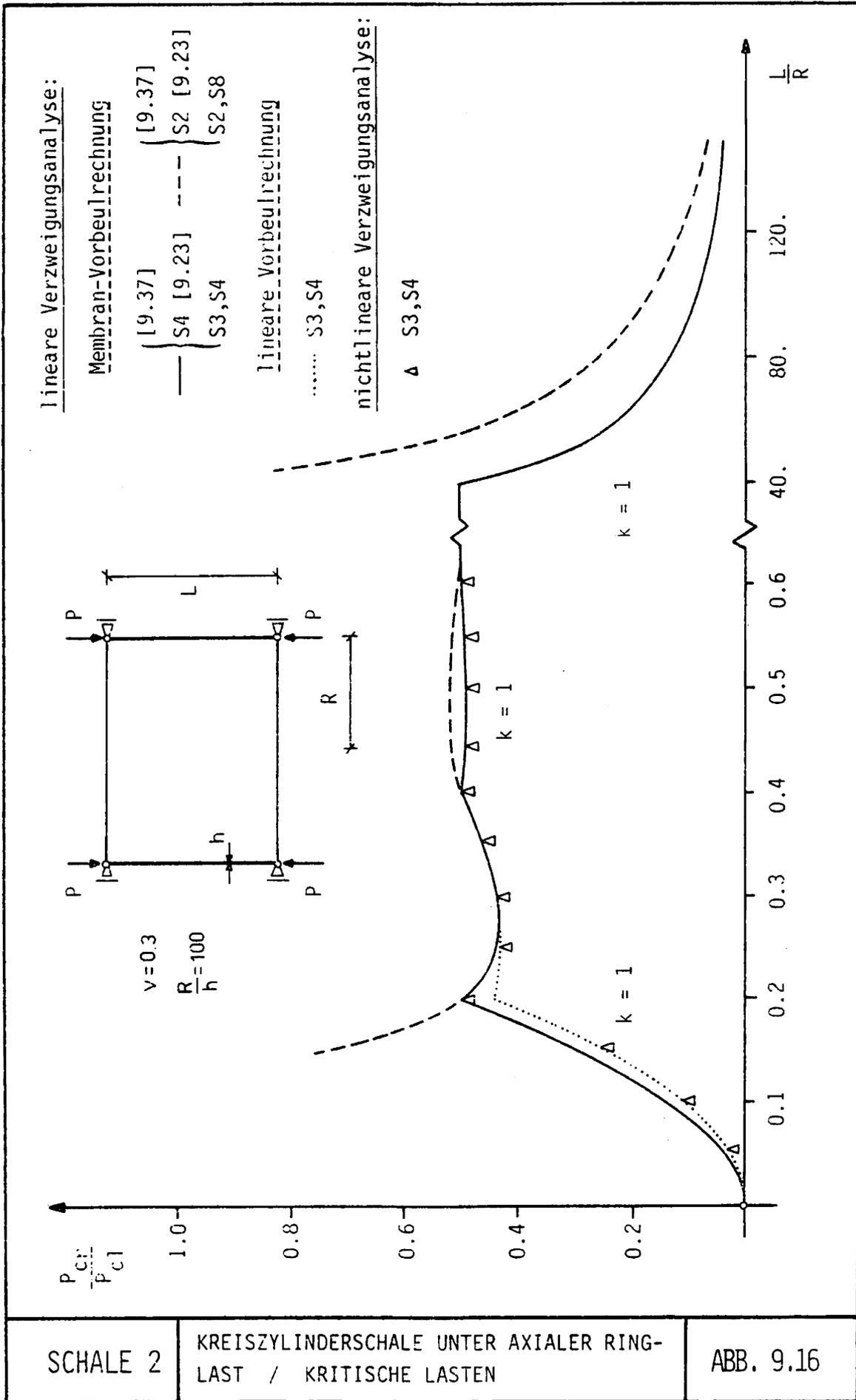


### 9.3.2. Kreiszylinderschale unter axialer Ringlast

Zur Demonstration der Gefahren, die bei Vernachlässigung vermeindlich kleiner Terme in den Schalengleichungen auftreten können, betrachten wir das in Abb. 9.16 dargestellte Beulproblem einer Kreiszylinderschale unter Axialdruck. Dabei werden sogenannte modifizierte Randbedingungen (nur die Normalverschiebung  $w = 0$ ) zugrunde gelegt.

Unter Verwendung der Donnell'schen Stabilitätsgleichungen wurde für dieses Beispiel von Hoff [9.17] unabhängig vom Längen-Radius Verhältnis dieselbe kritische Last, 50 % der klassischen Beullast ( $P_{k1} = \frac{E}{[3(1-\nu^2)]^{1/2}} \frac{h^2}{R^2}$ ), angegeben. Koiter [9.21] führte später durch Angabe einer oberen Grenze den Nachweis, daß kurze Zylinder schon unterhalb der in [9.17] angegebenen Last beulen. Auf der Basis eigener allgemeinerer Stabilitätsgleichungen [9.9] wurden von Simmonds u. Danielson [9.37] erstmals zylinderlängenabhängige kritische Lasten auf analytischem Wege berechnet. Eine Finite-Element-Lösung des Problems gibt Makowski [9.23], wobei ebenso wie in allen anderen Untersuchungen ein Membranspannungs-Vorbeulzustand angenommen wird.

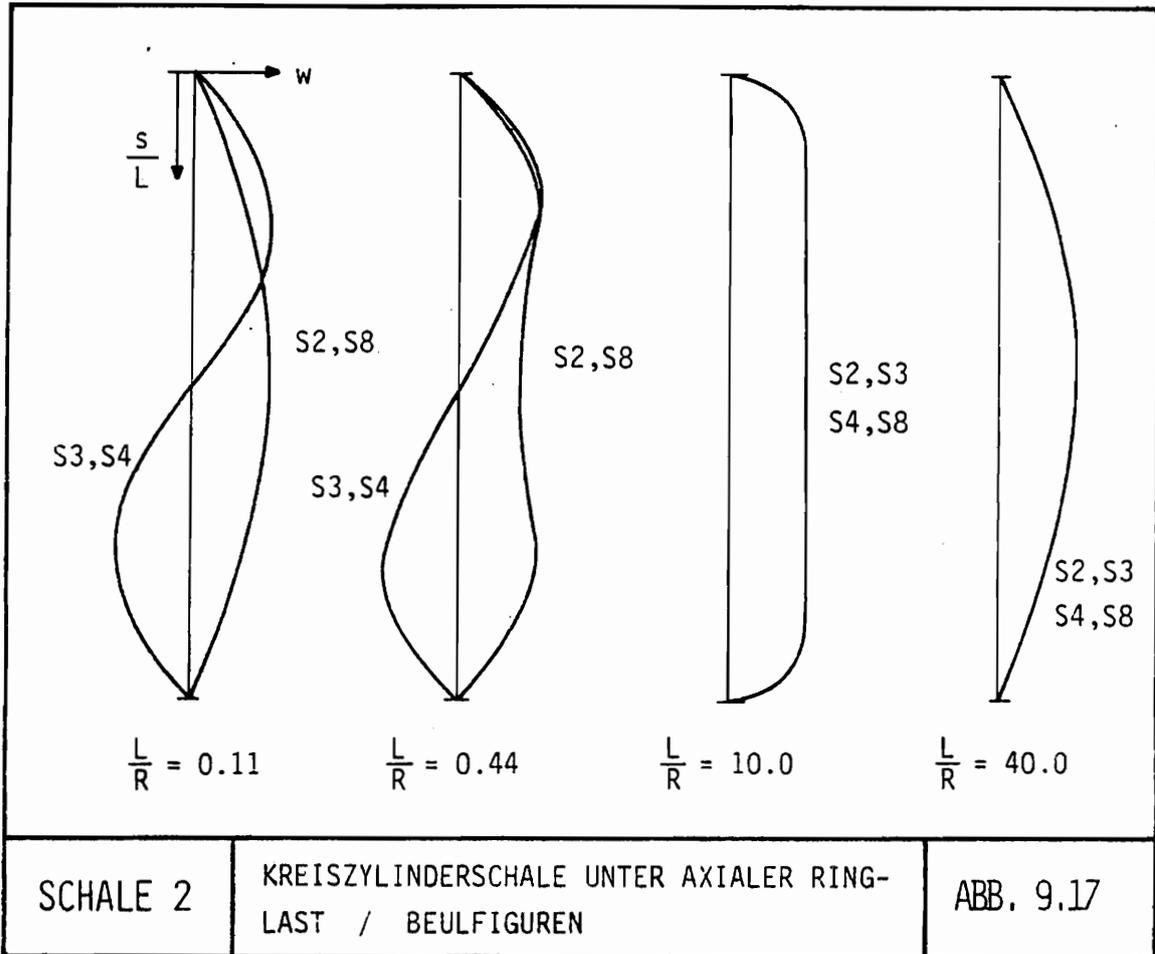
Abb. 9.16 zeigt einen Vergleich dieser Ergebnisse mit denen eigener Rechnungen. Auffallend ist, daß die mit den Theorien S2 und S8 berechneten kritischen Lasten im Bereich kurzer Zylinderlängen bei abfallendem Längen-Radius Verhältnis  $L/R \rightarrow 0$  stark ansteigen, wohingegen die Theorien S3 und S4 abfallende kritische Lasten liefern. Zudem treten in Meridianrichtung unterschiedliche Beulmuster auf, die in Abb. 9.17 dargestellt sind. Detaillierte Untersuchung aller Beiträge zur zweiten Variation des Gesamtpotentials verschiedener Varianten ergab, daß die fehlerhaften Ergebnisse der Theorien S2 und S8 auf die Vernachlässigung des Terms  $\bar{N}_{\lambda}^{\lambda} \phi^2$  zurückzuführen sind. Die Annahme kleiner Rotationen um Normalen zur Mittelfläche ist also in diesem Beispiel nicht zulässig. Für praktisch relevante Zylinderlängen konnte jedoch das Ergebnis von Hoff mit allen Theorien bestätigt werden. Auch dies erscheint bemerkenswert, da bei einer Vollwellenzahl in Umfangsrichtung  $k = 1$  typische Fehler der Donnell-Vlasov'schen Näherung infolge des langwelligen Beulmusters erwartet werden konnten [9.37]. Für sehr große Längen-Radius Verhältnisse  $L/R > 40$  weichen die Beullasten der Theorien S2 und S8 jedoch wieder deutlich von denen der Theorien S3 und S4 ab.



SCHALE 2

KREISZYLINDERSCHALE UNTER AXIALER RING-  
 LAST / KRITISCHE LASTEN

ABB. 9.16



Während die eigenen kritischen Lasten unter der Annahme eines Membranspannungs-Vorbeulzustands gut mit den Ergebnissen in [9.37, 9.23] übereinstimmen, führt eine Stabilitätsanalyse mit Vorbeulschnittgrößen, die aus einer linearen Biegelösung berechnet werden, im Bereich kurzer Zylinderschalen zu erkennbaren Unterschieden.

Die Ergebnisse einer vollständig nichtlinearen Verzweigungsanalyse auf der Basis der Theorie moderater Rotationen S4 weichen davon nur bei einem Längen-Radius Verhältnis  $L/R \sim 0.2$  um etwa 10% ab.

Dieses Beispiel macht deutlich, daß konsistent approximierte Schalengleichungen nur dann zu sinnvollen Ergebnissen führen können, wenn die dabei getroffenen Annahmen nicht im Widerspruch zum tatsächlichen Spannungs- und Stabilitätsverhalten stehen.

### 9.3.3. Halbkugel unter Ringlast

Das in Abb. 9.18 dargestellte Beispiel einer Halbkugel unter Ringlast wurde ausgewählt, um die verschiedenen Einflüsse konsistenter und inkonsistenter Approximationen der Schalengleichungen auf das rechnerische Tragverhalten zu untersuchen. Eine repräsentative Auswahl mehrerer Last-Verformungsbeziehungen wird in Abb. 9.18 gezeigt.

Obwohl die auftretenden relativen Verschiebungen der Halbkugel wesentlich kleiner sind als die vorangegangener Balkenbeispiele, führen die verschiedenen Näherungen zu bemerkenswerten Unterschieden. Infolge der guten Übereinstimmung zwischen den Theorien großer Rotationen S9 und S7, S8 werden diese im folgenden als Bezugslösungen betrachtet.

Auffallend ist, daß die Donnell-Vlasovsche Näherung erheblich bessere Ergebnisse liefert als die Theorie moderater Rotationen von Pietraszkiewicz S4. Diese relative Lösungsstabilität war schon bei der Berechnung des mäßig steilen Bogens (Balken 4) beobachtet worden, sollte jedoch grundsätzlich als Ausnahme gewertet werden.

Die Theorie mäßig großer Rotationen von Basar und Harte S5 zeigt in diesem Beispiel ein durchschnittlich gutes Lösungsverhalten, jedoch treten auch hier im Bereich relativer Extrema deutliche Abweichungen von der Bezugslösung auf. Bis zu Verformungen der 2.5-fachen Schalendicke sind alle Last-Verformungskurven nahezu deckungsgleich. Dann spalten sich allerdings die inkonsistent approximierten Varianten S6 und S10 ab und führen in den folgenden Bereichen zu völlig untauglichen Ergebnissen. Ein Grund für das aus Ingenieursicht "gefährliche" Ansteigen der Tragwerkssteifigkeit bei der Näherung nach Yaghmai S6 liegt in der Interaktion verschiedener Fehler  $O(1)$  und  $O(\sqrt{\theta})$  bezüglich der Membran- und Biegeenergie (s. Kapitel 6.4). Ähnlich wie bei den in Kapitel 9.2 untersuchten Balkenproblemen zeigt die Theorie von Varpasuo S10 ein äußerst schlechtes Lösungs- und Konvergenzverhalten, was auf Vernachlässigung zweiter Ableitungen der Tangentialverschiebungen im Biegepotential zurückzuführen ist. Ein Vergleich der ermittelten Durchschlagslasten ist Tab. 9.6 zu entnehmen.

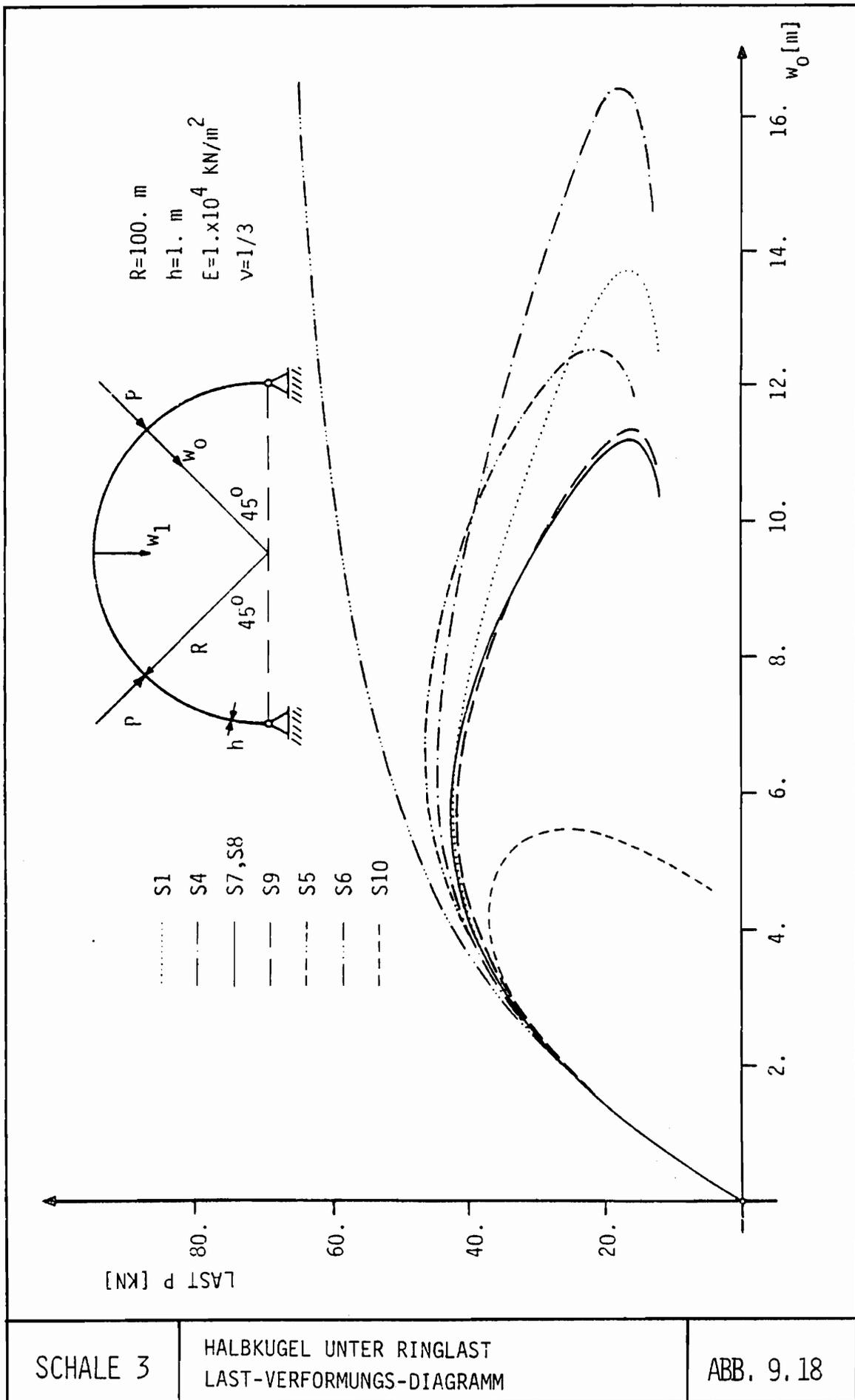
Theorie	Durchschlagslast P[kN]	Verschiebung $w_0$ [m]
S1	42.2	- 6.0
S4	44.6	- 6.4
S7,S8	42.5	- 5.6
S9	41.8	- 5.6
S5	46.3	- 6.5
S6	67.3	- 25.3
S10	36.8	- 4.4

Tab. 9.6

Abb. 9.19 zeigt die Komplexität der Last-Verformungsbeziehungen, insbesondere die Existenz vieler benachbarter instabiler Gleichgewichtszustände, eine dem Phänomen "looping" (s. Balken 2 u. 4) ähnliche Erscheinung. Dieses Beispiel verdeutlicht, daß die Last-Verformungsbeziehungen eines Freiheitsgrades nicht unbedingt ein repräsentatives Bild des Tragverhaltens wiedergeben, jedoch läßt sich die Topologie der Lösung durch Kennzeichnung der relativen Extrema in beiden Diagrammen gut verfolgen.

Neben der Untersuchung des axialsymmetrischen Verhaltens wurde zur Bestimmung möglicher nichtaxialsymmetrischer Verzweigungen eine lineare und nichtlineare Verzweigungsanalyse durchgeführt. Interessanterweise liegen die linear und nichtlinear berechneten kritischen Lasten deutlich unter der axialsymmetrischen Durchschlagslast und das bei Radialverschiebungen von der Größenordnung der Schalendicke.

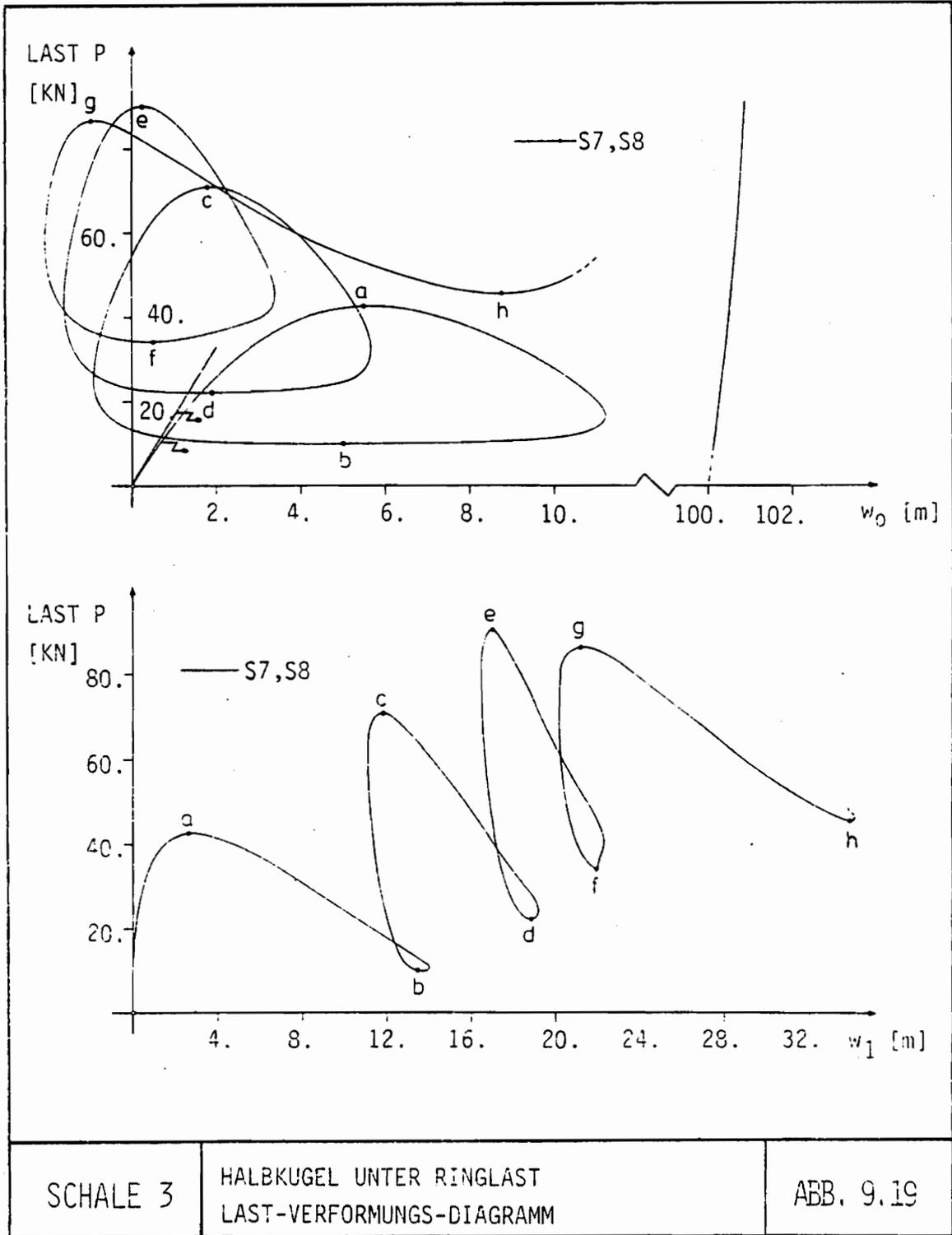
Dieses Beispiel macht deutlich, daß die auf der Basis theoretischer Untersuchungen und Testrechnungen an Balken gewonnenen Aussagen recht gut auf Rotationsschalen zu übertragen sind, was nicht zuletzt eine Rechtfertigung für die hier gewählte Vorgehensweise ist.



SCHALE 3

HALBKUGEL UNTER RINGLAST  
LAST-VERFORMUNGS-DIAGRAMM

ABB. 9.18



SCHALE 3

HALBKUGEL UNTER RINGLAST  
LAST-VERFORMUNGS-DIAGRAMM

ABB. 9.19

#### 9.3.4. Torus unter Ringlast, variabler Radius

Tori mit konstanter radialer Flächenlast sind von Timoshenko u. Woinowsky-Krieger [9.41] linear analytisch und von Yaghmai u. Popov [9.47] mit Hilfe Finiter Elemente untersucht worden. In diesem Beispiel wird das geometrisch nichtlineare Problem eines Torus unter Ringlast mit variablem Radius  $L_1$  behandelt (s. Abb. 9.20). Durch Änderung nur eines Geometrieparameters gelingt es, verschiedene Phänomene des Tragverhaltens dünner elastischer Schalen zu erfassen. Zudem sind insbesondere Tori mit großen Radien unter Ringlasten, ähnlich wie Zylinder unter Linien- und diametralen Einzellasten [9.16] ausgezeichnete Indikatoren für die in Tab. 9.4 zusammengestellten Näherungsstufen geometrisch nichtlinearer Schalentheorien.

Abb. 9.21 - 22 zeigen die Last-Verformungsdiagramme für vier verschiedene Torusradien  $L_1 \div L_4$ . Neben der Donnell-Vlasovschen Näherung S1 und konsistent approximierten Theorien großer S7, S8, S9 und moderater Rotationen S4 werden drei weitere Näherungen von Basar u. Harte S5, Yaghmai S6 und Varpasuo S10 zur Berechnung herangezogen.

Für alle untersuchten Geometrien liefert die einfachste Schalentheorie g/k Rotationen S8 auch in diesem Beispiel gleichbleibend gute Ergebnisse. Testrechnungen unter Verwendung der Variante S7 mit relativem Fehler E1 und einer Theorie g/g Rotationen S9 mit kubisch approximiertem Krümmungsänderungstensor führen erst im hochgradig nichtlinearen Bereich ( $w_0/h \geq 350$ ) zu kleinen Abweichungen, so daß im folgenden S7, S8 und S9 wieder als Referenzlösungen betrachtet werden können.

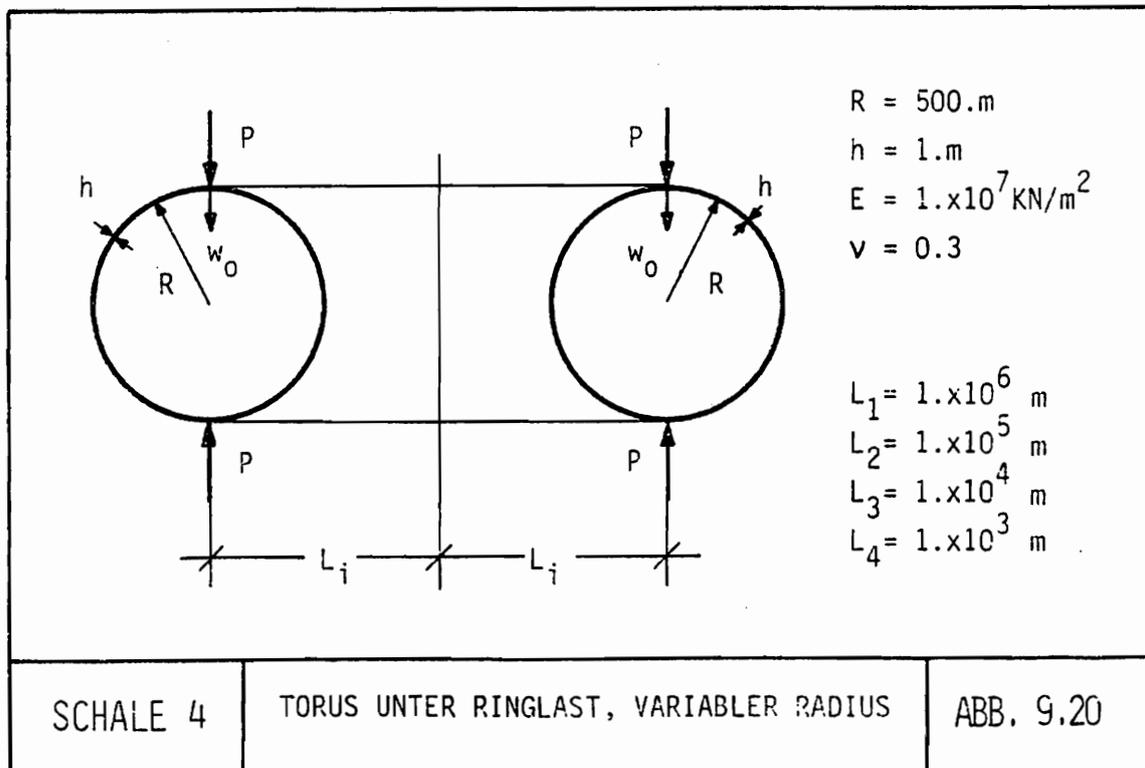
Die Theorie flacher Schalen S1 beginnt beim Torus  $L_1$  die Berechnung bereits mit einer falschen Anfangstangente. Mit abnehmenden Torusradien verbessern sich jedoch ihre Lösungseigenschaften erheblich. Dies gilt ebenso für die konsistent approximierten Variante moderater Rotationen S4 von Pietraszkiewicz.

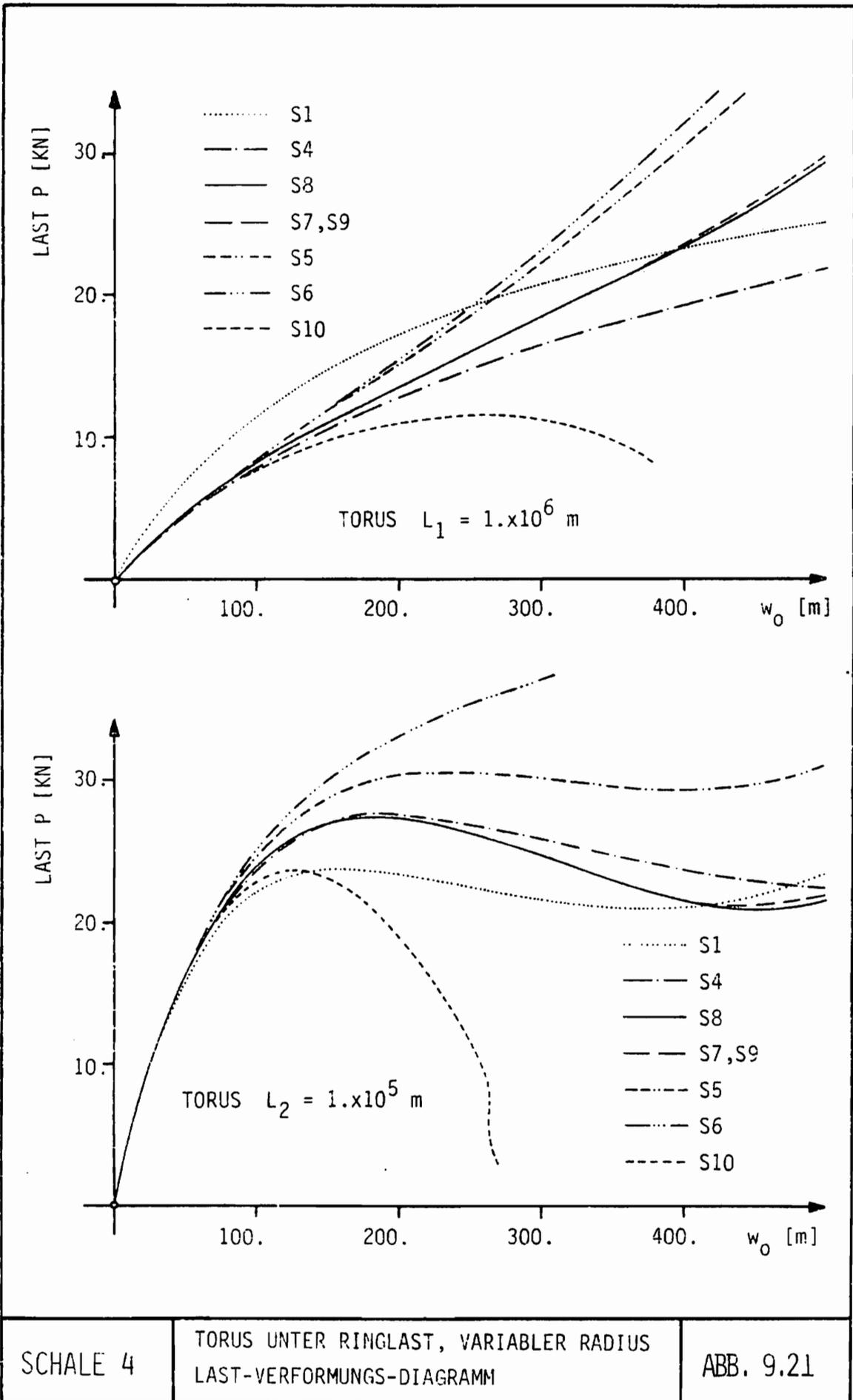
Die Näherung nach Yaghmai S6 führt auch in diesem Beispiel zu stark erhöhten rechnerischen Tragwerkssteifigkeiten. Insbesondere kann im Fall Torus  $L_2$  das Durchschlagsproblem nicht beschrieben werden. Noch deutlichere Abweichungen von den Bezugslösungen liefert die Variante S10. Zudem treten dort erhebliche Konvergenzprobleme während des Itera-

tionsprozesses auf. Die im Nachbeulbereich völlig untauglichen Ergebnisse der Varianten S6 und S10 können durch die schon in den vorangegangenen Beispielen erläuterten inkonsistenten Approximationen und den damit verbundenen größeren relativen Fehlern im Energieausdruck erklärt werden.

Die Theorie mäßig großer Rotationen von Basar und Harte S5 liefert im Vergleich dazu etwas bessere Lösungen. Jedoch ist bemerkenswert, daß diese Variante mit einem exakten Mittelflächendehnungstensor und einem nichtlinearen, quadratisch approximierten Krümmungsänderungstensor stärker von der Bezugslösung abweicht als die vergleichbare Theorie moderater Rotationen S4 mit wesentlich einfacheren kinematischen Beziehungen.

Dieses hochgradig geometrisch nichtlineare Berechnungsbeispiel veranschaulicht unter anderem das Fehlerverhalten verschiedener Theorien dünner elastischer Schalen als Funktion der Tragwerksgeometrien. Die qualitativen Aussagen der vorangegangenen Untersuchungen wurden weitgehend bestätigt.

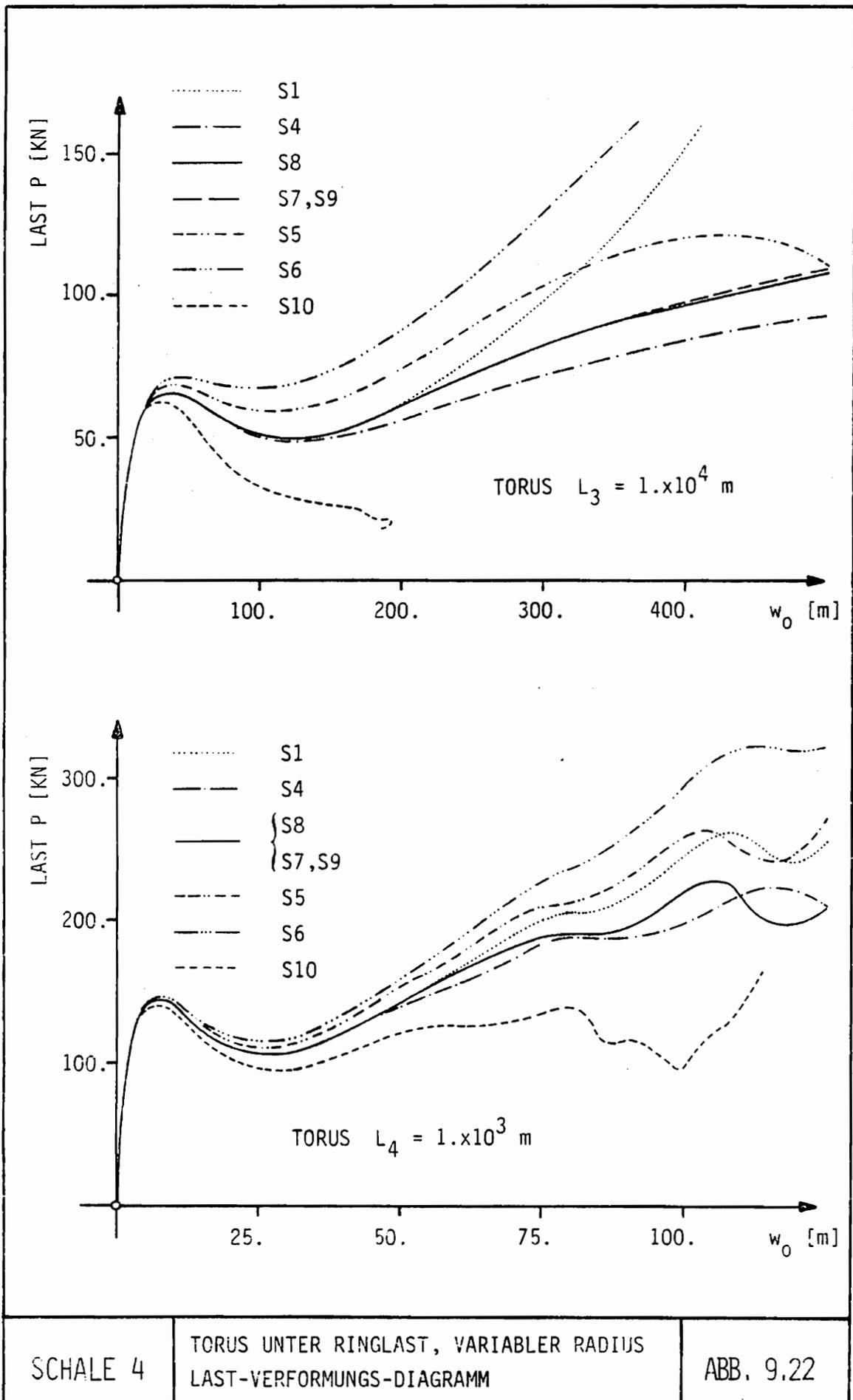




SCHALE 4

TORUS UNTER RINGLAST, VARIABLELER RADIUS  
LAST-VERFORMUNGS-DIAGRAMM

ABB. 9.21



SCHALE 4

TORUS UNTER RINGLAST, VARIABLER RADIUS  
LAST-VERFORMUNGS-DIAGRAMM

ABB. 9.22

#### 9.4. Wertung der Ergebnisse

In allen ausgewählten Anwendungsbeispielen zeigte das in Abschnitt 8 beschriebene gleichmäßig kubisch approximierten Balken- und Schalenelement ausgezeichnete Konvergenzeigenschaften.

Bei der Mehrzahl der untersuchten Balkenprobleme war ein hochgradig geometrisch nichtlineares Tragverhalten mit Auftreten großer und finiter Rotationen zu beobachten. Die Verwendung verschiedener Varianten eindimensional reduzierter Schalen- und Balkentheorien führte dort nicht nur zu erheblichen quantitativen, sondern auch qualitativen Abweichungen von den Bezugslösungen.

Die Suche nach Schalenbeispielen mit ähnlichen Eigenschaften gestaltete sich äußerst schwierig. Erst gezielte Variationen der Schalengeometrie, der Randbedingungen und des Lasttyps lieferten mit der Halbkugel und den Tori unter Ringlasten Systeme, die sich als ausgezeichnete Indikatoren für Näherungsstufen geometrisch nichtlinearer Schalentheorien erwiesen.

Bemerkenswert ist, daß sich die bei der Untersuchung von Balken unter Verwendung verschiedener Theorien gewonnenen Aussagen weitgehend auf Schalenprobleme übertragen ließen. Diese Tatsache mag ihre Erklärung darin finden, daß die bekannten Indikatoren für Näherungsstufen geometrisch nichtlinearer Schalentheorien (s. auch [9.16]) eine charakteristische "linienhafte" Lastabtragung mit langwelligem Deformationsmuster aufweisen. Die Vorgehensweise, Schalentheorien in ihrer eindimensional reduzierten Form an hochgradig nichtlinearen Balkenbeispielen einem Vorabtest zu unterziehen, findet dadurch seine Bestätigung.

Die folgenden Wertungen der Ergebnisse sollen dem Anwender die Auswahl einer für das zur Lösung anstehende Problem optimalen Schalen- bzw. Balkentheorie erleichtern:

- Konsistent approximierten Theorien sind wegen ihres gleichbleibend guten Lösungsverhaltens und ihrer Praktikabilität hinsichtlich der numerischen Anwendung inkonsistenten und energetisch unvollständig verbesserten Näherungen vorzuziehen.
- Auf eine Anpassung des Gültigkeitsbereiches der verwendeten Theorien an das zu lösende Problem ist zu achten. Längs der Last- Verformungsbeziehungen sollten daher in mehreren Punkten Kontrollrechnungen mit

Theorien höherer Nichtlinearität durchgeführt werden. Erst bei größeren Abweichungen auf der gleichen Last-  $\lambda$  bzw. Verschiebungsstufe  $\{q\}$  ist ein Wechsel der Theorie erforderlich.

- Bei Platten- und Schalenproblemen ist für die Mehrzahl baupraktischer Berechnungen mit geringeren Nichtlinearitäten die Donnell-Vlasovsche Näherung (6.2.30) ausreichend. Jedoch liefert sie in einigen Sonderfällen völlig untaugliche Ergebnisse und sollte dann abhängig vom Grad der Nichtlinearität des zu berechnenden Systems durch konsistent approximierte Theorien moderater (6.2.23 - 29) bzw. großer Rotationen (6.2.1 - 22) ersetzt werden.
- Das geometrisch nichtlineare Tragverhalten gekrümmter Balken ist in der Regel nur durch Theorien großer oder finiter Rotationen zu beschreiben. Ausnahmen bilden Probleme mit geringerer Nichtlinearität insbesondere ausgeprägtem Membran-Vorbeulverhalten.
- Einfachste Theorien großer Rotationen (s. auch Abschnitt 7) lieferten ohne Ausnahme in allen Anwendungsbeispielen ausgezeichnete Ergebnisse und das mit einem im Vergleich zu Theorien moderater Rotationen nur geringfügig höheren numerischen Aufwand. Vor allem die Variante mit dem größeren relativen Fehler  $E_2$  bietet sich zur Bearbeitung hochgradig nichtlinearer Problemstellung von Balken und Schalen an.

Es ist anzustreben, diese auf der Basis numerischer Ergebnisse gewonnenen Aussagen durch mathematisch fundierte Untersuchungen zu überprüfen.

Anhang A1

KONSISTENTE APPROXIMATIONEN DES ÄQUIVALENTEN KRÜMMUNGSÄNDERUNGS-  
MASSES  $\kappa_{\alpha\beta}$  IM RAHMEN EINER SCHALENTHEORIE GROSSER ROTATIONEN

Für eine Schalentheorie großer Rotationen wurden in Kapitel 6.2. unter Verwendung verschiedener Größenordnungsabschätzungen für die Rotationen um die Flächennormale und der relativen Fehlermargen  $EO \div E2$  Approximationen des modifizierten Dehnungsmaßes  $\chi_{\alpha\beta}$  vorgestellt. In diesem Kapitel leiten wir die entsprechenden Beziehungen für die Komponenten des Krümmungsänderungstensors  $\kappa_{\alpha\beta}$  als Repräsentant der Varianten 1-4 (s. Kapitel 2.2) ab. Damit erhält man eine Vervollständigung und teilweise Korrektur der Approximationen in [A1.1, A1.2]. Zusätzlich werden wir zeigen, daß beide Dehnungsmaße  $\kappa_{\alpha\beta}$  und  $\chi_{\alpha\beta}$  im Rahmen einer Theorie g/k Rotationen mit den relativen Fehlern E1 und E2 ineinander überführbar sind.

Ausgehend von den Beziehungen (2.2.15), (2.2.13) führen weitere Umformungen und detaillierte Abschätzung aller Terme auf den approximierten Ausdruck für eine Theorie g/g Rotationen

EO  $\div$  E2:

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta} = & -\frac{1}{2} \left[ \varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} + \underbrace{b_{\alpha}^{\lambda} (\theta_{\lambda\beta} - \omega_{\lambda\beta})}_{\text{---}} + \underbrace{b_{\beta}^{\lambda} (\theta_{\lambda\alpha} - \omega_{\lambda\alpha})}_{\text{---}} \right] - \\ & - \frac{1}{2} \underbrace{b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda}}_{\text{---}} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} + \underbrace{\theta_{\mu}^{\lambda} \theta_{\lambda}^{\mu} - \frac{1}{2} \theta_{\lambda}^{\lambda} \theta_{\mu}^{\mu}}_{\text{---}} \right) (\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha}) - \\ & - \frac{1}{4} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} \left( \underbrace{b_{\alpha}^{\lambda} \omega_{\lambda\beta} + b_{\beta}^{\lambda} \omega_{\lambda\alpha}}_{\text{---}} \right) - \varphi^{\mu} \varphi^{\lambda} \omega_{\mu\lambda} b_{\alpha\beta} + \\ & + \left( \varphi^{\lambda} - \frac{1}{2} \varphi^{\lambda} \varphi^{\lambda} + \underbrace{\varphi_{\mu} \omega^{\mu\lambda}}_{\text{---}} \right) \theta_{\lambda\alpha\beta} + O(\theta^3/\lambda) \end{aligned} \quad , \quad (A1-1)$$

wobei die Abkürzung

$$\theta_{\lambda\alpha\beta} = \theta_{\lambda\alpha|\beta} + \theta_{\lambda\beta|\alpha} - \theta_{\alpha\beta|\lambda} \quad (A1-2)$$

verwendet wurde. Analog zu Kapitel 6.2 erhalten wir durch Vernachlässigung der mit einer gestrichelten Linie markierten Terme bzw. der mit

einer gestrichelten und Wellenlinie markierten Größen die Approximationen mit den relativen Fehlern E1 und E2.

Schränkt man die Rotationen um die Flächennormale auf ein moderates Maß ( $\Omega = O(\theta)$ ) ein, so läßt sich die zu (A1-1) analoge Beziehung für eine Theorie g/m Rotationen angeben

EO ÷ E2:

$$\begin{aligned} \varkappa_{\alpha\beta} = & -\frac{1}{2} \left[ \varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} + \underbrace{b_{\alpha}^{\lambda}(\theta_{\lambda\beta} - \omega_{\lambda\beta})}_{\text{Wellenlinie}} + \underbrace{b_{\beta}^{\lambda}(\theta_{\lambda\alpha} - \omega_{\lambda\alpha})}_{\text{Wellenlinie}} \right] - \\ & - \frac{1}{2} \underbrace{b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda}}_{\text{Wellenlinie}} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} + \underbrace{\theta_{\mu}^{\lambda} \theta_{\lambda}^{\mu}}_{\text{Wellenlinie}} - \frac{1}{2} \theta_{\lambda}^{\lambda} \theta_{\mu}^{\mu} \right) (\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha}) + \\ & + \left( \varphi^{\lambda} + \underbrace{\varphi_{\mu} \omega^{\mu\lambda}}_{\text{Wellenlinie}} \right) \theta_{\lambda\alpha\beta} + O(\theta^3/\lambda) \end{aligned} \quad (A1-3)$$

Große Rotationen um die Tangenten ( $\Omega_{\alpha} = O(\sqrt{\theta})$ ) bei gleichzeitig kleinen Rotationen um die Flächennormale ( $\Omega = O(\theta^2)$ ), eine Annahme, die für viele Schalenkonstruktionen berechtigt erscheint, liefert schließlich den entsprechenden Ausdruck für eine Theorie g/k Rotationen

EO ÷ E2:

$$\begin{aligned} \varkappa_{\alpha\beta} = & -\frac{1}{2} (\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha} + \underbrace{b_{\alpha}^{\lambda} \theta_{\lambda\beta}}_{\text{Wellenlinie}} + \underbrace{b_{\beta}^{\lambda} \theta_{\lambda\alpha}}_{\text{Wellenlinie}}) - \\ & - \frac{1}{2} \underbrace{b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda}}_{\text{Wellenlinie}} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda} + \underbrace{\theta_{\mu}^{\lambda} \theta_{\lambda}^{\mu}}_{\text{Wellenlinie}} - \frac{1}{2} \theta_{\lambda}^{\lambda} \theta_{\mu}^{\mu} \right) (\varphi_{\alpha|\beta} + \varphi_{\beta|\alpha}) + \\ & + \varphi^{\lambda} \theta_{\lambda\alpha\beta} + O(\theta^3/\lambda) \end{aligned} \quad (A1-4)$$

Das kubische Polynom in Verschiebungen und deren Flächenableitungen  $\varkappa_{\alpha\beta}$  (A1-4) soll im folgenden durch weitere Umformungen mit anschließenden energiekonsistenten Abschätzungen markanter Beiträge in ein quadratisches und damit in die Form des modifizierten Maßes  $\chi_{\alpha\beta}$  überführt werden. Dabei werden generell größere relative Fehler E1 bzw. E2 angenommen.

Unter Zuhilfenahme der bekannten Transformationen [A1.1]

$$\omega_{\lambda\alpha|\beta} = \theta_{\alpha\beta|\lambda} - \theta_{\lambda\beta|\alpha} + b_{\alpha\beta} \varphi_{\lambda} - b_{\lambda\beta} \varphi_{\alpha} \quad (\text{A1-5})$$

läßt sich aus (A1-2) die hilfreiche Beziehung

$$\theta_{\lambda\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\theta_{\lambda\alpha|\beta} + \theta_{\lambda\beta|\alpha} - b_{\lambda\beta} \varphi_{\alpha} - b_{\lambda\alpha} \varphi_{\beta}) + b_{\alpha\beta} \varphi_{\lambda} + O(\theta^2/\lambda) \quad (\text{A1-6})$$

gewinnen. Zusammen mit (6.2.13)<sub>1</sub> sowie (6.2.13)<sub>2</sub> und deren erster kovarianter Ableitung

$$\varphi^{\lambda} \theta_{\lambda\alpha|\beta} - \varphi_{\alpha|\beta} \theta_{\lambda}^{\lambda} = \varphi_{\alpha} \theta_{\lambda}^{\lambda} - \varphi^{\lambda}{}_{|\beta} \theta_{\lambda\alpha} \quad (\text{A1-7})$$

erhalten wir schließlich den Ausdruck

E1 ÷ E2:

$$\begin{aligned} \varkappa_{\alpha\beta} = & \frac{1}{2} \left[ -(\delta_{\alpha}^{\lambda} + \theta_{\alpha}^{\lambda}) \varphi_{\lambda|\beta} - (\delta_{\beta}^{\lambda} + \theta_{\beta}^{\lambda}) \varphi_{\lambda|\alpha} + \right. \\ & + \varphi_{\alpha} (1 + \theta_{\alpha}^{\alpha})_{|\beta} + \varphi_{\beta} (1 + \theta_{\beta}^{\beta})_{|\alpha} + \underbrace{b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} \varphi_{\lambda}} - \\ & \left. - \varphi_{\lambda} (\underbrace{b_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\beta}} + \underbrace{b_{\beta}^{\lambda} \varphi_{\alpha}}) - \underbrace{b_{\alpha}^{\lambda} \theta_{\lambda\beta}} - \underbrace{b_{\beta}^{\lambda} \theta_{\lambda\alpha}} \right] + O(\theta^2 \sqrt{\theta}/\lambda) \\ & = \chi_{\alpha\beta} \quad \text{gemäß (6.2.20)} \end{aligned} \quad (\text{A1-8})$$

Ausgehend von zwei äquivalenten jedoch a priori verschiedenen Krümmungsänderungstensoren  $\chi_{\alpha\beta}$  (6.2.19) und  $\kappa_{\alpha\beta}$  (A1-4), beides kubische Polynome in Verschiebungen und Verschiebungsgradienten, führen konsistente Transformationen auf die kompakten quadratischen Beziehungen einer einfachsten Schalentheorie g/k Rotationen (6.2.20) bzw. (A1-8).

Anhang A2

DAS DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEM DER ALLGEMEINEN GEOMETRISCH NICHTLINEAREN THEORIE GEKRÜMMTER BALKEN BEI VERWENDUNG ÄQUIVALENTER KRÜMMUNGSÄNDERUNGSBEZIEHUNGEN

Auf der Basis äquivalenter Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen (6.3.16 - 21) und modifizierter Randparameter (6.3.23 - 24) lassen sich mit Hilfe des Prinzips vom stationären Wert des Gesamtpotentials (6.3.27) die statischen Beziehungen einer allgemeinen geometrisch nichtlinearen Balkentheorie bei kleinen Dehnungen und finiten Rotationen ableiten. Stellvertretend für die Varianten 1 - 4 und 5 - 7 werden wir im folgenden das vollständige Differentialgleichungssystem des nichtlinearen Randwertproblems unter Verwendung der Krümmungsänderungsbeziehungen  $\kappa_{\alpha\beta}$  bzw.  $\chi_{\alpha\beta}$  angeben:

a)  $\kappa_{\alpha\beta}$  (6.3.17)

Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen:

$$\gamma_{\langle 11 \rangle} = \gamma_{\langle 11 \rangle}(\underline{u}), \quad \partial \mathcal{E}_{\langle 11 \rangle} = \partial \mathcal{E}_{\langle 11 \rangle}(\underline{u}), \quad \text{gemäß (6.3.16) (6.3.17)} \quad (\text{A2-1})$$

geometrische Randbedingungen bei  $\theta_+^1$  und  $\theta_-^1$ :

$$\underline{u} = \underline{u}^*, \quad n_\nu = n_\nu^*, \quad (\text{A2-2})$$

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\underline{T}_{,1} + \underline{p} = 0, \quad (\text{A2-3})$$

mit

$$\underline{T} = \frac{1}{A_1} (N^{\langle 11 \rangle} - \bar{\epsilon} M^{\langle 11 \rangle}) \underline{\bar{a}}_1 + \frac{1}{A_1} \left( M^{\langle 11 \rangle} + \frac{\gamma_{\langle 11 \rangle, 1}}{1 + 2\gamma_{\langle 11 \rangle}} M^{\langle 11 \rangle} \right) \underline{\bar{n}}, \quad (\text{A2-4})$$

statische Randbedingungen bei  $\theta_+^1$  und  $\theta_-^1$ :

$$\underline{T} = \underline{T}_\nu^*, \quad M = M^*, \quad (\text{A2-5})$$

mit

$$M = \frac{1}{D} (1 + 2\gamma_{\langle 11 \rangle}) M^{\langle 11 \rangle}, \quad M^* = \frac{1}{D} H_v^* \cdot \bar{a}_1, \quad D = A_1 (1 + \theta_{\langle 11 \rangle}), \quad (\text{A2-6})$$

konstitutive Beziehungen:

$$N^{\langle 11 \rangle} = EA \gamma_{\langle 11 \rangle}, \quad M^{\langle 11 \rangle} = EJ \varrho_{\langle 11 \rangle}. \quad (\text{A2-7})$$

b)  $\chi_{\alpha\beta}$  (6.3.20)

Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen:

$$\gamma_{\langle 11 \rangle} = \gamma_{\langle 11 \rangle}(\underline{u}), \quad \chi_{\langle 11 \rangle} = \chi_{\langle 11 \rangle}(\underline{u}), \quad \text{gemäß (6.3.16) (6.3.20)} \quad (\text{A2-8})$$

geometrische Randbedingungen bei  $\theta_+^1$  und  $\theta_-^1$ :

$$\underline{u} = \underline{u}^*, \quad n_v = n_v^*, \quad (\text{A2-9})$$

Gleichgewichtsbedingungen

$$\underline{T}_{,1} + \underline{p} = 0, \quad (\text{A2-10})$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{T} = \frac{1}{A_1} \left[ (1 + \theta_{\langle 11 \rangle}) (N^{\langle 11 \rangle} - \sigma M^{\langle 11 \rangle}) - \frac{1}{A_1^2} (A_1 \varphi_{\langle 11 \rangle})_{,1} M^{\langle 11 \rangle} - \right. \\ \left. - A_1 \left( \frac{1}{A_1^2} \varphi_{\langle 11 \rangle} M^{\langle 11 \rangle} \right)_{,1} \right] \underline{e}_1 + \frac{1}{A_1} \left[ \varphi_{\langle 11 \rangle} (N^{\langle 11 \rangle} - \sigma M^{\langle 11 \rangle}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{A_1^2} (A_1 \theta_{\langle 11 \rangle})_{,1} M^{\langle 11 \rangle} + \left( \frac{1}{A_1} M^{\langle 11 \rangle} \right)_{,1} + A_1 \left( \frac{1}{A_1^2} \theta_{\langle 11 \rangle} M^{\langle 11 \rangle} \right)_{,1} \right] \underline{n}, \end{aligned} \quad (\text{A2-11})$$

statische Randbedingungen bei  $\theta_+^1$  und  $\theta_-^1$ :

$$\underline{T} = \underline{T}^*, \quad M = M^*, \quad (\text{A2-12})$$

mit

$$M = \frac{1}{D} (1 + 2\gamma_{\langle 11 \rangle})^{3/2} M^{\langle 11 \rangle}, \quad M^* = \frac{1}{D} H_v^* \cdot \bar{a}_1, \quad (\text{A2-13})$$

konstitutive Beziehungen:

$$N^{\langle 11 \rangle} = EA \gamma_{\langle 11 \rangle}, \quad M^{\langle 11 \rangle} = EJ \chi_{\langle 11 \rangle}. \quad (\text{A2-14})$$

Anhang A3

ZUSAMMENSTELLUNG VON DEHNUNGS-VERSCHIEBUNGSBEZIEHUNGEN DER ZUR BERECHNUNG HERANGEZOGENEN BALKENTHEORIEN

Nr.	Dehnungs - Verschiebungsbeziehungen	Bezug	
B1	$\tilde{y}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2A_1^2} W_{,1}^2$ $\tilde{\alpha}_{\langle 11 \rangle} = -\frac{1}{A_1^2} W_{,11}$	(6.2.29)	(A3-1)
B2	$\tilde{y}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2$ $\tilde{\alpha}_{\langle 11 \rangle} = -\frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1}$	(6.2.26)	(A3.2)
B3	$\tilde{y}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2$ $\tilde{\alpha}_{\langle 11 \rangle} = -\frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} - \sigma \theta_{\langle 11 \rangle}$	(6.2.22) (6.2.23)	(A3-3)
B4	$\tilde{y}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2A_1^2} W_{,1}^2$ $\tilde{\alpha}_{\langle 11 \rangle} = -\frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} - \sigma \theta_{\langle 11 \rangle}$	s. Kapitel (6.4)	(A3-4)
B5	$\tilde{y}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2A_1^2} W_{,1}^2$ $\tilde{\alpha}_{\langle 11 \rangle} = -\frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1}$	(6.2.29) (6.2.28)	(A3-5)
B6	$\tilde{y}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2$ $\tilde{\alpha}_{\langle 11 \rangle} = -\frac{1}{A_1^2} W_{,11}$	(6.2.28) (6.2.29)	(A3-6)
B7	$\tilde{y}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2 + \frac{1}{2} \theta_{\langle 11 \rangle}^2$ $\tilde{\alpha}_{\langle 11 \rangle} = -\frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} - \sigma \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle, 1} - \frac{1}{2} \sigma \varphi_{\langle 11 \rangle}^2$	s. Kapitel (6.4)	(A3-7)

Nr.	Dehnungs - Verschiebungsbeziehungen	Bezug	
B8	$\tilde{\gamma}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2$ $\tilde{\alpha}_{\langle 11 \rangle} = -\frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} - \sigma \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle, 1} - \frac{1}{2} \sigma \varphi_{\langle 11 \rangle}^2$	s. Kapitel (6.4)	(A3-8)
B9	$\tilde{\gamma}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2 + \frac{1}{2} \theta_{\langle 11 \rangle}^2$ $\tilde{\alpha}_{\langle 11 \rangle} = -\frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} - \sigma \theta_{\langle 11 \rangle} - \frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle, 1} - \frac{1}{2} \sigma \varphi_{\langle 11 \rangle}^2$	(6.2.17) (6.2.19)	(A3-9)
B10	$\tilde{\gamma}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2 + \frac{1}{2} \theta_{\langle 11 \rangle}^2$ $\tilde{\alpha}_{\langle 11 \rangle} = \frac{1}{A_1} (-\varphi_{\langle 11 \rangle, 1} - \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} \theta_{\langle 11 \rangle} + \varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle, 1})$	(6.2.17) (6.2.19)	(A3-10)
B11	$\tilde{\gamma}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2 + \frac{1}{2} \theta_{\langle 11 \rangle}^2$ $\tilde{\alpha}_{\langle 11 \rangle} = \frac{1}{A_1} (-\varphi_{\langle 11 \rangle, 1} - \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} \theta_{\langle 11 \rangle} + \varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle, 1}) - \frac{1}{2} \sigma \varphi_{\langle 11 \rangle}^2 - \frac{1}{2} \sigma \theta_{\langle 11 \rangle}^2 - \sigma \theta_{\langle 11 \rangle}$	(2.2.14) (4.1.2)	(A3-11)
B12	$\tilde{\gamma}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2 + \frac{1}{2} \theta_{\langle 11 \rangle}^2$ $\tilde{\alpha}_{\langle 11 \rangle} = -\frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} - \sigma \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle, 1} - \frac{1}{2} \sigma \varphi_{\langle 11 \rangle}^2 - \frac{1}{2} \sigma \theta_{\langle 11 \rangle}^2 + \frac{1}{2A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2$	(6.3.28) (6.3.17)	(A3-12)
B13	$\tilde{\gamma}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2 + \frac{1}{2} \theta_{\langle 11 \rangle}^2$ $\tilde{\alpha}_{\langle 11 \rangle} = \frac{1}{A_1} (-\varphi_{\langle 11 \rangle, 1} + \varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle, 1} + \frac{1}{2} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2)$	(6.3.28) (6.3.29)	(A3-13)
B14	$\tilde{\gamma}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2 + \frac{1}{2} \theta_{\langle 11 \rangle}^2$ $\tilde{\alpha}_{\langle 11 \rangle} = -\frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} - \sigma \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle} \theta_{\langle 11 \rangle, 1} - \frac{1}{2} \sigma \varphi_{\langle 11 \rangle}^2 + \frac{1}{2A_1} \varphi_{\langle 11 \rangle, 1} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2$	(6.3.28) (6.3.29)	(A3-14)

Nr.	Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen	Bezug	
B15	$\tilde{\gamma}_{\langle 11 \rangle} = \theta_{\langle 11 \rangle} + \frac{1}{2} \varphi_{\langle 11 \rangle}^2 + \frac{1}{2} \theta_{\langle 11 \rangle}^2$ $\tilde{\epsilon}_{\langle 11 \rangle} = -\frac{1}{A_1} \rho_{\langle 11 \rangle, 1} - \frac{1}{A_1} \rho_{\langle 11 \rangle, 1} \theta_{\langle 11 \rangle} - \frac{1}{2} \sigma \varphi_{\langle 11 \rangle}^2$	s. Kapitel (6.4)	(A3-15)

ZUSAMMENSTELLUNG VON DEHNUNGS-VERSCHIEBUNGSBEZIEHUNGEN DER ZUR BERECHNUNG HERANGEZOGENEN SCHALENTHEORIEN

Nr.	Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen	Bezug	
S1	$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} w_{, \alpha} w_{, \beta}$ $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} = -w_{, \alpha\beta}$	(6.2.29)	(A3-16)
S2	$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta}$ $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (\varphi_{\alpha \beta} + \varphi_{\beta \alpha})$	(6.2.28)	(A3-17)
S3	$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \varphi^2$ $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} (\varphi_{\alpha \beta} + \varphi_{\beta \alpha} - b_{\alpha}^{\lambda} \omega_{\lambda\beta} - b_{\beta}^{\lambda} \omega_{\lambda\alpha})$	(6.2.26)	(A3-18)
S4	$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \varphi^2 - \frac{1}{2} (\theta_{\alpha}^{\lambda} \omega_{\lambda\beta} + \theta_{\beta}^{\lambda} \omega_{\lambda\alpha})$ $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \{ \varphi_{\alpha \beta} + \varphi_{\beta \alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda\beta} + b_{\beta}^{\lambda} \varphi_{\lambda\alpha} \}$	(6.2.22) (6.2.23)	(A3-19)
S5	$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} + \frac{1}{2} a_{\alpha\beta} \varphi^2 - \frac{1}{2} (\theta_{\alpha}^{\lambda} \omega_{\lambda\beta} + \theta_{\beta}^{\lambda} \omega_{\lambda\alpha}) + \frac{1}{2} \theta_{\alpha}^{\lambda} \theta_{\lambda\beta}$ $\tilde{\epsilon}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \{ \varphi_{\alpha \beta} + \varphi_{\beta \alpha} + b_{\alpha}^{\lambda} \varphi_{\lambda\beta} + b_{\beta}^{\lambda} \varphi_{\lambda\alpha} - \varphi_{\lambda} (\varphi^{\lambda}_{\alpha \beta} + \varphi^{\lambda}_{\beta \alpha} + b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda} - \varphi_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} - \varphi_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda}) \}$	s. Kapitel (6.4)	(A3-20)



Nr.	Dehnungs - Verschiebungsbeziehungen	Bezug	
S10*	$\tilde{\gamma}_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta} + \frac{1}{2} \theta_{\alpha}^{\lambda} \theta_{\lambda\beta}$ $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \left\{ (\delta_{\alpha}^{\lambda} + \theta_{\alpha}^{\lambda}) \varphi_{\lambda \beta} + (\delta_{\beta}^{\lambda} + \theta_{\beta}^{\lambda}) \varphi_{\lambda \alpha} + \right.$ $\left. + \theta_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\beta} + \theta_{\beta}^{\lambda} b_{\lambda\alpha} + \varphi_{\lambda} (\varphi_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} + \right.$ $\left. + \varphi_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda} - b_{\alpha\beta} \varphi^{\lambda}) \right\}$	s. Kapitel (6.4)	(A3-25)

\* Die Dehnungs-Verschiebungsbeziehungen der Theorien S6 und S10 wurden in [A3.1, A3.2] mit Hilfe einer physikalischen Komponentenschreibweise für das axialsymmetrische Verformungsverhalten von Rotationsschalen abgeleitet. Sie können aus den in (A3-21, A3-25) vorgestellten Tensorkomponenten durch entsprechende Reduktion gewonnen werden.

Abschnitt 1

- [1.1] Harte, R.: Doppelt gekrümmte finite Dreieckelemente für die lineare und geometrisch nichtlineare Berechnung allgemeiner Flächentragwerke, Techn. wiss. Mitt. d. Inst. KIB, Nr. 82-10, Ruhr-Universität Bochum 1982.
- [1.2] Koiter, W. T.: On the nonlinear theory of thin elastic shells, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., Ser. B, 69 (1966), 1-54.
- [1.3] Koiter, W. T.; Simmonds, J. G.: Foundation of shell theory, in "Theoretical and Applied Mechanics", Proc. 13<sup>th</sup> IUTAM Congr. Moscow 1972, 150 - 175, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973.
- [1.4] Koiter, W. T.: On the foundations of the linear theory of thin elastic shells, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., Ser. B, 73 (1970), 169 - 195.
- [1.5] Krätzig, W. B.; Basar, Y.; Wittek, U.: Nonlinear behavior and elastic stability of shells, -Theoretical Concepts - Numerical Computation - Results, Proc. Coll. Buckling of Shells, Universität Stuttgart, 1982.
- [1.6] Pietraszkiewicz, W.: Finite rotations and Lagrangean description in the non-linear theory of shells, Polish Scientific Publishers, Warszawa-Poznań 1979.
- [1.7] Pietraszkiewicz, W.: Introduction to the non-linear theory of shells, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 10, 1977.
- [1.8] Pietraszkiewicz, W.: Finite rotations in the non-linear theory of thin shells, Beitrag zu dem CISM-Kurs "Thin Shells", Udine 1977.
- [1.9] Pietraszkiewicz, W.; Szabowicz, M. L.: Entirely Lagrangian non-linear theory of thin shells, Archives of Mechanics, 33, 2, 273 - 388, Warszawa 1981.
- [1.10] Pietraszkiewicz, W.: On consistent approximations in the geometrically non-linear theory of shells, Ruhr-Universität Bochum, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 26, 1981.
- [1.11] Schmidt, R.: Variationsprinzipie für geometrisch nichtlineare Schalentheorien bei Rotationen mittlerer Größenordnungen, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1980.
- [1.12] Schmidt, R.: Variational principles for general and restricted geometrically non-linear Kirchhoff-Love type shell theories, Proceedings of the International Conference on the Finite Element Methods, Shanghai, China, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York, 1982.

- [1.13] Stein, E.; Berg, A.; Wagner, W.: Different levels of nonlinear shell theory in finite element stability analysis, Proc. Coll. Buckling of Shells, Universität Stuttgart, 1982.
- [1.14] Stumpf, H.: The derivation of dual extremum and complementary stationary principles in geometrical non-linear shell-theory, Ing.-Arch. 48, 221 - 237, 1979.
- [1.15] Stumpf, H.: On the linear and nonlinear stability analysis in the theory of thin elastic shells, Ingenieur-Archiv 51, 195 - 213, 1981.
- [1.16] Stumpf, H.: Unified operator description, nonlinear buckling and post-buckling analysis of thin elastic shells, Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik 34, 1982.

## Abschnitt 2

- [2.1] Basar, Y.: Eine geometrisch nichtlineare Schalentheorie, Konstruktiver Ingenieurbau-Berichte Nr. 38/39, Ruhr-Universität Bochum 1981.
- [2.2] Budiansky, B.: Notes on nonlinear shell theory, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, Vol. 35, 393 - 401, 1968.
- [2.3] Green, A. E.; Zerna, W.: Theoretical elasticity, second edition, Clarendon Press, Oxford 1968.
- [2.4] Harte, R.: [1.1]
- [2.5] Klingbeil, E.: Tensorrechnung für Ingenieure, Bibliographisches Institut, Mannheim-Wien-Zürich 1966.
- [2.6] Koiter, W. T.: [1.2]
- [2.7] Koiter, W. T.; Simmonds, J. G.: [1.3]
- [2.8] Krätzig, W. B.: Introduction to general shell theory, Beitrag zu dem CISM-Kurs "Thin Shells" Udine 1977.
- [2.9] Leonhard, R. W.: Nonlinear first approximation thin shell and membrane theory, Dissertation, Virginia Polytechnic Institute, 1961.
- [2.10] Makowski, J.: Liniowa i nieliniowa analiza stateczności sprężystej cienkich powłok, Dissertation, Polskiej Akademii Nauk, Gdańsk 1981.
- [2.11] Naghdi, P. M.: Foundations of elastic shell theory, in "Progress in Solid Mechanics", Vol. IV, 1 - 90, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1963.
- [2.12] Pietraszkiewicz, W.: [1.6]

- [2.13] Pietraszkiewicz, W.: [1.7]
- [2.14] Pietraszkiewicz, W.: [1.8]
- [2.15] Pietraszkiewicz, W.: Finite rotations in shells, in "Theory of Shells", Proc. 3<sup>rd</sup> IUTAM Symp. on Shell Theory, Tbilisi 1978, 445 - 471, North-Holland Publ. Co., Amsterdam-New York-Oxford 1980.
- [2.16] Pietraszkiewicz, W.; Szwabowicz, M. L.: [1.9]
- [2.17] Sanders, J. L.: Nonlinear theories for thin shells, Quart. Appl. Math., Vol. 21, 21 - 36, 1963.
- [2.18] Budiansky, B.; Sanders, J. L.: On the "best" first order linear shell theory, "Progress in Applied Mechanics", (The Prager Anniv. Vol.), 129 - 140, Macmillan, New York 1963.

### Abschnitt 3

- [3.1] Basar, Y.: [2.1]
- [3.2] Green, A.E.; Zerna, W.: [2.3]
- [3.3] John, F.: Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations, Comm. Pure and Appl. Math. 18, 235-267, 1965.
- [3.4] Koiter, W. T.: A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells; Part I: Foundations and linear theory, Report of Laboratory of Applied Mechanics, Technological University Delft, 1959.
- [3.5] Koiter, W. T.: A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells, in "Theory of Thin Elastic Shells", Proc. IUTAM Symp. Delft 1959, 12-33, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1960.
- [3.6] Koiter, W. T.; Simmonds, J. G.: [1.3]
- [3.7] Pietraszkiewicz, W.: [1.6]
- [3.8] Pietraszkiewicz, W.: [1.7]
- [3.9] Pietraszkiewicz, W.; Szwabowicz, M. L.: [1.9]
- [3.10] Pietraszkiewicz, W.: Consistent second approximation to the elastic strain energy of a shell, ZAMM 59, T206-208, 1979.

Abschnitt 4

- [4.1] Hibbit, H. D.; Marcal, P. V.; Rice, J. R.: A finite element formulation for problems of large strain and large displacement, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 6, 1069-1086, 1970.
- [4.2] Koiter, W. T.: General equations of elastic stability of thin shells, *Proc. Symp. Theory of Shells to Honor Lloyd Hamilton Donnell*, Houston/Texas 1967, 185 - 227 .
- [4.3] Labisch, F. K.: Some applications and methods of nonlinear functional analysis in finite displacement plate theory, *Lecture Notes in Math. 503*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 374 - 383 , 1976.
- [4.4] Leibholz, H.: *Stabilitätstheorie*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1968.
- [4.5] Nemat-Nasser, S.: General variational principles in nonlinear and linear elasticity with applications, in "*Mechanics Today*", Vol. 1, 214-261, 1972.
- [4.6] Pietraszkiewicz, W.; Szwabowicz, M. L.: [2.16]
- [4.7] Ramm, E.: *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente*, Habilitationsschrift, Universität Stuttgart, 1976.
- [4.8] Schmidt, R.: [1.12]
- [4.9] Schmidt, R.: On variational formulations in the general geometrically non-linear first-approximation theory of thin elastic shells, *ZAMM* 62, T 165 - 167, 1982.
- [4.10] Schmidt, R.: [1.11]
- [4.11] Stumpf, H.: Generating functionals and extremum principles in nonlinear elasticity with application to nonlinear plate and shallow shell theory, *Lecture Notes in Math. 503*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 500-510, 1976.
- [4.12] Stumpf, H.: [1.15]
- [4.13] Stumpf, H.: The derivation of dual extremum and complementary stationary principles in geometrical non-linear shell theory, *Ing.-Arch.* 48, 221 - 237, 1979.
- [4.14] Stumpf, H.: Die dualen Variationsprinzipien mit Extremaleigenschaft in der nichtlinearen Theorie flacher Schalen, *ZAMM* 56, T 153 - T 155, 1976.
- [4.15] Stumpf, H.: Stationary and extremal variational principles in nonlinear moderate rotation shell theory, *Proc. German-Polish Conf. Mech. of Inelastic Media and Structures*, Warsaw 1978, Polish Scientific Publisher 1982.
- [4.16] Szwabowicz, M. L.: *Geometrycznie nieliniowa teoria cienkich powłok sprężystych w opisie Lagrange'a*, Dissertation, Polskiej Akademii Nauk, Gdańsk, 1983.

- [4.17] Szwabowicz, M. L.: Potential boundary load in the nonlinear theory of thin shells, Trans. Inst. Fluid-Flow Mach., Gdańsk, 1921.
- [4.18] Washizu, K.: Variational methods in elasticity and plasticity, second edition, Pergamon Press, Oxford 1975.

#### Abschnitt 5

- [5.1] Basar, Y.: Eine Schalentheorie endlicher Verformungen und ihre Anwendung zur Herleitung der Stabilitätstheorie, ZAMM 52, 197 - 211, 1972.
- [5.2] Budiansky, B.: [2.2]
- [5.3] Budiansky, B.: Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures, Adv. Appl. Mech. 14, 1 - 65, 1974.
- [5.4] Danielson, D. A.; Simmonds, J. G.: Accurate buckling equations for arbitrary and cylindrical elastic shells, Int. J. Eng. Sci. 7, 459 - 468, 1969.
- [5.5] Fritz, H.; Krätzig, W. B.; Wittek, U.: Stabilitätsgleichungen elastischer Flächentragwerke unter besonderer Beachtung der Energieerhaltung, ZAMM 56, 409 - 421, 1976.
- [5.6] Fritz, H.; Wittek, U.: Die Bedeutung dehnungsloser Beulzustände bei der Stabilitätsberechnung von Schalen, Der Stahlbau 2, 40 - 45, 1977.
- [5.7] Koiter, W. T.: A sufficient condition for the stability of shallow shells, Proc. K. Ned. Akad. Wet. Ser. B70, 367 - 375, 1967.
- [5.8] Koiter, W. T.: [4.2]
- [5.9] Krätzig, W. B.; Basar, Y.; Wittek, U.: [1.5]
- [5.10] Labisch, F.K.: The shallow arch problem for nonsymmetric vertical loads, ZAMM 64, Heft 4/5, 1984, im Druck.
- [5.11] Nolte, L.-P.: Stability equations of the general geometrically non-linear first approximation theory of thin elastic shells, ZAMM 63, T79 - T82, 1983.
- [5.12] Stumpf, H.: [1.15]
- [5.13] Stumpf, H.: The stability equations of the consistent nonlinear elastic shell theory with moderate rotations, in "Stability in the Mechanics of Continua", Proc. IUTAM Symp. Mümbrecht (Germany) 1981, 89 - 100, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [5.14] Stumpf, H.: [1.16]
- [5.15] Stumpf, H.: On the post-buckling analysis of thin elastic shells, ZAMM 63, 4/5, T101 - 103, 1983.

- [5.16] Stumpf, H.: On the stability analysis of thin elastic shells and catastrophe theory, ZAMM 64, Heft 4/5, T 191 - T 194, 1984, im Druck.
- [5.17] Vainberg, M. M.: Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations, John Wiley & Sons, New York-Toronto, 1973.
- [5.18] Wittek, U.: Die Stabilitätsgleichungen der Schalentheorie und ihre Anwendung zur Beurteilung des Schwingungs- und Stabilitätsverhaltens der Rotationsschalen, Konstruktiver Ingenieurbau in Forschung und Praxis, Festschrift W. Zerna, u. Institut KIB, Werner Verlag, 53 - 63, 1976.
- [5.19] Wittek, U.: Beitrag zum Tragverhalten der Strukturen bei endlichen Verformungen unter besonderer Beachtung des Nachbeulmechanismus dünner Flächentragwerke, Techn. wiss. Mittlg. d. Inst. KIB, Nr. 80-1, Ruhr-Universität Bochum, 1980.

#### Abschnitt 6

- [6.1] Basar, Y.: [2.1]
- [6.2] Brink, K.: Theorie und Berechnung in einer Ebene gekrümmter Stäbe unter großen Verformungen, Diss., Techn. wiss. Mitt. d. Inst. KIB, Nr. 79-1, Ruhr-Universität Bochum, 1979.
- [6.3] Brink, K.; Krätzig, W. B.: Geometrically correct formulations for curved finite bar elements under large deformations, in "Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics", 236 - 256, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981.
- [6.4] Budiansky, B. and Sanders, J. L.: [2.18]
- [6.5] Casciaro, R.; Di Carlo, A.; Pignataro, M.: A finite element technique for bifurcation analysis, Pubblicazione N. II-192, des Istituto di Scienza delle Costruzioni, UNIVERSITA' ROMA, 1976.
- [6.6] Donnell, L. H.: Stability of thin-walled tubes under torsion, NACA TR 479, 1933.
- [6.7] Ernst, L. J.: A geometrically non-linear finite element shell theory; applications to the postbuckling behaviour of shells, in "Theory of Shells", Proc. 3<sup>rd</sup> IUTAM Symp. on Shell Theory, Tbilisi 1978, 509 - 535, North-Holland Publ. Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1980.
- [6.8] Gass, N.: Some two field variational principles for nonlinear deformation analysis of shells, ZAMM 55, 515 - 521, 1975.

- [6.9] Harte, R.: [1.1]
- [6.10] von Kármán, T.: Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, Encykl. der Math. Wiss., Vol. IV/4, 311-385, Leipzig: Teubner 1910.
- [6.11] Koiter, W. T.: [1.2]
- [6.12] Krätzig, W. B.; Bazar, Y.; Wittek, U.: [1.5]
- [6.13] Leonard, R. W.: [2.9]
- [6.14] Lumpe, G.: Geometrisch nichtlineare Berechnung von räumlichen Stabwerken, Dissertation, Universität Hannover, 1982.
- [6.15] Makowski, J.: [2.10]
- [6.16] Marguerre, K.: Zur Theorie der gekrümmten Platte großer Formänderung, Proc. 5th Int. Congr. of Appl. Mech. Cambridge/Mass. 1938, 93-101, Wiley and Sons 1939.
- [6.17] Murakawa, H.; Reed, K. W.; Atluri, S. N.; Rubinstein, R.: Stability analysis of structures via a new complementary energy method, Computers & Structures, Vol. 13, 11-18, 1981.
- [6.18] Nachbar, W.; Jong, J. M.: Quadratic eigenvalue problems from a nonlinear structural analysis, SIAM J. Appl. Math., Vol. 25, No. 3, 539-555, Nov. 1973.
- [6.19] Naghdi, P. M.: [2.11]
- [6.20] Nolte, L.-P.; Stumpf, H.: Energy-consistent large rotation shell theories in Lagrangean description, Mechanics Research Communications, Vol.10(4), 213 - 221, 1983.
- [6.21] Obrecht, H.; Wunderlich, W.; Schrödter, V.: Large deflections and stability of thin-walled beam structures, "Stability in the Mechanics of Continua", Proc. 2<sup>nd</sup> IUTAM Symp., Nürnberg 1981, 165-184, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [6.22] Pietraszkiewicz, W.: [2.12]
- [6.23] Pietraszkiewicz, W.: [2.13]
- [6.24] Pietraszkiewicz, W.: [2.14]
- [6.25] Pietraszkiewicz, W.: [1.10]
- [6.26] Pietraszkiewicz, W.: A simplest consistent version of the geometrically non-linear theory of elastic shells undergoing large/small rotations, ZAMM 1983, im Druck.
- [6.27] Pietraszkiewicz, W.: O uproszczonych wariantach geometrycznie nieliniowej teorii cienkich powłok sprężystych przy o graniczonych obrotach, Proc. of the conference "Thin shells theory and applications", Opole, 1982.
- [6.28] Roik, K.: Vorlesungen über Stahlbau, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin-München-Düsseldorf, 1978.

- [6.29] Sabir, A. B.; Lock, A. C.: The application of finite elements to the large-deflection geometrically nonlinear behaviour of cylindrical shells, in "Variational Methods in Engineering", C. A. Brebbia and H. Tottenham (Eds.), Southampton, University Press, 7/66 - 7/75, 1972.
- [6.30] Sanders, J. L.: [2.17]
- [6.31] Schmidt, R.: [1.12]
- [6.32] Schmidt R.: [1.11]
- [6.33] Schrader, K. H.: Genauigkeitsprobleme bei Ansätzen mit Starrkörperverschiebungen, in "Finite Elemente in der Baupraxis", Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin-München-Düsseldorf, 1978.
- [6.34] Stein, E.: Variational functionals in the geometrically nonlinear theory of thin shells and finite-element-discretizations with applications to stability problems, in "Theory of shells", Proc. 3<sup>rd</sup> IUTAM Symp. on Shell Theory, Tbilisi 1978, 509-535, North-Holland Publ. Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1980.
- [6.35] Stein, E.; Berg, A.; Wagner, W.: [1.13]
- [6.36] Stumpf, H.: [1.16]
- [6.37] Thompson, J. M. T.; Hunt, G. W.: A general theory of elastic stability, 26-35, John Wiley & Sons, London-New York-Sydney-Toronto, 1973.
- [6.38] Timoshenko, S. P.; Gere, J. M.: Theory of elastic stability, McGraw-Hill, New-York, 1961.
- [6.39] Varpasuo, P.: Incremental analysis of axisymmetric shallow shells with varying strain-displacement equations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 21, 153-169, 1980.
- [6.40] Vlasov, V. Z.: General theory of shells and its applications in engineering, NASA TT F-99, 1964.
- [6.41] Wunderlich, W.; Obrecht, H.: Large spatial deformations of rods using generalized variational principles, in "Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, 185-216, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981.
- [6.42] Yaghmai, S.: Incremental analysis of large deformations in mechanics of solids with applications to axisymmetric shells of revolution, Dissertation, University of California, Berkeley, 1969.
- [6.43] Yaghmai, S.; Popov, E. P.: Incremental analysis of large deflections of shells of revolution, Int. J. Solids Structures, Vol. 7, 1375 - 1393, 1971.

### Abschnitt 7

- [7.1] Donnell, L. H.: [6.6]
- [7.2] Koiter, W. T.: [1.2]
- [7.3] Marguerre, K.: [6.16]
- [7.4] Nolte, L.-P.; Stumpf H.: [6.20]
- [7.5] Pietraszkiewicz, W.: [1.10]
- [7.6] Pietraszkiewicz, W.: [6.26]
- [7.7] Pietraszkiewicz, W.: [6.27]
- [7.8] Sanders, J. L.: [2.17]
- [7.9] Stumpf, H.: [1.15]
- [7.10] Stumpf, H.: [5.12]
- [7.11] Stumpf, H.: [1.16]
- [7.12] Vlasov, V. Z.: [6.40]

### Abschnitt 8

- [8.1] Ashwell, D. G.; Gallagher, R. H. (Eds.): Finite elements for thin shells and curved members, John Wiley & Sons, London-New York-Sydney-Toronto, 1976.
- [8.2] Cook, R. D.: Concepts and applications of finite element analysis, John Wiley & Sons, New York, 1974.
- [8.3] Cowper, G. R.: Variational procedures and convergence of finite-element method, in "Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics", Academic Press, 1-12, New-York, 1973.
- [8.4] Crisfield, M. A.: A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through", Comp. Struct., vol. 13, 55-62, 1981.
- [8.5] Delpak, R.: Static analysis of thin rotational shells, Comp. Struct., vol. 11, 305-325, 1980.
- [8.6] Eckstein, U.; Krätzig, W. B.; Wittek, U.: Finite-Element Berechnungen zur Grenztragfähigkeit der Rotationsschalen, Techn. wiss. Mittlg. d. Inst. KIB, Nr. 80-4, Ruhr-Universität Bochum, 1980.
- [8.7] Fonder, G. A.: Studies in doubly-curved elements for shells of revolution, in [8.1], 113-129.

- [8.8] Fried, I.: Basic computational problems in the finite element analysis of shells, *Int. J. Solids Structures*, vol. 7, 1705 - 1715, 1971.
- [8.9] Gould, P. L.; Basu, P. K.: Geometric stiffness matrices for the finite element analysis of rotational shells, *J. Struct. Mech.*, vol. 5, 87 - 105, 1977.
- [8.10] Grafton, P. E.; Strome, D. R.: Analysis of axi-symmetric shells by the direct stiffness method, *AIAA J.*, 1, 2343 - 2347, 1963.
- [8.11] Haisler, W. E.; Stricklin, J. A.; Stebbins, F. J.: Development and evaluation of solution procedures for geometrically nonlinear structural analysis, *AIAA J.*, vol. 10, 264 - 272, 1972.
- [8.12] Harte, R.: [1.1]
- [8.13] Koiter, W. T.: [1.3]
- [8.14] Makowski, J.: [2.10]
- [8.15] Navaratna, D. R.; Pian, T. H. H.; Witmer, E. A.: Stability analysis of shells of revolution by the finite element method, *AIAA J.* 6, 355 - 361, 1968.
- [8.16] Oden, J. T.: *Finite elements of nonlinear continua*, McGraw-Hill, 1972.
- [8.17] Percy, H. H.; Pian, T. H. H.; Klein, S.; Navaratna, D. R.: Application of matrix displacement method to linear elastic analysis of shells of revolution, *AIAA J.*, vol. 3, 2138 - 2145, 1965.
- [8.18] Ramm, E.: [4.6]
- [8.19] Ramm, E.: Strategies for tracing the nonlinear response near limit points, in "Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics", 63 - 89. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981.
- [8.20] Rheinboldt, W.: Numerical analysis of continuation methods for nonlinear structural problems, *Comp. Struct.*, vol. 13, 103 - 113, 1981.
- [8.21] Riks, E.: The application of Newton's method to the problem of elastic stability, *J. Appl. Mech.*, 1060 - 1065, 1972.
- [8.22] Riks, E.: An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *Int. J. Solids Structures*, vol. 7, 1581 - 1599, 1971.
- [8.23] Sabir, A. B.; Lock, A. C.: Large deflection, geometrically nonlinear finite element analysis of circular arches *Int. J. Mech. Sci.*, 37 - 47, 15, 1973.

- [8.24] Stricklin, J. A.; Haisler, W. E.: Nonlinear analysis of shells of revolution by the matrix displacement method, AIAA J., vol. 6, 2306 - 2312, 1968.
- [8.25] Stricklin, J. A.; Tillerson, J. R.; Haisler, W. E.: Numerical methods for the solution of nonlinear problems in structural analysis, in "Numerical Solution of Non-linear Structural Problems", Symp. ASME Detroit, Nov. 1973, Report AMD-Vol. 6.
- [8.26] Varpasuo, P.: [6.39]
- [8.27] Wood, R. D.; Zienkiewicz, O. C.: Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells. Comp. Struct., vol. 7, 725 - 735, 1977.
- [8.28] Wunderlich, W.: Zur nichtlinearen Berechnung von Rotationsschalen, IKM Weimar, 1981.
- [8.29] Yaghmai, S.: [6.42]
- [8.30] Yaghmai, S.; Popov E. P.: [6.43]
- [8.31] Zienkiewicz, O. C.: The finite element method, 3<sup>rd</sup> ed., McGraw-Hill, London, 1977.

#### Abschnitt 9

- [9.1] Ashwell, D. G.; Gallagher, R. H. (Eds.): [8.1]
- [9.2] Banerjee, B.: Large deflections of circular plates of variable thickness, Int. J. Solids Structures, Vol. 19, No. 2, 179 - 182, 1983.
- [9.3] Basar, Y.: [2.1]
- [9.4] Beverungen, G.: Geometrisch nichtlineare Berechnung des Spannungs- und Stabilitätsproblems räumlich gekrümmter Stäbe, Techn. Wiss. Mitt. d. Inst. KIB, Nr. 76-13, Ruhr-Universität Bochum, 1976.
- [9.5] Brink, K.: [6.2]
- [9.6] Budiansky, B.: Buckling of clamped shallow spherical shells, Proc. of the Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, Delft, North Holland Publishing Co., Amsterdam, Holland, 1959.
- [9.7] DaDeppo, D. A.; Schmidt, R.: Sidesway buckling and deep circular arches under a concentrated load, J. of Appl. Mech. 325 - 327, 1969.
- [9.8] DaDeppo, D. A.; Schmidt, R.: Nonlinear analysis of buckling and postbuckling behavior of circular arches, ZAMP 20, 847 - 857, 1969.

- [9.9] Danielson, D. A.; Simmonds, J. G.: [5.4]
- [9.10] Diekkämper, R.; Gembaczka, H.-D.; Reuter, M.; Schrader, K.-H.:  
Beispiele zum Programmsystem Mesy-Mini, Arbeitsgr.  
Systemmechanik u. angewandte Informatik, Ruhr-Uni-  
versität Bochum, 1979.
- [9.11] Diekkämper, R.; Schrader, K. H.: Benutzerhandbuch zum Programm-  
system Mesy 2, Arbeitsgr. Systemmechanik u. ange-  
wandte Informatik, Ruhr-Universität Bochum, 1981.
- [9.12] Donnell, L. H.: [6.6]
- [9.13] Egger, H.: Knickung der Kreisplatte und Kreisringplatte mit  
veränderlicher Dicke, Ing. Arch., Vol. 12, 190 - 200,  
1941.
- [9.14] Epstein, M; Murray, D. W.: Large deformation in-plane analysis  
of elastic beams, Computer & Structures, Vol. 6,  
1 - 9, 1976.
- [9.15] Federhofer, K.: Knickung der Kreisplatte und Kreisringplatte mit  
veränderlicher Dicke, Ing. Arch., Vol. 11, 224 - 238,  
1940.
- [9.16] Harte, R.: [1.1]
- [9.17] Hoff, N. J.: Low buckling stresses of axially compressed circular  
cylindrical shells of finite length, Trans. ASME,  
Journal of Applied Mechanics, 533 - 541, 1965.
- [9.18] Huang, N.-C.: Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical  
shells, Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics,  
447 - 457, 1964.
- [9.19] Huddleston, J. V.: Finite deflections and snap through of high  
circular arches, Trans. ASME, Journal of Applied  
Mechanics, 763 - 769, 1968.
- [9.20] Koiter, W. T.: [1.3]
- [9.21] Koiter, W. T.: [4.2]
- [9.22] Langhaar, H. L.; Boresi, A. P.; Carver, D. R.: Energy theory of  
buckling of circular elastic rings and arches, Proc.  
of second U. S. Nat. Congress of Appl. Mech., 437 -  
443, 1954.
- [9.23] Makowski, J.: [2.10]
- [9.24] Mescall, J.: Numerical solutions of nonlinear equations for shells  
of revolution, AIAA Journal, Nr. 4, Technical Notes,  
2041 - 2043, 1966.
- [9.25] Murakawa, H.; Reed, K.; Atluri, S. N.; Rubinstein, R.: [6.17]

- [9.16] Muskhelishvili, K. M.; Galimov, K. M.: Non-linear theory of thin elastic shells, The Israel Program for Sci. Transl., Jerusalem 1961, Translation of "Nelineinaya teoriya uprugikh obolochek", Tatkrigoizdat, Kazan 1957.
- [9.27] Nachbar, W.; Jong, J. M.: [6.18]
- [9.28] Nolte, L.-P.; Stumpf, H.: [6.20]
- [9.29] Nolte, L.-P.: [5.10]
- [9.30] Peer-Kasperska, A.; Kasperski, Z.; Makowski, J.: Rozwiązanie zagadnienia nieliniowej stateczności powłok obrotowych metodą elementów skończonych. Mat. V Konf. "Metody Komputerowe w Mechanice Konstrukcji", 1981.
- [9.31] Pietraszkiewicz, W.: [1.7]
- [9.32] Pietraszkiewicz, W.; Szabowicz, M. L.: [1.9]
- [9.33] Ramm, E.: [4.6]
- [9.34] Reuter, M.: Implementieren eines modularen Programmsystems zur statischen Analyse von Tragwerken auf Minicomputern. Diplomarbeit, Arbeitsgr. Systemmechanik u. angewandte Informatik, Ruhr-Universität Bochum, 1981.
- [9.35] Sabir, A. B.; Lock, A. C.: [8.23]
- [9.36] Sanders, J. L.: [2.17]
- [9.37] Simmonds, J. G.; Danielson, D. A.: New results for the buckling loads of axially compressed cylindrical shells subject to relaxed boundary conditions, Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, 93 - 100, 1976.
- [9.38] Stumpf, H.: Eulerian Elastica, Report, Lehrstuhl f. Mechanik III, Ruhr-Universität Bochum, 1981.
- [9.39] Tillman, S. C.: On the buckling behaviour of shallow spherical caps under an uniform pressure load, Int. J. Solids Structures, Vol. 6, 37 - 52, 1970.
- [9.40] Timoshenko, S. P.; Gere, J. M.: [6.38]
- [9.41] Timoshenko, S. P.; Woinowsky-Krieger, S.: Theory of plates and shells, second edition, McGraw-Hill, Sydney-New York-London, 1959.
- [9.42] Uchiyama, K.; Yamada, M.: Buckling of clamped imperfect thin shallow spherical shells under external pressure I, Technology Reports of the Tohoku University, Vol. 39, No. 1, 101 - 132, 1974.
- [9.43] Uemura, M.: Axisymmetrical buckling of an initially deformed shallow spherical shell under external pressure, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 6, 177 - 192, 1971.

[9.44] Varpasuo, P.: [6.39]

[9.45] Vlasov, V. Z.: [6.40]

[9.46] Yaghmai, S.: [6.42]

[9.47] Yaghmai, S.; Popov, E. P.: [6.43]

[9.48] Yamada, S.; Uchiyama, K.; Yamada, M.: Experiments on the buckling of clamped shallow spherical shells under external pressure, Technology Reports of the Tohoku University, Vol. 45, No. 2, 205 - 227, 1980.

#### Anhang A1

[A1.1] Pietraszkiewicz, W.: [1.7]

[A1.2] Pietraszkiewicz, W.: [1.8]

#### Anhang A3

[A3.1] Varpasuo, P.: [6.39]

[A3.2] Yaghmai, S.: [6.42]

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK

- Nr. 1     Theodor Lehmann:  
          Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2     Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
          Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite  
          Elastic-Plastic Deformations.  
          Basic Concepts
- Nr. 3     Wolfgang Krings:  
          Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,  
          viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4     Burkhard Lücke:  
          Theoretische und experimentelle Untersuchung der zyklischen  
          elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen.
- Nr. 5     Knut Schwarze:  
          Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen  
          Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6     Hubert Sommer:  
          Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungs-  
          zustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7     H. Stumpf/F.J. Biehl:  
          Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre  
          Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8     Albert Meyers:  
          Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnellaufenden  
          Zentrifugenschalen
- Nr. 9     Berend Fischer:  
          Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung eines dick-  
          wandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10    Wojciech Pietraszkiewicz:  
          Introduction to the non-linear theory of shells

- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer Wellen
- Nr. 13 Paweł Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates
- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Kármán Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czesław Woźniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods

- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear  
Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der  
Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen bei  
Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch  
stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value  
Problems in the Theory of Plasticity and Application to  
Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-  
Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger  
Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsions-  
last
- Nr. 28 Paweł Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic  
Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger  
Kreiszyylinder und Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen  
Kontaktproblem

- Nr. 31      Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32      Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und  
Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33      Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34      Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and  
Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35      Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre  
Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische  
Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36      Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hin-  
blick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37      Petrişor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38      Klaus-Detlef Mickley:  
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen der Elastomechanik  
und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Spline-  
funktionen
- Nr. 39      Lutz-Peter Nolte:  
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung  
geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksich-  
tigung großer Rotationen



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 39**