

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Petrisor Mazilu

Variationsprinzipie der
Thermoplastizität
II. Gekoppelte
thermomechanische Prozesse

Heft Nr. 37



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik
RUHR UNIVERSITÄT BOCHUM**

Petrisor Mazilu

**Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr.37

August 1983

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

© 1983 Dr. rer. nat. (R). Petrisor Mazilu
4630 Bochum 1, Hustadtring 61

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise zu vervielfältigen.

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit beschreibt Variationsprinzipie gekoppelter thermoplastischer Prozesse. Die Variationsprinzipie sind ursprünglich für das Modell des thermoplastischen Fließens, welches von Lehmann entwickelt wurde, erstellt.

Zuerst wird eine Analyse der existierenden Modelle des plastischen Fließens durchgeführt. Es wird eine alternative kalorische Gleichung vorgeschlagen, die für die Beschreibung der thermoplastischen Prozesse geeigneter scheint als die übliche kalorische Gleichung der Thermoelastizität. Im Rahmen des Konzeptes der Anergie von Baehr wird das Modell von Lehmann in eine Form gebracht, die man als eine Ausdehnung des Greenschen Modells für isotherme plastische Prozesse auf nicht-isotherme Prozesse betrachten kann. Diese Form beinhaltet gleichfalls das Pragersche Modell der Thermoplastizität, welches auf das Konzept der Normalen-Regel im Spannungs-Temperatur-Raum gegründet ist.

Für die erhaltene allgemeine mathematische Form der Thermoplastizität wird ein Mehrfachkriterium Variational-Verfahren entwickelt.

SUMMARY

The present work is devoted to the variational principles for coupled thermoplastical processes. The variational principles are fundamentally formulated for the models of thermoplastic flow developed by Lehmann.

First an analysis of the existent models of plastic flow is performed. A new form of the chaloric equation is suggested, which seems to be more suitable for the thermoplastic processes than the usual chaloric equation of thermoelasticity. By using the concept of anergy developed by Baehr, one achieves to represent Lehmann's model in a mathematical form which generalizes, in respect to non-isothermal processes, the well-known model of Green. This form also contents the model based on the normality-rule suggested by Prager.

For the obtained general mathematical model of thermoplasticity one develops a variational theory based on a multi-criterial procedure.

Vorwort

Der erste Teil unseres Berichts war den Variationsprinzipien der Wärmeausbreitung und Plastizitätstheorie als entkoppelte Phänomene gewidmet. Die vorliegende Arbeit widmet sich den Variationsprinzipien der Thermoplastizität als gekoppelten Prozeß. Diese Variationsprinzipien sind für das Modell des thermoplastischen Fließens, welches von Lehmann in einer Reihe von Veröffentlichungen seit Anfang 1972 entwickelt wird, entworfen. Im Gegensatz zum Prager'schen Modell spielt die Normalen-Regel im Modell von Lehmann keine besondere Rolle mehr.

Um die Variationsprinzipien zu entwickeln, müssen die folgenden drei Schwierigkeiten, die mit dem betrachteten Modell des thermoplastischen Fließens verbunden sind, zuerst überwunden werden.

1. Die Bestimmung eines geeigneten konstitutiven Gesetzes für die Entlastung, so daß die Stetigkeit, die von der allgemeinen Theorie der nichtlinearen Variationsrechnung im allgemeinen vorausgesetzt wird, gesichert ist (vgl. Appendix des Teils I).
2. Die Einführung geeigneter experimenteller Verfahren, welche eine eindeutige Bestimmung der Abweichungen von der Normalen-Regel erlauben. Die existierenden experimentellen Verfahren (vgl. Th. Lehmann, Ing.Arch., 52, 6, 1982, 391-403) berücksichtigen nicht die eventuelle Wirkung der dritten Invariante bei der Verletzung der Normalen-Regel. Deswegen führen diese Verfahren vermutlich manchmal zu großen Werten des Gliedes, welches die Abweichung von der Normalen-Regel beschreibt.: $\kappa = 3,2(1/2\mu)$ bei $\epsilon = 4,9\%$ für Ck 15 und $\kappa = 7,2(2\mu)$ für Messing.

3. Die Bestimmung des konstitutiven Gesetzes für den elastischen Teil der Verzerrungen in einer expliziten differentiellen Form.

Das approximative konstitutive Gesetz des Modells von Lehmann führt zu elastischen Verzerrungen, die für einen Spannungszyklus nicht ganz

reversibel sind. Das wirft Schwierigkeiten bei der Aufstellung von Variationsprinzipien auf.

Die Lösung des ersten Problems wurde im Rahmen des Modells von Green durchgeführt (vgl. Abschnitt 5.2). Dies wurde durch die Bemerkung erleichtert, daß für isotherme Prozesse und Belastung das konstitutive Gesetz des Modells von Lehmann einen besonderen Fall der allgemeinen Greenschen Theorie darstellt.

Für die Überwindung der zweiten Schwierigkeit werden als experimentelle Verfahren die Experimente von Feigen-Typ vorgeschlagen. Eine erste Durchführung^{*)} eines solchen Experiments (für Stahl Ck 15) führt für kleinere plastische Deformationen (bis 4,4 %) zu einer geringeren Abweichung der Normalen-Regel bis $\max \kappa = 0,76(1/2\mu)$.

Das dritte Problem wird in Kapitel 4 betrachtet. Die allgemeine Form eines elastischen konstitutiven Gesetzes wird in einer expliziten Form in Verzerrungsgeschwindigkeiten abgeleitet.

Außer diesen Problemen, die spezifische Probleme des Modells von Lehmann sind, muß man auch die Form der kalorischen Gleichung und den Ausdruck der Entropie für dies thermoplastische Fließen bestimmen.

Es ist bekannt (vgl. Kapitel 1), daß die thermoplastischen Prozesse mit der Existenz der Carnotschen Zyklen unvereinbar sind. Deshalb schlagen wir die Ersetzung der üblichen kalorischen Gleichung (die spezifisch für die thermoelastischen Prozesse ist) durch eine alternative Form vor, die den Materialien entspricht, für die Prozesse nicht möglich sind.

^{*)}U.Damm und P. Mazilu, Some studies to Feigen's experiment: internal report of the Institute of Mechanics, Ruhr-Universität Bochum (unpublished)

Der Ausdruck der Entropie wird aufgrund des Konzepts der Anergie von Baehr bestimmt (vgl. Kapitel 3 und Abschnitt 5.2). Dieses Konzept erlaubt uns die Bestimmung der Entropie bis einen positiven Proportionalitäts-Faktor, welcher nur eine qualitative Rolle spielt.

Aufgrund dieses thermomechanischen Konzeptes gelingt es uns, das Pragersche Modell und das Modell von Lehmann (mit den oben erwähnten Ergänzungen) im Rahmen desselben mathematischen Formalismusses darzustellen (vgl. Abschnitt 5.3). Die resultierenden Gleichungen lassen die Aufstellung eines Variationsprinzips zu, das auf ein Mehrfach-Kriterium gegründet ist. Diese Art des Variationsprinzips besteht in der Trennung der thermoplastischen Aufgabe in einen mechanischen Prozeß, in dem die Temperatur die Rolle eines inneren Parameter spielt, und einen thermischen Prozeß, in dem die Spannungen diese Rolle übernehmen. Die Kopplung der Prozesse wird durch die Evolutionsgleichungen der inneren Parameter wieder hergestellt. Das Variational-Verfahren verlangt die gleichzeitige Minimierung von vier Funktionalen, jeweils bezüglich einer bestimmten Zahl der Parameter (vgl. Abschnitt 5.6 und Kapitel 6).

Die Arbeit wurde teilweise von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Schwerpunktsprogramms "Kopplung von thermodynamischen und mechanischen Vorgängen bei Formänderungen fester Körper" finanziert. Sie darf nur als ein Versuch betrachtet werden, ein vollständiges Modell der Thermoplastizität anzugeben, dessen thermomechanischen Funktionen und Parameter experimentell bestimmbar sind und das eine mathematische Grundlage für eine zuverlässige numerische Lösung darstellt.

Der Autor ist Herrn Professor Th. Lehmann für seine stetige Unterstützung und sein Verständnis sehr dankbar.

Meinen Kollegen am Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, danke ich für ihre kollegiale Hilfe bei der Redigierung dieser Arbeit.

Bochum, 20. Oktober 1983

P.M.

<u>Inhalt:</u>	<u>Seite</u>
1. Kalorische Gleichung	5
2. Fließgrenze, Normalitäts-Regel und Drucker's Postulat für isothermes plastisches Fließen	34
3. Zur Entropie	47
4. Konstitutive Beziehungen für große elasto-plastische Verzerrungen	59
5. Thermoplastische Modelle	81
5.1 Ein Überblick über aktuelle mathematische Modelle der Thermoplastizität	81
5.2 Thermoplastizität begründet auf Green's Modell für plastisches Fließen	99
5.3 Die Variationsprinzipie in der Thermoplastizität, die auf ein Mehrfach-Kriterium gegründet sind	124
6. Möglichkeiten der numerischen Lösung	136
Literatur	142

1. Kalorische Gleichung

Die Thermodynamik der reversiblen Prozesse (oder besser gesagt: die Thermodynamik derjenigen Körper, die nur reversible Prozesse leisten können) wurde von Carnot, Clausius, Kelvin, Duhem und Reech begründet.

Ihre Entwicklung wurde durch die Erfindung und Anwendung thermischer Maschinen verursacht. Hierdurch bedingt, betrachtet sie vor allem die Verhältnisse bei Gasen (vgl. Truesdell und Bharatha [1], S. 60), obwohl ihre Begründer behaupten, daß ihre Theorie für alle natürlichen Körper im festen, flüssigen und gasförmigen Zustand gültig ist.

Ist die Hypothese der allgemeinen Gültigkeit haltbar, dann folgt daraus, daß es universale Funktionen gibt, mit denen man alle reversiblen Prozesse beschreiben kann, unabhängig davon, ob sie sich an Gasen, Flüssigkeiten oder festen Körpern vollziehen.

Eine rigorose Beweisführung war ohne die Existenz einer axiomatischen Theorie nicht möglich. Solche eine Theorie fehlte bis zu dem in jüngster Vergangenheit erschienenen Buch von Truesdell und Bharatha (loc.cit.).

Im folgenden untersuchen wir die Frage, ob die kalorische Gleichung, wie sie in der klassischen Thermodynamik zu finden ist, zur Beschreibung der thermoelastischen Körper geeignet ist oder nicht. Wir gründen unsere Darstellung auf die oben erwähnte Monographie von Truesdell und Bharatha sowie auf die Theorie der Thermodynamik von Sommerfeld [2]. Ebenfalls betrachten wir die Theorie, die auf dem Prinzip von Carathéodory aufbaut, so wie sie in der Monographie von Buchdahl [3] und in der Studie von Nemat-Nasser [4] dargestellt wird.

1.1 Die Theorie von Truesdell und Bharatha

Man nimmt als primitive Quantitäten an:

t	-	die Zeit
$V(t)$	-	das Volumen, $V(t) > 0$
$\theta(t)$	-	die Temperatur, $\theta(t) > 0$
$p(t)$	-	den Druck, $p(t) \geq 0$
$Q(t)$	-	die Wärmeenergie ^{†)}

Es sei D ein Gebiet das sämtliche möglichen Zustände des Körpers beinhaltet.

Axiom I. Das Volumen und die Temperatur bestimmen (zur Gänze) den Druck, der auf einen gegebenen Körper einwirkt.

$$p = \omega(V, \theta) \quad ; \quad \omega: D \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Die Funktion ω sei stetig und habe die stetigen Ableitungen $\partial\omega/\partial V$, $\partial\omega/\partial\theta$ und dazu

$$\frac{\partial\omega}{\partial V} > 0 .$$

Axiom II. Die Wärmeenergie Q eines gegebenen Körpers wird mit Hilfe der Funktionen $\Lambda_V(V, \theta)$ und $K_V(V, \theta)$, $(V, \theta) \in D$ bestimmt, die selbst stetig sind und stetige Ableitungen erster Ordnung haben, und zwar durch die Formel

$$\dot{Q} = \Lambda_V(V, \theta)\dot{V} + K_V(V, \theta)\dot{\theta} .$$

^{†)} Truesdell und Bharatha (loc.cit.) bezeichnen mit Q die Zeit-Ableitung der Wärmeenergie.

Überdies gilt

$$K_V > 0 .$$

Die Funktionen Λ_V und K_V werden die latente Wärme bezüglich des Volumens bzw. die spezifische Wärme bei konstantem Volumen genannt.

Definition 1.
$$C^+ = \frac{1}{2} \int_{t_2}^{t_1} (|\dot{Q}| + \dot{Q}) dt ,$$

$$C^- = \frac{1}{2} \int_{t_2}^{t_1} (|\dot{Q}| - \dot{Q}) dt ,$$

$$C = C^+ + C^-$$

bezeichnen die absorbierte, die abgestrahlte bzw. reine gewonnene Wärme im Zeitintervall $[t_1, t_2]$.

Definition 2.

$$L = \int_{t_2}^{t_1} pV dt$$

bezeichnet die Arbeit, die vom Druck p im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ geleistet wird.

Es gebe einen Prozeß $(V(t), \theta(t))$, $t \in [t_1, t_2]$.

Man bezeichnet mit

- τ^+ - das Zeitintervall $\tau^+ \subset [t_1, t_2]$
während dessen Wärme absorbiert wird,
- τ^- - das Zeitintervall $\tau^- \subset [t_1, t_2]$
während dessen Wärme abgestrahlt wird.

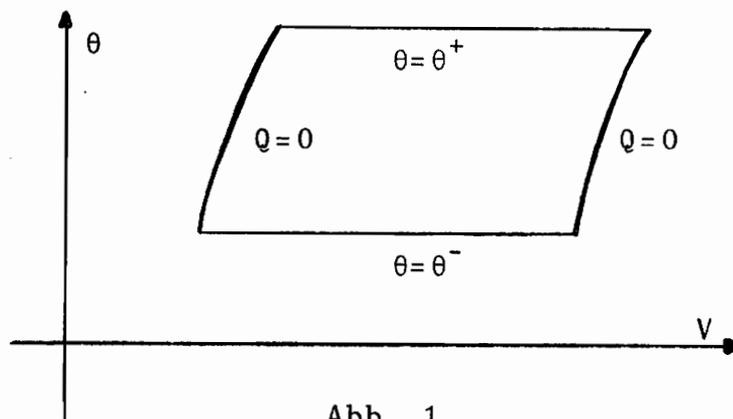
Definition 3. Es sei ein Carnotscher Zyklus ein solcher einfacher Zyklus $(V(t), \theta(t))$, $t \in [t_1, t_2]$ genannt, für den gilt:

für $t \in T^+$ wird $\theta = \theta^+ = \text{const.}$
 und
 für $t \in T^-$ wird $\theta = \theta^- = \text{const.} < \theta^+.$

Definition 4. Ein Carnotsche Zyklus, für welchen

$$\dot{Q}(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [t_1, t_2] - (T^+ + T^-)$$

gilt, ist ein gewöhnlicher Carnotscher Zyklus (Abb. 1)



Axiom III (Carnotsches Axiom). Für jeden Körper gibt es eine Funktion G , so daß, wenn ein gewöhnlicher Carnotscher Zyklus ist,

$$L(c) = G(\theta^+, \theta^-, C^+(c))$$

gilt.

Definition 5. Die Menge aller Carnotschen Zyklen, die durch die Unterteilung eines gewöhnlichen Carnotschen Zyklus konstruiert werden, bilden eine Carnotsche Wabe.

Theorem von Reech. Wenn W eine Carnotsche Wabe ist, dann gibt es eine Funktion $F(\theta^-, \theta^+)$, so daß

$$G(\theta^+, \theta^-, C(c)) = F(\theta^+, \theta^-) C^+(c)$$

für jeden Carnotschen Zyklus von W ist.

Lemma 1. Es gibt zwei Funktionen $h(\theta)$ und $g(\theta)$, ($h(\theta) > 0$ und $g(\theta) =$ stark zunehmende Funktion), so daß

$$F(\theta^+, \theta^-) = \frac{g(\theta^+) - g(\theta^-)}{h(\theta^+)}$$

für alle gewöhnlichen Zyklen von W ist.

Lemma 2. Es sei W eine Carnotsche Wabe. An allen Punkten $(V, \theta) \in D$ welche von einem gewöhnlichen Carnotschen Zyklus der Wabe umgeben sind, gilt dann folgende Restriktion:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Lambda_V}{h} \right) - \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{K_V}{h} \right) = 0 \quad (1.1)$$

Korrolar. Die Funktion h ist ein integrierender Faktor der Differentialformel

$$dQ = \Lambda_V(V, \theta) dV + K_V(V, \theta) d\theta$$

d.h.

$$\frac{dQ}{h} = \frac{\Lambda_V(V, \theta)}{h(\theta)} dV + \frac{K_V(V, \theta)}{h(\theta)} d\theta$$

ist ein totales Differential. Es gibt eine Funktion $H(V, \theta)$ so daß gilt:

$$dH = \frac{dQ}{h} .$$

Diese Funktion wird als Pro-Entropie bezeichnet.

Ihrer Konstruktion nach, hängt die Pro-Entropie vom jeweils betrachteten Körper ab.

In gleicher Weise wie Truesdell und Bharatha nehmen wir die folgenden zwei neuen Axiome an:

Axiom IV. Die Funktion $G(\theta^+, \theta^-, C^+(C))$ ist die Restriktion an D von einer universalen Funktion

$$G_u(\theta^+, \theta^-, C^+(C)) ,$$

die für alle $\theta^+ > \theta^- > 0$ und $C^+(C) > 0$ definiert ist.

Axiom V. Es gibt ein ideales Gas

$$p = R \frac{\theta}{V}, \quad R = \text{const.},$$

so daß es für jede Nachbarschaft eines beliebigen Punktes (V, θ) , $(V > 0, \theta > 0)$ wenigstens einen Punkt gibt, in dem $\Lambda_V \neq 0$ ist. Mit diesen neuen Axiomen kann man folgendes Theorem beweisen.

Theorem. Die Funktionen G , h , g seien universale Funktionen, die folgende Formen haben:

$$g_u = J h_u + \text{const.},$$

$$h_u = M \theta,$$

$$G_u(\theta^+, \theta^-, c^+(c)) = J \left(1 - \frac{\theta^+}{\theta^-}\right) c^+(c),$$

wobei J eine universale Konstante und M eine beliebige positive Konstante sind.

Aufgrund dieses Theorems folgt, daß die Pro-Entropie den Ausdruck

$$S(V, \theta) = \frac{1}{M} \int \frac{dQ}{\theta} + \text{const.}$$

hat.

Nimmt man $M = 1$, dann folgt

$$S(V, \theta) = \int \frac{dQ}{\theta} + \text{const.}$$

Diese besondere Pro-Entropie wird Entropie genannt.

Anmerkung: Das Lemma 2 funktioniert nur für solche Punkte $(V, \theta) \in D$, die innerhalb eines gewöhnlichen Carnotschen Zyklus liegen. Infolge dieses Lemmas bildet dQ/θ ein totales Differential nur in solchen Untergebieten von D , die sich von gewöhnlichen Carnotschen Zyklen umkreisen lassen.

Wenn ein Punkt außerhalb eines gewöhnlichen Carnotschen Zyklus liegt, liefert die oben dargestellte Theorie keinen Ausdruck der Entropie mehr.

Kommentar zu den Axiomen. Das erste Axiom postuliert nur die Existenz einer konstitutiven Beziehung zwischen Druck, Volumen und Temperatur. Das zweite Axiom bestätigt nur, daß V und θ tatsächlich Zustandsparameter bilden.

Im Gegensatz zu diesen ersten beiden Axiomen bilden die letzten drei Axiome eher abstrakte mathematische Behauptungen. Eine geeignete physikalische Motivation wird unserer Meinung nach von den folgenden Überlegungen von Sommerfeld (loc.cit.) geliefert.

1.2 Die Ausführungen von Sommerfeld

Ein Carnotscher Prozeß, den man mit einem Stoff durchführen kann, läuft folgendermaßen ab. Der Stoff geht durch isotherme Wärmezufuhr der Wärmemenge Q_1 aus einem Wärmereservoir mit der Temperatur θ^+ vom Zustand 1 (V, θ^+) zum Zustand 2 (V, θ^+) über, von Zustand 2 aus durch einen adiabaten Prozeß zum Zustand 3 (V, θ^-), von hier wiederum durch isotherme Wärmeabfuhr der Wärmemenge Q_2 in ein Wärmereservoir der Temperatur θ^- ($\theta^+ > \theta^-$) zum Zustand 4 (V, θ^-) und von dort aus wieder durch einen adiabaten Prozeß zum Zustand 1 zurück. Derselbe Prozeß kann auch in umgekehrter Reihenfolge ablaufen. Die Integrale der Wärme und die Arbeit beider Prozesse über den gesamten Weg dieses Kreisprozesses lassen sich folgendermaßen definieren: $\oint dQ = Q_1 - Q_2$; die reine gewonnene Wärme und $\oint dL = L$ die Arbeit, die von dem Körper geleistet wird.

Aus dem ersten thermodynamischen Hauptgesetz

$$0 = \oint dW = \oint dQ + \oint dL$$

folgt

$$L = Q_1 - Q_2$$

Für den Wirkungsgrad

$$\eta_M = \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{zugeführte Wärme}}$$

erhält man

$$\eta_M = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} .$$

Läßt man denselben Prozeß in umgekehrter Reihenfolge ablaufen, dann ergibt sich aus

$$0 = \int \delta W = \int \delta Q + \int \delta L$$

die Arbeit

$$-L = -Q_1 + Q_2$$

Daraus folgt, daß der Wirkungsgrad des umgekehrt ablaufenden Prozesses

$$\eta_K = \frac{-L}{-Q_1} = \frac{L}{Q_1} = \eta_M$$

ist.

Das heißt, daß der Wirkungsgrad unabhängig davon ist, ob die Körper als Motor oder als Kältemaschine funktionieren.

Von hier aus läßt sich der Carnotsche Beweis, daß der Wirkungsgrad unabhängig von der Beschaffenheit des Arbeitsstoffes ist, nachvollziehen. Dazu stellen wir uns zwei Wärmereservoirs mit den Temperaturen θ^+ und θ^- vor, die so durch zwei Carnot-Prozesse verbunden sind, daß der eine als Motor genau die Leistung \dot{L} bringt, die der andere Prozeß als Kältemaschine benötigt. Die Prozesse werden mit unterschiedlichen Stoffen ausgeführt. Die dem Motor zugeführte Wärme sei Q_1 , die abgeführte Q_2 . Die Kältemaschine entziehe dem Reservoir mit tieferem Temperaturniveau die Wärme Q_2' und führe dem Reservoir mit höherem Niveau die Wärme Q_1' zu. Wenn wir den Wirkungsgrad des Prozesses, der als Motor wirkt, mit η_1 bezeichnen, den der Kältemaschine mit η_2 und gleichzeitig voraussetzen, daß gilt

$$\eta_1 > \eta_2$$

dann folgt daraus

$$\frac{L}{Q_1'} > \frac{L}{Q_1}$$

und demzufolge $Q_1 > Q_1'$; die Kältemaschine führt somit dem Reservoir mit höherem Temperaturniveau mehr Wärme zu, als ihm der Motor entzieht. Die Quelle dieser Differenz kann nur das Reservoir mit niedrigerem Temperaturniveau sein.

Weil außerhalb des Systems keine Arbeit hinzugekommen ist, steht dies im Widerspruch zum Postulat von Clausius, daß Wärme nicht von selbst von niedrigen zum höheren Niveau wandern kann. Die gegenteilige Behauptung

$$\eta_1 > \eta_2$$

kann man auf die gleiche Art widerlegen, wenn man nur in beiden Prozessen die Reihenfolge vertauscht, also aus dem "Motor" die "Kältemaschine" macht und umgekehrt. Es bleibt also nur

$$\eta_1 = \eta_2$$

was besagt, daß alle Prozesse die beiden gleichen Temperaturen θ^+ und θ^- die gleiche Arbeit aus einem Carnot-Prozeß ziehen, den gleichen Wirkungsgrad haben und unabhängig vom jeweiligen Arbeitsstoff sind. Anders ausgedrückt gibt es eine universale Funktion $f(\theta^+, \theta^-, L)$, so daß

$$\frac{1}{1 - \eta} = \frac{Q_1}{Q_2} = f(\theta^+, \theta^-, L) . \quad (2.1)$$

Man kann beweisen, daß in der Tat die Funktion f unabhängig von L ist. Es sei $L \neq L^*$, so daß gilt

$$\frac{L}{L^*} = \frac{p}{q} , \quad (2.2)$$

wobei p und q ganze Zahlen sind.

Man betrachtet eine Anzahl q als "Motoren", von denen jeder die Arbeit L leistet und p als "Kältemaschinen", von denen jede die Arbeit L^* verbraucht. Alle "Motoren" und Kältemaschinen sind mit demselben Reservoir, einer Wärmequelle mit der Temperatur θ^+ und einer Kältequelle mit der Temperatur θ^- ($\theta^+ > \theta^-$), gekoppelt.

Es sei Q_1 die Wärme, die jeder Motor aus dem Reservoir mit höherer Temperatur entzieht und Q_1^* die Wärme, die jede Kältemaschine der Wärmequelle zuführt. Es gilt:

$$Q_1 = \frac{L}{\eta(\theta^+, \theta^-, L)} \quad (2.3)$$

und

$$Q_1^* = \frac{L^*}{\eta(\theta^+, \theta^-, L)} \quad (2.4)$$

Weil die gesamte Arbeit Null ist: $qL - pL^* = 0$, folgt aufgrund des Postulates von Clausius

$$pQ_1^* \leq qQ_1$$

Macht man die "Motoren" zu "Kältemaschinen" und die "Kältemaschinen" zu "Motoren", dann folgt

$$pQ_1^* \geq qQ_1$$

d. h.

$$pQ_1^* = qQ_1.$$

Aus (2.2), (2.3) und (2.4) folgt

$$\eta(\theta^+, \theta^-, L) = \eta(\theta^+, \theta^-, \frac{p}{q}L) \quad (2.5)$$

Für alle p und q als ganze Zahlen.

Ist der Wirkungsgrad η eine stetige Funktion, dann folgt aus (2.5), daß η unabhängig ist von L , und es gilt:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(\theta^+, \theta^-).$$

Verbindet man von drei Wärmereservoirs der Temperaturen θ_1 , θ_2 und θ_0 die ersten beiden so durch die Prozesse P_1 und P_2 mit dem dritten, daß dieses durch P_1 genau die Wärmemenge Q_0 erhält, die es an P_2 weitergibt, dann stehen die ausgetauschten Wärmemengen in den Verhältnissen

$$\frac{Q_1}{Q_0} = f(\theta_1, \theta_0) \quad , \quad \frac{Q_0}{Q_2} = f(\theta_0, \theta_2) \quad .$$

Da bei der Wärmebilanz über das ganze System der Einfluß des mittlern Reservoirs wegfällt, ist dieser Aufbau mit einem einfachen Carnot-Prozeß zwischen θ_1 und θ_2 bei gleichen Größen Q_1 und Q_2 vergleichbar, d.h.

$$\frac{Q_1}{Q_2} = f(\theta_1, \theta_2) = \frac{Q_1}{Q_0} \frac{Q_0}{Q_2} = f(\theta_1, \theta_0) f(\theta_0, \theta_2) \quad .$$

Diese allgemein hergeleiteten Gleichungen müssen auch für den Sonderfall $\theta_1 = \theta_2$ gelten, bei dem keine Arbeit geleistet wird

$$L = - \int dL = 0 = Q_1 - Q_2 \quad ,$$

$$1 = \frac{Q_1}{Q_2} = f(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_1, \theta_0) f(\theta_0, \theta_1) \quad .$$

Daraus folgt

$$f(\theta_0, \theta_2) = \frac{1}{f(\theta_2, \theta_0)}$$

oder

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{f(\theta_1, \theta_0)}{f(\theta_2, \theta_0)} = \frac{\phi(\theta_1)}{\phi(\theta_2)} \quad .$$

Führt man jetzt unter der Voraussetzung, daß $\phi(\theta)$ eine monotone Funktion ist, an Stelle der bisherigen Temperaturskala θ die absolute Temperatur T so ein, daß

$$T = \phi(\theta)$$

ist, erhält man die Carnotsche Proportion

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$$

die angewandt auf einen Carnot-Prozeß mit einer endlichen Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$ aber infinitesimal kleinen Wärmemengen dQ_1 und dQ_2 zu

$$\frac{dQ_1}{T_1} = \frac{dQ_2}{T_2} \quad (2.6)$$

führt.

Bezeichnet man

$$\frac{dQ}{T} = A(V,T)dV + B(V,T)dT$$

mit $A(V,T) = \frac{\Lambda_V(V,T)}{T}$ und $B(V,T) = \frac{K_V(V,T)}{T}$,

dann führt die Gleichung (2.6) zu

$$\int A(V,T)dV + B(V,T)dT = 0 \quad (2.7)$$

über alle gewöhnlichen Carnotschen Zyklen.

Es ist einfach zu beweisen, daß das genau dann geschieht, wenn

$$A(V,T) dV + B(V,T)dT$$

ein totales Differential bildet. Es sei C ein gewöhnlicher Carnotscher Prozeß, der durch die Eckpunkte (V,T) , $(V+\Delta V,T)$, $(V+\Delta V+\Delta V_1, T+\Delta T)$, $(V+\Delta V_2, T+\Delta T)$ definiert ist.

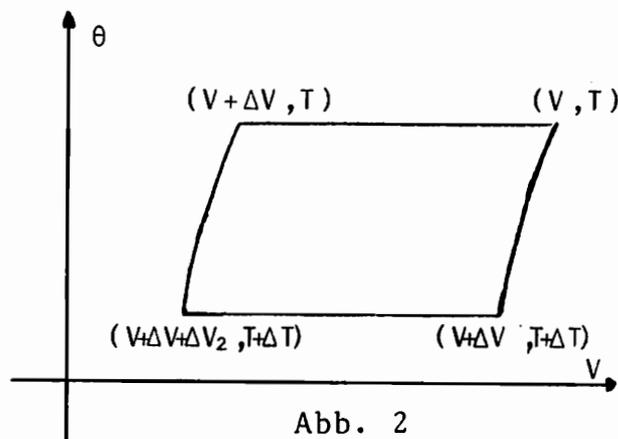


Abb. 2

Wendet man (2.7) an, dann erhält man durch Vernachlässigung

der Glieder dritter und höherer Ordnung in ΔV und ΔT

$$A(V, T)\Delta V + \frac{\partial A}{\partial V}(V, T)(\Delta V)^2 + A(V+\Delta V, T)\Delta V_1 + B(V+\Delta V, T)\Delta T =$$

$$= A(V+\Delta V+\Delta V_1, T+\Delta T)\Delta V + A(V, T)\Delta V_2 + B(V, T)\Delta T ,$$

oder äquivalent

$$A(V, T)\Delta V + \frac{\partial A}{\partial V}(V, T)(\Delta V)^2 + A(V, T)\Delta V_1 + \frac{\partial A}{\partial T}(V, T)\Delta V\Delta T +$$

$$+ B(V, T)\Delta T + \frac{\partial B}{\partial V}(V, T)\Delta V\Delta T = A(V, T)\Delta V_2 + B(V, T)\Delta T +$$

$$+ A(V, T)\Delta V + \frac{\partial A}{\partial V}(V, T)(\Delta V)^2 + \frac{\partial A}{\partial T}(V, T)\Delta V\Delta T , \quad (2.8)$$

Berechnet man ΔV_1 und ΔV_2 , dann folgt

$$\Delta V = \frac{B(V+\Delta V, T)}{A(V+\Delta V, T)}\Delta T =$$

$$= \frac{B(V, T)}{A(V, T)} \left(1 + \frac{\partial B}{\partial V}(V, T)\Delta V - \frac{\partial A}{\partial V}(V, T)\Delta V + \dots \right) \Delta T$$

bzw.

$$\Delta V = \frac{B(V, T)}{A(V, T)} \Delta T$$

Daraus folgt

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 + O(\Delta V\Delta T).$$

Setzt man das in (2.8) ein, dann erhält man durch Vereinfachung

$$\frac{\partial B}{\partial V}(V, T) = \frac{\partial A}{\partial T}(V, T)$$

was zu beweisen war. Daraus folgt für $\Lambda_V(V, T)$ und $K_V(V, T)$ die Restriktion

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\Lambda_V}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{K_V}{T} \right) \quad (2.9)$$

und es folgt außerdem, daß

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

ein totales Differential darstellt.

Für einen beliebigen Zyklus gilt demzufolge

$$\int dS = \int \frac{dQ}{T} = 0,$$

das führt wieder zur Definition der Entropie

$$S(V, T) = \int_{(0,0)}^{(V,T)} \frac{dQ}{T} \quad (2.10)$$

Anmerkung. Eine und dieselbe Restriktion (vgl. (1.11) und (2.9)) und ein- und derselbe Ausdruck der Entropie (vgl. (1.2) und (2.10)) wurden auf zwei unterschiedlichen Wegen abgeleitet.

Der erste Weg gründet sich auf solche Postulate, die als abstrakte mathematische Behauptungen formuliert sind. Der zweite Weg ist vom mathematischen Gesichtspunkt her gesehen eine nicht ganz rigorose Theorie, aber sie liefert eine zufriedenstellende physikalische Motivation. Bedauerlicherweise stellen die ersteren Ausführungen keineswegs eine mathematische Theorie für die oben erwähnte physikalische Motivation dar.

Mehr als das: Gemäß der Behauptung von Truesdell (vgl. [1]) ist es schwer zu begreifen, daß diese physikalische Motivation überhaupt in einer mathematischen Darstellung erfaßt werden kann. †)

1.3 Die thermodynamische Theorie auf der Grundlage des Prinzips von Carathéodory

Eine Alternative für die Bildung eines thermodynamischen Modells reversibler Prozesse wird vom Prinzip von Carathéodory geliefert. Im folgenden werden wir diese Theorie so vorstellen, wie sie in den Ausführungen der Arbeit von Nemat-Nasser [4] dargestellt wird. Man nimmt als zweites Hauptgesetz der Thermodynamik folgendes Prinzip an:

Das Prinzip von Carathéodory: Gegeben ist ein Zustand (V, θ) . Dann gibt es in jeder möglichen seiner Nachbarschaften einen anderen Zustand, der durch einen adiabatischen Prozeß nicht erreichbar ist. Es gilt folgendes Theorem:

Das Theorem von Carathéodory. In dem euklidischen Raum E_n betrachtet man die Differentialeformel

$$dF = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i ,$$

wobei X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) hinreichend glatte Funktionen von x_1, \dots, x_n sind, sowie einen Punkt $P \in E_n$ und seine Nachbarschaft $N_r(P)$, wobei

$$|P' - P| < r .$$

Falls es für jedes ε ($0 < \varepsilon < r$) einen Punkt $P' \in N_r(P)$ mit $|P' - P| < \varepsilon$ gibt, so daß dieser Punkt nicht durch eine

†) Es scheint jedoch, daß die neue Arbeit von Pitteri [12] solch eine mathematische Darstellung vorstellt.

Lösung der Differentialgleichung

$$X_i dx_i = 0$$

mit P zusammenhängen kann, dann gilt es einen integrierenden Faktor $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$, so daß

$$\frac{1}{\lambda} dF = \frac{X_i}{\lambda} dx_i$$

ein totales Differential darstellt.

Die Beweisführung dieses Theorems kann man in der Monographie von Buchdahl (loc.cit.) finden.

Berücksichtigt man jetzt das Theorem von Carathéodory, dann folgt, daß es ein $\lambda(V, \theta)$ gibt, so daß

$$dS = \frac{dQ}{\lambda} = \frac{\Lambda_V(V, \theta)}{\lambda(V, \theta)} dV + \frac{K_V(V, \theta)}{\lambda(V, \theta)} d\theta$$

ein totales Differential bildet. Es sei $S(V, \theta)$ die Funktion, die durch diese Differentialformel definiert wird.

Um den oben entwickelten Carnotschen Prozeß hier wiederzugewinnen, genügt es zu beweisen, daß λ eine Funktion ist, die nur von θ abhängt.

In den Ausführungen von Nemat-Nasser (loc.cit.) wird die Beweisführung dieser Tatsache unter der Voraussetzung vorgenommen, daß die oben definierte Funktion $S(V, \theta)$ eine in V und θ eindeutige Funktion ist (vgl. [4], S. 100).

Dieselbe Voraussetzung wird auch von Buchdahl (loc.cit.) formuliert. Offensichtlich ist diese Voraussetzung unabhängig vom Carathéodory-Prinzip und muß als zusätzliches Axiom betrachtet werden.

Aufgrund des Prinzips von Carathéodory und dieses Axioms läßt sich die Restriktion (2.9) für die kalorische Gleichung und zudem der Entropieausdruck (2.10) gewinnen.

Anmerkung. Die Annahme, daß $S(V, \theta)$ eindeutig in V und θ ist, sowie die Annahme, daß für alle Paare (V, θ) gilt:

$$\Lambda_V(V, \theta) \neq 0 \quad \text{und} \quad K_V(V, \theta) \neq 0$$

sind äquivalent.

Es ist ebenfalls klar, daß die letztgenannten Bedingungen die Möglichkeit der Durchführbarkeit von Carnotschen Zyklen um alle Punkte (V, Θ) impliziert.

Im übernächsten Abschnitt wird ein Beispiel von einer kalorischen Gleichung betrachtet, das zwar mit den Hauptgesetzen der Thermodynamik vereinbar ist, aber zu einer nicht eindeutigen V und Θ Entropie $S(V, \Theta)$ führt.

1.4 Die Anwendung der Carnotschen Theorie auf die Thermoelastizität

Anfänglich wurde die Thermoelastizität als ein entkoppeltes Phänomen für die Wärmeausbreitung unabhängig vom Deformationsprozeß betrachtet. Diese Konzeption erlaubt für die Berechnung des thermomechanischen Zustandes folgende Verfahren: Zunächst wird die Temperatur, aufgrund der Wärmeausbreitungsgleichung in starren Körpern, berechnet, dann setzt man das Temperaturfeld T in das konstitutive Gesetz (hier nur linear betrachtet)

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \delta_{ij} \quad (4.1)$$

wobei $\epsilon = \epsilon_{kk}$, ein und berechnet die Spannungen und Verzerrungen genau wie in der Elastizitätstheorie. Schreibt man die Energiebilanz im Rahmen eines solchen Modells, dann erhält man

$$W = \oint dL + \oint dQ = -(3\lambda + 2\mu) \alpha_T \oint T \dot{\epsilon}_{kk} dt .$$

Durchläuft man den Zyklus in einer bestimmten Reihenfolge, wird die innere Energie W negativ. Das steht aber im Widerspruch zum zweiten thermodynamischen Hauptgesetz.

Das aktuelle Modell für die Beschreibung des thermoelastischen Körpers wurde von Biot [5] vorgeschlagen. †)

†) Die erste Formel, die die Beziehung zwischen Spannungen und Temperaturen in adiabatischen Prozessen beschreibt, geht auf Lord Kelvin zurück. Weitere Entwicklungen sind mit den Namen von Duhamel, Voigt und Jeffreys verbunden.

Das Biotsche Modell gründet sich auf die Voraussetzung, daß

$$dW = dL + dQ \quad \text{und} \quad \frac{dQ}{T}$$

totale Differentialformeln im Raum der Verzerrungen

ϵ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) und der Temperatur T sind.

Es seien $W = W(\epsilon, T)$ bzw. $S = S(\epsilon, T)$ die innere Energie bzw. die Entropie, die durch oben erwähnte Differentialformeln definiert sind. Berücksichtigt man den Ausdruck der elementaren Arbeit

$$dL = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad ,$$

dann folgt

$$dQ = dW - \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial T} dT + \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) d\epsilon_{ij}. \quad (4.2)$$

Setzt man dQ in den Ausdruck der Entropie ein, dann erhält man

$$dS = \frac{1}{T} \left(-\frac{W}{T} dT + \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) d\epsilon_{ij} \right) .$$

Berücksichtigt man das konstitutive Gesetz (4.1), dann folgt

$$dS = \frac{1}{T} \left((3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \delta_{ij} - \lambda e \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} - 2\mu \epsilon_{ij} \right) d\epsilon_{ij} + \frac{1}{T} \frac{\partial W}{\partial T} dT .$$

Schreibt man die Bedingung der totalen Differentierbarkeit dann folgt

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} + (3\lambda + 2\mu) \alpha_T T \delta_{ij} . \quad (4.3)$$

Aus (4.2) erhält man

$$dQ = \frac{\partial W}{\partial T} dT + (3\lambda + 2\mu) \alpha_T T \delta_{ij} d\epsilon_{ij} .$$

Leitet man (4.3) bezüglich T ab, dann erhält man

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = 0,$$

und dadurch ergibt sich, daß $\frac{\partial W}{\partial T}$ eine Funktion nur von T ist

$$\frac{\partial W}{\partial T} = f(T).$$

Nimmt man an, daß für den undeformierten Zustand gilt:

$$W = c\rho T,$$

wobei $c\rho$ die Wärmekapazität bezeichnet, dann folgt unmittelbar, daß

$$f(T) = c\rho = \text{const.}$$

ist. Die kalorische Gleichung lautet dann

$$dQ = c\rho dT + (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T de. \quad (4.4)$$

Es gibt noch andere Wege, die zum selben Ausdruck der kalorischen Gleichung führen. Diese Wege gründen sich auf die Betrachtung der freien Energie, die durch die Beziehung

$$dQ = dW - TdS - SdT$$

definiert ist. Das Modell von Parkus [6] gründet sich auf die Voraussetzung, daß dS und dF totale Differentialformeln bilden. Das Modell von Kovalenko [7] geht ebenfalls von diesen Annahmen für dF und ds aus. Beide Modelle stimmen im wesentlichen mit dem Biotschen Modell überein. Die Voraussetzung, daß dQ/T ein totales Differential darstellt, ist in der Tat eine Ausdehnung der Carnotschen Theorie auf die festen Körper. Wie wir schon gesehen haben, ist die Eigenschaft der totalen Differentiabilität von dQ/T nur für solche Körper beweisbar, die Carnotsche Zyklen leisten können.

Die Wärmeausbreitungsgleichung, die der kalorischen Gleichung (4.4) entspricht, lautet

$$c_p \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T \dot{\epsilon} = a\Delta T + R, \quad (4.5)$$

wobei a die Wärmeleitfähigkeit und R die Wärmequelle bezeichnen. Im folgenden werden wir diejenigen Beispiele betrachten, die in den Rahmen des oben erwähnten Modells der Thermoelastizität gehören.

1. Vergleich zwischen einem isothermen und adiabatischen Zugversuch

Es sei ein isothermer Prozeß, in dem $\sigma_{11} = \sigma$ die einzige Spannungskomponente ist, die nicht den Wert Null hat. Die entsprechenden Verzerrungen lassen sich durch folgende Formel berechnen:

$$\epsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma,$$
$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma.$$

Für diesen isothermen Prozeß ergeben sich das Elastizitätsmodul und die Querkontraktionszahl aus den Verhältnissen

$$\frac{\sigma}{\epsilon_{11}} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = E_i$$

bzw.

$$\frac{\sigma}{\epsilon_{22}} = - \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda} = - \frac{E_i}{\nu_i}$$

Die beiden Größen führen den Index "i", weil sie einem isothermen Prozeß entsprechen. Lassen wir denselben Prozeß jetzt adiabatisch ablaufen, indem

$$dQ = c_p dT + (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T d\epsilon = 0$$

gilt, dann - berücksichtigt man die konstitutive Beziehung

$$de = \frac{1}{3\lambda+2\mu} d\sigma + 3 \alpha_T dT,$$

erhält man

$$dT = - \frac{\alpha_T T}{c_p(T)} d\sigma, \quad (4.5)$$

wobei $c_p(T) = c_p + 3(3\lambda+2\mu)\alpha_T^2 T$ die Wärme-Kapazität unter konstanter Spannung bezeichnet.

Eingesetzt (4.5) in das Konstitutive Gesetz (4.1) ergibt dies

$$d\varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} d\sigma - \frac{\alpha_T^2 T}{c_p(T)} d\sigma$$

woraus über

$$\frac{d\varepsilon_{11}}{d\sigma} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda+2\mu)} - \frac{\alpha_T T}{c_p(T)} = \frac{1}{E_1} - \frac{\alpha_T T}{c_p(T)} = \frac{1}{E_a}$$

ein von E_1 unterschiedlicher Elastizitätsmodul E_a für adiabatische Prozesse folgt.

Die numerische Auswertung des Ausdrucks

$$\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_a} = \frac{1}{\frac{c_p}{\alpha_T^2 T} + 3(3\lambda+2\mu)} = \frac{\alpha_T^2 T}{c_p(T)}$$

ergibt für Aluminium mit den Werten

$$E_1 = 6.75 \times 10^4 \text{ N/mm}^2, \quad \nu = 0.3, \quad \rho = 2.7 \text{ kg/dm}^3$$

$$c = 0.22 \text{ kcal/kggrad}, \quad \alpha_T = 2.38 \times 10^{-5} \text{ 1/grad}$$

$$T = 300^0 \text{ K}, \quad E_a = 67803 \text{ N/mm}^2$$

was im Vergleich mit E_1 eine Änderung um 0.4 % entspricht.

Wie dieses Beispiel zeigt, kann man auf diesem Wege das Biotsche Modell experimentell nur im Rahmen eines Experi-

menten bestätigen, bei dem der Fehler kleiner als 0.4 % wird.

2. Adiabatischer Zugversuch

Für einen adiabatischen Prozeß mögen folgende Zustände gelten:

Anfangszustand: $\sigma = 0$, $T_0 = 300^\circ\text{K}$

Endzustand: $\sigma = \sigma_1$, $T \neq T_1$.

Aus der kalorischen Gleichung

$$dQ = c_p dT + (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T de = 0$$

und aus dem konstitutiven Gesetz

$$de = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} d\sigma + 3\alpha_T dT$$

folgt

$$c_p dT + \alpha_T T d\sigma + 3(3\lambda + 2\mu)\alpha_T^2 T dT = 0 .$$

Integriert man diese Differentialformel, dann erhält man

$$\frac{c_p}{\alpha_T} (\ln T_1 - \ln T_0) + 3(3\lambda + 2\mu)\alpha_T (T_1 - T_0) = - \frac{\sigma_1}{\alpha_T} .$$

Bezeichnet man

$$T_1 = T_0 + \Delta T$$

und rechnet man in Näherung

$$\ln T - \ln T_0 \approx \frac{\Delta T}{T_0}$$

dann erhält man (Kelvin's Formula)

$$\Delta T = \frac{-\sigma_1}{\alpha_T (c_p / \alpha_T^2 T_0 + 3(3\lambda + 2\mu))} = \frac{-\sigma_1 \alpha_T T}{c_p(T)}$$

Setzt man die oben angegebenen Materialwerte für Aluminium ein und wählt man $\sigma_1 = 200 \text{ N/mm}^2$ so erhält man in erster Näherung einen Temperaturabfall von $T = 0.57^\circ \text{ K}$.

Dieses Beispiel zeigt, daß für eine Bestätigung des Biotschen Modells durch einen adiabatischen Zugversuch eine Änderung der Temperatur registriert werden muß, die kleiner ist als 0.57° K .

Im Vergleich mit den Werken der Temperaturänderungen in den üblichen Experimenten der infinitesimalen Thermoelastizität bildet 0.57° K eine obere Grenze. Wie in der Monographie von Bever, Holt und Titchener [8] behauptet wird, sind Werte 0.2° K üblich.

3. Isothermer Zugversuch

Gegeben sei ein Aluminiumzylinder mit den Abmessungen $r = 10 \text{ mm}$ $l = 200 \text{ mm}$. Nehmen wir als Temperatur die Raumtemperatur $T = 300^\circ \text{ K}$. Aus dem Biotschen Modell und aus dem konstitutiven Gesetz folgt

$$dQ = \alpha_T T d\sigma .$$

Pro Volumeneinheit ist die zugeführte Wärme in einem Zugversuch mit der Entspannung $\sigma = \sigma_1$ folgende:

$$Q = \int_0^{\sigma_1} dQ = \alpha_T T_0 \sigma_1 = 7.14 \times 10^{-4} \text{ Joule/mm}^3 .$$

Das bedeutet bei dem gegebenen Gesamtvolumen der Probe eine Wärmemenge von ca. 45 Joule.

Die ersten Experimente von dieser Art wurden schon 1830 von Weber durchgeführt. Später konnte Joule (1859), Edlund (1861) aufgrund sehr genauer Experimente Kelvin's Formula für Metalle bestätigen (vgl. Bell [9], S. 411).

Anmerkung: Die oben vorgestellten Beispiele zeigen, daß der numerische Beitrag des Kopplungsgliedes

$$(3\lambda+2\mu)\alpha_T T \dot{\epsilon}$$

in der Wärmeausbreitungsgleichung (4.5) sehr gering ist, d.h., daß man die Gleichung (4.5) als eine Störung der klassischen Wärmeausbreitungsgleichung betrachtet. Weil die Störung die Abteilungen der höchsten Ordnung beinhaltet, bilden diese eine singuläre Störung.

Bemerkenswert ist, daß die einfache Vernachlässigung des Kopplungsgliedes in (4.5) den thermodynamischen Hauptgesetzen widerspricht. Mit anderen Worten bildet die klassische Wärmeausbreitungsgleichung keine geeignete Regularisierung von (4.5).

Die folgenden Fragen scheinen berechtigt zu sein:

1. Gilt das oben erwähnte Modell von Biot (bzw. die Kelvin Formel) für alle festen Körper?
2. Ist das Modell von Biot das einzige Modell, welches mit den Hauptgesetzen der Thermodynamik verträglich ist?
3. Wie kann man die Wärmeausbreitungsgleichung (4.5) regularisieren, ohne die Hauptgesetze der Thermodynamik zu verletzen?

Im folgenden versuchen wir, eine Antwort auf die beiden letzten Fragen zu geben.

1.5 Alternative Modelle für die Thermoelastizität

Das Modell von Biot ist auf die Voraussetzung der Existenz der Carnotschen Prozesse gegründet. Dazufolge muß jedes eventuell alternative Modell auf diese Annahme verzichten. Wir betrachten wieder die allgemeine Form der kalorischen Gleichung

$$dQ = \alpha_{ij}(\epsilon, T) d\epsilon_{ij} + \beta(\epsilon, T) dT .$$

Carnotsche Zyklen sind in folgenden zwei Fällen unmöglich:

$$1^{\circ} \quad \alpha_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i, j = 1, 2, 3$$

$$2^{\circ} \quad \beta = 0 \quad .$$

Weil der zweite Fall nicht die Wärmeausbreitung in starren Körpern beschreiben kann, ist nur der erste Fall, d.h.

$$dQ = \beta(\epsilon, T) dT \tag{5.1}$$

zu betrachten. Vergleicht man (5.1) mit

$$dQ = \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) d\epsilon_{ij} + \frac{\partial W}{\partial T} dT \quad ,$$

dann folgt

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} - \sigma_{ij} = 0 \quad \text{und} \quad \beta(\epsilon, T) = \frac{\partial W}{\partial T} \quad .$$

Der Ausdruck der inneren Energie ist dann

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} + \frac{\partial W}{\partial T} dT = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} + \frac{\partial W}{\partial T} dT$$

was durch das konstitutive Gesetz in

$$dW = (\lambda \epsilon \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) \delta_{ij}) d\epsilon_{ij} + \frac{\partial W}{\partial T} dT \tag{5.2}$$

übergeht. Die Bedingung der Intergrabilität dieser Differentialformel führt zu

$$\frac{\partial^2 W}{\partial T \partial \epsilon_{ij}} = -(3\lambda + 2\mu) \alpha_T \delta_{ij} \quad .$$

Durch Integration erhält man

$$\frac{\partial W}{\partial T} = -(3\lambda + 2\mu) \alpha_T \epsilon + f(T) \quad ,$$

wobei $f(T)$ eine beliebige Funktion ist.

Setzt man dies in (5.2) ein, dann folgt

$$dW = (\lambda e \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0)\delta_{ij})d\epsilon_{ij} + \\ + (-(3\lambda + 2\mu)\alpha_T e + f(T))dT,$$

dessen Stammfunktion

$$W = \frac{1}{2}(\lambda e^2 + 2\mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0)e + F_0(T)$$

mit

$$\frac{dF_0}{dT} = f(T)$$

ist. Nimmt man an, daß für den unverformten Körper

$$W(0, T) = c\rho T$$

gilt, dann folgt

$$W = \frac{1}{2}(\lambda e + 2\mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T - T_0)e + c\rho T .$$

Als kalorische Gleichung erhält man

$$dQ = \frac{\partial W}{\partial T}dT = (-(3\lambda + 2\mu)\alpha_T e + c\rho)dT \quad (5.3)$$

was eine Alternative zu dem Modell von Biot bildet.

Wie wir schon bemerkt haben, in dem Modell von Biot sind die Wärmeausbreitung und der Deformationsprozeß das Glied

$$(3\lambda + 2\mu)\alpha_T T e$$

miteinander gekoppelt, welches in der kalorischen Gleichung erscheint. Obwohl dieses Kopplungsglied sehr klein ist, kann man es nicht ohne weitere mathematische Überlegungen vernachlässigen. Die mathematischen Grundlagen für eine solche Vernachlässigung wurden in letzter Zeit von Day [10], [11] untersucht.

Im Rahmen des neuen Modells sind die thermischen und die mechanischen Prozesse miteinander durch das Glied

$$-(3\lambda + 2\mu)\alpha_T e$$

gekoppelt, das in der kalorischen Gleichung (5.3) erscheint. Bemerkenswert ist, daß dieses Glied nur von der Deformation abhängt und so einer einfachen Störung der Wärmeausbreitungsgleichung entspricht.

Die Existenz eines zum Modell von Biot alternativen Modells für die Beschreibung der thermoelastischen Stoffe führt uns zu den folgenden Bemerkungen:

1. Gilt Kelvin's Formula nicht für einen bestimmten Stoff, dann hat die kalorische Gleichung dieses Stoffes unbedingt die Form (5.3).
2. Gilt Kelvin's Formula für alle Stoffe, dann benötigt die Thermodynamik noch ein neues Hauptgesetz, welches das alternative Modell nicht mehr notwendig macht.

1.6 Asymptotische Gleichung

Für eine kleine Deformationsgeschwindigkeit ist der Beitrag des Gliedes $(3\lambda+2\mu)\dot{e}$ sehr klein. Das Problem besteht darin, zu einer asymptotischen Darstellung der kalorischen Gleichung zu gelangen, in der der Betrag der Deformationsgeschwindigkeit Null ist. Die einfache Vernachlässigung des Kopplungsgliedes führt ja zu einer kalorischen Gleichung der starren Körper, die, wie wir bereits festgestellt haben, nicht mit der Thermodynamik vereinbar ist. Im folgenden wird ein asymptotisches Verfahren für ein Modell aufgezeigt, das mit den Hauptgesetzen der Thermodynamik vereinbar ist.

Es sei

$$\begin{aligned} d\tilde{Q} = dQ + dQ^\dagger = (c_p + \eta_T(e, T))dT + \\ + ((3\lambda + 2\mu)\alpha_T T + \eta_e(e, T))de . \end{aligned} \tag{6.1}$$

Eine Störung der kalorischen Gleichung. Diese Störung muß mit den Hauptgesetzen der Thermodynamik vereinbar sein, d.h., daß die zusätzliche innere Energie

$$dW^{\dagger} = dQ^{\dagger} = \eta_T(e, T)dT + \eta_e(e, T)de$$

ein totales Differential bildet. Der Beitrag der Deformationsgeschwindigkeit verschwindet genau dann, wenn gilt:

$$\eta_e = -(3\lambda+2\mu)\alpha_T T .$$

Aus der Bedingung der totalen Differentiabilität von dW^{\dagger} folgt

$$\frac{\partial \eta_T}{\partial e} = -(3\lambda+2\mu)\alpha_T$$

woraus man

$$\eta_T = -(3\lambda+2\mu)\alpha_T e + f(T)$$

erhält.

Die kalorische Gleichung (6.1) wird

$$dQ = (c_p - (3\lambda+2\mu)\alpha_T e + f(T))dT .$$

Aus der Bedingung, daß im unverformten Zustand gelten soll:

$$dQ = c_p dT$$

folgt unmittelbar

$$f(T) = 0 .$$

Dadurch reduziert sich die kalorische Gleichung zu

$$dQ = (c_p - (3\lambda+2\mu)\alpha_T e)dT ,$$

was identisch mit der kalorischen Gleichung (5.3) ist.

Die asymptotische Formel der kalorischen Gleichung, die einer kleinen Deformationsgeschwindigkeit entspricht, und die kalorische Gleichung für das alternative Modell sind gleich.

1.7 Schlußfolgerung

Wir fassen die oben gewonnenen Ergebnisse in folgendem Schema zusammen:

<p>Das Modell von Biot Kalorische Gleichung</p> $dQ = c_p dT + (3\lambda + 2\mu)\alpha_T dT$	<p>Das alternative Modell Kalorische Gleichung</p> $dQ = (c_p - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T e) dT$
<p>Carnotsche Zyklen sind möglich</p>	<p>Carnotsche Zyklen sind unmöglich</p>
<p>Wärmeausbreitungsgleichung</p> $c_p \dot{T} + (3\lambda + 2\mu)\alpha_T T \dot{e} = a\Delta T + R$	<p>Wärmeausbreitungsgleichung</p> $(c_p - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T e) \dot{T} = a\Delta T + R$
<p>Asymptotische Formel der kalorischen Gleichung für kleine Deformationsgeschwindigkeit</p> $dQ = (c_p - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T e) dT$	<p>Unabhängig von der Deformationsgeschwindigkeit</p>

Das alternative Modell ist tauglich für die Beschreibung von thermodynamischen Prozessen, die mit Materialien, die die Carnotschen Zyklen nicht durchführen können, und als asymptotische Darstellung für diejenigen thermodynamischen Prozesse, in denen der Betrag der Deformationsgeschwindigkeit in der kalorischen Gleichung vernachlässigbar ist.

2. Die Fließgrenze, Normalitäts-Regel und Druckers Postulat für isothermes plastisches Fließen

Die Theorie des infinitesimalen plastischen Fließens beinhaltet vier spezifische Konzepte, und zwar:

1. die Fließgrenze,
2. die Normalitäts-Regel,
3. die Belastungs-Entlastungs-Bedingung,
4. die Restriktionen von Drucker.

Diese Konzepte sind aus experimentellen Beobachtungen hervorgegangen. Betrachtet man diese speziellen Begriffe im Zusammenhang mit der klassischen Elastizitätstheorie, dann erhält man passende Modelle, um isothermes plastisches Fließen zu beschreiben.

Eine natürliche Aufgabe besteht in der Erklärung der thermodynamischen Bedeutung dieser Konzepte. Eine Antwort darauf könnte bestimmen, welche der oben erwähnten Begriffe universell gültig sind und welche nur zu dem besonderen Modell des plastischen Fließens gehören. Die Antwort kann für die Beschreibung anderer Arten von plastischem Fließen nützlich sein, z.B. für die Beschreibung des nichtisothermen plastischen Fließens.

Wir beginnen mit folgendem Theorem:

Theorem. Gegeben ist ein plastisches Fließen, das von einem konstitutiven Gesetz der Form

$$\dot{\epsilon}_{ij} = C_{ij}^{kl}(\sigma) \dot{\sigma}_{kl} \quad (1.1)$$

regiert wird, so daß folgende Annahmen erfüllt sind:

1. die plastische Arbeit, die einer Trajektorie $\sigma(t)$, $t \in [0, T]$ im Spannungsraum assoziiert wird

$$L = \int_0^T \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dt$$

ist eine Funktion der End-Spannungen

$$L = \Psi(\sigma(T)) ; \quad (1.2)$$

2. ohne plastische Arbeit sind keine plastischen Formänderungen möglich,

3. für hinreichend kleine Spannungsinkremente ist die Monotonie-Bedingung

$$\Delta \sigma_{ij} \Delta \epsilon_{ij} > 0 ; \quad (1.3)$$

immer erfüllt.

Dann hat das konstitutive Gesetz die besondere Form:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = G(\sigma) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \delta_{pq} \quad (1.4)$$

Beweis: Aus den Bedingungen (1.1) und (1.2) folgt, daß das Spannungsinkrement, welches tangent an der Fläche $f(\sigma) = \text{const.}$ ist, keine plastischen Formänderungen produziert, d.h. wenn $\sigma_{kl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} = 0$ gilt, dann ist $\dot{\epsilon}_{ij} = 0$. (1.5)

Man spaltet den Koeffizienten C_{ij}^{kl} für feste Indizes i und j , in

$$C_{ij}^{kl}(\sigma) = G_{ij}(\sigma) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \bar{C}_{ij}^{kl} , \quad (1.6)$$

wobei \bar{C}_{ij}^{kl} die Projektion des C_{ij}^{kl} auf die Ebene tangent zu $f(\sigma) = \text{const.}$ bezeichnet wird, d.h.

$$\bar{C}_{ij}^{kl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} = 0 .$$

Wenn man als δ_{kl}

$$\delta_{kl} = \mu \bar{c}_{ij}^{kl}$$

annimmt, mit μ eine beliebige positive Zahl, dann folgt aus (1.5)

$$\mu \bar{c}_{ij}^{kl} c_{ij}^{kl} = \xi_{ij} = 0$$

(keine Summierung bezüglich der festen Indizes i und j ist vorausgesetzt). Das impliziert unmittelbar, daß

$$\bar{c}_{ij}^{kl} = 0 \quad \text{für } k, l = 1, 2, 3.$$

Weil die festen Indizes auch beliebig sein können, folgt das für alle $i, j, k, l = 1, 2, 3$. Setzt man dieses in das konstitutive Gesetz (1.1) ein, so erhält man

$$\xi_{ij} = G_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \delta_{pq} . \quad (1.7)$$

Es sei jetzt $\underline{\delta}$ ein beliebiges Spannungsinkrement und $\underline{\delta}$ seine Zeitabteilung. Man kann $\underline{\delta}$ in folgender Form aufspalten:

$$\underline{\delta} = \underline{\delta}' + \underline{\delta}'' ,$$

wobei $\underline{\delta}''$ normal zu $f(\sigma) = \text{const.}$ und $\underline{\delta}'$ tangent zu derselben Fläche ist. Es sei δ^+ ein anderes Spannungsinkrement, so daß auch tangent zu $f(\sigma) = \text{const.}$ ist. Aufgrund der Voraussetzung 2 des Theorems produziert $k\underline{\delta}^+ + \underline{\delta}''$, wobei k eine beliebige Zahl ist, dieselbe Verzerrungsgeschwindigkeit $\underline{\xi}$ wie $\underline{\delta}' + \underline{\delta}''$.

Gemäß der Monotonie-Bedingung (1.3) folgt

$$(k\underline{\delta}_{ij}^+ + \underline{\delta}_{ij}'') \xi_{ij} > 0 .$$

Weil k eine beliebige Zahl ist, gilt Ungleichung genau

dann, wenn

$$\delta_{ij}^+ \dot{\epsilon}_{ij} = 0$$

ist. Weil man δ^+ beliebig in der Ebene tangent zu $f(\sigma) = \text{const.}$ wählen kann, folgt, daß $\dot{\epsilon}$ normal zu dieser Fläche ist, d.h. es gibt $H(\sigma, \dot{\sigma})$, so daß

$$\dot{\epsilon}_{ij} = H(\sigma, \dot{\sigma}) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} . \quad (1.8)$$

Vergleicht man (1.8) und (1.7), dann folgt unmittelbar (1.4). Das beweist auch das Theorem.

Die physikalische Motivierung für die Annahme des Theorems kann folgende sein:

Die allgemeine Form des konstitutiven Gesetzes (1) und die Voraussetzung 1.

Eine der allgemeinsten Formen eines geschwindigkeitsunabhängigen konstitutiven Gesetzes lautet

$$d\epsilon = C \left[\frac{s}{\sigma}(s) \right] d\sigma , \quad (1.9)$$

wobei $\frac{s}{\sigma}(s)$ den Spannungsweg als Funktion der Bodenlänge s bezeichnet

$$ds^2 = d\sigma_{ij} d\sigma_{ij}$$

und $d\sigma$, $d\epsilon$ die Spannungswege bzw. die plastischen Verzerrungsinkremente darstellen.

Das konstitutive Gesetz (1.1) stellt eine besondere Form von (1.9) dar, welche der Voraussetzung entspricht, daß C nur von dem aktuellen Spannungszustand abhängt. Diese Voraussetzung und die Voraussetzung 1 des Theorems sind äquivalent der Annahme, daß die Spannungskomponenten die Zustandsparameter bilden.

Die Voraussetzung 2 hat eine eindeutige thermodynamische Bedeutung, und zwar, daß alle bleibenden Deformationen Energie verbrauchen.

Die Voraussetzung 3 stellt eine übliche Monotonie-Bedingung zwischen Spannung und Verzerrung dar, die in der Mechanik der Kontinua sehr häufig getroffen wird.

Definition. Ein isothermes plastisches Fließen, das die Bedingungen des oben erwähnten Theorems erfüllt, wird standard-isothermes plastisches Fließen genannt.

Aus dem Theorem folgt, daß ein standard-isothermes plastisches Fließen folgende Eigenschaften hat.

1. Es entsteht nur für Spannungszustände, die außerhalb der Fläche $f(\sigma) = 0$ (Fließgrenze) liegen.
2. Die plastische Verzerrungsgeschwindigkeit ist normal zu der Fläche $f(\sigma) = \text{const.}$ (die Normalitäts-Regel).
3. Plastisches Fließen entsteht nur, wenn neben der Bedingung $f(\sigma) = 0$ auch $f(\sigma) > 0$ gilt (die Belastungsbedingung).
4. Die Monotoniebedingung $\Delta\sigma_{ij}\Delta\varepsilon_{ij} > 0$ ist erfüllt (der erste Teil von Drucker's Postulat).

Es folgt, daß das Modell des standard-isothermen plastischen Fließens alle Begriffe der klassischen Plastizitätstheorie enthält. Diese Begriffe erscheinen aber als eine Folge der besonderen Annahmen über die physikalischen Fließeigenschaften und nicht als primäre Konzepte.

Anmerkung: Der zweite Teil von Drucker's Postulat (der mit der Konvexität der Fließgrenze äquivalent ist) ist eine zusätzliche Bedingung für Stabilität.

Wir werden das anhand des folgenden Beispiels argumentieren. Es sei eine nicht konvexe Fließgrenze, deren Schritt mit der Ebene $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$ eine Kurve ergibt, die nicht konvex ist. Weiter nehmen wir an, daß diese Kurve im Punkt $(-\sigma, 0)$ nicht konvex ist (Abb. 1).

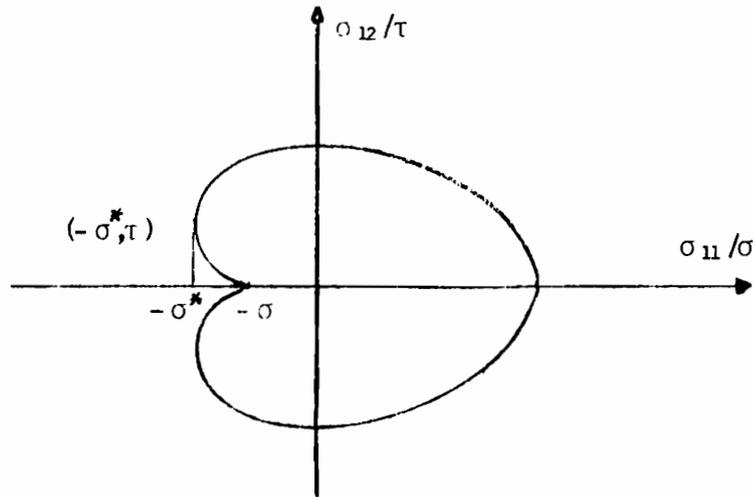


Abb. 1

Wir betrachten einen Stab, der aus solch einem Material besteht. Dieser Stab sei durch ein Kräftesystem, so wie in Abb. 2 dargestellt, belastet.

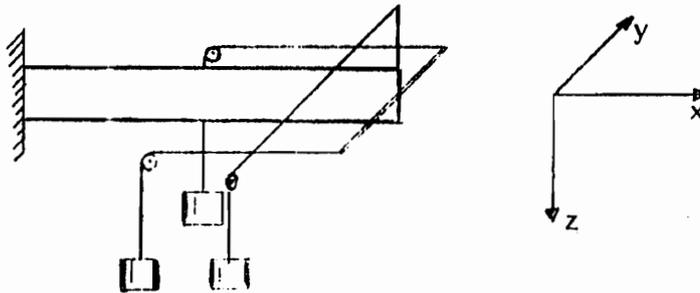


Abb. 2

Der Anfangsspannungszustand sei $(-\sigma, \tau)$. Durch Aufbringung zusätzlicher Kräfte wird der Spannungszyklus beschrieben, der durch die Ecken $(-\sigma, \tau)$, $(-\sigma^\dagger, \tau_2)$, $(-\sigma^\dagger, 0)$, $(-\sigma^\dagger, 0)$ mit $\sigma^\dagger > \sigma$ dargestellt ist.

Berechnet man die Arbeit, dann folgt, daß durch solch einen Zyklus das System einen Teil seiner potentiellen Energie abgibt.

Wir bemerken, daß die Voraussetzung der Nichtkonvexität, die als Gerade in der $(\sigma_{11}, \sigma_{12})$ -Ebene erscheint, keine Einschränkung der Allgemeinheit darstellt. Wenn

die Fließgrenze nicht konvex ist, dann gibt es im Spannungsraum immer eine Ebene, welche die Fließgrenze entlang einer nicht-konvexen Kurve schneidet.

Daraus folgt, daß der zweite Teil des Druckerschen Postulats eine notwendige Stabilitäts-Bedingung bezüglich der oben erwähnten Spannungszyklen darstellt.

Man kann sich auch solche Systeme vorstellen, die nicht stabil auf diese Art von Störungen sind. Das heißt, daß der zweite Teil des Druckerschen Postulats keine allgemeine thermodynamische Restriktion darstellt.

Aufgrund der oben erwähnten Überlegungen kann man schließen, daß die Fließgrenze, die Normalitäts-Regel, die Belastungs-Entlastungs-Bedingung und das Druckersche Postulat keine allgemeine thermodynamische Bedeutung haben. Sie sind nur eine Folge der speziellen Annahmen über die physikalischen Eigenschaften des plastischen Fließens.

Es ist interessant zu bestimmen, welche physikalischen Eigenschaften den am meisten bekannten Modellen des plastischen Fließens entsprechen.

Melan's Modell [1] betrachtet das konstitutive Gesetz

$$\dot{\epsilon}_{ij} = G(\sigma) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} .$$

Es ist ein konstitutives Gesetz, welches der Klasse (1.1) angehört. Im allgemeinen Fall befriedigt dieses Modell nicht die Bedingungen 1 - 3 des Theorems. Bemerkenswert ist, daß dieses Modell die Monotonie-Bedingung (1.3) genau dann erfüllt, wenn

$$g(s) = \tilde{g}(f(\sigma))$$

ist.

Das konstitutive Gesetz reduziert sich in diesem Fall auf

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \tilde{G}(\sigma) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \dot{\sigma}_{pq}$$

wobei $\tilde{G}(\sigma) = G(\sigma) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial f}$ bezeichnet.

Drucker's Modell [2] hat als konstitutives Gesetz die Fließ-Regel

$$\dot{\epsilon}_{ij} = G(\sigma) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \delta_{pq} .$$

Dieses konstitutive Gesetz gehört zur Klasse (1.1). Die Monotonie-Bedingung (1.3) wird genau dann erfüllt, wenn $G(\sigma) > 0$ ist.

Ist

$$\sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} > 0 ,$$

dann wird auch die Voraussetzung 3 des Theorems erfüllt. Die Voraussetzung 1 des Theorems wird genau dann erfüllt, wenn

$$G(\sigma) = \frac{H(f(\sigma))}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}} .$$

Lehmann's Modell [3] hat das konstitutive Gesetz

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = h(\tau) \sigma'_{ij} \dot{\tau} + \kappa(\tau) \delta'_{ij} ,$$

wobei $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$ die Deviator-Komponenten und $\tau^2 = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}$ die zweite Invariante bezeichnen. Dieses konstitutive Gesetz gehört zur Klasse (1.1).

Das Modell erfüllt die Voraussetzung 1 und 2 des Theorems.

Es erfüllt nicht die Bedingung 3 dieses Theorems.

Um diese letzte Behauptung zu beweisen bemerken wir, daß die plastische Arbeit den Ausdruck

$$L = \int (h(\tau) \tau^2 + \kappa(\tau) \tau) d\tau$$

hat und eine Funktion von τ ist

$$L = f(\tau) .$$

Es sei $\sigma(t)$ eine Spannungsgeschichte, so daß gilt

$$\tau^2 = \sigma'_{ij}(t)\sigma'_{ij}(t) = \text{const.}$$

Die entsprechende plastische Deformation wird

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \kappa(\tau)\delta'_{ij},$$

während die plastische Leistung

$$P = \dot{L} = 0.$$

Anmerkung: Es sei das letzte konstitutive Gesetz im Rahmen des Verfestigungs-Modells

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = h(\tau)\sigma'_{ij}\dot{t} + \kappa(\tau)\delta'_{ij} \quad \text{wenn } \tau^2 - k^2(L) = 0 \text{ und } \dot{t} > 0$$

betrachtet.

Man kann dann eine Folge der Spannungsgeschichte $\sigma_n(t)$ bestimmen, so daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma'_n(t) = \sigma'(t), \quad \tau_n^2 = k(L)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma'_{nij}(t)\sigma'_{nij}(t) = \sigma'_{ij}(t)\sigma'_{ij}(t) = \tau_0^2 = \text{const.}$$

und

$$\dot{t}_n > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^2 = 0$$

gelten.

Für die entsprechenden plastischen Verzerrungen gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \dot{\epsilon}'_{nij}(t) = \kappa(t_0)\delta'_{ij} \neq 0,$$

obwohl

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \dot{L}(\tau_n) = 0.$$

Das zeigt, daß auch für die oben erwähnte Art von Verfestigung das Paradoxon nicht ausgeschlossen wird.

Christoffersen und Hutchinson Modell [4]. Das konstitutive Gesetz dieses Modells lautet

$$\underline{\dot{\epsilon}} = C(\theta, \sigma) \underline{\dot{\sigma}}$$

wobei C eine Tensor-Funktion

$$C: [0, \pi] \times \Sigma \rightarrow R^{6 \times 6}$$

ist, welche von der Spannung $\underline{\sigma} \in \Sigma$ und von dem Winkel θ zwischen der Spannungsgeschwindigkeit $\underline{\dot{\sigma}}$ und einer gegebenen Richtung $\lambda^{(o)}$ im Spannungsraum Σ abhängt.

Wegen der Abhängigkeit von θ gehört dieses konstitutive Gesetz nicht zur Klasse (1.1).

Obwohl durch geeignete Restriktionen, welche der Tensorfunktion aufgezwungen werden, die Existenzbedingungen der Fließgrenze, der Normalitäts-Regel, der Monotonie-Bedingung der Konvexität der Fließgrenze erfüllt werden können, stellt das Modell von Christoffersen und Hutchinson - im Vergleich zum Modell des standard-isotropen plastischen Fließens - besondere physikalische Eigenschaften dar. Ob alle diese Eigenschaften in der Tat denen reeller Materialien entsprechen, ist noch eine offene Frage. Besonders wichtig ist zu beweisen, daß die Fließregel dieses Modells im folgenden Sinn stabil ist:

Strebt die Spannungsgeschichte $\underline{\sigma}_1(t), t \in [0, T]$ gegen $\underline{\sigma}_2(t), t \in [0, T]$ bezüglich der Norm

$$\|\sigma\| = \max_{t \in [0, T]} |\underline{\sigma}| \quad \text{d.h.} \quad \max_{t \in [0, T]} |\underline{\sigma}_1(t) - \underline{\sigma}_2(t)| \rightarrow 0,$$

dann gilt auch für die entsprechenden Verzerrungen $\underline{\epsilon}_1(t), \underline{\epsilon}_2(t), t \in [0, T]$

$$\max_{t \in [0, T]} |\underline{\epsilon}_1(t) - \underline{\epsilon}_2(t)| \rightarrow 0.$$

Man erkennt, daß bei den üblichen Modellen der isothermen Plastizität eine solche Eigenschaft der Stabilität unmittelbar folgt.

Green's Modell [5]. Für den isotropen Fall gründet sich dieses Modell auf die folgenden zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \tilde{t}_j^i &= h_1^+ f_j^i + 2t_k^i f_j^k + \frac{1}{2}h_4^+ (f_k^i t_j^k + t_k^i f_j^k) + (h_3^+ M + h_7^+ N) \delta_j^i + \\ & (h_6^+ M + h_{10}^+ N) t_j^i + (h_9^+ M + h_{11}^+ N) t_k^i t_j^k + \\ & \frac{1}{2}h_8^+ (f_m^i t_n^m t_j^n + t_m^i t_n^m f_j^n) \quad \text{für } M = t_j^i f_i^j > 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{t}_j^i &= h_1^- f_j^i + 2t_k^i f_j^k + \frac{1}{2}h_4^- (f_k^i t_j^k + t_k^i f_j^k) + (h_3^- M + h_7^- N) \delta_j^i + \\ & (h_6^- M + h_{10}^- N) t_j^i + (h_9^- M + h_{11}^- N) t_k^i t_j^k + \\ & \frac{1}{2}h_8^- (f_m^i t_n^m t_j^n + t_m^i t_n^m f_j^n) \quad \text{für } M = t_j^i f_i^j \leq 0 . \end{aligned}$$

Hier bezeichnen $f_j^i = d_j^i - \frac{1}{3}d_k^k \delta_j^i$; $t_j^i = s_j^i - \frac{1}{3}s_k^k \delta_j^i$
 die Deviatoren der Verzerrungsgeschwindigkeit $d_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$
 und s_{ij} der Cauchy-Spannungen ; $h_1^+ \dots h_{11}^+$
 bezeichnen Funktionen von

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} t_j^i t_j^i & ; & & K &= \frac{1}{3} t_j^i t_j^k t_i^k \\ M &= t_j^i f_i^j & ; & & N &= t_j^i t_j^k f_i^k \end{aligned}$$

und

$$\tilde{s}_j^i = \frac{\partial s_j^i}{\partial t} + v^m s_{j,m}^i + v_{,j}^m t_m^i - v_{,m}^i t_j^m .$$

Im Fall der infinitesimalen Theorie reduziert sich dieses konstitutive Gesetz zu einem Gesetz der Klasse (1.1). Das Modell von Green ist, mit Ausnahme des Modells von Christoffersen und Hutchinson, allgemeiner als alle schon betrachteten Modelle. Dieses Modell beinhaltet keines der Konzepte der klassischen Plastizität.

Verlangt man aber von diesem Modell die physikalischen Eigenschaften, die den Bedingungen des Theorems entsprechen, dann erhält man wieder das Modell des standard-isothermen plastischen Fließens. Die Verhältnisse des Modells von Green zu den anderen Modellen sind in Abb. 3 dargestellt.

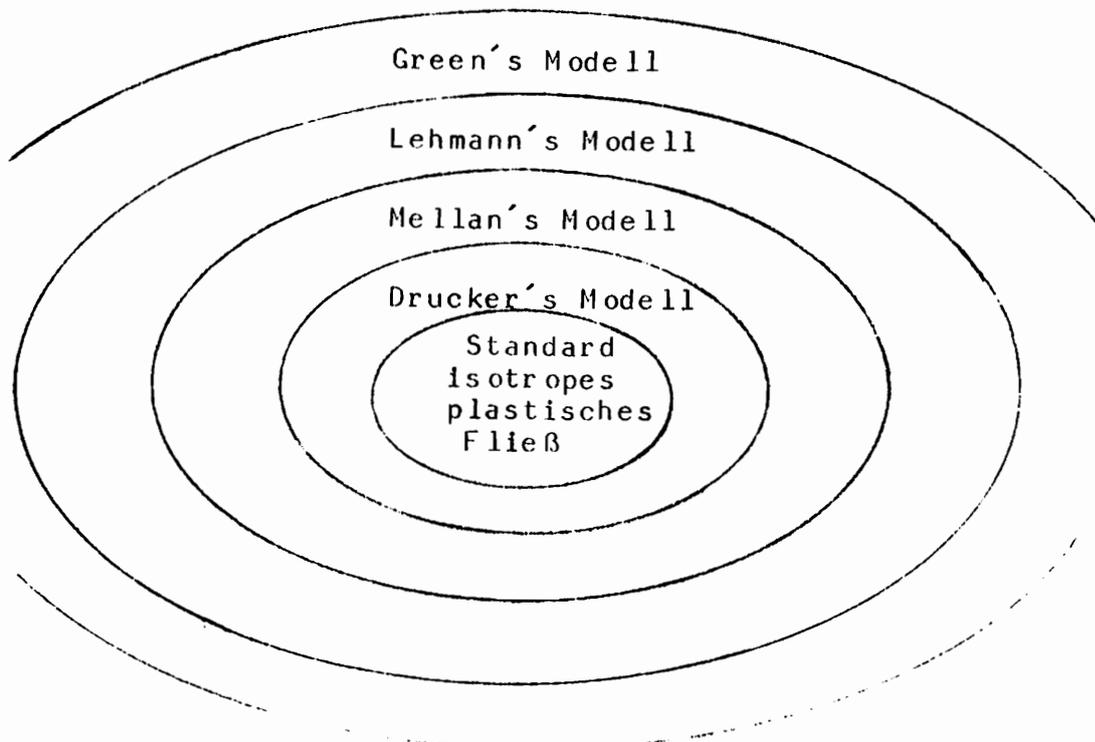


Abb. 3

Schlußfolgerung:

Durch bestimmte Restriktionen reduziert sich das Modell von Green auf andere bekannte Modelle. Diese Restriktionen reflektieren physikalische Eigenschaften des Materials. Die Existenz der Fließgrenze, der Normalitäts-Regel und die Erfüllung der Ungleichungen von Drucker erscheinen als Folge dieser physikalischen Eigenschaften und nicht als primäre Konzepte.

3. Zur Entropie

Für die reversiblen Prozesse, welche die Existenz der Carnotischen Zyklen voraussetzen, wird die Entropie S durch die Beziehung

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

definiert, wobei T die absolute Temperatur und dQ das Inkrement der Wärmeenergie bezeichnen.

Diese Definition gilt nicht mehr für irreversible Prozesse. Eine allgemeine Gültigkeit besitzt aber die folgende statistische Definition der Entropie (vgl. [1]). Diese Definition gründet sich auf die Annahme, daß die Entropie ein Maß für die Unordnung des Systems ist.

Es existiere ein thermodynamisches System, das von den Zustandsparametern $x_1 \dots \dots \dots x_n$ charakterisiert wird. Diese Parameter beschreiben nur den makroskopischen Zustand des Systems, es gibt jedoch immer mehrere mikroskopische Zustände, die denselben Werten der Zustands-Parameter entsprechen. Die sogenannte thermodynamische Wahrscheinlichkeit W , die mit den Zustandsparametern $x_1 \dots \dots \dots x_n$ assoziiert wird, können wir gleich der Zahl der mikroskopischen Zustände annehmen, durch die der makroskopische Zustand realisiert werden kann. W ist umso größer, je größer die Unordnung des Systems und dadurch unsere Unkenntnis über das System ist. Das führt uns zur Annahme, daß es eine Funktion

$$S = S (W)$$

gibt, die die Entropie und die thermodynamische Wahrscheinlichkeit verbindet. (Moderne Überlegungen über die mikroskopische Theorie der Entropie finden sich in den Arbeiten

von Müller [2], Prigogine [3] und Becker[4].) Im Rahmen der phänomenologischen Thermomechanik der Kontinua, in der man üblicherweise die innere mikroskopische Struktur ignoriert, ist solch eine Definition der Entropie unfruchtbar. Für ein Kontinuum scheint eine phänomenologische Definition, die die Entropie in Verbindung mit den Zustandsparametern betrachtet, mehr geeignet zu sein. Die ersten Untersuchungen für eine solche Definition sind erst in der Mitte des neunzehnten Jahrhunderts von Carnot, Clausius und Reech durchgeführt worden. Sie wurden später von Kelvin, Caratheodory und Planck weitergeführt. Im folgenden beschränken wir uns nur auf die Betrachtung der Entwicklung der Forschungen, die zu der sogenannten Clausius-Duhem-Doktrin der Entropie geführt hat.

Chronologisch wird diese Entwicklung von den folgenden Etappen markiert:

1822, Fourier (vgl. [5]) formuliert für die Wärmeausbreitung die Beschränkung

$$q \text{ grad} T \leq 0 ,$$

1850 - 1854 Clausius und Reech (vgl. [6]) begründen die kalorische Theorie, die für solche reversiblen Prozesse, die auch Carnotsche Prozesse beinhalten, zu der Definition der Entropie

$$ds = \frac{dQ}{T}$$

geführt hat.

1897 Planck [7] schlägt für irreversible Prozesse die Ungleichung $dS \geq \frac{dQ}{T}$ (Clausius-Planck-Ungleichung) vor.

1897 Duhem (vgl. [8]) leitet die Ungleichung

$$\rho \dot{S} \geq - \frac{\text{div } q}{T} + \frac{q \text{ grad } T}{T^2}$$

(Clausius-Duhems Ungleichung) ab.

1960 Truesdell und Noll [9] dehnen die Clausius-Duhem-Ungleichung für den Fall einer existierenden Wärmequelle R auf

$$\rho \dot{S} \geq - \frac{\text{div } q}{T} + \frac{q \text{ grad } T}{T^2} + \rho \frac{\dot{R}}{T}$$

aus.

1963 Coleman und Noll [10] erarbeiten die rationale Thermodynamik, die sich auf die Clausius-Duhem-Ungleichung gründet.

1977 Day [11] findet ein Beispiel, welches beweist, daß aus der Ungleichung von Clausius-Duhem nicht eine eindeutige Definition der Entropie folgt.

Es ist ausgesprochen interessant, eine Erklärung dafür zu finden, weshalb die Definition der Entropie durch die Clausius-Duhem-Ungleichung zu keiner Eindeutigkeit führt. Zu diesem Zweck schreiben wir alle Postulate und alle notwendigen Schritte in der logischen Ableitung der Clausius-Duhem-Ungleichung nieder.

Annahme 0: Die Entropie hängt nur von der Geschichte $\begin{matrix} t \\ X \\ -\infty \end{matrix}$ des thermodynamischen Prozesses

$$S = S \left(\begin{matrix} t \\ X \\ -\infty \end{matrix} \right)$$

ab.

Annahme 1: Für reversible Prozesse gilt

$$\dot{S} = \frac{\dot{Q}}{T} .$$

Annahme 2: Die Entropie kann in die Form

$$S = S_{\text{ext}} + S_{\text{int}}$$

aufgespalten werden, so daß $\dot{S}_{\text{int}} \geq 0$ gilt und $\dot{S}_{\text{int}} = 0$ genau dann gilt, wenn der Prozeß reversibel ist.

Aufgrund dieser Annahme folgt

$$\dot{S} = \frac{\dot{Q}}{T} + f\left(\underset{-\infty}{X}^t\right),$$

wobei f ein Funktional von $\underset{-\infty}{X}^t$ bezeichnet, welches für reversible Prozesse identisch Null ist ($f = 0$). Da aufgrund der Annahme 2 ein Prozeß genau dann reversibel ist, wenn $\dot{S}_{int} = 0$ gilt, folgt, daß man f in der Form

$$f\left(\underset{-\infty}{X}^t\right) = \phi\left(\underset{-\infty}{X}^t\right) \dot{S}_{int}$$

schreiben kann. Demzufolge gilt

$$\dot{S} = \frac{\dot{Q}}{T} + \phi\left(\underset{-\infty}{X}^t\right) \dot{S}_{int} \quad (1.1)$$

Wir formulieren ferner die folgenden Annahmen:

Annahme 3: S_{int} und Q sind unabhängige Veränderliche.

Annahme 4: Für adiabatische Prozesse gilt $\dot{S} > 0$.

Aus den Annahmen 3 und 4 folgt

$$\phi\left(\underset{-\infty}{X}^t\right) > 0.$$

Bezeichnet man $\phi_0 = \min \phi\left(\underset{-\infty}{X}^t\right)$ dann folgt aus (1.1)

$$\dot{S} \geq \frac{\dot{Q}}{T} + \phi_0 \dot{S}_{int} \quad (1.2)$$

Annahme 5: Die Wärme breitet sich stets von der wärmeren zu der kälteren Zone des Körpers aus

$$q \text{ grad} T \leq 0.$$

Mit der Annahme 5 wird (1.2) zu

$$\dot{S} \geq \frac{\dot{Q}}{T} + \phi_0 \dot{S}_{int} + \frac{1}{\rho} \frac{q \text{ grad} T}{T^2} \quad (1.3)$$

wobei ρ die Dichte bezeichnet.

Berücksichtigt man, daß

$$\rho \dot{Q} = -\operatorname{div} q + \dot{R}$$

gilt, dann folgt

$$\rho \dot{S} \geq -\frac{\operatorname{div} q}{T} + \frac{\dot{R}}{T} + \rho \phi_0 \dot{S}_{\text{int}} + \frac{q \operatorname{grad} T}{T^2},$$

oder äquivalent

$$\rho \dot{S} \geq -\operatorname{div}\left(\frac{q}{T}\right) + \frac{\dot{R}}{T} + \rho \phi_0 \dot{S}_{\text{int}}.$$

Vernachlässigt man $\rho \phi_0 \dot{S}_{\text{int}}$, dann erhält man die Ungleichung von Clausius-Duhem in der Form

$$\rho \dot{S} \geq -\operatorname{div}\left(\frac{q}{T}\right) + \frac{\dot{R}}{T} \quad (1.4)$$

Anmerkung: Bezeichnet man mit W die spezifische innere Energie

$$W = L + Q,$$

wobei L die Arbeit (pro Masseneinheit) bezeichnet, dann erhält man aus (1.3)

$$\dot{S} \geq \frac{\dot{W} - \dot{L}}{T} + \phi_0 \dot{S}_{\text{int}} + \frac{1}{\rho} \frac{q \operatorname{grad} T}{T^2}. \quad (1.5)$$

Schreibt man diese Ungleichung mit Hilfe der Freien Energie $U = W - ST$, dann findet man

$$\dot{U} + S\dot{T} - \dot{L} + \phi_0 \dot{S}_{\text{int}} + \frac{1}{\rho} \frac{q \operatorname{grad} T}{T^2} \leq 0$$

Wenn die Leistung durch die Cauchy-Spannung $\underline{\underline{g}}$ und die Deformationsgeschwindigkeit $\underline{\underline{d}}$ ausgedrückt wird,

$$\dot{L} = \frac{1}{\rho} \operatorname{Sp}(\underline{\underline{g}}\underline{\underline{d}}),$$

dann wird (1.4) zu

$$\dot{U} + S\dot{T} - \frac{1}{\rho} \text{Sp}(\underline{\underline{g}}\underline{\underline{d}}) + \phi_0 \dot{S}_{int} + \frac{1}{\rho} \frac{\underline{q} \text{ grad} T}{T} \leq 0$$

reduziert. Vernachlässigt man wieder \dot{S}_{int} , dann erhält man die Clausius-Duhem-Ungleichung in der Form

$$-\rho(\dot{U} + S\dot{T}) + \text{Sp}(\underline{\underline{g}}\underline{\underline{d}}) - \frac{\underline{q} \text{ grad} T}{T} \geq 0, \quad (1.6)$$

oder äquivalent hierzu

$$-\rho(\dot{W} - S\dot{T}) + \text{Sp}(\underline{\underline{g}}\underline{\underline{d}}) - \frac{\underline{q} \text{ grad} T}{T} \geq 0. \quad (1.7)$$

Man kann folgendes schließen: Die Ungleichung von Clausius-Duhem in der einen oder anderen äquivalenten Form (1.4), (1.6) oder (1.7) ist eine direkte Folge der Annahme A0-A5. Sie ergibt sich aufgrund der folgenden Reihe von eindirektionalen Implikationen

$$\begin{array}{l} A1 \\ A2 \end{array} \longrightarrow \dot{S} = \frac{\dot{Q}}{T} + \phi \left(\frac{\underline{X}}{\underline{\infty}} \right) \dot{S}_{int}$$

$$\begin{array}{l} A3 \\ A4 \end{array} \longrightarrow \dot{S} \geq \frac{\dot{Q}}{T} + \phi_0 \dot{S}_{int}$$

$$A5 \longrightarrow \dot{S} \geq \frac{\dot{Q}}{T} + \phi_0 \dot{S}_{int} + \frac{1}{\rho} \frac{\underline{q} \text{ grad} T}{T^2}$$

$$\rho \dot{S} \geq -\text{div} \left(\frac{\underline{q}}{T} \right) + \frac{\dot{R}}{T}$$

$$-\rho(\dot{U} + S\dot{T}) + \text{Sp}(\underline{\underline{d}}) - \frac{\underline{q} \text{ grad} T}{T} \geq 0,$$

$$-\rho(\dot{W} - S\dot{T}) + \text{Sp}(\underline{\underline{d}}) - \frac{\underline{q} \text{ grad} T}{T} \geq 0.$$

Weil die Implikationen eindirektional sind, folgt natürlich, daß die Clausius-Duhem-Ungleichung schwächer als die Axiome A0-A5 ist. Deswegen bildet diese Ungleichung nur eine notwendige Beschränkung. Diese Bemerkung könnte die oben erwähnte Nichteindeutigkeit der Entropie, die durch die Clausius-Duhem-Ungleichung definiert wird, erklären. In einer Zusammenfassung aller Kritiken zur Clausius-Duhem-Ungleichung bemerkt Naghdi [12]: "1) It is not at all clear how the basic ideas contained in the statement of the second law of thermodynamics have been translated into C(lausius)-D(Duhems) inequality" and 2)"the inability of the C-D inequality to rule out unacceptable behaviour in some materials"

Interpretiert man, daß die Axiome A0-A5 das zweite Gesetz der Thermodynamik reflektieren, dann bildet die oben erwähnte Reihe von Implikationen eine passende Antwort auf die erste Frage von Naghdi. Diese Antwort unterstützt aber nicht die Behauptung, daß die Ungleichung von Clausius-Duhem die ganzen Ideen des zweiten Gesetzes der Thermodynamik beinhalten.

Man kann mit der Bemerkung schließen, daß eine universale Definition der Entropie unmöglich zu sein scheint. Eine eindeutige Definition der Entropie benötigt zusätzliche spezielle Informationen über die Entwicklung des thermodynamischen Prozesses. Außer den Arbeiten von Day (loc.cit.) und Naghdi (loc.cit.) sind andere kritische Überlegungen über die Clausius-Duhem-Ungleichungen und die neuen Versuche für alternative mathematische Ausdrücke des zweiten thermodynamischen Gesetzes von Green und Naghdi [13], [14], [15], Meixner [16], Hutter [17], Lebon [18], Muschik [19], Kratochvil und Silhavy [20] und Nevers und Seader [21] durchgeführt worden.

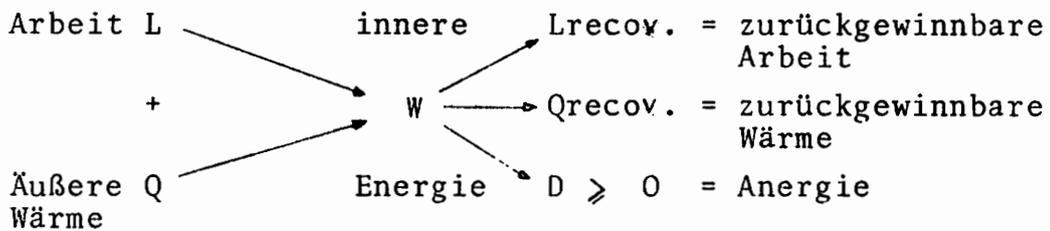
Für die Mechanik der Kontinuum scheint die Definition der Entropie, die sich auf das Konzept von der Anergie gründet, vielversprechender zu sein.

Unter Anergie versteht man den Teil der Energie, welcher zu der nutzbaren Energie (Exergie) komplementär ist.

(Vgl. H.D. Baehr [22]). Nevers und Seader (loc.cit.) nennen diesen Teil "lost work".

Die Idee von "lost work" wird als ein Maß für die Energie-degradierung benutzt. Gemäß Nevers und Seader (loc.cit.) wurde dieses Konzept benutzt, um die Irreversibilität zu charakterisieren. Wir geben ein einfaches Beispiel zur Anwendung dieses Konzeptes in der Thermodynamik der Kontinua.

Es bestehe ein thermomechanischer Prozeß, in dem der folgende Mechanismus der Energieumwandlung funktioniert.



Diese einfache Art der Energieumwandlung entspricht z.B. dem folgenden rheologischen Modell

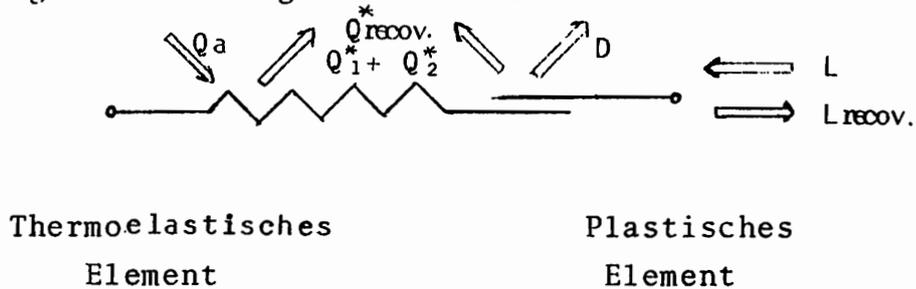


Abb. 1

Man nimmt die folgenden Voraussetzungen an:

V1. Die Anergie D produziert eine Zunahme der inneren Entropie S_{int} .

V2. Die innere Entropie nimmt nur zu, wenn $D \geq 0$ ist. Aufgrund dieser Voraussetzung folgt, daß es zwischen S_{int} und D eine Beziehung gibt, die man in der Form

$$\dot{S}_{int} = \kappa D$$

schreiben kann, wobei κ einen positiven Parameter bezeichnet, welcher von der Geschichte der dissipierten Energie D bestimmt wird.

Bemerkt man, daß

$$D = \dot{W} - \dot{L}_{recov} - \dot{Q}$$

dann erhält man

$$\dot{S}_{int} = \kappa(\dot{W} - \dot{L}_{recov} - \dot{Q}) \quad (1.8)$$

Nimmt man an, daß für die externe Entropie S_{ext} die Beziehung

$$\dot{S}_{ext} = \frac{\dot{Q}_1 + \dot{Q}_2^*}{T}$$

gilt, dann findet man

$$S = \dot{S}_{ext} + \dot{S}_{int} = \frac{\dot{Q}}{T} + (\dot{W} - \dot{L}_{recov} - \dot{Q}_{recov}) \cdot \kappa \quad (1.9)$$

Berücksichtigt man (1.8), dann erhält man die Ungleichung von Planck und dadurch die Ungleichung von Clausius-Duhem als eine schwächere Form der Gleichung (1.9).

Man bemerkt, daß auf diesem Weg die Entropie voll definiert bis auf den Proportionalitäts-Faktor κ ist.

Nevers und Seader (loc.cit.) betrachten diesen Faktor als konstant. Natürlich kann man κ durch eine neue Definition der Entropie immer zu einer Konstanten reduzieren.

Die Definition der Entropie mit der Hilfe der Anergie wurde im Rahmen des oben erwähnten Energieumwandlungs-Schemas in [24] auf den thermoplastischen Prozeß angewendet.

Die oben erwähnte Art der Energieumwandlung stellt einen sehr speziellen Fall dar. Als ein anderes Beispiel betrachten wir den folgenden komplizierten Typ der Energieumwandlung.

Es bestehe ein rheologisches Modell, wie s in Abb. 2 gezeichnet wird. Der Kolben und der Zylinder bilden ein zweites plastisches Element P neben dem gewöhnlichen plastischen Element P .

Wir nehmen an, daß der Zylinder und der Kolben die unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten α_Z, α_P besitzen, so daß $\alpha_Z > \alpha_P$.

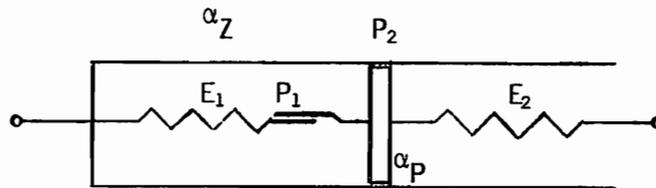


Abb. 2

Wir stellen uns den folgenden thermomechanischen Prozeß vor (Abb. 3)

- Stufe I : Belastung im elasto-plastischen Bereich
- Stufe II : Entlastung im elastischen Bereich
- Stufe III : Thermische Belastung

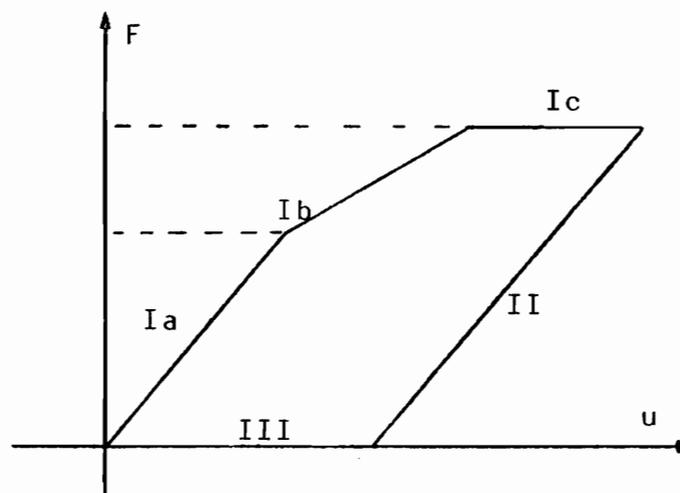


Abb. 3

Die Stufe I unterteilt sich in drei Unterstufen

- Ia - reine elastische Deformation ($F < F_2$)
- Ib - elastoplastische Deformation ($F_2 < F < F_2 + F_1$)
- Ic - reine plastische Deformation ($F = F_1 + F_2$)

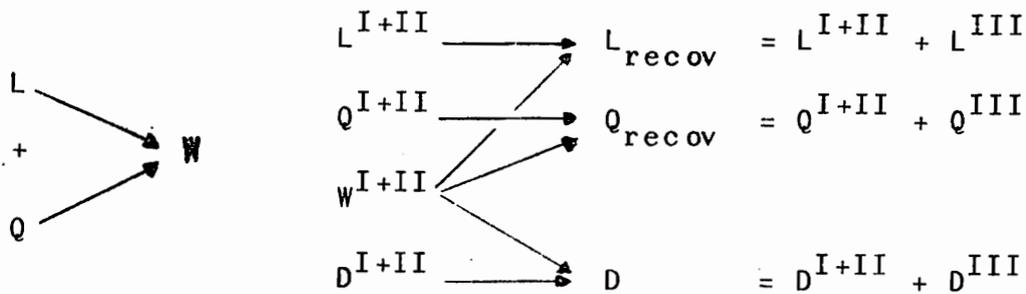
Bezüglich der Stufe II unterscheidet man zwei Fälle

1. $F_1 \leq F_2$ dann ist die Entlastung so wie in Abb. 3 gezeichnet wird

2. $F_1 > F_2$; dann gibt es zwei Unterstufen

- IIa - Entlastung des elastischen Elements E_2
- IIb - Entlastung beider elastischen Elemente E_1 und E_2

Die Energieumwandlung, die diesem Prozeß entspricht, hat das folgende verhältnismäßig komplizierte Schema:



Hierbei sind

- L^{I+II} - die zurückgewinnbare Arbeit
- Q^{I+II} - die zurückgewinnbare Wärme
- W^{I+II} - die gespeicherte Energie
- D^{I+II} - die Anergie,

die den Stufen I und II entsprechen.

L_{recov} , Q_{recov} und D bezeichnen die gesamte zurückgewinnbare Arbeit bzw. Wärme und die dissipierte Energie.

Schlußfolgerungen:

1. Es gibt keine universale phänomenologische Definition der Entropie,

2. Das Konzept der Anergie erlaubt bis auf einen Proportionalitäts-Parameter eine eindeutige Definition der Entropie unter der Bedingung, daß das Energieumwandlungs-Schema bekannt ist.

4. Konstitutive Beziehungen für große elasto-plastische Verzerrungen

Bezeichnungen:

Zeichen:	Bedeutung:
F	Deformationsgradient
T	Cauchy-Spannungstensor
S	Gewichteter Cauchy Spannungstensor
$C = F^T \cdot F$	Rechter Cauchy-Green Verzerrungstensor
$B = F \cdot F^T$	Linker Cauchy-Green Verzerrungstensor
$L = F \cdot F^{-1}$	Geschwindigkeitsgradient
$D = \frac{1}{2}(L + L^T)$	Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit
$W = \frac{1}{2}(L - L^T)$	Spintensor
$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \xi^i}$	Basisvektoren eines konvektiven Koordinatensystems
g_{ik}	Metrik der konvektiven Koordinaten basis \underline{g}_i
g^{ik}	Metrik der konvektiven Koordinaten basis \underline{g}^i ; ($\underline{g}^i \underline{g}_k = \delta_k^i$)
$S = s_{ik} \underline{g}^i \otimes \underline{g}^k = s_{ik}^i \underline{g}_i \otimes \underline{g}^k = s^{ik} \underline{g}_i \otimes \underline{g}_k$	Gewichteter Cauchy Spannungstensor im konvektiven Koordinatensystem
$\epsilon = \frac{1}{2}(I - B^{-1}) = \frac{1}{2}(g_{ik} - g_{ik}^0) \underline{g}^i \otimes \underline{g}^k =$ $= \frac{1}{2}(g^{ik} - g^{i0} g_{rs} g^{sk}) \underline{g}_i \otimes \underline{g}_k$	Almansi Verzerrungstensor
$D = \frac{1}{2} \underline{g}_{ik} \underline{g}^i \otimes \underline{g}^k = -\frac{1}{2} g^{ik} \underline{g}_i \otimes \underline{g}_k$	Verzerrungsgeschwindigkeit im konvektiven Koordinatensystem

4.1 Einleitung

Eine aktuelle Aufgabe der Geometrie nichtlinearer elasto-plastischer Deformationen besteht in der Bestimmung eines geeigneten differentiellen konstitutiven Gesetzes zur Beschreibung des elastischen Teils der Formänderungen. Bezüglich des besonderen Falls der isotropen Materialien wird dieses Problem von Lehmann ([1] - [7]) intensiv untersucht. Er betrachtet u.a. die lineare konstitutive Beziehung zwischen gemischt-varianten Komponenten des Almansi Verzerrungstensors ϵ_k^i und des gewichteten Cauchy Spannungstensors

$$\epsilon_k^i = \frac{1}{2G} (s_k^i - \frac{\nu}{1+\nu} s_r^r \delta_k^i) , \quad (1.1)$$

wobei G und ν - die elastischen Konstanten bezeichnen. Durch Zeit-Ableitung der (1.1) und mit der Beziehung

$$\epsilon_k^i = \frac{1}{2} (\delta_k^i - g^{ir} g_{rk})$$

erhält man

$$(\dot{\epsilon})_{,k}^i = \frac{1}{2G} ((\dot{s})_{,k}^i - \frac{\nu}{1+\nu} (\dot{s})_r^r \delta_k^i) , \quad (1.2)$$

und

$$(\dot{\epsilon})_{,k}^i = -\frac{1}{2} \dot{g}^{ir} g_{rk} \quad (1.3)$$

Mit Hilfe des Verzerrungsgeschwindigkeit-Tensors

$$d_k^i = \frac{1}{2} \dot{g}^{ir} g_{rk} = -\frac{1}{2} \dot{g}^{ir} g_{rk}$$

läßt sich (1.3) in der Form

$$(\dot{\epsilon})_{,k}^i = -\frac{1}{2} \dot{g}^{ir} g_{rp} g^{ps} g_{sk} = d_p^i g^{ps} g_{sk} = d_p^i q_k^{\bar{p}1} , \quad (1.4)$$

schreiben, wobei

$$q_k^i = g^{ir} g_{rk}$$

ist.

Setzt man (1.4) und (1.2) gleich, dann folgt

$$d_k^i = \frac{1}{2G} [q_k^r ((\dot{s})_{,r}^i - \frac{\nu}{1+\nu} (\dot{s})_p^p \delta_r^i)] . \quad (1.5)$$

Man bemerkt, daß die Zeit-Ableitung $(\dot{s})_{,r}^i$ nicht voll*) objektiv ist. Diesen Nachteil kann man durch die Benutzung der Jaumann'schen Ableitung

$$s_k^i|_0 = (\dot{s})_{,k}^i + d_r^i s_k^r - d_k^r s_r^i$$

eliminieren. Dann wird (1.5)

$$d_k^i = -\frac{1}{2G} [q_k^r (s_r^i|_0 - d_p^i s_r^p + d_r^p s_p^i - \frac{\nu}{1+\nu} (\dot{s})_p^p \delta_r^i)] . \quad (1.6)$$

Man bemerkt, daß (1.6) eine implizite Beziehung in d_k^i ist. Wird eine solche Beziehung zur Beschreibung des elastischen Teils der großen elasto-plastischen Deformationen herangezogen, dann folgt, daß der elastische Teil der Verzerrungsgeschwindigkeit d_k^i auch von der gesamten Formänderungsgeschwindigkeit $d_k^i = d_k^i + d_k^i$ gemäß der konstitutiven Beziehung

$$d_k^i = \frac{1}{2G} [q_k^r (s_r^i|_0 - d_p^i s_r^p + d_r^p s_p^i - \frac{\nu}{1+\nu} (\dot{s})_p^p \delta_r^i)]$$

abhängt.

Diese Bemerkung geht auf Lehmann [3] zurück. Sie war ursprünglich auf eine andere nicht ganz korrekt abgeleitete Form von (1.6) gegründet, nämlich

$$d_k^i = \frac{1}{2G} \text{sym}\{q_k^r (s_r^i|_0 - d_p^i s_r^p + d_r^p s_p^i - \frac{\nu}{1+\nu} (\dot{s})_p^p \delta_r^i)\} ,$$

wobei $\text{sym}\{A\}$ den symmetrischen Teil von $\{A\}$ bezeichnet.

Es gibt einen besonderen Fall, in dem sich (1.6) auf eine explizite Formel reduziert. Das betrifft den Fall der kleinen Deformationen und Deformations-

*) $(s)_{,k}^i$ bleibt unverändert bei starren Rotationen, verändert sich aber mit den Formänderungen des konvektiven Koordinatensystems.

geschwindigkeiten. Dann gilt

$$q_p^k \approx \delta_p^k, \quad (1.7)$$

$$d_r^i s_k^r - d_k^r s_k^i \approx 0 \quad (1.8)$$

und (1.6) wird zu

$$d_k^i = \frac{1}{2G} (s_k^i |_0 - \frac{\nu}{1+\nu} \dot{s}_r^r \delta_k^i) . \quad (1.9)$$

Anmerkung: Falls man (1.6) benutzt, um den elastischen Teil eines elasto-plastischen Prozesses approximativ zu beschreiben, dann wird die Bedingung (1.8) zu

$$(d_{Er}^i + d_{pr}^i) s_k^r - (d_{Ek}^r + d_{pk}^r) s_r^i \approx 0.$$

verändert. Bemerkenswert ist, daß diese Bedingung auch für große plastische Formänderungen erfüllt sein kann. Das entspricht dem Fall, daß d_k^r proportional zu s_k^r ist so wie es für das von Misessche konstitutive Gesetz gilt.

Die approximative Beziehung (1.9) ist nicht integrierbar, d.h. sie führt nicht auf eine eindeutige Spannung-Verzerrung-Beziehung, die einen elastischen Stoff beschreibt. Im allgemeinen ergeben sich bei einem Zyklus in der Spannung bleibende Deformationen, die zwar meist sehr klein sind aber prinzipiell die Entwicklung eines vollständigen thermodynamischen Modells stören. Um diese Behauptung zu begründen, ist es ausreichend zu bemerken, daß unter diesen Umständen die eindeutige Bestimmung der freien Energie, oder der dissipierten Energie unmöglich wird. Dies macht aus mathematischen Gesichtspunkten die Erstellung irgendeines Variationsprinzips unmöglich.

In dem folgenden wird ein neues mathematisches Verfahren entwickelt, das dem isotropischen Material, hypoelastische konstitutive Gesetze von der

Form

$$D = H(T)\overset{\circ}{T}$$

assoziiert, wobei $\overset{\circ}{T}$ Jaumann'sche Ableitung bezeichnet. Mit Hilfe solcher konstitutiven Beziehungen, die integrierbar und explizit sind, kann man in der Beschreibung der großen elasto-plastischen Verzerrungen die oben erwähnten Nachteile vermeiden.

Dieser neue Weg gründet sich auf die geometrisch nichtlinearen konstitutiven Gesetze für isotrope elastische Stoffe, die im Cauchyschen Spannungstensor T (bzw. S) und im linken Cauchy-Green Tensor B beschrieben sind

4.2. Das konstitutive Gesetz für isotrope elastische Materialien

Es ist bekannt, daß für ein isotropes elastisches Material die Deformationen durch ein konstitutives Gesetz (vgl. [9]) von der Form

$$T = f(B) \tag{2.1}$$

beschrieben werden können, wobei $f(B)$ der Identität

$$Qf(B)Q^T = f(QBQ^T) \tag{2.2}$$

für jede orthogonale Matrix $Q(QQ^T = I)$ genügt.

Wir nehmen an, daß $f(B)$ eine invertierbare Funktion ist, d.h.

$$B = g(T) \tag{2.3}$$

und dazu, daß das g eine differentierbare Funktion ist. Durch Ableitung nach der Zeit erhält man

$$\dot{B} = \frac{\partial g}{\partial T} \dot{T} \tag{2.4}$$

Benutzt man die Identität

$$\dot{B} = \dot{F}F^T + F\dot{F}^T = \dot{F}F^{-1}B + BF^{-T}\dot{F}^T = LB + BL^T ,$$

dann läßt sich (2.4)

$$LB + BL^T = \frac{\partial g}{\partial T} \dot{T} \quad (2.5)$$

schreiben. Wird der Geschwindigkeitsgradient in Deformations- und Rotationsgeschwindigkeit aufgespalten, dann folgt aus (2.5)

$$DB + BD = \frac{\partial g}{\partial T} \dot{T} - WB + BW ,$$

oder äquivalent

$$DB + BD = \frac{\partial g}{\partial T} \dot{T} - Wg(T) + g(T)W. \quad (2.6)$$

Aus (2.2) folgt unmittelbar, daß auch für g

$$Qg(T)Q^T = g(QTQ^T) \quad (2.7)$$

gilt. Wendet man (2.7) für eine Rotationsgeschichte $Q(t)$ an, so daß $Q(0) = I$ und $\dot{Q}(0) = W (W = -W^T)$ ist, dann folgt durch Zeit-Differenzierung die Identität

$$Wg(T) - g(T)W = \frac{\partial g}{\partial T} (WT - TW) . \quad (2.8)$$

Auf Grund von (2.8) kann man (2.6) in der folgenden äquivalenten Form

$$DB + BD = \frac{\partial g}{\partial T} (\dot{T} - WT + TW) \quad (2.9)$$

schreiben. Mit Hilfe der Jaumannschen Ableitung

$$\overset{\circ}{T} = \dot{T} - WT + TW$$

läßt sich schließlich (2.9)

$$DB + BD = \frac{\partial g}{\partial T} \overset{0}{T} \quad (2.10)$$

schreiben. Es ist einfach zu beweisen, daß (2.10) mit dem hypoelastischen-konstitutiven Gesetz, das von Noll [8] abgeleitet wurde, äquivalent ist.

Anmerkung: Falls man statt (2.1) mit dem konstitutiven Gesetz

$$S = f^*(B) \equiv (\det B)^{1/2} f(B) \quad (2.11)$$

beginnt, dann bekommt man auf dem gleichen Weg

$$DB + BD = \frac{\partial g^*}{\partial S} \overset{0}{S}, \quad (2.12)$$

wobei g^* die Inverse von f^* bezeichnet.

Es sei $\mathbb{R}_S^{3 \times 3}$ die Menge der 3×3 symmetrischen Matrizen. Wir bemerken, daß die Beziehung (2.10) bzw. (2.12) eine lineare Transformation

$$\begin{aligned} B(B) : \mathbb{R}_S^{3 \times 3} &\rightarrow \mathbb{R}_S^{3 \times 3} \\ B(B)D &= DB + BD \end{aligned} \quad (2.13)$$

definieren. Um (2.10) oder (2.12) in einer expliziten Form zu schreiben, muß man zuerst beweisen, daß $B(B)$ nicht eine singuläre Transformation bildet, d.h. daß

$$B(B)D = 0$$

genau nur dann gilt, wenn $D = 0$ ist. Im nächsten Abschnitt wird dies bewiesen.

4.3. Die lineare Transformation $B(B)D = DB + BD$

Wir beginnen mit dem folgenden allgemeinen Theorem der Algebra.

Theorem: Für eine symmetrische und positiv definite Matrix $M (M = M^T, M > 0)$

gilt die Identität

$$MA + AM = 0 \tag{3.1}$$

genau dann, wenn $A = 0$ ist.

Beweis: Es seien $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ die Eigenwerte der Matrix M und x_i die entsprechenden Eigenvektoren. Da M eine symmetrische und positiv definite Matrix ist, gilt $\lambda_i > 0, i=1, 2, \dots, n$ und die Eigenvektoren x_i können so bestimmt werden, daß

$$x_i x_j^T = \delta_{ij}$$

gilt.

Es sei X die Matrix, die mit den Eigenvektoren x_i gebildet ist

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Dann ist M in der Form

$$M = X^T \lambda X \tag{3.2}$$

darstellbar, wobei λ die diagonale Matrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

Bezeichnet man

$$C = XAX^T,$$

dann folgt aus (3.1) und (3.2)

$$\Lambda C + C \Lambda = 0 \tag{3.3}$$

In einer expliziten Form wird (3.3) zu

$$\begin{pmatrix} 2C_{11}\lambda_1 & C_{12}(\lambda_1+\lambda_2) & \dots & C_{1n}(\lambda_1+\lambda_2) \\ C_{21}(\lambda_1+\lambda_2) & 2C_{22}\lambda_2 & \dots & C_{2n}(\lambda_1+\lambda_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1}(\lambda_1+\lambda_2) & \dots & \dots & 2C_{nn}\lambda_n \end{pmatrix}$$

Weil λ_i streng positive Zahlen sind, gilt (3.3) genau dann, wenn $C = 0$ ist. Aus (3.2) folgt, daß dann auch $A = 0$ ist. Damit ist das Theorem bewiesen.

Anmerkung: Die Notwendigkeit der positiven Definitheit der Matrix M wird durch das folgende Gegen-Beispiel bestätigt:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann gilt

$$MA + AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 .$$

Auf Grund dieses oben erwähnten Theorems folgt, daß die Transformation $B(B)D = DB + BD$ nichtsingulär ist und demzufolge die Matrix-Gleichung

$$DB + BD = E$$

(mit $E = (e_{ij})$ als 3x3-symmetrische Matrix) eine eindeutige Lösung $D = (d_{ij})$ hat. Bezeichnen wir diese Lösung*) durch

$$D = B^{-1}(B)E$$

*) S. S. 10

und kehren wir zu (2.10) und (2.12) zurück, dann folgt

$$D = B^{-1}(B) \frac{\partial g}{\partial T} \overset{\circ}{T} \quad (3.4)$$

bzw.

$$D = B^{-1}(B) \frac{\partial g^*}{\partial S} \overset{\circ}{S} . \quad (3.5)$$

Benutzt man (2.3) bzw. (2.11), so folgt dann

$$D = B^{-1}(g(T)) \frac{\partial g}{\partial T} \overset{\circ}{T} , \quad (3.6)$$

oder

$$D = B^{-1}(g^*(S)) \frac{\partial g^*}{\partial S} \overset{\circ}{S} . \quad (3.7)$$

Diese Beziehungen bestimmen voll die allgemeine differentielle Form die einem elastischen konstitutiven Gesetz entspricht.

4.4. Kleine elastische Formänderungen

Wir nehmen an, daß die elastischen Formänderungen klein sind, d.h.

$$B = I + O(\epsilon) \quad (4.1)$$

wobei $O(\epsilon)$ einen Term der Ordnung ϵ bezeichnet mit $\epsilon^2 \approx 0$.

*) s.S. 9

Die Komponenten dieser Lösung sind durch die Formel

$$d_{ij} = \sum_{k,1,p,q} p_i \frac{x_{pk} e_{k1} x_{q1}}{\lambda_p + \lambda_2} x_{qj} .$$

zu bestimmen mit $\lambda_i (i=1,2,3)$ und $x_p (p,q=1,2,3)$ werden die Eigenwerte bzw. die Komponenten der Eigenvektoren des Tensors B bezeichnet.

Es ist dann einfach zu beweisen, daß

$$B^{-1}(B) = \frac{1}{2} I + O(\epsilon). \quad (4.2)$$

Die konstitutiven Gesetze (3.4) bzw. (3.5) werden durch

$$D = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial T} \overset{\circ}{T} \quad (4.3)$$

bzw.

$$D = \frac{1}{2} \frac{\partial g^*}{\partial S} \overset{\circ}{S} \quad (4.4)$$

gut angenähert.

Nimmt man als g und g^* die Funktionen

$$g(T) = 2I + \frac{1}{G} \left(T - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(T)I \right) \quad (4.5)$$

bzw.

$$g^*(S) = 2I + \frac{1}{G} \left(S - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(S)I \right), \quad (4.6)$$

dann reduziert sich (4.3) und (4.4) zu

$$D = \frac{1}{2G} \left(\overset{\circ}{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(\overset{\circ}{T})I \right) \quad (4.7)$$

bzw.

$$D = \frac{1}{2G} \left(\overset{\circ}{S} - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(\overset{\circ}{S})I \right) \quad (4.8)$$

die dieselbe Form wie (1.9) darstellen.

Wir können jetzt den folgenden Satz formulieren:

Unter der Bedingung (4.1) bildet das konstitutive Gesetz (4.8) eine Annäherung des elastischen konstitutiven Gesetzes für geometrische nichtlineare Formänderungen

$$\frac{1}{2} (B - I) = \frac{1}{2G} \left(S - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(S)I \right) \quad (4.9)$$

Die exakte Differential-Beziehung, die aus (4.9) abgeleitet wurde ist

$$D = \frac{1}{2G} B^{-1} [2I + \frac{1}{G} (S - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(S)I)] (\overset{\circ}{S} - \frac{\nu}{1+\nu} \text{Sp}(\overset{\circ}{S})I) . \quad (4.10)$$

Dieser Satz rechtfertigt demzufolge das konstitutive Gesetz (1.9) als eine Annäherung von (4.10).

4.5. Das elastische Potential für isotrope Materialien

Es sei

$$S = \frac{1}{\rho} T F^{-1} , \quad (\rho_0 = 1)$$

Piolas Spannungstensor und

$$U = U(F^T F) = U(C)$$

das elastische Potential, das einem isotropen hyperelastischen Körper entspricht. Das konstitutive Gesetz ist, in diesem Fall, durch die Beziehung

$$S_{ij} = \frac{\partial U}{\partial F_{ij}} = 2 F_{ip} \frac{\partial U}{\partial C_{pj}} \quad (5.1)$$

gegeben. Schreibt man diese konstitutive Beziehung mit dem Cauchy Spannungstensor, dann erhält man

$$\frac{1}{\rho} T_{ij} = 2 F_{ip} \frac{\partial U}{\partial C_{pq}} F_{jq} , \quad (5.2)$$

oder den äquivalenten Ausdruck

$$\frac{1}{\rho} T = 2 F \frac{\partial U}{\partial C} F^T .$$

Anmerkung: Weil das Material isotrop ist, hängt das elastische Potential $U(C)$ von C durch die Invarianten $I(C)$, $II(C)$ und $III(C)$ ab. Es ist aber bekannt, daß die Tensoren C und B dieselben Invarianten besitzen, d.h. $I(C) = I(B)$; $II(C) = II(B)$ und $III(C) = III(B)$.

Es folgt demzufolge, daß im isotropen Fall das elastische Potential auch als eine Funktion von B zu betrachten ist:

$$U = U(I(C), II(C), III(C)) = U(I(B), II(B), III(B)).$$

Die Funktion $f(B)$ in (2.1) wird dann durch die Beziehung

$$f(B) = 2p F \frac{\partial U}{\partial C} F^T \quad (5.3)$$

definiert.

Lemma. Für hyperelastische und isotrope Materialien erfüllt die konstitutive Funktion $f(B)$ für alle antisymmetrischen Tensoren $W; W = -W^T$ die Beziehung

$$\text{Sp}(f(B) B^{-1}(B)(WB - BW)) = 0. \quad (5.4)$$

Beweis. Weil das Material isotrop und hyperelastisch ist gilt für das elastische Potential $U(B)$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial B} B = \text{Sp}(TD).$$

Es sei ein Deformationsprozeß der von dem Spin W und von der Deformationsgeschwindigkeit

$$D = B^{-1}(B)(WB - BW)$$

bestimmt wird.

Aus der Gleichung

$$B = BD + DB + WB - BW$$

folgt, daß $B = 0$. Das impliziert,

$$0 = \frac{\partial U}{\partial B} B = \text{Sp}(TD) = \text{Sp}(TB^{-1}(B)(WB - BW)) = \text{Sp}(f(B)B^{-1}(B)(WB - BW)).$$

Das beweist das Lemma.

Korrolar. Wenn das konstitutive Gesetz (2.1) invertierbar ist, dann wird mit Hilfe von (2.3) die Beziehung (5.4) zu

$$\text{Sp}(TB^{-1}(g(T))(Wg(T) - g(T)W) = 0 . \quad (5.5)$$

Benutzt man die Identität

$$Wg(T) - g(T)W = \frac{\partial g}{\partial T}(T)(WT - TW) ,$$

dann reduziert sich (5.5) zu

$$\text{Sp}(TB^{-1}(g(T)) \frac{\partial g}{\partial T}(T)(WT - TW) = 0 . \quad (5.6)$$

Berücksichtigt man (5.4) und (5.5), so erhält man für das elastische Potential den Ausdruck

$$U = \int_{C(B)} \text{Sp}(f(B)B^{-1}(B)dB) = \int_{C(T)} \text{Sp}(TB^{-1}(g(T)) \frac{\partial g}{\partial T}(T)dT) , \quad (5.7)$$

wobei $C(B)$ und $C(T)$ Trajektorien im B - bzw. im T -Raum darstellen. Die Integranden in (5.7) sind vollständige Differential im B - oder T -Raum.

Jetzt beweisen wir ein Theorem, welches die hinreichenden Bedingungen für Hyperelastizität bestimmt.

Theorem. Ein isotropes elastisches Material für welches

$$1. \quad \text{Sp}(f(B)B^{-1}(B)(WB - BW)) = 0 \quad (5.8)$$

für alle antimetrischen Tensoren W gilt und

2. die differentiale Form

$$\text{Sp}(f(B)B^{-1}(B)dB) \quad (5.9)$$

ein vollständiges Differential darstellt,

ist ein hyperelastisches Material.

Beweis. Es sei $U(B)$ die Funktion, die durch

$$U(B) = \int_{C(B)} \text{Sp}(f(B)B^{-1}(B)dB) \quad (5.10)$$

definiert wird. Man kann beweisen, daß $U(B)$ invariant in Bezug auf starre Rotationen ist. Um das zu beweisen, schreiben wir (5.10) in die äquivalente Form

$$U(B) = \int_0^t \text{Sp}(f(B)B^{-1}(B)\dot{B})dt.$$

Berücksichtigt man (5.8), dann folgt

$$\begin{aligned} U(B) &= \int_0^t \text{Sp}(f(B)B^{-1}(B)(\dot{B} - WB + BW))dt = \\ &= \int_0^t \text{Sp}(f(B)B^{-1}(B)\overset{\circ}{B})dt. \end{aligned}$$

Das zeigt, daß $U(B)$ offenbar invariant in Bezug auf starre Rotationen ist.

Berücksichtigt man

$$DB + BD = B - WB + BW = \overset{\circ}{B}$$

dann folgt die Beziehung

$$U(B) = \int_0^t \text{Sp}(TD)dt.$$

Das beweist, daß (5.10) tatsächlich das elastische Potential definiert.

Anmerkung 1. Wenn das konstitutive Gesetz (2.1) in die Form (2.3) invertierbar ist, dann lassen sich die Bedingungen des Theorems durch

$$1. \quad \text{Sp}(TB^{-1}(g(T))(Wg(T) - g(T)W) = 0$$

für jedwelchen antimetrischen Tensor W , und

2. die Differentialform

$$\text{Sp}(TB^{-1}(g(T)) \frac{\partial g}{\partial T}(T)dT)$$

ist ein vollständiges Differential ersetzen.

Anmerkung 2. Die Bedingung (5.8) bildet eine Objektivitätsbedingung. Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist, diese Bedingung durch die übliche Objektivitätsbedingung

$$f(QBQ^T) = Qf(B)Q^T, \quad QQ^T = I$$

zu ersetzen. Wir werden diese Möglichkeit beweisen.

Aus (5.10) folgt, daß $f(B)$ und $U(B)$ durch die Beziehung

$$f(B)B^{-1}(B) = \frac{\partial U}{\partial B}(B)$$

verbunden sind. Weil f und B^{-1} objektive Tensorfunktionen sind, folgt, daß die Objektivität auch für $\frac{\partial U}{\partial B}$ gilt, d.h.

$$\frac{\partial U}{\partial B}(QBQ^T) = Q \frac{\partial U}{\partial B}(B)Q^T$$

jeder Zeit wenn $QQ^T = I$ ist. Durch Integration der letzten Bedingung erhält man, daß die Beziehung

$$\begin{aligned} U(QBQ^T) &= \int_{(B)} \text{Sp}\left(\frac{\partial U}{\partial B}(QBQ^T)\right) d(QBQ^T) = \\ &= \int_{(B)} \text{Sp}\left(Q \frac{\partial U}{\partial B}(B)Q^T Q dBQ^T\right) = \text{Sp}\left(Q \int_{(B)} \frac{\partial U}{\partial B}(B) dBQ^T\right) = \\ &= \text{Sp}(QU(B)Q^T) = U(B) \end{aligned}$$

für alle starren Rotationen $Q(QQ^T = I)$ gilt.

Weil $U(B)$ objektiv ist und für Deformationen, für welche $W \equiv 0$, gleich dem elastischen Potential ist^{*)}, folgt es, daß sie immer gleich dem elastischen Potential ist.

^{*)}Durch die Rotationen $Q(t)$, die durch die Beziehung $\dot{Q} = -QW$ definiert wird, kann man immer den Spin annullieren.

Schreibt man

$$W(B) = \text{Tr}(TD) = \text{Tr}(f(B)B^{-1}(B)(\overset{\circ}{B} - WB + WB))$$

und vergleicht mit (5.10), dann folgt (5.8).

4.6. Anisotrope Materialien

Die allgemeine Form eines konstitutiven Gesetzes für ein anisotropes elastisches Material ist

$$T = f(F) \quad . \quad (6.1)$$

Benützt man die Polarzerlegung $F = VR$, dann folgt

$$T = f(VR) \quad ,$$

oder, weil

$$V^2 = B$$

gilt äquivalent

$$T = f(B, R) \quad . \quad (6.2)$$

Die Objektivität der Beziehung (6.2) wird genau dann erfüllt, wenn (6.2) die besondere Form

$$T = R f(R^T B R) R^T \quad (6.3)$$

hat. Wenn man die Bezeichnungen $T^* = R^T T R$ und $B^* = R^T B R$ einführt, dann reduziert sich (6.3) auf

$$T^* = f(B^*) \quad . \quad (6.4)$$

Im folgenden, nehmen wir an, daß (6.4) invertierbar ist, d.h.

$$B^* = g(T^*) \quad (6.5)$$

und dann reduziert sich (6.3) auf

$$B = R g (R^T T R) R^T \quad (6.6)$$

Anmerkung. Ist das Material isotrop, dann ist (6.3) oder (6.6) zu jedwelcher Vordrehung

$$\hat{F} = F Q$$

invariant, d.h.

$$\begin{aligned} T &= R f(R^T B R) R^T = \hat{R} f(\hat{R}^T \hat{B} \hat{R}) = \\ &= R Q f(Q^T R^T B R Q) Q^T R . \end{aligned}$$

Es folgt

$$f(Q^T B Q) = Q^T f(B) Q$$

und (6.3) reduziert sich zu (2.1).

Durch Differentiation von (6.6) bezüglich der Zeit, findet man

$$\begin{aligned} BD + DB &= (\dot{R} - WR) g(R^T T R) R^T + R g(R^T T R) (\dot{R} + R^T W) \\ &+ R \frac{\partial g}{\partial T} (R^T \dot{T} R) (R^T T R + \dot{R}^T T R + R^T \dot{T} R) . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Bezeichnet man durch $\overset{\circ}{R}$ und $\overset{\circ}{T}$ die objektiven Zeitdifferentiale

$$\overset{\circ}{R} = \dot{R} - WR$$

und

$$\overset{\circ}{T} = R^T \dot{T} R + \dot{R}^T T R + R^T \dot{T} R$$

dann wird (6.7)

$$BD + DB = R \frac{\partial g(R^T T R)}{\partial T} \overset{\circ}{T} R^T + \overset{\circ}{R} g(R^T T R) R^T + R g(R^T T R) \overset{\circ}{R}^T .$$

Benutzt man die Transformationen $B^{-1}(B)$, dann erhält man

$$D = B^{-1}(Rg(R^T TR)) \left\{ R \frac{\partial g(R^T TR)}{\partial T} \overset{\circ}{T} RT + \right. \\ \left. + \overset{\circ}{R} g(R^T TR) R^T + Rg(R^T TR) \overset{\circ}{R}^T \right\} \quad (6.8)$$

Man kann diese Formel in einer äquivalenten Form umschreiben, die die Abhängigkeit von \dot{T} und \dot{R} besser hervorhebt.

Aus der Beziehung

$$W = \frac{1}{2} (\dot{V}V^{-1} - V^{-1}\dot{V} + V\dot{R}R^T V^{-1} + V^{-1}\dot{R}R^T V) \quad (6.9)$$

folgt

$$W = \frac{1}{2} (\nabla_B B^{1/2} \dot{B} B^{-1/2} - B^{-1/2} \nabla_B B^{1/2} \dot{B} + B^{1/2} \dot{R} R^T B^{-1/2} + \\ + B^{-1/2} \dot{R} R^T B^{1/2}) = \beta_B(B, R) \dot{B} + \beta_R(B, R) \dot{R} \quad (6.10)$$

Benutzt man das konstitutive Gesetz (6.6), dann reduziert sich (6.10) auf

$$W = \gamma_T(T, R) \dot{T} + \gamma_R(T, R) \dot{R} \quad (6.11)$$

Setzt man (6.11) in (6.9) ein, dann erhält man

$$D = (\alpha_T(T, R) + \gamma_T(T, R)) \dot{T} + (\alpha_R(T, R) + \gamma_R(T, R)) \dot{R} \quad (6.12)$$

Jetzt kann man den Ausdruck des elastischen Potentials für anisotrope hyperelastische Materialien bestimmen.

Berücksichtigt man, daß $C = R^T B R$ ist, so folgt, daß das elastische Potential eine Funktion von $R^T B R$ ist

$$U = U(R^T B R)$$

oder, mit Hilfe des konstitutiven Gesetzes (6.6)

$$U = U(R^T T R) \quad .$$

Man findet

$$\begin{aligned}
 U(R^T BR) &= \int_{C(B,R)} TD \, dt = \int_{C(B,R)} Rf(R^T BR)R^T B^{-1}(B)|B-WB+BW| \, dt = \\
 &= \int_{C(B,R)} Rf(R^T TR)R^T B^{-1}(B)[dB - (\beta_B(B,R)dB + \beta_R(B,R)dR)B + \\
 &\quad + B(\beta_B(B,R)dB + \beta_R(B,R)dR)] \, ,
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

wobei $C(B,R)$ eine Trajektorie im Raum (B,R) bezeichnet.

Weil das Material hyperelastisch ist, muß der Integrand in (6.13) ein vollständiges Differential sein. Auch umgekehrt gilt, daß wenn der Integrand ein vollständiges Differential ist, das Material hyperelastisch ist.

Berücksichtigt man (6.12) dann hat das elastische Potential den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 U(R^T TR) &= \int_{C(T,R)} TD \, dt = \int_{C(T,R)} T[(\alpha_T(T,R) + \alpha_W(R,R)\gamma_T(T,R))dT \\
 &\quad + (\alpha_R(T,R) + \alpha_W(T,R)\gamma_R(T,R))dR] \, ,
 \end{aligned}$$

wobei $C(T,R)$ eine Trajektorie im Raum (T,R) darstellt.

4.7. Elasto-plastische Deformationen

Wir nehmen an, daß es ein plastisches Potential gibt, das von T und R abhängt.

$$\phi = \phi(T,R) \, . \tag{7.1}$$

Die Objektivitätsbedingung verlangt, daß

$$\phi(QTQ^T, QR) = \phi(T,R) \tag{7.2}$$

für alle starren Rotationen Q , gilt.

Nimmt man an $Q = R^T$, dann folgt aus (7.2) die Identität

$$\phi(R^T T R, I) = \phi(T, R).$$

Auf Grund dieser Identität kann man das plastische Potential in der Form

$$\phi = \phi(R^T T R) = \phi(T^*) \quad (7.3)$$

schreiben. Wenn das plastische Material isotrop ist, dann ist (7.3) unabhängig von den Verdrehungen des Materials, d.h., es gilt:

$$\phi(Q^T R^T T R Q) = \phi(R^T T R). \quad (7.4)$$

Beachtet man, daß (7.4) genau dann erfüllt ist, wenn nur von den Invarianten $I(R^T T R)$, $II(R^T T R)$, $III(R^T T R)$ abhängt und daß diese Invarianten gleich mit $I(T)$, $II(T)$, $III(T)$ sind, so folgt:

a) Für isotrope Materialien reduziert sich das Plastische Potential (7.1) zu

$$\phi = \phi(I(T), II(T), III(T)) \equiv \phi(T) \quad (7.5)$$

b) Ein plastisches Potential hängt nur von den Cauchy-Spannungen T ab, wenn das Material isotrop ist.

Mit Hilfe solch eines plastischen Potentials kann man folgendes Modell für plastisches Fließen bilden:

Normalitäts-Regel Die plastische Verzerrungsgeschwindigkeit D^P ist im T -Raum zu den Flächen

$$\phi(R^T T R) = \text{const.}$$

senkrecht, d.h.

$$D^P = \lambda \frac{\partial \phi(R^T T R)}{\partial T} = \lambda R^T \frac{\partial \phi(T^*)}{\partial T^*} R \quad (7.6)$$

Im isotropen Fall reduziert sich diese Beziehung auf

$$D^P = \lambda \frac{\partial \Phi(R^T TR)}{\partial T} = \lambda \frac{\partial \Phi(T)}{\partial T} . \quad (7.7)$$

Addiert man (7.6) mit (6.8) bzw. (7.7) mit (4.3), dann erhält man die entsprechenden konstitutiven Beziehungen für anisotrope bzw. isotrope elasto-plastische Materialien. Setzt man in (4.3) die konstitutive Beziehung (4.5) ein und nimmt man (4.2) an, dann erhält man das konstitutive Gesetz, welches von Lehmann (loc.cit.) als eine Näherung für große elasto-plastische Verzerrungen vorgeschlagen wurde.

Im besonderen Fall des plastischen Fließens mit Verfestigung, wenn die plastische Arbeit L eine Funktion des plastischen Potentials ist

$$L = L(\Phi),$$

dann findet man

$$L = \frac{\partial L}{\partial \Phi} \dot{\Phi} = TD = \lambda T \frac{\partial \Phi(R^T TR)}{\partial T} .$$

Daraus folgt

$$\lambda = \frac{\frac{\partial L}{\partial \Phi} \dot{\Phi}}{T \frac{\partial \Phi(R^T TR)}{\partial T}} .$$

Im isotropen Fall erhält man

$$\lambda = \frac{\frac{\partial L}{\partial \Phi} \dot{\Phi}}{T \frac{\partial \Phi(T)}{\partial T}} .$$

5. Thermoplastische Modelle

5.1. Ein Überblick über aktuelle mathematische Modelle der Thermoplastizität

Die großen Schwierigkeiten, die man in der Ausarbeitung mathematischer Modelle für gekoppelte thermomechanische Prozesse überwinden muß, rühren daher, daß solche thermomechanischen Prozesse mit unseren üblichen menschlichen Erfahrungen nicht übereinstimmen. (... "the concept of thermodynamics do not conform to the unsophisticated human experience", vgl. Ahrends [1]).

Die Vielfalt in der die Gesetze der Thermodynamik formuliert werden, macht gleichzeitig die Überprüfung einer Theorie schwer. Hier beschränken wir uns darauf, über den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu referieren.

Wie Woods [2] bemerkt: "The second law manifests itself in a remarkable number of forms, and discussion still continues as to which of these forms is optimal in some sense or other". Diese Lage wird von der folgenden Behauptung von Müller [3] gut charakterisiert: "Because of the difficulties of thermodynamic experimentation we cannot decide which one of the thermodynamic theories is general enough for the description of a particular material. Therefore the theories are judged on their appeal to logic or to personal preference."

Die Auseinandersetzung über die verschiedenen thermodynamischen Theorien hat viele Wissenschaftler dermaßen entmutigt, daß sie sich schließlich zur Verurteilung der klassischen Thermodynamik führen ließen.

(..... "discourage many mathematicians and engineers so much as to bring them to contempt classical thermodynamics". vgl. Truesdell [4]).

Weil es gegenwärtig keine thermodynamische Theorie gibt, die von allen Wissenschaftlern anerkannt wird, ist es sinnvoll, eine Diskussion nur im Rahmen solcher Postulate zu führen, die von allen Theorien akzeptiert werden. Diese Postulate sind die folgenden:

1. Das Gesetz der Energieerhaltung.

2. Clausius-Fouriers Gesetz: Die Wärme fließt nicht von selbst vom Kälteren zum Wärmeren.
3. In einem isothermischen Zyklus wird mechanische Arbeit verloren und nicht gewonnen.

Ein thermodynamisches Modell, welches mit den allgemeinen Gesetzen der Mechanik vereinbar ist und dazu den oben erwähnten drei Axiomen der Thermodynamik nicht widerspricht, kann man als ein mögliches Modell akzeptieren. Nur Experimente können es jedoch bestätigen oder widerlegen.

Im folgenden werden wir einen kurzen Überblick über die mathematischen Modelle geben, die für die Beschreibung des thermoplastischen Fließens vorgeschlagen werden.

Prager's Modell [5]

Zunächst sei das Prager'sche Modell vorgestellt, wie es von Naghdi [6] formuliert wird.

Das Modell bezieht sich auf die Theorie der infinitesimalen Verzerrungen.

Man nimmt an, daß die gesamten Verzerrungen in der Form

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}' + \underline{\epsilon}'' \quad (1.1)$$

darstellbar sind, wobei ϵ' den elastischen Teil und ϵ'' den inelastischen Teil bezeichnen. Der elastische Teil wird vom konstitutiven Gesetz

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \left(\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} - \alpha T \right) \delta_{ij} \quad (1.2)$$

beschrieben, wobei E und ν Young's bzw. Poisson's Modul und α den thermischen Ausdehnungs-Koeffizienten bezeichnen.

Das Auftreten inelastischer Verzerrungen $\underline{\epsilon}''$ ist an die Fließbedingung

$$f(\sigma, \epsilon'', L_p, T) = 0 \quad (1.3)$$

gebunden, wobei T die Temperatur und L_p die plastische Arbeit

$$L_p = \int \sigma_{ij} \dot{\epsilon}''_{ij} dt \quad (1.4)$$

bezeichnen. Nimmt man die Gültigkeit der Normalenregel an, dann erhält man

$$\epsilon''_{ij} = \begin{cases} \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} & \text{für } f = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} \geq 0 \\ 0 & \text{für } f < 0 \text{ oder } f = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} < 0 . \end{cases} \quad (1.5)$$

Aus der Fließbedingung (1.3) folgt

$$\lambda = - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon''_{kl}} + \frac{\partial f}{\partial L_p} \dot{\sigma}_{kl} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (1.6)$$

Das thermodynamische Modell gründet sich auf die Aufspaltung der mechanischen Arbeit W in der Form

$$\dot{W} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{W}' + \dot{W}'' , \quad (1.7)$$

wobei W' und W'' die elastische bzw. plastische Arbeit bezeichnen

$$\dot{W}' = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} , \quad \dot{W}'' = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}''_{ij} . \quad (1.8)$$

Als Definition der Entropie η nimmt man die Beziehung

$$\eta = - \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} + \sigma , \quad (1.9)$$

wobei q den Wärmefluß und σ die innere Entropie bezeichnen. Nimmt man die Gibson'sche Beziehung an

$$T_\eta = U - W' ,$$

wobei U die gesamte Energie bezeichnet, dann erhält man

$$T\dot{\sigma} = \dot{W}''' - \frac{q_i T_{,i}}{T} \quad (1.10)$$

Wird der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in der Form

$$\dot{\sigma} \geq 0$$

geschrieben, dann ist er genau erfüllt, wenn

$$\dot{W}''' - \frac{q_i T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (1.11)$$

Man bemerkt, daß (1.11) erfüllt wird, wenn die letzten zwei der oben erwähnten Axiome gelten. Tatsächlich folgt aus Clausius-Fouriers Ungleichung und aus der Bedingung, daß in jeden isothermen Zyklus die plastische Arbeit positiv sein muß, daß gleichzeitig

$$q_i T_{,i} \leq 0 \quad (1.12)$$

und

$$\frac{-\sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{kl}''} + \frac{\partial f}{\partial Lp} \sigma_{kl}\right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \geq 0 \quad (1.13)$$

gelten. Aus diesen Ungleichungen folgt unmittelbar (1.11). Man bemerkt, daß die Bedingung (1.13) z.B. erfüllt wird, wenn die Fließfunktion f konvex im Spannungsraum ist und

$$\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{kl}''} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial Lp} < 0$$

gelten. Diese Bedingungen lassen sich einfach physikalisch deuten.

Wir können schließen, daß Prager's Modell mit den oben erwähnten allgemeinen Axiomen der Thermodynamik vereinbar ist.

Es bildet aber kein vollständiges Modell. Es fehlen Betrachtungen über die

Umwandlung der plastischen Arbeit.

Besonders beinhaltet das Modell keine Gleichung, um die Wärmeausbreitung zu beschreiben.

Bemerkenswert ist die folgende Eigenschaft eines Materials, welches durch die Fließregel (1.5) beschrieben wird. Es sei eine Spannungsgeschwindigkeit, so daß

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \quad (1.14)$$

und eine Änderung der Temperatur, so daß

$$T > - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial T}} \quad (1.15)$$

Aus der letzten Ungleichung folgt, daß für solch eine Änderung der Spannungen und der Temperatur plastische Verzerrungen auftreten, obwohl die Änderung der Spannungen einer isothermen Entlastung entspricht, d.h., daß im Rahmen dieses Modells plastische Verzerrungen aufgrund einer reinen thermischen Belastung auftreten können.

Um diese Eigenschaft experimentell zu bestätigen, genügt der folgende einfache Versuch:

1) Ein isothermer Zugversuch bringt die Probe bis an seine Fließgrenze (Abb. 1)

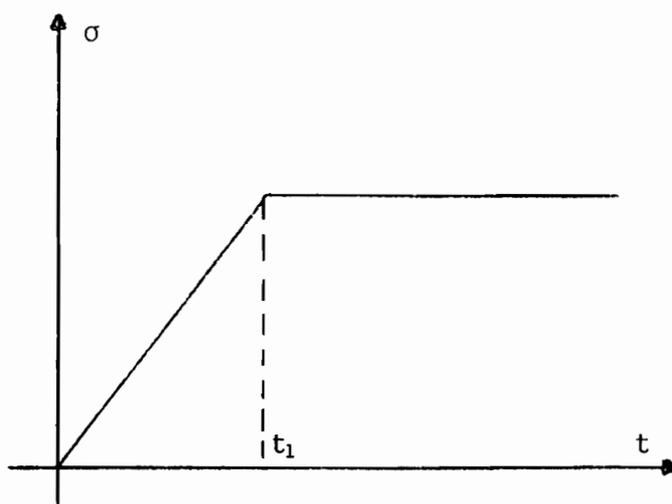
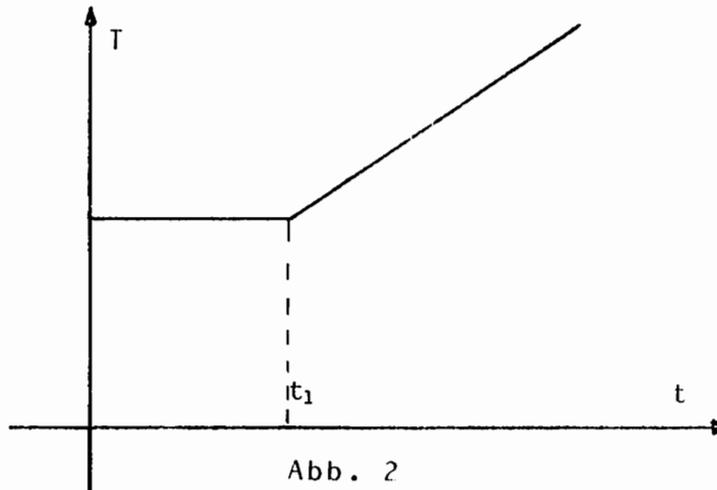


Abb. 1

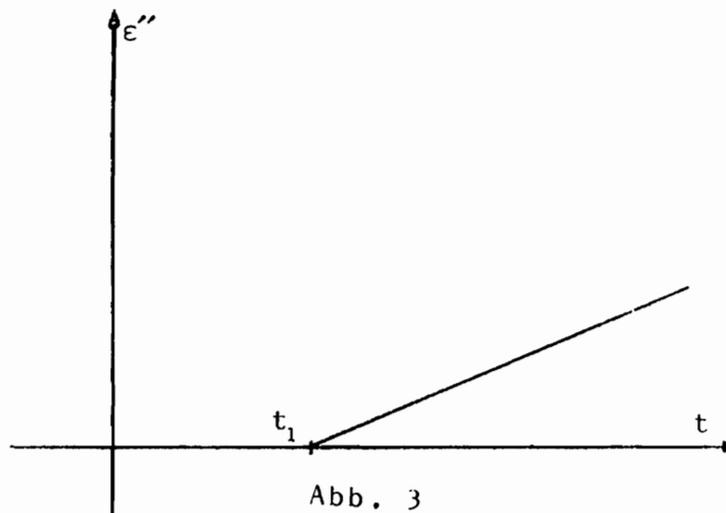
2) Unter konstanter Spannung ändert man die Temperatur, so daß

$$\frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} > 0 \quad \text{für } t \geq t_1$$

gilt (Abb. 2)



Falls das Material von den konstitutiven Gesetzen (1.5) beschrieben wird, muß die plastische Verzerrung dem in Abb. 3 dargestellten Verlauf entsprechen,



Bruhns und Mielniczuku Modell [7] basiert auf der Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeit

$$D = \frac{1}{2} (L + L^T)$$

in einen elastischen und einen plastischen Teil

$$D = D_E + D_P .$$

Dadurch wird die mechanische Arbeit $W = \frac{1}{\rho_0} \text{Sp}(SD)$, wobei S die Cauchy-Spannung bezeichnet, in der folgenden Form zerlegbar

$$W = W_E + W_P$$

mit

$$W_E = \frac{1}{\rho_0} \text{Sp}(SD_E) , \quad W_P = \frac{1}{\rho_0} \text{Sp}(SD_P) .$$

Weiter wird W_P in den Anteil W_D , der dissipiert wird und den Anteil W_H , der zur Strukturveränderung im Inneren des Materials beiträgt, zerlegt:

$$W_P = W_D + W_H .$$

Man nimmt an, daß zwischen W_D und W_H die Beziehung

$$W_D = \gamma W_H$$

mit einer Konstanten γ gilt.

Als thermodynamische Restriktion, die dem zweiten Gesetz der Thermodynamik entspricht, wird die Ungleichung

$$W_D \geq 0$$

vorgeschlagen. Diese Ungleichung wird als eine Folge der Clausius-Duhem-Ungleichung abgeleitet.

Für die elastischen Verzerrungen nimmt man die Beziehung

$$\overset{\circ}{S} = 2G(D_E + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Sp}(D_E) \cdot I) + m \dot{\theta} I \quad (1.16)$$

an, wobei $\overset{\circ}{S}$ - die Jaumannsche Ableitung, θ die Temperatur und I die Einheitsmatrix bezeichnen.

Die plastischen Verzerrungen werden mit Hilfe der Fließbedingungen

$$\phi(T, \theta, k^2) = \text{Sp}(T^2) - k^2(\theta, W_p) = 0 \quad (1.17)$$

beschreiben, wobei

$$T = S - \frac{1}{3} \text{Sp}(S) I$$

der Spannungsdeviator ist. Die konstitutive Beziehung lautet dann:

$$D_p = \begin{cases} \lambda \frac{\partial \phi}{\partial S} & \text{wenn } \phi = 0 \text{ und } \text{Sp}\left(\frac{\partial \phi}{\partial S} \overset{\circ}{S}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \dot{\theta} > 0 \\ 0 & \text{wenn } \phi < 0, \text{ oder } \phi = 0 \text{ und } \text{Sp}\left(\frac{\partial \phi}{\partial S} \overset{\circ}{S}\right) + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \dot{\theta} \leq 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Als kalorische Gleichung nimmt man

$$\dot{Q} = -m \frac{\theta_0}{\rho_0} \text{Sp}(D_E) + c \dot{\theta} \quad (1.19)$$

an und definiert die Entropie durch die Differentialgleichung

$$\dot{s} = \frac{\dot{Q}}{\theta} \quad (1.20)$$

Die entsprechende Wärmeausbreitungsgleichung wird dann

$$c \rho_0 \dot{\theta} = \gamma \text{Sp}(SD_p) + m \theta_0 \text{Sp}D + \rho_0 r + \lambda \Delta \theta ,$$

wobei r die Wärmequelle pro Massen-Einheit, c die spezifische Wärme und λ die Wärmeleitfähigkeit bezeichnen.

Kritik: 1) Es wird nicht klar, ob (1.16) zu den reversiblen elastischen Verzerrungen führt oder nicht, d.h., ob für einen Zyklus in Spannungen und Temperatur mit $\phi < 0$ die bleibenden Verzerrungen Null sind. Das passiert genau dann, wenn die Integrierbarkeitsbedingungen von Bernstein [8] erfüllt werden. Für isotrope Materialien ist die allgemeine Form einer hypoelastischen kon-

stitutiven Beziehung, welche diese Integrabilitätsbedingungen erfüllt, in dem Kapitel 4 dargestellt.

2) Aus (1.19) und (1.20) folgt für die Entropie der Ausdruck

$$\dot{s} = \frac{1}{\theta} \left(-m \frac{\theta_0}{\rho_0} \text{Sp}(D_{\underline{E}}) + c\dot{\theta} \right) .$$

Dieser Ausdruck der Entropie ist demjenigen sehr ähnlich, der in der Thermoelastizität benutzt wird

$$\dot{s} = \frac{1}{\theta} \left(-m \frac{\theta}{\rho_0} \text{Sp}(\dot{\underline{\epsilon}}) + c\dot{\theta} \right) .$$

Dieser Ausdruck für die Entropie gewährleistet in der Thermoelastizität, daß ds ein totales Differential im $(\underline{\epsilon}, \theta)$ - Raum ist. Durch die Ersetzung von $\text{Sp}(\underline{\epsilon})$ durch $\text{Sp}(D_{\underline{E}})$ und von $\frac{\theta}{\rho_0}$ durch $\frac{\theta_0}{\rho_0}$ scheint diese totale Differentiabilität zerstört zu sein.

3) Es scheint, daß in der Belastungsbedingung

$$\text{Sp}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{S}} \overset{\circ}{\underline{S}}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \dot{\theta} > 0$$

die Jaumannsche Ableitung $\overset{\circ}{\underline{S}}$ durch partielle Zeitableitung ersetzbar ist.

Man rechnet

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{S}} &= \frac{\partial}{\partial \underline{S}} \left\{ \text{Sp} \left[\left(\underline{S} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\underline{S}) \right) \left(\underline{S} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\underline{S}) \right) \right] \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \underline{S}} \left[\text{Sp}(\underline{S}^2) - \frac{1}{3} (\text{Sp}(\underline{S}))^2 \right] = \\ &= 2 \left(\underline{S} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\underline{S}) \right) = 2\underline{T} , \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \text{Sp}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{S}} \overset{\circ}{\underline{S}}\right) &= \text{Sp}(\underline{T} \overset{\circ}{\underline{S}}) = \text{Sp}(\underline{T} \dot{\underline{S}}) - \text{Sp}(\underline{T} \dot{\underline{W}} \underline{S}) + \text{Sp}(\underline{T} \underline{S} \dot{\underline{W}}) = \\ &= \text{Sp}(\underline{T} \dot{\underline{S}}) = \text{Sp}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{S}} \dot{\underline{S}}\right) . \end{aligned}$$

Weil die Fließfunktion objektiv sein muß

$$(\phi(Q^T S Q) = \phi(S) \text{ für alle } Q, Q Q^T = I)$$

gilt die Identität

$$\frac{\partial \phi}{\partial S} \dot{S} - \frac{\partial \phi}{\partial S} W S + \frac{\partial \phi}{\partial S} S W = \frac{\partial \phi}{\partial S} \dot{S}$$

für alle antimetrischen Tensoren $W, W = W^T$.

Um das zu beweisen reicht es, die Objektivitätsbedingung für eine besondere Drehungsgeschichte $Q(t)$, $t \in [0,1]$ mit $Q(0) = I$ und $\dot{Q}(0) = W$ zu schreiben.

Daraus folgt, daß in der Belastungsbedingung die Jaumannsche Ableitung immer durch die partielle Zeitableitung ersetzbar ist.

Lehmann-Raniecki Modell Das Modell gründet sich auf Arbeiten von Lehmann [9], [10], [11]. Im Vergleich mit Prager's Modell verzeichnen diese Arbeiten die folgenden Vorschritte:

1. Die plastische Arbeit wird zuerst in den dissipierten Anteil W_D und in den komplementären Anteil W_H zerlegt. Diese Zerlegung ist eindeutig durch die Proportionalitätsbeziehungen

$$W_D = \xi W_P, W_H = (1 - \xi) W_P, 0 \leq \xi \leq 1$$

definiert, wobei ξ experimentell bestimmbarer Parameter ist.

2. Die Energie-Bilanzgleichung wird mit Hilfe der Helmholtz-Funktion

$$\phi = \phi(q_k^i, T),$$

ausgedrückt, wobei q_k^i die elastischen Verzerrungen und T die Temperatur bezeichnen. Sie lautet

$$\dot{q} + \xi \dot{W}_P = - T \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial T^2} \dot{T} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_k^i \partial T} q_k^i \Big|_0 \right) \quad (1.21)$$

Man bezeichnet mit q die gesamte Wärmeenergie, die von einem Einheits-Volumenelement aufgenommen wird:

$$\dot{q} = - \operatorname{div} q + r .$$

3. Das Modell wird für große elastoplastische Formänderungen ausgearbeitet. Es gründet sich auf die Zerlegung der gesamten Deformationsgeschwindigkeit D in den elastischen und plastischen Anteil D_E bzw. D_P . Der elastische Anteil wird durch die Beziehung

$$d_{E k}^i = \frac{1}{2G} (S_k^i |_0 - \frac{\nu}{1+\nu} S_m^m |_0 \delta_k^i) + \alpha T \delta_k^i$$

definiert, wobei $S_{k/0}^i$ die kovariante Ableitung der Cauchy-Spannung

$$S_{k/0}^i = (S^i)_{.k} + d_r^i S_k^r - d_k^r S_r^i$$

bezeichnet.

Der plastische Anteil wird mit Hilfe der Fließbedingung

$$F(S_k^i, T, k^2, \alpha_k^i \dots A_{KS}^{ir}) = 0$$

und der Belastungsbedingung

$$\frac{\partial F}{\partial S_k^i} S_{k/0}^i + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} = 0$$

ausgedrückt. Durch k , α_k^i und A_{KS}^{ir} bezeichnet man bestimmte verborgene Variablen.

Die Fließregel lautet dann

$$d_{P k}^i = \lambda \frac{\partial F}{\partial S_k^i} + \varkappa_{KS}^{ir} \dot{t}_r^s, \quad (1.22)$$

wobei t_{sr} die Komponenten des Spannungsdeviators und \varkappa_{KS}^{ir} eine tensorielle Funktion die eventuelle Abweichung von der Normalitäts-Regel beschreiben

Ein ganz ähnliches Modell wird, unabhängig, von Mróz und Raniecki [12], [13] vorgeschlagen:

1. Das Modell beschreibt die elastischen Verzerrungen durch die Beziehung

$$\dot{\underline{\epsilon}}_e = L \dot{\underline{\sigma}} + \alpha \dot{\theta} \mathbf{I},$$

wobei $L = (\partial \underline{\epsilon}_e / \partial \underline{\sigma})$ und α die thermische Ausdehnung - Koeffizient bezeichnen. Die plastischen Verzerrungen sind mit Hilfe der Normalitätsregel

$$\dot{\underline{\epsilon}}_p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$

gegeben, wobei λ aus der Fließbedingung

$$f(\sigma, \Pi, \pi, K, \theta) = 0 \quad (1.23)$$

bestimmt wird. Die Parameter Π, π, K und K sind mit der Verfestigung des Materials verbunden. (Diese Verbindung ist im Modell nicht spezifiziert.)

2. Die plastische Arbeit wird in der Form

$$Sp(\underline{\sigma} \dot{\underline{\epsilon}}_p) = W_D + S_p(\Pi \dot{K}) + \pi \dot{K} \quad (1.24)$$

zerlegt, wobei W_D der dissipierte Anteil und $Sp(\Pi \dot{K}) + \pi \dot{K}$ der Anteil, der zur Strukturveränderung im Inneren des Materials beiträgt ist.

3. Die Wärmeausbreitungsgleichung ist mit der von Lehmann vorgeschlagenen gleich.

4. Als thermodynamischen zweiten Hauptsatz nimmt man die Ungleichung

$$\dot{W}_D \geq 0$$

an. Diese Ungleichung ist als eine Folge der Clausius-Duhem abgeleitet.

Das Modell von Mróz und Raniecki wird von Raniecki in [14] erweitert und entwickelt. Es wird ein neues Paar von inneren Variablen betrachtet (insgesamt sechzehn); die physikalische Bedeutung dieser Parameter diskutiert und mögliche experimentelle Bestimmungen vorgeschlagen.

Ein umfassendes Modell, um thermoplastisches Fließen zu beschreiben, wurde von Lehmann [15] vorgeschlagen. Dieses Modell gründet sich auf die Voraus-

setzung, daß die Fließgrenze den Ausdruck

$$F = \text{Sp} (\mathbf{T} - c\mathbf{B})^2 - k^2(b,T) = 0 \quad (1.25)$$

hat, wobei $\mathbf{T} = \mathbf{S} - \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{S})\mathbf{I}$ den Deviator der Cauchy Spannung \mathbf{S} , und T die Temperatur bezeichnet, \mathbf{B} und b die Verschiebung bzw. die isotropische Ausdehnung der Fließgrenze beschreibt.

Für Verzerrungen nimmt man die Zerlegung

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_E + \mathbf{D}_P + \mathbf{D}_S ,$$

an, wobei

$$\mathbf{D}_E = \frac{1}{2G} \overset{\circ}{\mathbf{T}} + \left\{ \frac{1}{gk} \text{Sp}(\overset{\circ}{\mathbf{S}}) + \alpha T \right\} \mathbf{I} , \quad (1.26)$$

(mit $\overset{\circ}{\mathbf{T}}$ oder $\overset{\circ}{\mathbf{S}}$ bezeichnet man, wie üblich, die Jaumannsche Ableitung)

$$\mathbf{D}_P = \frac{\lambda}{\sqrt{k^2}} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} = 2 \frac{\lambda}{\sqrt{k^2}} (\mathbf{T} - c\mathbf{B}) , \quad (1.27)$$

und

$$\mathbf{D}_S = \mathcal{K}(\overset{\circ}{\mathbf{T}} - c\overset{\circ}{\mathbf{B}})$$

sind. Die Konstanten G, K und α sind die üblichen thermoelastischen Konstanten, \mathcal{K} ist eine Funktion, die die Abweichung von der Normalitäts-Regel beschreibt. Für die inelastische Arbeit $w_P + w_S$ gilt die Zerlegung

$$\begin{aligned} w_P + w_S = w_D + w_H = (1-\xi)\text{Sp}(\mathbf{T}\mathbf{D}_P) + (1-\theta)\text{Sp}(\mathbf{T}\mathbf{D}_S) + \\ + \xi \text{Sp}(\mathbf{T}\mathbf{D}_P) + \theta \text{Sp}(\mathbf{T}\mathbf{D}_S) , \end{aligned} \quad (1.28)$$

wobei ξ und θ ($0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 1$) experimentell zu bestimmen sind.

Nimmt man für die inneren Variablen \mathbf{B} und C die Evolutionsgleichungen

$$\dot{b} = \frac{\delta}{\rho_0} \text{Sp}((\mathbf{T} - \mathbf{B})\mathbf{D}_S) + \frac{\mu}{\rho_0} \text{Sp}((\mathbf{T} - \mathbf{B})\mathbf{D}_P) \quad (1.29)$$

$$\dot{\mathbf{B}} = c_\zeta \mathbf{D}_S + c_v \mathbf{D}_P$$

an, sowie

$$\dot{W}_H = \dot{b} + 2g \operatorname{Sp}(\mathbf{B} \overset{\circ}{\mathbf{B}}) \quad (1.30)$$

dann erhält man $\delta = \theta$, $\mu = \xi$

$$v = \frac{c_\mu}{2g\rho_0}, \quad \zeta = \frac{c_\delta}{2g\rho_0}$$

Bezeichnet man $\gamma = \frac{c^2}{2g\rho_0}$ dann folgt

$$c\zeta = \delta\gamma, \quad cv = \mu\gamma.$$

Setzt man (1.26) und (1.27) in (1.29) und (1.30) ein, dann erhält man

$$\dot{b} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\rho_0} \operatorname{Sp}[(\mathbf{T} - c\mathbf{B})(\overset{\circ}{\mathbf{T}} - c\overset{\circ}{\mathbf{B}})] - \frac{2\mu}{\rho_0} \sqrt{k^2} \dot{\lambda} \quad (1.31)$$

und

$$\overset{\circ}{c\mathbf{B}} = \frac{\gamma\delta\mathcal{H}\overset{\circ}{\mathbf{T}} + 2\gamma\mu \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{k^2}} (\mathbf{T} - c\mathbf{B})}{1 + \gamma\delta\mathcal{H}} \quad (1.32)$$

Der Parameter $\dot{\lambda}$ läßt sich aus der Fließbedingung

$$F = 0$$

ableiten. Schreibt man die Funktion k^2 in der Form $k^2(\gamma\rho_0 b, T)$, dann erhält man

$$\dot{\lambda} = \frac{(2 - \frac{\partial k^2}{\partial(\gamma\rho_0 b)}) \gamma\delta\mathcal{H} \operatorname{Sp}[(\mathbf{T} - c\mathbf{B})\overset{\circ}{\mathbf{T}}] - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}(1 + \gamma\delta\mathcal{H})}{2\mu\gamma\sqrt{k^2}(2 + \frac{\partial k^2}{\partial(\gamma\rho_0 b)})} \quad (1.33)$$

Setzt man (1.33) in (1.31) ein, dann findet man für \dot{b} die Evolutionsgleichung

$$\rho_0 \gamma \dot{b} = \frac{2 \operatorname{Sp}[(\mathbf{T} - c\mathbf{B})\overset{\circ}{\mathbf{T}}] - \frac{\partial k^2}{\partial T} \dot{T}}{2 + \frac{\partial k^2}{\partial(\gamma\rho_0 b)}} \quad (1.34)$$

Die irreversiblen Deformationen $\mathbb{D}_{irr} = \mathbb{D}_p + \mathbb{D}_s$ sind durch

$$\mathbb{D}_{irr} = \frac{1}{1+g\delta c} (\mathcal{H}\overset{\circ}{T} + \frac{[1+\mathcal{H}(g\delta-\gamma\mu)](\mathbf{T}-c\mathbf{B})\{(2-\frac{\partial k^2}{\partial(\gamma\rho b)}\gamma\delta c)Sp[(\mathbf{T}-c\mathbf{B})\overset{\circ}{T}] - \frac{\partial k^2}{\partial T}\dot{T}(1+\gamma\delta c)\}}{\mu\gamma k^2(2+\frac{\partial k^2}{\partial(\gamma\rho_0)})}) \quad (1.35)$$

bestimmt. Betrachtet man dazu die Energiebilanz in der Form

$$T\{\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial T^2} \dot{T} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial s_k^i \partial T} \dot{s}_k^i\} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \tilde{q} - r - \dot{w}_D, \quad (1.36)$$

wobei $\psi^* = \psi^*(S, T)$ wie üblich bestimmt ist, so daß die Summe zwischen der Leistung der reversiblen Deformationen und der Wärmeenergie Intensität

$$\dot{L}_E + \dot{Q} = \frac{1}{\rho_0} Sp(\overset{\circ}{S}_D)_E + T\{\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial T^2} \dot{T} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial s_k^i \partial T} \dot{s}_k^i\} \quad (1.37)$$

ein totales Differential im (s_k^i, T) -Raum bildet, dann erhält man ein vollständiges Modell.

Anmerkung: In [16] wird auch ein allgemeines Modell vorgeschlagen, in dem nicht (1.30) angenommen ist. Dieses führt aber auf die reversiblen Deformationen

$$\begin{matrix} \tilde{\varepsilon}_k^i & = & \tilde{\varepsilon}_k^i & (\tilde{s}_k^i, T, b, \mathbb{B}), \\ (r) & & (r) \end{matrix}$$

die wegen Anwesenheit der inneren Variablen b und \mathbb{B} nicht mehr reversibel sind. *)

Das Modell besteht aus

Gl. (1.26)-für den elastischen Anteil der Deformation;

Gl. (1.35)-für den inelastischen Anteil der Deformation;

Gl. (1.31) und (1.32)-für die Entwicklung der inneren Variable b und \mathbb{B} ;

*) $\tilde{s}_{.k}^i$ und $\tilde{\varepsilon}_{.k}^i$ bezeichnen ein Paar von adjungierter Spannung und Verzerrung (nicht unbedingt symmetrisch), so daß $\dot{w} = \frac{1}{\rho_0} \tilde{s}_{.k}^i \dot{\varepsilon}_{.k}^i$.

Gl. (1.33)-für das Parameter λ ;

Gl. (1.36)-für die Wärmeausbreitung;

Gl. (1.37)-für die Bestimmung der Gibb'schen Funktion;

$\lambda > 0$ -als Belastungsbedingung.

Kritik: 1. Das Modell*) gründet sich auf die Existenz der Gibb'schen Funktion

$\psi = \psi(s_k^i, T, b, B_k^i)$, die sich durch die Gleichung darstellen läßt:

$$\psi = U - \frac{1}{\rho^0} s_k^i \cdot \frac{\cdot k}{\epsilon_i^k} - TS, \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s_k^i} = - \frac{1}{\rho^0} \frac{\epsilon_k^i}{(r)}, \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial T} = - S. \quad (1.40)$$

Dabei bezeichnen U die totale Energie und S die Entropie. Es ist bekannt, daß die Gibbs'sche Funktion immer für thermoelastische Prozesse existiert, wenn

$$\frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} (dU - \frac{1}{\rho^0} s_k^i d\epsilon_i^k) \quad (1.41)$$

ein totales Differential im Spannung-Temperatur-Raum darstellt. Nimmt man dann als Entropie

$$\dot{S} = \frac{\dot{Q}}{T}$$

und setzt sie in (1.38) ein, erhält man durch Differenzierung

$$\frac{\partial \psi}{\partial s_k^i} \dot{s}_k^i + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} = - \frac{1}{\rho^0} \dot{s}_k^i \frac{\epsilon_k^i}{(r)} - \dot{T} S,$$

woraus, da s_k^i und T unabhängig sind, auch (1.39) (1.40) nehmen eine eindeutige Lösung ψ genau dann an, wenn

*) Um jedwelche Mißinterpretation des Modells zu vermeiden, beschränken wir uns hier nur auf infinitesimale Verzerrungen. Dann bezeichnen s_k^i und ϵ_i^k die üblichen Spannungs- und Verzerrungsgeschwindigkeiten der infinitesimalen Elastizitätstheorie.

$$\frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial \epsilon_k^i}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial s_k^i}$$

gilt. Diese Integrabilitätsbedingung wird immer erfüllt, weil für thermoelastische Prozesse.

$$dU = \frac{1}{\rho\sigma} s_k^i d\epsilon_i^k + dQ$$

ein totales Differential im Spannung-Temperatur-Raum bildet. Im allgemeinen Fall verlangt die Existenz der Gibbs'schen Funktion die Erfüllung entsprechender Bedingungen. Um diese Bedingungen abzuleiten, setzen wir (1.40) in (1.38) ein, und schreiben das Ergebnis in der Form

$$\frac{\partial(e^{-T}\psi)}{\partial T} = e^{-T} \left(U - \frac{1}{\rho\sigma} s_k^i \epsilon_i^k \right) \quad (1.42)$$

Schreibt man (1.39) in der äquivalenten Form

$$\frac{\partial(e^{-T}\psi)}{\partial s_k^i} = - \frac{1}{\rho\sigma} e^{-T} \epsilon_k^i \quad (1.43)$$

dann folgt, daß die Gibbs'sche Funktion genau dann existiert, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$e^{-T} \frac{\partial}{\partial s_k^i} \left(U - \frac{1}{\rho\sigma} s_k^i \epsilon_i^k \right) = - \frac{1}{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial T} \left(e^{-T} \epsilon_k^i \right) \quad (1.44)$$

erfüllt wird. Ist diese Bedingung erfüllt, dann folgt aus (1.38-40)

$$T \left(\frac{\partial \psi}{\partial s_k^i} \dot{s}_k^i + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial b} \dot{b} + \frac{\partial \psi}{\partial B_k^i} \dot{B}_k^i = \dot{U} - \frac{1}{\rho\sigma} s_k^i \dot{\epsilon}_k^i$$

Aus der Energiebilanz-Gleichung folgt gleichzeitig, daß

$$\dot{Q} = \dot{U} - \frac{1}{\rho\sigma} s_k^i \dot{\epsilon}_k^i \quad (1.45)$$

gelten muß. Demzufolge muß neben (1.43) noch

$$T \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial s_k^i \partial T} \dot{s}_k^i + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial b} \dot{b} + \frac{\partial \psi}{\partial B_k^i} \dot{B}_k^i = \dot{Q} \quad (1.46)$$

gelten. Wir fassen jetzt alle Bedingungen zusammen, die für die Existenz der Gibbs'schen Funktion notwendig sind.

a) Es gibt innere Parameter b und B , so daß

$$\int \frac{1}{\rho \sigma} s_k^i \frac{\dot{\epsilon}_j^k}{(r)} dt + \int \dot{Q} dt = U(s_k^i, T, b, B_k^i)$$

für alle möglichen Spannung-Temperatur-Trajektorien gilt.

b) Mit der so definierten Gesamtenergie $U(s_k^i, T, b, B_k^i)$ ist die Integrabilitätsbedingung (1.44) erfüllt.

c) Die Funktion ψ , die durch die Gleichungen (1.42) und (1.43) definiert wird, erfüllt die Bedingung (1.46).

Das oben erwähnte Modell nimmt stillschweigend an (vgl. [15]), daß alle diese drei Bedingungen erfüllt werden und weiter, daß die Lösung ψ die besondere Form

$$\psi = \psi^*(s_k^i, T) + b + g B_k^i B_j^k$$

(mit einer Konstanten g) hat.

Für diese starke Annahme wird keine physikalische Rechtfertigung geliefert.

2) Die Beschreibung des Verfestigungsprozesses durch eine Translation und Ausdehnung der ursprünglichen Fließgrenze ist nur als eine erste Annäherung annehmbar.

In Wirklichkeit führt die Verfestigung zu einer komplizierten Änderung dieser Fließgrenze (vgl. [16], [17], [18]). Nimmt man diese Art von Ver-

festigung an, dann muß man diejenigen Beschränkungen der Parameter b und B feststellen, die auf nun, physikalische noch annehmbare Fließgrenzen führen, (z.B. muß diese Fließgrenze immer den Nullspannungs-Punkt umschließen).

3. Das Modell stellt nicht die mathematische Restriktion genau fest, die das zweite thermodynamische Gesetz reflektiert. Üblich ist die Restriktion

$$\text{Sp}(S \mathbb{D}_{\text{irr}}) \geq 0$$

zu beweisen.

Sie ist bei allen oben erwähnten Modellen anzutreffen. Der Beweis, daß diese Restriktion erfüllt ist, ist äquivalent zum Beweis, daß die Ungleichung

$$\text{Sp } \pi(\mathcal{K} \overset{\circ}{T} + \frac{[1+\mathcal{K}(g\delta-\gamma\mu)](T-cB)\{(2 - \frac{\partial k^2}{\partial(\gamma\rho_0 b)} g\delta\mathcal{K})\text{Sp}[(T-cB)\overset{\circ}{T}] - \frac{\partial k^2}{\partial T} T(1+g\delta\mathcal{K})\}}{\mu\gamma k^2(2 + \frac{\partial k^2}{\partial(\gamma\rho_0 b)})} \geq 0$$

immer dann gilt, wenn

$$\frac{(2 - \frac{\partial k^2}{\partial(\gamma\rho_0 b)} g\delta\mathcal{K})\text{Sp}[(T-cB)\overset{\circ}{T}] - \frac{\partial k^2}{\partial T} T(1+g\delta\mathcal{K})}{2\mu\gamma k^2(2 + \frac{\partial k^2}{\partial(\gamma\rho_0 b)})} \geq 0$$

gilt.

4. Das Modell schlägt für die Entlastung keine konstitutiven Gleichungen vor. Die Anwesenheit des Gliedes $\mathcal{K}\overset{\circ}{T}$ in (1.35) macht die elastische Entlastung gemäß (1.26) unmöglich. Für isotherme Prozesse (ohne die Existenz der inneren Variable b, B) ist dieses Problem in [19] betrachtet worden.

5.2. Thermoplastizität auf der Grundlage des Green'schen Modells für plastisches Fließen

Wie wir in Kapitel 2 gesehen haben, stellt Green's Modell eines der allge-

meinsten Modelle für die Beschreibung der plastischen Verzerrung dar, die heute benutzt werden. Es beinhaltet z.B. das klassische Modell von Plastizität, welches sich auf die Existenz eines plastischen Potentials gründet. Ein Grundprinzip der mathematischen Logik empfiehlt uns, das thermoplastische Fließen im Rahmen einer Erweiterung des allgemeinsten Modells, in unserem Fall des Green'schen Modells, zu versuchen. Es gibt "a priori" keinen Grund, die Annahmen, die ein besonderes isothermes Modell definieren, auf nicht isotherme Prozesse auszudehnen.

Ein thermoplastisches Modell, welches vom Green'schen Modell ausgeht, wird durch die konstitutive Beziehung der Form:

$$\text{Spannungsgeschwindigkeit} = f(\text{Spannungen, Temperatur, Verzerrungsgeschwindigkeit, Temperaturgeschwindigkeit})$$

beschrieben. Jedes thermoplastische Material braucht zwei solche Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen; eine für Belastung, eine für Entlastung. Es sei:

$$\begin{aligned} S &= (s_{ij}) - && \text{Cauchy Spannungstensor ,} \\ D &= (d_{ij}) - && \text{Verzerrungsgeschwindigkeitstensor ,} \\ T &= S - \frac{1}{3} \text{Sp}(S) = (t_{ij}) - && \text{Spannungsdeviator ,} \\ E &= D - \frac{1}{3} \text{Sp}(D) = (e_{ij}) - && \text{Deviator für Verzerrungsgeschwindigkeit ,} \\ s &= \text{Sp}(S) - && \text{Hydrostatischer Anteil der Spannung ,} \\ d &= \text{Sp}(D) - && \text{Hydrostatischer Anteil der Verzerrungsgeschwindigkeit.} \end{aligned}$$

Im folgenden entwickeln wir ein solches Modell, das sich auf die folgenden zusätzlichen Voraussetzungen stützt:

1. Der Verzerrungsprozess ist Geschwindigkeits-unabhängig.
2. In der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung sind die hydrostatischen Anteile

und die Deviatoren der Spannung und Verzerrungen entkoppelt.

3. Die Belastungs-Entlastungs-Bedingung ist durch das Vorzeichen der Distorsions-Leistung $M = t_{ij} \dot{e}_{ij}$ definiert.
4. Den stetigen Verzerrungs- und Temperaturgeschwindigkeiten entsprechen immer stetige Spannungsgeschwindigkeiten und umgekehrt.

Auf Grund dieser Voraussetzungen erhält man die konstitutiven Beziehungen:

$$\dot{s} = h_d(s, \theta) \dot{d} + h_\theta(s, \theta) \dot{\theta} \quad (2.1)$$

$$\overset{0}{T} = A_E^+(T, \theta) E + A_\theta^+(T, \theta) \dot{\theta} \quad \text{wenn } M > 0, \quad (2.2)$$

$$\overset{0}{T} = A_E^-(T, \theta) E + A_\theta^-(T, \theta) \dot{\theta} \quad \text{wenn } M \leq 0, \quad (2.3)$$

mit der Stetigkeitsbedingung

$$A_E^+(T, \theta) E + A_\theta^+(T, \theta) \dot{\theta} = A_E^-(T, \theta) E + A_\theta^-(T, \theta) \dot{\theta} \quad \text{wenn } M = 0.$$

Wir machen die folgende zusätzliche Voraussetzung:

5. Keine Verzerrungen sind ohne die Änderung des Spannungs- oder Temperaturzustands möglich.

Diese letzte Voraussetzung wird genau dann erfüllt, wenn $h_d \neq 0$ und die Matrizen A_E^+, A_E^- nicht singuläre sind;

$$\det(A_E^+) \neq 0, \quad \det(A_E^-) \neq 0$$

Bezeichnet man:

$$g_s(s, \theta) = \frac{1}{h_d(s, \theta)}, \quad g_\theta(s, \theta) = \frac{h_\theta(s, \theta)}{h_d(s, \theta)}$$

$$B_T^+(T, \theta) = (A_E^+(T, \theta))^{-1}, \quad B_T^-(T, \theta) = (A_E^-(T, \theta))^{-1}$$

$$B_\theta^+(T, \theta) = B_T^+(T, \theta) A_\theta^+(T, \theta), \quad B_\theta^-(T, \theta) = B_T^-(T, \theta) A_\theta^-(T, \theta)$$

dann wird die konstitutive Beziehung (2.1-3)

$$d = g_s(s, \theta) s + g_\theta(s, \theta) \dot{\theta} \quad , \quad (2.5)$$

$$E = \mathbb{B}_T^+(T, \theta) \overset{\circ}{T} + B_\theta^+(T, \theta) \dot{\theta} \quad \text{wenn } M > 0 \quad , \quad (2.6)$$

$$E = \mathbb{B}_T^-(T, \theta) \overset{\circ}{T} + B_\theta^-(T, \theta) \dot{\theta} \quad \text{wenn } M \leq 0 \quad . \quad (2.7)$$

Bezeichnet man

$$M^+ = \text{Sp}(\mathbb{B}_T^+(T, \theta) \overset{\circ}{T}) + \text{Sp}(B_\theta^+(T, \theta) \dot{\theta})$$

bzw.

$$M^- = \text{Sp}(\mathbb{B}_T^-(T, \theta) \overset{\circ}{T}) + \text{Sp}(B_\theta^-(T, \theta) \dot{\theta})$$

dann folgt

$$M = \begin{cases} M^+ & \text{wenn } M > 0 \\ M^- & \text{wenn } M \leq 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Aus der Stetigkeitsbedingung (2.4) folgt gleichfalls $M^+ = M^- = 0$, wenn $M = 0$. (2.9)

Bezeichnet man mit a^+, a^- den Tensor zweiter Ordnung

$$a^+ = \mathbb{B}_T^+(T, \theta) \quad , \quad a^- = \mathbb{B}_T^-(T, \theta)$$

und mit c^+, c^- die Skalarfelder

$$b^+ = \text{Sp}(B_\theta^+(T, \theta)) \quad , \quad b^- = \text{Sp}(B_\theta^-(T, \theta)) \quad ,$$

dann erhält man

$$M^+ = \text{Sp} \left(a^+ \overset{\circ}{T} \right) + b^+ \dot{\theta} \quad \text{wenn } M > 0 \quad (2.10)$$

$$M^- = \text{Sp} \left(a^- \overset{\circ}{T} \right) + b^- \dot{\theta} \quad \text{wenn } M \leq 0 \quad (2.11)$$

Wir machen die folgende Voraussetzung:

6. Die Umkehrung der Richtung einer Trajektorie $T(t), \theta(t)$ im (T, θ) - Raum ändert auch das Vorzeichen der Verzerrungsleistung M .

(d.h. falls $T(t), \theta(t), t \in [t_0, t_0 + \eta]$ eine Belastung darstellt, dann $T^*(t), \theta^*(t), t \in [t_0 + \eta, t_0 + 2\eta]$ mit $T^*(t) = T(2t_0 + 2\eta - t)$ und $\theta^*(t) = \theta(2t_0 + 2\eta - t)$ eine Entlastung bildet, Abb.1)

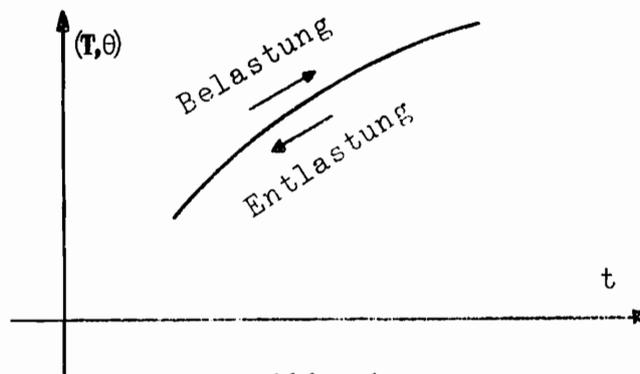


Abb. 1

Mit Hilfe dieser Voraussetzung kann man beweisen, das folgender Satz gilt:

Wenn $M^+ > 0$ dann $M > 0$ und wenn $M^- \leq 0$ dann $M \leq 0$. Widerspruchsbeweisführung:

Es sei $M^+ > 0$ und $M < 0$. Durch die Umtauschung der Richtung der Trajektorie folgt dann für die neue Spannungs-Temperatur-Geschichte $M^+ < 0$ und $M > 0$, was der Gleichung (2.8) widerspricht. Weil wegen (2.9) $M^+ > 0$ und $M = 0$ gleichzeitig unmöglich ist, folgt der erste Teil des Satzes unmittelbar.

Die Beweisführung des zweiten Teils erfolgt gleichartig. Aus dem oben erwähnten Satz folgt die folgende neue Form der Belastungs-Entlastungs-Bedingung

$$\text{Belastung: } M > 0 \Leftrightarrow M^+ > 0$$

$$\text{Entlastung: } M \leq 0 \Leftrightarrow M^- \leq 0 \tag{2.12}$$

Wir machen die folgenden zwei neuen Voraussetzungen:

7. Für Entlastungen die Verzerrungsarbeiten

$$L^- = \int M dt$$

hängt nur von den Enden der Entlastungs-Trajektorien ab.

8. Ein reiner Temperatur-Zyklus produziert keine Distorsions-Arbeit.

An den Voraussetzungen 7 folgt, daß M^- ein totales Differential im (T, θ) -Raum darstellt. Aus 8 folgt auch unmittelbar, daß $b^+(T, \theta) = b^-(T, \theta)$ ist, und dadurch, daß $M^+ - M^- = \text{Sp}[(a^+(T, \theta) - a^-(T, \theta)) \overset{0}{T}]$ gilt. Es sei L^+ die Distorsions-Arbeit, die einer Trajektorie $T(\cdot), \theta(\cdot)$ im (T, θ) -Raum entspricht.

Definition. Die Differenz

$$L_{p1} = L^+ - L^-, \quad (2.13)$$

wobei L^- die Verzerrungsarbeit ist, die einer Entlastungs-Trajektorie entspricht, die im Punkt $(T(t), \theta(t))$ anfängt und im Punkt $(T = 0, \theta = 0)$ endet, wird plastische Arbeit im Moment t genannt.

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß

$$\dot{L}_{p1} = \begin{cases} M^+ - M^- & \text{wenn } M > 0 \\ 0 & \text{wenn } M \leq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

gilt.

Wir nehmen die folgende neue Voraussetzung an:

9. In jedem isothermen Zyklus ist die Distorsions-Arbeit positiv.

Wir können das folgende Theorem beweisen:

Theorem: Die Zeitableitung der plastischen Arbeit ist immer positiv, d.h. es gilt:

$$\dot{L}_{p1} \geq 0$$

Beweis: Es sei $T(t), \theta(t) = \theta_0, t \in [t_0, t_0 + \eta]$ der Teil einer isothermen Trajektorie in (T, θ) -Raum, auf der die Belastungsbedingung $M > 0$ erfüllt wird. Wenn man diese Trajektorie in umgekehrte Richtung zurückgelegt,

d.h. $T^*(t), \theta^*(t) \quad t \in [t_0 + n, t_0 + 2n]$, $T^*(t) = T(2t_0 + 2n - t)$, $\theta^*(t) = \theta_0$

und man berücksichtigt die Voraussetzung 9, dann erhält man:

$$\int_{t_0}^{t_0+n} M^+ dt + \int_{t_0+n}^{t_0+2n} M^- dt \geq 0$$

woraus folgt

$$\int_{t_0}^{t_0+n} (M^+ - M^-) dt \geq 0$$

oder, für $n \rightarrow 0$ $M^+ - M^- \geq 0$.

Weil im allgemeinen Ausdruck der Differenz $M^+ - M^-$ die Temperatur die Rolle eines Parameters spielt (vgl. die Folge der Voraussetzung 8) gilt diese Ungleichung auch für nicht isotherme Prozesse. Mit Hilfe von (2.14) folgt die Behauptung des Theorems. Man kann beweisen, daß sich die Belastungs-Entlastungs-Bedingung in der äquivalenten Form

Belastung: $\dot{L}_{p1} > 0$,

Entlastung: $\dot{L}_{p1} = 0$

schreiben läßt.

Tatsächlich folgt aus dem oben erwähnten Theorem, daß

$$\dot{L}_{p1} = M^+ - M^- \geq 0 \quad \text{wenn } M > 0$$

d.h., daß

$$\text{Sp}[(a^+(T, \theta) - a^-(T, \theta))\dot{T}] \geq 0 \quad \text{wenn } \text{Sp}(a^+(T, \theta)\dot{T}) + b^+(T, \theta)\dot{\theta} > 0. \quad (2.15)$$

Man bemerkt, daß es nur zwei Möglichkeiten gibt, unter denen diese letzte Bedingung erfüllt wird, und zwar

1. wenn $a^+(T, \theta) - a^-(T, \theta) = 0$

und

2. $b^+(T, \theta) = 0$ und es gibt eine skalare Funktion $\lambda(T, \theta)$, so daß

$$a^+(T, \theta) - a^-(T, \theta) = \lambda(T, \theta) a^+(T, \theta).$$

Der erste Fall folgt unmittelbar. Wir werden nur den zweiten Fall beweisen.

Es sei die orthogonale Darstellung des Tensors $a^+(T, \theta) - a^-(T, \theta)$ in der Form

$$a^+(T, \theta) - a^-(T, \theta) = \lambda(T, \theta) a^+(T, \theta) + a^*(T, \theta) \text{ gegeben,}$$

wobei $a^*(T, \theta)$ orthogonal zu $a^+(T, \theta)$ ist

$$\text{Sp}(a^*(T, \theta) a^+(T, \theta)) = 0$$

und $\lambda(T, \theta)$ eine bestimmte skalar Funktion ist. Nimmt man

$$\overset{\circ}{T} = \alpha a^+ + \beta a^*$$

an, mit $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, dann findet man

$$M = \alpha \text{Sp}(a^+(T, \theta) a^+(T, \theta)) > 0$$

und

$$M^+ - M^- = \alpha \lambda(T, \theta) \text{Sp}(a^+(T, \theta) a^+(T, \theta)) + \beta \text{Sp}(a^+(T, \theta) a^*(T, \theta)).$$

Man bemerkt, daß (2.15) erfüllt wird für alle $\beta \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn

$$\text{Sp}(a^*(T, \theta) a^*(T, \theta)) = 0$$

gilt, demzufolge genau dann, wenn $a^*(T, \theta) \equiv 0$ ist.

Mit der neuen Belastungs-Entlastungs-Bedingung wird die Stetigkeitsbedingung (2.4) zu

$$\mathbb{B}_T^+(T, \theta) \overset{\circ}{T} + B_\theta^+(T, \theta) \dot{\theta} = \mathbb{B}_T^-(T, \theta) \overset{\circ}{T} + B_\theta^-(T, \theta) \dot{\theta} \text{ wenn } \dot{L}_{p1} = M^+ - M^- = 0$$

reduziert. Weil $M^+ - M^-$ abhängt nicht von $\dot{\theta}$ wird diese Bedingung genau

dann erfüllt, wenn

$$\mathbb{B}_T^+(T, \theta) \overset{\circ}{T} = \mathbb{B}_T^-(T, \theta) \overset{\circ}{T} \quad \text{wenn } \dot{L}_{p1} = M^+ - M^- = 0 \quad (2.16)$$

und

$$\mathbb{B}_\theta^+(T, \theta) \equiv \mathbb{B}_\theta^-(T, \theta) = \mathbb{B}_\theta(T, \theta) .$$

5.2.2. Beispiele Es sei $\mathbb{B}_T^+(T, \theta)$ und $\mathbb{B}_T^-(T, \theta)$ gegeben, so daß

$$\mathbb{B}_T^+(T, \theta) = \mathbb{B}_T^-(T, \theta) + \Lambda T \mathbb{B}_T^+(T, \theta) = \mathbb{B}_T^-(T, \theta) + \Lambda a^+ \quad (2.17)$$

d.h.

$$\mathbb{B}_{Tijkl}^+(T, \theta) = \mathbb{B}_{Tijkl}^-(T, \theta) + \lambda_{ij} T_{pq} \mathbb{B}_{Tpqkl}^+(T, \theta)$$

wobei Λ ein Tensor-Feld bezeichnet, mit:

$$\text{Sp}(T\Lambda) = \lambda > 0$$

und

$$\mathbb{B}_\theta^+(T, \theta) = \mathbb{B}_\theta^-(T, \theta) = \mathbb{B}_\theta(T, \theta)$$

so daß

$$\text{Sp}(T \mathbb{B}_\theta(T, \theta)) = 0 .$$

Es ist offenbar, daß die konstitutiven Beziehungen (2.6), (2.7) alle oben erwähnten Beschränkungen erfüllen.

Um dieses zu beweisen genügt es zu bemerken, daß in diesem Fall die Gleichung

$$M^+ = M^- + \lambda M$$

und dazu die Beziehung

$$\mathbb{B}_T^+(T, \theta) \overset{\circ}{T} = \mathbb{B}_T^-(T, \theta) \overset{\circ}{T} + \Lambda M$$

gelten.

Die Experimentelle Bestimmung der Funktionen $\mathbb{B}_T^\pm(T, \theta)$ und $B(T, \theta)$.

Die konstitutiven Funktionen $\mathbb{B}_T^\pm(T, \theta)$ sind aus isothermen Belastungen bzw. Entlastungen zu bestimmen. Die Beziehung (2.17) erlaubt uns, die Zahl der unbekannt konstitutiven Funktionen zu reduzieren. Es reicht, das Tensorfeld $\mathbb{B}_T^+(T, \theta)$ (oder $\mathbb{B}_T^-(T, \theta)$) und den Tensor zweiter Ordnung $\Lambda(T, \theta)$ zu bestimmen. Die konstitutiven Funktionen $B_\theta(T, \theta)$ sind aus reinen thermischen Prozessen bestimmbar. Die Funktionen $g_s(s, \theta)$ und $g_\theta(s, \theta)$ sind aus normalen Experimenten der Volumen- und Temperatur-Änderung zu bestimmen. Zeichnen sich die Tensoren $\mathbb{B}_T^\pm(T, \theta)$ durch Symmetriebeziehungen aus, z.B. die Onsagerschen Symmetriebeziehungen

$$\mathbb{B}_T^\pm(T, \theta) = (\mathbb{B}_T^\pm(T, \theta))^T,$$

dann wird die Anzahl der Unbekannten weiter reduziert.

Im folgenden nehmen wir diese Onsagerschen Symmetriebeziehungen an. Dann folgt aus (2.17) $\Lambda = g a^+$, wobei g eine Skalarfunktion

Eine erhebliche Vereinfachung gilt in dem folgenden Sonderfall des isotropen Materials.

Isotrope Materialien. Für die Beschreibung der thermoplastischen Verzerrungen isotroper Materialien kann man die konstitutiven Beziehungen von Green (vgl. Kap. 2) benutzen. Es reicht dann, in den konstitutiven Funktionen des Modells von Green die Temperatur als Parameter zu betrachten und die Form der Glieder $A_\theta^\pm(T, \theta)$ für den isotropen Fall abzuleiten. Man erhält

$$d = g_s(s, \theta)s + g_\theta(s, \theta)\theta \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} t_{ij}^0 &= h_1^\pm e_{ij} + \frac{2+h_4^\pm}{2} (e_{ik} t_{kj} + t_{ik} e_{kj}) + \\ &+ (h_3^\pm M + h_7^\pm N) \delta_{ij} + (h_6^\pm M + h_{10}^\pm N) t_{ij} + \\ &+ (h_9^\pm M + h_{11}^\pm N) t_{ik} t_{kj} + \frac{1}{2} h_8^\pm (e_{im} t_{mn} t_{nj} + t_{im} t_{mn} e_{nj}) \\ &+ h_{12}^\pm t_{ij} \dot{\theta}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

wobei $h_1^+ \dots h_{11}^+, h_{12}^+$ von den Invarianten

$$J = \frac{1}{2} t_{ij} t_{ij}, \quad K = \frac{1}{3} t_{ij} t_{jk} t_{ki}$$

und von der Temperatur θ abhängen, und außerdem die Bedingungen

$$h_4 + 2 \cdot 3h_3 + 2h_9J = 0$$

$$3h_7 + h_8 + 2h_{11}J = 0$$

erfüllen.

(diese Bedingungen folgen aus $t_{ii} = 0$); N bezeichnet.

$$N = t_{ij} t_{jk} e_{kj}$$

und mit "+" bezeichnet man die konstitutiven Funktionen, die der Belastung entspricht bzw. mit "-" diese die der Entlastung entsprechen.

Die Stetigkeitsbedingung (2.4) verlangt, daß

$$h_1^+ = h_1^-, \quad h_4^+ = h_4^-, \quad h_7^+ = h_7^-$$

$$h_8^+ = h_8^-, \quad h_{10}^+ = h_{10}^-, \quad h_{11}^+ = h_{11}^-, \quad h_{12}^+ = h_{12}^-$$

Falls wir annehmen, genau wie in Thermoelastizität, daß während der Entlastung die Temperaturänderung nur die Änderung des Volumens des Körpers verursacht, dann muß $B_\theta(T, \theta) = 0$ und demzufolge $h_{12}^\pm = 0$ sein.

Nimmt man

$$h_3^\pm = h_7^\pm = h_8^\pm = h_9^\pm = h_{10}^\pm = h_{11}^\pm = 0$$

an und berücksichtigt man, daß die Bedingung $t_{ii} = 0$ verlangt, daß $h_4 = -2$, dann erhält man:

$$\overset{\circ}{t}_{ij} = h_1^+ e_{ij} + h_6^+ t_{ij} M \quad \text{wenn } M > 0 \quad (2.20)$$

$$\overset{\circ}{t}_{ij} = h_1^- e_{ij} + h_6^- t_{ij} M \quad \text{wenn } M \leq 0. \quad (2.21)$$

Für kleine Formänderungen gilt

$$\overset{\circ}{t}_{ij} \approx \sigma'_{ij}, \quad d_{ij} = \varepsilon'_{ij},$$

wobei σ'_{ij} und ε'_{ij} die Deviatoren der Spannungen σ_{ij} bzw. Verzerrungen ε_{ij} bezeichnen.

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} s \delta_{ij}, \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} e \delta_{ij}, \quad s = \sigma_{ij}, \quad e = \varepsilon_{ij}.$$

Die konstitutive Beziehung (2.20-21) reduziert sich zu

$$\dot{\sigma}'_{ij} = h_1^+ \dot{\varepsilon}'_{ij} + h_6^+ \sigma'_{ij} M \quad \text{wenn } M > 0,$$

$$\dot{\sigma}'_{ij} = h_1^- \dot{\varepsilon}'_{ij} + h_6^- \sigma'_{ij} M \quad \text{wenn } M \leq 0,$$

oder äquivalent

$$\dot{\varepsilon}'_{ij} = \frac{1}{h_1^+} \dot{\sigma}'_{ij} - \frac{h_6^+}{h_1^+} \sigma'_{ij} M \quad \text{wenn } M > 0, \quad (2.22)$$

$$\dot{\varepsilon}'_{ij} = \frac{1}{h_1^-} \dot{\sigma}'_{ij} - \frac{h_6^-}{h_1^-} \sigma'_{ij} M \quad \text{wenn } M \leq 0. \quad (2.23)$$

Bezeichnet man $\tau^2 = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 2J$ und nimmt man an, daß h_1^+ und h_2^+ unabhängig von der dritten Invarianten sind, dann erhält man für die Verzerrungsleistung

$$M^+ = \frac{1}{h_1^+(\tau, \theta)} \tau \dot{\tau} - \frac{h_6^+(\tau, \theta)}{h_1^+(\tau, \theta)} \tau^2 M \quad \text{wenn } M > 0$$

bzw.

$$M^- = \frac{1}{h_1^-(\tau, \theta)} \tau \dot{\tau} - \frac{h_6^-(\tau, \theta)}{h_1^-(\tau, \theta)} \tau^2 M \quad \text{wenn } M \leq 0.$$

Es folgt

$$M^\pm = \frac{1}{h_1^\pm(\tau, \theta)} \left(1 + \frac{h_6^\pm(\tau, \theta)}{h_1^\pm(\tau, \theta)} \right)^{-1} \tau \dot{\tau}. \quad (2.24)$$

Bezeichnet man $g_1^+(\cdot, \cdot)$ und $g_2^+(\cdot, \cdot)$ die Funktionen, die durch Gleichungen

$$\frac{dg_1^+(\tau, \theta)}{d\tau} = - \frac{h_6^+(\tau, \theta)}{(h_1^+(\tau, \theta))^2} \left(1 + \frac{h_6^+(\tau, \theta)}{h_1^+(\tau, \theta)} \tau^2\right) \tau ,$$

$$g_1^+(\tau, \theta) + g_2^+(\tau, \theta) = \frac{1}{h_1^+(\tau, \theta)}$$

definiert werden, dann werden die konstitutiven Gleichungen (2.22-23) zu

$$\dot{\epsilon}_{ij}^+ = (g_1^+(\tau, \theta) + g_2^+(\tau, \theta)) \dot{\sigma}_{ij}^+ + \frac{dg_1^+(\tau, \theta)}{d\tau} \sigma_{ij}^+ \dot{\tau} \quad \text{wenn } M > 0 ,$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^- = (g_1^-(\tau, \theta) + g_2^-(\tau, \theta)) \dot{\sigma}_{ij}^- + \frac{dg_1^-(\tau, \theta)}{d\tau} \sigma_{ij}^- \dot{\tau} \quad \text{wenn } M \leq 0 .$$

reduziert.

Aus (2.24) folgt die äquivalente Belastungs-Entlastungs-Bedingung:

Belastung: $\dot{\tau} > 0$

Entlastung: $\dot{\tau} \leq 0$

Mit dieser neuen Belastungs-Entlastungs-Bedingung wird das vollständige System der konstanten Gleichungen zu:

$$e = g_s(s, \theta) \dot{s} + g_\theta(s, \theta) \dot{\theta} , \quad (2.25)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^+ = (g_1^+(\tau, \theta) + g_2^+(\tau, \theta)) \dot{\sigma}_{ij}^+ + \frac{dg_1^+(\tau, \theta)}{d\tau} \sigma_{ij}^+ \dot{\tau} \quad \text{wenn } \dot{\tau} > 0 , \quad (2.26)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^- = (g_1^-(\tau, \theta) + g_2^-(\tau, \theta)) \dot{\sigma}_{ij}^- + \frac{dg_1^-(\tau, \theta)}{d\tau} \sigma_{ij}^- \dot{\tau} \quad \text{wenn } \dot{\tau} \leq 0 . \quad (2.27)$$

Die Stetigkeitsbedingung reduziert sich auf

$$g_1^+(\tau, \theta) + g_2^+(\tau, \theta) = g_1^-(\tau, \theta) + g_2^-(\tau, \theta) . \quad (2.28)$$

Die experimentelle Bestimmung der Funktionen g_s , g_θ , g_1^+ und g_2^+

Die Funktionen $g_s(s, \theta)$, $g_\theta(s, \theta)$ sind aus üblichen Experimenten von Druck-

und Temperaturänderungen bestimmbar, d.h.

$$g_s(s, \theta) = \frac{\dot{\epsilon}}{s} \Big|_{\dot{\theta}=0} \quad (2.29)$$

bzw.

$$g_\theta(s, \theta) = \frac{\dot{\theta}}{\theta} \Big|_{\dot{s}=0} . \quad (2.30)$$

Die Funktionen $g_1^+(\tau, \theta) g_2^+(\tau, \theta)$ sind aus dem Experiment von Feigen [20] bestimmbar. Solche Experimente bemessen die Schubspannungen in der Nachbarschaft eines axialen Spannungszustands. Eine zylindrische Probe ist einem Zugversuch unterworfen (Abb. 2)

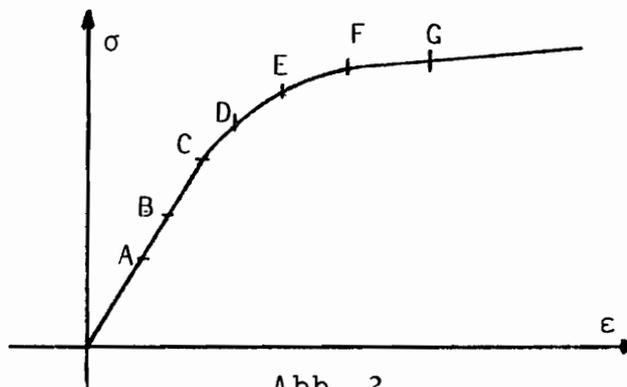


Abb. 2

In den Punkten A, B, C, ... G des σ - ϵ -Diagramms für Belastung und Entlastung des Zugversuchs wird der Zug gestoppt und ein Torsionszyklus begonnen. Es sei $\pi = \pi(\epsilon)$ die Beziehung zwischen der Schubspannung ϵ und Schubverzerrung in diesem Torsions-Versuch.

Durch die Definition des Anfangs-Schubmoduls ist durch die Beziehung

$$G(\sigma) = \frac{1}{2} \frac{\partial \pi}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0}$$

definiert, wobei σ die Axialspannung ist, an der der Torsion-Zyklus durchgeführt wird. Im oben erwähnten Experiment wird G nur für die Punkte $\sigma_A, \sigma_B \dots \sigma_G$ bestimmt. Für die Aluminiumlegierung (24S-T3) Feigen Anfangs-Schubmodul $G(\sigma)$ bestimmt, ist er wie in Abb. 3 gezeichnet.

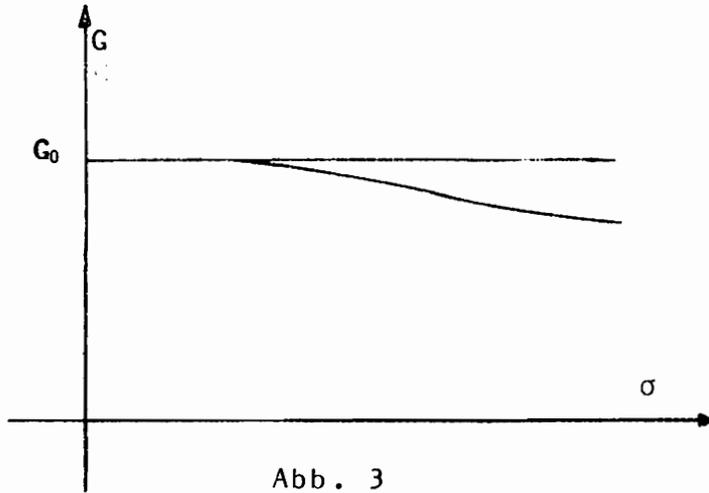


Abb. 3

Bezeichnet man mit $M(\sigma)$ die Funktion, die durch die Beziehung

$$2M(\sigma) = \frac{1}{2\sigma(\sigma)}$$

definiert wird, dann gilt gemäß Feigens Experiment

$$M(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{4\mu} & \text{für } \sigma < 209 \text{ N/mm}^2 \\ \frac{1}{4\mu} + 5.28 \cdot 10^{-9} (\sigma - 209) & \text{für } \sigma \geq 209 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

Das entspricht einer Änderung von 10-11 Prozent des Anfangs-Schubmoduls $G(\sigma)$.

Um eine vollständige Bestimmung der Funktionen $g_1^\pm(\tau, \theta)$ und $g_2^\pm(\tau, \theta)$ zu erhalten, muß man das Experiment von Feigen auch für Entlastung und verschiedene konstante Werte der Temperatur durchführen. Es sei $G^\pm(\sigma, \theta)$ der Anfangs-Schubmodulus (Abb. 4)

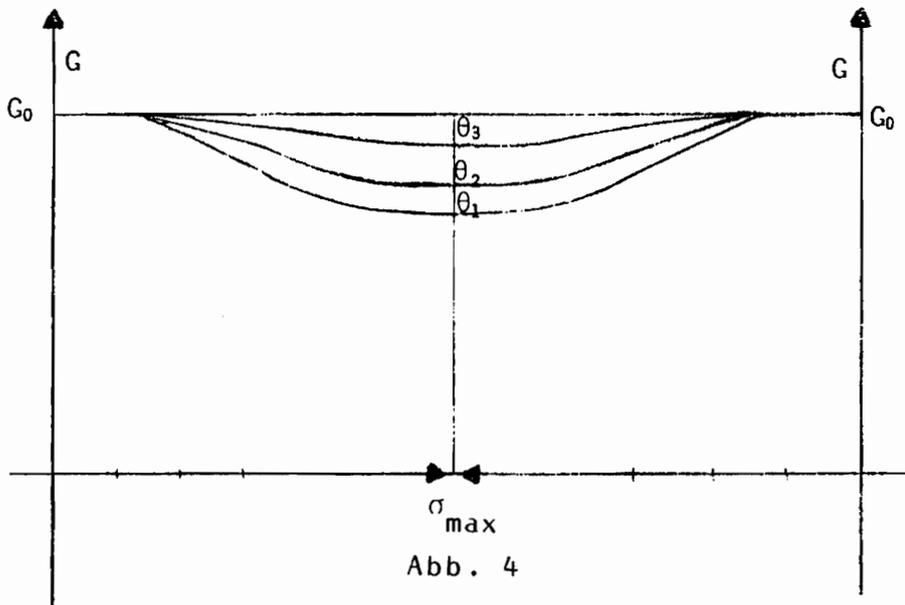


Abb. 4

Es gibt zwei Möglichkeiten:

1. $G^-(\sigma, \theta)$ ist unabhängig von der maximalen Spannung σ_{\max}
2. $G^-(\sigma, \theta)$ hängt von σ_{\max} ab.

Im ersten Fall muß wegen der Stetigkeitsbedingung

$$G^+(\sigma, \theta) = G^-(\sigma, \theta) = G(\sigma, \theta) \text{ sein. Im zweiten Fall ist } G^-(\sigma, \theta) = G^-(\sigma, \theta, \sigma_{\max}).$$

Im folgenden geben wir eine kurze Darstellung des ersten Falls. Mehr über den zweiten kann man in [19] finden. Die Stetigkeitsbedingung (2.28) wird immer erfüllt, wenn

$$g_1^+(\tau, \theta) = g_1(\tau, \theta) + h(\tau, \theta) ,$$

$$g_2^+(\tau, \theta) = g_2(\tau, \theta) - h(\tau, \theta) ,$$

$$g_1^-(\tau, \theta) = g_1(\tau, \theta) ,$$

$$g_2^-(\tau, \theta) = g_2(\tau, \theta) .$$

Die konstitutiven Beziehungen (2.26), (2.27) lassen sich in der Form

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = g_1(\tau, \theta) \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{dg_1}{d\tau}(\tau, \theta) \sigma'_{ij} \dot{\tau} + g_2(\tau, \theta) \dot{\sigma}'_{ij} + h(\tau, \theta) \sigma'_{ij} \dot{\tau} , \dot{\tau} > 0 \quad (2.31)$$

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = g_1(\tau, \theta) \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{dg_1}{d\tau}(\tau, \theta) \sigma_{ij} \dot{\tau} + g_2(\tau, \theta) \dot{\sigma}'_{ij} , \dot{\tau} \leq 0 \quad (2.32)$$

schreiben.

Es bleiben demzufolge nur die Funktionen $g_1(\tau, \theta)$, $g_2(\tau, \theta)$ und $h(\tau, \theta)$ zu bestimmen.

Es seien $E_t^+(\sigma)$ und $E_t^-(\sigma)$ die Tangenten-Module von Belastung bzw. Entlastung

$$E_t^\pm = \left(\frac{d\sigma}{d\epsilon} \right)^\pm .$$

Aus dem konstitutiven Gesetz (2.25) und (2.31-32) folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} g_s(s, \theta) + \frac{2}{3} (g_1(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma, \theta) + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma \frac{dg_1}{d\tau} (\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma, \theta) + g_2(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma, \theta) + \\ + \frac{2}{3} \frac{2}{3} h(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma)) = \frac{1}{E_t^+(\sigma)}, \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{3} g_s(s, \theta) + \frac{2}{3} (g_1(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma, \theta) + \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma \frac{dg_1}{d\tau} (\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma, \theta) + g_2(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma, \theta)) = \frac{1}{E_t^-(\sigma)} \quad (2.34)$$

Berechnet man den Anfangs-Schubmodulus dann aus Feigen's Experiment, so folgt:

$$g_1(s, \theta) + g_2(s, \theta) = G(\sigma, \theta) . \quad (2.35)$$

Aus (2.29-30) und auch (2.33-2.35) kann man eindeutig alle konstitutiven Funktionen, d.h. g_s , g_θ , g_1 , g_2 und h bestimmen.

Sonderfälle:

1. Es gelte in (2.29) und (2.30)

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{s}} \Big|_{\dot{\theta}=0} = \frac{1}{3k}$$

bzw.

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\theta}} \Big|_{\dot{s}=0} = \alpha_T ,$$

dann reduziert (2.25) zu

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{3k} \dot{s} + \alpha_T \dot{\theta}$$

2. Der Tangenten-Modulus der Entlastung ist konstant $E_t^-(\sigma) = E$ wobei E-Young's Modulus im elastischen Bereich ist. Aus (2.34) folgt dann

$$g_1(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma, \theta) + \frac{2}{3} \frac{dg_1}{d\tau} (\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma, \theta) + g_2(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma, \theta) = \frac{1}{2\mu}$$

3. Feigen's Experiment liefert, daß

$$G(\sigma) = G = \text{const.}$$

ist. Dann reduzieren sich die Gleichungen (2.31) und (2.32) auf

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}'_{ij} + h(\tau, \theta) \sigma_{ij} \dot{\tau}, \quad \dot{\tau} > 0$$

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}'_{ij}, \quad \dot{\tau} \leq 0$$

Die kalorische Gleichung.

Es ist bekannt (vgl. [21]), daß für thermoplastische Materialien die spezifische Wärme und dadurch die kalorische Gleichung von der gespeicherten Energie abhängt.

Die experimentelle Auszeichnung dieser Abhängigkeit ist besser beobachtbar im Temperaturbereich in der Nachbarschaft von Null-Absolut. Solche experimente zeichnet aus, daß die spezifische Wärme eine Änderung mit ungefähr 3 Prozent.

Aus dem Kapitel 1 folgt, daß diese Änderung vergleichbar ist mit der Änderung der spezifischen Wärme, die man bei Benutzung solcher klassischer thermodynamischer Modelle erhält, die sich auf die Existenz Carnotscher Zyklen gründet.

Die Ausarbeitung einer mathematischen Theorie, die in der Lage ist, die Wirkung der gespeicherten Energie über die kalorische Gleichung zu beschreiben, scheint in diesem Moment unmöglich zu sein. Es fehlen noch die quantitativen und qualitativen Kenntnisse über diese Phenomen. Eine sichere Information besteht darin, daß die gespeicherte Energie sehr wenig die kalorische Gleichung beeinflusst. Auf Grund dieser Information kann man aber nur eine asymptotische Darstellung geben, d.h. einen Ausdruck der kalorischen Gleichung finden, gegen die der richtige Ausdruck der kalorischen Gleichung

strebt, wenn die gespeicherte Energie gegen Null strebt. Die Theorie, die in dem Kapitel 1 entwickelt worden ist, zeigt, daß es nur zwei mögliche Modelle für diese asymptotische Darstellung gibt: Eines, das sich auf die Existenz der Carnotschen Zyklen gründet und eines, das dieses nicht voraussetzt. Weil die Wirkung der gespeicherten Energie ein kumulatives Phänomen ist, welches unvereinbar mit der Existenz der Carnotschen Zyklen ist, folgt, daß nur die zweite Art von Modell paßt. Im Sonderfall, wenn die konstitutive Beziehung für den hydrostatischen Teil der Spannung und Verzerrung

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{3K} \dot{s} + \alpha_T \dot{\theta}$$

lautet, wird dieses Modell der kalorischen Gleichung (vgl. Kapitel 1) zu:

$$\dot{Q} = (c_p - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T e) \dot{\theta} .$$

Jetzt betrachten wir den Fall der allgemeinen Beziehung

$$\dot{\epsilon} = g_s(s, \theta) \dot{s} + g_\theta(s, \theta) \dot{\theta} .$$

Wir suchen die kalorische Gleichung in der Form

$$Q = C(s, \theta) \dot{\theta} . \tag{2.36}$$

Die Funktion $C(s, \theta)$ ist so zu bestimmen, daß die innere Energie

$$dW = dL + dQ = (s g_s(s, \theta) \dot{s} + s g_\theta(s, \theta) \dot{\theta} + C(s, \theta) \dot{\theta}) dt$$

ein totales Differential bildet. Die Bedingung der totalen Differenzierbarkeit führt zu der Gleichung

$$\frac{\partial C}{\partial s}(s, \theta) = -g_\theta(s, \theta) - s \frac{\partial g_\theta(s, \theta)}{\partial s} + s \frac{\partial g_s(s, \theta)}{\partial \theta} \tag{2.37}$$

Mit Hilfe der Anfangsbedingung

$$C(0, \theta) = \rho c = \text{kalorische Kapazität für} \tag{2.38}$$

Die gesamte zurückgewinnbare Energie $V(s, \theta)$ besteht aus der Summe

$$V(s, \theta) = L_{rec} + Q_{rec}.$$

Im Rahmen des oben erwähnten Modells thermoplastischen Fließens wird $V(s, \theta)$ durch die Gleichung

$$V(s, \theta) = s g_s(s, \theta) \dot{s} + s g_\theta(s, \theta) \dot{\theta} + TA^-(T, \theta) \dot{T} + C(s, \theta) \dot{\theta}$$

definiert.

Aus der Energie-Bilanzgleichung folgt, daß für die Anergie pro Zeiteinheit \dot{D} die Gleichung

$$\dot{D} = \dot{W} - \dot{V} = \dot{L} + \dot{Q}_a - \dot{V} = (\dot{L} - \dot{L}_{rec}) \text{ mit } \dot{Q}_a - \dot{Q}_{rec} = (\dot{L} - \dot{L}_{rec}) - \dot{Q}^*$$

gilt. Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar, daß

$$\dot{D} + \dot{Q}^* = \dot{L} - \dot{L}_{rec} = \dot{L}_{pl} = \begin{cases} M^+ - M^- & \text{wenn } M > 0 \\ 0 & \text{wenn } M \leq 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

gilt.

Es folgt, daß auf Grund der allgemeinen Energie-Bilanz, nur die Summe aus Anergie pro Zeiteinheit \dot{D} und die degradierte Leistung \dot{Q}^* bestimmbar ist. Aus physikalischen Gesichtspunkten ist klar, daß \dot{Q}^* und \dot{D} nicht unabhängig sind. Die einfachste Beziehung, die man sich vorstellen kann, ist die Proportionalität

$$\dot{Q}^* = \epsilon \dot{D}, \quad (2.40)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor ϵ von der gesamte Anergie abhängen, kann:

$$\epsilon = \epsilon(D)$$

Aus (2.36) und (2.37) folgt

$$\dot{D} = \frac{1}{1+\epsilon} \dot{L}_{p1}$$

und

$$\dot{Q} = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \dot{L}_{p1}$$

Nimmt man $\epsilon = \text{const.}$, dann entspricht die zweite Gleichung einer Beziehung, die in einer ganzen Reihe von Veröffentlichungen anzutreffen ist (vgl. [7], [11], [15]). Benutzt man zur Definition der Entropie die Anergie, dann folgt (vgl. Kapitel 3)

$$\rho \dot{S}_{\text{int}} = \frac{\mathcal{K}}{1+\epsilon} \frac{1}{\theta} \dot{L}_{p1} \quad \text{mit } \mathcal{K} \geq 0$$

Nimmt man für die äußere Entropie den Ausdruck

$$\rho \dot{S}_{\text{ext}} = - \frac{\text{div } \mathbf{q}}{\theta} + \frac{R}{\theta} \tag{2.41}$$

an, wobei \mathbf{q} den Wärmefluß und R die Wärmequelle bezeichnet, dann findet man für die gesamte Entropie den Ausdruck

$$\rho \dot{S} = \rho (\dot{S}_{\text{ext}} + \dot{S}_{\text{int}}) = - \frac{\text{div } \mathbf{q}}{\theta} + \frac{R}{\theta} + \frac{\mathcal{K}}{1+\epsilon} \frac{1}{\theta} \dot{L}_{p1} \tag{2.44}$$

Gemäß der Doktrin der Definition der Entropie "via" Anergie stellt \mathcal{K} ein positives Funktional dar, das von der allgemeinen Geschichte des Prozesses abhängen kann. Berücksichtigt man, daß $\dot{L}_{p1} \geq 0$ ist, dann folgt

$$\rho \dot{S}_{\text{int}} = \frac{\mathcal{K}}{1+\epsilon} \frac{1}{\theta} \dot{L}_{p1} \geq 0 \tag{2.43}$$

ist. Aus (2.38) folgt dann die Ungleichung von Planck

$$\rho \dot{S} \geq - \frac{\text{div } \mathbf{q}}{\theta} + \frac{R}{\theta} \tag{2.42}$$

Benutzt man die Clausius-Fouriersche Ungleichung $\mathbf{q} \cdot \text{grad } \theta \leq 0$, dann erhält man weiter auch die Clausius-Duhems Ungleichung. (vgl. Kapitel 3)

Anmerkung: Weil die kalorische Gleichung die Form (2.36) hat (keine Carnotsche Zyklen sind möglich), führt die Definition (2.41) die äußere Entropie nicht mehr zu einem totalen Differential für \dot{S}_{ext} . Das zeigt, daß (2.41) nicht mehr eine geeignete Definition der äußeren Entropie liefert, obwohl formal die Clausius-Duhemsche Gleichung erfüllt wird.

Um die äußere Entropie, die vereinbar mit der kalorischen Gleichung (2.36) ist, zu definieren, muß man zum Konzept des integrierenden Faktors für die kalorische Gleichung zurückkehren. Es ist klar, daß solch ein Faktor unbedingt den Ausdruck

$$\lambda(s, \theta) = \frac{\phi(\theta)}{C(s, \theta)}$$

hat., wobei ϕ eine beliebige Funktion der Temperatur bezeichnet. Es folgt, daß $\dot{S}_{\text{ext}} = \phi(\theta)\dot{\theta}$ gilt. Die absolute Temperatur liefert in diesem Fall nicht mehr einen integrierenden Faktor. Dadurch verliert die Clausius-Duhem-Ungleichung voll ihre physikalische Bedeutung. Es bleibt, als ein mathematischer Ausdruck das zweite thermodynamische Hauptgesetz, nur die Ungleichung (2.43) zu betrachten.

Die Wärmeausbreitungsgleichung

Aus der kalorischen Gleichung (2.36) und aus dem Fourierschen Gesetz

$$q_i = -K_{ij} \theta_{,j}$$

folgt mit Hilfe der Energie-Bilanzgleichung, die Wärmeausbreitungsgleichung

$$C(s, \theta)\dot{\theta} = k_{ij} \theta_{,ij} + R + \dot{Q}^*. \quad (2.43)$$

Diese Gleichung ist mit dem thermoplastischen Deformationsprozeß durch den Koeffizienten $C(s, \theta)$ und durch die degradierte Leistung \dot{Q}^* gekoppelt.

Die Charakteristiken des Modells

1. Für die Beschreibung des thermoplastischen Fließens benötigt das Modell kein Potential im Spannungs-Temperatur-Raum. Dadurch wird die Erscheinung des plastischen Fließens nur als Wirkung der Temperaturänderung vermieden. Das heißt, daß die Geschichte der Spannung und Temperatur, wie sie in Abb. 1 und 2 dargestellt wird, in Abb. 3 führt. Wir exemplifizieren dies durch das folgende Beispiel: Es sei ein Stab, der durch einen isothermen Zugversuch an die Grenze des plastischen Fließens gebracht wird. Unter konstanter Spannung vergrößert man nun die Temperatur. Wegen der thermischen Ausdehnung soll die Distorsions-Leistung M positiv sein; $M > 0$. Unter der Voraussetzung, daß der Deformations-Prozeß von der Gleichung (2.19) bestimmt wird. Weil θ nicht in dieser Gleichung erscheint und $\dot{t}_{ij} = 0$, müssen die entsprechenden plastischen Formänderungen Null sein.

2. Das Modell benutzt (2.36) als kalorische Gleichung. Das führt zu der regularisierten Wärmeausbreitungs-Gleichung (2.43), (vgl. Kap. 1). Das Modell zeichnet sich durch die folgenden Vorteile aus:

- a) Die numerische Lösung vereinfacht sich,
- b) Es vermeidet die Benutzung der kalorischen Gleichung der thermoelastischen Prozesse für die nichtreversible thermoplastischen Prozesse.

Die Entropie wird mit Hilfe des Konzeptes der Anergie definiert. So definiert, erfüllt die Entropie die Planck'sche Ungleichung (2.42) und dadurch folgt über die Clausius-Fourier'sche Ungleichung gleichfalls die Ungleichung von Clausius-Duhem. (Falls man als Definition der äußeren Entropie (2.41) nimmt.)

3. Das Modell beschreibt gleichzeitig den Entlastungs-Prozeß, so daß in dem neutralen Punkt die Kontinuität der Spannungs- und Verzerrungs-Geschwindigkeiten erfüllt ist. Z.B. wird diese Stetigkeit in dem Fall der konstitutiven

Gesetze (2.31), (2.32) für alle Konstitutiven Funktionen g_1, g_2 und h erfüllt.

4. Die konstitutiven Funktionen sind direkt bestimmbar. Im besonderen Fall des isotropen Materials (2.31)-(2.32) sind die Funktionen g_1, g_2 und h durch Experimente, wie Feigen vorgeschlagen hat, zu bestimmen.

5.3 Die Variationsprinzipie in der Thermoplastizität, die auf ein Mehrfach-Kriterium gegründet sind

Wir versuchen, für das Modell von Prager (vgl. Abs. 5.1) und für solche Modelle, die sich auf das Greensche konstitutive Gesetz (vgl. Abs. 5.2) gründen, Variationsprinzipie zu entwickeln. Wie im Abs. 5.1 gezeigt wurde, fehlt für die anderen Modelle die passende thermodynamische Rechtfertigung.

Im Rahmen des Modells von Prager beschränken wir uns nur auf solche konstitutiven Gesetze, bei denen die Fließgrenze nicht von den plastischen Verzerrungen abhängt. Für diesen besonderen Fall gilt es als sicher, daß das Modell mit der Thermodynamik vereinbar ist.

Im Rahmen des Modells, welches sich auf das konstitutive Gesetz von Green gründet, werden nur die konstitutiven Gesetze, die in Abs. 5.2.2 vorgestellt wurden, betrachtet. Beide Modelle werden nur für infinitesimale Verzerrungen angewendet.

Wie in den vorherigen Abschnitten bemerkt wurde, sind die oben erwähnten Modelle aus physikalischen Gesichtspunkten ganz unterschiedlich. Es gibt aber eine Möglichkeit, beide Modelle in einer einheitlichen mathematischen Form darzustellen.

5.3.1 Das konstitutive Gesetz

Beide konstitutiven Gesetze lassen sich in der Form

$$\underline{\underline{\epsilon}} = H_{\sigma}(\sigma, \theta) \underline{\underline{\sigma}} + H_{\theta}(\sigma, \theta) \theta + \frac{1}{2} g(\sigma, \theta) \left(1 + \frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}\right) \dot{\underline{\underline{a}}} \quad (3.1)$$

schreiben. Es werden $H_{\sigma}(\sigma, \theta)$, $H_{\theta}(\sigma, \theta)$, $g(\sigma, \theta)$ und $\underline{\underline{a}}(\sigma, \theta)$ wie folgt definiert:

1 . in dem Fall des Modells von Prager durch die Gleichungen:

$$H_{\sigma ij}^{kl}(\sigma, \theta) = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1+\nu}{2E} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

$$H_{\theta ij} = \alpha \delta_{ij}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta},$$

$$\underline{a} = \text{grad}_{\sigma} f,$$

$$g = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial Lp} \frac{\partial f}{\partial \sigma pq} \sigma pq}$$

und

2 . in dem Fall des Modells welches sich auf das konstitutive Gesetz von Green gründet, durch die Gleichungen

$$H_{\sigma} = \underline{B}^{-}$$

$$\dot{\phi} = M = a^{+}(\sigma, \theta) \dot{\sigma}$$

$$\underline{a} = \underline{\sigma} \underline{B}^{+}$$

$g = g(\sigma, \theta) =$ eine beliebige Skalarfunktion.

5.3.2. Wärmeausbreitungsgleichung

Das Modell von Prager enthält keine Gleichung für die Wärmeausbreitung. Im Rahmen des zweiten Modells (vgl. 2.4.3.) lautet diese Gleichung

$$c(s, \theta) \dot{\theta} = k_{ij} \theta_{,ij} + \dot{R} + \dot{Q}^*, \quad (3.2)$$

wobei $-c(s, \theta)$ eine Funktion ist, die von dem kugelsymmetrischen Teil der Spannungen und von der Temperatur abhängt, $-k_{ij}$ sind die Komponenten des

Wärmeleitfähigkeitstensors

- R ist die Wärmequelle
- Q^* ist der Teil der plastischen Arbeit, welcher in Wärme degradiert wird.

Für das Modell von Prager gilt:

$$\dot{L}_{pl} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta}}{\frac{\partial f}{\partial L_{pl}}}$$

In dem Fall des Modells, welches sich auf die konstitutiven Gleichungen von Green gründet, gilt

$$\dot{L}_{pl} = M^+ - M^- = [a_{\nu}^+(\sigma, \theta) - a_{\nu}^-(\sigma, \theta)] \dot{\sigma}$$

Man kann für die beiden Fälle eine einzige Formel für Q^* schreiben

$$\dot{Q}^* = m(s, \theta) \dot{\sigma} + n(s, \theta) \dot{\theta},$$

mit

$$m_{ij}(s, \theta) = - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} / \frac{\partial f}{\partial L_{pl}}$$

$$n(s, \theta) = - \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \frac{\partial f}{\partial \theta} / \frac{\partial f}{\partial L_{pl}}$$

für das Pragersche Modell, und

$$m(s, \theta) = \frac{\epsilon}{1+\epsilon} [a_{\nu}^+(\sigma, \theta) - a_{\nu}^-(\sigma, \theta)]$$

$$n(s, \theta) = 0$$

für das zweite Modell.

Die Wärmeausbreitungsgleichung wird in beiden Fällen in der Form

$$c(s, \theta) \dot{\theta} = k_{ij} \theta_{,ij} + \dot{R} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|} \right) [\tilde{m}(\sigma, \theta) \dot{\sigma} + n(\sigma, \theta) \dot{\theta}]$$

geschrieben.

5.3.3. Das fundamentale Problem der Thermoplastizität

Es wird ein Gebiet Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$ oder $\Omega \subset \mathbb{R}^2$) betrachtet, welches von $\partial\Omega$ begrenzt wird. Man kennt

a) das Volumen-Kraft Feld $\tilde{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$

b) die Verschiebungen an einem Teil $\partial_u \Omega$ des Randes

$$\tilde{u}^* : \partial_u \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

c) die Kraft auf dem komplementären Teil $\partial_\sigma \Omega$ ($\partial_\sigma \Omega + \partial_u \Omega = \partial\Omega$)

$$\tilde{h} : \partial_\sigma \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

d) die Wärmequelle

$$R = \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

e) die Temperatur auf einen Teil $\partial_\theta \Omega$ des Randes

$$\tilde{\theta} = \partial_\theta \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

f) den thermischen Fluß auf dem komplementären Teil $\partial_q \Omega$ ($\partial_q \Omega + \partial_\theta \Omega = \partial\Omega$)

$$\tilde{q} : \partial_q \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} .$$

g) die Anfangstemperatur

$$\theta_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Der Rand $\partial\Omega$ und die gegebenen Funktionen $F_{\sim}, u_{\sim}^*, h_{\sim}, R, \tilde{\theta}, \tilde{q}, \theta_0$ sind als hinreichend glatt vorauszusetzen.

Zu bestimmen sind die Vektor- und Tensorfelder $u_{\sim} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$u_{\sim}(\cdot, t) \in C^1(\Omega) \cap C^0(\Omega + \partial\Omega),$$

$$\varepsilon_{\sim} = \Omega \times [0, T] \rightarrow R_{\text{sym}}^{3 \times 3}, \quad \varepsilon_{\sim}(\cdot, t) \in C^1(\Omega)$$

$$\sigma_{\sim} = \Omega \times [0, T] \rightarrow R_{\text{sym}}^{3 \times 3},$$

$$\sigma_{\sim}(\cdot, t) \in C^1(\Omega) \cap C^0(\Omega + \partial\Omega),$$

$$\theta = \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \theta \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega + \partial\Omega)$$

die die folgenden Gleichungen und Randwertaufgaben erfüllen:

$$\text{div } \underline{\sigma} + F = 0, \tag{3.5}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{3.6}$$

$$\dot{\varepsilon}_{\sim} = H_{\sigma}(\sigma, \theta) \dot{\sigma}_{\sim} + H_{\theta}(\sigma, \theta) \dot{\theta} + \frac{1}{2} g(\sigma, \theta) \left(1 + \frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}\right) \dot{\phi}_{\sim} \tag{3.7}$$

$$c(\sigma, \theta) \dot{\theta} = k_{ij} \theta_{,ij} + R + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\dot{\phi}}{|\dot{\phi}|}\right) [m(\sigma, \theta) \dot{\sigma} + n(\sigma, \theta) \dot{\theta}] \tag{3.8}$$

$$u_{\sim}|_{\partial_u \Omega} = u_{\sim}^* \tag{3.9}$$

$$\underline{\sigma}_{\sim} \underline{n} = h \tag{3.10}$$

$$\theta|_{\partial_{\theta} \Omega} = \tilde{\theta} \tag{3.11}$$

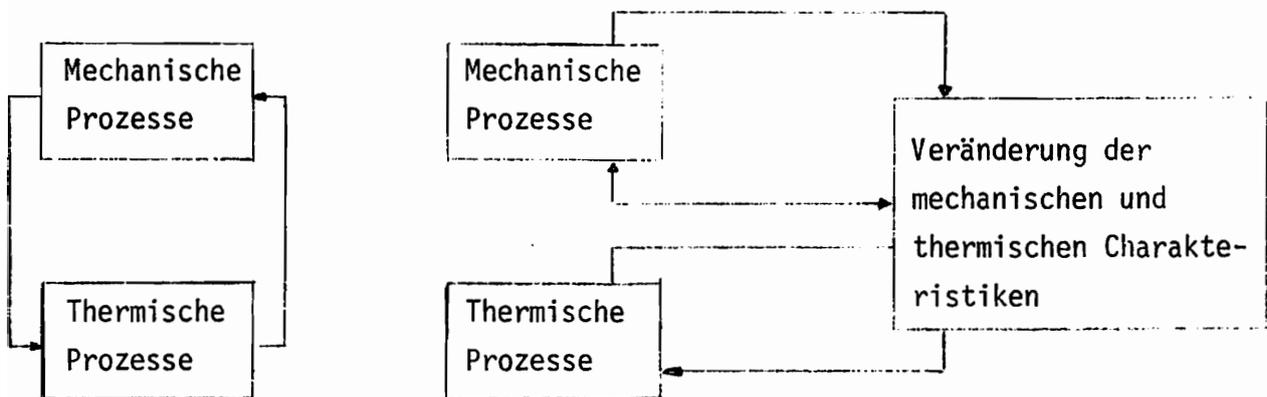
$$(k \text{ grad } \theta)_{\sim} \underline{n}|_{\partial_q \Omega} = \tilde{q} \tag{3.17}$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) \text{ für } x \in \Omega. \tag{3.13}$$

Hier sind H_σ , H_θ , m , n , gegeben, konstitutive Funktionen und c bzw. k sind die gegebene Wärmekapazität und Wärmeleitfähigkeit.

5.3.4. Die Zerlegung in einfache thermische und mechanische Probleme

Das fundamentale Problem der Thermoplastizität ist besonders schwierig. Die Schwierigkeit wird hauptsächlich durch die Kopplung zwischen den mechanischen und thermischen Prozessen verursacht. Auf Grund unserer aktuellen mathematischen Kenntnisse ist es schwer vorzusagen, daß die Lösung des fundamentalen Problems der Thermoplastizität irgendwann durch ein Extremal-Variationsprinzip im Eulerschen Sinne möglich wird. Mit anderen Worten, es ist kaum zu erwarten, ein Funktional im Spannungs- und Temperatur-Raum zu finden, welches sein Minimum genau für die Lösung des fundamentalen Problems der Thermoplastizität erreicht. Geeignete Extremal-Variationsprinzipie kann man finden, wenn das Problem in einfache thermo-mechanische Probleme zerlegt wird. Diese Zerlegung bedeutet die Umschreibung des fundamentalen Problems der Thermoplastizität in Form eines reinen mechanischen Problems und eines reinen thermischen Problems für Körper mit veränderlichen mechanischen bzw. thermischen Charakteristiken. Diese mechanischen und thermischen Charakteristiken lassen sich durch bestimmte Parameter beschreiben, deren Entwicklung von den mechanischen und den thermischen Prozessen regiert wird. Das Schema dieser Zerlegung wird in dem folgenden Bild gezeigt:



Das thermo-mechanische Problem

Die Zerlegung in einfache thermische und mechanische Probleme

Für das fundamentale Problem der Thermoplastizität schlagen wir folgende Zerlegung vor:

1 . das konstitutive Gesetz

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\epsilon}}_{\nu} &= H_{\sigma}(\alpha, \beta) \dot{\underline{\sigma}} + H_{\theta}(\sigma, \beta) \dot{\beta} + \\ &+ \frac{1}{2} g(\alpha, \beta) \left(1 + \frac{\xi_{\nu}(\alpha, \beta) \dot{\underline{\sigma}} + \eta(\alpha, \beta) \dot{\beta}}{|\xi(\alpha, \beta) \dot{\underline{\sigma}} + \eta(\alpha, \beta) \dot{\beta}|} \right) \times \\ &[\xi(\alpha, \beta) \underline{\sigma} + \eta(\alpha, \beta) \beta] \underline{a}(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (3.14)$$

2 . die Wärmeausbreitungsgleichung

$$\begin{aligned} c(\alpha, \beta) \dot{\theta} &= k_{ij} \theta_{,ij} + R + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi(\alpha, \beta) \dot{\underline{\sigma}} + \eta(\alpha, \beta) \dot{\beta}}{|\xi(\alpha, \beta) \dot{\underline{\sigma}} + \eta(\alpha, \beta) \dot{\beta}|} \right) \times \\ &[\xi(\alpha, \beta) \dot{\underline{\sigma}} + \eta(\alpha, \beta) \dot{\beta}] \underline{a}(\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (3.15)$$

3 . die Gleichgewichtsgleichung

$$\text{div } \underline{\sigma} + F = 0 \quad (3.16)$$

4 . die Evolutionsgleichungen für α und β

$$\alpha_{\nu}(t) = \int_0^t \dot{\alpha}_{\nu} dt \quad (3.17)$$

$$\beta(t) = \int_0^t \dot{\beta} dt \quad (3.18)$$

5 . Die Kompatibilitätsgleichung sowie die Rand- und Anfangsbedingungen bleiben unverändert.

5.3.5. Variationsprinzipie, die auf ein Mehrfach-Kriterium gegründet sind.

Wir nehmen an, daß $F = 0$ und $h = 0$ sind. Der allgemeine Fall ist, durch eine geeignete Translation der Unbekannten, immer an diesem Fall reduzierbar. (vgl. [22], Abschnitt 3.2)

Es sei

$$\begin{aligned} \Phi_1(\sigma) &= \frac{1}{2} \int_0^T dt \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{\sim} H_{\sigma}(\alpha, \beta) \dot{\sigma}_{\sim} dv + \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^T dt \int_{\Omega} g(\alpha, \beta) \left(1 + \frac{\xi(\alpha, \beta) \dot{\sigma}_{\sim} + \eta(\alpha, \beta) \dot{\beta}}{|\xi(\alpha, \beta) \dot{\sigma}_{\sim} + \eta(\alpha, \beta) \dot{\beta}|} \right) (\xi(\alpha, \beta) \dot{\sigma}_{\sim} + \eta(\alpha, \beta) \dot{\beta})^2 dv \\ &+ \int_0^T dt \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{\sim} H_{\theta}(\alpha, \beta) \dot{\beta} dv + \int_0^T dt \int_{\partial_U \Omega} \dot{u}^*_{\sim} \dot{\sigma}_{\sim} n ds \end{aligned} \quad (3.19)$$

das Funktional auf der Menge $\Sigma[0, T]$ aller Spannungsgeschwindigkeiten

$$\sigma_{\sim} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{3 \times 3},$$

$$\sigma_{\sim}(\cdot, t) \in C^1(\Omega) \cap C^0(\Omega + \partial\Omega) \quad \text{für alle } t \in [0, T],$$

$$\text{div } \sigma_{\sim} = 0, \quad \sigma_{\sim} n|_{\partial_{\sigma} \Omega} = 0,$$

$$\|\sigma_{\sim}\| = \left(\int \sigma_{ij} \sigma_{ij} dv \right)^{1/2} < +\infty \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Man kann auf demselben Weg wie in [22] (Abschnitt 3.3) beweisen, daß Φ_1 sein Minimum für $\sigma \in \Sigma[0, T]$ genau für die Lösung der folgenden Randwert-aufgabe erreicht:

$$\text{div } \sigma_{\sim} = 0, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= H_{\sigma}(\alpha, \beta) \dot{\sigma}_{\sim} + H_{\theta}(\alpha, \beta) \dot{\beta} + \\ &+ \frac{1}{2} g(\alpha, \beta) \left(1 + \frac{\xi(\alpha, \beta) \dot{\sigma}_{\sim} + \eta(\alpha, \beta) \dot{\beta}}{|\xi(\alpha, \beta) \dot{\sigma}_{\sim} + \eta(\alpha, \beta) \dot{\beta}|} \right) \times \end{aligned}$$

$$[\xi(\alpha, \beta) \dot{\sigma}_{\sim} + \eta(\alpha, \beta) \dot{\beta}] \dot{a}(\alpha, \beta), \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (m_{ij} + u_{j,i}), \quad (3.22)$$

$$u|_{\partial_U \Omega} = u^*. \quad (3.23)$$

Es ist auch einfach zu beweisen, daß ϕ_1 eines Funktionals bildet, welches für alle $\sigma_{\nu} \in \Sigma [0, T]$ konvex ist. Jetzt werden wir das zweite Funktional betrachten, welches in Verbindung mit der Anfangs- und Randwertaufgabe für die Wärmeausbreitungsgleichung (3.15) steht. Zuerst schreiben wir die Gleichung (3.15) in eine äquivalente Form.

Es sei die Transformation $x^*(x, t), t^*(x, t)$ im Raum (x, t) die durch die Gleichungen

$$dx^* = dx ,$$

$$dt^* = \frac{c(\alpha, \beta)}{c_0} dt$$

mit $c_0 = c(0, 0)$; $x^*(0, t) = x$, $t^*(0, 0) = t$ definiert wird.

Bezeichnet man mit $R^*(x^*, t)$ die Funktion, die durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$\dot{R}^*(x^*, t^*) = \dot{R}(x, t) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi(\alpha, \beta)\dot{\alpha}_{\nu} + \eta(\alpha, \beta)\dot{\beta}}{|\xi(\alpha, \beta)\dot{\alpha}_{\nu} + \eta(\alpha, \beta)\dot{\beta}|} \right) \times$$

$$[\xi(\alpha, \beta)\dot{\alpha}_{\nu} + \eta(\alpha, \beta)\dot{\beta}] a(\alpha, \beta) ,$$

wobei $\alpha_{\nu}, \alpha, \beta$ und β für das Paar (x, t) gilt, welches dem Paar (x^*, t^*) entspricht.

Bezeichnet man durch $\theta^*(x^*, t^*)$ die Funktion, die durch die Gleichung

$$\theta^*(x^*, t^*) = \theta(x, t)$$

definiert ist, dann wird (3.15) auf

$$c_0 \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} = k_{ij} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_i^* \partial x_j^*} + \dot{R}^* \tag{3.24}$$

reduziert.

Diese Gleichung entspricht im Raum (x^*, t^*) der klassischen Wärmeausbreitungsgleichung.

Wir schreiben die Randbedingungen und die Anfangsbedingungen in folgende Form

$$\theta^*|_{\partial_\theta \Omega} (x^*, t^*) = \tilde{\theta}^*(x^*, t^*) = \tilde{\theta}(x, t) \quad (3.25)$$

$$-(k \operatorname{grad}_{x^*} \theta^*) \cdot \tilde{n}|_{\partial_q \Omega} (x^*, t^*) = \tilde{q}^*(x^*, t^*) = \tilde{q}(x, t) \quad (3.26)$$

$$\theta^*(x^*, 0) = \theta_0^*(x^*) = \theta_0(x) \quad (3.27)$$

Es sei das Funktional

$$\begin{aligned} \Phi_2(\theta^*) &= \frac{1}{2} \int_0^{T^*} dt^* \int_\Omega \left| \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \right|^2 dv + \frac{1}{2} \int_0^{T^*} dt^* \int_\Omega \left| k_{ij} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_i^* \partial x_j^*} \right|^2 dv \\ &+ \frac{1}{2} \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_i^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_j^*} \Big|_{t^*=T^*} dv - \int_\Omega k_{ij} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_i^*} \frac{\partial \theta_0^*}{\partial x_j^*} \Big|_{t^*=s} dv \\ &- \int_0^{T^*} dt^* \int_{\partial_\theta \Omega} k_{ij} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_i^*} n_j \tilde{\theta}^* ds + c_0 \int_0^{T^*} dt^* \int_{\partial_q \Omega} \tilde{q}^* \theta^* dv \end{aligned}$$

Es sei $\Theta[0, T^*]$ die Menge der zulässigen Funktionen

$$\theta^*(\cdot, t) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega + \partial\Omega) \text{ für alle } t \in]0, T^*[$$

$$\theta^*(x^*, \cdot) \in C^1[0, T^*] \text{ für alle } x^* \in \Omega$$

$$\int_0^{T^*} dt^* \int_\Omega \left| \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \right|^2 dv < +\infty, \quad \int_0^{T^*} dt^* \int_\Omega \left| k_{ij} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_i^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_j^*} \right|^2 dv < +\infty,$$

$$\theta^*|_{\partial_\theta \Omega} = \tilde{\theta}^*,$$

$$-(k \operatorname{grad}_{x^*} \theta^*) \cdot \tilde{n}|_{\partial_q \Omega} = \tilde{q}^*.$$

Es ist möglich zu beweisen (vgl. [22], Kapitel 1), daß ϕ_2 ein konvexes Funktional ist und es sein Minimum in $\Theta[0, T]$ genau für die Lösung der Anfangs- und Randwertaufgabe (3.23 - 26) erreicht.

Wir können jetzt die Gleichungen (3.17) und (3.18) einfach durch zwei Variationsprinzipie ersetzen. Es seien die Funktionale

$$\phi_3 = \int_0^T dt \int_{\Omega} (\alpha_{ij} - \int_0^t \dot{\sigma}_{ij} dt) (\alpha_{ij} - \int_0^t \dot{\sigma}_{ij} dt) dv$$

und

$$\phi_4 = \int_0^T dt \int_{\Omega} (\beta - \int_0^t \dot{\theta} dt)^2 dv .$$

Für gegebene σ_{ij} und θ sind diese Funktionale konvex in α_{ij} bzw. β überall in $L_2(\Omega \times [0, T])$ und erreichen ihr Minimum genau, wenn (3.17) bzw. (3.18) gilt.

Das Mehrfach-Kriterium, welches dem fundamentalen Problem der Thermoplastizität assoziiert wird, lautet:

Zu bestimmen sei $\underline{\sigma} \in \Sigma[0, T]$,

$$\dot{\theta} \in \Theta[0, T], \quad \alpha \in L_2(\Omega \times [0, T]), \quad \beta \in L_2(\Omega \times [0, T])$$

so, daß

$$\min_{\underline{\sigma} \in \Sigma[0, T]} \phi_1(\tau, \alpha, \beta) = \phi_1(\underline{\sigma}, \alpha, \beta)$$

$$\min_{\eta \in \Theta[0, T^*]} \phi_2(\eta, \alpha, \beta) = \phi_2(\theta^*, \alpha, \beta)$$

(wobei $\theta^*(x^*, t^*) = \theta(x, t)$ und $T^* = \int_0^T \frac{c(\alpha, \beta)}{c_0} dt$ sind)

$$\underset{\gamma}{\min} \in L_2(\Omega \times [0, T]) \quad \Phi_3(\gamma, \sigma) = \Phi_3(\alpha, \sigma)$$

$$\underset{\delta}{\min} \in L_2(\Omega \times [0, T]) \quad \Phi_4(\delta, \theta) = \Phi_4(\beta, \theta) .$$

6. Möglichkeiten der numerischen Lösung

Wie in dem vorhergehenden Kapitel formuliert wird, besteht das Mehrfach-Kriterium Variationsprinzip für die Lösung der fundamentalen Randwertaufgabe der Thermoplastizität in vier Funktionalen

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \quad (1.1)$$

welche von vier Systemen von unbekanntem Funktionen

$$\{\underline{\sigma}\}, \{\theta\}, \{\underline{\alpha}\}, \{\beta\} \quad (1.2)$$

abhängen. Die Lösung der fundamentalen Aufgabe der Thermoplastizität ist durch die Minimierung jeder der oben erwähnten Funktionalen bezüglich des entsprechenden Systems von unbekanntem Funktionen gegeben. Die Bestimmung der Systeme der unbekanntem Funktionen, die gleichzeitig die vier Funktionalen minimieren, stellt ein Problem dar, das die Entwicklung einer besonderen numerischen Methode verlangt

Im Folgenden wir nur einige Überlegungen über die numerischen Verfahren, die ein einzelnes Funktional minimieren können, darstellen.

Wie schon bemerkt wurde sind alle vier Funktionalen konvex bezüglich des entsprechenden Systems der Funktionen. Die Minimierung der Funktionalen ϕ_3 und ϕ_4 bezüglich $\{\underline{\alpha}\}$ bzw. $\{\beta\}$ ist eine triviale Aufgabe. Bezüglich des Funktional ϕ_1 bemerkt man, daß es möglich ist, es in folgender Form darzustellen:

$$\phi_1(\underline{\sigma}, \theta, \underline{\alpha}, \beta) = \int_0^T \phi_1^*(\underline{\sigma}(\cdot, t), \theta(\cdot, t), \underline{\alpha}(\cdot, t), \beta(\cdot, t)) dv. \quad (1.3)$$

Für jedes feste $t \in [0, T]$ bildet ϕ_1^* ein Funktional vom klassischen Typ. Solch ein Funktional ist z.B. in der Elastizitäts-Theorie der physisch nicht-linearen Körper anzutreffen. (vgl. [1]). Dieses Funktional vereint alle

Eigenschaften, die eine gute numerische Näherung erlaubt. Das Funktional ϕ_2 wurde vom numerischen Gesichtspunkt aus sehr wenig untersucht. In [2] wird die Konvexität dieses Funktionals bewiesen. Diese Konvexität impliziert unter anderem die Eindeutigkeit*) der Lösung. Gleichfalls wird die Bestimmung einer minimisierenden Folge, die gegen die Lösung des Problems strebt, möglich. Wir werden im folgenden zeigen, daß die minimisierende Folge (vgl. [2], Appendix) des Funktionals ϕ_2 dieselben Eigenschaften betreffend ihrer numerischen Stabilität besitzt, wie das Funktional von Dirichlet

$$\phi_D = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 \, dv + \int_{\Omega} f u \, dv . \quad (1.4)$$

Zuerst erinnern wir an diese Eigenschaften der numerischen Stabilität des Funktionals ϕ_D .

Es sei u die Funktion für die ϕ_D sein Minimum in der Klasse der zulässigen Funktionen

$$Z(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \int_{\Omega} |\text{grad } u|^2 \, dv < +\infty, u|_{\partial\Omega} = u_0\} \quad (1.5)$$

erreicht und $\{u_n\}$ eine minimisierende Folge.

Infolge der Konvexität von ϕ_D folgt (vgl. [2])

$$E_{mn} = \frac{1}{2} \phi_D(u_m) + \frac{1}{2} \phi_D(u_n) - \phi_D\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right) \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

Gleichzeitig kann man die Ungleichung

$$\int_{\Omega} |\text{grad } u_m - \text{grad } u_n|^2 \, dv \leq 8 E_{mn} \quad (1.7)$$

beweisen.

*) Die Eindeutigkeit der Lösung bedeutet in diesem Fall, daß alle numerischen Verfahren, die man benutzt, unter der Voraussetzung, daß keine mathematischen Fehler gemacht werden, zu derselben Lösung führen.

Aus (1.6) und (1.7) folgt dann, daß die Folge $\{\text{grad } u_n\}$ gegen $\text{grad } u$ konvergiert bezüglich der Norm von L_2 . Es ist einfach zu beweisen, daß diese Konvergenz auch dann gilt, wenn wegen den numerischen Störungen die Randwerte u_0 sich verändern in $u_0 + \delta u_0$, wobei δu_0 eine kleine Abweichung bezeichnet. Diese bemerkenswerte Eigenschaft der Stabilität bei numerischen Störungen gilt nicht für alle Variationsprinzipie. Es sei das quadratische Fehlerfunktional

$$\phi_Q = \int_{\Omega} |\Delta u - f|^2 dv$$

und $Z(\Omega)$ die Klasse der zulässigen Funktionen

$$Z(\Omega) = \{u = \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dv < +\infty, u|_{\partial\Omega} = u_0\}$$

für die Lösung der folgenden Randwertaufgabe:

$$\Delta u = f(x), x \in \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = u_0 .$$

Das folgende Beispiel zeigt, daß nicht alle minimisierenden Folgen des Funktionals ϕ_Q eine stabile Konvergenz haben.

Es sei als Ω der Einheits-Kreis betrachtet. Als Störung des Randwertes nehmen wir $\delta u_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos n\theta$ an.

Es sei $\{u_n\}$ eine minimisierende Folge, die dem Grundproblem entspricht. Dann ist $\{u_n + \frac{1}{\sqrt{n}} r^n \cos n\theta\}$ eine minimisierende Folge für die gestörte Randwertaufgabe. Es ist einfach zu beweisen, daß der Gradient

$$\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x} + \sqrt{n} r^{n-1} \cos (n-1)\theta \right\} ,$$

$$\left\{ \frac{\partial u_n}{\partial y} - \sqrt{n} r^{n-1} \sin (n-1)\theta \right\}$$

nicht mehr in L_2 konvergiert.

Im folgenden werden wir zeigen, daß das Funktional ϕ_2 dieselbe Eigenschaft der numerischen Stabilität hat wie das Funktional von Dirichlet. In dem Fall der Minimierung des Funktionals ϕ_2 können folgende Arten von Störungen erscheinen:

- 1 . die Störungen der Randwerte θ^* , q^* und des Anfangswertes θ_0 , die in dem Ausdruck des Funktionals erscheinen;
- 2 . die Störungen der Randwerte, die die Klasse der zulässigen Funktionen definiert.

Bezeichnet man mit $O(\epsilon)$ die Größenordnung dieser Störungen, dann kann man auf Grund der Konvexität zeigen, daß für die Abweichung $\delta\theta$ der Lösung die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\delta\theta\| = & \left(\int_0^T dt \int_{\Omega} |\delta\dot{\theta}|^2 dv + \int_0^T dt \int_{\Omega} |\Delta\delta\theta|^2 dv + \right. \\ & \left. + \int_{\Omega} |\text{grad } \delta\theta|^2 |_{t=T} dv \right)^{1/2} = O(\epsilon) \end{aligned} \quad (1.8)$$

gilt. Aus (1.8) folgt unmittelbar die numerische Stabilität jedwelder minimisierenden Folge.

Das folgende Gegenbeispiel zeigt, daß diese numerische Stabilität nicht für andere Arten von Variationsprinzipien gilt. Es sei das Funktional der quadratischen Fehler

$$\phi_{2Q} = \int_0^T dt \int_0^{2\pi} |\dot{\theta} - \theta_{,xx} - R|^2 dv ,$$

welches der folgenden Randwertaufgabe mit den Anfangswerten

$$\theta - \theta_{,xx} = R(x) , x \in (0, 2\pi) ,$$

$$\theta(0,t) = \theta(2\pi, t) = 0 , t \in [0,T] ,$$

$$\theta(x,0) = \theta_0(x) , x \in (0, 2\pi) .$$

entspricht.

Es sei

$$\delta\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-n^2 t} \sin 2\pi n x$$

Falls $\{\theta_n\}$ eine minimisierende Folge für das Grundproblem ist, dann ist

$$\{\theta_n + \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-n^2 t} \sin 2\pi n x\}$$

eine minimisierende Folge für die gestörten Anfangswerte. Es ist klar, daß der Gradient dieser letzten minimisierenden Folge nicht mehr konvergiert.

Die folgende Anmerkung erleichtert uns, eine Rechtfertigung für diesen bemerkenswerten Unterschied zwischen ϕ_2 und ϕ_{2Q} zu finden.

Es sei ϕ_2 in dem besonderen Fall, wenn $k_{ij} = \delta_{ij}$ und $c = 1$ sind, betrachtet. Nehmen wir dazu an, daß die Wärmequellenintensität R , die Randwerte θ^* und \tilde{q} unabhängig von der Zeit sind. Der Anfangswert θ_0 wird so gegeben, daß die Lösung θ der Randwertaufgabe auch unabhängig von der Zeit ist.

Schreibt man ϕ_2 für T , welches gegen Null strebt, dann erhält man

$$\phi_{20} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\text{grad } \theta|^2 dv - \int_{\Omega} \text{grad } \theta \cdot \text{grad } \theta_0 dv = 0 .$$

Es ist einfach zu beweisen, daß ϕ_{20} bis auf eine Konstante, mit dem Funktional von Dirichlet

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\text{grad } \theta|^2 \, dv + \int_{\Omega} R\theta \, dv + \int_{\partial_q \Omega} q^* \delta \, ds ,$$

gleich ist, welches der Randwertaufgabe

$$\Delta \theta = R ,$$

$$\theta|_{\partial_{\theta} \Omega} = 0 ,$$

$$\text{grad } \theta \, n|_{\partial_q \Omega} = q^*$$

entspricht.

Es folgt, daß das Funktional ϕ_2 eine Verallgemeinerung des Funktionals von Dirichlet ϕ_D darstellt. Gleichzeitig ist es einfach zu bemerken, daß ϕ_{2Q} die Verallgemeinerung des quadratischen Fehler-Funktionalis ist.

Literatur

Kapitel 1

1. C. Truesdell und S. Bharatha, The Concepts and Logic of Classical Thermodynamics as a Theory of Heat Engines, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977
2. A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Band V, Thermodynamik und Statistik, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/M., 1977
3. H.A. Buchdahl, The Concepts of Classical Thermodynamics, Cambridge at the University Press, 1966
4. S. Nemat-Nasser, On Nonequilibrium Thermodynamics of Continua, in Mechanics Today, vol. 2, Ed. S. Nemat-Nasser, Pergamon Press Inc., 1972
5. M.A. Biot, Thermoelasticity and irreversible Thermodynamics, J. Appl. Physics, 27, 3, 1956 (240-253)
6. H. Parkus, Thermoelasticity, Blaisdell Publishing Company, Waltham (Mass.), Toronto, London, 1968
7. A.D. Kovalenko, Thermoelasticity, Wolters-Noordhoff Publishing Cie., Groningen, 1969
8. M.B. Bever, D.L. Holt und A.L. Titchener, The stored Energie of Cold Work, in Progress in Material Science, Pergamon Press, 1973
9. J.F. Bell, The Experimental Foundations of Solid Mechanics, in Handbuch der Physik, Band VIa/1, Springer-Verlag, 1973

10. W.A. Day, Justification of the Uncoupled and Quasi-Static Approximations in a Problem of Dynamic Thermoelasticity, Arch. Rational Mech. Anal. 77, 4, 1981 (387-396)
11. W.A. Day, Further Justification of the Uncoupled and Quasi-Static Approximations in Thermoelasticity, Arch. Rational Mech. Anal. 79, 1, 1982 (85-95)
12. M. Pitteri, Classical Thermodynamics of Homogeneous Systems based upon Carnot's General Axiom, Arch. Rational Mech. Anal., 80, 4, 1982 (333-385)

Kapitel 2

1. R. Hill, The mathematical theory of plasticity, Oxford, At the Clarendon Press, 1971
2. P.M. Naghdi, Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity, in Plasticity, Ed. E.H. Lee und P.S. Symonds, Pergamon Press, 1960
3. Th. Lehmann, Zur Beschreibung großer plastischer Formänderungen unter Berücksichtigung der Werkstoffverfestigung, Rheologica Acta 2, 3 1967 (247-254)
4. J. Christoffersen, und J.W. Hutchinson, A class of phenomenological convex theories of plasticity, J. Mech. Phys. Solids 27, 1979, 465-487
5. A. E. Green, Hypoelasticity and plasticity, Proc. Roy S. London, A 234, 1956 (45-59)

Kapitel 3

1. W.P. Allis, Thermodynamics and Statistical Mechanics, McGraw-Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London, 1982
2. I. Müller, Thermodynamik, Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf, 1973
3. I. Prigogine, The microscopic Theory of irreversible Processes, Proc. of the 11th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, Cannes, July 3-8, 1978
4. E. Becker, Continuum-thermo-mechanics in Trends in Solid Mechanics 1979, Ed. J.F. Besseling und A.M.A. Van der Heyden, Delft University Press, Sijthoff & Noordhoff International Press, 1979
5. C. Truesdell, The tragicomical History of Thermodynamics, 1822-1854, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1980
6. C. Truesdell und S. Bharatha, The Concepts and Logic of Classical Thermodynamics as a Theory of Heat Engines, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin 1977
7. M. Planck, Vorlesung über Thermodynamik, elfte Auflage, Walter De Gruyter & Co., Berlin, 1964
8. C. Truesdell, Rational Thermodynamics, McGraw-Hill, New York etc., 1969
9. C. Truesdell und R. Toupin, The Classical Field Theories, in Handbuch der Physik, III/1, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1960

10. B.D. Coleman und W. Noll, The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity, Arch. Rational Mech. Anal., 13, 1963, 167-178
11. W.A. Day, An objection to using entropy as a primitive concept in continuum thermodynamics, Acta Mechanica 27, 1977, 251-255
12. P.M. Naghdi, On the role of the second law of thermodynamics in mechanics of materials, Energy, 5, 1980, 771-781
13. A.E. Green und P.M. Naghdi, On thermodynamics and the nature of the second law, Proc. R. Soc. London, A 357, 1977, 253-270
14. A.E. Green und P.M. Naghdi, The second law of thermodynamics and cyclic processes, J. App. Mech. 45, 487, 1978
15. A.E. Green und P.M. Naghdi, On thermodynamics and the nature of the second law for mixtures of interacting continua
16. J. Meixner, The entropy problem in thermodynamics of processes, Theol. Acta 12, 1173, 475-467
17. K. Hutter, The foundation of thermodynamics, its basic postulates and implications. A review of modern thermodynamics, Acta Mechanica 27, 1977, 1-54
18. G. Lebon, A thermodynamic analysis of rigid heat conditions, Int. J. Eng. Sci. 18, 1980, 727-739
19. W. Muschik, Thermodynamische Theorien, Überblick und Vergleich, ZAMM 61, 1981, T213-T219

20. J. Kratochvil und M. Silhavy, Thermodynamics of actual non-equilibrium processes (nicht veröffentlicht)
21. N. de Nevers und J.D. Seader, Lost work: a measure of thermodynamic efficiency, Energy, 5, 1980, 757-769
22. H.D. Baehr, Energie, Exergie, Anergie, in Energie und Exergie, VDI-Verlag Düsseldorf, 1965
23. J. Ahrendts, Reference states, Energy 5, 1980, 667-677
24. P. Mazilu, On the equations of Thermoplastic Flow, Euromech 53, Col. in Thermoplasticity, Warsaw 1974

Kapitel 4

1. Th. Lehmann, On large elastic-plastic deformations, in Foundation of Plasticity, Ed. A. Sawczuk, Noordhoff International Publishing, Leyden 1972.
2. Th. Lehmann und G. Zander, Non-isothermic large elastic-plastic deformations, Archives of Mechanics, 27, 5-6, 1975, (759-772).
3. Th. Lehmann, Große elasto-plastische Formänderungen, Mitteilung aus dem Institut für Mechanik 1, Ruhr-Universität Bochum, 1976.
4. Th. Lehmann, Some aspects of non-isothermic large inelastic deformations, SM Archives, 3, 1978 (261-317).
5. Th. Lehmann, On constitutive relations in thermoplasticity, Preprint, 1980.
6. Th. Lehmann, Coupling phenomena in thermoplasticity, Nuclear Engineering and Design 57, 1980 (323-332).
7. Th. Lehmann, On the concept of stress-strain relations in plasticity, Preprint, 1981.
8. W. Noll, On the continuity of the solid und fluid state, J. Rational Mech. Anal. 4, 1955 (3-81).
9. R.J. Atkin und N. Fox, An introduction to the theory of elasticity, Longman, London, New York, 1980.

Kapitel 5

1. J. Ahrendts, Reference states, *Energie*, 5, 1980 (667-777).
2. L.C. Woods, *The thermodynamics of fluid systems*, Clarendon Press, Oxford, 1975.
3. I. Müller, Thermodynamic theories of thermoelasticity and special cases of thermoplasticity, Course given at the International Centre for Mechanical Sciences (CIS/1) Udine, Academic Year 1982, The Laplace Session, July 19-30, 1982.
4. C. Truesdell und S. Barahta, *The Concepts and Logic of Classical Thermodynamics as a Theory of Heat Engines*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1977.
5. W. Prager, Non-isothermal plastic deformation, *Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet. B* 61, 1958, (176-182).
6. P.M. Naghdi, Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity, in *Plasticity Proc. Second. Symp. Naval Structural Mech.*, Ed. E.H. Lee und P.S. Symonds, Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris, 1960.
7. O. Bruhns und J. Mielniczuk, Zur Theorie der Verzweigungen nicht-isothermer elasto-plastischer Deformationen, *Ingenieur-Archiv*, 46, 1977 (65-74).
8. B. Bernstein, Hypo-elasticity and Elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.* 6, (69-104).
9. Th. Lehmann, Some thermodynamic considerations of phenomenological theory of non-isothermal elastic-plastic deformations, *Arch. of Mechanics*, 24, 1972 (975-989).
10. Th. Lehmann, Einige Betrachtungen zur Thermodynamik großer elasto-plastischer Formänderungen, *Acta Mechanica* 1974.

11. Th. Lehmann und G. Zander, Non-isothermic large elastic-plastic deformations, Arch. of Mechanics, 27, 5-6, 1975(759-772).
12. Z. Mroz and B. Raniecki, A note on Variational Principles in Coupled Thermoplasticity, Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Série des sciences techniques, 23, 3, 1975 (133-139).
13. Z. Mroz and B. Raniecki, On the uniqueness problem in coupled thermo-plasticity, Int. J. Eng. Sci. 14, 1978 (211-221).
14. B. Raniecki, Thermodynamic aspects of cyclic and monotone plasticity, Course given at the International Centre for Mechanical Science (CISM), Udine, Academic Year 1982, The Laplace Session, July 19-30, 1982.
15. Th. Lehmann, General frame for the definition of constitutive for large non-isothermic elastic-plastic and elastic-visco-plastic deformations, Course given at the International Centre for Mechanical Sciences (CISM), Udine, Academic Year 1982, The Laplace Session, July 19-30, 1982.
16. R.M. Haythornthwaite, A more rational approach to strain-hardening in Engineering Plasticity, Ed. J. Heymann und F.A. Leckie, Cambridge at the University Press, 1968 (201-218).
17. E. Shiratori, K. Ikegami und K. Kaneko, Subsequent yield surface determined in consideration of the Bauschinger effect, in Foundation of Plasticity, Nordhoff International Publishing, Leyden, 1973 (477-489).
18. R.L. Sierakowski and A. Phillips, The effect of repeated loading on the yield surface, Acta Mechanica, 6, 1968 (217-231).
19. P. Mazilu, Decreasing of the initial shear modulus with increasing axial strain explained by means of plastic-hypoelastic model, Ruhr-Universität Bochum, 1980 (unveröffentlicht).
20. M. Feigen, Inelastic behaviour under combined torsion, Proc. sec. U.S.-Nat. Congress of Appl. Mech. 1954 (459-467).

21. M.B. Bever, D.L. Holt, A.L. Titchener, The stored energie of cold work, Pergamon Press, Oxford, New York, etc. 1973.
22. P. Mazilu, Variationsprinzipæder Thermoplastizität I, Wärmeausbreitung und Plastizität, Mitteilung aus dem Institut für Mechanik 33, Dezember 1982, Ruhr-Universität Bochum.

Kapitel 6

1. P. Mazilu und S.F.Sburlan, Funktional Methoden zur Lösung von Gleichungen der Elastizitätstheorie. Editura Academiei, Bukarest 1973.
2. P. Mazilu, Variationsprinzipte der Thermoplastizität I, Wärmeausbreitung und Plastizität, Mitteilung aus dem Institut für Mechanik 33, Dezember 1982, Ruhr-Universität Bochum.

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
 Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
 Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of
 Finite Elastic-Plastic Deformations
 Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
 Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,
 viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
 Theoretische und experimentelle Untersuchung der
 zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei
 endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
 Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwan-
 digen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittel-
 linie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
 Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen
 Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
 Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre
 Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
 Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnell-
 laufenden Zentrifugenschalen

- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung
eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Ver-
zerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer
dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizi-
tät auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer
Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Opti-
mierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodi-
scher Beanspruchung bei Beachtung von Spannungs-
restriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte
des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von
kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue
Problems of Elastic Systems with Application to
Eigenvibrations of Orthotropic Plates

- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical
Application to Geometrically Nonlinear v. Kármán
Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung
bei numerischen Berechnungen von Schalentragerwerken
- Nr. 20 Czeslaw Woźniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic
Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear
Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer
Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der
Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen
bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregun-
gen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-
Value Problems in the Theory of Plasticity and
Application to Plate Problems

- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically
Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger
Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und
Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Visco-
plastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter,
dickwandiger Kreiszyylinder und Innendruck und
Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim ein-
seitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell
Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und
Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösun-
gen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 Helmut Stumpf:
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling
and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre
Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische
Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im
Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzipie der Thermoplastizität
II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 37**