

**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Alfred Kraft

Zum methodischen Entwurf  
mechanischer Systeme  
im Hinblick auf  
optimales Schwingungsverhalten

Heft Nr. 36



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Alfred Kraft

Zum methodischen Entwurf  
mechanischer Systeme  
im Hinblick auf optimales  
Schwingungsverhalten

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 36

Juli 1983

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit in der Arbeitsgruppe "Numerisches Rechnen in der Mechanik und Simulationstechnik" am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Waller, der mich zu dieser Arbeit angeregt hat. Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann, der freundlicherweise das Korreferat übernahm, bin ich für das große Interesse an dieser Arbeit zu Dank verpflichtet. Schließlich danke ich recht herzlich den Helfern bei der Abfassung dieser Arbeit: Frau Schmidt-Balve für das Anfertigen der vielen Zeichnungen, Herrn Grundmann für die fotografische Erstellung der Bilder, Fräulein Karin Piltner für die sorgfältige Reinschrift des Manuskripts, meinem Kollegen Hans-Jürgen Michel für die Klebearbeiten und Herrn Michael Geis für die Durchführung der Rechenbeispiele.

Juli 1983

Alfred Kraft

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Heinz Waller

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Tag der Einreichung: 22.4.1983

Tag der mündlichen Prüfung: 18.7.1983

© 1983 Alfred Kraft  
Anton-Riemerschmidtstr. 3  
8263 Burghausen/Oberbayern

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

### Zusammenfassung

Die Methoden der elektrischen Netzwerksynthese werden für die Mechanik aufbereitet. Passive mechanische Systeme werden durch positiv-reelle Funktionen bzw. Matrizen beschrieben. Die freien Parameter solcher Funktionen bzw. Matrizen können zur Optimierung von Schwingungssystemen, z. B. Schwingungstilger und -isolatoren, verwendet werden. Die Synthesemethoden erlauben die Umsetzung der gefundenen Funktionen in mechanische Systeme. Zunächst erhält man ein mechanisches Netzwerk. Es wird gezeigt, wie man dieses mechanisch interpretieren kann. Die Masse besitzt gegenüber einem analogen elektrischen Bauelement die besondere Eigenschaft, am Inertialsystem gebunden zu sein. Dagegen erhält man mit den Syntheseverfahren auch Netzwerke mit Massen, die nicht direkt mit dem Inertialsystem verknüpft sind. Mit Balkensystemen ist jedoch die mechanische Realisierung gewährleistet. Das Syntheseverfahren von O. BRUNE wird durch ein spezielles mechanisches Ersatzsystem anwendbar gemacht. Somit kann analog zum Satz von BRUNE in der Elektrotechnik bewiesen werden, daß allen positiv-reellen Funktionen passive mechanische Systeme zugeordnet werden können.

### Summary

The methods of electrical network synthesis are worked up for mechanics. Passive mechanical systems will be described by positive-real functions resp. matrices. The free parameters of such functions resp. matrices can be used for the optimization of vibrational systems, e.g. vibration absorbers. By means of the synthesis methods the functions found can be realized by mechanical systems. At first we obtain a mechanical network. Its interpretation is shown. Contrary to analogous electrical elements the mass has the special property to be bound by an inertial system. But by applying the methods of synthesis we will get networks with masses which are not linked with the inertial system. With beam-systems the mechanical realization is possible. The BRUNE-synthesis is applicable if a special mechanical substitute system is used. Thus by analogy to the theorem of O. BRUNE in electro-technics it is proved that all positive-real functions can be realized by passive mechanical systems.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
VERZEICHNIS DER WICHTIGSTEN FORMELZEICHEN	III
1. EINLEITUNG	1
2. ALLGEMEINE NETZWERKE	3
3. ÜBERGANG VON DEN ALLGEMEINEN ZU DEN MECHANISCHEN NETZWERKEN	13
4. ZWEIPOLFUNKTIONEN	19
4.1 Topologische Analyse	19
4.2 Betrachtung des Differentialgleichungssystems eines mechanischen Schwingungssystems	23
4.3 Eigenschaften von Admittanzen und Impedanzen	24
4.4 Prüfung der Positivität einer rationalen und reellen Funktion	29
5. REALISIERBARKEIT NICHT GEERDETER MASSEN	33
6. SPEZIALFÄLLE DER ZWEIPOLFUNKTIONEN	43
6.1 Netzwerke mit nur zwei Bauelementtypen	43
6.2 Modale Systeme	53
7. SYNTHESEVERFAHREN FÜR SPEZIELLE ZWEIPOLFUNKTIONEN	58
7.1 Syntheseverfahren für Zweipolfunktionen mit zwei Bauelementtypen	58
7.2 Synthese modaler Systeme	66
8. SYNTHESE ALLGEMEINER ZWEIPOLFUNKTIONEN	72
8.1 Methodik der Syntheseverfahren	72
8.2 Reaktanzreduktion und Realteilminimumabbau	74
8.3 Das Syntheseverfahren von O.BRUNE	80

	Seite
8.4 Realisierbarkeit allgemeiner Zweipolfunktionen	96
8.5 Abbau von Polen in der offenen linken Halbebene	112
9. BESCHREIBUNG VON ZWEITOREN DURCH POSITIV-REELLE MATRIZEN	134
10. SPEZIALFÄLLE VON ZWEITORMATRIZEN	139
10.1 Netzwerke mit nur zwei Bauelementen	139
10.2 Modale Systeme	146
11. ANWENDUNG DER NETZWERKSYNTHESE AUF MECHANISCHE SCHWINGUNGSPROBLEME	150
11.1 Aufgabenstellungen der Schwingungstechnik und deren Behandlung mit Hilfe der Netzwerksynthese	150
11.2 Approximation von Impedanzen und Admittanzen	155
11.3 Ein Beispiel für stationäre Schwingungen und direkte Optimierung	169
11.4 Anwendung der Synthesemethode zur Schwingungsisolaton	177
12. ZUSAMMENFASSUNG	183
LITERATURVERZEICHNIS	185

Verzeichnis wichtiger Formelzeichen

$\underline{A}(s) = (a_{jk})$	Kettenmatrix ( $j, k = 1, 2$ )
$A_0, A_1, \dots, A_\infty$	Entwicklungskoeffizienten der Impedanz eines Feder-Masse-Systems
$A_0^{-1}, A_1^{-1}, \dots, A_\infty^{-1}$	Entwicklungskoeffizienten der Admittanz eines Feder-Masse-Systems
$B_0, B_1, \dots, B_\infty$	Entwicklungskoeffizienten der Impedanz eines Masse-Dämpfer-Systems
$B_0^{-1}, B_1^{-1}, \dots, B_\infty^{-1}$	Entwicklungskoeffizienten der Admittanz eines Masse-Dämpfer-Systems
$C_0, C_1, \dots, C_\infty$	Entwicklungskoeffizienten der Impedanz eines Feder-Dämpfer-Systems
$C_0^{-1}, C_1^{-1}, \dots, C_\infty^{-1}$	Entwicklungskoeffizienten der Admittanz eines Feder-Dämpfer-Systems
$\underline{C}$	Dämpfungsmatrix (Knotenanalyse)
$\hat{\underline{C}}$	Dämpfungsmatrix (Maschenanalyse)
$c$	Dämpfungskonstante
$\underline{D}$	modal abhängige Matrix
$d_A, d_B$	Defekt der Matrizen $\underline{A}, \underline{B}$
$E(t)$	Im Netzwerk gespeicherte Energie
$\underline{E}$	Diagonalmatrix für Eigensystem
$\underline{e}_j$	Einheitsvektor in Richtung $j$
$F(s)$	Kraft (LAPLACE-transformiert)

$f(t)$	Kraft (Zeitgröße)
$\underline{f}(s)$	Knoten-Kraftvektor
$\hat{\underline{f}}(s)$	Vektor der Maschenkräfte
$G(s)$	Ausgangsgröße eines Schwingungssystems
$\underline{g}(s)$	Kraftvektor im Eigensystem
$H(s)$	Übertragungsfunktion (LAPLACE-transformiert)
$H_0(s)$	Überschrift für eine Übertragungsfunktion im Frequenzbereich
$h(t)$	Übertragungsfunktion (Zeitbereich)
$h_0(t)$	Vorschrift für Übertragungsfunktion im Zeitbereich
$\underline{I}$	Einheitsmatrix
$i$	imaginäre Einheit ( $i = \sqrt{-1}$ )
$\underline{J}$	Knoten-Inzidenz-Matrix
$\underline{K}$	Steifigkeitsmatrix
$\hat{\underline{K}}$	Flexibilitätsmatrix (bei Maschenanalyse)
$k$	Federsteifigkeit
$\underline{M}$	Massenmatrix (Knotenanalyse)
$\hat{\underline{M}}$	Massenmatrix (Maschenanalyse)
$m$	Masse
$\underline{p}$	Parametervektor der Optimierung

$Q(s)$	Integrierte Flußgröße (LAPLACE-transformiert)
$q(t)$	Integrierte Flußgröße (Zeitbereich)
$R$	Realteil für alle oder bestimmte $s$ -Werte
$r_{jk}$	Entwicklungskoeffizienten zu imaginären Polstellen einer positiv-reellen Matrix ( $j, k = 1, 2$ )
$s$	Frequenzvariable (LAPLACE-Transformation)
$\underline{T}$	Transformationsmatrix
$T$	Pseudoenergiefunktion für Massen
$t$	Zeit
$U$	Pseudoenergiefunktion für Federn
$\underline{u}$	Variable im Eigensystem
$V(s)$	Geschwindigkeit (LAPLACE-transformiert)
$v(t)$	Zeitgröße
$W$	Pseudoenergiefunktion für Dämpfung
$X$	Imaginärteil für alle oder bestimmte $s$ -Werte
$X(s)$	Weg (LAPLACE-transformiert)
$\ddot{x}$	Beschleunigung
$\underline{x}$	Wegvektor (Knotenanalyse)
$\hat{x}$	Wegerregungsvektor (Maschenanalyse)
$Y(s)$	Admittanz

$\underline{Y}(s) = (y_{jk})$	Admittanzmatrix ( $j, k = 1, 2$ )
$Z(s)$	Impedanz
$\underline{Z}(s) = (z_{jk})$	Impedanzmatrix ( $j, k = 1, 2$ )
$\underline{z}(s)$	Allgemeiner Weggrößen-Vektor (Knotenanalyse)
$\hat{\underline{z}}(s)$	Allgemeiner Weggrößen-Vektor (Maschenanalyse)
$z$	komplexe Variable bei bilinearer Transformation
$\alpha, \hat{\alpha}$	modale Faktoren
$\beta, \hat{\beta}$	modale Faktoren
$\Delta$	Optimierungszielfunktion (diskrete Fehlerquadratmethode)
$\Delta_s$	Straffehler (diskrete Fehlerquadratmethode)
$\delta', \delta''$	Minimalwerte zur Erzeugung einer Zweipolfunktion
$\zeta(s)$	Zweipolfunktion (allgemeine Bezeichnung für Impedanzen oder Admittanzen)
$\theta$	Trägheitsmoment eines Balkens
$\vartheta$	Winkel auf dem Einheitskreis bei der bilinearen Transformation
$\kappa$	Hebelübersetzung am mechanischen BRUNE-Element
$\underline{\Lambda}$	Diagonalmatrix mit Eigenwerten
$\lambda$	verallgemeinerte komplexe Frequenzvariable
$\underline{\Xi}$	Zweitormatrix (entweder Impedanz- oder Admittanzdarstellung)

$\xi$	verallgemeinerte "Impedanz"
$\xi'$	verallgemeinerte "Admittanz"
$\sigma$	Realteil der Frequenzvariablen $s$
$\sigma_0$	reelle Konstante für bilineare Transformation
$\underline{\Phi}(s)$	modale Matrix des Eigensystems
$\chi_j = r_j + i x_j$	Entwicklungskoeffizient an einer Polstelle $j$
$\Psi(s)$	Integrierte Differenzgröße (LAPLACE-transformiert)
$\psi(t)$	Integrierte Differenzgröße (Zeitbereich)
$\Omega$	Optimierungsfunktion (kontinuierliche Fehlerquadratmethode)
$\omega$	Frequenz, Imaginärteil der Frequenzvariablen $s$
*	Kennzeichnung konjugiert-komplexer Größen
	Betrag einer reellen oder komplexen Zahl
Re	Realteil
Im	Imaginärteil
$(\underline{\quad})^T$	transponierte Matrix zu $(\underline{\quad})$
Min( )	Minimum von ( )
$\circ \text{---} \bullet$	Korrespondenzbeziehung bei der LAPLACE - Transformation (Zeitbereich-Frequenzbereich)

## 1. Einleitung

An vielen Konstruktionen treten unerwünschte Schwingungen auf, z.B. Türme im Wind, Maschinen auf schwingenden Fundamenten, Fahrzeuge auf unebenen Fahrbahnen und vieles andere mehr. Als wesentliche Aufgabenstellungen zur Verringerung von Schwingungseinflüssen sind die Schwingungstilgung und die Schwingungsisolation zu nennen.

Zur Schwingungstilgung und -isolation werden diskrete, passive mechanische Bauelemente betrachtet. Die Wirkung dieser mechanischen Systeme wird beeinflusst von der

- Struktur und den
- Bauelementwerten

Bei der bisherigen Entwurfspraxis für mechanische Tilger und Schwingungsisolatoren greift man aus der Menge aller mechanischen Strukturen zuerst eine heraus. Die Bauelementwerte werden nun z.B. einer Optimierung unterzogen, um eine geforderte Übertragungseigenschaft zu erzielen. Die ausgewählte Struktur beschränkt jedoch in jedem Fall die Optimierungsmöglichkeiten. Nur durch Einblick in die physikalische Wirkungsweise mechanischer Systeme bei bestimmten Erregungen gelingt eine optimale Strukturauswahl, z.B. bei Störungen mit schmalen Frequenzband. Liegen Störungen vor, die breiter über das Frequenzband verteilt sind, und sind die Bauteile, für die eine Schwingungstilgung oder -isolation vorgenommen werden soll, zudem kompliziert, kann der physikalische Zusammenhang unanschaulich werden. In der Praxis kommt es durch willkürliche Auswahl mechanischer Strukturen vor, daß die Schwingungstilgung und die Schwingungsisolation nicht die gewünschten Erfolge bringen. Aus diesem Grunde gewinnen aktive Bauelemente, die mit den Methoden der Regelungstechnik konzipiert werden, in jüngerer Zeit an Bedeutung. Die Regelung mechanischer Strukturen ist jedoch aufwendig, kostspielig und störanfälliger als der Einsatz passiver mechanischer Bauelemente.

In dieser Arbeit wird eine neue Methode zur Synthese, d.h. zum Entwurf, passiver mechanischer Systeme vorgestellt. Der Hauptvorteil liegt im Wegfall des Auswahlproblems einer geeigneten mechanischen Struktur zu speziellen Schwingungsproblemen. Aus der Optimierung zur Anpassung an eine

Übertragungsvorschrift geht bei diesem Verfahren stets die optimale Struktur mit den optimalen Bauelementen hervor.

Die vorgestellte Entwurfstheorie basiert auf der Netzwerksynthese der Elektrotechnik, wo sie zu einem selbständigen Teilgebiet geworden ist. Große Bedeutung besitzt die Netzwerksynthese beispielsweise in der Nachrichtentechnik. R. UNBEHAUEN [36] schreibt in einem Standardwerk zur Netzwerksynthese: "Die deduktive Methode wurde hier zu einer prinzipiellen Vorgehensweise entwickelt, die dazu geeignet ist, auch in anderen Fällen der Technik die spezielle Aufgabe der Synthese einer Lösung zuzuführen." Von RUPPRECHT [26] wird betont, daß es sich bei der Netzwerksynthese um eine axiomatische Theorie handelt, die im Gegensatz zur Netzwerkanalyse kein Gegenstück in der theoretischen Mechanik hat.

Das Ziel dieser Arbeit besteht in der Aufbereitung der Netzwerksynthese für die Strukturmechanik. Die Methoden bieten sich als Entwurfstheorie diskreter, passiver mechanischer Systeme wie Tilger und Schwingungsisolatoren an. Anhand von Aufgabenstellungen der Schwingungstechnik sollen Einsatzgebiete der mechanischen Netzwerksynthese aufgezeigt werden.

Die Methoden der Netzwerksynthese machen es notwendig, mechanische Systeme als Netzwerke darzustellen. Anstelle direkter Analogiebetrachtungen zwischen elektrischen und mechanischen Systemen wird von einer allgemeinen Netzwerkttheorie ausgegangen. Hierdurch soll der allgemeine Charakter der Synthesemethode hervorgehoben werden. Diese Arbeit möge im Sinne von R. UNBEHAUEN auch als Anregung für andere Ingenieurdisziplinen als der Elektrotechnik und der Mechanik angesehen werden.

## 2. Allgemeine Netzwerke

Im folgenden werden Begriffe, Definitionen und Darstellungsformen einer der Mechanik übergeordneten, allgemeinen Netzwerktheorie eingeführt.

Netzwerke sind eine Möglichkeit neben anderen zur Darstellung und Beschreibung einer Klasse von Modellsystemen technischer Objekte, die verschiedenen physikalischen Bereichen (Objektbereichen) entstammen können. Bei den betrachteten Modellsystemen sollen folgende Voraussetzungen zutreffen:

- a) Die das System beschreibenden Variablen können in Flußgrößen und Differenzgrößen, deren Produkt eine Leistung darstellt, unterschieden werden. In den einzelnen Objektbereichen sind dies z.B.

<u>Flußgröße</u>	<u>Differenzgröße</u>
Kraft	Geschwindigkeit
Drehmoment	Winkelgeschwindigkeit
elektr. Strom	elektr. Spannung
Volumenstrom	Druck
Entropiestrom	Temperatur

Flußgrößen werden an einer Stelle gemessen (1-Punkt-Variable). Bei Differenzgrößen ist stets die Angabe einer Bezugsstelle erforderlich. Zur Feststellung der Differenzgröße müssen daher zwei Meßstellen angegeben werden (2-Punkt-Variable).

- b) Das Modellsystem kann auf eine endliche Menge von Bauelementen bzw. Netzwerkelementen zurückgeführt werden. Die Netzwerkelemente können Energie speichern, erzeugen oder verbrauchen. Innerhalb eines Bauelementes sollen die räumlichen Ausbreitungsvorgänge vernachlässigbar sein (konzentrierte Bauelemente), so daß sich das Bauelement durch gewöhnliche Differential- und Integraloperationen in der Zeit  $t$  beschreiben läßt.
- c) Die Netzwerkelemente werden durch ideale Verbindungselemente verknüpft. Die idealen Verbindungselemente dienen zur Übertragung der Flußgrößen und können weder Energie speichern, erzeugen oder verbrauchen.

Das oben definierte Gebilde wird als Netzwerk bezeichnet. Von einem Netzwerk wird weiter die Erfüllung folgender Gesetze gefordert:

1. Schnittgesetz für Flußgrößen:

Wird ein beliebiger Teil des Netzwerkes herausgeschnitten, so verschwindet zu jedem Zeitpunkt die Summe aller in das Teilnetzwerk ein- und austretender Flüsse. In den verschiedenen physikalischen Bereichen ist das Gesetz als Kirchhoffsche Knotenregel, Gleichgewichtsbedingung, Kontinuitätsgesetz usw. bekannt.

2. Umlaufgesetz für Differenzgrößen:

Bei einem beliebigen Umlauf innerhalb des Netzwerkes verschwindet zu jedem Zeitpunkt die Summe aller über dem Umlauf ermittelten Differenzgrößenunterschiede. Dieses Gesetz ist z.B. in der Elektrotechnik als Kirchhoffsche Maschenregel bekannt. In der Mechanik besteht eine Analogie in den (geometrischen) Verträglichkeitsbedingungen.

Aus der Menge der konzentrierten Netzwerkelemente werden die Zweipole und Zweitore (andere Bezeichnung: Vierpol) ausgewählt.

Ein Zweipol wird in Abb. 2-1 dargestellt.

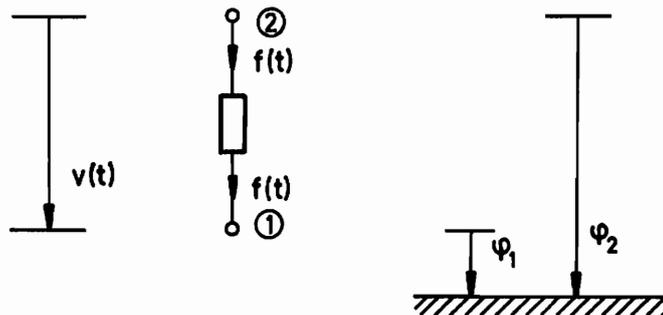


Abb. 2-1 Zweipol

Die Knoten oder Pole 1 und 2 besitzen bezüglich eines Bezugsniveaus die Potentiale  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , woraus sich die Differenzgröße

$$v = \psi_2 - \psi_1 \quad (2-1)$$

ableitet.

Ist die im Zweipol zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t \geq t_0$  (für jedes  $t_0$ ) gespeicherte Energie

$$E(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) f(\tau) d\tau + E(t_0) \quad (2-2)$$

$$( \text{sofern } 0 \leq E(t_0) \leq E_{max} < \infty )$$

positiv, handelt es sich um ein passives Netzwerkelement. Anderenfalls wird es als aktiv bezeichnet.

Folgende Definitionen werden eingeführt:

a) Integrierte Flußgröße (Mechanik: Impuls)

$$q(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau + q(0) \quad (2-3a)$$

Unter Anwendung der LAPLACE-Transformation erhält man

$$Q(s) = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} q(0) \quad (2-3b)$$

b) Integrierte Differenzgröße (Mechanik: Weg)

$$\psi(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau + \psi(0) \quad (2-4a)$$

$$\psi(s) = \frac{1}{s} V(s) + \frac{1}{s} \psi(0) \quad (2-4b)$$

Mit Hilfe dieser Definitionen werden folgende passive, zweipolige Standard-Netzwerkelemente klassifiziert:

a) Verbraucher

$$v(t) = r \cdot f(t)$$



$$V(s) = r \cdot F(s)$$

(2-5)

b) Flußgrößenspeicher

$$q(t) = m \cdot v(t)$$



$$Q(s) = m \cdot V(s)$$

(2-6)

Aus Gl.(2-3a) folgt

$$m v(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau + m v(0)$$

$$\Rightarrow f(t) = m \cdot \dot{v}(t)$$

bzw. nach Gl.(2-3b)

$$m V(s) = \frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} m v(0)$$

$$\Rightarrow F(s) = m s V(s) - m v(0) \quad (2-7)$$

c) Differenzgrößenspeicher

$$\psi(t) = n \cdot f(t)$$



$$\Psi(s) = n \cdot F(s)$$

(2-8)

Aus Gl.(2-4a) folgt

$$n f(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau + n f(0)$$

$$\Rightarrow v(t) = n \cdot \dot{f}(t)$$

bzw. nach Gl.(2-4b)

$$n F(s) = \frac{1}{s} V(s) + \frac{1}{s} n f(0)$$

$$\Rightarrow V(s) = n s F(s) - n f(0) \quad (2-9)$$

Aufgrund der Zusammenhänge Gln.(2-5) bis (2-7) werden die Netzwerkelemente als linear und zeitinvariant bezeichnet, d.h.  $r$ ,  $m$  und  $n$  sind keine Funktionen der Zeit. Wegen der vorausgesetzten Passivität sind  $r$ ,  $m$  und  $n$  positiv.

Bei der weiteren Betrachtung werden die Anfangswerte  $v(0)$  und  $f(0)$  als verschwindend angenommen. In der Darstellung der LAPLACE-Transformation werden für den Zusammenhang zwischen Fluß- und Differenzgröße eines Zweipols folgende Größen eingeführt:

a) Impedanz

$$Z(s) = \frac{V(s)}{F(s)} \quad (2-10)$$

b) Admittanz

$$Y(s) = \frac{F(s)}{V(s)} \quad (2-11)$$

Erregungen gehen von Quellen (aktive, zweipolige Netzwerkelemente) aus. Eine ideale Differenzgrößenquelle (siehe Abb. 2-2) liefert unabhängig von der anliegenden Last eine konstante Differenzgröße. Eine ideale Flußgrößenquelle (siehe Abb. 2-3) gibt eine konstante Flußgröße unabhängig von der Belastung ab.

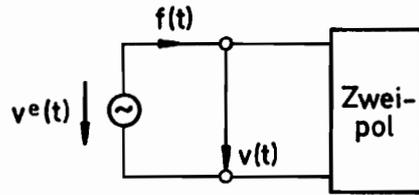


Abb. 2-2 Ideale Differenzgrößenquelle

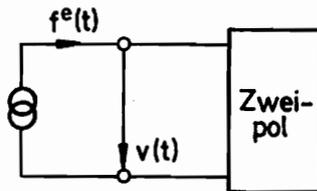


Abb. 2-3 Ideale Flußgrößenquelle

Lastabhängige Quellen werden näherungsweise auf ideale Quellen mit inneren Impedanzen bzw. Admittanzen zurückgeführt.

Gegenüber den Zweipolen besitzen die Zweitore zwei Eingänge (Tore) bzw. vier Pole. An jedem Tor kann eine Flußgröße und eine Differenzgröße gemessen werden (siehe Abb. 2-4).

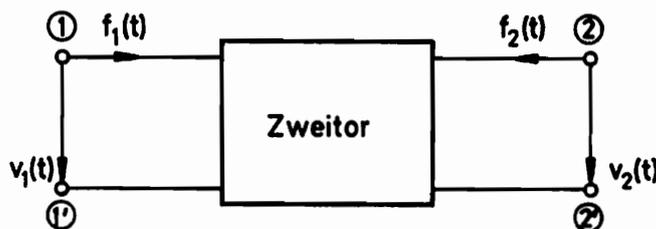


Abb. 2-4 Zweitor

Es wird angenommen, daß die Zweitore lineare, zeitinvariante Netzwerkelemente sind, d.h. im Inneren eines Zweitors gelten zu den Gln.(2-5) bis (2-8) analoge lineare Beziehungen mit zeitinvarianten Proportionalitätsfaktoren. Wie bei Zweipolen bietet sich eine Beschreibung mit LAPLACE-transformierten Größen an. Unter Annahme verschwindender Anfangswerte sind mehrere Beschrei-

bungsformen möglich, von denen hier nur die drei wesentlichen gezeigt werden:

a) Impedanzdarstellung

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{21}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{bmatrix} \quad (2-12a)$$

$$\underline{v}(s) = \underline{Z}(s) \cdot \underline{f}(s) \quad (2-12b)$$

$\underline{Z}(s)$  : *Impedanzmatrix*

b) Admittanzdarstellung

$$\begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (2-13a)$$

$$\underline{f}(s) = \underline{Y}(s) \cdot \underline{v}(s) \quad (2-13b)$$

$\underline{Y}(s)$  : *Admittanzmatrix*

c) Kettendarstellung

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ F_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -F_2(s) \end{bmatrix} \quad (2-14a)$$

$$\underline{w}_1(s) = \underline{A}(s) \cdot \underline{w}_2(s) \quad (2-14b)$$

$\underline{A}(s)$  : *Kettenmatrix*

Die Koeffizienten  $z_{ij}$ ,  $y_{ij}$  und  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) können mit Hilfe von Tabellen (siehe RUPPRECHT [26]) umgerechnet werden. In einigen Fällen existie-

ren nicht immer alle Matrizen  $\underline{Z}$ ,  $\underline{Y}$  und  $\underline{A}$  gleichzeitig.

Die Energie in einem zweitorigen Netzwerkelement lautet für  $t \geq t_0$ :

$$E(t) = \int_{t_0}^t [v_1(\tau) \cdot f_1(\tau) + v_2(\tau) \cdot f_2(\tau)] d\tau \quad (2-15)$$

( mit  $E(t_0) = 0$  )

Gilt  $E(t) \geq 0$  für jedes  $t_0$  und für jedes  $t \geq t_0$ , handelt es sich um ein passives Zweitor.

Die wichtigsten passiven Zweitore sind:

a) Idealer Übertrager

Charakterisiert wird dieser durch die Kettendarstellung

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ f_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\ddot{u}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

Aus Gl.(2-16) erhält man

$$v_1(t) \cdot f_1(t) + v_2(t) \cdot f_2(t) = 0$$

d.h. im idealen Übertrager wird keine Energie gespeichert. Die Impedanz- und Admittanzdarstellungen des idealen Übertragers existieren nicht.

b) Gekoppelter Übertrager

Gekoppelte Übertrager besitzen entweder die Form

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1(t) \\ \dot{i}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

oder die Form

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

Die zu den Gln.(2-17) und (2-18) gehörenden physikalischen Systeme sind verschieden. Im Sinne der zuvor eingeführten Definitionen soll ein System nach Gl.(2-17) als differenzgrößenspeichernder gekoppelter Übertrager und ein System nach Gl.(2-18) als flußgrößenspeichernder gekoppelter Übertrager bezeichnet werden.

Wendet man die LAPLACE-Transformation unter Voraussetzung verschwindender Anfangswerte an, erhält man aus Gl.(2-17)

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{bmatrix} \quad (2-19a)$$

bzw.

$$\underline{v}(s) = s \underline{L} \underline{f}(s) \quad (2-19b)$$

und aus Gl.(2-18)

$$\begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (2-20a)$$

bzw.

$$\underline{f}(s) = s \underline{M} \underline{v}(s) \quad (2-20b)$$

Die Energie (vgl. Gl.2-15) ergibt sich unter Verwendung der Gl.(2-17) zu

$$E(t) = \frac{1}{2} [ L_{11} f_1^2(t) + 2 L_{12} f_1(t) f_2(t) + L_{22} f_2^2(t) ] \quad (2-21)$$

und unter Verwendung von Gl.(2-18)

$$E(t) = \frac{1}{2} [ M_{11} f_1^2(t) + 2 M_{12} f_1(t) f_2(t) + M_{22} f_2^2(t) ] \quad (2-22)$$

Gekoppelte Übertrager werden als passiv vorausgesetzt, so daß für die quadratischen Formen (2-21) und (2-22) gelten muß:

$$L_{11} \cong 0 \quad (2-23a)$$

$$L_{22} \cong 0 \quad (2-23b)$$

$$L_{11} L_{22} - L_{12}^2 \cong 0 \quad (2-23c)$$

bzw.

$$M_{11} \cong 0 \quad (2-24a)$$

$$M_{22} \cong 0 \quad (2-24b)$$

$$M_{11} M_{22} - M_{12}^2 \cong 0 \quad (2-24c)$$

Sind die Gleichungen (2-23c) bzw. (2-24c) mit dem Gleichungszeichen erfüllt und gilt  $L_{11} \rightarrow \infty$  und  $L_{22} \rightarrow \infty$  bzw.  $M_{11} \rightarrow \infty$  und  $M_{22} \rightarrow \infty$ , erhält man aus den gekoppelten Übertragern die Charakteristik eines idealen Übertragers mit konstantem Übersetzungsverhältnis

$$\ddot{u} = \sqrt{\frac{L_{11}}{L_{22}}} \quad (2-25)$$

bzw.

$$\ddot{u} = \sqrt{\frac{M_{22}}{M_{11}}} \quad (2-26)$$

### 3. Übergang von den allgemeinen zu den mechanischen Netzwerken

Es werden im folgenden mechanische Systeme mit translatorischen Bewegungen, die nur in einer Raumrichtung vorliegen mögen, betrachtet. Solche Systeme führen auf sogenannte eindimensionale Netzwerke. Mechanische Systeme mit rotatorischen Bewegungen mit einer Drehachse nur in einer Raumrichtung verhalten sich physikalisch vollkommen analog. Deshalb können die nachfolgenden Begriffe und Beziehungen für translatorische Systeme auf rotatorische übertragen werden.

Die wesentlichen Bauelemente in der Mechanik sind Feder, Dämpfer und Masse. Ein System aus diesen Elementen ermöglicht nur Bewegungen auf einer Geraden. Mit den Bauelementen Hebel und Balken sind parallele translatorische Bewegungen möglich. Im Gegensatz zur üblichen mechanischen Darstellung werden zur Beschreibung des Zustandes eines solchen Systems die Geschwindigkeiten und nicht die Lagekoordinaten herangezogen.

Die Darstellung eines mechanischen Systems erfolgt üblicherweise so, daß die räumliche Anordnung der Bauelemente erhalten bleibt. In der Netzwerkdarstellung werden die Elemente so dargestellt, daß die sinnbildliche Anordnung nicht mit den räumlichen Koordinaten übereinstimmt. Durch die nachfolgenden Definitionen wird die Netzwerkdarstellung physikalisch sinnvoll und anschaulich.

Zunächst werden mechanische Netzwerkelemente mit zwei Systempunkten (Pole) betrachtet, die als Zweipole eingeordnet werden können. Einen allgemeinen mechanischen Zweipol zeigt Abb. 3-1 in der orientierungsgebundenen Darstellung. Die Punkte 1 und 2 besitzen gegenüber einem Inertialsystem die Absolutgeschwindigkeiten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , wobei eine positive Richtung festgelegt wurde. Der Aktionsrichtungsvektor  $\vec{a}$  stimmt mit dieser Richtung überein, während der Reaktionsrichtungsvektor  $\vec{r}$  entgegengesetzt ist. Eine positive Geschwindigkeit wird in der Netzwerkdarstellung (siehe Abb. 2-1) in Richtung abnehmenden Potentials dargestellt. So ergibt sich eine unterschiedliche Orientierung der Differenzgröße bzw. Relativgeschwindigkeit

$$v = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (3-1)$$

(man vergleiche Gl. 2-1).

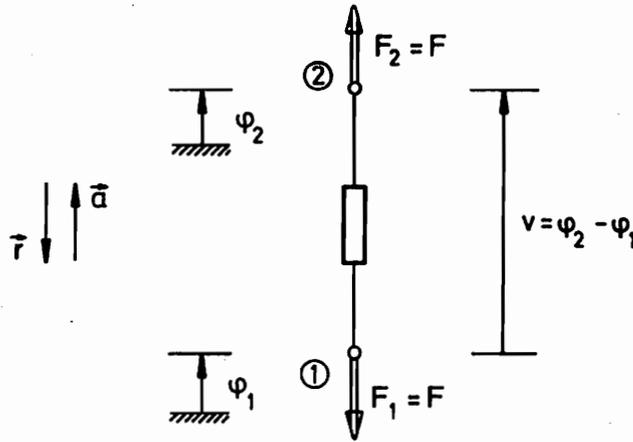


Abb. 3-1 Zweipol in orientierungsgebundener mechanischer Darstellung

Ein Unterschied besteht auch in der Darstellung der Kräfte. In Abb. 3-1 werden Kräfte als positiv bezeichnet, die in Richtung  $\vec{a}$  weisen. So ergibt sich das Kräftegleichgewicht

$$F_2 - F_1 = 0 \quad (3-2)$$

In der Netzwerkdarstellung Abb. 3-2 wird eine Bilanzhülle um das Bauelement gezogen. Kräfte, die in das System eintreten, werden positiv gewertet ( $\vec{a}$  kann auch als Normalenvektor auf einer konvexen Hülle gedeutet werden).

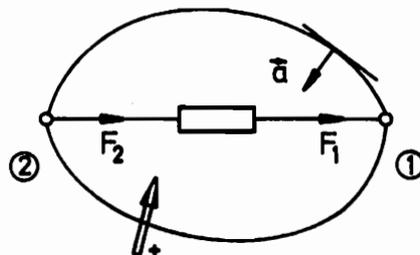


Abb. 3-2 Festlegung von positiven Kräften im Netzwerk

Mit dieser Orientierung stimmt die Flußgrößenbilanz mit dem Gleichgewicht in Aktionsrichtung überein.

Die mechanischen Standard-Bauelemente, welche zu den passiven Zweipolen zählen, sind:

a) Dämpfer ( $\hat{=}$  Verbraucher)

$$V(s) = \frac{1}{c} F(s) \quad (3-3)$$

c: Dämpfungskonstante

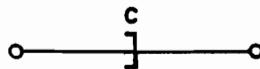


Abb. 3-3

Symbol eines Dämpfers

b) Masse ( $\hat{=}$  Flußgrößenspeicher)

$$V(s) = \frac{1}{m \cdot s} F(s) \quad (3-4)$$

m: Masse

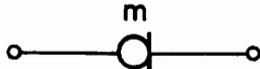


Abb. 3-4

Symbol einer Masse

c) Feder ( $\hat{=}$  Differenzgrößenspeicher)

$$V(s) = \frac{s}{k} F(s) \quad (3-5)$$

k: Federsteifigkeit



Abb. 3-5

Symbol einer Feder

Bei der Masse wird der zweite Systempol durch das Inertialsystem dargestellt. Da sich die Trägheitskraft einer Einzelmasse immer proportional zur Absolutgeschwindigkeit verhält, ist die Masse immer mit dem Inertialsystem verknüpft ("geerdet"). Dies ist eine folgenschwere Einschränkung für die mechanische Netzwerksynthese.

Am Beispiel eines gekoppelten mechanischen Schwingers (siehe Abb. 3-6) soll

gezeigt werden, daß die eingeführte Darstellungsweise physikalisch sinnvoll und anschaulich ist.

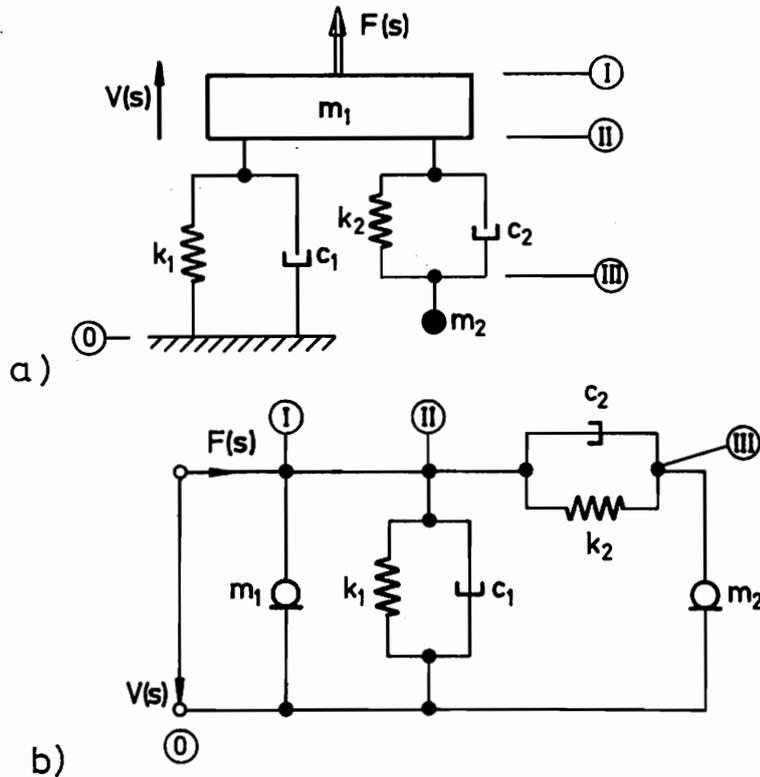


Abb. 3-6 a) Mechanisches System; b) Mechanisches Netzwerk

Entsprechend den Ausführungen des letzten Kapitels geht man bei Erregungen von idealen Geschwindigkeits- und Kraftquellen aus.

Das ideale Übertragungselement wird mechanisch durch einen Hebel (siehe Abb. 3-7) realisiert. Am Hebel gelten die Beziehungen (vgl. Gl. 2-16)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\ddot{u}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

$$\ddot{u} = \frac{l_1}{l_2} \quad (3-7)$$

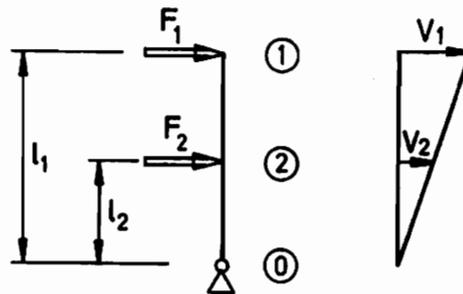


Abb. 3-7 Mechanisches Bauteil Hebel

Die Geschwindigkeiten sind relativ zum Punkt 0. Als schaltungstechnische Darstellung wird eine solche nach Abb. 3-8 gewählt (entspricht einem idealen elektrischen Übertrager).

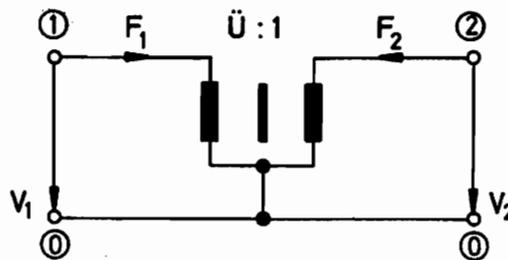


Abb. 3-8 Netzwerkdarstellung eines Hebels

Der starre Balken nach Abb. 3-9 besitzt die gekoppelten Differentialgleichungen (LAPLACE-transformiert):

$$\begin{bmatrix} F_1(s) \\ F_2(s) \end{bmatrix} = \frac{s}{l^2} \begin{bmatrix} mb^2 + \theta & mab - \theta \\ mab - \theta & ma^2 + \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (3-8a)$$

$$(l = a + b)$$

$$\underline{f}(s) = \underline{Y}(s) \cdot \underline{v}(s) = s \underline{M} \cdot \underline{v}(s) \quad (3-8b)$$

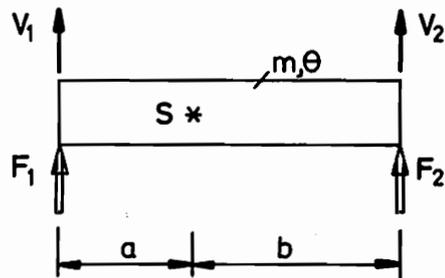


Abb. 3-9 Starrer Balken

Die Gleichungen (3-8a,b) entsprechen den Gleichungen (2-20a,b), d.h. ein starrer Balken entspricht dem gekoppelten Übertrager. Für  $a + b \neq 0$  erfüllt die Massenmatrix  $\underline{M}$  aus Gl.(3-8a) die Ungleichungen (2-24a,b,c). Insbesondere erhält man

$$M_{11} M_{22} - M_{12}^2 = \frac{m \theta}{(a + b)^2} \cong 0 \quad (3-9)$$

wegen  $m, \theta \cong 0$ .

#### 4. Zweipolfunktionen

Die Impedanz  $Z(s)$  und die Admittanz  $Y(s)$  gehören zur Klasse der positiv-reellen Funktionen oder Zweipolfunktionen. Im folgenden wird ein passives Netzwerk aus Massen, Dämpfern, Federn und Hebeln betrachtet, für welches die Admittanz  $Y(s)$  abgeleitet wird. Die Eigenschaften von  $Y(s)$  werden analysiert, worauf der Begriff einer positiv-reellen Funktion spezifiziert wird. Die Ableitung der Admittanz  $Y(s)$  soll durch zwei Betrachtungsweisen erfolgen:

1. Topologische Analyse
2. Betrachtung des Differentialgleichungssystems eines mechanischen Schwingungssystems

##### 4.1. Topologische Analyse

Ein Netzwerk bestehe aus  $N$  Zweigen mit passiven oder aktiven Elementen. Zur Beschreibung des Systems sind  $N_p \leq N$  unabhängige Variable, z.B. Knotenpotentiale (Absolutgeschwindigkeiten), erforderlich. Alle Verträglichkeitsbedingungen und das Gleichgewicht in jedem Knoten seien erfüllt. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^N V_i(s) \cdot F_i^*(s) = 0 \quad (4-1a)$$

$$\sum_{i=1}^N V_i^*(s) \cdot F_i(s) = 0 \quad (4-1b)$$

wobei über alle Elemente zu summieren ist und wenn mit  $V_i$  die Relativgeschwindigkeit über den Zweig  $i$  und mit  $F_i^*$  die konjugiert-komplexe Kraft über diesen Zweig  $i$  bezeichnet werden. Diese Aussage wird als Satz von TELLEGEN bezeichnet.

Beweis: Die Zweiggeschwindigkeiten  $V_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) können als Linearkombination der Knotenpotentiale  $\hat{V}_k$  ( $k = 1, \dots, N_p$ ) dargestellt werden:

$$V_i = \sum_{k=1}^{N_p} J_{ik} \hat{V}_k \quad (4-2)$$

Das Gleichgewicht für einen Knoten  $k$  wird beschrieben durch:

$$\sum_{i=1}^N J_{ik} F_i = 0 \quad (4-3)$$

Für das Produkt  $V_i \cdot F_i^*$  erhält man mit Gl.(4-1a)

$$V_i \cdot F_i^* = F_i^* \sum_{k=1}^{N_p} J_{ik} \hat{V}_k$$

Es wird die Summe über alle Zweige  $i = 1, \dots, N$  gebildet:

$$\sum_{i=1}^N V_i \cdot F_i^* = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{N_p} F_i^* J_{ik} \hat{V}_k$$

oder

$$\sum_{i=1}^N V_i \cdot F_i^* = \sum_{k=1}^{N_p} \left\{ \hat{V}_k \left[ \sum_{i=1}^N J_{ik} F_i^* \right] \right\}$$

Mit Gl.(4-3) erhält man

$$\sum_{i=1}^N V_i \cdot F_i^* = 0$$

was zu beweisen war.

Der Satz von TELLEGEN wird in Form von Gl.(4-1b) angewendet. Für die passiven mechanischen Netzwerkelemente gelten die Zusammenhänge:

a) Dämpfer

$$F_\alpha = c_\alpha V_\alpha \quad (4-4)$$

b) Feder

$$F_{\beta} = \frac{k_{\beta}}{s} V_{\beta} \quad (4-5)$$

c) Masse

$$F_{\gamma} = m_{\gamma} s V_{\gamma} \quad (4-6)$$

d) Hebel

$$\left. \begin{aligned} V_{\mu+1}^* &= \ddot{u} V_{\mu}^* \\ F_{\mu+1} &= -\frac{1}{\ddot{u}} F_{\mu} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_{\mu}^* F_{\mu} + V_{\mu+1}^* F_{\mu+1} = 0 \quad (4-7)$$

e) Balken

$$\begin{bmatrix} V_{\nu} \\ V_{\nu+1} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} M_{11\nu} & M_{12\nu} \\ M_{12\nu} & M_{22\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{\nu} \\ F_{\nu+1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} V_{\nu}^* F_{\nu} + V_{\nu+1}^* F_{\nu+1} &= \\ &= s \left[ M_{11\nu} V_{\nu}^* V_{\nu} + M_{12\nu} (V_{\nu}^* V_{\nu+1} + V_{\nu}^* V_{\nu+1}) + \right. \\ &\quad \left. + M_{22\nu} V_{\nu+1}^* V_{\nu+1} \right] \end{aligned} \quad (4-8)$$

oder in Matrixschreibweise (vgl. Kapitel 2)

$$V_{\nu}^* F_{\nu} + V_{\nu+1}^* F_{\nu+1} = \underline{x}_{\nu}^{*T} \underline{f}_{\nu} = s \underline{x}_{\nu}^{*T} \underline{M}_{\nu} \underline{x}_{\nu}$$

Da  $\underline{M}_{\nu}$  positiv-semidefinit ist, gilt

$$\underline{x}_{\nu}^{*T} \underline{M}_{\nu} \underline{x}_{\nu} \geq 0 \quad (4-9)$$

für jedes  $V_{\nu}$ ,  $V_{\nu+1}$ , d.h. der Ausdruck in eckigen Klammern von Gl. (4-8) ist immer positiv.

Die Gl.(4-1b) wird nach den Netzwerkelementen a bis e aufgegliedert:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N V_i^* F_i &= \sum_{\alpha} V_{\alpha}^* F_{\alpha} + \sum_{\beta} V_{\beta}^* F_{\beta} + \sum_{\gamma} V_{\gamma}^* F_{\gamma} + \\
 &+ \sum_{\mu} [V_{\mu}^* F_{\mu} + V_{\mu+1}^* F_{\mu+1}] + \\
 &+ \sum_{\nu} [V_{\nu}^* F_{\nu} + V_{\nu+1}^* F_{\nu+1}] - V^* F = 0
 \end{aligned}
 \tag{4-10}$$

Der letzte Term stammt von der Quelle. Mit den Gln.(4-4) bis (4-8) erhält man aus Gl.(4-10):

$$\begin{aligned}
 \sum_{\alpha} c_{\alpha} V_{\alpha}^* V_{\alpha} + \frac{1}{s} \sum_{\beta} k_{\beta} V_{\beta}^* V_{\beta} + s \sum_{\gamma} m_{\gamma} V_{\gamma}^* V_{\gamma} + \\
 + s \sum_{\nu} [M_{11\nu} V_{\nu}^* V_{\nu} + M_{12\nu} (V_{\nu}^* V_{\nu+1} + V_{\nu} V_{\nu+1}^*) + \\
 + M_{22\nu} V_{\nu+1}^* V_{\nu+1}] = V^* F
 \end{aligned}
 \tag{4-11}$$

Die Admittanz

$$Y(s) = \frac{F(s)}{V(s)}$$

lautet nach Gl.(4-11)

$$Y(s) = W + \frac{1}{s} U + s T \tag{4-12}$$

wobei folgende Abkürzungen eingeführt wurden:

$$W = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \frac{V_{\alpha}^* V_{\alpha}}{V^* V} \tag{4-13}$$

$$U = \sum_{\beta} k_{\beta} \frac{V_{\beta}^* V_{\beta}}{V^* V} \tag{4-14}$$

$$T = \sum_Y m_Y \frac{V_Y^* K_Y}{V^* V} + \sum_V \left[ M_{11V} \frac{K_V^* V_V}{V^* V} + M_{12V} \frac{V_V^* V_{V+1} + V_V V_{V+1}^*}{V^* V} + M_{22V} \frac{V_{V+1}^* V_{V+1}}{V^* V} \right] \quad (4-15)$$

Wegen Gl.(4-9) und der positiven Bauelementwerte  $c_\alpha$ ,  $k_\beta$ ,  $m_\gamma$  gilt:

$$W \cong 0 \quad (4-16a)$$

$$U \cong 0 \quad (4-16b)$$

$$T \cong 0 \quad (4-16c)$$

#### 4.2. Betrachtung des Differentialgleichungssystems eines mechanischen Schwingungssystems

Ein mechanischer Schwinger mit passiven Balken, Hebeln, Dämpfern, Federn und Punktmassen kann in der Form

$$s \underline{M} \underline{v}(s) + \underline{C} \underline{v}(s) + \frac{1}{s} \underline{K} \underline{v}(s) = \underline{f}(s) \quad (4-17)$$

beschrieben werden. Mit  $V_j$  werden die zur Beschreibung des Systems notwendigen Knotengeschwindigkeiten und mit  $F_j$  die am Knoten angreifende äußere Kraft bezeichnet. Vereinbarungsgemäß gelte, daß  $V_1$  und  $F_1$  mit den Erregungsgrößen  $V$  und  $F$  identisch sind. Dann gilt:

$$\underline{f}^T = [F, 0, \dots, 0] \quad (4-18)$$

$$V_1 \cong V \quad (4-19)$$

Es wird das Skalarprodukt  $\underline{v}^{*T} \cdot \underline{f}$  gebildet, das mit den Gln.(4-18) und (4-19 a,b) übergeht in

$$\underline{v}^{*T} \underline{f} = \underline{v}^{*T} \left[ s \underline{M} + \underline{C} + \frac{1}{s} \underline{K} \right] \underline{v} = V^* F \quad (4-20)$$

Nun erhält man für die Admittanz:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{V(s)} = \frac{1}{V^*(s)V(s)} \underline{v}^{*T} \left[ s \underline{M} + \underline{C} + \frac{1}{s} \underline{K} \right] \underline{v} \quad (4-21)$$

Die Massenmatrix  $\underline{M}$ , Dämpfungsmatrix  $\underline{C}$  und Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  sind wegen der vorausgesetzten Passivität des Systems positiv-definit (positiv-semidefinit). Der Vergleich zu den Gln.(4-16 a,b,c) führt auf

$$W = \frac{1}{V^*V} \underline{v}^{*T} \underline{C} \underline{v} \cong 0 \quad (4-22a)$$

$$U = \frac{1}{V^*V} \underline{v}^{*T} \underline{K} \underline{v} \cong 0 \quad (4-22b)$$

$$T = \frac{1}{V^*V} \underline{v}^{*T} \underline{M} \underline{v} \cong 0 \quad (4-22c)$$

so daß die Gl.(4-12) eine allgemeine Darstellungsform einer Admittanz ist.

### 4.3 Eigenschaften von Admittanzen und Impedanzen

Die Admittanz  $Y(s)$  hat folgende Eigenschaften:

1.  $\text{Re } Y(s) > 0$  für  $\text{Re } s > 0$   
d.h.  $Y(s)$  ist positiv
2. für reelle  $s$  ist  $Y(s)$  auch reell

Beweis: Gl.(4-12) lautet mit  $s = \sigma + i\omega$

$$Y(s) = W + \sigma T + \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} U + i\omega \left[ T - \frac{U}{\sigma^2 + \omega^2} \right] \quad (4-23)$$

Da nicht alle inneren Kräfte für einen Wert von  $s$  verschwinden, ist mindestens einer der Größen  $W$ ,  $U$ ,  $T$  von Null verschieden, d.h.  $W > 0$  oder  $U > 0$  oder  $T > 0$ . Dann gilt für  $\sigma = \text{Re } s > 0$ :

$$\text{Re}[Y(s)] = W + \sigma T + \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2} U > 0$$

Andererseits erkennt man für reelles  $s = \sigma$

$$Y(\sigma) = \operatorname{Re}[Y(\sigma)]$$

d.h.  $Y(s)$  ist für reelle  $s$  auch reell. Damit sind Punkt 1 und 2 bewiesen.

Teilt man  $Y(s)$  in Real- und Imaginärteil auf, d.h.

$$Y(s) = R(s) + iX(s) \quad (4-24)$$

erhält man

$$Z(s) = \frac{1}{Y(s)} = \frac{1}{|Y(s)|^2} [R(s) - iX(s)] \quad (4-25)$$

Anhand der Gl. (4-25) erkennt man, daß auch  $Z(s)$  positiv und reell ist. Zu diesem Resultat kommt man auch, wenn man von Gl.(4-1a) ausgehend die Impedanzbeziehungen anstelle der Admittanzbeziehungen für die Netzwerkelemente herangezogen hätte. Da nun  $Y(s)$  und  $Z(s)$  positiv sind, folgt einerseits, daß beide Funktionen keine Nullstellen in der offenen rechten Halbebene besitzen und, da  $Y(s)$  und  $Z(s)$  reziprok zueinander sind, daß beide Funktionen keine Pole in der offenen Halbebene besitzen können. Wegen der adäquaten Eigenschaften von  $Y(s)$  und  $Z(s)$  spricht man von Zweipolfunktionen. Aus den bereits bewiesenen Aussagen sollen die Eigenschaften von Zweipolfunktionen auf dem Rand  $s = i\omega$  der rechten Halbebene abgeleitet werden. Zu diesem Zweck wird eine Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  mit einer  $n$ -fachen Nullstelle  $s_0 = i\omega_0$  betrachtet. Für eine solche Funktion gilt eine TAYLOR-Reihenentwicklung

$$\zeta(s) = a_n (s - s_0)^n + a_{n+1} (s - s_0)^{n+1} + \dots \quad (4-26)$$

in der Umgebung von  $s_0 = i\omega_0$  ( $\omega_0 \neq \infty$ ). Auf einem kleinen Halbkreis  $C$  mit dem Radius  $r$  innerhalb der offenen rechten Halbebene, d.h.  $|\psi| \leq \frac{\pi}{2}$  (siehe Abb. 4-1) gilt

$$s - s_0 = r e^{i\psi} \quad (4-27)$$

$$\left( -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

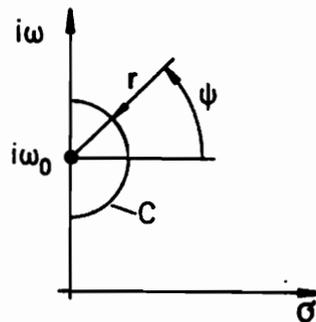


Abb. 4-1 Kurve C um Nullstelle  $s = i\omega_0$

Der Entwicklungskoeffizient  $a_n$  wird komplex angenommen, d.h.

$$a_n = |a_n| e^{i\alpha_n} \quad (4-28)$$

Aus den Gleichungen (4-26), (4-27), (4-28) erhält man für alle  $s \in C$

$$\operatorname{Re} \zeta(s) = |a_n| r^n \cos(\alpha_n + n\psi) + r^{n+1} \rho(r; \psi) \quad (4-29)$$

Die im Restglied auftauchende Größe  $\rho(r, \psi)$  ist für kleine  $r$  beschränkt. Für sehr kleine Radien  $r$  ( $r \rightarrow 0$ ) erweist sich das Restglied gegenüber dem ersten Glied in Gl.(3-29) als von höherer Ordnung klein. Also erhält man für hinreichend kleine  $r$

$$\operatorname{Re} \zeta(s) = |a_n| r^n \cos(\alpha_n + n\psi) + O^{n+1} \quad (4-30)$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

Für  $n = 1$  und  $n = 2$  wird Gl.(4-30) veranschaulicht.

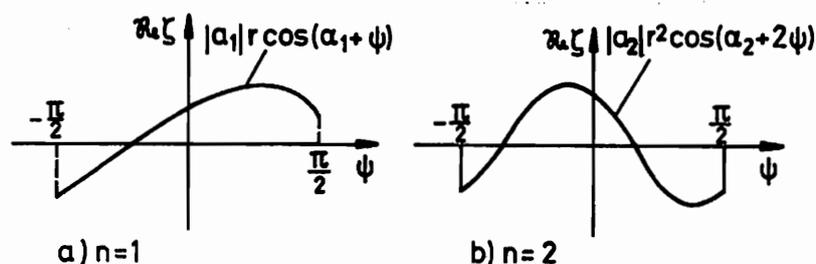


Abb. 4-2 Darstellung der Funktion Gl.(4-30)

Der Realteil von  $\zeta(s)$  für  $s \in \mathbb{C}$  und  $r \rightarrow 0$  wird durch eine Schwingung mit der Frequenz  $n\psi$  dargestellt.

Da nun  $\zeta(s)$  positiv-reell vorausgesetzt wurde, muß hier  $\operatorname{Re} \zeta(s) > 0$  für  $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$  erfüllt sein. Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, wenn:

1.  $n = 1$ , d.h.  $\zeta(s)$  eine Nullstelle höchstens vom ersten Grade besitzt, und
2.  $\alpha_1 = 0$ , d.h.  $a_1$  eine reelle, positive Zahl ist.

In diesem Fall erhält man einen in Abb. 4-3 veranschaulichten Realteil nach Gl.(4-30).

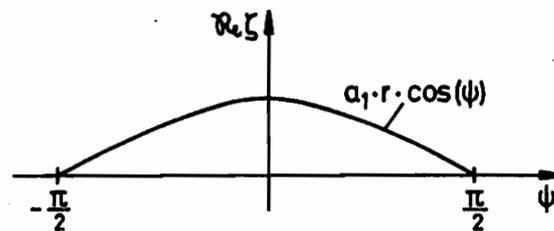


Abb. 4-3 Realteilverlauf nach Gl.(4-30) für eine Zweipolfunktion

Genau für  $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$ , also  $\operatorname{Re} s = 0$  ( $s \in \mathbb{C}$ ), erhält man  $\operatorname{Re} \zeta(s) = 0$ . Wäre  $n > 1$  oder  $\alpha_1 \neq 0$ , würde der Realteil von  $\zeta(s)$  innerhalb  $|\psi| \leq \frac{\pi}{2}$  sicher negativ werden.

Es wird nun angenommen, daß  $\zeta(s)$  eine Nullstelle  $n$ -ten Grades in  $s = \infty$  besitzt. Dann gilt in der Umgebung von  $s = \infty$  die LAURENT-Reihenentwicklung

$$\zeta(s) = \frac{a_{-n}}{s^n} + \frac{a_{-n-1}}{s^{n+1}} + \frac{a_{-n-2}}{s^{n+2}} + \dots \quad (4-31)$$

Betrachtet man die Funktion auf einem Halbkreis  $C$  ähnlich Abb.(4-1), jedoch mit hinreichend groß gewähltem Radius  $r$ , gilt

$$\operatorname{Re} \zeta(s) = \frac{|a_{-n}|}{r^n} \cos(n\psi - \alpha_{-n}) + \frac{1}{r^{n+1}} \rho(r, \psi) \quad (4-32)$$

In der Umgebung der Nullstelle  $s = \infty$  ist  $\rho(r, \psi)$  beschränkt. Das Restglied ist für sehr große Radien  $r$  von höherer Ordnung kleiner als das erste

Glied in Gl.(4-32). In diesem Fall erhält man

$$\operatorname{Re} \zeta(s) = \frac{|a_{-n}|}{r^n} \cos(n\psi - \alpha_{-n}) + O^{n+1} \quad (4-33)$$

$$\left( -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

Die Bedingung  $\operatorname{Re} \zeta(s) > 0$  in  $\operatorname{Re} s > 0$  bzw. hier  $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$  kann wiederum nur mit  $n = 1$  und  $\alpha_{-1} = 0$  erfüllt werden. Eine Nullstelle in  $s = \infty$  kann also ebenfalls nur einfach sein und besitzt einen positiven, reellen Entwicklungskoeffizienten.

Eine Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  besitze eine  $n$ -fache Polstelle in  $s_0 = i\omega_0$ . Die reziproke Funktion, die ebenfalls Zweipolfunktion ist, besitzt dann dort eine  $n$ -fache Nullstelle. Diese Funktion kann man in eine TAYLOR-Reihe um  $s_0 = i\omega_0$  entsprechend Gl.(4-26) entwickeln, wobei aber für eine Zweipolfunktion  $n = 1$  und  $\alpha_1 = 0$  gelten muß. Dann besitzt die Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  aber höchstens eine einfache Polstelle in  $s_0 = i\omega_0$  mit positivem Entwicklungskoeffizienten.

Eine  $n$ -fache Polstelle einer Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  in  $s = \infty$  führt auf eine  $n$ -fache Nullstelle in  $s = \infty$  der reziproken Zweipolfunktion. Es gilt dann dort eine LAURENT-Reihenentwicklung entsprechend Gl.(4-31). Die Polstelle von  $\zeta(s)$  in  $s = \infty$  muß folglich einfach sein und einen positiven Entwicklungskoeffizienten besitzen.

Die Ergebnisse dieses Abschnittes werden in folgendem Satz zusammengefaßt:

#### Satz 4-1

Die Impedanz oder Admittanz eines jeden passiven Zweipols, der aus Federn, Massen, Dämpfern, Hebeln und Balken besteht, ist eine Zweipolfunktion, d.h. eine positiv-reelle Funktion. Eine Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  hat folgende Eigenschaften:

1.  $\operatorname{Re} \zeta(i\omega) \geq 0$  für alle  $\omega$ , für die  $\zeta(i\omega)$  endlich ist
2.  $\zeta(s)$  besitzt in der offenen rechten Halbebene  $\operatorname{Re} s > 0$  keine Null- oder Polstellen
3.  $\zeta(s)$  besitzt, wenn überhaupt, auf der imaginären Achse (einschließlich  $s = \infty$ ) nur einfache Nullstellen und einfache Polstellen mit positiven Entwicklungskoeffizienten.

#### 4.4 Prüfung der Positivität einer rationalen und reellen Funktion

Es wird eine rationale, reelle Funktion

$$\zeta(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n} \quad (4-34)$$

mit reellen Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_m$  und  $b_0, b_1, \dots, b_n$  betrachtet. Soll  $\zeta(s)$  eine Zweipolfunktion sein, muß die Positivität von Gl.(4-34) überprüft werden. Die Eigenschaften einer positiv-reellen Funktion gehen aus Satz 4-1 hervor. Im Sinne der Funktionentheorie handelt es sich bei den Zweipolfunktionen um in  $\operatorname{Re} s > 0$  analytische Funktionen. Mit Hilfe von Sätzen der Funktionentheorie zeigt sich, daß Aussagen über Null- und Polstellen in Satz 4-1 verknüpft sind. Es wird gezeigt, daß die nachfolgenden Sätze für die Überprüfung der Positivität einer rationalen und reellen Funktion hinreichend sind.

##### Satz 4-2

Notwendig und hinreichend für die Positivität einer rationalen, reellen Funktion  $\zeta(s)$  sind die Bedingungen:

- a)  $\operatorname{Re} \zeta(i\omega) \geq 0$  für alle  $\omega$ -Werte, für die  $\zeta(i\omega)$  endlich ist
- b)  $\zeta(s)$  hat in der offenen rechten Halbebene keine Pole
- c) Alle Pole von  $\zeta(s)$  auf der imaginären Achse (einschließlich  $s = \infty$ ) sind einfach und besitzen positive Entwicklungskoeffizienten.

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingungen ergibt sich aus Satz 4-1. Für die Hinlänglichkeit wird das abgeschlossene Gebiet  $\Gamma$  mit der Randkurve  $\bar{\Gamma}$  nach Abb. 4-4 betrachtet. Durch kleine Halbkreise mit den Radien  $r_0, r_1, \dots, r_N$  und einem Großkreis mit dem Radius  $r_\infty$  werden so die Pole auf der imaginären Achse ( $s = 0, s = \pm i\omega_1, \dots, s = \pm i\omega_N, s = \infty$ ) außerhalb des abgeschlossenen Gebietes gelegt.

Im Punkt  $a$  geht man entlang jener Teilstücke von  $\bar{\Gamma}$ , die auf der imaginären Achse  $s = i\omega$  liegen, denn dort bleibt  $\zeta(i\omega)$  endlich. Die Eigenschaften von  $\zeta(s)$  auf den Halbkreisen mit den

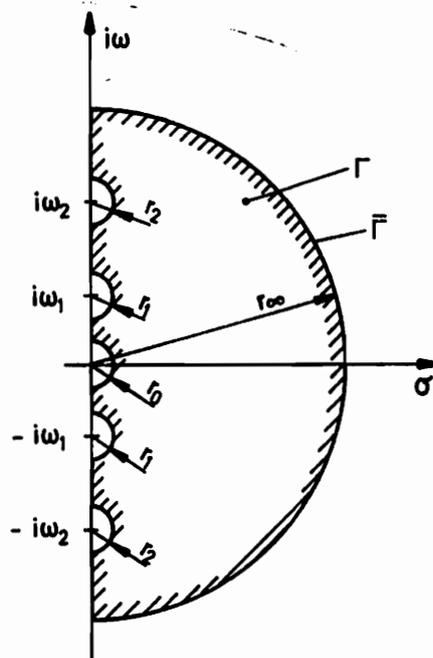


Abb. 4-4 Gebiet  $\Gamma$  mit Rand  $\bar{\Gamma}$

Radien  $r_0, r_1, \dots, r_N$  und  $r_\infty$  werden in Punkt  $c$  beschrieben. Da die Entwicklungskoeffizienten auf der imaginären Achse positiv sind, folgt aus den Untersuchungen des Kapitels 4.3, daß  $\zeta(s)$  auf den Halbkreisen einen positiven Realteil besitzt. Aus a und b ergibt sich die Abbildung von  $\bar{\Gamma}$  innerhalb  $\text{Re } \zeta(s) \cong 0$  (siehe Abb. 4-5).

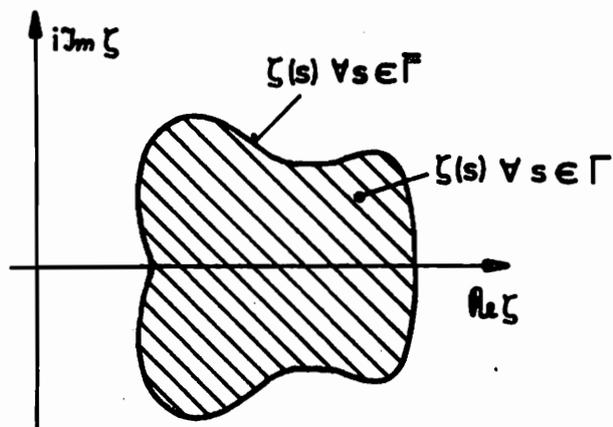


Abb. 4-5 Abbildung von  $\Gamma$  und  $\bar{\Gamma}$  in der  $\zeta$ -Ebene

Die geforderte Positivität ( $\operatorname{Re} \zeta(s) > 0$  für  $\operatorname{Re} s > 0$ ) besagt, daß sich ein beliebiger Punkt innerhalb des Gebietes  $\Gamma$  im schraffierten Gebiet der  $\zeta$ -Ebene (siehe Abb. 4-5) abbilden muß. Zur Erfüllung dieses Kriteriums dient Punkt b. Trifft b zu, ist  $\zeta(s)$  im abgeschlossenen Gebiet  $\bar{\Gamma}$  polstellenfrei ( $\zeta(s) \neq \pm \infty$ ), d.h. analytisch. Dann ist die Funktion

$$\eta(s) = e^{-\zeta(s)} \quad (4-35)$$

im abgeschlossenen Gebiet  $\bar{\Gamma}$  null- und polstellenfrei, d.h. analytisch. Nach dem Prinzip vom Maximum (siehe RÜHS [25]) erreicht der absolute Betrag einer in einem abgeschlossenen Gebiet analytischen Funktion seinen größten und, wenn die Funktion im abgeschlossenen Gebiet nullstellenfrei ist, auch seinen kleinsten Wert nur auf dem Gebietsrand (sofern die Funktion nicht konstant ist). Die Voraussetzung des Prinzips vom Maximum trifft für  $\eta(s)$  im abgeschlossenen Gebiet  $\bar{\Gamma}$  zu. Dann besitzt

$$|\eta(s)| = e^{-\operatorname{Re} \zeta(s)} \quad (4-36)$$

sein Maximum auf dem Gebietsrand  $\bar{\Gamma}$ . Aufgrund des Zusammenhangs Gl.(4-36) liegt das Realteilminimum von  $\zeta(s)$  auf dem Rand  $\bar{\Gamma}$ . Da  $\operatorname{Re} \zeta(s) \geq 0$  auf  $\bar{\Gamma}$  erfüllt wird, gilt auch  $\operatorname{Re} \zeta(s) \geq 0$  im abgeschlossenen Gebiet  $\bar{\Gamma}$ . Das Prinzip vom Maximum besagt sogar  $\operatorname{Re} \zeta(s) > 0$  im offenen Gebiet ( $\Gamma$  ohne Rand  $\bar{\Gamma}$ ). Die Positivität von  $\zeta(s)$  ist mit Satz 4-2 hinreichend bewiesen.

Da  $\frac{1}{\zeta(s)}$  auch positiv sein muß, wenn  $\zeta(s)$  positiv ist, muß auch  $\frac{1}{\zeta(s)}$  die Bedingungen von Satz 4.2 erfüllen. Geht man wieder auf  $\zeta(s)$  über, gehen die Polstellenaussagen (Punkte b und c) in solche für Nullstellen über. Da außerdem

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\zeta(s)} \right\} = \frac{1}{|\zeta(s)|^2} \operatorname{Re} \zeta(s) \quad (4-37)$$

gilt (sofern  $\zeta(s) \neq 0$ ), erhält man den

Satz 4-3

Notwendig und hinreichend für die Positivität einer rationalen, reellen Funktion  $\zeta(s)$  sind die Bedingungen:

- a)  $\operatorname{Re} \zeta(i\omega) \geq 0$  für alle  $\omega$ -Werte, für die  $\zeta(i\omega)$  endlich ist
- b)  $\zeta(s)$  hat in der offenen rechten Halbebene keine Nullstellen
- c) Alle Nullstellen von  $\zeta(s)$  auf der imaginären Achse (einschließlich  $s = \infty$ ) sind einfach und besitzen positive Entwicklungskoeffizienten.

## 5. Realisierbarkeit nicht geerdeter Massen

In Kapitel 3 wurde bereits darauf hingewiesen, daß alle Einzelmassen am Inertialsystem anliegen müssen. Im allgemeinen Netzwerk ist jedoch jede beliebige Zusammenschaltung der Netzwerkelemente erlaubt. Ein solches, nach den bisherigen Betrachtungen als unzulässig anzusehendes Netzwerk zeigt Abb. 5-1.

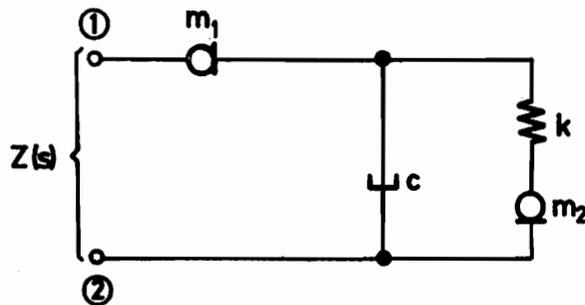


Abb. 5-1 Netzwerk mit nicht geerdeter Masse  $m_1$

Interpretiert man den Punkt 0 als Inertialsystem, handelt es sich bei  $m_1$  um eine nicht geerdete Masse. Die Impedanz

$$Z(s) = \frac{m_1 m_2 s^3 + m_2 c s^2 + k(m_1 + m_2)s + k c}{m_1 s (m_2 c s^2 + k m_2 s + k c)}$$

$$(m_1, m_2, k, c > 0) \quad (5-1)$$

kann durch kein anderes Netzwerk mit positiven Einzelmassen als das nach Abb. 5-1 realisiert werden. Daher müßte die Zweipolfunktion Gl.(5-1) als mechanisch unzulässig ausgeschlossen werden. Existieren keine "erdfreien" Massen, müßten Bedingungen gefunden werden, wann Zweipolfunktionen auf Realisierungen mit geerdeten oder mit nicht geerdeten Massen führen.

Im folgenden wird ein mechanisches System betrachtet, das eine nicht geerdete Masse im Netzwerk ersetzen kann. Ausgangspunkt ist der Balken nach Abb. 3-9. Mit  $\theta = 0$  und  $a = b = \frac{1}{2}$  erhält man das System in Abb. 5-2.

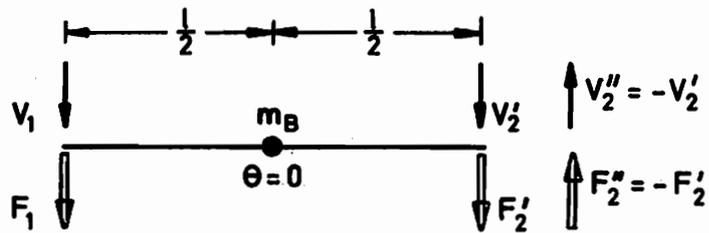


Abb. 5-2 Starrer Balken mit  $\theta = 0$

Die Admittanzbeziehung lautet hier (vgl. Gl. 3-8a):

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2' \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \frac{m_B}{4} & \frac{m_B}{4} \\ \frac{m_B}{4} & \frac{m_B}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2' \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

Das Gleichungssystem (5-2) ist singular. Die Singularität verschwindet später bei der Zusammenschaltung mit anderen Bauelementen. Aus Gl.(5-2) folgt eine Massenmatrix

$$\underline{M}'_B = \begin{bmatrix} \frac{m_B}{4} & \frac{m_B}{4} \\ \frac{m_B}{4} & \frac{m_B}{4} \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

Nun kann jede symmetrische Admittanzmatrix  $\underline{Y}$  durch das Netzwerk Abb. 5-3 abgebildet werden. Die Funktionen

$$Y_a = Y_{11} + Y_{12} \quad (5-4a)$$

$$Y_b = Y_{22} + Y_{12} \quad (5-4b)$$

$$Y_c = -Y_{12} \quad (5-4c)$$

brauchen keine Zweipolfunktionen zu sein.

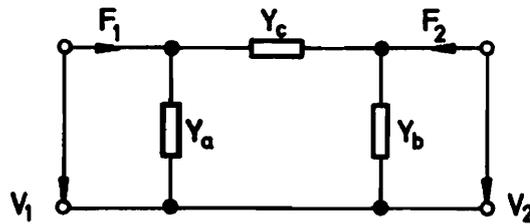


Abb. 5-3 Darstellung einer symmetrischen Admittanzmatrix

Eine Analyse beweist unmittelbar die Richtigkeit der Darstellung Abb. 5-3:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a V_1 + Y_c (V_1 - V_2) \\ Y_b V_2 + Y_c (V_2 - V_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (5-5)$$

In diesem Sinne erhält man aus Gl.(5-2) das Netzwerk Abb. 5-4, das auch nicht geerdete Massen enthält.

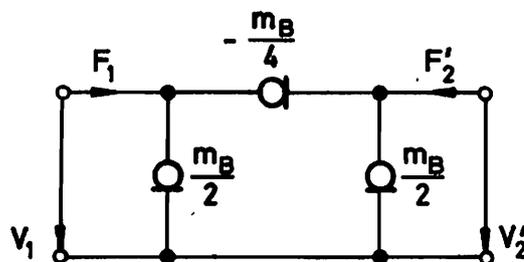


Abb. 5-4 Netzwerkdarstellung eines Balkens mit  $\Theta = 0$

Eine allgemeine Darstellung des Systems mit nicht geerdeten Massen zeigt Abb. 5-5. Die Impedanz des Netzwerkes lautet:

$$Z(s) = \frac{1}{ms} + Z_a(s) \quad (5-6)$$

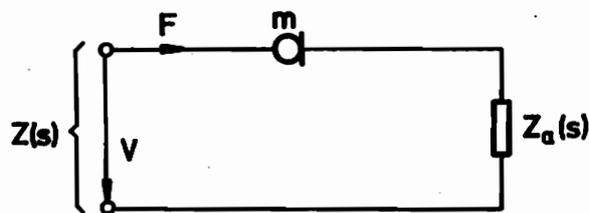


Abb. 5-5 Realisierungsproblem mit nicht geerdeter Masse m

Das System mit der Impedanz  $Z_a$  besitze mindestens eine Masse. Anderenfalls könnten die Masse  $m$  und die Impedanz  $Z_a$  vertauscht werden, so daß die einzige im System vorhandene Masse  $m$  am Inertialsystem anliegt. Greift man die Masse  $m$  in Abb. 5-5 als Zweitor heraus (siehe Abb. 5-6), erhält man die Massenmatrix:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m & -m \\ -m & m \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

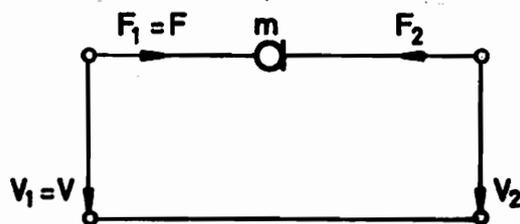


Abb. 5-6 Masse  $m$  als Zweitor

Der Vergleich zwischen den Netzwerken Abb. 5-4 und 5-6 sowie zwischen den Gleichungen (5-3) und (5-7) zeigt zunächst Unterschiede auf. Definiert man die Vorzeichen von  $V_2'$  und  $F_2'$  in Gl.(5-2) um (siehe auch Abb. 5-2), d.h.

$$V_2' = -V_2'' \quad (5-8)$$

$$F_2' = -F_2'' \quad (5-9)$$

folgt die Admittanzbeziehung

$$\begin{bmatrix} F_1' \\ F_2'' \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} \frac{m_B}{4} & -\frac{m_B}{4} \\ -\frac{m_B}{4} & \frac{m_B}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2'' \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

Die Massenmatrix in Gl.(5-10) lautet:

$$\underline{M}'' = \begin{bmatrix} \frac{m_B}{4} & -\frac{m_B}{4} \\ -\frac{m_B}{4} & \frac{m_B}{4} \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

Unter den Voraussetzungen

$$F_2'' = F_2 \quad (5-12)$$

und

$$V_2'' = V_2 \quad (5-13)$$

sind die Massenmatrizen  $\underline{M}$  nach Gl.(5-7) und  $\underline{M}''_B$  nach Gl.(5-11) für

$$m = \frac{m_B}{4} \quad (5-14)$$

gleich. Die zu Abb. 5-2 äquivalente Realisierung zeigt Abb. 5-7.

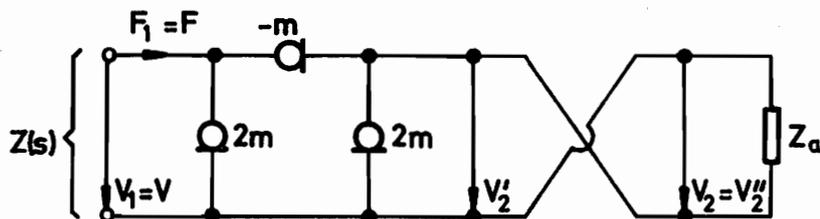


Abb. 5-7 Ersatznetzwerk für Abb. 5-5 (mit Richtungsumkehr)

Aus dem Netzwerk Abb. 5-7 geht hervor, daß das Überkreuzen der idealen Verbindungselemente nicht notwendig ist. Entwirrt man die Leitungen, erhält man Abb. 5-8.

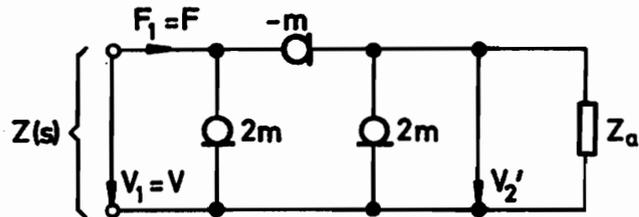


Abb. 5-8 Ersatznetzwerk für Abb. 5-5 (ohne Richtungsumkehr)

Die Abbildungen 5-9,a,b zeigen die beiden mechanischen Realisierungen der Impedanz  $Z(s)$  nach Gl.(5-6).

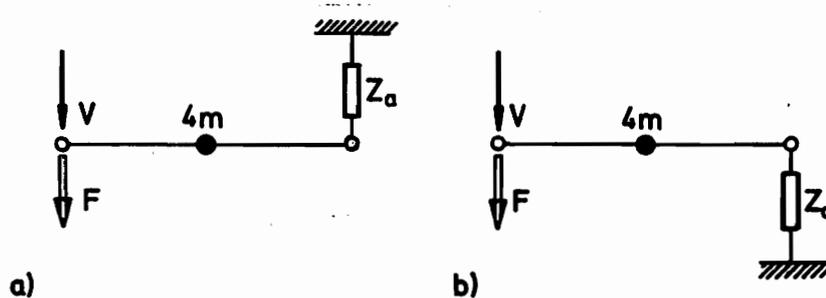


Abb. 5-9 Mechanische Realisierung zu Abb. 5-5:  
a) mit Richtungsumkehr  
b) ohne Richtungsumkehr

Im Falle der Zweipolfunktion Gl.(5-1) besteht nun die mechanische Realisierung nach Abb. 5-10 (ohne Richtungsumkehr).

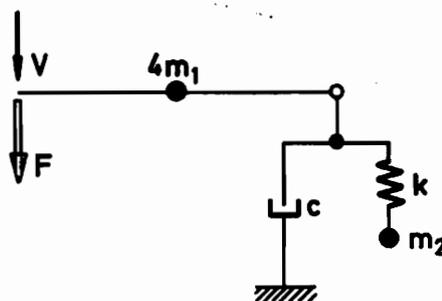


Abb. 5-10  
Mechanische Realisierung zu Abb. 5-1

Mit Hilfe des Balkensystems Abb. 5-2 lassen sich noch weitere Realisierungen mit nicht geerdeten Massen finden. Betrachtet werden soll zum Beispiel ein Netzwerk in Form von Abb. 5-11, das die Impedanz

$$Z(s) = \frac{s}{m s^2 + c s + k} + Z_a(s) \quad (5-15)$$

besitzt.

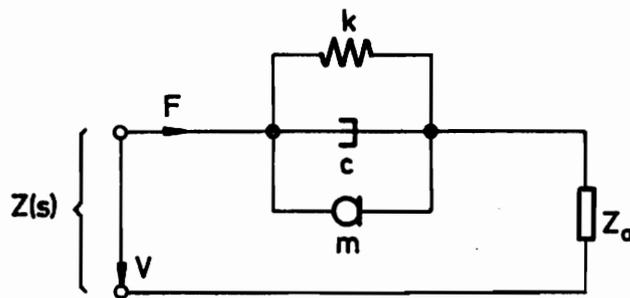


Abb. 5-11 Weiteres Realisierungsproblem mit nicht geerdeter Masse  $m$

Im Gegensatz zum System Abb. 5-5 muß hier die Richtungsumkehr berücksichtigt werden. Verwendet man als Ersatzsystem für die nicht geerdete Masse den Balken Abb. 5-2 mit Richtungsumkehr und schaltet das Feder-Dämpfer-System entsprechend Abb. 5-11 parallel hinzu, erhält man das Netzwerk Abb. 5-12.

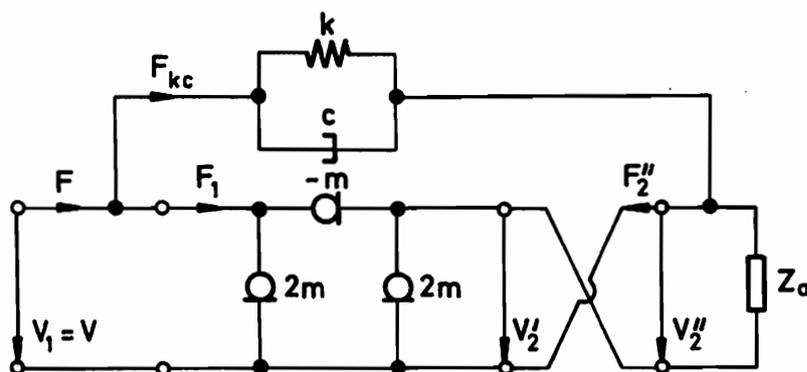


Abb. 5-12 Ersatznetzwerk zu Abb. 5-11 (mit Richtungsumkehr)

Ohne Überkreuzen bzw. ohne Richtungsumkehr an der rechten Balkenseite ergibt sich Abb. 5-13.

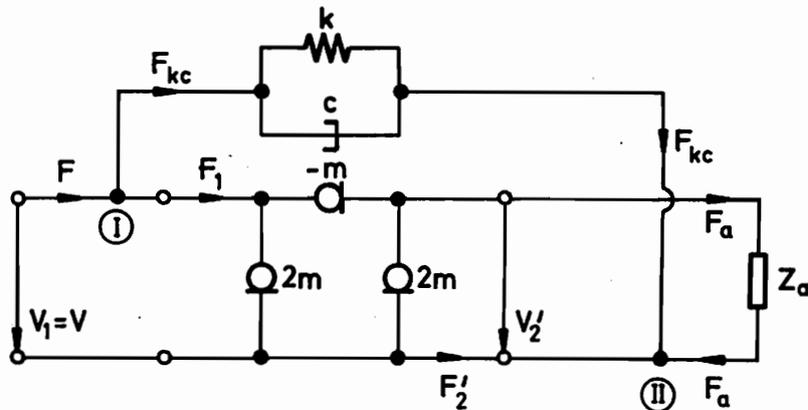


Abb. 5-13 Ersatznetzwerk zu Abb. 5-11 (ohne Richtungsumkehr)

Für die Kraft  $F_{kc}$  erhält man aus Abb. 5-12

$$F_{kc} = \left( c + \frac{k}{s} \right) ( V_1 - V_2'' ) \quad (5-16)$$

bzw. nach Vorzeichenumkehr

$$F_{kc} = \left( c + \frac{k}{s} \right) ( V_1 + V_2' ) \quad (5-17)$$

Die Kraft  $F_{kc}$  in dem Feder-Dämpfer-System ergibt sich aus der Differenz der Pol-Absolutgeschwindigkeiten, d.h. nach Gl.(5-16). Da der Anschluß der Impedanz  $Z_a$  ohne Richtungsumkehr erfolgen soll, muß aber eine Umlenkung für das Feder-Dämpfer-System erfolgen.

Betrachtet man das mechanische System in Abb. 5-14, werden alle geometrischen Verträglichkeitsbedingungen und Gl.(5-16) bzw. Gl.(5-17) des Netzwerkes in Abb. 5-13 wiedergegeben. Daß mit dem System Abb. 5-14 nicht nur die Verträglichkeitsbedingungen, sondern insgesamt die Impedanz  $Z(s)$  nach Gl.(5-15) realisiert wird, soll die nachfolgende Analyse zeigen. Die Abb. 5-15 gibt das in die zunächst als unabhängig betrachteten Baugruppen Balken, Feder-Dämpfer-System mit Hebel und Impedanz  $Z(s)$  zerlegte System wieder.

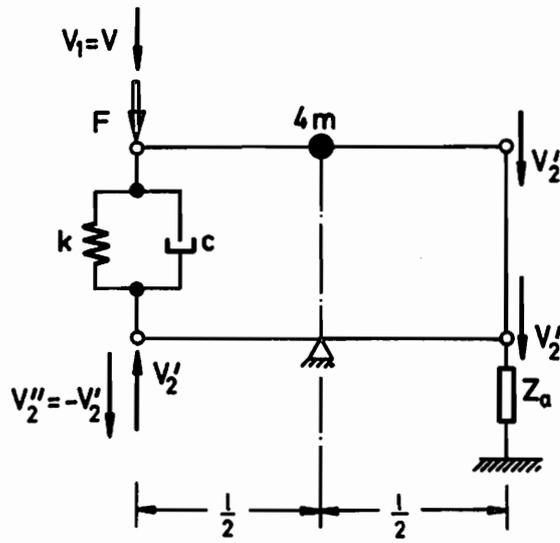


Abb. 5-14 Mechanische Realisierung zu Abb. 5-11

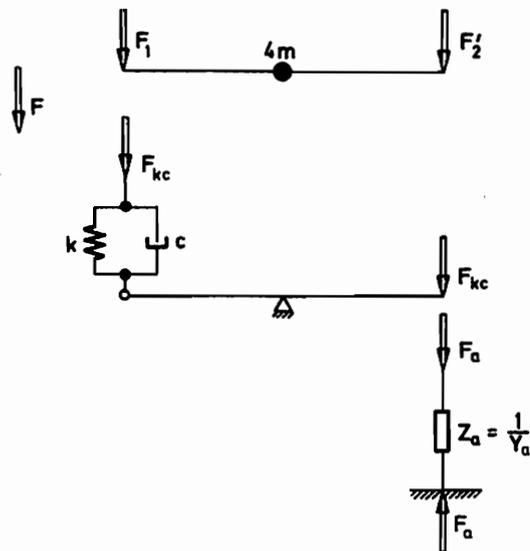


Abb. 5-15 Kräftezerlegung des Systems Abb. 5-14

Als Ankopplungsbedingungen müssen erfüllt sein:

$$F_1 + F_{kc} = F \quad (5-18)$$

$$F_2' + F_{kc} + F_a = 0 \quad (5-19)$$

Die Verträglichkeitsbedingungen seien erfüllt, so daß unter Verwendung von Gl. (5-2) (mit  $m_B = 4 m$ ) und Gl.(5-17) sowie

$$F_a = \frac{1}{Z_a} \cdot V_2' = Y_a \cdot V_2' \quad (5-20)$$

aus den Gln.(5-18) und (5-19) das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} ms + c + \frac{k}{s} & ms + c + \frac{k}{s} \\ ms + c + \frac{k}{s} & ms + c + \frac{k}{s} + Y_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

folgt. Aufgelöst nach  $V_1$  ergibt sich aus Gl.(5-21)

$$V_1 = V = \left( \frac{s}{ms^2 + cs + k} + Z_a \right) F \quad (5-22)$$

Der in Klammern stehende Ausdruck in Gl.(5-22) stellt genau die Impedanz  $Z(s)$  nach Gl.(5-15) dar. Das mechanische System Abb. 5-14 realisiert somit das Netzwerk Abb. 11.

Zu bemerken ist, daß die Gln.(5-18) und (5-19) im Netzwerk Abb. 5-13 mit den Kräftebilanzen an den Knoten I und II übereinstimmen.

In diesem Kapitel wurde die Realisierbarkeit nicht geerdeter Massen mit Hilfe des Balkens Abb. 5-2 gezeigt. Die zu Anfang aufgeführten Vorbehalte gegenüber "erdfreien" Massen sind nicht notwendig. Allerdings wird man vielleicht aus konstruktiven Gründen ein System ohne Balken, also Schwingerketten, bevorzugen wollen. Es existiert jedoch noch keine notwendige und hinreichende Bedingung für Zweipolfunktionen, die Realisierungen mit Schwingerketten ermöglicht.

## 6. Spezialfälle der Zweipolfunktionen

Eine Zweipolfunktion führt, wie zuvor beschrieben, nicht in jedem Fall auf balkenfreie mechanische Systeme (Schwingerketten). Im folgenden werden Spezialfälle von Zweipolfunktionen definiert, die immer durch mechanische Systeme ohne Balken realisierbar sind. Dazu gehören:

1. Netzwerke mit nur zwei Bauelementen
2. Modale Netzwerke

### 6.1 Netzwerke mit nur zwei Bauelementtypen

Treten nur zwei Bauelementtypen auf, verschwindet einer der Ausdrücke  $W$ ,  $U$  oder  $T$  in Gl.(4-12) identisch, d.h. für alle Werte von  $s$ . Dann ist aber eine einfache Darstellungsform einer Impedanz oder Admittanz möglich. Die Herleitung für die Impedanz  $Z(s)$  soll hier vom Gleichungssystem (4-17) ausgehend allgemein abgeleitet werden. Folgende Bauelementkombinationen sind möglich:

- a) Massen-Federn (oder ungedämpfte Systeme)

$$\left( s \underline{M} + \frac{1}{s} \underline{K} \right) \underline{v} = \underline{f}$$

oder mit  $\underline{v}(s) = s \underline{x}(s)$  (6-1)

$$\left( s^2 \underline{M} + \underline{K} \right) \underline{x} = \underline{f} \quad (6-2)$$

- b) Massen-Dämpfer (oder ungefederte Systeme)

$$\left( s \underline{M} + \underline{C} \right) \underline{v} = \underline{f} \quad (6-3)$$

- c) Dämpfer-Federn (oder masselose Systeme)

$$\left( \underline{C} + \frac{1}{s} \underline{K} \right) \underline{v} = \underline{f}$$

bzw. mit Gl.(6-1)

$$(\underline{s} \underline{C} + \underline{K}) \underline{x} = \underline{f} \quad (6-4)$$

Die Gleichungen (6-2), (6-3) und (6-4) besitzen die allgemeine Form

$$(\lambda \underline{A} + \underline{B}) \underline{z} = \underline{f} \quad (6-5)$$

wobei  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  als symmetrisch und positiv-semidefinit vorausgesetzt werden. Das Eigenwertproblem lautet

$$(\lambda \underline{A} + \underline{B}) \underline{z} = \underline{0} \quad (6-6)$$

Die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind wegen der Symmetrie von  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  reell. Aus der Positiv-Semidefinitheit folgt, daß die Eigenwerte zudem negativ oder Null sind. Aus Gl.(6-6) erhält man für einen Eigenwert  $\lambda_j$  mit dem zugehörigen Eigenvektor  $\underline{z}_j$

$$\lambda_j \underline{z}_j^T \underline{A} \underline{z}_j + \underline{z}_j^T \underline{B} \underline{z}_j = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_j = - \frac{\underline{z}_j^T \underline{B} \underline{z}_j}{\underline{z}_j^T \underline{A} \underline{z}_j}$$

woraus wegen

$$\underline{z}_j^T \underline{B} \underline{z}_j \cong 0$$

und für

$$\underline{z}_j^T \underline{A} \underline{z}_j > 0$$

$$\lambda_j \cong 0$$

folgt. Im Fall  $\underline{z}_j^T \underline{A} \underline{z}_j = 0$  ist der Eigenwert  $\lambda_j = \infty$ . Es wird nun eine lineare Transformation

$$\underline{z} = \underline{T} \underline{u} \quad (6-7)$$

mit der Modalmatrix  $\underline{T}$  durchgeführt. Die Gl.(6-5) geht über in

$$(\lambda \underline{T}^T \underline{A} \underline{T} + \underline{T}^T \underline{B} \underline{T}) \underline{u} = \underline{T}^T \underline{f} \quad (6-8)$$

oder

$$(\lambda \underline{E} - \underline{\Lambda}) \underline{u} = \underline{g} \quad (6-9)$$

Die Matrix  $\underline{E}$  ist diagonal und besitzt  $r_A = \text{rg } \underline{A}$  Eins-Elemente, die durch Sortieren auf den Diagonalplätzen 1 bis  $r_A$  stehen mögen. Die restlichen  $d_A = n - r_A$  Elemente sind Null. Durch geeignete Linearkombinationen von Eigenvektoren zu mehrfachen Eigenwerten geht die Matrix  $\underline{B}$  bei der Ähnlichkeitstransformation auch in eine Diagonalform über. Die Matrix  $\underline{B}$  kann singular sein und habe den Rangabfall  $d_B = n - \text{rg } \underline{B}$ , wodurch sich in der Matrix  $\underline{\Lambda}$   $d_B$  Null-Diagonalelemente ergeben. Diese können durch Sortieren auf die Diagonalplätze 1 bis  $d_B < r_A$  gebracht werden, ohne daß die oben erwähnte Struktur von  $\underline{A}$  verändert wird. Der Fall, daß  $\underline{E}$  und  $\underline{\Lambda}$  auf einem Diagonalplatz gemeinsam Nullen besitzen, bedeutete, daß die Gleichungssysteme (6-9) und (6-5) für alle  $\lambda$  singular wären, was aber ausgeschlossen werden kann. Im einzelnen erhält man in Gl. (6-8)

$$\text{diag}(\lambda \underline{E} - \underline{\Lambda}) = \begin{cases} \lambda & \text{für Zeilen } j = 1, \dots, d_B \\ \lambda - \lambda_j & \text{" " } j = d_B + 1, \dots, r_A \\ -\lambda_j & \text{" " } j = r_A + 1, \dots, n \end{cases}$$

oder mit

$$l_j = -\lambda_j > 0 \quad (6-10)$$

$$\text{diag}(\lambda \underline{E} - \underline{\Lambda}) = \begin{cases} \lambda & \text{für Zeilen } j = 1, \dots, d_B \\ \lambda + l_j & \text{" " } j = d_B + 1, \dots, r_A \\ l_j & \text{" " } j = r_A + 1, \dots, n \end{cases}$$

(6-11)

Die Werte  $l_j$  in den Zeilen  $j = r_A + 1$  bis  $j = n$  sind beliebig, jedoch von Null verschieden und wegen der Positiv-Definitheit von  $\underline{B}$  positiv.

Entsprechend Kapitel 4 sei  $z_1$  die Erregungsdifferenzgröße, und  $\underline{f}$  habe die Form Gl. (4-18), d.h.

$$\underline{f} = F \cdot \underline{e}_1 \quad (6-12)$$

Dann gilt

$$z_1 = \underline{e}_1^T \cdot \underline{z} \quad (6-13)$$

bzw. mit Gl.(6-7)

$$z_1 = \underline{e}_1^T \underline{I} \underline{u} \quad (6-14)$$

Löst man das Gleichungssystem (6-9) nach  $\underline{u}$  auf und setzt das Ergebnis in Gl.(6-14) ein, erhält man

$$z_1 = \underline{e}_1^T \underline{I} (\lambda \underline{E} - \underline{\Delta})^{-1} \underline{g}$$

bzw.

$$z_1 = \underline{e}_1^T \underline{I} (\lambda \underline{E} - \underline{\Delta})^{-1} \underline{I}^T \underline{f}$$

Für die "Impedanz"

$$\xi = \frac{z_1}{F} \quad (6-15)$$

folgt mit Gl.(6-12)

$$\xi = \underline{e}_1^T \underline{I} (\lambda \underline{E} - \underline{\Delta})^{-1} \underline{I}^T \underline{e}_1 \quad (6-16)$$

oder

$$\xi = \sum_{j=1}^{d_B} \frac{t_{1j}^2}{\lambda} + \sum_{j=d_B+1}^{r_A} \frac{t_{1j}^2}{\lambda + l_j} + \sum_{j=r_A+1}^n \frac{t_{1j}^2}{l_j} \quad (6-17)$$

Die Elemente unter dem ersten und letzten Summenzeichen werden zusammengefaßt:

$$K_0 = \sum_{j=1}^{d_B} t_{1j}^2 \cong 0 \quad (6-18)$$

$$K_{\infty} = \sum_{j=r_A+1}^n \frac{t_{1j}^2}{l_j} \cong 0 \quad (6-19)$$

Dann folgt aus Gl.(6-17)

$$\xi = \frac{K_0}{\lambda} + \sum_{j=1}^N \frac{K_j}{\lambda + p_j} + K_{\infty} \quad (6-20)$$

wobei eine Indexverschiebung ( $N = r_A - d_B$ ) durchgeführt wurde. Außerdem wurde eingeführt

$$K_j = t_{1, d_B+j}^2 \cong 0 \quad (6-21)$$

$$p_j = l_{j+d_B} > 0 \quad (6-22)$$

$$(j = 1, \dots, N)$$

Nun wird von der allgemeinen Form Gl.(6-5) auf die speziellen Formen zurückgegangen:

- a) ungedämpfte Systeme  
hier galten

$$\lambda = s^2$$

$$\xi(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)}$$

$$Z(s) = s \cdot \xi(s)$$

Aus Gl.(6-20) ergibt sich also eine Form

$$Z(s) = \frac{A_0}{s} + \sum_{j=1}^{N_g} \frac{2A_j s}{s^2 + \omega_j^2} + A_{\infty} s \quad (6-23)$$

$$\begin{aligned}\omega_j^2 &\hat{=} p_j \\ A_0 &\hat{=} K_0 \\ A_\infty &\hat{=} K_\infty \\ A_j &\hat{=} \frac{1}{2} K_j\end{aligned}$$

b) ungedrigte Systeme  
hier galten

$$\lambda \equiv s$$

$$\xi \equiv Z$$

Aus Gl.(6-20) erhalt man

$$Z(s) = \frac{B_0}{s} + \sum_{j=1}^{N_b} \frac{B_j}{s + \sigma_j} + B_\infty \quad (6-24)$$

$$B_0 \hat{=} K_0$$

$$B_\infty \hat{=} K_\infty$$

$$B_j \hat{=} K_j$$

$$\sigma_j \hat{=} p_j$$

$$(j = 1, \dots, N_b)$$

c) masselose Systeme  
hier galten

$$\lambda \equiv s$$

$$\xi(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)}$$

$$Z(s) = s \cdot \xi(s)$$

Aus Gl.(6-20) erhält man

$$Z(s) = C_0 + \sum_{j=1}^{N_c} \frac{C_j \cdot s}{s + \sigma_j} + C_\infty \cdot s \quad (6-25)$$

$$C_0 \hat{=} K_0$$

$$C_\infty \hat{=} K_\infty$$

$$C_j \hat{=} K_j$$

$$\sigma_j \hat{=} p_j$$

$$(j = 1, \dots, N_c)$$

In völlig analoger Form kann man mit der Maschenanalyse auf Darstellungsformen für die Admittanz  $Y(s)$  entsprechend den Gleichungen (6-23) bis (6-25) kommen, sofern Systeme mit zwei Baelementtypen vorliegen.

Eine Maschenanalyse führt auf ein Gleichungssystem

$$\left( \frac{1}{s} \underline{\hat{M}} + \underline{\hat{C}} + s \underline{\hat{K}} \right) \underline{\hat{f}} = \underline{\hat{v}} \quad (6-26)$$

wobei  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  und  $\underline{K}$  wegen der vorausgesetzten Passivität des Systems positiv-definit oder (im Falle von Bewegungsformen ohne Energiespeicherung) positiv-semidefinit sind. Der Vektor  $\underline{f}$  enthält die notwendigen Maschenkräfte  $\hat{F}_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), womit sich die Invertierbarkeit des Gleichungssystems (6-26), ausgenommen wenn  $s$  einen Eigenwert annimmt, ergibt. Die Maschen seien so sortiert, daß die erste Masche über den Quellenzweig, alle übrigen innerhalb des passiven Zweipols laufen. Dann gilt

$$\underline{\hat{v}}^T = [V, 0, \dots, 0] \quad (6-27a)$$

$$\underline{\hat{F}}_1 \equiv F \quad (6-27b)$$

Sind nur zwei Baelementtypen vorhanden, geht Gl.(6-26) jeweils über in:

a) Masse-Feder-Systeme

$$\left( \frac{1}{s} \underline{\hat{M}} + s \underline{\hat{K}} \right) \underline{\hat{f}} = \underline{\hat{v}}$$

oder mit  $\underline{\hat{v}} = s \underline{\hat{x}}$  (6-28)

$$\left( \frac{1}{s^2} \underline{\hat{M}} + \underline{\hat{K}} \right) \underline{\hat{f}} = \underline{\hat{x}}$$
 (6-29)

b) Masse-Dämpfer-Systeme

$$\left( \frac{1}{s} \underline{\hat{M}} + \underline{\hat{C}} \right) \underline{\hat{f}} = \underline{\hat{v}}$$
 (6-30)

c) Feder-Dämpfer-Systeme

$$\left( \underline{\hat{C}} + s \underline{\hat{K}} \right) \underline{\hat{f}} = \underline{\hat{v}}$$

oder mit Gl.(6-28)

$$\left( \frac{1}{s} \underline{\hat{C}} + \underline{\hat{K}} \right) \underline{\hat{f}} = \underline{\hat{x}}$$
 (6-31)

Die Gleichungen (6-29) bis (6-31) besitzen ähnlich Gl.(6-5) die Form

$$\left( \frac{1}{\lambda} \underline{\hat{A}} + \underline{\hat{B}} \right) \underline{\hat{f}} = \underline{\hat{z}}$$
 (6-32)

Die Matrizen  $\underline{\hat{A}}$ ,  $\underline{\hat{A}}$  und  $\underline{\hat{B}}$ ,  $\underline{\hat{B}}$  aus Gl.(6-5) und Gl.(6-32) beziehen sich auf jeweils gleiche Bauelemente, und die Variable  $\lambda$  ist identisch.

Da die Voraussetzungen zu Gl.(6-32) vollkommen denen von Gl.(6-5) entsprechen, ergibt sich für die "Admittanz"

$$\xi' = \frac{\underline{\hat{F}}_1}{\underline{\hat{z}}_1} = \frac{F}{z_1}$$
 (6-33)

die Darstellung (vgl. Gl.6-20)

$$\xi' = \frac{\hat{K}_0}{1/\lambda} + \sum_{j=1}^{N'} \frac{\hat{K}_j}{1/\lambda + \hat{p}_j} + \hat{K}_\infty$$

bzw.

$$\xi' = \hat{K}_0 \cdot \lambda + \sum_{j=1}^{N'} \frac{\hat{K}_j / \hat{\rho}_j \cdot \lambda}{\lambda + 1/\hat{\rho}_j} + \hat{K}_\infty$$

Mit

$$K'_0 = \hat{K}_\infty$$

$$K'_\infty = \hat{K}_0$$

$$K'_j = \frac{\hat{K}_j}{\hat{\rho}_j}$$

$$p'_j = \frac{1}{\hat{\rho}_j}$$

$$(j = 1, \dots, N')$$

erhält man endgültig die Darstellung

$$\xi' = K'_\infty \cdot \lambda + \sum_{j=1}^{N'} \frac{K'_j \cdot \lambda}{\lambda + p'_j} + K'_0 \quad (6-34)$$

$$(K'_0, K'_\infty, K'_j \geq 0; p'_j > 0 \text{ für } j = 1, \dots, N')$$

Aufgrund der getroffenen Vereinbarungen, insbesondere wegen  $z_1 = \hat{z}_1$ , sind  $\xi$  und  $\xi'$  reziprok zueinander.

Für die speziellen Bauelement-Kombinationen erhält man:

a) Masse-Feder-System

$$\lambda = s^2$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \xi'(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{A'_0}{s} + \sum_{j=1}^{N'_d} \frac{2 \cdot A'_j \cdot s}{s^2 + \omega'_j{}^2} + A'_\infty \cdot s \quad (6-35)$$

$$A'_0 \hat{=} K'_\infty$$

$$A'_\infty \hat{=} K'_0$$

$$A'_j \hat{=} \frac{1}{2} K'_j$$

$$\omega'_j{}^2 \hat{=} p'_j$$

$$(j = 1, \dots, N'_d)$$

b) Masse-Dämpfer-Systeme

$$\lambda \equiv s$$

$$Y(s) \equiv \xi'(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = B'_\infty \cdot s + \sum_{j=1}^{N'_b} \frac{B'_j \cdot s}{s + \sigma'_j} + B'_0 \quad (6-36)$$

$$B'_0 \hat{=} K'_0$$

$$B'_\infty \hat{=} K'_\infty$$

$$B'_j \hat{=} K'_j$$

$$\sigma'_j \hat{=} p'_j$$

$$(j = 1, \dots, N'_b)$$

c) Feder-Dämpfer-Systeme

$$\lambda \equiv s$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \xi'(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = C'_\infty + \sum_{j=1}^{N'_c} \frac{C'_j}{s + \sigma'_j} + \frac{C'_0}{s} \quad (6-37)$$

$$\begin{aligned} C'_0 &\hat{=} K'_0 \\ C'_\infty &\hat{=} K'_\infty \\ C'_j &\hat{=} K'_j \\ \sigma'_j &\hat{=} p'_j \\ (j = 1, \dots, N'_c) \end{aligned}$$

## 6.2 Modale Systeme

Im Gegensatz zum letzten Abschnitt sollen hier alle Größen  $W$ ,  $U$  und  $T$  in Gl.(4-12) existieren, so daß  $\underline{M}$ ,  $\underline{K}$  und  $\underline{C}$  in Gl.(4-18) nicht verschwinden.

Als modale Systeme werden solche bezeichnet, bei denen sich eine der Matrizen  $\underline{M}$ ,  $\underline{K}$  oder  $\underline{C}$  als Linearkombination der beiden übrigen ausdrücken läßt. Unter den verschiedenen Möglichkeiten werden die modal gedämpften Systeme beispielhaft herausgegriffen.

Es gilt für modale Dämpfung:

$$\underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K} \quad (6-38)$$

Für Gl.(4-18) wird eine Ähnlichkeitstransformation durchgeführt:

$$\underline{v} = \underline{T} \cdot \underline{u} \quad (6-39)$$

$$\Rightarrow \left( s \underline{I}^T \underline{M} \underline{I} + \underline{I}^T \underline{C} \underline{I} + \frac{1}{s} \underline{I}^T \underline{K} \underline{I} \right) \underline{u} = \underline{I}^T \underline{f} \quad (6-40)$$

Unter den möglichen regulären Transformationsmatrizen  $\underline{I}$  wird eine solche herausgewählt, die sowohl  $\underline{M}$  als auch  $\underline{K}$  diagonalisiert. Man erhält sie durch Betrachtung des Eigenwertproblems im ungedämpften Fall. Mit den Bezeichnungen

$$\underline{M}' = \underline{I}^T \underline{M} \underline{I} = \text{diag} [ m'_1, \dots, m'_n ] \quad (6-41)$$

$$\underline{K}' = \underline{I}^T \underline{K} \underline{I} = \text{diag} [ k'_1, \dots, k'_n ] \quad (6-42)$$

$$( m'_j, k'_j \cong 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n )$$

und

$$\underline{g} = \underline{I}^T \underline{f} \quad (6-43)$$

folgt unter Anwendung von Gl.(6-38) aus Gl.(6-40)

$$\left[ s \underline{M}' + ( \alpha \underline{M}' + \beta \underline{K}' ) + \frac{1}{s} \underline{K}' \right] \underline{u} = \underline{g}$$

oder

$$\underline{\Phi}(s) \underline{u} = \underline{g} \quad (6-44)$$

wobei

$$\underline{\Phi}(s) = s \underline{M}' + ( \alpha \underline{M}' + \beta \underline{K}' ) + \frac{1}{s} \underline{K}' \quad (6-45)$$

zur Abkürzung eingeführt wurde.

Es gilt nach Gl.(4-19b)

$$\underline{V} \equiv \underline{V}_j = \underline{e}_j^T \cdot \underline{v} \quad (6-46)$$

und mit Gl.(6-39):

$$\underline{V} = \underline{e}_j^T \cdot \underline{I} \cdot \underline{u} \quad (6-47)$$

Das Gleichungssystem kann als invertierbar vorausgesetzt werden, d.h.

$$\underline{u} = \underline{\Phi}^{-1}(s) \cdot \underline{g}$$

woraus aus Gl.(6-47)

$$V = \underline{e}_j^T \cdot \underline{T} \cdot \underline{\Phi}^{-1}(s) \cdot \underline{g}$$

folgt. Berücksichtigt man Gl.(4-19a), d.h.

$$\underline{f} = \underline{e}_1 \cdot F$$

erhält man

$$V = \underline{e}_j^T \cdot \underline{T} \cdot \underline{\Phi}^{-1}(s) \cdot \underline{T}^T \cdot \underline{e}_1 \cdot F$$

und für die Impedanz

$$Z(s) = \underline{e}_j^T \cdot \underline{T} \cdot \underline{\Phi}^{-1}(s) \cdot \underline{T}^T \cdot \underline{e}_1 \quad (6-48)$$

Dies ergibt

$$Z(s) = \sum_{j=1}^n \frac{t_{1j}^2}{\varphi_j(s)}$$

bzw. mit Gl.(6-45) rücks substituiert

$$Z(s) = \sum_{j=1}^n \frac{s \cdot t_{1j}^2}{s^2 m_j' + s(\alpha m_j' + \beta k_j') + k_j'} \quad (6-49)$$

Die Gl.(6-49) ist die Darstellungsform der Impedanz eines modal gedämpften Systems. Andererseits sind modale Ansätze auch für das Gleichungssystem (6-26), d.h. bei einer Maschenanalyse, denkbar. Zum Beispiel erhält man mit

$$\underline{\hat{C}} = \hat{\alpha} \underline{\hat{M}} + \hat{\beta} \underline{\hat{K}} \quad (6-50)$$

für die Admittanz die Darstellungsform

$$Y(s) = \sum_{j=1}^{\hat{n}} \frac{s \cdot \hat{t}_{1j}^2}{s^2 \hat{m}_j' + s(\hat{\alpha} \hat{m}_j' + \hat{\beta} \hat{k}_j') + \hat{k}_j'} \quad (6-51)$$

Der Ansatz Gl.(6-38) soll veranschaulicht werden. Betrachtet man Gl.(4-17) in der Form

$$(s + \alpha) \underline{M} \underline{v} + \left(\beta + \frac{1}{s}\right) \underline{K} \underline{v} = \underline{f} \quad (6-52)$$

besagt der erste Teil anschaulich, daß zu jeder Masse  $m_j$  ein Dämpfer der Größe  $c_j = \alpha m_j$  parallel geschaltet ist (siehe Abb. 6-1a).

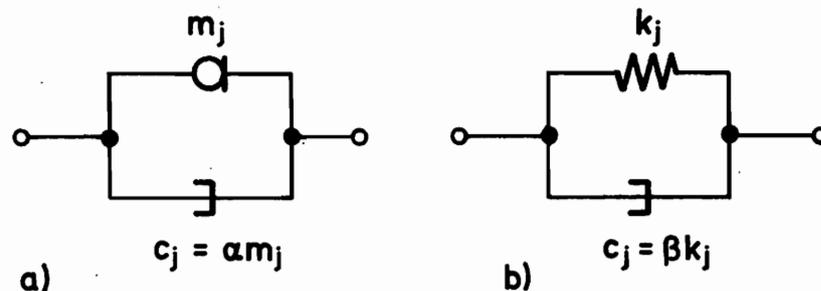


Abb. 6-1 Modale Dämpfung  
a) Masseproportional: b) Steifigkeitsproportional

Der zweite Teil besagt, daß zu jeder Feder  $k_j$  ein Dämpfer der Größe  $c_j = \beta m_j$  parallel geschaltet ist (siehe Abb. 6-1b). Da die Dämpfer passiv sein sollen, ist  $\alpha \geq 0$  und  $\beta \geq 0$  notwendig.

Entsprechend bedeutet der Ansatz Gl.(6-50) für Gl.(6-26), daß zu jeder Masse  $m_j$  ein Dämpfer der Größe  $c_j = \frac{1}{\alpha} m_j$  und zu jeder Feder  $k_j$  ein Dämpfer der Größe  $c_j = \frac{1}{\beta} k_j$  in Reihe geschaltet ist.

Ähnliche Darstellungsformen wie Gl.(6-49) und (6-51) für  $Z(s)$  und  $Y(s)$  ergeben sich auch für modale Ansätze von  $\underline{M}$  oder  $\underline{K}$  bzw.  $\hat{\underline{M}}$  oder  $\hat{\underline{K}}$ .

Zusammenfassend kann man für modale Systeme folgende Sätze aufstellen:

Satz 6-1

Modale Systeme besitzen für eine Impedanz notwendig die Darstellungsform

$$Z(s) = \sum_{j=1}^n \frac{s \cdot t_{jj}^2}{s^2 m_j' + s c_j' + k_j'} \quad (6-53)$$

wobei entweder

$$m'_j = \alpha c'_j + \beta k'_j \quad (c'_j, k'_j \geq 0)$$

$$c'_j = \alpha m'_j + \beta k'_j \quad (m'_j, k'_j \geq 0)$$

$$k'_j = \alpha m'_j + \beta c'_j \quad (m'_j, c'_j \geq 0)$$

$$(\alpha \geq 0 \quad \text{und} \quad \beta \geq 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, n)$$

gelten muß.

Satz 6-2

Modale Systeme besitzen für eine Admittanz notwendig die Darstellungsform

$$Y(s) = \sum_{j=1}^{\hat{n}} \frac{s t_{1j}^2}{s^2 \hat{m}'_j + s \hat{c}'_j + \hat{k}'_j} \quad (6-54)$$

wobei entweder

$$\hat{m}'_j = \hat{\alpha} \hat{c}'_j + \hat{\beta} \hat{k}'_j \quad (\hat{c}'_j, \hat{k}'_j \geq 0)$$

$$\hat{c}'_j = \hat{\alpha} \hat{m}'_j + \hat{\beta} \hat{k}'_j \quad (\hat{m}'_j, \hat{k}'_j \geq 0)$$

$$\hat{k}'_j = \hat{\alpha} \hat{m}'_j + \hat{\beta} \hat{c}'_j \quad (\hat{m}'_j, \hat{c}'_j \geq 0)$$

$$(\hat{\alpha} \geq 0 \quad \text{und} \quad \hat{\beta} \geq 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, \hat{n})$$

gelten muß.

Aus den bisherigen Betrachtungen ergibt sich nicht notwendig, daß aus einer Form Gl.(6-53) oder (6-54) die andere folgt.

## 7. Syntheseverfahren für spezielle Zweipolfunktionen

### 7.1 Syntheseverfahren für Zweipolfunktionen mit zwei Bauelementtypen

Im letzten Abschnitt wurden passive Netzwerke mit nur zwei Bauelementtypen betrachtet. Für die Impedanzen ergaben sich Darstellungen nach den Gleichungen (6-23) bis (6-25), und für Admittanzen erhielt man die Darstellungen Gln. (6-35) bis (6-37). Die auftretenden Koeffizienten sind notwendig positiv. Im folgenden wird gezeigt, daß diese Darstellungen auch hinreichend für die Realisierbarkeit in ein mechanisch zulässiges Netzwerk sind. Die Impedanzen und Admittanzen bei den verschiedenen Bauelementkombinationen können im Sinne von Kapitel 6.1 mit Hilfe der Funktionen  $\xi$  und  $\xi' = 1/\xi$  verallgemeinert werden.

Die zwei Bauelemente mögen die "Admittanzen"  $\xi' = a\lambda$  bzw.  $\xi' = b$  besitzen. Die "Impedanzen"  $\xi$  sind voraussetzungsgemäß reziprok zu den "Admittanzen". In Gl.(6-5) gehen die einzelnen Zweig-"Admittanzen"  $a_j\lambda$  ( $j = 1, \dots, J$ ) linear kombiniert in den Matrizenanteil  $\lambda \underline{A}$  und die Zweig-"Admittanzen"  $b_l$  ( $l = 1, \dots, L$ ) linear kombiniert in die Matrix  $\underline{B}$  ein. Entsprechend gehen die Zweig-"Impedanzen"  $1/a_j\lambda$  ( $j = 1, \dots, J$ ) und  $1/b_l$  ( $l = 1, \dots, L$ ) in die Matrizenanteile  $\frac{1}{\lambda} \underline{\hat{A}}$  und  $\underline{\hat{B}}$  von Gl.(6-32) ein. Wegen der Passivität der Bauteile müssen die Koeffizienten  $a_j$  und  $b_l$  positiv sein.

Für die Umsetzung der allgemeinen Koeffizienten  $a_j$  und  $b_l$  in die speziellen Bauelementparameter gelten folgende Korrespondenzen:

a) Masse-Feder-System

$$a_j \hat{=} m_j$$

$$b_l \hat{=} k_l$$

b) Masse-Dämpfer-System

$$a_j \hat{=} m_j$$

$$b_l \hat{=} c_l$$

c) Dämpfer-Feder-System

$$a_j \hat{=} c_j$$

$$b_l \hat{=} k_l$$

Nach den Vorbetrachtungen ist erkennbar, daß eine "Impedanz"  $\xi$  in Form von Gl.(6-20) unmittelbar durch ein Netzwerk nach Abb. 7-1 realisierbar ist.

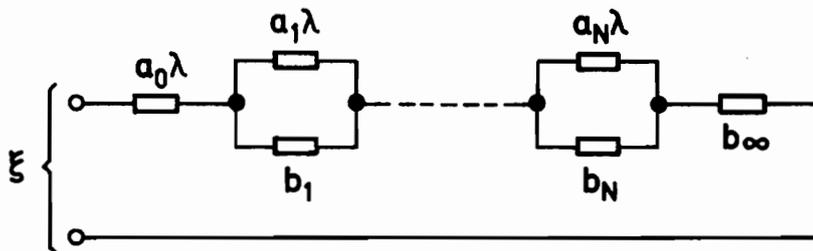


Abb. 7-1 Impedanz in der 1. Fosterform

Das Netzwerk in Abb. 7-1 besitzt die "Impedanz"

$$\xi = \frac{1}{a_0 \lambda} + \sum_{j=1}^N \frac{1}{a_j \lambda + b_j} + \frac{1}{b_\infty} \quad (7-1)$$

Der Koeffizientenvergleich zwischen Gl.(6-20) und Gl.(7-1) liefert:

$$a_0 = \frac{1}{K_0}$$

$$b_\infty = \frac{1}{K_\infty}$$

$$a_j = \frac{1}{K_j}$$

$$b_j = \frac{p_j}{K_j}$$

$$(j = 1, \dots, N)$$

Ebenso ist die "Admittanz"  $\xi'$  in Form (6-34) unmittelbar realisierbar (siehe Abb.7-2).

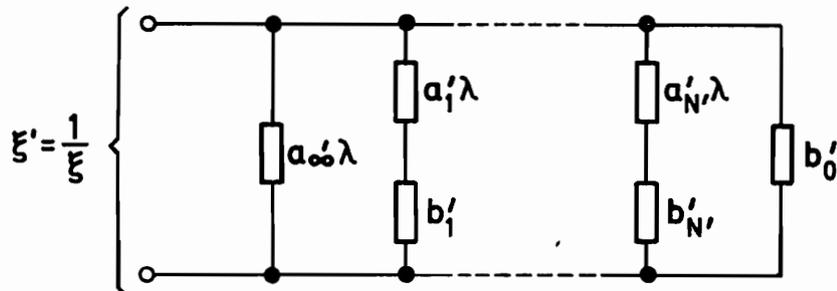


Abb. 7-2 Admittanz in der 2. Fosterform

Das Netzwerk in Abb.7-2 besitzt die "Admittanz"

$$\xi' = a'_{\infty} \lambda + \sum_{j=1}^{N'} \frac{b'_j \lambda}{\lambda + \frac{b'_j}{a'_j}} + b'_0 \quad (7-2)$$

Hier ergibt der Koeffizientenvergleich zwischen Gl.(6-34) und Gl.(7-2):

$$a'_{\infty} = K'_{\infty}$$

$$b'_0 = K'_0$$

$$a'_j = \frac{K'_j}{p'_j}$$

$$b'_j = K'_j$$

$$(j = 1, \dots, N')$$

Die Gleichungen (7-1) und (7-2) stellen Partialbruchzerlegungen der rationalen Funktionen  $\xi$  und  $\xi'$  dar. Deshalb werden die Netzwerke Abb.7-1

und 7-2 als Partialbruchnetzwerke bezeichnet. Die Realisierung nach Gl. (7-1) wird auch als 1. Fosterform und die nach Gl.(7-2) als 2. Fosterform bezeichnet. Die Funktionen  $\xi$  und  $\xi'$  sind zueinander reziprok, so daß die Netzwerke in Abb. 7-1 und Abb. 7-2 zwei Realisierungen einer Zweipolfunktion ermöglichen. Darüberhinaus sind noch viele andere Realisierungen möglich. Besitzt beispielsweise die Funktion  $\xi$  in Gl.(7-1)  $n = N + 2$  Summenglieder, gibt es ebensoviele Möglichkeiten, einen Summanden mit der "Impedanz"  $\xi$  unmittelbar zu realisieren. Das restliche Netzwerk besitzt die "Impedanz"  $\xi_2 = \xi - \xi_1$ . Da es durch passive Bauelemente realisierbar ist, muß  $\xi_2' = 1/\xi_2$  in Form von Gl.(7-2) mit  $n_2$  Summanden darstellbar sein. In jedem der  $n$  Möglichkeiten der Abspaltung eines Summanden von  $\xi$  gibt es wieder  $n_2$  Möglichkeiten, einen Summanden von  $\xi_2$  abzuspalten. Dies setzt sich bis zum vollständigen Abbau fort und führt auf einen "Realisierungsbaum". Dieser verästelt sich dadurch noch weiter, daß neben der Abspaltung eines Gliedes in Gl.(7-1)  $r$  (mit  $1 \leq r \leq n$ ) Summanden abgespalten werden können. Im Fall  $r > 1$  ist die Realisierung der abgespaltenen Funktion  $\xi_1$  selbst auf verschiedene Weise möglich. Praktisch kann sich die Anzahl der Realisierungen dadurch verdoppeln, indem man nicht von der "Impedanz"  $\xi$ , sondern von der "Admittanz"  $\xi' = 1/\xi$  ausgeht. Aus der Fülle möglicher Realisierungen gibt es neben den Fosterformen noch zwei Cauerformen, die jeweils auf einen bestimmten Algorithmus zurückgeführt werden können. Da diese Algorithmen auf  $\xi$  oder  $\xi' = 1/\xi$  anwendbar sind, ergeben sich daraus vier Realisierungsmöglichkeiten. Bei der 1. Cauerform wird jeweils derjenige Summand abgespalten, der für  $\lambda \rightarrow \infty$  überwiegt. Im Falle einer "Impedanz"  $\xi$  nach Gl.(6-20) ist dies eine Konstante  $K_\infty \geq 0$  und im Falle einer "Admittanz"  $\xi' = 1/\xi$  nach Gl.(6-34) ein Pol in  $\lambda = \infty$  mit dem Residuum  $K'_\infty \geq 0$ . Die Realisierung führt auf Bauelemente mit den Leitwertparametern  $a_{\infty j} = K'_{\infty j}$  und  $b_{\infty j} = \frac{1}{K_{\infty j}}$  im Abbauschritt  $j$ . Daraus erhält man entweder die Kettenformen

$$\xi = \frac{1}{b_{\infty_1}} + \frac{1}{|a_{\infty_2} \lambda} + \frac{1}{|1/b_{\infty_3}} + \dots \quad (7-3)$$

oder

$$\xi' = a_{\infty_1} \lambda + \frac{1}{|1/b_{\infty_2}} + \frac{1}{|a_{\infty_3} \lambda} + \dots \quad (7-4)$$

Die Schreibweise für Kettenbrüche geht auf O. PERRON [23] zurück, und zwar gilt

$$\xi = \frac{\alpha_1}{\beta_1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2 + \dots}} \equiv \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \dots$$

Die Realisierungen von Gl.(7-3) und Gl.(7-4) zeigen die Abbildungen (7-3) und (7-4).

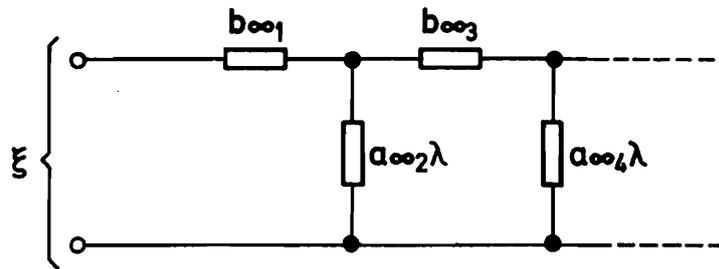


Abb. 7-3 Impedanz in der 1. Cauerform

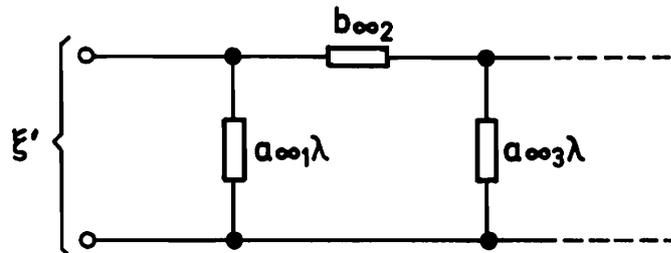


Abb. 7-4 Admittanz in der 1. Cauerform

Die 2. Cauerform zeichnet sich durch das Abspalten desjenigen Summanden aus, der in  $\lambda \rightarrow 0$  überwiegt. Liegt eine "Impedanz"  $\xi$  vor, handelt es sich nach Gl.(6-20) um einen Pol in  $\lambda = 0$  mit dem Residuum  $K_0 \geq 0$ . Die "Admittanz"  $\xi'$  nimmt nach Gl.(6-34) in  $\lambda = 0$  den Wert  $K'_0 \geq 0$  an. Die Realisierung erfolgt mit Bauelementen mit den Leitwerten  $a_{0j} = \frac{1}{K_{0j}}$  und  $b_{0j} = K'_{0j}$  im Abbauschritt  $j$ . Man erhält die Kettenformen

$$\xi = \frac{1}{a_{0_1} \lambda} + \frac{1}{b_{0_2}} + \frac{1}{1/a_{0_3} \lambda} + \dots \quad (7-5)$$

oder

$$\xi' = b_{0_1} + \frac{1}{1/a_{0_2} \lambda} + \frac{1}{b_{0_3}} + \dots \quad (7-6)$$

Die zu den Gleichungen (7-5) und (7-6) gehörenden Netzwerke zeigen die Abbildungen (7-5) und (7-6).

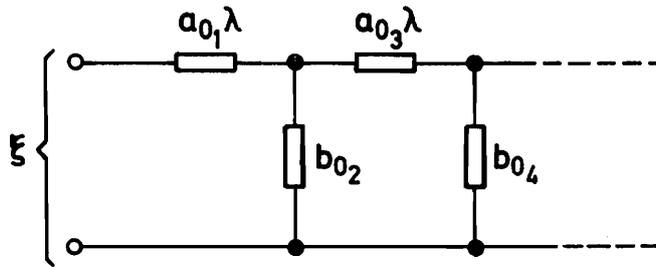


Abb. 7-5 Impedanz in der 2. Cauerform

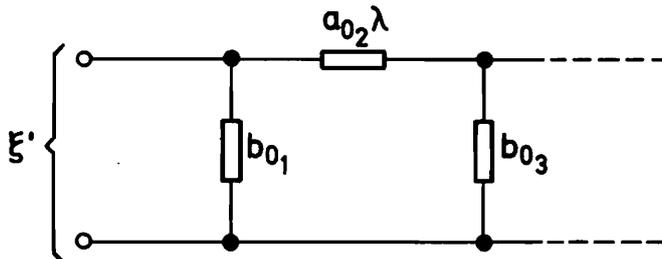


Abb. 7-6 Admittanz in der 2. Cauerform

Überträgt man mit den oben angegebenen Korrespondenzen die Netzwerke in den Abbildungen (7-3) bis (7-6) in die speziellen Netzwerke mit zwei Bauelement-

typen, ergeben sich zum Teil unbefriedigende Realisierungen. Interpretiert man die untere, durchgehende ideale Verbindung als Inertialsystem (Erde), kommt man zu dem Resultat, daß die 1. Fosterform und die 2. Cauerform auf nicht geerdete Massen führen, sofern es sich um ein System mit Massen handelt. Dagegen liefern die 2. Fosterform und die 1. Cauerform geerdete Massen, so daß Schwingerketten möglich sind.

Zur Veranschaulichung wurden die Netzwerke bzw. mechanischen Systeme in der 2. Fosterform und 1. Cauerform mit Massen und Federn (Reaktanzen) in den Abbildungen 7-7 bis 7-9 dargestellt.

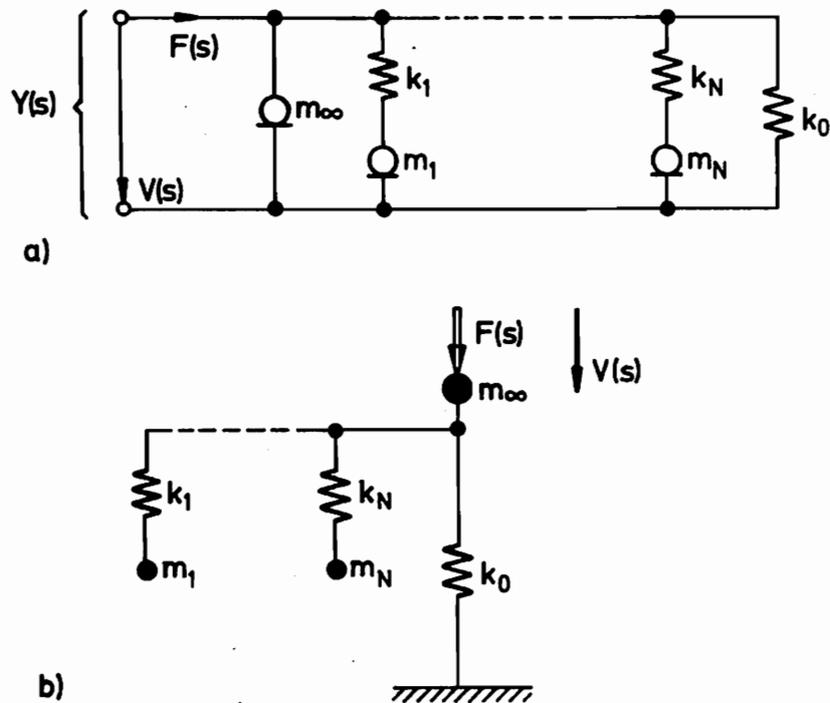


Abb. 7-7 Realisierung der Admittanz  $Y(s)$  eines Feder-Masse-Systems in der 2. Fosterform  
a) mechanisches Netzwerk; b) mechanisches System

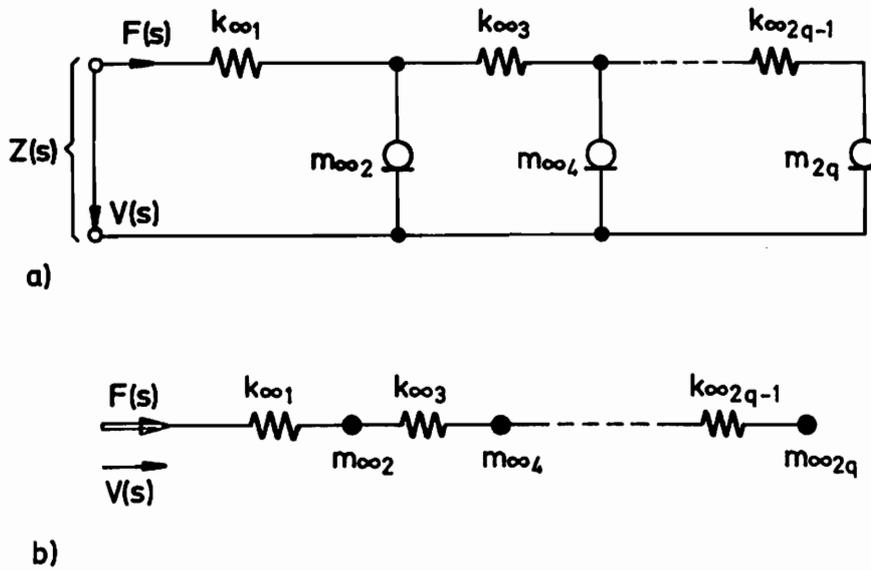


Abb. 7-8 Realisierung der Impedanz  $Z(s)$  eines Feder-Masse-Systems in der 1. Cauerform  
 a) Netzwerk; b) mechanisches System

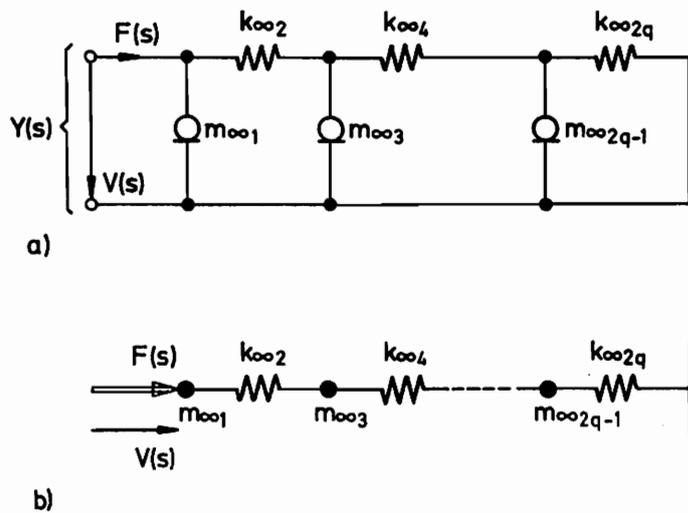


Abb. 7-9 Realisierung der Admittanz  $Y(s)$  eines Feder-Masse-Systems in der 1. Cauerform  
 a) Netzwerk; b) mechanisches System

## 7.2 Synthese modaler Systeme

In Kapitel 6.2 wurde gezeigt, daß die Impedanz  $Z(s)$  eines modalen Systems notwendig die Form von Gl.(6-53) besitzt. Es stellt sich die Frage, ob die Darstellung auch hinreichend dafür ist, daß ein mechanisch realisierbares Netzwerk existiert. Würde man jedes Summenglied in Gl.(6-53) für sich realisieren, erhielte man insgesamt das Netzwerk in Abb. 7-10.

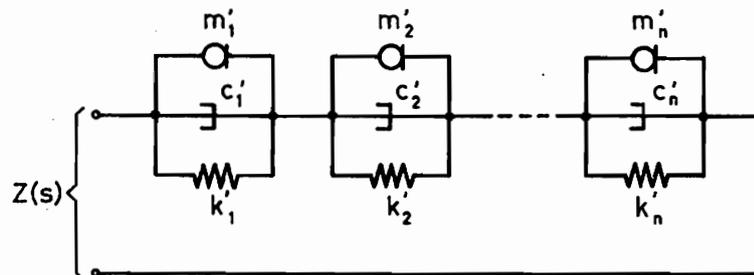


Abb. 7-10 Netzwerkrealisierung von Gl.(6-53)

Das Netzwerk ist aber nur durch eine Hintereinanderschaltung von Ersatzsystemen nach Abb. 5-14 realisierbar. Die besonderen Eigenschaften modaler mechanischer Systeme erlauben jedoch folgenden Satz :

### Satz 7-1

Impedanzen mit der Darstellung

$$Z(s) = \sum_{j=1}^n \frac{s}{s^2 m'_j + s c'_j + k'_j} \quad (7-7)$$

wobei entweder

$$m'_j = \alpha c'_j + \beta k'_j \quad (c'_j, k'_j \geq 0)$$

$$c'_j = \alpha m'_j + \beta k'_j \quad (m'_j, k'_j \geq 0)$$

$$k'_j = \alpha m'_j + \beta c'_j \quad (m'_j, c'_j \geq 0)$$

$$(\alpha, \beta \geq 0 ; j = 1, \dots, n)$$

gilt, führen auf passive mechanische Schwingerketten. Insbesondere sind Netzwerke ähnlich der 1. Cauerform und 2. Fosterform möglich. Im Fall  $m_j' = \alpha c_j' + \beta k_j'$  ( $j=1, \dots, n$ ) gilt  $\alpha = 0$  oder  $\beta = 0$ .

Beim Übergang von Gl.(6-53) zu Gl.(7-7) wird davon ausgegangen, daß  $n$  Summanden nicht verschwinden, für die also  $t_{1j} \neq 0$  ( $j=1, \dots, n$ ) gilt. Die Koeffizienten  $t_{1j}$  sind dann frei wählbar, z.B.  $t_{1j} = 1$  ( $j=1, \dots, n$ ). Dies ist auch so interpretierbar, daß die Partialbrüche in Gl.(6-53) durch  $t_{1j}^2$  ( $j=1, \dots, n$ ) kürzbar sind, d.h. Gl.(6-53) ist bezüglich der Parameter redundant.

Zum Beweis, daß Satz 7-1 hinreichend ist, wird eine Realisierung nach Abb. 7-10 angenommen. Das Netzwerk führt auf das Gleichungssystem:

$$\left( s \underline{M}' + \underline{C}' + \frac{1}{s} \underline{K}' \right) \underline{v}' = \underline{f} \quad (7-8)$$

Jene Matrix, die als Linearkombination der beiden anderen angesetzt wurde, soll vorläufig unberücksichtigt bleiben. Das verbleibende System besteht nur aus zwei Bauelementtypen und besitzt ein Gleichungssystem in Form von (vgl. Kapitel 6.1):

$$\left( \lambda \underline{A}' + \underline{B}' \right) \underline{z}' = \underline{f} \quad (7-9)$$

In Gl.(7-7) verschwinden dann alle  $m_j'$ ,  $c_j'$  bzw.  $k_j'$  ( $j=1, \dots, n$ ). Die Impedanz  $Z(s)$  kann nach Kapitel 7.1 auch durch andere Netzwerke realisiert werden, insbesondere durch die mechanisch zulässige 2. Fosterform und 1. Cauerform. Eine solche mechanisch zulässige Realisierung besitze das Gleichungssystem

$$\left( \lambda \underline{A}'' + \underline{B}'' \right) \underline{z}'' = \underline{f} \quad (7-10)$$

Notwendig für die Ähnlichkeit der Systeme nach Gl.(7-9) und (7-10) ist, daß sie auf die gleichen Diagonalformen nach Gl.(6-9) führen (siehe GANTMACHER [10]), denn dann besitzen beide Systeme die gleichen Eigenwerte. Mit den linearen Transformationen

$$\underline{z}' = \underline{T}' \cdot \underline{u}' \quad (7-11a)$$

$$\underline{z}'' = \underline{T}'' \cdot \underline{u}'' \quad (7-11b)$$

erhält man

$$(\lambda \underline{T}'^T \underline{A}' \underline{T}' + \underline{T}'^T \underline{B}' \underline{T}') \underline{u}' = \underline{T}'^T \underline{f} \quad (7-12a)$$

und

$$(\lambda \underline{T}''^T \underline{A}'' \underline{T}'' + \underline{T}''^T \underline{B}'' \underline{T}'') \underline{u}'' = \underline{T}''^T \underline{f} \quad (7-12b)$$

Daraus entstehen die Diagonalformen

$$(\lambda \underline{E} - \underline{\Lambda}) \underline{u}' = \underline{g}' \quad (7-13a)$$

und

$$(\lambda \underline{E} - \underline{\Lambda}) \underline{u}'' = \underline{g}'' \quad (7-13b)$$

Daraus folgt

$$\underline{T}'^T \underline{A}' \underline{T}' = \underline{T}''^T \underline{A}'' \underline{T}''$$

und

$$\underline{T}'^T \underline{B}' \underline{T}' = \underline{T}''^T \underline{B}'' \underline{T}''$$

d.h.

$$\underline{A}'' = (\underline{T}''^{-1})^T \underline{T}'^T \underline{A}' \underline{T}' \underline{T}''^{-1} \quad (7-14a)$$

und

$$\underline{B}'' = (\underline{T}''^{-1})^T \underline{T}'^T \underline{B}' \underline{T}' \underline{T}''^{-1} \quad (7-14b)$$

Mit

$$\underline{T} = \underline{T}' \underline{T}''^{-1} \quad (7-15)$$

erhält man

$$\underline{A}'' = \underline{T}^T \underline{A}' \underline{T} \quad (7-16a)$$

$$\underline{B}'' = \underline{T}^T \underline{B}' \underline{T} \quad (7-16b)$$

d.h. Gl.(7-9) geht durch eine Ähnlichkeitstransformation mit der Transformationsmatrix  $\underline{T}$  in Gl.(7-10) über.

Die bisher unberücksichtigte Matrix  $\underline{D}'$ , die sich als Linearkombination von  $\underline{A}'$  und  $\underline{B}'$  darstellen läßt, also

$$\underline{D}' = \alpha \underline{A}' + \beta \underline{B}' \quad (7-17)$$

geht bei der Ähnlichkeitstransformation in

$$\underline{D}'' = \underline{T}^T \underline{D}' \underline{T} \quad (7-18)$$

über. Aus Gl.(7-18) folgt mit den Gleichungen (7-17) und (7-16a,b)

$$\underline{D}'' = \alpha \underline{A}'' + \beta \underline{B}'' \quad (7-19)$$

Durch den modalen Ansatz Gl.(7-17) besitzt das neue System eine solche Struktur, daß zu jedem Bauelement  $a''_j$  in Gl.(7-19) ein Bauelement  $d''_j = \alpha \cdot a''_j$  und zu jedem Bauelement  $b''_k$  ein Bauelement  $d''_k = \beta b''_k$  parallel geschaltet ist. Da  $\underline{A}''$  und  $\underline{B}''$  einer mechanisch zulässigen Realisierung mit positiven Bauelementwerten zugeordnet sind und andererseits  $\alpha \geq 0$  und  $\beta \geq 0$  vorausgesetzt wurde, sind die Bauelementwerte der parallel geschalteten Bauelemente positiv. Liegt der Fall

$$m'_j = \alpha c'_j + \beta k'_j$$

$$(j = 1, \dots, n)$$

vor, erlauben die Standardrealisierungen Netzwerke, bei denen entweder alle Dämpfer  $c''_j$  oder Federn  $k''_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) am Inertialsystem anliegen. Da zu den nicht geerdeten Bauelementen keine Massen parallel geschaltet werden sollen, muß der entsprechende Wert  $\alpha$  oder  $\beta$  zu Null werden. Der Satz 7-1 ist damit vollständig bewiesen.

Wurde bisher die Synthese ausgehend von Gl.(6-53) bzw. (7-7) betrachtet, soll nun auf die Darstellung Gl.(6-54) eingegangen werden. Treffen die Voraussetzungen von Satz 6-2 zu und setzt man  $t_{ij} = 1$  (wenn die  $n$  Summanden nicht verschwinden, d.h.  $t_{ij} \neq 0$ ;  $j=1, \dots, n$ ), kann unmittelbar eine Partialbruchrealisierung nach Abb. 7-11 erfolgen.

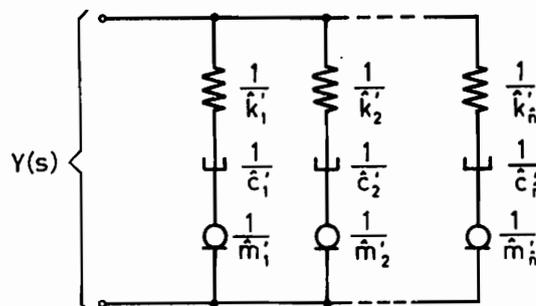


Abb. 7-11 Netzwerkrealisierung von Gl.(6-54)

Das Netzwerk in Abb. 7-11 ist unmittelbar als Schwingerkette realisierbar. Andererseits sind noch weitere balkenfreie Realisierungen möglich. Das Netzwerk in Abb. 7-11 besitze das Maschengleichungssystem:

$$\left( \frac{1}{s} \underline{\hat{M}}' + \underline{\hat{C}}' + s \underline{\hat{K}}' \right) \underline{\hat{f}}' = \underline{\hat{v}} \quad (7-20)$$

Durch die lineare Transformation

$$\underline{\hat{f}}' = \underline{\hat{T}} \underline{\hat{f}}''$$

erhält man aus Gl.(7-20)

$$\left( \frac{1}{s} \underline{\hat{M}}'' + \underline{\hat{C}}'' + s \underline{\hat{K}}'' \right) \underline{\hat{f}}'' = \underline{\hat{v}} \quad (7-21)$$

mit

$$\underline{\hat{M}}'' = \underline{\hat{T}}^T \underline{\hat{M}}' \underline{\hat{T}} \quad (7-22a)$$

$$\underline{\hat{C}}'' = \underline{\hat{T}}^T \underline{\hat{C}}' \underline{\hat{T}} \quad (7-22b)$$

$$\underline{\hat{K}}'' = \underline{\hat{T}}^T \underline{\hat{K}}' \underline{\hat{T}} \quad (7-22c)$$

Die zwei unabhängigen Matrizen in Gl.(7-20) werden mit  $\underline{\hat{A}}'$  und  $\underline{\hat{B}}'$  bezeichnet, die dritte sei

$$\underline{\hat{D}}' = \underline{\hat{\alpha}} \underline{\hat{A}}' + \underline{\hat{\beta}} \underline{\hat{B}}' \quad (7-23)$$

Durch die Ähnlichkeitstransformation können die Matrizen

$$\underline{\hat{A}}'' = \underline{\hat{T}}^T \underline{\hat{A}}' \underline{\hat{T}} \quad (7-24a)$$

$$\underline{\hat{B}}'' = \underline{\hat{T}}^T \underline{\hat{B}}' \underline{\hat{T}} \quad (7-24b)$$

auf Formen gebracht werden, die als Realisierung mit zwei Bauelementtypen mit passiven Netzwerkelementen zulässig sind. Die Gl.(7-23) geht über in

$$\begin{aligned} \underline{\hat{D}}'' &= \underline{\hat{T}}^T \underline{\hat{D}}' \underline{\hat{T}} \\ \Rightarrow \underline{\hat{D}}'' &= \underline{\hat{\alpha}} \underline{\hat{A}}'' + \underline{\hat{\beta}} \underline{\hat{B}}'' \end{aligned} \quad (7-25)$$

Die Gl.(7-25) besagt, daß zu jedem Bauelement  $\hat{a}_j$  ein Bauelement  $\hat{d}_j = \hat{\alpha} \cdot \hat{a}_j$  und zu jedem Bauelement  $\hat{b}_k$  ein Bauelement  $\hat{d}_k = \hat{\beta} \cdot \hat{b}_k$  in Reihe geschaltet ist. Für  $\hat{\alpha} \geq 0$  und  $\hat{\beta} \geq 0$  sind die Bauelementwerte der zugeordneten Bauelemente positiv.

Im Falle eines modalen Ansatzes

$$\underline{\hat{M}}' = \hat{\alpha} \underline{\hat{C}}' + \hat{\beta} \underline{\hat{K}}'$$

ist keine Einschränkung für  $\hat{\alpha}$  und  $\hat{\beta}$  notwendig, da in jedem Fall eine Realisierung nach Abb. 7-11 möglich ist. Weitere Realisierungen, insbesondere in der 1. Cauerform, sind nur möglich, wenn entweder  $\hat{\alpha} = 0$  oder  $\hat{\beta} = 0$  ist.

Die letzten Ergebnisse werden zusammengefaßt:

Satz 7-2

Admittanzen mit der Darstellung

$$Y(s) = \sum_{j=1}^{\hat{n}} \frac{s}{s^2 \hat{m}'_j + s \hat{c}'_j + \hat{k}'_j} \quad (7-26)$$

wobei entweder

$$\hat{m}'_j = \hat{\alpha} \hat{c}'_j + \hat{\beta} \hat{k}'_j \quad (\hat{c}'_j, \hat{k}'_j \cong 0)$$

$$\hat{c}'_j = \hat{\alpha} \hat{m}'_j + \hat{\beta} \hat{k}'_j \quad (\hat{m}'_j, \hat{k}'_j \cong 0)$$

$$\hat{k}'_j = \hat{\alpha} \hat{m}'_j + \hat{\beta} \hat{c}'_j \quad (\hat{m}'_j, \hat{c}'_j \cong 0)$$

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta} \cong 0 ; j = 1, \dots, \hat{n})$$

gilt, führen auf passive mechanische Schwingerketten. Im Fall  $\hat{m}'_j = \hat{\alpha} \hat{c}'_j + \hat{\beta} \hat{k}'_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) sind Kettennetzwerke nur möglich, wenn entweder  $\hat{\alpha} = 0$  oder  $\hat{\beta} = 0$  gilt.

## 8. Synthese allgemeiner Zweipolfunktionen

### 8.1 Methodik der Syntheseverfahren

Bei den Syntheseverfahren wird eine Zweipolfunktion  $\zeta_0(s)$  aufgeteilt in

$$\zeta_0(s) = \bar{\zeta}_1(s) + \zeta_1(s) \quad (8-1)$$

Die Funktion  $\bar{\zeta}_1(s)$  soll nach Möglichkeit eine Zweipolfunktion sein (trifft jedoch nicht für alle Syntheseverfahren zu). Die Restfunktion

$$\zeta_1(s) = \zeta_0(s) - \bar{\zeta}_1(s) \quad (8-2)$$

ist aber wieder eine Zweipolfunktion. Die Gl.(8-1) stellt im Falle einer Impedanz eine Reihenschaltung (siehe Abb. 8-1a) und im Falle einer Admittanz eine Parallelschaltung dar (siehe Abb. 8-1b).

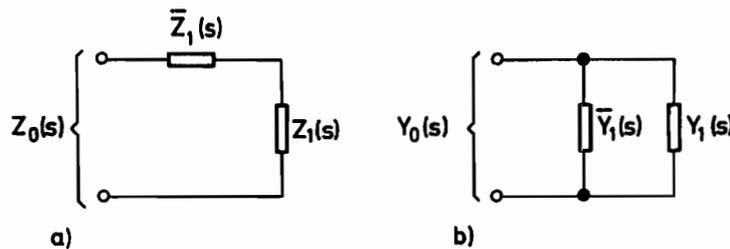


Abb. 8-1 Veranschaulichung von Gl.(8-1):  
a) Impedanz; b) Admittanz

Die Gl.(8-2) wird auch ausgedrückt als Abbau der Funktion  $\bar{\zeta}_1$  von  $\zeta_0(s)$  mit der Restfunktion  $\zeta_1(s)$ . Mit dem Abbau von  $\bar{\zeta}_1(s)$  wird der erste Abbauschritt beendet. Nun erfolge ein Abbau von  $1/\zeta_1(s)$ , d.h.

$$\frac{1}{\zeta_2(s)} = \frac{1}{\zeta_1(s)} - \frac{1}{\bar{\zeta}_2(s)} \quad (8-3)$$

Daraufhin erfolge wieder ein Abbau von  $\zeta_2(s)$  usw., so daß sich eine Kettenentwicklung

$$\zeta_0(s) = \bar{\zeta}_1(s) + \frac{1}{\frac{1}{\bar{\zeta}_2(s)}} + \frac{1}{\bar{\zeta}_3(s)} + \dots \quad (8-4)$$

mit

$$\zeta_j(s) = \zeta_{j-1}(s) - \bar{\zeta}_j(s) \quad (8-5a)$$

für ungerades  $j \geq 1$  bzw.

$$\frac{1}{\zeta_j(s)} = \frac{1}{\zeta_{j-1}(s)} - \frac{1}{\bar{\zeta}_j(s)} \quad (8-5b)$$

für gerades  $j \geq 2$  ergibt. Die Realisierung und damit der Kettenbruch Gl. (8-4) enden im Abbauschritt N entweder mit

$$\zeta_N(s) = \zeta_{N-1}(s) - \bar{\zeta}_N(s) \equiv 0 \quad (8-6a)$$

für ungerades N oder mit

$$\frac{1}{\zeta_N(s)} = \frac{1}{\zeta_{N-1}(s)} - \frac{1}{\bar{\zeta}_N(s)} \equiv 0 \quad (8-6b)$$

für gerades N.

Für eine Impedanz  $Z_0(s)$  geht die Kettenentwicklung Gl.(8-4) über in (wenn N ungerade):

$$Z_0(s) = \bar{Z}_1 + \frac{1}{\bar{Y}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Y}_{N-1}} + \frac{1}{\bar{Z}_N} \quad (8-7)$$

Die Gl.(8-7) wird in Abb. 8-2 veranschaulicht.

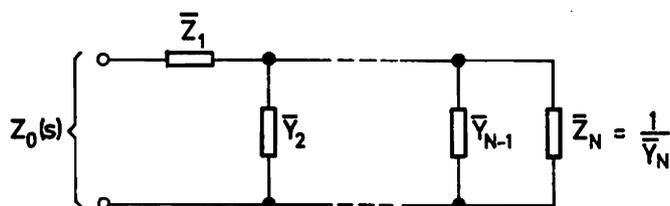


Abb. 8-2 Kettennetzwerk zu Gl.(8-7)

Handelt es sich in Gl.(8-4) um eine Admittanz, folgt für ungerades N :

$$Y_0(s) = \bar{Y}_1 + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\bar{Z}_{N-1}} + \frac{1}{\bar{Y}_N} \quad (8-8)$$

Die Abb. 8-3 veranschaulicht Gl.(8-8). Die Funktionen  $\bar{Y}_j$  und  $\bar{Z}_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) aus den Gln.(8-7) und (8-8) sind i.a. nicht miteinander verwandt.

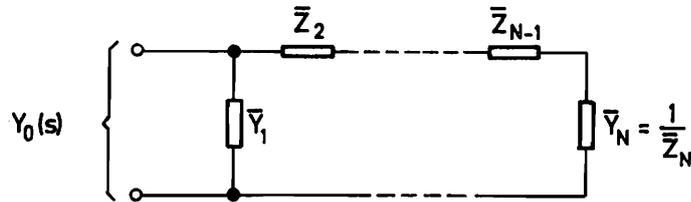


Abb. 8-3 Kettennetzwerk zu Gl.(8-8)

Die einzelnen Syntheseverfahren unterscheiden sich nun im Auffinden der Abbaufunktionen  $\bar{\zeta}_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ).

## 8.2 Reaktanzreduktion und Realteilminimumabbau

Die Partialbrüche mit imaginären Polstellen (einschließlich  $s = \infty$ ) einer Zweipolfunktion  $\zeta_0(s)$  werden zusammengefaßt zur Reaktanzfunktion:

$$\zeta_R(s) = \frac{A_0}{s} + \sum_{j=1}^{N_R} \frac{2 A_j s}{s^2 + \omega_j^2} + A_\infty s \quad (8-9)$$

$$(A_0, A_1, A_2, \dots, A_{N_R}, A_\infty \cong 0)$$

Die Gl.(8-9) entspricht Gl.(6-23) bzw. Gl.(6-35). Der Abbau der Reaktanzen (Reaktanzreduktion)

$$\zeta_1(s) = \zeta_0(s) - \zeta_R(s) \quad (8-10)$$

führt wieder auf eine Zweipolfunktion  $\zeta_1(s)$  als Restfunktion. Dies läßt sich mit Satz 4-2 zeigen:

- $\operatorname{Re} \zeta_1(i\omega) = \operatorname{Re} \zeta_0(i\omega) \cong 0$
- $\zeta_1(s)$  besitzt als Polstellen diejenigen von  $\zeta_0(s)$ , die in der offenen linken Halbebene  $\operatorname{Re} s < 0$  liegen
- $\zeta_1(s)$  besitzt keine Polstellen mehr auf der imaginären Achse (einschließlich  $s = \infty$ ).

Als weiterer Abbau wird der einer Konstanten  $R_1 \geq 0$ , also eines passiven Dämpfers, betrachtet:

$$\zeta_1(s) = \zeta_0(s) - R_1 \quad (8-11)$$

Für die Positivität von  $\zeta_1(s)$  verbleibt aus Satz 4-2 die Bedingung  $\operatorname{Re} \zeta_1(i\omega) \geq 0$ , so daß

$$\operatorname{Min} [\operatorname{Re} \zeta_1(i\omega)] = \operatorname{Min} [\operatorname{Re} \zeta_0(i\omega)] - R_1 \geq 0$$

gelten muß. Aus Gl.(8-12) folgt: (8-12)

$$R_1 \leq \operatorname{Min} [\operatorname{Re} \zeta_0(i\omega)] \quad (8-13)$$

Wird die Beziehung Gl.(8-13) verletzt, ist  $\zeta_1(s)$  keine Zweipolfunktion. Der Abbau mit

$$R_1 = \operatorname{Min} [\operatorname{Re} \zeta_0(i\omega)] \quad (8-14)$$

wird als Realteilminimumabbau bezeichnet.

Realteilminimumabbau und Reaktanzreduktion werden so gekoppelt, daß eine möglichst große Gradreduktion oder sogar ein Vollabbau möglich ist. Auf eine Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  soll der Realteilminimumabbau angewendet werden. Dabei sind zwei Wege möglich:

1. Das Realteilminimum wird von  $\zeta(s)$  abgebaut, d.h.

$$\zeta_1(s) = \zeta(s) - R'_m \quad (8-15)$$

mit

$$R'_m = \operatorname{Min} [\operatorname{Re} \zeta(i\omega)] = \operatorname{Re} \zeta(i\omega'_m) \quad (8-16)$$

Nun folgt aus den Gln.(8-15) und (8-16)

$$\operatorname{Min} [\operatorname{Re} \zeta_1(i\omega)] = \operatorname{Re} \zeta_1(i\omega'_m) = 0 \quad (8-17)$$

Gilt auch

$$\operatorname{Im} \zeta_1(i\omega'_m) = \operatorname{Im} \zeta(i\omega'_m) = 0 \quad (8-18)$$

besitzt  $1/\zeta_1(s)$  eine Polstelle in  $s = i\omega'_m$ . Diese und, sofern  $\omega'_m \neq 0$  und  $\omega'_m \neq \infty$ , die in  $s = -i\omega'_m$  können von  $\frac{1}{\zeta_1(s)}$  abgebaut werden.

2. Das Realteilminimum wird von  $\frac{1}{\zeta_1(s)}$  abgebaut, d.h.

$$\frac{1}{\zeta_2(s)} = \frac{1}{\zeta(s)} - R_m'' \quad (8-19)$$

mit

$$R_m'' = \text{Min} \left\{ \text{Re} \left[ \frac{1}{\zeta(i\omega)} \right] \right\} = \text{Re} \left[ \frac{1}{\zeta(i\omega_m'')} \right] \quad (8-20)$$

Aus den Gln.(8-19) und (8-20) folgt

$$\text{Min} \left\{ \text{Re} \left[ \frac{1}{\zeta_2(i\omega)} \right] \right\} = \text{Re} \left[ \frac{1}{\zeta_2(i\omega_m'')} \right] = 0 \quad (8-21)$$

Gilt auch

$$\text{Im} \left[ \frac{1}{\zeta_2(i\omega_m'')} \right] = \text{Im} \left[ \frac{1}{\zeta(i\omega_m'')} \right] = 0 \quad (8-22)$$

liegt eine Polstelle von  $\zeta_2(s)$  in  $s = i\omega_m''$  und, wenn  $\omega_m'' \neq 0$  und  $\omega_m'' \neq \infty$ , auch in  $s = -i\omega_m''$  vor. Der Polstellenabbau ist anschließend möglich.

Unter Umständen können der Realteilminimumabbau nach Gl.(8-15) und der nach Gl.(8-19) auf Reaktanzreduktionen führen. Je nachdem für welchen Weg man sich entscheidet, ergeben sich unterschiedliche Lösungen. Führt nur einer der beiden Wege zu einer Reaktanzreduktion, wird dieser Weg beschriftet. Ist in beiden Fällen keine Reaktanzreduktion möglich, handelt es sich um eine Zweipolfunktion minimaler Reaktanz  $\zeta_M(s)$ .

Es wird angenommen, daß die Reaktanzreduktionen nach 1 bzw. 2 möglich sind. Je nach beschriftetem Weg erhält man entweder

1.

$$\frac{1}{\zeta_2'(s)} = \frac{1}{\zeta_1(s)} - \frac{1}{\zeta_{R_2}(s)} \quad (8-23)$$

oder

2.

$$\zeta_3(s) = \zeta_2(s) - \zeta_{R_3}(s) \quad (8-24)$$

Da alle Reaktanzen abgebaut werden, sind die Restfunktionen  $\frac{1}{\zeta_2'(s)}$  bzw.  $\zeta_3(s)$  auf der imaginären Achse (einschließlich  $s = \infty$ ) polstellenfrei. Nicht notwendig ist die Nullstellenfreiheit von  $\frac{1}{\zeta_2'(s)}$  bzw.  $\zeta_3(s)$ . Besitzen  $\frac{1}{\zeta_2'(s)}$  bzw.  $\zeta_3(s)$  Nullstellen auf der imaginären Achse (einschließlich  $s = \infty$ ), sind dies Polstellen von  $\zeta_2'(s)$  bzw.  $\frac{1}{\zeta_3(s)}$ , die abgebaut werden können. Nach den Reaktanzreduktionen kann der beschriebene Polabbauprozess solange fortgeführt werden, bis eine Restfunktion verbleibt, die weder Null- noch Polstellen auf der imaginären Achse (einschließlich  $s = \infty$ ) besitzt. Die Restfunktion kann wieder Ausgangspunkt eines Realteilminimumabbaus mit einer Folge alternierender Polstellenabbaus auf der imaginären Achse (einschließlich  $s = \infty$ ) sein. Der beschriebene Prozess läuft also zyklisch ab. Faßt man einen Realteilminimumabbau mit der Folge alternierender Reaktanzreduktionen als einen Zyklus auf, wird die Indizierung (z.B. der abgebauten Reaktanzen) sehr aufwendig und unüberschaubar. Günstiger ist es, einen Zyklus so zu definieren, daß nach einem Realteilminimumabbau nur ein Polstellenabbau erfolgt. Besitzt die Restfunktion nach einem Zyklus eine Nullstelle, ist das abzubauen Realteilminimum im nächsten Zyklus Null.

Ausgangspunkt eines jeden Zyklus  $j$  ist nun die Impedanz  $Z^{(j)}(s)$ . Für  $j = 1$  ist  $Z^{(1)}(s)$  mit der zu realisierenden Impedanz  $Z(s)$  identisch. Bei der Beschreibung des Vorgehens innerhalb des Zyklus  $j$  ist zwischen den oben beschriebenen Alternativen des Realteilminimumabbaus zu unterscheiden:

1. Es wird

$$Z_1^{(j)}(s) = Z^{(j)}(s) - R_m^{(j)} \quad (8-25)$$

mit

$$R_m^{(j)} = \text{Min} [ \text{Re } Z^{(j)}(i\omega) ] = \text{Re } Z^{(j)}(i\omega_m^{(j)}) \quad (8-26)$$

gebildet. Unter der Voraussetzung

$$\text{Im } Z_1^{(j)}(i\omega_m^{(j)}) = 0 \quad (8-27)$$

erfolgt die Reaktanzreduktion

$$Y_2^{(j)}(s) = Y_1^{(j)}(s) - Y_R^{(j)} \quad (8-28)$$

2. Es wird

$$Y_2^{(j)}(s) = Y^{(j)}(s) - R_m^{(j)} \quad (8-29)$$

mit

$$R_m^{(j)} = \text{Min} [ \text{Re } Y^{(j)}(i\omega) ] = \text{Re } Y^{(j)}(i\omega_m^{(j)}) \quad (8-30)$$

gebildet. Unter der Voraussetzung

$$\text{Im } Y_2^{(j)}(i\omega_m^{(j)}) = 0 \quad (8-31)$$

erfolgt die Reaktanzreduktion

$$Z_3^{(j)}(s) = Z_2^{(j)}(s) - Z_R^{(j)} \quad (8-32)$$

Die Größen  $R_m^{(j)}$ ,  $\omega_m^{(j)}$  und andere sind in Punkt 1 und 2 verschieden. Da in einem Zyklus nur einer der beiden Wege eingeschlagen wird, ist die Bezeichnungsweise bei Angabe des Realteilminimumabbaus von der Impedanz (Gl. 8-25) bzw. von der Admittanz (Gl. 8-29) eindeutig.

Für den nächsten Zyklus  $j + 1$  erhält man als Ausgangsfunktion entweder

1.

$$Z^{(j+1)}(s) = Z_2^{(j)}(s) \quad (8-33)$$

oder

2.

$$Z^{(j+1)}(s) = Z_3^{(j)}(s) \quad (8-34)$$

Die Abb. 8-4 veranschaulicht den Abbauprozess im Zyklus  $j$  nach Punkt 1, und Abb. 8-5 veranschaulicht ihn nach Punkt 2.

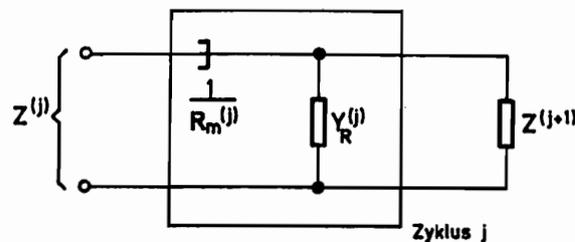


Abb. 8-4 Abbauzyklus nach Punkt 1

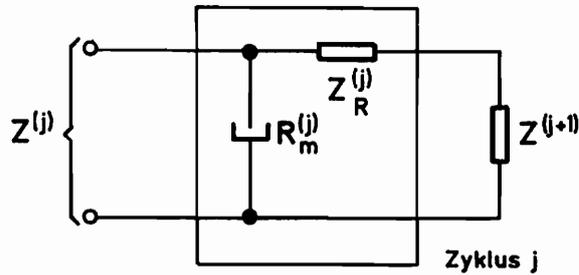


Abb. 8-5 Abbauzyklus nach Punkt 2

Nach jedem Zyklus beginnt der Abbauprozess von neuem, wobei sowohl nach Punkt 1 oder Punkt 2 verfahren werden kann.

Führt die geschilderte Vorgehensweise auf einen Vollabbau im Zyklus N, bedeutet dies entweder

1.

$$Y_2^{(N)}(s) = Y_1^{(N)}(s) - Y_R^{(N)}(s) \equiv 0 \quad (8-35)$$

oder

2.

$$Z_3^{(N)}(s) = Z_2^{(N)}(s) - Z_R^{(N)}(s) \equiv 0 \quad (8-36)$$

Sind nach dem Zyklus  $N_M$  weder durch Verfahren 1 noch durch Verfahren 2 Reaktanzreduktionen möglich, wird der Abbauprozess mit einer Zweipolfunktion minimaler Reaktanz  $Z_M \neq 0$  abgebrochen. Es gilt dann

$$Z_M(s) = Z^{(N_M+1)}(s) \quad (8-37)$$

Die Abb. 8-6 gibt ein Beispiel der Vorgehensweise mit einer Zweipolfunktion minimaler Reaktanz  $Z_M$  als Abschluß. Wie schon in den Abbildungen 8-4 und 8-5 angedeutet, können die in einem Zyklus abgebauten Bauelemente zu Zweitoren zusammengefaßt werden. Erfolgen wie in Abb. 8-6 mehrere Abbauzyklen, erhält man eine Kettenschaltung einzelner Zyklus-Zweitore. Zweitore, die sich aus dem Verfahren 1 ergeben, werden als Typ "IMP" (Realteilminimumabbau von der Impedanz) bezeichnet, anderenfalls, d.h. nach Verfahren 2 (Realteilminimumabbau von der Admittanz) als Typ "ADM".

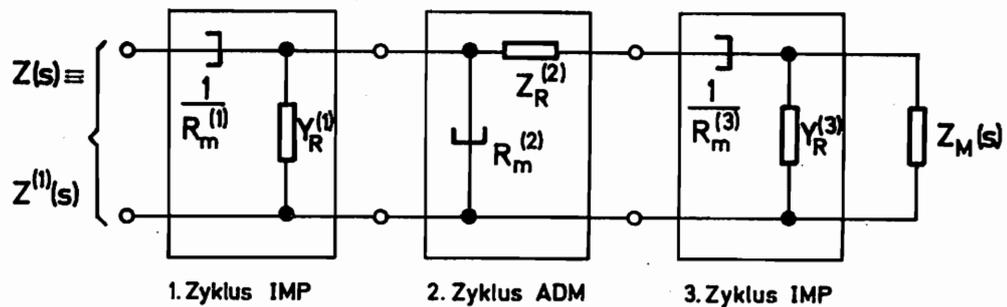


Abb. 8-6 Beispiel mit drei Abbauszuklen und  $Z_M(s)$

Die Synthese von Zweipolfunktionen minimaler Reaktanz erfolgt mit den in den folgenden Abschnitten beschriebenen Verfahren.

### 8.3 Das Syntheseverfahren von O. Brune

Betrachtet werden soll eine Zweipolfunktion minimaler Reaktanz  $Z_M(s)$ . Aus dem letzten Kapitel geht hervor, daß  $Z_M(s)$  auf der imaginären Achse (einschließlich  $s = \infty$ ) und damit in der abgeschlossenen rechten Halbebene  $\text{Re } s \geq 0$  null- und polstellenfrei ist. Für  $Z_M(s)$  nimmt Gl.(4-34) die Form

$$Z_M(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n} \quad (8-38)$$

an. Da die Null- und Polstellen nur in der offenen linken Halbebene  $\text{Re } s < 0$  liegen dürfen, stellen Nenner- und Zählerpolynom in Gl.(8-38) HURWITZ-Polynome dar. Notwendig für das Vorhandensein von Null- bzw. Polstellen in der offenen linken Halbebene  $\text{Re } s < 0$  sind (siehe SZABO [27] )

$$a_j > 0 \quad (8-39)$$

$$b_j > 0 \quad (8-40)$$

für alle  $j = 0, 1, \dots, n$ . Dann erhält man mit Gl.(8-38) in  $s = 0$

$$Z_M(0) = \frac{a_0}{b_0} \quad (8-41)$$

und in  $s = \infty$

$$Z_M(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} [Z_M(s)] = \frac{a_n}{b_n} \quad (8-42)$$

d.h. reelle Werte. Der Imaginärteil von  $Z_M(s)$  verschwindet in  $s = 0$  und  $s = \infty$ . Darum kann das Realteilminimum

$$R_m = \text{Min} [ \text{Re } Z_M(i\omega) ] = \text{Re } Z_M(i\omega_m) \quad (8-43)$$

nur an einer von Null und Unendlich verschiedenen Stelle  $s = i\omega_m$  auftreten. Wäre  $\omega_m = 0$  oder  $\omega_m = \infty$ , könnte man das Realteilminimum abbauen, und die Restfunktion besäße eine Nullstelle in  $\omega_m = 0$  oder  $\omega_m = \infty$ . Dies wäre eine Voraussetzung eines anschließenden Reaktanzabbaus, der aber voraussetzungsgemäß für eine Zweipolfunktion minimaler Reaktanz nicht möglich ist. Also tritt das Realteilminimum an einer von Null und Unendlich verschiedenen Stelle auf. Mit der gleichen Begründung liegt das Realteilminimum

$$R'_m = \text{Min} [ \text{Re } Y_M(i\omega) ] = \text{Re } Y_M(i\omega'_m) \quad (8-44)$$

nicht in  $\omega'_m = 0$  und  $\omega'_m = \infty$ .

Das Realteilminimum  $R_m$  nach Gl.(8-43) wird abgebaut:

$$Z_1(s) = Z_M(s) - R_m \quad (8-45)$$

An der Stelle  $s = i\omega_m$  ( $\omega_m > 0$ ) folgt mit Gl.(8-43)

$$Z_1(i\omega_m) = i X_m \quad (8-46)$$

$$(\omega_m > 0)$$

mit

$$X_m = \text{Im } Z_1(i\omega_m) = \text{Im } Z_M(i\omega_m) \quad (8-47)$$

Da eine Reaktanzreduktion nach Realteilminimumabbau für  $Z_M(s)$  ausgeschlossen wurde, gilt hier

$$X_m \neq 0 \quad (8-48)$$

Im weiteren sind die Fälle  $X_m < 0$  und  $X_m > 0$  zu unterscheiden:

1. Fall  $X_m < 0$

Es erfolgt der Abbau

$$Z_2(s) = Z_1(s) - \frac{1}{k_1} s \quad (8-49)$$

Die Federsteifigkeit  $k_1$  erhält man aus der Forderung

$$Z_2(i\omega_m) = Z_1(i\omega_m) - i \frac{1}{k_1} \omega_m = 0 \quad (8-50)$$

Aus Gl.(8-50) folgt mit Gl.(8-46)

$$k_1 = \frac{\omega_m}{X_m} \quad (8-51)$$

Da  $X_m < 0$  und  $\omega_m > 0$  vorausgesetzt wurden, gilt

$$k_1 < 0 \quad (8-52)$$

Wegen  $k_1 < 0$  wird in Gl.(8-49) zur Zweipolfunktion  $Z_1(s)$  eine Zweipolfunktion addiert, d.h.

$$Z_2(s) = Z_1(s) + \frac{1}{|k_1|} s \quad (8-53)$$

Aus Satz 4-2 folgt unmittelbar, daß die Summe zweier Zweipolfunktionen wieder eine Zweipolfunktion darstellt. Somit ist  $Z_2(s)$  wieder Zweipolfunktion.

Aufgrund der Wahl von  $k_1$  nach Gl.(8-51) ist Gl.(8-50) erfüllt, d.h.  $Z_2(s)$  besitzt in  $s = i\omega_m$ , aber auch in  $s = -i\omega_m$  eine Nullstelle. Die Nullstellen von  $Z_2(s)$  in  $s = \pm i\omega_m$  sind Polstellen von  $Y_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)}$ . Da  $Y_2(s)$  Zweipolfunktion ist, sind die Entwicklungskoeffizienten in den Polen  $s = \pm i\omega_m$  nach Satz 4-1 notwendig positiv. Es erfolgt nun der Pol- bzw. Reaktanzabbau

$$Y_3(s) = Y_2(s) - \frac{k_2 s}{s^2 + \omega_m^2} \quad (8-54)$$

mit  $k_2 > 0$ . Hier unterscheidet sich  $k_2$  um den Faktor Zwei von den Entwicklungskoeffizienten in  $s = \pm i\omega$  (vgl. Gl. 6-35). Aus Kapitel 8.2 geht hervor, daß  $Y_3(s)$  nach dem Reaktanzabbau Gl.(8-54) wieder eine Zweipolfunktion ist.

Nach Einsetzen von Gl.(8-49) in Gl.(8-54) ergibt sich

$$Y_3(s) = \frac{1}{Z_1(s) - \frac{1}{k_1} s} - \frac{k_2 s}{s^2 + \omega_m^2}$$

oder

$$Y_3(s) = -\frac{k_1}{s} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{k_1}{s} Z_1(s)\right]} - \frac{k_2 s}{s^2 + \omega_m^2} \quad (8-55)$$

Voraussetzungsgemäß bleibt  $Z_1(s)$  in  $s = \infty$  endlich. Für  $s \rightarrow \infty$  erhält man aus Gl.(8-55) die Entwicklung

$$Y_3(s) = -\frac{k_1}{s} - \frac{k_2}{s} \quad (8-56)$$

bzw.

$$Y_3(s) = \frac{k_3}{s} \quad (8-57)$$

Da  $Y_3(s)$  Zweipolfunktion ist, muß der Entwicklungskoeffizient in der Nullstelle  $s = \infty$  nach Satz 4-1 positiv sein. Daraus folgt

$$k_3 = -(k_1 + k_2) > 0 \quad (8-58)$$

Aus Gl.(8-57) folgt, daß  $Z_3(s) = \frac{1}{Y_3(s)}$  in  $s = \infty$  eine Polstelle besitzt, die nachfolgend abgebaut wird:

$$Z_4(s) = Z_3(s) - \frac{s}{k_3} \quad (8-59)$$

Nach dem Reaktanzabbau Gl.(8-59) folgt nach Kapitel 8.2, daß  $Z_4(s)$  wieder eine Zweipolfunktion ist.

Der Abbauprozess oder Abbauprozess ist nun abgeschlossen. Das Netzwerk, das sich hier ergibt, zeigt Abb. 8-7.

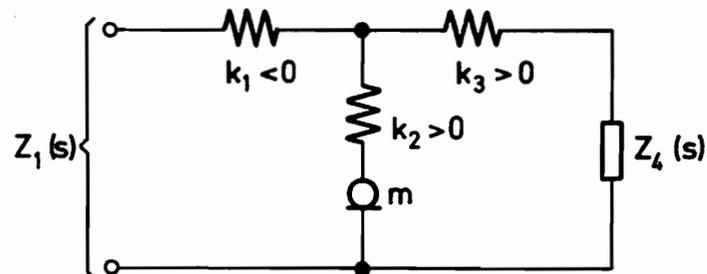


Abb. 8-7 Netzwerk nach einem BRUNE-Zyklus ( $X_m < 0$ )

Die abgebaute Reaktanz in Gl.(8-54) wird durch eine Reihenschaltung der Feder  $k_2 > 0$  und der Masse

$$m = \frac{k_2}{\omega_m^2} \quad (8-60)$$

realisiert. Auf die mechanische Realisierung des Netzwerkes Abb. 8-7, insbesondere der Feder mit  $k_1 < 0$ , wird später noch eingegangen.

## 2. Fall $X_m > 0$

Aus Gl.(8-46) folgt

$$Y_1(i\omega_m) = \frac{1}{Z_1(i\omega_m)} = \frac{1}{iX_m} \quad (8-61)$$

oder

$$Y_1(i\omega_m) = -i\hat{X}_m \quad (8-62)$$

mit

$$\hat{X}_m = -\frac{1}{X_m} < 0 \quad (8-63)$$

Der Fall 2 kann auf Fall 1 zurückgeführt werden. Analog zu Gl.(8-49) wird

$$Y_2'(s) = Y_1(s) - m_1 s \quad (8-64)$$

gebildet. Mit der Wahl

$$m_1 = \frac{\hat{X}_m}{\omega_m} < 0 \quad (8-65)$$

erhält man

$$Y_2'(i\omega_m) = 0 \quad (8-66)$$

Wegen  $m_1 < 0$  stellt  $Y_2'(s)$  eine Zweipolfunktion dar, die in  $s = \pm i\omega_m$  Nullstellen besitzt. Dann besitzt  $Z_2'(s) = \frac{1}{Y_2'(s)}$  dort Polstellen, die abgebaut werden:

$$Z_3'(s) = Z_2'(s) - \frac{\frac{1}{m_2} s}{s^2 + \omega_m^2} \quad (8-67)$$

Da  $Z_2'(s)$  eine Zweipolfunktion ist, muß der Entwicklungskoeffizient in den Polen  $s = \pm i\omega_m$  und damit  $m_2$  positiv sein.

Mit Gl.(8-64) geht Gl.(8-67) über in

$$Z_3'(s) = \frac{1}{Y_1(s) - m_1 s} - \frac{\frac{1}{m_2} s}{s^2 + \omega_m^2}$$

oder

$$Z_3'(s) = -\frac{1}{m_1 s} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{1}{m_1 s} Y_1(s)\right]} - \frac{1}{m_2 s} \cdot \frac{1}{\left[1 + \frac{\omega_m^2}{s^2}\right]} \quad (8-68)$$

In  $s = \infty$  bleibt  $Y_1(s)$  endlich, so daß man für  $s \rightarrow \infty$  aus Gl.(8-68) die Entwicklung

$$Z_3'(s) = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \cdot \frac{1}{s} \quad (8-69)$$

bzw.

$$Z_3'(s) = \frac{1}{m_3 s} \quad (8-70)$$

erhält. Da  $Z_3'(s)$  Zweipolfunktion ist, folgt für den Entwicklungskoeffizienten der Nullstelle in  $s = \infty$

$$\frac{1}{m_3} = - \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) > 0 \quad (8-71)$$

Nun besitzt  $Y_3'(s) = \frac{1}{Z_3'(s)}$  eine Polstelle in  $s = \infty$ , die abgebaut wird:

$$Y_4'(s) = Y_3'(s) - m_3 s \quad (8-72)$$

Da  $m_3 > 0$  gilt, stellt  $Y_4'(s)$  wieder eine Zweipolfunktion dar. Der Abbau-prozeß ist mit der Restfunktion  $Y_4'(s)$  beendet. Das Netzwerk für Fall 2 zeigt Abb. 8-8

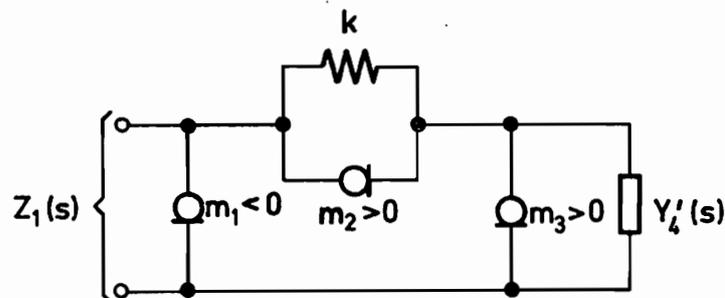


Abb. 8-8 Netzwerk nach einem BRUNE-Zyklus ( $X_m > 0$ )

Die abgebaute Reaktanz in Gl.(8-67) wird durch die Parallelschaltung der Masse  $m_2 > 0$  und der Feder

$$k = m_2 \omega_m^2 \quad (8-73)$$

realisiert.

Die Netzwerke Abb. 8-7 und Abb. 8-8 sind wegen  $k_1 < 0$  bzw.  $m_1 < 0$  nicht durch einzelne Federn und Massen realisierbar. Im folgenden kann gezeigt werden, daß ein mechanisches Ersatzsystem existiert, das die Netzwerke in Abb. 8-7 und 8-8 realisiert.

Zunächst wird das Zweitor Abb. 8-9 aus dem Netzwerk Abb. 8-7 betrachtet. Es wird nun eine Maschenanalyse mit den Maschen 1 und 2 (siehe Abb. 8-9) durchgeführt. Aus der Wahl der Maschen folgt, daß die Maschenkräfte mit den

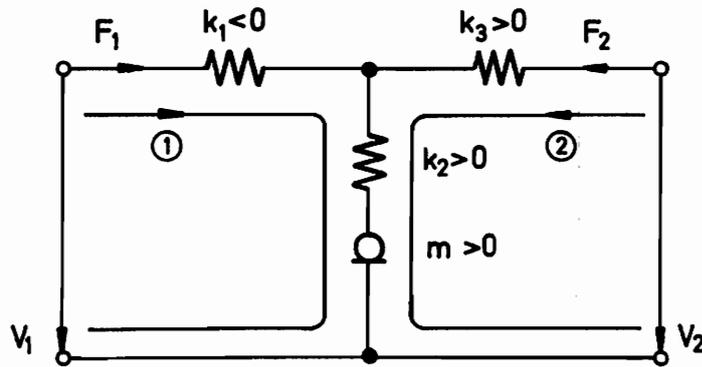


Abb. 8-9 Zweitor aus Abb. 8-7

äußeren Kräften  $F_1$  und  $F_2$  identisch sind. Mit Hilfe der Maschenanalyse ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) + \frac{1}{ms} & \frac{s}{k_2} + \frac{1}{ms} \\ \frac{s}{k_2} + \frac{1}{ms} & s\left(\frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right) + \frac{1}{ms} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

oder

(8-74)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{k_a} + \frac{1}{ms} & \frac{s}{k_b} + \frac{1}{ms} \\ \frac{s}{k_b} + \frac{1}{ms} & \frac{s}{k_c} + \frac{1}{ms} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

(8-75)

mit

$$\frac{1}{k_a} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} > 0 \quad (8-76)$$

$$\frac{1}{k_b} = \frac{1}{k_2} > 0 \quad (8-77)$$

$$\frac{1}{k_c} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} > 0 \quad (8-78)$$

Daß  $k_a$  positiv ist, ergibt sich mit Gl.(8-58).

Betrachtet wird nun das mechanische System in Abb. 8-10.

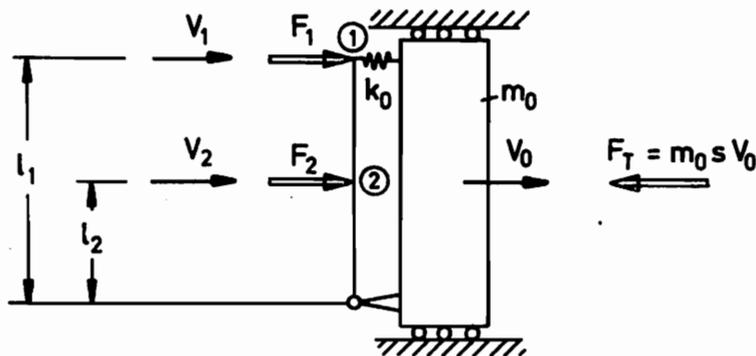


Abb. 8-10 Mechanisches Ersatzsystem für die BRUNE-Synthese

Die Führung der Einzelmasse  $m_0$  in Abb. 8-10 sei reibungsfrei und bewirke, daß nur translatorische Bewegungen möglich sind. Ferner besteht das System aus einem Hebel und einer Feder  $k_0$ . Es soll nun eine Impedanzbeziehung analog zu Gl.(8-75) abgeleitet werden. Das System Abb. 8-10 wird aufgeschnitten (siehe Abb. 8-11).

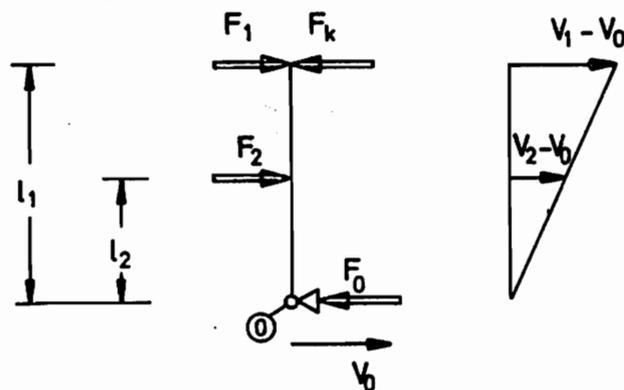


Abb. 8-11 Analyse des Systems Abb. 8-10

Für das Teilsystem Abb.(8-11) erhält man das Momentengleichgewicht (bezüglich 0):

$$F_1 l_1 + F_2 l_2 - F_k l_1 = 0 \quad (8-79)$$

Die Federkraft  $F$  ergibt sich aus

$$F_k = \frac{k_0}{s} (V_1 - V_0) \quad (8-80)$$

Das Kräftegleichgewicht am Gesamtsystem Abb. 8-10 lautet

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 - m_0 s V_0 &= 0 \\ \Rightarrow V_0 &= \frac{F_1 + F_2}{m_0 s} \end{aligned} \quad (8-81)$$

Nach Einsetzen von Gl.(8-81) in Gl.(8-80) folgt

$$F_k = \frac{k_0}{s} V_1 - \frac{k_0}{m_0 s^2} (F_1 + F_2) \quad (8-82)$$

Gl.(8-82) kann nun in Gl.(8-79) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} F_1 l_1 + F_2 l_2 - l_1 \frac{k_0}{s} V_1 + l_1 \frac{k_0}{m_0 s^2} (F_1 + F_2) &= 0 \\ \Rightarrow V_1 &= \left( \frac{s}{k_0} + \frac{1}{m_0 s} \right) F_1 + \left( \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{s}{k_0} + \frac{1}{m_0 s} \right) F_2 \end{aligned} \quad (8-83)$$

Die Geschwindigkeiten bezüglich 0 verhalten sich nach

$$\begin{aligned} \frac{V_1 - V_0}{l_1} &= \frac{V_2 - V_0}{l_2} \\ \Rightarrow V_1 - V_0 &= \frac{l_1}{l_2} (V_2 - V_0) \end{aligned} \quad (8-84)$$

Mit Gl.(8-84) geht Gl.(8-80) in

$$F_k = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{k_0}{s} (V_2 - V_0) \quad (8-85)$$

über. Gl.( 8-81) in Gl.(8-85) eingesetzt führt auf

$$F_k = \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{k_0}{s} V_2 - \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{k_0}{m_0 s^2} (F_1 + F_2) \quad (8-86)$$

Nach Einsetzen von Gl.(8-86) in Gl.(8-79) folgt

$$F_1 l_1 + F_2 l_2 - \frac{l_1^2}{l_2} \cdot \frac{k_0}{s} V_2 + \frac{l_1^2}{l_2} \cdot \frac{k_0}{m_0 s^2} (F_1 + F_2) = 0$$

$$\Rightarrow V_2 = \left( \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{s}{k_0} + \frac{1}{m_0 s} \right) F_1 + \left( \frac{l_2^2}{l_1^2} \cdot \frac{s}{k_0} + \frac{1}{m_0 s} \right) F_2 \quad (8-87)$$

Die Gleichungen (8-83) und (8-87) werden zum Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{k_0} + \frac{1}{m_0 s} & \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{s}{k_0} + \frac{1}{m_0 s} \\ \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{s}{k_0} + \frac{1}{m_0 s} & \frac{l_2^2}{l_1^2} \cdot \frac{s}{k_0} + \frac{1}{m_0 s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

zusammengefaßt.

(8-88)

Zwischen den Gleichungssystemen (8-75) und (8-88) wird ein Koeffizientenvergleich durchgeführt:

$$m = m_0 \quad (8-89)$$

$$k_a = k_0 \quad (8-90)$$

$$k_b = \frac{l_1}{l_2} k_0 \quad (8-91)$$

Die Federkonstanten  $k_a$ ,  $k_b$  und  $k_c$  in den Gln.(8-76) bis (8-78) sind nicht unabhängig voneinander, sondern sind über Gl.(8-58) gekoppelt. In Gl. (8-78) wird die Gl.(8-58) eingesetzt:

$$\frac{1}{k_c} = \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1 + k_2} = \frac{k_1}{k_2(k_1 + k_2)}$$

oder

$$\frac{1}{k_c} = \frac{1}{k_2^2} \cdot \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)} \quad (8-92)$$

Mit Gl.(8-76) und Gl.(8-77) folgt aus Gl.(8-92)

$$\frac{1}{k_c} = \frac{k_a}{k_b^2}$$

oder

$$k_c = \frac{k_b^2}{k_a} \quad (8-93)$$

Die Ähnlichkeit der Gleichungssysteme (8-75) und (8-88) ist dann gewährleistet, wenn Gl.(8-93) erfüllt ist. Dies wird mit den Gln.(8-90) und (8-91) überprüft

$$\frac{k_b^2}{k_a} = \frac{l_1^2}{l_2^2} k_0 \quad (8-94)$$

Der unmittelbare Koeffizientenvergleich liefert ebenfalls

$$k_c = \frac{l_1^2}{l_2^2} k_0 \quad (8-95)$$

Die Bedingung Gl.(8-93) ist also erfüllt. Hiermit wurde gezeigt, daß das mechanische System Abb. 8-10 das Zweitor Abb. 8-9 ersetzt. Koppelt man am Punkt 2 in Abb. 8-10 Bauelemente mit der Impedanz  $Z_k(s)$  an, wird das Netzwerk Abb. 8-7 realisiert.

Zur Untersuchung der mechanischen Realisierbarkeit des Netzwerkes Abb. 8-8 wird das Zweitor Abb. 8-12 betrachtet.

Die Analyse an den Knoten I und II führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2)s + \frac{k}{s} & -(m_2s + \frac{k}{s}) \\ -(m_2s + \frac{k}{s}) & (m_2 + m_3)s + \frac{k}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (8-96)$$

oder

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_a s + \frac{k}{s} & -(m_b s + \frac{k}{s}) \\ -(m_b s + \frac{k}{s}) & m_c s + \frac{k}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (8-97)$$

mit

$$m_a = m_1 + m_2 > 0 \quad (8-98)$$

$$m_b = m_2 > 0 \quad (8-99)$$

$$m_c = m_2 + m_3 > 0 \quad (8-100)$$

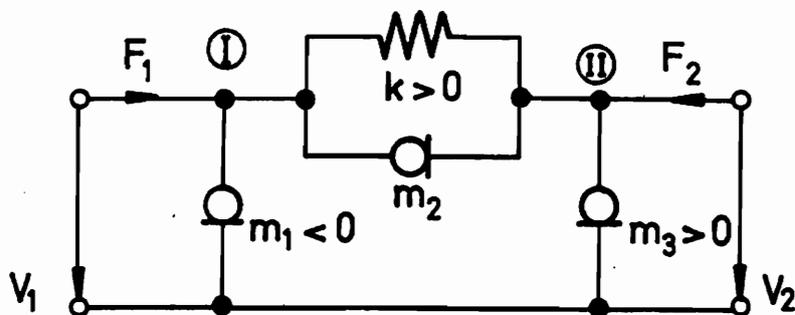


Abb. 8-12 Zweitor aus Abb. 8-8

Die Gültigkeit von  $m_a > 0$  wird mit Gl.(8-71) bewiesen. Aus Gl.(8-71) folgt

$$\frac{1}{m_1} = - \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} \right)$$
$$\Rightarrow m_1 = - \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3} > 0$$

Dann erhält man

$$m_1 + m_2 = m_2 - \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}$$
$$\Rightarrow m_1 + m_2 = \frac{m_2^2}{m_2 + m_3} > 0 \quad (8-101)$$

was zu beweisen war. Aus Gl.(8-71) folgt ferner, daß  $m_a$ ,  $m_b$ ,  $m_c$  voneinander abhängig sind. Mit

$$m_3 = - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

aus Gl.(8-71) folgt aus Gl.(8-100)

$$m_c = \frac{m_2^2}{m_1 + m_2}$$

woraus sich unter Verwendung der Gln.(8-98) und (8-99)

$$m_c = \frac{m_b^2}{m_a} \quad (8-102)$$

ergibt.

Es wird wieder das mechanische System Abb. 8-10 betrachtet. Um den Vergleich mit dem Zweitor Abb. 8-12, für das die Admittanzbeziehung Gl.(8-96) hergeleitet wurde, durchzuführen, muß Gl.(8-88) invertiert werden. Die Inversion ergibt

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-x)^2} \begin{bmatrix} x^2 m_0 s + \frac{k_0}{s} & -(x m_0 s + \frac{k_0}{s}) \\ -(x m_0 s + \frac{k_0}{s}) & m_0 s + \frac{k_0}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (8-103)$$

mit

$$x = \frac{l_2}{l_1} \quad (8-104)$$

Der Koeffizientenvergleich zwischen den Gleichungssystemen (8-97) und (8-103) liefert:

$$k = \frac{k_0}{(1-x)^2} \quad (8-105)$$

$$m_a = \frac{x^2}{(1-x)^2} m_0 \quad (8-106)$$

$$m_b = \frac{x}{(1-x)^2} m_0 \quad (8-107)$$

$$m_c = \frac{1}{(1-x)^2} m_0 \quad (8-108)$$

Die Bedingung Gl.(8-102) muß erfüllt sein. Es folgt aus Gl.(8-102) nach Einsetzen der Gln. (8-106) und (8-107)

$$m_c = \frac{\frac{m_0^2 x^2}{(1-x)^4}}{\frac{m_0 x^2}{(1-x)^2}} = \frac{1}{(1-x)^2} m_0 \quad (8-109)$$

Die Gl.(8-109) ist mit Gl.(8-108) identisch, d.h. die Bedingung Gl.(8-102) wird erfüllt. Das mechanische System Abb. 8-10 realisiert somit auch das

Zweiter Abb. 8-12. Nach Ankopplung von Bauelementen mit der Admittanz  $Y'_4(s)$  an Punkt 2 in Abb. 8-10 wird das Netzwerk Abb. 8-8 realisiert.

Bei dem oben abgeleiteten Realisierungsverfahren wurde in Gl.(8-45) das Realteilminimum  $R_m$  nach Gl.(8-43) von der Impedanz  $Z_M(s)$  abgebaut. Das Syntheseverfahren ändert sich nicht, wenn das Realteilminimum  $R'_m$  aus Gl. (8-44) von der Admittanz  $Y_M(s)$  abgebaut wird, wenn also

$$Y'_1(s) = Y_M(s) - R'_m \quad (8-110)$$

gebildet wird. Mit Gl.(8-44) erhält man aus Gl.(110) für  $s = i\omega'_m$  ( $\omega'_m > 0$ )

$$Y'_1(i\omega'_m) = i X'_m \quad (8-111)$$

wobei

$$X'_m = \text{Im } Y_M(i\omega'_m) = \text{Im } Y'_1(i\omega'_m) \quad (8-112)$$

eingeführt wurde. Analog zu Gl.(8-48) muß hier auch

$$X'_m \neq 0 \quad (8-113)$$

gelten. Mit Hilfe des Zusammenhanges

$$Z'_1(i\omega'_m) = \frac{1}{Y'_1(i\omega'_m)} = i \hat{X}'_m \quad (8-114)$$

mit

$$\hat{X}'_m = - \frac{1}{X'_m} \quad (8-115)$$

kann gezeigt werden, daß die weitere Realsierung auf die oben definierten Fälle 1 und 2 zurückgeführt werden kann. Folgende Vorzeichen kann  $X'_m$  besitzen:

a)  $X'_m > 0$

Es gilt nach Gl.(8-115)

$$\hat{X}'_m = \text{Im } Z'_1(i\omega'_m) < 0 \quad (8-116)$$

Hier treffen die Voraussetzungen für Fall 1 zu (vgl. Gln. 8-46 und 8-47).

b)  $X'_m < 0$

Aufgrund der Ähnlichkeit von Gl.(8-112) mit den Gln.(8-62) und (8-63) treffen für  $X'_m < 0$  die Voraussetzungen von Fall 2 zu.

Bei der Realisierung von  $Y'_1(s)$  nach Gl.(8-110) wird also auch das Bauelement Abb. 8-10 verwendet, das aber im allgemeinen andere Bauelementwerte als bei der Realisierung von  $Z_1(s)$  nach Gl.(8-45) besitzt. Auch die bei den Realisierungen von  $Z_1(s)$  und  $Y'_1(s)$  verbleibenden Restfunktionen  $Z_4(s)$  (für Fall 1 bzw.  $Y'_4(s)$  im Fall 2) unterscheiden sich im allgemeinen.

Die Restfunktionen  $Z_4(s)$  oder  $Y'_4(s)$  sind nicht notwendig Zweipolfunktionen minimaler Reaktanz. Die Realisierung dieser Funktionen mit Realteilminimumabbau und Reaktanzreduktion ist also möglich. Handelt es sich bei  $Z_4(s)$  oder  $Y'_4(s)$  um Zweipolfunktionen minimaler Reaktanz, kann der in diesem Kapitel beschriebene Abbauprozess erneut angewendet werden. Bei der Realisierung werden dann zwei oder mehr mechanische Systeme nach Abb. 8-10 hintereinander angeordnet.

In diesem Kapitel wurde ein Syntheseverfahren für Zweipolfunktionen minimaler Reaktanz  $\zeta_M(s)$  gezeigt. Die beim Abbau auftretenden Netzwerke können in mechanische Systeme umgesetzt werden. Die nach Anwendung des Syntheseverfahrens verbleibende Restfunktion ist in jedem Fall gradniedriger als die Ausgangsfunktion  $\zeta_M(s)$ . Auf die Restfunktion kann erneut Realteilminimumabbau und Reaktanzreduktion bis zum Vollabbau oder bis zu einer Zweipolfunktion minimaler Reaktanz angewendet werden. Im letzteren Fall wird wieder das hier beschriebene Syntheseverfahren angewendet usw. Die Kombination von Realteilminimumabbau, Reaktanzabbau und Syntheseverfahren von O. BRUNE führt somit zum Vollabbau der Zweipolfunktion minimaler Reaktanz  $\zeta_M(s)$ .

#### 8.4 Realisierbarkeit allgemeiner Zweipolfunktionen

Mit Hilfe von Realteilminimumabbau und Reaktanzreduktion nach Kapitel 8.2 kann eine Zweipolfunktion voll abgebaut oder auf eine Zweipolfunktion minimaler Reaktanz reduziert werden. Die abgebauten Realteilminima werden durch Dämpfer realisiert, und die abgebauten Reaktanzen können nach Kapitel 7 durch Systeme mit Federn und Massen realisiert werden. Die Massen können auch nicht

geerdet vorkommen. Dazu wird auf das Beispiel in Abb. 8-6 zurückgegriffen. Beim Zweitortyp "IMP" sind die Reaktanzen, als Zweipole dargestellt, mit der durchgehenden Verbindungsleitung, die als Inertialsystem interpretiert wird, verknüpft. Die Realisierungen der Reaktanzen in der 2. Fosterform (siehe Abb. 7-7a) oder 1. Cauerform (siehe Abb. 7-8a und 7-9a) weisen Massen auf, die an einer Verbindungsleitung liegen. Wird diese mit der durchgehenden Verbindungsleitung in Abb. 8-6 verknüpft, können alle Massen im Typ "IMP" am Inertialsystem anliegen.

Dagegen sind die Reaktanzzweipole beim Typ "ADM" im allgemeinen nicht mit der durchgehenden Verbindungsleitung verbunden (z.B.  $Z_R^{(2)}$  in Abb. 8-6). Bei der Realisierung in der 1. Fosterform (siehe Abb. 8-13) wird eine Reaktanzfunktion  $Z_R(s)$  in die Impedanz der Masse  $m_0$  und der Restfunktion  $Z_1(s)$  aufgeteilt:

$$Z_R(s) = \frac{1}{m_0 s} + Z_1(s) \quad (8-117)$$

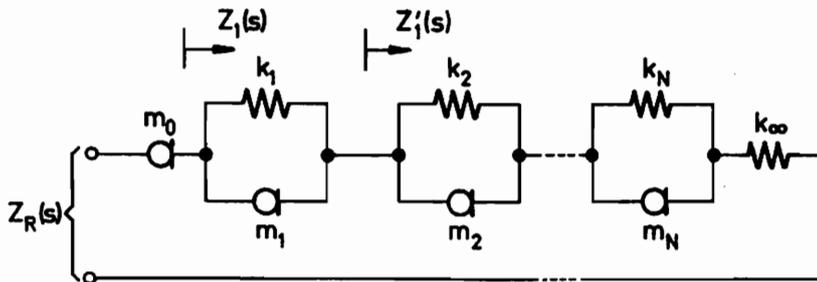


Abb. 8-13 Reaktanzfunktion (Impedanz) in der 1. Fosterform

Da nach einer Reaktanzfunktion im allgemeinen noch weitere Bauelemente, die zu einem Zweipol mit der Impedanz  $Z_2(s)$  zusammengefaßt werden, angeordnet sind (z.B. alle Bauelemente nach  $Z_R^{(2)}$  in Abb. 8-6), erhält man das Realisierungsproblem nach Abb. 8-14.

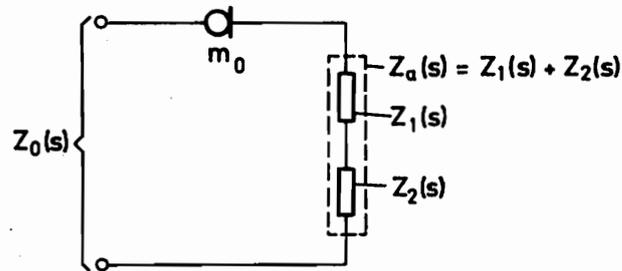


Abb. 8-14 Zur Realisierung von Gl.(8-119)

Die Impedanzen  $Z_1(s)$  und  $Z_2(s)$  werden zur Impedanz

$$Z_a(s) = Z_1(s) + Z_2(s) \quad (8-118)$$

zusammengefaßt. Das Realisierungsproblem nach Abb. 8-14 mit

$$Z_0(s) = \frac{1}{m_0 s} + Z_a(s) \quad (8-119)$$

entspricht dem aus Abb. 5-5. Es wurde in Kapitel 5 gezeigt, daß die mechanischen Systeme aus Abb. 5-9 die Realisierung eines Netzwerkes nach Abb. 5-5 ermöglichen. Damit existiert mit dem System Abb. 5-9 auch eine mechanische Realisierung der Impedanz  $Z_0(s)$  nach Gl.(8-119).

Nach Abbau der Masse  $m_0$  aus Abb. 8-14 ist die Impedanz  $Z_a(s)$  aus Gl. (8-118) zu realisieren. Die verbleibende Reaktanzfunktion  $Z_1(s)$  wird aufgeteilt in

$$Z_1(s) = \frac{\frac{1}{m_1} s}{s^2 + k_1/m_1} + Z_1'(s) \quad (8-120)$$

Werden  $Z_1'(s)$  und  $Z_2(s)$  zusammengefaßt zu

$$Z_a'(s) = Z_1'(s) + Z_2(s)$$

folgt das Realisierungsproblem (siehe auch Abb. 8-15)

$$Z'_0(s) = \frac{\frac{1}{m_1} s}{s^2 + k_1/m_1} + Z'_a(s) \quad (8-121)$$

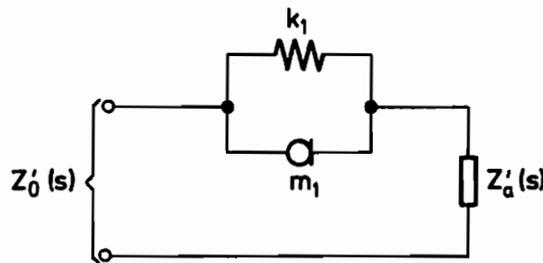


Abb. 8-15 Realisierungsproblem nach Gl.(8-121)

Das Realisierungsproblem in Abb. 8-15 kann man mit dem nach Abb. 5-11 (mit  $c = 0$ ) vergleichen. Das mechanische System Abb. 5-14 ermöglicht die mechanische Realisierung des Netzwerkes Abb. 5-11. Dann wird auch hier die Impedanz  $Z'_0(s)$  aus Gl.(8-121) mit dem mechanischen System Abb. 5-14 realisiert. Die Realisierung kann nun schrittweise fortgesetzt werden, bis von der Reaktanz in Abb. 8-13 nur die Feder  $k_\infty$ , die als Einzelfeder realisierbar ist, verbleibt.

Die Realisierungen in der 2. Cauerform werden in den Abbildungen 7-5 und 7-6 in allgemeiner Form dargestellt. Nach den Korrespondenzen in Kapitel 7 entsprechen die  $a_{0j}$  Massen  $m_{0j}$  und die  $b_{0k}$  Federn  $k_{0k}$ . Die Bauelemente können auch hier schrittweise immer so zusammengefaßt werden, daß eine Impedanz als Summe der Impedanz einer Einzelmasse und einer Restimpedanz betrachtet werden kann (vgl. Gl. 8-119). Dies entspricht dem Realisierungsproblem nach Gl.(5-6) bzw. Abb. 5-5, für das die mechanischen Realisierungen aus Abb. 5-9 existieren. Damit besteht auch in der 2. Cauerform die mechanische Realisierbarkeit von Reaktanzen im Zweitortyp "ADM".

Im Zweitortyp "ADM" ergeben sich bei Anwendung der 2. Fosterform (siehe Abb. 7-7a) oder 1. Cauerform (siehe Abb. 7-8a und 7-9a) neue Realisierungsprobleme.

Eine Reaktanz mit der Admittanz  $Y_R(s) = \frac{1}{Z_R(s)}$  wird in der 2. Fosterform Abb. 7-7a ( $Y(s)$  entspricht  $Y_R(s)$ ) dargestellt. Zunächst möge nur ein Zweig mit in Reihe geschalteter Feder  $k_1$  und Masse  $m_1$  vorhanden sein (siehe Abb. 8-16).

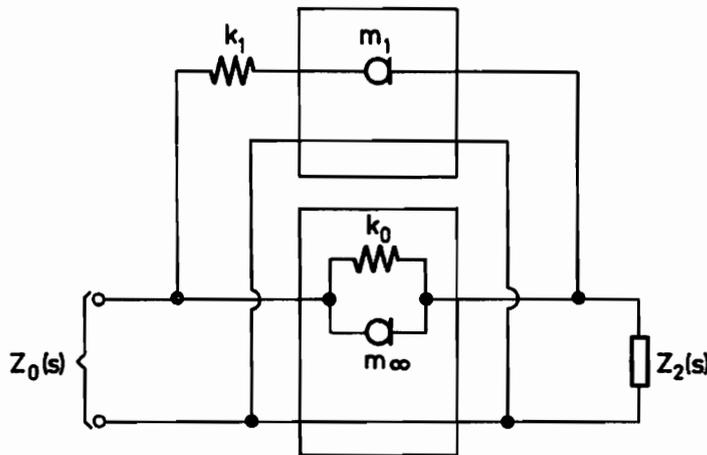


Abb. 8-16 Reaktanzfunktion (Admittanz) in der 2. Fosterform

Wie oben werden die nachgeschalteten Bauelemente mit der Impedanz  $Z_2(s)$  in Abb. 8-16 berücksichtigt.

Die untere Verbindungsleitung befindet sich auf Nullniveau (Inertialsystem) und kann mit einer idealen Verbindungsleitung wie in Abb. 8-16 verzweigt werden. In Abb. 8-16 werden zwei Zweitore hervorgehoben, für die in Kapitel 5 mechanische Realisierungen gefunden wurden. Dabei wurde das Balkenelement Abb. 5-2 mit der Netzwerkdarstellung Abb. 5-4 zu Hilfe genommen. Das Zweitort mit der Masse  $m_1$  (vgl. Abb. 5-6) wird durch ein Netzwerk nach Abb. 5-4 mit vertauschten Polen am Tor 2 ersetzt. Das Zweitort mit der Feder  $k_0$  und der Masse  $m_\infty$  kann auch in Abb. 5-11 herausgegriffen werden. Das Ersatzsystem findet man in Abb. 5-12. In Abb. 8-17 sind die Ersatzsysteme verwendet worden.

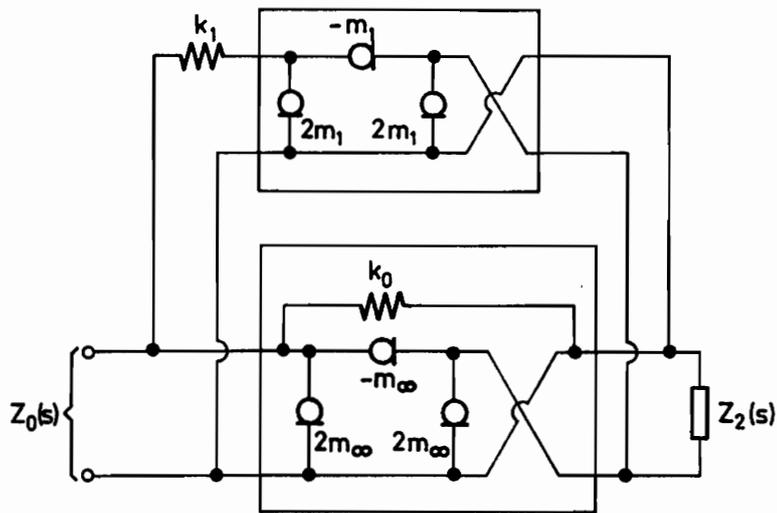


Abb. 8-17 Ersatznetzwerk zu Abb. 8-17 (mit Richtungsumkehr)

In Abb. 8-18 werden die Balken ohne Überkreuzen bzw. ohne Umkehr der einmal als positiv definierten Richtung für Kräfte und Geschwindigkeiten gezeigt.

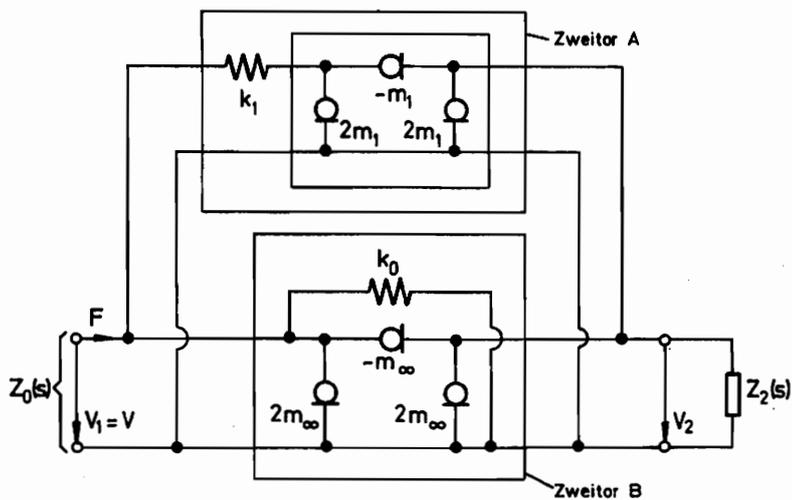


Abb. 8-18 Ersatznetzwerk zu Abb. 8-17 (ohne Richtungsumkehr)

Aus Abb. 8-18 wird die Feder  $k_1$  mit nachfolgendem Balken als Zweitor A für sich betrachtet (siehe Abb. 8-19).

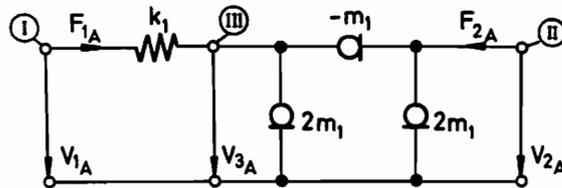


Abb. 8-19 Analyse des Zweitors A

Die Darstellung des Balkens erfolgt ohne Richtungsumkehr im mechanischen System (siehe Abb. 5-2). Die Krafteinteilung erfolgt über eine Feder  $k_1$ . Dann muß das mechanische System Abb. 8-20 das Zweitor A in Abb. 8-19 realisieren.

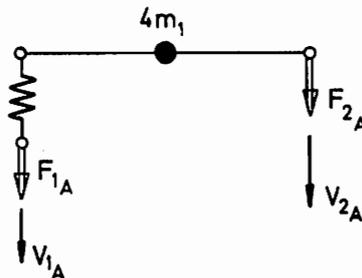


Abb. 8-20

Mechanische Realisierung von Zweitor A

Die Knotenanalyse in den Knoten I bis III aus Abb. 8-19 führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} F_{1A} \\ F_{2A} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{s} & 0 & -\frac{k_1}{s} \\ 0 & m_1 s & m_1 s \\ -\frac{k_1}{s} & m_1 s & m_1 s + \frac{k_1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}_A \quad (8-122)$$

Nach Kondensation folgt aus Gl.(8-122)

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} Y_A & Y_A \\ Y_A & Y_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}_A \quad (8-123)$$

mit

$$Y_A(s) = \frac{k_1 m_1 s}{m_1 s^2 + k_1} \quad (8-124)$$

Die Realisierung des Zweitores B (siehe Abb. 8-21) aus Abb. 8-18 folgt aus Abb. 5-14 und wird hier mit den aktuellen Größen in Abb. 8-22 gezeigt.

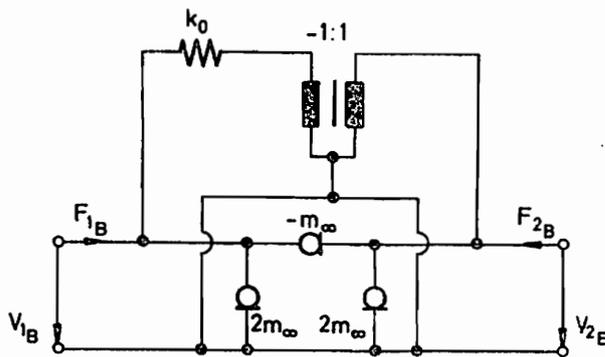


Abb. 8-21 Parallelschaltung der Zweitore A und B

In Abb. 8-21 wird die Richtungsumkehr entsprechend dem mechanischen System Abb. 8-22 durch einen Übertrager (Hebel) mit dem Übersetzungssystem  $\ddot{u} = -1$  dargestellt. Das Gleichungssystem für das mechanische System Abb. 8-22 geht aus Gl.(5-21) hervor und lautet mit den aktuellen Größen

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} m_\infty s + \frac{k_0}{s} & m_\infty s + \frac{k_0}{s} \\ m_\infty s + \frac{k_0}{s} & m_\infty s + \frac{k_0}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}_B \quad (8-125)$$

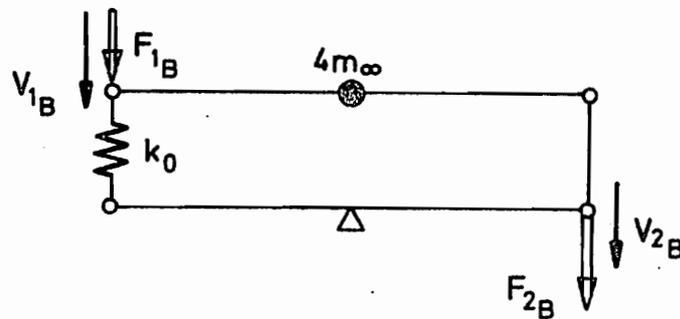


Abb. 8-22 Mechanische Realisierung zu Abb. 8-21

Der Leitwert  $Y_a(s)$  aus Gl.(5-21) verschwindet hier. Außerdem wirkt im Gegensatz zu Gl.(5-21) an der rechten Balkenseite die äußere Kraft  $F_{2B}$ . Mit

$$Y_B(s) = m_\infty s + \frac{k_0}{s} \quad (8-126)$$

nimmt Gl.(8-125) die Form

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} Y_B & Y_B \\ Y_B & Y_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}_B \quad (8-127)$$

an. Der Zweipol  $Z_2(s)$  aus Abb. 8-18 wird einzeln in Abb. 8-23 gezeigt (in Abb. 8-23b als mechanisches System).

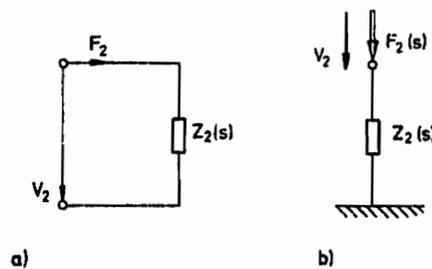


Abb. 8-23 Zweipol  $Z(s)$  :  
a) Netzwerk; b) Mechanisches System

Es gilt der Zusammenhang

$$F_2(s) = \frac{1}{Z_2(s)} V_2(s) = Y_2(s) V_2(s) \quad (8-128)$$

Die Teilsysteme in den Abbildungen 8-20, 8-22 und 8-23 werden verknüpft (siehe Abb. 8-24).

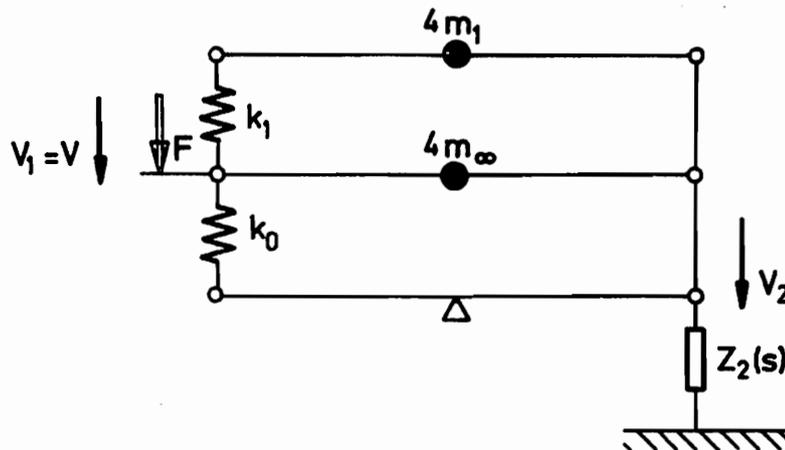


Abb. 8-24 Mechanische Realisierung zu Abb. 8-16

Die Verträglichkeitsbedingungen lauten

$$V_{1A} = V_{1B} = V_1 \quad (8-129)$$

$$V_{2A} = V_{2B} = V_2 \quad (8-130)$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt

$$F_{1A} + F_{1B} = F \quad (8-131)$$

$$F_{2A} + F_{2B} + F_2 = 0 \quad (8-132)$$

Unter Berücksichtigung der Gln.(8-129) und (8-130) folgt nach Einsetzen der Beziehungen Gln.(8-123), (8-127) und (8-128) aus den Gl.(8-131) und (8-132) das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} Y_A + Y_B & Y_A + Y_B \\ Y_A + Y_B & Y_A + Y_B + Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8-133)$$

Aus Gl.(8-133) erhält man

$$V_1 = \frac{Y_A + Y_B + Y_2}{Y_2 (Y_A + Y_B)} F \quad (8-134)$$

Da  $V(s)$  und  $V_1(s)$  identisch sind, entnimmt man Gl.(8-134) die Impedanz

$$Z_0(s) = \frac{Y_A + Y_B + Y_2}{Y_2 (Y_A + Y_B)} \quad (8-135)$$

wobei  $Y_A$  nach Gl.(8-124),  $Y_B$  nach Gl.(8-126) und  $Y_2$  nach Gl.(8-128) definiert sind. Mit diesen Abkürzungen nimmt das ursprüngliche Netzwerk in Abb. 8-16 die Gestalt von Abb. 8-25 an.

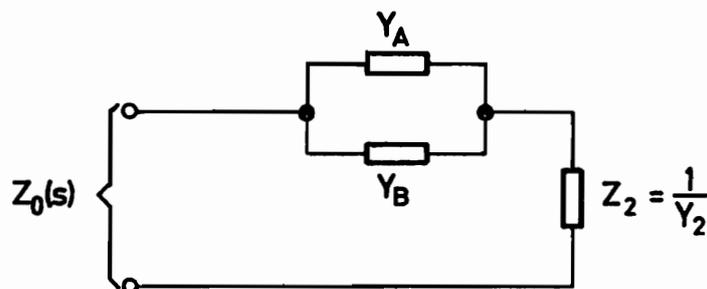


Abb. 8-25 Vereinfachte Darstellung von Abb. 8-16

Die Impedanz  $Z_0(s)$  berechnet sich hier aus

$$Z_0(s) = \frac{1}{Y_A + Y_B} + \frac{1}{Y_2}$$

$$\Rightarrow Z_0(s) = \frac{Y_A + Y_B + Y_2}{Y_2 (Y_A + Y_B)} \quad (8-136)$$

Die Impedanzen aus den Gln.(8-135) und (8-136) sind also gleich, d.h. das mechanische System Abb. 8-24 realisiert das Netzwerk Abb. 8-16. Zunächst wurde nur ein Zweig mit der Feder  $k_1$  und der Masse  $m_1$  betrachtet. Bei  $N$  Zweigen werden dann  $N$  Balkenelemente nach Abb. 8-20 parallel angeordnet und mit den Elementen Abb. 8-22 und 8-23 verknüpft. Aus  $Y_A(s)$  nach Gl.(8-124) wird nun

$$Y_A(s) = \sum_{j=1}^N \frac{m_j k_j s}{m_j s^2 + k_j} \quad (8-137)$$

und zwar sowohl im Netzwerk Abb. 8-25 als auch in der mechanischen Zusammenschaltung. Die Impedanz  $Z_0(s)$  besitzt wieder die Darstellungen Gln. (8-135) und (8-136). Die oben beschriebene Parallelschaltung von Bauelementen nach Abb. 8-20 löst also das Realisierungsproblem aus Abb. 8-16 bei  $N$  parallelen Zweigen mit Federn  $k_j$  und Massen  $m_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ).

Realisiert man Reaktanzfunktionen  $Z_R(s)$  im Zweitortyp "ADM" in der 1. Cauerform (siehe Abbildungen 7-8a und 7-9a) kann man das mechanische System unmittelbar dem Netzwerk entnehmen. Die Abb. 8-26 zeigt die Netzwerkdarstellung der Admittanz  $Y_R(s) = \frac{1}{Z_R(s)}$  in der 1. Cauerform für zwei Massen und zwei Federn. In Abb. 8-26 gilt wieder die Reihenschaltung

$$Z_0(s) = Z_R(s) + Z_2(s)$$

zu realisieren. Aus Abb. 8-26 erkennt man die aus Kapitel 5 bekannten Zweitore A und B. Das Zweitor B kann durch das mechanische System Abb. 8-22 realisiert werden. Die Krafteinleitung erfolgt über die Feder  $k_{\infty 2}$ . Parallel zur Feder  $k_{\infty 2}$  mit Zweitor B ist das Zweitor A angeordnet, das durch einen Balken nach Abb. 5-2 realisiert werden kann.

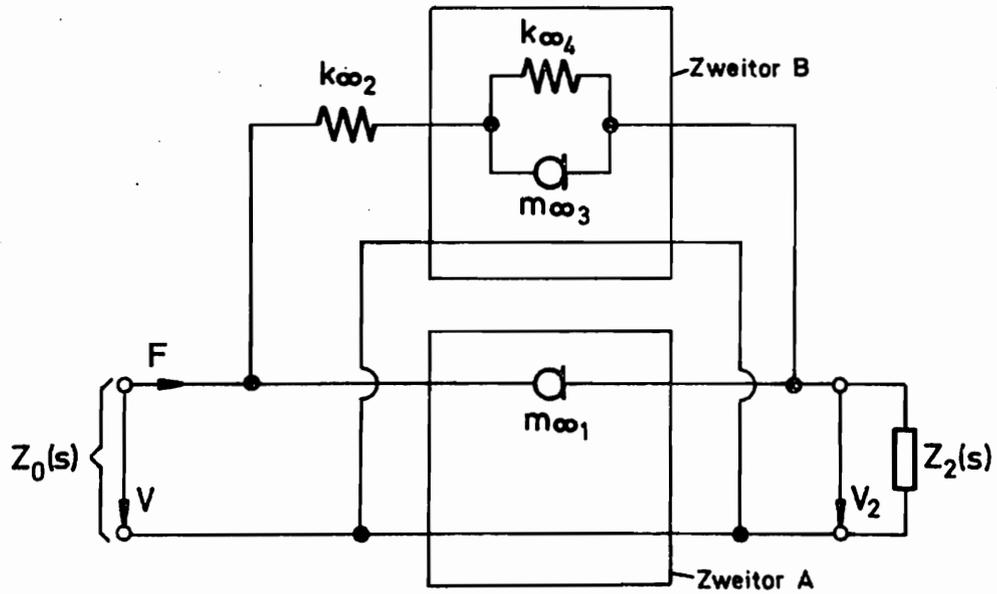


Abb. 8-26 Reaktanzfunktion (Admittanz) in der 1. Cauerform

Die Netzwerkanordnung erlaubt nun unmittelbar die Umsetzung in das mechanische System Abb. 8-27.

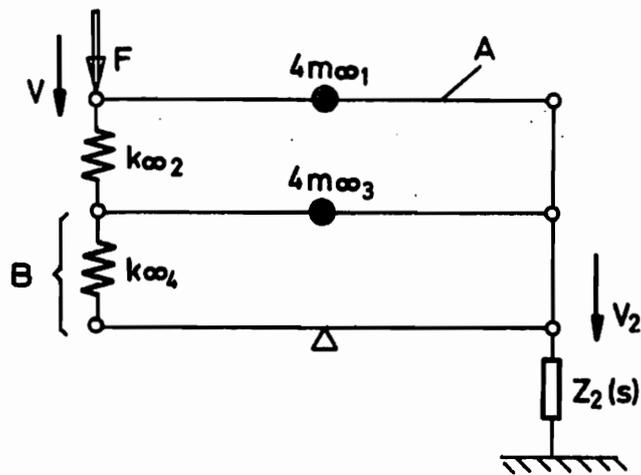


Abb. 8-27 Mechanische Realisierung zu Abb. 8-26

Erweitert man das Realisierungsproblem in der 1. Cauerform auf drei Massen, folgt Abb. 8-28.

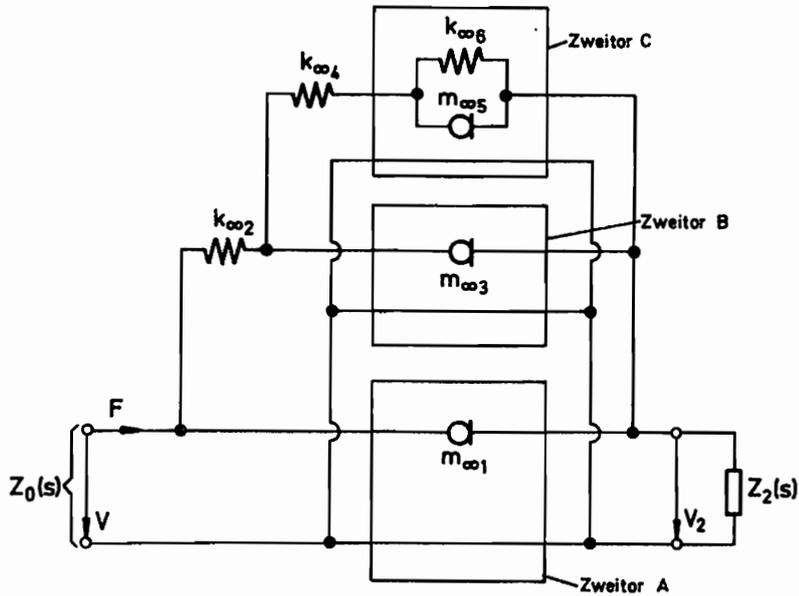


Abb. 8-28 1. Cauerform (Admittanz) mit drei Massen

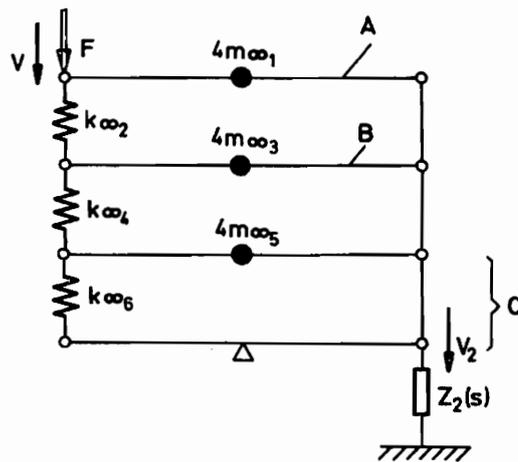


Abb. 8-29 Mechanische Realisierung zu Abb. 8-28

Die Zweitore A, B und C aus Abb. 8-28 entsprechen wieder den bereits bekannten Bauelementen Abb. 8-22 und Abb. 5-2. Nach den oben ausgeführten Betrachtungen kann auch hier das realisierende mechanische System (siehe Abb. 8-29) der Netzwerkstruktur in Abb. 8-28 entnommen werden.

Bei  $q$  Massen und  $q$  Federn (siehe Abb. 7-9a) erhält man  $q - 1$  Einzelmassen-Zweitore und (sofern  $k_{\infty 2q} \neq 0$ ) ein Zweitor mit parallel geschalteter Feder  $k_{\infty 2q}$  und Masse  $m_{\infty 2q}$ . Diese beiden Zweitore wurden durch die mechanischen Ersatzsysteme 5-2 und 8-22 realisiert. Die mechanische Realisierung mit einer Admittanz  $Y_R(s)$  in der 1. Cauerform mit  $q$  Massen und  $q$  Federn zeigt Abb. 8-30.

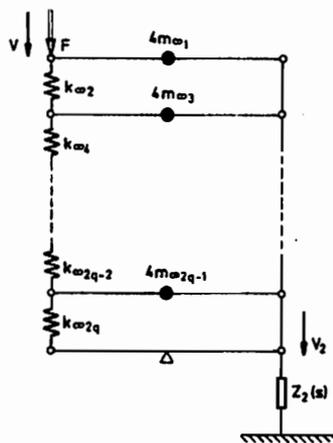


Abb. 8-30 1. Cauerform (Admittanz) mit  $q$  Massen

Gilt  $k_{\infty 2q} = 0$ , tritt  $m_{\infty 2q-1}$  als Einzelmasse auf, so daß auf den Hebel in Abb. 8-30 verzichtet werden kann.

Wendet man den Algorithmus der 1. Cauerform auf die Impedanz  $Z_R(s)$  an, folgen Netzwerke nach Abb. 7-8a. Bei  $q$  Massen und  $q$  Federn treten alle Massen in Einzelmasse-Zweitoren auf (siehe Abb. 8-31 für  $q = 3$ ). Die mechanische Realisierung (siehe Abb. 8-32) folgt unmittelbar aus der Netzwerkstruktur in Abb. 8-31, wobei alle Einzelmassen durch Balkenelemente nach Abb. 5-2 realisiert werden.

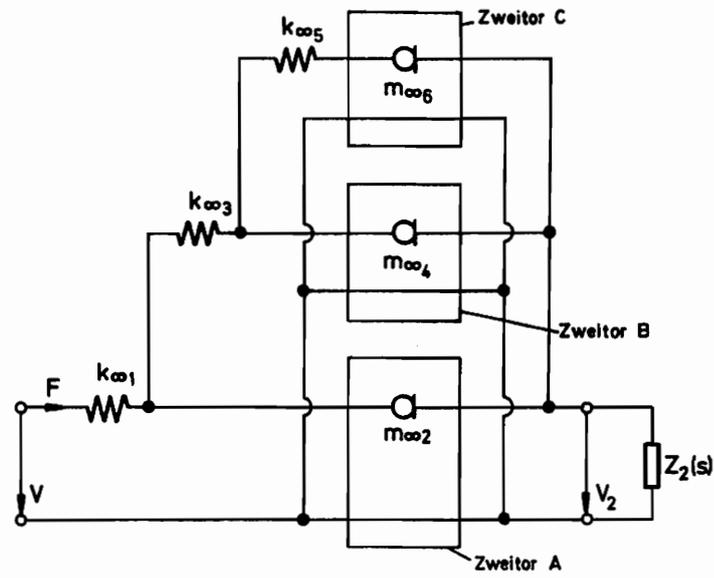


Abb. 8-31 1. Cauerform (Impedanz) mit drei Massen

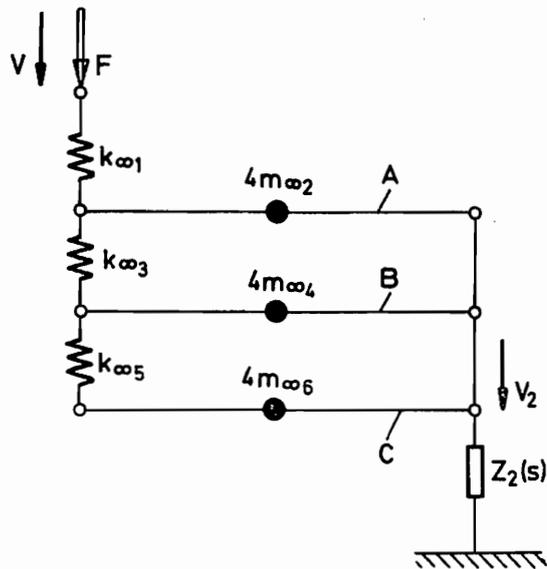


Abb. 8-32 Mechanische Realisierung zu Abb. 8-31

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß alle bei der Reaktanzreduktion abgebauten Reaktanzen - sowohl im Zweitortyp "IMP" als auch im Zweitortyp "ADM" - in mechanische Systeme umgesetzt werden können.

Im letzten Kapitel wurde bereits darauf hingewiesen, daß durch wiederholte Anwendung von Realteilminimumabbau, Reaktanzreduktion und Syntheseverfahren von O. BRUNE (siehe Kapitel 8.3) der Vollabbau einer allgemeinen Zweipolfunktion erreicht wird. Nach den Betrachtungen dieses Kapitels lassen sich alle abgebauten Realteilminima und Reaktanzen mechanisch umsetzen, und nach Kapitel 8.3 besteht auch die mechanische Realisierbarkeit der Netzwerke beim Syntheseverfahren von O. BRUNE. Damit sind alle Zweipolfunktionen mechanisch realisierbar.

In Kapitel 4 wurde die Notwendigkeit der Darstellung passiver mechanischer Systeme als positiv-reelle Funktionen, d.h. Zweipolfunktionen, gezeigt. In diesem Kapitel ergibt sich diese Darstellung auch als hinreichend für die Realisierbarkeit in passive mechanische Systeme. Somit gilt folgender Satz:

#### Satz 8-1

Notwendig und hinreichend für die Realisierbarkeit der Impedanz  $Z(s)$  oder Admittanz  $Y(s)$  eines allgemeinen passiven mechanischen Systems ist die Darstellung von  $Z(s)$  oder  $Y(s)$  als positiv-reelle Funktion, d.h. Zweipolfunktion. Eine Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  besitzt die Eigenschaften:

- a)  $\operatorname{Re} \zeta(s) > 0$  für  $\operatorname{Re} s > 0$
- b)  $\zeta(s)$  ist reell für reelle  $s$

### **8.5 Abbau von Polen in der offenen linken Halbebene**

Eine Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  besitze auch Pole in der offenen linken Halbebene  $\operatorname{Re} s < 0$ . Komplexe Pole treten paarweise konjugiert-komplex auf, da das Nennerpolynom von  $\zeta(s)$  nach Kapitel 4.4 reelle Koeffizienten besitzt. Es wird untersucht, ob der Abbau von Partialbrüchen mit einfachen oder konjugiert-komplexen Polstellen auf passive mechanische Systeme führt.

Zunächst wird eine einfache Polstelle  $s_j = \sigma_j < 0$  betrachtet. Die Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  wird aufgeteilt in

$$\zeta(s) = \tilde{\zeta}(s) + \frac{\chi_j}{s - \sigma_j} \quad (8-138)$$

Der Entwicklungskoeffizient  $\chi_j$  an der Polstelle  $s = \sigma_j$  ist, da  $\zeta(s)$  in der Umgebung von  $s = \sigma_j$  reell sein muß, reell.

Der Abbau soll so erfolgen, daß die abgebaute Funktion wieder eine Zweipolfunktion darstellt. Aus diesem Grunde ist zwischen den Fällen  $\chi_j > 0$  und  $\chi_j < 0$  zu unterscheiden.

Im Fall  $\chi_j > 0$  ist der Partialbruch

$$\zeta'(s) = \frac{\chi_j}{s - \sigma_j} = \frac{\chi_j}{s + |\sigma_j|} \quad (8-139)$$

nach Satz 4-2 Zweipolfunktion. Insbesondere gilt

$$\operatorname{Re} \zeta'(i\omega) = \frac{\chi_j |\sigma_j|}{\omega^2 + \sigma_j^2} \cong 0 \quad (8-140)$$

für alle  $\omega$  (einschließlich  $\infty$ ). Der Partialbruch in  $s = \sigma_j$  wird abgebaut:

$$\tilde{\zeta}(s) = \zeta(s) - \frac{\chi_j}{s + |\sigma_j|} \quad (8-141)$$

Es wird mit Satz 4-2 untersucht, ob  $\tilde{\zeta}(s)$  eine Zweipolfunktion ist. Punkt b ist erfüllt, da  $\zeta(s)$  und  $\tilde{\zeta}(s)$  alle Nullstellen außer die in  $s = \sigma_j$  gemein haben. In der Umgebung von imaginären Polstellen (einschließlich  $s = \infty$ ) ist der Einfluß des Partialbruchs in Gl.(8-141) vernachlässigbar klein, d.h.  $\zeta(s)$  und  $\tilde{\zeta}(s)$  besitzen an imaginären Polstellen (einschließlich  $s = \infty$ ) die gleiche Entwicklung. Dann besitzen  $\zeta(s)$  und  $\tilde{\zeta}(s)$  an Polstellen auf der imaginären Achse (einschließlich  $s = \infty$ ) positive Entwicklungskoeffizienten, so daß auch Punkt c aus Satz 4-2 erfüllt ist. Die Erfüllung von Punkt a, d.h.  $\operatorname{Re} \tilde{\zeta}(i\omega) \cong 0$ , ist jedoch nicht gesichert. Für  $s = i\omega$  folgt aus Gl.(8-141)

$$\operatorname{Re} \tilde{\zeta}(i\omega) = \operatorname{Re} \zeta(i\omega) - \frac{\chi_j |\sigma_j|}{\omega^2 + \sigma_j^2} \quad (8-142)$$

Sind zwar beide Funktionen aus Gl.(8-142) wegen  $\operatorname{Re} \zeta(i\omega) \geq 0$  (da  $\zeta(s)$  eine Zweipolfunktion ist) und Gl.(8-140) positiv, kann die Differenz in bestimmten Bereichen negativ werden (siehe Abb. 8-33).

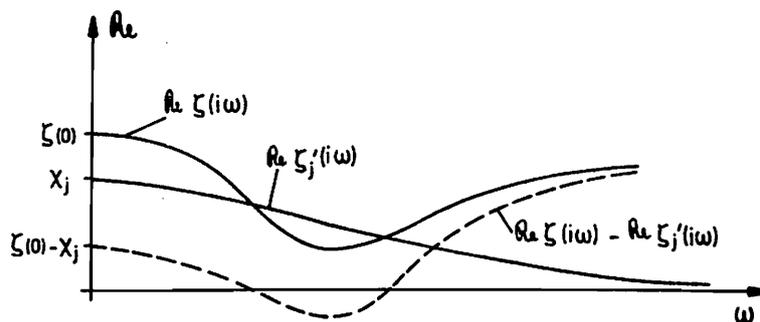


Abb. 8-33 Veranschaulichung von Gl.(8-142)

Ist das Realteilminimum von  $\tilde{\zeta}(i\omega)$

$$R'_j = \operatorname{Min} [\operatorname{Re} \tilde{\zeta}(i\omega)] = \operatorname{Min} [\operatorname{Re} \zeta(i\omega) - \operatorname{Re} \zeta_j'(i\omega)] \quad (8-143)$$

positiv, wird Satz 4-2 erfüllt, und  $\tilde{\zeta}(s)$  aus Gl.(8-141) ist Zweipolfunktion.

Für  $R'_j < 0$  führt der Abbau nach Gl.(8-141) nicht auf eine Zweipolfunktion und ist deshalb für die Synthese nicht zulässig.

Für  $\chi_j < 0$  ist der Partialbruch in Gl.(8-139) negativ reell, da

$$\operatorname{Re} \zeta_j'(i\omega) = \frac{-|\chi_j| |\sigma_j|}{\omega^2 + \sigma_j^2} \leq 0 \quad (8-144)$$

für alle  $\omega$  (einschließlich  $\infty$ ) gilt. Gl.(8-144) stellt wegen

$$\frac{d}{d\omega} [\operatorname{Re} \zeta(i\omega)] = 2\omega \frac{|\chi_j| |\sigma_j|}{(\sigma_j^2 + \omega^2)^2} > 0 \quad (8-145)$$

für  $\omega > 0$  eine monoton steigende Funktion dar. Dann gilt

$$R'_j = \text{Min} [\text{Re } \zeta'_j(i\omega)] = - \frac{|\chi_j|}{|\sigma_j|} < 0 \quad (8-146)$$

Damit die abzubauen Funktion eine Zweipolfunktion ist, muß

$$\delta'_j = - R'_j > 0 \quad (8-147)$$

zu  $\zeta'_j(s)$  addiert werden. Also stellt

$$\bar{\zeta}'_j(s) = \zeta'_j(s) + \delta'_j \quad (8-148)$$

eine Zweipolfunktion dar. Mit den Gln.(8-139), (8-146) und (8-147) erhält man aus Gl.(8-148)

$$\bar{\zeta}'_j(s) = \frac{|\chi_j|}{|\sigma_j|} \frac{s}{s + |\sigma_j|} \quad (8-149)$$

Anstelle des Abbaus Gl.(8-141) wird

$$\zeta_j(s) = \zeta'_j(s) - \frac{|\chi_j|}{|\sigma_j|} \frac{s}{s + |\sigma_j|} \quad (8-150)$$

gebildet. Wendet man auf Gl.(8-150) den Satz 4-2 an, folgt auch hier, daß  $\text{Re } \zeta_j(i\omega) \geq 0$  nicht notwendig erfüllt sein muß. Nur für

$$\text{Min} [\text{Re } \zeta_j(i\omega)] \geq 0 \quad (8-151)$$

darf der Abbau nach Gl.(8-150) erfolgen, wenn  $\zeta_j(s)$  eine Zweipolfunktion sein soll.

Die Vorgehensweise in den Fällen  $\chi_j > 0$  und  $\chi_j < 0$  wird zusammengefaßt. Zum Partialbruch  $\zeta'_j(s)$  nach Gl.(8-139) wird

$$\delta'_j = - \text{Min} [\text{Re } \zeta'_j(i\omega)] = \begin{cases} 0 & \text{für } \chi_j > 0 \\ |\chi_j| & \text{für } \chi_j < 0 \end{cases} \quad (8-152)$$

addiert, wodurch

$$\bar{\zeta}'_j(s) = \zeta'_j(s) + \delta'_j \quad (8-153)$$

entsteht. Der Abbau lautet

$$\zeta_1(s) = \zeta(s) - \bar{\zeta}'_j(s) \quad (8-154)$$

Die Bedingung  $\operatorname{Re} \zeta_1(i\omega) \geq 0$  muß überprüft werden. Ist sie erfüllt, ist der Abbau nach Gl. (8-154) zulässig, da  $\zeta_1(s)$  eine Zweipolfunktion ist. Zur mechanischen Realisierung muß zwischen den Fällen  $\chi_j > 0$  und  $\chi_j < 0$  unterschieden werden:

1.  $\chi_j > 0$

Es wird der Partialbruch Gl. (8-139) abgebaut. Aus Gl. (8-139) folgt

$$\frac{1}{\zeta'_j(s)} = \frac{|\sigma_j|}{\chi_j} + \frac{1}{\chi_j} s \quad (8-155)$$

Im weiteren wird unterschieden:

- $\zeta'_j(s)$  stellt eine Impedanz  $Z'_j(s)$  dar. Die Gl. (8-155) kann als Parallelschaltung eines Dämpfers und einer Masse interpretiert werden (siehe Abb. 8-34a).
- $\zeta'_j(s)$  stellt eine Admittanz  $Y'_j(s)$  dar. Dann entspricht Gl. (8-155) einer Reihenschaltung eines Dämpfers und einer Feder (siehe Abb. 8-34b).

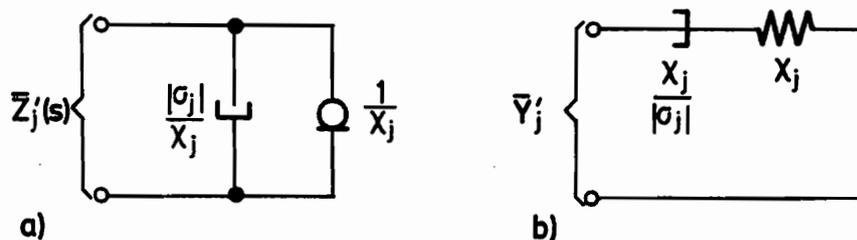


Abb. 8-34 Realisierung im Fall 1 :  
a) Impedanz; b) Admittanz

2.  $\chi_j < 0$

Es wird der Partialbruch Gl. (8-149) abgebaut. Aus Gl. (8-149) folgt

$$\frac{1}{\zeta'_j(s)} = \frac{|\sigma_j|}{|X_j|} + \frac{\sigma_j^2}{|X_j|} \cdot \frac{1}{s} \quad (8-156)$$

Nun muß unterschieden werden:

- a)  $\bar{\zeta}'_j(s)$  stellt eine Impedanz  $\bar{Z}'_j(s)$  dar. Gl.(8-156) ergibt eine Parallelschaltung eines Dämpfers und einer Feder (siehe Abb. 8-35a).
- b)  $\bar{\zeta}'_j(s)$  stellt eine Admittanz  $\bar{Y}'_j(s)$  dar. Gl.(8-156) entspricht einer Reihenschaltung eines Dämpfers und einer Masse (siehe Abb. 8-35b).

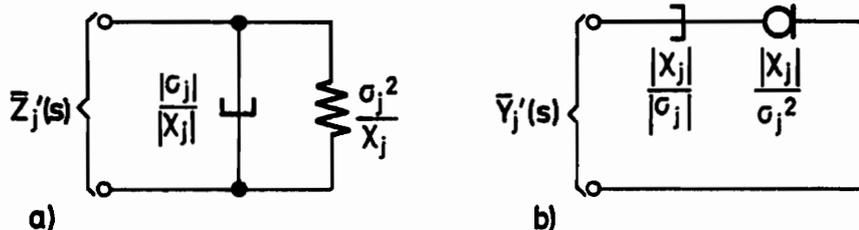


Abb. 8-35 Realisierung im Fall 2 :  
a) Impedanz; b) Admittanz

Im folgenden wird das konjugiert-komplexe Polstellenpaar

$$s_j = \sigma_j + i\omega_j \quad (8-157a)$$

$$s_j^* = \sigma_j - i\omega_j \quad (8-157b)$$

$$(\sigma_j < 0)$$

mit der Definition

$$\omega_j > 0 \quad (8-158)$$

betrachtet. Die Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  wird aufgeteilt in

$$\zeta(s) = \tilde{\zeta}(s) + \frac{\chi_j}{s - s_j} + \frac{\chi_j^*}{s - s_j^*} \quad (8-159)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $\chi_j$  und  $\chi_j^*$  an den konjugiert-komplexen Polstellen  $s_j$  und  $s_j^*$  sind nach dem Residuensatz konjugiert-komplex zueinander (siehe GUILLEMIN [13]). Der Partialbruch

$$\zeta_j''(s) = \frac{\chi_j}{s - s_j} + \frac{\chi_j^*}{s - s_j^*} \quad (8-160)$$

braucht nicht notwendig Zweipolfunktion zu sein. Aus Satz 4-2 muß die Bedingung  $\operatorname{Re} \zeta_j''(i\omega) \geq 0$  erfüllt sein. Zerlegt man  $\chi_j$  in

$$\chi_j = r_j + i x_j \quad (8-161)$$

mit der Definition

$$x_j \geq 0 \quad (8-162)$$

erhält man aus Gl.(8-160) mit den Gln.(8-157a,b)

$$\zeta_j''(s) = \frac{2 r_j s - 2 (r_j \sigma_j + x_j \omega_j)}{s^2 - 2 \sigma_j s + (\sigma_j^2 + \omega_j^2)} \quad (8-163a)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird Gl.(8-163a) auf die Form

$$\zeta_j''(s) = \frac{a_0 + a_1 s}{b_0 + b_1 s + s^2} \quad (8-163b)$$

mit

$$a_0 = -2 (r_j \sigma_j + x_j \omega_j) \quad (8-164)$$

$$a_1 = 2 r_j \quad (8-165)$$

$$b_0 = \sigma_j^2 + \omega_j^2 > 0 \quad (8-166)$$

$$b_1 = -2 \sigma_j > 0 \quad (8-167)$$

gebracht. Zur Untersuchung der Positivität wird

$$\operatorname{Re} \zeta_j''(i\omega) = \frac{a_0 b_0 + (a_1 b_1 - a_0) \omega^2}{(b_0 - \omega^2)^2 + b_1^2 \omega^2} \quad (8-168)$$

gebildet. Der Nenner in Gl.(8-168) nimmt für alle  $\omega$  positive Werte an, so daß die Bedingung  $\operatorname{Re} \zeta_j''(i\omega) \geq 0$  nur mit einem positiven Zähler erreicht wird. Es sind unter Berücksichtigung von Gl.(8-166) notwendig

$$a_0 \geq 0 \quad (8-169)$$

und

$$a_1 b_1 - a_0 \geq 0 \quad (8-170)$$

zu erfüllen. Die Ungleichungen (8-169) und (8-170) werden zusammengefaßt:

$$a_1 b_1 \geq a_0 \geq 0 \quad (8-171)$$

Aus Gl.(8-171) folgt aber auch mit Gl.(8-167)

$$a_1 \geq 0 \quad (8-172)$$

Nach Rücksubstitution von  $a_1$  durch Gl.(8-165) erhält man aus Gl.(8-172) die Forderung

$$r_j \geq 0 \quad (8-173)$$

für Zweipolfunktionen. Aus den notwendigen Bedingungen Gl.(8-169) und (8-170) ergeben sich nach Rücksubstitution mit den Gl.(8-164) bis (8-167) die Forderungen

$$r_j |\sigma_j| - x_j \omega_j \geq 0 \quad (8-174)$$

$$r_j |\sigma_j| + x_j \omega_j \geq 0 \quad (8-175)$$

Es wurden  $\omega_j > 0$  und  $x_j \geq 0$  definiert, und  $r_j \geq 0$  gilt nach Gl.(8-173). Dann können die Beziehungen Gl.(8-174) und (8-175) zusammengefaßt werden zu

$$-\frac{x_j}{r_j} \cong \frac{|\sigma_j|}{\omega_j} \cong \frac{x_j}{r_j} \quad (8-176)$$

Die Abb. 8-36 veranschaulicht die Ungleichungen (8-176). Der Entwicklungskoeffizient  $x_j$  muß innerhalb des schraffierten Gebietes

$$|\arg x_j| \cong \gamma = \arctan\left(\frac{|\sigma_j|}{\omega_j}\right) \quad (8-177)$$

liegen.

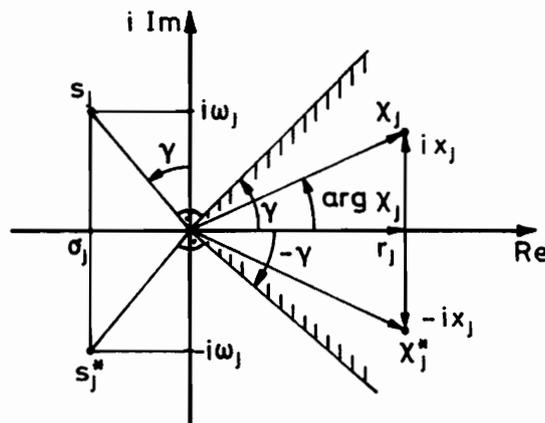


Abb. 8-36 Zulässigkeitsgebiet des Partialbruchs Gl.(8-163b)

Handelt es sich bei  $\zeta_j''(s)$  nicht um eine Zweipolfunktion, muß eine Konstante

$$\delta_j'' = -\text{Min} [\text{Re } \zeta_j''(i\omega)] \cong 0 \quad (8-178)$$

addiert werden. Dadurch entsteht die Zweipolfunktion

$$\bar{\zeta}_j''(s) = \zeta_j''(s) + \delta_j'' \quad (8-179)$$

Bei der weiteren Betrachtung wird Gl.(8-168) vereinfacht dargestellt:

$$\operatorname{Re} \zeta_j''(i\omega) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \omega^2}{\beta_0 + \beta_1 \omega^2 + \omega^4} \quad (8-180)$$

mit

$$\alpha_0 = a_0 b_0 \quad (8-181)$$

$$\alpha_1 = a_1 b_1 - a_0 \quad (8-182)$$

$$\beta_0 = b_0^2 \quad (8-183)$$

$$\beta_1 = b_1^2 - 2 b_0 \quad (8-184)$$

Das Realteilminimum aus Gl.(8-180) folgt aus der Forderung

$$\frac{d}{d\omega} [\operatorname{Re} \zeta''(i\omega)] = \frac{\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0 + 2\alpha_0 \omega^2 + \alpha_1 \omega^4}{[\beta_0 + \beta_1 \omega^2 + \omega^4]^2} = 0 \quad (8-185)$$

Gl.(8-185) wird außer in  $\omega = 0$  und  $\omega = \infty$  an den Stellen

$$\omega_{1,2}^2 = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)^2 + \beta_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \beta_1} \quad (8-186)$$

erfüllt, sofern  $\omega_1^2 \geq 0$  bzw.  $\omega_2^2 \geq 0$  und  $\alpha_1 \neq 0$  gilt. Im Fall  $\alpha_1 = 0$  wird Gl.(8-185) bei

$$\omega_3^2 = -\frac{\beta_1}{2} \quad (8-187)$$

erfüllt, sofern  $\omega_3^2 \geq 0$  gilt. Da  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  positiv oder negativ sein können, werden vier Fälle unterschieden. Zu jedem Fall erfolgt eine Unterscheidung in die Unterfälle:

- a)  $\beta_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \beta_1 \geq 0$  für  $\alpha_1 \neq 0$  oder  $-\beta_1 \geq 0$  für  $\alpha_1 = 0$   
 b)  $\beta_0 - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \beta_1 \geq 0$  für  $\alpha_1 \neq 0$  oder  $-\beta_1 \geq 0$  für  $\alpha_1 = 0$

Die vier Fälle sind:

1.  $\alpha_0 \geq 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$  (Zweipolfunktion)

Es gilt

$$\text{Min} [\text{Re } \zeta_j''(i\omega)] = \zeta_j''(\infty) = 0 \quad (8-188)$$

Im Fall 1a tritt ein relatives Maximum bei  $\omega^2 = \omega_1^2$  für  $\alpha_1 \neq 0$  bzw.  $\omega^2 = \omega_3^2$  für  $\alpha_1 = 0$  auf. Die Fälle 1a und 1b werden in Abb. 8-37 veranschaulicht.

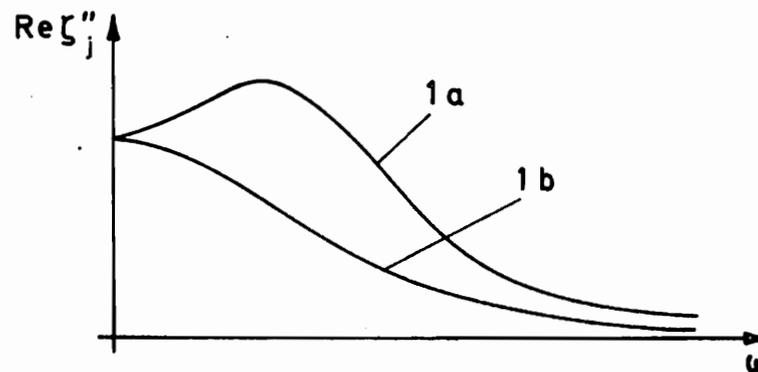


Abb. 8-37 Fall 1 :  $\alpha_0 \geq 0$ ,  $\alpha_1 \geq 0$

2.  $\alpha_0 \geq 0$ ,  $\alpha_1 < 0$

Gl.(8-186) geht mit

$$\omega_0^2 = \frac{|\alpha_0|}{|\alpha_1|} \quad (8-189)$$

geht hier über in

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \pm \sqrt{\omega_0^4 + \beta_1 \omega_0^2 + \beta_0} \quad (8-190)$$

Der Ausdruck unter der Wurzel in Gl.(8-190) ist für  $\omega = \omega_0$  mit dem Nenner in Gl.(8-180) gleich. Der Nenner in Gl.(8-180) geht aus Gl.(8-180) hervor und ist für alle  $\omega$ , d.h. auch für  $\omega_0$ , positiv.

a) Das Realteilminimum tritt bei

$$\omega_m^2 = \omega_1^2 = \omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 + \omega_0^2 \beta_1 + \beta_0}$$

auf. Es gilt  $\omega_2^2 < 0$ . (8-191a)

b) Das Realteilminimum tritt bei

$$\omega_m^2 = \omega_1^2 = \omega_0^2 - \sqrt{\omega_0^4 + \omega_0^2 \beta_1 + \beta_0}$$

auf. Bei  $\omega^2 = \omega_2^2$  liegt ein relatives Maximum vor. (8-191b)

Abb. 8-38 veranschaulicht die Fälle 2a und 2b.

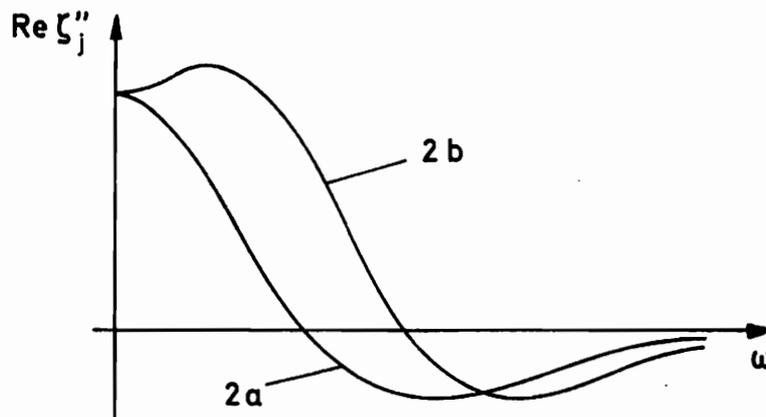


Abb. 8-38 Fall 2 :  $\alpha_0 \geq 0$  ,  $\alpha_1 < 0$

3.  $\alpha_0 < 0$  ,  $\alpha_1 > 0$

Auch hier ist Gl.(8-186) nach Gl.(8-190) darstellbar.

a) Es tritt ein relatives Maximum bei  $\omega^2 = \omega_1^2$  auf ( $\omega_2^2 < 0$ ), d.h.

$$\text{Min} [ \text{Re } \zeta''_j(i\omega) ] = \zeta''_j(0) < 0 \quad (8-192)$$

b) Das Realteilminimum liegt bei

$$\omega_m^2 = \omega_2^2 = \omega_0^2 - \sqrt{\omega_0^4 + \omega_0^2 \beta_1 + \beta_0}$$

(8-193)

Bei  $\omega^2 = \omega_1^2$  liegt das Maximum.

Die Fälle 3a und 3b werden in Abb. 8-39 veranschaulicht.

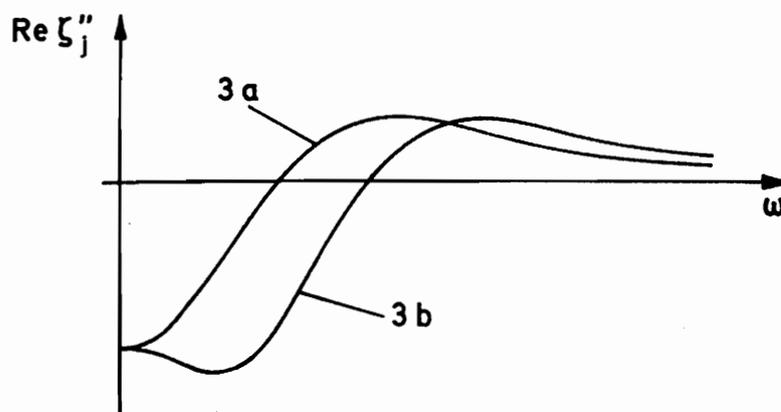


Abb. 8-39 Fall 3 :  $\alpha_0 < 0$  ,  $\alpha_1 > 0$

4.  $\alpha_0 < 0$  ,  $\alpha_1 \cong 0$

Gl.(8-180) lautet hier

$$\operatorname{Re} \zeta_j''(i\omega) = - \frac{|\alpha_0| + |\alpha_1| \omega^2}{\beta_0 + \beta_1 \omega^2 + \omega^4} \quad (8-194)$$

so daß der Realteil für alle  $\omega$  negativ wird. Die Realteilverläufe zu den Fällen 4a und 4b (siehe Abb. 8-40) sind deshalb gegenüber den Fällen 1a und 1b (siehe Abb. 8-37) vorzeichenverschieden.

a) Das Realteilminimum liegt bei

$$\omega_m^2 = \omega_1^2 = -\omega_0^2 + \sqrt{\omega_0^4 - \omega_0^2 \beta_1 + \beta_0} \quad (8-195)$$

für  $\alpha_1 = 0$  ( $\omega_2^2 < 0$ ). Im Fall a wird für  $\alpha_1 = 0$   $-\beta_1 \cong 0$  vorausgesetzt, so daß das Minimum bei

$$\omega_3^2 = -\frac{\beta_1}{2} \cong 0 \quad (8-196)$$

liegt.

b) Wegen  $\omega_1^2 < 0$  ,  $\omega_2^2 < 0$  und  $\omega_3^2 < 0$  gilt

$$\operatorname{Min} [\operatorname{Re} \zeta_j''(i\omega)] = \zeta_j''(0) < 0 \quad (8-197)$$

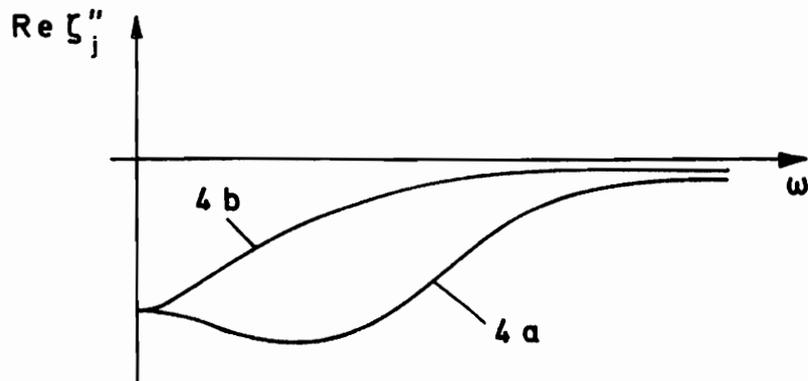
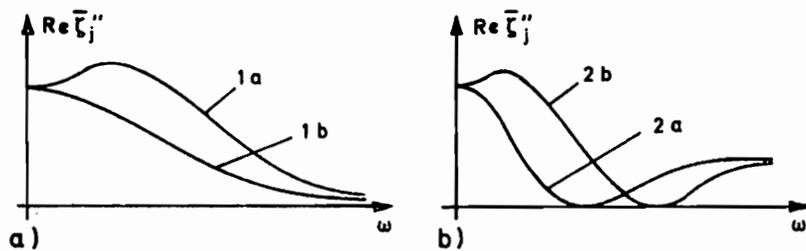


Abb. 8-40 Fall 4 :  $\alpha_0 < 0$  ,  $\alpha_1 \leq 0$

Nach der Kurvendiskussion für  $\zeta_j''(s)$  liegt die Konstante  $\delta_j''$  (siehe Gl.(8-178) fest. Es wird  $\bar{\zeta}_j''(s)$  nach Gl.(8-179) gebildet. Die Realteilverläufe in den Fällen 1 bis 4 (Abbildungen 8-37 bis 8-40) gehen über in solche nach den Abbildungen 8-41 a bis d



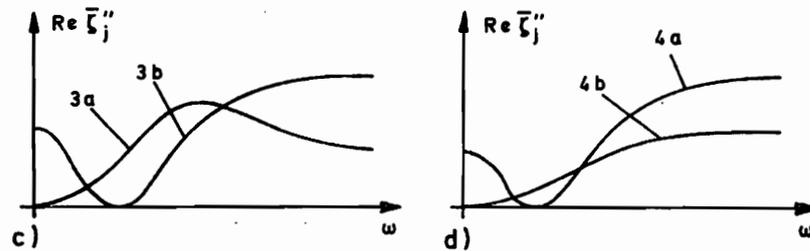


Abb. 8-41 Realteilverläufe in den Fällen 1 bis 4 nach Addition einer Konstanten  $\delta_j''$  nach Gl.(8-178)

Für die Realisierung wird die folgende Klassifikation durchgeführt:

1. Realteilminimum in  $s = \infty$

Dies trifft bei den Fällen 1a und 1b zu, bei denen  $\zeta_j''(s)$  nach Gl.(8-163b) bereits Zweipolfunktion ist. Zur Realisierung wird  $\zeta_j''(s)$  auf die Form

$$\frac{1}{\zeta_j''(s)} = \frac{1}{a_1} s + \frac{b_0 + (b_1 - a_0/a_1) s}{a_0 + a_1 s} \quad (8-198)$$

gebracht. Wird der Pol in  $s = \infty$  mit dem Entwicklungskoeffizienten  $\frac{1}{a_1}$  abgebaut, ist die Restfunktion

$$\frac{1}{\zeta_{1j}''(s)} = \frac{b_0 + (b_1 - a_0/a_1) s}{a_0 + a_1 s} \quad (8-199)$$

Zweipolfunktion. Auf die Realisierung von Gl.(8-199) wird noch eingegangen.

2. Realteilminimum in  $s = 0$

Dies tritt bei den Fällen 3a und 4b auf. Die Gl.(8-179) lautet hier

$$\zeta_j''(s) = \frac{s (a_0' + a_1' s)}{b_0 + b_1 s + s^2} \quad (8-200)$$

Gl.(8-200) wird in die Form

$$\frac{1}{\zeta_j''(s)} = \frac{b_0}{a_0'} \cdot \frac{1}{s} + \frac{(b_1 - b_0 a_1'/a_0') + s}{a_0' + a_1' s} \quad (8-201)$$

überführt. Der Pol in  $s = 0$  mit dem Entwicklungskoeffizienten  $\frac{b_0}{a_0'}$  wird abgebaut. Die Restfunktion

$$\frac{1}{\zeta_{2j}''(s)} = \frac{(b_1 - b_0 a_1'/a_0') + s}{a_0' + a_1' s} \quad (8-202)$$

ist notwendig Zweipolfunktion.

3. Realteilminimum bei  $s = i\omega_m$  ( $\omega_m \neq 0$  und  $\omega_m \neq \infty$ ). Dies tritt bei den Fällen 2a, 2b, 3b und 4a auf. Gl.(8-179) wird hier zu

$$\bar{\zeta}_j''(s) = \frac{a_0'' + a_1'' s + a_2'' s^2}{b_0 + b_1 s + s^2} \quad (8-203)$$

$\bar{\zeta}_j''(s)$  ist Zweipolfunktion minimaler Reaktanz. Die Realisierung erfolgt mit dem Syntheseverfahren aus Kapitel 8.3, wobei ein Bauteil nach Abb. 8-10 zur Anwendung kommt. Da beim Syntheseverfahren aus Kapitel 8.3 Nenner- und Zählerpolynom nach einem Zyklus eine Gradreduzierung um 2 erfahren, verbleibt eine positive Konstante als Restfunktion. Diese ist durch einen passiven Dämpfer realisierbar.

Die Restfunktionen Gl.(8-199) und Gl.(202) sind Zweipolfunktionen ersten Grades mit der Form

$$\zeta_I(s) = \frac{d_0 + d_1 s}{e_0 + e_1 s} \quad (8-204)$$

Es gilt

$$\operatorname{Re} \zeta_I(i\omega) = \frac{d_0 e_0 + d_1 e_1 \omega^2}{e_0^2 + e_1^2 \omega^2} \quad (8-205)$$

und daraus

$$\frac{d}{d\omega} [\operatorname{Re} \zeta_I(i\omega)] = 2\omega \frac{e_0 e_1 (d_1 e_0 - d_0 e_1)}{[e_0^2 + e_1^2 \omega^2]^2} \quad (8-206)$$

Nach Gl.(8-206) ist  $\operatorname{Re} \zeta_I(i\omega)$  für  $\omega > 0$  eine monoton steigende oder monoton fallende Funktion. Es sind folgende Unterscheidungen zu treffen:

a) 
$$\frac{d_0}{e_0} > \frac{d_1}{e_1}$$

Dies ist nach Gl.(8-205) gleichbedeutend mit

$$\zeta_I(0) > \zeta_I(\infty) \quad (8-207)$$

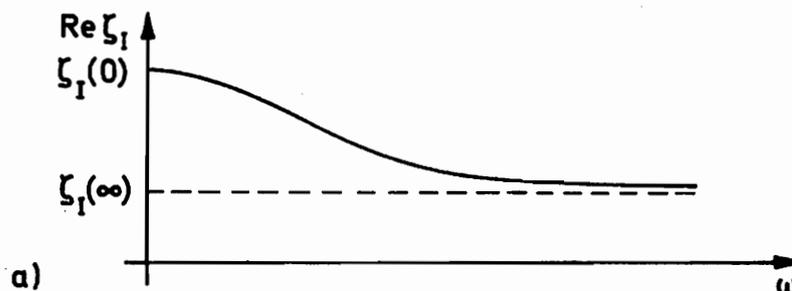
Nach Gl.(8-206) ist  $\operatorname{Re} \zeta_I(i\omega)$  für  $\omega > 0$  monoton fallend. Der Realteilverlauf wird in Abb. 8-42a dargestellt.

b) 
$$\frac{d_0}{e_0} < \frac{d_1}{e_1}$$

Somit gilt

$$\zeta_I(0) < \zeta_I(\infty) \quad (8-208)$$

nach Gl.(8-205). Nach Gl.(8-206) ist  $\operatorname{Re} \zeta_I(i\omega)$  für  $\omega > 0$  monoton steigend. Es folgt der Realteilverlauf nach Abb. 8-42b.



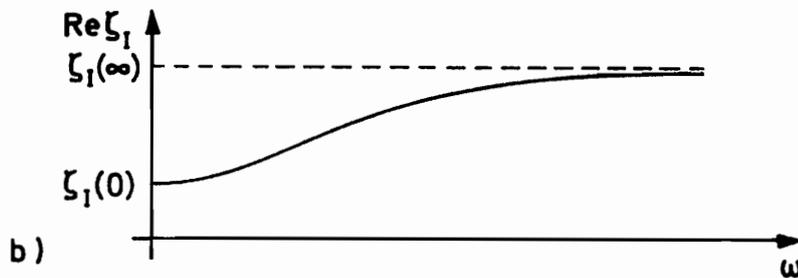


Abb. 8-42 Verlauf nach Gl.(8-205), Fälle a) und b)

Es folgt die Realisierung von  $\zeta_I(s)$  :

a)  $d_0 e_1 - d_1 e_0 > 0$

Es existieren zwei Realisierungsmöglichkeiten:

a1)

$$\zeta_I(s) = \frac{d_1}{e_1} + \frac{d_0 - \frac{e_0}{e_1} d_1}{e_0 + e_1 s}$$

$$\Rightarrow \zeta_I(s) = \frac{d_1}{e_1} + \left[ \frac{e_0 e_1}{d_0 e_1 - d_1 e_0} + \frac{e_1^2}{d_0 e_1 - d_1 e_0} s \right]^{-1}$$

(8-209)

a2)

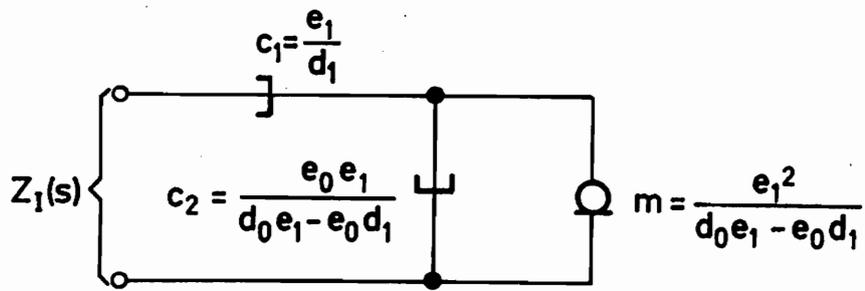
$$\frac{1}{\zeta_I(s)} = \frac{e_0}{d_0} + \frac{e_1 - \frac{d_1}{d_0} e_0}{d_0 + d_1 s}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\zeta_I(s)} = \frac{e_0}{d_0} + \left[ \frac{d_0 d_1}{d_0 e_1 - d_1 e_0} + \frac{d_0^2}{d_0 e_1 - d_1 e_0} \cdot \frac{1}{s} \right]^{-1}$$

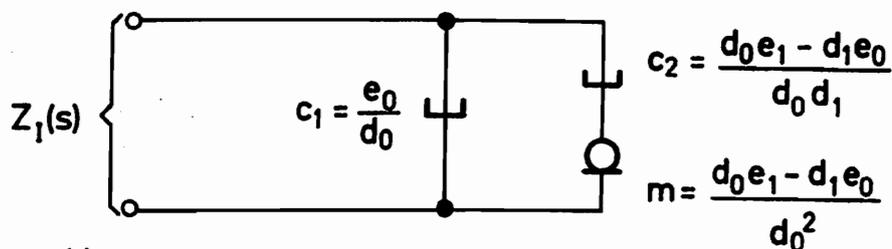
(8-210)

Im Fall a) gilt  $d_0 e_1 - d_1 e_0 > 0$ , so daß alle Koeffizienten in den Gln.(8-209) und (8-210) positiv sind. Die Gln.(8-209) und (8-210) stellen also Kettenentwicklungen zur Realisierung mit passiven Bauelementen dar. Ist  $\zeta_I(s)$  eine Impedanz  $Z_I(s)$ , erhält man die Realisierungen

aus Abb. 8-43.



a)



b)

Abb. 8-43 Realisierung in a) Fall a1 , b) Fall a2

b)  $d_0 e_1 - d_1 e_0 < 0$  bzw.  $d_1 e_0 - d_0 e_1 > 0$

Es existieren zwei Realisierungsmöglichkeiten:

b1)

$$\zeta_I(s) = \frac{d_0}{e_0} + \frac{s(d_1 - \frac{e_1}{e_0} d_0)}{e_0 + e_1 s}$$

$$\Rightarrow \zeta_I(s) = \frac{d_0}{e_0} + \left[ \frac{e_0 e_1}{d_1 e_0 - d_0 e_1} + \frac{e_0^2}{d_1 e_0 - d_0 e_1} \cdot \frac{1}{s} \right]^{-1}$$

(8-211)

b2)

$$\frac{1}{\zeta_I(s)} = \frac{e_1}{d_1} + \frac{e_0 - \frac{d_0}{d_1} e_1}{d_0 + d_1 s}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\zeta_I(s)} = \frac{e_1}{d_1} + \left[ \frac{d_0 d_1}{d_1 e_0 - d_0 e_1} + \frac{d_1^2}{d_1 e_0 - d_0 e_1} s \right]^{-1} \quad (8-212)$$

Im Fall b gilt  $d_1 e_0 - d_0 e_1 > 0$ , so daß die Kettenentwicklungen Gln.(8-211) und (8-212) durch passive Bauelemente realisierbar sind. Stellt  $\zeta_I(s)$  eine Impedanz  $Z_I(s)$  dar, sind die Realisierungen aus Abb. 8-44 möglich.

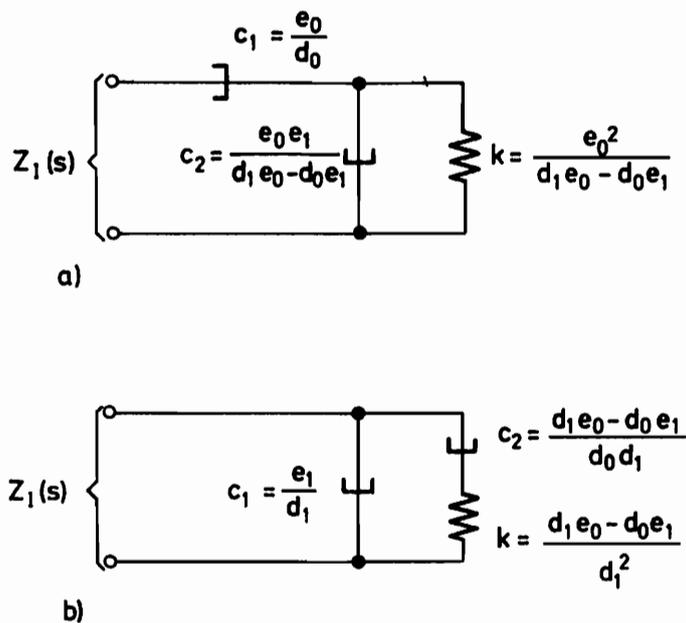


Abb. 8-44 Realisierung in a) Fall b1 ; b) Fall b2

Im bisher nicht behandelten Sonderfall  $\frac{d_0}{e_0} = \frac{d_1}{e_1}$  sind Zähler und Nenner von  $\zeta_I(s)$  kürzbar. Es verbleibt die Konstante

$$\zeta_I = \frac{d_1}{e_1} \cong 0 \quad (8-213)$$

die als passiver Dämpfer realisierbar ist.

Damit wurde gezeigt, daß die Partialfunktion  $\bar{\zeta}_j''(s)$  für sich mechanisch realisierbar sind. Wird  $\bar{\zeta}_j''(s)$  von der Ausgangsfunktion  $\zeta(s)$  (vgl. Gl. 8-159) abgespalten, erhält man

$$\zeta_1(s) = \zeta(s) - \bar{\zeta}_j''(s) \quad (8-214)$$

Die Zulässigkeit des Abbaus nach Gl.(8-214) hängt nach Satz 4-2 davon ab, ob die Bedingung

$$\text{Min}[Re \zeta_1(i\omega)] = \text{Min}[Re \zeta(i\omega) - Re \bar{\zeta}_j''(i\omega)] \cong 0 \quad (8-215)$$

erfüllt ist. Die Bedingung Gl.(8-215) muß nicht notwendig gelten. Im Fall  $\text{Min}\{Re \zeta_1(i\omega)\} < 0$  ist  $\zeta_1(s)$  keine Zweipolfunktion, so daß die Realisierung nicht ausschließlich mit passiven Bauelementen möglich ist.

Besteht eine Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  aus  $N_1$  einfachen Polen und  $N_2$  konjugiert-komplexen Polstellenpaaren können beliebig viele Partialbrüche herausgegriffen werden, die für sich realisiert werden sollen. Es existiert dann eine große Zahl verschiedener Kombinationen von Partialbrüchen. Die jeweiligen Restfunktionen müssen auf Positivität überprüft werden. Der Abbau eines Partialbruchs stellt einen Sonderfall mit  $N_1 + N_2$  Möglichkeiten dar. Ein anderer Sonderfall liegt vor, wenn  $\zeta(s)$  in alle  $N_1 + N_2$  Partialbrüche zerlegt wird.

Zunächst wird  $\zeta(s)$  in eine notwendig positive Konstante

$$\zeta_\infty = \zeta(\infty) \cong 0 \quad (8-216)$$

und eine echt gebrochene Funktion  $\zeta_e(s)$  zerlegt :

$$\zeta(s) = \zeta_\infty + \zeta_e(s) \quad (8-217)$$

$\zeta_e(s)$  kann in Partialbruchfunktionen  $\zeta_j''(s)$  entsprechend Gl.(8-139) mit  $j = 1, \dots, N_1$  und  $\zeta_k''(s)$  entsprechend Gl.(8-163a) mit  $k = 1, \dots, N_2$  aufgegliedert werden, so daß man aus Gl.(8-217)

$$\zeta(s) = \zeta_{\infty} + \sum_{j=1}^{N_1} \zeta'_j(s) + \sum_{k=1}^{N_2} \zeta''_k(s) \quad (8-218)$$

erhält. Nun werden die Konstanten  $\delta'_j$  nach Gl.(8-152) und  $\delta''_k$  nach Gl.(8-178) ermittelt und zu  $\zeta'_j(s)$  und  $\zeta''_k(s)$  addiert ( $j = 1, \dots, N_1$ ;  $k = 1, \dots, N_2$ ). Aus Gl.(8-218) entsteht

$$\begin{aligned} \zeta(s) = & \zeta_{\infty} - \left\{ \sum_{j=1}^{N_1} \delta'_j + \sum_{k=1}^{N_2} \delta''_k \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^{N_1} [\zeta'_j(s) + \delta'_j] + \sum_{k=1}^{N_2} [\zeta''_k(s) + \delta''_k] \end{aligned} \quad (8-219)$$

Mit den Gln.(8-153) und (8-179) und der Zusammenfassung

$$\bar{\zeta}_{\infty} = \zeta_{\infty} - \left\{ \sum_{j=1}^{N_1} \delta'_j + \sum_{k=1}^{N_2} \delta''_k \right\} \quad (8-220)$$

folgt aus Gl.(8-219)

$$\zeta(s) = \bar{\zeta}_{\infty} + \sum_{j=1}^{N_1} \bar{\zeta}'_j(s) + \sum_{k=1}^{N_2} \bar{\zeta}''_k(s) \quad (8-221)$$

Handelt es sich bei  $\zeta(s)$  um eine Impedanz, stellt Gl.(8-221) eine Reihenschaltung dar. Auf die Realisierung der Summenglieder in Gl.(8-221) wurde bereits oben eingegangen. Die Konstante  $\bar{\zeta}_{\infty}$  kann als Dämpfer angesehen werden, der für  $\bar{\zeta}_{\infty} \geq 0$  passiv realisierbar ist. Falls  $\bar{\zeta}_{\infty} < 0$ , muß ein aktiver, geschwindigkeitsproportionaler Dämpfer eingesetzt werden.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß der Abbau von Partialbrüchen mit Polen in der offenen linken Halbebene nicht immer zulässig ist. Die Zulässigkeit besteht darin, daß die Restfunktionen einen positiven Realteil für alle  $s = i\omega$  (einschl.  $s = \infty$ ) besitzt. Ist die Restfunktion positiv, d.h. Zweipolfunktion, kann die weitere Realisierung durch passive mechanische Bauelemente erfolgen.

## 9. Beschreibung von Zweitoren durch positiv-reelle Matrizen

Ein Zweitor nach Abb.(2-4) bestehe aus Massen, Dämpfern, Federn, Hebeln und Balken. Dann ist eine Beschreibung mit Absolutgeschwindigkeiten möglich:

$$\left( s \underline{M} + \underline{C} + \frac{1}{s} \underline{K} \right) \underline{v} = \underline{f} \quad (9-1)$$

Es wird vereinbart, daß  $V_1$  und  $V_2$  sowie  $F_1$  und  $F_2$  mit den Größen an den beiden Toren in Abb.(2-4) übereinstimmen und daß

$$\underline{f}^T = [F_1, F_2, 0, \dots, 0] \quad (9-2)$$

Die Matrizen  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  und  $\underline{K}$  sind wegen der vorausgesetzten Passivität des Systems positiv-semidefinit. Bildet man aus Gl.(9-1) den Ausdruck

$$Y(s) = \underline{v}^{*T} \left( s \underline{M} + \underline{C} + \frac{1}{s} \underline{K} \right) \underline{v} = \underline{v}^{*T} \cdot \underline{f} \quad (9-3)$$

muß dann im einzelnen

$$T = \underline{v}^{*T} \underline{M} \underline{v} \cong 0 \quad (9-4a)$$

$$W = \underline{v}^{*T} \underline{C} \underline{v} \cong 0 \quad (9-4b)$$

$$U = \underline{v}^{*T} \underline{K} \underline{v} \cong 0 \quad (9-4c)$$

gelten. Die Größen  $T$ ,  $W$  und  $U$  sind gegenüber denen aus Kapitel 4 etwas anders definiert, besitzen aber die gleichen Eigenschaften (vgl. Gln. 4-22a, b,c). Aus Gl.(9-3) folgt mit den Gleichungen (9-2) und (9-4a,b,c)

$$Y(s) = V_1^* F_1 + V_2^* F_2 = s T + W + \frac{1}{s} U \quad (9-5)$$

Der Vergleich mit Gl.(4-12) zeigt, daß  $Y(s)$  in Gl.(9-5) zu den positiv reellen Funktionen, deren Eigenschaften in Satz 4-1 beschrieben werden, gehört.

Da nach Gl.(9-2)  $F_j = 0$  für  $j > 2$  definiert wurden, sind die Geschwindigkeiten  $V_j$  ( $j > 2$ ) von  $V_1$  und  $V_2$  linear abhängig. Eine Kondensation führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} y_{11}(s) & y_{12}(s) \\ y_{21}(s) & y_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (9-6)$$

das mit Gl.(2-13a) übereinstimmt. Da die Matrizen  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  und  $\underline{K}$  symmetrisch sind, folgt  $y_{12}(s) = y_{21}(s)$ . Die Funktion  $Y(s)$  erhält man auch aus Gl.(9-6):

$$Y(s) = [V_1^*, V_2^*] \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = V_1^* F_1 + V_2^* F_2$$

$$\Rightarrow Y(s) = y_{11} V_1 V_1^* + y_{12} (V_1^* V_2 + V_1 V_2^*) + y_{22} V_2 V_2^* \quad (9-7)$$

Nach Satz 4-1 muß  $\operatorname{Re} Y(i\omega) \geq 0$  für alle  $\omega$  erfüllt sein. Daraus folgt notwendig die Forderung:

$$\operatorname{Re} y_{11}(i\omega) \geq 0 \quad (9-8)$$

$$\operatorname{Re} y_{22}(i\omega) \geq 0 \quad (9-9)$$

$$[\operatorname{Re} y_{11}(i\omega)][\operatorname{Re} y_{22}(i\omega)] - [\operatorname{Re} y_{12}(i\omega)]^2 \geq 0 \quad (9-10)$$

Da  $Y(s)$  in der offenen rechten Halbebene  $\operatorname{Re} s > 0$  keine Polstelle besitzen darf, müssen  $y_{11}(s)$ ,  $y_{12}(s)$  und  $y_{22}(s)$  ebenfalls in der offenen rechten Halbebene polstellenfrei sein. Wenn  $Y(s)$  höchstens eine einfache Polstelle auf dem Rand  $s = i\omega$  (einschließlich  $s = \infty$ ) besitzen darf, muß dies auch für  $y_{11}(i\omega)$ ,  $y_{12}(i\omega)$  und  $y_{22}(i\omega)$  gelten. Der Entwicklungskoeffizient  $r$  von  $Y(s)$  an einer Polstelle auf der imaginären Achse muß positiv sein. Werden mit  $r_{11}$ ,  $r_{12}$  und  $r_{22}$  die Entwicklungskoeffizienten von  $y_{11}$ ,  $y_{12}$  und  $y_{22}$  an einer solchen Polstelle bezeichnet, erhält man

$$r = r_{11} V_1 V_1^* + r_{12} (V_1 V_2^* + V_1^* V_2) + r_{22} V_2 V_2^* \quad (9-11)$$

$$r = [V_1^*, V_2^*] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

oder

$$r = \underline{v}^{*T} \underline{R} \underline{v} \quad (9-12)$$

Mit der linearen Transformation

$$\underline{v} = \underline{T} \underline{u} \quad (9-13)$$

gehe Gl.(9-18) in eine Diagonalform über, d.h.

$$\begin{aligned} r &= \varrho_1 u_1 u_1^* + \varrho_2 u_2 u_2^* \\ \text{oder} \\ r &= \varrho_1 |u_1|^2 + \varrho_2 |u_2|^2 \end{aligned} \quad (9-14)$$

Die Forderung  $r \geq 0$  kann erfüllt werden, wenn die Eigenwerte  $\rho_1$  und  $\rho_2$  von  $\underline{R}$  positiv sind. Notwendig und hinreichend dafür sind

$$r_{11} \geq 0 \quad (9-15)$$

$$r_{22} \geq 0 \quad (9-16)$$

$$r_{11} r_{22} - r_{12}^2 \geq 0 \quad (9-17)$$

Wird ein Zweitor nach Abb. 2-4 mit Maschenkräften beschrieben, erhält man (vgl. Kapitel 4):

$$\left( \frac{1}{s} \underline{\hat{M}} + \underline{\hat{C}} + s \underline{\hat{K}} \right) \underline{\hat{f}} = \underline{\hat{v}} \quad (9-18)$$

Die Maschenkräfte  $\hat{F}_1$  und  $\hat{F}_2$  sollen mit den äußeren Kräften  $F_1$  und  $F_2$  übereinstimmen. Ferner gelte

$$\underline{\hat{v}}^T = [V_1, V_2, 0, \dots, 0] \quad (9-19)$$

Die Kondensation führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} z_{11}(s) & z_{12}(s) \\ z_{12}(s) & z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (9-20)$$

wobei  $\hat{F}_1 = F_1$  und  $\hat{F}_2 = F_2$  berücksichtigt wurde. Bildet man eine Funktion

$$Z(s) = \underline{\hat{f}}^{*T} \cdot \underline{\hat{v}} = F_1^* V_1 + F_2^* V_2 \quad (9-21)$$

muß diese analog zu  $Y(s)$  in Gl.(9-3) eine Zweipolfunktion sein. Daraus ergeben sich die Forderungen (vgl. Gln. 9-8 bis 9-10):

$$\operatorname{Re} z_{11}(i\omega) \cong 0 \quad (9-22)$$

$$\operatorname{Re} z_{22}(i\omega) \cong 0 \quad (9-23)$$

$$[\operatorname{Re} z_{11}(i\omega)][\operatorname{Re} z_{22}(i\omega)] - [\operatorname{Re} z_{12}(i\omega)]^2 \cong 0 \quad (9-24)$$

In der offenen rechten Halbebene  $\operatorname{Re} s > 0$  müssen  $z_{11}(s)$ ,  $z_{12}(s)$  und  $z_{22}(s)$  polstellenfrei sein. Auf der imaginären Achse  $s = i\omega$  (einschließlich  $s = \infty$ ) dürfen nur einfache Polstellen auftreten. Werden mit  $\hat{r}_{11}$ ,  $\hat{r}_{12}$ ,  $\hat{r}_{22}$  die Entwicklungskoeffizienten von  $z_{11}$ ,  $z_{12}$  und  $z_{22}$  an einer solchen Polstelle bezeichnet, müssen die Ungleichungen

$$\hat{r}_{11} \cong 0 \quad (9-25)$$

$$\hat{r}_{22} \cong 0 \quad (9-26)$$

$$\hat{r}_{11} \hat{r}_{22} - \hat{r}_{12}^2 \cong 0 \quad (9-27)$$

gelten, die den Gln.(9-15) bis(9-17) entsprechen.

Nach Kapitel 2 bilden die Funktionen  $y_{ij}(s)$  nach Gl.(9-6) und  $z_{ij}(s)$  nach Gl.(9-20) ( $i, j = 1, 2$ ) die Matrizen  $\underline{Y}(s)$  und  $\underline{Z}(s)$ , die bei bestimmten Systemen nicht existieren. Die in diesem Abschnitt vorausgesetzte Kondensation ist dann nicht möglich. Allerdings sind die hier gemachten Aussagen nur von Bedeutung, wenn alle  $y_{ij}$  bzw.  $z_{ij}(s)$  ( $i, j = 1, 2$ ) existieren.

Die Matrizen  $\underline{Y}(s)$  und  $\underline{Z}(s)$ , die gleiche Eigenschaften besitzen, werden auch als positiv-reelle Matrizen bezeichnet. Zusammenfassend kann man folgenden Satz aufstellen (vgl. Satz 4-1 für Zweipolfunktionen):

#### Satz 9-1

Die Impedanzmatrix  $\underline{Z}(s)$  oder Admittanzmatrix  $\underline{Y}(s)$  eines jeden passiven Zweitors, der aus Federn, Massen, Dämpfern, Hebeln und Balken besteht, ist eine positiv-reelle Matrix. Eine positiv-reelle Matrix mit den Elementen  $\zeta_{ij}(s)$  ( $i, j = 1, 2$ ) hat folgende Eigenschaften:

1.  $\operatorname{Re} \zeta_{11}(i\omega) \cong 0$

$$\operatorname{Re} \zeta_{22}(i\omega) \cong 0$$

$$[\operatorname{Re} \zeta_{11}(i\omega)][\operatorname{Re} \zeta_{22}(i\omega)] - [\operatorname{Re} \zeta_{12}(i\omega)]^2 \cong 0$$

für alle  $\omega$ .

2.  $\zeta_{11}(s)$ ,  $\zeta_{12}(s)$  und  $\zeta_{22}(s)$  besitzen keine Pole in der offenen rechten Halbebene  $\operatorname{Re} s > 0$ .

3.  $\zeta_{11}(s)$ ,  $\zeta_{12}(s)$  und  $\zeta_{22}(s)$  besitzen, wenn überhaupt, auf der imaginären Achse (einschließlich  $s = \infty$ ) nur einfache Pole. Die Entwicklungskoeffizienten  $r_{ij}$  der Funktionen  $\zeta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) an einer solchen Polstelle erfüllen die Bedingungen

$$r_{11} \cong 0$$

$$r_{22} \cong 0$$

$$r_{11} r_{22} - r_{12}^2 \cong 0$$

## 10. Spezialfälle von Zweitormatrizen

Analog zu den in Kapitel 6 definierten Spezialfällen mechanischer Zweipole sollen hier spezielle Zweitormatrizen hergeleitet werden.

### 10.1 Netzwerke mit nur zwei Bauelementtypen

Wie in Kapitel 6 gezeigt, führen Netzwerke mit nur zwei Bauelementen in der Beschreibung mit Absolutgeschwindigkeiten (Knotenpotentialanalyse) auf das Gleichungssystem (vgl. Gl. 6-5)

$$(\lambda \underline{A} + \underline{B}) \underline{z} = \underline{f} \quad (10-1)$$

Im Gegensatz zu Gl. (6-5) wird der Vektor  $\underline{f}$  im Sinne von Gl.(9-2) definiert, und mit  $z_1$  und  $z_2$  werden die absoluten Differenzgrößen an den beiden Toren bezeichnet. Auch hier wird Gl.(10-1) als invertierbar vorausgesetzt, da die folgenden Betrachtungen sinnlos wären. Mit den Gleichungen (6-7) bis (6-9) führt die Inversion von Gl.(10-1) auf

$$\underline{z} = \underline{I} (\lambda \underline{E} - \underline{\Lambda})^{-1} \underline{I}^T \underline{f} \quad (10-2)$$

Die Matrizen  $\underline{E}$  und  $\underline{\Lambda}$  entsprechen den Gln. (6-10) und (6-11), d.h. sie mögen in diesem Sinne sortiert sein.

Zur Herleitung einer  $2 \times 2$  - "Impedanz"-Matrix wird die Beziehung

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1^T \\ \underline{e}_2^T \end{bmatrix} \underline{z} \quad (10-3)$$

eingeführt, wobei  $\underline{e}_1$  und  $\underline{e}_2$  Einheitsvektoren sind. Außerdem gilt

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (10-4)$$

Setzt man Gl.(10-2) in Gl.(103) ein und ersetzt  $\underline{f}$  durch Gl.(10-4), folgt die gewünschte "Impedanz"-Beziehung

$$\begin{bmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1^T \\ \underline{e}_2^T \end{bmatrix} \underline{T} (\lambda \underline{E} - \underline{\Lambda})^{-1} \underline{T}^T \begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (10-5)$$

Führt man die Abkürzung

$$\underline{\Phi} = \lambda \underline{E} - \underline{\Lambda} = \text{diag} [\varphi_1, \dots, \varphi_n] \quad (10-6)$$

ein, erhält man aus Gl.(10-5) die "Impedanz"-Matrix

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1^T \underline{T} \underline{\Phi}^{-1} \underline{T}^T \underline{e}_1 & \underline{e}_1^T \underline{T} \underline{\Phi}^{-1} \underline{T}^T \underline{e}_2 \\ \underline{e}_2^T \underline{T} \underline{\Phi}^{-1} \underline{T}^T \underline{e}_1 & \underline{e}_2^T \underline{T} \underline{\Phi}^{-1} \underline{T}^T \underline{e}_2 \end{bmatrix} \quad (10-7)$$

oder in Komponenten

$$\xi_{ik} = \underline{e}_i^T \underline{T} \underline{\Phi}^{-1} \underline{T}^T \underline{e}_k \quad (10-8)$$

( i , k = 1 , 2 )

Die Gl.(10-8) wird vereinfacht zu

$$\xi_{ik} = \sum_{j=1}^n \frac{t_{ij} t_{kj}}{\varphi_j} \quad (10-9)$$

( i , k = 1 , 2 )

Da voraussetzungsgemäß die Matrix  $\underline{\Phi}$  aus Gl. (10-6) die Struktur von Gl. (6-11) besitzt, erhält man aus Gl.(10-9)

$$\xi_{ik} = \sum_{j=1}^{d_B} \frac{t_{ij} t_{kj}}{\lambda} + \sum_{j=d_B+1}^{r_A} \frac{t_{ij} t_{kj}}{\lambda + l_j} + \sum_{j=r_A+1}^n \frac{t_{ij} t_{kj}}{l_j} \quad (10-10)$$

( i , k = 1 , 2 )

Es erfolgen die Zusammenfassungen (vgl. Gln. 6-18, 6-19, 6-21 und 6-22):

$$K_{0_{ik}} = \sum_{j=1}^{d_B} t_{ij} t_{kj} \quad (10-11)$$

$$K_{\infty_{ik}} = \sum_{j=r_A+1}^n \frac{t_{ij} t_{kj}}{l_j} \quad (10-12)$$

$$K_{j_{ik}} = t_{i, d_B+j} \cdot t_{k, d_B+j} \quad (10-13)$$

$$p_j = l_{d_B+j} > 0 \quad (10-14)$$

$$(j = 1, \dots, N = r_A - d_B)$$

Wichtig ist es, festzustellen, daß die Koeffizienten in den Gln.(10-11) bis (10-3) mit  $i = k$  positiv werden, da sie sich aus Summen quadratischer Ausdrücke ergeben. Mit den Gleichungen (10-11) bis (10-14) nimmt Gl.(10-10) die Form

$$\xi_{ik} = \frac{K_{0_{ik}}}{\lambda} + \sum_{j=1}^N \frac{K_{j_{ik}}}{\lambda + p_j} + K_{\infty_{ik}} \quad (10-15)$$

$$(i, k = 1, 2)$$

an. Wie in Kapitel 6.1 erfolgt der Übergang zu den speziellen Bauelementkombinationen:

a) Feder-Masse-Systeme

$$z_{ik} = \frac{A_{0_{ik}}}{s} + \sum_{j=1}^{N_a} \frac{2 A_{j_{ik}} s}{s^2 + \omega_j^2} + A_{\infty_{ik}} \quad (10-16)$$

$$\omega_j^2 \hat{=} p_j$$

$$A_{0_{ik}} \hat{=} K_{0_{ik}}$$

$$A_{\infty_{ik}} \hat{=} K_{\infty_{ik}}$$

$$A_{j_{ik}} \hat{=} \frac{1}{2} K_{j_{ik}}$$

$$(i, k = 1, 2 ; j = 1, \dots, N_a)$$

b) Masse-Dämpfer-Systeme

$$z_{ik} = \frac{B_{0_{ik}}}{s} + \sum_{j=1}^{N_b} \frac{B_{j_{ik}}}{s + \sigma_j} + B_{\infty_{ik}} \quad (10-17)$$

$$B_{0_{ik}} \hat{=} K_{0_{ik}}$$

$$B_{\infty_{ik}} \hat{=} K_{\infty_{ik}}$$

$$B_{j_{ik}} \hat{=} K_{j_{ik}}$$

$$\sigma_j \hat{=} p_j$$

$$(i, k = 1, 2 ; j = 1, \dots, N_b)$$

c) Feder-Dämpfer-Systeme

$$z_{ik} = C_{0_{ik}} + \sum_{j=1}^{N_c} \frac{C_{j_{ik}} s}{s + \sigma_j} + C_{\infty_{ik}} s \quad (10-18)$$

$$C_{0\,ik} \hat{=} K_{0\,ik}$$

$$C_{\infty\,ik} \hat{=} K_{\infty\,ik}$$

$$C_{j\,ik} \hat{=} K_{j\,ik}$$

$$\sigma_j \hat{=} p_j$$

$$(i, k = 1, 2 ; j = 1, \dots, N_c)$$

Erfolgt die Beschreibung mit Maschenkräften, erhält man das Gleichungssystem (vgl. Gl. 6-32)

$$\left( \frac{1}{\lambda} \underline{\hat{A}} + \underline{\hat{B}} \right) \underline{\hat{f}} = \underline{\hat{z}} \quad (10-19)$$

Entgegen den Definitionen aus Kapitel 6 gelten hier (vgl. Gl. 6-27a, b)

$$\underline{\hat{z}} = \left[ z_1, z_2, 0, \dots, 0 \right] \quad (10-20)$$

und

$$\hat{F}_1 \equiv F_1 \quad (10-21a)$$

$$\hat{F}_2 \equiv F_2 \quad (10-21b)$$

Die Invertierbarkeit des Gleichungssystems (10-19) wird vorausgesetzt. Wendet man zur Invertierung von Gl.(10-19) das gleiche Vorgehen wie oben für Gl.(10-1) über das Eigensystem an, läßt sich die "Admittanz"-Beziehung

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi'_{11} & \xi'_{12} \\ \xi'_{21} & \xi'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (10-22)$$

ableiten. Es gilt dann analog zu Gl.(10-15)

$$\xi'_{ik} = \frac{\hat{K}_{0ik}}{1/\lambda} + \sum_{j=1}^{N'} \frac{\hat{K}_{jik}}{1/\lambda + \hat{p}_j} + \hat{K}_{\infty ik} \quad (10-23)$$

$$(i, k = 1, 2)$$

Die Koeffizienten in Gl.(10-23) mit  $i = k$  sind auch hier positiv. Setzt man

$$K'_{0ik} = \hat{K}_{\infty} \quad (10-24)$$

$$K'_{\infty ik} = \hat{K}_{0ik} \quad (10-25)$$

$$K'_{jik} = \frac{\hat{K}_{jik}}{\hat{p}_j} \quad (10-26)$$

$$p'_j = \frac{1}{\hat{p}_j} \quad (10-27)$$

$$(i, k = 1, 2 ; j = 1, \dots, N')$$

folgt aus Gl.(10-23)

$$\xi'_{ik} = \lambda K'_{\infty ik} + \sum_{j=1}^{N'} \frac{\lambda K'_{jik}}{\lambda + p'_j} + K'_{0ik} \quad (10-28)$$

$$(i, k = 1, 2)$$

Aufgrund der getroffenen Vereinbarungen ist die Matrix

$$\underline{\xi}' = \begin{bmatrix} \xi'_{11} & \xi'_{12} \\ \xi'_{21} & \xi'_{22} \end{bmatrix} \quad (10-29)$$

zur Matrix  $\Xi$  aus Gl.(10-7) invers. Für die speziellen Bauelement- Kombinationen erhält man:

a) Feder-Masse-Systeme

$$y_{ik} = \frac{A'_{0'ik}}{s} + \sum_{j=1}^{N'_a} \frac{2 A'_{j'ik} s}{s^2 + \omega_j'^2} + A'_{\infty ik} \quad (10-30)$$

$$\omega_j'^2 \hat{=} p_j'$$

$$A'_{0'ik} \hat{=} K'_{0'ik}$$

$$A'_{\infty ik} \hat{=} K'_{\infty ik}$$

$$A'_{j'ik} \hat{=} \frac{1}{2} K'_{j'ik}$$

$$(i, k = 1, 2 ; j = 1, \dots, N'_a)$$

b) Masse-Dämpfer-Systeme

$$y_{ik} = s B'_{\infty ik} + \sum_{j=1}^{N'_b} \frac{s B'_{j'ik}}{s + \sigma_j} + B'_{0'ik} \quad (10-31)$$

$$B'_{0'ik} \hat{=} K'_{0'ik}$$

$$B'_{\infty ik} \hat{=} K'_{\infty ik}$$

$$B'_{j'ik} \hat{=} K'_{j'ik}$$

$$\sigma_j' \hat{=} p_j'$$

$$(i, k = 1, 2 ; j = 1, \dots, N'_b)$$

c) Feder-Dämpfer-Systeme

$$y_{ik} = C'_{\infty ik} + \sum_{j=1}^{N'_c} \frac{C'_{j ik}}{s + \sigma_j} + \frac{C'_{0 ik}}{s} \quad (10-32)$$

$$C'_{0 ik} \hat{=} K'_{0 ik}$$

$$C'_{\infty ik} \hat{=} K'_{\infty ik}$$

$$C'_{j ik} \hat{=} K'_{j ik}$$

$$\sigma'_j \hat{=} p'_j$$

$$(i, k = 1, 2 ; j = 1, \dots, N'_c)$$

## 10.2 Modale Systeme

Ausgangspunkt ist wieder ein Gleichungssystem nach Gl.(4-17), wobei der Vektor  $\underline{f}$  entsprechend Gl.(9-2) definiert ist und  $V_1, V_2$  mit den Geschwindigkeiten an den beiden Toren übereinstimmen. Insbesondere gilt hier entweder

$$\underline{M} = \alpha \underline{C} + \beta \underline{K} \quad (10-33a)$$

$$\underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K} \quad (10-33b)$$

$$\underline{K} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{C} \quad (10-33c)$$

Wie in Kapitel 6.2 werden die modal gedämpften Systeme (Gl.10-33b) aus den verschiedenen modalen Ansätzen beispielhaft ausgewählt.

Mit der Transformation Gl.(6-39) geht Gl.(4-17) in die Diagonalform Gl.(6-44) über. Invertiert man Gl.(6-44) und setzt  $\underline{u}$  in Gl.(6-39) ein, erhält man unter Berücksichtigung von Gl.(6-43)

$$\underline{v} = \underline{T} \underline{\Phi}^{-1} \underline{T}^T \underline{f} \quad (10-34)$$

Die Matrix  $\underline{\Phi}$  geht aus Gl.(6-45) mit den Gln.(6-41) und (6-42) hervor. Da  $\underline{v}$  im Sinne von Gl.(10-3) und  $\underline{f}$  nach Gl.(10-4) vereinbart wurden, erhält man die zu Gl.(10-5) ähnliche Impedanzbeziehung

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{e}_1^T \\ \underline{e}_2^T \end{bmatrix} \underline{T} \underline{\Phi}^{-1} \underline{T}^T \begin{bmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (10-35)$$

Die Impedanzmatrix aus Gl.(10-35) lautet nun

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \frac{t_{1j}^2}{\varphi_j} & \sum_{j=1}^n \frac{t_{1j} t_{2j}}{\varphi_j} \\ \sum_{j=1}^n \frac{t_{1j} t_{2j}}{\varphi_j} & \sum_{j=1}^n \frac{t_{2j}^2}{\varphi_j} \end{bmatrix}$$

bzw. mit Gl.(6-45) rücks substituiert

$$\underline{Z} = \sum_{j=1}^n \frac{s}{m'_j s^2 + c'_j s + k'_j} \begin{bmatrix} t_{1j}^2 & t_{1j} t_{2j} \\ t_{1j} t_{2j} & t_{2j}^2 \end{bmatrix} \quad (10-36)$$

Die Gl.(10-36) ist die Darstellungsform der Impedanzmatrix eines modal gedämpften Systems. Gl.(10-36) kann auf alle drei modalen Systeme nach den Gln.(10-33a, b, c) übertragen werden. Es gilt entweder

$$\text{oder } m'_j = \alpha c'_j + \beta k'_j \quad (10-37a)$$

$$\text{oder } c'_j = \alpha m'_j + \beta k'_j \quad (10-37b)$$

$$\text{oder } k'_j = \alpha m'_j + \beta c'_j \quad (10-37c)$$

Es erfolge die Beschreibung eines mechanischen Systems mit dem Maschengleichungssystem Gl.(6-26) unter Verwendung eines modalen Ansatzes, also entweder

$$\underline{\hat{M}} = \hat{\alpha} \underline{\hat{C}} + \hat{\beta} \underline{\hat{K}} \quad (10-38a)$$

oder

$$\underline{\hat{C}} = \hat{\alpha} \underline{\hat{M}} + \hat{\beta} \underline{\hat{K}} \quad (10-38b)$$

oder

$$\underline{\hat{K}} = \hat{\alpha} \underline{\hat{M}} + \hat{\beta} \underline{\hat{C}} \quad (10-38c)$$

Die Vektoren  $\underline{\hat{f}}$  und  $\underline{\hat{v}}$  werden hier im Sinne der Gln. (10-20) und (10-21a, vereinbart. Wendet man das in diesem Kapitel oben ausgeführte Vorgehen auf das Maschengleichungssystem Gl.(6-26) an, erhält man die Admittanzmatrix

$$\underline{Y} = \sum_{j=1}^{\hat{n}} \frac{s}{\hat{m}'_j s^2 + \hat{c}'_j s + \hat{k}'_j} \begin{bmatrix} \hat{t}_{1j}^2 & \hat{t}_{1j} \hat{t}_{2j} \\ \hat{t}_{1j} \hat{t}_{2j} & \hat{t}_{2j}^2 \end{bmatrix} \quad (10-39)$$

Zusammenfassend kann man für modale Zweitore aussagen:

Satz 10-1

Modale Systeme besitzen für eine Impedanzmatrix notwendig die Darstellungsform

$$\underline{Z} = \sum_{j=1}^n \frac{s}{m'_j s^2 + c'_j s + k'_j} \begin{bmatrix} t_{1j}^2 & t_{1j} t_{2j} \\ t_{1j} t_{2j} & t_{2j}^2 \end{bmatrix} \quad (10-40)$$

wobei entweder

oder

$$m'_j = \alpha c'_j + \beta k'_j \quad (c'_j, k'_j \cong 0)$$

oder

$$c'_j = \alpha m'_j + \beta k'_j \quad (m'_j, k'_j \cong 0)$$

oder

$$k'_j = \alpha m'_j + \beta c'_j \quad (m'_j, c'_j \cong 0)$$

$$(\alpha \cong 0 \quad \beta \cong 0 ; j = 1, \dots, n)$$

gelten muß.

Satz 10-2

Modale Systeme besitzen für eine Admittanzmatrix notwendig die Darstellungsform

$$\underline{Y} = \sum_{j=1}^{\hat{n}} \frac{s}{\hat{m}'_j s^2 + \hat{c}'_j s + \hat{k}'_j} \begin{bmatrix} \hat{t}_{1j}^2 & \hat{t}_{1j} \hat{t}_{2j} \\ \hat{t}_{1j} \hat{t}_{2j} & \hat{t}_{2j}^2 \end{bmatrix}$$

wobei entweder

(10-41)

$$\begin{aligned} \text{oder } \hat{m}'_j &= \hat{\alpha} \hat{c}'_j + \hat{\beta} \hat{k}'_j & (\hat{c}'_j, \hat{k}'_j \cong 0) \\ \hat{c}'_j &= \hat{\alpha} \hat{m}'_j + \hat{\beta} \hat{k}'_j & (\hat{m}'_j, \hat{k}'_j \cong 0) \\ \text{oder } \hat{k}'_j &= \hat{\alpha} \hat{m}'_j + \hat{\beta} \hat{c}'_j & (\hat{m}'_j, \hat{c}'_j \cong 0) \end{aligned}$$

$$(\alpha \cong 0 \quad \beta \cong 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, \hat{n})$$

gelten muß.

## 11. Anwendung der Netzwerksynthese auf mechanische Schwingungsprobleme

### 11.1 Aufgabenstellungen der Schwingungstechnik und deren Behandlung mit Hilfe der Netzwerksynthese

Durch die Anwendung der LAPLACE-Transformation bietet sich die Netzwerksynthese sowohl für stationäre als auch für instationäre Schwingungsvorgänge an.

Es wird ein mechanisches System betrachtet, das einen passiven Zweipol mit der Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  als Teilsystem enthält. Für das Gesamtsystem wird eine gewisse Ausgangsgröße

$$G(s) = G(\zeta(s)) \quad (11-1)$$

angenommen. Die Gl.(11-1) besagt, daß  $G(s)$  vom Teilsystem mit der Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  beeinflußt wird. Bei  $G(s)$  kann es sich einerseits um eine Größe handeln, die unmittelbar mit physikalischen Größen wie Weg, Beschleunigung usw. in Beziehung steht. Andererseits kann sie eine Übertragungsfunktion  $H(s)$ , die als Quotient physikalischer Ausgangs- und Eingangsgrößen definiert wird, darstellen. Von der Funktion  $G(s)$  wird eine beliebige Vorschrift  $G_0(s)$  erwartet.

Bei stationären Schwingungsvorgängen geht der Frequenzparameter in  $s = i\omega$  über. Zu bemerken ist, daß in den meisten Anwendungsfällen FOURIER-transformierte Funktionen mit den LAPLACE-transformierten für  $s = i\omega$  übereinstimmen. Die Identität besteht, wenn die FOURIER-transformierte Funktion keine DIRAC-Impulse besitzt bzw. die LAPLACE-transformierte Funktion auf der imaginären  $s$ -Achse polstellenfrei ist (siehe UNBEHAUEN [35]). Die Voraussetzungen mögen zutreffen. Als Ausgangsgröße  $G(\omega)$  bei stationären Schwingungen kann es sich beispielsweise um das Spektrum

$$S_a(\omega) = |X_a(\omega)|^2 \quad (11-2)$$

einer Auslenkung  $\ddot{x}_a(\omega)$  aufgrund eines gegebenen Erregungsspektrums handeln. Betragsgrößen sind daher von Interesse, weil damit Aussagen über maximale Materialbeanspruchungen möglich werden. Ein anderer Fall liegt vor, wenn die

Funktion  $G(\omega)$  eine Übertragungsfunktion

$$H(\omega) = \left| \frac{\ddot{X}_a(\omega)}{X_e(\omega)} \right| = \omega^2 \left| \frac{X_a(\omega)}{X_e(\omega)} \right| \quad (11-3)$$

darstellt. In Gl.(11-3) geht  $H(\omega)$  aus dem Quotienten der Beschleunigung  $\ddot{X}_a(\omega)$  und der Wegerregung  $X_e(\omega)$  hervor.

Aufgabenstellung bei instationären Schwingungen ist zumeist, für die zeitliche Übertragungsfunktion

$$h(t) \longrightarrow H(s) \quad (11-4)$$

ein bestimmtes Verhalten  $h_0(t)$  zu erreichen. Zu  $h_0(t)$  existiere die LAPLACE-transformierte Funktion  $H_0(s)$ . Aus Stabilitätsgründen erwartet man, daß  $H_0(s)$  und  $H(s)$  in  $\text{Re } s > 0$  analytisch ist (siehe UNBEHAUEN [35]). Da eine analytische Funktion betragsmäßig das Maximum und, falls die Funktion in  $\text{Re } s > 0$  nullstellenfrei ist, das Minimum auf dem Rand des Analytizitätsgebietes erreicht, erfolgt die Approximation von  $H_0(s)$  durch  $H(s)$  auf dem Rand  $s = i\omega$ .

Die Aufgabenstellung bei stationären und instationären Schwingungen besteht somit gleichermaßen in der Approximation einer beliebigen Vorschrift  $G_0(\omega)$  durch die Funktion

$$G(\omega) = G(i\omega) \quad (11-5)$$

Die Vorschrift  $G_0(\omega)$  kann im allgemeinen nicht exakt durch  $G(\omega)$  erfüllt werden. Aus diesem Grunde muß eine Optimierungszielfunktion definiert werden. Beispielsweise kann die integrale oder diskrete Fehlerquadratmethode angewendet werden. Die Funktionen

$$\Omega = \int_0^{\infty} [G(\omega) - G_0(\omega)]^2 d\omega \longrightarrow \min \quad (11-6)$$

bzw.

$$\Delta = \sum_{j=1}^N [G(\omega_j) - G_0(\omega_j)]^2 \longrightarrow \min \quad (11-7)$$

sollen hier minimiert werden. Da  $G(\omega)$  nach Gl.(11-5) von  $\zeta(i\omega)$  abhängt und sich  $\zeta(s)$  in Form von Gl.(4-34) ausdrückt, stellen die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n$  aus Gl.(4-34) Optimierungsparameter dar, die man zum  $N_p$ -dimensionalen Parametervektor  $\underline{p}$  zusammenfassen kann. Die Koeffizienten von  $\zeta(s)$  unterliegen den Bedingungen aus Satz 4-2 oder Satz 4-3. So entstehen im  $N_p$ -dimensionalen Raum der Parameter  $p_k$  ( $k = 1, \dots, N_p$ ) Teilgebiete, in denen  $\zeta(s)$  zulässig ist. Die relativen Minima der Zielfunktionen  $\Omega$  aus Gl.(11-6) und  $\Delta$  aus Gl.(11-7) befinden sich zum Teil im nicht zulässigen Gebiet. Das absolute Minimum kann also auch auf dem Rand eines zulässigen Teilgebietes liegen. Aus diesem Grunde empfehlen sich zur Optimierung Koordinatensuchverfahren (siehe ENTENMANN [9]). Der mathematische Zusammenhang der Restriktionen aus den Sätzen 4-2 und 4-3 und den Koeffizienten der Zweipolfunktionen ist bisher noch nicht gefunden worden. Bei den Koordinatensuchverfahren bietet sich hier die Verwendung von Straffunktionen an. Nimmt z.B.  $\text{Re } \zeta(i\omega)$  zwischen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  negative Werte an, kann entweder der Straffehler

$$\Omega_S = \varepsilon_1 \int_{\omega_1}^{\omega_2} [\text{Re } \zeta(i\omega)]^2 d\omega + \varepsilon_0 \quad (11-8)$$

oder

$$\Delta_S = \delta_1 \sum_{j=1}^{N_S} [\text{Re } \zeta(i\omega_j)]^2 + \delta_0 \quad (11-9)$$

definiert werden. Die Größen  $\delta_0, \delta_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1$  seien so groß gewählt, daß  $\Omega_S$  und  $\Delta_S$  größer sind als  $\Omega$  und  $\Delta$  für zulässige Funktionen.

Sehr hilfreich für die numerische Anwendung sind konforme Abbildungen. Bei der bilinearen Transformation

$$z = \frac{\sigma_0 - s}{\sigma_0 + s} \quad (11-10)$$

mit einer beliebigen reellen Konstante  $\sigma_0 > 0$  wird z.B. die offene rechte  $s$ -Halbebene in das Innere des Einheitskreises, d.h.  $|z| < 1$ , transformiert. Die imaginäre Achse  $s = i\omega$  wird auf dem Einheitskreis  $|z| = 1$

unter dem Winkel

$$\vartheta = -2 \arctan \left( \frac{\omega}{\sigma_0} \right) \quad (11-11)$$

abgebildet. Das unendliche Intervall

$$-\infty < \omega < \infty$$

geht nach Gl.(11-11) über in

$$-\pi \leq \vartheta \leq \pi$$

d.h. in ein endliches und abgeschlossenes Intervall. Man kann nun die Variable  $\omega$  in den Gln.(11-6) und (11-7) durch  $\vartheta$  substituieren. Andererseits können auch neue Zielfunktionen wie

$$\Omega' = \int_0^{\pi} [G(\vartheta) - G_0(\vartheta)]^2 d\vartheta \rightarrow \min \quad (11-12)$$

oder

$$\Delta' = \sum_{j=1}^{N'} [G(\vartheta_j) - G_0(\vartheta_j)]^2 \rightarrow \min \quad (11-13)$$

formuliert werden.

Die beschriebene Optimierungsmethode wird als direkt bezeichnet, da unmittelbar die Koeffizienten einer Zweipolfunktion optimiert werden. UNBEHAUEN [33] schlägt ein indirektes Verfahren vor. In einem ersten Schritt erfolgt die Approximation durch eine positiv-reelle, jedoch nicht rationale Funktion  $\tilde{\zeta}(\vartheta)$ . UNBEHAUEN [33] verwendet stückweises lineare Funktionen, HANSEN [15] dagegen Spline-Funktionen. Darüberhinaus können FOURIER-Reihen in der Variablen  $z$  angesetzt werden, da sich die im Intervall  $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$  definierte Funktion  $\zeta(\vartheta)$  bzw.  $\tilde{\zeta}(\vartheta)$  periodisch wiederholt. Bei indirekten Verfahren ist von Vorteil, daß bei den Restriktionen für positiv-reelle Funktionen aus den Sätzen 4-2 und 4-3 ein linearer bzw. quadratischer Zusammenhang zu den Optimierungsparametern gelingt. Somit können auch andere Optimierungsverfahren als Koordinatensuchverfahren an-

gewendet werden (siehe ENTENMANN [9] ). Im zweiten Optimierungsschritt erfolgt die Umsetzung der nicht rationalen Funktion  $\tilde{\zeta}(s)$  in eine rationale, positiv-reelle Funktion  $\zeta(s)$  . Dabei werden keine Restriktionen verlangt, da man von einer so guten Approximation ausgeht, daß

$$\operatorname{Re} \tilde{\zeta}(s) \approx \operatorname{Re} \zeta(s) \cong 0 \quad (11-14)$$

erfüllt ist.

Das indirekte Verfahren ist auch in der Form möglich, daß für die Näherungsfunktion  $\tilde{\zeta}(s)$  noch weitere Vereinfachungen getroffen werden. Diese bestehen z.B. darin, daß  $\tilde{\zeta}(s)$  in  $\operatorname{Re} s > 0$  analytisch, jedoch nicht notwendig positiv-reell ist. Bei analytischen Funktionen bestehen zwischen Real- und Imaginärteil, aber auch für Betrag und Phase Zusammenhänge durch die HILBERT-Transformation (siehe GUILLEMIN [13] , UNBEHAUEN [35] ) . Im zweiten Optimierungsschritt, der Annäherung von  $\tilde{\zeta}(s)$  durch die Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  auf dem Rand des Analytizitätsgebietes  $s = i\omega$  (oder  $|z| = 1$  nach s-z-Transformation) , müssen die Restriktionen für Zweipolfunktionen erfüllt werden. Die erste Approximation erfolgt hier z.B. mit TSCHEBYSCHJEFF-Funktionen (siehe RUPPRECHT [26] , UNBEHAUEN [36] ) .

Kein prinzipieller Unterschied besteht, wenn statt des oben vorausgesetzten Zweipols ein Zweitor als Teilsystem eines mechanischen Systems betrachtet wird.  $G(\omega)$  wird nun von den einzelnen Funktionen einer Zweipolmatrix beeinflusst, also (vgl. Gl. 11-5)

$$G(\omega) = G(\zeta_{11}(i\omega), \zeta_{12}(i\omega), \zeta_{22}(i\omega)) \quad (11-15)$$

Bei der Optimierung müssen hier die Restriktionen für positiv-reelle Matrizen (siehe Satz 9-1) erfüllt sein, die gegenüber denen für skalare, positiv-reelle Funktionen umfangreicher sind.

An dieser Stelle soll der besondere Vorteil von modalen Systemen hervorgehoben werden. In den Darstellungen der Gln. (7-7), (7-26), (10-40) und (10-41) können alle auftretenden Koeffizienten als Quadrate der Optimierungsparameter definiert werden. Dann sind alle notwendigen Bedingungen für Zweipolfunktionen modaler Systeme erfüllt. Die Optimierung erfolgt also ohne Restriktionen und erfordert dementsprechend wesentlich geringere Rechenzeiten.

Der Übergang von  $\zeta(i\omega)$  bzw.  $\zeta_{11}(i\omega)$ ,  $\zeta_{12}(i\omega)$  und  $\zeta_{22}(i\omega)$  auf  $\zeta(s)$ ,  $\zeta_{11}(s)$ ,  $\zeta_{12}(s)$ ,  $\zeta_{22}(s)$  wird durch analytische Fortsetzung erreicht. Anstelle von  $\omega$  setzt man

$$\omega = -i s \quad (11-16)$$

bzw. für  $\omega^2$

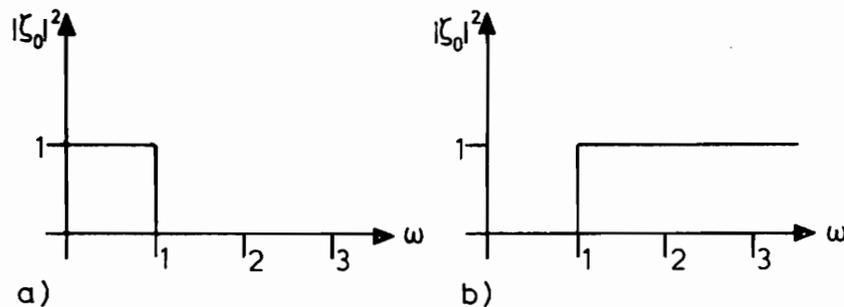
$$\omega^2 = -s^2 \quad (11-17)$$

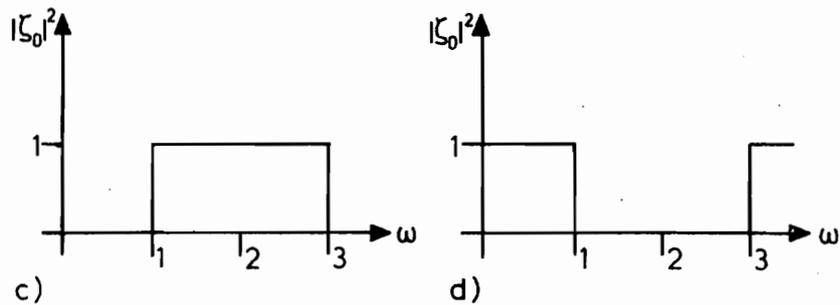
ein.

## 11.2 Approximation von Impedanzen und Admittanzen

Ein mechanisches System bestehe nur aus einem passiven Zweipol selbst. Aufgrund einer vorläufigen Approximation bei indirekten Verfahren erhalte man Forderungen für eine Impedanz  $Z(s)$  bzw. Admittanz  $Y(s)$  (allgemein Zweipolfunktion  $\zeta(s)$ ). Näherungsweise seien die folgenden Betragsvorschriften  $|\zeta_0(i\omega)|^2$  zu erfüllen (siehe auch die Abbildungen 11-1a bis d) :

1. Tiefpaß
2. Hochpaß
3. Breitbandpaß
4. Breitbandsperre

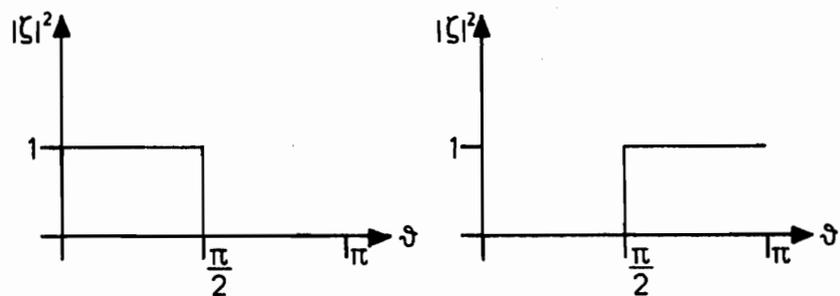




**Abb. 11-1** Betragsvorschriften  
 a) Tiefpaß      b) Hochpaß  
 c) Breitbandpaß      d) Breitbandsperre

Wie aus den Abbildungen 11a bis d zu erkennen ist, werden hier die Frequenz  $\omega$  und die Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  bzw.  $\zeta_0(i\omega)$  als normierte Größen aufgefaßt (siehe UNBEHAUEN [37]).

Wendet man die s-z-Transformation (siehe Gln. 11-10 und 11-11) an, gehen die Vorschriften aus den Abbildungen 11-1a bis d in solche nach den Abbildungen 11-2a bis d über. Die Konstante  $\sigma_0$  aus Gl.(11-11) nimmt für die Vorschriften 1 und 2 den Wert  $\sigma_0 = 1$  und für die Vorschriften 3 und 4 den Wert  $\sigma_0 = \sqrt[3]{3}$  an.



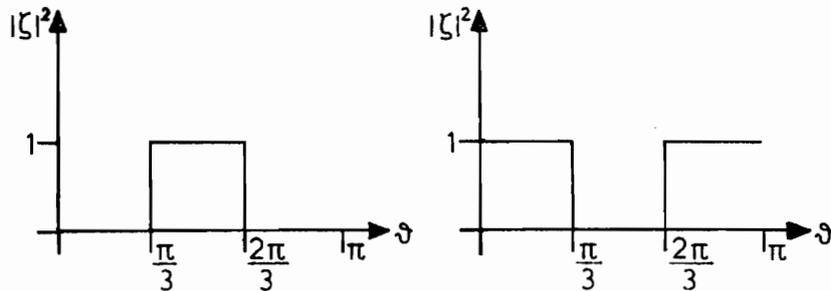


Abb. 11.2 Betragsvorschriften

- a) Tiefpaß (  $\sigma_0 = 1$  )      b) Hochpaß (  $\sigma_0 = 1$  )  
 c) Breitbandpaß (  $\sigma_0 = \sqrt{3}$  )      d) Breitbandsperre (  $\sigma_0 = \sqrt{3}$  )

Als Optimierungsziel­funktion wird

$$\Delta' = \sum_{j=1}^{N'} ( |\zeta(\vartheta_j)|^2 - |\zeta_0(\vartheta_j)|^2 )^2 \quad (11-18)$$

definiert. (vgl. Gl. 11-13). Das Intervall  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  wird hier in  $N' - 1$  äquidistante Intervalle mit  $N'$  Stützstellen aufgeteilt. Nach Anwendung der s-z-Transformation Gl.(11-10) erhält man für eine allgemeine Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  die Ansatzform

$$\zeta(z) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_n z^n}{1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots + \beta_n z^n} \quad (11-19)$$

Erfüllen die Optimierungsparameter  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  nicht die Positivität des Realteils von  $\zeta(\vartheta)$ , wird ein Straffehler entsprechend Gl.(11-9), jedoch in der Variablen  $\vartheta$ , gebildet. Liegen die  $2n + 1$  Koeffizienten aus Gl.(11-9) aus der Optimierung fest, kann  $\zeta(z)$  mit der Transformation

$$s = \sigma_0 \frac{1 - z}{1 + z} \quad (11-20)$$

durch einfache algebraische Operationen in

$$\zeta(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}{1 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n} \quad (11-21)$$

überführt werden.

Als Vergleich zu den allgemeinen Zweipolfunktionen sollen auch Zweipolfunktionen modaler Systeme nach Gl.(7-7) oder Gl.(7-26), allgemein

$$\zeta(s) = \sum_{l=1}^{n_m} \frac{s}{m_l s^2 + c_l s + k_l} \quad (11-22)$$

mit

$$m_l = \alpha c_l + \beta k_l \quad (11-23a)$$

oder

$$c_l = \alpha m_l + \beta k_l \quad (11-23b)$$

oder

$$k_l = \alpha m_l + \beta c_l \quad (11-23c)$$

( $l = 1, \dots, n_m$ ;  $\alpha, \beta \geq 0$ ), angesetzt werden. Hier wird von der Möglichkeit der Rücktransformation

$$\omega_j = \sigma_0 \cdot \tan\left(\frac{\vartheta_j}{2}\right) \quad (11-24)$$

Gebrauch gemacht. Eine Stützstelle  $\vartheta_j$  wird mit Gl.(11-24) umgerechnet in  $s = i\omega_j$ . Dieser Wert wird zur Berechnung von  $\zeta(\vartheta_j)$  bzw.  $\zeta(i\omega_j)$  eingesetzt. Da alle Koeffizienten in Gl.(11-22) einschließlich  $\alpha$  und  $\beta$  als Quadrate der Optimierungsparameter definiert werden, sind bei modalen Ansätzen keine Restriktionen und damit keine Straffunktionen notwendig.

Als Beispiel wurde zunächst eine allgemeine Zweipolfunktion nach Gl.(11-19) mit  $n = 4$ , d.h. mit 9 Optimierungsparametern, angesetzt. Die Koeffizienten von  $\zeta(s)$  nach Gl.(11-21) sind in der Tabelle 11-1 zu finden. Im

Vergleich dazu wurde ein modaler Dämpfungsansatz nach Gl.(11-22) und Gl.(11-23b) mit  $n_m = 3$ , d.h. 8 Optimierungsparametern, gewählt. Die Koeffizienten aus Gl.(11-22) findet man in Tab. 11-2. Zur Veranschaulichung der Optimierungsergebnisse dienen die Abbildungen 11-3 bis 11-6, wobei jeweils unter a die Ergebnisse aus dem allgemeinen Ansatz und unter b die aus dem modalen Dämpfungsansatz aufgetragen sind.

Es wurden auch noch allgemeine Zweipolfunktionen höheren Grades und modale Ansätze (auch mit modalen Massen und modalen Steifigkeiten) herangezogen. Der Vergleich der Werte der Zielfunktion  $\Delta'$  geht aus Tab. 11-3 hervor. Modale Massen bzw. modale Steifigkeiten sind als Ansatzfunktionen für bestimmte Vorschriften ungeeignet. Man möchte z.B. die Vorschrift 1 (Tiefpaß) durch den modalen Massenansatz

$$m_l = \beta \cdot k_l \quad (11-25)$$

( $l = 1, \dots, n_m$ ) erreichen. Um  $\zeta(0) = 1$  zu erfüllen, muß mindestens eine Feder  $k_L$  mit  $L \in [1, \dots, n_m]$  aus Gl.(11-22) verschwinden. Nach Gl.(11-25) verschwindet auch  $m_L$ , und es folgt

$$\zeta(0) = \frac{1}{c_L} \quad (11-26)$$

Nun gilt aber auch mit  $m_L = k_L = 0$  und einer endlichen Dämpferkonstante  $c_L$

$$\zeta(\infty) = \frac{1}{c_L} \neq 0 \quad (11-27)$$

Mit dem modalen Massenansatz Gl.(11-25) ist also Vorschrift 1 nicht zu verwirklichen.

Zu den allgemeinen Zweipolfunktionen aus Tab. 11-1 wurden zu jeder Vorschrift Realisierungen mit Hilfe eines FORTRAN-Realisierungsprogramms bestimmt. Die Zweipolfunktionen wurden als Impedanzen interpretiert. Es zeigte sich, daß bis auf Vorschrift 3 der Einsatz von mechanischen Bauelementen nach Abb. 8-10 zur BRUNE-Synthese erforderlich war. Vorschrift 3 kann ohne Hebel als Schwingerkette realisiert werden. Zu jeder Zweipolfunktion gehört eine Lösungsvielfalt, aus der für jede Vorschrift jeweils eine Realisierung ausge-

Koeffizienten	Vorschrift 1	Vorschrift 2	Vorschrift 3	Vorschrift 4
$a_0$	1,0000	0,0	0,0	1,0000
$a_1$	2,6498	1,6319	0,3575	0,1169
$a_2$	1,1113	1,2573	0,2186	0,8345
$a_3$	0,9250	2,9559	0,1192	0,0390
$a_4$	0,0	0,7294	0,0	0,1111
$b_1$	3,6541	4,4878	0,6117	0,6293
$b_2$	3,2595	3,8679	0,8962	1,1272
$b_3$	3,3357	3,7807	0,2039	0,2098
$b_4$	0,0227	0,7294	0,1111	0,1111

Tab. 11-1 Koeffizienten einer allgemeinen Zweipolfunktion  $\zeta(s)$  mit  $n = 4$

Koeffizienten	Vorschrift 1	Vorschrift 2	Vorschrift 3	Vorschrift 4
$m_1$	6,9110	0,0	2,6934	2,0798
$k_1$	0,9415	2,9173	15,6855	0,0
$m_2$	6,2908	0,8794	1,9434	2,9214
$k_2$	2,7818	7,3575	3,5820	1,0551
$m_3$	2,7197	2,6051	2,4619	0,0
$k_3$	0,0	6,7022	8,6455	2,7187
$\alpha$	0,3569	0,0	0,6191	0,4562
$\beta$	0,0	0,3326	0,0041	0,3349

Tab. 11-2 Koeffizienten für einen modalen Dämpfungsansatz mit  $n_m = 3$

Ansatzfunktion	Vorschrift 1	Vorschrift 2	Vorschrift 3	Vorschrift 4
allgemeine Zweipolfunktion	0,66	0,63	1,26	0,72
modale Dämpfung $c = \alpha m + \beta k$	1,35	1,36	1,39	3,01
modale Massen $m = \alpha c$	1,35	X	1,39	X
modale Massen $m = \beta k$	X	X	2,30	X
modale Steifigk. $k = \alpha m + \beta c$	X	1,35	1,39	X

Tab. 11-3 Vergleich der Zielfunktionen bei verschiedenen Ansätzen

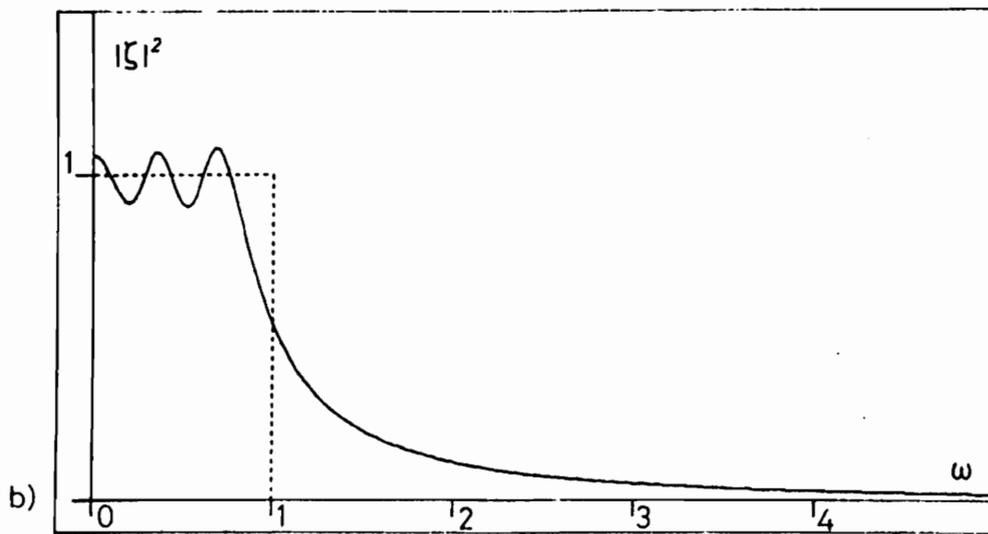
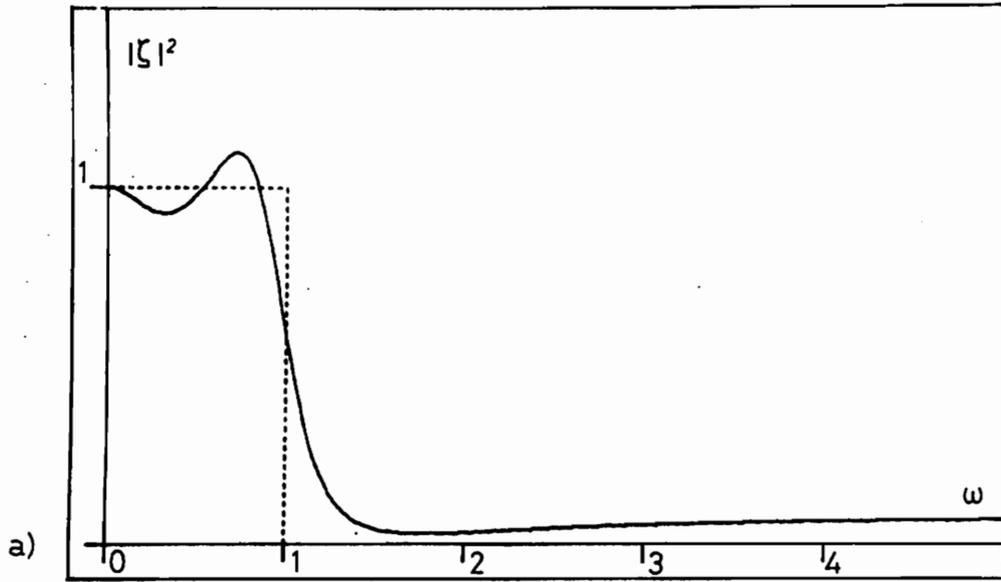


Abb. 11-3 Annäherung der Betragsvorschrift 1 durch  $\zeta(s)$

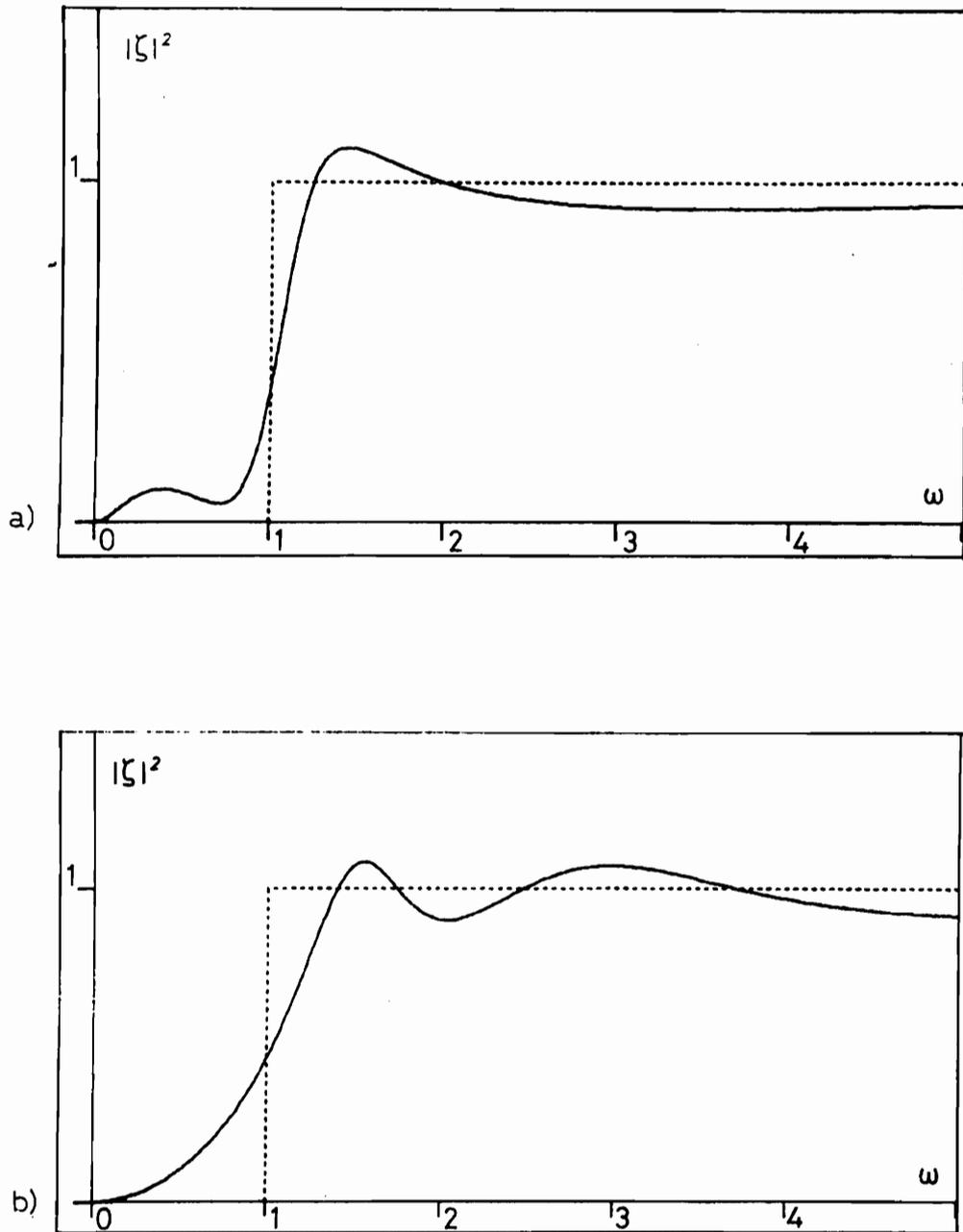


Abb. 11-4 Annäherung der Betragsvorschrift 2 durch  $\zeta(s)$

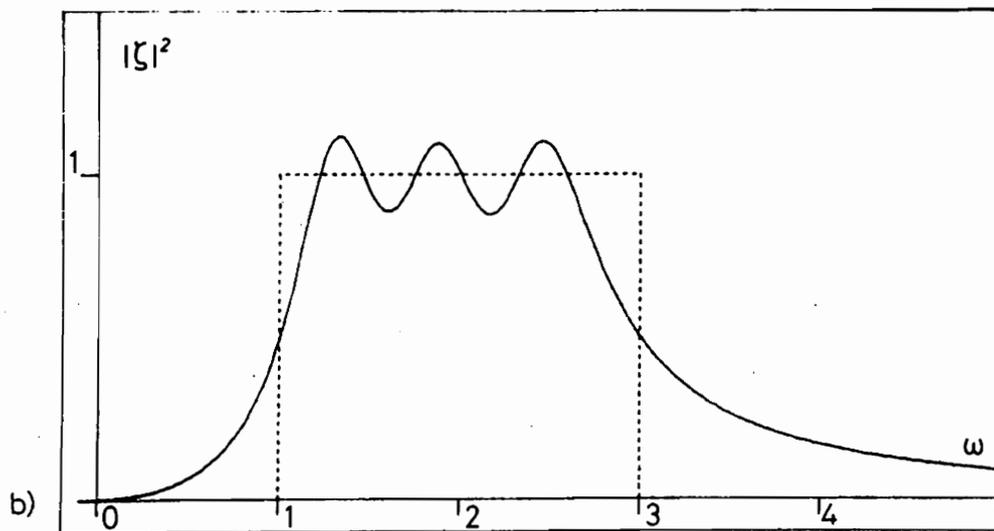
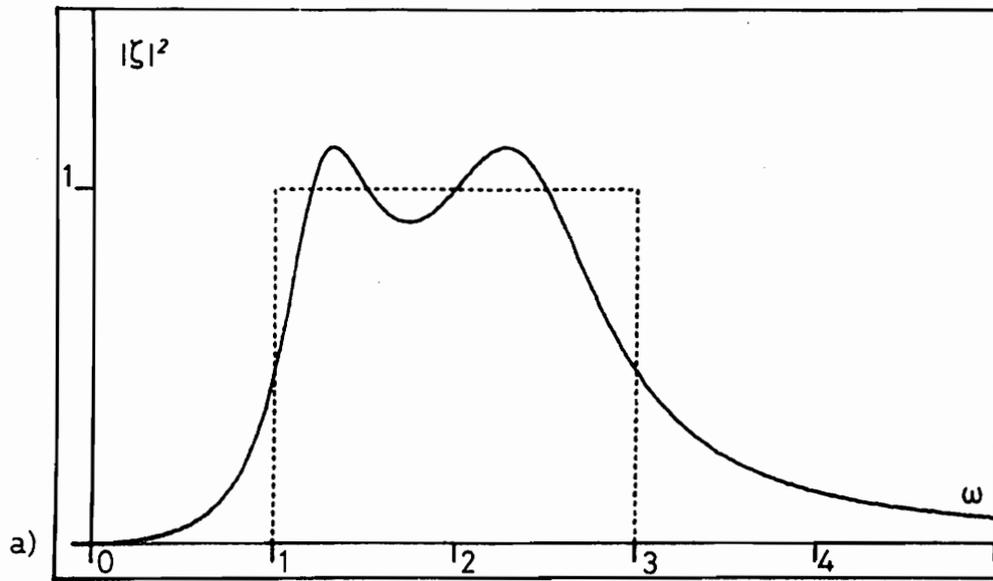


Abb. 11-5 Annäherung der Betragsvorschrift 3 durch  $\zeta(s)$

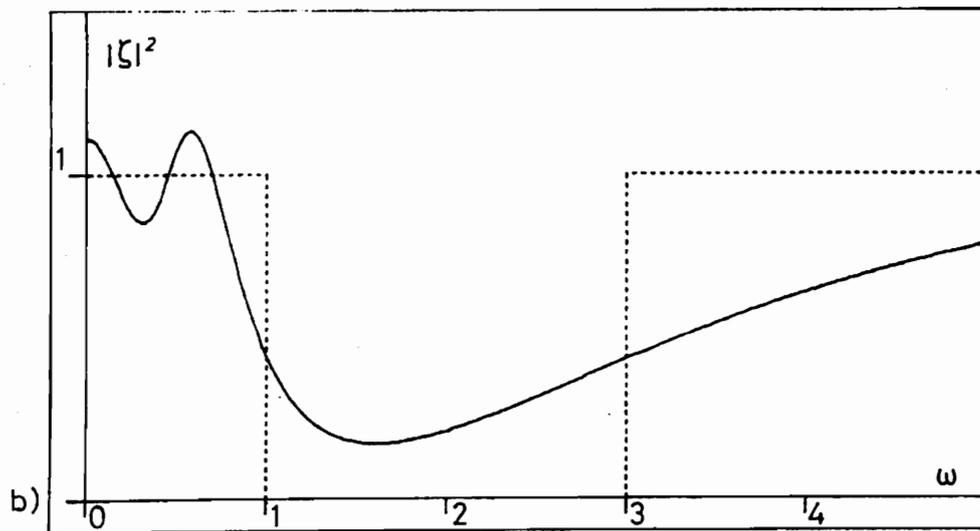
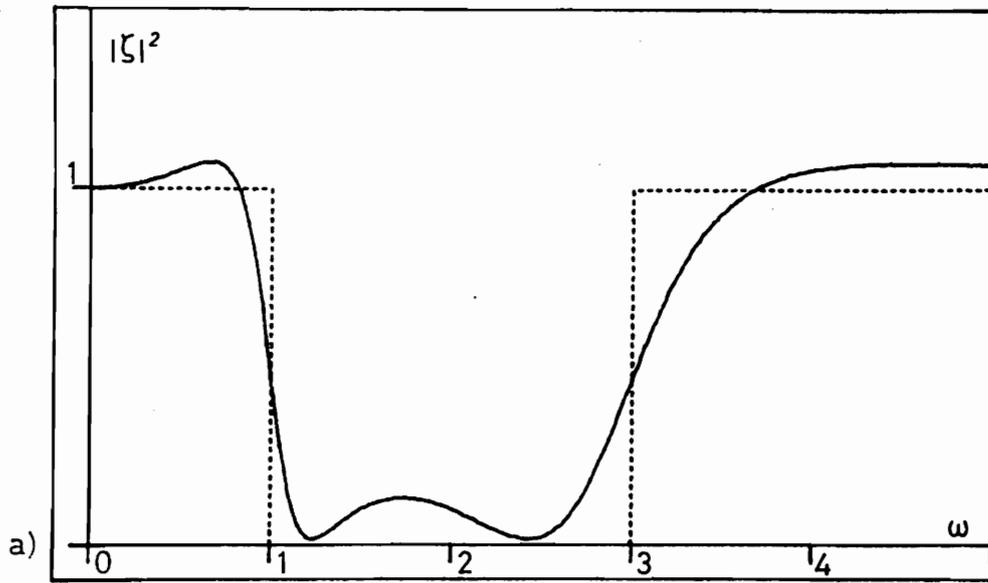


Abb. 11-6 Annäherung der Betragsvorschrift 4 durch  $\zeta(s)$

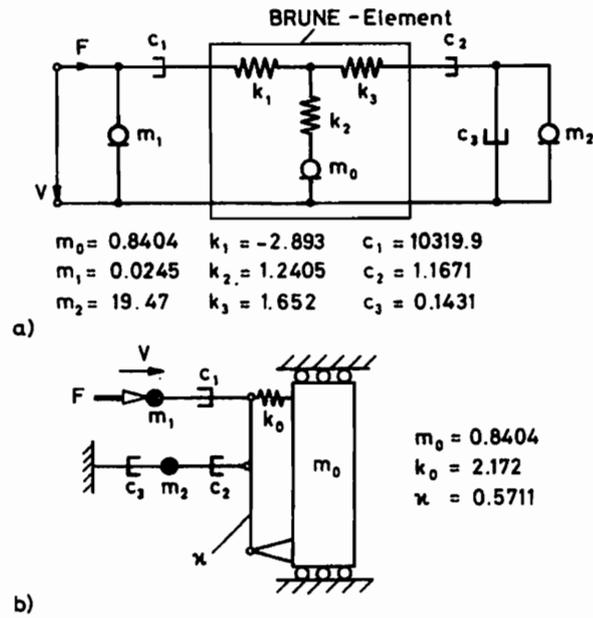


Abb. 11-7 Realisierung von  $Z(s)$  für Vorschrift 1  
 a) Netzwerk b) mechanisches System

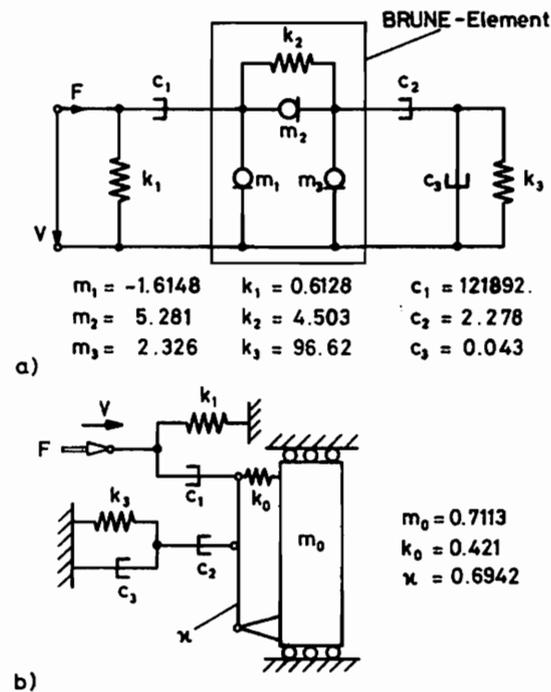


Abb. 11-8 Realisierung von  $Z(s)$  für Vorschrift 2  
 a) Netzwerk b) mechanisches System

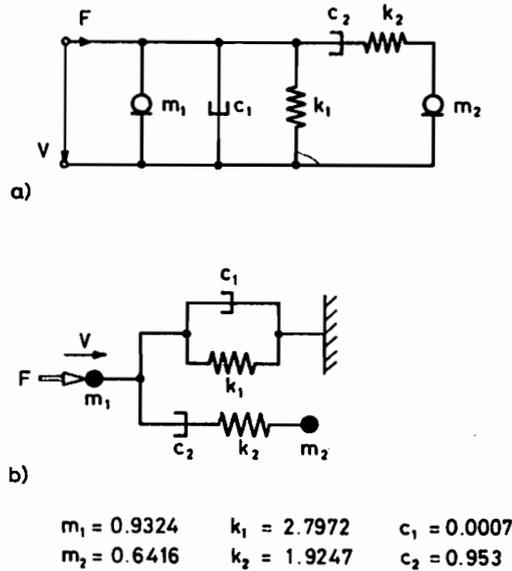


Abb. 11-9 Realisierung von  $Z(s)$  für Vorschrift 3  
a) Netzwerk b) mechanisches System

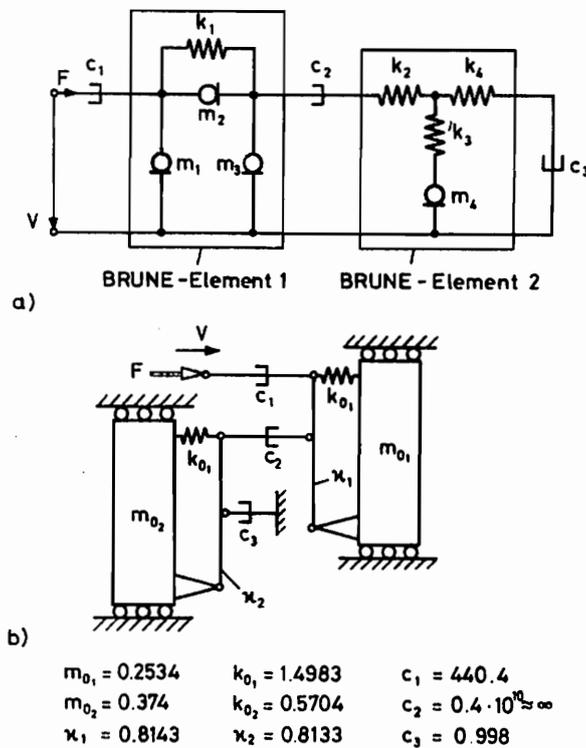


Abb. 11-10 Realisierung von  $Z(s)$  für Vorschrift 4  
a) Netzwerk b) mechanisches System

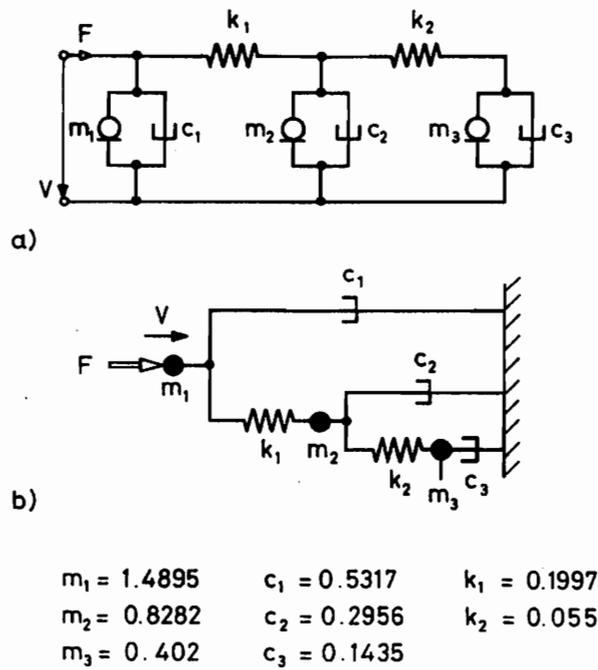


Abb. 11-11 Realisierung der modalen Impedanz  $Z(s)$  für Vorschrift 1 in der 1. Cauerform a) Netzwerk b) mechanisches System

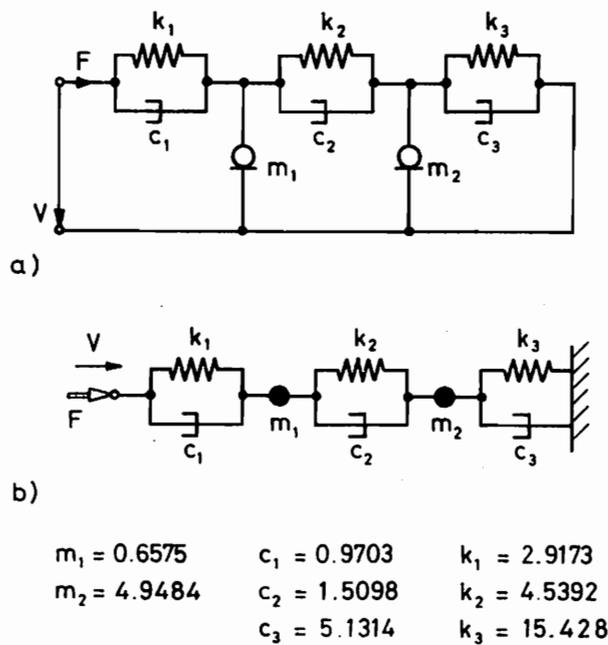
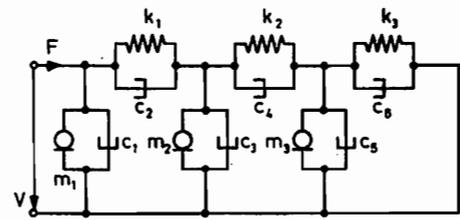
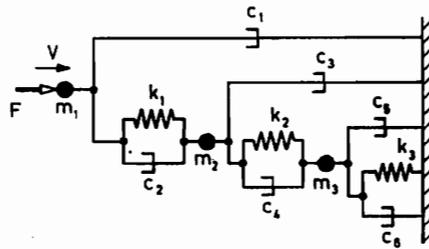


Abb. 11-12 Realisierung der modalen Impedanz  $Z(s)$  für Vorschrift 2 in der 1. Cauerform a) Netzwerk b) mechanisches System



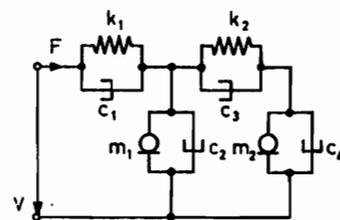
a)



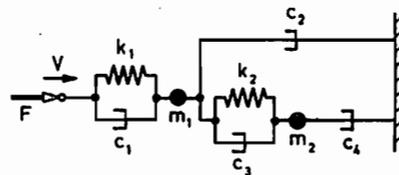
b)

$m_1 = 0.774$	$m_2 = 3.61$	$m_3 = 34.48$
$c_1 = 0.4792$	$c_2 = 0.011$	$c_3 = 2.2351$
$c_4 = 0.05$	$c_5 = 21.349$	$c_6 = 0.4433$
$k_1 = 2.718$	$k_2 = 12.284$	$k_3 = 108.8$

Abb. 11-13 Realisierung der modalen Impedanz  $Z(s)$  für Vorschrift 3 in der 1. Cauerform a) Netzwerk b) mechanisches System



a)



b)

$m_1 = 1.2149$	$m_2 = 0.8648$
$k_1 = 2.718$	$k_2 = 0.1825$
$c_1 = 0.9105$	$c_2 = 0.5542$
$c_3 = 0.0611$	$c_4 = 0.3945$

Abb. 11-14 Realisierung der modalen Impedanz  $Z(s)$  für Vorschrift 4 in der 1. Cauerform a) Netzwerk b) mechanisches System

wählt wurde. Die Netzwerke und mechanischen Systeme zeigen die Abbildungen 11-7 und 11-10. Hier findet sich bestätigt, daß mit der Wahl  $n = 4$  für die Ansatzfunktion Gl.(11-19) auch vier Energiespeicher erforderlich sind.

Die modal gedämpften Systeme aus Tab. 11-2 wurden in der 1. Cauerform realisiert. Auch hier wurden die Zweipolfunktionen als Impedanzen aufgefaßt. Die Realisierungen als Netzwerke und mechanische Systeme zeigen die Abbildungen 11-11 bis 11-14. Hier ergab sich der Einsatz von fünf Energiespeichern.

Der Vergleich zwischen den Ansätzen mit allgemeinen Zweipolfunktionen und Zweipolfunktionen modal gedämpfter Systeme zeigt, daß selbst unter Verwendung eines weiteren Energiespeichers die modal gedämpften Systeme wesentlich schlechtere Werte für die Zielfunktion  $\Delta'$  aus Gl.(11-18) liefern. Hier zeigt sich der Vorteil der Synthesemethode. Nach Wahl der Menge von Energiespeichern, d.h. Wahl des Grades  $n$  in Gl.(11-19), wird die für eine bestimmte Zielfunktion optimale mechanische Struktur mit den optimalen Bauelementwerten ermittelt. Zweipolfunktionen aus modalen Systemen schränken, da sie Unterklasse der allgemeinen Zweipolfunktionen sind, die Optimierbarkeit ein.

### 11.3 Ein Beispiel für stationäre Schwingungen und direkte Optimierung

Betrachtet wird eine Masse  $m$ , die mit einer Feder  $k$  und einem Dämpfer  $m$  auf einem schwingenden Fundament abgestützt ist (siehe Abb. 11-15).

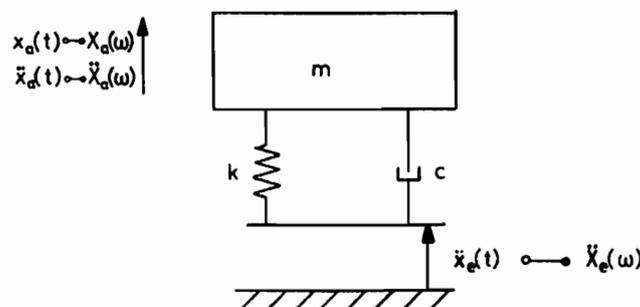


Abb. 11-15 Einfaches Beispiel einer Fundamentalschwingung

Bei dem System aus Abb. 11-15 handelt es sich z.B. um das einfache Ersatzsystem eines Maschinenbauteils. Auf der Masse  $m$  befinde sich ein hochempfindliches Meßgerät, das durch die Beschleunigungen  $\ddot{x}_a(t)$  in seiner Einsatzfähigkeit gestört wird. Von der stationären Beschleunigungserregung  $\ddot{x}_e(t)$  sei das Spektrum

$$S_e(\omega) = |\ddot{X}_e(\omega)|^2 \quad (11-28)$$

bekannt. Optimal wäre, wenn die Masse  $m$  in Ruhe bliebe. Die Vorschrift für das Ausgangsspektrum

$$S_a(\omega) = |\ddot{X}_a(\omega)|^2 \quad (11-29)$$

verschwindet in diesem Fall. Da ein verschwindendes Spektrum  $S_a(\omega)$  in der Realität unerreichbar ist, wird die Zielfunktion

$$\Omega = \int_0^{\infty} S_a(\omega) d\omega \quad (11-30)$$

gebildet, die mit der Varianz bei Zufallsschwingungen (siehe GOSSMANN/KRINGS/WALLER [11], HEINRICH/HENNIG [16]) in Beziehung steht. Nimmt man z.B. GAUSS-Verteilung an, lassen sich Aussagen über die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Beschleunigung innerhalb vorgegebener Grenzen treffen. Je geringer die Größe  $\Omega$  in Gl.(11-30) wird, desto geringer wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Beschleunigung innerhalb vorgegebener Grenzen bleibt. Daher ist es sinnvoll,  $\Omega$  als Optimierungsfunktion heranzuziehen.

Die Bauteilgrößen  $m$ ,  $c$  und  $k$  mögen aus konstruktiven Gründen festliegen, z.B.

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$c = 0,2 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

$$k = 4 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

Die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems befindet sich bei

$$\omega_0 = 2 \frac{1}{s}$$

Zur Verbesserung der Größe  $\Omega$  wird ein Tilgersystem mit der Admittanz  $Y_T(s)$  angekoppelt (siehe Abb. 11-16).

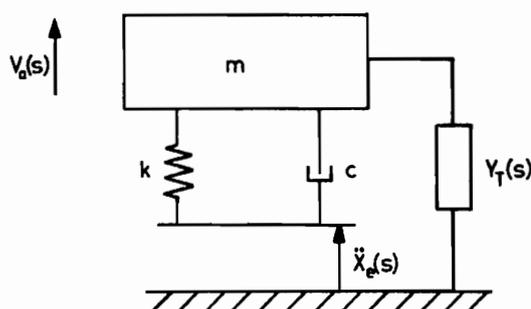


Abb. 11-16 Anbringung eines Tilgers am System Abb. 11-15

Nun erhält man mit der Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{V_a(s)}{V_e(s)} = \frac{k + cs}{k + cs + ms^2 + s Y_T(s)} \quad (11-31)$$

das Spektrum

$$S_a(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot S_e(\omega) \quad (11-32)$$

wobei  $S_a(\omega)$  und  $S_e(\omega)$  den Definitionen Gln. (11-28) und (11-29) entsprechen. Als Erregungsspektrum  $S_e(\omega)$  werden drei Verläufe betrachtet (siehe Abbildungen 11-17a bis c):

1. Schmalbandige Erregung

$$S_e(\omega) = \begin{cases} 2,5 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s^4} & \text{für } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \\ 2,5 \cdot 10^{-8} \frac{m^2}{s^4} & \text{für } \omega < \omega_1 \text{ und} \\ & \omega_2 < \omega < \omega_{max} \end{cases} \quad (11-33)$$

mit  $\omega_1 = 1 \frac{1}{s}$ ,  $\omega_2 = 3 \frac{1}{s}$  und  $\omega_{max} = 10 \frac{1}{s}$ . Mit der Grundstörung in den Bereichen  $\omega < \omega_1$  und  $\omega_2 < \omega < \omega_{max}$  sollen Eigenfrequenzen auf der imaginären s-Achse in diesen Intervallen vermieden werden. Die Störung liegt im Bereich der Eigenfrequenz  $\omega_0 = 2 \frac{1}{s}$  des ungedämpften Systems aus Abb. 11-15.

## 2. Exponentiell abklingendes Spektrum

$$S_e(\omega) = d_0 \cdot e^{-d_0 \omega^2} \quad (11-34)$$

$$d_0 = 1 \frac{m^2}{s^4} ; \quad d_1 = 0.00713 s^2$$

Das Integral

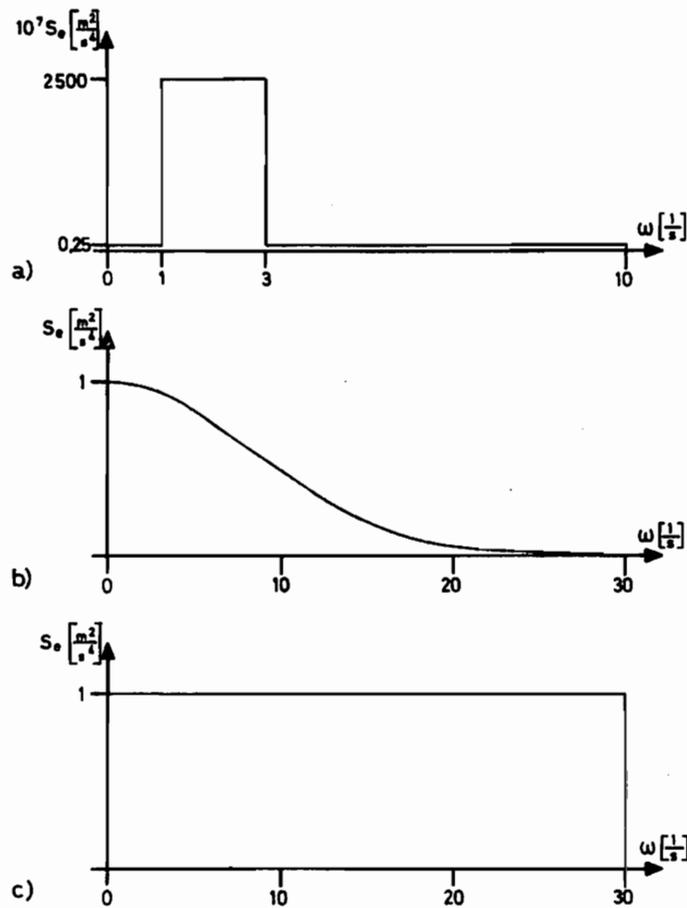
$$\Omega_e = \int_0^{\infty} S_e(\omega) d\omega \quad (11-35)$$

zur Berechnung der Erregervarianz konvergiert hier (siehe BRONSTEIN [1]). Die Integration des Ausgangsspektrum nach Gl.(11-30) kann bei  $\omega = 30 \frac{1}{s}$  mit vernachlässigbarem Abbruchfehler abgebrochen werden.

## 3. Tiefbandiges Spektrum

$$S_e(\omega) = \begin{cases} 1 \frac{m^2}{s^4} & \text{für } 0 \leq \omega \leq 30 \frac{1}{s} \\ 0 & \text{für } \omega > 30 \frac{1}{s} \end{cases} \quad (11-36)$$

Die Bandbreite ist im Vergleich zur Eigenfrequenz  $\omega_0 = 2 \frac{1}{s}$  relativ groß gewählt worden.



**Abb. 11-17** Darstellung der Erregerspektren  $S_e(\omega)$   
a) Schmalbandiges Spektrum  
b) Exponentiell abklingendes Spektrum  
c) Tiefbandiges Spektrum

Da das Bauteil in Abb. 11-16 auf einem schwingenden Fundament steht, kann die Verknüpfung des Tilgers mit dem Inertialsystem nur über einzelne Massen erfolgen. Daraus ergeben sich Bedingungen für die Ansatzform der Tilgeradmittanz  $Y_T(s)$ . Für  $s = 0$  verschwinden die Admittanzen (Leitwerte) aller Massen. Da allein die Massen im mechanischen Netzwerk die Verbindung zum Inertialsystem herstellen sollen, wird der Kraftfluß im Netzwerk für  $s = 0$  gesperrt. Die Tilgeradmittanz  $Y_T(s)$  muß also für  $s = 0$  notwendig verschwinden. Wie man anhand einfacher Beispiele zeigen kann, ist die Bedingung jedoch nicht hinreichend zur Vermeidung nicht geerdeter Massen. Daher müssen noch weitere Überlegungen zu  $Y_T(s)$  erfolgen. Aus den Gln.(11-31) und (11-32) geht hervor, daß der Tilger seine optimale Wirkung wohl dann erreicht, wenn  $Y_T(i\omega)$  groß wird, wenn das Spektrum  $S_e(\omega)$  große Werte annimmt. Im ersten Erregungsfall wird demnach ein einfacher Tilger, der

seinen Maximalwert im schmalen Störbereich erreicht, ausreichende Wirkung erzielen. Es wird die Ansatzfunktion

$$Y_T(s) = \frac{s (a_0 + a_1 s)}{1 + b_1 s + b_2 s^2} \quad (11-37)$$

gewählt, die aufgrund des zweiten Grades von Nenner- und Zählerpolynom zwei Energiespeicher erwarten läßt. Nunn könnte man auch das Tilgersystem nach Abb. 11-18 mit der Admittanz

$$Y_T(s) = \frac{m s (k + c s)}{k + c s + m s^2} \quad (11-38)$$

wählen.

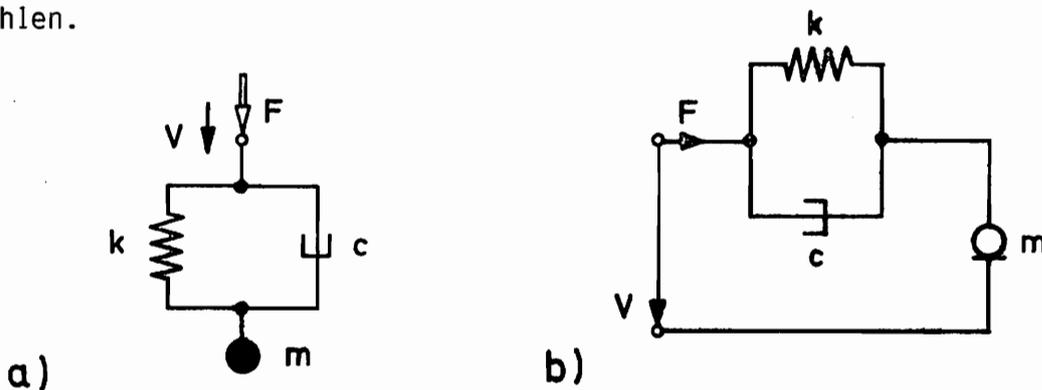


Abb. 11-18 Vorgewählte Tilgerstruktur  
a) mechanisches System; b) Netzwerk

Besitzt Gl.(11-37) vier freie Parameter, treten in Gl.(11-38) nur drei auf. Die Gl.(11-38) stellt den Spezialfall von Gl.(11-37) dar, daß ein Koeffizient von den anderen abhängig ist, beispielsweise

$$a_1 = a_0 b_1 \quad (11-39)$$

Die Wahl der Ansatzfunktion Gl.(11-37) mit den Methoden der Netzwerksynthese ist somit ein allgemeines Vorgehen.

Realisiert man Gl.(11-37), erfolgt zunächst der Abbau

$$Z_I(s) = \frac{1}{Y_T(s)} - \frac{1}{a_0 s} \quad (11-40)$$

Aus Gl.(11-40) erhält man

$$Z_I(s) = \frac{(a_0 b_1 - a_1) + a_0 b_2 s}{a_0 (a_0 + a_1 s)} \quad (11-41)$$

Die Impedanz  $Z_I(s)$  aus Gl.(11-41) ist mit Gl.(8-204) vergleichbar. Nach den Betrachtungen aus Kapitel 8.5 ist Gl.(8-204) bzw. Gl.(11-41) entweder durch Masse-Dämpfer-Systeme (Fall a) oder Feder-Dämpfer-Systeme (Fall b) realisierbar. Da in Gl.(11-40) bereits eine Masse abgebaut wird, muß zur Vermeidung nicht geerdeter Massen der Fall b erzwungen werden. Die Restriktion für Fall b lautet hier

$$a_0^2 b_2 + a_1^2 - a_0 a_1 b_2 \cong 0 \quad (11-42)$$

Das Gleichheitszeichen wird zugelassen, da dies auf einen einfachen Sonderfall führt. Wird die Bedingung aus Gl.(11-42) nicht erfüllt, wird während der Optimierung ein Straffehler berechnet. Bestrafung erfolgt wieder entsprechend Gl.(11-8) bei Nichterfüllung des positiven Realteils von  $Y_T(s)$  für  $s = i\omega$ .

Für die Erregungen 2 und 3 wird der Ansatz nach Gl.(11-37) als nicht ausreichend angenommen. Die Ansatzfunktion lautet hier

$$Y_T(s) = \frac{s(a_0' + a_1' s)}{1 + b_1' s + b_2' s^2} + \frac{s(a_0'' + a_1'' s)}{1 + b_1'' s + b_2'' s^2} \quad (11-43)$$

und stellt eine Parallelschaltung zweier Admittanzen nach Gl.(11-37) dar. Liegen die Maxima der einzelnen Partialbrüche von  $Y_T(i\omega)$  aus Gl.(11-43) bei zwei verschiedenen Frequenzen, nimmt  $Y_T(i\omega)$  im Hauptstörbereich große Werte an. Aufgrund der Gln. (11-31) und (11-32) wird das Ausgangsspektrum klein. Die Realisierung der einzelnen Partialbrüche aus Gl.(11-43) erfolgt wie für Gl.(11-37). Die Koeffizienten müssen jeweils Restriktionen entsprechend Gl.(11-42) erfüllen. Die Überprüfung der Positivität des Realteils muß für jeden einzelnen Partialbruch aus Gl.(11-43) erfolgen. Bei Nichterfüllung wird ein Straffehler nach Gl.(11-8) berechnet.

Die Rechenergebnisse zu diesen Beispielen gehen aus Tabelle 11-4 hervor. Es werden für jede Erregung die Werte der Zielfunktion  $\Omega$  nach Gl.(11-30) mit und ohne Tilger angegeben. Die Verbesserung von  $\Omega$  durch Einsatz des Tilgers umfaßt vier Zehnerstellen. Auch die Maximalwerte des Ausgangsspektrums  $S_a(\omega)$  verringern sich in diesem Maße. Die Realisierung von  $Y_T$  nach Gl. (11-37) bzw. jedes Partialbruches in Gl.(11-43) kann nun entweder nach Abb. 11-19a oder Abb. 11-19b erfolgen. Die Bauelementwerte zu den Optimierungsergebnissen aus Tabelle 11-4 sind in Tabelle 11-5 aufgeführt.

Erregung	$\Omega$ (ohne Tilger)	$\Omega$ (mit Tilger)
1	$7,537 \cdot 10^{-6}$	$0,3436 \cdot 10^{-6}$
2	33,03	0,1486
3	22,10	0,1895

Tab. 11-4 Vergleich der Zielfunktion  $\Omega$  mit und ohne Tilger

1. Partialbruch	Erregung 1		Erregung 2		Erregung 3	
Realisierung	a	b	a	b	a	b
$m'$	108,2	108,2	82,5	82,5	208,3	208,3
$c_1'$	133,0	90,7	245,3	1,16	93,2	19,9
$c_2'$	284,9	42,3	1,16	244,1	25,3	73,3
$k'$	474,0	48,0	1,0	0,99	30,5	18,9
2. Partialbruch	Erregung 1		Erregung 2		Erregung 3	
Realisierung	a	b	a	b	a	b
$m''$	--	--	395,0	395,0	202,5	202,5
$c_1''$	--	--	97,7	18,1	262440	3,0
$c_2''$	--	--	22,2	79,6	3,0	262437
$k''$	--	--	48,5	32,2	3,0	3,0

Tab. 11-5 Bauelementwerte zu den Realisierungen nach Abb. 11-19a und b

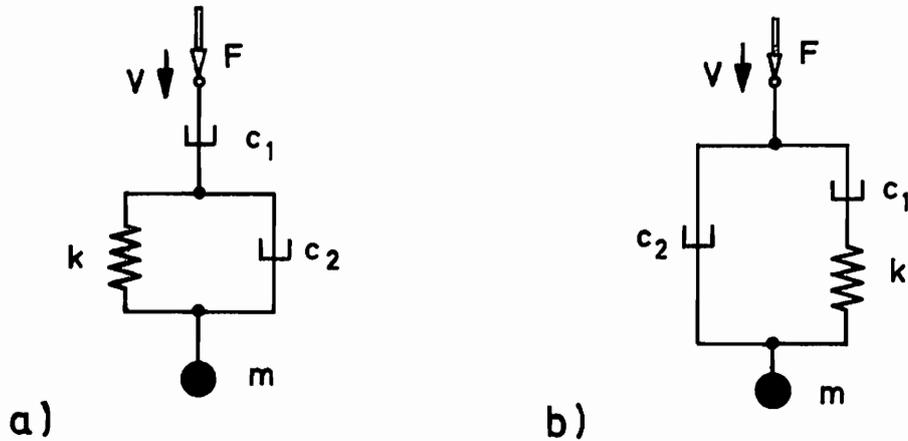


Abb. 11-19 Realisierungsmöglichkeiten a und b zu Gl.(11-38)

#### 11.4 Anwendung der Synthesemethode zur Schwingungsisolation

Durch die ungleichförmige An- und Durchströmung des Hauptrotors im Translationsflug treten bei einem Hubschrauber periodisch veränderliche Luftlasten auf. Diese Störreregungen sind abhängig von der Rotorblattzahl und der Rotordrehzahl. An der Hubschrauberzelle führen beispielsweise diese Erregungen zu einem Beschleunigungsspektrum nach Abb. 11-20. Die blattzahlharmonischen Frequenzen liegen in einem Bereich, in dem sich Vibrationen negativ auf das physiologische Wohlbefinden des Menschen auswirken. Daneben spielt die Empfindlichkeit von Geräten in der Zelle eine Rolle.

Ein einfaches Ersatzmodell des Hubschraubers, das auch für praktische Versuche verwendet wurde, zeigt Abb. 11-21. Hier wurde das Verbindungselement, der Schwingungsisolator, noch als freies Bauteil aufgefaßt. In Abb. 11-22 wird das Verbindungselement herausgeschnitten.

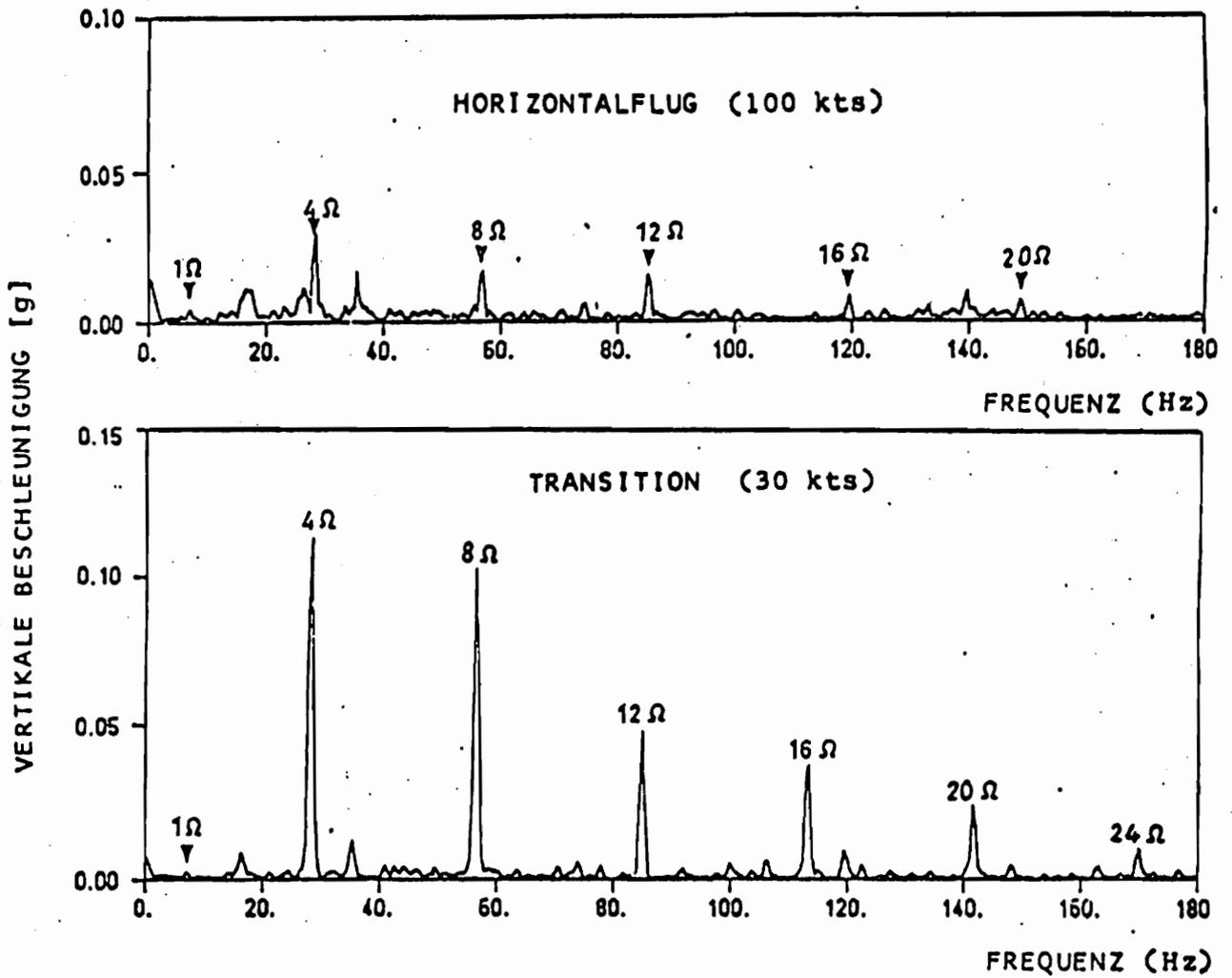


Abb. 11-20 Vertikale Vibrationen in einer Hubschrauberzelle

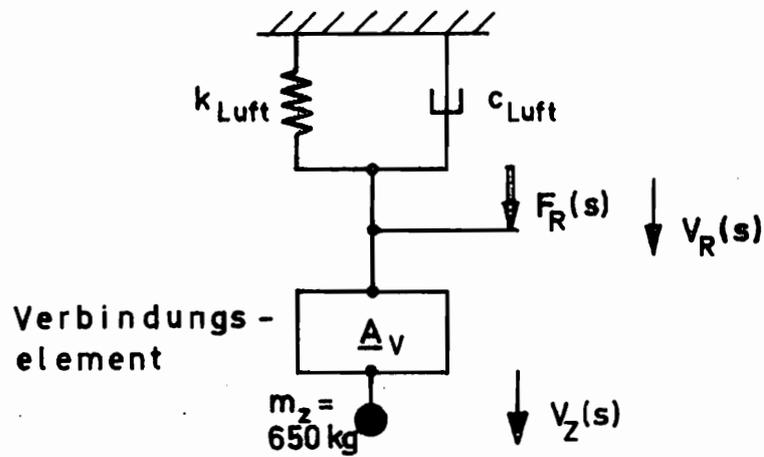


Abb. 11-21 Ersatzmodell für einen Hubschrauber

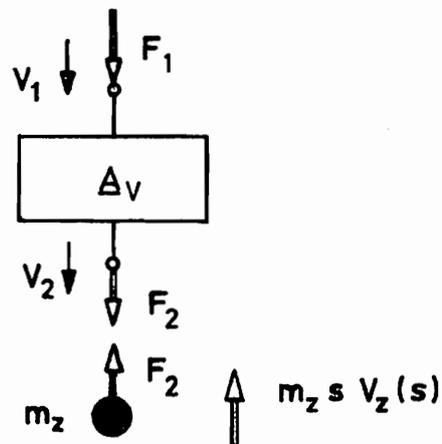


Abb. 11-22 Verbindungselement eines Hubschraubers

Aus Abb. 11-22 wird deutlich, daß das Verbindungsbauteil als ein Zweitor mit der Kettenmatrix  $\underline{A}_V$  betrachtet werden kann. Die Kettendarstellung lautet

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{V_{11}} & A_{V_{12}} \\ A_{V_{21}} & A_{V_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -F_2 \end{bmatrix} \quad (11-44)$$

mit

$$V_1 = V_R \quad (11-45)$$

$$V_2 = V_Z \quad (11-46)$$

Die Gleichgewichtsbetrachtung an der Masse  $m_z$  ergibt

$$F_2(s) = -m_z s V_Z(s) \quad (11-47)$$

Berücksichtigt man in Gl.(11-44) die Gleichungen (11-45) bis (11-47), erhält man in der ersten Zeile

$$V_R(s) = (A_{V_{11}} + s m_z A_{V_{12}}) V_Z(s) \quad (11-48)$$

Multipliziert man die rechte und linke Seite in Gl.(11-48) mit  $s$ , bekommt man eine Beziehung zwischen den Beschleunigungen am Rotor und an der Zelle.

Aus Gl.(11-48) läßt sich die Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{V_Z(s)}{V_R(s)} = \frac{s V_Z(s)}{s V_R(s)} = \frac{1}{A_{V_{11}} + s m_Z A_{V_{12}}} \quad (11-49)$$

definieren.

Die Beschreibung von Zweitoren erfolgt nach den Kapiteln 9 und 10 in der Impedanz- oder Admittanzform. Für das Verbindungselement wird eine Impedanzmatrix  $\underline{Z}(s)$  angesetzt, so daß man

$$\underline{A}_V = \begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{z_{12}} & \frac{\Delta Z}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{12}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{bmatrix} \quad (11-50)$$

mit

$$\Delta Z = z_{11} z_{22} - z_{12}^2 \quad (11-51)$$

erhält.

Da es sich um ein stationäres Schwingungsproblem handelt ( $s = i\omega$ ), erhält man aus Gl.(11-49) eine Beziehung

$$S_Z(\omega) = |H(\omega)|^2 S_R(\omega) \quad (11-52)$$

wobei das Beschleunigungsspektrum der Zelle

$$S_Z(\omega) = |i\omega V_Z(i\omega)|^2 \quad (11-53)$$

und das Erreger- Beschleunigungsspektrum

$$S_R(\omega) = |i\omega V_R(i\omega)|^2 \quad (11-54)$$

eingeführt wurden. Aus den physikalischen Eigenschaften des Rotors kann  $S_R(\omega)$  entsprechend Abb. 11-23 angenommen werden (vgl. Abb. 11-23). Die

Erregung am Rotor erfolgt durch die Kraftquelle "Motor", die als ideal angenommen werden kann.

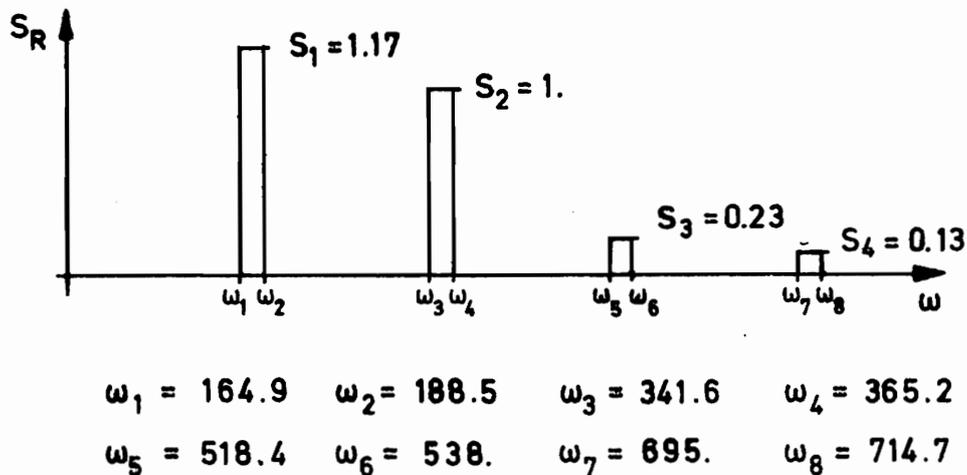


Abb. 11-23 Spektrum der Rotorerregung eines Hubschraubers

Wie in Kapitel 11.3 kann die Größe

$$\Omega = \int_0^{\omega_{\max}} S_Z(\omega) d\omega \rightarrow \min \quad (11-55)$$

als geeignete Optimierungsfunktion angesehen werden.

Es erfolgte eine Rechnung mit einem modalen Dämpfungsansatz nach Gl.(10-40) mit zwei Partialbrüchen. Da die Brüche bezüglich der Parameter redundant sind, wurde  $t_{11} = 1$  und  $t_{12} = 1$  festgelegt, so daß insgesamt 8 Optimierungsparameter zur Verfügung stehen. Die Optimierung lief in Richtung  $\alpha \rightarrow 0$  und  $\beta \rightarrow 0$ , was sich anhand der Gln. (11-49) bis (11-52) erklären läßt. Gilt  $\alpha = 0$  und  $\beta = 0$ , wird  $A_{V_{12}}(s)$  auf der imaginären Achse  $s = i\omega$  im ersten Störungsbereich von  $S_e(\omega)$  unendlich groß. Nach Gl.(11-49) verschwindet dort  $H(\omega)$  bzw. nach Gl.(11-52) auch  $S_e(\omega)$ .

Das Ergebnis der Optimierung hätte man durch genauere Betrachtungen des Schwingungsproblems von vorn herein erhalten können. Es sollte jedoch gezeigt werden, daß die Optimierung tatsächlich in die Richtung einer optimalen Struktur geht.

Für breiter verteilte Erregerspektren und kompliziertere zu isolierende Strukturen wird die analytische Betrachtungsweise ihre Grenzen haben. Hier

kann die vorgestellte Methode weiterhelfen, auch wenn die Realisierung von Zweitormatrizen durch mechanische Systeme noch zu erforschen ist. Man wähle z.B. für ein kompliziertes Schwingungsisolationsproblem wie beim einfachen Hubschraubermodell eine Impedanzmatrix  $Z(s)$  mit

$$z_{ik}(s) = \frac{a_{0ik} + a_{1ik}s + \dots + a_{mik}s^m}{1 + b_{1ik}s + \dots + b_{nik}s^n} \quad (11-56)$$

$$(i, k = 1, 2)$$

vor. Die Koeffizienten aus Gl.(11-56) mögen einer Optimierung, wie sie bereits beschrieben wurde, unterzogen werden. Im Optimierungsergebnis, also in einer optimalen Impedanzmatrix  $\underline{Z}$ , ist die optimale Struktur erhalten, auch wenn diese nicht explizit bekannt ist. Die Darstellungsform Gl.(11-56) ermöglicht dann einen Einblick zur praktischen Strukturauswahl. Hat man sich auf der anderen Seite für eine bestimmte Struktur entschieden, erhält man nun ein Beurteilungskriterium im Vergleich der Impedanzdarstellungen der optimalen mit der vorgewählten Struktur. Diese Vorgehensweise stellt ein indirektes Optimierungsverfahren dar. Sie bietet sich für aufwendige Systeme an, wo der Rechenaufwand zur Bauelementoptimierung bei einer vorgewählten Struktur groß ist. Ein numerisches Experimentieren mit verschiedenen Strukturen würde viel Rechenzeit in Anspruch nehmen. Der erste Optimierungsschritt erfolge dann mit einer Impedanzmatrix  $\underline{Z}(s)$  in der Darstellung nach Gl.(11-56). Die Anpassung der gefundenen Lösung mit Hilfe einer vorgewählten Struktur im zweiten Optimierungsschritt ist in relativ einfacher Weise programmierbar (ähnlich wie in Kapitel 11.2). Das Erproben verschiedener Strukturen kann mit wenig Rechenaufwand durchgeführt werden.

## 12. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine neue Synthesemethode als Entwurfstheorie für diskrete, passive mechanische Schwingungssysteme vorgestellt. Anhand von einfachen Beispielen werden Einsatzgebiete bei der Schwingungstilgung und -isolation aufgezeigt.

Notwendig zur Anwendung der Synthesemethode ist die Darstellung mechanischer Systeme als Netzwerke. Mechanische Netzwerke können als Spezialfälle allgemeiner Netzwerke aufgefaßt werden. Aus der Menge aller passiven Netzwerke lassen sich Zweipole (z.B. Tilger) und Zweitore (z.B. Schwingungsisolatoren) definieren. Zweipole, die aus Massen, Balken, Dämpfern, Federn und Hebeln bestehen, werden durch Impedanzen und Admittanzen charakterisiert. Die Impedanzen und Admittanzen gehören zur Funktionenklasse der rationalen, positiv-reellen Funktionen, sogenannte Zweipolfunktionen. Zweitore werden mittels Matrixgleichungen zweiter Ordnung beschrieben. Die Impedanz- und Admittanzmatrizen passiver Zweitore können der Klasse rationaler, positiv-reeller Matrizen zugeordnet werden.

Die freien Parameter von Zweipolfunktionen und positiv-reellen Matrizen bieten die Möglichkeit zur optimalen Annäherung an vorgeschriebene Übertragungsfunktionen. Die Methoden der Netzwerksynthese erlauben die Umsetzung der gefundenen Funktionen in mechanische Systeme. Durch diese Vorgehensweise erhält man für jedes spezielle Schwingungsproblem optimale Strukturen mit optimalen Bauelementwerten.

Bei der Realisierung von Zweipolfunktionen durch mechanische Systeme stößt man auf eine Sonderrolle der Masse. Einzelne Massen weisen die Besonderheit auf, mit dem Inertialsystem verknüpft, d.h. "geerdet" zu sein. Dagegen erhält man mit dem Syntheseverfahren auch Netzwerke mit nicht geerdeten Massen. Es existieren jedoch mechanische Ersatzsysteme (Balkensysteme) zur Realisierung solcher Netzwerke. Das für die Synthese wichtige Verfahren von O. BRUNE führt auf mechanische Netzwerke, die wegen negativer Massen und Federn nicht unmittelbar realisierbar sind. Es konnte jedoch ein mechanisches Bauelement gefunden werden, mit dem die Anwendung des Syntheseverfahrens von O. BRUNE für die Mechanik möglich wird.

Mit Hilfe der Betrachtungen über nicht geerdete Massen und die Netzwerke bei der BRUNE-Synthese wird der Beweis der mechanischen Realisierbarkeit aller Zweipolfunktionen erbracht. Der Realisierbarkeitssatz ist die Kernaussage dieser Arbeit und kann als Analogon zum Satz von BRUNE in der Elektrotechnik angesehen werden.

Die praktischen Anwendungsmöglichkeiten passiver mechanischer Systeme werden durch die methodische Vorgehensweise beim Entwurf verbessert und erweitert. Es bleibt zu hoffen, daß die vorgestellte neue Synthesemethode in die Mechanik Eingang findet wie dies bereits in der Elektrotechnik geschehen ist.

### Literaturverzeichnis

- [ 1 ] BRONSTEIN, I.N. / SEMENDJAJEW, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Hari Deutsch, Zürich / Frankfurt a.M. 1976
- [ 2 ] CARLIN, H.J. / GIORDANO, A.B.: Network Theory. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1964
- [ 3 ] CAUER, W.: Die Verwirklichung von Wechselstromwiderständen vorgeschriebener Frequenzabhängigkeit. Dissertation Berlin 1926
- [ 4 ] CAUER, W.: Theorie linearer Wechselstromschaltungen. Akademie-Verlag, Ost-Berlin 1960
- [ 5 ] CHEN, W.H.: Linear Network Design and Synthesis. Mc Graw-Hill, New York / San Francisco / Toronto / London 1964
- [ 6 ] CREMER, H. / EFFERTZ, F.H. / BREUER, K.H.: Über Realisierbarkeitsbedingungen für die Synthese zweipoliger elektrischer Netzwerke mit vorgegebener Frequenzabhängigkeit. (Math. Inst. d. RWTH Aachen), Westdeutscher Verlag, Köln / Opladen, Forschungsberichte des Landes NRW, Heft 12 (1963)
- [ 7 ] DOETSCH, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der z-Transformation. Oldenbourg, München / Wien 1967
- [ 8 ] DOETSCH, G.: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Birkhäuser, Basel / Stuttgart 1976
- [ 9 ] ENTENMANN, W.: Optimierungsverfahren. Hüthig, Heidelberg 1976
- [10] GANTMACHER, F.R.: Matrizenrechnung, Teil 1: Allgemeine Theorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Ost-Berlin 1970
- [11] GOSSMANN, E. / KRINGS, W. / WALLER, H.: Numerische Behandlung linearer Tragwerksschwingungen bei deterministischen und stochastischen Erregungen. Vulkan-Verlag Essen, Konstr. Ing. Bau, Heft 25 (1976)
- [12] GUILLEMIN, E.A.: Theory of Linear Physical Systems. Wiley, New York / London 1963
- [13] GUILLEMIN, E.A.: Mathematische Methoden des Ingenieurs. Oldenbourg, München / Wien 1966

- [14] GUILLEMIN, E.A.: Synthesis of Passive Networks. Krieger, Huntington / New York 1977
- [15] HANSEN, U.: Beiträge zur Approximation von elektrischen Zweipolen. Dissertation Erlangen 1980
- [16] HEINRICH, W. / HENNIG, K.: Zufallsschwingungen mechanischer Systeme. Akademie-Verlag, Ost-Berlin 1977
- [17] JORDAN-ENGELIN, G. / REUTTER, F.: Numerische Mathematik für Ingenieure. Bibliographisches Institut, Mannheim / Wien / Zürich 1973
- [18] KLOTTER, K.: Technische Schwingungslehre. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York 1981
- [19] KLOTTER, K.: Die Analogien zwischen elektrischen und mechanischen Schwingern. Ing.-Archiv XVIII. Band (1950), S. 291-301
- [20] LENK, A.: Elektronische Systeme, Band 1: Systeme mit konzentrierten Parametern. VEB Verlag Technik, Ost-Berlin 1971
- [21] MAGNUS, K.: Schwingungen. BG Teubner, Stuttgart 1969
- [22] MARKO, H.: Methoden der Systemtheorie. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York 1977
- [23] PERRON, O.: Lehre von den Kettenbrüchen, Band I, II. BG Teubner, Stuttgart 1954
- [24] REINSCHKE, K. / SCHWARZ, P.: Verfahren zur rechnergestützten Analyse linearer Netzwerke. Akademie-Verlag, Ost-Berlin 1976
- [25] RÜHS, F.: Funktionentheorie. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Ost-Berlin 1971
- [26] RUPPRECHT, W.: Netzwerksynthese. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York 1972
- [27] SAUER, R. / SZABO, I.: Mathematisches Hilfsmittel des Ingenieurs. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York 1967
- [28] SMIRNOW, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil III/ 1. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Ost-Berlin 1979

- [29] SMIRNOW, W.I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil III/2 . VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Ost-Berlin 1979
- [30] SPIEGEL, M. R.: Theory and Problems of Complex Variables. Mc Graw-Hill, New York / San Francisco / Toronto / Sydney 1964
- [31] SPIEGEL, M. R.: Theory and Problems of Laplace Transforms. Mc Graw-Hill, New York / San Francisco / Toronto / Sydney 1965
- [32] UNBEHAUEN, R.: Neuartige Verwirklichung von Zweipolfunktionen durch kanonische oder durch kopplungsfreie Schaltungen. Dissertation Stuttgart 1956
- [33] UNBEHAUEN, R.: Über die Lösung der Approximationsprobleme bei der Synthese elektrischer Zweipole. Habilitation Stuttgart 1962
- [34] UNBEHAUEN, R.: Elektrische Netzwerke. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York 1972
- [35] UNBEHAUEN, R.: Systemtheorie. Oldenbourg, München / Wien 1971
- [36] UNBEHAUEN, R.: Synthese elektrischer Netzwerke. Oldenbourg, München / Wien 1972
- [37] UNBEHAUEN, R. / MAYER, A.: Netzwerksynthese in Beispielen, Band I. Oldenbourg, München / Wien 1977
- [38] WALLER, H. / KRINGS, W.: Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik. Bibliographisches Institut, Mannheim / Wien / Zürich 1975
- [39] WUNSCH, G.: Theorie und Anwendung linearer Netzwerke, Teil I. Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig, Leipzig 1964
- [40] WUNSCH, G.: Elemente der Netzwerksynthese. VEB Verlag Technik, Ost-Berlin 1969
- [41] WUNSCH, G.: Systemanalyse, Band I: Lineare Systeme. Hüthig, Heidelberg 1969
- [42] WUNSCH, G.: Systemanalyse, Band 2: Statische Systemanalyse. Hüthig, Heidelberg 1970

- [43] ZURMÜHL, R.: Matrizen. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York 1964
- [44] ZURMÜHL, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York 1965

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK

- Nr. 1     Theodor Lehmann:  
          Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2     Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:  
          Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of  
          Finite Elastic-Plastic Deformations  
          Basic Concepts
- Nr. 3     Wolfgang Krings:  
          Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,  
          viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4     Burkhard Lücke:  
          Theoretische und experimentelle Untersuchung der  
          zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei  
          endlichen Verzerrungen
- Nr. 5     Knut Schwarze:  
          Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwan-  
          digen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittel-  
          linie
- Nr. 6     Hubert Sommer:  
          Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen  
          Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7     H. Stumpf/F.J. Biehl:  
          Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre  
          Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8     Albert Meyers:  
          Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnell-  
          laufenden Zentrifugenschalen

- Nr. 9 Berend Fischer:  
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung  
eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Ver-  
zerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:  
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:  
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer  
dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:  
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizi-  
tät auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer  
Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:  
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:  
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Opti-  
mierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:  
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodi-  
scher Beanspruchung bei Beachtung von Spannungs-  
restriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:  
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte  
des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von  
kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:  
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue  
Problems of Elastic Systems with Application to  
Eigenvibrations of Orthotropic Plates

- Nr. 18 Uwe Kolberg:  
Variational Principles and their Numerical  
Application to Geometrically Nonlinear v. Kármán  
Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:  
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung  
bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Woźniak:  
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic  
Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:  
Problems of Geometrically Non-Linear  
Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:  
Optimierung von Stäben unter stochastischer  
Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:  
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der  
Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:  
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen  
bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregun-  
gen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:  
Variational Formulation and Solution of Boundary-  
Value Problems in the Theory of Plasticity and  
Application to Plate Problems

- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:  
On Consistent Approximations in the Geometrically  
Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:  
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger  
Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und  
Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:  
An Alternative Approach to the Elastic-Visco-  
plastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:  
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter,  
dickwandiger Kreiszyylinder und Innendruck und  
Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:  
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim ein-  
seitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:  
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell  
Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:  
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und  
Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösun-  
gen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:  
Variationsprinzip der Thermoplastizität  
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

- Nr. 34 Helmut Stumpf:  
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling  
and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf:  
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre  
Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische  
Probleme unter Verwendung der finiten Elemente
- Nr. 36 Alfred Kraft:  
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im  
Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 36**