



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Bernd Kaempf

Ein Exremal-Variationsprinzip
für die instationäre Wärmeleitung
mit einer Anwendung auf
thermoelastische Probleme unter
Verwendung der finiten Elemente

Heft Nr. 35



Mitteilungen
aus dem
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Bernd Kaempf

**Ein Extremal-Variationsprinzip für
die instationäre Wärmeleitung
mit einer Anwendung
auf thermoelastische Probleme
unter Verwendung der finiten Elemente**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 35

März 1983

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Assistententätigkeit am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann danke ich für die großzügige Unterstützung und die hilfreichen Anregungen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Thermann danke ich für die wertvollen Hinweise und die Übernahme des zweiten Referates. Herrn Dr. P. Mazilu bin ich für die intensiven Diskussionen zu Dank verpflichtet. Mein Dank gilt auch meinen Kollegen für deren Hilfsbereitschaft und Freundlichkeit.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Klaus Thermann

Tag der Einreichung: 27.10.1982

Tag der mündlichen Prüfung: 08.03.1983

© 1983 Dr.-Ing. Bernd Kaempf
Joseph-Haydn-Str. 43, 4370 Marl

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das instationäre Temperaturfeld unter Einschluß einer bekannten Wärmequelle durch ein Extremal-Variationsprinzip im Funktionalraum beschrieben. Auf dieser Basis werden für den ein- und zweidimensionalen Körper FEM-Programme entwickelt. An einigen Beispielen werden Vergleiche mit bekannten Lösungen und experimentellen Ergebnissen durchgeführt. Die so bestimmte Temperaturverteilung wird in das Prinzip der virtuellen Arbeit eingesetzt. Hierdurch wird die Berechnung der entsprechenden Wärmespannungen möglich. Ein hierzu entwickeltes FEM-Programm wird an einfachen Beispielen getestet.

Summary

The present paper deals with the description of the unsteady temperature field including a known heat source by means of an extremal-variational principle in the function space. On this basis FEM-programs for the one- and two-dimensional body are developed. Some examples are compared with known solutions and experimental results. The so determined temperature profile is applied to the principle of the virtual work. Hereby the calculation of the corresponding thermal stresses is made possible. A FEM-program developed for this purpose is tested with single examples.

I N H A L T

		Seite
	Formelzeichen	4
1	Einführung	7
1.1	Die instationäre Wärmeleitungs- gleichung	7
1.2	Bekannte Variationsprinzipien für die instationäre Wärmeleitung	9
2	<u>Ein Variationsprinzip mit Extremal-Eigenschaften für die Wärmeleitung</u>	17
2.1	Das Funktional und seine erste Variation	17
2.2	Die Konstruktion des Funktionals aus dem "Prinzip der virtuellen Energieübertragung"	23
2.3	Beziehungen zur Fehlerquadrat- methode	26
2.4	Zur Illustration der instationären Wärmeleitung	28
2.4.1	Ein numerischer Vergleich mit der exakten Lösung	28
2.4.2	Eine Minimisierung des Funktionals	32
3	<u>Zur Thermomechanik fester Körper</u>	39
3.1	Allgemeines	39
3.2	Einige Bemerkungen zur gekoppelten thermoelastischen Theorie	40

		Seite
3.3	Zum ebenen Spannungszustand	44
4	<u>Zum Prinzip der virtuellen Arbeiten für thermoelastische Verformungen</u>	46
4.1	Allgemeines	46
4.2	Formulierung des Prinzips für thermoelastische Formänderungen	47
5	<u>Ein FEM-Programm zur Thermoelastizität</u>	50
5.1	Grundsätzliche Bemerkungen	50
5.2	Das dreidimensionale Problem der instationären Wärmeleitung	53
5.2.1	Zur Geometrie eines Dreieck-Elementes	53
5.2.2	Bestimmung der Formfunktionen für die Temperaturfunktion	56
5.2.3	Die Bestimmungsgleichungen des Anfang-Randwertproblems	63
5.2.3.1	Die Anfangs- und Randbedingungen der instationären Wärmeleitung	63
5.2.3.2	Herleitung des Gleichungssystems aus der ersten Variation des Funktionals	64
5.2.3.3	Erweiterung der thermischen Belastung	82
5.3	Die Anwendung der FEM auf thermoelastische Verformungen	83
6	<u>Zum Programmsystem für das dreidimensionale Problem</u>	88

		Seite
7	<u>Numerische Ergebnisse</u>	89
7.1	Beispiele zur Wärmeleitung	89
7.2	Beispiele zur Thermoelastizität	101
7.3	Ein Vergleich mit experimentellen Ergebnissen	106
8	<u>Zusammenfassung und Ausblick</u>	116
	Literaturverzeichnis	

FORMELZEICHEN

<u>Zeichen</u>	<u>Bedeutung</u>
a	Temperaturleitfähigkeit
A	Fläche
A_e	Fläche eines Elementes
c_p, c_v	spezifische Wärmekapazität
D	Gebiet, Volumen
∂D	Rand eines Gebietes
E	Elastizitätsmodul
\dot{e}	spezifische thermische Quellenenergie, Quellenenergie
$\delta \dot{e}$	virtuelle Änderung der Quellenenergie
$d\underline{F}$	Kraftvektor auf ein Masseteilchen bezogen
F_0	Fourier-Zahl
G	Schubmodul
L_i	Natürliche Koordinaten

<u>Zeichen</u>	<u>Bedeutung</u>
m	Masse, Temperaturspannungsmodul (3-dim.)
m^*	Temperaturspannungsmodul (2-dim.)
N_i	Formfunktion
n	Normalenvektor
p_k	Randspannung
q	Wärmestromdichte
q_n	Wärmestromdichte in Normalenrichtung
Q_n	Wärmestrom in Normalenrichtung
\dot{R}	Wärmequellenfunktion
t	Zeit
T	Zeitschrittweite
u	Verschiebungsvektor
v	Geschwindigkeitsvektor

<u>Zeichen</u>	<u>Bedeutung</u>
V	Volumen
$x, y; 1, 2$	kartesische Koordinaten
α	Wärmeübergangszahl, Wärmeausdehnungskoeffizient
ϵ_{ij}	Verzerrungen
ϑ	Empirische Temperatur, Temperaturdifferenz
Θ	Thermodynamische Temperatur, Temperaturdifferenz
Θ_0	Thermodynamische Bezugstemperatur
Λ	Lagrange'scher Parameter
λ	Wärmeleitfähigkeit
ν	Querkontraktionszahl
ρ_0	Dichte bei Bezugstemperatur
σ_{ik}	Spannungen

1 Einführung

Die vorliegende Arbeit wird als ein Beitrag zur numerischen Lösung von thermomechanischen Problemen verstanden. Es wird eine Beschränkung auf lineare, thermoelastische Prozesse durchgeführt. Im Hauptteil der Arbeit wird mit Hilfe der Variationsrechnung bzw. der Methode der kleinsten Fehlerquadrate eine mathematische Grundlage zur Berechnung instationärer Wärmeleitungsprobleme entwickelt. Die so formulierte Theorie wird auf die Methode der finiten Elemente angewendet. Die erhaltene Temperaturverteilung wird als Belastung für einen thermoelastischen Körper betrachtet. Die entsprechenden Wärmespannungen werden durch ein erweitertes Formänderungsgesetz berechnet, das in das Prinzip der virtuellen Arbeiten eingesetzt wird. Numerische Beispiele und experimentelle Untersuchungen bestätigen die entwickelten theoretischen Methoden.

1.1 Die instationäre Wärmeleitungsgleichung

Mit der Wärmeleitung ist ein Energietransport infolge ungleichmäßiger Temperaturverteilung verbunden. Die Geschwindigkeit mit der diese thermische Energie transportiert wird, hängt von den thermischen Materialeigenschaften und der Größe des Temperaturgradienten ab. Beschränkt man sich auf homogene und isotrope Körper, so kann der auf ein Flächenelement in Normalenrichtung bezogene Wärmestrom $Q(\underline{x}, t)$ mit der von Biot und Fourier eingeführten Beziehung

$$\underline{q} = -\lambda \text{ grad } \Theta \quad (1.1)$$

als Wärmestromdichte \underline{q} ermittelt werden. Hierbei stellt λ die auf eine skalare Größe reduzierte Matrix der Wärmeleitfähigkeit dar. $\Theta(\underline{x}, t)$ stellt die Temperaturverteilung dar. Die Energiebilanz für ein Volumenelement dV ergibt (s. a. [7])

$$dV \varrho_0 c_p d\dot{\Theta} = - dV dt \nabla \cdot \underline{q} + dV dt \dot{R} \quad (1.2)$$

Während die linke Seite von (1.2) die Änderung der inneren Energie darstellt, bestimmt $\text{div } \underline{q}$ die pro Volumen- und Zeiteinheit ausgetretene Wärmemenge. Der letzte Ausdruck der Gleichung (1.2) stellt die Änderung der Quellenenergie dar. Gleichung (1.2) wird umgeformt und man erhält mit (1.1) die bekannte Fourier-Gleichung

$$\dot{\Theta} - a \Delta \Theta = \frac{1}{\varrho_0 c_p} \dot{R} \quad (1.3)$$

In der obigen Gleichung ist eine unendliche Wellen- bzw. Informationsgeschwindigkeit vorausgesetzt. Außerdem werden sämtliche Materialkonstanten als konstant über die Zeit angenommen. Das Symbol " Δ " stellt den Laplace-Operator dar. Mit $H = \dot{R}$ schreibt sich die Gleichung (1.3) zu

$$\varrho_0 c_p \dot{\Theta} + \nabla \cdot \underline{q} = H. \quad (1.4)$$

Schreibt man die Feldgleichung der Mechanik zu

$$\rho \dot{\underline{v}} - \nabla \cdot \underline{\sigma} = \rho \underline{f} \quad , \quad (1.5)$$

so sind die folgenden Analogien zu erkennen:

- | | | |
|-------------------|---|---|
| i) Impuls | ↔ | innere Energie |
| ii) Spannung | ↔ | Wärmestromdichte |
| iii) Volumenkraft | ↔ | Quellenleistung oder
thermische Quellenkraft H |

Für spezielle Probleme existieren Lösungen dieser parabolischen Differentialgleichung (1.3), so z. B. für die unendliche Halbebene. Insbesondere sind für regelmäßige Körperformen brauchbare Näherungslösungen, die z. B. auf Laplace-Transformationen oder Differenzenverfahren beruhen, vorhanden (s. a. [8] und [9]). Eine allgemeine Lösung für beliebige Körperformen ist offensichtlich nur über die Anwendung numerischer Verfahren möglich. Obwohl die Grenzen, die durch die elektronische Datenverarbeitung bedingt sind, sehr weit gesteckt sind, kommt es bei einer numerischen Lösung eines Problems nach wie vor auf ein stabiles Lösungsverhalten an. Eine Grundvoraussetzung ist hierfür ein geeignetes Funktional.

1.2 Bekannte Variationsprinzipien für die instationäre Wärmeleitung

Eine zusammenfassende Darstellung über das gesamte Gebiet der Thermodynamik ist in dem Buch von G. Lebon und P. Perzyna [10] enthalten. B. A. Finlayson und L. E. Scriven

[11] haben in einer umfassenden Arbeit die Entwicklung der Variationsprinzipien bis 1966 beschrieben. Für die Zeit bis 1966 existieren nach Finlayson für die Wärmeleitung nur "Quasi-Variationsprinzipien" und "eingeschränkte Variationsprinzipien", die nicht den Anwendungsbereich von klassischen Variationsprinzipien besitzen. In diesem Zusammenhang wird auf die Einteilung der approximativen Lösungsmethoden in zwei große Gruppen hingewiesen. Dies sind zum einen die Methode der gewichteten Residuen (s. a. G. Schmid [37]) und zum anderen die Methoden, die auf eine variationale Formulierung gründen. Beide Gruppen beinhalten wieder Verfahren wie z. B. die Fehlerquadrat-Methode oder das Galerkin-Verfahren als Sonderfälle der Methode der gewichteten Residuen bzw. das Prinzip von d'Alembert oder ein Quasi-Variationsprinzip als Methoden der Variationsrechnung. Zwischen einigen Methoden der beiden genannten Gruppen bestehen Äquivalenzbeziehungen, auf die an dieser Stelle jedoch nicht eingegangen wird. Für die Zeit nach 1966 werden einige bekannte Variationsprinzipien für die instationäre Wärmeleitung betrachtet. Als ein erstes Beispiel wird ein Funktional von Krajewski [13] bzw. von Lebon und Lambermont [14] betrachtet. Alle drei Autoren betrachten ein Funktional der folgenden Art:

$$\Phi(\Theta) = \int_0^T \int_D \left[\frac{\lambda^2(\Theta)}{2} |\nabla \Theta|^2 + \dot{\Theta}_k \int_{\Theta_0}^{\Theta} C(\vartheta) \lambda(\vartheta) d\vartheta - \int_{\Theta_0}^{\Theta} W(\vartheta) \lambda(\vartheta) d\vartheta \right] dV dt$$

(1.6)

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^T \int_{\partial D_2} \left[\int_{\Theta_0}^{\Theta} q(\vartheta) \lambda(\vartheta) d\vartheta \right] dA dt \\
 & + \alpha \int_0^T \int_{\partial D_3} \left[\int_{\Theta_0}^{\Theta} \{\vartheta - \vartheta_F\} \lambda(\vartheta) d\vartheta \right] dA dt \\
 & + Z \Big|_{t=0}
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Hierbei beschreibt (1.6) die nichtlineare Wärmeleitung, wobei die folgenden Größen definiert sind:

- $\lambda(\vartheta)$ Wärmeleitfähigkeit
- $C(\vartheta)$ Wärmekapazität
- $W(\vartheta)$ Wärmequelle
- $q(\vartheta)$ Wärmestromdichte auf dem Rand ∂D_2
- α Wärmeübergangskoeffizient für eine Randbedingung der 3. Art (Newton'sche R. B.)
- Θ_0 Bezugstemperatur

$$Z \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} \int_D \{ \Theta - \Theta_a \}^2 dV \tag{1.7}$$

- Θ_a Temperaturverteilung zur Zeit $t = 0$
- ϑ_F Temperatur des umgebenden Mediums.

Während Krajewski [13] mit Hilfe des Satzes von Gauss-Ostrogradsky zu den Differentialgleichungen des Problems kommt, bezeichnet Lebon [14] das Variations-Prinzip als ein eingeschränktes Prinzip, da bei der Variation der Ausdruck $\dot{\Theta}_k$ nicht variiert wird.

Ebenso wird die Anfangsbedingung durch das Fehlerquadratintegral $Z|_{t=0}$ offensichtlich unabhängig vom Variationsprinzip erfüllt. Betrachtet man das Prinzip für den Fall der linearen Wärmeleitung, so folgt das Funktional (1.6) zu

$$\begin{aligned} \Phi(\Theta) = & \int_0^T \int_D \left[\frac{1}{2} \lambda |\nabla \Theta|^2 + C \dot{\Theta}_k \Theta - W(\Theta) \Theta \right] dV dt \\ & + \int_0^T \int_{\partial D_2} \Theta q(\Theta) dA dt + \alpha \int_0^T \int_{\partial D_3} \left\{ \frac{1}{2} \Theta^2 - \Theta_F \Theta \right\} dA dt \\ & + Z|_{t=0} \quad . \end{aligned} \quad (1.8)$$

Es ist nun nicht schwierig zu erkennen, daß eine Variation von (1.8) nur dann zu den Differentialgleichungen des Systems führt, falls der Ausdruck $\dot{\Theta}_k$ nicht variiert wird.

Hieraus resultieren auch gewisse Schwierigkeiten für die numerische Anwendung. Es bleibt somit der grundsätzliche Nachteil bestehen, daß der Differentialoperator $L(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$ ein Hindernis für die Bildung eines positiv

definiten Funktionals darstellt. Diese Schwierigkeit ist mathematisch begründet und liegt in der fehlenden Selbstadjungiertheit des Operators $L(\cdot)$ in Bezug auf das gewöhnliche innere Produkt. Diese negative Eigenschaft ist natürlich auch noch bei anderen Problemen vorhanden und es wurde daher mit Hilfe der modernen Funktional-Analyse schon frühzeitig versucht, solche Operatoren zu symmetrisieren. Ist dies möglich, so wird ein selbstadjungierter Operator $K(\cdot)$ so bestimmt, daß $L(\cdot)$ K -selbstadjungiert ist. Auf diese Weise erhält man z. B. ein Faltungsintegral (convolution-product). K. Washizu [16] war offensichtlich der erste, der diese Produktbildung für die Formulierung eines Variationsprinzipes einsetzte. Später wurde diese Methode auf Probleme in der Viscoelastizität (M. Gurtin [17], M. Leitman [18]) und auf die Wärmeleitung (J. M. Reddy [19], [20]) ausgedehnt. Die Methode der Symmetrierung führt jedoch für die Wärmeleitung zu keinem Extremal-Prinzip. Ein erster Schritt auf dem Weg zur Entwicklung eines Extremal-Prinzips wurde von Herrera [21] und Collins [22] getan. Grundlage dieses Weges ist die gleichzeitige Betrachtung der Fourierrechnung und ihrer adjungierten Gleichung. Herrera erhält durch diese Betrachtung ein Funktional, das in einem beschränkten Bereich ein Minimum und in einem anderen beschränkten Bereich ein Maximum für die Lösung der Gleichung besitzt. Collins [22] erhält durch Addition und Subtraktion der zueinander adjungierten Differentialgleichungen ein neues System von Differentialgleichungen. Er konstruiert zwei Funktionale mit den folgenden Besonderheiten: Das erste Funktional stellt zusammen mit der ersten Gleichung als Nebenbedingung ein Minimum-Prinzip und das zweite Funktional stellt zusammen mit der zweiten Gleichung als Nebenbedingung ein Maximumprinzip dar. Ein weiterer Versuch, ein Extremalprinzip zu konstruieren, ist von Filippov und Skorohodov [23] durchgeführt worden. Die Hauptidee der Autoren besteht in dem Versuch,

das Prinzip in einer erweiterten Klasse der Funktionale zu formulieren. In dieser erweiterten Klasse werden neben den ersten Ableitungen auch die Integrale der ersten Ableitungen betrachtet. Hierdurch gelingt es den Autoren, ein Extremalprinzip zu konstruieren. Es ist jedoch offensichtlich nur für Rechteck-Gebiete und besondere Randbedingungen anwendbar. Vujanovic und Baclic [15] wenden das Prinzip des kleinsten Zwanges nach Gauß auf die parabolische Differentialgleichung an. Sie betrachten den quadratischen Ausdruck

$$Z = \int_D [X - Y]^2 dV \quad (1.9)$$

mit

$$X = \nabla \cdot (\lambda \nabla \Theta) ; Y = \rho c \dot{\Theta}$$

Eine Minimisierung von (1.7) ist für die Autoren auf zweierlei Arten möglich:

$$\begin{aligned} & \delta X \neq 0 \quad \text{und} \quad \delta Y = 0 \\ \text{oder} & \quad \delta X = 0 \quad \text{und} \quad \delta Y \neq 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Unabhängig davon, daß in beiden Fällen nicht alle Variationen zugelassen sind, erhält man bei dieser Methode Lösungen, die noch nachträglich über die Zeit integriert werden müssen. Ansonsten ist der Grundgedanke, das Prinzip für die Wärmeleitung über das Gauß'sche Prinzip des kleinsten Zwanges

zu formulieren auch in dem Prinzip der virtuellen Quellenenergie enthalten. Eine besondere Stellung unter den Prinzipien für die instationäre Wärmeleitung nimmt das Prinzip von Biot [12] ein. Biot führt einen Wärmeverschiebungsvektor \underline{H} ein, der durch

$$\underline{H} = \int_0^t \underline{q} \, d\tau \quad (1.11)$$

bestimmt ist. Hierdurch kommt Biot zu der Beziehung

$$\int_D (\nabla \Theta + \frac{1}{\lambda} \dot{\underline{H}}) \cdot \delta \underline{H} \, dV = 0 \quad (1.12)$$

und nach einiger Umformung sowie mit der inneren Energie

$u_v = c_p \Theta$ zu

$$\int_D c_p \Theta \, \delta \Theta \, dV + \int_D \frac{1}{\lambda} \dot{\underline{H}} \cdot \delta \underline{H} \, dV = - \int_{\partial D} \Theta \, \underline{n} \cdot \delta \underline{H} \, dA \quad (1.13)$$

Aus dem ersten Integral schließt Biot auf das thermische Potential

$$P = \frac{1}{2} \int_D c_p \Theta^2 dV \quad (1.14)$$

Durch eine Variation des (1.13) entsprechenden Funktionals kommt man zu (1.12), falls \dot{H} nicht variiert wird. Eine Deutung der Fourier-Gleichung als Euler-Gleichung in (1.12) ist jedoch möglich. Durch eine Einführung von generalisierten Koordinaten gelingt es Biot, eine zur Lagrange'schen Gleichung für dissipative mechanische Systeme analoge Gleichung zu finden. Es fällt an dieser Stelle auf, daß ähnlich wie beim Prinzip der virtuellen Quellenenergie die Eulersche Gleichung durch eine beliebige Variation einer abgeleiteten Größe und nicht der Grundgröße Θ folgt. Ein entsprechendes Funktional existiert jedoch im Sinne der Variationsrechnung nicht.

2 Ein Variationsprinzip mit Extremal-Eigenschaften für die Wärmeleitung

2.1 Das Funktional und seine erste Variation

Es wird ein homogener und isotroper Körper betrachtet, für den die Wärmeleitungsgleichung (1.3) in jedem Punkt gültig sein soll. Ebenso sollen auch alle in Kapitel 1.1 getroffenen Annahmen weiterhin bestehen. Zur mathematischen Beschreibung im Raum und der Zeit wird der Körper in ein Gebiet D und einen Rand ∂D wie folgt aufgeteilt.

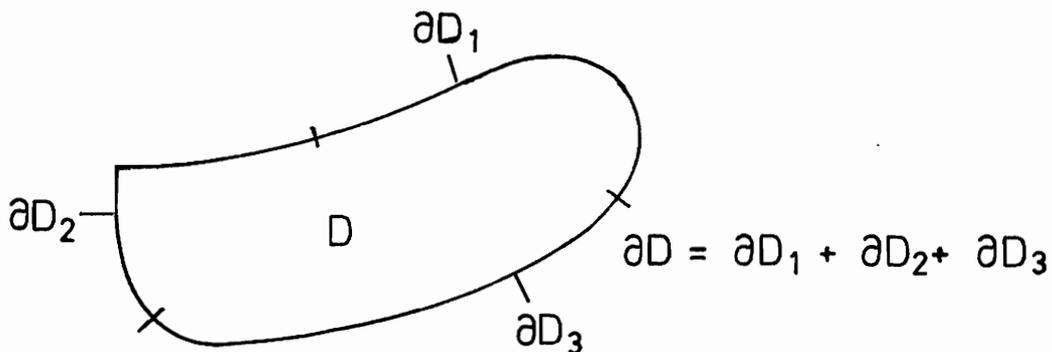


Abb. 2.1 Gebiet D und Rand ∂D des Körpers

Während auf den Rändern ∂D_1 bzw. ∂D_2 die Temperaturen bzw. die Wärmestromdichten in Normalenrichtung als bekannte Funktionen vorgegeben sind, können auch auf dem Rand ∂D_3 Linearkombinationen von Temperaturen und Wärmestromdichten als Randbedingung der dritten Art berücksichtigt werden. Da im folgenden in Zeitintervallen gerechnet wird, wird die Randbedingung der dritten Art mit ausreichender Genauigkeit auf eine Randbedingung der zweiten Art zurückgeführt.

Das Funktional lautet mit $\kappa = \frac{1}{\Omega_0 c_p}$

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_D |\dot{\Theta}|^2 dV dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_D a^2 |\Delta \Theta|^2 dV dt \\
 &\quad - \int_0^T \int_D \kappa \dot{R} (\dot{\Theta} - a \Delta \Theta) dV dt + \frac{1}{2} \int_D a |\nabla \Theta|_T^2 dV \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_D a |\nabla \Theta|_0^2 dV - \int_0^T \int_{\partial D_1} a f \nabla \Theta \cdot \underline{n} dA dt \\
 &\quad + \int_0^T \int_{\partial D_2} \kappa q_n \dot{\Theta} dA dt .
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Es wird nun die Menge der Funktionen $\Theta(\underline{x}, t)$ betrachtet, die

- (i) stückweise stetig bezüglich t und zweimal stückweise stetig bezüglich \underline{x} differenzierbar sind,
- (ii) die Anfangsbedingungen $\Theta(\underline{x}, 0) = \Theta_0(\underline{x})$ und

(iii) alle Randbedingungen erfüllen, d. h. für die

$$\Theta(\underline{x}, t) = f(t) \text{ auf } \partial D_1 \text{ und}$$

$$\lambda \nabla \Theta(\underline{x}, t) \cdot \underline{n} = -q_n(t) \text{ auf } \partial D_2 .$$

Die erste Variation des Funktionals (2.1) ergibt unter Beachtung der obigen Bedingungen (i - iii)

$$\begin{aligned} \delta \Phi = & \int_0^T \int_D \dot{\Theta} \delta \dot{\Theta} dV dt + \int_0^T \int_D a^2 \Delta \Theta \delta \Delta \Theta dV dt \\ & - \int_0^T \int_D \kappa \dot{R}(\delta \dot{\Theta} - a \delta \Delta \Theta) dV dt + \int_D a \nabla \Theta|_T \cdot \delta \nabla \Theta|_T dV \\ & - \int_0^T \int_{\partial D_1} a f \delta \nabla \Theta \cdot \underline{n} dA dt + \int_0^T \int_{\partial D_2} \kappa q_n \delta \dot{\Theta} dA dt \end{aligned}$$

(2.2)

Zur Umformung von $\delta \Phi$ wird zunächst die Gültigkeit der Identität

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T \int_D a (\Delta \Theta \delta \dot{\Theta} + \dot{\Theta} \delta \Delta \Theta) dV dt - \int_D a \nabla \Theta \cdot \delta \nabla \Theta \Big|_0^T dV \\
 & + \int_0^T \int_{\partial D} (a \nabla \Theta \cdot \underline{n} \delta \dot{\Theta} + a \dot{\Theta} \delta \nabla \Theta \cdot \underline{n}) dA dt = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

gezeigt. Diese folgt aus

$$\int_0^T \int_D (\Delta \Theta \delta \dot{\Theta} + \dot{\Theta} \delta \Delta \Theta) dV dt = \delta \int_0^T \int_D \dot{\Theta} \Delta \Theta dV dt
 \tag{2.4}$$

sowie einer Umformung von

$$\int_0^T \int_D \dot{\Theta} \Delta \Theta dV dt = \int_0^T \int_D \dot{\Theta} \Theta_{,ii} dV dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^T \int_D (\dot{\Theta} \Theta_{,i})_{,i} dV dt - \int_0^T \int_D \dot{\Theta}_{,i} \Theta_{,i} dV dt \\
 &= \int_0^T \int_D (\dot{\Theta} \Theta_{,i})_{,i} dV dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_D (\overline{\dot{\Theta}_{,i} \Theta_{,i}}) dV dt \\
 &= \int_0^T \int_{\partial D} \dot{\Theta} \Theta_{,i} n_i dA dt - \frac{1}{2} \int_D \Theta_{,i} \Theta_{,i} \Big|_0^T dV .
 \end{aligned}$$

(2.5)

Setzt man (2.5) in (2.4) ein, so folgt

$$\begin{aligned}
 &\int_0^T \int_D (\Delta \Theta \delta \Theta + \dot{\Theta} \delta \Delta \Theta) dV dt = \\
 &\int_0^T \int_{\partial D} (\dot{\Theta} \delta \nabla \Theta \cdot \underline{n} + \nabla \Theta \delta \dot{\Theta} \cdot \underline{n}) dA dt - \int_D \nabla \Theta \cdot \delta \nabla \Theta \Big|_0^T dV .
 \end{aligned}$$

(2.6)

Aus (2.6) folgt unmittelbar die Identität (2.3).

Addiert man die Identität (2.3) zu (2.2), so schreibt sich die 1. Variation unter Beachtung der Zulassungsbedingungen für $\Theta(\underline{x}, t)$

$$\delta\Phi = \int_0^T \int_D (\dot{\Theta} - a \Delta\Theta - \kappa \dot{R}) \delta(\dot{\Theta} - a \Delta\Theta) dV dt. \quad (2.7)$$

Wird das Funktional für eine Funktion $\Theta(\underline{x}, t)$ stationär, gilt also $\delta\Phi = 0$ für alle $\delta\Theta(\underline{x}, t)$, die den homogenen Anfangs- und Randbedingungen genügen, so befriedigt die zugehörige Funktion $\Theta(\underline{x}, t)$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{\Theta} - a \Delta\Theta - \kappa \dot{R} = 0. \quad (2.8)$$

Um auf diese Euler-Gleichung schließen zu können, ist zu beachten, daß zu beliebig vorgegebenen $\delta\dot{\Theta}$

$$\delta\dot{\Theta} = \delta\dot{\Theta} - a \Delta\delta\Theta \quad (2.9)$$

stets eine Funktion $\delta\Theta(\underline{x}, t)$ gefunden werden kann, nämlich die Lösung der obigen Wärmeleitungsgleichung für

$\delta\Theta(\underline{x}, t)$ mit homogenen Anfangs- und Randbedingungen und $\delta\dot{e}(\underline{x}, t)$ als Quellterm bzw. als spezifische thermische Quellenenergie.

2.2 Die Konstruktion des Funktionals aus dem "Prinzip der virtuellen Quellenenergie"

Es wird nun gezeigt, daß das Funktional (2.1) auch direkt aus der Wärmeleitungsgleichung entwickelbar ist. Hierzu wird die Gleichung (1.3) mit einer virtuellen Änderung der spezifischen thermischen Quellenenergie (2.9) multipliziert, so daß

$$\int_0^T \int_D (\dot{\Theta} - a \Delta \Theta - \kappa \dot{R}) \delta \dot{e} dV dt = 0 \quad (2.10)$$

folgt. Mit $\dot{e} = \dot{\Theta} - a \Delta \Theta$ wird (2.10) zu

$$\int_0^T \int_D (\dot{e} - \kappa \dot{R}) \delta \dot{e} dV dt = 0. \quad (2.11)$$

Diese Form wird als das Prinzip der virtuellen Quellenenergie¹⁾ bezeichnet. Von (2.11) kommt man leicht zu

1) Dieses Prinzip ist eine besondere Form des Prinzips der virtuellen Energieübertragung, das P. Mazilu in [3] entwickelt hat.

$$\delta \int_0^T \int_D \left(\frac{1}{2} \dot{e}^2 - \kappa \dot{R} \dot{e} \right) dV dt = 0 \quad (2.12)$$

und zu der Funktionalform

$$\Phi = \int_0^T \int_D \left(\frac{1}{2} \dot{e}^2 - \kappa \dot{R} \dot{e} \right) dV dt . \quad (2.13)$$

Schreibt man (2.13) ausführlich, so folgt

$$\Phi = \int_0^T \int_D \left[\frac{1}{2} (\dot{\Theta} - a \Delta \Theta)^2 - \kappa \dot{R} (\dot{\Theta} - a \Delta \Theta) \right] dV dt \quad (2.14)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2} \int_0^T \int_D |\dot{\Theta}|^2 dV dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_D a^2 |\Delta \Theta|^2 dV dt \\ & - \int_0^T \int_D a \dot{\Theta} \Delta \Theta dV dt - \int_0^T \int_D \kappa \dot{R} (\dot{\Theta} - a \Delta \Theta) dV dt . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Mit Hilfe der Beziehung (2.5) kann das dritte Integral (2.15) umgeformt werden, so daß das Funktional zu

$$\begin{aligned}\Phi = & \frac{1}{2} \int_0^T \int_D |\dot{\Theta}|^2 dV dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_D a^2 |\Delta \Theta|^2 dV dt \\ & - \int_0^T \int_D \kappa \dot{R} (\dot{\Theta} - a \Delta \Theta) dV dt + \frac{1}{2} \int_D a |\nabla \Theta|_T^2 dV \\ & - \frac{1}{2} \int_D a |\nabla \Theta|_0^2 dV - \int_0^T \int_{\partial D_1} a \dot{f} \nabla \Theta \cdot \underline{n} dA dt \\ & + \int_0^T \int_{\partial D_2} \kappa q_n \dot{\Theta} dA dt\end{aligned}\tag{2.16}$$

geschrieben werden kann. (2.16) stimmt aber mit (2.1) überein. Hierdurch ist bewiesen, daß die Wärmeleitungsgleichung (1.3) und das Funktional (2.1) äquivalente Beschreibungen des Wärmeleitungsproblems sind.

Bezüglich der Konvexität des Funktionals hat P. Mazilu in [3] bewiesen, daß das Funktional (2.1) streng konvex ist. Damit ist die Voraussetzung für ein stabiles Lösungsverhalten gegeben.

2.3 Beziehungen zur Fehlerquadratmethode

Für eine beliebige Funktion $\Theta(\underline{x}, t)$, die lediglich den Zulassungsbedingungen genügt, wird die Wärmeleitungsgleichung natürlich nicht erfüllt, es entsteht vielmehr der Fehler

$$\dot{\Theta} - a \Delta \Theta - \kappa \dot{R} .$$

(2.17)

Als Fehlerquadrat ergibt sich damit

$$\tilde{\Phi} = \int_0^T \int_D (\dot{\Theta} - a \Delta \Theta - \kappa \dot{R})^2 dV dt = \int_0^T \int_D (\dot{e} - \kappa \dot{R})^2 dV dt$$

(2.18)

bzw.

$$\tilde{\Phi} = \int_0^T \int_D (\dot{e}^2 - 2 \kappa \dot{R} \dot{e} + \kappa^2 \dot{R}^2) dV dt .$$

(2.19)

Vergleicht man (2.19) mit (2.13), so gilt

$$\tilde{\Phi} = 2\Phi + \int_0^T \int_D \kappa^2 \dot{R}^2 dV dt \quad (2.20)$$

bzw.

$$\Phi = \frac{1}{2}\tilde{\Phi} - \frac{1}{2} \int_0^T \int_D \kappa^2 \dot{R}^2 dV dt . \quad (2.21)$$

Das Funktional Φ stimmt also bis auf ein konstantes, additives Glied und einen konstanten Faktor mit dem Fehlerquadrat $\tilde{\Phi}$ überein. Dieser Unterschied ist für die Variation des Funktionals ohne Bedeutung. Das Minimum beider Funktionale wird natürlich für die gleiche Funktion

$\Theta(\underline{x}, t)$ angenommen.

2.4 Zur Illustration der instationären Wärmeleitung

An zwei einfachen Beispielen werden typische Lösungen der als Anfangs-Randwertaufgabe formulierten parabolischen Differentialgleichung (1.3) aufgezeigt. In einem ersten Kapitel werden die Werte, die aufgrund des vorgestellten Variationsprinzipes aus der FEM-Rechnung folgen, mit den Werten der entsprechenden exakten Lösung verglichen. In einem zweiten Kapitel wird eine Minimisierung des Funktionals (2.1) bezüglich einer allgemeinen Lösungsfunktion durchgeführt. Es folgt hieraus die exakte Lösung.

2.4.1 Ein numerischer Vergleich mit der exakten Lösung

Es wird das folgende, einfache Problem betrachtet.

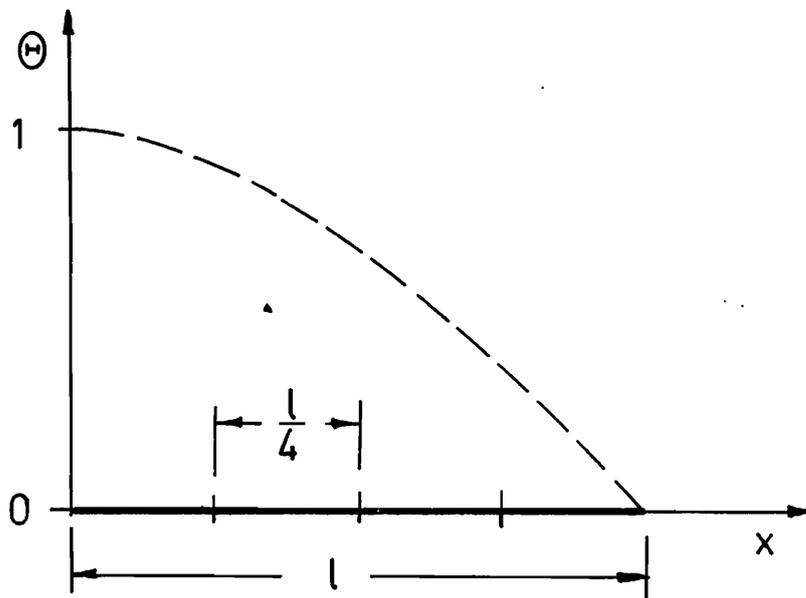


Abb. 2.2 Eindimensionaler Körper (Stab) mit der Länge $l = 20$ mm, der Temperaturleitfähigkeit $a = 14,1$ mm²/s und der gewählten Elemententeilung

Gegeben ist die in Abb. 2.2 skizzierte Anfangstemperturverteilung des Stabes zu

$$\Theta(x,0) = \Theta_{\max} \cos\left(\frac{\pi}{2l} x\right), \quad (2.22)$$

der homogenen Dirichlet'schen Randbedingung

$$\Theta(l,t) = 0 \quad (2.23)$$

und der homogenen Neumann'schen Randbedingung

$$\frac{\partial}{\partial x} \Theta(0,t) = \Theta'(0,t) = 0. \quad (2.24)$$

Im folgenden wird Θ_{\max} gleich Eins gesetzt. Für dieses Wärmeleitungsproblem schreibt sich die Fouriergleichung (1.3) mit $\dot{R} = 0$ zu

$$\dot{\Theta} - a\Theta'' = 0. \quad (2.25)$$

Die exakte Lösung nach J. Bernoulli ist bekannt und lautet für das obige Problem

$$\Theta = \exp(-k^2 at) \cos(kx)$$

mit

$$k = \frac{\pi}{2l}$$

(2.26)

Im Vergleich hierzu wird das obige Problem mit Hilfe des vorgestellten Variationsprinzipes gelöst. Hierzu wird der Körper in vier Elemente aufgeteilt, für die geeignete Formfunktionen mit Hilfe kubischer Hermite-Polynome formuliert werden. Als Freiheitsgrade an den jeweiligen Knoten werden die Temperaturen und die Temperaturgradienten bestimmt, so daß auch die Stetigkeit der ersten Ortsableitung gesichert ist. Der entsprechende Formfunktionsansatz wird zu

$$\Theta(x,t) = f_1(t) H_i \Theta_i^0 + f_2(t) H_i \Theta_i^T$$

(2.27)

geschrieben und in das Funktional (2.1) eingesetzt. Hierbei stellen die H_i die schon erwähnten Hermite-Polynome dar und die Θ_i^0 bzw. Θ_i^T sind die Knoten-Anfangswerte bzw. Knotenfreiheitsgrade (Temperaturen und Temperatur-

gradienten) zur Zeit $t = 0$ bzw. $t = T$. Die Zeitfunktionen $f_1(t)$ und $f_2(t)$ sind lineare Formfunktionen, die den Zeitverlauf approximieren. Das Funktional wird nun bezüglich aller Θ_i^T minimisiert und man erhält die Bestimmungsgleichungen für Θ_i^T . Das entsprechende Programm ist in Basic geschrieben und auf einem CBM-Computer gerechnet worden. Die Ergebnisse sind in Abb. 2.3 aufgetragen.

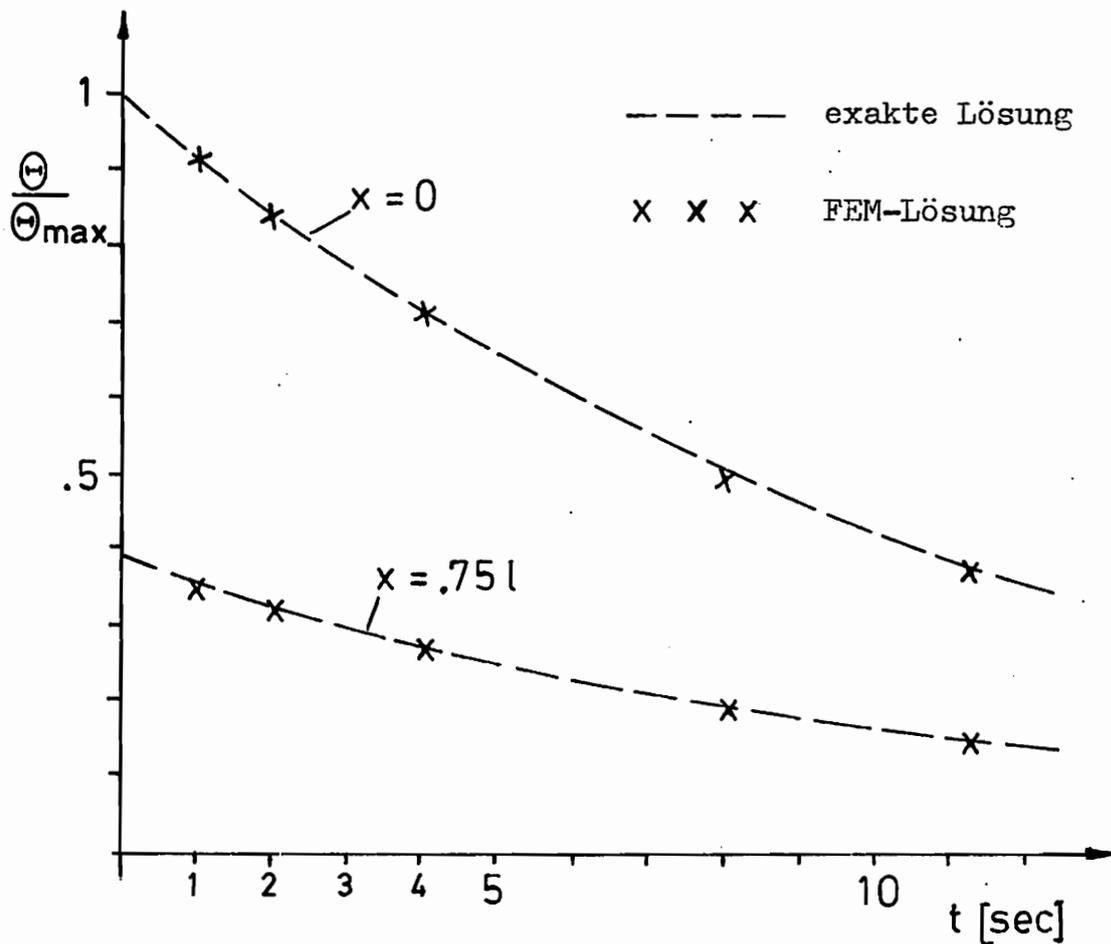


Abb. 2.3 Temperaturverlauf für zwei Punkte des eindimensionalen Körpers ($c_p = 470 \text{ J/kg K}$, $\lambda = 52,3 \text{ W/K m}$, $\rho_0 = 7900 \text{ kg/m}^3$)

Vergleicht man die Werte der in diskreten Zeitpunkten berechneten FEM-Lösung mit der Kurve der exakten Lösung, so kann man von einer nahezu völligen Übereinstimmung beider Lösungen sprechen. Die Abweichungen liegen innerhalb der Zeichengenauigkeit und betragen bei einer Zeitintervalllänge von 1,6 sec weniger als 0,04 %.

2.4.2 Eine Minimisierung des Funktionals

Analog zum Beispiel in Kap. 2.4.1 wird ein Stab mit einer sinusförmigen Anfangstemperaturverteilung

$$\Theta(x,0) = \Theta_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{l} x\right) \quad (2.28)$$

und den homogenen Dirichlet'schen Randbedingungen

$$\Theta(0,t) = \Theta(l,t) = 0 \quad (2.29)$$

betrachtet.

Im folgenden wird Θ_{\max} gleich Eins angenommen und R gleich Null gesetzt.

Für die allgemeine Lösung wird die Funktionenreihe

$$\Theta_{(x,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(\Omega n x) \quad (2.30)$$

mit $\Omega = \frac{2\pi}{l}$

angeschrieben.

Mit $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = (\cdot)'$ und $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = (\cdot)\dot{}$ folgen weiterhin

$$\Theta'_{(x,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega n b_n(t) \cos(\Omega n x)$$

$$\Theta''_{(x,t)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \Omega^2 n^2 b_n(t) \sin(\Omega n x)$$

$$\dot{\Theta}_{(x,t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{b}_n(t) \sin(\Omega n x) .$$

(2.31)

Diese allgemeinen Ausdrücke werden in das Funktional (2.1) eingesetzt und bezüglich $b_n(t)$ minimisiert. Unter Berücksichtigung der obengenannten Randbedingungen kann das Funktional zunächst auf

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2} \int_0^T \int_D |\dot{\Theta}|^2 dV dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_D a^2 |\Delta \Theta|^2 dV dt \\ & + \frac{1}{2} \int_D a |\nabla \Theta|_T^2 dV \end{aligned} \quad (2.32)$$

reduziert werden.

Im einzelnen folgt

$$\begin{aligned} \Phi(b_n) = & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^T \dot{b}_n^2 \int_0^l \sin^2(\Omega n x) dx dt \right. \\ & + \int_0^T a^2 \Omega^4 n^4 b_n^2 \int_0^l \sin^2(\Omega n x) dx dt \\ & \left. + a \Omega^2 n^2 b_n^2 \int_0^l \cos^2(\Omega n x) dx \right\} . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Hierbei wurde bzw. wird von der allgemeinen Beziehung

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \pi \delta_{mn} \quad (2.34)$$

Gebrauch gemacht.

Die weitere Rechnung ergibt

$$\Phi_{(b_n)} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^T (\dot{b}_n^2 + a^2 \Omega^4 n^4 b_n^2) dt + a \Omega^2 n^2 b_n^2(T) \right\}. \quad (2.35)$$

Zur Minimierung des Funktionals (2.35) wird die erste Variation durchgeführt.

$$\delta \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^T (\dot{b}_n \delta \dot{b}_n + a^2 \Omega^4 n^4 b_n \delta b_n) dt + a \Omega^2 n^2 b_n(T) \delta b_n(T) \right\} = 0 \quad (2.36)$$

Eine partielle Zeitintegration führt auf

$$\delta\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^T (a^2 \Omega^4 n^4 b_n - \ddot{b}_n) \delta b_n dt \right. \\ \left. + (\dot{b}_{n(T)} + a \Omega^2 n^2 b_{n(T)}) \delta b_{n(T)} \right\} = 0$$

(2.37)

und damit zu den Bestimmungsgleichungen

$$a^2 \Omega^4 n^4 b_n - \ddot{b}_n = 0$$

$$\dot{b}_{n(T)} + a \Omega^2 n^2 b_{n(T)} = 0 .$$

(2.38)

Aus den Anfangsbedingungen (2.28) folgt

$$b_1(0) = 1 \quad (2.39)$$

$$b_n(0) = C_n + D_n = 0 \quad \text{für } n = 2, 3, \dots$$

Die Fundamentallösung der Differentialgleichungen (2.38) lautet mit $k_n = a \Omega^2 n^2$

$$b_n(t) = C_n \exp(-k_n t) + D_n \exp(k_n t). \quad (2.40)$$

Diese Beziehung wird in die zweite Gleichung von (2.38) eingesetzt, so daß

$$\begin{aligned} & -C_n k_n \exp(-k_n T) + D_n k_n \exp(k_n T) \\ & + C_n k_n \exp(-k_n T) + D_n k_n \exp(k_n T) = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

folgt.

Aus (2.41) folgt unmittelbar

$$D_n = 0 \quad \text{für alle } n \quad (2.42)$$

und hieraus mit (2.39)

$$C_n = 0 \quad \text{für alle } n > 1 \quad (2.43)$$

Die allgemeine Lösung (2.30) wird mit den obigen Ergebnissen eindeutig zu

$$\Theta(x,t) = \exp(-a\Omega^2 t) \sin(\Omega x) \quad (2.44)$$

geschrieben. Dies ist aber auch die exakte Lösung, wie man sie direkt aus (2.25) mit den entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen erhält.

3 Zur Thermomechanik fester Körper

3.1 Allgemeines

Eine sehr ausführliche und für einen weiten Bereich der Thermomechanik gültige Theorie hat Th. Lehmann in [24] und [25] aufgestellt. Ebenso grundlegend haben K. Thermann und B. Raniecki die Kopplungseffekte in der Thermoplastizität in [26] betrachtet. O. Bruhns und J. Mielniczuk [27] beschreiben den Einfluß einiger Kopplungsphänomene für Verzweigungsprobleme. Die obengenannten Arbeiten beinhalten insbesondere Phänomene im plastischen Bereich der großen Deformationen wie z. B. die Verfestigung oder die teilweise Dissipation der plastischen Arbeit. Da in dieser Arbeit eine Beschränkung auf linearelastische Verformungen vorliegt, ist es sinnvoll, nicht die Gleichungen der oben zitierten allgemeinen Theorie als Grundlage zu nehmen, sondern die grundlegenden Gesetze direkt für die in dieser Arbeit betrachtete quasistatische Theorie der linearen Thermoelastizität anzuwenden. Die in dem zweiten Kapitel gemachten Ausführungen beziehen sich ausschließlich auf das Temperaturverhalten in festen Körpern bzw. auf Prozesse, die durch Wärmeenergie bestimmt sind. Auch das Prinzip der virtuellen Quellenenergie beschreibt ja z. B. nicht explizit die Umwandlung von mechanischer Energie in Wärmeenergie. Mit Hilfe der Wärmequellenfunktion $\dot{R}(\underline{x}, t)$ ist es jedoch möglich, die z. B. in thermoplastischen Prozessen dissipierte Arbeit zu erfassen. Ebenso wäre auch die Berücksichtigung der in der gekoppelten thermoelastischen Theorie auftretenden Wärmeenergie durch Volumendehnung auf diese Weise möglich. Eine Kopplung durch die Volumendehnung wird jedoch nicht durchgeführt. Eine Begründung wird in dem nachfolgenden Abschnitt gegeben. Dort werden auch Betrachtungen zur Vernachlässigung von Beschleunigungsgliedern bei der thermoelastischen Lösung angestellt.

3.2 Einige Bemerkungen zur gekoppelten thermoelastischen Theorie

Die in Abschnitt 1.1 hergeleitete Fourier-Gleichung beinhaltet nicht den "Kopplungsterm", der durch die Volumendehnung bestimmt ist. Eine Herleitung einer so erweiterten Energiegleichung geschieht über die thermischen und kalorischen Zustandsgleichungen. Sie wird hier nicht nachvollzogen. So gilt für die gekoppelte Theorie¹⁾ (s. a. Boley, Weiner [28]):

$$\rho_0 c_v \dot{\Theta} - \lambda \Delta \Theta = -m \Theta_0 \dot{\epsilon}_{ii} . \quad (3.1)$$

Bei fehlenden Massenkräften liefert der Impulssatz

$$\sigma_{ij,j} = \rho_0 \ddot{u}_i . \quad (3.2)$$

Der Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen sei linear, so daß

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.3)$$

gilt.

Das Formänderungsgesetz für den dreidimensionalen Spannungszustand lautet

$$\sigma_{ij} = 2G \left[\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \right] + m \Theta \delta_{ij} . \quad (3.4)$$

1) Im folgenden wird die Gültigkeit der Einstein'schen Summationskonvention vereinbart.

Die Gleichungen (3.1) bis (3.4) werden für den ebenen Spannungszustand zu

$$G \Delta \underline{u} + G \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla \nabla \cdot \underline{u} - m^* \nabla \vartheta = \rho_0 \ddot{\underline{u}} \quad (3.5)$$

und

$$\rho_0 c_v \dot{\vartheta} - \lambda \Delta \vartheta = - m^* \Theta_0 \nabla \cdot \dot{\underline{u}} \quad (3.6)$$

Die gekoppelte Theorie besteht somit aus den beiden Gleichungen (3.5) und (3.6) für ϑ und \underline{u} . Für den ebenen Spannungszustand sind dies somit 3 Gleichungen. Die Wärmequellenfunktion $\dot{R}(\underline{x}, t)$ wird hierbei nicht berücksichtigt, da sie für die vergleichenden Betrachtungen zwischen der gekoppelten und entkoppelten Theorie ohne Bedeutung ist. Es ist noch zu erwähnen, daß sich auch die obige gekoppelte dynamische Theorie der Thermoelastizität auf sogenannte thermodynamisch einfache elastische Materialien beschränkt (siehe hierzu auch P. J. Chen u. a. [29]).

Es stellt sich nun die Frage bzw. es ist das Problem zu lösen, ob die Vernachlässigung des Kopplungsausdrucks

$$m^* \Theta_0 \nabla \cdot \dot{\underline{u}} \quad (3.7)$$

und des Beschleunigungsterms

$$\rho_0 \ddot{\underline{u}} \quad (3.8)$$

unter gewissen Voraussetzungen zu einer brauchbaren Theorie im Bereich der Thermomechanik führt. Zu diesem Problemkreis finden sich in der Literatur nicht wenige Arbeiten, die meisten dieser Arbeiten behandeln diese Frage an Hand von konkreten Beispielen. Obwohl sie daher keine allgemeine Aussagekraft besitzen, tragen sie in nützlicher Weise zu Entscheidungsfindung im jeweils vorliegenden Problem bei.

Eine allgemeine Aussage ist W. A. Day in [30] für den ein-dimensionalen Fall und für die Randbedingung der 2. Art in Form eines Beweises gelungen. Day beweist das Theorem, daß die Verschiebungs- und die Temperaturlösungen der gekoppelten dynamischen und der entkoppelten quasistatischen Theorie für $t \rightarrow \infty$ gleich werden. Dieses Ergebnis ist von grundsätzlicher Bedeutung. Die anfangs allgemeine Fragestellung nach dem Unterschied der beiden Theorien reduziert sich zum Ersten auf die Frage nach dem Zeitbereich, in dem wesentliche Differenzen zu erwarten sind. Zum Zweiten ist die Bedeutung des Kopplungsausdruckes der Volumendehnung (3.7) abzuschätzen. Die Frage nach der Temperaturveränderung durch Volumendehnung ist in der linearen Elastizitätstheorie z. B. für Metalle von H. Lauert [31] und P. Mazilu und L. Schreiber [32] beantwortet worden. Sie haben gezeigt, daß der Fehler bei Ausnutzung der Streckgrenze in der Größenordnung von 0,5 Kelvin liegt. Dies liegt schon nahe an der Meßgenauigkeit von Thermoelementen und ist auf jeden Fall von sekundärer Bedeutung für die Spannungs- und Verformungsberechnung. Desgleichen betrachtet H. Parkus [33] die dynamischen Einflüsse des Beschleunigungsausdruckes (3.8). Parkus erhält z. B. für eine Rechnung mit Stahl bei einem unendlichen Körper mit einem kugeligem Hohlraum und sprunghaft aufgebrachter Randtemperatur eine Annäherung der Lösungen bis auf 5% innerhalb eines Zeitraumes der Größenordnung 10^{-12} Sekunden. Eine interessante Rechnung haben auch Boley und Weiner [28] mit einer rechteckigen

Aluminiumplatte und einer sprunghaften Änderung der Wärmestromdichte an einer Seite durchgeführt. Sie erhalten in Abhängigkeit der Plattendicke und eines weiteren Parameters das folgende Ergebnis. Die durch den Wärmeschock hervorgerufene Plattenschwingung ergibt zwar für sehr dünne Platten nach der dynamischen Theorie eine bis zu 100 % größere maximale Durchbiegung als mit der quasistatischen Lösung, jedoch reduziert sich diese Abweichung z. B. für quadratische Platten mit einem Dicken-Längenverhältnis von mehr als 1/100 auf weniger als 10 %. Je dicker die Platten sind, desto geringer ist die Abweichung zwischen den Lösungen. Z. B. entspricht ein Verhältnis von 1/60 einer Abweichung von nur 2 %. Weiterhin untersuchten Boley und Weiner [28] sehr ausführlich die Kopplungseffekte. Sie zeigen mit Hilfe von definitiv eingeführten charakteristischen Zeiten für die Mechanik mit $t_M = L/v_e$ und für die Wärmeleitung mit $t_\lambda = L^2/a$, daß die Kopplungseffekte von höherer Ordnung klein sind, falls $t_\lambda \gg t_M$ und im Falle der Temperaturstörung innerhalb der Zeit t_0 die Bedingung $t_0 \gg t_M$ gilt. Diese Bedingungen sind für die meisten Metalle erfüllt. Hierbei ist L eine charakteristische Länge und v_e ist die Wellengeschwindigkeit der Verformungen. Eine recht einfache und allgemein gültige Abschätzung des Kopplungseffektes der Volumendehnung wird möglich, wenn man das Alternativmodell von Mazilu und Schreiber [32] betrachtet. Hiernach gilt für die Energiebilanz ohne eine externe Wärmequelle im Vergleich zu (3.1)

$$(\rho_0 c_v + m \varepsilon_{ii}) \dot{\Theta} - \lambda \Delta \Theta = 0. \quad (3.9)$$

Es läßt sich durch einfache Zahlenrechnungen zeigen, daß bei den meisten thermomechanischen und insbesondere auch bei thermoelastischen Prozessen in Metallen der Ausdruck

gegenüber der Wärmekapazität von höherer Ordnung klein ist (s. a. Y. Takeuti [48]).

Diese hier genannten Ergebnisse rechtfertigen die Anwendung einer entkoppelten Theorie der linearen Thermoelastizität in ausreichendem Maße, da die Energiedissipation im elastischen Bereich nicht ein Gegenstand dieser Arbeit ist. Darüber hinaus wird die Auffassung vertreten, daß die entkoppelte quasistatische Theorie auch eine sichere Grundlage für viele thermoplastische Prozesse liefert. Für thermoelastische Prozesse kommen somit für den ebenen Spannungszustand die folgenden Gleichungen zum Ansatz:

$$G \left[\Delta \underline{u} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla \nabla \cdot \underline{u} \right] - m^* \nabla \vartheta = 0 \quad (3.10)$$

$$\rho_0 c_p \dot{\vartheta} - \lambda \Delta \vartheta - \dot{R} = 0 . \quad (3.11)$$

3.3 Zum ebenen Spannungszustand

Das in dieser Arbeit entwickelte FEM-Programm ist auf thermoelastische Körper beschränkt, die eine Annahme des ebenen Spannungszustandes zulassen. Diese Beschränkung wird durchgeführt, da einerseits die vorhandene Rechnerkapazität schon für die Durchrechnung relativ kleiner Beispiele im dreidimensionalen Fall zu gering ist und andererseits Beispiel-Rechnungen im zweidimensionalen Raum ausreichende Beweise zur

Gültigkeit der vorliegenden Theorie darstellen.

Es gelten die folgenden Annahmen:

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (3.12)$$

und

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 \quad (3.13)$$

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} . \quad (3.14)$$

Gemäß (3.4) folgt für die X_3 -Richtung mit (3.12)

$$2 G \left[\epsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) - \alpha \frac{1+\nu}{1-2\nu} \vartheta \right] = 0 . \quad (3.15)$$

Diese Gleichung dient zur Elimination der Dehnung ϵ_{33} .

Mit

$$\epsilon_{kk} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \vartheta \quad (3.16)$$

folgt für den ebenen Spannungszustand ($i, j = 1, 2$) das Formänderungsgesetz

$$\sigma_{ik} = 2G \left[\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{jj} \delta_{ik} \right] - \frac{1+\nu}{1-\nu} 2G\alpha \vartheta \delta_{ik}. \quad (3.17)$$

4 Zum Prinzip der virtuellen Arbeiten für thermoelastische Verformungen

4.1 Allgemeines

In der Literatur über sogenannte entkoppelte thermoelastische Prozesse sind nur wenige Arbeiten zu finden, die auf der Basis eines Variationsprinzipes die thermoelastischen Verformungen betrachten. Eine Literaturübersicht ist z. B. von H. J. Yu in [43] erstellt worden. H. J. Yu arbeitet zwar für das Wärmeleitungsproblem nach dem Galerkin-Verfahren, beschreibt aber die Verformungen in ähnlicher Weise wie in dieser Arbeit nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten. Den zu (4.9) entsprechenden Ausdruck bezeichnet H. J. Yu als fiktive äußere Wärmekräfte. Im Gegensatz hierzu ist die Literatur über Variationsprinzipe bei gekoppelter Thermoelastizität umfangreicher. Es wird hier nur kurz auf einige Aspekte der gekoppelten Thermoelastizität bezüglich einer Beschreibung im Funktionalraum eingegangen.

Ein Großteil der Arbeiten betrachtet die Helmholtz'sche freie Energie als Grundlage. Es ist bekannt, daß diese Energiefunktion keine Extremaleigenschaften hat, falls man z. B. die Dehnungen und die Temperaturen variiert. Wie in [10] ausführlich beschrieben, hat Biot ein Variationsprinzip entwickelt, das eine Analogie zu seinem Variationsprinzip für die Wärmeleitung darstellt. Im Gegensatz zur freien Energie

führt Biot ein thermoelastisches Potential ein, daß positiv-definit ist. Mit Hilfe eines Wärme-Verschiebungsvektors $\underline{H} = \int \underline{q} dt$ führt Biot eine zusätzliche Dissipationsfunktion ein und erhält durch Variation der Verschiebungen \underline{u} und des Wärme-Verschiebungsvektors \underline{H} die Euler-Lagrange-Gleichungen. Dieses Quasi-Variationsprinzip setzt die näherungsweise Vorgabe des Temperaturverlaufes voraus und unterliegt daher gewissen Anwendungsbeschränkungen (s. a. Kap. 1.2). Rafalski verallgemeinert in [44] das Prinzip von Biot durch eine Anwendung der Methode von Gurtin, die mit Faltungsintegralen arbeitet. Grundsätzlich bestehen aber auch bei Rafalski Beschränkungen bezüglich der zu variierenden Größen. Eine recht umfangreiche, meist anwendungsorientierte Darstellung von thermomechanischen Problemen ist in [45] und [46] zu finden.

4.2 Formulierung des Prinzips für thermoelastische Formänderungen

Stellt man das Grundgesetz der Mechanik an den Anfang der Betrachtungen, so folgt aus (1.5) in Abschnitt 1.1 (s. a. Th. Lehmann [35]) der Impulssatz ohne Massen- und Beschleunigungskräfte zu

$$\sigma_{ik,j} = 0. \quad (4.1)$$

Das in Abschnitt 3.3 schon benutzte Boltzmann-Axiom liefert mit dem Drallsatz

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \quad (4.2)$$

Es werden nun die unabhängigen Prozeßvariablen festgelegt. Diese in Form der Randbedingungen auftretenden Variablen sind zum Ersten die Spannungen $P_k(\underline{x}, t)$, die auf dem Teil ∂D_1 der Körperoberfläche vorgeschrieben sind, und zum Zweiten die Verschiebungen $U_k(\underline{x}, t)$, die auf dem Teil ∂D_2 der Körperoberfläche vorgegeben sind. Andere mechanische Randbedingungen werden hier nicht betrachtet. Weiterhin gilt bei kleinen Verschiebungen der Körperpunkte und bei kleinen Verdrehungen und Verzerrungen der Körperelemente ein linearer Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen (s. a. Glg. 3.3). Die Beziehung (4.1) wird nun mit der virtuellen Verschiebung skalar multipliziert und das Ergebnis über den ganzen Körper D integriert.

$$\int_D \sigma_{ik,i} \delta u_k dV = 0 \quad (4.3)$$

Eine Umformung der virtuellen Arbeit (4.3) ergibt

$$\int_D (\sigma_{ik} \delta u_k)_{,i} dV - \int_D \sigma_{ik} (\delta u_k)_{,i} dV = 0 . \quad (4.4)$$

Auf das erste Integral von (4.4) wird der Integralsatz von Gauß-Green angewendet. Es folgt mit (3.3) für die virtuelle Arbeit

$$-\int_D \sigma_{ik} \delta \epsilon_{ik} dV + \int_{\partial D_1} p_k \delta u_k dA = 0 . \quad (4.5)$$

Hierbei wurde berücksichtigt, daß δu_k auf dem Rand ∂D_2 zu Null wird. In die obige Gleichung wird nun das Formänderungsgesetz (3.17) eingesetzt. Es wird die Beziehung

$$m^* = - \frac{1+\nu}{1-\nu} 2G \alpha \quad (4.6)$$

vereinbart, so daß aus (4.5) die Gleichung

$$\begin{aligned} & - \int_D \left[2G \left(\epsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{jj} \delta_{ik} \right) + m^* \vartheta \delta_{ik} \right] \delta \epsilon_{ik} dV \\ & + \int_{\partial D_1} p_k \delta u_k dA = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

folgt.

Aus (4.7) folgt das Funktional

$$\begin{aligned} \Phi_E = & - \int_D \left[G \left(\epsilon_{ik} \epsilon_{ki} + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{kk}^2 \right) + m^* \vartheta \epsilon_{kk} \right] dV \\ & + \int_{\partial D_1} p_k u_k dA . \end{aligned} \quad (4.8)$$

In diesem Funktional ist die Temperaturfunktion $\vartheta(\underline{x}, t)$ als bekannt voraus zu setzen und wird nach dem Prinzip der virtuellen Quellenenergie (Kapitel 2) bestimmt. Der Integralausdruck

$$\int_D m^* \vartheta \varepsilon_{kk} dV \quad (4.9)$$

stellt den Unterschied zur Verzerrungsenergie der rein elastischen Formänderung dar. Die Extremaleigenschaften des Funktionals (4.8) gestatten eine vorteilhafte numerische Lösung (s. Abschnitt 5.3).

5. Ein FEM-Programm zur Thermoelastizität

5.1 Grundsätzliche Bemerkungen

Die Methode der finiten Elemente ist ein Näherungsverfahren, das insbesondere im Bereich der Ingenieurwissenschaften schon sehr weit entwickelt ist. Ein Hauptgrund für die weite Verbreitung dieses schon um 1940 in der Stabstatik angewendeten Verfahrens liegt in der Möglichkeit begründet, die Vorgänge in einem beliebig geformten Körper sehr wirklichkeitsnah beschreiben zu können. Obwohl die Beschränkung des Anwendungsgebietes bei komplexen Körper- und Belastungsstrukturen durch die schnelle Entwicklung der elektronischen Rechnersysteme immer geringer wird, kommt es nach wie vor in großem Maße auf eine theoretisch gut begründete Grundlage der Methode an. Diese Grundlage bilden im Bereich der FEM vor allem die Variationsprinzipien bzw. die Verfahren, die mittelbar aus der Methode der gewichteten Residuen ableitbar sind. Während

die klassischen Variationsmethoden nach Ritz, Galerkin und Trefftz (s. a. Th. Lehmann [34]) mit Basisfunktionen arbeiten, die nahezu im gesamten Körper von Null verschieden sind, ist beim FEM-Verfahren durch die besondere Art der Körperaufteilung eine bessere Anpassung der Interpolationsfunktionen an die Vorgänge im Körper möglich. Die Nähe der FEM zu den Variationsprinzipien zeigt sich z. B. darin, daß die Herleitung aus der verallgemeinerten Methode nach Ritz möglich ist (s. a. Kolář u. a. [36]). Neben den klassischen Extremal-Variationsprinzipien können auch andere Integralprinzipien wie z. B. die Methode der gewichteten Residuen (s. a. Schmid [37]) oder die sogenannten Quasi-Variationsprinzipien als Grundlage dienen.

Auf die durch die Numerik des Lösungsalgorithmus bedingten Schwierigkeiten und Instabilitäten sei hier nur hingewiesen, da eine genauere Betrachtung nur bei größeren Systemen erforderlich ist. Wesentlich wichtiger ist jedoch die Frage nach der Konvergenz und der Zulässigkeit der Formfunktionen bzw. der Näherungsfunktionen. Diese Frage ist z. B. von O. C. Zienkiewicz in [38] ausführlich behandelt worden. Die wesentlichen Bedingungen für ein gutes Konvergenzverhalten sind die folgenden:

1. Die gewählte Näherungsfunktion hat mindestens die gleiche Ordnung "n" wie die Funktionen im Funktional, d. h. sie ist stetig und n-mal stetig differenzierbar.
2. Zwischen den Elementen dürfen keine Unstetigkeiten bis zur (n-1)-ten Ableitung auftreten.
3. Innerhalb eines Elementes muß eine konstante, endliche n-te Ableitung möglich sein.

Das 1. Kriterium, auch als Vollständigkeit bekannt, ist die wichtigste Forderung und einfach durch ein Polynom in den entsprechenden Variablen zu erfüllen. Wesentlich schwieriger und aufwendiger ist die Erfüllung des 2. Kriteriums, falls die Stetigkeit der ersten oder einer höheren Ableitung gefordert wird. So ist grundsätzlich bei einem Dreieck-Element zur Stetigkeit der 1. Ableitung eine Polynomfunktion der 5. Ordnung notwendig. Dies würde eine unverhältnismäßig hohe Anzahl von Elementfreiheitsgraden bedeuten. Da dies ein Problem ist, das in den nachfolgenden Kapiteln für die dreidimensionalen Probleme auftritt, sei noch erwähnt, daß gerade zu diesem Thema relativ viele Untersuchungen angestellt wurden. Der Erfolg war jedoch mehr praktischer Natur. So hat z. B. Morley in [39] gezeigt, daß für das Plattenproblem bei geeigneter Wahl der Freiheitsgrade bei einem Polynom der 2. Ordnung trotz der Unstetigkeiten Konvergenz auftritt. Interessant sind in diesem Zusammenhang die Versuche, die mit verschiedenen konformen und nichtkonformen Plattenelementen durchgeführt wurden und in [38] dargestellt sind. Obwohl diese Ergebnisse nicht allgemein auf andere Probleme übertragbar sind, wird hierdurch bewiesen, daß eine Verletzung der Kompatibilitätsbedingungen nicht unbedingt zur Divergenz oder falschen Ergebnissen führen muß. Eine interessante Lösung mit Hilfe der Methode von Galerkin ist von O. C. Zienkiewicz und C. J. Parekh in [40] für isoparametrische Elemente entwickelt worden. In dieser Arbeit werden die Knotentemperaturen als Funktion der Zeit betrachtet. Die 3. Bedingung ist natürlich auf jeden Fall erfüllt, falls man genau ein Polynom der Ordnung "n" einsetzt. Bei Funktionen höherer Ordnung ist die 3. Bedingung jedoch nicht immer erfüllt. Hierbei ist die 3. Bedingung in der schwächeren Form als ein Kriterium für die Güte des Konvergenzverhaltens zu verstehen. Es bleibt noch zu erwähnen, daß das vorliegende Raum-Zeitproblem im allgemeinen ein vierdimensionales Problem ist, das sich im einfachsten Fall der eindimensionalen Körper zweidimensional gestaltet.

5.2 Das dreidimensionale Problem der instationären Wärmeleitung

5.2.1 Zur Geometrie eines Dreieck-Elementes

Sowohl für die thermoelastischen Verformungen wie auch für die Wärmeleitung werden Dreieck-Elemente verwendet. Weiterhin wird eine Beschränkung auf ebene Probleme durchgeführt. Der Einsatz von Rechteck-Elementen bietet sich dann an, wenn grundsätzlich in kartesischen Koordinaten gerechnet werden soll. Andererseits haben Dreieck-Elemente den großen Vorteil, daß sie eine beliebige Körperkontur leichter abbilden können. Da im folgenden Dreieck-Elemente verwendet werden, ist es sinnvoll für das Element mit Flächenkoordinaten zu rechnen.

Zur Festlegung der Geometrie werden die drei Eckpunkte des Dreiecks benutzt.

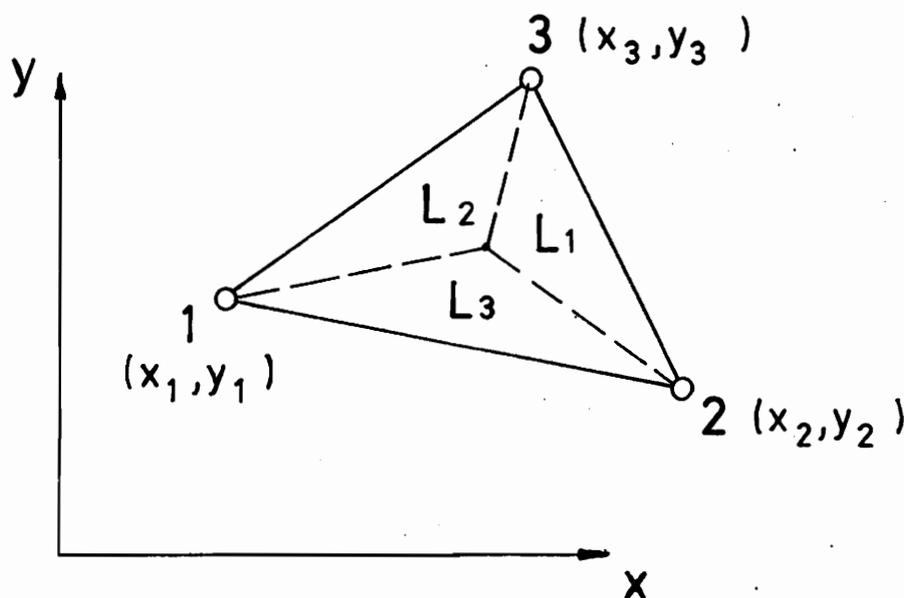


Abb. 5.1 Dreieck-Element mit Flächen- und Global-Koordinaten und lokaler Knotennummerierung

Gemäß Abb. 5.1 gilt für die Beziehungen zwischen kartesischen Koordinaten und Flächen-Koordinaten

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3$$

(5.1)

Außerdem gilt

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

(5.2)

Die Gleichungen (5.1) werden mit Hilfe der Gleichung (5.2) zu

$$L_1(x,y) = \frac{1}{2A} (a_1 + b_1 x + c_1 y)$$

$$L_2(x,y) = \frac{1}{2A} (a_2 + b_2 x + c_2 y)$$

(5.3)

$$L_3(x,y) = \frac{1}{2A} (a_3 + b_3 x + c_3 y)$$

umgestellt. Die Koeffizienten a_i, b_i und c_i sind durch

$$a_1 = y_3 x_2 - y_2 x_3$$

$$b_1 = y_2 - y_3$$

(5.4)

$$c_1 = x_3 - x_2$$

(Zyklische Vertauschung der Indizes ergibt die restlichen Konstanten) bestimmt. Die Fläche "A" des Dreiecks 1 - 2 - 3 wird zu

$$A = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3) \quad (5.5)$$

ermittelt. In der späteren Rechnung erscheinen die partiellen Ableitungen der Flächenkoordinaten nach den kartesischen Koordinaten. Hierfür gilt

$$\frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A}$$

(i = 1, 2 u. 3)

$$\frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A} \cdot$$

(5.6)

5.2.2 Bestimmung der Formfunktionen für die Temperaturfunktion

In dem Funktional Φ (Glg. 2.1) für die instationäre Wärmeleitung tritt die zweite Ortsableitung und die erste Ableitung nach der Zeit auf. Beachtet man die in Abschnitt 5.1 beschriebenen Bedingungen für ein gutes Konvergenzverhalten, so müßte ein Polynom der 5ten Ordnung gewählt werden. Durch eine geschickte Formulierung der Neigungsbedingung kann man die Zahl der Freiheitsgrade auf achtzehn reduzieren. In dieser Arbeit wird jedoch ein anderer Weg beschritten. Grundsätzlich wird ein quadratisches Polynom verwendet. Es werden die folgenden drei Modelle betrachtet (Abb. 5.2), wobei die notwendige Zeitdiskretisierung später vorgenommen wird.

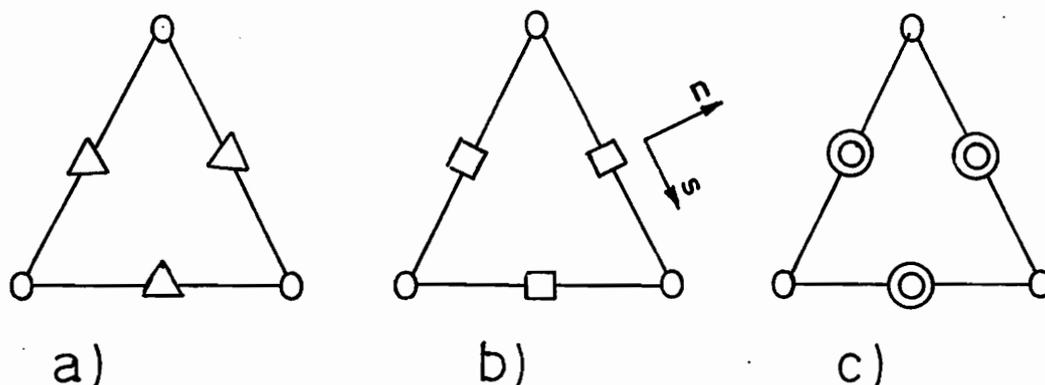


Abb. 5.2 Dreieck-Elemente mit nichtkonformen Formfunktionen

Freiheitsgrade

$$o [v] ; \triangle \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] ; \square \left[\int_l \frac{\partial v}{\partial n} ds \right] ; \odot [v, \Lambda]$$

Alle drei Dreieck-Modelle erfüllen zwar mit dem zugrundeliegenden quadratischen Polynom die 1. Bedingung nach Vollständigkeit und die 3. Bedingung nach einer konstanten 2. Ableitung, jedoch verletzen die Dreiecke a) und b) die Kompatibilitätsbedingungen. Energetisch gesehen scheint das Element b) durch die integrale Stetigkeit der Normalenableitung bzw. der Wärmestromdichte eine brauchbare Lösung zu sein. Um dies zu überprüfen, wurden umfangreiche Untersuchungen durchgeführt. Die hierbei erhaltenen Resultate lassen den Schluß zu, daß weder das Element-Modell a) noch b) zur Darstellung des Funktionals im diskretisierten Raum geeignet ist. Die Verletzung der Kompatibilitätsbedingungen durch die Funktion selbst hat zu große Auswirkungen auf das Konvergenzverhalten. Auf eine Darstellung der Formfunktionen und deren Einarbeitung in das Funktional (2.1) wird für die Elemente a) und b) verzichtet, da das Ergebnis negativ ist.

Eindeutig positiv sind jedoch alle Rechnungen mit dem Element-Modell c) verlaufen. Der entscheidende Unterschied zu den anderen Modellen besteht darin, daß die Funktion selbst die Kompatibilitätsbedingungen erfüllt und die Stetigkeit der 1. Ableitung näherungsweise durch eine zusätzliche Zwangsbedingung für den Wärmestrom gesichert ist. Dies wird in der Abb. 5.2 durch den Lagrange'schen Parameter Λ angedeutet.

Bevor die Formfunktionen bestimmt werden, wird das Funktional (2.1) um die zusätzliche Bedingung zur Zeit T

$$[Q_n^+ + Q_n^-]_T = 0 \quad (5.7)$$

mit Hilfe des Lagrange'schen Multiplikators erweitert. Hierbei gilt für den Wärmestrom Q_n über eine Elementgrenze des Elementes "+" bzw. "-"

$$Q_n = \int_{\partial D_i} q_n \, dA . \quad (5.8)$$

Mit Glg. (1.1) folgt aus (5.8)

$$Q_n = - \int_{\partial D_i} \lambda \nabla \vartheta \cdot \underline{n} \, dA \quad (5.9)$$

und damit wird (2.1) unter der Annahme $\dot{f} = 0$ zu

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_D |\dot{\vartheta}|^2 \, dV \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_D a^2 |\Delta \vartheta|^2 \, dV \, dt + \frac{1}{2} \int_D a |\nabla \vartheta|_T^2 \, dV \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_D a |\nabla \vartheta|_0^2 \, dV - \int_0^T \int_D \frac{1}{g_0 c_p} \dot{R} (\dot{\vartheta} - a \Delta \vartheta) \, dV \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\partial D_2} \kappa q_n \dot{\vartheta} \, dA \, dt + \sum_k^k \Lambda_k \left[\int_{\partial D^k} (\lambda^+ \nabla \vartheta^+ \cdot \underline{n}^+ + \lambda^- \nabla \vartheta^- \cdot \underline{n}^-) \, dA \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

In dem obigen Funktional ist die thermodynamische Temperatur durch die empirische Temperatur ϑ ersetzt. Dies geschieht aus praktischen Gesichtspunkten und ist in diesem Fall ohne weitere Bedeutung. Die Summe über die Lagrange'schen Zusatzbedingungen erstreckt sich auf alle inneren Elementseiten. D. h., die Lagrange'schen Parameter sind als knotenlose Freiheitsgrade den inneren Elementseiten zugeordnet. Das obige Anfangs-Randwertproblem wird bezüglich der finiten Elemente im Raum und der Zeit diskretisiert. Hierzu wird zunächst ein Intervall von $t = 0$ bis $t = T$ betrachtet. Bezeichnet man mit $\{\vartheta^0\}$ das vorgegebene Anfangstemperatursystem bei $t = 0$ und mit $\{\vartheta^1\}$ das gesuchte Temperatursystem bei $t = T$, so folgt mit einer linearen Interpolation in Matrizenform

$$\{\vartheta\} = \{N_t^0, N_t^1\} \begin{bmatrix} \{\vartheta^0\} \\ \{\vartheta^1\} \end{bmatrix} .$$

(5.11)

Hierbei sind N_t^0 und N_t^1 geeignete Formfunktionen, die später bestimmt werden. Da das Funktional (5.10) auch als Summe aller Elementintegrale geschrieben werden kann, genügt eine Definition der Näherungsfunktion für jeweils ein Element. Wie schon angedeutet, wird ein quadratisches Polynom in den Temperaturen ϑ als Näherungsfunktion bestimmt. Allgemein gelte für die Temperatur ϑ in einem Element mit den Flächenkoordinaten L_i

$$\vartheta = \beta_1 L_1 L_3 + \beta_2 L_1 L_2 + \beta_3 L_2 L_3 + \beta_4 L_3^2 + \beta_5 L_1^2 + \beta_6 L_2^2 .$$

(5.12)

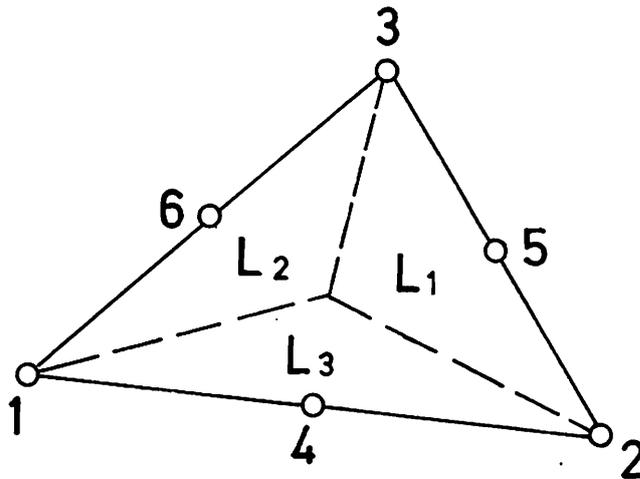


Abb. 5.3 Dreieck-Elemente mit lokaler Knotennummerierung

Wendet man (5.12) auf das Element (Abb. 5.3) an, so folgt für die Konstanten $\beta_1 - \beta_6$

$$\beta_1 = 4 \vartheta_6 - \vartheta_3 - \vartheta_1$$

$$\beta_2 = 4 \vartheta_4 - \vartheta_1 - \vartheta_2$$

$$\beta_3 = 4 \vartheta_5 - \vartheta_3 - \vartheta_2$$

$$\beta_4 = \vartheta_3$$

$$\beta_5 = \vartheta_1$$

$$\beta_6 = \vartheta_2$$

(5.13)

$\vartheta_1 - \vartheta_6$ sind die entsprechenden Knotentemperaturen. Aus (5.12) folgt mit (5.13) und der Beziehung

$$\vartheta = N_i \vartheta_i \quad (5.14)$$

für die Formfunktionen N_i

$$N_i = \left\{ L_1^2 - L_1 L_3 - L_1 L_2; L_2^2 - L_1 L_2 - L_2 L_3; \right. \\ \left. L_3^2 - L_1 L_3 - L_2 L_3; 4 L_1 L_2; 4 L_2 L_3; 4 L_1 L_3 \right\}. \quad (5.15)$$

Damit sind die Formfunktionen bestimmt und es ist offensichtlich, daß es sich um subparametrische Elemente handelt. Die Beziehung (5.14) gilt natürlich auch zur Zeit $t = 0$ und $t = T$ und wird daher in die Matrizenform (5.11) eingesetzt. Da die Funktion nun ausschließlich auf jeweils ein Element bezogen ist, gilt für die Temperatur im Element

$$\vartheta = \{ N_t^0, N_t^1 \} \begin{bmatrix} N_i, 0 \\ 0, N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_i^0 \\ \vartheta_i^1 \end{bmatrix} .$$

$$(i = 1-6)$$

$$(5.16)$$

In (5.16) bzw. (5.11) sind noch die Formfunktionen N_t^0 und N_t^1 zu bestimmen. Hierzu werden mit Abb. 5.4 die folgenden Beziehungen aufgestellt.

$$N_t^0 = \frac{T-t}{T} ; N_t^1 = \frac{t}{T} \quad (5.17)$$

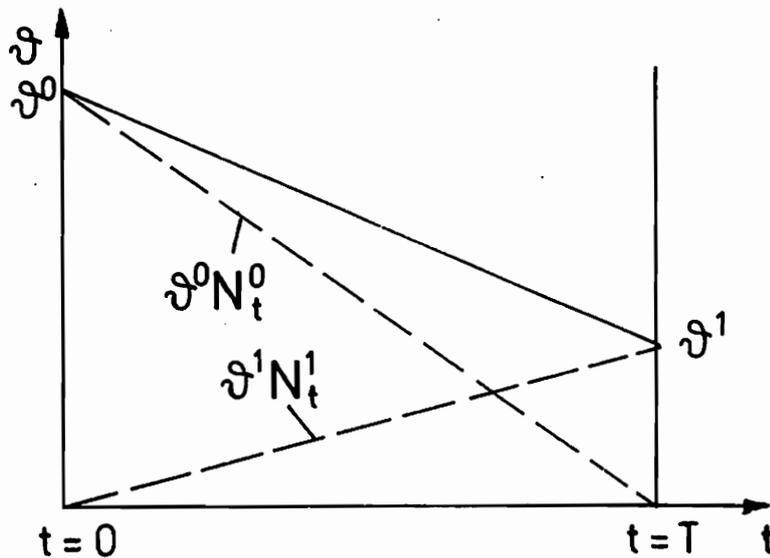


Abb. 5.4 Zur Interpolation im Zeitbereich

Wählt man aufwendigere Zeitelemente bzw. Formfunktionen, so steigt zwar die zulässige Schrittweite, gleichzeitig erhöht sich jedoch die Zahl der zu lösenden Gleichungen. Die Bestimmung einer optimalen Formfunktion sowie einer optimalen Schrittweite kann nur im Zusammenhang mit bestimmten Optimierungsparametern durchgeführt werden und kann nicht ein Gegenstand dieser Arbeit sein.

5.2.3 Die Bestimmungsgleichungen des Anfang-Randwertproblems

5.2.3.1 Die Anfangs- und Randbedingungen der instationären Wärmeleitung

Als Anfangsbedingungen sind lediglich alle Knotentemperaturen $\{\vartheta^0\}$ am Anfang eines Zeitschrittes vorzugeben. Bei den Randbedingungen sind drei Arten zu unterscheiden. Zunächst wird die Randbedingung der 1. Art betrachtet. Sie lautet mit der vorgegebenen Funktion

$$\vartheta(\underline{x},t)|_{\partial D_1} = f(\underline{x},t) . \quad (5.18)$$

Physikalisch sinnvoll ist diese Bedingung, falls ein sehr guter Wärmekontakt zwischen zwei Körpern bzw. zwischen einem Körper und einem Fluid vorhanden ist und eines der beiden Kontaktmaterialien eine Temperatur besitzt, die nicht vom anderen Kontaktmaterial beeinflusst wird. Die Erfüllung dieser Randbedingung wird dadurch gesichert, daß die entsprechenden Knotentemperaturen in den Bestimmungsgleichungen als bekannte Größen angesehen werden. Im Falle, daß $f(\underline{x},t)$ nur eine Funktion des Ortes ist, reicht die gewählte lineare Zeitinterpolation aus, um $f(\underline{x},t)$ darzustellen. Im allgemeinen Fall muß eine numerische oder, falls möglich, eine exakte Zeitintegration für $f(\underline{x},t)$ durchgeführt werden.

Eine 2. Art der Randbedingung ist die schon verwendete Neumann'sche Bedingung. Hierbei ist also die Wärmestromdichte $Q_n(\underline{x},t)$ auf dem Rand vorgegeben. Diese Bedingung kann z. B. bei der solaren Einstrahlung auf einen Körper oder einer Strahlungsheizung verwirklicht werden. Ebenso kann diese

Bedingung zur Annäherung der 3. Art der Randbedingung dienen. In den ausgearbeiteten FEM-Programmen wird die Randbedingung der 3. Art berücksichtigt. Jedoch wird durch eine Anpassung der Gleichung der 3. Art zum jeweiligen Zeitschrittanfang die Randwertaufgabe der 3. Art auf eine der 2. Art zurückgeführt.

Eine Erweiterung hinsichtlich der thermischen Belastung auf die Ränder parallel zur (x - y)-Ebene wird in Abschnitt 5.2.3.3 durchgeführt.

5.2.3.2 Herleitung des Gleichungssystems aus der ersten Variation des Funktionals

Setzt man die Näherungsfunktion (5.16) in das Funktional (5.10) ein, so folgt aus der notwendigen Bedingung für ein Extremum das folgende Gleichungssystem aus der ersten Variation von (5.10) nach den Knotentemperaturen ϑ_i und den Lagrange'schen Faktoren Λ_k . Dieser Lösungsweg mit Hilfe eines simultanen Gleichungssystems wird einer direkten Minimierung des Funktionals vorgezogen, da sich diese erst bei nichtlinearen und sehr großen Systemen vorteilhaft anbietet.

Für die erste Variation gilt

$$\delta \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_m} \delta \vartheta_m + \frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda_m} \delta \Lambda_m . \quad (5.19)$$

Da die Variationen $\delta \vartheta_m$ und $\delta \Lambda_m$ beliebig sind, erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_m} = 0$$

und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda_m} = 0 \quad (5.20)$$

Dies bedeutet im einzelnen mit elementweise konstanten Werten von a , λ , ϱ_0 und C_p

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_m} = & \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Elemente}}} \left[\underbrace{\int_0^T \int_{D_e} \dot{\vartheta} \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial \vartheta_m} dV dt}_{IT 1} \right. \\ & + \underbrace{a^2 \int_0^T \int_{D_e} \Delta \vartheta \frac{\partial (\Delta \vartheta)}{\partial \vartheta_m} dV dt}_{IT 2} + \underbrace{\int_{D_e} \nabla \vartheta \Big|_T \frac{\partial (\nabla \vartheta)_T}{\partial \vartheta_m} dV}_{IT 3} \quad (5.21) \\ & - \underbrace{\kappa \int_0^T \int_{D_e} \dot{R} \left(\frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial \vartheta_m} - a \frac{\partial (\Delta \vartheta)}{\partial \vartheta_m} \right) dV dt}_{IT 4} + \underbrace{\kappa \int_0^T \int_{\partial D_e} q_n \frac{\partial \dot{\vartheta}}{\partial \vartheta_m} dA dt}_{IT 6} \\ & + \underbrace{\sum_k \Lambda_k \left[\int_{\partial D^k} \lambda^+ \frac{\partial (\nabla \vartheta \cdot \underline{n}^+) + \lambda^- \frac{\partial (\nabla \vartheta \cdot \underline{n}^-)}{\partial \vartheta_m} \right]_T dA}_{IT 7} = 0 \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Lambda_m} = \int_{\partial D^m} \underbrace{[\lambda^+ \nabla \vartheta^+ \cdot \underline{n}^+ + \lambda^- \nabla \vartheta^- \cdot \underline{n}^-]}_{IT \ 8} dA = 0. \quad (5.22)$$

In der weiteren Rechnung werden die zeitlichen und geometrischen Ableitungen von (5.16) benötigt. Für die zeitliche Ableitung folgt mit (5.17) bzw.

$$\dot{N}_t^0 = -\frac{1}{T}; \quad \dot{N}_t^1 = \frac{1}{T} \quad (5.23)$$

die Gleichung

$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{T} \{-1, 1\} \begin{bmatrix} N_i & , & 0 \\ 0 & , & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_i^0 \\ \vartheta_i^1 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Weiterhin wird der Gradient der Temperatur zu

$$\nabla \vartheta = \vartheta_{,x} \underline{e}_x + \vartheta_{,y} \underline{e}_y \quad (5.25)$$

geschrieben. Benötigt werden also die partiellen Ableitungen nach x und y . Diese werden mit (5.6) wie folgt formuliert

$$\vartheta_{,x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{1}{2A} b_i \vartheta_{,L_i}$$

$$\vartheta_{,y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{1}{2A} c_i \vartheta_{,L_i} . \quad (5.26)$$

Mit (5.14) und (5.15) folgen aus (5.26) nach einiger Rechnung die Gleichungen

$$\begin{aligned} \vartheta_{,x} = \frac{1}{2A} \{ & [(2b_1 - b_2 - b_3)L_1 - b_1L_3 - b_1L_2] \vartheta_1 \\ & + [(2b_2 - b_3 - b_1)L_2 - b_2L_3 - b_2L_1] \vartheta_2 \\ & + [(2b_3 - b_1 - b_2)L_3 - b_3L_2 - b_3L_1] \vartheta_3 \\ & + 4[b_1L_2 + b_2L_1] \vartheta_4 + 4[b_2L_3 + b_3L_2] \vartheta_5 \\ & + 4[b_1L_3 + b_3L_1] \vartheta_6 \} \end{aligned} \quad (5.27)$$

oder in einer kürzeren Form

$$\vartheta_{,x} = \frac{1}{2A} N_i^x \vartheta_i . \quad (5.28)$$

Tauscht man in (5.27) die Konstanten b_i durch c_i aus, so erhält man die partielle Ableitung der Temperatur nach der y -Koordinate, d. h.

$$\vartheta_{,y} = \frac{1}{2A} N_i^y \vartheta_i . \quad (5.29)$$

Als nächstes wird der Laplace-Operator auf ϑ angewendet.

$$\Delta \vartheta = \vartheta_{,xx} + \vartheta_{,yy} . \quad (5.30)$$

Im einzelnen gilt für die partiellen Ableitungen analog zu (5.26)

$$\vartheta_{,xx} = \frac{\partial \vartheta_{,x}}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{1}{2A} b_i (\vartheta_{,x})_{,L_i}$$

$$\vartheta_{,yy} = \frac{\partial \vartheta_{,y}}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{1}{2A} c_i (\vartheta_{,y})_{,L_i} . \quad (5.31)$$

Hieraus folgt mit Hilfe von (5.27), (5.28) und (5.29) nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned} \vartheta_{,xx} = \frac{1}{2A^2} \{ & [b_1^2 - b_1 b_2 - b_1 b_3] \vartheta_1 + [b_2^2 - b_1 b_2 - b_2 b_3] \vartheta_2 \\ & + [b_3^2 - b_1 b_3 - b_2 b_3] \vartheta_3 + 4 b_1 b_2 \vartheta_4 \\ & + 4 b_2 b_3 \vartheta_5 + 4 b_1 b_3 \vartheta_6 \} \end{aligned} \quad (5.32)$$

bzw.

$$\vartheta_{,xx} = \frac{1}{2A^2} N_i^{xx} \vartheta_i \quad (5.33)$$

und nach einem Austausch der Konstanten b_i durch c_i in (5.32)

$$\vartheta_{,yy} = \frac{1}{2A^2} N_i^{yy} \vartheta_i . \quad (5.34)$$

Die Integranden in (5.21) und (5.22) sind nun soweit bestimmt, daß die Integrationen durchgeführt werden können. Dies kann einmal numerisch und zum anderen auch exakt geschehen. Der Vorteil einer exakten Integration liegt in diesem Fall nicht so sehr in der größeren Genauigkeit, sondern vielmehr in der kürzeren Rechenzeit. Grundsätzlich wird daher der exakten Integration der Vorzug gegeben, obwohl dies eine, wenn auch einmalige, sehr zeitintensive Arbeit ist. Eine numerische Integration wird nur dann erforderlich, falls die vorgegebenen Funktionen wie z. B. die Wärmestromdichte auf dem Rand oder die Wärmequellenfunktion im Element von \underline{x} und t abhängen und nicht oder nur sehr schwierig durch die natürlichen Koordinaten L_i auszudrücken sind.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die folgenden Symbole eingeführt. Mit den Beziehungen (5.16), (5.24), (5.28), (5.29), (5.33) und (5.34) folgen aus (5.21) und (5.22)

$$IT_1 = \frac{1}{T} \int_{D_e} N_m \{ -N_i \vartheta_i^0 + N_i \vartheta_i^1 \} dV$$

$$IT_2 = \frac{a^2}{4A^4} T \int_{D_e} \left\{ \frac{1}{6} (N_m^{xx} + N_m^{yy}) (N_i^{xx} + N_i^{yy}) \vartheta_i^0 + \frac{1}{3} (N_m^{xx} + N_m^{yy}) (N_i^{xx} + N_i^{yy}) \vartheta_i^1 \right\} dV$$

$$IT_3 = \frac{a}{4A^2} \int_{D_e} (N_m^x N_i^x + N_m^y N_i^y) \vartheta_i^1 dV$$

(5.35)

Weiterhin folgt mit elementweiser Konstanz der Wärmequellenfunktion \dot{R} und der Wärmestromdichte q

$$IT4 = - \kappa \dot{R} \int_{D_e} N_m dV, \quad IT6 = \kappa q_n \int_{\partial D_e} N_m dA$$

$$IT5 = \frac{\kappa a \dot{R}}{4A} T \int_{D_e} \{ N_m^{xx} + N_m^{yy} \} dV \quad (5.36)$$

$$IT7 = \Lambda_k \frac{1}{2A} \int_{\partial D^k} \{ \lambda^+ (N_m^x n_x + N_m^y n_y)^+ + \lambda^- (N_m^x n_x + N_m^y n_y)^- \} dA$$

$$IT8 = \frac{1}{2A} \int_{\partial D^m} \{ [\lambda (N_i^x n_x + N_i^y n_y) \vartheta_i^1]^+ [\lambda (N_i^x n_x + N_i^y n_y) \vartheta_i^1]^- \} dA .$$

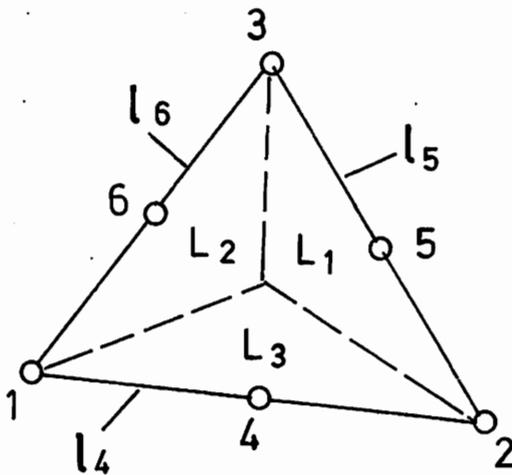
Bevor über den Raum integriert wird, wird das Differential "dA" wie folgt umgewandelt. Es gilt für eine konstante Dicke "h" des Körpers und die Koordinate "S" auf dem Rand eines Elementes

$$dA = h ds .$$

(5.37)

Gemäß Abb. 5.5 folgt aus (5.37) mit $ds_j = l_j dL_i$

$$dA_j = h l_j dL_i \quad (5.38)$$



$$j = 4 \longleftrightarrow i = 3$$

$$j = 5 \longleftrightarrow i = 1$$

$$j = 6 \longleftrightarrow i = 2$$

l_j : = Länge der Seite "j"

(j = 4, 5, 6)

Abb. 5.5 Zur Umrechnung des Differential "dA"

Die Längen der Elementseiten werden mit Hilfe der Beziehungen (5.4) zu

$$l_4 = (b_3^2 + c_3^2)^{0,5}$$

$$l_5 = (b_1^2 + c_1^2)^{0,5}$$

$$l_6 = (b_2^2 + c_2^2)^{0,5} \quad (5.39)$$

ermittelt. Die Integrale in IT1 bis IT8 können nun ausgeführt werden. Hierzu dienen für die Volumenintegrale die Ergebnisse, die K. H. Huebner in [42], S. 144, für verschiedene Integranden dargestellt hat. Die Randintegrale werden direkt integriert. Durch die Kombination der verschiedenen Komponenten der Formfunktionen sind umfangreiche Rechnungen notwendig. Man erhält für die einzelnen Kombinationen die folgenden Ergebnisse:

$$\bar{N}_{11} = \frac{1}{h} \int_{D_e} N_1 N_1 dV = \frac{1}{30} A_e, \bar{N}_{22} = \frac{1}{30} A_e$$

$$\bar{N}_{33} = \frac{1}{30} A_e, \bar{N}_{44} = \frac{8}{45} A_e, \bar{N}_{55} = \frac{8}{45} A_e$$

$$\bar{N}_{66} = \frac{8}{45} A_e, \bar{N}_{12} = -\frac{1}{180} A_e, \bar{N}_{13} = -\frac{1}{180} A_e$$

$$\bar{N}_{14} = 0, \bar{N}_{24} = 0, \bar{N}_{25} = 0, \bar{N}_{26} = -\frac{1}{45} A_e$$

$$\bar{N}_{34} = -\frac{1}{45} A_e, \bar{N}_{35} = 0, \bar{N}_{36} = 0, \bar{N}_{45} = \frac{4}{45} A_e$$

$$\bar{N}_{46} = \frac{4}{45} A_e, \bar{N}_{56} = \frac{4}{45} A_e$$

(5.40)

$$\bar{N}_{15} = -\frac{1}{45} A_e, \bar{N}_{16} = 0, \bar{N}_{23} = -\frac{1}{180} A_e$$

$$\bar{N}_{11}^x = \frac{1}{h} \int_{D_e} N_1^x N_1^x dV = \frac{1}{6} [3b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2(b_2b_3 - b_1b_2 - b_1b_3)] A_e$$

$$\bar{N}_{22}^x = \frac{1}{6} [3b_2^2 + b_1^2 + b_3^2 + 2(b_1b_3 - b_2b_3 - b_1b_2)] A_e$$

$$\bar{N}_{33}^x = \frac{1}{6} [3b_3^2 + b_2^2 + b_1^2 + 2(b_2b_1 - b_1b_3 - b_2b_3)] A_e$$

$$\bar{N}_{44}^x = \frac{8}{3} [b_1^2 + b_2^2 + b_1b_2] A_e, \bar{N}_{55}^x = \frac{8}{3} [b_2^2 + b_3^2 + b_2b_3] A_e$$

$$\bar{N}_{66}^x = \frac{8}{3} [b_3^2 + b_1^2 + b_1b_3] A_e$$

$$\bar{N}_{12}^x = \frac{1}{12} [b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2(b_1b_3 + b_2b_3 - b_1b_2)] A_e$$

$$\bar{N}_{13}^x = \frac{1}{12} [b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2(b_2b_3 + b_1b_2 - b_1b_3)] A_e$$

$$\bar{N}_{14}^x = \frac{1}{3} [b_1b_2 - b_1b_3 - 2b_2b_3 - b_1^2 - 2b_2^2] A_e$$

$$\bar{N}_{15}^x = -\frac{1}{3} [b_2^2 + b_3^2 + 2b_2b_3 + b_1b_3 + b_1b_2] A_e$$

$$\bar{N}_{16}^x = -\frac{1}{3} [b_3^2 + b_2^2 + 2b_2b_3 + b_1b_3 + b_1b_2] A_e$$

$$\bar{N}_{23}^x = \frac{1}{12} [b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2(b_1b_3 + b_1b_2 - b_2b_3)] A_e$$

$$\bar{N}_{24}^x = -\frac{1}{3} [b_2^2 + 2b_1^2 + 2b_3b_1 + b_2b_3 - b_1b_2] A_e$$

$$\bar{N}_{25}^x = \frac{1}{3} [b_2b_3 - 2b_1b_3 - b_1b_2 - b_2^2 - 2b_3^2] A_e$$

$$\bar{N}_{26}^x = -\frac{1}{3} [2b_1b_3 + b_1b_2 + b_2b_3 + b_1^2 + b_3^2] A_e$$

$$\bar{N}_{34}^x = -\frac{1}{3} [b_1b_3 + b_2b_3 + 2b_1b_2 + b_1^2 + b_2^2] A_e$$

$$\bar{N}_{35}^x = -\frac{1}{3} [b_1b_3 + 2b_1b_2 - b_2b_3 + 2b_2^2 + b_3^2] A_e$$

$$\bar{N}_{36}^x = \frac{1}{3} [b_1b_3 - 2b_1b_2 - b_2b_3 - 2b_1^2 - b_3^2] A_e$$

$$\bar{N}_{45}^x = \frac{4}{3} [b_1b_2 + b_2b_3 + 2b_1b_3 + b_2^2] A_e$$

$$\bar{N}_{46}^x = \frac{4}{3} [b_1^2 + b_1 b_3 + 2 b_2 b_3 + b_1 b_2] A_e$$

(5.41)

$$\bar{N}_{56}^x = \frac{4}{3} [b_3^2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 + 2 b_1 b_2] A_e$$

$$\bar{N}_{ij}^y = \bar{N}_{ij}^x, \quad \text{falls } b_k \text{ durch } c_k \text{ ersetzt wird.}$$

$$\text{Mit } \bar{b}_1 = b_1^2 - b_1 b_2 - b_1 b_3 \quad \text{folgt}$$

$$\bar{N}_{11}^{xy} = \frac{1}{h} \int_{D_e} N_1^{xy} N_1^{xy} dV = \bar{b}_1 (c_1^2 - c_2 c_1 - c_3 c_1) A_e$$

$$\bar{N}_{12}^{xy} = \bar{b}_1 (c_2^2 - c_1 c_2 - c_2 c_3) A_e$$

$$\bar{N}_{13}^{xy} = \bar{b}_1 (c_3^2 - c_1 c_3 - c_2 c_3) A_e$$

$$\bar{N}_{14}^{xy} = 4 \bar{b}_1 c_1 c_2 A_e, \quad \bar{N}_{15}^{xy} = 4 \bar{b}_1 c_2 c_3 A_e$$

$$\bar{N}_{16}^{xy} = 4 \bar{b}_1 c_1 c_3 A_e .$$

Mit $\bar{b}_2 = b_2^2 - b_1 b_2 - b_2 b_3$ folgt

$$\bar{N}_{22}^{xy} = \bar{b}_2 (c_2^2 - c_1 c_2 - c_2 c_3) A_e$$

$$\bar{N}_{23}^{xy} = \bar{b}_2 (c_3^2 - c_1 c_3 - c_2 c_3) A_e$$

$$\bar{N}_{24}^{xy} = 4 \bar{b}_2 c_1 c_2 A_e$$

$$\bar{N}_{25}^{xy} = 4 \bar{b}_2 c_2 c_3 A_e$$

$$\bar{N}_{26}^{xy} = 4 \bar{b}_2 c_1 c_3 A_e .$$

Mit $\bar{b}_3 = b_3^2 - b_1 b_3 - b_2 b_3$ folgt

$$\bar{N}_{33}^{xy} = \bar{b}_3 (c_3^2 - c_1 c_3 - c_2 c_3) A_e, \bar{N}_{34}^{xy} = 4 \bar{b}_3 c_1 c_2 A_e$$

$$\bar{N}_{35}^{xy} = 4 \bar{b}_3 c_2 c_3 A_e, \bar{N}_{36}^{xy} = 4 \bar{b}_3 c_1 c_3 A_e$$

$$\bar{N}_{44}^{xy} = 16 b_1 b_2 c_1 c_2 A_e, \bar{N}_{45}^{xy} = 16 b_1 b_2 c_2 c_3 A_e$$

$$\bar{N}_{46}^{xy} = 16 b_1 b_2 c_1 c_3 A_e, \bar{N}_{55}^{xy} = 16 b_2 b_3 c_2 c_3 A_e$$

$$\bar{N}_{56}^{xy} = 16 b_2 b_3 c_1 c_3 A_e, \bar{N}_{66}^{xy} = 16 b_1 b_3 c_1 c_3 A_e .$$

Durch Austauschen der Konstanten erhält man

$$\bar{N}_{mn}^{xx} = \bar{N}_{mn}^{xy} \quad \text{mit } c_j = b_j$$

$$\bar{N}_{mn}^{yy} = \bar{N}_{mn}^{xy} \quad \text{mit } b_j = c_j$$

$$\bar{N}_{mn}^{yx} = \bar{N}_{mn}^{xy} \quad \text{mit } b_j = c_j$$

$$\text{und } c_j = b_j .$$

(5.42)

Mit (5.38) und (5.39) folgt

$$\dot{N}_j^* = \frac{1}{h} \int_{\partial D_e} N_j \, dA = \int_{\partial D_e^k} N_j \, l_k \, dL_i$$

$$L_1 = 0 \Rightarrow k = 5, i = 2, L_3 = 1 - L_2$$

$$[\dot{N}_j^*]^5 = \left\{ 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{2}{3}, 0 \right\} l_5$$

$$L_2 = 0 \Rightarrow k = 6, i = 1, L_3 = 1 - L_1$$

$$[\dot{N}_j^*]^6 = \left\{ \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6}, 0, 0, \frac{2}{3} \right\} l_6$$

$$L_3 = 0 \Rightarrow k = 4, i = 1, L_2 = 1 - L_1$$

$$[\dot{N}_j^*]^4 = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0, \frac{2}{3}, 0, 0 \right\} l_4 \quad (5.43)$$

Analog folgt hierzu mit (5.27) und (5.28)

$$\begin{aligned} \bar{N}_j^* &= \int_{\partial D_e^k} N_j^* l_k dL_i \\ [\bar{N}_j^*]^5 &= \left\{ -b_1, b_2 - \frac{1}{2}(b_3 + b_1), b_3 - \frac{1}{2}(b_1 + b_2), \right. \\ &\quad \left. 2b_1, 2(b_2 + b_3), 2b_1 \right\} l_5 \\ [\bar{N}_j^*]^6 &= \left\{ b_1 - \frac{1}{2}(b_2 + b_3), -b_2, b_3 - \frac{1}{2}(b_1 + b_2), \right. \\ &\quad \left. 2b_2, 2b_2, 2(b_1 + b_3) \right\} l_6 \\ [\bar{N}_j^*]^4 &= \left\{ b_1 - \frac{1}{2}(b_2 + b_3), b_2 - \frac{1}{2}(b_1 + b_3), -b_3, \right. \\ &\quad \left. 2(b_1 + b_2), 2b_3, 2b_3 \right\} l_4 \quad (5.44) \end{aligned}$$

Durch einen Austausch von b_j durch c_j erhält man $[\bar{N}_j^*]^k$.

Mit (5.15) folgt

$$\bar{N}_j = \frac{1}{h} \int_{D_e} N_j dV, [\bar{N}_j] = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\} A_e. \quad (5.45)$$

Mit (5.32) bzw. (5.34) folgt

$$\overset{*}{N}_j^{xy} = \frac{1}{h} \int_{D_e} (N_j^{xx} + N_j^{yy}) dV$$

$$\overset{*}{N}_1^{xy} = (b_1^2 - b_1 b_2 - b_1 b_3 + c_1^2 - c_1 c_2 - c_1 c_3) A_e$$

$$\overset{*}{N}_2^{xy} = (b_2^2 - b_1 b_2 - b_2 b_3 + c_2^2 - c_1 c_2 - c_2 c_3) A_e$$

$$\overset{*}{N}_3^{xy} = (b_3^2 - b_1 b_3 - b_2 b_3 + c_3^2 - c_1 c_3 - c_2 c_3) A_e$$

$$\overset{*}{N}_4^{xy} = 4(b_1 b_2 + c_1 c_2) A_e$$

$$\overset{*}{N}_5^{xy} = 4(b_2 b_3 + c_2 c_3) A_e$$

$$\overset{*}{N}_6^{xy} = 4(b_1 b_3 + c_1 c_3) A_e .$$

(5.46)

Mit den obigen Formeln können die Integrale IT1 bis IT8 ausgewertet werden. Zur Aufstellung des simultanen Gleichungssystems wird die Matrix $Z(I, J)$ eingeführt. Hierdurch geschieht die Zuordnung der lokalen Knotennummer J des Elementes I zur globalen Knotennummer Z .

5.2.3.3 Erweiterung der thermischen Belastung

Die im vorigen Abschnitt angedeutete Erweiterung der thermischen Belastung auf die Ränder parallel zur $(x - y)$ -Ebene bezieht sich auf die Wärmestromdichte $\underline{q}(\underline{x}, t)$. Mit Hilfe der Wärmequellenfunktion $\dot{R}(\underline{x}, t)$ wird gemäß Abb. 5.6 die folgende Beziehung

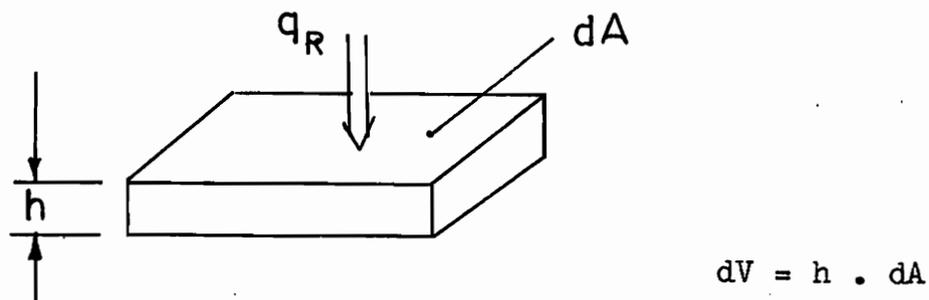


Abb. 5.6 Körperelement mit Wärmestrombelastung

aufgestellt. Eine Betrachtung der Leistungsbilanz ergibt

$$q_R \cdot dA = \dot{R} dV. \quad (5.47)$$

Mit Hilfe der Newton'schen Beziehung wird aus (5.47)

$$\dot{R}_{(\underline{x}, t)} = \frac{1}{h} q_R = \frac{1}{h} \alpha (\vartheta_F - \vartheta_R) \quad (5.48)$$

mit α als Wärmeübergangszahl und ϑ_F als Fluidtemperatur.

Durch diese Beziehung wird die Berücksichtigung der Ab- bzw. Einstrahlung an den großflächigen Seiten der Scheibe sehr leicht möglich.

5.3 Die Anwendung der FEM auf thermoelastische Verformungen

Da gemäß Abschnitt 4.2 das entsprechende Funktional ausschließlich im Raum beschrieben ist und als höchste Ableitung die 1. Ordnung enthält, wird der in diesem Falle ebene Raum durch Dreieckselemente diskretisiert, wie sie in Abschnitt 5.2.1 beschrieben sind. Weiterhin reicht es aus, ein Polynom 1. Grades zur Erfüllung aller in 5.1 beschriebenen Forderungen zur Konformität zu nehmen. Dies bedeutet, daß für die Verschiebungen die folgenden Beziehungen innerhalb eines Elementes gelten.

$$\{ \overset{1}{u} , \overset{2}{u} \} = \{ L_i \overset{1}{u}_i , L_i \overset{2}{u}_i \} \quad (5.49)$$

(Knotennummer $i = 1, 2, 3$)

Vergleicht man die Beziehungen (5.1) mit (5.49) so wird deutlich, daß es sich in diesem Fall um isoparametrische Elemente handelt. In der Gleichung (5.49) stellen die \hat{u}_i^k die Verschiebungen in Richtung der k-Koordinate am Knoten i dar. Es gelten die Entsprechungen $1 \hat{=} x$ und $2 \hat{=} y$. Für die partiellen Ableitungen nach x bzw. y gilt

$$\hat{u}_{,1}^1 = \frac{\partial \hat{u}^1}{\partial L_i} \frac{\partial L_i}{\partial x} = b_i \hat{u}_i^1 \frac{1}{2A_e}$$

$$\hat{u}_{,2}^1 = c_i \hat{u}_i^1 \frac{1}{2A_e}$$

$$\hat{u}_{,1}^2 = b_i \hat{u}_i^2 \frac{1}{2A_e}; \quad \hat{u}_{,2}^2 = c_i \hat{u}_i^2 \frac{1}{2A_e} .$$

(5.50)

Mit den Gleichungen (3.3) und (5.50) folgen die Beziehungen

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_e} \begin{bmatrix} b_1, 0, b_2, 0, b_3, 0 \\ 0, c_1, 0, c_2, 0, c_3 \\ \frac{1}{2}c_1, \frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}c_2, \frac{1}{2}b_2, \frac{1}{2}c_3, \frac{1}{2}b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1^1 \\ \hat{u}_1^2 \\ \hat{u}_2^1 \\ \hat{u}_2^2 \\ \hat{u}_3^1 \\ \hat{u}_3^2 \end{bmatrix} .$$

(5.51)

Eine Variation des Funktionals (4.8) ergibt

$$\delta \Phi_E = \frac{\partial \Phi_E}{\partial \dot{u}_m^k} \delta \dot{u}_m^k. \quad (5.52)$$

Hierbei wird der lokale Knotenverschiebungsvektor zu

$$\{u_j\} = \{\dot{u}_1^1, \dot{u}_1^2, \dot{u}_2^1, \dot{u}_2^2, \dot{u}_3^1, \dot{u}_3^2\} \quad (5.53)$$

geschrieben.

Vereinbart man

$$\{N_{1j}\} = \{L_1, 0, L_2, 0, L_3, 0\}$$

$$\{N_{2j}\} = \{0, L_1, 0, L_2, 0, L_3\}$$

$$\{N'_{1j}\} = \{b_1, 0, b_2, 0, b_3, 0\} \frac{1}{2A_e}$$

$$\{N'_{2j}\} = \{0, b_1, 0, b_2, 0, b_3\} \frac{1}{2A_e}$$

$$\{N_{1j}^*\} = \{N'_{1j}\} \text{ mit } b_i = c_i, \{N_{2j}^*\} = \{N'_{2j}\} \text{ mit } b_i = c_i \quad (5.54)$$

und faßt weiterhin

$$\begin{aligned}
 B_{1k} &= N_{2k}^* + \nu N_{1k}' , & B_{2k} &= N_{1k}' + \nu N_{2k}^* \\
 B_{3k} &= N_{1k}^* + N_{2k}' , & B_{4k} &= N_{2k}' + N_{1k}^* \\
 B_{5k} &= N_{1k}' + N_{2k}^*
 \end{aligned}
 \tag{5.55}$$

zusammen, so folgen die auf jeweils ein Element bezogenen Bestimmungsgleichungen aus (5.52) zu

$$\begin{aligned}
 \int_{D_e} [m^* \vartheta_{(x,t)} B_{5m} + G \left(\frac{2}{1-\nu} (B_{1m} \{ N_{2j}^* \} + B_{2m} \{ N_{1j}' \}) \right. \\
 \left. + B_{3m} \{ N_{1j}^* \} + B_{4m} \{ N_{2j}' \}) \{ u_j \}^T] dV \\
 - \int_{\partial D_e} p_k N_{km} dA = 0 .
 \end{aligned}
 \tag{5.56}$$

Hierbei stellen die p_k die äußeren Spannungen auf dem Rand ∂D_e in Richtung der k -Koordinate dar. Das simultane Gleichungssystem folgt aus einer Summation von (5.56) über alle Elemente.

6 Zum Programmsystem für das dreidimensionale Problem

Fast alle im Rahmen dieser Arbeit entwickelten FEM-Programme sind in "Fortran-IV" geschrieben und auf Band gespeichert. Die in Kapitel 7 beschriebenen Ergebnisse sind mit diesen Programmen auf einem "Modcomp"-Rechner gerechnet worden. Der Programmaufbau ist in erster Linie beispielorientiert und nicht allgemein anwendungsorientiert gestaltet. Eine etwas allgemeinere Gestaltung ist natürlich leicht möglich. Durch eine kurze Eingabe- und Ausgabebeschreibung soll der Leistungsumfang der Programme deutlich werden:

Eingabe

- 1) Physikalische Konstanten und Geometriedaten eines rechteckigen Körpers mit oder ohne eine kreisförmige Aussparung.
- 2) Anfangswerte und Randbedingungen wie Temperaturen, Wärmestromdichten oder Verschiebungen.
- 3) Äußere Belastungen wie Wärmequellen, Spannungen oder Temperaturverteilungen.

Ausgabe

- 1) Temperaturverteilung zur Zeit T
- 2) Verformungen und Spannungen infolge der Temperaturverteilung unter 1) und der äußeren Kräfte.

Alle durchgeführten Rechnungen zeigten ein stabiles Verhalten und ließen die für größere Gleichungssysteme typi-

sche Abhängigkeit der Lösung von der Genauigkeit der Zahlen und Operationen erkennen.

7 Numerische Ergebnisse

7.1 Beispiele zur Wärmeleitung

Das in dieser Arbeit entwickelte FEM-Programm kann grundsätzlich für alle ebenen Wärmeleitungsprobleme eingesetzt werden. Zusätzlich ist auch eine dreidimensionale Belastung durch einen Wärmestrom möglich. Im zweidimensionalen Raum sind die Randbedingungen der 1., 2. und 3. Art sowie Wärmequellen und Wärmesenken berücksichtigt. Aus der Vielzahl der hiermit gegebenen Möglichkeiten werden nur einige wenige, betont einfach gestaltete Beispiele herausgegriffen. Es soll dadurch ausschließlich die Anwendbarkeit und Stabilität des Prinzips der virtuellen Quellenenergie gezeigt werden. Die in Kapitel 2.1 beschriebenen zulässigen Funktionen bedingen z. B. bezüglich der Neumann'schen Randbedingungen eine konstruktive Erfüllung durch entsprechende Temperaturen der randnahen Knotenwerte. Auf diese Erfüllung wurde bei den folgenden Beispielrechnungen verzichtet. Die numerischen Ergebnisse lassen den Schluß zu, daß die Klasse der zulässigen Funktionen bezüglich der Neumann'schen Bedingung erweitert werden können.

Ein erstes Beispiel ist in Abb. 7.1 dargestellt.

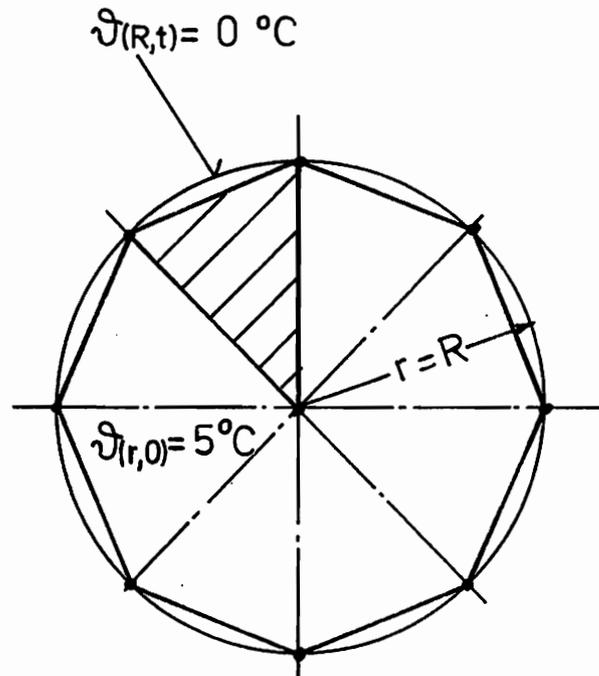


Abb. 7.1 Kreisscheibe ($R = 80 \text{ mm}$, $a = 14,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$) mit einer Randbedingung der 1. Art und der gewählten FEM-Einteilung

Das in Abb. 7.1 skizzierte Problem wird zum Vergleich mit der FEM-Rechnung mit Hilfe der Bessel'schen Funktionen (10 Glieder) nach H. S. Carslaw und J. C. Jaeger [49] direkt gelöst. Einige Ergebnisse sind in Abb. 7.2 aufgetragen. Bei der FEM-Rechnung wurden nur 2 Elemente über den Durchmesser verteilt.

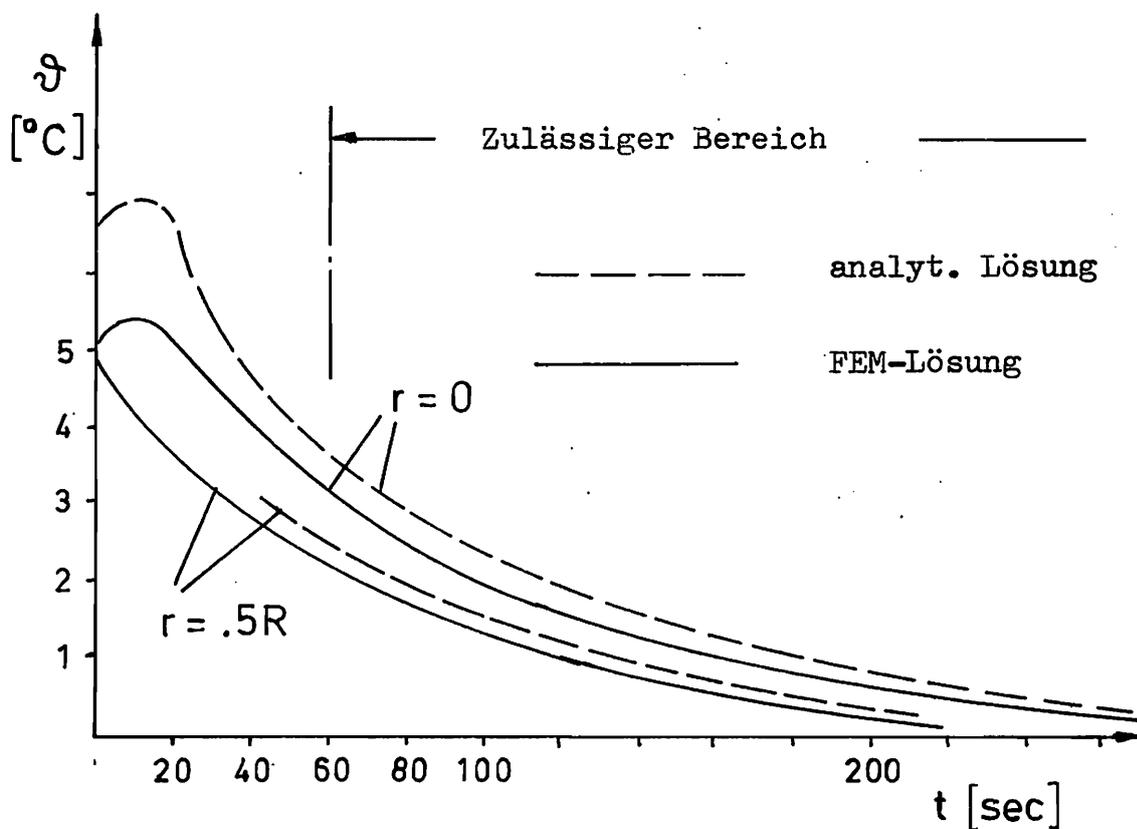
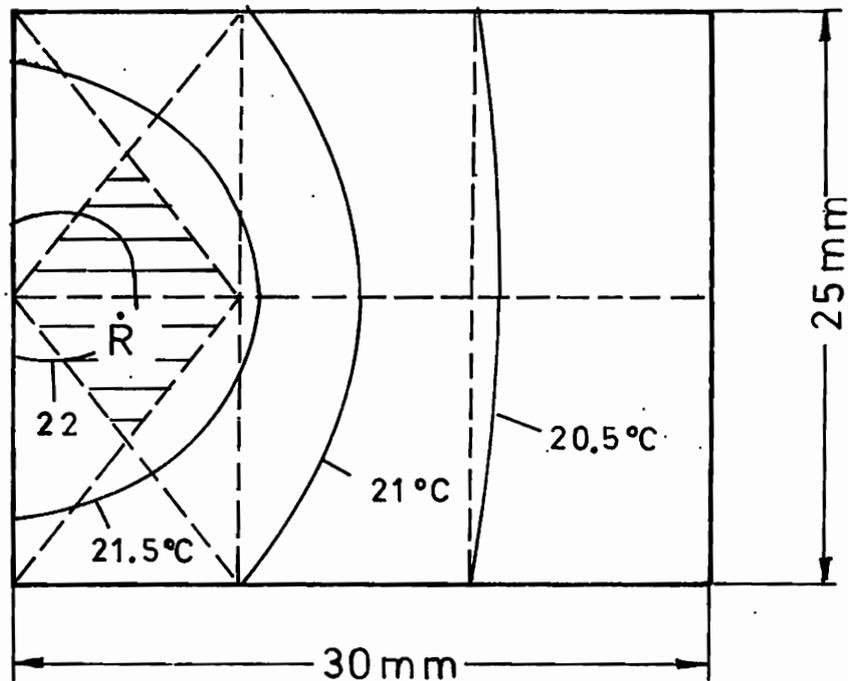


Abb. 7.2 Temperaturverlauf für das in Abb. 7.1 skizzierte Anfangs-Randwertproblem

Der zulässige Bereich gilt in diesem Fall auch für die FEM-Rechnung, da die Einteilung der Elemente relativ grob ist und außerdem die sprunghafte Änderung der Randtemperatur eine Verletzung der Stetigkeitsforderungen darstellt.

Ein weiteres Beispiel zeigt den Einfluß einer inneren Wärmequelle (Abb. 7.3), die im schraffierten Bereich wirksam ist. Es ist der Temperaturverlauf für einige Isothermen zur Zeit $t = 10$ sec eingezeichnet.



$$\begin{aligned}\dot{R} &= 4,19 \cdot 10^{-3} \text{ J/mm}^3 \text{ s} \\ a &= 14,1 \text{ mm}^2/\text{s} \\ \vartheta(x,0) &= 20^\circ \text{ C}\end{aligned}$$

Abb. 7.3 Rechteckige Scheibe mit 24 Elementen und adiabatem Rand. Isothermen zur Zeit $t = 10 \text{ sec}$

Ein praktisch orientiertes Beispiel ist der Wärmeübergang von einem Fluid mit einer Temperatur von 90°C auf einen festen Körper mit 20°C . Bei diesem Problem liegt grundsätzlich eine Randbedingung der 3. Art vor. Da die FEM-Rechnung auf jeden Fall in Zeitschritten vorzunehmen ist, bietet sich die in Abschnitt 5.2.3.1 angedeutete Berücksichtigung durch eine Anpassung der Randbedingung nach jeweils einem Zeitschritt an. Die so erhaltenen Temperaturverläufe werden mit Lösungen verglichen, die mit einer Methode von Duhamel (1833) (s. a. [8]) für den halbunend-

lichen Körper bei zeitabhängigen Randbedingungen erhalten wurden. Diese Rechnung ist vom Verfasser in "Pascal" programmiert und auf einem Mikrocomputer installiert. Vergleichende Betrachtungen sind jedoch hier nur für die ersten Sekunden zulässig, da die endliche Ausdehnung des betrachteten Körpers schon relativ früh eine Wirkung zeigt.

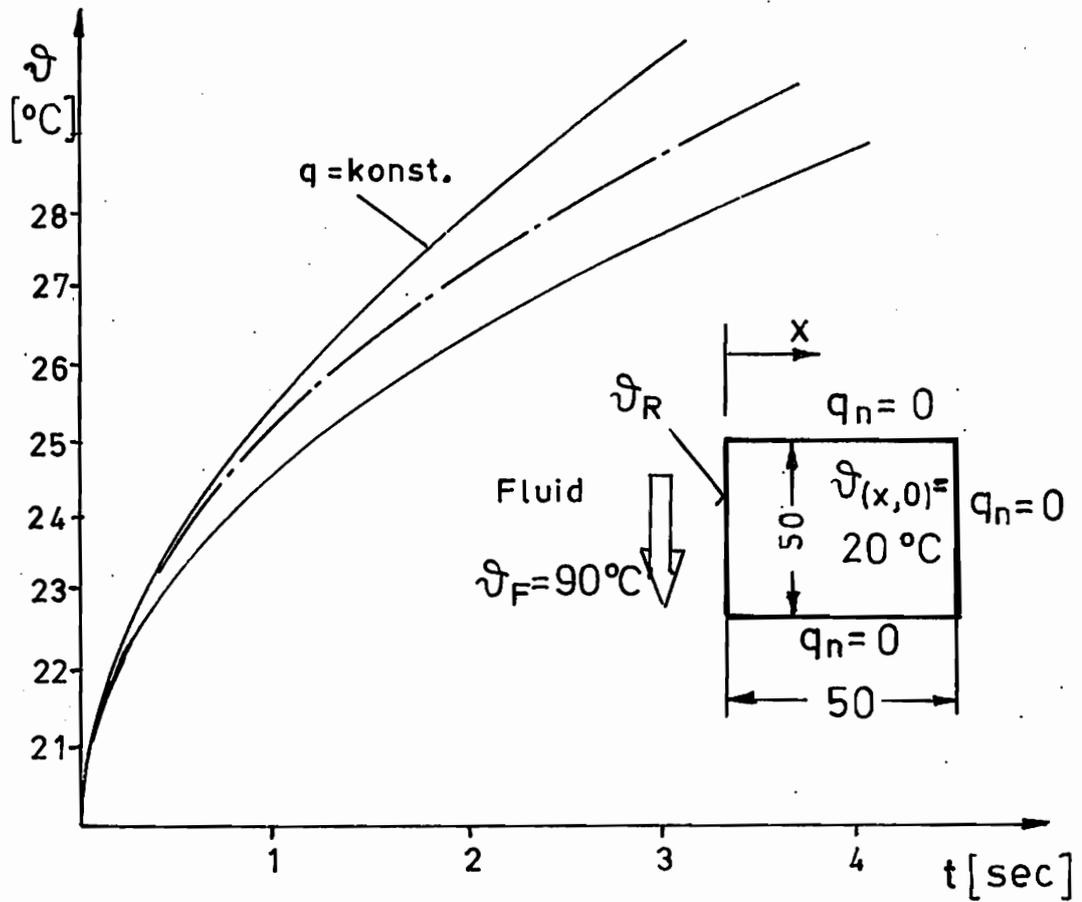


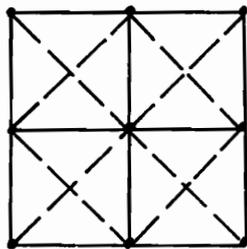
Abb. 7.4 Beispiel zur Randbedingung der 3. Art.

$$\alpha = 1000 \text{ J/sKm}^2, \lambda = 52.3 \text{ J/sKm}$$

$$c_p = 470 \text{ J/kg K}, \rho_0 = 7900 \text{ kg/m}^3$$

———— analytische Lösung
(halbunendlicher Körper)

- - - - - FEM-Lösung



Einteilung des Körpers
in 16 Elemente

Das Temperaturverhalten des gesamten Körpers ist in Abb. 7.5 dargestellt.

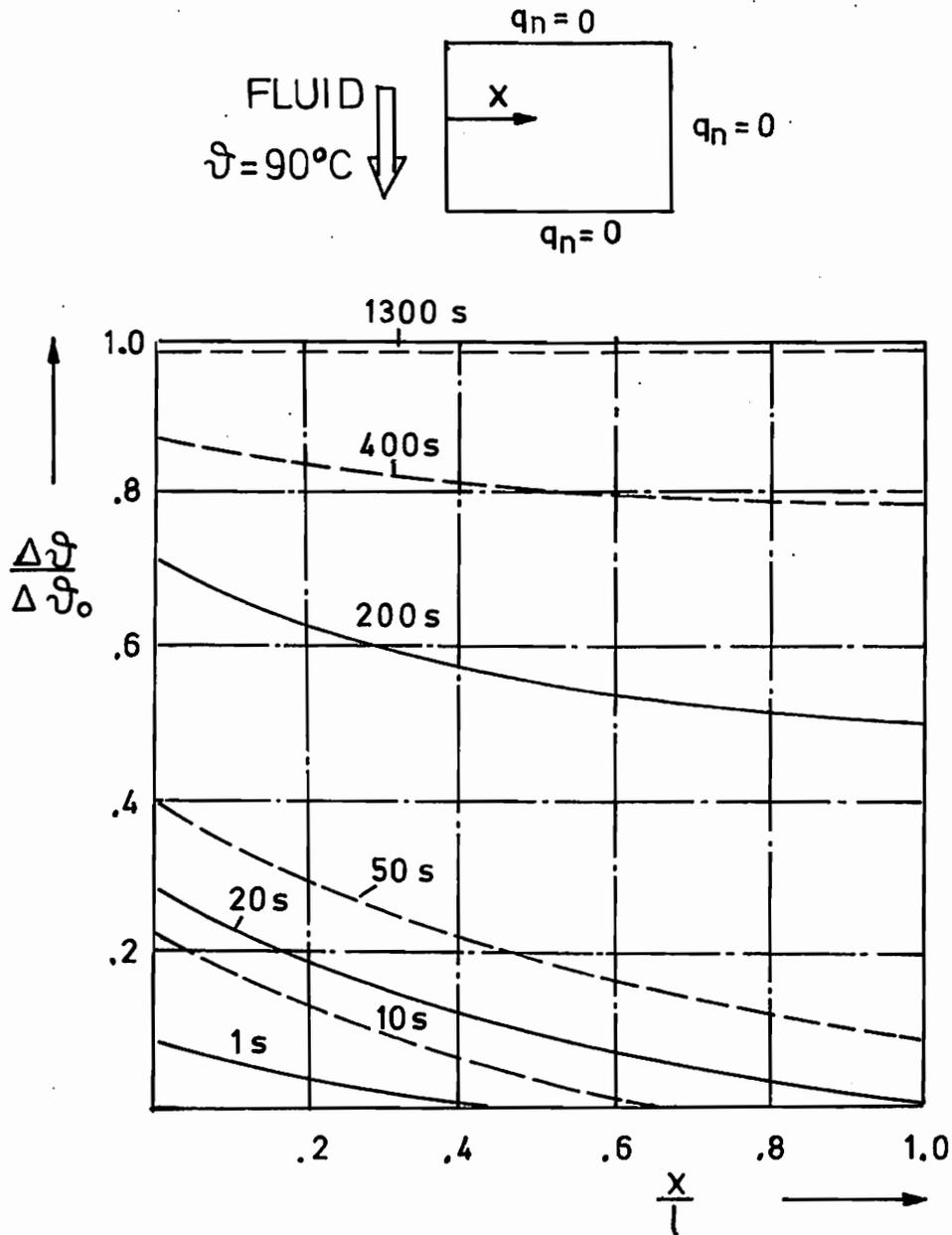


Abb. 7.5 Temperaturprofil zur Randbedingung der 3. Art

$$\Delta\vartheta_0 = 70^\circ\text{C}, \quad \Delta\vartheta = \vartheta(x,t) - 20^\circ\text{C}$$

Im folgenden Beispiel wird die Randbedingung der 1. Art berücksichtigt. Zusätzlich wird der Einfluß der Zeitschrittweite betrachtet.

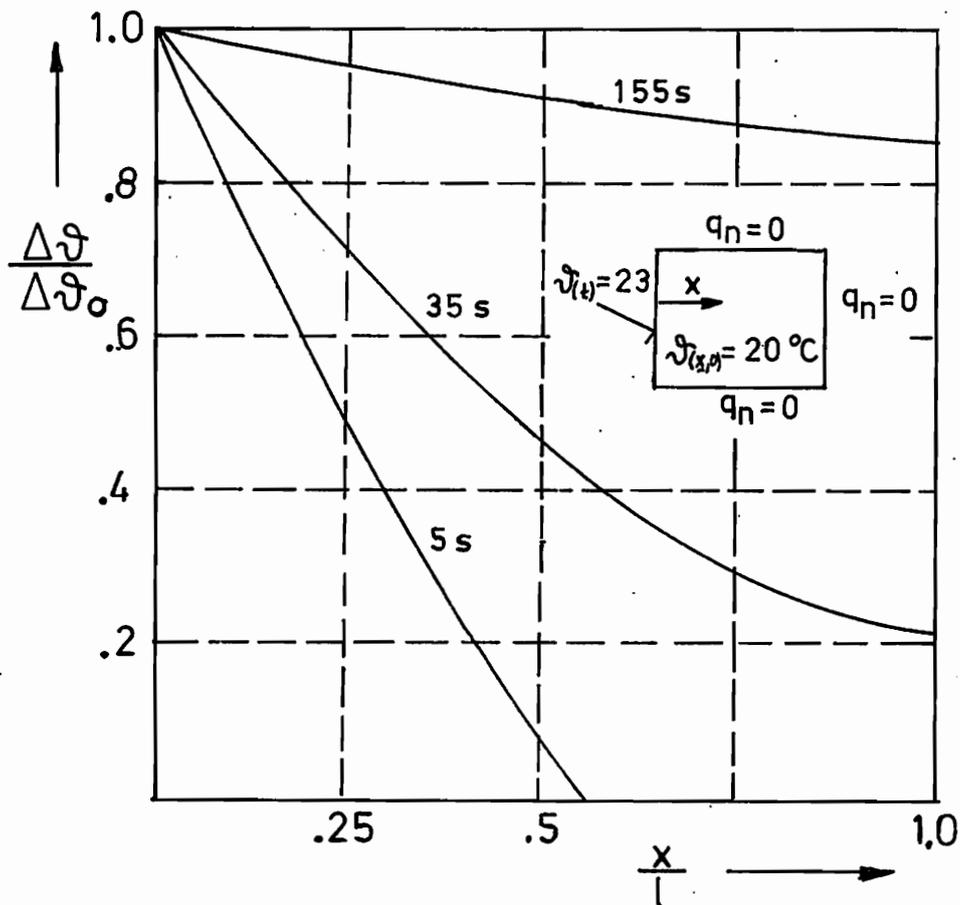


Abb. 7.6 Temperaturprofil zur Randbedingung der 1. Art an einer quadratischen Scheibe mit $\vartheta(\underline{x}, 0) = 20^\circ\text{C}$, die an einer Seite einen Temperatursprung auf 23°C erfährt (Konstanten wie im vorigen Beispiel).

Die Schrittweite wurde zwischen $t = 0,005\text{ s}$ und $t = 0,5\text{ sec}$ variiert. Bei dem obigen Beispiel betragen die hierdurch bedingten Abweichungen weniger als 1 %. Für einfache Körper sind z. B. in [8] Formeln und Ergebnisse für die instationäre Wärmeleitung enthalten. Zum Vergleich mit der

FEM-Lösung bei einer quadratischen Scheibe (wie im vorigen Beispiel beschrieben) werden die entsprechenden Werte dem Bild 6.6 in [8] entnommen. Die mit einer eindimensionalen Theorie unter Anwendung der Fourier-Reihen in [8] angegebenen Temperaturverläufe können für eine Biotzahl von $Bi = \alpha X / \lambda = \infty$ (Randbedingung 1. Art) nach einer kleinen Umrechnung direkt übernommen werden. Mit den physikalischen Konstanten des vorigen Beispiels und mit der charakteristischen Länge $X = 50$ mm sind in Abb. 7.7 die Vergleichskurven gezeichnet.

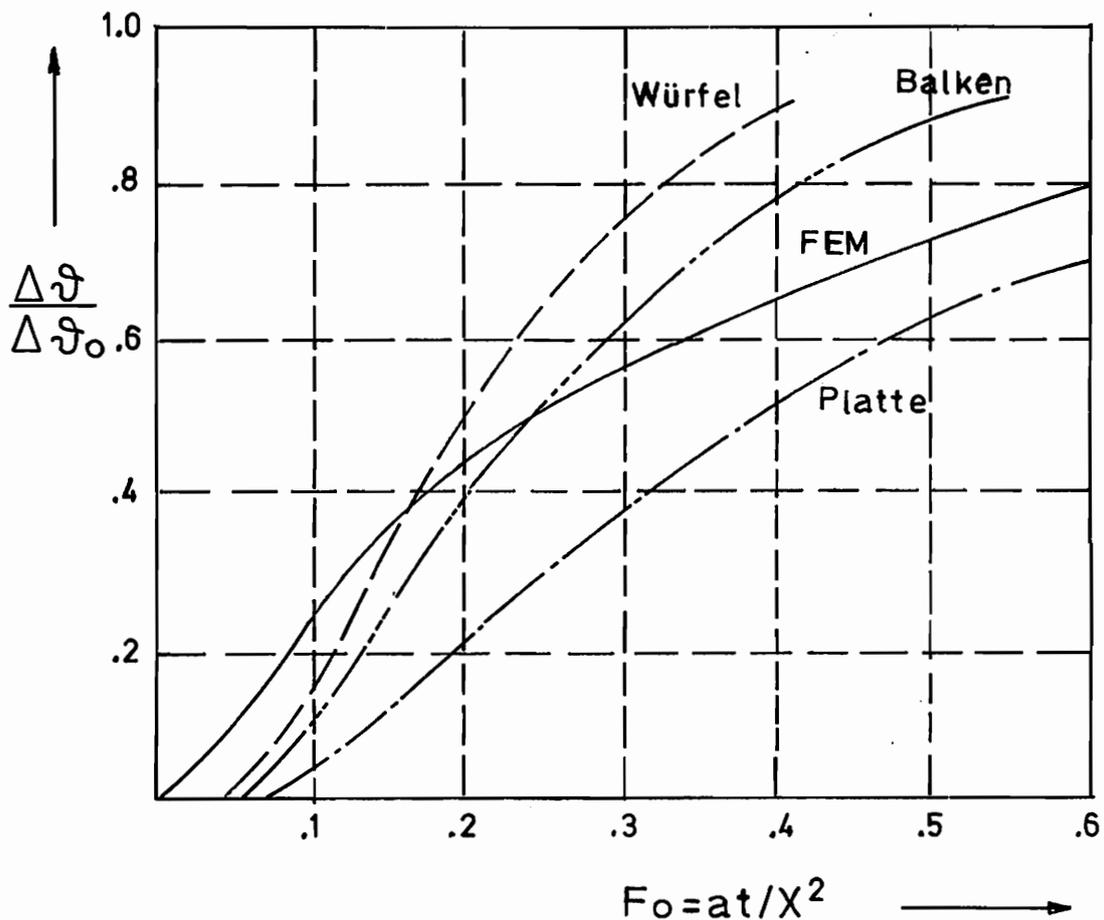


Abb. 7.7 Vergleichskurven für die quadratische Scheibe mit einer Randbedingung der 1. Art

Mit dem folgenden Beispiel wird der Einfluß der Zeitintervalllänge dargestellt. Behandelt wurde das folgende Problem.

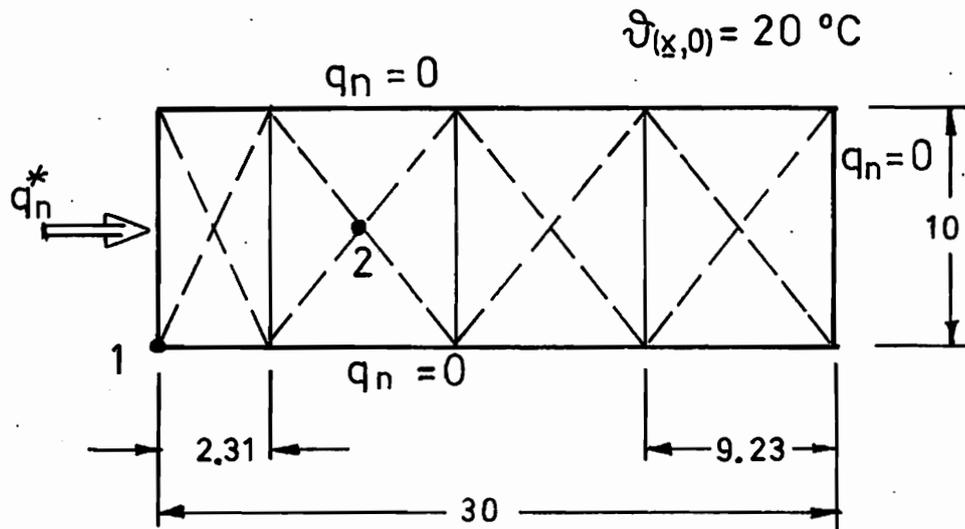


Abb. 7.8 Einteilung der finiten Elemente mit den Abmessungen in mm.

$$q_n^* = 70\,000 \text{ W/m}^2, \lambda = 52.3 \text{ W/Km}$$

$$c_p = 470 \text{ J/kgK}, \rho_0 = 7900 \text{ kg/m}^3$$

Für die Punkte 1 und 2 aus Abb. 7.8 werden nun einige Temperaturverläufe für verschiedene Zeitintervalllängen gegenübergestellt.

- *—*— 5 Intervalle mit .05 sec, dann .25 sec
- 5 Intervalle mit . 1 sec, dann .5 sec
- 5 Intervalle mit . 5 sec, dann 2,5 sec
- △ Intervalle mit 1 sec

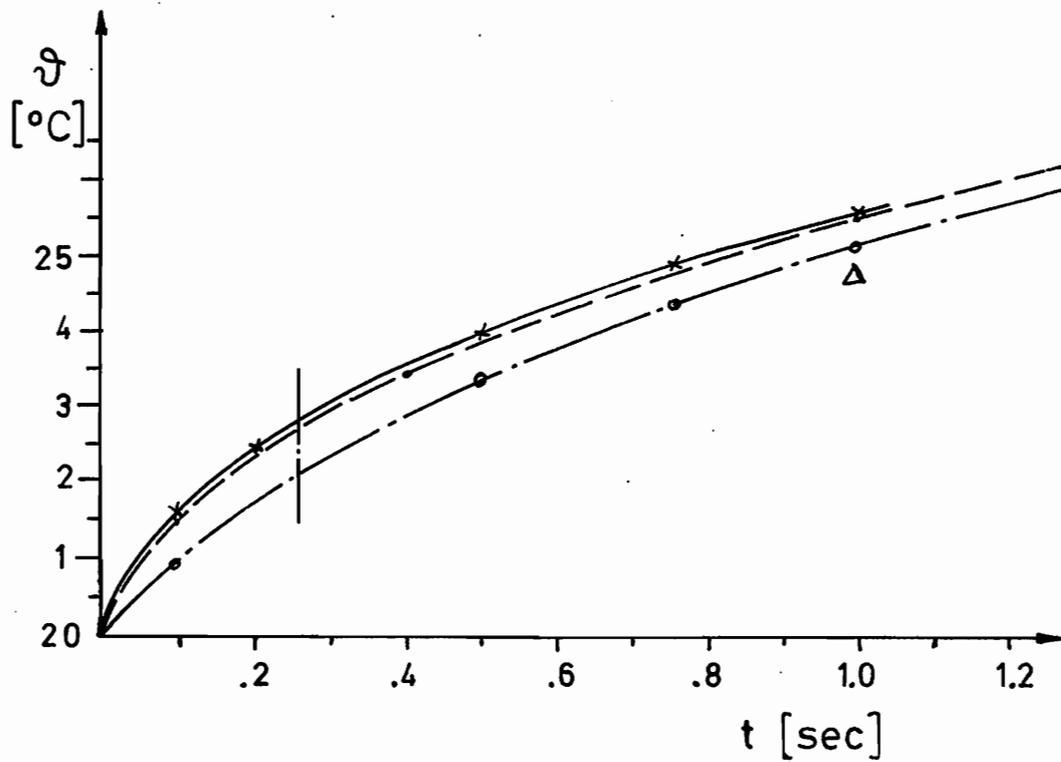


Abb. 7.9 Temperaturverlauf für Punkt 1

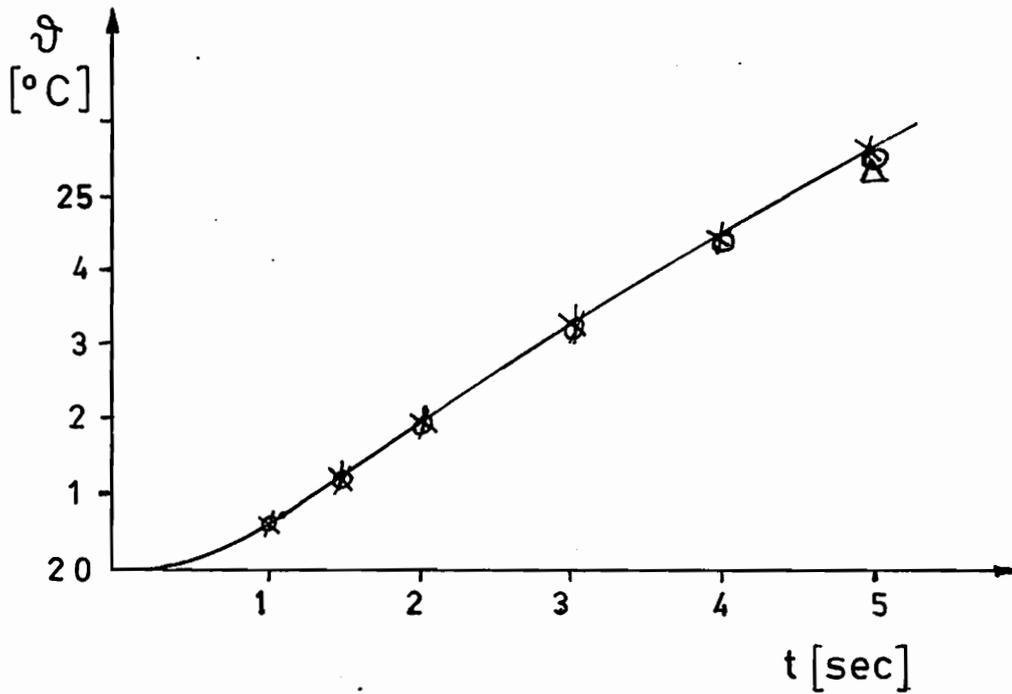


Abb. 7.10 Temperatur-Verlauf für Punkt 2

Aus den Abbildungen 7.9 und 7.10 ist zu entnehmen, daß bei abnehmender Zeitintervalllänge die Temperaturlösungen von unten konvergieren. Außerdem erkennt man, daß die Rechnung im gewählten Intervalllängenbereich relativ geringe Abweichungen zeigt. Die größten Abweichungen sind erwartungsgemäß im Bereich großer Gradienten aufgetreten. Vergleicht man die Temperatur des Punktes 1 bei .25 sec, so ergibt sich eine maximale Abweichung von 2,7 % bei einer Vergrößerung der Intervalllänge um den Faktor 10.

7.2 Beispiele zur Thermoelastizität

Als ein erstes Beispiel wird die eine Hälfte einer Lochscheibe betrachtet, die auf dem ganzen Rand in den Verschiebungen u und v fest ist. Die Scheibe erfährt eine homogene Temperaturerhöhung um $\vartheta = 50$ K. Die Verformungen sind, wie zu erwarten

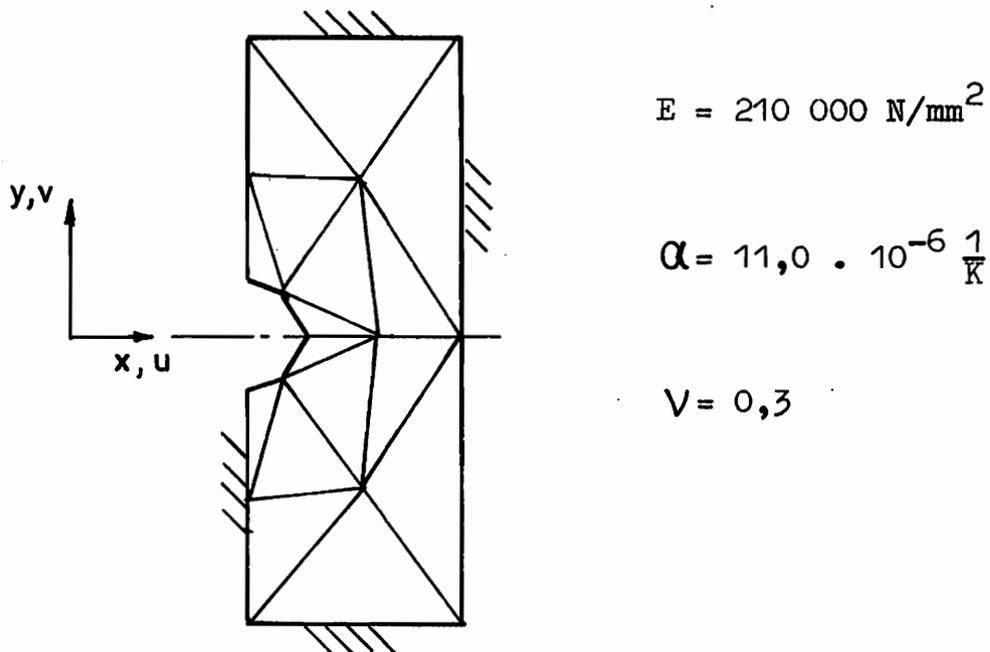
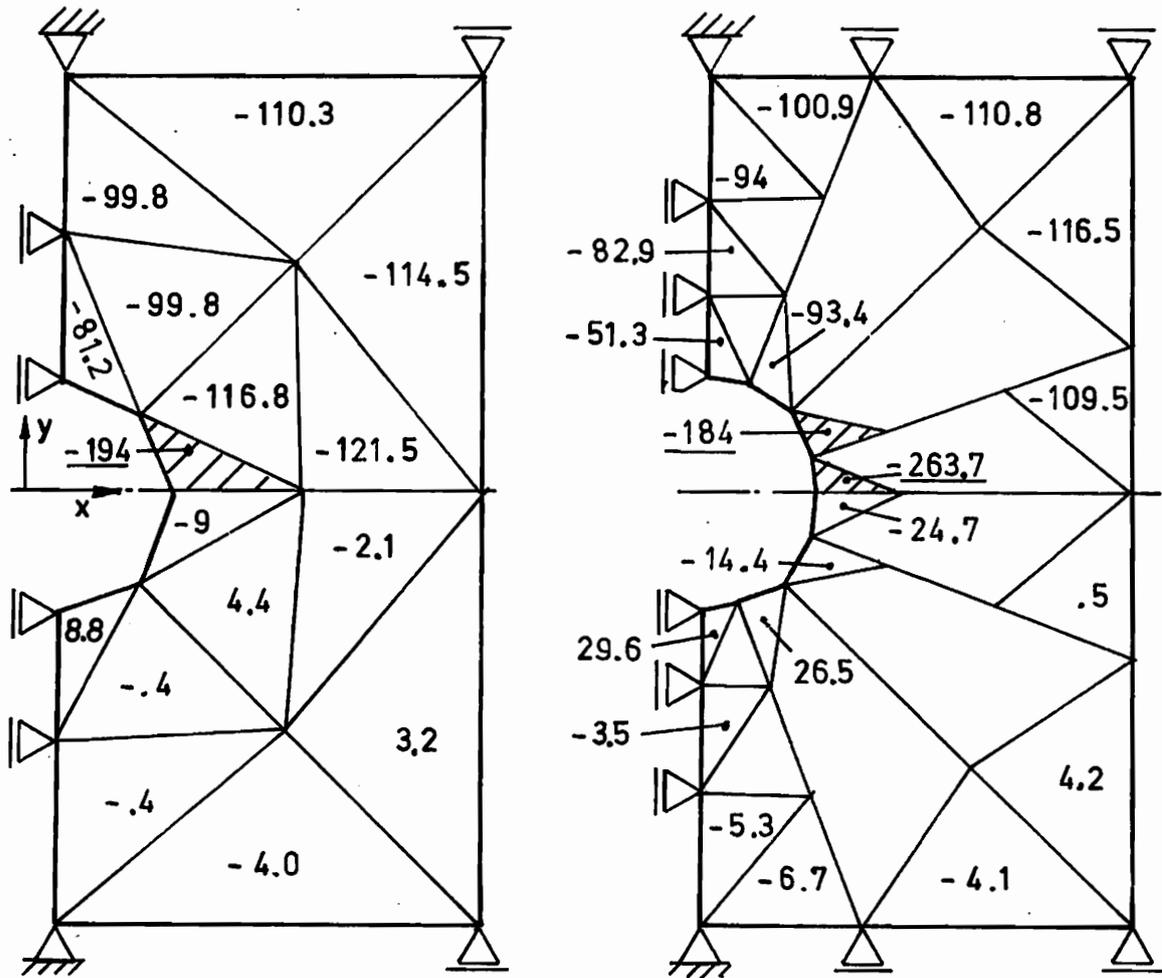


Abb. 7.11 Allseitig eingespannte Scheibe mit Elementaufteilung

ist, an allen Knoten zu Null ermittelt. Die Spannungen in den Elementen werden zu $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -165 \text{ N/mm}^2$ und $\sigma_{xy} = 0$ berechnet. In diesem einfachen Fall stimmt die FEM-Lösung völlig mit der exakten Lösung überein.

Als ein weiteres Beispiel dient die Scheibe in Abb. 7.11, wobei jedoch eine andere Lagerung der Randknoten vorgesehen wird (s. Abb. 7.12). Da Symmetrie zur y-Koordinate vorliegt, gilt die Lösung auch für die gesamte Scheibe.



a) 16 Elemente

b) 48 Elemente

Abb. 7.12 Scheibe mit homogener Temperaturerhöhung um 50 Kelvin mit Elementspannungen.

(σ_{xx} im Bereich $y < 0$ und σ_{yy} im Bereich $y > 0$), $E = 210\,000\text{ N/mm}^2$,

$\alpha = 11,0 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$, $\nu = 0,3$

Der Abb. 7.12 ist leicht zu entnehmen, daß die Spannungserhöhung im schraffierten Element mit zunehmender Verfeinerung des Elementnetzes ansteigt. Um eine Konvergenz erkennen zu können, müßten natürlich noch weitere Rechnungen mit immer feineren Einteilungen durchgeführt werden. Da dies jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit ist, soll die Bemerkung genügen, daß die betragsmäßig maximale Hauptspannung von $\sigma_{\max} = 264,1 \text{ N/mm}^2$ schon relativ gut die steigende Tendenz an dieser Stelle darstellt, die mit Hilfe von Spannungskonzentrationsfaktoren in [47] für einen äquivalenten Spannungszustand ermittelbar ist. Weiterhin ist zu erkennen, daß die Spannungen in den ungestörten Bereichen trotz einer Erhöhung der Elementzahl nahezu konstant bleiben. Dies ist ein Beweis für die Stabilität des Verfahrens. Für ein entsprechendes eindimensionales Problem erhält man bei homogener Spannungsverteilung eine Normalspannung von $\sigma_{yy} = -115,5 \text{ N/mm}^2$. Für das in Abb. 7.12 skizzierte Problem werden noch die errechneten Verformungen dargestellt.

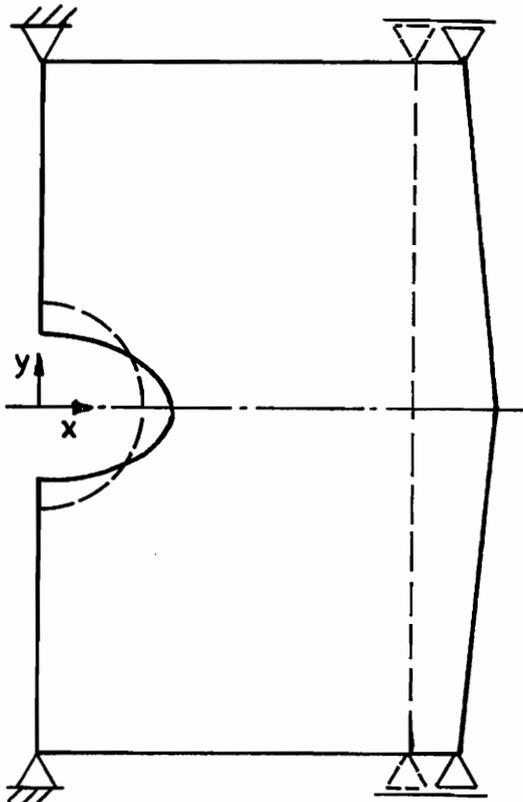


Abb. 7.13
Verformungsbild der
Scheibe

In den nächsten drei Abbildungen sind die Verformungen aufgrund einer inhomogenen Temperaturverteilung, einer homogenen Temperaturverteilung mit freier Ausdehnung und einer äußeren Kraft dargestellt. Die Temperatur des schraffierten Bereiches ist in Abb. 7.14 um 50 Kelvin höher als im restlichen Körper. Hieraus resultieren die skizzierten Verformungen. In allen Fällen wird mit 16 Elementen gerechnet. Die Verschiebungen sind um den Faktor 150 vergrößert dargestellt.

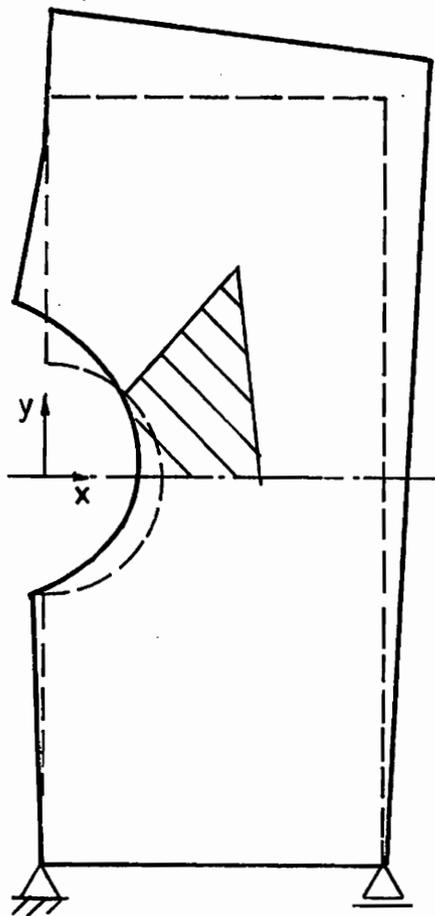


Abb. 7.14
Verformungsbild für
 $\Delta T = 50 \text{ K}$ im schraffierten
Bereich (Sonst $\Delta T = 0 \text{ K}$)

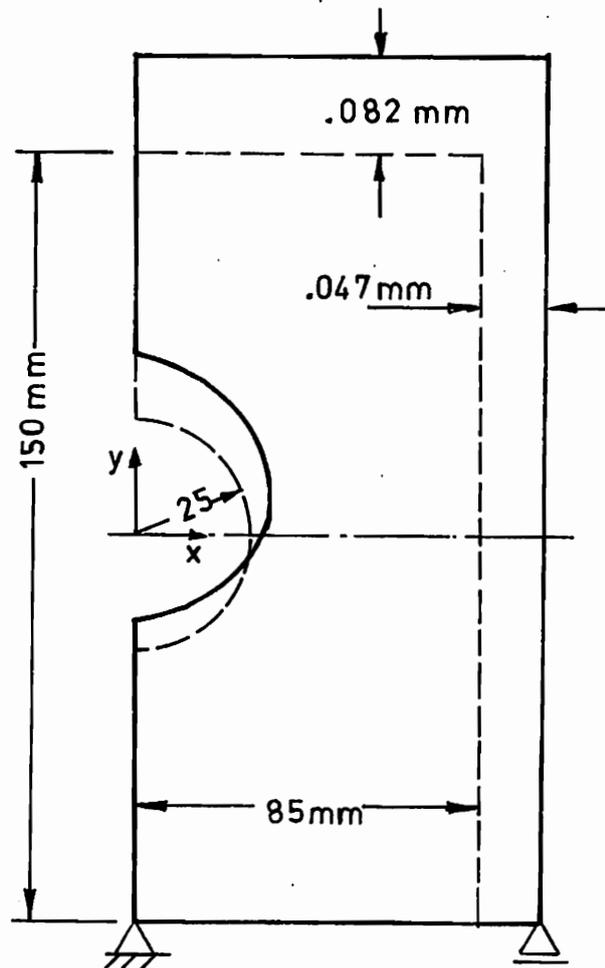


Abb. 7.15
Verformungsbild für eine
homogene Temperaturerhöhung
um $\Delta T = 50 \text{ K}$

Für die homogene Temperaturerhöhung in Abb. 7.15 stimmen die dort angegebenen Verschiebungen mit der exakten Lösung überein. Das dritte Beispiel ist in Abb. 7.16 skizziert.

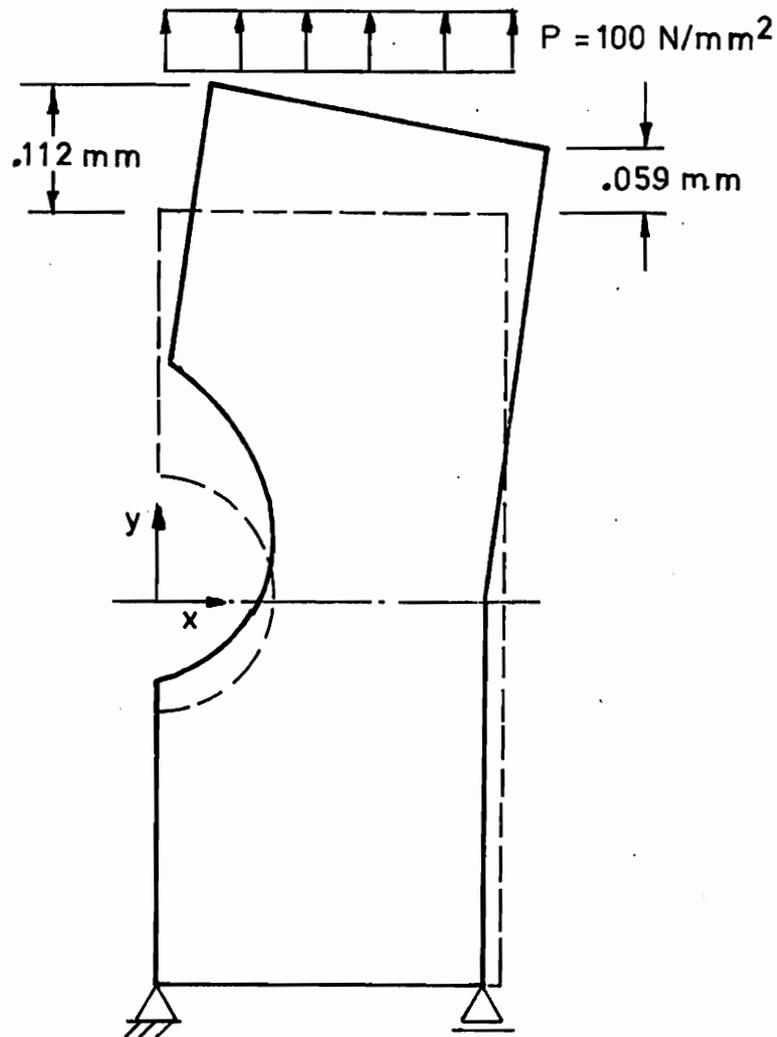


Abb. 7.16 Verformungsbild für mechanische Belastung

Die hier gezeigten Beispiele bestätigen alle qualitativ und auch quantitativ das in Abschnitt 4.2 beschriebene und in Abschnitt 5.3 angewendete Prinzip für thermoelastische Formänderungen.

7.3 Ein Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

Zum Vergleich mit einer entsprechenden FEM-Rechnung wurden Versuche mit einer Stahlprobe, wie sie in Abb. 7.17 zu sehen ist, durchgeführt. Die dargestellte Probe wurde gegen die Luft zur Verminderung der freien Konvektion mit Styropor isoliert. Da es insbesondere auf die Messung der instationären Vorgänge ankam, dürfte die angebrachte Isolierung gut genug gewesen sein. Es sollte also im Versuch gewährleistet sein, daß die Wärme ausschließlich über die Bohrungen an den oberen und unteren verdickten Endstücken mit dem Wasser abfließt und durch das zentrale Loch der Platte aus der Oelflüssigkeit übertragen wird.

Versuchsaufbau:

Die Stahlprobe wird durch ein am 30 mm-Loch angeflanschetes Rohr mit Oel beaufschlagt. Das Rohr ist mit einer Teflondichtung gegen die Platte abgedichtet und hat sonst keinen Kontakt zur Probe. Das Wasser wird mit entsprechenden Schlauchverbindungen an die Probe geführt. Das Wasser wird dem Leitungsnetz entnommen und das Oel wird in einem eigens dazu konstruierten Behälter erhitzt und über eine Pumpe zur Probe im Kreislauf gefördert. Auf die Probe sind die mit 2 - 9 nummerierten Thermoelemente aufgeklebt. Die entsprechenden Thermospannungen werden jeweils mit einem in einem Eis-Wasser-Gemisch befindlichen Thermoelement verglichen. Über eine elektronische Schaltung werden die einzelnen Thermospannungen zu diskreten Zeitpunkten in den Datenspeicher eines Mikrorechners gegeben. Die Steuerung geschieht ebenfalls über ein Rechnerprogramm.

Versuchsablauf:

Zunächst wird das Wasser durch die Enden der Probe geschickt. Es wird ein stationärer Zustand der Wassertemperatur und der Proben-Temperaturverteilung abgewartet. Dann wird das Ventil an der Oelpumpe geöffnet, so daß das vorher erhitzte Öl plötzlich durch die Probe strömen kann. Der instationäre Temperaturverlauf wird hierbei vom Rechner datenmäßig erfaßt.

Gemessene Größen:

- 1) Die Öltemperatur im Behälter mit einem Thermometer
- 2) Die Wassertemperatur des Leitungsnetzes
- 3) Die Temperatur im Eis-Wasser-Gemisch mit Eintauch-Thermomeßfühler und Thermometer
- 4) Die Raumtemperatur mit einem Thermometer
- 5) Die Thermospannungen der aufgeklebten Thermoelemente
- 6) Die Zeit mit dem rechner eigenen Zeitsignal

Zur Genauigkeit der Messungen:

Die Temperaturmessungen mit dem Thermometer dürften in dem gemessenen Bereich bis auf $\pm 0,2$ K genau sein. Die Thermoelemente wurden bei Raumtemperatur ($\vartheta = 23$ °C) geeicht. D. h. der Verstärkungsfaktor wurde bei dieser Temperatur bestimmt. Der Meßbereich des Versuches umfaßte Temperaturen von $14,1$ °C bis 35 °C. Es wird angenommen, daß der Fehler der Thermoelemente in diesem Bereich bei $\pm 0,1$ K liegt. Die durch das Aufkleben der Meßfühler bedingten zusätzlichen Fehler infolge einer schwankenden Kontakthaltung werden zu $\pm 0,2$ K angenommen. Dadurch ergibt sich ein Gesamtfehler von $\pm 0,5$ K, der prozentual bezüglich der Meßwerte in einem Bereich von $1,43 - 3,6$ % liegt. Diese Genauigkeit ist ausreichend, um mit numerischen Ergebnissen eines FEM-Programms aussagekräftige Vergleiche zu bekommen.

Zum Rechenmodell

Das vorliegende Problem ist grundsätzlich mit Randbedingungen der 3. Art zu rechnen. Da in Zeitintervallen gerechnet wird, reicht es aus, die Neumann'sche Randbedingung zu berücksichtigen. Im Fall der Wasserkühlung wäre auch für einen Zeitbereich bis etwa 150 sec eine Randbedingung der 1. Art zu akzeptieren. Gerechnet wurde jedoch mit im Zeitintervall konstanten Wärmestromdichten, die jeweils nach einem Zeitschritt angepaßt wurden. Es wurde mit folgenden Parametern gerechnet:

$$\alpha_{\text{Oel}} = 450 \text{ W/K m}^2$$

$$\alpha_{\text{Wasser}} = 4000 \text{ W/K m}^2$$

$$\lambda_{\text{Stahl}} = 52,3 \text{ W/K m}$$

$$c_p_{\text{Stahl}} = 470 \text{ J/kg K}$$

$$\rho_{\text{Stahl}} = 7900 \text{ kg/m}^3$$

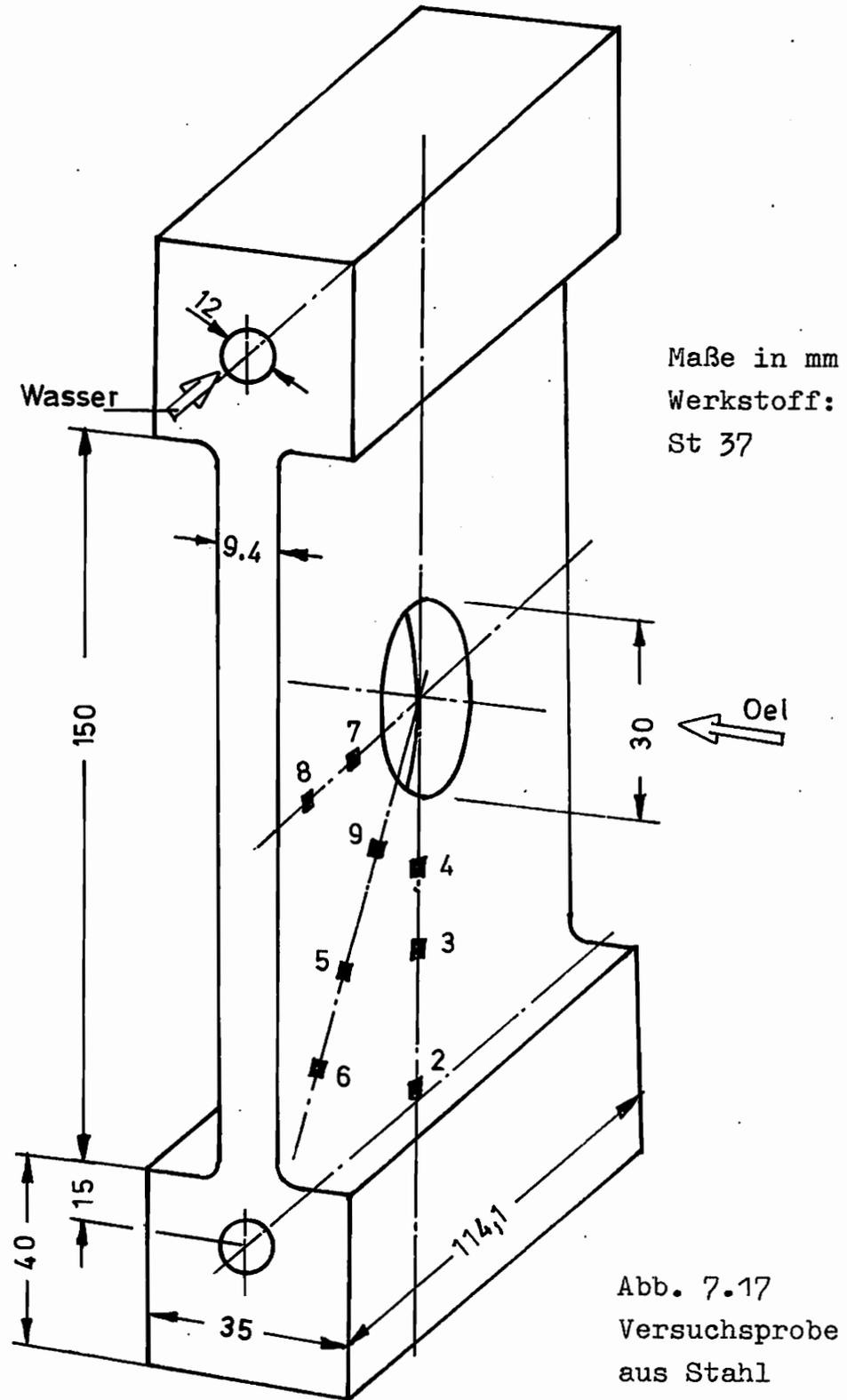
$$\vartheta_{\text{Oel}} = 98 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\vartheta_{\text{Wasser}} = 14,1 \text{ }^\circ\text{C.}$$

Die Rechnung startet mit einer homogenen Anfangstemperatur der Probe von $23,2 \text{ }^\circ\text{C}$ und einer Kühlung mit Wasser. Nach Erreichen einer definierten Temperatur am Rand des Plattenloches wird die Randbedingung bezüglich des heißen Oeles an dieser Stelle automatisch hinzugeschaltet. Die Ergebnisse sind in den nachfolgenden Bildern dargestellt.

Zu den Ergebnissen

Die in den Abb. 7.21 - 7.24 eingezeichneten Temperaturkurven sind für charakteristische Punkte der Probe ausgewählt worden. Die Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung liegt innerhalb einer Abweichung von 9 %. Die Übereinstimmung kann verbessert werden, falls die Anfangswerte der FEM-Rechnung exakt an die Versuchsanfangswerte angepaßt werden. Ohne eine neue Rechnung durchzuführen, ist ersichtlich, daß die nachträglich eingezeichneten Korrekturkurven (gestrichelt) bis etwa 50 sec als realistisch angesehen werden können. Es fällt auf, daß die Punkte 4 und 7 in der Nähe der Ölbohrung im Gegensatz zu den etwas entfernter liegenden Punkte 3 und 5 ab ca. 100 sec eine Vorzeichenumkehr der Temperaturabweichung erleiden. Dies ist wahrscheinlich auf Einflüsse des an die Probe angeflanschten Rohres zurückzuführen, das ja ebenfalls vom Öl erwärmt wird und mit etwa 80 °C Oberflächentemperatur die Isolierung in diesem Bereich zusätzlich beeinflusst. Eine bessere Übereinstimmung der Ergebnisse ist durch ein feineres Elementnetz auf der Rechnungsseite zu erreichen. Dies ist aber nur dann sinnvoll, falls der Versuchsaufwand ebenfalls erhöht wird, um die mittlere Fehlerquote von ca. 2,5 % zu mindern. Dies war im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht vorgesehen.



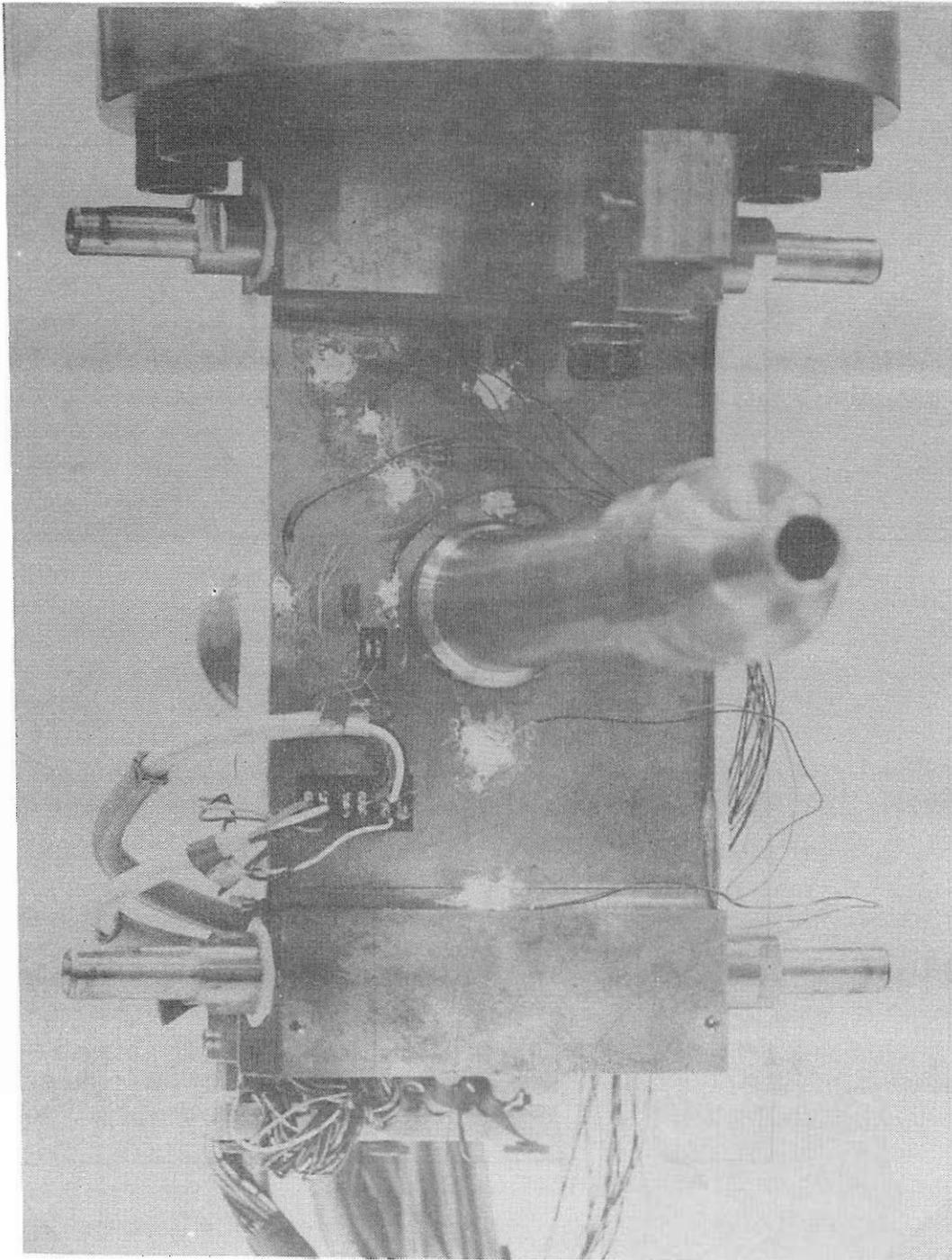


Abb. 7.18 Versuchsaufbau

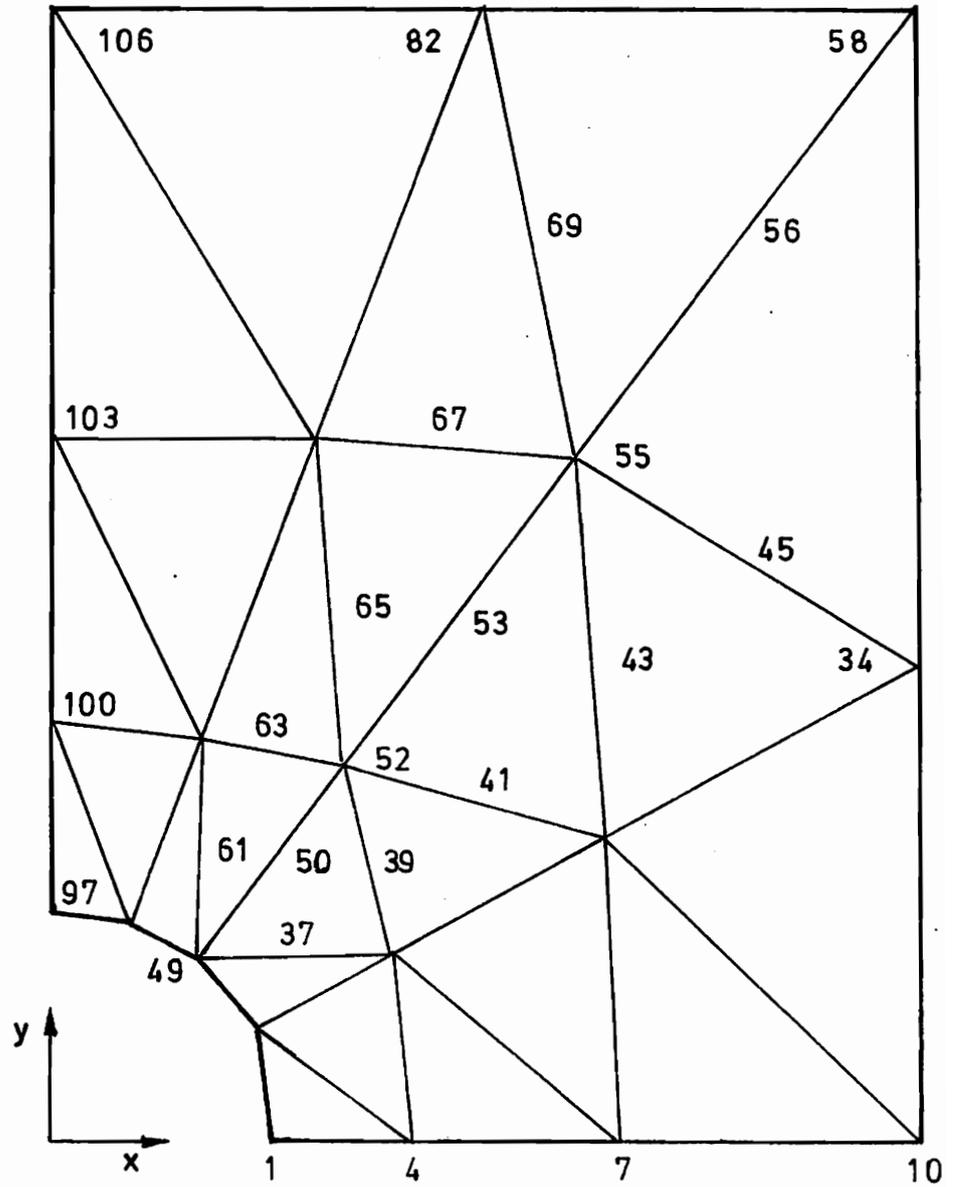


Abb. 7.19 FEM-Netz mit einigen
Koordinatenpunkten

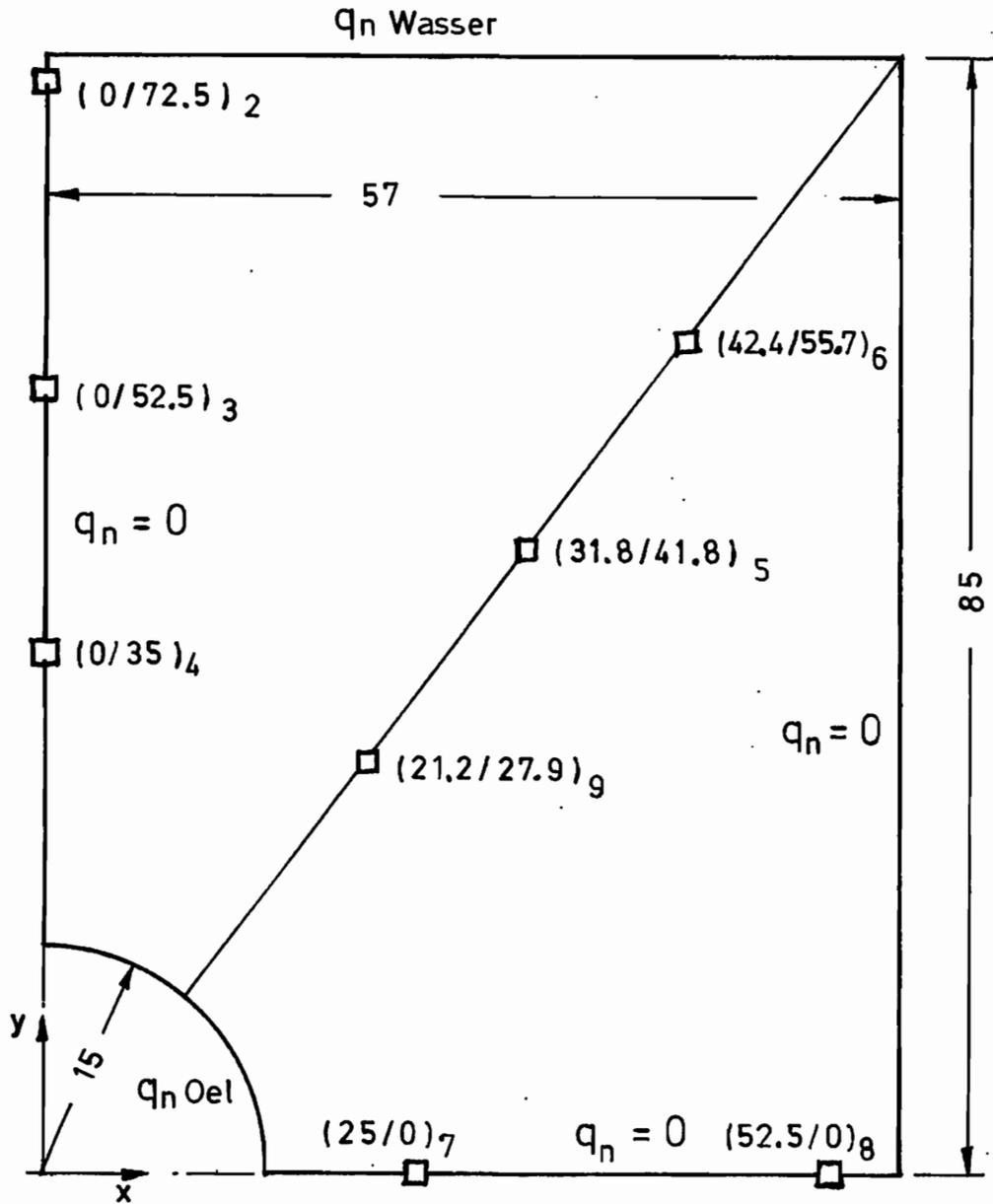


Abb. 7.20 Kennzeichnung der Temperaturmeßpunkte mit angegebenen (x/y) Koordinaten am Rechenmodell

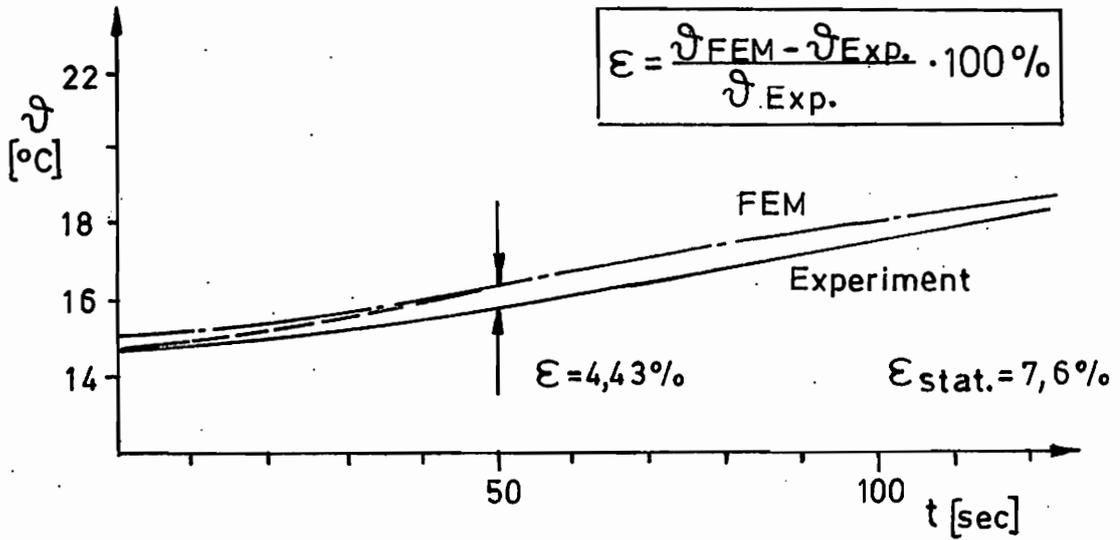


Abb. 7.21 Temperaturverlauf für Punkt 3

$$\alpha_{\text{Oel}} = 450 \text{ W/K m}^2$$

$$\alpha_{\text{Wasser}} = 4000 \text{ W/K m}^2$$

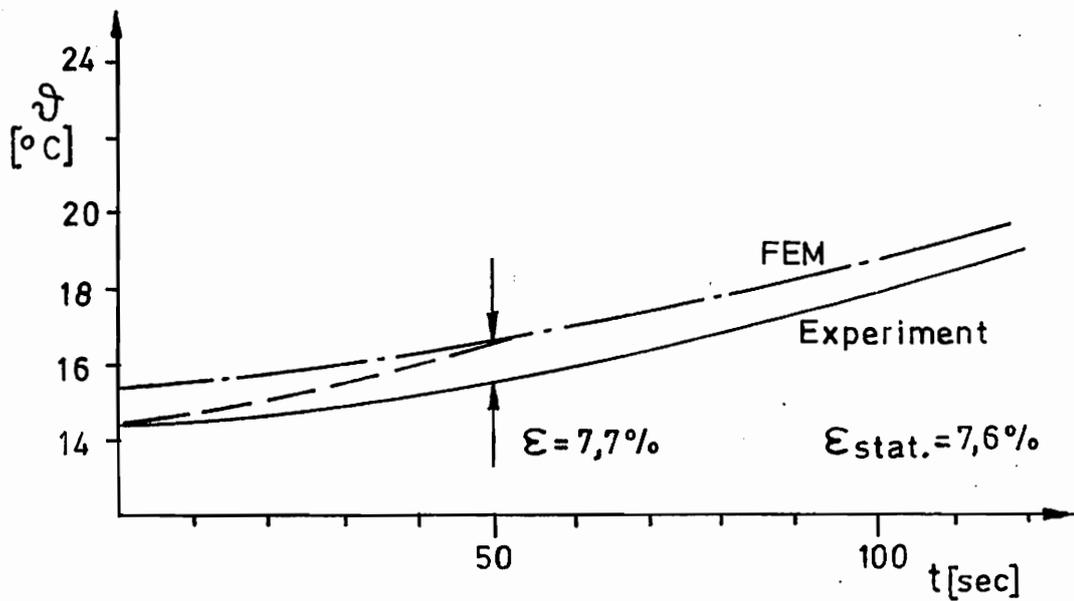


Abb. 7.22 Temperaturverlauf für Punkt 5

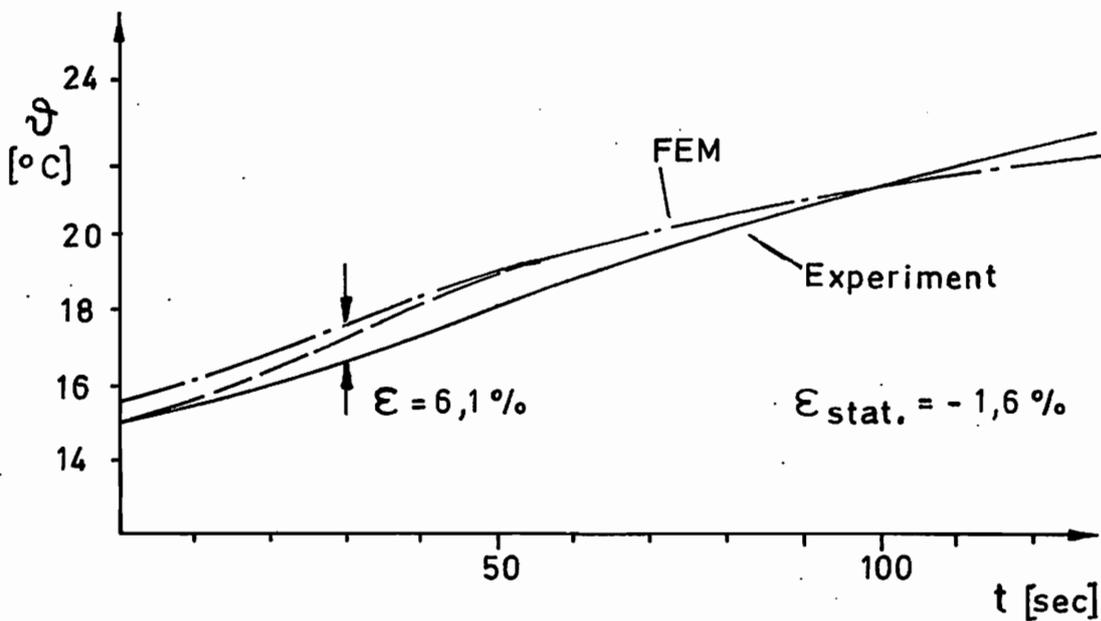


Abb. 7.23 Temperaturverlauf für Punkt 4

$$\alpha_{\text{Oel}} = 450 \text{ W/K m}^2$$

$$\alpha_{\text{Wasser}} = 4000 \text{ W/K m}^2$$

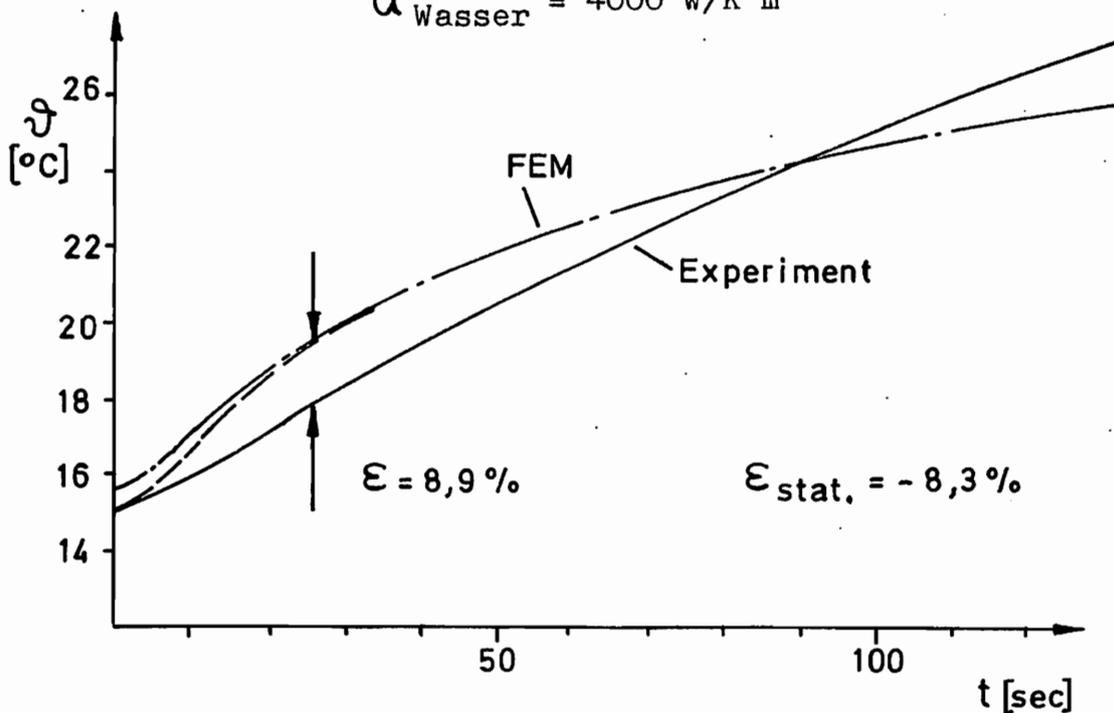


Abb. 7.24 Temperaturverlauf für Punkt 7

8 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird die instationäre Temperaturverteilung in festen Körpern unter Berücksichtigung beliebiger Randbedingungen durch ein Extremal-Variationsprinzip im Funktionalraum beschrieben. Dieses als Prinzip der virtuellen Quellenenergie formulierte Prinzip wird mit einigen bekannten Prinzipien für die Wärmeleitung verglichen. Es werden Äquivalenzen aufgezeigt. Für den ein- und zweidimensionalen Körper werden FEM-Programme entwickelt, die konkrete Rechnungen zur instationären Wärmeleitung auf der Basis des vorgestellten Prinzips ermöglichen. Die Vorteile der entwickelten Methode liegt zum einen in der positiven Definitheit des Funktionals und zum anderen in der Darstellung in der Zeit-Raum-Struktur. Dadurch sind iterative Rechenprozesse überflüssig. Die Temperaturfunktion ist also im Gegensatz zu anderen Verfahren direkt aus der Anfangsbedingung mit einer Genauigkeit berechenbar, die natürlich von der Einteilung des Raumes und der Zeit abhängt. Vergleiche mit exakten Lösungen und experimentellen Ergebnissen bestätigen die Brauchbarkeit des Verfahrens in zufriedenstellender Weise. Auf der Basis einer so bestimmten Temperaturverteilung wird ein thermoelastisches Variationsprinzip vorgestellt und durch die FEM ebenfalls konkretisiert. Es werden weiterhin die Unterschiede zur gekoppelten Thermoelastizität diskutiert und die These aufgestellt, daß mit Ausnahme von Schwingungsproblemen die hier vorgestellte Theorie für lineare thermoelastische Probleme völlig ausreichend ist. Die Ergebnisse dieser Arbeit bestätigen ohne Ausnahme die Gültigkeit der Theorie.

Es bieten sich folgende Punkte an, die eine weitere Betrachtung sinnvoll erscheinen lassen. Zunächst sind dies Themen aus numerischer Sicht, wie z. B. die Verwendung

anderer Polynome oder die direkte Minimisierung des Funktionals. Weiterhin könnte der Einfluß von Nichtlinearitäten untersucht werden. Dies ist besonders bei hohen Temperaturen und bei großen elastoplastischen Deformationen von Interesse. Ebenso sind Erweiterungen der thermoelastischen Theorie auf der Basis des Prinzips der virtuellen Energieübertragung denkbar. Nicht zuletzt verspricht eine Kopplung zwischen dem in dieser Arbeit vorgestellten Prinzip der virtuellen Quellenenergie und entsprechenden Prinzipien für elastoplastische Prozesse eine zukünftige, sinnvolle Aufgabe zu werden.

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

- [1] I. Prigogine und I. Stengers Dialog mit der Natur;
R. Piper & Co. Verlag München,
Zürich (1981).
- [2] A. Budó Theoretische Mechanik
VEB Berlin 1971
- [3] P. Mazilu Das Variationsprinzip der
virtuellen Energieübertragung;
unveröffentlicht, Institut für
Mechanik I, Ruhr-Universität
Bochum (1980).
- [4] A. Kneser Euler und die Variationsrechnung;
in: Festschrift zur Feier des
200. Geburtstages Leonhard Eulers
(P. Schafheitlin, E. Jahnke und
C. Färber Hg.) B. G. Teubner,
Leipzig, Berlin (1907).
- [5] E. Mach Die Mechanik in ihrer Entwicklung;
F. A. Brockhaus, Leipzig (1883).
- [6] I. Szabo Geschichte der mechanischen
Prinzipien; Birghäuser Verlag,
Basel, Boston, Stuttgart (1979).
- [7] W. Traupel Die Grundlagen der Thermodynamik;
G. Braun, Karlsruhe (1971).

- [8] U. Grigull und
H. Sandner Wärmeleitung; Springer-Verlag,
Berlin, Heidelberg, New York
(1979).
- [9] R. W. Lewis und
K. Morgan (Hg.) Numerical Methods in Thermal
Problems; Pineridge Press Swansea,
U. K., Volume I (1979) und Volume
II (1981).
- [10] G. Lebon und
P. Perzyna (Hg.) Recent Developments in Thermo-
mechanics of Solids; CISM Courses
and Lectures No. 262, Springer
Verlag, Wien, New York (1980).
- [11] B. A. Finlayson
und
L. E. Scriven On the Search for Variational
Principles Int. J. Heat Mass
Transfer, Vol. 10 (1967),
799 - 821.
- [12] M. A. Biot Variational Principles in Heat
Transfer; Oxford at the Clarendon
Press (1970).
- [13] B. Krajewski On a Direct Variational Method
for Nonlinear Heat Transfer;
Int. J. Heat Mass Transfer,
Vol. 10 (1975), 495 f.
- [14] G. Lebon und
J. Lambermont Comments on the Papers. "On a
Direct Variational Method for
Nonlinear Heat Transfer" by
B. Krajewski;
Int. J. Heat Mass Transfer,
Vol. 19 (1976), 1340 f.

- [15] B. Vujanovic und
B. Baclic Applications of Gauss's
Principle of Least Constraint
to the Nonlinear Heat-Transfer
Problem; Int. J. Heat Mass
Transfer, Vol. 19 (1976), 721 f.
- [16] K. Washizu Variational Methods in Elasticity
and Plasticity; Pergamon Press,
Oxford (1975).
- [17] M. E. Gurtin Variational Principles for
Linear Initial-Value Problems;
Quart. Appl. Math. 22 (1964),
No. 3, 252 - 256
- [18] M. J. Leitman und
G. M. C. Fisher The Linear Theory of Viscoelasti-
city; in: Handbuch der Physik,
Band VI/a/3, Springer Verlag
(1973)
- [19] J. N. Reddy A Note on Mixed Variational
Principles for Initial Value
Problems; Q. J. Mech. Appl.
Math., Vol. 28 (1975), part 1.
- [20] J. T. Oden und
J. N. Reddy Variational Methods in
Theoretical Mechanics;
Springer Verlag (1976).
- [21] I. Herrera und
J. Bielak Dual Variational Principles for
Diffusion Equations; Quart.
Appl. Math., (1976), 85 f.

- [22] W. D. Collins Dual Extremum Principles for
the Heat Equation; Proc. Royal
Society Edinburgh, 77 A (1977),
273 - 292.
- [23] V. M. Filippov Quadratic-Functional Minimum
und Principle for Heat-Conduction
A. N. Skorokhodov Boundary-Value Problem;
Differential Equations (1978),
770 - 776.
- [24] Th. Lehmann Some Aspects of Coupling Effects
in Thermoplasticity; Symposium on
Large Deformations, New Delhi
(1979).
- [25] Th. Lehmann On the Theory of Large Non-
Isothermic Elastic-plastic and
Elastic-Visco-Plastic
Deformations; Arch. Mech. 29
(1977), 393 - 409.
- [26] B. Raniecki und Infinitesimal Thermoplasticity
K. Thermann and Kinematics of Finite Elastic-
Plastic Deformations; Mitt. Inst.
Mech. Ruhr-Universität Bochum,
Nr. 2 (1978).
- [27] O. Bruhns und Zur Theorie der Verzweigungen
J. Mielniczuk nichtisothermer elastoplastischer
Deformationen; Ing. Arch. 46
(1977), 65 - 74.

- [28] B. A. Boley und
J. H. Weiner Theory of Thermal Stresses;
John Wiley & Sons, Inc.,
New York (1966).
- [29] P. J. Chen,
M. E. Gurtin und
W. O. Williams On the Thermodynamics of Non-
Simple Elastic Materials with
Two Temperatures, ZAMP, Vol.
20 (1969), 107 - 112.
- [30] W. A. Day und
M. E. Gurtin Justification of the Uncoupled
and Quasi-Static Approximations
in a Problem of Dynamic Thermo-
elasticity; Arch. Rat. Mech.
Anal., Vol. 77 (1981), No. 4,
387 - 396.
- [31] H. Lauert Thermoelastizität kleiner Form-
änderungen; unveröffentlicht,
Institut für Mechanik I, Ruhr-
Universität Bochum (1977).
- [32] P. Mazilu und
L. Schreiber Über die Möglichkeiten eines
neuen Mathematischen Alternativ-
Modells für thermoelastische
Prozesse; unveröffentlicht,
Institut für Mechanik, Ruhr-
Universität Bochum (1980).
- [33] H. Parkus Instationäre Wärmespannungen;
Springer Verlag Wien (1959).

- [34] Th. Lehmann Elemente der Mechanik IV,
Schwingungen, Variationsprinzip; Vieweg Braunschweig (1979).
- [35] Th. Lehmann Elemente der Mechanik II,
Elastostatik; Vieweg Braunschweig (1975)
- [36] V. Kolář,
J. Kratochvíl,
F. Leitner und
A. Ženišek Berechnung von Flächen- und Raum-
tragwerken nach der Methode der
finiten Elemente; in: Ingenieur-
bauten 6, Theorie und Praxis
(K. Sattler und P. Stein, Hg.)
Springer Verlag Wien New York
(1975).
- [37] G. Schmid Die Methode der finiten Elemente
als Sonderfall der Methode der
gewichteten Residuen; ZAMM 52
(1972), 461 - 469.
- [38] O. C. Zienkiewicz Methode der finiten Elemente;
Carl Hanser Verlag München,
Wien (1975).
- [39] L. S. D. Morley The triangular equilibrium
element in the solution of
plate bending problems;
Aero Quart., 19 (1968),
149 - 169.

- [40] O. C. Zienkiewicz und C. J. Parekh
Transient Field Problems: Two-Dimensional and Three-Dimensional Analysis by Isoparametric Finite Elements; Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 2 (1970), S. 61 - 71.
- [41] E. Anderheggen
A Conforming Triangular Finite Element Plate Bending Solution; Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 2 (1970), S. 259 - 264.
- [42] K. H. Huebner
The Finite Element Methods for Engineers; John Wiley and Sons, New York (1975).
- [43] H. J. Yu
Berechnung von Abkühlungs-, Umwandlungs-, Schweiß- sowie Verformungseigenstressen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente; Dissertation Universität Karlsruhe (1977).
- [44] P. Rafalski
A Variational Principle for the Coupled Thermoelastic Problem; Int. J. Engng. Sci. Vol. 6 (1968), S. 465 - 471.
- [45] R. W. Lewis und K. Morgan (Hg.)
Numerical Methods in Thermal Problems; Proc. First. Int. Conf., Swansea, 2. - 6. Juli 1979, Pineridge Press, Swansea U. K.

- [46] R. W. Lewis, Numerical Methods in Thermal
K. Morgan und Problems; Proc. Second Int. Conf.
B. A. Schrefler Venice, Italy, 7. - 10. Juli 1981,
(Hg.) Pineridge Press, Swansea, U. K.
- [47] R. E. Peterson Stress Concentration Factors;
John Wiley & Sons, New York (1974).
- [48] Y. Takeuti und Thermal-Stress Problems in
M. Tsuji Industry. 6: Transient Thermal
Stresses in a Plate Due to
Rolling with Considerations of
Coupling Effects; Journal of
Thermal Stresses, Vol. 5 (1982),
Nr. 1, S. 53 - 65.
- [49] H. S. Carslaw und Conduction of Heat in Solids;
J. C. Jaeger Oxford, (1959).
- [50] R. Courant und Methoden der Mathematischen Physik I;
D. Hilbert Springer-Verlag Berlin - Heidelberg-
New York (1968), S. 199 f.
- [51] K. - J. Bathe Numerical Methods in Finite
und Element Analysis Prentice-Hall,
E. L. Wilson Inc., Englewood Cliffs,
New Jersey (1976).

MITTEILUNGEN AUS DEM INSTITUT FÜR MECHANIK

- Nr. 1 Theodor Lehmann:
 Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann:
 Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of
 Finite Elastic-Plastic Deformations
 Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings:
 Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem,
 viscoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke:
 Theoretische und experimentelle Untersuchung der
 zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei
 endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze:
 Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwan-
 digen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittel-
 linie
- Nr. 6 Hubert Sommer:
 Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen
 Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F.J. Biehl:
 Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre
 Anwendung zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers:
 Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnell-
 laufenden Zentrifugenschalen

- Nr. 9 Berend Fischer:
Zur zyklischen elastoplastischen Beanspruchung
eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Ver-
zerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz:
Introduction to the non-linear theory of shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom:
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer
dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig:
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizi-
tät auf ein Problem gekoppelter elasto-plastischer
Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski:
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers:
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Opti-
mierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert:
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodi-
scher Beanspruchung bei Beachtung von Spannungs-
restriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz:
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte
des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von
kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F.J. Biehl:
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue
Problems of Elastic Systems with Application to
Eigenvibrations of Orthotropic Plates

- Nr. 18 Uwe Kolberg:
Variational Principles and their Numerical
Application to Geometrically Nonlinear v. Kármán
Plates
- Nr. 19 Heinz Antes:
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung
bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Woźniak:
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic
Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek:
Problems of Geometrically Non-Linear
Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow:
Optimierung von Stäben unter stochastischer
Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss:
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der
Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Goßmann:
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallschwingungen
bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregun-
gen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert:
Variational Formulation and Solution of Boundary-
Value Problems in the Theory of Plasticity and
Application to Plate Problems

- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz:
On Consistent Approximations in the Geometrically
Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander:
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger
Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und
Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski:
An Alternative Approach to the Elastic-Visco-
plastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen:
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter,
dickwandiger Kreiszyylinder und Innendruck und
Axialkraft
- Nr. 30 Franz-Josef Biehl:
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim ein-
seitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek:
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell
Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner:
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und
Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösun-
gen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu:
Variationsprinzip der Thermoplastizität
I. Wärmeausbreitung und Plastizität

Nr. 34 Helmut Stumpf:

Unified Operator Description, Nonlinear Buckling
and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells

Nr. 35 Bernd Kaempf:

Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre
Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische
Probleme unter Verwendung der finiten Elemente

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 35**