



**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Jürgen Preuss

Optimaler Entwurf von  
Tragwerken mit Hilfe der  
Mehrzielmethode

Heft Nr. 23



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

Jürgen Preuss

Optimaler Entwurf von Tragwerken  
mit Hilfe der Mehrzielmethode

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 23

Februar 1981

## Zusammenfassung

Um auch umfangreiche und komplizierte Aufgaben der Optimierung mechanischer Strukturen numerisch lösen zu können, wird eine Erweiterung der Mehrzielmethode in Verbindung mit einem modifizierten Newton-Verfahren zur Anwendung auf mehrläufige (verzweigte) mechanische Systeme vorgenommen. Die Optimierungsprobleme müssen sich dabei auf nichtlineare Randwertaufgaben mit gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückführen lassen. Der Aufbau der Tragwerke aus einzelnen Bauelementen darf dabei völlig beliebig sein. Es werden verschiedene Aufgaben aus dem Bereich des optimalen Entwurfs von Tragwerken vorgestellt, wobei unterschiedliche Zielfunktionen gewählt werden. Die Effizienz der Methode kommt besonders bei den komplexeren Aufgabenstellungen zum Tragen.

## Abstract

In order to solve larger complicated problems of optimization of structures the multiple shooting method coupled with a modified Newton method is extended as to apply also to mechanical systems with different branches. The problems have to be prescribed by a nonlinear boundary value problem with ordinary differential equations. The shape and the construction of the structures composed of several elements is completely arbitrary. Different subjects in the field of optimal design of structures with various criterium functions are presented. The efficiency of the method stands out especially in complex problems.

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Assistententätigkeit am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Maschinenbau als Dissertation angenommen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Th. Lehmann und Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Thermann danke ich für die Anregung und Unterstützung der Arbeit sowie für die Übernahme der Referate.

Referenten:

Prof. Dr.-Ing. Theodor Lehmann

Prof. Dr.-Ing. Klaus Thermann

Tag der Einreichung: 6. Dez. 80

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Feb. 81

© 1981 Dr.-Ing. Jürgen Preuss

Helgolandstr. 22, 435 Recklinghausen

Alle Rechte vorbehalten. Auch die fotomechanische Vervielfältigung des Werkes (Fotokopie, Mikrokopie) oder von Teilen daraus bedarf der vorherigen Zustimmung des Autors.

## Inhaltsverzeichnis

	Seite
<u>1. Einführung</u>	3
<u>2. Aufgabenstellung</u>	7
<u>3. Notwendige Optimalitätsbedingungen</u>	11
3.1 Allgemeines	11
3.2 Die Methode der Lokalschnitte	11
<u>4. Die Mehrzielmethode</u>	17
4.1 Allgemeines und Beschreibung des Verfahrens	17
4.2 Lösungsmethoden für nichtlineare Gleichungssysteme	20
4.3 Anwendung des Newton-Verfahrens auf die Mehrzielmethode	21
4.4 Modifikation des Newton-Verfahrens unter Verwendung von Abstiegskriterien	24
4.4.1 Vorbemerkungen	24
4.4.2 Nichtsinguläre Funktionalmatrix	24
4.4.3 Singuläre Funktionalmatrix	26
4.4.4 "Fast-singuläre" Funktionalmatrix	35
4.5 Berechnung und Approximation der Funktionalmatrix	40
4.6 Bemerkungen zur numerischen Durchführung	43
4.7 Die Schaltfunktionen	48
4.7.1 Bestimmung der Schaltpunkte	48
4.7.2 Folgen für die Berechnung der Jacobi-Matrizen	51
4.7.3 Fehlerquellen	51
4.8 Techniken bei der Wahl von Starttrajektorien	52
<u>5. Anwendungen</u>	54

	Seite
5.1 Harmonisch erregte Stäbe mit minimaler Amplitude an der Erregerstelle	54
5.1.1 Allgemeines	54
5.1.2 Einseitig eingespannter Längsschwinger	54
5.1.3 Einseitig eingespannter Biegeschwinger	65
5.2 Rahmenartige Tragwerke maximaler Steifigkeit unter statischer Belastung	74
5.2.1 Allgemeines	74
5.2.2 Grundgleichungen	74
5.2.3 Ergebnisse und Diskussion	83
5.3 Minimalgewichtsentwurf des beiderseitig eingespannten Knickstabes	93
5.3.1 Allgemeines	93
5.3.2 Grundgleichungen in bimodaler Formulierung	95
5.3.3 Numerische Durchführung und Diskussion der Ergebnisse	101
5.4 Rotierende Scheibe mit maximalem Trägheitsmoment ohne Spannungsüberschreitungen	107
5.4.1 Allgemeines	107
5.4.2 Aufstellen der Grundgleichungen	107
5.4.3 Numerische Durchführung und Diskussion der Ergebnisse	114
5.5 Minimalgewichtsentwurf eines mit gegebener erster Eigenfrequenz schwingenden Rahmens	121
5.5.1 Allgemeines	121
5.5.2 Grundgleichungen in bimodaler Formulierung	122
5.5.3 Numerische Durchführung, Diskussion der Ergebnisse und Grenzbetrachtungen	131
<u>6. Schlußbetrachtungen</u>	142
<u>Literaturverzeichnis</u>	144
<u>Anhang</u>	147

## 1. Einführung

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zum optimalen Entwurf von einzelnen Bauelementen und ganzen Tragwerken, deren mechanisches Verhalten durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden kann. Die Gestalt der Tragwerke hängt wesentlich vom jeweiligen Bewertungskriterium ab. Restriktionen aus konstruktiven oder physikalischen Gründen spielen dabei eine erhebliche Rolle. In der Regel ist die Topologie der Systeme, d.h. die Form der Stabachse bei Stabtragwerken oder die Form der Mittelfläche bei Flächentragwerken, vorgegeben. Als Entwurfsparameter stehen dann Querschnittsabmessungen bzw. die Wanddicke zur Verfügung. Aber auch die erweiterte Fragestellung, die Bestimmung der Topologie bei gegebenem oder durch Restriktionen (z.B. Spannungsbeschränkungen) eingeschränktem Querschnittsverlauf, ist möglich. Entwurfsvariable sind dann geometrische Parameter der Form der Stabachse bzw. der Mittelfläche. Eine Übersicht über die Vielfalt der Aufgabenstellungen und veröffentlichten Arbeiten findet man etwa bei WASIU-TYŃSKI und BRANDT [1], SHEU und PRAGER [2], NIORDSON und PEDERSEN [3] und ŻYCZKOWSKI [4].

Eine große Klasse von Problemen kann man in die folgende allgemeine Aufgabenstellung einordnen:

Eine Zielfunktion, auch Gütefunktion genannt (beispielsweise das Gewicht eines Tragwerks), soll in Abhängigkeit von Entwurfsvariablen, die als Steuergrößen wirken, und Zustandsvariablen, die den Zustand des Systems beschreiben, zum Extremum (meist minimal) gemacht werden. Dabei liegen im allgemeinen verschiedene Nebenbedingungen vor, und zwar:

- (i) ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\underline{y}' = f(x, \underline{y}, \underline{u}) \quad (1.1)$$

das die Struktur beschreibt. Die Vektorfunktion  $\underline{f}$

auf der rechten Seite von (1.1) ist durch die Art und den inneren Aufbau des entsprechenden Tragwerks bestimmt und hängt ab von der Ortskoordinate  $x$ , dem Vektor der Zustandsvariablen  $\underline{y}$  und dem Vektor der Entwurfsvariablen  $\underline{u}$ . Sie gibt also das Gesetz an über die örtliche Veränderung der Zustands- und Entwurfsvariablen. (Beispiel: Dgl.-System der Eigenschwingungen eines Biegebalkens mit Verschiebungen und Schnittkräften als Zustandsgrößen und der Querschnittsfläche als Entwurfsvariable)

(ii) Integralbedingungen (Beispiel: vorgegebene Materialmenge), die sich aber stets in differentielle Beziehungen umwandeln lassen.

(iii) Nebenbedingungen in Gleichungs- und Ungleichungsform (Beispiel: Spannungsbedingungen), die den Steuerbereich der Entwurfsvariablen einschränken, wobei auch ein mit der Ortskoordinate veränderlicher Steuerbereich eingeschlossen ist.

Notwendige Bedingungen für ein Extremum der Zielfunktion findet man mit Hilfe der PONTRYAGINSchen Maximumtheorie [5] (Methode der Lokalschnitte von BOLTJANSKI [19]) oder der Variationsrechnung. Damit verknüpft ist das Auftreten eines adjungierten Dgl.-Systems von der gleichen Ordnung wie das Ausgangssystem und gegebenenfalls weiteren Hilfsfunktionen infolge der Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen. Die Randbedingungen des adjungierten Systems sind dabei über Transversalitätsbedingungen zwischen den Zustandsvariablen und adjungierten Variablen bestimmt, so daß ein vollständiger Satz von Differentialgleichungen und Randbedingungen vorhanden ist.

Die Extremalaussagen geben an jeder Stelle  $x$  den Zusammenhang zwischen Entwurfsvariablen, Zustandsvariablen und adjungierten Variablen an. Die Entwurfsgrößen lassen sich also als Funktion der Zustandsvariablen und adjungierten Variablen

ausdrücken, wobei sie natürlich innerhalb des zulässigen Steuerbereichs oder auf seinem Rand liegen müssen. Das führt dazu, daß verschiedene rechte Seiten der Differentialgleichungssysteme auftreten können. Welche rechte Seite zu nehmen ist, läßt sich über Schaltfunktionen steuern.

Die unbequeme Folge des funktionalen Zusammenhanges zwischen Entwurfs,- Zustandsvariablen und adjungierten Variablen besteht darin, daß stets, selbst bei ursprünglich linearen Dgl.-Systemen und linearen Randbedingungen, ein nichtlineares Randwertproblem entsteht. Erschwerend kommt hinzu, daß man im Gegensatz zu den Zustandsgrößen keinen physikalischen Zugang zu den adjungierten Variablen findet. In speziellen Fällen, z.B. für lineare konservative Systeme unter globalen Nebenbedingungen, läßt sich das adjungierte System auf das Originalsystem zurückführen, so daß diese zusätzliche Schwierigkeit entfällt und gleichzeitig ein kleineres Dgl.-System entsteht. Die Problematik der Lösung einer nichtlinearen Randwertaufgabe bleibt jedoch erhalten.

Auf diesem Gebiet sind in den letzten Jahren beachtenswerte Fortschritte gemacht worden. Als besonders effektives Verfahren mit guten Konvergenzeigenschaften stellte sich die Mehrzielmethode [15, 16, 17] ("multiple shooting method") heraus, die in Kapitel 4 vorgestellt wird. Der Unterschied zum einfachen Schießverfahren besteht darin, daß eine iterative Lösung des Randwertproblems an mehreren Stellen gleichzeitig vorgenommen wird, indem man das Integrationsintervall durch Stützstellen unterteilt. Das Verfahren läßt sich auch auf mehrläufige Systeme erweitern, so daß auch verwickeltere Konstruktionen, man denke etwa an aus mehreren Elementen zusammengesetzte Stab- und Flächentragwerke (z.B. Stockwerkrahmen), optimal gestaltet werden können.

Die iterative Lösung des bei solchen Verfahren auftretenden nichtlinearen Gleichungssystems erweist sich oft als schwie-

rig, zumal das Gleichungssystem schlecht konditioniert sein, wenn nicht sogar infolge des Iterationsprozesses in einem Iterationsschritt singulär werden kann. Unter den verschiedenen Techniken bei der Lösung von nichtlinearen Gleichungssystemen sind besonders hervorzuheben das Levenberg-Marquardt-Verfahren (LEVENBERG [6], MARQUARDT [7]), die Methode von Powell (POWELL [8], BROYDEN [9]) und die modifizierte Newton-Methode (GOLDSTEIN [10], STOER [11], STOER und BULIRSCH [12]). Eine gute Übersicht gibt SCHWETLICK [13]. In dieser Arbeit werden die Ergebnisse von DEUFLHARD [14] verwendet, der eine modifizierte Newton-Methode zur Lösung schlecht konditionierter Systeme von nichtlinearen Gleichungen vorschlägt und diese auf die Mehrzielmethode anwendet.

Die hier vorgenommene Modifikation auf mehrläufige Systeme wurde in das von BULIRSCH und DEUFLHARD entwickelte Fortran-Programm DLOPTR eingearbeitet. Das Fortran-Programm OPTAL als neue Fassung von DLOPTR befindet sich im Anhang der vorliegenden Arbeit.

Mit diesem weiter entwickelten Algorithmus werden verschiedene Aufgaben aus dem Bereich des optimalen Entwurfs von Tragwerken gelöst. Die Ergebnisse sind in Kapitel 5 enthalten.

## 2. Aufgabenstellung

Betrachtet werden mehrläufige Tragwerke entsprechend Abb. 1

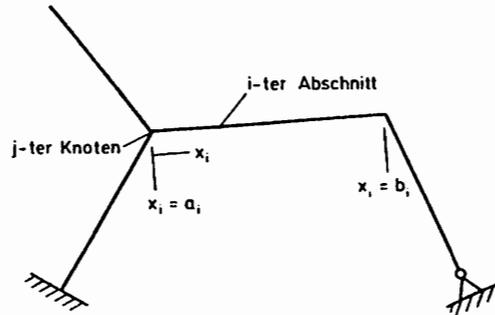


Abb. 1

mit gegebener Knotentopologie. Das bedeutet, die Koordinaten von Punkten, an denen Bauelemente miteinander verbunden werden, liegen fest. Die Koordinatenachse  $x_i$ , die auch gekrümmt sein kann, darf für jeden Abschnitt beliebig gewählt werden. Abhängig von der Aufgabenstellung können ein oder mehrere Entwurfparameter, die im folgenden als Steuervariable  $u_k$  bezeichnet und zum Steuervektor

$$\underline{u}_i = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}_i$$

des i-ten Abschnitts zusammengefaßt werden, auftreten.

Unter der Einwirkung einer gewählten Belastung oder Beanspruchung wird das Tragwerk einen bestimmten Zustand annehmen. Der Zustand eines Bauteils, des i-ten Abschnitts, kann an jeder Stelle  $x_i$  durch die Zustandsvariablen  $y_k$  oder den Zustandsvektor

$$\underline{y}_i = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

beschrieben werden.

Die Güte der Struktur läßt sich im allgemeinen durch ein Funktional (die Güte- oder Zielfunktion) bewerten. Für den i-ten Abschnitt erhält man

$$Z_i = \int_{x_i = \alpha_i}^{b_i} f_{0i}(x_i, \underline{y}_i, \underline{u}_i) dx_i \quad (2.1)$$

und für das aus m Abschnitten bestehende System

$$Z = \sum_{i=1}^m Z_i \quad (2.2)$$

Optimalität ist im Sinne des Minimums des Funktionals (2.2) zu verstehen. Beispiele für Zielfunktionen sind das Gewicht oder die Formänderungsarbeit. Die Frage nach dem Maximalwert einer Zielfunktion ist in (2.2) enthalten, wenn man die negative Zielfunktion minimiert.

Die Zustandsgrößen sind aus einem gewöhnlichen Differentialgleichungs-System zu ermitteln, wobei die Ableitungen Funktionen der Zustandsvariablen und Steuergrößen sind. Es lautet für den i-ten Abschnitt

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_\nu) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_\nu) \end{bmatrix}_i \quad (2.3)$$

oder

$$\underline{y}_i' = \underline{f}_i(x_i, \underline{y}_i, \underline{u}_i) \quad (2.4)$$

An den Knoten und Rändern sind die Zustandsvariablen durch die entsprechende Zahl von Rand- und Knotenbedingungen miteinander verknüpft, wobei hier alle Randbedingungen zu einer Knotenbedingung zusammengefügt werden. In vektorieller Schreibweise ergibt sich für den j-ten Knoten

$$\underline{r}_j = \underline{r}_j ( \underline{y}_{\underline{G}_1} (a_{\underline{G}_1}), \dots, \underline{y}_{\underline{G}_\mu} (a_{\underline{G}_\mu}), \underline{y}_{\underline{\tau}_1} (b_{\underline{\tau}_1}), \dots, \underline{y}_{\underline{\tau}_s} (b_{\underline{\tau}_s}) ) = \underline{0} \quad (2.5)$$

mit  $\underline{G}_r$  als Index für einen Abschnitt, dessen Ortskoordinate am Knoten beginnt (rechter Knotenrand) und  $\underline{\tau}_1$  als Index für einen Abschnitt, dessen Ortskoordinate am Knoten endet (linker Knotenrand).

Neben dem beschreibendem Dgl.-System können Nebenbedingungen in integraler Form vorgeschrieben werden. Man denke daran, daß für ein Tragwerk nur eine bestimmte Materialmenge verfügbar sein kann. Allgemein

$$I = \sum_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} g_i(x_i, \underline{y}_i, \underline{u}_i) dx_i = konst. \quad (2.6)$$

Solche Integralbedingungen lassen sich durch formales Differenzieren auf Differentialform plus Randbedingungen bringen und damit dem Dgl.-System (2.4) zuordnen.

Als weitere Nebenbedingungen können Gleichungen und Ungleichungen der Form auftreten

$$a_{\alpha_i}(x_i, \underline{y}_i, \underline{u}_i) = 0, \quad \alpha_i = 1, \dots, k \quad (2.7)$$

$$b_{\gamma_i}(x_i, \underline{y}_i, \underline{u}_i) \leq 0, \quad \gamma_i = 1, \dots, l \quad (2.8)$$

Durch sie ergibt sich im allgemeinen ein mit der Ortskoordinate  $x_i$  veränderlicher Steuerbereich. Beispiele für Ungleichungen sind Spannungsbedingungen oder in einfachster Form die Vorschrift einer oberen bzw. unteren Schranke für die

Querschnittsfläche. Die Gleichungen (2.1) bis (2.8) stellen die allgemeinste Form der hier behandelten Problemklasse dar.

### 3. Notwendige Optimalitätsbedingungen

#### 3.1 Allgemeines

Für die analytische Behandlung von Extremalaufgaben, wie sie bei der Optimierung vorkommen, ist die Variationsrechnung und das PONTRYAGINSche Maximumprinzip entwickelt worden [5], [18]. Diese Methoden liefern leider nur notwendige Bedingungen für das Vorliegen eines Extremums, nur in Ausnahmefällen, z.B. bei der linearen Optimierungsaufgabe, auch hinreichende. Die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen kann meist unmittelbar aus der physikalischen Problemstellung beantwortet werden. Ein Beweis ist nur unter sehr einschränkenden Bedingungen durchführbar.

Die eleganteste und am besten geeignete Methode zur Aufstellung der notwendigen Bedingungen für die hier betrachteten Aufgabenstellungen bietet die Methode der Lokalschnitte von BOLTJANSKI [19], die eine Weiterentwicklung des PONTRYAGINSchen Maximumprinzips darstellt.

#### 3.2 Die Methode der Lokalschnitte

Die in Kapitel 2 gegebene Aufgabenstellung wird nach [19] in der Weise abgeändert, daß das Funktional (2.1) als zusätzliche Zustandsvariable (Phasenkoordinate) eingeführt wird und dann durch die Gleichung

$$y_{0i}' = f_{0i}(x_i, y_i, u_i) \quad (3.1)$$

bestimmt ist. Für jeden Abschnitt  $i$  erhält man unter Einbeziehung der Nebenbedingungen in Integralform ein Dgl.-System der Form

$$\begin{bmatrix} y_0' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} f_0(x, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_\nu) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_\nu) \end{bmatrix}_i \quad (3.2)$$

oder

$$\underline{y}_i' = \underline{f}_i(x_i, \underline{y}_i, \underline{u}_i), \quad (3.3)$$

wobei die rechten Seiten von (3.2) bzw. (3.3) nicht von den Variablen  $y_{0i}$  abhängen. Der Steuerbereich  $U_i(\underline{y}_i)$  folgt aus den Nebenbedingungen (2.7) und (2.8)

$$\begin{aligned} \alpha_{\alpha_i}(x_i, \underline{y}_i, \underline{u}_i) &= 0, \quad \alpha_i = 1, \dots, k \\ b_{\gamma_i}(x_i, \underline{y}_i, \underline{u}_i) &\leq 0, \quad \gamma_i = 1, \dots, l \end{aligned}$$

Von den Funktionen  $f_j$ ,  $a_{\alpha_i}$ ,  $b_{\gamma_i}$  wird verlangt, daß ihre ersten Ableitungen nach sämtlichen Argumenten stetig sind. Jeder Punkt  $\underline{y}_i$  aus dem Zustandsraum  $Y_i$  und jeder Punkt  $\underline{u}_i$  aus dem Steuerbereich  $U_i(\underline{y}_i)$  erfüllt daher die Beziehungen (2.7) und (2.8). Der Index  $\gamma_i$  heißt aktiv im Punkt  $(\underline{y}_i, \underline{u}_i)$ , wenn in (2.8) das Gleichheitszeichen gilt. Die Menge aller im Punkt  $(\underline{y}_i, \underline{u}_i)$  aktiven Indices wird mit  $J_i(\underline{y}_i, \underline{u}_i)$  bezeichnet. Weiter wird vorausgesetzt, daß die Gleichungen (2.7) und (2.8) die Bedingungen der allgemeinen Lage erfüllen. Das ist der Fall, wenn die Vektoren

$$\text{grad}_{\underline{u}_i} \alpha_{\alpha_i}(x_i, \underline{y}_i, \underline{u}_i), \quad \alpha_i = 1, \dots, k \quad (3.4)$$

$$\text{grad}_{\underline{u}_i} b_{\gamma_i}(x_i, \underline{y}_i, \underline{u}_i), \quad \gamma_i \in J_i(\underline{y}_i, \underline{u}_i)$$

linear unabhängig sind. Im Zustandsraum  $Y$  sind außerdem die glatten Mannigfaltigkeiten  $M_0, \dots, M_t$  entsprechend der Knotenzahl gegeben. Das zu minimierende Funktional wird durch Gleichung (2.2) repräsentiert. Gesucht ist jetzt ein optimaler Prozeß, der die Mannigfaltigkeiten  $M_0, \dots, M_t$  verbindet. Dafür gibt der folgende Satz [19] die notwendigen Optimalitätsbedingungen an.

#### Maximumprinzip:

Man bilde mit Hilfsfunktionen  $\psi_j$  die Hamilton-Funktion für

jeden Abschnitt  $i$

$$H_i = \gamma_{0i} f_{0i}(x_i, \underline{y}_i, \underline{u}_i) + \gamma_{1i} f_{1i}(x_i, \underline{y}_i, \underline{u}_i) + \dots \quad (3.5)$$

$$\dots + \gamma_{ni} f_{ni}(x_i, \underline{y}_i, \underline{u}_i)$$

$(\underline{y}_i(x_i), \underline{u}_i(x_i))$ ,  $a_i \leq x_i \leq b_i$ ,  $i=1, \dots, m$  sei ein zulässiger Prozeß, der die Mannigfaltigkeiten  $M_0, \dots, M_t$  miteinander verbindet. Für diesen Prozeß sei die Menge der aktiven Indices  $J_i(\underline{y}_i(x_i), \underline{u}_i(x_i))$  auf jedem Abschnitt  $i$  stückweise konstant, d.h. die Strecken  $a_i \leq x_i \leq b_i$  können in eine endliche Anzahl aneinander grenzender Teilstrecken zerlegt werden, so daß sich die Menge  $J_i(\underline{y}_i(x_i), \underline{u}_i(x_i))$  auf keiner offenen Teilstrecke ändert. Wenn  $(\underline{y}_i(x_i), \underline{u}_i(x_i))$ ,  $a_i \leq x_i \leq b_i$ ,  $i=1, \dots, m$  ein optimaler Prozeß ist, muß es stückweise stetige Funktionen  $\lambda_{\alpha_i}(x_i)$ ,  $\alpha_i=1, \dots, k$ ,  $i=1, \dots, m$ ,  $a_i \leq x_i \leq b_i$ , nichtnegative stückweise stetige Funktionen  $\beta_{\gamma_i}(x_i)$ ,  $\gamma_i=1, \dots, l$ ,  $i=1, \dots, m$ ,  $a_i \leq x_i \leq b_i$ , Konstanten  $\gamma_{0i} \leq 0$ ,  $i=1, \dots, m$  und für jeden Abschnitt  $i$  eine stetige Lösung

$$\underline{\gamma}_i(x_i) = \begin{bmatrix} \gamma_1(x) \\ \vdots \\ \gamma_n(x) \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m$$

der Hilfssysteme

$$\gamma_{ji}' = - \frac{\partial H_i(x_i, \underline{\gamma}_i(x_i), \underline{y}_i(x_i), \underline{u}_i(x_i))}{\partial \gamma_{ji}}$$

$$+ \sum_{\alpha_i=1}^k \lambda_{\alpha_i}(x_i) \frac{\partial \alpha_{\alpha_i}(x_i, \underline{y}_i(x_i), \underline{u}_i(x_i))}{\partial \gamma_{ji}}$$

$$+ \sum_{\gamma_i=1}^l \beta_{\gamma_i}(x_i) \frac{\partial b_{\gamma_i}(x_i, \underline{y}_i(x_i), \underline{u}_i(x_i))}{\partial \gamma_{ji}}, \quad (3.6)$$

$$j = 1, \dots, n$$

geben, so daß die folgenden Bedingungen zutreffen:

- (A) Für sämtliche Punkte  $x_i$  der Intervalle  $a_i \leq x_i \leq b_i$  und beliebige  $\gamma_{oi} \leq 0$  mit endlich vielen Ausnahmen gilt für jeden Abschnitt  $i$

$$\begin{aligned} \max_{\underline{u}_i \in U_i(\underline{y}_i)} H_i(x_i, \underline{y}_i(x_i), \underline{y}_i(x_i), \underline{u}_i) &= \\ H_i(x_i, \underline{y}_i(x_i), \underline{y}_i(x_i), \underline{u}_i(x_i)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

- (B) Die Transversalitätsbedingung in jedem Knotenpunkt. Es ist

$$-\sum_{r=\sigma_1}^{\sigma_\mu} \underline{\gamma}_r(\alpha_r) \cdot \underline{w}_r(\alpha_r) + \sum_{s=\tau_1}^{\tau_p} \underline{\gamma}_s(b_s) \cdot \underline{w}_s(b_s) = 0 \quad (3.8)$$

für jeden Tangentenvektor

$$\underline{w}_j = (\underline{w}_{\sigma_1}(\alpha_{\sigma_1}), \dots, \underline{w}_{\sigma_\mu}(\alpha_{\sigma_\mu}), \underline{w}_{\tau_1}(b_{\tau_1}), \dots, \underline{w}_{\tau_p}(b_{\tau_p}))$$

an die Mannigfaltigkeit  $M_j$  in jedem Punkt

$$\begin{aligned} \underline{y}_j &= (\underline{\gamma}_{\sigma_1}(\alpha_{\sigma_1}), \dots, \underline{\gamma}_{\sigma_\mu}(\alpha_{\sigma_\mu}), \underline{\gamma}_{\tau_1}(b_{\tau_1}), \dots, \underline{\gamma}_{\tau_p}(b_{\tau_p})), \\ j &= 0, \dots, t \end{aligned}$$

- (C) Die Bedingung der Nichttrivialität: Wenigstens eine der Zahlen  $\gamma_{oi}, \gamma_{1i}, \dots, \gamma_{ni}$  ist von Null verschieden.

(D) 
$$\rho_{\gamma_i}(x_i) \circ \gamma_i(x_i, \underline{y}_i(x_i), \underline{u}_i(x_i)) \equiv 0 \quad (3.9)$$

für  $\gamma_i=1, \dots, l$ ,  $a_i \leq x_i \leq b_i$ ,  $i=1, \dots, m$  auf jedem Abschnitt  $i$ .

- (E) Bis auf endlich viele Ausnahmen auf jedem Abschnitt  $i$  für alle  $x_i$  aus  $a_i \leq x_i \leq b_i$  gilt die Beziehung:

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\underline{u}_i} H_i(x_i, \underline{z}_i(x_i), \underline{y}_i(x_i), \underline{u}_i(x_i)) = \\ \sum_{\alpha_i=1}^k \lambda_{\alpha_i}(x_i) \text{grad}_{\underline{u}_i} a_{\alpha_i}(x_i, \underline{z}_i(x_i), \underline{u}_i(x_i)) \\ + \sum_{j_i=1}^l \beta_{j_i}(x_i) \text{grad}_{\underline{u}_i} b_{j_i}(x_i, \underline{z}_i(x_i), \underline{u}_i(x_i)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Eine kurze Überlegung zeigt, daß dieser Satz von Bedingungen hinreichend ist, um eine Lösung eindeutig zu bestimmen. Es gibt infolge der Transversalitätsbedingungen (3.8)  $2mn$  Knotenbedingungen für  $2mn$  Differentialgleichungen der  $n$  Zustandsvariablen  $(y_1, \dots, y_n)_i$  und  $n$  Hilfsfunktionen  $(z_1, \dots, z_n)_i$  auf  $m$  Abschnitten. Wegen der Homogenität von  $H_i$  in den  $z_{ji}$  und der Bedingung (3.7) kann man für die  $z_{oi} = -1$  setzen. Gleichung (3.10) liefert zunächst  $\nu - (k+1)$  Gleichungen für  $\nu - (k+1)$  unbekannte Steuervariable  $u_j$  auf jedem Abschnitt  $i$ .  $k$  Steuervariable sind durch die Gleichungsnebenbedingungen (2.7) und die restlichen  $l$  Steuervariablen entweder durch (2.8) bei Gültigkeit des Gleichheitszeichens oder über die Identität (3.9) durch die Beziehung (3.10) bestimmt. Die Steuergrößen  $u_j$  lassen sich also auf jedem Abschnitt  $i$  durch die Zustands- und Hilfsvariablen ausdrücken.

Infolge von Restriktionen, ausgedrückt durch die Ungleichungsnebenbedingungen, können die durch sie festgelegten Steuervariablen sowohl im Inneren ihres Definitionsgebietes als auch auf seinem Rand liegen. Dieser Teil der Steuervariablen ist, wie oben bereits erwähnt, entweder durch (2.8) oder über die Beziehung (3.9) durch Gleichung (3.10) bestimmt. Die Grenzen des Gültigkeitsbereiches von (2.8) bzw. (3.10) kann man leicht durch die Konstruktion von Schaltfunktionen angeben. Bei  $q$  Schaltfunktionen  $s_j$  auf dem Abschnitt  $i$  erhält man den Schaltvektor

$$\underline{s}_i = \begin{bmatrix} s_i \\ \vdots \\ s_q \end{bmatrix}_i$$

Mit Hilfe dieser Schaltfunktionen entscheidet man jetzt, wann man welche Funktion der Steuergrößen zu nehmen hat, abhängig davon, ob  $s_j > 0$  oder  $s_j < 0$  ist. Setzt man nun die Steuergrößen  $u_j$  als Funktion der Zustandsvariablen  $y_j$  in die Beziehungen (3.2) und (3.6) ein und faßt das Originalsystem und das Hilfssystem als ein Dgl.-System auf, so erhält man ein nichtlineares Randwertproblem vom folgenden Typ:

Die Zahl der abhängigen Variablen wird wieder mit  $n$  bezeichnet. Dann ergeben sich  $m$  Dgl.-Systeme  $n$ -ter Ordnung, für den  $i$ -ten Abschnitt

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{bmatrix}_i \quad (3.11)$$

oder

$$\underline{y}_i' = \underline{f}_i(x_i, \underline{y}_i(x_i))$$

Dazu gehören  $m$  Schaltvektoren, für den  $i$ -ten Abschnitt

$$\underline{s}_i = \begin{bmatrix} s_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ s_m(x, y_1, \dots, y_n) \end{bmatrix}_i, \quad (3.12)$$

die die rechten Seiten des Systems (3.11) steuern, je nachdem, ob  $s_j > 0$  oder  $s_j < 0$  ist, und  $t$  Knotenbedingungen, für den  $j$ -ten Knoten

$$\underline{r}_j = \begin{bmatrix} r_1(y_{\sigma_1}(a_{\sigma_1}), \dots, y_{\sigma_\mu}(a_{\sigma_\mu}), y_{\tau_1}(b_{\tau_1}), \dots, y_{\tau_p}(b_{\tau_p})) \\ \vdots \\ r_p(y_{\sigma_1}(a_{\sigma_1}), \dots, y_{\sigma_\mu}(a_{\sigma_\mu}), y_{\tau_1}(b_{\tau_1}), \dots, y_{\tau_p}(b_{\tau_p})) \end{bmatrix}_j = \underline{0}, \quad (3.13)$$

wobei die Gesamtzahl  $nm$  aller Variablen  $y_k$  mit der Gesamtzahl  $tp$  aller Knotenbedingungen übereinstimmen muß.

## 4. Die Mehrzielmethode

### 4.1 Allgemeines und Beschreibung des Verfahrens

Die Mehrzielmethode [15, 16, 17] ist ein Iterationsverfahren, das die Lösung des Randwertproblems (3.11) bis (3.13) an mehreren Stellen gleichzeitig berechnet. Durch dieses künstliche Einfügen von Lösungspunkten (Stützstellen) wird bekannterweise bei einläufigen Systemen [17] Konvergenz erzeugt bzw. der Konvergenzbereich stark verbessert gegenüber einem einfachen Schießverfahren, das nur die Randpunkte benutzt und iterativ versucht, durch geschätzte Anfangswerte am linken Rand die entsprechenden Werte am rechten Rand zu erfüllen. Ein solch günstiges Verhalten ist auch für mehrläufige Systeme zu erwarten. Eine allzu hohe Zahl von Stützstellen führt allerdings wieder zu einer Verschlechterung des Konvergenzverhaltens [17].

Die Vorgehensweise für mehrläufige Systeme soll an Hand des dargestellten Beispiels (Abb. 2) erläutert werden.

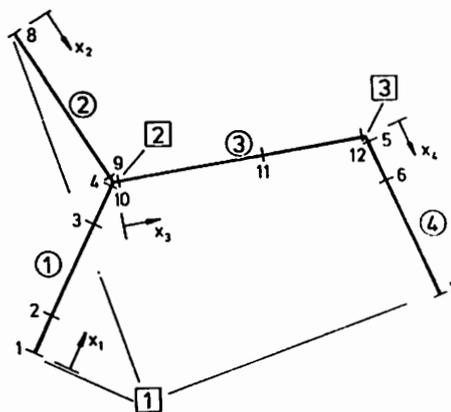


Abb. 2

Zunächst werden die einzelnen Abschnitte (hier ① bis ④) und Knoten (hier ① bis ③) willkürlich nummeriert und die Richtungen der unabhängigen Koordinaten  $x_i$  auf den Abschnit-

ten festgelegt. Der Verlauf von  $x$  muß nicht notwendig geradlinig sein. Auch sämtliche Ränder werden dabei zu einem Knoten (hier  $\boxed{1}$ ) zusammengefaßt. Danach können die Abschnitte durch Stützstellen aufgeteilt werden, und zwar nummeriert man die Stützstellen fortlaufend in der festgesetzten  $x$ -Richtung. Die Wahl der Nummer der ersten Stützstelle auf jedem Abschnitt ist beliebig. Jede Stützstellennummer darf jedoch nur einmal vorkommen.

Ausgehend von einer geschätzten Anfangsnäherung, die natürlich sinnvoll von den physikalischen Gegebenheiten Gebrauch machen sollte, wird das Dgl.-System (3.11) von den Stützstellen aus integriert, also ein Anfangswertproblem gelöst unter Berücksichtigung der Schaltbedingungen. Für Abschnitt  $\textcircled{1}$  könnte sich folgendes Bild ergeben (Abb. 3):

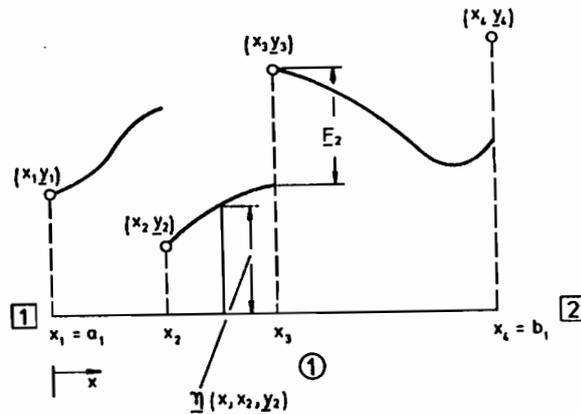


Abb. 3

Die Lösung zwischen den Stützstellen lautet

$$\underline{\eta} = \underline{\eta}(x, x_k, \underline{y}_k) \quad (4.1)$$

Ziel ist es, die  $\underline{y}_k$  aller Stützstellen so zu bestimmen, daß die Lösung stetig wird und überdies die Knotenbedingungen erfüllt werden. Das ergibt die folgende Beziehung an den Stützstellen zwischen den Knoten

$$\underline{\eta}(x_{k+1}, x_k, \underline{y}_k) = \underline{y}_{k+1}$$

oder

$$\underline{F}_k = \underline{y}(x_{k+1}, x_k, \underline{y}_k) - \underline{y}_{k+1} = \underline{0} \quad (4.2)$$

Dazu kommen die t Knotenbedingungen aus (3.13)

$$\begin{aligned} \underline{r}_j = \underline{r}_j(\underline{y}_{G_1}, \dots, \underline{y}_{G_\mu}, \underline{\eta}(x_{L_1}, x_{L_1-1}, \underline{y}_{L_1-1}), \dots, \underline{\eta}(x_{L_j}, x_{L_j-1}, \underline{y}_{L_j-1})) \\ = \underline{0} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Insgesamt hat man sn Gleichungen zu bestimmen, wenn s die Stützstellenzahl ist. Für das Beispiel (Abb. 2) erhält man das Gleichungssystem

$$\underline{F}(\underline{y}) = \begin{bmatrix} \underline{F}_1 \\ \underline{F}_2 \\ \underline{r}_2 \\ \underline{F}_5 \\ \underline{r}_3 \\ \underline{F}_{10} \\ \underline{r}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\eta}(x_2, x_1, \underline{y}_1) - \underline{y}_2 \\ \underline{\eta}(x_3, x_2, \underline{y}_2) - \underline{y}_3 \\ \underline{r}_2(\underline{\eta}(x_4, x_3, \underline{y}_3), \underline{\eta}(x_9, x_8, \underline{y}_8), \underline{y}_{10}) \\ \underline{\eta}(x_6, x_5, \underline{y}_5) - \underline{y}_6 \\ \underline{r}_3(\underline{\eta}(x_{12}, x_{11}, \underline{y}_{11}), \underline{y}_5) \\ \underline{\eta}(x_{11}, x_{10}, \underline{y}_{10}) - \underline{y}_{11} \\ \underline{r}_1(\underline{\eta}(x_7, x_6, \underline{y}_6), \underline{y}_1, \underline{y}_8) \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (4.4)$$

mit  $\underline{y} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \underline{y}_{11} \end{bmatrix}$  oder allgemein

$$\boxed{\underline{F}(\underline{y}) = \underline{0}} \quad (4.5)$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem für die unbekannt

Vektoren  $\underline{y}_k$  kann nur iterativ gelöst werden. Dabei ist erfahrungsgemäß mit Konvergenzschwierigkeiten zu rechnen, die durch Modifikation von Standardverfahren verbessert, teilweise verhindert werden können.

#### 4.2 Lösungsmethoden für nichtlineare Gleichungssysteme

Im wesentlichen kann man sich auf zwei Arten an die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (4.5) begeben:

- (i) Man betrachtet das Problem als Nullstellenaufgabe und löst diese etwa mit Hilfe des Newton-Verfahrens.
- (ii) Das Nullstellenproblem wird in eine Minimierungsaufgabe transformiert. Dazu konstruiert man eine skalare Testfunktion  $T$  derart, daß die Nullstellen von  $F^*$  mit den Minimumstellen von  $T$  zusammenfallen, d.h.

$$T = 0 \iff F = 0 \quad (4.6)$$

Die naheliegendste Form einer Testfunktion ist irgendeine Norm von  $F$ , etwa

$$T = \frac{1}{2} (AF)^T (AF) \quad (4.7)$$

$A$  ist eine nichtsinguläre konstante Matrix. Diese Minimierungsaufgabe läßt sich dann mit Abstiegs- oder Gradientenverfahren behandeln.

Häufig kommen modifizierte Kombinationen aus beiden Verfahren zur Anwendung.

---

\* Wegen der besseren Übersichtlichkeit und weil Verwechslungen mit skalaren Größen ausgeschlossen werden können, werden in diesem Kapitel Vektoren und Matrizen nicht mehr durch Unterstreichen hervorgehoben.

### 4.3 Anwendung des Newton-Verfahrens auf die Mehrzielmethode

Das Newton-Verfahren berechnet die (j+1)-te Näherung aus der j-ten Näherung nach der Vorschrift:

$$y^{(j+1)} = y^{(j)} - \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^{(j)-1} F(y)^{(j)} \quad (4.8)$$

oder

$$y^{(j+1)} = y^{(j)} + \Delta y^{(j)} \quad (4.9)$$

mit

$$H^{(j)} \Delta y^{(j)} = -F(y)^{(j)}$$

Darin bedeutet

$$H^{(j)} = \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^{(j)} \quad (4.10)$$

die Funktionalmatrix im j-ten Schritt. Für einen Teilvektor  $F_k$  aus F erhält man

$$\left( \frac{\partial F_k}{\partial y} \right)^{(j)} = \left( \frac{\partial F_k}{\partial y_k}, \frac{\partial F_k}{\partial y_{k+1}} \right)^{(j)} = \left( \frac{\partial \eta}{\partial y_k}, -I \right)^{(j)}$$

oder

$$\left( \frac{\partial F_k}{\partial y} \right)^{(j)} = (G_k, -I)^{(j)}$$

mit

$$G_k = \frac{\partial \eta(x_{k+1}, x_k, y_k)}{\partial y_k}$$

als k-te Jacobi-Matrix oder Übertragungsmatrix und I als Einheitsmatrix auf dem k-ten Stützstellenintervall. Für ein  $r_k$  aus F ergibt sich

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial r_k}{\partial y} \right)^{(j)} &= \left( \frac{\partial r_k}{\partial y_{G_1}}, \dots, \frac{\partial r_k}{\partial y_{G_\mu}}, \frac{\partial r_k}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y_{T_1-1}}, \dots, \frac{\partial r_k}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y_{T_S-1}} \right)^{(j)} \\ &= (A_{G_1}, \dots, A_{G_\mu}, B_{T_1} G_{T_1-1}, \dots, B_{T_S} G_{T_S-1})^{(j)} \quad (4.11) \end{aligned}$$

In der Gesamtmatrix stehen die  $G_k$  in Spalte  $k$ , die Einheitsmatrizen in Spalte  $k+1$ , die  $A_{G_k}$  in Spalte  $G_k$  und die  $B_{\tau_k} G_{\tau_k-1}$  in Spalte  $\tau_k-1$ . Für das Beispiel erhält man

$$\begin{bmatrix} G_1 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_4 G_3 & 0 & 0 & B_9 G_8 & A_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_5 & -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_5 & 0 & 0 & 0 & B_{12} G_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{10} & -I \\ A_1 & 0 & 0 & 0 & B_7 G_6 & A_8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta y_3 \\ \Delta y_5 \\ \Delta y_6 \\ \Delta y_8 \\ \Delta y_{10} \\ \Delta y_{11} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \tau_2 \\ F_5 \\ \tau_3 \\ F_{10} \\ \tau_1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

oder nach (4.9)

$$H^{(j)} \Delta y^{(j)} = -F^{(j)}$$

Dieses Gleichungssystem kann einmal als Ganzes gelöst werden. Da jedoch die einzelnen Matrixgleichungen zwischen den Knoten direkt miteinander gekoppelt sind, kann man ein Übertragungsverfahren aufbauen, so daß sich ein System kleinerer Ordnung erzielen läßt. Das kann in der Weise bewerkstelligt werden, daß man in (4.12) die Matrizenmultiplikation zeilenweise durchführt und die erhaltenen Gleichungen ineinander einsetzt. Dann bleibt folgendes System übrig:

	$m$ Abschnitte					
$t$		1	2	3	4	
Knoten						
1		$B_4 G_3 G_2 G_1$	0	$B_9 G_8$	$A_{10}$	$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_5 \\ \Delta y_8 \\ \Delta y_{10} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tau_2 + B_4 G_3 F_2 + B_4 G_3 G_2 F_1 \\ \tau_3 + B_7 G_6 F_5 \\ \tau_1 + B_{12} G_{11} F_{10} \end{bmatrix}$
2		$A_1$	$B_7 G_6 G_5$	$A_8$	0	
3		0	$A_5$	0	$B_{12} G_{11} G_{10}$	

allgemein

$$E^{(j)} \hat{\Delta y}^{(j)} = \hat{\tau}^{(j)} \quad (4.13)$$

Für nichtsinguläre Funktionalmatrizen  $H^{(j)}$  läßt sich dieses reduzierte System vorab lösen. Die anderen  $\Delta y_k$  folgen durch einfache Matrizenmultiplikation aus dieser Lösung.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\Delta Y}^{(j)} &= E^{-1(j)} \hat{\gamma}^{(j)} \\ \Delta Y_{k+1}^{(j)} &= G_k^{(j)} \Delta Y_k^{(j)} + F_k^{(j)} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

speziell

$$\begin{aligned} \Delta Y_2 &= G_1 \Delta Y_1 + F_1 \\ \Delta Y_3 &= G_2 \Delta Y_2 + F_2 \\ \Delta Y_6 &= G_5 \Delta Y_5 + F_5 \\ \Delta Y_{11} &= G_{10} \Delta Y_{10} + F_{10} \end{aligned}$$

Die so durchgeführte Reduktion des Gleichungssystems durch Elimination einzelner Variablen

$$\Delta Y_{k+1} = G_k \Delta Y_k + F_k$$

kann auch durch eine Transformation mit nichtsingulären quadratischen Matrizen L und R ersetzt werden (vgl. [14]).

$H^{(j)}$  wird dann überführt in

$$\hat{H}^{(j)} = \begin{bmatrix} F & & 0 \\ & I & \\ 0 & & I \end{bmatrix}^{(j)} \quad (4.15),$$

wobei zwischen  $\hat{H}^{(j)}$  und  $H^{(j)}$  die Beziehung besteht

$$\hat{H}^{(j)} = (L H R)^{(j)} \quad (4.16)$$

Die Durchführung des Newton-Verfahrens für das reduzierte System ist also äquivalent der für das Ausgangssystem bei nichtsingulärer Funktionalmatrix  $H^{(j)}$ .

Die bekannte Tatsache, daß eine hohe Zahl von Übertragungen zur numerischen Instabilität führt, läßt sich ausschließen, da die Stützstellenzahl aus Konvergenzgründen beschränkt bleiben muß. Man kann auf den Abschnitten auch künstlich Knotenpunkte einführen. Der Vorteil der Reduktion des Gleichungssystems mit dem damit verbundenen geringeren Speicherbedarf bei der numerischen Durchführung wiegt die Nachteile des Übertragungsverfahrens weit auf.

#### 4.4 Modifikation des Newton-Verfahrens unter Verwendung von Abstiegskriterien

---

##### 4.4.1 Vorbemerkungen

Wenden wir Abstiegsverfahren auf die in Kapitel 4.2 definierte Testfunktion

$$T(y^{(j)}, A) = \frac{1}{2} (AF^{(j)})^T (AF^{(j)})$$

an, so berechnet man die (j+1)-te Näherung aus der j-ten Näherung nach der Vorschrift

$$y^{(j+1)} = y^{(j)} + \lambda^{(j)} p^{(j)} \quad (4.17),$$

falls 
$$T(y^{(j+1)}, A) < T(y^{(j)}, A) \quad (4.18)$$

Eine mögliche Suchrichtung  $p^{(j)}$  läßt sich beispielsweise aus der Testfunktion durch Gradientenbildung gewinnen.

$$p^{(j)} = \Delta y^{(j)} = -\text{grad } T(y^{(j)}, A) \quad (4.19)$$

$\lambda^{(j)} > 0$  aus (4.17) ist immer so zu wählen, daß die Beziehung (4.18) erfüllt wird. Die Existenz eines solchen  $\lambda^{(j)}$  ist gesichert (vgl. [13]), falls

$$p^{T(j)} \text{grad } T(y^{(j)}, A) < 0 \quad (4.20)$$

Auf Grund dieses Zusammenhanges nennt man eine Testfunktion  $T(y, A)$  für ein beliebiges Iterationsverfahren geeignet, falls die Bedingung (4.20) erfüllt wird.

##### 4.4.2 Nichtsinguläre Funktionalmatrix

Bei direkter Anwendung des Newton-Verfahrens (4.8) bzw. (4.9) hat man, wenn die Iteration nicht "hinreichend" nahe an der gesuchten Nullstelle beginnt, mit Divergenz zu rechnen (vgl. [11]). Dieses divergente Verhalten kann man vermeiden, wenn man als Erfolgskriterium für einen Newton-Schritt die Abstiegsbedingung (4.18) benutzt, indem man in (4.17) als Such-

richtung  $p^{(j)}$  die Newton-Richtung wählt.  $\lambda^{(j)}$  spielt dann die Rolle eines Dämpfungsfaktors oder Konvergenz erzeugenden Faktors.

$$\begin{aligned} y^{(j+1)} &= y^{(j)} + \lambda^{(j)} \Delta y^{(j)} \\ \Delta y^{(j)} &= -H^{-1(j)} F^{(j)} \end{aligned}$$

Den Faktor  $\lambda^{(j)}$  ( $0 < \lambda^{(j)} \leq 1$ ) bestimmt man zweckmäßig nach folgender Strategie:

$$\lambda^{(j)} = 2^{-k}$$

mit  $k$  als natürliche Zahl.

$\lambda^{(j)}$  bzw.  $k$  ist dann so zu wählen, daß für eine zunächst noch beliebige Testfunktion gilt

$$T(y^{(j+1)}, B) < T(y^{(j)}, B)$$

Die Überprüfung der Bedingung (4.18) ergibt

$$\Delta y^{T(j)} \text{grad}(y^{(j)}, B) = -2T(y^{(j)}, B) < 0$$

Jede Testfunktion ist also für dieses modifizierte Verfahren geeignet. Aus Gründen, die in Kapitel 4.4.3 herausgestellt werden, wird in dieser Arbeit die Testfunktion

$$T = T(y^{(j)}, H^{-1(j)}) = \frac{1}{2} (\Delta y^{(j)})^T \Delta y^{(j)} \quad (4.21)$$

gewählt. Hält man also  $B=H^{-1(j)}$  in einem Iterationsschritt konstant, so ergibt sich der folgende Algorithmus:

#### Modifiziertes Newton-Verfahren bei nichtsingulärer Funktionalmatrix

---

$$\begin{aligned} y^{(j+1)} &= y^{(j)} + \lambda^{(j)} \Delta y^{(j)} \\ \Delta y^{(j)} &= -H^{-1(j)} F^{(j)} \\ \Delta y^{(j)} &= 2^{-k}, \quad k=0,1,2,\dots, \text{ derart, daß} \\ T(y^{(j+1)}, H^{-1(j)}) &< T(y^{(j)}, H^{-1(j)}). \end{aligned}$$

Mit

$$\Delta y^{(j)} = -H^{-1(j)} F^{(j)} \quad (4.22)$$

und

$$\Delta y^{(j+1)} = -H^{-1(j)} F^{(j+1)} = H^{-1(j)} F(y^{(j+1)})$$

wird aus der letzten Beziehung

$$(\Delta y^{(j+1)})^T \Delta y^{(j+1)} < (\Delta y^{(j)})^T \Delta y^{(j)}$$

Bei Anwendung auf die Mehrzielmethode ist

$$\Delta y^{(j)} = -H^{-1(j)} F^{(j)}$$

zu ersetzen durch (4.14)

$$\hat{\Delta y}^{(j)} = E^{-1(j)} \hat{\tau}^{(j)}$$

$$\Delta y_k^{(j)} = G_{k-1}^{(j)} \Delta y_{k-1}^{(j)} + F_{k-1}^{(j)}$$

#### 4.4.3 Singuläre Funktionalmatrix

Für die Funktionalmatrix  $H^{(j)}$  (Rang  $s < n$ ) findet man dann die Form

$$H^{(j)} = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{|cc|} \hline J & k \\ \hline o & o \\ \hline \end{array}}^n \\ \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} J \quad k \\ o \quad o \end{array} \right\} s \\ \left. \begin{array}{l} o \quad o \end{array} \right\} r \end{array} \right\} \end{array} \quad (4.23)$$

J ist eine obere (s,s)-Dreiecksmatrix und k eine (r,r)-Matrix. Da die Inverse  $H^{-1(j)}$  nicht definiert ist, fällt das Newton-Verfahren aus, und man muß auf andere Möglichkeiten zurückgreifen:

- (i) Man kann  $\Delta y^{(j)}$  aus der Gradientenbedingung (4.19), bei der die Inverse nicht benötigt wird, ermitteln, indem man beispielsweise  $A=I$  in der Testfunktion setzt. In diesem Fall muß aber der Monotonietest nachgewiesen werden, denn er gilt nicht mehr für beliebige Matrizen A der Testfunktion (4.7). Man erhält aus (4.7)

$$\tau^{(j)} = \frac{1}{2} F^T{}^{(j)} F^{(j)}$$

und aus (4.19)

$$\Delta y^{(j)} = -H^T{}^{(j)} F^{(j)}$$

Mit

$$\text{grad } T^{(j)} = H^{T(j)} F^{(j)}$$

ist dann der Monotonietest (4.17) erfüllt.

$$\Delta y^{T(j)} \text{grad } T^{(j)} = -\Delta y^{T(j)} \Delta y^{(j)} < 0$$

- (ii) Da  $J^{-1}$  nach Definition existiert, kann dieser Teil der  $\Delta y$  aus dem Newton-Verfahren ermittelt werden. Über den anderen Teil von  $\Delta y$  kann nichts ausgesagt werden, und man setzt ihn willkürlich zu Null.

Anwendung auf die Mehrzielmethode:

Mit (4.15) und (4.16) aus Kapitel 4.2 folgt sofort, daß bei singulärem  $H^{(j)}$  auch  $E^{(j)}$  singulär ist.  $E^{(j)}$  läßt sich also auf die gleiche Form wie  $H^{(j)}$  transformieren

$$E^{(j)} = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{J} & \hat{k} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \hat{s} \\ \hat{r} \end{array}$$

und man erhält

$$\left[ \begin{array}{c|c} \hat{J} & \hat{k} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{array}^{(j)} = \begin{array}{l} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \end{array}^{(j)}$$

Daraus berechnet man

$$\begin{aligned} \Delta y_1^{(j)} &= \hat{J}^{-1} \hat{r}_1^{(j)} \\ \Delta y_2^{(j)} &= 0 \end{aligned}$$

Die anderen  $\Delta y_i$  sind bestimmt durch die untere der Gleichungen (4.14).

- (iii) Eine dritte Möglichkeit besteht darin, daß man zur Bestimmung des Lösungsvektors  $\Delta y$  gleichzeitig das Newton-Verfahren

$$\left[ \begin{array}{c|c} J & k \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{array}^{(j)} = - \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \end{array}^{(j)} \quad (4.24)$$

und das Gradientenverfahren (4.19)

heranzieht mit beliebigem A unter den Voraussetzungen von Gleichung (4.7). Da diese Art des Vorgehens (vgl. [14]) am vielversprechendsten erscheint, soll hier davon Gebrauch gemacht werden.

Das Newton-Verfahren liefert dann die Gleichung

$$J \Delta y_1^{(j)} + k \Delta y_2^{(j)} = -F_1^{(j)} \quad (4.25)$$

oder

$$\Delta y_1^{(j)} = \overline{\Delta y_1}^{(j)} - \overline{k} \Delta y_2^{(j)} \quad (4.26)$$

mit den Definitionen ( $J^{-1}$  existiert nach Voraussetzung.)

$$\overline{\Delta y_1}^{(j)} = -J^{-1} F_1^{(j)} \quad (4.27)$$

$$\overline{k} = J^{-1} k \quad (4.28)$$

Wird im Gradientenverfahren  $B=AA^T$  gesetzt, und für B eine Blockzerlegung durchgeführt

$$B = \left[ \begin{array}{c|c} B_0 & B_1 \\ \hline B_1^T & B_2 \end{array} \right] \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} B_0 \\ B_1^T \end{matrix}} \right\} s \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} B_1 \\ B_2 \end{matrix}} \right\} r \end{matrix} ,$$

so folgt aus (4.19)

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix}^{(j)} = - \begin{bmatrix} J^T & 0 \\ k^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 & B_1 \\ B_1^T & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}^{(j)}$$

und daraus

$$\begin{aligned} \Delta y_1^{(j)} &= -J^T (B_0 F_1 + B_1 F_2)^{(j)} \\ \Delta y_2^{(j)} &= -k^T (B_0 F_1 + B_1 F_2)^{(j)} \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Beziehungen läßt sich  $(B_0 F_1 + B_1 F_2)$  eliminieren, und man erhält die Gradientenbedingung

$$\Delta y_2^{(j)} = k^T J^{-1 T} \Delta y_1^{(j)} \quad (4.29)$$

oder

$$\Delta y_2^{(j)} = (J^{-1}k)^T \Delta y_1^{(j)} = \bar{k}^T \Delta y_1^{(j)}$$

$\Delta y_1^{(j)}$  ist also durch das Newton-Verfahren festgelegt und  $\Delta y_2^{(j)}$  durch die Gradientenbedingung. Setzt man (4.26) in die letzte Gleichung ein, so ergibt sich

$$\Delta y_2^{(j)} = \bar{k}^T \bar{\Delta y}_1^{(j)} - \bar{k}^T \bar{k} \Delta y_2^{(j)}$$

oder

$$\bar{k}^T \bar{\Delta y}_1^{(j)} = (I + \bar{k}^T \bar{k}) \Delta y_2^{(j)}$$

Definiert man  $M = (I + \bar{k}^T \bar{k})$ , dann läßt sich die letzte Beziehung auflösen, und man erhält mit (4.27)

$$\begin{aligned} \Delta y_2^{(j)} &= -M^{-1} \bar{k}^T J^{-1} F_1^{(j)} \\ &= -M^{-1} \bar{k} \bar{\Delta y}_1 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Aus (4.26) folgt  $\Delta y_2^{(j)} = -M^{-1} \bar{\Delta y}_2$

$$\Delta y_1^{(j)} = -(I - \bar{k} M^{-1} \bar{k}^T) J^{-1} F_1^{(j)} \quad (4.31)$$

Man rechnet nun leicht nach, daß

$$\begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix}^{(j)} = - \begin{bmatrix} (I - \bar{k} M^{-1} \bar{k}^T) J^{-1} & 0 \\ M^{-1} \bar{k}^T J^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}^{(j)} \quad (4.32)$$

eine äquivalente Darstellung zu

$$\Delta y = -H^+ F^{(j)} \quad (4.33)$$

ist, wobei  $H^+$  die von PENROSE definierte Pseudoinverse bezeichnet mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} HH^+H &= H \\ H^+HH^+ &= H^+ \\ (H^+H)^T &= H^+H \\ (HH^+)^T &= HH^+ \end{aligned} \quad (4.34)$$

Es ist bekannt, daß die Pseudoinverse unter allen Vektoren, die der Newton-Bedingung (4.25) genügen, denjenigen mit der kleinsten euklidischen Norm, d.h. mit dem kleinsten Betrag, liefert. Man spricht auch von der Normallösung unter den unendlich vielen Lösungen von Gleichung (4.24)

Bei der Anwendung auf die Mehrzielmethode ist eine Verallgemeinerung der Pseudoinversen vorzunehmen (vgl. [14]), wenn man nicht den Vorteil der Reduktion des Gleichungssystems verlieren will. Dafür benötigen wir die in Kapitel 4.3 angegebene besonders einfache Form der Funktionalmatrix

$$\hat{H} = LHR = \begin{bmatrix} E & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix}$$

L und R waren quadratische nichtsinguläre Matrizen. Für den Korrekturvektor  $\Delta y^{(j)}$  ermittelt man dann bei singulärer Funktionalmatrix

$$\Delta y^{(j)} = -H^{-(j)} F^{(j)} \quad (4.35)$$

mit  $H^- = R \hat{H}^+ L$  als "gewichtete" Pseudoinverse

und

$$\hat{H}^+ = \begin{bmatrix} E & & & \\ & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

oder mit

$$R^{-1(j)} \Delta y^{(j)} = -\hat{H}^{+(j)} L^{(j)} F^{(j)} = -R^{-1(j)} \hat{H}^{-(j)} \quad (4.37)$$

entsprechend (4.14) die Form

$$\begin{aligned} \hat{\Delta y}^{(j)} &= E^{+(j)} \hat{T}^{(j)} \\ \Delta y_{k+1}^{(j)} &= G_k^{(j)} \Delta y_k^{(j)} + F_k^{(j)} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Die "gewichtete" Pseudoinverse ist mit S und T als reelle positiv-definite Matrizen durch die Axiome definiert:

$$\begin{aligned}
 HH^{-1} &= H \\
 H^{-1}H^{-1} &= H^{-1} \\
 (H^{-1}H)^T &= S^{-1}H^{-1}HS \\
 (HH^{-1})^T &= T^{-1}HH^{-1}T
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

In unserem Fall ist  $S=RR^T$  und  $T=(L^T L)^{-1}$ , was leicht durch Nachrechnen verifiziert werden kann.

Die in der obigen Weise definierte Pseudoinverse zieht Konsequenzen für die Minimaleigenschaften des Lösungsvektors und Restriktionen in der Wahl von A für die Testfunktion nach sich. Statt der Norm  $\Delta y^T \Delta y$  wird hier die Norm  $\Delta y^T L^{-1} \Delta y$  minimiert. Die unter 4.4.3 (i) genannte Testfunktion  $T^{(j)} = 1/2 F^{T(j)} F^{(j)}$  ist nur unter Einschränkungen für das Verfahren geeignet. Das läßt sich durch Anwendung des Monotonietests (4.20) auf die Mehrzielmethode zeigen. Man erhält

$$\begin{aligned}
 \Delta y^{T(j)} \text{grad } T^{(j)} &= \Delta y^{T(j)} \text{grad } \left( \frac{1}{2} F^{T(j)} F^{(j)} \right) \\
 &= - (H^{-1(j)} F^{(j)})^T H^{T(j)} F^{(j)} \\
 &= - F^{T(j)} (H^{(j)} H^{-1(j)})^T F^{(j)}
 \end{aligned}$$

Setzt man (4.16) und (4.36) ein, so folgt

$$\Delta y^{T(j)} \text{grad } T^{(j)} = - F^{T(j)} (L^{-1} \hat{H} \hat{H}^+ L)^T F^{(j)}$$

Führt man  $\hat{H} \hat{H}^+$  aus, so ergibt sich

$$\hat{H} \hat{H}^+ = \left[ \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & I_1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c} E^+ & 0 \\ \hline 0 & I_1 \end{array} \right] = I - \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_3 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

und weiter

$$\begin{aligned}
 \Delta y^{T(j)} \text{grad } T^{(j)} &= - F^{T(j)} F^{(j)} + F^{T(j)} L^{T(j)} \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I_3 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] L^{T(j)} F^{(j)} \\
 &= - F^{T(j)} F^{(j)} + F^{T(j)} B^T F^{(j)}
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

Der erste Ausdruck auf der rechten Seite von (4.40) ist in jedem Fall negativ-definit, der letzte im allgemeinen nicht, da in den  $L^{(j)}$  Produkte der Jacobi-Matrizen stecken, die wie-

derum von der willkürlichen Wahl der Stützstellen abhängen. Nur in dem Fall, daß auf den einzelnen Abschnitten keine Stützstellen vorhanden sind, d.h.  $L^{(j)} = I$ , und damit

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bleibt der Ausdruck auf der rechten Seite negativ-definit; es wird nur ein Teil der  $F^{(j)}$  "ausgeblendet".

Es ist deshalb sinnvoll, nur solche Testfunktionen zuzulassen, die in jedem Fall die Gültigkeit des Monotonietests garantieren. Geeignete Testfunktionen für beliebig viele Stützstellen sind die in dieser Arbeit verwendete

$$T = T(y^{(j)}, H^{-(j)}) = \frac{1}{2} \Delta y^T \tau^{(j)} \Delta y^{(j)}, \quad (4.41)$$

aber auch

$$T = T(y^{(j)}, R^{-1(j)} H^{-(j)}),$$

was durch einfaches Einsetzen in den Monotonietest leicht nachgewiesen werden kann.

Damit können wir den folgenden Algorithmus angeben:

Modifiziertes Newton-Verfahren bei singulärer Funktionalmatrix

$$y^{(j+1)} = y^{(j)} + \lambda^{(j)} \Delta y^{(j)}$$

$$\Delta y^{(j)} = -H^{-(j)} F^{(j)}$$

$$\lambda^{(j)} = 2^{-k} \quad , \quad k=0,1,\dots, \text{ derart, daß}$$

$$T(y^{(j+1)}, H^{-(j)}) < T(y^{(j)}, H^{-(j)}).$$

Mit

$$\Delta y^{(j)} = -H^{-(j)} F^{(j)}$$

und

$$\overline{\Delta y}^{(j+1)} = -H^{-(j)} F^{(j+1)} \quad (4.42)$$

lautet die letzte Beziehung

$$\frac{\tau^{(j+1)}}{\Delta y^{(j+1)}} \frac{\tau^{(j+1)}}{\Delta y^{(j+1)}} < \Delta y^{(j)} \tau^{(j)} \Delta y^{(j)}$$

Bei der Anwendung auf die Mehrzielmethode ist

$$\Delta y^{(j)} = -H^{-(j)} F^{(j)}$$

zu ersetzen durch (4.38)

$$\hat{\Delta y}^{(j)} = E^{+(j)} \hat{\tau}^{(j)}$$

$$\Delta y_{k+1}^{(j)} = G_k^{(j)} \Delta y_k^{(j)} + F_k^{(j)}$$

Bei der Durchführung des Verfahrens wird man aus numerischen Gründen die Funktionalmatrizen  $H^{(j)}$  bzw.  $E^{(j)}$  skalieren. Bekannterweise wird durch Skalierung die Gleichungsauflösung linearer Systeme gutartig beeinflusst. Von solchen Skalierungsmatrizen wird man allerdings erwarten, daß die Korrekturvektoren  $\Delta y^{(j)}$  unabhängig von dieser Skalierung sind. Dazu müssen die Skalierungsmatrizen bestimmten Bedingungen genügen.

Geht man von der unskalierten Version aus, so gilt:

$H^{(j)} \Delta y^{(j)} = -F^{(j)}$  oder  $\Delta y^{(j)} = -H^{+(j)} F^{(j)}$ . Skaliert man nun  $H^{(j)}$  mit nichtsingulärem  $D^{(j)}$ , dann liefert die erste Beziehung

$$H^{(j)} D^{(j)} \Delta x^{(j)} = -F^{(j)} \quad (4.43)$$

Falls  $\Delta y^{(j)}$  invariant gegenüber der Skalierung  $D^{(j)}$  ist, muß die Auflösung von (4.43) nach  $\Delta x^{(j)}$  ergeben

$$\begin{aligned} \Delta x^{(j)} &= - (H^{(j)} D^{(j)})^{-1} F^{(j)} \\ &= - D^{+(j)} H^{+(j)} F^{(j)} \\ &= D^{-1(j)} \Delta y^{(j)}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

d.h.

$$\Delta y^{(j)} = D^{(j)} \Delta x^{(j)} \quad (4.45)$$

(4.44) ist erfüllt (vgl. [21]), falls (Iterationsindex wird

weggelassen)

$$(a) \quad D^+ D H (D H)^T = H (D H)^T$$

$$(b) \quad H H^+ D^T D H = D^T D H \quad \text{ist.}$$

(a) ist für  $D^+ = D^{-1}$  immer erfüllt. Aus (b) folgt

$$(I - H H^+) D^T D H = 0 \quad (4.46)$$

und mit

$$H H^+ = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P$$

$$(I - H H^+) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = I - P = \bar{P}$$

$$H = P H$$

wird aus (4.46)

$$\bar{P} D^T D P H = 0$$

Das gilt für beliebiges H nur dann, wenn

$$\bar{P} D^T D P = 0 \quad \text{ist.} \quad (4.47)$$

Diagonalmatrizen und orthogonale Matrizen erfüllen die Beziehung (4.47). Nach dem Vorschlag von DEUFLHARD [14] wird hier deshalb im j-ten Schritt mit der Diagonalmatrix

$$D^{(j)} = \begin{bmatrix} D_1 & & & 0 \\ & \dots & & \\ & & D_k & \\ 0 & & & \dots & D_{s-1} \end{bmatrix}^{(j)} \quad (4.48)$$

skaliert, wobei gilt

$$D_k^{(j)} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & d_i & \\ & & & \dots & d_n \end{bmatrix}_k^{(j)} \quad (4.49)$$

und

$$(d_i)_k = \frac{1}{2} (|y_i|^{(j)} + |y_i|^{(j-1)})_k \quad (4.50)$$

Die Skalierung ist also von der Größenordnung der Komponente  $y_{ik}$  im  $j$ -ten Schritt.

#### 4.4.4 "Fastsingularität" Funktionalmatrix

Häufig tritt der Fall ein, daß die Funktionalmatrizen schlecht konditioniert sind. Man kann dann (vgl. [14]) von "fastsingularität" Matrizen sprechen und behandelt sie mit der gleichen Methode wie die singulären Matrizen. Zur Feststellung des Grades der "Fastsingularität", d.h. des Ranges der Funktionalmatrix, bzw. ob überhaupt "Fastsingularität" vorliegt, benötigt man ein möglichst einfaches Kriterium.

Ein solches Kriterium entsteht z.B. durch Vergleich der exakten Lösung  $\Delta y^{(j)}$  des Systems  $H(\Delta y^{(j)}) \Delta y^{(j)} = -F(\Delta y^{(j)})$  mit der berechneten Lösung  $\Delta \tilde{y}^{(j)}$  des Systems  $H^{(j)} \Delta \tilde{y}^{(j)} = -F(\Delta \tilde{y}^{(j)})$ .  $H^{(j)}$  stellt die durch fehlerhafte numerische Differentiation entstandene Funktionalmatrix dar, wobei Rundungsfehler, die bei der Auflösung des linearen Gleichungssystems auftreten (vgl. WILKINSON [22]), mit eingeschlossen werden. Für das Verhältnis der euklidischen Normen gilt (vgl. STOER [11]):

$$\frac{\|\Delta \tilde{y}^{(j)} - \Delta y^{(j)}\|}{\|\Delta y^{(j)}\|} \leq \frac{e_j \text{cond}(H^{(j)})}{1 - e_j \text{cond}(H^{(j)})} \quad (4.51)$$

mit

$$e_j = \frac{\|H(y^{(j)}) - H^{(j)}\|}{\|H^{(j)}\|} \quad (4.52)$$

und der Konditionszahl

$$\text{cond}(H^{(j)}) = \|H^{(j)}\| \|H^{-1(j)}\| \quad (4.53)$$

Unter der Matrixnorm  $\|H^{(j)}\|$  versteht man dabei die Spektralnorm

$$\|H^{(j)}\| = \max_{\Delta y^{(j)} \neq 0} \sqrt{\frac{\Delta y^{\tau(j)} H^{\tau(j)} H^{(j)} \Delta y^{(j)}}{\Delta y^{\tau(j)} \Delta y^{(j)}}} \quad (4.54)$$

Die Konditionszahl ist ein Maß für die Empfindlichkeit der Lösung  $\Delta y^{(j)}$  gegenüber Störungen der rechten Seite  $F^{(j)}$ . Für die Gültigkeit von (4.51) muß mindestens  $e_j \text{cond}(H)^{(j)} < 1$  sein. Damit läßt sich (vgl. [14]) die folgende Definition der "Fastsingularität" der Funktionalmatrix  $H^{(j)}$  geben:

$$|H^{(j)} \text{ ist "fastsingular", falls } e_j \text{cond}(H)^{(j)} \geq 1. \quad (4.55)$$

In dieser Form ist das Entscheidungskriterium aus numerischen Gründen nicht geeignet, weil die Berechnung der Konditionszahl aus (4.53) sehr aufwendig ist und für das im allgemeinen unbekanntes  $e_j$  nur eine untere Schranke angegeben werden kann (vgl. [14]).

Zu einem einfacheren Entscheidungskriterium gelangt man, wenn man ein Ergebnis von STOER [11] benutzt, wonach für Dreiecksmatrizen  $R$  gilt:

$$\text{cond}(R) \geq \max_{i,k} \frac{|r_{ii}|}{|r_{kk}|} \quad (4.56)$$

Gelingt es, eine Dreieckszerlegung zu finden, so daß die Diagonalglieder der Größe nach von oben nach unten geordnet sind, d.h.  $|r_{kk}| \leq |r_{ii}|$  für  $k \geq i$ , so folgt aus (4.56)

$$\text{cond}(R) \geq \frac{|r_{11}|}{|r_{nn}|} \quad (4.57)$$

Der Algorithmus von BUSINGER und GOLUP [23], der eine Householder-Transformation mit Spaltenpivotisierung darstellt, erzeugt das gewünschte Ergebnis

$$R = \bar{Q} H S \quad (4.58)$$

$\bar{Q}$  und  $S$  sind orthogonale Matrizen, so daß  $\text{cond}(H) = \text{cond}(R)$  gilt und damit auch

$$\text{cond}(H) \geq \frac{|r_{11}|}{|r_{nn}|} \geq \frac{|r_{11}|}{|r_{(n-1)(n-1)}|} \geq \dots \geq \frac{|r_{11}|}{|r_{11}|} = 1 \quad (4.59)$$

$$\bar{Q} = \prod_{k+1}^n \bar{Q}_k \quad (4.60)$$

ist das Produkt von Householder-Matrizen (vgl. [11]) mit

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Q}_k &= (I - \beta_k u_k u_k^T) \\ \sigma_k &= \sqrt{h_k^T h_k} \\ (h_k \text{ ist } k\text{-ter Spaltenvektor der Restmatrix von } H) \\ u_k &= \begin{bmatrix} |h_{kk}| + \sigma_k \\ \vdots \\ h_{(k+1)k} \\ \vdots \\ h_{nk} \end{bmatrix} \\ \beta_k &= \frac{2}{u_k^T u_k} = \frac{1}{\sigma_k (\sigma_k + |h_{1k}|)} \end{aligned} \right\} (4.61)$$

$$\bar{Q}_k = \left[ \begin{array}{cc} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_k \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{matrix} I_{k-1} \\ 0 \end{matrix}} \right\} k-1 \\ \left. \vphantom{\tilde{Q}_k} \right\} n-k+1 \end{array} \right\} (4.62)$$

erzeugt im k-ten Schritt eine  $(n-k+1, n-k+1)$ -Restmatrix, wobei die Permutationsmatrix  $S$  dafür sorgt, daß die k-te Spalte maximal wird bezüglich  $\sigma_k$  und damit die Diagonalglieder der Größe nach ordnet. Ist der Rang der Funktionalmatrix  $s = \text{rg}(H^{(ij)}) < n$ , so ergibt sich  $r_{ik} = 0$  für  $i > s$ . Das ist aber gerade (4.23).

Die Entscheidung, ob die Funktionalmatrix "fastsingulär" ist, trifft man jetzt leicht über das folgende Rang-Kriterium:

Kriterium I:

Für ein gewähltes  $\epsilon < \epsilon_j$  ( $\epsilon_j$  aus (4.52)) ist der Pseudorang  $s$  einer Matrix definiert durch

$$\frac{|\tau_{ss}|}{|\tau_{11}|} > e \quad \text{und} \quad \frac{|\tau_{(s+1)(s+1)}|}{|\tau_{11}|} \leq e \quad (4.63)$$

Ist der Pseudorang  $s < n$ , dann ist  $H(y^{(j)})$  "fastsingulär". (4.64)

Zum Beweis dient die Definition der "Fastsingularität" (4.55):

$$\begin{aligned} \text{cond}(H^{(j)})e_j &= \text{cond}(R^{(j)})e_j \\ &\geq \text{cond}(R^{(j)})e \geq \frac{|\tau_{11}|e}{|\tau_{(s+1)(s+1)}|} \geq 1 \end{aligned} \quad (4.65)$$

Wegen der Skalierungsabhängigkeit von Kondition und Pseudorang einer Matrix (vgl. [14]) skaliert man zweckmäßigerweise vor der Zerlegung (4.58) und damit vor Anwendung von Kriterium I. Mit der gewählten Skalierung (4.50) erhält man:

$$\text{Funktionalmatrix:} \quad H^{(j)} \rightarrow H^{(j)}D^{(j)} \quad (4.66)$$

Testfunktion für die  $\lambda$ -Strategie nach (4.42):

$$\begin{aligned} T(y^{(j)}, H^{-(j)}) &\rightarrow T(y^{(j)}, D^{-1(j)}H^{-(j)}) \\ T(y^{(j+1)}, H^{-(j)}) &\rightarrow T(y^{(j+1)}, D^{-1(j)}H^{-(j)}) \end{aligned} \quad (4.67)$$

e sollte von der Größenordnung der relativen Maschinengenauigkeit sein.

Da die Umkehrung von (4.64) nicht gilt, erfaßt man mit (4.63) nicht alle Fälle von "Fastsingularität". Beispielsweise kann bei  $e_k \gg e$  sehr wohl "Fastsingularität" vorliegen, weil e ein willkürlicher Eingabeparameter ist, obwohl (4.63) liefert  $s=n$ . Das führt (vgl. [14]) in der  $\lambda$ -Strategie nach (4.22) zu sehr kleinen Werten von  $\lambda$ , so daß der Iterationsprozeß nur langsam fortschreitet. Hier kann man Abhilfe schaffen, indem man  $\lambda^{(j)}$  nach unten begrenzt

$$\lambda_{\min} \leq \lambda^{(j)} \leq 1$$

und nach [14] folgende Rang-Strategie benutzt:

Kriterium II:

Falls  $\lambda^{(j)} < \lambda_{min}$ , reduziere den Pseudorang  $s^{(j)}$  um 1 ( $s^{(j+1)} = s^{(j)} - 1$ ) und berechne den Korrekturvektor  $\Delta y^{(j+1)}$  nach (4.42) beginnend mit  $\lambda^{(j+1)} = 1$ . (4.68)

Bei Erfolg ( $\lambda^{(j+1)} \geq \lambda_{min}$ ):

Setze im nächsten Schritt  $s^{(j+1)} = s^{(j)} + 1$  und benutze das erfolgreiche  $\lambda^{(j)}$  aus dem vorhergehenden Schritt, bis  $s^{(j+1)} = n$  ist. Bei  $s^{(j+1)} = n$  (nichtsingulärer Fall) wird das  $\lambda^{(j)}$  nach jedem erfolgreichen Schritt solange verdoppelt, bis  $\lambda^{(j)} = 1$  (normale Newton-Korrektur) ist.

Bei Mißerfolg ( $\lambda^{(j+1)} < \lambda_{min}$ ):

Reduziere den Pseudorang weiter  $s^{(j+1)} = s^{(j)} - 1$  und breche das Verfahren bei  $s^{(j+1)} = 0$  ab.

Diese Vorgehensweise läßt sich theoretisch untermauern (siehe hierzu [14]). Auf Grund praktischer Erfahrungen sollte  $\lambda_{min}$  in den Grenzen liegen zwischen

$$\frac{1}{16} \leq \lambda_{min} \leq \frac{1}{8}$$

Manchmal wirkt es sich günstig auf das Konvergenzverhalten aus, wenn man die Rechnung künstlich mit einem kleineren Rang als dem Maximalrang beginnt. Dieses Verhalten liegt in den Minimaleigenschaften des Korrekturvektors bei der Berechnung der Pseudoinversen begründet. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|\Delta y^{(j)}\|_{Pseudo} &\leq \|\Delta y^{(j)}\|_{Newton} \\ T_{Pseudo}^{(j)} &\leq T_{Newton}^{(j)} \end{aligned}$$

#### 4.5 Berechnung und Approximation der Funktionalmatrix

Die Berechnung der Funktionalmatrix H bzw. der reduzierten Matrix E geschieht durch numerische Differentiation, und zwar, da sich die Funktionalmatrix und die reduzierte Matrix aus Untermatrizen aufbauen, durch numerische Differentiation dieser Untermatrizen. Dabei können wir uns auf die Betrachtung der numerischen Differentiation der Jacobi-Matrizen  $G_k$  beschränken, da die Matrizen  $A_k$  und  $B_k$  infolge der Knotenbedingungen direkt angegeben werden können. Aus praktischen Gründen werden die  $A_k$  und  $B_k$  auch numerisch bestimmt.

Zur Berechnung der  $G_k$  wird zunächst mit einem möglichst genauen Integrationsverfahren (Benutzt wird das Extrapolationsverfahren DIFSYF [24], das mit möglichst großer Schrittweite über ein Intervall integriert.) eine Grundtrajektorie (vgl. (4.1))  $\eta = \eta(x, x_k, y_k)$  ermittelt. Diese Grundtrajektorie wird am linken Rand komponentenweise unter Berücksichtigung der Skalierungsmatrix D leicht variiert

$$\tilde{y}_k = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j + \delta y_j \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_k, \quad (4.69)$$

um dann eine variierte Trajektorie  $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(x, x_k, \tilde{y}_k)$  zu erzeugen. Insgesamt sind für eine Jacobi-Matrix n Integrationen auszuführen, und man erhält

$$(G_{ij})_k = \left\{ \frac{\tilde{\eta}_i(x_{k+1}, x_k, y_1, \dots, y_j + \delta y_j, \dots, y_n) - \eta_i(x_{k+1}, x_k, y_1, \dots, y_n)}{\delta y_j} \right\}_k \quad (4.70)$$

Für die  $(\delta y_j)_k$  setzt man

$$(\delta y_j)_k = \alpha_{jk} \varepsilon_1 \quad (4.71)$$

wobei  $\varepsilon_1$  im Bereich liegen sollte zwischen

$$10^{-4} \leq \varepsilon_1 \leq 10^{-1}$$

Der Aufwand zur Erzeugung der  $G_k$  bzw. der Funktionalmatrix  $H$  ist beträchtlich. Es erscheint daher zweckmäßig, eine Approximation der Matrizen vorzunehmen. Dazu bedient man sich der Methode von BROYDEN [9].

Ausgangspunkt ist, daß die Näherung  $H^{(j+1)}$  der Quasi-Newton-Beziehung

$$H^{(j+1)} (y^{(j+1)} - y^{(j)}) = F^{(j+1)} - F^{(j)} \quad (4.72)$$

gehörchen soll. Weiter sei eine Näherung  $H^{(j)}$  bekannt, und es gelte

$$\begin{aligned} y^{(j+1)} - y^{(j)} &= \lambda^{(j)} \Delta y^{(j)} \\ H^{(j)} \lambda^{(j)} \Delta y^{(j)} &= -\lambda^{(j)} F^{(j)} \end{aligned}$$

Die Veränderung zwischen  $H^{(j+1)}$  und  $H^{(j)}$  kann dann beschrieben werden durch

$$(H^{(j+1)} - H^{(j)}) \lambda^{(j)} \Delta y^{(j)} = F^{(j+1)} - F^{(j)} + \lambda^{(j)} F^{(j)} \quad (4.73)$$

Diese Gleichung reicht aber noch nicht aus, um  $H^{(j+1)}$  eindeutig zu bestimmen, denn sie gibt nur die Änderung von  $H^{(j)}$  in Bezug auf  $\Delta y^{(j)}$  an. Da keine weitere Information vorhanden ist, geht man davon aus, daß  $H^{(j)}$  hinsichtlich von zu  $\Delta y^{(j)}$  orthogonalen Richtungen  $s_i$  unverändert bleibt. Das liefert  $n-1$  zusätzliche Gleichungen

$$(H^{(j+1)} - H^{(j)}) s_i = 0 \quad (4.74)$$

mit  $\Delta y^{T(j)} s_i = 0$ ,  $i=1, \dots, n-1$ .

Dann kann  $H^{(j+1)} - H^{(j)}$  nur von der Form sein

$$H^{(j+1)} - H^{(j)} = u^{(j)} \Delta y^{T(j)}$$

mit zunächst noch beliebigem Vektor  $u^{(j)}$ . Mit Hilfe von (4.73) bestimmt man

$$u^{(j)} = \frac{F^{(j+1)} - F^{(j)}(1 - \lambda^{(j)})}{\Delta y^{T(j)} \Delta y^{(j)}}$$

und erhält für die angenäherte Funktionalmatrix

$$H^{(j+1)} = H^{(j)} + \frac{F^{(j+1)} - F^{(j)}(1-\lambda^{(j)}) \Delta Y^T^{(j)}}{\Delta Y^T^{(j)} \Delta Y^{(j)}} \quad (4.75)$$

Schreibt man (4.73) für eine Spalte aus (4.12) auf, so ergibt sich als Näherung für die k-te Jacobi-Matrix

$$(G_k^{(j+1)} - G_k^{(j)}) \lambda^{(j)} \Delta y_k^{(j)} = F_k^{(j+1)} - (1-\lambda^{(j)}) F_k^{(j)} \quad (4.76)$$

und daraus entsprechend (4.75)

$$G_k^{(j+1)} = G_k^{(j)} + \frac{(F_k^{(j+1)} - (1-\lambda^{(j)}) F_k^{(j)}) \Delta y_k^T}{\lambda^{(j)} \Delta y_k^T \Delta y_k^{(j)}} \quad (4.77)$$

Eine Näherung für die Matrizen  $A_k$  und  $B_k G_{k-1}$  ist nur bei einläufigen Systemen unter zusätzlichen Annahmen sinnvoll. Die entsprechende Zeile aus (4.73) ergibt bei mehrläufigen Systemen eine Gleichung für mehrere unbekannte  $A_k$  und  $B_k G_{k-1}$  mit nur einer rechten Seite  $r_k^{(j+1)} - (1-\lambda^{(j)}) r_k^{(j)}$ . Nur bei einläufigen Systemen, d.h. in der Gleichung taucht nur ein  $A_k$  und ein  $B_k G_{k-1}$  auf, läßt sich die rechte Seite noch sinnvoll aufspalten, so daß jeweils eine Gleichung für  $A_k$  bzw.  $B_k G_{k-1}$  entsteht und insgesamt die entsprechende Zeile aus (4.73) befriedigt wird. Man kann jedoch immer die Gesamtmatrix  $H^{(j)}$  oder die reduzierte Matrix  $E^{(j)}$  approximieren. Aus Gründen eines erhöhten Speicherbedarfs wird dieser Weg hier nicht besprochen. Die  $A_k$  und  $B_k G_{k-1}$  werden immer durch numerische Differentiation bestimmt.

Für die skalierte Version der approximierten Jacobi-Matrix ergibt sich (vgl. [14])

$$G_k^{(j+1)} = G_k^{(j)} + \frac{(F_k^{(j+1)} - (1-\lambda^{(j)}) F_k^{(j)}) (D_k^{-2} \Delta y_k)^T^{(j)}}{\lambda^{(j)} (D_k^{-1} \Delta y_k)^T^{(j)} (D_k^{-1} \Delta y_k)^{(j)}} \quad (4.78)$$

Die Approximationen funktionieren (vgl. [17]) bei den Anwendungen in der Regel nur für  $\lambda^{(j)} \geq 1/2$ . Außerdem sollte nach

einigen Approximationen immer mal wieder auf die Version mit numerischer Differentiation umgeschaltet werden, weil die Approximationen (vgl. hierzu [14, 17]) in einigen Fällen nach wenigen Iterationen zu "fastsingulären" Matrizen führen können. Die Anzahl der Approximationen wird durch einen Eingabeparameter  $K_p$  gesteuert.

#### 4.6 Bemerkungen zur numerischen Durchführung

Zur numerischen Bestimmung des Korrekturvektors  $\Delta y^{(j)}$  wird die Dreieckszerlegung der Matrix  $H^{(j)}$  bzw.  $E^{(j)}$  mit dem Algorithmus von BUSINGER und GOLUP [23] vorgenommen, weil dabei gleichzeitig die Frage nach der Singularität ("Fastsingularität") bzw. Nichtsingularität der Matrizen entschieden wird. Bei der Anwendung auf das reduzierte Gleichungssystem der Mehrzielmethode erhält man mit der gewählten Skalierung  $D_k^{(j)}$  nach (4.49)

$$R^{(j)} \Delta \hat{\eta}^{(j)} = (\bar{Q} E \hat{D} S)^{(j)} \Delta \hat{\eta}^{(j)} = \bar{Q} \hat{r}^{(j)} = f^{(j)}$$

Nach (4.60) ist  $\bar{Q}$  das Produkt von Householder-Transformationen

$$\bar{Q} = \prod_{k=1}^n \bar{Q}_k$$

mit der k-ten Transformation

$$\bar{Q}_k = \left[ \begin{array}{cc} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_k \end{array} \right] \begin{array}{l} k-1 \\ n-k+1 \end{array}$$

$$\tilde{Q}_k = (I - \beta_k u_k u_k^T), \quad E = \begin{bmatrix} e_{11} & & e_{1n} \\ & \ddots & \\ e_{n1} & & e_{nn} \end{bmatrix}$$

$$u_k = \begin{bmatrix} |e_{kk}| + \sigma_k \\ e_{(k+1)(k)} \\ \vdots \\ e_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\beta_k = \frac{1}{\sigma_k(\sigma_k + e_{1k})}, \quad \sigma_k = \sqrt{e_k^T e_k}$$

Die wesentliche Information in jedem Transformationsschritt (Vektor  $u_k$ ) wird üblicherweise in der k-ten Spalte unterhalb der Diagonalen von E einschließlich des Diagonalelementes abgespeichert. Die Diagonalelemente von R werden deshalb in einem besonderen Diagonalvektor d abgelegt. Mit der Permutationsmatrix S wird R schließlich von der Gestalt sein

$$R = \left[ \begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} J & k \\ 0 & 0 \end{matrix}}^s & \overbrace{\begin{matrix} k \\ 0 \end{matrix}}^r \\ \hline & \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} s \\ r \end{array} \right\} n$$

mit J als oberer Dreiecksmatrix, wobei die Diagonalelemente von J der Größe ihres Betrages nach im oberen Teil des Diagonalvektors

$$d = \begin{bmatrix} J_{11} \\ \vdots \\ J_{ss} \\ x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix}$$

enthalten sind.

Die weitere Auflösung wird mit dem Verfahren für singuläre Funktionalmatrizen (vgl. Kapitel 4.4.3) durchgeführt. Der nichtsinguläre Fall ( $r=0$ ) ist darin enthalten.

(i) Zunächst wird  $k$  (vgl. (4.28)) aus

$$\underbrace{J}_{s \times s} \underbrace{\bar{k}}_{r \times 1} = \underbrace{k}_{r \times 1}$$

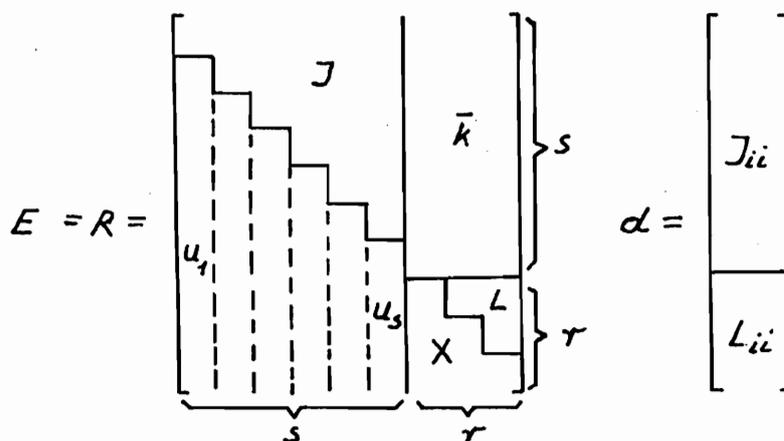
berechnet. Das

ergibt  $r$  Gleichungssysteme für die  $r$  unbekannt Spalten von  $\bar{k}$ .  $\bar{k}$  wird auf den Plätzen von  $k$  abgespeichert.

(ii) Gleichzeitig wird nach der Erzeugung jeder Spalte von  $\bar{k}$  die Cholesky-Zerlegung der  $(r,r)$ -Matrix  $M=I+\bar{k}\bar{k}^T$  vorgenommen:  $M=LL^T$ . Die Bestimmungsgleichungen für die Dreiecksmatrizen L lauten:

$$\left. \begin{aligned} k_{ij} k_{ji} &= |L_{i1}|^2 + |L_{i2}|^2 + \dots + |L_{ii}|^2 \\ k_{kj} k_{jk} &= L_{k1} L_{i1} + L_{k2} L_{i2} + \dots + L_{ki} L_{ii}, \quad k < i \end{aligned} \right\} i=1, \dots, r$$

$L^T$  wird in der oberen Ecke der  $(r,r)$ -Untermatrix von  $R$  abgespeichert und die Diagonalelemente von  $L^T$  im freien unteren Teil des Diagonalvektors. Es ergibt sich folgender Speicherplan:



(iii) Entsprechend (4.27) und (4.30) werden dann die Gleichungssysteme

$$J \overline{\Delta \eta_1}^{(j)} = \hat{f}^{(j)}$$

und  $\overline{\Delta \eta_2}^{(j)} = \bar{k}^T \overline{\Delta \eta_1}^{(j)}$  gelöst.

Aus (4.30) erhält man ein weiteres Gleichungssystem

$$L^T \overline{\Delta \eta_2}^{(j)} = L^{-1} \overline{\Delta \eta_2}^{(j)}$$

und aus (4.31)

$$\hat{\Delta \eta_1}^{(j)} = \overline{\Delta \eta_1}^{(j)} - \bar{k} \hat{\Delta \eta_2}^{(j)}$$

(iv) Der endgültige Lösungsvektor der reduzierten Systems entsteht durch Rücknahme der Permutation und nachfolgende Entskalierung

$$\hat{\Delta y}^{(j)} = D^{(j)} S^T \hat{\Delta \eta}^{(j)}$$

Die anderen  $\Delta y_k^{(j)}$  ergeben sich aus

$$\Delta y_{k+1}^{(j)} = G_k^{(j)} \Delta y_k^{(j)} + F_k^{(j)}$$

- (v) Gleichzeitig erfolgt die Berechnung der Testfunktion

$$T(y^{(j+1)}, \underbrace{D^{-1(j)} H^{-1(j)}}_{(H^{(j)} D^{(j)})^{-1}}) = T(y^{(j)} + \lambda^{(j)} \Delta y^{(j)}, D^{-1(j)} H^{-1(j)})$$

Das vereinfachte Flußdiagramm auf der nächsten Seite gibt noch einmal Aufschluß über den Ablauf des modifizierten Newton-Verfahrens mit  $\lambda$ -Strategie und Rang-Strategie ohne Berücksichtigung der Reduktion des Gleichungssystems.



## 4.7 Die Schaltfunktionen

### 4.7.1 Bestimmung der Schaltpunkte

Beim Auftreten von Beschränkungen in den Steuervariablen (seltener sind solche in den Zustandsvariablen) existieren bereichsweise verschiedene Funktionen für dieselbe Steuergröße  $u_k$ . Der Gültigkeitsbereich der einzelnen Steuerfunktionen läßt sich auf jedem Abschnitt  $i$  durch Schaltfunktionen  $s_j$  angeben (vgl. Kapitel 3.2). Es wird vorausgesetzt, daß die Zahl der möglichen Steuerfunktionen für jede Steuergröße  $u_k$  und die Zahl der Schaltfunktionen für jeden Abschnitt  $i$  unverändert bleibt.

$s_j(x_0, y_0) = 0$  kennzeichnet eine Schaltebene im Raum  $Y$  der Variablen  $y_{k0}$ . Zur Erläuterung ist in Abb. 4 der Fall für eine Steuervariable  $u$  mit zwei Schaltfunktionen  $s_j$  dargestellt. Die Schaltebenen teilen den Raum  $Y$  in Gebiete auf, für die ganz bestimmte Steuerfunktionen  $u = u_s(x, y)$  gelten. In diesen Gebieten nehmen die Schaltfunktionen jeweils einen von zwei Zuständen an:

$$s_j > 0 \quad \text{oder} \quad s_j < 0. \quad (4.79)$$

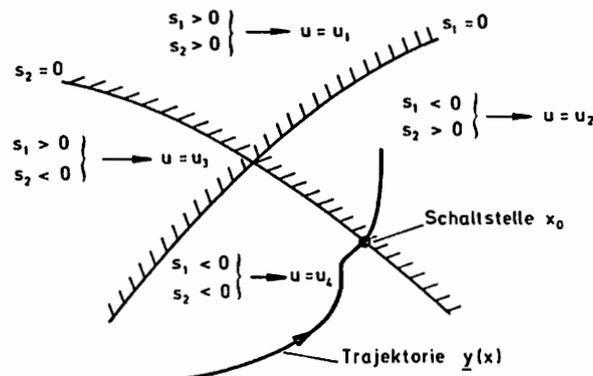


Abb. 4

Überschreitet eine Trajektorie (Lösung des Dgl.-Systems (3.11)) eine solche Schaltebene, so muß die Schaltstelle  $x_0$  berechnet werden. Das kann nur iterativ geschehen, wobei auf eine möglichst genaue Bestimmung dieses Punktes bei wenig Aufwand Wert gelegt wird. Da auch die Lösung des nicht-linearen Randwertproblems einen Iterationsprozeß darstellt, "wandern" die Schaltpunkte von Iteration zu Iteration. Es können sogar alte verschwinden und neue auftauchen.

Das hier verwendete Integrationsverfahren DIFSYF [24] arbeitet mit relativ großen Schrittweiten, um den Integrationsaufwand klein zu halten. Der Abstand von Integrationspunkten, innerhalb dessen ein Schaltpunkt liegt, kann daher recht groß werden. Beschränken wir uns zunächst auf das Vorhandensein nur einer Schaltfunktion  $s$ , so geht man in zwei Schritten vor (Abb. 5):

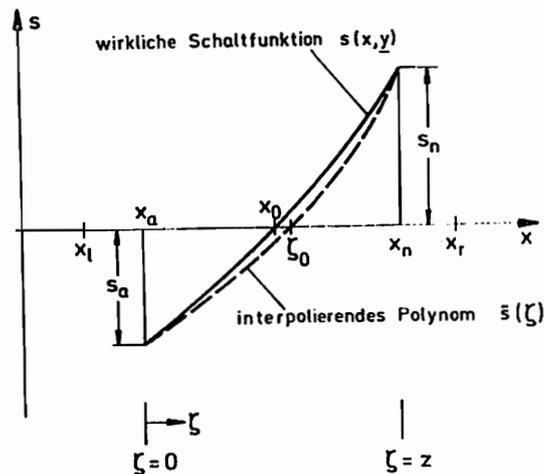


Abb. 5

- (i) Bei der Feststellung eines Vorzeichenwechsels in der Schaltfunktion legt man ein Interpolationspolynom (Hermite-Polynom) durch die beiden Punkte  $s_a$  und  $s_n$  und bestimmt dessen Nullstelle  $\zeta_0$ . Mit der neuen Koordinate  $\zeta = x - x_a$  und  $z = x_n - x_a$  wählt man den kubischen Polynomansatz

$$\tilde{s}(\zeta) = s_a + s_a' \zeta + k_1 \zeta^2 + k_2 \zeta^3 \quad (4.80)$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{z^2} \{ 3(s_n - s_a) - z(2s_a' - s_n') \} \\ k_2 &= \frac{1}{z^3} \{ 2(s_a - s_n) + z(s_a' + s_n') \} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Der kubische Ansatz ist möglich, weil die Steigungen  $s_a'$  und  $s_n'$  berechnet werden können. Allgemein ist

$$s'(x, \underline{y}) = \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y_1} y_1' + \dots + \frac{\partial s}{\partial y_n} y_n' \quad (4.82)$$

und damit  $s_a' = s'(x_a, \underline{y}_a)$  und  $s_n' = s'(x_n, \underline{y}_n)$ .

Die Nullstelle  $\xi_0$  ermittelt man mit dem Newton-Verfahren

$$\begin{aligned} \xi_0^{(i+1)} &= \xi_0^{(i)} + \frac{\tilde{s}(\xi_0^{(i)})}{\tilde{s}'(\xi_0^{(i)})} \\ \xi_0^{(0)} &= \frac{s_a}{s_a - s_n} z \end{aligned} \quad (4.83)$$

(ii) Die genaue Nullstelle wird dann weiter durch Newton-Iteration der wirklichen Schaltfunktion berechnet.

$$\begin{aligned} x_0^{(i+1)} &= x_0^{(i)} - \frac{s(x_0^{(i)}, \underline{y}_0^{(i)})}{s'(x_0^{(i)}, \underline{y}_0^{(i)})} \\ x_0^{(0)} &= x_0 + \xi_0 \end{aligned} \quad (4.84)$$

(4.84) ist gewöhnlich nach 2 bis 3 Schritten erledigt. Der Aufwand für (i) ist gering, weil hierfür die Integration von  $\underline{y}' = f(x, \underline{y})$  entfällt.

Bei einem ungünstigen Verlauf der Schaltfunktion kann die

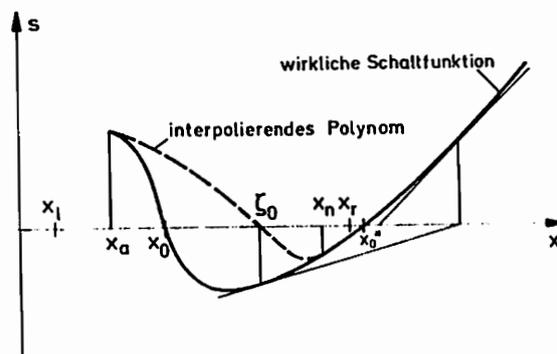


Abb. 6

Newton-Iteration (4.84) versagen oder in eine Nullstelle  $x_0$  (vgl. Abb. 6) außerhalb des Stützstellenintervalls  $(x_1, x_r)$  konvergieren. In einem solchen Fall wird die Integrations-schrittweite von  $x_a$  an halbiert und das Verfahren (i) und (ii) erneut durchgeführt. Bei wiederholtem Mißerfolg erhält man ein neues  $x_a$  und kann das Verfahren mit weiter halbierter Integrationsschrittweite erneut starten.

Die weitere Integration von der Schaltstelle  $x_0$  ab erfolgt jetzt mit der von hierab gültigen Steuerfunktion.

Haben mehrere Schaltfunktionen auf dem Intervall zwischen  $x_a$  und  $x_n$  Nulldurchgänge, so behält man von diesen Nullstellen nur die, die am nächsten bei  $x_a$  liegt. Die anderen werden vergessen, da sie sich infolge der neuen Steuerfunktion rechts von dieser Stelle ändern können und deshalb neu bestimmt werden müssen.

#### 4.7.2 Folgerungen für die Berechnung der Jacobi-Matrizen

Die Jacobi-Matrizen  $G_k$  (vgl. Kapitel 4.5) werden durch Variation  $\delta y_j$  der Grundtrajektorie  $\underline{y}$  an der Stelle  $x_k$  berechnet. Diese Variation wird zu einer um  $\delta x_0$  verschobenen Schaltstelle  $x_0$  für die variierte Trajektorie  $\underline{\tilde{y}}$  führen. Zur Bestimmung dieser Schaltstelle integriert man zunächst bis zur alten Schaltstelle  $x_0$  und führt von hierab die Newton-Iteration (4.84) durch mit dem Startwert  $x_0^{(0)} = x_0$ .

#### 4.7.3 Fehlerquellen

Der häufigste Fehler ist das falsche Programmieren von  $s_j$ , was in den meisten Fällen zur Divergenz der Mehrzielmethode führt.

Ein weiterer Fehler entsteht durch das "Übersehen" von Schaltstellen, was bei kurz aufeinander folgenden Schaltstellen für dieselbe Schaltfunktion vorkommen kann (vgl. Abb. 7).

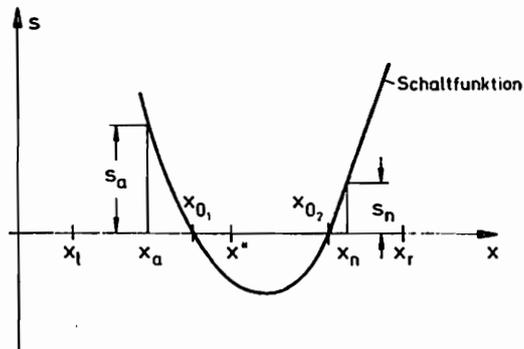


Abb. 7

Besteht die Vermutung eines solchen Verhaltens, führt man an diesem Punkt eine neue Stützstelle  $x^*$  ein.

Im allgemeinen soll bei der Festsetzung der Stützstellen darauf geachtet werden, daß die Schaltstellen durch die Stützstellen separiert werden, weil sonst (vgl. [17]) Konvergenzschwierigkeiten zu erwarten sind.

#### 4.8 Techniken bei der Wahl von Starttrajektorien

Das Versagen oder Nichtversagen der Mehrzielmethode hängt, wie bei allen Optimierungsverfahren, von der Wahl vernünftiger Starttrajektorien ab. Mathematisch ist dieses keineswegs triviale Problem kaum in den Griff zu bekommen. Näherungen für die Zustandsvariablen sind dabei noch verhältnismäßig leicht anzugeben, da ihre Größenordnung aus den physikalischen Gegebenheiten abgeschätzt werden kann. Bei den adjungierten Variablen, zu denen im allgemeinen jeder physikalische Bezug fehlt, muß man anders vorgehen.

Man kann hier die Technik von "indirekten" Optimierungsmethoden ausnutzen, die mit geschätzten Verläufen für die Steuervariablen arbeiten, um daraus Informationen über die adjungierten Variablen abzuleiten. Dieses Vorgehen ist sinnvoll, da die Entwurfsvariablen (z.B. Querschnittsverläufe) wieder physikalische Hintergründe haben. Auf Grund technischer Erfahrung und "Fingerspitzengefühl" trifft man für solche Größen leichter sinnvolle Annahmen. Sucht man, wie bei vielen

Aufgaben des optimalen Entwurfs von Tragwerken, Querschnittsflächen- oder Dickenverläufe, so kann man für bestimmte Lastverhältnisse davon ausgehen, daß der konstante Querschnittsflächen- oder Dickenverlauf der Optimallösung schon sehr nahe kommt und gewinnt in diesem Zusammenhang gute Näherungen für die Zustandsvariablen und adjungierten Variablen.

Eine weitere Methode ist die Homotopie- oder Fortsetzungsmethode. Sie bietet bei komplizierten Optimierungsaufgaben oft die einzige Möglichkeit, zu Lösungen zu kommen und ist bei den hier behandelten Beispielen häufig benutzt worden. Die Rechtfertigung für diese Methode liefern Sätze über implizite Funktionen (vgl. [17]).

Man unterscheidet Parameter- und Randwert-Homotopien. Bei der Parameter-Homotopie ist natürlich das Vorhandensein eines solchen Parameters Voraussetzung. Sie haben die Form:

$$\begin{aligned} \underline{y}' &= \varepsilon f(x, \underline{y}) + (1-\varepsilon) g(x, \underline{y}) \\ 0 &\leq \varepsilon \leq 1 \end{aligned}$$

$\varepsilon = 0$  ergibt ein Dgl.-System mit bekannter Lösung,  $\varepsilon = 1$  eines mit der gesuchten Lösung. Variationen von  $\varepsilon$  führen dabei auf neue Lösungen. Dazu soll folgendes Beispiel betrachtet werden:

Gesucht ist das Minimalgewicht eines mit vorgegebener erster Eigenfrequenz  $\omega$  schwingenden Rahmens bei veränderlicher Querschnittsfläche. Der Rahmen mit konstanter Querschnittsfläche ist eine bekannte Optimallösung zur Eigenfrequenz  $\omega_0$ . Dieser Parameter  $\omega_0$  wird nun variiert auf  $\omega_1$  und als Starttrajektorie die Optimallösung zu  $\omega_0$  benutzt. Man erhält so eine Folge von Optimallösungen, die man auch als Homotopiekette bezeichnet:  $\omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega$ .

Bei der Randwert-Homotopie geht man so vor, daß man das Problem zunächst als Anfangswertaufgabe formuliert. Die das wirkliche Problem noch nicht erfüllenden Randwerte werden nun langsam verändert. Das zugehörige Randwertproblem wird immer mit der vorherigen Lösung als Starttrajektorie gelöst. Oft ist es ratsam, nicht alle Randwerte auf einmal zu variieren.

## 5. Anwendungen

### 5.1 Harmonisch erregte Stäbe mit minimaler Amplitude an der Erregerstelle

#### 5.1.1 Allgemeines

Behandelt wird der einseitig eingespannte und am freien Ende mit der harmonischen Kraft  $F=F_0 \cos(\Omega t)$  belastete Längs- und Biegeschwinger aus homogenem Material mit gegebener Masse. Die Betrachtungen bleiben auf Stäbe im Sinne der elementaren Elastizitätstheorie beschränkt. Um ein Verschwinden von Querschnittsflächen an diskreten Stellen oder ein zu starkes Anwachsen in bestimmten Bereichen zu vermeiden, werden die Querschnittsflächen nach oben und unten begrenzt  $A_u \leq A \leq A_o$ . Minimiert werden soll der Betrag der Amplitude an der Erregerstelle. Es soll also eine Art "Schwingungstilgung" durchgeführt werden.

#### 5.1.2 Einseitig eingespannter Längsschwinger

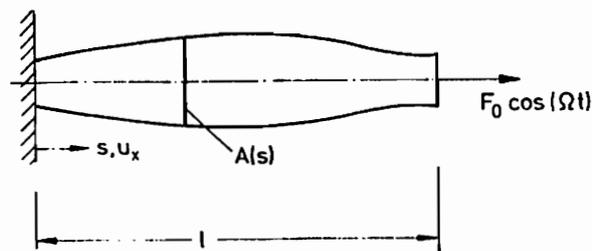


Abb. 5.1

Die partielle Differentialgleichung vom hyperbolischen Typ lautet:

$$\rho A(s) \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial (EA(s) \frac{\partial u_x}{\partial s})}{\partial s} \quad (5.1)$$

Mit dem Ansatz  $u_x(s,t)=u(s)\cos(\Omega t+\varphi)$  für die stationäre Dauerlösung, die hier nur betrachtet wird, eliminiert man den Teil der Lösung, der das zeitliche Verhalten beschreibt, und erhält für den Amplitudenverlauf eine gewöhnliche Diffe-

rentialgleichung 2. Ordnung

$$\rho A \Omega^2 u + (EA u')' = 0 \quad (5.2)$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = 0 \quad (5.3)$$

$$N(L) = F_0 = EA u'(L)$$

( )' kennzeichnet die Ableitung nach der Ortskoordinate  $s$ . Die Zielfunktion kann man mit Hilfe des Energiesatzes (Arbeit der äußeren Kräfte)  $\bar{\Phi} = F_0 |u(L)| = \min.$  formulieren. Wenn man nicht mit Betragsgrößen arbeiten will, muß man 2 Fälle unterscheiden:

(i)  $u(L) > 0$

$$\bar{\Phi}_1 = F_0 u(L) = \int_0^L F_0 u' ds = \min. \quad (5.4)$$

(ii)  $u(L) < 0$

$$\bar{\Phi}_2 = -F_0 u(L) = -\int_0^L F_0 u' ds = \min. \quad (5.5)$$

Die Restriktionen in der Aufgabenstellung ergeben die Nebenbedingungen:

$$A_u \leq A(s) \leq A_0 \quad (5.6)$$

$$V = \int_0^L A(s) ds = V_0 \quad (5.7)$$

Wegen der Homogenität des Materials ist in (5.7) die Masse  $M$  durch das Volumen  $V$  ersetzt. Führt man noch die folgenden Normierungen durch

$$\begin{aligned} x &= \frac{s}{L}, & ( )' &= \frac{d( )}{dx}, & \alpha &= \frac{A}{A^*} \\ \gamma_1 &= \frac{u}{L}, & \gamma_2 &= \frac{N}{EA^*} = \alpha \gamma_1', \\ \omega^2 &= \frac{L^2 \rho}{E} \Omega^2, & f &= \frac{F_0}{EA^*} \\ \gamma_3 &= \frac{V}{A^* L}, & \bar{\gamma} &= \frac{\bar{\Phi}}{EA^* L}, \end{aligned}$$

so erhält man die Optimierungsaufgabe in dimensionsloser Form.

Zielfunktion: (i)  $\varphi_1 = \int_0^1 f \frac{y_2}{\alpha} dx = f y_1(1) = \min.$

(ii)  $\varphi_2 = - \int_0^1 f \frac{y_2}{\alpha} dx = -f y_1(1) = \min.$

Dgl.-System:

$$y_1' = \frac{y_2}{\alpha}$$

$$y_2' = -\omega^2 \alpha y_1$$

$$y_3' = \alpha$$

Randbedingungen:

$$y_1(0) = 0$$

$$y_2(1) = f$$

$$y_3(0) = 0, \quad y_3(1) = v_0$$

Nebenbedingung für die Steuergröße  $u=a$ :

$$\alpha_u \leq \alpha \leq \alpha_0$$

Fall (i):

Das Maximumprinzip liefert (vgl. Kapitel 3.2):

Hamilton-Funktion:

$$H = \varphi_0 f \frac{y_2}{\alpha} + \varphi_1 \frac{y_2}{\alpha} - \varphi_2 \omega^2 \alpha y_1 + \varphi_3 \alpha = \max. \text{ bezügl. } \alpha$$

adjungiertes System:

$$\varphi_j' = - \frac{\partial H}{\partial y_j}$$

$$\varphi_1' = \omega^2 \alpha \varphi_2$$

$$\varphi_2' = -\varphi_0 \frac{f}{\alpha} - \varphi_1 \frac{1}{\alpha}$$

$$\varphi_3' = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_3 = K,$$

Transversalitätsbedingung (vgl. Kapitel 3.2 (B)) in etwas abgewandelter Form [18]:

$$- [\underline{\varphi} \cdot \underline{dY}]_{(0)} + [\underline{\varphi} \cdot \underline{dY}]_{(1)} = 0$$

$$- [\varphi_1(0) d y_1(0) + \varphi_2(0) d y_2(0) + \varphi_3(0) d y_3(0)] + [\varphi_1(1) d y_1(1) + \varphi_2(1) d y_2(1) + \varphi_3(1) d y_3(1)]$$

$$\Rightarrow \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_1(1) = 0$$

Ansätze zur Lösung des adjungierten Systems sind

$$\varphi_1 = y_1^* = K_2 y_2 + f$$

$$\varphi_2 = y_2^* = -K_2 y_1$$

Die Randbedingungen werden für  $K_2 = -1$  erfüllt. Setzt man noch  $y_0 = -1$ , so folgt für die Hamilton-Funktion

$$H = -\frac{y_2^2}{\alpha} + \alpha(-\omega^2 y_1^2 + K) = \max. \text{ bezügl. } \alpha$$

oder mit den Abkürzungen  $\alpha = (K - \omega^2 y_1^2)$  und  $\beta = y_2^2$

$$H = \alpha a - \frac{\beta}{\alpha}$$

Die Bedingungen (D) und (E) aus Kapitel 3.2 liefern drei Möglichkeiten für die optimale Wahl von  $a$ :

$$a = \frac{y_2}{\sqrt{\omega^2 y_1^2 - K}} \text{ aus } \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0, \quad a = a_u \text{ oder } a = a_o.$$

Welches  $a$  das Maximum der Hamilton-Funktion für einen beliebigen Punkt des Zustandsraumes bezeichnet, veranschaulicht die Abb. 5.2 für die beiden Fälle  $\alpha > 0$  und  $\alpha < 0$ .

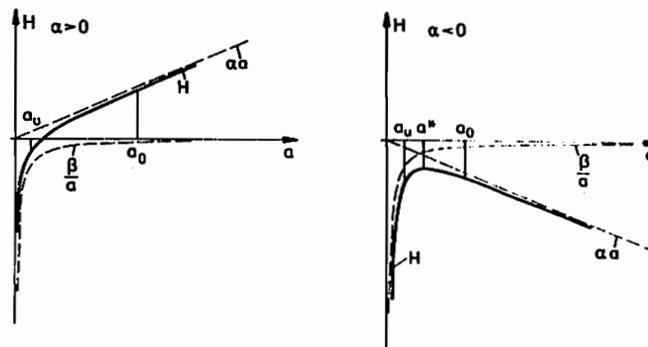


Abb. 5.2

Das Maximum der Funktion  $H$  liegt für

$$\begin{aligned} \underline{\alpha > 0}: \quad \alpha = \alpha_o, \quad \underline{\alpha < 0}: \quad \alpha_o \leq a^* &\implies a = \alpha_o \\ \alpha \geq a^* &\implies a = a_u \\ \alpha < a^* < \alpha_o &\implies a = a^* \end{aligned}$$

$$a^* = \frac{y_2}{\sqrt{\omega^2 y_1^2 - K}}$$

Zur Bestimmung der Schaltfunktionen nach Kapitel 4.7 betrachten wir die  $\alpha, \beta$ -Ebene der Zustandsgrößen (Abb. 5.3). Die

Schaltgeraden  $S_1 = \alpha + \frac{\beta}{\alpha_o^2}$  und  $S_2 = \alpha + \frac{\beta}{a_u^2}$  teilen die

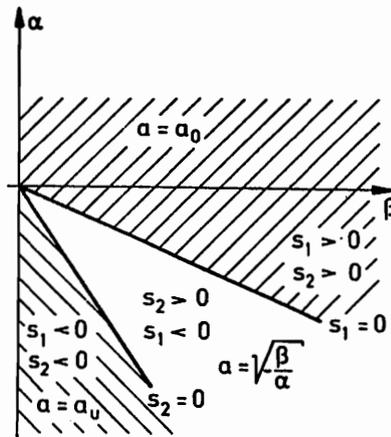


Abb. 5.3

rechte Halbebene in drei Bereiche auf. Das Vorzeichen von  $s_1$  bzw.  $s_2$  gibt dann für jeden Punkt des Zustandsraumes die entsprechende Funktion der Steuergröße  $a$  an. Betrachtet man die Konstante  $K$  als 4. Variable  $y_4$ , so erhält man das Randwertproblem:

Dgl.-System:

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{y_2}{\alpha} \\ y_2' &= -\omega^2 \alpha y_1 \\ y_3' &= 0 \\ y_4' &= 0 \end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0 \\ y_2(1) &= f \\ y_3(0) &= 0 \\ y_3(1) &= v_0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Schaltfunktionen:

$$\begin{aligned} s_1 &= (y_4 - \omega^2 y_1^2) + \frac{y_2^2}{\alpha_0^2} \\ s_2 &= (y_4 - \omega^2 y_1^2) + \frac{y_2^2}{\alpha_u^2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Schaltbedingungen:

$$\begin{aligned} s_1 \geq 0 : & \quad \alpha = \alpha_0 \\ s_2 > 0 \text{ und } s_1 < 0 : & \quad \alpha = \sqrt{\frac{y_2^2}{\omega^2 y_1^2 - y_4}} \\ s_2 \leq 0 : & \quad \alpha = \alpha_u \end{aligned} \quad (5.10)$$

Fall (ii):

Die Vorgehensweise ist analog zum Fall (i). Die Lösung des

adjungierten Systems lautet hier allerdings

$$\gamma_1 = \gamma_2 - f$$

$$\gamma_2 = -\gamma_1,$$

so daß sich das Vorzeichen der Hamilton-Funktion umkehrt

$$H = \frac{\gamma_2^2}{\alpha} + (\omega^2 \gamma_1^2 - K) \alpha$$

oder

$$H = -\alpha a + \frac{\beta}{\alpha}$$

Aus dem Verlauf  $H(a)$  (Abb. 5.4) für die Fälle  $\alpha > 0$  und  $\alpha < 0$  entnimmt man, daß das Maximum von  $H$  immer nur an den Grenzen des zulässigen Steuerbereichs der Querschnittsfläche liegen kann.

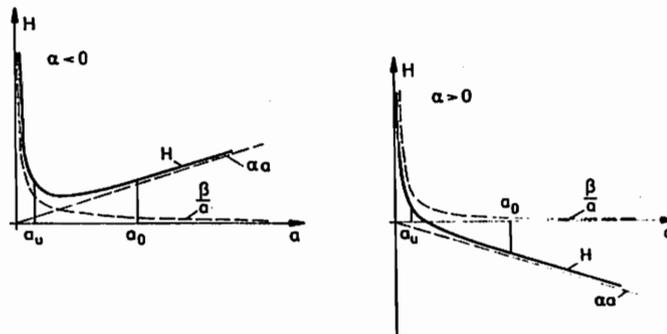


Abb. 5.4

Man erhält

$$\underline{\alpha < 0}: H(a_u) \geq H(a_0): a = a_u \quad \underline{\alpha > 0}: a = a_u$$

$$H(a_u) < H(a_0): a = a_0$$

Die  $\alpha, \beta$ -Ebene (Abb. 5.5) zeigt dann nur die Schaltgerade

$$s = \alpha + \frac{\beta}{\alpha_0 a_u} \text{ aus der Bedingung } H(a_u) = H(a_0). \text{ Das zu}$$

lösende Randwertproblem unterscheidet sich vom Fall (i) also nur in den Schaltbedingungen und Schaltfunktionen. (5.9)

und (5.10) sind zu ersetzen durch:

$$s = (\gamma_4 - \omega^2 \gamma_1^2) + \frac{\gamma_2^2}{\alpha_0 a_u} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned}
 s < 0 & \implies \alpha = \alpha_0 \\
 s \geq 0 & \implies \alpha = \alpha_u
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

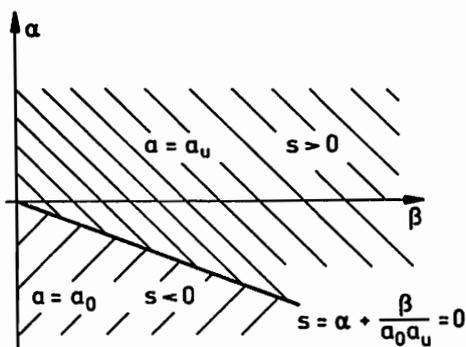


Abb. 5.5

Ergebnisse:

Als Daten für die numerische Durchführung werden gewählt:  $v_0 = 1,5$ ,  $a_u = 1,0$ ,  $a_0 = 2,0$ , wobei zu einigen Frequenzen mit verschiedenen Stützstellenzahlen auf dem Intervall (11 und 6 Stützstellen) gerechnet wird. Selbst bei schlechter Wahl der Starttrajektorien führt das Verfahren stets zum Ziel. Die Stützstellenzahl hat keinen Einfluß.

In Abb. 5.7 ist der Minimalbetrag der Verschiebung als Funktion des Erregerfrequenz-Parameters  $\omega$  dargestellt. Die Fälle  $y_1(1) < 0$  bzw.  $y_1(1) > 0$  werden jeweils durch einen Lösungsast repräsentiert. Kontinuierlicher Querschnittsflächen-Verlauf ( $y_1(1) > 0$ ) führt mit steigender Erregerfrequenz  $\omega$  solange zu einem Anwachsen der minimalen Endverschiebung, bis die für diese Schwingungsform maßgebende Eigenfrequenz erreicht wird. Die Stäbe werden also oberhalb der entsprechenden Eigenfrequenz erregt. Bei sprunghaftem Querschnittsflächen-Verlauf ( $y_1(1) < 0$ ) liegt die Erregerfrequenz oberhalb der zu dieser Schwingungsform gehörenden Eigenfrequenz. Die Endamplitude nimmt also mit steigender Erregerfrequenz ab.

Für den zu  $\omega_{i_{\min}}$  bzw.  $\omega_{i_{\max}}$  gehörenden Querschnittsflächen-Verlauf stellt  $v_0=1,5$  dann das minimale Volumen dar. Die Lösungskurven überschneiden sich, so daß natürlich immer nur die Lösung mit der kleineren Amplitude optimal ist. Daneben gibt es Bereiche, z.B. zwischen  $\omega_1^*$  und  $\omega_2^*$ , für die zu den gegebenen Restriktionen keine Lösung existiert.

Für Frequenzen oberhalb von  $\omega^*$  können jedoch z.B. stets Stäbe der Endamplitude Null mit sprunghaftem Verlauf der Querschnittsfläche angegeben werden, deren untere Querschnittsflächen-Begrenzung innerhalb des zulässigen Bereichs  $a_u \leq a \leq a_0$  und deren obere Querschnittsflächen-Begrenzung auf dem oberen Rand liegt (vgl. Abb. 5.6). Die Beziehung zwischen unterer Querschnittsschranke  $a_u$  und Frequenz-Parameter  $\omega$  lautet für  $a_0=2$

$$\frac{a}{\tan(\omega(\frac{1}{2}-b))} - 2 \tan(\omega b) = 0$$

$$b = \frac{1}{4(2-a)}$$

Für  $\omega=4$  rechnet man z.B.  $a \approx 1,3633$  aus.

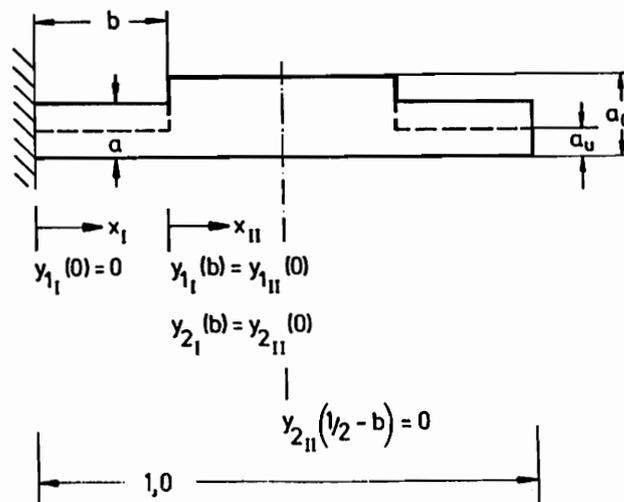


Abb. 5.6

Das Lösungsverhalten spiegelt dann der dick ausgezogene Kurvenzug wieder. Stehen jedoch nur die Querschnittsflächen  $a_o$  und  $a_u$  zur Verfügung, so bleibt zwischen  $\omega_1^*$  und  $\omega_2^*$  die Lösungslücke erhalten. Zwischen  $\omega_2^*$  und  $\omega_3^*$  ist die Lösung durch die sich schneidenden Kurvenäste  $y_1(1) > 0$  und  $y_1(1) < 0$  bestimmt.

Einige ausgewählte Querschnittsflächen-Verläufe sind in Abb. 5.8 dargestellt.

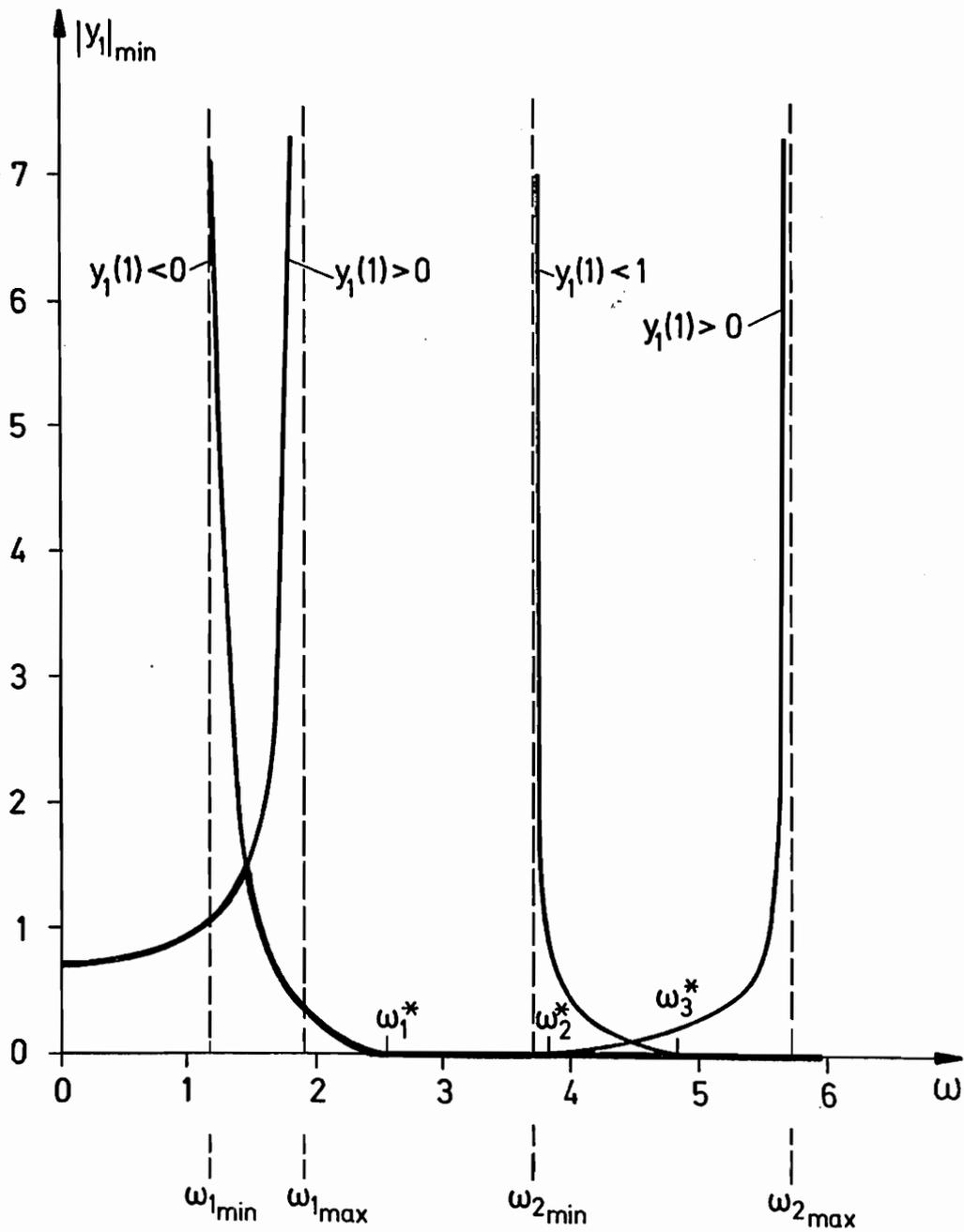


Abb. 5,7: Betrag der Endamplitude als Funktion der Erregerfrequenz,  $v_0=1,5$ ,  $a_0=2,0$ ,  $a_u=1,0$

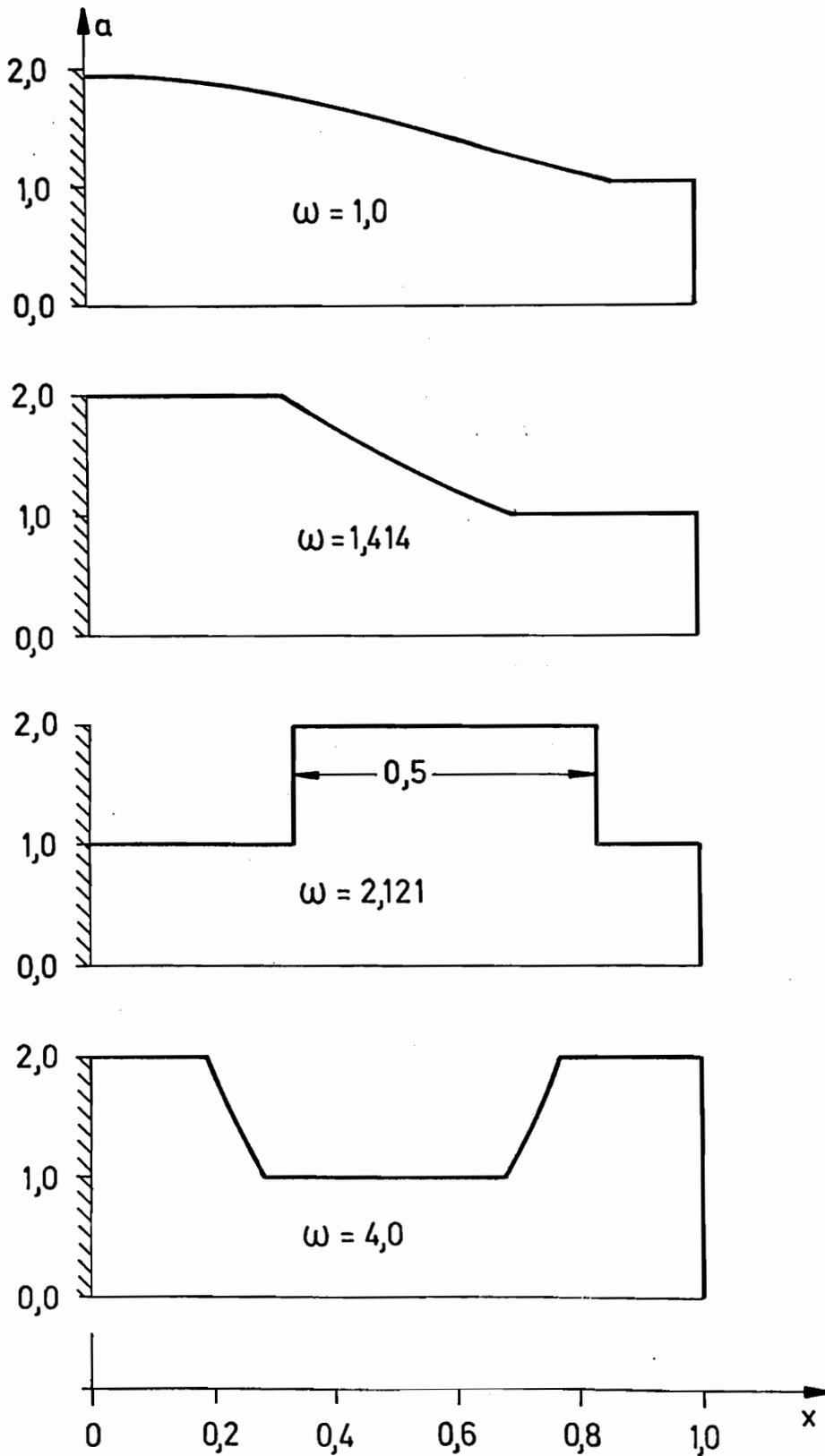


Abb. 5.8 Verlauf von Querschnittsflächen,  $v_0 = 1,5$

### 5.1.3 Einseitig eingespannter Biegeschwinger

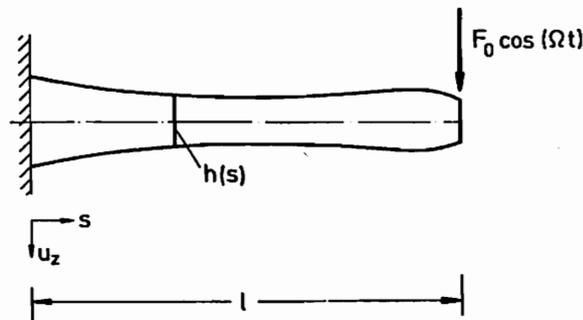


Abb. 5.9

Die partielle Differentialgleichung ist vom parabolischem Typ

$$\rho A(s) \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} (E I_{yy}(s) \frac{\partial^2 u_z}{\partial s^2}) = 0 \quad (5.13)$$

Der Bernoulli-Ansatz  $u_z(s, t) = w(s) \cos(\Omega t + \varphi)$  führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung für den Verlauf der Amplitude  $w(s)$

$$[E I_{yy}(s) w''']'' - \rho A(s) \Omega^4 w = 0 \quad (5.14)$$

Dazu gehören die inhomogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ w'(0) &= 0 \\ M(l) &= -E I_{yy}(l) w''(l) = 0 \\ Q(l) &= -E I_{yy}(l) w'''(l) = F_0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Die vereinbarten Nebenbedingungen sind wie beim Längsschwinger

$$A_u \leq A(s) \leq A_o \quad (5.16)$$

$$V = \int_0^l A(s) ds = V_o \quad (5.17)$$

Das Flächenträgheitsmoment  $I_{yy}$  läßt sich mit dem Ansatz

$$I_{yy} = c A^p \quad (5.18)$$

durch die Querschnittsfläche ausdrücken. Für einen Rechteckquerschnitt mit variabler Höhe  $h$  und konstanter Breite  $b$  erhält man  $p=3$  und  $c=1/(12b^2)$ .

Die Zielfunktion ist wie beim Längsschwinger für die Fälle  $w(1) > 0$

$$\bar{I}_1 = F_0 w(L) = \int_0^L F_0 w' ds$$

und  $w(1) < 0$

$$\bar{I}_2 = -F_0 w(L) = -\int_0^L F_0 w' ds$$

getrennt zu betrachten. Wird in der folgenden Weise normiert

$$x = \frac{s}{L}, \quad \alpha = \frac{A}{A^*}, \quad ( )' = \frac{d( )}{dx}, \quad v = \frac{V_0}{A^* L},$$

$$I = c \alpha^3 \quad \text{mit dem neuen} \quad c = \frac{A^{*3}}{12b^2},$$

$$\varphi = \frac{\bar{I}}{cEA^*L}, \quad \omega^4 = \frac{\rho \Omega^4 L}{cE}, \quad f = \frac{F_0}{EA^*},$$

Zustandsvariable:

$$y_1 = \frac{w}{L}, \quad y_2 = y_1'$$

$$y_3 = -\frac{M}{cEA^*L} = \alpha^3 y_2'$$

$$y_4 = -\frac{Q}{cEA^*} = y_3',$$

dann nimmt die Optimierungsaufgabe die Gestalt an:

Zielfunktion:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad y_1 > 0 : \quad \varphi_1 &= \int_0^1 f y_2 dx \\ \text{(ii)} \quad y_2 < 0 : \quad \varphi_2 &= -\int_0^1 f y_2 dx \end{aligned} \quad (5.19)$$

Nebenbedingungen: Dgl.-System mit Randbedingungen

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 & y_1(0) &= 0 \\ y_2' &= \frac{y_3}{\alpha^3} & y_2(0) &= 0 \\ y_3' &= y_4 & y_3(1) &= 0 \\ y_4' &= \omega^2 \alpha y_1 & y_4(1) &= -f \\ y_5' &= \alpha & y_5(0) &= 0, \quad y_5(1) = V_0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Steuervariable  $u=a$

$$\alpha_u \leq \alpha \leq \alpha_0$$

Fall (i):

Die Anwendung des Maximumprinzips erzeugt analog zum Längsschwinger aus der Hamilton-Funktion

$$H = \gamma_0 f \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_2 \frac{\gamma_3}{\alpha^3} + \gamma_3 \gamma_4 + \gamma_4 \alpha \omega^4 \gamma_1 + \gamma_5 \alpha \quad (5.21)$$

das adjungierte System

$$\begin{aligned} \gamma_1' &= -\omega^4 \alpha \gamma_4 \\ \gamma_2' &= -\gamma_1 + f \\ \gamma_3' &= -\frac{\gamma_2}{\alpha^3} \\ \gamma_4' &= -\gamma_3 \\ \gamma_5' &= 0 \quad \implies \gamma_5 = K \end{aligned} \quad (5.22)$$

Aus der Transversalitätsbedingung folgt

$$\begin{aligned} \gamma_1(1) &= 0, & \gamma_2(1) &= 0 \\ \gamma_3(0) &= 0, & \gamma_4(0) &= 0 \end{aligned}$$

Zwischen adjungierten Variablen und Zustandsvariablen besteht der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_4 + f, & \gamma_2 &= -\gamma_3 \\ \gamma_3 &= \gamma_2, & \gamma_4 &= -\gamma_1 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Die Maximumbedingung stellt sich dann mit  $\gamma_0 = -1$  dar als

$$H = (K - \omega^4 \gamma_1^2) \alpha - \frac{\gamma_3^2}{\alpha^3} + 2 \gamma_2 \gamma_4 = \max. \text{ bezügl. } \alpha \quad (5.24)$$

oder mit den Abkürzungen  $\alpha = K - \omega^4 \gamma_1^2$ ,  $\beta = \gamma_3^2$  und  $\gamma = 2 \gamma_2 \gamma_4$

$$H = \alpha a - \frac{\beta}{\alpha^3} + \gamma$$

$\gamma$  ist für die Entscheidung, welches  $a$  zum Maximum von  $H$  führt, ohne Einfluß. Der qualitative Verlauf  $H(a)$  entspricht Abb. 5.2. Daraus liest man für die optimale Wahl von  $a$  unmittelbar ab:

$$\alpha > 0: \alpha = \alpha_0, \quad \alpha < 0: \alpha_0 \leq \alpha^* \quad \implies a = \alpha_0$$

$$\begin{aligned} \alpha \leq \alpha_u &\implies \alpha = \alpha_o \\ \alpha_u \leq \alpha^* \leq \alpha_o &\implies \alpha = \alpha^* \\ \alpha^* &= \left( \frac{3\gamma_3^2}{\omega^4 \gamma_1^2 - K} \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Auch der qualitative Verlauf der Schaltgeraden in der  $\alpha, \beta$ -Ebene ist derselbe wie in Abb. 5.3. Die zu lösende Randwert-aufgabe mit der Konstanten K als 6. Variable lautet dann:

Dgl.-System:

$$\begin{aligned} \gamma_1' &= \gamma_2 \\ \gamma_2' &= \frac{\gamma_3}{\alpha^3} \\ \gamma_3' &= \gamma_4 \\ \gamma_4' &= \omega^4 \alpha \gamma_1 \\ \gamma_5' &= \alpha \\ \gamma_6' &= 0 \end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \gamma_1(0) &= 0 \\ \gamma_2(0) &= 0 \\ \gamma_3(1) &= 0 \\ \gamma_4(1) &= -f \\ \gamma_5(0) &= 0 \\ \gamma_5(1) &= v_o \end{aligned} \tag{5.25}$$

Schaltfunktionen:

$$\begin{aligned} s_1 &= \alpha + \frac{3\beta}{\alpha_o^4} = \gamma_6 + \omega^4 \gamma_1^2 + \frac{3\gamma_3^2}{\alpha_o^4} \\ s_2 &= \alpha + \frac{3\beta}{\alpha_u^4} = \gamma_6 + \omega^4 \gamma_1^2 + \frac{3\gamma_3^2}{\alpha_u^4} \end{aligned} \tag{5.26}$$

Schaltbedingungen:

$$\begin{aligned} s_1 \geq 0 &: \alpha = \alpha_o \\ s_2 > 0 \text{ und } s_1 < 0 &: \alpha = \left( \frac{3\gamma_3^2}{\omega^4 \gamma_1^2 - K} \right)^{\frac{1}{4}} \\ s_2 \leq 0 &: \alpha = \alpha_u \end{aligned} \tag{5.27}$$

Fall (ii):

Der Vorzeichenwechsel in der Zielfunktion bewirkt einen Vorzeichenwechsel der Lösungen (5.23) der adjungierten Variablen und einen Vorzeichenwechsel in der Maximumbedingung

$$H = (\omega^4 \gamma_1^2 - K) \alpha + \frac{\gamma_3}{\alpha^3} - 2\gamma_2 \gamma_4 = \max. \text{ bezügl. } \alpha$$

oder

$$H = -\alpha a + \frac{\beta}{a^3} - \gamma = \max. \text{ bezügl. } a$$

Da  $\gamma$  auch hier ohne Einfluß auf die Maximumbedingung bleibt, findet man den qualitativen Verlauf von  $H$  in Abb. 5.4 bzw. den qualitativen Verlauf der Schaltfunktion in Abb. 5.5 wieder. Das bedeutet:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha < 0}: \quad H(a_u) \geq H(a_o) &\Rightarrow a = a_u, \quad \underline{\alpha > 0}: \quad a = a_u \\ H(a_u) < H(a_o) &\Rightarrow a = a_o \end{aligned}$$

(5.26) und (5.27) ist zu ersetzen durch:

$$\begin{aligned} s &= -\alpha + \bar{a} \beta \\ \bar{a} &= \frac{a_o^2 + a_u^2 + a_o a_u}{(a_o a_u)^3} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$s < 0: \quad a = a_o$$

$$s \geq 0: \quad a = a_u$$

### Ergebnisse:

Die numerischen Rechnungen werden mit den Daten  $v_o = 2,5$ ,  $a_u = 1,0$  und  $a_o = 5,0$  durchgeführt. Die Stäbe mit kontinuierlichem Querschnittsflächen-Verlauf zeigen ein wesentlich besseres Konvergenzverhalten als die Stäbe mit sprunghaftem Querschnittsflächen-Verlauf. Um leichter und mit weniger numerischen Aufwand zum Ziel zu gelangen, wird deshalb bei den Stäben mit sprunghaftem Querschnittsverlauf vom normalen Lösungsalgorithmus abgewichen.

Über eine längere Zwischenrechnung, auf die hier im einzelnen nicht eingegangen werden kann, stellt man die Frequenzgleichung als Funktion der Sprungstellen auf. Die Schaltbedingung (5.28)  $s=0$  an jeder Sprungstelle liefert die notwendige Zahl von weiteren Gleichungen für die unbekannte Konstante  $\gamma_6$  und die Schaltstellen. Betrachtet man dieses nichtlineare Gleichungssystem als Rand- oder Knotenbedingungen, die Schaltstellen und die Konstante als Zustandsvariable (Dgl.-System mit  $\gamma_i' = 0$ ), für die ein beliebiges Pseudo-Integrationsinter-

vall definiert wird, so kann man den gleichen Lösungsalgorithmus wie im Normalfall verwenden. Der Aufwand beim Aufstellen der Frequenzgleichung wird durch sehr kurze Rechenzeiten belohnt.

Abb. 5.10 zeigt den Zusammenhang zwischen Erregerfrequenz und Absolutwert der Endamplitude. Man stellt ein ähnliches Verhalten wie beim Längsschwinger fest. Kontinuierliche Querschnittsflächen-Verläufe ( $y_1(1) > 0$ ) maximieren die zu ihrer Schwingungsform gehörende Eigenfrequenz, sprunghafte minimieren sie. Zwischen  $\omega_1^*$  und  $\omega_2^*$  existiert zu den gewählten Restriktionen keine Lösung.

Für höhere Frequenz-Parameter als  $\bar{\omega}$  können z.B. wieder sprunghafte Querschnittsfläche-Verläufe mit der Endamplitude Null konstruiert werden, wobei die Querschnittsflächen innerhalb des zulässigen Gebietes  $a_u \leq a \leq a_0$  liegen. Dieses Lösungsverhalten finden wir im dick ausgezogenen Kurvenzug wieder. Gibt es nur die Möglichkeiten  $a_0$  und  $a_u$ , so gelten auch oberhalb von  $\bar{\omega}$  die dargestellten Kurven, und man hat bei übereinanderliegenden Kurvenästen diejenigen mit der kleinsten Amplitude auszuwählen.

Querschnittsflächen-Verläufe zu verschiedenen Frequenz-Parametern zeigen die Abbildungen 5.11 und 5.12.

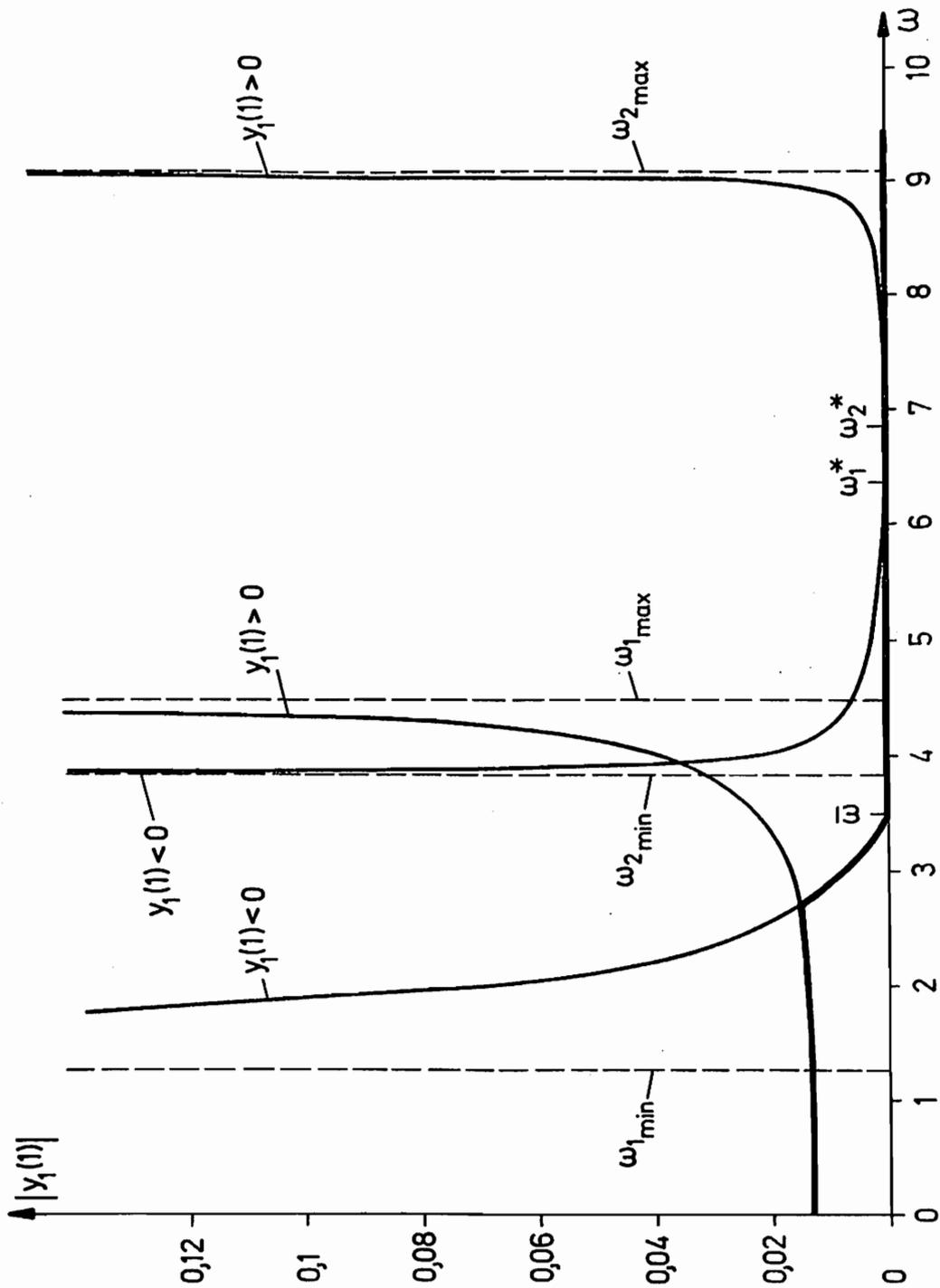


Abb. 5.10: Betrag der Endamplitude als Funktion der Erregerfrequenz,  $v_0=2,5$ ,  $a_0=5,0$ ,  $a_u=1,0$

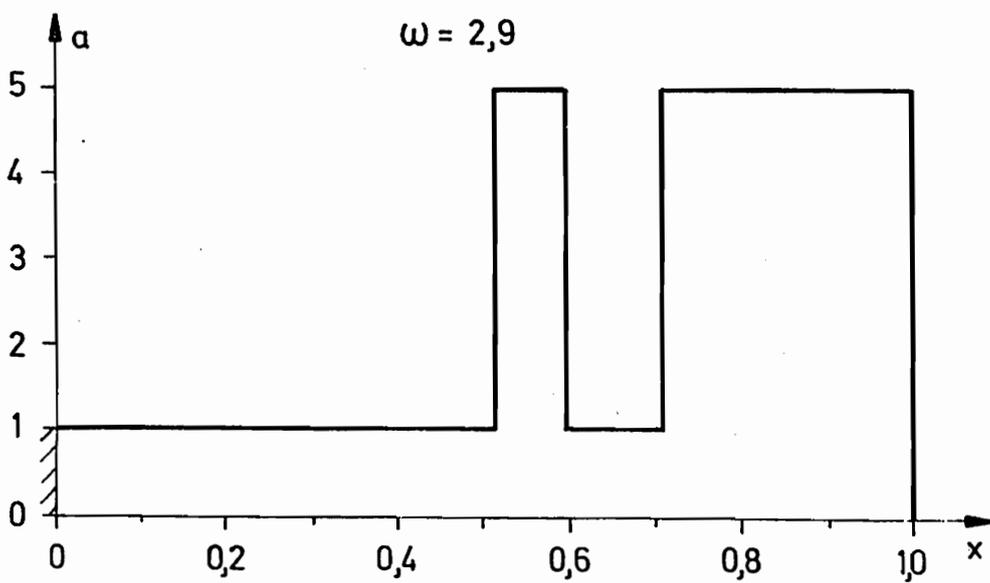
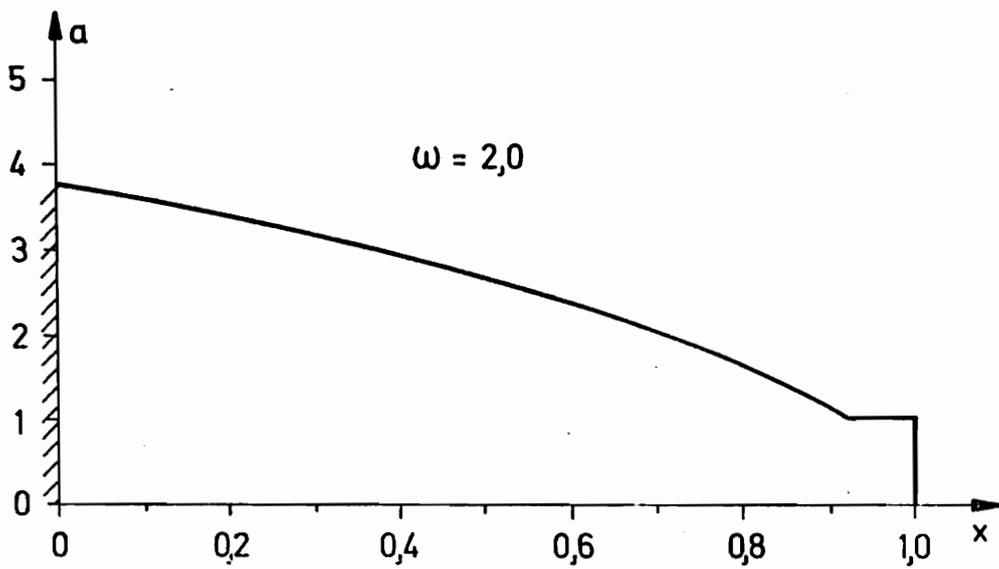
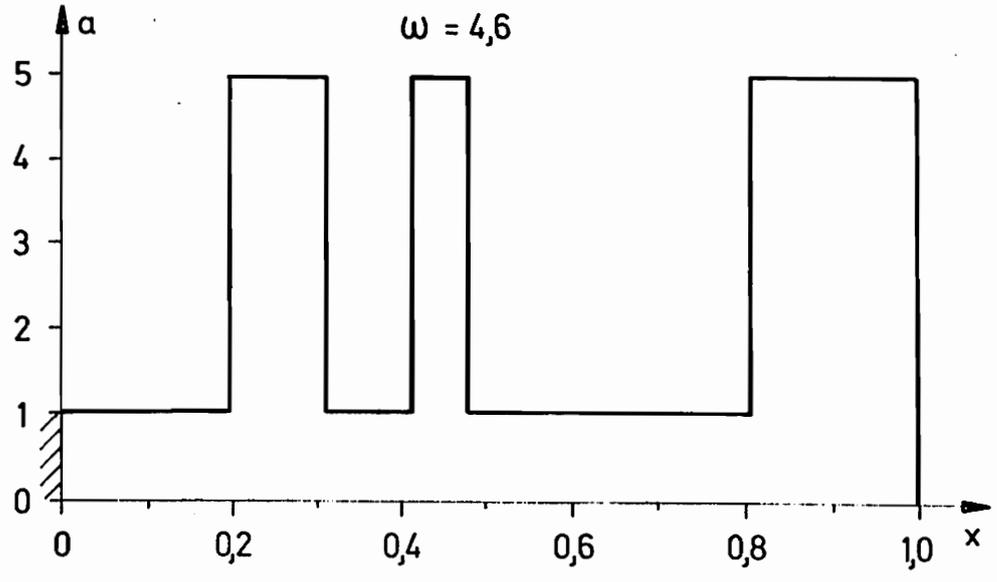
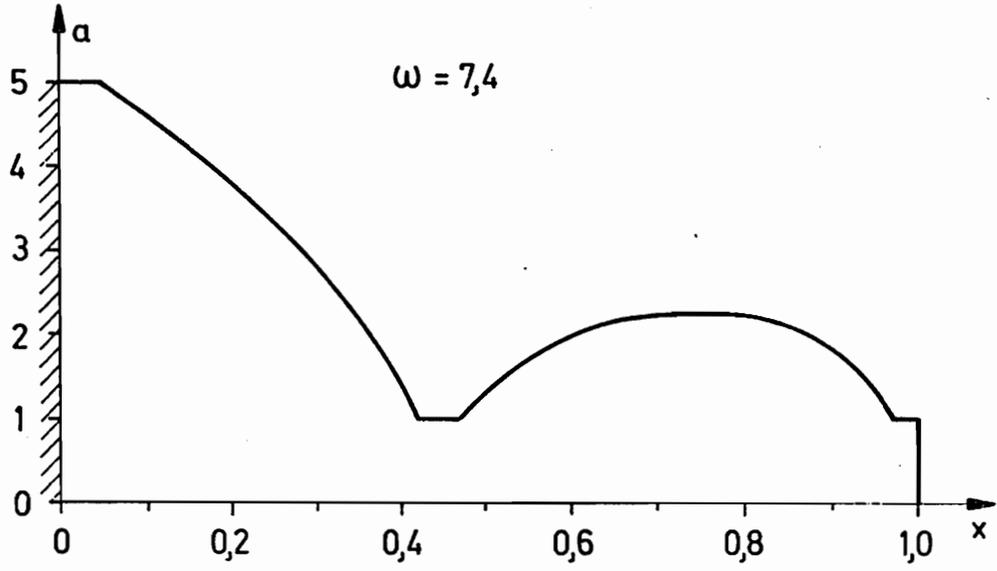


Abb. 5.11: Verlauf von Querschnittsflächen,  $v_0 = 2,5$



## 5.2 Rahmenartige Tragwerke maximaler Steifigkeit unter statischer Belastung

### 5.2.1 Allgemeines

An statisch belastete Tragwerke wird häufig die Anforderung gestellt, daß ihre Verformungen möglichst klein bleiben sollen. Eine globale Aussage über das Maß der Formänderungen eines elastischen Bauwerks und damit auch der Beanspruchung bei zähen Werkstoffen ist die Formänderungsarbeit. Nach dem Energiesatz der Mechanik (1. Hauptsatz der Thermodynamik) gilt nun, daß die Formänderungsarbeit gleich der Arbeit der äußeren (eingepprägten) Kräfte bei einem isothermen Prozeß und quasistatischen Formänderungsvorgängen eines linear-elastischen Körpers ist. Maximale Steifigkeit oder minimale Verformungen sind daher mit dem Minimum der Arbeit der äußeren Kräfte verbunden. Durch die Menge an Material, die verbaut werden darf (Ein bestimmtes Gewicht des Bauwerks soll nicht überschritten werden.), und durch Begrenzung der Querschnittsflächen nach oben und unten sind den Systemen oftmals Restriktionen auferlegt. Schranken für die Querschnittsfläche ergeben sich meist aus konstruktiven Gründen, sind aber auch notwendig, wenn man das Verschwinden von Querschnittsflächen an diskreten Stellen oder ein zu starkes Anwachsen von Querschnittsflächen (Widerspruch zur Stabtheorie) verhindern will.

In diesem Zusammenhang sollen hier zwei ebene rahmenartige Stabtragwerke (Abb. 5.13 und Abb. 5.14) untersucht werden. Die Annahmen der Elasto-Statik der Stäbe werden vorausgesetzt, Dehnungen der Stabachse bleiben unberücksichtigt. Auf ein Einbeziehen des Eigengewichtes wird verzichtet.

### 5.2.2 Grundgleichungen

Abschnitts-, Knoten- und Stützstellennummerierungen werden entsprechend Kapitel 4.1 durchgeführt. Der Angriffspunkt von

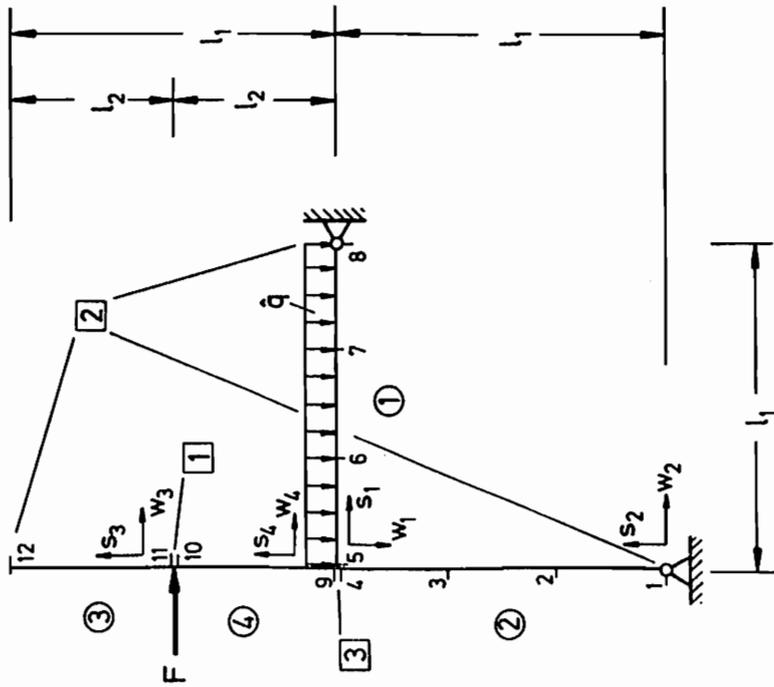


Abb. 5.13

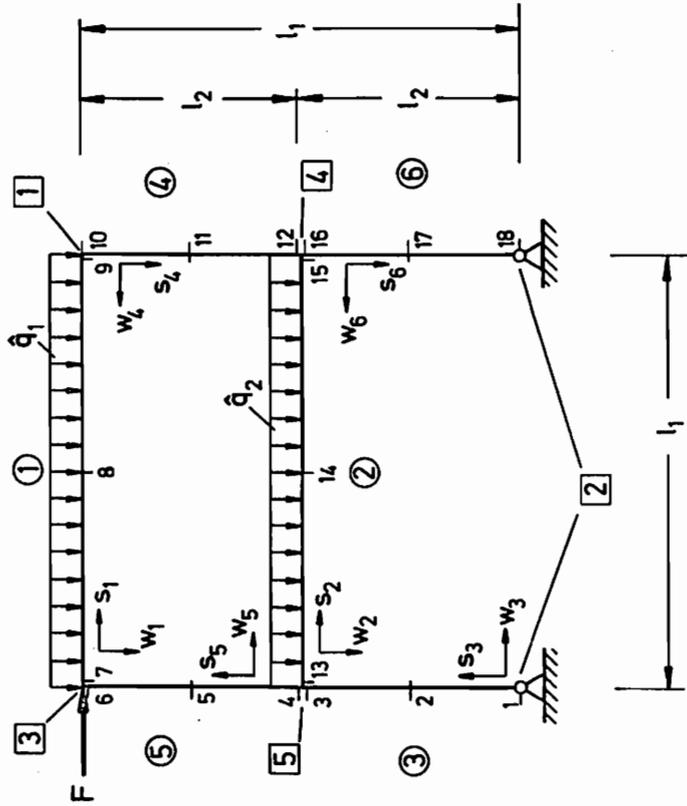


Abb. 5.14

Einzelkräften muß dabei immer mit einem Knotenpunkt zusammenfallen.

Zielfunktion ist die Arbeit der äußeren Kräfte  $\bar{\Phi}$ , die zum Minimum gemacht werden soll. Beim Aufstellen der Zielfunktion werden die Einzelkräfte dem Anfangs- oder Endpunkt eines Abschnittes am jeweiligen Knoten zugeordnet. Man erhält:

$$\text{Beispiel 1: } \bar{\Phi}_1 = \int_0^{L_2} F w_4' ds_4 + \int_0^{L_1} \hat{q}_1 w_1 ds_1 = \min. \quad (5.29)$$

$$\text{Beispiel 2: } \bar{\Phi}_2 = \int_0^{L_2} F w_5' ds_5 + \int_0^{L_1} \hat{q}_1 w_1 ds_1 + \int_0^{L_1} \hat{q}_2 w_2 ds_2 = \min. \quad (5.30)$$

Bei homogenem Werkstoff schreibt man in beiden Fällen für die Beschränkung der Masse

$$V = \int_{(L)} A(s) ds = V_0 \quad (5.31)$$

und für die Restriktionen in der Querschnittsfläche

$$A_u \leq A \leq A_0 \quad (5.32)$$

Die Differentialgleichung der Stabbiegung für den i-ten Stab lautet

$$\left. \frac{d^4 (EI(s) w(s))}{ds^4} \right|_i = -\hat{q}_i \quad (5.33)$$

Normalkraft und Verschiebung in Richtung der Stabachse werden als konstant angenommen

$$N_i = \text{konst.}, \quad u_i = \text{konst.} \quad (5.34)$$

Für Rechteckquerschnitte mit variabler Höhe h und konstanter Breite b gilt (vgl. Kapitel 5.1.3)

$$I(s) = c A^3(s) \quad (5.35)$$

Es wird in der folgenden Weise normiert:

$$x_i = \frac{s_i}{L}, \quad L = L_1 + \dots + L_m$$

$$\begin{aligned} ( )' &= \frac{d( )}{dx}, \quad \alpha_i = \frac{A_i}{A^*}, \quad v_0 = \frac{V_0}{A^* L} \\ I_i &= c \alpha_i^3 \quad \text{mit} \quad c = \frac{A^{*3}}{12 b^2} \\ q_i &= \frac{\hat{q}_i}{q^*}, \quad p = \frac{q^* L^3}{Ec}, \quad p=1 \text{ gew\u00e4hlt} \\ f_i &= \frac{F_i}{q^* L}, \quad \varphi = \frac{\bar{\Phi}}{q^* L^2} \\ \gamma_{1i} &= \frac{w_i}{L}, \quad \gamma_{2i} = \gamma_{1i}' \\ \gamma_{3i} &= \frac{M_i L}{Ec}, \quad \gamma_{4i} = \frac{Q_i L^2}{Ec} \\ \gamma_{5i} &= \frac{N_i L^2}{Ec}, \quad \gamma_{8i} = \frac{u_i}{L} \end{aligned}$$

Man erh\u00e4lt dann die Optimierungsaufgabe:

Zielfunktion:

Beispiel 1:  $\varphi_1 = \int_0^{1/6} f_4 \gamma_{24} dx_4 + \int_0^{1/3} q_1 \gamma_{11} dx_1 = \min.$

Beispiel 2:  $\varphi_2 = \int_0^{0,125} f_5 \gamma_{25} dx_5 + \int_0^{0,25} q_1 \gamma_{11} dx_1 + \int_0^{0,25} q_2 \gamma_{12} dx_2 = \min. \quad (5.36)$

Nebenbedingungen:

Dgl.-System f\u00fcr den i-ten Stab einschlie\u00dflich der integralen

Nebenbedingung (5.31)  $v_i = \gamma_{6i} = \int_0^{l_i} \alpha_i dx_i :$

$$\begin{aligned} \gamma_{1i}' &= \gamma_{2i} \\ \gamma_{2i}' &= -p \frac{\gamma_{3i}}{\alpha_i^3} = -\frac{\gamma_{3i}}{\alpha_i^3} \\ \gamma_{3i}' &= \gamma_{4i} \\ \gamma_{4i}' &= -q_i \\ \gamma_{5i}' &= 0 \\ \gamma_{6i}' &= \alpha_i \\ \gamma_{8i}' &= 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Steuervariable  $u_i = a_i$ :

$$\alpha_u \leq \alpha_i \leq \alpha_0 \quad (5.38)$$

Die Knotenbedingungen für (5.37) sind in Tabelle 1 enthalten, wobei die Bedingungen für die Variable  $y_{7i}$  vorerst außer acht bleiben. Gemäß Kapitel 3.2 wird die Hamilton-Funktion für den  $i$ -ten Stab gebildet

$$H_i = \psi_{0i} (q_i y_{1i} + f_i y_{2i}) + \psi_{1i} y_{2i} - \psi_{2i} \frac{y_{3i}^3}{\alpha_i^3} + \psi_{3i} y_{4i} - \psi_{4i} q_i + \psi_{6i} \alpha_i \quad (5.39)$$

Gleichung (3.6) liefert das Hilfssystem für den  $i$ -ten Stab

$$\begin{aligned} \psi_{1i}' &= -\psi_{0i} q_i, & \psi_{5i}' &= 0 \implies \psi_{5i} = K_{5i} \\ \psi_{2i}' &= -\psi_{0i} f_i - \psi_{1i}, & \psi_{6i}' &= 0 \implies \psi_{6i} = K_{6i} \\ \psi_{3i}' &= \frac{\psi_{2i}}{\alpha_i^3}, & \psi_{8i}' &= 0 \implies \psi_{8i} = K_{8i} \\ \psi_{4i}' &= -\psi_{3i} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Aus der Transversalitätsbedingung in jedem Knotenpunkt,

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} \text{Knoten 1:} & \quad \underline{\psi_4} \cdot \underline{\delta y_4} - \underline{\psi_3} \cdot \underline{\delta y_3} = 0 \\ \text{Knoten 2:} & \quad \underline{\psi_3} \cdot \underline{\delta y_3} + \underline{\psi_1} \cdot \underline{\delta y_1} - \underline{\psi_2} \cdot \underline{\delta y_2} = 0 \\ \text{Knoten 3:} & \quad -\underline{\psi_1} \cdot \underline{\delta y_1} + \underline{\psi_2} \cdot \underline{\delta y_2} - \underline{\psi_4} \cdot \underline{\delta y_4} = 0, \end{aligned} \quad (5.41)$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} \text{Knoten 1:} & \quad \underline{\psi_1} \cdot \underline{\delta y_1} - \underline{\psi_4} \cdot \underline{\delta y_4} = 0 \\ \text{Knoten 2:} & \quad -\underline{\psi_3} \cdot \underline{\delta y_3} + \underline{\psi_6} \cdot \underline{\delta y_6} = 0 \\ \text{Knoten 3:} & \quad \underline{\psi_5} \cdot \underline{\delta y_5} - \underline{\psi_1} \cdot \underline{\delta y_1} = 0 \\ \text{Knoten 4:} & \quad \underline{\psi_2} \cdot \underline{\delta y_2} + \underline{\psi_4} \cdot \underline{\delta y_4} - \underline{\psi_6} \cdot \underline{\delta y_6} = 0 \\ \text{Knoten 5:} & \quad \underline{\psi_3} \cdot \underline{\delta y_3} - \underline{\psi_2} \cdot \underline{\delta y_2} - \underline{\psi_5} \cdot \underline{\delta y_5} = 0 \end{aligned} \quad (5.42)$$

findet man die Knotenbedingungen für die Hilfsfunktionen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 dargestellt. Das Dgl.-Sys-

Tabelle 1

Knoten	1	2	3	4	5
<u>Beispiel 1</u>	$Y_{14} - Y_{13} = 0$ $Y_{24} - Y_{23} = 0$ $Y_{34} - Y_{33} = 0$ $Y_{44} - Y_{43} - f_4 = 0$ $Y_{54} - Y_{53} = 0$ $Y_{64} - Y_{63} = 0$ $Y_{74} - Y_{73} = 0$ $Y_{84} - Y_{83} = 0$	$Y_{11} = 0$ $Y_{31} = 0$ $Y_{33} = 0$ $Y_{43} = 0$ $Y_{53} = 0$ $Y_{63} - v_0 = 0$ $Y_{12} = 0$ $Y_{32} = 0$ $Y_{72} - Y_{71} = 0$ $Y_{61} - Y_{62} = 0$ $Y_{81} = 0$ $Y_{82} = 0$	$Y_{11} + Y_{82} = 0$ $Y_{82} - Y_{84} = 0$ $Y_{22} - Y_{24} = 0$ $Y_{22} - Y_{21} = 0$ $Y_{32} - Y_{34} - Y_{31} = 0$ $Y_{14} - Y_{12} = 0$ $Y_{51} + Y_{44} - Y_{42} = 0$ $Y_{52} - Y_{54} + Y_{41} = 0$ $Y_{61} = 0$ $Y_{62} - Y_{64} = 0$ $Y_{72} - Y_{74} = 0$ $Y_{12} - Y_{81} = 0$	$Y_{14} + Y_{82} = 0$ $Y_{22} - Y_{26} = 0$ $Y_{24} - Y_{26} = 0$ $Y_{32} + Y_{34} - Y_{36} = 0$ $Y_{52} + Y_{46} - Y_{44} = 0$ $Y_{54} + Y_{42} - Y_{56} = 0$ $Y_{64} + Y_{62} - Y_{66} = 0$ $Y_{72} - Y_{76} = 0$ $Y_{74} - Y_{76} = 0$ $Y_{84} - Y_{86} = 0$ $Y_{84} - Y_{12} = 0$ $Y_{14} - Y_{16} = 0$	$Y_{13} - Y_{15} = 0$ $Y_{13} - Y_{82} = 0$ $Y_{23} - Y_{22} = 0$ $Y_{23} - Y_{25} = 0$ $Y_{32} + Y_{35} - Y_{33} = 0$ $Y_{52} + Y_{45} - Y_{43} = 0$ $Y_{55} - Y_{42} - Y_{53} = 0$ $Y_{65} - Y_{63} = 0$ $Y_{75} - Y_{73} = 0$ $Y_{62} = 0$ $Y_{85} - Y_{83} = 0$ $Y_{83} + Y_{12} = 0$
<u>Beispiel 2</u>	$Y_{21} - Y_{24} = 0$ $Y_{31} - Y_{34} = 0$ $Y_{41} - Y_{54} = 0$ $Y_{51} + Y_{44} = 0$ $Y_{61} - Y_{64} = 0$ $Y_{71} - Y_{74} = 0$ $Y_{81} + Y_{14} = 0$ $Y_{11} - Y_{84} = 0$	$Y_{13} = 0$ $Y_{33} = 0$ $Y_{63} = 0$ $Y_{83} = 0$ $Y_{16} = 0$ $Y_{36} = 0$ $Y_{66} - v_0 = 0$ $Y_{86} = 0$	$Y_{11} + Y_{85} = 0$ $Y_{25} - Y_{21} = 0$ $Y_{35} - Y_{31} = 0$ $Y_{55} + Y_{41} = 0$ $Y_{45} - Y_{51} - f_5 = 0$ $Y_{65} - Y_{61} = 0$ $Y_{75} - Y_{71} = 0$ $Y_{15} - Y_{81} = 0$	$Y_{14} + Y_{82} = 0$ $Y_{22} - Y_{26} = 0$ $Y_{24} - Y_{26} = 0$ $Y_{32} + Y_{34} - Y_{36} = 0$ $Y_{52} + Y_{46} - Y_{44} = 0$ $Y_{54} + Y_{42} - Y_{56} = 0$ $Y_{64} + Y_{62} - Y_{66} = 0$ $Y_{72} - Y_{76} = 0$ $Y_{74} - Y_{76} = 0$ $Y_{84} - Y_{86} = 0$ $Y_{84} - Y_{12} = 0$ $Y_{14} - Y_{16} = 0$	$Y_{13} - Y_{15} = 0$ $Y_{13} - Y_{82} = 0$ $Y_{23} - Y_{22} = 0$ $Y_{23} - Y_{25} = 0$ $Y_{32} + Y_{35} - Y_{33} = 0$ $Y_{52} + Y_{45} - Y_{43} = 0$ $Y_{55} - Y_{42} - Y_{53} = 0$ $Y_{65} - Y_{63} = 0$ $Y_{75} - Y_{73} = 0$ $Y_{62} = 0$ $Y_{85} - Y_{83} = 0$ $Y_{83} + Y_{12} = 0$

Tabelle 2

Knoten	1	2	3	4	5
<b>Beispiel 1</b>	$\psi_{14} - \psi_{13} = 0$ $\psi_{24} - \psi_{23} = 0$ $\psi_{34} - \psi_{33} = 0$ $\psi_{44} - \psi_{43} = 0$ $\psi_{54} - \psi_{53} = 0$ $\psi_{64} - \psi_{63} = 0$ $\psi_{84} - \psi_{84} = 0$	$\psi_{21} = 0$ $\psi_{41} = 0$ $\psi_{61} - \psi_{62} = 0$ $\psi_{13} = 0$ $\psi_{23} = 0$ $\psi_{22} = 0$ $\psi_{42} = 0$ $\psi_{51} = 0$ $\psi_{52} = 0$ $\psi_{83} = 0$	$\psi_{11} + \psi_{82} - \psi_{84} = 0$ $\psi_{22} - \psi_{24} - \psi_{21} = 0$ $\psi_{31} - \psi_{32} = 0$ $\psi_{32} - \psi_{34} = 0$ $\psi_{42} - \psi_{51} = 0$ $\psi_{42} - \psi_{44} = 0$ $\psi_{54} - \psi_{52} = 0$ $\psi_{54} + \psi_{41} = 0$ $\psi_{62} - \psi_{64} = 0$ $\psi_{12} - \psi_{81} - \psi_{14} = 0$	$\psi_{14} - \psi_{16} - \psi_{82} = 0$ $\psi_{22} + \psi_{24} - \psi_{26} = 0$ $\psi_{32} - \psi_{36} = 0$ $\psi_{34} - \psi_{36} = 0$ $\psi_{52} + \psi_{44} = 0$ $\psi_{44} - \psi_{46} = 0$ $\psi_{54} - \psi_{56} = 0$ $\psi_{42} - \psi_{56} = 0$ $\psi_{62} - \psi_{66} = 0$ $\psi_{64} - \psi_{66} = 0$ $\psi_{86} - \psi_{84} - \psi_{12} = 0$	$\psi_{13} - \psi_{15} - \psi_{82} = 0$ $\psi_{23} + \psi_{22} - \psi_{25} = 0$ $\psi_{33} - \psi_{32} = 0$ $\psi_{33} - \psi_{35} = 0$ $\psi_{43} - \psi_{52} = 0$ $\psi_{43} - \psi_{45} = 0$ $\psi_{53} - \psi_{55} = 0$ $\psi_{55} + \psi_{42} = 0$ $\psi_{65} - \psi_{63} = 0$ $\psi_{83} + \psi_{12} - \psi_{85} = 0$
<b>Beispiel 2</b>	$\psi_{21} - \psi_{24} = 0$ $\psi_{31} - \psi_{34} = 0$ $\psi_{41} - \psi_{54} = 0$ $\psi_{51} + \psi_{44} = 0$ $\psi_{61} - \psi_{64} = 0$ $\psi_{81} + \psi_{14} = 0$ $\psi_{11} - \psi_{84} = 0$	$\psi_{23} = 0$ $\psi_{43} = 0$ $\psi_{53} = 0$ $\psi_{26} = 0$ $\psi_{46} = 0$ $\psi_{56} = 0$	$\psi_{25} - \psi_{21} = 0$ $\psi_{35} - \psi_{31} = 0$ $\psi_{55} + \psi_{41} = 0$ $\psi_{45} - \psi_{51} = 0$ $\psi_{65} - \psi_{61} = 0$ $\psi_{15} - \psi_{81} = 0$ $\psi_{11} + \psi_{85} = 0$	$\psi_{14} - \psi_{16} - \psi_{82} = 0$ $\psi_{22} + \psi_{24} - \psi_{26} = 0$ $\psi_{32} - \psi_{36} = 0$ $\psi_{34} - \psi_{36} = 0$ $\psi_{52} + \psi_{44} = 0$ $\psi_{44} - \psi_{46} = 0$ $\psi_{54} - \psi_{56} = 0$ $\psi_{42} - \psi_{56} = 0$ $\psi_{62} - \psi_{66} = 0$ $\psi_{64} - \psi_{66} = 0$ $\psi_{86} - \psi_{84} - \psi_{12} = 0$	$\psi_{13} - \psi_{15} - \psi_{82} = 0$ $\psi_{23} + \psi_{22} - \psi_{25} = 0$ $\psi_{33} - \psi_{32} = 0$ $\psi_{33} - \psi_{35} = 0$ $\psi_{43} - \psi_{52} = 0$ $\psi_{43} - \psi_{45} = 0$ $\psi_{53} - \psi_{55} = 0$ $\psi_{55} + \psi_{42} = 0$ $\psi_{65} - \psi_{63} = 0$ $\psi_{83} + \psi_{12} - \psi_{85} = 0$

tem der Hilfsgrößen und das der Zustandsgrößen zeigen gleichen Aufbau. Daher ergibt sich als Lösung des Hilfssystems

$$\begin{aligned}
 \psi_{1i} &= -\gamma_{4i} + f_i & \psi_{5i} &= \gamma_{8i} \\
 \psi_{2i} &= \gamma_{3i} & \psi_{8i} &= -\gamma_{5i} \\
 \psi_{3i} &= -\gamma_{2i} \\
 \psi_{4i} &= \gamma_{1i}
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

Die Konstanten  $K_{5i}$  und  $K_{8i}$  treten in der Hamilton-Funktion nicht auf. Einsetzen von (5.43) in (5.39) liefert mit  $\psi_{0i}^{\alpha-1}$

$$\begin{aligned}
 H_i &= K_{6i} \alpha_i - \frac{\gamma_{3i}^2}{\alpha_i^3} - 2(\gamma_{4i} \gamma_{2i} + f_i \gamma_{1i}) \\
 &= \gamma_i \alpha_i - \beta_i \frac{1}{\alpha_i^3} - 2\beta_i
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Wegen der Querschnittsflächen-Schranken ist wieder die richtige Wahl unter den drei möglichen Querschnittsflächen

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= \alpha_o, \quad \alpha_i = \alpha_u \\
 \alpha_i &= \sqrt[4]{-\frac{3\gamma_{3i}^2}{K_{6i}}}
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

zu treffen. Wir betrachten dazu Abb. 5.15 (a) und (b) und lesen ab, daß das Maximum von  $H_j$  bestimmt ist durch:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \alpha &= \alpha_o & \text{(b)} \quad \alpha_o &\leq \alpha_i^* & \implies & \alpha = \alpha_o \\
 & & & \alpha_u &\geq \alpha_i^* & \implies & \alpha = \alpha_u \\
 & & & \alpha_u &< \alpha_i^* < \alpha_o & \implies & \alpha = \alpha^*
 \end{aligned}$$

$$\alpha_i^* = \sqrt[4]{-\frac{3\gamma_{3i}^2}{K_{6i}}}$$

Daraus lassen sich die Schaltfunktionen konstruieren

$$\begin{aligned}
 S_{1i} &= \gamma_i \alpha_o^4 + 3\beta_i^2 \\
 S_{2i} &= \gamma_i \alpha_u^4 + 3\beta_i^2
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

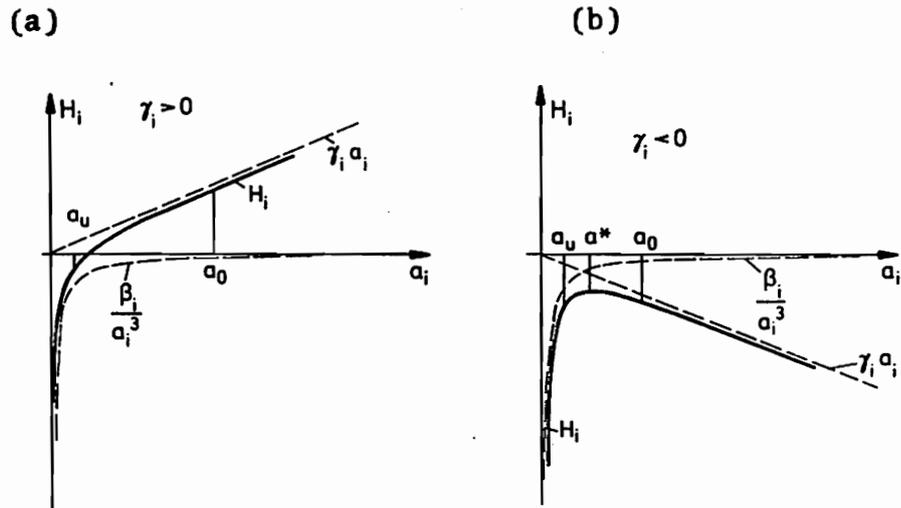


Abb. 5.15

Die Schaltbedingungen  $s_{1i}=0$  und  $s_{2i}=0$  stellen sich als Geraden in der  $(\gamma, \beta)_i$ -Ebene der Zustandsgrößen dar (Abb. 5.16).

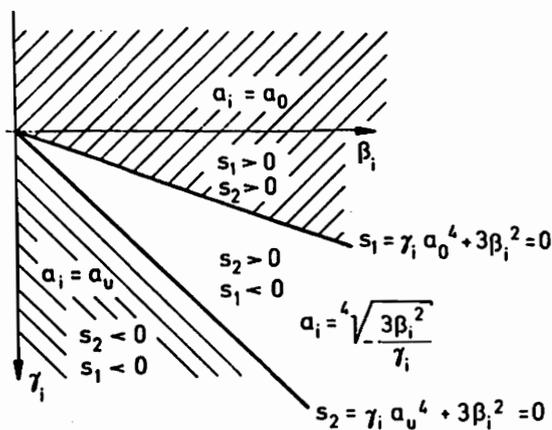


Abb. 5.16

Bezeichnet man die Konstante  $K_{6i}$  als 7. Zustandsvariable, dann bekommt man folgende Randwertaufgabe:

Dgl.-System:

$$\gamma_{1i}' = \gamma_{2i}$$

$$\gamma_{2i}' = -\frac{\gamma_{3i}}{\alpha_i^3}$$

Knotenbedingungen:

Tabelle 1

(5.47)

$$Y_{3i}' = Y_{4i}$$

$$Y_{4i}' = -q_i$$

$$Y_{5i}' = 0$$

$$Y_{6i}' = \alpha_i$$

$$Y_{7i}' = 0$$

$$Y_{8i}' = 0$$

Schaltfunktionen:

$$S_{1i} = Y_{7i} \alpha_o^4 + Y_{3i}^2 \quad (5.48)$$

$$S_{2i} = Y_{7i} \alpha_u^4 + Y_{3i}^2$$

Schaltbedingungen:

$$S_{1i} > 0 : \quad \alpha_i = \alpha_o$$

$$S_{2i} > 0 \text{ und } S_{1i} < 0 : \quad \alpha_i = \sqrt[4]{-\frac{3Y_{3i}^2}{Y_{7i}}} \quad (5.49)$$

$$S_{2i} < 0 : \quad \alpha_i = \alpha_u$$

### 5.2.3 Ergebnisse und Diskussion

Die numerische Rechnung für die beiden in den Abbildungen 5.13 und 5.14 dargestellten Beispiele erfolgt mit den Daten:

Beispiel 1:  $l_1/L=1/3$ ,  $l_2/L=1/6$ ,  $a_o=2,5$ ,  $a_u=1,0$

$$v_o=1,5, \quad q=1,0, \quad f=1,0,$$

Beispiel 2:  $l_1/L=0,25$ ,  $l_2/L=0,125$ ,  $a_u=1,0, \dots, 0,0$

$$v_o=1,5, \quad q_1=1,0, \quad q_2=1,0, \quad f=1,0.$$

Als Starttrajektorie wird die Lösung des Rahmens konstanter Querschnittsfläche  $a=a_u=1,0$  gewählt. Mit dieser Näherungslösung als Startpunkt, die im übrigen mit dem gleichen Programm ermittelt werden kann wie die Optimalformen, wenn man nur die Schaltfunktionen entsprechend modifiziert, zeigen sich keine Konvergenzprobleme. Bei der Untersuchung des Einflusses der unteren Querschnittsschranke für Beispiel 2 wird die in Kapitel 4.8 erwähnte Homotopie-Methode angewandt, d.h.  $a_u$  wird

ausgehend von  $a_u = 1,0$  schrittweise erniedrigt, wobei als Näherungstrajektorie immer die Optimallösung aus dem vorhergehenden Schritt benutzt wird.

In den Abbildungen 5.17, 5.19 und 5.20 sind optimale Querschnittsflächen-Verläufe dargestellt. Um einen Begriff vom Erfolg des Optimierungsprozesses zu bekommen, ist in diesen Abbildungen die Verschiebung (Durchbiegung) für die optimalen Querschnittsformen und für den konstanten Querschnittsflächen-Verlauf von  $a = 1,5$  eingezeichnet.  $a = 1,5$  wird gewählt, weil hierfür jeweils in beiden Fällen die gleiche Menge an Material verbraucht wird. Man erkennt, daß die Verformungen der optimalen Stabwerke gegenüber denen mit konstantem Querschnittsverlauf bei gleichem Materialaufwand doch erheblich niedriger liegen.

Den Einfluß der unteren Querschnittsschranke auf den Optimierungsprozeß zeigt Abb. 5.22. Die Verkleinerung der minimalen Formänderungsarbeit mit fallender unterer Querschnittsflächen-Schranke ist darauf zurückzuführen, daß der Spielraum für den Entwurfparameter Querschnittsfläche bei gleicher Materialmenge größer wird. Im unteren Bereich von  $a_u$  muß man allerdings für kleine Verbesserungen extreme Verläufe der Querschnittsfläche (Abb. 5.20) in Kauf nehmen. Im Grenzfall  $a_u = 0,0$ , d.h. Optimieren ohne geometrische Schranken, führt das zum Wegfall eines Stabes und zum Verschwinden von Querschnittsflächen an einzelnen Stellen. Diese Stellen können als innere Gelenke gedeutet werden, so daß aus dem ursprünglich statisch überbestimmten System ein statisch bestimmtes wird (Abb. 5.23). Der Querschnittsflächen-Verlauf stimmt ziemlich genau mit dem aus Abb. 5.20 überein. Dieses Verhalten bei unbeschränkter Optimierung gilt ganz allgemein für beliebige Stabwerke und kann beispielsweise vermieden werden, wenn man die Dehnungen der Stabachse (Normalkraftverformungen) mit in die Betrachtungen einbezieht. Die optimale Querschnittsfläche (Gl. (5.45)) ist dann nicht mehr nur hauptsächlich durch das Biegemoment bestimmt.

Die Abbildungen 5.18 und 5.21 vergleichen Momentenverläufe von optimierten Rahmen mit solchen konstanter Querschnittsfläche. Auffällig sind die erheblichen Momentenverschiebungen.

Die so erhaltenen Optimalformen könnten nun auch als Ausgangspunkt für eine weitere Optimierung unter Berücksichtigung von Spannungsrestriktionen dienen, da die Formänderungsarbeit bei zähen Werkstoffen als Maß für die Beanspruchung gilt (Gestaltänderungs-Arbeits-Hypothese).

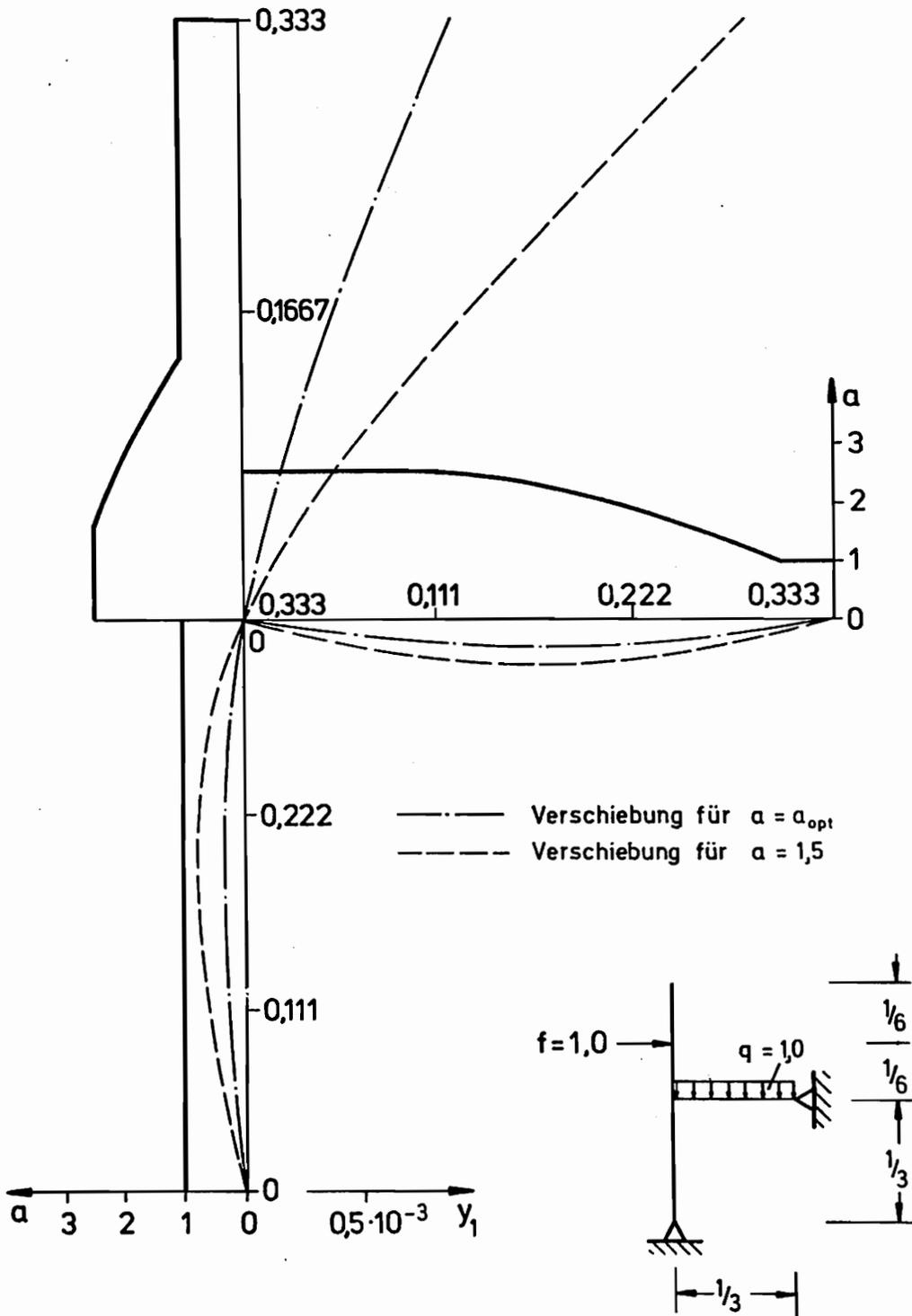


Abb. 5.17: Verlauf der Querschnittsfläche und der Verschiebung, Beispiel 1,  $v_o = 1,5$ ,  $a_o = 2,5$ ,  $a_u = 1,0$

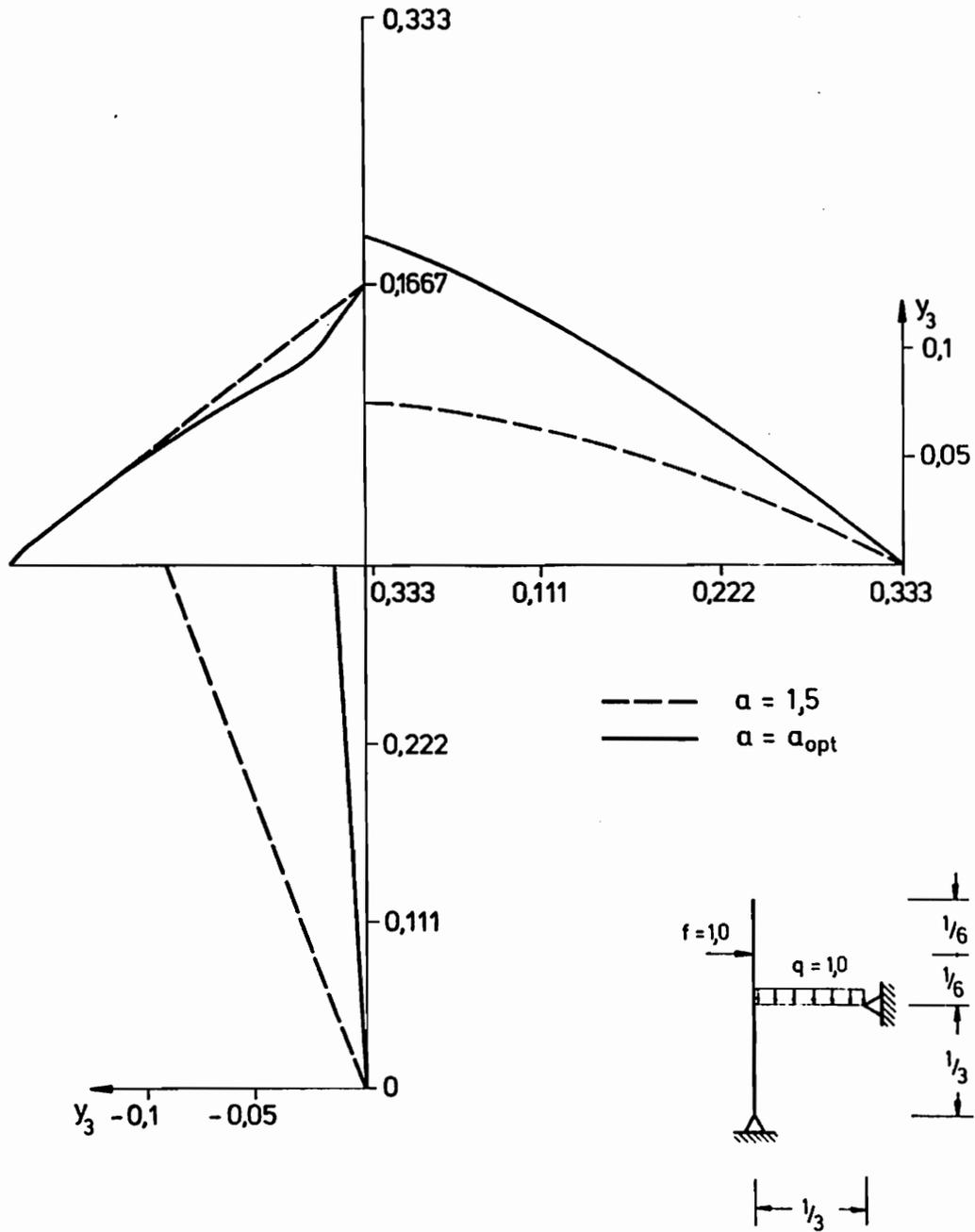


Abb. 5.18: Momentenverläufe, Beispiel 1,  $v_o = 1,5$ ,  $a_o = 2,5$ ,  
 $a_u = 1,0$

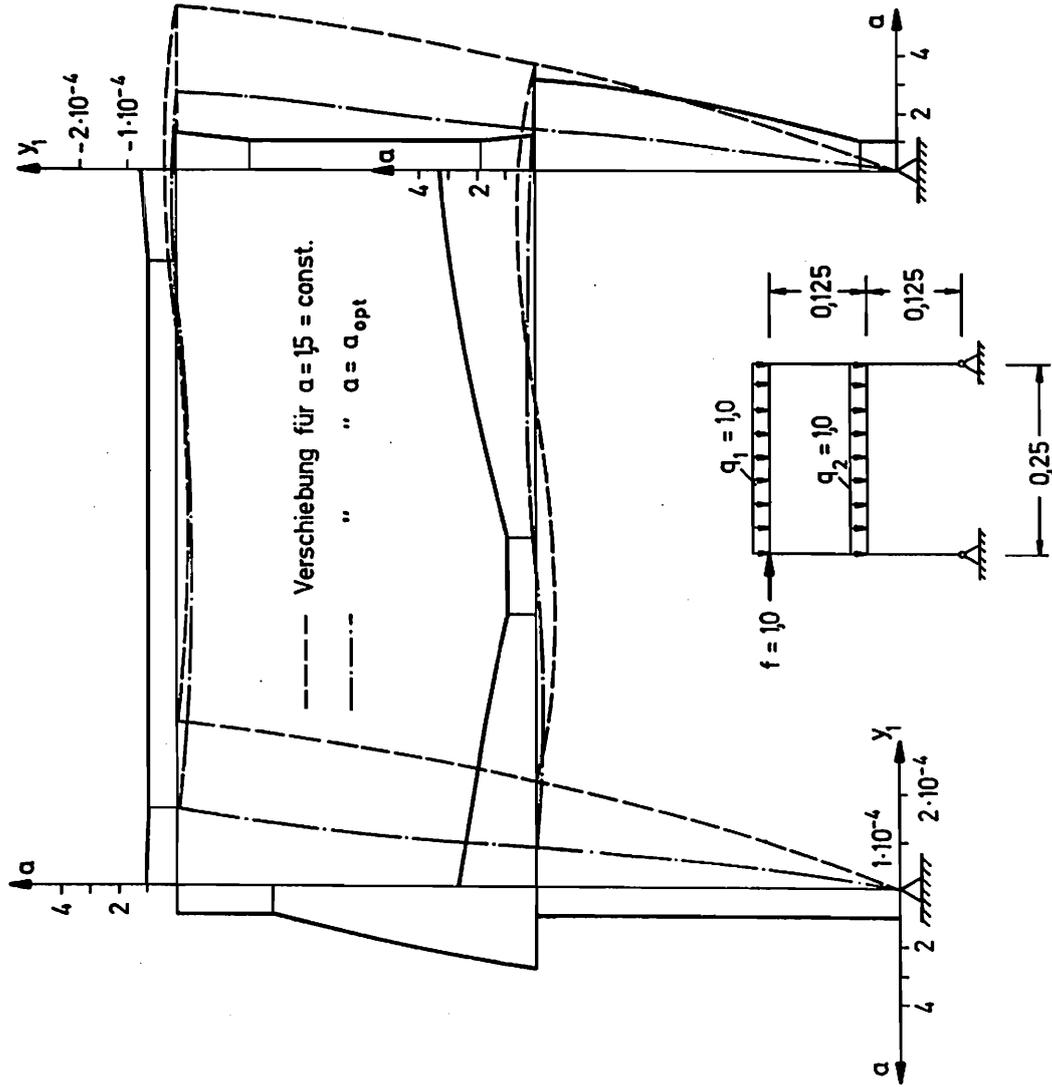


Abb. 5.19: Verlauf der Querschnittsfläche und der Verschiebung, Beispiel 2,  $v_0 = 1,5$ ,  $a_u = 1,0$

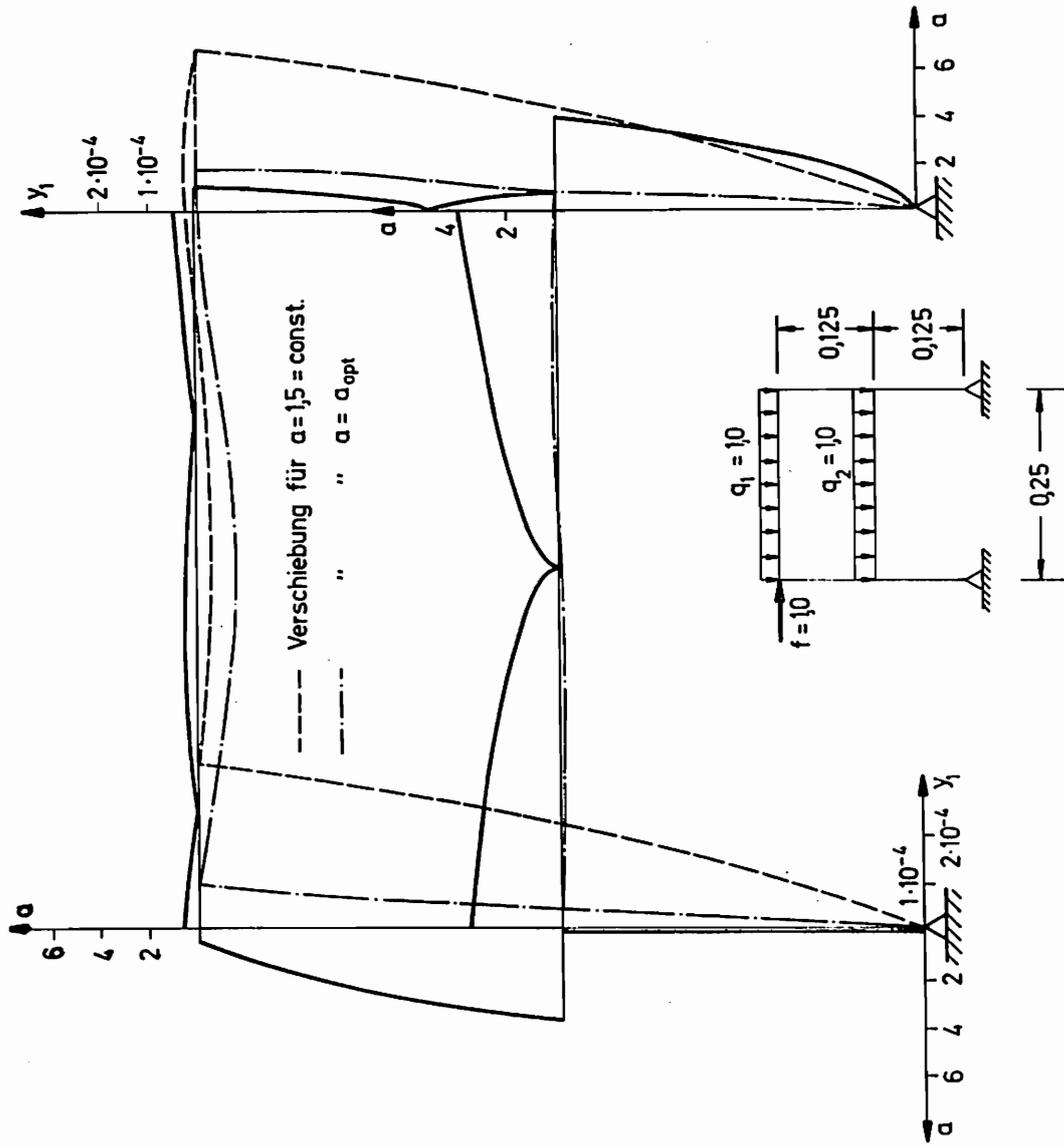


Abb. 5.20: Verlauf der Querschnittsfläche und der Verschiebung, Beispiel 2,  $\nu_0 = 1,5$ ,  $a_u = 0,05$

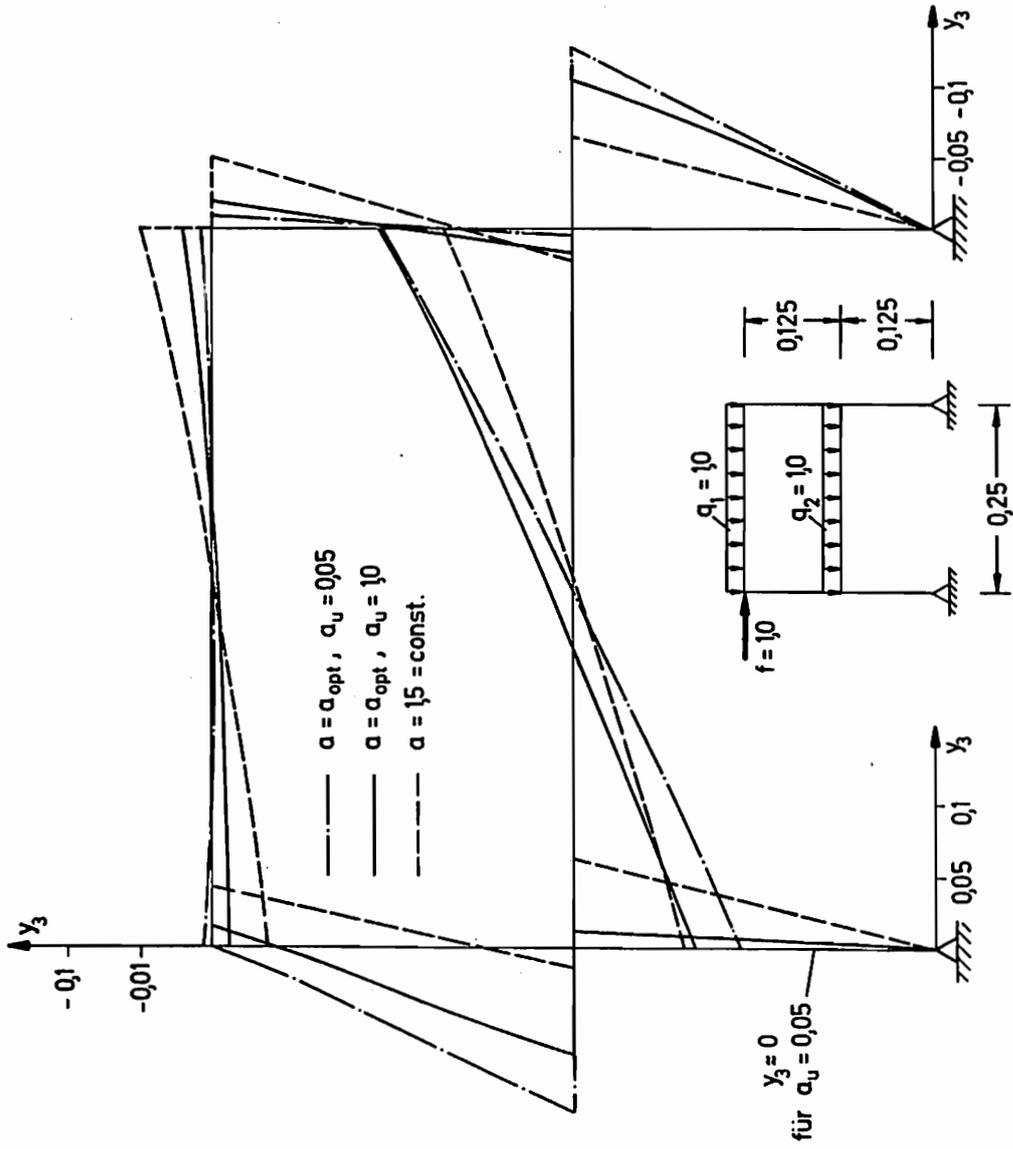


Abb. 5.21: Vergleich von Momentenverläufen, Beispiel 2,  $v_0 = 1,5$

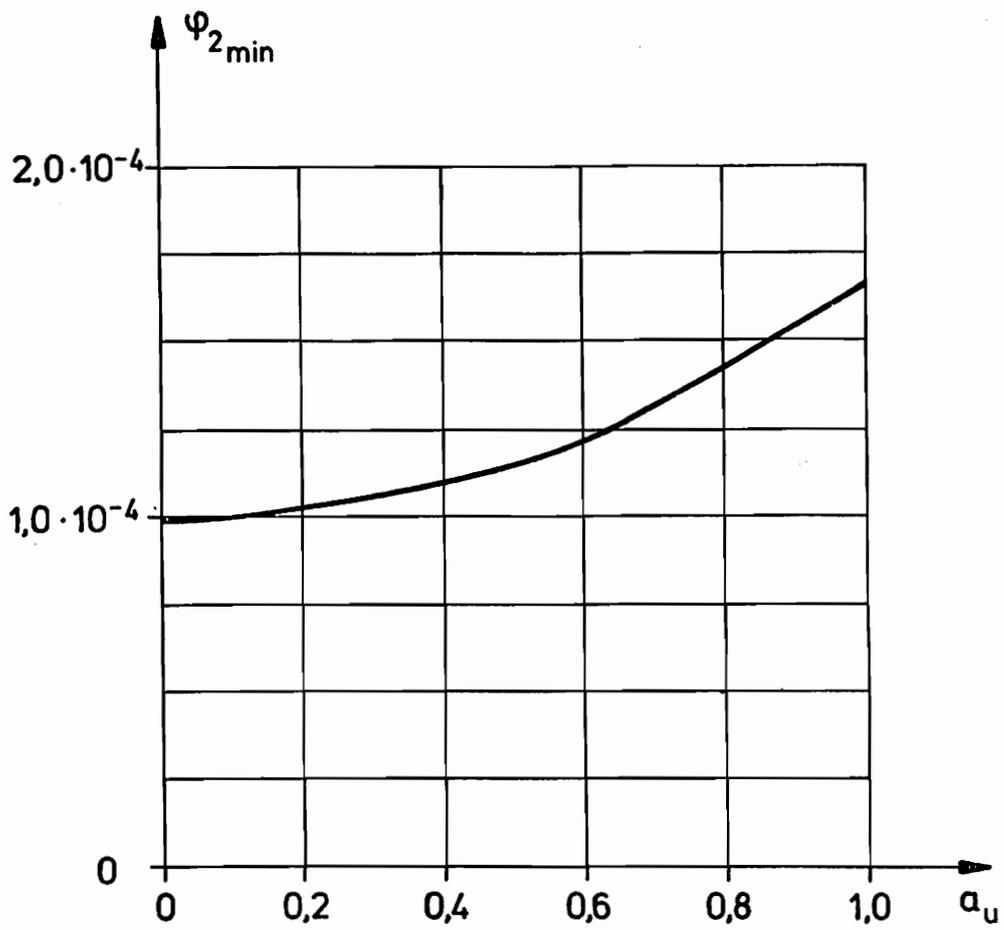


Abb. 5.22: Minimale Formänderungsarbeit als Funktion der unteren Querschnittsflächen-Schranke, Beispiel 2

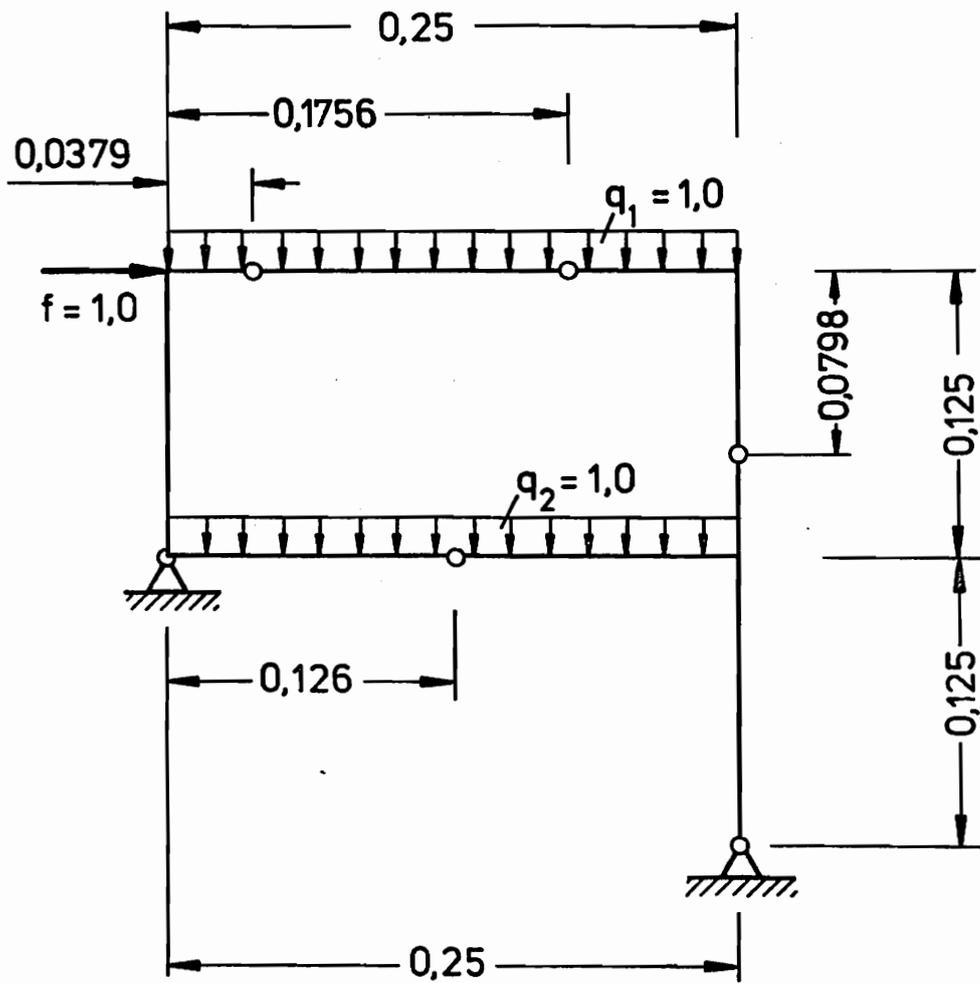


Abb. 5.23: Statisch bestimmtes Ersatzsystem, Beispiel 2,  
 $v_o = 1,5$ ,  $a_u = 0$

### 5.3 Minimalgewichtsentwurf des beiderseitig eingespannten Knickstabes

---

#### 5.3.1 Allgemeines

Gesucht wird die optimale Form eines dünnen elastischen Druckstabes gegebener Länge aus homogenem Werkstoff, dessen Enden eingespannt sind (4. Euler-Fall). Es bestehen hier

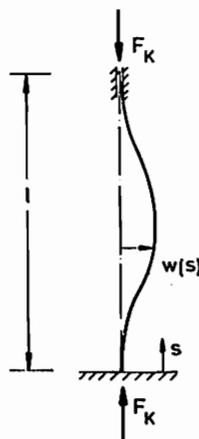


Abb. 5.24

zwei äquivalente Möglichkeiten, eine Zielfunktion zu definieren:

- (i) Es werden die Stäbe bestimmt, die zu gegebenem Volumen (Materialmenge) die größte kritische Last  $F_K$  tragen, wobei  $F_K$  der kleinste Eigenwert ist.
- (ii) Zum niedrigsten Eigenwert  $F_K$  (gegebene Belastung) sucht man die Gestalt desjenigen Knickstabes, der das minimale Volumen (Gewicht) liefert.

Die Formulierung (i), Maximierung des ersten Eigenwertes, ist 1962 von TADJBAKSH und KELLER [25] für geometrisch ähnliche Vollquerschnitte ohne Beschränkungen des Entwurfsparameters Querschnittsfläche behandelt worden. Als Ausdruck für die Zielfunktion (kritische Last) wird der Rayleigh-Quotient herangezogen. Infolge des Fehlens von Restriktionen für den Entwurfparameter treten bei den dort angegebenen Lösungen zwei Punkte mit verschwindender Querschnittsfläche (Abb. 5.25), d.h. inneren Gelenken, auf. Das vorher zweifach statisch über-

bestimmte System ist somit statisch bestimmt geworden.

Beim Aufstellen der Optimalitätsbedingungen war die Stetigkeit der Steigung der ersten Eigenform vorausgesetzt worden.

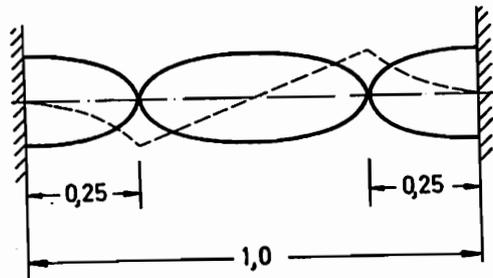


Abb. 5.25

Zur Beschreibung des Stabilitätsverhaltens bei gegebenem Querschnittsflächen-Verlauf muß man an den Stellen mit der Querschnittsfläche Null (Gelenke) diese Voraussetzung fallenlassen. OLHOFF und RASMUSSEN [26] weisen 1976 nach, daß die in [25] angegebenen Stäbe beim Wegfall dieser Annahme schon unter viel kleineren Lasten beulen. Die Knickform zum kleinsten Eigenwert ist tatsächlich antimetrisch (Abb. 5.25) im Gegensatz zur Annahme in [26]. Der Mittelteil bleibt gerade, d.h. die kritische Last reicht nicht aus, den Mittelteil zum Knicken zu bringen.

Unter Zulassung dieses singulären Verhaltens (Diskontinuität von Steigung und Querkraft) bestimmen OLHOFF und RASMUSSEN eine neue Lösung mit höherer erster Knicklast, die auch wieder symmetrisch ist. Die Punkte mit verschwindender Querschnittsfläche verschieben sich weiter zu den Rändern. Sie müssen aber feststellen, daß es darüber hinaus Stäbe gleichen Volumens mit noch größeren Knicklasten gibt. Daraus schließen sie, daß die unimodale Formulierung des Problems nicht ausreicht, und gehen zu einer bimodalen über, wobei sie gleichzeitig eine untere Schranke für die Querschnittsfläche einführen. Zu solchen Knickstäben gehört dann ein doppelter Eigenwert mit zwei verschiedenen Eigenformen.

In diesem Kapitel wird nun das Problem in der etwas anderen Formulierung (ii) neu aufgegriffen und mit Hilfe des Pontryagin'schen Maximumprinzips gelöst. Weiter wird der Einfluß verschiedener Querschnittstypen betrachtet.

### 5.3.2 Grundgleichungen in bimodaler Formulierung

Zielfunktion ist nach (ii) das minimale Volumen

$$V = \int_0^L A(s) ds = \min. \quad (5.50)$$

Für aus dem Grundzustand (gerader Stab) ausgelenkte Nachbarlagen erhält man für mögliche Gleichgewichtszustände die Differentialgleichung

$$\frac{d\left(EI(s) \frac{d^2 w}{ds^2}\right)}{ds^2} + F_k \frac{d^2 w}{ds^2} = 0 \quad (5.51)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 & w(L) &= 0 \\ \frac{dw}{ds}(0) &= 0 & \frac{dw}{ds}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (5.52)$$

und als weitere Nebenbedingung für die Querschnittsfläche

$$A_u \leq A(s) \quad (5.53)$$

Das Flächenträgheitsmoment wird wieder über den Ansatz (5.18) durch die Querschnittsfläche ausgedrückt.

$$I(s) = c A(s)^p,$$

wobei  $p=2$  für den geometrisch ähnlichen Vollquerschnitt und  $p=3$  für den Rechteckquerschnitt mit variabler Höhe und konstanter Breite gilt. Im weiteren wollen wir stets davon ausgehen, daß die Knickform senkrecht zur Achse mit dem kleinsten Flächenträgheitsmoment (Minimalquerschnitt) liegt. Es werden folgende Normierungen durchgeführt:

$$x = \frac{s}{L}, \quad \alpha = \frac{A}{A^*}, \quad ( )' = \frac{d( )}{dx}, \quad I = c \alpha^p$$

$$v = \frac{V_0}{A^*L}, \quad \lambda^2 = \frac{F_k L^2}{EC}$$

Zustandsvariable:

$$y_1 = \frac{w}{L}, \quad y_2 = y_1'$$

$$y_3 = \frac{ML}{EC}, \quad y_4 = \frac{QL^2}{EC}$$

Da symmetrische Querschnittsflächen-Verläufe zu erwarten sind, genügt es, nur den halben Stab zu betrachten. Die Zielfunktion lautet dann:

$$v = 2 \int_0^{1/2} \alpha(x) dx = \min. \quad (5.54)$$

und die Nebenbedingung für die Steuervariable  $u=a$

$$a_u \leq \alpha(x). \quad (5.55)$$

Für den allgemeinen bimodalen Fall gibt es zum gleichen Eigenwert zwei Eigenformen (Abb. 5.26). Jede beliebige Linearkombination dieser beiden Eigenformen ist dann auch wieder Lösung zum gleichen Eigenwert.

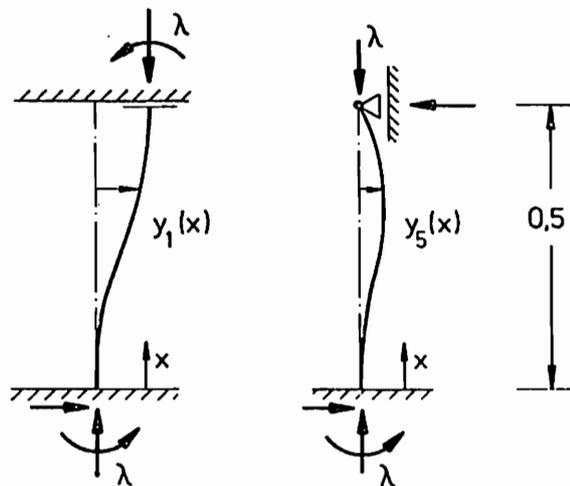


Abb. 5.26

a)

b)

Zu jeder Eigenform gehört ein Satz von Zustandsvariablen, so daß zwei formal gleiche Dgl.-Systeme mit verschiedenen Zustandsvariablen existieren, und zwar zur symmetrischen Verschiebungsform

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1' &= \gamma_2 & \gamma_1(0) &= 0 \\
 \gamma_2' &= \frac{\gamma_3}{\alpha^p} & \gamma_2(0) &= 0 \\
 \gamma_3' &= \gamma_4 & \gamma_2(1/2) &= 0 \\
 \gamma_4' &= -\lambda^2 \frac{\gamma_3}{\alpha^p} & \gamma_4(1/2) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

und zur antimetrischen Verschiebungsform

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
 \gamma_5' &= \gamma_6 & \gamma_5(0) &= 0 \\
 \gamma_6' &= \frac{\gamma_7}{\alpha^p} & \gamma_6(0) &= 0 \\
 \gamma_7' &= \gamma_8 & \gamma_5(1/2) &= 0 \\
 \gamma_8' &= -\lambda^2 \frac{\gamma_7}{\alpha^p} & \gamma_7(1/2) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

Bei der Anwendung des Maximumprinzips bilden wir zunächst die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned}
 H &= \gamma_0 \alpha + \gamma_1 \gamma_2 + \frac{\gamma_3}{\alpha^p} (\gamma_2 - \lambda^2 \gamma_4) + \gamma_3 \gamma_4 \\
 &\quad + \gamma_5 \gamma_6 + \frac{\gamma_7}{\alpha^p} (\gamma_6 - \lambda^2 \gamma_8) + \gamma_7 \gamma_8
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

und daraus die adjungierten Hilfssysteme

$$\begin{aligned}
 \gamma_1' = 0 &\implies \gamma_1 = C_1 & \gamma_5' = 0 &\implies \gamma_5 = C_3 \\
 \gamma_2' = -\gamma_1 &\implies \gamma_2 = -C_1 x + C_2 & \gamma_6' = -\gamma_5 &\implies \gamma_6 = C_3 x + C_4 \\
 \gamma_3' = \frac{\lambda^2 \gamma_4 - \gamma_2}{\alpha^p} & & \gamma_7' = \frac{\lambda^2 \gamma_8 - \gamma_6}{\alpha^p} & \\
 \gamma_4' = -\gamma_3 & & \gamma_8' = -\gamma_7 &
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

Aus der Transversalitätsbedingung

$$-(\underline{\gamma} \cdot \underline{d\gamma})_{(0)} + (\underline{\gamma} \cdot \underline{d\gamma})_{(1/2)} = 0$$

folgt

$$\begin{aligned}
 \psi_3(0) &= 0 & \psi_7(0) &= 0 \\
 \psi_4(0) &= 0 & \psi_8(0) &= 0 \\
 \psi_1(1/2) &= 0 & \psi_6(1/2) &= 0 \\
 \psi_3(1/2) &= 0 & \psi_8(1/2) &= 0
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

Die Ansätze

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= -A(\gamma_4 + \lambda^2 \gamma_2) & \psi_5 &= -B(\gamma_8 + \lambda^2 \gamma_6) \\
 \psi_2 &= A(\gamma_3 + \lambda^2 \gamma_1) & \psi_6 &= B(\gamma_7 + \lambda^2 \gamma_5) \\
 \psi_3 &= -A\gamma_2 & \psi_7 &= -B\gamma_6 \\
 \psi_4 &= A\gamma_1 & \psi_8 &= B\gamma_5
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

genügen den Dgl.-Systemen (5.59) und den Randbedingungen (5.60) und (5.56) bzw. (5.57). Wegen  $\psi_1(1/2)=0$  folgt  $\psi_1=C_1=0$  und wegen  $\psi_6(1/2)=0$ , d.h.  $C_3=2C_4$ ,

$$\begin{aligned}
 \psi_5 &= 2C_4 = 2BD_2 \\
 \psi_6 &= C_4(1-2x) = BD_2(1-2x).
 \end{aligned}$$

Daraus oder durch Integration von (5.56) und (5.57) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \gamma_3 &= -\lambda^2 \gamma_1 + D_1 & \gamma_7 &= D_2(1-2x) - \lambda^2 \gamma_5 \\
 \gamma_4 &= -\lambda^2 \gamma_2 & \gamma_8 &= -(2D_2 + \lambda^2 \gamma_6),
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

d.h. die Variablen  $\gamma_3, \gamma_4$  und  $\gamma_7, \gamma_8$  sind bis auf zwei Konstante durch die anderen Zustandsvariablen bestimmt. Geht man in den Ausdruck für die Hamilton-Funktion (5.58), so erhält man mit  $\psi_0 = -1$

$$\begin{aligned}
 H &= -\alpha + \frac{1}{\alpha^p} \left\{ A(D_1 - \lambda^2 \gamma_1)^2 + B(D_2(1-2x) - \lambda^2 \gamma_5)^2 \right\} \\
 &\quad + 4BD_2 \gamma_6 + \lambda^2 (A\gamma_2^2 + B\gamma_6^2)
 \end{aligned} \tag{5.63}$$

oder

$$H = -\alpha + \beta \alpha^{-p} + \gamma$$

mit

$$\beta = A \left\{ (D_1 - \lambda^2 \gamma_1)^2 + B(D_2(1-2x) - \lambda^2 \gamma_5)^2 \right\} \tag{5.64}$$

$$\gamma = A \{ 4 \zeta D_2 \gamma_6 + \lambda^2 (\gamma_2^2 + \zeta \gamma_6^2) \} .$$

$a$  ergibt sich aus der Maximumbedingung, d.h. entweder aus der Beziehung (3.9) oder aus (3.10).  $\gamma$  hat keinen Einfluß auf die Maximumbedingung. Dem Verlauf  $H(a)$

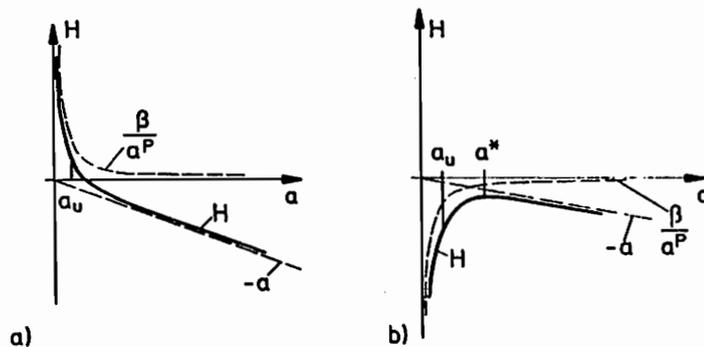


Abb. 5.27

(Abb. 5.27 (a) und (b)) entnehmen wir, daß das Maximum von  $H$  bestimmt ist durch

(a)

$$\alpha = \alpha_u$$

(b)

$$\alpha_u \geq \alpha^* \Rightarrow \alpha = \alpha_u$$

$$\alpha_u < \alpha^* \Rightarrow \alpha = \alpha^* \quad (5.65)$$

$$\alpha^* = (-p\beta)^{\frac{1}{p+1}}$$

Daraus berechnet man die Schaltfunktion

$$s = \alpha_u^{p+1} + p\beta \quad (5.66)$$

Die Schaltbedingung  $s=0$  reduziert sich auf einen Punkt auf der  $\beta$ -Achse von Abb. 5.28.

Da es sich um eine Eigenwertaufgabe handelt, die Eigenformen

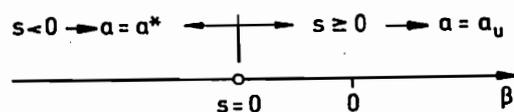


Abb. 5.28

also noch bis auf einen beliebigen Parameter unbestimmt sind, kann man die Konstanten A und C durch willkürliche Wahl jeweils einer weiteren Randbedingung für jede Eigenform festlegen. Hier wird gewählt  $y_1(1/2)=1$  und  $y_6(1/2)=-1$ .

Definiert man die Zustandsvariablen neu

$$\begin{array}{ll} \gamma_1 = Y_1 & \gamma_5 = Y_5 \\ \gamma_2 = Y_2 & \gamma_6 = Y_6 \\ \gamma_3 = D_1 & \gamma_7 = D_2 \\ \gamma_4 = A & \gamma_8 = C \end{array}$$

dann bekommt die bimodale Randwertaufgabe folgendes Aussehen:

Dgl.-System:

$$\begin{array}{l} \gamma_1' = \gamma_2 \\ \gamma_2' = \frac{\gamma_3 - \lambda^2 \gamma_1}{\alpha^p} \\ \gamma_3' = 0 \\ \gamma_4' = 0 \\ \gamma_5' = \gamma_6 \\ \gamma_6' = \frac{\gamma_7(1-2x) - \lambda^2 \gamma_5}{\alpha^p} \\ \gamma_7' = 0 \\ \gamma_8' = 0 \end{array}$$

Randbedingungen:

$$\begin{array}{l} \gamma_1(0) = 0 \\ \gamma_2(0) = 0 \\ \gamma_1(1/2) = 1 \\ \gamma_2(1/2) = 0 \\ \gamma_5(0) = 0 \\ \gamma_6(0) = 0 \\ \gamma_5(1/2) = 0 \\ \gamma_6(1/2) = -1 \end{array} \quad (5.67)$$

Schaltfunktion:

$$s = \alpha_u^{p+1} + p \gamma_4 \{ (\gamma_3 - \lambda^2 \gamma_1)^2 + \gamma_8 (\gamma_7(1-2x) - \lambda^2 \gamma_5)^2 \} \quad (5.68)$$

Schaltbedingungen:

$$\begin{aligned}
 s \geq 0: & \quad \alpha = \alpha_u \\
 s < 0: & \quad \alpha = \left\{ -\rho \gamma_4 \left[ (\gamma_3 - \lambda^2 \gamma_1)^2 + \gamma_8 (\gamma_7 (1-2x) - \lambda^2 \gamma_5)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{p+1}} \quad (5.69)
 \end{aligned}$$

Der unimodale Fall ist mit  $\gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = \gamma_8 = 0$  im bimodalen enthalten. Bei gegebenem kritischem Lastparameter  $\lambda$  hängt die Lösung nur noch von der Querschnittsflächen-Schranke  $a_u$  ab.

### 5.3.3 Numerische Durchführung und Diskussion der Ergebnisse

Die Rechnungen werden für den geometrisch ähnlichen Vollquerschnitt ( $p=2$ ) und den Rechteckquerschnitt ( $p=3$ ) für den Lastparameter  $\lambda=6.4$  durchgeführt. Die Startfunktionen für den Lösungsalgorithmus werden nach der Homotopie-Methode (Kapitel 4.8) bestimmt. Bei schrittweiser Änderung der Querschnittsschranke  $a_u$  dient die vorhergehende Lösung immer als Näherungstrajektorie. Im bimodalen Fall muß dabei mit erheblich kleineren Variationen von  $a_u$  als im unimodalen gearbeitet werden.

Zu einem gewählten  $a_u$  löst man zunächst den Unimodalfall zur symmetrischen Eigenform. Hier wird mit  $a_u=1,0$  begonnen. Die sich ergebende Lösung wird daraufhin überprüft, ob das gewählte  $\lambda$  tatsächlich der kleinste Eigenwert ist. Ist das nicht der Fall, fängt man mit einem größeren  $a_u$  an. Man verkleinert das  $a_u$  nun solange, bis man feststellt, daß der Eigenwert zur antimetrischen Eigenform unter dem der symmetrischen liegt. Von hier an muß nun mit der bimodalen Formulierung weiter gerechnet werden, und zwar vergrößert man  $a_u$  zunächst wieder, um festzustellen, von welchem  $a_u$  an die bimodale Formulierung die bessere Lösung liefert. Dieses  $a_u$  (Schnittpunkt der Kurven für den unimodalen und bimodalen Fall in Abb. 5.29 bzw. Abb. 5.31) läßt sich genau ermitteln, da diese Stelle in der bimodalen Formulierung mit  $\gamma_8=0$  verbunden ist. Man kann dann  $a_u$  als Variable  $\gamma_8$  auffassen und hat wieder eine vollständige Randwertaufgabe. Auch jede Lösung der bimodalen Formulierung wird weiter daraufhin kontrolliert, ob zu ihr nicht

ein noch kleinerer Eigenwert gehört als der gewählte Lastparameter. Das ist aber nicht der Fall.

Das Lösungsverhalten gibt Abb. 5.29 für den geometrisch ähnlichen Vollquerschnitt und Abb. 5.31 für den Rechteckquerschnitt mit variabler Höhe wieder. Die Abbildungen 5.30 und 5.32 zeigen einige typische Querschnittsflächen-Verläufe. Aus Symmetriegründen ist jeweils nur der halbe Stab dargestellt. Die unimodalen Stäbe haben eine weitere Symmetrieachse bei  $x=0,25$  und  $x=0,75$ . Für den geometrisch ähnlichen Vollquerschnitt gilt von der Stelle  $a_u \approx 0,249$  die bimodale Lösung, da von hier an die unimodalen Stäbe einen kleineren Eigenwert zur antimetrischen Eigenform aufweisen als den, für den sie optimiert wurden. Die bimodalen Stäbe sind nur noch einfach symmetrisch wegen der unterschiedlichen Eigenformen. Der Bereich mit der konstanten Querschnittsfläche wächst mit kleinerem  $a_u$  zusammen, um bei  $a_u \approx 0,195$  ganz zu verschwinden. Verkleinert man  $a_u$  weiter, so greift diese Schranke nicht mehr, wird also inaktiv. Diese Stabform ist dann für alle Stäbe mit  $a_u \approx 0,195$  und auch für den Stab ohne die geometrische Schranke ( $a_u=0$ ) optimal. Das Verhalten beim Rechteckquerschnitt (größerer Querschnittsflächen-Parameter  $p=3$ ) ist ähnlich, tritt nur schon früher bei  $a_u \approx 0,409$  auf. Auch wird der Bereich der Bimodallösungen (zwischen  $a_u \approx 0,409$  und  $a_u \approx 0,334$ ) gespreizt. Trimodale Optimallösungen tauchen nicht auf.

Ein Vergleich der hier gefundenen Ergebnisse für den geometrisch ähnlichen Vollquerschnitt mit denen, die OLHOFF und RASMUSSEN angeben, zeigt gute Übereinstimmung, wenn man die Werte entsprechend umrechnet. Der hier verwendete Lösungsalgorithmus arbeitet allerdings etwas genauer, da er die Schaltstellen exakt bestimmt.

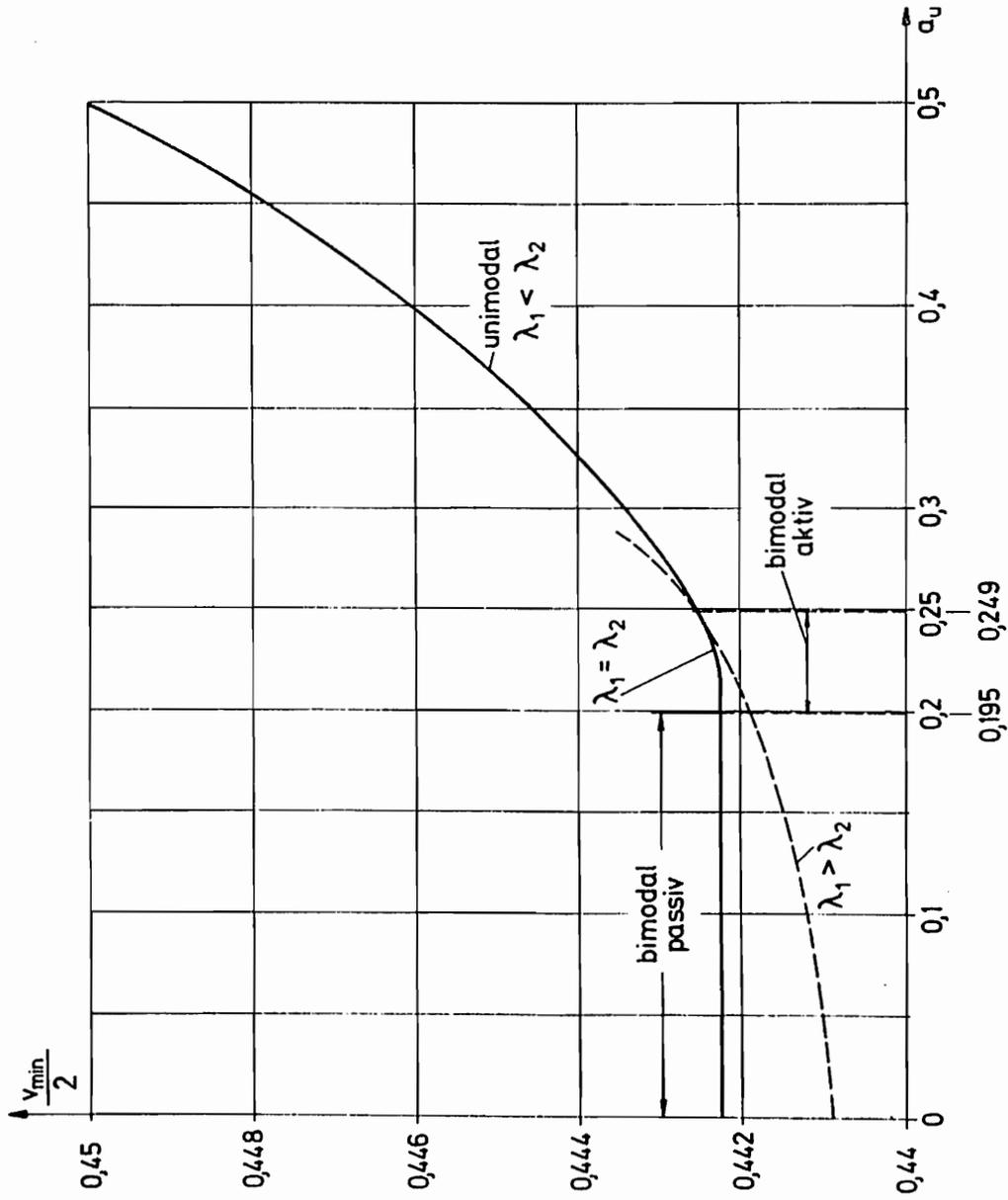


Abb. 5.29: Minimales Volumen als Funktion der unteren Querschnittsflächen-Schranke bei geometrisch ähnlichem Vollquerschnitt,  $\lambda_1=6.4$

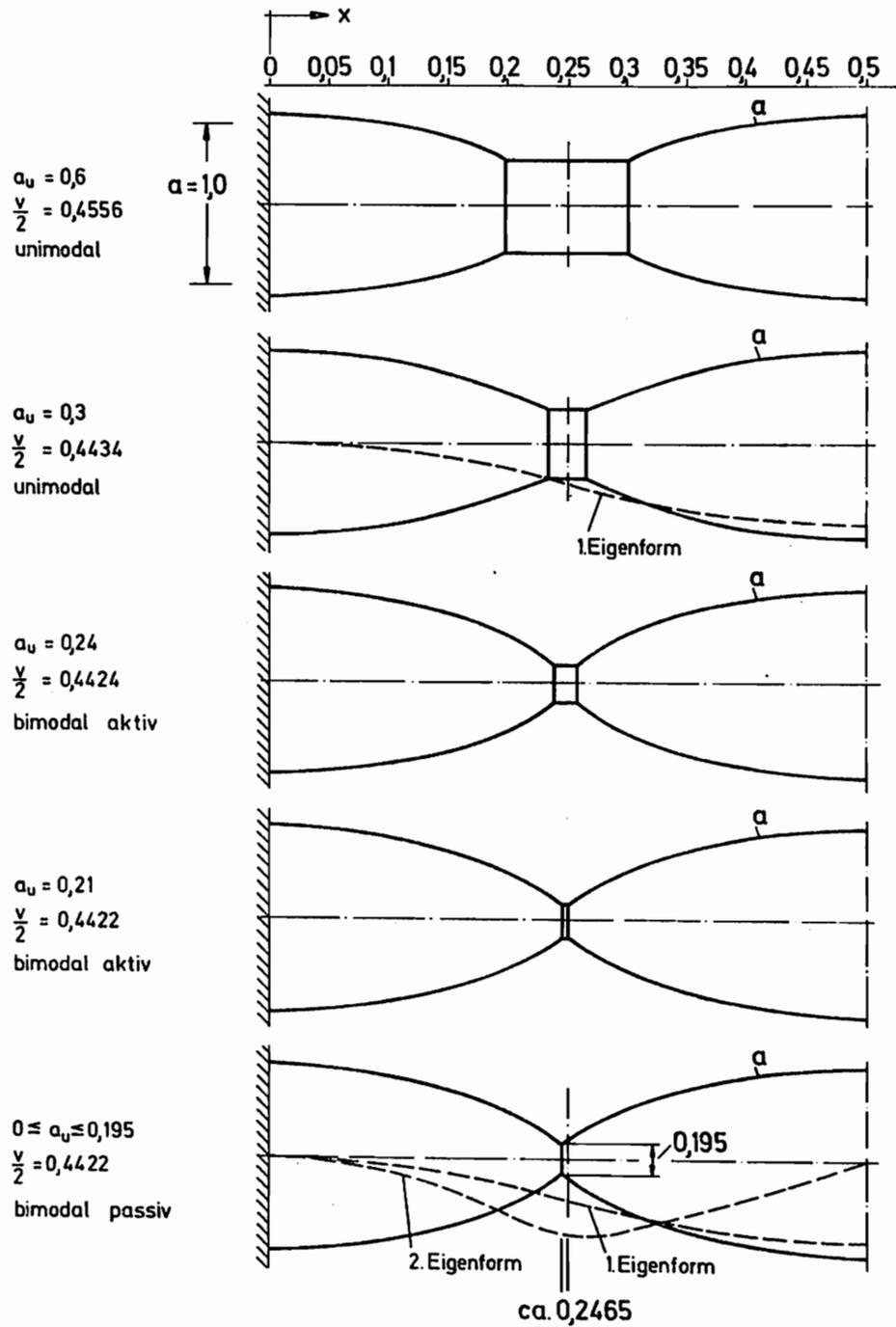


Abb. 5.30: Querschnittsflächen-Verläufe beim geometrisch ähnlichen Vollquerschnitt

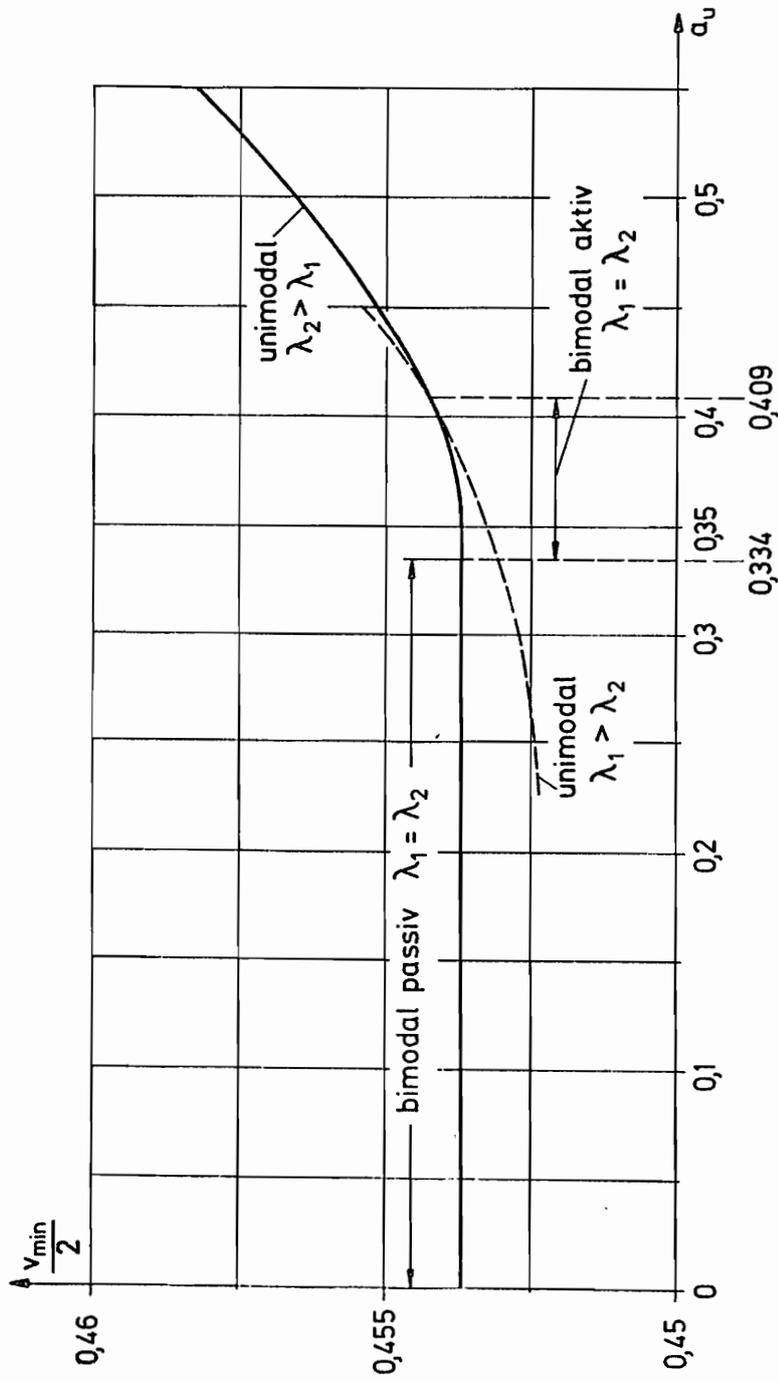


Abb. 5.31: Minimales Volumen als Funktion der unteren Querschnittsflächen-Schranke beim Rechteckquerschnitt,  $\lambda_1 = 6,4$

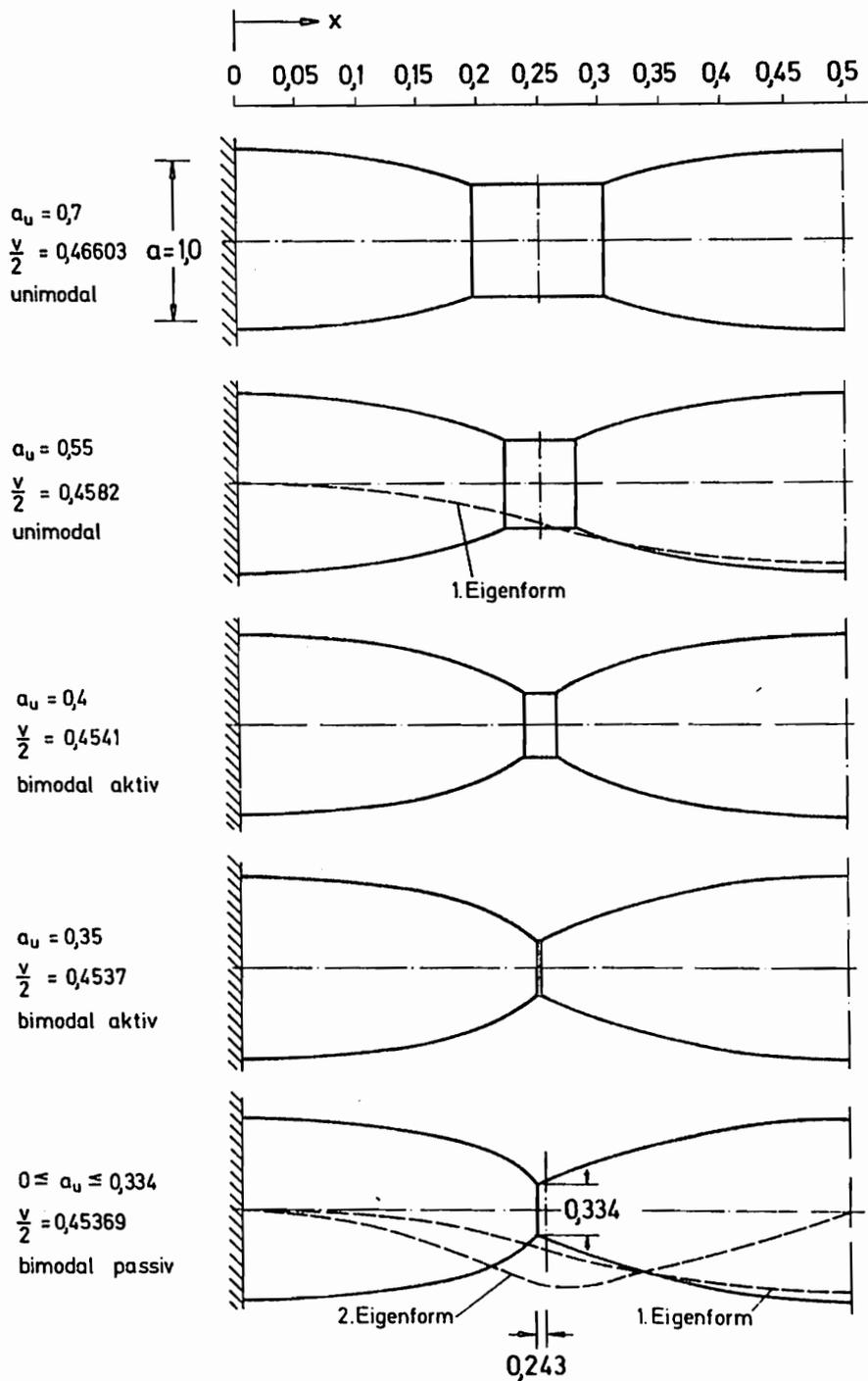


Abb. 5.32: Querschnittsflächen-Verläufe beim Rechteckquerschnitt mit variabler Höhe

## 5.4 Rotierende Kreisscheibe mit maximalem Trägheitsmoment ohne Spannungsüberschreitungen

### 5.4.1 Allgemeines

Rotierende Kreisscheiben sind ein häufig verwendetes Konstruktionsmittel im Maschinenbau mit verschiedenen Anwendungsgebieten [27]. Eines dieser Gebiete ist ihre Verwendung als Schwungscheiben, deren Aufgabe es ist, ungleichförmige Arbeitsrythmen, z.B. bei Kolbenmaschinen, durch ein großes Massenträgheitsmoment auszugleichen. Ziel einer Optimierung ist also die Maximierung des Trägheitsmomentes bei gleichem Materialaufwand. Dabei darf natürlich eine zulässige Spannung nicht überschritten werden. Außerdem sind meistens gewisse Einbaumaße einzuhalten, so daß weitere geometrische Restriktionen für die Scheibendicke bestehen.

Auf Grund dieser Überlegungen soll hier das Massenträgheitsmoment einer rotierenden Kreisscheibe bei gegebener Drehzahl und Materialmenge für homogene Werkstoffe maximiert werden, wobei eine Vergleichsspannung an jeder Stelle kleiner als eine zulässige Spannung bleiben muß. Da solche Scheiben meistens durch eine Preßpassung auf der Welle befestigt werden, sollen die Scheiben gerade immer zu der Grenzdrehzahl optimiert werden, bei der die Preßpassung gerade aufgehoben wird, d.h. die Verschiebung der Scheibe am Innenradius wird zu Null angenommen.

### 5.4.2 Aufstellen der Grundgleichungen

Betrachtet wird eine homogene dünne Kreisscheibe mit linear-elastischem Werkstoffverhalten. Die Rotationssymmetrie des Körpers, der Belastung und der kinematischen Bindung (Lagerung auf der Welle) hat zur Folge, daß wir es mit einem ebenen axialsymmetrischen Problem zu tun haben, d.h. der Spannungs- und Verschiebungszustand sind axialsymmetrisch (Abb. 5.33). Schnittkräfte und Verschiebungen sind entsprechend

Abb. 5.34 definiert.

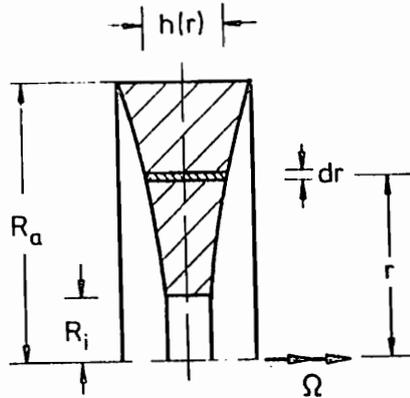


Abb. 5.33

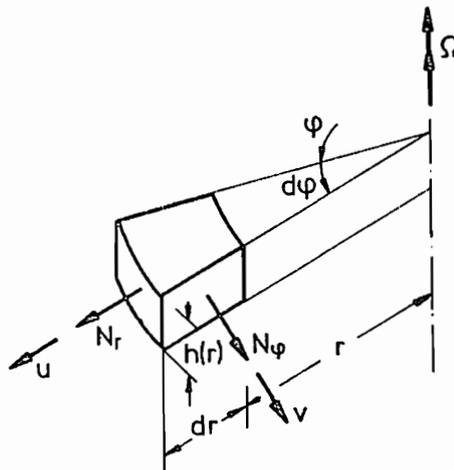


Abb. 5.34

Für die axialsymmetrische Belastung  $X=r\varrho\Omega^2h(r)$  erhält man das Dgl.-System des Schnittkraft- und Formänderungszustandes

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{r} \left\{ -\mu v + \frac{r N_r}{D(r)} \right\} \quad (5.70)$$

$$\frac{d(N_r r)}{dr} = \frac{1}{r} \left\{ \mu r N_r + D(r) (1 - \mu^2) v - r X \right\}.$$

Darin ist  $\mu$  die Querkontraktionszahl (für Stahl  $\mu=0,3$ ) und

$$D(r) = \frac{Eh(r)}{1 - \mu^2} \quad (5.71)$$

die Dehnsteifigkeit. Dazu gehören die Randbedingungen

$$\begin{aligned} v(R_i) &= e = 0 \\ N_r(R_a) &= 0 \end{aligned} \quad (5.72)$$

Die Zielfunktion lautet

$$\Theta = \int_{(V_0)} r^2 dm = \int_{R_i}^{R_a} 2\pi r^3 h(r) dr = \max. \quad (5.73)$$

und die Nebenbedingung für das Volumen (homogener Werkstoff)

$$V = 2\pi \int_{R_i}^{R_a} r h(r) dr = V_0 \quad (5.74)$$

oder als Differentialgleichung mit Randbedingungen

$$\begin{aligned} V' &= 2\pi r h(r) \\ V(R_i) &= 0, \quad V(R_a) = V_0. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Als Spannungsnebenbedingung kommt die Vergleichsspannung nach von Mises (Gestaltänderungs-Arbeits-Hypothese) in Frage. In Schnittgrößen geschrieben heißt das

$$\left(\frac{N_r}{h(r)}\right)^2 + \left(\frac{N_\varphi}{h(r)}\right)^2 - \frac{N_r N_\varphi}{(h(r))^2} \leq \sigma_0^2 \quad (5.76)$$

Man kann aber auch in vereinfachter Weise nach der größten Radialspannung bemessen

$$\left(\frac{N_r}{h(r)}\right)^2 \leq \sigma_0^2 \quad (5.77)$$

und liegt dann in jedem Fall auf der sicheren Seite, nutzt das Material aber nicht voll aus. Mit den dimensionslosen Größen

$$\begin{aligned} x &= \frac{r}{R_a}, \quad ( )' = \frac{d}{dx} ( )', \quad f_\Omega = \frac{R_a^2 \rho \Omega^2}{\sigma_0} \\ \gamma_1 &= \frac{v \cdot E}{R_a \sigma_0}, \quad \gamma_2 = \frac{N_r r}{\sigma_0 R_a^2}, \quad u = \frac{h}{R_a} \\ \gamma_3 &= \frac{\Theta}{2\pi \rho R_a^5}, \quad \gamma_4 = \frac{V}{2\pi R_a^3}, \quad v_0 = \frac{V_0}{2\pi R_a^3} \end{aligned}$$

schreibt man das Problem um:

**Zielfunktion:**

$$J = - \int_{x_i}^1 x^3 u \, dx = \min. \quad (5.78)$$

**Dgl.-System:**

$$\begin{aligned} \gamma_1' &= \frac{1}{x} \left\{ -\mu \gamma_1 + (1 - \mu^2) \frac{\gamma_2}{u} \right\} \\ \gamma_2' &= \frac{1}{x} \left\{ \mu \gamma_2 + (\gamma_1 - x^3 f_{\Omega}) u \right\} \\ \gamma_3' &= x u \end{aligned} \quad (5.79)$$

**Randbedingungen:**

$$\begin{aligned} \gamma_1(x_i) &= \bar{e} = 0 & \gamma_2(1) &= 0 \\ \gamma_3(x_i) &= 0 & \gamma_3(1) &= v_0 \end{aligned}$$

**Spannungsnebenbedingung:**

nach (5.76)

$$\gamma_2^2 + (\mu \gamma_2 + u \gamma_1)^2 - \gamma_2 (\mu \gamma_2 + u \gamma_1) - (x u)^2 \leq 0, \quad (5.80)$$

nach (5.77)

$$\gamma_2^2 - (x u)^2 \leq 0 \quad (5.81)$$

Im weiteren soll der Übersichtlichkeit wegen die Gleichung (5.81) benutzt werden. Die Optimierung kann aber genauso für die Nebenbedingung (5.80) durchgeführt werden.

Die Anwendung des Maximumprinzips liefert folgende Gleichungen:

**Hamilton-Funktion:**

$$\begin{aligned} H &= -\psi_0 x^3 u + \psi_1 \frac{1}{x} \left\{ -\mu \gamma_1 + (1 - \mu^2) \frac{\gamma_2}{u} \right\} \\ &+ \psi_2 \frac{1}{x} \left\{ \mu \gamma_2 + (\gamma_1 - x^3 f_{\Omega}) u \right\} + \psi_3 x u \end{aligned} \quad (5.82)$$

**adjungiertes System:**

$$\begin{aligned} \psi_1' &= \frac{\mu}{x} \psi_1 - \frac{u}{x} \psi_2 \\ \psi_2' &= -\frac{1 - \mu^2}{x} \frac{1}{u} - \frac{\mu}{x} \psi_2 + 2\beta \gamma_2 \\ \psi_3' &= 0 \implies \psi_3 = A \end{aligned} \quad (5.83)$$

Transversalitätsbedingung:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x_i) \cdot \underline{dY}(x_i) - \underline{\psi}(1) \cdot \underline{dY}(1) &= 0 \\ \psi_1(1) &= 0 \\ \psi_2(x_i) &= 0, \end{aligned} \quad (5.84)$$

außerdem die Beziehungen

$$\rho(\gamma_2^2 - (xu)^2) \equiv 0 \quad (5.85)$$

und

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\psi_0 x^3 - \frac{1-\mu^2}{x} \frac{\gamma_2 \psi_1}{u^2} + \frac{1}{x} \psi_2 (\gamma_1 - x^3 f_{\Omega}) + \psi_3 x = 2\rho x^2 u \quad (5.86)$$

Des weiteren gilt die Maximumbedingung, d.h.  $u$  ist für  $\psi_0 = -1$  durch das Maximum der Hamilton-Funktion bezüglich der Steuergröße  $u$  bestimmt.

Das adjungierte System läßt sich in diesem Fall weder elementar lösen noch durch das Originalsystem ausdrücken. Die Steuergröße  $u$  ist entweder durch die Spannungsbedingung

$$u = u_G = \frac{|\gamma_2|}{x} \quad (5.87)$$

oder mit  $\rho = 0$  aus Gleichung (5.86) durch

$$\left. \begin{aligned} u = u^* &= \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \\ \beta &= \frac{1-\mu^2}{x} \gamma_2 \psi_1 \\ \alpha &= x^3 \left(1 - \frac{\psi_2 f_{\Omega}}{x}\right) + x \psi_3 + \frac{\gamma_1 \psi_2}{x} \end{aligned} \right\} \quad (5.88)$$

gegeben.

Ob (5.88) gilt, hängt vom Vorzeichen von  $\beta$  bzw.  $\alpha$  ab. Dazu betrachten wir den Verlauf

$$H(u) = \alpha u + \frac{\beta}{u} + \gamma \quad (5.89)$$

und müssen vier Fälle unterscheiden (Abb. 5.35).

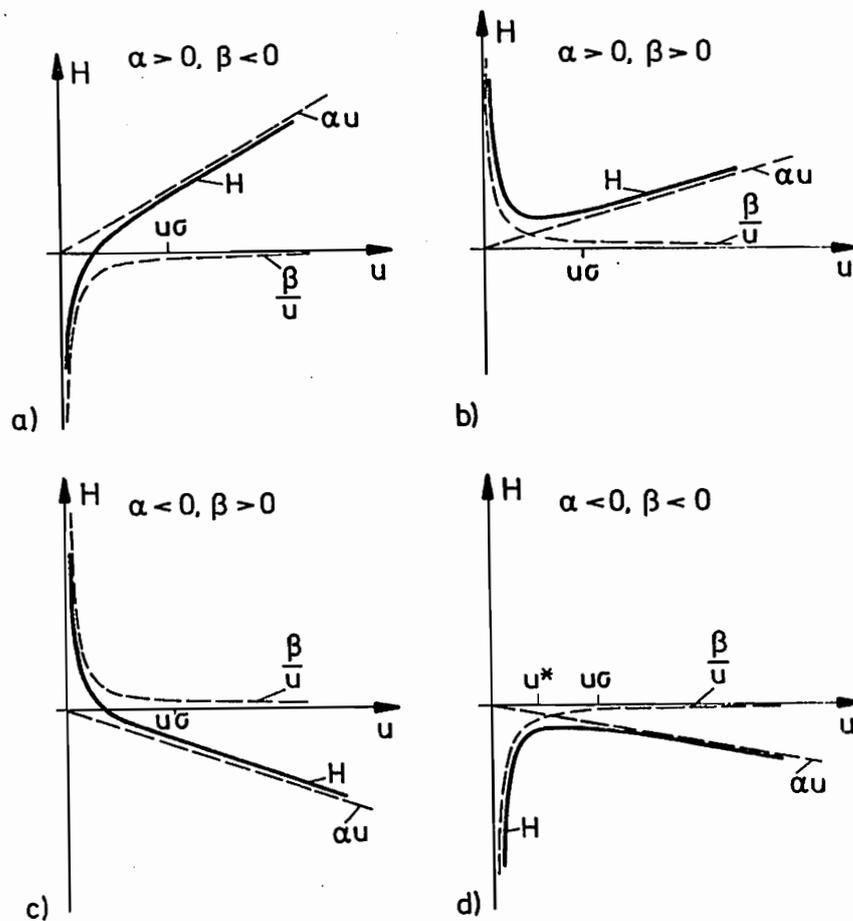


Abb. 5.35

Daraus lesen wir ab:

Fall (a) und (b):  $u$  so groß, wie möglich,

Fall (c):  $u = u_G$

Fall (d):  $u^* > u \Rightarrow u = u^*$

$u^* \leq u \Rightarrow u = u_G$

Wegen (a) und (b) und aus technischen Gründen wird eine Dikenschranke  $u_{\max}$  eingeführt. Für  $u_G$  müssen wir selbstverständlich zulassen, daß es  $u_{\max}$  übersteigen darf. Dann erhält man im Falle

(a)  $u = u_{\max}$

(b)  $H(u_G) \geq H(u_{\max}) \Rightarrow u = u_G$

$H(u_G) < H(u_{\max}) \Rightarrow u = u_{\max}$

(c)  $u = u_G$

(d)  $u^* \geq u_{\max}$  und  $u_G \leq u_{\max} \Rightarrow u = u_{\max}$

$u^* \geq u_{\max}$  und  $u_G > u_{\max} \Rightarrow u = u_G$

$u^* \leq u_G \Rightarrow u = u_G$

Die Steuerung dieser verschiedenen Möglichkeiten kann durch folgende Schaltfunktionen realisiert werden:

$$\begin{aligned} s_1 &= \alpha \\ s_2 &= \frac{\beta}{\alpha} - u_G^2 \\ s_3 &= \frac{\beta}{\alpha} - u_{\max}^2 \\ s_4 &= \alpha (u_G - u_{\max}) + \beta \frac{u_{\max} - u_G}{u_{\max} u_G} \end{aligned} \quad (5.90)$$

mit den Schaltbedingungen

$$\begin{aligned} s_1 \geq 0 \text{ und } s_4 > 0: & \quad u = u_G \\ s_1 \geq 0 \text{ und } s_4 \leq 0: & \quad u = u_{\max} \\ s_1 < 0 \text{ und } s_2 < 0: & \quad u = u_G \\ s_1 < 0 \text{ und } s_2 > 0 \text{ und } s_3 < 0: & \quad u = u_G \\ s_1 < 0 \text{ und } s_2 \geq 0 \text{ und } s_3 \geq 0: & \quad u = u_{\max} \end{aligned} \quad (5.91)$$

Auf Grund physikalischer Überlegungen kann man die Zahl der Schaltfunktionen reduzieren. Ein hohes Massenträgheitsmoment kann nur dann erzielt werden, wenn die Masse möglichst außen konzentriert wird. Das hat allerdings zur Folge, daß am Innenrand hohe Spannungen auftreten. Die Fälle (a), (c) und (d) könnten also ausgeschlossen werden, so daß von den Schaltfunktionen nur  $s_4$  übrig bliebe, wie sich später beim Rechnen auch richtig herausstellte. Diese Überlegungen erweisen sich auch als hilfreich bei der Wahl von Startwerten für die adjungierten Variablen.

Bezeichnet man die adjungierten Variablen neu -  $y_4 = \gamma_1$ ,  $y_5 = \gamma_2$  und  $y_6 = A$  -, so erhält man die Randwertaufgabe:

Dgl.-System:

$$y_1' = \frac{1}{x} \{ -\mu y_1 + (1-\mu^2) \frac{y_2}{u} \}$$

$$y_2' = \frac{1}{x} \{ \mu y_2 + (y_1 - x^3 f_{\Omega}) u \}$$

$$y_3' = x u$$

$$y_4' = \frac{1}{x} \{ y_5 - u y_6 \}$$

$$y_5' = -\frac{1-\mu}{x} \frac{y_4}{u} - \frac{\mu}{x} y_5 + 2\beta y_2$$

$$y_6' = 0$$

$$\beta = \frac{x^3 \left\{ \left(1 - \frac{y_5 f_{\Omega}}{x}\right) + x y_6 + \frac{y_1 y_5}{x} \right\} - \frac{1-\mu^2}{x} y_2 y_4}{2x^2 u}$$

Schaltfunktionen: siehe (5.90)

Randbedingungen:

$$y_1(x_i) = 0$$

$$y_2(1) = 0$$

$$y_3(x_i) = 0$$

$$y_3(1) = v_0$$

$$y_4(1) = 0$$

$$y_5(x_i) = 0$$

(5.92)

mit

$$\alpha = x^3 \left(1 - \frac{y_5 f_{\Omega}}{x}\right) + y_6 x + \frac{y_1 y_5}{x} \quad (5.93)$$

und

$$\beta = \frac{1-\mu^2}{x} y_2 y_4$$

Schaltbedingungen: siehe (5.91).

### 5.4.3 Numerische Durchführung und Diskussion der Ergebnisse

Zu gegebenem Drehzahlparameter  $\omega^*$  und gegebenem Volumen kann das Randwertproblem gelöst werden. Hier tauchen jedoch die schon erwähnten Schwierigkeiten bei der Wahl vernünftiger Startwerte für die adjungierten Variablen auf. Die in Kapitel 4.8 aufgezeigte Technik der Randwert-Homotopie leistet hierbei gute Dienste. Es wird so vorgegangen, daß zunächst die Scheibe gleicher Radialfestigkeit zu vorgegebenem Volumen, also ein kleineres Dgl.-System, gelöst wird. Diese Scheibe erfüllt natürlich die Randbedingung  $y_2(1)=0$  nicht. Im nächsten Schritt wird das vollständige System gelöst, indem man die Randbedingung für die adjungierte Variable  $y_4$  nicht am rechten Rand, sondern am linken Rand vorschreibt, also für die adjungierten Variablen ein Anfangs-

wertproblem löst. Die Variable  $y_4$  wird nun schrittweise so verändert, daß die wirkliche Randbedingung  $y_4(1)=0$  erfüllt wird. Das ist nach wenigen Schritten erledigt. Für weitere Lösungen zu verändertem Drehzahlparameter kann man dann als Starttrajektorie die Lösung aus dem vorhergehenden Schritt wählen.

Daten für die numerische Durchführung waren: Innenradius  $x_i=0,2$  und Querkontraktionszahl für Stahl  $\mu=0,3$ . Zu zwei Volumina  $v_0=0,3$  und  $v_0=0,5$  und verschiedenen maximalen Scheibendicken  $u_{\max}$  in Bereichen ohne Spannungsüberschreitungen werden die Lösungen in Abhängigkeit des Drehzahlparameters  $\omega^* = \sqrt{f_{\Omega}}$  bestimmt. Einige typische Querschnittsverläufe zum Volumen  $v_0=0,3$  und  $u_{\max}=1,0$  zeigt Abb. 5.36. Wir finden den vermuteten Dickenverlauf bestätigt. Die Scheiben bestehen aus einem inneren Teil, der konstante Radialfestigkeit aufweist, und einem äußeren Ring mit maximal zulässiger Dicke.

In Abb. 5.37 wird der Verlauf der Radialspannung  $\frac{G_r}{G_0}$  und der Tangentialspannung  $\frac{G_y}{G_0}$  der optimierten Scheibe zum Volumen  $v_0=0,3$ , Drehzahlparameter  $\omega^*=1,0$  und Maximaldicke  $u_{\max}=1,0$  verglichen mit der Scheibe konstanter Dicke gleichen Volumens. Die optimale Scheibe nutzt den Querschnitt natürlich viel besser aus.

Die Abbildungen 5.38 und 5.39 veranschaulichen den Verlauf des maximalen Trägheitsmomentes über dem Drehzahlparameter. Bei kleinen bis mittleren Drehzahlen läßt sich das Massenträgheitsmoment erheblich steigern. Bei hohen Drehzahlen werden die Fliehkräfte dann so groß, daß die Scheiben nur noch nach der Spannungsnebenbedingung bemessen werden. Die Scheibe konstanter Dicke versagt ab einer bestimmten Drehzahl. In Abb. 5.40 ist der Verlauf der Übergangsstelle zwischen dem inneren Teil der optimalen Scheiben (gleiche Radialspannung) und dem äußeren Ring (konstante Dicke) dargestellt.



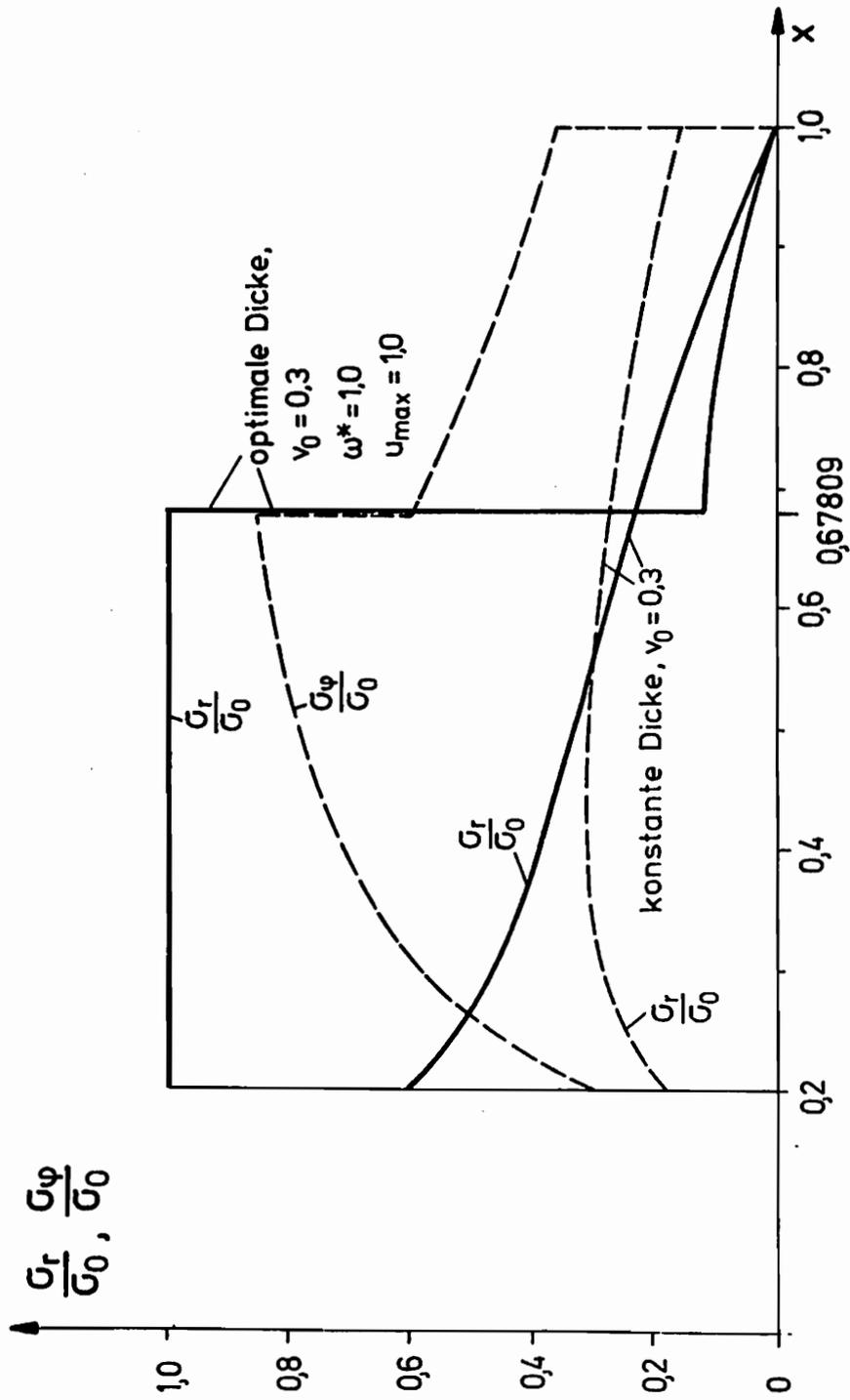


Abb. 5.37 Vergleich von Spannungsverläufen

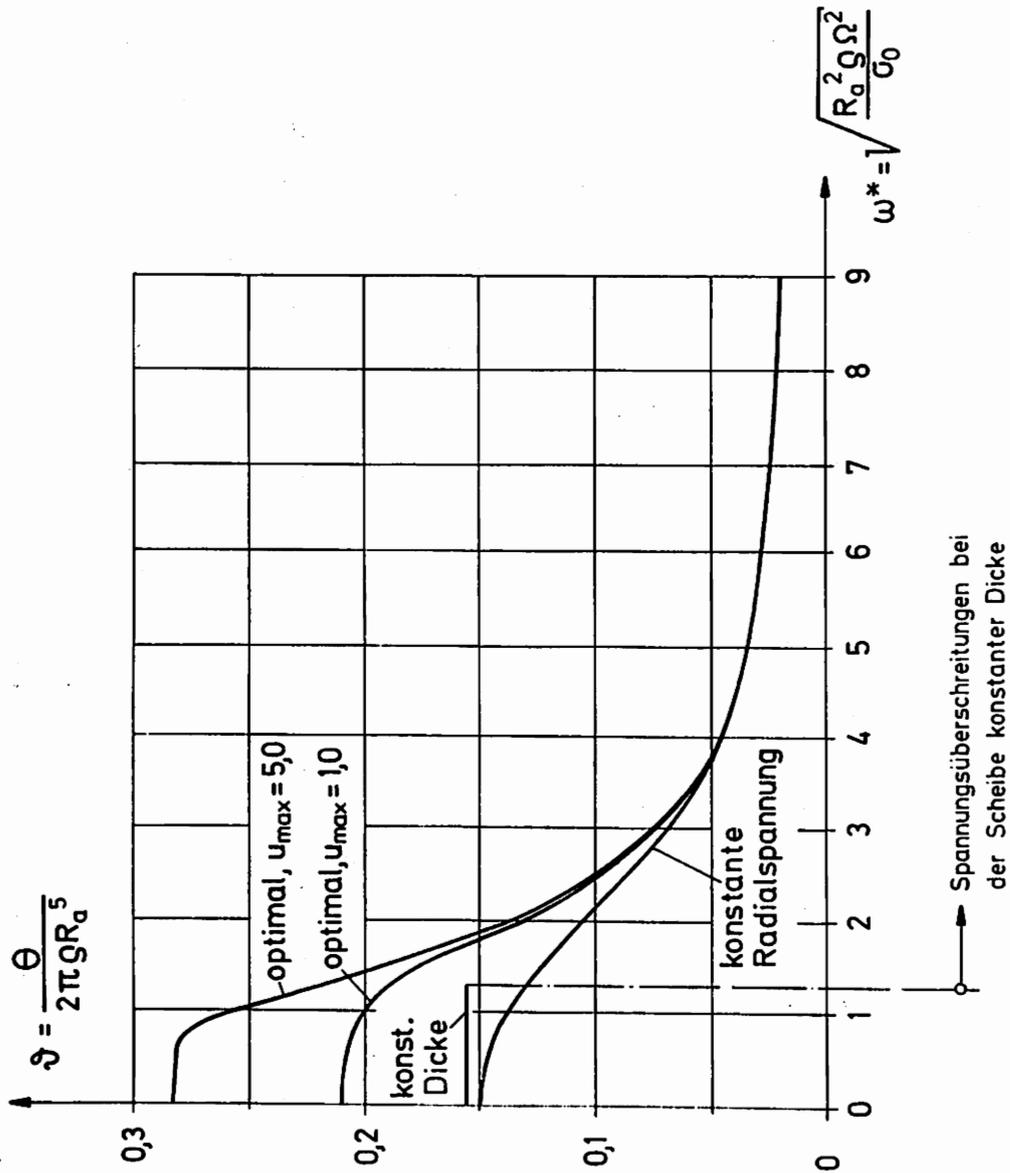


Abb. 5.38: Massenträgheitsmoment als Funktion des Drehzahlparameters,  $\nu_0 = 0,3$

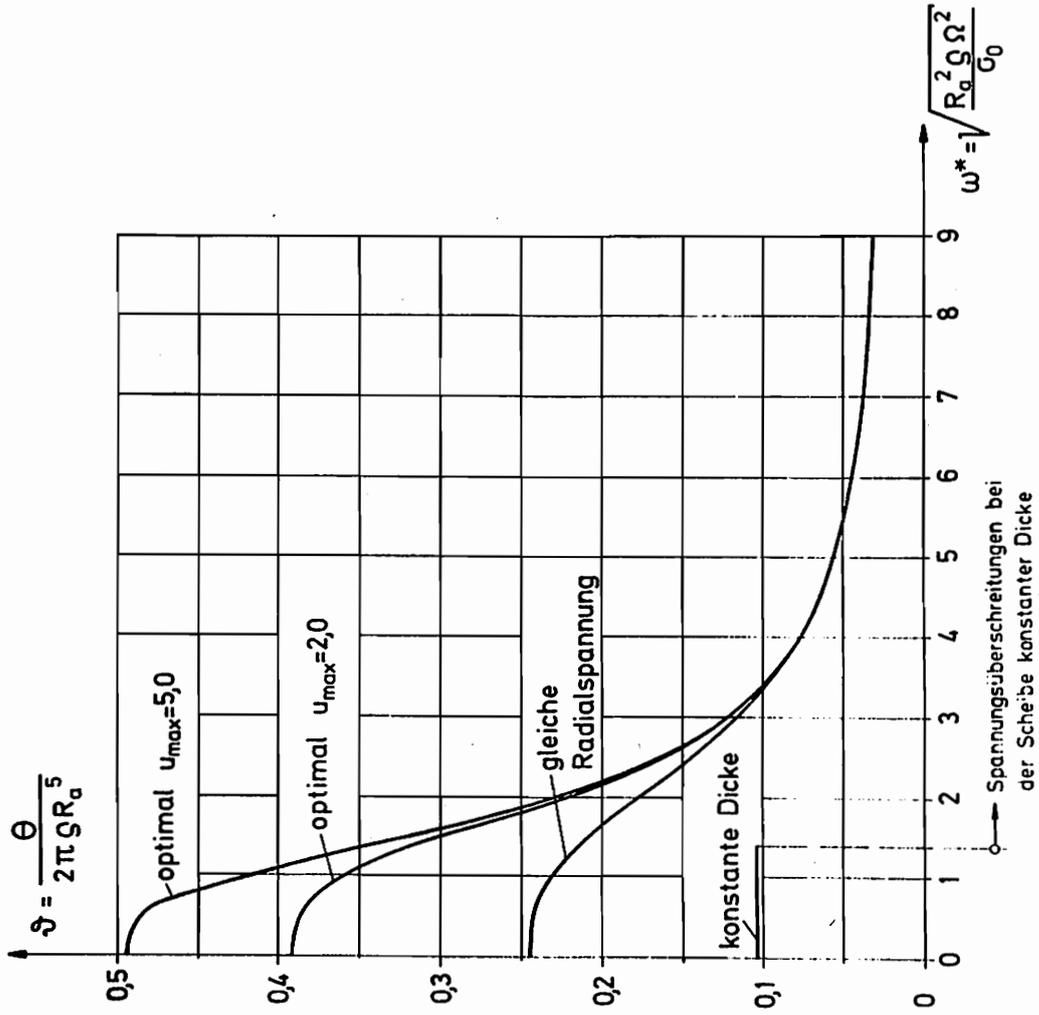


Abb. 5.39: Massenträgheitsmoment als Funktion des Drehzahlparameters,  $\nu_0=0,5$

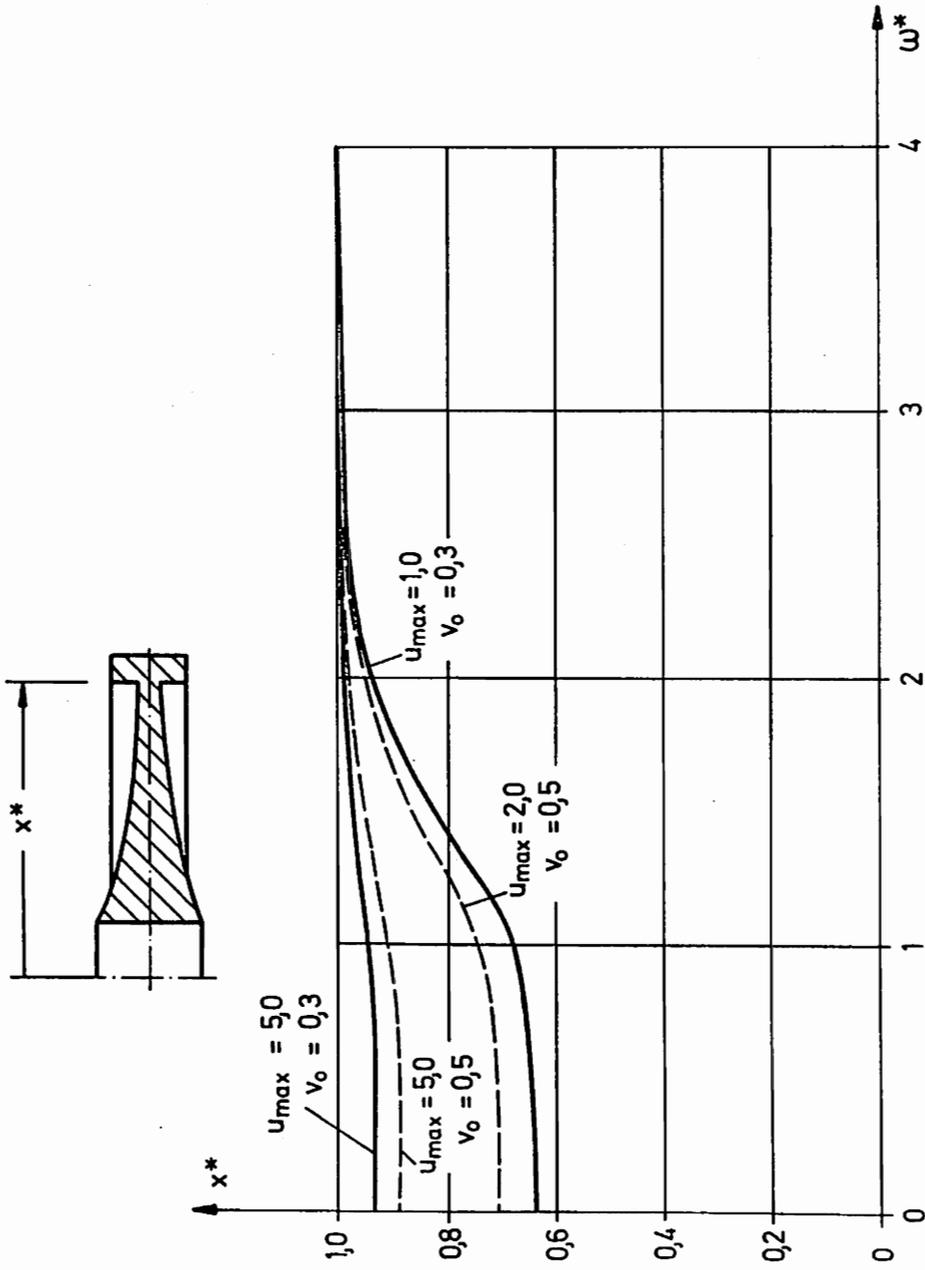


Abb. 5.40: Sprungkoordinate als Funktion des Drehzahlparameters

## 5.5 Minimalgewichtsentwurf eines mit gegebener erster Eigenfrequenz schwingenden Rahmens

### 5.5.1 Allgemeines

Stehen mechanische Systeme unter periodischer Belastung, so ist ein Zusammenfallen von Eigen- und Erregerfrequenz zu vermeiden, um Resonanz auszuschließen. Schreibt man beispielsweise vor, daß man im unterkritischen Bereich bleiben will, dann muß die erste Eigenfrequenz  $\omega$  sich in einem gewissen Abstand oberhalb der Erregerfrequenz  $\Omega$  (z.B.  $\omega = 1,01\Omega$ ) befinden. In der Regel kennt man die Erregerfrequenz und kann die Optimierungsaufgabe so formulieren, daß man zu vorgegebener tiefster Eigenfrequenz dasjenige Tragwerk mit dem kleinsten Gewicht (bei homogenem Material kleinstem Volumen) sucht. Weil bei einer solchen Aufgabenstellung [29 - 33] die Querschnittsflächen an diskreten Stellen verschwinden und die Querschnittsflächen-Verläufe sich bei hohen Eigenfrequenzen extrem verändern können, was bei Stabwerken den Annahmen der Stabtheorie widerspricht, wird eine Beschränkung der Querschnittsfläche nach oben und unten vorgenommen ( $A_u \leq A(s) \leq A_0$ ).

Unter den Voraussetzungen der Elasto-Statik der Stäbe ohne Berücksichtigung der Dehnungen der Stabachse wird der Minimalgewichtsentwurf für den auf beiden Seiten eingespannten in seiner Ebene schwingenden Rahmen aus homogenem Material

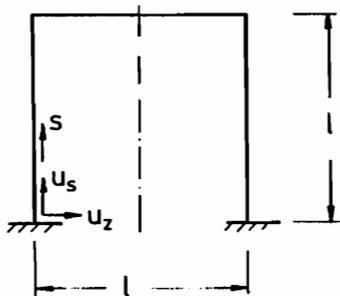


Abb. 5.41

nach Abb. 5.41 mit geometrisch ähnlichem Vollquerschnitt durchgeführt. Da für die zum gewählten Eigenwert optimierten Rahmen bei der unimodalen Formulierung nicht auszuschließen ist [34], daß zu dieser Optimalform ein kleinerer als der gewählte Eigenwert gehören kann, wird die Aufgabe von vorneherein in der bimodalen Form formuliert. Diese Rahmen sind weiter daraufhin zu untersuchen, ob nicht höhermodale Eigenformen eine Rolle spielen.

### 5.5.2 Grundgleichungen in bimodaler Formulierung

Zielfunktion bei homogenem Material ist das Volumen

$$V = \int_{(L)} A(s) ds = \min. \quad (5.94)$$

Das mechanische Verhalten wird nach der elementaren Theorie durch die beiden partiellen Differentialgleichungen der Biege- und Längsschwingung beschrieben

$$\frac{\partial^2 (EI(s) \frac{\partial^2 u_z}{\partial s^2})}{\partial s^2} + \rho A(s) \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0 \quad (5.95)$$

$$\frac{\partial (EA(s) \frac{\partial u_s}{\partial s})}{\partial s} - \rho A(s) \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = 0 \quad (5.96)$$

Mit den Produktansätzen  $u_z(s,t) = w(s)f(t)$  und  $u_s(s,t) = u(s)f(t)$  nach Bernoulli können wir die Zeitlösung eliminieren und erhalten gewöhnliche Differentialgleichungen mit homogenen Randbedingungen, die sich als Eigenwertproblem herausstellen.

$$\frac{d^2 (EI(s) \frac{d^2 w}{ds^2})}{ds^2} - \rho A(s) \omega^2 w = 0 \quad (5.97)$$

$$\frac{d (EA(s) \frac{du}{ds})}{ds} + \rho A(s) \omega^2 u = 0 \quad (5.98)$$

$$\begin{aligned}
 w(0) &= 0 & w(L) &= 0 \\
 \frac{dw}{ds}(0) &= 0 & \frac{dw}{ds}(L) &= 0 \\
 u(0) &= 0 & u(L) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.99}$$

Die zugehörigen Eigenformen sind entweder symmetrisch oder antimetrisch. Wir können unsere Betrachtungen daher auf den halben Rahmen beschränken, müssen die symmetrische und die antimetrische Schwingungsform dann aber getrennt betrachten. Die Randbedingungen ändern sich entsprechend Abb. 5.42 (a) und (b).

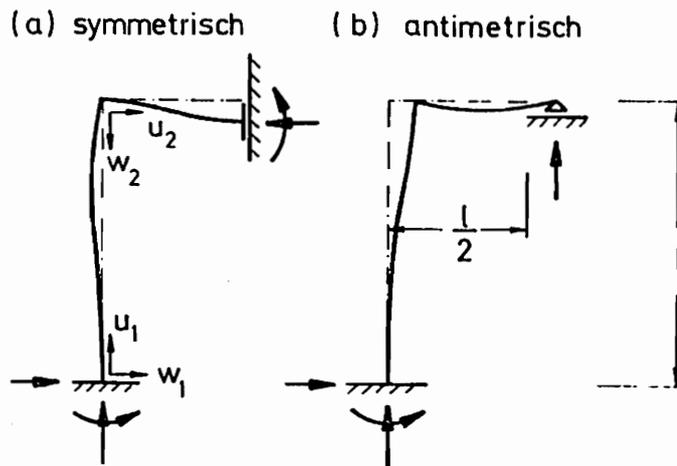


Abb. 5.42

Abschnitts-, Knoten- und Stützstellenummerierung nach Kapitel 4.1 sind in Abb. 5.43 dargestellt. Für die Querschnittsfläche besteht zusätzlich die Nebenbedingung

$$A_u \leq A(s) \leq A_0 \tag{5.100}$$

Das Flächenträgheitsmoment für den geometrisch ähnlichen Vollquerschnitt ist gemäß Gleichung (5.18)

$$I(s) = \bar{c} A(s)^2$$

durch die Querschnittsfläche bestimmt. Eine dimensionslose Darstellung erreicht man durch folgende Normierungen:

$$x = \frac{s}{L}, \quad \alpha = \frac{A}{A^*}, \quad ( )' = \frac{d}{dx} ( ), \quad I = c\alpha^2$$

$$v = \frac{V}{A^*L}, \quad \beta^4 = \frac{\rho\omega^2 L^4}{cEA^*}, \quad \alpha_u = \frac{A_u}{A^*}, \quad \alpha_o = \frac{A_o}{A^*}$$

Zustandsvariable:

$$y_1 = \frac{w}{L}, \quad y_2 = y_1'$$

$$y_3 = -\frac{ML}{EcA^{*2}} = \alpha^2 y_2'$$

$$y_4 = -\frac{QL^2}{EcA^{*2}} = y_3'$$

$$y_5 = \frac{u}{L}$$

$$y_6 = -\frac{NL^2}{EcA^{*2}} = \frac{y_5}{\alpha\beta^4}$$

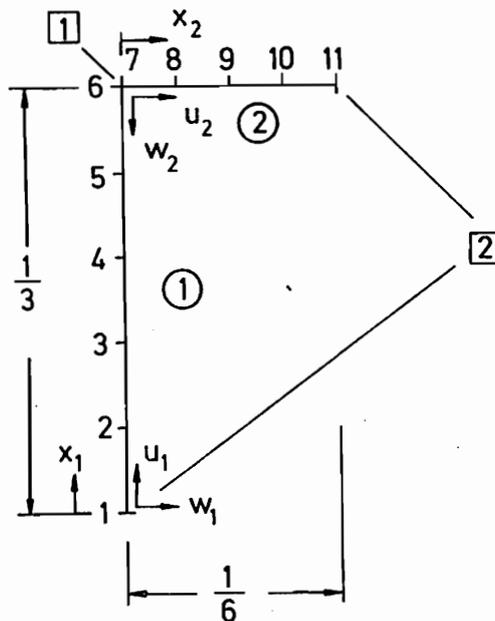


Abb 5.43

Im bimodalen Fall existieren zum gleichen Eigenwert  $\beta$  die beiden Eigenformen nach Abb. 5.42, die jeweils durch eigene Zustandsvariable beschrieben werden. Zu jeder Eigenform gehört daher ein formal gleiches Dgl.-System mit unterschiedlichen Zustandsvariablen. Für beide Stäbe ( $i=1,2$ ) gelten die gleichen Dgl.-Systeme. Die Variablen  $y_5$  und  $y_6$  (Normalkraft und Längsverschiebung) brauchen zur Beschreibung des Schwin-

ungsverhaltens im symmetrischen Fall nicht berücksichtigt werden, weil dafür die Verschiebung an jeder Stelle  $y_5 \equiv 0$  ist. Man erhält aus (5.97) und (5.98) die Dgl.-Systeme:

antimetrische Form:

symmetrische Form:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{1i}' &= \gamma_{2i} & \gamma_{9i}' &= \gamma_{10i} \\
 \gamma_{2i}' &= \frac{\gamma_{3i}}{\alpha_i^2} & \gamma_{10i}' &= \frac{\gamma_{11i}}{\alpha_i^2} \\
 \gamma_{3i}' &= \gamma_{4i} & \gamma_{11i}' &= \gamma_{12i} \\
 \gamma_{4i}' &= \beta^4 \alpha_i \gamma_{1i} & \gamma_{12i}' &= \beta^4 \alpha_i \gamma_{9i} \\
 \gamma_{5i}' &= 0 \\
 \gamma_{6i}' &= \beta^4 \alpha_i \gamma_{5i} .
 \end{aligned}
 \tag{5.101}$$

Die Knotenbedingungen finden wir in Tabelle 3.

Die Bedingung für die Steuervariable  $u_i = a_i$  lautet:

$$a_u \leq a_i \leq a_o . \tag{5.103}$$

Als Zielfunktion ergibt sich

$$V = 2 (v_1 + v_2) = 2 \left\{ \int_0^{1/3} \alpha_1 dx_1 + \int_0^{1/6} \alpha_2 dx_2 \right\} . \tag{5.104}$$

Die Hamilton-Funktion für den i-ten Stab lautet:

$$\begin{aligned}
 H_i = & (\psi_0 \alpha + \psi_1 \gamma_2 + \psi_2 \frac{\gamma_3}{\alpha^2} + \psi_3 \gamma_4 + \psi_4 \beta^4 \alpha \gamma_1 + \psi_6 \beta^4 \alpha \gamma_5 \\
 & + \psi_9 \gamma_{10} + \psi_{10} \frac{\gamma_{11}}{\alpha^2} + \psi_{11} \gamma_{12} + \psi_{12} \beta^4 \alpha \gamma_9)_i .
 \end{aligned}
 \tag{5.105}$$

Daraus bilden wir nach der Beziehung (3.6) das Hilfssystem

$$\begin{aligned}
 \psi_{1i}' &= -\beta^4 \alpha_i \psi_{4i} & \psi_{9i}' &= -\beta^4 \alpha_i \psi_{12i} \\
 \psi_{2i}' &= -\psi_{1i} & \psi_{10i}' &= -\psi_{9i} \\
 \psi_{3i}' &= -\frac{\psi_{2i}}{\alpha_i^2} & \psi_{11i}' &= -\frac{\psi_{10i}}{\alpha_i^2} \\
 \psi_{4i}' &= -\psi_{3i} & \psi_{12i}' &= -\psi_{11i} \\
 \psi_{5i}' &= -\beta^4 \alpha_i \psi_{6i} \\
 \psi_{6i}' &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.106}$$

Die Knotenbedingungen für das Hilfssystem folgen aus der Transversalitätsbedingung (3.8) für jeden Knotenpunkt:

$$\text{Knoten 1: } \quad \underline{\psi}_2 \cdot \underline{\delta y}_2 - \underline{\psi}_1 \cdot \underline{\delta y}_1 = 0 \quad (5.107)$$

$$\text{Knoten 2: } \quad \underline{\psi}_1 \cdot \underline{\delta y}_1 - \underline{\psi}_2 \cdot \underline{\delta y}_2 = 0 .$$

Die Ergebnisse enthält Tabelle 3.

Das Hilfssystem läßt sich wieder durch das Originalsystem darstellen. Die Ansätze

$$\begin{aligned} \psi_{1i} &= -A \gamma_{4i} & \psi_{9i} &= -B \gamma_{12i} \\ \psi_{2i} &= A \gamma_{3i} & \psi_{10i} &= B \gamma_{11i} \\ \psi_{3i} &= -A \gamma_{2i} & \psi_{11i} &= -B \gamma_{10i} \\ \psi_{4i} &= A \gamma_{1i} & \psi_{12i} &= B \gamma_{9i} \\ \psi_{5i} &= -A \gamma_{6i} & & \\ \psi_{6i} &= A \gamma_{5i} & & \end{aligned} \quad (5.108)$$

genügen dem Dgl.-System (5.106) und den Knotenbedingungen (Tabelle 3). Setzt man (5.108) in die Hamilton-Funktion ein, so erhält man mit  $\psi_{0i}^{\alpha-1}$

$$\begin{aligned} H_i &= \left\{ \alpha [-1 + \beta^4 \bar{A} (\gamma_1^2 + \gamma_5^2 + \bar{B} \gamma_9^2)] + \frac{\bar{A}}{\alpha^2} [\gamma_3^2 + \bar{B} \gamma_{11}^2] \right. \\ &\quad \left. - 2 \bar{A} [\gamma_2 \gamma_4 + \bar{B} \gamma_{10} \gamma_{12}] \right\}_i \end{aligned} \quad (5.109)$$

oder

$$H_i = \left\{ \alpha \alpha + \frac{\delta^2}{\alpha^2} + \delta \right\}_i \quad (5.110)$$

Da die Eigenformen noch von der Wahl eines beliebigen Parameters abhängen, kann man die noch freien Konstanten  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  durch willkürliche Wahl einer weiteren Knotenbedingung für jede Eigenform bestimmen. Hier wird gesetzt:

$$\text{Knoten 1: } \gamma_{62}(1/6) = 1, 0 = k_1$$

$$\text{Knoten 2: } \gamma_{11} \quad 2(0) = -250 = k_2$$

Das optimale  $a$  liefert die Maximumbedingung, wobei  $\delta$  wieder ohne Einfluß ist. Den qualitativen Verlauf  $H_i(a)$  zeigt

Tabelle 3

Knoten	1	2
Original- system	$y_{12} + y_{61} = 0$ $y_{21} - y_{22} = 0$ $y_{31} - y_{32} = 0$ $y_{51} + y_{42} = 0$ $y_{52} - y_{41} = 0$ $y_{11} - y_{62} = 0$ $y_{71} - y_{72} = 0$ $y_{81} - y_{82} = 0$ $y_{91} = 0$ $y_{92} = 0$ $y_{10\ 1} - y_{10\ 2} = 0$ $y_{11\ 1} - y_{11\ 2} = 0$ $y_{13\ 1} - y_{13\ 2} = 0$	$y_{11} = 0$ $y_{21} = 0$ $y_{51} = 0$ $y_{71} = 0$ $y_{12} = 0$ $y_{32} = 0$ $y_{62} = 0$ $y_{91} = 0$ $y_{10\ 1} = 0$ $y_{10\ 2} = 0$ $y_{12\ 2} = 0$
Hilfs- system	$\psi_{12} + \psi_{61} = 0$ $\psi_{22} - \psi_{21} = 0$ $\psi_{32} - \psi_{31} = 0$ $\psi_{42} + \psi_{51} = 0$ $\psi_{52} - \psi_{41} = 0$ $\psi_{11} + \psi_{62} = 0$ $\psi_{10\ 2} - \psi_{10\ 1} = 0$ $\psi_{11\ 2} - \psi_{11\ 1} = 0$ $\psi_{12\ 2} = 0$ $\psi_{12\ 1} = 0$	$\psi_{31} = 0$ $\psi_{41} = 0$ $\psi_{61} = 0$ $\psi_{11\ 1} = 0$ $\psi_{12\ 1} = 0$ $\psi_{22} = 0$ $\psi_{42} = 0$ $\psi_{52} = 0$ $\psi_{92} = 0$ $\psi_{11\ 2} = 0$

Abb. 5.44. Abhängig vom Vorzeichen von  $\alpha$  bzw.  $\gamma$  ergeben sich vier Fälle.

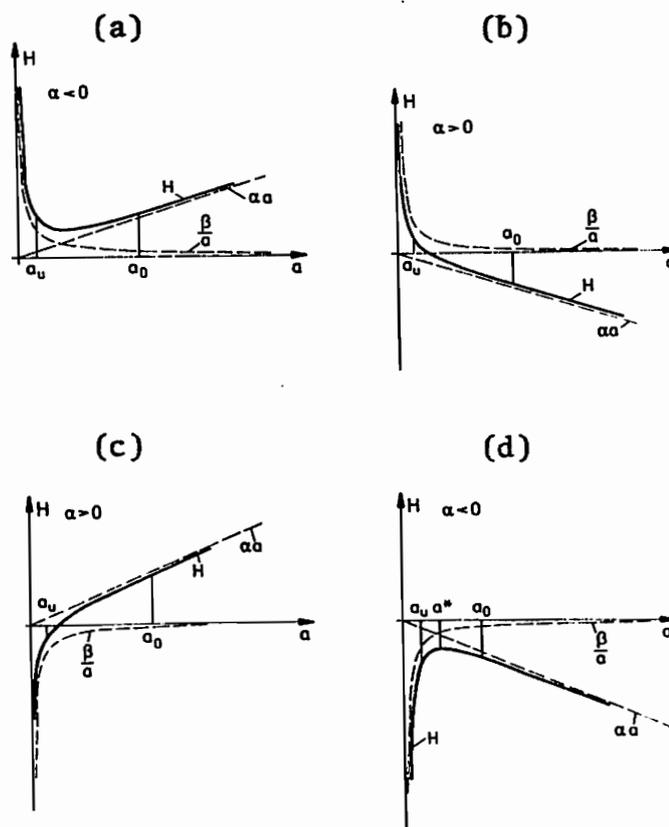


Abb 5.44

(a)  $a_u < a^* < a_0 \Rightarrow a = a^*$

$a^* - a_u \leq 0 \Rightarrow a = a_u$

$a^* - a_0 \leq 0 \Rightarrow a = a_0$

(b)  $a = a_0$

(c)  $H(a_0) - H(a_u) \geq 0 \Rightarrow a = a_0$

$H(a_0) - H(a_u) < 0 \Rightarrow a = a_u$

(d)  $a = a_u$

$a^*$  rechnet man aus der Beziehung (3.10)  $\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)_i = 0$  aus und erhält

$$\alpha^* = \sqrt[3]{\frac{2\gamma}{\alpha}} \quad (5.111)$$

Die richtige Wahl von  $a$  (Fälle (a) - (d) aus Abb. 5.44) läßt sich nun über die folgenden Schaltfunktionen steuern:

$$\begin{aligned} s_{1i} &= (\alpha \alpha_o^3 + 2\gamma)_i \\ s_{2i} &= (\alpha \alpha_u^3 + 2\gamma)_i \\ s_{3i} &= (\alpha - \bar{\alpha} \gamma)_i \end{aligned} \quad (5.112)$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_o + \alpha_u}{(\alpha_o \alpha_u)^2} \quad (5.113)$$

Infolge des linearen Zusammenhanges zwischen  $\alpha$  und  $\gamma$  erscheinen die Schaltbedingungen  $s_{1i} = s_{2i} = s_{3i} = 0$  als Gerade in der  $\alpha, \gamma$ -Ebene der Zustandsvariablen (Abb. 5.45).

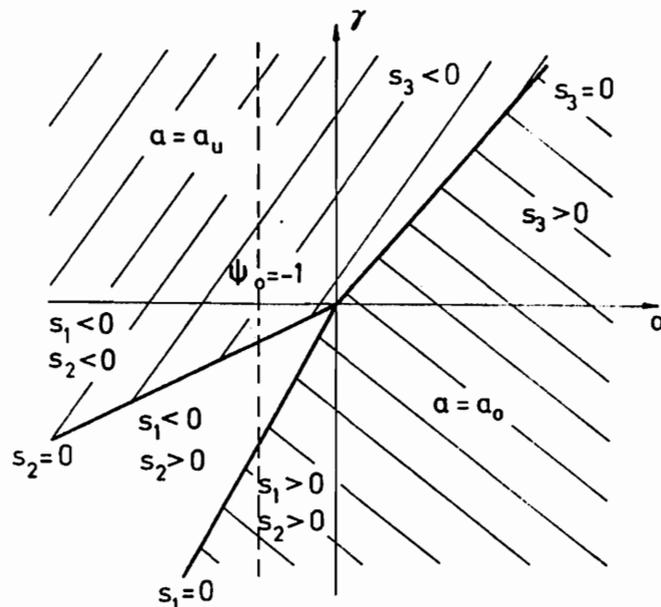


Abb. 5.45

Einen Sonderfall stellt  $\psi_0 = 0$  dar. Die Hamilton-Funktion ist dann nur noch abhängig von den Nebenbedingungen und nicht mehr vom Integranden der Zielfunktion und der Konstanten  $\bar{\alpha}$ .

An die Stelle der freien Konstanten  $\bar{A}$  tritt dann der Frequenzparameter  $\beta$ .  $\beta$  ist also nicht mehr frei wählbar, sondern durch die Nebenbedingungen festgelegt und stellt infolge der Querschnittsschranken den zu einem bestimmten Querschnittsflächen-Verhältnis  $a_o/a_u$  gehörenden maximal oder minimal möglichen Frequenzparameter dar.

Der glatte Rahmen mit der konstanten Querschnittsfläche  $a=a_u$  hat bei den gewählten Systemabmessungen den kleinsten Eigenwert bei  $\beta_o=5,3703964$ , und die zugehörige Eigenform ist antimetrisch. Der kleinste Eigenwert zur symmetrischen Eigenform beträgt 10,6692254. Geht man aus vom glatten Rahmen, der zu seiner Eigenfrequenz  $\beta_o$  sicher optimal ist, so wird man zunächst unimodale Rahmen erwarten, d.h.  $y_9=y_{10}=y_{11}=y_{12}=0$ . Dann hängt  $\gamma$  nur noch vom Vorzeichen von  $\bar{A}$  ab, und man kann grundsätzlich zwei Rahmentypen unterscheiden.  $\bar{A} > 0$  ( $\gamma > 0$ ) liefert Rahmen mit sprunghaftem Querschnittsflächen-Verlauf (vgl. Abb. 5.45) und  $\bar{A} < 0$  solche mit kontinuierlichem Querschnittsflächen-Verlauf.  $\bar{A}=0$  kennzeichnet den glatten Rahmen.

Bei der Formulierung des Randwertproblems faßt man  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  wieder als Variable auf:  $\bar{A}=y_8$  und  $\bar{B}=y_{13}$ . Die Zielfunktion (das minimale Volumen) wird als Variable  $v_{\min}=y_7$  mit in das Dgl.-System aufgenommen. Die dazu gehörenden Knotenbedingungen finden wir auch in Tabelle 3. Die bimodale Randwertaufgabe hat dann folgendes Aussehen:

Dgl.-System für jeden Stab:

Knotenbedingungen:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \\ y_5' \\ y_6' \\ y_7' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \frac{y_3}{a^2} \\ y_4 \\ \beta^4 a y_1 \\ 0 \\ \beta^4 a y_5 \\ a \end{bmatrix}$$

Tabelle 3

(5.114)

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c}
 \gamma_B' \\
 \gamma_9' \\
 \gamma_{10}' \\
 \gamma_{11}' \\
 \gamma_{12}' \\
 \gamma_{13}'
 \end{array} \right]_i \quad \left[ \begin{array}{c}
 0 \\
 \gamma_{10} \\
 \frac{\gamma_{11}}{\alpha^2} \\
 \gamma_{12} \\
 \beta^4 \alpha \gamma_9 \\
 0
 \end{array} \right]_i
 \end{array}
 \quad - 131 -$$

Schaltfunktionen:

$$\begin{aligned}
 \gamma_i \geq 0: & \\
 & s_{1i} = (\alpha \alpha_o^3 + \gamma)_i \\
 & s_{2i} = (\alpha \alpha_u^3 + \gamma)_i
 \end{aligned}
 \quad (5.115)$$

$$\gamma_i < 0: \quad s_{3i} = (\alpha - \bar{\alpha} \gamma)_i$$

$$\gamma_i = (\gamma_B (\gamma_3^2 + \gamma_{13} \gamma_{11}^2))_i, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha_o + \alpha_u}{\alpha_o \alpha_u}$$

$$\alpha_i = (\beta^4 \gamma_B (\gamma_1^2 + \gamma_5^2 + \gamma_{13} \gamma_9^2))_i - 1$$

Schaltbedingungen:

$$\begin{aligned}
 \gamma_i \geq 0: \quad s_1 < 0 \text{ und } s_2 \leq 0 & \Rightarrow a = a_u \\
 s_1 < 0 \text{ und } s_2 > 0 & \Rightarrow a = (2\gamma / \alpha)^{1/3} \\
 s_1 \geq 0 \text{ und } s_2 > 0 & \Rightarrow a = a_o
 \end{aligned}
 \quad (5.116)$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_i < 0: \quad s_3 \leq 0 & \Rightarrow a = a_u \\
 s_3 > 0 & \Rightarrow a = a_o
 \end{aligned}$$

### 5.5.3 Numerische Durchführung, Diskussion der Ergebnisse und Grenzbetrachtungen

---

In Abhängigkeit des Frequenzparameters  $\beta$  wird das Lösungsverhalten für den Rahmen ohne obere Querschnittsflächen-Schranke und verschiedene Querschnittsflächen-Verhältnisse  $a_o/a_u$  bestimmt. Die untere Querschnittsflächen-Schranke wird zu  $a_u=1,0$  angenommen. Der Einfluß der unteren Querschnittsflächen-Schranke, der nur bei den kontinuierlichen Querschnittsflächen-Verläufen von Bedeutung ist, wird bei kon-

stantem Frequenzparameter  $\beta = 8,0$  untersucht, wobei eine obere Querschnittsflächen-Schranke nicht vorgeschrieben ist. Stützstellenzahl und -nummerierung entsprechen Abb. 5.43.

Zur Bestimmung von Starttrajektorien für den Lösungsalgorithmus kommt die Methode der Parameter-Homotopie zur Anwendung, wobei im ersten Fall die Frequenzgröße  $\beta$  Homotopieparameter ist und im zweiten die untere Querschnittsflächen-Schranke  $a_u$ . Bei schrittweiser Änderung dieser Parameter wird als Starttrajektorie immer die vorhergehende Lösung benutzt, dabei werden die Konstanten  $\bar{A}$  und  $\bar{R}$  bzw.  $y_8$  und  $y_{13}$  entsprechend modifiziert eingegeben.

Abb. 5.46 zeigt den Verlauf des minimalen Volumens als Funktion des Frequenzparameters  $\beta$  bei  $a_u = 1,0$ . Ausgehend vom glatten Rahmen mit  $\beta_0 = 5,3704$  weisen die Rahmen mit steigender Frequenz kontinuierlichen Querschnittsflächen-Verlauf und mit fallender Frequenz sprunghaften Querschnittsflächen-Verlauf auf. Bei kontinuierlichem Verlauf hat man es zunächst mit unimodalem Verhalten zu tun. Die zweite Eigenfrequenz der unimodalen Rahmen wächst mit größer werdender erster Eigenfrequenz weniger stark. In Abb. 5.46 ist die zweite Eigenfrequenz zur Unimodalform zusätzlich eingezeichnet. Bei  $\beta = 12,40736$  haben symmetrische und antisymmetrische Eigenform schließlich die gleiche Eigenfrequenz. Rechnet man von hier ab unimodal weiter, so ist der bei der Optimierungsstrategie gewählte Frequenzparameter nicht mehr der kleinste. Die Rahmen sind also nicht mehr zur kleinsten Eigenfrequenz optimal.

Man muß daher von dieser Stelle an von bimodalem Lösungsverhalten ausgehen. Lösungen findet man nur noch bei kleinen Schritten des Homotopie-Parameters  $\beta$ . Ob sich eine Erhöhung der Stützstellenzahl günstig auswirkt, was in der Regel der Fall ist, kann nicht getestet werden, da die Kapazität der eingesetzten Rechenanlage bei der gewählten Stützstellenzahl

von 11 und dem Dgl.-System 13. Ordnung voll ausgenutzt ist. Manchmal ist eine Veränderung der Lage der Stützstellen, die ja beliebig sein darf, vorteilhaft. Hält man aber die Schritte  $\Delta/\beta$  genügend klein, so kommt man in der Regel mit dieser Strategie weiter. Kann bei den unimodalen Rahmen mit Schritten von  $\Delta/\beta = 0,5$  gerechnet werden, dann müssen die Schrittweiten bei den bimodalen Lösungsformen auf  $\Delta/\beta = 0,02$  bis  $0,01$  verkleinert werden. Im bimodalen Fall führt die Rang-Strategie im Normalfall nach einigen Iterationsschritten oft durch Rangerniedrigung auf die Version mit der Pseudoinversen. Von Vorteil erweist es sich manchmal, besonders, wenn man größere  $\Delta/\beta$ -Schritte versucht, gleich mit einem kleineren als dem Maximalrang zu starten. Die Berechnung der Pseudoinversen kann aber auch im unimodalen Fall notwendig werden, wenn man hier mit sehr großen  $\Delta/\beta$ -Schritten und damit schlechten Starttrajektorien arbeitet. Allgemein wird das Konvergenzverhalten mit steigender Frequenz immer schlechter. Höhermodales Verhalten, d.h. ein Zusammenfallen von drei Eigenfrequenzen, kann im untersuchten Frequenzbereich nicht festgestellt werden.

Bei den Querschnittsflächen-Verhältnissen  $a_o/a_u = 3$  und  $a_o/a_u = 6$  bleibt das Lösungsverhalten unimodal. Bei größeren Werten von  $a_o/a_u$  sind bimodale Optimalformen durchaus möglich. Erreicht man zu gegebenem  $a_o/a_u$  die obere Querschnittsflächen-Schranke, so kann man den Frequenzparameter nur noch wenig steigern. Die Kurven enden mit horizontaler Tangente (Abb. 5.46). Der Endpunkt stellt den Fall  $\psi_o = 0$  bzw.  $\bar{A} \rightarrow \infty$  dar. Darüber hinaus existieren zum gewählten Verhältnis  $a_o/a_u$  keine Lösungen mehr. Die Abbildungen 5.47, 5.48 und 5.49 zeigen einige ausgewählte Querschnittsflächen-Verläufe.

Der Einfluß der unteren Querschnittsflächen-Schranke bei  $\beta = 8,0$  ist in Abb. 5.50 dargestellt. Ab einer bestimmten Schranke von  $a_u$  (hier  $a_u = 0,17284$ ) werden die Rahmen mit bimodalem Lösungsverhalten optimal. Diese Eigenschaft ist ganz typisch. Querschnittsflächen-Verläufe dazu finden wir

in den Abbildungen 5.51 und 5.52. Hebt man die untere Querschnittsflächen-Schranke auf, so führt das zur Ausbildung eines Gelenkes in der Mitte des Querriegels. Weil das Lösungsverhalten bimodal ist, bleibt das System statisch überbestimmt.

Sprunghafter Verlauf der Querschnittsfläche stellt sich bei kleineren Frequenzen unterhalb des glatten Rahmens ein. Das Lösungsverhalten bleibt unimodal. Bei den gewählten (im Rahmen der Stabtheorie noch vernünftigen) Querschnittsflächen-Verhältnissen  $a_o/a_u = 3, 5, 10$  stellt sich der Bereich mit der oberen Schranke im Querriegel ein, und zwar symmetrisch zur Rahmenmitte (Abb. 5.49). Erst bei sehr großen Verhältnissen  $a_o/a_u$  treten zwei Bereiche symmetrisch zur Rahmenmitte auf. Macht man den Grenzübergang  $a_o/a_u \rightarrow \infty$ , d.h. Einzelmassen, so kann man die Lage der Einzelmassen berechnen (Abb. 5.53).

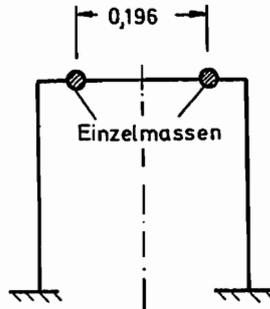


Abb. 5.53

Die Lösungen mit sprunghaftem Verlauf der Querschnittsfläche werden aus Gründen der Rechenzeiterparnis und wegen des günstigeren Konvergenzverhaltens durch Aufstellen der Frequenzgleichung und der Schaltbedingungen an den Sprungstellen berechnet. Die Vorgehensweise ist die gleiche wie in Kapitel 5.1.3. Das nichtlineare Gleichungssystem wird mit dem vorgestellten Algorithmus gelöst.

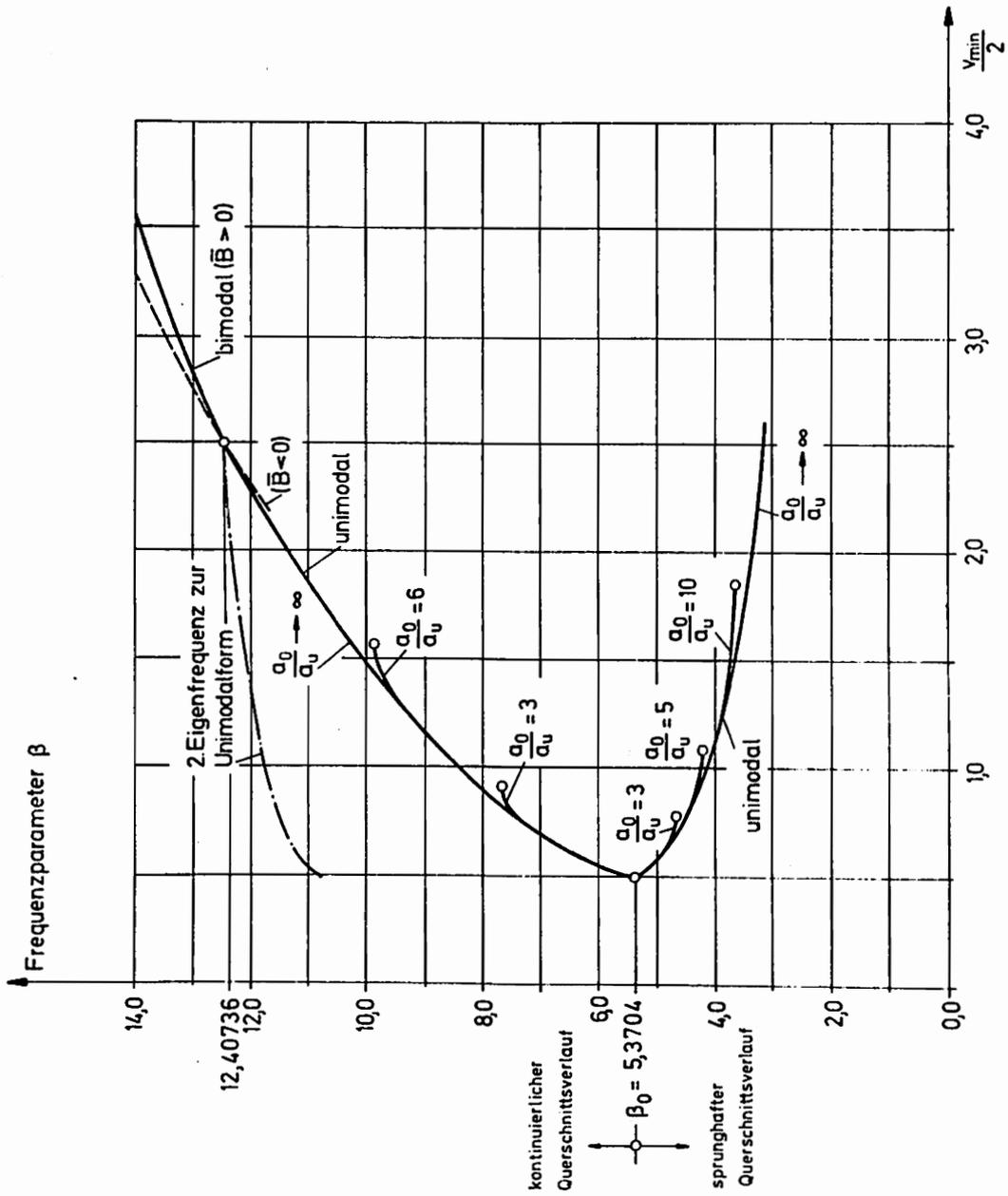


Abb. 5.46: Minimales Volumen als Funktion des Frequenzparameters,  $a_u = 1,0$

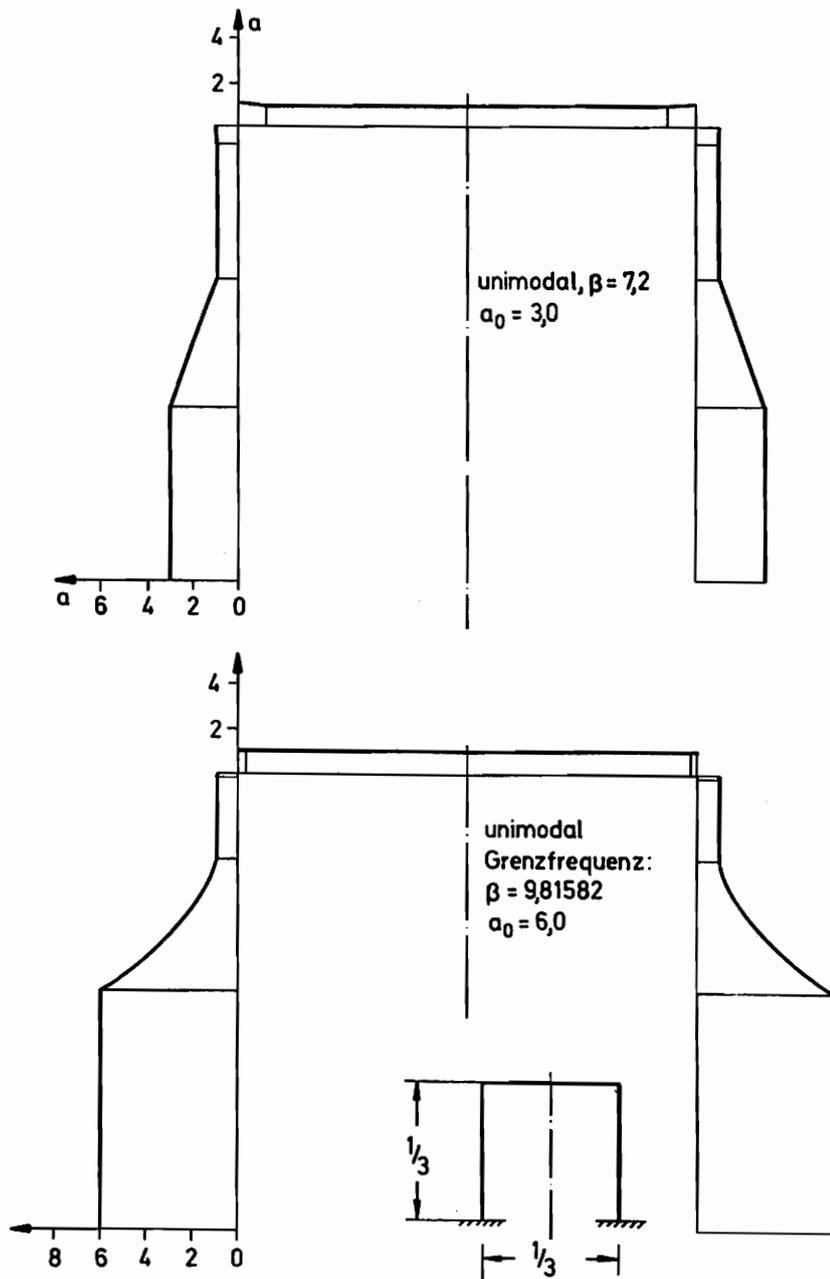


Abb. 5.48: Querschnittsflächen-Verläufe für verschiedene Frequenzen,  $a_u = 1,0$

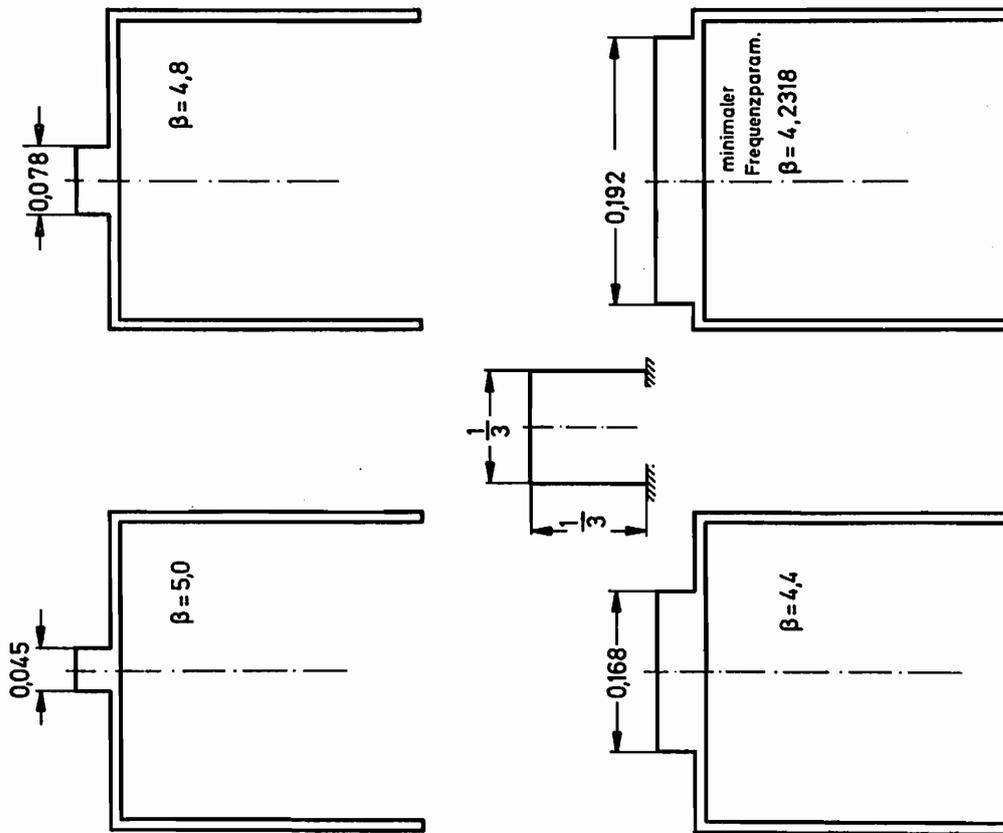


Abb. 5.49: Sprunghafter Verlauf der Querschnittsfläche bei verschiedenen Frequenzen,  
 $a_0 = 5,0$ ,  $a_u = 1,0$

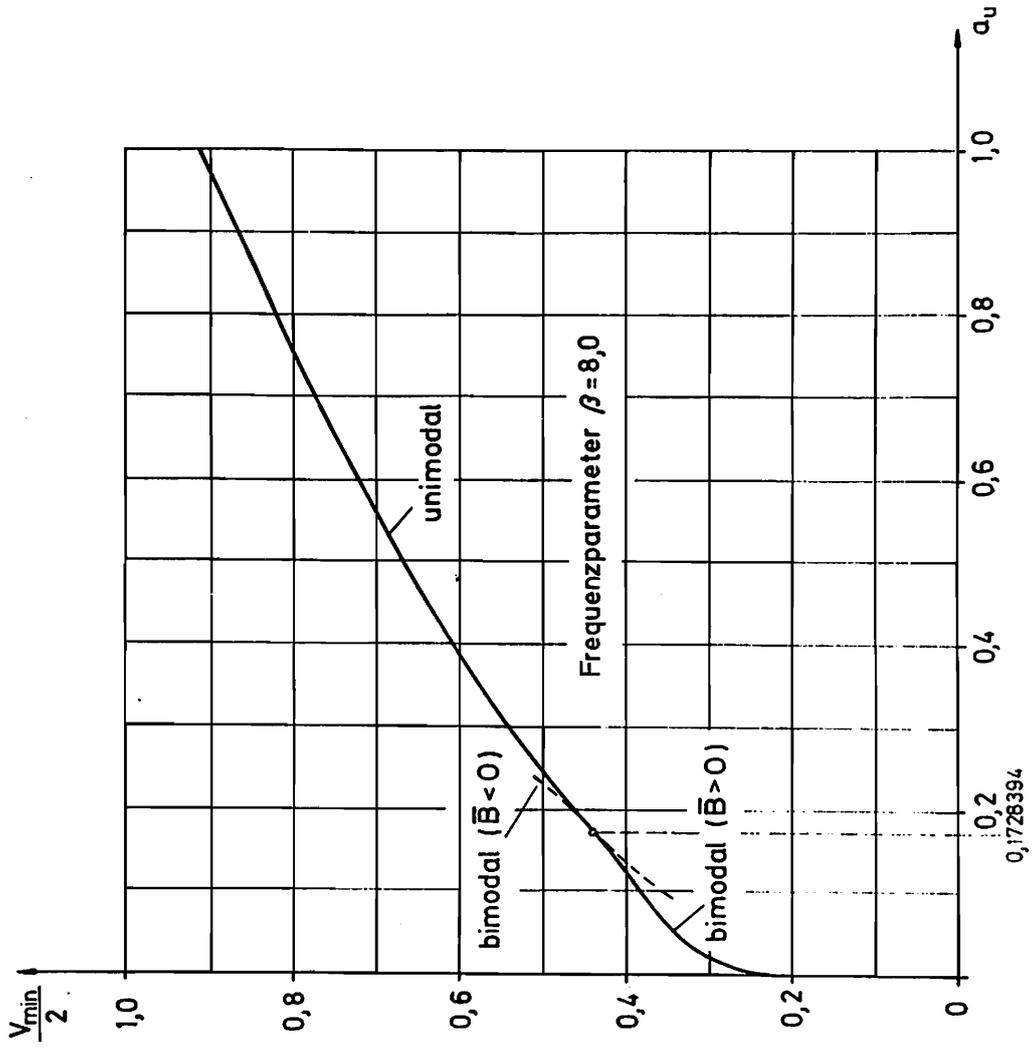


Abb. 5.50: Minimales Volumen als Funktion der unteren Querschnittsflächen-Schranke

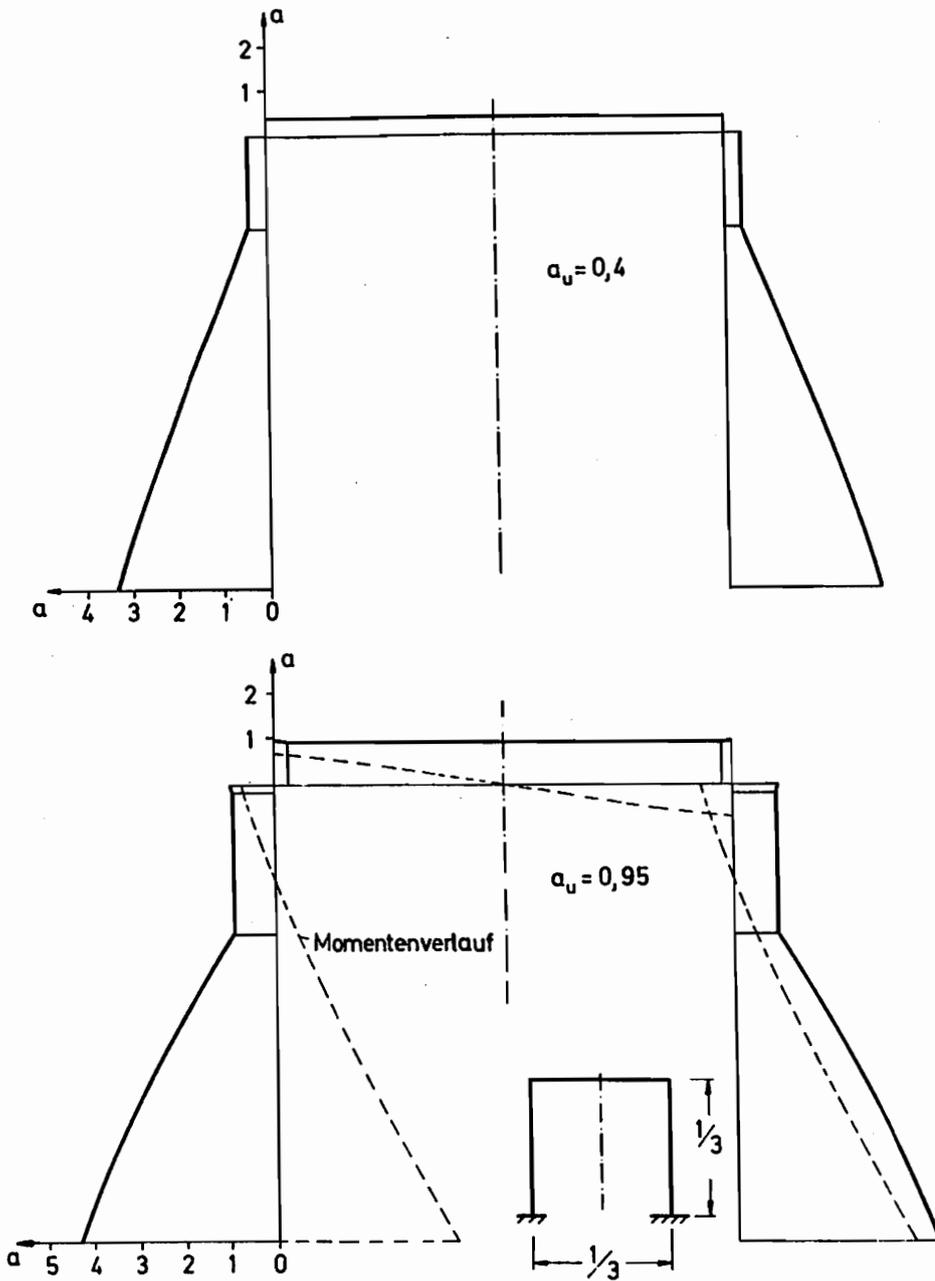


Abb. 5.51: Querschnittsflächen-Verläufe bei variabler unterer Schranke, Unimodalfälle,  $\beta = 8,0$

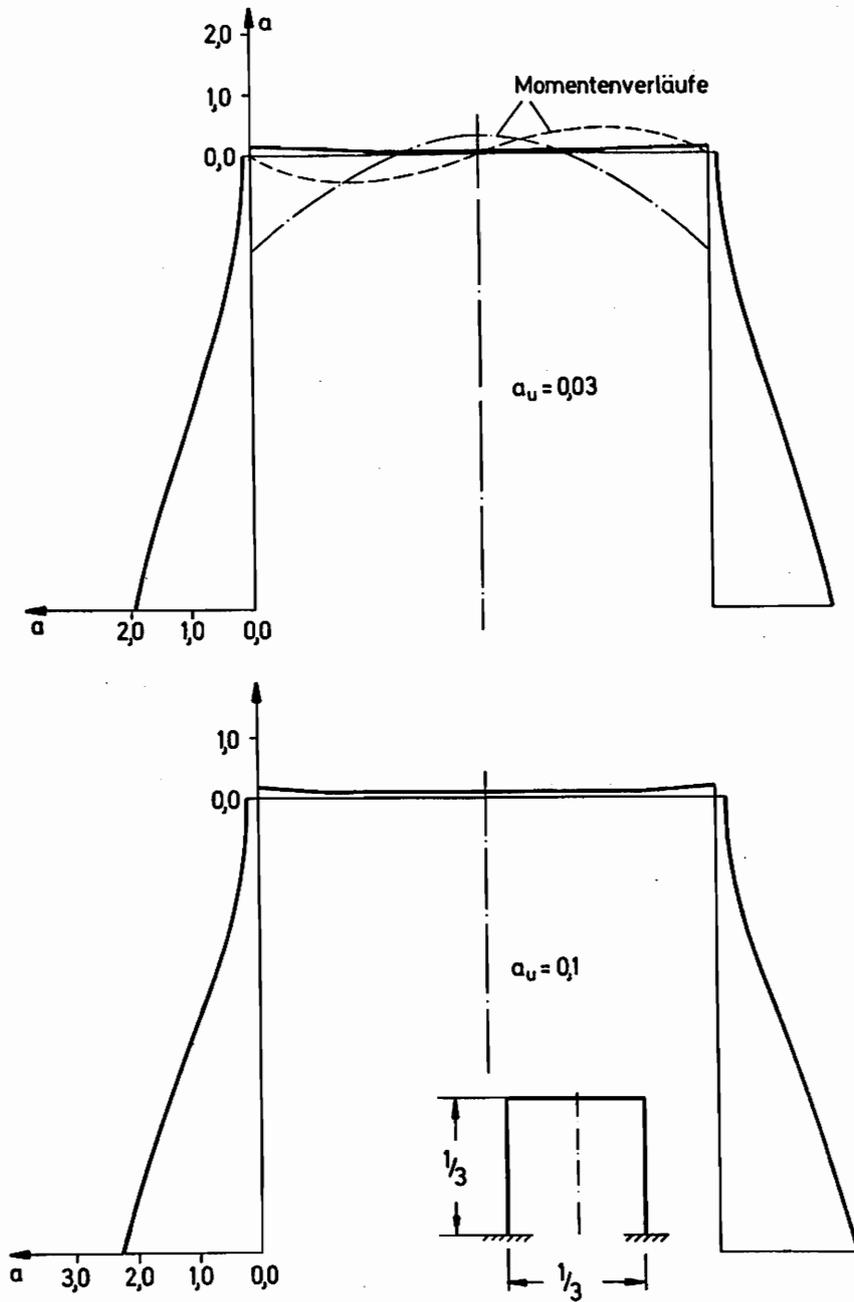


Abb. 5.52: Querschnittsflächen-Verläufe bei variabler unterer Schranke, Bimodalfälle,  $\beta = 8,0$

## 6. Schlußbetrachtungen

Mit der in dieser Arbeit auf mehrläufige Systeme weiterentwickelten Mehrzielmethode hat man ein Verfahren an der Hand, das es gestattet, auch umfangreiche und komplizierte Probleme der Optimierung mechanischer Strukturen zu lösen, die sich auf nichtlineare Randwertaufgaben mit gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückführen lassen. Verschiedene rechte Seiten der Differentialgleichungs-Systeme, wie sie bei der Optimierung vorkommen, werden durch Schaltfunktionen gesteuert. Der Aufbau der Tragwerke aus einzelnen Elementen darf dabei völlig beliebig sein.

Die Mehrzielmethode ist ein Iterationsverfahren, das die Lösung des Randwertproblems mit Bedingungen an den Knotenpunkten ersetzt durch  $n$  Anfangswertprobleme, indem die einzelnen Abschnitte (Intervalle) durch Stützstellen, deren Anzahl und Abstand frei gewählt werden darf, unterteilt und die nicht vorgegebenen Anfangswerte an den Stützstellen und Knotenpunkten geschätzt werden. Die Lösung der Anfangswertaufgabe führt infolge der Stetigkeitsbedingungen an den Stützstellen und der Knotenbedingungen auf ein nichtlineares Gleichungssystem. Auf dieses nichtlineare Gleichungssystem wird ein durch Abstiegs- und Gradientenkriterien modifiziertes Newton-Verfahren, das mit einem Konvergenz erzeugenden Faktor arbeitet, angewandt. Da man es häufig mit schlecht konditionierten Gleichungssystemen zu tun hat, wobei in einem Iterationsschritt auch singuläre Systeme auftreten können, wird in diesem Fall die beim Newton-Verfahren anfallende Berechnung der Inversen ersetzt durch die Pseudoinverse. Der Teil der Lösung, der sich nicht aus dem Newton-Verfahren bestimmen läßt, ist dann durch eine Gradientenbedingung festgelegt.

Die Mehrzielmethode in Verbindung mit dem modifizierten Newton-Verfahren zeigt gute Konvergenzeigenschaften und ist

dem einfachen Schießverfahren weit überlegen. Oftmals wird erst durch die Anwendung der Mehrzielmethode Konvergenz erzeugt. Die Zahl der Stützstellen ist dabei von Bedeutung. Eine mittlere Stützstellenzahl erweist sich als besonders günstig. Kleine (Degeneration auf das einfache Schießverfahren) und sehr hohe Stützstellenzahlen können zur Divergenz führen. Die Ursachen für das schlechte Verhalten bei großen Stützstellenzahlen sind noch nicht ganz geklärt. Es wird beobachtet, daß auch die Lage der Stützstellen nicht ohne Einfluß ist.

Bei komplizierten Problemen ist die Wahl von guten Startwerten für die Konvergenzeigenschaften entscheidend. Eine große Entfernung vom Lösungspunkt führt in der Regel zur Divergenz. Hier muß man auf die Technik von Homotopiemethoden (Parameter-Homotopien und Randwert-Homotopien) zurückgreifen, bei der man das Problem schrittweise in die richtige Lösung deformiert.

Es werden mit der Mehrzielmethode in dieser Arbeit verschiedenartige Aufgaben aus dem Bereich des optimalen Entwurfs von Tragwerken bearbeitet, wobei unterschiedliche Zielfunktionen gewählt werden. Der Steuerbereich der Entwurfsvariablen ist durch Nebenbedingungen eingeschränkt. Die Effizienz der Methode kommt besonders bei den komplizierten Aufgaben zum Tragen. Beim Minimalgewichtsentwurf des mit gegebener erster Eigenfrequenz schwingenden Rahmens ist bei der bimodalen Formulierung beispielsweise ein Randwertproblem 13. Ordnung zu lösen.

Abschließend kann festgestellt werden, daß es sich bei der hier weiterentwickelten Mehrzielmethode um ein universell einsetzbares Verfahren handelt, das für die Optimierung komplizierter mehrläufiger Systeme geeignet ist.

Literaturverzeichnis

- [1] Wasiutyński, Z./A. Brandt: The present state of knowledge in the field of optimum design of structures, Appl. Mech. Rev. 16, 341-350, (1963)
- [2] Sheu, C.Y./ W. Prager: Recent development in optimal design, Appl. Mech. Rev. 21, 985-992, (1968)
- [3] Niordson, F.I./ P. Pedersen: A review of optimal structure design, Proc. 13th Congr. Theoret. Appl. Mech., Held: Moscow 1973, Springer, Berlin 1973
- [4] Życzkowski M.: Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe, Kraków, 1977
- [5] Pontryagin, L.S./ W.G. Boltjanski/ R.W. Gramkrelidse/ E.F. Mishcenko: Mathematische Theorie der optimalen Prozesse, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965
- [6] Levenberg, K.A.: A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares, Quart. Appl. Math. 2, 164-168, (1944)
- [7] Marquardt, D.W.: An algorithm for least-squares-estimation of nonlinear parameters, SIAM J. Appl. Math. 11, 431-441, (1963)
- [8] Powell, M.J.D.: A Fortran subroutine for solving systems of nonlinear algebraic equations, A.E.R.E. Rep. 5947, Harwell, (1968)
- [9] Broyden, C.G.: A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations, Math. Comp. 19, 577-583, (1965)
- [10] Goldstein, A.A.: Cauchy's Methode der Minimierung, Num. Math. 4, 146-150, (1962)

- [11] Stoer, J.: Einführung in die Numerische Mathematik I, Heidelberger Taschenbuch 105, Springer, Berlin 1972
- [12] Bulirsch R./ J. Stoer: Einführung in die Numerische Mathematik II, Heidelberger Taschenbuch 114, Springer, Berlin 1973
- [13] Schwetlick, H.: Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen, R. Oldenbourg Verlag, München 1979
- [14] Deuflhard, P.: Ein Newton-Verfahren bei fastsingulärer Funtionalmatrix zur Lösung von nichtlinearen Randwertaufgaben mit der Mehrzielmethode, Universität zu Köln, Mathematisches Institut, Dissertation 1972
- [15] Keller, H.B.: Numerical methods for two-point boundary-value problems, Blaisdell, London 1968
- [16] Osborne, M.R.: On shooting methods for boundary-value problems, J. Math. Anal. Appl. 27, 417-433, (1969)
- [17] Bulirsch, R.: Die Mehrzielmethode zur numerischen Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung, Vortrag im Lehrgang "Flugbahnoptimierung" der Carl-Cranz-Gesellschaft e.V., Okt. 1971
- [18] Tolle, H.: Optimierungsverfahren, Springer, Berlin 1971
- [19] Boltjanski, W.G.: Mathematische Methoden der optimalen Steuerung, Carl Hanser Verlag, München 1972
- [20] Householder, A.S.: Principles of numerical analysis, McGraw-Hill, New York 1953
- [21] Bouillion, T.L./ P.L. Odell: Generalized Inverse Matrices, Wiley-Interscience, New York 1971
- [22] Wilkinson, J.H.: Rundungsfehler, Heidelberger Taschenbuch 44, Berlin 1969

- [23] Businger, P./ G.H. Golub: Linear least squares solutions by Householder transformations, Num. Math. 7, 269-276, (1965)
- [24] Bulirsch, R./ J. Stoer: Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods, Num. Math. 8, 1-13, (1966)
- [25] Keller, J.B./ I. Tadjbakhsh: Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues, J. of Appl. Mech., 159-164, (1962)
- [26] Olhoff, N./ S.H. Rasmussen: On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns, Int. J. Solids Strukt. 13, 605-614, (1977)
- [27] Löffler, K.: Die Berechnung von rotierenden Scheiben und Schalen, Springer, Berlin 1961
- [28] Hampe, E.: Statik rotationssymmetrischer Flächentragwerke Band 1, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1967
- [29] Niordson, F.I.: On the optimal design of a vibrating beam, Quart. Appl. Math. 23, 1911-1913, (1965)
- [30] Thermann, K.: Zum optimalen Entwurf eines schwingenden Kreisbogenträgers, Zamm 52, T156-T158, (1972)
- [31] Thermann, K.: Optimal design criteria of dynamically loaded elastic structures, Optimization in Structural Design, 152-167, IUTAM Symposium, Warsaw 1973
- [32] Turner, M.J.: Design of minimum mass structures with specified natural frequencies, AIAA J. 5, 406-412, (1967)
- [33] Olhoff, N.: Optimal design of vibrating circular plates, Int. J. Solids Struct. 6, 139-156, (1970)
- [34] Olhoff, N.: Optimization of vibrating beams with respect to higher order natural frequencies, J. Struct. Mech. 4, 87-122, (1976)

Anhang

\*E.0 MODCOMP SOURCE EDITOR            DATE 00/00/00 01:58:33            PAGE 1

```
1            SUBROUTINE OPTAL (F,R,DIFSYF,X,Y,N,M,KPR,EPS,
2            1EPS1,ETA,EKOND,KFMIN,KFA,KP,KCMAX,KSK,JRMAX,IGRUND,KA,KS,
3            2NS,NK,STAB,NKZ,MSCHLT,NU,KSCH,S)
4            C
5            C
6            C OPTAL LOEST EINE OPTIMIERUNGSAUFGABE, DIE IN DER FORM
7            C EINES NICHTLINEAREN RANDWERTPROBLEMS MIT VERZWEIGUNGEN IN
8            C IN DER UNABHAENGIGEN KOORDINATE X BEI BELIEBIGER FORM
9            C DER RAND- UND KNOTENBEDINGUNGEN GEGEBEN IST. DIE RECHTE
10            C SEITE DES NICHTLINEAREN DGL.-SYSTEMS WIRD MIT HILFE VON
11            C SCHALTFUNKTIONEN GESTEUERT.
12            C
13            C UNTERPROGRAMME, DIE IN OPTAL BENOETIGT WERDEN
14            C 1. R            ENTHAELT DIE KNOTENBEDINGUNGEN
15            C 2. DIFSYF       LOEST EIN AN-PROBLEM FUER EIN SYSTEM VON
16            C                    N DGLN. (BESCHREIBUNG SIEHE BEI DIFSYF)
17            C 3. F            BERECHNET DIE RECHTE SEITE DYDX=F(X,Y) FUER
18            C                    DIFSYF (BESCHREIBUNG SIEHE BEI DIFSYF)
19            C 4. S            BERECHNET DIE SCHALTBEDINGUNGEN
20            C
21            C
22            C EINGABE (UEBERSCHRIEBENE GROESSEN MIT * MARKIERT)
23            C N               ANZAHL DER DGLN. (.LE.13)
24            C M               ANZAHL DER STUETZPUNKTE FUER MEHRZIEL-
25            C                    METHODE) (.LE.20)
26            C * X(M),Y(N,M)    STARTTRAJEKTORIE
27            C MSCHLT            ERWARTETE ANZAHL VON SCHALTPUNKTEN
28            C NU               ANZAHL VON SCHALTFUNKTIONEN
29            C KPR               AUSDRUCHPARAMETER
30            C                    0 KOMMENTAR BEI ABRUCH OHNE KONVERGENZ
31            C                    1 + STARTWERTE,
32            C                    ITERIERTE WERTE DER TESTFUNKTIONEN,
33            C                    KONDITIONSSCHRANKE NACH KRITERIUM 1,
34            C                    LOESUNG
35            C                    2 + STUETZPUNKTE DER ITERIERTEN
36            C                    TRAJEKTORIEN
37            C                    3 + RELATIVE DIFFERENZEN AN DEN STUETZ-
38            C                    STELLEN, DIAGONALELEMENTE DER MATRIX
39            C                    E NACH JK*DK=Q*R*S
40            C                    4 + ITERIERTE SCHALTPUNKTE
41            C                    5 + ZWISCHENPUNKTE DER ITERIERTEN
42            C                    TRAJEKTORIEN
```

```
43 C EPS          GEWUENSCHTE RELATIVE GENAUIGKEIT
44 C EPS1         RELATIVE GENAUIGKEIT FUER DIFSYF
45 C ETA          PARAMETER DER NUMERISCHEN DIFFEREN-
46 C              TIATION (ETWA ETA=SQRT(10*EPS1))
47 C EKOND        OBERE SCHRANKE FUER DIE KONDITION DER
48 C              MATRIX E NACH KRITERIUM 1
49 C * KFA        LAMBDA=2**(-KFA), KFA.GE.0
50 C KFMIN        RANGSTRATEGIE BEI KFA.GT.KFMIN, FUER
51 C              KRITERIUM 2 (ETWA KFMIN=4)
52 C KP           MAXIMALE ANZAHL AN REKURSIVEN APPROXIMA-
53 C              TIONEN NACH BROYDEN
54 C              (ETWA KP=2*N)
55 C KCMAX        MAXIMALE ANZAHL AN ITERATIONEN
56 C KSCH         0 M,X(M) AUSGABE WIE EINGABE
57 C              1 M,X(M) BEI AUSGABE UEBERSCHRIEBEN
58 C              STUETZPUNKTE UND SCHALTPUNKTE SORTIERT
59 C KSK          0 UNSKALIERTER APPROXIMATION NACH BROYDEN
60 C              1 SKALIERTER APPROXIMATION NACH BROYDEN
61 C JRMAX        MAXIMALE ANZAHL AN DIFSYF-AUFRUFEN PRO
62 C              INTERVALL (ETWA JRMAX=50)
63 C IGRUND       1 NUR EINE TRAJEKTORIE GERECHNET
64 C              (AW.-AUFGABE)
65 C              -1 MEHRZIELMETHODE (RANDWERTAUFGABE)
66 C KA           VORGEGEBENER MAXIMALRANG VON E (KA.LE.N)
67 C              -1 KEIN MAXIMALRANG VORGEGEBEN
68 C * KS         STARTRANG, .GE.0 (FUER M.GT.2), .LE.KA
69 C              -1 KEIN STARTRANG VORGEGEBEN
70 C NS           ANZAHL DER EINLAEUFIGEN ABSCHNITTE
71 C              (GERADEN STABABSCHNITTE)
72 C NK           ANZAHL DER KNOTEN (RANDBEDINGUNGEN ZAEHLEN
73 C              ALS EIN KNOTEN)
74 C STAB(I,K)    FELD, DAS ANGIBT, WELCHE STUETZSTELLEN
75 C              UND KNOTENPUNKTE ZUM ANFANGS- BZW. END-
76 C              PUNKT EINES EINLAEUFIGEN ABSCHNITTES
77 C              (GERADEN STABABSCHNITTES) GEHOEREN.
78 C              STUETZSTELLEN INNERHALB EINES AB-
79 C              SCHNITTES MUESSEN FORTLAUFEND
80 C              NUMMERIERT SEIN.
81 C              K....ABSCHNITTSHUMMER (STABNUMMER)
82 C              STAB(I,K)=J1.....J1 IST NUMMER DER
83 C              1. STUETZSTELLE
84 C              DES K. ABSCHNITTES (STABES)
```

```
85 C STAB(2,K)=J2.....J2 IST NUMMER DER VORLETZ-
86 C TEN STUETZSTELLE DES K. AB-
87 C SCHNITTES (STABES)
88 C STAB(3,K)=J3.....J3 IST NUMMER DES LINKEN
89 C KNOTENS DES K. ABSCHNIT-
90 C TES (STABES)
91 C STAB(4,K)=J4.....J4 IST NUMMER DES RECHTEN
92 C KNOTENS DES K. ABSCHNIT-
93 C TES (STABES)
94 C NKZ(I,K) FELD, DAS ANGIBT, WELCHE ABSCHNITTE (STAEBE)
95 C I AM KNOTEN K ANKOMMEN (VOM KNOTEN AUS FALLEN-
96 C DE STUETZSTELLENZAHL) BZW. ABGEHEN (VOM
97 C KNOTEN AUS STEIGENDE STUETZSTELLENZAHL).
98 C NKZ(I,K)=0.....I-TER ABSCHNITT (STAB) BE-
99 C RUEHRT DEN K. KNOTEN NICHT
100 C NKZ(I,K)=-1.....I-TER ABSCHNITT (STAB)EN GEHT
101 C VOM K. KNOTEN AB
102 C NKZ(I,K)=1.....I-TER ABSCHNITT (STAB) KOMMT
103 C AM K. KNOTEN AN
104 C BEISPIEL: SYSTEM HAT 6 GERADE STAEBE
105 C STAB 2 UND 4 KOMMEN AN, STAB 5
106 C GEHT AB, AN KNOTEN 3
107 C NKZ(I,3)=(0,1,0,1,-1,0)
108 C
109 C
110 C AUSGABE
111 C M ANZAHL DER STUETZPUNKTE FUER MEHRZIELMETHODE
112 C FALLS KSCH=0, WIE EINGABE
113 C FALLS KSCH=1, ANZAHL DER STUETZPUNKTE
114 C + SCHALTPUNKTE
115 C X(N),Y(N,M) LOESUNG
116 C J ANZAHL DER ITERATIONEN, FALLS J.GT.0
117 C -1 BEI ABRUCH OHNE KONVERGENZ
118 C
119 C
120 EXTERNAL F,R,S
121 DIMENSION X(1),Y(10,28),
122 1U(50),V(50),W(28),W1(10),A(16,10,6),E(50,50),EH(50,50),
123 2HH(10,20),DY(10,20),YA(10,20),YU(10,28),YW(10,20),
124 3JS(28),XX(28),U1(50),D(50),UA(50),HHA(10,28),
125 4UU(50),UE(20,5),UEA(20,5),VY(10),GK(16,10,6),
126 5QA(3),QM(3),QN(3),DQ(3),DQA(3),G(10,10,20)
```

```
127     INTEGER ISP(50), ISA(50), NNZ(5), STAB(4,6), NKZ(6,5),
128     1STABS(2,6)
129     COMMON J, UU1(28,3), II
130 C STARTWERTE
131     KT=0
132     EP2=1.0/(EKOND*EKOND)
133     KC=0
134     NEU=0
135     KP1=KP+1
136     M1=M-1
137     M2=M-2
138     KY=0
139     N1=N+1
140     MD=M
141     NNS=NS*N
142     MNS=M+MSCHLT
143     FA=1.0
144     IF (KFA.LT.0) KFA=0
145     IF (KFA.GT.KFMIN) KFA=KFMIN
146     IF (KFA.LE.0) GOTO 105
147     DO 1050 I=1,KFA
148 1050 FA=FA*0.5
149 105  KF=1
150     EPI=EPSI
151     DO 11 I=1,N
152 C BERECHNUNG DER SKALIERUNGSMATRIZEN YW(I,J)
153 C ZEILE I ENTHAELT MITTELWERT DER ZUSTANDSVARIABLEN
154 C YI UEBER ZAHL DER STUETZSTELLEN J
155     T=0.0
156     DO 10 J=1,M
157 10  T=T+ABS(Y(I,J))
158     T=T/FLOAT(M)
159     IF (T.LT.1.0E-30) T=1.0
160     DO 11 J=1,M
161 11  YW(I,J)=T
162 C AUSDRUCK DER EINGABEWERTE
163     IF (KPR.LT.1) GOTO 1171
164     WRITE (6,106)
165     WRITE (6,107) N,M,EPS,EPSI,ETA,EKOND,FA,KFMIN,KP,KSK,
166     1KCHAX,JRMAX,IGRUND,KA,KS,MSCHLT,HU,KSCH
167     WRITE (6,108)
168     DO 1081 J=1,MD
```

```
169 1081 WRITE (6,1082) X(J),(Y(I,J),I=1,N)
170      WRITE (6,1061)
171      WRITE (6,109)
172 1171 CONTINUE
173 C BERECHNUNG DER TRAJEKTORIEN
174 1 MS=NS
175      IS=0
176 C TESTFUNKTION 1 OHNE SKALIERUNG
177      SAN=0.0
178 C TESTFUNKTION 1 MIT SKALIERUNG
179      SUM1=0.0
180 C KN IST KONVERGENZFAKTOR, BLEIBT KN=1 IST LOESUNG GEFUNDEN
181      KN=1
182      M=MD
183      MM=MD
184      DO 1501 I=1,NS
185      DO 1501 K=1,2
186 1501 STABS(K,I)=STAB(K,I)
187      LD=0
188      DO 17 I=1,NU
189 17 QM(I)=0.0
190      DO 15 I=1,MMS
191 15 JS(I)=0
192      IA=1
193 2707 DO 2700 II=IA,NS
194      JA=STAB(1,II)
195      JAA=STABS(1,II)
196      JE=STAB(2,II)
197      JEA=STABS(2,II)
198      HX=X(JA+1)-X(JA)
199      HR=HX
200      J=JAA
201      JJ=JA
202      XX(J)=X(JJ)
203 12 J1=J+1
204      JJ1=JJ+1
205      JR=0
206      XX(J1)=X(JJ1)
207      ZAEHL=2.
208 2344 CONTINUE
209      DO 21 K=1,N
210 21 U(K)=Y(K,JJ)
```

```
211      X1=XX(J)
212      X2=XX(J1)
213      XEPS=(ABS(X1)+ABS(X2))*5.0E-13
214      H=HR
215      LS=-1
216      JT=-1
217      LD=-2
218      CALL S(X1,U,NU,QN,DQ,JT,LS,LD)
219      LD=0
220      CALL S(X1,U,NU,QN,DQ,JT,LS,LD)
221      GOTO 211
222      20 DO 201 I=1,N
223      201 U(I)=V(I)
224      X1=XA
225      H=HA
226      JS(J1)=JT
227      GOTO 204
228      22 DO 203 I=1,N
229      203 V(I)=U(I)
230      XA=X1
231      JT=0
232      204 HA=H
233      CALL DIFSYF (N,F,EPS1,H,X1,U)
234      XA1=X1-XA
235      IF (ABS(HA).GT.ABS(XA1)) HA=XA1
236      IF (H.EQ.0.0.OR.JR.GE.JRMAX) GOTO 970
237      JR=JR+1
238      C   BESTIMMUNG DES SCHALTPUNKTES
239      IF (JT.GE.1) GOTO 2251
240      DO 2219 I=1,NU
241      QA(I)=QN(I)
242      DQA(I)=DQ(I)
243      DD=ABS(QN(I))
244      IF (DD.GT.QN(I)) QN(I)=DD
245      2219 CONTINUE
246      2251 LS=-1
247      JY=JT
248      2200 CONTINUE
249      CALL S(X1,U,NU,QN,DQ,JT,LS,LD)
250      C
251      C   DRUCKBEFEHLE
252      IF (KPR.EQ.4.AND.JT.EQ.LS) GOTO 1087
```

```
253     IF (KPR.LT.5) GOTO 1086
254 1087 WRITE (6,1083)
255     WRITE (6,1971) II
256     WRITE (6,1082) X1,(U(I),I=1,N)
257     WRITE (6,1084)
258     WRITE (6,1085) (QN(I),DQ(I),I=1,NU)
259 1086 CONTINUE
260 C
261 C PARAMETER-STEUERUNG BEI DER SUCHE DER SCHALTPUNKTE
262     IF (JT.EQ.0) GOTO 211
263     IF (LD.EQ.-1) GOTO 2204
264     IF (JT.EQ.LS) GOTO 2215
265     IF (JV.EQ.JT) GOTO 2201
266     GOTO 2210
267 2201 IF (ABS(QN(JT)).LT.EP1*QN(JT)) GOTO 2202
268     GOTO 2203
269 2202 LS=JT
270     IF ((X1.LT.XX(J)).OR.(X1.GT.XX(J1))) GOTO 2343
271     GOTO 2200
272 2343 HR=(XX(J1)-XX(J))/ZAEHL
273     ZAEHL=ZAEHL*ZAEHL
274     JR=0
275     GOTO 2344
276 2203 IF (JX.EQ.1) GOTO 2209
277 C
278     HA=HA-QN(JT)/DQ(JT)
279     GOTO 20
280 2209 JX=0
281     IF (QN(JT)*Q2.GE.0.0) GOTO 2206
282     GOTO 2205
283 C
284 C VORITERATION MIT HERMITE-INTERPOLATION
285 2206 Q2=QN(JT)
286     D2=DQ(JT)
287     HY=0.0
288     GOTO 2207
289 2205 A1=QN(JT)
290     B1=DQ(JT)
291     HY=HA
292     HA=HY-HA
293     GOTO 2207
294 2210 A1=QA(JT)
```

```
295      B1=DQA(JT)
296      Q2=QN(JT)
297      D2=DQ(JT)
298      JX=1
299      JW1=0
300      HY=0.0
301      HV=HA
302      HR=H
303  2207  QQ=Q2-A1
304      AN=(B1+D2)*HA
305      H2=HA*HA
306      C1=(3.0*QQ-AN-B1*HA)/H2
307      DDD=(AN-2.0*QQ)/(H2*HA)
308      C12=C1+C1
309      D13=DDD+DDD+DDD
310      H3=ABS(HA)*EPS
311      HW=HA
312      GA=A1/(A1-Q2)
313      IF (A1.EQ.0.0) GA=1.0/(1.0-Q2/(HA*B1))
314      IF (GA.GT.1.0.OR.GA.LE.0.0) GA=0.5
315      HZ=HA*GA
316      HA=HZ
317      JW=0
318  2218  HN=HA
319      JW=JW+1
320      IF (JW.LT.11) GOTO 2213
321      HA=HZ+HY
322      GOTO 20
323  C
324  C      NEWTON-VERFAHREN MIT INTERPOLATIONSPOLYNOM
325  2213  HA=HN-(((DDD*HN+C1)*HN+B1)*HN+A1)/((D13*HN+C12)*HN+B1)
326      IF (ABS(HA-HN).GT.H3) GOTO 2218
327      Z2=HA*HW
328      IF (Z2.LE.0.0.OR.Z2.GT.H2) HA=HZ
329      HA=HA+HY
330      GOTO 20
331  C
332  C      EINGLIEDERN DER SCHALTPUNKTE UND EVENTUELLER NEUER
333  C      STUETZPUNKTE
334  2215  IF (IS.EQ.0) GOTO 2216
335      GOTO 2217
336  2216  HC=HR
```

```
337      IS=II
338      MS=IS
339  2217  M11=MM
340      MM=MM+1
341      JEA=STABS(2,II)
342      KK=JEA
343      JJE=JEA-J+1
344      JEA=JEA+1
345  2806  JMAX=M11-1
346  2808  IF (JMAX.EQ.KK) GOTO 2809
347      DO 2811 L=1,MS
348      I=STABS(2,L)
349      IF (I.NE.JMAX) GOTO 2811
350      LL=L
351      GOTO 2923
352  2811  CONTINUE
353  2923  JAA=STABS(1,LL)+1
354      STABS(1,LL)=JAA
355      STABS(2,LL)=STABS(2,LL)+1
356      JE1=STABS(2,LL)+1
357      JMAX=JAA-3
358      JEA1=JE1-JAA+1
359      DO 2810 K=1,JEA1
360      JK=JE1-K
361      JI=JK+1
362      DO 2861 L=1,NU
363  2861  UU1(JI,L)=UU1(JK,L)
364      JS(JI)=JS(JK)
365  2810  XX(JI)=XX(JK)
366      GOTO 2808
367  2809  J=J1
368      J1=J+1
369      STABS(2,II)=JEA
370      XX(J)=X1
371      XX(J1)=X2
372      H=HR
373      LD=-1
374      GOTO 2200
375  2204  LD=0
376      IF (KY*KSCH.NE.0.OR.IGRUND.GT.0) GOTO 205
377      GOTO 211
378  C
```

```
379      205 M1=M
380          M=M+1
381          KK=JE
382          JJE=JE-J+2
383          JE=JE+1
384      2706 JMAX=M1-1
385      2708 IF (JMAX.EQ.KK) GOTO 2709
386          DO 2711 L=1,N
387          I=STAB(2,L)
388          IF (I.NE.JMAX) GOTO 2711
389          LL=L
390          GOTO 2913
391      2711 CONTINUE
392      2913 JA=STAB(1,LL)+1
393          STAB(1,LL)=JA
394          STAB(2,LL)=STAB(2,LL)+1
395          JE1=STAB(2,LL)+1
396          JMAX=JA-3
397          JE11=JE1-JA+1
398          DO 2710 K=1,JE11
399          JK=JE1-K
400          JI=JK+1
401          X(JI)=X(JK)
402          DO 2710 I=1,N
403      2710 Y(I,JI)=Y(I,JK)
404          GOTO 2708
405      2709 JJ=J
406          JJ1=J1
407          STAB(2,II)=JE
408          JE2=JE+1
409          DO 206 K=1,JJE
410          JK=JE2-K
411          JI=JK+1
412          X(JI)=X(JK)
413          DO 206 I=1,N
414      206 Y(I,JI)=Y(I,JK)
415          X(J)=X1
416          DO 2061 I=1,N
417      2061 Y(I,J)=U(I)
418      211 H1=X2-X1
419          IF (ABS(H1).LE.XEPS) GOTO 24
420          Q=H1/H
```

```
421      IF (Q-1.0E-15) 24,24,23
422  23   IF (Q-1.0) 25,22,22
423  25   HR=H
424      H=H1
425      GOTO 22
426  24   IF (JJ.NE.JE) GOTO 246
427  C
428  C Y(I,JE+1)
429      DO 245 I=1,N
430      YU(I,JJ)=U(I)
431  245   Y(I,JJ1)=U(I)
432  246   IF (JJ.EQ.JE) GOTO 2701
433  C
434  C YU(K,I)=Y(Y(K,I),X)
435      DO 26 K=1,N
436  26   YU(K,JJ)=U(K)
437      JJ=JJ1
438      J=J1
439      GOTO 12
440  2701  JEA=STABS(2,II)+1
441      JS(JEA)=0
442  2700  CONTINUE
443  261   IF (KY.EQ.1) GOTO 94
444      IF (NS.EQ.NS) HC=HR
445      IF (KPR.GT.3) WRITE (6,7821) (XX(I),I=1,MM)
446  7821  FORMAT (' STUETZ- UND SCHALTSTELLEN',/, (6E17.7))
447      IF (KPR.GT.3) WRITE (6,7822) (JS(I),I=1,MM)
448  7822  FORMAT (' JS(I)',/, (10I4))
449      IF (KPR.LT.4) GOTO 7823
450      DO 7824 K=1,NU
451  7824  WRITE (6,7825) (UU1(I,K),I=1,MM)
452  7825  FORMAT (' SCHALT',/, (10E12.6))
453  7823  CONTINUE
454  C STETIGKEITSBEDINGUNGEN AN DEN STUETZSTELLEN
455  C UND KNOTENPUNKTEN
456  C SUM1 SKALIERTER FEHLERNORM
457  C SAN UNSKALIERTER FEHLERNORM
458  C FUER TESTFUNKTION F(TRANS)*F
459      IF (KY.EQ.1) GOTO 265
460  C STUETZSTELLEN
461      DO 250 L=1,NS
462      JA=STAB(1,L)
```

```
463      JE=STAB(2,L)
464      MM=JE-JA
465      JE1=JE-1
466      IF (MM.EQ.0) GOTO 250
467      DO 266 I=JA,JE1
468      IK=I+1
469      DO 266 K=1,N
470      T=YU(K,I)-Y(K,IK)
471      HH(K,I)=T
472      SAN=SAN+T*T
473      T=T/YU(K,IK)
474      266  SUM1=SUM1+T*T
475      250  CONTINUE
476      C KNOTENPUNKTE
477      DO 252 IK=1,NK
478      L=0
479      LL=0
480      LLL=0
481      DO 253 K=1,NS
482      IF (NKZ(K,IK).EQ.0) GOTO 253
483      IF (NKZ(K,IK).EQ.1) GOTO 254
484      JA=STAB(1,K)
485      DO 255 KK=1,N
486      L=L+1
487      255  UU(L)=Y(KK,JA)
488      GOTO 253
489      254  JE=STAB(2,K)
490      DO 256 KK=1,N
491      LL=LL+1
492      256  U(LL)=YU(KK,JE)
493      253  CONTINUE
494      CALL R(IK,U,UU,W,NZ)
495      NNZ(IK)=NZ
496      DO 257 I=1,NZ
497      T=W(I)
498      UE(I,IK)=T
499      SAN=SAN+T*T
500      257  SUM1=SUM1+T*T
501      252  CONTINUE
502      265  IF (IGRUND.GT.0) GOTO 94
503      IF (KC.EQ.0) GOTO 30
504      IF (KS.EQ.0) GOTO 722
```

```
505      GOTO 520
506      30  NB=NNS
507      IF (KA.LT.O.OR.KA.GT.NB) KA=NB
508      IF (KS.LT.O.OR.KS.GT.KA) KS=KA
509      NB1=NB+1
510      GOTO 2961
511  C EINSCHUB FUER FA-STRATEGIE
512      298  KF=1
513      KFA=KFA+1
514  C ABFRAGE NACH KRITERIUM 2: LAMBDA.LE.LAMBDA MIN
515      IF (KFA.GT.KFMIN) GOTO 292
516      FA=FA*0.5
517      DO 299 J=1,NS
518      JA=STAB(1,J)
519      JE=STAB(2,J)
520      MM=JE-JA
521      IF (MM.EQ.O) GOTO 299
522      DO 2993 K=JA,JE
523      DO 2993 I=1,N
524      2993 Y(I,K)=YA(I,K)+FA*DY(I,K)
525      299  CONTINUE
526      GOTO 1
527  C EINSCHUB FUER RANGSTRATEGIE: RANG KS
528      292  IF (KS.EQ.O) GOTO 980
529      SAA=SAA
530      KT=0
531      KC=KC-1
532      DO 290 I=1,NHS
533      U(I)=UA(I)
534      U(I)=UA(I)
535      IF (KS.EQ.NB.OR.I.GE.KS) GOTO 290
536      DO 291 K=KS1,NB
537      291  E(I,K)=EH(I,K)
538      290  CONTINUE
539      DO 2910 I=1,N
540      DO 2910 J=1,M
541      2910 Y(I,J)=YA(I,J)
542      DO 2911 L=1,NS
543      JA=STAB(1,L)
544      JE=STAB(2,L)
545      JE1=JE-1
546      MM=JE-JA
```

```
547         IF (MM.EQ.0) GOTO 2911
548         DO 2912 I=JA,JE1
549         DO 2912 K=1,N
550 2912 HH(I,K)=HHA(I,K)
551 2911 CONTINUE
552         DO 2915 J=1,NK
553         NN=NNZ(J)
554         DO 2915 K=1,NN
555 2915 UE(K,J)=UEA(K,J)
556         KS=KS-1
557         GOTO 736
558 C VORBEREITUNGEN FUER DIE NAECHSTE ITERATION
559 297 KT=0
560 C EINSCHUB FUER FA-STRATEGIE
561         FAA=FA
562         IF (KF.EQ.1.OR.KFA.EQ.0) GOTO 296
563         FA=FA+FA
564         KFA=KFA-1
565 296 KF=0
566         DO 2971 I=1,N
567         DO 2971 K=1,NS
568         JA=STAB(1,K)
569         JE=STAB(2,K)
570         JE1=JE+1
571         DO 2975 J=JA,JE1
572 C WECHSEL DER SKALIERUNG YW(I,J)
573         T=.5*(ABS(Y(I,J))+ABS(YA(I,J)))
574         IF (T.LT.ABS(DY(I,J))) GOTO 2975
575         IF (T.LT.ETA) GOTO 2975
576         YW(I,J)=T
577 2975 CONTINUE
578 2971 CONTINUE
579 C DRUCKBEFEHLE
580         IF (KPR.LT.2) GOTO 2962
581         WRITE (6,952)
582         DO 2973 J=1,M1
583 2973 WRITE (6,1082) X(J),(Y(I,J),I=1,N)
584         WRITE (6,1082) X(MD),(YU(I,M1),I=1,N)
585 2962 CONTINUE
586 C
587         NEW=NEW+1
588         IF (NEW.GT.KP1) NEW=0
```

```
589         IF (KS.LT.NB.OR.KFA.GT.1) NEW=0
590 C NUMERISCHE DIFFERENTIATION; ERZEUGUNG DER G(I,K,JJ)
591 C DURCH VARIIERTE TRAJEKTORIEN
592   2961 CONTINUE
593         DO 242 II=1,NS
594           JA=STAB(1,II)
595           JAA=STABS(1,II)
596           JE=STAB(2,II)
597           JEA=STABS(2,II)
598           IF (NEW.GT.0) GOTO 1503
599           GOTO 1504
600   1503 JA=JE
601         XAA=X(JA)
602         JEA1=JEA+1
603         DO 1505 I=JAA,JEA1
604           IF (JS(I).EQ.1) GOTO 1514
605           GOTO 1505
606   1514 IF (XAA.LT.XX(I)) GOTO 1506
607         GOTO 1505
608   1506 JAA=I-1
609         GOTO 1504
610   1505 CONTINUE
611         JAA=JEA
612   1504 JE1=JE+1
613         HX=XX(JAA+1)-X(JA)
614         HR=HX
615         JJ=JA
616         J=JAA
617   13    J1=J+1
618         JJ1=JJ+1
619         XJJ=X(JJ)
620         XJJ1=X(JJ1)
621         X11=XX(J)
622         X22=XX(J1)
623         XEPS=(ABS(X11)+ABS(X22))*5.0E-13
624         DO 28 I=1,N
625   273  DO 27 K=1,N
626   27    V(K)=Y(K,JJ)
627         VS=V(I)
628         JR=0
629         JW1=0
630         JZ=0
```

```
631      X1=X11
632      X2=X22
633      H=HR
634      T=YW(I, JJ)*ETA
635      IF (YS.LT.0.0) T=-T
636      ST=YS+T
637      V(I)=ST
638      T=1.0/T
639  C
640  C VARIIERTE TRAJEKTORIEN
641    215  LD=1
642      JT=0
643      GOTO 212
644    221  DO 2031 L=1, N
645    2031  U1(L)=V(L)
646      XA=X1
647      HA=H
648    2041  CALL DIFSYF (N, F, EPS1, H, X1, V)
649      JR=JR+1
650      IF (JR.GE.JRMAX.OR.H.EQ.0.0) GOTO 2412
651    212  H1=X2-X1
652      IF (ABS(H1).LE.XEPS) GOTO 241
653      Q=ABS(H1/H)
654      IF (Q-1.0E-15) 241, 241, 231
655    231  IF (Q-1.01) 251, 2310, 2310
656    251  HR1=ABS(H)*HX/ABS(HX)
657      H=H1
658    2310  IF (JT) 221, 221, 2041
659    241  IF (JT.NE.0) GOTO 2411
660      IF (JS(J1).LT.1) GOTO 2422
661  C
662  C BESTIMMUNG DES VARIierten SCHALTPUNKTES
663      HA=X1-XA
664      JT=JS(J1)
665      LS=-1
666    2411  CALL S(X1, V, NU, QN, DQ, JT, LS, LD)
667      IF (LD.EQ.-1) GOTO 215
668      IF (ABS(QN(JT)).LT.EP1*QN(JT)) GOTO 2415
669  C
670  C NEWTON-VERFAHREN
671      HA=HA-QN(JT)/DQ(JT)
672      DO 2001 L=1, N
```

```
673 2001 V(L)=U1(L)
674      X1=XA
675      X2=XA+HA
676      HJJ=X2-XJJ
677      HJJ1=X2-XJJ1
678      IF (HJJ#HJJ1.LE.0.0) GOTO 2413
679      IF (ABS(HJJ).LT.ABS(HJJ1)) GOTO 2410
680      HA=XJJ1-XA
681      X2=XJJ1
682      GOTO 2413
683 2410 HA=XJJ-XA
684      X2=XJJ
685 2413 H=HA
686      GOTO 2041
687 2415 J=J1
688      J1=J+1
689      X2=XX(J1)
690      JZ=JZ+1
691      LS=JT
692      LD=-1
693      JW1=0
694      H=X2-X1
695      GOTO 2411
696 C
697 C FEHLAUSGANG
698 2412 IF (ETA.LT.0.0) GOTO 969
699      ETA=-ETA
700      J=J-JZ
701      J1=J1-JZ
702      GOTO 273
703 2422 IF (ETA.LT.0.0) ETA=-ETA
704      J=J-JZ
705      J1=J1-JZ
706      DO 281 K=1,N
707 281  G(K,I,JJ)=T*(V(K)-YU(K,JJ))
708 28  CONTINUE
709      HR=HR1
710      J=J1+JZ
711      JJ=JJ1
712      IF (JJ.NE.JE1) GOTO 13
713 242  CONTINUE
714 C EINARBEITEN DER KNOTENPUNKTE
```

```
715 C
716 DO 2450 LL=1,NK
717 L=0
718 LLL=0
719 DO 2451 K=1,NS
720 IF (NKZ(K,LL).EQ.0) GOTO 2451
721 IF (NKZ(K,LL).EQ.1) GOTO 2452
722 JA=STAB(1,K)
723 DO 2453 J=1,N
724 L=L+1
725 2453 UU(L)=Y(J,JA)
726 GOTO 2451
727 2452 JE=STAB(2,K)
728 DO 2454 J=1,N
729 LLL=LLL+1
730 2454 U(LLL)=YU(J,JE)
731 2451 CONTINUE
732 IK=0
733 IL=0
734 DO 2460 K=1,NS
735 IF (NKZ(K,LL).EQ.0) GOTO 2460
736 IF (NKZ(K,LL).EQ.1) GOTO 2455
737 JA=STAB(1,K)
738 DO 2496 J=1,N
739 IK=IK+1
740 DO 2463 KK=1,L
741 2463 V(KK)=UU(KK)
742 YS=V(IK)
743 T=YU(J,JA)*ETA
744 IF (YS.LT.0.0) T=-T
745 ST=YS+T
746 V(IK)=ST
747 T=1.0/T
748 CALL R(LL,U,V,W,NN)
749 DO 2456 I=1,NN
750 2456 A(I,J,K)=T*(W(I)-UE(I,LL))
751 2496 CONTINUE
752 GOTO 2460
753 2455 JE=STAB(2,K)
754 JE1=JE+1
755 DO 2497 J=1,N
756 IL=IL+1
```

```
757      DO 2464 KK=1,LLL
758 2464 V(KK)=U(KK)
759      YS=V(IL)
760      T=YU(J,JE)*ETA
761      IF (YS.LT.0.0) T=-T
762      ST=YS+T
763      V(IL)=ST
764      T=1.0/T
765      CALL R(LL,V,UU,W,NN)
766      DO 2457 I=1,NN
767 2457 GK(I,J,K)=T*(W(I)-UE(I,LL))
768 2497 CONTINUE
769      DO 2458 I=1,NN
770      DO 2491 J=1,N
771      ST=0.0
772      DO 2492 JJ=1,N
773 2492 ST=ST+GK(I,JJ,K)*G(JJ,J,JE)
774 2491 V(J)=ST
775      DO 2493 J=1,N
776 2493 GK(I,J,K)=V(J)
777 2458 CONTINUE
778 2460 CONTINUE
779 2450 CONTINUE
780      IF (NEW.EQ.0) GOTO 41
781 C APPROXIMATION DER JACOBY-MATRIZEN G(I,K) NACH BROYDEN
782 C KSK=0 OHNE SKALIERUNG
783 C KSK=1 MIT SKALIERUNG
784 29 H=FAA-1.0
785      DO 6 L=1,NS
786      JA=STAB(1,L)
787      JE=STAB(2,L)
788      JE1=JE-1
789      MH=JE-JA
790      IF (MH.EQ.0) GOTO 6
791      DO 61 J=JA,JE1
792      ST=0.0
793      DO 610 I=1,N
794      T=DY(I,J)
795      IF (KSK.EQ.1) T=T/YU(I,J)
796      U1(I)=T
797      UU(I)=HH(I,J)+H*HHA(I,J)
798 610 ST=ST+T*T
```

```
799      ST=ST*FAA
800      DO 61 K=1,N
801      T=U1(K)/ST
802      IF (KSK.EQ.1) T=T/YW(K,J)
803      DO 61 I=1,N
804      TT=UU(I)
805      61  G(I,K,J)=G(I,K,J)+TT*T
806      6   CONTINUE
807  C BERECHNUNG DER MATRIX E
808      41  KSA=KS
809      IF (KS.LT.KA.AND.KC.NE.0) KS=KS+1
810      SAA=SAN
811  C BESETZEN DER MATRIX E MIT NULLEN
812      DO 430 I=1,NNS
813      DO 430 K=1,NNS
814      430  E(I,K)=.0
815      DO 4 L=1,NS
816      JA=STAB(1,L)
817      JE=STAB(2,L)
818      LL=STAB(4,L)
819      NH=NHZ(LL)
820      MH=JE-JA
821      IF (MH.EQ.0) GOTO 420
822      DO 421 I=1,MH
823      J1=JE-I
824      DO 2445 K=1,NH
825      DO 422 J=1,N
826      ST=0.0
827      DO 423 JJ=1,N
828      423  ST=ST+GK(K,JJ,L)*G(JJ,J,J1)
829      422  U(J)=ST
830      DO 424 J=1,N
831      424  GK(K,J,L)=U(J)
832      2445 CONTINUE
833      421  CONTINUE
834      420  LLL=LL-1
835      K=0
836      IF (LLL.EQ.0) GOTO 2446
837      DO 425 I=1,LLL
838      425  K=K+NHZ(I)
839      2446 KK=0
840      J1=STAB(3,L)
```

```
841      JJ1=J1-1
842      IF (JJ1.EQ.0) GOTO 2447
843      DO 426 I=1,JJ1
844 426   KK=KK+HNZ(I)
845 2447  IK=(L-1)*N
846      DO 427 J=1,NN
847      JK=J+K
848      DO 427 JJ=1,N
849      IKJ=IK+JJ
850 427   E(JK,IKJ)=GK(J,JJ,L)
851      HN=HNZ(J1)
852      DO 4271 J=1,NN
853      JKK=J+KK
854      DO 4271 JJ=1,N
855      IKJ=IK+JJ
856 4271  E(JKK,IKJ)=A(J,JJ,L)
857      4   CONTINUE
858  C BERECHNUNG DER RECHTEN SEITE U
859 520   LL=0
860      DO 52 L=1,NK
861      NN=HNZ(L)
862      DO 521 K=1,NN
863 521   V(K)=UE(K,L)
864      DO 522 K=1,NS
865      IF (NKZ(K,L).NE.1) GOTO 522
866      JA=STAB(1,K)
867      JE=STAB(2,K)
868      MM=JE-JA
869      IF (MM.EQ.0) GOTO 522
870      DO 523 I=1,N
871 523   VV(I)=HH(I,JA)
872      MM1=MM-1
873      IF (MM1.EQ.0) GOTO 524
874      JA1=JA+1
875      JE1=JE-1
876      DO 525 J=JA1,JE1
877      DO 526 I=1,N
878      ST=HH(I,J)
879      DO 527 IK=1,N
880 527   ST=ST+VV(IK)*R(I,IK,J)
881 526   UU(I)=ST
882      DO 525 I=1,N
```

```
883 525 VV(I)=UU(I)
884 524 DO 528 J=1,NH
885 ST=0.0
886 DO 529 I=1,N
887 529 ST=ST+GK(J,I,K)*VV(I)
888 528 V(J)=V(J)+ST
889 522 CONTINUE
890 531 DO 532 I=1,NH
891 LL=LL+1
892 532 U(LL)=V(I)
893 52 CONTINUE
894 IF (KPR.GT.4) WRITE (6,7341) (U(I),I=1,NHS)
895 7341 FORMAT ('0',' R.S.',/,/(7E17.7))
896 480 IF (KT.EQ 1) GOTO 791
897 GOTO 790
898 791 DO 792 I=1,NHS
899 792 ISP(I)=ISA(I)
900 GOTO 740
901 C HOUSEHOLDER-TRANSFORMATION DER MATRIX E NACH
902 C BUSINGER-GOLUP
903 790 BY=0.0
904 DO 7300 L=1,NS
905 JA=STAB(1,L)
906 JE=STAB(2,L)
907 JE1=JE-1
908 MM=JE-JA
909 IF (MM.EQ.0) GOTO 7300
910 DO 7303 I=JA,JE1
911 DO 7303 K=1,N
912 7303 HHA(K,I)=HH(K,I)
913 7300 CONTINUE
914 DO 6667 L=1,NK
915 NN=NNZ(L)
916 DO 6667 I=1,NH
917 6667 UEA(I,L)=UE(I,L)
918 DO 70 J=1,NS
919 L=STAB(1,J)
920 JJ=J-1
921 KK=JJ*N
922 DO 70 K=1,N
923 LL=KK+K
924 H=YU(K,L)
```

```
925      ST=0.0
926      DO 701 I=1,NB
927      T=-E(I,LL)*H
928      E(I,LL)=T
929  701  ST=ST+T*T
930      ISP(LL)=LL
931  70  D(LL)=ST
932      K1=1
933  700  K=K1
934      K1=K+1
935      ST=D(K)
936      JJ=K
937      IF (K.EQ.NB) GOTO 712
938      DO 710 J=K1,NB
939      IF (ST.GE.D(J)) GOTO 710
940      ST=D(J)
941      JJ=J
942  710  CONTINUE
943      IF (JJ.EQ.K) GOTO 712
944      I=ISP(K)
945      ISP(K)=ISP(JJ)
946      ISP(JJ)=I
947      D(JJ)=D(K)
948      DO 711 I=1,NB
949      ST=E(I,K)
950      E(I,K)=E(I,JJ)
951  711  E(I,JJ)=ST
952  712  ST=0.0
953      ISA(K)=ISP(K)
954      DO 713 I=K,NB
955      T=E(I,K)
956  713  ST=ST+T*T
957  C ABFRAGE NACH DEM RANG DER MATRIX E (PSEUDORANG)
958      IF (ST.GT.BY) GOTO 719
959      KS=K-1
960      GOTO 71
961  719  H=E(K,K)
962      IF (K.EQ.1) BY=ST*EP2
963      T=SQRT(ST)
964      IF (H.GT.0.0) T=-T
965      D(K)=T
966      E(K,K)=H-T
```

```
967      IF (K.EQ.NB) GOTO 71
968      T=1.0/(ST-H*T)
969      DO 714 J=K1,NB
970      ST=0.0
971      DO 715 I=K,NB
972 715  ST=ST+E(I,K)*E(I,J)
973      ST=T*ST
974      DO 717 I=K,NB
975 717  E(I,J)=E(I,J)-E(I,K)*ST
976      ST=E(K,J)
977 714  D(J)=D(J)-ST*ST
978      IF (K.LT.KS) GOTO 700
979 71  IF (KS.EQ.0) GOTO 737
980 C DRUCKBEFEHLE
981      IF (KPR.LT.3) GOTO 7102
982      WRITE (6,7100) (D(J),J=1,NB)
983      WRITE (6,7101) (ISP(J),J=1,NB)
984 7102 CONTINUE
985 C HOUSEHOLDER-TRANSFORMATION VON U
986 740 DO 74 J=1,KS
987      ST=0.0
988      DO 741 I=J,NB
989 741  ST=ST+E(I,J)*U(I)
990      ST=ST/(D(J)*E(J,J))
991      DO 742 I=J,NB
992 742  U(I)=U(I)+E(I,J)*ST
993 74  CONTINUE
994      IF (KT.EQ.1) GOTO 746
995      DO 536 I=1,NNS
996 536  UA(I)=U(I)
997 C EINSCHUB FUER RANG-STRATEGIE
998      IF (KS.GE.KSA) GOTO 737
999 736  FA=1.0
1000      KFA=0
1001 737  KS1=KS+1
1002      IF (KS.NE.0) SKOND=ABS(D(1)/D(KS))
1003      IF (KS.EQ.NB) GOTO 746
1004 C BERECHNUNG DER PSEUDOINVERSEN MIT RANG KS
1005      IF (KS.GT.0) GOTO 720
1006 C RANG NULL, D.H. KS=0
1007      SKOND=0.0
1008 722 DO 721 I=1,NB
```

```
1009 721 V(I)=0.0
1010 IF (M.EQ.2) GOTO 94
1011 GOTO 770
1012 C RANG KS VON NULL VERSCHIEDEN
1013 720 DO 73 J=KS1,NB
1014 DO 731 I=1,KS
1015 L=KS1-I
1016 ST=E(L,J)
1017 EH(L,J)=ST
1018 IF (I.EQ.1) GOTO 733
1019 DO 732 LL=L1,KS
1020 732 ST=ST-E(L,LL)*V(LL)
1021 733 L1=L
1022 V(L)=ST/D(L)
1023 731 E(L,J)=V(L)
1024 DO 730 L=KS1,J
1025 ST=0.0
1026 LL=L-1
1027 DO 734 I=1,LL
1028 734 ST=ST+E(I,L)*V(I)
1029 IF (L.EQ.J) GOTO 730
1030 V(L)=-ST/D(L)
1031 E(L,J)=-V(L)
1032 730 CONTINUE
1033 ST=ST+1.0
1034 IF (ST.LE.0.0) GOTO 98
1035 73 D(J)=SQRT(ST)
1036 C
1037 C LOESEN DER GLEICHUNGS-SYSTEME
1038 C 1. LOESEN VON J*P*DX(QUER)=-P*F(QUER)
1039 746 DO 743 I=1,KS
1040 L=KS1-I
1041 ST=U(L)
1042 IF (L.EQ.KS) GOTO 744
1043 DO 745 LL=L1,KS
1044 745 ST=ST-E(L,LL)*V(LL)
1045 744 L1=L
1046 743 V(L)=ST/D(L)
1047 IF (KS.EQ.NB) GOTO 770
1048 C 2. (A) P(SENK)*DX(QUER)=J(QUER(TRANS))*P*DX(QUER)
1049 C (B) L*L(TRAS)*P(SENK)*DX=P(SENK)*DX(QUER)
1050 C (C) P*DX=P*DX(QUER)-J(QUER)*P(SENK)*DX
```

```
1051      DO 75 J=KSI,NB
1052      ST= 0.0
1053      J1=J-1
1054      DO 751 I=1,J1
1055 751    ST=ST+E(I,J)*V(I)
1056 75    V(J)=-ST/D(J)
1057      DO 76 JJ=1,NB
1058      J=NB1-JJ
1059      ST=0.0
1060      IF (J.EQ.NB) GOTO 760
1061      DO 762 I=J1,NB
1062 762    ST=ST+E(J,I)*V(I)
1063      IF (J.LE.KS) GOTO 761
1064 760    J1=J
1065      ST=- (V(J)+ST)/D(J)
1066      GOTO 76
1067 761    ST=V(J)-ST
1068 76     V(J)=ST
1069 770    DO 780 I=1,NHS
1070      L=ISP(I)
1071      IF (L.EQ.I) GOTO 780
1072      DO 781 J=I,NHS
1073      K=ISP(J)
1074      JJ=J
1075      IF (K.EQ.I) GOTO 782
1076 781    CONTINUE
1077 782    ST=V(I)
1078      ISP(I)=ISP(JJ)
1079      ISP(JJ)=L
1080      V(I)=V(JJ)
1081      V(JJ)=ST
1082 780    CONTINUE
1083      IF (KPR.LT.4) GOTO 7346
1084      WRITE (6,7342) (V(I),I=1,NHS)
1085 7342  FORMAT ('0','KNOTEN-DY',/, (7E17.7))
1086      WRITE (6,7343) (ISP(I),I=1,NHS)
1087 7343  FORMAT ('0','ISP',/, (1X,(10I5,5X)))
1088 C AUFLOESUNG DER GLEICHUNGS-SYSTEME, D.H.
1089 C BESTIMMUNG DER DY(J)
1090 C
1091 C DRUCKBEFEHLE
1092 7346 IF (KT.NE.O.OR.KPR.LT.3) GOTO 771
```

```
1093      DO 772 J=1,NK
1094      NN=NNZ(J)
1095      WRITE (6,799)
1096 772  WRITE (6,800) J,(UE(I,J),I=1,NN)
1097 771  ST=0.0
1098      IF (KT.EQ.0) SUM2=0.0
1099      IF (KT.EQ.1) GOTO 7511
1100      DO 7501 J=1,NK
1101      NN=NNZ(J)
1102      DO 7501 I=1,NN
1103      T=UE(I,J)
1104 7501 SUM2=SUM2+T*T
1105 7511 L=0
1106      DO 8 LL=1,NS
1107      JA=STAB(1,LL)
1108      JE=STAB(2,LL)
1109      JE1=JE+1
1110      MM=JE-JA
1111      DO 773 I=1,N
1112      L=L+1
1113      T=Y(L)
1114      ST=ST+T*T
1115      H=T*YW(I,JA)
1116      IF (KT.EQ.1) GOTO 773
1117 C KONVERGENZABFRAGE
1118      IF (ABS(T).GT.EPS) KN=0
1119      DY(I,JA)=H
1120      T=Y(I,JA)
1121      YA(I,JA)=T
1122      T=T+H*FA
1123      Y(I,JA)=T
1124 773  U(I)=H
1125      IF (MM.EQ.0) GOTO 8111
1126      JA=JA+1
1127      DO 9 J=JA,JE
1128      J1=J-1
1129      DO 91 I=1,N
1130      T=HH(I,J1)
1131      T1=T
1132      H=YW(I,J)
1133      DO 911 K=1,N
1134 911  T=T+U(K)*G(I,K,J1)
```

```
1135      TT=T/H
1136      ST=ST+TT*TT
1137      VV(I)=T
1138      IF (KT.EQ.1) GOTO 91
1139 C KONVERGENZABFRAGE
1140      IF (ABS(TT).GT.EPS) KN=0
1141      DY(I,J)=T
1142      TT=Y(I,J)
1143      YA(I,J)=TT
1144      TT=TT+T*FA
1145      Y(I,J)=TT
1146      T=T1/H
1147      W1(I)=T
1148      SUM2=SUM2+T*T
1149      91 CONTINUE
1150 C DRUCKBEFEHLE
1151      IF (KT.NE.0.OR.KPR.LT.3) GOTO 912
1152      WRITE (6,802) J1,(W1(I),I=1,H)
1153      912 DO 9 I=1,H
1154      9 U(I)=VV(I)
1155      8111 DO 8112 K=1,H
1156      8112 Y(K,JE1)=Y(K,JE1)
1157      8 CONTINUE
1158 C TESTFUNKTION T3=1/2*DX(TRANS)*DX
1159 C KT=0 NEWTON-KORREKTUR
1160 C KT=1 KORREKTUR AUS VEREINFACHTEM NEWTON-VERFAHREN
1161      90 IF (KT.EQ.1) GOTO 900
1162      SUMA=ST
1163      IF (KPR.LT.1) GOTO 1092
1164      WRITE (6,110) KC,SUMA,NEW,KS,SKOND,SUM2,SAN
1165      1092 KT=1
1166      IF (KC.EQ.KCMAX.AND.KN.EQ.0) GOTO 99
1167      KC=KC+1
1168      IF (KN.EQ.0) GOTO 1
1169      GOTO 92
1170 C
1171      900 SUM=ST
1172      IF (KPR.LT.1) GOTO 1091
1173      WRITE (6,111) SUM,FA,SUM1,SAN
1174      1091 IF (SUM.GT.SUMA) GOTO 298
1175      GOTO 297
1176 C
```

```
1177 C BERECHNUNG DER LETZTEN TEILTRAJEKTORIEN, D.H. AB AB-
1178 C SCHNITT (STAB), BEI DEM ERSTER SCHALTPUNKT ERSCHEINT
1179 92 KY=1
1180 IA=MS
1181 MH=MD
1182 M=MD
1183 HR=HC
1184 LD=0
1185 DO 9321 I=1,NS
1186 DO 9321 K=1,2
1187 9321 STABS(K,I)=STAB(K,I)
1188 GOTO 2707
1189 94 CONTINUE
1190 C AUSDRUCKBEFEHLE
1191 IF (KPR.LT.1) GOTO 9502
1192 WRITE (6,9501)
1193 DO 9500 J=1,M
1194 WRITE (6,1082) X(J),(Y(I,J)),I=1,N)
1195 9500 CONTINUE
1196 9502 CONTINUE
1197 C
1198 IF (KN.EQ.0) GOTO 999
1199 C ABFRAGE BEI SINGULAERER ODER FASTSINGULAERER MATRIX
1200 C OB T(XK/JK(PLUS))=.GT.0
1201 IF (KS.LT.NB.AND.SUM2.GT.EPS*EPS*FLOAT(N*M))
1202 1GOTO 960
1203 J=KC-1
1204 IF (IGRUND.GT.0.AND.KPR.GE.1)
1205 1WRITE (6,9503) SUM1,SAH
1206 9503 FORMAT (1X,///,' FN-REL=',E10.3,' FN-ABS=',E10.3)
1207 RETURN
1208 C ABBRUCH OHNE KONVERGENZ
1209 960 WRITE (6,961)
1210 961 FORMAT (1X,' ITERATIONSSTOP IM STATIONAEREM PUNKT
1211 1 - EKOND ODER KA ODER KFMIN ODER EPS1 VERKLEINERN')
1212 GOTO 999
1213 C
1214 C KC=KCMAX
1215 99 WRITE (6,9911) KC
1216 9911 FORMAT (1X,' ABBRUCH NACH',I4,' ITERATIONEN')
1217 KN=0
1218 GOTO 92
```

```
1219 98 WRITE (6,988)
1220 988 FORMAT (1X,' CHOLESKY-MATRIX SINGULAER')
1221 KN=0
1222 GOTO 92
1223 969 WRITE (6,994) JT
1224 994 FORMAT (' ABRUCH NUMERISCHE DIFFERENTIATION,
1225 1SCHALTFUNKTION ',I2)
1226 970 WRITE (6,993) JR,JRMAX,JJ,X1
1227 993 FORMAT (1X,' 0 SINGULAERE TRAJEKTORIE JR=',I4,
1228 1' JRMAX=',I4,/, ' IM INTERVALL J=',I4,
1229 2' STUETZSTELLE X=',E17.7,' EINFUEGEN',/,
1230 3' ODER JRMAX ERHOEHEN')
1231 GOTO 999
1232 980 WRITE (6,996)
1233 996 FORMAT (1X,' KS-FA-STRATEGIE VERSAGT')
1234 999 KPR=-1
1235 WRITE (6,991)
1236 991 FORMAT (15X,' OPTAL KEINE KONVERGENZ')
1237 C
1238 C FORMATE AM ENDE VON OPTAL
1239 799 FORMAT ('0',22X,'RELATIVE SPRUENGE'//)
1240 1061 FORMAT ('1',52('*'),'OPTAL-PARAMETER',52('*'))
1241 106 FORMAT ('1',52('*'),'EINGABEPARAMETER',52('*'))
1242 107 FORMAT ('0', ' N ',I3,8X,' M ',I3,8X,
1243 1' EPS ',E11.2,
1244 2' EPS1 ',E11.2/ ' ETA ',E11.2,
1245 3' EKOND',E11.2,' FA ',
1246 4E11.2,' KFMIN ',I3,8X,' KP ',I3,8X,
1247 5' KSK ',I3,8X/' KCHAX ',
1248 6I3,8X,' JRMAX ',I3,8X,' IGRUND',I3,8X,
1249 7' KA',I7,8X,' KS',I7,
1250 88X/' MSCHLT',I3,8X,' NU',I3,8X,' KSCH',I2////////)
1251 108 FORMAT ('0',4X,'STUETZSTELLEN ',3X,
1252 1'NAEHERUNGSTRAJEKTORIE')
1253 1082 FORMAT ('0',7E17.7,/(18X,6E17.7))
1254 109 FORMAT (5X,'IT',8X,'JN-ALT',9X,'JN-NEU',11X,
1255 1'FA',10X,'NEU',5X,'RANG
1256 2G(E)',7X,'KOND',10X,'FN-REL',9X,'FN-ABS'////////)
1257 110 FORMAT (1X/5X,I2,6X,E10.3,36X,I2,8X,I2,7X,
1258 1E10.3,5X,E10.3,5X,E10.3)
1259 1083 FORMAT ('0', ' ARGUMENT',8X,'FUNKTIONSWERTE')
1260 1084 FORMAT (' ',4X,'SCHALTER/ABLEITUNG')
```

```
1261 1085 FORMAT (( ' ',3(2E17.7,3X)))
1262 111 FORMAT (1X,/,28X,E10.3,7X,F5.3,43X,
1263 1E10.3,5X,E10.3,5X,12)
1264 7100 FORMAT ('0',' DIAGONALELEMENTE (E) '/( 1X,10E10.2))
1265 7101 FORMAT ('0',' KOMPONENTE (DY1) '/( 1X,10(15,5X)))
1266 800 FORMAT ('0',' KNOTEN '13,6X,10E10.2/(17X,10E10.2))
1267 802 FORMAT ('0',' INTERVALL '13,3X,10E10.2/(17X,10E10.2))
1268 952 FORMAT ('0',4X,' STUETZSTELLEN ',3X,' ITERIERTE ')
1269 9501 FORMAT ('0',4X,' STUETZSTELLEN ',3X,
1270 1' LETZTE TRAJEKTORIE ')
1271 989 FORMAT (15X,' KEIN SPRUNG IN DEN STEUERVARIABLEN')
1272 1971 FORMAT ('0',' ABSCHNITT (STAB) ',13)
1273 9421 FORMAT (2E17.7,215)
1274 RETURN
1275 C
1276 END
TOTAL RECORDS WRITTEN = 1277/ 105
X1
$
$
```

```
81 C
82 C *****
83 C
84 C DGLN.-SYSTEME (RECHTE SEITEN)
85 C
86 C     SUBROUTINE F(X,Y,DYDX)
87 C
88 C F BERECHNET DIE RECHTEN SEITEN DER DGLN.-SYSTEME
89 C
90 C II     COMMON-PARAMETER, DER ERFORDERLICHENFALLS
91 C     VERSCHIEDENE RECHTE SEITEN AUF UNTERSCHIEDLICHEN
92 C     ABSCHNITTEN (GERADE STABE) ZWISCHEN DEN KNOTEN
93 C     STEuern KANN (WECHSEL DES DGL.-SYSTEMS NUR AN DEN
94 C     KNOTENPUNKTEN); WECHSEL NICHT DURCH SCHALTFUNKTIONEN)
95 C U(I,K) COMMON-FELD, DAS IN SUBROUTINE S DER SCHALTFUNKTION-
96 C     NEN BERECHNET WIRD UND DIE RECHTEN DES DGL.-SYSTEMS
97 C     ENTSPRECHEND DER SCHALTFUNKTIONEN STEUERT.
98 C     REAL Y(1),DYDX(1)
99 C     COMMON J,U(28,3),II
```

Rechte Seiten in der Form:  $DXDY(I)=F(X,Y)$

```
129     RETURN
130     END
131 C *****
132 C SCHALTFUNKTIONEN
133 C
134 C     SUBROUTINE S(X,Y,NU,Q,DQDX,JT,LS,LD)
135 C II     NUMMER DES ABSCHNITTES (STABES) FUER DEN SCHALTFUNK-
136 C     TIONEN DEFINIERT SIND
137 C     REAL Y(1),Q(1),DQDX(1)
138 C     COMMON J,U(28,3),II
```

Spezieller Programmteil von S

```
142     IF (JT.EQ.-1) GOTO 4
143     IF (JT.EQ.LS) Q(JT)=0.0
144     IF (LD.NE.0) RETURN
145     DO 8 I=1,NU
146     QU=Q(I)*U(J,I)
147     IF (QU.LT.0.0) JT=I
148     8 CONTINUE
149     IF (JT.NE.LS) RETURN
150     DO 9 I=1,NU
151     9 U(J+1,I)=U(J,I)
152     U(J+1,JT)=-U(J,JT)
153     RETURN
154     4 CONTINUE
155     DO 40 I=1,NU
156     A=Q(I)
157     IF (A.EQ.0.0) A=DQDX(I)
158     IF (A.GT.0.0) U(J,I)=1.0
159     IF (A.LT.0.0) U(J,I)=-1.0
160     40 CONTINUE
161     RETURN
162     END
163 C *****
```

```
164 C KNOTENBEDINGUNGEN
165 C
166 C SUBROUTINE R(J,YL,YR,W,NZ)
167 C R BERECHNET DIE KNOTENBEDINGUNGEN IN DER FORM  $R=R(YL,YR)=0$ 
168 C
169 C EINGABE
170 C J NUMMER DES KNOTENS
171 C YL(I) Y-WERTE DER AM KNOTEN ANKOMMENDEN ABSCHNITTE
172 C (STAEBE) (WERDEN IN DER REIHENFOLGE DER AB-
173 C SCHNITTNUMMERIERUNG (STABNUMMERIERUNG)
174 C INDIZIERT).
175 C YR(I) Y-WERTE DER VOM KNOTEN ABGEHENDEN ABSCHNITTE
176 C (STAEBE) (INDIZIERUNG IN REIHENFOLGE DER
177 C ABSCHNITTNUMMERN).
178 C
179 C AUSGABE
180 C W(I) ENTHAELT DIE BERECHNETEN WERTE  $R=R(YL,YR)$ 
181 C NZ GIBT LAENGE DES KNOTENVEKTORS  $W(NZ)$  AN
182 C REAL YL(1),YR(1),W(1)
183 C COMMON JR,U(28,3)
```



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 23**