

**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

Heinz Antes

Über Fehler und Möglichkeiten  
ihrer Abschätzung bei  
numerischen Berechnungen von  
Schalentragwerken

Heft Nr. 19



Mitteilungen  
aus dem  
Institut für Mechanik

**Institut für Mechanik**  
**RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM**

**Heinz Antes**

**Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung  
bei numerischen Berechnungen  
von Schalenträgwerken**

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 19**  
**Januar 1980**

Herausgeber:

Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1974 bis 1978 am Lehrstuhl für Mechanik II der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der dortigen Abteilung für Bauingenieurwesen als Habilitationsschrift angenommen.

Den Herren Prof. Dr.-Ing. H. Stumpf und Prof. Dr.-Ing. W. B. Krätzig danke ich für manche wertvolle Anregung und für die Übernahme des Referats bzw. Korreferats. Ebenso gilt mein Dank dem auswärtigen Gutachter Herrn Prof. Dr. rer. nat. G. Rieder.

Referent: Prof. Dr.-Ing. Helmut Stumpf

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Wilfried B. Krätzig

auswärtiger Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Georg Rieder

Tag der Habilitation: 27. Juni 1979

© 1979 Priv.-Doz. Dr. rer. nat. Heinz Antes

4630 Bochum 1, Hustadtring 151

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Mit Genehmigung des Autors ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise zu vervielfältigen.

## ZUSAMMENFASSUNG

Die Hauptschwierigkeit bei jeder approximativen Problemlösung ist, neben der numerischen Berechnung selbst, die Beurteilung der Ergebnisse hinsichtlich der Fehler, die ihnen anhaften. Dazu ist in jedem Fall ein umfassender Überblick über alle das Ergebnis beeinflussenden Faktoren und die daraus resultierenden Fehler notwendig.

Mit der Erfassung und den Möglichkeiten zur Abschätzung solcher Fehler beschäftigt sich diese Arbeit; dabei werden speziell numerische Ergebnisse auf der Grundlage der linearen Theorie dünner Schalentragwerke untersucht.

Nach einer Einführung, die einen Überblick über zu diesen Fragen bekannte Veröffentlichungen zu geben versucht, werden einige funktionalanalytische Begriffe, Aussagen und vor allem Ungleichungen zuerst in der linearen Elastizitätstheorie dargestellt (Abschnitt 1) und dann auf die Gleichungen und Größen der linearen Schalentheorie übertragen (Abschnitt 2). Damit ist es möglich, sowohl globale wie auch lokale Eingrenzungen des Fehlers von Näherungslösungen anzugeben. Danach werden die verschiedenen Fehlerursachen - der Fehler durch die Annahme einer vereinfachten Modelltheorie, der Diskretisierungsfehler finiter Lösungen und der Fehler infolge der Verwendung numerischer Prozeduren - erläutert und abgeschätzt (Abschnitt 3). Diese theoretischen Überlegungen führen zu Kriterien (Abschnitt 4.1), die bei der finiten Formulierung der Eingrenzungen wie auch der Näherungsverfahren (Abschnitt 4.2) hinsichtlich einer möglichst optimalen Relation zwischen Konvergenzverhalten, Anpassungsfähigkeit und Aufwand zu beachten sind. Für lokale Eingrenzungen sind außerdem passende Green'sche Zustände wesentlich (Abschnitt 4.3). Der Anhang enthält ein numerisch durchgeführtes Beispiel.

## SUMMARY

In every approximative solution the main difficulty is, besides the numerical computation itself, the judgement of the results with regard to the included errors. Thereto it is necessary to achieve a general view of all the facts influencing the result and of the therefrom yielding errors.

This paper is concerned with the identification and the possibilities for an estimate of such errors. In this topic we analyse especially numerical results on the basis of the linear theory of thin shells.

In an introduction it is tried to give a survey on the publications known to such questions. Then some functional analytical concepts, theorems and above all inequalities are first stated in the linear elasticity theory (chapter 1) and then transmitted to the equations and quantities of the linear shell theory (chapter 2).

Therewith it is possible to give global as well as local bounds for the error of approximations. Then the different causes for errors - the error in consequence of the assumption of a simplified model theory, the discretization errors and the errors owing to the use of numerical procedures - are discussed and estimated (chapter 3). These theoretical considerations lead to criterions (chapter 4.1) which have to be observed in the finite formulation of the error estimate procedure (chapter 4.2) in order to gain a relation optimal as possible between convergence behavior, flexibility and display. For the local bounds also suitable GREEN's states are important (chapter 4.3).

The supplement contains a numerically realized example.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
ZEICHENERKLÄRUNG	1
EINFÜHRUNG	7
1. FUNKTIONALANALYSIS UND UNGLEICHUNGEN IN DER LINEAREN ELASTIZITÄTSTHEORIE	10
1.1. Die Grundgleichungen (schematische Darstellung nach TONTI)	10
1.2. Operatorgleichungen und Funktionale im Hilbert- raum elastischer Zustände	17
1.3. Ungleichungen und pauschale Fehlerschranken	36
1.4. Punktweise Fehlereingrenzung	45
2. GRUNDLEGENDE BEZIEHUNGEN DER THEORIE DÜNNER SCHALEN	52
2.1. Eine deduktive Herleitung von Grundgleichungen einer allgemeinen Schalentheorie	52
2.2. Die Grundgleichungen einer linearen Theorie dünner Schalen	58
2.3. Die Eigenschaften der Operatorgleichungen, Skalarprodukte und Funktionale	69
3. VERSCHIEDENE FEHLERURSACHEN UND MÖGLICHKEITEN IHRER EINGRENZUNG	78
3.1. Zur Fehlerordnung der flächenhaften Schalen- biegetheorie	79
3.2. Diskretisierungsfehler bei finiten Lösungen, insbesondere der Schalengleichungen	86
3.3. Fehler infolge der Verwendung numerischer Prozeduren	95
4. ZUR NUMERISCHEN BESTIMMUNG DER A-POSTERIORI FEHLER- SCHRANKEN	103
4.1. Verschiedene Möglichkeiten finiter Ansätze	103

	Seite
4.1.1. Auswahlkriterien	104
4.1.2. Globale Ansätze	106
4.1.3. Finite-Element Approximationen	113
4.1.4. Bereichsweise Ansätze mit B-Spline- Funktionen	121
4.2. Finite Formulierung der Eingrenzungen	125
4.3. Zur Konstruktion GREEN'scher Zustände	131
5. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	142
Anhang	145
LITERATURVERZEICHNIS	157
VERZEICHNIS DER TAFELN, BILDER UND TABELLEN	172
<u>Anlage</u> : BEISPIEL	175

ZEICHENERKLÄRUNG

Im folgenden wird ein Verzeichnis der wichtigsten in dieser Arbeit verwendeten Größen und Bezeichnungen gegeben. Verschiedene, hier nicht aufgeführte Symbole werden definiert, wenn sie zum ersten Mal auftreten oder sind wie in der Literatur üblich zu verstehen.

Symbol	Bedeutung
$\left. \begin{matrix} a_{\alpha}^{\alpha}, a_{\beta}^{\beta}, a_{\gamma}^{\gamma} \\ \tilde{a}_{\alpha}^{\alpha}, \tilde{a}_{\beta}^{\beta}, \tilde{a}_{\gamma}^{\gamma} \end{matrix} \right\}$	ko- bzw. kontravariante Basis der verformten Referenzfläche unverformten Re-
$a_{\alpha\beta}, \tilde{a}_{\alpha\beta}^0$	Metriktensor der verformten, unverformten Referenzfläche
$a_i^{ok}$	Tensor der Transformation der Basis $\tilde{a}_i$ in die Basis $\tilde{a}_k^0$
A	Arbeitsraum: Hilbertraum der Paare (Verschiebung, Last)
$\left. \begin{matrix} A^{\alpha\beta} \\ B^{\alpha\beta} \end{matrix} \right\} \tilde{E}$	modifizierte Verzerrungsmaße der Schalenmittelfläche bzw. die Zusammenfassung als Vektor
$b_{\alpha\beta}$	Krümmungstensor der verformten Referenzfläche
<u>B</u>	Matrix der Transformation in die modifizierten Verzerrungsmaße
$\langle n \rangle$ $\tilde{c}$	Vektor der n Freiwerte eines Verschiebungsansatzes
<u>C</u>	Tensor der Elastizitätskonstanten im Kontinuum
C	Operatorabbildung: Verzerrungsraum $\rightarrow$ Spannungsraum
$C_p, C_u$	Schalenrand mit vorgegebenen statischen bzw. geometrischen Größen
$\langle n \rangle$ $\tilde{d}$	Vektor der n Freiwerte eines Spannungsfunktionsansatzes
$\underline{D}, \underline{D}^T$	Operatormatrix der Verschiebungs-Verzerrungsbeziehungen bzw. der Gleichgewichtsbedingungen
$\mathcal{D}$	Raum dualer Arbeit: Hilbertraum der (Inkompatibilitäten, Spannungsfunktionen) - Paare

Symbol	Bedeutung
$d_n(\theta^\alpha, t)$ $D_n(\theta^\alpha)$	Direktorfunktionen des verformten bzw. unverformten ( $t=0$ ) Kontinuums bzw. der Referenzfläche $F(n=0)$
$E$	Energieraum: Hilbertraum der (Verzerrungs-, Spannungs) - Paare
$E = E_M + E_B$	elastische Energie und ihr Membran- bzw. Biegeanteil
$F(x^p), F_N(x^p)$	exakter bzw. angenäherter Wert einer Zustandsgröße im Punkt $x^p$
$F, F_h$	Referenzfläche/Schalenmittelfläche bzw. ihre diskrete Aufteilung
$F_p, F_u$	Oberfläche mit vorgegebenen statischen bzw. geometrischen Größen
$\underline{F}$	Matrixform des inversen Elastizitätstensors der Schalentheorie
$g^{ij}, g_{ij}$	kontra- bzw. kovariante Metrik des Raumes
$\tilde{g}_i, \tilde{g}^j$	ko- bzw. kontravariante Basis im Kontinuum
$H$	Hilbertraum der elastischen Zustände
$H_{00}^1, H_{10}^1$	lineare Hermite-Polynome
$H_{00}^3, H_{01}^3, H_{10}^3, H_{11}^3$	kubische Hermite-Polynome
$h_{\sim up}$	Element aus $A$
$h_{\sim \epsilon\tau}$	Element aus $E$
$h_{\sim n\chi}$	Element aus $D$
$I_p$	konvexes Extremalfunktional: Gesamtpotential
$I_{pc}$	konkaves Extremalfunktional: Konjugiertes Potential
$I_d, I_{dc}$	konvex bzw. konkaves Extremalfunktional in dualen Größen
$J_p, J_d$	erzeugendes Funktional aller primären bzw. dualen Grundgleichungen
$K$	Lastraum: Hilbertraum der Lastvektoren

Symbol	Bedeutung
$\underline{K}$	Matrixform der konstitutiven Beziehung der Schalentheorie
$k^1$	l-tes Moment der Massendichte des Kontinuums
$L_\alpha, L_3$	Bezugsgrößen für dimensionslose Koordinaten
$L(\bar{L})$	Operator (adjungierte Ergänzung): $S \rightarrow K$
$L^*(\bar{L}^*)$	Operator (adjungierte Ergänzung): $V \rightarrow N$
$\tilde{m}^{li}$	l-tes Moment des Spannungsvektors $\tilde{T}^i$
$\tilde{m}^{\alpha\beta}$	symmetrischer Momententensor der Schale
$M_n(x; x_1, \dots, x_{i+n})$	Basis-Splinefunktion vom Grad $n-1$
$\left. \begin{matrix} M_{(\alpha\beta)} \\ \bar{N}_{(\alpha\beta)} \end{matrix} \right\} \tilde{M}$	modifizierte Schnittgrößen der Schale bzw. deren Matrixdarstellung
$\bar{n}^{\alpha\beta}$	symmetrischer Teil des Längskrafttensors der Schale
$\bar{n}$	Normaleneinheitsvektor im Kontinuum
$N$	Inkompatibilitätenraum
$\tilde{p}, \tilde{P}$	Kräfteverteilung im Innern bzw. auf der Oberfläche
$p^1$	l-tes Moment der Massen- und Oberflächenkräfte
$\tilde{q}$	Querkraftvektor
$\underline{Q}_h$	Flexibilitätsmatrix
$\tilde{r}$	Ortsvektor
$\underline{R}, \underline{R}^T$	Operatormatrix der Kompatibilitätsbedingungen bzw. der Spannungsfunktion-Spannungsbeziehungen
$\underline{R}_h, \underline{R}_h^e$	Gesamt- bzw. Element-Steifigkeitsmatrix
$S$	Spannungsraum
$S$	Operator: $S \rightarrow V$
$t$	Schalendicke
$\dagger$	Zeitveränderliche ( $\dagger = 0$ unverformter Körper)
$\tilde{T}^i$	Spannungsvektor auf der Fläche mit der Normalen $n_i$
$\left. \begin{matrix} T(\bar{T}) \\ T^*(\bar{T}^*) \end{matrix} \right\}$	Operator (adjungierte Ergänzung): $U \rightarrow V$ $S \rightarrow K$

Symbol	Bedeutung
$\underline{u}$	Verschiebungsfeld
$U$	Verschiebungsraum
$\underline{v}$	Geschwindigkeitsfeld
$V$	Verzerrungsraum
$w, w_c$	spezifische Formänderungsenergie bzw. komplementäres Potential
$w^1$	1-tes Moment der inneren Energiedichte
$\underline{w}, w_\alpha$	Änderung des Normaleneinheitsvektors $\underline{\hat{a}}_3^0$
$\underline{x}$	kartesisches raumfestes Koordinatensystem
$X$	Spannungsfunktionsraum
$z^\alpha, Z^3$	krummliniges körperfestes Koordinatensystem

*Griechische Symbole*

$\alpha_{(\alpha\beta)}$	erster Verzerrungstensor der Schale
$\beta_{\alpha\beta} = \Delta\lambda_{1\alpha\beta}$	zweiter und dritter Verzerrungstensor einer linearen Theorie dünner Schalentragwerke
$\gamma_\alpha = \Delta d_{1\alpha}$	
$\epsilon_{ij}$	Verzerrungstensor des Kontinuums
$\Delta\lambda_{nia}$	zweiter und dritter Verzerrungstensor einer allgemeinen Schalentheorie
$\Delta d_{ni}$	
$\epsilon^{\alpha\beta}$	$\epsilon$ -Tensor (Vektormultiplikation)
$\underline{\epsilon}^E, \underline{\zeta}^E$	Tensor bzw. Matrixdarstellung der elastischen Verformungen
$\underline{\epsilon}^Q, \underline{\zeta}^Q$	Tensor bzw. Matrixdarstellung der Extradehnung
$\underline{\eta}, \underline{\zeta}$	Tensor bzw. Matrixform der Inkompatibilitäten
$\theta^\alpha, \theta$	dimensionslose krummlinige körperfeste Koordinaten
$\lambda_{nia}, \overset{0}{\lambda}_{nia}$	partielle Ableitungen der Direktorfunktionen
$\lambda_i^R, \lambda_i^r, \lambda_i^m$	Eigenwerte der Gesamt bzw. Elementsteifigkeits- bzw. Massenmatrix
$\mu^2 = g/a$	Verhältnis der Metrik des Schalenraumes zu der der Schalenmittelfläche

Symbol	Bedeutung
$\nu$ $\nu^\alpha$	Binormale des Schalenrandes
$\xi(x^\alpha, z)$	Abstandsänderung zur Mittelfläche
$\pi, \pi_c$	Gesamtpotential bzw. konjugiertes Potential
$\rho$	Massendichte des Materials
$\underline{g}$	Matrixform der Schnittgrößen der Schale
$\underline{s}$ $s^\alpha$	Tangentenvektor am Schalenrand
$\underline{\tau}^G$	Tensor der Gesamtspannung
$\underline{\varphi}(x), \underline{\varphi}_h(x)$	Matrix der globalen bzw. diskreten Ansatzfunktionen
$\Phi(\theta)$	Integraltransformation zum Übergang zwischen Kontinuum und Flächentheorie
$\underline{\chi}, \underline{\chi}$	Tensor bzw. Matrixform der Spannungsfunktionen in V
$\psi_\alpha, \psi_3$	Spannungsfunktionen der Schale

### Kennzeichnungen

$\cdot^*$	vorgegebene Größen
$\cdot^V$	Größen des Kontinuums
$\cdot^R$	Randgrößen der Schale
$\cdot^T$	Transponierte einer vektoriellen oder tensoriellen Größe
$\cdot^'$	Lastspannungszustände
$\cdot''$	Eigenspannungszustände
$\cdot^{\sim}$	geometrisch zulässige Zustände
$\cdot^{\approx}$	statisch zulässige Zustände
$\cdot _\alpha$	kovariante Differentiation nach $\theta^\alpha$
$\nabla$ bzw. $\cdot_{,i}$	Nablavektor, Vektor der partiellen Ableitungen
$\{ \cdot, \cdot \}_G$ bzw. $\  \cdot \ _G$	Skalarprodukt bzw. Norm mit Gewicht G
$\delta$	Variationssymbol

## EINFÜHRUNG

Seit sich Ingenieure damit befassen, Konstruktionen nicht nur zu entwerfen und zu bauen, sondern auch, meist unumgänglich nur näherungsweise, zu berechnen, spielt die Beurteilung der Ergebnisse solcher Berechnungen eine große Rolle. Dabei stellt sich zunächst bei der mathematischen Formulierung des Problems die Frage nach den physikalisch zulässigen Vereinfachungen der Aufgabe. Darüber hinaus interessiert aber ebenso die Genauigkeit einer numerischen Approximation der i. a. nicht angebaren exakten Lösung des mathematischen Problems. Daß die Theorie solcher Fehlerabschätzungen bis in die letzten Jahre weitgehend auf die "reine" numerische Mathematik beschränkt blieb und auch meist nur zum Beweis der Konvergenz oder der Feststellung der Fehlerordnung eines numerischen Verfahrens führte, liegt sicherlich an der Kompliziertheit ihrer Realisierung bei praktischen Problemen. Im allgemeinen wurde und wird auch noch im Ingenieurwesen eine Fehlerabschätzung, d. h. eine Aussage über die Güte einer Näherung dadurch erbracht, daß die Methode auf Probleme angewandt wird, deren Lösung exakt bekannt ist, sei es aus anderen Berechnungen, sei es aus Meßergebnissen. Daraus dann zu folgern, daß der Fehler bei Aufgaben mit unbekannter Lösung nicht wesentlich größer sein wird, ist sicherlich in vielen Fällen ein Trugschluß. Sinnvolle Antworten auf diese Frage nach Fehlerabschätzungen und Fehlerschranken kann nur eine mathematisch fundierte Untersuchung geben. Das gilt besonders für so umfangreiche und komplizierte numerische Berechnungen, wie sie im Ingenieurwesen notwendig sind.

Der Beginn der Entwicklung solcher Untersuchungen bei Problemen der linearen Elastomechanik liegt nicht sehr weit zurück. Nach den ersten grundlegenden Arbeiten über die Ermittlung beidseitiger globaler Schranken von E. TREFFTZ [1,2] und K. O. FRIEDRICHS [3,4] in den Jahren 1926 - 1929 kamen weitere Untersuchungen zur Bestimmung auch punktwieser Eingrenzungen erst im Jahre 1942 von C. WEBER [5,6]. Ausgebaut wurden diese Ideen dann in den Jahren ab 1947 im wesentlichen von DIAZ und GREENBERG [7, 8, 9], MAPLE [10] sowie WASHIZU [11] für verschiedene inhomogene Randwertprobleme der Elastizitätstheorie. Eine sehr anschauliche elementargeometrisch deutbare Methode zur systematischen Verbesserung solcher Schranken wurde 1947/48 von SYNGE und PRAGER [12-14] mit dem sogenannten Hyperkreis-Verfahren gegeben. Die Grundlage all dieser Arbeiten zur Be-

rechnung von Schranken ist die Verwendung komplementärer Energieprinzipie. Die punktweise Eingrenzung von Lösungsfunktionen ist bei zusätzlicher Konstruktion geeigneter Green'scher Funktionen mittels der Schwarz'schen Ungleichung möglich.

Die Frage der Eingrenzung bei homogenen Randwertproblemen, d. h. die Bestimmung von Schranken für Eigenfrequenzen und die zugehörigen Eigenzustände elastischer Körper wurde basierend auf den Arbeiten von TREFFTZ [15] bzw. WEINSTEIN [16] im Jahr 1933 bzw. 1935 erst 1938 von AROSZAJN [17] und 1949 von KATO [18], also relativ spät wieder aufgegriffen und detaillierter untersucht. Zu erwähnen sind dazu außerdem die Arbeiten von PAYNE [19] 1955, DIAZ [20] 1958, BAZLEY und FOX [21,22] 1961, WEINSTEIN [23-25] in den Jahren 1961 - 65 und FICHERA [26] 1966. Die Möglichkeit punktweiser Eingrenzungen bei homogenen Problemen wurde zuerst 1960 von WEINBERGER [27] und dann ab 1968 vor allem von RIEDER [28,29] und STUMPF [30-33] untersucht.

Die aufgeführten Arbeiten, insbesondere diejenigen über punktweise Eingrenzungen haben überwiegend theoretischen Charakter. Die ersten wesentlichen numerischen Realisierungen gelangen STUMPF [29-36] 1968 - 72 für die lineare Kirchhoff'sche Plattentheorie. In den folgenden Jahren erschienen im Zuge der fortschreitenden Computertechnik und der Entwicklung der Methode der Finiten Elemente zahlreiche Arbeiten, von denen hier nur einige erwähnt seien. So gab SCHOMBURG [37] 1972 ebenfalls für die lineare Kirchhoff'sche Plattentheorie punktweise Schranken für Näherungen an, die mittels in Finiten Elementen definierten Hermite-Polynomen berechnet wurden. YOUNG und MOTE [38,39] betrachteten gemischte ebene Randwertprobleme, DILLON und O'BRIEN [40] die Torsion eines einfach zusammenhängenden Gebietes.

Bezüglich einer Ausweitung dieser Betrachtungen auf nichtlineare Theorien sei auf die grundlegenden Untersuchungen von STUMPF [41-46] und LABISCH [47,48] verwiesen.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind im wesentlichen drei Aspekte, die bei allen Fehlerabschätzungen von numerischen Berechnungen praktischer, vor allem technischer Probleme wichtig sind:

- a) Die Erfassung aller Fehlerursachen.
- b) Die Zusammenstellung möglicher Eingrenzungsmethoden.
- c) Die numerische Realisierung der Fehlerschranken.

Im 1. Kapitel werden die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie als Operatorgleichungen eines Hilbertraumes formuliert, so daß funktionalanalytische Sätze und Ungleichungen, wie z. B. die SCHWARZ'sche Ungleichung, für pauschale und lokale Fehlerbetrachtungen anwendbar werden. Die kurzen analytischen Darstellungen, wie sie z. B. auch bei GREENBERG [8] zu finden sind, werden dabei nach der geometrischen Betrachtungsweise von SYNGE und PRAGER [12] erläutert. Dazu werden in Kapitel 2 die grundlegenden Gleichungen der benützten linearen Biegetheorie dünner Schalen, wie sie von KRAETZIG [49,50] hergeleitet wurden, in Beziehung gesetzt und die Voraussetzungen zur Anwendung der funktionalanalytischen Sätze, die zu den Fehlerschranken führen, geprüft.

Zur Einordnung dieser Fehlerabschätzungen in den Gesamtzusammenhang werden in Kapitel 3 mögliche Fehler betrachtet und abgeschätzt, die einer konkreten numerischen Lösung in einer approximativen Theorie im Vergleich zur exakten Lösung eines ursprünglich drei-dimensionalen physikalischen Problems anhaften. Das erscheint sinnvoll, da die Genauigkeit numerischer Berechnungen bzw. die Güte der Fehlerschranken in einem angemessenen Verhältnis zu der Größe des Fehlers stehen sollte, der bereits in der physikalischen Vereinfachung der "exakten" drei-dimensionalen Theorie begründet oder z. B. durch fehlerbehaftete Ausgangsdaten unvermeidlich ist.

In Kapitel 4 werden Überlegungen zur möglichst zweckmäßigen Erstellung von 'a posteriori' Fehlerschranken ausführlich dargestellt. Als wesentlich erweist sich daher für die punktwisen Eingrenzungen die richtige Wahl der Green'schen Näherungszustände und außerdem zur Vermeidung unkalkulierbar großer numerischer Rundungsfehler, die Wahl von Ansatzfunktionen, die zu guter Kondition der Gleichungssysteme führen.

Abschließend (Kapitel 5) werden die Untersuchungen zusammengefaßt sowie Möglichkeiten für die Erweiterung und Vertiefung der vorgelegten Untersuchungen aufgezeigt.

Der Anhang enthält ein nach der behandelten Theorie numerisch durchgeführtes Beispiel.

## 1. FUNKTIONALANALYSIS UND UNGLEICHUNGEN IN DER LINEAREN ELASTIZITÄTSTHEORIE

Die Theorie der Funktionalanalysis ist einer der abstrakten Zweige der Mathematik. Aber gerade dieses Konzept - abstrakt definierte Operatoren wirken auf gewisse Mengen abstrakter Elemente, zwischen denen in abstrakten Räumen Abstand und Produkt, nämlich Norm und Skalarprodukt definiert werden können - macht es möglich, die verschiedensten Inhalte darzustellen. Man kann als Elemente z. B. die möglichen Zustände eines gegebenen physikalischen Systems betrachten. So ist es auch auf dem Gebiet der Elastizitätstheorie möglich und vorteilhaft, Methoden der Funktionalanalysis zu verwenden.

Ziel dieses Kapitels ist die Verbindung der Gleichungen und Größen der linearen Elastizitätstheorie mit einigen Begriffen der Funktionalanalysis. Zunächst wird dabei die in den Grundgleichungen enthaltene Komplementarität aufgezeigt und anschließend mit der Einführung geeigneter Hilberträume und Abbildungen die der Theorie ebenfalls innewohnende Dualität erkennbar gemacht. Dabei definierte Skalarprodukte ermöglichen es dann, Ungleichungen der Funktionalanalysis zu Fehlerabschätzungen, zur Erstellung pauschaler und auch punktwieser Fehlerschranken heranzuziehen.

### 1.1. Die Grundgleichungen (Schematische Darstellung nach TONTI)

Die Annahmen der linearen Elastizitätstheorie besagen, daß Quadrate und höhere Potenzen von Verschiebungsableitungen vernachlässigt und die Beziehungen zwischen Spannungen und Verformungen linear dargestellt werden. Außerdem wird bei den vorausgesetzt kleinen Verformungen der Unterschied zwischen dem Bezug auf die unverformte und die verformte Konfiguration vernachlässigbar. Die beiden Darstellungen des Verzerrungstensors - der GREEN'sche und der ALMANZI'sche Verzerrungstensor - werden damit gleich. Ebenso sind dann alle Spannungstensoren identisch und wie der CAUCHY'sche Spannungstensor symmetrisch. Die Darstellung aller Größen und Gleichungen bezieht sich hier auf kartesische Koordinaten  $x^r$ .

Der linear-elastische Körper sei auf einem Teil  $F_p$  seiner Oberfläche durch *Kräftebelegungen*  $\underline{p}^*(\underline{x})$  belastet; auf einem anderen Teil  $F_u$  seien *Weggrößen*, z. B. *Verschiebungen*  $\underline{u}^*(\underline{x})$  vorgeschrieben. Sind auf einem gemeinsamen Abschnitt  $F_p \cap F_u$  statische und geometrische Größen gegeben, müssen diese zueinander *komplementär* sein, d.h. dürfen nicht aneinander Arbeit leisten

bzw. miteinander innere Energie liefern. Im Innern  $V$  des Körpers können *Kräfteverteilungen*  $\underline{p}^*(\underline{x})$  (z. B. das Eigengewicht) und *Eigenspannungsursachen* oder *Inkompatibilitäten*  $\underline{\eta}^*(\underline{x})$ , verursacht durch *Extradehnungen*  $\underline{\varepsilon}^Q(\underline{x})$  z. B. aufgrund von Erwärmung, Magnetisierung oder plastischer Verformung des Materials [51], vorgeschrieben sein:

$$\underline{p}(\underline{x}) = \underline{p}^*(\underline{x}), \quad \underline{x} \in V, \quad p_i(x^r) = p_i^*(x^r), \quad x^r \in V, \quad (1.1.1)$$

$$\underline{p}(\underline{x}) = \underline{p}^*(\underline{x}), \quad \underline{x} \in F_p, \quad p_i(x^r) = p_i^*(x^r), \quad x^r \in F_p, \quad (1.1.2)$$

$$\underline{\varepsilon}^Q(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}^{Q*}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in V, \quad \varepsilon_{ij}^Q(x^r) = \varepsilon_{ij}^{Q*}(x^r), \quad x^r \in V, \quad (1.1.3)$$

$$\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}^*(\underline{x}), \quad \underline{x} \in F_u, \quad u_i(x^r) = u_i^*(x^r), \quad x^r \in F_u. \quad (1.1.4)$$

Diese hier aufgeführten Verformungs- und Spannungsursachen lassen sich klar in zwei Gruppen aufteilen, die statischen Ursachen (1.1.1-2) und die geometrischen Ursachen (1.1.3-4). Entsprechend bezeichnet man elastische Zustände  $f$ , die sich bei homogenen geometrischen Bedingungen aufgrund inhomogener Belastungen einstellen, als *Lastspannungszustände*  $f'$  [52] (auch Gleichgewichtsfelder  $f'$  [53]), während die Zustände, die umgekehrt bei homogenen statischen Bedingungen durch geometrische Inhomogenitäten verursacht werden, *Eigenspannungszustände*  $f''$  [52] (kompatible Felder  $f''$  [53]) genannt werden.

$$f' = \left\{ f \mid \begin{array}{l} \underline{p}(\underline{x}) = \underline{p}^*(\underline{x}) ; \underline{\varepsilon}^Q(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in V \\ \underline{p}(\underline{x}) = \underline{p}^*(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in F_p ; \underline{u}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in F_u \end{array} \right\}, \quad (1.1.5)$$

$$f'' = \left\{ f \mid \begin{array}{l} \underline{p}(\underline{x}) = \underline{0} ; \underline{\varepsilon}^Q(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}^{Q*}(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in V \\ \underline{p}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in F_p ; \underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}^*(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in F_u \end{array} \right\}. \quad (1.1.6)$$

Ein Feld, das alle Grundgleichungen und Randbedingungen exakt erfüllt, ist daher im allgemeinen nur durch die Überlagerung beider Zustände darzustellen:

$$f = f' + f'' \quad (1.1.7)$$

Entsprechend dieser Einteilung der Verformungs- und Spannungsursachen lassen sich auch die Grundgleichungen in Beziehungen zwischen geometrischen Größen und solche zwischen statischen Größen trennen. Wird eine schematische Darstellung - das TONFI-Schema [54] - gewählt, in der geo-

metrische Größen den statischen Größen komplementär gegenüberstehen, ergibt sich in den Grundgleichungen auch eine Analogie.

Zwischen den Verschiebungskomponenten  $u_i(x^r)$  und den Verformungsgrößen, den *elastischen Dehnungen*  $\varepsilon_{ij}^E(x^r)$  [55] und Extradehnungen  $\varepsilon_{ij}^Q(x^r)$  besteht die Beziehung

$$\frac{1}{2} (\nabla \underline{u} + \underline{u} \nabla) = \underline{\varepsilon}^E + \underline{\varepsilon}^{Q*} \quad (1.1.8)$$

mit den Kompatibilitätsbedingungen

$$\nabla \times \underline{\varepsilon}^E \times \nabla = \underline{\eta}^* = -\nabla \times \underline{\varepsilon}^{Q*} \times \nabla . \quad (1.1.9)$$

Diesen beiden Zusammenhängen formal gleich sind die Gleichgewichtsbedingungen

$$\nabla^T \cdot \underline{\tau}^G = -\underline{p}^{*T} \quad (1.1.10)$$

bzw. die Beziehungen zwischen dem *Spannungsfunktionenfeld*  $\chi$  und den *Spannungen*  $\underline{\tau}^G$

$$\nabla \times \chi \times \nabla = \underline{\tau}^G + \underline{\tau}^K . \quad (1.1.11)$$

Dabei ist  $\underline{\tau}^K$  eine Partikulärlösung der inhomogenen Gleichgewichtsbedingungen

$$\nabla^T \cdot \underline{\tau}^K = \underline{p}^{*T} , \quad (1.1.12)$$

die jedoch nicht die statischen Randbedingungen erfüllen muß [55]. Die Verknüpfung zwischen kinematischen und statischen Größen liefert das Stoffgesetz

$$\underline{\tau}^G = \underline{c} \cdot \underline{\varepsilon}^E , \quad \tau_{ij}^G = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^E , \quad (1.1.13)$$

bzw. dessen Umkehrung

$$\underline{\varepsilon}^E = \underline{s} \cdot \underline{\tau}^G , \quad \varepsilon_{ij}^E = s_{ijkl} \tau_{kl}^G , \quad (1.1.14)$$

mit den zueinander inversen Tensoren 4. Stufe der Elastizitätskonstanten  $\underline{c}$  bzw. der Elastizitätskoeffizienten  $\underline{s}$ .

Besonders deutlich wird diese Äquivalenz des formalen Aufbaus der für die kinematischen und die statischen Größen geltenden Gleichungen in einer Matrixschreibweise. Werden alle Feldgrößen, die symmetrischen Tensoren

$\underline{\varepsilon}, \underline{\tau}$  und  $\underline{\eta}, \underline{\chi}$  wie der Verschiebungsvektor  $\underline{u}$  nach VOIGT als Vektoren geschrieben, z. B.:

$$\underline{\varepsilon} := (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}, 2\varepsilon_{12})^T, \quad (1.1.15)$$

und gleichzeitig Matrizen von Differentialoperatoren  $\partial_i = \partial/\partial x_i$  eingeführt, so ergibt sich in kartesischen Koordinaten die in Tafel 1 angegebene Darstellungsmöglichkeit. Dabei sind

$$\underline{D}^T = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.16)$$

und

$$\underline{R} = \underline{R}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_{33} & -\partial_{22} & \partial_{23} & 0 & 0 \\ -\partial_{33} & 0 & -\partial_{11} & 0 & \partial_{13} & 0 \\ -\partial_{22} & -\partial_{11} & 0 & 0 & 0 & \partial_{12} \\ \partial_{23} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\partial_{11} & -\frac{1}{2}\partial_{12} & -\frac{1}{2}\partial_{13} \\ 0 & \partial_{13} & 0 & -\frac{1}{2}\partial_{12} & \frac{1}{2}\partial_{22} & -\frac{1}{2}\partial_{23} \\ 0 & 0 & \partial_{12} & -\frac{1}{2}\partial_{13} & -\frac{1}{2}\partial_{23} & \frac{1}{2}\partial_{33} \end{pmatrix} \quad (1.1.17)$$

die grundlegenden Operatormatrizen mit der auch als BIANCCHI-Identität bekannten Eigenschaft

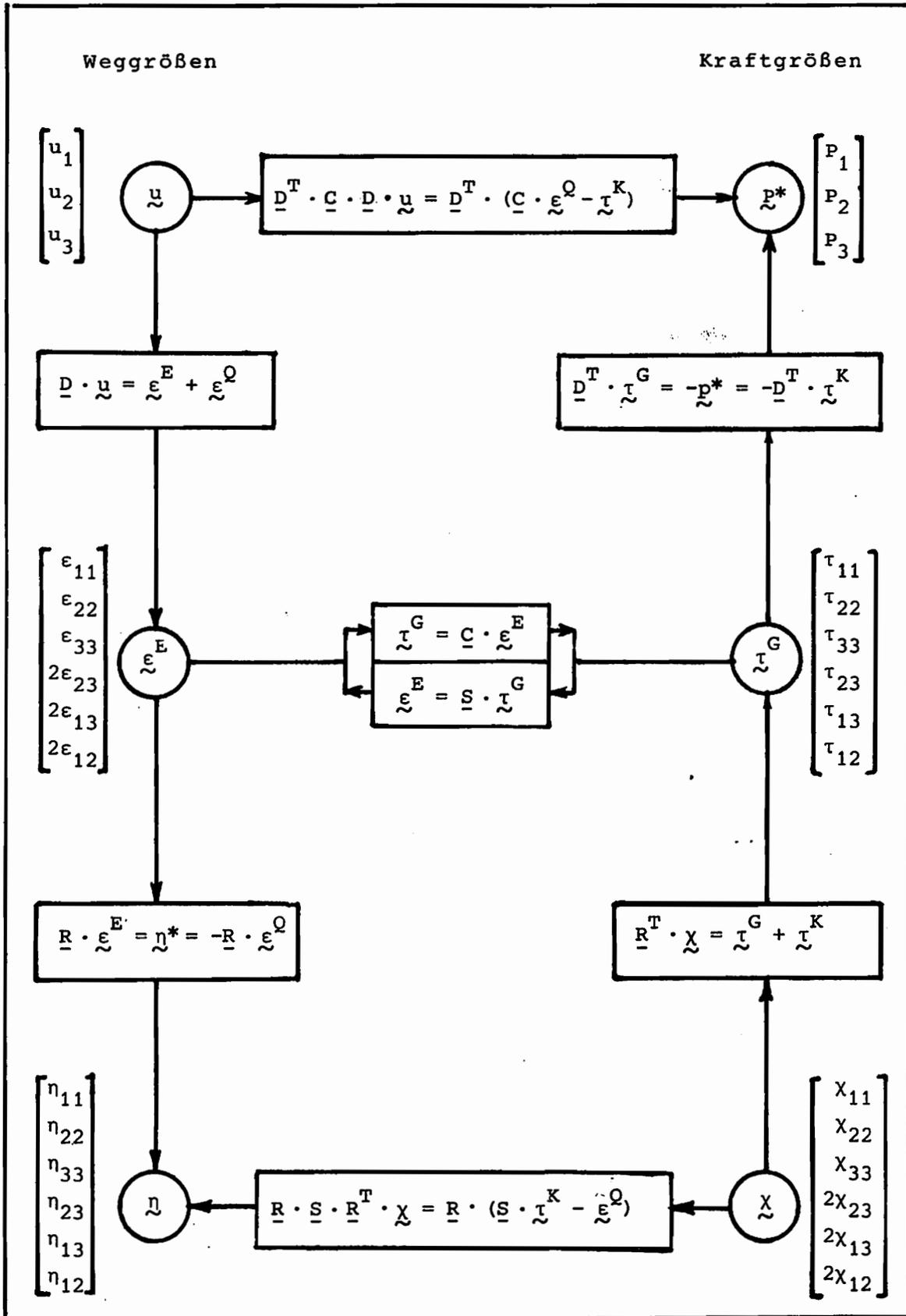
$$\underline{D}^T \cdot \underline{R} = \underline{D}^T \cdot \underline{R}^T = \underline{0} \quad (1.1.18)$$

Dies bedeutet, daß

$$\underline{D}^T \cdot \underline{\eta} = \underline{0} \quad (1.1.19)$$

gilt, also drei Abhängigkeiten zwischen den sechs Verträglichkeitsbedingungen (1.1.9) existieren.

Die im folgenden betrachteten Körper mögen jeweils aus hyperelastischem Material bestehen, so daß die Existenz einer *Verformungsenergiedichte*  $W$



Tafel 1 : Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie in schematischer Darstellung nach TONTI

angenommen werden kann. Damit sind die allgemeinen Spannungs-Verformungsbeziehungen (1.1.13) auch in der Form

$$\underline{\tau}^G = \partial W / \partial \underline{\epsilon}^E \quad (1.1.20)$$

schreibbar, wenn  $W$  als Funktion der Verzerrungskomponenten  $\epsilon_{ij}^E$  bekannt ist, bei linearelastischem Materialverhalten also gilt:

$$W = W(\epsilon_{ij}^E) = \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{ij}^E \epsilon_{kl}^E \quad (1.1.21)$$

Diese quadratische Form ist wie der symmetrische Tensor  $c_{ijkl}$  positiv definit. Die Umkehrung (1.1.14) existiert also und führt zu der *komplementären Energiedichte*

$$W_c = W_c(\tau_{ij}^G) = \frac{1}{2} s_{ijkl} \tau_{ij}^G \tau_{kl}^G \quad (1.1.22)$$

Beide Energiedichten sind auch durch die LEGENDRE Transformation miteinander verknüpft:

$$W_c(\underline{\tau}^G) = \underline{\tau}^{GT} \cdot \underline{\epsilon}^E(\underline{\tau}^G) - W(\underline{\epsilon}^E(\underline{\tau}^G)) \quad (1.1.23)$$

Außerdem gilt analog zu (1.1.20)

$$\underline{\epsilon}^E = \frac{\partial W_c}{\partial \underline{\tau}^G} \quad (1.1.24)$$

Mit der Energiedichte  $W$  kann ein elastisches *Gesamtpotential*

$$\pi = \int_V W \, dV - \int_V \underline{p}^{*T} \cdot \underline{u} \, dV - \int_{F_P} \underline{p}^{*T} \cdot \underline{u} \, dF \quad (1.1.25)$$

eingeführt werden, aus dem sich durch Variation als EULER'sche Differentialgleichungen die Gleichgewichtsaussagen (1.1.10) ergeben. Notwendige Bedingung ist dabei ein *geometrisch zulässiges*, d. h. alle geometrischen Bedingungen erfüllendes, sonst aber beliebiges Verschiebungsfeld  $\underline{u}$ . Dies bedeutet, daß der hyperelastische Körper unter allen geometrisch möglichen Verschiebungen  $\underline{u}$  einen Zustand annimmt, in dem das Gesamtpotential  $\pi$  einen stationären Wert hat. Da  $W$  eine positiv definite quadratische Form, also auch eine konvexe Funktion ist, ist dies ein Minimum des Funktionals (siehe Abschnitt 1.2).

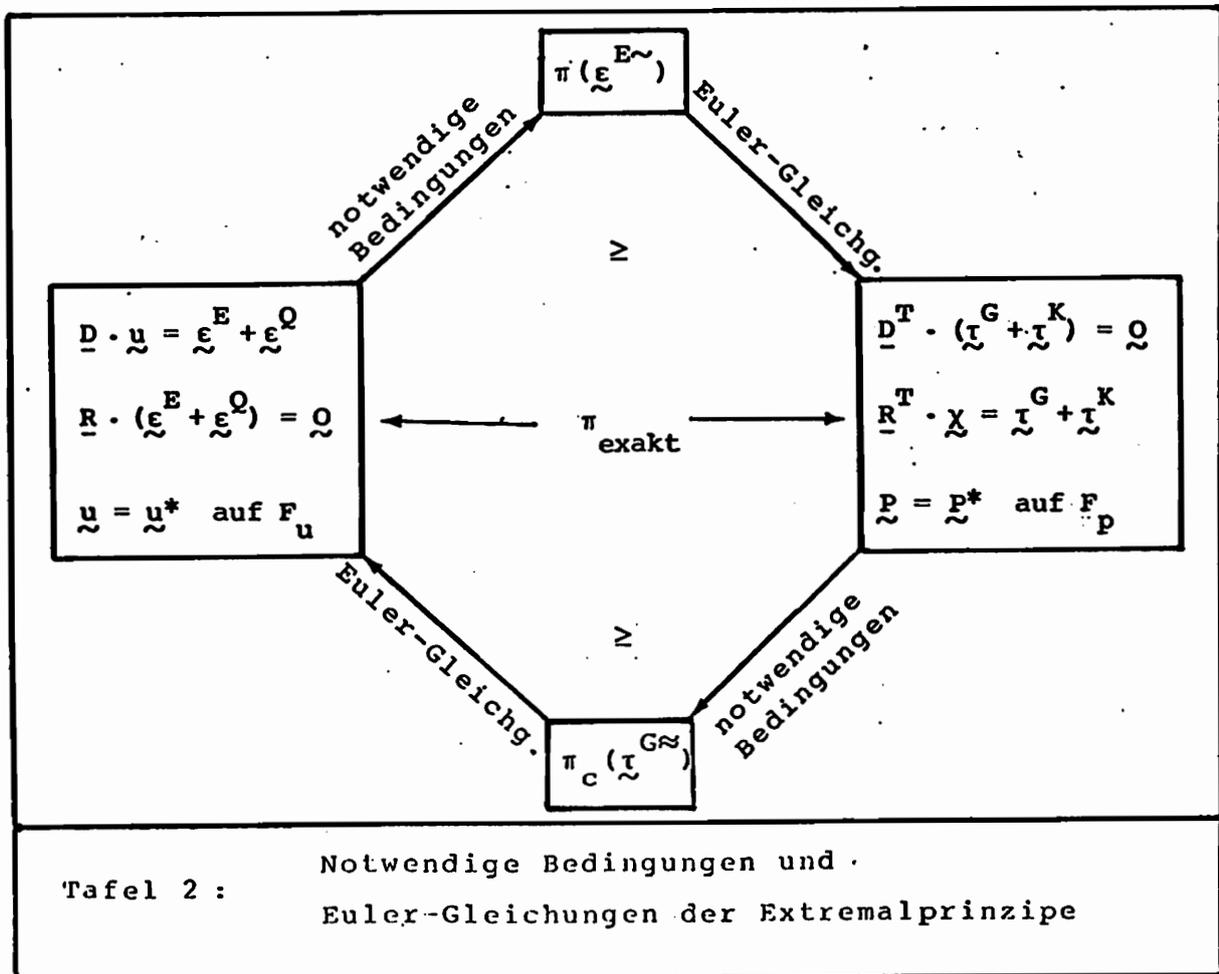
Eine komplementäre Aussage in Kraftgrößen erhält man über die LEGENDRE-Transformation (1.1.23) aus (1.1.25) nach Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes. Für Zustände  $\underline{\tau}^{G\approx}$ , die alle statischen Bedingungen erfüllen, d. h. *statisch zulässig* sind, ergibt sich

$$\pi_c = - \int_V w_c \, dV + \int_{F_u} \underline{p}^T \cdot \underline{u}^* \, dF - \int_V \underline{\tau}^{GT} \cdot \underline{\varepsilon}^{Q*} \, dV \quad (1.1.26)$$

das *konjugierte Gesamtpotential*  $\pi_c$ . Unter allen statisch zulässigen Zuständen  $\underline{\tau}^{G\approx}$  gibt das wirkliche Spannungsfeld, das also auch alle kinematischen Bedingungen erfüllt, für das konjugierte Gesamtpotential  $\pi_c$  den größten Wert. Es gilt damit (siehe Abschnitt 1.2)

$$\pi_c = (\underline{\tau}^{G\approx}) \leq \pi_c(\underline{\tau}^G_{\text{exakt}}) = \pi(\underline{\varepsilon}^E_{\text{exakt}}) \leq \pi(\underline{\varepsilon}^{E\sim}) \quad (1.1.27)$$

Diese komplementären Extremalprinzipie haben neben den komplementären Formulierungen in Weggrößen bzw. Kraftgrößen auch komplementäre notwendige Bedingungen und Euler-Gleichungen (siehe Tafel 2): Die notwendigen Bedingungen für  $\pi$  sind die Euler-Gleichungen von  $\pi_c$  und umgekehrt.



## 1.2. Operatorgleichungen und Funktionale im Hilbertraum elastischer Zustände

Wie hier gezeigt wird, sind alle bisher aufgeführten Gleichungen der linearen Elastizitätstheorie sowie die "schwachen" Formulierungen der Randwertprobleme als Extremalaussagen, als Operatorgleichungen bzw. Funktionale in geeignet gewählten Funktionenräumen formulierbar. Damit können Sätze und Ungleichungen der Funktionalanalysis für die zu untersuchenden Probleme der Elastizitätstheorie Verwendung finden, z. B. um Fehlerabschätzungen anzugeben.

Benützt werden reelle unendlich-dimensionale gewichtete  $L_2$ -Räume [56]. Sie werden von quadratintegrablen skalaren, vektoriellen oder tensoriellen Funktionen  $f$  in einfachen zusammenhängenden Gebieten  $V$  des  $n$ -dimensionalen EUKLID'schen Raumes  $E^n$  gebildet. Dabei ist der Raum mit dem Skalarprodukt zweier Elemente  $f_1$  und  $f_2$  und einem symmetrischen Tensor  $\underline{G}$  als positives Gewicht

$$\{f_1, f_2\}_G := \int_V f_1^T \cdot \underline{G} \cdot f_2 \, dV, \quad (1.2.1)$$

sowie der damit definierbaren  $G$ -Norm

$$\|f\|_G := \{f, f\}_G^{1/2} \quad (1.2.2)$$

zu vervollständigen [57]; dem Raum sind also alle Grenzwerte  $f_n$  von *schwach konvergenten*, sogenannten *Cauchy* Folgen

$$f_{(1)}, f_{(2)}, f_{(3)}, \dots \quad | \quad \forall c > 0 \exists k : \|f_{(n)} - f_{(k)}\|_G < c \quad \forall n > k$$

hinzuzufügen. Diese Grenzwerte z. B.  $f_n^1$  und  $f_n^2$  gehören zur gleichen *Äquivalenzklasse*, wenn die zugehörigen Cauchy Folgen die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{(n)}^1 - f_{(n)}^2\|_G = 0$$

erfüllen. Die Menge all dieser Äquivalenzklassen bildet einen nach Konstruktion vollständigen Raum, mit der Norm (1.2.2) also einen Hilbertraum. Für alle geometrischen wie auch statischen Darstellungen elastischer Zustände (siehe Tafel 1) können danach Hilberträume definiert werden, zwischen denen die Grundgleichungen als Operatorgleichungen lineare Abbildungen einführen.

Mit (1.2.1 / 2) und dem Einheitstensor als Gewicht werden der Vektorraum der Verschiebungsfunktionen  $\underline{u}$  sowie der zugeordnete "statische" Raum der Kraftvektoren  $\underline{p}$  Hilberträume, der *Verschiebungsraum*  $U$  bzw. der *Lastraum*  $K$ :

$$\{\underline{u}^1, \underline{u}^2\} = \int_V \underline{u}_i^1 \underline{u}_i^2 \, dv \quad , \quad (1.2.3)$$

$$\{\underline{p}^1, \underline{p}^2\} = \int_V \underline{p}_i^1 \underline{p}_i^2 \, dv \quad . \quad (1.2.4)$$

Genauso ergeben sich für die tensorwertigen symmetrischen Größen der Inkompatibilitäten  $\underline{\eta}_{ij}$  wie auch der Spannungsfunktionen  $\underline{\chi}_{ij}$  Hilberträume, der *Inkompatibilitätenraum*  $N$  bzw. der *Spannungsfunktionenraum*  $X$ :

$$\{\underline{\eta}^1, \underline{\eta}^2\} = \int_V \underline{\eta}_{ij}^1 \underline{\eta}_{ji}^2 \, dv \quad , \quad (1.2.5)$$

$$\{\underline{\chi}^1, \underline{\chi}^2\} = \int_V \underline{\chi}_{ij}^1 \underline{\chi}_{ji}^2 \, dv \quad . \quad (1.2.6)$$

Schließlich ist der Funktionenraum der symmetrischen Verzerrungstensoren  $\underline{\epsilon}_{ij}^E$  mit dem Tensor der Elastizitätskonstanten  $c_{ijkl}$  als Gewichtung ein Hilbertraum, der *Verzerrungsraum*  $V$ :

$$\{\underline{\epsilon}^1, \underline{\epsilon}^2\} = \int_V \underline{\epsilon}_{ij}^1 c_{ijkl} \underline{\epsilon}_{kl}^2 \, dv \quad . \quad (1.2.7)$$

Entsprechend definiert das Skalarprodukt

$$\{\underline{t}^1, \underline{t}^2\} = \int_V \underline{t}_{ij}^1 s_{ijkl} \underline{t}_{kl}^2 \, dv \quad (1.2.8)$$

mit dem zu  $\underline{c}$  inversen Tensor der Elastizitätskoeffizienten  $\underline{s}$  einen Hilbertraum, den *Spannungsraum*  $S$ .

Die Grundgleichungen (1.1.8-13) verknüpfen die Elemente dieser Räume miteinander und stellen damit lineare Abbildungen zwischen diesen Räumen dar. So ist (1.1.8) eine Abbildung vom Verschiebungsraum  $U$  in den Verzerrungsraum  $V$ :

$$\underline{T} \underline{u} = \underline{\epsilon}^G = \underline{\epsilon}^E + \underline{\epsilon}^Q \quad , \quad (1.2.9)$$

$$\frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \epsilon_{ij}^E + \epsilon_{ij}^Q \quad .$$

Der Definitionsbereich  $H^1(V)$  dieses Operators  $T$  ist ein Hilbertraum, der durch Vervollständigung [58,59] des Prähilbertraums  $C^1(V)$ , des Raums der bis zur 1. Ableitung stetigen Funktionen, entsteht. Die konstitutiven Beziehungen (1.1.13) und (1.1.14), hier erweitert um von Extradehnungen  $\underline{\varepsilon}^Q$  verursachte Spannungen  $\underline{\tau}^Q$  [55], beschreiben Abbildungen zwischen dem Verzerrungsraum  $V$  und dem Spannungsraum  $S$  durch die zueinander inversen Operatoren  $C$  und  $S$  in  $L_2(V)$ :

$$C(\underline{\varepsilon}^E + \underline{\varepsilon}^Q) = \underline{\tau}^G - \underline{\tau}^Q, \quad (1.2.10)$$

$$c_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^E + \varepsilon_{kl}^Q) = \tau_{ij}^G - \tau_{ij}^Q,$$

$$\underline{\varepsilon}^E + \underline{\varepsilon}^Q = S(\underline{\tau}^G - \underline{\tau}^Q), \quad (1.2.11)$$

$$\varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^Q = s_{ijkl}(\tau_{kl}^G - \tau_{kl}^Q).$$

Die Abbildung vom Verschiebungsraum  $U$  in den Spannungsraum  $S$  ist infolgedessen

$$CT\underline{u} = \underline{\tau}^G - \underline{\tau}^Q. \quad (1.2.12)$$

Sie ist durch das Produkt der Operatoren  $C$  und  $T$ , also  $CT : H^1(V) \rightarrow L_2(V)$  gegeben. Die Elemente  $S$  werden durch die Gleichgewichtsbedingungen (1.1.10) in den Lastraum  $K$  abgebildet:

$$\begin{aligned} T^*\underline{\tau}^G &= \underline{p}, \\ -\tau_{ij,j}^G &= p_i. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Räume, deren Elemente aneinander Arbeit leisten, innere Energie liefern o. ä., können in einem Raum zusammengefaßt werden. Dazu sind die Elemente des Verschiebungsraums  $U$  und des Lastraums  $K$  um die Randwerte zu erweitern:

$$\underline{u} := \begin{pmatrix} u_i(V) \\ u_i'(F_p) \\ u_i''(F_u) \end{pmatrix}, \quad \underline{p} := \begin{pmatrix} p_i(V) \\ p_i'(F_p) \\ p_i''(F_u) \end{pmatrix}. \quad (1.2.14)$$

Die Paare  $h_{up} = (\underline{u}, \underline{p})$  bilden durch

$$\tilde{h}_{up}^1 + \tilde{h}_{up}^2 : = (\tilde{u}^1 + \tilde{u}^2, \tilde{p}^1 + \tilde{p}^2) , \quad (1.2.15)$$

$$\alpha \tilde{h}_{up} : = (\alpha \tilde{u}, \alpha \tilde{p}), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (1.2.16)$$

einen linearen Vektorraum. Mit der Einführung des Skalarproduktes

$$\{\tilde{h}_{up}^1, \tilde{h}_{up}^2\} : = \int_V \tilde{u}_i^1 \tilde{p}_i^2 \, dV + \int_F \tilde{u}_i^1 \tilde{P}_i^2 \, dF , \quad (1.2.17)$$

der Arbeit der Volumenkräfte  $\tilde{p}^2$  und der Oberflächenkräfte  $\tilde{P}^2$  an der Verschiebung  $\tilde{u}^1$  in  $V$  bzw. auf  $F$ , wird dies ein Prähilbertraum [58]. Die Vervollständigung dieses *Arbeitsraums*  $A$  ist ein Hilbertraum, wenn die Norm

$$\|\tilde{h}_{up}\| = \left( \int_V \tilde{u}_i \tilde{p}_i \, dV + \int_F \tilde{u}_i \tilde{P}_i \, dF \right)^{1/2} \quad (1.2.18)$$

für  $\tilde{h}_{up} \neq 0$  stets positiv ist. Inkompressible Körper sind damit ausgeschlossen [55]. Auch der Verzerrungsraum  $V$  und der Spannungsraum  $S$  können unter dieser Voraussetzung mit der Wechselwirkungsenergie

$$\{\tilde{h}_{\epsilon\tau}^1, \tilde{h}_{\epsilon\tau}^2\} : = \int_V \tilde{\epsilon}_{ij}^1 \tilde{\tau}_{ij}^2 \, dV \quad (1.2.19a)$$

als Skalarprodukt der Elemente  $\tilde{h}_{\epsilon\tau} = (\tilde{\epsilon}_{ij}, \tilde{\tau}_{ij})$  zu einem Hilbertraum, dem *Energieraum*  $E$  zusammengefaßt werden. In gleicher Weise kann man auch mit einer Erweiterung

$$\begin{aligned} \{\tilde{h}_{\epsilon\tau}^1, \tilde{h}_{\epsilon\tau}^2\} : &= \int_V \tilde{\epsilon}_{ij}^1 \tilde{\tau}_{ji}^2 \, dV \\ &+ \int_F \frac{1}{2} (\tilde{\epsilon}_{ij}^{1R} \tilde{\tau}_{ij}^{2R} + \tilde{\epsilon}_{ij}^{2R} \tilde{\tau}_{ij}^{1R}) \, dF \end{aligned} \quad (1.2.19b)$$

verfahren.

Der Nachweis der notwendigen Kommutativität der Skalarprodukte ergibt sich über die Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes, geeignete Umformungen und die konstitutiven Beziehungen. Gleichbedeutend mit dem Satz von BETTI ist (siehe Anhang A1)

$$\{\tilde{h}_{up}^1, \tilde{h}_{up}^2\} = \{\tilde{h}_{up}^2, \tilde{h}_{up}^1\} . \quad (1.2.20)$$

Das Skalarprodukt (1.2.19) des Raumes  $\bar{E}$  ist im Anteil der Wechselwirkungsenergie wegen der Symmetrie des Tensors der Elastizitätskonstanten kommutativ. Bezüglich der Randterme der Erweiterung gilt die Kommutativität nach Konstruktion.

Erweitert man den Definitions- und Wertebereich des mit (1.2.9) eingeführten Operators  $T$  um die auf  $F_u$  gegebenen Randwerte von  $\underline{u}$  entsprechend der Definition (1.2.14)

$$\bar{T}\underline{u} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (u_{k,1} + u_{1,k}) \\ 0 \\ -\frac{1}{2} (n_k u_1'' + n_1 u_k'') \end{pmatrix} \quad (1.2.21)$$

und analog auch den Definitions- und Wertebereich des mit (1.2.13) eingeführten Operators  $T^*$  um die Werte auf  $F_p$  [42,60,61]

$$\bar{T}^* \underline{1}^G := \begin{pmatrix} -\tau_{ij,j}^G \\ n_j \tau_{ij}^G \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2.22)$$

zeigt sich, daß diese Abbildungen zueinander *adjungiert* sind. Diese Eigenschaft kann leicht mit dem GAUSS'schen Integralsatz bewiesen werden:

$$\begin{aligned} \{\bar{1}^G, \bar{T}\underline{u}\} &= \int_V \bar{1}_{ij}^G \bar{u}_{i,j}^2 dV - \int_{F_u} \bar{1}_{ij}^G n_i \bar{u}_j'' dF \\ &= - \int_V \bar{1}_{ij,j}^G \bar{u}_i^2 dV + \int_{F_p} \bar{1}_{ij}^G n_i \bar{u}_j' dF \\ &= \{\bar{T}^* \bar{1}^G, \underline{u}\}. \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

Ohne Erfassung der Randwerte in den Definitionen würden die Operatoren, also hier  $T$  und  $T^*$  entsprechend (1.2.9) bzw. (1.2.13), nur *formal adjungiert* sein [56,62,63].

Die Folge der Abbildungen durch  $T$ , dann  $C$  und  $T^*$ , bzw. deren Erweiterungen auf die Randwerte, bildet Verschiebungen in den Lastraum, also einen

Unterraum von  $\mathcal{A}$  in einen anderen ab. Mit der Einführung einer durch die Eigenspannungsquelle  $\underline{\varepsilon}^Q$  verursachten *Quasikraftdichte*  $\underline{p}^Q$  im Innern von  $V$  und einer *Quasi-Kräftebelegung*  $\underline{p}^Q$  auf der Oberfläche  $F$  [55]

$$\mathbf{T}^* \underline{\tau}^Q = -\underline{p}^Q \quad \text{in } V, \quad (1.2.24)$$

$$\underline{\tau}^Q \cdot \underline{n} = -\underline{p}^Q \quad \text{auf } F, \quad (1.2.25)$$

erhält man

$$\mathbf{T}^* \mathbf{C} \mathbf{T} \underline{u} = \underline{p} + \underline{p}^Q \quad \text{in } V \quad (1.2.26a)$$

$$(\mathbf{C} \mathbf{T} \underline{u}) \cdot \underline{n} = \underline{p}^* + \underline{p}^Q \quad \text{auf } F \quad (1.2.26b)$$

$$\underline{u} = \underline{u}^* \quad \text{auf } F_u. \quad (1.2.26c)$$

Dies ist die Operatordarstellung der verallgemeinerten NAVIER'schen Gleichungen.

Auch die Zusammenhänge zwischen den Elementen des Spannungsfunktionsraums  $X$  und des Spannungsraums  $S$ , die Gleichungen (1.1.11), können als Operatorgleichungen aufgefaßt werden. Im Definitionsbereich  $H^2(V)$  gibt

$$\begin{aligned} L \underline{\chi} &= \underline{\tau}^G + \underline{\tau}^K, \\ \epsilon_{ikl} \epsilon_{jnm} \chi_{ln,km} &= \tau_{ij}^G + \tau_{ij}^K \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

diese Abbildung mit dem Wertebereich  $L_2(V)$ . Analog ist durch

$$\begin{aligned} L^* \underline{\varepsilon}^E &= \underline{\eta}, \\ \epsilon_{ikl} \epsilon_{jnm} \varepsilon_{ln,km}^E &= \eta_{ij} \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

die Abbildung vom Verzerrungsraum  $V$  in den Inkompatibilitätenraum  $N$  definiert. Diese zu (1.2.9) bzw. (1.2.13) dualen Systeme [54,63] sind ebenfalls durch formal adjungierte Operatoren beschrieben, wie zweimalige Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes zeigt [51,55]:

$$\begin{aligned} \{ \underline{\varepsilon}^E, L \underline{\chi} \}_C &= \int_V \varepsilon_{ij}^E \epsilon_{ikl} \epsilon_{jnm} \chi_{ln,km} dV + \\ &+ \int_F \epsilon_{ikl} \epsilon_{jnm} [ \varepsilon_{ij}^E \chi_{ln,k} - \varepsilon_{ln,k}^E \chi_{ij} ] n_m dF \\ &= \{ L^* \underline{\varepsilon}^E, \underline{\chi} \} + \langle \underline{\varepsilon}^E, l \underline{\chi} \rangle - \langle l^* \underline{\varepsilon}^E, \underline{\chi} \rangle. \end{aligned} \quad (1.2.29)$$

Diese Energieausdrücke sind dabei in einem Raum  $\mathcal{D}$  gebildet, der in einem einfach zusammenhängenden Körper ohne Volumenkräfte mit [51]

$$\{h_{-n\chi}^1, h_{-n\chi}^2\} := \int_V \bar{n}_{ij}^2 \chi_{ij}^2 dV + \oint_F [\bar{n}_{ij}^1 \chi_{ij}^2 + (n_k^2 \chi_{ij}^2), k \bar{n}_{ij}^1] dF \quad (1.2.30)$$

einen Hilbertraum darstellt. Wie in  $\mathcal{A}$  sind auch in diesem *Raum dualer Arbeit*  $\mathcal{D}$  Werte der Faktoren des Skalarproduktes auf der Oberfläche wesentlich. So stellen [51,55]

$$\bar{n} : = \nabla \times \underline{\varepsilon} \times \underline{n} - \overbrace{\underline{n} \times \underline{\varepsilon} \times \underline{n} \times (\underline{n} \times \nabla)} \quad , \quad (1.2.31a)$$

$$\bar{n} : = \underline{n} \times \underline{\varepsilon} \times \underline{n} \quad (1.2.31b)$$

Flächeninkompatibilitäten und [64]

$$\overbrace{\nabla \cdot \underline{n} \underline{\chi}} = \overbrace{(\nabla \cdot \underline{n}) \underline{\chi}} + \underline{n} \cdot \overbrace{(\nabla \underline{\chi})} \hat{=} \underline{\chi} ; \underline{n} \times \overbrace{\underline{\chi} \times \nabla} \quad (1.2.32)$$

Randwerte der Spannungsfunktionen dar. Die notwendige Kommutativität des Skalarproduktes (1.2.30) ist bei einem Körper, für den homogene Gleichgewichtsbedingungen gelten, erfüllt [51]. Dies ist mit der (1.2.24/25) äquivalenten Einführung von *Quasiinkompatibilitäten*  $\underline{n}^K$  und fiktiven Werten an der Oberfläche, die nach (1.2.31) aus einer fiktiven Verzerrung  $\underline{\varepsilon}^K$

$$\underline{\varepsilon}^K = -S \underline{\tau}^K \quad , \quad (1.2.33a)$$

$$L^* \underline{\varepsilon}^K = \underline{n}^K \quad , \quad (1.2.33b)$$

zu berechnen sind, keine wesentliche Einschränkung.

Eine Erweiterung der Operatoren  $L$  und  $L^*$ , so daß sie die Eigenschaft der Adjungiertheit erhalten, ist

$$\bar{L} \underline{\chi} := \left. \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} \nabla \times \underline{\chi} \times \nabla \\ \underline{\chi}' \\ -\nabla \times \underline{\chi}' \times \underline{n} \\ 0 \end{array} \right) \\ \left. \begin{array}{l} \text{in } V \\ \text{auf } F_p \\ \text{auf } F_u \end{array} \right\} \quad (1.2.34)$$

$$\bar{L}^* \underline{\varepsilon} := \left. \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} \nabla \times \underline{\varepsilon} \times \nabla \\ 0 \\ -\nabla \times \underline{\varepsilon}'' \times \underline{n} \\ \underline{\varepsilon}'' \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{in } V \\ \text{auf } F_p \\ \text{auf } F_u \end{array} \end{array} \right\} \quad (1.2.35)$$

wenn die Zustandsbeschreibungen durch Verzerrungsgrößen bzw. Spannungsfunktionen ebenfalls durch Randwerte

$$\underline{\varepsilon} = \left. \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} \underline{\varepsilon} \\ \nabla \times \underline{\varepsilon} \times \underline{n} \\ \underline{\varepsilon} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{in } V \\ \text{auf } F \end{array} \end{array} \right\} \quad (1.2.36)$$

$$\underline{\chi} = \left. \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} \underline{\chi} \\ \underline{\chi} \\ \nabla \times \underline{\chi} \times \underline{n} \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{in } V \\ \text{auf } F \end{array} \end{array} \right\} \quad (1.2.37)$$

ergänzt werden. Wie sich entsprechend (1.2.29) dann durch

$$\begin{aligned} \{\underline{\varepsilon}, \bar{L}\underline{\chi}\} &= \int_V \underline{\varepsilon} \cdot (\nabla \times \underline{\chi} \times \nabla) dV \\ &\quad - \int_{F_p} [\underline{\varepsilon}' \cdot (\nabla \times \underline{\chi}' \times \underline{n}) - (\nabla \times \underline{\varepsilon}' \times \underline{n}) \cdot \underline{\chi}'] dF \\ &= \int_V (\nabla \times \underline{\varepsilon} \times \nabla) \cdot \underline{\chi} dV \\ &\quad + \int_{F_u} [\underline{\varepsilon}'' \cdot (\nabla \times \underline{\chi}'' \times \underline{n}) - (\nabla \times \underline{\varepsilon}'' \times \underline{n}) \cdot \underline{\chi}''] dF \\ &= \{\bar{L}^* \underline{\varepsilon}, \underline{\chi}\} \end{aligned} \quad (1.2.38)$$

bestätigt, gibt  $\bar{L}$  eine Abbildung von einem Unterraum von  $\mathcal{D}$  in  $E$ , und  $\bar{L}^*$  die dazu adjungierte Abbildung von  $E$  in  $\mathcal{D}$ .

Dual zur Operatordarstellung der verallgemeinerten NAVIER'schen Gleichungen (1.2.26) ist die Folge der Operatoren L, dann S und L\*, bzw. deren Erweiterungen auf die Randwerte. Die damit folgende Abbildung vom Spannungsfunktionsraum X in den Inkompatibilitätenraum N

$$L^* S L \chi = \underline{\eta} + \underline{\eta}^K \quad \text{in } V \quad (1.2.39)$$

stellt die verallgemeinerten BELTRAMI - Gleichungen dar.

Dazu gehören statische Bedingungen, die  $\underline{u} \times \underline{\chi} \times \underline{v}$  und  $\underline{\chi}$  bzw.  $\underline{u} \times \underline{\chi}$  an der Oberfläche  $F_p$  festlegen [64], sowie auf  $F_u$  geometrische Bedingungen für  $SL\chi$  oder für die Flächeninkompatibilitäten  $\bar{\eta}$  und  $\bar{\eta}$  (1.2.31).

Analog dem Schema der Grundgleichungen (Tafel 1) lassen sich diese hiermit vollständigen Operatorgleichungen sehr übersichtlich zusammenfassen (Tafel 3), so daß die der Theorie innewohnende Dualität [54,63] klar zu erkennen ist.

Die Verformungsenergiedichte W (1.1.21), ist mit den hier eingeführten Operatoren

$$W = \frac{1}{2} (T \underline{u} - \underline{\varepsilon}^Q)^T \cdot C (T \underline{u} - \underline{\varepsilon}^Q) \quad (1.2.40)$$

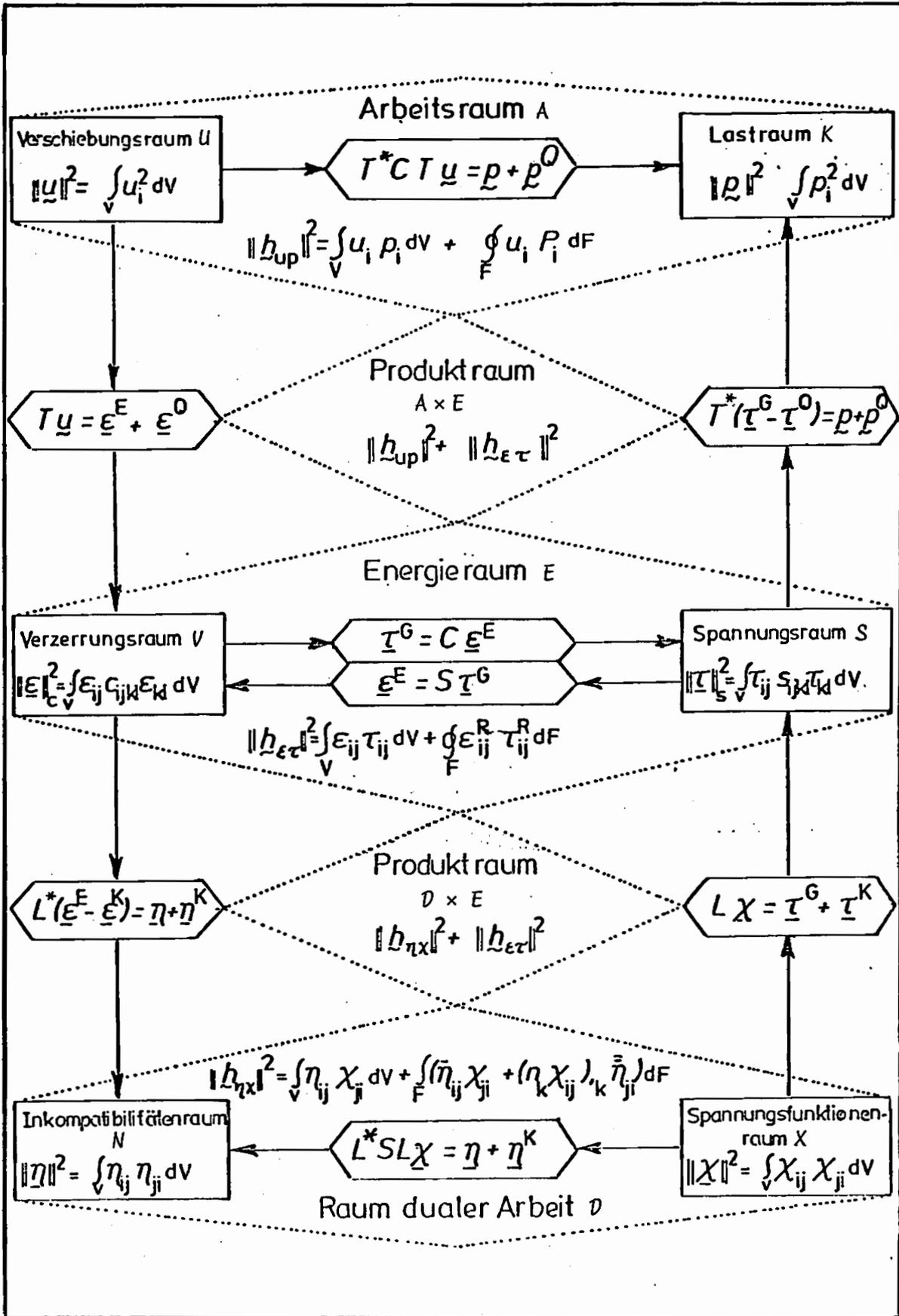
dual zur komplementären Energiedichte  $W_c$  (1.1.22), ausgedrückt durch Spannungsfunktionen nach (1.2.27)

$$W_c = \frac{1}{2} (L \chi - \underline{\tau}^K)^T \cdot S (L \chi - \underline{\tau}^K) \quad (1.2.41)$$

Es lassen sich außerdem duale Darstellungen der gesamten *elastischen Energie* E angeben. Unter Berücksichtigung von (1.2.24/25) ist

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \{ \underline{E}, \underline{\varepsilon}^E \} = \int_V W(\underline{\varepsilon}^E) \, dV \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_V (\underline{p}^* - \underline{p}^Q)^T \cdot \underline{u} \, dV + \int_F (\underline{p}^* - \underline{p}^Q)^T \cdot \underline{u} \, dF \right] + \int_V W(\underline{\varepsilon}^Q) \, dV \\ &= \frac{1}{2} \{ \underline{p} - \underline{p}^Q, \underline{u} \} + \int_V W(\underline{\varepsilon}^Q) \, dV \quad , \end{aligned} \quad (1.2.42)$$

aber auch unter Berücksichtigung von (1.2.39) und (1.2.33) in den dualen Größen

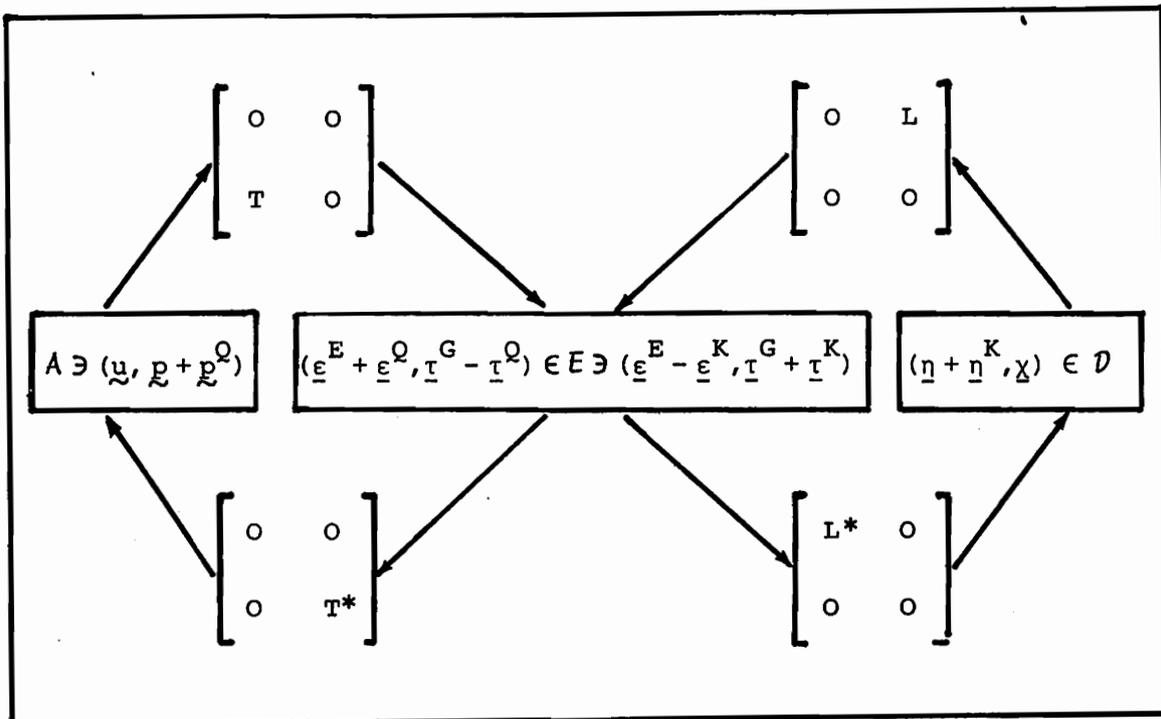


Tafel 3 : Hilberträume und Operatorgleichungen der linearen Elastizitätstheorie

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \{ \underline{\varepsilon}^E, \underline{\tau}^G \} = \int_V w_c(\underline{\tau}^G) dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_V (\underline{\nabla} \times \underline{\chi} \times \underline{\nabla}) \dots (\underline{\varepsilon}^E + \underline{\varepsilon}^K) dV + \int_V w_c(\underline{\tau}^K) dV \\
 &= \frac{1}{2} \{ \underline{\eta} - \underline{\eta}^K, \underline{\chi} \} + \int_V w_c(\underline{\tau}^K) dV \quad . \quad (1.2.43)
 \end{aligned}$$

In (1.2.43) ist verwendet, daß die Oberflächenintegrale von (1.2.29) in solche mit Flächeninkompatibilitäten (1.2.31) überführt werden können [51,55], wenn keine Belastung durch Volumenkräfte vorliegt.

Wie diese verschiedenen Darstellungen zeigen, enthalten die drei Funktionenräume  $A$ ,  $E$  und  $\mathcal{D}$  verschiedene Repräsentationen des allgemeinen Hilbertraumes der elastischen Zustände  $H$  [55], sind also Unterräume von  $H$ . In  $H$  wird üblicherweise als Skalarprodukt die Wechselwirkungsenergie (1.2.19) zugrunde gelegt. Elemente dieser drei Hilberträume werden durch formal adjungierte bzw. adjungierte Operator-Matrizen aufeinander abgebildet, die sich aus den in (1.2.9/13) sowie (1.2.27/28) bzw. (1.2.21/22) sowie (1.2.34/35) definierten Operatoren  $T$  und  $T^*$  sowie  $L$  und  $L^*$  bzw.  $\bar{T}$  und  $\bar{T}^*$  sowie  $\bar{L}$  und  $\bar{L}^*$  ergeben (siehe auch Tafel 3):



Mit der selbstadjungierten Operatormatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & S \\ C & 0 \end{pmatrix} : E \rightarrow E, \quad (1.2.44)$$

die Elemente  $(\underline{\varepsilon}, \underline{\tau})$  auf sich selbst abbildet, ergibt sich als Abbildung von  $A$  auf  $\mathcal{D}$

$$\begin{pmatrix} L^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & S \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\lambda}^u \\ \underline{\lambda}^p + \underline{p}^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\eta} = \underline{0} \\ \underline{\chi} = \underline{0} \end{pmatrix} \quad (1.2.45)$$

und umgekehrt als Abbildung von  $\mathcal{D}$  auf  $A$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & S \\ C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\eta} + \underline{\eta}^K \\ \underline{\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\lambda}^u = \underline{0} \\ \underline{\lambda}^p = \underline{0} \end{pmatrix}. \quad (1.2.46)$$

Die Operatoren dieser Abbildungen sind also nicht injektiv [58]. Dies ist gleichbedeutend mit der BIANCHI-Identität (1.1.18).

Werden Elemente aus  $A$  und aus  $E$  zu Elementen  $(\underline{\tau}, \underline{u})$  und  $(\underline{\varepsilon}, \underline{p})$  eines kartesischen Produktraumes  $A \times E$  zusammengefaßt [61], so ist dieser mit der Summe der Skalarprodukte von  $A$  und  $E$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{\tau} \\ 1 \\ \underline{u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \underline{\tau} \\ 2 \\ \underline{u} \end{pmatrix} \right\}_{A \times E} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{u} \\ 1 \\ \underline{p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \underline{u} \\ 2 \\ \underline{p} \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{\varepsilon} \\ 1 \\ \underline{\tau} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \underline{\varepsilon} \\ 2 \\ \underline{\tau} \end{pmatrix} \right\} \\ &= \int_V \underline{u}_i \underline{p}_i \, dV + \int_F \underline{u}_i \underline{p}_i \, dF + \int_V \underline{\varepsilon}_{ij} \underline{\tau}_{ji} \, dV \end{aligned} \quad (1.2.47)$$

ein Hilbertraum [62,63]. Darin werden die Elemente  $(\underline{\tau}, \underline{u})$  auf  $(\underline{\varepsilon}, \underline{p})$  durch folgende Operatormatrix abgebildet:

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{T} \\ \bar{T}^* & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \underline{\tau}^G \\ \underline{\lambda}^G \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}^E + \underline{\varepsilon}^Q \\ \underline{p} \end{pmatrix}. \quad (1.2.48)$$

Diese Abbildung ist selbstadjungiert [61], wie sich mit (1.2.23) sofort ergibt:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \underline{\tau}, \underline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{T} \\ \bar{T}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \underline{\tau} \\ 2 \\ \underline{u} \end{pmatrix} &= \{ \underline{\tau}, \bar{T} \underline{u} \} + \{ \underline{u}, \bar{T}^* \underline{\tau} \} \\
 &= \{ \underline{u}, \bar{T}^* \underline{\tau} \} + \{ \underline{\tau}, \bar{T} \underline{u} \} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \underline{\tau}, \underline{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{T} \\ \bar{T}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{\tau} \\ 1 \\ \underline{u} \end{pmatrix} .
 \end{aligned} \tag{1.2.49}$$

Entsprechendes gilt für den dualen kartesischen Produktraum  $E \times \mathcal{D}$  mit dem Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{\tau} \\ 1 \\ \underline{\eta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \underline{\tau} \\ 2 \\ \underline{\eta} \end{pmatrix} \right\}_{E \times \mathcal{D}} &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{\varepsilon} \\ 1 \\ \underline{\chi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \underline{\varepsilon} \\ 2 \\ \underline{\chi} \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{\eta} \\ 1 \\ \underline{\chi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \underline{\eta} \\ 2 \\ \underline{\chi} \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \int_V \underline{\varepsilon}_{ij} \underline{\tau}_{ji} \, dV + \int_V \underline{\eta}_{ij} \underline{\chi}_{ji} \, dV \\
 &\quad + \int_F \left[ \underline{\eta}_{ij} \underline{\chi}_{ji} + \frac{1}{\underline{\eta}_{ij}} (n_k \underline{\chi}_{ij})_{,k} \right] dF ,
 \end{aligned} \tag{1.2.50}$$

in dem eine selbstadjungierte Operatormatrix aus den adjungierten Operatoren  $\bar{L}$  und  $\bar{L}^*$  (1.2.34/35) die Elemente  $(\underline{\varepsilon}, \underline{\chi})$  auf  $(\underline{\tau}, \underline{\eta})$  abbildet:

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{L} \\ \bar{L}^* & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\chi} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{\tau}^G + \underline{\tau}^K \\ \underline{\eta} \end{pmatrix} . \tag{1.2.51}$$

Die Abbildungen durch diese Operatormatrizen (1.2.48) bzw. (1.2.51) können auch als Gradienten, bzw. als GÄTEAUX-Ableitung oder erste Variation zugeordneter bilinearer Funktionale dargestellt werden [42,61,62,65]:

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{T} \\ \bar{T}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\tau}^G \\ \underline{u} \end{pmatrix} = \frac{\partial Q_P}{\partial} \begin{pmatrix} \underline{\tau}^G \\ \underline{u} \end{pmatrix} . \tag{1.2.52}$$

Mit (1.2.23) ist dabei

$$\begin{aligned}
 Q_P(\underline{\tau}, \underline{u}) &= \frac{1}{2} [\{ \underline{\tau}, \bar{T} \underline{u} \} + \{ \underline{u}, \bar{T}^* \underline{\tau} \}] \\
 &= \{ \underline{\tau}, \bar{T} \underline{u} \} \\
 &= \{ \underline{u}, \bar{T}^* \underline{\tau} \} .
 \end{aligned} \tag{1.2.53}$$

Für die duale Abbildung (1.2.51) kann

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{L} \\ \bar{L}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\chi} \end{pmatrix} = \partial Q_d / \partial \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon} \\ \underline{\chi} \end{pmatrix} \quad (1.2.54)$$

und mit (1.2.38)

$$\begin{aligned} Q_d(\underline{\varepsilon}, \underline{\chi}) &= \frac{1}{2} [\{\underline{\varepsilon}, \bar{L} \underline{\chi}\} + \{\bar{L}^* \underline{\varepsilon}, \underline{\chi}\}] \\ &= \{\underline{\varepsilon}, \bar{L} \underline{\chi}\} \\ &= \{\bar{L}^* \underline{\varepsilon}, \underline{\chi}\} \end{aligned} \quad (1.2.55)$$

definiert werden. Die Erfassung aller Operatorgleichungen als Gradienten zweier zueinander dualer Funktionale ist möglich, wenn auch die Bildelemente der Abbildungen (1.2.48) bzw. (1.2.51) sich aus je einem Funktional herleiten lassen. D. h. für (1.2.48) muß ein Funktional  $H_p$  existieren, so daß aus

$$\delta J_p = \delta(Q_p - H_p) = \partial(Q_p - H_p) / \partial \begin{pmatrix} \underline{\tau}^G \\ \underline{u} \end{pmatrix} \delta \begin{pmatrix} \underline{\tau}^G \\ \underline{u} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.2.56)$$

bei Beachtung von (1.5.52)

$$\underline{\varepsilon}^E + \underline{\varepsilon}^Q = \partial H_p / \partial \underline{\tau}^G, \quad (1.2.57)$$

$$\underline{p} = \partial H_p / \partial \underline{u} \quad (1.2.58)$$

folgt. Dies ist erfüllt durch

$$\begin{aligned} H_p(\underline{\tau}^G, \underline{u}, \underline{\varepsilon}^E) &= \int_V [\underline{\tau}^G \cdot (\underline{\varepsilon}^E + \underline{\varepsilon}^Q) + w(\underline{\varepsilon}^E) + \underline{p}^{*T} \cdot \underline{u}] dv \\ &\quad - \int_{F_u} \underline{u}^{*T} \cdot \underline{\tau}^G \cdot \underline{n} dF + \int_{F_p} \underline{p}^{*T} \cdot \underline{u} dF. \end{aligned} \quad (1.2.59)$$

Wie die Variation nach  $\underline{\varepsilon}^E$  zeigt

$$\partial J_p / \partial \underline{\varepsilon}^E = 0 = \begin{pmatrix} -\underline{\tau}^G + \partial w(\underline{\varepsilon}^E) / \partial \underline{\varepsilon}^E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2.60)$$

enthält das Funktional  $J_p = Q_p(\underline{\tau}^G, \underline{u}) - H_p(\underline{\tau}^G, \underline{u}, \underline{\varepsilon}^E)$  außer den geforderten Gleichungen (1.2.57/58) auch die konstitutiven Beziehungen (1.1.20). Die duale Formulierung erhält man, wenn sich aus

$$\delta J_d = \delta(Q_d - H_d) = \frac{\partial(Q_d - H_d)}{\partial \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}^E \\ \underline{\chi} \end{pmatrix}} \delta \begin{pmatrix} \underline{\varepsilon}^E \\ \underline{\chi} \end{pmatrix} \quad (1.2.61)$$

mit (2.2.54)

$$\underline{\tau}^G + \underline{\tau}^K = \frac{\partial H_d}{\partial \underline{\varepsilon}^E}, \quad (1.2.62)$$

$$\underline{\eta} = \frac{\partial H_d}{\partial \underline{\chi}} \quad (1.2.63)$$

ergibt. Bei Berücksichtigung von (1.2.38) hat

$$\begin{aligned} H_d(\underline{\tau}^G, \underline{\chi}, \underline{\varepsilon}^E) &= \int_V [(\underline{\tau}^G + \underline{\tau}^K) \dots \underline{\varepsilon}^E - w_c(\underline{\tau}^G) + \underline{\eta}^* \dots \underline{\chi}] dv \\ &- \int_{F_p} [\underline{\varepsilon}^E \dots (\underline{\nabla} \times \underline{\chi} \times \underline{n})^* - (\underline{\nabla} \times \underline{\varepsilon}^E \times \underline{n}) \dots \underline{\chi}^*] dF \\ &+ \int_{F_u} [\underline{\varepsilon}^{E*} \dots (\underline{\nabla} \times \underline{\chi} \times \underline{n}) - (\underline{\nabla} \times \underline{\varepsilon}^E \times \underline{n})^* \dots \underline{\chi}] dF \end{aligned} \quad (1.2.64)$$

die gewünschten Eigenschaften und (1.2.61) liefert die dualen Grundgleichungen sowie auch die zu (1.2.60) inversen konstitutiven Beziehungen (siehe Anhang A2). In Tafel 4 ist die Funktionaldarstellung der primären und dualen Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie zusammengestellt.

Die Variation dieser beiden Funktionale  $J_p(\underline{\tau}^G, \underline{u}, \underline{\varepsilon}^E)$  und  $J_d(\underline{\tau}^G, \underline{\chi}, \underline{\varepsilon}^E)$  entspricht im allgemeinen einer Stationaritätsaussage. Extremalprinzipie, wie sie für Fehlerabschätzungen notwendig sind, ergeben sich nur, wenn das Funktional bezüglich aller variierbaren Größen konvex oder konkav ist. Hat ein Funktional die *Sattel-Eigenschaft*, d. h., ist es konvex in einigen Variablen und konkav in den restlichen, kann durch Elimination der jeweils "falschen" Variablen ein Extremal-Funktional gebildet werden [61,66]. Wie gezeigt werden kann [66], ist  $J_p(\underline{\tau}^G, \underline{u}, \underline{\varepsilon}^E)$  konkav in  $\underline{\tau}^G$  und konvex sowohl in  $\underline{u}$  wie in  $\underline{\varepsilon}^E$ , wenn die Verformungsenergiedichte  $W(\underline{\varepsilon}^E)$  konvex ist, d. h. wenn

$$\frac{\partial^2 W(\underline{\varepsilon})^E}{\partial \varepsilon_{ij}^E \partial \varepsilon_{kl}^E} > 0 \quad \text{in } V \quad (1.2.65)$$

gilt. Also hat  $J_P(\underline{\tau}^G, \underline{u}, \underline{\varepsilon}^E)$  die Sattel-Eigenschaft. Das eingeschränkte Funktional

$$\begin{aligned} I_P(\underline{u}, \underline{\varepsilon}^E) &= J_P(\underline{\tau}^G, \underline{u}, \underline{\varepsilon}^E) - \{ \underline{\tau}^G, \frac{\partial J_P}{\partial \underline{\tau}^G} \} \\ &= \int_V [W(\underline{\varepsilon}^E) - \underline{p}^{*T} \cdot \underline{u}] \, dV - \int_{F_P} \underline{p}^{*T} \cdot \underline{u} \, dF \end{aligned} \quad (1.2.66)$$

ist bei Erfüllung von (1.2.65) streng konvex, so daß die exakte Lösung diesem Funktional (1.2.66) gegenüber allen elastischen Zuständen, die nur die Bedingungen

$$\{ \delta \underline{\tau}^G, \frac{\partial J_P}{\partial \underline{\tau}^G} \} = 0 \quad , \quad (1.2.67)$$

also die geometrischen Bedingungen (siehe A2)

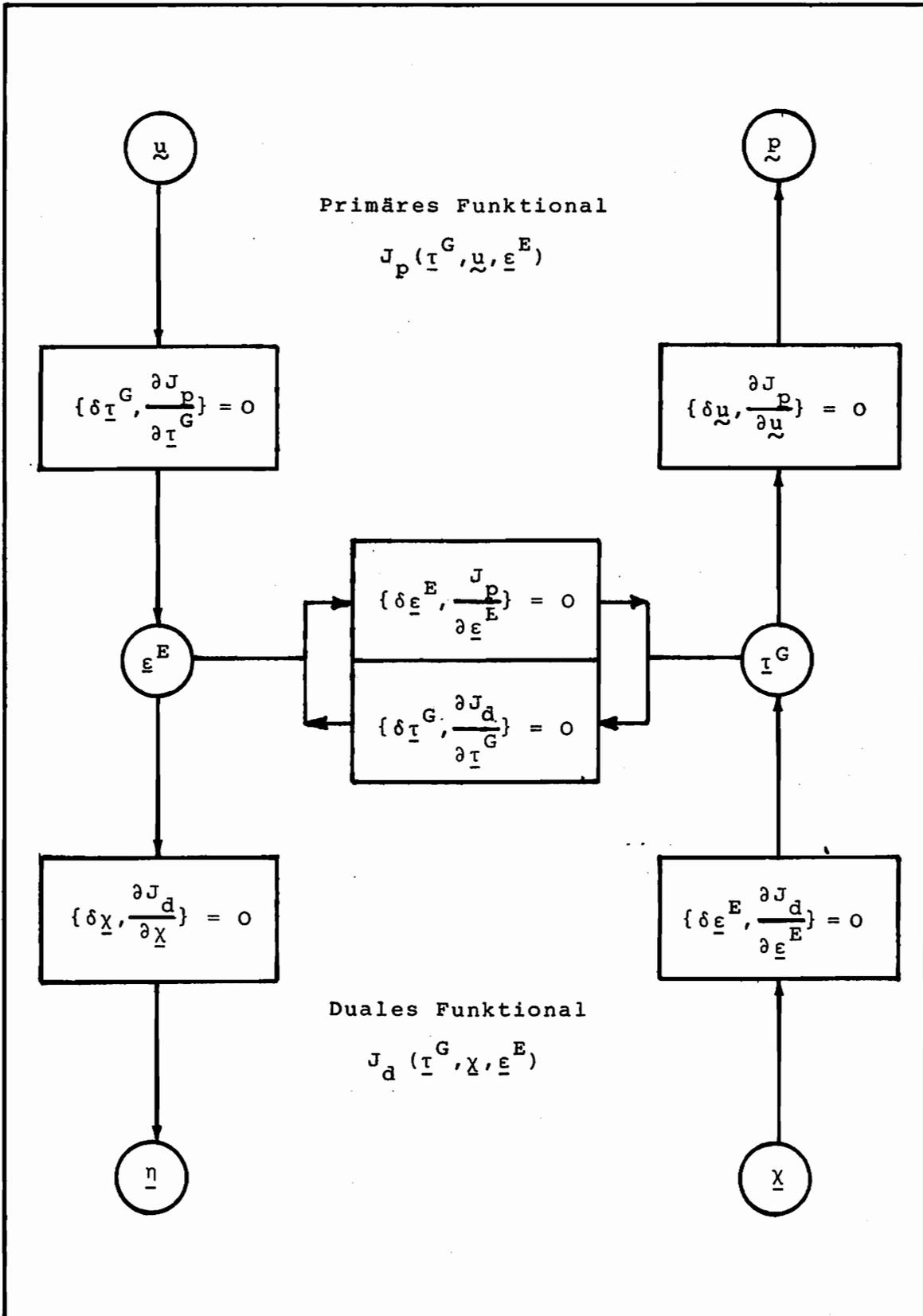
$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}^E + \underline{\varepsilon}^Q &= \frac{1}{2} (\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{u} \underline{\nabla}) \quad \text{in } V \quad , \\ \underline{u}'' &= \underline{u}^* \quad \text{auf } F_u \end{aligned} \quad (1.2.68)$$

erfüllen und damit geometrisch zulässig sind, den kleinsten Wert, das Minimum gibt. Umgekehrt ist

$$\begin{aligned} I_{PC}(\underline{\tau}^G) &= J_P(\underline{\tau}^G, \underline{u}, \underline{\varepsilon}^E) - \{ \underline{u}, \frac{\partial J_P}{\partial \underline{u}} \} - \{ \underline{\varepsilon}^E, \frac{\partial J_P}{\partial \underline{\varepsilon}^E} \} \\ &= \int_V [W(\underline{\varepsilon}^E) - \underline{\varepsilon}^E \dots \frac{\partial W(\underline{\varepsilon}^E)}{\partial \underline{\varepsilon}^E} - \underline{\tau}^G \dots \underline{\varepsilon}^Q] \, dV \\ &\quad + \int_{F_u} \underline{u}^{*T} \cdot \underline{\tau}^G \cdot \underline{n} \, dF \end{aligned} \quad (1.2.69)$$

bzw. bei Berücksichtigung der konstitutiven Beziehungen (1.1.24) und Anwendung der LEGENDRE-Transformation (1.1.23)

$$I_{PC}(\underline{\tau}^G) = - \int_V [W_C(\underline{\tau}^G) + \underline{\tau}^G \dots \underline{\varepsilon}^Q] \, dV + \int_{F_u} \underline{\tau}^G \dots \underline{n} \underline{u}^* \, dF \quad (1.2.70)$$



Tafel 4 : Funktionaldarstellung der primären und dualen Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie

streng konkav. Dieses gegenüber  $J_P$  eingeschränkte Funktional nimmt also unter allen statisch zulässigen Zuständen für die exakte Lösung den größten Wert an. Die statische Zulässigkeit besteht in den Bedingungen

$$\left\{ \delta \underline{u}, \frac{\partial J_P}{\partial \underline{u}} \right\} = 0, \quad \text{d. h. } \underline{v} \cdot \underline{\tau}^G + \underline{p}^{*T} = \underline{0}^T \quad \text{in } V, \\ \underline{\tau}^G \cdot \underline{n} + \underline{p}^* = \underline{0} \quad \text{auf } F_P, \quad (1.2.71)$$

$$\left\{ \delta \underline{\varepsilon}^E, \frac{\partial J_P}{\partial \underline{\varepsilon}^E} \right\} = 0, \quad \text{d. h. } \underline{\tau}^G - \frac{\partial W(\underline{\varepsilon})^E}{\partial \underline{\varepsilon}^E} = \underline{0} \quad \text{in } V. \quad (1.2.72)$$

Damit existieren für die primäre Formulierung zwei zueinander komplementäre Funktionale  $I_P$  und  $I_{PC}$ .

Analog dazu ist auch in den dualen Größen, den Spannungsfunktionen  $\underline{\chi}$  und Inkompatibilitäten  $\underline{\eta}$  die Formulierung zueinander komplementärer Funktionale möglich.

Das duale Funktional  $J_d(\underline{\tau}^G, \underline{\chi}, \underline{\varepsilon}^E)$  ist für positiv definites  $W_c(\underline{\tau}^G)$  konkav in  $\underline{\varepsilon}^E$  und in  $\underline{\chi}$  sowie  $\underline{\tau}^G$  konvex. Also ist das eingeschränkte Funktional

$$I_d(\underline{\tau}^G, \underline{\chi}) = J_d(\underline{\tau}^G, \underline{\chi}, \underline{\varepsilon}^E) - \left\{ \underline{\varepsilon}^E, \frac{\partial J_d}{\partial \underline{\varepsilon}^E} \right\} \\ = \int_V [W_c(\underline{\tau}^G) - \underline{\eta}^* \cdot \underline{\chi}] dV \\ - \int_{F_u} [\underline{\varepsilon}^{E*} \cdot (\underline{v} \times \underline{\chi} \times \underline{n}) - (\underline{v} \times \underline{\varepsilon}^E \times \underline{n})^* \cdot \underline{\chi}] dF \quad (1.2.73)$$

für positiv definites  $W_c(\underline{\tau}^G)$  streng konvex, d. h. die exakte Lösung gibt diesem Funktional gegenüber allen elastischen Zuständen, die nur die Bedingungen

$$\left\{ \delta \underline{\varepsilon}^E, \frac{\partial J_d}{\partial \underline{\varepsilon}^E} \right\} = 0, \quad (1.2.74)$$

also die statischen Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \underline{v} \times \underline{\chi} \times \underline{v} - (\underline{\tau}^G + \underline{\tau}^K) &= \underline{0} & \text{in } V, \\ \underline{\chi} - \underline{\chi}^* &= \underline{0} \\ \underline{v} \times \underline{\chi} \times \underline{n} - (\underline{v} \times \underline{\chi} \times \underline{n})^* &= \underline{0} \end{aligned} \right\} \quad \text{auf } F_P \quad (1.2.75)$$

erfüllen, den kleinsten Wert, das Minimum. Umgekehrt ist

$$\begin{aligned}
 I_{dc}(\underline{\varepsilon}^E) &= J_d(\underline{\tau}^G, \underline{\chi}, \underline{\varepsilon}^E) \\
 &= \left\{ \underline{\chi}, \frac{\partial J_d}{\partial \underline{\chi}} \right\} - \left\{ \underline{\tau}^G, \frac{\partial J_d}{\partial \underline{\tau}^G} \right\} \\
 &= \int_V [W_c(\underline{\tau}^G) - \underline{\tau}^G \dots \frac{\partial W_c(\underline{\tau}^G)}{\partial \underline{\tau}^G} - \underline{\tau}^K \dots \underline{\varepsilon}^E] dv \\
 &+ \int_{F_p} [\underline{\varepsilon}^E \dots (\underline{\nabla} \times \underline{\chi} \times \underline{n})^* - (\underline{\nabla} \times \underline{\varepsilon}^E \times \underline{n}) \dots \underline{\chi}^*] dF, \quad (1.2.76)
 \end{aligned}$$

bzw. mit (1.1.24) und (1.1.23)

$$\begin{aligned}
 I_{dc}(\underline{\varepsilon}^E) &= - \int_V [W(\underline{\varepsilon}^E) + \underline{\varepsilon}^E \dots \underline{\tau}^K] dv \\
 &+ \int_{F_p} [\underline{\varepsilon}^E \dots (\underline{\nabla} \times \underline{\chi} \times \underline{n})^* - (\underline{\nabla} \times \underline{\varepsilon}^E \times \underline{n}) \dots \underline{\chi}^*] dF \quad (1.2.77)
 \end{aligned}$$

streng konkav für positiv definites  $W(\underline{\varepsilon}^E)$ . Dieses Funktional  $I_{dc}$  nimmt also unter den Bedingungen

$$\begin{aligned}
 \left\{ \delta \underline{\chi}, \frac{\partial J_d}{\partial \underline{\chi}} \right\} &= 0, \quad \text{d. h.} \quad \underline{\nabla} \times \underline{\varepsilon}^E \times \underline{\nabla} = \underline{n}^* \quad \text{in } V, \\
 \underline{\varepsilon}^E - \underline{\varepsilon}^* &= \underline{0} \quad \text{auf } F_u, \\
 \underline{\nabla} \times \underline{\varepsilon}^E \times \underline{n} - (\underline{\nabla} \times \underline{\varepsilon}^* \times \underline{n})^* &= \underline{0} \quad \text{auf } F_u, \quad (1.2.78a)
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \delta \underline{\tau}^G, \frac{\partial J_d}{\partial \underline{\tau}^G} \right\} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \underline{\varepsilon}^E = \frac{\partial W_c(\underline{\tau}^G)}{\partial \underline{\tau}^G} \quad \text{in } V, \quad (1.2.78b)$$

also unter allen geometrisch zulässigen Zuständen für die exakte Lösung den größten Wert an. Es existieren damit auch in der dualen Formulierung zueinander komplementäre Funktionale  $I_d$  und  $I_{dc}$ , so daß zwei gleichwertige Darstellungen der Eingrenzung des exakten Funktionalwerts gegeben sind;

$$I_{pc}(\underline{\tau}^{G\approx}) \leq I_{pc} = I_p \leq I_p(\underline{u}^{\approx}, \underline{\varepsilon}^{E\approx}), \quad (1.2.79)$$

$$I_{dc}(\underline{\varepsilon}^{E\approx}) \leq I_{dc} = I_d \leq I_d(\underline{\tau}^{G\approx}, \underline{\chi}^{\approx}). \quad (1.2.80)$$

Durch diese dualen Schranken entstehen jedoch keine zusätzlichen neuen Möglichkeiten der Eingrenzung, da, wie sich durch partielle Integrationen leicht zeigen läßt, folgende Gleichungen gelten:

$$I_{dc}(\underline{\varepsilon}^{\sim}) = -I_p(\underline{u}^{\sim}, \underline{\varepsilon}^{\sim}) , \quad (1.2.81)$$

$$I_d(\underline{r}^{\sim}, \underline{\chi}^{\sim}) = - I_{pc}(\underline{r}^{\sim}) . \quad (1.2.82)$$

### 1.3. Ungleichungen und pauschale Fehlerschranken

Die Darstellung elastostatischer Randwertprobleme als Operatorgleichung  $A\underline{u} = \underline{p}$  mit positivem symmetrischen Operator  $A$ , speziell auch mit  $A = T^* C T$  oder  $A = T^*T$  und adjungierten Operatoren  $T^*$  und  $T$ , beziehungsweise in schwacher Form als Variationsgleichungen komplementärer Funktionale, ermöglicht es, Ungleichungen der Funktionalanalysis [9,55,67] bzw. der Variationsrechnung [59] zu Fehlerabschätzungen und zur Einschließung der exakten Lösung heranzuziehen. Hier werden verschiedene Möglichkeiten dafür vorgestellt.

Mit Ungleichungen von KORN'schem Typ kann die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sowie deren stetige Abhängigkeit von den gegebenen Daten gezeigt werden. Da hier jedoch vor allem numerisch relevante Abschätzungen gegeben werden sollen, sei hierzu nur auf einige Veröffentlichungen verwiesen [68-72].

Im Hilbertraum der elastischen Zustände [55] können für die dort definierten Formulierungen eines Skalarproduktes bzw. einer Norm folgende Ungleichungen der Funktionalanalysis angegeben werden:

Die Dreiecksungleichung

$$\{f_1 \pm f_2, f_1 \pm f_2\}^{1/2} \leq \{f_1, f_1\}^{1/2} + \{f_2, f_2\}^{1/2} , \quad (1.3.1a)$$

z. B. also

$$\left[ \int_{B=V \cup F} (\underline{u}_1^1 + \underline{u}_1^2) (\underline{p}_1^1 + \underline{p}_1^2) dB \right]^{1/2} \leq \left[ \int_B \underline{u}_1^1 \underline{p}_1^1 dB \right]^{1/2} + \left[ \int_B \underline{u}_1^2 \underline{p}_1^2 dB \right]^{1/2} , \quad (1.3.1b)$$

bzw. [59]

$$|\{f_1, f_1\}^{1/2} - \{f_2, f_2\}^{1/2}| \leq \{f_1 - f_2, f_1 - f_2\}^{1/2} \quad (1.3.2)$$

und die SCHWARZ'sche Ungleichung

$$\{f_1, f_2\}^2 \leq \{f_1, f_1\} \{f_2, f_2\} \quad (1.3.3)$$

Für zueinander *orthogonale* Zustände  $f_1$  und  $f_2$ , d. h. Zustände, deren Skalarprodukt  $\{f_1, f_2\}$  verschwindet, gilt das Gleichheitszeichen in (1.3.1), und damit in der Norm des Raums der Satz von PYTHAGORAS [55].

Wie bereits in Abschnitt 1.1 erwähnt wurde, lassen sich alle elastischen Zustände eindeutig in einen Lastspannungsanteil  $f'$  (1.1.5) und einen Eigenspannungsanteil  $f''$  (1.1.6) aufteilen. Der Hilbertraum  $H$  der elastischen Zustände kann also in zwei abgeschlossene orthogonale Unterräume  $H'$  und  $H''$  zerlegt werden [55]

$$H = H' \oplus H'', \quad H' \cap H'' = \phi, \quad (1.3.4a)$$

so daß für das Skalarprodukt, die Wechselwirkungsenergie

$$\{f', f''\} = 0 \quad \forall f' \in H', f'' \in H'' \quad (1.3.4b)$$

gilt. Damit existieren zu einem beliebigen Zustand  $\hat{f}$  die orthogonale Projektion  $\hat{f}'$  in  $H'$  und die orthogonale Projektion  $\hat{f}''$  von  $\hat{f}$  auf  $H''$ . D. h.  $\hat{f}'$  bzw.  $f''$  ist die Lösung der Extremalaufgabe

$$\{f' - \hat{f}, f' - \hat{f}\} \rightarrow \text{minimum}, \quad (1.3.5)$$

$$f' \in H'$$

bzw.

$$\{f'' - \hat{f}, f'' - \hat{f}\} \rightarrow \text{minimum} \quad (1.3.6)$$

$$f'' \in H''$$

Für die konkreten i. a. inhomogenen Randwertprobleme ist die Lösung durch eine Überlagerung einer geometrisch zulässigen Näherung  $f'_0$  und eines Lastspannungszustandes  $f'$  ebenso darstellbar wie durch die Überlagerung eines statisch zulässigen Zustandes  $f'_0$  und eines Eigenspannungszustandes  $f''$

$$f = (f'_0 \oplus H') \cap (f''_0 \oplus H'') \quad (1.3.7)$$

Dies läßt sich aus der Betrachtung der Eigenschaften der Differenzzustände

$f - f^{\sim}$  und  $f - f^{\approx}$  leicht erkennen. Damit ist aber  $f$  auch gemeinsame Lösung der beiden Extremalprobleme

$$\{f - f_0^{\sim}, f - f_0^{\approx}\} \longrightarrow \text{minimum für } f \in H' \oplus f_0^{\sim}, \quad (1.3.8)$$

$$\{f - f_0^{\sim}, f - f_0^{\approx}\} \longrightarrow \text{minimum für } f \in H'' \oplus f_0^{\approx}. \quad (1.3.9)$$

Also ist  $f$  gleichzeitig die orthogonale Projektion von  $f_0^{\approx}$  auf die lineare Mannigfaltigkeit  $H' \oplus f_0^{\sim}$  und die von  $f_0^{\sim}$  auf  $H'' \oplus f_0^{\approx}$ . Diese beiden Aussagen (1.3.8/9) sind den in Abschnitt 1.2 hergeleiteten komplementären Prinzipien (1.2.66) und (1.2.70) bzw. (1.2.77) und (1.2.73) gleichwertig. So entspricht mit

$$f^{\sim} \hat{=} \underline{u}^{\sim} \text{ bzw. } (\underline{\varepsilon}^E + \underline{\varepsilon}^O)^{\sim} = \frac{1}{2} (\underline{v} \underline{u}^{\sim} + \underline{u}^{\sim} \underline{v}) , \quad (1.3.10)$$

$$f_0^{\approx} \hat{=} \underline{p}^* \text{ in } B' = V \cup F_p$$

das Extremalproblem (1.3.8) dem Prinzip (1.2.66)

$$I_p(f^{\sim}) = \frac{1}{2} \{f^{\sim}, f^{\sim}\} - \{f^{\sim}, f_0^{\approx}\} \longrightarrow \min_{f^{\sim} \in H' \oplus f_0^{\sim}} . \quad (1.3.11)$$

Mit

$$f_0^{\approx} \hat{=} \begin{cases} \tau_{ij}^G & \text{in } V \cup F_u , \\ -\varepsilon_{ij}^{O*} & \text{in } V , \\ u_j^* & \text{auf } F_u \end{cases} \quad (1.3.12)$$

ist das komplementäre Prinzip (1.2.70) auch durch Skalarprodukte ausdrückbar

$$-I_{pc}(f^{\approx}) = \frac{1}{2} \{f^{\approx}, f^{\approx}\} - \{f^{\approx}, f_0^{\sim}\} \longrightarrow \min_{f^{\approx} \in H'' \oplus f_0^{\sim}} \quad (1.3.13)$$

und damit äquivalent (1.3.9). Der Unterschied zwischen den Darstellungen (1.3.8) bzw. (1.3.9) und (1.3.11) bzw. (1.3.13) entfällt bei der Variation. Die Extremaleigenschaft sowie die Komplementarität der Funktionale (1.3.11) bzw. (1.3.13) ergibt sich unter der Voraussetzung einer positiven Distanz zwischen einem beliebigen Näherungszustand  $\hat{f}$  und der exakten

Lösung  $f$ , also der Existenz einer Norm bzw. eines Skalarprodukts

$$\begin{aligned} \{f - \hat{f}, f - \hat{f}\} &\geq 0, \\ \{f, f\} &\geq 2 \{f, \hat{f}\} - \{\hat{f}, \hat{f}\}, \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

allein aus den Eigenschaften der Skalarprodukte [56]. Mit (1.2.44), der Gleichheit von doppelter Formänderungsenergie  $\{\underline{\tau}^G, \underline{\tau}^G\}_S$  und äußerer Arbeit  $\{\underline{u}, \underline{p}^*\}$  für den exakten Zustand  $f \hat{=} \underline{\tau}^G$ , dem Satz von CLAPEYRON, ergibt (1.3.14) für geometrisch zulässige Näherungen

$$\hat{f} = f^{\sim} \hat{=} \begin{cases} C T \underline{u}^{\sim} = \underline{\tau}^{G^{\sim}} & \text{in } V, \\ \underline{u}^{\sim} = \underline{u}^* & \text{auf } F_u \end{cases} \quad (1.3.15)$$

das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials [56]:

$$\begin{aligned} -\{\underline{\tau}^G, \underline{\tau}^G\}_S &= \{\underline{\tau}^G, \underline{\tau}^G\}_S - 2\{\underline{u}, \underline{p}^*\} \\ &\leq \{C T \underline{u}^{\sim}, C T \underline{u}^{\sim}\}_S - 2\{\underline{u}^{\sim}, \underline{p}^*\}. \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Für statisch zulässige Zustände, also Zustände mit

$$\hat{f} = f^{\approx} \hat{=} \begin{cases} T^* \underline{\tau}^{G^{\approx}} = \underline{p}^* & \text{in } V, \\ \underline{\tau}^{G^{\approx}} \cdot \underline{n} = \underline{p}^* & \text{auf } F_p \end{cases} \quad (1.3.17)$$

liefert die Ungleichung (1.3.14) nach einer Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes auf  $\{\underline{\tau}^G, T \underline{u}\}$  das komplementäre Prinzip

$$\{\underline{\tau}^G, \underline{\tau}^G\}_S - 2\{\underline{u}, \underline{p}\} \geq 2\{\underline{u}, \underline{\tau}^{G^{\approx}} \cdot \underline{n}\} - \{\underline{\tau}^{G^{\approx}}, \underline{\tau}^{G^{\approx}}\}_S. \quad (1.3.18)$$

Die Ungleichungen (1.3.16) und (1.3.18) drücken ebenfalls, nur durch Skalarprodukte beschrieben, die Eingrenzung (1.2.79) des exakten Gesamtpotentials aus.

PRAGER und SYNGE [12-14] geben eine sehr anschauliche geometrische Darstellung der Tatsache, daß die exakte Lösung gleichzeitig durch die orthogonale Projektion von geometrisch zulässigen Zuständen  $f^{\sim}$  auf die lineare Mannigfaltigkeit aller statisch zulässigen Zustände  $H'' \oplus F_0^{\sim}$  wie auch durch die orthogonale Projektion von  $f^{\approx}$  auf  $H' \oplus F_0^{\sim}$  dargestellt ist. Sie ist also gleichzeitig Lösung der Extremalprobleme (1.3.8) und (1.3.9) und liefert den Extremwert der beiden Funktionale  $I_p$  und  $I_{pc}$ .

Aus dieser Tatsache, formuliert in (1.3.7) und gleichbedeutend mit

$$\{f - f^{\sim}, f - f^{\approx}\} = 0 \quad , \quad (1.3.19)$$

folgt

$$\{f - f^{\sim}, f - f^{\sim}\} + \{f - f^{\approx}, f - f^{\approx}\} = \{f^{\sim} - f^{\approx}, f^{\sim} - f^{\approx}\}. \quad (1.3.20)$$

Stellt man elastische Zustände anschaulich durch Vektorpfeile dar, sagt (1.3.20) aus, daß  $f$  auf einem *Hyperkreis* mit dem Mittelpunkt  $0.5(f^{\sim} + f^{\approx})$  und dem Radius  $0.5 \|f^{\sim} - f^{\approx}\|$  liegt (Bild 1). Diese geometrische Veranschaulichung gibt außerdem über Längenverhältnisse der rechtwinkligen Dreiecke Abschätzungen der *Fehlerenergie*, die auch aus der positiven Definitheit der Skalarprodukte in (1.3.20) folgen

$$\|f - f^{\sim}\| \leq \|f^{\sim} - f^{\approx}\| \quad , \quad (1.3.21)$$

$$\|f - f^{\approx}\| \leq \|f^{\sim} - f^{\approx}\| \quad .$$

Bei Benützung des arithmetischen Mittels von  $f^{\sim}$  und  $f^{\approx}$  als Näherung folgt auch

$$\|f - \frac{1}{2}(f^{\sim} + f^{\approx})\| = \frac{1}{2} \|f^{\sim} - f^{\approx}\| \quad . \quad (1.3.22)$$

Eine Fehlerabschätzung für geometrische oder statische Näherungen der inneren elastischen Energie  $E$  ergibt sich aufgrund der Orthogonalität der Last- und Eigenspannungszustände über die SCHWARZ'sche Ungleichung (1.3.3) und die Abschätzungen (1.3.21)

$$\begin{aligned} | \|f\|^2 - \|f^{\sim}\|^2 | &= |\{f - f^{\sim}, f + f^{\sim}\}| \\ &= |\{f - f^{\sim}, f - f^{\approx} + f^{\approx} + f^{\sim}\}| \\ &= |\{f - f^{\sim}, f - f^{\approx}\} + \{f - f^{\sim}, f^{\approx} + f^{\sim}\}| \\ &= |\{f - f^{\sim}, f^{\approx} + f^{\sim}\}| \\ &\leq \|f - f^{\sim}\| \|f^{\approx} + f^{\sim}\| \\ &\leq \|f^{\approx} - f^{\sim}\| \|f^{\approx} + f^{\sim}\| \quad . \quad (1.3.23) \end{aligned}$$

Die gleiche Abschätzung gilt für die Näherung  $\{f^{\approx}, f^{\sim}\}$ .

Der wesentliche Teil dieser globalen Fehlerschranken, das Quadrat der Energienorm des Differenzzustandes der geometrischen und der statischen Näherungen ist nach (1.3.11) bzw. (1.3.13) gleich der doppelten

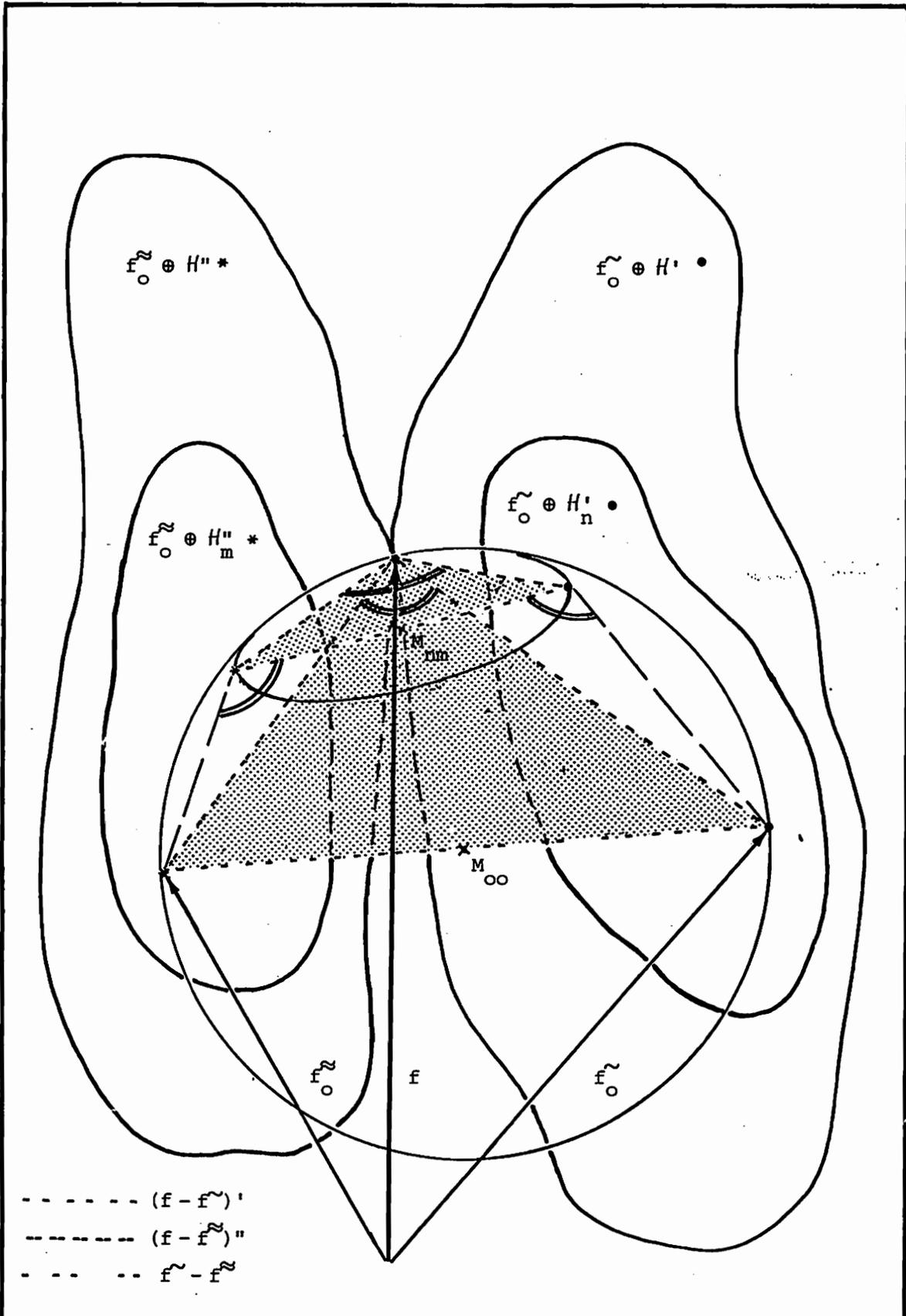


Bild 1 : Geometrische Veranschaulichung von  
 $\|f - \tilde{f}\|^2 + \|f - \tilde{\tilde{f}}\|^2 = \|\tilde{f} - \tilde{\tilde{f}}\|^2$ , der Hyperkreis

Differenz der zueinander komplementären Funktionale  $I_p$  und  $I_{pc}$  (oder auch  $I_{dc}$  und  $I_d$ )

$$\begin{aligned} \{f^{\sim} - f^{\approx}, f^{\sim} - f^{\approx}\} &= 2 \left[ \frac{1}{2} \{f^{\sim}, f^{\sim}\} - \{f^{\sim}, f^{\approx}\}_{V \cup F_p} \right] \\ &+ 2 \left[ \frac{1}{2} \{f^{\approx}, f^{\approx}\} - \{f^{\approx}, f^{\approx}\}_{F_u} \right] \\ &= 2 [ I_p(f^{\sim}) - I_{pc}(f^{\approx}) ] \quad . \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

Die Abschätzung des Fehlers  $f - f^{\sim}$  in der  $L_2$ -Norm ist möglich [73], wenn für den positiv definiten Operator der zugrunde liegenden Operatorgleichung  $A \underline{u} = T^* C T \underline{u} = \underline{p}$ , hier also der NAVIER'schen Differentialgleichung, in  $H^{\sim}$ , also unter Beachtung der geometrischen Bedingungen eine untere Schranke  $\Lambda$  für den kleinsten Eigenwert  $\lambda_0$  bekannt ist oder berechnet werden kann [17-25 u.a.]. Dann gilt

$$\|f - f^{\sim}\|_{L_2} = \|u - u^{\sim}\|_{L_2} \leq \left[ \frac{2}{\Lambda} (I_p(f^{\sim}) - I_{pc}(f^{\approx})) \right]^{1/2} \quad . \quad (1.3.25)$$

Kann eine reelle positive Konstante  $k$  bestimmt werden, so daß für alle geometrisch zulässigen Näherungen  $u^{\sim}$  die  $L_{\infty}$ -Norm

$$\|f^{\approx}\|_{\infty} = \sup_{\underline{u} \in H^{\sim}} |\underline{u}| \leq k \left[ 2 \int_V W(\underline{\varepsilon}(u^{\sim})) dV \right]^{1/2} \quad . \quad (1.3.26)$$

nach oben begrenzt ist, ist wegen

$$I_p(f^{\sim}) - I_p(f) = \int_V W(\underline{\varepsilon}^{\sim} - \underline{\varepsilon}) dV \quad (1.3.27)$$

auch der maximale globale Fehler angebar:

$$\|f - f^{\sim}\|_{\infty} \leq k \left[ 2(I_p(f^{\sim}) - I_{pc}(f^{\approx})) \right]^{1/2} \quad . \quad (1.3.28)$$

Wird der Defekt  $\underline{d}$  der Näherung  $f^{\sim}$  bestimmt

$$\underline{d} = \begin{cases} - T^* C T \underline{u}^{\sim} - \underline{p} & \text{in } V \quad , \\ (C T \underline{u}^{\sim}) \cdot \underline{n} - \underline{p} & \text{auf } F_p \quad , \end{cases} \quad (1.3.29)$$

so gilt neben (1.3.25) auch [73]

$$\begin{aligned} \Lambda \|\underline{u} - \underline{u}^{\sim}\|_{L_2}^2 &\leq 2(I_p(\underline{f}^{\sim}) - I_p(\underline{f})) \\ &= \int_{\underline{B} = \underline{V} \underline{U} \underline{F}_p} \underline{d}^T \cdot (\underline{u}^{\sim} - \underline{u}) \, d\mathbf{B} \quad . \end{aligned} \quad (1.3.30)$$

Daraus gibt die SCHWARZ'sche Ungleichung (1.3.3)

$$\Lambda \|\underline{u} - \underline{u}^{\sim}\|_{L_2}^2 \leq \|\underline{d}\|_{L_2} \|\underline{u} - \underline{u}^{\sim}\|_{L_2} \quad . \quad (1.3.31)$$

Da (1.3.26/27) auch

$$\|\underline{u} - \underline{u}^{\sim}\|_{\infty}^2 \leq k^2 2(I_p(\underline{f}^{\sim}) - I_p(\underline{f})) \quad (1.3.32)$$

bedeutet und entsprechend (1.3.30)

$$\|\underline{u} - \underline{u}^{\sim}\|_{\infty}^2 \leq k^2 \|\underline{d}\|_{L_2} \|\underline{u} - \underline{u}^{\sim}\|_{L_2} \quad (1.3.33)$$

gefolgert werden kann, gilt als Kombination der beiden Ungleichungen (1.3.31) und (1.3.33) auch

$$\|\underline{f} - \underline{f}^{\sim}\|_{\infty}^2 \leq \frac{k^2}{\Lambda} \|\underline{d}\|_{L_2}^2 \quad . \quad (1.3.34)$$

Die Verkleinerung der meisten dieser Fehlerschranken bedeutet also gleichzeitig die Minimierung der Funktionale der beiden komplementären Näherungen  $\underline{f}^{\sim}$  und  $\underline{f}^{\approx}$ . In endlich dimensionalen Unterräumen  $H'_n$  des Lastspannungsraumes  $H'$  bzw.  $H''_m$  des Eigenspannungsraumes  $H''$  aus linear unabhängigen Funktionen  $f'_i$  bzw.  $f''_j$  wird dafür die lineare Mannigfaltigkeit  $c_i f'_i$  bzw.  $d_j f''_j$  gebildet und durch Variation der Freiwerte  $c_i$  bzw.  $d_j$  der Fehler minimiert:

$$\|\underline{f}^{\sim} - \underline{f}^{\approx}\|^2 = \|\underline{f}^{\sim}_0 + c_i f'_i - \underline{f}^{\approx}_0 - d_j f''_j\|^2 \rightarrow \min_{c_i, d_j} \quad . \quad (1.3.35)$$

Daraus folgen die beiden linearen Gleichungssysteme [40,74]

$$\{f'_k, f'_i\} c_i = \{f'_k, \underline{f}^{\approx}_0 - \underline{f}^{\sim}_0\} \quad , \quad (1.3.36)$$

$$\{f''_k, f''_j\} d_j = \{f''_k, \underline{f}^{\sim}_0 - \underline{f}^{\approx}_0\} \quad (1.3.37)$$

zur systematischen Verbesserung der beiden Näherungen. Damit diese Fehlerabschätzungen günstige Ergebnisse bringen, müssen beide Näherungen,  $\underline{f}^{\sim}$  und  $\underline{f}^{\approx}$  mit ungefähr der gleichen Genauigkeit bestimmt werden [75].

Dies ist jedoch sowieso bei Elastizitätstheoretischen Problemen sinnvoll, da beide Näherungen gleich wichtige physikalische Größen liefern.

Eine prinzipiell andere zweite Möglichkeit zur Bestimmung und Verbesserung von Fehlerschranken soll hier kurz erläutert werden. Sie wird in dieser Arbeit jedoch nicht numerisch erprobt, obwohl ihre Anwendung unter geeigneten Umständen vorteilhaft sein kann. Sie beruht auf der Kenntnis und Verwendung eines benachbarten *kleineren* Operators; dabei ist ein Operator  $A_0$  kleiner als ein Operator  $A$ , wenn  $A - A_0$  im gleichen Definitionsgebiet positiv definit ist.

Die Existenz des Skalarproduktes (1.2.17) im Hilbertraum  $\tilde{A}$  ist gleichbedeutend mit dem Satz von BETTI (1.2.20) und beinhaltet außerdem die Symmetrie des Operators  $A = \bar{T}^* C \bar{T}$ , so daß im Definitionsgebiet von  $A$

$$\{\tilde{u}_1, A \tilde{u}_2\} = \{A \tilde{u}_1, \tilde{u}_2\} \quad (1.3.38)$$

gilt. Die doppelte elastische Energie der Lösung ist nach (1.2.42) ohne Extradehnungen  $\underline{\varepsilon}^Q$

$$2E(\underline{u}) = \{\underline{p}, \underline{u}\} = \{A \underline{u}, \underline{u}\} . \quad (1.3.39)$$

Sie ist, da  $A$  ein symmetrischer und positiv definiten Operator ist, mit Hilfe einer Näherungslösung  $\underline{u}_1^{\sim}$  nach unten abschätzbar [76]:

$$\{\underline{p}, \underline{u}\} \geq \{2\underline{p} - A \underline{u}_1^{\sim}, \underline{u}_1^{\sim}\} . \quad (1.3.40)$$

Kann zum Operator  $A$  ein *benachbarter* symmetrischer Operator  $A_0$  mit dem gleichen Definitionsgebiet so gewählt werden, daß aus der Gleichung

$$A_0 \underline{u}_2 = \underline{p} - A \underline{u}_1^{\sim} \quad (1.3.41)$$

die Lösung  $\underline{u}_2$  exakt bestimmt werden kann, ergibt sich, falls  $A_0$  größer als  $A$  ist, die folgende schärfere Ungleichung:

$$\{\underline{p}, \underline{u}\} \geq \{\underline{p}, \underline{u}_1^{\sim}\} + \{\underline{p} - A \underline{u}_1^{\sim}, \underline{u}_1^{\sim} + \underline{u}_2\} . \quad (1.3.42)$$

Ist  $A_0$  nur größer als  $0.5 A$ , gilt

$$\{\underline{p}, \underline{u}\} \geq \{2\underline{p} - A \underline{u}_1^{\sim}, \underline{u}_1^{\sim}\} + \{(2A_0 - A)\underline{u}_2, \underline{u}_2\} . \quad (1.3.43)$$

Eine komplementäre Ungleichung ergibt sich für einen positiv definiten Operator  $A_0$ , der im Definitionsgebiet von  $A$  kleiner als  $A$  ist:

$$\{p, u\} \leq \{p, u_1\} + \{p - A u_1, u_1 + u_2\} . \quad (1.3.44)$$

Die Ungleichungen (1.3.43) und (1.3.44) geben damit für benachbarte Operatoren  $A_0$ , die zwischen  $0.5 A$  und  $A$  liegen, eine beidseitige Eingrenzung der Energie der Lösung [76], ohne wie vorher zwei zueinander komplementäre Funktionale zu benützen und diese beide näherungsweise zu lösen. Jedoch muß die benachbarte Operatorgleichung exakt lösbar sein. Ein solcher immer möglicher benachbarter Operator  $A_0$  ergibt sich mit dem kleinsten Eigenwert  $\lambda_0$  des positiv definiten Operators  $A$ , vorausgesetzt es existiert eine zugehörige Eigenfunktion.  $A_0$  ist dann das  $\lambda_0$ -fache des Einheitsoperators  $I$ .

Eine Möglichkeit, bei finiten Berechnungen, z. B. bei Finite-Element Näherungen Fehlerschranken zu berechnen bzw. zu verbessern, liegt darin begründet, das asymptotische Verhalten dieser Näherungen bzw. ihrer Diskretisierungsfehler auszunützen. Damit ist durch Extrapolation eine wesentliche Konvergenzbeschleunigung [77-79] und Verbesserung von Fehlerschranken [40] erreichbar. Dies wird bei der Untersuchung des Diskretisierungsfehlers (Abschnitt 3.2) erläutert.

Eine weitere Möglichkeit, Fehlerschranken zu bestimmen, hat den einen Nachteil, bisher nur für spezielle Probleme, spezielle Differentialgleichungen vierter Ordnung, wie das Plattenproblem, anwendbar zu sein [80,81]. Diese Abschätzung benützt 'a priori' Ungleichungen, d. h. im wesentlichen obere Schranken aus bekannten Randwerten für die  $L_2$ -Norm der gesuchten Lösung, die bei finiten Näherungsberechnungen zu sehr guten Fehlerschranken führen können [82]. Sie wird hier vor allem als Anregung zu weiteren Untersuchungen erwähnt.

#### 1.4. Punktweise Fehlereingrenzung

Bei Berechnungen technischer Projekte, ist es häufig besonders wichtig, für einzelne kritische Stellen Schranken für die zu erwartenden Verformungen oder inneren Kräfte angeben zu können. Das bedeutet, daß ein Funktionswert oder ein Wert von bestimmten Ableitungen einer Lösungsfunktion eingegrenzt werden muß. Der Schlüssel zu solchen lokalen Schranken ist die Kenntnis der Fundamentallösung bzw. der GREEN'schen Funktion  $g$  des

Problems. Ein GREEN'scher Zustand  $g$  hat außer im singulären Punkt  $\underline{x}^P$  homogene Kompatibilitäts-Bedingungen sowie die geometrischen und statischen Randbedingungen des Problems in homogener Form zu erfüllen. Auf die Bestimmung spezieller GREEN'scher Zustände, insbesondere ihres singulären Teils  $g^S$  und die Art ihrer Singularität wird hier nicht eingegangen, da dies problemabhängige Größen sind (siehe dazu Abschnitt 4.2.2). Es sei aber vorausgesetzt, daß ihre Energienorm beschränkt ist. Ist das nicht der Fall, muß etwas anders vorgegangen werden [36,59].

Die im Punkt  $\underline{x}^P$  einzugrenzende Funktion, z. B.  $u_i$ , ist mit einem passenden singulären Zustand  $g$ , z. B.  $p_{iE}(\underline{x}^P)$ , in einem Skalarprodukt so zu verknüpfen, daß dieser Energieausdruck den gesuchten Funktionswert liefert [36,38,59,83 u.a.]. Zur Abschätzung sind dann die in Abschnitt 1.3. beschriebenen Schranken zu benutzen. Die Kommutativität des Skalarproduktes

$$\{f, g\} = \{g, f\} , \quad (1.4.1)$$

hier gleichbedeutend mit dem Satz von BETTI für singuläre Zustände [84], liefert eine Verallgemeinerung der GREEN'schen Formeln für Differentialoperatoren [38,59,83]. So ergibt sich die Arbeit der gegebenen Lasten an dem den GREEN'schen Zustand repräsentierenden Verschiebungsfeld  $\underline{u}^g$

$$\{f, g\} = \int_{\{V - \underline{x}^P\}} p_i^* u_i^g dv + \int_{F_P} p_i^* u_i^g dv + S(\underline{x}^P) \quad (1.4.2)$$

und nach (1.4.1) gleichwertig die Wechselwirkungsenergie zwischen GREEN'schem Spannungsfeld  $\underline{\tau}^g$  und gegebenen kinematischen Größen

$$\{g, f\} = \int_{F_u} n_i \tau_{ij}^g u_j^* dF - \int_{\{V - \underline{x}^P\}} \tau_{ij}^g \epsilon_{ji}^{Q*} dv + V(\underline{x}^P) . \quad (1.4.3)$$

Dabei ist  $S(\underline{x}^P)$  bzw.  $V(\underline{x}^P)$  die statische bzw. kinematische Größe, zu der mit dem passenden GREEN'schen Zustand  $g$  Schranken berechnet werden sollen.

Im allgemeinen ist jedoch von diesem notwendigen GREEN'schen Zustand  $g$  nur der singuläre Anteil  $g^S$  bekannt, während der reguläre Teil  $g^R$  als Lösung eines zugeordneten inhomogenen Randwertproblems bestimmt werden muß [38], z. B. bei einer GREEN'schen Verschiebungsfunktion  $\underline{u}^g = \underline{u}^S + \underline{u}^R$  aus

$$\begin{aligned} T^* C T \underline{u}^R &= \underline{0} && \text{in } V, \\ \underline{u}^R &= - \underline{u}^S && \text{auf } F_u, \\ (C T \underline{u}^R) \cdot \underline{n} &= - (C T \underline{u}^S) \cdot \underline{n} && \text{auf } F_p. \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Ein sinnvoller Weg zur Ermittlung von  $g^R$  ist sicher die Verwendung der zueinander komplementären Funktionale (1.3.11) und (1.3.13), für deren Näherungslösungen  $g^{\sim}$  und  $g^{\approx}$  die Fehlerenergie  $\|g^{\sim} - g^{\approx}\|$  mit (1.3.25) abgeschätzt werden kann:

$$\|g^{\sim} - g^{\approx}\|^2 = 2[I_p(g^{\sim}) - I_{pc}(g^{\approx})]. \quad (1.4.5)$$

Dabei ist  $g^{\sim}$  ein geometrisch zulässiger und  $g^{\approx}$  ein statisch zulässiger Zustand

$$g^{\sim} = g^S + g^{R\sim}, \quad (1.4.6)$$

$$g^{\approx} = g^S + g^{R\approx}, \quad (1.4.7)$$

für die die Wechselwirkungsenergie mit  $f$  nach (1.4.2) und (1.4.3) die beiden Näherungen

$$\{f, g^{\sim}\} = \int_{V-\{x^P\}} p_i^* u_i^g \, dV - \int_{F_p} p_i^* u_i^{g^{\sim}} \, dF + S(x^P), \quad (1.4.8)$$

$$\{g^{\approx}, f\} = \int_{F_u} n_i \tau_{ij}^{g^{\approx} u} \, dF - \int_{V-\{x^P\}} \tau_{ij}^{g^{\approx} \epsilon} \epsilon_{ji}^Q \, dV + V(x^P) \quad (1.4.9)$$

hat. Die gesuchte statische bzw. geometrische Zustandsgröße an der Stelle  $x^P$  ergibt sich aus der Differenz dieser Näherungen

$$\begin{aligned} F(x^P) &= S(x^P) - V(x^P) \\ &= \int_{F_u} n_i \tau_{ij}^{g^{\approx} u} \, dF - \int_{V-\{x^P\}} \tau_{ij}^{g^{\approx} \epsilon} \epsilon_{ij}^Q \, dV - \int_{V-\{x^P\}} p_i^* u_i^{g^{\sim}} \, dV \\ &\quad - \int_{F_p} p_i^* u_i^{g^{\sim}} \, dF + \{f, g^{\sim} - g^{\approx}\}. \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Da die hierin vorkommende exakte Lösung  $f$  des Ausgangsproblems natürlich nicht bekannt ist, ist eine der aus den Funktionalen (1.3.11) oder (1.3.13) bestimmten Näherungen  $f^{\sim}$  oder  $f^{\approx}$  bzw. auch der gemittelte Zustand  $0.5(f^{\sim} + f^{\approx})$  zu verwenden. Dafür gilt folgende Abschätzung nach SCHWARZ (1.3.3):

$$\begin{aligned}
 & | \{ f, g^{\sim} - g^{\approx} \} - \frac{1}{2} \{ f^{\sim} + f^{\approx}, g^{\sim} - g^{\approx} \} | \\
 & = | \{ f - \frac{1}{2}(f^{\sim} + f^{\approx}), g^{\sim} - g^{\approx} \} | \\
 & \leq \| f - \frac{1}{2}(f^{\sim} + f^{\approx}) \| \quad \| g^{\sim} - g^{\approx} \| . \quad (1.4.11)
 \end{aligned}$$

Mit der Abschätzung (1.3.22) erhält man schließlich

$$| \{ f, g^{\sim} - g^{\approx} \} - \frac{1}{2} \{ f^{\sim} + f^{\approx}, g^{\sim} - g^{\approx} \} | \leq \frac{1}{2} \| f^{\sim} - f^{\approx} \| \quad \| g^{\sim} - g^{\approx} \| . \quad (1.4.12)$$

Für die sich damit aus (1.4.10) ergebende Näherung des an der Stelle  $\tilde{x}^P$  einzugrenzenden Zustandes

$$\begin{aligned}
 F_N(\tilde{x}^P) &= \int_{F_u} n_i \tau_{ij}^{g^{\approx}} u_j^* dF - \int_{F_p} p_i^* u_i^{g^{\sim}} dF \\
 & - \int_{V-\{\tilde{x}^P\}} [ \tau_{ij}^{g^{\approx}} \varepsilon_{ij}^{Q*} + p_i^* u_i^{g^{\sim}} ] dV + \frac{1}{2} \{ f^{\sim} + f^{\approx}, g^{\sim} - g^{\approx} \} \quad (1.4.13)
 \end{aligned}$$

gilt wegen (1.4.12) also folgende Fehlerabschätzung

$$| F(\tilde{x}^P) - F_N(\tilde{x}^P) | \leq \frac{1}{2} \| f^{\sim} - f^{\approx} \| \quad \| g^{\sim} - g^{\approx} \| . \quad (1.4.14)$$

Diese Eingrenzung kann mit (1.4.5) auch durch Näherungswerte der Funktionale ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
 & | F(\tilde{x}^P) - F_N(\tilde{x}^P) | \\
 & \leq [ (I_p(\tilde{u}^{\sim}) - I_{pc}(\tilde{\tau}^{\approx})) (I_p(\tilde{u}^{g^{\sim}}) - I_{pc}(\tilde{\tau}^{g^{\approx}})) ]^{1/2} . \quad (1.4.15)
 \end{aligned}$$

Eine Variante dieser punktweisen Fehlereingrenzung, die zu einer anderen unter Umständen kleineren Fehlerschranke führt, sei für den speziellen Fall der lokalen Eingrenzung einer Verschiebungskomponente kurz erläutert [38,39]. Der wesentliche numerische Aufwand, d. h. die Zahl und Art der näherungsweise zu lösenden Extremalaufgaben ist dabei gleich.

Die Beziehungen (1.4.2) und (1.4.3) können, wie bereits erwähnt wurde, als Verallgemeinerung der sogenannten GREEN'schen Formel [59] geschrieben werden ( $\underline{\varepsilon}^Q \equiv 0$ ):

$$V(\tilde{x}^P) = u_k(\tilde{x}^P) \cdot \bar{p} = \int_{V - \{\tilde{x}^P\}} p_i^* u_i^g \, dV + \int_{F_p} p_i^* u_i^g \, dF - \int_{F_u} n_i \tau_{ij}^g u_j^* \, dF. \quad (1.4.16)$$

Wie vorher sind für den darin vorkommenden GREEN'schen Zustand  $u^g = u^s + u^r$  wie auch für die Lösung des Ausgangsproblems geometrisch zulässige und statisch zulässige Näherungen zu berechnen, deren Funktionalwerte die jeweiligen exakten Funktionale eingrenzen:

$$I_{pc}(f^{\sim}) \leq I_{pc}(f) = I_p(f) \leq I_p(f^{\sim}), \quad (1.4.17a)$$

$$I_{pc}(g^{r\sim}) \leq I_{pc}(g^r) = I_p(g^r) \leq I_p(g^{r\sim}). \quad (1.4.17b)$$

Die Verknüpfung dieser beiden Randwertaufgaben, so daß damit Schranken für  $f$  in einem Punkt  $\tilde{x}^P$  berechnet werden können, wird hier durch die Untersuchung einer Linearkombination

$$q := u + \alpha u^r \quad (1.4.18)$$

beider Probleme mit einem Parameter  $\alpha$  erreicht.

Die dafür geltenden Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} T^* C T q &= p^* && \text{in } V; \\ q &= u^* - \alpha u^s && \text{auf } F_u, \dots \\ (C T q) \cdot n &= p^* - \alpha (C T u^s) \cdot n && \text{auf } F_p. \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

Wird deren Lösung  $q$  ebenfalls mit Hilfe der beiden Funktionale (1.3.11) und (1.3.13) näherungsweise bestimmt, kann für den exakten Wert, der sich aufgrund der Überlagerung (1.4.18) zu

$$I_p(q) = I_p(u) + \alpha^2 I_p(u^r) - \alpha (u_k(\tilde{x}^P) - u_k^s(\tilde{x}^P)) \bar{p} \quad (1.4.20)$$

ergibt, eine Eingrenzung ermittelt werden. Mit den Näherungen für  $u$  und  $u^r$  ist die obere Schranke

$$I_p(q^{r\sim}) = I_p(u^{\sim}) + \alpha^2 I_p(u^{r\sim}) + 2\alpha B(u^{\sim}, u^{r\sim}), \quad (1.4.21)$$

wobei explizit

$$\begin{aligned} 2B(u^{\sim}, u^{r\sim}) &= \int_V [(C T u^{r\sim})^T \cdot T u^{\sim} - p^{*T} \cdot u^{r\sim}] \, dV \\ &- \int_{F_p} [u^{\sim T} \cdot C T u^{r\sim} \cdot n + p^{*T} \cdot u^{r\sim}] \, dF. \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

bedeutet.

Die untere Schranke für  $I_p(q)$  lautet entsprechend

$$I_{pc}(q_{\sim}) = I_{pc}(\tau^{G_{\sim}}) + \alpha^2 I_{pc}(\tau^{R_{\sim}}) + 2\alpha B_c(\tau^{G_{\sim}}, \tau^{R_{\sim}}) \quad (1.4.23)$$

mit

$$2B_c(\tau^{G_{\sim}}, \tau^{R_{\sim}}) = \int_{F_u} (\tau^{G_{\sim}} \cdot \underline{n} u^{R_{\sim}*} + \tau^{R_{\sim}} \cdot \underline{n} u^*) dF - \int_V \tau^{R_{\sim}} \cdot S \tau^{G_{\sim}} dV. \quad (1.4.24)$$

Die Schranken (1.4.17a) für das Funktional des Problems, dessen Lösung  $f$  im Punkt  $x^P$  in beidseitige Schranken eingeschlossen werden soll, sowie die des Variationsfunktionals zu (1.4.4), zur Berechnung des Regulärteils des GREEN'schen Zustands, führen die Gleichung (1.4.20) in die Ungleichungen

$$\begin{aligned} & [I_{pc}(\tau^{G_{\sim}}) - I_p(u^{\sim})] + \alpha^2 [I_{pc}(\tau^{R_{\sim}}) - I_p(u^{R_{\sim}})] - 2\alpha B(u^{\sim}, u^{R_{\sim}}) \\ & \leq \alpha (u_k(x^P) - u_k^S(x^P)) \bar{p} \leq \\ & \leq [I_p(u^{\sim}) - I_{pc}(\tau^{G_{\sim}})] + \alpha^2 [I_p(u^{R_{\sim}}) - I_{pc}(\tau^{R_{\sim}})] - \\ & - 2\alpha B_c(\tau^{G_{\sim}}, \tau^{R_{\sim}}) \end{aligned} \quad (1.4.25)$$

über. Das bedeutet für  $\alpha < 0$  eine Abschätzung

$$- \epsilon \leq (u_k(x^P) - u_k^S(x^P)) \bar{p} + B(u^{\sim}, u^{R_{\sim}}) + B_c(\tau^{G_{\sim}}, \tau^{R_{\sim}}) \leq \epsilon \quad (1.4.26)$$

mit der Eingrenzungsspanne

$$\begin{aligned} - 2\epsilon & = - \left( \frac{1}{\alpha} [I_p(u^{\sim}) - I_{pc}(\tau^{G_{\sim}})] + \alpha [I_p(u^{R_{\sim}}) - I_{pc}(\tau^{R_{\sim}})] \right) \\ & + 2[B(u^{\sim}, u^{R_{\sim}}) - B_c(\tau^{G_{\sim}}, \tau^{R_{\sim}})] . \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

Für

$$\alpha = - \left[ \frac{(I_p(u^{\sim}) - I_{pc}(\tau^{G_{\sim}}))}{(I_p(u^{R_{\sim}}) - I_{pc}(\tau^{R_{\sim}}))} \right]^{1/2} \quad (1.4.28)$$

nimmt sie ihr Minimum

$$\begin{aligned} \epsilon_{\text{Min}} = & 2 \left[ (I_p(\tilde{u}) - I_{pc}(\tilde{r}^G)) (I_p(\tilde{u}^R) - I_{pc}(\tilde{r}^R)) \right]^{1/2} \\ & - [B(\tilde{u}, \tilde{u}^R) - B_c(\tilde{r}^G, \tilde{r}^R)] \end{aligned} \quad (1.4.29)$$

an. Ein Vergleich der beiden punktweisen Abschätzungen (1.4.15) und (1.4.26) hinsichtlich ihrer Genauigkeit bzw. ihrer Unterschiede und Gemeinsamkeiten wird hier nicht durchgeführt.

Die folgenden drei Möglichkeiten wurden bei der Besprechung pauschaler Schranken (Abschnitt 1.3) bereits erläutert bzw. erwähnt.

So können prinzipiell auch punktweise Fehlerschranken mit Hilfe eines sogenannten kleineren Operators  $A_0$  ermittelt werden [76], jedoch erscheint die Forderung, daß die Operatorgleichung mit  $A_0$  exakt gelöst werden muß, als so starke Einschränkung, daß das Verfahren hier nicht weiter dargelegt wird.

Interessant hinsichtlich der punktweisen Schranken ist es jedoch, aus der Kenntnis einer Folge von Näherungswerten zu verschiedenen Diskretisierungsstufen und ihres asymptotischen Verhaltens untere und obere Schranken für den exakten Wert zu bestimmen [85-87]. Genaueres hierzu wird bei der Untersuchung der Diskretisierungsfehler (Abschnitt 3.2) gesagt.

Die Möglichkeit, über 'a priori' Ungleichungen punktweise Schranken zu erstellen, besteht leider bisher nur bei speziellen Randwertproblemen, wie z. B. einer allseitig eingespannten Platte [80,82].

## 2. GRUNDLEGENDE BEZIEHUNGEN DER THEORIE DÜNNER SCHALEN

Tragwerke sind im allgemeinen dreidimensionale Strukturen. Wenn die charakteristischen Abmessungen es gestatten, werden sie aber aus rechnerischen Zweckmäßigkeitsgründen durch flächenhafte oder gar eindimensionale Modelle angenähert. Die Theorie der flächenhaften Tragwerke, insbesondere der Schalen, kann deduktiv über Reihenentwicklungen bezüglich der Normalkoordinate aus der Theorie des räumlichen Kontinuums hergeleitet werden [55]. Aufgrund der verschiedenen Möglichkeiten bei den notwendigen Reihenabbrüchen ergeben sich dabei eine Vielzahl von Varianten. Für eine lineare Theorie dünner Schalen liegt trotzdem die Formulierung der Grundgleichungen bei elastischen Werkstoffen in ähnlicher Klarheit wie in der dreidimensionalen Kontinuumsmechanik vor.

In diesem Kapitel wird das Vorgehen zur Herleitung allgemeiner Grundgleichungen für Flächentragwerke und zum Übergang in die lineare Theorie dünner Schalen kurz geschildert. Das Hauptgewicht liegt jedoch darauf zu zeigen, daß diese speziellen Grundgleichungen dasselbe duale Verhalten aufweisen wie die Gleichungen der dreidimensionalen Theorie, und außerdem ebenfalls als Operatorgleichungen in einem Hilbertraum formuliert werden können. Damit sind die meisten vorstehend dargelegten Möglichkeiten zur pauschalen bzw. punktwisen Fehlerabschätzung anwendbar.

### 2.1. Eine deduktive Herleitung von Grundgleichungen einer allgemeinen Schalentheorie

Eine Möglichkeit der Herleitung, die außerdem den Vorteil hat, der Spezialfall einer allgemeinen Schalentheorie für beliebige Werkstoffe und beliebig große Verformungen zu sein, wird von KRÄTZIG [49] durchgeführt. Die trotz der Beachtung der Prinzipie der Mechanik und der Vermeidung jeglicher 'a priori' Annahmen auftretenden Widersprüche, die *Unschärfen* der Schalentheorie, erscheinen dabei 'nur' im elastischen Gesamtpotential bzw. in seinen komplementären oder dualen Darstellungen [50]. Diese Widersprüche verletzen aber nicht die Voraussetzungen, die in den allgemein erläuterten Eingrenzungsverfahren erfüllt sein müssen.

Den Ausgangspunkt der hier dargestellten Herleitung [49,50,88] einer allgemeinen Schalentheorie bildet der Energiesatz für das dreidimensionale Kontinuum in seiner globalen Form ohne Dämpfungsglieder.

Für eine bestimmte "momentane" Verformungsphase des bewegten Kontinuums ist die Änderung der gesamten Formänderungsenergie und der kinetischen Energie gleich der Energieänderung der Massenkkräfte und Oberflächenspannungen:

$$\frac{d}{dt} \int_V [w^V + \frac{1}{2} \underline{v}^{VT} \cdot \underline{v}^V] \rho^V dV = \int_V \underline{p}^{VT} \cdot \underline{v}^V \rho^V dV + \oint_F \underline{p}^{VT} \cdot \underline{v}^V dF \quad (2.1.1)$$

Hierbei bedeuten  $dV$  ein materielles Volumenelement und  $dF$  dessen Oberflächenelement zur Zeit  $t$ ,  $\rho^V$  die *Massendichte*,  $w^V$  die *Formänderungsenergie* und  $\underline{p}^V$  den *Massenkraftvektor* pro Masseneinheit sowie  $\underline{p}^V$  den *Spannungsvektor* auf  $dF$ .  $\underline{v}^V$  ist das Feld der *Geschwindigkeitsvektoren*, die materielle Zeitableitung  $\dot{\underline{x}}^V$  des *Ortsvektors*  $\underline{x}^V = \underline{x}^V(\theta^\alpha, \theta, t)$  eines Punktes  $P^V$  mit den dimensionslosen Koordinaten  $\theta^i : \theta^1, \theta^2, \theta^3 = \theta$  (siehe Bild 2).

Nach dem WEIERSTRASS'schen Approximationssatz kann  $\underline{x}^V$  in einer Entwicklung bezüglich der Normalenkoordinate  $\theta$  mit im allgemeinen anfänglich unbekanntem *Direktorfunktionen*  $\underline{d}_n$

$$\underline{x}^V(\theta^\alpha, \theta, t) = L \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda \theta)^n \underline{d}_n(\theta^\alpha, t) ; \quad \lambda = t/L \quad (2.1.2)$$

beliebig genau dargestellt werden. Hierin repräsentiert  $L$  eine charakteristische Schalenabmessung [89] und  $t$  die charakteristische Dicke des unverformten Körpers. Der Ortsvektor  $\underline{x}$  der unverformten ( $t = 0$ ) oder der verformten ( $t \neq 0$ ) *Referenzfläche*, die durch  $\theta = 0$  charakterisiert wird, ist nach (2.1.2)

$$\underline{x}(\theta^\alpha, t) = \begin{cases} L \underline{d}_0(\theta^\alpha, 0) = : L \underline{D}_0(\theta^\alpha) & t = 0 \\ \text{für} & \\ L \underline{d}_0(\theta^\alpha, t) & t \neq 0 \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Durch partielle Differentiation nach den Koordinatenlinien  $\theta^\alpha$  ergeben sich daraus die *kovarianten Basisvektoren*  $\underline{\tilde{a}}_\alpha^0$  bzw.  $\underline{\tilde{a}}_\alpha$  der unverformten bzw. verformten Referenzfläche und damit auch ihr *Metriktensor*, z. B.  $a_{\alpha\beta} = \underline{\tilde{a}}_\alpha \cdot \underline{\tilde{a}}_\beta$ . Der *Normaleneinheitsvektor*  $\underline{\tilde{a}}_3^0$  bzw.  $\underline{\tilde{a}}_3$  ist das normierte Vektorprodukt dieser Basisvektoren. Die Winkeländerung zwischen Normalenrichtung und Basisvektoren wird im *Krümmungstensor*, z. B.  $b_{\alpha\beta} = \underline{\tilde{a}}_3 \cdot \underline{\tilde{a}}_{\alpha,\beta}$  beschrieben. Der Unterschied der Lage eines Punktes im unverformten und

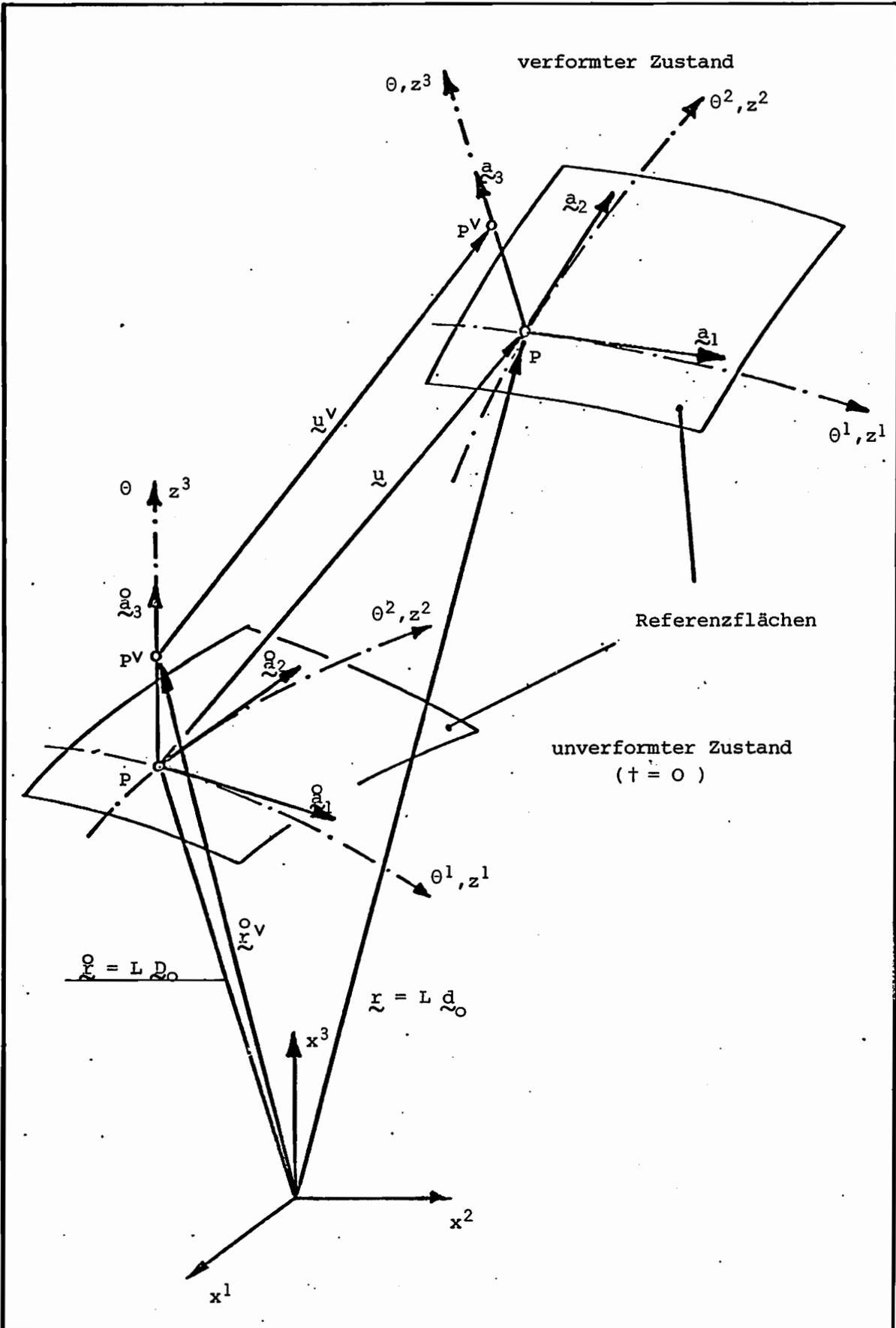


Bild 2 : Unverformtes und verformtes Schalenkontinuum

im verformten Körper ist anschaulich durch den *Verschiebungsvektor*

$$\begin{aligned} \underline{u}^V(\theta^\alpha, \theta, t) &= \underline{r}^V(\theta^\alpha, \theta, t) - \underline{r}^V(\theta^\alpha, \theta, 0) \\ &= L \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\theta)^n \underline{u}_n(\theta^\alpha, t) \\ &= L \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\theta)^n (\underline{d}_n(\theta^\alpha, t) - \underline{D}_n(\theta^\alpha)) \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

dargestellt. Als Bezugssystem der Vektoren wird dabei auch eine *kontra-variante* Basis  $\underline{\tilde{a}}^{\alpha\alpha}$  bzw.  $\underline{\tilde{a}}^\alpha$  mit  $\underline{\tilde{a}}_\beta \cdot \underline{\tilde{a}}^\alpha = \underline{\tilde{a}}^{\alpha\alpha} \cdot \underline{\tilde{a}}_\beta = \delta_\beta^\alpha$  benutzt. So ist der Vektor der Direktorfunktionen sowie ihrer partiellen Ableitungen nach  $\theta^\alpha$ , z.B. des verformten Körpers [49]

$$\underline{\tilde{d}}_n : = d_{ni} \underline{\tilde{a}}^i, \quad \underline{\tilde{d}}_{n,\alpha} : = \lambda_{ni\alpha} \underline{\tilde{a}}^i. \quad (2.1.5)$$

Mit diesen wesentlichsten kinematischen Größen läßt sich der Unterschied zwischen der ursprünglichen und der verformten Konfiguration analog dem GREEN'schen Verzerrungsmaß der dreidimensionalen Theorie als Differenz charakteristischer Tensoren in der Basis der Referenzfläche darstellen [50]:

$$\alpha_{(\alpha\beta)} : = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} - \overset{0}{a}_{\alpha\beta}), \quad (2.1.6a)$$

$$\Delta d_{ni} : = d_{ni} - \overset{0}{D}_{ni} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (2.1.6b)$$

$$\Delta \lambda_{ni\alpha} : = \lambda_{ni\alpha} - \overset{0}{\Lambda}_{ni\alpha} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.1.6c)$$

Ähnlich der Approximation des Ortsvektors (2.1.2) und damit des Verschiebungsvektors (2.1.4) mit ihrem Bezug auf eine Flächenbasis ist auch für die globale dynamische Aussage des Energiesatzes (2.1.1) ein Übergang auf Größen einer Flächentheorie durchzuführen.

Wird der Spannungsvektor  $\underline{p}^V$  definitionsgemäß als Skalarprodukt von *Normaleneinheitsvektor*  $\underline{n} = n_i \underline{g}^i$  in der kontravarianten räumlichen Basis  $\underline{g}^i$  und CAUCHY'schem Spannungstensor  $\tau^{ij}$  bezüglich der kovarianten Basis  $\underline{g}_j$  geschrieben, ist nach Anwendung des Integralsatzes von GAUSS eine Integraltransformation des Energiesatzes (2.1.1), eine Erweiterung mit dem skalaren Funktionensystem  $\phi(\theta) = (\lambda\theta)^l$ , ( $l = 0, 1, \dots$ ), dessen Zeitableitung  $\dot{\phi}$  verschwindet, möglich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V [w^V + \frac{1}{2} \underline{v}^{VT} \cdot \underline{v}^V] \rho^V \phi(\theta) dv \\ = \int_V [\underline{p}^{VT} \cdot \underline{v}^V \rho^V + \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} \tau^{ij} \underline{g}_j^T \cdot \underline{v}^V)_{,i}] \phi(\theta) dv . \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Wird für den Geschwindigkeitsvektor  $\underline{v}^V$  die Zeitableitung des Ortsvektors  $\underline{x}^V$  (2.1.2) benutzt, kann formal die Integration über die Variable  $\theta (t_1 \leq \theta \leq t_2)$ , also über Schalendicke durchgeführt werden. Dazu werden für die Anteile der wesentlichen Größen *Momente* eingeführt, die alle auf die Metrik der verformten Referenzfläche ( $a = \det a_{\alpha\beta}$ ) bezogen sind [49,50]:

Resultierende und höhere Momente der Formänderungsenergie:

$$w^1_{\rho L} \sqrt{a} = \lambda^1 \int_t w^V \rho^V \sqrt{g} \theta^1 d\theta . \quad (2.1.8)$$

Resultierende und höhere Momente der Massendichte:

$$k^1_{\rho \sqrt{a}} = \lambda^1 \int_t \rho^V \sqrt{g} \theta^1 d\theta , \quad k^0 = 1 . \quad (2.1.9)$$

Spannungsresultierende und höhere Spannungsmomente:

$$\underline{m}^{1\alpha}_{L \sqrt{a}} = \lambda^1 \int_t \tau^{\alpha j} \underline{g}_j \sqrt{g} \theta^1 d\theta \quad (2.1.10a)$$

$$\underline{m}^{13}_{L \sqrt{a}} = \lambda^1 \int_t \tau^{3j} \underline{g}_j \sqrt{g} \theta^{1-1} d\theta , \quad \underline{m}^{03} \equiv \underline{0} . \quad (2.1.10b)$$

Resultierende Belastung und höhere Lastmomente:

$$\underline{p}^1_{\rho L \sqrt{a}} = \lambda^1 \int_t \underline{p}^V \rho^V \sqrt{g} \theta^1 d\theta + (\underline{p}^V \sqrt{g g^{33}} \theta^1) \Big|_{t_1}^{t_2} . \quad (2.1.11)$$

Wird nach der Integration über  $\theta$  auch die Zeitdifferentiation durchgeführt, können wie im dreidimensionalen Kontinuum durch Geltendmachung von Homogenität und Isotropie des euklidischen Einbettungsraums nach dem *Prinzip der räumlichen Invarianz* [49], d. h. einer unveränderten Energiebilanz bei beliebigen Starrkörpertranslationen und -rotationen, in diesen Größen der Referenzfläche folgende Sätze von Feldgleichungen gewonnen werden:

Das Gesetz der Massenerhaltungen:

$$\rho \sqrt{a} = \rho^0 \sqrt{a^0} . \quad (2.1.12)$$

Die Symmetriebedingungen der Spannungsgrößen ( $q = 1 + n$ )

$$\bar{m}^{-1}(\alpha\beta) = \bar{m}^{-1}(\beta\alpha) = \sum_{n=0,1,\dots}^{\infty} [nm^{q3\alpha} d_{n\cdot}^{\beta} + m^{q\epsilon\alpha} \lambda_{n\cdot\epsilon}^{\beta}] , \quad (2.1.13)$$

$$\sum_{n=0,1,\dots}^{\infty} [nm^{q33} d_{n\cdot}^{\alpha} - nm^{q3\alpha} d_{n\cdot}^3 + m^{q\epsilon 3} \lambda_{n\cdot\epsilon}^{\alpha} - m^{q\epsilon\alpha} \lambda_{n\cdot\epsilon}^3] = 0 .$$

Die Bewegungsgleichungen ( $q = 1 + n$ ):

$$\begin{aligned} m^{q\alpha\beta} |_{\alpha} - b_{\alpha}^{\beta} m^{q\alpha 3} - qm^{q3\beta} &= -\rho \bar{p}^{q\beta} , \\ m^{q\alpha 3} |_{\alpha} + b_{\alpha\beta} m^{q\alpha\beta} - qm^{q33} &= -\rho \bar{p}^{q3} , \\ \bar{p}^{li} &= p^{li} - \sum_{m=0}^{\infty} k_{\dot{v}_m}^{q,i} . \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Die Energiegleichung:

$$\dot{W}^1_{\rho} = \frac{1}{2} \bar{m}^{-1}(\alpha\beta) \dot{a}_{\alpha\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} (nm^{1+n3i} \dot{d}_{ni} + m^{1+n\alpha i} \dot{\lambda}_{ni\alpha}) . \quad (2.1.15)$$

Die kovariante Ableitung  $\dots|_{\alpha}$  bezieht sich auf die verformte Referenzfläche.

In hyperelastischen Werkstoffen sind die Energiemomente  $W^1$  (2.1.8) eindeutige Funktionen der Verzerrungsmaße (2.1.6). Ein Vergleich von

$$\begin{aligned} \dot{W}^1_{\rho} &= \rho \frac{d}{dt} W^1(\alpha_{(\alpha\beta)}, \Delta d_{ni}, \Delta \lambda_{ni\alpha}) \\ &= \rho \frac{\partial W^1}{\partial \alpha_{(\alpha\beta)}} \dot{\alpha}_{(\alpha\beta)} + \rho \frac{\partial W^1}{\partial \Delta d_{ni}} \dot{d}_{ni} + \rho \frac{\partial W^1}{\partial \Delta \lambda_{ni\alpha}} \dot{\lambda}_{ni\alpha} \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

mit der Energiegleichung (2.1.15) liefert die konstitutiven Beziehungen des Schalenkontinuums:

$$\bar{m}^{-1}(\alpha\beta) = \rho \frac{\partial W^1}{\partial \alpha_{(\alpha\beta)}} , \quad (2.1.17a)$$

$$m^{1+n3i} = \rho \frac{\partial W^1}{\partial \Delta d_{ni}} , \quad (2.1.17b)$$

$$m^{1+n\alpha i} = \rho \frac{\partial W^1}{\partial \Delta \lambda_{ni\alpha}} . \quad (2.1.17c)$$

Damit ist die Herleitung eines vollständigen Systems primärer Grundgleichungen für eine allgemeine Theorie beliebig großer Verformungen beliebig dicker Schalen gegeben [49,50].

## 2.2. Die Grundgleichungen einer linearen Theorie dünner Schalen

Das Tragverhalten dünner Schalen soll näherungsweise durch das der dehn- und biegesteifen Referenzfläche dargestellt werden, so daß also ein Flächentragwerk als ein dreidimensionales Kontinuum definiert werden kann, dessen kinematische Variablen und mechanische Größen denen einer COSSERAT-Fläche hinreichend genau entsprechen [49]. Dies begründet in den vorstehend hergeleiteten Beziehungen den Abbruch der unendlichen Reihen mit steigenden Potenzen von  $\lambda$  bei der Potenz eins. Außerdem habe die dünne Schale konstante Dicke, so daß also  $\lambda_{,\alpha} = 0$  gilt. Da hier eine lineare Theorie, d. h. auch eine Theorie kleiner Verformungen betrachtet wird, ist außer bei der Definition (2.1.6) der Verzerrungsmaße und bei der aus (2.4.4) folgenden Transformation der unverformten Basis  $\overset{0}{\tilde{a}}_{\alpha}$  in die der verformten Referenzfläche  $\tilde{a}_{\alpha}$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{\alpha} &= \overset{0}{\tilde{a}}_{\alpha} + u_{\tilde{0},\alpha} \\ &= (u_{\tilde{0}}^{\beta} |_{\alpha} - u_{\tilde{0}}^3 b_{\alpha}^{\beta} + \delta_{\alpha}^{\beta}) \overset{0}{\tilde{a}}_{\beta} + (u_{\tilde{0},\alpha}^3 + u_{\tilde{0}}^{\beta} b_{\alpha\beta}^3) \overset{0}{\tilde{a}}_3 \\ &=: a_{\alpha\tilde{\beta}}^{\beta\tilde{0}} + a_{\alpha\tilde{3}}^{\beta\tilde{0}} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

jeweils die entsprechende Größe der unverformten Referenzfläche zu verwenden; so sei z. B.  $a = \det a_{\alpha\beta} \approx \overset{0}{a} = \det \overset{0}{a}_{\alpha\beta}$  und nach (2.1.2) der Ortsvektor bzw. nach (2.1.4) der Verschiebungsvektor

$$\tilde{r}^{\overset{0}{V}} = L[D_{\tilde{0}i} \overset{0}{\tilde{a}}^{\overset{0}{V}} + (\lambda\theta) \overset{0}{\tilde{a}}^{\overset{0}{3}}], \quad \tilde{u}^{\overset{0}{V}} = L[u_{\tilde{0}i} + (\lambda\theta) u_{\tilde{1}i}] \overset{0}{\tilde{a}}^{\overset{0}{i}} . \quad (2.2.2)$$

Damit reduzieren sich die allgemeinen Verzerrungsmaße (2.1.6) aber ebenfalls [49,50,90]:

$$\alpha_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} (u_{0\alpha|\beta} + u_{0\beta|\alpha} - 2b_{\alpha\beta} u_{03}) \quad , \quad (2.2.3a)$$

$$\Delta d_{1\alpha} = u_{03,\alpha} + u_{0\lambda} b_{\alpha}^{\lambda} + u_{1\alpha} = : \gamma_{\alpha} \quad , \quad (2.2.3b)$$

$$\Delta \lambda_{1\alpha\beta} = u_{1\beta|\alpha} - u_{0\rho|\beta} b_{\alpha}^{\rho} + u_{03} b_{\alpha\rho} b_{\beta}^{\rho} = : \beta_{\alpha\beta} \quad . \quad (2.2.3c)$$

Der lineare GREEN'sche Verzerrungstensor  $\epsilon_{ij}$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{\sim i} \cdot u_{\sim, j}^V + g_{\sim j} \cdot u_{\sim, i}^V) \quad (2.2.4)$$

kann mit (2.2.2) und der Basis des unverformten Schalenraums

$$\underset{\sim}{g}_{\alpha} = L[\underset{\sim}{a}_{\alpha} - (\lambda\theta) b_{\alpha\rho}^{\rho}] \quad , \quad \underset{\sim}{g}_3 = L\lambda \underset{\sim}{a}_3 \quad (2.2.5)$$

in den Verzerrungsmaßen (2.2.3) der Referenzfläche geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= L^2 [\alpha_{(\alpha\beta)} + (\lambda\theta) \beta_{(\alpha\beta)} + (\lambda\theta)^2 (\alpha_{(\rho\lambda)} b_{\alpha}^{\lambda} b_{\beta}^{\rho} - \beta_{\rho} (\alpha b_{\beta}^{\rho}))] , \\ \epsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} L^2 \lambda [\gamma_{\alpha} - (\lambda\theta) \gamma_{\lambda} b_{\alpha}^{\lambda}] \quad , \quad (2.2.6) \\ \epsilon_{33} &= L^2 \lambda^2 \Delta d_{13} \quad . \end{aligned}$$

Hierin ist

$$\beta_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} (\beta_{\alpha\beta} + \beta_{\beta\alpha}) \quad (2.2.7)$$

der symmetrisierte 2. Verzerrungstensor. Diese Darstellung (2.2.6) sowie die Formulierungen

$$g^{\alpha\beta} = \frac{1}{L^2} [a^{\alpha\beta} + 2(\lambda\theta) b^{\alpha\beta} + \dots] \quad , \quad g^{\alpha 3} = 0 \quad , \quad g^{33} = \frac{1}{\lambda^2 L^2} \quad (2.2.8)$$

für den kontravarianten Metriktensor des Schalenkontinuums ermöglichen es, aus der Formänderungsenergie elastischer isotroper Körper

$$\rho^V W^V = \frac{G}{2} (g^{ir} g^{js} + g^{is} g^{jr} + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{ij} g^{rs}) \epsilon_{ij} \epsilon_{rs} \quad (2.2.9)$$

die resultierende Formänderungsenergie (2.1.8) der Referenzfläche zu berechnen:

$$\rho W^0 = \frac{Gt}{2} \left[ \binom{0}{E} \alpha\beta\rho\lambda \left( a_{(\alpha\beta)}^{\alpha} a_{(\rho\lambda)}^{\lambda} + \frac{\lambda^2}{12} \beta_{(\alpha\beta)}^{\beta} \beta_{(\rho\lambda)}^{\lambda} \right) + a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \right] . \quad (2.2.10)$$

Dabei ist G der Schubmodul und bei der Annahme eines flächenhaften Verformungszustands

$$\binom{0}{E_1} \alpha\beta\rho\lambda = a^{\alpha\rho} a^{\beta\lambda} + a^{\alpha\lambda} a^{\beta\rho} + \frac{2\nu}{1-2\nu} a^{\alpha\beta} a^{\rho\lambda} \quad (2.2.11a)$$

bzw. für einen flächenhaften Spannungszustand [91] ( $\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{\lambda}^{\lambda}$ )

$$\binom{0}{E_2} \alpha\beta\rho\lambda = a^{\alpha\rho} a^{\beta\lambda} + a^{\alpha\lambda} a^{\beta\rho} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\rho\lambda} . \quad (2.2.11b)$$

Beide Tensoren unterscheiden sich im letzten Term, insgesamt um [92]

$$\Delta \binom{0}{E} \alpha\beta\rho\lambda = \frac{2\nu^2}{(1-\nu)(1-2\nu)} a^{\alpha\beta} a^{\rho\lambda} . \quad (2.2.11c)$$

Häufig werden beide Tensoren als gleichwertig angesehen [91], obwohl die Auswirkungen dieses Unterschieds auf die Lösung nicht gering sind (siehe Abschnitt 3.1). In Folgendem wird der Tensor für flächenhafte Spannungszustände (2.2.11b) benutzt [92].

Die linearisierte Form (2.2.2) des Ortsvektors, d. h.  $D_{1\beta} = 0$  und  $D_{13} = 1$  ergibt nach (2.1.5)

$$\Lambda_{1\beta\alpha} = D_{1\beta|\alpha} - D_{13} b_{\alpha\beta}^{\lambda} = -b_{\alpha\beta}^{\lambda}, \quad \Lambda_{13\alpha} = D_{13,\alpha} + D_{1\lambda} b_{\alpha}^{\lambda} = 0, \quad (2.2.12)$$

und damit aus (2.1.13) die reduzierten Symmetriebedingungen [88]

$$\bar{m}^0(\alpha\beta) = m^0\beta\alpha + b_{\lambda}^{\beta} m^{1\lambda\alpha}, \quad (2.2.13a)$$

$$\bar{m}^1(\alpha\beta) = m^1\alpha\beta, \quad (2.2.13b)$$

$$m^{0\alpha 3} = m^{13\alpha}, \quad (2.2.13c)$$

Aus der Formänderungsenergie (2.2.10) folgt nach den allgemeinen konstitutiven Beziehungen (2.1.17) durch partielle Differentiation

der symmetrische Teil des *Längskrafttensors*

$$\bar{m}^0(\alpha\beta) = \rho \frac{\partial W^0}{\partial a_{(\alpha\beta)}} = Gt \binom{0}{E} \alpha\beta\rho\lambda a_{(\rho\lambda)}^{\lambda} = : \bar{n}^{\alpha\beta}, \quad (2.2.14)$$

der nach (2.2.13b) symmetrische *Momententensor*

$$\bar{m}^{-1}(\alpha\beta) = \rho \frac{\partial W^0}{\partial \beta_{(\alpha\beta)}} = Gt \frac{\lambda^2}{12} \frac{(\circ)}{E} \alpha\beta\rho\tau_{\beta(\rho\tau)} = : m^{\alpha\beta}, \quad (2.2.15)$$

sowie auch der *Querkraftvektor*

$$m^{13\alpha} = \frac{\partial W^0}{\partial \gamma_\alpha} = Gt a^{\alpha\rho} \gamma_\rho = : q^\alpha. \quad (2.2.16)$$

Berücksichtigt man konsequent nur Terme gleicher Größenordnung [92,93], so ist in dieser Theorie erster Ordnung die Schubverzerrung zu vernachlässigen, die konstitutive Beziehung (2.2.16) für die Querkraft also ungültig.

Die Bewegungsgleichungen (2.2.14), bei Beschränkung auf statische Probleme die *Gleichgewichtsbedingungen*, reduzieren sich bei Beachtung aller Einschränkung dieser Theorie, so vor allem der reduzierten Symmetriebedingungen (2.2.13) auf [50,91,92]:

$$\begin{aligned} n^{\alpha\beta}|_\alpha - b_\alpha^\beta m^{\lambda\alpha}|_\lambda &= -p^\beta + b_\lambda^\beta c^\lambda, \\ b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}|_{\alpha\beta} &= -p^3 - c^\alpha|_\alpha. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Hierzu sind  $p^i = \rho \bar{p}^{0i}$  die Komponenten der Belastung  $\underline{p}$  und  $c^\alpha = \rho \bar{p}^{1\alpha}$  die Komponenten eines Moments  $\underline{c} = c^\alpha \underline{a}_3 \times \underline{a}_\alpha$ . Die Querkraft  $q^\alpha$  ist also explizit nicht mehr in den Grundgleichungen enthalten; sie kann jedoch nachträglich über die Gleichgewichtsbedingung

$$q^\beta = m^{\alpha\beta}|_\alpha \quad (2.2.18)$$

berechnet werden. Dies kommt der Erfahrung entgegen, daß eine Schale mit Schnittmomenten nicht frei von Querkraften sein kann.

Der schubstarre Querschnitt bzw. die Vernachlässigung von  $\gamma_\alpha$  bewirkt außerdem, daß die Änderung der Normalen  $\underline{a}_3^0$ , die *Rotation*  $w_\alpha = u_{1\alpha}$ , nach (2.2.3b) folgenden Zusammenhang mit den *Verschiebungen*  $u_i = u_{0i}$  erhält:

$$w_\alpha = -u_{3,\alpha} - u_\lambda b_\alpha^\lambda. \quad (2.2.19)$$

Berücksichtigt man dies in (2.2.3c), erhält man folgende Darstellungen für *Verzerrungsmaße*

$$\alpha_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} (u_\alpha|_\beta + u_\beta|_\alpha - 2u_3 b_{\alpha\beta}) \quad (2.2.20a)$$

$$\beta_{\alpha\beta} = -u_3|_{\alpha\beta} - (u_\lambda b_\beta^\lambda)|_\alpha - u_\lambda|_\beta b_\alpha^\lambda + u_3 b_{\alpha\lambda} b_\beta^\lambda \quad (2.2.20b)$$

Wendet man in (2.2.20b) die Gleichungen von MEINARDI und CODAZZI an, so ergibt sich auch

$$\beta_{(\alpha\beta)} = -u_3|_{\alpha\beta} - u_\lambda b_\alpha^\lambda|_\beta - u_\lambda|_\alpha b_\beta^\lambda - u_\lambda|_\beta b_\alpha^\lambda + u_3 b_{\alpha\lambda} b_\beta^\lambda \quad (2.2.20c)$$

Die konstitutiven Beziehungen (2.2.14-16) geben zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen (2.2.17) und den Abhängigkeiten (2.2.20) das primäre System von Grundgleichungen einer linearen Theorie dünner Schalen.

Das dazu duale System besteht wie in der allgemeinen Elastizitätstheorie (siehe Abschnitt 1.2.) aus den inversen konstitutiven Beziehungen, den Verträglichkeitsbedingungen und den Zusammenhängen zwischen den Schnittgrößen und den Spannungsfunktionen.

Die inversen konstitutiven Beziehungen sind in einer linearen Theorie durch die dort immer eindeutig lösbare Gleichung

$$\binom{0}{E} \alpha_{\beta\rho\lambda} \binom{0}{F} \alpha_{\beta\varepsilon\sigma} = \frac{1}{2} (\delta_\varepsilon^\rho \delta_\sigma^\lambda + \delta_\sigma^\rho \delta_\varepsilon^\lambda) \quad (2.2.21)$$

bestimmbar:

$$\alpha_{(\alpha\beta)} = \frac{2}{Gt} \binom{0}{F} \alpha_{\beta\rho\lambda} \bar{n}^{\rho\lambda} \quad (2.2.22a)$$

$$\beta_{(\alpha\beta)} = \frac{24}{\lambda^2 Gt} \binom{0}{F} \alpha_{\beta\rho\lambda} m^{\rho\lambda} \quad (2.2.22b)$$

Dabei ist

$$\binom{0}{F} \alpha_{\beta\rho\lambda} = \frac{1}{4} (a_{\alpha\rho} a_{\beta\lambda} + a_{\alpha\lambda} a_{\beta\rho} - \frac{2\nu}{1+\nu} a_{\alpha\beta} a_{\rho\lambda}) \quad (2.2.23)$$

Die LEGENDRE-Transformation (1.1.23) ergibt dann mit (2.2.22) und (2.2.10)

$$\begin{aligned} \rho W_C^0 &= (\bar{n}^{\alpha\beta} \alpha_{(\alpha\beta)} + m^{\alpha\beta} \beta_{(\alpha\beta)}) - \rho W^0 \\ &= \frac{1}{2G} \binom{0}{F} \alpha_{\beta\rho\lambda} [\bar{n}^{\alpha\beta} \bar{n}^{\rho\lambda} + \frac{12}{\lambda^2} m^{\alpha\beta} m^{\rho\lambda}] \quad (2.2.24) \end{aligned}$$

$\rho W_C^0$  ist, dargestellt in den Schnittgrößen, das zu  $\rho W^0$  komplementäre Funktional. Dual zu (2.2.14/16) können daraus durch partielle Ableitungen die inversen konstitutiven Beziehungen (2.2.22) bestimmt werden:

$$\alpha_{(\alpha\beta)} = \rho \frac{\partial W_c}{\partial \bar{n}^{\alpha\beta}} \quad , \quad (2.2.25a)$$

$$\beta_{(\alpha\beta)} = \rho \frac{\partial W_c}{\partial m^{\alpha\beta}} \quad . \quad (2.2.25b)$$

Diese Verzerrungsmaße sind durch je drei Komponenten bestimmt, die nach (2.2.20) durch drei Komponenten des Verschiebungsvektors der Mittelfläche ausgedrückt werden. Sie können daher nicht voneinander unabhängig sein, sondern müssen drei Identitäten erfüllen. Umgekehrt sind auch zur eindeutigen Berechenbarkeit dieser drei Verschiebungskomponenten aus den Verzerrungstensorsorkomponenten Integrabilitätsbedingungen erforderlich [94].

Für *modifizierte Verzerrungsmaße*  $A^{\alpha\beta}$  und  $B^{\alpha\beta}$ , die die einfache Transformation

$$A^{\alpha\beta} = - \epsilon^{\alpha\mu} \epsilon^{\beta\nu} \alpha_{(\mu\nu)} \quad , \quad (2.2.26a)$$

$$B^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\mu} \epsilon^{\beta\nu} [\beta_{(\nu\mu)} + b_{\mu}^{\lambda} \alpha_{(\lambda\nu)}] \quad (2.2.26b)$$

ergibt, gelten drei Differentialbeziehungen [91], die den Gleichgewichtsbedingungen (2.2.17) formal gleich sind, die *Kompatibilitätsbedingungen*:

$$B^{\alpha\beta} |_{\alpha} - b_{\alpha}^{\beta} A^{\rho\alpha} |_{\rho} = 0 \quad ; \quad \beta = 1, 2 \quad , \quad (2.2.27a)$$

$$b_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} + A^{\alpha\beta} |_{\alpha\beta} = 0 \quad . \quad (2.2.27b)$$

Die Reduzierung der sieben verschiedenen Komponenten der modifizierten Maße auf nur sechs unabhängige ist durch

$$\epsilon_{\alpha\beta} [B^{\alpha\beta} + b_{\rho}^{\beta} A^{\rho\alpha}] = 0 \quad , \quad (2.2.28a)$$

oder die Existenz eines symmetrischen 2. modifizierten Verzerrungsmaßes

$$\bar{B}^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta} + b_{\rho}^{\beta} A^{\rho\alpha} \quad (2.2.28b)$$

gegeben. Dies ist formal gleich der Definition (2.2.13a) des symmetrischen Längskrafttensors  $\bar{n}^{\alpha\beta}$ . Sind diese Verzerrungsmaße nicht mit (2.2.26) nach (2.2.20) aus Verschiebungskomponenten bestimmt, können die Kompatibilitätsbedingungen auch inhomogen sein; d. h. Extra-Verzerrungen können von Inkompatibilitäten  $\eta^{\alpha}$ ,  $\eta$  verursacht werden.

Dual zur identischen Erfüllung der homogenen Verträglichkeitsbedingungen durch Verzerrungstensoren, die aus den drei Verschiebungskomponenten berechnet wurden, existieren drei Spannungsfunktionen, die die homogenen Gleichgewichtsbedingungen (2.2.17) identisch erfüllen. Damit folgt, daß Schnittgrößen, die über die (2.2.26) analogen Transformationen

$$n^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\alpha\mu}\epsilon^{\beta\nu}[\bar{N}_{(\nu\mu)} + b_{\mu}^{\lambda}M_{\lambda\nu}] , \quad (2.2.29a)$$

$$m^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\mu}\epsilon^{\beta\nu} M_{\mu\nu} \quad (2.2.29b)$$

aus dem *modifizierten symmetrischen Längskrafttensor*  $\bar{N}_{(\nu\mu)}$  und dem ebenfalls *symmetrischen modifizierten Momententensor*  $M_{\nu\mu}$

$$\bar{N}_{(\alpha\beta)} = -\psi_3|_{\alpha\beta} - \psi_{\lambda}b_{\alpha}^{\lambda}|_{\beta} - \psi_{\lambda}|_{\alpha}b_{\beta}^{\lambda} + \psi_{\lambda}|_{\beta}b_{\alpha}^{\lambda} + \psi_3b_{\alpha\lambda}b_{\beta}^{\lambda} , \quad (2.2.30a)$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\psi_{\alpha}|_{\beta} + \psi_{\beta}|_{\alpha} - 2b_{\alpha\beta}\psi_3) \quad (2.2.30b)$$

aus den drei Spannungsfunktionen  $\psi_{\alpha}$ ,  $\psi_3$  bestimmt wurden, falls sie genügend oft stetig differenzierbar sind, Lösungen der homogenen Gleichungen (2.2.17) sind.

Zur Verdeutlichung der Gleichheit des formalen Aufbaus der für die geometrischen und für die statischen Größen geltenden Grundgleichungen werden, wie für die dreidimensionale Theorie in Tafel 1, alle Beziehungen in einer Darstellung durch Operatormatrizen geschrieben und in Tafel 5 zusammengestellt. Dazu werden, mit  $D_{\alpha}$  als Operator der kovarianten Differentiation  $|_{\alpha}$ , die Operator-Matrix

$$\underline{D}^T = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & D_2 & -2b_1^1 D_1 & -2b_2^1 D_2 & -2(b_1^1 D_2 + b_2^1 D_1) \\ & & & -b_1^1|_1 & -b_2^1|_2 & -2b_1^1|_2 \\ 0 & D_2 & D_1 & -2b_1^2 D_1 & -2b_2^2 D_2 & -2(b_1^2 D_2 + b_2^2 D_1) \\ & & & -b_1^2|_1 & -b_2^2|_2 & -2b_2^2|_1 \\ b_{11} & b_{22} & 2b_{12} & -b_{1\lambda}b_1^{\lambda} & -b_{2\lambda}b_2^{\lambda} & -2b_{1\lambda}b_2^{\lambda} \\ & & & + D_{11} & + D_{22} & + D_{12} \end{pmatrix} \quad (2.2.31)$$

und die Transformationsmatrizen

$$\underline{B}^T = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 0 & b_1^1 - b_2^2 & -b_2^1 & 0 & -1 & 0 \\ b_2^2 - b_1^1 & 0 & -b_1^2 & -1 & 0 & 0 \\ b_2^1 & b_1^2 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.32)$$

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2.33)$$

definiert. Die konstitutiven Beziehungen (2.2.22) bzw. (2.2.14/15) sind in der Matrixformulierung mit

$$\underline{F} = \frac{1}{Et} \begin{pmatrix} a_{11}^2 & (1+\nu)a_{12}^2 & 2a_{12}a_{11} \\ -\nu a_{11}a_{22} & a_{22}^2 & 2a_{12}a_{22} \\ \text{symm.} & & 2(1+\nu)a_{11}a_{22} \\ & & +2(1-\nu)a_{12}^2 \end{pmatrix}, \quad (2.2.34)$$

$$\underline{E} = \underline{F}^{-1} = \frac{Et}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} (a_{11}^{11})^2 & (1-\nu)(a_{12}^{12})^2 & a_{12}^{12}a_{11}^{11} \\ +\nu a_{11}^{11}a_{22}^{22} & (a_{22}^{22})^2 & a_{12}^{12}a_{22}^{22} \\ \text{symm.} & & \frac{1-\nu}{2} a_{11}^{11}a_{22}^{22} \\ & & + \frac{1+\nu}{2} (a_{12}^{12})^2 \end{pmatrix} \quad (2.2.35)$$

durch

$$\underline{\tilde{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \underline{F} & \underline{0} \\ \underline{0} & \frac{12}{\lambda^2} \underline{F} \end{pmatrix} \cdot \underline{\tilde{\sigma}} = \underline{K} \cdot \underline{\tilde{\sigma}} \quad (2.2.36)$$

$$\underline{\tilde{\sigma}} = \begin{pmatrix} \underline{E} & \underline{0} \\ \underline{0} & \frac{\lambda^2}{12} \underline{E} \end{pmatrix} \cdot \underline{\varepsilon} = \underline{K}^{-1} \cdot \underline{\varepsilon} \quad (2.2.37)$$

ausdrückbar. Dabei ist E der Elastizitätsmodul und  $\nu$  die Querdehnungszahl, und die Vektordarstellung  $\underline{\varepsilon}$  bzw.  $\underline{\tilde{\sigma}}$  der Verzerrungs- bzw. Schnittgrößen in Tafel 5 zu ersehen.

Die in Tafel 5 zusammengestellten lokalen Aussagen sind auch in globalen Formulierungen, den Arbeitsansätzen oder zueinander komplementären Variationsfunktionalen darstellbar. So lautet in dieser linearen Theorie dünner Schalen das das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials darstellende Funktional entsprechend (1.2.66) und in Matrixschreibweise:

$$I_p(\underline{u}, \underline{\varepsilon}) = \int_F \left[ \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{K}^{-1} \cdot \underline{\varepsilon} - \underline{p}^{*T} \cdot \underline{u} \right] dF - \int_{C_p} \underline{u}^{RT} \cdot \underline{v}^T \cdot \underline{\sigma}^{R*} ds. \quad (2.2.38)$$

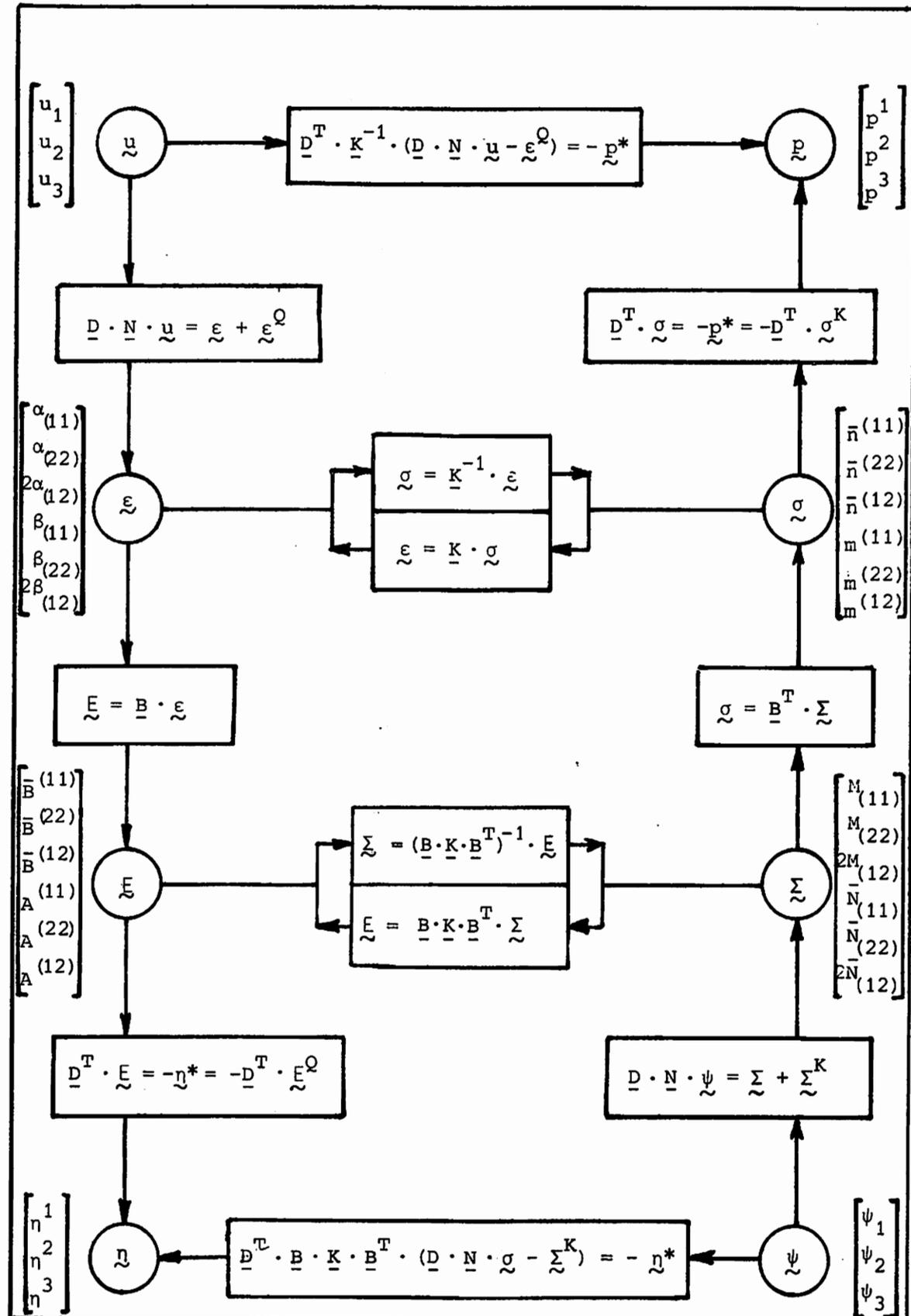
Die Nebenbedingungen für zulässige Ansätze  $\underline{u}$  sind

$$\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{u} = \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}^{Q*} \quad \text{in } F, \quad (2.2.39a)$$

$$\underline{u}^R = \underline{u}^{R*} \quad \text{auf } C_u. \quad (2.2.39b)$$

Dabei ist  $C_p$  bzw.  $C_u$  der Teil des Randes der Schalenmittelfläche F, auf dem statische bzw. geometrische Größen vorgeschrieben werden. Sind auf einem Teil des Randes  $C_p \cap C_u$  sowohl statische wie geometrische Größen gegeben, müssen diese zueinander komplementär sein, d.h. dürfen aneinander keine Arbeit leisten. Eine Matrixschreibweise der Verschiebungs- bzw. Schnittgrößen entlang des Randes C ist mit

$$\underline{u}^{RT} := (u_1; u_2; u_3; -u_{3,1} - u_\lambda b_1^\lambda; -u_{3,2} - u_\lambda b_2^\lambda) \quad (2.2.40a)$$



Tafel 5 : Grundgleichungen einer linearen Schalentheorie (ohne Schubverformung)

$$\underline{\underline{g}}^{RT} := (\bar{n}^{11}; \bar{n}^{22}; \bar{n}^{12}; m^{11}; m^{22}; m^{12}; m^{\lambda 1}|_{\lambda}; m^{\lambda 2}|_{\lambda}) \quad (2.2.40b)$$

und der die Außennormale  $\underline{\underline{v}}$  enthaltenden Matrix  $\underline{\underline{V}}$

$$\underline{\underline{V}}^T = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & v_2 & -v_1 b_1^1 & -v_2 b_2^1 & -v_1 b_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & v_1 & -v_1 b_1^2 & -v_2 b_2^2 & -v_1 b_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & v_1 & 0 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_2 & v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.40c)$$

möglich. Zur Definition (2.2.40) der Randgrößen ist anzumerken, daß nur vier der Komponenten von  $\underline{\underline{u}}^R$  oder der dazu komplementären Terme von  $\underline{\underline{V}}^T \cdot \underline{\underline{g}}^R$  unabhängig von einander gegeben sein können.

Das zu (2.2.38) komplementäre Funktional ergibt sich entsprechend (1.2.70):

$$I_{pc}(\underline{\underline{g}}) = - \int_F \left[ \frac{1}{2} \underline{\underline{g}}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{g}} + \underline{\underline{g}}^T \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^{Q*} \right] dF + \int_{C_u} \underline{\underline{g}}^{RT} \cdot \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{u}}^{R*} ds. \quad (2.2.41)$$

Hier lauten die notwendigen statischen Bedingungen für die zulässigen Ansätze  $\underline{\underline{g}}^*$ :

$$\underline{\underline{D}}^T \cdot \underline{\underline{g}} = -\underline{\underline{p}}^* \quad \text{auf } F, \quad (2.2.42a)$$

$$\underline{\underline{V}}^T \cdot \underline{\underline{g}}^R = \underline{\underline{V}}^T \cdot \underline{\underline{g}}^{R*} \quad \text{auf } C_p. \quad (2.2.42b)$$

Die zu den beiden Funktionalen (2.2.38) und (2.2.41) dualen Formulierungen in Spannungsfunktionen  $\underline{\underline{\psi}}$  und den modifizierten Schnittgrößen  $\underline{\underline{\Sigma}}$  (2.2.30) bzw. den modifizierten Verzerrungsmaßen  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  (2.2.26) können entsprechend der dreidimensionalen Theorie ebenfalls angegeben werden [95] (siehe dazu Abschnitt 2.3).

Die hier angegebenen Grundgleichungen einer linearen Schalentheorie sind nicht die einzig bekannten [96]. Andere Formulierungen unterscheiden sich jedoch nur durch Terme, die von höherer Ordnung klein sind [92]. Die hier gewählten Gleichungen geben eine konsistente Theorie erster Ordnung, sind den Gleichungen der dreidimensionalen Theorie weitgehend ähnlich aufgebaut (siehe Tafel 5), vor allem aber besitzen sie Eigenschaften, die zur Durchführung einer Fehlerabschätzung in der im Abschnitt 1.3. dargelegten Form erforderlich sind.

### 2.3. Die Eigenschaften der Operatorgleichungen, Skalarprodukte und Funktionale

Die Gleichungen und Funktionale zur Darstellung von elastostatischen Randwertproblemen bei dünnen schalenförmigen Körpern sind i. a. nur näherungsweise lösbar, so daß Fehlerabschätzungen, pauschal oder punktweise, wie sie in den Abschnitten 1.3. bzw. 1.4. erläutert wurden, nützlich sind. Die zu deren Anwendung notwendigen Voraussetzungen sollen hier überprüft werden.

Die wesentlichste Größe bei jeder Abschätzung ist die eingeführte Norm, in der der betrachtete Fehler ausgedrückt wird und damit unmittelbar zusammenhängend der Funktionenraum, in dem die Untersuchung durchgeführt wird. Beides wird in dieser Fehlerabschätzung zur Lösung elastizitätstheoretischer Probleme sinnvollerweise sehr allgemein definiert: Im Raum aller möglichen elastischen Zustände wird die Energie eines Zustandes als Maß, als Norm verwendet. Genauer ausgedrückt: Mit der Einführung der Wechselwirkungsenergie (1.2.19) zweier elastischer Zustände als Skalarprodukt ist in dieser linearen Theorie ein Prä-Hilbertraum, mit dessen Vervollständigung ein Hilbertraum  $H$  der elastischen Zustände definiert [59,55,36 u.a.].

In der vorliegenden linearen Schalentheorie (Abschnitt 2.2.) bedeutet das Skalarprodukt zweier Zustände  $f, f$ :

$$\{f, f\} := \int_F \left[ \alpha_{(\rho\lambda)}^1 \frac{2\rho\lambda}{n} + \beta_{(\rho\lambda)}^1 \frac{2\rho\lambda}{m} \right] dF \quad (2.3.1a)$$

$$\begin{aligned} &= \int_F \left[ \frac{1}{2} u_{\alpha|\beta} + \frac{1}{2} u_{\beta|\alpha} - u_3 b_{\alpha\beta} \right] \frac{2\alpha\beta}{n} \\ &\quad + (-u_3 |_{\alpha\beta} - u_{\lambda} b_{\alpha|\beta} - u_{\lambda} |_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} - u_{\lambda} |_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda} + u_3 b_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\lambda}) \frac{2\alpha\beta}{m} \\ &\quad + \left( \alpha_{(\rho\lambda)}^1 \frac{2\rho\lambda}{n} + \beta_{(\rho\lambda)}^1 \frac{2\rho\lambda}{m} \right) dF. \end{aligned} \quad (2.3.1b)$$

Dabei ist entsprechend (1.1.9) die Möglichkeit von Inkompatibilitäten  $\eta^\alpha$ ,  $\eta$  erzeugenden Extradehnungen  $\alpha_{(\rho\lambda)}^Q$  und  $\beta_{(\rho\lambda)}^Q$  berücksichtigt. Das Skalarprodukt ist, wie erforderlich, wegen (2.2.14/15) und (2.2.22)

kommutativ

$$\begin{aligned} \{f, f\} &= \int_F \left[ \alpha_{(\rho\lambda)}^1 \bar{n}^{2\rho\lambda} + \beta_{(\rho\lambda)}^1 m^{2\rho\lambda} \right] dF \\ &= \frac{2(1+\nu)}{Et} \int_F \left[ \alpha_{\alpha\beta\rho\lambda}^{(o)} \frac{1}{\bar{n}} \frac{1}{\bar{n}} \alpha_{(\rho\lambda)}^2 + \frac{12}{\lambda^2} \frac{1}{m} \frac{1}{m} \alpha_{(\rho\lambda)}^2 \right] dF \\ &= \frac{Et}{2(1+\nu)} \int_F \left[ \alpha_{\alpha\beta\rho\lambda}^{(o)} \frac{1}{E} \left[ \alpha_{(\alpha\beta)}^1 \alpha_{(\rho\lambda)}^2 + \frac{\lambda^2}{12} \beta_{(\alpha\beta)}^1 \beta_{(\rho\lambda)}^2 \right] \right] dF \\ &= \int_F \left[ \bar{n}^{\rho\lambda} \alpha_{(\rho\lambda)}^1 + m^{\rho\lambda} \beta_{(\rho\lambda)}^2 \right] dF \\ &= \{f, f\}^2 \quad , \quad (2.3.2) \end{aligned}$$

und wegen der Linearität der Theorie und damit der Abbildungen auch distributiv und assoziativ:

$$\begin{aligned} \{cf + df, f\} &= \int_F \left[ (c\alpha_{(\rho\lambda)}^1 + d\alpha_{(\rho\lambda)}^2) \bar{n}^{3\rho\lambda} \right. \\ &\quad \left. + (c\beta_{(\rho\lambda)}^1 + d\beta_{(\rho\lambda)}^2) m^{3\rho\lambda} \right] dF \\ &= c\{f, f\}^1 + d\{f, f\}^2 \quad ; \quad c, d \in \mathbb{R} \quad . \quad (2.3.3) \end{aligned}$$

Außerdem ist bei Ausschluß von inkompressiblen Materialien aufgrund der positiven Definitheit (siehe A3) der zueinander inversen symmetrischen Tensoren  $\alpha_{\alpha\beta\rho\lambda}^{(o)}$  und  $\beta_{\alpha\beta\rho\lambda}^{(o)}$  sowohl die quadratische Form (2.2.10), das Schalenpotential  $\rho W^O(\underline{\epsilon})$  als auch die quadratische Form (2.2.24), das komplementäre Potential  $\rho W_C(\underline{\sigma})$  positiv definit, so daß auch die folgende vierte notwendige Eigenschaft eines Skalarprodukts erfüllt ist:

$$\{f, f\} \geq 0 \quad , \quad (2.3.4a)$$

$$\{f, f\} = 0 \quad , \quad \text{nur wenn } f \equiv 0 \quad . \quad (2.3.4b)$$

Also ist es möglich [58], durch

$$\|f\| = \{f, f\}^{1/2} = \left[ \int_F \left( \alpha_{(\rho\lambda)}^1 \bar{n}^{\rho\lambda} + \beta_{(\rho\lambda)}^1 m^{\rho\lambda} \right) dF \right]^{1/2} \quad (2.3.5)$$

eine Norm zu klären, so daß die Vervollständigung dieses linearen normierten Raumes einen Hilbertraum darstellt.

Eine wichtige Grundlage der Fehlerabschätzungen bildet die Aufteilung aller elastischen Zustände in die orthogonalen Unterräume der Lastspannungszustände  $f'$  und der Eigenspannungszustände  $f''$ . Entsprechend der Definition in der dreidimensionalen Theorie (1.1.5) und (1.1.6) sind diese Zustände in der Schalentheorie durch

$$f' := \{ \underline{u}(\underline{x}) \mid \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{u} = \underline{\varepsilon} \quad \text{auf } F, \underline{u} = \underline{0} \quad \text{auf } C_u \} \quad (2.3.6)$$

$$f'' := \{ \underline{\psi}(\underline{x}) \mid \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\psi} = \underline{\sigma} \quad \text{auf } F, \underline{\sigma}^{RT} \cdot \underline{v} = \underline{0} \quad \text{auf } C_p \} \quad (2.3.7)$$

charakterisiert. Ein Lastspannungszustand  $f'$  ist darstellbar durch ein Verschiebungsfeld  $\underline{u}'(\underline{x})$ , das allein durch inhomogene Belastungen auf  $F$  und/oder  $C_p$  herbeigeführt wird. Ein Eigenspannungszustand  $f''$  kann durch Spannungsfunktionen  $\psi''$  beschrieben werden, die einen elastischen Zustand wiedergeben, der durch Extra-Verzerrungen  $\underline{\alpha}^Q, \underline{\beta}^Q$  in  $F$  und/oder auf  $C_u$  [64,51] verursacht wird. Ihre Orthogonalität ergibt sich mit (2.3.6/7) über Abbildungen durch die Operatorgleichungen, d. h. Umformung mit den vorliegenden Grundgleichungen, und partielle Integration nach dem Satz von GAUSS:

$$\begin{aligned} \{f', f''\} &= \int_F [\alpha'_{(\rho\lambda)} \bar{n}^{\rho\lambda} + \beta'_{(\rho\lambda)} m^{\rho\lambda}] dF \\ &= \int_F \left[ \left( \frac{1}{2} u'_{\alpha|\beta} + \frac{1}{2} u'_{\alpha|\beta} - u'_3 b_{\alpha\beta} \right) \bar{n}^{\alpha\beta} + \right. \\ &\quad \left. + (u'_3 |_{\alpha\beta} - u'_\lambda b_{\alpha|\beta}^\lambda - u'_\lambda |_{\alpha\beta} b_{\beta}^\lambda - u'_\lambda |_{\beta\alpha} b_{\alpha}^\lambda + u'_3 b_{\alpha\lambda} b_{\beta}^\lambda) m^{\alpha\beta} \right] dF \\ &= \int_F \underbrace{[u'_\alpha (-\bar{n}^{\alpha\beta}) |_{\beta} + 2 m^{\lambda\beta} |_{\beta} b_{\lambda}^\alpha + b_{\beta}^\alpha |_{\lambda} m^{\lambda\beta}]}_{=0} \\ &\quad + u'_3 (-b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta} |_{\alpha\beta} + b_{\alpha\lambda} b_{\beta}^\lambda m^{\alpha\beta}) dF \\ &+ \int_{C_p} \underbrace{[v_\rho n^{\rho\alpha} u'_\alpha]}_{=0} + \underbrace{[v_\rho q^\rho u'_3]}_{=0} + \underbrace{[v_\rho m^{\rho\mu} w'_\mu]}_{=0} ds \end{aligned}$$

$$+ \int_C [ \underbrace{n^{\alpha\alpha} u'_\alpha}_{=0} + \underbrace{q^n u'_3}_{=0} + \underbrace{m^{n\mu} w'_\mu}_{=0} ] ds = 0 \quad (2.3.8)$$

Mit den bisher aufgeführten Eigenschaften des Skalarproduktes (2.3.1) und der Orthogonalität (2.3.8) der Last- und Eigenspannungszustände ist es möglich, die Lösung über orthogonale Projektionen aus den Extremalprinzipien (1.3.8/9) zu bestimmen. Wie gezeigt wurde, ist dies gleichbedeutend mit der Minimierung der Fehlerenergie (1.3.35) bzw. der pauschalen Fehlerschranken (1.3.21/22). Zur Berechnung punktweiser Fehlerabschätzungen muß die Aussage des Satzes von BETTI gelten. Aufgrund der Kommutativität (2.3.2) des Skalarproduktes und der bereits beim Nachweis der Orthogonalität der Last- und Eigenspannungszustände benützten partiellen Integrationen zeigt sich diese sofort:

$$\begin{aligned} & \int_C [ u_\alpha^1 p^\alpha + u_3^2 p^3 ] dF + \int_C [ u_\alpha^2 n^{\alpha\alpha} + u_3^2 q + w_\alpha^2 m^{\alpha\alpha} ] ds \\ & - \int_F [ \alpha_{(\alpha\beta)}^1 \bar{n}^{2\alpha\beta} + \beta_{(\alpha\beta)}^1 m^{2\alpha\beta} ] dF \\ & = \int_F [ u_\alpha^2 p^\alpha + u_3^2 p^3 ] dF + \int_C [ u_\alpha^2 n^{\alpha\alpha} + u_3^2 q + w_\alpha^2 m^{\alpha\alpha} ] ds \\ & - \int_F [ \alpha_{(\alpha\beta)}^2 \bar{n}^{1\alpha\beta} + \beta_{(\alpha\beta)}^2 m^{1\alpha\beta} ] dF \quad . \quad (2.3.9) \end{aligned}$$

Die komplementären Funktionale (2.2.38) und (2.2.41) ergeben sich wie in der dreidimensionalen Theorie (Abschnitt 1.2.) aus einem erzeugenden Funktional, falls die dafür wesentlichen Operatoren adjungiert sind. Das gleiche gilt für Darstellungen in den dualen Größen [95].

Die linearen Operatoren  $T$  bzw.  $T^*$  bilden Verschiebungsfelder  $\underline{u}$  auf Verzerrungsfelder  $\underline{\varepsilon}$  bzw. Schnittgrößen  $\underline{g}$  auf Kraftfelder  $\underline{p}$  (siehe Tafel 5) ab:

$$T \underline{u} = \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{u} = \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}^Q \quad \text{in } F, \quad (2.3.10a)$$

$$T^* \underline{g} = - \underline{D}^T \cdot \underline{g} = \underline{p}^* \quad \text{in } F, \quad (2.3.10b)$$

Sie sind formal adjungiert, da gilt:

$$\begin{aligned}
 \{T\tilde{u}, \tilde{\sigma}\} &= \int_F \left[ \left( \frac{1}{2} u_{\alpha|\beta} + \frac{1}{2} u_{\beta|\alpha} - u_3 b_{\alpha\beta} \right) \bar{n}^{\alpha\beta} \right. \\
 &\quad \left. + (-u_3|_{\alpha\beta} - u_{\lambda} b_{\alpha}^{\lambda} |_{\beta} - u_{\lambda} |_{\alpha} b_{\beta}^{\lambda} - u_{\lambda} |_{\beta} b_{\alpha}^{\lambda} + u_3 b_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\lambda}) m^{\alpha\beta} \right] dF \\
 &= \int_F \left[ u_{\alpha} (-\bar{n}^{\alpha\beta} |_{\alpha} + 2m^{\lambda\beta} |_{\beta} b_{\lambda}^{\alpha} + b_{\beta}^{\alpha} |_{\lambda} m^{\lambda\beta}) \right. \\
 &\quad \left. + u_3 (-b_{\alpha\beta} \bar{n}^{\alpha\beta} - m^{\alpha\beta} |_{\alpha\beta} + b_{\alpha\lambda} b_{\beta}^{\lambda} m^{\alpha\beta}) \right] dF \\
 &\quad + \oint_C [n^{\alpha} u_{\alpha} + q^n u_3 + m^{\alpha} w_{\alpha}] ds \\
 &= \{\tilde{u}, T^* \tilde{\sigma}\} + \langle \tilde{u}^R, \tilde{\sigma}^R \rangle .
 \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Werden wie im Abschnitt 1.2. die Randwerte mit in die Definition der Operatoren aufgenommen, sind die so erweiterten Operatoren adjungiert.

Auf

$$\tilde{u} := \begin{cases} \begin{pmatrix} u_i \\ u_i^{R'} \\ u_i^{R''} \end{pmatrix} & \text{in } F \\ & \text{auf } C_p , \\ & \text{auf } C_u \end{cases} \tag{2.3.12}$$

$$\tilde{\sigma} := \begin{cases} \left. \begin{pmatrix} \bar{n}^{\alpha\beta} \\ m^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \right\} & \text{in } F \\ \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^{R'} \\ \tilde{\sigma}^{R''} \end{pmatrix} & \text{auf } C_p \\ & \text{auf } C_u \end{cases} \tag{2.3.13}$$

wirken die Operatoren  $\bar{T}$  bzw.  $\bar{T}^*$ :

$$\bar{T} \tilde{u} := \begin{cases} \begin{pmatrix} \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \tilde{u} \\ \tilde{u} \end{pmatrix} & \text{in } F \\ \begin{pmatrix} \tilde{\sigma} \\ \tilde{\sigma}^{R''} \end{pmatrix} & \text{auf } C_p , \\ \begin{pmatrix} -\underline{V} \cdot \tilde{u}^{R''} \end{pmatrix} & \text{auf } C_u \end{cases} \tag{2.3.14}$$

$$\bar{T}^* \underline{\underline{g}} := \begin{pmatrix} -\underline{D}^T \cdot \underline{\underline{g}} \\ \underline{V}^T \cdot \underline{\underline{g}}^R \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{in } F \\ \text{auf } C_0 \\ \text{auf } C_u \end{array} \quad (2.3.15)$$

Wenn das Skalarprodukt (2.3.1) um die Energie der Randspannungen  $\underline{\underline{g}}^R$

$$\{\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{g}}\} = \int_F \underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot \underline{\underline{g}} \, dF + \int_C \underline{\underline{\varepsilon}}^{RT} \cdot \underline{\underline{g}}^R \, ds \quad (2.3.16)$$

erweitert wird, und entsprechend (1.2.18) mit den Randkräften  $\underline{\underline{p}}^R = \underline{V}^T \cdot \underline{\underline{g}}^R$  durch

$$\{\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{p}}\} := \int_F \underline{\underline{u}}^T \cdot \underline{\underline{p}} \, dF + \int_C \underline{\underline{u}}^{RT} \cdot \underline{\underline{p}}^R \, ds \quad (2.3.17)$$

ein *Arbeitsraum*  $A$  eingeführt wird, ist die behauptete Adjungiertheit von  $\bar{T}$  und  $\bar{T}^*$  gegeben:

$$\begin{aligned} \{ \overset{1}{\underline{\underline{g}}}, \bar{T} \overset{2}{\underline{\underline{u}}} \} &= \int_F \overset{1}{\underline{\underline{g}}}^T \cdot (\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \overset{2}{\underline{\underline{u}}}) \, dF - \int_{C_u} (\overset{2}{\underline{\underline{g}}^R})^T \cdot \underline{V} \cdot \overset{2}{\underline{\underline{u}}^R} \, ds \\ &= \int_F \overset{2}{\underline{\underline{u}}}^T \cdot (-\underline{D}^T \cdot \overset{1}{\underline{\underline{g}}}) \, dF + \int_{C_p} (\overset{2}{\underline{\underline{u}}^R})^T \cdot (\underline{V}^T \cdot \overset{1}{\underline{\underline{g}}^R}) \, ds \\ &= \{ \bar{T}^* \overset{1}{\underline{\underline{g}}}, \overset{2}{\underline{\underline{u}}} \} \quad (2.3.18) \end{aligned}$$

Wie für die entsprechenden Operatoren der dreidimensionalen Theorie (Abschnitt 1.2.) ist es damit auch hier möglich [95], im kartesischen Produktraum  $A \times E$  eine selbstadjungierte Operatormatrix zu definieren, deren Abbildungen, formal wie (1.2.52), durch die GÄTEAUX-Ableitungen eines bilinearen Funktionals  $Q_p$  darstellbar sind. Auch zueinander komplementäre Funktionale sind dann, entsprechend (1.2.66) und (1.2.69/70) mit Nebenbedingungen wie (1.2.67) bzw. (1.2.71/72), aus einem erzeugenden Funktional  $J_p$  entsprechend (1.2.56) definierbar. Wie gezeigt werden kann (siehe Anhang A4), ist  $J_p(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{u}}, \underline{\underline{g}})$  konkav in  $\underline{\underline{g}}$  und konvex in  $\underline{\underline{u}}$  und  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ , wenn das Schalenpotential  $W^0(\underline{\underline{\varepsilon}})$  konvex ist. Damit hat  $J_p(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{u}}, \underline{\underline{g}})$  die Sattlereigenschaft [61], und es folgen die bereits in (2.2.38) bzw. (2.2.41) angegebenen komplementären Extremalprinzipie:

a) das streng konvexe Funktional

$$I_p(\underline{u}, \underline{\varepsilon}) = J_p(\underline{\varepsilon}, \underline{u}, \underline{\sigma}) - \left\{ \underline{\sigma}, \frac{\partial J_p}{\partial \underline{\sigma}} \right\} \quad (2.3.19)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\left\{ \delta \underline{\sigma}, \frac{\partial J_p}{\partial \underline{\sigma}} \right\} = 0 = \begin{cases} T \underline{u} - (\underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}^{Q*}) & \text{in } F \\ \underline{u}^R - \underline{u}^{R*} & \text{auf } C_u \end{cases} \quad (2.3.20)$$

b) das streng konkave Funktional

$$\begin{aligned} I_{pc}(\underline{\sigma}) &= J_p(\underline{\varepsilon}, \underline{u}, \underline{\sigma}) - \left\{ \underline{u}, \frac{\partial J_p}{\partial \underline{u}} \right\} - \left\{ \underline{\varepsilon}, \frac{\partial J_p}{\partial \underline{\varepsilon}} \right\} \\ &= \int_F [\rho W^O(\underline{\varepsilon}) - \underline{\varepsilon}^T \cdot \rho \frac{\partial W^O(\underline{\varepsilon})}{\partial \underline{\varepsilon}} - \underline{\sigma}^T \cdot \underline{\varepsilon}^Q] dF - \int_{C_u} \underline{\sigma}^{RT} \cdot \underline{v} \cdot \underline{u}^{R*} ds, \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

nach der LEGENDRE-Transformation und der Erfüllung der Forderung

$$\left\{ \delta \underline{\varepsilon}, \frac{\partial J_p}{\partial \underline{\varepsilon}} \right\} = 0 = -\underline{\sigma} + \rho \frac{\partial W^O(\underline{\varepsilon})}{\partial \underline{\varepsilon}} \quad (2.3.22)$$

das bereits angegebene Funktional (2.2.41) mit den Nebenbedingungen

$$\left\{ \delta \underline{u}, \frac{\partial J_p}{\partial \underline{u}} \right\} = 0 = \begin{cases} T^* \underline{\sigma} - \underline{p}^* & \text{in } F \\ \underline{v}^T \cdot (\underline{\sigma}^R - \underline{\sigma}^{R*}) & \text{auf } C_p \end{cases} \quad (2.3.23)$$

Zwischen den zu  $\underline{p}$  bzw.  $\underline{u}$  dualen Größen  $\underline{\eta}$  bzw.  $\underline{\psi}$  und den zu  $\underline{\sigma}$  bzw.  $\underline{\varepsilon}$  dualen Größen, den modifizierten Verzerrungsmaßen  $\underline{\xi}$  bzw. Schnittgrößen  $\underline{\Sigma}$  werden durch die gleichen Operatoren  $T^*$  bzw.  $T$  Abbildungen definiert:

$$T \underline{\psi} = \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\psi} = \underline{\Sigma} + \underline{\Sigma}^K \quad \text{in } F, \quad (2.3.24)$$

$$T^* \underline{\xi} = -\underline{D}^T \cdot \underline{\xi} = \underline{\eta} \quad \text{in } F. \quad (2.3.25)$$

Damit gelten auch formal die gleichen Eigenschaften. Ähnlich (2.3.14) bzw. (2.3.15) sind nach den Erweiterungen der Definitionsbereiche um die Randwerte, entsprechend (2.2.40) um

$$\underline{\psi}^{RT} := (\psi_1; \psi_2; \psi_3; -\psi_{3,1} - \psi_{\lambda} b_1^\lambda; -\psi_{3,2} - \psi_{\lambda} b_2^\lambda), \quad (2.3.26a)$$

$$\underline{\xi}^{RT} := (\bar{B}^{11}; \bar{B}^{22}; \bar{B}^{12}; A^{11}; A^{22}; A^{12}; A^{\lambda 1}|_{\lambda}; A^{\lambda 2}|_{\lambda}), \quad (2.3.26b)$$

diese Operatoren adjungiert:

$$\bar{T}\psi := \begin{cases} \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \psi & \text{in } F \\ -\underline{V} \cdot \psi^{R_1} & \text{auf } C_p \\ 0 & \text{auf } C_u \end{cases} \quad (2.3.27)$$

$$\bar{T}^*E := \begin{cases} -D^T \cdot E & \text{in } F \\ 0 & \text{auf } C_p \\ \underline{V}^T \cdot E^{R_2} & \text{auf } C_u \end{cases} \quad (2.3.28)$$

Es gilt also wie (2.3.18) auch bei den dualen Größen

$$\{\bar{E}^1, \bar{T}\psi^2\} = \{\bar{T}^*E^1, \psi^2\} \quad (2.3.29)$$

Damit ist das duale erzeugende Funktional  $J_d(\underline{\Sigma}, \underline{\psi}, \underline{E}) = Q_d(\underline{\psi}, \underline{E}) - H_d(\underline{\Sigma}, \underline{\psi}, \underline{E})$  definierbar:

$$Q_d(\underline{\psi}, \underline{E}) = \{\bar{T}\underline{\psi}, \underline{E}\} = \{\underline{\psi}, \bar{T}^*\underline{E}\} \quad (2.3.30)$$

$$H_d(\underline{\Sigma}, \underline{\psi}, \underline{E}) = \int_F [(\underline{\Sigma} + \underline{\Sigma}^k)^T \cdot \underline{E} - \rho \bar{W}_c^0(\underline{\Sigma}) + \underline{\psi}^T \cdot \underline{n}^*] dF \\ - \int_{C_p} \underline{E}^{RT} \cdot \underline{V} \cdot \underline{\psi}^{R*} ds + \int_{C_u} \underline{\psi}^{RT} \cdot \underline{V}^T \cdot \underline{E}^{R*} ds \quad (2.3.31)$$

Dabei sind die Potentiale  $\bar{W}_c^0$  bzw.  $\bar{W}^0$  in den modifizierten Größen  $\underline{\Sigma}$  bzw.  $\underline{E}$  den üblicheren Darstellungen  $W_c^0$  bzw.  $W^0$  gleichwertig, und es gilt die LEGENDRE-Transformation:

$$\rho W_c^0(\underline{\Sigma}) = \frac{1}{2} \underline{\Sigma}^T \cdot (\underline{B} \cdot \underline{K} \cdot \underline{B}^T) \cdot \underline{\Sigma} = \frac{1}{2} \underline{g}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{g} = \rho W_c(\underline{g}) \\ = \underline{\Sigma}^T \cdot \underline{E} - \rho \bar{W}^0(\underline{E}) \\ = ((\underline{B}^T)^{-1} \cdot \underline{g})^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{E} - \frac{1}{2} \underline{E}^T \cdot (\underline{B} \cdot \underline{K} \cdot \underline{B}^T)^{-1} \cdot \underline{E} \\ = \underline{g}^T \cdot \underline{\varepsilon} - \rho W^0(\underline{\varepsilon}) \quad (2.2.32)$$

Aus diesem dualen erzeugenden Funktional  $J_d(\underline{\Sigma}, \underline{\psi}, \underline{E})$  ergeben sich, da  $J_d$  konvex in  $\underline{\psi}$  und  $\underline{\Sigma}$  und konkav in  $\underline{E}$  ist, wenn  $\bar{W}_c(\underline{\Sigma}) = W_c(\underline{\sigma})$  positiv definit ist, die dualen komplementären Funktionale mit Extremaleigenschaft. Ein Beweis ist aufgrund der Analogie überflüssig.

Das Funktional

$$\begin{aligned} I_d(\underline{\Sigma}, \underline{\psi}) &= J_d(\underline{\Sigma}, \underline{\psi}, \underline{E}) - \left\{ \underline{E}, \frac{\partial J_d}{\partial \underline{E}} \right\} \\ &= \int_F [\rho \bar{W}_c(\underline{\Sigma}) - \underline{\psi}^T \cdot \underline{\eta}^*] dF - \int_C \underline{\psi}^{RT} \cdot \underline{v}^T \cdot \underline{E}^{R*} ds \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\left\{ \delta \underline{E}, \frac{\partial J_d}{\partial \underline{E}} \right\} = 0 = \begin{cases} \underline{\psi}^T - \underline{\Sigma} - \underline{\Sigma}^k & \text{in } F \\ \underline{v} \cdot (\underline{\psi}^R - \underline{\psi}^{R*}) & \text{auf } C_p \end{cases} \quad (2.3.34)$$

ist also streng konvex. Komplementär dazu ist

$$\begin{aligned} I_{dc}(\underline{E}) &= J_d(\underline{\Sigma}, \underline{\psi}, \underline{E}) - \left\{ \underline{\Sigma}, \frac{\partial J_d}{\partial \underline{\Sigma}} \right\} - \left\{ \underline{\psi}, \frac{\partial J_d}{\partial \underline{\psi}} \right\} \\ &= - \int_F [\rho \bar{W}(\underline{E}) + \underline{E}^T \cdot \underline{\Sigma}^{k*}] dF + \int_{C_p} \underline{E}^{RT} \cdot \underline{v} \cdot \underline{\psi}^{R*} ds \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

mit den Nebenbedingungen

$$\left\{ \delta \underline{\psi}, \frac{\partial J_d}{\partial \underline{\psi}} \right\} = 0 = \begin{cases} \underline{\Sigma}^{k*} - \underline{\eta}^* & \text{in } F \\ \underline{v}^T \cdot (\underline{E}^R - \underline{E}^{R*}) & \text{auf } C_u \end{cases} \quad (2.3.36)$$

streng konkav.

Damit gelten wie in der dreidimensionalen Theorie mit (1.2.79) und (1.2.80) zwei gleichwertige Darstellungen der pauschalen Engrenzung des exakten Funktionalwerts:

$$I_{pc}(\underline{\sigma}^{\sim}) \leq I_{pc} = I_{p \text{ exact}} \leq I_p(\underline{u}^{\sim}, \underline{\varepsilon}^{\sim}), \quad (2.3.37)$$

$$I_{dc}(\underline{E}^{\sim}) \leq I_{dc} = I_{d \text{ exact}} \leq I_d(\underline{\Sigma}^{\sim}, \underline{\psi}^{\sim}). \quad (2.3.38)$$

Abgesehen von der Formulierung in anderen Zustandsgrößen gibt dies keine neue Möglichkeit, Fehlerschranken zu berechnen, da (1.2.81/82) entsprechend auch hier gilt.

### 3. VERSCHIEDENE FEHLERURSACHEN UND MÖGLICHKEITEN IHRER EINGRENZUNG

Die Fehler, die bei numerischen Berechnungen der meisten Randwertprobleme gegenüber der realen exakten Lösung unvermeidbar sind, lassen sich in drei Gruppen zusammenfassen [98]:

- a) Fehler durch die Annahme einer vereinfachten Modelltheorie
- b) Fehler durch diskretisierende Lösungsmethoden
- c) Fehler durch numerische Berechnung von Integralen, der Matrizeninversion usw..

Jede dieser Fehlerursachen kann bereits allein dafür sorgen, daß unter Umständen trotz augenscheinlicher Konvergenz der jeweiligen numerischen Werte die berechnete Näherungslösung kaum etwas oder auch nichts mehr mit der exakten Lösung des ursprünglichen i. a. dreidimensionalen Problems zu tun hat.

Wie vielfältig und nur für Spezialfälle vollständig widerspruchsfrei [50] insbesondere die Herleitung einer flächenhaften Schalentheorie ist, zeigte die in Abschnitt 2.1.1. angedeutete Deduktion. Dies ist auch an der Unzahl verschiedener Theorien abzulesen, die in der Literatur zu finden sind. Die Fehler, die durch die Verwendung solcher zweidimensionaler Grundgleichungen verursacht werden, können im allgemeinen nur in ihrer Größenordnung abgeschätzt werden, da auch die Lösung in einem dreidimensionalen Kontinuum nur mit Hilfe finiter Verfahren erfolgen kann [99] und damit im Ergebnis der Fehleranteil aufgrund der finiten Betrachtungsweise nicht von dem durch die verschiedenen Formulierungen der Grundgleichungen zu trennen ist. Trotzdem ist es wichtig, Aussagen über die bereits von der Theorie bedingten Abweichungen von der "exakten" dreidimensionalen Lösung vorliegen zu haben, da es jedenfalls nicht sinnvoll sein kann, finite Lösungen bis zu unnötig hoher Genauigkeit zu verbessern.

Der Fehler, der durch die Verwendung finiter Lösungsmethoden verursacht wird, der Diskretisierungsfehler, ist theoretisch am eingehendsten erforscht. Jedoch begnügen sich die meisten Untersuchungen damit, theoretische Konvergenzbeweise zu führen oder die unter den jeweiligen Bedingungen mögliche Konvergenzordnung eines Verfahrens anzugeben. Solche Arbeiten [100-104 u.a.] sind notwendig, um eine korrekte und optimale Wahl unter den zur Verfügung stehenden Methoden treffen zu können, und um außerdem sicher zu sein, daß

numerisch feststellbar konvergierende Werte auch gegen den theoretisch richtigen Wert gehen. So ist es wichtig, den Einfluß einer durch das finite Verfahren bedingten Änderung des Gebietes zu untersuchen [105], da der Fall eintreten kann, daß die numerische Lösung allein dadurch, daß ein ursprünglich krummlinig berandetes Gebiet durch Polygonzüge approximiert wird, gegen einen falschen Wert konvergiert [106-111]. Für numerische Berechnungen genauso wichtig wie die Beachtung der theoretischen Voraussetzungen ist aber eine echte zahlenmäßige Kontrolle dieser Konvergenz und, wenigstens für besonders wichtige Größen und Punkte, die Ermittlung von beidseitigen Schranken. Brauchbare Abschätzungen und insbesondere günstige Lösungsmethoden, die diese Kontrolle und Schrankenberechnung ermöglichen, wurden in den Abschnitten 1.3. und 1.4. ganz allgemein für die Gleichungen der dreidimensionalen linearen Elastizitätstheorie erläutert. Für die betrachtete lineare Schalentheorie sollen hier diese Fehlerabschätzungen unter Verwendung der bereits hergeleiteten komplementären Extremalprinzipie (Abschnitt 2.3.) angegeben werden.

Untersuchungen über den Einfluß bzw. die Auswirkungen der Rundungsfehler, die bei jeder numerischen Auswertung durch die begrenzten Möglichkeiten der Zahlendarstellung unvermeidbar auftreten, sind ebenso wichtig wie umfangreich. Da jedoch die explizite numerische Bestimmung solcher Fehler im allgemeinen trotz erheblichen Aufwands nur sehr grobe Schranken liefert, die dann nicht mehr aussagekräftig sind, sollen hier im wesentlichen Kriterien angegeben werden, die beachtet werden sollten, um Stabilität und Konsistenz bei der Diskretisierung eines Variationsproblems möglichst optimal zu gewährleisten [112-115]. Besonders betrachtet wird das Problem der notwendigen numerischen Integrationen [116].

### 3.1. Zur Fehlerordnung der flächenhaften Schalenbiegetheorie

Da neben der Beachtung gewisser wesentlicher Kriterien [117], wie der Invarianz unter Koordinatentransformationen sowie gegen unbeschleunigte Starrkörpertranslationen und -rotationen usw., vor allem die gleichmäßige Approximation aller Grundgleichungen und Grundprinzipie der Kontinuumsmechanik Grundlage der in dieser Arbeit benützten linearen Schalentheorie ist (siehe Abschnitt 2.1. und 2.2.), kann erwartet werden, daß für dünne Flächentragwerke die theoretische, exakte Lösung der Schalengleichungen die Grundgleichungen der dreidimensionalen Theorie mit geringem Defekt erfüllt. Dies wird jedoch hier nicht untersucht [118]. Hier soll die Ab-

weichung der (unbekannten) exakten Lösung der Gleichungen der flächenhaften Schalenbiegetheorie von der Lösung der "exakten" drei-dimensionalen Theorie untersucht und pauschal abgeschätzt werden [119-123]. Entsprechende Abschätzungen sind für die klassische Plattentheorie [124-125] sowie für eine Theorie mit nichtlinearen konstitutiven Beziehungen [126] bekannt.

Aus den Eigenschaften der Schalengrundgleichungen, insbesondere der Erfüllung des Satzes von BETTI und der Konsistenz der geometrischen und statischen Beziehungen, ist erkennbar, daß Unschärfen dieser Theorie im wesentlichen auf Ungenauigkeiten bzw. Unklarheiten bei der Formulierung des elastischen Potentials beruhen. Der Einfluß dieser Fehler in den daraus resultierenden Beziehungen zwischen den Schnittgrößen und den Verzerrungen, insbesondere auf eine durch ein Verschiebungsfeld dargestellte Lösung, wird ebenfalls untersucht [122,123].

Als Voraussetzungen der Untersuchungen sind folgende a priori-Abschätzungen wesentlich [127-129,92]:

- a) Es gilt bei konstanter Dicke  $t$  für den Hauptkrümmungsradius  $R_0$  die Dünne-Hypothese  $\frac{t}{R_0} \ll 1$ .
- b) Die Krümmungsänderungen sind so begrenzt, daß neben  $b_{\alpha\beta} = O(R_0^{-1})$  auch  $b_{\alpha\beta|\lambda} = O(R_0^{-2})$ ,  $b_{\alpha\beta|\lambda\rho} = O(R_0^{-3})$ , ... gilt.
- c) Die Mittelfläche unterliegt nur Verformungen, so daß mit deren kleinster charakterischer Länge  $L_w$  die Bedingung  $(\frac{t}{L_w})^2 \ll 1$  erfüllt ist; damit ist vor allem der Zusammenhang zwischen Ableitung und Funktionswert einer Variablen  $f$  abgeschätzt:  $O(f|_{\alpha}) = O(f)/L_w$ .
- d) Alle Verformungskomponenten sind in der ganzen Schale so klein, daß auch für den Betrag der großen Hauptdehnung des GREEN'schen Verzerrungstensors  $\epsilon_{ij}$  (2.2.6) die obere Schanke  $\eta \ll 1$  gilt.
- e) Der Abstand  $d$  vom Schalenrand  $C$  ist hinreichend groß, so daß die Bedingung  $(\frac{t}{d})^2 \ll 1$  erfüllt ist.

Der dimensionslose Parameter [127]

$$\Theta = \max \left( \frac{t}{L_w}, \frac{t}{d}, \sqrt{\frac{t}{R_0}}, \sqrt{\eta} \right) \quad (3.1.1)$$

ist damit eine nicht vernachlässigbare, aber kleine Größe, die als Fehlermaß im weiteren benützt wird. Mit diesen Annahmen folgen für die Spannungen bzw. Schnittgrößen und Verzerrungen eines Schalentragwerks die Abschätzungen [129,92]:

$$\tau^{\alpha\beta} = O(E\eta), \quad \tau^{\alpha 3} = O(E\eta\theta), \quad \tau^{33} = O(E\eta\theta^2), \quad (3.1.2a)$$

$$\bar{n}^{\alpha\beta} = O(Et\eta), \quad m^{\alpha\beta} = O(Et^2\eta), \quad (3.1.2b)$$

$$\alpha_{(\alpha\beta)} = O(\eta), \quad \beta_{(\alpha\beta)} = O\left(\frac{\eta}{t}\right). \quad (3.1.2c)$$

Der Schlüssel zu der hier vor allem gesuchten Abschätzung des Unterschieds zwischen der exakten Lösung der dreidimensionalen Theorie und der der flächenhaften Schalenbiegetheorie sind die Ungleichungen (1.3.21), anschaulich interpretierbar durch einen Hyperkreis [12-14] (siehe Bild 1)

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{E}{1+\nu} [(\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^{\sim}) (\epsilon^{ij} - \epsilon^{ij\sim}) + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_i^i - \epsilon_i^{i\sim}) (\epsilon_j^j - \epsilon_j^{j\sim})] dV \\ & \leq \int_V \frac{1}{E} [(1+\nu) (\tau^{ij\sim} - \tau^{ij}) (\tau_{ij}^{\sim} - \tau_{ij}) - \nu (\tau_i^i - \tau_i^{i\sim}) (\tau_j^j - \tau_j^{j\sim})] dV \\ & = 2[I_p(\underline{\epsilon}^{\sim}) - I_{pc}(\underline{\tau}^{\sim})] \quad , \quad (3.1.3) \end{aligned}$$

und die Idee [113,120], aus der exakten Lösung der Schalenrundgleichungen erstens eine geometrisch zulässige und zweitens eine statisch zulässige Näherungslösung der Gleichungen des Kontinuums zu konstruieren. Dabei werden *reguläre* Randbedingungen [119,120], d. h. solche Bedingungen in den Randflächen  $F_u$  bzw.  $F_p$  angenommen, daß mit der Erweiterung der exakten Schalenlösung auf räumliche Näherungen gleichzeitig diese jeweils wesentlichen Randbedingungen erfüllt sind.

Eine statisch zulässige Näherung  $\underline{\tau}^{\sim}$  mit einem Abbruchfehler  $O(E\eta\theta^2)$

$$\begin{aligned} \tau^{\alpha\beta} &= \tau^{\alpha\beta} + \theta \tau^{\alpha\beta} + O(E\eta\theta^2) = O(E\eta) + O(E\eta\theta^2) \quad , \\ \tau^{\alpha 3} &= \tau^{\alpha 3} + \theta \tau^{\alpha 3} + \theta^2 \tau^{\alpha 3} = O(E\eta\theta) + O(E\eta\theta^2) \quad , \\ \tau^{33} &= O(E\eta\theta^2) \quad (3.1.4) \end{aligned}$$

zu konstruieren, bedeutet also, die Erfüllung der auf die Basis der Schalenmittelfläche transformierten Gleichgewichtsbedingungen des Kontinuums [130] ( $z^3 = t\theta$ )

$$[(\delta_{\kappa}^{\alpha} - z^3 b_{\kappa}^{\alpha}) \mu \tau^{\kappa 3}]_{,3} - b_{\kappa}^{\alpha} \mu \tau^{\kappa 3} + [(\delta_{\kappa}^{\alpha} - z^3 b_{\kappa}^{\alpha}) \mu \tau^{\kappa \beta}]|_{\beta} = 0, \quad (3.1.5a)$$

$$[\partial \tau^{3\beta}]|_{\beta} + [\mu \tau^{33}]_{,3} + (\delta_{\kappa}^{\alpha} - z^3 b_{\kappa}^{\alpha}) b_{\alpha\beta} \mu \tau^{\kappa \beta} = 0, \quad (3.1.5b)$$

zu erreichen. Die Beiträge der Volumenkräfte sind dabei den vorgegebenen Belastungen an den Schalenlaibungen zugeschlagen. Bei einer Abhängigkeit von  $\Theta$  entsprechend (3.1.4) gibt folgende Kombination der diesen Lasten das Gleichgewicht haltenden Schnittgrößen der Schale eine statisch zulässige Näherung [120]

$$\mu \tau^{\alpha\beta\kappa} = \frac{1}{t} \bar{n}^{\alpha\beta} + \frac{12}{t^2} \Theta m^{\alpha\beta} + O(E\eta\Theta^2), \quad (3.1.6a)$$

$$\mu \tau^{\alpha 3\alpha} = -\Theta \bar{n}^{\alpha\beta}|_{\beta} + \frac{3}{2t} (1 - 4\Theta^2) m^{\alpha\beta}|_{\beta} + O(E\eta\Theta^2), \quad (3.1.6b)$$

die die Gleichgewichtsbedingungen (3.1.5) mit der geforderten Fehlerordnung erfüllen.

Eine geometrisch zulässige Näherung  $\underline{\epsilon}^{\sim}$  mit einem entsprechenden Abbruchfehler  $O(\eta\Theta^2)$ , die weder die Normalenhypothese verletzt, die die Darstellbarkeit des GREEN'schen Verzerrungstensors  $\underline{\epsilon}$  durch die beiden Verzerrungsmaße  $\underline{\alpha}$  und  $\underline{\beta}$  garantiert [92], noch wesentliche Querspannungen erzeugt, kann aus einem modifizierten KIRCHHOFF'schen Verschiebungsfeld [119] ermittelt werden. Es stimmt für  $z^3 = z = 0$  mit den Verschiebungen  $u_i = u_i(z^0)$  der Schalenmittelfläche überein, läßt aber Abstandsänderungen  $\zeta(z^0, z)$  zur Mittelfläche und damit auch Dehnungen in Normalenrichtung unter der Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial z^3} \zeta(z^0, z) = : \epsilon_{33}(z^0, z) \stackrel{!}{=} - \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{\lambda}^{\lambda}(z^0, z) \quad (3.1.7a)$$

zu. Aus der Differenz der Quadrate eines unverformten und eines verformten Linienelements des Schalenkontinuums folgt dann

$$\epsilon_{\alpha 3}(z^0, z) = \frac{1}{2} \zeta_{, \alpha}(z^0, z), \quad (3.1.7b)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta}(z^0, z) = \alpha_{(\alpha\beta)}(z^0) + z \beta_{(\alpha\beta)}(z^0) + O(\eta\Theta^2). \quad (3.1.7c)$$

Die Gleichung (3.1.7a) ist mit (3.1.7c) eine Differentialgleichung für  $\zeta$ , die mit einem relativen Fehler  $O(t/R_0) = O(\Theta^2)$  die Lösung

$$\zeta(z^0, z) = - \frac{\nu}{1-\nu} [z \alpha_{\lambda}^{\lambda}(z^0) + \frac{1}{2} z^2 \beta_{(\lambda \cdot)}^{\lambda}(z^0)] (1 + O(\Theta^2)) \quad (3.1.8)$$

hat. Aus (3.1.7a/b) ergibt dies, mit dem gleichen Abbruchfehler wie  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , die explizite Abhängigkeit der Verzerrungskomponenten  $\epsilon_{\alpha 3}$  und  $\epsilon_{33}$  von den Verzerrungsmaßen der Schale bzw. von  $z$ . Geometrisch zulässig sind diese Feldgrößen, homogene Verträglichkeitsbedingungen vorausgesetzt, wenn sie sich über die auf die Metrik der Schalenfläche transformierten Verformungs-Verschiebungsbeziehungen (1.1.8)

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta}^V + u_{\beta|\alpha}^V - 2b_{\alpha\beta} u_3^V) + 2z(b_{\alpha}^{\rho} b_{\rho\beta} u_3^V + b_{\alpha|\beta}^{\lambda} u_{\lambda}^V) + O\left(\frac{u}{R_0^3}\right) z^2, \\ \epsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} (u_{\alpha,3}^V + u_{3,\alpha}^V) + b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda}^V + z b_{\alpha}^{\lambda} b_{\lambda\rho} u_{\rho}^V + O\left(\frac{u}{R_0^3}\right) z^2, \\ \epsilon_{33} &= u_{3,3}^V, \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

aus einem Verschiebungsfeld berechnen lassen. Dies gelingt für  $\epsilon_{ij}$  in der Form (3.1.7) mit

$$\begin{aligned} u_{\alpha}^V(z^{\rho}, z) &= u_{\alpha}(z^{\rho}) - z[u_{3,\alpha}(z^{\rho}) + 2b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda}(z^{\rho})], \\ u_3^V(z^{\rho}, z) &= u_3(z^{\rho}) - \zeta(z^{\rho}, z), \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

so daß diese Verzerrungsmaße also geometrisch zulässig sind.

Zur Auswertung der Abschätzung (3.1.3) ist über die konstitutiven Beziehungen des Kontinuums aus  $\tilde{\epsilon}_{ij}^{\sim}$  (3.1.7)

$$\begin{aligned} \mu\tau^{\alpha\beta\sim} &= : \frac{E}{1+\nu} a^{\alpha\rho} a^{\beta\lambda} [(\alpha_{(\rho\lambda)} + z\beta_{(\rho\lambda)}) + \frac{\nu}{1-\nu} a_{\rho\lambda} (\alpha_{\gamma}^{\gamma} + z\beta_{(\gamma\cdot)}^{\gamma})] + O(E\eta\Theta^2), \\ \mu\tau^{\alpha 3\sim} &= - \frac{E\nu}{2(1-\nu^2)} z a^{\alpha\rho} [\alpha_{\lambda,\rho}^{\lambda} + \frac{z}{2} \beta_{(\lambda\cdot),\rho}^{\lambda}] + O(E\eta\Theta^2), \\ \mu\tau^{33\sim} &= O(E\eta\Theta^2) \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

zu berechnen, und unter Verwendung von (2.2.14/15) die statische Näherung (3.1.6) ebenfalls in den Verzerrungsgrößen der Schale zu schreiben. Die Differenz der geometrisch und der statisch zulässigen Näherungen der Spannungen parallel zur Mittelfläche und auch der Normalspannung in  $z$ -Richtung ist von der Größenordnung  $O(E\eta\Theta^2)$ , wie sich dann leicht abschätzen läßt. Um dies auch für die Schubspannungen  $\tau^{\alpha 3}$  zu erreichen, ist ein geringfügig verändertes Verschiebungsfeld  $u_{\alpha}^V$  zur Bestimmung der geometrisch zulässigen Spannungen zu verwenden [120]:

$$u_{\alpha}^v = u_{\alpha} - z[u_{3,\alpha} + 2b_{\alpha}^{\lambda} u_{\lambda}] + z \frac{3(1+\nu)}{Et} m_{\alpha}^{\beta} |_{\beta} - \frac{z^2}{2Et} [2(1+\nu) (\bar{n}_{\alpha}^{\beta} + \frac{4z}{t^2} m_{\alpha}^{\beta}) |_{\beta} - \nu (\bar{n}_{\beta}^{\alpha} + \frac{4z}{t^2} m_{\beta}^{\alpha}) |_{\alpha}] . \quad (3.1.12)$$

Diese Änderung beeinflusst die anderen Komponenten nur durch Terme der Größenordnung  $O(E\eta\Theta^2)$ , bewirkt aber, daß auch  $\mu(\tau^{\alpha 3\sim} - \tau^{\alpha 3\approx})$  von dieser Ordnung klein wird.

Damit ist die Abschätzung (3.1.3) der Größenordnung nach realisierbar. Die doppelte elastische Energie, das Quadrat der Energienorm der Abweichung einer dieser räumlichen Näherungen, die für  $z = 0$  in die exakte Lösung der Schalengleichungen übergehen, von der exakten Lösung der dreidimensionalen Theorie ist also

$$\| \tau - \frac{\tau}{w} \|_w^2 \leq \frac{1}{E} \int_V O(E\eta\Theta^2) O(E\eta\Theta^2) dV \leq O(EtF\eta^2\Theta^4) . \quad (3.1.13)$$

Demgegenüber ist mit den a-priori Abschätzungen (3.1.2) die doppelte elastische Energie der verformten Schale von der Größenordnung

$$\| \underline{\varepsilon} \|_w^2 = Et \int_F [(O(\eta))^2 + \frac{t^2}{12} (O(\frac{\eta}{t}))^2] dF = O(EtF\eta^2) . \quad (3.1.14)$$

Ein Vergleich von (3.1.13) und (3.1.14) zeigt somit, daß der relative Fehler, der dieser linearen Schalentheorie (Abschnitt 2.2) anhaftet, bezogen auf die Energie der Schalenlösung höchstens  $O(\Theta^4)$ , in der Energienorm (2.3.5) also höchstens  $O(\Theta^2)$  ist. Ist eine angenäherte Lösung der Schalengleichungen bekannt, kann diese qualitative Fehlerabschätzung gegebenenfalls auch quantitativ präzisiert werden [119]; auf jeden Fall ist jedoch eine numerische Approximation mit höherer relativer Genauigkeit kaum sinnvoll.

Wie anfangs erwähnt wurde, werden Unschärfen der Theorie von verschiedenen Formulierungen des elastischen Potentials  $W$  verursacht. Eine Untersuchung der beiden häufigsten verschiedenen Darstellungen, der eines flächenhaften Verformungszustands mit (2.2.11a)

$$W_1 = \frac{Et}{2(1+\nu)} (a^{\alpha\rho} a^{\beta\lambda} + \frac{\nu}{1-2\nu} a^{\alpha\lambda} a^{\beta\rho}) (\alpha_{(\alpha\beta)} \alpha_{(\rho\lambda)} + \frac{\lambda^2}{12} \beta_{(\alpha\beta)} \beta_{(\rho\lambda)}) \quad (3.1.15a)$$

sowie eines flächenhaften Spannungszustandes mit (2.2.11b)

$$W_2 = \frac{Et}{2(1+\nu)} (a^{\alpha\rho} a^{\beta\lambda} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\rho\lambda}) (\alpha_{(\alpha\beta)} \alpha_{(\rho\lambda)} + \frac{\lambda^2}{12} \beta_{(\alpha\beta)} \beta_{(\rho\lambda)}) \quad (3.1.15b)$$

ergibt [129] hinsichtlich der Größenordnung der jeweiligen Abbruchfehler  $O(Et\eta^2\nu^2)$  oder genauer  $O(Et\eta^2 \frac{\nu^2}{1-2\nu})$  sowie  $O(Et\eta^2\Theta^2)$ . Hiermit ist, da die Querdehnungszahl  $\nu$  i. a. den Parameter  $\Theta$  bei weitem übersteigt, eine klare Aussage für die Bevorzugung von (3.1.15b) gegeben.

Die Auswirkung der Benützung dieser verschiedenen Potentialdarstellungen auf die Lösung selbst kann bei Kenntnis einer Maßzahl  $\kappa < 1$

$$\left| \int_F (W_1(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) - W_2(\underline{\alpha}, \underline{\beta})) dF \right| \leq \kappa \int_F W_2(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) dF \quad (3.1.16)$$

abgeschätzt werden [131]. Für (3.1.15) fordert dies

$$\begin{aligned} & \frac{Et}{2(1-\nu^2)(1-2\nu)} \int_F a^{\alpha\beta} a^{\rho\lambda} [\alpha_{(\alpha\beta)} \alpha_{(\rho\lambda)} + \frac{t^2}{12} \beta_{(\alpha\beta)} \beta_{(\rho\lambda)}] dF \\ & \leq \kappa \frac{Et}{2(1+\nu)} \int_F (a^{\alpha\rho} a^{\beta\lambda} + \frac{\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\rho\lambda}) [\alpha_{(\alpha\beta)} \alpha_{(\rho\lambda)} + \frac{t^2}{12} \beta_{(\alpha\beta)} \beta_{(\rho\lambda)}] dF \\ & = \kappa \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_F (a^{\alpha\beta} a^{\rho\lambda} [\alpha_{(\alpha\beta)} \alpha_{(\rho\lambda)} + \frac{t^2}{12} \beta_{(\alpha\beta)} \beta_{(\rho\lambda)}] \\ & \quad - 2(1-\nu)a[\det(\alpha_{(\alpha\beta)}) + \frac{t^2}{12} \det(\beta_{(\alpha\beta)})] dF, \quad (3.1.17a) \end{aligned}$$

abgekürzt geschrieben

$$\frac{\nu^2}{1-2\nu} V_1(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \leq \kappa (V_1(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) - 2(1-\nu)V_2(\underline{\alpha}, \underline{\beta})). \quad (3.1.17b)$$

Wegen der positiven Definitheit beider Seiten der Ungleichung ergibt sich

$$\kappa \geq \frac{\nu^2}{1-2\nu} \frac{V_1(\underline{\alpha}, \underline{\beta})}{V_1(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) - 2(1-\nu)V_2(\underline{\alpha}, \underline{\beta})} > 0. \quad (3.1.18)$$

Nur für negativ definites  $V_2(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ , d. h. für Verformungszustände, die in  $F$  die Bedingungen

$$\det(\alpha_{(\alpha\beta)}) = \alpha_{(11)}\alpha_{(22)} - \alpha_{(12)}^2 \leq 0; \det(\beta_{(\alpha\beta)}) \leq 0 \quad (3.1.19)$$

erfüllen, ist ohne explizite Berechnung der Funktionalwerte  $V_1(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$  und  $V_2(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$  die Maßzahl  $\kappa$  zu

$$\kappa = \frac{\nu^2}{1-2\nu} \quad (3.1.20)$$

angebar. Dieser Wert ist wegen  $0 < \kappa < 1$  nur für  $\nu < \sqrt{2} - 1 \approx 0,415$  brauchbar und natürlich nicht optimal.

Für die Differenz der Lösungen  $\underline{u}^{(1)}$  und  $\underline{u}^{(2)}$  der extremalen Funktionale mit (3.1.15a) bzw. (3.1.15b) sind aus (3.1.16) mit Hilfe der SCHWARZ'schen Ungleichung pauschale Energieabschätzungen [131]

$$\int_F W_2(\underline{u}^{(2)} - \underline{u}^{(1)}) dF \leq 9\kappa^2 \int_F W_2(\underline{u}^{(1)}) dF, \quad (3.1.21a)$$

$$\leq \frac{9\kappa^2}{(1-\kappa)^2} \int_F W_2(\underline{u}^{(2)}) dF \quad (3.1.21b)$$

möglich. Dies ist auf die  $L_2$ -Norm übertragbar [122], da mit einer endlichen positiven Konstanten  $c$  (wenn Starrkörperbewegungen ausgeschlossen sind, ist  $c = 1/\sqrt{\rho\omega^2}$  mit der niedrigsten Eigenfrequenz  $\omega$  des Tragwerks) die Ungleichung  $\|u\|_{L_2} \leq c \|u\|_W$  gilt. Der häufig vorkommende Wert  $\nu = 0,3$  gibt mit (3.1.20) nach (3.1.21)

$$\|\underline{u}^{(2)} - \underline{u}^{(1)}\|_{W_2} \leq 0,675 \|\underline{u}^{(1)}\|_{W_2} \leq 0,872 \|\underline{u}^{(2)}\|_{W_2}, \quad (3.1.22)$$

ein deutliches Zeichen für den starken Einfluß auch formal anscheinend nur kleiner Abweichungen in der Formulierung der Formänderungsdichte  $W$  auf damit bestimmte Lösungen.

### 3.2. Diskretisierungsfehler bei finiten Lösungen, insbesondere der Schalengleichungen

Finite Lösungsmethoden beruhen darauf, den ursprünglich unendlich-dimensionalen Problemraum auf einen endlich-dimensionalen Unterraum zu projizieren und dort aus finiten Gleichungssystemen Näherungen zu bestimmen. Bei Randwertaufgaben, z. B. nach (1.3.11) der Aufgabe, im Hilbertraum  $\tilde{H}$  aller geometrisch zulässigen Zustände  $\tilde{f}$  das Funktional

$$I_p(\tilde{f}) = \frac{1}{2} \{\tilde{f}, \tilde{f}\} - \{\tilde{f}, \tilde{f}_0\}, \quad \tilde{f} \in H' \oplus F_0 = \tilde{H}, \quad (3.2.1)$$

oder explizit bei Schalen nach (2.2.38)

$$I_p(\tilde{u}) = \int_F \left[ \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}^T \cdot \underline{K}^{-1} \cdot \tilde{\varepsilon} - \tilde{p}^{*T} \cdot \tilde{u} \right] dF - \int_{C_p} \tilde{u}^{R,T} \cdot \underline{V}^T \cdot \tilde{g}^{R*} ds, \quad (3.2.2a)$$

$$\tilde{u} = \{ \underline{u} \in H \mid T\underline{u} = \underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}^{Q*} \text{ in } F; \underline{u}^R = \underline{u}^{R*} \text{ auf } C_u \} \in H^{\sim}, \quad (3.2.2b)$$

zu minimieren, bedeutet dies häufig die Ermittlung eines Extremwertes in einem finiten Unterraum, z. B.  $H_h^{\sim} \subset H^{\sim}$ . Unter dem finiten Verfahren wird hier i. a. die Finite-Element Methode verstanden, die aufgrund ihrer Anpassungsfähigkeit an die Geometrie der Gebiete und an die Randbedingungen seit dem Einsatz großer Computer zur Lösung von Summations-Randwertproblemen wohl am meisten verbreitet ist. Es ist jedoch festzustellen, daß diese Prozeduren oft mehr Freiheitsgrade für eine bestimmte Genauigkeit benötigen als ein klassisches RITZ-GALERKIN-Verfahren mit a priori gut gewählten Koordinatenfunktionen, so daß diese dann großen Systeme häufig nicht mehr sehr gut konditioniert sind. Es kann daher vorteilhaft sein, trotz der damit verbundenen größeren Bandweite der von Null verschiedenen Elemente in der entstehenden Koeffizientenmatrix, eine Kombination globaler und lokaler Variablendarstellung für die finiten Berechnungen zu wählen [132].

Die Fragen, die sich bei jedem finiten Verfahren bzw. seiner Lösung stellen, treffen zwei Teilaspekte:

- a) die Existenz numerischer Stabilität der Konvergenz der Näherungen;
- b) die zahlenmäßige Kontrolle dieser Konvergenz.

Dazu werden hier a-priori Aussagen gesammelt (siehe auch Abschnitt 4.3.1) und Möglichkeiten von a-posteriori Fehlerschranken speziell für Lösungen der Schalengleichungen erläutert (siehe auch Abschnitte 1.3. und 1.4.).

"Schlecht gestellte" Aufgaben können dazu führen, daß bei abnehmendem *Diskretisierungsparameter*  $h$  die Konditionszahl des diskretisierten Problems und damit der Einfluß etwaiger Fehler der gegebenen Daten stark wächst. Dies wird bei einer projektiven Diskretisierung wie etwa beim RITZ-Verfahren regularisiert, also gedämpft [133]. Dabei sind allerdings von den Elementen der verwendeten finiten Unterräume  $H_h$  einige zusätzliche Eigenschaften zu fordern. Um zu garantieren, daß die *Konditionszahl*, z.B. als Quotient  $\lambda_0/\lambda_1$  des größten und kleinsten Eigenwertes des sich in  $H_h$  ergebenden linearen Gleichungssystems, nicht über einen festen Maximalwert wächst,

ist es notwendig, daß die Elemente von  $H_h$  fast orthonormiert sind [59], bzw. daß das System der erzeugenden Funktionen *minimal* ist. Dies bedeutet, daß keines der Elemente des Raums  $H_h$  von anderen Funktionen aus  $H_h$  erzeugbar ist. Damit ist ein minimales System auch linear unabhängig (das gilt jedoch nicht unbedingt umgekehrt [59]). Bilden die erzeugenden Funktionen außerdem ein vollständiges System, so ist dies auch hinreichend für ein numerisch stabiles Projektionsverfahren. Zwischen der Frage der numerischen Stabilität und der der Konvergenzeigenschaft von Näherungslösungen gewisser Projektionsverfahren besteht ein enger Zusammenhang. So ergibt die Feststellung der Konvergenzkriterien der Finite-Element-Methode, die ja bei Beachtung hinreichender Stetigkeit in den Ansätzen ein RITZ-Verfahren darstellt [101], daß für *konforme* Elemente die Tatsache der Vollständigkeit des benützten Funktionensystems allein ausreichend ist [134]. Als konform wird dabei ein Element bezeichnet, wenn aus der *reduzierten Stetigkeit*, d. h. der Stetigkeit in den Knotenwerten, die Stetigkeit des Ansatzes bis zu den wesentlichen Ableitungen auch über die Elementgrenzen hinweg gewährleistet ist. *Wesentlich* sind dabei alle Ableitungen bis zur Ordnung  $m - 1$ , wenn  $m$  die jeweilige höchste Ordnung der in der Energiedichte vorkommenden Ableitungen angibt. Ein Kriterium für die auch bei konformen Elementen notwendige *Vollständigkeit* der Ansätze fordert, daß alle Feldkomponenten und alle ihre Ableitungen bis zur Ordnung  $m$  wenigstens stückweise konstant angenähert werden, also in den Elementen wenigstens konstante Werte annehmen können [101]. Zur Feststellung der Konvergenz von nicht-konformen Element-Ansätzen reicht dieses Vollständigkeitskriterium ebenfalls hin [101]. Weitaus häufiger werden dafür *Patch-Tests* verwendet [135,136], so z. B. folgendes Kriterium [135]: "Die Konvergenz nicht-konformer Ansätze ist gesichert, wenn die Wechselwirkungsenergie - gebildet zwischen Verschiebungsfeldern aus Polynomen  $m$ -ten Grades und den nicht-konformen Ansätzen - von den Unstetigkeiten an den Elementgrenzen unbeeinflusst bleibt". Diese Tests sind jedoch nicht unbedingt notwendig [134] und nicht in jeder Formulierung für jedes Beispiel hinreichend [137,138].

Die Auswertung all dieser Aussagen fordert für Randwertprobleme der linearen Theorie dünner Schalen Stetigkeit der Verschiebungs- bzw. Spannungsfunktionenansätze in den wesentlichen Ableitungen, also z. B. konforme Elemente aus stetigen Interpolationsfunktionen für  $u_\alpha$  bzw.  $\psi_\alpha$  sowie bis zu ersten Ableitungen stetigen Funktionen für  $u_3$  bzw.  $\psi_3$  [115]. Damit kann die Gesamt-Verformungsenergie aus der Summe der Energieanteile der Elemente gebildet werden, da die entsprechenden Integrale auch an den Element-

grenzen endlich bleiben. Dies sichert erstens die Konvergenz [135] und zweitens die Möglichkeit, aus Energieungleichungen (siehe Abschnitt 1.3.) Fehlerabschätzungen zu gewinnen. Auch nicht-konforme Finite-Elemente können allerdings Schranken liefern [139].

Zu beachten ist bei der Einteilung eines Gebietes in finite Elemente und der damit verbundenen Approximation des Randes die sogenannte *Winkelbedingung* [140]. Sie besagt, daß kein Winkel eines Elements zu nahe an  $180^\circ$  liegen darf. Trotz der Beachtung dieser Bedingung kann jedoch, wie sich bei einer gelenkig gelagerten Platte zeigt [106-111], eine kleine Änderung der Randform auch sehr große Störungen in der Lösung zur Folge haben, so daß eine Annäherung einer glatt berandeten Platte durch Elemente mit geraden Rändern gar nicht möglich ist [107]. Die Ursache ist das Entstehen singulärer Randeffekte an den Ecken der Polygonplatte bei einer bestimmten Art der Eckenlagerung [109,110]. Eine Untersuchung über die Möglichkeit solcher Effekte bei Schalen steht noch aus.

Neben den bisher angeschnittenen Fragen der Stabilität und der Existenz einer Konvergenz gegen die wahre Lösung ist auch die Konvergenzordnung oder eine asymptotische Konvergenzabschätzung des Verfahrens von Interesse. Über solche a-priori Fehlerabschätzungen gibt es zahlreiche Untersuchungen [103,104,141-146 u.a.], die jedoch fast alle einen gravierenden Nachteil für die praktische Anwendung haben. Sie enthalten unspezifizierte, nicht zahlenmäßig angebbare Konstanten.

Bei den hier betrachteten Variationsproblemen, denen streng konvexe (oder streng konkave) quadratische Funktionale wie (1.3.11) und (1.3.13) zugrunde liegen, ist es eine Folge der Extremaleigenschaft, daß in der Energienorm der Fehler einer finiten Lösung  $u_h$  durch den einer  $u$  interpolierenden Funktion  $\bar{u}_h$  begrenzt wird [145,147]:

$$\|u - u_h\|_w \leq \|u - \bar{u}_h\|_w, \quad u_h, \bar{u}_h \in H_h. \quad (3.2.3)$$

Dies gilt sowohl für homogene wie für inhomogene Randbedingungen [145], seien sie wesentlich oder natürlich für das betrachtete Funktional. Damit gibt der Approximationsfehler auch die wesentliche Aussage über die Größe des Fehlers der "exakten" Finite-Element Lösung [75] (bei der keine numerischen Integrationen usw. verwendet wurden). Ist  $H_h$  konkret ein Finite-Element Raum  $S_h^p$ , erzeugt von einem vollständigen Polynomsystem vom Grad  $p$ , wird (3.2.3) [145]:

$$\| \underline{u} - \underline{u}_h \|_w^2 \leq O(h^{2(p+1-m)}). \quad (3.2.4a)$$

Diese Größenordnungsabschätzung ist folgender Aussage gleichwertig [142]:

$$\| \underline{u} - \underline{u}_h \|_w \leq c h^{p+1-m} \| \underline{u} \|_{p+1}. \quad (3.2.4b)$$

Dabei ist die Norm  $\| \cdot \|_s$  aus Halbnormen  $| \cdot |_s$  (Null auch für  $\underline{u} \neq 0$ ) bis zur Ordnung  $s$  zusammengesetzt [145]:

$$\| \underline{u} \|_s^2 = | \underline{u} |_0^2 + \dots + | \underline{u} |_s^2, \quad | \underline{u} |_s^2 = \sum_{|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = s} \int_F \left| \frac{\partial^{|\alpha|} \underline{u}(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right|^2 dF. \quad (3.2.5)$$

Mit der Annahme, daß die Energienorm wegen  $c_0 \| \underline{u} \|_m^2 \leq \| \underline{u} \|_w^2 \leq c_1 \| \underline{u} \|_m^2$ ,  $c_0 > 0$ , der Norm  $\| u \|_m$  äquivalent ist, ergibt (3.2.4) auch eine Fehler-schranke in der Halbnorm [145]

$$| \underline{u} - \underline{u}_h |_s = O(h^{p+1-s} + h^{2(p+1-m)}). \quad (3.2.6)$$

Mit der kleinsten Eigenfrequenz  $\lambda_0$  des Flächentragwerkes läßt sich über das RAYLEIGH'sche Prinzip aus der Energienormabschätzung (3.2.4) auch eine Betragsabschätzung formulieren [143]:

$$\| \underline{u} - \underline{u}_h \|_\infty \leq \frac{1}{\lambda_0^2} \| \underline{u} - \underline{u}_h \|_w \leq \frac{c}{\lambda_0^2} h^{p+1-m} \| \underline{u} \|_{p+1}. \quad (3.2.7)$$

Diese a priori Konvergenzabschätzungen von Finite-Element Berechnungen einer Schale geben für die konkrete Wahl von Ansatzfunktionen eine Aussage über die Fehlerordnung der "exakten" Approximation. Gleichzeitig stellen sie Forderungen an die Ansätze, die zur Sicherung der Konvergenz erfüllt werden müssen. So fordert z. B. (3.2.4):

Der Grad  $p$  eines Finite-Element-Raums  $S_h^p$  muß größer oder gleich  $m$  sein; d. h. Polynomansätze  $a_{ij} x_1^i x_2^j$  mit allen Potenzen  $i + j \leq p$  müssen  $p \geq m$  erfüllen.

Für finite Ansätze  $\underline{u}_h = (u_{\alpha h}, u_{3h})$  zur Lösung der Schalengleichungen ist obige Forderung die bekannte *constant strain* Bedingung, die besagt, daß ein Ansatz mindestens eine stufenweise Approximation der im Funktional des Problems vorkommenden Größen ermöglichen muß. Dies sagt also wie vorher die Forderung von konformen Elementen, daß  $u_{\alpha h}$  aus  $H^1$  und  $u_{3h}$  aus  $H^2$ , den Hilberträumen mit quadratintegrablen Ableitungen bis zur 1-ten bzw. 2-ten

Ordnung, sein müssen. Möglich ist damit die Approximation in  $S_h^{1,1}$  bzw.  $S_h^{3,3}$ , dem Finite-Element Raum aus bilinearen bzw. bikubischen Hermite-Polynomen. Die Größenordnung der Fehler ist hierbei nach (3.2.3-6) [75]

$$\|u_\alpha - u_{\alpha h}\|_s \leq c_{12} h^{2-s} \|u_\alpha\|_2, \quad s \leq 1, \quad (3.2.8a)$$

$$\|u_3 - u_{3h}\|_s \leq c_3 h^{4-s} \|u_3\|_4, \quad s \leq 2. \quad (3.2.8b)$$

Insgesamt ist also bei diesen finiten Verschiebungsansätzen in der  $L_2$ -Norm ( $s = 0$ ) die Konvergenzordnung  $O(h^2)$  zu erwarten.

Neben den bisher betrachteten Approximationsfehlern tritt häufig noch eine zweite Art von Diskretisierungsfehlern auf. Diese entstehen dadurch, daß es i. a. bei krummlinig berandeten Definitionsgebieten  $F$  unmöglich ist, Randbedingungen exakt zu erfüllen. Das übliche Vorgehen, die für den eigentlichen Rand  $C$  vorgeschriebenen Bedingungen, z. B.  $\tilde{u}^{R*}$ , auf dem z. B. durch Polygonzüge in  $F$  einbeschriebenen Rand  $C_h$  des diskretisierten Gebietes  $F_h$  zu erfüllen, bedeutet eine Abweichung  $\delta \tilde{u}^{R*}$  von den dort eigentlich aufgrund der unbekanntenen exakten Lösung zu erwartenden Werten. Ist  $c_\epsilon$  die Distanz zwischen den Rändern  $C$  und  $C_h$ , für geradlinige Polygonberandungen  $C_h$  z.B.  $c_\epsilon = ch^2$ , so gilt für die Änderung  $e$  der Lösung aufgrund der Randwertstörung  $\delta \tilde{u}^{R*}$  [105,148]:

$$\max_{F_h} |e| \leq \max_{C_h} |\delta \tilde{u}^{R*}| = O(c_\epsilon) = O(h^2). \quad (3.2.9)$$

Bei einer Approximation  $C_h$  durch polynomiale Kurvenzüge vom Grad  $p$  ist die Größenordnung der Abweichung  $\delta \tilde{u}^{R*}$  von den exakten Randwerten  $O(h^{p+1})$  [148]. Zur Ausnützung dieses Effekts einer geringeren Randstörung bei nicht-geradliniger Randapproximation wird der Rand häufig stückweise durch Polynome höheren Grades ( $p > 1$ ) angenähert und dann durch eine Koordinaten-Transformation in Geradenstücke überführt (isoparametrische Elemente) [135]. Auf jeden Fall trifft jedoch der Einfluß dieser Randstörungen, außer in Sonderfällen [106-111] aufgrund des St. VENANT'schen Prinzips nur die unmittelbare Nachbarschaft des Randes.

All diese Angaben über Fehlerordnungen finiter Näherungen haben leider den Nachteil, daß sie keinen direkten Wert für numerische Zwecke haben, da sie unspezifizierte Konstanten enthalten. Trotzdem haben sie bei der Auswahl geeigneter Ansatzfunktionen (siehe Abschnitt 4.3.1.) eine große

Bedeutung, damit nicht a-priori, beim Start der numerischen Berechnungen bereits Fehler [135] gemacht werden, die im nachhinein, a-posteriori, zu falschen oder zu schlechten Resultaten führen. In dieser Hinsicht sind auch die im folgenden Abschnitt noch zu behandelnden Fehler durch die numerische Berechnung von Ausgangsdaten a-priori zu beachten. Dies dürfte bei der Behandlung nichtlinearer Probleme ein noch wichtigerer Punkt sein. Deshalb sei hier noch auf die sehr viele Möglichkeiten umfassende Arbeit von WITSCH [149] über die Konvergenz von Projektionsverfahren hingewiesen, deren Darstellung auch auf Untersuchungen nichtlinearer Gleichungen übertragen werden kann.

Ein Weg zur Ermittlung von a-posteriori Fehlerschranken benützt die Eigenschaften komplementärer Variationsprinzipie bzw. des Verfahrens der orthogonalen Projektion, wie in den Abschnitten 1.3. und 1.4. bereits für die allgemeine Theorie dargelegt wurde. Hier soll dies auf die lineare Schalentheorie (Abschnitt 2.2.) übertragen werden. Dabei ermöglicht die Darstellung der Zustandsgrößen und Grundgleichungen als Vektoren bzw. Operatormatrizen (siehe Tafel 1) ein einfaches, rein formales Vorgehen. Die Voraussetzungen dafür wurden in Abschnitt 2.3. bereits überprüft.

Nach (1.3.21/24) ist der Fehler einer geometrisch zulässigen Näherung  $\tilde{u}$  (2.2.39) wie auch einer statisch zulässigen Approximation  $\tilde{\sigma}$  (2.2.42) in der Energienorm

$$\left\| \underline{u} - \tilde{u} \right\|_w^2 \leq 2 [I_p(\tilde{u}) - I_{pc}(\tilde{\sigma})] , \quad (3.2.10a)$$

$$\left\| \underline{\sigma}(\underline{u}) - \tilde{\sigma} \right\|_w^2 = \int_F [\underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{K}^{-1} \cdot \underline{\varepsilon} - 2 \underline{\varepsilon}^T \cdot \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}^T \cdot \underline{K} \cdot \tilde{\sigma}] dF . \quad (3.2.10b)$$

Diese und auch jede der folgenden Abschätzungen gilt für zulässige Ansatzfunktionen mit globalem, auf einzelne Elemente beschränktem, oder auch bereichsweise Definitionsbereich.

Die Abschätzung des Fehlers einer geometrischen oder statischen Approximation der inneren Energie E ist nach (1.3.23) bzw. explizit

$$\left| \left\| \underline{u} \right\|_w^2 - \frac{\left\| \tilde{u} \right\|_w^2}{\left\| \tilde{\sigma} \right\|_w^2} \right| \leq \left\| \tilde{\sigma} - \underline{\sigma}(\tilde{u}) \right\| \left\| \tilde{\sigma} + \underline{\sigma}(\tilde{u}) \right\| , \quad (3.2.11a)$$

$$2 \sqrt{ \left[ \int_F (W(\underline{\varepsilon}) + W_c(\tilde{\sigma})) dF \right]^2 - \left[ \int_F \underline{\varepsilon}^T \cdot \tilde{\sigma} dF \right]^2 } . \quad (3.2.11b)$$

Formal identisch können die Schranken (1.4.15) für einen Näherungswert entsprechend (1.4.13) einer Zustandsgröße im Punkt  $\tilde{x}^P$  übernommen werden:

$$|F(\tilde{x}^P) - F_N(\tilde{x}^P)| \leq \sqrt{[I_p(\tilde{u}^{\sim}) - I_{pc}(\tilde{g}^{\sim})][I_p(\tilde{u}^{g\sim}) - I_{pc}(\tilde{g}^{g\sim})]}, \quad (3.2.12)$$

$$F_N(\tilde{x}^P) = \int_{C_u} \tilde{u}^{R*T} \cdot \tilde{v}^T \cdot \tilde{g}^{gR\sim} ds - \int_{C_p} \tilde{p}^{R*T} \cdot \tilde{u}^{gR\sim} ds - \int_{F-\{\tilde{x}^P\}} [\tilde{g}^{g\sim T} \cdot \tilde{\varepsilon}^{Q*} + \tilde{u}^{g\sim T} \cdot \tilde{p}^*] dF + \frac{1}{2} \int_F (\tilde{\varepsilon}^{\sim} + \tilde{\varepsilon}^{\sim})^T \cdot (\tilde{g}^{g\sim} - \tilde{g}^{g\sim}) dF. \quad (3.2.13)$$

Die einzige wesentliche Schwierigkeit besteht hier in der Konstruktion der geeigneten GREEN'schen Näherungszustände  $\tilde{u}^{g\sim}$  sowie  $\tilde{g}^{g\sim}$ . Darauf wird besonders im Abschnitt 4.2.2. eingegangen.

Da der Aufwand für diese numerisch brauchbare Möglichkeit zur Eingrenzung des Fehlers einer Näherung infolge der Notwendigkeit, auch das komplementäre Variationsproblem zu lösen, doppelt so groß ist wie der für die eigentliche Approximation der gesuchten Zustandsgröße, sollte natürlich wenigstens das Resultat möglichst optimal sein. Ein Weg, dies außer durch möglichst gute Wahl der Ansatzfunktionen ohne wesentlichen Mehraufwand verbessert zu erreichen, ist eine *Extrapolation* der Fehlerschranken [40].

Sind bei einer gleichmäßigen Diskretisierungskennzahl  $h_i$ , z. B. der Elementgröße,  $u_k^{ui}$  und  $u_k^{oi}$  untere bzw. obere Schranken der Lösung  $u_k$ , so gilt häufig

$$u_k^{ui} = u_{k0} + \alpha h_i^\gamma, \quad u_k^{oi} = u_{k0} + \beta h_i^\gamma, \quad (3.2.14)$$

mit den unbekanntenen Größen  $u_{k0}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ . Für die Differenz ergibt sich in einer logarithmischen Skala eine Gerade (siehe Bild 3):

$$\log(u_k^{oi} - u_k^{ui}) = \log(\beta - \alpha) + \gamma \log h_i, \quad (3.2.15)$$

deren Steigung  $\gamma$  allerdings erst bei Kenntnis je zweier Schranken bestimmbar ist:

$$\gamma = \frac{\log(u_k^{oi} - u_k^{ui}) - \log(u_k^{oi+1} - u_k^{ui+1})}{\log h_i - \log h_{i+1}}. \quad (3.2.16)$$

Dann sind aus (3.2.14) oder zeichnerisch auch die Vorfaktoren bekannt:

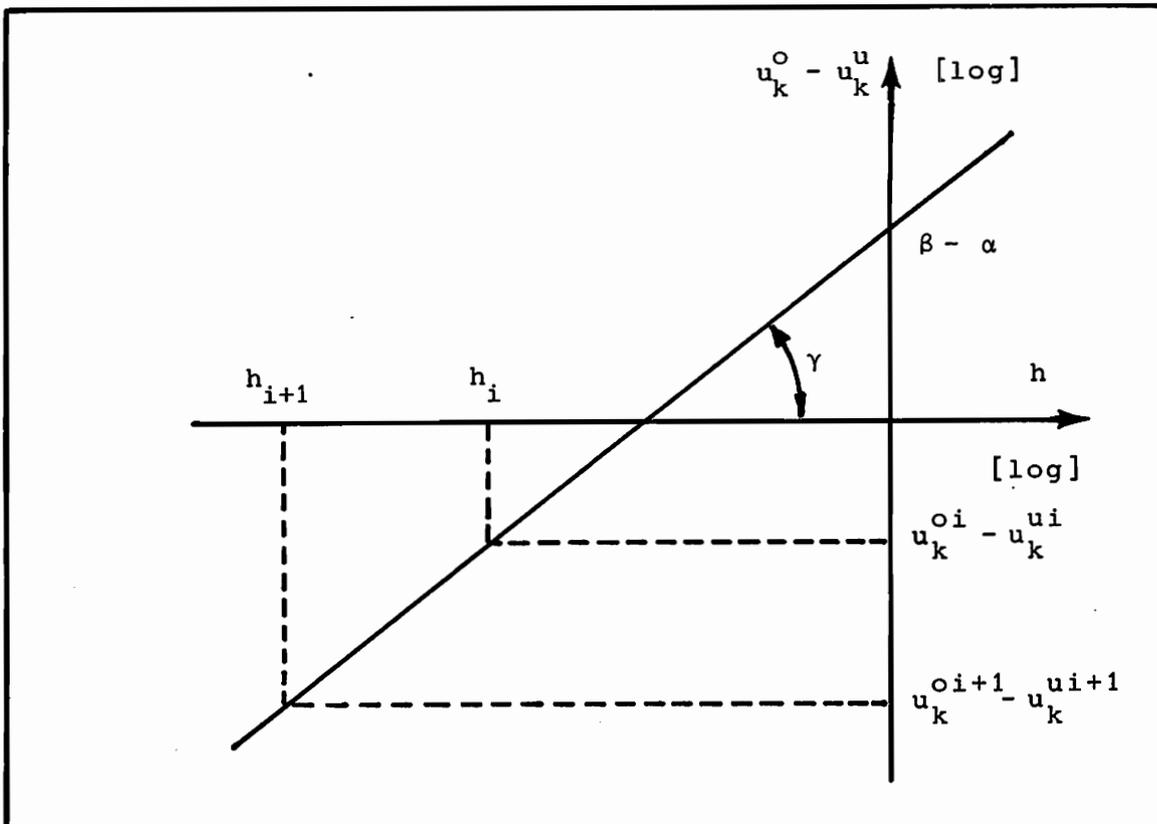


Bild 3 : Graphische Bestimmung der Konstanten  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$

$$\alpha = \frac{u_k^{ui} - u_k^{ui+1}}{h_i^\gamma - h_{i+1}^\gamma}, \quad \beta = \frac{u_k^{oi} - u_k^{oi+1}}{h_i^\gamma - h_{i+1}^\gamma} \quad (3.2.17)$$

und es ergibt sich damit der auf  $h_i = 0$  extrapolierte verbesserte Näherungswert

$$u_{ko} = \frac{u_k^{ui+1} h_i^\gamma - u_k^{ui} h_{i+1}^\gamma}{h_i^\gamma - h_{i+1}^\gamma} \quad (3.2.18)$$

Diese Extrapolation, die das angenommene asymptotische Verhalten (3.2.14) ausnützt, beschleunigt die Konvergenz einer Folge von Schranken wesentlich [40]. Eine entsprechende Anwendung bei einer Folge von Näherungswerten ist ebenfalls möglich [77,79], wenn es gelingt, für ihr Konvergenzverhalten eine asymptotische Entwicklung nachzuweisen [78-82,87-151], z. B.: für die Approximation  $u_{ih} \approx (x^P)$  der Verschiebungskomponenten

$$u_{ih}(\tilde{x}^P) = u_i(\tilde{x}^P) + c_1 h^{\gamma_1} + c_2 h^{\gamma_2} + \dots, \quad 0 < \gamma_1 < \gamma_2 \quad \dots \quad (3.2.19)$$

In diesem Fall ist es sogar möglich, aus dieser Folge von Näherungswerten zu verschiedenen Diskretisierungsstufen  $h_i$  für den exakten Wert im Punkt  $\tilde{x}^P$  asymptotische untere und obere Schranken zu berechnen [85-87, 152, 153]. Dabei werden die bei  $h_0 > h_1 > \dots$  berechneten Näherungen  $u_{i0}, u_{i1}, \dots$  für den exakten Wert  $u_i(\tilde{x}^P)$  zu einem Interpolationspolynom  $\hat{u}_i(h)$  durch  $(h_0, u_{i0}), (h_1, u_{i1}), \dots$  zusammengefaßt und dann dessen Wert bei  $h = 0$ , der extrapolierte Wert bestimmt.

Erfolgt die fortschreitende Diskretisierung nach der Regel  $h_j = h_0 b^j$ ,  $0 < b < 1$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , kann dieser extrapolierte Wert nach der Rekursionsformel [85, 86] ( $m = 1, 2, \dots$ )

$$u_{ik}^m = u_{ik+1}^{m-1} + \frac{(u_{ik+1}^{m-1} - u_{ik}^{m-1})b^{\gamma_m}}{(1 - b^{\gamma_m})}, \quad u_{ik}^0 = u_{ik}, \quad (3.2.20)$$

bestimmt werden. Mit diesen verbesserten Approximationen kann das Wertepaar  $(u_{ik}^m, \hat{u}_{ik}^m)$  berechnet werden,

$$\hat{u}_{ik}^m = u_{ik+1}^{m-1} + \frac{u_{ik}^m - u_{ik+1}^{m-1}}{1 - \frac{u_{ik}^m - u_{ik-1}^m}{u_{ik+1}^{m-1} - u_{ik}^{m-1}}}, \quad (3.2.21)$$

das für hinreichend kleine  $h_k$  den exakten Wert  $u_i(\tilde{x}^P)$ , einschließt. *Hinreichend klein* bedeutet dabei, daß die Folge der Werte  $u_{ik}^m$  bzw.  $\hat{u}_{ik}^m$  monotonen Wachsen oder Fallen erkennen läßt.

Diese formal so einfache Möglichkeit, punktweise Schranken zu berechnen, ohne komplementäre Variationsprobleme lösen zu müssen, ist leider bei Schalen noch nicht begründet durchführbar. Die Voraussetzung, der Nachweis einer asymptotischen Entwicklung wie (3.2.19) für eine Folge numerischer Lösungen einer finiten Methode, ist noch nicht erbracht.

### 3.3. Fehler infolge der Verwendung numerischer Prozeduren

Bei den bisherigen Überlegungen zum Fehler finiter Lösungen wurde angenommen, daß die sich in den endlich-dimensionalen Unterräumen  $S_h$  ergebenden Gleichungssysteme exakt, d. h. ohne Fehler in der Koeffizientenmatrix und der rechten Seite, also z. B. mit einer exakten Steifigkeitsmatrix  $\underline{R}$  und einem exakten Lastvektor  $\underline{p}$  erstellt worden sind. Bei der praktischen

Ausführung auf einem Digital-Computer werden jedoch nicht "exakte" sondern nur "numerische" Approximationen ermittelt, z. B. wenn es notwendig war, Integrale durch Quadraturformeln zu bestimmen. In solchen Fällen sollten jedoch numerische Prozeduren verwendet werden, die *konsistente Fehler* verursachen, d. h. Fehler der Größenordnung, wie sie durch das finite Verfahren, z. B. die RITZ-GALERKIN oder spezieller eine Finite-Element Methode entstehen.

Zur Beurteilung des Einflusses solcher Störungen  $\delta \underline{R}$  in der Steifigkeitsmatrix  $\bar{\underline{R}} = \underline{R} + \delta \underline{R}$  und  $\delta \underline{p}$  im Lastvektor  $\bar{\underline{p}} = \underline{p} + \delta \underline{p}$  auf die Lösung, also zur Erforschung des dadurch in die Lösung eingeführten Fehlers, ist nicht nur die Größe dieser Störungen abzuschätzen [135]. Trotz relativ starker Abweichungen zwischen den Elementen der exakten und der numerischen Steifigkeitsmatrix  $\underline{R}$  und  $\bar{\underline{R}}$  kann der Fehler in der Lösung, z. B.  $\underline{u}_h - \bar{\underline{u}}_h$  klein bleiben. Es kann jedoch auch bei schlechter Kondition der Matrizen bereits die kleinste Störung sehr große Auswirkungen haben. Deshalb muß diese Untersuchung von dem zugrunde liegenden Variationsprinzip selbst ausgehen [75,135,154-156].

Das zu minimierende Funktional (3.2.2) wird im finiten, n-dimensionalen Unterraum  $\tilde{H}_h^n$  geometrisch zulässiger Ansatzfunktionen (siehe Abschnitt 4.1.)

$$\tilde{u}_h^n(x) = \underline{\varphi}(x) \cdot \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} \quad (3.3.1)$$

in folgende quadratische Form überführt:

$$\begin{aligned} I_p(\tilde{u}_h^n) &= \frac{1}{2} \frac{\langle n \rangle^T}{\tilde{c}} \cdot \left[ \int_F (\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\varphi})^T \cdot \underline{K}^{-1} \cdot (\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\varphi}) dF \right] \cdot \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} \\ &\quad - \left[ \int_F \underline{p}^{*T} \cdot \underline{\varphi} dF + \int_{C_p} \underline{g}^{R*T} \cdot \underline{v}^T \cdot \underline{\varphi}^R ds \right] \cdot \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} \\ &= : \frac{1}{2} \frac{\langle n \rangle^T}{\tilde{c}} \cdot \underline{R}_h \cdot \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} - \underline{p}_h^T \cdot \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Das Verschwinden ihrer ersten Variation, die notwendige Bedingung für ein Extremum, führt theoretisch exakt auf

$$\underline{R}_h \cdot \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} - \underline{p}_h = \underline{0} \quad (3.3.3)$$

bei Verwendung von Quadraturformeln (genau genommen auch bei analytisch berechneten Integralen durch Rundungsfehler infolge der Gleitkommadarstel-

lung mit beschränkter Stellenzahl) in Wirklichkeit auf die nicht exakten, numerischen Gleichungen

$$\bar{R}_h \cdot \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} - \bar{p}_h = (R_h + \delta R_h) \cdot \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} - (p_h + \delta p_h) = 0. \quad (3.3.4)$$

Für das Folgende wichtig ist die Annahme, daß die Lösung dieser Gleichungssysteme exakt erfolgt. Natürlich werden sich bei der Berechnung der Lösungen Rundungsfehler ergeben, die zu einem *Lösungsfehler* kumulieren werden. Im allgemeinen ist jedoch die Auswirkung dieses Lösungsfehlers gegenüber der der Anfangsstörungen  $\delta R_h$  und  $\delta p_h$  so gering, daß es üblich und realistisch ist, den Lösungsfehler zu vernachlässigen [115].

Der Unterschied zwischen exakter und numerischer Näherung, zwischen den Lösungen von (3.3.3) bzw. (3.3.4) ist in der numerischen Energienorm

$$\| \tilde{u}_h - \bar{u}_h \|_w^2 = \left( \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} - \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} \right)^T \cdot \bar{R}_h \cdot \left( \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} - \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} \right) \quad (3.3.5a)$$

$$= \left( \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} - \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} \right)^T \cdot (\delta R_h \cdot \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} - \delta p_h). \quad (3.3.5b)$$

Damit diese Fehlerenergie positiv definit ist, muß die numerische Integration genügend Funktionswerte verwenden [135], d. h. z. B., bei bilinearen Ansätzen müssen zumindest lineare Polynome von der Formel exakt integriert werden. Auch dann ist die Formel jedoch noch nicht konsistent [154-156].

Zur exakten Analyse dieser Fehler ist die Einführung eines Maßes  $l_0$  für die Genauigkeit der Quadraturformel und einer Kenngröße  $k_0$  für den Grad der Polynome notwendig, die die Terme mit der höchsten Ableitung  $m$  in der quadratischen Form  $a(u_h, u_h) = \frac{1}{2} \frac{\langle n \rangle^T}{\tilde{c}} \cdot R_h \cdot \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}}$  darstellen:

$$l_0 = \min \{ \gamma_1 + \gamma_2 | x^\gamma := x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \in P_I \}, \quad (3.3.6a)$$

$$k_0 = \max \{ \gamma_1 + \gamma_2 | x^\gamma \in P_m \}. \quad (3.3.6b)$$

Dabei bedeutet  $P_I$  die Teilmenge aller Polynome, die von der Formel exakt integriert werden, und  $P_m$  die der sich nach den  $m$ -ten Ableitungen in  $a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h)$  ergebenden Polynome.

Bei einer Diskretisierungskenngröße  $h_i$ , z.B. dem Durchmesser  $h_i$  der Elemente  $F_i$ , ist der Fehler der rechten Seite durch

$$|\delta p_h| \leq \sum_{F_i} h_i^{l_0} \int_{F_i} \left| \frac{\partial |\gamma| p^* \cdot \varphi_h}{\partial x^\gamma} \right| dF, \quad |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 = l_0, \quad (3.3.7)$$

abgeschätzt. Da  $\varphi_h$  bis zur Ordnung  $k_0 + 1$  differenzierbar ist, folgt weiter mit  $h = \max h_i$  und  $p_s$ , der Ordnung der höchstens möglichen Ableitung von  $\underline{p}^*$ :

$$|\delta p_h| \leq c h^s \|\underline{p}^*\|_s \|\varphi_h\|_m \sim O(h^s), \quad s = \begin{cases} p_s & p_s < l_0 - k_0 \\ 1_0 - k_0 & p_s \geq l_0 - k_0 \end{cases} \quad (3.3.8)$$

Die Steifigkeitsmatrix ist häufig ohne Störung  $\delta R_{-h}$  erstellbar, z. B. da die Integration über bereichsweise definierte i. a. niedrige Polynome einfach analytisch durchgeführt werden kann. Der Fehler infolge der numerischen Bestimmung des Lastvektors  $\bar{\underline{p}}_h$  mit einer Quadraturformel der Kenngröße  $l_0$  ist nach (3.3.5b) mit (3.3.8)

$$\|\underline{u}_h - \bar{\underline{u}}_h\|_w^2 = (\underline{\bar{c}} - \underline{\bar{n}})^T \cdot \delta \underline{p}_h \leq c h^s \|\underline{p}^*\|_s \|\underline{u}_h - \bar{\underline{u}}_h\|_m \quad (3.3.9)$$

Da die Normen  $\|\cdot\|_w$  und  $\|\cdot\|_m$  äquivalent sind [145], ist dies gleichbedeutend mit ( $s = p_s$  bzw.  $l_0 - k_0$ )

$$\|\underline{u}_h - \bar{\underline{u}}_h\|_w \sim \|\underline{u}_h - \bar{\underline{u}}_h\|_m \sim O(h^s) \quad (3.3.10)$$

Ist auch die Steifigkeitsmatrix  $R_{-h}$  über numerische Integrationen bestimmt worden, muß zusätzlich zu (3.3.9) der andere Term in (3.3.5b) abgeschätzt werden. Erfüllen die (bereichsweise definierten) Polynome  $\varphi_h$  vom Grad  $p$ , die den Ansatz (3.3.1) bilden, die inverse Ungleichung [156]

$$\|\varphi_h\|_j \leq k h^{1-j} \|\varphi_h\|_1, \quad 1 < j, \quad \forall \varphi_h \in S_h, \quad (3.3.11)$$

gilt

$$(\underline{\bar{c}} - \underline{\bar{n}})^T \cdot \delta R_{-h} \cdot \underline{\bar{c}} = k h^{l_0 - k_0} (1 + h^{p - k_0}) \|\underline{u}_h - \bar{\underline{u}}_h\|_m, \quad (3.3.12)$$

und für  $l_0 > 2k_0$

$$\|\underline{u}_h - \bar{\underline{u}}_h\|_m \leq k h^{l_0 - k_0} (1 + h^{p - k_0}) \|\underline{u}\|_{p+1} \quad (3.3.13)$$

Die Anwendung dieser Abschätzungen bei der numerischen Lösung des Schalenfunktional (3.2.2) mit bilinearen Ansätzen für  $u_{\alpha h}$  und bikubischen Polynomen für  $u_{3h}$  ergibt wegen  $m = 2$  die Kenngröße  $k_0 = 4$ . Eine Quadraturformel, die bei diesen finiten Ansätzen konsistent [155] zur Größenordnung

des Approximationsfehlers in der  $\|\cdot\|_m$ -Norm, nach (3.2.8) also konsistent zu  $O(h)$  sein soll, muß wegen (3.3.13) mindestens  $l_0 = 5$  erfüllen, d. h. vollständige Polynome 5. Grades exakt integrieren. Dabei ist wegen (3.3.10) außerdem die Belastung  $\tilde{p}^*$  mindestens einmal stetig differenzierbar vorausgesetzt.

Es läßt sich zeigen[75], daß die Produkttrapezregel

$$I_{nm}(f) = \frac{1}{n+1} \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f\left(\frac{j}{n+1}, \frac{k}{m+1}\right) \quad (3.3.14)$$

dieser Bedingung genügt. Die Romberg-Integration [157,158] hat sogar unabhängig von Grad und Stetigkeit der Polynomansätze oder von der Voraussetzung über die Differenzierbarkeit der Belastung  $\tilde{p}^*$  immer diese Eigenschaft der Konsistenz [155]. Der Nachteil dieses numerischen Integrationsverfahrens, die große Zahl von notwendigen Auswertungen des Integranden, wird durch die gleichzeitig mögliche Eingrenzung des exakten Integralwertes [85,152,153] sicher aufgehoben. Dieses Verfahren wird deshalb auch in dieser Arbeit für die numerischen Berechnungen verwendet.

Außer dieser Untersuchung der Größenordnung des Fehlers zwischen der numerischen und der exakten finiten Lösung, die zur Forderung nach konsistenten Quadraturformeln führt, ist es auch notwendig, die Akkumulation dieser Fehler, die Empfindlichkeit des finiten Verfahrens zu untersuchen. Diese ist abhängig von der Genauigkeit des Rechners und von der Kondition der Steifigkeitsmatrix.

So bewirken bei einer Genauigkeit des Computers auf  $s$  Dezimalen allein die *Abbruchfehler*, in beliebiger Matrixnorm  $\|\delta_{R_h}\|_M = 10^{-s} \|\underline{R}_h\|_M$  und dazu passender [161] Vektornorm  $\|\delta_{\tilde{p}_h}\|_V = 10^{-s} \|\underline{p}_h\|_V$ , unter Umständen beträchtliche Abweichungen. Der Unterschied zwischen der exakten und der numerischen Lösung, d. h. zwischen der Lösung von (3.3.3) und der von (3.3.4)

$$\langle \tilde{c} \rangle^n - \langle \tilde{\bar{c}} \rangle^n = \delta \langle \tilde{c} \rangle^n = \underline{R}_h^{-1} \cdot (\delta \underline{p}_h - \delta \underline{R}_h \cdot \langle \tilde{c} \rangle^n) \quad (3.3.15)$$

hat unter den Annahmen  $\|\underline{p}_h\| \sim \|\langle \tilde{c} \rangle^n\|_V \sim \|\underline{R}_h^{-1}\|_M \sim O(1)$  und mit der Abschätzung  $C_2(\underline{R}_h) = O(h^{-2m})$  für die Spektral-Konditionszahl eines diskretisierten elliptischen Problems  $2m$ -ter Ordnung [159] die Größenordnung

$$\|\langle \tilde{c} \rangle^n - \langle \tilde{\bar{c}} \rangle^n\|_V = 10^{-s} O(h^{-2m}) \quad (3.3.16)$$

Unter der Voraussetzung

$$\beta_h := \frac{C_2(R_h) \|\delta R_h\|_M}{\|R_h\|_M} < 1 \quad (3.3.17)$$

gilt in der Energienorm für den relativen Fehler infolge der gestörten Anfangsdaten [115]

$$\frac{\|\tilde{u}_h - \bar{u}_h\|_w}{\|\tilde{u}_h\|} \leq \frac{C_2(R_h)}{1 - \beta_h} \left[ \frac{\|\delta p_h\|_v}{\|R_h\|_v} + \frac{\|\delta R_h\|_M}{\|R_h\|_M} \right] \quad (3.3.18)$$

Dabei ist hier

$$\|R_h\|_M = \max_{\underline{g}} \left( \frac{\|R_h \cdot \underline{g}\|_v}{\|\underline{g}\|_v} \right) \quad (3.3.19)$$

die zur Euklidischen Vektornorm  $\|\cdot\|_v$  passende Matrixnorm [161]. Kann die Konditionszahl  $C_2(R_h)$  der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $R_h$  nicht durch die Berechnung ihres größten und ihres kleinsten Eigenwerts bestimmt werden, ist es bei Finite-Element-Ansätzen möglich, mit den Eigenwerten der Elemente beidseitige Schranken anzugeben [160,162,163]. Außer dem kleinsten und dem größten Eigenwert der Element-Steifigkeitsmatrizen  $R_h^e$  sind auch die der Element-Massenmatrizen  $M_h^e$ , der GRAM'schen Matrizen [163] der Elementansätze  $M_h^e = \int \varphi_h^T \cdot \varphi_h \, dF$ , die maximale Zahl  $p_{\max}$  der an einem Knoten aneinanderstoßenden Elemente und die Grundfrequenz  $\lambda_0$ , der kleinste Eigenwert des zugrunde liegenden Differentialoperators  $T^*CT$  darin enthalten.

$$\frac{\max_e (\lambda_n^r)}{\lambda_0 \cdot p_{\max} \max_e (\lambda_n^m)} \leq C_2(R_h) \leq \frac{\max_e (\lambda_n^r) p_{\max}}{\lambda_0 \min_e (\lambda_1^m)} \quad (3.3.20)$$

Mit der oberen Schranke kann dann (3.3.18) ebenfalls nach oben begrenzt werden.

Der so durch die extremen Eigenwerte der Element-Steifigkeits- bzw. Massenmatrizen abgeschätzte "diskrete" Einfluß auf die Konditionszahl  $C_2(R_h)$  ist jedoch nicht immer eindeutig in seiner Aussagekraft über die "gute" oder "schlechte" Kondition diskreter Gleichungen. Der Wertebereich dieser Eigenwerte ist nicht eindeutig, sondern kann durch *Skalierung*, d. h. Division einer i-ten Zeile und einer i-ten Spalte des finiten Systems durch die gleiche Konstante  $a$  verändert werden [164]. Der Lösungsvektor  $\underline{g}$  wird dadurch nur in der i-ten Komponente beeinflusst; diese ergibt sich ebenfalls

als mit  $a_i$  multipliziert. So kann eine Matrix  $R_h$  erst dann als *optimal skaliert* bezeichnet werden, wenn eine Diagonalmatrix  $D_s$  gefunden ist, die die Konditionszahl  $C_2(D_s^T \cdot R_h \cdot D_s)$  minimiert [162]. Erst diese optimale Konditionszahl gibt eine echte Aussage über den Effekt der Rundungsfehler. In der Praxis ist jedoch das Suchen nach der optimalen Matrix  $D_s$  hoffnungslos. Für Bandmatrizen, wie sie sich beim Finite-Element Verfahren ergeben, ist jedoch eine Skalierung, die gleich besetzte Diagonalen bewirkt, *fast optimal*.

Ein skalierungs-invariantes Kriterium ist z. B. das *Diagonal-Energie-Kriterium* [164], das eine sehr klare und nützliche Aussage über eine etwaige schlechte Kondition der Gleichungen gibt:

Die Standardabweichung  $S(W)$  der Formänderungsenergie wird durch

$$S(W) < 2 \cdot 10^{-5} \sqrt{b} W_d, \quad (3.3.21)$$

dem Kennwert der Rechnergenauigkeit  $10^{-5}$ , der halben Bandbreite  $b$  der Steifigkeitsmatrix  $R_h$ , sowie  $W_d$ , dem Anteil der Verformungsenergie  $W$ , der allein durch die Hauptdiagonale  $R_{hd}$  der Steifigkeitsmatrix bestimmt wird, begrenzt. Der Quotient  $W_d/W$  kann durch den Kehrwert des kleinsten Eigenwertes  $\lambda_m$  aller Elementgleichungen

$$(R_h^e - R_{hd}^e) \cdot \underline{x} = \underline{0} \quad (3.3.22)$$

nach oben abgeschätzt werden und erreicht in ungünstigsten Fällen den Wert  $10^5$  oder größer. Diese Abschätzung der Empfindlichkeit eines Systems führt zwar nicht zu scharfen Fehlerschranken, gibt aber eine skalierungsinvariante Aussage, die in der Praxis sehr nützlich sein kann [164].

Mit all diesen Abschätzungen ist es nicht möglich, eine realistische a-priori Schranke für den Fehler anzugeben, der von gestörten Anfangsdaten verursacht wird; der Fehler wird dabei stark überschätzt [115]. Es ist jedoch trotzdem sinnvoll, die ja von den gewählten Ansatzfunktionen abhängige Konditionszahl  $C_2(R_h)$  zu bestimmen. Mit dieser Kontrolle sollte es möglich sein, schlecht konditionierte Systeme mit  $C_2(R_h) \sim O(10^5)$  [162] und damit die Möglichkeit zu vermeiden, daß Rundungen während einer finiten Berechnung zu zu großen Fehlern führen. Falls a-priori ein Schätzwert der Konditionszahl bekannt ist, kann auch die Computer-Genauigkeit so gewählt werden, daß die gewünschte Rechengenauigkeit überhaupt möglich wird [163]. Ein wesentliches Resultat dieser Untersuchungen über die Auswirkungen der Rundungsfehler ist die Feststellung, daß bei Verkleinerung von  $h$  zwar der Diskretisierungsfehler wie  $O(h^{p+1-m})$  kleiner aber gleichzeitig der Effekt

der Rundungsfehler wie  $O(h^{-2m})$  größer wird. Daraus folgt, daß Ansätze mit höherer Ordnung  $p$  i. a. vorzuziehen sind, da diese Wahl einen positiven Einfluß auf den Diskretisierungsfehler, aber keine direkten Auswirkungen auf die Größenordnung der Konditionszahl, d. h. auf die Rundungsfehler hat [159].

Die Eingrenzung (3.3.20) der Konditionszahl zeigt auch, daß die Konditionszahl eines Problems von zwei Aspekten abhängt: von der Diskretisierung und den Ansätzen und von der Natur des gestellten Problems [165].  $\lambda_0$  hängt ja im wesentlichen von internen Schalenparametern wie dem Krümmungsradius und der Schalendicke sowie den Randbedingungen ab. Eine etwaige schlechte Kondition kann also auch eine direkte Folge einer physikalischen Instabilität sein. So haben neben den Schalenparametern auch Materialeigenschaften, insbesondere die POISSON'sche Zahl  $\nu$  [166] einen natürlichen Einfluß auf die Kondition einer Steifigkeitsmatrix. Solche kritischen Werte sollten jedoch vorher bekannt sein, damit bei der Lösung eines solchen Problems bereits von Anfang an geeignete Maßnahmen ergriffen werden können.

Ein weiterer Grund für die schlechte Kondition einer Steifigkeitsmatrix kann darin liegen, daß nicht alle Starrkörperbewegungen vollständig ausgeschlossen wurden. Insbesondere bei feinerer Elemententeilung kann dadurch die finite Lösung stärker beeinflusst werden, wenn nicht bei der Wahl der Ansätze darauf geachtet wurde, daß durch sie Starrkörperverschiebungen exakt wiedergegeben, also auch alle möglichen Komponenten ganz verhindert werden können [167,168]. Dies ist insbesondere wichtig für krummlinig berandete Elemente, ist aber im allgemeinen keine notwendige Konvergenzbedingung [169].

Diese hier aufgeführten Aussagen über Auswirkungen und Ursachen von Fehlern, die alle, aufgrund ungenauer Daten und Rechenoperationen entstanden, das Resultat beeinflussen, sind vor allem auch deshalb so wichtig, weil nennenswerte Rundungsfehler natürlich die Gültigkeit der über die komplementären Variationsprinzipie bestimmten a-posteriori Fehlerschranken beeinträchtigen [115].

#### 4. ZUR NUMERISCHEN BESTIMMUNG DER A-POSTERIORI FEHLERSCHRANKEN

Nach den theoretischen Vorüberlegungen zur Fehlerordnung der Theorie und der numerischen Hilfsprozeduren, sowie zu den wesentlichen Voraussetzungen für die Zulässigkeit von Ansatzfunktionen bleiben folgende Aufgaben:

Zu überlegen, welche Ansätze den in den Abschnitten 3.2. und 3.3. gestellten Forderungen genügen, und bei welchen Ansätzen die Relation zwischen Konvergenzverhalten, Anpassungsfähigkeit und Aufwand möglichst optimal ist.

Bei den numerischen Berechnungen den notwendigen Aufwand, insbesondere den für die Erstellung der Fehlerschranken zusätzlich notwendigen Aufwand möglichst klein zu halten.

Für die Erstellung der punktweisen Schranken passende GREEN'sche Zustände zu bestimmen.

Sind Teile dieser Aufgaben problemabhängig, wie z. B. die Anpassung der Ansätze an Randbedingungen oder die Konstruktion der GREEN'schen Näherungszustände, werden diese hier für eine Kreiszyinderschale gelöst.

##### 4.1. Verschiedene Möglichkeiten finiter Ansätze

Bei der Untersuchung der verschiedenen Fehlerursachen und ihrer Auswirkungen auf die finiten Näherungslösungen wurde eine Reihe von Eigenschaften der Ansatzfunktionen aufgezählt, die Auswirkungen auf das Konvergenzverhalten und auch die Stabilität des numerischen Approximationsverfahrens haben. Neben den daraus folgenden Kriterien für einen theoretisch optimalen Ansatz sind auch Eigenschaften wie Größe der entstehenden Gleichungssysteme oder Anpassungsfähigkeit an krummlinige Ränder zu beachten.

Hinsichtlich dieser Fragen werden einige Fakten und auch ein leicht zu realisierendes Kriterium angegeben. Mit diesen Aussagen soll die Auswahl unter verschiedenen Ansätzen erleichtert werden. Für drei der vielen Möglichkeiten werden unter Betonung ihrer Vor- und Nachteile die finiten Gleichungen hergeleitet bzw. angegeben. Dabei können jedoch hier nicht alle Feinheiten, wie z. B. das Problem der Gitteroptimierung beim Finite-Element Verfahren [170] oder auch die Verwendung isoparametrischer Elemente [171, 172] für krummlinig berandete Gebiete, behandelt werden.

#### 4.1.1. Auswahlkriterien

In Zusammenfassung der in Abschnitt 3.2. dargelegten Eigenschaften finiter Ansätze werden hier einige Aussagen speziell für konforme Elemente nochmals konkretisiert.

Das wesentliche Kriterium für die Zulässigkeit konformer Elementansätze besagt [101], daß gesuchte Feldgrößen bis in die höchste ihrer im zugrunde liegenden Funktional vorkommenden Ableitungen wenigstens stückweise stetig approximiert werden müssen. Danach müssen also in dieser vorliegenden Schalentheorie Verschiebungsansätze für das Funktional (2.2.38) folgende Bedingungen erfüllen [113,173]:

$u_\alpha$  bzw.  $\psi_\alpha$  sind als quadratintegrale Funktionen aus  $C^0$ , d. h. mit stückweise stetigen ersten Ableitungen zu wählen,

$u_3$  bzw.  $\psi_3$  müssen quadratintegrale Funktionen aus  $C^1$ , d. h. mit stückweise stetigen zweiten Ableitungen sein.

Dies kann durch Ansätze verschiedenster Ordnung erfüllt werden und damit sowohl der Diskretisierungsfehler als auch die Kondition des sich ergebenden algebraischen Systems, d. h. die Empfindlichkeit des Systems auf Fehler in den Ausgangsdaten, beeinflußt werden. Üblicherweise werden dabei entsprechend der verschiedengradigen Stetigkeit von  $u_\alpha$  und  $u_3$  (Spannungsfunktionenansätze sind vollständig äquivalent [174] und werden deshalb hier nicht mehr gesondert erwähnt) auch Ansatzfunktionen verschiedener Ordnung  $u_\alpha$  und  $u_3$  gewählt. Abgesehen von der dann geringeren Anzahl der Knotenfreiwerte für  $u_\alpha$ , d. h. des in dieser Hinsicht geringeren Aufwandes, gibt dies jedoch wegen des wechselseitigen Einflusses beider Ansätze sowohl auf den *Membrananteil*  $E_M$  wie auch auf den *Biegeanteil*  $E_B$  der Gesamtenergie  $E$  nicht unbedingt ein Verfahren von optimaler Effizienz [165]. Wird  $u_\alpha$  durch vollständige Polynome vom Grad  $p$  und  $u_3$  durch vollständige Polynome vom Grad  $q$  interpoliert, ergibt sich nach (3.2.4) für den Fehler der Gesamtenergie

$$\Delta E = \int_F \left[ (E_M - E_{Mh})^2 + \frac{t^2}{12} (E_B - E_{Bh})^2 \right] dF = \min(O(h^{2(q-1)}), O(h^{2p})). \quad (4.1.1)$$

Diese Fehlerordnung sagt zum Beispiel aus, daß der Fehler des gesamten angenäherten Verschiebungsfeldes  $u_h$  wesentlich von den für  $u_\alpha$  benutzten vollständigen Polynomansätzen abhängt. So bleibt die Ordnung des Fehlers der Gesamtenergie  $\Delta E$  auch bei höheren Ansätzen für  $u_3$  zusammen mit einem nur linearen, an den Elementgrenzen nur stetigen Ansatz, also einem voll-

ständigen Polynomansatz mit  $p = 1$  für  $u_\alpha$  in der Größenordnung  $O(h^2)$ .

Damit ist die günstigste Wahl für den Grad des Ansatzes von  $u_\alpha$  bzw.  $u_3$  mit  $p = q - 1$  festgestellt. Kommt  $h$  in die Größenordnung der Schalendicke  $t$ , wird sogar  $p = q$  optimal (bei dimensionsloser Rechnung [175] gilt dies nicht). Ein anderer möglicher Weg, der hier nicht weiter dargelegt wird, ist der der Verwendung verschiedener Ansätze für  $u_3$  in den Membrandehnungen, d. h. in  $E_M$  und im Biegeteil  $E_B$  [176]. Dadurch kann vor allem die Aufstellung der Membran-Steifigkeitsmatrix vereinfacht werden und trotzdem durch diese "partielle" Approximation der Weg zu neuen Möglichkeiten eröffnet werden.

Im allgemeinen jedoch ist die oben begründete Regel bei der Wahl der Ansätze vorteilhaft:

*Vollständige Polynomansätze für  $u_\alpha$  und  $u_3$  sollten sich im Grad um eins unterscheiden ( $q = p + 1$ ).*

Als zweites wichtiges Kriterium für die Auswahl bestimmter Ansatzfunktionen ist deren Einfluß auf die Konditionszahl zu nennen. Ihre Berechnung als Quotient von größtem zu kleinstem Eigenwert der Gesamt-Steifigkeitsmatrix  $R_h$  ist für die Praxis in der Regel undurchführbar, insbesondere, wenn erst die Auswahl unter verschiedenen Ansatzfunktionen bzw. Elementmodellen getroffen werden soll. Praktikabel ist aber folgende Aussage, die mit Hilfe der Elementmatrizen überprüft werden kann (siehe auch Abschnitt 3.3):

*Bei gleichen Auswirkungen auf die Bandstruktur der Gesamtmatrix ergibt sich das System mit der besten Kondition aus Ansätzen, bei denen der Quotient  $\lambda_n^r / \lambda_1^m$  am kleinsten ist.*

Dabei ist  $\lambda_n^r$  der größte Eigenwert der Element-Steifigkeitsmatrix und  $\lambda_1^m$  der kleinste Eigenwert der GRAM'schen Matrix der Ansatzfunktionen im Element.

Außerdem sollte insbesondere wegen des Einflusses auf die Kondition des Gleichungssystems jeder Ansatz den völligen Ausschluß aller Starrkörperbewegungen ermöglichen [167,168].

Ein letztes, aber wichtiges, da relativ leicht nachprüfbares Kriterium sei noch angegeben und begründet [113,177]:

*Ist die Differenz zweier Element-Steifigkeitsmatrizen  $R_h^{e1} - R_h^{e2}$  positiv (semi-)definit, so ist die Verwendung von  $R_h^{e2}$  günstiger.*

Nachzuprüfen ist die positive Definitheit am einfachsten durch die Berechnung des kleinsten Eigenwertes dieser Elementmatrix  $R_{-h}^{e1} - R_{-h}^{e2}$ . Dabei sind erstens konforme Elemente angenommen und zweitens im Element nach Möglichkeit Starrkörperverschiebungen durch Randbedingungen ausgeschlossen. Dieses Kriterium gilt für Steifigkeitsmatrizen, die auf der Grundlage des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials erstellt worden sind:

Die exakte Lösung gibt den Minimalwert des Funktionals. Da mit (3.3.3) in (3.3.2) auch

$$I_p(\tilde{u}_h) = \frac{1}{2} \tilde{c}^T \cdot R_{-h} \cdot \tilde{c} - \tilde{p}_h^T \cdot \tilde{c} = -\frac{1}{2} \tilde{c}^T \cdot \tilde{p}_h = -\frac{1}{2} \tilde{c}^T \cdot R_{-h} \cdot \tilde{c} \quad (4.1.2)$$

gilt, ist eine Interpolation, die bei gleichem Lastvektor  $\tilde{p}_h$  die größere Verformungsenergie liefert, die bessere. Bei verschiedenen Interpolationen  $\tilde{u}_h^1$  und  $\tilde{u}_h^2$  ist wegen  $\tilde{c} = R_{-h}^{-1} \cdot \tilde{p}_h$  und (4.1.2) für positiv (semi-)definite Matrizen  $[(R_{-h}^1)^{-1} - (R_{-h}^2)^{-1}]$

$$I_p(\tilde{u}_h^1) - I_p(\tilde{u}_h^2) = \frac{1}{2} \tilde{p}_h^T \cdot [(R_{-h}^1)^{-1} - (R_{-h}^2)^{-1}] \cdot \tilde{p}_h \geq 0 \quad (4.1.3)$$

Da die positive Definitheit der Steifigkeitsmatrizen und die ihrer Inversen eindeutig wie folgt zusammenhängt [113]

$$\tilde{x}^T \cdot [(R_{-h}^2)^{-1} - (R_{-h}^1)^{-1}] \cdot \tilde{x} \geq 0 \Leftrightarrow \tilde{x}^T \cdot [R_{-h}^1 - R_{-h}^2] \cdot \tilde{x} \geq 0 \quad (4.1.4)$$

und sich außerdem das Gesamtpotential (4.1.2) aus den Anteilen der Elemente zusammensetzen läßt, ist das angegebene Kriterium bewiesen.

Für den Fall gleicher Elemente ist in der ganzen diskretisierten Struktur nur der kleinste Eigenwert einer Elementmatrix zu berechnen. Hierzu ist noch anzumerken, daß hinsichtlich der Genauigkeit eine einzige Art von Maschen vorteilhafter als die gleichzeitige Verwendung mehrerer Maschentypen zu sein scheint [178].

#### 4.1.2. Globale Ansätze

Ein klassisches RITZ-Verfahren mit gut gewählten globalen Koordinatenfunktionen kann für manche Probleme günstiger sein als die Finite-Element Version, die zwar große Flexibilität in der Form des Definitionsgebiets, in den Randbedingungen und den Materialeigenschaften gibt, aber zu sehr großen Gleichungssystemen mit häufig nicht gerade guter Kondition führt. Insbesondere, wenn das Verhalten bestimmter Zustandsgrößen aus der Erfahrung bekannt ist oder z. B. bei singulären Lastfällen in analytischen

Untersuchungen bestimmt werden konnte, kann eine diesem angepaßte Wahl globaler Ansatzfunktionen sehr schnell einen guten Einblick in das gesamte Lösungsverhalten geben.

Abgesehen von einigen zusätzlichen Hinweisen, die zur Wahl geeigneter Koordinatenfunktionen (siehe dazu die Abschnitte 3.2. und 4.1.1.) gegeben werden, stehen hier zwei Aspekte im Vordergrund: die Zulässigkeit der Ansätze und die Vermeidung unterschiedlicher Größenordnungen (die auch für andere Ansatzmöglichkeiten wesentlich ist).

Die den finiten Raum  $H_h$  erzeugenden Koordinatenfunktionen  $\varphi_{ik}(\underline{x})$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , müssen ein vollständiges und zusätzlich minimales, also auch linear unabhängiges System darstellen [59]. Zulässig hinsichtlich der Forderungen nach linearer Unabhängigkeit und Vollständigkeit ist z. B. das System  $\varphi_{ik}(\underline{x}) \in \{x^n y^m; n, m = 0, 1, 2, \dots\}$ , jedoch nicht minimal [112]. Also kann bei Vergrößerung der Anzahl  $n$  der Koordinatenfunktionen  $\varphi_{ik}(\underline{x})$  der durch geringe Anfangsstörungen verursachte Fehler so anwachsen, daß er die durch die Erhöhung der Anzahl  $n$  erzielte Verbesserung stark reduziert. Es ist deshalb besonders wichtig, im Falle solcher Koordinatenfunktionen die RITZ'sche Matrix, also z. B. die Steifigkeitsmatrix besonders genau zu ermitteln. Außerdem sollte, wenn es nicht möglich oder zu aufwendig ist, orthonormierte oder fast orthonormierte Funktionensysteme zu verwenden (z. B. aus LEGENDRE-Polynomen [112]), die Anzahl der globalen Ansatzfunktionen gering bleiben und statt dessen ein aus der Erfahrung bekanntes Lösungsverhalten weitestgehend berücksichtigt werden. Zur weiteren Verbesserung der Ergebnisse ist es im übrigen häufig günstig, eine Verbindung von global und lokal definierten Funktionen zu wählen [132]. In dieser Arbeit ist die Kombination globaler und lokaler Ansätze besonders bei der punktweisen Fehlerabschätzung wichtig, bei der nach der Hyperkreismethode Approximationen GREEN'scher Funktionen bestimmt werden. Die Lösungen dieses Problems enthalten Singularitäten und dies beeinflußt natürlich das Konvergenzverhalten, vor allem auch lokaler Ansätze stark [179]. So hat z. B. ein Problem der ebenen Elastizitätstheorie mit einer Spannungssingularität  $r^{\varepsilon-1}$  bei rechteckigen Elementen mit bilinearen Interpolationsfunktionen nur die Konvergenzordnung  $O(h^{2\varepsilon})$  [180]. Solche Verringerung der Konvergenz ist nur zu vermeiden, wenn die korrekten Singularitäten (siehe Abschnitt 4.3.2), am einfachsten global, mit in die Ansätze aufgenommen werden.

Bezüglich der Möglichkeit, mit wenigen gut gewählten Ansatzfunktionen

sehr brauchbare Resultate zu erzielen, s auf eine bisher allerdings erst für ein Balkenproblem gegebene Kombination des RITZ-Verfahrens mit einem Iterationsverfahren [181] hingewiesen. Damit ist es möglich, systematisch Ansatzfunktionen zu konstruieren, die neben den wesentlichen Randbedingungen auch die natürlichen Randbedingungen erfüllen, also Ergebnisse mit grösserer Genauigkeit liefern.

Die *Zulässigkeit* der verwendeten Funktionen bei der Variation des zugrunde liegenden Funktionals ist neben der notwendigen Differenzierbarkeit und Integrabilität die wichtigste Voraussetzung:

Die Ansätze für das RITZ-Verfahren müssen die wesentlichen Nebenbedingungen des Funktionals erfüllen.

Dies sind bei den hier untersuchten Funktionalen  $I_p(u, \varepsilon)$  (2.2.38) bzw.  $I_{pc}(\sigma)$  (2.2.41), die das Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials bzw. Maximum des komplementären Potentials beinhalten, die geometrischen bzw. statischen Bedingungen (2.2.39) bzw. (2.2.42). Sie sind gleichzeitig die natürlichen Bedingungen des jeweils komplementären Funktionals.

Die geometrischen Bedingungen, die jede Ansatzfunktion am Rand C der Mittelfläche F zu erfüllen hat, sind entsprechend der Definition (2.2.40a) von  $\underline{u}^R$  durch die vier voneinander unabhängigen Größen  $u_\alpha$ ,  $u_3$  und  $\partial u_3 / \partial v$  charakterisiert. Dadurch kann jede Verschiebung in Richtung der Tangenten  $\underline{\Delta}$ , der Binormalen  $\underline{v}$  und der Normalen  $\underline{a}_3$  sowie jede Verdrehung um die Tangenten- bzw. Binormalen-Richtung  $w_s$  bzw.  $w_n$  festgelegt werden [182]; mit

$$\underline{\Delta} = \underline{r}_{,s} = s^\alpha \underline{a}_\alpha, \quad \underline{v} = \underline{\Delta} \times \underline{a}_3 = v^\alpha \underline{a}_\alpha = \epsilon_{\alpha\rho} s^\rho \underline{a}^\alpha \quad (4.1.5)$$

und (2.2.19) ist

$$u_s = u_\alpha s^\alpha, \quad u_n = u_\alpha v^\alpha, \quad (4.1.6a)$$

$$w_s = w_\alpha v^\alpha = -u_{3,v} - b_\alpha^\lambda v^\alpha u_\rho (s^\rho s_\lambda + v^\rho v_\lambda), \quad (4.1.6b)$$

$$w_n = -w_\alpha s^\alpha = u_{3,s} + b_\alpha^\lambda s^\alpha u_\rho (s^\rho s_\lambda + v^\rho v_\lambda). \quad (4.1.6c)$$

Dabei ist offensichtlich die Verdrehung  $w_n$  bereits durch die drei Verschiebungskomponenten  $u_\alpha$ ,  $u_3$  entlang des Randes bestimmt. Fällt der Rand mit einer Koordinatenlinie eines orthogonalen Hauptkrümmungssystems

( $a_{12} = b_{12} = 0$ ), z. B.  $\underline{a}_1$  zusammen (Bild 4), so ist [182]  $\underline{\Delta} = \underline{a}_1 / \sqrt{a_{11}}$ , also  $s^1 = 1/\sqrt{a_{11}}$  und  $s^2 = 0$ , sowie  $\underline{v} = \underline{a}_2 / \sqrt{a_{22}}$ , also  $v^1 = 0$  und  $v^2 = -1/\sqrt{a_{22}}$ .

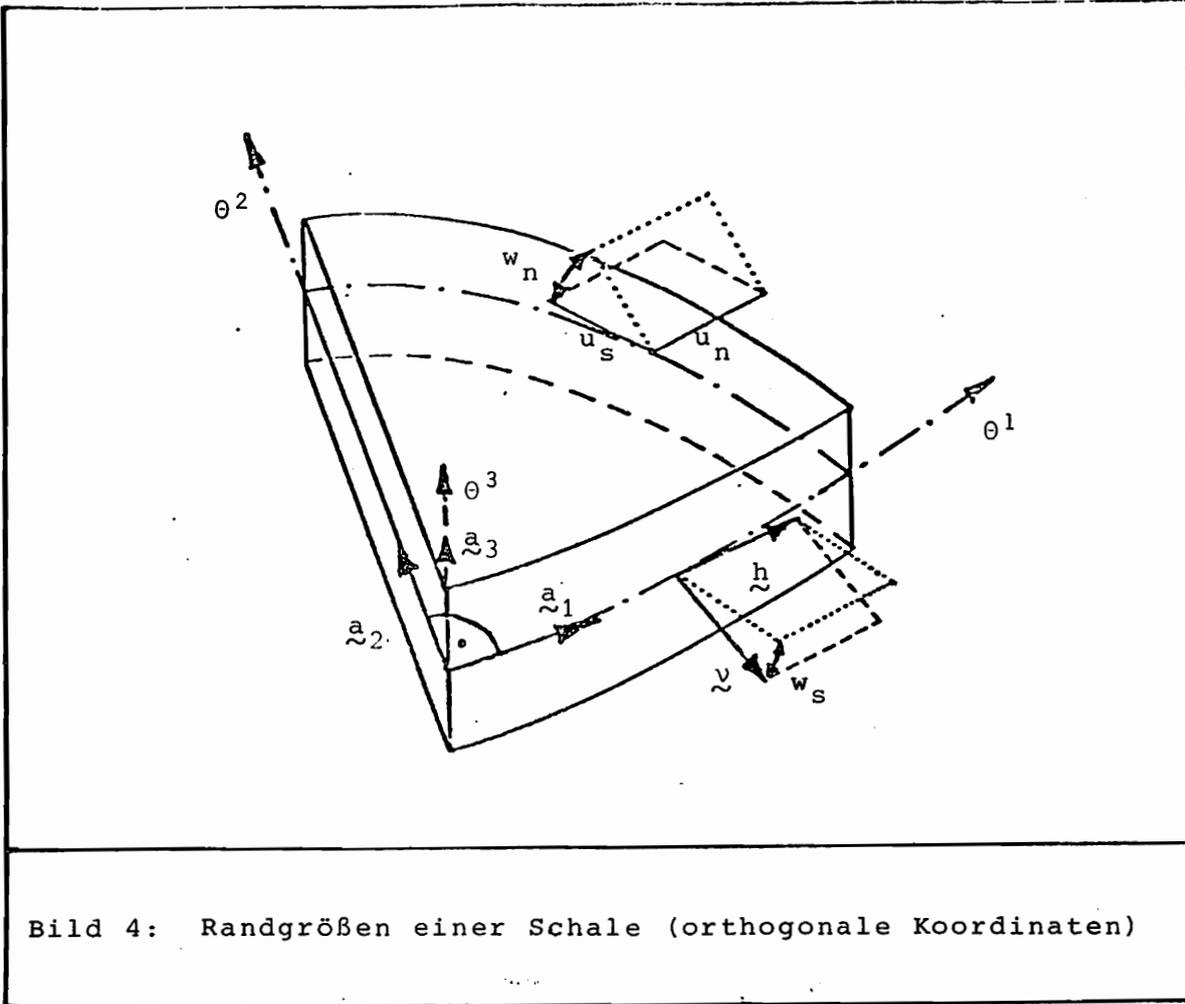


Bild 4: Randgrößen einer Schale (orthogonale Koordinaten)

Dafür ergeben sich als wesentliche geometrische Festlegungen an diesem Rand ( $\tilde{a}_2 = \text{konstant}$ ) bei den verschiedenen Lagerungen:

fest eingespannt 
$$\begin{cases} u_\alpha = 0 & u_s = 0, u_n = 0 \\ u_3 = 0 \cong u_{3,v} = 0 \\ u_{3,2} = 0 & u_{3,v} = 0 \end{cases}, \quad (4.1.7a)$$

frei drehbar, tangential verschieblich 
$$\begin{cases} u_2 = 0 & u_n = 0 \\ u_3 = 0 \cong u_3 = 0 \end{cases}, \quad (4.1.7b)$$

frei drehbar, normal verschieblich 
$$\begin{cases} u_1 = 0 & u_s = 0 \\ u_3 = 0 \cong u_3 = 0 \end{cases}. \quad (4.1.7c)$$

Entsprechende Bedingungen gelten für einen Rand entlang der zweiten Koordinatenlinie  $\tilde{a}_2$ . An beliebig laufenden Rändern sind die jeweiligen Normal- oder Tangentialkomponenten bzw. Ableitungen Null zu setzen. Man kann natürlich auch eine oder mehrere dieser vier Randgrößen inhomogen, als geometrische Verformungsursache vorgeben.

Die Erfüllung solcher Bedingungen durch globale, d. h. über die ganze Schalenmittelfläche definierte Koordinatenfunktionen  $\varphi_{ik}(\underline{x})$  eines Verschiebungsansatzes

$$\underline{\tilde{u}}_h(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \dots \varphi_{1n_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \varphi_{21} \dots \varphi_{2n_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & \varphi_{31} \dots \varphi_{3n_3} & \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \langle n \rangle \\ \underline{\tilde{c}} \end{matrix} \quad (4.1.8)$$

ist für beliebig krummlinig berandete Gebiete im allgemeinen nicht durchführbar. Deshalb sei angenommen, daß die Berandung C der Schalenmittelfläche mit Koordinatenlinien zusammenfällt oder durch eine Approximation  $C_h$  mit dieser Eigenschaft ersetzt ist, wie auch bei der Finite-Element Methode bei Rechteckelementen üblich. Dafür ist es dann i. a. möglich, durch geeignete Interpolationen oder Multiplikationen mit speziellen Randfunktionen die Ansätze den notwendigen Forderungen anzupassen, d. h. geometrisch zulässig zu machen [183]. So ist z. B. ein eingespannter Rand bei  $\theta^2 = y = c$  sehr einfach in

$$\varphi_{\alpha i}^{\sim}(x, y) = (y - c)\varphi_{\alpha i}(x, y), \quad \varphi_{3i}^{\sim}(x, y) = (y - c)^2\varphi_{3i}(x, y) \quad (4.1.9)$$

berücksichtigt.

Die statischen Bedingungen (2.2.42) legen bestimmte, mit (2.2.40/41)  $\underline{\tilde{u}}^R$  zugeordnete Werte

$$\underline{\tilde{\sigma}}^{RT} \cdot \underline{v} = (v_{\rho} n^{\rho 1}; v_{\rho} n^{\rho 2}; v_{\rho} m^{\rho \lambda} |_{\lambda}; v_{\rho} m^{\rho 1}; v_{\rho} m^{\rho 2}) \quad (4.1.10)$$

am Rand fest. In Anpassung an die nur vier unabhängigen geometrischen Randgrößen  $u_{\alpha}, u_3, \partial u_3 / \partial v$  bzw.  $u_s, u_n, u_3, w_s$  ist auch hier eine diesen Größen zugeordnete statisch äquivalente neue Zusammenfassung sinnvoll [182, 184].

Es ist

$$\int_C \underline{\tilde{\sigma}}^{RT} \cdot \underline{v} \cdot \underline{\tilde{u}}^R ds = \int_C \underline{\tilde{\sigma}}^{-RT} \cdot \underline{\tilde{u}}^R ds - \sum_{\text{Ecken}} (m_+^{nt} - m_-^{nt}) u_3, \quad (4.1.11)$$

wenn die Ersatz-Schnittgrößen

$$n_s = (n^{n\beta} - b_{\rho}^{\lambda} s^{\rho} s_{\lambda} m^{n\beta}) s_{\beta} = n^{nt} - b_{\rho}^{\lambda} s^{\rho} s_{\lambda} m^{nt}, \quad (4.1.12a)$$

$$n_n = n^{n\beta} v_{\beta} - b_{\rho}^{\lambda} s^{\rho} v_{\lambda} m^{n\beta} s_{\beta} = n^{nn} - b_{\rho}^{\lambda} s^{\rho} v_{\lambda} m^{nt}, \quad (4.1.12b)$$

$$n = q^n + m^{nt} |_{\rho} s^{\rho}, \quad (4.1.12c)$$

$$m_s = m^{n\beta} v_\beta = m^{nn} , \quad (4.1.12d)$$

wie auch die geometrischen Randgrößen (4.1.6) neu vektoriell zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{-RT} &= (n_s, n_n, n, m_s) , \\ \tilde{u}^{-RT} &= (u_s, u_n, u_3, w_s) . \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Fällt der Rand mit einer Parameterlinie eines orthogonalen Systems von Hauptkrümmungskordinaten, z. B.  $\underline{a}_1$  (Bild 4) zusammen, so ergeben sich dort als für die Zulässigkeit eines Ansatzes für (2.2.41) wesentliche statische Bedingungen bei den folgenden Lagerungen:

$$\begin{array}{l} \text{drehbar, tangential} \\ \text{verschieblich} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} m^{22} = 0 \\ -n^{21} + b_1^1 m^{21} = 0 \end{array} \right. \cong \begin{array}{l} m_s = 0 \\ n_s = 0 \end{array} , \quad (4.1.14a)$$

$$\begin{array}{l} \text{frei drehbar, nor-} \\ \text{mal verschieblich} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} m^{22} = 0 \\ n^{22} = 0 \end{array} \right. \cong \begin{array}{l} m_s = 0 \\ n_n = 0 \end{array} , \quad (4.1.14b)$$

$$\begin{array}{l} \text{frei} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} m^{22} = 0 \\ -n^{21} + b_1^1 m^{21} = 0 \\ n^{22} = 0 \\ -m_{,2}^{22} - 2m_{,1}^{21} = 0 \end{array} \right. \cong \begin{array}{l} m_s = 0 \\ n_s = 0 \\ n_n = 0 \\ n = 0 \end{array} . \quad (4.1.14c)$$

Globale Ansätze, die außer solche Randbedingungen homogene Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, sind am einfachsten nach (2.2.29/30) aus Spannungsfunktionen zu ermitteln. Randschnittgrößen  $\underline{V}^T \cdot \tilde{g}^R$  lassen sich in diesen Funktionen durch

$$\underline{V}^T \cdot \tilde{g}^R = \frac{v_\rho \epsilon^{\rho\mu}}{\sqrt{a}} \left[ \begin{array}{l} \psi_3|_{2\mu} + \frac{1}{2} b_\mu^\lambda (\psi_\lambda|_2 - \psi_2|_\lambda) + (\psi_\lambda b_2^\lambda)|_\mu \\ -\psi_3|_{1\mu} + \frac{1}{2} b_\mu^\lambda (\psi_\lambda|_1 - \psi_1|_\lambda) + (\psi_\lambda b_1^\lambda)|_\mu \\ \frac{1}{2} \sqrt{a} \epsilon^{\lambda\nu} (\psi_\mu|_\nu + \psi_\nu|_\mu - 2b_{\nu\mu} \psi_3)|_\lambda \\ \frac{1}{2} (\psi_2|_\mu + \psi_\mu|_2 - 2b_{\mu 2} \psi_3) \\ -\frac{1}{2} (\psi_1|_\mu + \psi_\mu|_1 - 2b_{\mu 1} \psi_3) \end{array} \right] \quad (4.1.15)$$

ausdrücken. Für Ersatzschnittgrößen (4.1.12) ergibt sich dann z. B.

$$n_s = \epsilon^{\rho\mu} \epsilon^{\beta\nu} v_{\rho} s_{\beta} [\psi_{3|\nu\mu} + \frac{1}{2} b_{\mu}^{\lambda} (\psi_{\lambda|v} - \psi_{v|\lambda}) + (\psi_{\lambda} b_{v}^{\lambda})|_{\mu} - b_{\tau}^{\lambda} s_{\tau} s_{\lambda} \frac{1}{2} (\psi_{\mu|v} + \psi_{v|\mu} - 2b_{\nu\mu} \psi_3)]. \quad (4.1.16)$$

Die Erfüllung der statischen Randbedingungen (4.1.14) kann also durch die Festlegung der Spannungsfunktionen erreicht werden, bei einer Kreiszylinderschale:

$$\begin{array}{l} \text{frei drehbar, tan-} \\ \text{gential verschieblich} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{1,1} = 0 \\ \psi_2 = 0; \psi_{2,1} = 0; \psi_{3,21} = 0 \end{array} \right. \cong \begin{array}{l} m_s = 0 \\ n_s = 0 \end{array}, \quad (4.1.17a)$$

$$\begin{array}{l} \text{frei drehbar,} \\ \text{normal verschieblich} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{1,1} = 0 \\ \psi_1 = 0; \psi_{3,11} = 0; \end{array} \right. \cong \begin{array}{l} m_s = 0 \\ n_n = 0 \end{array}, \quad (4.1.17b)$$

$$\begin{array}{l} \text{frei} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{1,1} = 0 \\ \psi_2 = 0; \psi_{2,1} = 0; \psi_{3,21} = 0 \\ \psi_1 = 0; \psi_{3,11} = 0 \\ \psi_3 = 0; \psi_{1,21} = 0; \psi_{2,11} = 0 \end{array} \right. \cong \begin{array}{l} m_s = 0 \\ n_s = 0 \\ n_n = 0 \\ n = 0 \end{array}. \quad (4.1.17c)$$

Also kann ähnlich dem geometrisch zulässigen Verschiebungsansatz (4.1.8/9) für einen globalen Ansatz in Spannungsfunktionen

$$\psi_h(\underline{x}) = \underline{\varphi}_h(\underline{x}) \cdot \frac{\langle n \rangle}{\underline{d}} \quad (4.1.18)$$

z. B. ein frei drehbarer, in Binormalenrichtung verschieblicher Rand  $\theta^2 = y = c$  ohne Schwierigkeiten durch

$$\varphi_{1i}^{\approx}(x,y) = (y-c)\varphi_{1i}^{\approx}(x,y), \quad \varphi_{2i}^{\approx}(x,y) = \varphi_{2i}^{\approx}(x,y) \quad (4.1.19)$$

statisch zulässig dargestellt werden.

Das Vermeiden zu unterschiedlicher Größenordnungen in den numerischen Berechnungen ist ein Gesichtspunkt, der insbesondere bei der Verwendung einiger weniger, gut gewählter globaler Ansätze für  $u_{\alpha}$  und  $u_3$  bzw.  $\psi_{\alpha}$  und  $\psi_3$  wichtig ist, aber auch bei lokalen Ansätzen beachtet werden sollte. Bei den hier untersuchten Schalenproblemen ist die Größe der Tangentialverschiebungen  $u_{\alpha}$  und der Normalverschiebungen  $u_3$  i. a. sehr unterschiedlich. Ähnliches gilt für die Längskräfte und Biegemomente wie auch den Membran- bzw. Biegeanteil der elastischen Energie. Es werden deshalb vor Erstellung der finiten Gleichungssysteme alle Tensorgrößen auf die anschaulicheren physikalischen Komponenten transformiert [92,182,185]; so z.B.

$$\underline{u} = u_{\alpha} \underline{a}^{\alpha} + u_3 \underline{a}_3 = u_{\langle i \rangle} \underline{e}_i, \quad (4.1.20a)$$

$$\underline{M} = m_{\alpha\beta} \underline{a}_{\alpha}^{\alpha} \otimes \underline{a}_{\beta} = m_{\langle \alpha\beta \rangle} \underline{e}_{\alpha} \otimes \underline{e}_{\beta}, \quad (4.1.20b)$$

mit

$$u_{\langle \alpha \rangle} = \sqrt{a_{\alpha\alpha}} a^{\alpha\beta} u_{\beta}, \quad \underline{z}_{\alpha} \quad (4.1.21)$$

$$m_{\langle \alpha\beta \rangle} = \sqrt{a_{\alpha\alpha} a_{\beta\beta}} m^{\alpha\beta}, \quad \underline{z}_{\alpha\beta} \quad (4.1.22)$$

und danach dimensionslose Größen ( $\hat{\quad}$ ) so eingeführt [175,186], daß dadurch die Größenverhältnisse soweit möglich egalisiert werden ( $\kappa^4 = 12(1 - \nu^2)$ ):

$$\begin{aligned} \alpha_{\langle \alpha\beta \rangle} &= \frac{t^2}{L_1 L_2} \hat{\alpha}_{\alpha\beta}, & n_{\langle \alpha\beta \rangle} &= \frac{Et^3}{L_1 L_2} \hat{n}_{\alpha\beta}, \\ \beta_{\langle \alpha\beta \rangle} &= \frac{t}{L_1 L_2} \hat{\beta}_{\alpha\beta}, & m_{\langle \alpha\beta \rangle} &= \frac{Et^4}{L_1 L_2} \frac{1}{\kappa^2} \hat{m}_{\alpha\beta}, \\ u_{\langle \alpha \rangle} &= \frac{t^2}{L_2} \hat{u}_{\alpha}, & p_{\langle \alpha \rangle} &= \frac{Et^3}{L_1^2 L_2} \hat{p}_{\alpha}, \\ u_{\langle 3 \rangle} &= \frac{L_1 t}{L_2} \kappa^2 \hat{u}_3, & p_{\langle 3 \rangle} &= \frac{Et^4}{L_1^3 L_2} \frac{1}{\kappa^2} \hat{p}_3, \\ \psi_{\langle 3 \rangle} &= \frac{Et^3}{L_2} L_1 \hat{\psi}_3, & \psi_{\langle \alpha \rangle} &= \frac{Et^4}{L_2} \frac{1}{\kappa^2} \hat{\psi}_{\alpha}, \\ z_1 &= L_1 \hat{x}, & z_2 &= L_2 \hat{y}, \\ \underline{F} &= \frac{1}{Et} \hat{\underline{F}}, & \underline{F}^{-1} &= \frac{Et}{1-\nu^2} \hat{\underline{F}}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

### 4.1.3. Finite-Element Approximation

Nach dem Konzept des Finite-Element Verfahrens wird ein aktuelles Kontinuum als eine Ansammlung diskreter Strukturelemente idealisiert. Die Vereinigung von  $n_e$  Elementen  $F^j$  bildet also das Definitionsgebiet  $F = \bigcup_{j=1}^{n_e} F^j$ . Das bedeutet bei finiten Verfahren, die auf der Extremwertbestimmung von Funktionalen  $I_p(\underline{u})$  beruhen:

Das Funktional  $I_p(\underline{u})$  wird als Summe der Funktionale der einzelnen Elemente  $I_p^j(\underline{u})$  berechnet (direkte Methode [187]).

In jedem dieser Elemente gilt für eine Approximation des Verschiebungsfeldes  $\underline{u}_h^j$  (für Spannungsfunktionen ganz äquivalent) formal gleich den globalen Ansätzen (4.1.8):

$$\underline{u}_h^j(\xi) = \underline{\varphi}_h^j(\xi) \cdot \underline{c}^{<n>j}, \quad \Sigma_j. \quad (4.1.24)$$

Dabei enthält entsprechend der für konforme Ansätze notwendigen Stetigkeit an den Elementgrenzen der Vektor der Freiwerte  $\underline{c}^{<n>j}$  die Knoten-Verschiebungen bzw. Verschiebungsableitungen, die *verallgemeinerten Verschiebungen*. Hier muß  $u_\alpha$  über die Elementgrenzen hinweg stetig und  $u_3$  stetig in der ersten Ableitung sein [173]. Also ist bei Rechteckselementen (bzgl. Dreieckselementen siehe [173,188,189,190])

$$\underline{c}^{<n>jT} = (\underline{u}_1^1; \underline{u}_1^2; \underline{u}_1^3; \underline{u}_1^4; \underline{u}_2^1; \dots; \underline{u}_3^1; \underline{u}_{3,x}^1; \underline{u}_{3,y}^1; \underline{u}_{3,xy}^1; \dots; \underline{u}_{3,xy}^4)$$

(4.1.25)

ein Vektor mit 24 Freiwerten. Die zugehörigen lokalen Koordinatenfunktionen mit den lokalen Koordinaten  $\xi \in [0, h_x] \times [0, h_y]$  sind in

$$\underline{\varphi}_h^j(\xi) = \begin{pmatrix} \underline{H}^{1T}(\xi) & \underline{0}^T & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{H}^{1T}(\xi) & \underline{0}^T \\ \underline{0}^T & \underline{0}^T & \underline{H}^{4T}(\xi) \end{pmatrix} \quad (4.1.26)$$

mit

$$\underline{H}^{1T}(\xi) = (f_1^{11}, f_2^{11}, f_3^{11}, f_4^{11}), \quad (4.1.27a)$$

$$\underline{H}^{4T}(\xi) = (f_1^{41}, f_1^{42}, f_1^{43}, f_1^{44}, f_2^{41}, \dots, f_4^{44}) \quad (4.1.27b)$$

zusammengefaßt und haben die Eigenschaften [173], außerhalb des Gebietes  $F^j$  eines Elements identisch zu verschwinden, die Bedingungen  $\partial_{k f_i}^{n n l}(\xi^j) = \delta_i^j \delta_k^1$  zu erfüllen. Dabei ist  $\partial_1^1 = \underline{\delta}^1 = (1)$  und  $\delta_k^4$  die k-te Komponente von  $\underline{\delta}^4 = (1, \partial_x, \partial_y, \partial_{xy})^T$ . Als Beispiel zur Konstruktion solcher Basisfunktionen  $f_i^{n l}(\xi^i)$  sind hier HERMITE-Polynome vom Grad eins bzw. drei gewählt [37,191,192]:

Mit in  $0 \leq \xi \leq h$  definierten linearen und kubischen Polynomen (siehe Bild 5)

$$H_{00}^1(\xi) = 1 - \frac{\xi}{h}, \quad H_{10}^1(\xi) = \frac{\xi}{h} \quad (4.1.28)$$

$$H_{00}^3(\xi) = 1 - 3\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + 2\left(\frac{\xi}{h}\right)^3, \quad H_{10}^3(\xi) = 3\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{\xi}{h}\right)^3, \quad (4.1.29a)$$

$$H_{01}^3(\xi) = h\left[\left(\frac{\xi}{h}\right) - 2\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{h}\right)^3\right], \quad H_{11}^3(\xi) = h\left[-\left(\frac{\xi}{h}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{h}\right)^3\right], \quad (4.1.29b)$$

können die in (4.1.27) allgemein definierten Vektoren  $\underline{H}^1$  bzw.  $\underline{H}^4$  aus bilinearen bzw. bikubischen HERMITE-Polynomen gebildet werden [183]:

$$\underline{H}^1(\xi) = \begin{pmatrix} H_{00}^1(\xi)H_{00}^1(\eta) \\ H_{00}^1(\xi)H_{10}^1(\eta) \\ H_{10}^1(\xi)H_{00}^1(\eta) \\ H_{10}^1(\xi)H_{10}^1(\eta) \end{pmatrix}, \quad \underline{H}^4(\xi) = \begin{pmatrix} H_{00}^3(\xi)H_{00}^3(\eta) \\ H_{01}^3(\xi)H_{00}^3(\eta) \\ H_{00}^3(\xi)H_{01}^3(\eta) \\ H_{01}^3(\xi)H_{01}^3(\eta) \\ H_{00}^3(\xi)H_{10}^3(\eta) \\ H_{01}^3(\xi)H_{10}^3(\eta) \\ H_{00}^3(\xi)H_{11}^3(\eta) \\ H_{01}^3(\xi)H_{11}^3(\eta) \\ H_{10}^3(\xi)H_{00}^3(\eta) \\ H_{11}^3(\xi)H_{00}^3(\eta) \\ H_{10}^3(\xi)H_{01}^3(\eta) \\ H_{11}^3(\xi)H_{01}^3(\eta) \\ H_{10}^3(\xi)H_{10}^3(\eta) \\ H_{11}^3(\xi)H_{10}^3(\eta) \\ H_{10}^3(\xi)H_{11}^3(\eta) \\ H_{11}^3(\xi)H_{11}^3(\eta) \end{pmatrix}. \quad (4.1.30)$$

Zur Veranschaulichung der weiteren Schritte bis zur Erstellung der Steifigkeitsmatrix  $\underline{R}_h$  wird im weiteren der einfachste und damit übersichtlichste Fall, eine Kreiszylinderschale betrachtet. Dafür kann ein orthogonales Hauptkrümmungssystem, d. h.  $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$  und  $b_{\alpha\beta} = 0$  außer z. B.  $b_{22} = 1/R$ , gewählt werden [175,193]. Explizit wird in diesem Elementansatz der mit (4.1.23) dimensionslose Zusammenhang (2.2.39a) zwischen den Verschiebungen und den daraus resultierenden Verzerrungen ( $\epsilon^Q \equiv 0$ ):

$$\begin{aligned}
 \tilde{z}_H^j &= \tilde{D}^j \cdot \tilde{N}^j \cdot \tilde{z}_H^j \\
 &= \tilde{H}^j \cdot \tilde{z}_H^j =
 \end{aligned}
 \left( \begin{array}{ccc}
 \tilde{H}_{,1}^{1T} & \tilde{\rho}^T & \tilde{\rho}^T \\
 \tilde{\rho}_2^T & \tilde{H}_{,2}^{1T} & -\rho_1 \tilde{H}_{,1}^{4T} \\
 e \tilde{H}_{,2}^{1T} & \tilde{H}_{,1}^{1T} & \tilde{\rho}^T \\
 \tilde{\rho}_2^T & \tilde{\rho}^T & -\kappa \tilde{H}_{,11}^{2,4T} \\
 \tilde{\rho}_2^T & -2\rho_2 e \tilde{H}_{,2}^{1T} & \rho_2 \tilde{H}_{,2}^{4T} \\
 \tilde{\rho}_2^T & -2\rho_2 \tilde{H}_{,1}^{1T} & -\kappa e \tilde{H}_{,22}^{2,4T} \\
 \tilde{\rho}_2^T & -2\rho_2 \tilde{H}_{,1}^{1T} & -2e \kappa \tilde{H}_{,12}^{2,4T}
 \end{array} \right)
 \left( \begin{array}{c}
 1 \\
 u_1 \\
 2 \\
 u_1 \\
 \vdots \\
 1 \\
 u_2 \\
 \vdots \\
 1 \\
 u_3 \\
 1 \\
 u_{3,x} \\
 \vdots \\
 4 \\
 u_{3,xy}
 \end{array} \right)
 \quad (4.1.31)$$

Dabei sind  $\rho_1 = \kappa^2 L_1^2 / Rt$ ,  $\rho_2 = t/R$  und  $\rho_3 = L^2 \kappa^2 / R^2$  drei dimensionslose Krümmungsgrößen und  $e = L_1 / L_2$  eine Verhältniszahl der Abmessungen der Schalenmittelfläche.

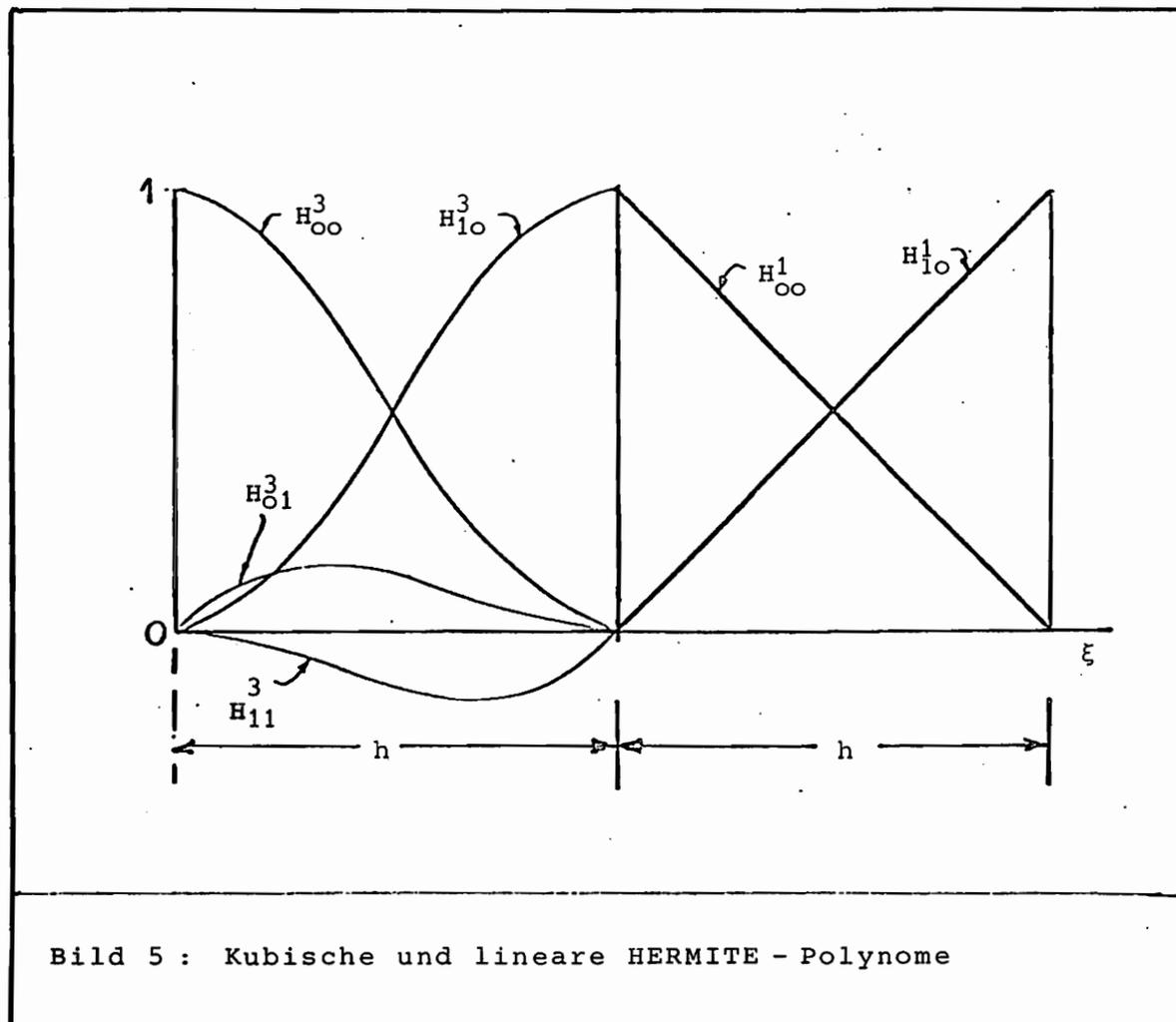


Bild 5 : Kubische und lineare HERMITE - Polynome

Die daraus resultierende Element-Steifigkeitsmatrix

$$\underline{R}_h^e = \frac{Et^5}{L_1 L_2} \frac{1}{1-\nu^2} \int_{\hat{F}_e} \underline{H}^T \cdot \hat{\underline{K}}^{-1} \cdot \underline{H} dF \quad (4.1.32a)$$

$$= \frac{Et^5}{L_1 L_2} \frac{1}{1-\nu^2} \left[ \begin{array}{l} \underline{H}_{\sim,1}^1 \cdot \underline{H}_{\sim,1}^{1T} \quad \nu e \underline{H}_{\sim,1}^1 \cdot \underline{H}_{\sim,2}^{1T} \quad -\nu \rho_1 \underline{H}_{\sim,1}^1 \cdot \underline{H}^{4T} \\ + e^2 \frac{(1-\nu)}{2} \underline{H}_{\sim,2}^1 \cdot \underline{H}_{\sim,2}^{1T} \quad + e \frac{(1-\nu)}{2} \underline{H}_{\sim,2}^1 \cdot \underline{H}_{\sim,1}^{1T} \\ (1 + \frac{\rho_2^2}{3}) \cdot \quad -e(\rho_1 + \frac{\rho_2 \rho_3}{6}) \underline{H}_{\sim,2}^1 \cdot \underline{H}^{4T} \\ [e^2 \underline{H}_{\sim,2}^1 \cdot \underline{H}_{\sim,2}^{1T} \quad + \kappa^2 e \frac{\rho_2}{6} [(1-\nu) \underline{H}_{\sim,1}^1 \cdot \underline{H}_{\sim,12}^{4T} \\ + \frac{(1-\nu)}{2} \underline{H}_{\sim,1}^1 \cdot \underline{H}_{\sim,1}^{1T}] + \underline{H}_{\sim,2}^1 \cdot (\nu \underline{H}_{\sim,11}^{4T} + e^2 \underline{H}_{\sim,22}^{4T})] \\ \text{symmetrisch} \quad (\rho_1^2 + (\frac{\rho_3}{12}) \underline{H}_{\sim}^4 \cdot \underline{H}^{4T} \\ - \frac{\kappa^2}{12} \rho_3 [\underline{H}_{\sim}^4 \cdot (e^2 \underline{H}_{\sim,22}^{4T} + \nu \underline{H}_{\sim,11}^{4T}) \\ + (e^2 \underline{H}_{\sim,22}^4 + \nu \underline{H}_{\sim,11}^4) \cdot \underline{H}_{\sim}^{4T}] \\ + \frac{\kappa^4}{12} [\underline{H}_{\sim,11}^4 \cdot (\underline{H}_{\sim,11}^{4T} + \nu e^2 \underline{H}_{\sim,22}^{4T}) \\ + e^2 \underline{H}_{\sim,22}^4 \cdot (e^2 \underline{H}_{\sim,22}^{4T} + \nu \underline{H}_{\sim,11}^{4T}) \\ + 2(1-\nu) e^2 \underline{H}_{\sim,12}^4 \cdot \underline{H}_{\sim,12}^{4T}] \end{array} \right] \quad (4.1.32b)$$

ist bei diesem einfachen Fall, d. h. der einfachen Metrik und Krümmung der Schale, durch einige grundlegende Integrale erstellbar. Zur Vermeidung unnötiger Fehler in den Ausgangsdaten sollte die Möglichkeit einer exakten analytischen Integration ausgenutzt werden. So ist für die bilinearen Ansatzfunktionen  $\underline{H}_{\sim}^1$

$$\int_0^1 \int_0^1 \underline{H}_{\sim,1}^1 \cdot \underline{H}_{\sim,1}^{1T} d\xi d\eta = \frac{h_y}{h_x} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ & & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \text{symm.} & & & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (4.1.33)$$

leicht zu ermitteln. Mit Einführung der dieser Matrix zugrunde liegenden Integrale über nur eine Variable

$$\underline{H1}^x := \int_0^{h_x} \begin{pmatrix} H_{00}^1(\xi)H_{00}^1(\xi) & H_{00}^1(\xi)H_{10}^1(\xi) \\ H_{10}^1(\xi)H_{00}^1(\xi) & H_{10}^1(\xi)H_{10}^1(\xi) \end{pmatrix} d\xi = h_x \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad (4.1.34)$$

$$\underline{HD1D1}^x := \int_0^{h_x} \begin{pmatrix} H_{00}^{1'}(\xi)H_{00}^{1'}(\xi) & H_{00}^{1'}(\xi)H_{10}^{1'}(\xi) \\ H_{10}^{1'}(\xi)H_{00}^{1'}(\xi) & H_{10}^{1'}(\xi)H_{10}^{1'}(\xi) \end{pmatrix} d\xi = \frac{1}{h_x} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1.35)$$

ergibt sich die Matrix (4.1.33) einfacher

$$\int_0^{h_x} \int_0^{h_y} \underline{\tilde{H}}_{,1}^1 \cdot \underline{\tilde{H}}_{,1}^{1T} d\xi d\eta = \begin{pmatrix} HD1D1_{11}^x \cdot \underline{H1}^y & HD1D1_{12}^x \cdot \underline{H1}^y \\ HD1D1_{21}^x \cdot \underline{H1}^y & HD1D1_{22}^x \cdot \underline{H1}^y \end{pmatrix}. \quad (4.1.36)$$

Außerdem erhält man ohne weitere Rechnung sofort auch

$$\int_0^{h_x} \int_0^{h_y} \underline{\tilde{H}}_{,2}^1 \cdot \underline{\tilde{H}}_{,2}^{1T} d\xi d\eta = \begin{pmatrix} H1_{11}^x \cdot \underline{HD1D1}^y & H1_{12}^x \cdot \underline{HD1D1}^y \\ H1_{21}^x \cdot \underline{HD1D1}^y & H1_{22}^x \cdot \underline{HD1D1}^y \end{pmatrix}. \quad (4.1.37)$$

Ähnlich lassen sich die übrigen Untermatrizen, auch die mit den bikubischen Ansätzen  $\underline{\tilde{H}}^4$ , also  $\underline{\tilde{H}}_{,1}^1 \cdot \underline{\tilde{H}}^{4T}$  oder  $\underline{\tilde{H}}_{,11}^4 \cdot \underline{\tilde{H}}_{,11}^{4T}$  aus einfachen Grundintegralen zusammensetzen (siehe Anhang A5). Diese exakte analytische Erstellung der Steifigkeitsmatrix  $\underline{R}_h^e$  kann allerdings nur bei koordinatenunabhängiger Metrik und konstanter Krümmung der Schale durchgeführt werden. In anderen Fällen wird  $\underline{R}_h^e$  i. a. nur numerisch bestimmt werden können.

Die *Flexibilitätsmatrix*  $\underline{Q}_h$  unterscheidet sich in ihrer Definition von  $\underline{R}_h$  dadurch, daß anstelle von  $\underline{K}^{-1}$  die die konstitutiven Beziehungen zwischen den modifizierten Größen  $\underline{\xi}$  und  $\underline{\zeta}$  beinhaltende Operatormatrix  $\underline{B} \cdot \underline{K} \cdot \underline{B}^T$

zu verwenden ist. Für Schalen mit konstanten Krümmungen und koordinaten-unabhängigem Metriktensor sind wegen des sonst gleichen formalen Aufbaus bei einem Spannungsfunktionenansatz die gleichen Grundintegrale notwendig, die bereits zur Erstellung der Steifigkeitsmatrix benötigt werden. Weitere Einzelheiten, z. B. bezüglich der weiteren Organisation der Berechnungen und dem Zusammenbau der Element-Matrizen zur Gesamt-Matrix, werden hier vermieden und sind den entsprechenden Spezialveröffentlichungen zu entnehmen [189,173, u.a.].

Die wesentlichen Randbedingungen, die die für die beiden komplementären Funktionale  $I_p(\tilde{u})$  und  $I_{pc}(\tilde{\sigma}(\psi))$  zulässigen Ansätze  $\tilde{u}$  bzw.  $\tilde{\sigma}(\psi)$  zu erfüllen haben, lassen sich bei Finite-Element Ansätzen ohne Schwierigkeit durch Vorgabe der entsprechenden Werte in den Randknoten erfüllen. So ergeben sich analog den Bedingungen an die globalen Ansätze z. B. für Knoten  $x^j$  auf einem Rand, der mit der Koordinatenlinie  $a_1$  zusammenfällt, bei bilinearen Ansätzen für  $u_\alpha$  bzw.  $\psi_\alpha$  und bikubischen Hermite-Polynomen für  $u_3$  bzw.  $\psi_3$  folgende Festlegungen:

Randlagerung	geometrische Bedingungen	statische Bedingungen	
eingespannt	$u_\alpha^j = u_3^j = 0,$ $u_{3,x}^j = u_{3,y}^j = 0,$ $u_{3,xy}^j = 0$	keine	(4.1.38a)
frei drehbar, tangential verschieblich	$u_2^j = 0,$ $u_3^j = u_{3,x}^j = 0,$	$\psi_\alpha^j = 0$ $\psi_3^j = \psi_{3,xy}^j = 0,$	(4.1.38b)
frei drehbar, normal verschieblich	$u_1^j = 0,$ $u_3^j = u_{3,x}^j = 0,$	$\psi_1^j = 0$ $\psi_3^j = \psi_{3,x}^j = 0,$	(4.1.38c)
frei	keine	$\psi_\alpha^j = 0$ $\psi_{3,x}^j = \psi_{3,y}^j = \psi_{3,xy}^j = 0.$	(4.1.38d)

Der Spezialfall der finiten Approximation singularer Zustände, der auch bei der punktwisen Fehlereingrenzung (Abschnitt 1.4. und 4.3.) zu lösen ist,

bedarf bei Finite-Element Ansätzen besonderer Überlegungen.

Der meistens eingeschlagene Weg, auf eine "beste" Verteilung der Elemente in der Umgebung einer Singularität zu achten [194], erhöht den Aufwand und bringt trotzdem i. a. nicht "beste" Konvergenz. Der Ausweg, die Berücksichtigung von Funktionen mit der korrekten Singularität [195] ist in Verbindung mit dem Finite-Element Verfahren auf zweierlei Weise möglich. Es kann, wie bereits angedeutet, die singuläre Funktion als globaler Ansatz zusammen mit den Finite-Element Ansätzen verwendet werden [132]. Dies ist am einfachsten (und wird bei den Berechnungen in dieser Arbeit praktiziert, siehe Abschnitt 4.3.), hat jedoch den Nachteil, daß der Einfluß dieser Singularität bis an den Außenrand der Schale reicht, an dem diese Funktionen geometrischen bzw. statischen Bedingungen angepaßt werden müssen. Eine Beschränkung dieser Ansätze auf die unmittelbare Nachbarschaft der singulären Punkte läge näher an der Realität [196] und wird deshalb sicher die Konvergenz der Ansätze verbessern. Ein Versuch mit einem Verschiebungsansatz und der Berücksichtigung des korrekten singulären Verhaltens der Normalverschiebung  $u_3$  infolge einer Einzellast  $p_E^3$  bestätigt das auch [197], ist jedoch für die direkte Verwendung bei der punktweisen Eingrenzung noch nicht herangezogen worden. Ein entsprechendes Vorgehen zur Ermittlung einer statischen Approximation über auf ein Element beschränkte singuläre Spannungsfunktionen ist sicher auch möglich [198].

Die Verwendung der Finite-Element Methode hat gegenüber der Approximation mit globalen Ansätzen Vorteile, aber auch einige Nachteile. Beim RITZ-Verfahren mit globalen Koordinatenfunktionen ist die Empfindlichkeit des entstehenden algebraischen Systems und auch die Brauchbarkeit der resultierenden Approximationen ganz von der geeigneten Wahl dieser Funktionen abhängig. Ein relativ schwieriges Problem vor allem bei komplizierten berandeten Gebieten, ist dabei die Erfüllung der wesentlichen Randbedingungen. Ein Vorteil ist dagegen die geringe Zahl der Gleichungen, die erstellt und gelöst werden müssen. Genau umgekehrt verhält es sich bei den lokal definierten Finite-Element Ansätzen. Die Basisfunktionen können sehr einfach auch bei irregulären Gebieten allen möglichen Randbedingungen angepaßt werden, und die entstehenden Gleichungssysteme sind auch wegen der Bandstruktur im allgemeinen gut konditioniert [199]. Der einzige Nachteil ist die große Zahl der Gleichungen, die erstellt und gelöst werden müssen. So hat z. B. der angegebene Ansatz (4.1.26-30), der einfacher bei Rechteckelementen kaum möglich ist, bereits  $l = 6$  Knotenfreiwerte, so daß bei einer Unterteilung in  $n_e = n_y \cdot n_y$  Elemente die

Gesamtzahl der Unbekannten bereits  $l(n_x + 1)(n_y + 1)$ , abzüglich etwa vorgegebener Randwerte, beträgt. Dabei ist noch nicht einmal Stetigkeit der Verzerrungen bzw. Schnittgrößen an den Elementgrenzen erreicht.

#### 4.1.4. Bereichsweise Ansätze mit B-Spline-Funktionen

Eine Alternative zu den beiden bereits dargelegten Möglichkeiten, finite Näherungen zu bestimmen, kann die Verwendung von Splinefunktionen, insbesondere der hier betrachteten *Basis-(B-)Splinefunktionen* sein [200-208].

Zur Konstruktion des Näherungsansatzes ist wie beim Finite-Element Verfahren der ganze Definitionsbereich  $F$  durch eine Wahl von Knotenpunkten  $(x_i, y_j)$  in rechteckige Elemente einzuteilen. Als Unterschied ist anzumerken, daß es möglich ist, durch die Vorgabe bestimmter Vielfachheiten einer Knoten-Koordinate  $x_i$  oder  $y_j$  die Stetigkeit der Approximationsfunktion an dieser Stelle in  $x$  bzw.  $y$  zu beeinflussen. Die Koordinatenfunktionen  $\varphi_{\alpha 1}$  bzw.  $\varphi_{31}$  eines RITZ-Verfahrens für das Verschiebungsfeld  $u_h(x)$  sind zur Erreichung stetiger Verzerrungsgrößen biquadratisch für  $u_\alpha$  und bikubisch für  $u_3$ , oder zur Vereinfachung einheitlich für alle Komponenten bikubisch anzusetzen [206]:

$$\varphi_3^{\alpha 1}(x) = \varphi_{ij}(x; y) := M_4(x; x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}) M_4(y; y_j, \dots, y_{j+4}). \quad (4.1.39)$$

Dabei sind die eindimensionalen Basis-Splinefunktionen  $(n-1)$ ten Grades

$$M_n(x, \underbrace{x_1, \dots, x_1}_{\alpha_1}, \dots, \underbrace{x_k, \dots, x_k}_{\alpha_k}) := \langle \underbrace{x_1, x_1, \dots, x_k}_{n+1} \rangle \quad (4.1.40)$$

durch die Rekursionsformel für dividierte Differenzen [209] mit einer zusätzlichen Regel für  $(\alpha_i = r)$ -fache Knoten  $x_i$  definiert:

$$\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle := \frac{1}{x_0 - x_n} (\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle - \langle x_1, \dots, x_n \rangle), \quad (4.1.41a)$$

$$\langle \underbrace{x_i, x_i, \dots, x_i}_{r\text{-fach}} \rangle = \frac{1}{(r-1)!} \frac{\partial^{r-1}}{\partial x_i^{r-1}} \langle x_i \rangle = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} (x_i - x)_+^{n-r}. \quad (4.1.41b)$$

Die Grundfunktionen dieser Basis-Splinefunktionen  $(n-1)$ ten Grades sind abgebrochene Potenzfunktionen

$$\langle x_i \rangle : n(x_i - x)_+^{n-1} := \begin{cases} n(x_i - x)^{n-1} & x_i \geq x \\ \text{für} & \\ 0 & x_i < x \end{cases}. \quad (4.1.42)$$

Jede Basis-Splinefunktion ist nur innerhalb des Bereichs der zugehörigen  $n + 1$  Knoten  $x_v \leq x_{v+1} \leq \dots \leq x_{v+n}$ ,  $x_v < x_{v+n}$ , von Null verschieden (siehe Bild 6). Je nach der Vielfachheit  $\alpha_i$  eines Knotenpunktes  $x_i$  ist die Funktion dort aus  $C^{n-1-\alpha_i}$ . Eine kubische B-Splinefunktion mit nur einfachen Knoten im gleichen Abstand  $h$  ergibt sich nach (4.1.40/41) zu [206]:

$$M_4(x; x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+4}) = \frac{h^{-4}}{6} [(x_i - x)_+^3 - 4(x_{i+1} - x)_+^3 + 6(x_{i+2} - x)_+^3 - 4(x_{i+3} - x)_+^3 + (x_{i+4} - x)_+^3] \quad (4.1.43)$$

Diese Funktion sowie ihre erste und zweite Ableitung nimmt in den beiden äußeren Knotenpunkten  $x_i$  bzw.  $x_{i+4}$  den Wert Null an. Auf dem Rand  $C$  ist i. a. anderes Verhalten wiedergegeben; dies kann durch Splinefunktionen mit mehrfachem Randknoten erreicht werden [206]. Mit für alle drei Komponenten des Verschiebungsfeldes  $\underline{u}$  gleichartigen Ansätzen aus  $M_i(x) = M_4(x; x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+4})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_x$ , bzw.  $M_j(y) = M_4(y; y_j, \dots, y_{j+4})$ ,  $j = 1, \dots, n_y$ , also

$$u_{kh}(x, y) = c_k^{ij} M_i(x) M_j(y), \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.1.44)$$

ergeben sich ähnlich (4.1.31) die nach (4.1.23) dimensionslosen Beziehungen (2.2.39) zu den Verzerrungsgrößen in einem orthonormalen Hauptkrümmungssystem, z. B. einer Kreiszylinderschale

$$\hat{\underline{\epsilon}}_h = \hat{\underline{D}} \cdot \hat{\underline{N}} \cdot \hat{\underline{u}}_h = \hat{\underline{H}} \cdot \hat{\underline{u}}_h = \begin{pmatrix} M'_i M'_j & 0 & 0 \\ 0 & M_i M'_j & -\rho_1 M_i M_j \\ e M_i M'_j & M'_i M_j & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa^2 M''_i M_j \\ 0 & -2\rho_2 e M_i M'_j & \rho_3 M_i M_j \\ 0 & -2\rho_2 M'_i M_j & -\kappa^2 e^2 M_i M''_j \\ 0 & -2\rho_2 M'_i M'_j & -2\kappa^2 e M'_i M'_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{ij} \\ c_2^{ij} \\ c_3^{ij} \end{pmatrix} \quad (4.1.45)$$

Die nach (4.1.32a) zu berechnende Steifigkeitsmatrix  $\underline{R}_h$  läßt sich wie beim Finite-Element Ansatz aus einfachen Grundintegralen erstellen. Mit der Einführung [206] von

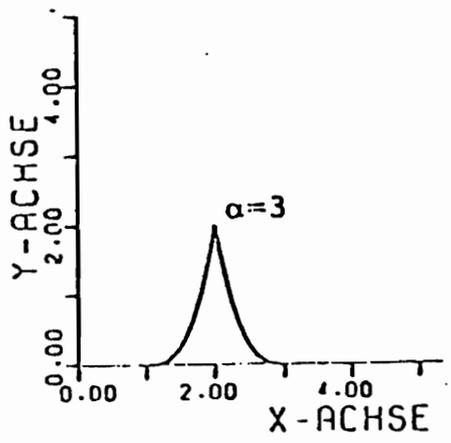
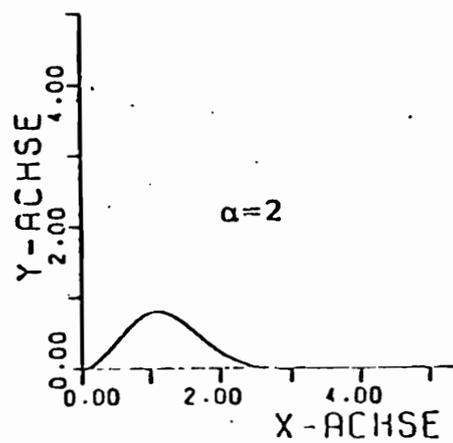
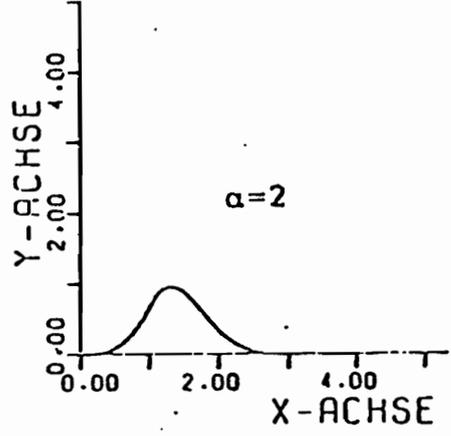
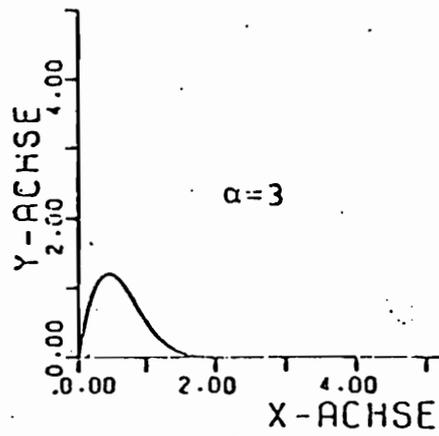
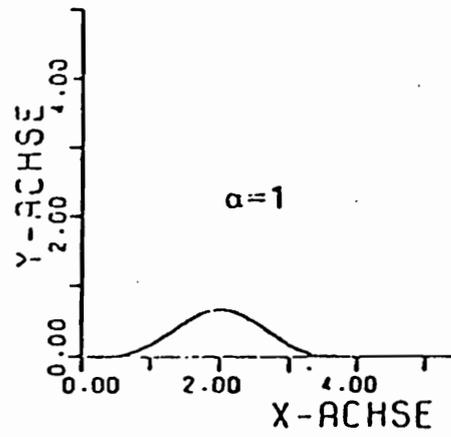
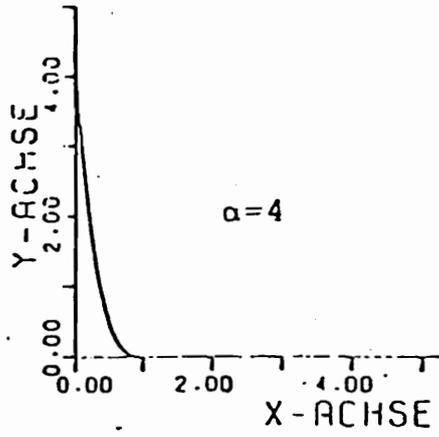


Bild 6 : Kubische Basis-Splinefunktionen  
mit Knoten der Vielfachheit  $\alpha$

$$\begin{aligned}
 A_{ik} &= \int M_i(x) M_k(x) dx, & B_{ik} &= \int M_i'(x) M_k'(x) dx, \\
 C_{ik} &= \int M_i(x) M_k''(x) dx, & D_{ik} &= \int M_i''(x) M_k''(x) dx, \\
 E_{ik} &= \int M_i(x) M_k'(x) dx, & F_{ik} &= \int M_i'(x) M_k''(x) dx,
 \end{aligned} \tag{4.1.46}$$

ist das gesamte durch die Minimierung des Funktionals  $i_p(u)$  (2.2.38) entstehende Gleichungssystem ( $i, k = 1, 2, \dots, n_x$ ;  $j, l = 1, 2, \dots, n_y$ ):

$$\begin{aligned}
 [B_{ik} A_{jl} + \frac{(1-\nu)}{2} e^2 A_{ik} B_{jl}] c_1^{ij} + e[\nu E_{ik} E_{lj} + \frac{(1-\nu)}{2} E_{ki} E_{jl}] c_2^{ij} \\
 - \nu \rho_1 E_{ik} A_{jl} c_3^{ij} = p_{kl}^1, \tag{4.1.47a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e[\nu E_{ki} E_{jl} + \frac{(1-\nu)}{2} E_{ik} E_{lj}] c_1^{ij} + (1 + \frac{\rho_2^2}{3}) [e^2 A_{ik} B_{jl} + \frac{(1-\nu)}{2} B_{ik} A_{jl}] c_2^{ij} \\
 + [e \kappa^2 \frac{\rho_2}{6} (A_{ik} F_{lj} + \nu C_{ki} E_{jl} + (1-\nu) B_{ik} E_{lj}) - (\rho_1 + \frac{\rho_2 \rho_3}{6}) A_{ik} E_{jl}] c_3^{ij} = p_{kl}^2, \tag{4.1.47b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\nu \rho_1 E_{ki} A_{lj} c_1^{ij} + [e \kappa^2 \frac{\rho_2}{6} (A_{ki} F_{jl} + \nu C_{ik} E_{jl} + (1-\nu) B_{ki} E_{jl}) - (\rho_1 + \frac{\rho_2 \rho_3}{6}) A_{ki} E_{jl}] c_2^{ij} \\
 + [(\rho_1^2 + \frac{\rho_2^2}{12}) A_{ik} A_{jl} - \rho_3 \frac{\kappa^2}{12} (2A_{ik} C_{lj} + (C_{ik} + C_{ki}) A_{jl}) \\
 + \frac{\kappa^4}{12} (2(1-\nu) e^2 B_{ik} B_{jl} + e^4 A_{ik} D_{jl} + A_{jl} D_{ik} + \nu e^2 (C_{ik} + C_{ki}) C_{lj})] c_3^{ij} = p_{kl}^3. \tag{4.1.47c}
 \end{aligned}$$

Es hat wie auch die in (4.1.46) eingeführten Hilfsmatrizen wegen der bereichsweisen Definition der B-Splinefunktionen Bandstruktur. Für Knoten mit gleichem Abstand  $h$  sind diese Hilfsmatrizen einfach analytisch zu berechnen (siehe Anhang A6). In (4.1.47) sind als rechte Seite die Lastvektoren  $p_{kl}^i$  eingeführt worden; sie sind z. B. bei Fällen ohne vorgeschriebene Randkräfte ( $\underline{V}^T \cdot \underline{\sigma}^R \equiv \underline{0}$ ) definiert zu:

$$p_{kl}^i = (1 - \nu^2) \int_{\hat{F}} \hat{p}^i(\hat{x}, \hat{y}) M_k(\hat{x}) M_l(\hat{y}) d\hat{x} d\hat{y}. \tag{4.1.48}$$

Die Erfüllung wesentlicher homogener Randbedingungen (siehe Abschnitt 4.1.2/3) ist hier einfach dadurch zu erreichen, daß am Rand B-Splinefunktionen mit passender Vielfachheit des Randknotens verwendet werden [206]; so ist z. B. bei einem Verschiebungsansatz nur an einem freien Rand ein B-Spline mit vierfachem Randknoten zu benützen. Spannungsfunktionen-Ansätze [205] zur näherungsweise Bestimmung des

komplementären Funktionalen  $I_{pc}(\tilde{\sigma})$  (2.2.41) können außer am Rand  $C$  die gleichen Splinefunktionen benutzen. Sie führen auch, jedenfalls bei konstanter Metrik und Krümmung der Schale, zu den gleichen grundlegenden Matrizen (4.1.46).

Der Vorteil bei der Verwendung dieser Basis-Spline Funktionen liegt in dem wegen ihrer günstigen Stetigkeitseigenschaften besseren Approximationsverhalten [207], insbesondere der höheren Konvergenzgeschwindigkeit. Damit verbunden ist eine weit geringere Zahl von Freiwerten als beim Finite-Element Verfahren notwendig, um gleiche oder bessere Ergebnisse zu erzielen. Dabei ist die Koeffizientenmatrix, Steifigkeits- oder Flexibilitätsmatrix des Systems nicht wesentlich stärker besetzt.

Der Nachteil der B-Splinefunktionen, nicht direkt Freiwerte des Näherungsansatzes interessierenden Zustandsgrößen zuzuordnen, ist jedem "normalen" RITZ-Ansatz eigen und ist nicht wesentlich. Es ist kein großer Aufwand, nach Bestimmung des Lösungsvektors  $(c_1^{ij}, c_2^{ij}, c_3^{ij})^T$  den Einfluß aller Koordinatenfunktionen auf eine Zustandsgröße zu summieren. So ist z. B. eine Verschiebungskomponente im Knotenpunkt  $(x_{i+2}, y_{j+2})$  (Indizierung der Knoten entsprechend (4.1.39)) leicht zu bestimmen, bei einem bikubischen B-Spline-Ansatz mit gleichmäßigem Knotenabstand  $h$  durch:

$$u_1(x_{i+2}; y_{j+2}) = h^{-2} \left[ \frac{1}{6}; \frac{2}{3}; \frac{1}{6} \right] \begin{pmatrix} c_1^{i-1, j-1} & c_1^{i-1, j} & c_1^{i-1, j+1} \\ c_1^{i, j-1} & c_1^{i, j} & c_1^{i, j+1} \\ c_1^{i+1, j-1} & c_1^{i+1, j} & c_1^{i+1, j+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad (4.1.49)$$

#### 4.2. Finite Formulierung der Eingrenzungen

Die Extremalaussagen der zueinander komplementären Funktionale  $I_p(\tilde{u})$  (2.2.38) bzw.  $I_{pc}(\tilde{\sigma})$  (2.2.41) ergeben in finiten, durch eine endliche Zahl von Ansatzfunktionen mit globalen oder auf Elemente bzw. auf Bereiche beschränktem Definitionsbereich erzeugten, Unterräumen  $H_h^\sim$  bzw.  $H_h^\approx$  der zulässigen Zustandsräume  $H^\sim$  bzw.  $H^\approx$  finite Näherungen  $u_h^\sim$  bzw.  $\sigma_h^\approx$ . Gleichzeitig liefern sie pauschale und bei zusätzlicher Bestimmung passender komplementärer GREEN'scher Näherungszustände auch punktweise Schranken für den Diskretisierungsfehler (siehe Abschnitt 3.2). Hier werden die finiten Gleichungen und Ausdrücke zusammengestellt, die dazu ausgewertet

werden müssen. Dabei wird vor allem darauf geachtet, daß der zusätzliche Aufwand für die Berechnung der Fehlerschranken möglichst klein bleibt.

Werden geometrisch zulässige Ansatzfunktionen (2.2.39, 4.1.8) durch ein entsprechend  $\underline{\varphi}(\underline{x})$  als Diagonalmatrix  $\overset{\circ}{\underline{\varphi}}(\underline{x})$  geschriebenes Verschiebungsfeld  $\overset{\circ}{\underline{u}}(\underline{x})$  ergänzt, um ein a-priori bekanntes, z. B. singuläres Verhalten mit einem Gewicht  $\overset{\circ}{\underline{c}}$  zu berücksichtigen [132]

$$\underline{u}_{\sim h}^{\sim}(\underline{x}) = \underline{\varphi}(\underline{x}) \cdot \overset{\circ}{\underline{c}}^{\langle n \rangle} + \overset{\circ}{\underline{\varphi}}(\underline{x}) \cdot \overset{\circ}{\underline{c}} \quad (4.2.1)$$

ergeben diese entsprechend (3.3.2) als Approximation des Funktionals  $I_p(\underline{u})$  die quadratische Form

$$I_{pn}(\underline{u}_{\sim h}^{\sim}) = \frac{1}{2} \left[ \overset{\circ}{\underline{c}}^{\langle n \rangle T} \cdot (\underline{R}_{-h} \cdot \overset{\circ}{\underline{c}} + \overset{\circ}{\underline{R}}_{-h} \cdot \overset{\circ}{\underline{c}}) + \overset{\circ}{\underline{c}}^T \cdot (\overset{\circ}{\underline{R}}_{-h} \cdot \overset{\circ}{\underline{c}} + \overset{\circ}{\underline{R}}_{-o} \cdot \overset{\circ}{\underline{c}}) \right] - (\underline{p}_{\sim h}^T \cdot \overset{\circ}{\underline{c}}^{\langle n \rangle} + \underline{p}_{\sim o}^T \cdot \overset{\circ}{\underline{c}}) \quad (4.2.2)$$

Dabei ist analog der Definition (3.3.2) der Steifigkeitsmatrix  $\underline{R}_{-h}$  und des Lastvektors  $\underline{p}_{\sim h}$  eingeführt worden:

$$\overset{\circ}{\underline{R}}_{-h} := \int_F (\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\varphi})^T \cdot \underline{K}^{-1} \cdot (\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\varphi}) dF, \quad \overset{\circ}{\underline{R}}_{-o} := \int_F (\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\varphi})^T \cdot \underline{K}^{-1} \cdot (\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\varphi}) dF, \\ \underline{p}_{\sim o} := \int_F \underline{p}^{*T} \cdot \underline{\varphi} dF + \int_{C_p} \underline{g}^{R*T} \cdot \underline{v}^T \cdot \underline{\varphi} ds \quad (4.2.3)$$

Die notwendige Bedingung für einen stationären Wert, das Verschwinden der ersten Variation führt auf das Gleichungssystem

$$\underline{R}_{-h} \cdot \overset{\circ}{\underline{c}}^{\langle n \rangle} + \overset{\circ}{\underline{R}}_{-h} \cdot \overset{\circ}{\underline{c}} - \underline{p}_{\sim h} = \underline{0} \quad (4.2.4a)$$

$$\overset{\circ}{\underline{R}}_{-h}^T \cdot \overset{\circ}{\underline{c}}^{\langle n \rangle} + \overset{\circ}{\underline{R}}_{-o} \cdot \overset{\circ}{\underline{c}} - \underline{p}_{\sim o} = \underline{0} \quad (4.2.4b)$$

dessen Lösungsvektoren  $\overset{\circ}{\underline{c}}^{\langle n \rangle}$  und  $\overset{\circ}{\underline{c}}$  die geometrische Approximation (4.2.1) bestimmen. Der Wert der finiten Näherung (4.2.2) des Funktionals  $I_p(\underline{u})$  ist unter Berücksichtigung dieser Gleichungen (4.2.4) auch durch

$$I_{pn}(\underline{u}_{\sim h}^{\sim}) = -\frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{\underline{c}}^{\langle n \rangle T} \cdot \underline{p}_{\sim h} + \overset{\circ}{\underline{c}}^T \cdot \underline{p}_{\sim o} \right) \quad (4.2.5)$$

gegeben. Ist  $\overset{\circ}{\underline{u}}(\underline{x})$  eine partikuläre Lösung der Grundgleichungen, und liegt damit  $\overset{\circ}{\underline{c}}^T = (1,1,1)$  fest, wird also nicht variiert, reduzieren sich die

Gleichungen (4.2.4) auf

$$\underline{R}_{-h} \cdot \langle \underline{n} \rangle_{\underline{z}^c} = -\underline{R}_{-h}^0 \cdot \underline{z}^c + \underline{p}_{-h} = \underline{p}^0 + \underline{p}_{-h}, \quad (4.2.6)$$

und der Funktionalwert der finiten Näherung auf

$$\begin{aligned} I_{pn}(\underline{u}_{-h}^c) &= -\frac{1}{2} \langle \underline{n} \rangle_{\underline{z}^c}^T \cdot (\underline{p}^0 + \underline{p}_{-h}) + \frac{1}{2} \underline{z}^c{}^T \cdot \underline{R}_0^0 \cdot \underline{z}^c - \underline{p}_0^T \cdot \underline{z}^c \\ &= -\frac{1}{2} \langle \underline{n} \rangle_{\underline{z}^c}^T \cdot (\underline{p}^0 + \underline{p}_{-h}) + I_p(\underline{u}) . \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Finite statisch zulässige (2.2.42) Ansätze aus Spannungsfunktionen (4.1.18) sind häufig, z. B. im Falle inhomogener Gleichgewichtsbedingungen, ebenfalls um einen speziellen Zustand  $\underline{g}^0$ , z. B. entsprechend (1.1.12) um eine Partikularlösung  $-\underline{g}^k$  mit  $\underline{D}^T \cdot \underline{g}^k = \underline{p}^*$  in F, zu ergänzen:

$$\underline{u}_{-h}^c(\underline{x}) = \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\psi}(\underline{x}) + \underline{\varphi}(\underline{x}) \cdot \underline{d}^0 \quad (4.2.8a)$$

$$= \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\varphi}(\underline{x}) \cdot \underline{d}^{\langle n \rangle} + \underline{\varphi}(\underline{x}) \cdot \underline{d}^0 . \quad (4.2.8b)$$

Da auf die Spannungsfunktionen  $\underline{\psi}(\underline{x})$  der gleiche Differentiationsoperator, die Operatormatrix  $\underline{D}$ , wirkt wie auf die Verschiebungsfelder  $\underline{u}(\underline{x})$ , können hierbei in (4.2.8b) auch die gleichen Basisfunktionen  $\underline{\varphi}(\underline{x})$  Verwendung finden. Als Approximation des komplementären Funktionals  $I_{pc}(\underline{g})$  (2.2.41) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} I_{pcn}(\underline{g}_{-h}^c) &= -\frac{1}{2} \langle \underline{n} \rangle_{\underline{z}^c}^T \cdot (\underline{Q}_{-h} \cdot \underline{d}^{\langle n \rangle} + \underline{Q}_{-h}^0 \cdot \underline{d}^0) \\ &\quad + \underline{d}^0{}^T \cdot (\underline{Q}_{-h}^0 \cdot \underline{d}^{\langle n \rangle} + \underline{Q}_{-h}^0 \cdot \underline{d}^0) - (\underline{r}_{-h}^T \cdot \underline{d}^{\langle n \rangle} + \underline{r}_{-h}^T \cdot \underline{d}^0) . \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Hierbei sind den Steifigkeitsmatrizen  $\underline{R}_{-h}$ ,  $\underline{R}_{-h}^0$  und  $\underline{R}_{-h}^0$  sowie Lastvektoren  $\underline{p}_{-h}$  und  $\underline{p}_{-h}^0$  komplementär Flexibilitätsmatrizen  $\underline{Q}_{-h}$ ,  $\underline{Q}_{-h}^0$  und  $\underline{Q}_{-h}^0$  sowie Verückungsvektoren  $\underline{r}_{-h}$  und  $\underline{r}_{-h}^0$  definiert:

$$\begin{aligned} \underline{Q}_{-h} &:= \int_F (\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\varphi})^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{K} \cdot \underline{B}^T \cdot (\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\varphi}) dF , \\ \underline{Q}_{-h}^0 &:= \int_F (\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\varphi})^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{K} \cdot \underline{\varphi} dF, \quad \underline{Q}_{-h}^0 := \int_F \underline{\varphi}^T \cdot \underline{K} \cdot \underline{\varphi} dF , \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_h &:= \int_F (\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\varphi})^T \cdot \underline{B} \cdot \tilde{\varepsilon}^{Q*} dF - \int_{C_u} [(\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\varphi})^T \cdot \underline{B}]^R \cdot \underline{v} \cdot \tilde{u}^{R*} ds \\ \tilde{r}_0 &:= \int_F \underline{\varphi}^0 \cdot \tilde{\varepsilon}^{Q*} dF - \int_{C_u} \underline{\varphi}^{0RT} \cdot \underline{v} \cdot \tilde{u}^{R*} ds \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Die Forderung nach dem Verschwinden der ersten Variation von (4.2.9) ergibt das gekoppelte Gleichungssystem:

$$\underline{Q}_h \cdot \langle \tilde{d}^n \rangle + \underline{Q}_h^0 \cdot \tilde{d}^0 + \tilde{r}_h = \tilde{r}_0, \quad (4.2.12a)$$

$$\underline{Q}_h^{0T} \cdot \langle \tilde{d}^n \rangle + \underline{Q}_0^0 \cdot \tilde{d}^0 + \tilde{r}_0 = \tilde{r}_0. \quad (4.2.12b)$$

Die finite Approximation (4.2.9) des komplementären Funktionals  $I_{pc}(\tilde{g})$  kann bei Benützung dieser Gleichungen (4.2.12) auch durch

$$I_{pcn}(\tilde{g}_h^{\approx}) = -\frac{1}{2} \left( \langle \tilde{d}^n \rangle^T \cdot \tilde{r}_h + \tilde{d}^{0T} \cdot \tilde{r}_0 \right) \quad (4.2.13)$$

ausgedrückt worden. Ist  $\tilde{g}^0$  die erwähnte Partikularlösung  $-\tilde{g}^K$ , damit  $\tilde{d}^{0T} = (1,1,1)$  und nicht zu variieren, reduzieren sich die Gleichungen (4.2.12) auf

$$\underline{Q}_h \cdot \langle \tilde{d}^n \rangle = -\underline{Q}_h^0 \cdot \tilde{d}^0 - \tilde{r}_h = -\tilde{r}_0 - \tilde{r}_h \quad (4.2.14)$$

und der Funktionalwert (4.2.13) auf

$$I_{pcn}(\tilde{g}_h^{\approx}) = -\frac{1}{2} \langle \tilde{d}^n \rangle^T \cdot (\tilde{r}_h + \tilde{r}_0) - \frac{1}{2} \tilde{d}^{0T} \cdot \underline{Q}_0^0 \cdot \tilde{d}^0 - \tilde{r}_0^T \cdot \tilde{d}^0 = -\frac{1}{2} \langle \tilde{d}^n \rangle^T \cdot (\tilde{r}_h + \tilde{r}_0) + I_{pc}(-\tilde{g}^K). \quad (4.2.15)$$

Für jede der beiden Näherungen, der Approximation  $\tilde{u}_h^{\approx}$  (4.2.1) des Verschiebungsfeldes und  $\tilde{\sigma}_h^{\approx}$  (4.2.8), der des Spannungszustandes, gelten in der Energienorm die Fehlerabschätzungen (3.2.10) und (3.2.11).

Für den Fall eines Lastspannungszustandes ( $\tilde{x}_h \equiv 0$ ) mit  $\tilde{u}^0 = \tilde{u}$  ist in den hier eingeführten Größen die finite Formulierung der Schranke für die Energie des Fehlers

$$\left. \begin{aligned} &\| \tilde{u} - \tilde{u}_h^{\approx} \|_w^2 \\ &\| \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_h^{\approx} \|_w^2 \end{aligned} \right\} \leq \tilde{r}_0^{0T} \cdot \langle \tilde{d}^n \rangle - \underline{P}_h^T \cdot \langle \tilde{c} \rangle - 2I_{pc}(-\tilde{g}^K) =: 2\Delta I_n. \quad (4.2.16)$$

Die Abweichung der Energie der Näherungen von der Energie des exakten Zustands ergibt sich für diesen Fall zu

$$\left| \|\tilde{u}\|_w^2 - \frac{\|\tilde{u}_h\|_w^2}{\|\tilde{\sigma}_h\|_w^2} \right| \leq 2\Delta I_n \sqrt{1 + \underline{p}_h^T \cdot \frac{\langle n \rangle}{\tilde{c}} / \Delta I_n} \quad (4.2.17)$$

Zur Erstellung einer punktweisen Schranke, einer Fehlerschranke (3.2.12) für eine angenähert berechnete Zustandsgröße (3.2.13) in einem Punkt  $\underline{x}^p$  sind zusätzlich passende (siehe Abschnitt 4.3.) komplementäre GREEN'sche Zustände  $\tilde{u}^g$  und  $\tilde{\sigma}^g$  zu approximieren. Der Aufwand dafür ist optimal gering, wenn die bereits für die pauschalen Schranken (4.2.16,17) erstellten Gleichungssysteme (4.2.6) und (4.2.14) in wesentlichen Teilen weiterbenutzt werden können.

GREEN'sche Zustände haben auf  $C_u$  wie auch auf  $C_p$  die Randbedingungen des aktuellen Problems, für das punktweise Schranken berechnet werden sollen, in homogener Form zu erfüllen. Werden inhomogen vorgegebene Randgrößen bei den Ansätzen (4.2.1) bzw. (4.2.8) im Term  $\tilde{u}^0(\underline{x})$  oder  $\tilde{\phi}^0(\underline{x}) \cdot \tilde{c}$  bzw.  $\tilde{g}^0(\underline{x})$  oder  $\tilde{\phi}^0(\underline{x}) \cdot \tilde{d}$  berücksichtigt, so daß der Rest einen Lastspannungszustand  $\underline{u}'_h(\underline{x})$  bzw. ein Eigenspannungsfeld  $\underline{\sigma}''_h(\underline{x})$  darstellt, können die finiten Ansätze für die komplementären Approximationen des GREEN'schen Zustands diese Lastspannungs- bzw. Eigenspannungsanteile übernehmen:

$$\tilde{u}_h^g(\underline{x}) = \underline{\psi}'(\underline{x}) \cdot \frac{\langle n \rangle^g}{\tilde{c}} + \tilde{u}_h^\infty(\underline{x}) \quad (4.2.18)$$

$$\tilde{\sigma}_h^g(\underline{x}) = \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\psi}''(\underline{x}) \cdot \frac{\langle n \rangle^g}{\tilde{d}} + \tilde{\sigma}_h^\infty(\underline{x}) \quad (4.2.19)$$

Damit hat das finite Gleichungssystem zur Bestimmung der Freiwerte  $\frac{\langle n \rangle^g}{\tilde{c}}$  bzw.  $\frac{\langle n \rangle^g}{\tilde{d}}$  die gleiche Koeffizientenmatrix, die Steifigkeitsmatrix  $\underline{R}_h$  bzw. Flexibilitätsmatrix  $\underline{Q}_h$  wie das entsprechende System zur näherungsweise Lösung des aktuellen Problems (4.2.6) bzw. (4.2.14)

$$\underline{R}_h \cdot \frac{\langle n \rangle^g}{\tilde{c}} = \underline{r}_h^\infty \quad (4.2.20)$$

$$\underline{Q}_h \cdot \frac{\langle n \rangle^g}{\tilde{d}} = -\underline{r}_h^\infty \quad (4.2.21)$$

Neu sind nur die rechten Seiten, die mit  $\tilde{u}_h^\infty(\underline{x})$  bzw.  $\tilde{\sigma}_h^\infty(\underline{x})$  die für den jeweiligen GREEN'schen Zustand wesentliche Singularität enthalten. Wie (1.3.24) zeigt, kann sowohl das Gleichungssystem (4.2.20) wie das System

(4.2.21) auch durch die Minimierung der Energie des Differenzzustandes  $\tilde{g}(u_n^g) - \tilde{g}_n^g$  erzeugt werden [13,14]. Bei solcher Herleitung ergeben sich diese rechten Seiten zu

$$\tilde{p}_n^{\infty T} := - \int_F (\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\varphi}')^T \cdot [\underline{K}^{-1} \cdot \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \tilde{u}_n^{\infty} - \tilde{g}_n^{\infty}] dF, \quad (4.2.22)$$

$$\tilde{r}_n^{\infty T} := \int_F (\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\varphi}'')^T \cdot \underline{B} \cdot \underline{K} \cdot [\tilde{g}_n^{\infty} - \underline{K}^{-1} \cdot \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \tilde{u}_n^{\infty}] dF. \quad (4.2.23)$$

Die gegenüber der direkten Herleitung aus den extremalen Funktionalen (2.2.38) bzw. (2.2.41) im Gebiet  $F - \{x^P\}$  zusätzlichen zweiten, eine Differenz bildenden Terme geben keinen zusätzlichen Beitrag, da  $\tilde{g}_n^{\infty}$  bzw.  $\tilde{u}_n^{\infty}$  dort einen Eigenspannungs- bzw. Lastspannungszustand darstellt. Sie bewirken jedoch den Wegfall der wesentlichen Singularitäten des Integranden, so daß die Vektoren  $\tilde{p}_n^{\infty}$  und  $\tilde{r}_n^{\infty}$  aus regulären Integralen entstehen. Bei Berücksichtigung aller bereits berechneten Größen ist für den angenäherten Wert einer Zustandsgröße im Punkt  $x^P$ , nach (3.2.13)

$$\begin{aligned} F_N(x^P) &= \int_{C_u} \tilde{u}^{R*T} \cdot \underline{V}^T \cdot \tilde{g}^{gR\tilde{u}} ds - \int_{C_P} \tilde{p}^{R*T} \cdot \tilde{u}^{gR\tilde{u}} ds - \int_{F - \{x^P\}} [\tilde{g}^{g\tilde{u}T} \cdot \tilde{\varepsilon}^{Q*} + \tilde{u}^{g\tilde{u}T} \cdot \tilde{p}^*] dF \\ &+ \frac{1}{2} \int_F (\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \tilde{u}_n^{\infty} + \underline{K} \cdot \tilde{g}_n^{\infty})^T \cdot [\underline{K}^{-1} \cdot \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \tilde{u}_n^{\infty} - \tilde{g}_n^{\infty}] dF \\ &+ \frac{1}{2} (\tilde{p}_n - \tilde{p}_0)^T \cdot \langle n \rangle_g + \frac{1}{2} (\tilde{r}_n - \tilde{r}_0)^T \cdot \langle n \rangle_g, \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

folgende Fehlerschranke berechenbar:

$$|F(x^P) - F_N(x^P)| \leq \sqrt{\Delta I_n \cdot \Delta I_n^{\infty}}. \quad (4.2.25)$$

Hierin ist  $\Delta I_n$  nach (4.2.16) zu berechnen, und  $\Delta I_n^{\infty}$ , die entsprechende Größe für die beiden GREEN'schen Näherungen (4.2.18) und (4.2.19)

$$2\Delta I_n^{\infty} := \tilde{r}_n^{\infty T} \cdot \langle n \rangle_g - \tilde{p}_n^{\infty T} \cdot \langle n \rangle_g + \int_F [\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \tilde{u}_n^{\infty} - \underline{K} \cdot \tilde{g}_n^{\infty}]^T \cdot [\underline{K}^{-1} \cdot \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \tilde{u}_n^{\infty} - \tilde{g}_n^{\infty}] dF. \quad (4.2.26)$$

Bei einem solchen Vorgehen ist der zusätzliche Aufwand zur Berechnung einer punktwweisen Schranke im wesentlichen auf die Integration der Vektoren  $\tilde{p}_n^{\infty}$  und  $\tilde{r}_n^{\infty}$ , der zusätzlichen rechten Seiten der Gleichungssysteme (4.2.6) bzw. (4.2.14) reduziert.

Noch geringer ist der Aufwand zur Ermittlung von a-posteriori Fehlerschranken, wenn die beiden jeweils notwendigen komplementären Näherungen aus ein und demselben Gleichungssystem bestimmt werden können. Dies ist bei vollständig dualer Formulierung der Grundgleichungen möglich [210,211].

#### 4.3. Zur Konstruktion passender GREEN'scher Zustände

Das Auffinden GREEN'scher Funktionen für beliebige Gebiete ist bereits bei einfachen partiellen Differentialgleichungen ein recht schwieriges Problem, dessen Lösung auf verschiedensten Wegen gesucht werden kann [212,213, u.a.]. Neben der allgemeinen linearen Elastizitätstheorie [214] sind es vor allem die lineare Plattentheorie und die Theorie flacher Schalen, in denen zahlreiche Untersuchungen [186,215-224 u.a.] entweder die GREEN'sche Funktion selbst, oder die eng damit zusammenhängenden singulären Lastfälle bzw. deren Fundamental-Lösungen behandeln. Leider, da für finite Verfahren wie das RITZ-Verfahren oder das Finite-Element Verfahren numerisch ungünstig, sind diese Lösungen in der Regel in Form von speziellen Funktionen, wie BESSEL-, THOMSON- oder KELVIN-Funktionen, oder von FOURIER-Integralen, in komplexer Darstellung oder auch als Lösung von Integralgleichungen gegeben [196,220-222,225,226]. Einen guten Überblick über bekannte Resultate gibt LUKASIEWICZ [227].

Bei der hier behandelten Aufgabe, bei der punktweisen Eingrenzung von Näherungszuständen ist vor allem der singuläre Teil der GREEN'schen Funktion, die sogenannte *Fundamentallösung* [228] wichtig. Diese hat nur die jeweils wesentlichen, in einem Punkt inhomogenen Differentialgleichungen zu erfüllen. *Passend* ist dabei eine Fundamentallösung, wenn ihre Wechselwirkungsenergie mit einer Approximation des aktuellen Zustands als wichtigsten Teil nach (1.4.2) bzw. (1.4.3) die einzugrenzende Größe im Punkt  $\underline{x}^P$  ergibt. Soll z. B. bei einem aktuellen Problem mit homogenen geometrischen Bedingungen, also bei einem Lastspannungszustand eine geometrische Größe  $v(\underline{x})$  in einem Punkt  $\underline{x}^P$  eingegrenzt werden, muß sich für eine statisch zulässige Beschreibung des GREEN'schen Zustands

$$\{\tilde{\sigma}^{\infty}, \tilde{\epsilon}'\} = V(\underline{x}^P) = cv(\underline{x}^P) \quad (4.3.1a)$$

ergeben.

Außerdem muß die Singularität der jeweils komplementären Zustandsbeschreibung bekannt sein, also z. B. zum Singulärteil  $\underline{g}^S$  eines GREEN'schen Spannungszustandes auch die Singularität des zugehörigen GREEN'schen Verschie-

bungsfeldes  $u^s$ .

Wird bei einer Schale unter singulärer Last das System der Gleichgewichtsbedingungen in Verschiebungen ausgedrückt und für diese "Navier'schen" Differentialgleichungen die Fundamentallösung gefunden, sind die zugehörigen singulären Schnittgrößen durch die Verschiebungs-Verformungsbeziehungen und die konstitutiven Zusammenhänge direkt zu erhalten. Auf diesem Weg ergeben sich jedoch die erwähnten numerisch ungünstigen und unnötig komplizierten Lösungsfunktionen. Ihre Reduzierung auf die wesentlichen singulären Anteile [229] aber bewirkt, daß die Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr exakt erfüllt werden. Zur Konstruktion eines statisch zulässigen GREEN'schen Näherungszustandes ist dies notwendig, so daß ein solcher Weg nicht günstig erscheint. Einen praktikablen Ausgangspunkt bilden sicher Spannungsfunktionen, da diese die homogenen Gleichgewichtsbedingungen in jedem Punkt ihres Definitionsgebietes, in dem sie genügend oft stetig differenzierbar sind, identisch erfüllen. Mit der Wahl "richtiger" Singularitäten der Spannungsfunktionen im Angriffspunkt  $x^P$  einer singulären Belastung muß es also möglich sein, diese Gleichungen auch bei solchen punktwisen Inhomogenitäten zu erfüllen. Die Anforderung an eine passende Fundamentallösung, z. B. (4.3.1) ist in Spannungsfunktionen ausgedrückt, nach (2.2.29/30) explizit

$$\int_F \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\mu} \epsilon^{\beta\nu} [ (\tilde{\psi}_3|_{\nu\mu} + (b_{\nu\rho}^{\tilde{\psi}}) |_{\mu} - \frac{1}{2} b_{\mu}^{\rho} (\tilde{\psi}_{\nu|\rho} - \tilde{\psi}_{\rho|\nu})) (u'_{\alpha|\beta} + u'_{\beta|\alpha} - 2b_{\alpha\beta} u'_3) - (\tilde{\psi}_{\nu|\mu} + \tilde{\psi}_{\mu|\nu} - 2b_{\nu\mu} \tilde{\psi}_3) (u'_{3|\alpha\beta} + (b_{\beta\rho}^{\tilde{\psi}}) |_{\alpha} - \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\rho} (u'_{\beta|\rho} - u'_{\rho|\beta})) ] dF = V(x^P). \quad (4.3.1b)$$

Entsprechend ist bei punktweise inhomogenen Kompatibilitätsbedingungen als singuläre geometrische Verformungs- und Spannungsursache eine geeignet singuläre Verschiebungsfunktion als Ausgangspunkt zu suchen.

Es ist bekannt [222,229], daß das Verhalten von Schalen in der Umgebung singulärer Laststellen dem von Platten bzw. Scheiben entspricht. Dies bestätigt ein Vergleich der Zusammenhänge (2.2.29/30) zwischen den Schnittgrößen und den Spannungsfunktionen der hier verwendeten Schalentheorie

$$n^{\alpha\beta} = -\epsilon^{\alpha\mu} \epsilon^{\beta\nu} [ -\psi_3|_{\nu\mu} - (b_{\nu\rho}^{\psi}) |_{\mu} + \frac{1}{2} b_{\mu}^{\rho} (\psi_{\nu|\rho} - \psi_{\rho|\nu}) ] \quad (4.3.2a)$$

$$m^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\mu} \epsilon^{\beta\nu} \frac{1}{2} [(\psi_{\nu|\mu} + \psi_{\mu|\nu}) - b_{\nu\mu} \psi_3] \quad (4.3.2b)$$

und denen der Scheibentheorie bzw. der Plattentheorie

$$n^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\mu} \epsilon^{\beta\nu} \psi_3 |_{\nu\mu}, \quad m^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\mu} \epsilon^{\beta\nu} \left[ \frac{1}{2} (\psi_{\nu|\mu} + \psi_{\mu|\nu}) \right]. \quad (4.3.3)$$

Ein singuläres Biegemoment  $m^{\alpha\beta}$  kann nach (4.2.1) durch in erster Ableitung singuläre  $\psi_\alpha$ , durch die SCHAEFER'schen Spannungsfunktionen der Plattentheorie erzeugt werden; das Verhalten der Membrankräfte  $n^{\alpha\beta}$  richtet sich vor allem nach dem der Spannungsfunktion  $\psi_3$ , der AIRY'schen Spannungsfunktion der Scheibentheorie, da etwaige singuläre Anteile  $\psi_\alpha$  gleichzeitig singuläre Momente hervorrufen würden. Dies gilt sowohl in der Theorie flacher Schalen, wie ein Vergleich [223,224] mit auf anderem Weg erhaltenen Fundamentallösungen [217] bestätigt, als auch in der allgemeinen linearen Schalentheorie, wie durch Gleichgewichtsbetrachtungen an einer kleinen Umgebung der singulären Stelle zusätzlich nachgeprüft werden kann [183].

Damit muß es möglich sein, aus den bekannten Spannungsfunktionen der Platte bzw. der Scheibe [36] über (4.3.1) Fundamentallösungen der Gleichgewichtsbedingungen der Schale zu berechnen [183] (siehe Tafel 6).

Die Darstellung eines GREEN'schen Zustandes in Verschiebungsfunktionen erfordert die Kenntnis der singulären Anteile von  $u_\alpha$  und  $u_3$ . Deren Feststellung ist in der Schalentheorie ein Problem, das bisher allgemein noch nicht gelöst ist, da hier keine Integrationsformel entsprechend der Formel von CESARO der linearen Elastizitätstheorie [230] bekannt ist. Die Möglichkeit einer solchen Integration, d. h. aus vorgegebenen Verzerrungen die zugehörigen Verschiebungen zu berechnen, ist bekanntlich gegeben, wenn die Kompatibilitätsbedingungen, die ja auch Integrabilitätsbedingungen genannt werden, erfüllt sind.

Zur genaueren Erläuterung wird hier der Spezialfall einer Kreiszyinderschale untersucht und für zwei interessante Probleme, für die punktweise Eingrenzung der Normalverschiebung  $u_3$  und der Tangentialverschiebungen  $u_\alpha$  die jeweils richtige Singularität für  $g^S$  und  $y^S$ , die Singulärteile der statischen bzw. geometrischen Representation des passenden GREEN'schen Zustandes ermittelt.

Mit den krummlinigen dimensionsbehafteten Koordinaten  $z^1 = x^3$ ,  $z^2 = R\varphi$  ergibt sich für einen Kreiszyylinder der Ortsvektor zur Mittelfläche  $\vec{r} = R \vec{a}_3 + z^1 \vec{a}_1$  mit  $\vec{a}_1^T = (0,0,1)$  und  $\vec{a}_3^T = (-\cos \varphi, -\sin \varphi, 0)$  und damit die Einheitsmetrik  $a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$  und ein Krümmungstensor mit der einzigen von

Null verschiedenen Komponente  $b_{22} = 1/R$ . In diesem Fall lautet die Forderung (4.3.1b) zur Eingrenzung der Verschiebungskomponenten  $u_i$  im Punkt  $\underline{x}^P$

$$\int_F \left[ \left( \tilde{\psi}_{3,22}^{\infty} + \frac{1}{R} \tilde{\psi}_{2,2}^{\infty} \right) u'_{1,1} - \left( \tilde{\psi}_{3,12}^{\infty} + \frac{1}{R} \tilde{\psi}_{2,1}^{\infty} \right) u'_{1,2} \right. \\ \left. + \left( \tilde{\psi}_{3,11}^{\infty} - \frac{1}{R} \tilde{\psi}_{1,1}^{\infty} \right) u'_{2,2} - \left( \tilde{\psi}_{3,12}^{\infty} - \frac{1}{R} \tilde{\psi}_{1,2}^{\infty} \right) u'_{2,1} + \frac{1}{R} \left( \tilde{\psi}_{3,3,11}^{\infty} u'_3 - \tilde{\psi}_{3,11}^{\infty} u'_3 \right) \right. \\ \left. + \left( \tilde{\psi}_{1,2}^{\infty} u'_{3,21} - \tilde{\psi}_{1,1}^{\infty} u'_{3,22} \right) + \left( \tilde{\psi}_{2,1}^{\infty} u'_{3,21} - \tilde{\psi}_{2,2}^{\infty} u'_{3,11} \right) \right] dF \\ = \sum_{i \in E} p_{iE} u_i(\underline{x}^P), \quad \forall \underline{x}^P. \quad (4.3.4)$$

Daraus sind in statisch zulässiger Darstellung durch Spannungsfunktionen die wesentlichen Terme  $\underline{\sigma}^S$  des GREEN'schen Zustands für die singulären Belastungen  $p_{iE} \delta(\underline{x} - \underline{x}^P)$  zu finden.

Für die singuläre Normallast  $p_{3E} \delta(\underline{x} - \underline{x}^P)$  ist der naheliegende Ausgangspunkt ein Ansatz in der Form der bekannten SCHAEFER'schen Spannungsfunktionen einer dünnen Platte [36], also mit  $x = z^1 - z^{1P}$ ,  $y = z^2 - z^{2P}$  und  $r^2 = x^2 + y^2$

$$\psi_1^S(x,y) = a_1 y \cdot \arctan \frac{x}{y} + b_1 x \ln r^2 + c_1 x, \quad (4.3.5a)$$

$$\psi_2^S(x,y) = a_2 x \cdot \arctan \frac{x}{y} + b_2 y \ln r^2 + c_2 y. \quad (4.3.5b)$$

Die Beachtung der Bedingungen (4.3.4) legt die Konstante  $a_2$  zu  $a_2 = p_{3E}/2\pi$  fest und fordert die zusätzliche Einführung von

$$\psi_3^S(x,y) \hat{=} - \frac{1}{R} \int \psi_2^S(x,y) dy \\ = - \frac{1}{R} \left[ a_2 xy \cdot \arctan \frac{x}{y} + (b_{31} x^2 + b_{32} y^2) \ln r^2 \right] \quad (4.3.5c)$$

Eine Untersuchung des Gleichgewichts eines kleinen Ausschnitts der Umgebung des singulären Punktes [183] fordert außerdem  $a_1 = -a_2$ . Die übrigen Konstanten werden durch diese Betrachtungen nicht festgelegt; sie ergeben sich, wie in der Plattentheorie, erst durch die Anpassung von statischer und geometrischer Beschreibung des GREEN'schen Zustands.

Aus diesen Spannungsfunktionen können über (4.3.2) Schnittgrößen und mit den konstitutiven Beziehungen (2.2.36) Verzerrungsgrößen bestimmt werden,

z.B.:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{SS}(x,y) = & \frac{1}{EtR} [(b_2 - \nu b_1 - 2b_{32} + 2\nu b_{31}) \ln r^2 + c_2 - \nu c_1 \\ & + (a_2 - 2\nu b_1 - (2 - 6\nu)b_{31}) \frac{x^4}{r^4} + (3\nu a_2 + 2b_2 - (6 - 2\nu)b_{32}) \frac{y^4}{r^4} \\ & + (a_2(\nu - 1) + 2b_2 - 2\nu b_1 + (2 + 10\nu)b_{31} - (10 + 2\nu)b_{32}) \frac{x^2 y^2}{r^4} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Direkte Integrationen dieser Verzerrungsmaße entsprechend den Zusammenhängen (2.2.20) für den Fall der Kreiszylinderschale liefern mögliche Darstellungen der Verschiebungskomponenten; so ergibt sich z. B.:

$$\begin{aligned} u_1^S(x,y) = & \frac{1}{EtR} [(b_2 - \nu b_1 - 2b_{32} + 2\nu b_{31}) x \ln r^2 + (a_2 - 2b_2 + c_2 - \nu c_1 + 4b_{32} - 2(1-\nu)b_{31}) x \\ & + (1+\nu)(a_2 + 2b_{32} - 2b_{31}) \frac{xy^2}{r^2} + 2(2b_2 - (1-\nu)a_2 + 2b_{31} - 6b_{32}) y \cdot \arctan \frac{x}{y}], \end{aligned} \quad (4.3.7a)$$

$$\begin{aligned} u_2^S(x,y) = & \frac{1}{EtR} [(b_1 - \nu b_2 - 2b_{31} + 2\nu b_{32}) y \ln r^2 + (c_1 - \nu c_2 - 3a_2 - 2b_1 + 4b_{31} - 2(1-\nu)b_{32}) y \\ & - (1+\nu)(a_2 + 2b_{32} - 2b_{31}) \frac{x^2 y}{r^2} + 4(b_1 + a_2 - 3b_{31} + b_{32}) x \cdot \arctan \frac{y}{x}]. \end{aligned} \quad (4.3.7b)$$

Da daraus berechenbare Verzerrungsgrößen keine Unstetigkeiten haben dürfen, müssen die Vorfaktoren der arctan-Terme verschwinden. Hieraus folgen die Festlegungen

$$b_{31} = \frac{1}{16} [6b_1 + 2b_2 + (5 + \nu)a_2], \quad b_{32} = \frac{1}{16} [2b_1 + 6b_2 - (1 - 3\nu)a_2]. \quad (4.3.8)$$

Die dritte Verschiebungskomponente  $u_3^S$ , für die durch Integration der Verzerrungsmaße  $\beta_{(\rho\lambda)}$  drei Versionen berechenbar sind, kann nur hinsichtlich der beiden wesentlichsten Terme eindeutig bestimmt werden. Die notwendige Stetigkeit von  $\beta_{(\rho\lambda)}$ , das Verschwinden von arctan-Termen wird durch

$$b_1 = b_2 = -\frac{(1+\nu)}{4} a_2 \quad (4.3.9)$$

erreicht. Die erforderlichen Singularitäten in  $\beta_{(\rho\lambda)}$  sind mit

$$u_3^S(x,y) = \frac{P_{3E}}{16\pi} \cdot \frac{12(1+\nu^2)}{Et^3} [x^2 + y^2 \cdot (1 + \frac{t^2}{12R^2} \cdot \frac{5-3\nu}{1-\nu})] \ln r^2 \quad (4.3.10)$$

ausdrückbar. Zusammen mit den tangentialen Verschiebungskomponenten  $u_{\alpha}^s$ , deren in (4.3.7) gegebenen Darstellungen wegen (4.3.9) und (4.3.8), sowie mit  $c_1 = c_2 = (1-\nu)/8\pi$  explizit

$$u_1^s(x,y) = \frac{P_{3E}}{16\pi} \frac{(1+\nu)}{EtR} [(1+\nu)x \ln r^2 + 2(1+\nu) \frac{xy^2}{r^2} + (5+\nu)x] , \quad (4.3.11a)$$

$$u_2^s(x,y) = \frac{P_{3E}}{16\pi} \frac{(1+\nu)}{EtR} [(3\nu-5)y \ln r^2 - 2(1+\nu) \frac{x^2y}{r^2} + 3(\nu-3)y] \quad (4.3.11b)$$

lauten, gibt dies die gesuchten wesentlichen Anteile eines GREEN'schen Verschiebungsfeldes  $\underline{u}^g$  für den Fall einer singulären Normallast  $P_{3E}$  an (siehe Tafel 6).

Die zugehörige statische Beschreibung  $\underline{g}^g$  ist aus den Spannungsfunktionen  $\psi_1^s$  (4.3.5) d.h. mit der beschriebenen Festlegung der Konstanten aus (Tafel 7)

$$\psi_1^s(x,y) = \frac{P_{3E}}{16\pi} [-8y \cdot \arctan \frac{x}{y} - 2(1+\nu)x \ln r^2 + 2(1-\nu)x] , \quad (4.3.12a)$$

$$\psi_2^s(x,y) = \frac{P_{3E}}{16\pi} [8x \cdot \arctan \frac{x}{y} - 2(1-\nu)y \ln r^2 + 2(1-\nu)y] , \quad (4.3.12b)$$

$$\psi_3^s(x,y) = -\frac{1}{R} \frac{P_{3E}}{32\pi} [16xy \cdot \arctan \frac{x}{y} + (3-\nu)(x^2 - y^2) \ln r^2] \quad (4.3.12c)$$

herleitbar (siehe Tafel 6). Damit kann  $\underline{g}^s = \underline{K} \cdot \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{u}^s$  (siehe Anhang A8), also durch Anpassung an die aktuellen homogenen Randbedingungen auch  $\underline{g}^{g\approx} = \underline{g}(\underline{u}^{g\approx})$  erstellt werden, so daß nach (4.2.24-26) die punktweise Eingrenzung der Normalverschiebung  $u_{3N}(x^P)$  durchgeführt werden kann.

Eine singuläre Tangentiallast, z. B. in Richtung der Mantellinien des Kreiszylinders  $p_{1E}(\underline{x} - \underline{x}^P)$ , geht für wachsenden Krümmungsradius  $R$  in den Fall einer Einzelkraft im Punkt  $\underline{x}^P$  einer Scheibe über. Die Erfüllung der Forderung (4.3.4) ist damit hinsichtlich der von  $R$  unabhängigen Terme sicher durch die entsprechende AIRY'sche Spannungsfunktion

$$\psi_3^s(x,y) = a_3 y \cdot \arctan(\frac{y}{x}) + b_3 x \ln r^2 \quad (4.3.13)$$

mit  $a_3 = -p_{1E}/2\pi$ ,  $b_3 = -(1-\nu)a_3/4$  erreichbar. Hier jedoch können diese Konstanten wie auch die beiden anderen Spannungsfunktionen der Schale von  $R$  abhängen, müssen also in Anpassung an die notwendigen Forderungen bestimmt werden.

GREEN'sche Zustände	$P_{3E}/16\pi$	$P_{1E}/16\pi$
$\begin{matrix} s \\ u_{<1>} \\ \text{Et} \end{matrix}$	$\frac{(1+\nu)}{R} [(1+\nu)x \ln r^2 + 2(1+\nu)\frac{xy^2}{r^2} + (5+\nu)x]$	$-2(1+\nu) [(3-\nu) \ln r^2 + 2(1+\nu)\frac{y^2}{r^2}]$
$\begin{matrix} s \\ u_{<2>} \\ \text{Et} \end{matrix}$	$\frac{(1+\nu)}{R} [(3\nu-5)y \ln r^2 - 2(1+\nu)\frac{x^2y}{r^2} + 3(\nu-3)y]$	$4(1+\nu)^2 \frac{xy}{r^2}$
$\begin{matrix} s \\ u_{<3>} \\ \text{Et}^3 \end{matrix}$	$12(1-\nu^2) [x^2 + y^2 (1 + \frac{t^2}{12R^2} \frac{5-3\nu}{1-\nu})] \ln r^2$	$-\frac{t^2}{R} (1+\nu)^2 [x \ln r^2 - 2\frac{x^3}{r^2}]$
$\begin{matrix} -s \\ \bar{n}_{<11>} \end{matrix}$	$\frac{1}{R} [(1-3\nu) \ln r^2 - 4(1-\nu)\frac{x^2}{r^2} + 4(1+\nu)\frac{x^4}{r^4} + 7 - 9\nu]$	$-4\frac{x}{r^2} [3 + \nu - 2(1+\nu)\frac{y^2}{r^2} - \frac{t^2}{R^2} \frac{(1+\nu)}{24} (1 + 4\frac{x^2y^2 - y^4}{r^4})]$
$\begin{matrix} -s \\ \bar{n}_{<22>} \end{matrix}$	$-\frac{1}{R} [(5+\nu) \ln r^2 + 4(1-\nu)\frac{y^2}{r^2} + 4(1+\nu)\frac{y^4}{r^4} + 10]$	$4\frac{x}{r^2} [1 - \nu - 2(1+\nu)\frac{y^2}{r^2} - \frac{t^2}{R^2} \frac{(1+\nu)}{24} (1 + 4\frac{x^2y^2 - y^4}{r^4})]$
$\begin{matrix} -s \\ \bar{n}_{<12>} \end{matrix}$	$\frac{2xy}{R r^4} [(3\nu-1)x^2 - (3-\nu)y^2]$	$-4\frac{y}{r^2} [1 - \nu + 2(1+\nu)\frac{x^2}{r^2} - \frac{t^2}{R^2} \frac{(1+\nu)}{24} (1 + 4\frac{x^2y^2 - y^4}{r^4})]$
$\begin{matrix} s \\ m_{<11>} \end{matrix}$	$-2(1+\nu) \ln r^2 - 4(1-\nu)\frac{x^2}{r^2} - 2(1+3\nu) + \frac{1}{R^2} [8xy \arctan(\frac{x}{y}) + \frac{(3-\nu)}{2} (x^2 - y^2) \ln r^2]$	$\frac{t^2}{R} \frac{(1+\nu)}{6} \frac{x}{r^2} [1 + 4\frac{y^2(x^2 - y^2)}{r^4}] - \frac{1}{R} [8y \arctan(\frac{x}{y}) + 2(1-\nu)x \ln r^2]$
$\begin{matrix} s \\ m_{<22>} \end{matrix}$	$-2(1+\nu) \ln r^2 - 4(1-\nu)\frac{y^2}{r^2} - 2(1+3\nu)$	$-\frac{t^2}{R} \frac{(1+\nu)}{6} \frac{x}{r^2} [1 + 4\frac{y^2(x^2 - y^2)}{r^4}]$
$\begin{matrix} s \\ m_{<12>} \end{matrix}$	$-4(1-\nu)\frac{xy}{r^2}$	$\frac{t^2}{R} \frac{(1+\nu)}{6} \frac{y}{r^2} [8\frac{x^2y^2}{r^4} - 1]$

Tafel 6: Singulärteile Green'scher Zustände bei Kreiszylinderschalen ( $b_{22} = 1/R$ )

einzugrenzende Zustandsgröße	Spannungsfunktionen zur Erzeugung GREEN'scher Spannungsfelder $\underline{g}^s$		
$u_3$	$- 4y \arctan(x/y)$ $-(1+\nu)x \ln r^2 + (1-\nu)x$	$4x \arctan(x/y)$ $-(1+\nu)y \ln r^2 + (1-\nu)y$	$- \frac{4}{R} xy \arctan(x/y)$ $- \frac{1}{R} \frac{(3-\nu)}{4} (x^2 - y^2) \ln r^2$
$\beta_{(11)} = u_{3,xx}$	$- 2(1+\nu) \frac{x^3}{r^4}$ $+ 2(1-3\nu) \frac{xy^2}{r^4}$	$2(1+\nu) \frac{x^2 y}{r^4}$ $+ 2(3-\nu) \frac{y^3}{r^4}$	$- \frac{1}{R} \frac{(3-\nu)}{2} [\ln r^2 + 3]$ $- \frac{2}{R} (1+\nu) \frac{y^4}{r^4}$
$u_1$	$- \frac{t^2}{R} \frac{(1+\nu)}{24} \ln r^2$ $+ \frac{t^2}{R} \frac{(1+\nu)}{6} \frac{x^2 y^2}{r^4}$	$\frac{t^2}{R} \frac{(1+\nu)}{12} \frac{yx^3}{r^4}$ $+ \frac{t^2}{R} \frac{(1+\nu)}{4} \frac{xy^3}{r^4}$	$- 4y \arctan(y/x)$ $+ (1-\nu)x \ln r^2$
$\alpha_{(11)} = u_{1,x}$	$\frac{t^2}{R} \frac{(1+\nu)}{12} \frac{x}{r^2}$ $+ \frac{t^2}{R} \frac{(1+\nu)}{3} \frac{xy^2 (x^2 - y^2)}{r^6}$	$\frac{t^2}{R} \frac{(1+\nu)}{12} \frac{y}{r^2}$ $+ \frac{t^2}{R} \frac{(1+\nu)}{3} \frac{y^3 (x^2 - y^2)}{r^6}$	$- 2(1-\nu) \ln r^2$ $+ 2(1+\nu) \frac{y^2}{r^2}$

Spannungsfunktionen

Tafel 7: zur Eingrenzung verschiedener Zustandsgrößen einer Kreiszylinderschale ( $b_{22} = 1/R$ )

Die Nachprüfung von (4.3.4) bestätigt  $a_3 = -p_{1E}/2\pi$ , läßt  $b_3$  beliebig wählbar und fordert in Abweichung vom üblichen Zusammenhang (4.3.2b) zwischen den Biegemomenten  $m^{\alpha\beta}$  und den Spannungsfunktionen  $\psi_i$  für diesen Fall einer unstetigen Spannungsfunktion  $\psi_3^S$

$$m_{\langle 11 \rangle} := -\frac{1}{R} \int \psi_{3,x}^S(x,y) dx + \psi_{2,y}(x,y) \quad (4.3.14)$$

Zu den aus  $\psi_3^S(x,y)$  in der Form (4.3.13) nach (4.3.2) ermittelten Schnittgrößen können über die konstitutiven Beziehungen (2.2.36) Verzerrungsgrößen  $\alpha_{(\rho\lambda)}^{SS}$  und  $\beta_{(\rho\lambda)}^{SS}$  bestimmt werden (siehe 4.3.6). Direkte Integration von  $\alpha_{(11)}^{SS}$  bzw.  $\alpha_{(22)}^{SS}$  liefert

$$u_1^S(x,y) = \frac{1}{Et} [(a_3 + b_3(1-\nu)) \ln r^2 + (1+\nu)(a_3 + 2b_3) \frac{y^2}{r^2}] \quad (4.3.15a)$$

$$u_2^S(x,y) = \frac{1}{Et} [((1-\nu)a_3 + 4b_3) \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - (1+\nu)(a_3 + 2b_3) \frac{xy}{r^2}] \quad (4.3.15b)$$

Der unstetige arctan-Term der Verschiebungskomponente  $u_2^S$  ist, wie mit (1.4.2) nachgewiesen werden kann, einer Inkompatibilität zuzuordnen, darf also in der Darstellung des Verschiebungsfelds der Einzelkraft  $p_{1E} \delta(x - x^P)$  nicht erscheinen. Dies fordert den aus der Scheibentheorie bekannten Zusammenhang  $b_3 = -(1-\nu)a_3/4$ , so daß sich nach (4.3.15) die tangentialen Verschiebungskomponenten

$$u_1^S(x,y) = \frac{a_3}{Et} \frac{(1+\nu)}{4} [(3-\nu) \ln r^2 + 2(1+\nu) \frac{y^2}{r^2}] \quad (4.3.16a)$$

$$u_2^S(x,y) = -\frac{a_3}{Et} \frac{(1+\nu)^2}{2} \frac{y^2}{r^2} \quad (4.3.16b)$$

ergeben. Da für die Kreiszylinderschale nach (2.2.20c) der zweite Verzerrungstensor wie folgt von den Verschiebungen abhängt

$$\beta_{(11)} = -u_{3,xx} \quad (4.3.17a)$$

$$\beta_{(12)} = -u_{3,xy} - \frac{1}{R} u_{2,x} \quad (4.3.17b)$$

$$\beta_{(22)} = -u_{3,yy} - \frac{2}{R} u_{2,y} + \frac{1}{R^2} u_3 \quad (4.3.17c)$$

sind mit  $u_2^S$  nach (4.3.16b) die beiden Komponenten  $\beta_{(12)}^S$  und  $\beta_{(22)}^S$  singular. Somit müssen auch die über die konstitutiven Beziehungen (2.2.15) zugeordneten Biegemomente  $m^{(\alpha\beta)}$  entsprechend singuläre Terme enthalten, die aus

Spannungsfunktionen  $\psi_\alpha$  ableitbar sind und außerdem das Gleichgewicht nicht stören. Als geeignet erweisen sich hierfür die Ansätze

$$\psi_1^S(x, y) = \frac{a_3 t^2}{12R} [c_{11} \ln r^2 + c_{12} \frac{y^2}{r^2} + c_{13} \frac{y^4}{r^4}] , \quad (4.3.18a)$$

$$\psi_2^S(x, y) = \frac{a_3 t^2}{12R} [c_{21} \frac{xy^3}{r^4} + c_{22} \frac{x^3 y}{r^4}] . \quad (4.3.18b)$$

Da hieraus folgende Biegemomente auch ein singuläres  $\beta_{(11)}^{SS}$  ergeben, wird wegen (4.3.17a) auch die Verschiebungskomponente  $u_3^S$  wesentlich sein und wie folgt von den Konstanten der Spannungsfunktionen  $\psi_\alpha^S$  abhängen:

$$u_3^S(x, y) = \frac{a_3}{EtR} \frac{1}{2} [(2\nu c_{11} - c_{22})x \ln r^2 + (c_{21} - c_{22} - \nu c_{13}) \frac{x^3}{r^2}] . \quad (4.3.18c)$$

Außerdem gibt (4.3.17a) den Zusammenhang

$$6c_{22} - 2c_{21} = \nu(4c_{11} + 2c_{12} + c_{13}) . \quad (4.3.19)$$

Der weitere Vergleich der aus den Spannungsfunktionen (4.3.18a,b) über die konstitutiven Beziehungen sowie nach (4.3.17b,c) aus den Verschiebungskomponenten  $u_2^S$  und  $u_3^S$  hergeleiteten Verzerrungskomponenten legt diese fünf Konstanten eindeutig fest:

$$c_{13} = -c_{12} = 4c_{11} = 0,5(1+\nu); \quad c_{21} = 3c_{22} = -0,75(1+\nu) . \quad (4.3.20)$$

Damit sind die Spannungsfunktionen  $\psi_\alpha^S$  und die Normalverschiebung  $u_3^S$  zu

$$\psi_1^S(x, y) = \frac{a_3 t^2}{12R} \frac{(1+\nu)}{8} (\ln r^2 - 4 \frac{x^2 y^2}{r^4}) , \quad (4.3.21a)$$

$$\psi_2^S(x, y) = - \frac{a_3 t^2}{12R} \frac{(1+\nu)}{4} (\frac{yx^3}{r^4} + 3 \frac{xy^3}{r^4}) , \quad (4.3.21b)$$

$$u_3^S(x, y) = \frac{a_3}{EtR} \frac{(1+\nu)^2}{8} (x \ln r^2 - 2 \frac{x^3}{r^2}) \quad (4.3.21c)$$

bestimmt.

Diese Spannungsfunktionen  $\psi_\alpha^S$  stören zwar nicht das Gleichgewicht, beeinflussen jedoch außer die Biegemomente  $m^{(\alpha\beta)}$  nach (4.3.2a) auch den Längskrafttensor  $\bar{n}^{\alpha\beta}$ . Dies wiederum hat Auswirkungen auf die Längsdehnungen und damit auf die Tangentialverschiebungen  $u_\alpha$ . So wird z. B.  $u_1^S$  dadurch

$$\langle u_1 \rangle_s(x, y) = \frac{a_3}{Et} \frac{(1+\nu)}{4} \left[ \left( 3 - \nu - \frac{(1+\nu)}{24} \frac{t^2}{R^2} \right) \ln r^2 + 2(1+\nu) \frac{y^2}{r^2} \left( 1 + \frac{t^2}{12R^2} \frac{x^2}{r^2} \right) \right]. \quad (4.3.22)$$

Diese zusätzlichen Terme sind jedoch relativ zu den führenden Gliedern, zur Verschiebungsfunktion  $\langle u_1 \rangle_s$  in der Form (4.3.16) von der Größenordnung  $O(t^2/R^2) = O(\Theta^4)$  (siehe 3.1.1.). Daraus abgeleitete Verzerrungen  $\alpha_{(\rho\lambda)}$  sind nach (3.1.2c) von der Ordnung  $O(\eta) (1 + O(\Theta^4))$ , so daß die doppelte elastische Energie dadurch ebenfalls nur eine Änderung dieser Größenordnung erfährt:

$$\begin{aligned} \|\langle \underline{\varepsilon} \rangle_s\|_w^2 &= Et \int_F \left[ (O(\eta) (O(\Theta^4) + 1))^2 + \frac{t^2}{12} (O(\frac{\eta}{t}))^2 \right] dF \\ &= O(EtF\eta^2) (1 + O(\Theta^4)). \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

Der relative Fehler durch die Vernachlässigung solcher zusätzlicher Terme ist also in der Energienorm von der Ordnung  $O(\Theta^2)$ . Da dies die Fehlerordnung der hier betrachteten Schalentheorie ist (siehe Abschnitt 3.1), ist es nicht notwendig, solche zusätzlichen Terme wie in (4.3.22) zu bestimmen und mitzuführen. Allerdings haben aus (4.3.13) und (4.3.18a,b) hergeleitete statische und aus (4.3.16,21c) ermittelte geometrische Darstellungen des GREEN'schen Zustands singuläre Differenzterme (siehe Anhang A8), die bei der Durchführung des Eingrenzungsverfahrens aus numerischen Gründen analytisch integriert werden sollten.

## 5. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In der vorliegenden Arbeit ist das in der dreidimensionalen Elastizitätstheorie und auch in Plattentheorien bekannte Hyperkreis-Verfahren zur Fehlereingrenzung auf dünne Schalentragwerke übertragen worden. Dazu ist die Erfüllung bestimmter Voraussetzungen, wie z. B. die Existenz zweier komplementärer Extremalprinzipie und die Erfüllung des Satzes von BETTI notwendig. Dies wird unter allgemeinsten Gesichtspunkten, durch die Herleitung aus erzeugenden Funktionalen mit Sattteleigenschaft, die Einführung eines Hilbertraumes elastischer Schalenzustände bzw. seiner Unterräume und durch die Kontrolle der notwendigen Eigenschaften der dort definierten Skalarprodukte überprüft. Der relativ breite Raum, der diesen funktionalanalytischen Betrachtungen eingeräumt worden ist, erscheint sinnvoll, da dieser Weg nach den hier begonnenen Überlegungen auch bei einer allgemeinen nichtlinearen Theorie dünner Schalen weiterführen kann.

Es ist außerdem versucht worden, den nach der Hyperkreis-Methode bestimm- baren globalen und auch punktwisen Fehlerschranken einen Vergleichsmaßstab zu verschaffen. Dazu wurden die bereits der zugrunde liegenden Theorie anhaftenden Ungenauigkeiten und die numerisch bedingten Störungen untersucht.

Die Erfassung einiger weiterer Möglichkeiten zur Ermittlung von Fehler- schranken, wie die der asymptotischen unteren und oberen Schranken für Resultate von Extrapolationsverfahren (Abschnitt 3.2) soll Anstöße geben, auf solchen anderen Wegen auch bei Schalenberechnungen Eingrenzungen zu versuchen.

An einem Beispiel (siehe Anlage) wird die hier theoretisch nachgewiesene Möglichkeit verifiziert, über das Hyperkreis-Verfahren globale Fehler- grenzen und auch lokale Schranken für Zustandsgrößen an beliebigen (nicht auf dem Rand liegenden) Punkten zu erstellen. Das Ziel jeder Berechnung eines Ingenieurs ist eine möglichst schnell und einfach zu ermittelnde Approximation mit nicht zu groben echten Fehlerschranken. Deshalb wird auch gezeigt, daß einige wenige globale Ansätze Näherungen und damit auch Fehlerschranken erzeugen können, die ebenso "gut" sind - dies ist ein- deutig durch die Funktionalwerte feststellbar - wie viel umfangreichere Finite-Element-Ansätze. Trotzdem werden die Grenzen solcher Schranken- Bestimmung über extremale komplementäre Funktionale vor allem durch die numerische Aufwendigkeit gesetzt. Eine möglichst optimale Formulierung der finiten Berechnungen (siehe Abschnitt 4.2) ist deshalb ebenso wichtig

wie die Auswahl guter Ansatzfunktionen (siehe Abschnitt 4.1).

Ein künftiges Arbeitsprogramm sollte versuchen, durch Verwendung möglichst geeigneter finiter Ansätze, z. B. der B-Spline-Funktionen, die Konvergenz zu verbessern, und außerdem den für punktweise Eingrenzungen notwendigen zusätzlichen Aufwand durch Einführung "singulärer Elemente" zu reduzieren. Außerdem sollten - wie bereits begonnen [211] - Formulierungen von Schalentheorien weiter untersucht werden, die es ermöglichen, den Aufwand zur Erstellung der beiden komplementären Gleichungssysteme in vielen Fällen praktisch auf die Hälfte zu reduzieren. Auch sollten andere hier eingeführte Möglichkeiten zur Schrankenberechnung weiterverfolgt werden; dazu müssen allerdings noch die notwendigen theoretischen Untersuchungen in der Schalentheorie durchgeführt werden.

Weiterhin sind ebenso wie die hier behandelten inhomogenen Probleme die Untersuchungen der Eigenschwingungen von Schalen von großem Interesse. Deshalb sollten die Eingrenzungsmöglichkeiten, die auf diesem Gebiet aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie [55] und aus der Plattentheorie [35] bekannt sind, auch in der linearen Schalentheorie erforscht werden. Dieser Ausblick auf an diese Arbeit anschließende Fragestellungen (mit wachsendem Schwierigkeitsgrad) kann natürlich noch um die Frage nach Eingrenzungen bei nichtlinearen Theorien erweitert werden.

Diese Arbeit kann somit nur einen Anfang für Untersuchungen "über Fehler und ihre Abschätzungen bei numerischen Berechnungen von Schalentragwerken" bedeuten.

Anhang A1: DER SATZ VON BETTI

für zwei reine Lastspannungsfälle, d. h.  $\underline{\varepsilon}^Q \equiv 0$  in  $V$ ,  $\underline{u} \equiv 0$  auf  $F_u$ :

$$\begin{aligned} \int_V \underline{u}_i \underline{p}_i^2 dV + \int_{F_p} \underline{u}_i \underline{p}_i^2 dF &= - \int_V \underline{u}_i \underline{\tau}_{ij,j}^{2G} dV + \int_{F_p} \underline{u}_i \underline{\tau}_{ij}^{2G} n_j dF = \int_V \underline{u}_{i,j} \underline{\tau}_{ij}^{2G} dV = \\ &= \int_V \underline{u}_{i,j} \underline{\tau}_{ij}^{1G} dV = \int_V \underline{u}_i \underline{p}_i^1 dV + \int_{F_p} \underline{u}_i \underline{p}_i^1 dF . \end{aligned}$$

für zwei reine Eigenspannungsfälle, d. h.  $\underline{p}_i \equiv 0$  in  $V$ ,  $\underline{P}_i \equiv 0$  auf  $F_p$ :

$$\begin{aligned} \int_{F_u} \underline{u}_i \underline{p}_i^2 dF + \int_V \underline{u}_i \underline{p}_i^{2Q} dV + \int_{F_p} \underline{u}_i \underline{p}_i^{2Q} dF &= \int_V \underline{u}_{i,j} \underline{\tau}_{ij}^{2G} dV + \int_V \underline{u}_i \underline{\tau}_{ij,j}^{2Q} dV - \int_{F_p} \underline{u}_i \underline{\tau}_{ij}^{2Q} n_j dF \\ &= \int_V \underline{u}_{i,j} (\underline{\tau}_{ij}^{2G} - \underline{\tau}_{ij}^{2Q}) dV = \int_V (\underline{\tau}_{ij}^{1G} - \underline{\tau}_{ij}^{1Q}) \underline{u}_{i,j}^2 dV \\ &= \int_{F_u} \underline{u}_i \underline{p}_i^1 dF + \int_V \underline{u}_i \underline{p}_i^{1Q} dV + \int_{F_p} \underline{u}_i \underline{p}_i^{1Q} dF \end{aligned}$$

für einen Lastspannungszustand, d. h.  $\underline{\varepsilon}^{1Q} \equiv 0$  in  $V$ ,  $\underline{u} = 0$  auf  $F_u$ ,  
und einen Eigenspannungszustand, d. h.  $\underline{p}_i^2 = 0$  in  $V$ ,  $\underline{P}_i = 0$  auf  $F_p$ :

$$\begin{aligned} \int_V \underline{u}_i \underline{p}_i^{2Q} dV + \int_{F_p} \underline{u}_i \underline{p}_i^{2Q} dF &= \int_V \underline{u}_i (\underline{\tau}_{ij,j}^{2Q} - \underline{\tau}_{ij,j}^{2G}) dV + \int_{F_p} \underline{u}_i (\underline{\tau}_{ij}^{2G} - \underline{\tau}_{ij}^{2Q}) n_j dF \\ &= \int_V \underline{u}_{i,j} (\underline{\tau}_{ij}^{2G} - \underline{\tau}_{ij}^{2Q}) dV = \int_V \underline{\tau}_{ij}^{1G} \underline{u}_{i,j}^2 dV = \int_{F_p} \underline{u}_i \underline{p}_i^1 dF + \int_V \underline{u}_i \underline{p}_i^1 dV . \end{aligned}$$

Anhang A2: DAS PRIMÄRE UND DAS DUALE FUNKTIONAL

Das primäre Funktional  $J_p$  der linearen Elastizitätstheorie liefert die primären Grundgleichungen:

$$\begin{aligned} J_p(\underline{\tau}^G, \underline{u}, \underline{\varepsilon}^E) &= \int_V \underline{\tau}^G \dots \frac{1}{2} (\underline{v}u + u\underline{v}) dV - \int_{F_u} \underline{\tau}^G \dots \underline{n} \underline{u}'' dF \\ &- \int_V [\underline{\tau}^G \dots (\underline{\varepsilon}^E + \underline{\varepsilon}^{Q*}) - w(\underline{\varepsilon}^E) + \underline{p}^{*T} \cdot \underline{u}] dV + \int_{F_u} \underline{u}^{*T} \cdot \underline{\tau}^G \cdot \underline{n} dF - \int_{F_p} \underline{p}^{*T} \cdot \underline{u} dF \end{aligned}$$

$$= - \int_V \sqrt{\underline{\underline{v}}} \cdot \underline{\underline{\tau}}^G \cdot \underline{\underline{u}} \, dV + \int_{F_p} \underline{\underline{\tau}}^{G'} \cdot \underline{\underline{n}} \underline{\underline{u}} \, dF - H_p(\underline{\underline{\tau}}^G, \underline{\underline{u}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^E) .$$

$$\left\{ \delta \underline{\underline{\tau}}^G, \frac{\partial J_p}{\partial \underline{\underline{\tau}}^G} \right\} = 0 = \int_V \delta \underline{\underline{\tau}}^G \cdot \left[ \frac{1}{2} (\underline{\underline{v}} \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{u}} \underline{\underline{v}}) - (\underline{\underline{\varepsilon}}^E + \underline{\underline{\varepsilon}}^{Q*}) \right] dV - \int_{F_u} \delta \underline{\underline{\tau}}^G \cdot \underline{\underline{n}} (\underline{\underline{u}}'' - \underline{\underline{u}}^*) \, dF .$$

$$\left\{ \delta \underline{\underline{u}}, \frac{\partial J_p}{\partial \underline{\underline{u}}} \right\} = 0 = - \int_V [\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{\tau}}^G + \underline{\underline{p}}^{*T}] \cdot \delta \underline{\underline{u}} \, dV + \int_{F_p} [\underline{\underline{\tau}}^{G'} \cdot \underline{\underline{n}} - \underline{\underline{p}}^{*T}] \cdot \delta \underline{\underline{u}} \, dF .$$

$$\left\{ \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^E, \frac{\partial J_p}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^E} \right\} = 0 = - \int_V \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^E \cdot \left( \underline{\underline{\tau}}^G - \frac{\partial W(\underline{\underline{\varepsilon}}^E)}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^E} \right) dV .$$

Das *duale Funktional*  $J_d$  der linearen Elastizitätstheorie liefert die dualen Grundgleichungen:

$$\begin{aligned} J_d(\underline{\underline{\tau}}^G, \underline{\underline{\chi}}, \underline{\underline{\varepsilon}}^E) &= \int_V \underline{\underline{\varepsilon}}^E \cdot (\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{\chi}} \times \underline{\underline{v}}) \, dV - \int_{F_p} [\underline{\underline{\varepsilon}}^{E'} \cdot (\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{\chi}}' \times \underline{\underline{n}}) - (\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{\varepsilon}}^{E'} \times \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{\chi}}'] \, dF \\ &\quad - \int_V [(\underline{\underline{\tau}}^G + \underline{\underline{\tau}}^K) \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}^E - w_c(\underline{\underline{\tau}}^G) + \eta \cdot \underline{\underline{\chi}}] \, dV \\ &\quad + \int_{F_p} [\underline{\underline{\varepsilon}}^E \cdot (\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{\chi}} \times \underline{\underline{n}})^* - (\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{\varepsilon}}^E \times \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{\chi}}^*] \, dF \\ &\quad - \int_{F_u} [\underline{\underline{\varepsilon}}^{E*} \cdot (\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{\chi}} \times \underline{\underline{n}}) - (\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{\varepsilon}}^{E*} \times \underline{\underline{n}}) \cdot \underline{\underline{\chi}}] \, dF \end{aligned}$$

$$\frac{\partial J_d}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^E} = \underline{\underline{\omega}} = \left[ \begin{array}{l} \underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{\chi}} \times \underline{\underline{v}} - (\underline{\underline{\tau}}^G + \underline{\underline{\tau}}^K) \quad \text{in } V \\ 0 \quad \text{auf } F_u \\ - \underline{\underline{\chi}} + \underline{\underline{\chi}}^* \\ - (\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{\chi}} \times \underline{\underline{n}}) + (\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{\chi}} \times \underline{\underline{n}})^* \quad \text{auf } F_p \end{array} \right]$$

$$\frac{\partial J_d}{\partial \underline{\underline{\chi}}} = \underline{\underline{\omega}} = \left[ \begin{array}{l} \underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{\varepsilon}}^E \times \underline{\underline{v}} - \eta^* \quad \text{in } V \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^E - \underline{\underline{\varepsilon}}^{E*} \\ - (\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{\varepsilon}}^E \times \underline{\underline{n}}) + (\underline{\underline{v}} \times \underline{\underline{\varepsilon}}^{E*} \times \underline{\underline{n}})^* \quad \text{auf } F_u \\ 0 \quad \text{auf } F_p \end{array} \right]$$

Anhang A3: DIE POSITIVE DEFINITHEIT DER ELASTIZITÄTSTENSOREN

Der Tensor  $\overset{(o)}{E}_2^{\alpha\beta\rho\lambda}$  kann ebenso wie der dazu inverse Tensor  $\overset{(o)}{F}_{\alpha\beta\rho\lambda}$  als symmetrische Matrix geschrieben werden (siehe 2.2,35/34). Der Nachweis der positiven Definitheit ist erbracht [97], wenn für eine der beiden Matrizen  $\underline{E}$  und  $\underline{F}$  eine Dreieckszerlegung mit nur positiven Diagonalelementen durchgeführt werden kann. Mit  $a = \det(a_{\alpha\beta})$  und  $n := a_{11}^2 a_{22}^2 - a_{12}^4 - va^2$  ist

$$\underline{F} = \frac{1}{Et} \begin{pmatrix} a_{11}^2 & (1+v)a_{12}^2 - va_{11}a_{22} & 2a_{11}a_{22} \\ & a_{22}^2 & 2a_{22}a_{12} \\ \text{symm.} & & 2(1+v)a_{11}a_{22} + 2(1-v)a_{12}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{Et} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{12}^2 - va}{a_{11}^2} & 1 & 0 \\ 2 \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{2aa_{12}a_{11}}{n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 - va & 2a_{11}a_{12} \\ & 2va \frac{(1+v)a_{12}^2}{a_{11}^2} & 2(1+v) \frac{a_{12}}{a_{11}} a \\ & + (1-v)^2 \frac{n + va^2}{a_{11}^2} & \frac{2(1-v^2)a^3}{n} \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Annahme  $a_{11}^2 a_{22}^2 - a_{12}^4 < a^2$  zu einem Widerspruch mit der Eigenschaft des Metrikensors  $\det a_{\alpha\beta} = a > 0$ , d. h.  $a_{11}a_{22} > a_{12}^2$  führt, ist bewiesen, daß

$$a_{11}^2 a_{22}^2 - a_{12}^4 > a^2 > 0, \quad n = (a_{11}^2 a_{22}^2 - a_{12}^4) - va^2 > (1-v)a^2$$

ist. Für die üblichen POISSON'schen Zahlen  $0 < v < 1$  sind damit alle Diagonalelemente dieser Zerlegung, also auch die Eigenwerte von  $\underline{F}$  positiv. Da die Inverse  $\underline{E}$  von  $\underline{F}$  die inversen Eigenwerte von  $\underline{F}$  hat, ist auch  $\underline{E}$  positiv definit.

Anhang 4: DIE SATTELEIGENSCHAFT

Das primäre Schalenfunktional  $J_p$

$$J_p(\underline{\varepsilon}, \underline{u}, \underline{\sigma}) = Q_p(\underline{\varepsilon}, \underline{u}) - \int_F [(\underline{\varepsilon} + \underline{\varepsilon}^{Q*})^T \cdot \underline{\sigma} - \rho W(\underline{\varepsilon}) + \underline{p}^{*T} \cdot \underline{u}] dF \\ + \int_{C_u} \underline{\sigma}^{RT} \cdot \underline{v} \cdot \underline{u}^{R*} ds - \int_{C_p} \underline{u}^{RT} \cdot \underline{v}^T \cdot \underline{\sigma}^{R*} ds$$

mit

$$Q_p(\underline{\varepsilon}, \underline{u}) = \int_F (\underline{T}\underline{u})^T \cdot \underline{\sigma} dF - \int_{C_u} \underline{\sigma}^{RT} \cdot \underline{v} \cdot \underline{u}^R ds = \int_F \underline{u}^T \cdot (\underline{T}^* \underline{\sigma}) dF + \int_{C_p} \underline{u}^{RT} \cdot \underline{v}^T \cdot \underline{\sigma}^R ds$$

ist konkav in  $\underline{\sigma}$  und konvex in  $\underline{u}$  und  $\underline{\varepsilon}$ , wenn [61]

$$J_p(\underline{\varepsilon}_+, \underline{u}_+, \underline{\sigma}_+) - J_p(\underline{\varepsilon}_-, \underline{u}_-, \underline{\sigma}_-) - \left\{ \underline{\sigma}_+ - \underline{\sigma}_-, \frac{\partial J_p}{\partial \underline{\sigma}} \Big|_+ \right\} - \left\{ (\underline{u}_+ - \underline{u}_-), \frac{\partial J_p}{\partial \underline{u}} \Big|_- \right\} - \left\{ (\underline{\varepsilon}_+ - \underline{\varepsilon}_-), \frac{\partial J_p}{\partial \underline{\varepsilon}} \Big|_- \right\} \geq 0$$

gilt. Die explizite Nachprüfung dieser Bedingung unter Beachtung der oben angegebenen Eigenschaft von  $Q_p(\underline{\varepsilon}, \underline{u})$  gibt ( $\underline{\varepsilon}^Q \equiv 0$ )

$$J_p(\underline{\varepsilon}_+, \underline{u}_+, \underline{\sigma}_+) - J_p(\underline{\varepsilon}_-, \underline{u}_-, \underline{\sigma}_-) - \int_F (\underline{T}\underline{u}_+ - \underline{\varepsilon}_+)^T \cdot (\underline{\sigma}_+ - \underline{\sigma}_-) dF + \int_{C_u} (\underline{\sigma}_+^R - \underline{\sigma}_-^R)^T \cdot \underline{v} \cdot (\underline{u}_+^R - \underline{u}_-^R) ds \\ - \int_F (\underline{T}(\underline{u}_+ - \underline{u}_-))^T \cdot \underline{\sigma}_- dF + \int_{C_u} (\underline{u}_+^R - \underline{u}_-^R)^T \cdot \underline{v}^T \cdot \underline{\sigma}_-^R ds + \int_F \underline{p}^{*T} \cdot (\underline{u}_+ - \underline{u}_-) dF + \int_{C_p} (\underline{u}_+^R - \underline{u}_-^R)^T \cdot \underline{v}^T \cdot \underline{\sigma}_-^{R*} ds \\ + \int_F (\underline{\varepsilon}_+ - \underline{\varepsilon}_-)^T \cdot \underline{\sigma}_- dF - \int_F \left( \frac{\partial W(\underline{\varepsilon}_-)}{\partial \underline{\varepsilon}_-} \right)^T \cdot (\underline{\varepsilon}_+ - \underline{\varepsilon}_-) dF = \int_F [W(\underline{\varepsilon}_+) - W(\underline{\varepsilon}_-) - \frac{\partial W(\underline{\varepsilon}_-)}{\partial \underline{\varepsilon}_-} \Big|_- (\underline{\varepsilon}_+ - \underline{\varepsilon}_-)] dF \geq 0$$

und damit als Bedingung für die behauptete Eigenschaft von  $J_p$  die Konvexität von  $W(\underline{\varepsilon})$ .

Anhang A5: GRUNDINTEGRALE LINEARER UND KUBISCHER HERMITE-POLYNOME

Zum Aufbau von Steifigkeits- bzw. Flexibilitätsmatrizen  $R_{\underline{h}}$  bzw.  $Q_{\underline{h}}$  sind bei Rechteckelementen und bilinearen bzw. bikubischen HERMITE-Ansätzen folgende Matrizen mit den dabei wesentlichen Integralen nützlich (siehe 4.1.34-37):

$$\int_0^h \begin{pmatrix} H_{00}^1(\xi)H_{00}^{1'}(\xi) & H_{00}^1(\xi)H_{00}^{1'}(\xi) \\ H_{10}^1(\xi)H_{00}^{1'}(\xi) & H_{10}^1(\xi)H_{10}^{1'}(\xi) \end{pmatrix} d\xi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\int_0^h \begin{pmatrix} H_{00}^1 \\ H_{10}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{00}^3 H_{01}^3 H_{10}^3 H_{11}^3 \\ H_{00}^3 H_{01}^3 H_{10}^3 H_{11}^3 \end{pmatrix} d\xi = \frac{h}{60} \begin{pmatrix} 21 & 3h & 9 & -2h \\ 9 & 2h & 21 & -3h \end{pmatrix},$$

$$\int_0^h \begin{pmatrix} H_{00}^1 \\ H_{10}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{00}^{3'} H_{01}^{3'} H_{10}^{3'} H_{11}^{3'} \\ H_{00}^{3'} H_{01}^{3'} H_{10}^{3'} H_{11}^{3'} \end{pmatrix} d\xi = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -6 & h & 6 & -h \\ -6 & -h & 6 & h \end{pmatrix},$$

$$\int_0^h \begin{pmatrix} H_{00}^{1'} \\ H_{10}^{1'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{00}^3 H_{01}^3 H_{10}^3 H_{11}^3 \\ H_{00}^3 H_{01}^3 H_{10}^3 H_{11}^3 \end{pmatrix} d\xi = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -6 & -h & -6 & h \\ 6 & h & 6 & -h \end{pmatrix},$$

$$\int_0^h \begin{pmatrix} H_{00}^1 \\ H_{10}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{00}^{3''} H_{01}^{3''} H_{10}^{3''} H_{11}^{3''} \\ H_{00}^{3''} H_{01}^{3''} H_{10}^{3''} H_{11}^{3''} \end{pmatrix} d\xi = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 & h & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & h \end{pmatrix},$$

$$\int_0^h \begin{pmatrix} H_{00}^{1'} \\ H_{10}^{1'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{00}^{3'} H_{01}^{3'} H_{10}^{3'} H_{11}^{3'} \\ H_{00}^{3'} H_{01}^{3'} H_{10}^{3'} H_{11}^{3'} \end{pmatrix} d\xi = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\int_0^h \begin{pmatrix} H_{00}^{1'} \\ H_{10}^{1'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{00}^{3''} H_{01}^{3''} H_{10}^{3''} H_{11}^{3''} \\ H_{00}^{3''} H_{01}^{3''} H_{10}^{3''} H_{11}^{3''} \end{pmatrix} d\xi = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 0 & h & 0 & -h \\ 0 & -h & 0 & h \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{c} h \\ \circ \end{array} \begin{pmatrix} H_{00}^3 \\ H_{01}^3 \\ H_{10}^3 \\ H_{11}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{00}^3 & H_{01}^3 & H_{10}^3 & H_{11}^2 \end{pmatrix} \quad d\xi = \frac{h}{420} \quad \begin{pmatrix} 156 & 22h & 54 & -13h \\ 22h & 4h^2 & 13h & -3h^2 \\ 54 & 13h & 156 & -22h \\ -13h & -3h^2 & -22h & 4h^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} h \\ \circ \end{array} \begin{pmatrix} H_{00}^3 \\ H_{01}^3 \\ H_{10}^3 \\ H_{11}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{00}^{3''} & H_{01}^{3''} & H_{10}^{3''} & H_{11}^{3''} \end{pmatrix} \quad d\xi = \frac{1}{30h} \quad \begin{pmatrix} -36 & -33h & 36 & -3h \\ -3h & -4h^2 & 3h & h^2 \\ 36 & 3h & -36 & 33h \\ -3h & h^2 & 3h & -4h^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} h \\ \circ \end{array} \begin{pmatrix} H_{00}^{3'} \\ H_{01}^{3'} \\ H_{10}^{3'} \\ H_{11}^{3'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{00}^{3'} & H_{01}^{3'} & H_{10}^{3'} & H_{11}^{3'} \end{pmatrix} \quad d\xi = \frac{1}{30h} \quad \begin{pmatrix} 36 & 3h & -36 & 3h \\ 3h & 4h^2 & -3h & -h^2 \\ -36 & -3h & 36 & -3h \\ 3h & -h^2 & -3h & 4h^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} h \\ \circ \end{array} \begin{pmatrix} H_{00}^{3''} \\ H_{01}^{3''} \\ H_{10}^{3''} \\ H_{11}^{3''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{00}^{3''} & H_{01}^{3''} & H_{10}^{3''} & H_{11}^{3''} \end{pmatrix} \quad d\xi = \frac{1}{h^3} \quad \begin{pmatrix} 12 & 6h & -12 & 6h \\ 6h & 4h^2 & -6h & 2h^2 \\ -12 & -6h & 12 & -6h \\ 6h & 2h^2 & -6h & 4h^2 \end{pmatrix}$$



ein Element der vorher angegebenen Matrix  $[A_{ik}]$

$$\begin{aligned}
 A_{36} &= \int_{3h}^{4h} \frac{h^{-8}}{54} [2(4h-x)_+^3] [-4(4h-x)_+^3 + 6(5h-x)_+^3 - 4(6h-x)_+^3 + (7h-x)_+^3] dx \\
 &= \frac{h^{-8}}{54} \int_0^h [2(h-x)^3] [-4(h-x)_+^3 + 6(2h-x)^3 - 4(3h-x)^3 + (4h-x)^3] dx \\
 &= \frac{h^{-1}}{54} [-8 \cdot \frac{1}{7} + 12(\frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4}) - 8(\frac{1}{7} + 6 \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{1}{5} + 8 \cdot \frac{1}{4}) \\
 &\quad + 2(\frac{1}{7} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 27 \cdot \frac{1}{5} + 27 \cdot \frac{1}{4})] \\
 &= \frac{h^{-1}}{3780} .
 \end{aligned}$$

Anhang 7: DIFFERENZEN GREEN'SCHER ZUSTANDSBESCHREIBUNGEN

Bei der Erstellung geometrisch bzw. statisch zulässiger GREEN'scher Zustände sind die Ausgangspunkte Verschiebungsfelder  $\tilde{u}^s$  bzw. Spannungsfunktionen  $\psi^s$ . Die daraus bestimmten Schnittgrößen und Verzerrungsmaße unterscheiden sich i. a. durch reguläre Reste:

$\frac{P_{3E}}{8\pi Et}$	$\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \tilde{u}^s - \underline{K} \cdot \tilde{g}^s$	$\tilde{g}^s - \underline{K}^{-1} \cdot \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \tilde{u}^s$	$\frac{Et}{1-\nu^2}$
$\Delta\alpha_{<11>}^s$	0	$\frac{\nu}{R} u_3^s$	$\Delta\bar{n}_{<11>}^s$
$\Delta\alpha_{<22>}^s$	$-\frac{8\pi Et}{P_{3E}} \frac{1}{R} u_3^s$	$\frac{1}{R} u_3^s$	$\Delta\bar{n}_{<22>}^s$
$\Delta\alpha_{<12>}^s$	0	0	$\Delta\bar{n}_{<12>}^s$
$\Delta\beta_{<11>}^s$	$\frac{(1+\nu)}{R^2} (5-3\nu) \frac{y^2x^2-y^4}{r^4} + \frac{96\pi}{P_{3E}} \frac{\psi_3^s}{Rt^2}$	$-\frac{t^2}{12} [\Delta\beta_{<11>}^s + \nu\Delta\beta_{<22>}^s]$	$\Delta m_{<11>}^s$
$\Delta\beta_{<22>}^s$	$\frac{8\pi}{P_{3E}} (\frac{Et}{R^2} u_3^s - \frac{12\nu}{Rt^2} \psi_3^s) - \frac{(1+\nu)}{R^2} [(7-\nu) \frac{x^2y^2-x^4}{r^4} - 4]$	$-\frac{t^2}{12} [\Delta\beta_{<22>}^s + \nu\Delta\beta_{<11>}^s]$	$\Delta m_{<22>}^s$
$\Delta\beta_{<12>}^s$	$\frac{(1+\nu)}{R^2} \frac{xy}{r^4} [(7-\nu)y^2 - (5-3\nu)x^2]$	$-\frac{t^2}{12} (1-\nu)\Delta\beta_{<12>}^s$	$\Delta m_{<12>}^s$

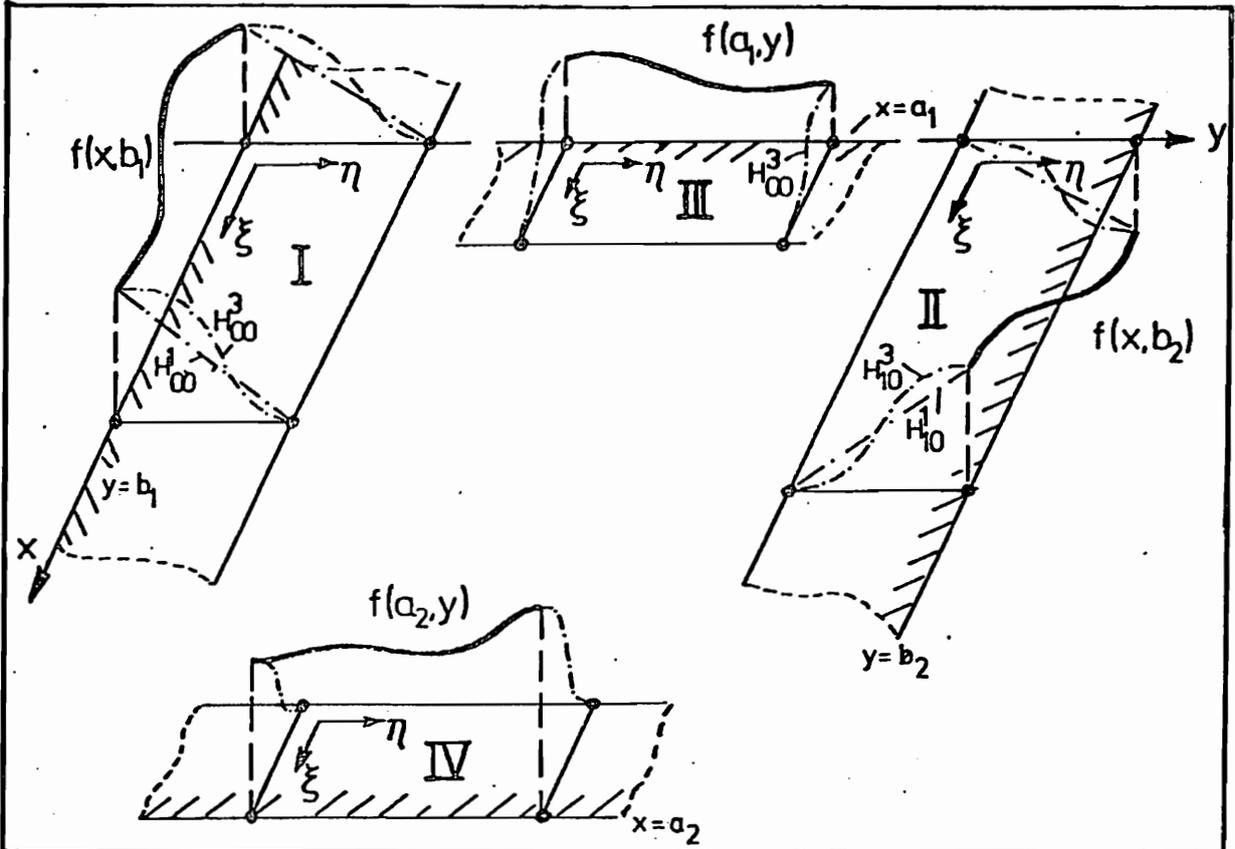
$\frac{P_1 E}{8\pi E t}$	$\underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{u}^s - \underline{K} \cdot \underline{g}^s$	$\underline{z}^s - \underline{K}^{-1} \cdot \underline{D} \cdot \underline{N} \cdot \underline{u}^s$	$\frac{E t}{1 - \nu^2}$
$\Delta \alpha_{<11>}^s$	$-\frac{t^2 (1+\nu)^2}{R^2} \frac{1}{12} (1+4y^2 \frac{x^2-y^2}{r^4}) \frac{x}{r^2}$	$-\Delta \alpha_{<11>}^s - \nu \Delta \alpha_{<22>}^s$	$\Delta \bar{n}_{<11>}^s$
$\Delta \alpha_{<22>}^s$	$-\frac{8\pi E t}{P_1 E} (\frac{1}{R} u_3^s + \Delta \alpha_{<11>}^s)$	$-\Delta \alpha_{<22>}^s - \nu \Delta \alpha_{<11>}^s$	$\Delta \bar{n}_{<22>}^s$
$\Delta \alpha_{<12>}^s$	$-\frac{t^2 (1+\nu)^2}{R^2} \frac{1}{12} \frac{y}{r^2} (1+4y^2 \frac{x^2-y^2}{r^4})$	$-(1-\nu) \Delta \alpha_{<12>}^s$	$\Delta \bar{n}_{<12>}^s$
$\Delta \beta_{<11>}^s$	$\frac{96\pi}{P_1 E} \frac{\psi_3^s}{R t^2}$	$-\frac{t^2}{12} [\Delta \beta_{<11>}^s + \nu \Delta \beta_{<22>}^s]$	$\Delta m_{<11>}^s$
$\Delta \beta_{<22>}^s$	$\frac{8\pi}{P_1 E} (\frac{E t}{R^2} u_3^s - \frac{12\nu}{R t^2} \psi_3^s)$	$-\frac{t^2}{12} [\Delta \beta_{<22>}^s + \nu \Delta \beta_{<11>}^s]$	$\Delta m_{<22>}^s$
$\Delta \beta_{<12>}^s$	0	0	$\Delta m_{<12>}^s$

Anhang A8: ANPASSUNG GLOBALER FUNKTIONEN AN HOMOGENE RAND-BEDINGUNGEN

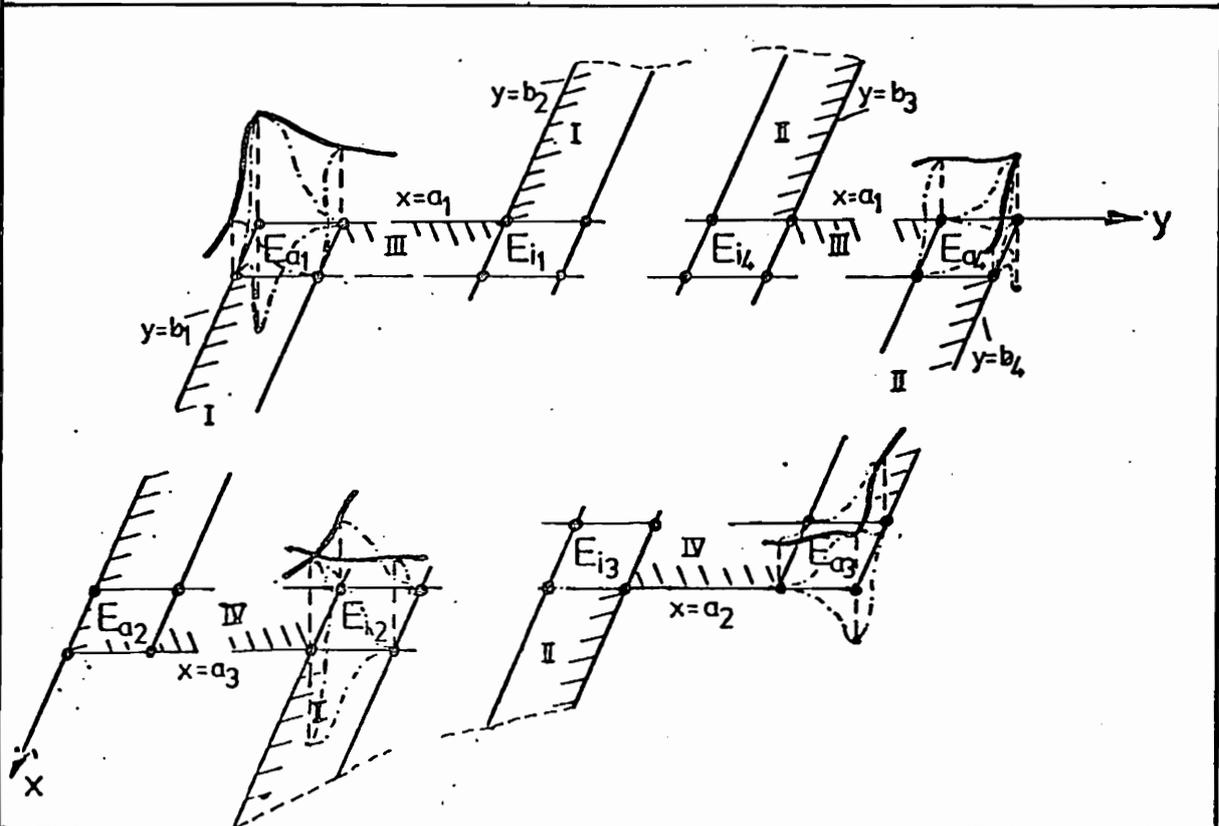
Werden global definierte Funktionen z. B. zur Wiedergabe eines singulären Verhaltens zusammen mit lokalen Ansätzen, z. B. in HERMITE-Polynomen, verwendet, ist es sinnvoll, in den Randelementen zur Anpassung an homogene Randbedingungen eine geeignete Koppelung durchzuführen (siehe Skizzen):

Bedingung	Ansatz mit HERMITE-Polynomen
	Im Randstreifen II ( $b_2 - h_y \leq y \leq b_2; 0 \leq \eta \leq h_y$ )
$\tilde{u}_1(x, b_2) = 0$	$u_1^s + u_1^{gc} = u_1^s(x, y) - u_1^s(x, b_2) H_{10}^1(\eta);$
$\tilde{u}_2(x, b_2) = 0$	$u_2^s + u_2^{gc} = u_2^s(x, y) - u_2^s(x, b_2) H_{10}^1(\eta);$
$\tilde{u}_3(x, b_2) = 0$	$u_3 + u_3^{gc} = u_3^s(x, y) - u_3^s(x, b_2) H_{10}^3(\eta) - u_{3,y}^s(x, b_2) H_{11}^3(\eta);$
$\tilde{u}_{3,y}(x, b_2) = 0$	
	im Randstreifen III ( $a_1 \leq x \leq a_1 + h_x, 0 \leq \xi \leq h_x$ )
$\tilde{u}_2(a_1, y) = 0$	$u_2^s + u_2^{gc} = u_2^s(x, y) - u_2^s(a_1, y) H_{00}^1(\xi);$
$\tilde{u}_3(a_1, y) = 0$	$u_2^s + u_2^{gc} = u_3^s(x, y) - u_3^s(a_1, y) H_{00}^3(\xi);$

Bedingung	Ansatz mit HERMITE-Polynomen	
	im Randschreifen IV ( $a_2 - h_x \leq x \leq a_2; 0 \leq \xi \leq h_x$ )	
$u_2^{\sim}(a_2, y) = 0$	$u_2^S + u_2^{GC} = u_2^S(x, y) - u_2^S(a_2, y) H_{10}^1(\xi);$	
$u_3^{\sim}(a_2, y) = 0$	$u_3^S + u_3^{GC} = u_3^S(x, y) - u_3^S(a_2, y) H_{10}^1(\xi);$	
	im Eckelementtyp $E_{a_2}$ ( $a_3 - h_x \leq x \leq a_3; b_1 \leq y \leq b_1 + h_y$ )	
$u_1^{\sim}(x, b_1) = 0$	$u_1^S + u_1^{GC} = u_1^S(x, y) - u_1^S(x, b_1) H_{00}^1(\xi); \quad 0 \leq \eta \leq h_y$	
$u_2^{\sim}(a_3, y) = 0$	} $u_2^S + u_2^{GC} = u_2^S(x, y) - u_2^S(x, b_1) H_{00}^1(\xi) - u_2^S(a_3, y) H_{10}^1(\xi)$	
$u_2^{\sim}(x, b_1) = 0$		+ $u_2^S(a_3, b_1) H_{10}^1(\xi) H_{00}^1(\eta);$
$u_3^{\sim}(x, b_1) = 0$	} $u_3^S + u_3^{GC} = u_3^S(x, y) - u_3^S(x, b_1) H_{00}^3(\eta) - u_{3,y}^S(x, b_1) H_{01}^3(\eta)$	
$u_3^{\sim}(a_3, y) = 0$		- $u_3^S(a_3, y) H_{10}^3(\xi) + u_3^S(a_3, b_1) H_{00}^3(\eta) H_{10}^3(\xi)$
$u_{3,y}^{\sim}(x, b_1) = 0$		+ $u_{3,y}^S(a_3, b_1) H_{10}^3(\xi) H_{01}^3(\eta);$
	im Eckelementtyp $E_{a_3}$ ( $a_2 - h_x \leq x \leq a_2; b_4 - h_y \leq y \leq b_4$ )	
$u_1^{\sim}(x, b_4) = 0$	$u_1^S + u_1^{GC} = u_1^S(x, y) - u_1^S(x, b_4) H_{10}^1(\eta);$	
$u_2^{\sim}(x, b_4) = 0$	} $u_2^S + u_2^{GC} = u_2^S(x, y) - u_2^S(x, b_4) H_{10}^1(\eta) - u_2^S(a_2, y) H_{10}^1(\eta)$	
$u_2^{\sim}(a_2, y) = 0$		+ $u_2^S(a_2, b_4) H_{10}^1(\xi) H_{10}^1(\eta);$
$u_3^{\sim}(a_2, y) = 0$	} $u_3^S + u_3^{GC} = u_3^S(x, y) - u_3^S(x, b_4) H_{10}^3(\eta) - u_{3,y}^S(x, b_4) H_{11}^3(\eta)$	
$u_3^{\sim}(x, b_4) = 0$		- $u_3^S(a_2, y) H_{10}^3(\xi) + u_3^S(a_2, b_4) H_{10}^3(\xi) H_{10}^3(\eta)$
$u_{3,y}^{\sim}(x, b_4) = 0$		+ $u_{3,y}^S(a_2, b_4) H_{10}^3(\xi) H_{11}^3(\eta);$
	im Eckelementtyp $E_{a_4}$ ( $a_1 \leq x \leq a_1 + h_x; b_4 - h_y \leq y \leq b_4$ )	
$u_1^{\sim}(x, b_4) = 0$	$u_1^S + u_1^{GC} = u_1^S(x, y) - u_1^S(x, b_4) H_{10}^1(\eta);$	
$u_2^{\sim}(x, b_4) = 0$	} $u_2^S + u_2^{GC} = u_2^S(x, y) - u_2^S(x, b_4) H_{10}^1(\eta) - u_2^S(a_1, y) H_{00}^1(\xi)$	
$u_2^{\sim}(a_1, y) = 0$		+ $u_2^S(a_1, b_4) H_{00}^1(\xi) H_{10}^1(\eta);$
$u_3^{\sim}(x, b_4) = 0$	} $u_3^S + u_3^{GC} = u_3^S(x, y) - u_3^S(x, b_4) H_{10}^3(\eta) - u_3^S(a_1, y) H_{00}^3(\xi)$	
$u_3^{\sim}(a_1, y) = 0$		- $u_{3,y}^S(x, b_4) H_{11}^3(\eta) + u_{3,y}^S(a_1, b_4) H_{00}^3(\xi) H_{11}^3(\eta)$
$u_{3,y}^{\sim}(x, b_4) = 0$		+ $u_3^S(a_1, b_4) H_{00}^3(\xi) H_{10}^3(\eta);$



Randfunktioneninterpolation an glatten Rändern  
mit linearen bzw. kubischen HERMITE - Polynomen



Randfunktioneninterpolation  
an aus- und einspringenden Ecken

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] TREFFTZ, E.: Ein Gegenstück zum RITZ'schen Verfahren. Proc. 2. Int. Congr. Appl. Mech., Zürich (1926) 131-137.
- [2] TREFFTZ, E.: Konvergenz und Fehlerabschätzung beim RITZ'schen Verfahren. Math. Ann. 100 (1928) 502.
- [3] FRIEDRICHS, K.O.: Die Rand- und Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten. Math. Ann. 98 (1927) 206.
- [4] FRIEDRICHS, K.O.: Ein Verfahren der Variationsrechnung, das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdrucks darzustellen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1929) 13 - 20.
- [5] WEBER, C.: Eingrenzung von Verschiebungen mit Hilfe der Minimalsätze. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942) 126-130.
- [6] WEBER, C.: Eingrenzung von Verschiebungen und Zerrungen mit Hilfe der Minimalsätze. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942) 130.
- [7] DIAZ, J.B., GREENBERG, H.J.: Upper and lower bounds for the solution of the first boundary value problem of elasticity. Quart. Appl. Math. 6 (1948) 326 - 331.
- [8] GREENBERG, H.J.: The determination of upper and lower bounds for the solution of the Dirichlet problem. J. Math. Phys. 27 (1948) 161 - 182.
- [9] DIAZ, J.B.: Upper and lower bounds for quadratic functionals. Collect. Math. 4 (1951) 3 - 49.
- [10] MAPLE, C.G.: The Dirichlet problem: Bounds at a point for the solution and its derivatives. Quart. Appl. Math. 8 (1950) 213 - 228.
- [11] WASHIZU, K.: Bounds for solutions of boundary value problems in elasticity. J. Math. Phys. 32 (1953) 117 - 128.
- [12] PRAGER, W., SYNGE, J.L.: Approximations in elasticity based on the concept of function space. Quart. Appl. Math. 5 (1947) 241 - 269.
- [13] SYNGE, J.L.: The method of the Hypercircle in elasticity when body forces are present. Quart. Appl. Math. 6 (1948) 15 - 19.
- [14] SYNGE, J.L.: The hypercircle in mathematical physics. Cambridge University Press 1957.
- [15] TREFFTZ, E.: Über Fehlerabschätzung bei der Berechnung von Eigenwerten. Math. Ann. 108 (1933) 595 - 604.
- [16] WEINSTEIN, A.: Sur la stabilité des plaques encastrées. Compt. Rend. 200 (1935) 107 - 109.

- [17] ARONSZAJN, M.: The Rayleigh-Ritz method and A. Weinstein method for approximation of eigenvalues I, II. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 34 (1948) 474 - 480, 594 - 601.
- [18] KATO, T.: On upper and lower bounds of eigenvalues. J. Phys. Soc. Jap. 4 (1949) 334.
- [19] PAYNE, L.E.: Inequalities for eigenvalues of membranes and plates, J. Rat. Mech. Anal. 4 (1955) 517 - 529.
- [20] DIAZ, J.B.: Upper and lower bounds on eigenvalues. 8. Symp. Appl. Math., A.M.S. (1958) 53 - 58.
- [21] BAZLEY, N., FOX, D.W.: Truncation in the method of intermediate problems for lower bounds to eigenvalues, J. Res. Nat. Bur. Stds. 65B (1961).
- [22] BAZLEY, N., FOX, D.W.: Error bounds for eigenvalues of selfadjoint operators. J. Res. Nat. Bur. Stds. 66B.
- [23] WEINSTEIN, A.: Some applications of the new maximum-minimum theory of eigenvalues, J. Math. Anal. Applic. 12 (1965) 58 - 64.
- [24] WEINSTEIN, A.: A necessary and sufficient condition in the maximum-minimum theory of eigenvalues, Studies in mathematical analysis and related topics, Stanford Univ. Press 1962.
- [25] WEINSTEIN, A.: Bounds for eigenvalues and the method of intermediate problems, Proc. Int. Conf. on part. differential equat. and continuum mech., Madison, Univ. Wisconsin Press (1961) 39 - 53.
- [26] WEINBERGER, H.F.: Error bounds in the Rayleigh-Ritz approximation of eigenvectors, J. Res. Nat. Bur. Std. 63 B (1960) 217.
- [27] RIEDER, G.: Zur punktweisen Eingrenzung von Eigenfunktionen in Schwingungs- und Stabilitätsproblemen, Z. angew. Math. Mech. 48 (1968) 279.
- [28] RIEDER, G.: Zur punktweisen Eingrenzung von Eigenfunktionen vollstetiger Operatoren, Vortrag Jahrestag. Math. Ges. DDR, Magdeburg 1969.
- [29] STUMPF, H.: Über punktweise Eingrenzung der Eigenfunktionen vollstetiger Operatoren und Anwendung auf die Schwingungen dünner Platten. Z. angew. Math. Mech. 22 (1970) T243.
- [30] STUMPF, H.: Zur numerischen Berechnung zweiseitiger Schranken für beliebige vektorielle und tensorielle Feldgrößen elastischer Eigenschwingungszustände. Z. angew. Math. Mech. 52 (1972) 37 - 44.
- [31] STUMPF, H.: Zur Eingrenzung von Feldgrößen bei Eigenschwingungsproblemen der Elastomechanik. Acta mechanica 13 (1972) 225 - 243.

- [32] STUMPF, H.: Lower bounds to the frequencies of continuous elastic systems. Continuum mechanics and related problems of analysis, NAUKA, Moskau 1972, 667.
- [33] STUMPF, H.: Obere und untere Schranken bei inhomogenen Problemen der Elastizitätstheorie, Z. angew. Math. Mech. 48 (1968) T166.
- [34] STUMPF, H.: Über punktweise Eingrenzung in der Elastizitätstheorie I-III. Bull. Acad. Polon., Sér. Sci. Techn. 16 (1968) 329 - 344, 397 - 406.
- [35] STUMPF, H.: Über punktweise Eingrenzung der Eigenfunktionen vollstetiger Operatoren und Anwendung auf die Schwingungen dünner Platten. Z. angew. Math. Mech. 50 (1970) T213.
- [36] STUMPF, H.: Eingrenzungsverfahren in der Elastomechanik. Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen Nr. 2116, Köln 1970.
- [37] SCHOMBURG, U.: Lokale Eingrenzung bei Randwertproblemen der Elastizitätstheorie mit der Methode der finiten Elemente, Dissertation RWTH Aachen 1972.
- [38] YOUNG, R.C., MOTE, C.D.: Local error bounds in mathematical physics by Finite Element methods. Variat. Meth. Engin., Proc. Int. Conf. Southampton 1972, 2/92 - 2/104.
- [39] YOUNG, R.C., MOTE, C.D.: Solution of mixed boundary value problems with local error bounds by the Finite Element method. Comp. Meth. in appl. Mech. and Eng. 2 (1973) 159 - 183.
- [40] DILLON, C., O'BRIEN, M.: Solution bounds in some stress problems by the Hypercircle and Finite Element methods. Variat. Meth. Enging., Proc. Int. Conf. Southampton 1972, 10/1-23.
- [41] STUMPF, H.: The principle of complementary energy in nonlinear plate theory. J. of Elasticity 6 (1976) 95 - 104.
- [42] STUMPF, H.: Generating functionals and extremum principles in nonlinear elasticity with applications to nonlinear plate and shallow shell theory. IUTAM/IMU Symp. Marseille 1975 on: Applic. of methods of functional analysis to problems in mechanics. Lect. notes in math. 503, Springer Verlag 1976.
- [43] STUMPF, H.: Dual extremum principles and error bounds in non-linear elasticity theory. IUTAM Congress of theor. and applied mechanics 1976.
- [44] STUMPF, H.: Dual extremum principles and error bounds in the theory of plates with large deflections. Arch. of mechanics 27 (1975) 485 - 496.
- [45] STUMPF, H.: Generalizations of hypercircle method and pointwise error bounds in nonlinear elasticity. Proc. IUTAM-Symp. on Variational Methods in the Mechanics of Solids, Evanston (USA) 1978.

- [46] STUMPF, H.: The derivation of dual extremum and complementary stationary principles in geometrical non-linear shell theory. Ing. Archiv 48 (1979) 221 - 237.
- [47] LABISCH, F.: Some applications and methods of non-linear functional analysis in finite displacement plate theory. IUTAM/IMU Symp. Marseille 1975 on: Applications of methods of functional analysis to problems in mechanics. Lecture notes in mathematics 503, Springer Verlag 1976.
- [48] LABISCH, F.: Zur Fehlerabschätzung in der nichtlinearen KARMAN'schen Plattentheorie. Z. angew. Math. Mech. 56 (1976) 128 - 130.
- [49] KRÄTZIG, W.B.: Allgemeine Schalentheorie beliebiger Werkstoffe und Verformungen. Ingen. Archiv 40 (1971) 311 - 326.
- [50] KRÄTZIG, W.B.: Optimale Schalengrundgleichungen und deren Leistungsfähigkeit. Z. angew. Math. Mech. 54 (1974) 265 - 276.
- [51] KRÖNER, E.: Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. Springer Verlag 1958.
- [52] RIEDER, G.: On the physical interpretation of certain inner products as a guide to the application of functional analysis. IUTAM/IMU Symp. Marseille 1975 on: Applications of methods of functional analysis to problems in mechanics. Lecture Notes in mathematics 503, Springer Verlage 1976.
- [53] OLIVEIRA, E.R.A.: Some applications of functional analysis in the mathematical theory of structures, *ibid.*
- [54] TONTI, E.: On the mathematical structure of a large class of physical theories. Rend. Accad. Naz. Lincei, Class. Sci. fis. mat. nat. 52 (1972) 48 - 56.
- [55] RIEDER, G.: Iterationsverfahren und Operatorgleichungen in der Elastizitätstheorie. Abh. Braunsch. Wiss. Ges. 14 (1962) 109 - 343,
- [56] LAWS, N.: The use of energy theorems to obtain upper and lower bounds. J. Int. Maths. Applics. 15 (1975) 109 - 119.
- [57] RAFALSKI, P.: Minimum principles in plasticity, *Mitteilg. d. Inst. f. Mech.* 13 (1978), Ruhr-Universität Bochum.
- [58] WEIDMANN, J.: Lineare Operatoren in Hilberträumen. B.G. Teubner Verlag Stuttgart 1976.
- [59] VELTE, W.: Direkte Methoden der Variationsrechnung. LAMM 26, Teubner Verlag Stuttgart 1976.
- [60] BUFLER, H. : Zur Variationsformulierung nichtlinearer Randwertprobleme. Ingenieur Archiv 45 (1976) 17 - 39.
- [61] SEWELL, M.J.: The governing equations and extremum principles of elasticity and plasticity I,II. J. Structural Mech. 2 (1973) 1 - 32, 135 - 158.

- [62] ARTHURS, A.M.: Dual extremum principles and error bounds for a class of boundary values problems. *J. Math. Anal. Appl.* 41 (1973) 781 - 795.
- [63] ODEN, J.T., REDDY, J.N.: On dual-complementary variational principles in mathematical physics. *Int. J. Engng. Sci.* 12 (1974) 1 - 29.
- [64] RIEDER, G.: Topologische Fragen in der Theorie der Spannungsfunktionen. *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.* 12 (1960) 4 - 65.
- [65] RALL, L.B.: On complementary variational principles. *J. Math. Anal. Appl.* 14 (1966) 174 - 184.
- [66] NOBLE, B., SEWELL, M.J.: On dual extremum principles in applied mathematics. *J. Inst. Maths. Applics.* 9 (1972) 123 - 193.
- [67] KATO, T.: On some approximate methods concerning the operators  $T^*T$ . *Math. Annalen* 126 (1953) 253 - 262.
- [68] FRIEDRICHS, K.O.: On the boundary-value problems of the theory of elasticity and KORN's inequalities, *Annals. of Math.* 48 (1947) 441 - 471.
- [69] HLAVÁČEK, I., NECAS, J.: On inequalities of KORN's type, I,II. *Arch. Rat. Mech. Analysis* 36 (1970) 305 - 334.
- [70] TING, T.W.: Generalized KORN's inequalities. *Tensor* 25 (1972) 295 - 302.
- [71] HORGAN, C.O.: Inequalities of KORN and FRIEDRICHS in elasticity and potential theory. *J. appl. Math. Phys.* 26 (1975) 155 - 164.
- [72] SHOIKHET, B.A.: On existence theorems in linear shell theory. *PMM* 38 (1974) 527 - 531.
- [73] ARTHURS, A.M., COLES, C.W.: Error bounds and variational methods for non-linear differential and integral equations. *J. Int. Maths. Applics.* 7 (1967) 324 - 330.
- [74] ANTES, H.: Über pauschale Fehlerschranken für Approximationen von Schalenverformungen. *Z. angew. Math. Mech.* 55 (1975) 491 - 501.
- [75] MÜHLENBEIN, H.: Die numerischen Lösungen der Schalengleichung mit verallgemeinerten bikubischen Splinefunktionen. *Dissertation Univ. Bonn* 1975.
- [76] WALPOLE, L.J.: New extremum principles for linear problems. *J. Inst. Maths. Applics.* 14 (1974) 113 - 118.
- [77] HEISE, U.: Combined application of Finite-Element method and Richardson-Extrapolation to the torsion problem. *Proc. Brussel Univ. Conference: The mathematics of Finite-Elements and applications.* (Herausg. J.R. Whiteman) 1972, 225 - 237.
- [78] STETTER, H.J.: Asymptotic expansions for the error of discretization algorithms for non-linear functional equations. *Numer. Math.* (1965) 18 - 31.

- [79] RICHARDSON, C. GAUST, J.: The deferred approach to the limit. Trans. Roy. Soc. London 226 (1927) 300 - 361.
- [80] BRAMBLE, J., PAYNE, L.E.: Pointwise bounds in the first biharmonic boundary value problems. J. Math. and Phys. 42 (1963) 278 - 286.
- [81] SIGILLITO, V.G.: A priori inequalities and pointwise bounds for solutions of fourth order elliptic partial differential equations. SIAM J. appl. Math. 15 (1967) 1136 - 1155.
- [82] SIGILLITO, V.G.: A priori inequalities and approximate solutions of the first boundary value problem for  $\Delta^2 u = f$ . SIAM J. Numer. Anal. 13 (1976) 251 - 260.
- [83] COOPERMAN, Ph.: An extension of the method of TREFFTZ for finding local bounds on the solutions of boundary value problems, and on their derivatives. Quart. Appl. Math. 10 (1952) 359 - 373.
- [84] GURTIN, M.E.: The linear theory of elasticity. Handbuch der Physik VIa/2. Hgb.: Flügge S. Springer Verlag 1972.
- [85] BURLISCH, R., STOER, J.: Asymptotic upper and lower bounds for results of extrapolation methods. Numer. Math. 8 (1966) 93 - 104.
- [86] SCHMIDT, J.W.: Asymptotische Einschließung bei konvergenzbeschleunigenden Verfahren I/II. Numer. Math. 8 (1966) 105 - 113, 11 (1968) 53 - 56.
- [87] HOFMANN, P.: Asymptotic expansions of the discretization error of boundary value problems of the Laplace-equation in rectangular domains. Numer. Math. 9 (1967) 302 - 322.
- [88] KRÄTZIG, W.B.: Thermodynamik der Deformationen und Schalentheorie. Techn. Report 71 - 3 (1971) Inst. KIB, Ruhr-Universität Bochum.
- [89] ZERNA, W.: Herleitung der ersten Approximation der Theorie elastischer Schalen. Abh. Braunsch. Wissensch. Ges. 19 (1967) 52.
- [90] KRÄTZIG, W.B.: Herleitung energiekonsistenter Grundgleichungen für Flächentragwerke. Z. angew. Math. Mech. 56 (1976) T119-120.
- [91] HARNACH, R., STALLBOHM, H.: Grundzüge der klassischen Schalentheorie in tensorieller Schreibweise mit besonderer Betonung der auftretenden Widersprüche. Techn. Report 73 - 1 (1973), Institut KIB, Ruhr-Universität Bochum.
- [92] PIETRASZKIEWICZ, W.: Introduction to the non-linear theory of shells. Mitteilg. d. Inst. für Mechanik 10 (1977) Ruhr-Universität Bochum.
- [93] HAMMEL, J.: Geometrisch nichtlineare Schalengleichungen als Approximation des dreidimensionalen Kontinuums unter Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung. Ing.Arch. 47 (1978) 75 - 93.

- [94] GRYCZ, J.: On the compatibility conditions in the classical theory of elasticity. Arch. Mech. Stosowanej 19 (1967) 883 - 891.
- [95] ANTES, H.: Duale komplementäre Variationsprinzipie in der linearen Schalentheorie. Acta mechanica 33 (1979) 55 - 67.
- [96] HARNACH, R.: Systematische Darstellung der Energie- und Variationsprinzipie und Anwendung auf die Schalentheorie. Techn. Rep. 74-3 (1974) Institut KIB, Ruhr-Universität Bochum.
- [97] STUMPF, H.: Stationarität- und Extremalprinzipie der geometrisch-nichtlinearen Plattentheorie. Wiss. Z. Hochsch. Arch. Bauw. Weimar, 22 (2975) 236 - 239.
- [98] STUMPF, H.: Fehlerursachen und Fehlerabschätzungen. TWM 74-1 (1974): Finite-Element-Methoden, Institut KIB, Ruhr-Universität Bochum.
- [99] WUNDERLICH, W.: Approximation des Schalenkontinuums auf der Grundlage verallgemeinerter Variationsaussagen. TWM 73-1 (1973) Institut KIB, Ruhr-Universität Bochum.
- [100] WALZ, J.E., FULTON, R.E., CYRUS, N.J.: Accuracy and convergence of Finite-Element approximation. Air-Force Sec. Conf. on Matrix Meth. in Struc. Mech., Ohio 1968.
- [101] OLIVEIRA, E.R.A.: Theoretical foundations of the Finite-Element methods, Int. J. Solids Struct. 4 (1968) 929 - 951.
- [102] OLIVEIRA, E.R.A.: Completeness and convergence in the Finite-Element methods. II. Conf. Matrix Meth. on Struc. Mech., Ohio 1968.
- [103] NITSCHKE, J.A.:  $L_2$ -Convergence of Finite-Element approximation. 2. Conference on Finite-Elements, Rennes, France, 12.-14.5. 1975.
- [104] FREHSE, J.: Eine a priori-Abschätzung zur Methode der Finiten Elemente in der numerischen Variationsrechnung. Tagung DFG/SFB 72 (1977) 115 - 126.
- [105] STRANG, G., BERGER, A.E.: The change in solution due to change in domain. Proc. AMS Summer Inst. on Partial Differential Equations. Berkeley 1971.
- [106] BABUSKA, I.: Die Abhängigkeit der Lösung der Elastizitätsprobleme von kleinen Änderungen des Definitionsgebiets. Z. angew. Math. Mech. 39 (1959) 411 - 412.
- [107] RIEDER, G.: Zum Paradox von Babuška der drehbar gelagerten Kirchhoff'schen Platte und der Methode der Finiten Elemente. Vortrag IUTAM-Kongreß Moskau 1972.
- [108] HANUSKA, A: Zu den Theorien der Plattenbiegung. Beton und Stahlbau 9 (1969) 214 - 217.

- [109] WILLIAMS, M.L.: Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending. *J. appl. mech.* 18 (1951) 320.
- [110] WILLIAMS, M.L.: Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J. appl. mech.* 19 (1952) 526 - 528.
- [111] RAO, A.K. RAJAJIAH, K.: Polygon-circle paradox of simply supported thin plates under uniform pressure. *AIAA J.* 6 (1968) 155-156.
- [112] MICHLIN, S.G.: *Numerische Realisierung von Variationsmethoden.* Akademie-Verlag Berlin 1968.
- [113] TONG, P., PIAN, T.H.H.: The convergence of Finite-Element method in solving linear elastic problems. *Int. J. Solids Structures* 3 (1967) 885 - 897.
- [114] MELOSH, R.: Inherited error in finite element analysis of structures. *Computer & Structures* 3 (1973) 1205 - 1217.
- [115] OMODEI, B.: On the numerical stability of the Rayleigh-Ritz method. *SIAM J. Num. Anal.* 14 (1977) 1151 - 1171.
- [116] HERBOLD, R.J., SCHULTZ, M.H., VARGA, R.S.: The effect of quadrature errors in the numerical solution of boundary value problems by variational techniques. *Aeq. math.* 3 (1969) 247 - 270.
- [117] KRÄTZIG, W.B.: Eine bestmögliche erste Approximation in der linearen Theorie elastischer Schalen. TWM 73-1 (1973), Institut KIB, Ruhr-Universität Bochum.
- [118] SENSENIG, C.B.: A shell theory compared with the exact three-dimensional theory of elasticity, *Int. J. Engng. Sci.* 6 (1968) 435 - 464.
- [119] KOITER, W.T.: On the foundations of the linear theory of thin elastic shells I/II. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. B* 73 (1970) 169 - 195.
- [120] DANIELSON, D.A.: Improved error estimates in the linear theory of thin elastic shells. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. B* 74 (1971) 294 - 300.
- [121] LADEVÈZE, P.: Justification de la théorie linéaire des coques élastiques. *J. de Mécanique* 15 (1976) 813 - 856.
- [122] SIMMONDS, J.G.: Extension of Koiter's  $L_2$ -Error Estimate to Approximate Shell Solutions with no Strain Energy Functional. *J. Appl. Math. Phys.* 22 (1971) 339 - 345.
- [123] SIMMONDS, J.G.: Pointwise displacement errors in linear shell theory resulting from errors in the stress-strain relations. *J. of applied Math. Physics.* 23 (1972) 265 - 269.

- [124] NORDGREN, R.P.: A bound on the error in plate theory. Quart. of applied math. 28 (1971) 587 - 595.
- [125] SIMMONDS, J.G.: An improved estimate for the error in the classical linear theory of plate bending. Quart. of applied math. 28 (1971) 439 - 447.
- [126] SHOIKHET, B.A.: An energy identity in physically nonlinear elasticity and error estimates of the plate equations. PMM 40 (1976) 317 - 326.
- [127] JOHN, F.: Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations. Comm. Pure and Appl. Math. 18 (1960) 235 - 267.
- [128] JOHN, F.: Refined interior equations for thin elastic shells. Comm. Pure and Appl. Math. 24 (1971) 583
- [129] BASAR, Y., KRÄTZIG, W.B.: Theorie und Berechnungsmethoden der Flächentragwerke. In Vorbereitung.
- [130] NAGHDI, P.M.: Foundations of elastic shell theory. Progr. in Solid Mech. 4 (1963) 1-90. ed.: Sneddon I.N., Hill, R., North-Holland Co. Amsterdam.
- [131] KOITER, W.T.: Error estimates for certain approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity. J. appl. Math. Physics 21 (1970) 534 - 538.
- [132] MOTE, C.D.: Global-local finite element. Int. J. Numerical Meth. Engr. 3 (1971) 565 - 574.
- [133] NATTERER, F.: Regularisierung schlecht gestellter Probleme durch Projektionsverfahren. Numer. Math. 28 (1977) 329 - 341.
- [134] OLIVEIRA, E.R.A.: The patch test and the general convergence criteria of the finite element method. Int. J. Solids Struct. 13 (1977) 159 - 178.
- [135] STRANG, G.: Variational crimes in the finite element method. S. 689-710 in: The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations. Herausg.: Aziz. A.K., Proc. Symp. Univ. Maryland 1972.
- [136] IRONS, B.M., RAZZAQUE, A.: Experience with the patch test for convergence of finite elements. S. 557 - 587 in: The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations Hgb.: Aziz A.K., Proc. Symp. Univ. Maryland 1972.
- [137] STUMMEL, F.: A counter example to the patch test of Irons and Strang. Erscheint in: Inst. J. Numer. Meth. Eng.
- [138] STUMMEL, F.: The generalized patch test. Erscheint in: SIAM J. Numer. Anal.

- [139] WERNER, B.: Über eine Beziehung zwischen komplementären und nicht-konformen finiten Elementen. Z. angew. Math. Mech. 57 (1977) 501 - 506.
- [140] BABUSKA, I., AZIZ, A.K.: On the angle condition in the finite element method. SIAM J.num. Analysis 13 (1976) 214-226.
- [141] KIKUCHI, F.: Approximation in finite element models I. General theory for linear problems. ISAS Rep. 531 (1975) 277-309.
- [142] FRIED, I.: Finite-element method: Accuracy at a point. Quart. appl.math.32(1974) 149 - 161.
- [143] BRAMBLE, J.H., HILBERT, S.R.: Bounds for a class of linear functionals with applications to HERMITE' interpolation. Numer. Math. 16 (1971) 362 - 369.
- [144] CIARLET, P.G., RAVIART, P.A.: Maximum principle and uniform convergence for the finite element method. Comp. meth. in appl. mech. enggn. 2 (1973) 17 - 31.
- [145] STRANG, G.: Approximation in the finite element method. Numer. Math. 19 (1972) 81 - 98.
- [146] BABUSKA, I.: Error Bounds for finite element method. Numer. Math. 16 (1971) 322 - 333.
- [147] NOOR, M.A., WHITEMAN, J.R.: Error bounds for finite element solutions fo mildly nonlinear elliptic boundary value problems. Numer. Math. 26 (1976) 107 - 116.
- [148] FRIED. I.: Boundary and interior approximation errors in the Finite-Element method. J. appl.mech.40(1973), 1113-1117.
- [149] WITSCH, K.: Konvergenzaussagen für Projektionsverfahren bei linearen Operatoren. Numer. Math. 27 (1977) 339-354.
- [150] MEINGUET, J., DESCLOUX, J.: An operator-theoretical approach to error estimation. Numer. Math. 27 (1977) 307 - 326.
- [151] PRUESS, S.: The approximation of linear functionals and  $h^2$ -extrapolation. SIAM Review 18 (1975) 641-651.
- [152] ANTES, H.: Über die Romberg-Integration in n-Dimensionen. Computing 9 (1972) 203 - 209.
- [153] ANTES, H.: Über die vierdimensionale Romberg-Integration mit Schranken. Computing 9 (1972) 45 - 52.
- [154] WITSCH, K.: Numerische Quadratur bei Projektionsverfahren. Rep. 77 - 13, Math. Inst. Univer. Köln 1977.
- [155] HERBOLD, R.J., SCHULTZ, M.H., VARGA, R.S.: The effect of quadrature errors in the numerical solution of boundary value problems by variational techniques. Aequ. math. 3 (1969) 247 - 270.

- [156] FIX, G.J.: Effects of quadrature errors in finite element approximation of steady state, eigenvalue and parabolic problems. The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (Herausg. Aziz A.K.) 525 - 556, Academic Press, New York, London 1972.
- [157] ROMBERG, W.: Vereinfachte numerische Integration. Det. Kong. Norske Videnskabers Selskab Forhandl. 28 (1955)
- [158] BULIRSCH, R.: Bemerkungen zur Romberg-Integration. Numer. Math. 6 (1964) 6 - 16.
- [159] FRIED, I.: Discretization and computational errors in high-order finite elements. AIAA 9 (1971) 2071 - 2073.
- [160] FRIED, I.: Bounds on the spectral and maximum norms of the finite element stiffness, flexibility and mass matrices. Int. J. Solids Structures 9 (1973) 1013 - 1034.
- [161] COLLATZ, L.: Funktionanalysis und numerische Mathematik. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York 1968.
- [162] FRIED, I.: Condition of finite element matrixes generated from non-uniform meshes. AIAA 10 (1972) 219 - 221.
- [163] FRIED, I.: The  $l_2$  and  $l_\infty$  condition numbers of the finite element stiffness and mass matrices and the pointwise convergence of the method. Proc. Brunel Univ. Conf.: The mathematics of finite elements and applications. (1972) 163 - 174. Ed. Whiteman, J.R., Academic Press 1973.
- [164] IRONS, B.M.: Roundoff criteria in direct stiffness solution. AIAA J. 6 (1968) 1308 - 1312.
- [165] FRIED, I.: Basic computational problems in the finite element analysis of shells. Int. J. Solids Struct. 7 (1971) 1705 - 1815.
- [166] FRIED, I.: Influence of POISSON's ratio on the condition of the finite element stiffness matrix. Int. J. Solids Structures 9 (1973) 323 - 329.
- [167] ROSANOFF, R.A., GRINSBURG, T.A.: Matrix error analysis for engineers. Proc. Conf. Matrix Methods in Structural Engineering 1965.
- [168] MURRAY, H.K.: Comments on the Convergence of finite element solutions. AIAA J. 8 (1970) 815 - 816.
- [169] CLÉMENT, P., DESCLOUX, J.: On the rigid displacement condition. Int. J. Numer. Meth. in Engg. 4 (1972) 583 - 586.
- [170] TURCKE, D.H., McNEICE, G.M.: A variational approach to grid optimization in the Finite-Element method. Proc. Int. Conf. Southampton 1972: Variational methods in engineering (C.A. Brebbia, Tottenham, H.) S. 4/144 - 130.

- [171] ERGATOUDIS, I., IRONS, M., ZIENKIEWICZ, O.C.: Curved, isoparametric, quadrilateral elements for finite element analysis. Int. J. Solids Struct. 4 (1968) 31 - 42.
- [172] PALACOL, E.L., STANTON, E.L.: Anisotropic parametric plate discret elements. Int. J. Numer. Meth. Enging. 6 (1973) 413 - 425.
- [173] DUPUIS, G.: Application of Ritz'method to thin shell analysis. J. appl. mechanics 38 (1971) 987 - 996.
- [174] SANDER, G.: Application of the dual analysis principle. IUTAM-Symposium: High speed computing of elastic structures. Université de Liège 1970, 168 - 207.
- [175] ANTES, H.: Punktweise Eingrenzung bei flachen Schalen. Acta Mechanica 23 (1975) 235 - 245.
- [176] KIKUCHI, F.: On the validity of an approximation available in the finite element shell analysis. Comp. Struct. 5 (1975) 1 - 8.
- [177] KHANNA, J.: Criterion for selecting stiffness matrices. AIAA 3 (1965) 1976.
- [178] YAMAMOTO, Y., TOKUDA, N.: A note on convergence of finite element solutions. Int. J. Numer. Meth. Enging. 3 (1971) 485 - 493.
- [179] TONG, P., PIAN, Th.H.: On the convergence of the Finite-Element method for the problems with singularity. Int. J. Solids Structures 9 (1973) 313 - 321.
- [180] JOHNSON, M.W., McLAY, R.W.: Convergence of the Finite-Element method in the theory of elasticity. J. appl. mech. 35 (1968) 274 - 278.
- [181] HABEDANK, G.: Über eine Kombination des Ritz'schen Verfahrens mit einem Iterationsverfahren. Z. angew. Math. Mech. 54 (1974) 325 - 334.
- [182] WUNDERLICH, W.: Differentialsystem und Übertragungsmatrizen der Biegetheorie allgemeiner Rotationsschalen. Dissertation Techn. Hochschule Hannover 1966.
- [183] ANTES, H.: Über singuläre Lastfälle in einer linearen Schalentheorie und ihre finite Behandlung. Ing. Archiv. 45 (1976) 99 - 114.
- [184] HARBORD, R., SCHRÖDER, R.: Finite-Element-Methode zur Berechnung dünnwandiger Behälter. Der Stahlbau 47 (1978) 90 - 96.
- [185] WUNDERLICH, W.: Ein verallgemeinertes Variationsverfahren zur vollen oder teilweisen Diskretisierung mehrdimensionaler Elastizitätsprobleme. Ingenieur Archiv 39 (1970) 230-247.
- [186] SANDERS, J.L.: Singular solutions to the shallow shell equations, J. appl. mech. 37 (1970) 361 - 366.

- [187] MELOSCH, R.J.: Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method. AIAA J. 1 (1963) 1631 - 1637.
- [188] DEPUIS, G., GOEL, J.: A curved finite element for thin elastic shells. Int. J. Solids Structures 6 (1970) 1413 - 1428.
- [189] CLOUGH, R.W. JOHNSON, C.Ph.: A finite element approximation for the analysis of thin shells. Int. J. Solids Structures 4 (1968) 43 - 60.
- [190] ANDERHEGGEN, E.: A conforming triangular finite element plate bending solution. Int. J. Numer. Meth. Enging. 2 (1970) 259 - 264.
- [191] MITCHELL, A.R.: Variational principles and the finite element method. J. Inst. Maths. Applics. 9 (1972) 378 - 389.
- [192] CIALRET, P.G., RAVIART, P.A.: General Lagrange and Hermite interpolation in  $R^n$  with applications to Finite-Element method. Arch. Rat. Mech. Anal. 46 (1972) 177 - 199.
- [193] ZERNA, W., GREEN, A.E.: Theoretical elasticity. Oxford 1954.
- [194] FRIED, I.: YANG, Sh. K.: Best finite elements distribution around a singularity. AIAA J. 10 (1972) 1244 - 1246.
- [195] FIX, G.J., GULATI, S., WAKOFF, I.: On the use of singular functions with Finite-Element approximations. J. Comp. Phys. 13 (1973) 209 - 228.
- [196] FLÜGGE, W.: Concentrated forces on shells, Proc. 11. Int. Cong. appl. Mech. 1964 (ed. H. Görtler) 270 - 276.
- [197] ANTES, H.: Ein finites Element für singuläre Lastfälle in einer linearen Schalentheorie. Z. angew. Math. Mech. 57 (1977) T100 - 101.
- [198] RAO, A.K., RAJU, I.S., KRISHNA MURTHY, A.V.: A powerful hybrid method in Finite-Element analysis. Int. J. Numer. Meth. Enging. 3 (1971) 389 - 403.
- [199] ODEN, J.T.: Finite-Element applications in mathematical physics. Proc. Brunel Univ. Conference: The mathematics of Finite-Elements and applications (Herausg.: J.R. Whiteman) (1972) 239 - 282.
- [200] SCHAEFFER, H.: Latteninterpolation bei einer Funktion von zwei Veränderlichen. Z. angew. Math. Phys. 14 (1963) 90 - 96.
- [201] CURRY, H.B.: SCHOENBERG, J.: On Pólya frequency function IV: The fundamental spline functions and their limits. J. Anal. Math. 17 (1966) 71 - 107.
- [202] AHLBERG, J.H., NILSON, E.N., WALSH, J.L.: The theory of splines and their applications. Academic Press. New York 1967.

- [203] CAPRILI, M., CELLA, A., GHERI, G.: Spline interpolation techniques for variational methods. *Int. J. Numer. Meth. Enging.* 6 (1973) 565 - 576.
- [204] ANTES, H.: Fundamental-Splinefunktionen bei einem Variationsverfahren zur Balkenberechnung. *Wiss. Z. Hochsch. Arch. Bauw. Weimar* 19 (1972) 131 - 134.
- [205] ANTES, H.: Splinefunktionen bei der Plattenberechnung mittels Spannungsfunktionen. *Wiss. Z. Hochsch. Arch. Bauw. Weimar* 22 (1975) 135 - 138.
- [206] ANTES, H.: Bicubic fundamental splines in plate bending. *Int. J. Numer. Meth. Enging.* 8 (1974) 503 - 511.
- [207] BURCHARD, H.G.: Splines (with optimal knots) are better. *Applicable Analysis* 3 (1974) 309 - 319.
- [208] BOOR de C.: Package for calculating with B-splines. *SIAM J. Numer. Analysis* 14 (1977) 441.
- [209] SAUER, R., SZABÓ, I.: *Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs III.* Springer Verlag, Berlin 1968.
- [210] HARNACH, R., ANTES, H.: Zur vollständigen Dualität der Differentialoperatoren von Flächentragwerken. Vortrag IX IKM Weimar 1978.
- [211] ANTES, H., HARNACH, R.: Komplementäre Prinzipie und Fehlerabschätzung bei finiten Berechnungen von Flächentragwerken mit dual formulierten Operatorgleichungen. Vortrag IX. IKM Weimar 1978.
- [212] BOLEY, B.A.: A method for the construction of Green's functions. *Quart. appl. math.* 14 (1956) 249 - 257.
- [213] INDENBOM, V.L., ORLOV, S.S.: Construction of Green's function in terms of Green's function of lower dimension. *PMM* 32 (1968) 414 - 420.
- [214] TURTELTAUB, M.J., STERNBERG, E.: On concentrated loads and Green's functions in elastostatics. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 29 (1963) 133 - 240.
- [215] PUCHER, A.: *Einflußfelder elastischer Platten*, Springer Verlag Wien 1958.
- [216] KALNINS, A.: On fundamental solutions and Green's functions in the theory of elastic plates. *J. applied mechanics* 33 (1966) 31 - 38.
- [217] DORÉ, R., FLÜGGE, W.: Singular solutions for shallow cylindrical shells, *J. appl. Mech.* 40 (1973) 215 - 220.
- [218] NORDGREN, R.P.: On the method of Green's functions in the thermo-elastic theory of shallow shells. *Int. J. of eng. science* 1 (1963) 279 - 308.

- [219] JAHANSHAH, A.: Some notes on singular solutions and the Green's functions in the theory of plates and shells. J. appl. mech. 31 (1954) 441 - 446.
- [220] LUKASIEWICZ, S.: Concentrated loads on shallow spherical shells. Quart. J. Mech. and appl. Math. 20 (1967) 293 - 305.
- [221] FORSBERG, K., FLÜGGE, W.: Point load on a shallow elliptic paraboloid, J. appl. mech., 33 (1966) 575 - 585.
- [222] DORÉ, R., FLÜGGE, W.: Force singularities of shallow cylindrical shells. J. appl. mech. 37 (1970) 361 - 366.
- [223] ANTES, H.: Zur Berechnung singulärer Lastfälle bei schwach gekrümmten Schalen. Z. angew. Math. Mech. 56 (1976) 193 - 95.
- [224] ANTES, H.: Admissible singular solutions and the hypercircle method in shallow shell theory. J. appl. mech. 44 (1977) 117 - 122.
- [225] SIMMONDS, J.G.: Green's functions for closed elastic spherical shells: exact and accurate approximate solutions. Proc. K. Ned. Acad. Wet. Ser. B (1968) 236 - 249.
- [226] GUERRERO, I., TURTELTAUB, M.J.: The elastic sphere under arbitrary concentrated surface loads. J. elasticity 2 (1972) 21 - 33.
- [227] LUKASIEWICZ, S.: Introduction of concentrated loads in plates and shells. Progr. in Aerospace science 17 (1976) 109-146.
- [228] JOHN, F.: Fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients. Comm. pure and applied math. 3 (1950) 273 - 304.
- [229] CHERNYSHEV, G.N.: On the action of concentrated forces and moments on an elastic thin shell of arbitrary shape. J. appl. math. mech. 27 (1963) 172 - 184.
- [230] LURJE, A.I.: Räumliche Probleme der Elastizitätstheorie. Akademie Verlag, Berlin 1963.

VERZEICHNIS

DER TAFELN;	Seite
Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie in schematischer Darstellung nach TONTI	14
Notwendige Bedingungen und Euler-Gleichungen der Extremalprinzipie	16
Hilberträume und Operatorgleichungen der linearen Elastizitätstheorie	26
Funktionaldarstellung der primären und dualen Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie	33
Grundgleichungen einer linearen Schalentheorie (ohne Schubverformung)	67
Singulärteile GREEN'scher Zustände bei Kreiszylinderschalen ( $b_{22} = 1/R$ )	137
Spannungsfunktionen zur Eingrenzung verschiedener Zustandsgrößen einer Kreiszylinderschale ( $b_{22} = 1/R$ )	138
DER TABELLEN:	
Konvergenz von Zustandsgrößen aus globalen bzw. Finite-Element Ansätzen	185
Konditionszahlen der Steifigkeitsmatrix $\bar{K}_{-h}^p$ einer Quadratplatte	188
Vergleich der Funktionalwerte bei globalen und lokalen (Finite-Element) Ansätzen	189
Konvergenz in der Energienorm und des relativen pauschalen Fehlers	189
Konvergenz der pauschalen Schranken für den Fall konstanter Normallast $p_0$ und einer Einzellast $p_{\langle 3 \rangle E}(0,0)$	193

	Seite
Konvergenz der Näherungswerte und Fehlerschranken für $u_{\langle 3 \rangle}(0,0)$	195
Ortsabhängigkeit der Eingrenzungsspannen für $u_{\langle 3 \rangle}$	195
Extrapolation der Fehlerschranken für die Normalverschiebung $u_{\langle 3 \rangle}(0,0)$	197
Konvergenz der Extrapolationen von $u_{\langle 3 \rangle i}(0,0)$	198
Konvergenz der Extrapolationen von $u_{\langle 1 \rangle i}(a,0)$	198
Konvergenz der Extrapolationen von $n_{\langle 22 \rangle i}(0,0)$	199
Asymptotische Fehlerschranken für $u_{\langle 3 \rangle}(0,0)$ durch Extrapolation	200
 DER BILDER;	
Geometrische Veranschaulichung von $\ f - f^{\sim}\ ^2 + \ f - f^{\approx}\ ^2 = \ f^{\sim} - f^{\approx}\ ^2$ - der Hyperkreis	41
Unverformtes und verformtes Schalenkontinuum	54
Graphische Bestimmung der Konstanten $\alpha, \beta$ und $\gamma$	94
Randgrößen einer Schale (orthogonale Koordinaten)	109
Kubische und lineare HERMITE-Polynome	116
Kubische Basis-Splinefunktionen mit Knoten der Vielfachheit $\alpha$	123
Geometrie, Lagerung und Belastung des Schalenbeispiels	177
Konvergenz der Verschiebungskomponenten $u$ bzw. $w$ einer Kreis- zylinderschale unter konstanter Last bei globalen Verschie- bungsansätzen mit Potenzfunktionen und je 2,3 sowie 12 Freiwerten	179 180
Konvergenz der Verschiebungskomponenten $u$ bzw. $w$ einer Kreis- zylinderschale unter konstanter Last bei Ansätzen mit HERMITE- Polynomen in 9,36 und 144 Elementen	181 182

	Seite
Vergleich der Verschiebungskomponente $u$ bzw. $w$ einer Kreis-	183
zylinderschale unter konstanter Last $p_0$ aus globalen An-	184
sätzen mit 3 x 12 Freiwerten und aus HERMITE-Plynomen in	
144 Elementen	
Konvergenz der Eingrenzungsspanne für $u_{\langle 3 \rangle}(0,0)$	194

Anlage:

TONNENDACH IN KREISZYLINDERFORM UNTER RADIALEM AUSSENDRUCK

1. Allgemeines

Hier sollen die dargelegten Möglichkeiten zur Eingrenzung des Fehlers, der bei numerischen Schalentragwerks-Berechnungen auftritt, veranschaulicht werden. Das dazu benutzte Beispiel - ein kreiszylinderförmiges Tonnendach unter radialem Außendruck - ist ein sehr häufig behandelte Fall, so daß die hier gefundenen Resultate mit vielen ähnlichen Problemlösungen verglichen werden können.

Durch die Angabe der Ergebnisse sowohl mit einfachen globalen RITZ-Ansätzen als auch mit den weit verbreiteten Finite-Elementen aus bilinearen bzw. bikubischen HERMITE-Polynomen soll erstens gezeigt werden, daß bei problemgerechter Wahl einiger weniger Koordinatenfunktionen bereits ähnlich gute Näherungen erreicht werden können wie mit vergleichsweise viel mehr Knotenfreiwerten eines Finite-Element Ansatzes, und zweitens, daß eine eindeutige Aussage über die "bessere" Approximation nur durch den Vergleich der zugehörigen Funktionalwerte gemacht werden kann. Die pauschalen Schranken aus den Werten der zueinander komplementären Funktionale geben überdies deutlich die "Güte", die bereits erreichte globale relative Genauigkeit der Approximation an.

Als Realisierung der Berechnung lokaler Schranken nach der Hyperkreis-Methode wird für einige Punkte des Schalentragwerks die Normalkomponente des Verschiebungsvektors eingegrenzt. Die Konvergenz der Schranken wie der Approximationen dieser Zustandsgröße im untersuchten Punkt macht einerseits die (in 2.3) bewiesene Anwendbarkeit des Verfahrens auch bei Schalenproblemen deutlich; andererseits aber zeigt sich daraus, daß für diese Aufgaben besondere Überlegungen bezüglich der Ansatzfunktionen - als Verbesserungsvorschlag werden hier B-Splinefunktionen vorgestellt - notwendig sind, wenn ähnlich gute Schranken wie bei Plattenproblemen [93 - 37] erreicht werden sollen.

Den Einfluß der Ansatzfunktionen - globale Ansätze in Potenzfunktionen oder lokale Ansätze in HERMITE-Polynomen bzw. B-Spline-Funktionen - auch auf die Stabilität und damit die numerische Genauigkeit des Verfahrens weist eine Untersuchung der Konditionszahlen der Steifigkeitsmatrizen nach.

Als Anwendung des in Abschnitt 4.3.2 geschilderten Extrapolationsverfahrens wird die konvergenzbeschleunigende Wirkung bei den über das Hyperkreis-Verfahren berechneten punktweisen Schranken gezeigt. Außerdem wird die Möglichkeit der asymptotischen Einschließung an einigen Zustandsgrößen verifiziert, um zu zeigen, daß diese Resultate der Extrapolationsmethode eine günstige Alternative zur Bestimmung der unteren und oberen Schranken nach dem Hyperkreis-Verfahren geben können.

## 2. Pauschale Eingrenzung numerischer Approximationen mit globalen und lokalen Ansätzen

Die wesentlichen Vor- und Nachteile dieser beiden Möglichkeiten wurden bereits kurz dargelegt (Abschnitt 4.1). Das hier behandelte Beispiel eines kreiszylinderförmigen Tonnendaches (siehe Bild 7) macht einige dieser Eigenschaften der Näherungsansätze deutlich. Besonders klar wird dabei vor allem die Notwendigkeit, den Funktionalwert zur jeweiligen Approximation zu bestimmen. Nur mit seiner Hilfe ist es eindeutig möglich, bei verschiedenen Ansätzen zu entscheiden, welcher von ihnen global, d. h. im Mittel besser den exakten Zustand wiedergibt.

Als Lagerungsbedingungen eines konkreten Problems sind an gegenüberliegenden Rändern feste Einspannungen (bei  $y = \pm b$ ) bzw. freie Stützungen (bei  $x = \pm a$ ) gewählt worden. Wie aus (4.1.7) bzw. (4.1.14) zu entnehmen ist, bedeutet dies die geometrischen Bedingungen

$$\begin{aligned} u_2 = 0; \quad u_3 = 0 & \quad \text{bei } x = \pm a, \\ u_1 = 0; \quad u_2 = 0; \quad u_3 = u_{3,y} = 0 & \quad \text{bei } y = \pm b, \end{aligned} \quad (1)$$

sowie die statischen Bedingungen

$$n_n = n_{11} = 0; \quad m_s = m_{11} = 0 \quad \text{bei } x = \pm a. \quad (2)$$

Die Anpassung globaler Ansätze für die Verschiebungskomponenten  $u_i(x,y)$  bzw. für die Spannungsfunktionen  $\psi_i(x,y)$  an die Forderungen (1) bzw. (2) ist bei dem vorliegenden Definitionsbereich, einem Rechteck, kaum schwieriger als bei lokalen Approximationen, z. B. bei Finite-Element-Ansätzen in HERMITE-Polynomen (5.3.36/37). Während bei letzteren in Randknoten  $(x^R, y^R)$  nur die Freiwerte

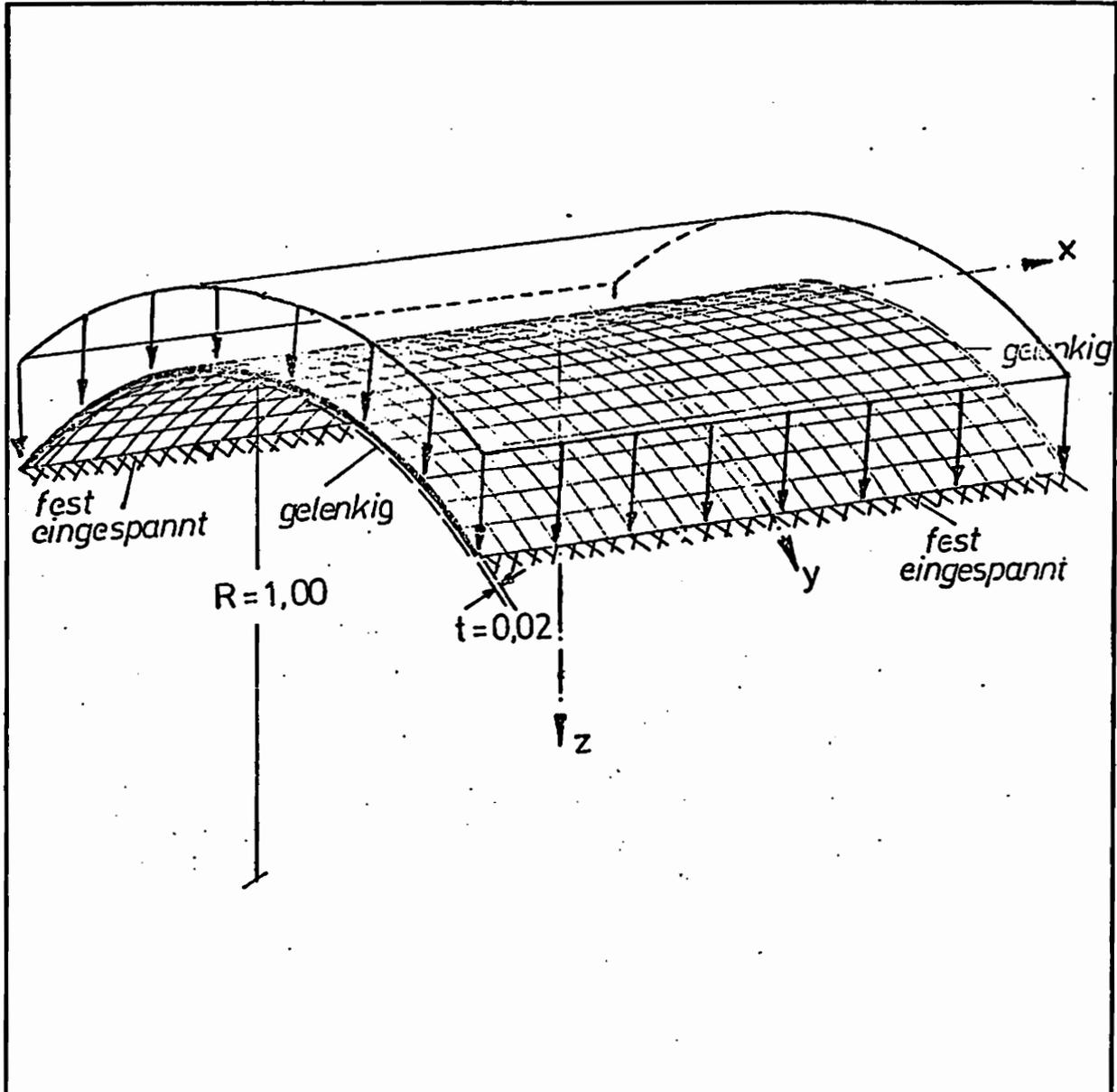


Bild 7: Geometrie, Lagerung und Belastung des Schalenbeispiels

$$\begin{aligned}
 u_2^i = 0; \quad u_3^i = 0 & \quad \text{für } x^R = \pm a \\
 u_1^i = 0; \quad u_2^i = 0; \quad u_3^i = u_{3,y}^i = 0 & \quad \text{für } y^R = \pm b
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

bzw.

$$\psi_2^i = 0; \quad \psi_3^i = \psi_{3,y}^i = 0 \quad \text{für } x^R = \pm a
 \tag{4}$$

Null zu setzen sind, erfüllen globale Ansätze, z. B. Polynome die Bedingungen (1) bzw. (2) durch Anfügen geeigneter Vorfaktoren. So ist das Verschiebungsfeld (dimensionslos nach (4.1.23):  $x = a\hat{x}$ ;  $y = b\hat{y}$ )

$$\begin{aligned}\hat{u}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= (\hat{y}^2 - 1) [c_{11}\hat{x} + c_{12}\hat{x}^3 + c_{13}\hat{x}\hat{y}^2 + \dots], \\ \hat{u}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= (\hat{x}^2 - 1)(\hat{y}^2 - 1) [c_{21}\hat{y} + c_{22}\hat{y}\hat{x}^2 + c_{23}\hat{y}^3 + \dots], \\ \hat{u}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= (\hat{x}^2 - 1)(\hat{y}^2 - 1)^2 [c_{31} + c_{32}\hat{x}^2 + c_{33}\hat{y}^2 + \dots],\end{aligned}\quad (5)$$

geometrisch zulässig. Außerdem sind in diesen Ansätzen Kenntnisse über die zu erwartende exakte Lösung berücksichtigt.

Ähnlich erhält man aus (dimensionslosen) Spannungsfunktionen

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x} [d_{11} + d_{12}\hat{x}^2 + d_{13}\hat{y}^2 + \dots], \\ \hat{\psi}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= (\hat{x}^2 - 1)\hat{y}[d_{21} + d_{22}\hat{x}^2 + d_{23}\hat{y}^2 + \dots], \\ \hat{\psi}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= (\hat{x}^2 - 1)[d_{31} + d_{32}\hat{x}^2 + d_{33}\hat{y}^2 + \dots],\end{aligned}\quad (6)$$

statisch zulässige globale Ansätze, wenn den daraus nach (2.2.29/30) ermittelten Schnittgrößen eine partikuläre Lösung  $\hat{g}^k$  überlagert wird. Im vorliegenden Fall haben die (mit  $e = a/b$ ;  $L_1 = a$  nach 4.1.23 dimensionslosen) Gleichgewichtsbedingungen (2.2.17) in den symmetrischen Tensoren

$$\begin{aligned}\hat{n}_{xx, \hat{x}} + e\hat{n}_{xy, \hat{y}} &= 0, \\ \hat{n}_{xy, \hat{x}} + e\hat{n}_{yy, \hat{y}} - 2\frac{t}{Rk^2}(\hat{m}_{xy, \hat{x}} + e\hat{m}_{yy, \hat{y}}) &= 0, \\ \frac{a^2k^2}{Rt}\hat{n}_{yy} + \hat{m}_{xx, \hat{x}\hat{x}} + e^2\hat{m}_{yy, \hat{y}\hat{y}} + 2e\hat{m}_{xy, \hat{y}\hat{x}} - \frac{a^2}{R^2}\hat{m}_{yy} &= -\hat{p}_0,\end{aligned}\quad (7)$$

z. B. die spezielle Lösung

$$\hat{n}_{yy} = -Rt \frac{\hat{p}_0}{a^2k^2} \quad (8)$$

Diese einfachen globalen Koordinatenfunktionen ergeben Näherungslösungen mit offensichtlich (siehe Tabelle 1, Bilder 8 und 9) guter Konvergenz. Zustandsgrößen, die sich daraus bestimmen lassen, unterscheiden sich nicht wesentlich von mit weit größerem Aufwand über Finite-Element Ansätze (Bild 10 - 11) mit bilinearen bzw. bikubischen HERMITE-Polynomen ermittelten Approximationen. Dies zeigen die Bilder 12 und 13 sehr deutlich; an ihnen ist nicht zu unterscheiden, welche Näherung näher an der exakten Lösung liegt. Auch ein Vergleich der Zahlenwerte (Tabelle 1) gibt dazu keine klare Antwort.

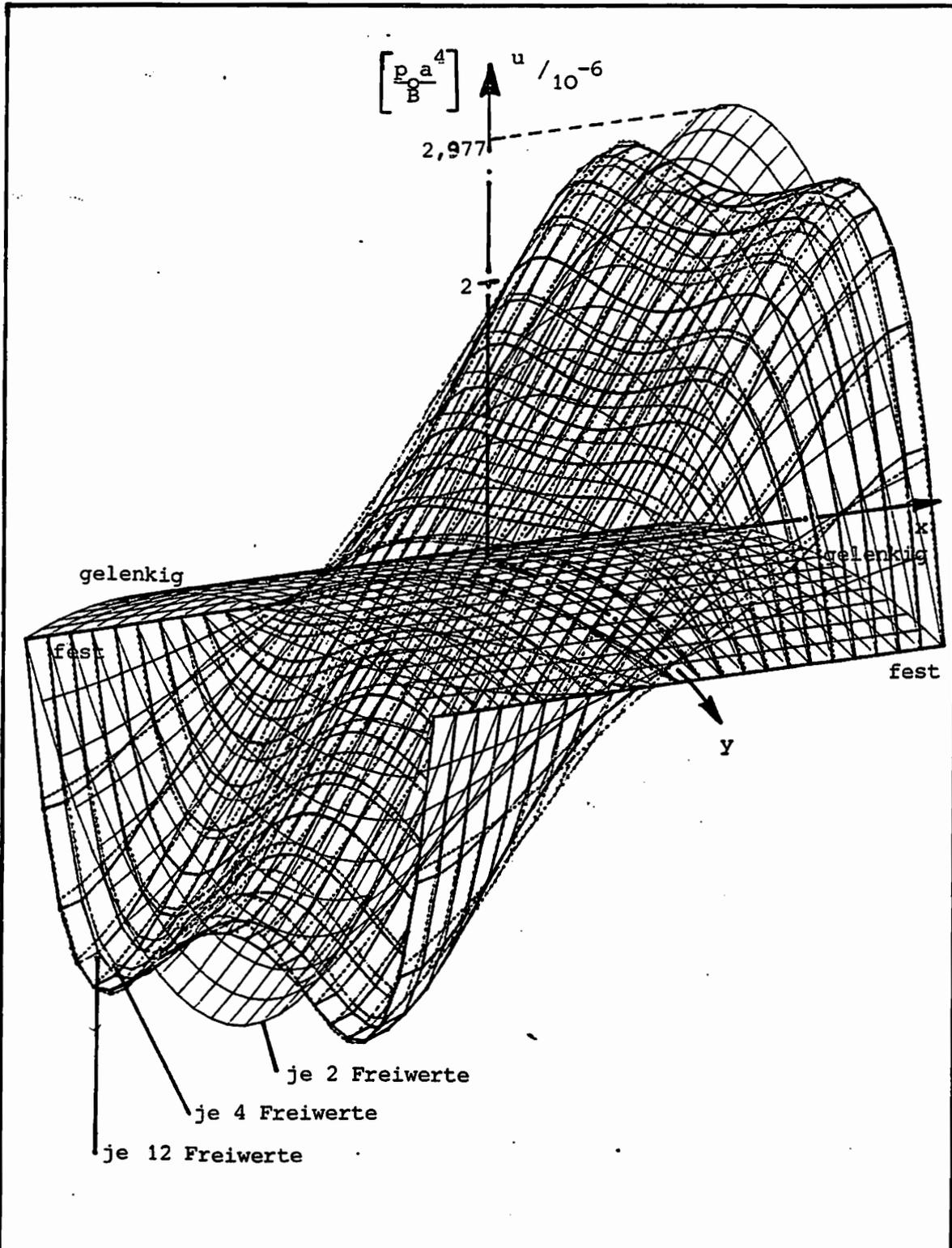


Bild 8 : Konvergenz der Verschiebungskomponente  $u$  einer Kreiszylinderschale unter konstanter Last bei globalen Verschiebungsansätzen mit Potenzfunktionen und je 2, 4 und 12 Freiwerten

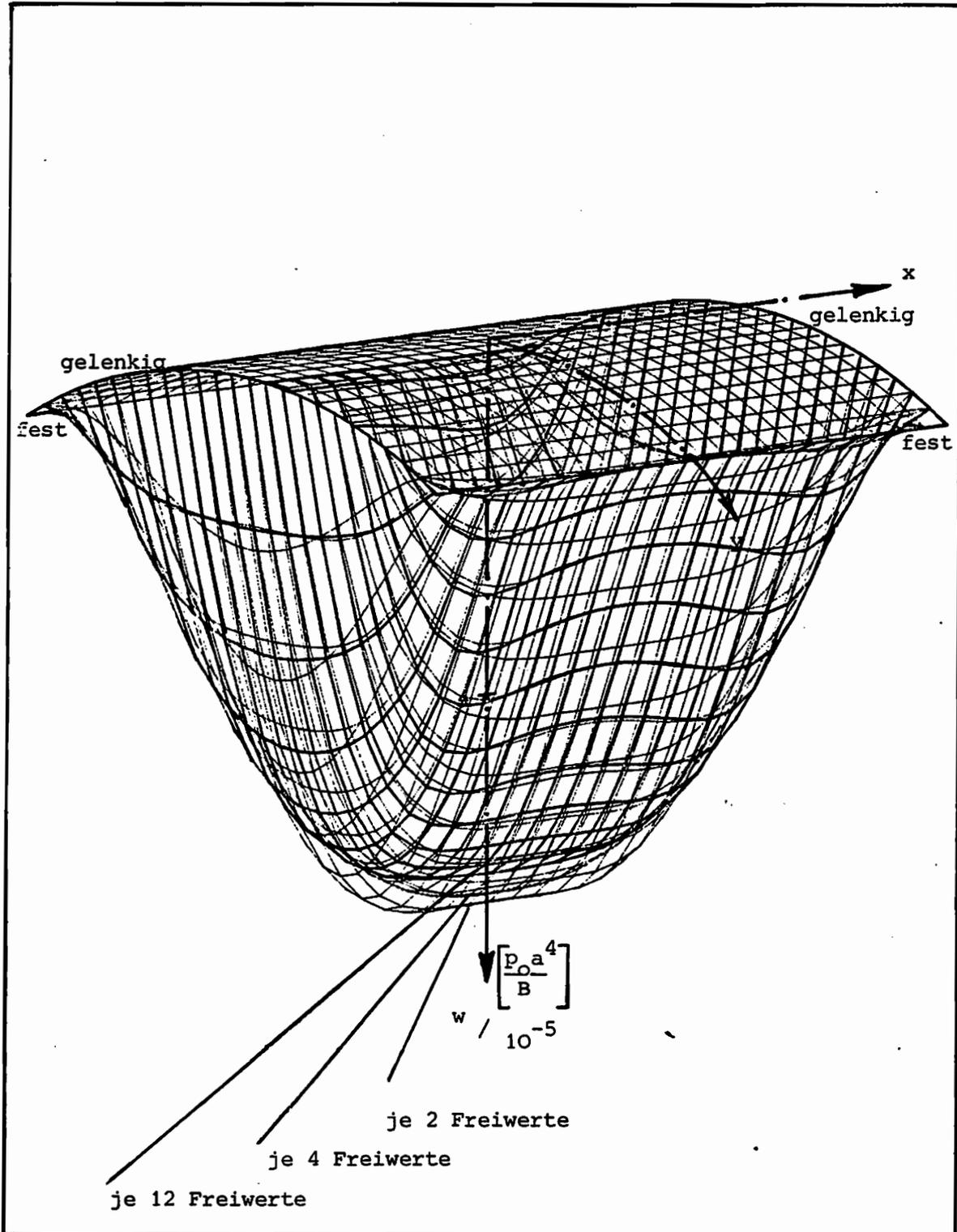


Bild 9:

Konvergenz der Verschiebungskomponente  $w$   
einer Kreiszylinderschale unter konstanter Last  
bei globalen Verschiebungsansätzen mit Potenzfunktionen  
und je 2, 4 und 12 Freiwerten

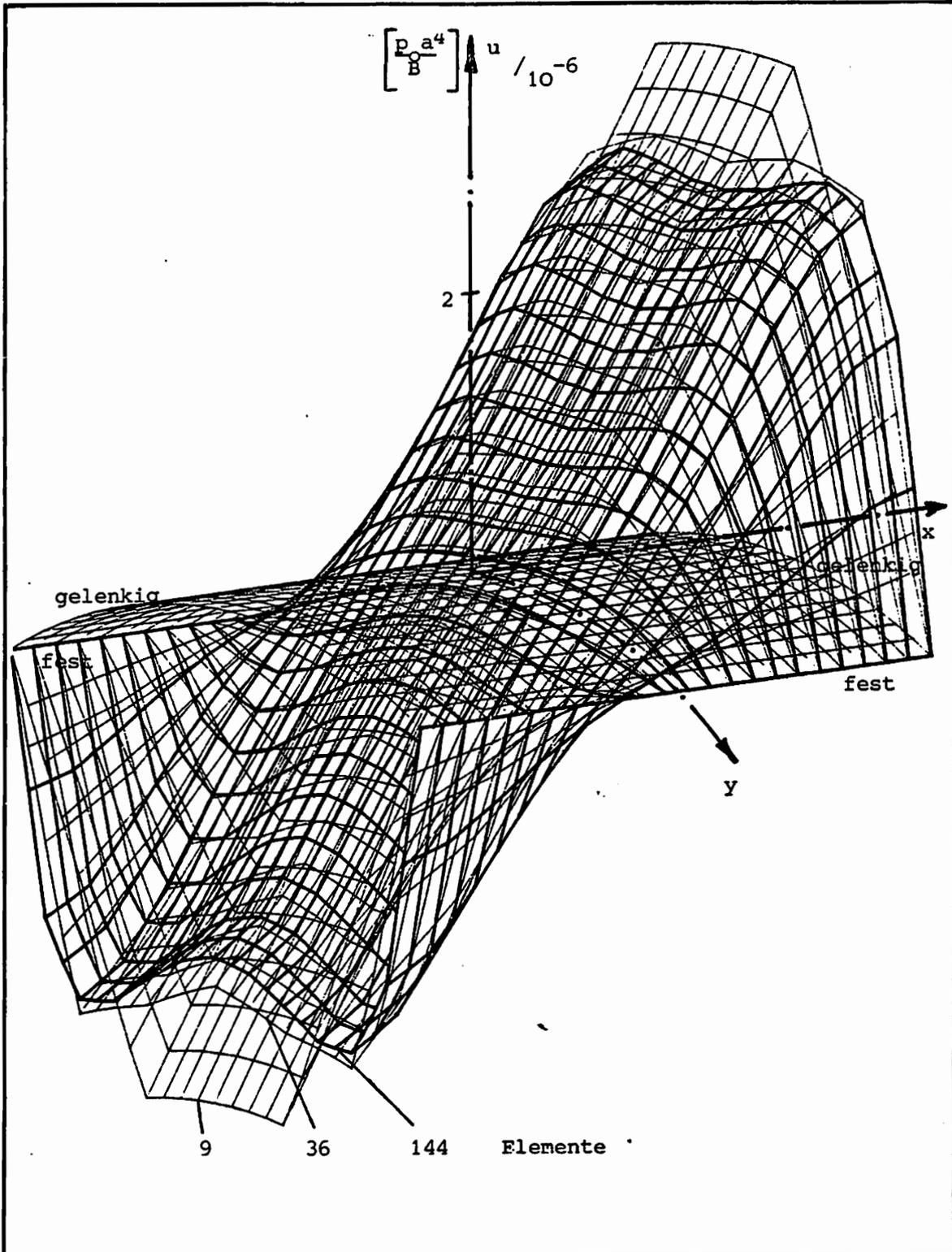


Bild 10: Konvergenz der Verschiebungskomponente  $u$  einer Kreiszylinderschale unter konstanter Last bei Ansätzen mit Hermite-Polynomen in 9, 36 und 144 Elementen

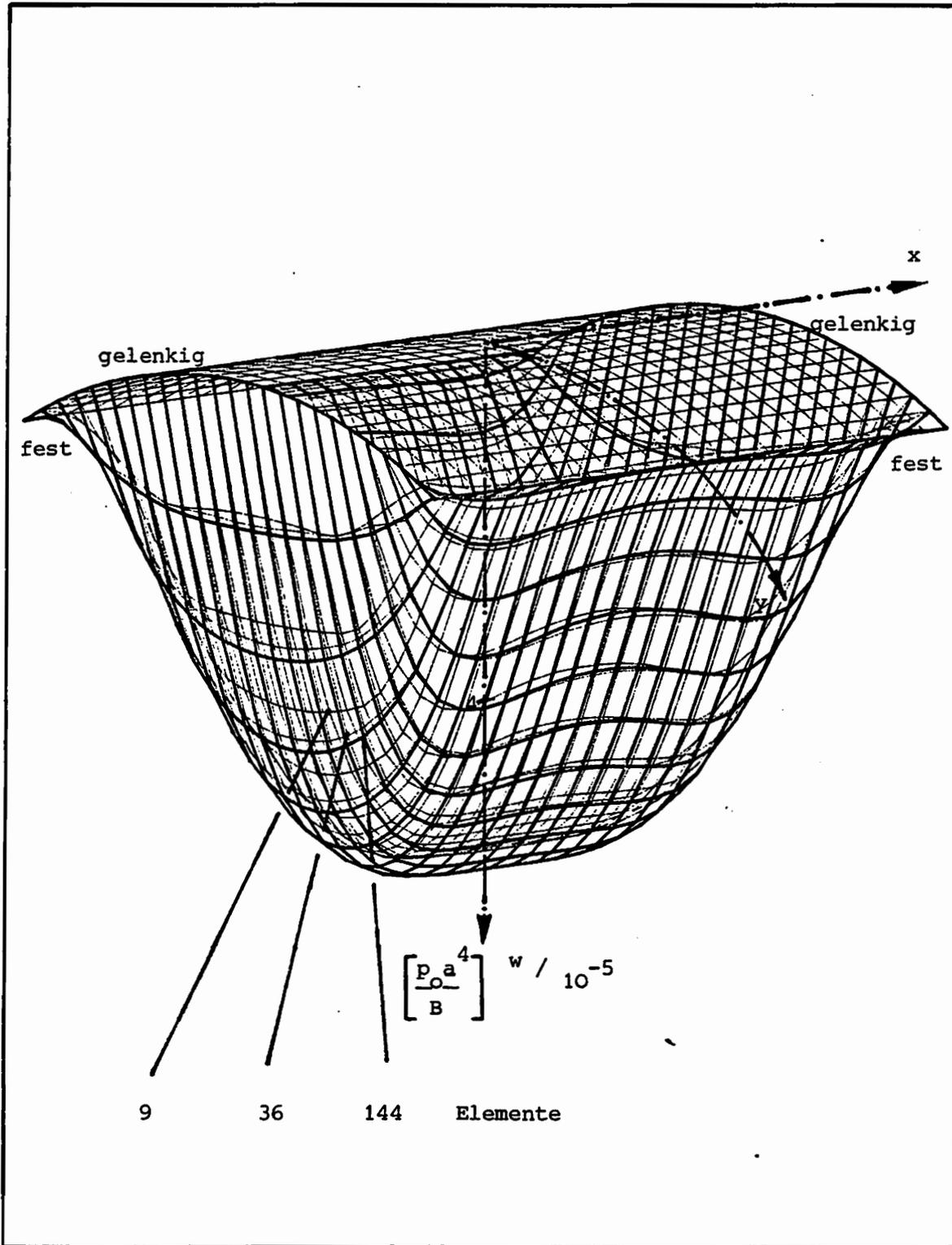


Bild 11: Konvergenz der Verschiebungskomponente  $w$  einer Kreiszyklinderschale unter konstanter Last bei Ansätzen mit Hermite-Polynomen in 9, 36 und 144 Elementen

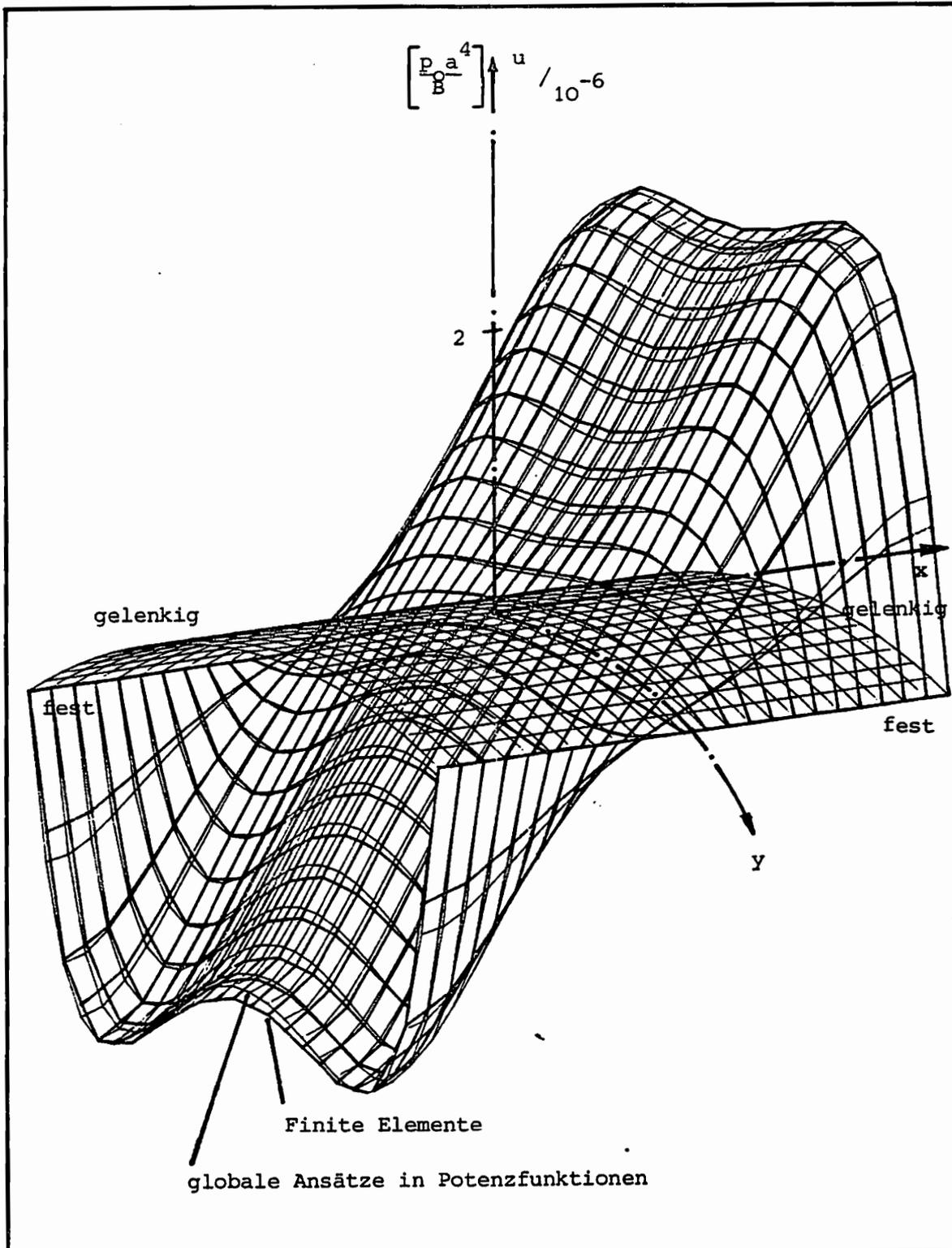


Bild 12: Vergleich der Verschiebungskomponente  $u$  einer Kreiszylinderschale unter konstanter Last aus globalen Ansätzen mit je 12 Freiwerten bzw. Hermite-Polynomen in 144 Elementen

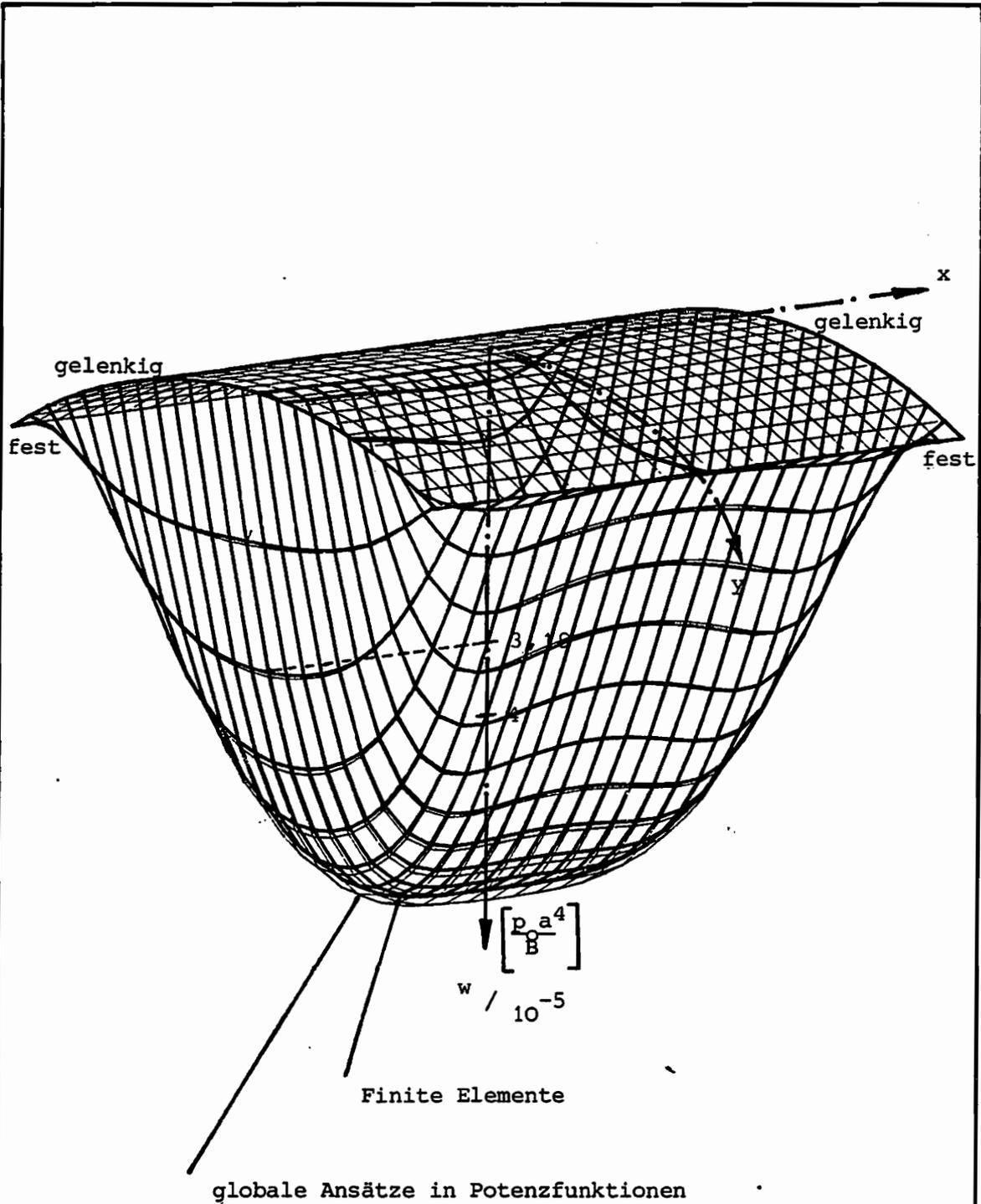


Bild 13:

Vergleich der Verschiebungskomponente  $w$   
einer Kreiszylinderschale unter konstanter Last  
aus globalen Ansätzen mit je 12 Freiwerten  
bzw. Hermite-Polynomen in 144 Elementen

Globale Ansätze	$\frac{u_{\langle 3 \rangle}^{\sim}(0,0)}{a^4 p_0/B}$	$\frac{u_{\langle 1 \rangle}^{\sim}(-a,0)}{a^4 p_0/B}$	$\frac{u_{\langle 2 \rangle}^{\sim}(0, \frac{b}{2})}{a^4 p_0/B}$
$A_n$			
3	$7,3276 \cdot 10^{-5}$	$-2,8120 \cdot 10^{-6}$	$4,5842 \cdot 10^{-6}$
6	$6,3304 \cdot 10^{-5}$	$-2,9773 \cdot 10^{-6}$	$4,2302 \cdot 10^{-6}$
12	$6,1123 \cdot 10^{-5}$	$-2,1976 \cdot 10^{-6}$	$4,4434 \cdot 10^{-6}$
24	$5,8557 \cdot 10^{-5}$	$-2,3403 \cdot 10^{-6}$	$4,4124 \cdot 10^{-6}$
Finite Elemente			
770	$5,8711 \cdot 10^{-5}$	$-2,4278 \cdot 10^{-6}$	$4,3106 \cdot 10^{-6}$
322	$5,7499 \cdot 10^{-5}$	$-2,5198 \cdot 10^{-6}$	$4,1892 \cdot 10^{-6}$
170	$5,6199 \cdot 10^{-5}$	$-2,6278 \cdot 10^{-6}$	$3,5636 \cdot 10^{-6}$
66	$5,4070 \cdot 10^{-5}$	$-2,8266 \cdot 10^{-6}$	$4,1209 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 1: Konvergenz der Zustandsgrößen aus globalen bzw. Finite-Element Ansätzen

Eine Aussage zu der Frage nach den günstigeren Ansatzfunktionen ist durch die Untersuchung der Konditionszahlen der Koeffizienten-Matrix, hier der Steifigkeitsmatrix  $R_n$  bzw. der Flexibilitätsmatrix  $Q_n$  des aktuellen Gleichungssystems möglich (siehe Abschnitt 3.3.). Dies ist für die Problemlösung mit einigen wenigen globalen Ansätzen nicht so wichtig, da algebraische Gleichungssysteme mit wenigen Unbekannten auf jeden Fall numerisch beliebig genau gelöst werden können, auch wenn wie bei den Verschiebungsansätzen (5) die Steifigkeitsmatrix  $R_n$  schlechte Kondition hat. Die Konditionszahl wächst von  $C_{sp}(R_3) \approx 1674,6 / 1,474 \approx 1136$  bei nur je einem

Freiwert auf  $C_{sp-6}(R_{-6}) \approx 1712,3 / 0,0815 \approx 20755$  bei je nur zwei freien Konstanten, bleibt jedoch dann annähernd konstant. So ist  $C_{sp-9}(R_{-9}) \approx 1726,4 / 0,0810 \approx 21314$  nicht mehr wesentlich größer.

Wichtig sind Überlegungen bezüglich der Wahl der Koordinatenfunktionen bzw. der Kondition der von ihnen erzeugten Steifigkeits- oder Flexibilitätsmatrizen sicher für alle lokalen Ansätze, da dabei die Zahl der Freiwerte und damit die Größe der Gleichungssysteme bedeutend größer ist.

So sind für Finite-Element-Ansätze in den Verschiebungskomponenten ebenso wie den Spannungsfunktionen pro Knoten  $l = 5$  Freiwerte notwendig,  $l = 6$  Freiwerte aber physikalisch sinnvoll. Bei einer Unterteilung des Definitionsgebiets in  $n_e = n_x \cdot n_y$  Elemente mit  $(n_x + 1) \cdot (n_y + 1)$  Knoten ergeben sich je nach den Randbedingungen bis zu  $(n_x + 1)(n_y + 1) \cdot l$  Gleichungen und Unbekannte. Bereits bei geringer Erhöhung der Elementzahl  $n_e$  ( $n_x = n_y$ ) wächst also die Zahl  $A_n$  der Unbekannten stark an. Dies bewirkt, daß trotz der Bandstruktur der aus lokalen Ansätzen erstellten Koeffizientenmatrizen die Konditionszahl beachtlich groß wird. Dies zeigt sich bei der mit Ansätzen aus bilinearen bzw. bikubischen HERMITE-Polynomen erstellten Steifigkeitsmatrix  $R_{-h}$  zum hier vorgegebenen Problem mit den Randbedingungen (1):

$n_x = n_y$	$A_n$	$\lambda_n^R$	$\lambda_1^R$	$C_h$
3	32	625,98921	0,257181	2434
5	112	558,4890	0,110408	5058
7	240	1022,676	0,063519	16100
9	416	1682,198	0,037871	44419

Somit macht die Größe  $A_n$  der zu lösenden Systeme die Verwendung möglichst optimaler, also wenigstens fast orthonormierter Funktionen sinnvoll. Die B-Spline-Funktionen (siehe Abschnitt 4.1.4) haben diese Eigenschaft; sie sind dadurch gekennzeichnet, daß die Konditionszahl  $C_h$  als Quotient von größtem zu kleinstem Eigenwert des finiten Systems nicht über einen festen Maximalwert wächst. Dies wird an einer Untersuchung deutlich, die wegen des geringeren Aufwands bei einer quadratischen Platte durchgeführt wurde. Die Steifigkeitsmatrix  $R_{-h}^P$  der Platte ergibt sich nach (4.1.47c) mit  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$

$$R_{-h}^P = \frac{k^4}{12} [2(1-\nu)B_{ik} B_{jl} + 2A_{ik} D_{jl} + \nu(C_{ik} + C_{ki})C_{li}] \quad (9)$$

Bei gleichem Abstand  $h$  aller die B-Spline-Funktionen bestimmenden Knoten kann die Abhängigkeit der Matrixkoeffizienten von  $h$  als Faktor herausgezogen werden:

$$\bar{R}_h^{\text{Platte}} = \frac{\kappa^4}{12} h^{-6} \bar{R}_h^{\text{P}} \quad (10)$$

Es zeigt sich für diese skalierte Matrix  $\bar{R}_h^{\text{P}}$ , daß zwar notwendigerweise bei verschiedenen Lagerungsbedingungen verschiedene Eigenwerte auftreten, trotzdem jedoch die Konditionszahl bei wachsender Zahl der Ansatzfunktionen beschränkt bleibt (Tabelle 2).

Auch bei Annahme exakt berechneter Steifigkeitsmatrizen ist die relative Abweichung (3.3.18) aufgrund eines numerisch, z. B. durch Quadraturformeln berechneten Lastvektors  $\underline{p}_h + \delta \underline{p}_h$  in der Energienorm

$$\frac{\|\underline{u}_h^{\sim} - \bar{\underline{u}}_h^{\sim}\|_w}{\|\underline{u}_h^{\sim}\|_w} \leq c_h \frac{\|\delta \underline{p}_h\|_v}{\|\underline{p}_h\|_v} \quad (11)$$

Dies sagt aus, daß bei gleicher relativer Störung des Lastvektors die Größe des relativen Fehlers durch die Kondition des Systems bestimmt wird. Dieses Kriterium, die Kondition der Steifigkeits- (bzw. Flexibilitäts-) Matrix spricht also eindeutig gegen die in dem Schalenbeispiel verwendeten Finite-Element-Ansätze mit HERMITE-Polynomen.

Dies gilt, obwohl bei glatten und regulären Belastungsfunktionen

$\|\delta \underline{p}_h\|_v / \|\underline{p}_h\|_v$  so klein ist (für die Schale unter konstantem Außendruck  $p_0$  und Integration mit der konsistenten ROMBERG'schen Quadraturformel [152,158] z.B.  $10^{-10}$  für  $n_x = n_y = 3$  bzw.  $10^{-9}$  für  $n_x = n_y = 12$ ), daß auch schlecht konditionierte Systeme keine nennenswerten Abweichungen zwischen numerischer Approximation  $\underline{u}_h^{\sim}$  und 'exakter' Näherung  $\bar{\underline{u}}_h^{\sim}$  ergeben. Sind Lastgrößen jedoch unstetig und somit die Störungen  $\delta \underline{p}_h$  des Lastvektors  $\underline{p}_h$  i. a. größer, kann der dadurch verursachte Fehler nicht mehr ganz vernachlässigt werden.

Eine klare Entscheidung der Frage, welcher Ansatz die exakte Lösung besser annähert, ist jedoch mit der Untersuchung der Kondition des entstehenden finiten Systems nicht zu erhalten. Eine Antwort darauf ist nur durch die Ermittlung der Funktionalwerte für die verschiedenen Approximationen zu bekommen. Ihr Vergleich (Tabellen 3/4) gibt eindeutige Aussagen über

- a) die Konvergenz in der Energienorm
- b) die "bessere" Approximation
- c) den relativen pauschalen Fehler.

bikubische Basis-Splinefunktionen

Randlagerung	gleichmäßiger Knotenabstand			
	a/6	a/7	a/8	
zwei fest - zwei gelenkig	$\lambda_n^R$	2656,08322	2658,2136	2652,859
	$\lambda_1^R$	2354,7028	2373,0083	2378,44
	$C_h$	1,12799	1,12018	1,11537
allseitig gelenkig	$\lambda_n^R$	2656,4657	2658,8870	2653,82
	$\lambda_1^R$	2335,3721	2349,7970	2353,40
	$C_h$	1,13749	1,13153	1,12765
allseitig fest	$\lambda_n^R$	2655,915	2657,6840	2651,81
	$\lambda_1^R$	2373,0938	2394,3871	2401,58
	$C_h$	1,11918	1,10996	1,10419

bikubische HERMITE-Polynome

Randlagerung	gleiche Elementgröße			
	a/6	a/7	a/8	
zwei fest - zwei gelenkig	$\lambda_n^R$	79,0186	80,4154	81,3304
	$\lambda_1^R$	0,20865	0,19986	0,13272
	$C_h$	378,713	402,358	612,796

Tabelle 2 : Konditionszahlen der Steifigkeitsmatrix  $\bar{R}_h^p$  einer Quadratplatte

Globale Ansätze		Finite Elemente-HERMITE Pol.		
$A_n$	Funktionalwerte $\pi^{\sim}$	$n_e$	$A_n$	Funktionalwerte $\pi^{\sim}$
6	-1,370 25	9	32	-1,252 44
12	$-1,421 44 \cdot 10^{-5} \frac{p_0^2 a^6}{B}$	36	170	$-1,388 96 \cdot 10^{-5} \frac{p_0^2 a^6}{B}$
24	-1,430 75	144	770	-1,422 03
<hr/>				
24	-1,440 82	144	770	-1,485 40
12	$-1,459 45 \cdot 10^{-5} \frac{p_0^2 a^6}{B}$	36	170	$-1,543 60 \cdot 10^{-5} \frac{p_0^2 a^6}{B}$
6	-1,80598	9	32	-1,620 71
$A_{nc}$	Funktionalwerte $\pi^{\approx C}$	$n_e$	$A_{nc}$	Funktionalwerte $\pi^{\approx C}$

Tabelle 3: Vergleich der Funktionalwerte bei globalen und lokalen (Finite-Element) Ansätzen

Ansätze	$A_n = A_{nc}$	$\ u - u_h^{\sim}\  \leq$	$\ u - u_h^{\sim}\  / \ u_h^{\sim}\  \leq$
global	6	0,295 204	0,5639
	12	$0,087 189 \cdot 10^{-2} \frac{p_0 a^3}{\sqrt{B}}$	0,1635
	24	0,044 877	0,0839
Finite-Elemente	32	0,271 392	0,5422
	170	$0,175 863 \cdot 10^{-2} \frac{p_0 a^3}{\sqrt{B}}$	0,3336
	770	0,112 578	0,2111

Tabelle 4: Konvergenz in der Energienorm und des relativen pauschalen Fehlers

### 3. Punktweise Eingrenzung der Normalverschiebung

Sollen für bestimmte Zustandsgrößen an einigen Punkten eines Tragwerks Schranken bestimmt werden, ist, wie in den Abschnitten 1.4. und 4.2. erläutert wurde, zusätzlich zu den komplementären Berechnungen des ursprünglichen Problems der Verformungs- bzw. Spannungszustand des Tragwerks infolge einer passenden singulären Last oder Versetzung zu berechnen. Die Näherungen dieses GREEN'schen Zustandes können aus den gleichen beiden algebraischen Systemen bestimmt werden wie die geometrisch bzw. statisch zulässigen Approximationen des Ausgangsproblems (siehe Abschnitt 4.2.).

Eine wesentliche Aufgabe bleibt dabei die geeignete Erfassung der homogenen Randbedingungen der GREEN'schen Näherungen. Möglichkeiten dazu werden hier am konkreten Beispiel erläutert. Die danach aufgeführten Resultate verifizieren das in den Abschnitten 1.4. und 2.3. theoretisch begründete Verfahren.

Im hier untersuchten Fall einer offenen Kreiszyinderschale mit je zwei fest eingespannten und frei gestützten Rändern sind die geometrischen und die statischen Randbedingungen des GREEN'schen Zustandes mit denen des Ausgangsproblems identisch. Nach (4.2.1) und (4.2.18) sind Ansätze in Verschiebungen bzw. nach (4.2.8) und (4.2.19) in Spannungsfunktionen zu erstellen und den Bedingungen (1) bzw. (2) anzupassen. Dies ist mit global oder mit bereichsweise definierten *Randfunktionen*  $u^{gc}$  bzw.  $g^{gc}$  möglich. So ist z. B. der globale (dimensionslose) Ansatz [183]

$$u_1^s + u_1^{gc} = u_1^s(x, y) - \frac{1}{2} [(1 + y)u_1^s(x, 1) + (1 - y)u_1^s(x, -1)] , \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} u_2^s + u_2^{gc} = & u_2^s(x, y) - \frac{1}{2} [(1 + x)u_2^s(1, y) + (1 - x)u_2^s(-1, y)] \\ & + (1 + y)u_2^s(x, 1) + (1 - y)u_2^s(x, -1) \\ & + \frac{1}{4}(1 + x)[(1 + y)u_2^s(1, 1) + (1 - y)u_2^s(1, -1)] \\ & + \frac{1}{4}(1 - x)[(1 + y)u_2^s(-1, 1) + (1 - y)u_2^s(-1, -1)] , \end{aligned} \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} u_3^s + u_3^{gc} = & u_3^s(x, y) - \frac{1}{2} [(1 + x)u_3^s(1, y) + (1 - x)u_3^s(-1, y)] \\ & - \frac{1}{4} (1 - y)^2 (2 + y) [u_3^s(x, -1) - \frac{(1+x)}{2} u_3^s(1, -1) - \frac{(1-x)}{2} u_3^s(-1, -1)] \\ & - \frac{1}{4} (1 + y)^2 (2 - y) [u_3^s(x, 1) - \frac{(1+x)}{2} u_3^s(1, 1) - \frac{(1-x)}{2} u_3^s(-1, 1)] \end{aligned} \quad (12c)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} (1-y)^2 (1+y) \left[ u_{3,y}^s(x,1) - \frac{(1+x)}{2} u_{3,y}^s(1,1) - \frac{(1-x)}{2} u_{3,y}^s(-1,1) \right] \\
 & + \frac{1}{4} (1-y)^2 (1-y) \left[ u_{3,y}^s(x,-1) - \frac{(1+x)}{2} u_{3,y}^s(1,-1) - \frac{(1-x)}{2} u_{3,y}^s(-1,-1) \right],
 \end{aligned}$$

geometrisch zulässig, d. h. erfüllt die geometrischen Randbedingungen (1). Dies gilt für alle möglichen GREEN'schen Verschiebungsfelder  $\underline{u}^s$  (siehe Tafel 6).

Ähnlich, wegen der geringen Zahl der Bedingungen (2) bzw. (4) sogar einfacher, läßt sich ein statisch zulässiger GREEN'scher Zustand, z. B. aus den Ansätzen für die Spannungsfunktionen [183]

$$\psi_1^s + \varphi_1^{gc} = \psi_1^s(x, y) \quad , \quad (13a)$$

$$\psi_2^s + \varphi_2^{gc} = \psi_2^s(x, y) - \frac{1}{2} [(1+x)\psi_2^s(1, y) + (1-x)\psi_2^s(-1, y)], \quad (13b)$$

$$\psi_3^s + \varphi_3^{gc} = \psi_3^s(x, y) - \frac{1}{2} [(1+x)\psi_3^s(1, y) + (1-x)\psi_3^s(-1, y)] \quad (13c)$$

finden. Dies gilt für alle möglichen nach (4.3.2) aus Spannungsfunktionen hergeleiteten GREEN'schen Spannungszustände (siehe Tafel 7).

Für nicht-rechteckige Schalengebiete ist diese Möglichkeit der globalen Anpassung der Singulärteile  $\underline{u}^s$  bzw.  $\underline{\psi}^s$  der GREEN'schen Zustände an die vorgegebenen homogenen Randbedingungen im allgemeinen nicht durchführbar. In diesen Fällen sind dann lokal definierte Ansatzfunktionen durch nur in den Randstreifen des Definitionsgebiets eingeführte Interpolationsfunktionen  $\underline{u}^{gc}$  bzw.  $\underline{\psi}^{gc}$  zu ergänzen. Wird die Schalenmittelfläche F in rechteckige Elemente mit den lokalen Koordinaten  $\xi$  bzw.  $\eta$  eingeteilt und sind die lokalen Ansätze aus bilinearen bzw. bikubischen HERMITE-Polynomen (siehe Abschnitt 4.1.3) gebildet, können für die vier prinzipiell verschiedenen Arten von Randstreifen mit ein- oder ausspringenden Ecken die Randbedingungen (1) dieses Beispiels wie folgt (siehe auch Anhang A8) erfüllt werden:

Im Randstreifen I ( $b_1 + h \geq y \geq b_1$ ) mit fest eingespanntem Rand  $y = b_1$  durch

$$u_1^s + u_1^{gc} = u_1^s(x, y) - u_1^s(x, b_1) H_{00}^1(\eta) \quad , \quad (15a)$$

$$u_2^s + u_2^{gc} = u_2^s(x, y) - u_2^s(x, b_1) H_{00}^1(\eta) \quad , \quad 0 \leq \eta \leq h_y \quad , \quad (15b)$$

$$u_3^s + u_3^{gc} = u_3^s(x, y) - u_3^s(x, b_1) H_{00}^3(\eta) - u_{3,y}^s(x, b_1) H_{01}^3(\eta) \quad . \quad (15c)$$

Die Erfassung vorgegebener Randwerte in Ecken wird hier am Beispiel fest eingespannter Ränder  $y = \text{konstant}$  und gelenkig gelagerter Ränder  $x = \text{konstant}$  angegeben (Anhang A8). Es sind vier verschiedene Außenecken  $E_{ai}$  möglich, die durch verschiedene Kompensationsglieder (---) im Eckelement zu berücksichtigen sind, so z. B. im Eckelementtyp  $E_{a1}$  ( $a_1 \leq x \leq a_1 + h_x$ ;  $b_1 \leq y \leq b_1 + h_y$ ) durch:

$$u_1^s + u_1^{gc} = u_1^s(x, y) - u_1^s(x, b_1) H_{oo}^1(\eta) \quad ; \quad (15a)$$

$$u_2^s + u_2^{gc} = u_2^s(x, y) - u_2^s(x, b_1) H_{oo}^1(\eta) - u_2^s(a_1, y) H_{oo}^1(\xi) + \underbrace{u_2^s(a_1, b_1) H_{oo}^1(\xi) H_{oo}^1(\eta)} \quad ; \quad (15b)$$

$$u_3^s + u_3^{gc} = u_3^s(x, y) - u_3^s(x, b_1) H_{oo}^3(\eta) - u_3^s(a_1, y) H_{oo}^3(\xi) - u_{3,y}^s(x, b_1) H_{oo}^1(\eta) + \underbrace{u_3^s(a_1, b_1) H_{oo}^3(\xi) H_{oo}^3(\eta) + u_{3,y}^s(a_1, b_1) H_{oo}^3(\xi) H_{oo}^3(\eta)} \quad . \quad (15c)$$

Einspringende Ecken sind entsprechend zu behandeln; so gilt für das Inneneckelement  $E_{i1}$  ( $a_1 \leq x \leq a_1 + h_x$ ;  $b_2 \leq y \leq b_2 + h_y$ ) der gleiche Ansatz wie bei der Außenecke  $E_{a1}$ . Infolge der Gleichartigkeit der sich überlappenden Randstreifen ist auch in  $E_{i2}$ ,  $E_{i3}$  und  $E_{i4}$  wie in  $E_{a2}$ , bzw.  $E_{a3}$  und  $E_{a4}$  zu approximieren.

Gleichartige Randfunktioneninterpolationen sind für die Spannungsfunktions Ansätze durchzuführen.

Diese ausführliche Beschreibung einer Möglichkeit, homogene Randbedingungen eines GREEN'schen Verschiebungsansatzes hier für abwechselnd gelenkige und feste Lagerung, zu erfüllen, wird gegeben, um das Verfahren der punktweisen Eingrenzung ohne Schwierigkeiten auf kompliziertere Schalenmittelflächen übertragbar zu machen.

Die Konvergenz der Fehlerschranken für Zustandsgrößen an bestimmten festen Stellen, der sogenannten punktweisen Schranken (4.2.25)

$$|F(\tilde{x}^p) - F_N(\tilde{x}^p)| \leq \sqrt{[(I_p(\tilde{u}_h) - I_{pc}(\tilde{\sigma}_h)) (I_p(\tilde{u}_h^{gr}) - I_{pc}(\tilde{\sigma}_h^{gr}))]} \quad (16)$$

hängt sowohl von  $\tilde{u}_h$  und  $\tilde{\sigma}_h$ , den Approximationen des ursprünglichen Problems als auch von  $\tilde{u}_h^{gr}$  und  $\tilde{\sigma}_h^{gr}$ , den GREEN'schen Näherungszuständen ab. Werden diese Näherungen, wie in Abschnitt 5,2. dargelegt wurde, aus je einem Gleichungssystem mit verschiedenen Lastvektoren bestimmt, ergeben sich

nach (4.2.16) sowie (4.2.26) die pauschalen Schranken  $\Delta I_n$  und  $\Delta I_n^\infty$  (Tabelle 5), Aus ihnen kann nach (16) sofort die Schranke für den jeweiligen Zustand in einem festen Punkt  $\underline{x}^P$  berechnet werden, hier für die Normalverschiebung  $v_{\langle 3 \rangle}(0,0)$  (Tabelle 6).

globale Ansätze $A_n = A_{nc}$	$\Delta I_n$ $\left[ \frac{p_0^2 a^6}{Et^3} \kappa^4 \right]$	$\Delta I_n^\infty$ $\left[ \frac{a^2 p_{\langle 3 \rangle E}^2}{Et^3} \kappa^4 \right]$
6	$435,73 \cdot 10^{-8}$	$15,202 \cdot 10^{-4}$
12	$38,01 \cdot 10^{-8}$	$2,830 \cdot 10^{-4}$
18	$16,07 \cdot 10^{-8}$	$0,979 \cdot 10^{-4}$
24	$10,07 \cdot 10^{-8}$	$0,573 \cdot 10^{-4}$

Konvergenz der pauschalen Schranken für den  
Tabelle 5: Fall konstanter Normallast  $p_0$  und einer  
Einzellast  $p_{\langle 3 \rangle E}(0,0)$

Der Näherungswert der Zustandsgröße, für den diese Schranke gilt, ist in diesem Beispiel mit rein homogenen Randbedingungen und dem Lastvektor  $\underline{p}^* = (0,0,p_0)^T$  bzw. der zugehörigen partikulären Lösung (8) nach (3.2.13) aus folgendem stark reduzierten Ausdruck zu bestimmen:

$$F_N(\underline{x}^P) = \frac{1}{2} \frac{p_0}{R} \int_F [\alpha_{(22)}^{s\approx} - \alpha_{(22)}^{s\sim}] dF - p_0 \int_{F-\{\underline{x}^P\}} u_{3h}^{g\sim} dF + \frac{1}{2} \left( \underline{p}_h^T \cdot \frac{\langle n \rangle g}{\underline{c}} - \underline{r}_h^T \cdot \frac{\langle n \rangle g}{\underline{d}} \right). \quad (17)$$

Zusammen mit der Fehlerschranke (16) gibt diese Näherung eine obere und eine untere Grenze für den (numerisch) exakten Wert bzw. eine Aussage über die prozentuale Abweichung davon. In Tabelle 6 und dem Bild 14 ist die Konvergenz der Eingrenzungsspanne sowie der Näherungen für die Normalver-

schiebung  $u_{\langle 3 \rangle}(0,0)$  des hier als Beispiel untersuchten Tonnendaches mit gelenkigen und fest eingespannten Rändern deutlich gemacht.

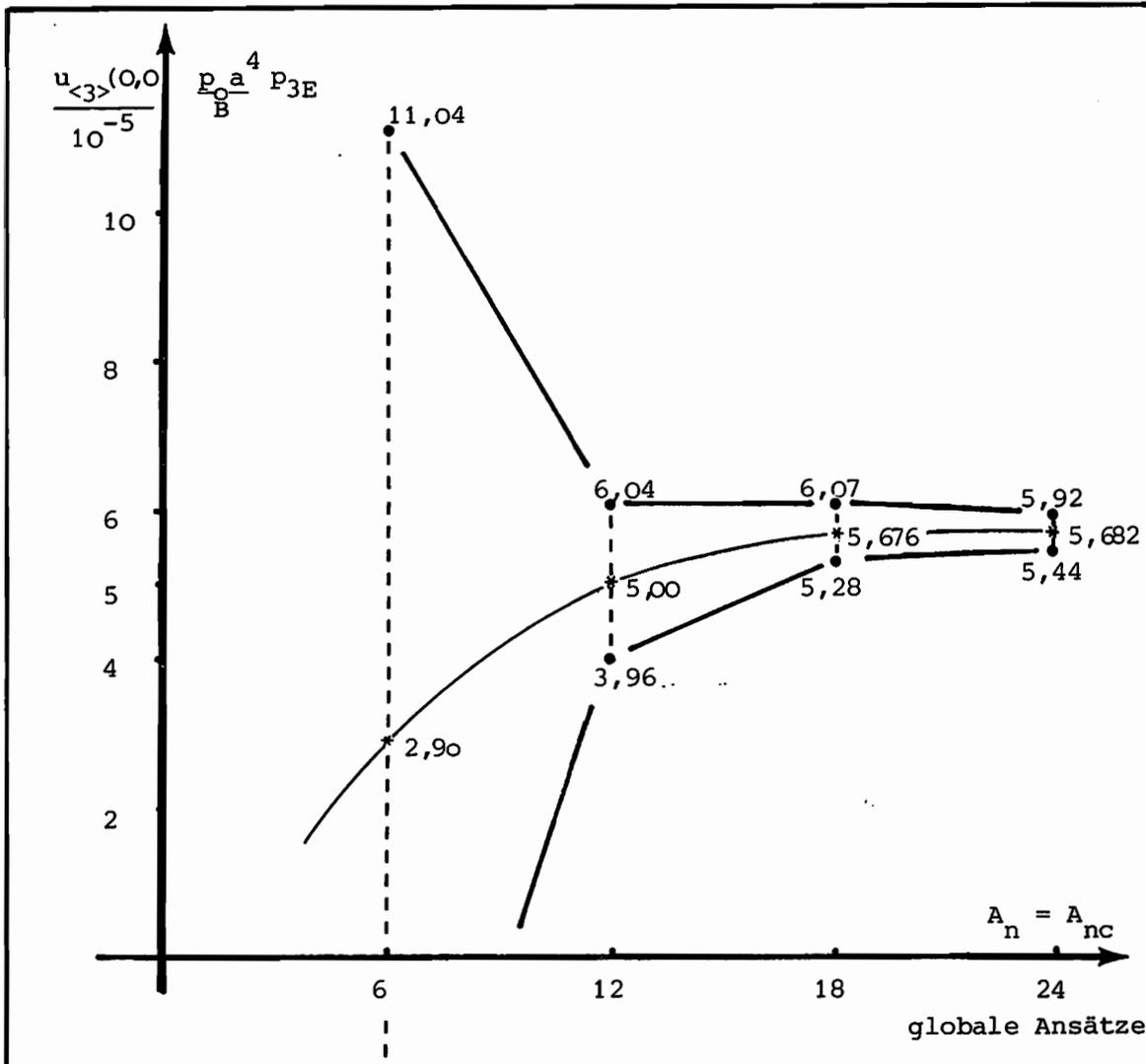


Bild 14: Konvergenz der Eingrenzungsspanne für  $u_{\langle 3 \rangle}(0,0)$

Auch die Abhängigkeit dieser Eingrenzungen von der Lage des untersuchten Punktes, speziell von seiner Entfernung vom Rand ist interessant. Tabelle 7 macht dazu folgende Aussage deutlich:

Die Größe der Fehlerschranken wie auch der punktweisen Näherungen selbst ist von der globalen Genauigkeit aller vier notwendigen Approximationen -  $\tilde{u}_h$  und  $\tilde{\sigma}_h$  sowie  $\tilde{u}_h^{gr}$  und  $\tilde{\sigma}_h^{gr}$  - abhängig.

globale Ansätze $A_n = A_{nc}$	$\frac{u_{<3>}^{\sim}(0,0)}{p_0 a^4 / B}$	$\frac{u_{<3>N}(0,0)}{p_{3E} p_0 a^4 / B}$	$\frac{Sp(u_{<3>})}{p_{3E} p_0 a^4 / B}$	$\frac{Sp(u_{<3>})}{u_{<3>N}}$
6	$6,330 \cdot 10^{-5}$	$2,902 \cdot 10^{-5}$	$8,138 \cdot 10^{-5}$	280 %
12	$6,112 \cdot 10^{-5}$	$5,000 \cdot 10^{-5}$	$1,037 \cdot 10^{-5}$	20,7%
18	$5,869 \cdot 10^{-5}$	$5,676 \cdot 10^{-5}$	$0,396 \cdot 10^{-5}$	7,0%
24	$5,855 \cdot 10^{-5}$	$5,683 \cdot 10^{-5}$	$0,240 \cdot 10^{-5}$	4,2%

Tabelle 6: Konvergenz der Näherungswerte und Fehlerschranken für  $u_{<3>}(0,0)$

$x^p = (x, y)$	$\frac{u_{<3>}^{\sim}(x, y)}{p_0 a^4 / B}$	$\frac{u_{<3>N}(x, y)}{p_{3E} p_0 a^4 / B}$	$\frac{Sp(u_{<3>})}{p_{3E} p_0 a^4 / B}$	$\frac{Sp(u_{<3>})}{u_{<3>N}}$
(0.,0)	$5,855 \cdot 10^{-5}$	$5,683 \cdot 10^{-5}$	$0,240 \cdot 10^{-5}$	4,2%
(.2,0)	$5,945 \cdot 10^{-5}$	$5,623 \cdot 10^{-5}$	$1,231 \cdot 10^{-5}$	21,9%
(.4,0)	$5,989 \cdot 10^{-5}$	$5,667 \cdot 10^{-5}$	$2,057 \cdot 10^{-5}$	36,3%
(.65,0)	$5,070 \cdot 10^{-5}$	$5,067 \cdot 10^{-5}$	$2,507 \cdot 10^{-5}$	49,5%
(.9,0)	$1,941 \cdot 10^{-5}$	$2,223 \cdot 10^{-5}$	$3,083 \cdot 10^{-5}$	138%

( globale Ansätze  $A_n = A_{nc} = 24$  )

Tabelle 7: Ortsabhängigkeit der Eingrenzungsspanne

Offensichtlich sind die Approximationen des Green'schen Zustands mit den gleichen globalen Potenzansätzen wie für den Fall der konstanten Last  $p_0$  ungenau, insbesondere je näher  $x^p$  am Rand liegt. Damit wächst die Eingren-

zungsspanne  $Sp(u_{\langle 3 \rangle})$  bei Annäherung an den Rand, obwohl  $u_3^{\sim}$  pauschal gut approximiert wird (Tabelle 4). Trotz der deutlichen Konvergenz (Tabelle 6, Bild 14) ist also die punktweise Eingrenzung mit den globalen Potenzansätzen nur für  $x^p = 0$  ausreichend gut; Verbesserungen durch die Erhöhung der Zahl  $A_n$  der Freiwerte sind dabei kaum zu erreichen, da dann wegen der schlechten Konditionierung Rundungsfehler bereits einen nicht mehr vernachlässigbaren Einfluß auf das Ergebnis haben.

Auch Finite-Element Ansätze mit bilinearen bzw. bikubischen Hermite-Polynomen ergeben kein optimal konditioniertes System (s. S. 186) und außerdem trotz großer Elementzahl Approximationen mit noch großem pauschalen Fehler (Tabelle 4). Einen Ausweg können Ansätze mit Spline-Funktionen bieten. Detaillierte Untersuchungen bezüglich dieser numerischen Mängel bleiben die Aufgabe weiterer Studien, waren jedoch nicht die Intention dieser hier vorliegenden Untersuchungen.

#### 4. Konvergenzbeschleunigung und Eingrenzung durch Extrapolation

Es ist möglich (siehe Abschnitt 3.2), bei Kenntnis des asymptotischen Fehlerverhaltens finiter Approximationsprozesse aus einer Folge von Näherungswerten für verschiedene Diskretisierungsstufen  $h_i$  einen verbesserten Wert zu berechnen, also ohne besonderen zusätzlichen Aufwand die Konvergenz zu verbessern [79]. Außerdem sind sogar unter bestimmten Voraussetzungen aus diesen Näherungswerten Schranken für den exakten Wert berechenbar [86]. Zum Nachweis, daß diese Einschließung 'echt' ist, sind genaue Informationen über die Abhängigkeit der Näherungslösung vom Diskretisierungsparameter  $h$  notwendig; d. h. z. B. für  $u_h^{\sim}$  muß die Entwicklung

$$u_h^{\sim} = u + c_1 h^{\gamma_1} + \dots + c_k h^{\gamma_k} + O(h^{\gamma_k}) \quad (18)$$

mit  $0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_k$  und von  $h$  unabhängigen Konstanten  $c_1, \dots, c_k$  bekannt sein. Die Ermittlung dieser Entwicklung ist i. a. sehr schwierig [78,87]. Deshalb soll hier nur unter der Annahme der nach (3.2.8) theoretisch zu erwartenden Konvergenzordnung  $O(h^2)$  für die Verschiebungskomponenten  $u_{ih}$  die Nützlichkeit solcher Extrapolationsverfahren deutlich gemacht werden.

Bei Kenntnis von anderweitig, z. B. über das geschilderte HYPERKREIS-Verfahren, berechneten unteren und oberen Schranken für den exakten Wert kann die Extrapolation ebenfalls zur Ermittlung eines verbesserten Nähe-

rungswertes  $F_N(x^P)$  benützt werden [40].

Mit der begründeten Annahme - beide Schranken werden beim Hyperkreis-Verfahren mit den gleichen vier Näherungszuständen bestimmt -, daß für die untere wie für die obere Schranke die gleiche Abhängigkeit  $h_i^Y$  vom Diskretisierungsparameter  $h_i$  gilt

$$\begin{aligned} u_{<3>i}^u &= u_{<3>} + \alpha h_i^Y, \\ u_{<3>i}^o &= u_{<3>} + \beta h_i^Y, \end{aligned} \quad \alpha, \beta, \gamma = \text{konst}, \quad (19)$$

kann daraus (siehe 3.2.16 - 18) die verbesserte Näherung

$$u_{<3>N} = \frac{u_{<3>i+1}^u h_i^Y - u_{<3>i}^u h_{i+1}^Y}{h_i^Y - h_{i+1}^Y} = \frac{u_{<3>i}^u u_{<3>i+1}^o - u_{<3>i}^o u_{<3>i+1}^u}{u_{<3>i}^u - u_{<3>i+1}^u + u_{<3>i+1}^o - u_{<3>i}^o} \quad (20)$$

berechnet werden. Dabei ergeben auch relativ grobe Schranken - wie in diesem Beispiel (Tabelle 6) - falls ihr Verhalten monoton ist, verbesserte Näherungen (Tabelle 8).

$A_n = A_{nc}$	$u_{<3>i}^u$	$u_{<3>i}^o$	extrapolierte Näherung $u_{<3>N}$
6	$-5,2371 \cdot 10^{-5}$	$11,0403 \cdot 10^{-5}$	$5,30507 \cdot 10^{-5}$ <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> $5,88801 \cdot 10^{-5}$
12	$3,9617 \cdot 10^{-5}$	$6,0359 \cdot 10^{-5}$	
24	$5,4420 \cdot 10^{-5}$	$5,9224 \cdot 10^{-5}$	
( globale Potenzansätze )			
<p>Tabelle 8: Extrapolation der Fehlerschranken für die Normalverschiebung <math>u_{&lt;3&gt;}(0,0)</math></p>			

Noch interessanter ist jedoch die bereits erwähnte Möglichkeit, mit einer Folge von Näherungswerten aus verschiedenen Diskretisierungsstufen  $h_j$  eines finiten Verfahrens, z. B. von Finite-Element Näherungen für die Verschiebungsfunktionen  $u_{\tilde{h}}$ , durch rekursiv nach (3.2.20) berechenbare extrapolierte Werte in beliebigen Punkten und für beliebige Zustandsgrößen

nicht nur eine größere Genauigkeit zu erreichen, sondern allein aus diesen Größen auch asymptotische - wenn die Fehlerentwicklung (18) bewiesen ist, auch echte  $\sim$  Schranken zu berechnen.

Für einige besonders interessante Zustandsgrößen dieses Beispiels hier durchgeführt, zeigen die Extrapolationstableaus (Tabellen 9-11),

$h_x = h_y$	$\frac{u_{\langle 3 \rangle}^{\sim}(0,0)}{p_0 a^4/B}$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$i = 1 : a/4$	5,4078				
$i = 2 : a/6$	5,6199	5,78958			
$i = 3 : a/8$	$5,7499 \cdot 10^{-5}$	5,91704	5,95953		
$i = 4 : a/10$	5,8256	5,96017	5,98444	5,98918	
$i = 5 : a/12$	5,8711	5,97451	5,98597	5,98648	5,98615

Tabelle 9: Konvergenz der Extrapolationen von  $u_{\langle 3 \rangle i}^{\sim}(0,0)$

$h_x = h_y$	$\frac{u_{\langle 1 \rangle}^{\sim}(a,0)}{a^4 p_0/B}$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$i = 1 : a/4$	2,8266				
$i = 2 : a/6$	2,6278	2,468760			
$i = 3 : a/8$	$2,5198 \cdot 10^{-6}$	2,38094286	2,3516905		
$i = 4 : a/10$	2,4616	2,35813	2,34530297	2,3440863	
$i = 5 : a/12$	2,4278	2,3509918	2,3452606	2,345246	2,34539

Tabelle 10: Konvergenz der Extrapolationen von  $u_{\langle 1 \rangle i}^{\sim}(a,0)$

$h_x = h_y$	$\frac{n_{\langle 22 \rangle}^{\sim}(0,0)}{\kappa^2 a^2 p_0 / t}$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$i = 1 : a/4$	-2,1468				
$i = 2 : a/6$	-2,0798	-2,02620			
$i = 3 : a/8$	$-2,0447 \cdot 10^{-2}$	-1,99957	-1,990693		
$i = 4 : a/10$	-2,0258	-1,99220	-1,988054	-1,987551	
$i = 5 : a/12$	-2,0146	-1,98914	-1,986692	-1,986238	-1,98607

Tabelle 11: Konvergenz der Extrapolationen von  $n_{\langle 22 \rangle i}^{\sim}(0,0) (\gamma = 2)$

erstellt unter der Annahme  $\gamma = 2$  mit der Rekursionsformel

$$f_i^m = f_{i+1}^{m-1} + \frac{f_{i+1}^{m-1} - f_i^{m-1}}{\left(\frac{h_i}{h_{i+m}}\right)^2 - 1}, \quad m \geq 1; \quad f_i^0 = f_i, \quad (21)$$

deutlich ihre konvergenzbeschleunigende Wirkung.

Die Möglichkeit, daraus untere und obere Schranken zu berechnen, ist insbesondere für Zustandsgrößen in der Nähe des Randes oder gar auf dem Rand besonders wertvoll. Zusätzlich zum Extrapolationsschema (21) ist dafür ein Tableau von Werten nach der Formel (3.2.21)

$$\tilde{f}_i^m = f_{i+1}^{m-1} + \frac{f_i^m - f_{i+1}^{m-1}}{1 - \frac{f_i^m - f_{i-1}^m}{f_{i+1}^{m-1} - f_i^{m-1}}}; \quad m \geq 1; \quad i \geq 2 \quad (22)$$

zu bestimmen. Zeigen die Wertepaare  $(f_i^m, \tilde{f}_i^m)$  monotonen Verhalten, stellen sie asymptotische Schranken für den (numerisch) exakten Wert der untersuchten Zustandsgröße dar.

Diese asymptotischen Schranken sind mit relativ geringem Aufwand bereits sehr gut:

$$5,98616 \cdot 10^{-5} \frac{p_0 a^4}{B} \leq u_{\langle 3 \rangle} (0,0) \leq 5,98648 \cdot 10^{-5} \frac{p_0 a^4}{B} .$$

	$\frac{u_{\langle 3 \rangle i}^{\sim} (0,0)}{p_0 a^4/B}$	$\frac{u_{\langle 3 \rangle i}^1}{\tilde{u}_{\langle 3 \rangle i}^1}$	$\frac{u_{\langle 3 \rangle i}^2}{\tilde{u}_{\langle 3 \rangle i}^2}$	$\frac{u_{\langle 3 \rangle i}^3}{\tilde{u}_{\langle 3 \rangle i}^3}$	$\frac{u_{\langle 3 \rangle i}^4}{\tilde{u}_{\langle 3 \rangle i}^4}$
i=1	$5,4079 \cdot 10^{-5}$				
i=2	$5,6199 \cdot 10^{-5}$	5,78958			
i=3	$5,7499 \cdot 10^{-5}$	5,91704 14,304	5,95953		
i=4	$5,8256 \cdot 10^{-5}$	5,96017 6,13845	5,98444 6,01761	5,98918	
i=5	$5,8711 \cdot 10^{-5}$	5,97451 6,02206	5,98597 5,98735	5,98648 5,98616	5,98615

Tabelle 12 : asymptotische Fehlerschranken für  $u_{\langle 3 \rangle} (0,0)$  durch Extrapolation

Zu beachten ist dabei allerdings, daß dadurch nur dann der exakte Wert eingegrenzt wird, wenn die vorausgesetzte Fehlerentwicklung (18) tatsächlich mit  $\gamma_i = 2i$  gegeben ist. Hier ist - wie ein Vergleich mit der Eingrenzung (Tabelle 6, Bild 14) nach Hyperkreis-Methode zeigt - die Konvergenzordnung der Approximationen  $u_{ih}$  sicher höher als 2, da mit diesem Faktor offensichtlich ein zu großer Wert angepeilt wird.



**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik  
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM  
Nr. 19**