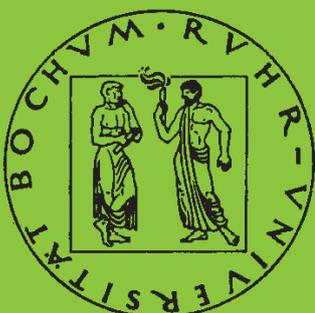


Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

Markus Peters

**Modellierung von Rissausbreitung unter
Verwendung der p-Version der XFEM mit
einer adaptiven Integrationsmethode**

Heft Nr. 143



RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM

RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Institut für Mechanik

Dipl.-Ing. Markus Peters

**Modellierung von Rissausbreitung
unter Verwendung der p-Version der XFEM
mit einer adaptiven Integrationsmethode**

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 143

Herausgeber:
Institut für Mechanik
— Schriftenreihe —
Ruhr-Universität Bochum
D-44780 Bochum

ISBN 3-935892-08-X

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

©2006 Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum

Printed in Germany

Kurzfassung

Die XFEM ist eine effektive Möglichkeit, um Verschiebungs- und Spannungsfelder in der Nähe einer Risspitze zu berechnen. Die vorliegende Arbeit untersucht die XFEM hinsichtlich der Genauigkeit, mit der die Integration durchgeführt werden muss, um Steifigkeitsmatrizen zu erhalten, die mit einer sinnvollen Beschränkung des Fehlers berechnet werden können. Dazu wird eine adaptive Integrationsmethode als Kombination aus Newton-Cotes-Formel und Gauß-Quadratur hergeleitet.

Weiterhin beschäftigt sich diese Arbeit mit der Genauigkeit, mit der das Verschiebungs- und Spannungsfeld und somit auch die Spannungs-Intensitäts-Faktoren berechnet werden können. Um den Fehler der Approximation zu verringern wird ein Vergleich zwischen unterschiedlichen Möglichkeiten der p-Methode der Finiten Elemente auf die XFEM übertragen und eine p-Version der XFEM auf Grundlage der hierarchischen Formfunktionen vorgeschlagen.

Abschließend werden verschiedene Rissausbreitungskriterien für unterschiedliche Beispiele unter Berücksichtigung der verschiedenen Ansatzgrade und Basen der Formfunktionen untersucht.

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner wissenschaftlichen Tätigkeit im SFB 398 Teilprojekt B8 am Institut für Mechanik der Ruhr-Universität Bochum und wurde von der Fakultät für Bauingenieurwesen als Dissertation angenommen.

Für die Anregungen, die Bereitschaft Diskussionen über diese Arbeit zu führen und die wissenschaftliche Betreuung während dieser Zeit möchte ich mich in erster Linie bei Prof. Dr. rer. nat. K. Hackl, dem Inhaber des Lehrstuhls für Allgemeine Mechanik an der Ruhr-Universität Bochum, herzlich bedanken. Seine Bereitschaft, über offene Fragen zu diskutieren und Lösungsansätze zu erörtern, haben neben seinem Interesse am Fortschreiten meiner Forschungstätigkeiten wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Gleichermaßen möchte ich Herrn Prof. Dr.-techn. G. Meschke danken für sein wissenschaftliches Interesse an meiner Arbeit und die Bereitschaft, die Funktion des zweiten Gutachters zu übernehmen.

Außerdem möchte ich mich bei meinen Kollegen am Lehrstuhl für allgemeine Mechanik, bei Herrn Jun.Prof. H. Schütte und Herrn M.Sc. K. Molla-Abassi vom Lehrstuhl für Technische Mechanik und bei Herrn Dr.-Ing. P. Dunmstorff, Herrn Dipl.-Ing. J.-H. Hommel und Herrn Dipl.-Ing. W. Fleming für die Diskussionsbereitschaft bedanken. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr.-Ing. U. Hoppe, der mit einer Vielzahl nützlicher Tipps, wertvollen Diskussionen und dem kontinuierlichen Gedankenaustausch zahlreiche Anregungen lieferte.

Schließlich möchte ich mich bei meiner Frau Kathrin bedanken für die Unterstützung in den letzten Jahren, insbesondere in der Zeit, in der diese Arbeit entstanden ist.

Gelsenkirchen,

Markus Peters

Mündliche Prüfung: 05.06.2007

1. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. K. Hackl
2. Gutachter: Prof. Dr.-techn. G. Meschke

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Problemstellung	1
1.2. Zielsetzung der vorliegenden Arbeit	2
2. Linear elastische Mechanik	3
2.1. Grundlagen der linear-elastischen Kontinuumsmechanik	3
2.1.1. Spannungen und Gleichgewicht	3
2.1.2. Verschiebungen und Verzerrungen	6
2.1.3. Stoffgesetz	8
2.1.4. Variationsprinzip	9
2.1.5. Diskretisierung und Finite Elemente Methode	12
2.2. Grundlagen der linear-elastischen Bruchmechanik	14
2.2.1. Grundlagen der Bruchmechanik	15
2.2.2. <i>Partition of Unity Method</i> und XFEM	19
2.2.3. Berechnung der Spannungs-Intensitäts-Faktoren	28
3. Integration	33
3.1. Analytische Integration	33
3.2. Numerische Integration und Fehlerschätzung	34
3.2.1. Algorithmen zur Integration stetiger Funktionen	34
3.2.2. Algorithmen zur Integration unstetiger und singulärer Funktionen	41
3.2.3. Vergleich der Integrationsverfahren anhand von Beispielen	49
3.2.4. Ergebnisdiskussion	58
4. XFEM mit höherwertigen Polynomen	61
4.1. Allgemeines zur p-Methode der FEM	61
4.2. Beispielrechnungen für bi-lineare und quadratische XFEM	63
4.2.1. Mixed-Mode-Test	63
4.2.2. Mode-I-Test	67
4.3. Bestmögliche Näherung des Ansatzes	69
4.3.1. Prozedur	69
4.3.2. Rissspitzenelement	72
4.3.3. Übergangselemente	72
4.3.4. Weitere Elemente	75
4.4. Zusammenfassung und Ergebnis	75
4.5. Weitere Beispielrechnungen mit der p-XFEM und Vergleich der Ergebnisse	78
4.5.1. Drei-Punkt-Biege-Versuch	78
4.5.2. CT-Versuch	79
5. Rissausbreitungskriterien	83
5.1. Kriterien der maximalen Zugspannung	84
5.2. Kriterien auf Basis der Spannungs-Intensitäts-Faktoren	85
5.2.1. Kriterium der maximalen Umfangsspannung	85

5.2.2. Kriterium auf Basis der Minimierung von K_{II} ($K_{II} \rightarrow 0$)	86
5.3. Kriterium auf Basis des Prinzips des Minimums der potentiellen Energie . .	88
6. Studie des Risspfades an speziellen Beispielen	91
6.1. Drei-Punkt-Biegeversuch	92
6.1.1. Simulationsdefinitionen	92
6.1.2. Ergebnisse und Diskussion für $b_1 = 5.2$	94
6.1.3. Ergebnisse und Diskussion für $b_1 = 1.8$	108
6.2. CT-Versuch	121
6.2.1. Simulationsdefinitionen	121
6.2.2. Ergebnisse und Diskussion für $h_1 = 9.8$	121
6.2.3. Ergebnisse und Diskussion für $h_1 = 9.0$	133
6.3. Zusammenfassung der Beispiele	146
7. Zusammenfassung und Ausblick	147
7.1. Zusammenfassung	147
7.2. Ausblick	148
A. Details der Implementierung	153
A.1. <i>Pointer</i> -Strukturen in FORTRAN 90	153
A.1.1. <i>TYPE</i> -Definitionen	153
A.1.2. Verwendung von <i>Pointern</i>	154
A.2. Module	159

Abbildungsverzeichnis

2.1. Definition der Kräfte	4
2.2. Spannungszustand des Körpers, beschrieben an einem Würfel	4
2.3. Spannungsvektor \mathbf{t}_n auf beliebig orientierter Fläche	5
2.4. Koordinatensystem mit Gesamtheit der Materiepunkte zur Beschreibung der Kinematik	7
2.5. Finite-Elemente-Modell mit Abbildung auf das Einheitsquadrat	13
2.6. Kinematik der LEBM	15
2.7. Rissöffnung bei Mode-I-Belastung	16
2.8. Rissöffnung bei Mode-II-Belastung	16
2.9. Rissöffnung bei Mode-III-Belastung	17
2.10. Riss in unendlicher Scheibe mit Zylinderkoordinaten	17
2.11. FE-Netz mit Riss entlang der Elementkanten	20
2.12. FE-Netz mit verschmiertem Riss	20
2.13. FE-Netz mit explizitem Riss innerhalb der Elemente	21
2.14. zu approximierende Funktion aus Gleichung 2.80	23
2.15. zu approximierende Funktion aus Gleichung 2.80 mit den Interpolationspolynomen, links aus Gleichung 2.81, rechts aus Gleichung 2.82	23
2.16. Definitionen des Normalen- und Tangentenvektors	24
2.17. Die vier Rissspitzenfunktionen F_i aus Gleichung 2.85	24
2.18. Einfach abknickender Riss	25
2.19. Einfach abknickender Riss nach Abbildung auf geraden Riss	27
2.20. Mehrfach abknickender Riss	27
2.21. Mehrfach abknickender Riss nach erster Abbildung auf geraden Riss	27
2.22. Definitionen für das J-Integral in 2D: links als Flächenintegral, rechts als Kurvenintegral	30
2.23. Punkt \mathbf{x} und an der Rissfront gespiegelter Punkt $\hat{\mathbf{x}}$	31
3.1. Prinzip der Mittelpunktsformel in 1D	36
3.2. Prinzip der Trapezregel in 1D	36
3.3. Beispielfunktion (Gleichung 3.27) zur Integration mit Gauß-Jacobi	42
3.4. Vergleich der Nullstellen im Bereich $x \in [-1, 1]$, links: Legendre-Polynome, rechts: Jacobi-Polynome mit $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 0$	43
3.5. Relativer Integrationsfehler der Gauß-Jacobi-Integration im Vergleich zur Gauß-Legendre-Integration	44
3.6. Integrationspunkte der adaptiven 3-Punkt-Newton-Cotes-Formel	46
3.7. Integrationspunkte der adaptiven 4-Punkt-Newton-Cotes-Formel	46
3.8. Integrationspunkte der adaptiven 2-Punkt-Gauß-Integration	47
3.9. Integrationspunkte der adaptiven 3-Punkt-Gauß-Integration	47
3.10. ε nach Gleichung 3.46 für das Integral aus Gleichung 3.50	52
3.11. Anzahl der Integrationspunkte für das Integral aus Gleichung 3.50	52
3.12. ε nach Gleichung 3.46 für das Integral aus Gleichung 3.52	53
3.13. Anzahl der Integrationspunkte für das Integral aus Gleichung 3.52	53
3.14. ε nach Gleichung 3.46 für das Integral aus Gleichung 3.54	54

3.15. Anzahl der Integrationspunkte für das Integral aus Gleichung 3.54	54
3.16. ε nach Gleichung 3.46 für das Integral aus Gleichung 3.56	56
3.17. Anzahl der Integrationspunkte für das Integral aus Gleichung 3.56	56
3.18. ε nach Gleichung 3.46 für das Integral aus Gleichung 3.58	57
3.19. Anzahl der Integrationspunkte für das Integral aus Gleichung 3.58	57
3.20. ε nach Gleichung 3.46 für das Integral aus Gleichung 3.60	59
3.21. Anzahl der Integrationspunkte für das Integral aus Gleichung 3.60	59
4.1. hierarchische Formfunktionen bis Polynomgrad $p=3$	63
4.2. Formfunktionen der Standard-Basis mit dem Polynomgrad $p=3$	64
4.3. Konfiguration des Mixed-Mode-Tests für 5×11 Elemente	65
4.4. Erläuterung des Layer-Begriffs	65
4.5. normierte SIF (K_I links, K_{II} rechts) für unterschiedliche Konfigurationen des Mixed-Mode-Tests aus Abbildung 4.3 für 5×11 Elemente	66
4.6. normierte SIF (K_I links, K_{II} rechts) für unterschiedliche Konfigurationen des Mixed-Mode-Tests aus Abbildung 4.3 für 11×23 Elemente	66
4.7. normierte SIF (K_I links, K_{II} rechts) für unterschiedliche Konfigurationen des Mixed-Mode-Tests aus Abbildung 4.3 für 23×47 Elemente	66
4.8. Konfiguration des Mode-I-Tests für 5×10 Elemente	67
4.9. normierte SIF des Mode-I-Tests aus Abbildung 4.8 für einen Layer, links für bi-lineare Formfunktionen, rechts für quadratisch hierarchische Formfunk- tionen	68
4.10. normierte SIF des Mode-I-Tests aus Abbildung 4.8 für zwei Layer, links für bi-lineare Formfunktionen, rechts für quadratisch hierarchische Formfunk- tionen	68
4.11. normierte SIF des Mode-I-Tests aus Abbildung 4.8 für drei Layer, links mit bi-linearen Formfunktionen, rechts mit quadratisch-hierarchischen Form- funktionen	68
4.12. Verschiebungen um die Rissspitze des Mode-I-Tests aus Abbildung 4.3 für bi-lineare Formfunktionen	69
4.13. Verschiebungen um die Rissspitze des Mode-I-Tests aus Abbildung 4.3 für bi-quadratische Formfunktionen	70
4.14. Verschiebungen um die Rissspitze des Mode-I-Tests aus Abbildung 4.3 für hierarchisch quadratische Formfunktionen	70
4.15. Elemente, in denen die Näherung untersucht wird	71
4.16. Verschiebungsdifferenzen des 1. Übergangselements	73
4.17. Verschiebungsdifferenzen des 2. Übergangselements	73
4.18. Verschiebungsdifferenzen des 3. Übergangselements	74
4.19. Verschiebungsdifferenzen des 4. Übergangselements	74
4.20. Verschiebungsdifferenzen des 5. Übergangselements	75
4.21. Verschiebungsdifferenzen des 1. Elements ohne Erweiterung	76
4.22. Verschiebungsdifferenzen des 2. Elements ohne Erweiterung	76
4.23. Verschiebungsdifferenzen des Elements, in dem die Moden einer Kante mit der Heaviside-Funktion erweitert sind	77
4.24. Verschiebungsdifferenzen des Elements, in dem alle Moden mit der Heavy- Side-Funktion erweitert sind	77
4.25. Drei-Punkt-Biege-Versuch, Konfiguration und Definition zur Bestimmung der SIF	79
4.26. SIF für Drei-Punkt-Biegeversuch mit bi-linearen Formfunktionen	80
4.27. SIF für Drei-Punkt-Biegeversuch mit bi-quadratischen Formfunktionen	80

4.28. SIF für Drei-Punkt-Biegeversuch mit hierarchisch quadratischen Formfunktionen	80
4.29. CT-Versuch, Konfiguration und Definition zur Bestimmung der SIF	81
4.30. SIF für CT-Versuch mit bi-linearen Formfunktionen	82
4.31. SIF für CT-Versuch mit bi-quadratischen Formfunktionen	82
4.32. SIF für CT-Versuch mit hierarchisch quadratischen Formfunktionen	82
5.1. Erläuterung des Winkels θ , der Spannung σ_H (links) sowie der Spannung und der Richtung von σ_T (rechts); radiale Normalspannungen und Schubspannungen sind nicht dargestellt	84
5.2. Prinzipskizze zur Berechnung der SIF am abknickenden Riss mit $r \rightarrow 0$	87
5.3. Prinzipskizze zur Berechnung der SIF am abknickenden Riss mit konstantem Radius	87
5.4. Beispielhafter Verlauf von K_{II} (links) bzw. $ K_{II} $ (rechts) in Abhängigkeit des Winkels θ für den Drei-Punkt-Biege-Versuch nach Abbildung 6.1	88
5.5. Energiefunktion Π_{ges} für einen Drei-Punkt-Biege-Versuch nach Abbildung 6.1, links: als 3D-Plot, rechts: als 2D-Plot aufgetragen für konstante Winkel über den Radius	89
6.1. Drei-Punkt-Biegung mit einem Riss	93
6.2. Skizzen experimenteller Ergebnisse für einen Drei-Punkt-Biege-Versuch mit hohem Bewehrungsgrad	93
6.3. Skizze experimenteller Ergebnisse für einen Drei-Punkt-Biege-Versuch mit fehlender Verankerungslänge der Längsbewehrung	94
6.4. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 11×5 Elementen	96
6.5. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 23×11 Elementen	97
6.6. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 47×23 Elementen	98
6.7. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium SIF-1 mit 11×5 Elementen und $f = 1000$	99
6.8. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium SIF-1 mit 23×11 Elementen und $f = 1000$	100
6.9. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium SIF-1 mit 47×23 Elementen und $f = 1000$	101
6.10. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium SIF-2 mit 11×5 Elementen und $f = 1000$	102
6.11. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium SIF-2 mit 23×11 Elementen und $f = 1000$	103
6.12. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium SIF-2 mit 47×23 Elementen und $f = 1000$	104
6.13. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 11×5 Elementen und $f_1 = 0.01, f_2 = 0.01, f_3 = 0.5$	105
6.14. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 0.01, f_2 = 0.01, f_3 = 0.5$	106
6.15. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 100, f_2 = 1.0, f_3 = 0.0$	107

6.16. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 11×5 Elementen	109
6.17. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 23×11 Elementen	110
6.18. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 47×23 Elementen	111
6.19. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium SIF-1 mit 11×5 Elementen und $f = 1000$	112
6.20. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium SIF-1 mit 23×11 Elementen und $f = 1000$	113
6.21. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium SIF-1 mit 47×23 Elementen und $f = 1000$	114
6.22. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium SIF-2 mit 11×5 Elementen und $f = 1000$	115
6.23. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium SIF-2 mit 23×11 Elementen und $f = 1000$	116
6.24. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium SIF-2 mit 47×23 Elementen und $f = 1000$	117
6.25. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 11×5 Elementen und $f_1 = 0.01, f_2 = 0.01, f_3 = 0.5$	118
6.26. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 0.01, f_2 = 0.01, f_3 = 0.5$	119
6.27. Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 100, f_2 = 0.1, f_3 = 0.5$	120
6.28. CT-Versuch	121
6.29. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 11×5 Elementen	123
6.30. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 23×11 Elementen	124
6.31. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium SIF-1 mit 11×5 Elementen und $f = 100$	125
6.32. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium SIF-1 mit 23×11 Elementen und $f = 100$	126
6.33. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium SIF-2 mit 11×5 Elementen und $f = 100$	127
6.34. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium SIF-2 mit 23×11 Elementen und $f = 100$	128
6.35. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 11×5 Elementen und $f_1 = 0.01, f_2 = 0.01, f_3 = 0.5$	129
6.36. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 0.01, f_2 = 0.01, f_3 = 0.5$	130
6.37. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 11×5 Elementen und $f_1 = 10, f_2 = 0.1, f_3 = 0.0$	131
6.38. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 10, f_2 = 0.1, f_3 = 0.0$	132
6.39. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 11×5 Elementen	134
6.40. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 23×11 Elementen	135

6.41. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium SIF-1 mit 11×5 Elementen und $f = 100$	136
6.42. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium SIF-1 mit 23×11 Elementen und $f = 100$	137
6.43. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium SIF-2 mit 11×5 Elementen und $f = 100$	138
6.44. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium SIF-2 mit 23×11 Elementen und $f = 100$	139
6.45. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 11×5 Elementen und $f_1 = 0.01, f_2 = 0.01, f_3 = 0.5$	140
6.46. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 0.01, f_2 = 0.01, f_3 = 0.5$	141
6.47. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 11×5 Elementen und $f_1 = 100, f_2 = 0.1, f_3 = 0.0$	142
6.48. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 100, f_2 = 0.1, f_3 = 0.0$	143
6.49. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ mit 11×5 Elementen und bilinearen Formfunktionen für das Kriterium SIF-1 mit $r = 6.0$ für das Integrationsgebiet des J-Integrals und $f = 100$	144
6.50. Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ mit 11×5 Elementen und bilinearen Formfunktionen für das Kriterium SIF-2 mit $r = 6.0$ für das Integrationsgebiet des J-Integrals und $f = 100$	145
A.1. Erweitern einer verketteten Liste	158
A.2. Löschen aus einer verketteten Liste	160

Tabellenverzeichnis

3.1. Wichtungsfaktoren und Fehler für die 2D Newton-Cotes-Formeln	37
---	----

Symbolverzeichnis

In der folgenden Tabelle sind einige häufig verwendete Bezeichnungen aufgeführt.

Symbol	Bezeichnung
α, θ, φ	Winkelbezeichnungen
Γ	Oberfläche eines Körpers, Rand eines Elements
ϵ	Integrationsfehler
ϵ	Verzerrungstensor
η, ξ	Koordinaten im Einheitsquadrat
κ	Parameter zur Beschreibung des EVZ bzw. ESZ
λ, μ	Lamé-Konstanten
ν	Querkontraktionszahl
Π	Energie
σ	Spannungstensor
Ω	Körper, Element bzw. Integrationsgebiet
A	Fläche
a	Risslänge
C	Elastizitätstensor
D	Ableitungsmatrix
E	Elastizitätsmodul
e	Einheitsvektoren der Koordinatenachsen
f	Lasten
I	Integrationsergebnis
J	Jacobi-Matrix
J	J-Integral
K	Steifigkeitsmatrix
K	Spannungs-Intensitäts-Faktoren
N	Formfunktionen
n	Normalenvektor
r	Abstand zur Rissspitze
u	Verschiebungen
x	Koordinate

1. Einleitung

1.1. Problemstellung

Ein Hauptziel der Ingenieurwissenschaften ist es, das Versagen von Bauteilen, Strukturen oder Bauwerken zu beschreiben und, soweit wie möglich, vorherzusagen und damit vermeiden zu können. Zu diesem Zweck werden mathematische Verfahren und Modelle benötigt, die es ermöglichen, die Verformungen bzw. Spannungen in einem beliebigen Körper zu berechnen. Für das Versagen sind dabei vor allem die Bauteile von großer Bedeutung, die Risse aufweisen. Die Geschwindigkeit des Rissfortschritts in einem solchen Bauteil kann unter Umständen zu einer stark verringerten Lebensdauer des gesamten Bauwerks führen. Aus diesem Grund sind die Beurteilung von entstehenden bzw. entstandenen Rissen ein wichtiges Instrument für die Lebensdauerabschätzung. Die Lebensdauer jedoch kann ohne Simulation der entsprechenden Bauteile und der darin vorhandenen Risse unter gegebenen Beanspruchungen nur unzureichend vorhergesagt werden. Dies führt dazu, dass Modelle entwickelt werden, die zum einen die Berechnung der Verformungen und Spannungen des Bauteils unter Berücksichtigung der Risse, zum anderen die Vorhersage des Rissfortschritts zum Ziel haben.

Die Grundlage der Rissfortschritts-Modelle bilden dabei vor allem die Spannungen bzw. Dehnungen oder daraus resultierende Größen, die darauf hinweisen, dass Risswachstum stattfindet, wenn ein entsprechender Material-Kennwert überschritten wird. Die Berechnung der dafür erforderlichen Größen erfolgt meist mit Hilfe numerischer Berechnungen mittels der Finiten-Elemente-Methode (FEM). Allerdings können Verschiebungen in der Nähe einer Risspitze durch die FEM nur mit großem Aufwand berechnet werden. Zur schnelleren und genaueren Lösung dieses Problems wurde auf Basis der Zerlegung der Eins (*Partition of Unity*) (Melenk 1995) die *eXtended Finite Element Method* (Belytschko and Black 1999; Moës, Dolbow, and Belytschko 1999) entwickelt.

Die *eXtended Finite Element Method* (XFEM) ist deshalb eine sehr effektive Methode, weil Netzabhängigkeiten bei der Analyse von Risswachstum reduziert werden. Sowohl die Verschiebungen als auch die Spannungen können mit Hilfe der XFEM gut wiedergegeben werden, da in die Finite-Elemente-Berechnung zusätzliche Formfunktionen eingebaut werden, die das analytische Rissspitzennahfeld aufspannen. Für das Ergebnis und die Brauchbarkeit der durch die XFEM erhaltenen Verschiebungen ist es jedoch wichtig, dass die Integration mit einer vorhersagbaren Genauigkeit durchgeführt wird, und muss sowohl für die Steifigkeitsmatrizen (Peters and Hackl 2005) als auch die Berechnung des J-Integrals zur Bestimmung der Spannungs-Intensitäts-Faktoren erfolgen.

Ein Vergleich der analytischen Lösung für die Verschiebungen mit den numerisch durch die XFEM mit bi-linearen Formfunktionen berechneten Werten zeigt, dass in den Übergangselementen die Verschiebungen zum Teil nur unzureichend genau approximiert werden können (Peters and Hackl 2006). Daraus resultierend werden auch die Spannungen im Nahfeld der

Riss Spitze und daraus abgeleitete Größen — z.B. das J-Integral mit kleinem Integrationsgebiet und damit auch die Spannungs-Intensitäts-Faktoren — nicht mit der erforderlichen Genauigkeit dargestellt.

1.2. Zielsetzung der vorliegenden Arbeit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die XFEM durch geeignete Maßnahmen so zu optimieren, dass auch bei Berücksichtigung mehrerer Risse der Approximationsfehler verringert werden kann und so die XFEM sinnvolle Ergebnisse produziert.

Zu diesem Zweck wird ein adaptives Integrationsverfahren entwickelt, durch welches es möglich ist, den Integrationsfehler zielführend abzuschätzen. Das Verfahren beruht auf der Kombination aus einer Newton-Cotes-Integration mit fünf Punkten pro Richtung und einer Gauß-Quadratur mit drei Punkten je Richtung. Diese beiden Verfahren haben die gleiche Fehler-Ordnung, so dass der Integrationsfehler gut abgeschätzt werden kann.

Da dies allein zur Approximation des Nahfeldes nicht ausreicht, wird für die XFEM eine p-Version mit hierarchischer Basis abgeleitet. Durch die Verwendung der Legendre-Polynome in den Elementen, die durch die Rissspitzenfunktionen erweitert werden, ist es möglich, das Verfahren schneller konvergieren zu lassen, als dies mit einer Basis aus Lagrange-Interpolationspolynomen möglich ist.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:

- Kapitel 2 beschäftigt sich mit den Grundlagen der Mechanik, beginnend mit der linear-elastischen Kontinuums-Mechanik in Kapitel (2.1). Darauf aufbauend werden die Unterschiede und Erweiterungen der linear-elastischen Bruchmechanik in Kapitel 2.2 dargestellt.
- In Kapitel 3 werden die analytische Integration und die Grundlagen der numerischen Integration vorgestellt. Ebenso wird die oben genannte Kombination aus Newton-Cotes- und Gauß-Integration hergeleitet. Durch Beispiele wird die Effektivität der Methode gegenüber anderen Integrationsverfahren getestet.
- Nach einer kurzen Einführung in die p-Version der Finiten-Elemente-Methode wird im 4. Kapitel die Erweiterung der XFEM mit bi-linearen Formfunktionen auf höhere Polynomgrade beschrieben, und es werden die Unterschiede zwischen den Ergebnissen mit Lagrange-Basis und hierarchischer Legendre-Basis analysiert.
- In Kapitel 5 werden Kriterien zum Risswachstum vorgestellt.
- Diese werden dann anhand einiger Beispiele in Kapitel 6 durch XFEM-Berechnungen mit der p-Version einander gegenübergestellt.
- Eine Zusammenfassung und ein Ausblick für mögliche Weiterentwicklungen schließen diese Arbeit in Kapitel 7 ab.

2. Linear elastische Mechanik

2.1. Grundlagen der linear-elastischen Kontinuumsmechanik

Für die Berechnung von Bauteilen und Strukturen wird ein Modell benötigt, welches in der Lage ist, die mechanischen und materialspezifischen bzw. physikalischen Eigenschaften zu beschreiben.

Die Modellbildung, die hier vorgestellt wird, erfolgt dabei im Rahmen der klassischen Kontinuumstheorie. Nach der Einführung von Spannungen, die durch äußere Kräfte hervorgerufen werden, werden die Geometrie und Verformung von Körpern beschrieben und anschließend der Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen über das Stoffgesetz hergestellt. Das Kapitel schließt ab mit dem Variationsprinzip des Minimums der potentiellen Energie und der daraus resultierenden Methode der Finiten Elemente.

Der interessierte Leser sei des Weiteren auf (Hahn 1985; Truesdell 1985; Szabo and Babuska 1991; Chou and Pagano 1992; Betten 1993; Altenbach and Altenbach 1994; Gross, Hauger, Schnell, and Wriggers 1993; Gross 1996; Holzapfel 2000) verwiesen.

2.1.1. Spannungen und Gleichgewicht

In diesem Abschnitt erfolgt die Beschreibung der von außen auf den Körper einwirkenden Kräfte und der daraus resultierenden Spannungen, die zur Betrachtung des Gleichgewichts erforderlich sind. Als mögliche Belastungen sind an dieser Stelle Volumenkräfte

$$\mathbf{f}_V(\mathbf{x}) = \sum_i f_{Vi}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.1)$$

die im Innern des Körpers wirken und an der Körperoberfläche wirkende Flächenlasten

$$\mathbf{f}_T(\mathbf{x}) = \sum_i f_{Ti}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_T \quad (2.2)$$

zu definieren, wobei Γ_T den Teil der Oberfläche $\Gamma \equiv \partial\Omega$ bezeichnet, der durch Flächenlasten belastet ist.

Die Spannungen ergeben sich als Quotient der inneren Kraft ΔF , die auf ein Flächenelement ΔA wirkt. Der auftretende Spannungszustand kann als Grenzwert durch den Spannungsvektor

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (2.3)$$

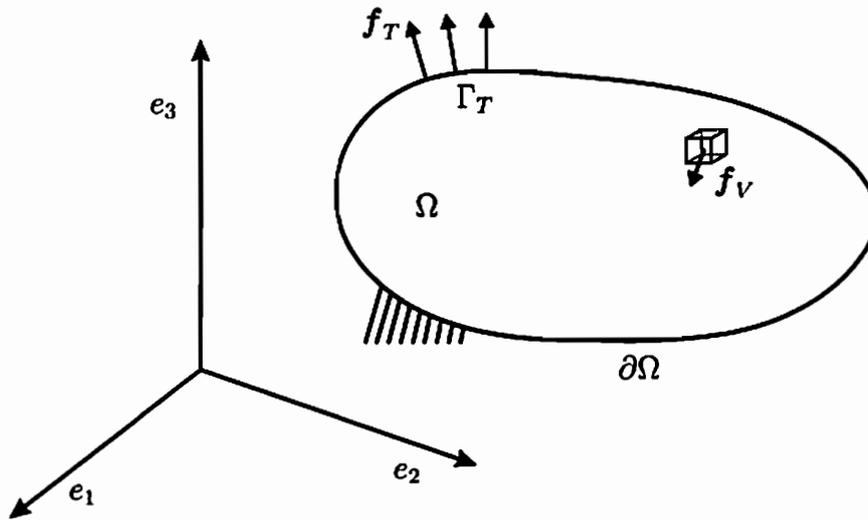


Abbildung 2.1.: Definition der Kräfte

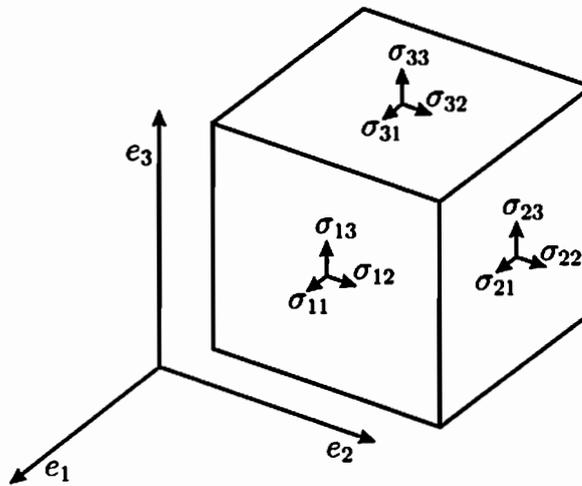


Abbildung 2.2.: Spannungszustand des Körpers, beschrieben an einem Würfel

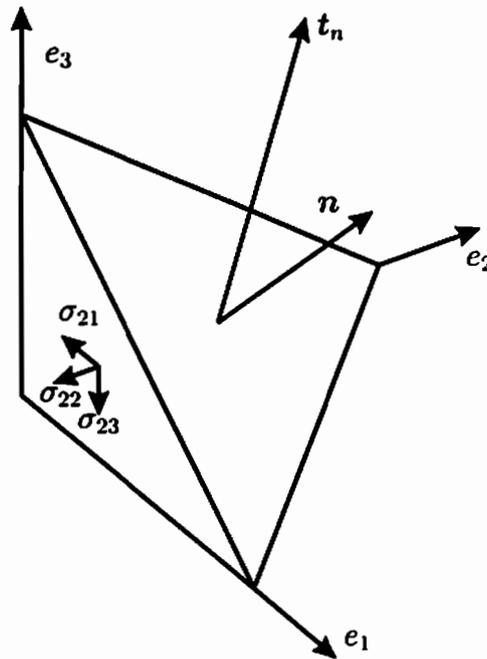
bzw. durch die Betrachtung eines infinitesimalen Volumenelements beschrieben werden (Hahn 1985; Gross 1996). Bei Verwendung kartesischer Koordinaten ist das Volumenelement ein Quader und wird meist als Würfel dargestellt. Die Kanten des Würfels verlaufen dabei parallel zu den Koordinatenachsen (s. Abbildung 2.2). So ergibt sich durch die angreifenden äußeren und inneren Lasten im Allgemeinen ein dreidimensionaler Spannungszustand. In jedem Körperpunkt lässt sich dann der Spannungszustand durch Angabe der Spannungen σ_{ij} beschreiben. Hierbei bezeichnet der erste Index die Richtung des Normalenvektors auf die Fläche, auf die die Spannung wirkt, und der zweite Index die Richtung, in die die Spannung wirkt. Zusammenfassend kann der Spannungszustand durch die Matrix

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

bzw. als Spannungstensor

$$\sigma = \sum_{i,j} \sigma_{ij} e_i \otimes e_j \quad (2.5)$$

ausgedrückt werden.

Abbildung 2.3.: Spannungsvektor t_n auf beliebig orientierter Fläche

Soll der Spannungszustand auf einer beliebig orientierten Schnittfläche mit den Spannungs-komponenten in Normalen- bzw. Tangentenrichtung beschrieben werden, ist dazu gemäß (Hahn 1985) eine Gleichgewichtsbetrachtung an einem Tetraederelement nach Abbildung 2.3 erforderlich. Wird der Normalenvektor auf die Schnittebene mit \mathbf{n} bezeichnet und die Fläche die am Tetraeder erzeugt wird mit dA , können nach (Gross, Hauger, Schnell, and Wriggers 1993) die anderen Seitenfläche durch Projektion von dA auf die entsprechenden Koordinatenebenen berechnet werden:

$$dA_1 = dA n_1 \quad dA_2 = dA n_2 \quad dA_3 = dA n_3 \quad (2.6)$$

bzw.

$$dA_i = dA n_i. \quad (2.7)$$

Die Gleichgewichtsbedingung in x_i -Richtung liefert

$$t_i dA = \sigma_{1i} dA_1 + \sigma_{2i} dA_2 + \sigma_{3i} dA_3 \quad (2.8)$$

Die auf Cauchy zurückgehende Beziehung

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n} \circ \boldsymbol{\sigma} \quad (2.9)$$

ist daraus durch Einsetzen zu erhalten. Aufgrund der unten aufgeführten Gleichgewichtsbedingungen gilt

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.10)$$

Das bedeutet, dass der Spannungstensor symmetrisch ist. Somit ist Gleichung 2.9 äquivalent zu

$$\mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.11)$$

Wird nun nicht ein einzelner Punkt des Körpers herausgenommen, sondern der verformte Körper im Gleichgewicht betrachtet, erfolgt nicht mehr nur die Betrachtung eines Spannungszustands, sondern die Betrachtung einer Spannungsverteilung, die sich durch die äußere Belastung des Körpers einstellt. Für die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen gibt es zwei Möglichkeiten, die durch die Beschränkung auf infinitesimale Verformungen aufgrund der geometrisch linearen Theorie am unverformten Körper erfolgt (vgl. z.B. (Kotucha 2005)):

1. Die differentielle Form des Gleichgewichts ergibt sich durch die Betrachtung eines aus dem Körper herausgeschnittenen infinitesimalen Elements. Es gilt die Aussage: Ist ein Körper unter äußeren Lasten im Gleichgewicht, muss auch jeder beliebige aus diesem herausgeschnittene Teilkörper im Gleichgewicht sein. Es ergibt sich somit die lokale Gleichgewichtsaussage

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}_V = 0 \text{ in } \Omega \quad (2.12)$$

und

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \text{ in } \Omega. \quad (2.13)$$

Ferner muss für den Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{f}_T \text{ auf } \Gamma_T \quad (2.14)$$

gelten. Dies stellt die Gleichgewichtsbedingung an der Körperoberfläche dar, wodurch der an der Körperoberfläche Γ_T herrschende Spannungszustand mit der auf den Körper wirkenden Flächenlast \boldsymbol{f}_T in Beziehung gesetzt wird.

2. Die Beschreibung der integralen Form erfolgt über die statische Form der Impulsbilanz

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{t}_N \, d\Gamma + \int_{\Omega} \boldsymbol{f}_V \, d\Omega = 0 \quad (2.15)$$

und der Drehimpulsbilanz

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}_N + \int_{\Omega} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f}_V \, d\Omega = 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.16)$$

und damit über die Formulierung eines globalen Gleichgewichts.

2.1.2. Verschiebungen und Verzerrungen

Die Beschreibung der Kinematik eines deformierbaren Körpers erfolgt üblicherweise durch Verschiebungsvektoren und Verzerrungstensoren. Dazu wird der Körper als eine zusammenhängende Menge von kontinuierlich im Raum verteilten Punkten angenommen.

Zur Lagebeschreibung jedes einzelnen Punktes wird oft ein kartesisches Koordinatensystem verwendet, das einen raumfesten Bezugspunkt und orthonormale Basisvektoren \boldsymbol{e}_1 , \boldsymbol{e}_2 und \boldsymbol{e}_3 besitzt. In diesem Koordinatensystem kann die Lage jedes Punktes über seine Koordinaten bzw. durch einen entsprechenden Ortsvektor, jeweils bezogen auf die Basisvektoren, beschrieben werden (s. Abbildung 2.4).

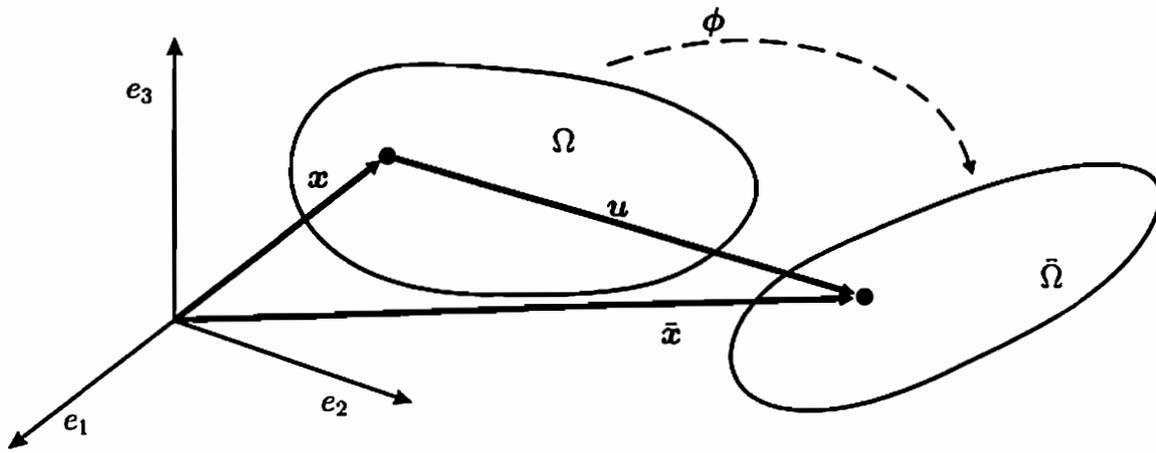


Abbildung 2.4.: Koordinatensystem mit Gesamtheit der Materiepunkte zur Beschreibung der Kinematik

Dabei sind der unverformte Zustand Ω und der verformte Zustand $\bar{\Omega}$ des Körpers zu unterscheiden. Deshalb wird jedem Materialpunkt neben dem Ortsvektor

$$\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset R^3 \quad (2.17)$$

zur Beschreibung der unverformten Konfiguration ebenfalls ein Ortsvektor

$$\bar{\mathbf{x}} = \sum_i \bar{x}_i \mathbf{e}_i \quad \bar{\mathbf{x}} \in \bar{\Omega} \subset R^3 \quad (2.18)$$

zugeordnet, der die Lage in einer verformten Konfiguration beschreibt.

Mit der Beschreibung der unverformten und verformten Konfiguration kann die Deformation des Körpers im Allgemeinen als zeitabhängige Abbildung $\phi(\mathbf{x}, t)$ des Gebiets Ω und der darin enthaltenen Punkte \mathbf{x} auf das Gebiet $\bar{\Omega}$ aufgefasst werden.

$$\bar{\mathbf{x}} = \phi(\mathbf{x}, t) \quad (2.19)$$

Die Lageänderung von Ω , das Verschiebungsfeld, läßt sich ausdrücken als

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}. \quad (2.20)$$

Somit kann dann das Verschiebungsfeld angegeben werden als

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x}. \quad (2.21)$$

Da diese Arbeit keine dynamischen Prozesse berücksichtigt, ist die Abbildung ϕ unabhängig von der Zeit und es gilt damit

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{x}). \quad (2.22)$$

Werden zwei benachbarte Punkte betrachtet, haben diese im unverformten Zustand einen Abstand ds , der sich im verformten Zustand zu $\bar{d}s$ verändert. Man erhält so den Green'schen Verzerrungstensor durch

$$ds^2 - \bar{d}s^2 = 2 E_{ij} dX_i dX_j \quad \text{mit} \quad E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (2.23)$$

Es lässt sich nun zeigen, dass sich die Verzerrungen für infinitesimale Verschiebungsgradienten ($\partial u_i / \partial X_j \ll 1$) durch die symmetrische Matrix

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.24)$$

ausdrücken lassen. Alternativ können die Verzerrungen auch durch den Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (2.25)$$

bzw. als symmetrisierter Verschiebungsgradient

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (2.26)$$

notiert werden.

2.1.3. Stoffgesetz

Neben der Einführung der Spannungen, Dehnungen und Verformungen ist es ebenfalls erforderlich, ein Stoffgesetz zu formulieren, welches die Materialeigenschaften des zu modellierenden Körpers beschreibt und die Beziehung zwischen dem Spannungszustand und den daraus resultierenden Dehnungen beinhaltet. Es gilt

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.27)$$

Durch Gleichung 2.27 wird der Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ mittels des linearen Operators \mathbb{C} auf die Spannungen abgebildet. Dabei ist die allgemeine Form dieses Operators

$$\mathbb{C} = \sum_{i,j,k,l} C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (2.28)$$

Durch Berücksichtigung der Symmetrie, sowohl des Spannungs- als auch des Dehnungstensors, und der Berücksichtigung, dass sich diese Arbeit auf isotrope, linear-elastische Materialien bezieht, lassen sich die Komponenten des Materialtensors in Anlehnung an (Hahn 1985; Chou and Pagano 1992; Betten 1993) durch zwei Parameter beschreiben. Eine Möglichkeit dazu bilden die Lamé-Konstanten λ und μ . Mit diesen Parametern lässt sich der Materialtensor darstellen als

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (2.29)$$

wodurch die Konstitutivbeziehung aus Gleichung 2.27 umformuliert werden kann zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_i \varepsilon_{ii}, \quad \mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j. \quad (2.30)$$

In der technischen Literatur ist es jedoch üblich, die Formulierung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung statt mit den Lamé-Konstanten mittels des Elastizitätsmoduls E und der Querkontraktionszahl ν zu schreiben. Es besteht zwischen den beiden genannten Formulierungen die Beziehung nach Gleichung 2.31 und 2.32.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.31)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.32)$$

Durch Umformulierung ergibt sich aus Gleichung 2.30 unter Berücksichtigung der Beziehungen 2.31 und 2.32 die nachfolgende Gleichung

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{E}{2(1 + \nu)} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.33)$$

Die Schreibweise aus Gleichung 2.33 wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit gegenüber der Formulierung mit Hilfe der Lamé-Parameter bevorzugt, da die Beschreibung des Materials durch den E-Modul und die Querkontraktion auf anschaulicheren Größen beruht.

2.1.4. Variationsprinzip

Das Variationsproblem lässt sich aus der differentialen Form des Gleichgewichts (Gleichungen 2.12 und 2.13), den Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen (Gleichung 2.27) und der Definition des Dehnungstensors (Gleichung 2.24) unter Dirichlet-Randbedingungen ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ auf Γ_U) und Neumann-Randbedingungen ($\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_T$ auf Γ_T) durch ein Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_V(\mathbf{x}) &= 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

innerhalb des Körpers, also mit $\mathbf{x} \in \Omega$, unter den Randbedingungen

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \text{ auf } \Gamma_U \quad (2.35)$$

und

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_T \text{ auf } \Gamma_T \quad (2.36)$$

herleiten. Die Lösung dieses Problems liefert die gesuchten Spannungs-, Dehnungs- und Verschiebungsfelder. Da im Allgemeinen für die Gleichungen 2.34, 2.35 und 2.36 keine analytische Lösung existiert, muss die Randwertaufgabe in der Regel durch ein numerisches Verfahren näherungsweise gelöst werden.

Gemäß des Prinzips des Minimums des Gesamtpotentials wird im Gleichgewichtszustand ein Minimum erreicht (s. dazu auch (Gurtin 1972; Szabo and Babuska 1991)). Dabei setzt sich das Gesamtpotential zusammen aus der Formänderungsenergie

$$\Pi_{int}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega \quad (2.37)$$

und dem Potential der äußeren Kräfte

$$\Pi_{ext}(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_T} \mathbf{f}_T \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma_T. \quad (2.38)$$

Das Gesamtpotential ist also

$$\begin{aligned}\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) &= \Pi_{int}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) + \Pi_{ext}(\mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_T} \mathbf{f}_T \cdot \mathbf{u} d\Gamma_T.\end{aligned}\quad (2.39)$$

Setzt man nun die Beziehungen aus Gleichung 2.27 ein und berücksichtigt den Zusammenhang in Gleichung 2.24, kann das Gesamtpotential in Abhängigkeit des Verschiebungsfeldes formuliert werden als

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_T} \mathbf{f}_T \cdot \mathbf{u} d\Gamma_T.\quad (2.40)$$

Das zu lösende Minimierungsproblem kann nun wie folgt dargestellt werden

$$\delta\Pi(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{mit} \quad \delta\mathbf{u} = 0 \text{ auf } \Gamma_U.\quad (2.41)$$

Das Minimum eines Funktionals — hier des Gesamtpotentials — lässt sich mit Hilfe der Gâteaux-Ableitung ausdrücken als

$$\begin{aligned}D\Pi(\mathbf{u})(\delta\mathbf{u}) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Pi(\mathbf{u} + \alpha \delta\mathbf{u}) - \Pi(\mathbf{u})}{\alpha} \\ &= \frac{d}{d\alpha} \Pi(\mathbf{u} + \alpha \delta\mathbf{u})|_{\alpha=0},\end{aligned}\quad (2.42)$$

und es gilt

$$D\Pi(\mathbf{u})(\delta\mathbf{u}) = 0 \quad \text{mit} \quad \delta\mathbf{u} = 0 \text{ auf } \Gamma_U,\quad (2.43)$$

wobei $\delta\mathbf{u}$ eine beliebige Variation des Verschiebungsfeldes ist, welche die Randbedingung aus Gleichung 2.43 erfüllt. Die Auswertung dieser Gleichungen führt zur so genannten schwachen Form des Gleichgewichts

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f}_V \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_T} \mathbf{f}_T \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma_T = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (2.44)$$

mit $\delta\mathbf{u} = 0$ auf Γ_U .

Diese Form des Problems wird anstelle des Randwertproblems 2.34 zur Bestimmung des Verschiebungsfeldes herangezogen. Aus den so gewonnenen Verschiebungen lässt sich dann das Dehnungsfeld und daraus wiederum das Spannungsfeld berechnen.

Beschränkt man sich nun zur näherungsweisen Lösung des Randwertproblems auf ausgewählte Polynomansätze von Variationen $\delta\mathbf{u}$, werden durch die Ergebnisse der so ermittelten Felder die Randbedingungen 2.35 und die Gleichungen 2.24 sowie 2.27 exakt erfüllt. Lediglich Gleichung 2.12 und Randbedingung 2.36 werden im integralen Mittel eingehalten.

Zur numerischen Umsetzung können in Voigt-Notation die Komponenten der Spannungsmatrix zu einem Spannungsvektor

$$\hat{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}]^T \quad (2.45)$$

und die Komponenten der Dehnungsmatrix zu einem Dehnungsvektor

$$\hat{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{31}]^T \quad (2.46)$$

zusammengefasst werden. Unter Verwendung einer Materialmatrix

$$\hat{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

lässt sich die Spannungs-Dehnungsbeziehung dann folgendermaßen schreiben:

$$\hat{\sigma} = \hat{C} \hat{\varepsilon} \quad (2.48)$$

Nach Einführung eines Differentialoperators

$$D_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

kann die Beziehung von Verschiebungen und Dehnungen durch

$$\hat{\varepsilon} = D_u u \quad (2.50)$$

ausgedrückt werden. Mit diesen Umformulierungen kann das Gesamtpotential aus Gleichung 2.40 umgeschrieben werden zu

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (D_u u)^T \hat{C} D_u u \, d\Omega - \int_{\Omega} f_V^T u \, d\Omega - \int_{\Gamma_T} f_T^T u \, d\Gamma_T \quad (2.51)$$

Ebenso kann mit dem Variationsproblem verfahren werden. Die schwache Form des Gleichgewichts aus Gleichung 2.44 lässt sich also darstellen als

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} (D_u u)^T \hat{C} D_u \delta u \, d\Omega - \int_{\Omega} f_V^T \delta u \, d\Omega - \int_{\Gamma_T} f_T^T \delta u \, d\Gamma_T = 0 \quad \forall \delta u \quad (2.52)$$

mit $\delta u = 0$ auf Γ_U .

2.1.5. Diskretisierung und Finite Elemente Methode

Im Rahmen dieser Arbeit werden Probleme in zwei Dimensionen betrachtet. Im Folgenden wird exemplarisch die Formulierung eines Finite-Elemente-Modells zur Berechnung von Gleichung 2.52 unter der Annahme eines ebenen Spannungszustandes durchgeführt. Die Herleitung für den ebenen Verzerrungszustand kann analog erfolgen und lässt sich auch ohne Weiteres zu einer 3D-Formulierung erweitern. Damit können dann beliebige dreidimensionale Spannungszustände berücksichtigt werden.

Bei der Berechnung des Gesamtpotentials Π müssen unter der erwähnten Annahme eines ebenen Spannungszustand nur noch die Spannungen σ_{xx} , σ_{yy} und σ_{xy} sowie die Dehnungen ε_{xx} , ε_{yy} und ε_{xy} berücksichtigt werden. Damit lässt sich die Verzerrung ε_{zz} berechnen zu (vgl. (Gross, Hauger, Schnell, and Wriggers 1993))

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}). \quad (2.53)$$

Alle anderen Komponenten des Spannungsvektors und des Dehnungsvektors werden Null. Es wird dabei ein Koordinatensystem mit den drei Raumrichtungen x , y und z verwendet, wobei z die Dicken-Richtung bezeichnet.

Der Spannungs- und Dehnungszustand lässt sich nun durch die Vektoren

$$\hat{\sigma} = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}]^T \quad (2.54)$$

und

$$\hat{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, 2\varepsilon_{xy}]^T \quad (2.55)$$

beschreiben. Die Materialmatrix geht in eine 3×3 -Matrix über, die unter Berücksichtigung der Bedingung $\sigma_{zz} = 0$ und dem daraus resultierenden Zusammenhang aus Gleichung 2.53 als

$$\hat{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

geschrieben werden kann. Die Verschiebungen können ebenfalls zu einem Verschiebungsvektor, der jetzt zwei Einträge enthält, zusammengefasst werden:

$$\mathbf{u} = [u_x, u_y]^T. \quad (2.57)$$

Der Differentialoperator aus Gleichung 2.49 muss noch modifiziert werden:

$$D_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Neben der Formulierung der schwachen Form des Gleichgewichts werden noch

- das Finite-Elemente-Netz

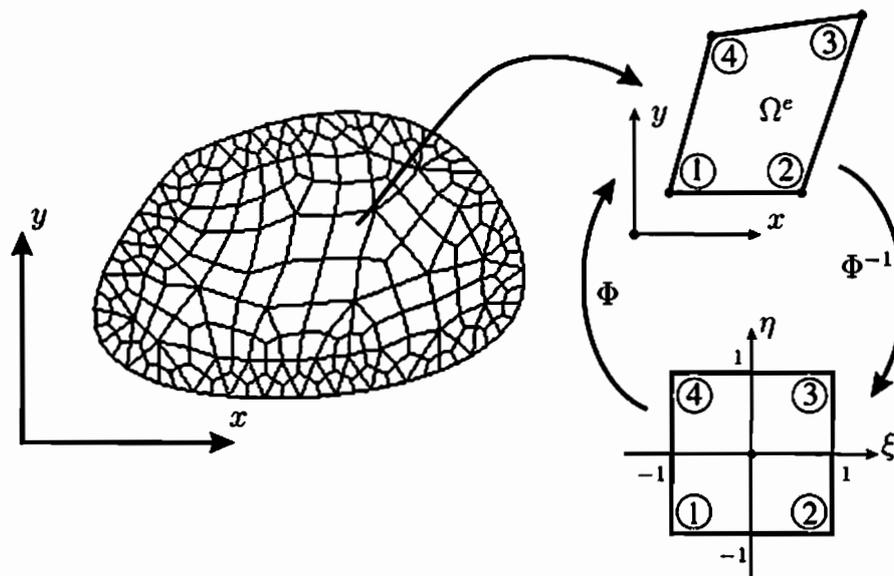


Abbildung 2.5.: Finite-Elemente-Modell mit Abbildung auf das Einheitsquadrat

- die Polynomordnung der Ansatzfunktionen in den einzelnen Elementen und
- die geometrischen Abbildungen der globalen Daten auf lokale Element-Informationen (s. auch Abbildung 2.5)

benötigt. Zusammenfassend wird dabei von einer Diskretisierung gesprochen. Man versteht darunter im Allgemeinen die Reduzierung des Problems, so dass die Lösung dieses Problems durch eine finite Anzahl von Parametern dargestellt werden kann.

Im Folgenden soll nun kurz auf die einzelnen Punkte eingegangen und der Zusammenhang erläutert werden. Der interessierte Leser sei an dieser Stelle auch auf (Zienkiewicz and Taylor 1989; Szabo and Babuska 1991) verwiesen.

Um das Problem 2.52 zu lösen, wird der Körper Ω in eine endliche Anzahl von Elementen Ω^e , $e = 1, \dots, n$ unterteilt. Die entstehenden Elemente sind im Falle eines zweidimensionalen Problems Drei- bzw. Vierecke, die keine einspringenden Ecken haben dürfen. Ein typisches Elementnetz aus Vierecken ist in Abbildung 2.5 mit einem zum Element gehörenden globalen Koordinatensystem dargestellt. In Abbildung 2.5 wird ebenfalls die Abbildung des globalen Koordinatensystems auf das Koordinatensystem des Einheitsquadrats veranschaulicht. Dabei gilt für die Abbildung des Einheitsquadrats auf das Element:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(\xi, \eta) = \sum_i N_i(\xi, \eta) \begin{pmatrix} x_i^e \\ y_i^e \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Jedem Knoten kann durch die Unterteilung des gesamten Gebiets ein Verschiebungswert u_i^e zugeordnet werden, der sich als Näherung des Verschiebungsfeldes ergibt. Diese Näherung kann durch geeignete Formfunktionen modelliert werden. Die am häufigsten verwendeten Formfunktionen sind die Lagrange-Polynome. Diese haben unter anderem die Eigenschaft, an einer Stützstelle den Wert 1 und an allen anderen Stützstellen, für die das Polynom aufgestellt wurde, den Wert 0 zu haben (s. auch Kapitel 4 und (Szabo and Babuska 1991)). Mit

diesen Funktionen lässt sich das Verschiebungsfeld im Element näherungsweise angeben

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_i \mathbf{N}_i^e \mathbf{u}_i^e \quad \text{und} \quad \delta \hat{\mathbf{u}} = \sum_i \mathbf{N}_i^e \delta \mathbf{u}_i^e. \quad (2.60)$$

Die schwache Form des Gleichgewichts lässt sich damit im Element zu

$$\delta \Pi^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{D}_u \hat{\mathbf{u}})^T \mathbf{C} \mathbf{D}_u \delta \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{f}_V^T \delta \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega^e - \int_{\Gamma_T} \mathbf{f}_T^T \delta \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma_T = 0 \quad (2.61)$$

umformulieren. Durch Einsetzen von Gleichung 2.60 erhält man somit für die Variation der Formänderungsenergie

$$\delta \Pi_{int}^e = \sum \left(\int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_i^e \mathbf{u}_i^e)^T \mathbf{D}_u^T \mathbf{C} \mathbf{D}_u (\mathbf{N}_i^e \delta \mathbf{u}_i^e) \, d\Omega^e \right). \quad (2.62)$$

Da die Variation der Verschiebungen $\delta \mathbf{u}_i^e$ beliebig und damit ungleich Null ist, muss im Element gelten:

$$\sum \left(\int_{\Omega^e} (\mathbf{N}_i^e \mathbf{u}_i^e)^T \mathbf{D}_u^T \mathbf{C} \mathbf{D}_u \mathbf{N}_i^e \, d\Omega^e \right) - \sum \left(\int_{\Omega^e} \mathbf{f}_V^T \mathbf{N}_i^e \, d\Omega^e \right) - \sum \left(\int_{\Gamma_T} \mathbf{f}_T^T \mathbf{N}_i^e \, d\Gamma_T \right) = 0 \quad (2.63)$$

Die Integration der Element-Steifigkeitsmatrizen

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{D}\mathbf{N})^T \mathbf{C} (\mathbf{D}\mathbf{N}) \, d\Omega^e \quad (2.64)$$

erfolgt üblicherweise im Einheitsquadrat (siehe dazu auch Kapitel 3). Die Element-Steifigkeitsmatrizen können anschließend nach (Hughes 1987) durch den Assemblierungsoperator \mathbf{A} zur Gesamt-Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{K}_i^e \quad (2.65)$$

zusammengefasst werden. Somit kann das Problem in ein Gleichungssystem folgender Form überführt werden:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (2.66)$$

Darin stehen \mathbf{K} für die Gesamtsteifigkeitsmatrix, \mathbf{U} für den Gesamtverschiebungsvektor und \mathbf{F} für den Gesamtlastvektor, die ähnlich der Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammengestellt werden.

2.2. Grundlagen der linear-elastischen Bruchmechanik

In diesem Kapitel sollen die Grundlagen der linear-elastischen Bruchmechanik mit spannungsfreien Rissflächen erläutert und die Unterschiede zur linear-elastischen Kontinuumsmechanik aus Kapitel 2.1 aufgezeigt werden. Verschiedene Bruch- und Versagenshypothesen und ihre numerische Umsetzung im Bezug auf die XFEM werden in Kapitel 5 betrachtet.

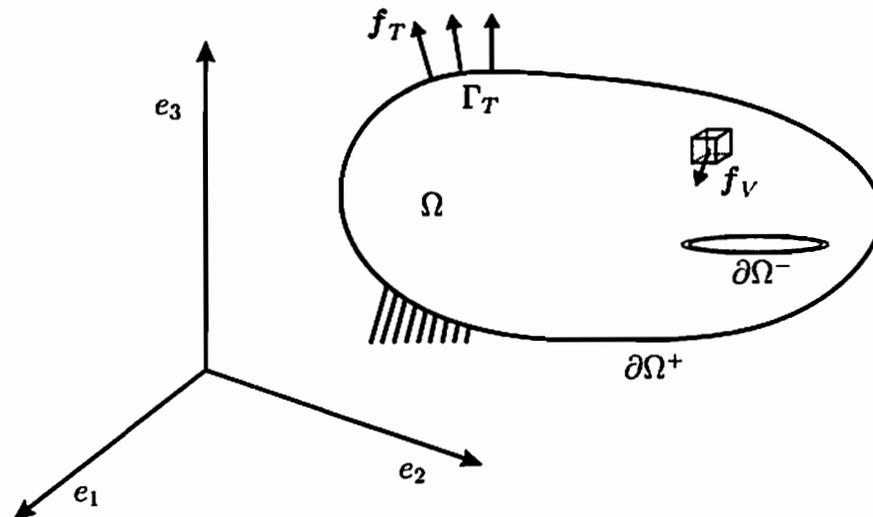


Abbildung 2.6.: Kinematik der LEBM

2.2.1. Grundlagen der Bruchmechanik

Allgemeines

Als Erweiterung der Kontinuumsmechanik werden in der Bruchmechanik im Inneren des Gebiets Ω Risse als Oberflächen $\delta\Omega^-$ definiert (s. Abbildung 2.6). Diese Oberflächen werden in dieser Arbeit als spannungsfreie Oberflächen angesehen.

In drei Raumdimensionen lassen sich dabei drei Versagensrichtungen unterscheiden, die in den Abbildungen 2.7, 2.8 und 2.9 dargestellt sind. Mode-I- und Mode-II-Versagen sind die beiden Versagensarten, die in der Ebene vorkommen — also auch in zwei Dimensionen. Sie lassen sich durch die beiden Spannungs-Intensitäts-Faktoren (SIF) K_I und K_{II} charakterisieren: Mode-I stellt dabei die Öffnung des Risses dar, eine symmetrische Verschiebung der Rissufer bezogen auf das Rissspitzenkoordinatensystem (s. Abbildung 2.10), wohingegen Mode-II die gegenseitige Verschiebung der Rissufer innerhalb der Ebene charakterisiert, eine antisymmetrische Verschiebung. Mode-III mit dem SIF K_{III} stellt das Versagen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Körpers dar, also auch senkrecht zu den beiden Versagensrichtungen Mode-I und Mode-II.

Die SIF stellen ein Maß für die „Stärke“ — die Amplitude — des Rissspitzennahfeldes dar.

Rissspitzennahfelder

Wichtige Grundlage zur Untersuchung des Rissverhaltens ist die Kenntnis insbesondere der Rissspitzennahfelder, also sowohl des Verschiebungs- als auch des Spannungsfeldes in unmittelbarer Umgebung der Risspitze in 2D bzw. der Rissfront in 3D. Mit Hilfe der Airy'schen Spannungsfunktion \mathcal{F} kann das asymptotische Feld für den ebenen Verzerrungszustand ermittelt werden (s. dazu auch (Williams 1957; Schütte 2001)). Die Berechnung erfolgt in Zylinderkoordinaten für einen Riss in einer unendlichen Scheibe (s. Abbildung 2.10). Es gilt:

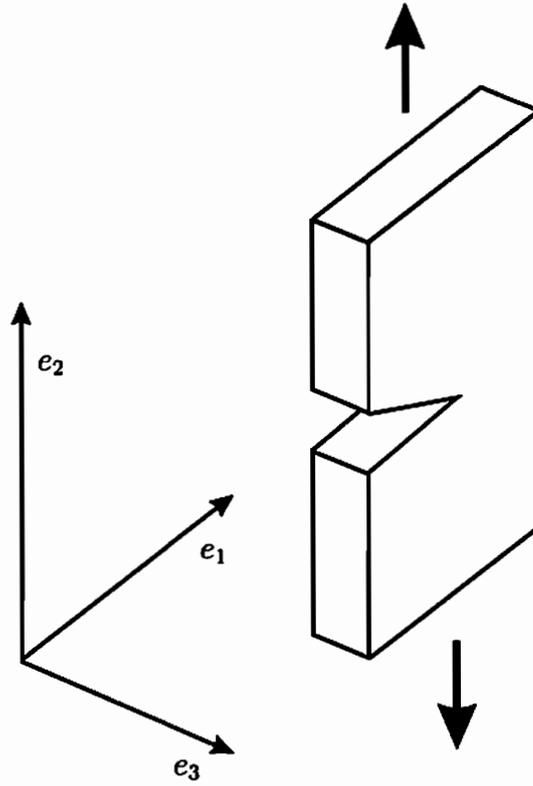


Abbildung 2.7.: Rissöffnung bei Mode-I-Belastung

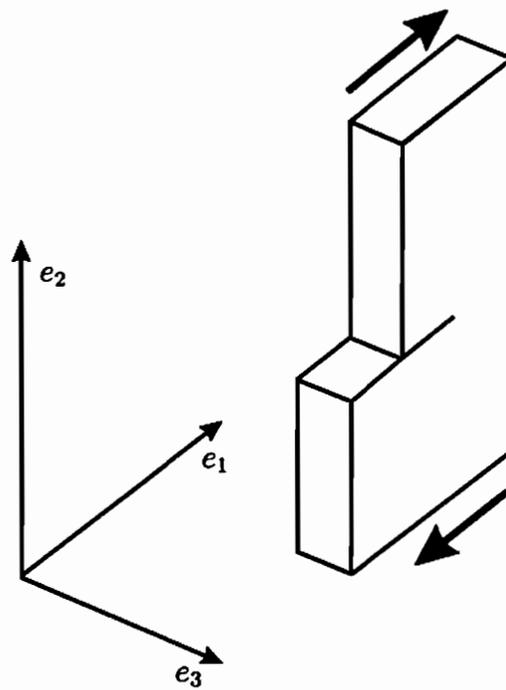


Abbildung 2.8.: Rissöffnung bei Mode-II-Belastung

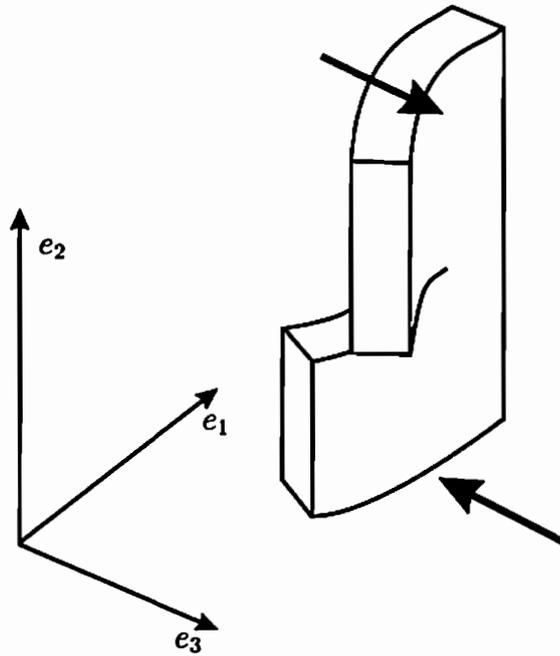


Abbildung 2.9.: Rissöffnung bei Mode-III-Belastung

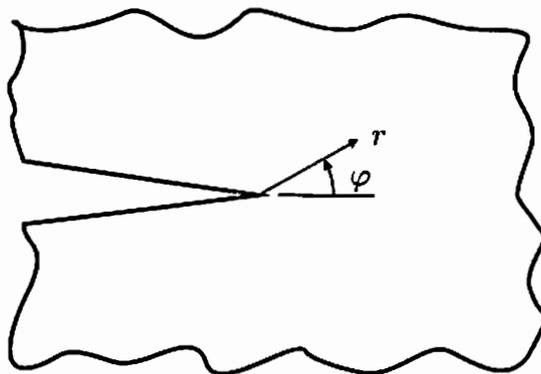


Abbildung 2.10.: Riss in unendlicher Scheibe mit Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{F} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \mathcal{F} \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathcal{F} \\
\sigma_{r\varphi} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{F} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathcal{F}.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Aufgrund des angenommenen ebenen Dehnungszustands gilt zusätzlich:

$$\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}). \tag{2.68}$$

Durch Einhalten der Bedingung

$$\Delta \Delta \mathcal{F} = 0 \tag{2.69}$$

werden die Kompatibilitätsbedingungen, das Hooke'sche Gesetz und die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Für die Spannungsfunktion

$$\mathcal{F} = r^{\lambda+1} (C_1 \cos((\lambda+1)\varphi) + C_2 \cos((\lambda-1)\varphi) + C_3 \sin((\lambda+1)\varphi) + C_4 \sin((\lambda-1)\varphi)) \tag{2.70}$$

sorgt die Bedingung $\lambda > 0$ für eine Beschränkung der Verschiebungen auf finite Werte für $r \rightarrow 0$.

Wie eingangs erwähnt, sollen hier nur spannungsfreie Rissflächen betrachtet werden. Damit ergibt sich folgende Randbedingungen:

$$\sigma_{r\varphi}(\pm\pi) = \sigma_{\varphi\varphi}(\pm\pi) = 0 \tag{2.71}$$

Durch Einsetzen von Bedingung 2.71 in Gleichung 2.70 ergibt sich folgendes Gleichungssystem für die vier Koeffizienten

$$\left\{ \begin{array}{cccc}
-(\lambda+1) \cos(\lambda\pi) & -(\lambda+1) \cos(\lambda\pi) & (\lambda+1) \sin(\lambda\pi) & (\lambda+1) \sin(\lambda\pi) \\
-(\lambda+1) \cos(\lambda\pi) & -(\lambda+1) \cos(\lambda\pi) & -(\lambda+1) \sin(\lambda\pi) & -(\lambda+1) \sin(\lambda\pi) \\
(\lambda-1) \sin(\lambda\pi) & (\lambda+1) \sin(\lambda\pi) & (\lambda-1) \cos(\lambda\pi) & (\lambda+1) \cos(\lambda\pi) \\
-(\lambda-1) \sin(\lambda\pi) & -(\lambda+1) \sin(\lambda\pi) & (\lambda-1) \cos(\lambda\pi) & (\lambda+1) \cos(\lambda\pi)
\end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}. \tag{2.72}$$

Nichttriviale Lösungen für dieses Gleichungssystem ergeben sich, wenn die Determinante der Matrix zu Null wird:

$$-4r^{4(-1+\lambda)} \lambda^2 \sin(2\pi\lambda)^2 = 0 \tag{2.73}$$

Lösungen für das gegebene Problem sind

$$\lambda = \frac{n}{2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \tag{2.74}$$

Mit $\lambda = \frac{1}{2}$ ergeben sich die für das Nahfeld dominanten Spannungen mit der bekannten Singularität an der Risspitze. Durch Einsetzen dieser Lösung in Gleichung 2.72 können zwei

Koeffizienten eliminiert werden. Die dann daraus folgenden Verschiebungen und Spannungen im Nahfeld ergeben sich zu (hier z.B. in der Notation von (Gross 1996))

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos \varphi) \begin{Bmatrix} \cos \left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ \sin \left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin \left(\frac{\varphi}{2}\right) (\kappa + 2 + \cos(\varphi)) \\ \cos \left(\frac{\varphi}{2}\right) (\kappa - 2 + \cos(\varphi)) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} 1 - \sin \left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin \left(\frac{3\varphi}{2}\right) \\ 1 + \sin \left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin \left(\frac{3\varphi}{2}\right) \\ \sin \left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos \left(\frac{3\varphi}{2}\right) \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \left(\frac{\varphi}{2}\right) (2 + \cos \left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos \left(\frac{3\varphi}{2}\right)) \\ \sin \left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos \left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos \left(\frac{3\varphi}{2}\right) \\ \cos \left(\frac{\varphi}{2}\right) (1 - \sin \left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin \left(\frac{3\varphi}{2}\right)) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.76)$$

wobei κ in Abhängigkeit des gewählten Zustandes einzusetzen ist:

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{im ebenen Verzerrungszustand} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{im ebenen Spannungszustand} \end{cases} \quad (2.77)$$

Die Notation mit dem Faktor $\sqrt{2\pi}$ wird aus historischen Gründen benutzt (vgl. (Irwin 1957)).

2.2.2. Partition of Unity Method und XFEM

Allgemeines

Das Prinzip des Minimums des Gesamtpotentials aus Kapitel 2.1.4 bleibt ebenso wie die darin enthaltenen Gleichungen gültig. Einziger Unterschied ist, dass nun nicht mehr nur stetige Verschiebungs- und Spannungsfelder als Lösung des Problems in Betracht gezogen werden, sondern vielmehr in Ω stetige Funktionen, die am Riss $\delta\Omega^-$ einen Sprung aufweisen.

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, Risse im FE-Modell zu berücksichtigen (für einen Vergleich s. z.B. (Mosler and Meschke 2003; Mosler and Meschke 2004)). Die drei Wichtigsten sind:

- Die explizite Modellierung der Rissoberflächen mit dem FE-Netz (s. Abbildung 2.11): Der Riss verläuft entlang der Elementkanten. Eine Möglichkeit, den Riss durch ein Element laufen zu lassen, gibt es nicht, so dass bei Risswachstum, neu vernetzt werden

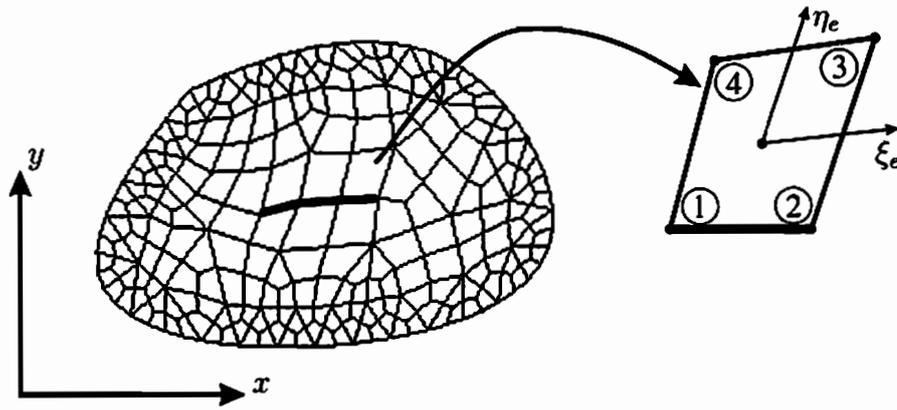


Abbildung 2.11.: FE-Netz mit Riss entlang der Elementkanten

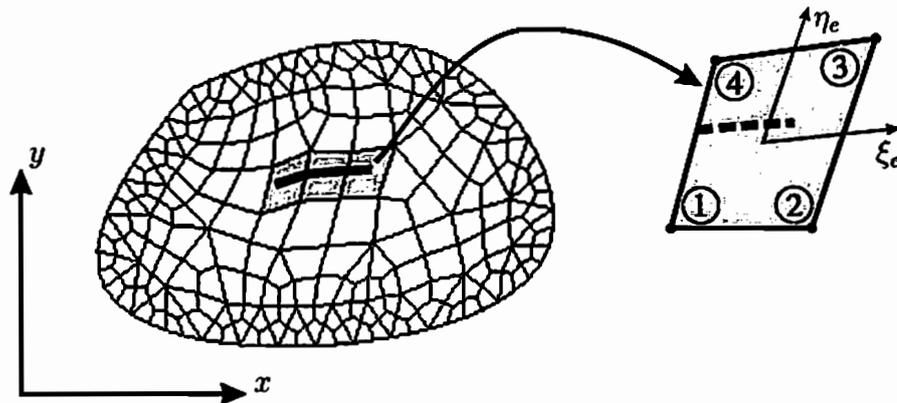


Abbildung 2.12.: FE-Netz mit verschmiertem Riss

muss. Dieses Verfahren ist gerade für drei-dimensionale Probleme einfach zu handhaben. Die Generierung neuer Netze bringt allerdings neue Probleme mit sich. Zum einen benötigt diese Generierung viel Zeit, zum anderen sind die Ergebnisse netzabhängig, weil sie auf der Finiten Elemente Methode beruhen, die zwar mit höheren Polynomgraden oder feiner werdenden Element-Netzen konvergiert, diesen Umstand aber mit einem starken Zuwachs an Rechenzeit erkaufte (vgl. dazu (Szabo and Babuska 1991)). Darüber hinaus ist die Finite-Elemente-Methode ungeeignet die Spannungssingularität an der Rissspitze wiederzugeben, ohne ein sehr feines Netz um die Rissspitze herum. Mit speziellen Rissspitzelementen (z.B. so genannte *Quarter-Point-Elements*) kann die Singularität der Spannungen abgebildet werden, jedoch muss auch hier für Risswachstum in jedem Schritt ein neues Elementnetz generiert werden, und, wie in (Yehia and Shephard 1985) dargestellt, die Ergebnisse bleiben weiterhin netzabhängig.

- Die Betrachtung des Risses als verschmiert über ein Element (s. Abbildung 2.12): Die Elemente, durch die der Riss verläuft, werden nur mit einer geringeren Steifigkeit oder gar nicht mit in die Berechnung einbezogen. Durch diese Betrachtungsweise müssen die Elemente, die den Riss enthalten, sehr klein modelliert werden, damit das Ergebnis noch aussagekräftig sein kann. Somit bleibt das Ergebnis auch hier von der Art des Elementnetzes abhängig (s. auch (Jirásek and Zimmermann 2001; de Borst, Remmers, Needleman, and Abellan 2004)).
- Die explizite Modellierung des Risses und des Verschiebungs- bzw. Spannungsnahfel-

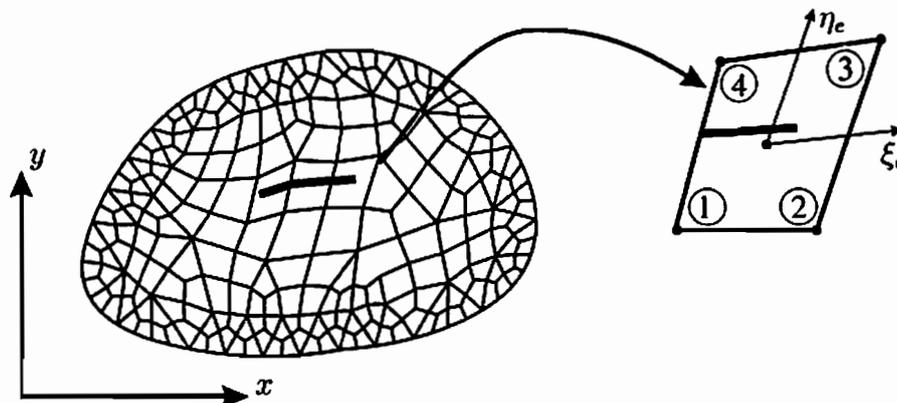


Abbildung 2.13.: FE-Netz mit explizitem Riss innerhalb der Elemente

des mit Hilfe der Formfunktionen (s. Abbildung 2.13): Die XFEM bietet die Möglichkeit durch Berücksichtigung zusätzlicher spezieller Formfunktionen, den Riss unabhängig vom FE-Netz zu simulieren und die Steifigkeiten der Elemente mit Riss zu berechnen. Basierend auf der *Partition of Unity Method* werden Funktionen, die den analytischen Funktionenraum aufspannen, mit in die Betrachtung einbezogen (s. folgende Kapitel).

Partition of Unity Method

Die Idee der *Partition of Unity Method*, wie sie hier Verwendung findet, ist, eine bekannte Funktion (hier $\Psi(\mathbf{x})$ genannt) nicht allein durch die Formfunktionen zu approximieren, sondern bekannte Funktionen mit in die Näherung zu implementieren.

Die Lagrange-Polynome, die als Standard-Formfunktionen genutzt werden, haben die Eigenschaft

$$\sum_i N_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (2.78)$$

Durch die Zerlegung der Eins (Gl. 2.78) wird nun die Funktion Ψ in einer Finite Elemente Umgebung näherungsweise erzeugt durch

$$\sum_i N_i(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}) \quad (2.79)$$

Es lässt sich also jede beliebige Funktion durch eine Summe dieser Funktion multipliziert mit den Standard-Formfunktionen darstellen.

An einem Beispiel soll die Möglichkeit, die sich hiermit bietet, verdeutlicht werden. Die anzunähernde Funktion sei

$$f(x) = \frac{10(-0.9+x) + 10(-0.9+x)^5 + 0.5 \cos(0.9-x)^3}{|-0.9+x|} \quad (2.80)$$

Die Funktion wird in drei Abschnitte unterteilt (s. auch Abbildung 2.14) und wird in jedem Bereich an $p+1$ äquidistant verteilten Punkten ausgewertet. Mit Hilfe dieser Punkte kann

ein Interpolationspolynom vom Grad p berechnet werden. Der Polynomgrad wird mit $p = 1, \dots, 8$ variiert. Im mittleren Bereich wird die Funktion zum einen durch eine Summe von Polynomen vom Grad p angenähert

$$g_1(x) = \sum_i f(x_i) L_{in}(x) \quad (2.81)$$

und zum anderen durch Funktionen

$$g_2(x) = \sum_i f(x_i) |x_i - 0.9| \frac{L_{in}(x)}{|x - 0.9|}, \quad (2.82)$$

in denen das Wissen um die Art und Position der Singularität enthalten ist. Wie in Abbildung 2.15 dargestellt, kann durch Gleichung 2.82 die Funktion $f(x)$ bei Verwendung eines geringeren Polynomgrades für das Ausgleichspolynom besser dargestellt werden. Die darin verwendeten Lagrange-Polynome sind definiert als

$$L_{in}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Der rechte und linke Bereich werden jeweils durch Interpolationspolynome aus Gleichung 2.81 approximiert.

Der interessierte Leser sei auf (Melenk 1995) verwiesen. In (Chessa, Wang, and Belytschko 2003) wird die *Partition of Unity Method* im Bezug auf die XFEM bzw. die darin enthaltenen Übergangselemente betrachtet. Mehr über die Genauigkeit, mit der die Verschiebungen und Spannungen in den Übergangselementen der XFEM berechnet werden können, ist in Kapitel 4 und dort speziell in den Abschnitten 4.3 und 4.4 dargestellt.

eXtended Finite Element Method

Wie im vorhergehenden Abschnitt erläutert, bietet die *Partition of Unity Method* die Möglichkeit, analytisch bekannte Funktionen in die Lösung mit zu implementieren. Durch die Formfunktionen aus der Finite Elemente Methode kann die Stetigkeit des Verschiebungsfeldes über die Elementgrenzen hinaus gewährleistet werden. Nutzt man die XFEM zur Lösung von bruchmechanischen Problemen, erhält man folgende Gleichung als Näherungslösung für die Verschiebungen:

$$\hat{u} = u_i N_i(\mathbf{x}) + b_j N_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) + c_{kl} N_k(\mathbf{x}) F_l(\mathbf{x}) \quad (2.83)$$

Darin enthalten sind

- die Standard-FEM-Lösung ($u_i N_i$)
- die sprungstetigen Anteile ($b_j N_j H$), wobei b_j die halbe Rissöffnungsbreite repräsentiert und H die Heaviside-Funktion ist mit

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{e}_n > 0 \\ -1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.84)$$

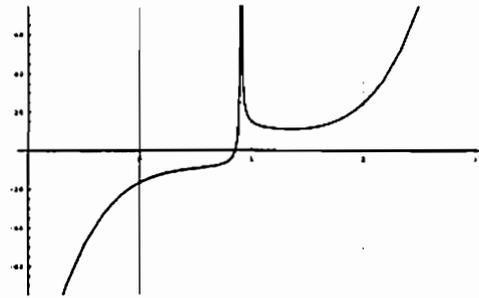


Abbildung 2.14.: zu approximierende Funktion aus Gleichung 2.80

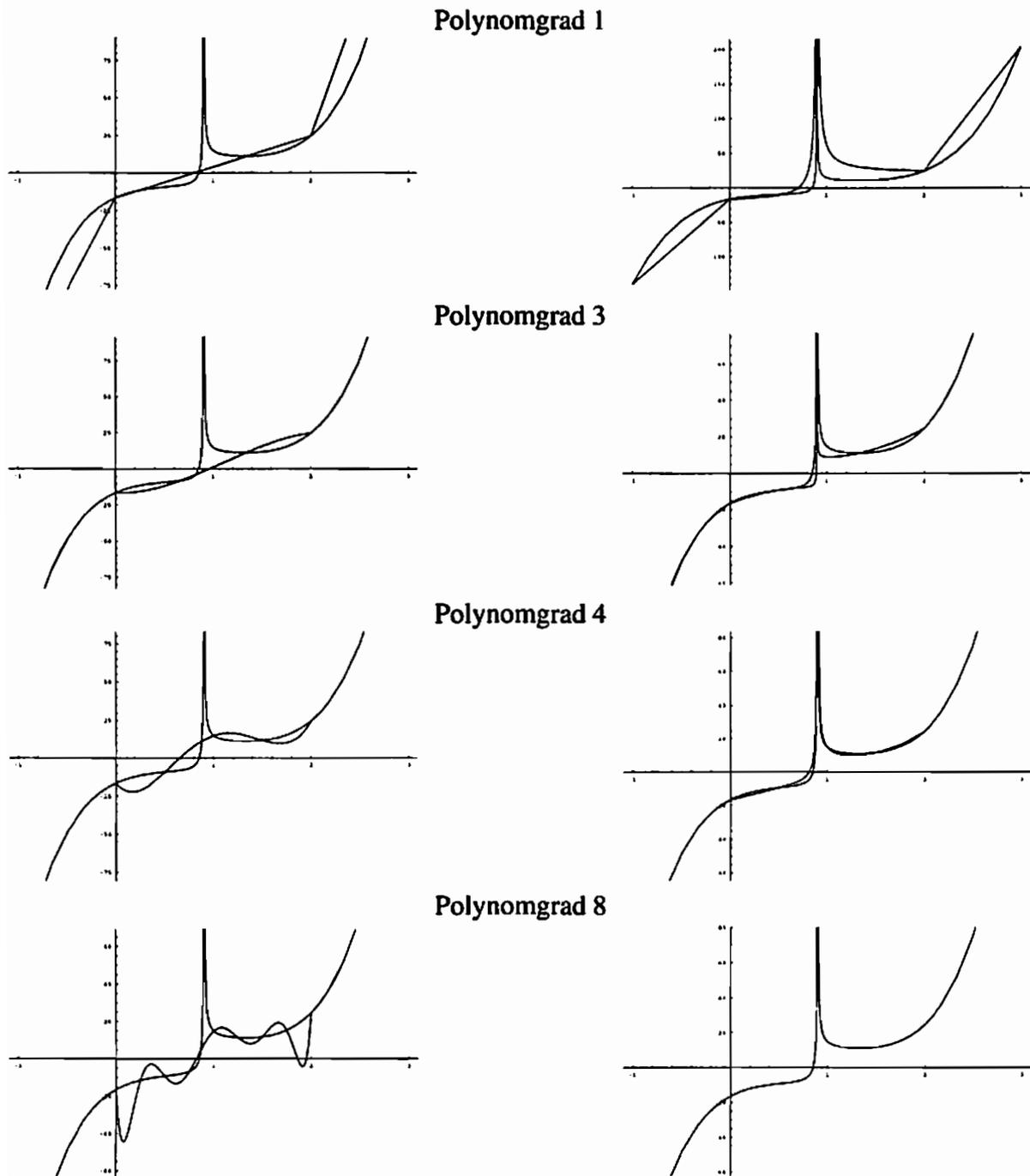


Abbildung 2.15.: zu approximierende Funktion aus Gleichung 2.80 mit den Interpolationspolynomen, links aus Gleichung 2.81, rechts aus Gleichung 2.82

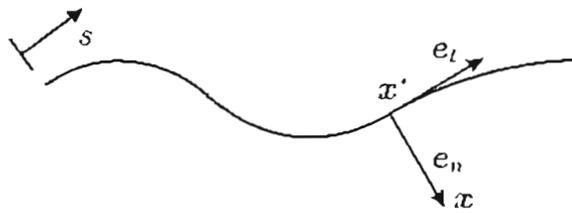


Abbildung 2.16.: Definitionen des Normalen- und Tangentenvektors

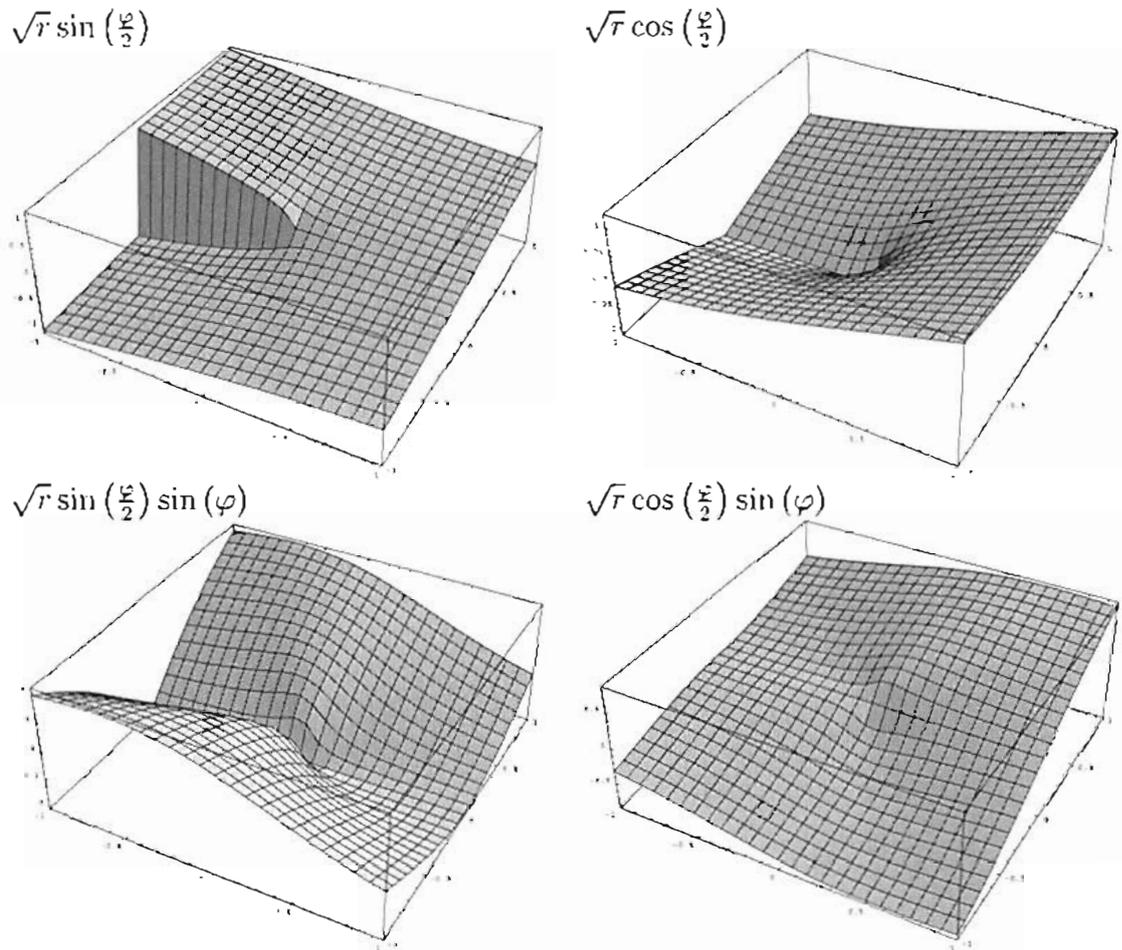


Abbildung 2.17.: Die vier Risspitzenfunktionen F_l aus Gleichung 2.85

x^* ist in dieser Definition der Punkt auf dem Riss mit dem kürzesten Abstand zu x und e_n der Normalenvektor auf den Riss mit der Orientierung, so dass $e_t \times e_n = e_z$ gilt. Der darin enthaltene Vektor e_t stellt den Tangentenvektor an den Riss dar (vgl. auch Abbildung 2.16).

- das Risspitzen-Nahfeld der Verschiebungen $(c_{kl} N_k F_l)$. Die Funktionen F_l spannen dabei den Funktionenraum der analytischen Verschiebungen aus Gleichung 2.75 auf.

$$F_l = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi) \right\} \quad (2.85)$$

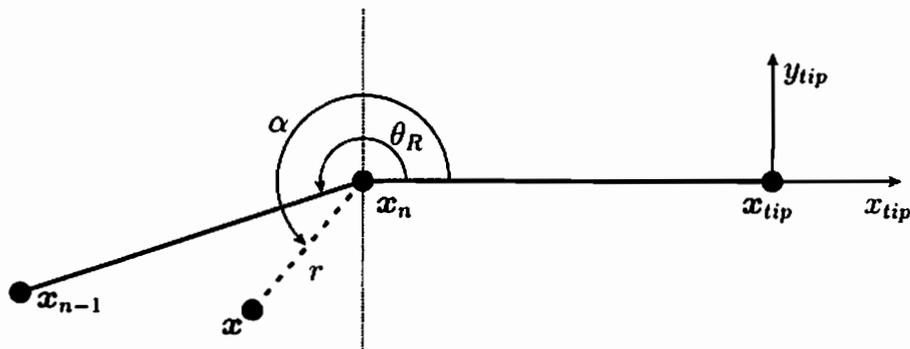


Abbildung 2.18.: Einfach abknickender Riss

Die Elementsteifigkeitsmatrix ergibt sich damit zu

$$\mathbf{K}_{XFEM}^e = \int_{\Omega} \left(\mathbf{D} \begin{bmatrix} N_1 \mathbb{F} \\ N_2 \mathbb{F} \\ \vdots \\ N_n \mathbb{F} \end{bmatrix} \right)^T \mathbf{C} \left(\mathbf{D} \begin{bmatrix} N_1 \mathbb{F} \\ N_2 \mathbb{F} \\ \vdots \\ N_n \mathbb{F} \end{bmatrix} \right) d\Omega. \quad (2.86)$$

Der darin enthaltene Vektor \mathbb{F} sei definiert als

$$\mathbb{F} = [1, H, F_1, F_2, F_3, F_4]^T. \quad (2.87)$$

Definiert sind die Funktionen F_i für gerade Risse. Abknickende Risse müssen auf einen geraden Riss abgebildet werden, so dass die Funktionen wieder angesetzt werden können. In (Belytschko and Black 1999; Moës, Dolbow, and Belytschko 1999) wird folgende Abbildung vorgeschlagen:

Mit den Koordinaten des betrachteten Punktes kann der Winkel α und für den aktuellen Rissknick der Winkel θ_R berechnet werden (s. Abbildung 2.18). Ebenso kann der Abstand r des Punktes zum Risspunkt x_n angegeben werden. Liegt der Punkt so, dass eine senkrechte Linie auf des Risspitzensegment mit dem Punkt verbunden werden kann ($-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ — rechts der dünnen, gepunkteten Linie in Abbildung 2.18), muss der Punkt nicht abgebildet werden, sondern kann mit seinen Polarkoordinaten in die Funktionen F_i eingesetzt werden. Andernfalls wird aus den Werten nun die Abbildung berechnet zu (s. dazu auch Abbildung 2.19)

$$\begin{pmatrix} x_{tip} \\ y_{tip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l - r \cos(\bar{\theta}) \\ -r \sin(\bar{\theta}) \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

Darin sind

$$\bar{\theta} = c(\alpha - \theta_R) \quad (2.89)$$

$$\text{mit } c = \begin{cases} \frac{\pi/2}{3/2 \pi - \theta_R} & \text{für } \alpha > \theta_R \\ \frac{\pi/2}{\theta_R - \pi/2} & \text{für } \alpha < \theta_R \end{cases} \quad (2.90)$$

$$l = |\mathbf{x}_{tip} - \mathbf{x}_n| \quad (2.91)$$

$$r = |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|. \quad (2.92)$$

Zu berücksichtigen ist pro Abbildung für die Ableitungen noch eine Matrix folgender Form:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{xylok}} \\ \frac{\partial}{\partial y_{xylok}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \bar{\theta} \cos \alpha - c \sin \bar{\theta} \sin \alpha & -\sin \bar{\theta} \cos \alpha - c \cos \bar{\theta} \sin \alpha \\ -\cos \bar{\theta} \sin \alpha + c \sin \bar{\theta} \cos \alpha & -\sin \bar{\theta} \sin \alpha - c \cos \bar{\theta} \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{tip}} \\ \frac{\partial}{\partial y_{tip}} \end{pmatrix}. \quad (2.93)$$

Die hier enthaltenen Werte c entsprechen denen aus Gleichung 2.90. $\frac{\partial}{\partial x_{tip}}$ bedeutet die Ableitung in x-Richtung des Rissspitzenkoordinatensystems bei geradem Riss bzw. $\frac{\partial}{\partial x_{xylok}}$ steht für die Ableitung in x-Richtung am abknickenden Riss. Entsprechendes gilt für die y-Richtungen.

Berechnet wird die Matrix aus Gleichung 2.93 wie folgt

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}_{tip}(\mathbf{x})) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{tip}} f \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{x}_{tip}. \quad (2.94)$$

Mit der Definition für die Abbildung der Koordinaten nach Gleichung 2.88 ergeben sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} x_{tip} &= \left(-\frac{\partial}{\partial x} r \right) \cos \bar{\theta} - r \left(\frac{\partial}{\partial x} \cos \bar{\theta} \right) \\ &= -\frac{1+x}{r} \cos \bar{\theta} - r \left(-c_k \sin \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial x} \alpha \right) \\ &= -\cos \alpha \cos \bar{\theta} + c_k \sin \bar{\theta} \frac{-y}{r} \\ &= -\cos \alpha \cos \bar{\theta} - c_k \sin \bar{\theta} \sin \alpha \\ \frac{\partial}{\partial y} x_{tip} &= \left(-\frac{\partial}{\partial y} r \right) \cos \bar{\theta} - r \left(\frac{\partial}{\partial y} \cos \bar{\theta} \right) \\ &= -\frac{y}{r} \cos \bar{\theta} - r \left(-c_k \sin \bar{\theta} \frac{\partial}{\partial y} \alpha \right) \\ &= -\sin \alpha \cos \bar{\theta} + c_k \sin \bar{\theta} \frac{x}{r} \\ &= -\sin \alpha \cos \bar{\theta} - c_k \sin \bar{\theta} \cos \alpha \\ \frac{\partial}{\partial x} y_{tip} &= -\cos \alpha \sin \bar{\theta} - c_k \cos \bar{\theta} \frac{-y}{r} \\ &= -\cos \alpha \sin \bar{\theta} + c_k \cos \bar{\theta} \sin \alpha \\ \frac{\partial}{\partial y} y_{tip} &= -\sin \alpha \sin \bar{\theta} - c_k \cos \bar{\theta} \frac{x}{r} \\ &= -\sin \alpha \sin \bar{\theta} - c_k \cos \bar{\theta} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Bei mehrfach abknickenden Rissen wird die in den Gleichungen 2.88–2.93 beschriebene Abbildung mehrfach hintereinander ausgeführt. Begonnen wird dabei am Rissknick, der der Rissspitze am nächsten liegt (vgl. Abbildungen 2.20 und 2.21).

Abschließend müssen die Ableitungen dann noch vom Rissspitzenkoordinatensystem auf das globale x-/y-Koordinatensystem umgerechnet werden, was mit einer einfachen Rotati-

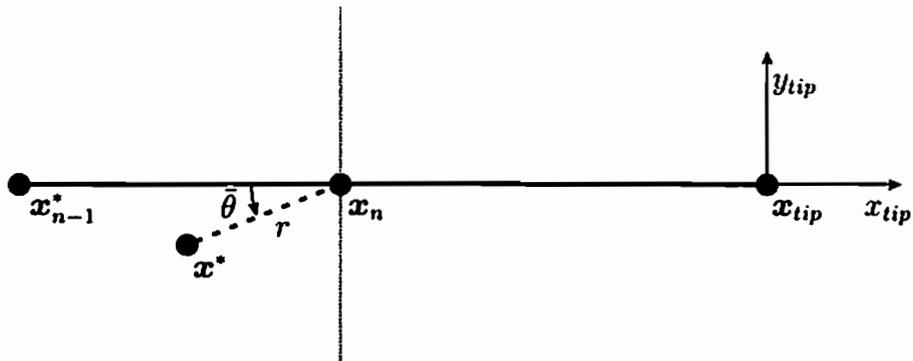


Abbildung 2.19.: Einfach abknickender Riss nach Abbildung auf geraden Riss

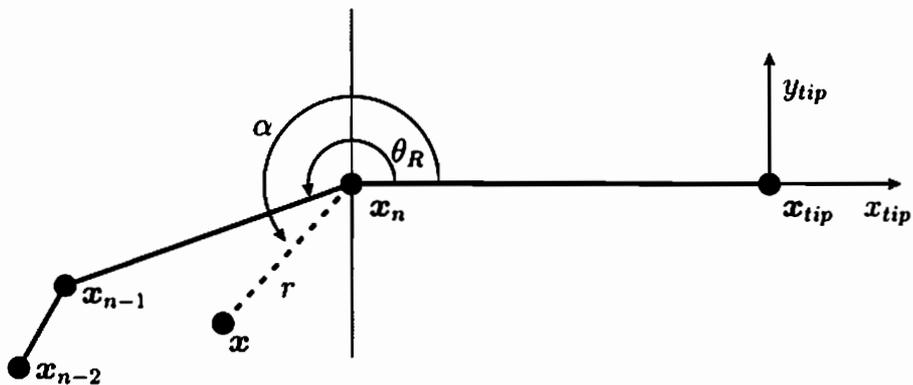


Abbildung 2.20.: Mehrfach abknickender Riss

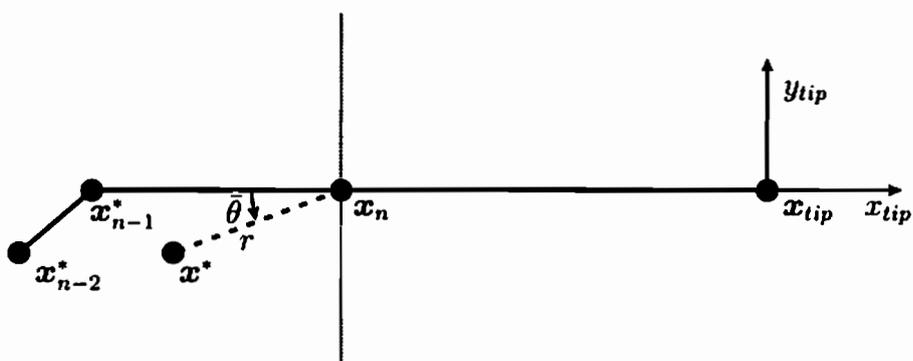


Abbildung 2.21.: Mehrfach abknickender Riss nach erster Abbildung auf geraden Riss

onsmatrix durchgeführt werden kann:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{ygl0}} \\ \frac{\partial}{\partial y_{ygl0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{ylok}} \\ \frac{\partial}{\partial y_{ylok}} \end{pmatrix}. \quad (2.95)$$

φ_0 darin entspricht dem Winkel zwischen dem lokalen Rissspitzenkoordinatensystem und dem globalen Koordinatensystem.

2.2.3. Berechnung der Spannungs-Intensitäts-Faktoren

Zum Vergleich der numerischen Lösung mit den analytischen Verschiebungs- und Spannungsfeldern werden häufig die Spannungs-Intensitäts-Faktoren (SIF) herangezogen. Für sie gibt es unterschiedliche Berechnungsmöglichkeiten — drei davon sollen im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt werden:

1. Die direkte Berechnung der SIF aus den Verschiebungen oder Spannungen der FEM-Lösung,
2. die Berechnung der SIF als Teil der XFEM-Lösung und
3. die Berechnung der SIF mit Hilfe des J-Integrals

Direkte Berechnung der SIF aus den Verschiebungen oder Spannungen der FEM-Lösung

Bei dieser Methode zur Berechnung der SIF werden Spannungen oder Verschiebungen der FEM-Lösung an ausgewählten Punkten ermittelt. So können Näherungen der SIF aus den Gleichungen 2.75 und 2.76 ermittelt werden. Durch Extrapolation dieser Näherungsergebnisse auf einem Pfad $r \rightarrow 0$ können die SIF ermittelt werden. Nach (Gross 1996) gilt folgender Zusammenhang

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(\varphi = 0), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(\varphi = 0) \quad (2.96)$$

womit aus den Spannungen eine extrapolierte Näherung der SIF berechnet werden kann. In (Aliabadi and Rooke 1991) wird neben dem Zusammenhang der SIF mit den Spannungen auch die Möglichkeit aufgezeigt, die SIF aus den Verschiebungsdifferenzen zweier Punkte mit

$$u(\theta = \pi) - u(\theta = -\pi) = \frac{\kappa + 1}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} K_{II} \\ K_I \end{Bmatrix} \quad (2.97)$$

zu berechnen. Die Verschiebungen u in Gleichung 2.97 sind für diese Art der Berechnung ebenso wie die Spannungen in Gleichung 2.96 im Rissspitzenkoordinatensystem zu berechnen.

Darüber hinaus sind für diese Verfahren geeignete Punkte zu wählen:

- Die gegenseitige Verschiebung der Rissufer stellt ein Maß für die Größe der SIF dar. Wenn die SIF aus den Verschiebungen berechnet werden, müssen die Punkte auf $\varphi = \pm\pi$ liegen, um für beide Werte K_I und K_{II} sinnvolle Ergebnisse zu erhalten (vgl. Gleichung 2.97).
- Wenn die SIF über Spannungen berechnet werden sollen, können beliebige Winkel benutzt werden. Am Besten eignen sich jedoch Punkte, die auf einer Geraden bei $\varphi = 0$ liegen.

Wie in (Molla-Abbasi 2004) dargestellt müssen die Punkte, an denen die SIF ausgewertet werden, außerhalb der ersten zwei bis drei Elemente um die Risspitze liegen, weil so die Fehler verschwinden, die durch die Finite-Elemente-Approximation in direkter Umgebung der Risspitze (bzw. in 3D in unmittelbarer Umgebung der Rissfront) gemacht werden. Die SIF werden außerhalb dieses Bereichs annähernd linear und eignen sich dadurch erst dort für die Extrapolation.

SIF als Teil der XFEM-Lösung

Es werden nicht die Rissspitzenfunktionen aus Gleichung 2.85 als zusätzliche Formfunktionen in die Finite-Elemente-Berechnung eingebracht, sondern die SIF direkt. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Freiheitsgrade der SIF als Knotenwerte in der FE-Lösung vorhanden sind. Dies wird realisiert über die Werte $K_{1,i}$ und $K_{II,i}$ mit $i = 1, \dots, n$, worin n für die Anzahl der Knoten im Element steht. Über Penalty-Parameter müssen die Knotenwerte für die SIF auf die Werte K_I und K_{II} reduziert werden. Dieses Vorgehen unter Berücksichtigung nicht nur des ersten Terms der Reihenentwicklung des Verschiebungsfeldes wird in (Liu, Xiao, and Karihaloo 2004) vorgeschlagen. Das Verschiebungsfeld wird darin berechnet mit Hilfe von

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_i u_i N_i(\mathbf{x}) + \sum_j b_j N_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \quad (2.98)$$

$$+ \sum_m N_m(\mathbf{x}) \sum_{n=1}^{nf} \begin{bmatrix} f_{11n} & f_{12n} \\ f_{21n} & f_{22n} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{Inm} \\ K_{IIIm} \end{Bmatrix}. \quad (2.99)$$

Darin ist $m \in M$ wobei M die Menge aller Knoten ist, die durch die SIF als zusätzliche Freiheitsgrade erweitert werden. nf steht für die Anzahl der Terme, die in der Reihenentwicklung berücksichtigt werden, und f sind diese Terme aus der Reihenentwicklung, die für homogenes Material in (Liu, Xiao, and Karihaloo 2004) angegeben sind mit

$$\begin{Bmatrix} f_{11n} \\ f_{12n} \\ f_{21n} \\ f_{22n} \end{Bmatrix} = \frac{r^{n/2}}{2\mu n \sqrt{2\pi}} \begin{Bmatrix} (\kappa + \frac{n}{2} + (-1)^n \cos \frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2} \cos(\frac{n}{2} - 2)\theta) \\ (\kappa + \frac{n}{2} - (-1)^n \sin \frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2} \sin(\frac{n}{2} - 2)\theta) \\ (\kappa - \frac{n}{2} - (-1)^n \sin \frac{n}{2}\theta + \frac{n}{2} \cos(\frac{n}{2} - 2)\theta) \\ -(\kappa - \frac{n}{2} + (-1)^n \cos \frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2} \cos(\frac{n}{2} - 2)\theta) \end{Bmatrix}. \quad (2.100)$$

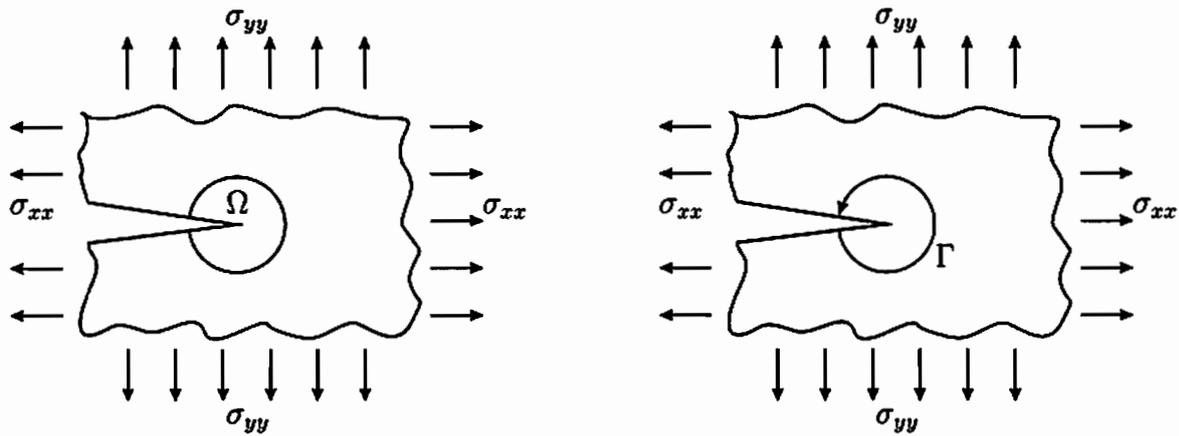


Abbildung 2.22.: Definitionen für das J-Integral in 2D: links als Flächenintegral, rechts als Kurvenintegral

SIF-Berechnung aus dem J-Integral

Aus den Spannungen und Verschiebungsableitungen der Finite-Elemente-Lösung können J-Integrale im zwei-dimensionalen Raum als Flächenintegral

$$J = \int_{\Omega} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - W \delta_{ij} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_j} d\Omega \quad (2.101)$$

oder als Kurvenintegral

$$J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \left(W n_1 - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} n_j \right) d\Gamma \quad (2.102)$$

berechnet werden (vgl. Abbildung 2.22). Darin sind σ die Spannungen, u die Verschiebungen, W die Energie mit $W = \frac{1}{2} \sigma \epsilon$, δ das Kronecker-Delta, q eine beliebige, stetige Gewichtungsfunktion, die an der Rissspitze den Wert 1 und auf dem äußeren Rand des Bereichs ($\Gamma = \partial\Omega$) den Wert 0 annehmen muss, und n der normierte nach außen gerichtete Normalenvektor auf die Kurve Γ . Die Integrale können mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes ineinander überführt werden. Es hat sich jedoch herausgestellt, dass das Flächenintegral mit den in Kapitel 3 vorgestellten Integrationsmethoden stabilere Ergebnisse liefert.

Durch einen so genannten *Mode-Separation-Algorithmus* können die beiden Moden von einander unabhängig integriert werden. Dazu wird das Integral J_I mit dem symmetrischen Anteil des Verschiebungs- bzw. Spannungsfeldes berechnet und das Integral J_{II} mit dem anti-symmetrischen Anteil dieser Felder, jeweils symmetrisch bzw. anti-symmetrisch bezüglich der Rissfront. Es ergeben sich nach (Ingraffea and Wawrzynek 2003) für die lokalen Verschiebungen

$$u = u_I + u_{II} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 + \hat{u}_1 \\ u_2 - \hat{u}_2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} u_1 - \hat{u}_1 \\ u_2 + \hat{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.103)$$

bzw. für die Spannungen

$$\sigma = \sigma_I + \sigma_{II} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} + \hat{\sigma}_{11} & \sigma_{12} - \hat{\sigma}_{12} \\ \sigma_{21} - \hat{\sigma}_{21} & \sigma_{22} + \hat{\sigma}_{22} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \hat{\sigma}_{11} & \sigma_{12} + \hat{\sigma}_{12} \\ \sigma_{21} + \hat{\sigma}_{21} & \sigma_{22} - \hat{\sigma}_{22} \end{Bmatrix}. \quad (2.104)$$

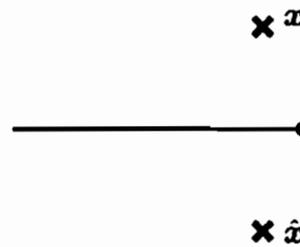


Abbildung 2.23.: Punkt x und an der Rissfront gespiegelter Punkt \hat{x}

Die Verschiebungen \hat{u} und Spannungen $\hat{\sigma}$ werden an einem Punkt \hat{x} ausgewertet. Dieser Punkt ist vom Punkt x an der Rissfront gespiegelt (s. Abbildung 2.23).

Nun können aus den unabhängig berechneten J-Integralen die SIF zu

$$|K_i| = \sqrt{J_i E'}, \quad E' = \begin{cases} E & \text{für den ebenen Spannungszustand} \\ \frac{E}{1-\nu^2} & \text{für den ebenen Verzerrungszustand} \end{cases} \quad (2.105)$$

mit $i = 1, 2, 3$ berechnet werden. Die Vorzeichen der SIF sind entsprechend den Verschiebungsdifferenzen zu ermitteln.

3. Integration

Die Integration spielt in der Finite Elemente Methode eine eher untergeordnete Rolle, da die zu integrierenden Funktionen Polynome sind, die zum einen analytisch integriert werden können, zum anderen numerisch mittels Gauß-Quadratur mit wenigen Punkten exakt zu integrieren sind. In der XFEM müssen jedoch unstetige und singuläre Funktionen numerisch integriert werden, da eine analytische Integration der Funktionen aus der Elementsteifigkeitsmatrix, die die Rissspitzenfunktionen enthalten, nicht möglich ist. Das gilt insbesondere dann, wenn abknickende Risse behandelt werden und die Abbildung des abknickenden Risses auf einen geraden Riss in die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix mit einfließt. Es ist für die Abschätzung der Genauigkeit des XFEM-Ergebnisses daher wichtig, auch die Genauigkeit der Integration der Steifigkeitsmatrix bestimmen zu können.

3.1. Analytische Integration

Die Steifigkeitsmatrix enthält nach Gleichung 2.64 die Integration des Produktes der Ableitungen der Formfunktionen. Also:

$$K^e = \int_{\Omega} (DN)^T C (DN) d\Omega.$$

Die analytische Integration der entstehenden Funktionen in der Finiten Elemente Methode ist möglich, da diese wieder Polynome sind. Ist n der Polynomgrad der Formfunktionen für eine Richtung, so wird die maximale Ordnung des Polynoms in K nicht größer als $2n$ sein. Die analytische Integration wird allerdings aufwendiger, wenn das Element kein Rechteck ist bzw. die Ränder nicht parallel zu den x - und y -Achsen verlaufen. Das gilt auch für die zu integrierenden Funktionen selbst. Im x/y -Koordinatensystem muss dann eine Funktion folgendermaßen integriert werden:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad (3.1)$$

Meist wird deshalb die analytische Integration durch eine numerische Gauß-Integration ersetzt, die bei n Stützstellen bis zum Polynomgrad $2n - 1$ der zu integrierenden Funktion exakt ist (s. Kapitel 3.2). Sie ist dadurch für Polynome, wie sie in der Finite-Elemente-Methode benutzt werden, effektiv einsetzbar.

Durch die Verwendung der Rissspitzenfunktionen in der Steifigkeitsmatrix nach Gleichung 2.86

$$K_{XFEM}^e = \int_{\Omega} \left(D \begin{bmatrix} N_1 \mathbb{F} \\ N_2 \mathbb{F} \\ \vdots \\ N_n \mathbb{F} \end{bmatrix} \right)^T C \left(D \begin{bmatrix} N_1 \mathbb{F} \\ N_2 \mathbb{F} \\ \vdots \\ N_n \mathbb{F} \end{bmatrix} \right)$$

und der Abbildung eines abknickenden Risses auf einen geraden Riss wird die analytische Integration jedoch unmöglich, da sich die Abbildung, die hier verwendet wird, nicht analytisch in die Integration implementieren lässt. Aus der für rechteckige Elemente relativ einfachen Integration der Formfunktionen wird so eine anspruchsvolle, numerisch aufwendige Berechnung.

3.2. Numerische Integration und Fehlerschätzung

Die Elementsteifigkeitsmatrizen werden im Allgemeinen meist nicht im globalen Koordinatensystem, sondern durch die Abbildung auf das Einheitsquadrat in den Grenzen $(\xi, \eta) \in [-1; 1]^2$ integriert.

$$I = \int_{\Omega} f(x, y) d\Omega = \int_{\xi} \int_{\eta} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J| d\xi d\eta. \quad (3.2)$$

$|J|$ ist darin die Determinante der Jacobi-Matrix, die definiert ist als

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Wobei x und y durch die Standard-Formfunktionen und die Elementknotenkoordinaten x_i und y_i ausgedrückt werden können

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_i N_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

3.2.1. Algorithmen zur Integration stetiger Funktionen

Die numerische Integration stetiger Funktionen kann durch unterschiedliche Algorithmen umgesetzt werden. Dabei lassen sich folgende prinzipielle Vorgehensweisen unterscheiden:

- Die Integration beruht auf einer geometrisch orientierten Volumenberechnung, bei der das Volumen angenähert wird, z.B. durch Quader oder andere einfache Körper, deren Flächeninhalte bzw. Volumina analytisch bekannt sind.
- Für die Integration wird ein Interpolationspolynom abgeleitet, welches dann analytisch integriert werden kann. Das Interpolationspolynom leitet sich dabei ab aus Stützstellen und deren Funktionswerten. Durch die Wahl äquidistanter Stützstellen können so die Newton-Cotes-Formeln hergeleitet werden.
- Eine Funktion $p_n(x)$ vom Grad n lässt sich analytisch integrieren. Diese Funktion p_n wird allerdings nicht wie im vorigen Fall durch ein Interpolationspolynom an beliebig gewählten Stützstellen bestimmt, sondern an unbekanntenen Stützstellen, die in dem Verfahren ebenfalls Teil der Lösung der Integrationsmethode sind. Daraus ergibt sich die Gauß-Quadratur.

Um die entstehenden Fehler der numerischen Integration abzuschätzen bzw. zu minimieren, können aus diesen unterschiedlichen Herangehensweisen Verfahren entwickelt werden, die sich untereinander auch kombinieren lassen.

Ziel muss bei allen Verfahren sein, das Integrationsergebnis mit möglichst wenigen Integrationspunkten und mit einer guten Fehlerschätzung zu erhalten, so dass der zulässige Fehler größer als der geschätzte und dieser wiederum größer als der vorhandene Fehler ist:

$$\epsilon_{zul} \geq \epsilon_{Schätzung} \geq \epsilon_{vorh}. \quad (3.5)$$

Ein Verfahren ist unzuverlässig und sein Integrationsergebnis nicht aussagekräftig, falls die Ungleichung 3.5 nicht erfüllt ist.

Mittelpunktsformel und Mittelwertsformel

Die einfachste Möglichkeit, ein Integral zu berechnen, ist, die Funktion in Abschnitte zu unterteilen und eine endliche Summe aus den Produkten von Funktionswerten und der Größe des zu dem Funktionswert gehörenden Abschnitts zu bilden (Rechtecke bzw. Quader). Die zu integrierende Funktion wird also abschnittsweise als konstant angesehen. Die Funktionswerte können am Anfang, in der Mitte oder am Ende des Intervals berechnet werden (s. auch Abbildung 3.1). Den Namen hat diese Methode jedoch durch die Benutzung des Mittelwerts aus Funktionswerten von Punkten aus dem Intervall erhalten. Für eine Funktion in zwei Dimensionen lautet die Mittelwertsformel

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega \approx I_n = l_x l_y M_n \quad M_n = \frac{1}{n_x n_y} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} f(x_i, y_j), \quad (3.6)$$

wobei n_x und n_y die Anzahl der Funktionswerte sind, die zur Berechnung des Mittelwerts M herangezogen werden, l_x und l_y stehen für die Längen des Intervalls in x- und y-Richtung und für die Koordinaten gilt:

$$a_x \leq x_i \leq b_x \quad a_y \leq y_j \leq b_y \quad (3.7)$$

mit den Intervall-Anfangs-Koordinaten a_x und a_y bzw. den Intervall-End-Koordinaten b_x und b_y .

Trapezregel

Aus der Mittelpunkts- bzw. Mittelwertsformel lässt sich unter Berücksichtigung von zwei Punkten pro Teilintervall die Trapezregel herleiten. Dazu wird der Mittelwert aus den Ergebnissen am Anfangs- und Endpunkt des Teilintervalls berechnet und dieser dann mit der Größe des Intervalls multipliziert. Anschließend wird daraus die Summe gebildet (s. Gleichung 3.8 und Abbildung 3.2).

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega \approx I = \frac{l_x l_y}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) \quad (3.8)$$

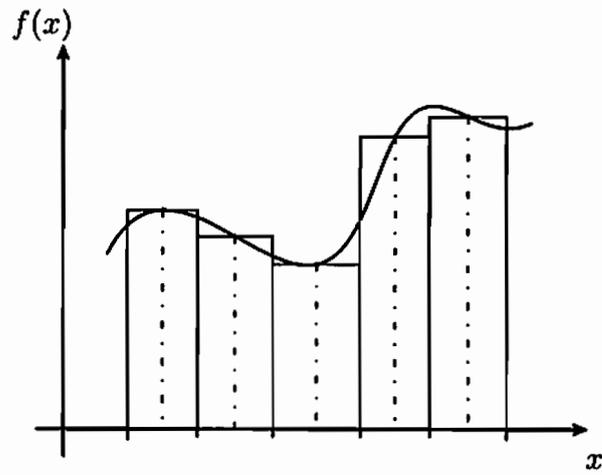


Abbildung 3.1.: Prinzip der Mittelpunktsformel in 1D

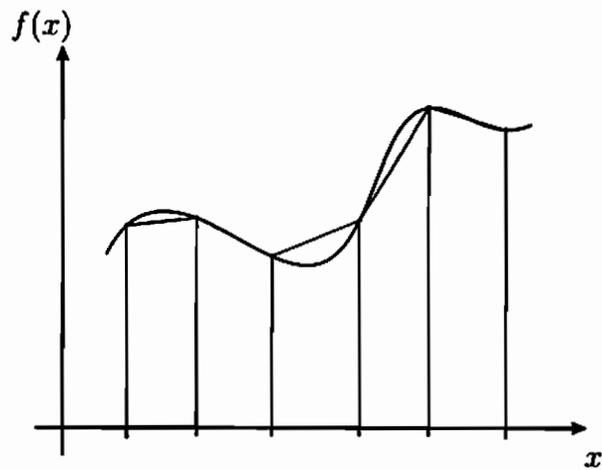


Abbildung 3.2.: Prinzip der Trapezregel in 1D

Tabelle 3.1.: Wichtungsfaktoren und Fehler für die 2D Newton-Cotes-Formeln

n	P_n	p_{1n}	p_{2n}	p_{3n}	p_{4n}	p_{5n}	p_{6n}	p_{7n}	R	m
1	2	1	1						$-\frac{1}{12}$	2
2	6	1	4	1					$-\frac{1}{90}$	4
3	8	1	3	3	1				$-\frac{3}{80}$	4
4	90	7	32	12	32	7			$-\frac{8}{945}$	6
5	288	19	75	50	50	75	19		$-\frac{275}{12096}$	6
6	840	41	216	27	272	27	216	41	$-\frac{9}{1400}$	8

dabei sind:

$$x_i = a_x + l_x(i - 1) \quad y_j = a_y + l_y(j - 1) \quad (3.9)$$

Der Fehler, der bei der Integration mit der Trapezformel gemacht wird, ergibt sich durch Integration des entsprechenden Interpolationsfehlers

$$\epsilon = \int_{\Omega} f(x, y) d\Omega - I = -\frac{1}{12} \left(\int_y \frac{d^2}{dx^2} f(\xi, y) dy + \int_x \frac{d^2}{dy^2} f(x, \eta) dx \right), \quad (3.10)$$

wobei ξ und η unbekannte Koordinaten innerhalb des Integrationsgebiets sind.

Newton-Cotes-Formeln

Die Erweiterung der Trapezregel auf höhere Polynomgrade bei äquidistanten Stützweiten ergibt die Familie der Newton-Cotes-Formeln. Sie entstehen durch die analytische Integration eines Interpolationspolynoms z.B. die Lagrange-Polynome. Die daraus hervorgehenden Integrationsformeln lauten:

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega \approx I_n = \frac{l_x l_y}{P_n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{in} p_{jn} f(x_i, y_j). \quad (3.11)$$

Die Werte für P_n und p_{in} können Tabelle 3.1 entnommen werden. Der Fehler läßt sich mit den Werten aus der Tabelle berechnen zu

$$\epsilon = \int_{\Omega} f(x, y) d\Omega - I_n = R \left(\int_y \frac{d^m}{dx^m} f(\xi, y) dy + \int_x \frac{d^m}{dy^m} f(x, \eta) dx \right). \quad (3.12)$$

Die Berechnung wird im Abschnitt *Fehlerberechnung und -abschätzung* und *Fehlerschätzung und Verbesserung der numerischen Integration* in Abschnitt 3.2.2 näher erläutert.

Fehlerberechnung und -abschätzung bei den Newton-Cotes-Formeln

Für die Bewertung der Integrationsergebnisse ist die Abschätzung der Fehler eine der wichtigsten Fragen, die es zur zu beantworten gilt. Zur Fehlerbestimmung in der Newton-Cotes-Integration bei 1D-Problemen wird die Funktion des analytischen Interpolationsfehlers, der bei der Bestimmung des Interpolationspolynoms entsteht, integriert zum Fehler der Integrationsmethode.

Für die Berechnung des Interpolationspolynoms können unterschiedliche Verfahren genutzt werden. An dieser Stelle sei die Form von Lagrange erwähnt (s. auch (Bronstein and Semendjajew 1991)):

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_{in}(x) \quad (3.13)$$

$$L_{in}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (3.14)$$

Der Fehler der Interpolation lässt sich angeben mit

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad (3.15)$$

wobei ξ eine unbekannte Stelle innerhalb des Intervalls bezeichnet.

Durch Integration der Lagrange-Polynome in einem beliebigen Bereich können, wie in Gleichung 3.16 gezeigt, die Gewichte berechnet werden

$$w_{in} = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_{in} dx. \quad (3.16)$$

Gleiches kann auch mit dem analytischen Interpolationsfehler getan werden:

$$\epsilon = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{x=a}^{a+h} \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx. \quad (3.17)$$

Da ϵ für gerade n Null wird, muss in diesen Fällen der nächste Term der Fehlerschätzung herangezogen werden:

$$\epsilon = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{x=a}^{a+h} x \prod_{i=0}^n (x - x_i) dx. \quad (3.18)$$

In zwei Dimensionen stellt sich die Fehlerberechnung etwas anders dar. Die aus dem ein-dimensionalen Fall bekannten Fehler ϵ müssen hier nacheinander für die beiden Koordinatenrichtungen berücksichtigt werden. In der Berechnung 3.19 bis 3.20 werden die Definitionen $\epsilon_x = R \frac{d^m}{dx^m} f(\xi, y)$ und $\epsilon_y = R \frac{d^m}{dy^m} (l_x \sum_i w_i f(\xi, \eta))$ benutzt. Darin sind R und m

Faktoren und Werte, die abhängig von der Integrations-Methode sind, die jeweils benutzt wird — z.B. aus Tabelle 3.1. In folgender Form ist die Vorgehensweise allgemein gültig:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) \Omega &= \int_y \int_x f(x, y) dx dy \\ &= \int_y l_x \sum_i w_i f(x_i, y) + \epsilon_x dy \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} &= l_x l_y \sum_j \sum_i w_j w_i f(x_i, y_j) + \epsilon_y + \int_y \epsilon_x dy \\ \text{mit} \quad \int_y \epsilon_x dy &= l_y \sum_j w_j \left(g_n \frac{d^m}{dx^m} f(\xi, y) \right) \\ &= l_x l_y \sum_j \sum_i w_j w_i f(x_i, y_i) \\ &\quad + g_n \frac{d^m}{dx^m} l_y \underbrace{\sum_j w_j f(\xi, y_i)}_{\int_y f(\xi, y) dy} + g_n \frac{d^m}{dy^m} l_x \underbrace{\sum_i w_i f(x_i, \eta)}_{\int_x f(x, \eta) dx} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die Schwierigkeit liegt hier, genau wie im 1D-Fall, darin, die Koordinaten, an denen der Fehler bestimmt werden muss, abzuschätzen. In einer Dimension kann auf sehr einfache Weise das Maximum innerhalb des Integrationsbereichs benutzt werden. Dadurch wird zwar der Fehler im Allgemeinen sehr viel größer geschätzt als der vorhandene Fehler wirklich ist, die Fehlerschätzung liefert dann aber zumindest eine konservative Lösung und damit ein richtiges Integrationsergebnis.

Gauß-Quadratur

Die allgemeine Form der Gauß-Quadratur in 1D ist in Gleichung 3.21 beschrieben.

$$\int_a^b f(x)q(x) dx \approx I_n = \sum_{i=1}^n A_{in} f x_{in} + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \left(\prod_{i=1}^n (x - x_{in}) \right)^2 q(x) dx \quad (3.21)$$

Für spezielle Formen der Gauß-Quadratur wird die Gewichtungsfunktion $q(x)$ an die zu integrierende Funktion angepasst. So lassen sich dann spezielle Gewichte A_{in} bzw. Auswertepunkte x_{in} berechnen, die im Gegensatz zu den Newton-Cotes-Formeln nicht mehr äquidistant sind.

Die Gewichte können durch das Integral über die Lagrange-Polynome (Gleichung 3.22) ermittelt werden:

$$A_{in} = \int_a^b L_{in}(x)q(x) dx. \quad (3.22)$$

Die Stützstellen sind im Allgemeinen die Nullstellen der im Bezug auf $q(x)$ orthogonalen Polynome. Diese Polynome sind über die Bedingung

$$\int_a^b P_i(x)P_j(x)q(x) dx = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad (3.23)$$

definiert.

Für den einfachsten Fall wird $q(x) = 1$ gesetzt und man erhält die so genannte Gauß-Legendre-Integration. Die Stützstellen sind dann die Nullstellen der Legendre-Polynome und die Gewichte lassen sich durch Integration der Lagrange-Polynome bestimmen. Diese Werte liegen tabelliert für den Bereich $x \in [-1; 1]$ vor (z.B. in (Bronstein and Semendjajew 1991)).

Für andere Gewichtungsfunktionen $q(x)$ lassen sich spezielle andere Integrationsformeln herleiten, z.B. Gauß-Tschebyscheff mit $q = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Die orthogonalen Polynome $P_i(x)$ sind dann die Tschebyscheff-Polynome, deren Nullstellen die Stützstellen x_{in} liefern. Durch Integration der gewichteten Lagrange-Polynome lassen sich die Integrations-Gewichte A_{in} berechnen (vgl. (Bronstein and Semendjajew 1991)).

Adaptive Integration

Die Ergebnisse der oben genannten Integrations-Verfahren lassen sich verbessern durch die Verwendung höherer Polynomgrade oder durch die Nutzung von adaptiven Integrationsmethoden. Dabei wird das Integrationsgebiet in mehrere Teilgebiete gegliedert und aus den Summen der Teilintegrationen das Gesamtergebnis berechnet. Die entstehenden Teilgebiete können nun so weit verfeinert werden, bis der abgeschätzte Integrationsfehler kleiner ist als die Fehlerschranke.

Bei der Unterteilung und Fehlerabschätzung gibt es unterschiedliche Herangehensweisen. Die Unterteilung des Integrationsgebiets kann z.B. folgende Formen annehmen (ϵ_{zul} steht dabei für den zulässigen Gesamtfehler der Integration, ϵ_i für den Integrationsfehler der Teilgebiete):

- Jedes Teilgebiet wird so lange selbst wieder unterteilt, bis der Fehler jeder einzelnen Integration kleiner ist als eine Fehlerschranke, die auf die Teilgebietsgröße angepasst wird

$$\epsilon_{zul,i} = \epsilon_{zul} \frac{F_i}{F}, \quad (3.24)$$

wobei F_i der Teilgebietsfläche und F der Fläche des gesamten Integrationsgebiets entspricht. Es muss dann gelten

$$\epsilon_i \leq \epsilon_{zul,i}. \quad (3.25)$$

Diese Herangehensweise ist leicht durch eine Rekursion in einem Programm implementierbar. Der Speicherbedarf und der Aufwand für die Organisation sind niedrig. Da allerdings in jedem Teilgebiet ein in jedem Rekursionsschritt kleiner werdende Fehlerschranke benutzt wird, ist ein erheblicher Zeit- und Integrationspunktaufwand erforderlich.

- Es wird in jedem Schritt nur das Teilgebiet weiter unterteilt, welches den größten absoluten Fehler erzeugt hat. Betrachtet wird immer nur, ob der Gesamtfehler kleiner

ist als der zulässige Höchstwert.

$$\sum_i \epsilon_i \leq \epsilon_{zul}. \quad (3.26)$$

Dieses Verfahren benötigt einen höheren Aufwand an Arbeitsspeicher und Organisation, das Ergebnis wird allerdings erheblich schneller erreicht, da immer nur der Gesamtfehler betrachtet wird und somit gut integrierbare Bereiche weniger gutmütige Teilgebiete „ausgleichen“ können. Beachtet werden muss dabei allerdings, dass der Fehler genau genug abgeschätzt werden muss, um das Verfahren nicht fälschlicherweise zu früh abzubrechen.

Für Funktionen, die nur mit erheblichem Aufwand numerisch integriert werden können, ist der Mehraufwand für Arbeitsspeicher und Organisation durch die zweite Herangehensweise gerechtfertigt, da in diesen Fällen der Speicherbedarf durch die Rekursion auch in der ersten Herangehensweise ebenfalls erheblich steigt. Die beiden Wege zur Integration solcher Funktionen unterscheiden sich deutlich in ihrem Bedarf an Integrationspunkten, so dass durch den Mehrbedarf durch die erste Herangehensweise und die größere Effektivität durch die Betrachtung des Gesamtfehlers in der zweiten Möglichkeit, diese deutlich positiver zu bewerten ist.

Die unterschiedlichen Integrationsmethoden dieses Kapitels werden in Kapitel 3.2.2 als adaptive Verfahren vorgestellt und auf ihre Effektivität im Bezug auf die Integration diskontinuierlicher bzw. singulärer Funktionen, wie sie in der XFEM integriert werden müssen, in Kapitel 3.2.3 getestet.

3.2.2. Algorithmen zur Integration unstetiger und singulärer Funktionen

Die in Kapitel 3.2.1 vorgestellten Verfahren sind nur gültig, wenn stetige Funktionen integriert werden. In der XFEM sind aber singuläre und diskontinuierliche Funktionen zu integrieren. Werden nun die oben genannten Verfahren ohne Berücksichtigung dieser Besonderheiten angewendet, kann der Fehler um mehrere Ordnungen größer sein, als das Integrationsergebnis selbst. Deshalb sollen an dieser Stelle die adaptiven Verfahren aus Kapitel 3.2.1 auf Konvergenz untersucht und mögliche Verbesserungen vorgeschlagen werden.

Vorher soll nun noch die allgemeine Gauß-Integration auf die Besonderheiten der XFEM hin betrachtet werden.

Gauß-Integrationen

Wie in Kapitel 3.2.1 bereits beschrieben, kann die Gauß-Quadratur mit Gewichtungsfunktionen durchgeführt werden. Dazu müssen Polynome gefunden werden, die orthogonal zu dieser Gewichtungsfunktion $q(x)$ sind. Für die Familie der Gewichtungsfunktionen $q(x) = (1-x)^a (1+x)^b$ sind die orthogonalen Funktionen die Jacobi-Polynome. Für Probleme in einer Dimension ist die Gauß-Quadratur mit Gewichtungsfunktionen ebenso effektiv wie die Gauß-Legendre-Quadratur für Polynome.

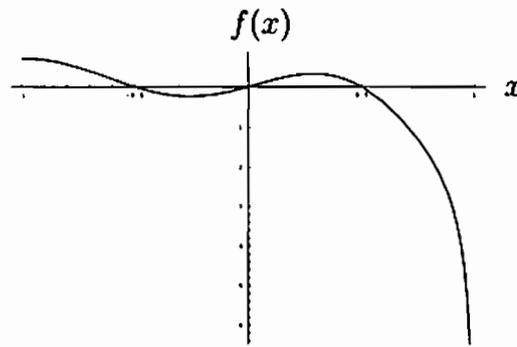


Abbildung 3.3.: Beispielfunktion (Gleichung 3.27) zur Integration mit Gauß-Jacobi

Die Anwendung und die Vorteile dieser Integrationsmethode soll ein Beispiel zeigen. Integriert werden soll die 1D Funktion (s. auch Abbildung 3.3)

$$f(x) = \frac{\cos(\pi x) \sin(\frac{\pi x}{2})}{\sqrt{1-x}} \quad (3.27)$$

Die Jacobi-Polynome sind

$$P_i(x) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{(1-x)^a (1+x)^b n!} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n (1-x)^{a+n} (1+x)^{b+n} \right) \quad (3.28)$$

Der Vergleich der Nullstellen der Legendre-Polynome mit denen der Jacobi-Polynome zeigt deutlich die Verschiebung der Nullstellen hin zu der Stelle der Singularität (s. Abbildung 3.4). Mit diesen Punkten als Stützstellen und entsprechenden Gewichten für die Integration kann die numerische Integration durchgeführt werden. Der daraus resultierende relative Fehler ist in Abbildung 3.5 im Vergleich zu dem der Gauß-Legendre-Integration in Abhängigkeit der Anzahl der verwendeten Punkte dargestellt. Es ist deutlich erkennbar, um wie viel schneller die Gauß-Jacobi-Integration mit steigender Punktzahl gegen den analytischen Integrationswert konvergiert.

Nachteil bei dieser Art der Integration ist für die XFEM, dass hier bei der Integration in x/y -Koordinaten nur rechteckige Höhenlinienverläufe, bei Integration in ξ/η -Koordinaten im x/y -Koordinatensystem nur geradlinige Höhenlinien und bei Verwendung von Polarkoordinaten eine kreisrunde Anordnung der Höhenlinien berücksichtigt werden kann. Hinzu kommen noch auftretende Probleme, die abknickende Risse im Bezug auf die Projektion der Elementkoordinaten mit sich bringen. Da aber die Funktionen in keinem der Koordinatensysteme die erforderlichen Bedingungen erfüllen, muss für die XFEM von dieser Art der Integration Abstand genommen werden.

Ein weiterer Nachteil dieser Integration ist, dass für $\alpha = -1$ bzw $\beta = -1$, also für Funktionen mit $\frac{1}{r}$, keine Stützstellen und damit keine Gewichte berechnet werden können. Es müsste also mit einer entsprechend geringerer Singularität integriert werden — eine Möglichkeit, die mit $q = 1$ und damit mit der Gauß-Legendre-Integration ohne Berücksichtigung einer Singularität sowieso zur Verfügung steht.

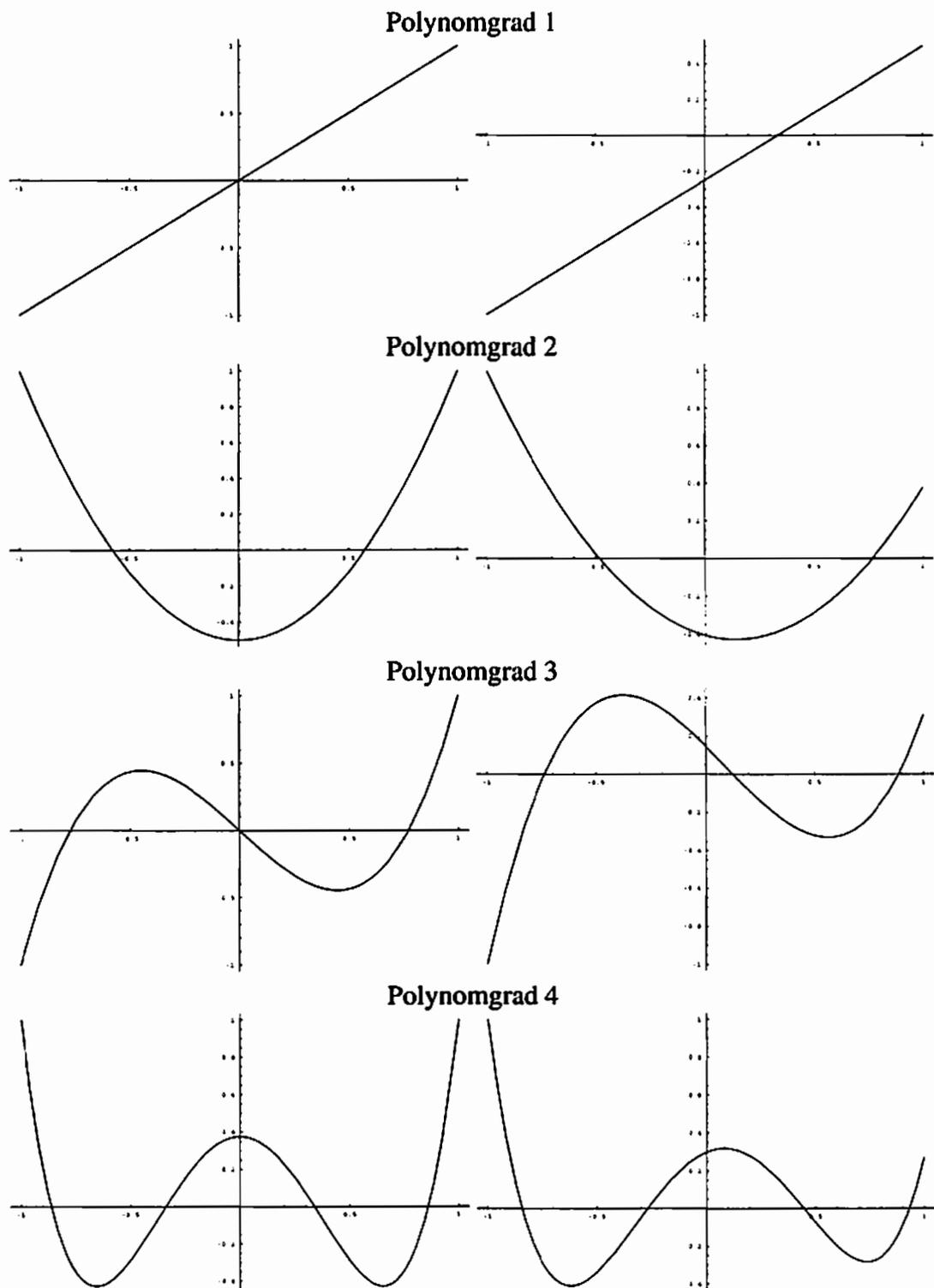


Abbildung 3.4.: Vergleich der Nullstellen im Bereich $x \in [-1, 1]$, links: Legendre-Polynome, rechts: Jacobi-Polynome mit $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = 0$

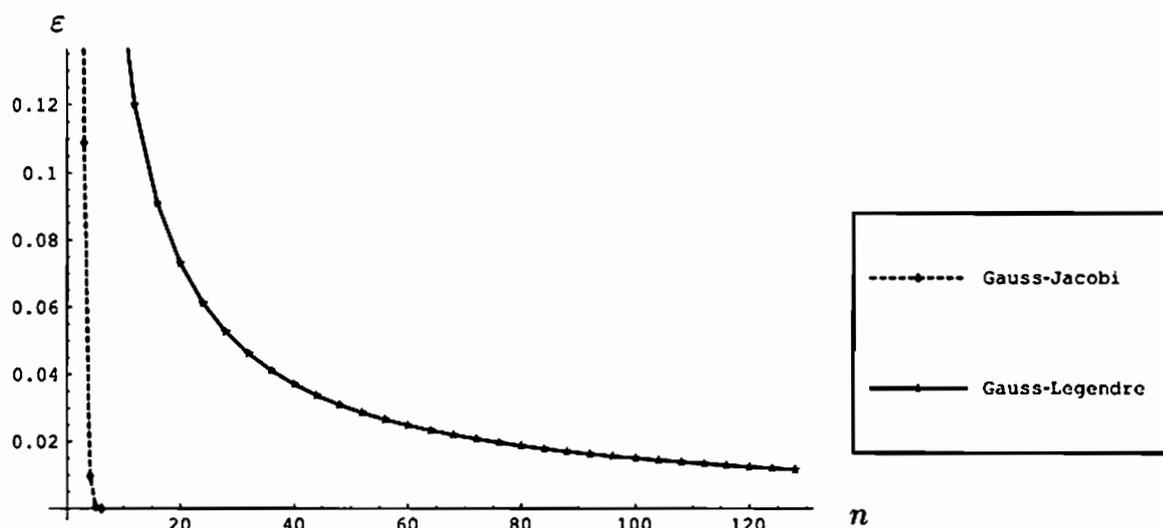


Abbildung 3.5.: Relativer Integrationsfehler der Gauß-Jacobi-Integration im Vergleich zur Gauß-Legendre-Integration

Fehlerschätzung und Verbesserung der numerischen Integration

Die in Abschnitt 3.2.1 genannten Verfahrensfehler sind ungeeignet, den Fehler abzuschätzen, da immer ein unbekannter Punkt innerhalb des Teilintervalls bzw. des Integrationsbereichs im analytischen Fehler enthalten ist. In den meisten Fällen reicht es vielleicht aus, zwei Integrationsergebnisse mit unterschiedlicher Anzahl von Stützstellen miteinander zu vergleichen und die Differenz als Fehlerschätzung zu benutzen. Sind allerdings beide Ergebnisse gleich falsch, wird der Fehler ebenfalls falsch und z.B. viel zu klein geschätzt.

Wird im analytischen Fehler anstelle der m -ten Ableitung der Funktion an einer unbekannt Stelle, das Maximum dieser Ableitung innerhalb des Intervalls zur Fehlerabschätzung benutzt, wird häufig von einem viel zu großen Wert ausgegangen und das Verfahren wird ineffektiv. Viel besser lässt sich die m -ten Ableitung an einer unbekannt Stelle abschätzen durch die Verwendung unterschiedlicher Verfahren mit dem gleichen Grad an Genauigkeit.

An dieser Stelle soll die Vorgehensweise für eine Integration in einer Dimension stellvertretend am Beispiel einer Simpson-Integration hergeleitet werden.

- Simpson-Integration über das gesamte Intervall

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_1 = \frac{1}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

mit dem Fehler $\epsilon_1 = -\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{90} \frac{(b-a)^5}{32}$

- Simpson-Integration über die linke Hälfte des Intervalls

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx \approx I_2 = \frac{1}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)$$

mit dem Fehler $\epsilon_2 = -\frac{f^{(4)}(\xi_2)}{90} \frac{(b-a)^5}{1024}$

- Simpson-Integration über die rechte Hälfte des Intervalls

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \approx I_3 = \frac{1}{6} \left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+b}{4}\right) + f(b) \right)$$

mit dem Fehler $\epsilon_3 = -\frac{f^{(4)}(\xi_3)}{90} \frac{(b-a)^5}{1024}$

Unter der Annahme, dass die Unterschiede der 4. Ableitung an den drei unbekanntenen Punkten ξ_1 , ξ_2 und ξ_3 nicht groß sind, lässt sich das Ergebnis so schreiben

$$\int_a^b f(x) dx = I_1 + \epsilon_1 = I_2 + I_3 + 2\epsilon_2. \quad (3.29)$$

Dieses Ergebnis lässt sich jetzt noch weiter umstellen

$$\int_a^b f(x) dx \approx I_2 + I_3 = I_n \quad \epsilon = \int_a^b f(x) dx - I_n \approx \frac{1}{15}(I_n - I_1). \quad (3.30)$$

Somit lässt sich der Fehler durch die Integrationsergebnisse abschätzen.

Für andere Integrationsverfahren auch in zwei Dimensionen oder Kombinationen aus unterschiedlichen Verfahren mit gleicher Integrationsordnung erfolgt diese Abschätzung analog, dann ggf. ohne Unterteilung des Integrationsgebiets (s. dazu auch in Kapitel 3.2.2 den Abschnitt *Adaptive Kombination aus Newton-Cotes-Formel und Gauß-Quadratur*). In 2D bietet dies den zusätzlichen Vorteil, dass nicht $\frac{d^m}{dy^m} \int_x f(x, \eta) dx$ (bzw. für vertauschte x und y) abgeschätzt werden muss.

Zusätzlich zur adaptiven Integration kann das Integrationsgebiet vor der Integration in Gebiete unterteilt werden, die vom Riss nicht mehr geschnitten werden bzw. die Risspitze auch nicht mehr enthalten. Dadurch enthalten die einzelnen Teilgebiete wieder stetige Funktionen. Leider führt das allerdings auch dazu, dass die Risspitze auf einem Eckpunkt mehrerer Teilgebiete liegt und somit eine Integration, die auf den Newton-Cotes-Formeln beruht, nicht mehr möglich ist. Sollen also die Newton-Cotes-Formeln angewendet werden, muss die Funktion ab einem endlichen Wert „abgeschnitten“ werden. Der so zusätzlich entstehende Fehler muss klein genug sein, so dass immer noch gilt

$$\epsilon_{\text{vorhanden}} \leq \epsilon_{\text{geschätzt}}. \quad (3.31)$$

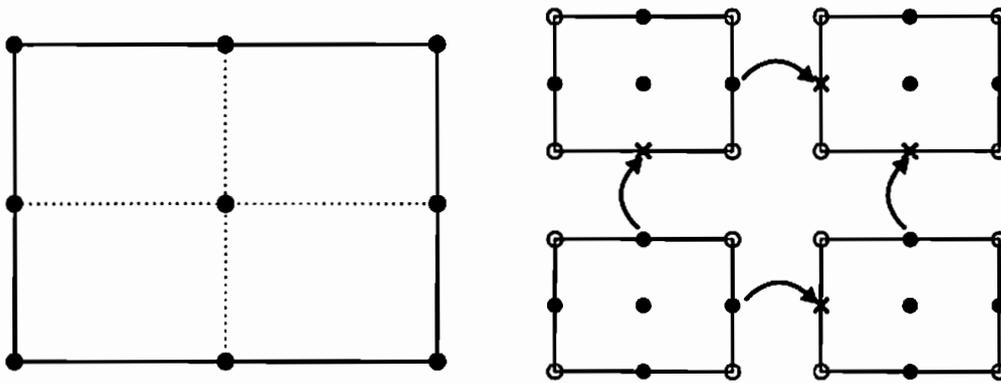


Abbildung 3.6.: Integrationspunkte der adaptiven 3-Punkt-Newton-Cotes-Formel

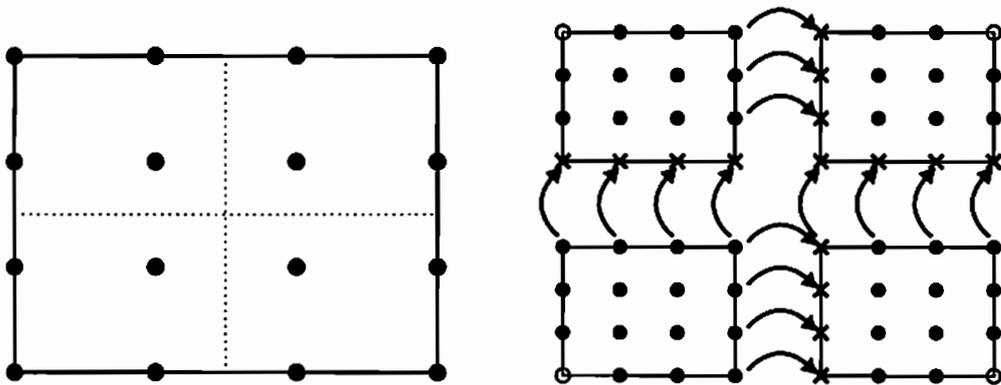


Abbildung 3.7.: Integrationspunkte der adaptiven 4-Punkt-Newton-Cotes-Formel

Adaptive Newton-Cotes-Formeln

Wie in Gleichung 3.30 angegeben, lässt sich der Integrationsfehler abschätzen durch die Verwendung mehrerer gleicher Integrationsverfahren ohne Kenntnis der Ableitungen der Funktion und auch ohne Wissen über die im Allgemeinen unbekannt Stelle, an der diese Ableitungen ausgewertet werden müssen. Dieses Vorgehen in Kombination mit einer adaptiven Integrationsgebietzerlegung bildet das hier dargestellte Verfahren. Dabei wird vor allem auf eine 3-Punkt- bzw. 5-Punkt-Newton-Cotes-Formel, mit einer Zerlegung der Gebiete in der Mitte des jeweiligen Integrationsbereichs (s. auch Abbildung 3.6), verwendet. Dabei ist zu beachten, dass sich die Punktzahl bei ungeraden Stützstellen weniger stark durch eine Gebietszerlegung erhöht, als das bei einer geraden Punktzahl der Fall ist (s. dazu auch Abbildung 3.7). Die in den Abbildungen dargestellten Punkte sind die Integrationspunkte des Verfahrens. Ausgefüllte Punkte stellen Punkte dar, an denen die Funktion ausgewertet werden muss. Kreise stellen die Punkte dar, an denen der Funktionswert aus der vorhergehenden Integration schon bekannt ist; Kreuze verweisen darauf, dass Werte an diesen Punkten auf gleicher Ebene schon berechnet wurden. Die Pfeile in den Abbildungen 3.6 und 3.7 weisen von den Punkten, an denen die Werte berechnet wurden auf die Stellen, an denen diese Werte erneut verwendet werden können.

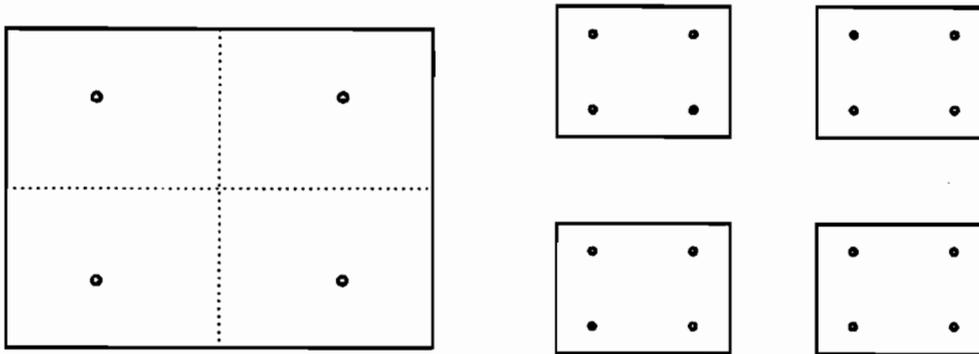


Abbildung 3.8.: Integrationspunkte der adaptiven 2-Punkt-Gauß-Integration

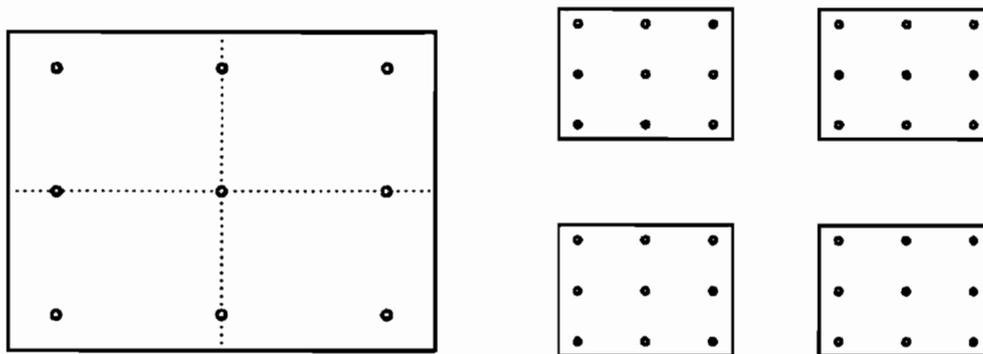


Abbildung 3.9.: Integrationspunkte der adaptiven 3-Punkt-Gauß-Integration

Adaptive Gauß-Integration

Mit dem gleichen Vorgehen kann für die Gauß-Quadratur der Fehler abgeschätzt und das Ergebnis verbessert werden. Dabei sind, im Gegensatz zur adaptiven Form der Newton-Cotes-Formeln, keine Funktionswerte an Stützstellen aus der übergeordneten Hierarchie wieder verwendbar. Für 2-Punkt- bzw. 3-Punkt-Gauß-Integrationen sind die benutzten Stützstellen in den Abbildungen 3.8 und 3.9 gekennzeichnet.

Adaptive Kombination aus Newton-Cotes-Formel und Gauß-Quadratur

Die Newton-Cotes-Formel und die Gauß-Quadratur können dann kombiniert werden, wenn die Verfahren die gleiche Integrationsordnung haben. Das ist z.B. bei der 5-Punkt-Newton-Cotes-Formel und der 3-Punkt-Gauß-Quadratur der Fall. In den folgenden Herleitung des Verfahrens für ein- und zwei-dimensionale Probleme steht der Index NC für die 5-Punkt-Newton-Cotes-Ergebnisse bzw. -Fehler und der Index G für die Ergebnisse und Fehler der 3-Punkt-Gauß-Legendre-Quadratur. In die Herleitungen fließt die Annahme ein, dass die Ableitungen der Funktion an den unbekanntenen Stellen sich vernachlässigbar unterscheiden und werden somit gleichgesetzt.

Die Newton-Cotes-Formel liefert das Ergebnis

$$\int_a^{a+h} f(x) dx \approx I_{NC} = \frac{h}{90} (7f_1 + 32f_2 + 12f_3 + 32f_4 + 7f_5) \quad (3.32)$$

mit dem Fehler

$$\epsilon_{NC} = \frac{h^7 f^{(6)}(\xi_{NC})}{1935360}. \quad (3.33)$$

Die Gauß-Quadratur liefert

$$\int_a^{a+h} f(x) dx \approx I_G = \frac{h}{18} (5f_1 + 8f_2 + 5f_3) \quad (3.34)$$

mit dem Fehler

$$\epsilon_G = \frac{1}{2016000} h^7 f^{(6)}(\xi_G). \quad (3.35)$$

Durch Gleichsetzen erhält man

$$I_G + \epsilon_G = I_{NC} + \epsilon_{NC}. \quad (3.36)$$

Einsetzen der Werte für ϵ_G und ϵ_{NC} und Umformen der Gleichung nach $f^{(6)}$ liefert unter der Annahme, dass sich die Ableitungen an den Punkten ξ_G und ξ_{NC} nicht unterscheiden

$$f^{(6)}(\xi) = \frac{-987429 (I_G + I_{NC})}{h^7}. \quad (3.37)$$

Wird diese Abschätzung nun in die Gleichung für ϵ_{NC} eingesetzt erhält man

$$\epsilon_{NC} = \frac{49}{25} (I_G - I_{NC}). \quad (3.38)$$

Dieses Ergebnis lässt sich wiederum benutzen, um das Newton-Cotes-Ergebnis zu verbessern, so dass Folgendes gilt:

$$\int_a^{a+h} f(x) dx \approx I_G \quad \hat{I}_{NC} = I_{NC} + \epsilon_{NC} \quad \epsilon_{G+NC} \approx I_G - \hat{I}_{NC}. \quad (3.39)$$

Das gleiche Vorgehen lässt sich für den zwei-dimensionalen Fall anwenden. Hier wird für die Newton-Cotes-Formeln allerdings nicht die sechste Ableitung selbst abgeschätzt, sondern zwei Integrale über die sechsten Ableitungen, die sich nach Gleichung 3.12 und Tabelle 3.1 ergeben. Gleiches gilt auch für die Gauß-Quadratur, so dass sich mit dem Vorgehen aus Abschnitt Fehlerberechnung und -abschätzung in Kapitel 3.2.1 der Fehler abschätzen lässt.

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} I_{NC} - \frac{8}{945} \left[\left(\frac{b_y - a_y}{4} \right)^7 \int_x \left(\frac{d}{dy} \right)^6 f dx + \left(\frac{b_x - a_x}{4} \right)^7 \int_y \left(\frac{d}{dx} \right)^6 f dy \right] \\ = I_G - \frac{1}{2016000} \left[(b_y - a_y)^7 \int_x \left(\frac{d}{dy} \right)^6 f dx + (b_x - a_x)^7 \int_y \left(\frac{d}{dx} \right)^6 f dy \right]. \quad (3.40) \end{aligned}$$

Mit der Annahme $[\dots]_{NC} \approx [\dots]_G$ lässt sich der Fehler der Newton-Cotes-Integration abschätzen:

$$\epsilon_{NC} = \frac{49}{25} (I_G - I_{NC}). \quad (3.41)$$

Auch hier lässt sich dann das Ergebnis für die Newton-Cotes-Formeln wie bei der 1D-Integration mit Gleichung 3.39 verbessern.

Analytische Integration eines Interpolationspolynoms

Eine ganz andere Art der Herangehensweise ist wiederum, die Integration nicht durch die oben dargestellten Verfahren, die für stetige Funktionen hergeleitet worden sind, durchzuführen, sondern eine Möglichkeit zu suchen, die diesen Nachteil „überwindet“. Dazu wird nicht die zu integrierende Funktion durch ein Interpolationspolynom approximiert, sondern eine Funktion, die den rationalen Teil der Funktion darstellt. Die analytische Integration wird dann für den Quotienten aus dem Interpolationspolynom und r^3 ermittelt. Diese Vorgehensweise ist auch in Gleichung 3.42 dargestellt.

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega = \int_{\Omega} \frac{f(x, y) r^3(x, y)}{r^3(x, y)} d\Omega \approx \int_{\Omega} \frac{g_n(x, y)}{r^3(x, y)} d\Omega \quad (3.42)$$

Darin sind:

$$g_n(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} L_i(x) L_j(y) \quad c_{ij} = f(x_i, y_j) r^3(x, y) \quad (3.43)$$

wobei $L_i(x)$ und $L_j(y)$ die Lagrange-Polynome bezeichnen.

3.2.3. Vergleich der Integrationsverfahren anhand von Beispielen

Der hier durchgeführte Vergleich der Integrationsmethoden stellt nur die Integration einzelner Funktionen dar. Eine Integration von Vektorfunktionen, die während der XFEM durch die Integration der Steifigkeitsmatrix durchgeführt wird, bleibt in dieser Betrachtung unberücksichtigt. Nähere Informationen dazu und ein Vergleich mit einer Integrationsmethode, die auf einem Extrapolationsverfahren beruht, ist in (Peters and Hackl 2005) zu finden.

Für die im Folgenden integrierten Funktionen zum Vergleich der Verfahren sind die Funktionen F_i definiert als die Rissspitzenfunktionen nach Gleichung 2.85 und die Funktionen N_i repräsentieren die bi-linearen Formfunktionen, die zum i -ten Knoten des Elements gehören. Darüber hinaus gilt

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.44)$$

und

$$\varphi(x, y) = \arctan(x, y). \quad (3.45)$$

Die Integrationsbereiche sind so gewählt, dass die Singularität nicht in der Mitte des Integrationsbereichs liegt, da das in der XFEM, worauf diese Untersuchung abzielt, nur in

Ausnahmefällen vorkommt. Einzige Ausnahme bildet die erste Funktion mit $f(x) = \frac{1}{r(x,y)}$. Sie zeigt, dass auch für diesen Fall die Integration durchgeführt werden kann.

Die numerischen Ergebnisse zu jeder Funktion sind mit den Integrationsmethoden

1. adaptive Simpson-Integration
2. adaptive 3-Punkt-Gauß-Integration
3. adaptive 4-Punkt-Gauß-Integration
4. adaptive Kombination aus 5-Punkt-Newton-Cotes-Integration und 3-Punkt-Gauß-Quadratur

berechnet worden für unterschiedliche Werte des maximal zulässigen relativen Fehlers $\varepsilon_{rel} = 10^{-i}$, $i = 1, \dots, 6$. In den Abbildungen 3.10-3.21 wird zum einen das Verhältnis der Fehler mit

$$\varepsilon = \max\left(\left|\frac{\varepsilon_{vorh}}{\varepsilon_{geschätzt}}\right|, \left|\frac{\varepsilon_{geschätzt}}{\varepsilon_{rel}}\right|\right) \quad (3.46)$$

und zum Anderen die Anzahl der Integrationspunkte, die in den jeweiligen Integrationsverfahren verwendet werden, dargestellt. Dabei ist ε_{rel} der vom Benutzer vorgegebene maximal zulässige relative Fehler.

Die dargestellten Balken für die Verhältnisse der Fehler sind weiß gefüllt, wenn die Bedingung

$$\varepsilon \leq 1 \quad (3.47)$$

erfüllt ist. Das bedeutet, dass

$$\varepsilon_{rel} \geq \varepsilon_{geschätzt} \geq \varepsilon_{vorh} \quad (3.48)$$

gilt. Der Balken grau dargestellt, falls die Abweichung maximal 3% ist, also die Bedingung

$$1 < \varepsilon \leq 1.03 \quad (3.49)$$

erfüllt ist. Ist der Fehler in der Integrationsroutine größer, sind die Balken der Ergebnisse schwarz.

Für die Berechnung der Ergebnisse der hier dargestellten Beispiele ist die maximale Integrationspunktanzahl für alle Verfahren auf $1.25 \cdot 10^6$ beschränkt.

Integration der Funktion $f_1(x, y)$

Die analytische Integration der Funktion

$$f_1(x, y) = \frac{1}{r(x, y)}$$

im Bereich $(x, y) \in [-1; 1]^2$ ergibt

$$\int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^1 f_1(x, y) dx = 7.0509887. \quad (3.50)$$

Die Ergebnisse der numerischen Integrationen sind in den Abbildungen 3.10 und 3.11 dargestellt.

Integration der Funktion $f_2(x, y)$

Die zu integrierende Funktion bildet die Ableitung der ersten Rissspitzenfunktion der XFEM in x-Richtung

$$f_2(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} (F_1(x, y)) \right)^2.$$

Durch Vereinfachungen ergibt sich folgende Funktion

$$f_2(x, y) = \frac{r(x, y) - x}{8 r(x, y)^2}. \quad (3.51)$$

Die analytische Integration der Funktion $f_2(x, y)$ im Bereich $(x, y) \in [-1.01; 1]^2$ ergibt

$$\int_{x=-1.01}^1 \int_{y=-1.01}^1 f_2(x, y) dx = 0.88773515. \quad (3.52)$$

Die Ergebnisse der numerischen Integrationen sind in den Abbildungen 3.12 und 3.13 dargestellt.

Integration der Funktion $f_3(x, y)$

Die zu integrierende Funktion entsteht aus der bi-linearen Formfunktion für den Knoten 1 und der ersten Rissspitzenfunktion mit

$$f_3(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (N_1(x, y) F_1(x, y)).$$

Durch Einsetzen der Funktionen N_1 und F_1 und Umformen ergibt sich die Funktion nach ein paar Vereinfachungen zu

$$f_3(x, y) = \frac{(-1 + y) \left(-((-1 + x) y \cos(\frac{\pi}{2})) + (x(-1 + 3x) + 2y^2) \sin(\frac{\pi}{2}) \right)}{8 (r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.53)$$

Die analytische Integration der Funktion $f_3(x, y)$ im Bereich $(x, y) \in [-1.01; 1]^2$ ergibt

$$\int_{x=-1.01}^1 \int_{y=-1.01}^1 f_3(x, y) dx = 0.54239955. \quad (3.54)$$

Die Ergebnisse der numerischen Integrationen sind in den Abbildungen 3.14 und 3.15 dargestellt.

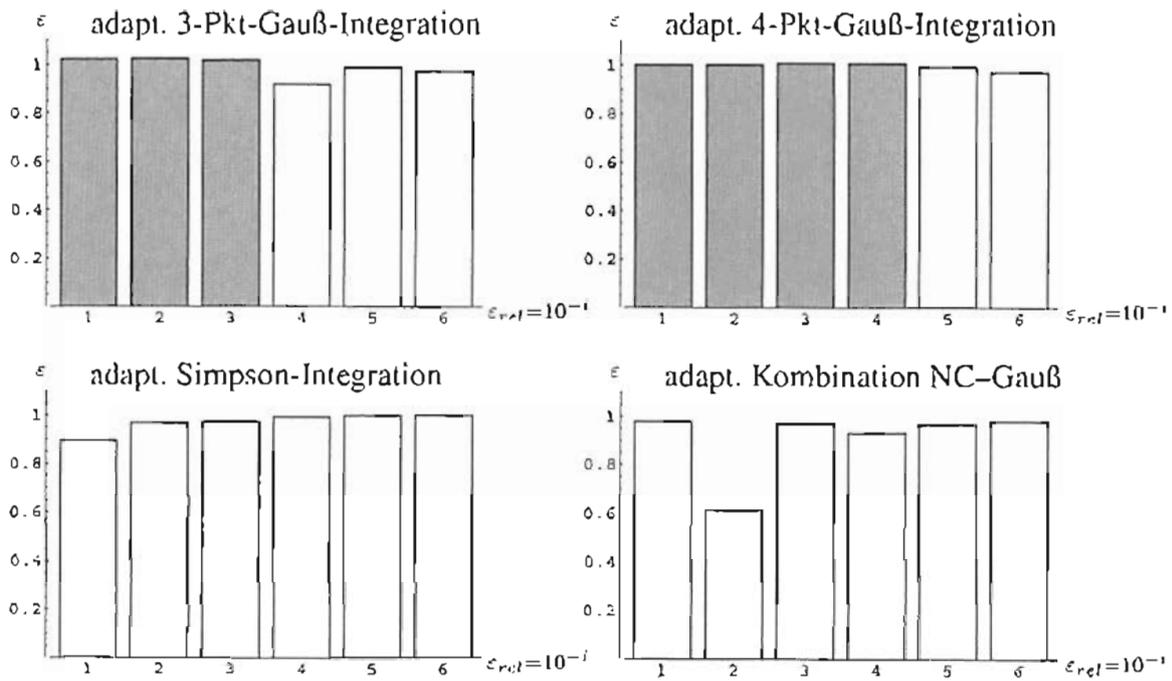


Abbildung 3.10.: ε nach Gleichung 3.46 für das Integral aus Gleichung 3.50

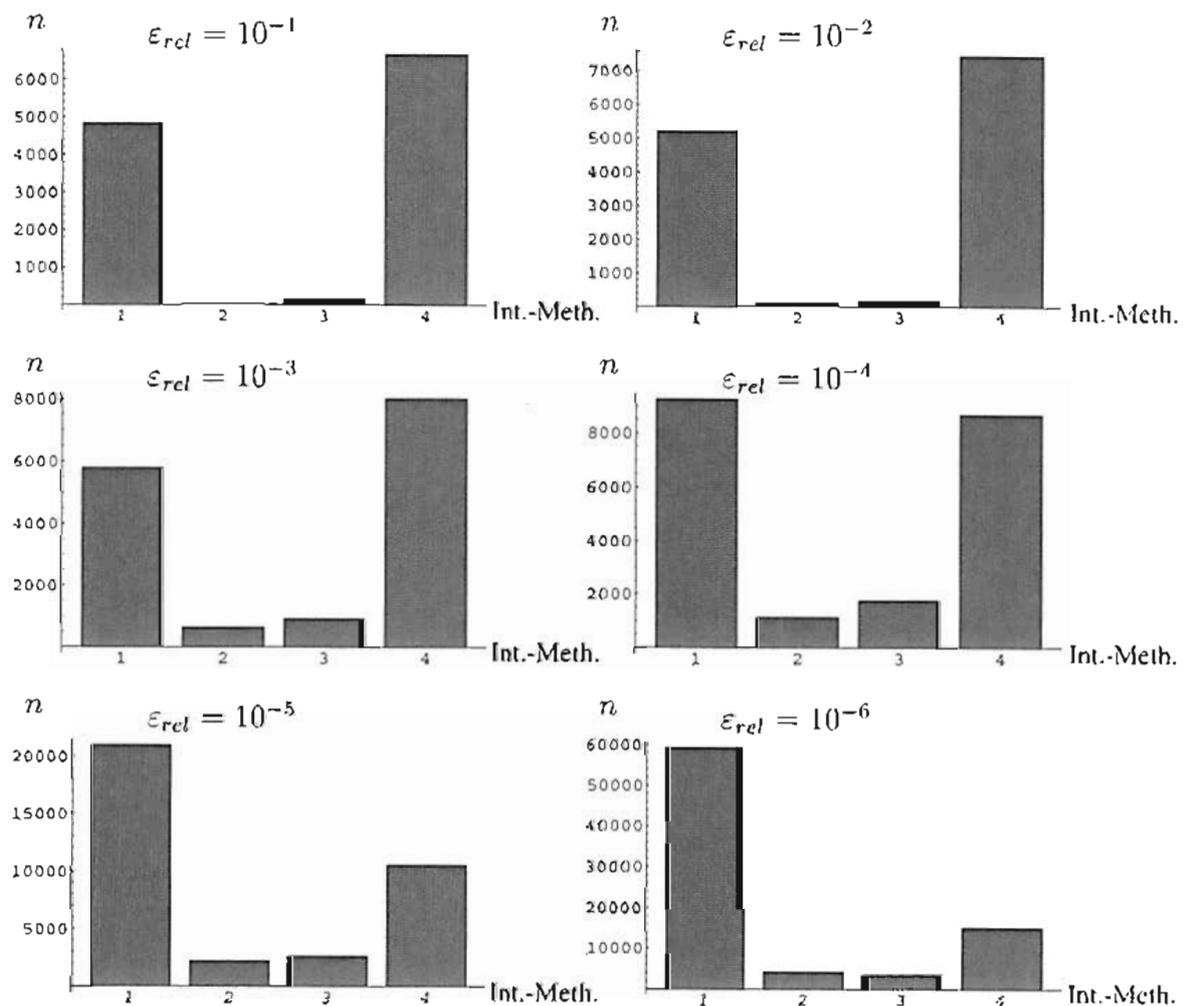


Abbildung 3.11.: Anzahl der Integrationspunkte für das Integral aus Gleichung 3.50

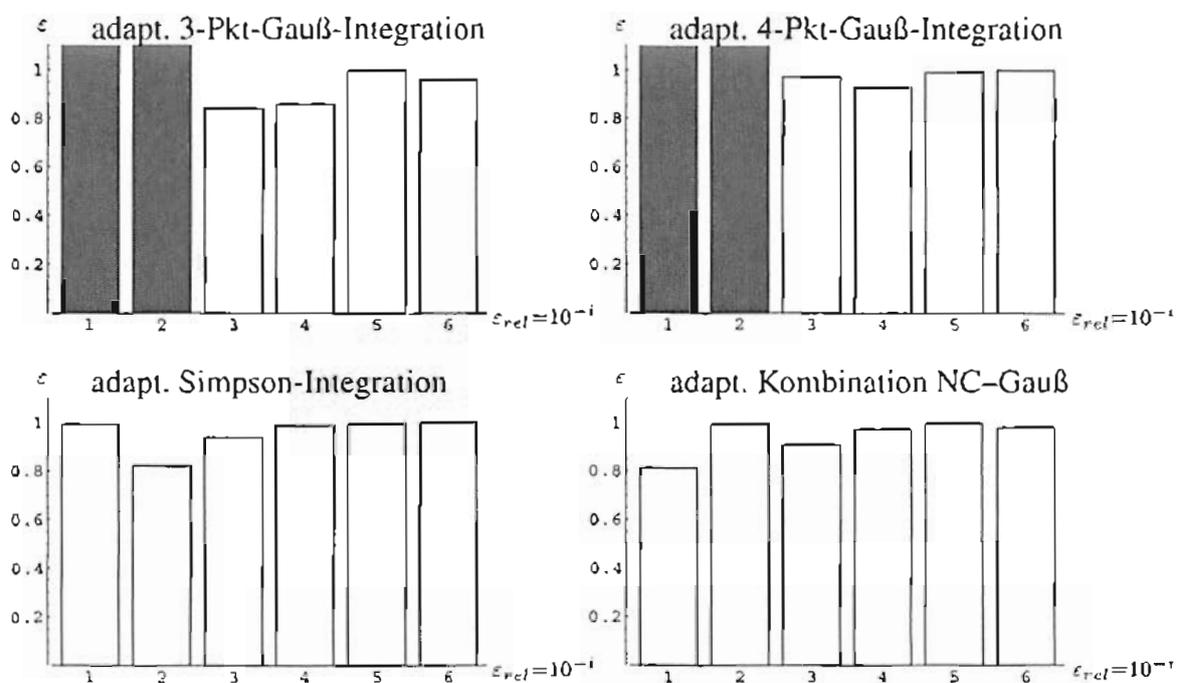


Abbildung 3.12.: ϵ nach Gleichung 3.46 für das Integral aus Gleichung 3.52

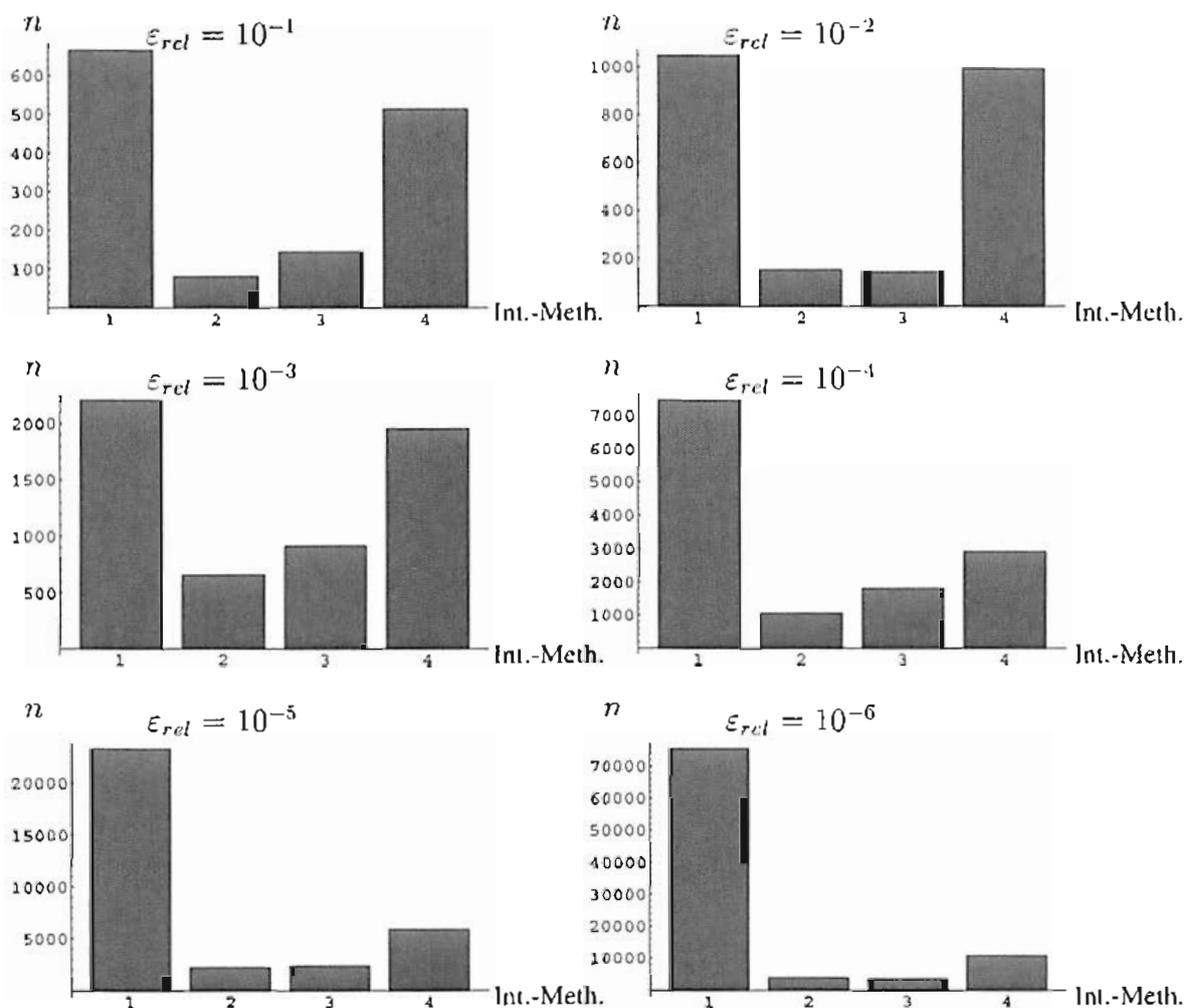


Abbildung 3.13.: Anzahl der Integrationspunkte für das Integral aus Gleichung 3.52

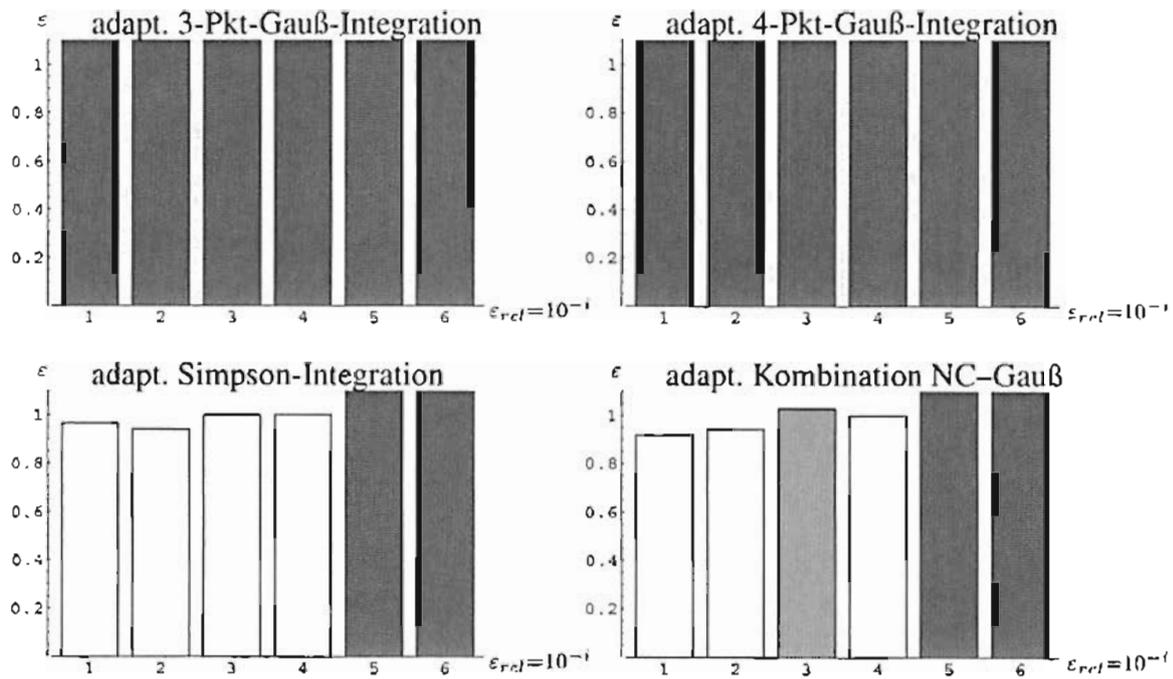


Abbildung 3.14.: ε nach Gleichung 3.46 für das Integral aus Gleichung 3.54

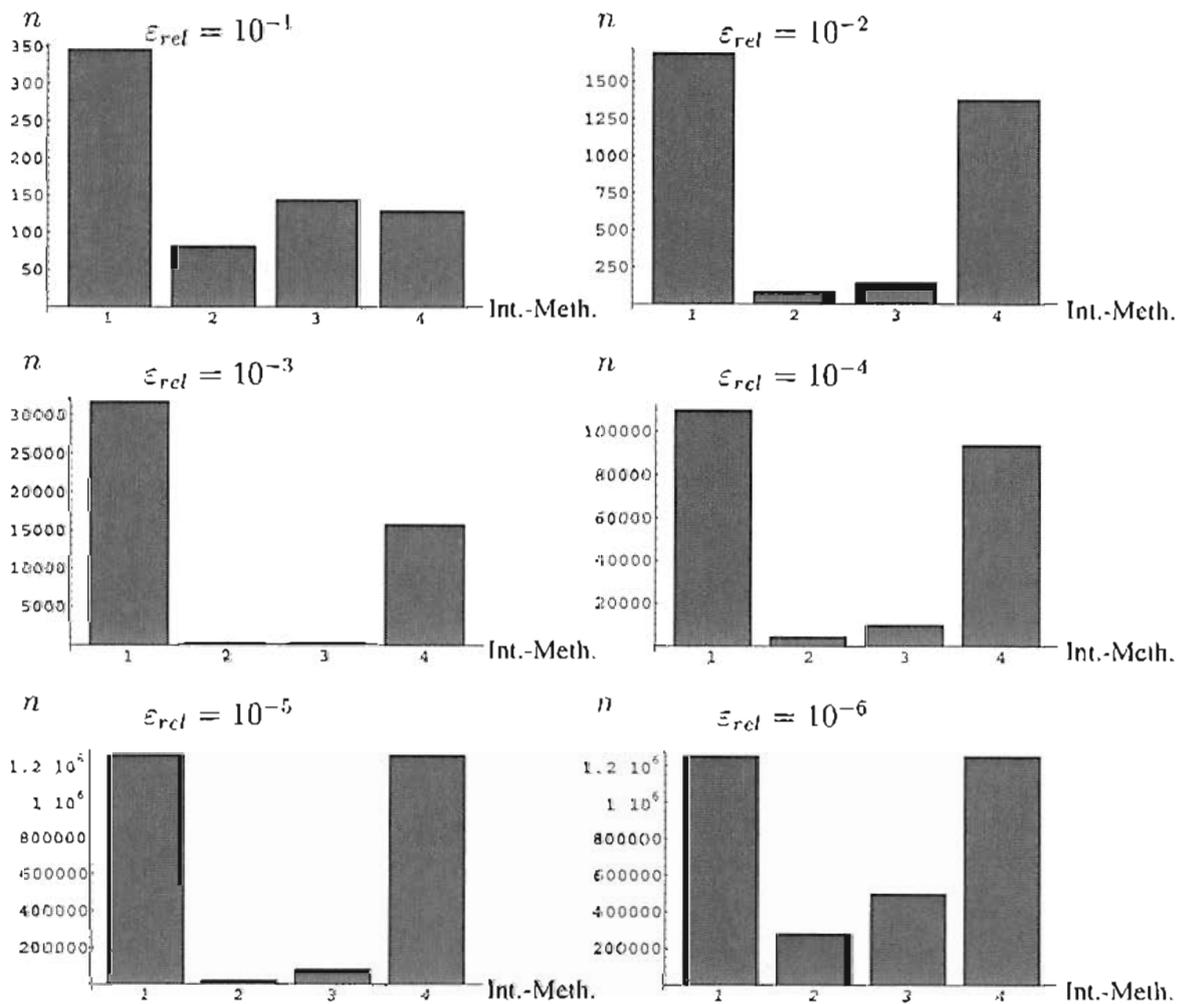


Abbildung 3.15.: Anzahl der Integrationspunkte für das Integral aus Gleichung 3.54

Integration der Funktion $f_4(x, y)$

Die zu integrierende Funktion entsteht aus dem Quadrat der Funktion $f_3(x, y)$

$$f_4(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (N_1(x, y)F_1(x, y))^2.$$

Es ergibt sich dadurch folgende Funktion

$$f_4(x, y) = \frac{(-1 + y)^2 \left((-1 + x) y \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + (x - 3x^2 - 2y^2) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right)^2}{64 (r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.55)$$

Die analytische Integration der Funktion $f_4(x, y)$ im Bereich $(x, y) \in [-1.01; 1]^2$ ergibt

$$\int_{x=-1.01}^1 \int_{y=-1.01}^1 f_4(x, y) dx = 0.49637119 \quad (3.56)$$

Die Ergebnisse der numerischen Integrationen sind in den Abbildungen 3.16 und 3.17 dargestellt.

Integration der Funktion $f_5(x, y)$

Die zu integrierende Funktion entsteht aus den bi-linearen Formfunktionen für die Knoten 1 und 3 und der ersten Rissspitzenfunktion in folgender Form:

$$f_5(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (N_1(x, y)F_1(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} (N_3(x, y)F_1(x, y)).$$

Berechnung der Ableitung und Vereinfachung führt zur Funktion

$$f_5(x, y) = \frac{-(((-1 + y^2) (-((x^2 + y^2) (-1 + 9x^2 + 4y^2)) + r x (-1 + 9x^2 + 8y^2)))}{128 (r^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.57)$$

Die analytische Integration der Funktion $f_5(x, y)$ im Bereich $(x, y) \in [-1.01; 1]^2$ ergibt

$$\int_{x=-1.01}^1 \int_{y=-1.01}^1 f_5(x, y) dx = -0.058125164. \quad (3.58)$$

Die Ergebnisse der numerischen Integrationen sind in den Abbildungen 3.18 und 3.19 dargestellt.

Integration der Funktion $f_6(x, y)$

Die zu integrierende Funktion entsteht aus

$$f_6(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (N_3(x, y)F_3(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} (N_2(x, y)F_4(x, y)) + \frac{\partial}{\partial y} (N_3(x, y)F_3(x, y)) \frac{\partial}{\partial y} (N_2(x, y)F_4(x, y)).$$

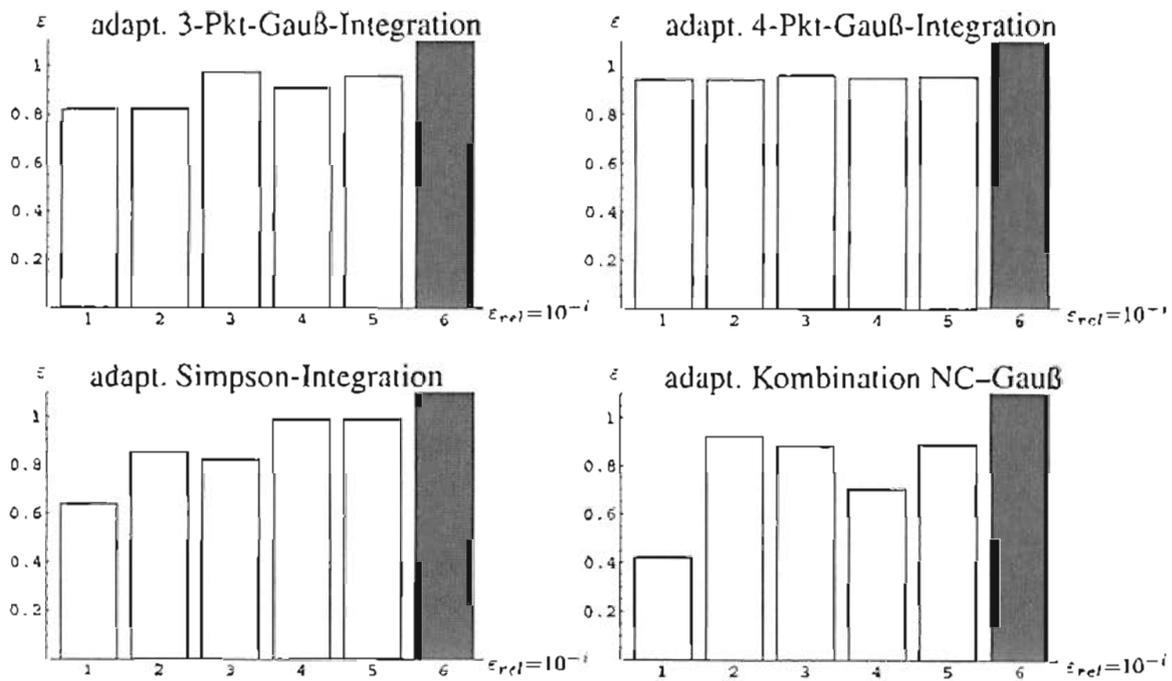


Abbildung 3.16.: ε nach Gleichung 3.46 für das Integral aus Gleichung 3.56

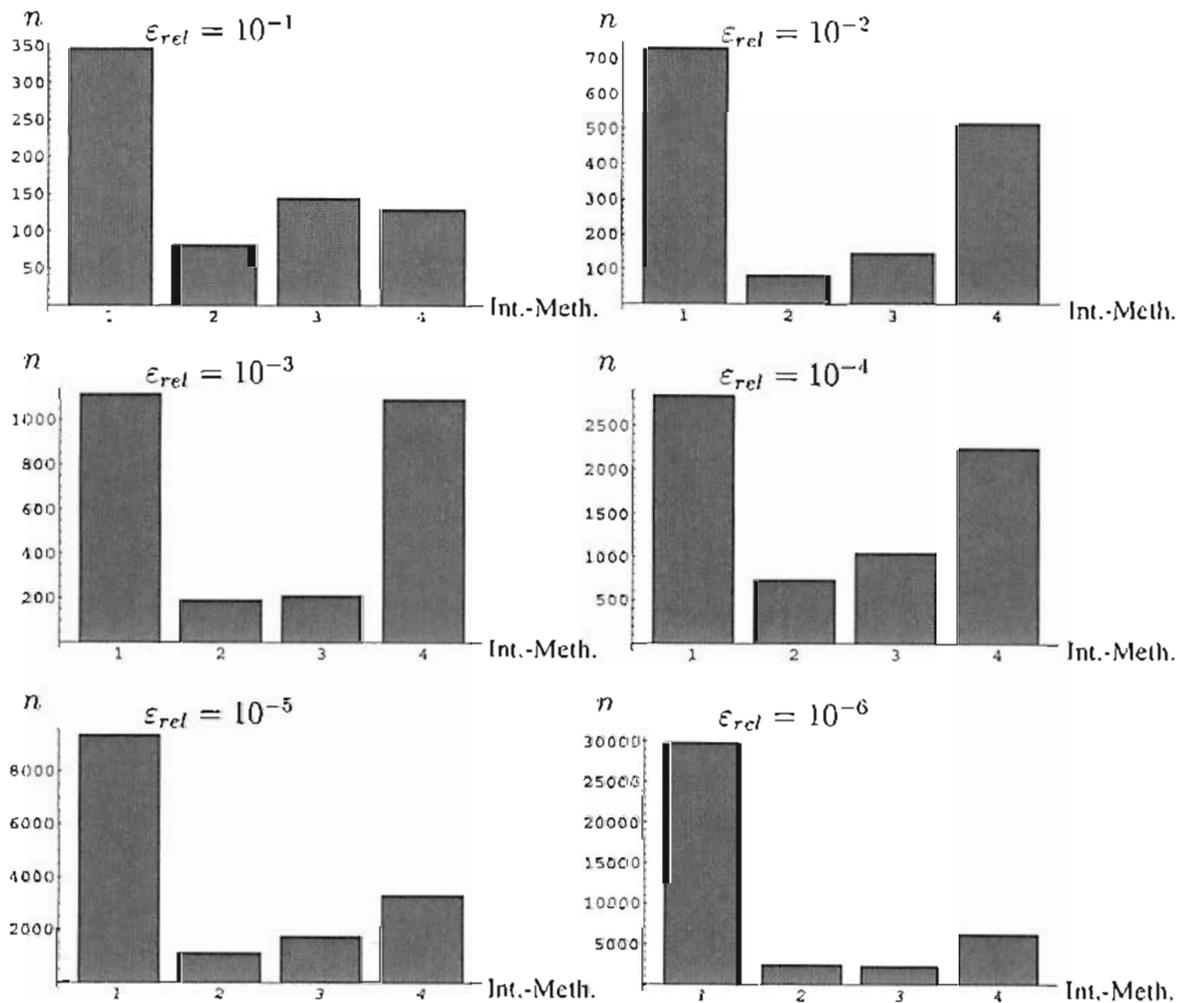


Abbildung 3.17.: Anzahl der Integrationspunkte für das Integral aus Gleichung 3.56

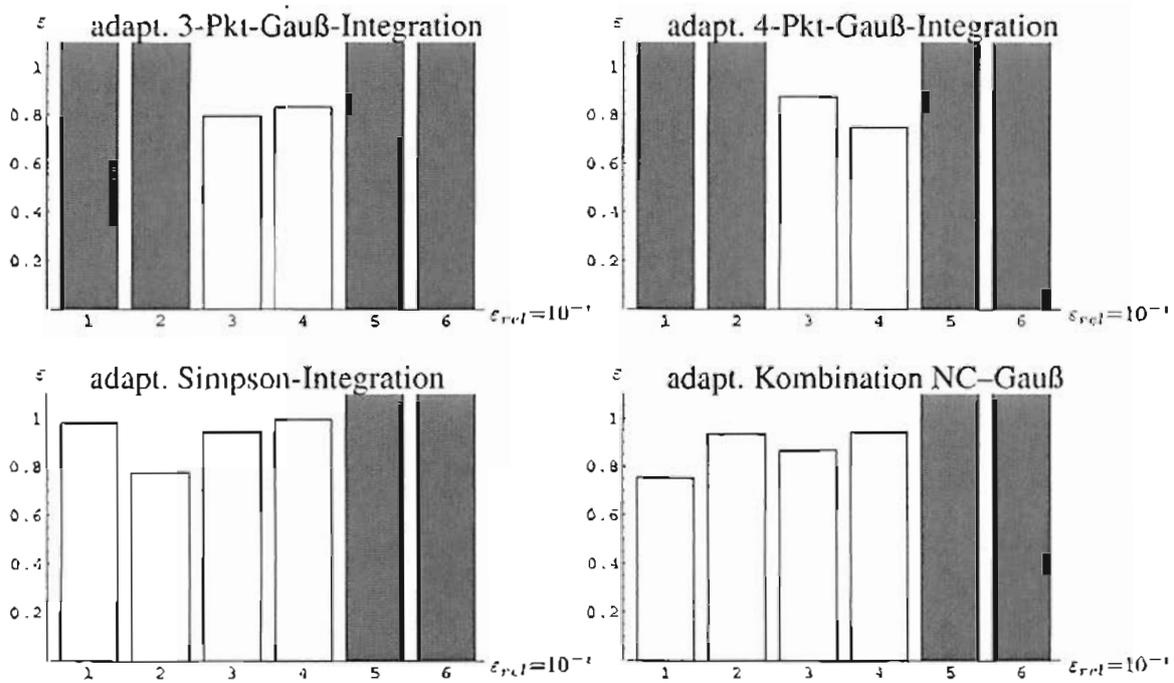


Abbildung 3.18.: ε nach Gleichung 3.46 für das Integral aus Gleichung 3.58

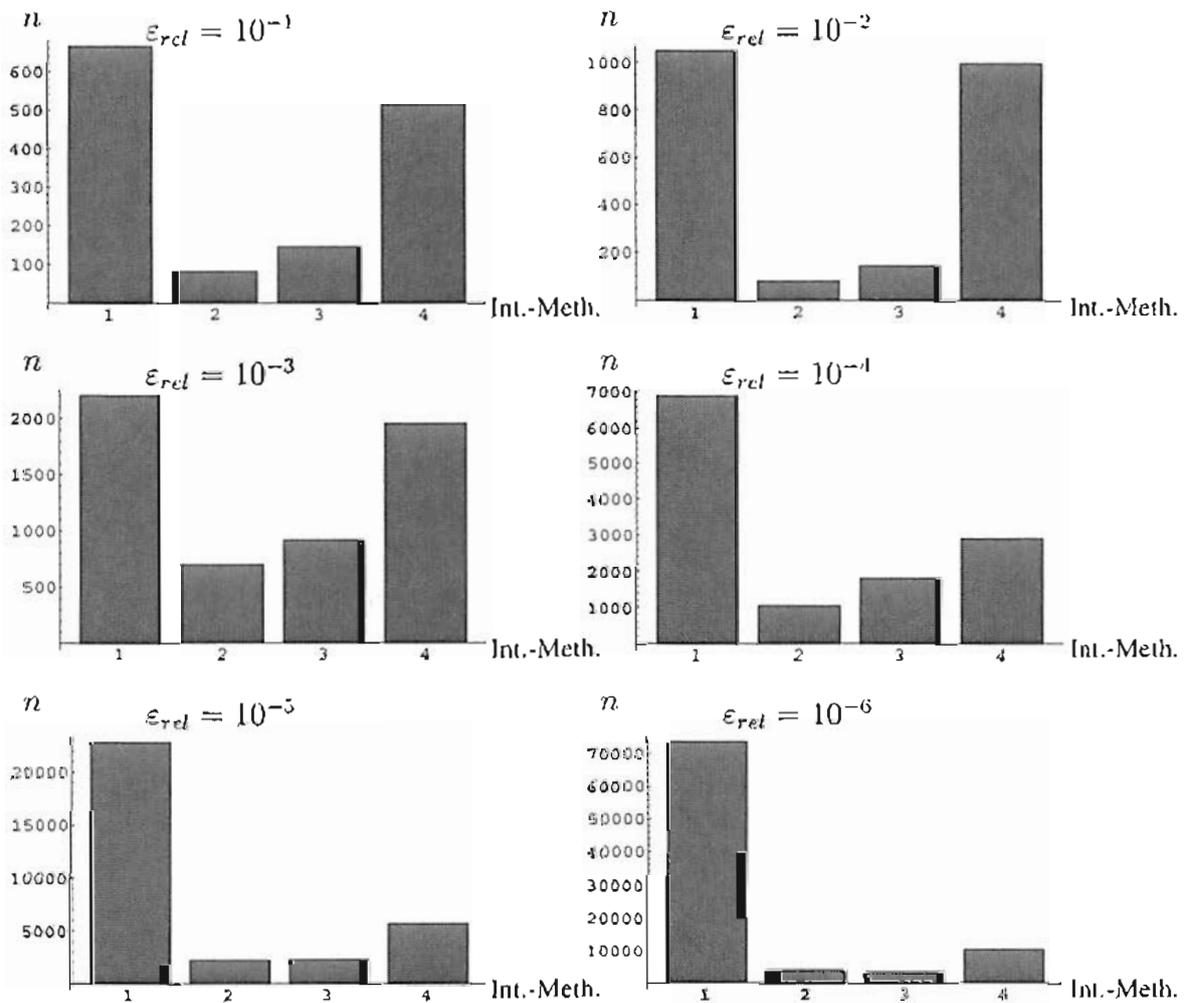


Abbildung 3.19.: Anzahl der Integrationspunkte für das Integral aus Gleichung 3.58

Durch Einsetzen der entsprechenden Funktionen, Umformen und Vereinfachen ergibt sich

$$f_6(x, y) = \frac{y}{32r^4} (2x^2(1+x)^2 - rx(1+x)^2y - x(2+x(7+6x(2+x)))y^2 - (1+x)^2y^4 - y^6). \quad (3.59)$$

Die analytische Integration der Funktion $f_6(x, y)$ im Bereich $x \in [-1.02; 1]$ und $y \in [-1.01; 1]$ liefert

$$\int_{x=-1.02}^1 \int_{y=-1.01}^1 f_6(x, y) dx = -0.027713772. \quad (3.60)$$

Die Ergebnisse der numerischen Integrationen sind in den Abbildungen 3.20 und 3.21 dargestellt.

3.2.4. Ergebnisdiskussion

Die Beispiele zeigen deutlich, dass alle Verfahren sowohl Vorteile bieten als auch Nachteile haben.

- Die adaptive Simpson-Integration ist in ihrer einfachsten Form sehr leicht zu implementieren, benötigt aber, da sie auf einer Interpolation mit niedriger Ordnung beruht, viele Integrationspunkte, um die gewünschte Genauigkeit zu erreichen. Die Anzahl der Punkte kann durch eine aufwendigere Programmierung reduziert werden, da dann häufig die Funktionswerte nicht mehr berechnet werden müssen, sondern schon vorliegen. Durch den hohen Bedarf an Integrationspunkten, ist dieses Verfahren allerdings sehr speicherintensiv. Mit Hilfe der adaptiven Simpson-Integration können jedoch alle hier dargestellten Funktionen bis zu einem vorgegebenen relativen Fehler von 10^{-4} berechnet werden, so dass ein brauchbares Ergebnis vorliegt.
- Die adaptive 3- bzw. 4-Punkt-Gauß-Integration ist deutlich einfacher zu implementieren als die aufwendigere Version der adaptiven Simpson-Integration, da bei den adaptiven Gauß-Verfahren die Integrationspunkte nicht erneut genutzt werden können, und somit neben der Programmierarbeit auch der große Speicherbedarf entfällt. Da die Gauß-Quadratur mit wenigen Punkten einen hohen Grad an Genauigkeit erreicht, kann das Integrationsergebnis in der vorgestellten adaptiven Form besonders schnell erzielt werden. Die Ergebnisse zeigen aber, dass der Verfahrensfehler gerade bei niedrigen Anforderungen häufig zu klein abgeschätzt wird und somit kein sinnvolles Integrationsergebnis erzielt werden. Steigt allerdings die geforderte Genauigkeit, sind die Verfahren in der Lage, im Vergleich zu den anderen Methoden mit sehr wenigen Integrationspunkten ein gutes Ergebnis zu liefern.
- Die adaptive Kombination aus 5-Punkt-Newton-Cotes-Formel und 3-Punkt-Gauß-Quadratur kann wie die adaptive Simpson-Regel in den beiden Variationen programmiert werden, wobei bei dieser Kombination nur die Ergebnisse an den Punkten der Newton-Cotes-Formel wiederverwendet werden können. Das führt dazu, dass die adaptive Simpson-Integration vor allem bei geringen Anforderungen an die Genauigkeit

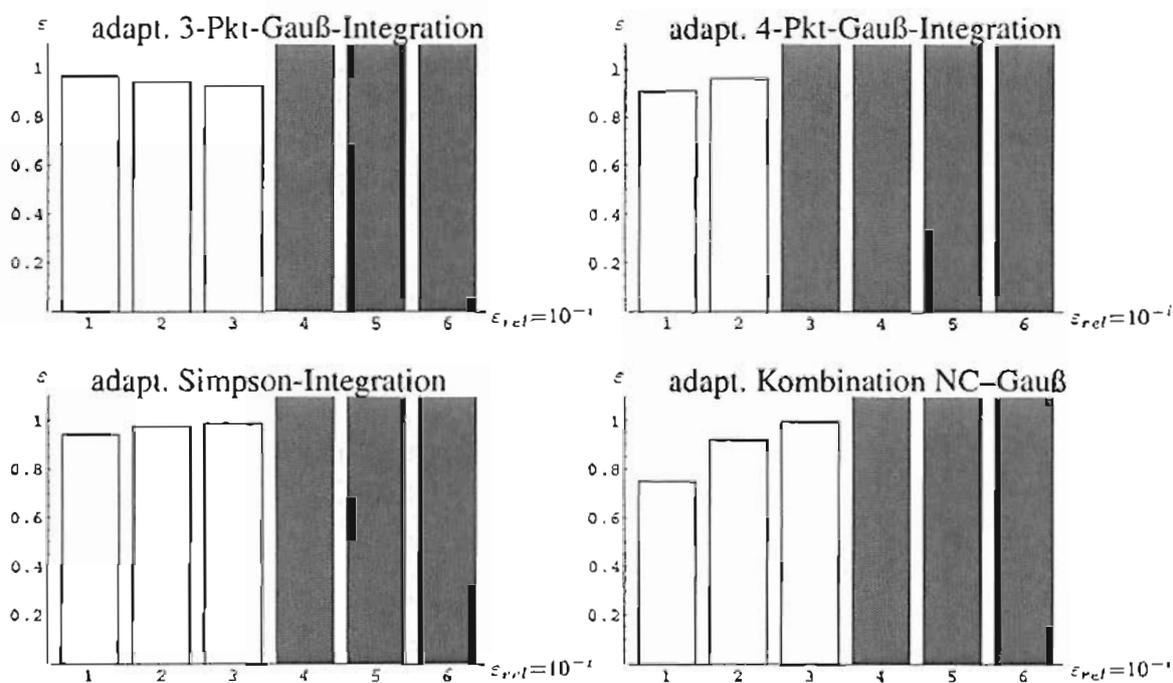


Abbildung 3.20.: ε nach Gleichung 3.46 für das Integral aus Gleichung 3.60

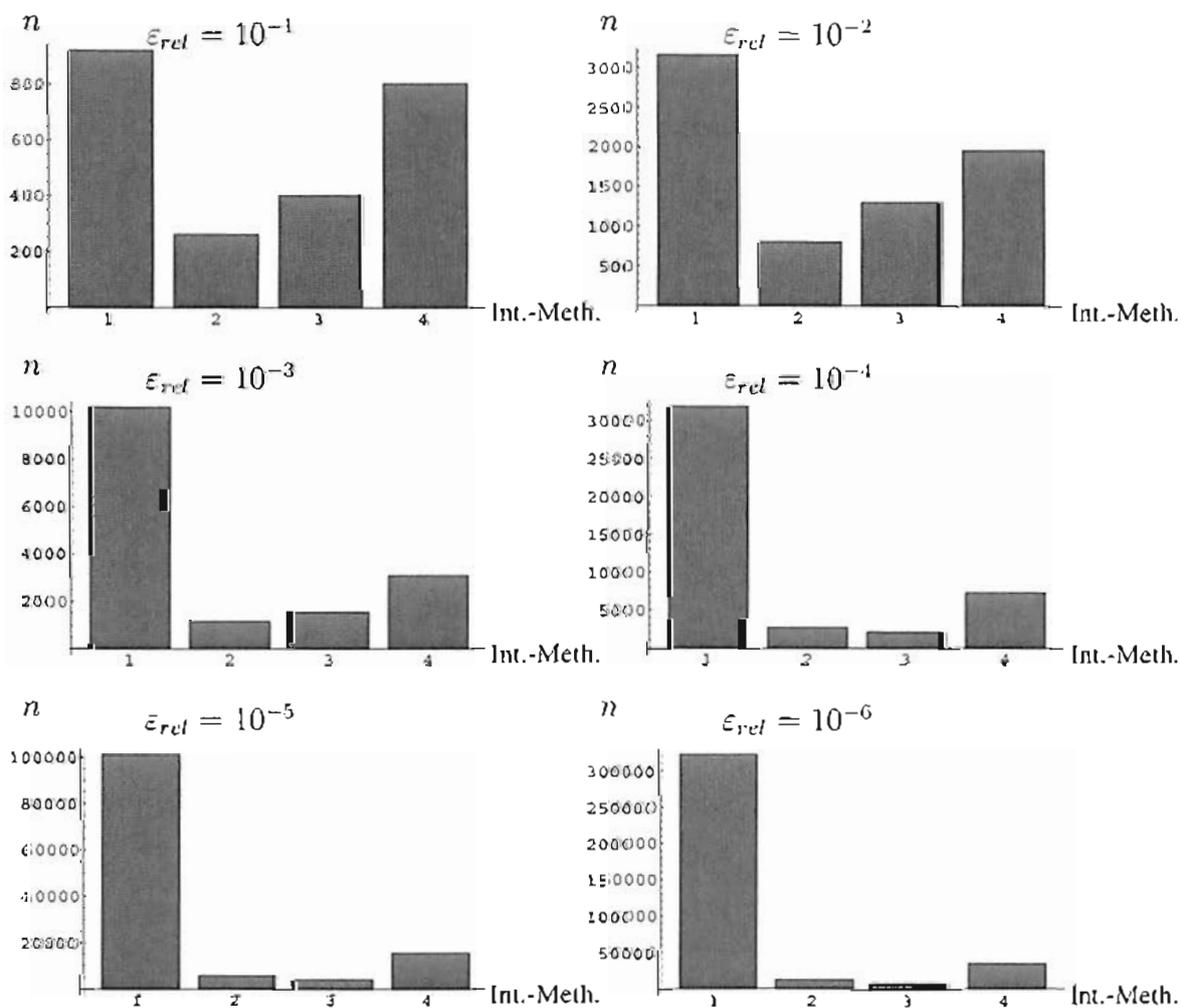


Abbildung 3.21.: Anzahl der Integrationspunkte für das Integral aus Gleichung 3.60

des Ergebnisses schneller durchgeführt werden kann. Der steigende Bedarf an Integrationspunkten ist bei wachsenden Anforderungen an die Genauigkeit für die adaptive Newton-Cotes-Gauß-Kombination wesentlich geringer als für die adaptive Simpson-Integration. Und auch der Fehlerschätzer ist für die Newton-Cotes-Gauß-Kombination genauer, so dass das Ergebnis besser approximiert und damit häufig schneller erreicht werden kann.

Das in der XFEM am Besten einsetzbare Verfahren hängt also nicht zuletzt auch davon ab, welche Genauigkeit erreicht werden soll. Nicht nur für die beispielhaft dargestellten Funktionen, sondern auch im Vergleich mit den Ergebnissen aus (Peters and Hackl 2005) und der Berücksichtigung des Fakts, dass die numerische Integration in einer FE-Berechnung im Allgemeinen keinen relativen Fehler von z.B. 10^{-6} erforderlich macht, ist die adaptive Kombination aus 5-Punkt-Newton-Cotes-Integration und 3-Punkt-Gauß-Quadratur als Integrationsmethode zu empfehlen.

4. XFEM mit höherwertigen Polynomen

In diesem Kapitel werden zu Anfang die Grundlagen der p-Methode der FEM mit unterschiedlichen Basen erläutert (s. auch (Zienkiewicz and Taylor 1989; Szabo and Babuska 1991)), um dann an zwei Beispielen die p-Methode der XFEM und die Differenzen in Ergebnissen darzustellen. Die in den Beispielen gezeigten Phänomene werden in einem dritten Abschnitt weiter beleuchtet und es wird herausgestellt, inwieweit sich allein die Wahl der Basis auf die Ergebnisse in der XFEM auswirkt.

4.1. Allgemeines zur p-Methode der FEM

Die allgemeine Form der Finite-Elemente-Methode ist nach Gleichung 2.60

$$\hat{u} = \sum N_i^e u_i^e.$$

Die darin enthaltenen Formfunktionen N können mit unterschiedlichen Polynomgraden realisiert werden. Für diesen Zweck werden hauptsächlich Lagrange-Polynome verwendet. Der Funktionswert dieser Funktionen ist an einem Punkt Eins und an allen anderen Punkten, für die das Polynom aufgestellt wurde, Null. Dadurch kann u_i^e als Knotenverschiebung interpretiert werden. Weiter gilt für die Funktionen

$$\sum_i N_i = 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

Ferner können alle Funktionen bis zum gewählten Polynomgrad exakt dargestellt werden (vgl. dazu die Berechnung eines Interpolationspolynoms z.B. in Abschnitt 3.2.2). Diese Formfunktionen können durch

$$N_{ij}^n(\mathbf{x}) = L_{in}(x)L_{jn}(y), \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

berechnet werden. Die darin enthaltenen Lagrange-Polynome L_{in} sind in Gleichung 3.14 definiert.

Für die Integration der Steifigkeitsmatrix in der XFEM ergibt sich hierbei jedoch der Nachteil, dass alle Formfunktionen N den gleichen Polynomgrad haben und damit für alle Integrationen mit den Ableitungen von $N_k F_l$ hohe Anforderungen an das Integrationsverfahren gestellt werden. Dieser Nachteil kann durch die Wahl einer anderen Basis umgangen werden (und wie später dargestellt auch andere Nachteile im Bezug auf die XFEM). Für die Wahl der Basis müssen lediglich Funktionen gefunden und benutzt werden, die alle Funktionen bis zum gewählten Polynomgrad exakt darstellen können. Aus dieser Überlegung heraus können z.B. die hierarchischen Formfunktionen benutzt werden. Dabei werden Funktionen mit niedrigem Polynomgrad beibehalten und für jeden Polynomgrad nur die Funktionen definiert, die für die Darstellung des höheren Grades noch fehlen. Daraus resultieren für die Betrachtung von zwei Dimensionen

- *nodal modes*, *vertex modes* oder *basic modes* die bi-linearen Formfunktionen.
- *edge modes* bzw. *side modes* Formfunktionen, die auf einem Rand mit dem „neuen“ Polynomgrad definiert sind und senkrecht zu dieser Kante linear verlaufen.
- *bubble modes* oder *internal modes* Formfunktionen, die im Inneren des Elements definiert sind, auf dem Rand aber den Funktionswert Null haben.

Eine Eigenschaft der hierarchischen Basis ist, dass die Summe aller Formfunktionen nicht mehr den Wert Eins ergibt; zur Darstellung einer konstanten Funktion müssen nur die vier bi-linearen Funktionen herangezogen werden — im Gegensatz dazu werden bei der Standard-Basis alle Formfunktionen benötigt. Nachteil bei der Wahl einer hierarchischen Basis in der FEM ist jedoch, dass die Knotenwerte nicht mehr als Verschiebungswerte interpretiert werden können, sondern nur einen Anteil an der Gesamtverschiebung bilden. Da die Verschiebungen bei Verwendung der XFEM jedoch in den Elementen, die um die Rissspitzenfunktionen erweitert werden, nur durch Summation der einzelnen Anteile aus den vier Rissspitzenfunktionen berechnet werden können, verliert hier der Nachteil durch die Wahl der hierarchischen Basis an Bedeutung.

Eine Studie der hierarchischen Formfunktionen basierend auf Lagrange-, Legendre- und Chebyshev-Funktionen ergibt für die FEM, dass die Konditionszahl von Elementen, die mit unterschiedlichen Geometrien berücksichtigt wurden, für die Elementsteifigkeitsmatrizen am niedrigsten war, die mit Legendre-Polynomen als Formfunktionen erzeugt wurden. Sie verhält sich für steigenden Polynomgrad nahezu konstant. Damit kann gewährleistet werden, dass die Qualität der numerischen Lösung durch die Erhöhung des Polynomgrades nicht beeinträchtigt wird (vgl. (Edgar and Surana 1996; Preusch 2003)).

Die Berechnung der hierarchischen Formfunktionen erfolgt im Rahmen dieser Arbeit mittels der Legendre-Polynome über

$$N_{ij}(\mathbf{x}) = \phi_i(x)\phi_j(y), \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

mit den Funktionen

$$\phi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{4i-2}} (P_i(x) - P_{i-2}(x)), \quad (4.4)$$

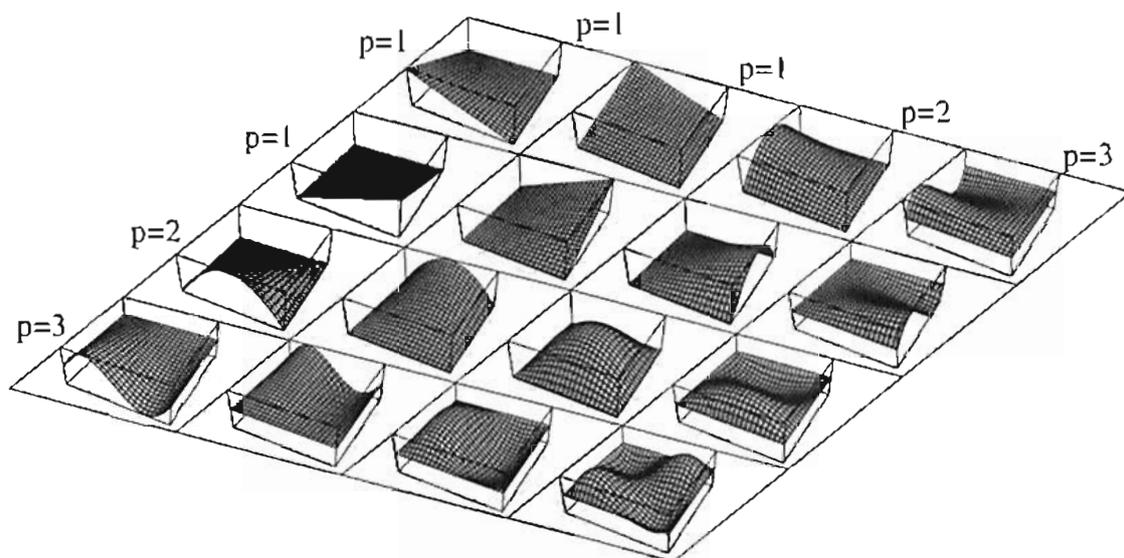
die sich aus den Legendre-Polynomen zusammensetzen. Diese Legendre-Polynome können mit Hilfe der Bonnet-Rekursionsformel berechnet werden als

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad \text{für } n = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Definiert sind

$$P_0(x) = 1 \quad \text{und} \quad P_1(x) = x. \quad (4.6)$$

Für die Polynomgrade $p = 0, \dots, 5$ ergeben sich somit folgende Formeln für die Legendre-

Abbildung 4.1.: hierarchische Formfunktionen bis Polynomgrad $p=3$

Polynome

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3z^2}{2}$$

$$P_3(x) = -\frac{3z}{2} + \frac{5z^3}{2}$$

$$P_4(x) = \frac{3}{8} - \frac{15z^2}{4} + \frac{35z^4}{8}$$

$$P_5(x) = \frac{15z}{8} - \frac{35z^3}{4} + \frac{63z^5}{8}$$

Zur Veranschaulichung sind die zweidimensionalen hierarchischen Formfunktionen bis zum Polynomgrad 3 in Abbildung 4.1 dargestellt. Zum Vergleich dazu sind in Abbildung 4.2 die Standard-Formfunktionen mit Lagrange-Basis für den Ansatzgrad 3 abgebildet.

4.2. Beispielrechnungen für bi-lineare und quadratische XFEM

4.2.1. Mixed-Mode-Test

Für die in Gleichung 2.83 enthaltenen Formfunktionen N werden für die Berechnung des Beispiels in diesem Abschnitt die bi-linearen Formfunktionen verwendet. Zum Vergleich sind die Berechnungen auch mit bi-quadratischen und hierarchisch quadratischen Formfunktionen durchgeführt worden. Dazu wird ein Mixed-Mode-Test mit Riss mit unterschiedlichen Elementgrößen berechnet. Die Berechnungskonfiguration für das größte Elementnetz ist in Abbildung 4.3 gezeigt. Neben dieser Konfiguration mit 5×11 Elementen, sind

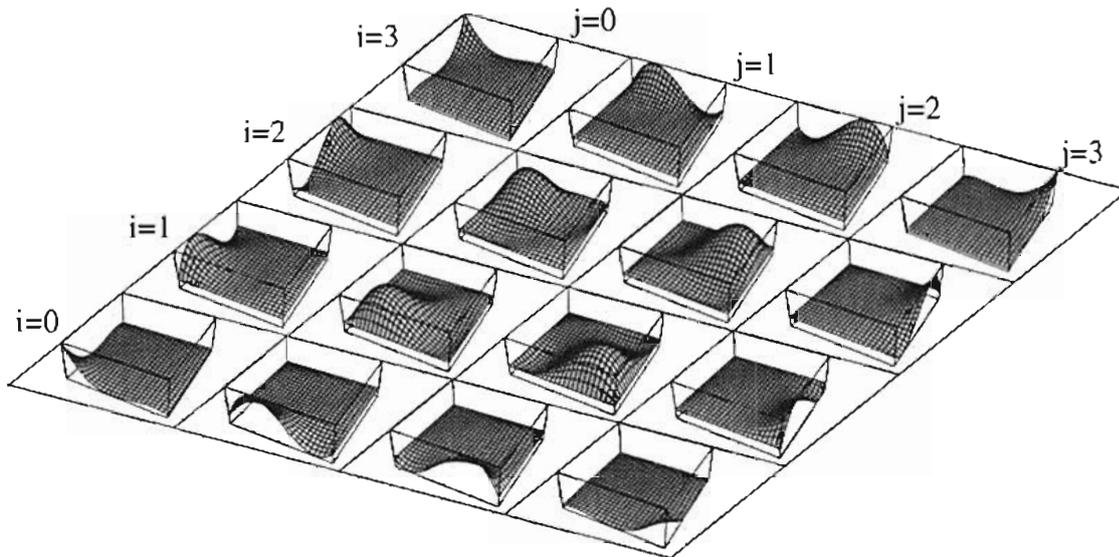


Abbildung 4.2.: Formfunktionen der Standard-Basis mit dem Polynomgrad $p=3$

auch Netze mit 11×23 und 23×47 Elementen erzeugt worden. Die Werte für K_I und K_{II} sind nach (Wilson 1969)

$$K_I = 34 \qquad K_{II} = 4.55 \qquad (4.7)$$

für die Parameter

$$l_x = 7.0 \quad l_y = 16.0 \quad a = 3.5 \quad \tau = 1.0 \quad E = 100. \qquad (4.8)$$

Die Ergebnisse der normierten SIF sind in den Abbildungen 4.5–4.7 im Vergleich mit den Ergebnissen der Methode aus Kapitel 2.2.3 und (Liu, Xiao, and Karihaloo 2004) zur Ermittlung der SIF als Teil der XFEM-Berechnung dargestellt. Die Ergebnisse, die aus (Liu, Xiao, and Karihaloo 2004) hier dargestellt sind, wurden mit $n = 11$ berechnet, wobei n für die Anzahl der Terme steht, die bei der Reihenentwicklung berücksichtigt werden. Durch diese Wahl haben die Lösung aus (Liu, Xiao, and Karihaloo 2004) und die XFEM mit quadratischen Formfunktionen für alle Elemente die gleiche Anzahl an Freiheitsgraden.

Die Abbildungen zeigen deutlich die Abhängigkeit der Ergebnisse von der gewählten Konfiguration. Mit kleiner werdender Elementgröße bzw. größer werdendem Radius für die Berechnung des J-Integrals werden die Ergebnisse besser und nähern sich den Werten von Wilson an. Der Integrationsbereich für das J-Integral variiert mit $r = 0.003n$, $n = 1, \dots, 110$. Im Vergleich zu diesen Ergebnissen zeigen die Ergebnisse aus (Liu, Xiao, and Karihaloo 2004) ein anderes Verhalten bei Berücksichtigung von höheren Termen der Reihenentwicklung für die Rissspitzenfunktionen bzw. der SIF. Die Ergebnisse sind unabhängig von einem Radius für das Integrationsgebiet, da sie Teil der XFEM-Lösung sind. Allerdings sind diese Ergebnisse, auch unter Verwendung von elf Termen aus der Reihenentwicklung, nicht besser als die Ergebnisse, die unter Verwendung von quadratisch hierarchischen Formfunktionen bei nur vier Rissspitzenfunktionen und einem Layer zustande kommen.

Unter einem Layer wird dabei die Erweiterung um die Rissspitzenfunktionen der Knoten und Moden des Elements verstanden, welches die Rissspitze enthält. Wird ein zweiter Layer hinzugenommen, werden alle Knoten bzw. Moden der Elemente, die an das Rissspitzenelement grenzen, ebenfalls erweitert (vgl. dazu auch Abbildung 4.4).

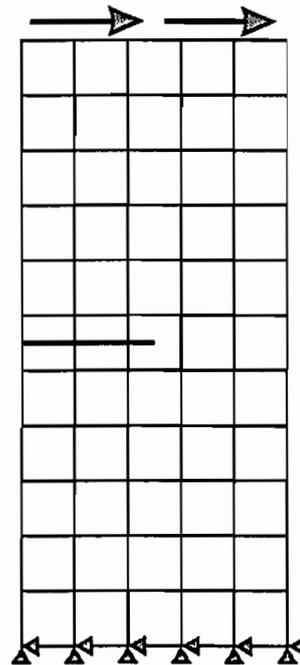


Abbildung 4.3.: Konfiguration des Mixed-Mode-Tests für 5×11 Elemente

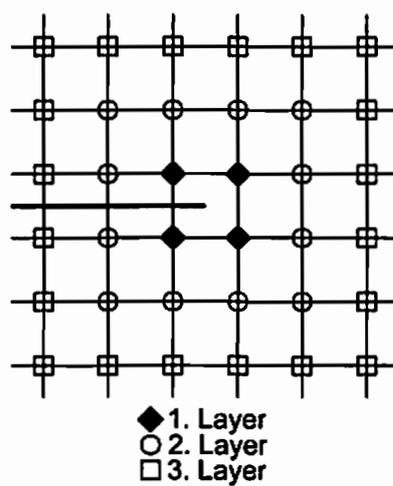


Abbildung 4.4.: Erläuterung des Layer-Begriffs

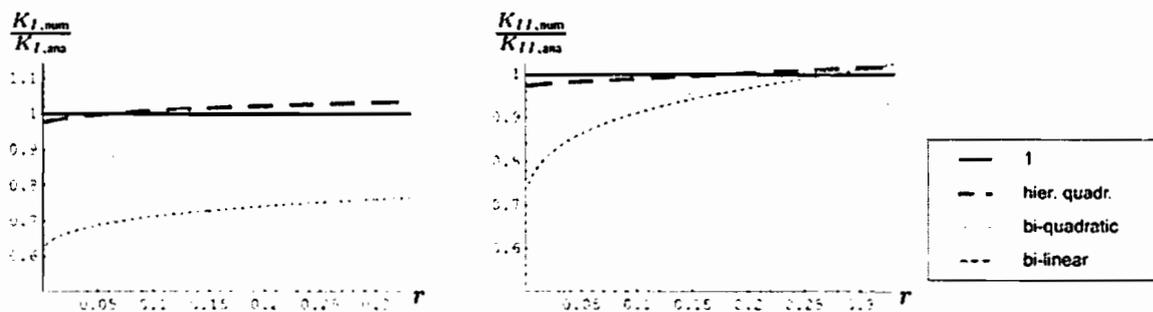


Abbildung 4.5.: normierte SIF (K_I links, K_{II} rechts) für unterschiedliche Konfigurationen des Mixed-Mode-Tests aus Abbildung 4.3 für 5×11 Elemente

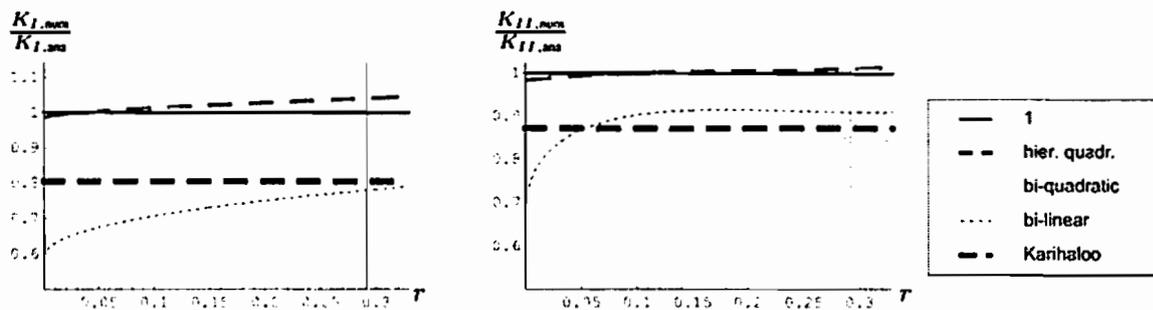


Abbildung 4.6.: normierte SIF (K_I links, K_{II} rechts) für unterschiedliche Konfigurationen des Mixed-Mode-Tests aus Abbildung 4.3 für 11×23 Elemente

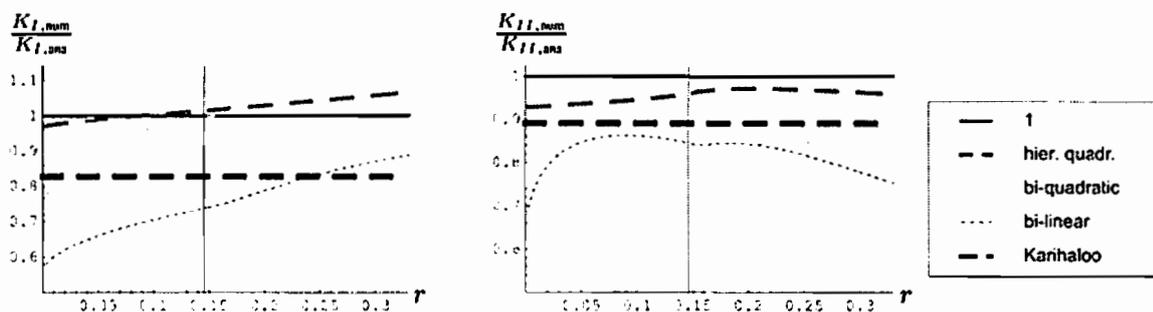


Abbildung 4.7.: normierte SIF (K_I links, K_{II} rechts) für unterschiedliche Konfigurationen des Mixed-Mode-Tests aus Abbildung 4.3 für 23×47 Elemente

Unter Verwendung der Standard-Basis zeigen die Ergebnisse bei der Wahl kleiner Radien mit $r < l_e$ jedoch große Abweichungen zum Ergebnis nach (Wilson 1969), wobei hier die Kantenlänge der Elemente in x-Richtung als l_e bezeichnet ist. Es entstehen Abweichungen von bis zu etwa 40% bei Verwendung der bi-linearen und bis zu etwa 30% bei Verwendung der bi-quadratischen Formfunktionen. Für die Benutzung in einem Finite-Elemente-Programm ist es allerdings sehr wichtig, dass die Radien für die Berechnung des J-Integrals klein werden können. Wenn mehrere Risse auftreten, darf in dem Bereich, in dem das J-Integral berechnet wird, nur eine Risspitze liegen. Ebenso sollte der Bereich, in dem das J-Integral berechnet wird, den Rand der Probe nicht schneiden. Haben zwei Risspitzen den Abstand $2r$, so sollte der Bereich, der für die Berechnung des J-Integrals benutzt wird, einen maximalen Radius r_Ω haben mit

$$r_\Omega < r.$$

Gleiches gilt auch, wenn eine Risspitze zum Rand der Probe den Abstand r hat. Geht nun r gegen Null, muss auch r_Ω gegen Null gehen.

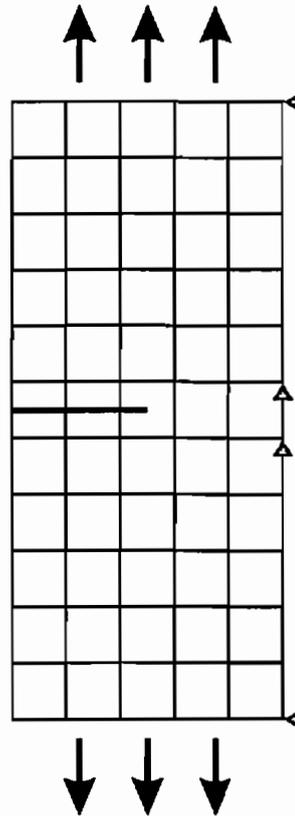


Abbildung 4.8.: Konfiguration des Mode-I-Tests für 5×10 Elemente

4.2.2. Mode-I-Test

Um die Ergebnisse besser interpretieren und Schlussfolgerungen ziehen zu können, soll in diesem Abschnitt ein einfacheres Beispiel als im vorhergehenden Abschnitt untersucht werden. Dazu wird ein reiner Mode-I-Test nach Abbildung 4.8 definiert und mit unterschiedlichen Konfigurationen für

- die Elementanzahl
- die Anzahl der Layer
- den Radius
- und die Art der Formfunktionen

berechnet. Die Ergebnisse der normierten SIF sind für die Abbildungen 4.9-4.11 mit dem J-Integral über einen kreisförmigen Bereich mit den Radien $r = 0.0015, 0.015, 0.15, 1.5$ berechnet. Klar zu erkennen ist, dass die SIF mit Hilfe der hierarchischen Formfunktionen z.T. deutlich genauer berechnet werden können. Das Ergebnis unter Verwendung der bi-linearen Formfunktionen weicht hingegen von dem analytischen Wert der SIF um bis zu etwa 30% ab. Das gilt vor allem für die kleinsten hier verwendeten Radien in der Definition für das J-Integral. Die Ergebnisse für bi-quadratische Formfunktionen sind denen ähnlich, die mit den bi-linearen Formfunktionen berechnet wurden, und unterscheiden sich von letzteren nur durch einen kleineren Fehler.

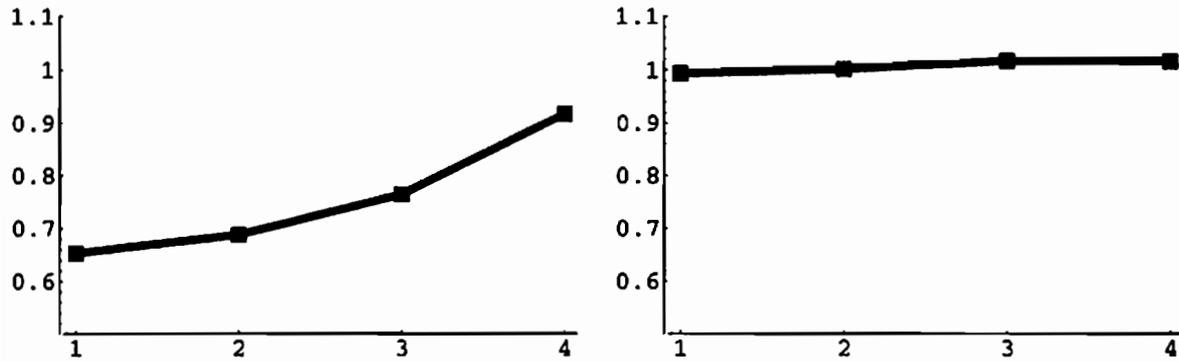


Abbildung 4.9.: normierte SIF des Mode-I-Tests aus Abbildung 4.8 für einen Layer, links für bi-lineare Formfunktionen, rechts für quadratisch hierarchische Formfunktionen

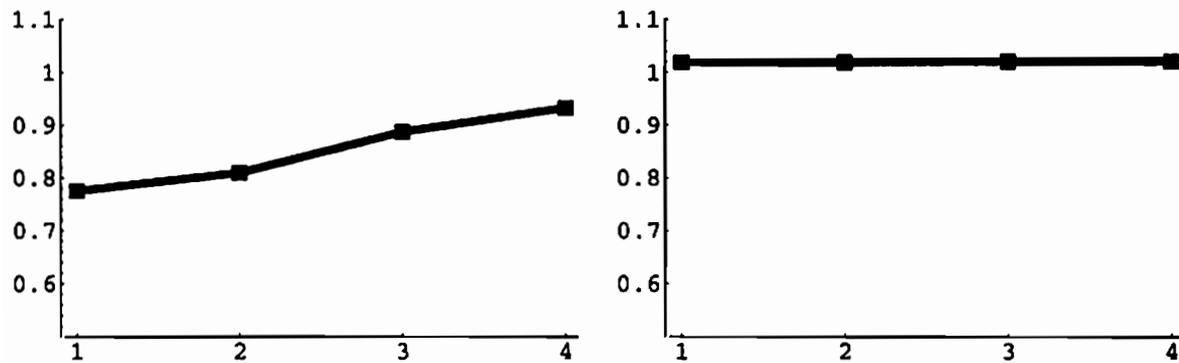


Abbildung 4.10.: normierte SIF des Mode-I-Tests aus Abbildung 4.8 für zwei Layer, links für bi-lineare Formfunktionen, rechts für quadratisch hierarchische Formfunktionen

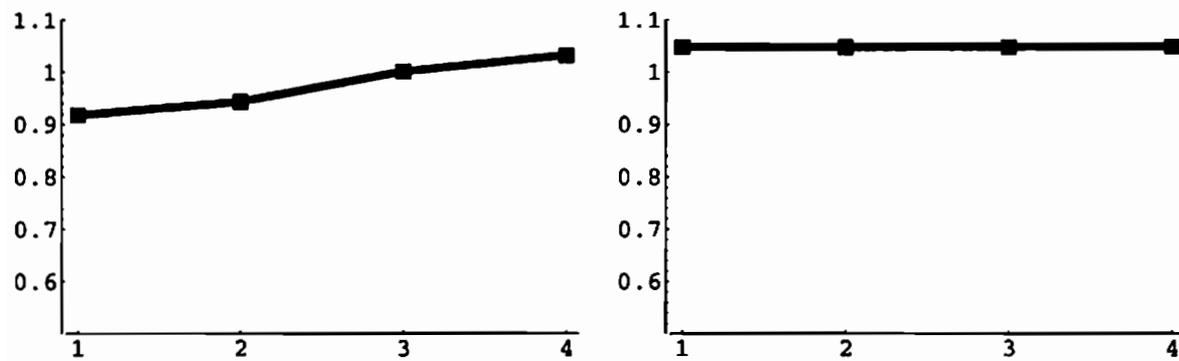


Abbildung 4.11.: normierte SIF des Mode-I-Tests aus Abbildung 4.8 für drei Layer, links mit bi-linearen Formfunktionen, rechts mit quadratisch-hierarchischen Formfunktionen

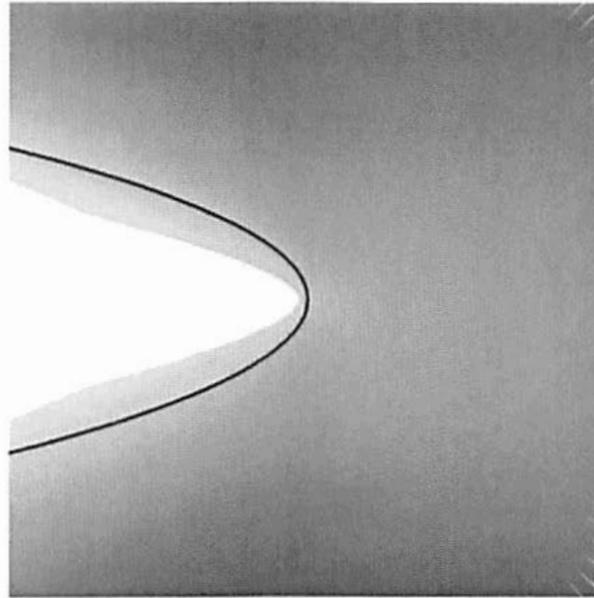


Abbildung 4.12.: Verschiebungen um die Rissspitze des Mode-I-Tests aus Abbildung 4.3 für bi-lineare Formfunktionen

Für die Berechnung des J-Integrals sind die Spannungen und Verschiebungsableitungen erforderlich. Da diese aus den Verschiebungen der XFEM-Lösung berechnet werden, sind in den Abbildungen 4.12-4.14 die Verschiebungen um die Rissspitze am verformten System dargestellt. Die in den Abbildungen dargestellte schwarze Linie ist die analytische Lösung der Verschiebungen an der Rissoberfläche des Rissspitzenahfeldes für ein reines Mode-I-Problem. Die Grautöne stellen die Verschiebungen in x-Richtung der XFEM-Lösung dar. Auch hier ist für die Wahl der hierarchischen Formfunktionen die bessere Annäherung der numerischen Lösung an die analytischen Verschiebungen deutlich zu erkennen. Zum einen existiert nur eine kaum sichtbare Differenz der numerischen und analytischen Verschiebungen an der Rissoberfläche, zum anderen gibt es keine so deutliche Einschnürung der Rissoberfläche an der Position, an der der Riss die Elementkante des Rissspitzenelements schneidet. Das heißt, die Unterschiede werden in den Resultaten also umso größer, je ungenauer die Verschiebungen des Rissspitzenahfeldes approximiert werden. Da jedoch das Nahfeld innerhalb des Rissspitzenelements durch die XFEM als Sonderfall der Zerlegung der Eins exakt dargestellt werden kann, können diese Fehler nur aus den Nachbarelementen resultieren.

Zu klären bleibt also die Frage: Wie gut kann die Näherung der XFEM überhaupt sein? Bzw. welche Elemente erzeugen die oben beschriebenen numerischen Probleme? Diese Fragen sollen im folgenden Kapitel eingehend betrachtet werden.

4.3. Bestmögliche Näherung des Ansatzes

4.3.1. Prozedur

Der Verschiebungsansatz der XFEM aus Gleichung 2.83 soll hier für einzelne Elemente untersucht werden. Dazu werden die Gleichungen 2.83 und 2.75 gleichgesetzt und in einem

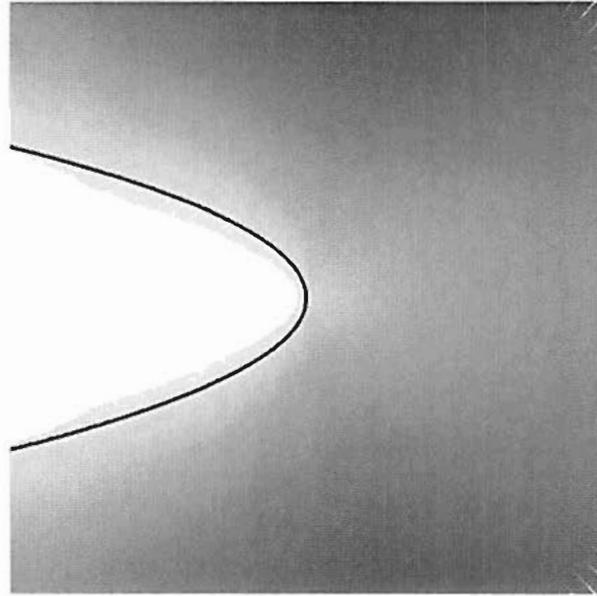


Abbildung 4.13.: Verschiebungen um die Rissspitze des Mode-I-Tests aus Abbildung 4.3 für bi-quadratische Formfunktionen

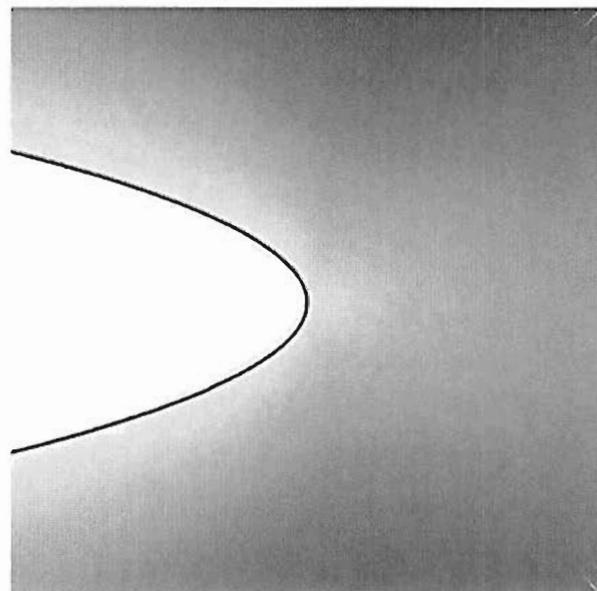


Abbildung 4.14.: Verschiebungen um die Rissspitze des Mode-I-Tests aus Abbildung 4.3 für hierarchisch quadratische Formfunktionen

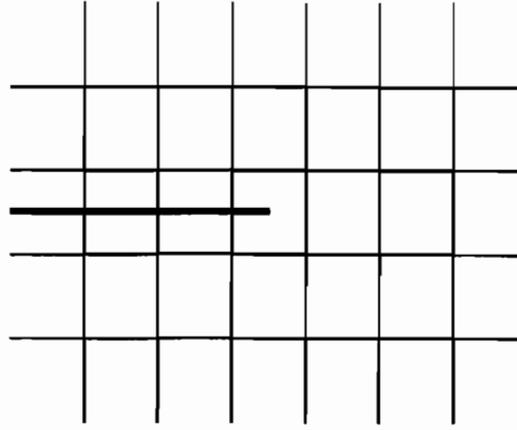


Abbildung 4.15.: Elemente, in denen die Näherung untersucht wird

Element ausgewertet. Die Gleichung lautet dann

$$\frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa - \cos \varphi) \begin{Bmatrix} \cos(\frac{\varphi}{2}) \\ \sin(\frac{\varphi}{2}) \end{Bmatrix} + \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin(\frac{\varphi}{2}) (\kappa + 2 + \cos(\varphi)) \\ \cos(\frac{\varphi}{2}) (\kappa - 2 + \cos(\varphi)) \end{Bmatrix} \\ = u_i N_i(x) + b_j H(x) N_j(x) + c_{kl} N_k(x) F_l(x). \quad (4.9)$$

Die Unbekannten in dieser Gleichung sind u_i , b_j und c_{kl} . Als Werte für die SIF sind die Lösungen des Beispiels aus Abbildung 4.8, $K_I = 3213.3$ und $K_{II} = 0$, benutzt. Die unbekanntenen Werte werden durch Minimierung der Fehlerquadrate berechnet:

$$\sum_{e=1}^{n_{coll}} (u_{ana}(\mathbf{x}_e) - (u_i N_i(\mathbf{x}_e) + b_j N_j(\mathbf{x}_e) H(\mathbf{x}_e) + c_{kl} N_k(\mathbf{x}_e) F_l(r(\mathbf{x}_e), \varphi(\mathbf{x}_e))))^2 \rightarrow \min. \quad (4.10)$$

Diese Gleichung wird an erheblich mehr Stützstellen (n_{coll}) ausgewertet, als Unbekannte vorhanden sind. Es wird somit ein überbestimmtes Gleichungssystem erzeugt — hier mehr als 10000-fach. Der Minimierungsprozess erzeugt dann das Ergebnis mit welchem die Summe der kleinsten Fehlerquadrate erreicht wird.

So wird für die in Abbildung 4.15 grau unterlegten Elemente berechnet, wie gut die Näherung der XFEM unter Verwendung unterschiedlicher Polynomgrade bei den Standard- bzw. den hierarchischen Formfunktionen sein kann. Aus diesem Ergebnis können dann Rückschlüsse im Bezug auf den Einfluss der Ergebnisse eines einzelnen Elements auf die XFEM-Lösung gezogen werden.

Die Verwendung von zufällig verteilten Punkten im Element und die Verwendung von äquidistant gewählten Punkten führt zu den gleichen Ergebnissen für die Unbekannten (die relativen Abweichungen sind kleiner als 10^{-7}). Aus diesem Grunde werden hier nur die Ergebnisse unter Verwendung der zufällig verteilten Punkte angegeben. In den Diagrammen sind die Integrale der Verschiebungsdifferenzen zwischen analytischer und numerischer Lösung über das jeweilige Element nach Gleichung 4.11 für die unterschiedlichen Formfunktionen angegeben.

$$f(x, y) = \int_{\Omega} (u(x) - \hat{u}(x)) d\Omega \quad (4.11)$$

Darin bedeutet u die analytischen Verschiebungen nach Gleichung 2.75 und \hat{u} die hier berechneten Verschiebungen.

4.3.2. Rissspitzenelement

Die Unterschiede zwischen den Näherungen der Verschiebungen und Spannungen zu den analytischen Werten im Rissspitzenelement sind sowohl unter Benutzung der Standard-Formfunktionen als auch mit den hierarchischen Formfunktionen kleiner als 10^{-8} . Weil die XFEM auf der Zerlegung der Eins beruht und für das Rissspitzenelement

$$\sum_i N_i \Psi = \Psi$$

gilt, müssen die Differenzen zwischen numerischer und analytischer Lösung verschwinden (vgl. (Chessa, Wang, and Belytschko 2003)).

4.3.3. Übergangselemente

In diesem Beispiel gibt es acht Übergangselemente. Da das Beispiel symmetrisch ist, werden im Weiteren nur die Ergebnisse von fünf Elementen dargestellt.

In allen Elementen können die Verschiebungen und Spannungen zum Teil erheblich besser durch Verwendung der hierarchischen Formfunktionen approximiert werden, als das mit den Standard-Formfunktionen möglich ist. Die Übergangselemente können in drei Gruppen eingeteilt werden:

- Elemente, bei denen alle Knoten auf einer Kante (bzw. die entsprechend auf dieser Kante definierten Moden) um die Rissspitzenfunktionen erweitert werden. Diese Elemente haben bei Verwendung der hierarchischen Basis für die Formfunktionen gegenüber der Standard-Basis eine Konvergenz-Rate, die 2.76-fach höher ist. Die Konvergenz-Rate ist im Mittel 6.9 für die hierarchische Basis und 2.5 für die Standard-Basis.
- Das Element, in dem alle Knoten/Moden mit der Heaviside-Funktion erweitert sind, außer die Knoten bzw. Moden einer Kante, die mit den Rissspitzenfunktionen erweitert sind. Die Konvergenz-Rate ist hier für die hierarchische Basis im Mittel um den Faktor 4.3 höher als bei der Standard-Basis. Die Konvergenz-Raten sind 6.5 bzw. 1.5 für die hierarchische bzw. die Standard-Basis.
- Elemente, bei denen ein Eckknoten bzw. der entsprechende Knoten-Mode um die Rissspitzenfunktionen erweitert wird. Für diese Elemente ist die Konvergenz-Rate um das 1.4-fache höher, wenn die hierarchischen Formfunktionen verwendet werden. Die Konvergenz-Raten sind 5.8 für die hierarchische Basis und 4.1 für die Standard-Basis.

Die hier dargestellten Ergebnisse der Übergangselemente zeigen, welchen enormen Einfluss die Wahl der Basis auf die Approximation des Verschiebungsfeldes hat. Die Ergebnisse zeigen deutlich, dass die Übergangselemente zum Teil erhebliche Ungenauigkeiten in die Finite-Elemente-Rechnung einbringen. Das liegt daran, dass in diesen Elementen die Zerlegung der Eins nicht eingehalten ist, da nicht alle Knoten durch die Rissspitzenfunktionen erweitert sind. Dass die XFEM mit hierarchischen Formfunktionen bessere Ergebnisse liefert als die XFEM mit den Standard-Formfunktionen liegt vor allem daran, dass

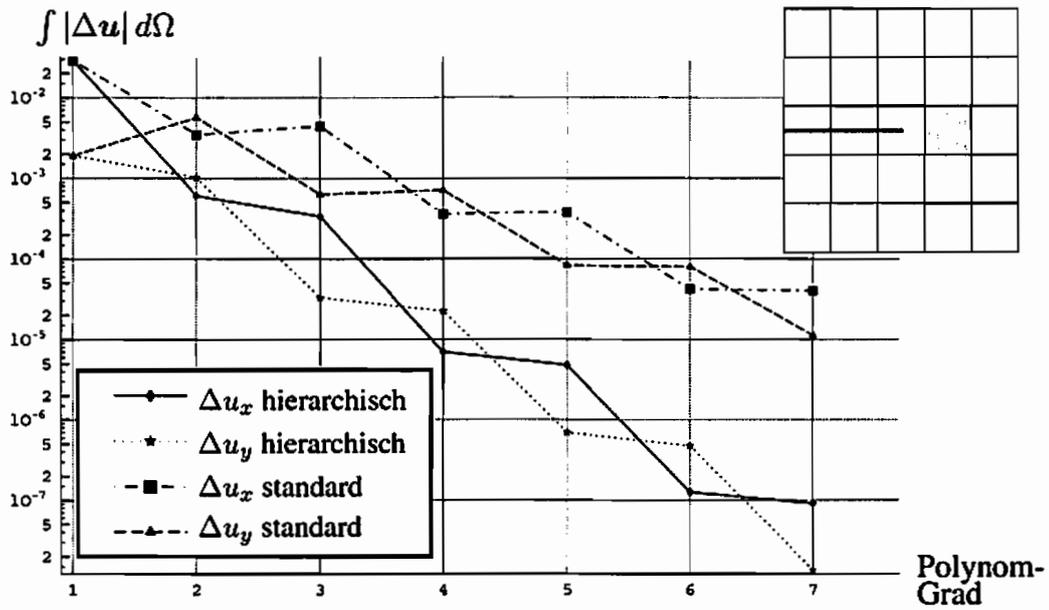


Abbildung 4.16.: Verschiebungsdifferenzen des 1. Übergangselements

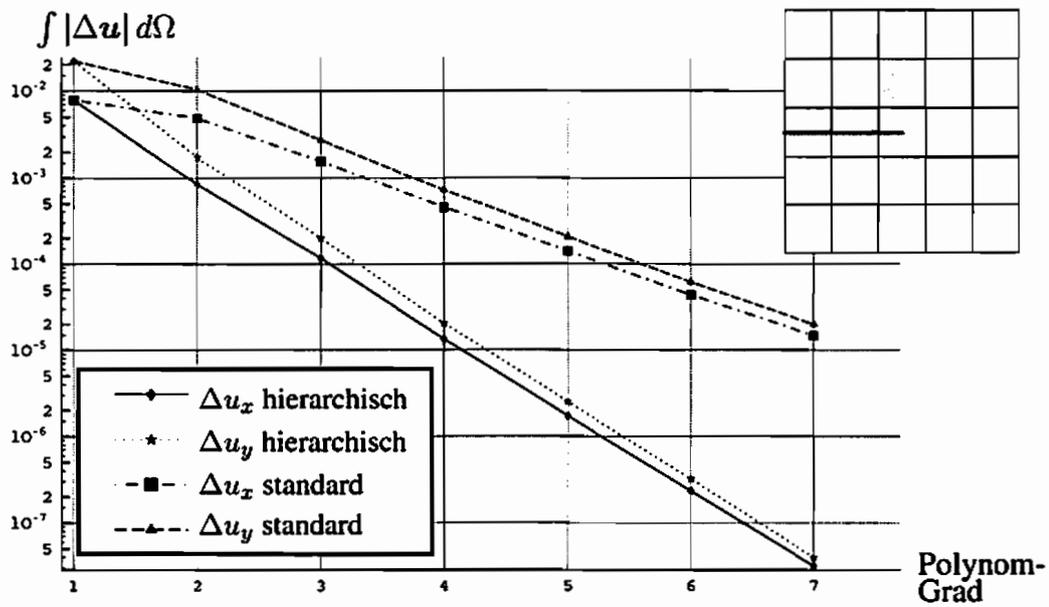


Abbildung 4.17.: Verschiebungsdifferenzen des 2. Übergangselements

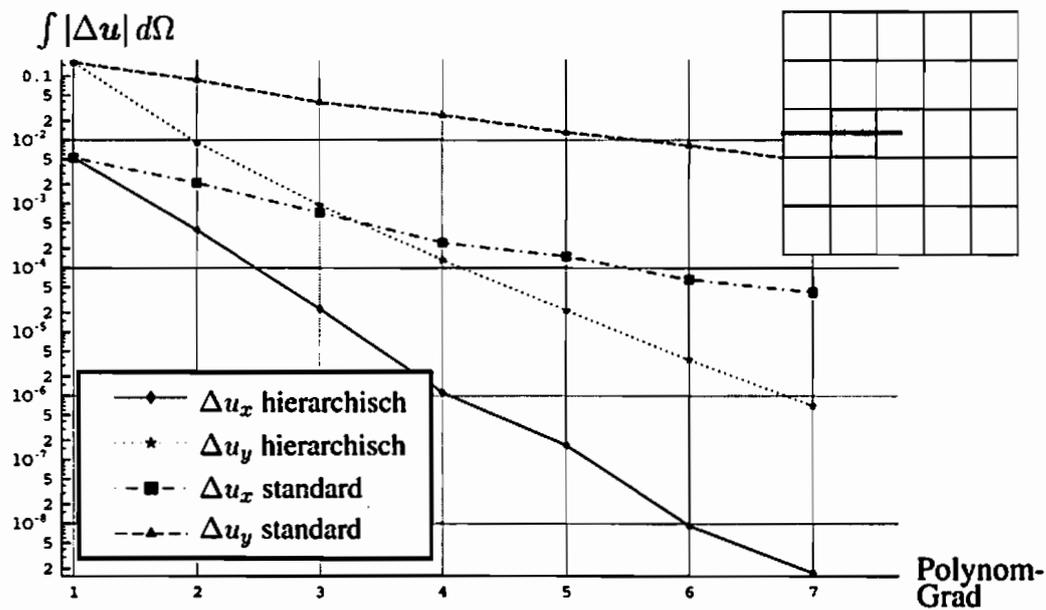


Abbildung 4.18.: Verschiebungsdifferenzen des 3. Übergangselements

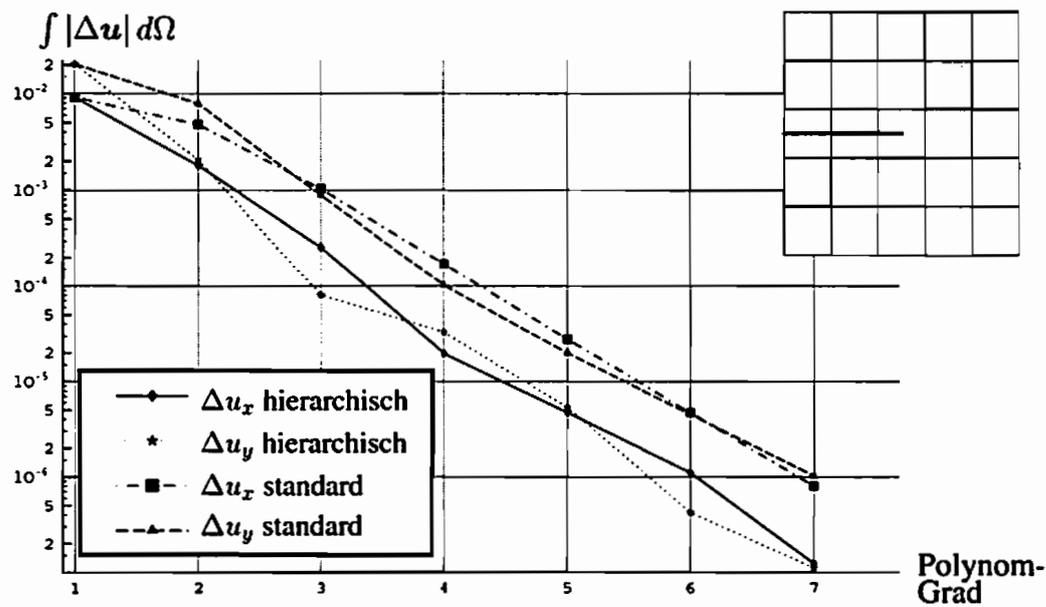


Abbildung 4.19.: Verschiebungsdifferenzen des 4. Übergangselements

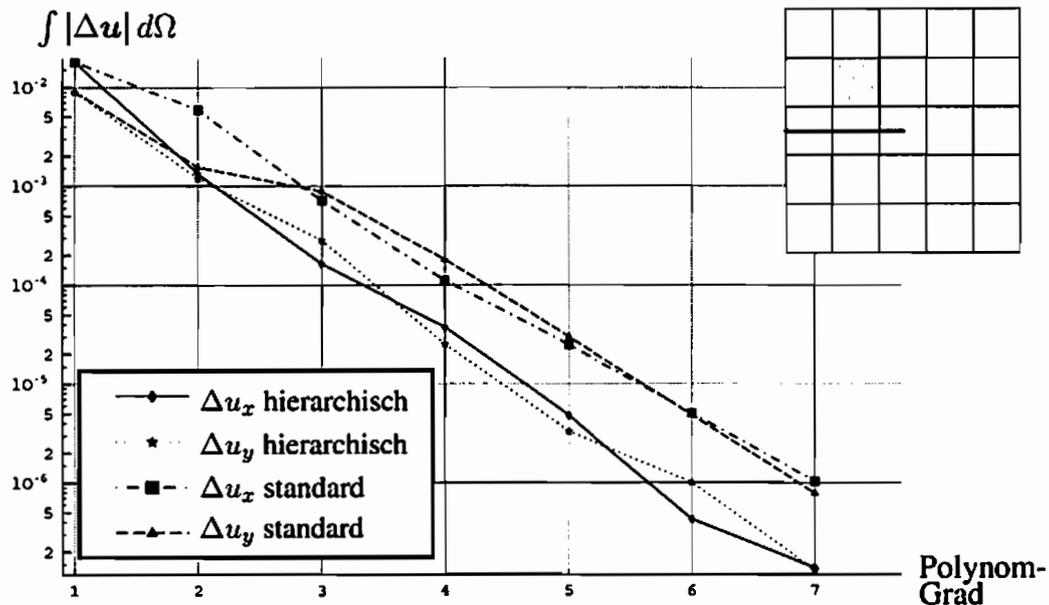


Abbildung 4.20.: Verschiebungsdifferenzen des 5. Übergangselements

die Rissspitzenfunktionen einen größeren Einfluss in den Übergangselementen bei Verwendung der hierarchischen Basis bekommen und somit die analytischen Verschiebungen des Rissspitzennahfeldes in einem größeren Gebiet in die Berechnung einfließen können.

4.3.4. Weitere Elemente

Die Ergebnisse zeigen in diesen nicht um die Rissspitzenfunktionen erweiterten Elementen nur Abhängigkeiten vom Polynomgrad, nicht jedoch davon, ob hierarchische oder Standard-Formfunktionen verwendet werden. In diesen Elementen erfolgt die Approximation der Verschiebungen wieder nach dem Prinzip der FEM bzw. p-Methode der FEM. Damit ist die Lösung nicht nur unabhängig von der Basis, sondern allein abhängig vom Polynomgrad.

4.4. Zusammenfassung und Ergebnis

Die aus den Überlegungen der Kapitel 4.2 und 4.3 resultierende p-Version der XFEM beruht ebenfalls auf Gleichung 2.83. Mögliche Formen der Umsetzung sind

- **Benutzung der bi-linearen Formfunktionen**
Die Ergebnisse sind schnell verfügbar, da eine geringe Anzahl von Freiheitsgraden berücksichtigt wird, und die Integration verhältnismäßig einfach im Vergleich mit höheren Polynomgraden bleibt. Die Ergebnisse der SIF sind allerdings, wie in Kapitel 4.2 gezeigt, nur für große Radien bei der Berechnung des J-Integrals akzeptabel. Die Verschiebungen nahe der Rissspitze sind ebenfalls nur eingeschränkt nutzbar.
- **Benutzung der Standard-Formfunktionen mit Polynomgraden $p \geq 2$**
Die Ergebnisse werden gegenüber jenen, die unter Verwendung der bi-linearen Formfunktionen berechnet werden, besser. Die Integration stellt allerdings höhere Anfor-

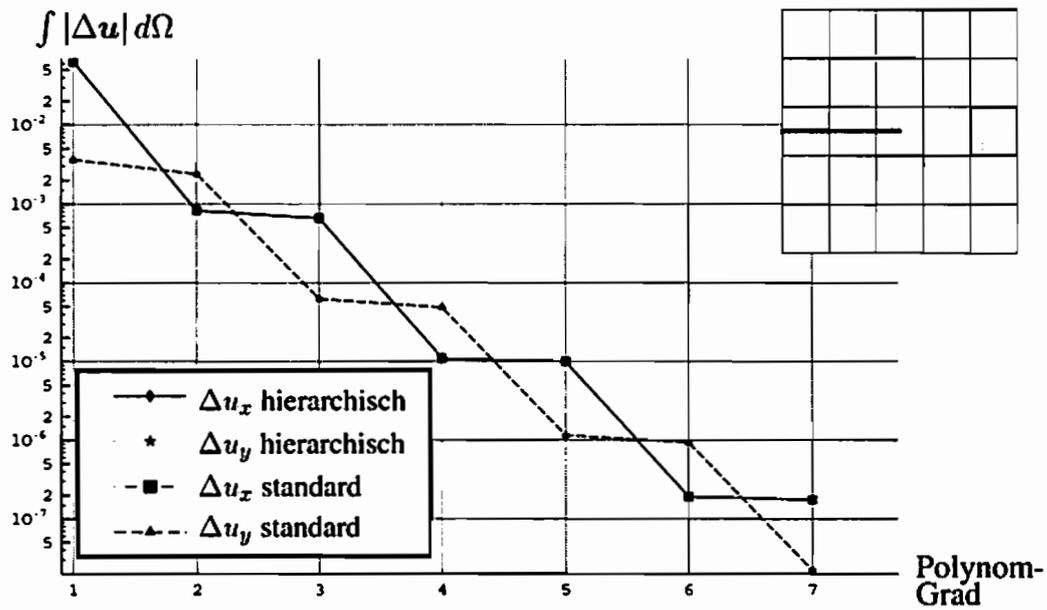


Abbildung 4.21.: Verschiebungsdifferenzen des 1. Elements ohne Erweiterung

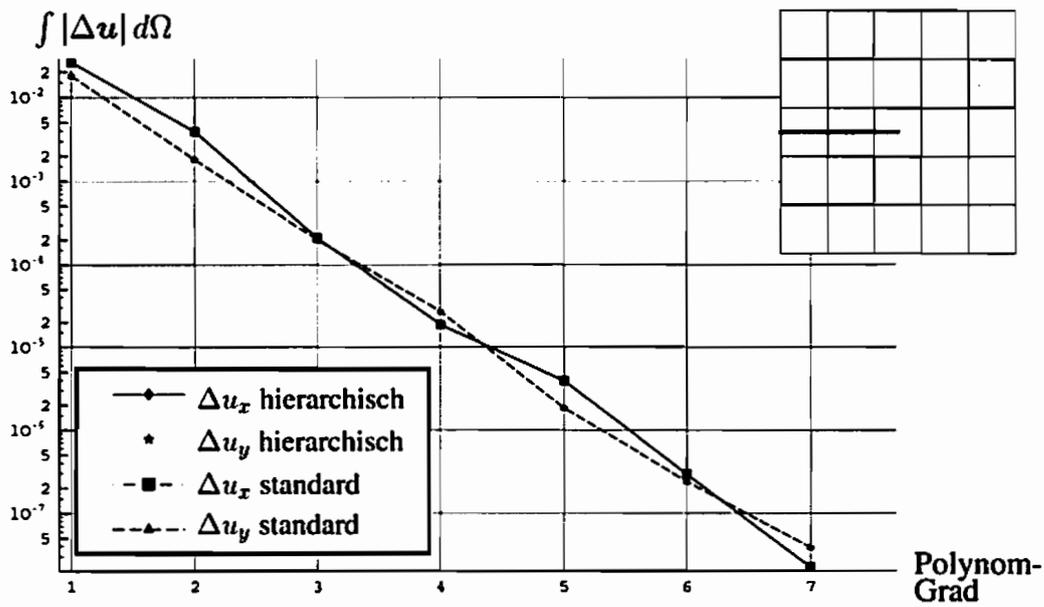


Abbildung 4.22.: Verschiebungsdifferenzen des 2. Elements ohne Erweiterung

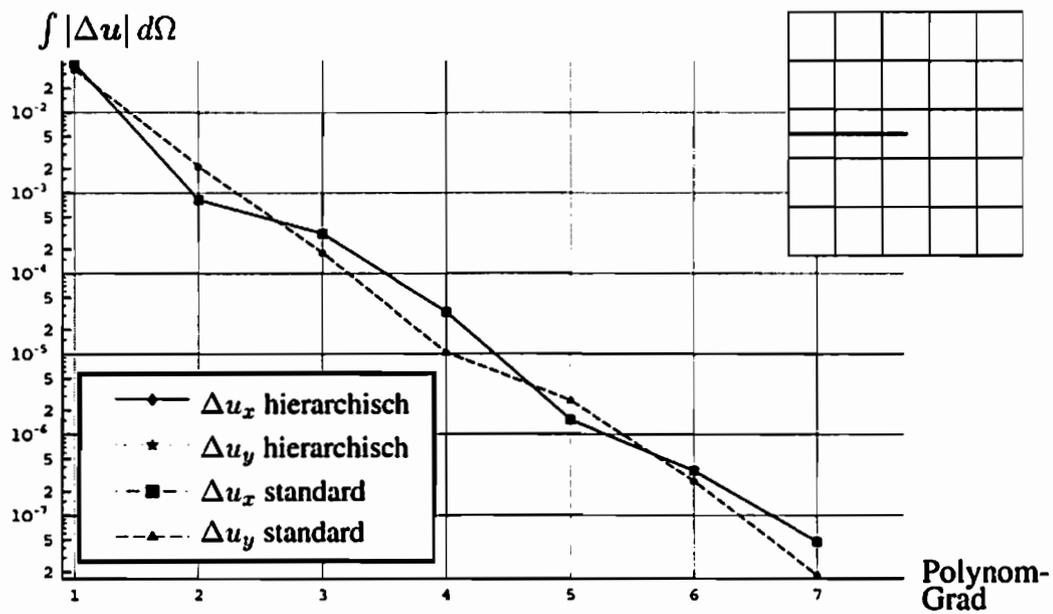


Abbildung 4.23.: Verschiebungsdifferenzen des Elements, in dem die Moden einer Kante mit der Heaviside-Funktion erweitert sind

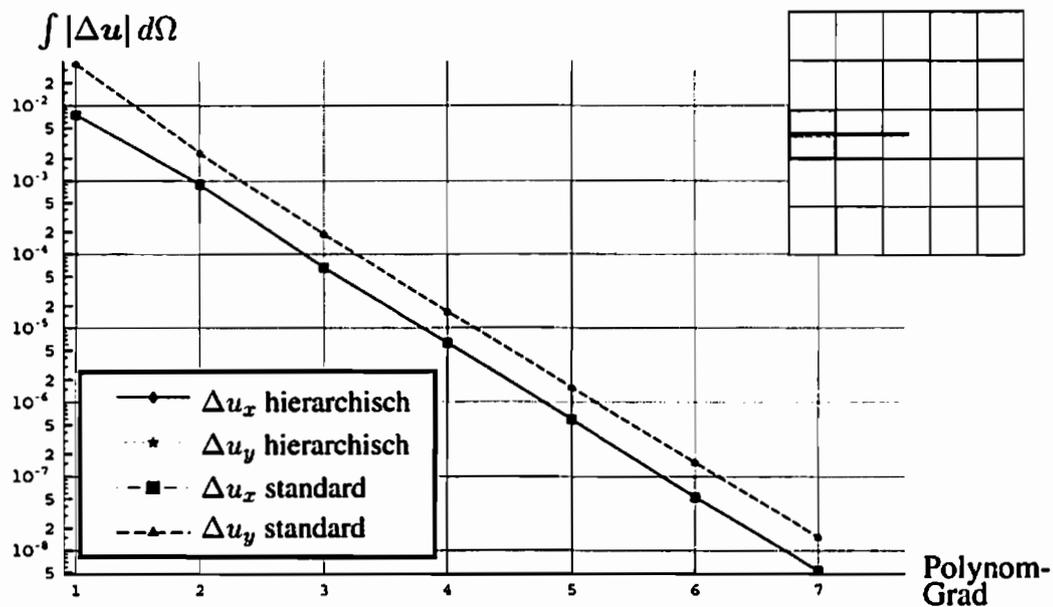


Abbildung 4.24.: Verschiebungsdifferenzen des Elements, in dem alle Moden mit der Heavy-Side-Funktion erweitert sind

derungen an das Verfahren. Zusammen mit der erhöhten Anzahl an Freiheitsgraden wird der Gewinn an Genauigkeit durch einen deutlichen Verlust an Geschwindigkeit erkaufte.

- Benutzung der hierarchischen Formfunktionen mit Polynomgraden $p \geq 2$
 Durch die Verwendung der hierarchischen Formfunktionen lassen sich die Ergebnisse gegenüber den Standard-Formfunktionen mit gleichem Polynomgrad weiter verbessern. Durch den größeren Einflussbereich der Rissspitzenfunktionen in den Übergangselementen können die Verschiebungen in den Elementen um die Rissspitze besser berechnet werden. Der Aufwand der Integration ist gegenüber der Integration der Standard-Formfunktionen etwas geringer, da nicht alle Polynome mit dem höchsten Grad definiert sind, sondern nur wenige. Hinzu kommt noch, dass sich durch die Verwendung der hierarchischen Formfunktionen die Anzahl der Freiheitsgrade u.U. drastisch reduzieren lässt, da nur für die Elemente, die durch die Rissspitzenfunktionen erweitert werden, auch der höhere Polynomgrad für die Formfunktionen angesetzt werden muss. In allen anderen Elementen werden mit den bi-linearen Formfunktionen gute Ergebnisse erzielt (siehe dazu auch Kapitel 4.5 und (Szabo and Babuska 1991)).

4.5. Weitere Beispielrechnungen mit der p-XFEM und Vergleich der Ergebnisse

Die im vorhergehenden Abschnitt dargestellte Zusammenfassung soll in diesem Kapitel durch Beispiele unterstützt werden. Die hier betrachteten Beispiele sind mit verschiedenen Ansatzgraden und hierarchischen bzw. Standard-Formfunktionen berechnet.

4.5.1. Drei-Punkt-Biege-Versuch

Für die Berechnung der SIF, bei dem in Abbildung 4.25 dargestellten Drei-Punkt-Biege-Versuch, werden neben den unterschiedlichen Formfunktionen (bi-linear, bi-quadratisch und quadratisch hierarchisch) auch jeweils zehn unterschiedliche Radien ($r = i0.03$, $i = 1, \dots, 10$) für die Definition des Bereichs Ω für das J-Integral benutzt. Darüber hinaus sind die Berechnungen mit 5×11 und 11×23 Elementen durchgeführt worden. Die Abbildungen 4.26 bis 4.28 zeigen die Ergebnisse der so berechneten SIF für die unterschiedlichen Formfunktionen. In den einzelnen Diagrammen sind die Mittelwerte der SIF mit den jeweiligen maximalen Abweichungen für die unterschiedlichen Anschnitttiefen a dargestellt. Deutlich erkennbar ist, dass die Abweichungen sowohl für die Berechnung mit bi-linearen als auch mit bi-quadratischen Formfunktionen erheblich größer sind als bei Verwendung der hierarchisch quadratischen Formfunktionen. Ebenso ist zu erkennen, dass nur die Mittelwerte im Diagramm für die hierarchisch quadratischen Formfunktionen auch für den Wert K_{II} eine annähernd proportionale Abhängigkeit zur Risslänge aufweisen.

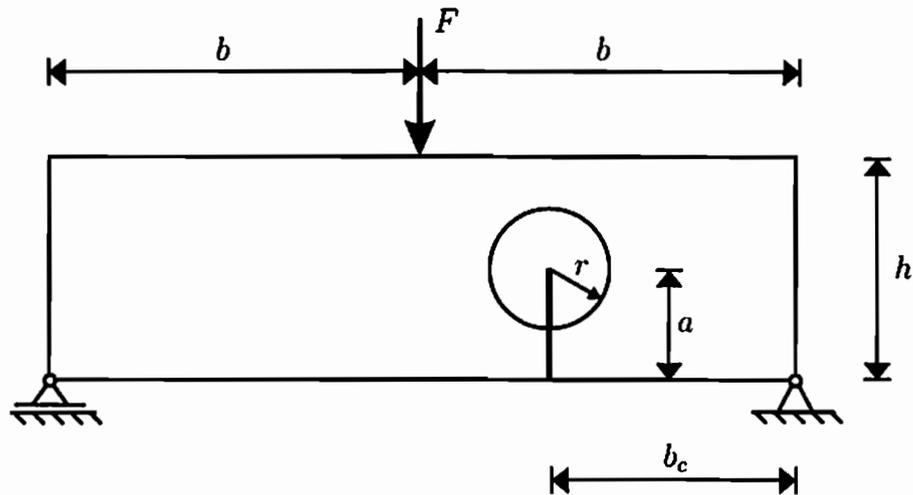


Abbildung 4.25.: Drei-Punkt-Biege-Versuch, Konfiguration und Definition zur Bestimmung der SIF

4.5.2. CT-Versuch

Die Berechnung der SIF in diesem Abschnitt erfolgt für den CT-Versuch, der in Abbildung 4.29 skizziert ist, mit einem festen Radius $r = 3$ für das J-Integral. Variiert wird zusätzlich zu den Formfunktionen die Länge a des Risses mit

$$12 \leq a \leq 36$$

und die Anzahl der Elemente (12×6 , 24×12 und 48×24 Elemente). In den Diagrammen 4.30 bis 4.32 sind die Ergebnisse der SIF für die unterschiedlichen Anschnitttiefen dargestellt. Die Ergebnisse für die Werte K_I sind für alle drei Variationen der Formfunktionen gleich gut. Deutliche Unterschiede zeigen sich in den Diagrammen für K_{II} . Während die SIF K_{II} unter Verwendung der bi-linearen bzw. der bi-quadratischen Formfunktionen besonders für das grobe und das mittlere Elementnetz keine brauchbaren Ergebnisse liefert, erzeugt die Berechnung der SIF unter Berücksichtigung der hierarchisch quadratischen Formfunktionen gute Ergebnisse, die schon mit wenigen Elementen konvergieren.

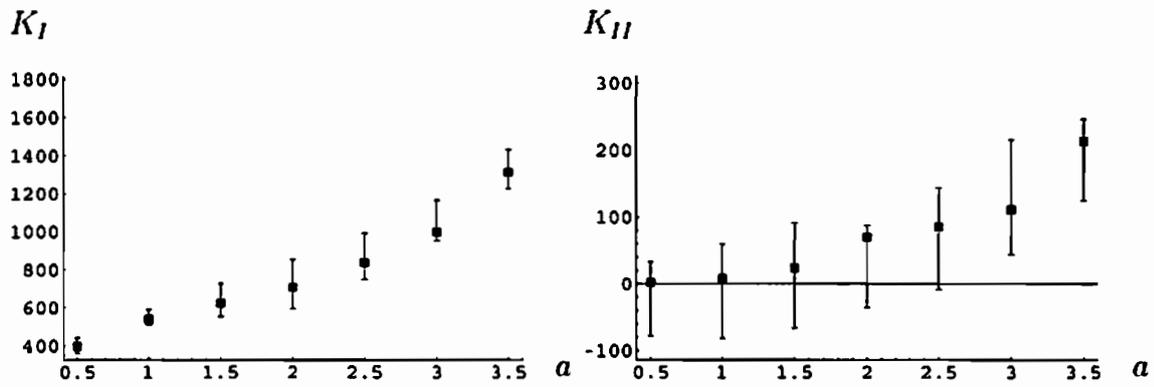


Abbildung 4.26.: SIF für Drei-Punkt-Biegeversuch mit bi-linearen Formfunktionen

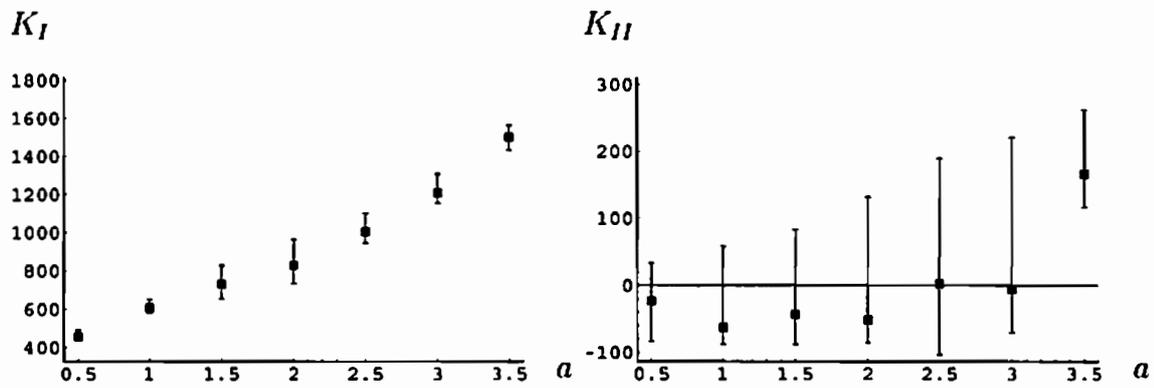


Abbildung 4.27.: SIF für Drei-Punkt-Biegeversuch mit bi-quadratischen Formfunktionen

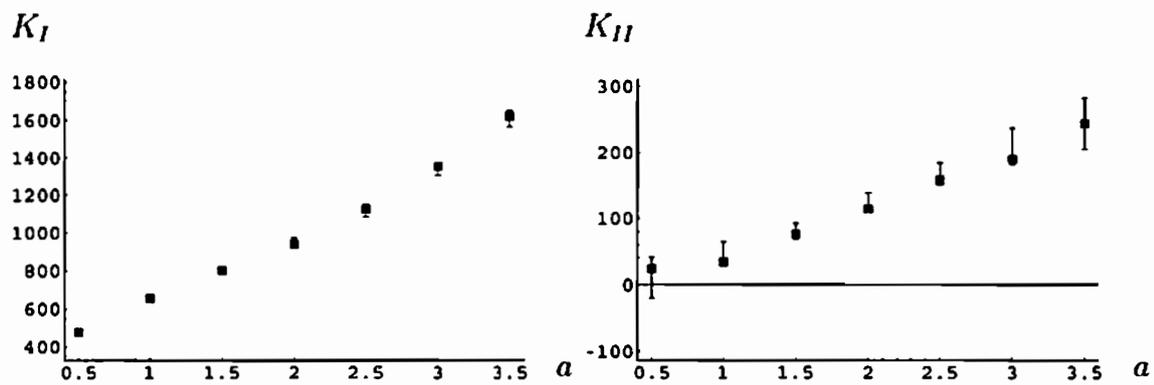


Abbildung 4.28.: SIF für Drei-Punkt-Biegeversuch mit hierarchisch quadratischen Formfunktionen

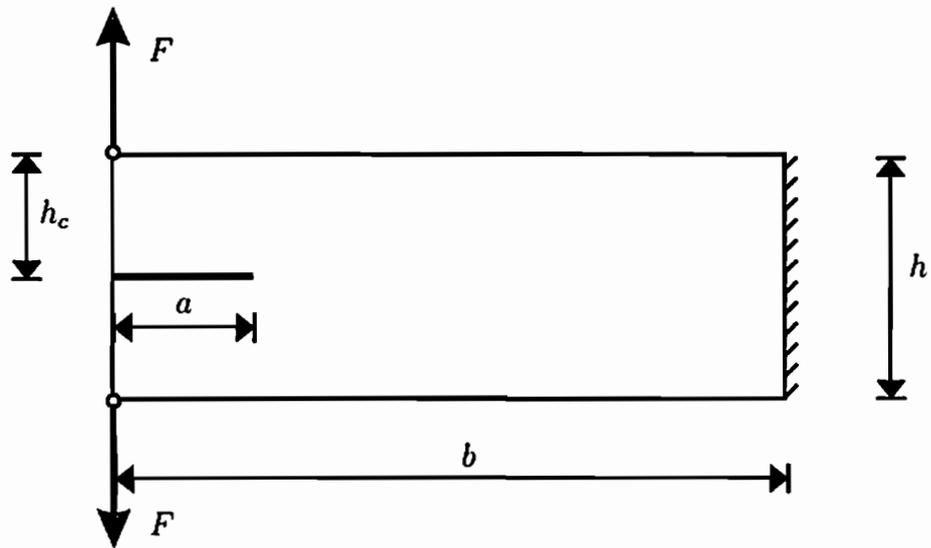


Abbildung 4.29.: CT-Versuch, Konfiguration und Definition zur Bestimmung der SIF

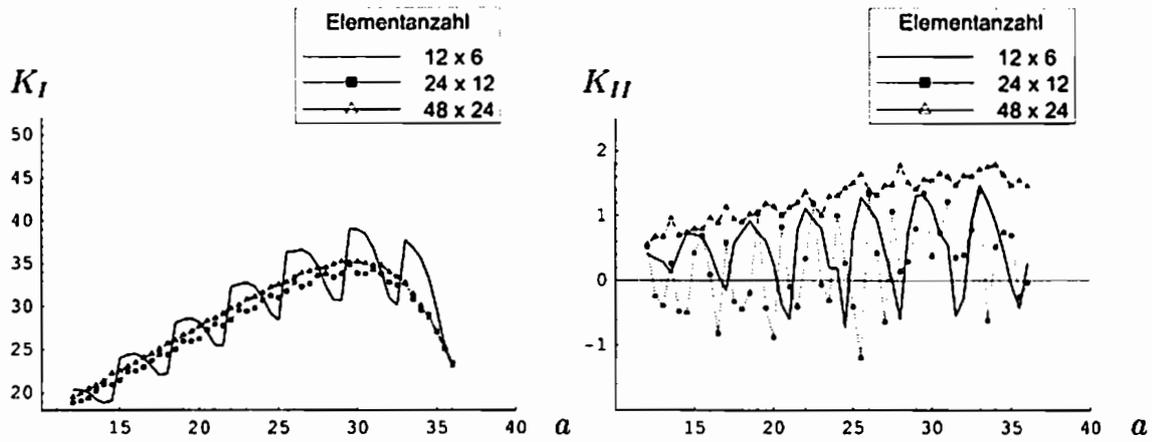


Abbildung 4.30.: SIF für CT-Versuch mit bi-linearen Formfunktionen

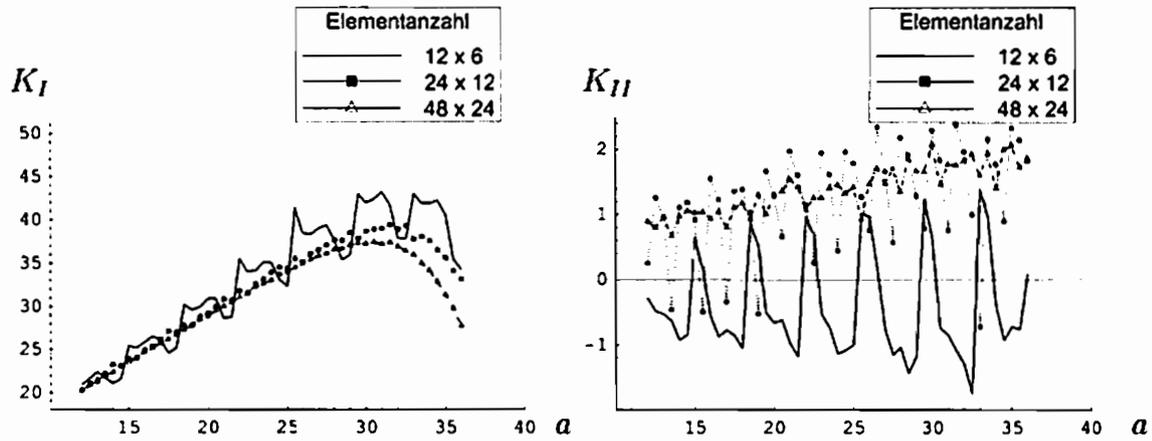


Abbildung 4.31.: SIF für CT-Versuch mit bi-quadratischen Formfunktionen

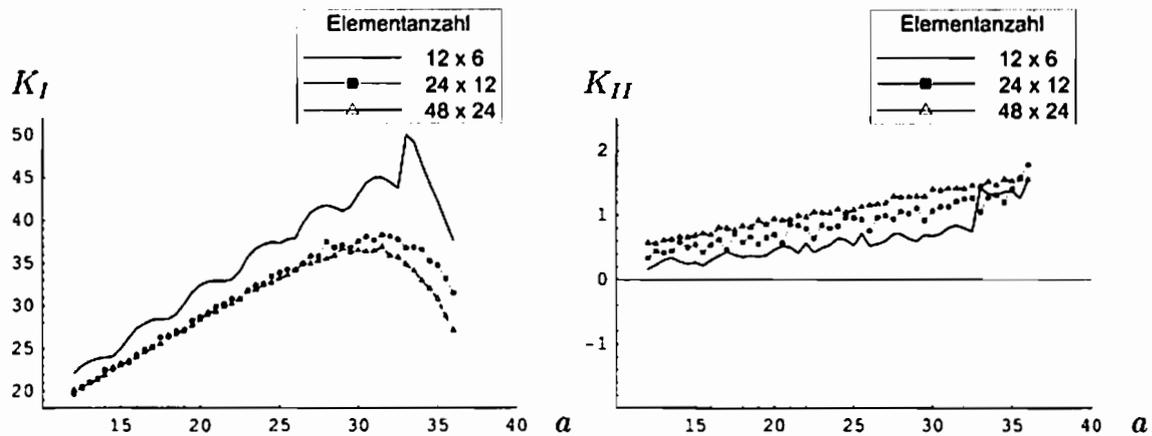


Abbildung 4.32.: SIF für CT-Versuch mit hierarchisch quadratischen Formfunktionen

5. Rissausbreitungskriterien

Die Betrachtung von Rissausbreitung ist die zentrale Problemstellung bei der Beurteilung von Lebensdaueraspekten eines Bauteils oder Bauwerks. Nachdem (Griffith 1920) ein energiebasiertes Kriterium zur Berechnung von Rissausbreitung für spröde Materialien veröffentlichte, erschien in (Irwin 1957) ein Kriterium, das durch das *strain energy release rate*-Konzept auch für duktile Materialien geeignet ist. Nach diesen grundlegenden Arbeiten in der Bruchmechanik wurde die Erforschung gerade von Möglichkeiten, die plastische Zone zu beschreiben, intensiviert (vgl. die Entwicklung des J-Integrals in (Wells 1961) und die Erweiterung der *energy release rate* auf nicht-lineare Materialien in (Rice 1968)).

Da sich diese Arbeit jedoch mit der linearen Bruchmechanik beschäftigt, sind vor allem die in den folgenden Veröffentlichungen entwickelten Kriterien maßgebend:

- maximale Umfangsspannung (Erdogan and Sih 1963),
- maximale Hauptzugspannung (Maiti and Smith 1983),
- Minimum der elastischen Energie-Dichte (Sih 1973),
- Rissrichtungskriterium mit $K_{II} = 0$ (Cotterell and Rice 1980)
- maximale treibende Kraft (Le, Schütte, and Stumpf 1999)

Sie alle lassen den SIF K_{III} unberücksichtigt und sind damit in besonderer Weise für den zweidimensionalen Fall, der im Rahmen dieser Arbeit betrachtet wird, geeignet.

In diesem Kapitel werden im Folgenden drei klassische Kriterien mit ihren unterschiedlichen Umsetzungsmöglichkeiten vorgestellt, da diese für die lineare Bruchmechanik in zwei Dimensionen von Bedeutung sind:

1. Kriterium der maximalen Zugspannung
2. Kriterium auf Grundlage der SIF
3. Kriterium auf Grundlage des Prinzips des Minimums der potentiellen Energie

Diese Kriterien werden in Kapitel 6 auf einige Beispiele angewendet und abschließend beurteilt.

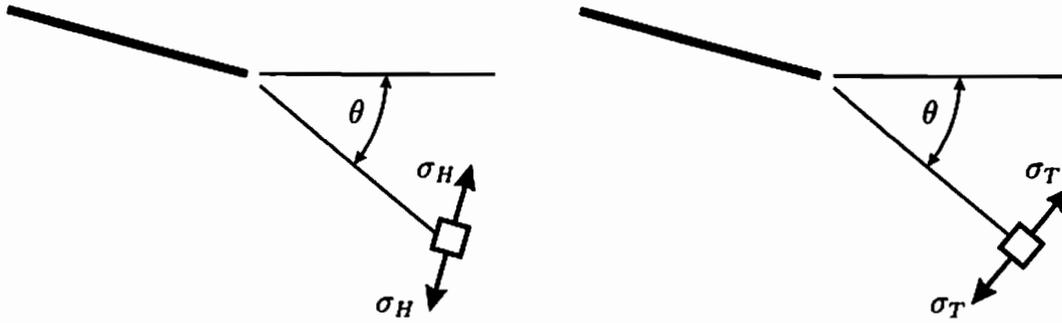


Abbildung 5.1.: Erläuterung des Winkels θ , der Spannung σ_H (links) sowie der Spannung und der Richtung von σ_T (rechts); radiale Normalspannungen und Schubspannungen sind nicht dargestellt

5.1. Kriterien der maximalen Zugspannung

Da sich diese Arbeit mit linearen Materialien beschäftigt, kann die Berechnung der Spannungen in einem Punkt durch ein FE-Programm schnell und einfach erfolgen. Zu jedem Punkt \mathbf{x} lässt sich die Spannung wie folgt angeben

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}. \quad (5.1)$$

Darin bedeutet

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{DN}(\mathbf{x}) & \text{für die FEM} \\ \mathbf{D} \begin{bmatrix} N_1(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ N_2(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ N_n(\mathbf{x}) \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} & \text{für die XFEM, mit } \mathbf{F} \text{ nach Gleichung 2.87} \end{cases} \quad (5.2)$$

Hiermit wird die Hauptspannung

$$\sigma_H = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (5.3)$$

oder die Umfangsspannung

$$\sigma_T = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xy} \sin(2\theta) \quad (5.4)$$

in Punkten mit konstantem Abstand zur Risspitze aus den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ berechnet. In den Gleichungen 5.3 und 5.4 werden die Spannungen im globalen Koordinatensystem eingesetzt. Der Winkel θ bezeichnet den Winkel zwischen der Geraden von der Risspitze zum betrachteten Punkt und der globalen x-Achse. Die hier als Tangentialspannungen bezeichneten Größen sind auch als Umfangsspannungen bekannt. Siehe dazu auch Abbildung 5.1.

Aus den so ermittelten Spannungen wird der Winkel θ gesucht, bei dem die größten Spannungen σ_H bzw. σ_T auftreten. Sind diese Werte größer als ein angegebener Grenzwert σ_C wächst der Riss in die ermittelte Richtung

$$\max_{\theta} \sigma_H(\theta) > \sigma_C \quad \text{bzw.} \quad \max_{\theta} \sigma_T(\theta) > \sigma_C. \quad (5.5)$$

Wie in (Dumstorff 2006) beschrieben, können die Hauptspannungen zur Verbesserung der Genauigkeit über einen Bereich gemittelt werden (vgl. (Wells and Sluys 2001; Jirásek and Zimmermann 2001)). Dazu wird eine Gaußsche Wichtungsfunktion

$$w = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} r_m^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2r_m^2}\right) \quad (5.6)$$

definiert und die gemittelten Spannungen σ_m über die Gleichung

$$\sigma_m = \int_{\Omega} w \sigma d\Omega \quad (5.7)$$

berechnet. Der Parameter r_m bezeichnet dabei einen Wert, der bestimmt, wie stark die Wichtungsfunktion w mit steigendem Abstand r zur Risspitze abnimmt. Für r_m ist ein Wert des 1.5-fachen der typischen Elementlänge üblich. Mittels Gleichung 5.3 wird die Hauptspannung und ihre Richtung aus den Spannungen σ_m berechnet. Risswachstum erfolgt hier ebenfalls, wenn eine kritische Spannung überschritten wird. Die Richtung des Risswachstums liegt senkrecht zur ermittelten Hauptzugspannungsrichtung.

Durch diese Vorgehensweisen kann die Richtung, in die der Riss wächst, berechnet werden. Die Länge, um die der Riss in diese Richtung wächst, kann jedoch nicht Teil der Betrachtung sein. Das liegt daran, dass die Spannungen an der Risspitze singulär, d.h. unendlich, sind. Ein Rissausbreitungskriterium mit der Risslängenänderung

$$\Delta r = \Delta r(\sigma) \quad \text{und} \quad \Delta r \sim \sigma$$

würde zu

$$\Delta r = \infty$$

führen. Aus diesem Grund wird ein konstanter Wert für Δr als eine Art Materialparameter vorgegeben.

5.2. Kriterien auf Basis der Spannungs-Intensitäts-Faktoren

Bei Verwendung der SIF zur Berechnung von Risswachstum gibt es mehrere Vorgehensweisen. Zwei davon sollen im Rahmen dieser Arbeit kurz vorgestellt werden. Ein weiteres Kriterium, das Kriterium der maximalen Energiefreisetzungsrates, wird in (Nuismer 1975) beschrieben. Die Umsetzung erfolgt dabei ebenfalls über die Berechnung der SIF. Untersuchungen haben jedoch gezeigt, dass die Ergebnisse, die mit den unterschiedlichen Kriterien erzielt werden, nur geringe Unterschiede aufweisen (Nuismer 1975). Für einen weiteren Vergleich der auf den SIF beruhenden Kriterien wird des Weiteren auf (Xie 1995) verwiesen.

5.2.1. Kriterium der maximalen Umfangsspannung

In (Erdogan and Sih 1963) wird davon ausgegangen, dass der Riss in die Richtung mit der größten Umfangsspannung wächst. Der Riss wächst demnach in die Richtung, die durch

Gleichung 5.8 berechnet werden kann

$$\theta = 2 \arctan \left(\frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right) \right) + \varphi_0, \quad (5.8)$$

wobei φ_0 den Winkel des letzten Risssegments gegenüber der globalen x-Richtung bezeichnet. Die neue Rissrichtung aus Gleichung 5.8 ist nach (Moës and Belytschko 2002) gleichbedeutend mit der Rissrichtung, die mit dem Kriterium der maximalen Umfangsspannung berechnet werden kann (vgl. auch (Dumstorff and Meschke 2004)).

5.2.2. Kriterium auf Basis der Minimierung von K_{II} ($K_{II} \rightarrow 0$)

Der Riss wächst in die Richtung, in der der Betrag des SIF K_{II} minimal wird. Das wiederum kann in unterschiedlicher Weise umgesetzt werden.

- Zum einen können nach (Amestoy and Leblond 1992) die SIF mit einer Risslängenänderung, die gegen Null geht (s. auch Abbildung 5.2) durch

$$\lim_{r \rightarrow 0} \begin{pmatrix} K_I^* \\ K_{II}^* \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

berechnet werden. In diesem Fall (vgl. (Le, Schütte, and Stumpf 1999)) werden die SIF unter Berücksichtigung des Knicks ermittelt durch

$$\begin{pmatrix} K_I^* \\ K_{II}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{I,I}(\theta) & F_{I,II}(\theta) \\ F_{II,I}(\theta) & F_{II,II}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Die darin enthaltenen Funktionen $F_{i,j}(\theta)$ können (Amestoy and Leblond 1992) entnommen werden und sind bei einem Fehler in der Reihenentwicklung von $O(m^8)$ für $i = j$ bzw. $O(m^7)$ für $i \neq j$

$$F_{I,I}(m) = 1 - \frac{3\pi^2}{8} m^2 + \left(\pi^2 - \frac{5\pi^4}{128} \right) m^4 + \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{11\pi^4}{72} + \frac{119\pi^6}{15360} \right) m^6 + O(m^8) \quad (5.11)$$

$$F_{I,II}(m) = -\frac{3\pi}{2} m + \left(\frac{10\pi}{3} + \frac{\pi^3}{16} \right) m^3 + \left(-2\pi - \frac{133\pi^3}{180} + \frac{59\pi^5}{1280} \right) m^5 + O(m^7) \quad (5.12)$$

$$F_{II,I}(m) = \frac{\pi}{2} m - \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi^3}{48} \right) m^3 + \left(-\frac{2\pi}{3} + \frac{13\pi^3}{30} - \frac{59\pi^5}{3840} \right) m^5 + O(m^7) \quad (5.13)$$

$$F_{II,II}(m) = 1 - \left(4 + \frac{3\pi^2}{8} \right) m^2 + \left(\frac{8}{3} + \frac{29\pi^2}{18} - \frac{5\pi^4}{128} \right) m^4 + \left(-\frac{32}{15} - \frac{4\pi^2}{9} - \frac{1159\pi^4}{7200} + \frac{119\pi^6}{15360} \right) m^6 + O(m^8). \quad (5.14)$$

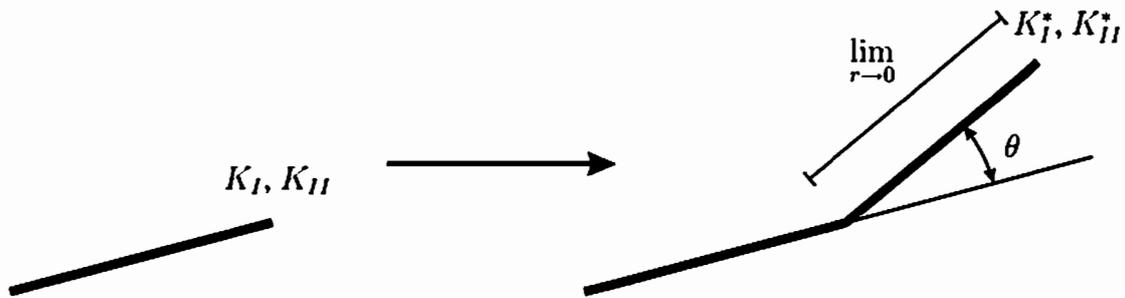
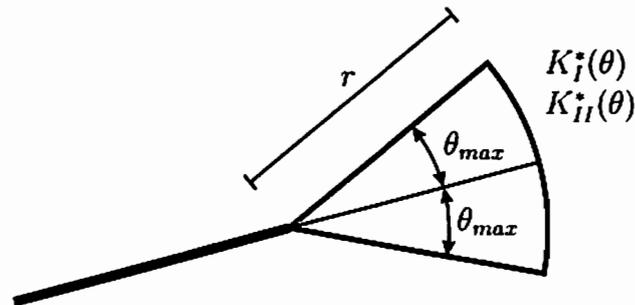
Abbildung 5.2.: Prinzipische Skizze zur Berechnung der SIF am abknickenden Riss mit $r \rightarrow 0$ 

Abbildung 5.3.: Prinzipische Skizze zur Berechnung der SIF am abknickenden Riss mit konstantem Radius

Berücksichtigt werden muss in den Gleichungen, dass hier $m = \frac{\theta}{\pi}$ einzusetzen ist.

- Zum anderen können die SIF in einem bestimmten Abstand, also mit konstantem r , berechnet werden. Über einen anzugebenden Winkelbereich $\pm\theta_{max}$ kann so das lokale Minimum des Wertes K_{II} bestimmt werden. In Abbildung 5.3 ist der Bereich als Prinzipische Skizze dargestellt. Auf dem dort gekennzeichneten Kreisbogen können die Werte K_{II} an unterschiedlichen virtuellen Risspositionen berechnet und durch ein Interpolations- oder Ausgleichspolynom approximiert werden. Der Verlauf des Betrags des SIF K_{II} für den Bereich

$$-25^\circ \leq \varphi \leq 25^\circ \quad (5.15)$$

und einem Radius von $r = 0.5$ für das in Abbildung 6.1 gezeigte Beispiel, ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Das Minimum des Graphen ist hier deutlich zu erkennen und die Rissrichtung kann z.B. durch einen einfachen Newton-Algorithmus oder bei Verwendung eines Ausgleichs- bzw. Interpolationspolynoms analytisch bestimmt werden. Da die Werte für K_{II} an mehreren Punkten innerhalb des Intervalls 5.15 ausgewertet wurden, wird die Stelle, an der K_{II} Null wird, im Allgemeinen nicht durch die über den Kreisbogen äquidistant verteilten Punkte genau getroffen, sondern muss aus den Werten interpoliert werden — wie in diesem Beispiel.

Bei beiden möglichen Vorgehensweisen aus den Abschnitten 5.2.1 und 5.2.2 wird die Risslängenänderung als Funktion des SIF K_I ausgedrückt

$$\Delta r = \Delta r(K_I). \quad (5.16)$$

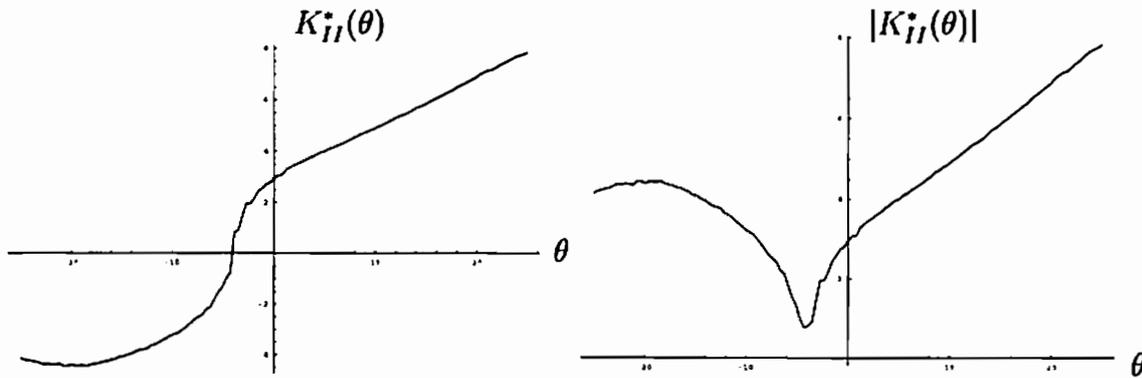


Abbildung 5.4.: Beispielhafter Verlauf von K_{II}^* (links) bzw. $|\dot{K}_{II}^*|$ (rechts) in Abhängigkeit des Winkels θ für den Drei-Punkt-Biege-Versuch nach Abbildung 6.1

5.3. Kriterium auf Basis des Prinzips des Minimums der potentiellen Energie

Energiebasierte Kriterien wurden bereits in (Griffith 1920; Parks 1974; Hellen 1975; Le 1990; Xie, Gerstle, and Rahulkumar 1995) vorgestellt. Bei den energiebasierten Kriterien wird davon ausgegangen, dass Rissfortschritt in jene Richtung stattfindet, so dass die Gesamtenergie minimiert wird. Die in einem Körper gespeicherte Formänderungsenergie ist nach Gleichung 2.37

$$\Pi_{int} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon d\Omega$$

bzw. in einem Finite-Elemente-Programm mit den Knotenwerten f_i und u_i durch

$$\Pi_{int} = -\frac{1}{2} \mathbf{f} \mathbf{u}$$

zu berechnen.

Durch eine virtuelle Verlängerung des Risses kann die Formänderungsenergie als Funktion der Rissänderung betrachtet werden. Zur ermittelten Energie Π_{int} wird dann jeweils die Energie addiert, die erforderlich ist, den Riss in eine bestimmte Richtung und mit einer bestimmten Länge voranzutreiben. In der Arbeit von Griffith (Griffith 1920) wird dargestellt, dass zur Rissausbreitung folgende Energie

$$\Pi_c(r, \varphi) = f_1 r$$

benötigt wird. Da durch die Theorie von Griffith kein oder nur instabiles Risswachstum simuliert werden kann, wird im Rahmen dieser Arbeit davon ausgegangen, dass zum Rissfortschritt Energie in einer Art von

$$\Pi_c(r, \varphi) = \frac{f_1 r^2}{1 + f_2 r} + f_3 \varphi^2 \quad (5.17)$$

erforderlich ist, um den Riss fortschreiten zu lassen. Die in Gleichung 5.17 dargestellte Energie geht für große Werte für Δr und bei gewähltem $f_3 = 0$ in das Kriterium von Griffith über. Diese phänomenologische Erweiterung des Griffith-Potentials ermöglicht es in einfacher Art und Weise, lokale Einflüsse und dynamische Prozesse zu erfassen, welche

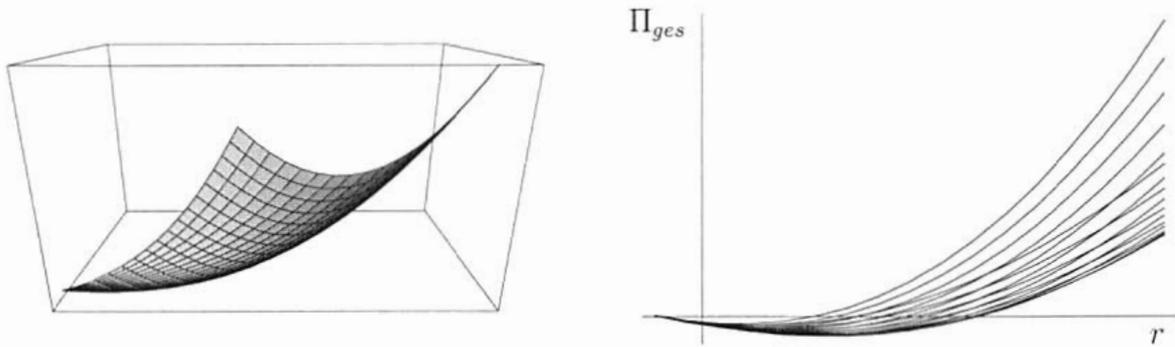


Abbildung 5.5.: Energiefunktion Π_{ges} für einen Drei-Punkt-Biege-Versuch nach Abbildung 6.1, links: als 3D-Plot, rechts: als 2D-Plot aufgetragen für konstante Winkel über den Radius

in der linear elastischen Bruchmechanik sonst unberücksichtigt blieben; liegt z.B. an einem Körper eine zyklische Belastung an, kann nun unter der Annahme, dass in jedem Zyklus der Riss um den Wert Δr fortschreitet auch Risswachstum simuliert werden, welches der Realität näher kommt. Durch diese Maßnahme lässt sich das Verfahren zudem numerisch stabiler durchführen und es entstehen Rissimulationen, die nicht mehr nur instabiles oder kein Risswachstum darstellen können, sondern in denen auch die Simulation von finitem Risswachstum möglich ist.

Die Energien werden zur Gesamtenergie zusammengefasst

$$\Pi_{ges} = \Pi_{int} + \Pi_c. \quad (5.18)$$

In Abbildung 5.5 ist eine solche Energiefunktion für einen Drei-Punkt-Biege-Versuch nach Abbildung 6.1 dargestellt mit einer virtuellen Rissverlängerung im Bereich

$$-25^\circ \leq \varphi \leq 25^\circ \quad \text{und} \quad \Delta r_{max} = 0.95. \quad (5.19)$$

Die Energie muss für die jeweiligen virtuellen Risspunkte durch das XFEM-Programm berechnet und gespeichert werden. Zusammengesetzt ergibt sich eine Energiefunktion, die

- entweder durch ein Interpolationspolynom approximiert wird; dieses Polynom wird dann dazu benutzt, das Minimum analytisch oder numerisch zu berechnen
- oder deren berechnete Punkte dazu benutzt werden, den Punkt herauszufiltern, der die kleinste berechnete Energie aufweist.

Da die Energiefunktion der internen Energie (Π_{int}) gut durch ein quadratisches Polynom (quadratisch in r und φ) näherungsweise bestimmt werden kann, sind nur sieben Iterationen für die Variation der Risspitze erforderlich. Für die Suche der minimalen Energie durch die Berechnung der Energie an einer finiten Anzahl von Punkten, sind jedoch erheblich mehr Punkte erforderlich.

Welche Vorgehensweise auch gewählt wird, das berechnete globale Minimum der Energie befindet sich an der Stelle, die die entsprechende Position der neuen Risspitzenposition beschreibt.

6. Studie des Risspfades an speziellen Beispielen

In diesem Kapitel wird eine Studie zum Rissverlauf anhand von Beispielen durchgeführt. Dazu werden

- ein Drei-Punkt-Biegeversuch und
- ein CT-Versuch

mit

- unterschiedlichen Elementnetzen
- unterschiedlichen Polynomgraden und Basen für die Formfunktionen
- unterschiedlichen Koordinaten für den initiierten Riss

und unter Berücksichtigung der Rissausbreitungskriterien

- Kriterium der maximalen Umfangs-/Tangentialzugspannung mit unterschiedlichen Werten für die Risslängenänderung
- Kriterium auf Grundlage der Spannungsintensitätsfaktoren als Kriterium der maximalen Umfangsspannung (SIF-1) mit unterschiedlichen Werten für f (s. Gleichung 6.1)
- Kriterium auf Grundlage der Spannungsintensitätsfaktoren mit $|K_{II}| \rightarrow 0$ (SIF-2) ebenfalls mit unterschiedlichen Werten für f (s. Gleichung 6.1)
- Kriterium auf Grundlage des Prinzips der minimalen potentiellen Energie mit unterschiedlichen Werten für f_1 , f_2 und f_3 (s. Gleichung 5.17)

simuliert. Bei beiden Kriterien auf Grundlage der SIF wird die Risslängenänderung mit

$$\Delta r = \frac{1}{f} K_I \quad (6.1)$$

berechnet. Die für die Rissausbreitungskriterien erforderlichen Parameter, werden variiert mit

$$\begin{aligned} f &= 10^n \text{ mit: } n = 0, 1, 2, 3 \\ f_{1,2} &= 10^n \text{ mit: } n = -3, -2, \dots, 2, 3 \\ f_3 &\in \{0, 0.5, 1\}. \end{aligned}$$

In den folgenden Abbildungen werden aus den in der Parameter-Studie ermittelten Risspfaden die charakteristischen Risspfade dargestellt. Diese Ergebnisse repräsentieren das gesamte Spektrum der Ergebnisse. Rechts neben den Grafiken für die Risspfade befindet sich jeweils ein Diagramm mit den Risslängenänderungen in jedem Risschritt, also den Längen der Vektoren

$$\Delta r = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}|,$$

wobei \mathbf{x}_i die i -te Risskoordinate bezeichnet.

Bei Verwendung des Kriteriums auf Grundlage des Minimums der potentiellen Energie, wird ein lokales Minimum innerhalb der Grenzen

$$0.0 \leq \Delta r \leq 0.8 \quad -30^\circ \leq \varphi \leq 30^\circ \quad (6.2)$$

gesucht.

Die Integrationen erfolgen sowohl für die Elementsteifigkeitsmatrizen als auch für die Berechnung des J-Integrals mit Hilfe der Kombination aus Newton-Cotes-Integration und Gauss-Quadratur mit einer relativen Genauigkeit von $\varepsilon_{\text{rel.}} = 10^{-3}$.

6.1. Drei-Punkt-Biegeversuch

6.1.1. Simulationsdefinitionen

Es wird der in Abbildung 6.1 dargestellte Biegeversuch simuliert mit den Parametern:

$$b = 8.0$$

$$h = 7.0$$

$$F = 1000.0$$

$$E = 10000.0$$

$$\nu = 0.3.$$

Die Koordinate b_1 wird in den Berechnungen mit den Werten $b_1 \in \{1.8, 5.2\}$ berücksichtigt. Die Länge des Anschnitts und der Radius für das Integrationsgebiet des J-Integrals ist in jedem Fall $a = r = 0.05$. Diese Wahl des Integrationsgebiets für das J-Integral hat zwei Gründe: Einerseits liegen damit alle Integrationspunkte innerhalb des Körpers, was zur Folge hat, dass die Integrationsmethode schneller und im Allgemeinen besser konvergiert. Andererseits muss das Kriterium auch für kleine Integrationsgebiete gute Ergebnisse liefern, damit das Risswachstum für zwei oder mehr Risse sinnvoll simuliert werden kann. Der Abstand von 0.05 wird ebenfalls für die ersten drei Punkte zur Ermittlung der Energiefläche gewählt. In doppeltem Abstand werden drei weitere Punkte erzeugt, mit denen die Energiefreisetzung ermittelt werden kann.

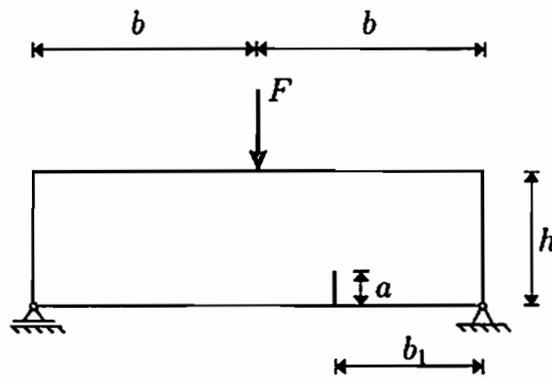


Abbildung 6.1.: Drei-Punkt-Biegung mit einem Riss

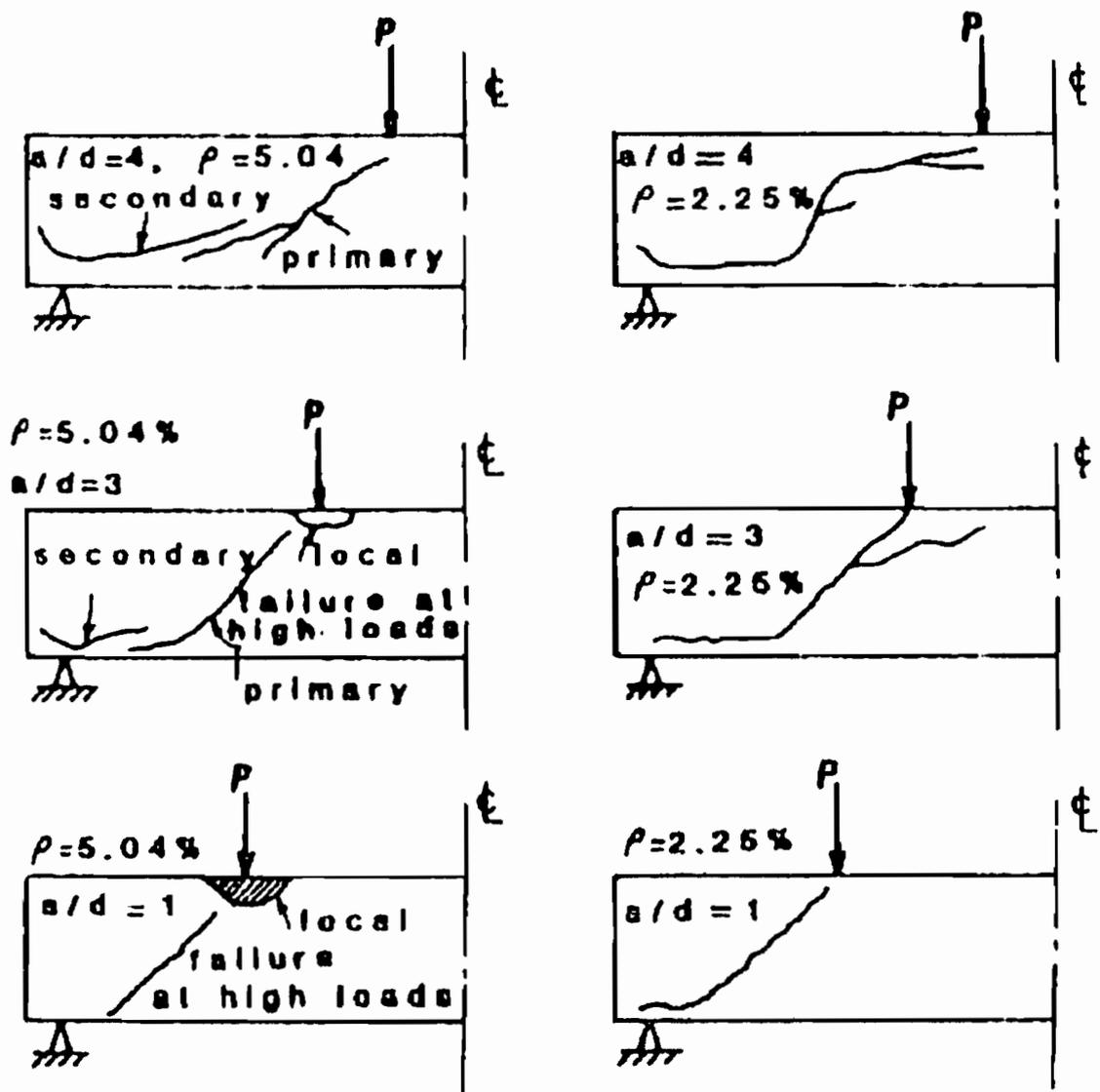


Abbildung 6.2.: Skizzen experimenteller Ergebnisse für einen Drei-Punkt-Biege-Versuch mit hohem Bewehrungsgrad

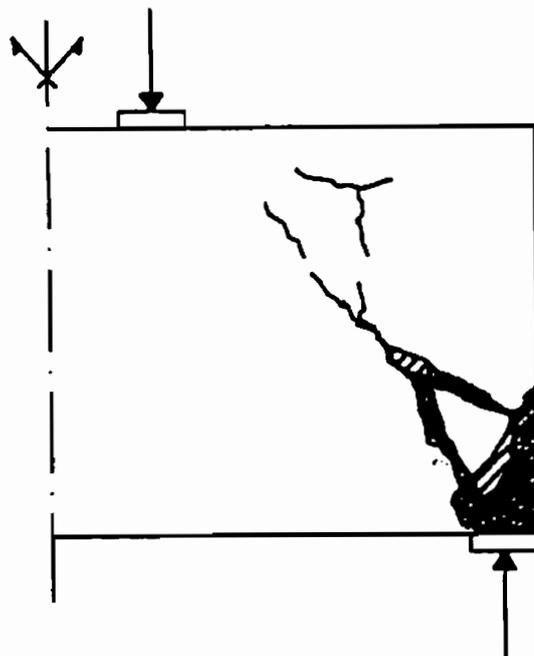


Abbildung 6.3.: Skizze experimenteller Ergebnisse für einen Drei-Punkt-Biege-Versuch mit fehlender Verankerungslänge der Längsbewehrung

6.1.2. Ergebnisse und Diskussion für $b_1 = 5.2$

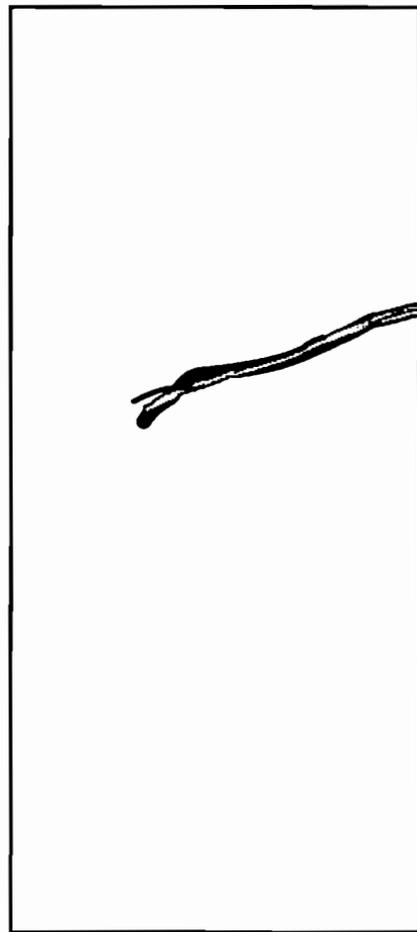
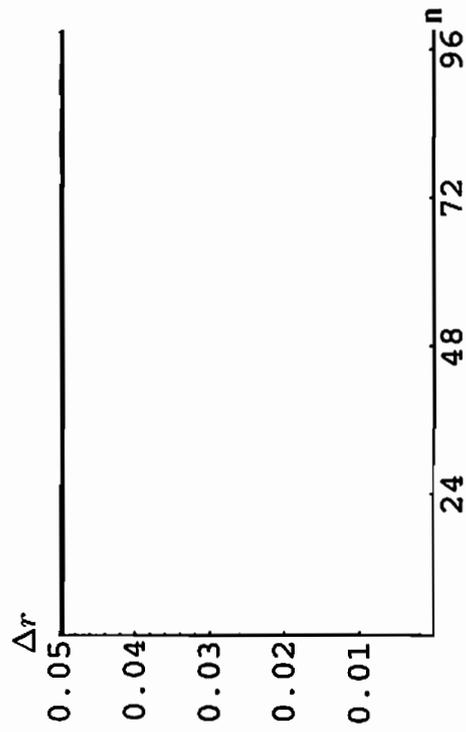
Die Ergebnisse für $b_1 = 5.2$ sind in den Abbildungen 6.4 bis 6.15 dargestellt. Das erwartete Rissbild (s. Abbildung 6.2, aus (Fischer 1997)) ist ein so genannter Biegeriss, der auf den Lastangriffspunkt zustrebt.

Die Abbildungen 6.4-6.6 zeigen die Ergebnisse für das Kriterium der maximalen Umfangsspannungen für Elementnetze aus 11×5 , 23×11 und 47×23 Elementen. In allen Fällen wächst der Riss auf den Lastangriffspunkt zu, wobei die Unterschiede zwischen den Lösungen und gegenüber Experimenten sowohl für unterschiedliche Elementnetze als auch für unterschiedliche Formfunktionen vernachlässigbar sind.

In den Abbildungen 6.7-6.9 sind die Ergebnisse für das Kriterium SIF-1 dargestellt. In allen Netzen verläuft der Riss annähernd gerade durch den Körper. Das Gleiche gilt auch für die Ergebnisse, die bei Verwendung des Kriteriums SIF-2 erzielt werden. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 6.10-6.12 dargestellt. Für beide Kriterien wird im groben Elementnetz für die bi-linearen Formfunktionen, im feinen Elementnetz für die quadratischen Formfunktionen nach wenigen Risschritten ein Wert von Null für K_I berechnet und damit ein Stillstand im Risswachstum ermittelt. Da es in der linear-elastischen Bruchmechanik bei kraftgesteuerten Prozessen nicht möglich ist, dass das Risswachstum stoppt, ist dieses Verhalten durch die Theorie nicht zu begründen und muss durch die Numerik hervorgerufen werden. Das bedeutet, dass die SIF nicht mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden können. Dafür können zwei Ursachen verantwortlich sein: Erstens kann der Radius für das Integrationsgebiet der J-Integrale nicht groß genug gewählt sein, damit die SIF mit entsprechender Genauigkeit berechnet werden. Zweitens kann die Abbildung des abknickenden Risses auf einen geraden Riss die Ergebnisse des J-Integrals beeinflussen. Dies bleibt weiter zu untersuchen.

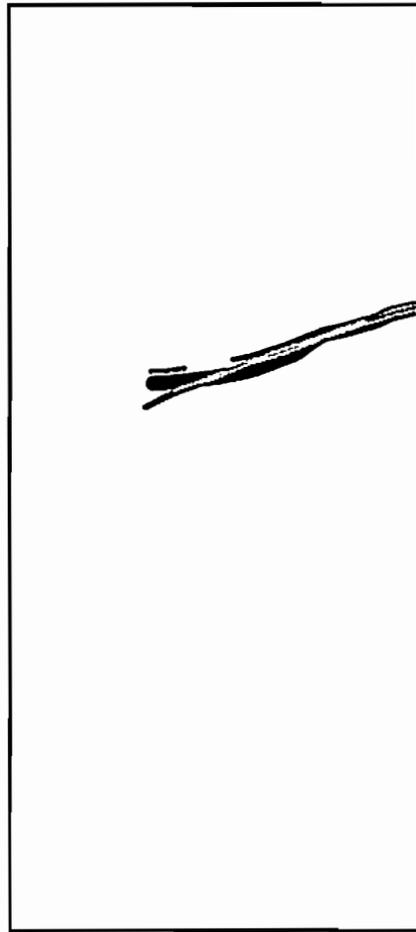
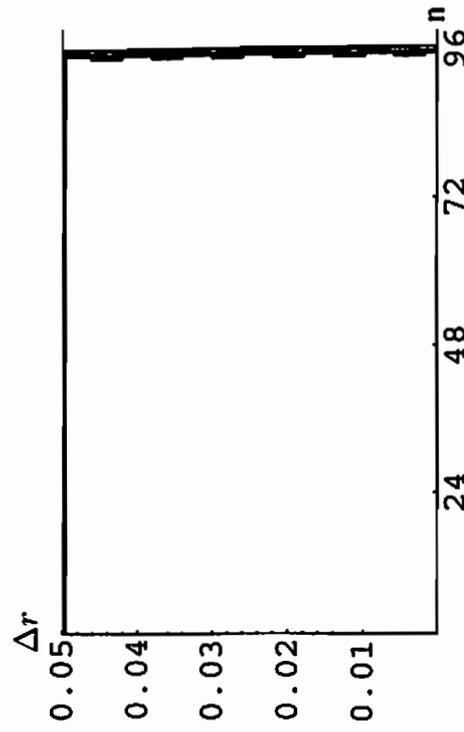
Durch Verwendung des Kriteriums der minimalen Energie werden die Risspfade berechnet, die in den Abbildungen 6.13-6.15 dargestellt sind. Auch hier werden für die verwendeten Elementnetze und die unterschiedlichen Formfunktionen kaum unterscheidbare Risspfade berechnet, die mit Experimenten in guter Übereinstimmung stehen. Der ermittelte Risspfad verläuft hier in einem Bogen auf den Lastangriffspunkt zu. Bei den in diesem Beispiel ermittelten Ergebnissen entsprechen die Risse unter Verwendung des Kriteriums der minimalen Energie am deutlichsten dem erwarteten Rissbild.

In diesem Beispiel lassen sich also Risspfade berechnen, die je nach Rissausbreitungskriterium mehr oder weniger dem erwarteten Risspfad entsprechen. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Lösungen bei Verwendung unterschiedlicher Formfunktionen sind nicht so deutlich wie durch die Ergebnisse aus Kapitel 4 erwartet. Weiter lässt sich beobachten, wie die Risslängenänderung überproportional mit fortschreitendem Riss wächst. Das gelingt besonders gut mit dem Kriterium der minimalen Energie. In dieser Form ist das für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung nicht möglich, da mit einer konstanten Risslängenänderung gearbeitet wird. Deutlich zu erkennen ist, dass die Genauigkeit der SIF bei diesem Beispiel nicht ausreicht, um ein sinnvolles Risswachstum zu simulieren.



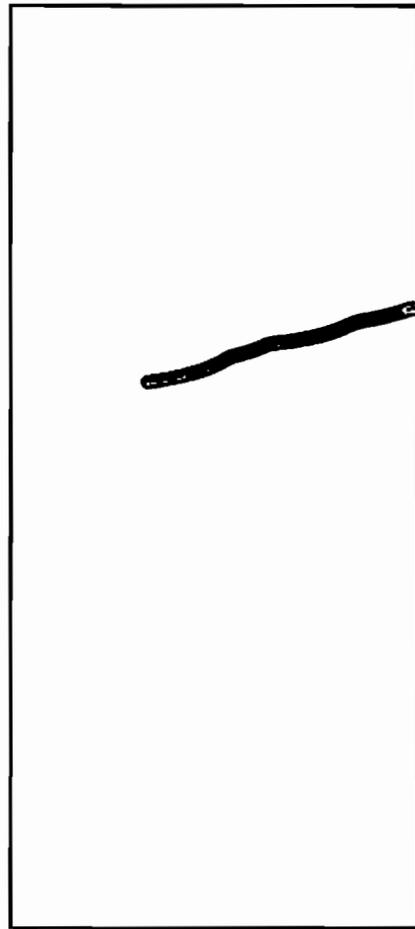
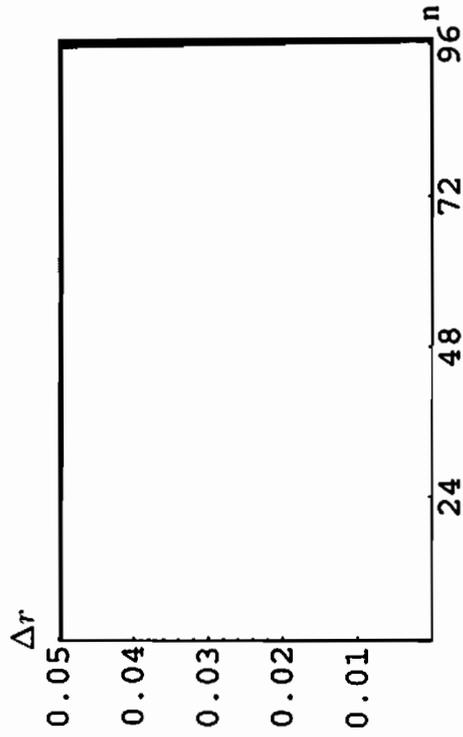
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.4.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 11×5 Elementen



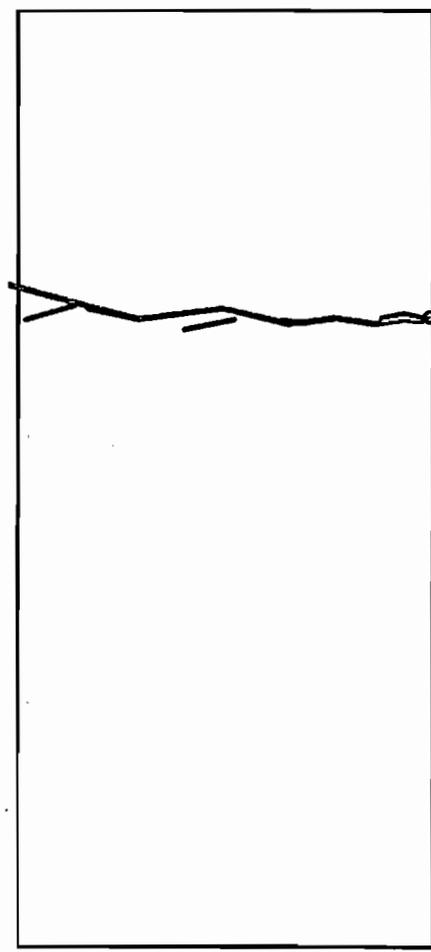
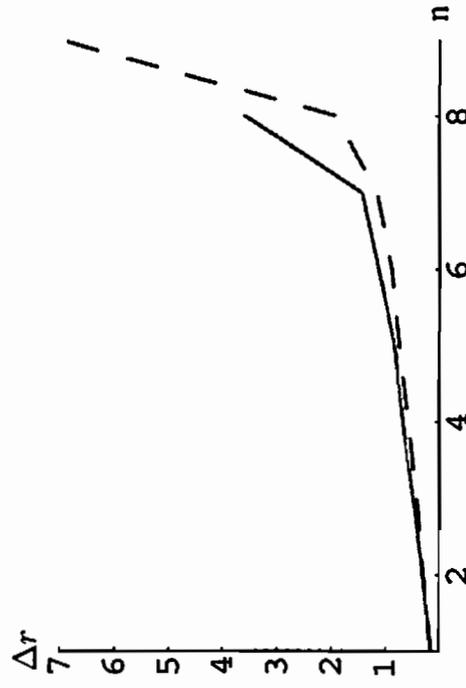
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.5.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 23×11 Elementen



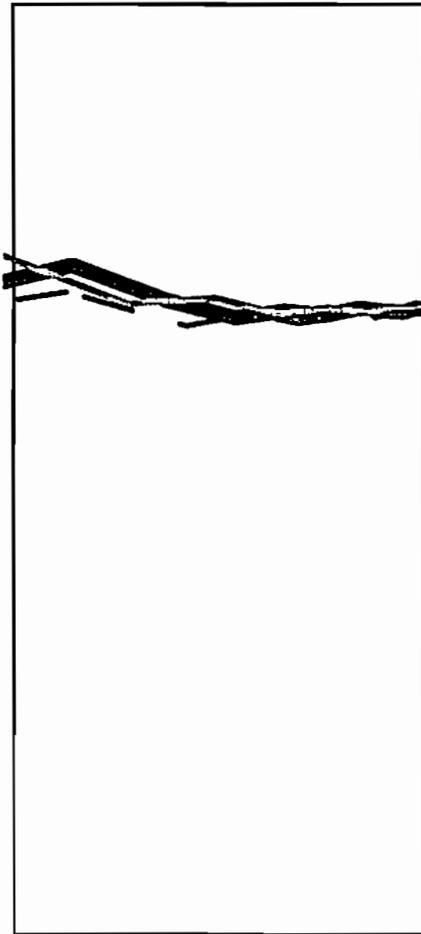
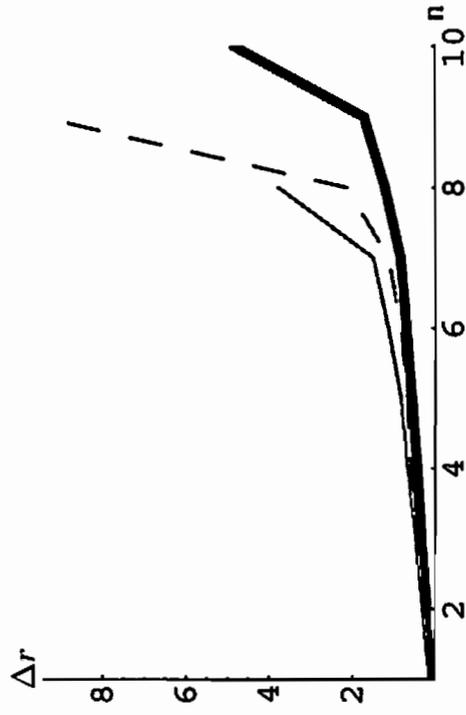
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.6.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 47×23 Elementen



— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.7.: Rissfaden des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium SIF-1 mit 1×5 Elementen und $f = 1000$



bi-linear
 bi-quadr.
 hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.8.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium SIF-1 mit 23×11 Elementen und $f = 1000$

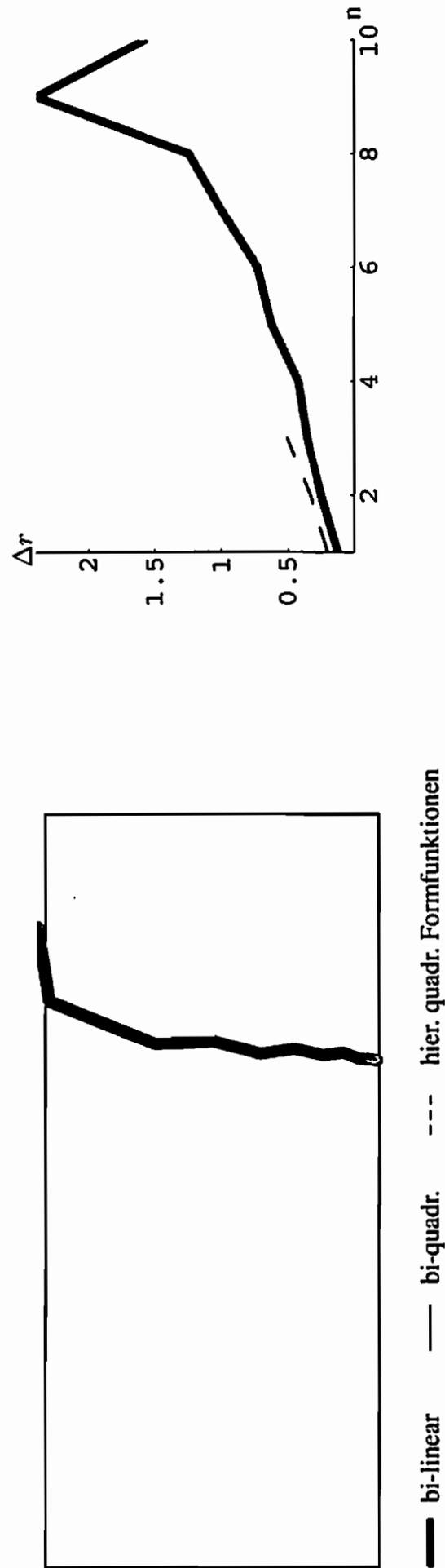
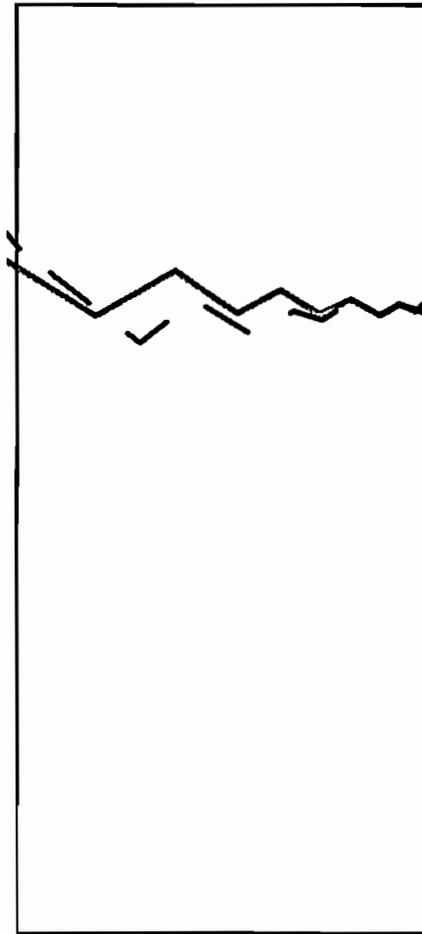
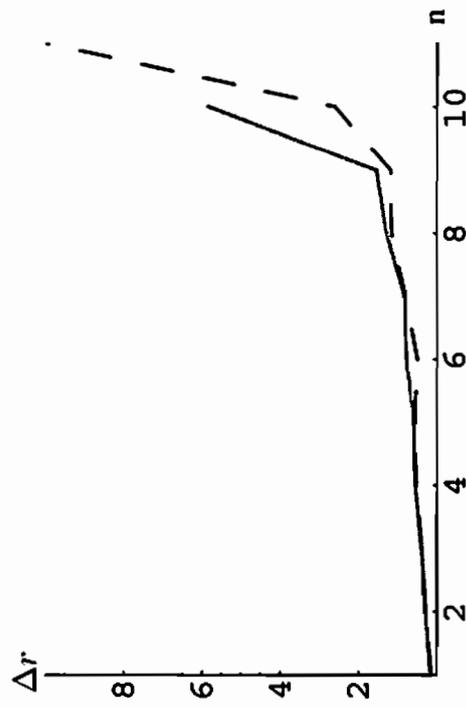
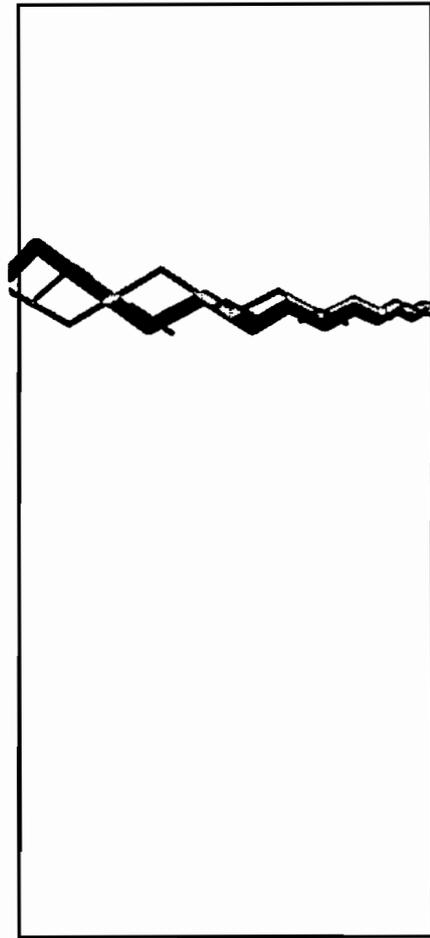
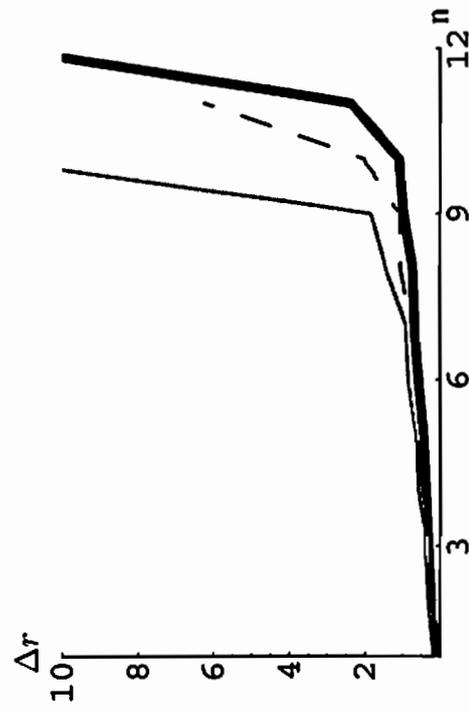


Abbildung 6.9.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium SIF-I mit 47×23 Elementen und $f = 1000$



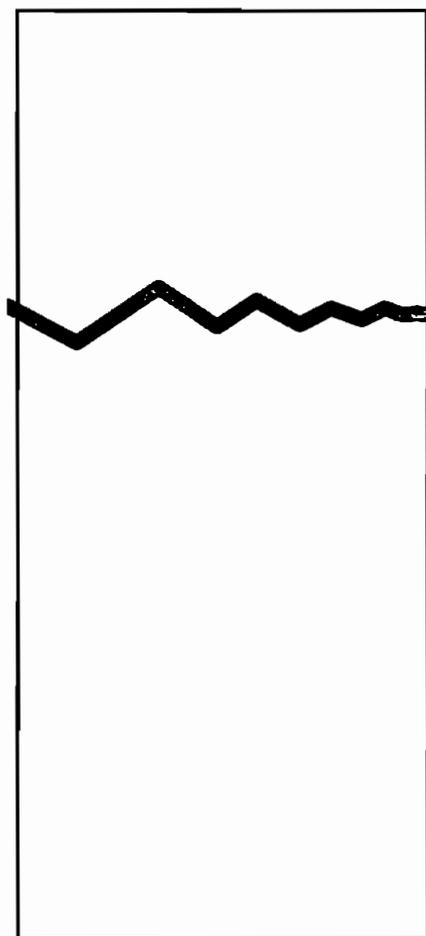
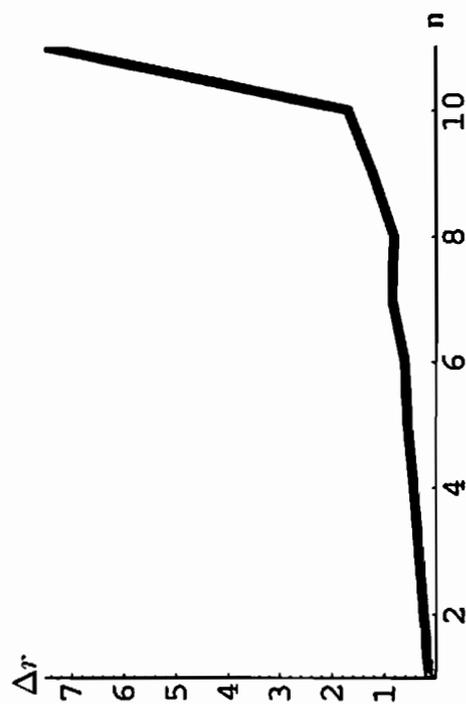
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.10.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium SIF-2 mit 11×5 Elementen und $f = 1000$



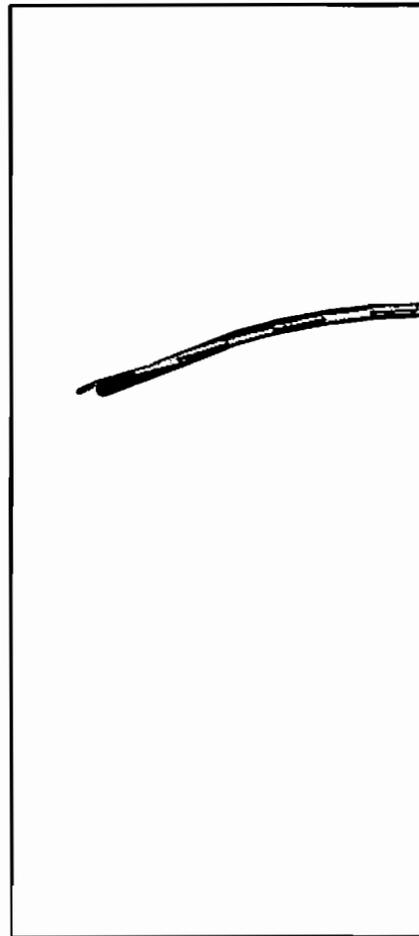
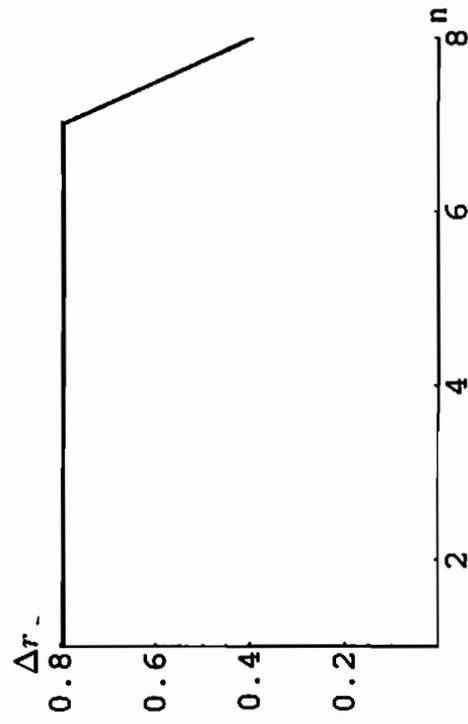
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.11.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium SIF-2 mit 23×11 Elementen und $f = 1000$



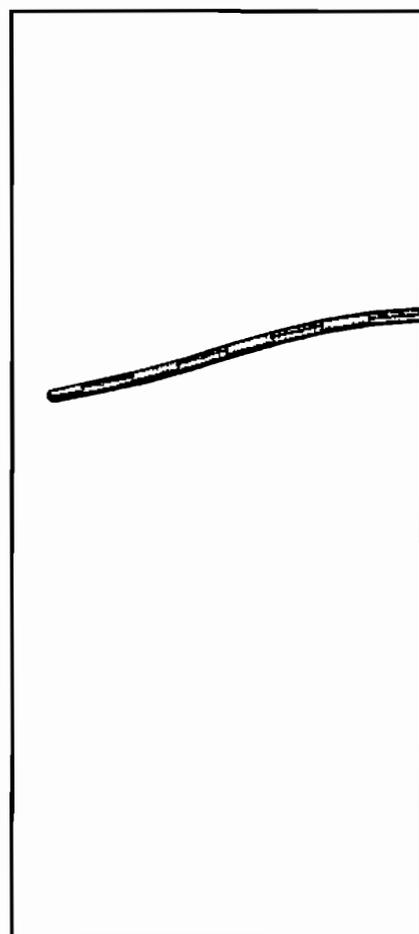
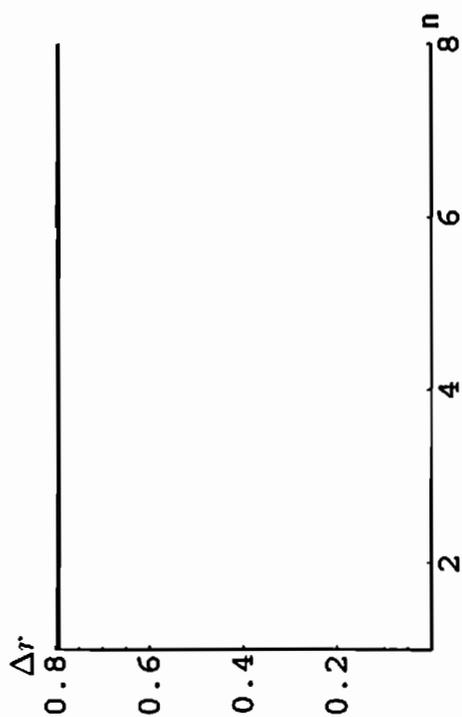
— bi-linear — bi-quadr. - - - hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.12.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium SIF-2 mit 47×23 Elementen und $f = 1000$



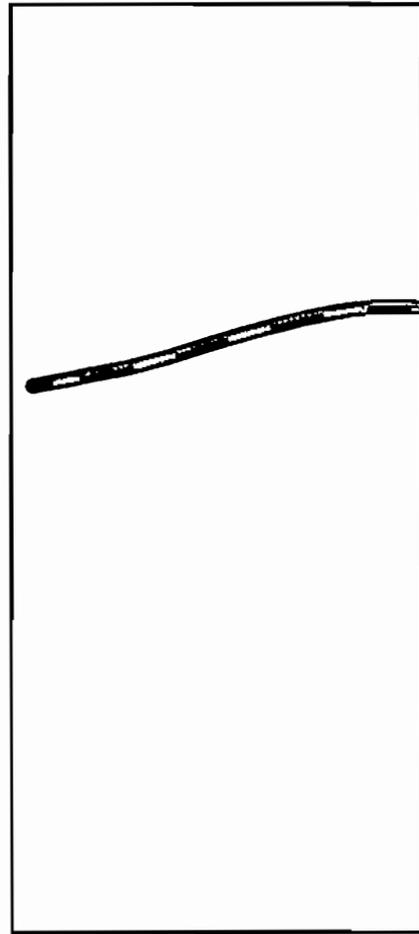
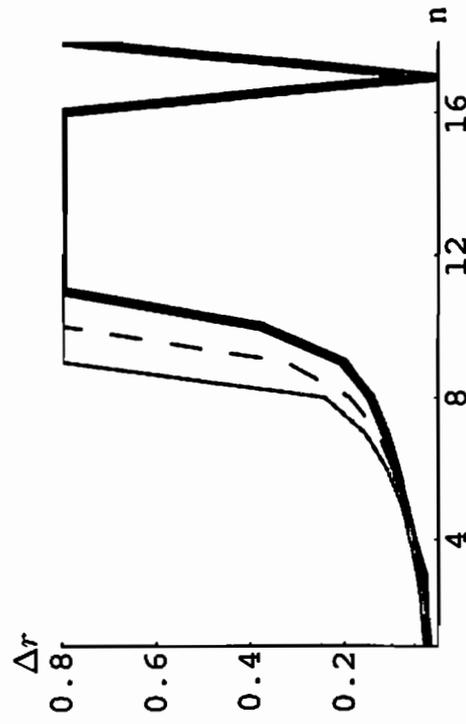
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.13.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 11×5 Elementen und $f_1 = 0.01$, $f_2 = 0.01$, $f_3 = 0.5$



— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.14.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 0.01$, $f_2 = 0.01$, $f_3 = 0.5$



— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.15.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 5.2$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 100$, $f_2 = 1.0$, $f_3 = 0.0$

6.1.3. Ergebnisse und Diskussion für $b_1 = 1.8$

Die Ergebnisse für $b_1 = 1.8$ sind in den Abbildungen 6.16 bis 6.27 dargestellt. Für dieses Beispiel ist aus experimenteller Sicht nach Abbildung 6.3 (aus (Hong, Kim, Kim, and Hong 2002)) entweder ein so genannter Schubriss oder ein Riss, der um das Auflager herum verläuft, zu erwarten. Mit der im Stahlbetonbau üblichen Betrachtung der Druck- und Zugstreben, erfolgt für dieses Beispiel Risswachstum auf den Lastangriffspunkt zu. Aufgrund einer energetischen Betrachtungsweise ist aber auch denkbar, dass der Lastangriffspunkt durch einen Riss, der um das Auflager herumläuft, eine größere Verschiebung erfährt und so durch das Abschneiden des Auflagers mehr Energie freigesetzt wird.

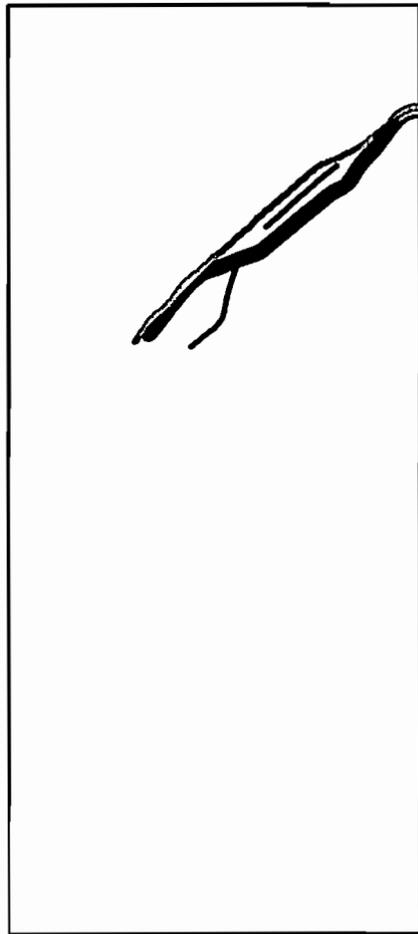
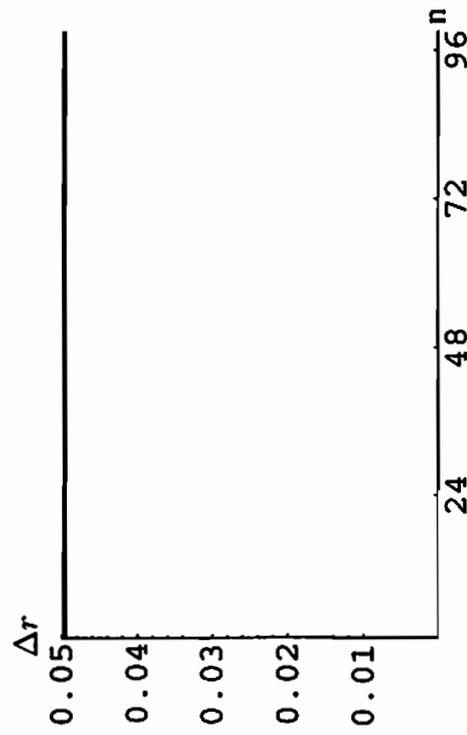
Die Abbildungen 6.16-6.18 zeigen die Ergebnisse für das Kriterium der maximalen Umfangsspannungen für Elementnetze aus 11×5 , 23×11 und 47×23 Elementen. In allen drei Fällen wächst der Riss auf den Lastangriffspunkt zu, also in der Richtung, die aus Experimenten z.B. aus dem Stahlbetonbau bekannt ist, so dass die Simulation eine sehr gute Annäherung an die Experimente bietet. Dabei fällt vor allem die gute Übereinstimmung der Rissrichtung zu Beginn der Simulation auf, die gerade bei den beiden feineren Elementnetzen zu kaum unterscheidbaren Ergebnissen führt.

In den Abbildungen 6.19-6.21 sind die Ergebnisse für das Kriterium SIF-1 und in den Abbildungen 6.22-6.24 für das Kriterium SIF-2 dargestellt. Für das grobe Elementnetz werden keine aussagekräftigen Ergebnisse ermittelt. Im mittleren Elementnetz verläuft der Riss für beide Kriterien nahezu geradeaus. Für das Kriterium SIF2 wird darüber hinaus im feinen Elementnetz für die quadratischen Formfunktionen nach wenigen Schritten ein Wert von Null für K_I berechnet, so dass das Risswachstum zum Stillstand kommt. Wie im vorhergehenden Abschnitt, muss auch hier untersucht werden, wodurch der durch die Theorie nicht begründbare Abbruch im Risswachstum verursacht wird.

Durch Verwendung des Kriteriums der minimalen Energie werden die Risspfade berechnet, die in den Abbildungen 6.25-6.27 dargestellt sind. Hier werden für das feinere Elementnetz Risspfade berechnet, die um das Auflager herumlaufen. Bei Verwendung des groben Netzes wird jedoch bei Verwendung der bi-linearen bzw. bi-quadratischen Formfunktionen ein nicht möglicher Risspfad berechnet, der dadurch zustande kommt, dass die Energiefläche in diesem Fall durch die geringe Anzahl von Punkten nicht gut genug approximiert werden kann. Aus diesem Grund wird auch für die hierarchisch quadratischen Formfunktionen ein etwas zu flach verlaufender Schubriss erzeugt.

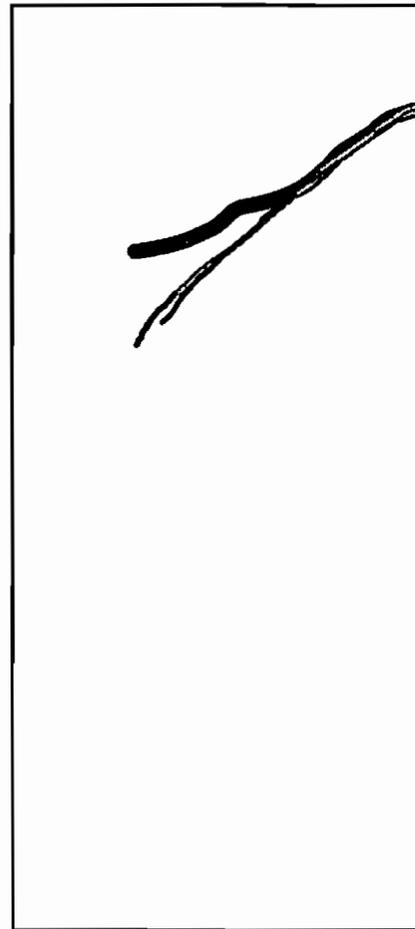
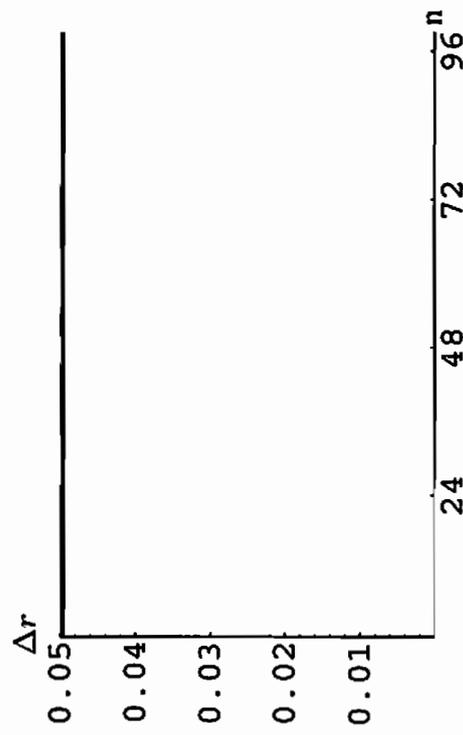
Bei diesem Beispiel werden unterschiedliche Richtungen für die Risspfade berechnet. Zusätzlich ist zu beobachten, dass die Unterschiede in den einzelnen Lösungen bei Verwendung unterschiedlicher Formfunktionen nicht so deutlich ausfallen, wie man aufgrund der Berechnung der SIF in Kapitel 4 meinen könnte. Weiter lässt sich beobachten, dass sich die Risslängenänderung Δr überproportional vergrößert.

Die Tatsache, dass die Energiefläche in diesem Beispiel durch nur sieben Punkte unzureichend dargestellt werden kann, ist problematisch. Um dieses Problem zu lösen, muss untersucht werden, inwieweit ein quadratisches Ausgleichspolynom unter Berücksichtigung mehrerer Punkte andere und ggf. bessere Ergebnisse für die Interpolation der Energie liefert.



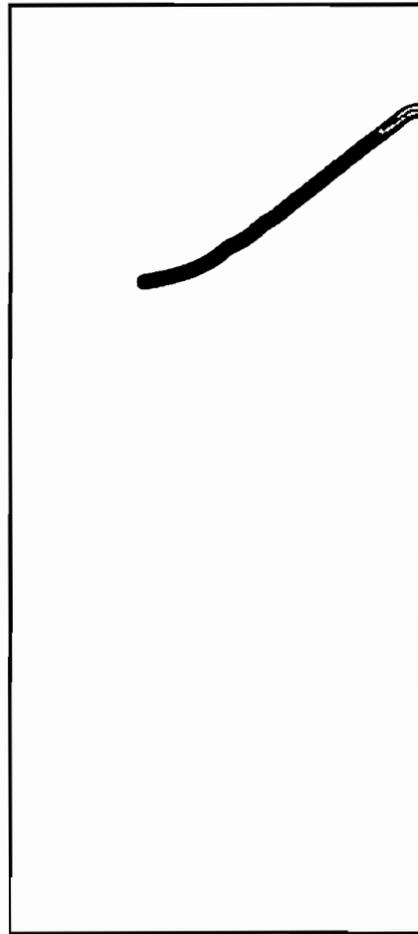
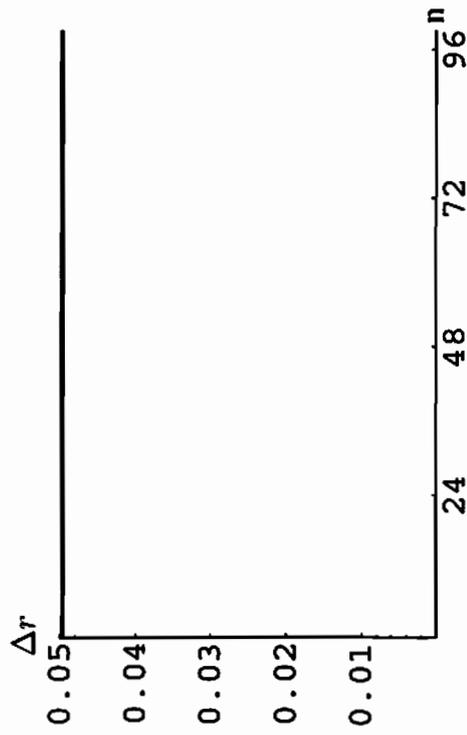
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.16.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 11×5 Elementen



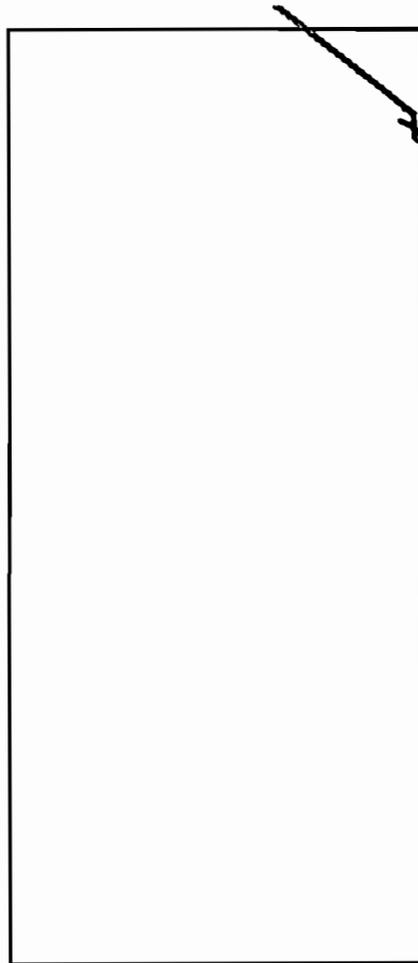
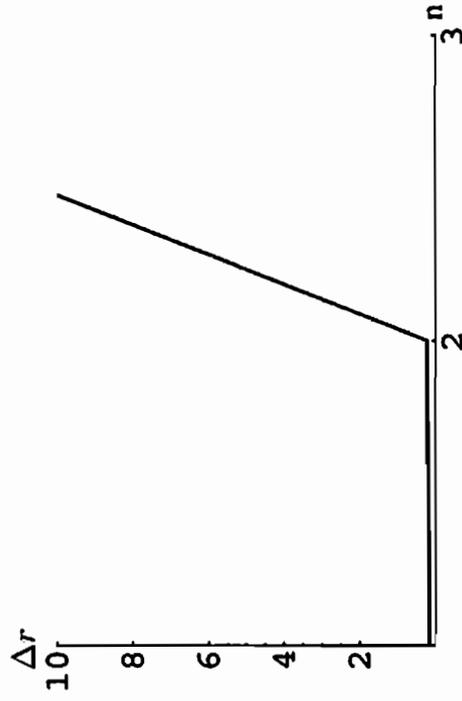
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.17.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 23×11 Elementen



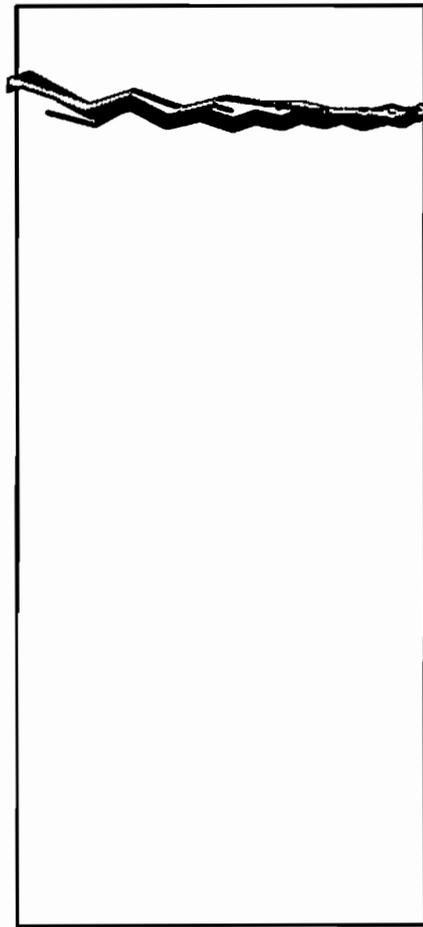
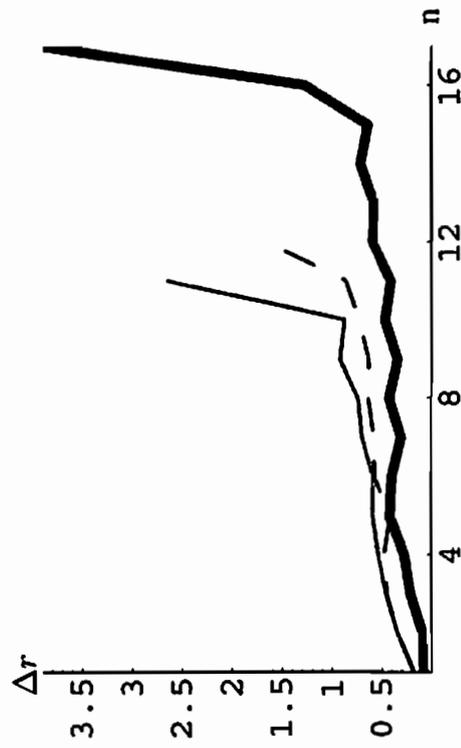
— bi-linear — bi-quadr. - - - hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.18.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 47×23 Elementen



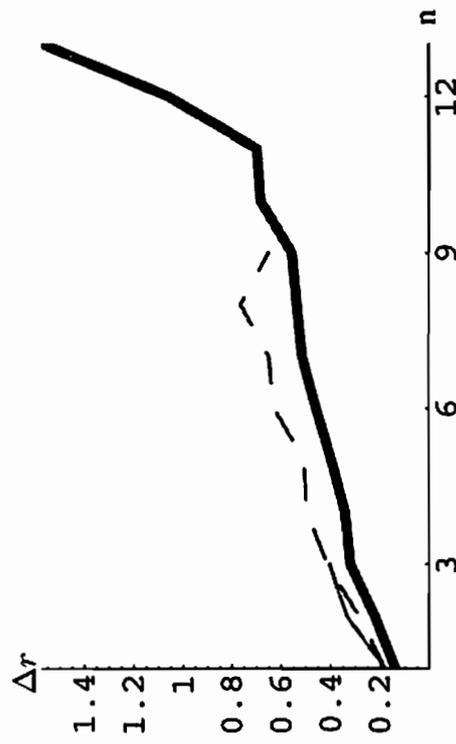
— bi-linear — bi-quadr. - - - hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.19.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium SIF-I mit 11×5 Elementen und $f = 1000$



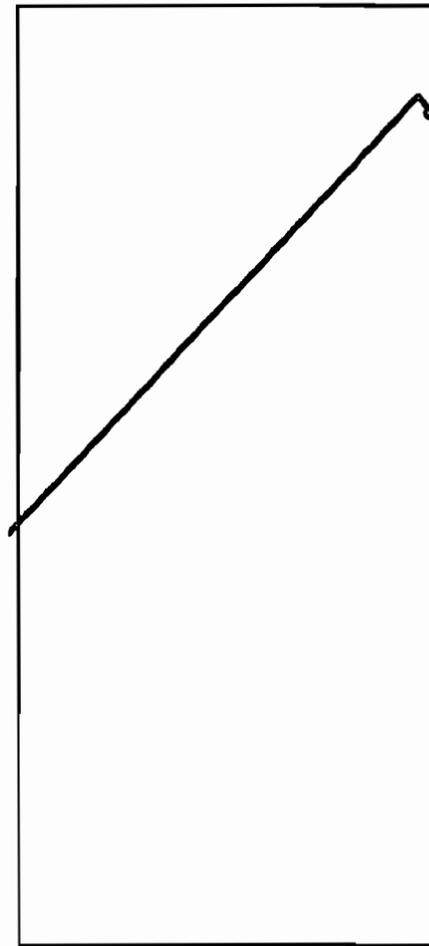
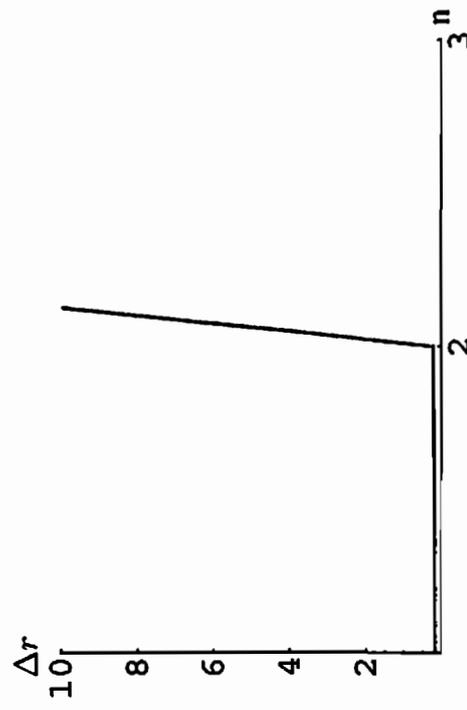
— bi-linear — hier. quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.20.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium SIF-1 mit 23×11 Elementen und $f = 1000$



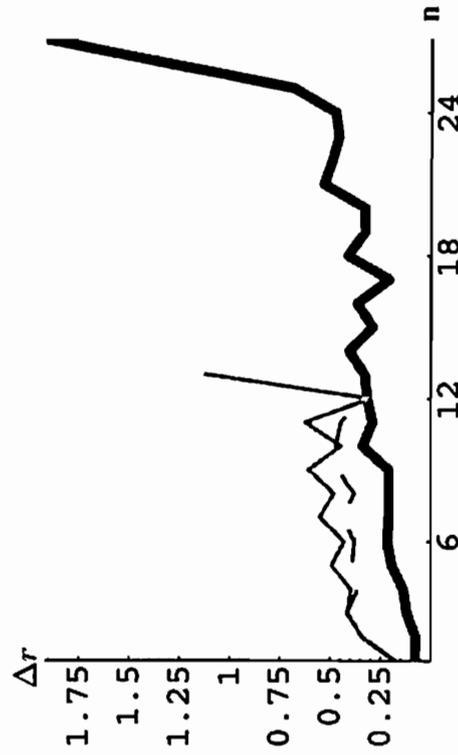
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.21.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium SIF-I mit 47×23 Elementen und $f = 1000$



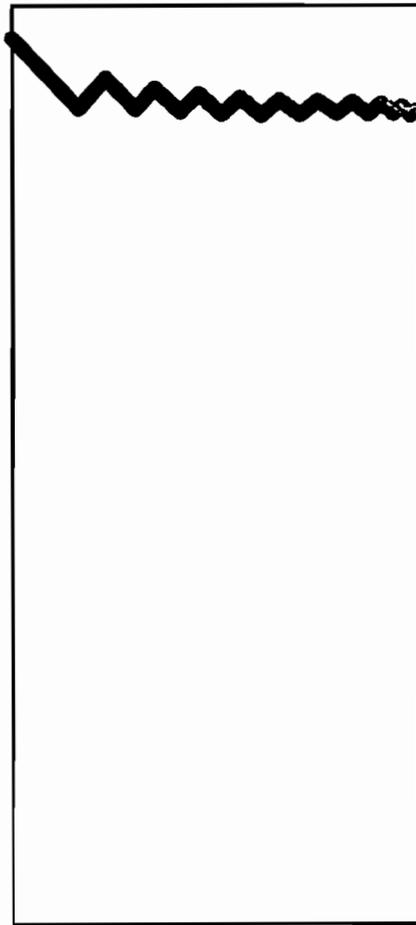
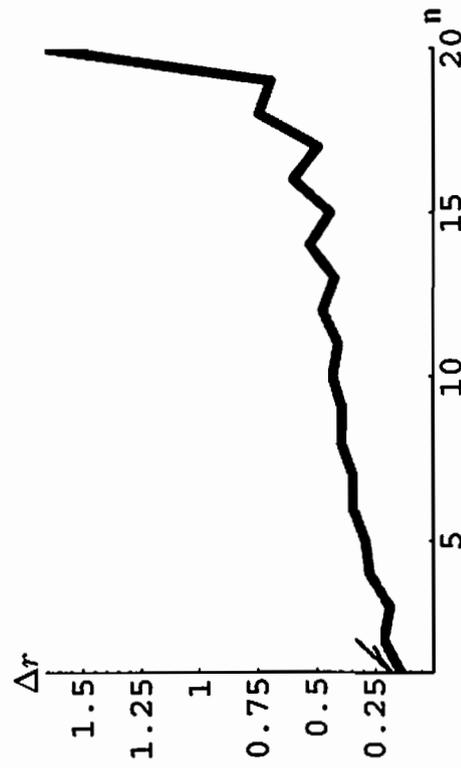
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.22.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium SIF-2 mit 1×5 Elementen und $f = 1000$



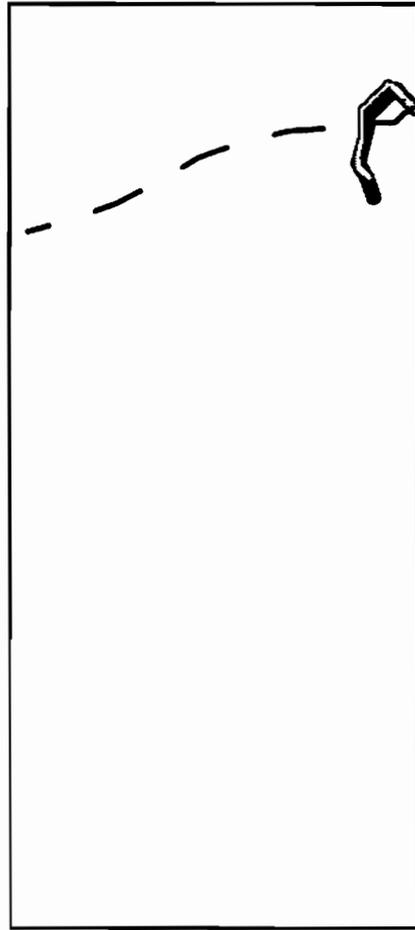
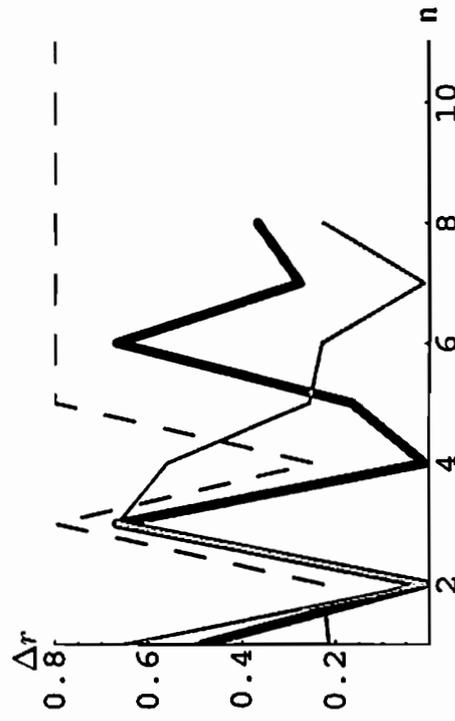
— bi-linear — bi-quadr. - - - hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.23.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium SIF-2 mit 23×11 Elementen und $f = 1000$



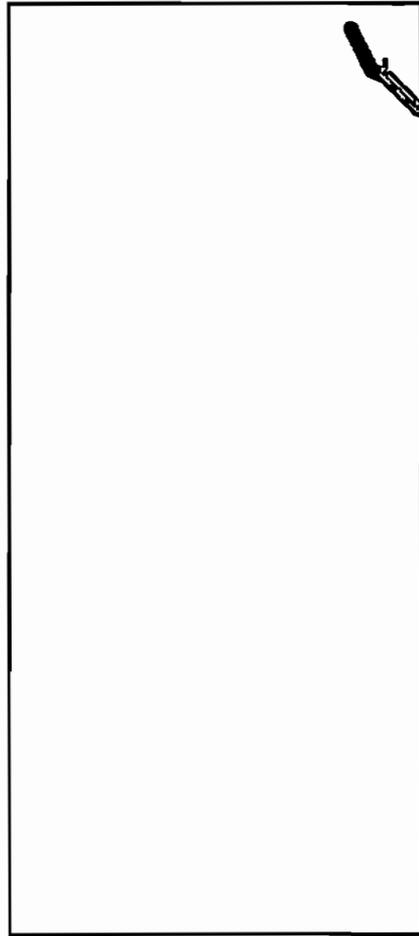
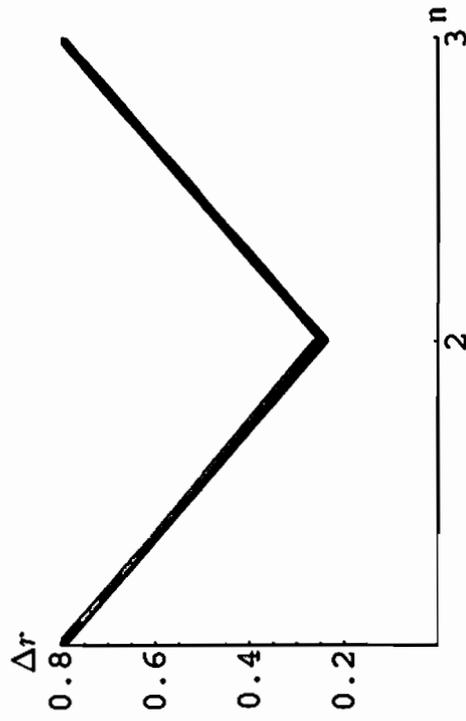
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.24.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium SIF-2 mit 47×23 Elementen und $f = 1000$



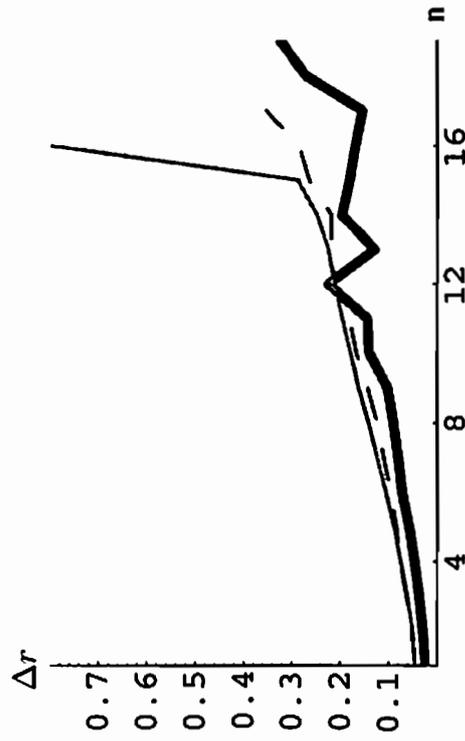
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.25.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 11×5 Elementen und $f_1 = 0.01$, $f_2 = 0.01$, $f_3 = 0.5$



— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.26.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 0.01$,
 $f_2 = 0.01$, $f_3 = 0.5$



— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.27.: Risspfade des Drei-Punkt-Biegeversuchs mit $b_1 = 1.8$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 100$, $f_2 = 0.1$, $f_3 = 0.5$

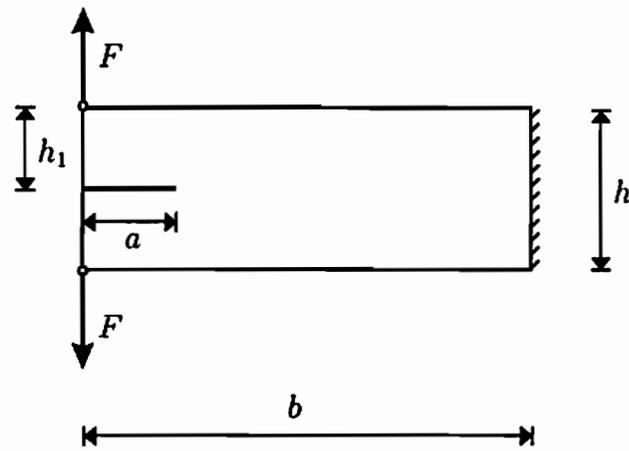


Abbildung 6.28.: CT-Versuch

6.2. CT-Versuch

6.2.1. Simulationsdefinitionen

Es wird der in Abbildung 6.28 dargestellte CT-Versuch simuliert. Die darin verwendeten Parameter sind:

$$\begin{aligned}
 b &= 40.0 \\
 h &= 20.0 \\
 a &= 12.0 \\
 F &= 200.0 \\
 E &= 36500.0 \\
 \nu &= 0.18
 \end{aligned}$$

Der Parameter h_1 wird in zwei Varianten berücksichtigt: $h_1 \in \{9.8, 9.0\}$. Der Radius des Integrationsgebiets für das J-Integral ist $r = 0.9$. Dies entspricht ungefähr der Hälfte der charakteristischen Elementlänge im feineren Elementnetz mit

$$l = \sqrt{\frac{l_x l_y}{n_x n_y}} \approx 1.778.$$

Der Abstand von 0.9 wird auch für den größeren Abstand der Punkte, mit denen die Energiefläche bestimmt wird, gewählt. Der kleinere Abstand für die ersten drei Punkte liegt bei der Hälfte, also 0.45.

Ähnlich den Berechnungen in (Belytschko and Black 1999) und (Dolbow 1999) ist dabei ein Riss zu erwarten, der zum oberen, näher am Riss gelegenen Rand strebt.

6.2.2. Ergebnisse und Diskussion für $h_1 = 9.8$

Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 6.29 bis 6.38 dargestellt. Der Riss, der sich in diesem Beispiel einstellen soll, verläuft in einem Bogen zum oberen, näher am Riss liegenden

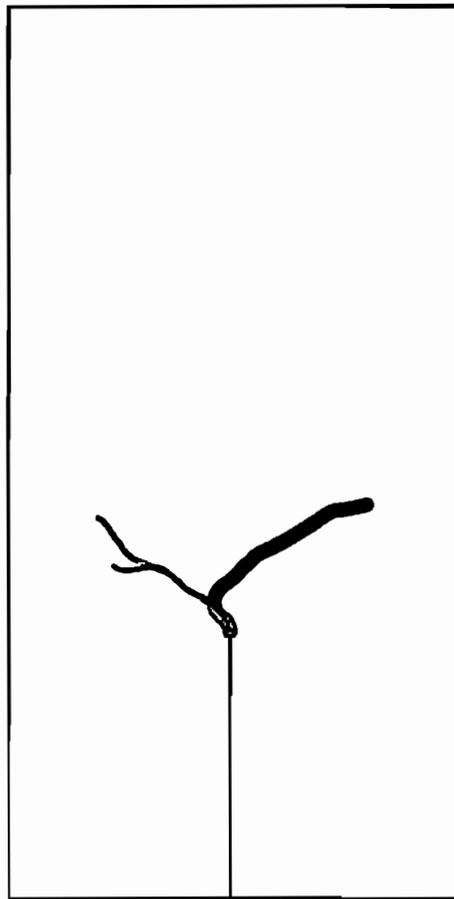
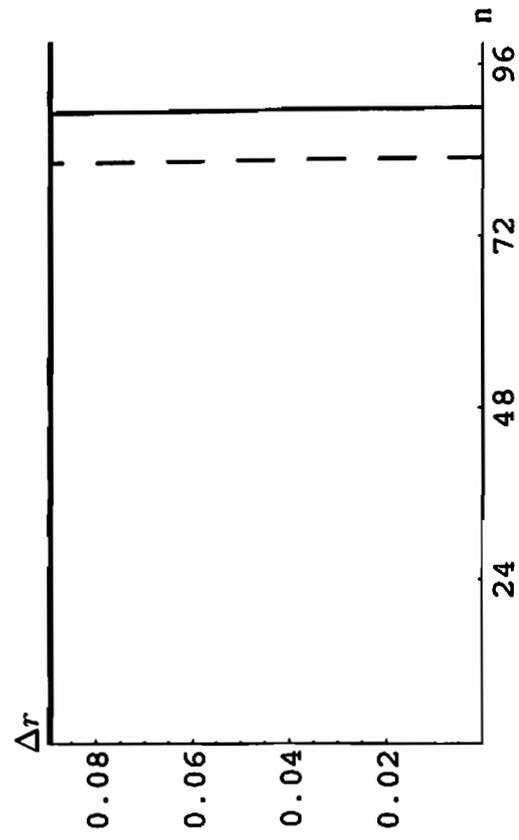
Rand.

In den Abbildungen 6.29-6.30 sind die Risspfade für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung gezeigt. Im groben Elementnetz verläuft der Riss unter Verwendung der quadratischen Formfunktionen in die erwartete Richtung; im feinen Elementnetz hingegen liefern nur die hierarchisch quadratischen Formfunktionen annähernd die erwarteten Ergebnisse. Für bi-lineare Formfunktionen wird in beiden Elementnetzen Risswachstum in die falsche Richtung berechnet. Die bi-quadratischen Ergebnisse liefern im groben Elementnetz korrekte Ergebnisse, im feinen Elementnetz allerdings wird Risswachstum entgegen der erwarteten Richtung erzeugt. Die Verwendung der maximalen Umfangsspannungen scheint also für dieses Beispiel nicht das geeignete Mittel zu sein, Risswachstum korrekt vorherzusagen.

Durch die Verwendung der Rissausbreitungskriterien, die auf Grundlage der SIF formuliert sind, werden Rissbilder erzeugt, die in den Abbildungen 6.31-6.34 dargestellt sind. In diesen Fällen wird Risswachstum berechnet, welches zuerst einen annähernd geraden Riss erzeugt, der dann mit einer Tendenz zum unteren Rand weiter wächst. Dies gilt sowohl für die bi-linearen als auch für die quadratischen Formfunktionen. Es treten hier also die gleichen Probleme auf, die schon in den vorhergehenden Abschnitten beschrieben sind.

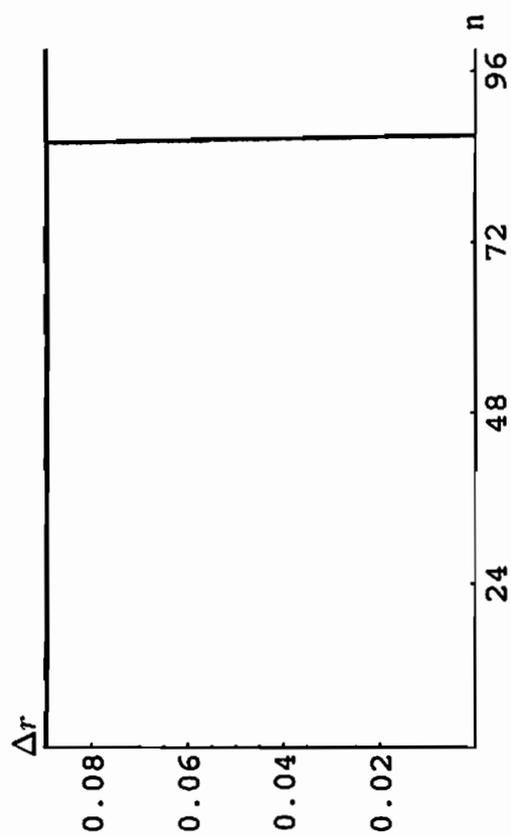
Die Verwendung des Kriteriums der minimalen Energie liefert die in den Abbildungen 6.35-6.38 dargestellten Ergebnisse. Hier zeigen sowohl die bi-linearen als auch die quadratisch hierarchischen Formfunktionen in drei von vier dargestellten Ergebnissen die richtige Tendenz, wohingegen die bi-quadratischen Formfunktionen zu einem Risswachstum führen, das nur in zwei Fällen den Erwartungen entspricht. Dabei lässt sich beobachten, dass die bi-linearen und die hierarchisch quadratischen Formfunktionen im feineren Elementnetz die besseren Ergebnisse erzeugen. Die bi-quadratischen Formfunktionen führen in beiden groben Netzen zu den korrekten Ergebnissen. Es lässt sich außerdem beobachten, dass auch hier mit größeren Werten für f_1 die Risslängenänderung überproportional ansteigt. Für kleinere Werte liegt die berechnete Risslängenänderung außerhalb des zugelassenen Wertebereichs (s. Gleichung 6.2), so dass ein konstanter Wert benutzt wird.

In diesem Beispiel werden Risspfade berechnet, die sich deutlich unterscheiden je nach Polynomgrad und Basis der Formfunktionen und Rissausbreitungskriterium. Vorhersagen des Rissbildes, die sehr gut mit den Erwartungen korrespondieren, werden dabei durch die Verwendung des Kriteriums der minimalen Energie und mit bi-linearen oder hierarchisch quadratischen Formfunktionen möglich. Die anderen Rissausbreitungskriterien liefern für dieses Beispiel kaum brauchbare Ergebnisse. Zum einen ist in diesem Zusammenhang der Einfluss der Abbildung des abknickenden auf den geraden Riss weiter zu untersuchen. Zum anderen ist dieses Beispiel annähernd symmetrisch, was numerisch zu Problemen führen kann.



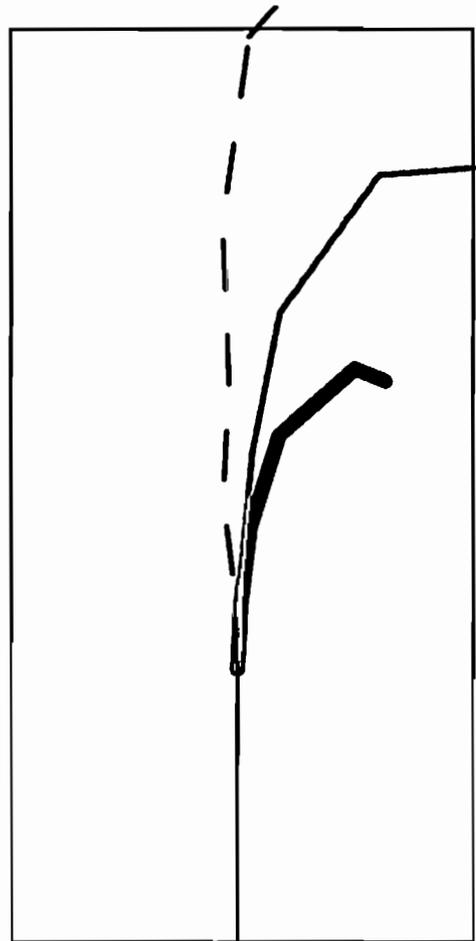
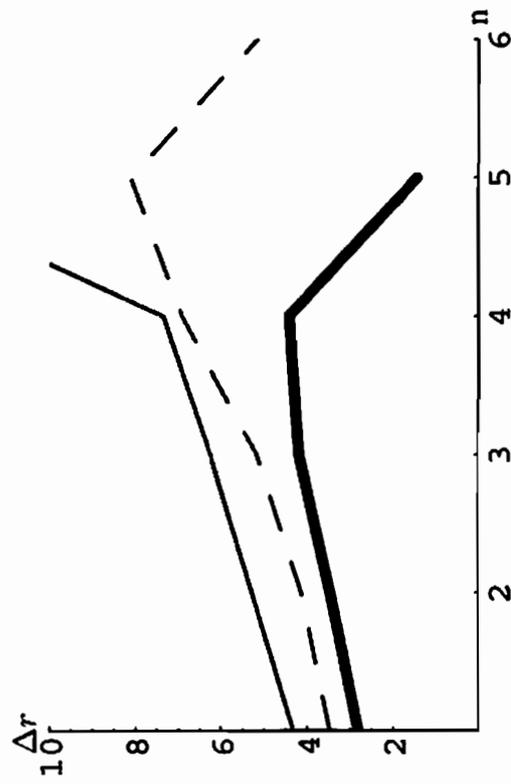
— bi-linear — hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.29.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 1×5 Elementen



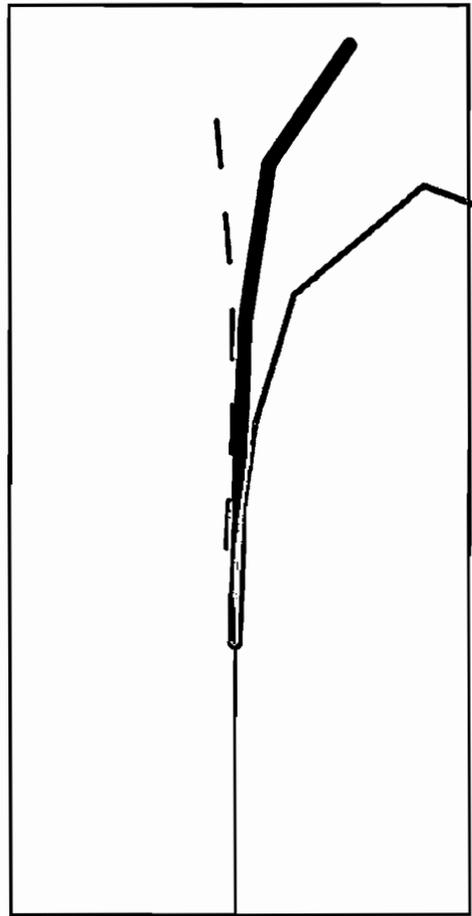
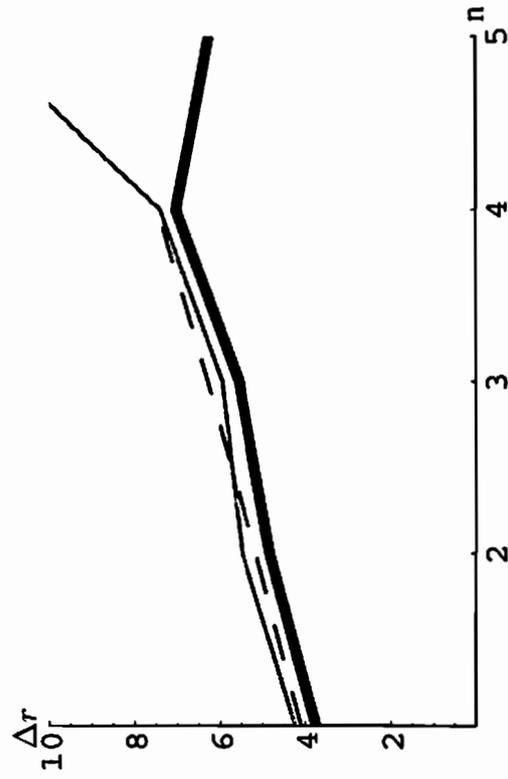
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.30.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 23×11 Elementen



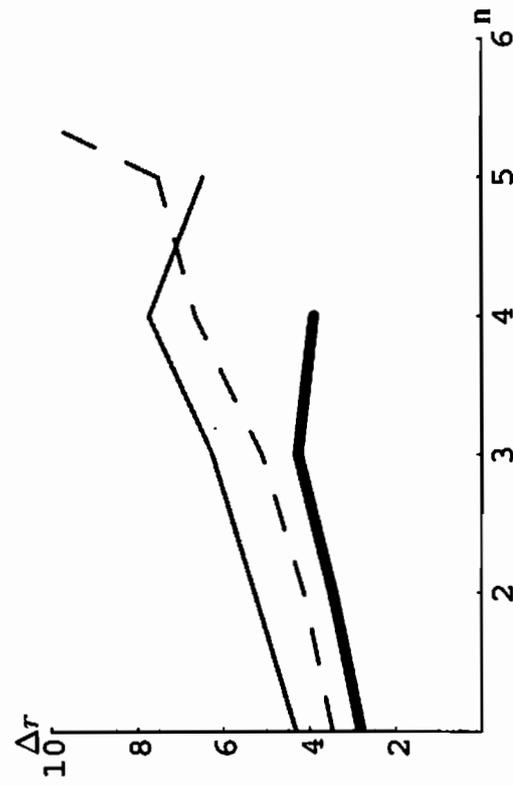
— bi-linear — bi-quadr. - - - hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.31.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium SIF-1 mit 11×5 Elementen und $f = 100$



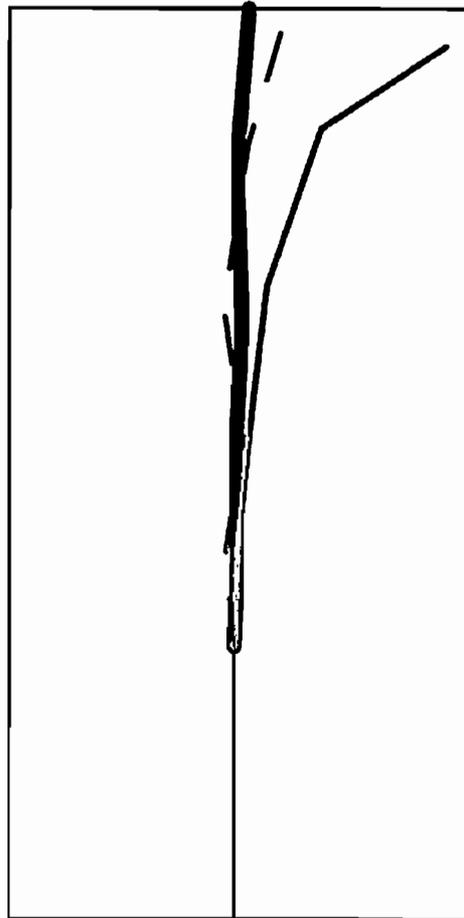
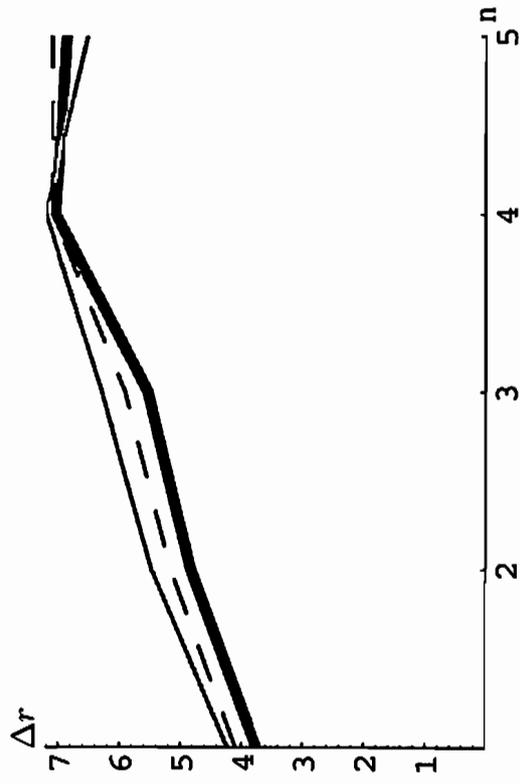
bi-linear
 bi-quadr.
 hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.32.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium SIF-1 mit 23×11 Elementen und $f = 100$



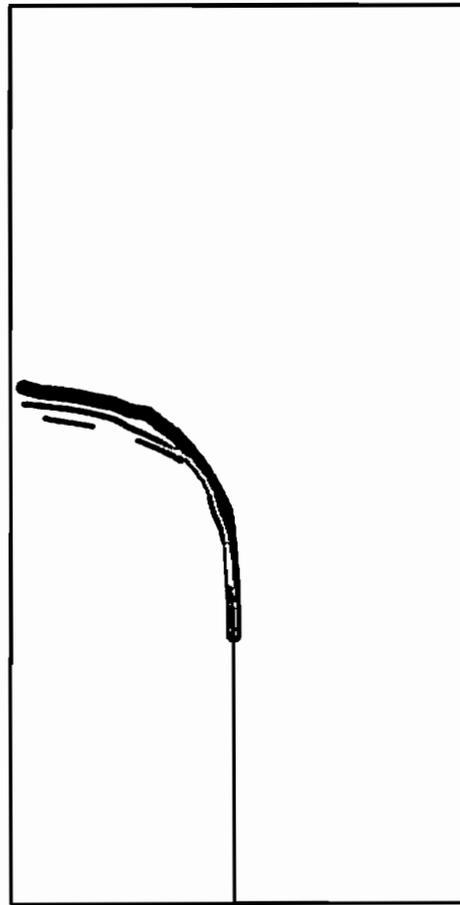
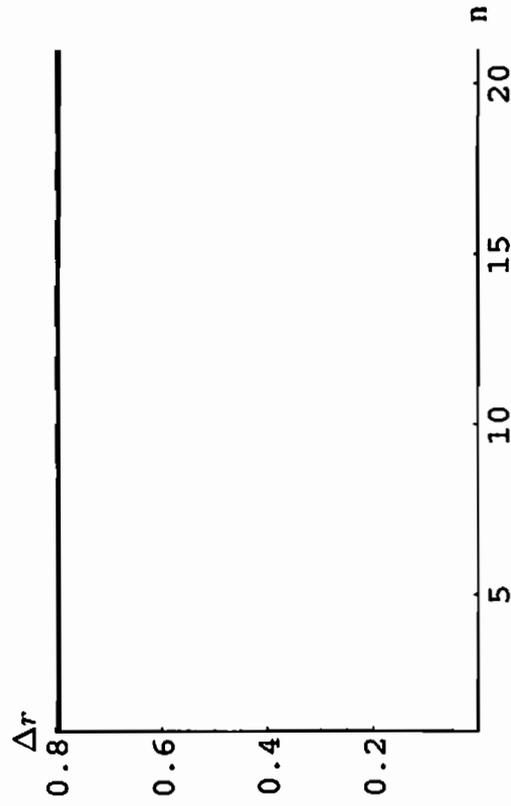
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.33.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium SIF-2 mit 1×5 Elementen und $f = 100$.



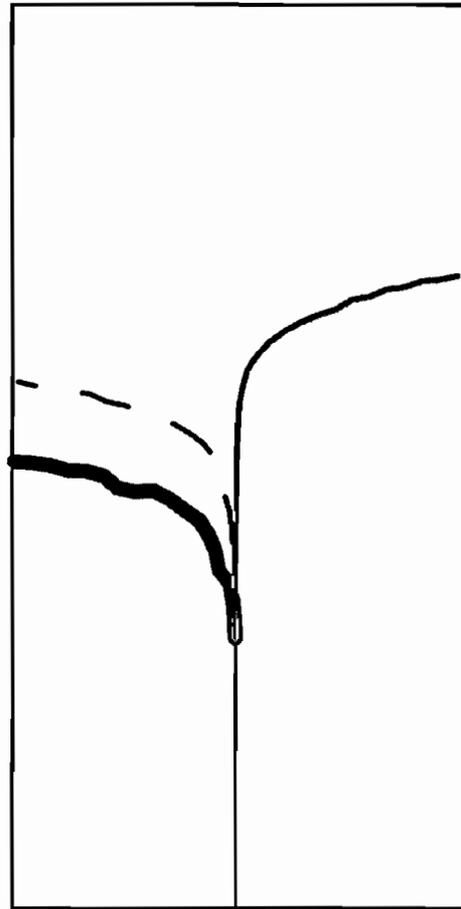
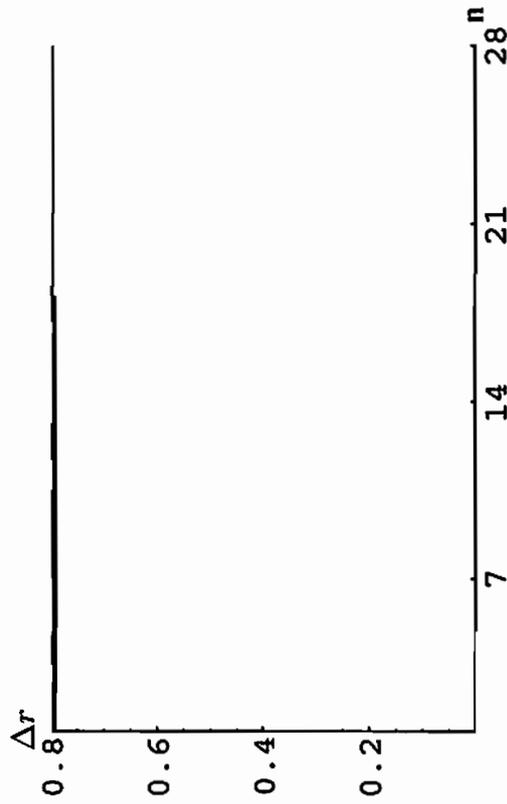
— bi-linear — bi-quadr. - - - hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.34.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium SIF-2 mit 23×11 Elementen und $f = 100$



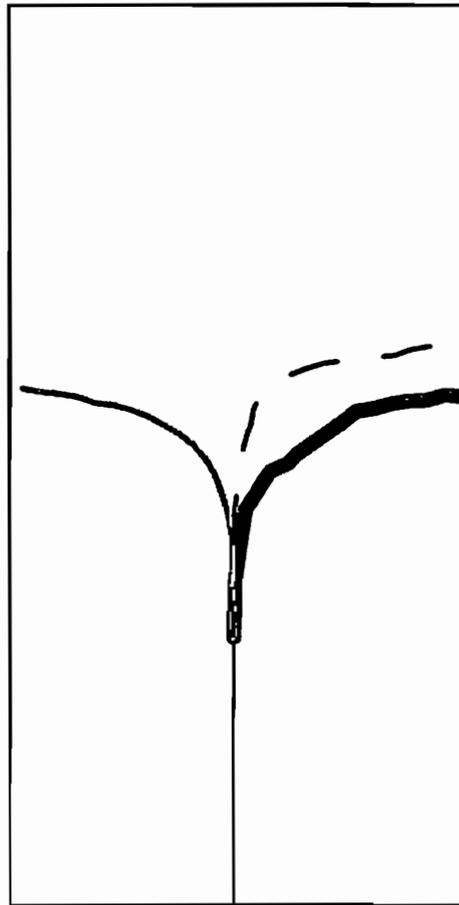
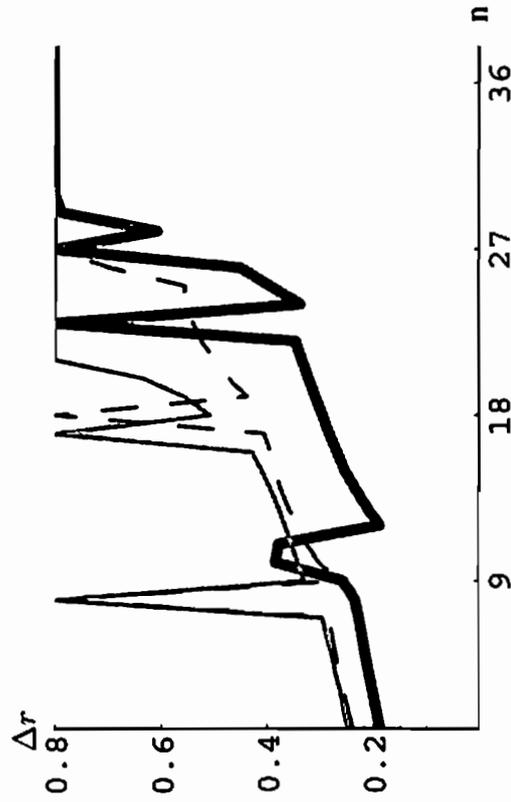
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.35.: Risspfade des CT-Versuchs mit $l_1 = 9.8$ für das Kriterium der minimalen Energie mit $f_1 = 0.01$, $f_2 = 0.01$, $f_3 = 0.5$



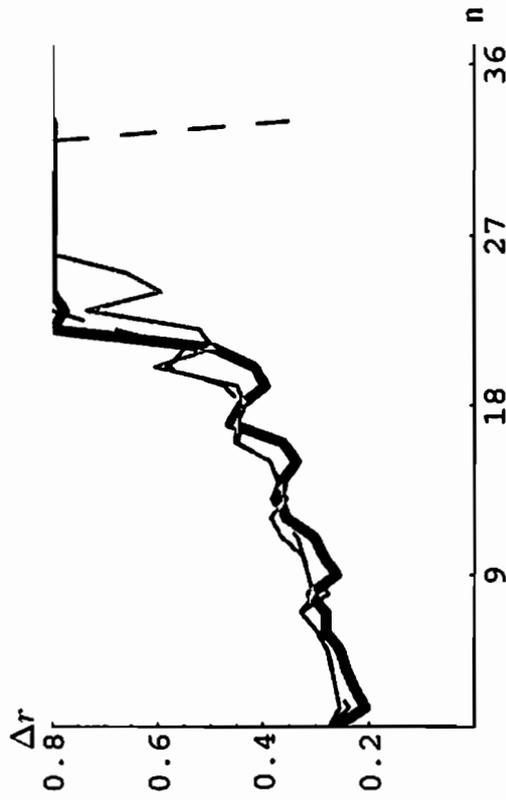
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.36.: Rissfades des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 0.01$, $f_2 = 0.01$, $f_3 = 0.5$



bi-linear
 bi-quadr.
 hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.37.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 11×5 Elementen und $f_1 = 10, f_2 = 0.1, f_3 = 0.0$



— bi-linear — hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.38.: Rissfades des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.8$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 10$, $f_2 = 0.1$, $f_3 = 0.0$

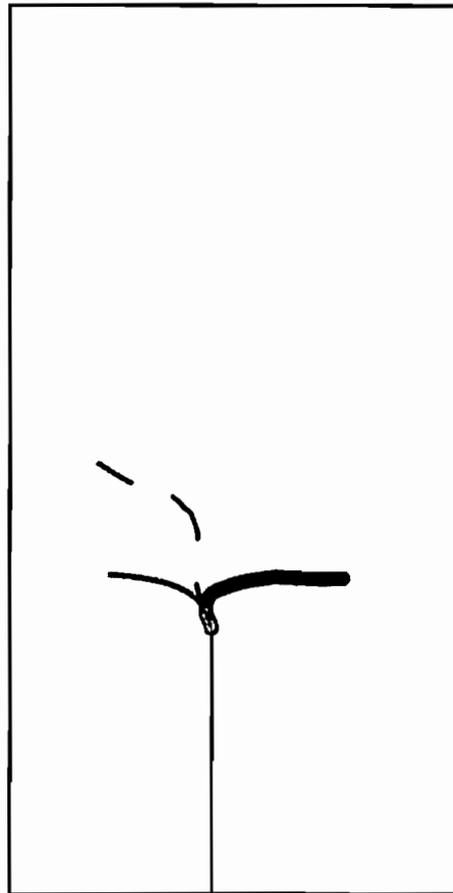
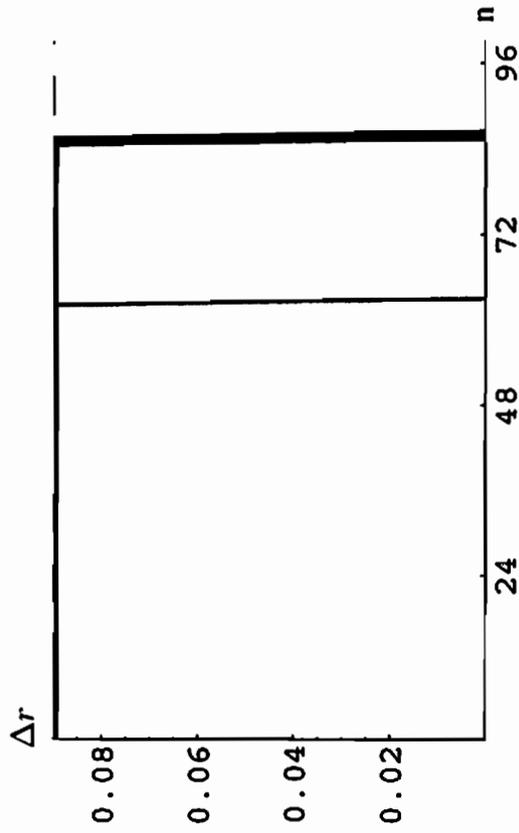
6.2.3. Ergebnisse und Diskussion für $h_1 = 9.0$

Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 6.39 bis 6.48 dargestellt. Ebenso wie im vorhergehenden Beispiel wird ein Risspfad erwartet, der zum oberen Rand strebt. Die hier verwendete Konfiguration soll durch den vergrößerten Abstand des Risses zur Symmetrieachse eindeutiger Ergebnisse erzeugen.

Für das Kriterium der maximalen Umfangsspannungen werden in diesem Beispiel allerdings Risspfade ermittelt (Abbildungen 6.39-6.40), die nicht zielführend sind und die Ergebnisse aus Abschnitt 6.2.2 nur unterstreichen. Auch für die Verwendung der Kriterien auf Grundlage der SIF werden Risse berechnet, die nicht mit den Erwartungen übereinstimmen (s. Abbildungen 6.41- 6.44). Auch für diese Kriterien sind die Ergebnisse mit denen aus Abschnitt 6.2.2 vergleichbar.

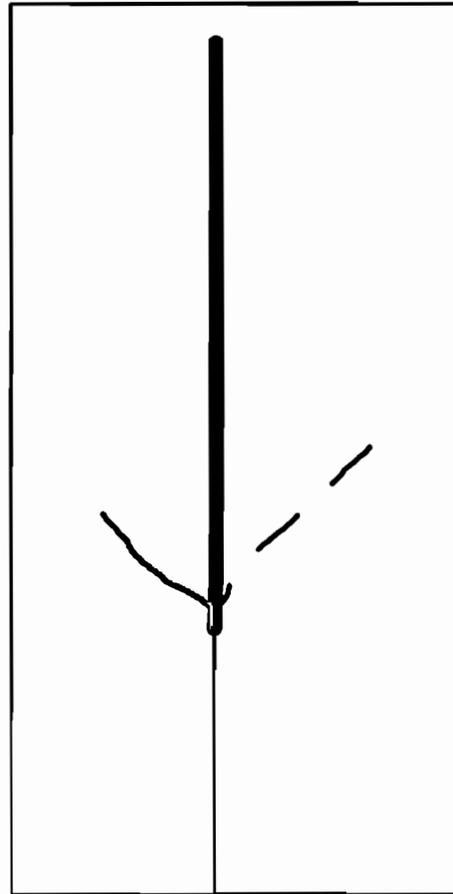
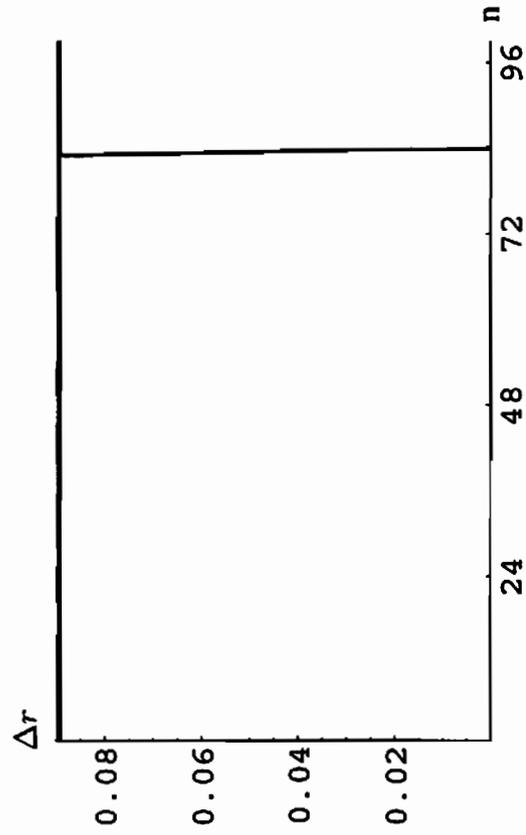
Unter Verwendung des Prinzips der minimalen potentiellen Energie werden hingegen Rissbilder erzeugt (Abbildungen 6.45-6.48), die sehr gut mit den Erwartungen übereinstimmen. Dies gilt allerdings nicht für das grobe Elementnetz mit einem hohen Wert für f_1 und mit bi-linearen Formfunktionen. Sie zeigen jedoch eine bessere Übereinstimmung mit den erwarteten Ergebnissen, als alle anderen Ergebnisse dieses und des vorhergehenden Abschnitts.

Zum Vergleich wird dieser Versuch ebenfalls für einen auf $r = 6.0$ vergrößerten Radius für das Integrationsgebiet zur Ermittlung des J-Integrals berechnet. Die SIF können nun in einer deutlich verbesserten Genauigkeit berechnet werden und hier z.B. unter Verwendung von bi-linearen Formfunktionen im groben Elementnetz für die Kriterien SIF-1 und SIF-2 die Risspfade in den Abbildungen 6.49 und 6.50 berechnet werden. Somit ist gezeigt, dass der Radius des Integrationsgebiets trotz verbesserter Integrationsmethode eine entscheidende Rolle spielt für die Genauigkeit der Risswachstumsvorhersage mit den Kriterien auf Grundlage der SIF.



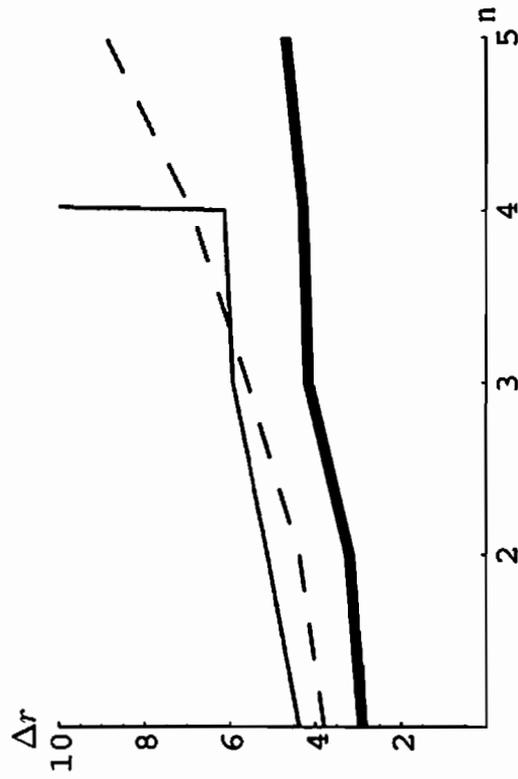
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.39.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 11×5 Elementen



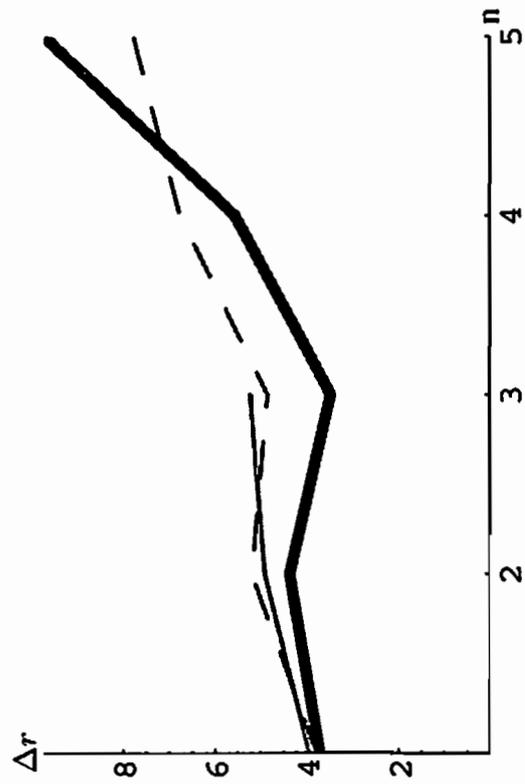
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.40.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium der maximalen Umfangsspannung mit 23×11 Elementen



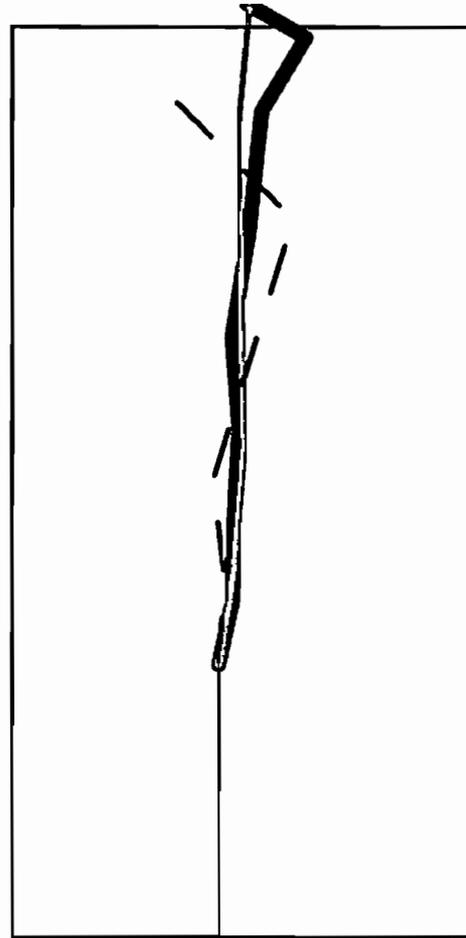
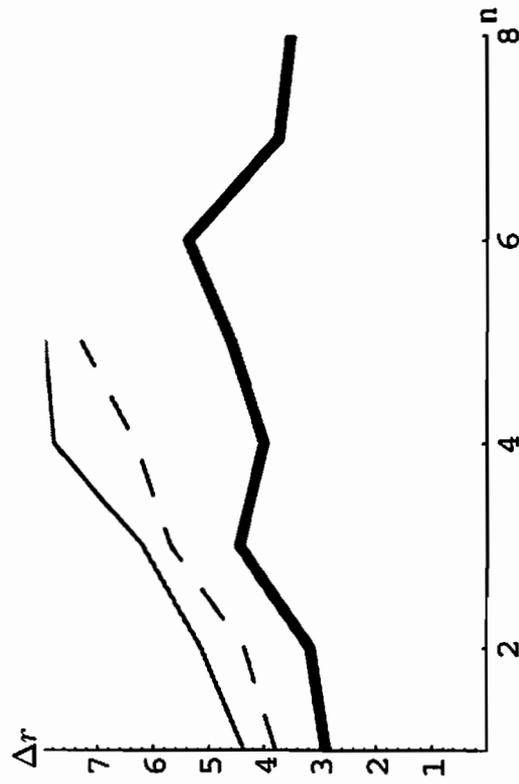
— bi-linear — bi-quadr. - - - hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.4.1.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium SIF-1 mit 1×5 Elementen und $f = 100$



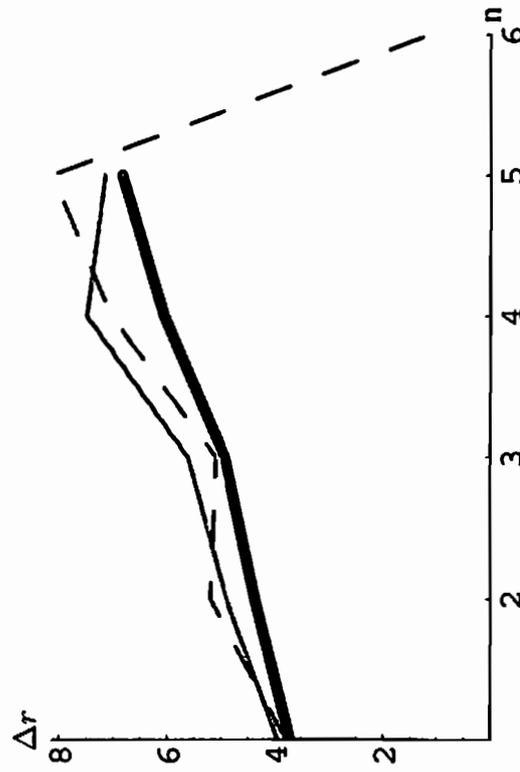
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.42.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium SIF-1 mit 23×11 Elementen und $f = 100$



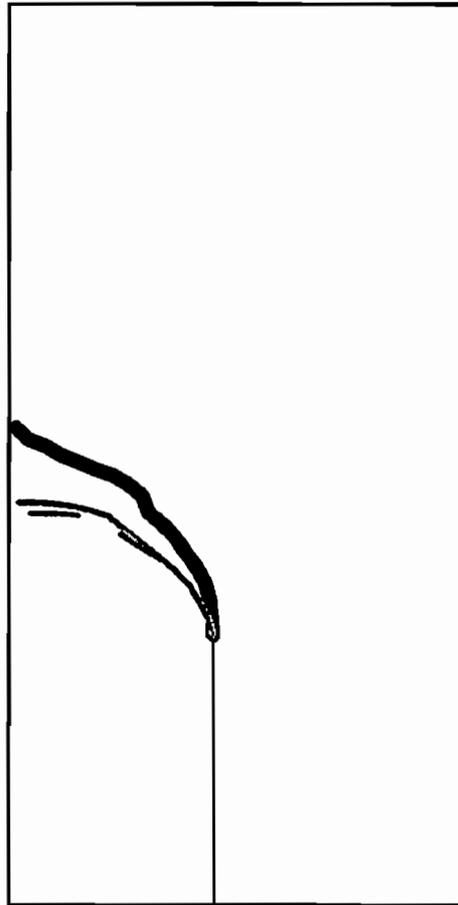
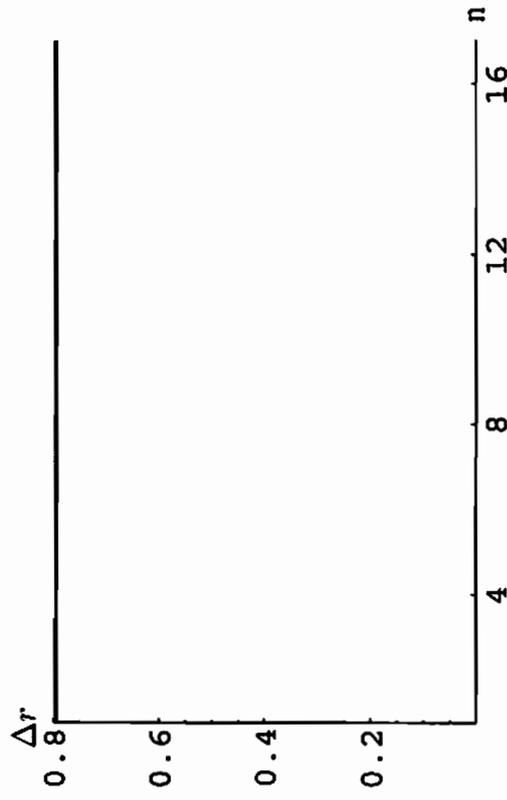
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.43.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium SIF-2 mit 11×5 Elementen und $f = 100$



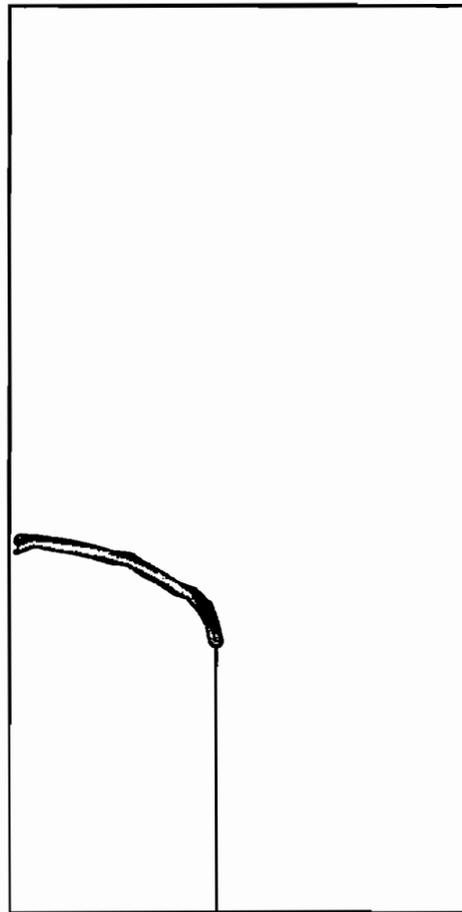
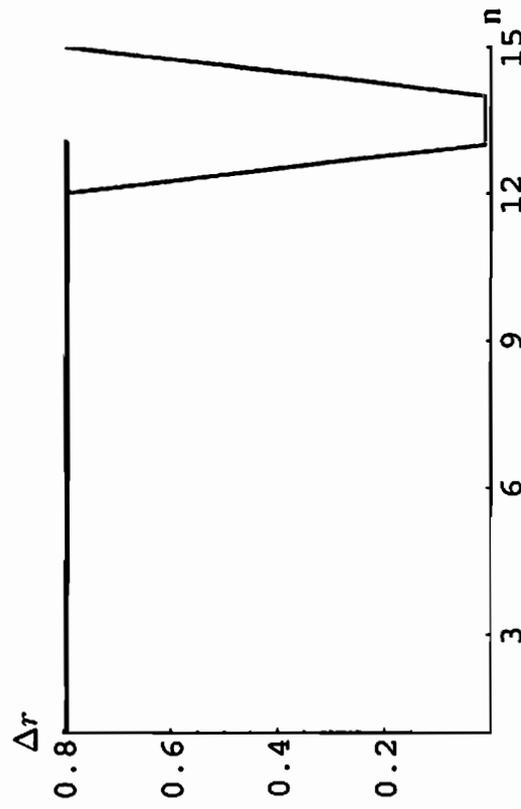
— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.44.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium SIF-2 mit 23×11 Elementen und $f = 100$



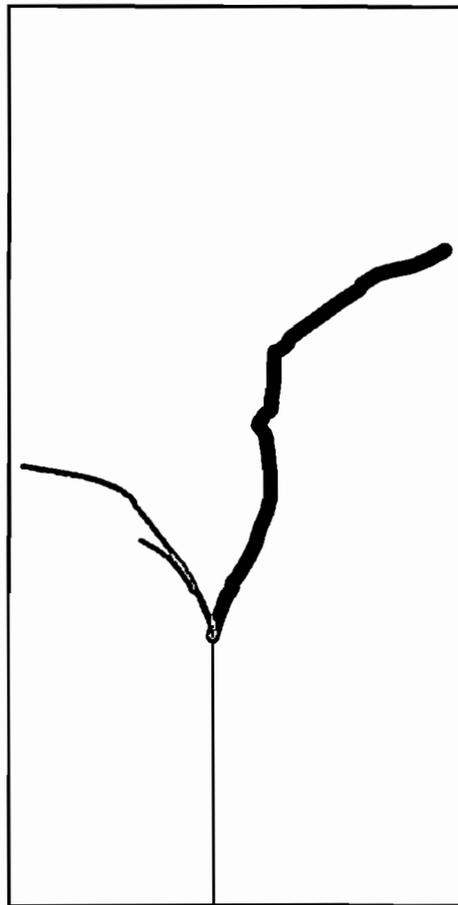
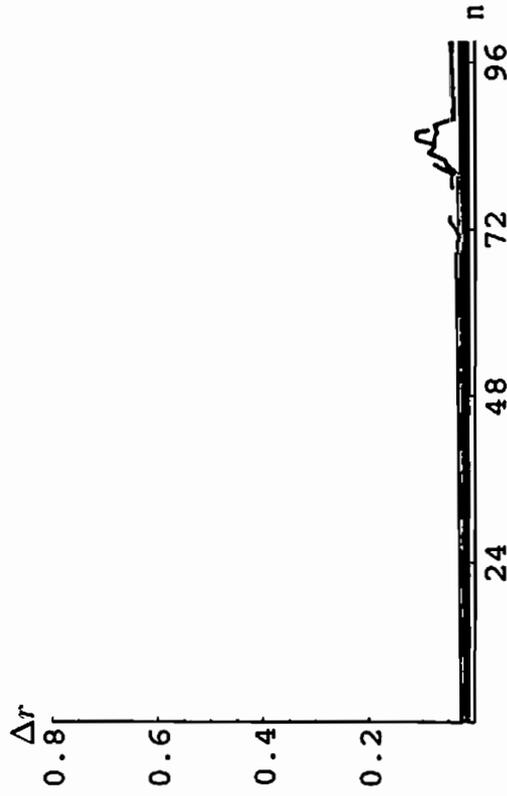
— bi-linear — hier. quadr. Formfunktionen --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.45.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 11×5 Elementen und $f_1 = 0.01$, $f_2 = 0.01$, $f_3 = 0.5$



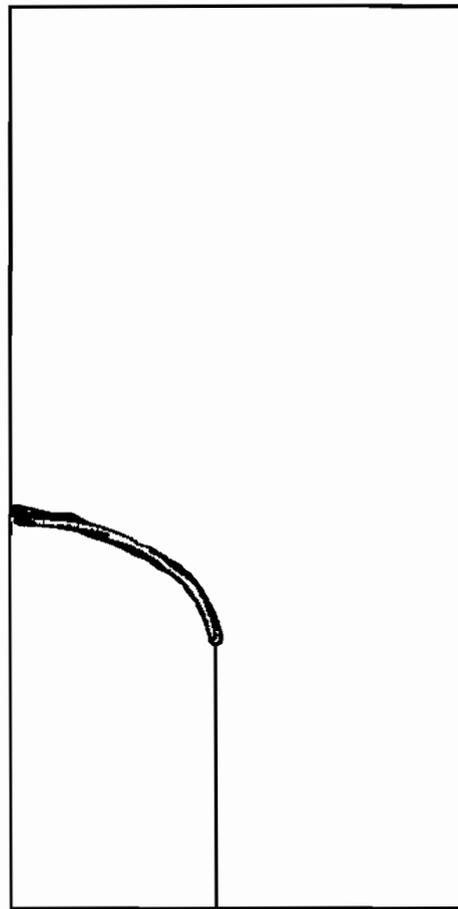
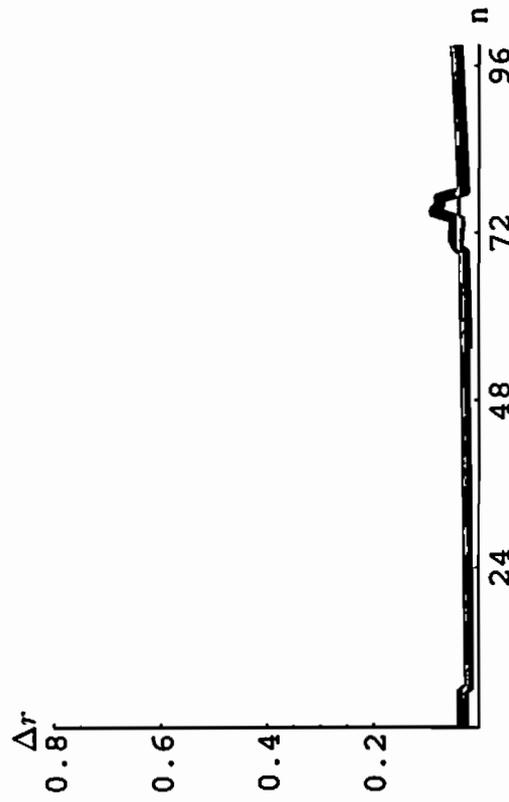
— bi-linear — hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.46.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 0.01$, $f_2 = 0.01$, $f_3 = 0.5$



— bi-linear — bi-quadr. --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.47.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 11×5 Elementen und $f_1 = 100, f_2 = 0.1, f_3 = 0.0$



— bi-linear --- hier. quadr. Formfunktionen

Abbildung 6.48.: Risspfade des CT-Versuchs mit $l_1 = 9.0$ für das Kriterium der minimalen Energie mit 23×11 Elementen und $f_1 = 100$, $f_2 = 0.1$, $f_3 = 0.0$

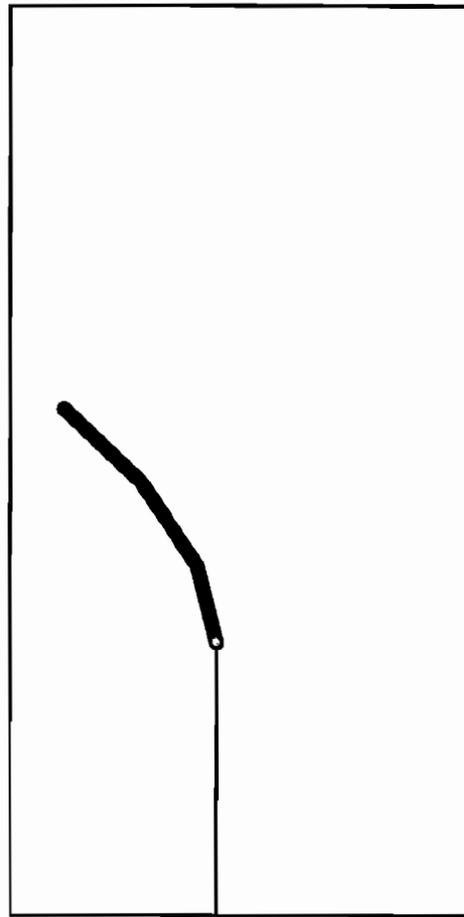
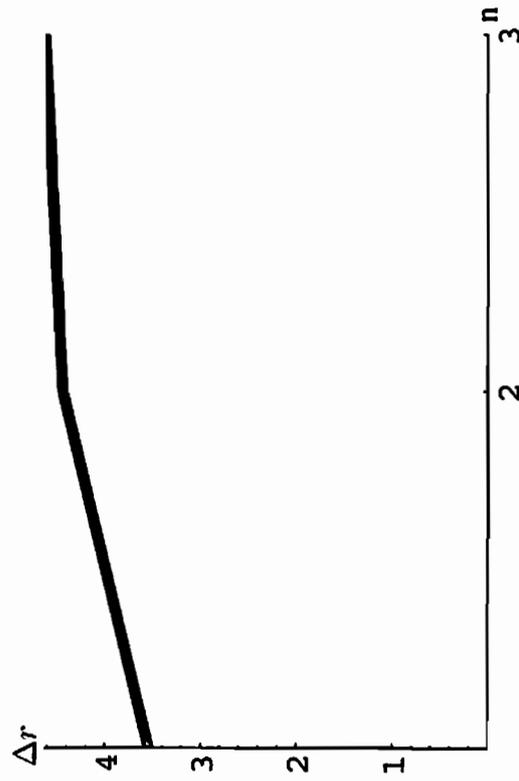


Abbildung 6.49.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ mit 1×5 Elementen und bi-linearen Formfunktionen für das Kriterium SIF-1 mit $r = 6.0$ für das Integrationsgebiet des J-Integrals und $f = 100$

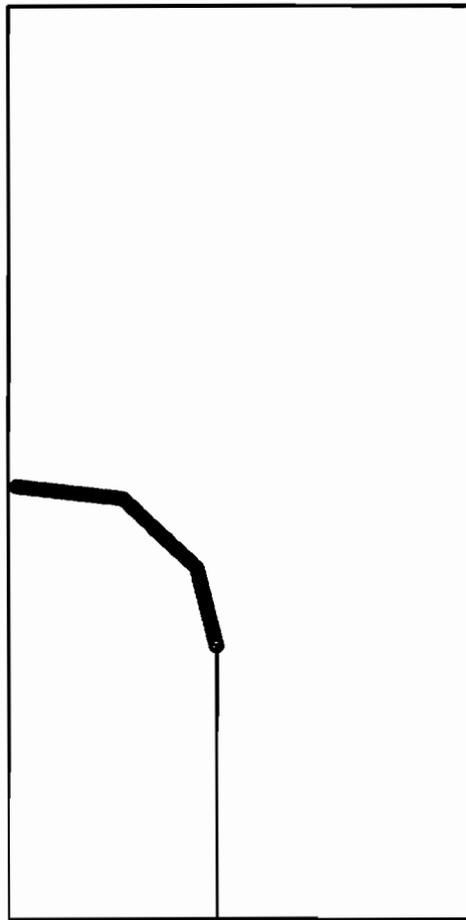
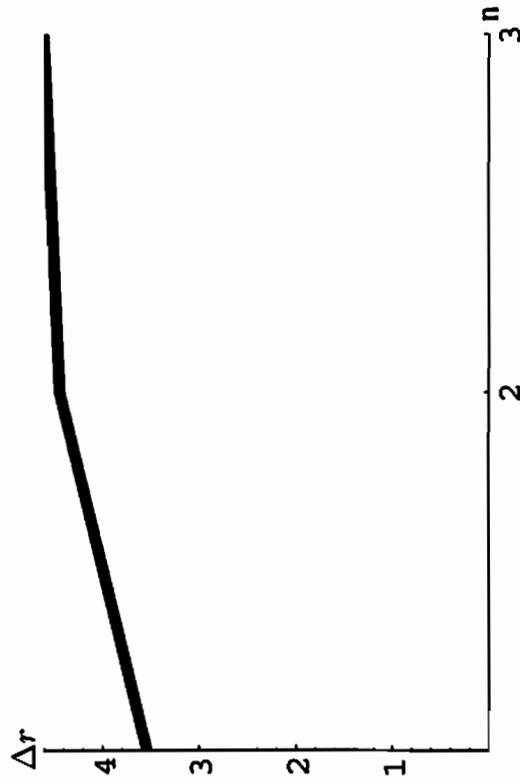


Abbildung 6.50.: Risspfade des CT-Versuchs mit $h_1 = 9.0$ mit 11×5 Elementen und bi-linearen Formfunktionen für das Kriterium SIF-2 mit $r = 6.0$ für das Integrationsgebiet des J-Integrals und $f = 100$

6.3. Zusammenfassung der Beispiele

Die Ergebnisse der Riss-Studien in diesem Kapitel sind unter Berücksichtigung von Informationen aus der unmittelbaren Umgebung der Rissspitze berechnet.

Das Kriterium der maximalen Umfangsspannung liefert für den Drei-Punkt-Biege-Versuch gute Ergebnisse. Das gilt sowohl für alle untersuchten Elementnetze als auch für die benutzten Formfunktionen. Im CT-Versuch werden jedoch Risspfade simuliert, die in den dargestellten Elementnetzen in keiner Weise mit den aus der Theorie oder Experimenten bekannten Verläufen übereinstimmen und somit nicht zielführend sind.

Die Kriterien auf Grundlage der SIF liefern durchweg in allen Beispielen keine brauchbaren Ergebnisse. Werden jedoch größere Radien zur Definition der Integrationsgebiete zur Berechnung der J-Integrale verwendet, werden bessere Ergebnisse für die Kriterien auf Grundlage der SIF ermittelt, jedoch mit dem Nachteil, dass der Rissabstand bei Verwendung mehrerer Risse entsprechend groß sein muss. Es bleibt deshalb weiter zu untersuchen, inwieweit höhere Polynomgrade für die Formfunktionen zu einer Verbesserung der Ergebnisse auch mit kleineren Radien führen bzw. wie groß ein Radius gewählt werden muss, um sinnvolle Ergebnisse für die SIF und damit für die Rissausbreitung zu ergeben.

Die Tatsache, dass die Kriterien der maximalen Umfangsspannung (direkt aus den Spannungen bzw. auf Grundlage der SIF) unterschiedliche Ergebnisse erzeugen, muss ebenfalls weiter untersucht werden und für unterschiedliche Radien des Integrationsgebiets überprüft werden.

Im Bezug auf das Kriterium der minimalen Energie bleibt außerdem zu untersuchen, welche Parameter f_1 , f_2 und f_3 für eine geeignete Simulation zu wählen sind bzw. welche Abhängigkeiten der Parameter z.B. von der Geometrie bestehen. Ebenso muss untersucht werden, inwieweit im Drei-Punkt-Biegeversuch mit auflagenahem Anschnitt ein Riss, der das Auflager abschneidet, in dieser Form durch weitere Experimente von z.B. unbewehrtem Beton validiert werden können.

Des Weiteren muss die Abbildung des abknickenden Risses auf den geraden Riss untersucht werden, nicht nur zur Verbesserung der Ergebnisse der Rissausbreitungskriterien, sondern auch zur genaueren Ermittlung von Spannungen und Verschiebungen an abknickenden Rissen. Die im Rahmen dieser Arbeit verwendete Abbildung ist eine stetige Funktion. Eine andere Möglichkeit besteht darin, eine stetig differenzierbare Funktion zu ermitteln (s. z.B. (Dumstorff 2006)) und die Konvergenz der Risspfade erneut mit den hier dargestellten Rissausbreitungskriterien zu untersuchen.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass vor allem die Verwendung eines Rissausbreitungskriteriums auf Grundlage des Prinzips der minimalen Energie zu guten Resultaten führt und sind deshalb zu empfehlen.

7. Zusammenfassung und Ausblick

7.1. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beleuchtet die numerischen Aspekten der XFEM und untersucht besonders die numerische Integration und die Benutzung von höherwertigen Formfunktionen mit unterschiedlichen Basen. Ziel ist es, mit geringerem zeitlichen Aufwand und besserer Ausnutzung des Arbeitsspeichers qualitativ bessere Ergebnisse zu berechnen, sowohl für die Verschiebungs- und Spannungsfelder als auch für die SIF und den daraus entwickelten Rissausbreitungskriterien.

Ausgehend von den Grundlagen der Kontinuumsmechanik, auf der alles Weitere aufbaut, wird die Kontinuumsmechanik um nicht-stetige Verschiebungen erweitert. Anschließend wird unter Berücksichtigung der Zerlegung der Eins die XFEM mit ihren erforderlichen Grundlagen vorgestellt.

Dass mit der XFEM im Allgemeinen gute Ergebnisse erzielt werden, ist sowohl in der entsprechenden Literatur (z.B. (Belytschko and Black 1999; Moës, Dolbow, and Belytschko 1999; Dumstorff 2006; Dumstorff and Meschke 2004; Peters, Hoppe, and Hackl 2004a; Peters, Hoppe, and Hackl 2004b; Peters and Hackl 2005)) als auch im Rahmen dieser Arbeit belegt worden. Die Voraussetzung für diese guten Ergebnisse ist aber, dass die behandelten Probleme „gutartig“ sind, d.h. dass der Fehler nicht zu groß wird. Deshalb ist eine weitere Zielsetzung dieser Arbeit, den Fehler deutlich zu minimieren bei trotzdem geringen Rechenzeiten.

Zu diesem Zweck wird die Integration der Steifigkeitsmatrix und des J-Integrals überprüft und eine numerische Methode zur adaptiven Integration vorgestellt. Sie besteht aus einer Kombination aus 5-Punkt-Newton-Cotes-Integration und 3-Punkt-Gauß-Quadratur, die beide für Funktionen vom Polynomgrad fünf exakt sind. Anhand einiger Beispielfunktionen wird die Effektivität dieser Methode dargestellt, nämlich die vergleichsweise geringe Anzahl von Integrationspunkten und die damit relativ hohe Geschwindigkeit bei gleichzeitig guter Abschätzung des Integrationsfehlers.

Ebenso wird die p -Version der XFEM hergeleitet, um den Fehler effektiv zu minimieren. Dass dies besonders durch Verwendung hierarchischer Formfunktionen zu erheblich besseren Ergebnissen führt, wird ebenfalls gezeigt. So können mit der p -Version der XFEM und der verbesserten numerischen Integration die Verschiebungen, Spannungen und damit auch die SIF in erheblich effektiverer Weise berechnet werden.

Nun gilt es, aus der Vielzahl der sich bietenden Möglichkeiten, Rissausbreitung zu simulieren, das jeweils geeignete Mittel auszuwählen. Einige Methoden und die Qualität ihrer Ergebnisse sind in dieser Arbeit anhand von Beispielen dargestellt. Im konkreten Einzelfall muss individuell abgewogen werden, ob

- das Kriterium der maximalen Umfangsspannung, welches durch eine hohe Berechnungsgeschwindigkeit charakterisiert werden kann oder
- das Kriterium der minimalen Energie, das gute Ergebnisse erzielt, die mit den erwarteten Ergebnissen im Allgemeinen gut übereinstimmen,

gewählt wird. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Spannungen nicht geglättet sind. Es bleibt zu untersuchen, ob mit geglätteten Spannungsverläufen, vor allem bei Verwendung des Kriteriums der maximalen Umfangsspannungen, Änderungen in den Rissverläufen auftreten. Darüber hinaus sind die in Kapitel 6 genannten Punkte genauer zu betrachten, also die Überprüfung der

- Radien zur Berechnung des J-Integrals bzw. Ermittlung der SIF
- Energieflächen, die im Rahmen dieser Arbeit durch Interpolationspolynome ermittelt wurde, die aber auch als Ausgleichspolynome durch mehrere Punkte berechnet werden können
- dargestellten Beispiele mit höheren Polynomgraden für die Formfunktionen
- Ergebnisse durch Verwendung feinerer Elementnetze

7.2. Ausblick

Schädigungsprozesse laufen grundsätzlich auf mehreren Skalen ab. „Diese reichen von der Skale der Atome und Moleküle, auf der sich z.B. das Wandern von Strukturdefekten oder chemische Vorgänge abspielen, über die Skale der materiellen Inhomogenitäten, welche z.B. granulare Strukturen, Poren, Risse oder Einschlüsse beinhalten, bis zur obersten Skale, welche die konkrete Struktur oder das spezifisch Bauteil unter Betrachtung umfasst.“ (Hackl and Stumpf 2001) Diese mehrskaligen Prozesse wurden in dieser Arbeit nicht betrachtet. Um dies allerdings in der Zukunft zu realisieren, ist es erforderlich, das J-Integral wie beschrieben mit kleinen Radien berechnen zu können, und die Fehler der Integration der Steifigkeiten bzw. während der Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren abzuschätzen. Nun müssen die in Kapitel 6 dargestellten Probleme weiter untersucht werden.

Zur Simulation von Rissausbreitung in Beton müssen außerdem noch weitere Phänomene berücksichtigt werden. Das sind vor allem

- Risse, deren Oberfläche nicht mehr spannungsfrei ist, sondern durch Kohäsivkräfte belastet sind
- Delamination, bei der z.B. im Beton die Zuschläge vom Matrixmaterial getrennt werden und
- Einflüsse von Poren, Porenwachstum, Porenreinigung.

Darüber hinaus gilt es für alle Werkstoffe zu untersuchen, welche Rolle

- Rissinitiierung bzw. das numerische Modell für die Rissinitiierung
- die Größe der plastischen Zone
- die sogenannten *T-Stresses*, also die nicht-singulären Spannungs-Terme

in der Simulation spielen.

Eine Erweiterung der bestehenden Simulation in zwei Dimensionen auf drei-dimensionale Probleme ist ebenfalls angestrebt. Die dabei auftretenden Schwierigkeiten der Implementierung und Organisation der Rissoberfläche sind durch das bestehende Programm bereits abgefangen und ein Lösungsansatz vorbereitet. Die Problematiken, die sich im Bereich der Rissausbreitung ergeben, sind für den drei-dimensionalen Fall jedoch noch genauer zu untersuchen.

Bei der Implementierung aller dieser Punkte muss ebenfalls überprüft werden, inwieweit die Integration und höherwertige Formfunktionen mit unterschiedlicher Basis das Ergebnis beeinflussen. Ferner muss für das bestehende Programm untersucht werden, welche Parameter, die in den Rissausbreitungskriterien vorhanden sind, durch physikalische, geometrische oder materielle Größen ausgedrückt werden können und in welcher Größenordnung die Parameter physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefern. Dies gilt in gleichem Maße für den Radius des Integrationsgebiets, für die Berechnung des J-Integrals und für die Anzahl der Punkte, die zur Ermittlung des Polynoms herangezogen werden, das die Energiefläche repräsentiert. Bei all diesen Erweiterungen muss mit einem deutlich erhöhten Bedarf an Rechenzeit und erforderlichem Arbeitsspeicher gerechnet werden — bereits die hier vorgestellten Beispielrechnungen erforderten Rechenzeiten zwischen einigen Minuten bis zu mehreren Stunden. Somit ist individuell abzuwägen, ob der qualitative Gewinn durch die erweiterte Betrachtung den Mehraufwand rechtfertigt und einen Zusatznutzen generiert.

Anhang

A. Details der Implementierung

In den folgenden Abschnitten sind einige Grundlagen der Erweiterungen für FORTRAN 90 dargestellt, die im Programm Verwendung finden. Weiterführende Informationen zu den hier dargestellten Möglichkeiten von FORTRAN 90 können z.B. (Chapman 1998) entnommen werden.

A.1. *Pointer*-Strukturen in FORTRAN 90

Da im Allgemeinen nicht bekannt ist, wie viele Risspunkte in der Simulation erzeugt werden, ist es unpraktisch, ein Feld mit vorgegebener Größe zu erzeugen, und dieses dann für die Rissspitzenkoordinaten zu verwenden. Denn falls in der Simulation mehr Punkte berechnet werden als zuerst vorgesehen, muss ein neues, größeres *Array* erzeugt und dann die Einträge des neues Feldes mit den bereits vorhandenen Koordinaten belegt werden. Ebenso ist im Allgemeinen in der XFEM die Anzahl der Integrationspunkte für die Elemente, die mit den Rissspitzenfunktionen erweitert werden, unbekannt.

Durch die Verwendung von Zeigern im Programm-Code wird es ermöglicht, eine verkettete Liste herzustellen, die beliebig erweitert werden kann. Zu diesem Zweck müssen eigene Datenstrukturen aufgebaut werden, die im folgenden Abschnitt (A.1.1) erläutert werden. Darauf aufbauend wird die Verwendung von *Pointern* in Abschnitt A.1.2 erklärt und abschließend für

- die Erweiterung der Liste,
- das Löschen aus der Liste und
- das Suchen in einer Liste

im Vergleich zu der Verwendung von *Arrays* dargestellt.

A.1.1. *TYPE*-Definitionen

Durch die Verwendung von zusammengesetzten Datenstrukturen, kann auf einzelne Elemente, statt wie bei Feldern durch die Angabe des Index, durch Angabe eines Namens zugegriffen werden. Eine Datenstruktur für eine Adress-Datenbank könnte also folgendermaßen aussehen:

```
TYPE eintrag
```

```

    CHARACTER*80    :: name, vorname, strasse, ort
    INTEGER         :: hausnr, plz
END TYPE eintrag

```

Durch diesen Aufruf im Kopf des Programm, kann eine Variable vom Typ *eintrag* erzeugt werden:

```
TYPE(eintrag)      :: meinEintrag
```

oder als Feld mit fester Größe

```
TYPE(eintrag)      :: meineAdressListe(80)
```

bzw. mit einer Größe, die erst während des Programmablaufs festgelegt wird:

```
TYPE(eintrag), ALLOCATABLE  :: adressen(:)
INTEGER                     :: n

```

Im letzten Fall muss die Feldgröße dann noch z.B. durch den Parameter *n* angegeben werden, der im Beispiel vom Benutzer einzugeben ist:

```
READ(*,*) n
ALLOCATE(adressen(n))

```

In allen dargestellten Fällen, bei denen eine Adressenliste gespeichert werden soll, muss, bevor die erste Adresse eingelesen wird, die maximale Anzahl der möglichen Adressen bekannt sein.

A.1.2. Verwendung von *Pointern*

Um dies zu vermeiden, wurden in FORTRAN 90 verkettete Listen eingeführt. Dazu wird eine Datenstruktur wie oben gezeigt angelegt. Unterschied ist jetzt, dass ein Pointer-Element hinzugenommen wird. Das Pointer-Element zeigt auf einen Speicherbereich, der mit seiner Länge für den Variablentyp, auf den gezeigt werden soll, bestimmt ist. Hier entsteht z.B. ein Zeiger auf einen Speicherbereich für eine Integer-Variable:

```
INTEGER, POINTER      :: np
```

Der Zeiger muss nun noch angelegt werden mit

```
ALLOCATE(np)
```

wodurch der Speicherbereich und damit auch die Integer-Variable benutzt werden kann. Eine verkettete Liste wird dadurch nicht erzeugt, sondern nur ein einzelnes Element. Für die verkettete Liste ist ein Pointer erforderlich, der auf eine Datenstruktur zeigt, die wiederum einen Zeiger enthält, der auf diese Datenstruktur zeigen kann. Für die im XFEM-Programm erforderlichen Risskoordinaten kann das z.B. folgendermaßen aussehen:

```
TYPE riss_typ
! x- und y-Koordinaten
  DOUBLE PRECISION          :: x(2)
! Zeiger auf das nächste Element der Liste
  TYPE(riss_typ), POINTER   :: r_next
END TYPE riss_typ
```

Nun kann der Zeiger auf die erste Koordinate erzeugt werden mit:

```
TYPE(riss_typ), POINTER   :: r_first
ALLOCATE(r_first)
```

Die einzelnen Koordinaten können dann z.B. in folgender Art und Weise von der Tastatur eingegeben werden:

```
READ(*,*) r_first%x(1)
READ(*,*) r_first%x(2)
```

Sollen nun weitere n Punkte angehängt werden, sollte eine neue Pointer-Variable definiert werden, um den Anfang der Liste nicht zu überschreiben.

```
TYPE(riss_typ), POINTER   :: r_now
```

Die Zeiger r_now und r_first können dann wie folgt verwendet werden:

```
! Anzahl der Risspunkte einlesen
READ(*,*) n
! Zeiger r_now auf Speicherbereich von r_first setzen
r_now=>r_first
DO i=1,n
! neuen Speicherbereich zur Verfügung stellen
  ALLOCATE(r_now%r_next)
! mit Zeiger r_now auf neuen Speicherbereich zeigen
  r_now=>r_now%r_next
! Risskoordinaten einlesen
  READ(*,*) r_now%x(1)
  READ(*,*) r_now%x(2)
END DO
```

Ein Array müsste in diesem Beispiel mindestens $n+1$ Einträge lang sein. Falls dies nicht der Fall ist, müssen erst ein neues Array angelegt und dann die bereits eingegebenen Koordinaten kopiert werden.

Mit der obigen Programmierung kann man nur von vorne nach hinten durch die Liste durchgehen. Ein Schritt zurück zur vorhergehenden Koordinate ist damit nicht möglich. Zu diesem Zweck ist es sinnvoll, die Datenstruktur mit einem Pointer auf das Vorgängerelement auszustatten.

```

TYPE riss_typ
! x- und y-Koordinaten
  DOUBLE PRECISION          :: x(2)
! Zeiger auf das nächste Element der Liste
  TYPE(riss_typ), POINTER   :: r_next
! Zeiger auf das vorhergehende Element der Liste
  TYPE(riss_typ), POINTER   :: r_prev
END TYPE riss_typ

```

Für das oben stehende Beispiel gilt dann:

```

TYPE(riss_typ), POINTER   :: r_first
TYPE(riss_typ), POINTER   :: r_now
ALLOCATE(r_first)

READ(*,*) r_first%x(1)
READ(*,*) r_first%x(2)

! Anzahl der Risspunkte einlesen
READ(*,*) n

! Zeiger r_now auf Speicherbereich von r_first setzen
r_now=>r_first
DO i=1,n

! neuen Speicherbereich zur Verfügung stellen
  ALLOCATE(r_now%r_next)

! mit Zeiger des neuen Elements
! auf das Vorgängerelement setzen
  r_now%r_next%r_prev=>r_now

! mit Zeiger r_now
! auf neuen Speicherbereich zeigen
  r_now=>r_now%r_next

! Risskoordinaten einlesen
  READ(*,*) r_now%x(1)
  READ(*,*) r_now%x(2)
END DO

```

Mit dieser Datenstruktur kann eine Liste sehr einfach und schnell erweitert werden. Ebenso schnell lässt sich das Löschen aus einer Liste durchführen. Das Suchen in einer Liste, welches als erstes hier dargestellt werden soll, läuft allerdings ebenso langsam, wie die Suche in einem Array, da die Koordinaten nicht sortiert werden können. Ansonsten wäre die Suche in einem sortierten Array erheblich schneller, da hier durch Angabe des Index direkt auf ein Element zugegriffen werden kann und nicht erst die Liste durchgegangen werden müsste.

Suchen in einer Liste

Unter der Annahme, dass die Koordinatenliste zum einen nach dem obigen Beispiel, zum anderen in ein Array eingelesen worden, soll in diesem Beispiel nach allen x-Koordinaten mit einem eingegebenen Wert *xin* gesucht werden und die entsprechenden y-Koordinaten sollen ausgegeben werden. Für den Programmteil, der die Koordinaten in einem Array gespeichert hat, gilt folgende Definition:

```
! für die x- und y- Koordinaten
  DOUBLE PRECISION      :: x(:, :)
  INTEGER                :: np
  ALLOCATABLE(x)
! Einlesen der maximalen Koordinatenanzahl
  READ(*, *) np
  ALLOCATE(x(np, 2))
```

<u>verkettete Liste</u>	<u>Array</u>
<pre>r_now=>r_first DO WHILE (ASSOCIATED(r_now)) IF (r_now%x(1).EQ.xin) THEN WRITE(*, *) r_now%x(2) END IF r_now=>r_now%r_next END DO</pre>	<pre>DO i=1, n IF (x(i,1).EQ.xin) THEN WRITE(*, *) x(i,2) END IF END DO</pre>

Erweitern einer Liste

Hier soll gezeigt werden, wie ein neues Element in eine verkettete Liste bzw. in ein Array eingefügt werden kann. Das neue Element *r_neu* bzw. *x_neu* soll hinter *r_akt* in die Liste bzw. hinter Element *j* in das Array einsortiert werden. Es wird ein zusätzliches Feld mit folgender Definition benötigt:

```
DOUBLE PRECISION      :: x_hilfe(:, :)
ALLOCATABLE(x_hilfe)
```

Zum Erweitern der Liste sind folgende Schritte notwendig (vgl. auch Abbildung A.1).

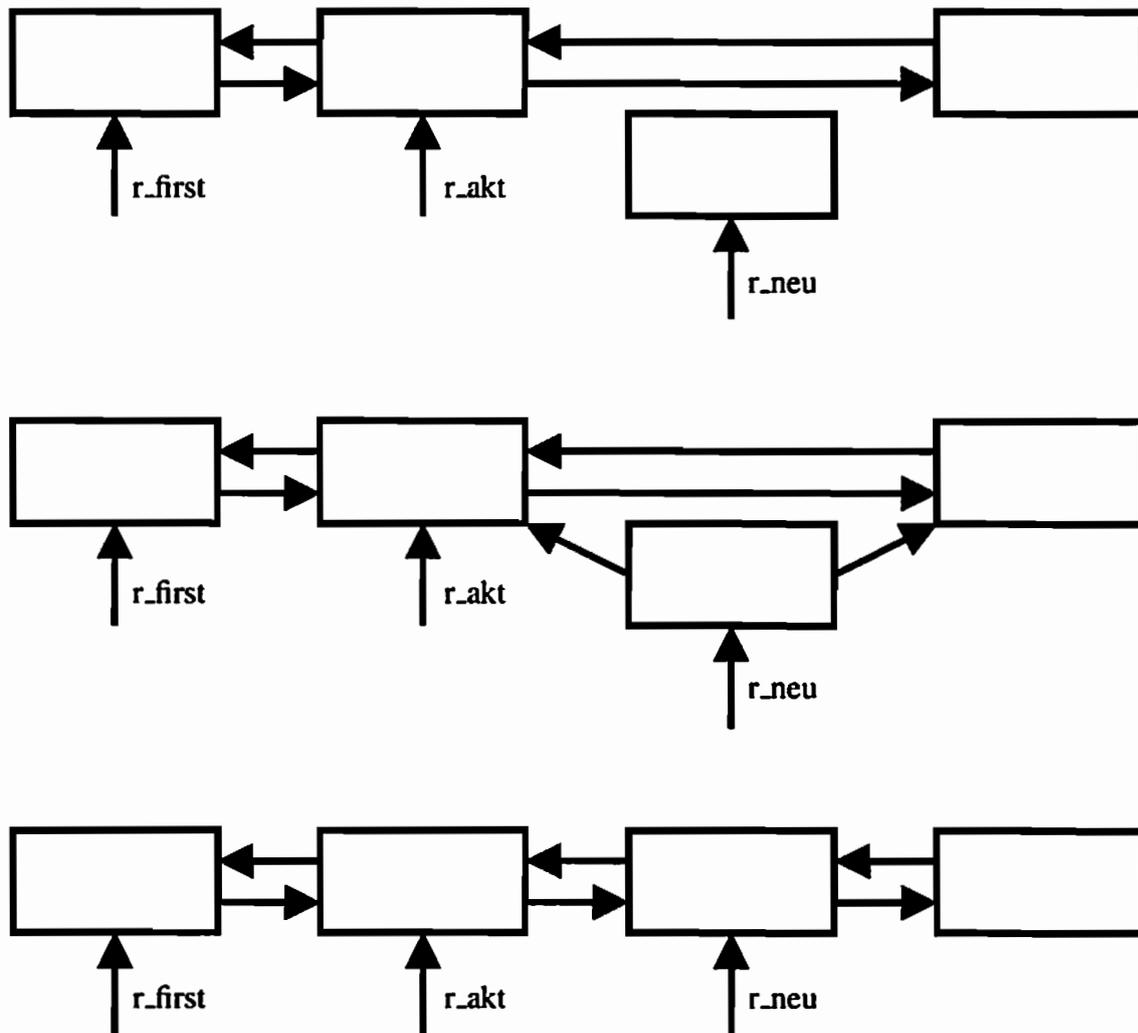


Abbildung A.1.: Erweitern einer verketteten Liste

verkettete Liste

```

r_neu%r_next=>r_akt%r_next
r_neu%r_prev=>r_akt
r_neu%r_next%r_prev=>r_neu
r_neu%r_prev%r_next=>r_neu

```

Array

```

IF (n+1.GT.np) THEN
  WRITE(*,*) 'Array zu &
    klein wird vergrößert'
  ALLOCATE(x_hilfe(np,2))
  x_hilfe=x
  DEALLOCATE(x)
  ALLOCATE(x(np+1,2))
  x(1:np,:)=x_hilfe
END IF
x(j+1:np,:)=x(j:np-1,:)
x(j,:)=xneu

```

Löschen aus einer Liste

An dieser Stelle soll nun gezeigt werden, wie ein Element `r_del` aus einer verketteten Liste bzw. Element `j` aus einem Array gelöscht werden kann (s. auch Abbildung A.2).

verkettete Liste

```

r_akt=>r_del%prev
r_akt%r_next=>r_del%r_next
r_akt%r_next%r_prev=>r_akt
DEALLOCATE(r_del)
NULLIFY(r_del)

```

Array

```

x(j:n-1,:)=x(j+1:n,:)
x(n,:)=0.0d0
n=n-1

```

A.2. Module

Die Verwendung von Modulen ermöglicht es, Funktionen, Variablen, Werte, Datenstrukturen u.s.w. nur für bestimmte Programmteile verfügbar zu machen. Dies kann die Verwendung von *Common*-Blöcken überflüssig machen.

In dem dieser Arbeit zugrunde liegende XFEM-Programm wurden eigene Datenstrukturen mittels `TYPE`-Befehl in einem Modul definiert. Um diese Typ-Definitionen in allen erforderlichen Programmteilen zur Verfügung zu stellen, war es nun nur noch erforderlich, dieses Modul mit dem Befehl `USE` in die einzelnen Teilprogramme einzubinden. Ebenso werden in dem Modul Variablen, die von vielen Unterprogrammen benötigt werden, definiert (z.B. der Wert π). Es wird so realisiert, dass nicht nur alle Typ-Definitionen, sondern auch alle erforderlichen Daten, wie

- die Geometrie
- das Elementnetz

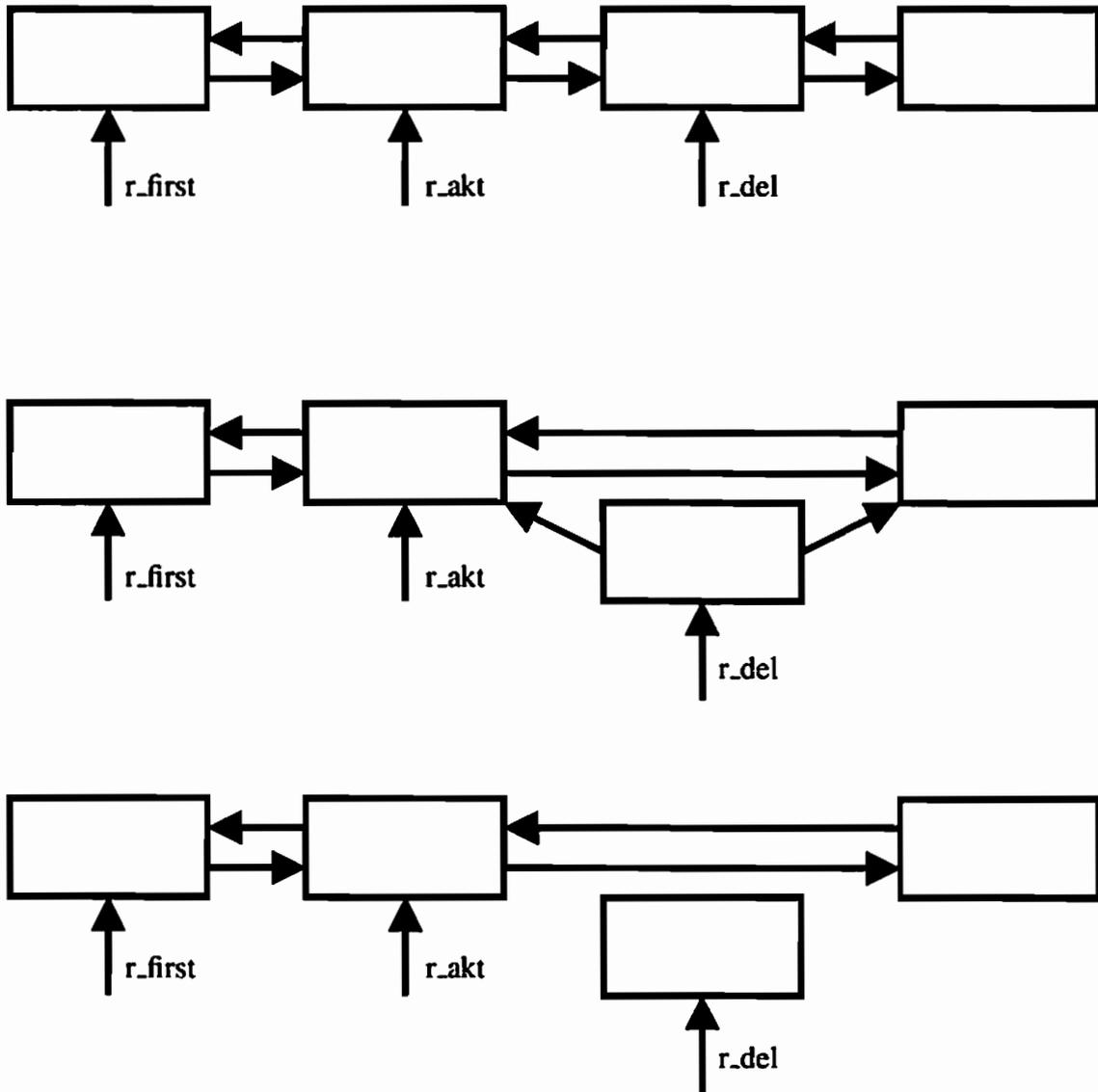


Abbildung A.2.: Löschen aus einer verketteten Liste

- der Polynomgrad und die Basis
- die Lasten
- usw.

ohne Parameter-Übergabe und ohne COMMON-Block in den Unterprogrammen verfügbar sind.

Ein Modul wird eingeleitet durch

```
MODULE <name>
```

und beendet durch

```
END MODULE <name>
```

wobei <name> durch den Namen des Moduls zu ersetzen ist. Zwischen diesen Zeilen können nun die Typ-Definitionen und die Deklaration von Variablen folgen.

Darüber hinaus ist es möglich, in einem Modul Unterprogramme und Funktionen zu definieren, die dann durch das Einbinden des Moduls in andere Programmteile nur für diese „sichtbar“ werden. Innerhalb des Moduls muss dann vor der Definition der Unterprogramme und Funktionen der Befehl CONTAINS stehen.

Der Aufbau eines Moduls könnte z.B. so aussehen:

```

MODULE koordmodul
  IMPLICIT NONE

! eine Typ-Definition für eine Koordinatenliste
  TYPE koord_typ
    DOUBLE PRECISION           :: x(3)
    TYPE(koord_typ), POINTER   :: next
  END TYPE koord_typ

! der Zeiger auf das erste Element der Koordinatenliste
  TYPE(koord_typ), POINTER     :: k_first

! hier folgt nun ein Unterprogramm
! zum Erzeugen der Koordinatenliste
  CONTAINS
    SUBROUTINE read_n_koord(n)
      IMPLICIT NONE
      INTEGER                :: n, i

      DO i=1,n

```

```

        IF (i.EQ.1) THEN
            ALLOCATE(k_first)
            k_akt=>k_first
        ELSE
            ALLOCATE(k_akt%next)
            k_akt=>k_akt%next
        END IF
        READ(*,*) k_akt%x(1)
        READ(*,*) k_akt%x(2)
        READ(*,*) k_akt%x(3)
    END DO
END SUBROUTINE read_n_koord
END MODULE koordmodul

```

Das Hauptprogramm könnte dann so aussehen:

```

PROGRAM koord_test

! Modul einlesen
    USE koordmodul
    IMPLICIT NONE

! Variablen für Hauptprogramm definieren
    TYPE(koord_typ), POINTER      :: k_akt
    INTEGER                       :: n

! Daten einlesen
    READ(*,*) n
    CALL read_n_koord(n)

! Daten ausgeben
    k_akt=>k_first
    DO WHILE (ASSOCIATED(k_akt))
        WRITE(*,*) k_akt%x
        k_akt=>k_akt%next
    END DO

! Programm beenden
    END PROGRAM koord_test

```

Literatur

- Aliabadi, M. H. and D. P. Rooke (1991). *Numerical Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- Altenbach, J. and H. Altenbach (1994). *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- Amestoy, M. and J. B. Leblond (1992). Crack paths in plane situations — II. Detailed Form of the expansion of the stress intensity factors. *Int. J. Solids Struc.* 29, 465–501.
- Belytschko, T. and T. Black (1999). Elastic Crack growth in Finite Elements with Minimal Remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 45, 601–620.
- Betten, J. (1993). *Kontinuumsmechanik*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Bronstein, I. N. and K. A. Semendjajew (1991). *Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig.
- Chapman, S. J. (1998). *Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*. McGraw-Hill Companies, Inc.
- Chessa, J., H. Wang, and T. Belytschko (2003). On the construction of blending elements for local partition of unity enriched Finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 57, 1015–1038.
- Chou, P. C. and N. J. Pagano (1992). *Elasticity*. Dover Publications Inc., New York.
- Cotterell, B. and J. R. Rice (1980). Slightly Curved or Kinked Cracks. *Int. J. Frac.* 16, 155–169.
- de Borst, R., J. J. C. Remmers, A. Needleman, and M.-A. Abellan (2004). Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: bridging the gap. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 28, 583–607.
- Dolbow, J. E. (1999). *An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics*. Ph. D. thesis, Northwestern University.
- Dumstorff, P. (2006). *Numerische Simulation von Rissfortschritt in Betonstrukturen auf Basis der Extended Finite Element Method*. Ph. D. thesis, Ruhr-Universität Bochum.
- Dumstorff, P. and G. Meschke (2004). Investigation of crack growth criteria in the context of the extended finite element method. In P. Neittaanmäki, T. Rossi, S. Korotov, E. Oñate, J. Périaux, and D. Knörzer (Eds.), *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*.
- Edgar, N. B. and K. S. Surana (1996). On the condition number and the selection criteria for p-version approximation functions. *Comp. Struc.* 60, 521–530.
- Erdogan, F. and G. C. Sih (1963). On the crack extension in plane under plane loading and transversal shear. *J. of Basic Engineering* 85, 519–527.
- Fischer, J. (1997). Versagensmodell für schubschlanke Balken. *Deutscher Ausschluß für Stahlbetonbau Heft 480*.
- Griffith, A. A. (1920). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions, Series A* 221, 163–198.
- Gross, D. (1996). *Bruchmechanik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Gross, D., W. Hauger, W. Schnell, and P. Wriggers (1993). *Technische Mechanik*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- Gurtin, M. E. (1972). The linear theory of elasticity. In S. Flügge (Ed.), *Encyclopedia of*

- Physics*, Volume VIa/2, pp. 1–295. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Hackl, K. and H. Stumpf (2001). *Teilprojekt B8 — Mehrskalensimulation von Schädigungsprozessen*, pp. 345–368.
- Hahn, H. G. (1985). *Elastizitätstheorie*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- Hellen, T. K. (1975). On the method of virtual crack extensions. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 9, 187–207.
- Holzapfel, G. A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, Weinheim, New York, Brisbane, Singapore, Toronto.
- Hong, S.-G., D. Kim, S.-Y. Kim, and N. K. Hong (2002). Shear Strength of Reinforced Concrete Deep Beams with End Anchorage Failure. *Structural Journal* 99, 12–22.
- Hughes, T. J. R. (1987). *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall, New Jersey, Englewood Cliffs.
- Ingraffea, A. R. and P. A. Wawrzynek (2003). *Finite Element Methods for Linear Elastic Fracture Mechanics*.
- Irwin, G. R. (1957). Analysis of stress and strain states near the end of a crack transversing a plate. *J. Appl. Mech* 24, 361–364.
- Jirásek, M. and T. Zimmermann (2001). Embedded crack model. Part II: Combination with smeared cracks. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 50, 1291–1305.
- Kotucha, G. (2005). *Regularisierung von Problemen der Topologieoptimierung unter Einbeziehung von Dichtegradienten*. Ph. D. thesis, Ruhr-Universität Bochum.
- Le, K. C. (1990). Variational principle of nonlinear brittle fracture mechanics. *J. Appl. Math. Mech. (PMM)* 54, 658–665.
- Le, K. C., H. Schütte, and H. Stumpf (1999). Determination of the driving force acting on a kinked crack. *Arch. Appl. Mech.* 69, 337–344.
- Liu, X. Y., Q. Z. Xiao, and B. L. Karihaloo (2004). XFEM for direct evaluation of mixed mode SIFs in homogeneous and bi-materials. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 59, 1103–1118.
- Maiti, S. K. and R. A. Smith (1983). Comparison of the Criteria for Mixed Mode Brittle Fracture Based on the Preinstability Stress-Strain Field, Part I: Slit and Elliptical Cracks under Uniaxial Tensile Loading. *Int. J. Frac.* 23, 281–295.
- Melenk, J. M. (1995). *On generalized Finite Element Methods*. Ph. D. thesis, University of Maryland.
- Moës, N. and T. Belytschko (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Eng. Frac. Mech.* 69, 813–833.
- Moës, N., J. Dolbow, and T. Belytschko (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 46, 131–150.
- Molla-Abbasi, K. (2004). On the numerical simulation of 3-d mixed mode crack propagation. Master's thesis, Ruhr-Universität Bochum.
- Mosler, J. and G. Meschke (2003). 3D modelling of strong discontinuities in elastoplastic solids: Fixed and rotating localization formulations. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 57, 1553–1576.
- Mosler, J. and G. Meschke (2004). Embedded crack vs. smeared crack models: a comparison of elementwise discontinuous crack path approaches with emphasis on mesh bias. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 193, 3351–3375.
- Nuismer, R. J. (1975). An energy release rate criterion for mixed mode fracture. *Int. J. Frac.* 11, 245–250.
- Parks, D. M. (1974). A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors. *Int. J. Frac.* 10, 487–502.
- Peters, M. and K. Hackl (2005). Numerical aspects of the extended finite element method. *PAMM* 5, 355–356.

- Peters, M. and K. Hackl (2006). Numerical aspects of the XFEM — The XFEM p-Version. *PAMM* 6, 189–190.
- Peters, M., U. Hoppe, and K. Hackl (2004a). Simulation of crack propagation using embedded discontinuities. In F. Stangenberg, O. Bruhns, D. Hartmann, and G. Meschke (Eds.), *Second Int. Conference Lifetime-Oriented Design Concepts*, pp. 141–147.
- Peters, M., U. Hoppe, and K. Hackl (2004b). Simulation of crack propagation using embedded discontinuities. *PAMM* 4, 366–367.
- Preusch, K. (2003). *Hierarchische Schalenmodelle für nichtlineare Kontinua mit der p-Version der Finite-Element Methode*. Ph. D. thesis, Ruhr-Universität Bochum.
- Rice, J. R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.* 35, 379–386.
- Schütte, H. (2001). *Ein finites Modell für spröde Schädigung basierend auf der Ausbreitung von Mikrorissen*. Ph. D. thesis, Ruhr-Universität Bochum.
- Sih, G. C. (1973). Some Basic Problems in Fracture Mechanics and New Concepts. *Engineering Fracture Mechanics* 5, 365–377.
- Szabo, B. and I. Babuska (1991). *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons Ltd., New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.
- Truesdell, C. (1985). *The Elements of Continuum Mechanics*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Wells, A. A. (1961). Unstable crack propagation in metals: Cleavage and fast fracture. In *Crack propagation symposium*, Volume 1.
- Wells, G. N. and L. J. Sluys (2001). A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 50, 2667–2682.
- Williams, M. L. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.* 24, 109–114.
- Wilson, W. K. (1969). *Combined mode fracture mechanics*. Ph. D. thesis, University of Pittsburgh.
- Xie, M. (1995). *Finite Element Modeling of Discrete Crack Propagation*. Ph. D. thesis, University of New Mexico.
- Xie, M., W. H. Gerstle, and P. Rahulkumar (1995). Energy-based automatic mixed-mode crack-propagation modeling. *J. Eng. Mech.* 121, 914–923.
- Yehia, N. A. B. and M. S. Shephard (1985). On the effect of quarter-point element size on fracture criteria. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 21, 1911–1924.
- Zienkiewicz, O. C. and R. L. Taylor (1989). *Finite Element Method*. McGraw-Hill, New York.

Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik

- Nr. 1 Theodor Lehmann: Dezember 1976
Große elasto-plastische Formänderungen
- Nr. 2 Bogdan Raniecki/Klaus Thermann: Juni 1978
Infinitesimal Thermoplasticity and Kinematics of Finite Elastic-Plastic Deformations. Basic Concepts
- Nr. 3 Wolfgang Krings: Januar 1976
Beitrag zur Finiten Element Methode bei linearem, viskoelastischem Stoffverhalten
- Nr. 4 Burkhard Lücke: Januar 1976
Theoretische und experimentelle Untersuchungen der zyklischen elastoplastischen Blechbiegung bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 5 Knut Schwarze: Februar 1976
Einfluß von Querschnittsverformungen bei dünnwandigen Stäben mit stetig gekrümmter Profilmittellinie
- Nr. 6 Hubert Sommer: Januar 1977
Ein Beitrag zur Theorie des ebenen elastischen Verzerrungszustandes bei endlichen Formänderungen
- Nr. 7 H. Stumpf/F. J. Biehl: März 1977
Die Methode der orthogonalen Projektionen und ihre Anwendungen zur Berechnung orthotroper Platten
- Nr. 8 Albert Meyers: April 1977
Ein Beitrag zum optimalen Entwurf von schnelllaufenden Zentrifugenschalen
- Nr. 9 Berend Fischer: April 1977
Zur zyklischen, elastoplastischen Beanspruchung eines dickwandigen Zylinders bei endlichen Verzerrungen
- Nr. 10 Wojciech Pietraszkiewicz: Mai 1977
Introduction to the Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 11 Wilfried Ullenboom: Juni 1977
Optimierung von Stäben unter nichtperiodischer dynamischer Belastung
- Nr. 12 Jürgen Güldenpfennig: Juli 1977
Anwendung eines Modells der Vielkristallplastizität auf ein Problem gekoppelter elastoplastischer Wellen
- Nr. 13 Pawel Rafalski: März 1978
Minimum Principles in Plasticity
- Nr. 14 Peter Hilgers: Juli 1978
Der Einsatz eines Mikrorechners zur hybriden Optimierung und Schwingungsanalyse
- Nr. 15 Hans-Albert Lauert: August 1979
Optimierung von Stäben unter dynamischer periodischer Beanspruchung bei Beachtung von Spannungsrestriktionen
- Nr. 16 Martin Fritz: Juli 1979
Berechnung der Auflagerkräfte und der Muskelkräfte des Menschen bei ebenen Bewegungen aufgrund von kinematographischen Aufnahmen
- Nr. 17 H. Stumpf/F. J. Biehl: Dezember 1979
Approximations and Error Estimates in Eigenvalue Problems of Elastic Systems with Application to Eigenvibrations of Orthotropic Plates

- Nr. 18 Uwe Kohlberg: Juli 1979
Variational Principles and their Numerical Application to Geometrically Nonlinear v. Karman Plates
- Nr. 19 Heinz Antes: Januar 1980
Über Fehler und Möglichkeiten ihrer Abschätzung bei numerischen Berechnungen von Schalenträgwerken
- Nr. 20 Czeslaw Wozniak: März 1980
Large Deformations of Elastic and Non-Elastic Plates, Shells and Rods
- Nr. 21 Maria K. Duszek: Juni 1980
Problems of Geometrically Non-Linear Theory of Plasticity
- Nr. 22 Burkhard von Bredow: Dezember 1980
Optimierung von Stäben unter stochastischer Erregung
- Nr. 23 Jürgen Preuss: Februar 1981
Optimaler Entwurf von Tragwerken mit Hilfe der Mehrzielmethode
- Nr. 24 Ekkehard Großmann: Februar 1981
Kovarianzanalyse mechanischer Zufallsschwingungen bei Darstellung der mehrfachkorrelierten Erregungen durch stochastische Differentialgleichungen
- Nr. 25 Dieter Weichert: März 1981
Variational Formulation and Solution of Boundary-Value Problems in the Theory of Plasticity and Application to Plate Problems
- Nr. 26 Wojciech Pietraszkiewicz: Juni 1981
On Consistent Approximations in the Geometrically Non-Linear Theory of Shells
- Nr. 27 Georg Zander: September 1981
Zur Bestimmung von Verzweigungslasten dünnwandiger Kreiszyylinder unter kombinierter Längs- und Torsionslast
- Nr. 28 Pawel Rafalski: September 1981
An Alternative Approach to the Elastic-Viscoplastic Initial-Boundary Value Problem
- Nr. 29 Heinrich Oeynhausen: November 1981
Verzweigungslasten elastoplastisch deformierter, dickwandiger Kreiszyylinder unter Innendruck und Axialkraft
- Nr. 30 F.-J. Biehl: Dezember 1981
Zweiseitige Eingrenzung von Feldgrößen beim einseitigen Kontaktproblem
- Nr. 31 Maria K. Duszek: Juni 1982
Foundations of the Non-Linear Plastic Shell Theory
- Nr. 32 Reinhard Piltner: Juli 1982
Spezielle finite Elemente mit Löchern, Ecken und Rissen unter Verwendung von analytischen Teillösungen
- Nr. 33 Petrisor Mazilu: Dezember 1982
Variationsprinzip der Thermoplastizität I. Wärmeausbreitung und Plastizität
- Nr. 34 Helmut Stumpf: Dezember 1982
Unified Operator Description, Nonlinear Buckling and Post-Buckling Analysis of Thin Elastic Shells
- Nr. 35 Bernd Kaempf: März 1983
Ein Extremal-Variationsprinzip für die instationäre Wärmeleitung mit einer Anwendung auf thermoelastische Probleme unter Verwendung der finiten Elemente

- Nr. 36 Alfred Kraft: Juli 1983
Zum methodischen Entwurf mechanischer Systeme im Hinblick auf optimales Schwingungsverhalten
- Nr. 37 Petrisor Mazilu: August 1983
Variationsprinzip der Thermoplastizität II. Gekoppelte thermomechanische Prozesse
- Nr. 38 Klaus-Detlef Mickley: November 1983
Punktweise Eingrenzung von Feldgrößen in der Elastomechanik und ihre numerische Realisierung mit Fundamental-Splinefunktionen
- Nr. 39 Lutz-Peter Nolte: Dezember 1983
Beitrag zur Herleitung und vergleichende Untersuchung geometrisch nichtlinearer Schalentheorien unter Berücksichtigung großer Rotationen
- Nr. 40 Ulrich Blix: Dezember 1983
Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode
- Nr. 41 Peter Becker: Februar 1984
Zur Berechnung von Schallfeldern mit Elementmethoden
- Nr. 42 Diemar Bouchard: Februar 1984
Entwicklung und Anwendung eines an die Diskrete-Fourier-Transformation angepaßten direkten Algorithmus zur Bestimmung der modalen Parameter linearer Schwingungssysteme
- Nr. 43 Uwe Zdebel: Dezember 1984
Theoretische und experimentelle Untersuchungen zu einem thermo-plastischen Stoffgesetz
- Nr. 44 Jan Kubik: April 1985
Thermoeffusion Flows in a Solid with a Dominant Constituent
- Nr. 45 Horst J. Klepp: Juni 1985
Über die Gleichgewichtslagen und Gleichgewichtsbereiche nichtlinearer autonomer Systeme
- Nr. 46 J. Makowski/L.-P. Nolte/H. Stumpf: Juli 1985
Finite In-Plane Deformations of Flexible Rods - Insight into Nonlinear Shell Problems
- Nr. 47 Franz Karl Labisch: August 1985
Grundlagen einer Analyse mehrdeutiger Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme der Elastostatik mit Hilfe von Variationsverfahren
- Nr. 48 J. Chroscielewski/L.-P. Nolte: Oktober 1985
Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY
- Nr. 49 Karl-Heinz Bürger: Dezember 1985
Gewichtsoptimierung rotationssymmetrischer Platten unter instationärer Erregung
- Nr. 50 Ulrich Schmid: Februar 1987
Zur Berechnung des plastischen Setzens von Schraubenfedern
- Nr. 51 Jörg Frischbier: März 1987
Theorie der Stoßbelastung ortotroper Platten und ihre experimentelle Überprüfung am Beispiel einer unidirektional verstärkten CFK-Verbundplatte
- Nr. 52 W. Tampczynski: Juli 1987
Strain history effect in cyclic plasticity
- Nr. 53 Dieter Weichert: Dezember 1987
Zum Problem geometrischer Nichtlinearitäten in der Plastizitätstheorie

- Nr. 54 Heinz Antes/Thomas Meise/Thomas Wiebe: Januar 1988
Wellenausbreitung in akustischen Medien Randelement-Prozeduren im 2-D Frequenzraum und im 3-D Zeitbereich
- Nr. 55 Wojciech Pietraszkiewicz: März 1988
Geometrically non-linear theories of thin elastic shells
- Nr. 56 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf: April 1988
Finite strain theory of rods
- Nr. 57 Andreas Pape: Mai 1988
Zur Beschreibung des transienten und stationären Verfestigungsverhaltens von Stahl mit Hilfe eines nichtlinearen Grenzflächenmodells
- Nr. 58 Johannes Groß-Weege: Juni 1988
Zum Einspielverhalten von Flächentragwerken
- Nr. 59 Peihua LIU: Juli 1988
Optimierung von Kreisplatten unter dynamischer nicht rotationssymmetrischer Last
- Nr. 60 Reinhard Schmidt: August 1988
Die Anwendung von Zustandsbeobachtern zur Schwingungsüberwachung und Schadensfrüherkennung auf mechanische Konstruktionen
- Nr. 61 Martin Pitzer: Juli 1988
Vergleich einiger FE-Formulierungen auf der Basis eines inelastischen Stoffgesetzes
- Nr. 62 Jerzy Makowski/Helmut Stumpf: Dezember 1988
Geometric structure of fully nonlinear and linearized Cosserat type shell theory
- Nr. 63 O. T. Bruhns: Januar 1989
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1988
- Nr. 64 Khanh Chau Le/Helmut Stumpf/Dieter Weichert: Juli 1989
Variational principles of fracture mechanics
- Nr. 65 Guido Obermüller: Juni 1989
Ein Beitrag zur Strukturoptimierung unter stochastischen Lasten
- Nr. 66 Herbert Diehl: Juni 1989
Ein Materialmodell zur Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der Schädigung durch Scherbänder
- Nr. 67 Michael Geis: November 1989
Zur Berechnung ebener, elastodynamischer Rißprobleme mit der Randelementmethode
- Nr. 68 Günter Renker: November 1989
Zur Identifikation nichtlinearer strukturmechanischer Systeme
- Nr. 69 Berthold Schieck: November 1989
Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien
- Nr. 70 Frank Szepan: Dezember 1989
Ein elastisch-viskoplastisches Stoffgesetz zur Beschreibung großer Formänderungen unter Berücksichtigung der thermomechanischen Kopplung
- Nr. 71 Christian Scholz: Dezember 1989
Ein Beitrag zur Gestaltoptimierung druckbelasteter Rotationsschalen
- Nr. 72 J. Badur/H. Stumpf: Dezember 1989
On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory

- Nr. 73 Werner Fornefeld: Januar 1990
Zur Parameteridentifikation und Berechnung von Hochgeschwindigkeitsdeformationen metallischer Werkstoffe anhand eines Kontinuums-Damage-Modells
- Nr. 74 J. Saczuk/H. Stumpf: April 1990
On statical shakedown theorems for non-linear problems
- Nr. 75 Andreas Feldmüller: April 1991
Ein thermoplastisches Stoffgesetz isotrop geschädigter Kontinua
- Nr. 76 Ulfert Rott: April 1991
Ein neues Konzept zur Berechnung viskoplastischer Strukturen
- Nr. 77 Thomas Heinrich Pingel: Juli 1991
Beitrag zur Herleitung und numerischen Realisierung eines mathematischen Modells der menschlichen Wirbelsäule
- Nr. 78 O. T. Bruhns: Dezember 1991
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1991
- Nr. 79 J. Makowski/J. Chroscielewski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part I: Theoretical Foundations
- Nr. 80 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf:
Computational Analysis of Shells Undergoing Large Elastic Deformation Part II: Finite Element Implementation
- Nr. 81 R. H. Frania/H. Waller: Mai 1992
Entwicklung und Anwendung spezieller finiter Elemente für Kerbspannungsprobleme im Maschinenaufbau
- Nr. 82 B. Bischoff-Beiermann: Juli 1992
Zur selbstkonsistenten Berechnung von Eigenspannungen in polykristallinem Eis unter Berücksichtigung der Monokristallanisotropie
- Nr. 83 J. Pohé: Februar 1993
Ein Beitrag zur Stoffgesetzentwicklung für polykristallines Eis
- Nr. 84 U. Kikillus: Mai 1993
Ein Beitrag zum zyklischen Kriechverhalten von Ck 15
- Nr. 85 T. Guo: Juni 1993
Untersuchung des singulären Rißspitzenfeldes bei stationärem Rißwachstum in verfestigendem Material
- Nr. 86 Achim Menne: Januar 1994
Identifikation der dynamischen Eigenschaften von hydrodynamischen Wandlern
- Nr. 87 Uwe Folchert: Januar 1994
Identifikation der dynamischen Eigenschaften Hydrodynamischer Kopplungen
- Nr. 88 Jörg Körber: April 1994
Ein verallgemeinertes Finite-Element-Verfahren mit asymptotischer Stabilisierung angewendet auf viskoplastische Materialmodelle
- Nr. 89 Peer Schieße: April 1994
Ein Beitrag zur Berechnung des Deformationsverhaltens anisotrop geschädigter Kontinua unter Berücksichtigung der thermoplastischen Kopplung
- Nr. 90 Egbert Schopphoff: Juli 1994
Dreidimensionale mechanische Analyse der menschlichen Wirbelsäule

- Nr. 91 Christoph Beerens: Juli 1994
Zur Modellierung nichtlinearer Dämpfungsphänomene in der Strukturmechanik
- Nr. 92 K. C. Le/H. Stumpf: November 1994
Finte elastoplasticity with microstructure
- Nr. 93 O. T. Bruhns: Dezember 1994
Große plastische Formänderungen - Bad Honnef 1994
- Nr. 94 Armin Lenzen: Dezember 1994
Untersuchung von dynamischen Systemen mit der Singulärwertzerlegung - Erfassung von Strukturveränderungen
- Nr. 95 J. Makowski/H. Stumpf: Dezember 1994
Mechanics of Irregular Shell Structures
- Nr. 96 J. Chroscielewski/J. Makowski/H. Stumpf: Dezember 1994
Finte Elements for Irregular Nonlinear Shells
- Nr. 97 W. Krings/A. Lenzen/u. a.: Februar 1995
Festschrift zum 60. Geburtstag von Heinz Waller
- Nr. 98 Ralf Podleschny: April 1995
Untersuchung zum Instabilitätsverhalten scherbeanspruchter Risse
- Nr. 99 Bernd Westerhoff: Juli 1995
Eine Untersuchung zum geschwindigkeitsabhängigen Verhalten von Stahl
- Nr. 100 Marc Mittelbach: Dezember 1995
Simulation des Deformations- und Schädigungsverhaltens beim Stoßversuch mit einem Kontinuums-Damage-Modell
- Nr. 101 Ulrich Hoppe: Mai 1996
Über grundlegende Konzepte der nichtlinearen Kontinuumsmechanik und Schalentheorie
- Nr. 102 Marcus Otto: Juni 1996
Erweiterung des Kaustikenverfahrens zur Analyse räumlicher Spannungskonzentrationen
- Nr. 103 Horst Lanzerath: Juli 1996
Zur Modalanalyse unter Verwendung der Randelementemethode
- Nr. 104 Andreas Wichtmann: August 1996
Entwicklung eines thermodynamisch konsistenten Stoffgesetzes zur Beschreibung der Reckalterung
- Nr. 105 Bjarne Fossa: Oktober 1996
Ein Beitrag zur Fließflächenmessung bei vorgedehnten Stoffen
- Nr. 106 Khanh Chau Le: Dezember 1996
Kontinuumsmechanisches Modellieren von Medien mit veränderlicher Mikrostruktur
- Nr. 107 Holger Behrens: Januar 1997
Nichtlineare Modellierung und Identifikation hydrodynamischer Kupplungen mit allgemeinen diskreten Modellansätzen
- Nr. 108 Johannes Moosheimer: Juli 1997
Gesteuerte Schwingungsdämpfung mit Elektrorheologischen Fluiden
- Nr. 109 Dirk Klaus Anding: Oktober 1997
Zur simultanen Bestimmung materialabhängiger Koeffizienten inelastischer Stoffgesetze
- Nr. 110 Stephan Weng: Dezember 1997
Ein Evolutionsmodell zur mechanischen Analyse biologischer Strukturen

- Nr. 111 Michael Straßberger: Dezember 1997
Aktive Schallreduktion durch digitale Zustandsregelung der Strukturschwingungen mit Hilfe piezokeramischer Aktoren
- Nr. 112 Hans-Jörg Becker: Dezember 1997
Simulation des Deformationsverhaltens polykristallinen Eises auf der Basis eines monokristallinen Stoffgesetzes
- Nr. 113 Thomas Nerzak: Dezember 1997
Modellierung und Simulation der Ausbreitung adiabatischer Scherbänder in metallischen Werkstoffen bei Hochgeschwindigkeitsdeformationen
- Nr. 114 O. T. Bruhns: März 1998
Große plastische Formänderungen
- Nr. 115 Jan Steinhausen: August 1998
Die Beschreibung der Dynamik von Antriebssträngen durch Black-Box-Modelle hydrodynamischer Kupplungen
- Nr. 116 Thomas Pandorf: August 1998
Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Kerbspitzenbeanspruchung bei schlagbelasteten Biegeproben
- Nr. 117 Claus Oberste-Brandenburg: Juni 1999
Ein Materialmodell zur Beschreibung der Austenit-Martensit Phasentransformation unter Berücksichtigung der transformationsinduzierten Plastizität
- Nr. 118 Michael Märtens: Dezember 1999
Regelung mechanischer Strukturen mit Hilfe piezokeramischer Stapelaktoren
- Nr. 119 Dirk Kamarys: Dezember 1999
Detektion von Systemveränderungen durch neue Identifikationsverfahren in der experimentellen Modalanalyse
- Nr. 120 Wolfgang Hiese: Januar 2000
Gültigkeitskriterien zur Bestimmung von Scherbruchzähigkeiten
- Nr. 121 Peter Jaschke: Februar 2000
Mathematische Modellierung des Betriebsverhaltens hydrodynamischer Kupplungen mit hybriden Modellansätzen
- Nr. 122 Stefan Müller: Februar 2000
Zum Einsatz von semi-aktiven Aktoren zur optimalen Schwingungsreduktion in Tragwerken
- Nr. 123 Dirk Eichel: Juni 2000
Zur Kondensation strukturdynamischer Aufgaben mit Hilfe von Polynommatrizen
- Nr. 124 Andreas Bürgel: August 2000
Bruchmechanische Kennwerte beim Wechsel im Versagensverhalten dynamisch scherbeanspruchter Risse
- Nr. 125 Daniela Lürding: März 2001
Modellierung großer Deformationen in orthotropen, hyperelastischen Schalenstrukturen
- Nr. 126 Thorsten Quent: Mai 2001
Ein mikromechanisch begründetes Modell zur Beschreibung des duktilen Verhaltens metallischer Werkstoffe bei endlichen Deformationen unter Berücksichtigung von Porenschädigung
- Nr. 127 Ndzi C. Bongmba: Mai 2001
Ein finites anisotropes Materialmodell auf der Basis der Hencky-Dehnung und der logarithmischen Rate zur Beschreibung duktiler Schädigung

- Nr. 128 Henning Schütte: August 2001
Ein finites Modell für spröde Schädigung basierend auf der Ausbreitung von Mikrorissen
- Nr. 129 Henner Vogelsang: Dezember 2001
Parameteridentifikation für ein selbstkonsistentes Stoffmodell unter Berücksichtigung von Phasentransformationen
- Nr. 130 Jörn Mosler: Dezember 2002
Finite Elemente mit sprungstetigen Abbildungen des Verschiebungsfeldes für numerische Analysen lokalisierter Versagenszustände
- Nr. 131 Karin Preusch: Mai 2003
Hierarchische Schalenmodelle für nichtlineare Kontinua mit der p-Version der Finite-Element Methode
- Nr. 132 Christoph Müller: August 2003
Thermodynamic modeling of polycrystalline shape memory alloys at finite strains
- Nr. 133 Martin Heiderich: Juni 2004
Ein Beitrag zur zerstörungsfreien Schädigungsanalyse
- Nr. 134 Raoul Costamagna: Juli 2004
Globale Materialbeziehungen für das geklüftete Gebirge
- Nr. 135 Markus Böl: Januar 2005
Numerische Simulation von Polymernetzwerken mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode
- Nr. 136 Gregor Kotucha: August 2005
Regularisierung von Problemen der Topologieoptimierung unter Einbeziehung von Dichtegradienten
- Nr. 137 Michael Steiner: Februar 2006
Deformations- und Versagensverhalten innendruckbeanspruchter Stahlrohre durch Stoßbelastung
- Nr. 138 Dirk Bergmannshoff: Dezember 2006
Das Instabilitätsverhalten zug-/scherbeanspruchter Risse bei Variation des Belastungspfades
- Nr. 139 Olaf Schilling: Januar 2007
Über eine implizite Partikelmethode zur Simulation von Umformprozessen
- Nr. 140 Jörn Mosler: Mai 2007
On the numerical modeling of localized material failure at finite strains by means of variational mesh adaption and cohesive elements
- Nr. 141 Rainer Fechte-Heinen: Juni 2007
Mikromechanische Modellierung von Formgedächtnismaterialien
- Nr. 142 Christian Grabe: Juni 2007
Experimental testing and parameter identification on the multidimensional material behavior of shape memory alloys
- Nr. 143 Markus Peters: Juli 2007
Modellierung von Rissausbreitung unter Verwendung der p-Version der XFEM mit einer adaptiven Integrationsmethode

**Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik
RUHR-UNIVERSITÄT BOCHUM
Nr. 143**

978-3-935892-18-6